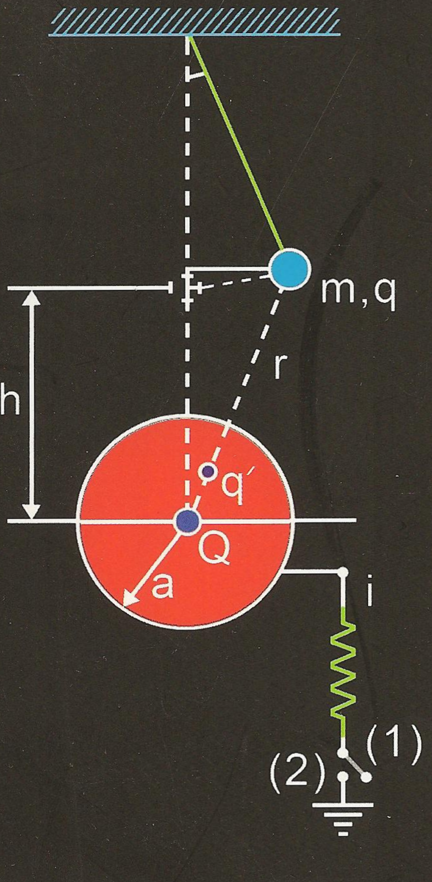
آزمون‌های تابستانی
المپیاد فیزیک



محمود بهمن آبادی
اشکان جعفرپور
زعیم گلباغی آستانه
علی شهراد

آزمون‌های تابستانی المپیاد فیزیک

(۱۳۸۳ ـ ۱۳۸۰)

پدیدآورندگان:
محمود بهمن‌آبادی
اشکان جعفرپور
زعیم گلباغی آستانه
علی شهراد

انتشارات
باشگاه دانش پژوهان جوان

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

- **سؤال‌ها و پاسخ‌های شانزدهمین دوره آزمون‌های المپیاد فیزیک ـ تابستان ۱۳۸۲**

- **سؤال‌ها و پاسخ‌های هفدهمین دوره آزمون‌های المپیاد فیزیک ـ تابستان ۱۳۸۳**

- **سؤال‌های بیست و یکمین دوره آزمون‌های المپیاد فیزیک ـ تابستان ۱۳۸۷**

پیش‌گفتار

نخستین دوره المپیاد فیزیک در سال ۱۹۷۶ میلادی در کشور لهستان برگزار شد. از آن سال تاکنون همه ساله (به جز سال‌های ۱۹۷۳ و ۱۹۷۸) این المپیاد برگزار شده است. ایران از دوره‌ی بیستم (در سال ۱۳۶۸ هجری شمسی) تا دوره‌ی چهلم که در سال ۲۰۰۹ در کشور مکزیک برگزار شد، در این مسابقات شرکت کرده است. تیم ایران فقط در سال ۱۳۷۲ که المپیاد در آمریکا برگزار شد، در این مسابقه شرکت نداشت. حداکثر تعداد اعضای دانش‌آموزی هر تیم در المپیاد جهانی فیزیک پنج نفر است که ایران معمولاً هر سال با پنج نفر در آن شرکت می‌کند. نحوه‌ی انتخاب این پنج نفر به صورت زیر است.

معمولاً در بهمن‌ماه هر سال یک امتحان تستی در سراسر کشور برگزار می‌شود که شرکت‌کننده‌گان در این آزمون دانش‌آموزان پایه‌ی سوم ریاضی و فیزیک هستند. حدود ۸۰۰ نفر اول برگزیده شده‌ی این امتحان در یک امتحان تشریحی و یک امتحان عملی در اردیبهشت‌ماه سال بعد (حدود دو ماه پس از امتحان تستی) شرکت می‌کنند. حدود ۴۰ نفر برتر این امتحان‌ها (که با وزن دادن به نمره‌ی هر کدام از امتحان‌های تستی، تشریحی و عملی انجام می‌شود) به عنوان برگزیدگان دوره‌ی تابستانی المپیاد فیزیک انتخاب می‌شوند. این برگزیدگان **"دانش‌پژوه"** نامیده می‌شوند.

در دوره‌ی تابستانی که مدت آن حدود ۱۰ هفته است، با آموزش بعضی از درس‌های نظری و تجربی فیزیک که معمولاً مکانیک و الکترومغناطیس است، آزمون‌های متعددی در این زمینه از دانش‌پژوهان گرفته می‌شود (تنها در یک دوره (تابستان ۱۳۸۱) به جای درس الکترومغناطیس، درس اپتیک ارائه شد.). در پایان دوره‌ی تابستان، ۱۰ نفر برتر این دوره انتخاب می‌شوند که این ۱۰ نفر بدون کنکور وارد دانشگاه خواهند شد. این دانش‌پژوهان می‌توانند هر رشته‌ی مهندسی یا علوم پایه را به عنوان رشته‌ی تحصیلی خود در دانشگاه انتخاب کنند. پس از دوره‌ی تابستان، آموزش تیم ۱۰ نفره‌ی فیزیک ادامه می‌یابد. در این دوره نیز ضمن آموزش مباحث مختلف فیزیک، آزمون‌های متعددی از این ۱۰ نفر گرفته می‌شود و در نهایت ۵ نفر برتر به المپیاد جهانی فیزیک (IPhO) اعزام می‌شوند.

این کتاب برای آشنایی بیشتر دانش‌آموزان با سؤال‌های دوره‌ی تابستان المپیاد فیزیک فراهم شده است. این سؤال‌ها بخشی از مباحث مکانیک، الکترومغناطیس و اپتیک را می‌پوشاند و سطح آن از کتاب‌های دبیرستان بالاتر است. بنابراین برای دانشجویان رشته‌ی فیزیک دانشگاه‌ها نیز مفید است. این سؤال‌ها توسط اعضای محترم کمیته‌ی المپیاد فیزیک و بعضی از دانش‌پژوهان سابق المپیاد فیزیک طرح شده‌اند. سؤال‌ها و پاسخ‌های دوره‌های دهم تا سیزدهم مربوط به سال‌های ۱۳۷۶ تا ۱۳۷۹ قبلاً منتشر شده‌اند. در این کتاب سؤال و پاسخ‌های دوره‌های چهاردهم تا هفدهم مربوط به سال‌های ۱۳۸۰ تا ۱۳۸۳ ارائه شده‌اند. ضمناً سؤال‌های دوره‌ی بیست و یکم (۱۳۸۷) نیز برای تمرین ارائه شده است که پاسخ آن در کتاب‌های بعد منتشر خواهد شد.

این کتاب مانند هر اثر دیگری عاری از اشکال نیست. از این‌رو از خوانندگان محترم این کتاب خواهشمندیم پیشنهادهای اصلاحی خود را به باشگاه دانش‌پژوهان جوان ارسال کنند تا در چاپ‌های بعدی تصحیح شود.

گروه مؤلفین

بهار ۱۳۸۹

سؤال‌ها و پاسخ‌های چهاردهمین دوره آزمون‌های المپیاد فیزیک

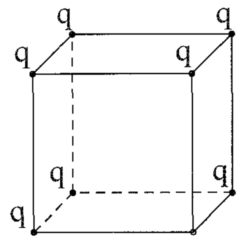
تابستان ۱۳۸۰

سؤال‌های امتحان اول المپیاد فیزیک ـ چهاردهمین دوره ـ تابستان ۸۰
وقت: ۳ ساعت

۱- مکعبی به ضلع a در نظر بگیرید. فرض کنید در هر رأس آن به جز یک رأس یک بار q+ قرار گرفته است.

الف) بردار شدت میدان الکتریکی را در رأس خالی بدست آورید. (هم راستا و هم اندازه)

ب) برای $a = 0.7\text{nm}$ و $q = 1.6\times10^{-19}\text{C}$، اندازه این E را در دستگاه SI بدست آورید.

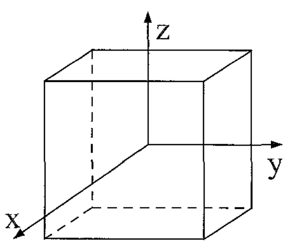


۲- مکعبی نارسانا را در نظر بگیرید که تمام وجوهش دارای چگالی سطحی σ است.

الف) با استفاده از تقارن نشان دهید میدان در مرکز مکعب صفر است.

ب) حال فرض کنید کمی از مرکز مکعب دور می‌شویم (یعنی از $(0,0,0)$ به (x,y,z) می‌رویم).

با بسط دادن هر یک از مولفه میدان حول مرکز مکعب تا مرتبه اول نسبت به x,y,z و با استفاده از تقارن و قانون گاوس نشان دهید تغییرات مرتبه اول میدان در راستای عمود بر وجه‌ها صفر است.



۳- میله‌ای انعطاف پذیر تحت جسمی به وزن W تغییر طول می‌یابد. فرض کنید هندسه میله با یک پارامتر طول ℓ توصیف می‌شود و خواص مادی میله با یک ضریب سختی به نام R، که بعد آن نیرو ضرب در سطح است.

الف) با استفاده از تحلیل ابعادی رابطه‌ای برای مقدار تغییر طول بیابید. دقت کنید که طول ℓ تنها طول میله را نشان نمی‌دهد و شعاع میله نیز با همین پارامتر نمایش داده شده است.

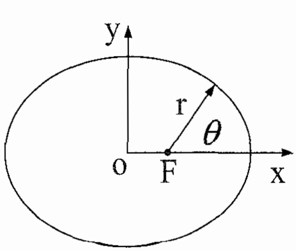
ب) حال فرض کنید W کوچک است. در این حالت با بررسی بستگی تغییر طول به W و با استفاده از رابطه‌ای که در قسمت الف به دست آورده اید، بستگی تغییر طول به کلیه پارامترهای مساله (در حالتی که W کوچک است.) را بطور دقیق تر بدست آورید.

۴- نسبت جرم زمین به خورشید برابر 3×10^{-6} است. فاصله نزدیک ترین ستاره‌ها با هم به طور میانگین $2\times10^{17}\,\mathrm{m}$ است. از اجتماع بزرگی از ستارگان، کهکشان به وجود می‌آید و جهان ما از تعداد زیادی از این کهکشان‌ها تشکیل شده است. فاصله بین نزدیک ترین کهکشان‌ها با هم بطور میانگین $5\times10^{22}\,\mathrm{m}$ است. کهکشانی که ما در آن هستیم «راه شیری» به شکل دیسکی است که شعاع آن $10^{21}\,\mathrm{m}$ و بیشینه ضخامت آن $10^{20}\,\mathrm{m}$ است. کهکشان‌های زیادی شبیه کهکشان ما وجود دارد. با فرض آن که کرانه‌های عالم مشاهده پذیر 10^{10} سال نوری باشد، تعداد پروتون‌های عالم مشاهده پذیر را تخمین بزنید.

چگالی زمین $\rho_E = 5.6\dfrac{g}{cm^3}$

شعاع زمین $R_E = 6400\mathrm{km}$

۵- جسمی بر روی یک بیضی به معادله $r = \dfrac{a}{1-\varepsilon\cos\theta}$ با سرعت زاویه‌ای ω ثابت حرکت می‌کند. $(\theta = \omega t)$ در این معادله مبدأ مختصات بر روی یکی از کانون‌های بیضی قرار دارد (مطابق شکل). شتاب و سرعت جسم را نسبت به مرکز بیضی که در وسط دو کانون قرار دارد بدست آورید. محور x در راستای قطر بزرگ بیضی و محور y در راستای قطر کوچک بیضی واقع است. جواب نهایی را در دستگاه دکارتی بر حسب $\hat{i}$ و $\hat{j}$ بنویسید.



سؤال‌های امتحان دوم المپیاد فیزیک ـ چهاردهمین دوره ـ تابستان ۸۰

وقت: ۳ ساعت

در حل مسائل ممکن است به معادلات دیفرانسیل زیر برخورد کنید که جواب آنها به صورت نشان داده شده، هستند.

$$1)\qquad \ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2x=0 \qquad \Rightarrow \qquad x=x_0e^{-\gamma t}\cos(\omega t+\varphi)$$

که در آن x_0 و φ به شرایط اولیه بستگی دارند و ثابت هستند ω و r نیز بر حسب a_1 و a_2 تعیین می‌شوند.

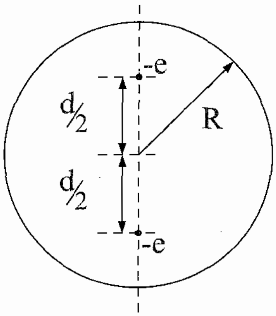
$$2)\qquad \ddot{x}+\omega^2x=0 \qquad \Rightarrow \qquad x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

A و φ به شرایط اولیه بستگی دارند و ثابت هستند.

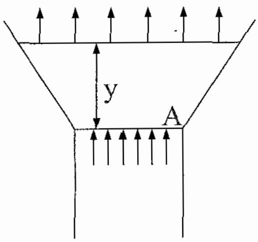
$$3)\qquad \ddot{x}+\omega^2x=\alpha t \qquad \Rightarrow \qquad x=A\cos(\omega t+\varphi)+\frac{\alpha t}{\omega^2}$$

که در آن A و φ به شرایط اولیه بستگی دارند و ثابت هستند. α نیز عددی ثابت است.

۱- در مدل اتمی تامسون، اتم هلیوم تشکیل شده از یک کره به شعاع R که به طور یکنواخت بار $+2e$ دارد، به علاوه دو الکترون که بار هر کدام شان $-e$ است. این دو الکترون در داخل کره مثبت قرار دارند. فاصله d، بین دو الکترون چقدر باشد تا وضعیت متقارن شکل مقابل وضعیت تعادل باشد. (در این وضعیت الکترونها حرکت نمی‌کنند.)



۲- قیفی را مطابق شکل در نظر بگیرید که از قسمت پایین آن مایع تراکم ناپذیری وارد می‌شود. سرعت عمودی مایع در تمام نقاط هر مقطع قیف یکسان است. سرعت مایع در قسمت پایین قیف (سطح A) v_0 است.



اگر گلوله‌ای در مایع قرار گیرد نیروی وارد بر آن طبق رابطه $\vec{F} = -k\vec{v}_{rel}$ به دست می‌آید، که در آن k مقدار ثابت مثبت و $\vec{v}_{rel}$ سرعت نسبی گلوله نسبت به مایع است. گلوله روی محور قیف قرار دارد. مقدار حجمی که در واحد زمان از هر سطح مقطع قیف عبور می‌کند ثابت است.

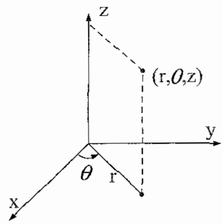
الف) گلوله‌ای به جرم m در چه ارتفاعی از سطح A قرار گیرد تا گلوله درحالت تعادل قرار باشد.

ب) اگر گلوله در یک y دلخواهی قرار گرفته باشد معادله‌ای برحسب y(t) و مشتقات مرتبه اول و دوم آن بنویسید.

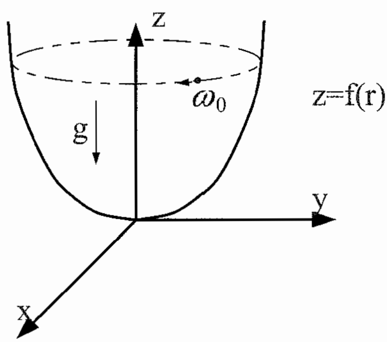
ج) فرض کنید گلوله را در نقطه تعادلش قرار می‌دهیم. حال آن را از حالت تعادل خارج می‌کنیم (ضربه‌ای عمودی می‌زنیم). اگر تغییر موضع گلوله کوچک باشد، y(t) را بعد از زدن ضربه بدست آورید. (ثوابت مربوطه که با شرایط اولیه تعیین می‌شوند مهم نیستند.)

راهنمایی: برای قسمت (ج) از مستقل بودن توابع سینوس و کسینوس استفاده کنید. یعنی اگر عبارتی مانند $A_1 \sin\alpha + A_2 \cos\alpha = 0$ داشته باشیم که برای تمام مقادیر α برقرار باشد لازم است که $A_1 = 0, A_2 = 0$ باشد. یعنی ضرایب سینوس و کسینوس صفر هستند.

۳- دستگاه مختصات استوانه‌ای، دستگاهی سه بعدی شبیه دستگاه دو بعدی قطبی است که مختصات یک نقطه در آن با سه کمیت (r,θ,z) مطابق شکل تعیین می‌شود. z ارتفاع نقطه مورد نظر از صفحه xy است و r و θ مختصات قطبی تصویر نقطه در صفحه xy است. با توجه به اینکه در این دستگاه بردار یکه در جهت z، $\hat{k}$، ثابت است به راحتی می‌توان دید که بردار شتاب در این دستگاه به شکل $\vec{a} = \ddot{z}\hat{k} + (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$ است.



الف) یک سطح متقارن از دوران منحنی $z=f(y)$ حول محور z به وجود آمده است. یعنی معادله این سطح در دستگاه استوانه‌ای به شکل $z=f(r)$ است. این سطح دارای این خاصیت است که اگر ذره‌ای با سرعت زاویه‌ای اولیه ω_0 و سرعت موازی صفحه xy، در هر نقطه‌ای روی آن قرار بگیرد، شروع به دوران حول محور z در صفحه‌ای ثابت موازی صفحه xy می‌کند. (ω_0 به اینکه ذره در چه نقطه‌ای روی سطح شروع به حرکت کند بستگی ندارد.) رویه سطح بدون اصطکاک است. نشان دهید معادله سطح به شکل $z=f(r)=kr^2$ خواهد بود و k را بر حسب ω_0 و g به دست آورید. فرض کنید $f(0)=0$ و صفحه xy، صفحه افق است.



ب) نشان دهید در دستگاه استوانه‌ای $F_\theta=\frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$ که در آن F_θ نیرو در جهت $\hat{\theta}$ است.

ج) حال فرض کنید ذره‌ای با شرایط اولیه دلخواه روی سطح قسمت (الف) شروع به حرکت می‌کند. با استفاده ازمعادلات نیرو و رابطه شتاب در دستگاه استوانه‌ای نشان دهید شعاع حرکت (r) در معادله زیر صدق می‌کند.

$$\frac{\dot{r}^2+r\ddot{r}+\frac{g}{2k}}{r^3\ddot{r}-\ell^2}=-\frac{1}{4k^2r^4}$$

با فرض اینکه حرکت ذره روی سطح باقی بماند.

د) حال فرض کنید ذره روی سطح با سرعت زاویه‌ای ω_0 در یک صفحه افقی ثابت در حال دوران حول z است. در $t=0$ ضربه کوچکی مماس به سطح و در صفحه $\hat{r},\hat{z}$ (یعنی مولفه‌ای در جهت θ ندارد) به ذره وارد می‌شود و در اثر ضربه در $t=0$ شعاع حرکت ذره شروع به تغییر با آهنگ کوچک اولیه $\dot{r}_0$ می‌کند (یعنی شرایط اولیه به شکل $\dot{r}(0)=\dot{r}_0$ و $r(0)=r_0$ و $\dot{\theta}(0)=\omega_0$ است). حال با استفاده از معادله دیفرانسیل قسمت قبل و با تقریبهای مناسب معادله حرکت ذره $(r(t),\theta(t))$ را تا مرتبه اول به دست آورید.

(داریم که اگر تغییرات $r(t)$ کم باشد: $r(t)=r_0+\delta(t)$)

ه) حال فرض کنید سطح دارای ضریب اصطکاک کوچک $\mu << 1$ است. باز ذره‌ای با سرعت زاویه‌ای ω_0 و سرعت موازی صفحه xy، شروع به حرکت روی سطح می‌کند. بردار نیروی اصطکاک را تا مرتبه اول نسبت به μ به دست آورید. فرض کنید زمان خیلی طولانی از شروع حرکت نمی‌گذرد.

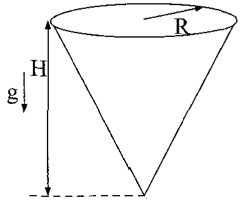
و) با استفاده از معادلات نیرو و شتاب در دستگاه استوانه‌ای و رابطه قسمت قبل در این حالت (وجود اصطکاک) معادلات حرکت را به دست آورید (تا مرتبه اول نسبت به μ).

راهنمایی: سعی کنید در این حالت هم معادله دیفرانسیل مناسبی برای $r(t)$ به دست آورید (شبیه کاری که در قسمت (ج) کردید). البته شاید این بار این رابطه علاوه بر r و مشتقات زمانی آن، شامل زمان هم باشد. سپس با تقریبهای مناسب معادلات را ساده کنید.

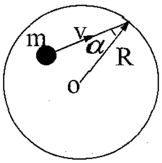
سؤال‌های امتحان سوم المپیاد فیزیک ـ چهاردهمین دوره ـ تابستان ۸۰

وقت: ۳ ساعت

۱- مخروطی داریم به شعاع قاعده R وارتفاع H. مسیر مارپیچی شکلی داخل آن ساخته ایم. درهر نقطه این مسیر زاویه بین مماس بر مسیر و مماس افقی بر مخروط ثابت است. شتاب جاذبه g است. اگر ذره را رها کنیم، نیروی وارد بر ذره را در هر نقطه مشخص کنید. از کلیه اصطکاک‌ها صرف نظر کنید.

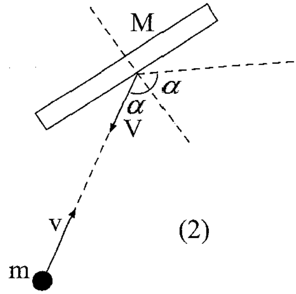


۲- الف) کره ثابت و توخالی به شعاع **R** را در نظر بگیرید که ذره‌ای به جرم **m** در داخل آن با سرعت v حرکت کرده و به دیواره کره به صورت کشسان برخورد می‌کند. زاویه α چه باشد تا مسیر بسته شود؟ همچنین شرط اینکه مسیر خود را قطع نکند چیست؟ شکل (۱) را ببینید.



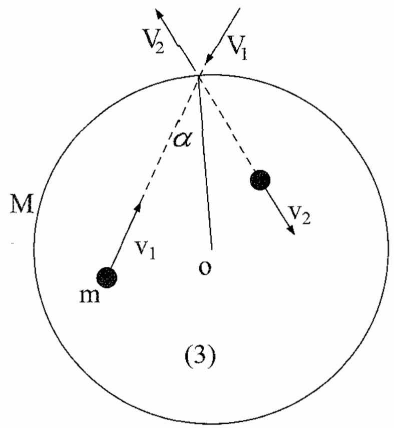
(1)

ب) مطابق شکل (۲) یک دیواره کشسان به جرم M و یک گلوله به جرم m را در دستگاه مرکز جرم در نظر بگیرید. اگر برخورد کشسان باشد و ذره به مرکز دیواره برخورد کند، ثابت کنید زاویه تابش و بازتابش در دستگاه مرکز جرم با هم برابر است.



(2)

ج) همان قسمت الف را دوباره در نظر بگیرید، منتها فرض کنید کره آزاد است و می‌تواند حرکت کند. جرم کره نیز **M** است. در این حالت نشان دهید که در دستگاه مرکز جرم، شرط بسته بودن و متقاطع نبودن مسیر همان شرایطی است که در قسمت الف برای α بدست آورده‌اید؟ اندیس‌های ۱ و ۲ مربوط به قبل و بعد برخوردند. راهنمایی: از قسمت (ب) استفاده کنید.



همچنین اگر سرعت ذره نسبت به مرکز جرم v باشد و در قسمت الف سرعت ذره نسبت به کره v باشد، دوره تناوب این دو حالت را با هم مقایسه کنید. $\left(\frac{T_2}{T_1}=?\right)$

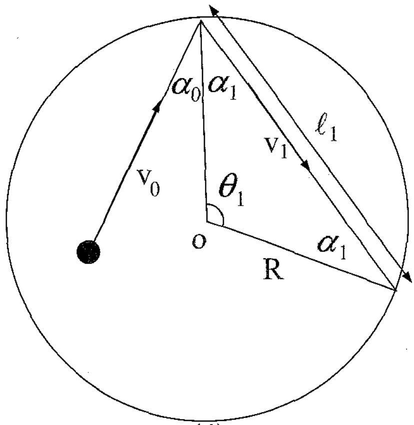
در قسمتهای بعدی کره را ثابت بگیرید.

د) فرض کنید ضریب جهندگی ذره با کره e است (یعنی برخورد کشسان نباشد). ضریب اصطکاک جنبشی μ_k میان ذره و سطح کره چقدر باشد تا مسیر قسمت الف تکرار شود (یعنی زاویه تابش و بازتابش برابر باشند)؟

راهنمایی: ضریب جهندگی به صورت $v_2^{\perp}=ev_1^{\perp}$ تعریف می‌شود که $v^{\perp}$ مؤلفه عمود بر سطح کره است.

توجه: از این قسمت به بعد فرض کنید $\mu_k=0$ است.

ه) حال فرض کنید $\mu_k=0$ و $e=1-\varepsilon$ باشد، به طوری که $n\varepsilon \ll 1$، که n تعداد دفعات برخورد به دیواره است. با توجه به شکل (۴) مقادیر ℓ_n, v_n, α_n را بر حسب شرایط اولیه (R, v_0, α_0) و تعداد دفعات برخورد n، و ε تا مرتبه اول نسبت به $n\varepsilon$ حساب کنید. اندیس n متناظر با برخورد n ام است.



(4)

و) $\overline{\omega}_n$ را به صورت $\overline{\omega}_n = \dfrac{\theta_n}{\Delta t_n}$ تعریف می‌کنیم؛ که θ_n زاویه مرکزی بعد از برخورد n ام و Δt_n زمان مابین برخورد n ام و (n+۱) ام است. مقدار $\overline{\omega}_n$ را تا مرتبه اول نسبت به $n\varepsilon$ به دست آورید.

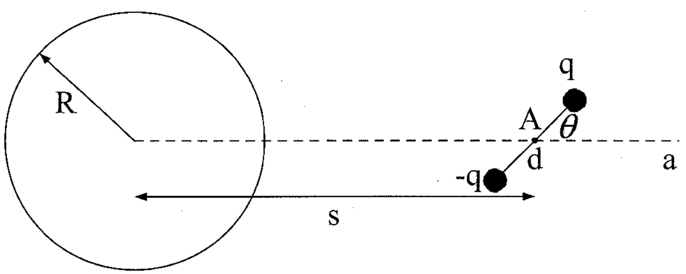
ز) توصیف کنید درحالتی که $\varepsilon \ll 1$ و $n\varepsilon \gg 1$ باشد چه اتفاقی می‌افتد.

سؤال‌های امتحان چهارم المپیاد فیزیک ـ چهاردهمین دوره ـ تابستان ۸۰
وقت: ۳ ساعت

۱- یک دو قطبی الکتریکی با اندازه P ، در فاصله s از مرکز یک کره فلزی به شعاع R قرار گرفته است. کره فلزی به زمین متصل است. نقطه A از دو قطبی به گونه‌ای در محل خود ثابت شده است که دو قطبی می‌تواند حول آن آزادانه و در صفحه شکل نوسان کند.

$qd = P$

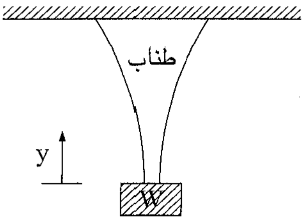
$d \ll s$



بسامد نوسانات کوچک دو قطبی حول محور a را محاسبه کنید.

نکته مهم: رابطه میان انرژی جنبشی دو قطبی و سرعت زاویه‌ای آن $(\dot{\theta})$ با ضریبی به نام لختی دورانی (I) داده می‌شود به گونه‌ای که داریم: $k = \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2$

۲- طنابی داریم با سطح مقطع دایروی شکل که اندازه مساحت سطح مقطع آن تابعی از y می‌باشد. چگالی طناب یکنواخت و برابر ρ است. در هر مقطع از طناب پارامتر S به گونه‌ای تعریف می‌شود که داریم: $S = \frac{T}{A}$ که پارامترهای T (کشش طناب) و A (مساحت سطح مقطع) هر دو مربوط به آن محل می‌باشد. اگر مقدار S از مقدار حدی S_m بیشتر شود طناب پاره می‌شود. اگر وزنه‌ای به وزن W به انتهای طناب آویزان باشد به گونه‌ای که $W = S_m A_0$ $(A_0 = A(y=0))$ معادله A(y) را به گونه‌ای تعیین کنید که داشته باشیم $S(y) = S_m$.



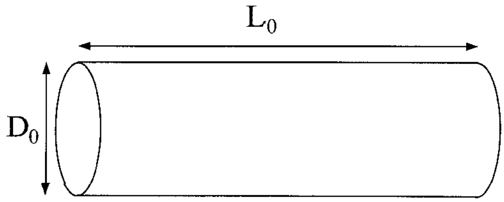
۳- استوانه‌ای فلزی داریم به طول اولیه L_0 و قطر اولیه D_0 استوانه را از دو طرف با فشار یکنواخت و ثابت $S=\frac{F}{A}$ می‌کشیم (F نیروی کششی و $A=\frac{\pi D_0^2}{4}$ است). به تعاریف و روابط زیر توجه کنید.

$$\varepsilon_L := \frac{L-L_0}{L_0} \qquad \varepsilon_D = \mu\varepsilon_L$$

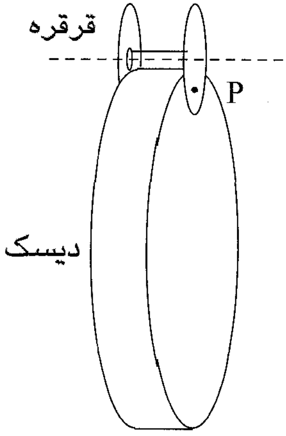
$$\varepsilon_D := \frac{D-D_0}{D_0} \qquad S = E\varepsilon_L$$

(که E و μ دو ثابت هستند که به خواص ماده بستگی دارند)

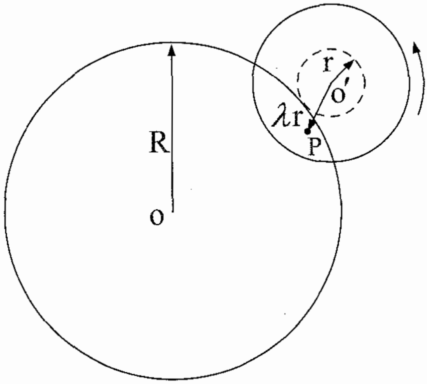
تغییر چگالی استوانه را تا مرتبه اول غیر صفر نسبت به $\frac{S}{E}$ محاسبه کنید. پارامترهای مربوط به خواص جسم را طوری تعیین کنید که این تغییر چگالی صفر شود.



۴- یک چرخ و محور (قرقره) که شعاع محور آن r می‌باشد، روی لبه دیسکی به شعاع R مطابق شکل می‌غلتد؛ به طوری که محور تقارن قرقره (O') حول مرکز دیسک با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد.



می خواهیم حرکت نقطه‌ای مانند P، روی بدنه قرقره، به فاصله λr از محور تقارن آن را بررسی کنیم (λ می‌تواند هر مقدار مثبتی را اختیار کند).



تعریف

ذره‌ای در مسیر دلخواه $\vec{r}(t)$ در حرکت است. در هر نقطه از مسیر این ذره می‌توان دایره‌ای رسم کرد که مشتق اول و دوم دایره و مسیر یکی باشند و تقعر آنها در یک جهت باشد، به عبارت دیگر می‌توان به صورت لحظه‌ای فرض کرد که ذره روی این دایره درحرکت است. به این دایره، دایره «بوسان» می‌گوییم و شعاع آن، شعاع انحنای مسیر در آن نقطه نام دارد که این شعاع از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\rho = \frac{v^2}{a_\perp}$$

که v اندازه سرعت ذره و $a_\perp$ مولفه عمود بر مسیر شتاب می‌باشد.

الف) شعاع انحنای مسیر نقطه P را به صورت تابعی از زمان به دست آورید.

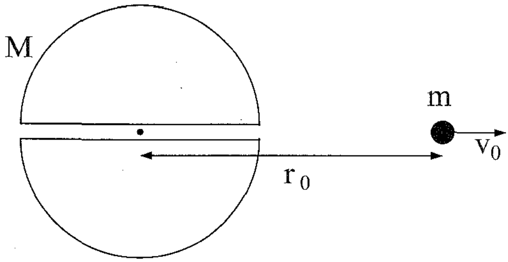
ب) معادلات حرکت را در مختصات قطبی، به مرکزیت محور دیسک بنویسید. $(r(t),\varphi(t))$

ج) تحت چه شرایطی مسیر نقطه P، خودش را قطع نمی‌کند؟ (اگر مسیر روی خودش بیفتد، یعنی مرتباً تکرار شود، نمی‌گوییم که خودش را قطع کرده است.)

سؤال‌های امتحان پنجم المپیاد فیزیک ـ چهاردهمین دوره ـ تابستان ۸۰
وقت: ۳ ساعت و ۲۰ دقیقه

۱- در مدل اتمی تامسون، هسته کره‌ای است به شعاع R که بار +ze به طور یکنواخت در حجم آن توزیع شده است و z تا الکترون (هر یک با بار e−) در آن قرار دارند.
الف) برای $z = 3$ یک آرایش ساکن وجود دارد. سه الکترون در سه رأس یک مثلث متساوی الاضلاع قرار دارند و مرکز تقارن این مثلث همان مرکز هسته است. طول ضلع این مثلث را حساب کنید.
ب) برای $z = 4$ نیز یک آرایش ساکن وجود دارد. چهار الکترون در چهار رأس یک هرم منتظم در داخل هسته باشند و مرکز تقارن این هرم همان مرکز هسته باشد. طول ضلع این هرم را حساب کنید.

۲- در کره‌ای به جرم M و شعاع R، چاهی در راستای یکی از قطرهایش حفر می‌کنیم. سطح مقطع چاه آن قدر کوچک است که اثری در نیروی کره ندارد. به جرم m در فاصله r_0 از مرکز کره، سرعت v_0 در جهت نشان داده شده می‌دهیم. دوره تناوب حرکت این جرم را با فرض ثابت بودن چگالی کره بدست آورید. اندازه v_0 به قسمی است که جسم نمی‌تواند از میدان جاذبه جرم M بگریزد.



۳- یک حلقه لاستیکی با شعاع اولیه r_0 و ضریب فنری k را که از قانون هوک پیروی می‌کند در نظر بگیرید. k را خیلی بزرگ فرض کنید.
اکنون بار Q به طور یکنواخت روی محیط حلقه توزیع می‌شود.
الف) ثابت کنید میدان الکتریکی روی محیط حلقه بی نهایت بزرگ است.
ب) شعاع تعادل جدید حلقه راتا اولین مرتبه غیر صفر نسبت به $\frac{1}{k}$ محاسبه کنید.
با توجه به قسمت الف، وجود این شعاع تعادل را چگونه توجیه می‌کنید؟
ج) فرکانس نوسانات شعاع حلقه را در نزدیکی حالت تعادل جدید حساب کنید.
راهنمایی: سطح مقطع حلقه را نادیده بگیرید.

۴- معادله مسیر یک ذره در صفحه، $y = ax^n$ است. x و y مختصات دکارتی ذره و a و n دو ثابت هستند. x(t) را طوری تعیین کنید تا نیروی وارد بر این ذره شعاعی باشد.

راهنمایی: $\ddot{x}(t)$ را بر حسب $\dot{x}$ و x به دست آورید. سپس تابعی از x را در این معادله ضرب کنید تا معادله به صورت $\frac{d}{dt}(\cdots) = 0$ در آید.

توجه

انتگرال‌های زیر ممکن است در مساله‌ها استفاده شوند. (جواب انتگرال شامل یک ثابت دلخواه است.)

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x; \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x; \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - 1}} = -\sqrt{x - x^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}(2x - 1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} + 1}} = \sqrt{x + x^2} + \frac{1}{2}\ln\left[2x + 1 + 2\sqrt{x + x^2}\right]$$

سؤال‌های امتحان نهایی المپیاد فیزیک ـ چهاردهمین دوره ـ تابستان ۸۰

وقت: ۷ ساعت

۱- بر اساس یک افسانه علمی، گالیلئو برای این که نشان دهد سرعت سقوط اجسام به وزن شان بستگی ندارد دو وزنه متفاوت را از بالای برج کج پیزا رها کرد و حاضران مشاهده کردند این دو وزنه با هم به زمین رسیدند. می‌خواهیم ببنیم این افسانه تا چه حد واقعی است.

گلوله‌ای با سرعت اولیه صفر از ارتفاع h رها می‌شود. نیروی مقاومت هوا برای این گلوله $m\alpha v^2$ است، که در آن m جرم گلوله و v سرعت آن است. α کمیت ثابتی است که به جنس گلوله و اندازه آن بستگی دارد:

$$\alpha = \frac{\rho'}{\rho R}$$

در این جا ρ' چگالی هوا، ρ چگالی گلوله، و R اندازه ی گلوله (۴/۳ برابر شعاع گلوله) است.

الف) معادله دیفرانسیل حرکت گلوله را بنویسید و از روی آن $y(t)$ راتا مرتبه یک نسبت به α به دست آورید. y ارتفاع گلوله و t زمان است.

ب) زمان رسیدن گلوله به زمین در نبود مقاومت هوا را T_0 بنامید. همین زمان با وجود مقاومت هوا را T بنامید. $(T-T_0)/T_0$ را تا مرتبه یک نسبت به α به دست آورید.

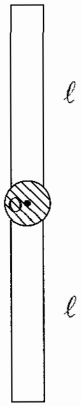
ج) پس از زمان T_0، گلوله در نزدیکی زمین است. $H = y(T_0)$ را تا مرتبه یک نسبت به α بدست آورید.

ارتفاع برج پیزا تقریبا $50\ \mathrm{m}$، چگالی هوا از مرتبه $1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$، چگالی سرب از مرتبه $10^4\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$، و چگالی چوب از مرتبه ی $10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ است.

د) یک گلوله ی سربی به اندازه $10\mathrm{cm}$ و یک گلوله سربی به اندازه ی $5\mathrm{cm}$ را هم زمان از بالای برج پیزا رها می‌کنیم. (این کار با دست بسیار دشوار است، چون جرم گلوله بزرگ تر نزدیک $20\mathrm{kg}$ است!) اختلاف زمان رسیدن این دو گلوله به زمین چقدر است؟ فاصله دو گلوله از هم در نزدیکی زمین چقدر است؟

ه) یک گلوله ی سربی و یک گلوله ی چوبی را هم زمان از بالای برج پیزا رها می‌کنیم. اندازه ی هر دو گلوله $10\mathrm{cm}$ است. اختلاف زمان رسیدن این دو گلوله به زمین چقدر است؟ فاصله دو گلوله از هم در نزدیکی زمین چه قدر است؟

۲- یک آب پاش باغچه از لوله‌ای به طول 2ℓ تشکیل شده است که مرکز آن (نقطه o) لولا می‌باشد. آب از نقطه o وارد لوله شده با سرعت v از دو سر آن خارج می‌شود.



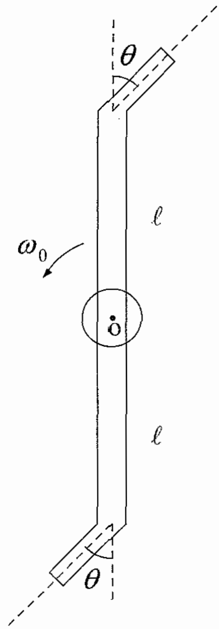
الف) فرض کنید آب پاش با شتاب زاویه‌ای ثابت α از سرعت صفر در لحظه $t = 0$ شروع به دوران می‌کند. در لحظه $t = t_0$ از بالا عکسی از آب پاش گرفته می‌شود که در آن همه قطرات آبی که تا این لحظه خارج شده اند، دیده می‌شوند.
معادله منحنی‌ای که قطرات در این لحظه بر روی آن قرار دارند را در دستگاه مختصات دکارتی بنویسید. (بر حسب v, ℓ, α, t_0) معادله را می‌توانید به صورت پارامتری بنویسید. یعنی:

$$\begin{cases} x = f(u) \\ y = g(u) \end{cases}$$

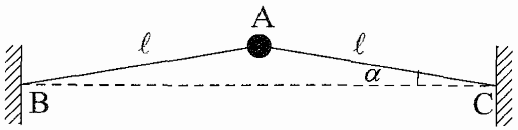
که در آن u یک پارامتر متغیر است. فرض کنید در $t = 0$ آب پاش در امتداد محور x است. از گرانش صرف نظر کنید.

ب) با ذکر دلیل بگویید آیا این منحنی خودش را قطع خواهد کرد یا خیر.

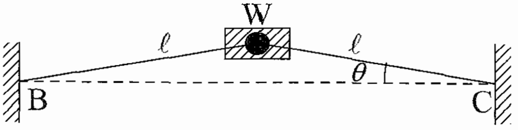
ج) هر دو انتهای لوله را به اندازه θ خم می‌کنیم به طوری که بخش خم شده قابل صرف نظر باشد، ولی آب هنگام خروج تغییر جهت میدهد. فرض کنید لولای o اصطکاک دارد. یعنی گشتاوری به صورت $\beta\omega$ به لوله وارد می‌کند (متناسب با سرعت زاویه ای). به علت خروج آب مجموعه شروع به دوران می‌کند. پس از مدتی سرعت زاویه‌ای به مقدار حدی میل می‌کند. مقدار حد چقدر است؟



۳- دو میله یکسان به طول ℓ مطابق شکل بین دو دیوار قرار گرفته اند. نقاط A، B، و C لولا هستند. فاصله دیوارها کمی کمتر از 2ℓ است به طوری که میله‌ها با افق زاویه α می‌سازند $(\alpha \ll 1)$. میله‌ها کاملاً صلب نیستند و رفتاری مانند فنر با ثابت k خیلی بزرگ دارند.



الف) وزنه‌ای به وزن W را به آرامی بر روی نقطه A قرار می‌دهیم تا به تعادل برسد. حداکثر مقدار W چقدر باشد تا نقطه A همچنان بالای خط BC بماند (θ مثبت باشد)؟
جواب راتا اولین مرتبه غیر صفر نسبت به α بیابید.



ب) وزنه W را در نقطه A قرار داده (در حالت $\theta = \alpha$) و رها می‌کنیم.

مبدأ انرژی پتانسیل را در $\theta = \alpha$ بگیرید. تا اولین مرتبه غیر صفر انرژی پتانسیل وزنه و مجموع میله‌ها را بر حسب θ حساب کرده، نمودار آنها را به طور جداگانه در یک نمودار رسم کنید. $(-2\alpha < \theta < 2\alpha)$.

ج) به ازای چه مقادیری از W سیستم یک نقطه تعادل و به ازای چه مقادیری دو نقطه تعادل دارد؟

د) در حالتی که سیستم یک نقطه تعادل دارد نمودار انرژی پتانسیل کل را رسم کنید $(-2\alpha < \theta < 2\alpha)$.

در کلیه مراحل بعد فرض کنید W طوری است که سیستم دو نقطه تعادل دارد.

ه) در این وضعیت دو حالت ممکن است رخ دهد. یا سیستم حول نقطه تعادل اول $(\theta > 0)$ نوسان خواهد کرد و یا از $\theta = 0$ رد شده و به نقطه تعادل دوم می‌رسد.

در هر دو حالت نمودار انرژی پتانسیل را بر حسب θ رسم کنید $(-2\alpha < \theta < 2\alpha)$.

و) تعیین کنید به ازای چه مقادیری از W سیستم از نقطه تعادل اول خواهد گذشت.

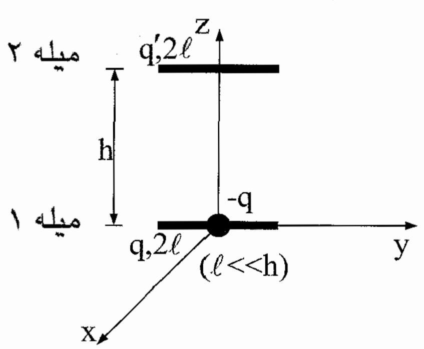
ز) با ذکر دلیل بگویید فرکانس نوسانات کوچک حول کدام نقطه تعادل بیشتر است.

۴- سه جسم باردار، مطابق شکل، با خصوصیات زیر در فضای xyz داریم.

۱) بار نقطه‌ای q- که در مبدا ثابت شده است.

۲) میله‌ای به طول 2ℓ که بار q+ به طور یکنواخت روی آن توزیع شده است. مرکز میله روی مبدا قرار دارد و خود میله در راستای y سمتگیری شده است. میله ثابت شده است (میله۱).

۳) میله‌ای به طول 2ℓ که بار q' به طور یکنواخت روی آن توزیع شده است. مرکز میله در نقطه $(x = 0, y = 0, z = h)$ ثابت شده، به طوری که میله می‌تواند حول مرکز در هر راستایی بچرخد (میله۲).



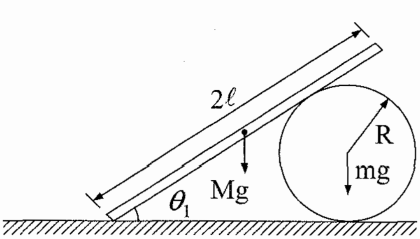
الف) میله ۲ آزاد است که در صفحه $z = h$ بچرخد (یعنی حول محور z). نقاط تعادل میله را به دست آورده، بر حسب علامت q' و q، در مورد پایداری این سمتگیری‌ها بحث کنید. در مورد نقاط تعادل پایدار، فرکانس نوسانات کوچک میله۲ را حول نقطه یا نقاط تعادل به دست آورید.

ب) همین کار را در مورد حرکت میله در صفحه $x = 0$ (چرخش حول محور گذرنده از مرکز میله ۲ به موازات محور x) انجام دهید.

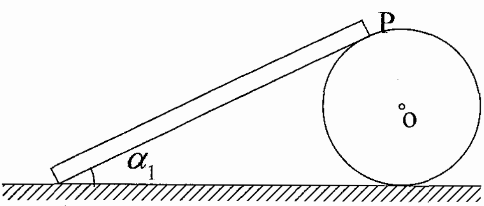
دقت کنید در این مساله، $\ell \ll h$ است و محاسبات را تا اولین مرتبه غیر صفر از $\frac{\ell}{h}$ انجام دهید.

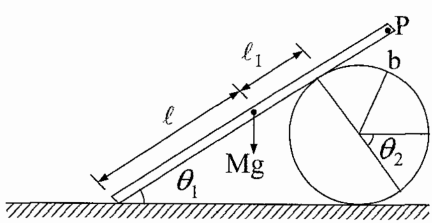
راهنمایی: در مورد میله، انرژی جنبشی را می‌توان به صورت $k = \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2$ نوشت که در آن $\dot{\theta}$ سرعت زاویه‌ای میله حول محور دوران است.

۵- الف) دیسکی به جرم m و شعاع R روی سطحی افقی قرار دارد. میله‌ای به جرم M و طول 2ℓ مطابق شکل به آن تکیه داده شده است. فرض کنید که همه سطوح اصطکاک دارند و سیستم در حال تعادل است. نیروی اصطکاکی که از طرف زمین بر دیسک وارد می‌شود را بر حسب $R, \theta_1, g, m, M, \ell$ به دست آورید.



ب) فرض کنید که در زمان $t = 0$ نوک میله مطابق شکل روی دیسک باشد و زاویه میله با سطح افق α_1 باشد. دیسک با سرعت زاویه‌ای $\dot{\theta}_2$ روی سطح افق می‌غلتد. نسبت $\frac{\dot{\theta}_1}{\dot{\theta}_2}$ را بر حسب θ_1، θ_2، α_1، ℓ، و R به دست آورید.



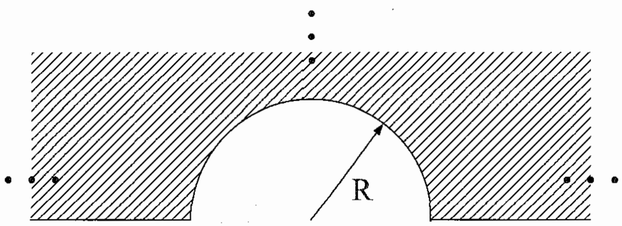


۶- جسمی به جرم m و بار q را از ارتفاع $y_0 = h$ بالای یک صفحه رسانای بی نهایت با سرعت $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$ پرتاب می‌کنیم. ابعاد جسم ناچیز است. شتاب گرانش $\vec{g} = -g\hat{j}$ ثابت است. بار جسم (q) را خیلی خیلی کوچک در نظر بگیرید. برای سادگی محاسبات فرض کنید $x_0 = 0$ است.

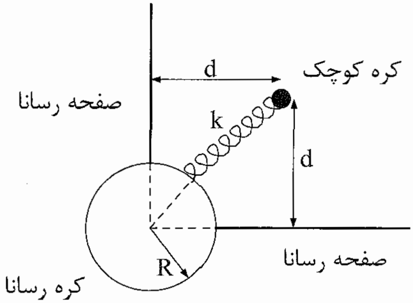
الف) ارتفاع اوج جسم را تا اولین مرتبه تقریب غیر صفر q به دست آورید.

ب) اکنون برای سادگی فرض کنید سرعت اولیه جسم در راستای قائم صفراست، یعنی $\vec{v}_0 = v_0\hat{i}$. مدت زمان پرواز (یعنی زمانی که طول می‌کشد تا جسم به صفحه برخورد کند) و برد ذره را تا اولین مرتبه تقریب غیر صفر q محاسبه کنید.

۷- دو صفحه رسانای مشابه داریم. صفحه‌ها از یک طرف محدود واز سه طرف دیگر نامحدود هستند. مطابق شکل یک نیم دایره به شعاع R از هر صفحه جدا می‌کنیم.



دو صفحه را از طرفی که محدود است طوری به هم متصل می‌کنیم که مرکز دو نیم دایره بر هم منطبق و بردار عمود بر سطح دو صفحه بر هم عمود باشد. سپس کره رسانایی به شعاع R را طوری که مرکزش منطبق بر مرکز نیم دایره‌های بریده شده از دو صفحه باشد، قرار می‌دهیم.



حال فنری عایق با k مجهول، مطابق شکل، به سیستم اضافه می‌کنیم و یک کره با ابعاد بسیار کوچک و جرم m به انتهای فنر می‌بندیم. در این حالت سیستم در حال تعادل است و فاصله کره

کوچک از دو صفحه برابر و اندازه فاصله d_0 است. ضمنا امتداد فنر از مرکز کره می‌گذرد و انتهای فنر به سطح کره وصل است.

فرض کنید فنر بسیار باریک است و از اثرات آن بر میدان الکتریکی چشم بپوشید.

حال صفحه‌ها و کره را به پتانسیل صفر وصل می‌کنیم. به کره کوچک متصل به فنر بار q می‌دهیم. در این حالت فاصله کره کوچک از صفحه‌ها باز هم برابر و اندازه آن d_1 است و سیستم در حالت تعادل است.

الف) k فنر را حساب کنید.

ب) تغییر انرژی پتانسیل سیستم را به ازای قرار گرفتن بار q در فاصله دلخواه d از هر دو صفحه حساب کنید.

ج) نوع تعادل را مشخص کنید. برای این کار معادله حرکت کره کوچک را به دست آورید و نشان دهید که معادله به صورت $\ddot{x} \pm b^2 x = 0$ در می‌آید. (یکی از علائم مثبت یا منفی به دست می‌آید.) مقدار b چیست؟

توجه

انتگرال‌های زیر ممکن است در مساله‌ها استفاده شوند.

$$1)\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=-2\sqrt{1-x}$$

$$2)\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x}}=\ln(\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}})$$

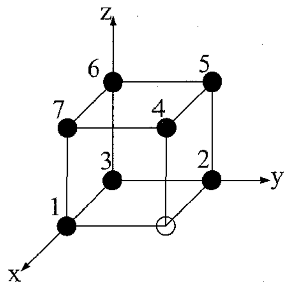
$$3)\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}$$

$$4)\int\frac{xdx}{(x^2-R^2)^2}=\frac{-1}{2(x^2-R^2)}$$

$$5)\int\frac{x^3dx}{(x^4-R^4)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-1}{2\sqrt{x^4-R^4}}$$

پاسخ سؤال‌های امتحان اول المپیاد فیزیک ـ چهاردهمین دوره ـ تابستان ۸۰

۱- الف) با شماره گذاری بارها، میدان هر یک در محل رأس خالی به صورت زیر به دست می‌آید.



$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum\frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|^3}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\begin{array}{l}\frac{a\hat{j}}{a^3}+\frac{a\hat{i}}{a^3}+\frac{a(\hat{i}+\hat{j})}{2\sqrt{2}a^3}+\frac{a(-\hat{k})}{a^3}+\\ \frac{a(\hat{i}-\hat{k})}{2\sqrt{2}a^3}+\frac{a(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})}{3\sqrt{3}a^3}+\frac{a(\hat{j}-\hat{k})}{2\sqrt{2}a^3}\end{array}\right]$$

پس از ساده کردن عبارات داخل کروشه، داریم:

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left[(1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{9})(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})\right]$$

اندازه میدان الکتریکی برابر $|\vec{E}|=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}(\frac{18+9\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{18})\sqrt{3}$ و راستای آن نیز در راستای قطری است که از رأس بدون بار می‌گذرد.

ب) با $a=0.7\text{nm}$ و $q=1.6\times10^{-19}\text{c}$، اندازه E می‌شود:

$$E=9\times10^9\times\frac{1.6\times10^{-19}}{(0.7\times10^{-9})^2}(\frac{18+9\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{18})\sqrt{3}=9.67\times10^9\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$$

۲- الف) برای هر جزء روی هر وجه، در مقابل آن نسبت به مرکز مکعب، جزء دیگری با همان بار و همان فاصله از مرکز وجود دارد (بنا بر تقارن) که میدان آن راخنثی می‌کند. بنابراین بنابر تقارن، در مرکز مکعب میدان الکتریکی صفر است.

ب) مولفه x میدان به ازای تغییر مکان کوچک تا مرتبه اول می‌شود:

$$E_x(x,y,z)\approx E_x(0)+\frac{\partial E_x}{\partial x}\Big|_{(0,0,0)}x+\frac{\partial E_x}{\partial y}\Big|_{(0,0,0)}y+\frac{\partial E_x}{\partial z}\Big|_{(0,0,0)}z$$

چون در مرکز مکعب میدان صفر است، جمله مرتبه صفر برابر صفر است و چون میدان در راستای x تابعی زوج از y و z است در نتیجه دو جمله آخر نیز برابر صفر است. در نتیجه:

$$E_x(x,y,z) \approx \frac{\partial E_x}{\partial x}\Big|_{(0,0,0)} x$$

به همین ترتیب برای بقیه مولفه‌ها نیز روابط مشابهی برقرار است تا مرتبه اول داریم:

$$\vec{E}(x,y,z) = E'_x(0)x\,\hat{i} + E'_y(0)y\,\hat{j} + E'_z(0)z\,\hat{k}$$

به علت تقارن E در راستای x، y و z تابع یکسانی است، یعنی:

$$E'_x(x) = E'_y(y) = E'_z(z) \Rightarrow E'_x(0) = E'_y(0) = E'_z(0)$$

پس داریم:

$$\vec{E}(x,y,z) = E'_x(0)(\Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j} + \Delta z\hat{k}) = E'_x(0)\Delta\vec{r} \qquad \text{(I)}$$

همچنین طبق قانون گاوس داریم:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$E'_x(0) + E'_y(0) + E'_z(0) = 0 \Rightarrow 3E'_x(0) = 0 \Rightarrow E'_x(0) = 0 \qquad \text{(II)}$$

بنابراین با توجه به روابط (I) و (II)، تا مرتبه اول داریم:

$$E(x,y,z) = 0$$

یعنی تغییرات E در راستای عمود بر وجه‌ها صفر است که نتیجه آن این است که تغییرات E در همه جهات در مبدا صفر است.

۳- الف) پارامترهای مساله عبارتند از: ℓ، δx، W، و R. کمیت بدون بُعد Q می‌شود:

$$Q = W^\alpha R^\beta \ell^\gamma \delta x^\theta = (MLT^{-2})^\alpha (ML^3T^{-2})^\beta L^\gamma L^\theta = M^{\alpha+\beta} L^{\alpha+3\beta+\gamma+\theta} T^{-2\alpha-2\beta}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \alpha+3\beta+\gamma+\theta=0 \\ -2\alpha-2\beta=0 \end{cases}$$

از این معادلات بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \beta=-\alpha \\ \gamma=2\alpha-\theta \end{cases}$$

پس کمیت Q را به صورت زیر می‌توانیم بنویسیم:

$$Q = W^\alpha R^{-\alpha} \ell^{2\alpha-\theta} \delta x^\theta = \left(\frac{W\ell^2}{R}\right)^\alpha \left(\frac{\delta x}{\ell}\right)^\theta$$

بنابراین داریم:

$$\frac{\delta x}{\ell} = f\left(\frac{W\ell^2}{R}\right) \Rightarrow \delta x = \ell f\left(\frac{W\ell^2}{R}\right)$$

که در آن $f(0)=0$ است.

ب) اگر $W=0$ باشد، $\delta x=0$ است. برای W کوچک (یعنی $\frac{W\ell^2}{R}\ll 1$)، داریم:

$$\frac{\delta x}{\ell}=f(0)+\frac{W\ell^2}{R}f'(0)+\dots$$

چون $f(0)=0$ است، داریم:

$$\frac{\delta x}{\ell}=\frac{W\ell^2}{R}f'(0)\Rightarrow \delta x=f'(0)\frac{\ell^3 W}{R}$$

که در آن $f'(0)$ یک ثابت است. بنابراین تغییر طول به ازای وزن‌های کم با وزن W رابطه خطی دارد. (مثل فنر)، با R نسبت عکس دارد. دقت کنید در این سوال به اشتباه طول و شعاع با یک کمیت ℓ نشان داده شده اند که ممکن است باعث کژتابی در فهم رابطه میان تغییر طول و خود طول گردد. (طول x است و نه ℓ)

۴- ابتدا جرم زمین را حساب می‌کنیم. برای این کار شعاع زمین و چگالی آن را باید بدانیم.

$$R_E=6400\text{km}$$

$$\rho_E=5.6\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$m_E=\frac{4}{3}\pi R_E^3\rho_E=\frac{4}{3}\pi(6400\times10^3)^3\times(5.6\times10^3)\approx 6\times10^{24}\text{kg}$$

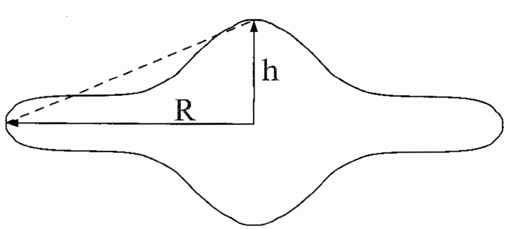
با توجه به اطلاعات مساله، نسبت جرم زمین به خورشید نیز برابر است با:

$$\frac{m_E}{m_S}=3\times10^{-6}$$

بنابراین جرم خورشید می‌شود:

$$m_S=\frac{m_E}{3\times10^{-6}}=2\times10^{30}\text{kg}=2\times10^{33}\text{g}$$

حجم کهکشان را می‌توان $V=\frac{1}{3}\pi R^2 h$ در نظر گرفت. اگر فاصله بین ستاره‌های کهکشان را $d_1=2\times10^{17}\text{m}$ باشد، تعداد ستاره‌های هر کهکشان برابر است با:



$$N_1=\frac{\frac{1}{3}\pi R^2 h}{d_1^3}=\frac{\frac{1}{3}\pi(10^{21})^2\times 10^{20}}{(2\times 10^{17})^3}=1.3\times 10^{10}$$

همچنین با در نظر گرفتن حجم عالم و فاصله بین کهکشانها، $d_2=5\times 10^{22}\,m$، تعداد کهکشانهای عالم می‌شود:

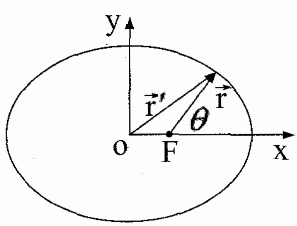
$$N_2=\frac{\frac{4}{3}\pi R'^3}{d_2^3}=\frac{4}{3}\pi\frac{(10^{10}\times 365\times 24\times 3600\times 3\times 10^8)^3}{(5\times 10^{22})^3}=2.8\times 10^{10}$$

بنابراین تعداد پروتونهای عالم مشاهده پذیر، N، برابر است با:

$$N=N_1N_2m_s\times N_A=1.3\times 10^{10}\times 2.8\times 10^{10}\times 2\times 10^{33}\times 6.02\times 10^{23}\approx 4\times 10^{77}$$

که در آن N_A عدد آووگادرو است. (در امتحان بدون ماشین حساب لازم نیست که عین این عدد بدست آید و حدود آن کافی است.)

۵- بردار $\vec{r}'$ را در مختصات دکارتی به دست می‌آوریم.



$$\vec{r}'=(c+r\cos\theta)\hat{i}+r\sin\theta\,\hat{j}\quad;\quad\theta=\omega t$$

که در آن c فاصله مرکز بیضی تا کانون F است.

$$\Rightarrow \vec{r}'=\left[c+\frac{a\cos\omega t}{1-\varepsilon\cos\omega t}\right]\hat{i}+\left(\frac{a\sin\omega t}{1-\varepsilon\cos\omega t}\right)\hat{j}$$

سرعت جسم نسبت به مرکز بیضی می‌شود:

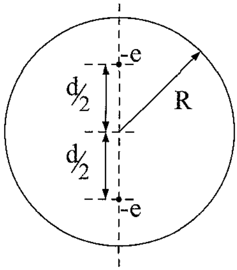
$$\dot{\vec{r}}'=\frac{-a\omega\sin\omega t}{(1-\varepsilon\cos\omega t)^2}\hat{i}+\frac{a\omega\cos\omega t-a\omega\varepsilon}{(1-\varepsilon\cos\omega t)^2}\hat{j}$$

شتاب آن هم می‌شود:

$$\ddot{\vec{r}}'=a\omega^2\left[\frac{\varepsilon(1+\sin^2\omega t)-\cos\omega t}{(1-\varepsilon\cos\omega t)^3}\right]\hat{i}+a\omega^2\left[\frac{\sin\omega t(2\varepsilon^2-\varepsilon\cos\omega t-1)}{(1-\varepsilon\cos\omega t)^3}\right]\hat{j}$$

پاسخ سؤال‌های امتحان دوم المپیاد فیزیک ـ چهاردهمین دوره ـ تابستان ۸۰

۱- چگالی بار مثبت درون کره $\rho = \dfrac{2e}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ است. اندازه نیروی وارد بر یکی از الکترونها از طرف کره باردار عبارتست از:



$$F_+ = \frac{\rho \times \frac{4}{3}\pi(\frac{d}{2})^3}{4\pi\varepsilon_0(\frac{d}{2})^2} e = \frac{\rho \frac{d}{2} e}{3\varepsilon_0}$$

اندازه نیرویی که دو الکترون به هم وارد می‌کنند می‌شود:

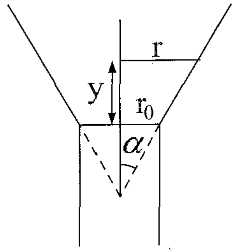
$$F_- = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$$

در شرایط تعادل داریم:

$$F_+ = F_-$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{2e}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{d}{2}e}{3\varepsilon_0} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} \Rightarrow \frac{d}{R^3} = \frac{1}{d^2} \Rightarrow d = R$$

۲- **الف)** سرعت عمودی در مقطع با شعاع r_0 را با v_0 و در شعاع r را با v نشان می‌دهیم. چون مقدار حجمی که در واحد زمان از هر سطح مقطع قیف عبور می‌کند ثابت است، داریم:



$$v_0 r_0{}^2 = v r^2 \qquad \text{(I)}$$

که در آن $A = \pi r_0{}^2$ است. همچنین $r = (y + r_0 \cot g\alpha) tg\alpha$ است.

با جانشین کردن این مقادیر در رابطه (I) بدست می‌آوریم:

$$v_0 r_0{}^2 = v(y + r_0 \cot g\alpha)^2 tg^2\alpha \qquad \text{(II)}$$

در حالت تعادل جسم رابطه $mg = kv$ برقرار است. بنابراین بجای v در رابطه (II) می‌توان مقدار $v = \frac{mg}{k}$ قرار داد. پس مقدار y_0، ارتفاعی که جسم درحال تعادل است، می‌شود:

$$y_0 = \sqrt{\frac{v_0}{v} r_0{}^2 \cot g^2\alpha} - r_0 \cot g\alpha \Rightarrow y_0 = r_0 \cot g\alpha \left(\sqrt{\frac{kv_0}{mg}} - 1 \right)$$

ب) قانون دوم نیوتن را برای این جسم می‌نویسیم.

$$-mg - k(\dot{y} - v) = m\ddot{y}$$

با جایگزین کردن v از قسمت (الف) و ساده کردن معادله اخیر بدست می‌آوریم که:

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}\left[\dot{y} - \frac{v_0 r_0{}^2}{(ytg\alpha + r_0)^2} \right] + g = 0$$

ج) در نقطه تعادل دیدیم که رابطه $y_0 tg\alpha + r_0 = r_0\sqrt{\frac{kv_0}{mg}}$ برقرار است. اگر از موضع تعادل به اندازه کوچک δ جا به جا شویم، داریم:

$$y = y_0 + \delta$$

بنابراین داریم:

$$\dot{y} = \dot{\delta} \quad , \quad \ddot{y} = \ddot{\delta}$$

با جانشین کردن این مقادیر در رابطه قسمت (ب) به دست می‌آوریم:

$$\ddot{\delta} + \frac{k}{m}\left[\dot{\delta} - \frac{v_0 r_0{}^2}{((y_0 + \delta) tg\alpha + r_0)^2} \right] + g = 0$$

$$\ddot{\delta}+\frac{k}{m}\left[\dot{\delta}-\frac{v_0 r_0^{\,2}}{\left(r_0\sqrt{\frac{kv_0}{mg}}+\delta tg\alpha\right)^2}\right]+g=0$$

$$\ddot{\delta}+\frac{k}{m}\dot{\delta}-\frac{k}{m}\frac{v_0 r_0^{\,2}}{r_0^{\,2}\frac{kv_0}{mg}\left(1+\frac{tg\alpha}{r_0\sqrt{\frac{kv_0}{mg}}}\delta\right)^2}+g=0$$

با بسط دادن عبارت داخل پرانتز در مخرج جمله سوم، بدست می‌آوریم:

$$\ddot{\delta}+\frac{k}{m}\dot{\delta}-g\left(1-\frac{2}{r_0}\sqrt{\frac{mg}{kv_0}}\delta tg\alpha\right)+g=0$$

$$\ddot{\delta}+\frac{k}{m}\dot{\delta}+\frac{2g}{r_0}tg\alpha\sqrt{\frac{mg}{kv_0}}\delta=0$$

حل این معادله هم با توجه به راهنمایی موجود در ابتدا به شکل زیر است:

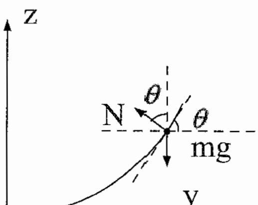
$$\delta=Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t+\varphi_0)$$

که پس ازمشتق گیری از این جواب و قرار دادن آن در معادله بالا بدست می‌آید که:

$$\omega=\sqrt{\frac{2g}{r_0}tg\alpha\sqrt{\frac{mg}{kv_0}}-\frac{k^2}{4m^2}}\quad,\quad \gamma=\frac{k}{2m}$$

جواب نهایی هم به صورت $y(t)=y_0+\delta$ است.

۳- الف) مطابق شکل داریم:



$$tg\theta=\frac{dz}{dy} \qquad (I)$$

شرط تعادل جسم روی سطح به صورت زیر است:

$$\begin{cases} N\sin\theta = my\omega_0^{\ 2} \\ N\cos\theta = mg \end{cases} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\omega_0^{\ 2}}{g}y \qquad \text{(II)}$$

با در نظر گرفتن روابط (I) و (II) به دست می‌آوریم که :

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\omega_0^{\ 2}}{g}y \Rightarrow z = \frac{1}{2}\frac{\omega_0^{\ 2}}{g}y^2$$

بنابراین معادله سطح به صورت $z = f(r) = \frac{1}{2}\frac{\omega_0^{\ 2}}{g}r^2$ است یعنی $k = \frac{\omega_0^{\ 2}}{2g}$ است.

ب) می‌دانیم $F_\theta = m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)$ است. با ضرب و تقسیم کردن سمت راست این رابطه در r به دست می‌آوریم:

$$F_\theta = \frac{m}{r}\left(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}\right) = \frac{m}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)$$

ج) چون سطح بدون اصطکاک است $F_\theta = 0$، و با توجه به قسمت (ب) داریم:

$$r^2\dot{\theta} = \text{Const.} = \ell \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\ell}{r^2}$$

معادلات حرکت در جهت z و r هم به صورت زیر است.

$$\begin{cases} F_z = N\cos\theta - mg = m\ddot{z} \\ F_r = -N\sin\theta = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \end{cases}$$

چون $z = kr^2$ است، پس $\dot{z} = 2kr\dot{r}$ و $\ddot{z} = 2k\left(r\ddot{r} + \dot{r}^2\right)$ است. با جایگزین در معادلات حرکت، به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} N\cos\theta = mg + 2km\left(r\ddot{r} + \dot{r}^2\right) \\ N\sin\theta = -m\left(\ddot{r} - \frac{\ell^2}{r^3}\right) \end{cases}$$

با تقسیم دو معادله اخیر بر هم، داریم:

$$tg\theta = -\frac{\ddot{r} - \frac{\ell^2}{r^3}}{2k\left(r\ddot{r} + \dot{r}^2\right) + g}$$

همچنین $tg\theta = \frac{dz}{dr} = 2kr$ است. پس به دست می‌آوریم که:

$$2kr = -\frac{r^3\ddot{r} - \ell^2}{r^3\left[2k\left(r\ddot{r} + \dot{r}^2\right) + g\right]}$$

با کمی ساده کردن به دست می‌آوریم:

$$-4k^2r^4 = \frac{r^3\ddot{r} - \ell^2}{r\ddot{r} + \dot{r}^2 + \frac{g}{2k}}$$

که همان معادله خواسته شده است.

د) در حالت تعادل با مقدار r ثابت، داریم $\ddot{r} = 0,\ \dot{r} = 0$. با جانشین کردن این مقادیر در رابطه به دست آمده در قسمت (ج)، داریم:

$$-4k^2{r_0}^4 = \frac{-\ell^2}{\frac{g}{2k}} \Rightarrow \ell^2 = 2kg{r_0}^4$$

که در آن r_0 شعاع در وضعیت تعادل است. با ضربه کوچک داریم:

$$r(t) = r_0 + \delta(t)$$
$$\dot{r} = \dot{\delta} \quad , \quad \ddot{r} = \ddot{\delta}$$

دوباره با جانشین کردن این روابط در رابطه قسمت (ج)، به دست می‌آوریم:

$$-4k^2(r_0+\delta)^4 = \frac{(r_0+\delta)^3\ddot{\delta} - \ell^2}{(r_0+\delta)\ddot{\delta} + \dot{\delta}^2 + \frac{g}{2k}}$$

با نگه داشتن جملات تا مرتبه اول داریم:

$$-4k^2{r_0}^4\left(1 + \frac{4\delta}{r_0}\right) = \frac{{r_0}^3\left(1 + \frac{3\delta}{r_0}\right)\ddot{\delta} - \ell^2}{(r_0+\delta)\ddot{\delta} + \dot{\delta}^2 + \frac{g}{2k}}$$

چون $\delta\ddot{\delta}$ و $\dot{\delta}^2$ از مرتبه بالاتر است، آنها را هم کنار می‌گذاریم. پس از کمی ساده کردن به دست می‌آوریم:

$$-4k^2{r_0}^5\ddot{\delta} - 2k{r_0}^4g\left(1 + \frac{4\delta}{r_0}\right) = {r_0}^3\ddot{\delta} - \ell^2$$

به جای $\ell^2 = 2kg{r_0}^4$ قرار می‌دهیم، و به دست می‌آوریم:

$$\left(1 + 4k^2{r_0}^2\right)\ddot{\delta} + 8kg\delta = 0$$

حل این معادله دیفرانسیل برای δ به صورت زیر است:

$$\delta(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

که در آن $\omega = \sqrt{\frac{8kg}{1 + 4k^2{r_0}^2}}$ است، مقادیر A و φ از شرایط اولیه به دست می‌آیند. در $t = 0$ داریم:

$$\delta(0)=0\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\delta(t)=A\sin\omega t$$

$$\dot{\delta}(0)=\dot{r}_0\Rightarrow A\omega=\dot{r}_0\Rightarrow A=\frac{\dot{r}_0}{\omega}$$

بنابراین:

$$\delta(t)=\frac{\dot{r}_0}{\omega}\sin\omega t\quad,\quad\omega=\sqrt{\frac{8kg}{1+4k^2{r_0}^2}}$$

$$r(t)=r_0+\frac{\dot{r}_0}{\omega}\sin\omega t$$

از طرفی داشتیم $\dot{\theta}=\frac{\ell}{r^2}$ یعنی $\dot{\theta}=\frac{{r_0}^2\omega_0}{r^2}$. بنابراین داریم:

$$\dot{\theta}=\frac{{r_0}^2\omega_0}{\left(r_0+\delta(t)\right)^2}=\frac{\omega_0}{\left(1+\frac{\delta(t)}{r_0}\right)^2}=\omega_0\left(1-\frac{2\delta(t)}{r_0}\right)=\omega_0\left(1-\frac{2}{r_0}\frac{\dot{r}_0}{\omega}\sin\omega t\right)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه اخیر به دست می‌آوریم:

$$\theta=\omega_0 t+\frac{2\omega_0}{r_0}\frac{\dot{r}_0}{\omega^2}\cos\omega t+\theta_0$$

در $t=0$ می‌توانیم θ را صفر بگیریم و از آنجا θ_0 به دست می‌آید. خواهیم داشت:

$$\theta=\omega_0 t+\frac{2\omega_0}{r_0}\frac{\dot{r}_0}{\omega^2}\left(\cos\omega t-1\right)$$

ه) چون زمان خیلی طولانی از شروع حرکت نمی‌گذارد r همان r_0 است. نیروی اصطکاک برابر $\vec{f}=-\mu N\hat{\theta}$ است. پس N را تا مرتبه صفر نسبت به μ می‌گذاریم، یعنی $N=\sqrt{(mg)^2+\left(mr_0{\omega_0}^2\right)^2}$. بنابراین داریم:

$$\vec{f}=-\mu m\sqrt{g^2+{r_0}^2{\omega_0}^4}\,\hat{\theta}=-\mu mg\sqrt{1+4k^2{r_0}^2}\,\hat{\theta}$$

و) معادله حرکت در جهت θ می‌شود:

$$F_\theta=\frac{m}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)=-\mu mg\sqrt{1+4k^2{r_0}^2}$$

با انتگرال‌گیری، داریم (دقت کنید به علت وجود μ در سمت راست عبارت می‌توان به جای $\frac{m}{r}$ از $\frac{m}{r_0}$ استفاده کرد.):

$$r^2\dot{\theta}-{r_0}^2\omega_0=-\mu g r_0\sqrt{1+4k^2{r_0}^2}\,t$$

با $r(t)=r_0+\delta(t)$، به دست می‌آوریم.

$$\dot{\theta}=\frac{r_0{}^2\omega_0}{\left(r_0+\delta\right)^2}-\frac{\mu g r_0\sqrt{1+4k^2r_0{}^2}}{\left(r_0+\delta\right)^2}t$$

$$\dot{\theta}=\omega_0\left(1-\frac{2\delta}{r_0}\right)-\frac{\mu g}{r_0}\sqrt{1+4k^2r_0{}^2}t$$

$$\dot{\theta}=\omega_0-\frac{1}{r_0}\left(2\omega_0\delta+\mu g\sqrt{1+4k^2r_0{}^2}t\right)\qquad\text{(III)}$$

معادلات حرکت در جهت r و z نیز به صورت زیرند:

$$\begin{cases}-N\sin\theta=m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\\ N\cos\theta-mg=m\ddot{z}\end{cases}$$

$$\Rightarrow -\tan\theta=\frac{\ddot{r}-r\dot{\theta}^2}{g+\ddot{z}}$$

همچنین با توجه به $z=kr^2$ داریم $\tan\theta=\dfrac{dz}{dr}=2kr$، و $\ddot{z}=2k\left(r\ddot{r}+\dot{r}^2\right)$، بنابراین

$$-2kr=\frac{\ddot{r}-r\dot{\theta}^2}{g+2k\left(r\ddot{r}+\dot{r}^2\right)}$$

با $r(t)=r_0+\delta(t)$ به دست می‌آوریم:

$$\ddot{\delta}-\left(r_0+\delta\right)\dot{\theta}^2=-2k\left(r_0+\delta\right)\left[g+2k\left((r_0+\delta)\ddot{\delta}+\dot{\delta}^2\right)\right]$$

تا تقریب مرتبه اول داریم:

$$\ddot{\delta}-r_0\dot{\theta}^2-\delta\omega_0{}^2=-4k^2r_0{}^2\ddot{\delta}-2kg\left(r_0+\delta\right)\qquad\text{(IV)}$$

با استفاده از رابطه (III) مقدار $\dot{\theta}$ را به جای معادله اخیر جایگزین می‌کنیم.

$$\dot{\theta}^2=\omega_0{}^2\left[1-\frac{1}{r_0\omega_0}\left(2\omega_0\delta+\mu g\sqrt{1+4k^2r_0{}^2}t\right)\right]^2$$

تا مرتبه اول نسبت به μ و δ می‌شود:

$$\dot{\theta}^2=\omega_0{}^2\left[1-\frac{2}{r_0\omega_0}\left(2\omega_0\delta+\mu g\sqrt{1+4k^2r_0{}^2}t\right)\right]$$

پس معادله (IV) می‌شود:

$$\ddot{\delta}-r_0\omega_0{}^2\left[1-\frac{2}{r_0\omega_0}\left(2\omega_0\delta+\mu g\sqrt{1+4k^2r_0{}^2}t\right)\right]-\delta\omega_0{}^2=$$

$$-4k^2r_0{}^2\ddot{\delta}-2kgr_0-2kg\delta$$

$$\left(1+4k^2r_0{}^2\right)\ddot{\delta}-r_0\omega_0{}^2+4\omega_0{}^2\delta+2\omega_0\mu g\sqrt{1+4k^2r_0{}^2}t-\delta\omega_0{}^2=-2kgr_0-2kg\delta$$

چون $\omega_0{}^2 = 2kg$ است، جمله آخر سمت چپ با جمله آخر سمت راست همدیگر را حذف می‌کنند. همچنین جملات ثابت طرفین رابطه اخیر یکدیگر را حذف می‌کنند. بنابراین داریم:

$$\left(1+4k^2r_0{}^2\right)\ddot{\delta}+4\omega_0{}^2\delta=-2\omega_0\mu g\sqrt{1+4k^2r_0{}^2}\,t$$

$$\ddot{\delta}+\frac{4\omega_0{}^2}{1+4k^2r_0{}^2}\delta=-\frac{2\omega_0\mu g}{\sqrt{1+4k^2r_0{}^2}}t$$

با تعریف $\alpha=\dfrac{-2\omega_0\mu g}{\sqrt{1+4k^2r_0{}^2}}$ و $\Omega^2=\dfrac{4\omega_0{}^2}{1+4k^2r_0{}^2}$ داریم:

$$\ddot{\delta}+\Omega^2\delta=\alpha t$$

$$\therefore \delta=A\cos\left(\Omega t+\varphi\right)+\frac{\alpha t}{\Omega^2}$$

شرایط اولیه به صورت $\delta\left(t=0\right)=0$ و $\dot{\delta}\left(t=0\right)=0$ است. پس

$$A\cos\varphi=0\Rightarrow\varphi={}^{\pi}\!/_{2}\Rightarrow\delta=-A\sin\Omega t+\frac{\alpha t}{\Omega^2}$$

$$\dot{\delta}\left(t=0\right)=0\Rightarrow -A\Omega+\frac{\alpha}{\Omega^2}=0\Rightarrow A=\frac{\alpha}{\Omega^3}$$

$$\therefore \delta(t)=-\frac{\alpha}{\Omega^3}\sin\Omega t+\frac{\alpha t}{\Omega^2}$$

بنابراین $r(t)$ می‌شود:

$$r(t)=r_0+\delta(t)=r_0+\frac{\mu g}{4\omega_0{}^2}\left(1+4k^2r_0{}^2\right)\sin\left(\frac{2\omega_0}{\sqrt{1+4k^2r_0{}^2}}t\right)-\frac{\mu g}{2\omega_0}\sqrt{1+4k^2r_0{}^2}\,t$$

از معادله (III) هم داریم:

$$\dot{\theta}=\omega_0-\frac{1}{r_0}\left[2\omega_0\left(-\frac{\alpha}{\Omega^3}\sin\Omega t+\frac{\alpha t}{\Omega^2}\right)+\mu g\sqrt{1+4k^2r_0{}^2}\,t\right]$$

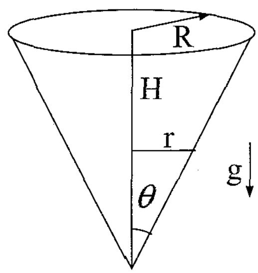
با انتگرال‌گیری داریم:

$$\theta=\omega_0 t-\frac{1}{r_0}\left\{2\omega_0\left[\frac{\alpha}{\Omega^4}\left(\cos\Omega t-1\right)+\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\Omega^2}t^2\right]+\frac{1}{2}\mu g\sqrt{1+4k^2r_0{}^2}\,t^2\right\}$$

که در آن α و Ω^2 قبلاً تعریف شده اند. ثابت انتگرال‌گیری هم طوری به دست آورده‌ایم که در زمان $t=0$ داشته باشیم $\theta=0$.

