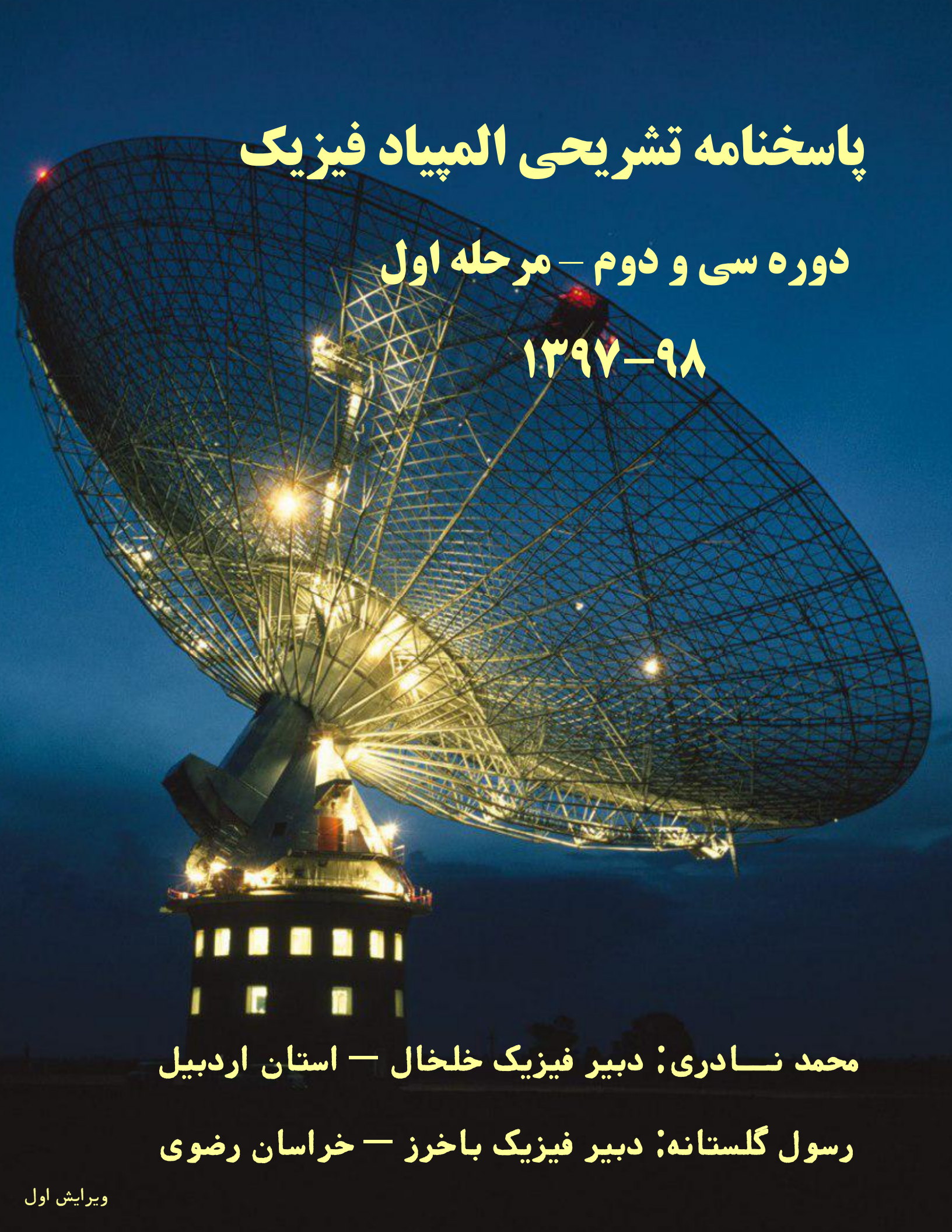


پاسخنامه تشریحی المپیاد فیزیک

دوره سی و دوم – مرحله اول

۹۸-۱۳۹۷

محمد نـــادری: دبیر فیزیک خلخال — استان اردبیل

رسول گلستانه: دبیر فیزیک باخرز — خراسان رضوی

ویرایش اول

باسمه تعالی
جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
مرکز ملّی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان
معاونت دانش‌پژوهان جوان

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده‌کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیّت‌هاست. «امام خمینی»

دفترچهٔ سؤالات مرحلهٔ اوّل سال ۱۳۹۷

سی و دومین دوره المپیاد فیزیک

ساعت: ۰۹:۰۰ صبح

کد دفترچه: ۱

تعداد سؤالات		مدّت آزمون
چهار گزینه‌ای	مسئله کوتاه	
۲۷	۸	۲۱۰ دقیقه

نام: نام خانوادگی: شمارهٔ صندلی:

توضیحات مهم

استفاده از ماشین‌حساب ممنوع است.

۱ - کد دفترچهٔ سؤالات شما ۱ است. این کد را در محلّ مشخص شده روی پاسخ‌نامه با مداد پر کنید. در غیر این صورت پاسخ‌نامهٔ شما تصحیح نخواهد شد. توجّه داشته باشید کد دفترچهٔ سؤالات شما که در بالای هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است، با کد دفترچه که در همین صفحه است، یکی باشد.

۲ - بلافاصله پس از آغاز آزمون، تعداد سؤالات داخل دفترچه و وجود همهٔ برگه‌های دفترچهٔ سؤالات را بررسی نمایید. در صورت وجود هرگونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطّلع کنید.

۳ - یک برگه پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخّصات شما بر روی آن نوشته شده است. در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطّلع کنید. ضمناً مشخّصات خواسته شده در پایین پاسخ‌نامه را با مداد مشکی بنویسید.

۴ - برگهٔ پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محلّ مربوطه علامت بزنید. لطفاً خانهٔ مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.

۵ - در سوال‌های چهار گزینه‌ای به هر پاسخ درست ۳ نمرهٔ مثبت و به هر پاسخ نادرست ۱ نمرهٔ منفی تعلق می‌گیرد. در مسئله‌های کوتاه به هر پاسخ درست ۵ نمرهٔ مثبت تعلق می‌گیرد و پاسخ نادرست نمرهٔ منفی ندارد.

۶ - همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ماشین‌حساب و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتّی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلّب محسوب خواهد شد.

۷ - آزمون مرحلهٔ دوّم برای دانش‌آموزان پایهٔ دهم، صرفاً جنبهٔ آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت‌کنندگان در دورهٔ تابستانی از بین دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم انتخاب می شوند.

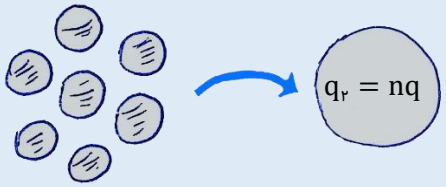
۸ - داوطلبان نمی‌توانند دفترچهٔ سؤالات را با خود ببرند. دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.

۱) پتانسیل الکتریکی یک قطرهٔ کروی رسانا با شعاع r و بار الکتریکی q برابر است با $V=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ r}$. اگر n قطرهٔ کروی مشابه با شعاع r و بار q با هم قطرهٔ کروی بزرگ‌تری درست کنند، پتانسیل الکتریکی این قطرهٔ بزرگ کدام است؟

۱) $n^{-\frac{۱}{۳}}V$ ۲) $n^{\frac{۱}{۳}}V$ ۳) $n^{\frac{۲}{۳}}V$ ۴) nV

پاسخ گزینه ۳

قطره‌ی بزرگ از به‌هم چسبیدن قطره‌های کوچکتر حاصل شده است. بنابراین بار آن برابر با بار کل قطره‌ها و حجم آن نیز برابر با جم کل قطره‌ها می‌باشد.



$$V_۲ = nV \Rightarrow \frac{۴}{۳}\pi R^۳ = n\frac{۴}{۳}\pi r^۳ \Rightarrow R = n^{\frac{۱}{۳}} r$$

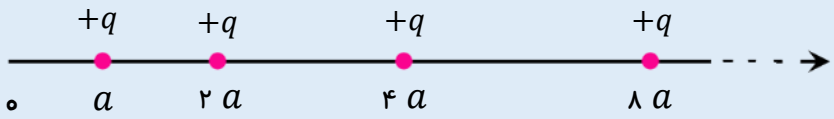
$$V' = \frac{nq}{۴\pi\varepsilon_۰ R} = \frac{nq}{۴\pi\varepsilon_۰ n^{\frac{۱}{۳}} r} = n^{\frac{۲}{۳}}\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ r} = n^{\frac{۲}{۳}}V$$

۲) در هر یک از نقاط $x_n = ۲^n a$ روی محور x بار الکتریکی نقطه‌ای $+q$ قرار می‌دهیم که n جزو مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی است. اندازهٔ میدان الکتریکی در نقطهٔ $x=۰$ کدام گزینه است؟

۱) $\frac{q}{\pi\varepsilon_۰ a^۲}$ ۲) $\frac{q}{۲\pi\varepsilon_۰ a^۲}$ ۳) $\frac{q}{۳\pi\varepsilon_۰ a^۲}$ ۴) $\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ a^۲}$

پاسخ گزینه ۳

میدان کل در مبدا مختصات از مجموع میدان هر یك از بار ها بدست می آید. میدان در فاصله a از بار q از رابطه $E=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ a^۲}$ بدست می‌آید.



بنابراین میدان خالص در مبدا مختصات به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ a^۲}\left(۱+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۶۴}+\cdots\right) = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ a^۲}\left(\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۴}}\right) = \frac{q}{۳\pi\varepsilon_۰ a^۲}$$

۳) پتانسیل الکتریکی بار نقطه‌ای q در فاصلهٔ r از آن از رابطهٔ $\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰ r}$ به دست می‌آید. دو بار نقطه‌ای Q و $-۲Q$ به ترتیب در مکان‌های $(-a, ۰)$ و $(a, ۰)$ در صفحهٔ x-y قرار دارند. در هر نقطه از فضا پتانسیل الکتریکی مجموعه‌ای از بارها جمع پتانسیل‌های الکتریکی هر یک از آن‌ها در آن نقطه است. مکان هندسی نقاطی از صفحهٔ x-y که پتانسیل الکتریکی صفر دارند یک دایره به شعاع r و مرکز C است. r و C کدام گزینه است؟

۱) $C(-۵a/۳, ۰), \quad r = ۴a/۳$

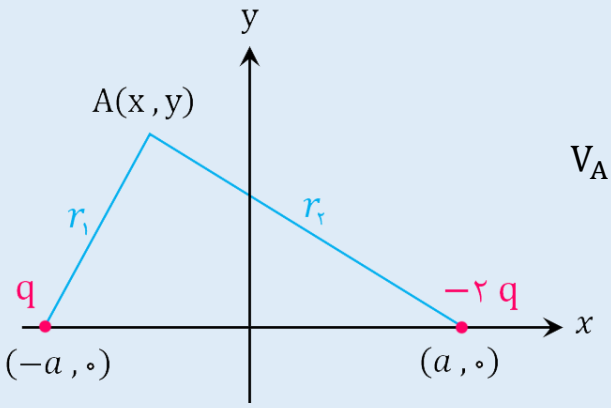
۲) $C(-۵a/۳, ۰), \quad r = ۲a/۳$

۳) $C(-۴a/۳, ۰), \quad r = ۴a/۳$

۴) $C(-۴a/۳, ۰), \quad r = ۲a/۳$

پاسخ گزینه ۱

مطابق شکل،در نقطه‌ای مثل A پتانسیل الکتریکی صفر است:



$$V_A = \frac{kq}{r_۱} - \frac{۲kq}{r_۲} = ۰ \rightarrow r_۲ = ۲r_۱ \quad (۱)$$

با توجه به فرمولِ فاصله‌ی دو نقطه در صفحه، برای رابطه‌ی (۱) داریم:

$$\sqrt{(a-x)^۲ + y^۲} = ۲\sqrt{(a+x)^۲ + y^۲}$$

$$\rightarrow a^۲ + x^۲ + ۲ax + y^۲ = ۴a^۲ + ۴x^۲ + ۸ax + ۴y^۲$$

$$\rightarrow a^۲ + x^۲ + \frac{۱۰}{۳}ax + y^۲ = ۰ \rightarrow \left(x + \frac{۵}{۳}a\right)^۲ + y^۲ = \left(\frac{۴}{۳}a\right)^۲$$

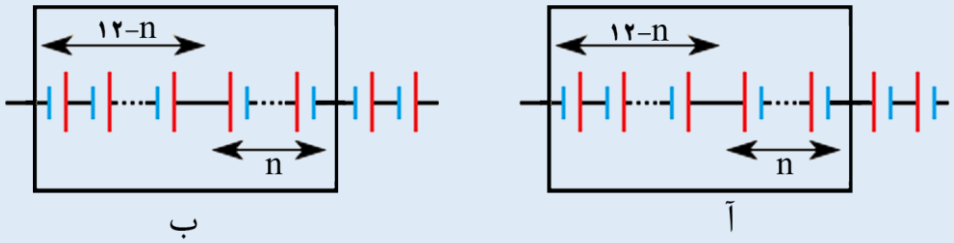
اکنون اگر این رابطه را با فرمول دایره در صفحه، یعنی رابطه‌ی $(x-a)^۲ + (y-b)^۲ = R^۲$ مقایسه کنیم، نتیجه می‌گیریم نقاطی که پتانسیل الکتریکی در آن‌ها صفر است، بر روی دایره‌ای به مرکزیت $(-\frac{۵}{۳}a \ . \ ۰)$ و به شعاع $\frac{۴}{۳}a$ قرار دارند.