پاسخ سؤال‌های امتحان سوم المپیاد فیزیک ـ چهاردهمین دوره ـ تابستان ۸۰

۱- دستگاه استوانه‌ای را به صورت استاندارد در نظر بگیرید و مبدا را راس مخروط فرض کنید.



وقتی ذره به مکان با شعاع r می‌رسد، با استفاده از بقای انرژی داریم که:

$$z = \frac{r}{R}H = r\cot\theta$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(H-z) = mgH(1-\frac{r}{R}) \qquad (۱)$$

از طرفی برای سرعت ذره داریم که:

$$\vec{v} = dr\hat{r} + dz\hat{z} + rd\varphi\hat{\varphi}$$

$$\frac{dr}{dz} = \tan\theta$$

$$\sqrt{\frac{dz^2+dr^2}{(rd\varphi)^2}} = \tan\alpha$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\cot\alpha}{r\cos\theta}$$

که در این روابط α زاویه بین مماس بر مسیر و مماس افقی بر مخروط و θ زاویه راس مخروط است.
نتیجه این است که:

$$\vec{v} = \dot{z}(\hat{z} + \tan\theta\hat{r} + \frac{\cot\alpha}{\cos\theta}\hat{\varphi}) \qquad (۲)$$

حال فرض کنید از نقطه $z+dz$ به نقطه z می‌آییم. جهت‌های $(\hat{r}_1, \hat{\varphi}_1, \hat{z}_1)$ در نقطه $z+dz$ سه بردار یکه دستگاه استوانه‌ای را نشان می‌دهند و $(\hat{r}_2, \hat{\varphi}_2, \hat{z}_2)$ در نقطه z سه بردار یکه دستگاه استوانه‌ای را نشان می‌دهند. در نقطه $z+dz$ همه چیز را با اندیس 1 و در نقطه z همه چیز را با اندیس 2 نشان می‌دهیم.

حال با استفاده از (۱) و (۲) داریم که:

$$2g(H-(z+dz))=\dot{z}_1{}^2\left(1+\tan^2\theta+\frac{\cot^2\alpha}{\cos^2\theta}\right)\Rightarrow$$

$$\dot{z}_1=-\sqrt{\frac{2g(H-(z+dz))}{1+\tan^2\theta+\dfrac{\cot^2\alpha}{\cos^2\theta}}}=\sqrt{\frac{2g(H-z-dz)}{\dfrac{1}{\cos^2\theta}+\dfrac{\cot^2\alpha}{\cos^2\theta}}}=\sqrt{\frac{2g(H-z-dz)}{\dfrac{1}{\cos^2\theta\sin^2\alpha}}}=$$

$$-\cos\theta\sin\alpha\sqrt{2g(H-z-dz)}$$

$$\dot{z}_2=-\cos\theta\sin\alpha\sqrt{2g(H-z)}$$

پس در نتیجه نیروی وارد بر ذره برابر است با (نیروی مخروط را با $\vec{N}$ نشان داده‌ایم.):

$$\vec{N}-mg\hat{z}=\frac{m}{dt}(\vec{v}_2-\vec{v}_1)=\frac{m}{dt}\left(\dot{z}_2(\hat{z}+\tan\theta\hat{r}_2+\frac{\cot\alpha}{\cos\theta}\hat{\varphi}_2)-\dot{z}_1(\hat{z}+\tan\theta\hat{r}_1+\frac{\cot\alpha}{\cos\theta}\hat{\varphi}_1)\right)=$$

$$\frac{m}{dt}\begin{pmatrix}\left((\dot{z}_2-\dot{z}_1)+\dot{z}_1\right)\left(\hat{z}+\tan\theta\left((\hat{r}_2-\hat{r}_1)+\hat{r}_1\right)+\dfrac{\cot\alpha}{\cos\theta}\left((\hat{\varphi}_2-\hat{\varphi}_1)+\hat{\varphi}_1\right)\right)\\ -\dot{z}_1\left(\hat{z}+\tan\theta\hat{r}_1+\dfrac{\cot\alpha}{\cos\theta}\hat{\varphi}_1\right)\end{pmatrix}$$

حال وقت آن است که این عبارت را تقریب بزنیم.

$$\Rightarrow\vec{N}-mg\hat{z}=-m\cos\theta\sin\alpha\sqrt{2g(H-z)}\frac{1}{dt}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}\left(1+\dfrac{1}{2}\dfrac{dz}{H-z}\right)\left(\hat{z}+\tan\theta\left(-d\varphi\hat{\varphi}_1+\hat{r}_1\right)+\dfrac{\cot\alpha}{\cos\theta}(d\varphi\hat{r}_1+\hat{\varphi}_1)\right)\\ -\left(\hat{z}+\tan\theta\hat{r}_1+\dfrac{\cot\alpha}{\cos\theta}\hat{\varphi}_1\right)\end{pmatrix}=$$

$$-\cos\theta\sin\alpha\sqrt{2g(H-z)}\frac{m}{dt}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}\left(1+\dfrac{1}{2}\dfrac{dz}{H-z}\right)\left(\hat{z}+\tan\theta\left(-\dfrac{\cot\alpha}{r\cos\theta}dz\hat{\varphi}_1+\hat{r}_1\right)+\dfrac{\cot\alpha}{\cos\theta}\left(\dfrac{\cot\alpha}{r\cos\theta}dz\hat{r}_1+\hat{\varphi}_1\right)\right)\\ -\left(\hat{z}+\tan\theta\hat{r}_1+\dfrac{\cot\alpha}{\cos\theta}\hat{\varphi}_1\right)\end{pmatrix}=$$

$$-\cos\theta\sin\alpha\sqrt{2g(H-z)}\frac{mdz}{dt}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2}\frac{1}{H-z}\left(\hat{z}+\tan\theta\hat{r}_1+\frac{\cot\alpha}{\cos\theta}\hat{\varphi}_1\right)+\left(-\tan\theta\frac{\cot\alpha}{r\cos\theta}\hat{\varphi}_1+\frac{\cot\alpha}{\cos\theta}\frac{\cot\alpha}{r\cos\theta}\hat{r}_1\right)\right)$$

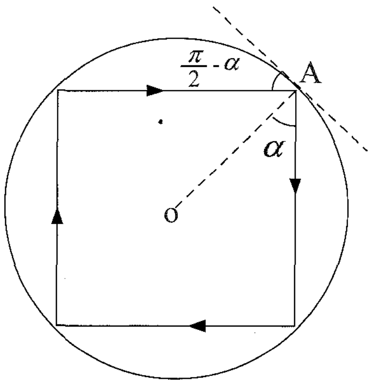
حال با ساده سازی و جایگزین کردن عناصر و با تغییر دادن جملات اندیس 1 را در عبارت بالا به جملات بدون اندیس بدست می‌آید که:

$$\vec{N} = mg\hat{z} - 2mg\cos^2\theta\sin^2\alpha(H-z)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2}\frac{1}{H-z}\left(\hat{z}+\tan\theta\hat{r}_1+\frac{\cot\alpha}{\cos\theta}\hat{\varphi}_1\right)+\left(-\tan\theta\frac{\cot\alpha}{r\cos\theta}\hat{\varphi}_1+\frac{\cot\alpha}{\cos\theta}\frac{\cot\alpha}{r\cos\theta}\hat{r}_1\right)\right)=$$

$$mg\hat{z}-mg\cos^2\theta\sin^2\alpha\left(\left(\hat{z}+\tan\theta\hat{r}+\frac{\cot\alpha}{\cos\theta}\hat{\varphi}\right)+\frac{2(H-z)\cot\alpha}{r\cos\theta}\left(-\tan\theta\hat{\varphi}+\frac{\cot\alpha}{\cos\theta}\hat{r}\right)\right)$$

۲- الف) فرض کنید ذره بعد از P بار برخورد دوباره به نقطه A برگردد. در هر برخورد ذره با دیواره کره، ذره به اندازه $(\pi-2\alpha)$ منحرف می‌شود. شرط بسته بودن مسیر بعد از P بار برخورد این است که زاویه انحراف کل، $P(\pi-2\alpha)$، ضریب درستی از 2π باشد، یعنی:



$$P(\pi-2\alpha)=2k\pi$$

$$\frac{\pi}{2}-\alpha=\frac{k}{P}\pi \Rightarrow \frac{\alpha}{\pi}=\left(\frac{1}{2}-\frac{k}{P}\right)=q$$

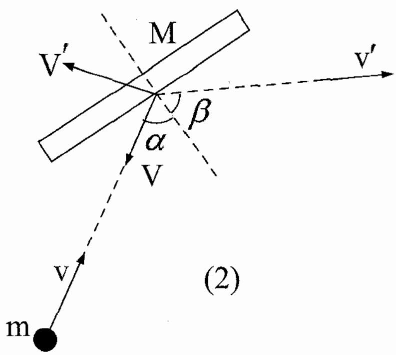
که در آن $q=\frac{1}{2}-\frac{k}{P}$ است که $q\in Q$ یعنی q عدد گویاست و عدد گنگ نمی‌تواند باشد. پس شرط لازم برای بسته بودن مسیر این است که $\frac{\alpha}{\pi}$ باید گویا باشد. این شرط کافی نیز هست چرا که $\frac{\alpha}{\pi}<\frac{1}{2}$ و q هر عدد گویای کوچکتر از .5 می‌تواند باشد.

شرط اینکه ذره مسیرش را قطع نکند این است که بعد از یک دور زدن محیط دایره و N بار برخورد، داشته باشیم:

$$N(\pi-2\alpha)=2\pi \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{N};(N\geq 2)$$

که مسیر یک N ضلعی منتظم می‌گردد.

ب) در دستگاه مرکز جرم داریم:



(2)

$$m\vec{v}+M\vec{V}=0 \Rightarrow M\vec{V}=-m\vec{v}$$
$$m\vec{v}'+M\vec{V}'=0 \Rightarrow M\vec{V}'=-m\vec{v}'$$

که در آن $\vec{v}$ و $\vec{V}$ به ترتیب سرعت گلوله و دیوار در دستگاه مرکز جرم قبل از برخورد است و پریمهای آنها مربوط به بعد از برخورد می‌باشند.

همچنین به علت برخورد کشسان، بقای انرژی جنبشی را داریم:

$$\frac{1}{2}MV^2+\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}M\vec{V}'+\frac{1}{2}mv'^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M}v\right)^2+\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M}v'\right)^2+\frac{1}{2}mv'^2 \Rightarrow |v|=|v'| \qquad \text{(I)}$$

اگر سرعت‌ها را در راستای موازی باسطح دیوار، $\|$ و عمود بر آن، $\perp$، تجزیه کنیم، سرعت گلوله و دیوار قبل و بعد از برخورد در راستای موازی با سطح دیوار تغییر نمی‌کند چون نیرویی در این راستا وارد نمی‌شود. پس:

$$v_{\|}=v'_{\|} \quad , \quad V_{\|}=V'_{\|} \qquad \text{(II)}$$

از روابط (I) و (II) داریم:

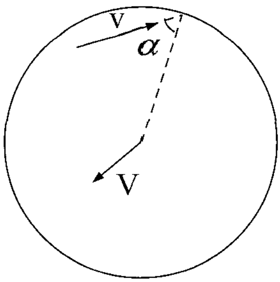
$$v_{\|}^2+v_{\perp}^2=v_{\|}'^2+v_{\perp}'^2 \Rightarrow v_{\perp}^2=v_{\perp}'^2 \Rightarrow \begin{cases} v_{\perp}=v'_{\perp} \\ v_{\perp}=-v'_{\perp} \end{cases}$$

که جواب اول غیر قابل قبول است. چون برخورد حتماً رخ می‌دهد، جواب $v_{\perp}=-v'_{\perp}$ قابل قبول است. بنابراین داریم:

$$\mathrm{tg}\alpha=\left|\frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}}\right|,\ \mathrm{tg}\beta=\left|\frac{v'_{\parallel}}{v'_{\perp}}\right|\Rightarrow \mathrm{tg}\alpha=\mathrm{tg}\beta$$

یعنی زاویه تابش و بازتابش با هم برابرند.

ج) در دستگاه مرکز جرم داریم:



قبل از برخورد: $M\vec{V}=-m\vec{v}$

بعد از برخورد: $M\vec{V}'=-m\vec{v}'$

چون اصطکاک نداریم، $F_{\parallel}=0$ بنابراین داریم:

$$v'_{\parallel}=v_{\parallel}\quad,\quad V'_{\parallel}=V_{\parallel}\qquad\text{(III)}$$

چون کره یکنواخت است، مرکز جرم آن روی مرکز هندسی آن است. بنابراین نیروی ضربه هیچ گشتاوری حول مرکز ایجاد نمی‌کند. پس انرژی جنبشی قبل از برخورد تنها به انرژی جنبشی انتقالی بعد از برخورد تبدیل می‌شود. بنابراین داریم:

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}MV^2=\frac{1}{2}mv'^2+\frac{1}{2}MV'^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M}v\right)^2=\frac{1}{2}mv'^2+\frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M}v'\right)^2\Rightarrow|v|^2=|v'|^2\qquad\text{(IV)}$$

از روابط (III) و (IV) به دست می‌آوریم $v_{\perp}^2=v_{\perp}'^2$ و در نتیجه $v_{\perp}=-v'_{\perp}$. علامت منفی به خاطر این است که بعد از برخورد جهت سرعت ذره تغییر می‌کند. بنابراین داریم:

$$\mathrm{tg}\alpha=\left|\frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}}\right|=\left|\frac{v'_{\parallel}}{-v'_{\perp}}\right|=\mathrm{tg}\beta$$

یعنی زاویه برخورد با زاویه بازتاب در دستگاه مرکز جرم برابر است. پس حل قسمت (الف) در این حالت نیز معتبر است. در واقع چون سرعت جرم و کره در دستگاه مرکز جرم خلاف جهت یکدیگر و هم راستا است، حرکت مانند قسمت الف است و در دستگاه کره، جسم با سرعتی بیشتر در حرکت است.

سرعت از v به $v+V$ تغییر کرده است و زمان به نسبت $\frac{v}{v+V}$ کم خواهد شد.

$$\frac{T'}{T}=\frac{v}{v+V}=\frac{v}{v+\frac{m}{M}v}=\frac{M}{m+M}$$

که در آن T و T' دوره تناوب برخورد ذره به کره به ترتیب در حالت (الف) و (ج) است.

د) برای این که مسیر بسته شود باید زاویه بازتاب برابر زاویه تابش باشد. اگر N نیروی عمود بر سطح وارد بر ذره باشد، داریم:

$$\begin{cases}\int N dt = m\left(v_\perp + e v_\perp\right) = m v_\perp (1+e)\\ \int(\mu_k N) dt = m\left(v_\parallel - v'_\parallel\right)\end{cases}$$

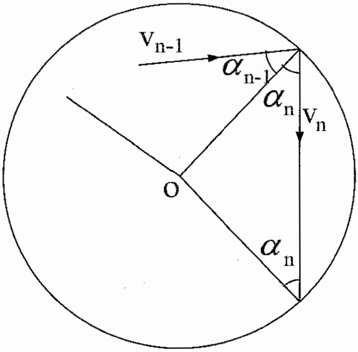
می خواهیم $tg\alpha = tg\beta$ باشد، در نتیجه

$$\frac{v_\parallel}{v_\perp}=\frac{v'_\parallel}{v'_\perp}=\frac{v'_\parallel}{ev_\perp}\Rightarrow v'_\parallel = ev_\parallel$$

بنابراین داریم:

$$\int(\mu_k N)dt = mv_\parallel(1-e)\Rightarrow \mu_k m v_\perp(1+e) = mv_\parallel(1-e)\Rightarrow \mu_k = \frac{v_\parallel}{v_\perp}\frac{1-e}{1+e}=\frac{1-e}{1+e}tg\alpha$$

ه) شکل مقابل n امین برخورد را نشان می‌دهد. در این وضعیت داریم:



$$tg\alpha_n = \frac{v_n^{\parallel}}{v_n^{\perp}}=\frac{v_{n-1}^{\parallel}}{ev_{n-1}^{\perp}}=\frac{1}{1-\varepsilon}tg\alpha_{n-1}=\frac{1}{(1-\varepsilon)^n}tg\alpha_0$$

اگر بگیریم $\alpha_n = \alpha_0 + \Delta\alpha$ به دست می‌آوریم:

$$tg\alpha_n = tg(\alpha_0+\Delta\alpha) = tg\alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{\cos^2\alpha_0}$$

با توجه به دو رابطه اخیر، داریم:

$$tg\alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{\cos^2\alpha_0} = \frac{1}{(1-\varepsilon)^n}tg\alpha_0$$

$$\Rightarrow tg\alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{\cos^2\alpha_0} = (1+n\varepsilon)tg\alpha_0 \Rightarrow \Delta\alpha = n\varepsilon\sin\alpha_0\cos\alpha_0$$

بنابراین خواهیم داشت: $\alpha_n = \alpha_0 + n\varepsilon\sin\alpha_0\cos\alpha_0$

برای تعیین v_n روابط زیر را به کار می‌بریم.

$$\begin{cases} v_n^{\perp} = (1-\varepsilon)^n v_0^{\perp} = (1-n\varepsilon)v_0^{\perp} \\ v_n^{\parallel} = v_{n-1}^{\parallel} = v_0^{\parallel} \end{cases}$$

$$v_n = \left(v_n^{\perp 2} + v_n^{\parallel 2}\right)^{1/2} = \left[(1-n\varepsilon)^2 v_0^{\perp 2} + v_0^{\parallel 2}\right]^{1/2} = \left[(1-2n\varepsilon)v_0^2\cos^2\alpha_0 + v_0^2\sin^2\alpha_0\right]^{1/2}$$

$$v_n = v_0\left(1-2n\varepsilon\cos^2\alpha_0\right)^{1/2} \Rightarrow v_n = v_0\left(1-n\varepsilon\cos^2\alpha_0\right)$$

ℓ_n هم به ترتیب زیر محاسبه می‌شود.

$$\ell_n = 2R\cos\alpha_n = 2R\cos(\alpha_0 + n\varepsilon\sin\alpha_0\cos\alpha_0)$$

$$= 2R\cos\alpha_0 - 2n\varepsilon R\sin^2\alpha_0\cos\alpha_0 = 2R\cos\alpha_0\left(1-n\varepsilon\sin^2\alpha_0\right)$$

$$\therefore \ell_n = \ell_0\left(1-n\varepsilon\sin^2\alpha_0\right)$$

و) با توجه به تعریف θ_n و Δt_n داریم:

$$\theta_n = \pi - 2\alpha_n = \pi - 2(\alpha_0 + n\varepsilon\sin\alpha_0\cos\alpha_0)$$

$$\Delta t_n = \frac{\ell_n}{v_n} = \frac{2R\cos\alpha_0\left(1-n\varepsilon\sin^2\alpha_0\right)}{v_0\left(1-n\varepsilon\cos^2\alpha_0\right)} = \frac{2R\cos\alpha_0}{v_0}\left[1+n\varepsilon\left(\cos^2\alpha_0 - \sin^2\alpha_0\right)\right]$$

$$\therefore \bar{\omega}_n = \frac{\theta_n}{\Delta t_n} = \frac{\pi - 2(\alpha_0 + n\varepsilon\sin\alpha_0\cos\alpha_0)}{\frac{2R\cos\alpha_0}{v_0}\left[1+n\varepsilon\left(\cos^2\alpha_0-\sin^2\alpha_0\right)\right]}$$

$$= \frac{(\theta_0 - 2n\varepsilon\sin\alpha_0\cos\alpha_0)\left[1-n\varepsilon\left(\cos^2\alpha_0 - \sin^2\alpha_0\right)\right]}{2R\cos\alpha_0}v_0$$

ز) در وضعیت گفته شده $e = 1-\varepsilon < 1$ و $n \to \infty$ است. بنابراین داریم:

$$v_n^{\perp} = v_0^{\perp}e^n \to 0$$

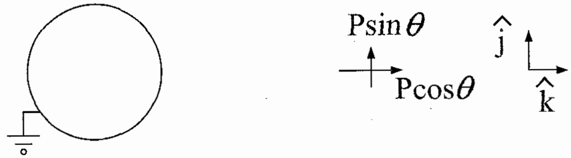
یعنی مؤلفه عمودی سرعت به سمت صفر میل می‌کند. از طرفی داشتیم:

$$v_n^{\parallel} = v_{n-1}^{\parallel} = v_0^{\parallel}$$

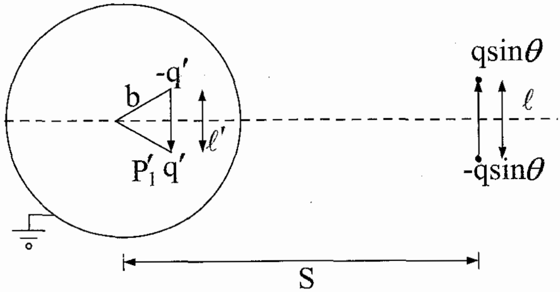
بنابراین $v_n = v_n^{\parallel} = v_0^{\parallel} = v_0\sin\alpha_0$. پس در نهایت فقط مؤلفه مماس بر سطح خواهیم داشت و ذره روی یک دایره به شعاع R با سرعت $v_0\sin\alpha_0$ حرکت خواهد کرد.

پاسخ سؤال‌های امتحان چهارم المپیاد فیزیک ـ چهاردهمین دوره ـ تابستان ۸۰

۱- دو قطبی $\vec{P}$ را به دو قطبی عمود بر هم $P\cos\theta\hat{k}$ ،$P\sin\theta\hat{j}$ تجزیه می‌کنیم.

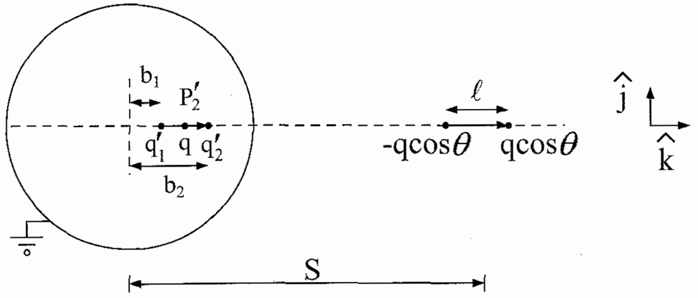


برای دو قطبی $P\sin\theta$ داریم که:



$$b \approx \frac{R^2}{S}\ ,\ q' = \frac{R}{S} q\sin\theta,\ \ell' = \frac{b}{S}\ell,\ P_1' = \frac{R^3}{S^3} P\sin\theta$$

و برای دو قطبی $P\cos\theta$ داریم که:



چون در حد $\ell \to 0$ هستیم از $q\ell^2$ و $q\ell^3$ صرف نظر می‌نماییم و تمام تقریب‌ها تـا مرتبـه اول $\frac{\ell}{S}$ می‌باشد.

$$q_1' = -\frac{R}{S+\frac{\ell}{2}} q\cos\theta \approx -\frac{qR\cos\theta}{S}\left(1-\frac{\ell}{2S}\right)$$

$$q_2' = \frac{R}{S-\frac{\ell}{2}} q\cos\theta \approx \frac{qR\cos\theta}{S}\left(1+\frac{\ell}{2S}\right)$$

$$b_1 = \frac{R^2}{S+\frac{\ell}{2}} \approx \frac{R^2}{S}\left(1-\frac{\ell}{2S}\right)$$

$$b_2 = \frac{R^2}{S-\frac{\ell}{2}} \approx \frac{R^2}{S}\left(1+\frac{\ell}{2S}\right)$$

دو بار q_1' و q_2' معادل یک دو قطبی و یک بار نقطه‌ای q' در فاصله $\frac{R^2}{S}$ می‌باشد.

$$P_2' = \frac{qR\cos\theta}{S}\times\frac{R^2\ell}{S^2} = \left(\frac{R}{S}\right)^3 P\cos\theta$$

$$q' = q_1' + q_2' = \frac{qR\ell\cos\theta}{S^2} = \frac{RP\cos\theta}{S^2}$$

انرژی کل سیستم برابر $\frac{-\vec{P}.\vec{E}}{2} = \frac{1}{2}\int V dq$ می‌باشد که $\vec{E}$ میدان در محل دو قطبی P است.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q'}{\left(S-\frac{R^2}{S}\right)^2}\hat{k} + \frac{P_1'}{\left(S-\frac{R^2}{S}\right)^3}\hat{j} + \frac{2P_2'}{\left(S-\frac{R^2}{S}\right)^3}\hat{k}\right]$$

$$U = -\frac{\vec{P}.\vec{E}}{2} = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Pq'\cos\theta}{\left(S-\frac{R^2}{S}\right)^2} + \frac{2P_2'P\cos\theta}{\left(S-\frac{R^2}{S}\right)^3} + \frac{P_1'P\sin\theta}{\left(S-\frac{R^2}{S}\right)^3}\right] \approx$$

$$-\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{RP^2\left(1-\theta^2\right)}{S^2\left(S-\frac{R^2}{S}\right)^2} + \frac{2P^2\left(\frac{R}{S}\right)^3\left(1-\theta^2\right)}{\left(S-\frac{R^2}{S}\right)^3} + \frac{\left(\frac{R}{s}\right)^3 P^2\theta^2}{\left(S-\frac{R^2}{S}\right)^3}\right] =$$

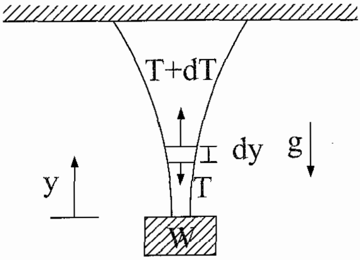
$$(\text{Const.}) + \frac{1}{2}\left(\frac{RP^2}{4\pi\varepsilon_0\left(S^2-R^2\right)^2} + \frac{P^2R^3}{4\pi\varepsilon_0\left(S^2-R^2\right)^3}\right)\theta^2$$

که اگر مقدار داخل پرانتز را A تعریف کنیم داریم که:

$$k=\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

$$\omega=\sqrt{\frac{A}{I}}=\sqrt{\frac{P^2RS^2}{4\pi\varepsilon_0\left(S^2-R^2\right)^3 I}}$$

۲- می‌خواهیم معادله $A(y)$ را طوری به دست آوریم که $S(y)=S_m$ باشد یعنی $S(y)$ ثابت باشد.
مطابق شکل داریم:



$$(T+dT)-T-\rho A(y)gdy=0$$

$$\Rightarrow dT=\rho A(y)gdy \qquad \text{(I)}$$

از طرف دیگر داریم:

$$S(y)=S_m \Rightarrow \frac{T}{A(y)}=S_m$$

$$\Rightarrow T=S_m A(y) \Rightarrow dT=S_m dA(y) \qquad \text{(II)}$$

بنابراین از روابط (I) و (II) داریم:

$$S_m dA(y)=\rho A(y)gdy$$

$$\frac{dA}{A}=\frac{\rho g}{S_m}dy \Rightarrow \ln\left(\frac{A}{A_0}\right)=\frac{\rho g}{S_m}y \Rightarrow A(y)=A_0 e^{\frac{\rho g}{S_m}y}$$

۳- از روابط داده شده در مساله داریم:

$$\frac{S}{E}=\varepsilon_L$$

$$L=L_0(1+\varepsilon_L)=L_0(1+\frac{S}{E})$$

$$D=D_0(1+\varepsilon_D)=D_0(1+\mu\varepsilon_L)=D_0(1+\mu\frac{S}{E})$$

همچنین حجم اولیه استوانه برابر $V_0=\frac{\pi D_0^2}{4}L_0$، و حجم نهایی آن می‌شود:

$$V=\frac{\pi D_0^2}{4}\left(1+\mu\frac{S}{E}\right)^2 L_0\left(1+\frac{S}{E}\right)\approx\frac{\pi D_0^2}{4}L_0\left[1+\frac{S}{E}(2\mu+1)\right]=V_0\left[1+\frac{S}{E}(2\mu+1)\right]$$

بنابراین تغییر چگالی استوانه به صورت زیر است:

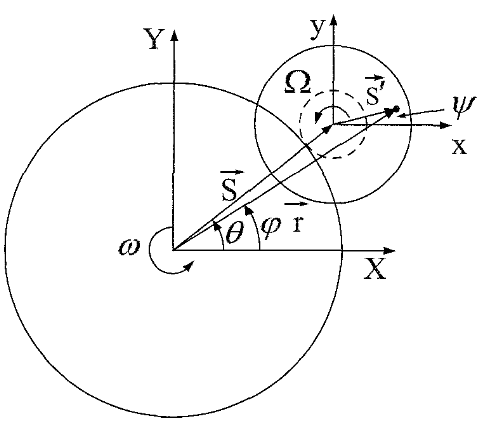
$$\Delta\rho=m\left(\frac{1}{V}-\frac{1}{V_0}\right)=m\left[\frac{1}{V_0\left(1+\frac{S}{E}(2\mu+1)\right)}-\frac{1}{V_0}\right]$$

$$=\frac{m}{V_0}\left[\left(1+\frac{S}{E}(2\mu+1)\right)^{-1}-1\right]\approx\rho_0\left[1-\frac{S}{E}(2\mu+1)-1\right]$$

$$\therefore\ \Delta\rho=-\rho_0\frac{S}{E}(2\mu+1)$$

روشن است که به ازای $\mu=-\frac{1}{2}$ تغییر چگالی صفر است.

۴- چرخ با سرعت زاویه‌ای Ω حول O' در چارچوب y-x با محورهای جهت ثابت می‌چرخد.



شرط اینکه قرقره روی لبه دیسک نلغزد به صورت زیر است.

$$(R+r)\omega=r\Omega\Rightarrow\Omega=\left(\frac{R+r}{r}\right)\omega$$

فرض می‌کنیم در $t=0$، $\theta=0$ و $\varphi=0$ باشد.

ب و ج)

برای مکان ذره داریم که

$$\vec{r}=\vec{S}+\vec{S}'=\left(\left(R+r\right)\cos\theta+\lambda r\cos\psi\right)\hat{i}+\left(\left(R+r\right)\sin\theta+\lambda r\sin\psi\right)\hat{j}$$

$$\theta=\omega t,\psi=\Omega t=\left(1+\frac{R}{r}\right)\omega t$$

$$r(t)=\left|\vec{P}\right|=\sqrt{\left(R+r\right)^2+\lambda^2r^2+2\lambda r\left(R+r\right)\cos\left(\theta-\psi\right)}\quad,\quad\theta-\psi=-\frac{R}{r}\omega t$$

$$\tan\varphi(t)=\frac{\left(R+r\right)\sin\theta+\lambda r\sin\psi}{\left(R+r\right)\cos\theta+\lambda r\cos\psi}$$

زمانی روی خودش می‌افتد که وقتی $\theta=2\pi$ باشد ψ برابر $n\times2\pi$ باشد که n عددی طبیعی است.

$$\left.\begin{matrix}\theta=2\pi\Rightarrow\psi=\left(1+\dfrac{R}{r}\right)\times2\pi\\ \psi=n\times2\pi\end{matrix}\right\}\Rightarrow1+\frac{R}{r}\in\mathbb{N}\Rightarrow R=mr$$

که شرط اول است و باید m عددی طبیعی باشد.

و همچنین برای اینکه در میانه‌های راه خودش را قطع کند $\dfrac{d\varphi}{dt}$ باید صعودی اکید باشد.

$$\frac{d\varphi}{dt}=\cos^2\varphi\frac{d\left(\tan\varphi\right)}{dt}=$$

$$\cos^2\varphi\times\frac{(\cos\theta+\frac{\lambda r}{R+r}\cos\psi)(\cos\theta\dot{\theta}+\frac{\lambda r}{R+r}\cos\psi\dot{\psi})}{\left[\cos\theta+\frac{\lambda r}{R+r}\cos\psi\right]^2}$$

$$+\frac{(\sin\theta+\frac{\lambda r}{R+r}\sin\psi)(\sin\theta\dot{\theta}+\frac{\lambda r}{R+r}\sin\psi\dot{\psi})}{\left[\cos\theta+\frac{\lambda r}{R+r}\cos\psi\right]^2}>0$$

که با ساده کردن بدست می‌آید که:

$$\Rightarrow\dot{\theta}+\frac{\lambda r}{R+r}\cos\left(\theta-\psi\right)\left[\dot{\psi}+\dot{\theta}\right]+\frac{\lambda^2r^2}{\left(R+r\right)^2}\dot{\psi}>0\Rightarrow$$

$$\dot{\theta}+\frac{\lambda^2r^2}{\left(R+r\right)^2}\dot{\psi}>\frac{\lambda r}{R+r}\left(\dot{\psi}+\dot{\theta}\right)\Rightarrow\omega+\frac{\lambda^2r}{\left(R+r\right)}\omega>\frac{\lambda\left(2r+R\right)}{\left(R+r\right)}\omega\Rightarrow$$

$$\lambda^2-\left(2+\frac{R}{r}\right)\lambda+\left(1+\frac{R}{r}\right)>0$$

که این هم شرط دوم است.

الف)

$$\vec{r}=\vec{S}+\vec{S}'\Rightarrow\vec{V}=\dot{\vec{S}}+\dot{\vec{S}}'=\vec{\omega}\times\vec{S}+\vec{\Omega}\times\vec{S}'$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{\omega}\times\dot{\vec{S}}+\vec{\Omega}\times\dot{\vec{S}}'=\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{S}\right)+\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{S}\right)=-\omega^2\vec{S}-\Omega^2\vec{S}'$$

$$\left|\vec{V}\right|^2=\vec{V}.\vec{V}=\omega^2S^2+\Omega^2S'^2+2\left(\vec{\omega}\times\vec{S}\right).\left(\vec{\Omega}\times\vec{S}'\right)=$$

$$\omega^2S^2+\Omega^2S'^2+2\vec{\Omega}.\left(\vec{S}'\times\left(\vec{\omega}\times\vec{S}\right)\right)=$$

$$\omega^2S^2+\Omega^2S'^2+2\vec{\Omega}.\left(\vec{\omega}\left(\vec{S}'.\vec{S}\right)-\vec{S}\left(\vec{S}'.\vec{\omega}\right)\right)=$$

$$\omega^2S^2+\Omega^2S'^2+2\left(\vec{\omega}.\vec{\Omega}\right)\left(\vec{S}.\vec{S}'\right)$$

$$\vec{a}\times\vec{v}=-\omega^2\vec{S}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{S}\right)-\omega^2\vec{S}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{S}'\right)$$

$$-\Omega^2\vec{S}'\times\left(\vec{\omega}\times\vec{S}\right)-\Omega^2\vec{S}'\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{S}'\right)=$$

$$-\omega^2S^2\vec{\omega}-\omega^2\left(\vec{S}.\vec{S}'\right)\vec{\Omega}-\Omega^2\left(\vec{S}.\vec{S}'\right)\vec{\omega}-\Omega^2S'^2\vec{\Omega}$$

$$\rho=\frac{v^2}{a_\perp}=\frac{\left|\vec{v}\right|^2}{\frac{\left|\vec{a}\times\vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}}=\frac{\left|\vec{v}\right|^3}{\left|\vec{a}\times\vec{v}\right|}\Rightarrow$$

$$\rho=\frac{\left(\omega^2S^2+\left(1+\frac{R}{r}\right)^2\omega^2S'^2+2\left(1+\frac{R}{r}\right)\omega^2SS'\cos\left(\theta-\psi\right)\right)^{\frac{3}{2}}}{\omega^3\left(S^2+\left(1+\frac{R}{r}\right)^3S'^2+\left(1+\frac{R}{r}\right)\left(2+\frac{R}{r}\right)SS'\cos\left(\theta-\psi\right)\right)}$$

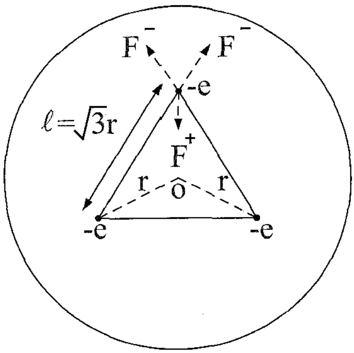
$$S=R+r$$

$$S'=\lambda r$$

$$\theta-\psi=-\frac{R}{r}\omega t$$

پاسخ سؤال‌های امتحان پنجم المپیاد فیزیک ـ چهاردهمین دوره ـ تابستان ۸۰

۱- الف) باید برآیند نیروهای وارد بر هرالکترون صفر باشد. همه الکترونها در وضعیت مشابهی هستند. پس کافی است تعادل یکی ازآنها را بررسی کنیم. نیروی از طرف یک الکترون به الکترون مورد نظر را با F^- نشان می‌دهیم، داریم:



$$F^- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{\left(\sqrt{3}r\right)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{3r^2}$$

چگالی هسته اتم که بار $+3e$ دارد برابر $\rho = \dfrac{3e}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ است. میدان الکتریکی ناشی از این هسته در محل الکترون را از قانون گاوس به دست می‌آوریم.

$$\oint \vec{E}.d\vec{s} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$E.4\pi r^2 = \rho\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \rho\frac{r}{3\varepsilon_0} = \frac{3e}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{r}{3\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{3er}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

بنابراین نیروی وارد از طرف هسته به الکترون، F^+، برابر است با:

$$F^+ = Ee = \frac{3e^2 r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

شرط تعادل الکترون به صورت زیر است:

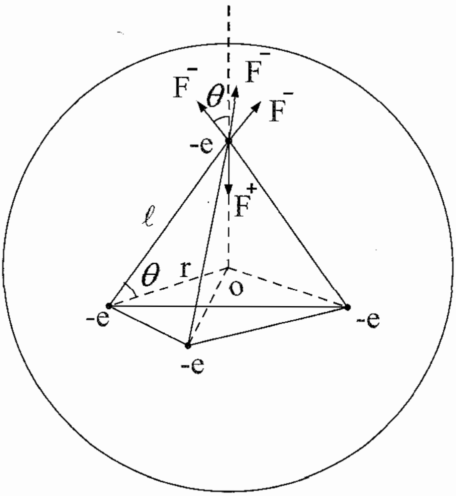
$$2F^- \cos 30^\circ = F^+ \Rightarrow \sqrt{3}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{3r^2} = \frac{3e^2 r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

$$\Rightarrow r^3 = \frac{R^3}{3\sqrt{3}}$$

بنابراین طول ضلع مثلث می‌شود:

$$\ell = \sqrt{3}r \Rightarrow \ell^3 = 3\sqrt{3}r^3 = R^3 \Rightarrow \ell = R$$

ب) به طریق مشابه قسمت (الف) در مورد F^+ داریم:



$$F^+ = Ee = \rho\frac{r}{3\varepsilon_0}e = \frac{4e}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{r}{3\varepsilon_0}e = \frac{re^2}{\pi\varepsilon_0 R^3}$$

F^- هم با توجه به $\ell = 2r\cos\theta$، که θ در شکل مشخص است، به صورت زیر است:

$$F^- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{\ell^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{4r^2\cos^2\theta}$$

شرط تعادل الکترونها این است که:

$$3F^-\cos\theta = F^+$$

$$3\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{4r^2\cos^2\theta}\cos\theta = \frac{re^2}{\pi\varepsilon_0 R^3}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{16\cos\theta} = \frac{r^3}{R^3}$$

در هر منتظم، $\cos\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$ است. بنابراین داریم:

$$\ell = 2r\cos\theta$$

$$\ell^3 = 8r^3\cos^3\theta = 8\left(\frac{3}{16\cos\theta}R^3\right)\cos^3\theta = \frac{3}{2}R^3\cos^2\theta = \frac{3}{2}R^3\frac{2}{3} = R^3$$

$$\Rightarrow \ell = R$$

۲- ابتدا ماکزیمم فاصله جسم از مرکز کره، r_m، را به دست می‌آوریم. با توجه به بقاء انرژی داریم:

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 - \frac{GMm}{r_0} = -\frac{GMm}{r_m}$$

$$\Rightarrow r_m = \frac{1}{\dfrac{1}{r_0} - \dfrac{{v_0}^2}{2GM}}$$

چون جسم از میدان جاذبه M نمی‌گریزد، انرژی کل آن منفی است یعنی $\frac{1}{2}mv_0^2 < \frac{GMm}{r_0}$ است.

یعنی مخرج کسر عبارت بدست آمده برای r_m مثبت است.

حال معادله حرکت جسم را می‌نویسیم:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$-\frac{GMm}{r^2} = m\ddot{r} \Rightarrow -\frac{GM}{r^2} = \dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr} \Rightarrow -\frac{GM}{r^2}dr = \dot{r}d\dot{r}$$

با انتگرال‌گیری از معادله اخیر به دست می‌آوریم:

$$GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_m}\right) = \frac{1}{2}\dot{r}^2 \Rightarrow \dot{r} = -\sqrt{\frac{2GM}{r_m}\left(\frac{r_m}{r} - 1\right)}$$

که در آن نقطه شروع انتگرال‌گیری را نقطه r_m که در آن سرعت صفر است، گرفته‌ایم. با انتگرال‌گیری مجدد رابطه اخیر، داریم:

$$\int_{r_m}^{r}\frac{dr}{\sqrt{\frac{r_m}{r} - 1}} = -\sqrt{\frac{2GM}{r_m}}\int_0^t dt \Rightarrow r_m\left[-\sqrt{\left(\frac{r}{r_m}\right) - \left(\frac{r}{r_m}\right)^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(2\frac{r}{r_m} - 1\right) - \frac{\pi}{4}\right]$$

$$= -\sqrt{\frac{2GM}{r_m}}t$$

زمان رسیدن به $r = R$ می‌شود:

$$T_1 = \frac{r_m}{\sqrt{\frac{2GM}{r_m}}}\left[\sqrt{\frac{R}{r_m} - \left(\frac{R}{r_m}\right)^2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2R}{r_m} - 1\right)\right]$$

از اینجا به بعد معادله نیرو تغییر می‌کند.

$$F = ma$$

$$-G\frac{M_{in}m}{r^2}=m\ddot{r}$$

که در آن M_{in} به صورت زیر است:

$$M_{in}=\frac{4}{3}\pi r^3\rho=\frac{4}{3}\pi r^3\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{Mr^3}{R^3}$$

بنابراین معادله حرکت می‌شود:

$$\frac{-GM\frac{r^3}{R^3}}{r^2}=\ddot{r}\Rightarrow -G\frac{M}{R^3}r=\ddot{r}$$

$$\Rightarrow r=A\sin(\omega t+\varphi);\omega=\sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

ثابتهای A و φ از شرایط اولیه به دست می‌آیند. لحظه‌ای که جسم به $r=R$ می‌رسد را زمان صفر می‌گیریم. بنابراین در $t=0$، $r=R$ و $\dot{r}=-v'_0$ است. مقدار v'_0 را از بقاء انرژی می‌توان به دست آورد.

$$\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{GMm}{r_0}=\frac{1}{2}mv_0'^2-\frac{GMm}{R}$$

$$\Rightarrow v'_0=\sqrt{v_0^2+2GM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_0}\right)}$$

با این شرایط اولیه داریم:

$$\begin{cases}R=A\sin\varphi\\-v'_0=A\omega\cos\varphi\end{cases}\Rightarrow \tan\varphi=-\frac{R\omega}{v'_0}\Rightarrow\varphi=\tan^{-1}\left(-\frac{R\omega}{v'_0}\right)$$

$$\Rightarrow\varphi=\pi-\tan^{-1}\left(\frac{R\omega}{v'_0}\right)$$

$$\therefore r=A\sin\left[\omega t+\pi-\tan^{-1}\left(\frac{R\omega}{v'_0}\right)\right]$$

زمان رسیدن جسم از شعاع R تا مرکز کره، T_2، می‌شود:

$$r=0\Rightarrow\omega T_2+\pi-\tan^{-1}\left(\frac{R\omega}{v'_0}\right)=\pi\Rightarrow T_2=\frac{1}{\omega}\tan^{-1}\left(\frac{R\omega}{v'_0}\right)$$

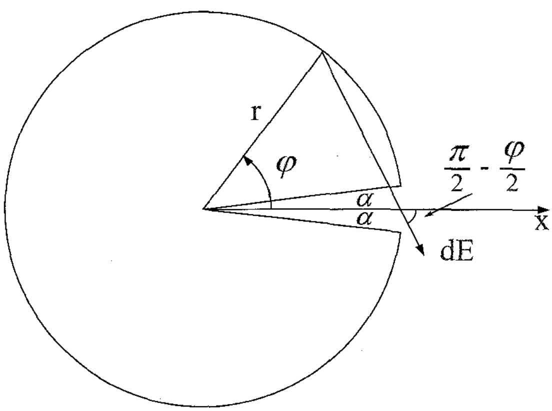
مجموع زمان T_1+T_2، برابر $\frac{1}{4}$ دوره تناوب است. بنابراین داریم:

$$T = 4\left(T_1 + T_2\right)$$

$$= 4\left[\frac{r_m}{\sqrt{\frac{2GM}{r_m}}}\left(\sqrt{\frac{R}{r_m} - \left(\frac{R}{r_m}\right)^2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2R}{r_m} - 1\right)\right) + \frac{1}{\omega}\tan^{-1}\left(\frac{R\omega}{v_0'}\right)\right]$$

که در آن $r_m = \frac{1}{\frac{1}{r_0} - \frac{v_0^2}{2GM}}$، $\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$، و $v_0' = \sqrt{v_0^2 + 2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0}\right)}$ است.

۳- الف) برای این که میدان الکتریکی حلقه را روی محیط بدست آوریم، ابتدا بخشی از حلقه را که می‌خواهیم میدان در آنجا به حساب شود را جدا می‌کنیم. زاویه مرکزی روبرو به این بخش را 2α در نظر می‌گیریم. مؤلفه میدان الکتریکی dE_x ناشی از یک عنصر بار روی حلقه در محلی که می‌خواهیم میدان را به دست آوریم، برابر است با:



$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{Q}{2\pi}d\varphi}{\left(2r\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

بقیه مؤلفه‌ها، بنا به تقارن، صفرند.

$$dE_x = \frac{Q}{32\pi^2\varepsilon_0 r^2}\frac{d\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$$\Rightarrow E_x = \frac{Q}{16\pi^2\varepsilon_0 r^2}\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha}\frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{Q}{16\pi^2\varepsilon_0 r^2}\left[\ln\left(tg\frac{\varphi}{4}\right)\right]_{\alpha}^{2\pi-\alpha}$$

$$\Rightarrow E_x = -\frac{Q}{8\pi^2\varepsilon_0 r^2}\ln\left(tg\frac{\alpha}{4}\right)$$

روشن است که در حد $\alpha \to 0$ میدان E_x به سمت $+\infty$ میل می‌کند.

ب) نیرویی که به هر عنصر حلقه وارد می‌شود را بدست می‌آوریم. زاویه مرکزی ایـن عنـصر را $2\Delta\alpha$ می‌گیریم. با توجه به قسمت (الف) داریم:

$$\Delta f = E_x\left(\frac{Q}{2\pi}\times 2\Delta\alpha\right) = \frac{Q}{\pi}E_x\Delta\alpha = -\frac{Q^2\Delta\alpha}{8\pi^3\varepsilon_0 r^2}\ln\left(tg\frac{\Delta\alpha}{4}\right)$$

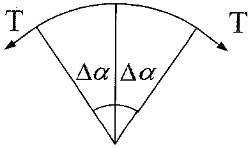
در حد $\Delta\alpha \to 0$ داریم:

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\Delta f \to -\frac{Q^2}{8\pi^3\varepsilon_0 r^2}\frac{\ln\left(\frac{\Delta\alpha}{4}\right)}{\frac{1}{\Delta\alpha}}$$

اگر از قاعده هوپیتال استفاده کنیم، عبارت اخیر بصورت زیر می‌شود.

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\Delta f \to -\frac{Q^2}{8\pi^3\varepsilon_0 r^2}\frac{\frac{1}{4}\frac{1}{\left|\frac{\Delta\alpha}{4}\right|}}{-\frac{1}{(\Delta\alpha)^2}} = \frac{Q^2\Delta\alpha}{8\pi^3\varepsilon_0 r^2}$$

همچنین نیروی کشش بقیه روی این بخش از حلقه می‌شود:



$$\Delta f' = -2T\Delta\alpha = -2k\times 2\pi(r-r_0)\Delta\alpha = -4\pi k(r-r_0)\Delta\alpha$$

بنابراین نیروی کل می‌شود:

$$\Delta F = \Delta f + \Delta f' = \left[\frac{Q^2}{8\pi^3\varepsilon_0 r^2} - 4\pi k(r - r_0)\right]\Delta\alpha$$

شعاع تعادل جایی است که $\Delta F = 0$ شود. پس:

$$\frac{Q^2}{8\pi^3\varepsilon_0 r_e^2} = 4\pi k(r_e - r_0)$$

بنابراین تا مرتبه اول نسبت به $\frac{1}{k}$ داریم:

$$r_e = r_0 + \frac{Q^2}{32\pi^4\varepsilon_0 k r_0^2}$$

توجیه: دیده می‌شود که میدان الکتریکی E_x در حد $\Delta\alpha \to 0$ بی نهایت است ولی نیروی الکتریکی $E_x\left(\frac{Q}{2\pi}2\Delta\alpha\right)$ در حد $\Delta\alpha \to 0$ به سمت صفر میل می‌کند.

ج) برای تعیین فرکانس نوسانات شعاع حلقه در نزدیکی حالت تعادل، معادله حرکت عنصری از حلقه را حول نقطه تعادل می‌نویسیم:

$$d(\Delta F)\big|_{r=re} = \frac{\partial(\Delta F)}{\partial r}\bigg|_{r=re}\delta r = \left[-\frac{Q^2}{4\pi^3\varepsilon_0 r_0^3} - 4\pi k\right]\Delta\alpha.\delta r$$

که با استفاده از قانون دوم نیوتن داریم:

$$d(\Delta F)\bigg|_{r=re} = \left(\frac{m}{2\pi}2\Delta\alpha\right)\delta\ddot{r}$$

$$\Rightarrow \delta\ddot{r} + \left[\frac{Q^2}{4\pi^2\varepsilon_0 r_e^3} + 4\pi^2 k\right]\frac{\delta r}{m} = 0$$

بنابراین تا مرتبه اول، فرکانس نوسانات می‌شود:

$$\omega^2 = \frac{Q^2}{4\pi^2\varepsilon_0 r_e^3 m} + \frac{4\pi^2 k}{m}$$

۴- با دوبار مشتق گیری از $y(t)$، نتیجه می‌شود:

$$\ddot{y} = a\left[nx^{n-1}\ddot{x} + n(n-1)x^{n-2}\dot{x}^2\right]$$

برای این که نیرو مرکزی باشد، نسبت شتابها باید همان نسبت مختصات باشد، یعنی:

$$\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}} = \frac{y}{x}$$

با جانشین کردن مقادیر $\ddot{y}$ و y در معادله اخیر به دست می‌آوریم:

$$nx^{n-1}\ddot{x} + n(n-1)x^{n-2}\dot{x}^2 = x^{n-1}\ddot{x}$$

یا

$$\ddot{x}+\frac{n\dot{x}^2}{x}=0$$

اگر این عبارت را در f(x) ضرب کنیم، نتیجه می‌شود

$$\ddot{x}f(x)+n\dot{x}^2 f(x)/x=0$$

یا

$$\frac{d}{dt}\left[\dot{x}f_{(x)}\right]+\left\{\left[nf(x)/x\right]-f'(x)\right\}\dot{x}^2=0$$

برای این که طرف چپ، مشتق چیزی باشد، کافی است ضریب $\dot{x}^2$ صفر باشد. از این جا

$$f'(x)=\frac{nf(x)}{x}$$

پس

$$f(x)=Cx^n$$

به این ترتیب با این f(x) داریم:

$$\frac{d}{dt}\left[\dot{x}f(x)\right]=0\Rightarrow\frac{d}{dt}\left[C\dot{x}x^n\right]=0$$
$$\Rightarrow \dot{x}x^n=C'$$

یا

$$x^{n+1}=C''(t-t_0)$$
$$\Rightarrow x(t)=C'''(t-t_0)^{\frac{1}{n+1}}$$

که در آن C، C'، C''، و C''' ثابت هستند.

پاسخ سؤال‌های امتحان نهایی المپیاد فیزیک ـ چهاردهمین دوره ـ تابستان ۸۰

۱- **الف)** معادله دیفرانسیل حرکت گلوله می‌شود:

$$m\ddot{y} = -mg + m\alpha\dot{y}^2 \qquad \text{(I)}$$

بسط تا مرتبه اول نسبت به α به صورت زیر است.

$$y = y_0 + y_1\alpha$$

که در آن y_0 و y_1 توابعی از t هستند.
معادله دیفرانسیل تا مرتبه صفر نسبت به α می‌شود:

$$\ddot{y} = -g \Rightarrow y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + h \qquad \text{(II)}$$

اگر y را تا مرتبه اول نسبت به α بنویسیم، داریم:

$$\dot{y} = \dot{y}_0 + \dot{y}_1\alpha \Rightarrow \dot{y}^2 = \dot{y}_0^2 + 2\alpha\dot{y}_0\dot{y}_1 + \alpha^2\dot{y}_1^2$$

و

$$\ddot{y} = \ddot{y}_0 + \ddot{y}_1\alpha$$

با جانشین کردن این روابط در معادله (I) و حفظ جملات تا مرتبه اول نسبت به α، به دست می‌آوریم:

$$\ddot{y}_0 + \ddot{y}_1\alpha = -g + \alpha\dot{y}_0^2$$

حال با استفاده از رابطه (II)، معادله اخیر می‌شود:

$$-g + \ddot{y}_1\alpha = -g + \alpha g^2t^2 \Rightarrow \ddot{y}_1 = g^2t^2 \Rightarrow y_1 = \frac{g^2t^4}{12}$$

بنابراین جواب y تا مرتبه اول نسبت به α می‌شود:

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{12}\alpha g^2t^4 \qquad \text{(III)}$$

ب) T_0 مرتبه صفر است. پس برای $\left(T - T_0\right)/T_0$ تا مرتبه اول، کافی است T را تا مرتبه اول به دست آوریم.

$$T = T_0 + \alpha T_1$$

این T را در معادله (III) می‌گذاریم.

$$0 = h - \frac{1}{2}gT^2 + \frac{1}{12}\alpha g^2T^4$$

تا مرتبه صفر، جواب معادله برای T به صورت $T_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ است. تا مرتبه اول جواب می‌شود:

$$h = \frac{1}{2}g\left(T_0 + \alpha T_1\right)^2 - \frac{1}{12}\alpha g^2T_0^4$$

$$h = \frac{1}{2}g\left(T_0^2 + 2\alpha T_0T_1 + O(2)\right) - \frac{1}{12}\alpha g^2T_0^4$$

که در آن $O(2)$ جمله مرتبه دوم یا بالاتر نسبت به α است که از آن چشم می‌پوشیم. پس

$$h=\frac{1}{2}gT_0^2+g\alpha T_0T_1-\frac{1}{12}\alpha g^2T_0^4$$

اگر قرار دهیم $T_0=\sqrt{\frac{2h}{g}}$، معادله اخیر به صورت زیر ساده می‌شود:

$$g\alpha T_0T_1=\frac{1}{12}\alpha g^2T_0^4\Rightarrow T_1=\frac{1}{12}gT_0^3\Rightarrow T_1=\frac{1}{12}g\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}}$$

بنابراین T می‌شود:

$$T=T_0+\alpha T_1=\sqrt{\frac{2h}{g}}+\frac{1}{12}\alpha g\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}}$$

و همچنین

$$\frac{T-T_0}{T_0}=\frac{\alpha T_1}{T_0}=\frac{\frac{1}{12}\alpha g\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{6}\alpha h$$

ج) برای تعیین $H=y(T_0)$ از معادله (III) استفاده می‌کنیم.

$$H=h-\frac{1}{2}gT_0^2+\frac{1}{12}\alpha g^2T_0^4$$

$$H=h-\frac{1}{2}g\left(\frac{2h}{g}\right)+\frac{1}{12}\alpha g^2\left(\frac{2h}{g}\right)^2\Rightarrow H=\frac{1}{3}\alpha h^2$$

د) اختلاف زمان رسیدن این دو گلوله به زمین، ΔT، را به طریق زیر به دست می‌آوریم:

$$\Delta T=T(2)-T(1)=\left(T_0+\frac{1}{12}\alpha_2gT_0^3\right)-\left(T_0+\frac{1}{12}\alpha_1gT_0^3\right)$$

$$\Delta T=\frac{1}{12}gT_0^3\left(\alpha_2-\alpha_1\right)$$

با مقادیر داده شده $\alpha_1=10^{-3}\frac{kg}{m^3}$، $\alpha_2=2\times10^{-3}\frac{kg}{m^3}$ است. ازاین جا

$$\Delta T\approx 0.03S$$

همچنین در نزدیکی زمین می‌توان ارتفاعی که هر یک در زمان T_0 دارند در نظر گرفت.

$$\begin{cases} H_1 = \dfrac{1}{3}\alpha_1 h^2 \\ H_2 = \dfrac{1}{3}\alpha_2 h^2 \end{cases} \Rightarrow \Delta H = H_2 - H_1 = \frac{1}{3}(\alpha_2 - \alpha_1)h^2 = 80\text{cm}$$

ه) در این حالت داریم:

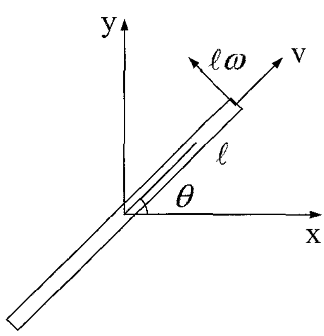
$$\Delta T = \frac{1}{12} g T_0^3 (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{1}{12} g T_0^3 \left(\frac{\rho'}{\rho_1 R} - \frac{\rho'}{\rho_2 R}\right)$$

$$\Delta T = \frac{1}{12} g T_0^3 \frac{\rho'}{R}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right) = 0.3\text{S}$$

و

$$\Delta H = \frac{1}{3} h^2 (\alpha_2 - \alpha_1) = 7\text{m}$$

۲- الف) چون شتاب زاویه‌ای آب پاش ثابت است داریم:



$$\omega = \alpha t \qquad , \qquad \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

سرعت آب خروجی از انتهای لوله برآیند دو سرعت v و $\ell\omega$ است که در آن v در جهت شعاعی و $\ell\omega$ مماسی است. بنابراین مؤلفه‌های سرعت در دستگاه دکارتی می‌شود

$$\begin{cases} v_x = v\cos\theta - \alpha t\ell\sin\theta \\ v_y = v\sin\theta + \alpha t\ell\cos\theta \end{cases}$$

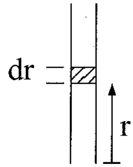
پس قطره‌ای که در زمان t از سر آب پاش خارج شده در زمان t_0 در مکان زیر است.

$$x = \ell\cos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) + \left[v\cos\left(\frac{\alpha t^2}{2}\right) - \alpha t\ell\sin\left(\frac{\alpha t^2}{2}\right)\right](t_0 - t)$$

$$y=\ell\sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)+\left[v\sin\left(\frac{\alpha t^2}{2}\right)+\alpha t\ell\cos\left(\frac{\alpha t^2}{2}\right)\right](t_0-t)$$

ب) با گذشت زمان اندازه سرعت قطرات خروجی زیاد می‌شود بنابراین زمانی می‌رسد که به قطرات قبلی می‌رسند.

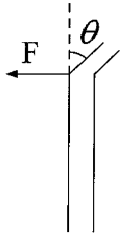
ج) چون سرعت زاویه‌ای به مقدار حدی میل می‌کند، مقدار این حد را ω می‌گیریم که ثابت است. در وضعیت تعادل مجموع گشتاورهای وارد شده به لوله باید صفر شود. گشتاوری که از طرف لوله به آب داخل آن وارد می‌شود برابر است با:



$$\tau=2\int_0^\ell r\,dF=2\int_0^\ell r\left(2\dot{r}\dot{\theta}dm\right)=4\int_0^\ell r\left(v\omega\rho A dr\right)=2\rho Av\omega\ell^2$$

که در آن A سطح مقطع لوله است. بنابراین گشتاوری که از حرکت آب به لوله وارد می‌شود در جهت عکس چرخش لوله است.

همچنین گشتاوری که آب خروجی از انتهای لوله خمیده، به لوله وارد می‌کند برابر است با:



$$\ell F=\ell\frac{dp}{dt}=\ell\left(\rho Av\right)\left(v\sin\theta\right)=\ell\rho Av^2\sin\theta$$

چون از دو طرف آب خارج می‌شود و جهت گشتاورهای ناشی از آنها یکسان است، مقدار گشتاور اخیر دو برابر می‌شود. پس داریم:

$$\sum\tau=0$$

$$2\rho Av^2\ell\sin\theta-2\rho Av\omega\ell^2-\beta\omega=0$$

از آنجا به دست می‌آوریم.

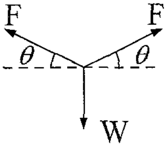
$$\omega=\frac{2\rho Av^2\ell\sin\theta}{2\rho Av\ell^2+\beta}$$

۳- الف) α زاویه میله‌ها با افق در نبود وزنه W و θ زاویه میله‌ها با افق با وجود وزنه است. چون فاصله دیوارها ثابت است داریم:

$$\ell(\theta)=\frac{\ell\cos\alpha}{\cos\theta}=\ell\frac{1-\frac{\alpha^2}{2}}{1-\frac{\theta^2}{2}}=\ell\left(1-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\theta^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta\ell=\frac{\ell}{2}\left(\alpha^2-\theta^2\right)$$

که در آن تا اولین مرتبه غیر صفر نسبت به α و θ حفظ شده است. دیاگرام آزاد جسم W مطابق شکل (۱) است. در وضعیت تعادل داریم:



شکل ۱

$$W=2F\sin\theta=2k\Delta\ell\sin\theta=2k\frac{\ell}{2}\left(\alpha^2-\theta^2\right)\theta$$

$$\Rightarrow W=k\ell\left(\alpha^2\theta-\theta^3\right)$$

که در آن از $\sin\theta\approx\theta$ استفاده کرده ایم. ماکزیمم W را حساب می‌کنیم.

$$\frac{dW}{d\theta}=0\Rightarrow\alpha^2-3\theta^2=0\Rightarrow\theta=\frac{\alpha}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore W_{max}=k\ell\left[\alpha^2\frac{\alpha}{\sqrt{3}}-\frac{\alpha^3}{3\sqrt{3}}\right]=\frac{2}{3\sqrt{3}}k\ell\alpha^3$$

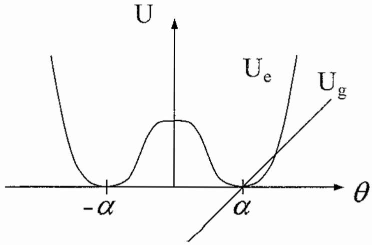
ب) انرژی پتانسیل وزنه بر حسب θ به صورت $U_g=W\ell\cos\alpha\left(tg\theta-tg\alpha\right)$ است که مبدأ پتانسیل در $\theta=\alpha$ است. تا اولین مرتبه غیر صفر می‌شود:

$$U_g=W\ell\left(\theta-\alpha\right)$$

انرژی پتانسیل میله‌ها هم $U_e=2\times\frac{1}{2}k\Delta\ell^2$ است که با جانشین کردن $\Delta\ell$ در آن به دست می‌آوریم:

$$U_e=k\frac{\ell^2}{4}\left(\alpha^2-\theta^2\right)^2$$

نمودار U_g و U_e هم به صورت شکل (۲) است.

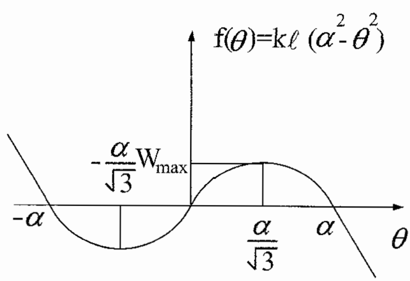


شکل ۲

ج) انرژی پتانسیل کل سیستم بصورت $U = W\ell(\theta-\alpha)+k\frac{\ell^2}{4}(\alpha^2-\theta^2)^2$ است. نقاط تعادل می‌شوند:

$$\frac{dU}{d\theta} = 0 \Rightarrow W\ell - k\ell^2\theta(\alpha^2-\theta^2) = 0$$
$$\Rightarrow W = k\ell\theta(\alpha^2-\theta^2)$$

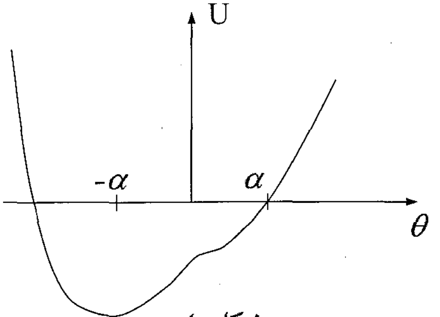
جواب‌های رابطه اخیر را می‌توان با روش ترسیم به دست آورد. سمت چپ این رابطه همواره مثبت است (وزن مثبت است). نمودار عبارت سمت راست رابطه هم به صورت شکل (۳) است.



شکل ۳

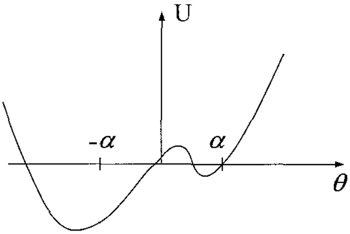
روشن است که قسمت مثبت $f(\theta)$ در شکل (۳) قابل قبول است. حال اگر $W > W_{max} = \frac{2}{3\sqrt{3}}k\ell\alpha^3$ باشد، تنها یک جواب داریم که تعادل پایدار است. اگر $W < W_{max} = \frac{2}{3\sqrt{3}}k\ell\alpha^3$ سه نقطه تعادل داریم که دو نقطه آن تعادل پایدار است.

د) از شکل (۳) روشن است که در این وضعیت $\frac{dU}{d\theta}$ در $\theta < 0$ دارای مقدار صفر است. نمودار U در این وضعیت بصورت شکل (۴) است.

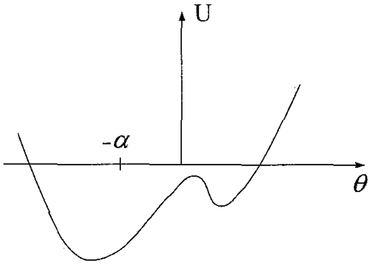


شکل ٤

ه) در حالی که سیستم حول نقطه تعادل اول $(\theta > 0)$ نوسان می‌کند، نمودار انرژی پتانسیل به صورت شکل (۵) و وقتی از $\theta = 0$ رد می‌شود و به نقطه تعادل دوم می‌رسد به صورت شکل (۶) است.



شکل ٥



شکل ٦

و) برای این که سیستم از نقطه تعادل پایدار اول بگذرد باید انرژی پتانسیل مطابق شکل (۶) در $0 \leq \theta < \alpha$ همواره منفی باشد، پس

$$U(0<\theta<\alpha)<0 \Rightarrow W\ell(\theta-\alpha)+\frac{k\ell^2}{4}\left(\alpha^2-\theta^2\right)^2<0$$

$$U=\frac{k\ell^2}{4}(\theta-\alpha)\left[\left(\theta^2-\alpha^2\right)(\theta+\alpha)+\frac{4W}{k\ell}\right]<0$$

$(\theta-\alpha)$ در محدوده مورد نظر همواره منفی است. پس شرط مورد نظر به این منجر می‌شود که عبارت داخل کروشه مثبت باشد یعنی

$$A=\left(\theta^2-\alpha^2\right)(\theta+\alpha)+\frac{4W}{k\ell}>0$$

اگر می‌نیمم عبارت A مثبت باشد همواره A هم مثبت است. پس می‌نیمم A را در نظر می‌گیریم.

$$\frac{dA}{d\theta}=0 \Rightarrow 3\theta^2+2\alpha\theta-\alpha^2=0 \Rightarrow \begin{cases}\theta=\frac{1}{3}\alpha \\ \theta=-\alpha\end{cases}$$

چون محدوده $0<\theta<\alpha$ مورد نظر است پس جواب $\theta=\frac{1}{3}\alpha$ قابل قبول است. داریم:

$$\min[A]=\left(\frac{\alpha^2}{9}-\alpha^2\right)\left(\frac{\alpha}{3}+\alpha\right)+\frac{4W}{k\ell}>0\Rightarrow W>\frac{8}{27}k\ell\alpha^3$$

همچنین باید $U(\theta=0)<0$ باشد. با این شرط داریم:

$$U(\theta=0)<0\Rightarrow -W\ell\alpha+\frac{k\ell^2}{4}\alpha^4<0\Rightarrow W>\frac{1}{4}k\ell\alpha^3$$

در $\theta=\alpha$ هم $U(\theta)=0$ است. بنابراین اگر $W>\frac{8}{27}k\ell\alpha^3$ باشد تمام شرایط برای گذشتن از نقطه تعادل پایدار اول فراهم است.

ز) با استفاده از مشتق دوم گرفتن از U_e بدست می‌آید که مجذور فرکانس با $k\ell^2(3\theta_S{}^2-\alpha^2)$ رابطه مستقیم دارد که در این رابطه θ_S زاویه تعادل است. و می‌دانیم که در نقطه تعادل دوم $\theta_S>\alpha$ است حال آنکه در نقطه تعادل اول $\theta_S<\alpha$.

$$\Rightarrow k\ell^2(3\theta_2{}^2-\alpha^2)>k\ell^2(3\theta_1{}^2-\alpha^2)\Rightarrow\omega_2>\omega_1$$

۴- الف) صفحه‌ای به موازات صفحه x-y در نظر بگیرید که میله ۲ بر روی آن قرار دارد. فاصله هر نقطه بر روی این صفحه را تا مرکز میله با δ و زاویه آن را با محور y با θ نمایش می‌دهیم. در این صورت اگر پتانسیل ناشی از میله ۱ را بر روی نقطه دلخواهی بر روی این صفحه را با φ_1 نمایش دهیم، داریم که:

$$\varphi_1=\int_{-\ell}^{+\ell}\frac{\lambda d\ell'}{4\pi\varepsilon_0(h^2+(\ell'-\delta\cos\theta)^2+(\delta\sin\theta)^2)^{\frac{1}{2}}}=$$

$$\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 h}\int_{-\ell}^{+\ell}\left(1+\frac{(\ell'-\delta\cos\theta)^2+(\delta\sin\theta)^2}{h^2}\right)^{-\frac{1}{2}}d\ell'=$$

$$\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 h}\int_{-\ell}^{+\ell}\left(1+\frac{\ell'^2+\delta^2-2\delta\ell'\cos\theta}{h^2}\right)^{-\frac{1}{2}}d\ell'$$

که اگر آن را تا اولین مرتبه غیر صفر نسبت به $\cos\theta$ بنویسیم، داریم که: (سایر جملات قبل یا بعد از انتگرال گیری صفر می‌شوند و یا تابعیت θ ندارند.)

$$\varphi_1=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 h}\left(\frac{\delta^2\ell^3}{h^4}\right)\cos^2\theta+F'$$

که F' شامل جملاتی است که تابعیت θ ندارند.

همچنین تابع پتانسیل ناشی از بار $-q$ در نقطه $\vec{\delta}$ می‌شود:

$$\varphi_2(\delta,\theta,h)=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\left(h^2+\delta^2\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 h}\left(1-\frac{\delta^2}{2h^2}+\frac{3}{8}\frac{\delta^4}{h^4}+\dots\right)$$

که تابعیتی از θ ندارد. پتانسیل کل مجموع $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$ است. برای تعیین انرژی پتانسیل سیستم باید $\int\varphi dq'$ را روی میله ۲ بدست آوریم. چون جمله مربوط به $\cos\theta$ برایمان مهم است، تنها این جمله را در نظر می‌گیریم.

$$U=\int_{-\ell}^{\ell}\left(\frac{\lambda\ell^3}{4\pi\varepsilon_0 h^5}\delta^2\cos^2\theta\right)\lambda' d\delta=\frac{\lambda\lambda'\ell^3\cos^2\theta}{4\pi\varepsilon_0 h^5}\frac{2\ell^3}{3}=\frac{\frac{q}{2\ell}\frac{q'}{2\ell}\ell^3\cos^2\theta}{4\pi\varepsilon_0 h^5}\frac{2\ell^3}{3}$$

$$\therefore U=\frac{qq'\ell^4}{24\pi\varepsilon_0 h^5}\cos^2\theta$$

با مشتق‌گیری از U نسبت به θ نقاط تعادل را پیدا می‌کنیم.

$$\frac{dU}{d\theta}=0$$

$$\Rightarrow\cos\theta\sin\theta=0\Rightarrow\theta=0,\frac{\pi}{2}$$

برای تعیین پایداری و ناپایداری نقاط به دست آمده از مشتق دوم U استفاده می‌کنیم.

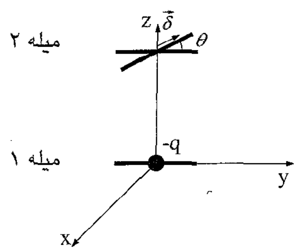
$$\frac{d^2U}{d\theta^2}=\frac{-qq'\ell^4}{12\pi\varepsilon_0 h^5}\cos 2\theta$$

در $\theta=0$، به ازای $qq'>0$، مشتق دوم U منفی است و تعادل ناپایدار است، و به ازای $qq'<0$ تعادل پایدار خواهد بود.

در $\theta=\frac{\pi}{2}$، بر عکس خواهد شد، یعنی به ازای $qq'>0$ تعادل پایدار و به ازای $qq'<0$ تعادل ناپایدار می‌شود. بنابراین در وضعیتهای تعادل پایدار فرکانس نوسانات کوچک می‌شود:

$$\omega^2=\frac{1}{I}\frac{d^2U}{d\theta^2}=\frac{|qq'|\ell^4}{12\pi\varepsilon_0 h^5 I}$$

ب) اگر میله ۲ حول محور گذرنده از مرکز میله ۲ و به موازات محور x به اندازه θ دوران کند، بردار $\vec{\delta}$ به صورت زیر می‌شود:



$$\vec{\delta}=\delta\cos\theta\hat{y}+\delta\sin\theta\hat{z}$$

پتانسیل ناشی از میله ۱ در محل $\vec{\delta}$ می‌شود:

$$\varphi_1=\int_{-\ell}^{\ell}\frac{\lambda dy}{4\pi\varepsilon_0\left|h\hat{z}+\delta\cos\theta\hat{y}+\delta\sin\theta\hat{z}-y\hat{y}\right|}$$

$$=\int_{-\ell}^{\ell}\frac{\lambda dy}{4\pi\varepsilon_0 h}\left[1+\left(\frac{\delta}{h}\right)^2+\left(\frac{y}{h}\right)^2-\frac{2y\delta}{h^2}\cos\theta+\frac{2\delta}{h}\sin\theta\right]^{\frac{-1}{2}}$$

$$=\int_{-\ell}^{\ell}\frac{\lambda dy}{4\pi\varepsilon_0 h}\left[\begin{array}{l}1-\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{h^2}-\frac{1}{2}\frac{y^2}{h^2}+\frac{y\delta\cos\theta}{h^2}-\frac{\delta}{h}\sin\theta+\\ \frac{3}{8}\left(\begin{array}{l}\frac{\delta^4}{h^4}+\frac{y^4}{h^4}+\frac{4y^2\delta^2}{h^4}\cos^2\theta+\frac{4\delta^2}{h^2}\sin^2\theta+\frac{2\delta^2y^2}{h^4}-\frac{4\delta^3y}{h^4}\cos\theta\\ +\frac{4\delta^3}{h^3}\sin\theta-\frac{4y^3\delta\cos\theta}{h^4}+\frac{4\delta y^2}{h^3}\sin\theta-\frac{8y\delta^2}{h^3}\sin\theta\cos\theta\end{array}\right)\\ -\frac{5}{16}\left(\frac{\delta^2}{h^2}+\frac{y^2}{h^2}-\frac{2y\delta}{h^2}\cos\theta+\frac{2\delta}{h}\sin\theta\right)^3+\ldots\end{array}\right]$$

چون برای انرژی پتانسیل بعداً روی δ هم انتگرال‌گیری می‌شود باید عباراتی که شامل زاویه θ و توابع زوجی از δ و y هستند را در نظر بگیریم تا صفر نشوند. بنابراین در این مرحله جملاتی که زاویه θ ندارند و یا تابع فردی از δ یا y هستند را کنار می‌گذاریم. مابقی تابع φ_1 را که برای ما مهم است را با φ_1' نشان می‌دهیم. داریم که φ_1 به صورت زیر است.

$$\varphi_1'=\int_{-\ell}^{\ell}\frac{\lambda dy}{4\pi\varepsilon_0 h}\left\{\frac{3}{8}\times 4\frac{\delta^2}{h^2}\left[\frac{y^2}{h^2}\cos^2\theta+\sin^2\theta\right]-\frac{15}{4}\sin^2\theta\left(\frac{\delta^4+y^2\delta^2}{h^4}\right)\right\}$$

که از جملات مرتبه بالاتر نیز صرف نظر شده است. حال تابع پتانسیل φ_2 ناشی از بار نقطه‌ای $-q$ در محل $\vec{\delta}$ را تعیین می‌کنیم.

$$\varphi_2=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\left|h\hat{z}+\delta\cos\theta\hat{y}+\delta\sin\theta\hat{z}\right|}$$

$$=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 h}\left[\begin{array}{l}1-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2}{h^2}+2\frac{\delta}{h}\sin\theta\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{\delta^2}{h^2}+2\frac{\delta}{h}\sin\theta\right)^2\\ -\frac{5}{16}\left(\frac{\delta^2}{h^2}+2\frac{\delta}{h}\sin\theta\right)^3+\frac{35}{128}\left(\frac{\delta^2}{h^2}+2\frac{\delta}{h}\sin\theta\right)^4+\ldots\end{array}\right]$$

در φ_2 هم جملات مستقل از θ را کنار می‌گذاریم. همچنین اگرجمله‌ای تابع فرد δ است آن را هم کنار می‌گذاریم. آنچه باقی می‌ماند را با φ_2' نشان می‌دهیم.

$$\varphi_2' = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 h}\times\left(\frac{3}{8}\frac{4\delta^2}{h^2}\sin^2\theta - \frac{5}{16}\times 3\frac{\delta^2}{h^2}\left(2\frac{\delta}{h}\sin\theta\right)^2 + \frac{35}{128}\times\left(2\frac{\delta}{h}\sin\theta\right)^4\right) =$$

$$\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 h}\times\left(\frac{3}{2}\frac{\delta^2}{h^2}\sin^2\theta - \frac{15}{4}\frac{\delta^4}{h^4}\sin^2\theta + \frac{35}{8}\times\frac{\delta^4}{h^4}\sin^4\theta\right)$$

حال مجموع $\varphi_1' + \varphi_2'$ را در نظر می‌گیریم.

$$\varphi = \varphi_1' + \varphi_2' = \left\{\int_{-\ell}^{\ell}\frac{\lambda dy}{4\pi\varepsilon_0 h}\frac{3}{2}\frac{\delta^2}{h^2}\left[\frac{y^2}{h^2}\cos^2\theta + \sin^2\theta\right] - \frac{15}{4}\sin^2\theta\left(\frac{\delta^4 + y^2\delta^2}{h^4}\right)\right\}$$

$$-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 h}\left(\frac{3}{2}\frac{\delta^2}{h^2}\sin^2\theta - \frac{15}{4}\frac{\delta^4}{h^4}\sin^2\theta + \frac{35}{8}\times\frac{\delta^4}{h^4}\sin^4\theta\right)$$

انتگرال $\int_{-\ell}^{\ell}\lambda dy = q$ است. بنابراین داریم.

$$\varphi = \int_{-\ell}^{\ell}\frac{\lambda dy}{4\pi\varepsilon_0 h}\left\{\frac{3}{2}\frac{\delta^2 y^2}{h^4}\cos^2\theta - \frac{15}{4}\sin^2\theta\left(\frac{\delta^4 + y^2\delta^2}{h^4}\right)\right\}$$

$$-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 h}\left(-\frac{15}{4}\frac{\delta^4}{h^4}\sin^2\theta + \frac{35}{8}\times\frac{\delta^4}{h^4}\sin^4\theta\right) =$$

$$\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 h^5}\left\{\delta^2\ell^3\cos^2\theta - \frac{15}{4}\sin^2\theta\left(2\ell\delta^4 + \frac{2}{3}\ell^3\delta^2\right)\right\}$$

$$+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 h}\left(\frac{15}{4}\frac{\delta^4}{h^4}\sin^2\theta - \frac{35}{8}\times\frac{\delta^4}{h^4}\sin^4\theta\right) =$$

انرژی پتانسیل هم می‌شود:

$$U = \int_{-\ell}^{\ell}\varphi dq' = \frac{\lambda\lambda'\ell^6}{6\pi\varepsilon_0 h^5}\left(1\text{-}8\sin^2\theta\right) + \frac{q\lambda'\ell^5}{4\pi\varepsilon_0 h^5}\left(\frac{3}{2}\sin^2\theta - \frac{7}{4}\sin^4\theta\right) =$$

$$\frac{qq'\ell^4}{24\pi\varepsilon_0 h^5}\left(1\text{-}\frac{7}{2}\sin^2\theta - \frac{21}{4}\sin^4\theta\right)$$

که در آن از $dq' = \lambda' d\delta$ استفاده شده است.

نقاط تعادل با مشتق‌گیری از U نسبت به θ به دست می‌آید.

$$\frac{dU}{d\theta} = \frac{qq'\ell^4}{24\pi\varepsilon_0 h^5}(-7\sin\theta\cos\theta - 21\sin^3\theta\cos\theta) = \frac{-7qq'\ell^4}{24\pi\varepsilon_0 h^5}\sin\theta\cos\theta(1 + 3\sin^2\theta)$$

$$\Rightarrow \sin 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \cos 2\theta = 1$$

تعادل پایدار و ناپایدار هم با علامت $\frac{d^2U}{d\theta^2}$ مشخص می‌شود.

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = \frac{-7qq'\ell^4}{24\pi\varepsilon_0 h^5}\left(\cos 2\theta(1+3\sin^2\theta) + \frac{3}{2}\sin^2 2\theta\right)$$

در $\theta = 0$، اگر $qq' > 0$ باشد، تعادل ناپایدار است و اگر $qq' < 0$ باشد، تعادل پایدار است.

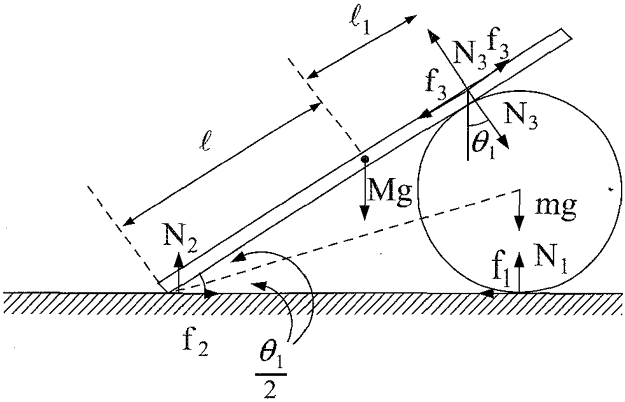
در $\theta = \frac{\pi}{2}$، اگر $qq' > 0$ باشد، تعادل پایدار و اگر $qq' < 0$ باشد، تعادل ناپایدار است.

بنابراین در وضعیتهای تعادل پایدار فرکانس نوسانات کوچک می‌شود:

$$\omega^2 = \frac{1}{I}\frac{d^2U}{d\theta^2} = \frac{7|qq'|\ell^4}{24\pi\varepsilon_0 h^5 I} \qquad \theta = 0$$

$$\omega^2 = \frac{1}{I}\frac{d^2U}{d\theta^2} = \frac{7|qq'|\ell^4}{24\pi\varepsilon_0 h^5 I}\times 4 \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

۵- الف) نیروهای وارد به دیسک و میله مطابق شکل است.



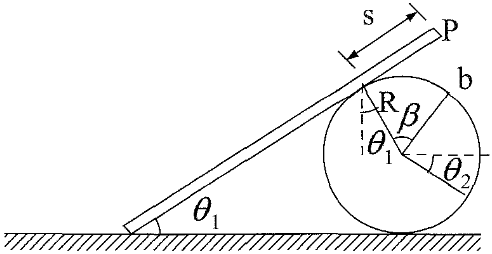
معادلات حرکت عبارتند از:

$$\begin{cases} N_1 + N_2 = Mg + mg \\ f_1 = f_2 \\ \left(N_1 - mg\right)R\sin\theta_1 = f_1 R\left(1+\cos\theta_1\right) \\ -Mg\ell_1\cos\theta_1 + N_2\left(\ell+\ell_1\right)\cos\theta_1 = f_2\left(\ell+\ell\right)\sin\theta_1 \end{cases}$$

همچنین از روی شکل روشن است که $tg\frac{\theta_1}{2} = \frac{R}{\ell+\ell_1}$ است. با توجه بـه معـادلات نوشـتـه شـده بـه دست می‌آوریم:

$$f_1 = Mg\frac{\ell}{R}\cos\theta_1 tg^2\frac{\theta_1}{2}$$

ب) از روی شکل روشن است که:



$$R + R\cos\theta_1 = (2\ell\text{-}S)\sin\theta_1$$

همچنین شرط نلغزیدن میله روی دیسک این است که

$$S = R\beta = R(\theta_1 + \theta_2 - \alpha)$$

بنابراین داریم:

$$R(1+\cos\theta_1) = \left[2\ell\text{-}R(\theta_1 + \theta_2 - \alpha)\right]\sin\theta_1$$

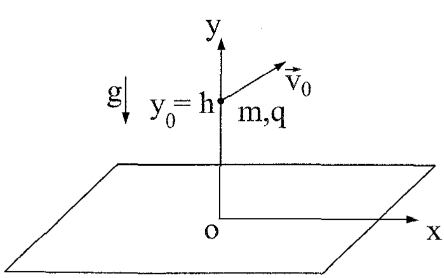
با مشتق گیری به دست می‌آوریم:

$$-R\dot{\theta}_1\sin\theta_1 = -R(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\sin\theta_1 + \left[2\ell\text{-}R(\theta_1+\theta_2-\alpha)\right]\dot{\theta}_1\cos\theta_1$$

$$\Rightarrow R\dot{\theta}_2\sin\theta_1 = \left[2\ell + R\alpha - R(\theta_1+\theta_2)\right]\dot{\theta}_1\cos\theta_1$$

$$\therefore \frac{\dot{\theta}_1}{\dot{\theta}_2} = \frac{R\sin\theta_1}{\left[2\ell + R\alpha - R(\theta_1+\theta_2)\right]\cos\theta_1}$$

۶- الف) به جای صفحه رسانای بی نهایت می‌توان بار تصویری $q-$ را در فاصله $y-$ قرار داد. همچنین چون در راستای x نیرویی به بار qوارد نمی‌شود، می‌توان حرکت در راستای x را در نظر نگرفت و $v_{x_0} = 0$ گرفت. بنابراین حرکت را در جهت y می‌گیریم. با استفاده از بقاء انرژی داریم:



$$\frac{1}{2}mv_{y_0}^2-\frac{kq^2}{4h}+mgh=-\frac{kq^2}{4y_{max}}+mgy_{max}$$

برای سادگی تعریف می‌کنیم $A=\frac{1}{2}mv_{y_0}^2$، $B=\frac{k}{4h}$، و $C=\frac{k}{4}$. همچنین تا اولین مرتبه غیر صفر q می‌نویسیم:

$$y_{max}=y(0)+y(1)$$

بنابراین داریم:

$$A-Bq^2=-C\frac{q^2}{y(0)+y(1)}+mg\left(y(0)+y(1)-h\right)$$

$$A-Bq^2=-\frac{Cq^2}{y(0)}\left[1-\frac{y(1)}{y(0)}\right]+mg\left(y(0)+y(1)-h\right) \qquad \text{(I)}$$

اگر تا مرتبه صفرم می‌نوشتیم داشتیم $A=mg\left(y(0)-h\right)$. پس معادله (I) می‌شود:

$$-Bq^2=\frac{-Cq^2}{y(0)}+\frac{Cq^2y(1)}{y(0)}+mgy(1)$$

جمله دوم سمت راست، $\frac{Cq^2y(1)}{y(0)}$، از مرتبه بالاتر از اولین تقریب غیر صفر است. پس از حذف آن داریم:

$$y(1)=\frac{q^2}{mg}\left(\frac{C}{y(0)}-B\right)$$

$$\therefore y_{max}=y(0)+y(1)=\left(h+\frac{v_{y_0}^2}{2g}\right)+\frac{q^2}{mg}\left(\frac{\frac{k}{4}}{h+\frac{v_{y_0}^2}{2g}}-\frac{k}{4h}\right)$$

ب) می‌توان سرعت اولیه را صفر گرفت. بنابراین داریم:

$$E_0=\frac{1}{2}mv^2+U(y)\Rightarrow v=-\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_0-U(y)\right)}$$

علامت منفی به خاطر سقوط جسم است. مبداء پتانسیل گرانشی را صفحه رسانا می‌گیریم، پس

$$\frac{dy}{dt}=-\sqrt{\frac{2}{m}}\left[-k\frac{q^2}{4h}+mgh-mgy+\frac{kq^2}{4y}\right]^{\frac{1}{2}}$$

با انتگرال‌گیری داریم:

$$-\sqrt{\frac{2}{m}}t=\int\frac{dy}{\left[\frac{kq^2}{4}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{h}\right)+mg\left(h-y\right)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$-\sqrt{\frac{2}{m}}t=\int\frac{dy}{\sqrt{mg\left(h-y\right)}}\left[1-\frac{1}{8}\frac{kq^2\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{h}\right)}{mg\left(h-y\right)}\right]$$

$$-\sqrt{\frac{2}{m}}t=\frac{1}{\sqrt{mg}}\int_h^0\frac{dy}{\sqrt{h-y}}-\frac{kq^2}{8\left(mg\right)^{\frac{3}{2}}}\int_h^0\frac{dy}{hy\sqrt{h-y}}$$

$$-\sqrt{\frac{2}{m}}t=\frac{-2}{\sqrt{mg}}\sqrt{h-y}\Big|_h^0-\frac{kq^2}{8\left(mg\right)^{\frac{3}{2}}h^{\frac{3}{2}}}\ln\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{y}{h}}}{1+\sqrt{1-\frac{y}{h}}}\right)\Bigg|_h^{\varepsilon}$$

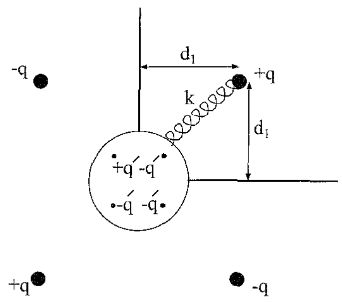
که در آن به دلیل بی نهایت شدن لگاریتم در $y=0$ در نظر گرفته‌ایم $\frac{y}{h}=\varepsilon\ll 1$.

$$-\sqrt{\frac{2}{m}}t=-2\sqrt{\frac{h}{mg}}-k\frac{q^2}{8\left(mgh\right)^{\frac{3}{2}}}\ln\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$$

$$\therefore t=\sqrt{\frac{2h}{g}}+\frac{kq^2\ln\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)}{8\left(mgh\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{2}{m}}}$$

بُرد جسم هم از $R=v_{x_0}t$ محاسبه می‌شود، که t از رابطه آخری که تعیین کردیم به دست می‌آید.

۷- الف) بارهای تصویری مطابق شکل است. در حالت تعادل داریم:



$$k\left(d_0-d_1\right)\sqrt{2}=$$

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\sqrt{2}}{4d_1^2}-\frac{1}{8d_1^2}+\frac{Rd_1\sqrt{2}}{\left(2d_1^2-R^2\right)^2}+\frac{Rd_1\sqrt{2}}{\left(2d_1^2+R^2\right)^2}-\frac{4\sqrt{2}Rd_1^{\,3}}{\left(4d_1^{\,4}+R^4\right)^{\frac{3}{2}}}\right] \qquad \text{(I)}$$

از این رابطه، k به دست می‌آید.

ب)

$$U=\frac{1}{2}k\left[\sqrt{2}\left(d_0-d\right)\right]^2-\int_{\infty}^{(x,y=x)}\vec{F}_{elec}.d\vec{r}$$

$$=k\left(d_0d\right)^2+\frac{q^2\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{d}\left[\frac{2\sqrt{2}-1}{8x^2}+\frac{R\sqrt{2}x}{\left(2x^2-R^2\right)^2}+\frac{R\sqrt{2}x}{\left(2x^2+R^2\right)^2}-\frac{4\sqrt{2}Rx^3}{\left(4x^4+R^4\right)^{\frac{3}{2}}}\right]dx$$

$$=k\left(d_0-d\right)^2+\frac{q^2\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-2\sqrt{2}+1}{4d}-\frac{R\sqrt{2}}{4\left(2d^2-R^2\right)}-\frac{R\sqrt{2}}{4\left(2d^2+R^2\right)}+\frac{\sqrt{2}R}{2\left(4d^4+R^4\right)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

ج) معادله حرکت کره کوچک با بار q به صورت زیر است.

$$F=m\ddot{x}$$

$$k\left(d_0-x\right)\sqrt{2}-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2\sqrt{2}-1}{8x^2}+\frac{Rx\sqrt{2}}{\left(2x^2-R^2\right)^2}+\frac{Rx\sqrt{2}}{\left(2x^2+R^2\right)^2}-\frac{4\sqrt{2}Rx^3}{\left(4x^4+R^4\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=m\ddot{x}$$

با $x=d_1+\delta$ که $\frac{\delta}{d_1}\ll 1$ است و در نظر گرفتن معادله (I) با کمی ساده کردن داریم:

$$-\left\{k\sqrt{2}-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\begin{array}{l}\frac{2\sqrt{2}-1}{4d_1^{\,3}}+\frac{R\sqrt{2}}{\left(2d_1^{\,2}-R^2\right)^2}\left(\frac{8d_1^{\,2}}{2d_1^{\,2}-R^2}-1\right)\\+\frac{R\sqrt{2}}{\left(2d_1^{\,2}+R^2\right)^2}\left(\frac{8d_1^{\,2}}{2d_1^{\,2}+R^2}+1\right)\\+\frac{12\sqrt{2}Rd_1^{\,2}}{\left(4d_1^{\,4}+R^4\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{8d_1^{\,4}}{R^4+4d_1^{\,4}}-1\right)\end{array}\right]\right\}\delta=m\ddot{\delta} \qquad \text{(II)}$$

$$B^2\delta = m\ddot{\delta} \Rightarrow \ddot{\delta} - \frac{B^2}{m}\delta = 0$$

$$\ddot{\delta} - b^2\delta = 0 \Rightarrow b = \frac{B}{\sqrt{m}}$$

که در آن B^2 ضریب δ در سمت چپ رابطه (II) است.

سؤال‌ها و پاسخ‌های پانزدهمین دوره آزمون‌های المپیاد فیزیک

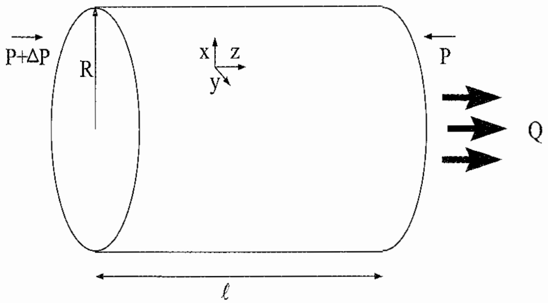
تابستان ۱۳۸۱

سؤال‌های امتحان اول المپیاد فیزیک ـ پانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۱

وقت: ۲ ساعت

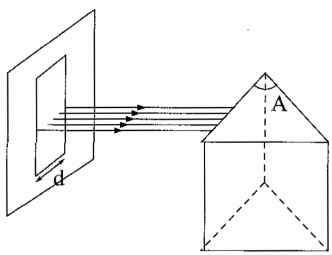
۱- رابطه پوازوی: از لوله‌ای به طول ℓ و شعاع R، با ایجاد اختلاف فشار ΔP در دو سر آن، مایعی را عبور می‌دهیم. گرانروی مایع، η است. حجم Q از مایع در واحد زمان از لوله خارج می‌شود. با تحلیل ابعادی Q را بر حسب $\eta, R, \ell, \Delta P$ به دست آورید.

توجه: در معادلات فیزیکی حاکم بر این پدیده، Z از X و Y مستقل است. همچنین به دلیل تقارن، Y, X را یک بُعد، مانند ℓ، بگیرید.



۲- الف) دسته پرتو موازیِ نور سفیدی از یک شکاف عمودی به ضخامت d و با زاویه تابش i_1 به یک منشور استوانه‌ای شیشه‌ای با زاویهٔ رأس A می‌تابد. (مسأله را دو بعدی فرض کنید). ضریب شکست شیشه برای رنگهای مختلف تفاوت دارد. اگر زاویهٔ انحراف پرتوی خروجی نسبت به پرتوی اولیه را D بنامیم، $\frac{dD}{dn}$ را بیابید.

(n: ضریب شکست)



ب) ضریب شکست شیشه را برای رنگهای مختلف را می‌توان با تقریب "کوشی" به شکل $n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2}$ بیان کرد. با این فرض، $\frac{dD}{d\lambda}$ را بر حسب λ بیابید. (λ: طول موج نور)

ج) ضریب شکست شیشه برای نورهای بنفش و قرمز با طول موج‌های $400nm$ و $700nm$ به ترتیب 1.470 و 1.455 است.

نور زرد سدیم از دو رنگ زرد بسیار شبیه به یکدیگر و با طول موجهای 589.0nm و 589.6nm تشکیل شده است. فرض کنیم برای مشاهده، وسیله‌ای داریم که دقت تفکیک آن 0.01mm است. همچنین زاویهٔ رأس منشور شیشه‌ای A، 60^0، است و ضخامت شکاف را 2mm فرض می‌کنیم. اگر زاویه تابش، (i_1)، 60^0 و فاصله منشور از پرده 5m باشد، آیا منشور می‌تواند دو خط زرد سدیم را از یکدیگر تفکیک کند؟ (فرض کنید پرده بر پرتوی خروجی از منشور تقریبا عمود است.)

۳- دو جرم m و M، تحت میدان گرانشی‌شان دور هم می‌گردند. فاصله این دو جسم از هم R است. در نتیجه یک موج گرانشی تولید می‌شود که با سرعت نور (C) حرکت می‌کند.

الف) توان این موج گرانشی را با استفاده از تحلیل ابعادی به دست آورید.

فرض کنید $M >> m$. در این صورت M تقریباً ساکن است و m دور آن می‌گردد.

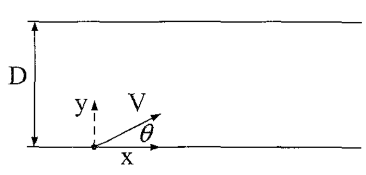
ب) با فرض اینکه توان موج با m^2 متناسب است، عبارت به دست آمده در بخش الف را ساده کنید.

ج) با فرض این که بستگی توان موج گرانشی به M، فقط از طریق دوره گردش m دور M است، T (دورهٔ گردش) با $M^{-\frac{1}{2}}$ متناسب است و توان با T^{-6} متناسب است. عبارت به دست آمده در بخش ب برای توان را ساده کنید.

د) فاصلهٔ زمین تا خورشید: $R = 150\times10^6 km$، جرم خورشید: $M = 2\times10^{30} kg$، جرم زمین: $m = 6\times10^{24} kg$، $C = 3\times10^8 \frac{m}{s}$ و $G = 6/7\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}$ است.

مقدار عددی توان موج گرانشی حاصل از گردش زمین دور خورشید را تخمین بزنید.

۴- یک مسلسل، رو به دیواری به فاصله D قرار دارد و گلوله‌هایی با سرعت V شلیک می‌کند. در حین شلیک، این مسلسل با سرعت زاویه‌ای ثابت ω از $\theta = 0$ تا $\theta = \pi$ می‌چرخد.



الف) اولین گلوله‌ای که به دیوار برخورد می‌کند، از چه زاویه‌ای شلیک شده است؟

ب) در حالت $\omega D >> V$، این زاویه چقدر است؟

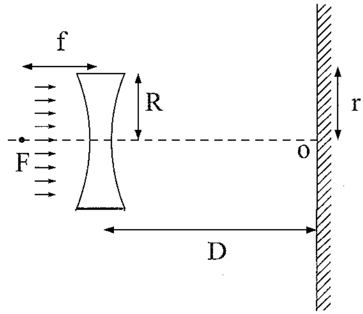
ج) با فرض وجود شتاب گرانش عمود بر صفحه $(\vec{g} = -g\hat{z})$، پس از شلیک کامل، چه شکلی روی دیوار (صفحهٔ $x - z$) ایجاد شده است؟

سؤال‌های امتحان دوم المپیاد فیزیک ـ پانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۱
وقت: ۳ ساعت

۱- الف) فردی نزدیک بین، عینک خود را (عدسی واگرا) در یک روز آفتابی در دست می‌گیرد، و مشاهده می‌کند با این که شیشه عینکش تیره و یا فتوکرومیک نیست، سایه شیشه تیره است. آیا می‌توانید این پدیده را توضیح دهید؟

ب) فرض کنید یک عدسی واگرا به شعاع R و فاصله کانونی f را به صورت موازی با دیوار در فاصلهٔ D قرار داده‌ایم، و نور خورشید هم به صورت عمود به دیوار می‌تابد. اگر شدت (توان بر واحد سطح) نور خورشید، I_0 باشد، شدت نور روی دیوار را بر حسب فاصله از مرکز، r، بیابید، و نمودار آن را به طور دقیق رسم کنید.

(از تقریب پیرا محوری می‌توانید استفاده کنید.)



۲- یک ذره روی یک خم در فضای سه بُعدی حرکت می‌کند. در یک نقطه از مسیر، اندازه سرعت ذره v، شعاع انحنای مسیر R (انحنای مسیر $\frac{1}{R}$)، و تاب مسیر β است. بردارهای یکه مماس، قائم اصلی، و قائم دوم $(\hat{b}, \hat{n}, \hat{\tau})$ با بردار سرعت زاویه‌ای $\vec{\omega}$ می‌چرخند. بردار سرعت زاویه‌ای برداری است که جهت آن، جهت بردار یکه محور چرخش، و طول آن اندازه سرعت زاویه‌ای چرخش است. بردار $\vec{\omega}$ را بر حسب $\beta, R, v, \hat{b}, \hat{n}, \hat{\tau}$ به دست آورید.

۳- منبعی نقطه‌ای در $(0,2a)$ قرار دارد و محور y، محور آینه‌ای است که رأس آن در $(0,0)$ است. (مسئله دو بُعدی است.)

الف) معادله سطح این آینه (y بر حسب x) را تا مرتبهٔ x^2 به گونه‌ای به دست آورید که نور را در $(0,a)$ کاملاً جمع کند.

ب) کانون این سطح را با یافتن نقطه‌ای که پرتوهای موازی با محور آینه در آن کانونی می‌شوند بیابید.

ج) کانون را با استفاده از رابطه آینه‌های کروی بیابید.

۴- صفحه استوایی زمین را صفحه $x-y$ بگیرید. مبدا مختصات، مرکز زمین، و دستگاه مختصات نسبت به زمین ثابت است. در یک روز از سال، زاویه خط واصل زمین به خورشید با صفحه $x-y$ برابر α است. (α مثبت یعنی خورشید در نیمکره شمالی است). خورشید با سرعت زاویه‌ای ثابت حول محور z می‌چرخد. دوره این چرخش یک روز است. فرض کنید در $t=0$، خورشید در صفحه $x-z$ است. (جهت محور $\hat{z}$ جهت قطب جنوب به قطب شمال زمین است.)

الف) بردار یکه جهت خورشید نسبت به زمین را بر حسب زمان به دست آورید.

ب) یک نقطه روی سطح زمین در صفحه $x-z$ در نظر بگیرید. عرض جغرافیایی این نقطه λ است. λ یعنی زاویه شعاع واصل این نقطه به مرکز زمین با صفحه استوا. (λ مثبت یعنی نقطه در نیمکره شمالی است.) بردار یکه شعاع واصل این نقطه به مرکز زمین را بنویسید.

ج) زمان طلوع و غروب خورشید در این روز سال و در این نقطه را به دست آورید.

سؤال‌های امتحان سوم المپیاد فیزیک ـ پانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۱
وقت: ۲ ساعت و ۳۰ دقیقه

۱- دو جرم m_1, m_2 تحت گرانش یکدیگر حول نقطه ثابت O می‌چرخند. نقطه O روی پاره خطی است که m_1, m_2 را به هم وصل می‌کند، و فاصله آن از m_1 و m_2، به ترتیب d_1 و d_2 است، که $m_1d_1 = m_2d_2$. d_1, d_2 ثابت‌اند، و m_1, m_2 و O روی صفحه ثابتی قرار دارند. نیروی گرانشی جرم m_1 وارد بر جرم m_2، $\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$ است. $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ مکان m_1 و m_2، و G مقداری ثابت است. جرم کوچک m در نقطه‌ای بیرون خط واصل m_1 و m_2 است. (می‌شود از اثر گرانشی m بر m_1, m_2 چشم پوشید.)

الف) مکان هندسی نقاطی را بیابید که اگر جرم m آنجا باشد، نیروی گرانشی وارد بر آن در راستای خط واصل m به O باشد.

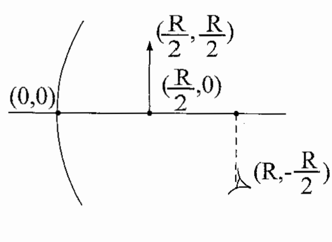
ب) نقاطی را پیدا کنید که اگر m آنجا باشد، مجموعه m_1, m_2 و m بتواند به طور صلب حرکت کند، یعنی فاصله سه جرم از هم ثابت بماند.

۲- جسمی روی دایره‌ای به مرکز C و شعاع R با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حرکت می‌کند. C روی محور یک عدسی محدب به فاصله کانونی f قرار دارد و فاصله آن تا رأس عدسی x_0 است. محور عدسی یکی از قطره‌های دایره است. x_0 و R به گونه‌ای هستند که جسم همواره در فاصله کانونی عدسی باقی می‌ماند. (به فاصله بین عدسی و صفحه کانونی، فاصله کانونی می‌گویند.)

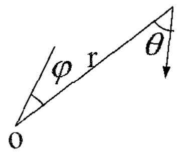
معادله مسیر تصویر این جسم را بیابید (به صورت غیر پارامتری). این معادله، معادله کدام یک از اشکال هندسی است؟

۳- یک آینه کروی مقعر واقعی (بدون تقریب پیرا محوری) به شعاع R موجود است. جسمی به طول $\frac{R}{2}$ عمود بر محور آینه و در فاصله $\frac{R}{2}$ از رأس آینه قرار دارد. ابتدای جسم در $\left(\frac{R}{2}, 0\right)$ و انتهای آن در $\left(\frac{R}{2}, \frac{R}{2}\right)$ است. ناظری در نقطه $\left(R, -\frac{R}{2}\right)$ قرار دارد.

بزرگی زاویه‌ای تصویری که ناظر می‌بیند چقدر است؟



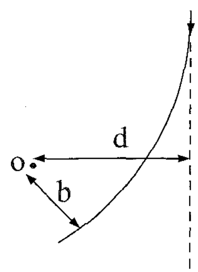
۴- یک محیط شفاف داریم که در آن $n=n(r)$ (r فاصله از مرکز است). زاویه مسیر نور با $\hat{r}$ را θ می‌نامیم.



الف) معادله $\theta(r)$ را بر حسب r به دست آورید و آن را حل کنید.

فرض کنید $n=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{r_s}{r}\right)^2}}$ که r_s عددی ثابت است. فرض کنید d فاصله مرکز از امتداد اولیه نوری است و b کمترین فاصله مسیر نور از مبدا است.

ب) b را به صورت تابعی از d به دست آورده و کوچکترین مقدار d (که در آن b وجود دارد) را مشخص کنید.



راهنمایی: ممکن است انتگرال زیر مفید باشد.

$$\int\frac{f'dx}{f}=\mathrm{Ln}(f)+C.$$

سؤال‌های امتحان چهارم المپیاد فیزیک ـ پانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۱
وقت: ۳ ساعت

۱- فنری به جرم M و ضریب سختی K و طول اولیه $2\pi R$ در نظر بگیرید. حال این فنر را از داخل حلقه صلبی به شعاع R عبور می‌دهیم، به طوری که دو سر فنر به هم وصل شوند. بردار عمود بر سطح حلقه موازی سطح زمین است، یعنی فنر تحت تأثیر جاذبه زمین قرار می‌گیرد و چگالی جرم بر واحد طول آن تغییر می‌کند.

هدف به دست آوردن چگالی جرم بر واحد طول فنر است. برای حل مساله، فنر جرم‌دار را به صورت N فنر و جرم که به طور سری به هم متصل شده‌اند، در نظر بگیرید. فرض کنید θ_n مقدار انحراف زاویه‌ای جرم nام از حالت طبیعی (بدون جاذبه) است.

الف) با نوشتن رابطه تعادل برای جرم nام رابطه‌ای بازگشتی بر حسب $R, K, g, N, M, \theta_{n-1}, \theta_{n+1}, \theta_n, n$ بنویسید.

حال فرض کنید که K خیلی بزرگ است و ما می‌خواهیم تا مرتبه یک نسبت به $\frac{1}{K}$ مساله را حل کنیم.

ب) برای رابطه‌ای که در قسمت «الف» به دست آورده‌اید تا مرتبه یک نسبت به $\frac{1}{K}$ جوابی به صورت $\theta_n = \beta \sin(\alpha n) + C$ پیشنهاد می‌کنیم که β, α, C مقادیری ثابت هستند. این مقادیر را بر حسب کمیات معلوم مساله به دست آورید. کمیات معلوم R, N, K, M, g هستند.

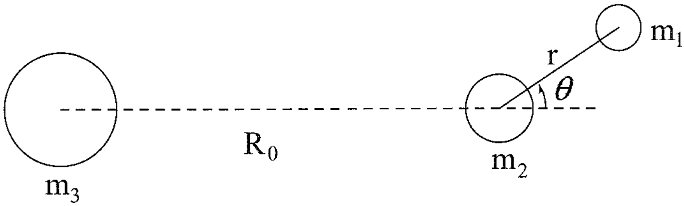
ج) با استفاده از قسمت «ب» و میل دادن $N \to \infty$ مقدار $\lambda = \frac{dm}{d\ell}$ که چگالی جرم بر واحد طول فنر است را به دست آورید.

۲- شخصی برای خواندن روزنامه از یک ذره بین (عدسی با فاصله کانونی f و قاب دایره‌ای به شعاع ℓ) استفاده می‌کند. اگر فاصله چشم تا روزنامه d باشد.

الف) ذره بین را در چه فاصله‌ای از روزنامه باید گرفت تا بخشی از روزنامه با شعاع R با بیشترین بزرگ نمایی ممکن دیده شود؟

ب) برای R, d, ℓ, f تخمین‌های مناسب بزنید و مقدار عددی قسمت الف را به دست آورید.

۳- الف) فرض کنید در فضا جرمی داریم، m_1، که در دایره‌ای به شعاع r_0 به دور جرم دیگر، m_2، که تقریباً ثابت است، می‌چرخد. اولاً چه شرطی باید داشته باشیم تا چنین حالتی پیش بیاید. ثانیاً $\theta(t)$ را برای جرم متحرک محاسبه کنید.



ب) حال می‌خواهیم تأثیر جرم دیگری، m_3 را که در فاصله R_0 نسبت به m_2 قرار دارد بر مسیر m_1 بیابیم. فرض کنید همچنان m_3 , m_2 ثابت‌اند.

معادله دیفرانسیل مربوط به فاصله جرم‌های m_1 و m_2، r، را به طور تقریبی بیابید.

راهنمایی: جواب کلّی معادله $\ddot{x}+\omega_0{}^2 x = k-\alpha\cos\omega_1 t$ به صورت:

$$x = A\cos(\omega_0 t+\varphi)+\frac{k}{\omega_0{}^2}+\frac{\alpha}{\omega_1{}^2-\omega_0{}^2}\cos\omega_1 t$$

و در حالتی که $\omega_1 \to \omega_0$ دامنه به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

ج) آیا این مُدل، مُدل خوبی برای سیستم ماه و زمین و خورشید است؟ چرا؟

$m_1 = 7\times10^{22}\,\text{kg}$ $\qquad$ $r_0 = 4\times10^{4}\,\text{km}$

$m_2 = 6\times10^{24}\,\text{kg}$ $\qquad$ $R_0 = 1.5\times10^{8}\,\text{km}$

$m_3 = 2\times10^{30}\,\text{kg}$ $\qquad$ $G = 6.7\times10^{-11}\,(\text{SI})$

۴- به طور تخمینی بگویید که حداقل چه مقدار انرژی نورانی در هر ثانیه به مردمک برسد تا ما بتوانیم جسمی مورد نظر را ببینیم.

نکته: ابعاد نوعی جسم مورد نظر و فاصله آن به نحوی است که تصویر آن بر روی تمام لکه زرد می‌افتد.

داده‌ها: قطر لکهٔ زرد: 2mm

سطح مقطع هر سلول حساس به نور: $0.07\mu\text{m}^2$

تعداد کل سلولهای حساس به نور در لکهٔ زرد: ۱۰ میلیون

هر سلول باید در هر ثانیه ۱۲ پیغام به مغز بفرستد. انرژی لازم برای هر پیغام هم 10ev و تنها ٪۱ نوری که به مردمک می‌رسد به شبکیه می‌رسد.

سؤال‌های امتحان پنجم المپیاد فیزیک ـ پانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۱
وقت: ٤ ساعت

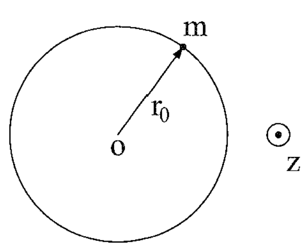
۱- دو ستاره به جرم‌های m_1, m_2 تحت گرانش خودشان دور نقطه O می‌چرخند. نقطه O روی پاره خطی است که جرم‌های m_1, m_2 را به هم وصل می‌کند. فاصله m_1, m_2 از O، به ترتیب d_1 و d_2 است، که $m_1d_1 = m_2d_2$ و d_1 و d_2 ثابت‌اند.

سیاره‌ای به جرم m تحت گرانش این دو ستاره حرکت می‌کند. $m \ll m_1, m_2$، به طوری که می‌شود از اثر گرانشی سیاره بر ستاره‌ها چشم پوشید.

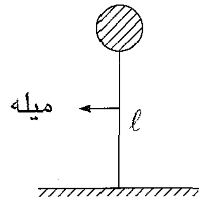
با فرض این که r (فاصله سیاره از O) خیلی بزرگ‌تر از d_1 و d_2 است، نیروی گرانشی وارد بر m را تا اولین مرتبه غیر صفر نسبت به d_1 و d_2 حساب کنید. این نیرو را بر حسب $\vec{r}$ (بردار مکان سیاره نسبت به O) و $\hat{n}$ (جهت عمود بر صفحه شامل مدارهای ستاره‌ها) به دست آورید.

راهنمایی: دوره حرکت ستاره‌ها خیلی کوچک‌تر از دوره حرکت سیاره است. بنابراین طی یک دوره حرکت ستاره‌ها می‌شود سیاره را ثابت گرفت.

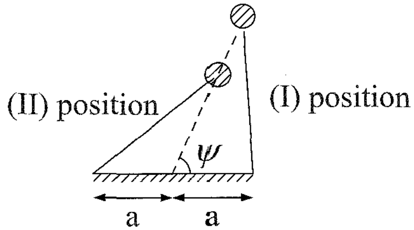
۲- میدان نیرویی به صورت $\vec{F} = \frac{\alpha m}{r^n}(\hat{z} \times \hat{v})$ در نظر بگیرید، که در آن r فاصله از مبدأ O است. جسمی به جرم m روی دایره‌ای به شعاع r_0 در حال چرخش است. شرطی روی n پیدا کنید که حرکت جسم حول شعاع r_0 پایدار باشد.



۳- آونگ معکوسی را مطابق شکل در نظر بگیرید. آونگ به زمین لولا شده است. اگر آونگ را کمی از حالت عمودی منحرف کنیم، سقوط می‌کند. ولی اگر تکیه‌گاه آونگ را با بسامد خاص، ω، به نوسان درآوریم می‌توان از سقوط آونگ جلوگیری کرد. یعنی حالت تعادل آونگ پایدار می‌شود. در این حالت حرکت آونگ به یک حرکت کم دامنه و کند تغییر و یک حرکت با دامنه خیلی کم و بسامد خیلی زیاد (یعنی $\sqrt{\frac{g}{\ell}} \ll \omega$) تقسیم می‌شود.



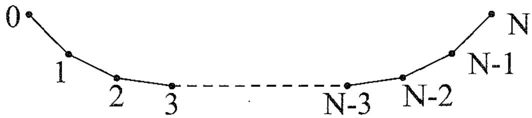
الف) در شکل زیر آونگ در دو وضعیت I و II مشخص شده است. وضعیت I و II مربوط به دو حالت انتهایی نوسان تکیه گاه است. متغیر ψ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
زاویه خطی که در دو حالت I و II سرِ آونگ‌ها را به هم وصل می‌کند با افق ψ است.

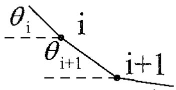


بنابراین زاویه آونگ با افق در طول زمان با $\psi(t)+\delta(t)$ مشخص می‌شود. به طوری که سرعت تغییرات δ خیلی بیشتر از تغییرات ψ است.
$\delta(t)$ را بر حسب ψ، a، ω، ℓ و t حساب کنید. $\ell \gg a$، و فرض کنید در یک تناوب حرکتِ تکیه‌گاه، ψ تغییر نمی‌کند.
ب) اگر در دستگاه متصل به تکیه‌گاهِ آونگ به حرکت آن نگاه کنیم، یک نیروی مجازی به آونگ وارد می‌شود. با فرض اینکه تغییرات ψ نسبت به تغییرات δ خیلی کند باشد، متوسط زمانی نیروی مماسی حاصل از نیروی مجازی را حساب کنید. متوسط زمانی نیروی مماس حاصل از وزن را نیز حساب کنید.
ج) شرطی روی ω پیدا کنید که حالت عمودی آونگ، حالت تعادل پایدار باشد.
راهنمایی: متوسط زمانی تابع $F(t)$ در زمان T به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$< F(t) >= \frac{1}{T}\int_0^T F(t)dt$$

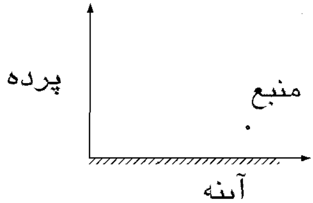
۴- $N+1$ جسم مشابه با جرم‌های مساوی را در فاصله‌های مساوی ℓ، روی طنابی به طول $N\ell$ مطابق شکل می‌بندیم، که با شماره‌های 0 تا N مشخص شده‌اند. جسم صفرم و جسم Nام را در ارتفاع یکسان و فاصله افقی D ثابت نگاه می‌داریم تا سیستم به تعادل برسد. اگر زاویه طناب سمت چپ یک جسم با افق را θ_i بنامیم، θ_i را بر حسب i بیابید. جواب شما می‌تواند حداکثر شامل یک ثابت اختیاری حساب نشده باشد، امّا معادلات کافی برای به دست آوردن آن را بنویسید.





۵- نیروی مغناطیسی، نیرویی است عمود بر سرعت که به صورت $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ تعریف می‌شود. که در آن $\vec{v}$ بردار سرعت، q بار جسم، و $\vec{B}$ بردار میدان مغناطیسی است. فرض کنید در میدان مغناطیسی $\vec{B} = B\hat{Z}$ (مقدار B ثابت است)، جسمی را با سرعت اولیه $\vec{v}_0 = v_x\hat{x} + v_y\hat{y}$ از مبدأ مختصات پرتاب می‌کنیم. اگر علاوه بر نیروی مغناطیسی، نیروی مقاومت هوا $\vec{F} = -\alpha\vec{V}$ نیز وارد شود، جسم در نقطه خاصی به سکون می‌رسد. آن نقطه را بیابید.

۶- آینه تختی عمود بر پرده‌ای موجود است. یک منبع نورانی با طول موج λ در نزدیکی آینه و در نقطه (x_0 , y_0) قرار دارد.

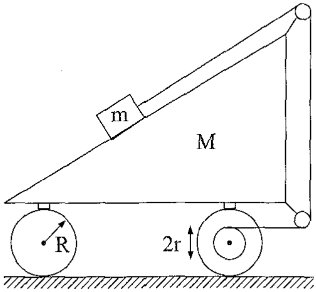


الف) مکان اولین نوار روشن را بر حسب پارامترهای مساله بیابید.

ب) سرعت حرکت اولین نوار روشن را روی پرده بر حسب $\vec{v}$ (بردار سرعت منبع نور) و $\vec{r}$ و λ بیابید.

سؤال‌های امتحان نهایی المپیاد فیزیک ـ پانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۱
وقت: ۶ ساعت

۱- در شکل مقابل، کلیه سطوح بدون اصطکاک‌اند و می‌توان از جرم نخ و چرخ و قرقره‌ها چشم پوشی کرد. نخ متصل به جرم m توسط قرقره‌ها به دور محور (شعاع r) چرخ (شعاع R) پیچیده شده است. شتاب افقی دستگاه را بیابید. (چرخ‌ها دارای محور هستند و مرکز آنها نسبت به ارابه ساکن است).



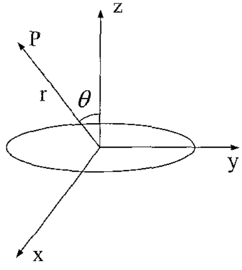
۲- نیروی گرانشی ماه در سطح زمین، بر شتاب موثر سقوط آزاد مثر است. تغییر شتاب سقوط آزاد در نزدیکی سطح زمین، حاصل از گرانش ماه را حساب کنید. فرض کنید زاویه جهت ماه نسبت به زمین، با بردار عمود بر سطح زمین θ است. نسبت مرتبه تغییر شتاب سقوط آزاد ناشی از ماه، نسبت به تغییر شتاب سقوط آزاد ناشی از چرخش زمین را تخمین بزنید.

جرم ماه را 10^{23}kg، فاصله زمین تا ماه را $4\times10^{8}\text{m}$، و شعاع زمین را $6\times10^{6}\text{m}$ بگیرید.

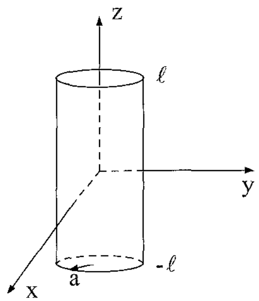
راهنمایی: توجه کنید که زمین دارد مثل یک جسم صلب در میدان گرانش ماه سقوط می‌کند.

۳- الف) حلقه‌ای به شعاع a و چگالی جرمی واحد طول λ داریم. پتانسیل گرانشی حلقه را در نقطه p به مختصات کروی $(r,\theta,0)$ محاسبه کنید.

محاسبات را تا مرتبه $\frac{a^3}{r^3}$ انجام دهید.



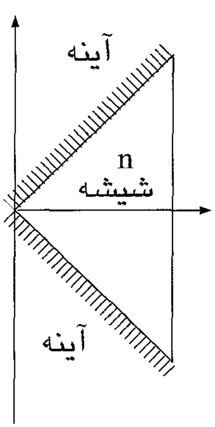
ب) پتانسیل گرانشی یک پوسته استوانه‌ای را که مطابق شکل، محورش موازی محور z است و از $z=-\ell$ تا $z=\ell$ امتداد دارد، روی نقطه‌ای در صفحه $z=0$، در فاصله d از محور استوانه پیدا کنید. جواب را به صورت انتگرالی نگه دارید. $a \ll d$ است که a شعاع استوانه است.



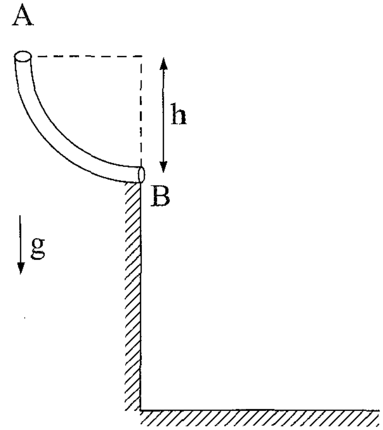
ج) کره‌ای به چگالی ρ داریم. در آن به موازات محور z، سوراخی به شعاع a ایجاد کرده‌ایم نقطه P در صفحه xy به فاصله d از محور سوراخ قرار دارد (روی صفحه استوایی کره). $\frac{a}{R}$ و $\frac{R}{d}$ هر دو خیلی کوچک هستند و هم مرتبه‌اند (R شعاع کره است). تصحیح پتانسیل گرانشی را در P، نسبت به حالت $a=0$، تا دومین مرتبه غیر صفر حساب کنید.

د) تصحیح سرعت مداری ماهواره‌ای را که در مداری به شعاع r_0، حول این کره در صفحه xy می‌چرخد، تا دومین مرتبه غیر صفر به دست آورید.

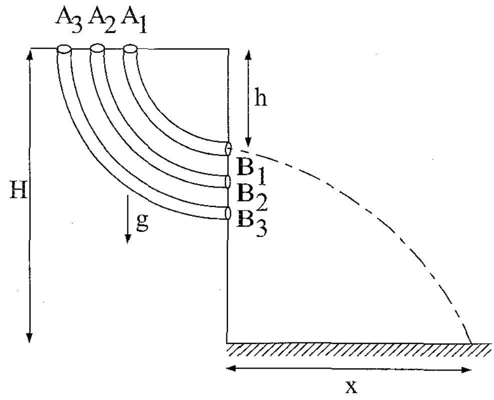
۴- یک مجموعه اپتیکی به شکل روبرو در نظر بگیرید. یک پرتو نورانی با رابطه $y=mx$ $(-1<m<1)$ به این مجموعه می‌تابانیم. معادله خط مسیر پرتو خروجی را بیابید.
مجموعه اپتیکی عبارتند از: دو آینه و یک گوه شیشه‌ای با زاویه رأس قائمه و ضریب شکست n.



۵- الف) گلوله‌ای روی مسیر AB بدون اصطکاک از حالت سکون رها می‌شود. فاصله قائم نقاط A و B، h است. سرعت گلوله هنگام خروج از نقطه B چقدر است. سرعت گلوله هنگام خروج از نقطه B، افقی است.

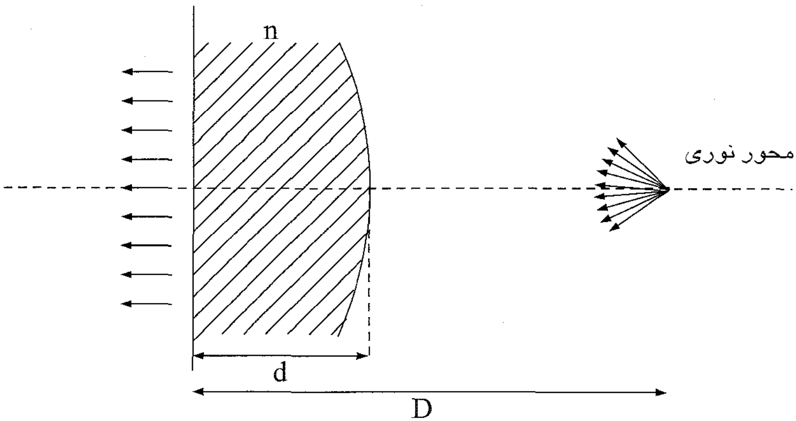


ب) حال گلوله‌هایی از نقاط A_1، A_2، A_3،... از حالت سکون رها می‌شوند. این نقاط در یک سطح افقی هستند. این گلوله‌ها از نقاط B_1، B_2، B_3،... خارج شده و پرتاب می‌شوند. سرعت گلوله‌ها هنگام خروج از مسیرشان در نقاط B_1، B_2، B_3،... افقی است. ارتفاع پرتابه (گلوله) از سطح زمین در نقطه‌ی x تابع h است. به ازای یک x معین بیشینه این ارتفاع را حساب نمایید. (به ازای هر x یک h وجود دارد که ارتفاع ماکسیمم می‌گردد.)

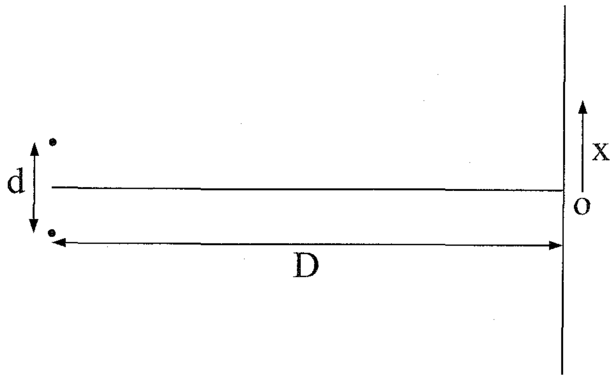


۶- می‌خواهیم یک عدسی با این مشخصات طراحی کنیم. عدسی حول محور نوری، تقارن محوری دارد. یک طرف آن تخت است و از جنسی با ضریب شکست n ساخته می‌شود. حداکثر ضخامت آن (یعنی ضخامت در راستای محور نوری) d است. معادله رویه دیگر این عدسی را به گونه‌ای بیابید که اگر یک

نقطه نورانی به فاصله‌ی D در سمت رویه غیر تخت عدسی قرار بگیرد، تمام پرتوهایی که به عدسی می‌رسند، در نهایت از طرف تخت، موازی خارج شوند.



۷- الف) یک خط نورانی یکنواخت با طول بی‌نهایت در نظر بگیرید. با توجه به قانون بقای انرژی و اینکه $I \propto E^2$ است، تابعیت E را با r بیابید. I شدت نور است.
ب) با دو خط نورانی با مشخصات فوق که در فاصله d از یکدیگر قرار دارند (مساله دو بعدی است)، یک دستگاه تداخل یانگ تشکیل داده‌ایم. پرده روی صفحه شامل این دو خط موازی و در فاصله‌ی D از آنها قرار دارد. (فرض کنید میدان مغناطیسی نور خارج شده در راستای $\hat{z}$، راستای عمود بر صفحه و به سمت داخل، است.)



با فرض اینکه x و d هم مرتبه هستند و D خیلی خیلی بزرگتر از آنهاست، شدت نور روی پرده را در فاصله‌ی x تا مرتبه دوم $\frac{x}{D}$ و $\frac{d}{D}$ محاسبه کنید. طول موج نور این منابع λ است.

۸- یک دوربین عکاسی با یک عدسیِ با فاصله کانونی f و قطر دهانه دوربین d تصویر نقطه نورانی در فاصله p_0 را روی فیلم عکاسی کاملا کانونی می‌کند. نقطه نورانی روی محور دوربین (عدسی) است. فاصله عدسی و دهانه، صفر است و فاصله عدسی تا فیلم ℓ است.
تصویر یک نقطه را در صورتی واضح می‌نامیم که قطر آن از یک عدد ثابت، d_0، کمتر باشد. حد بالا و حد پایین را برای p (فاصله نقطه نورانی از عدسی) به گونه‌ای تعیین کنید که تصویر واضح باشد.

۹- فاصله نزدیک‌ترین ستاره به خورشید تا خورشید، ۴ سال نوری است. فرض کنید فاصله ستاره‌ها در راه شیری از همین مرتبه است. توان متوسط ستاره‌ها از مرتبه توان خورشید است، و راه شیری را با کره‌ای به شعاع 10^4سال نوری و به مرکز زمین تقریب بزنید.
الف) توان بر واحد سطح حاصل از ستاره‌های راه شیری در سطح زمین، به توان بر واحد سطح حاصل از خورشید در سطح زمین را تخمین بزنید. تقریباً ۸ دقیقه طول می‌کشد تا نور خورشید به زمین برسد.
فاصله نزدیک‌ترین کهکشان به راه شیری 2×10^6 سال نوری است. فرض کنید فاصله کهکشانها از هم از همین مرتبه است و توان متوسط کهکشانها هم از مرتبه توان راه شیری است.
ب) توان بر واحد سطح حاصل از کهکشانهای دیگر در سطح زمین، نسبت به توان بر واحد سطح حاصل از ستاره‌های راه شیری (جز خورشید) در سطح زمین را تخمین بزنید.

پاسخ سؤال‌های امتحان اول المپیاد فیزیک ـ پانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۱

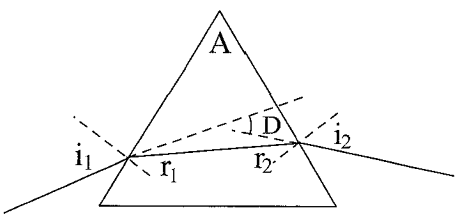
۱- ابتدا بعد هر یک از کمیتهای مربوطه را تعیین می‌کنیم.

$$[\ell]=Z$$
$$[R]=R$$
$$Q=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow[Q]=ZR^2T^{-1}$$
$$F=\eta A\frac{dv}{dx}\Rightarrow MZT^{-2}=[\eta]RZZT^{-1}R^{-1}\Rightarrow[\eta]=MZ^{-1}T^{-1}$$
$$\Delta P=\frac{\Delta F}{S}\Rightarrow[\Delta P]=MZT^{-2}.R^{-2}\Rightarrow[P]=MZR^{-2}T^{-2}$$

کمیت بدون بعدی از این پارامترها می‌سازیم.

$$Q^{\alpha}\eta^{\beta}\Delta P^{\gamma}\ell^{\delta}R^{\theta}=1$$
$$\left(ZR^2T^{-1}\right)^{\alpha}\left(MZ^{-1}T^{-1}\right)^{\beta}\left(MZR^{-2}T^{-2}\right)^{\gamma}(Z)^{\delta}(R)^{\theta}=1$$
$$\begin{cases}\beta+\gamma=0\\ \alpha-\beta+\gamma+\delta=0\\ 2\alpha-2\gamma+\theta=0\\ -\alpha-\beta-2\gamma=0\end{cases}\Rightarrow\beta=-\gamma\ ,\ \alpha=-\gamma\ ,\ \delta=-\gamma\ ,\ \theta=4\gamma$$
$$\Rightarrow Q=C\frac{R^4\Delta P}{\eta\ell}$$

۲- الف) با توجه به نمادگذاری در شکل برای زاویهٔ انحراف D داریم.



$$D=i_1-r_1+i_2-r_2$$

همچنین زاویهٔ رأس در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$A=r_1+r_2$$

بنابراین به‌دست می‌آوریم

$$D=i_1+i_2-A$$

از قانون اسنل هم استفاده می‌نماییم.

$$\begin{cases}\sin i_1 = n\sin r_1\\ \sin i_2 = n\sin r_2 = n\sin(A-r_1)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin i_2 = n\left[\sin A\sqrt{1-\frac{\sin^2 i_1}{n^2}}-\cos A\frac{\sin i_1}{n}\right]$$

$$\Rightarrow i_2 = \sin^{-1}\left[\sin A\sqrt{n^2-\sin^2 i_1}-\cos A\sin i_1\right]$$

از این رو $\frac{dD}{dn}$ می‌شود.

$$\frac{dD}{dn}=\frac{d}{dn}\left(i_1+i_2-A\right)=\frac{di_2}{dn}=\frac{n\sin A}{\sqrt{n^2-\sin^2 i_1}}\times\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sin A\sqrt{n^2-\sin^2 i_1}-\cos A\sin i_1\right)^2}}$$

ب) به سادگی دیده می‌شود که

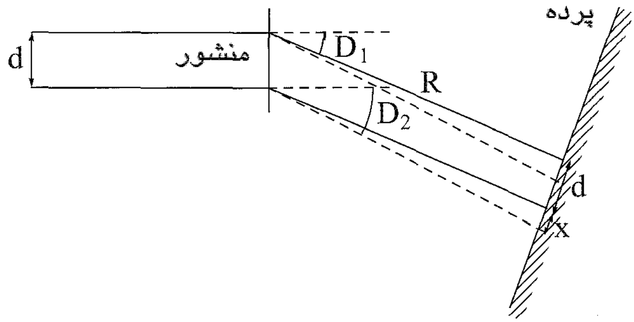
$$\frac{dD}{d\lambda}=\frac{dD}{dn}\frac{dn}{d\lambda}=-\frac{2b}{\lambda^3}\frac{\left(a+\frac{b}{\lambda^2}\right)\sin A}{\sqrt{\left(a+\frac{b}{\lambda^2}\right)^2-\sin^2 i_1}}\times\dots$$

$$\dots\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sin A\sqrt{\left(a+\frac{b}{\lambda^2}\right)^2-\sin^2 i_1}-\cos A\sin i_1\right)^2}}$$

ج) با استفاده از اطلاعات مربوط به نور بنفش و قرمز، مقادیر a و b تعیین می‌شوند.

$$\begin{cases}1.470 = a+\frac{b}{(400\text{nm})^2}\\ 1.455 = a+\frac{b}{(700\text{nm})^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1.448\\ b=3.564\times10^3(\text{nm})^2\end{cases}$$

حال مطابق شکل زیر دو پرتو از لبه بالایی شکاف و دو پرتو از لبه پایینی شکاف در نظر می‌گیریم. (در این شکل پرتوی خروجی از منشور با عمود بر سطح پرده زاویه دارد که این زاویه کوچک فرض شده و محاسبات بر مبنای آن صورت گرفته است.)در هر لبه یک پرتو نور زرد با طول موج کوتاه و یکی را هم بلند می‌گیریم و خطوط پُر با هم موازی‌اند و خطوط خط چین هم موازی یکدیگرند.



دو پرتویی که از لبه بالایی شکاف گسیل شده، روی پرده به اندازه x از یکدیگر فاصله می‌گیرند. برای این که دو نور کاملا از هم تفکیک شوند، باید $x > d$ شود. بنابراین ابتدا x را محاسبه می‌کنیم. از قسمت (ب)، $\frac{\Delta D}{\Delta\lambda}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\left|\frac{\Delta D}{\Delta\lambda}\right| = 4.6\times10^{-5}\,\frac{\text{rad}}{\text{nm}}$$

که در آن از مقادیر داده شده در مساله و مقادیر محاسبه شده برای a و b استفاده کرده‌ایم. همچنین به جای λ مقدار متوسط 589.3nm را قرار داده‌ایم.

بنابراین تفاوت زاویهٔ انحراف دو پرتو نور زرد، ΔD، می‌شود.

$$\Delta D = 4.6\times10^{-5}\times0.6 = 2.8\times10^{-5}\,\text{rad}$$

در نتیجه فاصله دو پرتو روی پرده، x، می‌شود.

$$x = R\Delta D = \left(5\times10^{3}\,\text{mm}\right)\left(2.8\times10^{-5}\right) = 0.138\text{mm}$$

چون $x = 0.138\text{mm}$ و $d = 2\text{mm}$ است، پس دو رنگ زرد به وسیلهٔ این سیستم جدا نمی‌شوند.

۳- الف) پارامترهای مربوطه عبارتند از: توان، P، ثابت گرانش، G، جرمهای m و M، سرعت نور، C، و فاصله دو جسم، R، که کمیت بدون بعدی از این پارامترها می‌سازیم.

$$P^{\alpha}G^{\beta}m^{\gamma}M^{\delta}C^{\theta}R^{\eta} = 1$$

$$\left(ML^2T^{-3}\right)^{\alpha}\left(M^{-1}L^3T^{-2}\right)^{\beta}(M)^{\gamma}(M)^{\delta}\left(LT^{-1}\right)^{\theta}L^{\eta} = 1$$

$$\begin{cases}\alpha-\beta+\gamma+\delta=0\\ 2\alpha+3\beta+\theta+\eta=0\\ -3\alpha-2\beta-\theta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta=\alpha+\gamma+\delta\\ \eta=-\gamma-\delta\\ \theta=-5\alpha-2\gamma-2\delta\end{cases}$$

$$\Rightarrow P^{\alpha}G^{\alpha+\gamma+\delta}m^{\gamma}M^{\delta}C^{-5\alpha-2\gamma-2\delta}R^{-\gamma-\delta} = 1$$

$$\left(\frac{PG}{C^5}\right)^{\alpha}\left(\frac{Gm}{RC^2}\right)^{\gamma}\left(\frac{GM}{RC^2}\right)^{\delta} = 1$$

ب) چون P متناسب با m^2 است پس $\gamma = -2\alpha$ می‌شود و داریم:

$$\left(\frac{PG}{C^5}\right)^{\alpha}\left(\frac{Gm}{RC^2}\right)^{-2\alpha}\left(\frac{GM}{RC^2}\right)^{\delta}=1\Rightarrow\left(\frac{PR^2}{GCm^2}\right)^{\alpha}\left(\frac{GM}{RC^2}\right)^{\delta}=1$$

ج) توان P متناسب با T^{-6} است و T هم متناسب با $M^{-\frac{1}{2}}$ است؛ پس P متناسب با M^3 می‌شود. بنابراین $\delta=-3\alpha$ است. داریم:

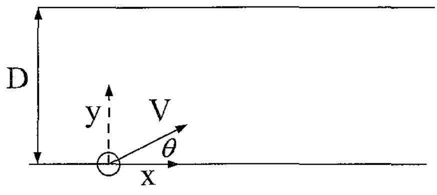
$$\left(\frac{PR^2}{GCm^2}\right)^{\alpha}\left(\frac{GM}{RC^2}\right)^{-3\alpha}=1$$

$$\Rightarrow\left(\frac{PR^5C^5}{G^4m^2M^3}\right)^{\alpha}=1\Rightarrow P=K\left(\frac{G^4m^2M^3}{R^5C^5}\right)$$

د) مقدار K را یک می‌گیریم.

$$P=\frac{\left(6.7\times10^{-11}\right)^4\left(6\times10^{24}\right)^2\left(2\times10^{30}\right)^3}{\left(150\times10^{9}\right)^5\left(3\times10^{8}\right)^5}\approx 31W$$

۴- **الف)** چون طولی برای مسلسل در نظر نگرفته‌ایم، فرض می‌شود که چرخش آن سرعتی در راستای مماسی به گلوله‌ها نمی‌دهد. اگر T زمان رسیدن هر تیر به دیوار باشد، داریم.



$$T=\frac{D}{V\sin\theta}+\frac{\theta}{\omega}$$

که در آن در زمان $t=0$، زاویه θ صفر است. برای مینیمم زمان T داریم.

$$\frac{dT}{d\theta}=-\frac{D}{V\sin^2\theta}\cos\theta+\frac{1}{\omega}=0$$

$$\Rightarrow\frac{D}{V}\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\omega}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{V}{D\omega}\right)^2\sin^4\theta+\sin^2\theta-1=0\Rightarrow\sin^2\theta=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\left(\frac{V}{D\omega}\right)^2}}{2\left(\frac{V}{D\omega}\right)^2}$$

که در آن علامت مثبت قابل قبول است. بنابراین داریم:

$$\theta = \sin^{-1}\left[\frac{D\omega}{\sqrt{2}V}\sqrt{\sqrt{1+4\frac{V^2}{D^2\omega^2}}-1}\right]$$

ب) در حالت $\omega D >> V$ داریم:

$$\sin\theta \approx \frac{D\omega}{\sqrt{2}V}\sqrt{\left(1+2\frac{V^2}{D^2\omega^2}\right)-1} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

ج) از شلیک گلوله تا رسیدن آن به دیوار مدت $t = \frac{D}{V\sin\theta}$ طول می‌کشد. مؤلفه z آن می‌شود.

$$Z = -\frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}g\frac{D^2}{V^2\sin^2\theta}$$

مؤلفهٔ x گلوله روی دیوار برابر $x = \frac{D}{tg\theta}$ است. بنابراین داریم:

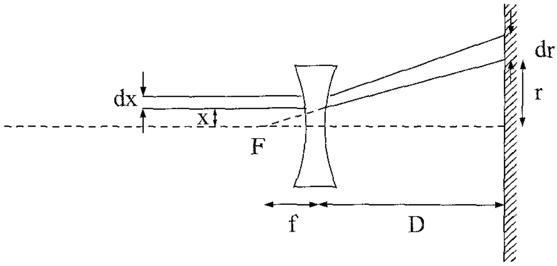
$$Z = -\frac{1}{2}\frac{gD^2}{V^2}\left(1+\cot^2\theta\right) = -\frac{1}{2}\frac{gD^2}{V^2}\left(1+\frac{x^2}{D^2}\right)$$

$$\Rightarrow Z = -\frac{1}{2}\frac{g}{V^2}\left(x^2+D^2\right)$$

پس شکل گلوله‌ها روی دیوار به صورت سهمی است.

پاسخ سؤال‌های امتحان دوم المپیاد فیزیک ـ پانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۱

۱- الف) به دلیل واگرایی نور در عدسی، شدت نور کاهش می‌یابد و سایه شیشه، تیره به نظر می‌رسد.
ب) مطابق شکل زیر دو پرتو موازی به فاصلهٔ dx در نظر می‌گیریم که پرتو شکسته شده آنها از کانون f می‌گذرد. فاصله‌ی دو پرتو شکسته شده روی پرده، dr است. از روابط هندسی داریم.



$$\frac{x}{f}=\frac{r}{D+f}$$

$$dx=\frac{f}{D+f}dr$$

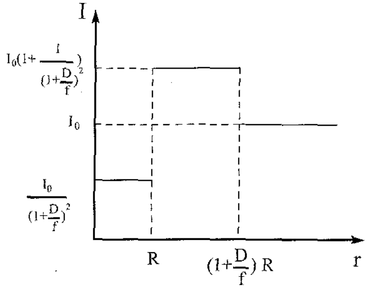
تمام پرتوهای موازی که در فاصله dx هستند در مساحت $2\pi x\,dx$ واقع‌اند که پس از شکست در مساحت $2\pi r\,dr$ قرار می‌گیرند. با استفاده از بقاء انرژی داریم:

$$I_0 2\pi x dx = 2I\pi r dr$$

$$\Rightarrow I = I_0\frac{x}{r}\frac{dx}{dr} \Rightarrow I = I_0\left(\frac{f}{D+f}\right)^2$$

$$\therefore I=\frac{I_0}{\left(1+\frac{D}{f}\right)^2}$$

بنابراین نمودار آن مطابق شکل زیر است.



۲- برای بردارهای یکه در حال دوران داریم:

$$\frac{d\hat{\tau}}{dt}=\vec{\omega}\times\hat{\tau}$$
$$\frac{d\hat{n}}{dt}=\vec{\omega}\times\hat{n}$$
$$\frac{d\hat{b}}{dt}=\vec{\omega}\times\hat{b}$$

می‌دانیم $\frac{d\hat{\tau}}{dt}=\frac{v}{R}\hat{n}$، $\frac{d\hat{n}}{dt}=-\frac{v}{R}\hat{\tau}+\beta v\hat{b}$ و $\frac{d\hat{b}}{dt}=-\beta v\hat{n}$. بنابراین به دست می‌آوریم.

$$\vec{\omega}\times\hat{\tau}=\frac{v}{R}\hat{n} \qquad \text{(I)}$$

$$\vec{\omega}\times\hat{n}=-\frac{v}{R}\hat{\tau}+\beta v\hat{b} \qquad \text{(II)}$$

$$\vec{\omega}\times\hat{b}=-\beta v\hat{n} \qquad \text{(III)}$$

بردار $\vec{\omega}$ را بر حسب $\hat{b},\hat{n},\hat{\tau}$ می‌نویسیم.

$$\vec{\omega}=\alpha_1\hat{\tau}+\alpha_2\hat{n}+\alpha_3\hat{b}$$

از (I) داریم:

$$\left(\alpha_1\hat{\tau}+\alpha_2\hat{n}+\alpha_3\hat{b}\right)\times\hat{\tau}=\frac{v}{R}\hat{n}\Rightarrow-\alpha_2\hat{b}+\alpha_3\hat{n}=\frac{v}{R}\hat{n}$$

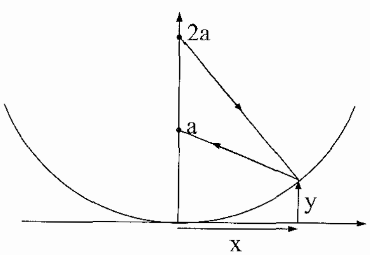
$$\Rightarrow\alpha_2=0,\ \ \alpha_3=\frac{v}{R}$$

از (III) هم داریم:

$$\left(\alpha_1\hat{\tau}+\alpha_2\hat{n}+\alpha_3\hat{b}\right)\times\hat{b}=-\beta v\hat{n}\Rightarrow-\alpha_1\hat{n}+\alpha_2\hat{\tau}=-\beta v\hat{n}\Rightarrow\alpha_1=\beta v$$

پس $\vec{\omega}=\beta v\hat{\tau}+\frac{v}{R}\hat{b}$ است. این $\vec{\omega}$ در معادله (II) هم صدق می‌کند.

۳- الف) بنا به اصل کمترین زمان فرما، اگر همه نورهایی که از نقطه $(0,2a)$ گسیل می‌شوند به نقطه‌ی $(0,a)$ برسند باید مجموع دو مسیر تابش و بازتابش ثابت باشد. پس سطح آینه باید بیضی باشد، یعنی



$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{(y-y_0)^2}{B^2}=1$$

که در آن A نصف قطر در راستای x و B نصف قطر در راستای y است. مرکز بیضی هم $(0,y_0)$ است. نقاط $(0,a)$ و $(0,2a)$ هم کانونهای بیضی‌اند. بنابراین داریم:

$$B=y_0=\frac{3}{2}a$$
$$A=\sqrt{2}a$$

y بر حسب x می‌شود.

$$y=\frac{3a}{2}\left[1\pm\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}a}\right)^2}\right]$$

به ازای $x=0$، باید $y=0$ شود. پس علامت منفی قابل قبول است.

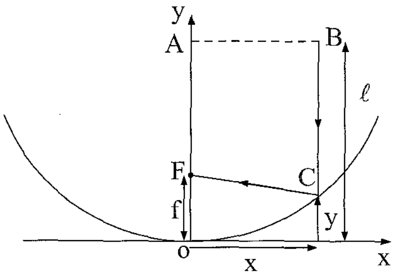
$$y=\frac{3a}{2}\left[1-\sqrt{1-\frac{x^2}{2a^2}}\right]$$

تا مرتبهٔ x^2 می‌شود.

$$y=\frac{3a}{2}\left[1-\left(1-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2a^2}\right)\right]=\frac{3x^2}{8a} \qquad \text{(I)}$$

که معادله سهمی است.

ب) بنا به اصل کمترین زمان فرما طول دو مسیر $BC+CF$ و $AO+OF$ با هم برابر است. پس



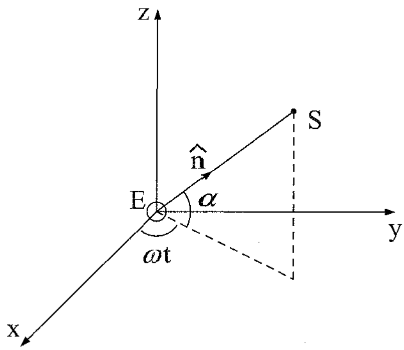
$$\ell-y+\sqrt{x^2+(f-y)^2}=\ell+f$$
$$\Rightarrow (f+y)^2=x^2+(f-y)^2$$
$$\Rightarrow y=\frac{x^2}{4f} \qquad \text{(II)}$$

از مقایسه دو رابطه (I) و (II) به دست می‌آوریم: $f=\frac{2a}{3}$

ج) از رابطه آینه‌های کروی داریم:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\Rightarrow\frac{1}{f}=\frac{1}{2a}+\frac{1}{a}\Rightarrow f=\frac{2}{3}a$$

۴- الف) مطابق شکل، بردار یکه جهت خورشید نسبت به زمین، $\hat{n}$، به صورت زیر است.



$$\hat{n}=\cos\alpha\cos\omega t\hat{x}+\cos\alpha\sin\omega t\hat{y}+\sin\alpha\hat{z}$$

که در آن $\omega=\frac{2\pi}{24\times3600}\frac{rad}{s}$ است.

ب) بردار یکه شعاع واصل نقطه‌ای در صفحه $x-z$ به مرکز زمین می‌شود.

$$\hat{r}=\cos\lambda\hat{x}+\sin\lambda\hat{z}$$

ج) زمان طلوع و غروب خورشید وقتی می‌شود که $\hat{n}$ بر $\hat{r}$ عمود شود. پس داریم:

$$\hat{n}.\hat{r}=0\Rightarrow\cos\alpha\cos\omega t\cos\lambda+\sin\alpha\sin\lambda=0$$

$$\Rightarrow\cos\omega t=-\frac{\sin\alpha\sin\lambda}{\cos\alpha\cos\lambda}=-\mathrm{tag}\alpha\,\mathrm{tag}\lambda$$

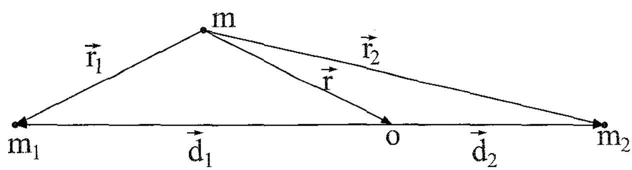
$$\Rightarrow t=\frac{1}{\omega}\cos^{-1}\left(-\mathrm{tag}\alpha\,\mathrm{tag}\lambda\right)$$

بنابراین t زمان غروب و $-t$ زمان طلوع خورشید را نشان می‌دهد.

اگر $\left|\mathrm{tag}\alpha\,\mathrm{tag}\lambda\right|>1$ باشد آنگاه در آن نقطه از زمین شب و یا روز به این صورت نداریم.

پاسخ سؤال‌های امتحان سوم المپیاد فیزیک ـ پانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۱

۱- **الف)** مطابق شکل نیروی وارد بر جرم m می‌شود.



$$\vec{F}_m = G\frac{m_1 m\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|^3} + G\frac{m_2 m\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|^3}$$

با توجه به اینکه $\vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{d}_1$ و $\vec{r}_2 = \vec{r} + \vec{d}_2$ به دست می‌آوریم.

$$\vec{F}_m = \frac{Gm_1 m\left(\vec{r} + \vec{d}_1\right)}{|\vec{r}_1|^3} + \frac{Gm_2 m\left(\vec{r} + \vec{d}_2\right)}{|\vec{r}_2|^3}$$

$$\vec{F}_m = Gm\left[\left(\frac{m_1}{|\vec{r}_1|^3} + \frac{m_2}{|\vec{r}_2|^3}\right)\vec{r} + \frac{m_1}{|\vec{r}_1|^3}\vec{d}_1 + \frac{m_2}{|\vec{r}_2|^3}\vec{d}_2\right]$$

روشن است که اگر m روی خط واصل m_1 و m_2 باشد، $\vec{F}_m$ هم در راستای خط واصل بین m و o است. شرط جواب دیگر این است که $\frac{m_1}{|\vec{r}_1|^3}\vec{d}_1 + \frac{m_2}{|\vec{r}_2|^3}\vec{d}_2 = 0$ شود. از طرف دیگر می‌دانیم: $m_1\vec{d}_1 + m_2\vec{d}_2 = 0$ است. پس اگر $|\vec{r}_1|^3 = |\vec{r}_2|^3$ باشد شرط برقرار است. یعنی اگر m روی عمود منصف خط واصل m_1 و m_2 باشد نیروی $\vec{F}_m$ در امتداد خط واصل m به o خواهد بود.

ب) m_1 و m_2 حول نقطه o با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخند. چون m اثری روی حرکت آنها ندارد کافی است این جرم هم با سرعت زاویه‌ای ω حول o بچرخد و $\ddot{\vec{r}} = 0$ باشد. می‌دانیم سرعت زاویه‌ای چرخش m_1 و m_2 برابر است با:

$$\omega^2 = G\frac{m_1 + m_2}{\left(d_1 + d_2\right)^3}$$

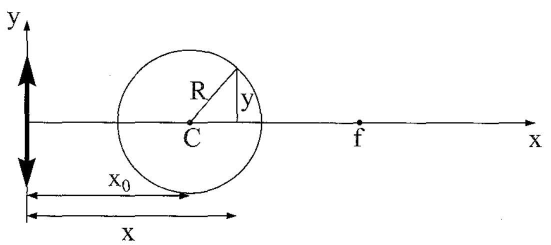
چون m هم باید با این سرعت زاویه‌ای حول o بچرخد، بایستی نیروی وارد بر آن هم به سمت o باشد، یعنی m (مطابق قسمت الف) روی عمود منصف خط واصل m_1 و m_2 باشد. در این وضعیت $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = \ell$ است. از طرف دیگر مطابق قسمت (الف) نیروی وارد بر m برابر $\vec{F}_m = \frac{Gm}{\ell^3}\left(m_1 + m_2\right)\vec{r}$ است که این نیرو باید برابر $mr\omega^2$ باشد. پس داریم:

$$\frac{Gm}{\ell^3}(m_1+m_2)r = mrG\frac{m_1+m_2}{(d_1+d_2)^3}$$

$$\Rightarrow \ell = d_1+d_2$$

پس اگر m، m_1 و m_2 روی رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشند این حالت پیش می‌آید و در واقع دو نقطه در بالا و پایین خط واصل دو جرم m_1 و m_2 این وضعیت را به وجود می‌آورد.

۲- از رابطه‌ی $\frac{1}{f}=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$ به دست می‌آوریم. (به ازای تصویر مجازی)



$$q=\frac{pf}{f-p}$$

مختصات جسم را (x,y) و مختصات تصویر آن را (x',y') می‌گیریم. داریم:

$$x'=\frac{xf}{f-x}\Rightarrow x=\frac{fx'}{f+x'} \qquad (1)$$

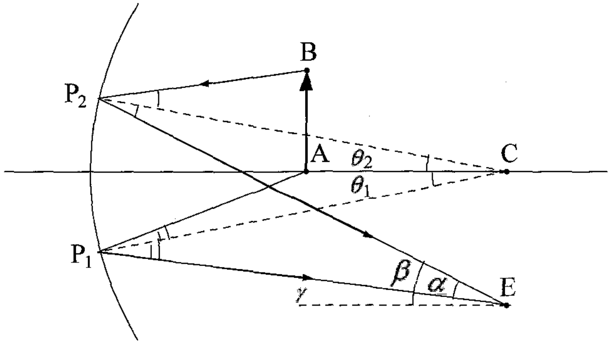
با توجه به رابطه بزرگنمایی $\frac{y'}{y}=\frac{x'}{x}$ و رابطه‌ی $y=\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}$ و رابطه (۱) داریم:

$$\frac{y'}{x'}=\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{y'}{x'}=\frac{\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}}{x}$$

$$\frac{y'}{x'}=\frac{\sqrt{R^2-\left(\frac{fx'}{f+x'}-x_0\right)^2}}{\frac{fx'}{f+x'}}\Rightarrow (fy')^2=(f+x')^2\left[R^2-\left(\frac{fx'}{f+x'}-x_0\right)^2\right] \qquad (2)$$

با توجه به اینکه $f-x_0>R$ است می‌توان رابطه (۲) را ساده کرد و دید که معادله مسیر تصویر، (x',y')، یک بیضی است.

۳-



از نقطه A پرتویی به آینه می‌تابانیم که آینه را در نقطه‌ی P_1 قطع کند و بازتابش آن از E بگذرد. از نقطه B هم پرتویی به آینه می‌تابانیم که آینه را در نقطهٔ P_2 قطع کند و بازتابش آن هم از E بگذرد. اگر نقاط P_1 و P_2 را به مرکز آینه (نقطه C) وصل کنیم، زاویه بین خطوط به دست آمده (خطوط خط چین) با محور اصلی آینه زوایای θ_1 و θ_2 می‌سازند. حال با توجه به اصل فرما می‌توانیم زوایای θ_1 و θ_2 را تعیین کنیم. یعنی باید زاویه θ_1 مقداری باشد که مجموع طولهای $\overline{AP_1}$ و $\overline{P_1E}$ اکسترمم شود و همچنین زاویهٔ θ_2 مقداری باشد که مجموع طولهای $\overline{BP_2}$ و $\overline{P_2E}$ اکسترمم شود.

با توجه به شکل و مختصات جسم و ناظر داریم:

$$\overline{AP_1} = \sqrt{\left(R\cos\theta_1 - \frac{R}{2}\right)^2 + R^2\sin^2\theta_1} = R\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta_1}$$

$$\overline{P_1E} = \sqrt{R^2\cos^2\theta_1 + \left(\frac{R}{2} - R\sin\theta_1\right)^2} = R\sqrt{\frac{5}{4} - \sin\theta_1}$$

$$L_1 = \overline{AP_1} + \overline{P_1E} = R\left(\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta_1} + \sqrt{\frac{5}{4} - \sin\theta_1}\right)$$

با اکسترمم کردن این مجموع، θ_1 به دست می‌آید.

$$\frac{dL_1}{d\theta_1} = 0 \Rightarrow \frac{\sin\theta_1}{\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta_1}} = \frac{\cos\theta_1}{\sqrt{\frac{5}{4} - \sin\theta_1}} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

در مورد پرتویی که از B به آینه می‌خورد و به E می‌رسد هم داریم:

$$\overline{BP_2} = \sqrt{\left(R\cos\theta_2 - \frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2} - R\sin\theta_2\right)^2} = R\sqrt{\frac{3}{2} - \cos\theta_2 - \sin\theta_2}$$

$$\overline{P_2E} = \sqrt{R^2\cos^2\theta_2 + \left(\frac{R}{2} + R\sin\theta_2\right)^2} = R\sqrt{\frac{5}{4} + \sin\theta_2}$$

$$L_2=\overline{BP_2}+\overline{P_2E}=R\left(\sqrt{\frac{3}{2}-\cos\theta_2-\sin\theta_2}+\sqrt{\frac{5}{4}+\sin\theta_2}\right)$$

$$\frac{dL_2}{d\theta_2}=0\Rightarrow\frac{\sin\theta_2-\cos\theta_2}{\sqrt{\frac{3}{2}-\cos\theta_2-\sin\theta_2}}=-\frac{\cos\theta_2}{\sqrt{\frac{5}{4}+\sin\theta_2}}$$

که به صورت عددی مقدار زاویه θ_2 برابر 0.65 rad بدست می‌آید.

مطابق شکل زاویهٔ α بزرگی زاویه‌ای تصویر از نظر ناظر است. از روی شکل داریم:

$$\alpha=\beta-\gamma$$

$$tg\beta=\frac{\frac{R}{2}+R\sin\theta_2}{R\cos\theta_2}$$

$$tg\gamma=\frac{\frac{R}{2}-R\sin\theta_1}{R\cos\theta_1}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ tg\alpha=tg(\beta-\gamma)=\frac{tg\beta-tg\gamma}{1+tg\beta\, tg\gamma}=A\Rightarrow\alpha=tg^{-1}(A)$$

۴- الف) یک تغییر کوچک در شعاع را در نظر بگیرید.

اگر نور مسیر قبلی خود را طی می‌کرد و نمی‌شکست، داریم که:

$$d\theta_1=\frac{-dr\times tg\theta}{r}$$

علت این امر از طریق هندسه قابل بررسی است. در واقع تغییر راستای $\hat{r}$ برای یک مسیر مستقیم که از مبدا نمی‌گذرد، باعث این امر می‌شود. (می‌توانید با کشیدن یک شکل و زاویه خارجی این مساله را اثبات نمایید.)

از طرفی به علت تغییر محیط از ناحیه r به $r+dr$ نور می‌شکند و داریم که اگر از انحنای دستگاه چشم پوشی کنیم و فرض کنیم که θ نسبت به یک دستگاه محور ثابت است سنجیده شود: (یعنی جمله بالا را کنار بگذاریم.)

$$n_{(r)}\sin\theta_{(r)}=n_{(r+dr)}\sin\theta_{(r+dr)}\Rightarrow$$

$$dn\times\sin\theta+n\cos\theta d\theta_2=0\Rightarrow$$

$$d\theta_2=\frac{-dn\times\sin\theta}{n\cos\theta}=-(\frac{dn}{dr})\frac{dr\times\sin\theta}{n\cos\theta}$$

که رابطه خط دوم رابطه آشنای قانون اسنل است که برای عبور از یک ناحیه به ناحیه دیگر داریم.