۴) در داخل یک جعبهٔ سیاه ۱۲ باتری را به طور سری به هم بسته‌ایم اما در قطب‌بندی باتری‌ها دقت کافی انجام نداده‌ایم، به طوری که n تا از آن‌ها قطب‌بندی مخالف با بقیه دارند. هر یک از باتری‌ها نیروی محرکهٔ ε و مقاومت داخلی r دارند. اگر دو باتری سری شدهٔ دیگر از همین نوع را با قطب‌بندی یکسان به مجموعهٔ فوق با دو قطب‌بندی متفاوت ببندیم و دو سر مجموعه را با یک سیم بدون مقاومت به هم وصل کنیم، یک بار جریان ۳A و بار دیگر جریان ۲A از سیم عبور می‌کند. n کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینه ۱

این ۱۴ مولد به دو طریق زیر به هم متصل هستند.



در حالتِ «ب» جریانِ ۳ آمپر از سیمِ متّصل به دو سرِ مولدها عبور می‌کند و در حالتِ «آ» ۲ آمپر (چرا؟). اکنون از فرمولِ جریانِ مدارِ تک‌حلقه‌ای داریم:

$$\begin{cases} \xrightarrow{\text{در حالت ب}} I=\dfrac{\Sigma\varepsilon}{\Sigma r} \rightarrow \quad ۳=\dfrac{(۱۲-n)-n+۲}{۱۴\,r} \\ \xrightarrow{\text{در حالت آ}} I=\dfrac{\Sigma\varepsilon}{\Sigma r} \rightarrow \quad ۲=\dfrac{(۱۲-n)-n-۲}{۱۴\,r} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{۱۴-۲\,n}{۳}=\frac{۱۰-۲\,n}{۲} \rightarrow \quad n=\boxed{۱}$$

۵) از لبهٔ بالایی یک برج، سنگی را به طور قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. در فاصلهٔ h زیر نقطهٔ پرتاب اندازهٔ سرعت سنگ دو برابر اندازهٔ سرعت آن در زمانی است که در ارتفاع h بالای نقطهٔ پرتاب است. سنگ در نقطهٔ اوج چه ارتفاعی از نقطهٔ پرتاب دارد؟

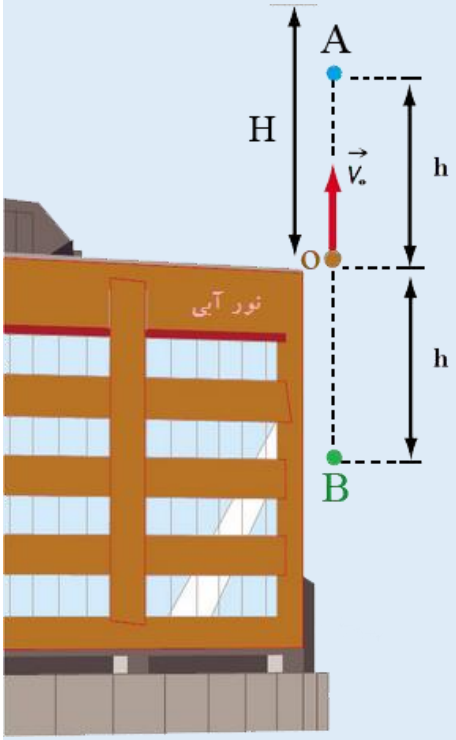
۱) $5h/6$ ۲) $5h/3$ ۳) $5h/2$ ۴) $5h$

پاسخ گزینه ۲

مطابقِ شکل، از پایستگیِ انرژیِ مکانیکی برایِ دو نقطه‌یِ O و B داریم:

$$E_O = E_B \rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgh + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\rightarrow v_0^2 = -2gh + v^2 \quad (1)$$



که v سرعت گلوله در نقطه‌ی B است. همینطور برایِ دو نقطه‌یِ A و B داریم:

$$E_A = E_B \rightarrow mgh + \frac{1}{2}m\frac{v^2}{4} = -mgh + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\rightarrow 3v^2 = 16gh \quad (2)$$

از دو رابطه‌ی (۱) و (۲) داریم:

$$v_0^2 = \frac{10}{3}gh \quad (3)$$

برای ارتفاعِ اوج از نقطه‌ی پرتاب تا نقطه‌ی اوج از معادله‌ی مستقل از زمان داریم:

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \xrightarrow{\text{از (۳)}} H = \frac{\frac{10}{3}gh}{2g} = \boxed{\frac{5}{3}h} \quad (4)$$

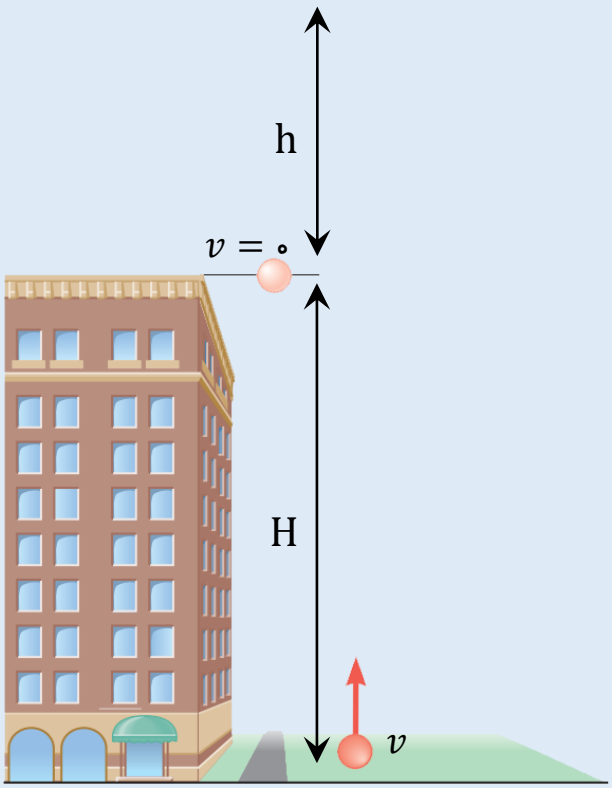
بالایِ برج، سطح مبنا برای محاسبه‌ی انرژیِ پتانسیل گرانشی لحاظ شده است.

۶) گلوله‌ای را به طور قائم از سطح زمین به طرف بالای یک ساختمان پرتاب می‌کنیم. گلوله در مدت $t_۱$ ثانیه از سطح زمین تا بام را طی می‌کند و مدت $t_۲$ ثانیه بالای ساختمان در حرکت است. اگر گلولهٔ دیگری را از لبهٔ بام رها کنیم تا در مدت $t_۳$ ثانیه به زمین برسد، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $t_۳ = \sqrt{t_۱(t_۱ + t_۲)}$ ۲) $t_۳ = \sqrt{t_۱(t_۱ + ۲t_۲)}$ ۳) $t_۳ = \sqrt{t_۱ t_۲}$ ۴) $t_۳ = \sqrt{\frac{t_۱^۲ + t_۲^۲}{۲}}$

پاسخ گزینه ۱

مطابقِ شکل، با توجه به زمان‌های داده‌شده داریم:



$$\begin{cases} H = \frac{۱}{۲} g t_۳^۲ & (۱) \\ h = \frac{۱}{۲} g \left(\frac{t_۲}{۲}\right)^۲ & (۲) \\ H + h = \frac{۱}{۲} g \left(t_۱ + \frac{t_۲}{۲}\right)^۲ & (۳) \end{cases}$$

اگر به جای H و h از دو رابطهِ (۱) و (۲) در رابطهِ (۳) قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$t_۳^۲ + \left(\frac{t_۲}{۲}\right)^۲ = \left(t_۱ + \frac{t_۲}{۲}\right)^۲ \quad (۴)$$

که به راحتی به دست می‌آید:

$$\boxed{t_۳ = \sqrt{t_۱(t_۱ + t_۲)}} \quad (۵)$$

۷) ذره‌ای به جرم m با سرعت اولیهٔ $v_۰$ شروع به حرکت می‌کند و با نیروی اصطکاک bv^n متوقف می‌شود، که v سرعت لحظه‌ای ذره است. با توجه به یکای کمیت‌ها زمان توقف t بر حسب m، $v_۰$، b و n با کدام گزینه متناسب است؟

۱) $\frac{m}{bv_۰^{n+۱}}$ ۲) $\frac{m}{bv_۰^{n}}$ ۳) $\frac{m}{bv_۰^{n-۱}}$ ۴) $\frac{m}{bv_۰^{n-۲}}$

پاسخ گزینه ۳: چون bv^n از جنس نیرو هست، ابتدا بُعد b را حساب می‌کنیم.

$$bv^n = F \rightarrow [bv^n] = [F]$$

$$\rightarrow [b] \times [v^n] = [m] \times [a] \rightarrow [b] = \frac{MT^{n-2}}{L^{n-1}} \quad (1)$$

که M، T و L به ترتیب نشان‌دهنده‌ی بُعدِ جرم، زمان و طول هستند. زمانِ توقف با رابطه‌ی زیر متناسب است:

$$t \propto \frac{m}{bv_\circ^x} \rightarrow [t] = \left[\frac{m}{bv_\circ^x}\right] = \frac{[m]}{[b] \times [v_\circ^x]}$$

$$\rightarrow T = \frac{ML^{n-1}}{MT^{n-2}}\left(\frac{T}{L}\right)^x \rightarrow x = n-1 \quad (2)$$

پس زمان توقف متناسب با $\frac{m}{bv_\circ^{n-1}}$ است.

۸) گلوله‌ای از هر ارتفاعی که رها شود پس از برخورد با زمین تا $\frac{2}{3}$ آن ارتفاع بالا می‌آید. با چشم‌پوشی از مقاومت هوا، در چندمین برخورد سرعت گلوله بعد از برخورد با زمین از نصف سرعت آن قبل از اولین برخورد کمتر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ گزینه ۳

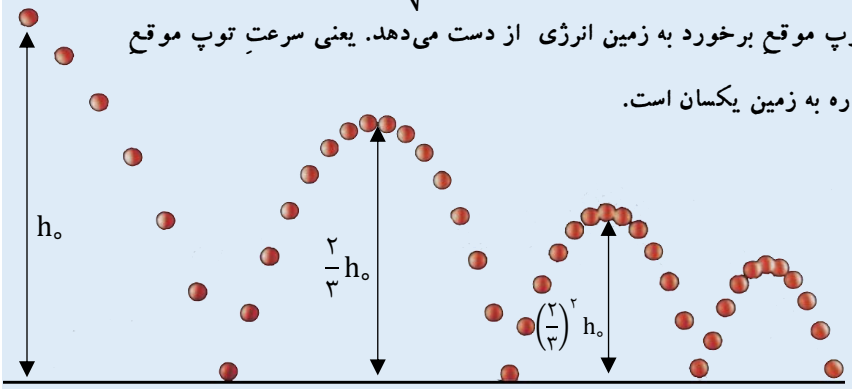
درست قبل از اوّلین برخورد به زمین، سرعتِ توپ طبقِ پایستگیِ انرژی برابر است با: $v_\circ = \sqrt{2gh_\circ}$ (۱)

امّا سرعتِ برخورد پس از بارِ nاُم به زمین برابر است با: $v_n = \sqrt{2g(2/3)^n h_\circ}$ (۲)

حال طبقِ شرطِ سوال داریم:

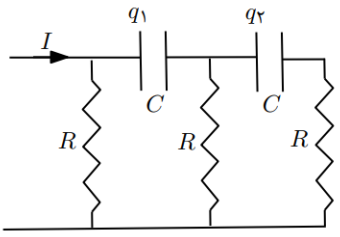
$$v_n < \frac{v_\circ}{2} \rightarrow \sqrt{2g\left(\frac{2}{3}\right)^n h_\circ} < \frac{1}{2}\sqrt{2gh_\circ} \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{n \geq 4}$$

چون از مقاومت هوا چشم‌پوشی شده، توپ موقع برخورد به زمین انرژی از دست می‌دهد. یعنی سرعتِ توپ موقع جداشدن از زمین و موقع بازگشتِ دوباره به زمین یکسان است.



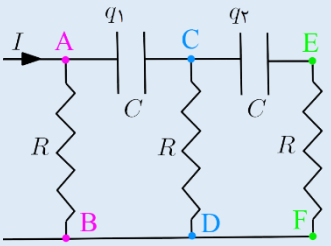
دقت کنید گزینه ۴ هم می‌تواند پاسخ این سوال باشد. باید در صورت سوال به کلمه حداقل تعداد برخورد اشاره می‌شد تا پاسخ سوال یکتا می‌بود.

۹) در مدار شکل مقابل I، $q_۱$ و $q_۲$ ثابت هستند. نسبت $\frac{q_۲}{q_۱}$ کدام گزینه است؟



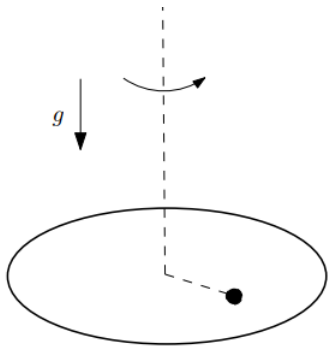
۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۰/۵ ۴) صفر

پاسخ گزینه ۴



مطابقِ شکل، با توجه به قانونِ حلقه‌یِ کیرشهف، در حلقه‌ی ABCD اختلافِ پتانسیلِ دو سرِ خازنِ $C_۱$ و مقاومتِ $R_۲$ برابر با اختلافِ پتانسیلِ دو سرِ مقاومتِ $R_۱$ است. چون از مقاومتِ $R_۱$ جریان عبور می‌کند امّا از مقاومتِ $R_۲$ جریانی عبور نمی‌کند، اختلاف پتانسیلِ دو سرِ خازنِ $C_۱$ همان اختلافِ پتانسیلِ دو سرِ مقاومتِ $R_۱$ است. پس این خازن دارای بار $q_۱$ است. امّا در حلقه‌ی CDEF اختلافِ پتانسیلِ دو سرِ مقاومتِ $R_۳$ و خازنِ $C_۲$ برابر با اختلافِ پتانسیلِ دو سرِ مقاومتِ $R_۲$ است. چون از هر دو مقاومت $R_۲$ و $R_۳$ جریانی عبور نمی‌کند و اختلافِ پتانسیلِ دو سرِ آن‌ها صفر است، پس اختلافِ پتانسیلِ دو سرِ خازن $C_۲$ هم صفر خواهد بود. پس باری هم روی خازن $C_۲$ نخواهد بود و $q_۲$ برابر صفر خواهد بود. بنابراین نسبت $\boxed{\frac{q_۲}{q_۱} = ۰}$ خواهد بود.

۱۰) یک صفحهٔ گردان هر دو ثانیه یک بار حول محور قائم خود می‌چرخد. جسم کوچکی به جرم ۰/۱۰ kg در فاصلهٔ ۲۰ سانتی‌متری محور دوران قرار دارد و همراه صفحه می‌چرخد. ضرایب اصطکاک ایستایی و جنبشی جسم با صفحهٔ گردان به ترتیب ۰/۳۰ و ۰/۳۵ است. اندازهٔ نیروی اصطکاک جسم با صفحهٔ گردان کدام گزینه است؟



۱) ۰/۱۵N ۲) ۰/۲۰N ۳) ۰/۳۰N ۴) ۰/۳۵N

پاسخ گزینه ۲

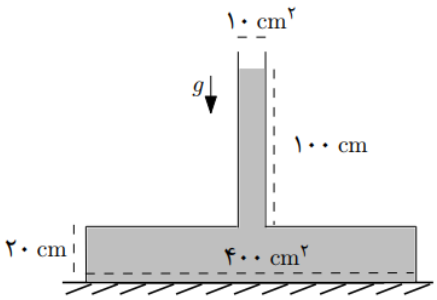
جسم روی مسیرِ دایره‌ای حرکتِ یکنواخت دارد. نیروی جانبِ مرکز، نیروی اصطکاکِ سکونِ وارد بر جسم از کفِ صفحه‌یِ گردان است:

$$F = mr\omega^۲$$

$$\rightarrow f_s = mr\left(\frac{۲\pi}{T}\right)^۲ = \frac{۱}{۱۰} \times \frac{۲}{۱۰} \times \frac{۴ \times \pi^۲}{۲^۲} = \boxed{۰.۲\ N}$$

که $\pi^۲ \approx ۱۰$ است.

۱۱) دستگاه شکل مقابل روی یک میز افقی قرار دارد. سطح مقطع قسمت فراخ ظرف $۴۰۰\ \text{cm}^۲$ و سطح مقطع لولهٔ باریک بالای آن $۱۰\ \text{cm}^۲$ است. ارتفاع قسمت فراخ $۲۰\ \text{cm}$ و ارتفاع آب در لولهٔ باریک $۱۰۰\ \text{cm}$ است. فشار هوا در محل $۱۰^۵\ \text{Pa}$، چگالی آب $۱\ \text{g/cm}^۳$ و شتاب گرانش $g = ۱۰\ \text{m/s}^۲$ است. بین سطح خارجی ظرف که در تماس با میز است و میز هیچ لایهٔ هوایی وجود ندارد. با چشم‌پوشی از وزن ظرف، نیرویی که از طرف ظرف به میز وارد می‌شود کدام گزینه است؟



۱) $۹۰\ \text{N}$ ۲) $۴۰۹۰\ \text{N}$ ۳) $۴۸۰۰\ \text{N}$ ۴) $۸۸۰۰\ \text{N}$

پاسخ گزینه ۲

مطابقِ شکل، سه نیرو بر ظرف در راستای قائم وارد می‌شوند:

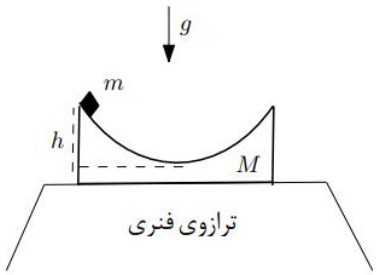
$$\begin{cases} mg = \rho V g = ۱۰^۳ \times (۹۰۰۰ \times ۱۰^{-۶}) \times ۱۰ = ۹۰\ \text{N} \\ F_{\text{هوا}} = p_{\text{هوا}} A = ۱۰^۵ \times ۴۰۰ \times ۱۰^{-۴} = ۴۰۰۰\ \text{N} \end{cases}$$

$$\rightarrow F_N = mg + F_{\text{هوا}} = \boxed{۴۰۹۰\ \text{N}}$$

♣ وزنِ ظرف، فقط بخاطرِ وزنِ آبِ داخلِ آن است.

♣ نیرویِ عمودیِ سطحِ وارد بر ظرف، واکنشِ نیرویِ وارد از طرفِ ظرف به میز است.

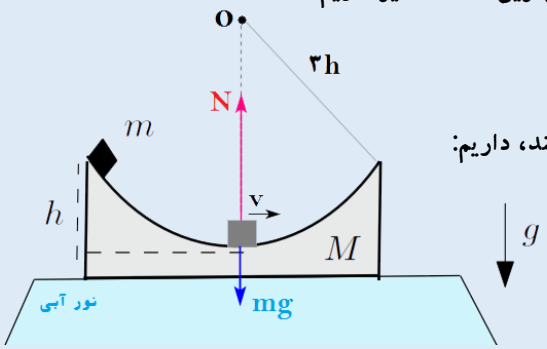
۱۲) جسم کوچکی به جرم m مطابق شکل از بالای ظرفی به جرم M رها می‌شود و بدون اصطکاک به پایین می‌لغزد. نقطهٔ شروع حرکت در ارتفاع h نسبت به پایین‌ترین نقطهٔ مسیر است. شعاع انحنای سطح داخلی ظرف $۳h$ است. این دستگاه روی یک ترازوی فنری قرار دارد. در لحظه‌ای که جرم m به پایین‌ترین نقطه مسیر می‌رسد ترازو چه وزنی را نشان می‌دهد؟ لازم به یادآوری است که اندازهٔ شتاب مرکزگرا در هر نوع حرکت دایره‌ای $\frac{v^۲}{R}$ است که R شعاع انحنا است.