حال در کل داریم که تغییر θ ناشی از جمع دو عامل کوچک بالا به ازای یک تغییر r است. در نتیجه:

$$d\theta = d\theta_2 + d\theta_1 = -(\frac{dn}{dr})\frac{dr \times \sin\theta}{n\cos\theta} - \frac{dr \times tg\theta}{r} \Rightarrow$$

$$\frac{d\theta}{dr} = -tg\theta(\frac{1}{r} + \frac{dn}{ndr}) \Rightarrow -\frac{d\theta\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{dr}{r} + \frac{dn}{n} \Rightarrow$$

$$\ln\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta} = \ln\frac{r}{r_0} + \ln\frac{n}{n_0} \Rightarrow nr\sin\theta = const.$$

ب)

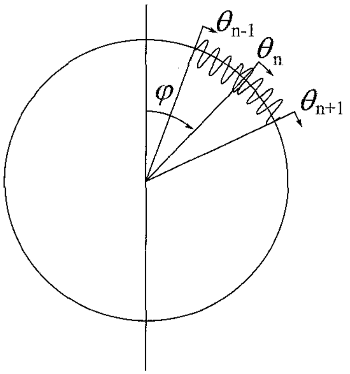
$$\left.\begin{aligned} & r_0\sin\theta_0 = d \\ & b = \frac{r_0\sin\theta_0 n_0}{n_{(b)}} \\ & n_0 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow b = d \times \sqrt{1-\left(\frac{r_s}{b}\right)^2}$$

$$\frac{b^4}{b^2 - r_s^{\,2}} = d^2$$

که این معادله درجه دو را می‌توان حل نمود و در ضمن می‌نیمم d نیز با مشتق گیری از این رابطه بدست خواهد آمد.

پاسخ سؤال‌های امتحان چهارم المپیاد فیزیک ـ پانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۱

۱- الف)



رابطه تعادل برای جرم nام در راستای مماس بر حلقه به صورت زیر است:

$$mg\sin\varphi = k'\left[\left(\theta_n-\theta_{n-1}\right)-\left(\theta_{n+1}-\theta_n\right)\right]R$$

که در آن $m=\frac{M}{N}$ و $k'=NK$ است. جرم nام در حالت طبیعی (بدون جاذبه) در زاویه $\frac{2\pi}{N}n$ از امتداد قائم است. در حالت تعادل وقتی جاذبه هم وجود دارد در زاویهٔ $\varphi=\frac{2\pi}{N}n+\theta_n$ است. بنابراین رابطه تعادل می‌شود.

$$\frac{Mg}{N^2KR}\sin\left(\frac{2\pi}{N}n+\theta_n\right)=2\theta_n-\theta_{n-1}-\theta_{n+1}$$

ب) با توجه به تقارن، جرم شماره صفر تغییر مکان نمی‌دهد یعنی $\theta_0=0$، بنابراین $C=0$ است. تا مرتبهٔ یک نسبت به $\frac{1}{K}$ رابطهٔ قسمت الف می‌شود.

$$\frac{Mg}{N^2KR}\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)=2\theta_n-\theta_{n-1}-\theta_{n+1}$$

با قرار دادن $\theta_n=\beta\sin\left(\alpha n\right)$ به دست می‌آوریم:

$$\frac{Mg}{N^2KR}\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)=2\beta\sin\left(\alpha n\right)-\beta\sin\left(\alpha\left(n-1\right)\right)-\beta\sin\left(\alpha\left(n+1\right)\right)$$

$$\frac{Mg}{N^2KR}\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)=2\beta\sin\left(\alpha n\right)-2\beta\sin\left(\alpha n\right)\cos\alpha$$

$$\frac{Mg}{N^2KR}\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)=2\beta\sin\left(\alpha n\right)\left(1-\cos\alpha\right)$$

$$\therefore \alpha=\frac{2\pi}{N}\,,\quad \beta=\frac{Mg}{2N^2KR\left(1-\cos\alpha\right)}=\frac{Mg}{4N^2KR\sin^2\left(\frac{\pi}{N}\right)}$$

ج) λ از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\lambda=\frac{\frac{M}{N}}{R\left(\frac{2\pi}{N}+\theta_n-\theta_{n-1}\right)}$$

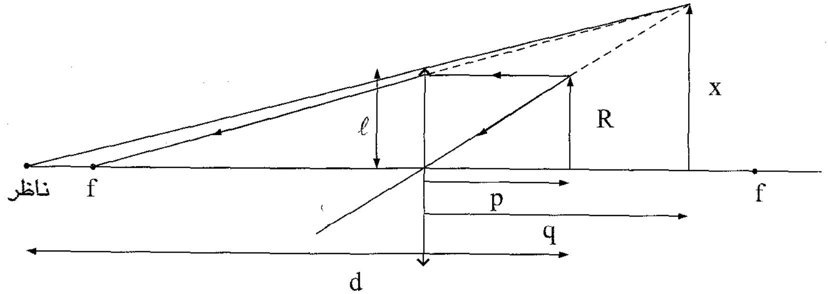
$$\Rightarrow \lambda=\frac{\frac{M}{N}}{R\left(\frac{2\pi}{N}+\frac{2Mg}{4N^2KR\sin^2\left(\frac{\pi}{N}\right)}\sin\frac{\pi}{N}\cos\frac{2\pi}{N}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)}$$

با $N\to\infty$ و $\frac{2\pi}{N}\left(n-\frac{1}{2}\right)=\theta$ داریم:

$$\lambda(\theta)=\frac{M}{2\pi R\left(1+\frac{Mg\cos\theta}{4\pi^2KR}\right)}$$

$$\therefore \lambda(\theta)=\frac{M}{2\pi R}\left(1-\frac{Mg\cos\theta}{4\pi^2KR}\right)$$

۲- الف) مطابق شکل بیشترین بزرگ نمایی وقتی است که خط واصل بین ناظر و لبه ذره‌بین از تصویر ایجاد شده توسط ذره‌بین عبور کند. از روی شکل دیده می‌شود که:



$$\frac{x}{R}=\frac{q}{p}\Rightarrow q=\frac{px}{R}\qquad(1)$$

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{1}{f}\Rightarrow\frac{1}{p}-\frac{R}{px}=\frac{1}{f}\Rightarrow x=\frac{Rf}{f-p} \qquad (2)$$

که در رابطه اخیر از رابطهٔ (۱) استفاده شده است. باز از روی شکل داریم:

$$\frac{x}{d+q-p}=\frac{\ell}{d-p} \qquad (3)$$

با جایگزین کردن روابط بدست آمده برای q و x از روابط (۱) و (۲) در رابطه (۳) بدست می‌آوریم:

$$\frac{\frac{Rf}{f-p}}{d+\frac{p}{R}\left(\frac{Rf}{f-P}\right)-p}=\frac{\ell}{d-p}$$

با ساده کردن رابطه اخیر بر حسب p به دست می‌آوریم.

$$\ell p^2+(fR-\ell d)p+(\ell fd-fRd)=0$$

با حل این رابطه برای p داریم:

$$p=\frac{(\ell d-fR)\pm\sqrt{f^2R^2+\ell^2d^2+2fR\ell d-4\ell^2fd}}{2\ell}$$

در حالت $\ell=R$ باید $p=0$ شود. (چرا که در این حالت تصویر ناشی از عدسی بزرگتر است و در ضمن کل جسم را می‌توان از داخل قاب دید.) از این رو تنها علامت منفی در رابطه بالا قابل قبول است.

ب) مقادیر $f=5cm$، $d=20cm$، $\ell=3cm$ و $R=1cm$ را انتخاب می‌کنیم. داریم:

$$3p^2-55p+200=0\Rightarrow p=\frac{55-\sqrt{55^2-2400}}{6}=\frac{55-25}{6}=5cm$$

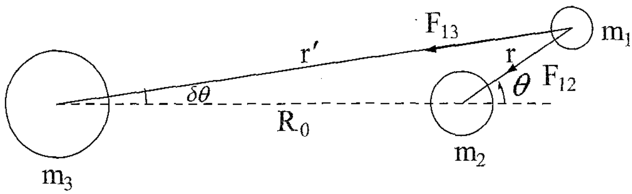
۳- الف) اولا: شرط چنین حالتی این است که

$$\frac{Gm_1m_2}{r_0^2}=m_1r_0\omega_0{}^2$$

یعنی سرعت زاویه‌ای چرخش آن $\omega_0=\sqrt{\frac{Gm_2}{r_0^3}}$ باشد.

ثانیاً: چون ω_0 ثابت است پس $\theta=\theta_0+\omega_0t=\theta_0+\sqrt{\frac{Gm_2}{r_0^3}}t$ است.

ب) با توجه به شکل، معادله حرکت m_1 در مختصات قطبی به صورت زیر است.



$$\begin{cases} m_1\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)=F_{12}+F_{13}\cos\left(\theta-\delta\theta\right) \\ m_1\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right)=F_{13}\sin\left(\theta-\delta\theta\right) \end{cases}$$

اگر $r \ll R_0$ باشد $r'^2 \approx {R_0}^2+2rR_0\cos\theta$ و داریم

$$\begin{cases} m_1\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)=-\dfrac{Gm_1m_2}{r^2}-G\dfrac{m_1m_3}{{R_0}^2+2R_0r\cos\theta}\left(\cos\theta+\delta\theta\sin\theta\right) \\ m_1\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)=\dfrac{Gm_1m_3r}{{R_0}^2+2R_0r\cos\theta}\left(\sin\theta-\delta\theta\cos\theta\right) \end{cases}$$

با صرفنظر کردن از جملات $\dfrac{r^2}{{R_0}^2}$ به بالا و $\dfrac{r}{R_0}\delta\theta$ داریم:

$$\begin{cases} m_1\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)=-\dfrac{Gm_1m_2}{r^2}-G\dfrac{m_1m_3}{{R_0}^2}\left(1-\dfrac{2r}{R_0}\cos\theta\right)\cos\theta-\dfrac{Gm_1m_3}{{R_0}^2}\delta\theta\sin\theta \\ m_1\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)=\dfrac{Gm_1m_3r}{{R_0}^2}\left(1-\dfrac{2r}{R_0}\cos\theta\right)\left(\sin\theta-\delta\theta\cos\theta\right) \end{cases} \quad (1)$$

با تقریب $\dfrac{r\sin\theta}{R_0} \approx \delta\theta$ و با حفظ معادلات تا مرتبه اول نسبت به $\dfrac{r}{R_0}$ از معادلهٔ دوم رابطه اخیر داریم

$$m_1\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)=\frac{Gm_1m_3}{{R_0}^2}r\sin\left(\omega_0 t\right)$$

که در آن به جای $\sin\theta$ از قسمت الف مقدار $\sin\omega_0 t$ با $\theta_0=0$ استفاده شده است. با تعریف $\ell=r^2\dot{\theta}$ و انتگرال گیری معادله اخیر به دست می‌آوریم.

$$\ell=\ell_0+\int_0^t G\frac{m_3}{{R_0}^2}r\sin\left(\omega_0 t\right)dt$$

$$\therefore \ell=\ell_0+\frac{Gm_3}{{R_0}^2}\frac{r_0}{\omega_0}\left(1-\cos\omega_0 t\right)=\ell_0+\Delta\ell$$

که در آن $\Delta\ell = \frac{Gm_3}{R_0^{\,2}}\frac{r_0}{\omega_0}\left(1-\cos\omega_0 t\right)$ ناشی از وجود جرم m_3 است.

معادله اول رابطه (۱) هم تنها با حفظ جملات تا مرتبه اول نسبت به $\frac{r}{R_0}$ می‌شود.

$$m_1\ddot{r} = \frac{m_1\ell^2}{r^3} - \frac{Gm_1m_2}{r^2} - \frac{Gm_1m_3}{R_0^{\,2}}\cos\omega_0 t$$

با فرض این که اختلاف r و r_0 (حالتی که m_3 وجود ندارد) کوچک باشد یعنی $\Delta r = r - r_0 \ll r_0$ باشد، به دست می‌آوریم.

$$m_1\left(\Delta\ddot{r}\right) = \frac{m_1\ell^2}{r_0^3}\left(1-3\frac{\Delta r}{r_0}\right) - \frac{Gm_1m_2}{r_0^{\,2}}\left(1-\frac{2\Delta r}{r_0}\right) - \frac{Gm_1m_3}{R_0^{\,2}}\cos\omega_0 t$$

با $\ell = \ell_0 + \Delta\ell$ و کوچک بودن $\Delta\ell$ نسبت به ℓ_0 داریم:

$$m_1\left(\Delta\ddot{r}\right) = \frac{m_1\ell_0^{\,2}}{r_0^3}\left(1+\frac{2\Delta\ell}{\ell_0}\right)\left(1-\frac{3\Delta r}{r_0}\right) - \frac{Gm_1m_2}{r_0^2}\left(1-\frac{2\Delta r}{r_0}\right) - G\frac{m_1m_3}{R_0^{\,2}}\cos\omega_0 t$$

با صرفنظر کردن از جملات مرتبه دوم به دست می‌آوریم:

$$m_1\left(\Delta\ddot{r}\right) = \frac{m_1\ell_0^{\,2}}{r_0^3} - \frac{3m_1\ell_0^{\,2}}{r_0^4}\Delta r + \frac{2m_1\ell_0\Delta\ell}{r_0^3} - \frac{Gm_1m_2}{r_0^2} + \frac{2Gm_1m_2}{r_0^3}\Delta r - \frac{Gm_1m_3}{R_0^{\,2}}\cos\omega_0 t$$

با توجه به $\ell_0 = r_0^2\omega_0 = \sqrt{Gm_2r_0}$ که از قسمت الف به دست می‌آید، جمله اول و چهارم سمت راست معادله اخیر یکدیگر را حذف می‌کنند و با جانشین کردن $\Delta\ell$ که به شکل زیر است، به دست می‌آوریم:

$$\Delta\ell = \frac{Gm_3}{R_0^2}\frac{r_0}{\omega_0}\left(1-\cos\omega_o t\right) = C\left(1-\cos\omega_o t\right) \Rightarrow$$

$$m_1\left(\Delta\ddot{r}\right) = -\frac{Gm_1m_2}{r_0^3}\Delta r + \frac{2m_1\ell_0}{r_0^3}C\left(1-\cos\omega_0 t\right) - \frac{Gm_1m_3}{R_0^{\,2}}\cos\omega_0 t$$

که با ساده کردن داریم

$$\Delta\ddot{r} + \omega_0^{\,2}\Delta r = K - \alpha\cos\omega_0 t$$

که در آن $K = \frac{2m_1\ell_0}{r_0^3}C$, $\alpha = \frac{2m_1\ell_0 C}{r_0^3} + \frac{Gm_1m_3}{R_0^{\,2}}$ است. بنابراین جواب r به صورت زیر است:

$$r = r_0 + \Delta r = r_0 + C\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right) + \frac{K}{\omega_0^{\,2}} + \frac{\alpha}{\omega_1^{\,2} - \omega_0^{\,2}}\cos\omega_1 t\ ,\ \omega_1 = \omega_0$$

ج) این مدل، مدل خوبی برای سیستم ماه- زمین- خورشید نیست. زیرا در حالت $\omega_1 = \omega_0$ دامنه به بی‌نهایت می‌رود و ماه دور زمین باقی نمی‌ماند. در واقع از چرخش زمین صرفنظر کرده‌ایم که درست نیست و با تقریبهایی که زدیم نیروی ناشی از m_3 (خورشید) را کم گرفته‌ایم که باز درست نیست.

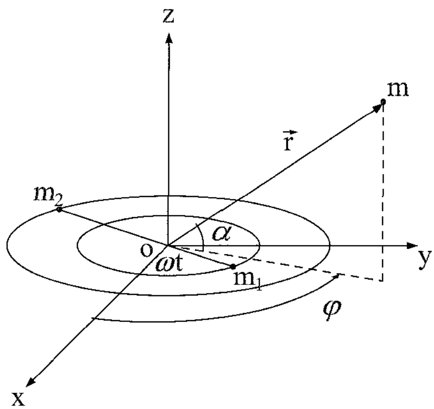
۴- فرض کنید توان ورودی P باشد. توان بر واحد سطح روی شبکیه $\frac{0.01P}{\pi\frac{D^2}{4}}$ است که D قطر لکهٔ زرد است و فرض می‌کنیم تصویر روی تمام لکهٔ زرد بیفتد. اگر a مساحت هر سلول حساس به نور باشد، توانی که به آن می‌رسد $\frac{0.01P}{\pi\frac{D^2}{4}}a$ است. این توان باید حداقل $12\times10\frac{ev}{s}$ باشد. بنابراین داریم:

$$\frac{0.01Pa}{\pi\frac{D^2}{4}}=120\frac{ev}{s}$$

$$\therefore P=\frac{\pi\frac{D^2}{4}\times120}{0.01a}=\frac{\pi\frac{\left(2\times10^{-3}\right)^2}{4}\times120}{0.01\times0.07\times10^{-6}}\approx5.4\times10^5\frac{ev}{s}$$

پاسخ سؤال‌های امتحان پنجم المپیاد فیزیک ـ پانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۱

۱-



اجرام m_1 و m_2 حول نقطه o با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کنند و بردار مکان آنها در دستگاه xyz به صورت $\vec{d}_1 = d_1\left(\cos\omega t\hat{i} + \sin\omega t\hat{j}\right)$ و $\vec{d}_2 = -d_2\left(\cos\omega t\hat{i} + \sin\omega t\hat{j}\right)$ است. بردار مکان جرم m هم به صورت $\vec{r} = r\left(\cos\alpha\cos\varphi\hat{i} + \cos\alpha\sin\varphi\hat{j} + \sin\alpha\hat{k}\right)$ است. سیاره تقریباً ثابت است پس داریم:

$$\vec{F}_1 = -G\frac{mm_1}{\left|\vec{r}-\vec{d}_1\right|^3}\left(\vec{r}-\vec{d}_1\right)$$

$$\vec{F}_2 = -G\frac{mm_2}{\left|\vec{r}-\vec{d}_2\right|^3}\left(\vec{r}-\vec{d}_2\right)$$

اگر مقادیر $\vec{r}$، $\vec{d}_1$ و $\vec{d}_2$ را در روابط $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ جایگزین کنیم و اولین مرتبه غیر صفر $\frac{d_1}{r}$ و $\frac{d_2}{r}$ را نگه داریم، به دست می‌آوریم:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\frac{Gm\left(m_1+m_2\right)}{r^3}\vec{r} + \frac{3}{2}\frac{Gmm_1d_1}{r^5}\left(d_1+d_2\right)\vec{r}$$
$$+\frac{3Gmm_1d_1\left(d_1+d_2\right)}{r^4}\cos\alpha\cos\left(\omega t-\varphi\right)\left(\cos\omega t\hat{i}+\sin\omega t\hat{j}\right)$$
$$-\frac{15}{2}\frac{Gmm_1d_1}{r^5}\left(d_1+d_2\right)\left(\cos\alpha\cos\left(\omega t-\varphi\right)\right)^2\vec{r}$$

که در آن α و φ زوایای نشان داده شده در شکل‌اند که مربوط به مختصات m است. توجه کنید در این روابط از $m_1d_1 = m_2d_2$ نیز استفاده شده است. البته با متوسط زمانی گرفتن می‌توان آن را ساده کرد.

۲- برای این که ببینیم حرکت روی دایره پایدار است تغییر جزئی زیر را در r و θ می‌دهیم.

$$\begin{cases} r = r_0 + \delta r \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \delta\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{r} = \delta\dot{r} \\ \dot{\theta} = \omega_0 + \delta\dot{\theta} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{r} = \delta\ddot{r} \\ \ddot{\theta} = \delta\ddot{\theta} \end{cases}$$

بنابراین $\hat{v} = \dfrac{\left(\delta\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}\right)}{\sqrt{\delta\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}}$ است و تا مرتبه اول معادله‌ی حرکت می‌شود.

$$\begin{cases} m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = -\dfrac{\alpha m}{r^n} \\ m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = \dfrac{\alpha m}{r^n}\left(\dfrac{\delta\dot{r}}{r\dot{\theta}}\right) \end{cases} \tag{1}$$

با جایگزین کردن مقادیر و حفظ آنها تا مرتبه اول داریم:

$$\delta\ddot{r} - \left(r_0 + \delta r\right)\left(\omega_0{}^2 + 2\omega_0\delta\dot{\theta}\right) = -\frac{\alpha}{r_0^n}\left(1 - n\frac{\delta r}{r_0}\right) \tag{3}$$

$$r_0\delta\ddot{\theta} + 2\omega_0\delta\dot{r} = \frac{\alpha}{r_0^{n+1}\omega_0}\delta\dot{r} \tag{4}$$

از (4) به دست می‌آوریم.

$$\delta\dot{\theta} = \frac{\alpha}{\omega_0 r_0^{n+2}}\delta r - \frac{2\omega_0}{r_0}\delta r \tag{5}$$

(3) هم با توجه به $r_0\omega_0{}^2 = \dfrac{\alpha}{r_0^n}$ و حفظ جملات تا مرتبهٔ اوّل به صورت زیر می‌شود:

$$\delta\ddot{r} - \omega_0{}^2\delta r - 2\omega_0 r_0\delta\dot{\theta} = \frac{\alpha n}{r_0^{n+1}}\delta r \tag{6}$$

با ترکیب (5) و(6) و حذف $\delta\dot{\theta}$ به دست می‌آوریم:

$$\delta\ddot{r} + \left(3\omega_0{}^2 - \frac{2\alpha}{r_0^{n+1}} - \frac{\alpha n}{r_0^{n+1}}\right)\delta r = 0$$

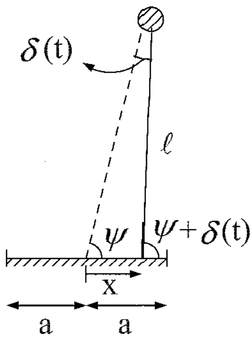
می‌دانیم $\omega_0{}^2 = \dfrac{\alpha}{r_0^{n+1}}$ است و اینکه شرط تعادل پایدار وقتی است که ضریب δr مثبت شود تا حول r_0 یک حرکت نوسانی داشته باشیم. بنابراین

$$3\alpha - 2\alpha - \alpha n > 0 \Rightarrow n < 1$$

چون در ابتدا حرکت دایره‌ای داریم، α مثبت است.

۳- الف) مکان تکیه‌گاه آونگ به صورت $x = a\sin\omega t$ است.

چون $a \ll \ell$ است از روی شکل پیداست که:



$$\delta(t) = \frac{x\sin\psi}{\ell}$$

$$\therefore\ \delta(t) = \frac{a\sin\omega t\sin\psi}{\ell} \qquad (1)$$

ب) نیروی مجازی $-m\ddot{x}$ است و مؤلفهٔ مماسی برابر $-m\ddot{x}\sin\psi' = ma\omega^2\sin\omega t\sin\psi'$ است که در آن $\psi' = \psi + \delta(t)$ است. متوسط زمانی این نیروی مماسی می‌شود:

$$<F_{\text{مجازی}}> = F'$$

$$F' = \frac{1}{T}\int_0^T ma\omega^2\sin\omega t\sin\psi' dt = \frac{1}{T}ma\omega^2\left[\int_0^T \sin\omega t\left(\sin\psi\cos\delta(t) + \sin\delta(t)\cos\psi\right)dt\right]$$

با تقریب‌های $\sin\delta(t) = \delta(t)\ ,\ \cos\delta(t) = 1$ داریم.

$$F' = \frac{ma\omega^2}{T}\int_0^T \sin\psi\sin\omega t\, dt + \frac{ma\omega^2}{T}\int_0^T \cos\psi\sin(\omega t)\delta(t)dt$$

انتگرال اول صفر است و به جای $\delta(t)$ در انتگرال دوم از رابطه (۱) استفاده می‌کنیم.

$$F' = \frac{ma\omega^2}{T}\int_0^T \cos\psi\sin(\omega t)\frac{a\sin\omega t\sin\psi}{\ell}dt = \frac{ma^2\omega^2\cos\psi\sin\psi}{T\ell}\int_0^T \sin^2\omega t\, dt$$

$$F' = \frac{ma^2\omega^2\cos\psi\sin\psi}{2\ell}$$

نیروی مماسی وزن $F_g = mg\cos\psi'$ است و متوسط زمانی آن می‌شود.

$$<F_g>=\frac{1}{T}\int_0^T mg\cos\psi'\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T mg\cos\left(\psi+\delta(t)\right)dt=$$

$$\frac{mg}{T}\int_0^T\left[\cos\psi\cos\delta(t)-\sin\psi\sin\delta(t)\right]dt$$

$$\Rightarrow <F_g>=mg\cos\psi$$

که در آن از $\cos\delta(t)=1$ و $\sin\delta(t)=\delta(t)$ و از (1) استفاده شده است.

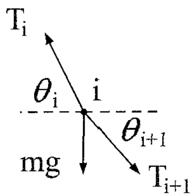
ج) شرط تعادل پایدار این است که متوسط نیروهای به دست آمده در قسمت (ب) با هم برابر شوند یعنی:

$$mg\cos\psi=\frac{ma^2\omega^2}{2\ell}\cos\psi\sin\psi$$

چون $\psi\approx\frac{\pi}{2}$ است پس شرط تعادل پایدار می‌شود $\omega=\sqrt{\frac{2g\ell}{a^2}}$.

۴- ذره‌ی iام را در نظر بگیریم. در حالت تعادل داریم:

$$\begin{cases}T_i\sin\theta_i-T_{i+1}\sin\theta_{i+1}=mg & (1)\\ T_i\cos\theta_i=T_{i+1}\cos\theta_{i+1} & (2)\end{cases}$$



با حذف T_{i+1} بین دو رابطه اخیر بدست می‌آوریم.

$$T_i\sin\theta_i-T_i\cos\theta_i\tan\theta_{i+1}=mg \qquad (3)$$

(2) نشان می‌دهد که $T_i\cos\theta_i$ ثابت است. بنابراین داریم:

$$T_i\cos\theta_i=T_1\cos\theta_1 \qquad (4)$$

که اندیس یک مربوط به ذره اول است. (ذره صفرم نگه داشته شده است.) بنابراین (3) می‌شود.

$$T_1\cos\theta_1\tan\theta_i-T_1\cos\theta_1\tan\theta_{i+1}=mg$$

$$\therefore\quad \tan\theta_{i+1}=\tan\theta_i-\frac{mg}{T_1\cos\theta_1} \qquad (5)$$

از (5) داریم

$$\tan\theta_2 = \tan\theta_1 - \frac{mg}{T_1\cos\theta_1}$$

$$\tan\theta_3 = \tan\theta_2 - 2\frac{mg}{T_1\cos\theta_1} \qquad (6)$$

$$\vdots$$

$$\tan\theta_i = \tan\theta_1 - (i-1)\left(\frac{mg}{T_1\cos\theta_1}\right)$$

حال از تقارن نیرویی که به ذره صفرم و nام وارد می‌شود و نیروی قائم وارد به طناب که برابر جرم آویزان است استفاده می‌کنیم یعنی:

$$2T_1\sin\theta_1 = (N-1)mg$$

$$\sin\theta_1 = \frac{(N-1)mg}{2T_1}$$

که مقدار $\sin\theta_1$ را برابر k در نظر می‌گیریم.

و $\cos\theta_1 = \sqrt{1-k^2}$، پس با توجه به (6) داریم:

$$\tan\theta_i = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} - (i-1)\left(\frac{mg}{T_1\sqrt{1-k^2}}\right)$$

$$\therefore \quad \tan\theta_i = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\left(k-(i-1)\frac{mg}{T_1}\right) \;;\; k = \frac{(N-1)mg}{2T_1} \qquad (7)$$

که در آن T_1 یک ثابت است که با توجه به فاصله افقی دو نقطه اتصال طناب (جسم‌های صفرم و Nام)، D، می‌توانیم آن را تعیین کنیم.

$$D = \ell\cos\theta_1 + \ell\cos\theta_2 + \ldots + \ell\cos\theta_{N-1} + \ell\cos\theta_N$$

$$D = \ell\sum_{i=1}^{N}\cos\theta_i = \ell\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta_i}} = \ell\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{\left(k-(i-1)\dfrac{mg}{T_1}\right)^2}{1-k^2}}}$$

$$\therefore \quad \frac{D}{\ell} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{\left(k-(i-1)\dfrac{mg}{T_1}\right)^2}{1-k^2}}} \qquad (8)$$

از (8) مقدار T_1 بر حسب کمیت‌های معلوم محاسبه می‌شود.

۵- در هر لحظه سرعت جسم را به صورت $\vec{v}=\dot{x}\,\hat{x}+\dot{y}\,\hat{y}$ نشان می‌دهیم. چون $\vec{B}$ در راستای $\hat{k}$ است پس نیرو در صفحه xy خواهد بود و سرعت همواره در صفحه xy است. معادله حرکت جسم می‌شود:

$$q\vec{v}\times\vec{B}-\alpha\vec{v}=m\ddot{\vec{r}}$$

$$q\left(\dot{x}\,\hat{x}+\dot{y}\,\hat{y}\right)\times B\hat{z}-\alpha\left(\dot{x}\,\hat{x}+\dot{y}\,\hat{y}\right)=m\left(\ddot{x}\,\hat{x}+\ddot{y}\,\hat{y}\right)$$

بنابراین مولفه‌های x و y می‌شود

$$\begin{cases} m\ddot{x}=-\alpha\dot{x}+qB\dot{y} \\ m\ddot{y}=-\alpha\dot{y}-qB\dot{x} \end{cases}$$

با یک بار انتگرال گیری داریم

$$\begin{cases} m\dot{x}=-\alpha x+qBy+C \\ m\dot{y}=-\alpha y-qBx+C' \end{cases} \qquad (1)$$

که در آن C و C' ثابت‌هایی هستند که از شرایط اولیه به دست می‌آیند. در لحظه پرتاب $x=y=0$ و $\dot{x}=v_x$ و $\dot{y}=v_y$ است. پس

$$\begin{cases} mv_x=C \\ mv_y=C' \end{cases}$$

بنابراین (1) می‌شود

$$\begin{cases} m\dot{x}=-\alpha x+qBy+mv_x \\ m\dot{y}=-\alpha y-qBx+mv_y \end{cases}$$

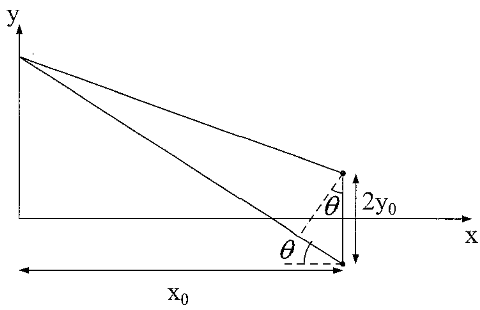
در زمان سکون $\dot{x}=\dot{y}=0$ است پس:

$$\begin{cases} -\alpha x+qBy+mv_x=0 \\ -\alpha y-qBx+mv_y=0 \end{cases} \qquad (2)$$

با حل (2) بر حسب x و y مختصات نقطه سکون به دست می‌آید.

$$\begin{cases} x=\dfrac{m\left(\alpha v_x+qBv_y\right)}{\alpha^2+q^2B^2} \\[2ex] y=\dfrac{m\left(\alpha v_y-qBv_x\right)}{\alpha^2+q^2B^2} \end{cases}$$

۶- الف) تصویر مجازی جسم در آینه مانند یک منبع دیگر عمل می‌کند که با منبع اصلی به اندازهٔ π اختلاف فاز دارد. اختلاف راه نوری دو منبع به اندازهٔ $2y_0\sin\theta$ است. بنابراین اختلاف فاز آنها می‌شود.



$$\Delta\varphi = \pi + 2\pi \frac{2y_0 \sin\theta}{\lambda}$$

در نقاط ماکزیمم $\Delta\varphi = 2k\pi$ است پس:

$$2k\pi = \pi\left(1 + \frac{4y_0 \sin\theta}{\lambda}\right)$$

$$\therefore \quad \sin\theta_{max} = \frac{\lambda(2k-1)}{4y_0}$$

اگر y هر نوار را با h نشان دهیم، داریم:

$$h \approx x_0 \sin\theta$$

و مکان ماکزیمم می‌شود

$$h_{max} = \frac{\lambda x_0 (2k-1)}{4y_0}$$

اولین نوار روشن به ازای $k = 1$ به دست می‌آید.

$$h_1 = \frac{\lambda x_0}{4y_0}$$

ب) اگر مکان منبع نورانی را با $\vec{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z}$ نشان دهیم مکان اولین نوار روشن $h_1 = \frac{\lambda}{4}\frac{x}{y}$ خواهد شد. بنابراین سرعت آن می‌شود

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{\lambda}{4}\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\lambda}{4}\left(\frac{\dot{x}y - \dot{y}x}{y^2}\right)$$

با توجه به بردار سرعت منبع $\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$ مولفه z بردار $\vec{v}\times\vec{r}$ همان $\dot{x}y - \dot{y}x$ است یعنی $(\vec{v}\times\vec{r}).\hat{z} = \dot{x}y - \dot{y}x$

از طرفی $y = \vec{r}.\hat{y}$ است پس سرعت حرکت اولین نوار روشن می‌شود.

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{\lambda}{4}\frac{(\vec{v}\times\vec{r}).\hat{z}}{(\vec{r}.\hat{y})^2}$$

پاسخ سؤال‌های امتحان نهایی المپیاد فیزیک ـ پانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۱

۱- فرض می‌کنیم که ارابه به مدت زمان t با شتاب ثابت a به سمت راست حرکت کند. در این صورت ارابه ، مسافت $x=\frac{1}{2}at^2$ را به سمت راست حرکت کرده است و طناب به اندازه $\ell=\frac{1}{2}at^2\frac{r}{R}$ باز شده و در نتیجه وزنه m به اندازه $h=\frac{1}{2}at^2\frac{r}{R}\sin\theta$ پایین آمده است. حال سرعت هر یک از اجرام را در انتهای کار می‌یابیم. اندازه سرعت جرم M را با v و اندازه سرعت جرم m را با u نمایش می‌دهیم. در نتیجه:

$$v=at$$

$$u=at\sqrt{\left(1-\frac{r}{R}\cos\theta\right)^2+\left(\frac{r}{R}\sin\theta\right)^2}=at\sqrt{1+\frac{r^2}{R^2}-2\frac{r}{R}\cos\theta}$$

حال با نوشتن بقاء انرژی، بدست می‌آید که:

$$mg\times\frac{1}{2}at^2\frac{r}{R}\sin\theta=\frac{1}{2}M\left(a^2t^2\right)+\frac{1}{2}m\left(a^2t^2\right)\left(1+\frac{r^2}{R^2}-2\frac{r}{R}\cos\theta\right)\Rightarrow$$

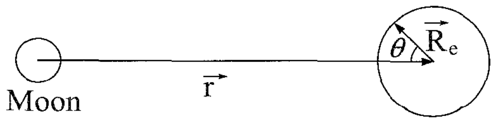
$$a=\frac{mg\ \frac{r}{R}\sin\theta}{M+m\left(1+\frac{r^2}{R^2}-\frac{2r}{R}\cos\theta\right)}$$

۲- زمین با شتابی مشخص به سمت ماه در حال حرکت و شتاب گرفتن است. (حرکت دایره‌ای ماه و زمین به معنای یک شتاب مرکز گرا است.)

r : فاصله زمین تا ماه

R_e : شعاع زمین

M_m : جرم ماه



اگر شتاب زمین را با $\vec{a}$ و شتاب جسم در مکان $\left(\vec{r}+\vec{R}e\right)$ را با توجه به شکل با $\vec{a}'$ نمایش دهیم، بدست می‌آید که:

$$\vec{a}'-\vec{a}=\frac{-GM_m\left(\vec{r}+\vec{R}e\right)}{\left|\vec{r}+\vec{R}e\right|^3}+\frac{GM_m\,\vec{r}}{r^3}=\frac{-GM_m}{r^3}\left(\left(\vec{r}+\vec{R}e\right)\left(1-\frac{3\vec{R}e.\vec{r}}{r^2}\right)-\vec{r}\right)=$$

$$\frac{-GM_m}{r^3}\left(\vec{R}e-\frac{3\left(\vec{R}e.\vec{r}\right)\vec{r}}{r^2}\right)$$

که اگر زاویه θ را جایگذاری کنیم به دست می‌آید که:

$$\vec{a}'-\vec{a}=\frac{GM_m\,Re}{r^3}\left(-3\cos\theta\hat{r}-\hat{R}e\right)$$

حال می‌خواهیم تخمینی از نسبت این شتاب به تغییر شتاب گرانش زمین را بیابیم. ابتدا ماکسیمم هر یک از این دو را می‌یابیم.

$$\max(\vec{a}'-\vec{a})=\frac{GM_m\,Re}{r^3}\sqrt{5}$$

که با مشتق گیری بدست می‌آید. و ماکسیمم شتاب گریز از مرکز نیز برابر است با:

$$a''=\Omega^2R_e$$

در نتیجه نسبت این دو شتاب می‌شود:

$$\frac{\dfrac{GM_m\,R_e}{r^3}\sqrt{5}}{\Omega^2R_e}$$

که با عدد گذاری مقدار 4×10^{-5} بدست می‌آید.

۳- الف)

$$V\left(r,\theta,0\right)=\int_0^{2\pi}\frac{-G\lambda a d\varphi}{\left(r^2\cos^2\theta+\left(r\sin\theta-a\cos\varphi\right)^2+a^2\sin^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}}=$$

$$-G\lambda a\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\left(r^2+a^2-2ar\sin\theta\cos\varphi\right)^{1/2}}$$

$$\approx\frac{-G\lambda a}{r}\int_0^{2\pi}d\varphi\left(1-\frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2}+\frac{a}{r}\sin\theta\cos\varphi+\frac{3}{2}\frac{a^2}{r^2}\sin^2\theta\cos^2\varphi\right)=$$

$$-\frac{G\lambda a}{r}\left(2\pi\left(1-\frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2}+\frac{3}{4}\frac{a^2}{r^2}\sin^2\theta\right)\right)=\frac{-G\lambda a2\pi}{r}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\left(\frac{-1}{2}+\frac{3}{4}\sin^2\theta\right)\right)$$

ب)

$$\int_{-\ell}^{+\ell}\int_{0}^{2\pi}\frac{-G\,\rho\, a\, d\varphi\, dz}{\left(z^2+a^2+d^2-2da\cos\varphi\right)^{\frac{1}{2}}}$$

ج) ما میدان یک کره کامل با چگالی جرمی ρ را می‌دانیم. کره مذکور در قسمت ج را از بر هم نهی کره کامل، با یک چگالی بار $-\rho$ در ناحیه‌ای تقریباً استوانه‌ای شکل می‌توانیم بسازیم:

$$V=\frac{-G\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{d}+\int_0^a\int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}}\int_0^{2\pi}\frac{G\,\rho\, r\, d\varphi\, dr\, dz}{\left(d^2+z^2+r^2-2rd\cos\varphi\right)^{\frac{1}{2}}}\approx$$

$$\frac{-G\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{d}+\frac{2G\rho}{d}\int_0^a\int_0^{R-\frac{r^2}{2R}}\int_0^{2\pi}\left(r\, d\varphi\, dr\, dz\left(1-\frac{1}{2}\frac{z^2}{d^2}+\frac{r}{d}\cos\varphi\right)\right)=$$

$$\frac{-G\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{d}+\frac{4\pi G\rho}{d}\int_0^a\int_0^{R-\frac{r^2}{2R}}\left(1-\frac{1}{2}\frac{z^2}{d^2}\right)dz\, r\, dr=$$

$$\frac{-G\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{d}+\frac{4\pi G\rho}{d}\int_0^a\left(R-\frac{r^2}{2R}-\frac{R^3\left(1-\frac{r^2}{2R^2}\right)^3}{6d^2}\right)r\, dr\approx$$

$$\frac{-G\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{d}+\frac{4\pi G\rho}{d}\left(\left(R-\frac{R^3}{6d^2}\right)\frac{a^2}{2}-\frac{a^4}{8R}\right)=\frac{-4\pi G\rho R^3}{3d}\left(1-\frac{3a^2}{2R^2}+\frac{a^2}{4d^2}+\frac{3a^4}{8R^4}\right)$$

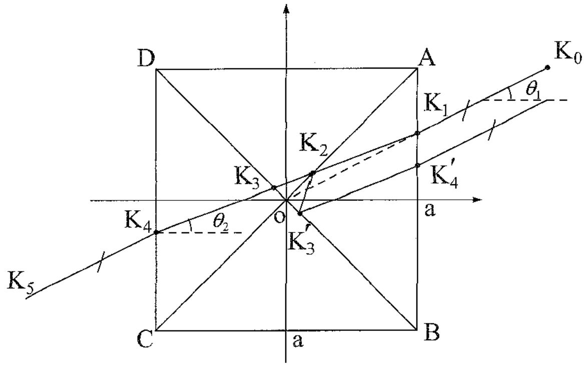
د)

$$\left.\frac{+dV}{d(d)}\right|_{r_0}=\frac{+4\pi G\rho R^3}{3r_0^2}\left(1-\frac{3a^2}{2R^2}+\frac{3a^2}{4r_0^2}+\frac{3a^4}{8R^4}\right)=\omega_0^2 r_0\Rightarrow$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{4\pi G\rho R^3}{3r_0^3}}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{-3a^2}{2R^2}+\frac{3a^2}{4r_0^2}+\frac{3a^4}{8R^4}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{3a^2}{2R^2}\right)^2\right)=$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{4\pi G\rho R^3}{3r_0^3}}\left(1-\frac{3a^2}{4R^2}+\frac{3a^2}{8r_0^2}-\frac{3a^4}{32R^4}\right)$$

۴- به شکل دقت کنید.



در ابتدا پرتوی K_0K_1 وارد سیستم می‌شود. این پرتو می‌شکند و پرتوی K_1, K_2 را تشکیل می‌دهد که حتماً در نقطه‌ای مثل K_2 با آینه Ao برخورد می‌کند.

فرض کنید به جای اینکه فکر کنیم پرتوی K_1K_2 از آینه Ao بازتاب می‌شود، فرض کنیم که کل دنیای سمت پایین آینه Ao نسبت به آن آینه بازتاب می‌شوند و در نتیجه تصویر B روی D می‌افتد و آینه Bo هم به آینه‌ای دیگر یعنی Do تبدیل خواهد شد. K_2K_3 همان بازتاب شده پرتو بازتاب شده ناشی از K_1K_2 در آینه Ao است و در نتیجه همین امتداد K_1K_2 را به خاطر دو بازتاب دارد. پرتوی K_2K_3 با آینه DO در نقطه‌ای به مانند K_3 برخورد می‌کند و باز هم همان عملیات قبل را انجام می‌دهیم و جای اینکه پرتو را بازتاب کنیم، تصویر مجازی را دوباره بازتاب می‌کنیم و تصویر دیگری از تصویر می‌سازیم. یعنی A را به C تصویر می‌کنیم. پرتو K_2, K_3 همان امتداد قبلی خود را یعنی K_3K_4 را می‌پیماید تا اینکه به انتهای مسیر شیشه‌ای یعنی CD می‌رسد و از محیط خارج می‌شود. در هنگام خارج شدن دوباره همان امتداد K_0K_1 را می‌گیرد که تنها یک انتقال به بالا یافته است.

D تصویر شده نقطه B است و C هم تصویر شده نقطه A. گویی که همه چیز نسبت به نقطه o یک تقارن نقطه‌ای یافته است. در واقع بنا بر هندسه می‌دانیم که تصویر نسبت به دو خط متعامد همان دوران به اندازه زاویه 180° است. کافی است پرتوی K_4K_5 را نسبت به مبدأ تقارن نقطه‌ای دهیم تا پرتوی خروجی را بیابیم.

$$\sin\theta_1 = \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} \Rightarrow \sin\theta_2 = \frac{\frac{m}{n}}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$\cot\theta_2 = \sqrt{\frac{1}{\sin^2\theta} - 1} = \sqrt{\frac{(m^2+1)n^2}{m^2} - 1} = \sqrt{\frac{(m^2+1)n^2 - m^2}{m^2}} = \frac{\sqrt{m^2(n^2-1)+n^2}}{m}$$

$$K_4 = \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}m - a\,tg\theta_2\right) = \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}m - a\frac{m}{\sqrt{m^2\left(n^2-1\right)+n^2}}\right)$$

که می‌دانیم K_4' همان $-K_4$ است:

$$K_4' = \left(+\frac{a}{2}, \frac{am}{\sqrt{m^2\left(n^2-1\right)+n^2}} - \frac{a}{2}m\right) \Rightarrow$$

$$\left(Y' - am\left(\frac{1}{\sqrt{m^2\left(n^2-1\right)+n^2}} - \frac{1}{2}\right)\right) = m\left(x' - \frac{a}{2}\right)$$

که به ازای $n=1$ نیز پرتو بازتابیده همان معادله $Y' = mx'$ را خواهد داشت.

۵- الف)

$$mgh = \frac{1}{2}m{v_0}^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh}$$

ب)

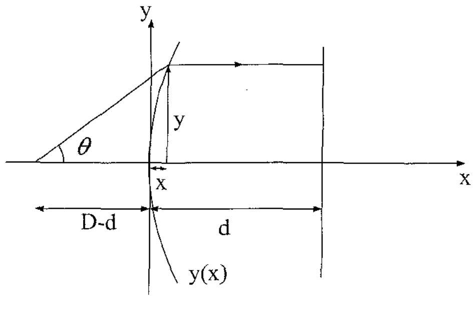
$$\left.\begin{aligned} x &= v_0.T \\ y &= H - h - \frac{1}{2}gT^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = H - h - \frac{x^2}{4h} \qquad x \le 2\sqrt{h\left(H-h\right)}$$

H ارتفاع A ها از سطح زمین می‌باشد.

$$\frac{\partial y}{\partial h} = -1 + \frac{x^2}{4h^2} = 0 \Rightarrow 4h^2 = x^2 \Rightarrow h = \frac{x}{2}$$

$$\max y = H - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4\times\frac{x}{2}} = H - \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = H - x$$

۶- با توجه به اصل فرما تمام پرتوهایی که در بی‌نهایت به هم می‌رسند باید زمان یکسانی را بپیمایند. پس زمانی که پرتوها طی می‌کنند تا به سطح تخت برسند می‌بایست یکسان باشد.



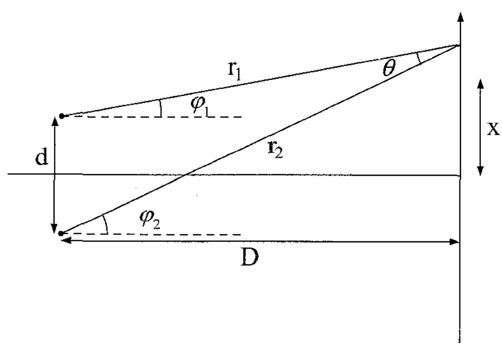
$$\frac{\sqrt{(D-d+x)^2+y^2}}{C}+\frac{n(d-x)}{C}=\frac{D-d}{C}+\frac{nd}{C}\Rightarrow$$

$$\sqrt{(D-d+x)^2+y^2}=nx+D-d\Rightarrow$$

$$y=\sqrt{(nx+D-d)^2-(x+D-d)^2}=\sqrt{(n^2-1)x^2+2(n-1)(D-d)x}$$

۷- **الف)** انرژی که در واحد طول از خط نورانی گسیل می‌شود، برابر U می‌باشد و از طرفی در فاصله r از خط شدت نور، $I(r)$ می‌باشد. که $U=2\pi rI$ ثابت است. پس $I\propto\frac{1}{r}$ و داریم: $I\propto E^2$ در نتیجه $E\propto\frac{1}{\sqrt{r}}$.

ب) به شکل زیر دقت کنید.



و فرض کنید که $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ است. داریم که:

$$r_1=\sqrt{D^2+\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}\approx D\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{D}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{d}{2D}\right)^2-\frac{xd}{2D^2}\right),\vec{r}_1=D\hat{y}+\left(x-\frac{d}{2}\right)\hat{x}$$

$$r_2=\sqrt{D^2+\left(x+\frac{d}{2}\right)^2}\approx D\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{D}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{d}{2D}\right)^2+\frac{xd}{2D^2}\right),\vec{r}_2=D\hat{y}+\left(x+\frac{d}{2}\right)\hat{x}$$

در نتیجه داریم که:

$$I=\frac{1}{2}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)\cdot\hat{n}=D\times\mathrm{Re}\left[\begin{array}{l}\left(\frac{\tilde{C}}{r_1\sqrt{r_1}}e^{i(kr_1-\omega t)}\left(\hat{z}\times\vec{r}_1\right)+\frac{\tilde{C}}{r_2\sqrt{r_2}}e^{i(kr_2-\omega t)}\left(\hat{z}\times\vec{r}_1\right)\right)\times\\ \left(\frac{\tilde{C}}{\sqrt{r_1}}e^{i(kr_1-\omega t)}\hat{z}+\frac{\tilde{C}}{\sqrt{r_2}}e^{i(kr_2-\omega t)}\hat{z}\right)^*\end{array}\right].\hat{n}$$

که در آن $\tilde{C}$ و D دو ثابت به ترتیب مختلط و حقیقی هستند. با توجه به این که $\hat{n}$ در راستای $\hat{y}$ است، با اندکی بررسی می‌توان فهمید که قسمت $\hat{x}$ در داخل $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ در نهایت نتیجه صفر به دنبال دارد. پس از ساده سازی داریم که:

$$I=\tilde{C}'\times \mathrm{Re}\left[\begin{array}{l}\left(\frac{1}{r_1\sqrt{r_1}}\left(\hat{z}\times D\hat{y}\right)+\frac{1}{r_2\sqrt{r_2}}e^{ik(r_2-r_1)}\left(\hat{z}\times D\hat{y}\right)\right)\times\\ \left(\frac{1}{\sqrt{r_1}}\hat{z}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}e^{-ik(r_2-r_1)}\hat{z}\right)\end{array}\right].\hat{y}=$$

$$\tilde{C}'D\times \mathrm{Re}\left[\left(\frac{1}{r_1\sqrt{r_1}}+\frac{1}{r_2\sqrt{r_2}}e^{ik(r_2-r_1)}\right)\times\left(\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}e^{-ik(r_2-r_1)}\right)\right]=$$

$$\tilde{C}''\times \mathrm{Re}\left[\begin{array}{l}\left(\frac{1}{\left(1+\left(\frac{x-\frac{d}{2}}{D}\right)^2\right)^{\frac{3}{4}}}+\frac{1}{\left(1+\left(\frac{x+\frac{d}{2}}{D}\right)^2\right)^{\frac{3}{4}}}e^{ik(r_2-r_1)}\right)\times\\ \frac{1}{\left(1+\left(\frac{x-\frac{d}{2}}{D}\right)^2\right)^{\frac{1}{4}}}+\frac{1}{\left(1+\left(\frac{x+\frac{d}{2}}{D}\right)^2\right)^{\frac{1}{4}}}e^{-ik(r_2-r_1)}\end{array}\right]=$$

$$\tilde{C}''\times \mathrm{Re}\left[\begin{array}{l}\left(\left(1-\frac{3}{4}\left(\frac{x-\frac{d}{2}}{D}\right)^2\right)+\left(1-\frac{3}{4}\left(\frac{x+\frac{d}{2}}{D}\right)^2\right)e^{ik(r_2-r_1)}\right)\times\\ \left(\left(1-\frac{1}{4}\left(\frac{x-\frac{d}{2}}{D}\right)^2\right)+\left(1-\frac{1}{4}\left(\frac{x+\frac{d}{2}}{D}\right)^2\right)e^{-ik(r_2-r_1)}\right)\end{array}\right]=$$

که با جانشینی $r_2-r_1=\frac{xd}{D}$ خواهیم داشت:

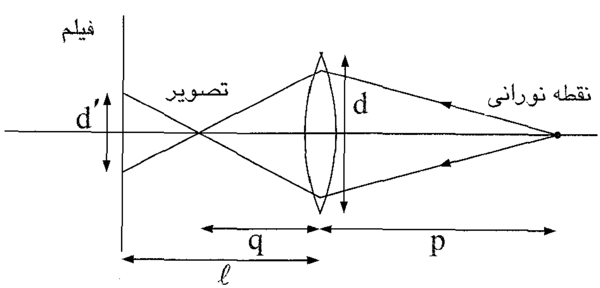
$$I=\tilde{C}''\times\left(\begin{array}{l}\left(1-\left(\frac{x-\frac{d}{2}}{D}\right)^2\right)+\left(1-\left(\frac{x+\frac{d}{2}}{D}\right)^2\right)+\\ \left(\left(1-\frac{1}{4}\left(\frac{x-\frac{d}{2}}{D}\right)^2-\frac{3}{4}\left(\frac{x+\frac{d}{2}}{D}\right)^2\right)\times\cos\left(k\frac{xd}{D}\right)\right)+\\ \left(\left(1-\frac{3}{4}\left(\frac{x-\frac{d}{2}}{D}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{x+\frac{d}{2}}{D}\right)^2\right)\times\cos\left(k\frac{xd}{D}\right)\right)\end{array}\right)=$$

$$\tilde{C}''\times\left(2-\left(\frac{x-\frac{d}{2}}{D}\right)^2-\left(\frac{x+\frac{d}{2}}{D}\right)^2\right)\left(1+\cos\left(k\frac{xd}{D}\right)\right)$$

لازم به ذکر است که چیزی در مورد کوچکی یا بزرگی k که ناشی از λ است در صورت سوال نیامده است.

-۸

$$\frac{1}{p_0}+\frac{1}{\ell}=\frac{1}{f} \qquad (1)$$



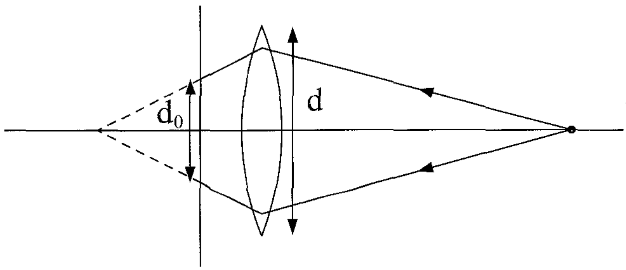
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}\Rightarrow q=\frac{fp}{p-f}$$

$$\frac{d'}{\ell-q}=\frac{d}{q}\Rightarrow d'=\left(\frac{\ell}{q}-1\right)d=\left(\ell\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{p}\right)-1\right)d\xrightarrow{(1)}$$

$$d'=\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}\right)\ell d$$

$$-d_0\le d'\le d_0\Rightarrow\frac{-d_0}{\ell d}\le\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}\le\frac{d_0}{\ell d}\Rightarrow\frac{1}{p_0}+\frac{d_0}{\ell d}\ge\frac{1}{p}\ge\frac{1}{p_0}-\frac{d_0}{\ell d}$$

d' برابر $-d_0$ به شکل مقابل می‌باشد.



۹- الف) می‌دانیم که توان با $\frac{1}{r^2}$ متناسب است. اگر توان خورشید را برابر P_0 بگیریم. توان ستاره‌ای در فاصله R از زمین، برابر است با: (در ضمنِ حل به مدت زمانی که نور در یک دقیقه طی می‌کند LM و به مدت زمانی که نور در یک سال طی می‌کند LY نسبت داده شده است.)

$$P_{(R)} = P_0\left(\frac{8\times LM}{R}\right)^2$$

حال به عنوان یک مدل فرض می‌کنیم که در فاصله بین ۴ سال نوریِ n، تا ۴ سال نوریِ $(n+1)$، تعداد $4\pi n^2$ ستاره وجود داشته باشد. (واضح است که این مدل برای nهای بزرگ مدلی کاملاً مناسب است.) در اینصورت داریم که:

$$P_1 = \sum_{n=1}^{\frac{10^4 LY}{4LY}} P_0\left(\frac{8\times LM}{4nLY}\right)^2 4\pi n^2 = P_0 4\pi\frac{10^4}{4}\left(\frac{8}{4\times365\times24\times60}\right)^2 \approx 10^{-6}P_0$$

پس نسبت آن به توان خورشید 10^{-6} است.

ب) تعداد ستاره‌های کهکشان راه شیری برابر است با:

$$\frac{4\pi}{3}\times\left(\frac{10^4 LY}{4LY}\right)^3$$

و در نتیجه توان متوسط ستاره‌های کهکشان راه شیری یا ستاره‌های هر کهکشان دیگری در فاصله R از آنها برابر خواهد بود با:

$$P_2'(n') = \frac{4\pi}{3}\times\left(\frac{10^4 LY}{4LY}\right)^3\times P_0\times\left(\frac{8LM}{2\times10^6\times n'}\right)^2$$

حال اگر قطر جهان را با r نشان دهیم، توان کل کهکشان‌های دیگر در زمین مثل قسمت الف محاسبه می‌شود. یعنی:

$$P_2=\sum_{n'=1}^{\frac{r}{2\times10^6 LY}} P_2'(n').4\pi n'^2=4\pi\frac{r}{2\times10^6}\frac{4}{3}\pi\left(\frac{10^4}{4}\right)^3 P_0\left(\frac{8}{2\times10^6\times365\times24\times60}\right)^2$$

و در نتیجه نسبت P_2 به P_1 برابر خواهد بود با:

$$\frac{\frac{r}{2\times10^6}.\frac{4}{3}\pi\left(\frac{10^4}{4}\right)^3\left(\frac{1}{2\times10^6}\right)^2}{\left(\frac{10^4}{4}\right)\quad\left(\frac{1}{4}\right)^2}\approx r\times10^{-10}$$

که نیاز به مقدار r (شعاع جهان) بر حسب سال نوری دارد که در اطلاعات صورت سوال نیست.

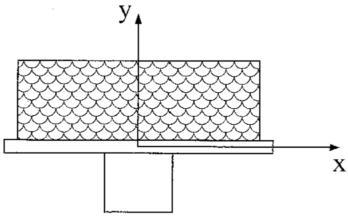
سؤال‌ها و پاسخ‌های شانزدهمین
دوره آزمون‌های المپیاد فیزیک

تابستان ۱۳۸۲

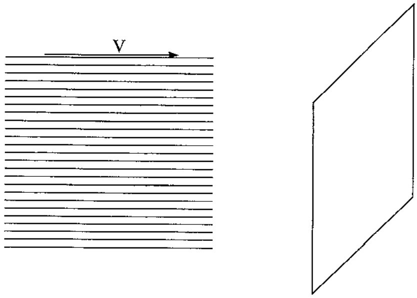
سؤال‌های امتحان اول المپیاد فیزیک ـ شانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۲

وقت: ٤ ساعت

۱- آب از آبپاشی مطابق شکل با سرعت v_0 خارج می‌شود. آبپاش را با سرعت $u_0 \sin \omega t$ در جهت x حرکت می‌دهیم. در زمان $t=0$ وسط آبپاش در مبدا مختصات بوده است. قطره آبی در زمان $t=T$ در نقطه $A(x=a, y=b)$ قرار دارد. این ذره از چه نقطه‌ای از آبپاش خارج شده و در چه مسیری به A رسیده است. از گرانش چشم بپوشید.



۲- صفحه مستطیل شکلی با ابعاد ℓ و ℓ' را درون شاره‌ای گذاشته‌ایم. سرعت شاره در فاصله دور، v در جهت عمود بر صفحه است. چگالی شاره ρ و گرانروی آن μ است. نیرویی که از طرف شاره بر مستطیل وارد می‌شود به پارامترهای $\mu, \rho, \ell, \ell', v$ بستگی دارد.



برای به دست آوردن این نیرو مستطیلی با ابعاد ℓ_0 و ℓ'_0 را درون شاره‌ای با همان سرعت قرار می‌دهیم. ابعاد مدل 100 برابر کوچکتر از مستطیل اصلی است. چگالی شاره $\rho_0 = 10\rho$، گرانروی آن $\mu_0 = 0.1\mu$ است. نیروی وارد بر مستطیل مدل F_0 شده است. نیروی وارد بر مستطیل بزرگ چقدر است؟

توجه: وقتی دو لایه شاره روی هم می‌لغزند و سرعت آنها با هم فرق دارد، نیرویی بین دو لایه وارد می‌شود. این نیرو برابر است با مساحت لایه‌ها ضربدر اختلاف سرعت لایه‌ها، تقسیم بر عکس فاصله لایه‌ها ضربدر یک ضریب به اسم ضریب گرانروی.

۳- هدف از این مساله محاسبه زمان پایان عمر خورشید است.

انرژی تولید شده توسط خورشید از فرآیندهای جوش هسته‌ای حاصل می‌شود. در این فرآیندها چهار هسته اتم هیدروژن با یکدیگر ترکیب و تشکیل یک هسته اتم هلیوم می‌دهند. انرژی تولید شده در این فرآیند بر طبق رابطه $E = \Delta mC^2$، برابر تفاوت جرم چهار اتم هیدروژن و اتم هلیوم ضربدر مجذور سرعت نور است. می‌توان نشان داد در صورتی‌که ۳۵ درصد جرم خورشید هلیوم باشد عمر آن به شکل فعلی به پایان می‌رسد. در حال حاضر ۲۵ درصد جرم خورشید هلیوم است.

برای محاسبه جرم خورشید می‌توان از رابطه $GM = r^3\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$ استفاده کرد. در این رابطه G ثابت گرانش نیوتن، M جرم خورشید، r شعاع مدار یک سیاره (مثلا زمین) و T زمان یک دور گردش آن سیاره به دور خورشید است.

در صورتی‌که زمان رسیدن نور خورشید به زمین $5.0\times10^2 s$ و توان دریافتی از خورشید در هر متر مربع روی سطح زمین $1.4kW$ باشد و با فرض اینکه توان تولیدی خورشید ثابت می‌ماند، زمان پایان عمر خورشید را محاسبه کنید.

فقط از پارامترهای زیر استفاده کنید.

$G = 6.67\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}$ ثابت جهانی گرانش

$C = 2.998\times10^8\frac{m}{s}$ سرعت نور در خلا

$m_{He} = 4.002603\frac{gr}{mol}$ جرم هسته اتم هلیوم

$m_H = 1.007825\frac{gr}{mol}$ جرم هسته اتم هیدروژن

$T = 365.25day$ زمان یک بار گردش زمین به دور خورشید

$t = 5.0\times10^2 s$ زمان رسیدن نوری که خورشید تولید می‌کند به زمین

$P = 1.4\frac{kW}{m^2}$ توان دریافتی از خورشید روی سطح زمین

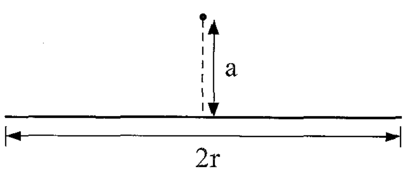
۴- ذرات ۱ و ۲ با سرعت‌های ثابت $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ حرکت می‌کنند. در یک لحظه دلخواه از زمان که آن را مبدا زمان در نظر می‌گیریم ($t = 0$)، بردارهای مکان این دو ذره به ترتیب $\vec{r}_{1i}$ و $\vec{r}_{2i}$ می‌باشند. نزدیک‌ترین فاصله این دو ذره چقدر است؟ در چه لحظه‌ای از زمان این نزدیک‌ترین فاصله اتفاق می‌افتد؟ دقت کنید که این زمان می‌تواند منفی باشد، چرا که مبدا را در یک لحظه دلخواه در نظر گرفته‌ایم. هم‌چنین شرطی را به دست آورید که برخورد دو ذره را تضمین کند.

راهنمایی: می‌توانید بدون استفاده از حسابان این مساله را حل کنید. هم‌چنین اجازه دارید بردارهای جدیدی بر حسب بردارهای داده شده تعریف کنید.

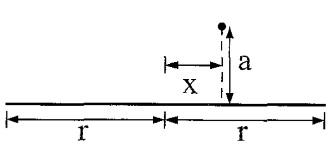
۵- دو سیاره روی دو دایره هم مرکز با صفحه مشترک حرکت می‌کنند. شعاع مدار سیاره اول $\vec{r}_1$، و شعاع مدار سیاره دوم $\vec{r}_2$ است. بسامد زاویه‌ای سیاره اول ω_1 و بسامد زاویه‌ای سیاره دوم ω_2 است. دو سیاره هم جهت می‌گردند. سرعت‌های زاویه‌ای ثابت‌اند. مبدا را مرکز دایره‌ها و محور x را یک محور دلخواه گذرنده از مبدا و در صفحه دایره‌ها بگیرید. در $t = 0$ سیاره اول روی نیم محور مثبت x است و بردار مکان سیاره دوم نسبت به نیم محور مثبت x برابر φ_0 است. زاویه بردار $r_2 - r_1$ نسبت به نیم محور مثبت x را θ می‌گیریم. $\vec{r}_2$ بردار مکان سیاره دوم، و $\vec{r}_1$ بردار مکان سیاره اول است. مشتق θ نسبت به زمان را به دست آورید. در حالت $\omega_1 = \omega_1 = \omega$، این مشتق را ساده کنید.

۶- در این مساله میدان الکتریکی چگالی بار خطی روی میله را مورد بررسی قرار می‌دهیم.
الف) میدان الکتریکی در فاصله عمودی a از میله بی‌نهایت طویلی با چگالی بار الکتریکی یکنواخت λ را بیابید. این میدان را E_0 می‌نامیم.

ب) میدان الکتریکی در فاصله عمودی a از مرکز میله‌ای به طول 2r را E می‌نامیم. اگر $\varepsilon = \dfrac{a}{r}$ کوچک باشد، $\dfrac{E}{E_0}$ را بسط تیلور داده و جملات آنرا تا مرتبه ε^2 نگه دارید.



ج) اگر نقطه مورد نظر در فاصله عمودی a از میله اما به فاصله افقی x از مرکز میله قرار داشته باشد، مولفه عمود بر میله میدان را برای $\dfrac{x}{r}$ های کوچک محاسبه کنید.



د) x چقدر کوچک باشد تا با دقت 0.01 مولفه عمود بر میله میدان الکتریکی یکنواخت باشد.

۷- چهار بار مشابه به اندازه q در چهار راس یک مربع به طول هر ضلع ℓ قرار دارند. مبدا مختصات را مرکز این مربع در نظر بگیرید. می‌خواهیم پتانسیل حاصل از این بارها را در نقطه‌ای بسیار نزدیک به مبدا به دست آوریم. این کمیت را برحسب $\vec{r}$، بردار فاصله نقطه مورد نظر از مبدا، تا مرتبه $\left(\dfrac{|\vec{r}|}{\ell}\right)^2$ به دست آورید. (فرض کنید $r << \ell$.)
جواب را برای حالتی که $\vec{r}$ در صفحه مربع است با حالتی که $\vec{r}$ عمود بر سطح مربع است مقایسه کنید.

سؤال‌های امتحان دوم المپیاد فیزیک ـ شانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۲
وقت: ٤ ساعت

۱- یک ماهواره در مداری دایره‌ای در صفحه‌ای عمود بر محور $\hat{n}_0$ و گذرنده از مرکز زمین، دور زمین می‌گردد. محور $\hat{n}_0$ نسبت به ستاره‌های دور ثابت است (یک چارچوب لخت) و جهت آن با مختصات کروی θ_0 و φ_0 داده می‌شود. محور z (که زاویه θ) نسبت به آن سنجیده می‌شود، همان محور چرخش زمین (خط قطب جنوب به قطب شمال) است و مرکز مختصات هم مرکز زمین است. جهت بردار مکان ماهواره در زمان t نسبت به مرکز زمین، $\hat{n}(t)$ است. این جهت هم با زاویه‌های θ و φ در مختصات کروی داده می‌شود. سرعت ماهواره (نسبت به چارچوب لخت)

$$v = r\omega\hat{n}_0 \times \hat{n}$$

است، که r فاصله‌ی ماهواره تا مرکز زمین، و ω سرعت زاویه‌ای ماهواره است. فرض کنید این سرعت زاویه‌ای با سرعت زاویه‌ای چرخش زمین به دور خود برابر است.

$(d\varphi/dt),(d\theta/dt)$ را برحسب ω و زاویه‌های مشخص کننده $\hat{n}_0$ و $\hat{n}$ به دست آورید.

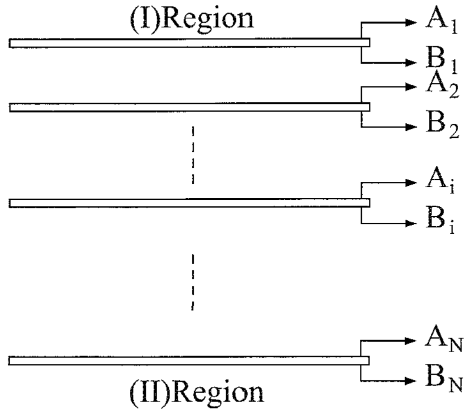
چارچوبی را در نظر بگیرید که محور z آن همان محور چرخش زمین است، مرکزش هم همان مرکز زمین است، اما هم راه با زمین می‌چرخد و زاویه‌های کروی نسبت به این چارچوب را با $\varphi_0', \theta_0', \varphi', \theta'$ نمایش می‌دهیم.

$(d\varphi'/dt),(d\theta'/dt)$ را برحسب ω و زاویه‌های پریم‌دار مشخص کننده $\hat{n}_0$ و $\hat{n}$ به دست آورید. (این‌ها در واقع سرعت ماهواره از دید یک ناظر زمینی‌اند).

۲- فرض کنید N رسانای مسطح طویل و هر یک با چگالی بار سطحی کل σ_i که i مربوط به رسانای i ام است به موازات یکدیگر واقع‌اند. فرض کنید چگالی بار در سطح بالایی صفحه i ام برابر A_i و در سطح پایینی آن B_i است به طوری که

$$\sigma_i = A_i + B_i \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

الف) با فرض اینکه بار دیگری در محیط وجود ندارد، میدان الکتریکی را در محیط خارج از رساناها (در نواحی مشخص شده با I و II در شکل به دست آورید.



ب) توزیع چگالی سطحی در دو طرف هر رسانا (Bi,Ai) را برحسب σ_jها ($j=1,2,...,N$) به دست آورید.

ج) در حالت خاص که دو صفحه داریم، مقادیر B_2, A_2, B_1, A_1 را برحسب σ_1 و σ_2 به دست آورید.

د) دوباره N رسانا در نظر بگیرید که چگالی بار سطحی کل همگی آنها با هم برابر است و مقدار هر یک برابر σ است، مقادیر B_i, A_i را برحسب σ به دست آورید.

هـ) اگر چگالی بار سطحی کل صفحه m ام به اندازه $n\sigma$ تغییر کند، مقادیر چگالی سطوح صفحات چقدر تغییر می‌کند. تنها کافی است در جدول زیر مقادیر تغییر B_i, A_i را بنویسید.

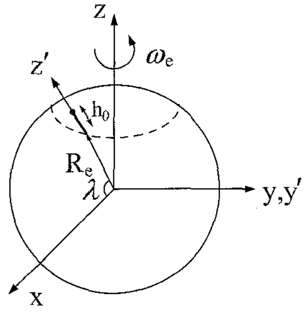
تغییر چگالی بار	$i<m$	$i=m$	$i>m$
ΔA_i			
ΔB_i			

و) فرض کنید $N=10$ است و همگی رساناها هم دارای چگالی یکسان σ هستند. فرض کنید میدان الکتریکی شکست (breakdown) برابر $E_C = \frac{1}{2}\left(\frac{10\sigma}{\varepsilon_0}\right)$ است. (میدان الکتریکی شکست یعنی اگر میدان الکتریکی بین دو صفحه رسانا به مقدار آن برسد، بین دو صفحه جرقه زده می‌شود).

حال فرض کنید مقدار $n\sigma$ به یکی از صفحات اضافه کنیم. حداقل n چقدر باشد تا بین دو صفحه از این رساناها شکست اتفاق بیافتد؟ یعنی اگر به صفحه اول دادیم حداقل n چقدر است، اگر به صفحه دوم دادیم حداقل n چقدر است و به همین ترتیب تا صفحه دهم حداقل n چقدر می‌شود؟

ز) فرض کنید صفحات فرد با چگالی کل σ و صفحات زوج با چگالی کل $-\sigma$ بار دارند. میدان الکتریکی بین صفحات در حالتی که N زوج است و حالتی که N فرد است به دست آورید. برای راحتی حالت $N=4, N=5$ را در نظر بگیرید و با ترسیم چهار رسانا و همچنین پنج رسانای دیگر مقادیر میدان‌ها را در بین صفحات بنویسید و جهت میدان را با علامت پیکان در آن‌ها نمایش دهید.

۳- فرض کنید سرعت زاویه‌ای زمین به دور خودش ω_e و در امتداد **z** است. جسمی به جرم **m** از بالای برجی به ارتفاع h_0 در عرض جغرافیایی λ با سرعت اولیه $\vec{v}_0$ به سمت بالا (در امتداد z' مطابق شکل) پرتاب می‌شود. (می‌دانیم در این حرکت کمیت $\vec{r}\times\vec{v}$ در کل حرکت ثابت است، که درآن $\vec{r}$ بردار فاصله از مرکز زمین است و $\vec{v}$ سرعت جسم در هر لحظه است).



الف) با توجه به ثابت بودن کمیت $\vec{r}\times\vec{v}$ در طول حرکت جسم (یا هر روش دیگری که می‌دانید)، سرعت زاویه‌ای جسم را در لحظه‌ای که در ارتفاع h از سطح زمین است، به دست آورید؟
اگر $\frac{h_0}{R_E}\ll 1$ و $\frac{h}{R_E}\ll 1$ باشند، تا مرتبه اول نسبت به $\frac{h}{R_E}$، این سرعت زاویه‌ای را تعیین کنید. (R_E شعاع زمین است.)

ب) با فرض اینکه $\frac{h}{R_E}\ll 1$ است، یعنی برای حرکت در نزدیکی سطح زمین، معادله حرکت شعاعی جسم را نوشته و با صرفنظر کردن از جملات $r\dot{\theta}^2$ در مقابل g_0 زمین $\left(\frac{R_E\omega_e^2}{g_0}=0.34\%\right)$، و با توجه به قسمت (الف)، زاویه θ دوران یافته در صفحه $y'z'$ را برحسب زمان به دست آورید.

ج) با توجه به چرخش زمین، محل افتادن جسم روی سطح زمین چقدر از پای برج فاصله دارد؟ فرض کنید سرعت اولیه پرتاب در این حالت نسبت به زمین صفر است یعنی جسم را رها کرده‌ایم.

د) اگر جسم را از سطح زمین ($h_0=0$) با سرعت اولیه v_0 به سمت بالا پرتاب کرده باشیم، فاصله جسم موقع برگشت به سطح زمین از مبدأ پرتاب چقدر است؟

ه) فرض کنید در ارتفاع h_0 جسم را با سرعت v_0 به سمت بالا پرتاب کنیم. به ازای چه مقدار از v_0، جسم درست از پای برج عبور خواهد کرد؟

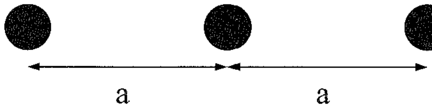
و) اگر برج مورد نظر 100m ارتفاع داشته باشد، سرعت v_0 چقدر است؟

راهنمایی: در مختصات قطبی $\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{u}_r+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\hat{u}_\theta, \vec{v}=\dot{r}\hat{u}_r+r\dot{\theta}\hat{u}_\theta$ و مقدار $g_0=10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ است.

۴- اگر معادله حرکت سیستمی به شکل $\ddot{x} = cx$ (c یک عدد منفی با بعد T^{-2} است) باشد، حرکت آن را نوسانی ساده می‌نامیم و معادله مکان آن برحسب زمان به صورت $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ خواهد بود، که در آن A و φ از شرایط اولیه به دست می‌آیند و $\omega = \sqrt{-c}$.

در یک تقریب بسیار ساده یک جامد فلزی را می‌توان به صورت تعدادی یون مثبت که با هم برهم‌کنش دارند در نظر گرفت.

الف) اگر یک یون (با بار $+e$) تنها تحت تأثیر دو یون هم‌جوار خود (مسئله یک بُعدی است) که در فاصله a از آن قرار دارند، باشد، ω این نوسان را بیابید.

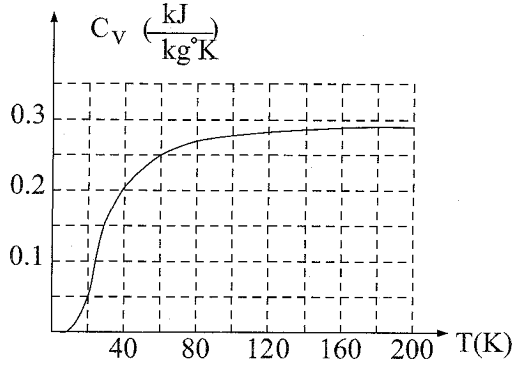


ب) برای $e = 1.6\times10^{-19}\,C, a = 1.0\,A^\circ$، ω را حساب کنید.

همانگونه که در بخش قبلی سوال دیدید، می‌توان به فلزات پارامتری به نام ω نسبت داد. نسبت ω برای سرب و آلومینیوم $\frac{1}{4}$ است یعنی $\frac{\omega_{Pb}}{\omega_{Al}} = \frac{1}{4}$.

نمودار زیر، نمودار ظرفیت گرمایی بر واحد جرم سرب است. ظرفیت گرمایی مقدار گرمایی(همان انرژی) است که برای بالا بردن دمای یک کیلوگرم از یک ماده به اندازه یک کلوین لازم است.

ج) با کمک نمودار و تحلیل ابعادی ظرفیت گرمایی بر واحد جرم آلومینیوم را در $300K$ (دمای اتاق) بیابید. چون این مساله مربوط به خواص گرمایی و کوانتومی مواد است می‌توان انتظار داشت دو ثابت بنیادی پلانک و بولتزمن در این موضوع نقش داشته باشند.



$h = 6.67\times10^{-34}\,J.s$	ثابت پلانک
$K_B = 1.38\times10^{-23}\,J/k$	ثابت بولتزمن
$M_{pb} = 82g$	جرم مولی سرب
$M_{Al} = 29g$	جرم مولی آلومینیوم

۵- در این سوال حرکت یک ذره در مختصات کروی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.
الف) ذره‌ای با شروع حرکت از نقطه A روی استوای کره‌ای به شعاع واحد، به اندازه زاویه α به سمت شرق می‌رود تا به نقطه B برسد. سپس به اندازه زاویه β روی دایره عظیمه گذرنده از قطب شمال و نقطه B به سمت شمال می‌رود. اگر مختصات اولیه ذره $x_0 = 1, y_0 = 0, z_0 = 0$ باشد، مختصات نهایی آن را حساب نمایید. $\vec{r_1} = (x_1, y_1, z_1) = ?$
ب) اکنون فرض کنید که این ذره از نقطه A به اندازه زاویه β روی دایره عظیمه گذرنده از قطب شمال و نقطه A به سمت شمال برود تا به نقطه c برسد. سپس روی دایره عظیمه گذرنده از نقطه c به اندازه زاویه α حرکتی کند که شروع آن به سمت شرق است. این حرکت روی دایره عظیمه‌ای صورت می‌گیرد که از c می‌گذرد و بر دایره عظیمه گذرنده از c و قطب شمال عمود است.
دقت کنید که در مختصات کروی، φ با حرکت روی استوا و θ با حرکت روی مدارها سنجیده می‌شود. (مدارها دایره‌های عظیمه عمود بر استوا هستند.)
مختصات نهایی ذره در این وضعیت را محاسبه کنید: $\vec{r_2} = (x_2, y_2, z_2) = ?$
ج) بردار اختلاف مختصات نهایی در این دو حالت $\vec{\Delta} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$ را بیابید.
د) فرض کنید β, α از یک مرتبه کوچک باشند. $\vec{\Delta}$ را تا مرتبه دوم کوچکی (یعنی تا جملاتی که بزرگتر از β^2, α^2 یا $\alpha\beta$ نیستند) محاسبه کنید.
راهنمایی: مختصات دکارتی معادل (r, θ, φ) در دستگاه کروی به شکل زیر است.
$(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$

سؤال‌های امتحان سوم امتحان المپیاد فیزیک ـ شانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۲
وقت: ٤ ساعت

۱- چند جمله ای زیر را در نظر بگیرید.

$$P(\varepsilon, x) = (x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-19)(x-20) + \varepsilon x^{19}$$
$$= x^{20} - (210-\varepsilon)x^{19} + \dots + 20!$$

دقت کنید که فقط ضریب x^{19} به εبستگی دارد. معادله $P(0,x)=0$ ۲۰ ریشه حقیقی دارد که عبارت‌اند از:

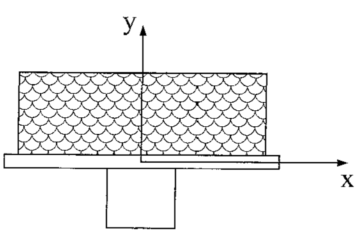
$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad \dots \quad x_{19} = 19, \quad x_{20} = 20$$

الف) ثابت کنید برای $\varepsilon > 0$ معادله، $P(0,x)=0$ هیچ ریشه حقیقی که بزرگ تر از ۲۰ باشد ندارد.

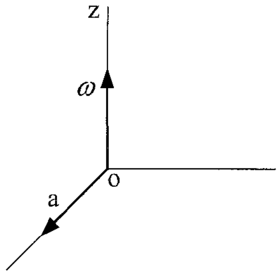
ب) می خواهیم به روش اختلال ریشه‌های معادله $P(\varepsilon, x) = 0$ را تا مرتبه اول (نسبت به ε) به دست آوریم. این ریشه ها را به شکل $x_n = n + \varepsilon y_n$ بنویسید، و y_n را به دست آورید. y_9 و y_{17} را حساب کنید.

ج) x_9 و x_{17} را به ازای $\varepsilon = 10^{-8}$ حساب کنید.

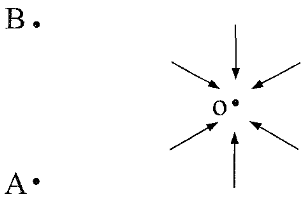
۲- آب از آبپاشی مطابق شکل با سرعت υ_0 خارج می شود. آبپاش را با سرعت $u_0 \mathrm{Sin}\omega t$ در جهت x نسبت به دستگاه xy حرکت می دهیم. در زمان $t=0$ وسط آبپاش در مبدأ مختصات بوده است. در مبدأ مختصات اسفنج کوچکی آغشته به رنگ ساکن است، به طوری که قطرات آبی که از مبدأ پرتاب می شوند رنگی می‌شوند. در لحظه T از این مجموعه عکس می گیریم. نقاط رنگی منحنی ای به شکل $f(x,y)=0$ می سازند. $f(x,y)$ را به دست آورید. از گرانش چشم بپوشید.



۳- صفحه بزرگی حول محور z که بر صفحه عمود است و از نقطه O می گذرد، با سرعت زاویه ثابت ω دوران می کند. جسم کوچکی به جرم m را روی این سطح و در فاصله a از نقطه O قرار می‌دهیم. ضریب اصطکاک m با صفحه μ است. بردار مکان ذره را تا رتبه دوم μ به دست آورید. تا این رتبه جسم به مبدأ نزدیک می شود و یا از آن دور می شود؟



۴- در یک دریاچه فرضی، سوراخی وجود دارد که آب از آن ناحیه به درون زمین فرو می‌رود. به همین دلیل همواره جریان آبی به سمت سوراخ وجود دارد. مکان سوراخ را مبدأ مختصات بگیرید.
الف) عمق کف رودخانه برحسب r (فاصله از سوراخ) را به گونه ای به دست آورید که اندازه سرعت آب دریاچه در همه جا تقریباً ثابت بماند. این سرعت را v بگیرید.
ب) شخصی می خواهد با یک قایق از نقطه A به نقطه B برود. اندازه سرعت قایق برابر با v (همان سرعت آب دریاچه) و جهت آن همواره به سوی نقطه B است.
مسیر حرکت قایق را به دست آورید. قایق سرانجام به کجا می رسد؟



۵- دو کره فلزی مشابه به شعاع R در فاصله d از هم قرار دارند. فرض کنید $d >> R$. روی یکی از آنها بار Q و روی دیگر بار $-Q$ قرار دارد.
الف) با فرض این که این دو کره آن قدر دورند که روی توزیع بار هم تأثیری ندارند، ظرفیت خازنی این سیستم را به دست آورید.
ب) به خاطر میدان هر کدام از کره ها، روی کره دیگر یک دو قطبی به وجود می آید. این دو قطبی را تا اولین مرتبه غیر صفر از $\frac{d}{R}$ به دست آورید.

ج) با استفاده از قسمت (ب) دقت در محاسبه خازنی را تا مرتبه $\left(\frac{d}{R}\right)^2$ بهبود دهید.

۶- بارهای $-q_1$، q_1، $-q_2$ و q_2 به ترتیب در نقطه‌های $\vec{o}$، $\vec{d}_1$، $\vec{r}$ و $\left(\vec{r}+\vec{d}_2\right)$ هستند.
الف) انرژی پتانسیل این مجموعه را حساب کنید.

ب) انرژی پتانسیل این مجموعه منهای انرژی پتانسیل همین مجموعه در حالت $|r| \to \infty$ (بقیه کمیت‌ها ثابت) را حساب کنید.

ج) بگیرید $\vec{p}_1 = q_1\vec{d}_1$ و $\vec{p}_2 = q_2\vec{d}_2$. $\vec{p}_1$ و $\vec{p}_2$ را ثابت بگیرید و $|d_1|$ و $|d_2|$ را به سمت صفر میل دهید. حد عبارت حاصل از (b) در این حالت را حساب کنید.

۷- یک بار q، در فاصله d از سطح صاف یک دی الکتریک بسیار بزرگ، با ضریب دی‌الکتریک k قرار دارد.

در این مساله می خواهیم چگالی بار القایی بر روی سطح دی الکتریک را از روش "پله‌ای" محاسبه نماییم.

الف) ابتدا مؤلفه عمود بر سطح میدان، ناشی از q تنها را، بر روی سطح دی الکتریک بیابید. (میدان به صورت تابعی از متغیرr، که r فاصله نقطه محاسبه میدان تا بار q است).

ب) حال فرض کنید که این میدان، باعث ایجاد بردار چگالی قطبش (P) بر طبق رابطه $P = (k-1)\varepsilon_0 E$، بر روی سطح دی الکتریک می گردد.

اکنون چگالی بار القایی برروی سطح دی الکتریک، ناشی از این P را بیابید.

ج) اکنون تعیین کنید که بار القایی به دست آمده در قسمت "ب" چه میدان الکتریکی را بر روی سطح دی الکتریک ایجاد می کند.

د) حال با میدان به دست آمده در قست "ج" مراحل "ب" و "ج" را تکرار کنید.

با تکرار این چرخه تا بی نهایت، هر بار یک میدان جدید در قسمت "ج" به دست می‌آید. جمع همه این میدان ها (که به صورت یک سری هندسی خواهد شد) برابر با کل میدان ناشی از بار القایی روی سطح دی الکتریک می باشد. این میدان کل را محاسبه کنید.

ه) حال با استفاده از میدان محاسبه شده درقسمت "د" چگالی بار سطحی القایی روی دی الکتریک را بیابید.

سؤال‌های امتحان چهارم فیزیک ـ شانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۲

وقت: ۵ ساعت

۱- نیروی وارد بر دو قطبی الکتریکی $\vec{P}$ در میدان الکتریکی $\vec{E}$

$$\vec{F} = P_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + P_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + P_z \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}$$

است.

الف) یک جسم با پذیرفتاری الکتریکی χ در میدان الکتریکی ایستا $\vec{E}$ قرار دارد. حجم کوچک ΔV از این جسم را در نظر بگیرید. نیروی وارد بر این حجم کوچک را به دست آورید. این نیرو را برحسب تغییرات فضایی $\vec{E}.\vec{E}$ به دست آورید.

راهنمایی: برای میدان‌های ایستا داریم که:

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{z} = 0\right]$$

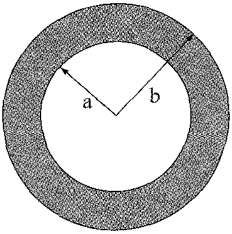
ب) یک دی الکتریک کوچک به حجم V و پذیرفتاری الکتریکی χ، به فاصله r از بار نقطه‌ای Q است. χ را کوچک بگیرید و نیروی وارد بر دی الکتریک را تا اولین مرتبه غیر صفر نسبت به χ حساب کنید.

۲- دو کره رسانای هم مرکز به ترتیب شعاع های a وb دارند. بین این دو کره، ماده‌ای با رسانندگی متغیر $\sigma = \sigma_0 + \alpha r$ قرار دارد. فرض کنید α بسیار کوچک است.

الف) مقاومت بین این دو کره را تا اولین مرتبه α حساب کنید.

ب) به دو کره، اختلاف پتانسیل V اعمال می کنیم و صبر می‌کنیم تا جریان‌ها ثابت شوند و سیستم به تعادل برسد. چگالی بار حجمی داخل رسانا را برحسب تابعی از r به دست آورید.

ج) فرض کنید ماده میان دو کره کاملاً نارسانا است و اختلاف پتانسیل V به آن اعمال شده است. با تغییر دما، ناگهان این ماده تغییر فاز می دهد و به ماده‌ای رسانا با همان رسانندگی متغیر $\sigma = \sigma_0 + \alpha r$ تبدیل می شود. این گذر فاز را در $t = 0$ درنظر بگیرید. درست در این زمان مشتق چگالی بار را در نقاط مختلف این ماده به دست آورید.



۳- جسمی به جرم m روی سطحی که می توان از اصطکاک آن چشم پوشید، حرکت می کند. در مختصات استوانه ای (r,θ,z) معادله سطح به صورت $r=r(z)$ است. می دانیم شتاب در دستگاه استوانه ای به صورت زیر است.

$$\vec{a}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\hat{r}+\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta}+\ddot{z}\hat{z}$$

الف) معادله حرکت جسم را به دست آورید. (تنها معادلات دیفرانسیل حرکت را در مختصات استوانه‌ای بنویسید.)

ب) با ساده کردن معادلات دیفرانسیل به دست آمده در قسمت (الف)، نشان دهید که معادله زیر به دست می آید.

$$\ddot{z}f_1\left(r,r',r''\right)+\dot{Z}^2f_2\left(r,r',r''\right)=f_3\left(r,r',r'',\dot{\theta}\right) \qquad (1)$$

که در آن $r'=\dfrac{dr}{dz},r''=\dfrac{d^2r}{dz^2}$ است. توابع f_1,f_2,f_3 را معین کنید.

ج) فرض کنید حرکت جسم نزدیک به یک دایره است. یعنی فرض کنید $z=z_0+\varepsilon\sin\omega t$ است. که در آن $\varepsilon<<z_0$. حال $r(z)$ را حول z_0 بسط تیلور دهید و $r(z)$ و $r'(z)$ را تا مرتبه اول نسبت به ε به دست آورید. با گذاشتن این مقادیر در معادله (۱) نشان دهید که $\omega^2=\Omega^2f_4\left(r_0,r_0',r_0''\right)$ است که در آن $r_0''=r''(z_0),r_0'=r'(z_0),r_0=r(z_0)$ و $\Omega=\dfrac{J}{m{r_0}^2}$ است که در آن (ثابت $=$ $J=mr^2\dot{\theta}$) است. تابع f_4 را به دست آورید.

د) اگر $\omega^2<0$ باشد مدار ناپایدار است. نشان دهید این شرط به صورت زیر در می آید.

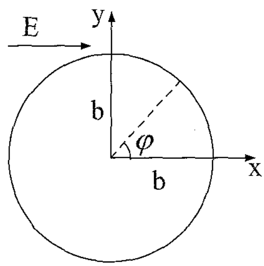
$$\left(\frac{1}{r^2}\right)''<0$$

که مشتق گیری نسبت به z است و در نقطه r_0 محاسبه می شود.

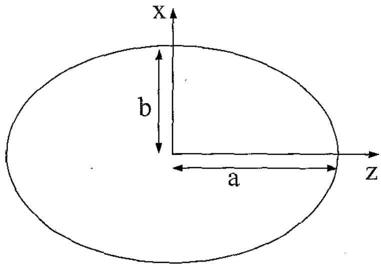
ه) کدام یک از سطوح زیر ناپایدار است.

۱) $r=-\dfrac{k}{z}$ (k ثابت است)، ۲) $r^2-z^2=R^2$ (R ثابت است)

۴- بیضی گونی رسانا را در یک میدان الکتریکی یکنواخت $\left(\vec{E}=E_0\hat{x}\right)$ قرار می دهیم. این بیضی گون از دوران یک بیضی حول محور z به وجود آمده است (مطابق شکل) و معادله آن $\dfrac{x^2+y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{a^2}=1$ است.



(2)(z=0)



(1)(y=0)

در اثر میدان الکتریکی، چگالی بار سطحی روی سطح بیضی گون به وجود می‌آید که این چگالی بار را در نقطه به مختصات (z,φ) با نماد $\sigma(z,\varphi)$ نمایش می دهیم. فرض کنید $\sigma(z,\varphi)=E_0 f(z,\varphi)$ که $f(z,\varphi)$ به هندسه مساله مربوط است.

الف) چگالی بار سطحی را در صفحه $x=0$ $\left[\sigma\left(z,-\frac{\pi}{2}\right),\quad \sigma\left(z,\frac{\pi}{2}\right)\right]$ به دست آورید.

ب) میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}_1$ را می‌خواهیم به دو میدان یکنواخت $\vec{E}_2$ و $\vec{E}_3$ تجزیه کنیم، به طوری که $\hat{E}_2.\hat{E}_3=0$ و $\hat{E}_1.\hat{E}_2=\cos\theta$. رابطه بین $|\vec{E}1|$ و $|\vec{E}2|$ را بیابید.

ج) با استفاده از نتایج قسمت‌های قبل $f(z,\varphi)$ را به صورت $g(z)p(\varphi)$ در آورده و $p(\varphi)$ را بیابید.

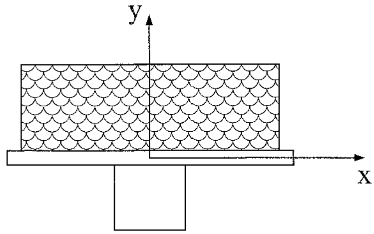
د) با استفاده از نتیجه قسمت (ج)، $f(z,\varphi)$ را در دوحالت زیر بیابید.

۱- $a=b$

۲- $a>>z,b$ ($f(z,\varphi)$ را تا اولین مرتبه غیر صفر نسبت به z بیابید).

روابط انتگرالی مفید: $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\quad \int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx=\pi$

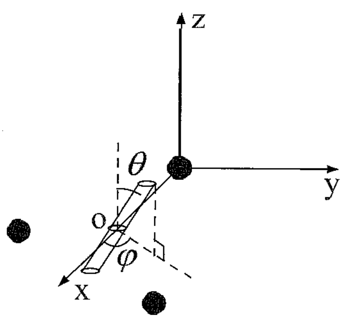
۵- آب از آبپاشی مطابق شکل با سرعت v_0 در جهت محور y خارج می شود. آبپاش را با سرعت $u_0\sin\omega t$ در جهت x نسبت به دستگاه xy حرکت می دهیم. در زمان $t=0$ وسط آب پاش در مبدأ مختصات بوده است. در وسط آب پاش اسفنج کوچکی آغشته به رنگ قرار داده‌ایم، به طوری که قطرات آبی که از وسط آب پاش پرتاب می شوند رنگی می شوند. در لحظه T از این مجموعه عکس می گیریم. نقاط رنگی منحنی‌ای به شکل $f(x,y)=0$ می سازند. $f(x,y)$ را به دست آورید. از گرانش چشم بپوشید.



۶- سه ذره باردار با بارهای یکسان q را روی راس‌های مثلث متساوی الاضلاعی ثابت نگه داشته‌ایم. طول هر ضلع مثلث a است.

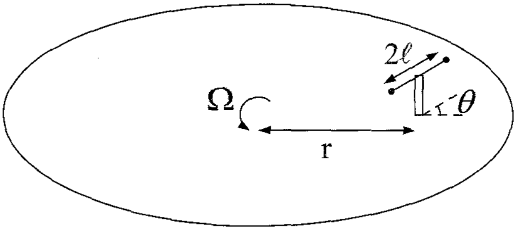
الف) بار q- رادر محل تقاطع میانه‌ها، نقطه O، گذاشته ایم. لوله‌ای نیز در همین نقطه قرار می دهیم به طوری که بار q- به راحتی بتواند در آن حرکت کند. این لوله با جهت مثبت محورz زاویه θ و تصویر آن روی صفحه ی xy با جهت مثبت محور x زاویه φ می سازد. به ازای چه مقادیری از θو φ اگر بار q- را کمی جابه‌جا نماییم حول حالت تعادلش نوسان خواهد کرد. فرکانس نوسانات کوچک مربوط به این نوسان را محاسبه کنید.

ب) آیا در جهت مثبت محور x به غیر از نقطه O نقطه تعادلی وجود دارد؟ توضیح دهید.



سؤال‌های امتحان نهایی فیزیک ـ شانزدهمین دوره تابستان ۸۲
وقت: ۷ ساعت و ۳۰ دقیقه

۱- صفحه‌ای افقی با سرعت زاویه‌ای ثابت Ω که عمود بر صفحه است می‌چرخد. ستونی در فاصله r از محور دوران روی صفحه ثابت شده است. میله‌ای با جرم ناچیز و طول 2ℓ از وسط روی آن لولا شده است. به دو سر میله دو جرم m متصل شده‌اند. میله می‌تواند به آزادی در صفحه افق دوران کند. زاویه‌ای که میله با جهت شعاعی می‌سازد را θ بگیرید.



الف) فرض کنید در زمان τ که $\theta=\frac{\pi}{2}$ است، $\dot{\theta}=\omega$ باشد. کمیت‌های زیر را بر حسب Ω,ω,ℓ,r,m بیابید.

I) نیروی وارد بر میله در زمان τ

II) کشش در میله در زمان τ، منظور از کشش نیروی موازی با میله که لازم است تا طول میله را ثابت نگه دارد.

ب) چه رابطه‌ای بین Ω و ω باشد تا کشش میله در $\theta=\frac{\pi}{2}$ صفر باشد؟

ج) فرض کنید شرطی که در بند قبل به دست آوردید برقرار باشد. حرکت میله به چه صورت است؟ اگر ناگهان صفحه را از چرخیدن باز داریم، حرکت میله به چه صورت می‌شود؟

۲- معادله بیضی‌ای که یک کانون آن مرکز مختصات است، در مختصات قطبی (r,θ) به شکل $r=\frac{a\left(1-\varepsilon^2\right)}{1+\varepsilon\cos\left(\theta-\theta_0\right)}$ است، که a نیم محور بزرگ بیضی، ε خروج از مرکز بیضی، و θ_0 مختصه زاویه‌ای نقطه حضیض است. بردارهای یکه مختصات قطبی را با e_r و e_θ نشان می دهیم. زاویه خط مماس بر بیضی با e_θ را با φ نشان دهید. جهت مثبت این زاویه را ساعت گرد (خلاف جهت مثلثاتی) می گیریم.

الف) $\tan\varphi$ را بر حسب θ و ثابت های وارد شده در معادله بیضی به دست آورید.

ب) فرض کنید $\varepsilon<<1$, φ را تا اولین مرتبه غیر صفر نسبت به ε به دست آورید.

یک فضاپیما در مداری به شکل بیضی دور خورشید حرکت می کند (خورشید مرکز مختصات و یک کانون این بیضی است). این فضاپیما از کنار سیاره‌ای در صفحه مداری می گذرد. اثر این سیاره آن است که به فضاپیما ضربه‌ای می زند که فقط جهت سرعت فضاپیما را عوض می کند. در اثر این ضربه، مکان فضاپیما تغییر نمی کند. صفحه بیضی هم عوض نمی شود، خورشید هم چنان در کانون مسیر جدید می ماند، و از پارامترهای بیضی a ثابت می ماند و ε و θ_0 تغییر می کنند. این تغییرات چنان است که مقدار φ در نقطه (r,θ) (محل برخورد) به $\varphi+\delta\varphi$ تبدیل می شود.

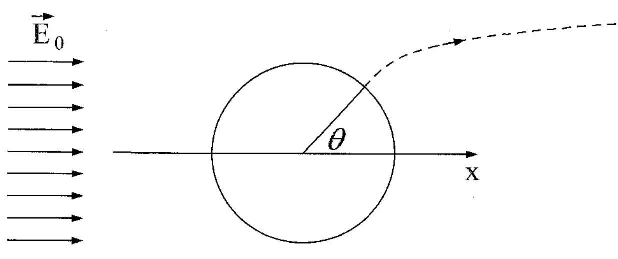
ج) با فرض $\varepsilon << 1$، رابطه r بر حسب θ در معادله بیضی را تا اولین مرتبه نسبت به ε بنویسید.

د) دو بیضی در نظر بگیرید که یک کانون هر دو در مرکز مختصات است، نیم محور بزرگ آنها با هم برابر است، و صفحه آنها هم یکسان است. با استفاده از معادله ساده شده حاصل از (ج)، شرطی بنویسید که این دو بیضی در مختصه زاویه‌ای θ یکدیگر را قطع کنند. این شرط را بر حسب ε و θ_0 (پارامترهای یک بیضی) و ε' و θ_0' (پارامترهای بیضی دیگر) بنویسید.

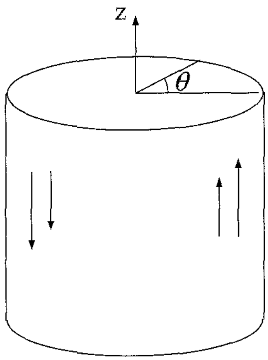
ه) بگیرید $\varepsilon'=\varepsilon+\delta\varepsilon$ و $\theta_0'=\theta_0+\delta\theta_0$. با فرض این که $\delta\varepsilon$ و $\delta\theta_0$ بسیار کوچک تر از ε اند، از معادله حاصل از (د) مقدار $\delta\theta_0$ را به دست آورید.

و) با فرض این که $1 >> \delta\varepsilon >> \delta\varphi$، مقدار $\delta\varepsilon$ را بر حسب $\delta\varphi$، θ، و پارامترهای بیضی اولیه به دست آورید.

۳- کره‌ای رسانا در یک میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}=E_0\hat{x}$ قرار دارد. خط میدانی را در نظر بگیرید که در زاویه θ از کره جدا می شود. (مطابق شکل) در فواصل دور فاصله این خط میدان را از محور x بر حسب زاویه θ بیابید.



۴- از روی پوسته استوانه‌ای شکل بسیار بلندی که محور آن موازی با محور Z است، چگالی جریان سطحی‌ای برابر با $\vec{K}=K_0\cos\theta\hat{z}$ می گذرد. (θ زاویه سمتی است.)
میدان مغناطیسی را در داخل و خارج استوانه بیابید.
راهنمایی: از اصل برهم نهی استفاده نمایید.



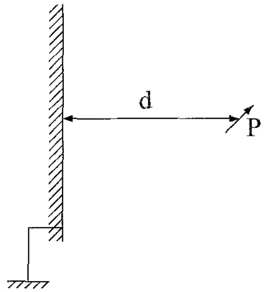
۵- الف) یک بار الکتریکی q در فاصله d از سطح یک رسانای تخت بسیار بزرگ که به زمین وصل شده است، قرار دارد. انرژی الکتریکی سیستم را بیابید.

اکنون یک دو قطبی الکتریکی با اندازه P را مطابق شکل در فاصله d از سطح رسانا قرار می دهیم. دو قطبی می تواند آزادانه حول محوری که از مرکزش می گذرد و بر صفحه کاغذ عمود است دوران کند.

لختی دورانی دو قطبی را حول این محور I بگیرید.

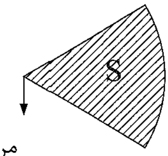
ب) وضعیت تعادل پایدار سیستم چیست؟

ج) بسامد نوسان های کوچک دو قطبی حول نقطه تعادل‌اش را به دست آورید.



۶- مدار زمین به دور خورشید یک بیضی با خروج از مرکز کوچک ε است که معادله آن $r(\theta)=\dfrac{a}{1-\varepsilon\cos\theta}$ است. فرض کنید اعتدالین در $\theta=\pm\dfrac{\pi}{2}$ است. (اعتدال بهاری، اول بهار و اعتدال پائیزی، اول پائیز است).

با دانستن این که در یک نیروی مرکزی مساحتی که بردار مکان جسم جاروب می کند با زمان متناسب است (قانون بقای اندازه حرکت زاویه ای)، ε را بیابید. (ε را خیلی کوچک بگیرید.)

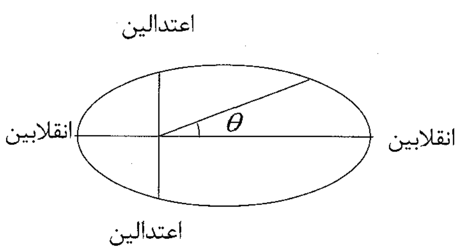


فاصله زمین از خورشید، اول تابستان (انقلاب تابستانی) بیشتر است یا اول زمستان (انقلاب زمستانی)؟ این اختلاف فاصله چند کیلومتر است؟

تذکر:

الف) فاصله متوسط زمین و خورشید ۱۵۰ میلیون کیلومتر است.

ب) در این سوال منظور از اسم فصلها، این فصلها در نیم کره شمالی است.

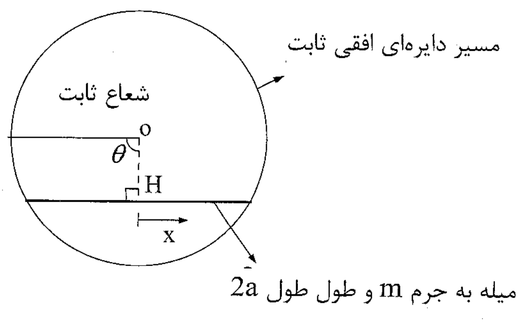


۷- دو انتهای یک میله همگن به جرم m و طول 2a می تواند بدون اصطکاک برروی یک مسیر گرد افقی به شعاع $R > a$ حرکت کند.

در لحظه صفر، یک ذره به جرم m در وسط میله در $x = 0$ قرار دارد و در این لحظه با سرعت ثابت v در روی میله شروع به حرکت می کند. سرعت ذره نسبت به میله ثابت است و بنابراین $x = vt$ خواهد شد. زاویه بین خط عمود بر وسط میله با یک شعاع ثابت از مسیر دایره ای را θ بنامید.

اگر در $t = 0$، $\theta = \theta_0$ باشد، θ را به صورت تابعی از زمان محاسبه کنید.

مسیر دایره‌ای مذکور بر روی زمین ثابت شده است.



۸- یک اتومبیل دیفرانسیل عقب، یعنی اتومبیلی که گشتاور محرکه موتور آن به چرخ های عقب منتقل می شود، روی یک جاده افقی حرکت می‌کند. فاصله افقی محور چرخ های جلو و عقب با مرکز جرم آن به ترتیب b_1 و b_2 است. ارتفاع مرکز جرم از سطح زمین h است. شتاب جاذبه برابر g و ضریب اصطکاک سکون بین چرخ های ماشین و جاده μ_s است.

حداکثر شتاب ماشین چه قدر باشد تا روی سطح جاده سر نخورد.

اکنون فرض کنید که باری در ماشین قرار دارد که وزن آن η برابر وزن ماشین است.

در این وضعیت فاصله افقی مرکز جرم اتومبیل با محور چرخ های عقب و جلو برابر است.

وقتی راننده تصمیم به بالا رفتن از سطح شیب داری با زاویه θ می گیرد؛ متوجه می شود که اتومبیل در آستانه سر خوردن قرار گرفته است. پس از رسیدن به سربالایی دیگری با زاویه $\theta' > \theta$، راننده می فهمد که دیگر نمی تواند بالا برود. برای رفع این مشکل، بار را نسبت به اتومبیل حداقل چه مقدار عقب تر ببرد؟

فاصله افقی محورهای عقب و جلو را $2b$ بگیرید و فرض کنید بار در ماشین باقی می ماند و با جاده تماس ندارد. جواب مسئله صرفا برحسب پارامترهای θ، θ'، b، و η به دست می‌آید.

از جرم چرخ‌ها چشم بپوشید.

اطلاعات:

در حل مسائل ممکن است انتگرال های زیر مفید باشند.

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln(x+a)$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

پاسخ سؤال‌های امتحان اول المپیاد فیزیک ـ شانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۲

۱- آب پس از خارج شدن از آب پاش یک مسیر مستقیم را می‌پیماید. سرعت آب در راستای y برابر v_0 است و علاوه بر آن سرعت در راستای x آب پاش را هم به هنگام خارج شدن دارد. چون آب در زمان T در نقطه $y = b$ است، زمان خارج شدن آب از آب پاش، t_1، برابر است با

$$t_1 = T - \frac{b}{v_0}$$

و مدت زمان حرکت آب از آب پاش تا نقطه A، t_2، برابر است با

$$t_2 = \frac{b}{v_0}$$

از طرفی در لحظه t_1، سرعت آب پاش در راستای x، v_x، برابر است با

$$v_x = u_0 \sin\left(\omega\left(T - \frac{b}{v_0}\right)\right)$$

و در نتیجه با توجه به اختلاف زمانی t_2 برای رسیدن آب به نقطه A، مختصه x مکان رهاشدن آبپاش، x_1، برابر است با

$$x_1 = a - t_2 v_x = a - \frac{b}{v_0} u_0 \sin\left(\omega\left(t - \frac{b}{v_0}\right)\right)$$

و آب یک مسیر مستقیم را از $(x_1, 0)$ به سمت (a ,b) طی خواهد کرد.

۲- ابتدا بعد هر یک از کمیت‌ها را در مساله می‌یابیم.

$$[\ell] = [\ell'] = L$$

$$[v] = \frac{L}{T}$$

$$[\rho] = \frac{M}{L^3}$$

$$F = \mu A \frac{\partial V}{\partial X} \Rightarrow [\mu] = \frac{M}{LT}$$

حال چون دو مستطیل مذکور هم شکل هستند، در نتیجه $\frac{\ell}{\ell'} = \frac{\ell_0}{\ell'_0}$ و در نتیجه به جای کمیت ℓ' می‌توان از کمیت ℓ استفاده کرد. در نهایت داریم که با کمیتهای F, ρ, v, ℓ, μ باید کمیت بدون بعد بسازیم و بدست می‌آید که

$$F = v^{\alpha}\mu^{\beta}\ell^{\gamma}\rho^{\lambda}$$
$$M:1=\beta+\lambda$$
$$L:1=\alpha-\beta+\gamma-3\lambda$$
$$T:-2=-\alpha-\beta$$
$$F \propto v\mu\ell\times f\left(\frac{\rho v\ell}{\mu}\right)$$

ولی نیروی گرانروی برای دو مایع به ازای یک سرعت مستقل از چگالی است چرا که اگر نیروی گرانروی که بین دو سطح است، همانطور که از تعریف صورت سوال آمده است، هیچ وابستگی به چگالی ندارد.

$$\Rightarrow F \propto v\mu\ell$$

و با توجه به اعداد صورت سوال بدست می‌آید که

$$F = F_0\times 100\times 10 = 10^3 F_0$$

۳- اگر کره‌ای به شعاع فاصله خورشید از زمین حول خورشید در نظر بگیریم و توان خروجی خورشید از این کره را بیابیم بدست می‌آید که

فاصله خورشید از زمین
$$r = Ct$$

توان خورشید
$$P_s = P\times 4\pi r^2 = 4\pi c^2 t^2 P$$

میزان انرژی تولیدی خورشید به ازای هر 1kg از He
$$W=\frac{4m_H-m_{He}}{4m_H}.C^2$$

میزان مصرف جرم خورشید بر واحد زمان
$$\alpha=\frac{P_s}{W}=\frac{4\pi c^2t^2P}{\frac{4m_H-m_{He}}{4m_H}.C^2}=\frac{16\pi t^2Pm_H}{4m_H-m_{He}}$$

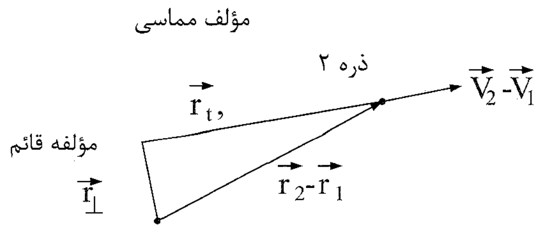
$$M=\frac{r^3.4\pi^2}{GT^2}$$

جرم هلیوم افزوده شده برای پایان عمر خورشید
$$=0.35M-0.25M=0.10M$$

زمان پایان عمر خورشید
$$\frac{0.10M}{\alpha}=\frac{\frac{0.10c^3t^3 4\pi^2}{GT^2}}{\frac{16\pi t^2Pm_H}{4m_H-m_{He}}}=$$

$$\frac{0.10\pi c^3t\left(4m_H-m_{He}\right)}{4Pm_HGT^2}\approx 2\times 10^{27}s$$

۴- ذره ۲ نسبت به ذره ۱ با سرعت $\vec{V}_2 - \vec{V}_1$ حرکت می‌کند و در لحظه صفر نیز مکان نسبی این ذره نسبت به ذره ۱ برابر $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ است.



ذره ۱ در مبدأ مختصات جدید

حال $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ را به دو مؤلفه عمود بر بردار ($\vec{v}_2 - \vec{v}_1$) و مماس بر بردار ($\vec{v}_2 - \vec{v}_1$) تقسیم می‌کنیم. واضح است که مؤلفه مماسی آن بالاخره در زمانی (با فرض غیر صفر بودن $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$) صفر خواهد شد و مؤلفه عمود، کمترین فاصله خط حرکت ذره ۲ نسبت به ذره ۱ است.
در زیر مؤلفه عمود با استفاده از خواص ضرب برداری حساب شده است.

$$\left|\vec{r}_\perp\right| = \left|\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) \times \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\left|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right|}\right|$$

در لحظه‌ای که مؤلفه مماس صفر شود، نزدیک‌ترین فاصله اتفاق افتاده است. ابتدا r_t را می‌یابیم.

$$\left|\vec{r}_t\right| = \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) . \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\left|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right|}$$

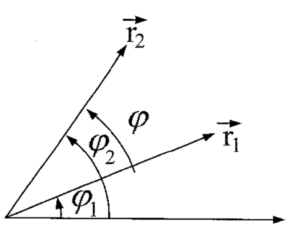
و چون باید لحظه‌ای را بیابیم که این مسافت هنوز طی نشده باشد (این لحظه در شکل کشیده شده منفی است) در نتیجه τ یعنی زمان خواسته شده برابر است با

$$\tau = \frac{-\left|\vec{r}_t\right|}{\left|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right|} = \frac{-\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right).\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right)}{\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right).\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right)}$$

و شرط برخورد نیز این است که $\left|\vec{r}_\perp\right|$ برابر صفر باشد. در نتیجه

$$\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) \times \left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right) = 0, \quad \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \neq 0$$

۵- به روابط زیر دقت کنید.



$$\varphi_1(t)=\omega_1 t=\left(\frac{\varphi_0}{2}+\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)-\left(\frac{\varphi_0}{2}+\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)$$
$$\varphi_2(t)=\varphi_0+\omega_2 t=\left(\frac{\varphi_0}{2}+\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)+\left(\frac{\varphi_0}{2}+\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)$$

تبدیلات بالا را شما در بسیاری از قسمتهای دیگر فیزیک دیده یا می‌بینید. در واقع ما می‌خواهیم در دستگاهی با سرعت زاویه‌ای میانگین دو سیاره به حرکت نگاه کنیم. در این دستگاه محور x با میانگین سرعت زاویه‌ای دو سیاره و در جهت عکس حرکت دارد. بردار خط واصل میان دو سیاره در این دستگاه سرعت زاویه‌ای مشخصی دارد که در دستگاه ساکن به اندازه میانگین سرعت زاویه‌ای دو سیاره بیشتر از مقدار آن در دستگاه میانگین است.

درواقع عبارت $\frac{\varphi_0}{2}+\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t$ که در جملات $\varphi_1(t)$ و $\varphi_2(t)$ ظاهر شده است، همان جمله ناشی از انتخاب دستگاه جدید است و در این دستگاه جدید زاویه هر کدام از سیاره‌ها جمله دوم در عبارت نوشته شده برای $\varphi_1(t)$ و $\varphi_2(t)$ در ابتدای حل است. بردار $\vec{r}_2'$ و $\vec{r}_1'$ را بردار هر کدام از سیاره‌ها در دستگاه جدید در نظر بگیرید.

$$\frac{\varphi_0}{2}+\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t=\frac{\varphi}{2}$$
$$\vec{r}_2'=\left(r_2\cos\frac{\varphi}{2}\right)\hat{x}'+\left(r_2\sin\frac{\varphi}{2}\right)\hat{y}'$$
$$\vec{r}_1'=\left(r_1\cos\left(-\frac{\varphi}{2}\right)\right)\hat{x}'+\left(r_1\sin\left(-\frac{\varphi}{2}\right)\right)\hat{y}'$$
$$\rightarrow \vec{r}_2'-\vec{r}_1'=\left((r_2-r_1)\cos\frac{\varphi}{2}\right)\hat{x}'+\left((r_2+r_1)\sin\frac{\varphi}{2}\right)\hat{y}'$$

و بنابر اینکه θ زاویه بردار واصل با محور x است که خود یک دوران با سرعت زاویه‌ای $\frac{\omega_2+\omega_1}{2}$ در جهت خلاف دارد، می‌توان نتیجه گرفت که

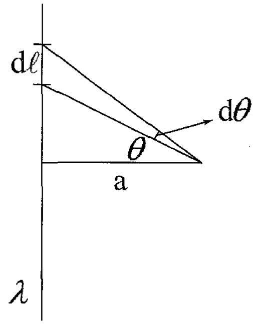
$$\frac{r_2+r_1}{r_2-r_1}=k$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}+\frac{d}{dt}\left(tg^{-1}\frac{(r_2+r_1)\sin\frac{\varphi}{2}}{(r_2-r_1)\cos\frac{\varphi}{2}}\right)=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}+\frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{dt}\frac{k\left(1+tg^2\frac{\varphi}{2}\right)}{1+k^2\,tg^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}+\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\frac{r_2+r_1}{r_2-r_1}\quad\frac{1+tg^2\left(\frac{\varphi_0}{2}+\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)}{1+\left(\frac{r_2+r_1}{r_2-r_1}tg\left(\frac{\varphi_0}{2}+\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\right)^2}$$

که به ازای $\omega_2=\omega_1=\omega_0$ مقدار ثابت ω_0 دارد.

۶- **الف)** با انتگرال گیری این میدان را بدست می آوریم.



$$d\ell=a\times d\left(tg\theta\right)=\frac{a\times d\theta}{\cos^2\theta}$$

و می دانیم بنابر تقارن میدان تنها مؤلفه شعاعی می تواند داشته باشد. در نتیجه

$$E_0=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\lambda\frac{a}{\cos^2\theta}\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0\frac{a^2}{\cos^2\theta}}d\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\qquad(1)$$

ب) در قسمت اول زاویه θ از $-\frac{\pi}{2}$ تا $+\frac{\pi}{2}$ بود و حال آنکه در این قسمت از $\sin^{-1}\frac{-r}{\sqrt{r^2+a^2}}$ تا $\sin^{-1}\frac{r}{\sqrt{r^2-a^2}}$ است و در نتیجه میدان با بسط تیلور دادن عبارت ۱ بدست می آید.

$$E=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\frac{2r}{\sqrt{r^2+a^2}}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{r^2}}}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\left(1-\frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2}\right)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)$$

ج) در قسمت اول رابطه میدان را داریم. با جایگذاری حدود انتگرال میدان را بدست می آوریم. و برای $\frac{x}{r}$ کوچک بسط می دهیم.

$$\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{r+x}{\sqrt{(r+x)^2+a^2}}+\frac{r-x}{\sqrt{(r-x)^2+a^2}}\right)=$$
$$\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\left(1+\frac{x}{r}\right)\left(1+\frac{x^2}{r^2}+\frac{2x}{r}+\frac{a^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1+\frac{x^2}{r^2}-\frac{2x}{r}+\frac{a^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

که با نگه داشتن جملات تا جنس $\frac{a^2x^2}{r^3}$ جواب بدست می‌آید. در ضمن $\frac{x}{r}$ به توان اعداد فرد به علت تقارن وجود ندارد. جملات $\frac{x^2}{r^2}$, $\frac{x^4}{r^4}$ هم، چون بنابر فیزیک مسأله تابعیت a ندارند، در جواب آخر صفر گشته اند.

$$\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}=((1+\frac{x}{r})(1-\frac{x}{r}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{r^2}-\frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2}+\frac{3}{2}\frac{x^2}{r^2}+\frac{3}{8}\frac{x^4}{r^4}+\frac{3}{8}\frac{a^4}{r^4}+\frac{3}{2}\frac{x^3}{r^3}+$$
$$\frac{3}{2}\frac{x}{r}\frac{a^2}{r^2}+\frac{3}{4}\frac{x^2}{r^2}\frac{a^2}{r^2}-\frac{5}{2}\frac{x^3}{r^3}-\frac{15}{4}\frac{x^4}{r^4}-\frac{15}{4}\frac{x^2}{r^2}\frac{a^2}{r^2}+\frac{35}{8}\frac{x^4}{r^4})+$$
$$(1-\frac{x}{r})(1+\frac{x}{r}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{r^2}-\frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2}+\frac{3}{2}\frac{x^2}{r^2}+\frac{3}{8}\frac{x^4}{r^4}+\frac{3}{8}\frac{a^4}{r^4}-\frac{3}{2}\frac{x^3}{r^3}-\frac{3}{2}\frac{x}{r}\frac{a^2}{r^2}$$
$$+\frac{3}{4}\frac{x^2}{r^2}\frac{a^2}{r^2}+\frac{5}{2}\frac{x^3}{r^3}-\frac{15}{4}\frac{x^4}{r^4}-\frac{15}{4}\frac{x^2}{r^2}\frac{a^2}{r^2}+\frac{35}{8}\frac{x^4}{r^4}))$$
$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(2-\frac{x^2}{r^2}-\frac{a^2}{r^2}+3\frac{x^2}{r^2}+\frac{3}{4}\frac{x^4}{r^4}+\frac{3}{4}\frac{a^4}{r^4}+\frac{3}{2}\frac{x^2}{r^2}\frac{a^2}{r^2}-\frac{15}{2}\frac{x^4}{r^4}-\frac{15}{2}\frac{x^2}{r^2}\frac{a^2}{r^2}+\frac{35}{4}\frac{x^4}{r^4}$$
$$-2\frac{x^2}{r^2}+3\frac{x^4}{r^4}+3\frac{x^2}{r^2}\frac{a^2}{r^2}-5\frac{x^4}{r^4})=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(2-\frac{a^2}{r^2}+\frac{3}{4}\frac{a^4}{r^4}-3\frac{x^2}{r^2}\frac{a^2}{r^2})$$

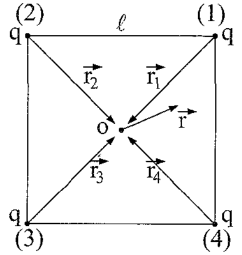
که جمله $\frac{a^4}{r^4}$ همان جمله ای است که با بسط تا مرتبه ۴ عبارت قسمت ب بدست می آید و به قسمت ج مربوط نمی شود و در واقع جمله $\frac{x^2}{r^2}\times\frac{a^2}{r^2}$ همان اختلاف را می رساند.

$$E=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(2-\frac{a^2}{r^2}+\frac{3}{4}\frac{a^4}{r^4}-3\frac{x^2}{r^2}\frac{a^2}{r^2})$$

د)

$$\frac{3}{2}\frac{x_{max}^2 a^2}{r^4}=0.01\Rightarrow|x|<\sqrt{\frac{0.02}{3}}\frac{r^2}{a}$$

۷- با توجه به شکل باید کمیتهای زیر را مورد محاسبه قرار دهیم.



$$\sum_{i=1}^{4}\frac{kq}{|\vec{r}_i+\vec{r}|}=\sum_{i=1}^{4}kq\left((\vec{r}_i+\vec{r}).(\vec{r}_i+\vec{r})\right)^{-\frac{1}{2}}=kq\sum_{i=1}^{4}\left(r_i^2+r^2+2\vec{r}_i.\vec{r}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{kq\sqrt{2}}{\ell}\sum_{i=1}^{4}\left(1+\frac{4\vec{r}_i.\vec{r}}{\ell^2}+\frac{2r^2}{\ell^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

حال جمله آخر را تا مرتبه دوم نسبت به $\frac{r}{\ell}$ بسط تیلور می دهیم.

$$\simeq\frac{\sqrt{2}kq}{\ell}\sum_{i=1}^{4}\left(1-\frac{2\vec{r}_i.\vec{r}}{\ell^2}-\frac{r^2}{\ell^2}+\frac{3}{8}\frac{(4r_i.\vec{r})^2}{\ell^4}\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{2}kq}{\ell}\left(2-\frac{2r^2}{\ell^2}+3\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{\vec{r}_i.\vec{r}}{\ell^2}\right)^2\right)$$

حال فرض کنید که بردار $\vec{r}$ را به صورت (x,y,z) بنویسیم. اگر بخواهیم جملات داخل جمع را در عبارت پایانی حساب کنیم، چون $\vec{r}_i$ ها در صفحه xy قرار دارند، پس در نتیجه مؤلفه z بردار $\vec{r}$ جمله‌ای بی تأثیر در جمع است و اما در داخل جمع، ما با ضرب داخلی دو بردار سر و کار داریم که نسبت به دوران ثابت است. یعنی اگر بردارها را 45° در جهت عقربه های ساعت دوران دهیم تا بردارهای $\vec{r}_i'$ و $\vec{r}'$ بدست آیند، مقدار جمع عوض نخواهد شد.

پس از دوران داریم که

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}_1'=(\frac{\ell}{\sqrt{2}},0,0)\\ \vec{r}_2'=(0,\frac{\ell}{\sqrt{2}},0)\\ \vec{r}_3'=(-\frac{\ell}{\sqrt{2}},0,0)\\ \vec{r}_4'=(0,-\frac{\ell}{\sqrt{2}},0)\\ \vec{r}'=(x',y')\end{array}\right\}\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{\vec{r}_i.\vec{r}}{\ell^2}\right)^2=\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{\vec{r}_i.\vec{r}'}{\ell^2}\right)^2=\frac{1}{2\ell^2}\left(x'^2+y'^2+x'^2+y'^2\right)$$

$$=\frac{x'^2+y'^2}{\ell^2}=\frac{x^2+y^2}{\ell^2}=\frac{|\vec{r}\times\hat{z}|^2}{\ell^2}=\frac{|\vec{r}\times\hat{z}|^2}{\ell^2}$$

پس در نتیجه جواب تا مرتبه دوم برابر است با

$$\frac{2\sqrt{2}kq}{\ell}\left(2-\frac{2r^2}{\ell^2}+\frac{3\left|\vec{r}\times\hat{z}\right|^2}{\ell^2}\right)$$

و در راستای $\hat{z}$ تعادل نا پایدار است و در راستای صفحه تعادل پایداری داریم. (برای بار آزمون مثبت).
در راستای $\hat{z}$ کاهش پتانسیل داریم، در حالیکه در راستای صفحه افزایش پتانسیل داریم.

پاسخ سؤال‌های امتحان دوم المپیاد فیزیک ـ شانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۲

۱- قسمت اول:

سرعت ماهواره در دستگاه مختصات قطبی به صورت زیر است:

$$\vec{V}=\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta}+r\sin\theta\dot{\varphi}\hat{\varphi} \qquad (1)$$

از طرفی سرعت ماهواره بر حسب بردارهای $\hat{n}_0,\hat{n}$ می شود:

$$V=r\omega\hat{n}_0\times\hat{n}$$

چون جهت بردار مکان ماهواره، $\vec{r}$، با $\hat{n}$ نمایش داده شده پس:

$$\hat{n}=\hat{r}$$

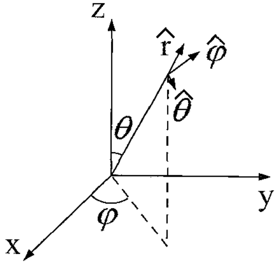
کافی است بردار $\hat{n}_0$ را بر حسب بردارهای $\hat{\theta},\hat{\varphi},\hat{r}$ بازنویسی کنیم.

بنابراین:

$$\hat{n}_0=\hat{z}\cos\theta_0+\hat{x}\sin\theta_0\cos\varphi_0+\hat{y}\sin\theta_0\sin\varphi_0$$

$$\hat{x}=-\sin\varphi\hat{\varphi}+\cos\varphi\sin\theta\hat{r}+\cos\varphi\cos\theta\hat{\theta}$$

$$\hat{y}=\cos\varphi\hat{\varphi}+\sin\varphi\sin\theta\hat{r}+\sin\varphi\cos\theta\hat{\theta}$$



$$\Rightarrow\hat{n}_0=\cos\theta_0\hat{z}+\left(-\sin\theta_0\cos\varphi_0\sin\varphi+\sin\theta_0\sin\varphi_0\cos\varphi\right)\hat{\varphi}$$
$$+\left(\sin\theta_0\cos\varphi_0\cos\varphi\sin\theta+\sin\theta_0\sin\varphi_0\sin\varphi\sin\theta\right)\hat{r}$$
$$+\left(\sin\theta_0\cos\varphi_0\cos\varphi\cos\theta+\sin\theta_0\sin\varphi_0\sin\varphi\cos\theta\right)\hat{\theta}$$
$$\Rightarrow V=r\omega\hat{n}_0\times\hat{n}=r\omega(\cos\theta_0\sin\theta\hat{\varphi}+\left(\sin\theta_0\sin\varphi_0\cos\varphi-\sin\theta_0\cos\varphi_0\sin\varphi\right)\hat{\theta}$$
$$+\left(\sin\theta_0\cos\varphi_0\cos\varphi\cos\theta+\sin\theta_0\sin\varphi_0\sin\varphi\cos\theta\right)\left(-\hat{\varphi}\right))$$
$$=r\omega\left(\left(\cos\theta_0\sin\theta-\sin\theta_0\cos\theta\cos(\varphi-\varphi_0)\right)\hat{\varphi}+\left(\sin\theta_0\sin\left(\varphi_0-\varphi\right)\hat{\theta}\right)\right) \qquad (2)$$

حال با مساوی قرار دادن رابطه (۱) (۲)، $\frac{d\theta}{dt}$ و $\frac{d\varphi}{dt}$ را محاسبه می کنیم.

$$\frac{d\theta}{dt}=\omega\sin\theta_0\sin\left(\varphi_0-\varphi\right)$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\omega\left(\cos\theta_0\sin\theta-\sin\theta_0\cos\theta\cos\left(\varphi-\varphi_0\right)\right)}{\sin\theta}$$

قسمت دوم:

رابطهٔ مشتق یک بردار در دستگاه ساکن بر حسب مشتق بردار در دستگاهی که با سرعت زاویه ای ω می چرخد به صورت زیر است:

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{A}+\frac{d\vec{A}}{dt'}$$

که $\frac{d\vec{A}}{dt'}$ مشتق A در دستگاه پریم دار، دستگاهی که می چرخد، است.

$$\vec{A}=\vec{r}$$

بنابراین رابطهٔ سرعت ها می شود:

$$\vec{V}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{r}+\frac{d\vec{r}}{dt'}=\vec{\omega}\times\vec{r}+\vec{V}' \qquad (3)$$

برای اینکه سرعت ماهواره را در دستگاه متصل به زمین بدست بیاوریم. محورهای دستگاه متصل به زمین را به صورت لحظه ای با دستگاه مختصات در قسمت اول یکی می گیریم بنابراین:

$$\theta=\theta'$$

$$\varphi=\varphi'$$

با توجه به رابطهٔ (۳)

$$\vec{V}'=\vec{V}-\vec{\omega}\times\vec{r}=\vec{V}-\omega r\sin\theta'\hat{\varphi}'$$

با جایگزینی $\vec{V}$ که در قسمت اول داشتیم در رابطهٔ بالا داریم:

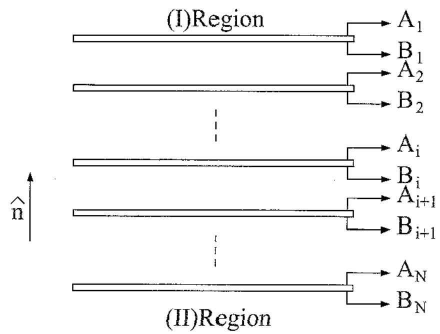
$$\vec{V}'=r\omega((\cos\theta_0{}'\sin\theta'-\sin\theta_0{}'\cos\theta'\cos(\varphi'-\varphi_0{}')-\sin\theta')\hat{\varphi}'+\sin\theta_0{}'\sin(\varphi_0{}'-\varphi')\hat{\theta}')$$

$$V'=\dot{r}'\hat{r}'+r'\dot{\theta}'\hat{\theta}'+r'\sin\theta'\dot{\varphi}'\hat{\varphi}'$$

$$\frac{d\theta'}{dt}=\omega\sin\theta_0{}'\sin(\varphi_0{}'-\varphi')$$

$$\frac{d\varphi'}{dt}=\frac{\omega(\cos\theta_0{}'\sin\theta'-\sin\theta_0{}'\cos\theta'\cos(\varphi'-\varphi_0{}')-\sin\theta')}{\sin\theta'}$$

۲- برای هر سطح گاؤسی مطابق شکل داریم که



$$\int \vec{E}.\vec{d}s = 0 \Rightarrow B_i = -A_{i+1} \qquad N-1 \geq i \geq 1$$

$$\sum \sigma = A_1 + (B_1 + A_2) + (B_2 + A_3) + \cdots + (B_{N-1} + A_N) + B_N = A_1 + B_N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \sigma_i = A_1 + B_N \qquad (1)$$

با استفاده از برهم نهی $\dfrac{\sum(A_i + B_i)}{2\varepsilon_0} = \dfrac{A_1 + B_N}{2\varepsilon_0} \Rightarrow A_1 = B_N \;\; E_I = \dfrac{A_1}{\varepsilon_0} =$ (2)

$$A_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \sigma_i}{2} \qquad E_I = \frac{A_1}{\varepsilon_0}\hat{n} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \sigma_i}{2\varepsilon_0}\hat{n} \qquad E_{II} = \frac{B_N}{\varepsilon_0}(-\hat{n}) = -\frac{\sum_{i=1}^{N} \sigma_i}{2\varepsilon_0}\hat{n}$$

$$\sum_{p=1}^{i} \sigma_p = A_1 + B_1 + A_2 + \ldots + A_i + B_i = A_1 + B_i \Rightarrow B_i = \sum_{p=1}^{i} \delta_p - A_1$$

$$= \sum_{p=1}^{i} \sigma_p - \frac{\sum_{i=1}^{N} \sigma_i}{2} \qquad N \geq i \geq 1$$

$$B_i = -A_{i+1} \qquad N-1 \geq i \geq 1 \Rightarrow A_i = -\sum_{p=1}^{p=i-1} \sigma_p + \frac{\sum_{i=1}^{N} \sigma_i}{2} \qquad N \geq i \geq 1$$

ج)

$$A_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad B_2 = A_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \qquad B_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad A_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}$$

د)

$$A_1 = \frac{N\sigma}{2} = B_N$$

$$B_i = i\sigma - \frac{N\sigma}{2}\left(N-1 \geq i \geq 1\right)$$

$$A_i = -\left(i-1\right)\sigma + \frac{N\sigma}{2}\left(N \geq i > 1\right)$$

ه)

$$1 \leq i < m : \begin{cases} B_i = i\sigma - \dfrac{\left(N+n\right)\delta}{2} \Rightarrow \Delta B_i = -\dfrac{n\sigma}{2} \\ \Delta\sigma_i = 0 \Rightarrow \Delta A_i = -\Delta B_i = \dfrac{n\sigma}{2} \end{cases}$$

$$i = m : \begin{cases} B_m = m\sigma + n\sigma - \dfrac{\left(N+n\right)\sigma}{2} \Rightarrow \Delta B_m = +\dfrac{n\sigma}{2} \\ \Delta\sigma_m = n\sigma \Rightarrow \Delta A_i = n\sigma - \Delta B_m = +\dfrac{n\sigma}{2} \end{cases}$$

$$N \geq i > m : \begin{cases} B_i = \left(i+n\right)\sigma - \dfrac{\left(N+n\right)\sigma}{2} \Rightarrow \Delta B_i = +\dfrac{n\sigma}{2} \\ \Delta\delta_i = 0 \Rightarrow \Delta A_i = -\Delta B_i = -\dfrac{n\sigma}{2} \end{cases}$$

و) با توجه به قسمت (د) داریم:

$$1 \leq i < m : B_i = \frac{\left(2i-n-10\right)}{2}\sigma$$

$$m \leq i < 10 : B_i = \frac{\left(2i+n-10\right)\sigma}{2}$$

میدان الکتریکی $\dfrac{B_i}{\varepsilon_0}$ می باشد.

$$1 \leq i < m : E = \pm E_c \Rightarrow \begin{cases} 2i-n-10 = 10 \Rightarrow n = 2i-20 \\ 2i-n-10 = -10 \Rightarrow n = 2i \end{cases}$$

$$m \leq i < 10 : E = \pm E_c \Rightarrow \begin{cases} 2i+n-10 = 10 \Rightarrow n = 20-2i \\ 2i+n-10 = -10 \Rightarrow n = -2i \end{cases}$$

از مقادیر فوق با توجه به بازه ها کمترین n را انتخاب می کنیم.

همانطور که می بینیم کمترین مقدار n، ۲ می تواند باشد. که به ازای $i=1,9$ بدست می آید و با انتخاب هر m شکست بین صفحات ۹ و ۱۰ یا صفحات ۱ و ۲ رخ می دهد. ماکزیمم میدان در بین صفحات ۹ و ۱۰ یا ۱ و ۲ است که با ریختن 2σ روی هر صفحه ای این شکست رخ می دهد.

ز)

$$B_i=\sum_{p=1}^{i}\sigma_p-\frac{\sum_{p=1}^{N}\sigma_p}{2}$$

در حالت N زوج داریم که:

$$\sum_{p=1}^{N}\sigma_p=0$$

زیر صفحات زوج $B_i=0\Rightarrow E_i=0$

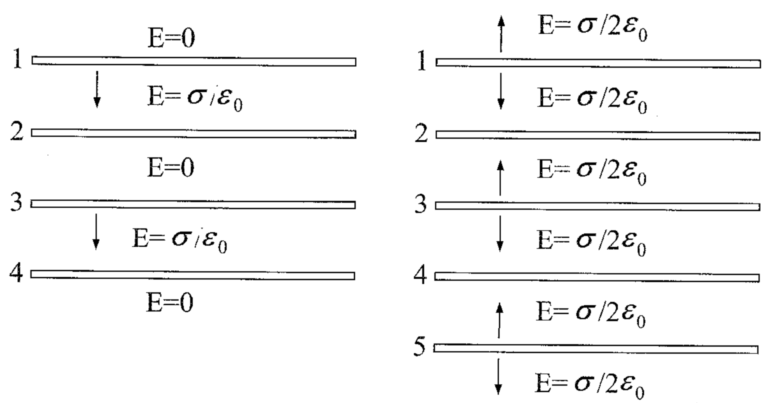
زیر صفحات فرد $B_i=\sigma\Rightarrow E_i=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(-\hat{n}\right)$

در حالت N فرد داریم که:

$$\sum_{p=1}^{N}\sigma_p=\sigma$$

زیر صفحات زوج $B_i=-\frac{\sigma}{2}\Rightarrow E_i=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\hat{n}\right)$

زیر صفحات فرد $B_i=\frac{\sigma}{2}\Rightarrow E_i=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(-\hat{n}\right)$



۳- الف) چون کمیت $\vec{r}\times\vec{V}$ در طول حرکت جسم ثابت است پس $\vec{V}$ و $\vec{r}$ همواره در صفحه ای که عمود بر $\vec{r}\times\vec{V}$ است، قرار دارند بنابراین حرکت جسم در یک صفحه است. پس می توانیم معادلات حرکت را در دو بعد بنویسیم:

$$\vec{V}=\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta}=\dot{r}\hat{r}+\vec{\omega}\times\vec{r}$$

که $\vec{\omega}$ در جهت $\vec{r}\times\vec{V}$ است.

$$\Rightarrow \vec{r}\times\vec{V}=\vec{r}\times\left(\dot{r}\hat{r}+\vec{\omega}\times\vec{r}\right)=\vec{r}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)=\vec{\omega}r^2-\vec{r}\left(\vec{\omega}.\vec{r}\right)=\vec{\omega}r^2$$

$$\vec{V}=\vec{V}(t)$$

$$\vec{V}(0)=V_0\hat{r}+\omega_e r_0\cos\lambda\hat{y}$$

مقدار کمیت در لحظه اول برابر است با:

$$\left|\vec{r}\times\vec{v}\right|=\left|r_0{}^2\times\omega_e\cos\lambda\hat{z}'\times\hat{y}\right|=\omega_e r_0{}^2\cos\lambda$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\omega}r^2=\omega_e r_0{}^2\cos\lambda\hat{z}'\times\hat{y}\\ r=Re+h\\ r_0=Re+h_0\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{\omega}=\omega_e\cos\lambda\frac{\left(1+\frac{h_0}{R_e}\right)^2}{\left(1+\frac{h}{R_e}\right)^2}\hat{z}'\times\hat{y}$$

اگر رابطه بالا را تا مرتبه اول نسبت به $\frac{h}{Re}$ و $\frac{h_0}{Re}$ ساده کنیم:

$$\Rightarrow\vec{\omega}\approx\omega_e\cos\lambda(1+\frac{2}{Re}(h_0-h))\hat{z}'\times\hat{y}$$

ب)

$$\vec{a}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\hat{u}_r+\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{u}_\theta$$

$$\vec{F}=\frac{-Gm_e m}{r^2}\hat{u}_r$$

$$\Rightarrow\vec{F}=m\vec{a}\Rightarrow\frac{-Gm_e}{r^2}=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$$

$$,\frac{Gm_e}{r^2}\gg r\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow\ddot{r}=\frac{-Gm_e}{r^2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\ddot{r}=\frac{-Gm_e}{r^2}\\ r\approx R_e\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}\ddot{r}=\frac{-Gm_e}{R_e{}^2}=-g\\ r=R_e+h\end{array}\right\}\Rightarrow\ddot{h}=-g\Rightarrow h=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+h_0$$

$$\omega=\omega_e\cos\lambda\left(1+\frac{2}{R_e}(h_0-h)\right)\hat{z}'\times\hat{y}=\omega_e\cos\lambda\left(1+\frac{2}{R_e}\left(-v_0t+\frac{1}{2}gt^2\right)\right)$$

$$\Delta\theta=\int\omega dt$$

$$\Delta\theta=\omega_e\cos\lambda\left(t+\frac{2}{R_e}\left(\frac{1}{6}gt^3-\frac{v_0t^2}{2}\right)\right)$$

ج)

$$\left.\begin{aligned}&v_0=0 \;\Rightarrow h=-\frac{1}{2}gt^2+h_0\\&h(T)=0\Rightarrow T^2=\frac{2h_0}{g}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \Delta\theta=\omega_e\cos\lambda\left(\frac{2h_0}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2}{R_e}\left(\frac{h_0}{3}\right)\right)$$

برای مکان جسم هنگام برخورد با زمین داریم که:

$$\vec{r}=R_e\left(\sin\Delta\theta\hat{y}+\cos\Delta\theta\cos\lambda\hat{x}+\cos\Delta\theta\sin\lambda\hat{z}\right)$$

و برای پای برج داریم که:

$$\vec{R}=R_e\left(\cos\lambda\sin\omega_e T\hat{y}+\cos\omega_e T\cos\lambda\hat{x}+\sin\lambda\hat{z}\right)$$

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}-\vec{R}=R_e\left(\sin\Delta\theta-\cos\lambda\sin\omega_e T\right)\hat{y}$$

$$\sin\Delta\theta\approx\Delta\theta \qquad \sin\omega_e T\approx\omega_e T$$

$$\cos\Delta\theta\approx 1 \qquad \cos\omega_e T\approx 1$$

$$\Rightarrow\Delta\vec{r}=R_e\left(\omega_e\cos\lambda\left(\frac{2h_0}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2}{R_e}\frac{h_0}{3}\right)-\omega_e\cos\lambda\left(\frac{2h_0}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\omega_e\cos\lambda\left(\frac{2h_0}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\times\frac{2h_0}{3}$$

د)

$$\left.\begin{aligned}&h_0=0\Rightarrow h=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t\\&h(T)=0\Rightarrow T=\frac{2v_0}{g}\end{aligned}\right\}$$

$$\Delta\vec{r}=R_e\left(\sin\Delta\theta-\cos\lambda\sin\omega_e T\right)\hat{y}=$$

$$R_e\left(\omega_e\cos\lambda\left(T+\frac{2}{R_e}\left(\frac{gT^3}{6}-\frac{v_0T^2}{2}\right)\right)-\omega_e\cos\lambda T\right)\hat{y}$$

$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow\Delta\vec{r}=R_e\omega_e\cos\lambda\times\frac{2}{R_e}T^2\left(\frac{gT}{6}-\frac{v_0}{2}\right)\\&T=\frac{2v_0}{g}\end{aligned}\right\}\Delta\vec{r}=2\omega_e\cos\lambda\times\frac{4v_0^2}{g^2}\times\frac{-v_0}{6}$$

$$\Rightarrow\Delta\vec{r}=\frac{-4}{3}\omega_e\cos\lambda\frac{v_0^3}{g^2}\;\therefore$$

ه)

$$\Delta\vec{r} = R_e\left(\sin\Delta\theta - \cos\lambda\omega_e t\right)\hat{y} = 0 \Rightarrow \Delta\theta = \cos\lambda\omega_e T$$

$$\Rightarrow \omega_e \cos\lambda T\left(1+\frac{2}{R_e}\left(\frac{g}{6}T^2 - \frac{v_0 T}{2}\right)\right) = \cos\lambda\omega_e T$$

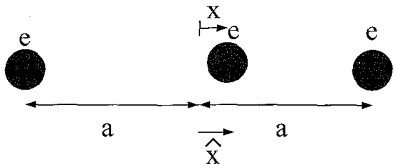
$$\Rightarrow \frac{g}{6}T^2 = \frac{v_0}{2}T \Rightarrow T = \frac{3v_0}{g}, \quad h(T) = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2}gT^2 + v_0 T + h_0$$

$$\Rightarrow v_0 \times \frac{3v_0}{g} - \frac{1}{2}g \times \frac{9v_0^2}{g^2} + h_0 = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}\frac{v_0^2}{g} = h_0 \Rightarrow v_0 = \left(\frac{2}{3}gh_0\right)^{\frac{1}{2}} \therefore$$

و)

$$v_0 = \sqrt{\frac{2}{3}\times 10\frac{m}{s^2}\times 100m} \approx 25.8\frac{m}{s} = 26\frac{m}{s}$$

۴- الف)



$$\vec{F} = \frac{ke^2}{(a+x)^2}\hat{x} - \frac{ke^2}{(a-x)^2}\hat{x} \approx \frac{ke^2}{a^2}\left(\left(1-\frac{2x}{a}\right) - \left(1+\frac{2x}{a}\right)\right) = \frac{4ke^2}{a^3}x(-\hat{x})$$

$$\vec{F} = m\ddot{x}\,\hat{x} \Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{4ke^2}{a^3}x \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{4ke^2}{ma^3}} \qquad (1)$$

ب)

$$\omega = \sqrt{\frac{4\times\left(1.6\times 10^{-19}\right)^2 \times 9\times 10^9}{9.1\times 10^{-31}\times 10^{-30}}} = 10^{11}\frac{rad}{s}$$

ج) کمیت های وابسته به هم عبارتند از:

C_v, T, h, k_B, a

$$C_v = \frac{[L]^2}{[T]^2\left[k^\circ\right]}$$

$$T = \left[k^\circ\right]$$

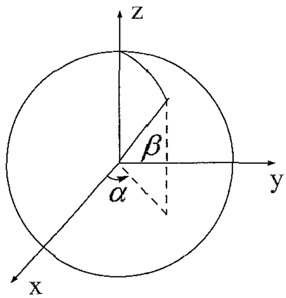
$$h = \frac{[M][L]^2}{[T]}$$

$$k_B = \frac{[M][L]^2}{[T]^2[k^\circ]}$$
$$a = [L]$$
$$M = [M]$$
$$\omega = \frac{1}{[T]}$$

$\frac{h\omega}{kT}$ کمیتی بی بعد می باشد و چون منحنی برای تمام فلزات هم شکل فرض شده است. برای آلومینیوم که ω آن ۴ برابر سرب است C_v در ۳۰۰ درجه رابطه دارد با C_v سرب در ۷۵ درجه و از طرف دیگر $\frac{C_v M}{k_B}$ کمیتی بی بعد می باشد.

$$\frac{C_v(pb, T=75)M_{pb}}{k_B} = \frac{C_v(al, T=300)M_{al}}{k_B} \Rightarrow$$
$$C_v(al, T=300) \approx 0.74\left(\frac{kJ}{kgk^\circ}\right)$$

۵- الف)



$$\vec{r}_1 = \sin\beta\hat{z} + \cos\beta\sin\alpha\hat{y} + \cos\beta\cos\alpha\hat{x}$$

ب)

$$\vec{r}_2 = \sin\alpha\hat{y} + \cos\alpha\sin\beta\hat{z} + \cos\alpha\cos\beta\hat{x}$$

ج)

$$\vec{\Delta} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \sin\alpha(1-\cos\beta)\hat{y} - \sin\beta(1-\cos\alpha)\hat{z}$$

د)

$$\vec{\Delta} = \frac{\alpha\beta^2}{2}\hat{y} - \frac{\beta\alpha^2}{2}\hat{z}$$

پاسخ سؤال‌های امتحان سوم المپیاد فیزیک ـ شانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۲

۱- الف) اگر ریشه حقیقی بزرگتر از ۲۰ وجود داشته باشد آنگاه:

$$(x-1)(x-2)...(x-20)>0$$

خواهد بود و εx^{19} هم $(\varepsilon>0)$ بزرگتر از صفر است و $\begin{cases}P(\varepsilon,x)=0\\ x>20\end{cases}$ غیر ممکن می باشد.

ب) $x_n=n+\varepsilon y_n$ را در $P(\varepsilon,x)$ جاگذاری می‌کنیم:

$$P(\varepsilon,x_n)=(n+\varepsilon y_n-1)(n+\varepsilon y_n-2)...(n+\varepsilon y_n-n)...(n+\varepsilon y_n-20)+\varepsilon(n+\varepsilon y_n)^{19}\Rightarrow$$

که تا مرتبه اول می‌شود:

$$P(\varepsilon,x_n)=(n-1)(n-2)....(1)(-1)...(n-20)\varepsilon y_n+\varepsilon n^{19}=0\Rightarrow y_n=\frac{-n^{19}}{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq n}}^{20}(n-i)}$$

$$y_9=\frac{-9^{19}}{8\times7\times...\times1\times-1\times...\times-11}=\frac{+9^{19}}{(8!)^2\times9\times10\times11}=\frac{9^{18}}{110\times(8!)^2}$$

$$y_{17}=\frac{-17^{19}}{16\times15\times...\times1\times-1\times-2\times-3}=\frac{17^{19}}{6\times16!}$$

ج)

$$x_9=9+\varepsilon y_9=9+\frac{10^{-8}\times9^{18}}{110\times(8!)^2}=9+8.4\times10^{-3}$$

$$x_{17}=17+\varepsilon y_{17}=17+\frac{10^{-8}\times17^{19}}{6\times16!}=17+19$$

۲- برای پیدا کردن مسیر باید مکان قطره ای را که در زمان t جدا شده است را در لحظه T پیدا کنیم.
سرعت این ذره می شود:

$$\vec{v}=v_0\hat{y}+u_0\sin\omega t\hat{x}$$

$$\left.\begin{array}{l}x_t(T)=u_0\sin\omega t(T-t)\\ y_t(T)=v_0(T-t)\end{array}\right\}\qquad t=T-\frac{y_t(T)}{v_0}\qquad T>t>0$$

$$\Rightarrow T>T-\frac{y_t(T)}{v_0}>0\qquad Tv_0>y>0$$

$$\Rightarrow x=u_0\sin\left[\omega\left(T-\frac{y}{v_0}\right)\right]\frac{y}{v_0}$$

$$\Rightarrow f(x,y)=\frac{u_0 y}{v_0}\sin\left(\omega\left(T-\frac{y}{v_0}\right)\right)-x$$

۳- اندازه نیروی اصطکاک μmg و جهت آن عکس جهت سرعت نسبی جسم به صفحه است. سرعت نسبی جسم نسبت به صفحه $\vec{v}-\vec{\omega}\times\vec{r}$ است. بنابراین نیروی اصطکاک عبارت است از:

$$\vec{f}=-\mu mg\frac{\vec{v}-\vec{\omega}\times\vec{r}}{|v-\vec{\omega}\times\vec{r}|}$$

شتاب جسم نیز عبارت است از:

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=-\mu g\frac{\vec{v}-\vec{\omega}\times\vec{r}}{|\vec{v}-\vec{\omega}\times\vec{r}|}$$

شرایط اولیه نیز $r(0)=a\hat{i}$ و $v(0)=0$. چون سمت راست رابطهٔ بالا یک ضریب μ دارد، برای آنکه سرعت را تا مرتبه اول به دست آوریم کافی است که سمت راست رابطهٔ بالا را تا مرتبه صفرم قرار دهیم. در این صورت

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt}=\mu g\frac{\vec{\omega}\times\hat{i}a}{|\vec{\omega}\times\hat{i}a|}$$

از حل این معادله میتوان سرعت تا مرتبهٔ اول، v_1 و مکان تا مرتبهٔ اول، r_1، به دست آورد.

$$\vec{v}_1=\mu gt\hat{j}, r_1=a\hat{i}+\frac{1}{2}\mu gt^2\hat{j}$$

به همین ترتیب با جای گذاری مقادیر مکان و سرعت تا مرتبهٔ اول میتوان سرعت و مکان راتا مرتبهٔ دوم به دست آورد.

$$\frac{d\vec{v}_2}{dt}=\mu g\frac{(\omega a-\mu gt)\hat{j}-\frac{1}{2}\mu gt^2\omega\hat{i}}{\sqrt{(\omega a-\mu gt)^2+\frac{1}{4}\mu^2g^2t^4\omega^2}}$$

چون صورت کسر ضریب μ دارد و ما می خواهیم نتیجه تا مرتبهٔدوم درست باشد کافی است مخرج کسر را تا مرتبهٔ اول نگه داریم. با صرف نظر از جمله های بالاتر از مرتبهٔ دو داریم.

$$\frac{d\vec{v}_2}{dt}=\mu g\left[\frac{(\omega a-\mu gt)\hat{j}}{(\omega a-\mu gt)}-\frac{\frac{1}{2}\mu gt^2\omega\hat{i}}{\omega a}\right]$$

پس از ساده کردن و انتگرال گیری، سرعت و مکان تا مرتبهٔ دوم به دست می آید.

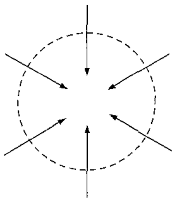
$$\vec{v}_2=\mu gt\hat{j}-\frac{\mu^2g^2t^3}{6a}\hat{i}\qquad \vec{r}_2=\frac{1}{2}\mu gt^2\hat{j}+\left(a-\frac{\mu^2g^2t^4}{24a}\right)\hat{i}$$

فاصلهٔ ذره تا مبدأ تا مرتبهٔ دوم μ عبارت است از:

$$r_2 = \sqrt{\frac{1}{6}\mu^2 g^2 t^4 + a^2} > a$$

پس ذره تا این مرتبه از مبدأ دور می شود.

۴- الف) اگر استوانهٔ فرضی ای به شعاع r و به ارتفاعِ عمق رودخانه در فاصله r ازسوراخ، در نظر بگیریم.



برای اینکه سطح آب رودخانه ثابت بماند، باید مقدار ثابتی آب وارد این سطح فرضی بشود.

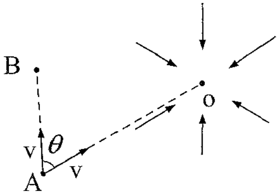
$$\frac{dm}{dt} = \rho v \times 2\pi r h$$

که $\frac{dm}{dt}$ نرخ آب وارد شده به این سطح یا آهنگ آب خارج شده از سوراخ است.
ρ چگالی آب و v سرعت آب رودخانه در فاصله r است

$$\Rightarrow h = \frac{A}{2\pi r v}$$

که A یک مقدار ثابت است.

ب) سرعت نزدیک شدن قایق به نقطه B می شود:



$$V_1 = v + v\cos\theta$$

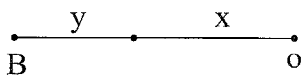
سرعت نزدیک شدن قایق به نقطه o می شود:

$$V_2 = v + v\cos\theta$$

$$V_1 = V_2$$

پس نتیجه می گیریم سرعت نزدیک شدن قایق به نقطهٔ B برابر سرعت نزدیک شدن قایق به نقطهٔ O است. پس قایق به همان اندازه که به B نزدیک می شود به O نیز نزدیک می شود. بنابراین اختلاف این دو فاصله، $|\vec{r} - \vec{r}_B| - |\vec{r} - \vec{r}_o|$، همواره ثابت است.

که $\vec{r}$ بردار مکان قایق است.
مکان هندسی نقاطی که اختلاف فاصله آن ها از دو نقطه ثابت باشد، هذلولی است.
برای بدست آوردن نقطه پایانی:
فرض می کنیم نقطه پایانی به فاصله x از نقطه o و به فاصله y از نقطه B قرار دارد.

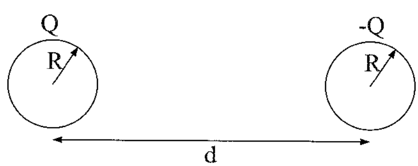


چون همیشه سرعت نزدیک شدن قایق به خط واصل مثبت است پس نقطه پایانی روی خط واصل نقاط oو B است.

$$x + y = |o\vec{B}|$$
$$x - y = |\overrightarrow{Ao}| - |\overrightarrow{AB}|$$
$$\Rightarrow (x+y)+(x-y) = |\overrightarrow{Ao}| - |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{oB}| = 2x$$

بنابراین برای بدست آوردن نقطه پایانی کافی است که پاره خط oB را از طرف B به اندازه $\left[|\overrightarrow{Ao}| - |\overrightarrow{AB}|\right]$ ادامه دهیم. طول بدست آمده دو برابر فاصله x است پس وسط این پاره خط نقطه پایانی است.

۵- الف)

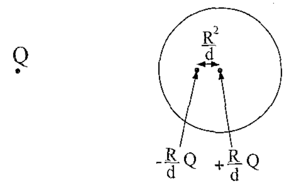


$$\Delta V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{R} - \frac{Q}{d-R} - \frac{Q}{d-R} + \frac{Q}{R}\right) = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{d-R}\right) \approx \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{d}\right)$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{R} - \frac{1}{d}}$$

ب)

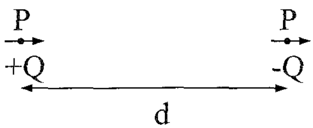
با استفاده از بار تصویری:



$$P=\left(\frac{R}{d}Q\right)\left(\frac{R^2}{d}\right)=\frac{R^3}{d^2}Q$$

ج)

سیستم معادل مطابق شکل است.



$$\Delta V=\frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{d-R}\right)+2\left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 R^2}-\frac{p}{4\pi\varepsilon_0(d-R)^2}\right)=$$

$$\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{d-R}\right)+\frac{RQ}{2\pi\varepsilon_0 d^2}\left(1-\left(1-\frac{d}{R}\right)^{-2}\right)=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{d}\left(1-\frac{R}{d}\right)^{-1}+\frac{R}{d^2}\right)\approx$$

$$\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{d}-\frac{R}{d^2}+\frac{R}{d^2}\right)=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{d}\right)$$

$$C=\frac{Q}{\Delta V}=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{R}-\frac{1}{d}}$$

تا مرتبه $\left(\frac{R}{d}\right)^2$ ظرفیت خازن تغییر نمی کند.