۱) $(M+m)g$ ۲) $(M+۲m/۳)g$ ۳) $(M+۵m/۳)g$ ۴) $(M+۳m)g$

پاسخ گزینه ۳

مطابقِ شکل، از پایستگی انرژیِ مکانیکی بین نقطه‌ی شروع و پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر داریم:



$$\frac{۱}{۲}mv^۲ = mgh \quad \rightarrow \quad v^۲ = ۲gh \quad (۱)$$

در پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر، برای نیروهایی که در امتدادِ شعاع هستند، داریم:

$$N - mg = m\frac{v^۲}{۳h} \xrightarrow{\text{از رابطه (۱)}}$$

$$N - mg = m\frac{۲gh}{۳h} \rightarrow N = \frac{۵}{۳}mg \quad (۲)$$

واکنشِ این نیرو به ظرف وارد می‌شود. حال با توجه به نیروهایِ وارد بر ظرف در راستایِ قائم، ترازو عدد زیر را نشان می‌دهد:

$$Mg + \frac{۵}{۳}mg$$

۱۳) داخل مکعب مستطیلی به ابعاد a، b و c یک گرم‌کن الکتریکی با توان P روشن است. ضخامت دیواره‌های این مکعب مستطیل در راستای هر کدام از ابعاد فوق به ترتیب Δa، Δb و Δc و رسانندگی گرمایی دیواره‌ها K است. دمای جداره‌های بیرون مکعب مستطیل $T_۲$ و دمای جداره‌های داخل مکعب مستطیل $T_۱$ است. کدام گزینه صحیح است؟

(۱) $$T_۱ = T_۲ + \frac{P}{K\left(\frac{ab}{\Delta c} + \frac{ac}{\Delta b} + \frac{bc}{\Delta a}\right)}$$

(۲) $$T_۱ = T_۲ + \frac{P}{۲K\left(\frac{ab}{\Delta c} + \frac{ac}{\Delta b} + \frac{bc}{\Delta a}\right)}$$

(۳) $$T_۱ = T_۲ + \frac{P}{K\left(\frac{(a+\Delta a)(b+\Delta b)}{c} + \frac{(a+\Delta a)(c+\Delta c)}{b} + \frac{(b+\Delta b)(c+\Delta c)}{a}\right)}$$

(۴) $$T_۱ = T_۲ + \frac{P}{۲K\left(\frac{(a+\Delta a)(b+\Delta b)}{c} + \frac{(a+\Delta a)(c+\Delta c)}{b} + \frac{(b+\Delta b)(c+\Delta c)}{a}\right)}$$

پاسخ گزینه ۲

از شش وجه مکعب انرژی گرمایی رو به بیرون شارش می‌کند. در حالت تعادلِ گرمایی، توان تولیدیِ بخاری با توانِ تلف‌شده از دیواره‌ها برابر است:

$$P = P' \quad (۱)$$

توانِ گرمایی تلف‌شده از ۶ وجهِ مکعب از رابطه‌ی $\dot{Q} = kA\frac{(T_H - T_L)}{\Delta x}$ برابر است با:

$$P' = \frac{۲\,kab(T_H - T_L)}{\Delta c} + \frac{۲\,kac(T_H - T_L)}{\Delta b} + \frac{۲\,kbc(T_H - T_L)}{\Delta a} \quad (۲)$$

از این دو رابطه داریم:

$$P = \frac{۲\,kab(T_H - T_L)}{\Delta c} + \frac{۲\,kac(T_H - T_L)}{\Delta b} + \frac{۲\,kbc(T_H - T_L)}{\Delta a}$$

$$\rightarrow \boxed{T_H = T_L + \frac{P}{۲\,k\left(\frac{ab}{\Delta c} + \frac{ac}{\Delta b} + \frac{bc}{\Delta a}\right)}} \quad (۳)$$

۱۴) بین صفحات یک خازن تخت از نوعی فوم که ثابت دی‌الکتریک آن κ است برای جدا نگه‌داشتن صفحات استفاده کرده‌ایم. اگر مساحت هر صفحهٔ خازن A و اندازهٔ بار روی آن Q باشد فشار وارد بر لایهٔ دی‌الکتریک از هر طرف چقدر است؟

۱) $\frac{Q^۲}{\kappa\varepsilon_۰A^۲}$ ۲) $\frac{Q^۲}{۲\kappa\varepsilon_۰A^۲}$ ۳) $\frac{۲Q^۲}{\kappa\varepsilon_۰A^۲}$ ۴) $\frac{Q^۲}{(\kappa-۱)\varepsilon_۰A^۲}$

پاسخ گزینه ۲

هر صفحه‌ی خازن در میدان الکتریکیِ صفحه‌ی دیگر قرار دارد. نیرویِ وارد بر آن برابر است با:

$$F = Eq = \frac{q}{۲\,\kappa\varepsilon_۰A}q = \frac{q^۲}{۲\,\kappa\varepsilon_۰A} \quad (۱)$$

دی‌الکتریك همین مقدار نیرو را به صفحه وارد می‌کند تا ساکن شود. پس طبق قانون سوم نیوتون، همین مقدار نیرو از طرفِ صفحه‌ی خازن بر لایه‌ی دی‌الکتریك وارد می‌شود. پس فشار وارد بر دی‌الکتریك برابر است با:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{\frac{q^۲}{۲\,\kappa\varepsilon_۰A}}{A} = \boxed{\frac{q^۲}{۲\,\kappa\varepsilon_۰A^۲}} \quad (۲)$$

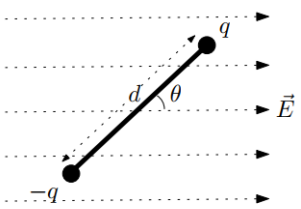
پرسش: ضریب $\frac{۱}{۲}$ در رابطه میدان هر یك از صفحات خازن از کجا آمده است؟

پاسخ: میدان کل بین دو صفحه خازن از رابطه روبرو بدست می‌آید :

$$E=\frac{V}{d}=\frac{q}{cd}=\frac{q}{\frac{\kappa\varepsilon_{\circ}A}{d}d}=\frac{q}{\kappa\varepsilon_{\circ}A}$$

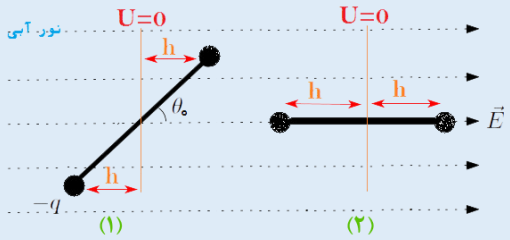
دقت کنید که میدان فوق ناشی از هر دو صفحه خازن می‌باشد. بنابراین میدان هر یك از صفحات نصف مقدار فوق است.

۱۵) یک دوقطبی در میدان الکتریکی یکنواخت E قرار دارد و از زاویهٔ $\theta=\circ$ تا زاویهٔ $\theta=\theta_{\circ}$ حول محوری که از مرکز آن می‌گذرد می‌چرخد. کار نیروی الکتریکی در این تحول بر حسب $p=qd$ (که اندازهٔ گشتاور دوقطبی نام دارد) چقدر است؟



۱) $pE\cos\theta_{\circ}$ ۲) $-pE\cos\theta_{\circ}$ ۳) $-pE(۱-\cos\theta_{\circ})$ ۴) $pE(۱-\cos\theta_{\circ})$

پاسخ گزینه ۴



روش ۱ (یك روش حل دانش‌آموزی). انرژی پتانسیل الکتریکیِ مجموعه را نسبت به سطح مرجعی که عمود بر خطوط میدان الکتریکی بوده و از مرکز چرخش دوقطبی می‌گذرد، در نظر می‌گیریم. در حالت (۱) انرژی پتانسیل الکتریکیِ مجموعِ دو بار برابر است با:

$$U_{۱}=U_q+U_{-q}=-Eq\frac{d}{۲}\cos\theta_{\circ}-Eq\frac{d}{۲}\cos\theta_{\circ}=-Eqd\cos\theta_{\circ}\quad(۱)$$

و در حالت (۲) پس از چرخش دوقطبی، انرژی پتانسیل الکتریکیِ مجموعِ دو بار برابر است با:

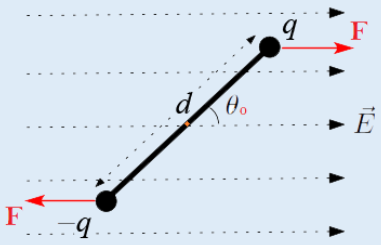
$$U_{۲}=U_q+U_{-q}=-Eq\frac{d}{۲}-Eq\frac{d}{۲}=-Eqd\qquad(۲)$$

می‌دانیم منفیِ تغییرات انرژیِ پتانسیل الکتریکیِ مجموعه برابر با کار میدان الکتریکی است:

$$W_E=-\Delta U=Eqd(۱-\cos\theta_{\circ})=\boxed{Ep(۱-\cos\theta_{\circ})}\quad(۳)$$

روش دوم:

کار گشتاور نیرویی که میدان الکتریکی بر دو قطبی اعمال می‌کند تا بچرخد، برابر است با:



$$W = -\int_{\theta_0}^{0} \tau\, d\theta = -\int_{\theta_0}^{0} Fd\sin\theta\; d\theta = -Fd\int_{\theta_0}^{0} \sin\theta\; d\theta$$

$$\rightarrow W = Eqd(\cos 0 - \cos\theta_0) = \boxed{Ep(1-\cos\theta_0)}$$

۱۶) فرض کنید نوکلئون‌ها، یعنی پروتون‌ها و نوترون‌ها حجم یکسانی دارند و حجم هسته با مجموع حجم نوکلئون‌های آن متناسب است. دو هسته در نظر بگیرید که عدد اتمی و عدد جرمی برای یکی Z_1 و A_1 و برای دیگری Z_2 و A_2 باشد. اندازهٔ نیروی کولنی متوسط بین دو پروتون مجاور هم در هر یک از این دو هسته به ترتیب F_1 و F_2 است. نسبت $\frac{F_1}{F_2}$ کدام گزینه است؟

۱) $\left(\frac{Z_2A_1}{Z_1A_2}\right)^{\frac{2}{3}}$ ۲) $\left(\frac{Z_1A_2}{Z_2A_1}\right)^{\frac{2}{3}}$ ۳) $\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{\frac{2}{3}}$ ۴) $\left(\frac{Z_2A_2}{Z_1A_1}\right)^{\frac{2}{3}}$

پاسخ گزینه ۲ برای درک پاسخ ابتدا لازم است توضیحات زیر را بخوانید، تا در ادامه، پاسخ سوال را درک کنید.

حجم هسته برابر است با حجم یك نوکلئون در تعداد نوکلئون یا همان عدد جرمی

$$V = A \times v \Rightarrow V \propto A$$

با توجه به توضیحات فوق می‌توان گفت حجم هسته با عدد جرمی آن متناسب است.

برای محاسبه فاصله بین دو نوکلئون مجاور درون هسته باید حجم هسته را بر تعداد نوکلئون ها تقسیم کرد و ریشه سوم گرفت. به عبارتی فاصله هر دو نوکلئون مجاور متناسب با ریشه سوم عدد جرمی تقسیم بر تعداد نوکلئون می‌باشد.

$$r \approx \left(\frac{V}{A}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow r \approx \left(\frac{A \times v}{A}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow r \propto v^{\frac{1}{3}}$$

یعنی می‌توان گفت فاصله متوسط بین دو نوترون مجاور متناسب با ریشه سوم عدد جرمی تقسیم بر تعداد نوترون‌های هسته می‌باشد.

$$r \approx \left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{1}{3}} \approx \left(\frac{A \times v}{N}\right)^{\frac{1}{3}} \approx \left(\frac{A}{N}\right)^{\frac{1}{3}} \times v^{\frac{1}{3}} \Rightarrow r \propto \left(\frac{A}{N}\right)^{\frac{1}{3}}$$

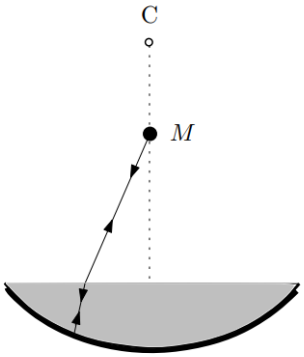
همچنین فاصله متوسط بین دو پروتون مجاور متناسب با ریشه سوم عدد جرمی تقسیم بر تعداد پروتون می‌باشد.

$$r \approx \left(\frac{V}{Z}\right)^{\frac{1}{3}} \approx \left(\frac{A \times v}{Z}\right)^{\frac{1}{3}} \approx \left(\frac{A}{Z}\right)^{\frac{1}{3}} \times v^{\frac{1}{3}} \Rightarrow r \propto \left(\frac{A}{Z}\right)^{\frac{1}{3}}$$

با توجه به قانون کولن، برای مقایسه نیروی بین دو پروتون مجاور در دو هسته متفاوت کافیست به فاصله آنها در هسته‌های مختلف توجه کنیم :

$$\frac{F_1}{F_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \left(\frac{A_2}{A_1}\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

۱۷) آینهٔ کروی کاو به شعاع ۱۷ cm مطابق شکل از مایع شفافی به ضریب شکست ۱٫۶ پر شده است. این آینه قسمتی از یک کره است که مرکز آن نقطهٔ C مرکز آینه نامیده می‌شود. بیشترین عمق مایع درون آینهٔ کروی ۱٫۰ cm است. با توجه به این که برای زاویه‌های کوچک سینوس و تانژانت زاویه با خود آن برابر است، چشمهٔ نقطه‌ای M را در چه فاصله‌ای از مرکز این آینه روی محور اصلی آن قرار دهیم تا تصویر آن بر روی خودش واقع شود؟