۶- **الف)** انرژی پتانسیل مجموعه را می‌نویسیم.

$$-\frac{kq_1^{\ 2}}{d_1}-\frac{kq_2^{\ 2}}{d_2}+\frac{kq_1q_2}{r}+\frac{kq_1q_2}{\left|\vec{r}-\vec{d}_1+\vec{d}_2\right|}-\frac{kq_1q_2}{\left|\vec{r}-\vec{d}_1\right|}-\frac{kq_1q_2}{\left|\vec{r}+\vec{d}_2\right|}\qquad(1)$$

ب) در حالت $\left|\vec{r}\right|\to\infty$ انرژی پتانسیل تنها دو جمله اول عبارت بالا را خواهد داشت و بقیه جملات صفر خواهند شد. پس در نتیجه جواب قسمت (b) این چنین است.

$$\left(-\frac{kq_1^{\ 2}}{d_1}-\frac{kq_1^{\ 2}}{d_1}+\frac{kq_1q_2}{r}+\frac{kq_1q_2}{\left|\vec{r}-\vec{d}_1+\vec{d}_2\right|}-\frac{kq_1q_2}{\left|\vec{r}-\vec{d}_1\right|}-\frac{kq_1q_2}{\left|\vec{r}+\vec{d}_2\right|}\right)-$$
$$\left(-\frac{kq_1^{\ 2}}{d_1}-\frac{kq_1^{\ 2}}{d_1}\right)=kq_1q_2\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{d}_1+\vec{d}_2\right|}-\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{d}_1\right|}-\frac{1}{\left|\vec{r}+\vec{d}_2\right|}\right) \tag{2}$$

ج) جملات را تا مرتبه d_1d_2 نگه می‌داریم. اگر جمله‌ای از مرتبه $d_1^{r_1}d_2^{r_2}$ که r_1 و r_2 از یک بزرگتر باشند را نگه داریم، در آن صورت در حد $\left|\vec{d}_2\right|,\left|\vec{d}_1\right|$ به سمت صفر این جملات صفر خواهند شد. ابتدا جمله زیر را با بسط تیلور تا مرتبه دوم بسط می‌دهیم.

$$\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{d}_1+\vec{d}_2\right|}=(r^2+\left|\vec{d}_2-\vec{d}_1\right|^2+2\vec{r}.(\vec{d}_2-\vec{d}_1))^{\frac{-1}{2}}$$
$$\approx\frac{1}{r}\left(1-\frac{\left|\vec{d}_2-\vec{d}_1\right|^2}{2r^2}-\frac{\vec{r}.(\vec{d}_2-\vec{d}_1)}{r^2}+\frac{3(\vec{r}.(\vec{d}_2-\vec{d}_1))^2}{2r^4}\right) \tag{3}$$

با صفر فرض کردن به ترتیب d_1 یا d_2 در عبارت (۳)، دیگر جملات موجود در معادله (۲) را می‌یابیم.

$$\frac{-1}{\left|\vec{r}-\vec{d}_1\right|}=\frac{1}{r}\left(-1+\frac{d_1^{\ 2}}{2r^2}-\frac{\vec{r}.\vec{d}_1}{r^2}-\frac{3(\vec{r}.\vec{d}_1)^2}{2r^4}\right) \tag{4}$$

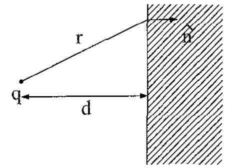
$$\frac{-1}{\left|\vec{r}+\vec{d}_2\right|}=\frac{1}{r}\left(-1+\frac{d_2^{\ 2}}{2r^2}+\frac{\vec{r}.\vec{d}_2}{r^2}-\frac{3(\vec{r}.\vec{d}_2)^2}{2r^4}\right) \tag{5}$$

با استفاده از روابط (۲)، (۳)، (۴) و (۵) انرژی پتانسیل را در حد $\left|\vec{d}_2\right|,\left|\vec{d}_1\right|$ به سمت صفر می‌یابیم.

$$\frac{kq_1q_2}{r}\left(\begin{array}{l}1+\left(1-\frac{\left|\vec{d}_2-\vec{d}_1\right|^2}{2r^2}-\frac{\vec{r}.(\vec{d}_2-\vec{d}_1)}{r^2}+\frac{3(\vec{r}.(\vec{d}_2-\vec{d}_1))^2}{2r^4}\right)+\\ \left(-1+\frac{d_1^{\ 2}}{2r^2}-\frac{\vec{r}.\vec{d}_1}{r^2}-\frac{3(\vec{r}.\vec{d}_1)^2}{2r^4}\right)+\left(-1+\frac{d_2^{\ 2}}{2r^2}+\frac{\vec{r}.\vec{d}_2}{r^2}-\frac{3(\vec{r}.\vec{d}_2)^2}{2r^4}\right)\end{array}\right)= \tag{6}$$

$$\frac{kq_1q_2}{r}\left(\frac{\vec{d}_2.\vec{d}_1}{r^2}-3\frac{(\vec{r}.\vec{d}_1)(\vec{r}.\vec{d}_2)}{r^4}\right)=\frac{k}{r^3}\left(\vec{p}_2.\vec{p}_1-3(\hat{r}.\vec{p}_1)(\hat{r}.\vec{p}_2)\right)$$

۷- الف)



$$\vec{E}(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{q\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

$$E_{\perp}(r)=\vec{E}.\hat{n}=\frac{qd}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}|^3}$$

ب)

$$\vec{P}=(k-1)\varepsilon_0\vec{E}$$

$$\sigma=\vec{P}.(-\hat{n})=-(k-1)\varepsilon_0\vec{E}.\hat{n}=\frac{-(k-1)qd}{4\pi|\vec{r}|^3}$$

ج) میدان بار القایی روی سطح دی‌الکتریک مانند میدان یک صفحه با چگالی σ است:

$$\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}\Rightarrow\vec{E}=\frac{-(k-1)qd}{8\pi\varepsilon_0|r|^3}\hat{n}$$

د) چگالی دو قطبی ناشی از میدان (ج) می‌شود:

$$\vec{P}=(k-1)\varepsilon_0\vec{E}=$$

$$\sigma=\vec{P}.(-\hat{n})=-(k-1)\varepsilon_0\times\frac{-(k-1)qd}{8\pi\varepsilon_0|\vec{r}|^3}$$

و میدان ناشی از این توزیع بار جدید:

$$E=\frac{(k-1)^2qd}{16\pi\varepsilon_0|r|^3}\hat{n}$$

$$\Rightarrow\vec{E}=\frac{qd\hat{n}}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}|^3}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1-k}{2}\right)^i=\frac{qd\hat{n}}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}|^3}\;\frac{\frac{1-k}{2}}{1+\frac{k-1}{2}}=\frac{qd}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}|^3}\;\frac{1-k}{1+k}\hat{n}$$

ه)

$$\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}$$

$$\Rightarrow\sigma=\frac{qd}{2\pi|\vec{r}|^3}\cdot\frac{1-k}{1+k}$$

پاسخ سؤال‌های امتحان چهارم المپیاد فیزیک ـ شانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۲

۱- الف)

$$\vec{F}=P_x\frac{\partial\vec{E}}{\partial x}+P_y\frac{\partial\vec{E}}{\partial y}+P_z\frac{\partial\vec{E}}{\partial z}$$

$$\vec{P}=\chi\varepsilon_0\vec{E}$$

$$\Rightarrow\Delta\vec{F}=\Delta V\chi\varepsilon_0\left[E_x\frac{\partial\vec{E}}{\partial x}+E_y\frac{\partial\vec{E}}{\partial y}+E_z\frac{\partial\vec{E}}{\partial z}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial x}=\dfrac{\partial E_x}{\partial x}\hat{x}+\dfrac{\partial E_y}{\partial x}\hat{y}+\dfrac{\partial E_z}{\partial x}\hat{z}\\ \nabla\times\vec{E}=0\Rightarrow\dfrac{\partial E_y}{\partial x}=\dfrac{\partial E_x}{\partial y}\\ \qquad\qquad\quad\dfrac{\partial E_z}{\partial x}=\dfrac{\partial E_x}{\partial z}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\partial\vec{E}}{\partial x}=\frac{\partial E_x}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial E_x}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{z}$$

$$\Rightarrow E_x\frac{\partial\vec{E}}{\partial x}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial E_x{}^2}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial E_x{}^2}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial E_x{}^2}{\partial z}\hat{z}\right]=\frac{1}{2}\vec{\nabla}(E_x{}^2)$$

به همین ترتیب برای مولفه‌های دیگر داریم:

$$Ey\frac{\partial\vec{E}}{\partial y}=\frac{1}{2}\vec{\nabla}(E_y{}^2)$$

$$E_z\frac{\partial\vec{E}}{\partial z}=\frac{1}{2}\vec{\nabla}(E_z{}^2)$$

$$\Rightarrow\Delta\vec{F}=\frac{\Delta V\chi\varepsilon_0}{2}\vec{\nabla}(E_x{}^2+E_y{}^2+E_z{}^2)=\frac{\Delta V\chi\varepsilon_0}{2}\nabla(\vec{E}.\vec{E})$$

ب) در محاسبه میدان در محل دی‌الکتریک تنها میدان ناشی از بار Q را در نظر می‌گیریم. زیرا دوقطبی‌های القا شده در دی‌الکتریک از مرتبه χ هستند و میدان آن‌ها نیز از مرتبه χ خواهد بود پس، از میدان ناشی از دی‌الکتریک در برابر میدان بار Q صرف نظر می‌کنیم.

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\Rightarrow \vec{E}.\vec{E}=\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{1}{|\vec{r}|^4}\Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}(\vec{E}.\vec{E})=(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0})^2\times\frac{-4}{|\vec{r}|^5}\times\vec{\nabla}(|\vec{r}|)=(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0})^2\times\frac{-4\vec{r}}{|\vec{r}|^6}$$

$$\Rightarrow \Delta\vec{F}=\frac{\Delta V\chi\varepsilon_0}{2}\times(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0})^2\ \frac{-4\vec{r}}{|\vec{r}|^6}$$

اگر طول نوعی حجم V نسبت به فاصله r از بار Q، خیلی کوچک باشد می‌توان فرض کرد $\vec{\nabla}(\vec{E}.\vec{E})$ در تمام حجم V مقدار ثابتی دارد پس:

$$\Rightarrow \Delta\vec{F}=\frac{\Delta V\chi\varepsilon_0}{2}\times(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0})^2\ \frac{-4\vec{r}}{|\vec{r}|^6}$$

$$\vec{F}=\sum\Delta\vec{F}=\frac{(\sum\Delta V)\chi Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0}\times\frac{-\vec{r}}{|\vec{r}|^6}$$

$$\Rightarrow \vec{F}=\frac{-V\chi Q^2\vec{r}}{8\pi^2\varepsilon_0|\vec{r}|^6}$$

۲- الف)

$$R=\int dR=\int\frac{dr}{\sigma\times4\pi r^2}=\int_a^b\frac{dr}{\sigma_0(1+\frac{\alpha r}{\sigma_0})4\pi r^2}\approx\frac{1}{4\pi\sigma_0}\int_a^b\frac{(1-\frac{\alpha r}{\sigma_0})}{r^2}dr=$$

$$\frac{1}{4\pi\sigma_0}\left(\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)-\frac{\alpha}{\sigma_0}\ln(\frac{b}{a})\right)\Rightarrow R=\frac{1}{4\pi\sigma_0}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{\alpha}{\sigma_0}\ln(\frac{b}{a}))$$

ب)

$$\vec{J}=\sigma\vec{E}$$

در حالت تعادل $\nabla.\vec{J}=0$ می‌باشد در نتیجه:

$$\nabla.(\sigma\vec{E})=0\Rightarrow\nabla\sigma.\vec{E}+\sigma\nabla.\vec{E}=0\Rightarrow\alpha\hat{r}.\vec{E}+\frac{\sigma\rho}{\varepsilon_0}=0\Rightarrow$$

به خاطر تقارن $\vec{E}=E_r\hat{r}$.

$$\alpha E_r+\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\rho=0\Rightarrow\rho=-\frac{\varepsilon_0}{\sigma}\alpha E_r \qquad (1)$$

Q_0 روی صفحه $r = a$ قرار دارد.

$$\int E.ds = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{Q_0 + \int \rho dv}{\varepsilon_0} = 4\pi r^2 E_r \Rightarrow$$

$$Q_0 + \int_a^r 4\pi r'^2 \rho dr' = 4\pi\varepsilon_0 r^2 E_r \xrightarrow{\frac{d}{dr}} \frac{r^2\rho}{\varepsilon_0} = \frac{d}{dr}(r^2 E_r) = 2rE_r + r^2\frac{dE_r}{dr}$$

$$\xrightarrow{(1)} \frac{dE_r}{dr} + (\frac{2}{r} + \frac{\alpha}{(\sigma_0 + \alpha r)})E_r = 0 \Rightarrow \ln E_r = -2\ln r - \ln(\sigma_0 + \alpha r) + C_1 \Rightarrow$$

$$E = \frac{C_2}{r^2(\sigma_0 + \alpha r)}$$

$$\left.\begin{array}{l} I = \int \vec{J}.d\vec{s} = \int \sigma\vec{E}.d\vec{s} = (\sigma_0 + \alpha a) \times 4\pi a^2 E_a \\ V = RI \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$E_a = \frac{V}{4\pi a^2(\sigma_0 + \alpha a)R} \Rightarrow \frac{C_2}{a^2(\sigma_0 + \alpha a)} = \frac{V}{4\pi a^2(\sigma_0 + \alpha a)R} \Rightarrow C_2 = \frac{V}{4\pi R}$$

$$E = \frac{V}{4\pi R r^2(\sigma_0 + \alpha r)}$$

$$\rho = -\frac{\varepsilon_0}{\sigma}\alpha E_r = -\frac{\varepsilon_0 \alpha V}{4\pi R r^2 \sigma^2} \approx -\frac{\varepsilon_0 \alpha V}{4\pi R r^2 \sigma_0^2} \approx -\frac{\varepsilon_0 \alpha V}{(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})\sigma_0 r^2}$$

ج) در $t = 0$، چگالی حجمی بار برابر صفر می‌باشد و E برابر $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$ می‌باشد و چون اختلاف پتانسیل بین دو صفحه V است، داریم:

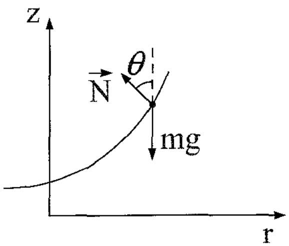
$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q_0 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = v \Rightarrow Q_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0 V}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla.\vec{J} = -\nabla.(\sigma\vec{E}) = -\nabla\sigma.\vec{E} + \sigma\nabla.\vec{E}$$

$$= -\alpha E_r + \frac{\sigma\rho}{\varepsilon_0} = -\alpha E_r$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} = -\alpha E_r = -\alpha \times \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0}{r^2} = -\frac{\alpha V}{(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})r^2}$$

۳- الف و ب) نیروهایی که به جسم وارد می‌شود نیروی وزن و نیروی عمود بر سطح $\vec{N}$ است.



$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F} = -mg\hat{z} - N\sin\theta\hat{r} + N\cos\theta\hat{z}$$

$$\left.\begin{aligned} &-N\sin\theta = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)m \\ \Rightarrow\ & N\cos\theta - mg = m\ddot{z} \\ &0 = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} & m(r\dot{\theta}^2 - \ddot{r})\cot\theta - mg = m\ddot{z} \\ & \frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = 0 \end{aligned}$$

$$\tan\theta = \frac{dz}{dr} \Rightarrow \cot\theta = r'$$

$$\Rightarrow \ddot{z} = (r\dot{\theta}^2 - \ddot{r})r' - g$$

$$\dot{r} = \frac{dr(z)}{dt} = r'\dot{z} \Rightarrow \ddot{r} = \frac{d(r'\dot{z})}{dt} = \frac{dr'}{dz}\frac{dz}{dt}\dot{z} + r'\ddot{z} = r''\dot{z}^2 + r'\ddot{z}$$

$$\Rightarrow \ddot{z} = (r\dot{\theta}^2 - r''\dot{z}^2 - r'\ddot{z})r' - g \Rightarrow \ddot{z}(1 + r'^2) + \dot{z}^2 r'r'' = rr'\dot{\theta}^2 - g$$

$$\Rightarrow f_1 = 1 + r'^2, f_2 = r'r'', f_3 = rr'\dot{\theta}^2 - g$$

ج)

$$z(t) = z_0 + \varepsilon\sin\omega t$$

$$r(z(t)) = r(z_0) + (\varepsilon\sin\omega t)r'(z_0) + \frac{(\varepsilon\sin\omega t)^2}{2}r''(z_0) + \dots$$

$$\Rightarrow r(z(t)) \approx r(z_0) + r'(z_0)\varepsilon\sin\omega t$$

$$r'(z(t)) = r'(z_0) + (\varepsilon\sin\omega t)r''(z_0) + \frac{(\varepsilon\sin\omega t)^2}{2}r'''(z_0) + \dots$$

$$\Rightarrow r'(z(t)) = r'(z_0) + \varepsilon\sin\omega t \times r''(z_0)$$

اگر این مقادیر رادر توابع f قرار دهیم:

$$f_1 = 1 + (r_0' + \varepsilon \sin \omega t\, r_0'')^2 = 1 + r_0'^2 + 2r_0' r_0'' \varepsilon \sin \omega t$$
$$f_2 = r_0' r_0''$$
$$f_3 = (r_0 + r_0' \varepsilon \sin \omega t)(r_0' + r_0'' \varepsilon \sin \omega t)\dot\theta^2 - g$$
$$= [r_0 r_0' + \varepsilon \sin \omega t (r_0 r_0'' + r_0'^2)]\dot\theta^2 - g$$

باقرار دادن این مقادیر در معادله (۱) و نگه داشتن جملات مرتبه صفر و یک داریم:

$$(-\varepsilon\omega^2 \sin \omega t)(1 + r_0'^2) = \varepsilon \sin \omega t (r_0 r_0'' + r_0'^2)\dot\theta^2 + r_0 r_0' \dot\theta^2 - g$$
$$\dot\theta = \frac{J}{mr^2} = \frac{J}{m(r_0 + r_0' \varepsilon \sin \omega t)^2} = \frac{J}{mr_0^{\ 2}}(1 - \frac{2r_0'}{r_0}\varepsilon \sin \omega t)$$
$$\Rightarrow \dot\theta^2 = \frac{J^2}{m^2 r_0^{\ 4}}(1 - \frac{4r_0'}{r_0}\varepsilon \sin \omega t)$$
$$\Rightarrow (-\varepsilon\omega^2 \sin \omega t)(1 + r_0'^2) =$$
$$\varepsilon \sin \omega t (r_0 r_0'' + r_0'^2)\frac{J^2}{m^2 r_0^{\ 4}} + \frac{r_0 r_0' J^2}{m^2 r_0^{\ 4}} + \frac{r_0 r_0' J^2}{m^2 r_0^{\ 4}} \times \frac{-4r_0'}{r_0}\varepsilon \sin \omega t - g$$

تا مرتبه صفر داریم که

$$\Rightarrow J^2 = \frac{m^2 r_0^{\ 3} g}{r_0'}$$

و تا مرتبه یک نتیجه زیر حاصل می‌شود.

$$\Rightarrow -\omega^2(1 + r_0'^2) = (r_0 r_0'' + r_0'^2)\frac{J^2}{m^2 r_0^{\ 4}} - \frac{4r_0'^2 J^2}{m^2 r_0^{\ 4}}$$
$$\Rightarrow -\omega^2(1 + r_0'^2) = (r_0 r_0'' - 3r_0'^2)\Omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \Omega^2 f_4(r_0, r_0', r_0'')$$
$$f_4 = \frac{3r_0'^2 - r_0 r_0''}{1 + r_0'^2}$$

د)

$$(\frac{1}{r^2})' = \frac{-2r'}{r^3} \Rightarrow \left(\frac{1}{r^2}\right)'' = -2(\frac{r'' r - 3r'^2}{r^4}) = \frac{2 \times (3r'^2 - r'' r)}{r^4}$$

$$\omega^2 < 0 \Rightarrow f_4 < 0 \Rightarrow 3r_0'^2 - r_0 r_0'' < 0 \Rightarrow \frac{2(3r_0'^2 - r_0''\, r_0)}{r_0^{\ 4}} < 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{r^2}\right)'' < 0$$

ه) سطح اول

$$r = \frac{-k}{z} \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{z^2}{k^2} \Rightarrow (\frac{1}{r^2})' = \frac{2z}{k^2} \Rightarrow (\frac{1}{r^2})'' = \frac{2}{k^2} > 0$$

بنابراین $\omega^2 > 0$ پس این سطح پایدار است.

سطح دوم

$$r^2 - z^2 = R^2 \Rightarrow r^2 = R^2 + z^2 \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{1}{R^2 + z^2}$$

$$(\frac{1}{r^2})' = \frac{-2z}{(R^2 + z^2)^2} \Rightarrow (\frac{1}{r^2})'' = -2 \times \frac{(R^2 + z^2) - 2 \times 2z^2}{(R^2 + z^2)^3}$$

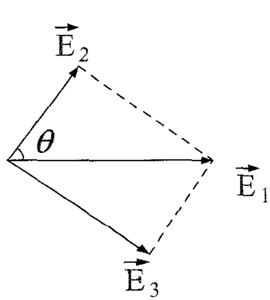
$$= -2 \times \frac{R^2 + z^2 - 4z^2}{(R^2 + z^2)^3} = \frac{6z^2 - 2R^2}{(R^2 + z^2)^3}$$

اگر $6z^2 > 2R^2$ باشد یعنی $z > \frac{\sqrt{3}}{3}R$ این سطح پایدار خواهد بود.

و اگر $z < \frac{\sqrt{3}}{3}R$ باشد این سطح ناپایدار خواهد بود.

۴- الف) می‌دانیم که میدان الکتریکی از خاصیت برهم نهی تبعیت می‌کند. در ضمن می‌دانیم که یک مساله الکترومغناطیس دارای جواب یکتا است. حال فرض می‌کنیم که به ازای میدان $\vec{E}$ چگالی بار مشخص در صفحه $x = 0$ ایجاد شود. به ازای میدان $-\vec{E}$ نیز باید همین چگالی بار ایجاد شود، چرا که با یک دوران به اندازه زاویه π حول محور y میدان $-\vec{E}$ به میدان $+\vec{E}$ تبدیل می‌شود و چگالی بار نیز باید همان چگالی بار ایجاد شده قبلی باشد. یعنی اگر میدان $-\vec{E}$ نیز داشته باشیم همچنان همان چگالی بار قبل را در ناحیه $x = 0$ داریم. حال فرض کنید که میدان $+E$ و $-E$ را با هم در فضا قرار دهیم (نقاط دور). یک جواب مساله و در نتیجه تنها جواب مساله این است که تمام چگالی بارها و تمام میدان‌ها، در تمام فضا صفر باشند. از طرفی بنا بر خاصیت بر هم نهی می‌فهمیم که باید دو برابر چگالی بار القا شده در حالت میدان $+\vec{E}$ القا شود. در نتیجه چگالی بار القا شده در حالت میدان $+\vec{E}$ در صفحه $x = 0$ برابر صفر است.

ب)

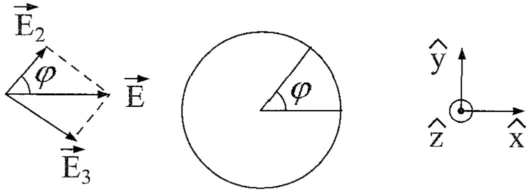


$$\left.\begin{aligned} E_2\cos\theta + E_3\sin\theta = E_1 \\ E_2\sin\theta = E_3\cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_2\cos\theta\left(1+\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right) = E_1 \Rightarrow$$

$$E_2 = E_1\cos\theta$$

$$E_3 = E_1\sin\theta$$

ج) میدان $\vec{E}$ را مطابق شکل به دو میدان $\vec{E}_2$ و $\vec{E}_3$ تجزیه می‌کنیم.



بنابرخاصیت بر هم نهی، چگالی بار ایجاد شده، برابر جمع چگالی بار سطحی ناشی از هر یک از میدان‌ها در زاویه φ است. بنابر قسمت الف میدان $\vec{E}_3$ چگالی بار صفر بر روی سطح رسانا با زاویه φ ایجاد می‌کند. از طرفی مقدار E_2 هم که برابر $E_0\cos\varphi$ است. در نتیجه چگالی بار ایجاد شده ناشی از $\vec{E}_2$ همان چگالی بار ایجاد شده از $\vec{E}$ در زاویه $\varphi = 0$ است که یک ضریب $\cos\varphi$ به خاطر تجزیه میدان یافته است.

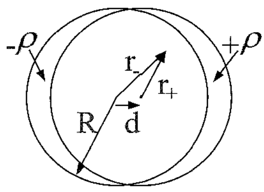
در نتیجه اگر $p(0) = 1$ بگیریم، بدست می‌آید که:

$$p(\varphi) = \cos\varphi$$

د) حالت اول- اگر $a = b$ باشد، یک کره در میدان خارجی $\vec{E}$ داریم.

برای محاسبه چگالی بار ابتدا مساله زیر را حل می‌کنیم.

یک کره با چگالی بار $+\rho$ و کره‌ای دیگر با چگالی بار $-\rho$ را در فاصله d بسیار کمی‌از یکدیگر قرار می‌دهیم به گونه‌ای که ρd برابر مقدار ثابت σ_0 باشد. در این صورت میدان در ناحیه میان دو کره برابر است با:



$$\frac{\frac{4}{3}\pi r_+{}^3\rho\vec{r}_+}{4\pi\varepsilon_0 r_+^3} - \frac{\frac{4}{3}\pi r_-^3\rho\vec{r}_-}{4\pi\varepsilon_0 r_+^3} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = \frac{-P\vec{d}}{3\varepsilon_0}$$

و از سویی می‌دانیم که میدان این کره‌ها در خارج برابر میدان یک دو قطبی است، در نتیجه برای خارج دو کره در حد اینکه d کوچک باشد و ρd مقدار ثابت σ_0 داشته باشد میدان برابر است با:

$$\frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho d}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\hat{r}+\sin\theta\hat{\theta})$$

که بردار $\hat{\theta}$ و $\hat{r}$ به ترتیب مولفه‌های بردار یکه در مختصات کروی هستند که محور z آن در جهت $\vec{E}$ قرار دارد.

از طرفی می‌دانیم که چگالی بار سطحی القا شده بر روی سطح، رسانا با اختلاف میدان عمود بر سطح داخل و خارج رسانا متناسب است که ضریب تناسب هم برابر ε_0 است. در نتیجه در حد d به سمت صفر می‌توان گفت که چگالی بار سطحی روی رسانا برابر است با:

$$\frac{\frac{4}{3}\pi a^3\rho d}{4\pi\varepsilon_0 a^3}(2\cos\theta\hat{n}+\sin\theta\hat{\theta})+\frac{\rho\vec{d}}{3\varepsilon_0}).\hat{r}\times\varepsilon_0=\rho d\cos\theta$$

حال به مساله بر می‌گردیم. اگر چگالی بار $\sigma=\sigma_0\cos\theta$ بر روی سطح رسانا ایجاد گردد، میدان تولید شده در داخل رسانا، باید میدان E_0 را خنثی کند یعنی:

$$-\frac{\rho\vec{d}}{3\varepsilon_0}+\vec{E}=0\Rightarrow\rho\vec{d}=3\varepsilon_0\vec{E}=3\varepsilon_0E_0\hat{x}$$

که $\rho\vec{d}$ همان σ_0 است. در نتیجه:

$$\sigma_{(\theta)}=3\varepsilon_0E_0\cos\theta$$

حال باید θ را بر حسب φ و z بیابیم به طوریکه متناسب با $\cos\varphi$ باشد واز آنجا g(z) را پیدا کنیم.

θ در مختصات کروی که زاویه بردار شعاعی با محور x است را باید بر حسب φ و z بیابیم.

داریم که:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2}=1\\[2ex]\cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{x}{a}\\[2ex]\cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}\frac{\sqrt{a^2-z^2}\cos\varphi}{a}=\cos\theta$$

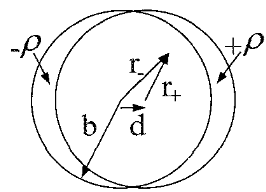
و در نتیجه بدست آمد که:

$$\sigma(\theta)=3\varepsilon_0E_0\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{a}\cos\varphi$$

و یعنی اینکه:

$$g(z) = 3\varepsilon_0 . \frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{a}$$

حالت دوم- حال مساله را در حالیکه a خیلی بزرگ باشد، حل می‌کنیم. گویی که یک استوانه را در میدان الکتریکی قرار داده‌ایم. در نتیجه باید چگالی بار سطحی روی استوانه را که تا اولین مرتبه غیر صفر مستقل از z است را بیابیم. برای اینکار، ابتدا مساله زیر را حل می‌کنیم.
یک استوانه با چگالی بار $+\rho$ در فاصله d از یک استوانه با چگالی بار $-\rho$ قرار می‌دهیم. (استوانه از دو سمت نامتناهی فرض می‌شود.) در حالیکه d را به سمت صفر میل می‌دهیم ρd برابر مقدار ثابت σ_0 است.
میدان یک هم چنین چگالی باری در فضای میان دو استوانه برابر است با:



$$\frac{\pi r_+^2 \rho \vec{r}_+}{2\pi\varepsilon_0 r_+^2} - \frac{\pi r_-^2 \rho \vec{r}_-}{2\pi\varepsilon_0 r_-^2} = \frac{-\rho \vec{d}}{2\varepsilon_0}$$

و میدان آن در خارج هم برابر است با:

$$\frac{\pi b^2 \rho d}{2\pi\varepsilon_0 r^2}(\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta})$$

و دوباره مثل حالت اول میزان $\sigma(\theta)$ را از اختلاف میدان عمود بر سطح در دو سمت سطح خارجی هنگامی‌که d را به سمت صفر میل می‌دهیم، می‌یابیم. در نتیجه:

$$\left(\frac{\pi b^2 \rho d}{2\pi\varepsilon_0 b^2}(\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}) + \frac{\rho\vec{d}}{2\varepsilon_0}\right).\varepsilon_0\hat{r} = \rho d\cos\theta$$

و در نتیجه چون میدان در داخل باید میدان $\vec{E}$ را خنثی کند، داریم که:

$$-\frac{\rho\vec{d}}{2\varepsilon_0} + \vec{E} = 0 \Rightarrow \rho d = 2\varepsilon_0 E_0$$

که به معنی این است که σ_0 برابر $2\varepsilon_0 E_0$ است ودر نتیجه چگالی بار روی سطح استوانه به شکل زیر است.

$$\left.\begin{array}{l} \rho d\cos\theta = 2\varepsilon_0 E_0 \cos\theta \\ \theta = \varphi \end{array}\right\} 2\varepsilon_0 E_0 \cos\varphi$$

که چون $\cos\varphi$ همان $p(\varphi)$است، در نتیجه g(z) برای این حالت برابر است با $2\varepsilon_0$ و ثابت است و به z بستگی ندارد (البته تا مرتبه صفرم)

۵- برای مکان وسط آبپاش در لحظه صفر داریم که:

$$X_{(t)}=\int_0^t u_0\sin\omega t\,dt=\frac{u_0}{\omega}(1-\cos\omega t)$$

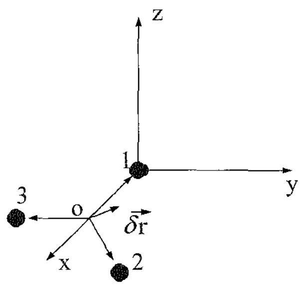
مکان قطره آبی که در لحظه t از آب پاش جدا شده (در لحظه T):

$$\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{u_0}{\omega}(1-\cos\omega t)+u_0(T-t)\sin\omega t\\ y=v_0(T-t)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$x=\frac{u_0}{\omega}\left(1-\cos\omega\left(T-\frac{y}{v_0}\right)\right)+u_0\frac{y}{v_0}\sin\omega\left(T-\frac{y}{v_0}\right)\Rightarrow$$

$$f(x,y)=x-\frac{u_0}{\omega}\left(1-\cos\left(\omega T-\frac{\omega y}{v_0}\right)\right)-\frac{u_0 y}{v_0}\sin\left(\omega T-\frac{\omega y}{v_0}\right)=0\quad (y\le v_0T)$$

۶- الف) مکان بارهای ۱ و ۲و ۳ نسبت به نقطه O را با $\vec{r}_3,\vec{r}_2,\vec{r}_1$ نمایش می‌دهیم.



پتانسیل را در نقطه $\vec{\delta r}$ محاسبه می‌کنیم: $|r_1|=|r_2|=|r_3|=\mathbf{r}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

$$V=\frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{|\vec{r}_i-\vec{\delta r}|}=\frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0}\sum\frac{1}{\sqrt{r_i^2+\delta r^2-2\vec{r}_i.\vec{\delta r}}}=$$

$$=-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\sum\frac{1}{r_i}\left(1+\left(\frac{\delta r}{r_i}\right)^2-\frac{2\vec{r}_i.\vec{\delta r}}{r_i^2}\right)^{\frac{-1}{2}}$$

اندازه r_1 و r_2 و r_3 یکسان است پس با تقریب تا مرتبه دوم داریم که:

$$V=\frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_{i=1}^{3}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta r}{r_i}\right)^2+\frac{\vec{r}_i.\vec{\delta r}}{r_i}+\frac{3}{2}\frac{(\vec{r}_i.\vec{\delta r})^2}{r_i^4}\right)=$$

$$-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(3-\frac{3}{2}\left(\frac{\delta r}{r}\right)^2+\frac{\vec{\delta r}.\sum\vec{r}_i}{r}+\frac{3}{2r^4}\sum_{i=1}^{3}(\vec{r}_i.\vec{\delta r})^2\right)$$

$\sum \vec{r}_i$ بنابر تقارن صفر است پس جمله سوم صفر می‌شود و فقط می‌بایست جمله نهایی را محاسبه کنیم.

$$\delta\vec{r} = (\cos\theta\hat{k} + \sin\theta\sin\varphi\hat{j} + \sin\theta\cos\varphi\hat{i})\delta r$$

$$\vec{r}_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}a\hat{i}$$

$$\vec{r}_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}a\hat{i} + \frac{a}{2}\hat{j}$$

$$\vec{r}_3 = \frac{\sqrt{3}}{6}a\hat{i} - \frac{a}{2}\hat{j}$$

$$\sum_{i=1}^{3}(\vec{r}_i.\delta\vec{r})^2 = a^2\frac{\sin^2\theta}{2}$$

$$\Rightarrow V = -\frac{q^2\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0 a}(3 - \frac{9}{2}\frac{(\delta r)^2}{a^2} + \frac{27(\delta r)^2}{4\ a^2}\sin^2\theta)$$

$$= -\frac{q^2\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(3 - \frac{9}{2}(\frac{\delta r}{a})^2(1 - \frac{3}{2}\sin^2\theta)\right)$$

در راستای لوله داریم که:

$$F = -\nabla V = -\frac{9\sqrt{3}q^2\delta r}{4\pi\varepsilon_0 a^3}(1 - \frac{3}{2}\sin^2\theta)$$

اگر مقدار فوق به ازای $\delta r > 0$ منفی باشد تعادل پایدار است پس:

$$1 - \frac{3}{2}\sin^2\theta > 0 \Rightarrow \sin^2\theta < \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \theta < \mathrm{Arc}\sin\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \pi \ge \theta > \pi - \mathrm{Arc}\sin\sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

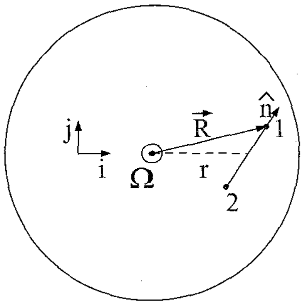
$$,\omega = \sqrt{\frac{9\sqrt{3}q^2(1 - \frac{3}{2}\sin^2\theta)}{4\pi\varepsilon_0 m a^3}}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

ب) به تابعیت نیرو دقت نمایید. در x های کوچک نیرو در جهت مثبت محور x است و در x های خیلی بزرگ نیز نیرو در جهت مثبت محور x است و در یک مکان تعادل هم نیرو صفر شده است و این نقطه تعادل ناپایدار دارد و در نتیجه در مجاورت آن، نقطه‌ای بر روی محور x است که نیرو در راستای منفی محور x ها است. نتیجه اینکه چنین تابعی که مثبت، منفی، مثبت می‌شود و پیوسته است، حداقل دو نقطه وجود دارد که نیرو در این دو نقطه برابر صفر شود.

پاسخ سؤال‌های امتحان نهایی المپیاد فیزیک ـ شانزدهمین دوره ـ تابستان ۸۲

۱- الف) در چارچوب دوار با سرعت زاویه‌ای Ω داریم. (پارامتر ها در دستگاه دوار با پریم مشخص شده اند.)



$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{R}\right) + 2\vec{\Omega}\times\vec{V}'$$

$$\vec{a}' = \ell\dot{\theta}^2(-\hat{n})$$

$$\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{R}\right) = -\Omega^2\vec{R}$$

$$\vec{\Omega}\times\vec{V}' = \Omega\hat{k}\times\left(V_x'\hat{i} + V_y'\hat{j}\right) = \Omega\left(V_x'\hat{j} - V_y'\hat{i}\right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} : V_y' = 0,\quad V_x' = -\ell\dot{\theta},\quad \vec{R} = r\hat{i} + \ell\hat{j},\quad \hat{n} = \hat{j}$$

$$\vec{a} = \ell\dot{\theta}^2\left(-\hat{j}\right) - \Omega^2\left(r\hat{i} + \ell\hat{j}\right) + 2\Omega\left(-\ell\dot{\theta}\hat{j}\right) =$$

$$-r\Omega^2\hat{i} - \left(\ell\dot{\theta}^2 + \ell\Omega^2 + 2\ell\Omega\dot{\theta}\right)\hat{j} \Rightarrow$$

$$a_1 = -r\Omega^2\hat{i} - \ell\left(\dot{\theta} + \Omega\right)^2\hat{j}$$

$$a_2 = \ell\dot{\theta}^2\left(\hat{j}\right) - \Omega^2\left(r\hat{i} - \ell\hat{j}\right) + 2\Omega\left(\ell\dot{\theta}\hat{j}\right) = -r\Omega^2\hat{i} + \ell\left(\dot{\theta} + \Omega\right)^2\hat{j}$$

برآیند نیرویی که اجرام بر میله وارد می‌کنند برابر:

$$\vec{F} = -m\vec{a}_1 - m\vec{a}_2 = 2mr\Omega^2\hat{i}$$

و کشش در میله به صورت زیر است.

$$T = m\ell\left(\omega + \Omega\right)^2$$

ب)

$$T = 0 \Rightarrow \omega = -\Omega$$

ج) میله نسبت به زمین جهتش ثابت می‌ماند یعنی نسبت به زمین دوران ندارد و تنها یک حرکت دورانی بر روی دایره بدون چرخش به دور خودش دارد. در اثر ایستادن صفحه، میله ثابت می‌ماند و هیچگونه دوران و حرکتی پس از آن ندارد.

۲- الف)

$$r=\frac{a\left(1-\varepsilon^2\right)}{1+\varepsilon\cos\left(\theta-\theta_0\right)}$$

$$\tan\varphi=\frac{dr}{rd\theta}=\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}=\frac{1+\varepsilon\cos\left(\theta-\theta_0\right)}{a\left(1-\varepsilon^2\right)}\frac{a\left(1-\varepsilon^2\right)\varepsilon\sin\left(\theta-\theta_0\right)}{\left(1+\varepsilon\cos\left(\theta-\theta_0\right)\right)^2}=\frac{\varepsilon\sin\left(\theta-\theta_0\right)}{1+\varepsilon\cos\left(\theta-\theta_0\right)}$$

ب)

$$\varepsilon<<1\Rightarrow\varphi<<1\Rightarrow$$

$$\varphi\approx tg\varphi=\frac{\varepsilon\sin\left(\theta-\theta_0\right)}{1+\varepsilon\cos\left(\theta-\theta_0\right)}\approx\varepsilon\sin(\theta-\theta_0)$$

ج)

$$r=\frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos(\theta-\theta_0)}=a\left(1-\varepsilon^2\right)\left(1-\varepsilon\cos(\theta-\theta_0)\right)$$

$$\Rightarrow r=a\left(1-\varepsilon\cos(\theta-\theta_0)\right)$$

د)

نیم محور بزرگ آنها با هم برابر است در نتیجه a ثابت است. دو بیضی وقتی همدیگر را در مختصه زاویه‌ای θ قطع می‌کنند، آنگاه:

$$r_\theta=r'_\theta\Rightarrow a\left(1-\varepsilon\cos\left(\theta-\theta_0\right)\right)=a\left(1-\varepsilon'\cos\left(\theta-\theta'_0\right)\right)$$

$$\Rightarrow\varepsilon\cos\left(\theta-\theta_0\right)=\varepsilon'\cos\left(\theta-\theta'_0\right)$$

ه)

با استفاده از معادله قسمت قبل داریم که:

$$\Rightarrow\left(\varepsilon+\delta\varepsilon\right)\cos\left(\theta-\theta_0-\delta\theta_0\right)=\varepsilon\cos\left(\theta-\theta_0\right)$$

$$\Rightarrow\left(\varepsilon+\delta\varepsilon\right)\left[\cos\left(\theta-\theta_0\right)+\sin\left(\theta-\theta_0\right)\delta\theta_0\right]=\varepsilon\cos\left(\theta-\theta_0\right)$$

$$\Rightarrow\varepsilon\cos\left(\theta-\theta_0\right)+\varepsilon\sin\left(\theta-\theta_0\right)\delta\theta_0+\delta\varepsilon\cos\left(\theta-\theta_0\right)\approx\varepsilon\cos\left(\theta-\theta_0\right)$$

$$\delta\theta_0=-\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon}\cot(\theta-\theta_0)$$

و)

$$\varphi+\delta\varphi=\varepsilon'\sin\left(\theta-\theta_0'\right)\Rightarrow\varphi+\delta\varphi=-\left(\varepsilon+\delta\varepsilon\right)\sin\left(\theta_0+\delta\theta_0-\theta\right)\Rightarrow$$

$$\varphi+\delta\varphi=-\left(\varepsilon+\delta\varepsilon\right)\left[\sin\left(\theta_0-\theta\right)+\cos\left(\theta_0-\theta\right)\delta\theta_0\right]\Rightarrow$$

$$\varphi+\delta\varphi=-(\varepsilon+\delta\varepsilon)\left(\sin\left(\theta_0-\theta\right)+\cos\left(\theta_0-\theta\right)\cot\left(\theta_0-\theta\right)\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon}\right)\Rightarrow$$

$$-\varphi-\delta\varphi=\varepsilon\sin\left(\theta_0-\theta\right)+\delta\varepsilon\sin\left(\theta_0-\theta\right)+\varepsilon\cos\left(\theta_0-\theta\right)\cot\left(\theta_0-\theta\right)\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow\delta\varphi=-\frac{1}{\sin\left(\theta_0-\theta\right)}\delta\varepsilon\Rightarrow\delta\varepsilon=\sin\left(\theta-\theta_0\right)\delta\varphi$$

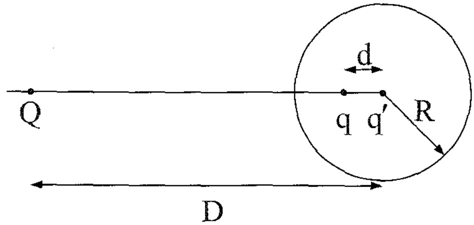
۳- می‌توان به جای میدان یکنواخت $\vec{E}=E_0\hat{x}$ فرض کرد که یک بار در بی‌نهایت قرار دارد:

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 D^2}=E_0$$

اندازه این بار Q است و مکان آن $x=-D$ است.

برای اینکه یک میدان یکنواخت باشد D و Q را به بی‌نهایت میل می‌دهیم به طوری که $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 D^2}=E_0$ ثابت باشد.

به کمک روش تصویر میدان الکتریکی را نزدیک کره رسانا پیدا می‌کنیم:



$$q=\frac{-QR}{D}$$

$$d=\frac{R^2}{D}$$

چون کره رسانا ابتدا خنثی بوده است پس یک بار q' باید در مرکز کره قرار دهیم به طوری که:

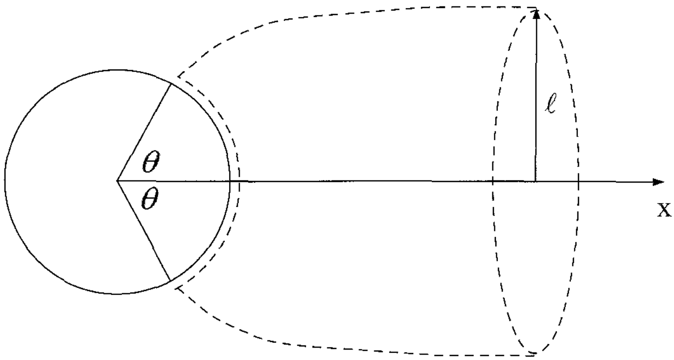
$$q+q'=0$$

$$\Rightarrow q'=\frac{QR}{D}$$

بنابراین بارهای القا شده در کره مانند یک دوقطبی در مرکز کره است که اندازه آن برابر است با:

$$\vec{p} = -qd\hat{x} = \frac{QR}{D} \times \frac{R^2}{D}\hat{x} = 4\pi\varepsilon_0 E_0 R^3 \hat{x}$$

اگر طبق شکل سطح گوسی‌ای در نظر بگیریم که سطح جانبی آن بر خطوط میدانی که با زاویه θ کره را ترک می‌کنند، مماس باشد و تا بی‌نهایت ادامه داشته باشد، آنگاه داریم:



طبق قانون گوس چون در این سطح فرضی باری وجود ندارد پس $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ است. پس شار کل میدان الکتریکی که از این سطح عبور می‌کند صفر است. از سطوح جانبی این سطح شاری نمی‌گذرد چون بر میدان مماس است. از سطح دیگر که در بی‌نهایت است شار زیر می‌گذرد:

$$\varphi_1 = E_0 \times \pi \ell^2$$

شاری که از سطح گوس مماس بر کره می‌گذرد، ناشی از میدان $E_0\hat{x}$ و میدان دو قطبی که در مرکز کره قرار داده است که به ترتیب با φ_2 و φ_3 نمایش می‌دهیم:

$$\varphi_2 = E_0 \times \pi \times (R\sin\theta)^2$$

$$\varphi_3 = \int_{S_0} \vec{E}.\vec{ds} = \int_0^\theta \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \left(\frac{3(\vec{p}.\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5} \right).\hat{r}Rd\theta \times 2\pi R\sin\theta$$

$$= \int_0^\theta \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{(3(\hat{x}.\hat{r})\hat{r} - \hat{x}).\hat{r}}{R^5} R^4 \times 2\pi \times \sin\theta d\theta$$

$$= \frac{p}{2\varepsilon_0 R} \int_0^\theta (3\cos\theta - \cos\theta) \times (-d\cos\theta) = \frac{-p}{2\varepsilon_0 R} \cos^2\theta \Big|_0^\theta$$

$$= \frac{p}{2\varepsilon_0 R}(1 - \cos^2\theta)$$

شار کل باید صفر شود:

$$\Rightarrow \varphi_2+\varphi_3=\varphi_1 \to \frac{p}{2\varepsilon_0 R}\left(1-\cos^2\theta\right)+E_0\times\pi R^2\sin^2\theta=E_0\pi\ell^2$$

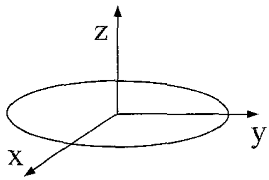
$$p=4\pi\varepsilon_0 E_0 R^3$$

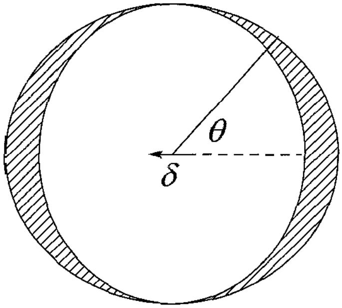
$$\Rightarrow 2\pi E_0 R^2\left(1-\cos^2\theta\right)+E_0\pi R^2\sin^2\theta=E_0\pi\ell^2$$

$$2R^2\left(1-\cos^2\theta\right)+R^2\sin^2\theta=\ell^2 \Rightarrow \sqrt{3}R\sin\theta=\ell$$

۴- دو استوانه با جریان $\vec{j},-\vec{j}$ در نظر می‌گیریم که در راستای محور z هستند و فاصله محورهایشان از همدیگر δ می‌باشد. بخاطر بر هم نهی در حائل میانی جریان صفر و در ناحیه هاشور خورده جریان $K_0\cos\theta$ پدید می‌آید.

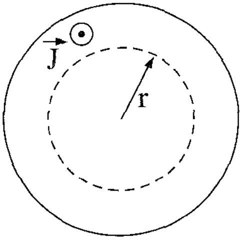
$$j\delta\cos\theta=K_0\cos\theta$$





اگر j را به بی‌نهایت و δ را به صفر میل دهیم طوری که $\delta j=K_0$ باشد، آنگاه به همان جریان سطحی $K_0\cos\theta$ می‌رسیم.

میدان پوسته استوانه‌ای می‌شود بر هم منحنی دو میدان برداری دو استوانه با جریان $\vec{j},-\vec{j}$.
با استفاده از قانون آمپر برای داخل استوانه داریم که



$$\mu_0\times\pi r^2 j=2\pi r B_\varphi \Rightarrow B_\varphi=\frac{\mu_0 rj}{2}\hat{\varphi}=\frac{\mu_0}{2}\left(\vec{j}\times\vec{r}\right)$$

که $\vec{r}$ فاصله از محور استوانه است. وقانون آمپر برای خارج استوانه نتیجه می‌دهد که:

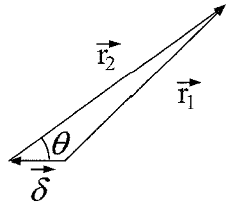
$$\Rightarrow \mu_0 i = 2\pi r B_\varphi \Rightarrow B_\varphi = \frac{\mu_0 R^2}{2} \quad \left(\vec{j}\times\frac{\hat{r}}{r}\right)$$

میدان داخل استوانه:

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0}{2}\left(\vec{j}\times\vec{r_1}\right) + \frac{\mu_0}{2}\left(\left(-\vec{j}\right)\times\vec{r}_2\right) = \frac{\mu_0}{2}\left(\vec{j}\times\left(\vec{r_1}-\vec{r_2}\right)\right) =$$
$$\frac{\mu_0}{2}\vec{j}\times\vec{\delta} = \frac{\mu_0 K_0}{2}\hat{x}$$

میدان خارج استوانه:

$$\overrightarrow{B'} = \overrightarrow{B'_1} + \overrightarrow{B'_2} = \frac{\mu_0 R^2}{2}\left(\vec{j}\times\frac{\hat{r}_1}{r_1}\right) + \frac{\mu_0 R^2}{2}\left(\left(\overrightarrow{-j}\right)\times\frac{\hat{r}_2}{r_2}\right)$$
$$= \frac{\mu_0 R^2}{2}\left(\vec{j}\times\left(\frac{\hat{r}_1}{r_1} - \frac{\hat{r}_2}{r_2}\right)\right)$$



$$\frac{\hat{r}_1}{r_1} - \frac{\hat{r}_2}{r_2} = \frac{\vec{r_1}}{r_1^2} - \frac{\vec{r_2}}{r_2^2} = A$$
$$\vec{r_2} = \vec{r_1} - \vec{\delta} \Rightarrow r_1^2 = r_2^2 + \delta^2 - 2r_2\delta\cos\theta$$
$$\Rightarrow A = \frac{\vec{r_2}+\vec{\delta}}{r_2^2+\delta^2-2\delta r_2\cos\theta} - \frac{\vec{r_2}}{r_2^2} = \frac{\vec{r}_2+\vec{\delta}}{r_2^2}\left(1+\frac{2\delta}{r_2}\cos\theta\right) - \frac{\vec{r}_2}{r_2^2} =$$
$$\frac{2\delta\vec{r_2}\cos\theta}{r_2^3} + \frac{\vec{\delta}}{r_2^2} = \frac{2\delta\cos\vec{r}}{r^3} + \frac{\vec{\delta}}{r^2}$$
$$B_{out} = \frac{\mu_0 R^2}{2}\left(\vec{j}\times\left(\frac{2\delta\cos\theta\vec{r}}{r^3} + \frac{\vec{\delta}}{r^2}\right)\right)$$
$$= \frac{\mu_0 R^2}{2}\left(\frac{2K_0\cos\theta\hat{z}\times\vec{r}}{r^3} + \frac{K_0\hat{x}}{r^2}\right)$$

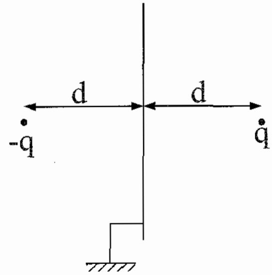
۵- الف) انرژی سیستم برابر است با:

$$\Sigma\frac{1}{2}q_i\varphi(r_i)=\int\frac{1}{2}\varphi(\vec{r})\rho(\vec{r})dv=\int\frac{1}{2}\varphi(\vec{r})\sigma(\vec{r})ds$$

که پتانسیل $\varphi(\vec{r})$ ناشی از بارهای دیگر در نقطه $\vec{r}$ است. در فرم انتگرالی انرژی چون سهم پتانسیل ناشی از جزء حجم ناچیز است، می‌توان پتانسیل ناشی از کل بار را در انتگرال قرار داد.

وقتی بار q در فاصله d از صفحه رسانا که به زمین وصل شده است قرار دارد. مقداری بار روی صفحه القا می‌کند. که بنابر روش تصویر، می‌توان به جای آن باری به اندازه $-q$ در طرف دیگر صفحه قرار داد.

در این سیستم هم توزیع بار پیوسته داریم و هم گسسته، انرژی سیستم می‌شود:



$$U=\frac{1}{2}q\varphi_1+\int\frac{1}{2}\varphi_2(\vec{r})\sigma(\vec{r})ds$$

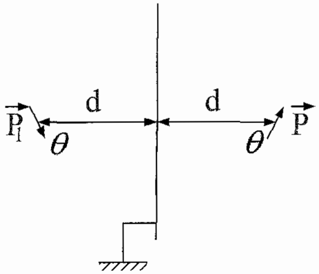
چون پتانسیل روی صفحه رسانا صفر است. پس حاصل انتگرال صفر می‌شود.

φ_1 پتانسیل ناشی از بار تصویری $-q$ است:

$$\varphi_1=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\times 2d}$$

$$\Rightarrow U=\frac{-q^2}{16\pi\varepsilon_0 d}$$

ب) بار القاء شده روی صفحه، مانند یک دوقطبی در طرف دیگر صفحه عمل می‌کند که اندازه آن $|\vec{P}|$ است و جهت آن مانند شکل است:



این دوقطبی را با $\overrightarrow{P_1}$ نشان می‌دهیم:

برای محاسبه انرژی سیستم مانند قسمت اول، کافی است انرژی ناشی از بارهای دیگر را روی دوقطبی محاسبه کنیم:

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2}\Sigma q_i \varphi(r_i) = -\frac{1}{2}\vec{P}.\vec{E}$$

که $\vec{E}$ میدان ناشی از دوقطبی تصویری است:

$$\vec{E} = \frac{\left[3\left(\overrightarrow{P_1}.\vec{r}\right)\vec{r} - \overrightarrow{P_1}\left(\vec{r}.\vec{r}\right)\right]}{4\pi\varepsilon_0 \quad \left|\vec{r}\right|^5}$$

$$\Rightarrow U = -\frac{1}{2}\times\frac{3\left(\overrightarrow{P_1}.\vec{r}\right)\left(\vec{r}.\vec{P}\right) - \left(\overrightarrow{P_1}.\vec{P}\right)\left(\vec{r}.\vec{r}\right)}{4\pi\varepsilon_0 \quad \left|\vec{r}\right|^5}$$

اندازه بردار $\vec{r}$ برابر با 2d است و جهت آن از دوقطبی تصویر به دوقطبی $\vec{P}$ است.

$$\Rightarrow U = -\frac{1}{2}\frac{\left[3\cos^2\theta P^2\times(2d)^2 - P^2\cos 2\theta(2d)^2\right]}{4\pi\varepsilon_0 \quad (2d)^5}$$

$$= \frac{-P^2\times\left[3\cos^2\theta - \cos 2\theta\right]}{64\pi\varepsilon_0 d^3} \Rightarrow U = \frac{-P^2\left[\cos^2\theta + 1\right]}{64\pi\varepsilon_0 d^3}$$

در نقطه مینیمم مشتق تابع صفر می‌شود:

$$\left.\frac{dU}{d\theta}\right|_{\theta_0} = 0 \Rightarrow \frac{+P^2 2\cos\theta_0 \sin\theta_0}{64\pi\varepsilon_0 d^3} = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$$

در نقطه مینیمم مشتق دوم تابع مثبت است:

$$\left.\frac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta_0} = \frac{P^2\times 2\cos 2\theta_0}{64\pi\varepsilon_0 d^3} \Rightarrow \left.\frac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta_0 = 0,\pi} > 0$$

وقتی سیستم در حالت تعادل پایدار است، انرژی سیستم مینیمم است.

پس وضعیت تعادل پایدار سیستم وقتی است که دوقطبی بر صفحه عمود شود.

اگر تابع انرژی پتانسیل سیستم را حول نقطه تعادل آن بسط دهیم به رابطه زیر می‌رسیم:

$$U(\theta_0 + \Delta\theta) = U(\theta_0) + \left.\frac{dU}{d\theta}\right|_{\theta_0}\Delta\theta + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta_0}\Delta\theta^2 + O\left(\Delta\theta^3\right)$$

انرژی جنبشی سیستم می‌شود:

$$\theta=\theta_0+\Delta\theta \Rightarrow \dot{\theta}=(\Delta\dot{\theta})$$

$$\Rightarrow k=\frac{1}{2}I\left(\Delta\dot{\theta}\right)^2$$

$$\Rightarrow U+K=\text{Const.}$$

$$\Rightarrow U\left(\theta_0\right)+\frac{1}{2}\frac{d^2U}{d\theta^2}\bigg|_{\theta_0}\Delta\theta^2+\frac{1}{2}I\left(\Delta\dot{\theta}\right)^2=\text{Const.}$$

اگر از رابطه بالا مشتق بگیریم:

$$\frac{d^2U}{d\theta^2}\bigg|_{\theta_0}(\Delta\theta)\times\Delta\dot{\theta}+I\left(\Delta\dot{\theta}\right)\times\left(\Delta\ddot{\theta}\right)=0$$

معادله روبرو معادله یک نوسانگر ساده است.

$$\Rightarrow \frac{d^2U}{d\theta^2}\bigg|_{\theta_0}\Delta\theta+I\Delta\ddot{\theta}=0$$

و بسامد نوسان آن برابر است با:

$$\left.\begin{array}{l}\omega=\sqrt{\dfrac{\left.\dfrac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta_0}}{I}}\\[2ex] \left.\dfrac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta_0}=\dfrac{P^2\cos 2\theta_0}{32\pi\varepsilon_0 d^3}\end{array}\right\}\Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{P^2}{32\pi\varepsilon_0 d^3 I}}$$

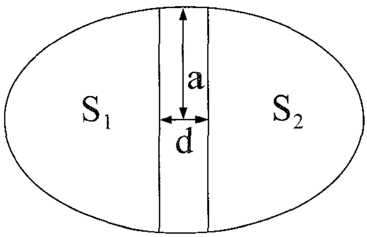
۶- داریم که مدت زمان بین اعتدال بهاری تا اعتدال پاییزی برابر مجموع فصل بهار و تابستان است، در حالی که مدت زمان بین اعتدال پاییزی تا اعتدال بهاری برابر مجموع فصل پاییز و زمستان است. چون مجموع اول برابر ۱۸۶ روز و مجموع دوم ۱۷۹,۲۵ روز است نتیجه آن است که مساحت بیشتری در زمان اول طی می‌شود و قسمت بزرگتر از بیضی مخصوص انقلاب بهاری است.

فرض‌کنید مساحتی که بین اعتدال بهاری تا اعتدال پاییزی جاروب می‌شود برابر S_2 و مساحتی که بین اعتدال پاییزی و اعتدال بهاری جاروب می‌شود برابر S_1 باشد. اگر d اختلاف فاصله باشد، به طور تقریبی داریم که:

$$S_2+S_1=\pi a^2$$

$$S_2-S_1=2da$$

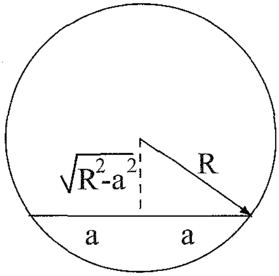
که برای معادله اول مسیر بیضی به شکل دایره تقریب زده شده است و برای معادله دوم نیز از تقارن میان سمت چپ بیضی و بخشی از سمت راست بیضی استفاده شده است. شکل زیر گویای این مطلب است.



نتیجه اینکه:

$$\frac{2da}{\pi a^2}=\frac{S_2-S_1}{S_2+S_1}\Rightarrow\frac{2d}{\pi a}=\frac{186-179.25}{186+179.25}\Rightarrow d\approx a\times 0.029\approx 4\times 10^9\,\mathrm{m}$$

۷– نیرویی که از طرف حلقه به میله وارد می شود یک نیروی شعاعی است و گشتاوری حول نقطه o ندارد. در نتیجه تکانه زاویه ای سیستم ثابت و برابر صفر است. لختی دورانی میله حول مرکز برابر است با



$$m\left(R^2-a^2\right)+\frac{1}{3}ma^2$$

اگر فرض کنیم که میله یک سرعت زاویه ای $\dot\theta$ حول مبدا داشته باشد در آنصورت از ثابت بودن تکانه زاویه‌ای حول مبدا بدست می آید که :

$$\begin{cases}\left(m\left(R^2-a^2\right)+\frac{1}{3}ma^2\right)\dot\theta+m\sqrt{R^2-a^2}\;V+m\left(R^2-a^2+x^2_{(t)}\right)\dot\theta=0\\ x(t)=Vt\end{cases}$$

$$\Rightarrow\dot\theta=\frac{-\sqrt{R^2-a^2}\,V}{2R^2-\frac{5}{3}a^2+V^2t^2}$$

حال با انتگرال گیری از عبارت بدست آمده برای $\dot\theta$ می توان θ را بر حسب زمان بدست آورد.

$$\left.\begin{aligned}
&\theta-\theta_0=\int_0^t\dot{\theta}dt=\frac{-\sqrt{R^2-a^2}V}{2R^2-\frac{5}{3}a^2}\int_0^t\frac{dt}{1+\frac{V^2}{2R^2-\frac{5}{3}a^2}t^2}\\
&\qquad tg\varphi=\frac{Vt}{\sqrt{2R^2-\frac{5}{3}a^2}}\\
&\quad dt=\frac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi\frac{\sqrt{2R^2-\frac{5}{3}a^2}}{V}
\end{aligned}\right\}$$

که جمله اول مربوط به تکانه زاویه‌ای میله و دو جمله دوم مربوط به تکانه زاویه‌ای ذره m می‌باشد.

$$\theta-\theta_0=\frac{-\sqrt{R^2-a^2}V}{2R^2-\frac{5}{3}a^2}\int_0^{tg^{-1}\frac{Vt}{\sqrt{2R^2-\frac{5}{3}a^2}}}\frac{\sqrt{2R^2-\frac{5}{3}a^2}\frac{1}{Cos^2\varphi}d\varphi}{V\frac{1}{Cos^2\varphi}}$$

$$=\frac{-\sqrt{R^2-a^2}}{\sqrt{2R^2-\frac{5}{3}a^2}}tg^{-1}\frac{Vt}{\sqrt{2R^2-\frac{5}{3}a^2}}$$

و در نتیجه با جمع زدن آن با θ_0، θ بر حسب زمان بدست آمده است.

۸ – در هنگام حداکثر شتاب چرخهای عقب در آستانه لغزش قرار می گیرند. فرض کنیم که حداکثر شتاب ماشین برابر a باشد. نیروی لازم برای شتاب **a** توسط اصطکاک چرخهای عقب به ماشین از طرف زمین داده می شود. اگر چرخهای عقب را در آستانه لغزش در نظر بگیریم و نیروی عمود بر سطح چرخهای جلو و عقب را به ترتیب N_2, N_1 بگیریم، بدست می آید که.

$$\left.\begin{aligned}N_1+N_2&=Mg\\ N_2\mu_S h+N_1b_1&=N_2b_2\end{aligned}\right\}\begin{aligned}N_2&=Mg\frac{b_1}{b_2-\mu_s h+b_1}\\ N_1&=Mg\frac{b_2-\mu_s h}{b_2-\mu_s h+b_1}\end{aligned}$$

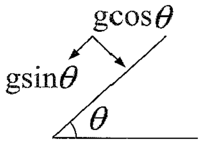
که با استفاده از نوشتن گشتاور، معادلات بالا بدست آمده است ولی نکته ای وجود دارد و آن هم این است که نباید N_1 مقدار منفی بگیرد. چرا که نیروی عمود بر سطح همواره مثبت است.

$$b_2 > \mu_s h \Rightarrow a = \frac{\mu_s N_2}{M} = \mu_s g \frac{b_1}{b_2 - \mu_s h + b_1}$$

$$\Rightarrow \qquad b_2 < \mu_s h \Rightarrow N_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} N_2 b_2 = N_2 \mu_s h \\ N_2 = mg \\ N_2 \mu_s = ma \end{cases} \Rightarrow a = \frac{g b_2}{h}$$

که در واقع اگر رابطه دوم برقرار باشد با ماشین مذکور می توان تک چرخ زد (؟ !) و در حالتی که N_1 برابر صفر است و N_2 برابر mg است با نوشتن معادلات گشتاور حول مرکز جرم جواب برای شتاب حاصل شده است.

قسمت دوم : گرانش را به دو راستا تقسیم می کنیم (مطابق شکل) اگر ماشین را رها کنیم با شتاب $g\sin\theta$ به سمت پایین می رویم و حال باید به اندازه $g\sin\theta$ چرخهای عقب به ماشین در راستای بالا شتاب دهند تا ماشین به سمت پایین شتاب نگیرد. در نتیجه (گرانش جدید در راستای عمود بر سطح $g\cos\theta$ است)



$$g\sin\theta = \mu_s g\cos\theta \frac{b}{2b - \mu_s h} \qquad (1)$$

پس از تکان دادن بار ماشین باید سر بالایی با شیب θ' را بالا برود. اگر b_1' بخواهد مکان جدید مرکز جرم نسبت به چرخ جلو باشد داریم که :

$$g\sin\theta' = \mu_s g\cos\theta' \frac{b_1'}{b_1 + b_2 - \mu_s h} \qquad (2)$$

$$(1),(2) \qquad \Rightarrow \frac{b_1'}{b} = \frac{tg\theta'}{tg\theta} \Rightarrow b_1' = \frac{tg\theta'}{tg\theta} \times b$$

و برای اینکه مرکز جرم به اندازه $b_1' - b$ عقب بیاید، باید بار به اندازه $\left(b_1' - b\right)\frac{\eta+1}{\eta}$ عقب بیاید.

در نتیجه میزان عقب آمدن بار برابر است با:

$$b\left(\frac{tg\theta'}{tg\theta} - 1\right) \times \frac{\eta+1}{\eta}$$

سؤال‌ها و پاسخ‌های هفدهمین دوره آزمون‌های المپیاد فیزیک

تابستان ۱۳۸۳

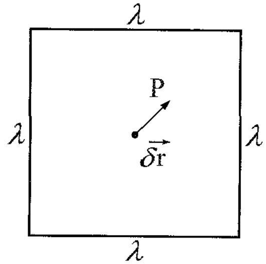
سؤال‌های امتحان اول المپیاد فیزیک ـ هفدهمین دوره ـ تابستان ۸۳

وقت: ۲ ساعت

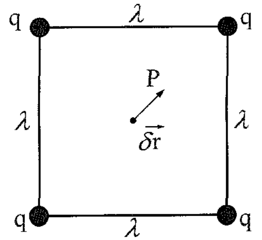
۱- یک جسم کوچک به اندازه R، در فاصله r از یک بار نقطه‌ای است ($r >> R$). در اثر میدان الکتریکی بار نقطه‌ای، یک دو قطبی الکتریکی در جسم تولید می‌شود که از رابطه $\vec{P} = \alpha\vec{E}$ پیروی می‌کند. $\vec{P}$ دو قطبی الکتریکی، $\vec{E}$ میدان الکتریکی بار نقطه‌ای در محل جسم، و α یک ضریب ثابت است که به اندازه جسم، جنس جسم (یک پارامتر بدون بعد)، و احیاناً ثابت‌های بعد دار بستگی دارد.
الف) α با چه توانی از R متناسب است؟
ب) نیروی وارد بر جسم با چه توانی از r متناسب است؟

۲- هواپیمایی با سرعت $\vec{v} = \vec{v}_0\hat{x}$ و در ارتفاع h در حال پرواز است. در زمان $t = 0$ گلوله‌ای از هواپیما رها می‌شود. در زمان T و قبل از آن که گلوله به زمین برسد گلوله منفجر می‌شود. قطعات گلوله پس از انفجار در همه جهت ها و با سرعت u_0 نسبت به مرکز انفجار پرتاب می‌شوند. در زمان T'، مکان هندسی قطعات گلوله را به دست آورید. در زمان T' هیچ کدام از قطعات گلوله به زمین نرسیده‌اند.
محور y را عمود بر سطح زمین بگیرید. از مقاومت هوا نیز صرف نظر کنید.

۳- چهار بار خطی با چگالی طولی λ و طول a مطابق شکل زیر روی چهار یال یک مربع قرار گرفته‌اند.
الف) میدان الکتریکی را در نقطه P به مختصات $\delta\vec{r} = \delta x\hat{i} + \delta y\hat{j}$ (بر روی صفحه مربع) پیدا کنید. فرض کنید که $a >> |\delta\vec{r}|$.



ب) چهار بار نقطه‌ای q را روی چهار راس این مربع قرار می‌دهیم. رابطه‌ای بین q و λ پیدا کنید که میدان در نقطه P تا مرتبه اول نسبت به $\frac{|\delta\vec{r}|}{a}$ صفر باشد.



۴- در این مساله با استفاده از تحلیل ابعادی می‌خواهیم بستگی ثابت فنر را به پارامترهای مختلف بررسی نماییم.

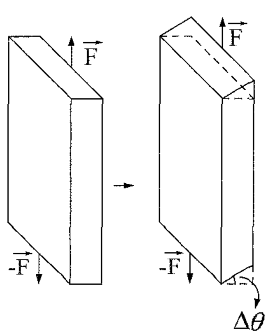
الف) نیروی باز گرداننده فنر به صورت $F=-k\Delta x$ است که k ثابت فنر و Δx تغییر طول آن است. ثابت فنرِ معادلِ دو فنر به ثابت‌های k_1 و k_2 را که به صورت سری (متوالی) به هم وصل شده اند را به دست آورید.

ب) تنشی که در فنر موقع کشیده شدن آن ایجاد می‌شود از نوع بُرشی است . (مفتول فنر موقع کشیده شدن می‌پیچد) مُدول برشی برای یک جسم به این صورت تعریف می‌شود:

$$\sigma=\frac{\frac{F}{A}}{\Delta\theta}$$

که در آن F نیروی مماسی (برشی)، A مساحت جانبی صفحات، و $\Delta\theta$ زاویه چرخش است که در شکل نشان داده شده است.

حال فرض کنید مفتول سیمی به طول ℓ تحت گشتاور τ به اندازه $\Delta\varphi$ بپیچد. مقدار گشتاور پیچشی متناسب با $\Delta\varphi$ است و $\tau=K\Delta\varphi$ که در آن K ثابت پیچشی نام دارد. بُعد گشتاور، نیرو ضرب در طول است. به کمک تحلیل ابعادی K را بر حسب پارامترهای مفتول به دست آورید. (رابطه نهایی را به کمک فیزیک مساله ساده کنید).



ج) به کمک تحلیل ابعادی و نتیجه قسمت (ب) بستگی k، ثابت فنر، را به پارامترهای هندسی و مدول برشی مفتولی که فنر از آن ساخته شده به دست آورید.

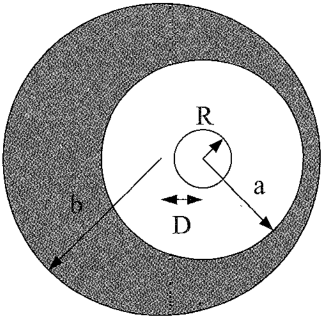
سؤال‌های امتحان دوم المپیاد فیزیک ـ هفدهمین دوره ـ تابستان ۸۳
وقت: ۳ ساعت و ۳۰ دقیقه

۱- تابع پتانسیل الکتریکی یک توزیع بار کروی مشخص، با توابع زیر داده شده است.

$$\varphi(r)=\begin{cases} Ar & ;0\le r\le R \\ A\,R^3/r^2 & ;r\ge R \end{cases} \qquad A=\text{const}$$

چگالی بار سطحی در $r=R$ را به دست آورید و از روی آن کل بار سطحی در $r=R$ را محاسبه کنید.

۲- یک لایه رسانای بی بار بین دو کره به شعاع های a و b است. $a<b$ است و این دو کره همدیگر را قطع نمی‌کنند. فاصله بین مرکزهای این دو کره D است. یک کره باردار به شعاع R با کره درونی هم مرکز است. $R<a$ است و چگالی حجمی بار این کره مقدار ثابت ρ است.
پتانسیل الکتریکی را در کل فضا (چهار ناحیه: درون توزیع بار، درون حفره و بیرون توزیع بار، درون رسانا، و بیرون رسانا) حساب کنید.
چگالی سطحی بار القا شده روی سطح های درونی و بیرونی رسانا را حساب کنید.

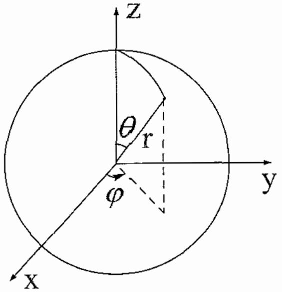


۳- یک دو قطبی الکتریکی را در نظر بگیرید که در مبدا مختصات واقع شده است و محور آن در راستای محور z قرار دارد. اگر اندازه این دو قطبی با زمان به صورت هماهنگ زمانی (هارمونیک ساده) نوسان کند، تابش خواهد کرد. میدان الکتریکی تابشی تولید شده توسط آن‌را در نواحی دور دست به صورت زیر می‌توان به دست آورد:

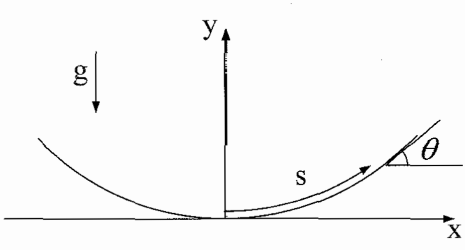
$$\vec{E}(\vec{r})=f(r)\sin\theta\,\hat{e}_\theta$$

(r,θ,φ) مختصات کروی هستند و $\hat{e}_\theta$ بردار یکه در راستای افزایش θ است. $f(r)$ یک تابع است که به پارامترهایی هم چون طول موج اشعهٔ تابشی، ثوابت الکترومغناطیسی فضا، و اندازه دامنه دوقطبی بستگی دارد. در این مساله شکل دقیق تابع f برای ما اهمیت ندارد و فرض کنید آن را می‌دانیم.

اکنون در نظر بگیرید که محور دو قطبی را ۹۰ درجه بچرخانیم تا در راستای محور x قرار بگیرد. میدان الکتریکی تابشی توسط دو قطبی در نواحی دور دست را بر حسب r، θ و φ و بردارهای یکه $\hat{e}_r$، $\hat{e}_\theta$ و $\hat{e}_\varphi$ به دست آورید.



۴- ذره‌ای به جرم m در نظر بگیرید که روی مسیر هموار (بدون اصطکاکی) مطابق شکل حرکت می‌کند. S طول خم و θ زاویه مماس بر خم با خط افقی است.

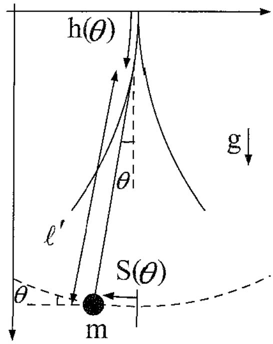


الف) مکان ذره را با پارامتر S توصیف می‌کنیم. معادله حرکت ذره را بنویسید.

ب) S بر حسب θ به چه صورتی باشد که حرکت نوسانی ساده باشد یعنی:

$$S(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

حال جرم m را در نظر بگیرید که از طنابی به طول L از وسط دو تیغه مشابه به شکل زیر آویزان شده باشد و مجموعه یک آونگ ساخته است. وقتی آونگ نوسان می‌کند طناب آن بر تیغه ها مماس می‌شود.



فرض کنید در طول نوسان جرم m روی مسیر $S(\theta)$ حرکت می‌کند و شکل تیغه‌ها نیز با پارامتر طول بر حسب زاویه مطابق شکل توصیف شده است. ($h(\theta)$)

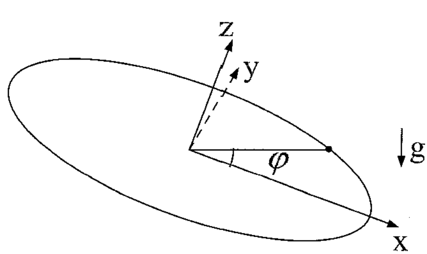
ج) رابطه‌ای بین $\ell', \dot{\theta}$ و سرعت ذره روی مسیر، $\dot{S}(\theta)$، به دست آورید. به کمک آن رابطه‌ای بین $\frac{dS}{d\theta}$ و $h(\theta)$ به دست آورید.

د) $h(\theta)$ را به گونه ای تعیین کنید که دوره تناوب نوسانات آونگ مستقل از دامنه آن باشد. (حرکت هارمونیک ساده باشد).

۵- حلقه‌ای به شکل دایره (به شعاع R) در نظر بگیرید. فرض کنید صفحه حلقه با صفحه افق زاویه α بسازد. این یعنی بردار عمود بر حلقه با راستای قائم زاویه α می‌سازد.

فرض کنید ذره ای مقید است که روی این حلقه حرکت کند. اصطکاک ناچیز است. دستگاه مختصه ها را این طور بگیرد: z عمود بر صفحه حلقه، به طرف بالا، مبدا در مرکز حلقه، محور x طوری که شتاب گرانش، $\vec{g}$، در صفحه xz باشد و امتداد مثبت x از پایین ترین نقطه مسیر بگذرد. دستگاه xyz راستگرد است، یعنی $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$.

نیرویی را که حلقه بر ذره وارد می‌کند، به صورت تابعی از اندازه سرعت ذره، v، و زاویه‌ای که بردار مکان ذره با محور x می‌سازد، که آن را φ می‌نامیم، به دست آورید.



سؤال‌های امتحان سوم المپیاد فیزیک ـ هفدهمین دوره ـ تابستان ۸۳
وقت: ۳ ساعت و ۳۰ دقیقه

۱- دو لایه نامتناهی بار به کلفتی D در نظر بگیرید.
چگالی حجمی یک لایه ρ و چگالی لایه دیگر $-\rho$ است. لایه با چگالی ρ بین $x=0$ و $x=D$، و لایه با چگالی $-\rho$ بین $x=-d$ و $x=D-d$ است. داریم $0<d<D$ (یعنی لایه ها در هم فرو رفته اند.)

الف) پتانسیل الکتریکی را در همه فضا حساب کنید. بگیرید: $\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)=0$

ب) فرض کنید $\rho d=P$ ، P را ثابت بگیرید و d را به سمت صفر میل دهید. در این حالت $\varphi(x)$ را به دست آورید.

یک صفحه باردار با چگالیِ سطحیِ یکنواخت σ و یک صفحه باردار با چگالیِ سطحیِ یکنواخت $-\sigma$ را در نظر بگیرید. صفحه اول در $x=0$ و صفحه دوم در $x=-\delta$ است.

ج) پتانسیل الکتریکی را در همه فضا حساب کنید. بگیرید: $\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)=0$

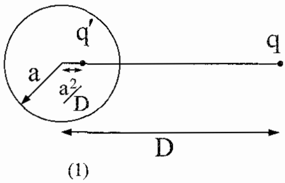
د) فرض کنید $\sigma\delta=\eta$، η را ثابت بگیرید و δ را به صفر میل دهید. در این حالت $\varphi(x)$ را به دست آورید.

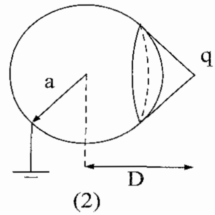
به آرایش بار بخش (د) (در حد $\delta\to 0$) یک صفحه دو قطبی الکتریکی با چگالیِ سطحیِ $\eta\hat{x}$ می گوئیم. یک لایه به کلفتی D (بین $x=0$ و $x=D$) در نظر بگیرید که چگالیِ حجمیِ دو قطبی در آن Γ است. این یعنی آن بخش از این لایه که بین x و $x+\Delta x$ است، مثل یک صفحه دو قطبی الکتریکی با چگالیِ سطحیِ $\hat{x}\Gamma\Delta x$ است.

ه) پتانسیل الکتریکی را در همه فضا حساب کنید. بگیرید: $\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)=0$

۲- پوسته کروی فلزی به شعاع a را در نظر بگیرید که پتانسیل الکتریکی آن برابر با صفر است. بار الکتریکی q را در فاصله $D>a$ از مرکز کره قرار می دهیم. میدان الکتریکی این مجموعه در خارج کره، درست مانند میدان الکتریکی حاصل از بار q و بار دیگری به اندازه q' است که q' در فاصله $\frac{a^2}{D}$ از مرکز کره قرار دارد، به طوری که q، q' ، و مرکز کره روی یک خط راست قرار دارند. مقدار $q'=-\frac{a}{D}q$ است.

مخروطی فرضی را در نظر بگیرید که راس آن منطبق بر بار q است و بر کره مماس است. (یعنی کره در مخروط محاط است.) منحنی حاصل از این تماس، یک دایره است. و سطح پوسته کروی را به دو بخش نزدیک به بار q و دور از بار q تقسیم می کند. (مطابق شکل) نسبت بار القا شده روی بخش نزدیک به بار q، به بار القا شده روی بخش دور از بار q را محاسبه کنید.





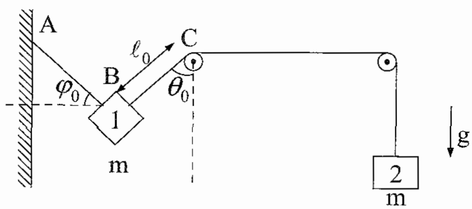
۳- دو جرم یکسان m توسط نخی که از روی دو قرقره رد شده مطابق شکل به هم وصل شده‌اند. جرم ۱ توسط نخی به دیوار وصل شده است. از جرم نخ ها، جرم قرقره ها و از اصطکاک قرقره ها صرف نظر کنید. نخ AB با محور افقی زاویه φ_0 و نخ BC با محور قائم زاویه θ_0 می سازد.

الف) این سیستم در حال تعادل است. کشش در هر یک از نخ ها چه قدر است؟

اندازه زاویه φ_0 را بر حسب m و θ_0 به دست آورید.

ب) نخ AB را با قیچی می‌بریم. شتاب جرم ۲ را درست پس از بریدن نخ به دست آورید.

ج) $\ddot{\theta}$ را درست پس از بریدن نخ به دست آورید. طول نخ BC در زمان بریدن نخ ℓ_0 است.



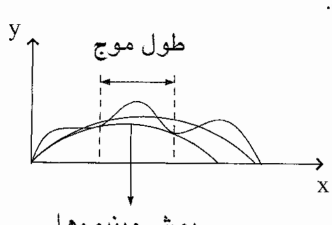
۴- یک فواره آب را با سرعت ثابت v_0 در زاویه θ با افق پرتاب می کند. زاویه پرتاب توسط یک موتور الکتریکی به صورت $\theta = \frac{\pi}{4} + \alpha \sin \omega t$ $(\alpha << \frac{\pi}{4})$ تنظیم می شود.

اگر در یک لحظه از مسیر حرکت آب عکس بگیریم حالتی موجی مشاهده می کنیم. دامنه حرکت را در فاصله افقی **x** از مبدا، اختلاف ارتفاع ماکزیمم و مینیمم مسیر در آن نقطه تعریف می‌کنیم.

الف) دامنه حرکت را بر حسب x بنویسید.

منحنی گذرنده از نقاط مینیمم را پوش مینیمم مسیر می نامیم. طول موج در فاصله افقی x از مبدا را فاصله افقی دو نقطه تماس مسیر آب با منحنی پوش مینیمم‌ها تعریف می‌کنیم، در زمانی که مینیمم اول در فاصله x قرار داشته باشد.

ب) این طول موج را حساب نمایید.



۵- مانند شکل، ۱+n جسم با جرم های یکسان m به n قرقره بی جرم و بدون اصطکاک آویزان هستند. شتاب گرانشی را g بگیرید و کشش بالاترین نخ را $T = m\beta$ بنامید. (نخی که به سقف متصل است.) جهت مثبت را رو به پایین بگیرید. همچنین شتاب جرم k ام را a_k و شتاب قرقره k ام را b_k بنامید.

الف) کشش طناب k ام $(1 \le k \le n)$، یعنی طنابی که به جسم k ام متصل است را بر حسب β بیابید.

ب) شتاب جرم k ام $(1 \le k \le n+1)$ را بر حسب β و g به دست آورید.

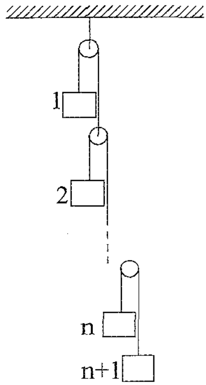
ج) به خاطر ثابت بودن طول طناب ها، قیدهایی روی شتاب جرم ها و قرقره ها وجود دارد. این قیدها را بنویسید. (یعنی رابطه‌ای بین a_k، b_k، و b_{k+1} به دست آورید.)

د) با استفاده از روابط بالا، b_k را بر حسب β به دست آورید.

هـ) کشش نخ بالایی (T) را به دست آورید. جوابتان را به ازای $n = 1$ بررسی کنید.

و) شتاب جسم k ام چقدر است؟

ی) در حد **n** های بسیار بزرگ، کشش نخ بالایی و شتاب جرم اول به چه عددهایی میل می کنند؟



سؤال‌های امتحان چهارم المپیاد فیزیک ـ هفدهمین دوره ـ تابستان ۸۳
وقت: ٤ ساعت

۱- دو جسم به جرم های m_1 و m_2 با فنری به ثابتِ K به هم وصل شده اند. طولِ کش نیامده فنر L است. مختصه ها را چنان می گیریم که محور x قائم، و جهتِ مثبتِ آن به طرفِ پایین باشد.
الف) قانون دومِ نیوتن را برای این دو ذره (وقتی در حال سقوط‌اند) بنویسید. (حرکت یک بعدی است.)
ب) هر دو جسمِ ۱ و ۲ را با دست می گیریم، طوری که ذره ۱ در $x = 0$ و ذره ۲ در $x = L$ باشد. در لحظه $t = 0$ هر دو را رها می کنیم. $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را به دست آورید.
ج) جسمِ ۱ را در $x = 0$ با دست می گیریم، طوری که ۲ آویزان باشد. در این حالت ۱ و ۲ هر دو ساکن اند. در لحظه $t = 0$ جسم ۱ را رها می کنیم که در نتیجه ۱ و ۲ هر دو می افتند. مختصه‌های X و u را این طور تعریف می کنیم.

$$X = \frac{m_1 x_1}{m_1 + m_2} + \frac{m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$
$$u = x_2 - x_1$$

معادله های دیفرانسیل حاکم بر X(t) و u(t) را به دست آورید و کلی ترین حل آن ها را بنویسید.
د) $x_1(t)$ و $x_2(t)$ (مربوط به قسمتِ ج) را به دست آورید.
هـ) برای مقادیر زیر $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را (با ضریب های عددیِ ساده شده) بنویسید و نمودار آن را بکشید.

$$m_1 = 1\text{kg}$$
$$m_2 = 2\text{kg}$$
$$K = 10^3\,\text{Nm}^{-1}$$
$$L = 10^{-1}\,\text{m}$$

۲- سه نفر که جرمِ هر کدام شان m است روی یک سطحِ افقی بدون اصطکاک (مثلاً روی یخ) کنار هم ایستاده‌اند و همدیگر را محکم گرفته‌اند. نفرِ اول با هل دادنِ دو نفرِ دیگر خود را به حرکت در می آورد؛ بعد نفرِ دوم نفرِ سوم را هل می دهد، طوری که در نهایت هر سه بر روی یک خط (مثلاً محورِ x) حرکت کنند. فرض کنید زورِ این افراد با هم برابر است، به این معنی که در هر هل دادن انرژی ثابتِ Q، و در کلِ فرایند انرژی 2Q آزاد می شود.
الف) انرژیِ جنبشیِ نفرِ j ام را به دست آورید. این انرژی را به شکل $\alpha_j Q$ بنویسید و α_j ها را به دست آورید.
ب) سرعتِ نفرِ سوّم را (نسبت به سطحِ افقی) به دست آورید. این سرعت را به شکلِ $\beta\sqrt{\frac{Q}{m}}$ بنویسید و β را تا سه رقم اعشار حساب کنید.

اکنون همان سه نفر را در نظر بگیرید و فرض کنید که نفرهایِ اول و دوم هم زمان نفرِ سوم را هل بدهند، به نحوی که باز هم هر کدام شان انرژیِ Q را آزاد کنند. دقت کنید که این بار دیگر نفرهایِ اول و دوم هم را هل نمی دهند، یعنی در این فرایند هم باز انرژی 2Q آزاد می شود.

ج) اکنون سرعت نفر سوم (نسبت به سطح افقی) چقدر است؟ این سرعت را به شکل $\gamma\sqrt{\frac{Q}{m}}$ بنویسید و γ را تا سه رقم اعشار حساب کنید.

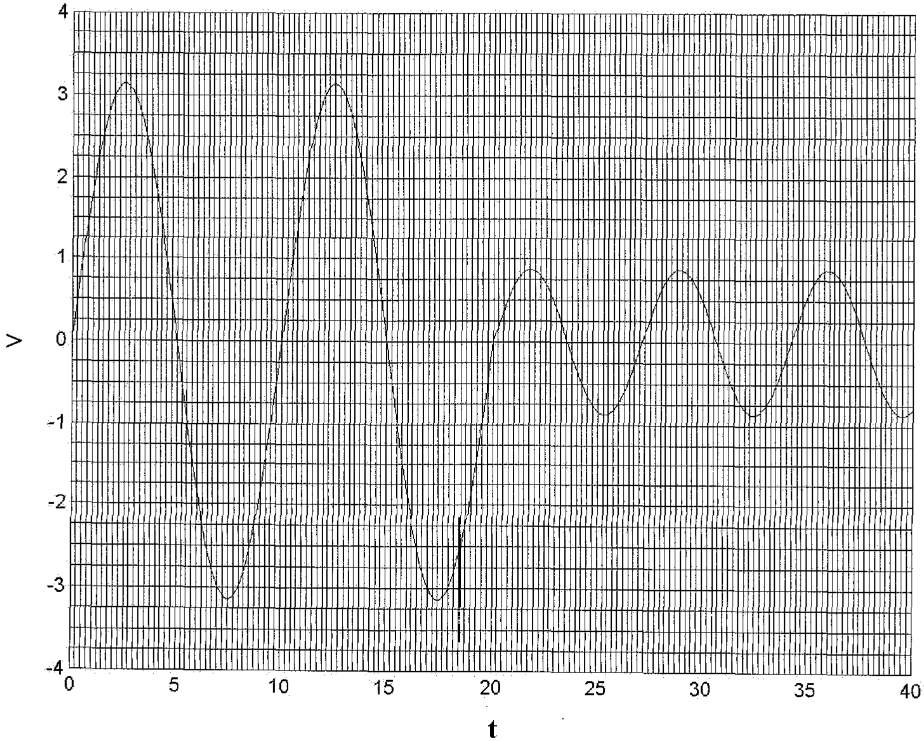
د) انرژی جنبشی هر یک از این سه نفر را به دست آورید. آن ها را به شکل $\delta_j Q$ بنویسد و δ_j ها را به دست آورید.

۳- جسمی که از دو تکه مجزا تشکیل شده است، به فنری آویزان است. جسم را کمی از حالت تعادل دور می کنیم و سپس آن را رها می کنیم. درست پس از دو نوسان کامل، یکی از دو تکه جسم جدا می شود و تکه دوم همراه با فنر به نوسانِ خود ادامه می دهد. جدا شدن تکه اول، نیرویی به بقیه سیستم وارد نمی‌کند. نمودارِ سرعت-زمان این سیستم در زیر آمده است. واحد ها اختیاری هستند و جهت مثبت حرکت به سمت پایین گرفته شده است.

الف) نسبت جرم باقیمانده به جرم اولیه چقدر است؟

ب) شتاب جاذبه برحسب واحدهای نمودار چقدر است؟

ج) نمودار مکان- زمان این جسم را بکشید.



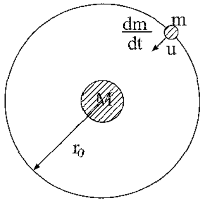
۴- دانه تسبیحی مقید است که روی مارپیچی حرکت کند. محور مارپیچ در راستای جاذبه زمین است و بردار مماس بر هر نقطه از مارپیچ همواره با صفحه عمود بر محور مارپیچ زاویه θ می سازد. تصویر این مارپیچ روی صفحه ای که بر محور مارپیچ عمود است، دایره ای به شعاع r است. ضریب اصطکاک بین دانه تسبیح و مارپیچ ثابت و مساوی μ است. دانه تسبیح تحت اثر جاذبه سقوط می کند.
الف) اندازه شتاب دانه را به عنوان تابعی از سرعت آن و سایر پارامترهای مساله بیابید.
ب) سرعت چقدر باشد تا اندازه آن در طول زمان تغییر نکند؟

۵- سه پوسته کروی فلزی هم مرکز به شعاع های $a < b < c$ داریم. پوسته های درونی و بیرونی به زمین وصل شده اند. (پتانسیل آن دو صفر است). بار Q نیز روی پوسته میانی به طور یکنواخت توزیع شده است. فشار (نیرو بر واحد سطح) وارد بر پوسته میانی را حساب کنید.

۶- یک خازن با صفحه‌های موازی در نظر بگیرید که یک صفحه آن در $x = -D$ ثابت است. صفحه دیگر در حالت تعادل در $x = 0$ است. در حالت تعادل، بار خازن Q_0 است. بین دو صفحه خازن یک فنر با ضریب سختیِ k هست، که دو صفحه خازن را از هم جدا می کند. مساحت هر یک از صفحه‌های خازن A است. سه حالت در نظر می‌گیریم. در حالت اول صفحه‌های خازن به هیچ رسانای دیگری وصل نیستند. در حالت دوم صفحه‌های خازن به یک باتری با ولتاژ ثابت وصل‌اند. در حالت سوم خازن با یک خازن مشابه موازی است، که فاصله بین صفحه های آن مقدار ثابت D است، و در حالت تعادل بار آن Q_0 است.
الف) در هر یک از این حالت ها، نیروی وارد بر صفحه متحرک خازن را بر حسب x (جای آن صفحه) به دست آورید.
ب) نیرو در هر یک از این سه حالت را برای x های کوچک، تا اولین مرتبه غیر صفر نسبت به x به دست آورید.

سؤال‌های امتحان پنجم المپیاد فیزیک ـ هفدهمین دوره ـ تابستان ۸۳
وقت: ٤ ساعت

۱- سفینه‌ای به جرم m مطابق شکل روی دایره ای به شعاع r_0، حول سیاره ثابتی به جرم M در حال چرخش است. در لحظه $t=0$، سفینه با آهنگ ثابت $\frac{dm}{dt}=b$ شروع به خارج کردن جرم می کند. در دستگاه ساکن (نسبت به سیاره)، اندازه سرعت خروج جرم نسبت به سیاره، u و جهت آن به سمت سیاره است. با فرض کوچک بودن b (نسبت به پارامترهایی که باید تعیین کنید) انحراف شعاعی حرکت سفینه نسبت به حالت دایره ای را تا کمترین مرتبه غیر صفر b به عنوان تابعی از زمان به دست آورید.

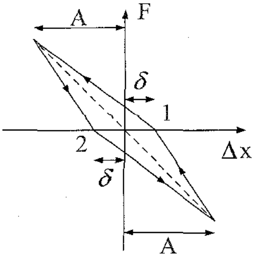


راهنمایی: جواب معادله دیفرانسیلِ $\ddot{x}+\omega_0^2x=\alpha t+\beta$ به صورت زیر است.

$$x(t)=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t+CT+D$$

C, B, A و D ثابت هایی هستند که باید تعیین شوند. β, α و ω_0^2 ثابت و معلوم هستند.

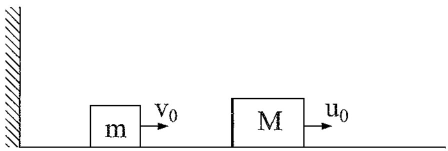
۲- فنری به ثابت k در نظر بگیرید که اثر پسماندی داشته باشد، به این صورت که وقتی کشیده می شود موقعی که رها شود که به ($F=0$) برمی‌گردد طول آن از طول اولیه بیشتر می شود (نقطه ۱). مقدار این افزایش طول δ است و فرض کنید مقدار آن به صورت $\delta=\beta A$ یعنی تغییر طول متناسب با دامنه کشیدگی اولیه است. همچنین اگر فنر از حالت فشرده رها شود هنگامی که به $F=0$ برمی گردد طول آن کمتر از طول اولیه است (نقطه ۲) که مقدار آن نیز δ است. حال فرض کنید جسمی به جرم m به این فنر متصل است و آن را به اندازه A می کشیم و رها می کنیم که نوسان کند. نمودار نیرو بر حسب Δx به صورت شکل است. (اگر اثر پسماند نبود نمودار خط می شد $F=-k\Delta x$).



به خاطر اثر پسماند انرژی نوسانگر تلف می شود. فرض کنید زمان ویژه کاهش انرژی (زمانی که انرژی نصف می شود) خیلی بیشتر از دوره تناوب نوسانات است. فرض کنید $\beta \ll 1$ است و مسیر نوسان به

صورت متوازی الاضلاع باقی می ماند. فرض کنید معادله حرکتِ جسم به صورت $x(t) = A(t)\cos\omega t$ باشد، $A(t)$ را به دست آورید.

۳- ذره ای به جرم m و سرعت v_0 مطابق شکل به سمت ذره ای به جرم M، ($M > m$) که با سرعت u_0 ($u_0 < v_0$) در حرکت است، پرتاب می شود. برخورد بین دو ذره را کشسان (الاستیک) بگیرید. جرم m پس از برخورد با M بر می گردد و با دیوار برخورد می‌کند. برخورد m با دیوار نیز کشسان است. از اصطکاک بین جرم ها و زمین هم صرف نظر کنید. قبل از $k+1$ اُمین برخورد بین جرم های m و M سرعت m را v_k و سرعت M را u_k بگیرید.



الف) v_{k+1}, u_{k+1} را بر حسب v_k, u_k به دست آورید.

ب) θ و S_k را به صورت زیر تعریف می کنیم.

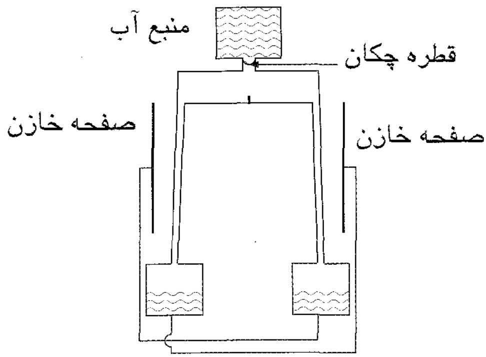
$$\cos\theta \triangleq \frac{M-m}{M+m}$$

$$S_k = v_k + i\sqrt{\frac{M}{m}}u_k$$

S_{k+1}را بر حسب S_k به دست آورید. با حل این معادله S_k را بر حسب v_0, u_0 به دست آورید.

ج) فرض کنید $\frac{m}{M} = 0.01$ و $u_0 = 0$. دو جرم چند برخورد با هم انجام می دهند.

۴- شکل زیر، طرح یک دستگاه مولد ولتاژ زیاد را نشان می دهد. طرز کار این دستگاه به این ترتیب است. در لحظه اول اختلاف پتانسیل V_0 بین صفحات خازن برقرار است. از منبع آب به وسیله یک قطره چکان، قطره ها در فاصله صفحات خازن رها می‌شوند. قطره، قطبیده الکتریکی شده و بعد از برخورد به تیغه زیرین به دو قطره باردار تفکیک می شود. این قطره توسط لوله دو شاخه به درون ظرفهای آب جمع کن می‌ریزد. دیواره ظرف های آب جمع کن رسانا بوده و بار را به طور کامل به صفحه متقابل خازن منتقل می‌کند. با تکرار این مراحل اختلاف پتانسیل بین صفحات خازن بیشتر می‌شود.



ظرف‌های آب جمع کن

الف) انرژی این دستگاه از کجا تامین می شود؟
ب) بعد از گذشت زمان t اختلاف پتانسیل بین صفحات را پیدا کنید.
برای حل این سوال موارد زیر را فرض کنید:

۱- قطره ها در زمان جدا شدن به صورت کره کاملی هستند که از وسط به دو نیم‌کره تقسیم می شوند.

۲- فاصله زمانی بین چکیدن قطره ها از زمان لازم برای ریختن قطره ها در ظرف های آب جمع کن بیشتر و از t بسیار کوچکتر است.

۳-

تعداد قطره ها در واحد زمان $n =$ مساحت صفحات خازن $A =$
حجم قطره ها $a =$ ثابت دی الکتریک آب $k =$
فاصله بین صفحات خازن $d =$

۵- بار نقطه‌ای q در فاصله D از یک صفحه رسانا است. نشان داده می شود پتانسیل الکتریکی در آن طرف صفحه که شامل بار است، $\varphi(\vec{r})=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}-\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0'|}\right]$ است، که $\vec{r}$ مکان، $\vec{r}_0$ مکان بار q و $\vec{r}_0'$ مکان قرینه بار q نسبت به صفحه است. یعنی صفحه رسانا صفحه عمود منصف پاره خطی است که دو سر آن $\vec{r}_0$ و $\vec{r}_0'$ اند.

الف) چگالی سطحیِ بار القا شده روی رسانا را بر حسب ρ به دست آورید. ρ فاصله تا تصویر نقطه $\vec{r}_0'$ روی صفحه رسانا است.

پتانسیل الکتریکی در آن طرف رسانا که شامل بار نیست، صفر است. این پتانسیل برابر است با پتانسیل حاصل از بار q به اضافه پتانسیل حاصل از چگالی سطحیِ حاصل از بخش (الف). از این جا معلوم

می شود در آن طرف صفحه که شامل بار نیست، پتانسیل الکتریکیِ حاصل از چگالیِ سطحیِ بخش (الف)، برابر است با پتانسیل الکتریکیِ حاصل از بار $-q$ در نقطه $\vec{r}_0$.

حالا فرض کنید یک صفحه فضا را به دو بخش تقسیم کرده است. در یک قسمت گذردهیِ الکتریکی ε_0 است، و بار q_0 به فاصله D از صفحه است. در قسمت دیگر پذیرفتاریِ الکتریکی χ است، و باری وجود ندارد.

ب) میدان الکتریکیِ حاصل از بار نقطه‌ای (بدون در نظر گرفتن دی‌الکتریک) را $\vec{E}_0$ می نامیم. قطبیده‌گی حاصل از این میدان $(\varepsilon_0\chi\vec{E}_0)$ را حساب کنید، و با استفاده از آن چگالیِ سطحیِ بار القا شده (ناشی از فقط $\vec{E}_0$ نه میدان کل) را به دست آورید. (σ_0)

ج) پتانسیل الکتریکیِ حاصل از این چگالی سطحی، در آن طرف صفحه که بار نیست، برابر با پتانسیل الکتریکیِ حاصل از یک بار q_1 در نقطه $\vec{r}_0$ است. q_1 را به دست آورید.

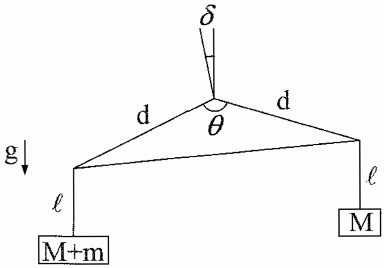
د) q_1 هم مشابه با q_0، یک بار سطحی القا می کند (σ_1). σ_1 را به دست آورید.

هـ) برای پتانسیل الکتریکی در طرف بدون بار، σ_1 را با یک بار q_2 جایگزین کنید و این فرآیند را ادامه دهید. q_{i+1} را بر حسب q_i به دست آورید. q_{i+1} بار معادلِ چگالیِ سطحی σ_i و σ_i چگالی سطحی ناشی از q_i است

و) $\sum_{i=0}^{\infty} q_i$ را حساب کنید. (فرض کنید این سری هم گرا است).

سؤال‌های امتحان نهایی المپیاد فیزیک ـ هفدهمین دوره ـ تابستان ۸۳
وقت: ۹ ساعت (در دو روز متوالی)

۱- با استفاده از یک مثلث متساوی الساقین با زاویه راس θ و طول ساق d، یک ترازوی دو کفه ای ساخته‌ایم. فرض کنید همه اجزای ترازو بدون جرم باشند. وزنه ها توسط نخ هایی به طول ℓ از قلابهایی که به مثلث ترازو وصل شده، آویزان هستند. اگر وزنه ای به جرم M را در یک کفه و وزنه ای به جرم $M+m$ را در کفه دیگر قرار دهیم، ترازو در حالت شکل به تعادل می رسد. m را بر حسب δ و M و پارامترهای مساله به دست آورید.

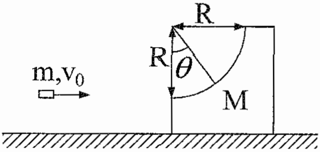


۲- مقطع جرم M مطابق شکل است. انحنا یک ربع دایره است به شعاع R. این جرم روی یک سطح بدون اصطکاک قرار دارد. گلوله کوچکی با جرم اولیه m و سرعت افقی اولیه v_0 وارد انحنای این جسم می شود. زاویه θ روی شکل مشخص شده است. (فرض کنید تعادل جرم M به هم نمی خورد و فقط به صورت افقی حرکت می کند. ضمناً گلوله از سطح جدا نمی‌شود.)

الف) $\dot{\theta}$ را به عنوان تابعی از θ و پارامترهای مساله بیابید.

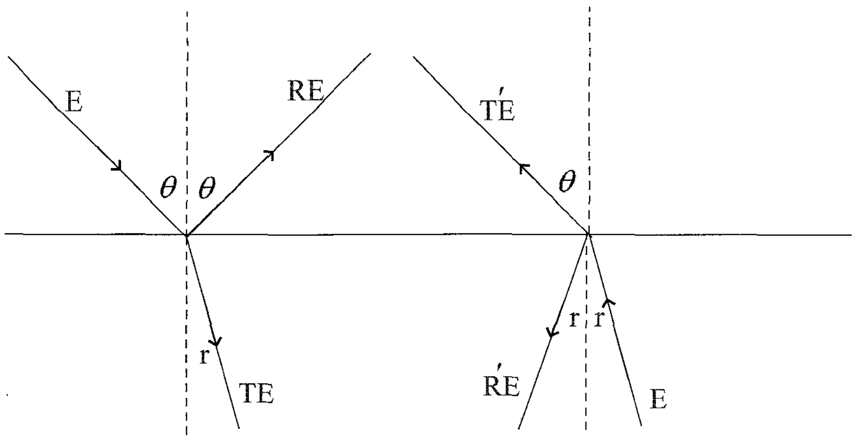
ب) v_0 حداقل چقدر باشد که جرم m تا بالای انحنا برود؟

ج) سرعت گلوله هنگامی که به پایین برمی‌گردد و در پایین آن جدا می شود، چقدر است؟



۳- پرتو نوری با انرژی E به سطح تماس دو ماده تابیده می شود. بخشی از این پرتو با انرژی RE بازمی گردد و بخش دیگر با انرژی TE عبورمی کند ($R+T=1$). پرتو بازتابیده در صفحه‌ای است که شامل مسیر پرتو تابیده و خط عمود بر سطح تماس است و با خط عمود زاویه θ می سازد. θ همان زاویه‌ای است که پرتوی تابیده شده با خط عمود می سازد. پرتوی عبور کرده نیز در همان صفحه است و با خط عمود بر سطح زاویه r می سازد. (r تابع جنس دو محیط و θ است). بر طبق اصل بازگشت

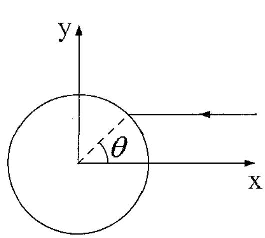
نور، اگر نور از محیط دوم با زاویه r نسبت به خط عمود به سطح تماس بتابد، بخشی از آن که عبور می کند با خط عمود زاویه θ می سازد و انرژی بخش بازتابیده و عبور کرده به ترتیب $R'E$ و $T'E$ است.



نور علاوه بر انرژی تکانه خطی دارد که اندازه آن برابر با $\frac{E}{C}$ (E انرژی و C سرعت نور است) و جهت آن جهت تابش نور است.

پرتو نوری با توان (انرژی تابیده شده در واحد زمان) W در جهت x– به استوانه‌ای شیشه‌ای می تابد و شعاع حاصل از محل برخورد آن با استوانه با محور xها زاویه θ می سازد. محور استوانه بر صفحه xy عمود است.

نیرویی که به استوانه وارد می‌شود را در راستای x و y حساب کنید. (بر حسب $R, R', T, T', W, C, \theta, r$)



راهنمایی:

۱- شاید تشکیل تابع $P_x + iP_y$ (P_x و P_y تکانه در راستای x و y اند.) مفید باشد.

۲- $\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$

۴- حلقه‌ای به شعاع R، در آزمایشگاه لخت S با سرعت زاویه ای ω به دور محور قائم z می چرخد. مرکز حلقه ثابت است. مهره ای به جرم m مقید است که همواره روی حلقه باشد. اصطکاکی در کار نیست. در این مساله می خواهیم با استفاده از قانون‌های نیوتن دینامیک این حلقه را بررسی کنیم.
مختصه‌های قطبی- کروی (r,θ,φ) را این طور تعریف می کنیم.

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta$$

با محاسبه می توان نشان داد که بردارهای یکه در جهت خم های مختصاتیِ φ,θ,r عبارت‌اند از:

$$\hat{r} = \hat{i}\sin\theta\cos\varphi + \hat{j}\sin\theta\sin\varphi + \hat{k}\cos\theta$$

$$\hat{\theta} = \hat{i}\cos\theta\cos\varphi + \hat{j}\cos\theta\sin\varphi - \hat{k}\sin\theta$$

$$\hat{\varphi} = -\hat{i}\sin\varphi + \hat{j}\cos\varphi$$

الف) بردار سرعت را در مختصه‌های قطبی- کروی بر حسب $\hat{\varphi},\hat{\theta},\hat{r},\dot{\varphi},\dot{\theta},\dot{r}$ بنویسید.

ب) عبارتی را که به دست آورده‌اید، برای ذره ای که مقید است روی حلقه چرخان حرکت کند ساده کنید. (شعاع حلقه R و سرعت زاویه ای حلقه ω است. R و ω ثابت اند.)

ج) با مشتق گیری از این عبارت، عبارتی برای شتاب مهره بر حسب $\ddot{\theta},\ddot{r},\dot{\theta},\dot{r},\hat{\varphi},\hat{\theta},\hat{r},\theta,\omega,r$ به دست آورید.

د) نیروی وزن را بر حسب $\hat{\varphi},\hat{\theta},\hat{r},\theta$ بنویسید.

هـ) نیرویی را که حلقه به مهره وارد می کند $\vec{N}$ می نامیم. این $\vec{N}$ را می توان بر حسب $\hat{\varphi},\hat{\theta},\hat{r}$ نوشت. شرط صفر بودن اصطکاک را بنویسید.

و) قانون دوم نیوتن برای این ذره سه معادله دیفرانسیل است. این ۳ معادله را بنویسید.

ز) تعریف می کنیم:

$$h = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\theta + mgr\cos\theta$$

h تابعی است از θ و $\dot{\theta}$ و این دو خود تابع هایی از t اند. پس h تابعی از t است. مشتق h نسبت به t را به دست آورید و آن را ساده کنید.

۵- همان طور که می دانید، قوانین کپلری، عباراتی در مورد حرکت دو جرم هستند. اگر حرکت ماه دور زمین را بدون توجه به اجرام دیگر در نظر می‌گرفتیم و مرکز جرم این سیستم را مبدا یک دستگاه لخت فرض می‌کردیم، قوانین کپلر به طور دقیق صدق می‌کردند. در این مساله می‌خواهیم بررسی کنیم حرکت این سیستم دور خورشید، چقدر خطا ایجاد می کند. خورشید، زمین و ماه به جرم های M_m ،M_e ،M_s را در یک صفحه در نظر بگیرید. خورشید را مبدا یک دستگاه لخت فرض کنید. بردار مکان های زمین نسبت به خورشید، ماه نسبت به خورشید و ماه نسبت به زمین را به ترتیب

$\vec{r}, \vec{R}_m, \vec{R}$ بنامید. فاصلهٔ ماه از زمین r خیلی کوچکتر از فاصلهٔ زمین از خورشید است. تعریف می کنیم: $\dot{\vec{S}} \triangleq \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$؛ این در واقع همان نرخ جاروب شدن مساحت است.

الف) تا اولین مرتبهٔ غیر صفر از $\frac{r}{R}$، $\ddot{\vec{S}}(t)$ را بر حسب ثابت گرانش $M_S, \vec{r}(t), \vec{R}(t), G$ حساب کنید.

ب) از اینجا به بعد حرکت ماه دور زمین و زمین به دور خورشید را دایره‌ای بگیرید:

$$\vec{r}_0(t) = r_0(\cos\omega_m t \quad e_x + \sin\omega_m t \quad e_y)$$

$$\vec{R}_0(t) = R_0(\cos\omega_e t \quad e_x + \sin\omega_e t \quad e_y)$$

(این فرض تا مرتبهٔ صفرم است.)

در این دو رابطه، $\omega_e \triangleq \sqrt{\frac{GM_s}{R_0^3}}$ و $\omega_m \triangleq \sqrt{\frac{GM_e}{r_0^3}}$ می باشند.

$\dot{\vec{S}}_0$ را نرخ جاروب مساحتِ بردارِ $\vec{r}$، برای حالتی که مرکز جرم زمین و خورشید را مبدا دستگاه لخت فرض می کنیم، به دست آورید. (وضعیت کپلری خالص) اکنون $\dot{\vec{S}}(t)$ را بر حسب $\dot{\vec{S}}_0, r_0, \omega_m, \omega_e$ به دست آورید.

ج) برای دانستن مقدار خطا، تعریف می کنیم:

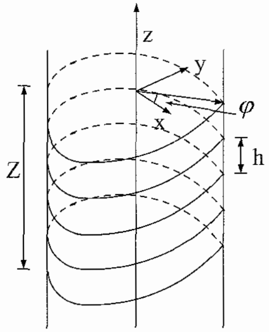
$$\eta \triangleq \frac{1}{2}\max\left(\frac{\left|\dot{\vec{S}}(t) - \dot{\vec{S}}(t')\right|}{\dot{\vec{S}}_0}\right)$$

به ازای هر t و t'. مقدار عددی η را محاسبه کنید.

راهنمایی: برای به دست آوردن $\dot{\vec{S}}(t)$ تا مرتبه اول، از $\ddot{\vec{S}}(t)$ انتگرال بگیرید.

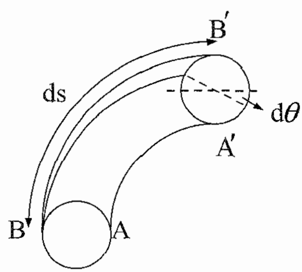
۶- مطابق شکل فنری به طول Z که به استوانه ای به شعاع R محاط است در اختیار داریم. پای پیچ فنر h است. معادله شکل فنر (مارپیچ) به صورت زیر است:

$$\vec{r} = R\cos\varphi\hat{i} + R\sin\varphi\hat{j} + \frac{h}{2\pi}\varphi\hat{k}$$



الف) شعاع انحنای فنر را به دست آورید.

ب) فرض کنید این فنر از سیم ساخته شده است. این سیم چون قطر دارد شیب خم مربوط به داخلی ترین بخش سیم نسبت به صفحه xy با شیب مربوط به خارجی ترین بخش سیم نسبت به صفحه xy متفاوت است. همین عامل باعث می شود بعد از طی مسیر ds، نقاط انتهایی این دو خم نسبت به نقاط اولیه‌شان پیچیده باشند. مطابق شکل $\frac{d\theta}{ds}$ پیچش سیم به ازای واحد طول است و θ پیچش به ازای کل مسیر است. θ را بر حسب Z، h و R به دست آورید.

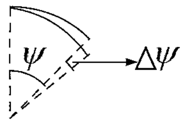


خم AA': داخلی ترین بخش سیم

خم BB': خارجی ترین بخش سیم

ج) اگر طول سیم تشکیل دهنده فنر L و شعاع آن a باشد ($L >> a$)گشتاوری که به ازای پیچش کوچک $\Delta\theta$ از سیم به وجود می آید متناسب با $\Delta\theta$ و به صورت $\tau = K\Delta\theta$ است. K ثابت است و برابر $\sigma\frac{\pi a^4}{2L}$ است. (σ به جنس بستگی دارد و مُدول برشی خوانده می شود). به همین ترتیب گشتاوری که به ازای خم شدن این سیم از انحنای ψ به $\psi+\Delta\psi$ ($\Delta\psi$ کوچک است.) به انتهای آن وارد می‌شود برابر $\tau' = K'\Delta\psi$ است که در آن K' ثابت و برابر $Y\frac{\pi a^4}{4L}$ است.

(Y به جنس بستگی دارد و مُدول یانگ نامیده می شود.)



حالا فرض کنید که فنر را به اندازه کوچک Δz بکشیم. شکل نهایی فنر را به دست آورید یعنی مقدار تغییر پای پیچ فنر، Δh، و شعاع استوانه ای که فنر بر آن محاط است، ΔR، را تعیین کنید.

راهنمایی: گشتاور کمیتی است که از حاصل ضرب نیرو در طول بازوی اعمال نیرو به دست می آید. رابطه $\tau = -K\Delta\varphi$ شبیه رابطه $F = -k\Delta x$ است و انرژی پتانسیل مربوط به آن نیز شبیه انرژی پتانسیل مربوط به F که به صورت $U = \frac{1}{2}k\Delta x^2$ است به شکل $U = \frac{1}{2}K\Delta\varphi^2$ می باشد.

د) نشان دهید قانون هوک برقرار است یعنی $F = -k\Delta z$. مقدار k را بر حسب h, z و R اولیه و ثوابت a، σ و Y به دست آورید.

۷- یک خازن با صفحه های موازی را در نظر بگیرید که یک صفحه آن در $x = -D$ ثابت است. دو صفحه خازن با یک فنر به هم متصل اند. ضریب سختیِ فنر k، و جرم صفحه متحرک خازن m است. در حالت تعادل، بار خازن Q_0 است و صفحه متحرک در $x = 0$ است. خازن در مداری شامل یک باتری و یک مقاومت R است. این سه عنصر (باتری، مقاومت، و خازن) با هم سری اند. ظرفیت خازن در حالت تعادل C_0 است.

الف) معادله دیفرانسیل حرکت x را بر حسب x و Q (بار خازن) و ثابت های داده شده بنویسید.

ب) معادله دیفرانسیل Q را بر حسب x و Q و ثابت های داده شده بنویسید.

ج) معادله های بالا را تا مرتبه یک نسبت به x و $q = Q - Q_0$ بسط دهید.

د) در معادله های (ج)، بگذارید $x = Xe^{st}$ و $q = Be^{st}$ که s,B,X ثابت‌اند. معادله‌ای برای s بیابید.

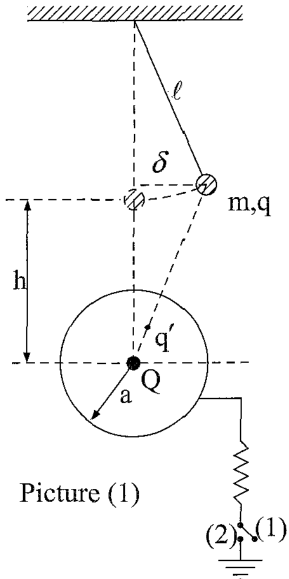
هـ) معادله (د) را برای حالت $Q_0 = 0$ حل کنید.

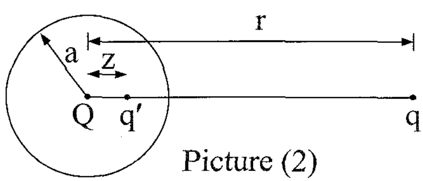
و) فرض کنید Q_0 کوچک است و تغییر ریشه های معادله (د) نسبت به حالت $Q_0 = 0$ را تا اولین مرتبه غیر صفر نسبت به Q_0 به دست آورید.

راهنمایی:

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

۸- آونگی به طول ℓ و جرم وزنه m در بالای کره رسانایی به شعاع a، مطابق شکل قرار دارد. فاصله نقطه تعادل وزنه از مرکز کره h است. جرم m دارای بار کل q است. می‌دانیم که اگر بار q مطابق شکل دوم در فاصله r از مرکز کره‌ای رسانا با پتانسیل V باشد، میدان در فضای خارج از کره، حاصل از بار q، و دو بار تصویری q' و Q می باشد.





$$\begin{cases} z = \dfrac{a^2}{r} \\ Q = 4\pi\varepsilon_0 Va = Q_{total} - q' \\ q' = -q\dfrac{a}{r} \end{cases}$$

الف) ابتدا در حالتی که کلید در وضعیت ۱ است و کره فاقد بار خالص است، آونگ را با دامنه δ_0 نسبت به خط عمود رها می کنیم $(\delta_0 << \ell)$. فرکانس نوسانات کوچک جرم را به دست آورید.

ب) حال فرض کنید که کلید را در وضعیت ۲ قرار می‌دهیم. معادله ای بنویسید که بار کل کره را در طول زمان به تغییرات زمانی آن ربط دهد و از روی آن بار کل روی کره را در طول زمان به دست آورید. مقدار مقاومت برابر R است.

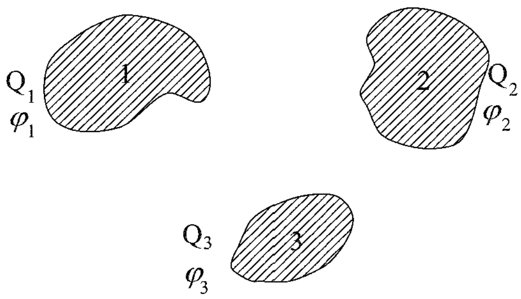
محاسبات را تا مرتبه اول نسبت به $\dfrac{\delta_0}{h}$ و $\dfrac{\delta_0}{\ell}$ انجام دهید.

ج) حالا با فرض این که مقاومت R بزرگ باشد (نسبت به پارامترهایی که باید تعیین کنید.) و در نتیجه تغییرات بار کره در طول زمان کم باشد، فرکانس لحظه‌ای نوسانات جسم را به صورت تابعی از زمان به دست آورید.

۹- می‌دانیم که برای مجموعه ای از رساناها، پتانسیل و بارهای روی رساناها به صورت خطی به یکدیگر مربوط می شوند.

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{N} P_{ij} Q_j$$

برای مثال برای سه رسانا رابطه زیر وجود دارد.



$$\begin{cases} \varphi_1 = P_{11}Q_1 + P_{12}Q_2 + P_{13}Q_3 \\ \varphi_2 = P_{21}Q_1 + P_{22}Q_2 + P_{23}Q_3 \qquad \text{(I)} \\ \varphi_3 = P_{31}Q_1 + P_{32}Q_2 + P_{33}Q_3 \end{cases}$$

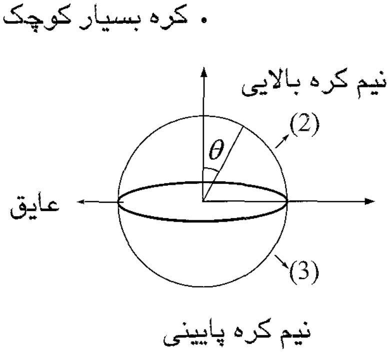
می دانیم که ضرایب P_{ij} مستقل از مقادیر بارها است و تنها تابع شکل هندسی رساناها و وضعیت نسبی آنها می باشد هم چنین می دانیم که $P_{ij} = P_{ji}$.

حال مجموعه روبرو را در نظر بگیرید که شامل:

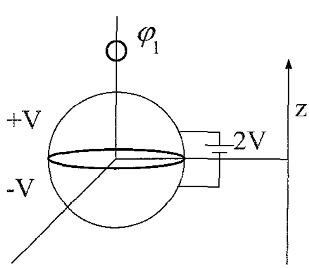
۱- کره بسیار کوچک (الکترود دستگاه اندازه گیری).

۲- نیمکره بالایی رسانا

۳- نیم کره پائینی رسانا که با عایقی از نیم کره بالایی جدا شده است.



الف) ابتدا فرض کنید هر دو پوسته رسانا به زمین متصل اند (یعنی مجموعه ۲ و ۳ مانند یک کره رسانای با پتانسیل صفر عمل می کنند.) و روی کره بسیار کوچک ۱، بار q قرارمی دهیم.
الف ۱) با استفاده از بار تصویری مناسب، پتانسیل را برای نقطه دلخواهی از فضا محاسبه کنید.
الف ۲) می دانیم که در سطح رسانا، $\sigma = \varepsilon_0 E$ چگالی بار سطحی روی کره را به صورت تابعی از θ محاسبه کنید.
الف ۳) کل بار سطحی نیم کره بالایی و پایینی را به طور جدا از هم، با استفاده از قسمت قبل به دست آورید. $(Q_2, Q_3 = ?)$
ب)
ب ۱) معادله ای مانند (I) برای نیم کره بالایی و پایینی بنویسید و P_{12} و P_{13} را به صورت تابعی از باقی ضرایب P_{ij} و Q_2 و Q_3 به دست آورید.
ب ۲) حال فرض کنید بار کره کوچک ۱ را تخلیه کرده و نیم کره ۲ را به پتانسیل V و نیم کره ۳ را به پتانسیل V− می رسانیم (با استفاده از یک باتری). مجدداً معادلات (I) را برای این مساله بازنویسی کنید. φ_1 را تنها به صورت تابعی از V و ضرایب پتانسیل موردنیاز به دست آورید. (لازم نیست ضرایب را محاسبه کنید.)



ب ۳) با استفاده از قسمت ۱ و ۲، φ_1 را به صورت تابعی از V و z محاسبه کنید.

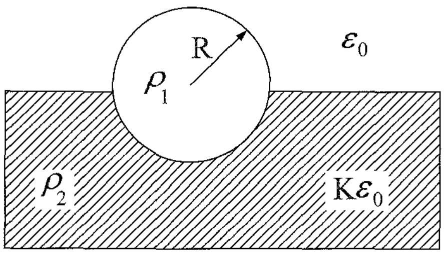
ج) در فواصل زیاد $(\frac{a}{z} << 1)$ پتانسیل را می توان به صورت زیر بسط داد:

$$\varphi(r,\theta) = \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2}\cos\theta + \ldots$$

ضرایب A و B را برای این مساله محاسبه کنید و گشتاور دو قطبی را حساب کنید.

۱۰- یک کره رسانای همگن به چگالی جرمی ρ_1 و شعاع R را داخل مایعی با چگالی جرمی ρ_2 و ثابت دی الکتریک K قرار می دهیم. $(\varepsilon = K\varepsilon_0)$از آن جا که $\rho_2 > 2\rho_1$ است، کمتر از نیمی از کره داخل مایع قرار می‌گیرد. اکنون اگر کره را باردار کنیم، در مایع پایین می‌رود. حساب کنید چقدر بار باید به کره داده شود تا دقیقاً نیمی از آن داخل مایع فرو رود. جواب خود را تا حد ممکن ساده نمایید. شتاب گرانش را برابر g و ثابت فرض کنید.

راهنمایی: در وضعیتی که کره تا نیمه در مایع فرو رفته است، پتانسیل الکتریکی برای فضای خارج کره را به صورت $V(r) = \frac{A}{r}$ ، $(r \geq R)$ درنظر بگیرید. A ثابتی است که بر حسب بار کره K, ε_0, q محاسبه پذیر می باشد. r فاصله یک نقطه از مرکز کره است.



پاسخ سؤال‌های امتحان اول المپیاد فیزیک ـ هفدهمین دوره ـ تابستان ۸۳

۱- **الف)** بعد کمیت‌های P ، E، ε_0 و R این چنین است.

$$E:[\frac{kg.m}{s^2.C}] \qquad P:[m.C]$$

$$R:[m] \qquad \varepsilon_0:[\frac{C^2.s^2}{m^3.kg}]$$

با توجه به این که می‌دانیم $\vec{P}$ برابر $\alpha\vec{E}$ است، بعد کمیت α را می‌یابیم.

$$\alpha:[\frac{m.C}{\frac{kg.m}{s^2.C}}]=[\frac{s^2.C^2}{kg}]$$

حال با استفاده از ε_0 و R که تنها کمیت‌های ممکن هستند، کمیت α رامی‌سازیم. یعنی $R^m\varepsilon_0{}^n$ را هم بعد α می‌گیریم. واضح است که چون هم ε_0 و هم α در واحد خود $\frac{1}{kg}$ دارند و R در واحد خود $\frac{1}{kg}$ ندارد، در نتیجه توان ε_0 باید ۱ و در نتیجه توان R هم ۳ باشد. یعنی α با R^3 متناسب است.

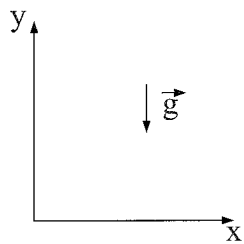
روش دیگر: چگالی بار سطحی با $\varepsilon_0 E$ در یک رسانا متناسب است. در دی‌الکتریک‌ها هم به نوعی این رابطه برقرار است و تنها یک ضریب عوض می‌شود. در نتیجه روی سطح جسم چگالی بار متناسب با $\varepsilon_0 E$ قرار می‌گیرد که در نهایت کل بار سطحی در یک طرف دی‌الکتریک از جنس $A\varepsilon_0 E$ می‌شود که چون A از جنس R^2 است، بار سطحی از جنس $\varepsilon_0 R^2 E$ است که در فاصله‌ای از جنس R از طرف دیگر جسم است. چون P برابر qd است، ضرب فاصله و بار، درنتیجه می‌توان گفت که α از جنس $R^3\varepsilon_0 E$ است و توانR، ۳ به دست می‌آید.

ب) می‌خواهیم بیابیم که F، نیروی متقابل بار نقطه‌ای و دو قطبی، با چه توانی از بقیه متناسب است و می‌دانیم که برای یک دوقطبی ثابت، F نسبت به بار q رابطه خطی دارد و برای یک بار ثابت، F نسبت به بار دوقطبی رابطه خطی دارد، چرا که ۲ دو قطبی یکسان معادل یک دو قطبی با اندازه ۲ برابر است. فرض کنیم F از جنس $Pqr^k\varepsilon_0{}^s$ باشد. در این صورت با تحلیل ابعادی توان ε_0 برابر ۱- است و توان r برابر ۳- است و چون خود P با E متناسب بود و E هم متناسب با r^{-2} است، F متناسب با r^{-5} به دست می‌آید.

$$P:[m.C],F:[\frac{m.kg}{s^2}],r:[m],\varepsilon_0:[\frac{C^2.s^2}{m^3.kg}],q:[C]$$

۲- در زمان T سرعت گلوله به صورت زیراست:

$\vec{v} = v_0\hat{x} - gT\hat{y}$



مکان ذره‌ای که با سرعت $\vec{u}_0$ نسبت به مرکز انفجار پرتاب شده است، در لحظه T' می‌شود:

$$\ddot{\vec{r}} = -g\hat{y}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dot{\vec{r}} = -g\left(T'-T\right)\hat{y}+\dot{\vec{r}}_0\\ \dot{\vec{r}}_0 = v_0\hat{x}-gT\hat{y}+\vec{u}_0\end{array}\right\}\Rightarrow \dot{\vec{r}} = -g\left(T'-T\right)\hat{y}+v_0\hat{x}-gT\hat{y}+\vec{u}_0 = -gT\hat{y}+v_0\hat{x}+\vec{u}_0$$

$$\Rightarrow \vec{r} = -\frac{1}{2}g\left(T'^2-T^2\right)\hat{y}+v_0\left(T'-T\right)\hat{x}+\vec{u}_0(T'-T)+\vec{r}_0$$

از رابطه بالا می‌توان مکان مرکز جرم را در لحظه T' پیدا کرد به این صورت که $\vec{u}_0$ را برابر صفر قرار دهیم:

$$\vec{R}_{cm} = -\frac{1}{2}g\left(T'^2-T^2\right)\hat{y}+v_0(T'-T)\hat{x}+\vec{r}_0$$

$$\Rightarrow \vec{r}-\vec{R}_{cm} = \vec{u}_0\left(T'-T\right) \Rightarrow \left|\vec{r}-\vec{R}_{cm}\right| = \left|\vec{u}_0\right|\left(T'-T\right) = u_0\left(T'-T\right)$$

بنابراین فاصله هرذره تا مرکز جرم در لحظه T'، برابر $u_0\left(T'-T\right)$ می‌شود.
بنابراین مکان هندسی تشکیل شده توسط این ذرات کره است که مختصات مرکز آن همان مختصات مرکز جرم می‌باشد:

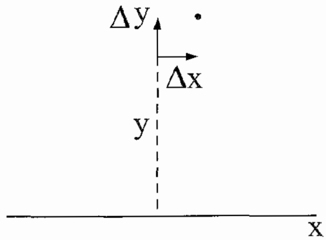
$$\vec{R}_{cm} = \left(h-\frac{1}{2}gT'^2\right)\hat{y}+v_0T'\hat{x}$$

و شعاع آن برابر است با:

$$u_0\left(T'-T\right)$$

گفتنی است که مکان مرکز جرم با سرعت اولیه $v_0\hat{x}$ و با شتاب $-g\hat{y}$ در حرکت است، چون گرانش تنها نیروی خارجی به این ذرات است.

۳- الف) ابتدا میدان یک خط بار را در نقطه مشخص شده بر روی شکل محاسبه می‌کنیم.



$$\vec{E}_P = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\left[(\frac{a}{2}+\Delta y)\hat{j}-(x-\Delta x)\hat{i}\right]dx}{\left[(\frac{a}{2}+\Delta y)^2+(x-\Delta x)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

در حل این مساله همه Δx و Δyها را تا مرتبه اول نگه می‌داریم و از تقریب $(1+x)^n \approx 1+nx$ به ازای $x \ll 1$ استفاده می‌کنیم.

$$E_{P_x} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{(x-\Delta x)dx}{\left[(\frac{a}{2}+\Delta y)^2+(x-\Delta x)^2\right]^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(\frac{a}{2}+\Delta y)^2+(\frac{a}{2}-\Delta x)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(\frac{a}{2}+\Delta y)^2+(-\frac{a}{2}-\Delta x)^2}}\right]$$

پس از ساده کردن و نگه داشتن مرتبه اول $\frac{\Delta x}{a}$ و $\frac{\Delta y}{a}$ خواهیم داشت:

$$E_{P_x} = \frac{2\sqrt{2}\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\Delta x$$

و برای مولفه در جهت y میدان خواهیم داشت:

$$E_{P_y} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{(\frac{a}{2}+\Delta y)dx}{\left[(\frac{a}{2}+\Delta y)^2+(x-\Delta x)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda(\frac{a}{2}+\Delta y)}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{dx}{\left[(\frac{a}{2}+\Delta y)^2+(x-\Delta x)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$x-\Delta x := u, \frac{a}{2}+\Delta y := L \Rightarrow \int \frac{du}{(L^2+u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{L^2\sqrt{L^2+u^2}} \Rightarrow$$

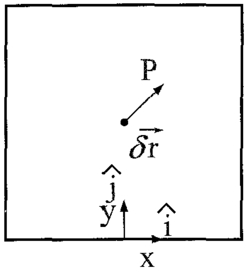
$$\Rightarrow E_{P_y}=\frac{\lambda(\frac{a}{2}+\Delta y)}{4\pi\varepsilon_0(\frac{a}{2}+\Delta y)^2}\left[\frac{\frac{a}{2}-\Delta x}{\sqrt{(\frac{a}{2}-\Delta x)^2+(\frac{a}{2}+\Delta y)^2}}-\frac{(-\frac{a}{2}-\Delta x)}{\sqrt{(-\frac{a}{2}-\Delta x)^2+(\frac{a}{2}+\Delta y)^2}}\right]$$

با صرف نظر از مرتبه بالاتر از $\frac{\Delta y}{a}$ و $\frac{\Delta x}{a}$ خواهیم داشت:

$$E_{P_y}=\frac{2\sqrt{2}\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a^2}(a-3\Delta y)$$

$$\frac{2\sqrt{2}\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a^2}:=K$$

حال میدان در نقطه P ناشی از میدان چهار خط بار می‌باشد که اثر هر خط بار مطابق جدول زیر است.



میدان ناشی از خط بارهای	راستای در $\hat{i}$	در راستای $\hat{j}$
پایینی	$K\Delta x$	$K(a-3\Delta y)$
بالایی	$K\Delta x$	$-K(a+3\Delta y)$
سمت چپ	$K(a-3\Delta x)$	$K\Delta y$
سمت راست	$-K(a+3\Delta x)$	$K\Delta y$

$$E_{P_x}=\sum_{i=1}^{4}E_{x_i}=-4K\Delta x=\frac{-2\sqrt{2}\lambda}{\pi\varepsilon_0 a^2}\Delta x$$

$$E_{P_y}=\sum_{i=1}^{4}E_{y_i}=-4K\Delta y=\frac{-2\sqrt{2}\lambda}{\pi\varepsilon_0 a^2}\Delta y$$

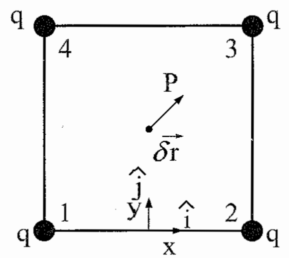
ب) میدان راستای x ناشی از بار نقطه‌ای اول به صورت زیر است. (در شکل داریم که $q_1=q_2=q_3=q_4=q$.)

$$E_{P_1}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\left[(\frac{a}{2}+\Delta x)\hat{i}+(\frac{a}{2}+\Delta y)\hat{j}\right]}{\left[(\frac{a}{2}+\Delta x)^2+(\frac{a}{2}+\Delta y)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

پس از تقریب مناسب داریم:

$$E_{P_1}=\frac{2\sqrt{2}q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\left[(\frac{a}{2}-\frac{\Delta x}{2}-\frac{3\Delta y}{2})\hat{i}+(\frac{a}{2}-\frac{\Delta y}{2}-\frac{3\Delta x}{2})\hat{j}\right]$$

برای بارهای دیگر هم با توجه به تقارن، میدان‌ها بدست می‌آید.



$$\frac{2\sqrt{2}q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}:=C$$

میدان ناشی از بارهای	در راستای $\hat{i}$	در راستای $\hat{j}$
q_1	$(\frac{a}{2}-\frac{\Delta x}{2}-\frac{3\Delta y}{2})C$	$(\frac{a}{2}-\frac{\Delta y}{2}-\frac{3\Delta x}{2})C$
q_2	$-(\frac{a}{2}+\frac{\Delta x}{2}-\frac{3\Delta y}{2})C$	$(\frac{a}{2}-\frac{\Delta y}{2}+\frac{3\Delta x}{2})C$
q_3	$-(\frac{a}{2}+\frac{\Delta x}{2}+\frac{3\Delta y}{2})C$	$-(\frac{a}{2}+\frac{\Delta y}{2}+\frac{3\Delta x}{2})C$
q_4	$(\frac{a}{2}-\frac{\Delta x}{2}+\frac{3\Delta y}{2})C$	$-(\frac{a}{2}+\frac{\Delta y}{2}-\frac{3\Delta x}{2})C$

$$E_{P_X}=\sum E_{X_i}=-2C\Delta x=\frac{-\sqrt{2}q}{\pi\varepsilon_0 a^3}\Delta x$$

$$E_{Py}=\sum E_{Y_i}=-2C\Delta y=\frac{-\sqrt{2}q}{\pi\varepsilon_0 a^3}\Delta y$$

برای صفر شدن میدان تا مرتبه اول باید رابطه زیر برقرار باشد.

$$\frac{-2\sqrt{2}\,\lambda}{\pi\varepsilon_0\, a^2}\Delta x-\frac{\sqrt{2}q}{\pi\varepsilon_0\, a^3}\Delta x=0\Rightarrow \boxed{q=-2\lambda a}$$

۴- الف) تغییر طول فنر اول را با Δx_1 و تغییر طول فنر دوم را با Δx_2 نمایش می‌دهیم.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{F}{k_1}=-\Delta x_1\\ \dfrac{F}{k_2}=-\Delta x_2\\ \Delta x=\Delta x_1+\Delta x_2\end{array}\right\}\frac{F}{k_1}+\frac{F}{k_2}=-\Delta x\Rightarrow\frac{1}{k_{eq}}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\Rightarrow k_{eq}=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$$

ب) پارامترهای مفتول شعاع و طول آن است که با ℓ,R نمایش می‌دهیم و جنس سیم مفتولی هم که با پارامتر σ نمایش داده می‌شود.

$$\tau=K\Delta\varphi$$

$$\sigma=\frac{F}{A\Delta\theta}$$

بعد K، $N.m$ است و بعد σ هم $N.m^{-2}$ است.

و با استفاده از تحلیل ابعادی داریم که

$$K=\sigma^a R^b \ell^c$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b+c=3\end{cases}$$

و چون بنابر فیزیک مساله باید رابطه K با ℓ به صورت $\frac{1}{\ell}$ باشد چرا که اگر طول فنر را دوبرابر کنیم، به ازای گشتاور مشخص اعمال شده به فنر، $\Delta\varphi$ آن دو برابر می‌گردد، در نتیجه داریم که:

$$a=1,b=4,c=-1\Rightarrow K\propto\frac{\alpha R^4}{\ell}$$

ج) بعد k، Nm^{-1} است و بعد K، $N.m$ است. در نتیجه اگر فنر را با شعاع r بپیچیم بدست می‌آید که

$$k\propto\frac{\sigma R^4}{\ell r^2}$$

که R شعاع مفتول و r شعاع فنر است.

(در اصل کمیتی دیگر بدون بعد یعنی $\frac{\ell}{nr}$ هم تاثیر گذار است که با کوچک فرض کردن آن، تاثیرش از بین خواهد رفت. این کمیت با شیب مارپیچ فنر رابطه مستقیمی دارد.)

پاسخ سؤال‌های امتحان دوم المپیاد فیزیک ـ هفدهمین دوره ـ تابستان ۸۳

۱- پتانسیل در تمام نقاط فضا مشخص است. میدان در جهت شعاعی است، چرا که سطوح شعاع ثابت دارای پتانسیل ثابت است و می‌دانیم که خطوط میدان بر سطوح هم پتانسیل عمود است. در نتیجه برای یافتن میدان کافی است از پتانسیل مشتق جهتی در جهت r بگیریم. $(\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi)$

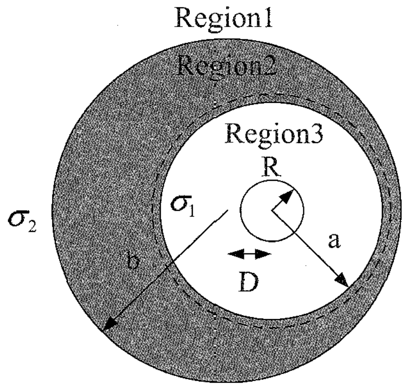
$$E_{in} = -\frac{d}{dr}(Ar) = -A \qquad 0 < r < R$$

$$E_{out} = -\frac{d}{dr}(A\frac{R^3}{r^2}) = \frac{2aR^3}{r^3} \qquad R \leq r$$

که این میدان‌ها در راستای شعاعی هستند. لازم به ذکر است که میدان بر روی سطح کره ناپیوستگی دارد و علت آن هم چگالی بار سطحی روی مرز است. می‌دانیم که ناپیوستگی میدان بر روی مرز برابر است با چگالی بار سطحی روی مرز.

$$\Rightarrow \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \left(E_{out} - E_{in}\right)\Big|_{r=R} = 3A \Rightarrow \sigma = 3A\varepsilon_0 \Rightarrow Q = 4\pi R^2\sigma = 12\pi A\varepsilon_0 R^2$$

۲- مقدار کل بار کره کوچک $q_0 = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$ است. و برای سطح گوسی مشخص شده در شکل داریم که $\int \vec{E}.d\vec{s} = 0$. پس مجموع بارهای درون سطح گوسی صفر است. پس:



$$-4\pi a^2\sigma_1 = q_0 \Rightarrow \sigma_1 = -\frac{q_0}{4\pi a^2}$$

σ_1, σ_2 به صورت یکنواخت توزیع شده‌اند. (با استفاده از قضیه یکتایی نشان داده می‌شود که این فرض درست است.) لایه رسانا بدون بار است. پس:

$$-4\pi b^2\sigma_2 = 4\pi a^2\sigma_1 \Rightarrow \sigma_2 = -\frac{a^2}{b^2}\sigma_1 = \frac{q_0}{4\pi b^2}$$

در درون توزیع بار داریم که:

$$\int \vec{E}.d\vec{s} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow 4\pi r^2 E = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \times \frac{1}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r}$$

$\hat{r}$ جهت شعاعی به سمت خارج از مرکز توزیع بار است.

درون حفره و بیرون توزیع بار

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{r^2}\hat{r}$$

درون رسانا

$$\vec{E} = \vec{0}$$

بیرون رسانا

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{r'^2}\hat{r}'$$

$\hat{r}'$ جهت شعاعی به سمت خارج از مرکز کره به شعاع b می‌باشد و r' فاصله از مرکز این کره بزرگ می‌باشد.

$$V_{(\infty)} = 0$$

در بیرون رسانا:

$$V_{(r')} = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}.d\vec{\ell} = -\int_{\infty}^{r} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{r'^2}dr' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{r'} , V(b) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{b}$$

در داخل رسانا میدان صفر است پس پتانسیل ثابت و برابر $V(b)$ می‌ماند.

درون حفره و بیرون توزیع بار:

$$V(r) = V(b) - \int_{a}^{r} \vec{E}.d\vec{\ell} = V(b) - \int_{a}^{r} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{r^2}\hat{r}.\hat{r}dr = V(b) + \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

$$\Rightarrow V(R) = V(b) + \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a}\right)$$

درون توزیع بار:

$$V(r) = V(R) - \int_{R}^{r} \vec{E}.d\vec{\ell} = V(R) - \int_{R}^{r} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r}.\hat{r}dr = V(R) - \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(r^2 - R^2\right)$$

-۳

$$\vec{E}(r) = \left(f(r)\sin\theta\right)\vec{e}_\theta = f(r)\vec{e}_r \times \left(\vec{e}_r \times \vec{e}_z\right)$$

که در آن $\vec{e}_z$ بردار یکه در راستای z است. پس برای یک دوقطبی در راستای z رابطه بالا را داریم. حال اگر دوقطبی در راستای x قرار بگیرد، در آنصورت:

$$\vec{E}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times \vec{e}_x) = f(r)(\vec{e}_r)(\vec{e}_r.\vec{e}_x) - \vec{e}_x.(\vec{e}_r.\vec{e}_r) =$$
$$f(r)\vec{e}_r(\sin\theta\cos\varphi) - f(r)\left(\vec{e}_r\sin\theta\cos\varphi + \vec{e}_\theta\cos\theta\cos\varphi - \vec{e}_\varphi\sin\varphi\right) =$$
$$f(r)\left(\vec{e}_\varphi\sin\varphi - \vec{e}_\theta\cos\theta\cos\varphi\right)$$

که از رابطه بک کب (bac cab) در خط اول استفاده شده است.

۴- الف)

$$-mg\sin\theta = m\ddot{S}$$
$$N - mg\cos\theta = \frac{m\dot{S}^2}{R}$$

که R شعاع انحنای مسیر است.

ب)

$$\left.\begin{aligned} \ddot{S} &= -A\omega^2\cos(\omega t+\varphi) \\ m\ddot{S} &= -mg\sin\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sin\theta = \frac{A\omega^2}{g}\cos(\omega t+\varphi) \Rightarrow \sin\theta = \frac{\omega^2}{g}S \Rightarrow S = \frac{g}{\omega^2}\sin\theta$$

ج)

$$\ell' = L - h(\theta)$$
$$\left.\begin{aligned} v &= \ell'\dot{\theta} = \left(L-h(\theta)\right)\dot{\theta} \\ v &= \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dS}{d\theta}\dot{\theta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dS}{d\theta} = L - h(\theta)$$

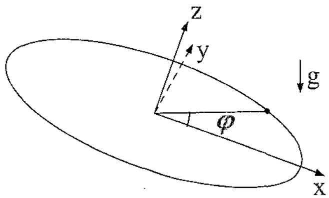
د) با توجه به قسمت (ب) S باید بصورت $k\sin\theta$ باشد که k مقداری ثابت است.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dS}{d\theta} = L - h(\theta) \\ &S = k\sin\theta \Rightarrow \frac{dS}{d\theta} = k\cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow L - h(\theta) = k\cos\theta \Rightarrow h(\theta) = L - k\cos\theta$$

از آنجایی که $h(0) = 0$ پس:

$$k = L, h(\theta) = L(1-\cos\theta)$$

۵-



$$\vec{g} = -g\cos\alpha\hat{z} + g\sin\alpha\hat{x}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

$$r = R = \text{Const.} \Rightarrow \dot{r} = 0, \ddot{r} = 0$$

$$\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\hat{r} + r\ddot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{N}, \vec{N} = N_z\hat{z} + N_r\hat{r} + N_\theta\hat{\theta}$$

چون اصطکاک نداریم $N_\theta = 0$ است.

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow m(-r\dot{\theta}^2\hat{r} + r\ddot{\theta}\hat{\theta}) = -mg\cos\alpha\hat{z} + mg\sin\alpha\hat{x} + N_z\hat{z} + N_r\hat{r} \\ &\hat{x} = \cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow -mr\dot{\theta}^2\hat{r} + mr\ddot{\theta}\hat{\theta} = -mg\cos\alpha\hat{z} + mg\sin\alpha\cos\theta\hat{r} - mg\sin\alpha\sin\theta\hat{\theta} + N_z\hat{z} + N_r\hat{r}$$

و در نتیجه ضریب هر برداریکه باید صفر شود.

$$\begin{cases} -mr\dot{\theta}^2 = mg\sin\alpha\cos\theta + N_r \\ mr\ddot{\theta} = -mg\sin\alpha\sin\theta \\ mg\cos\alpha = N_z \end{cases}$$

$$v = R\dot{\theta} \Rightarrow R\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{R} \Rightarrow N_r = -\frac{mv^2}{R} - mg\sin\alpha\cos\theta$$

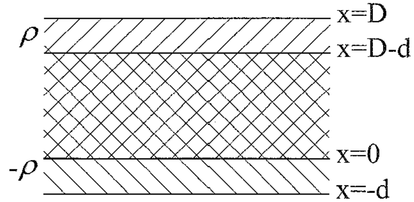
$$\hat{r} = \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{N} = N_z\hat{z} + N_r\hat{r} = N_z\hat{z} + N_r\cos\theta\hat{x} + N_r\sin\theta\hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{N} = mg\cos\alpha\hat{z} - m\left(\frac{v^2}{R} + g\sin\alpha\cos\theta\right)\cos\theta\hat{x} - m\left(\frac{v^2}{R} + g\sin\alpha\cos\theta\right)\sin\theta\hat{y}$$

پاسخ سؤال‌های امتحان سوم المپیاد فیزیک ـ هفدهمین دوره ـ تابستان ۸۳

۱- الف) برای بدست آوردن پتانسیل در تمام فضا ابتدا میدان را در تمام فضا محاسبه می‌کنیم. برای محاسبه میدان می‌توان این توزیع بار حجمی را به صورت صفحاتی، با ضخامت ناچیز در نظرگرفت و با انتگرال روی این صفحات میدان را بدست آورد.



$$E(x)=\begin{cases} 0 & x>D \\ \left(\frac{-\rho d}{2\varepsilon_0}-\frac{(D-x)\rho}{2\varepsilon_0}+\frac{(x+d-D)\rho}{2\varepsilon_0}\right)\hat{x} & D-d<x<D \\ \left(\frac{-d\rho}{\varepsilon_0}\right)\hat{x} & 0<x<D-d \\ \left(\frac{-\rho d}{2\varepsilon_0}-\frac{(d+x)\rho}{2\varepsilon_0}-\frac{x\rho}{2\varepsilon_0}\right)\hat{x} & -d<x<0 \\ 0 & x<-d \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(x)=\begin{cases} 0 & x>D \\ \frac{(x-D)\rho}{\varepsilon_0}\hat{x} & D-d<x<D \\ \frac{-d\rho}{\varepsilon_0}\hat{x} & 0<x<D-d \\ \frac{-(d+x)\rho}{\varepsilon_0}\hat{x} & -d<x<0 \\ 0 & x<-d \end{cases}$$

$$\Delta\varphi=-\int_c \vec{E}.d\vec{\ell}\Rightarrow \varphi(x)=\varphi(0^+)-\int_{0^+}^{x}\vec{E}.d\vec{\ell}$$

از روابط بالا می‌توانیم پتانسیل را محاسبه کنیم: (به دلیل متناهی بودن میدان، پتانسیل در تمام فضا پیوسته است)

$0 < x < D - d:$

$$\varphi(x) = -\int_0^x \frac{-d\rho}{\varepsilon_0} dx = \frac{d\rho x}{\varepsilon_0}$$

$D - d < x < D:$

$$\varphi(x) - \varphi(D-d) = -\int_{D-d}^{x} \vec{E}.d\vec{\ell} = -\int_{D-d}^{x} \frac{(x-D)\rho}{\varepsilon_0} dx$$

$$= \frac{-\rho}{\varepsilon_0} \frac{(x-D)^2}{2} \Bigg|_{D-d}^{x} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(d^2 - (D-x)^2)$$

$$\varphi(D-d) = \frac{\rho d(D-d)}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \varphi(x) \frac{\rho d(D-d)}{\varepsilon_0} + \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(d^2 - (D-x)^2)$$

$D < x:$

$$\varphi(x) - \varphi(D) = -\int_D^x \vec{E}.d\vec{\ell}$$

$$\vec{E}(x) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \varphi(D) \Rightarrow \varphi(x) = \frac{\rho d}{\varepsilon_0}(D - \frac{d}{2})$$

$-d < x < 0:$

$$\varphi(x) - \varphi(0) = -\int_0^x \vec{E}.d\vec{\ell} = -\int_0^x \frac{-(d+x)}{\varepsilon_o} dx = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(d+x)^2 \Bigg|_0^x$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}((d+x)^2 - d^2)$$

$x < -d:$

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(x) - \varphi(-d) = -\int_{-d}^{x} \vec{E}.d\vec{\ell} \\ &\vec{E}(x) = \vec{0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(-d) \Rightarrow \varphi(x) = \frac{-\rho d^2}{2\varepsilon_0}$$

ب)

$$\rho d = P$$

$$\Rightarrow \varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{P}{\varepsilon_0}(D-\dfrac{d}{2}) & x>D \\ \dfrac{P(D-d)}{\varepsilon_0}+\dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}(d^2-(D-x)^2) & D-d<x<D \\ \dfrac{Px}{\varepsilon_0} & 0<x<D-d \\ \dfrac{P}{\varepsilon_0}((d+x)^2-d^2) & -d<x<0 \\ -\dfrac{Pd}{2\varepsilon_0} & x<-d \end{cases}$$

در این حالت باید d را به صفر میل دهیم که در نتیجه دو ناحیه از این ۶ ناحیه از بین می‌روند.

$x<-d:$

$$\lim_{d\to 0}\rho d^2=\lim_{d\to 0}Pd=0$$

$D-d<x<D:$

$$0<D-x<d\Rightarrow 0<\rho(D-x)^2<\rho d^2$$

$$\Rightarrow 0<\lim_{d\to 0}\rho(D-x)^2<\lim_{d\to 0}\rho d^2$$

$$\Rightarrow \lim_{d\to 0}\rho(D-x)^2=0$$

$-d<x<0:$

$$0<d+x<d\Rightarrow 0<\lim_{d\to 0}\rho(d+x)^2<\lim_{d\to 0}\rho d^2$$

$$\Rightarrow \lim_{d\to 0}\rho(d+x)^2=0$$

$$\Rightarrow \varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{PD}{\varepsilon_0} & x>D \\ \dfrac{Px}{\varepsilon_0} & 0<x<D \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

ج و د) ابتدا میدان را در تمام فضا بدست می‌آوریم:

$$\vec{E}(x)\begin{cases} 0 & x>0 \\ \dfrac{-\sigma}{\varepsilon_0}\hat{x} & -\delta<x<0 \\ 0 & x<-\delta \end{cases}$$

$-\delta<x<0:$

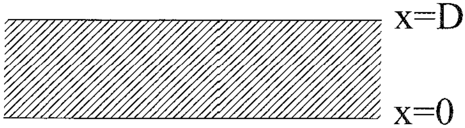
$$\varphi(x)-\varphi(0)=-\int_0^x \vec{E}.d\vec{x}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}x$$

$$\Rightarrow \varphi(x)=\begin{cases} 0 & x>0 \\ \dfrac{\sigma x}{\varepsilon_0}=\dfrac{\eta x}{\varepsilon_0\delta} & -\delta<x<0 \\ -\dfrac{\sigma\delta}{\varepsilon_0}=\dfrac{-\eta}{\varepsilon_0} & x<-\delta \end{cases}$$

اگر δ را به سمت صفر میل دهیم:

$$\lim_{\delta\to 0}\varphi(x)=\begin{cases} 0 & x>0 \\ \dfrac{-\eta}{\varepsilon_0} & x<0 \end{cases}$$

ه) برای بدست آوردن پتانسیل در کل فضا، توزیع حجمی را به صفحات دو قطبی با ضخامت اندک تقسیم می‌کنیم:



$$x>D: \qquad \varphi(x)=\int_0^D d\varphi(x)=0$$

$$0<x<D: \varphi(x)=\int_0^x d\varphi+\int_x^D d\varphi=\int_x^D \frac{-\Gamma dx}{\varepsilon_0}=\frac{-\Gamma}{\varepsilon_0}(D-x)$$

$$x<0: \qquad \varphi(x)=\int_0^D d\varphi=\int_0^D \frac{-\Gamma dx}{\varepsilon_0}=\frac{-\Gamma}{\varepsilon_0}D$$

برای اینکه پتانسیل در $x=0^+$ برابر صفر شود باید یک ثابت به پتانسیل بدست آمده اضافه کنیم:

$$\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-\Gamma}{\varepsilon_0}(D-x)+A\right)=0 \Rightarrow A=\frac{\Gamma D}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma D}{\varepsilon_0} & x>D\\[2mm] \dfrac{\Gamma x}{\varepsilon_0} & 0<x<D\\[2mm] 0 & x<0\end{cases}$$

۲- اولا کل بار القا شده بر روی رسانا برابر q' است و این با گرفتن یک سطح گوسی در دور کره به دست می‌آید. ثانیا اگر محل تلاقی خط واصل میان مرکز کره و بار را با صفحه گذرنده از محل تقاطع مخروط با کره بیابیم، H، خواهیم دید که این محل تلاقی درست روی محل قرار گیری بار q' است. چرا که دو مثلث OAP و OPH متشابه هستند. در نتیجه:

$$\frac{D}{a}=\frac{a}{OH}\Rightarrow OH=\frac{a^2}{D}$$

میدان در داخل کره صفر است. پس با داشتن شار هر یک از بارهای q و q' بر روی سطح خارجی عرقچین می‌توانیم بار داخل عرقچین یعنی q'' که بار روی سطح کوچکتر است را بیابیم.
با استفاده از زاویه فضایی داریم که

$$\frac{q'}{2\varepsilon_0}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\times 2\pi\times(1-\cos\theta)=\frac{q''}{\varepsilon_0}$$

چرا که شار کل خارج شونده از سطح کوچکتر برابر میزان بار موجود در این سطح بخش بر ε_0 است. با نام گذاری q''' به عنوان بار روی سطح بزرگتر کره داریم که:

$$\frac{q'}{2\varepsilon_0}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\times 2\pi\times(1-\cos\theta)=\frac{q'''}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{q''}{q'''}=\frac{-\dfrac{a}{D}-\left(1-\sqrt{1-\dfrac{a^2}{D^2}}\right)}{-\dfrac{a}{D}+\left(1-\sqrt{1-\dfrac{a^2}{D^2}}\right)}>1$$

۳- **الف)** برای اینکه جسم ۲ در تعادل بماند باید $T_{BC}=mg$ باشد. برای اینکه جسم ۱ در تعادل باشد ΣF باید صفر باشد. در نتیجه داریم که:

$T_{BC}\sin\theta_0-T_{AB}\cos\varphi_0=0$ نیروهای در جهت افق

نیروهای در جهت قائم

$$T_{AB}\sin\varphi_0 + T_{BC}\cos\theta_0 = mg$$

$$\Rightarrow T_{AB} = T_{BC}\frac{\sin\theta_0}{\cos\varphi_0} \Rightarrow T_{BC}(\cos\theta_0 + \tan\varphi_0\sin\theta_0) = mg$$

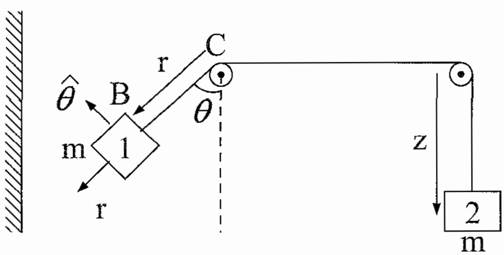
$$\Rightarrow \cos\theta_0 + \tan\varphi_0\sin\theta_0 = 1 \Rightarrow \frac{1-\cos\theta_0}{\sin\theta_0} = \tan\varphi_0$$

$$\Rightarrow \tan\varphi_0 = \frac{2\sin^2\frac{\theta_0}{2}}{2\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_0}{2}}$$

$$\Rightarrow \tan\varphi_0 = \tan\frac{\theta_0}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\theta_0}{2}$$

$$\Rightarrow T_{AB} = T_{BC}\frac{\sin\theta_0}{\cos\varphi_0} = mg\frac{\sin\theta_0}{\cos\frac{\theta_0}{2}} = 2mg\sin\frac{\theta_0}{2}$$

ب)



شتاب جسم ۱

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

$$\vec{F} = -T_{BC}\hat{r} + mg\cos\theta\hat{r} - mg\sin\theta\hat{\theta}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{v}(0) = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} = \vec{0} \Rightarrow \dot{r}(0) = 0, \dot{\theta}(0) = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{r}\hat{r} + mr\ddot{\theta}\hat{\theta} = -T_{BC}\hat{r} + mg\cos\theta\hat{r} - mg\sin\theta\hat{\theta}$$

$$\left.\begin{aligned} mg - T_{BC} &= m\ddot{z} \\ r + z = \text{const} &\Rightarrow \ddot{r} = -\ddot{z} \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_{BC} = mg + m\ddot{r}$$

$$\Rightarrow m\ddot{r}\hat{r} + mr\ddot{\theta}\hat{\theta} = -m(g + \ddot{r})\hat{r} + mg\cos\theta\hat{r} - mg\sin\theta\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow 2m\ddot{r} + mg = mg\cos\theta \Rightarrow \ddot{r} = \frac{-g(1-\cos\theta)}{2}$$

$$\Rightarrow \ddot{z} = \frac{g(1-\cos\theta)}{2}$$

پ)

$$m\ell_0\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{-g\sin\theta_0}{\ell_0}$$

۴- الف) برای یک حرکت پرتابی روابط زیر را داریم.

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 t\cos\theta \\ y &= v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow y = x\tan\theta - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{{v_0}^2\cos^2\theta}$$

که θ بین $\frac{\pi}{4}+\alpha$ و $\frac{\pi}{4}-\alpha$ است. با مشتق گیری از رابطه بالا و استفاده از بسط تیلور داریم که

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{x}{\cos^2\theta} - \frac{1}{2}g\frac{x^2 2\sin\theta}{{v_0}^2\cos^3\theta}$$

$$y(x,\theta) = y(x,\tfrac{\pi}{4}) + \frac{dy}{d\theta}(x,\tfrac{\pi}{4})\Delta\theta + ...$$

که چون $\Delta\theta$ کوچک است جملات دیگر قابل صرف نظر کردن هستند. در نتیجه داریم که

$$y(\frac{\pi}{4}+\alpha) - y(\frac{\pi}{4}-\alpha) = 2\alpha\left(\frac{x}{\cos^2\theta} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2}\frac{2\sin\theta}{\cos^3\theta}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}$$

که قدر مطلق این مقدار بیشترین اختلاف میان ارتفاع ماکزیمم و می‌نیمم در نقطه x است. دامنه حرکت برابر است با

$$2\alpha\left(\frac{x}{\frac{1}{2}} - \frac{gx^2\frac{1}{\sqrt{2}}}{v_0^2\frac{1}{2\sqrt{2}}}\right) = 4\alpha x\left(1 - \frac{gx}{v_0^2}\right) > 0$$

که این دامنه حرکت به ازای x بین 0 تا $\frac{{v_0}^2}{g}$ صادق است یعنی ماکزیمم برد پرتابه.

ب) واضح است که سرعت آب در راستای x تقریباً $\frac{v_0}{\sqrt{2}}$ است. اختلاف زمانی میان دو می‌نیمم برابر $\frac{2\pi}{\omega}$ است و در نتیجه طول موج برابر است با:

$$\frac{2\pi}{\omega}\times\frac{v_0}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi\times v_0}{\omega}$$

۵- الف)

$$T_k = \frac{T}{2^k} = \frac{m\beta}{2^k}$$

از آنجایی که جرم قرقره‌ها صفر است کشش طناب روی قرقره نصف کشش طناب متصل به قرقره می‌باشد.