۱) ۱۰٫۶ cm ۲) ۱۰ cm ۳) ۶٫۴ cm ۴) ۶ cm

پاسخ گزینه ۴

مطابقِ شکل از قانونِ اسنل ـ دکارت می‌توانیم بنویسیم:

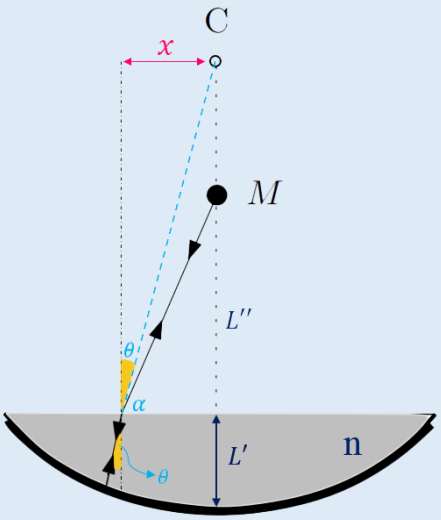
$$n\sin\theta = \sin(90 - \alpha) \quad (1)$$

در حالتی که زاویه‌یِ θ و α کوچك باشد، در رابطه‌یِ بالا داریم:

$$\frac{nx}{R - L'} = \frac{x}{L''} \rightarrow L'' = \frac{R - L'}{n} \quad (2)$$

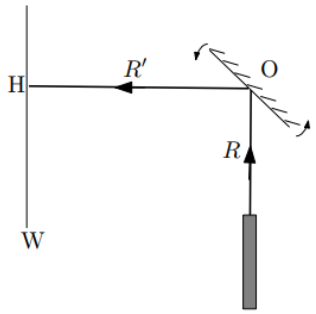
پس خواهیم داشت:

$$L'' = \frac{17 - 1}{1.6} = 10 \rightarrow CM = 17 - 11 = \boxed{6\ cm}$$



این سوال کاملاً مشابه سوالی از دوره‌ی ۳۰ است.

۱۸) در دستگاه شکل مقابل آینه به طور یکنواخت حول محوری که از نقطهٔ O می‌گذرد دور خودش می‌چرخد و دورهٔ چرخش آن T است. لیزری پرتو نوری را به نقطهٔ O از آینه می‌تاباند. نور بازتابیده روی دیوار W یک لکهٔ نورانی متحرک ایجاد می‌کند. در لحظه‌ای که لکهٔ نور از نقطهٔ H عبور می‌کند، سرعت آن چقدر است؟ R و R' به ترتیب فاصلهٔ لیزر و دیوار از نقطهٔ O هستند.



۱) $\frac{۲\pi R}{T}$ ۲) $\frac{۲\pi R'}{T}$ ۳) $\frac{۴\pi R'}{T}$ ۴) $\frac{۴\pi R}{T}$

پاسخ گزینه ۳

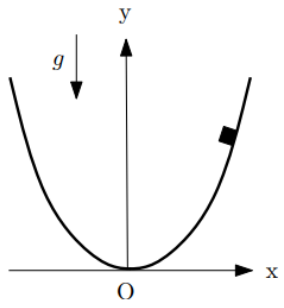
اگر خطِّ عمود بر سطحِ آینه (N) را در نظر بگیریم، به همراهِ آینه با سرعتِ زاویه‌ای ω خواهد چرخید. برای اینکه زاویه‌یِ تابش و بازتابش در هر لحظه مساوی بماند، باید پرتوِ بازتابش با سرعتِ زاویه‌ای ۲ω بچرخد. در این صورت، سرعتِ خطی هر نقطه از پرتوِ بازتابش که رویِ دایره‌ای به شعاعِ r حرکت می‌کند، برابر است با

$$v = ۲r\omega$$

برای نقطه‌ای از پرتوِ بازتابش که در تماس با دیوار است، داریم

$$v = ۲R'\omega = ۲R'\left(\frac{۲\pi}{T}\right) = \boxed{\frac{۴\pi R'}{T}}$$

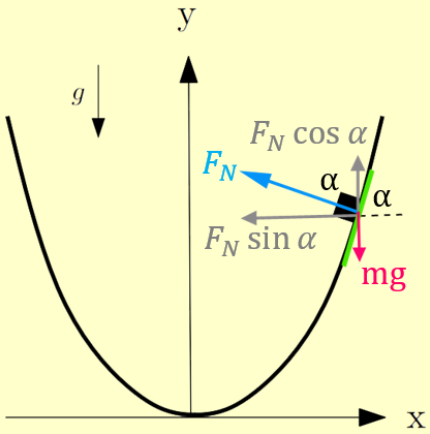
۱۹) سطح داخلی ظرفی که مقطع قائم آن به شکل روبروست بدون اصطکاک است. این ظرف حول محور قائم Oy به طور یکنواخت می‌چرخد و در مدت T ثانیه یک دور می‌زند. معادلهٔ این مقطع در صفحهٔ x-y به صورت $y = ax^۲$ است. دورهٔ چرخش طوری است که اگر جسم کوچک m در هر نقطه‌ای از سطح درونی ظرف در تماس با آن باشد می‌تواند همراه ظرف بچرخد و به بالا یا پایین حرکت نکند. اگر شتاب گرانش در محل g باشد رابطهٔ $T^۲$ با a و g کدام است؟ راهنمایی: شیب خط مماس بر نمودار $y = ax^۲$ در نقطه‌ای به طول x برابر $۲ax$ است.



۱) $T^۲ = \frac{۲\pi^۲}{ag}$ ۲) $T^۲ = \frac{\pi^۲}{۲ag}$ ۳) $T^۲ = \frac{۴\pi^۲}{ag}$ ۴) $T^۲ = \frac{\pi^۲}{۴ag}$

پاسخ گزینه ۱

مطابقِ شکل، دو نیروی عمودیِ سطح و وزن به جسم وارد می‌شوند.



جسم در راستای قائم شتاب ندارد امّا در صفحه‌ی افقی حرکت دایره‌ای یکنواخت به همراه ظرف دارد:

$$\begin{cases} F_N \sin\alpha = mr\omega^2 & (1) \\ F_N \cos\alpha = mg & (2) \end{cases} \xrightarrow{r=x} \tan\alpha = \frac{x\omega^2}{g} \quad (3)$$

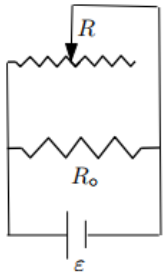
از طرفی $\tan\alpha$ شیبِ خطِّ مُماس بر منحنی ظرف در محلِّ جسم است

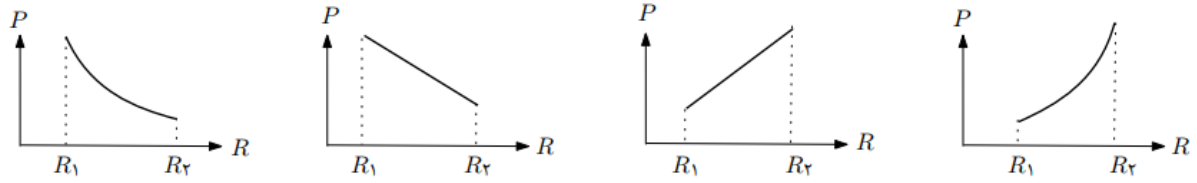
$$\tan\alpha = \frac{dy}{dx} = 2ax \quad (4)$$

که خواهیم داشت:

$$2ax = \frac{x(2\pi/T)^2}{g} \rightarrow T^2 = \boxed{\frac{4\pi^2}{ag}} \quad (5)$$

۲۰) در مدار شکل مقابل مقاومت داخلی باتری قابل چشم‌پوشی است. مقاومت متغیر را از R_1 تا R_2 $(R_2 > R_1)$ افزایش می‌دهیم. نمودار توان الکتریکی مصرف شده در کل مدار بر حسب مقاومت متغیر کدام گزینه است؟





(الف) (ب) (ج) (د)

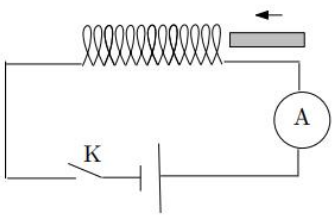
۱) الف ۲) ب ۳) ج ۴) د

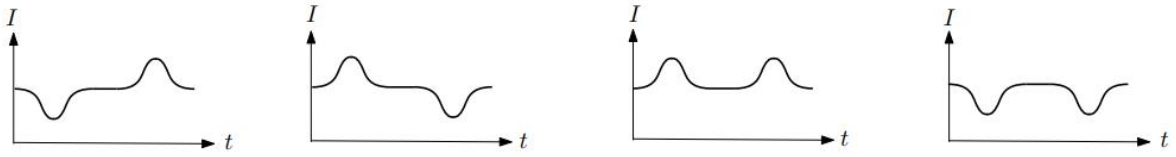
پاسخ گزینه ۴ توانِ الکتریکیِ مصرف‌شده در کلِّ مدار همان توانِ مصرفی در مقاومتِ معادلِ مدار است

$$P_t = \frac{V^2}{R_t} = \varepsilon^2 \frac{1}{R_t} = \varepsilon^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_o}\right) = \frac{\varepsilon^2}{R} + \frac{\varepsilon^2}{R_o}$$

این رابطه همانندِ تابعِ $y = \frac{a}{x} + b$ است. بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

۲۱) در مدار روبرو کلید K را می‌بندیم و صبر می‌کنیم تا جریان در مدار ثابت شود. سپس یک میلهٔ آهنی را با سرعت ثابت از یک سر القاگر وارد و از سر دیگر آن خارج می‌کنیم. کدام نمودار جریان الکتریکی در مدار را بر حسب زمان نمایش می‌دهد؟





(الف) (ب) (ج) (د)

۱) الف ۲) ب ۳) ج ۴) د

پاسخ گزینه ۴

با ورود میله به درون سیملوله، بزرگیِ میدانِ مغناطیسیِ درونِ آن بیشتر می‌شود. بنابراین شارِ مغناطیسیِ عبوری از سیملوله بیشتر می‌شود. بنابراین نیرویِ محرکه و جریانِ القایی در سیملوله (القاگر) در جهتی خواهد بود که جریانِ عبوری از سیملوله و جریانِ مدار کاهش یابد تا با کاهش بزرگیِ میدانِ مغناطیسیِ درون سیملوله، با افزایشِ شارِ مغناطیسیِ عبوری از حلقه‌ها مخالفت کند.

امّا به هنگامِ خروجِ میله از سیملوله، برعکسِ حالتِ قبل، میدانِ مغناطیسیِ درون سیلوله کاهش می‌یابد. پس جریانِ القایی در سیملوله طوری خواهد بود که جریانِ مدار افزایش یابد تا با افزایشِ بزرگیِ میدانِ مغناطیسیِ درونِ سیملوله، با کاهشِ شارِ مغناطیسیِ عبوری از حلقه‌ها مخالفت کند. با این اوصاف، نمودارِ (د) یا گزینه‌ی (۴) پاسخِ درست می‌تواند باشد.

۲۲) شعاع اتم هیدروژن حدود $10^{-10}\ m$ و شعاع پروتون حدود $10^{-15}\ m$ است. مرتبهٔ بزرگی چگالی پروتون به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

۱) $10^{8}\ g/cm^3$ ۲) $10^{11}\ g/cm^3$ ۳) $10^{14}\ g/cm^3$ ۴) $10^{17}\ g/cm^3$

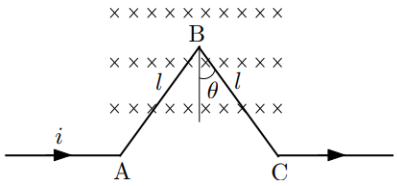
پاسخ گزینه ۳

جرمِ اتمِ هیدروژن تقریباً برابر با جرمِ پروتون است. جرمِ هر مول اتمِ هیدروژن ۱ گرم است. برایِ چگالیِ پروتون می‌توانیم بنویسیم:

$$\rho_p = \frac{m_p}{V_p} \cong \frac{m_H}{\frac{4}{3}\pi r_p^3} = \frac{\frac{1}{6.02\times10^{23}}}{\frac{4}{3}\pi\times(10^{-13})^3} \sim \frac{\frac{1}{10\times10^{23}}}{10^{-39}} = \boxed{10^{15}\ g/cm^3}$$

هر مول اتمِ هیدروژن شاملِ $6{,}02\times10^{23}$ اتمِ هیدروژن است.

۲۳) در شکل مقابل طول l از سیم‌های AB و BC داخل یک میدان مغناطیسی یکنواخت قرار دارند. میدان مغناطیسی عمود بر صفحهٔ شکل و به سمت داخل است. جریان در سیم‌ها i و اندازهٔ میدان مغناطیسی B است. زاویهٔ θ در شکل نشان داده شده است. اندازهٔ نیروی وارد بر هر سیم از طرف این میدان f و اندازهٔ نیروی وارد بر دو سیم از طرف میدان روی هم F است. کدام گزینه صحیح است؟



۱) $f = ilB,\quad F = ۲ilB\sin\theta$

۲) $f = ilB\sin\theta,\quad F = ۲ilB\sin\theta$

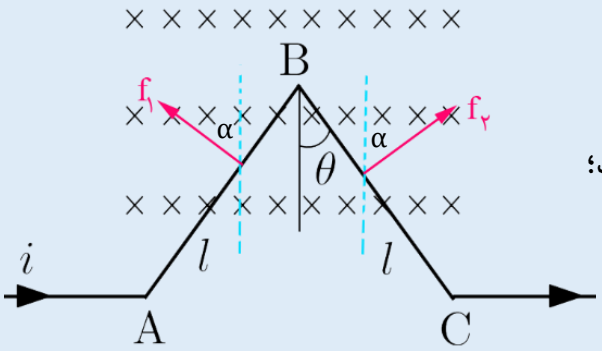
۳) $f = ilB,\quad F = ۲ilB\cos\theta$

۴) $f = ilB\cos\theta,\quad F = ۲ilB\cos\theta$

پاسخ گزینه ۱

نیروی مغناطیسیِ وارد بر هر سیم برابر است با:

$$f = f_۱ = f_۲ = \boxed{ilB}$$

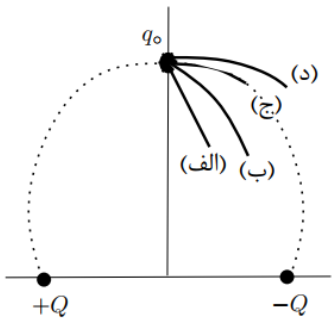


امّا برایندِ بُرداری دو نیروی f_1 و f_2 در راستای محورِ قائم است؛ چون مؤلفه‌ی افقیِ این دو نیرو همدیگر را حذف می‌کنند:

$$F = ۲f\cos\alpha = ۲f\sin\theta = \boxed{۲ilB\sin\theta}$$

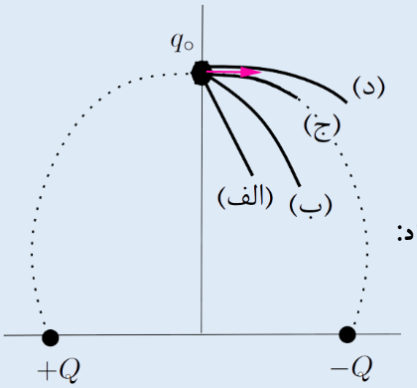
زاویه‌های α و θ مُتمّم هم هستند.

۲۴) در شکل مقابل بار کوچک $q_۰$ روی عمودمنصف یک دوقطبی ثابت قرار دارد و تحت اثر میدان الکتریکی دوقطبی از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. خط میدانی که از محل اولیه $q_۰$ می‌گذرد به صورت نقطه‌چین و چهار مسیر قابل تصور برای حرکت $q_۰$ با خطوط پر در شکل نشان داده شده است. مسیر حرکت $q_۰$ کدام یک از مسیرها می‌تواند باشد؟



۱) الف ۲) ب ۳) ج ۴) د

پاسخ گزینه ۴



نیروی الکتریکیِ وارد بر بار در لحظه‌ی $t = 0$ مطابقِ شکل است. بر اثر این نیرو، بار ساکن نمی‌تواند مسیر «ب» و «الف» را طی کند؛ چون بردارِ سرعتِ اولیه در جهتِ نیروی وارد شده هست. اما از بینِ دو مسیرِ «د» و «ج» کدام امکان‌پذیر هست؟ فرض کنید که بار مسیرِ «ج» را طی می‌کند. در این صورت دو اتفاقِ زیر خواهد افتاد:

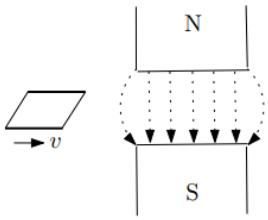
۱ــ پیوسته جهتِ بردارِ سرعت و بردارِ نیروی وارد بر بار در یك جهت خواهند بود.

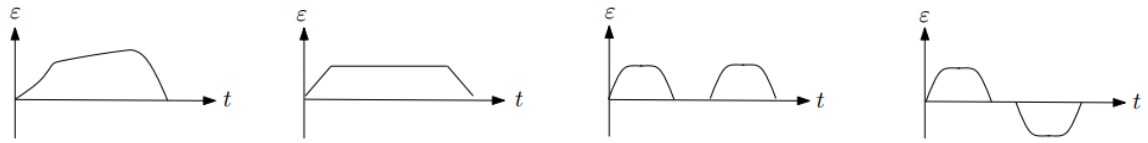
۲ــ بار یك مسیرِ منحنی را طی خواهد کرد.

بنا به نتیجه‌ی ۱، نیروی وارد بر ذره، مؤلفه‌ای در جهتِ عمود بر بردارِ سرعتِ ذره نخواهد داشت؛ پس عاملی برای تغییرِ جهتِ حرکتِ جسم هم وجود نخواهد داشت. اما طبقِ نتیجه‌ی ۲، باید بردارِ نیرو، مولفه‌ای در جهتِ عمود بر بردارِ سرعتِ بار داشته باشد تا بار روی یك مسیر منحنی حرکت کند.

از این تناقض به این نتیجه می‌رسیم که هرگز امکان ندارد بار روی خطِّ میدان حرکت کند. پس جواب مسیرِ «د» است.

۲۵) یک حلقهٔ رسانا مطابق شکل با سرعت ثابت v از ناحیه‌ای که در آن میدان مغناطیسی یکنواخت B برقرار است عبور می‌کند. طی حرکت، خطوط میدان مغناطیسی بر سطح حلقه عمود است. نمودار نیروی محرکهٔ القایی در حلقه بر حسب زمان به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

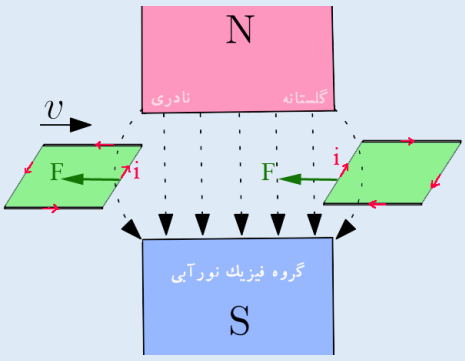




(الف) (ب) (ج) (د)

۱) الف ۲) ب ۳) ج ۴) د

پاسخ گزینه ۱



به هنگامِ ورودِ حلقه به میدانِ مغناطیسی، جریانِ ایجادشده در حلقه طوری خواهد بود که با ورودِ حلقه به میدان مخالفت کند. برای همین جریانِ ایجاد شده پادساعتگرد خواهد بود.

امّا به هنگامِ خروجِ حلقه از میدان، جریانِ ایجادشده این بار ساعتگرد خواهد بود. وقتی هم که حلقه به طورِ کامل در میدانِ مغناطیسی قرار دارد، تغییرِ شارِ مغناطیسی وجود ندارد و جریانی در حلقه القا نخواهد شد. با این حساب، گزینه‌ی ۱ می‌تواند پاسخِ درست باشد.

۲۶) ظرفی محتوی مخلوطی از ۷٫۰۰g گاز نیتروژن با جرم مولی ۲۸٫۰g/mol و ۱۱٫۰g گاز دی‌اکسید کربن با جرم مولی ۴۴٫۰g/mol در دمای ۳۰۰ K و فشار 1.00×10^5 pa در نظر بگیرید. جرم حجمی این مخلوط چقدر است؟ ثابت جهانی گازها ۸٫۳۱ J/mol.K است.

۱) ۱٫۴۴ g/L ۲) ۲٫۸۸ g/L ۳) ۱٫۱۲ g/L ۴) ۱٫۷۶ g/L

پاسخ گزینه ۱

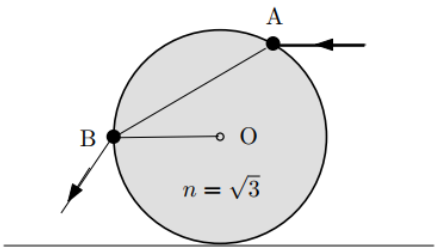
مخلوطِ گازی شاملِ ۰٫۲۵ مول نیتروژن و ۰٫۲۵ مول کربن‌دی‌اکسید و در کل ۰٫۵ مول است. از قانونِ عمومیِ گازها برایِ حجمِ مخلوط داریم:

$$pV = nRT \rightarrow 10^5 \times V = 0.5 \times 8.31 \times 300$$

$$\rightarrow V = 1246.5 \times 10^{-5}\ \text{m}^3 = 12.465\ \text{L}$$

اکنون برایِ جرمِ حجمیِ مخلوط داریم: $\rho = \frac{m}{V} = \frac{18}{12.465} \approx \boxed{1.44\ \text{g/L}}$

۲۷) یک استوانهٔ شیشه‌ای شفاف به شعاع ۵ cm با ضریب شکست $\sqrt{3}$ مطابق شکل در هوا و روی یک سطح افقی قرار دارد. یک پرتو نور موازی سطح افق و عمود بر محور استوانه به نقطهٔ A از استوانه می‌تابد و از نقطهٔ B خارج می‌شود به طوری که OB موازی سطح افقی است. زمان عبور نور از استوانهٔ شیشه‌ای چند نانوثانیه است؟

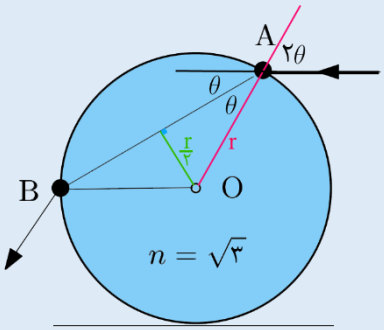


۱) ۱ ۲) ۰٫۹ ۳) ۰٫۵ ۴) ۰٫۳

پاسخ گزینه ۳

مطابقِ شکل، از قانونِ اسنل برایِ پرتوِ ورودی به استوانه داریم:

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_r \rightarrow \sin 2\theta = \sqrt{3}\sin\theta \rightarrow \theta = 30^\circ$$



تندیِ نور در این استوانه برابر است با: $v = \frac{c}{n} = \frac{3\times10^8}{\sqrt{3}}\ \text{m/s}$

از طرفی طولِ AB برابر است با:

$$\text{AB} = 2\sqrt{r^2 - r^2/4} = r\sqrt{3} = 5\sqrt{3}\times10^{-2}\ \text{m}$$

پس سرانجام زمانِ عبورِ نور برابر است با:

$$t = \frac{\text{AB}}{v} = 5\times10^{-10}\ \text{s} = \boxed{0.5\ \text{ns}}$$

گروه فیزیک نورآبی

مسئله‌های کوتاه

۱) یک ماشین کارنو بین دو منبع با دماهای ۴۵۰K و ۳۰۰K کار می‌کند. یک بار فقط دمای منبع سردتر را ΔT کاهش می‌دهیم و بار دیگر فقط دمای منبع گرم‌تر را ΔT افزایش می‌دهیم. ΔT چقدر باشد تا اختلاف بازده ماشین کارنو در این دو وضعیت ۰/۰۲۵ باشد؟

پاسخ : بازده ماشین کارنو از رابطه زیر بدست می آید.

$$\eta = \frac{T_H - T_c}{T_H} \Rightarrow \eta_۱ - \eta_۲ = \frac{۱۵۰ + \Delta T}{۴۵۰} - \frac{۱۵۰ + \Delta T}{۴۵۰ + \Delta T} = ۰/۰۲۵$$

$$۴\Delta T^۲ + ۵۵۵\,\Delta T - ۲۰۲۵۰ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۵۵۵^۲ - ۴ \times ۴ \times (-۲۰۲۵۰) = ۶۳۲۰۲۵ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = ۷۹۵$$

$$\Delta T = \frac{-۵۵۵ + ۷۹۵}{۸} = \boxed{۳۰\ ^\circ C}$$

۲) گازی داخل ظرفی توسط یک پیستون بدون اصطکاک محبوس شده است. در یک فرایند معین رابطهٔ فشار گاز با حجم آن به صورت $P = a + bV$ است که a و b مقادیر ثابتی هستند. انرژی درونی گاز با رابطهٔ $U = ۳PV$ به حجم و فشار وابسته است. اگر گاز از حالت تعادل اولیهٔ $(P = ۱۶۰\ \text{kPa}, V = ۰/۰۳۰\ \text{m}^۳)$ به صورت ایستاوار مطابق فرایند فوق به حالت تعادل نهایی $(P = ۴۰۰\ \text{kPa}, V = ۰/۰۶۰\ \text{m}^۳)$ تحول یابد، گرمای مبادله شده در این فرآیند چند **کیلو ژول** است؟

پاسخ: با جایگذاری مختصات تعادل اولیه و نهایی گاز در معادله فشار مقادیر a و b را بدست می‌آوریم.

$$P = a + bV \Longrightarrow \begin{cases} P = ۱۶۰\ \text{kpa} \quad V = ۰/۰۳\ \text{m}^۳ \\ P = ۴۰۰\ \text{kpa} \quad V = ۰/۰۶\ \text{m}^۳ \end{cases} \Rightarrow a = -۸۰\ \text{kpa} \text{ و } b = ۸۰۰۰\ {}^{\text{kpa}}/_{\text{m}^۳}$$

ابتدا تغییرات انرژی درونی گاز را بدست می آوریم: $\Delta U = U_۲ - U_۱ = ۳(P_۲V_۲ - P_۱V_۱) = ۵۷/۶\ kj$

سطح زیر نمودار $(p\text{-}v)$ برابر کار انجام شده است. می‌توان معادله فشار را رسم و مساحت زیر نمودار با محور حجم را حساب کرد. همچنین می‌توان به طریق زیر کار انجام شده را بدست آورد:

$$w = -\int_{۰/۰۳}^{۰/۰۶} PdV = ۸۰\,V - ۴۰۰۰V^۲ \Big|_{۰/۰۳}^{۰/۰۶} = -۸/۴\ kj$$

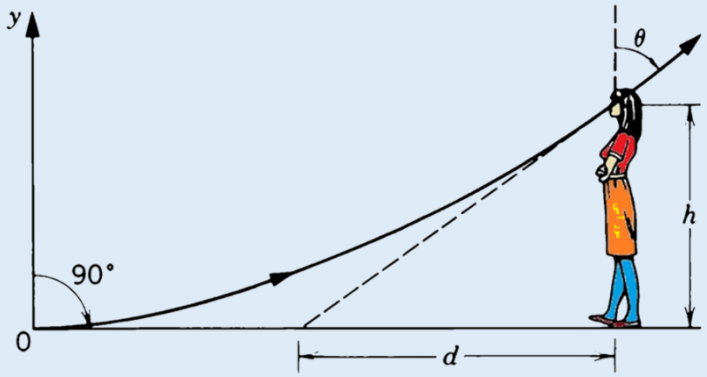
با توجه به قانون اول ترمودینامیک می‌توان گرمای مبادله شده را بدست آورد:

$$\Delta U = W + Q \Longrightarrow Q = ۵۷/۶ + ۸/۴ = \boxed{۶۶\ kj}$$

گروه فیزیک نورآبی

۳) شخصی در یک روز آفتابی و گرم کنار یک جادهٔ افقی، مستقیم و طولانی ایستاده و به دوردست نگاه می‌کند. به دلیل داغ بودن سطح جاده دمای لایه‌های هوای بالای سطح جاده به تدریج با فاصلهٔ عمودی از سطح جاده کم می‌شود و در نتیجه ضریب شکست لایه‌های هوا به صورت $n(y) = n_{\circ}(۱ + ۲ \times ۱۰^{-۷} y)$ به ارتفاع بستگی دارد که $n_{\circ}$ ضریب شکست لایهٔ هوای مجاور سطح جاده و y فاصلهٔ عمودی لایهٔ هوا از سطح جاده برحسب متر است. فاصلهٔ چشم شخص تا سطح جاده ۱۶۰ سانتی‌متر است. جسمی واقع بر کف جاده در فاصلهٔ بسیار دور از شخص قرار دارد. تصویر جسم در چه فاصله‌ای از شخص بر حسب **کیلومتر** به نظر می‌رسد؟

مطابق شکل، فاصله‌ی موردِنظر (d)، به صورت زیر توسطّ شخص مشاهده خواهد شد:



از قانونِ اسنل برای اوّلین لایه و آخرین لایه داریم:

$$n_۱ \sin\theta_۱ = n_۲ \sin\theta_۲ \rightarrow n_{\circ} \sin ۹۰^{\circ} = n_{\circ}(۱ + ah)\sin\theta$$

$$\rightarrow \sin\theta = \frac{۱}{۱ + ah} \approx ۱ - ah \quad (۱)$$

حال برای فاصله‌ی d داریم:

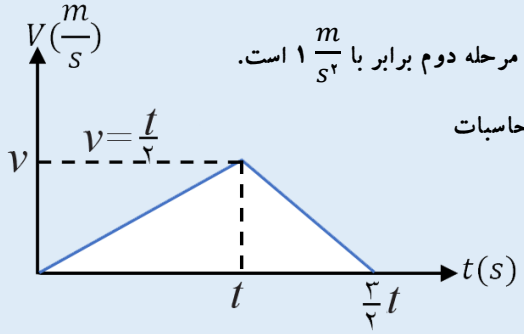
$$\tan\theta = \frac{d}{h} \rightarrow d = h\frac{\sin\theta}{\sqrt{۱ - \sin^{۲}\theta}} = h\frac{(۱ - ah)}{\sqrt{۲ah - a^{۲}y^{۲}}} \approx \frac{h}{\sqrt{۲ah}} = \sqrt{\frac{h}{۲a}}$$

$$\rightarrow d = \sqrt{\frac{۱۶ \times ۱۰^{-۱}}{۲ \times ۲ \times ۱۰^{-۷}}} = ۲ \times ۱۰^{۳}\ \mathrm{m} = \boxed{۲\ \mathrm{km}}$$

۴) فاصلهٔ دو ایستگاه مترو از هم ۲٫۴ km است. مسیر بین دو ایستگاه افقی و مستقیم است. قطاری با بیشینه شتاب تند شوندهٔ ۰٫۵۰ m/s^2 از یک ایستگاه شروع به حرکت می‌کند و با بیشینه شتاب کند شوندهٔ ۱٫۰ m/s^2 حرکتش را کند می‌کند تا در ایستگاه دیگر توقف کند. اگر قطار محدودیت سرعت نداشته باشد کمترین زمان طی مسافت بین دو ایستگاه T است و اگر قطار محدودیت سرعت ۹۰ km/h داشته باشد کمترین زمان طی مسافت بین دو ایستگاه T' است. $۲(T'-T)$ چند **ثانیه** است؟

اگر نمودار سرعت زمان را برای هردو حالت رسم کنیم به راحتی با استفاده از شتاب شروع حرکت و شتاب توقف و هم چنین اندازه جابجایی که همان ۲۴۰۰ متر می باشد، می‌توان حداقل زمان لازم را تعیین کرد:

الف) بدون محدودیت سرعت



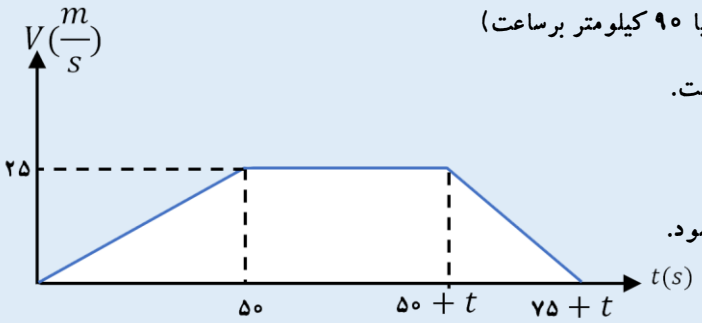
شیب این نمودار معرف شتاب است که در مرحله اول برابر $۰/۵\frac{m}{s^۲}$ و در مرحله دوم برابر با $۱\frac{m}{s^۲}$ است.

باید مساحت نمودار فوق با محور افقی برابر ۲۴۰۰ متر شود. با نوشتن محاسبات مقدار x بدست می آید. در نهایت زمان کل حرکت که $T=\frac{۳}{۲}t$ است را بدست می آوریم.

$$۲۴۰۰=\frac{۱}{۲}\times v\times\frac{۳}{۲}t\Rightarrow t=۸۰\Rightarrow T=\frac{۳}{۲}t=۱۲۰\ (s)$$

ب) حرکت قطار با محدودیت سرعت ۲۵ متر برثانیه (یا ۹۰ کیلومتر برساعت)

نمودار سرعت زمان برای این حالت به صورت مقابل است.



زمان کل حرکت که $T'=۷۵+t$ است

باز هم مساحت نمودار با محور زمان باید ۲۴۰۰ متر شود.

$$۲۴۰۰=\frac{۲t+۷۵}{۲}\times ۲۵\Rightarrow t=۵۸/۵\Rightarrow T'=۷۵+t=۱۳۳/۵\ (s)$$

بنابراین :

$$۲(T'-T)=\boxed{۲۷\ (s)}$$

۵) چگالی مس $۸/۹\ \mathrm{g/cm^3}$، جرم مولی مس $۶۴\ \mathrm{g/mol}$ و هر اتم مس یک الکترون آزاد دارد که باعث رسانش الکتریکی در این فلز است. یک سیم مسی به سطح مقطع $۲۰\ \mathrm{mm^2}$ حامل جریان الکتریکی $۸/۹\ \mathrm{A}$ است. سرعت سوق الکترون‌های آزاد در سیم، v_d، چند **میلی‌متر بر ثانیه** است؟ لازم به ذکر است که اگر n تعداد الکترون‌های آزاد در واحد حجم فلز مس باشد جریان گذرنده از سیم $I = Anev_d$ است که A مساحت مقطع سیم و e اندازه بار الکتریکی یک الکترون، $۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}\mathrm{C}$ است.

ابتدا تعداد مول ها و سپس تعداد اتم های مس را بدست می‌آوریم.

$$n = \frac{m}{M} = \frac{\rho AL}{M} \Rightarrow N = ۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}\frac{\rho AL}{M}$$

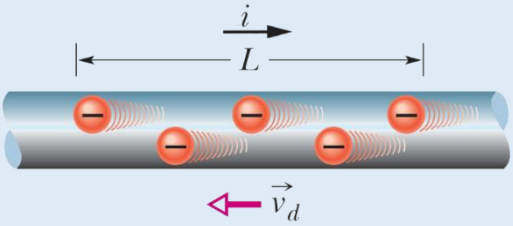
چون هر اتم مس یك الکترون آزاد دارد که باعث رسانش در این فلز است بنابراین تعداد الکترون های ازاد که باعث رسانش می شوند نیز برابر N است. تعداد الکترون های آزاد در واحد حجم از تقسیم تعداد الکترون ها به واحد حجم بدست می آید.

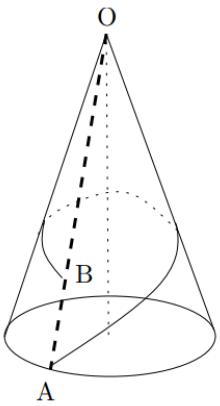
$$\mathrm{n} = \frac{N}{V} = \frac{N}{AL} = ۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}\frac{\rho}{M}$$

برای محاسبه سرعت سوق با توجه به فرمول داده شده در سوال داریم:

$$i = Anev_d \Rightarrow v_d = \frac{i}{Ane} = \frac{۸/۹ \times ۶۴}{۲ \times ۱۰^{-۵} \times ۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳} \times ۸/۹ \times ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}}$$

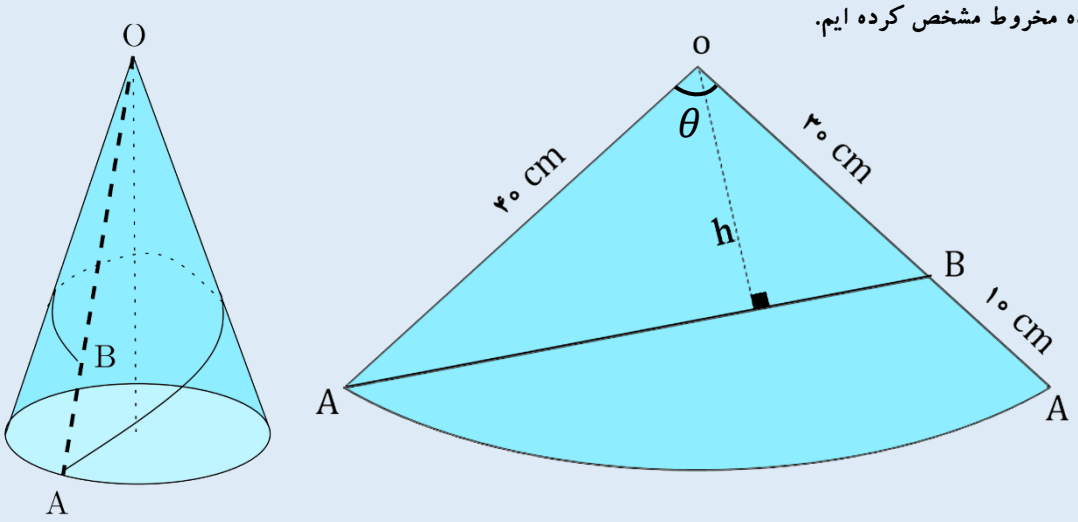
$$v_d = ۳ \times ۱۰^{-۵}\frac{m}{s} = \boxed{۰/۰۳\frac{mm}{s}}$$





۶) شعاع قاعدهٔ مخروط قائم شکل مقابل ۱۰ cm و طول یال آن (خط OA در شکل) ۴۰ cm است. فاصلهٔ نقاط A و B که روی یک یال قرار دارند ۱۰ cm است. مورچه‌ای از نقطهٔ A مخروط را یک بار دور می‌زند و در مسیری که کوتاه‌ترین مسیر ممکن است خود را به نقطهٔ B می‌رساند. در طی این مسیر کوتاه‌ترین فاصلهٔ مورچه از نقطهٔ O، رأس مخروط چند **سانتی‌متر** است؟

پاسخ: اگر مخروط فوق را باز کنیم به یك قطاعی از دایره که سعاع آن برابر با یال مخروط است خواهیم رسید. بنابراین با توجه به شکل زیر کوتاه ترین راهی که مورچه برای رفتن به نقطه B پیش رو خواهد داشت مسیر مستقیم از A به B است که در شکل باز شده مخروط مشخص کرده ایم.



به راحتی می توان ثابت کرد که زاویه θ برابر ۹۰ درجه است. شعاع مخروط $r = ۱۰\ \text{cm}$ و یال آن $l = ۴۰\ \text{cm}$ است.

$$۲\pi r = l\,\theta \Rightarrow \theta = \frac{۲\pi r}{l} = \frac{\pi}{۲}$$

بنابراین مثلث AOB یك مثلث قائم الزاویه است. ضلع AB از فیثاغورث بدست می آوریم:

$$AB = \sqrt{۴۰^۲ + ۳۰^۲} = ۵۰\ \text{cm}$$

مساحت این مثلث را به دو طریق می توان محاسبه نمود. با مساوی قرار دادن این مقادیر، اندازه h که کمترین فاصله مورچه از نقطه O می باشد را تعیین میکنیم.

$$\frac{۴۰ \times ۳۰}{۲} = \frac{h \times ۵۰}{۲} \Rightarrow \boxed{h = ۲۴\ \text{cm}}$$

۷) یک میلهٔ آهنی به جرم ۱٫۰kg را که تا دمای ۹۴۰ °C گرم شده است در ظرفی محتوی ۴٫۰ L آب فرو می‌بریم. دمای آب از ۲۵ °C به ۴۰ °C می‌رسد. فرض کنید در مجاورت میله، آب به دمای ۱۰۰ °C می‌رسد و تبخیر می‌شود و پس از تبخیر دمای بخار افزایش نمی‌یابد. همچنین از هر نوع انتقال گرما به ظرف و محیط چشم بپوشید. چند **گرم** آب تبخیر شده است؟ گرمای ویژهٔ آب و آهن به ترتیب ۴۲۰۰ J/kg.K و ۴۹۰ J/kg.K، چگالی آب ۱٫۰ kg/L و گرمای نهان تبخیر آب $۲٫۳\times ۱۰^{۶}$ J/kg است.

میله‌ی آهنی گرما از دست می‌دهد و در عوض آب این گرما را دریافت می‌کند. همه‌ی آب دمایش از ۲۵ °C به ۴۰ °C می‌رسد. امّا این وسط جرم m' از آب که در مجاورتِ میله است، ابتدا با جذبِ گرمای بیشتر از ۴۰ °C به ۱۰۰ °C رفته و سپس با گرفتنِ گرمایِ نهانِ تبخیر، بخار می‌شود. پس از پایستگی انرژی داریم:

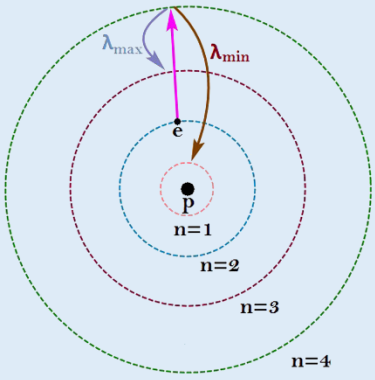
$$Q_{\text{آهن}} = Q_{\text{آب}}$$

$$\rightarrow m_{\text{آهن}}c_{\text{آهن}}\Delta\theta = \left(m_{\text{آب}}c_{\text{آب}}\Delta\theta\right) + \left(m'c_{\text{آب}}\Delta\theta'\right) + \left(m'L_{v\,\text{آب}}\right)$$

$$\rightarrow ۱ \times ۴۹۰ \times ۹۰۰ = (۴ \times ۴۲۰۰ \times ۱۵) + (m' \times ۴۲۰۰ \times ۶۰) + (m' \times ۲/۳ \times ۱۰^{۶})$$

$$\rightarrow m' = \frac{۱۸۹}{۲۵۵۲}\text{kg} \approx \boxed{۷۴\ \text{g}}$$

۸) ظرفی محتوی گاز هیدروژن در نظر بگیرید. فرض کنید بخشی از اتم‌ها در حالت پایه و بقیهٔ آن‌ها همگی در یک حالت برانگیخته هستند. به این گاز فوتون‌هایی با انرژی ۲٫۵۵ eV می‌تابانیم. این فوتون‌ها توسط گاز جذب می‌شوند؛ سپس اتم‌های تحریک شده به ترازهای پایین‌تر می‌روند و فوتون‌هایی با انرژی‌های مختلف گسیل می‌کنند. در بین فوتون‌های گسیل شده فوتون‌هایی با انرژی کمتر از ۲٫۵۵ eV نیز وجود دارد. اگر $\Delta\lambda$ تفاوت بلندترین و کوتاه‌ترین طول موج فوتون‌های گسیلی بر حسب **آنگستروم** باشد، $\frac{\Delta\lambda}{۱۰۰۰}$ چه عددی است؟ انرژی یونش اتم هیدروژن ۱۳٫۶ eV و ثابت پلانک $۶٫۶۳\times ۱۰^{-۳۴}$ J.s است.



انرژیِ الکترون در اتم هیدروژن طبقِ رابطه‌ی $E_n = -\frac{۱۳/۶}{n^{۲}}$ در ترازِ پایه ۱۳/۶ eV- و در اوّلین حالتِ برانگیخته ۳/۴ eV- است. چون انرژیِ فوتون‌های تابیده به ظرف از اختلافِ انرژیِ این دو تراز (۱۰٫۲ eV) کمتر است، این فوتون‌ها نمی‌توانند توسطِّ اتمی در حالت پایه جذب شوند.

امّا با کمی دقت متوجه می‌شویم که اختلافِ انرژیِ الکترون در دو حالتِ $n = ۲$ و $n = ۴$ برابرِ ۲٫۵۵ eV است. از جذبِ فوتون‌هایِ تابیده‌شده به ظرف نتیجه می‌گیریم که بخشی از اتم‌هایِ هیدروژنِ داخلِ ظرف در اوّلین حالتِ برانگیخته هستند. در اتم‌هایی که در اوّلین حالت برانگیخته هستند، الکترون با جذبِ فوتون ۲٫۵۵ الکترون‌ولتی از

حالتِ $n = ۲$ به حالتِ $n = ۴$ می‌روند.

حال اگر الکترون از حالتِ $n = ۴$ به ترازی با انرژیِ کمتر جهش کند، فوتون تابش خواهد کرد. اگر الکترون از حالتِ $n = ۴$ به حالتِ $n = ۳$ برود، فوتونِ تابش‌شده بیشترین طولِ موج و اگر از حالتِ $n = ۴$ به حالتِ $n = ۱$ برود، فوتونی با کمترین طولِ موج تابش خواهد کرد.

$$\begin{cases} \lambda_{min} = \dfrac{hc}{\Delta E_{۴\to۱}} = \dfrac{۱۲۴۰\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{۱۲/۷۵\ \text{eV}} = ۹۷/۲۵\ \text{nm} = ۹۷۲/۵\ \text{Å} \\ \lambda_{max} = \dfrac{hc}{\Delta E_{۴\to۳}} = \dfrac{۱۲۴۰\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{۰/۶۶\ \text{eV}} = ۱۸۷۸/۷۸\ \text{nm} = ۱۸۷۸۷/۸\ \text{Å} \end{cases}$$

پس خواهیم داشت:

$$\frac{\Delta\lambda}{۱۰۰۰} = \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{۱۰۰۰} = ۱۷/۸ \approx \boxed{۱۸}$$