ب)

$$mg - T_k = ma_k \Rightarrow a_k = g - \frac{T_k}{m} = g - \frac{\beta}{2^k} : 1 \le k \le n$$

$$k = n+1 : a_{k+1} = a_k = g - \frac{\beta}{2^k}$$

ج) اگر فاصله قرقره k ام را با نقطه آویز کل مجموعه به سقف با y_k نمایش دهیم و مکان جسم k ام را نیز با x_k نمایش دهیم، با توجه به ثابت بودن طول طناب خواهیم داشت که:

$$(x_k - y_k) + (y_{k+1} - y_k) = \text{Const.}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_k + \ddot{y}_{k+1} - 2\ddot{y}_k = 0 \Rightarrow$$

$$a_k + b_{k+1} - 2b_k = 0 : 1 \le k < n$$

برای قرقره آخر:

$$a_n + a_{n+1} - 2b_n = 0$$

د)

$$b_1 = 0, b_{k+1} = 2b_k - a_k = 2b_k + \frac{\beta}{2^k} - g$$

$$b_2 = \frac{\beta}{2} - g$$

$$b_3 = 2(\frac{\beta}{2} - g) + \frac{\beta}{2^2} - g = 2^0\beta - \left(2^1 + 2^0\right)g + \frac{\beta}{2^2}$$

$$b_4 = 2^2(\frac{\beta}{2} - g) + 2(\frac{\beta}{2^2} - g) + \frac{\beta}{2^3} - g = (2^1 + 2^{-1})\beta - (2^2 + 2^1 + 2^0)g + \frac{\beta}{2^3}$$

$$b_5 = 2^3(\frac{\beta}{2} - g) + 2^2(\frac{\beta}{2^2} - g) + 2(\frac{\beta}{2^3} - g) + \frac{\beta}{2^4} - g$$

$$= (2^2 + 2^0 + 2^{-2})\beta - (2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0)g + \frac{\beta}{2^4}$$

$$b_k = (2^{k-3} + 2^{k-5} + \ldots + 2^{-(k-3)})\beta - (2^{k-2} + 2^{k-3} + \ldots + 2^0)g + \frac{\beta}{2^{k-1}} \Rightarrow$$

$$b_k = \frac{2^{k-1} - 2^{3-k}}{3}\beta - (2^{k-1} - 1)g + \frac{\beta}{2^{k-1}} \qquad : 1 \le k \le n$$ (رابطه A)

(رابطه B)

$$b_n = \frac{a_n + a_{n+1}}{2} = a_n \Rightarrow b_n = g - \frac{\beta}{2^n}$$

ه)

(رابطه A و B)

$$\Rightarrow \frac{2^{n-1} - 2^{3-n}}{3}\beta - (2^{n-1} - 1)g + \frac{\beta}{2^{n-1}} = g - \frac{\beta}{2^n} \Rightarrow$$

$$\beta = \frac{2^{n-1}g}{\frac{2^{n-1} - 2^{3-n}}{3} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}} = \frac{3\times 2^{2n-1}g}{2^{2n-1}+1}, T = m\beta \quad , n = 1 : T = 2mg$$

و)

$$a_k = g - \frac{\beta}{2^k} = g(1 - \frac{1}{2^k}\frac{3\times 2^{2n-1}}{2^{2n-1}+1})$$

ز)

$$n \to \infty : T = m\beta = 3mg, a_1 = -\frac{g}{2}$$

پاسخ سؤال‌های امتحان چهارم المپیاد فیزیک ـ هفدهمین دوره ـ تابستان ۸۳

۱- الف)

$$m_1\ddot{x}_1 = m_1 g + K(x_2 - x_1 - L)$$
$$m_2\ddot{x}_2 = m_2 g + K(x_1 + L - x_2) \quad (1)$$

ب) هر دو با شتاب g بدون این که به یکدیگر نیرویی وارد کنند، به سمت پایین می‌آیند.

$$x_1(t) = \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$x_2(t) = \tfrac{1}{2}gt^2 + L \quad (2)$$

ج) با استفاده از روابط (۱) داریم که

$$m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = (m_1 + m_2)g$$
$$(m_1 + m_2)\ddot{X} = (m_1 + m_2)g \Rightarrow \ddot{X} = g \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= g + \frac{K(x_2 - x_1 - L)}{m_1} \\ \ddot{x}_2 &= g - \frac{K(x_2 - x_1 - L)}{m_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = K(x_1 + L - x_2)\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \quad (4)$$

$$\ddot{u} = \frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}(L - u)$$

که حل آن به شکل زیر است.

$$X = \tfrac{1}{2}gt^2 + V_0 t + X_0$$
$$u = L + A\cos(\omega t + \varphi), \omega = \sqrt{\frac{K(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}$$

د) با توجه به قسمت (ج) و حل معادله دیفرانسیل رابطه (۳) به دست می‌آید که

$$X = \tfrac{1}{2}gt^2 + X_0 \quad (5)$$

X_2 در لحظه صفر برابر است با $(L + \frac{m_2 g}{K})$ چرا که جسم ۲ از فنر در حالت تعادل آویزان است. پس مکان اولیه مرکز جرم یعنی X_0 را از روی آن می‌توان به دست آورد.

$$\left.\begin{aligned} &X_0 = (L + \frac{m_2 g}{K})\frac{m_2}{m_1 + m_2} \\ &\text{Equation}(5) \end{aligned}\right\} \Rightarrow X = \frac{1}{2}gt^2 + (L + \frac{m_2 g}{K})\frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (6)$$

و با توجه به رابطه (۴) و حل معادله دیفرانسیل آن به دست می‌آید که

$$u = L + A\cos\left(\sqrt{\frac{K(m_1+m_2)}{m_1 m_2}}\,t + \varphi\right) \qquad (۷)$$

که A و φ با توجه به شرایط اولیه به ترتیب $\frac{m_2 g}{K}$ و صفر به دست می‌آیند.

با به دست آوردن x_1 و x_2 برحسب X و u و جایگذاری X و u از روی معادلات (۶) و (۷) به دست می‌آید که

$$x_1 = \frac{1}{2}gt^2 + \frac{m_2^2 g}{K(m_1+m_2)}\left(1-\cos\left(\sqrt{\frac{K(m_1+m_2)}{m_1 m_2}}\,t\right)\right)$$

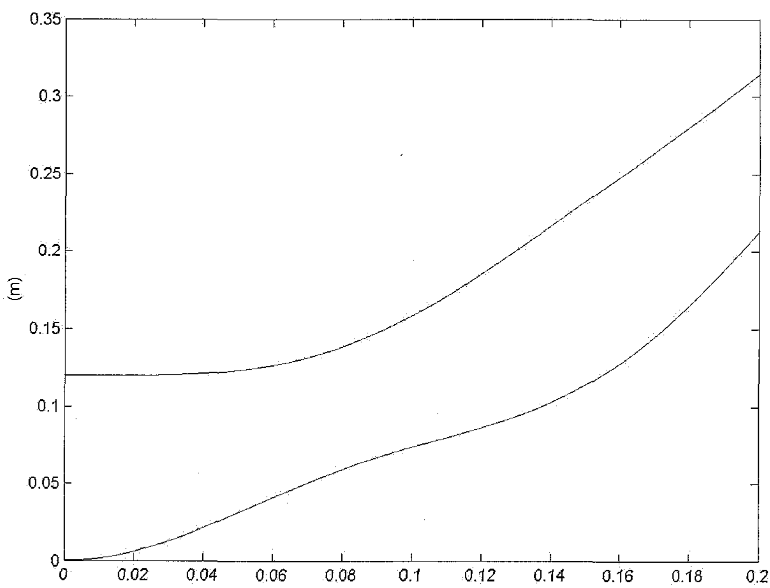
$$x_2 = \frac{1}{2}gt^2 + L + \frac{m_2 g}{K} - \frac{m_1 m_2 g}{K(m_1+m_2)}\left(1-\cos\left(\sqrt{\frac{K(m_1+m_2)}{m_1 m_2}}\,t\right)\right) \qquad (۸)$$

ه) با عدد گذاری در رابطه (۸) به سمت می‌آید که

$$x_1 = 5t^2 + \frac{1}{75}\left(1-\cos(\sqrt{1500}\,t)\right)$$

$$x_1 = 5t^2 + \frac{1}{10} + \frac{1}{50} - \frac{1}{150}\left(1-\cos(\sqrt{1500}\,t)\right)$$

که نمودار آن به صورت زیر است.



۲- الف و ب)

v_1, v_2, v_3 به ترتیب سرعت نفر اول و دوم و سوم می‌باشد. با توجه به تقارن پس از اولین هل دادن، $v_2 = v_3$ است.

با استفاده از پایستگی تکانه خطی داریم که:

$$mv_1 = 2mv_2 \Rightarrow v_1 = 2v_2$$

پایستگی انرژی :

$$Q = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}(2m)v_2^2 = 2mv_2^2 + mv_2^2 = 3mv_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{Q}{3m}}$$

$$v_1 = 2v_2 = 2\sqrt{\frac{Q}{3m}}$$

و پس از هل دادن مجدد نتیجه زیر حاصل می‌شود.

پایستگی تکانه : (رابطهٔ ۱)

$$(2m)v_2 = mv_2' + mv_3' \Rightarrow v_3' = 2v_2 - v_2'$$

پایستگی انرژی : (رابطهٔ ۲)

$$\frac{1}{2}(2m)v_2^2 + Q = \frac{1}{2}mv_2'^2 + \frac{1}{2}mv_3'^2 \Rightarrow 2v_2^2 + \frac{2Q}{m} = v_2'^2 + v_3'^2$$

$$\text{Equations}(1\&2) \Rightarrow 2v_2^2 + \frac{2Q}{m} = v_2'^2 + (2v_2 - v_2')^2 = 4v_2^2 + 2v_2'^2 - 4v_2v_2' \Rightarrow$$

$$-\frac{Q}{m} + v_2^2 + v_2'^2 - 2v_2v_2' = 0 \Rightarrow (v_2 - v_2')^2 = \frac{Q}{m} \Rightarrow v_2' = v_2 - \sqrt{\frac{Q}{m}}$$

$$, v_3' = 2v_2 - v_2' = v_2 + \sqrt{\frac{Q}{m}}$$

$$k_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{2}{3}Q \Rightarrow \alpha_1 = \frac{2}{3}$$

$$k_2 = \frac{1}{2}mv_2'^2 = \frac{m}{2}(v_2^2 + \frac{Q}{m} - 2v_2\sqrt{\frac{Q}{m}}) = \frac{2-\sqrt{3}}{3}Q \Rightarrow \alpha_2 = \frac{2-\sqrt{3}}{3}$$

$$k_3 = \frac{1}{2}mv_3'^2 = \frac{m}{2}(v_2^2 + \frac{Q}{m} + 2v_2\sqrt{\frac{Q}{m}}) = \frac{2+\sqrt{3}}{3}Q \Rightarrow \alpha_3 = \frac{2+\sqrt{3}}{3}$$

$$v_3' = (\sqrt{\frac{3}{3}} + 1)\sqrt{\frac{Q}{m}} \Rightarrow \beta = 1/577$$

ج و د) سرعت نفر اول و دوم یکسان و برابر v_0 می‌باشد.

پایستگی تکانه :

$$2mv_0 = mv_3 \Rightarrow v_3 = 2v_0$$

پایستگی انرژی:

$$2Q = \frac{1}{2}(2m)v_0^2 + \frac{1}{2}mv_3^2 = 3mv_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2Q}{3m}}$$

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{2}mv_0^{\ 2} = \frac{Q}{3} \Rightarrow \delta_1 = \delta_2 = \frac{1}{3}$$

$$k_3 = 2Q - k_2 - k_2 = \frac{4Q}{3} \Rightarrow \delta_3 = \frac{4}{3}$$

$$v_3 = 2v_0 = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{Q}{m}} \Rightarrow \gamma = 2\sqrt{\frac{2}{3}} = 1.633$$

۳- الف) درست هنگامی که سرعت جسم صفر شده است، یک تکه از آن را برداشته‌ایم. می‌دانیم که زمان تناوب با $\sqrt{m}$ متناسب است. پس با استفاده از نسبت دو زمان می‌توان نسبت جرم را به دست آورد.

زمان تناوب اولیه $T :=$ زمان تناوب ثانویه $T' :=$

جرم اولیه $m :=$ جرم باقی مانده $m' :=$

$$\frac{m'}{m} = (\frac{T'}{T})^2 \cong .5$$

ب) معادله زیر می‌تواند بیانگر یک نوع حرکت نوسانی خاص باشد.

$$X = X_0 \cos \omega t, \ (\omega = \sqrt{\frac{k}{m}})$$

$$v = X_0 \omega \sin \omega t$$

با توجه به شکل صورت سوال می‌دانیم که دامنه سرعت‌ها به ترتیب 3.1 و 0.8 است. اگر دامنه حرکت اول را با A_1 و دامنه حرکت دوم را با A_2 نمایش دهیم، با توجه به معادله دوم داریم که

$$A_1 = 3.1\sqrt{\frac{m}{k}}, A_2 = 0.8\sqrt{\frac{m'}{k}}$$

و از طرفی هم $A_1 - A_2$ برابر $\frac{(m-m')g}{k}$ است، چرا که با برداشتن مقدار جرم $(m-m')$ در هنگام صفر بودن سرعت، حالت تعادل به مقدار گفته شده بالاتر آمده است.

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{m}{k}}(3.1 - 0.8\sqrt{\frac{m'}{m}}) = \frac{mg}{k}(1 - \frac{m'}{m}) \qquad (۱)$$

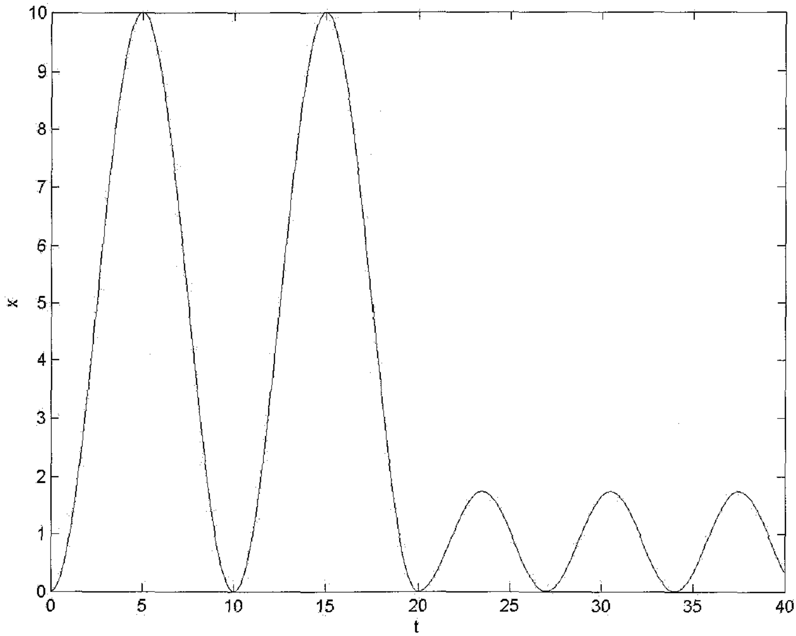
از طرفی با توجه به نمودار داریم که

$$10 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (۲)$$

$$(1),(2) \Rightarrow g = 3.2$$

یک راه حل دیگر نیز از طریق تغییر شیب نمودار در نقطه شکستگی وجود دارد.

ج) با سینوسی فرض کردن منحنی و گرفتن انتگرال آن (به صورت ریاضی)، منحنی به شکل زیر به دست می‌آید.



۴- الف) دستگاه $\hat{t},\hat{n},\hat{b}$ را در نظر می‌گیریم که :

$\hat{t}$ در جهت سرعت جسم و $\hat{n}$ عمود بر $\hat{t}$ و در صفحه سرعت و شتاب جسم قرار دارد و $\hat{b}=\hat{t}\times\hat{n}$

$$\vec{v}=v\hat{t}$$

$$\Rightarrow \vec{a}=\dot{v}\hat{t}+v\frac{d\hat{t}}{dt}$$

$$\frac{d\hat{t}}{dt}=\frac{d\hat{t}}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{\hat{n}}{R}v$$

که R شعاع انحنای مسیر است. برای اینکه R را به دست آوریم معادله مسیر را به صورت تابعی از یک متغیر، x، می‌نویسیم.

$$\vec{s}(x)=(r\sin\omega x, r\cos\omega x, Ax)$$

$$\Rightarrow \hat{t}=\frac{d\vec{s}}{dx}\times\frac{1}{\left|\frac{d\vec{s}}{dx}\right|},\frac{d\vec{s}}{dx}=(r\omega\cos\omega x,-r\omega\sin\omega x, A),\left|\frac{d\vec{s}}{dx}\right|=\sqrt{r^2\omega^2+A^2}$$

$$\Rightarrow \hat{t}=\frac{1}{\sqrt{r^2\omega^2+A^2}}\times(r\omega\cos\omega x,-r\omega\sin\omega x, A)$$

$$\frac{\hat{n}}{R}=\frac{d\hat{t}}{ds}=\frac{d\hat{t}}{dx}\frac{dx}{ds}$$

$$\frac{d\hat{t}}{dx}=\frac{1}{\sqrt{r^2\omega^2+A^2}}(-r\omega^2\sin\omega x, r\omega^2\cos\omega x, 0)$$

$$\frac{dx}{ds}=\frac{1}{\left|\frac{d\vec{s}}{dx}\right|}=\frac{1}{\sqrt{r^2\omega^2+A^2}}$$

$$\Rightarrow \hat{n}=(-\sin\omega x,-\cos\omega x,0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R}=\frac{r\omega^2}{r^2\omega^2+A^2}$$

چون بردار $\hat{t}$ با صفحه عمود بر محور مارپیچ زاویه θ می‌سازد.

$$\hat{t}.\hat{z}=\sin\theta$$

$$\hat{t}(x)=\frac{1}{\sqrt{r^2\omega^2+A^2}}(r\omega\cos\omega x,-r\omega\sin\omega x, A)$$

$$\Rightarrow \hat{t}.\hat{z}=\frac{A}{\sqrt{r^2\omega^2+A^2}}=\sin\theta\Rightarrow\frac{A^2}{r^2\omega^2+A^2}=\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow A^2=\tan^2\theta r^2\omega^2\Rightarrow A=r\omega\tan\theta$$

$$\Rightarrow R=r(1+\tan^2\theta)=\frac{r}{\cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{a}=\dot{V}\hat{t}+\frac{V^2\cos^2\theta}{r}\hat{n},\vec{g}=g\sin\theta\hat{t}+g\cos\theta\hat{b}$$

$$\vec{N}=N_b\hat{b}+N_n\hat{n}+N_t\hat{t},N_t=-\mu\sqrt{N_n{}^2+N^2_b}$$

$$\vec{F}=m\vec{a}\Rightarrow m\dot{v}\hat{t}+\frac{mv^2}{r}\cos^2\theta\hat{n}=mg\sin\theta\hat{t}+mg\cos\theta\hat{b}+N_b\hat{b}+N_n\hat{n}+N_t\hat{t}$$

$$\Rightarrow N_b=-mg\cos\theta,N_n=\frac{mv^2}{r}\cos^2\theta,N_t=-\mu\sqrt{\frac{m^2v^4}{r^2}\cos^4\theta+m^2g^2\cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow m\dot{v} = mg\sin\theta - \mu m\sqrt{\frac{v^4}{r^2}\cos^4\theta + g^2\cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \left(g\sin\theta - \mu\cos\theta\sqrt{\frac{V^4}{r^2}\cos^2\theta + g^2}\right)\hat{t} + \frac{v^2\cos^2\theta}{r}\hat{n}$$

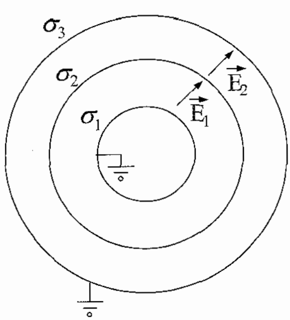
$$\Rightarrow |a| = \sqrt{\left(g\sin\theta - \mu\cos\theta\sqrt{\frac{v^4}{r^2}\cos^2\theta + g^2}\right)^2 + \frac{v^4\cos^4\theta}{r^2}}$$

ب)

$$\dot{v} = 0 \Rightarrow g\sin\theta = \mu\cos\theta\sqrt{\frac{v^4}{r^2}\cos^2\theta + g^2}$$

$$\Rightarrow g^2(\frac{\tan^2\theta}{\mu^2} - 1) = \frac{v^4}{r^2}\cos^2\theta \Rightarrow v = \sqrt{\frac{rg}{\cos\theta}\left(\frac{\tan^2\theta}{\mu^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}$$

-۵



$$\sigma_2 = \frac{Q}{4\pi b^2}$$

Q_1 بار روی پوسته درونی می‌باشد.

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(Q_1 + Q)}{r^2}\hat{r}$$

$$V_c - V_b = V_a - V_b \Rightarrow$$

$$\int_b^c \vec{E}_2.d\vec{r} = \int_b^a \vec{E}_1.d\vec{r} \Rightarrow \frac{(Q_1 + Q)}{4\pi\varepsilon_0}(-\frac{1}{c} + \frac{1}{b}) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}(-\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \Rightarrow$$

$$Q_1 = \frac{(\frac{1}{b}-\frac{1}{c})}{(\frac{1}{c}-\frac{1}{a})}Q \Rightarrow Q_1 = \frac{a(c-b)}{b(a-c)}Q$$

$$E_1\left(b\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{b^2}\hat{r}, E_2\left(b\right)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(Q_1+Q)}{b^2}\hat{r}$$

میدان روی سطح

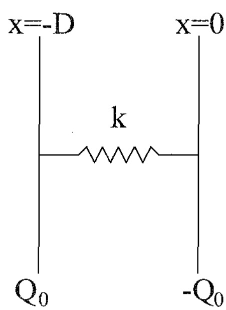
$$E = \frac{E_1\left(b\right)+E_2\left(b\right)}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{b^2}+\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{b^2}$$

فشار

$$P = E\sigma_2 = \frac{Q}{4\pi b^2}\times\frac{1}{8\pi\varepsilon_0 b^2}\left(2Q_1+Q\right) = \frac{Q}{32\pi^2\varepsilon_0 b^4}\left|2Q_1+Q\right| \Rightarrow$$

$$P = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 b^4}\left|\frac{ab+bc-2ac}{b(c-a)}\right|$$

۶- الف) حالت اول:



نیروی وارد به صفحه متحرک ناشی از میدان الکتریکی:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F}_1 = -Q_0\vec{E}(x) \\ \vec{E}(x) = \dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} = \dfrac{Q_0\hat{x}}{2\varepsilon_0 A}\end{array}\right\}\vec{F}_1 = \frac{-{Q_0}^2}{2\varepsilon_0 A}\hat{x}$$

که البته $\vec{E}(x)$ میدان خارجی ناشی از صفحه مجاور است و میدان خود صفحه در آن حساب نشده است.

اگر فرض کنیم که طول فشرده نشدهٔ فنر L است، نیروی فنر می‌شود:

$$\vec{F}_2 = k(L-D)\hat{x}$$

چون سیستم در $x=0$ در حالت تعادل است برای $x=0$ داریم که:

$$\sum F=0\Rightarrow \vec{F}_1+\vec{F}_2=0\Rightarrow k(L-D)=\frac{{Q_0}^2}{2\varepsilon_0 A}$$

پس نیروی وارد بر صفحه متحرک بر حسب x می‌شود:

$$\left.\begin{aligned}\vec{F}&=\vec{F}_1+\vec{F}_2\\ \vec{F}_1&=\frac{-{Q_0}^2}{2\varepsilon_0 A}\hat{x}\\ \vec{F}_2&=k(L-(x+D))\hat{x}\end{aligned}\right\}\vec{F}=(\frac{-{Q_0}^2}{2\varepsilon_0 A}+k(\ell-D)-kx)\hat{x}$$

$$\Rightarrow \sum\vec{F}=-kx\hat{x}$$

حالت دوم: در این حالت پتانسیل دو صفحه ثابت است:

$$V=ED=\frac{Q_0 D}{\varepsilon_0 A}$$

پس بار خازن بر حسب x می‌شود:

$$V=\frac{Q_{(x)}(x+D)}{\varepsilon_0 A}=\frac{Q_0 D}{\varepsilon_0 A}\Rightarrow Q(x)=\frac{Q_0 D}{x+D}$$

$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow \vec{F}_1=\frac{-Q^2}{2\varepsilon_0 A}\hat{x}=\frac{-{Q_0}^2}{2\varepsilon_0 A}\frac{D^2}{(x+D)^2}\hat{x}\\ &\vec{F}_2=k(L-(x+D))\hat{x}\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \vec{F}=\left[-kx+\frac{{Q_0}^2}{2\varepsilon_0 A}(1-\frac{D^2}{(x+D)^2})\right]\hat{x}$$

حالت سوم: در این حالت بار کل ثابت است و پتانسیل دو خازن همواره مساوی است.

$Q_{tot}=2Q_0$

$Q_1\rightarrow$ بار خازن متحرک

$Q_2\rightarrow$ بار خازن ساکن

$$\left.\begin{aligned}&V=\frac{Q_1(x+D)}{A\varepsilon_0}=\frac{Q_2 D}{A\varepsilon_0}\\ &Q_1+Q_2=2Q_0\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow Q_1\frac{(x+D)}{D}=2Q_0-Q_1\Rightarrow Q_1=\frac{2Q_0}{2+\frac{x}{D}}=\frac{Q_0}{1+\frac{x}{2D}}$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{F}_1 &= \frac{-Q^2}{2A\varepsilon_0}\hat{x} = \frac{-Q_0^{\,2}}{2A\varepsilon_0}\times\frac{1}{(1+\frac{x}{2D})^2}\hat{x}\\ \vec{F}_2 &= k(L-(x+D))\hat{x}\end{aligned}\right\}\sum\vec{F} = \vec{F}_1+\vec{F}_2 = \left[-kx+\frac{Q_0^{\,2}}{2A\varepsilon_0}(1-\frac{1}{(1+\frac{x}{2D})^2})\right]\hat{x}$$

قسمت ب) حالت اول:

$$\sum\vec{F} = -kx\hat{x}$$

حالت دوم :

$$\vec{F} = \left[-kx+\frac{Q_0^{\,2}}{2A\varepsilon_0}(1-\frac{1}{(1+\dfrac{x}{D})^2})\right]\hat{x}$$

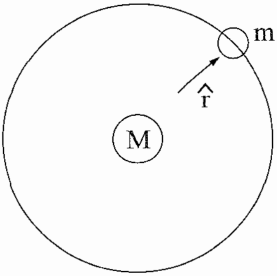
$$\frac{x}{D} << 1 \Rightarrow (1+\frac{x}{D})^{-2} \approx \frac{1-2x}{D} \Rightarrow \vec{F} \approx \left[-kx+\frac{Q_0^{\,2}}{2A\varepsilon_0}\times\frac{2x}{D}\right]\hat{x} = \left[(\frac{Q_0^{\,2}}{A\varepsilon_0 D}-k)x\right]\hat{x}$$

حالت سوم:

$$\vec{F} = \left[-kx+\frac{Q_0^{\,2}}{2A\varepsilon_0}(1-\frac{1}{(1+\dfrac{x}{2D})^2})\right]\hat{x} \Rightarrow \vec{F} \approx \left[(\frac{Q_0^{\,2}}{2A\varepsilon_0 D}-k)x\right]\hat{x}$$

پاسخ سؤال‌های امتحان پنجم المپیاد فیزیک ـ هفدهمین دوره ـ تابستان ۸۳

۱-



$$\vec{F}_{Ext}=\frac{d\vec{P}}{dt}$$

نیروی خارجی که به سیستم سفینه وارد می‌شود ناشی از گرانش سیاره به جرم M است:

$$\vec{F}_{Ext}=\frac{-GMm}{r^2}\hat{r}$$

که r فاصلهٔ جرم m تا مرکز سیاره است.

در فاصلهٔ زمانی dt مقدار dm از جرم m کم می‌شود و تغییر تکانه طی این فرآیند می‌شود:

تکانهٔ اولیه: $(m+dm)\vec{v}$

تکانهٔ ثانویه: $m(\vec{v}+d\vec{v})-dmu\hat{r}$

$$d\vec{P}=md\vec{v}-dm(u\hat{r}+\vec{v})\Rightarrow\frac{d\vec{p}}{dt}=m\vec{a}-b(u\hat{r}+\vec{v})$$

شتاب در دستگاه قطبی می‌شود: $\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{r}+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$

سرعت در دستگاه قطبی می‌شود: $\vec{v}=\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta}$

$$\Rightarrow\frac{-GMm}{r^2}\hat{r}=m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{r}+m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}-b(u\hat{r}+\vec{v})$$

$$\begin{cases}\frac{-GMm}{r^2}\hat{r}=m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)-b(u+\dot{r})\\ 0=m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})-br\dot{\theta}\end{cases}$$

در رابطهٔ دوم r ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow m(r^2\ddot{\theta}+2r\dot{r}\dot{\theta})=br^2\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow m\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt}=br^2\dot{\theta}\Rightarrow r^2\dot{\theta}=r_0^2\dot{\theta}_0e^{\frac{b}{m}t}$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{r_0^4\dot{\theta}_0^2}{r^4} e^{\frac{2b}{m}t}$$

$$b \ll 1$$

r را بر حسب b بسط می‌دهیم:

$$r = r_0 + br_1 + b^2 r_2 + \ldots$$

$$\Rightarrow \frac{-GMm}{r^2} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) - b(u + \dot{r})$$

$$\frac{2GMm}{r_0^3} r_1 = m(\ddot{r}_1 - \frac{2}{m} t r_0 \dot{\theta}_0^2 + 3r_1\dot{\theta}_0^2) - u$$

$$\dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0^3}}$$

$$\Rightarrow m\ddot{r}_1 - \frac{2GM}{r_0^2} t + \frac{GMm}{r_0^3} r_1 - u = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{r}_1 + \frac{GM}{r_0^3} r_1 = \frac{2GM}{mr_0^2} t + \frac{u}{m}$$

$$\omega_0^2 = \frac{GM}{r_0^3}$$

$$\alpha = \frac{2GM}{mr_0^2}, \quad \beta = \frac{u}{m}$$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + Ct + D \\ \ddot{x}(t) &= -(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t)\omega_0^2 \end{aligned}\right\} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 [Ct + D] = \alpha t + \beta$$

$$\Rightarrow C = \frac{\alpha}{\omega_0^2}, D = \frac{\beta}{\omega_0^2}$$

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= 0 = A + D \Rightarrow A = \frac{-\beta}{\omega_0^2} \\ \dot{x}(0) &= B\omega_0 + C = 0 \Rightarrow B = \frac{-C}{\omega_0} = \frac{-\alpha}{\omega_0^3} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow r = r_0 + b\left[\frac{-ur_0^3}{GMm}\cos\omega_0 t - \frac{2r_0}{m} \times \sqrt{\frac{r_0^3}{GM}} \sin\omega_0 t + \frac{2r_0}{m} t + \frac{ur_0^3}{GMm}\right]$$

با توجه به روابط بالا b باید نسبت به پارامترهای زیر کوچک باشد:

$$\frac{bu_0 r_0^3}{GMmr_0} \ll 1 \Rightarrow b \ll \frac{GMm}{ur_0^2}$$

$$\frac{br_0}{mr_0}\sqrt{\frac{r_0^{\;3}}{GM}} << 1 \Rightarrow b << m\sqrt{\frac{r_0^{\;3}}{GM}}$$

$$\frac{br_0 t}{mr_0} << 1 \Rightarrow b << \frac{m}{t}$$

۲- انرژی کل سیستم برابر است با:

$$u(t) = \frac{1}{2}kA^2(t)$$

انرژی تلف شده در یک دورهٔ تناوب برابر است با مساحت متوازی الاضلاع:

$$\Delta E = \Delta S = 2\delta \times kA(t) = 2k\beta A^2(t)$$

چون زمان ویژهٔ کاهش انرژی خیلی بیشتر از دورهٔ نوسانات است می‌توان فرض کرد که آهنگ کاهش انرژی کل سیستم برابر است با نسبت انرژی تلف شده در یک دوره به دورهٔ تناوب نوسان:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= -\frac{\Delta E}{T} \\ \frac{2\pi}{T} &= \omega \\ \frac{du(t)}{dt} &= kA(t)\frac{dA(t)}{dt} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow kA(t)\frac{dA(t)}{dt} = \frac{-2k\beta A^2(t)\omega}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{dA(t)}{dt} = \frac{-\beta\omega}{\pi}A(t) \Rightarrow A(t) = Ae^{\frac{-\beta\omega}{\pi}t}$$

۳- الف) دو جسم با سرعت v_k و u_k حرکت می‌کنند. سرعت مرکز جرم را با v_{cm} نمایش می‌دهیم. سرعت دو جرم را قبل از برخورد با v' و u' در دستگاه مرکز جرم و بعد از برخورد با v'' و u'' در دستگاه مرکز جرم نمایش می‌دهیم و هم چنین سرعت دو جسم بعد از برخورد را با v''' و u''' در دستگاه سکون نمایش می‌دهیم.

$$v_{cm} = \frac{mv_k + Mu_k}{m+M} \Rightarrow \begin{cases} u' = u_k - v_{cm} = \dfrac{mu_k - mv_k}{m+M} & (1) \\ v' = v_k - v_{cm} = \dfrac{Mv_k - Mu_k}{m+M} & (2) \end{cases}$$

بعد از برخورد، سرعت در دستگاه مرکز جرم معکوس می‌گردد.

$$\begin{cases} v'' = \dfrac{M(u_k - v_k)}{m+M} & (۳) \\ u'' = \dfrac{m(v_k - u_k)}{m+M} & (۴) \end{cases}$$

در نتیجه سرعت اجسام در دستگاه سکون بعد از برخورد با یکدیگر این چنین است.

$$\begin{cases} v''' = v_{cm} + v'' = \dfrac{2Mu_k + mv_k - Mv_k}{m+M} & (۵) \\ u''' = v_{cm} + u'' = \dfrac{2mv_k + Mu_k - mu_k}{m+M} & (۶) \end{cases}$$

اما بعد از برخوردها جسم m با دیوار هم برخورد می‌کند و سرعت آن منفی می‌گردد.

$$\begin{cases} v_{k+1} = -v''' = \dfrac{-2Mu_k - mv_k + Mv_k}{m+M} & (۷) \\ u_{k+1} = +u''' = \dfrac{2mv_k + Mu_k - mu_k}{m+M} & (۸) \end{cases}$$

ب)

$$\cos\theta = \frac{M-m}{M+m} \Rightarrow \qquad (۹)$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{2\sqrt{Mm}}{M+m} \qquad (۱۰)$$

$$(7),(8),(9),(10) \Rightarrow \begin{cases} v_{k+1} = v_k\cos\theta - \dfrac{2M}{m+M}\sqrt{\dfrac{m}{M}}\sqrt{\dfrac{M}{m}}u_k = \\ \cos\theta(v_k) + i\sin\theta(i\sqrt{\dfrac{M}{m}}u_k) \\ i\sqrt{\dfrac{M}{m}}u_{k+1} = i\sqrt{\dfrac{M}{m}}u_k\cos\theta + i\sqrt{\dfrac{M}{m}}\dfrac{2m}{m+M}v_k = \\ \cos\theta(i\sqrt{\dfrac{M}{m}}u_k) + i\sin\theta(v_k) \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{k+1} = e^{i\theta}S_k \qquad (۱۱)$$

$$\Rightarrow S_k = e^{ik\theta}S_0 = e^{ik\theta}(v_0 + i\sqrt{\frac{M}{m}}u_0)\ ,\ \theta = \cos^{-1}\frac{M-m}{m+M} \qquad (۱۲)$$

ج) واضح است که برخورد تا هنگامی ادامه خواهد داشت که v_k از u_k بزرگتر باشد.

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} S_k = e^{ik\theta} v_0 = v_0 \cos k\theta + i v_0 \sin k\theta \\ S_k = v_k + i\sqrt{\frac{M}{m}} u_k \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v_k = v_0 \cos(k \cos^{-1} \frac{M-m}{m+M}) \\ u_k = v_0 \sqrt{\frac{m}{M}} \sin(k \cos^{-1} \frac{M-m}{m+M}) \end{cases} \tag{۱۳}$$

اولین k را می‌خواهیم که v_k کوچکتر از u_k گردد.

$$\cos(k \cos^{-1} \frac{M-m}{m+M}) < \sqrt{\frac{m}{M}} \sin(k \cos^{-1} \frac{M-m}{m+M})$$

$$\Rightarrow \tan(k \cos^{-1} \frac{M-m}{m+M}) > \sqrt{\frac{M}{m}}$$

$$\Rightarrow k \cos^{-1} \frac{M-m}{m+M} > \tan^{-1} \sqrt{\frac{M}{m}}$$

$$\Rightarrow k > \frac{\tan^{-1} \sqrt{\frac{M}{m}}}{\cos^{-1} \frac{M-m}{m+M}}$$

که پس از عدد گذاری می‌نیمم k، ۸ بدست می‌آید.

۴- الف) از گرانش و انرژی سقوط قطرات آب

ب) ابتدا بار هر نیم کره (سمت چپ و راست) را می‌یابیم. باید این مساله را حل کنیم که اگر جسمی کروی با ضریب دی‌الکتریک k را در میدان ثابتی قرار دهیم چگالی بار سطحی چگونه خواهد بود. برای این منظور به عنوان یک حدس خوب از چگالی بار، $\sigma_0 \cos\theta$ را حدس می‌زنیم که θ زاویه بین بردار عمود بر سطح و میدان ثابت است و اگر حدس ما تمام شرایط مرزی را ارضا نماید در آن صورت حدس زده شده بنا بر یکتایی جواب، تنها جواب درست است. (این مساله بدون این حدس از روش بار تصویری یا تکرار یا لاپلاس هم قالب حل است، اما در این جا از این روش استفاده شده است). چگالی بار $\sigma_0 \cos\theta$ را می‌توان به صورت بر هم نهی دو کره با چگالی بار حجمی ρ_0 و $-\rho_0$ که در فاصله d از هم قرار دارند در نظر گرفت که $\rho_0 d = \sigma_0, (d << R, \rho_0 \to \infty)$ (فاصله d در جهت میدان است که با $\hat{z}$ نمایش می‌دهیم)

میدان این چگالی بار در خارج از کره برابر میدان یک دو قطبی با مقدار زیر است.

$$P=\frac{4}{3}\pi R^3\rho_0 d=\frac{4}{3}\pi R^3\sigma_0$$

که R برابر شعاع قطره است. برای دو قطبی میدان زیر در خارج آن وجود دارد.

$$\vec{E}'_{out}=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}((2\cos\theta)\hat{R}+(\sin\theta)\hat{\theta})$$

و میدان این چگالی بار در داخل (دو کره با چگالی بار حجمی ρ_0 و $-\rho_0$ در فاصله d از هم در فضای مشترک میان آن دو) برابر است با:

$$E'_{in}=\frac{-\frac{4}{3}\pi r^3\rho_0 d}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\frac{-\sigma_0}{3\varepsilon_0}$$

که علامت منفی حاکی از آن است که در صورت مثبت بودن σ_0 این میدان در جهت عکس میدان اولیه است.

حال به سراغ میدان کل در داخل و خارج می‌رویم و شرایط مرزی را برای آن‌ها چک می‌کنیم و درستی آن‌ها را تحقیق می‌کنیم.

$$E'_{tot}=\begin{cases}E_0\hat{z}+\dfrac{R^3\sigma_0}{3\varepsilon_0 r^3}((2\cos\theta)\hat{R}+(\sin\theta)\hat{\theta}), r>R\\[2ex] E_0\hat{z}-\dfrac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\hat{z}, r<R\end{cases}$$

واضح است که $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$ در داخل صفر است و در نتیجه $\vec{\nabla}\cdot\vec{p}$ هم در داخل صفر است. (نشان از این که حدس ما برای بار به وجود آمده فعلا درست است)

شرط مرزی که بر روی سطح دی‌الکتریک‌ها باید چک شود این است که تغییر مولفه عمودی $\varepsilon\vec{E}=\vec{D}$ باید برابر صفر باشد،(روی مرز) چرا که بار خارجی نداریم.

$$\begin{pmatrix}(E_0\cos\theta)\hat{R}-(E_0\sin\theta)\hat{\theta}+\dfrac{R^3\sigma_0}{3\varepsilon_0 R^3}\Big((2\cos\theta)\hat{R}+(\sin\theta)\hat{\theta}\Big)\\ -k\left((E_0\cos\theta)\hat{R}-(E_0\sin\theta)\hat{\theta}-\left(\dfrac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\cos\theta\right)\hat{R}+\left(\dfrac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\sin\theta\right)\hat{\theta}\right)\end{pmatrix}\cdot\hat{R}=0\Rightarrow$$

$$E_0+\frac{2\sigma_0}{3\varepsilon_0}-kE_0+\frac{k\sigma_0}{3\varepsilon_0}=0\Rightarrow\sigma_0=\frac{3(k-1)E_0\varepsilon_0}{(2+k)}$$

که البته مولفه مماسی $\vec{E}$ هم روی مرز پیوسته مانده است و شرایط مرزی رعایت شده است. پس چگالی بار سطحی روی دی‌الکتریک را هم داریم و اکنون بار کل روی هر نیم‌کره را می‌یابیم.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi R(\sin\theta\cos\theta)R\sigma_0 d\theta=\pi R^2\sigma_0$$

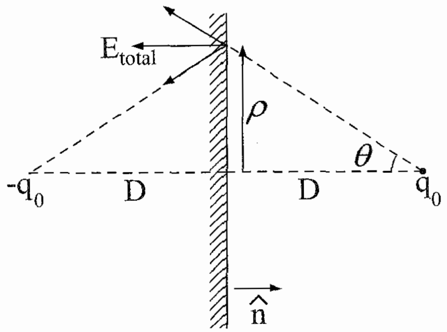
پس اگر N را تعداد قطره‌های ریخته شده بنامیم داریم که:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\Delta Q}{\Delta N}=\pi R^2\sigma_0\\&E_0=\frac{V}{d}\\&\frac{\Delta V}{\Delta Q}=\frac{1}{C}=\frac{d}{\varepsilon_0 A}\\&\frac{\Delta N}{\Delta t}=n\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{3\pi R^2(k-1)\varepsilon_0\frac{V}{d}}{(2+k)}\times n\times\frac{d}{\varepsilon_0 A}=\frac{3\pi R^2 Vn(k-1)}{(2+k)A}$$

پس با توجه به این که Δt در مقاسه با زمان کل خیلی کوچک است می‌توان جای $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ را با $\frac{dV}{dt}$ عوض کرد و در نتیجه با حل معادله دیفرانسیل بالا به دست می‌آید که:

$$V=V_0 e^{\frac{3\pi R^2 n(k-1)}{(2+k)A}t},R=\sqrt[3]{\frac{3a}{4\pi}}$$

۵-



$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|^3}-\frac{\vec{r}-\vec{r}_0'}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0'\right|^3}\right]$$

این میدان مثل میدان حاصل از دو بار q و $-q$ می‌ماند که در یک فاصله از دو طرف رسانا قرار گرفته‌اند.

الف)

$$E_{(\rho)}=2\times\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(\rho^2+D^2)}\cos\theta\Rightarrow\vec{E}_{(\rho)}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{D}{(\rho^2+D^2)^{\frac{3}{2}}}(-\hat{n})$$

حال به جای q مقدار q_0 را قرار می‌دهیم.

$$\sigma = \varepsilon_0 E_\rho = -\frac{q_0}{2\pi}\frac{D}{(\rho^2 + D^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ب)

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{R^2}\hat{R} \Rightarrow \vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}_0 = \frac{\chi q_0}{4\pi}\frac{\hat{R}}{R^2}$$

که R فاصله از بار q_0 می‌باشد.

چگالی بار سطحی قطبشی:

$$\sigma = \vec{P}.\hat{n} = -\frac{\chi q_0}{4\pi}\frac{\cos\theta}{(\rho^2 + D^2)} = -\frac{\chi q_0}{4\pi}\frac{D}{(\rho^2 + D^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow \sigma_0 = -\frac{\chi q_0}{4\pi}\frac{D}{(\rho^2 + D^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ج) با توجه به قسمت الف بدست می‌آید که:

$$\sigma_0 = \frac{\left(-\frac{\chi q_0}{2}\right)}{2\pi}\frac{D}{(\rho^2 + D^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow q_1 = -\frac{\chi q_0}{2}$$

د)

مانند بخش ب عمل می‌کنیم و فقط به جای q_0، q_1 را قرار می‌دهیم پس:

$$\sigma_1 = \vec{P}_1.\hat{n} = -\frac{\chi q_1}{4\pi}\frac{D}{(\rho^2 + D^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ه)

$$q_2 = -\frac{\chi q_1}{2}, q_{i+1} = -\frac{\chi}{2} q_i$$

و)

$$\sum_{i=0}^{\infty} q_i = q_0\left(1 - \frac{\chi}{2} + \frac{\chi^2}{4} - \frac{\chi^3}{8} + \dots\right) = \frac{q_0}{1 + \frac{\chi}{2}}$$

پاسخ سؤال‌های امتحان نهایی المپیاد فیزیک ـ هفدهمین دوره ـ تابستان ۸۳

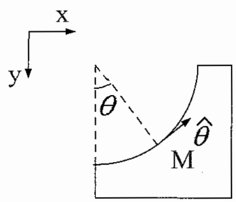
۱- در حالت تعادل باید گشتاور نیروهای خارجی وارد بر سیستم صفر باشد. برای این کار گشتاور نیروهای جاذبه به دو جرم را نسبت به نقطه O می‌یابیم.

$$Mgd\sin(\frac{\theta}{2}+\delta)=(M+m)gd\sin(\frac{\theta}{2}-\delta)$$

$$\Rightarrow m=M\frac{\sin(\frac{\theta}{2}+\delta)-\sin(\frac{\theta}{2}-\delta)}{\sin(\frac{\theta}{2}-\delta)}$$

دقت شود که هر چه $\frac{\theta}{2}$ به $\frac{\pi}{2}$ نزدیک‌تر باشد m بر حسب δ کوچکتر می‌گردد و این یعنی این که اگر بخواهیم یک ترازوی دقیق بسازیم که به ازای یک اختلاف جرم کوچک، δ زیادی داشته باشد باید θ را به π نزدیک گردانیم.

۲- الف) سرعت جرم m نسبت به جرم M برابر است با:



$$|\vec{u}|=R\dot{\theta}$$

و جهت آن مماس بر سطح جرم M می‌باشد.

$$\Rightarrow \vec{u}=R\dot{\theta}\hat{\theta}$$

اگر سرعت جرم M، $\vec{v}_1$ باشد بنابراین سرعت جرم m، $\vec{v}_2$، می‌شود:

$$\vec{v}_2=\vec{v}_1+\vec{u}$$

در راستای x نیروی خارجی به سیستم وارد نمی‌شود پس تکانه در راستای x پایسته است:

$$mv_0=(M\vec{v}_1+m\vec{v}_2).\hat{x}\Rightarrow mv_0=Mv_1+mv_1+mR\dot{\theta}\hat{\theta}\cdot\hat{x}$$

$$\hat{\theta}=\cos\theta\hat{x}+\sin\theta\hat{y}$$

$$\Rightarrow mv_0=(M+m)v_1+mR\dot{\theta}\cos\theta$$

همچنین انرژی کل سیستم نیز پایسته است:

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2=\frac{1}{2}Mv_1^2+\frac{1}{2}m(v_1+R\dot{\theta}\cos\theta)^2+\frac{1}{2}m(R\dot{\theta}\sin\theta)^2+mgR(1-\cos\theta)$$

$$v_1 = \frac{m(v_0 - R\dot{\theta}\cos\theta)}{m+M}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^{\ 2} = \frac{1}{2}M \times \frac{m^2}{(M+m)^2}(v_0 - R\dot{\theta}\cos\theta)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}m \times \frac{(mv_0 + MR\dot{\theta}\cos\theta)^2}{(m+M)^2} + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + mgR(1-\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m}{(M+m)^2}(Mm(v_0^{\ 2} + R^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta) + m^2v_0^{\ 2} + M^2R^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta) +$$

$$+\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + mgR(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow v_0^{\ 2} - \frac{mM}{(m+M)^2}v_0^{\ 2} - \frac{m^2v_0^{\ 2}}{(m+M)^2} - 2gR(1-\cos\theta) = \left[\frac{Mm\cos^2\theta + M^2\cos^2\theta}{(M+m)^2} + \sin^2\theta\right]R^2\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow \frac{v_0^{\ 2}}{(m+M)^2}(M^2 + mM) - 2gR(1-\cos\theta) = \frac{\left[Mm + M^2 + \sin^2\theta(m^2 + mM)\right]}{(M+m)^2}R^2\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{Mv_0^{\ 2} - 2gR(M+m)(1-\cos\theta)}{R^2(M + m\sin^2\theta)}$$

ب) برای اینکه جرم m حداقل تا بالای انحنای جرم M برود باید به ازای $\theta = \frac{\pi}{2}$، $0 < \dot{\theta}^2 > 0$ شود.

$$\Rightarrow Mv_0^{\ 2} - 2gR(M+m)(1-\cos 90^\circ) > 0 \Rightarrow v_0^{\ 2} > \frac{2gR(m+M)}{M}$$

$$\Rightarrow v_0 > \sqrt{\frac{2gR(m+M)}{M}}$$

ج) سرعت گلوله وقتی که به ابتدای مسیر بر می‌گردد افقی است و آن را v_1 می‌نامیم همچنین سرعت جرم M را v_2 می‌نامیم.

طبق قضیهٔ پایستگی انرژی و تکانه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} mv_0 = mv_1 + Mv_2 \\ \frac{1}{2}mv_0^{\ 2} = \frac{1}{2}mv_1^{\ 2} + \frac{1}{2}Mv_2^{\ 2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} m(v_0 - v_1) = Mv_2 \\ m(v_0^{\ 2} - v_1^{\ 2}) = Mv_2^{\ 2} \end{array}\right\}$$

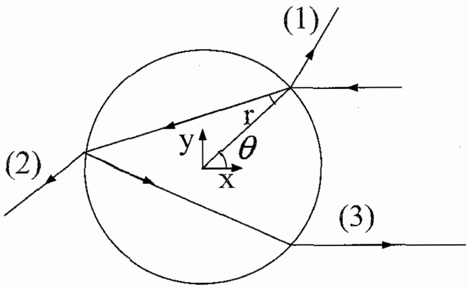
از تقسیم دو عبارت داریم که:

$$v_0 + v_1 = v_2$$

$$m(v_0 - v_1) = M(v_0 + v_1) \Rightarrow (m-M)v_0 = (m+M)v_1$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{m-M}{m+M}v_0$$

۳- پس از رسیدن پرتو به استوانه، پرتو با زاویه r وارد استوانه می‌گردد.



از توان تابشی به استوانه، RW بر می‌گردد و توان TW وارد استوانه می‌شود. برای حل این مساله در قسمت اول، نیروی لازم برای گرفتن تکانه بر واحد زمان پرتو اولیه را می‌یابیم و سپس نیروی لازم برای تولید هر یک از پرتوهای (۱)، (۲) و (۳) و...را که هر کدام از سیستم خارج می‌شود را بدست می‌آوریم.

نیروی لازم برای گرفتن تکانه پرتو تابیده:

$$\vec{F}_{in}=\frac{W}{C}\hat{x}$$

نیروی لازم برای ساختن تکانه پرتو (۱)

$$\vec{F}_{1out}=\frac{RW}{C}(\hat{x}\cos 2\theta+\hat{y}\sin 2\theta)\leftarrow$$

حال باید جمع نیروی لازم برای ساخت پرتوهای (۲) و (۳) و مابقی را بیابیم.

پرتو (۲) مشخص شده در شکل، در زاویه مثلثاتی $(\pi+2\theta-2r)$ با محور xها است.

پرتو (۳) با پرتو (۲) زاویه $(\pi-2r)$ دارد و این روند همین طور تا آخر ادامه دارد.

پس زاویه‌ای که پرتو k $(k>1)$ با محور x ها می‌سازد این چنین است.

$$\alpha_k=2\theta+(\pi-2r)\times(k-1)$$

از طرفی توان خروجی پرتو k ام نیز این‌چنین به دست می‌آید.

$$P_k=TWT'R'^{k-2}$$

پس اکنون می‌توانیم نیروی لازم برای تولید پرتوهای خروجی با توان‌های مذکور را بیابیم و به این وسیله کل نیروی وارد بر استوانه را بدست آوریم.

اگر جمع نیروهای پرتوهای خروجی (۲) به بعد را با $\vec{F}_{2out}$ نمایش دهیم، داریم که:

$$\vec{F}_{2out}=\sum_{i=2}^{\infty}\frac{P_i}{C}(\hat{x}\cos\alpha_i+\hat{y}\sin\alpha_i)=$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{P_{i+2}}{C}(\hat{x}\cos\alpha_{i+2}+\hat{y}\sin\alpha_{i+2})=$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{TWT'}{C}R'^{i}\left(\hat{x}\cos\left(2\theta+(\pi-2r)\times(i+1)\right)+\hat{y}\sin\left(2\theta+(\pi-2r)\times(i+1)\right)\right)$$

که اگر $\tilde{F}=(F_{2out}.\hat{x})+i(F_{2out}.\hat{y})$ را تعریف کنیم برای $\tilde{F}$ داریم که

$$\tilde{F}=\frac{TWT'}{C}\sum_{j=0}^{\infty}R'^{j}e^{i(2\theta+\pi-2r)}e^{ij(\pi-2r)}=\frac{TWT'e^{i(2\theta+\pi-2r)}}{C(1-R'e^{i(\pi-2r)})}$$

اکنون مقدار حقیقی $\tilde{F}$ نیرو در راستای x را می‌دهد و مقدار موهومی $\tilde{F}$ نیرو در راستای y را خواهد داد.

$$\tilde{F}=\frac{W}{C}\left(\frac{TT'e^{i(2\theta+\pi-2r)}(1-R'e^{i(2r-\pi)})}{(1-R'\cos(2r-\pi))^2+(R'\sin(2r-\pi))^2}\right)\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\vec{F}_{2out}.\hat{x}=\text{real}(\tilde{F})=\left(\dfrac{WTT'\cos(2\theta+\pi-2r)-R'\cos 2\theta}{C\left(1+R'^2-2R'\cos(2r-\pi)\right)}\right)\\[2ex] \vec{F}_{2out}.\hat{y}=\text{imag}(\tilde{F})=\left(\dfrac{WTT'\sin(2\theta+\pi-2r)-R'\sin 2\theta}{C\left(1+R'^2-2R'\cos(2r-\pi)\right)}\right)\end{cases}$$

کل نیروهای وارد بر استوانه برابر است با.

$$F_x=(\vec{F}_{in}+F_{1out}+\vec{F}_{2out}).\hat{x}=\frac{W}{C}+\frac{RW}{C}\cos 2\theta+\vec{F}_{2out}.\hat{x}$$

$$F_y=(\vec{F}_{in}+\vec{F}_{1out}+\vec{F}_{2out}).\hat{y}=\frac{RW}{C}\sin 2\theta+\vec{F}_{2out}.\hat{y}$$

۴- الف)

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}(r\hat{r})=\left(\frac{dr}{dt}\right)\hat{r}+r\left(\frac{d\hat{r}}{dt}\right)$$

$$\frac{d\hat{r}}{dt}=\frac{\partial\hat{r}}{\partial r}\frac{dr}{dt}+\frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt}+\frac{\partial\hat{r}}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=\dot{\theta}\hat{\theta}+\sin\theta\dot{\varphi}\hat{\varphi},\frac{\partial\hat{r}}{\partial r}=0$$

$$\Rightarrow\vec{v}=\dot{r}\vec{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta}+r\sin\theta\dot{\varphi}\hat{\varphi}$$

ب)

$$\vec{v}=R\dot{\theta}\hat{\theta}+R\omega\sin\theta\hat{\varphi}$$

ج)

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=R\frac{d}{dt}(\dot{\theta}\hat{\theta})+R\omega\frac{d}{dt}(\sin\theta\hat{\varphi})=R(\ddot{\theta}\hat{\theta}+\dot{\theta}\frac{d}{dt}\hat{\theta})+R\omega\cos\theta\dot{\theta}\hat{\varphi}+R\omega\sin\theta\frac{d\hat{\varphi}}{dt}\qquad(1)$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt}=-\hat{i}\sin\theta\dot{\theta}\cos\varphi-\hat{i}\sin\varphi\dot{\varphi}\cos\theta-\hat{j}\sin\theta\dot{\theta}\sin\varphi+\hat{j}\cos\theta\cos\varphi\dot{\varphi}-\hat{k}\cos\theta\dot{\theta}=$$

$$-\dot{\theta}(\hat{i}\sin\theta\cos\varphi+\hat{j}\sin\theta\sin\varphi+\hat{k}\cos\theta)+\dot{\varphi}\cos\theta(-\hat{i}\sin\varphi+\hat{j}\cos\varphi)=$$

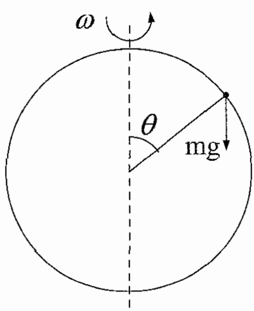
$$-\dot{\theta}\hat{r}+\dot{\varphi}\cos\theta\hat{\varphi}$$

$$\frac{d\hat{\varphi}}{dt}=-\cos\varphi\dot{\varphi}\hat{i}-\sin\varphi\dot{\varphi}\hat{j}=-\dot{\varphi}(\cos\varphi\hat{i}+\sin\varphi\hat{j})=-\dot{\varphi}(\sin\theta\hat{r}+\cos\theta\hat{\theta})$$

$$(1):\vec{a}=R\ddot{\theta}\hat{\theta}+R\dot{\theta}\left(-\dot{\theta}\hat{r}+\dot{\varphi}\cos\theta\hat{\varphi}\right)+R\omega\cos\theta\dot{\theta}\hat{\varphi}-R\omega\sin\theta\dot{\varphi}(\sin\theta\hat{r}+\cos\theta\hat{\theta})$$

$$\xrightarrow{\dot{\varphi}=\omega}\vec{a}=(-R\dot{\theta}^2-R\omega^2\sin^2\theta)\hat{r}+(R\ddot{\theta}-R\omega^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta}+(2R\omega\cos\theta\dot{\theta})\hat{\varphi}$$

د)



$$m\vec{g}=mg\cos\theta(-\hat{r})+mg\sin\theta\hat{\theta}$$

ه)

$$N_\theta=0\Rightarrow\vec{N}=N_r\hat{r}+N_\varphi\hat{\varphi}$$

و)

$$\begin{cases}-mg\cos\theta+N_r=ma_r=-mR(\dot{\theta}^2+\omega^2\sin\theta)\\ mg\sin\theta=ma_\theta=mR(\ddot{\theta}-\omega^2\sin\theta\cos\theta)\\ N_\varphi=ma_\varphi=2mR\omega\cos\theta\dot{\theta}\end{cases}$$

ز)

$$\frac{dh}{dt}=\frac{mR}{2}\left(2R\dot{\theta}\ddot{\theta}-2R\omega^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}-2g\sin\theta\dot{\theta}\right)$$

$$=mR^2\dot{\theta}\left(\ddot{\theta}-\omega^2\sin\theta\cos\theta-\frac{g}{R}\sin\theta\right)$$

$$=mR^2\dot{\theta}\left(\frac{mg\sin\theta}{mR}-\frac{g}{R}\sin\theta\right)=0\Rightarrow\frac{dh}{dt}=0$$

۵- الف)

$$\dot{\vec{S}}=\vec{r}\times\dot{\vec{r}}\Rightarrow\ddot{\vec{S}}=\vec{r}\times\ddot{\vec{r}}$$

از آنجا که شتاب ناشی از نیروی زمین به ماه شعاعی است، در این بین تنها اختلاف میان شتاب ناشی از خورشید بر روی زمین و ماه مهم است.

$$\Rightarrow\ddot{\vec{S}}=\vec{r}\times\left(\frac{-GM_s\vec{R}_m}{R_m^{\;3}}+\frac{GM_s\vec{R}}{R^3}\right)=-GM_s\vec{r}\times\left(\frac{\vec{R}+\vec{r}}{\left|\vec{R}+\vec{r}\right|^3}-\frac{\vec{R}}{R^3}\right)$$

$$=-GM_s\vec{r}\times\left(\frac{\vec{R}+\vec{r}}{(R^2+r^2+2\vec{R}\cdot\vec{r})^{\frac{3}{2}}}-\frac{\vec{R}}{R^3}\right)$$

$$\approx\frac{-GM_s\vec{r}}{R^3}\times\left((\vec{R}+\vec{r})\left(1-\frac{3\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\right)-\vec{R}\right)\approx\frac{-GM_s\vec{r}}{R^3}\times\left(\vec{r}-\frac{3\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\vec{R}\right)$$

$$=\frac{-GM_s\vec{r}}{R^3}\times(\vec{r}-3(\vec{r}\cdot\hat{R})\hat{R})=\frac{3GM_s(\vec{r}\times\hat{R})(\vec{r}\cdot\hat{R})}{R^3}$$

ب)

$$\dot{\vec{S}}_0=r_0^{\;2}\omega_m\ \ e_z$$

$$\ddot{\vec{S}}=\frac{3GM_s(\hat{r}\times\hat{R})(\hat{r}\cdot\hat{R})}{R^3}=\frac{3GM_sr_0^{\;2}}{R_0^{\;3}}(\hat{r}\cdot\hat{R})(\hat{r}\times\hat{R})$$

$$=-\frac{3GM_sr_0^{\;2}}{R_0^{\;3}}\cos(\omega_m-\omega_e)t\sin(\omega_m-\omega_e)t\ \ e_z=-\frac{3GM_sr_0^{\;2}}{2R_0^{\;3}}\sin2(\omega_m-\omega_e)t\ \ e_z$$

$$\dot{\vec{S}}(t)=\dot{\vec{S}}_0+\int_0^t\ddot{\vec{S}}(t')dt'=\dot{\vec{S}}_0-\frac{3GM_sr_0^{\;2}}{4R_0^{\;3}(\omega_m-\omega_e)}(1-\cos2(\omega_m-\omega_e)t)\ \ e_z$$

$$=\dot{\vec{S}}_0-\frac{3\omega_e^{\;2}r_0^{\;2}}{4(\omega_m-\omega_e)}(1-\cos2(\omega_m-\omega_e)t)\ \ e_z$$

ج)

$$\eta=\frac{1}{2}\frac{\frac{3\omega_e^{\;2}r_0^{\;2}}{4(\omega_m-\omega_e)}\times2}{\omega_mr_0^{\;2}}\approx\frac{3\omega_e}{4\omega_m}=\frac{3\frac{1}{365}}{4\frac{1}{28}}\approx.06$$

۶- الف)

$$\vec{r}=R\cos\varphi\hat{i}+R\sin\varphi\hat{j}+\frac{h}{2\pi}\varphi\hat{k}$$

$$d\vec{r}=\left(-R\sin\varphi\hat{i}+R\cos\varphi\hat{j}+\frac{h}{2\pi}\hat{k}\right)d\varphi$$

$$ds=\left|d\vec{r}\right|=\sqrt{R^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}d\varphi$$

$$\hat{t}=\frac{d\vec{r}}{ds}\Rightarrow\hat{t}=\frac{1}{\sqrt{R^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}}\left(-R\sin\varphi\hat{i}+R\cos\varphi\hat{j}+\frac{h}{2\pi}\hat{k}\right)$$

ρ شعاع انحنا

$$\frac{d\hat{t}}{ds}=\frac{1}{\rho}\hat{N}\quad,\quad\frac{d\hat{t}}{ds}=\frac{1}{R^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}\left(-R\cos\varphi\hat{i}-R\sin\varphi\hat{j}\right)\Rightarrow$$

$$\rho=\frac{R^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}{R}\qquad(1)$$

$$\hat{N}=\left(-\cos\varphi\hat{i}-\sin\varphi\hat{j}\right)$$

ب)

$$\hat{B}=\hat{t}\times\hat{N}\Rightarrow\hat{B}=\frac{1}{\sqrt{R^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}}\left(\frac{h}{2\pi}\sin\varphi\hat{i}-\frac{h}{2\pi}\cos\varphi\hat{j}+R\hat{k}\right)$$

m : پیچش سیم

$$\frac{d\vec{B}}{ds}=-m\hat{N}\Rightarrow\frac{d\hat{B}}{ds}=\frac{\left(\frac{h}{2\pi}\right)}{\left(R^2+\frac{h^2}{4\pi^2}\right)}\left(\cos\varphi\hat{i}+\sin\varphi\hat{j}\right)\Rightarrow$$

$$m=\frac{-h}{2\pi\left(R^2+\frac{h^2}{4\pi^2}\right)}\ ,m=\frac{d\theta}{ds}$$

$$\Rightarrow d\theta=mds=\frac{-h}{2\pi(R^2+\frac{h^2}{4\pi^2})}\times\sqrt{R^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}d\varphi$$

$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow \theta = \frac{-h}{2\pi\sqrt{R^2+\dfrac{h^2}{4\pi^2}}}\varphi \\ &Z=\frac{h}{2\pi}\varphi\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{-Z}{\sqrt{R^2+\dfrac{h^2}{4\pi^2}}} \qquad (۲)$$

ج)

$$L=\int ds=\sqrt{R^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}\int d\varphi=\sqrt{R^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}\varphi_0 \Rightarrow L=\sqrt{R^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}\varphi_0 \Rightarrow \varphi_0=\frac{L}{\sqrt{R^2+\dfrac{h^2}{4\pi^2}}} \qquad (۳)$$

طول فنر را با Z نشان می‌دهیم.

$$\left.\begin{aligned}&Z=\frac{h}{2\pi}\varphi_0\\ &Z+\Delta Z=\frac{h'}{2\pi}\varphi_0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{h'}{h}=\frac{Z+\Delta Z}{Z} \Rightarrow h'=h\left(1+\frac{\Delta Z}{Z}\right) \Rightarrow$$

$$\Delta h=h'-h=\frac{h\Delta Z}{Z}=\frac{h\Delta Z}{\left(\dfrac{h}{2\pi}\varphi_0\right)} \Rightarrow \Delta h=\frac{2\pi\sqrt{R^2+\dfrac{h^2}{4\pi^2}}\Delta Z}{L} \qquad (۴)$$

$$L=\sqrt{R^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}\varphi_0 \Rightarrow R=\sqrt{\left(\frac{L}{\varphi_0}\right)^2-\frac{h^2}{4\pi^2}}$$

$$R'=\sqrt{\left(\frac{L}{\varphi_0}\right)^2-\frac{h'^2}{4\pi^2}}=\sqrt{\left(\frac{L}{\varphi_0}\right)^2-\frac{(h+\Delta h)^2}{4\pi^2}}\approx\sqrt{R^2+\frac{h^2}{4\pi^2}-\frac{h^2}{4\pi^2}-\frac{2h\Delta h}{4\pi^2}} \Rightarrow$$

$$R'=\sqrt{R^2-\frac{\sqrt{R^2+\dfrac{h^2}{4\pi^2}}\times h\Delta Z}{\pi L}}$$

$$\Delta R=R'-R\approx-\frac{\sqrt{R^2+\dfrac{h^2}{4\pi^2}}h\Delta Z}{2\pi RL} \qquad (۵)$$

د)

$$\Delta V=\frac{1}{2}K(\Delta\theta)^2+\frac{1}{2}K'(\Delta\psi)^2$$

$$(3):\sqrt{R^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}=\frac{L}{\varphi_0},(2)\Rightarrow\theta=\frac{-Z\varphi_0}{L}$$

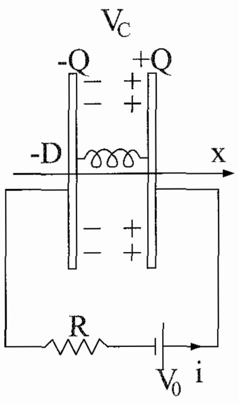
$$d\theta=-\frac{\varphi_0}{L}dZ$$

$$\left.\begin{array}{l}\psi=\dfrac{L}{\rho}\Rightarrow d\psi=-\dfrac{L}{\rho^2}d\rho\\[2ex] \rho=\dfrac{R^2+\dfrac{h^2}{4\pi^2}}{R}=\dfrac{L^2}{{\varphi_0}^2R}\\[2ex] d\psi=\dfrac{-\varphi_0 hdZ}{2\pi RL}\end{array}\right\}\Rightarrow d\psi=-\frac{L{\varphi_0}^4R^2}{L^4}\times-\frac{L^2}{{\varphi_0}^2R^2}dR,(5)\Rightarrow$$

$$du=\frac{1}{2}K\left(d\theta\right)^2+\frac{1}{2}K'\left(d\psi\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{K{\varphi_0}^2}{L^2}+\frac{K'{\varphi_0}^2h^2}{4\pi^2R^2L^2}\right)\left(dZ^2\right)$$

$$\Rightarrow k=\frac{K{\varphi_0}^2}{L^2}+\frac{K'{\varphi_0}^2h^2}{4\pi^2R^2L^2}$$

۷- اگر مساحت صفحات خازن S باشد.



$$C_0=\frac{\varepsilon_0 S}{D}\Rightarrow S=\frac{C_0D}{\varepsilon_0}$$

$$C=\frac{\varepsilon_0 S}{(D+x)}\Rightarrow C=\frac{C_0D}{D+x}$$

الف)

میدان الکتریکی مابین دو صفحه
$$E=\frac{Q}{S\varepsilon_0}=\frac{Q}{DC_0}$$

نیروی الکتریکی وارد به صفحه راست
$$F_e=\frac{QE}{2}=\frac{Q^2}{2DC_0}(-\hat{x})$$

$$\vec{F}_{tot}=\vec{F}_{mec}+\vec{F}_e=\left(k(\ell_0-D-x)-\frac{Q^2}{2DC_0}\right)(\hat{x})=m\frac{d^2x}{dt^2}(\hat{x})\Rightarrow$$

که ℓ_0 طول عادی فنرمی‌باشد.

$$k(\ell_0-D-x)-\frac{Q^2}{2DC_0}=+m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (۱)$$

در حالت تعادل $\ddot{x}$ صفر می باشد پس:

$$k(\ell_0-D)-\frac{Q_0^2}{2DC_0}=0\Rightarrow(\ell_0-D)=+\frac{Q_0^2}{2kDC_0}$$

$$(1)\Rightarrow+\frac{Q_0^2}{2DC_0}-kx-\frac{Q^2}{2DC_0}=+m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (۲)$$

ب)

$$V_0=Ri+V_c\Rightarrow V_0=R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q(D+x)}{C_0D} \qquad (۳)$$

ج)

$$(2)\Rightarrow-\frac{q(q+2Q_0)}{2DC_0}-kx=m\ddot{x}\Rightarrow\frac{-Q_0}{DC_0}q-kx=m\ddot{x} \qquad (۲-۲)$$

$$(3)\Rightarrow V_0=R\frac{dq}{dt}+\frac{(q+Q_0)(D+x)}{C_0D}\Rightarrow V_0-\frac{Q_0}{C_0}=R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C_0}+\frac{Q_0x}{C_0D} \qquad (۳-۳)$$

د)

$$(2-2)\Rightarrow-\frac{Q_0}{DC_0}Be^{st}-kXe^{st}=ms^2Xe^{st}$$
$$\Rightarrow$$
$$(3-3)\Rightarrow RBse^{st}+\frac{B}{C_0}e^{st}+\frac{Q_0X}{C_0D}e^{st}=V_0-\frac{Q_0}{C_0}=0$$

$$\begin{cases}\dfrac{Q_0}{DC_0}B+kX+ms^2X=0\ \Rightarrow\ \dfrac{B}{X}=-\dfrac{(k+ms^2)DC_0}{Q_0}\\[2ex] RsB+\dfrac{B}{C_0}+\dfrac{Q_0X}{C_0D}=0\ \Rightarrow\ \dfrac{B}{X}=-\dfrac{Q_0}{C_0D(\frac{1}{C_0}+Rs)}\end{cases}\Rightarrow$$

(۴)
$$\left(\frac{1}{C_0}+Rs\right)\left(k+ms^2\right)=\frac{Q_0^2}{C_0^2D^2}$$

ه)

$$Q_0=0\Rightarrow S_1=\frac{-1}{RC_0},S_2=i\sqrt{\frac{k}{m}},S_3=-i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

و)

$$s_1'=-\frac{1}{RC_0}+m_1Q_0+m_2Q_0{}^2$$

و رابطه ۴ تا مرتبه دوم به صورت زیر است.

$$\left(m_1Q_0+m_2Q_0{}^2\right)\left(\frac{k}{m}+\frac{1}{R^2C_0{}^2}+m_1{}^2Q_0{}^2-\frac{2}{RC_0}m_1Q_0-\frac{2}{RC_0}m_2Q_0{}^2\right)=\frac{Q_0{}^2}{mRC_0{}^2D^2}\Rightarrow$$

$$\left(m_1\frac{k}{m}+\frac{m_1}{R^2C_0{}^2}\right)Q_0+\left(m_2\frac{k}{m}+\frac{m_2}{R^2C_0{}^2}-\frac{2}{RC_0}m_1{}^2\right)Q_0{}^2=\frac{Q_0{}^2}{mRC_0{}^2D^2}\Rightarrow$$

$$m_1=0\quad,m_2=\frac{1}{mRC_0{}^2D^2\left(\frac{k}{m}+\frac{1}{R^2C_0{}^2}\right)}$$

$$S_1'=-\frac{1}{RC_0}+\left(\frac{1}{mRC_0{}^2D^2\left(\frac{k}{m}+\frac{1}{R^2C_0{}^2}\right)}\right)Q_0{}^2$$

$$S_2=i\sqrt{\frac{k}{m}}+n_1Q_0+n_2Q_0{}^2$$

رابطه دوم تا مرتبه ۴ به این صورت است.

$$\left(\frac{1}{RC_0}+i\sqrt{\frac{k}{m}}+n_1Q_0+n_2Q_0{}^2\right)\left(\frac{k}{m}+\left(\frac{-k}{m}\right)+n_1^2Q_0{}^2+2i\sqrt{\frac{k}{m}}n_1Q_0+2i\sqrt{\frac{k}{m}}n_2Q_0{}^2\right)=$$
$$\frac{Q_0{}^2}{mRC_0{}^2D^2}$$

$$\Rightarrow 2i\sqrt{\frac{k}{m}}n_1Q_0\left(\frac{1}{RC_0}+i\sqrt{\frac{k}{m}}\right)+$$

$$Q_0^{\,2}\left(\frac{n_1^2}{RC_0}+n_1^2 i\sqrt{\frac{k}{m}}+2i\sqrt{\frac{k}{m}}n_1^2+2i\sqrt{\frac{k}{m}}n_2\times\frac{1}{RC_0}-2\frac{k}{m}n_2\right)Q_0^{\,2}=\frac{Q_0^{\,2}}{mRC_0^{\,2}D^2}$$

$$\Rightarrow n_1=0\ ,\ \frac{2i}{RC_0}\sqrt{\frac{k}{m}}n_2-2\frac{k}{m}n_2=\frac{1}{mRC_0^{\,2}D^2}$$

$$\Rightarrow n_2=\frac{\left(-\frac{k}{m}-\frac{1}{RC}\sqrt{\frac{k}{m}}i\right)}{2mRC_0^{\,2}D^2\left(\frac{k^2}{m^2}+\frac{k}{mR^2C_0^{\,2}}\right)}$$

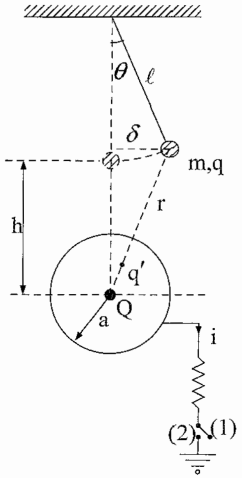
$$\Rightarrow S_2=i\sqrt{\frac{k}{m}}+\frac{\left(-\frac{k}{m}-\frac{1}{RC}\sqrt{\frac{k}{m}}i\right)}{2mRC_0^{\,2}D^2\left(\frac{k^2}{m^2}+\frac{k}{mR^2C_0^{\,2}}\right)}Q_0^{\,2}$$

و به طریقه مشابه بدست می‌آید که:

$$:\ S_3'=-i\sqrt{\frac{k}{m}}+P_1Q_0+P_2Q_0^{\,2}$$

$$S_3'=-i\sqrt{\frac{k}{m}}+\frac{\left(-\frac{k}{m}+\frac{1}{RC}\sqrt{\frac{k}{m}}i\right)}{2mRC_0^{\,2}D^2\left(\frac{k^2}{m^2}+\frac{k}{mR^2C_0^{\,2}}\right)}Q_0^{\,2}$$

۸-



$$r=\sqrt{(\ell+h)^2+\ell^2-2\ell(\ell+h)\cos\theta}\approx$$

$$\sqrt{(\ell+h)^2+\ell^2-2\ell(\ell+h)\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)}=\sqrt{h^2+\ell(\ell+h)\theta^2}\approx$$

$$h\left(1+\frac{1}{2}\frac{\ell(\ell+h)}{h^2}\theta^2\right)$$

الف)

$$q'=-\frac{a}{r}q$$

$$Q'=-q'=\frac{a}{r}q$$

انرژی الکتریکی

$$U_e=\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{\left(r-\frac{a^2}{r}\right)}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ'}{r}\right]$$

$$=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-aq^2}{r^2-a^2}+\frac{aq^2}{r^2}\right]=\frac{-a^3q^2}{8\pi\varepsilon_0\left(r^2-a^2\right)r^2}$$

$$=\frac{-a^3q^2}{8\pi\varepsilon_0}\times\frac{1}{\left[h^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{\ell(\ell+h)}{h^2}\theta^2\right)^2-a^2\right]r^2}\approx$$

$$\frac{-a^3q^2}{8\pi\varepsilon_0h^2}\frac{1}{(h^2+\ell(\ell+h)\theta^2-a^2)(1+\frac{\ell(\ell+h)}{h^2}\theta^2)}\approx$$

$$-\frac{a^3q^2}{8\pi\varepsilon_0h^2}\frac{1}{h^2-a^2+\left(2\ell(\ell+h)-\frac{a^2\ell(\ell+h)}{h^2}\right)\theta^2}\approx$$

$$-\frac{a^3q^2}{8\pi\varepsilon_0h^2(h^2-a^2)}\left[1-\left(\frac{2\ell(\ell+h)}{(h^2-a^2)}-\frac{a^2\ell(\ell+h)}{h^2\left(h^2-a^2\right)}\right)\theta^2\right]$$

$$U_{mec}=mg\ell(1-\cos\theta)\approx\frac{1}{2}mg\ell\theta^2$$

$$U_{tot} = U_{mec} + U_e = Const. + \frac{1}{2}(S)\theta^2,$$

انرژی جنبشی

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{S}{m\ell^2}} = \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{q^2a^3(\ell+h)}{m\ell \times 4\pi\varepsilon_0 h^2 (h^2-a^2)^2}\left(2-\frac{a^2}{h^2}\right)}$$

ب) Q بار کل کره می‌باشد.

$$i = -\frac{dQ}{dt}, V = Ri$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{a}, Q = Q' + q' = Q' - \frac{a}{r}q$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}(Q + \frac{a}{r}q) = -R\frac{dQ}{dt} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 aR}Q - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 Rr}$$

تا مرتبه اول داریم که:

$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 aR}Q - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 hR} =$$

$$Q = Ae^{-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 aR}t} - \frac{a}{h}q$$

$$Q_{(t=0)} = 0 \Rightarrow A = \frac{a}{h}q \Rightarrow Q = \frac{a}{h}q\left(e^{-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 aR}t} - 1\right)$$

ج) به روش نیرو عمل می‌نماییم. به خواننده پیشنهاد می‌شود برای مقایسه و آموزش سعی کند از روش انرژی نیز حل نماید. شرط روی آن به این صورت است که در طول یک دوره زمانی بار خیلی عوض نشود.

$$\frac{T}{4\pi\varepsilon_0 aR} << 1 \Rightarrow R >> \frac{T}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

که T دوره تناوب است.

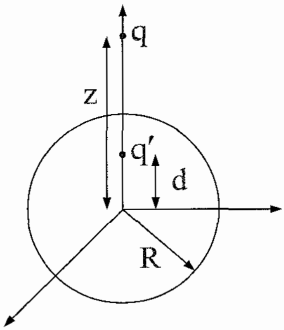
$$q' = -\frac{a}{r}q, Q' = Q - q' = Q + \frac{a}{r}q$$

به طور تقریبی داریم که:

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\theta - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q\frac{a}{h}}{(h-\frac{a^2}{h})^2} - \frac{q\frac{a}{h}e^{-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 aR}t}}{h^2}\right)(1+\frac{\ell}{h})\theta$$

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell}+\frac{aq^2(\ell+h)\left(h^4(1-e^{-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 aR}t})+(2a^2h^2-a^4)e^{-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 aR}t}\right)}{4\pi\varepsilon_0\ell h^4 m(h^2-a^2)^2}}$$

۹- الف-۱) از روش تصویر برای بدست آوردن پتانسیل در کل فضا استفاده می‌کنیم:



$$q'=\frac{-qR}{z}$$

$$d=\frac{R^2}{z}$$

$$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{|\vec{r}-z\hat{z}|}+\frac{q'}{|\vec{r}-d\hat{z}|}\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{|\vec{r}-z\hat{z}|}-\frac{\frac{qR}{z}}{\left|\vec{r}-\frac{R^2}{z}\hat{z}\right|}\right]$$

الف-۲) میدان در سطح رسانا، عمود بر رسانا است بنابراین کافی است که از پتانسیل نسبت به r مشتق بگیریم.

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{|\vec{r}-z\hat{z}|}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2-2z\vec{r}\cdot\hat{z}}}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2-2rz\cos\theta}}\right)$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}\times(2r-2z\cos\theta)}{(r^2+z^2-2rz\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}=\frac{z\cos\theta-r}{(r^2+z^2-2rz\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow \vec{E}=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{z\cos\theta-R}{\left(R^2+z^2-2Rz\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{R/z(\frac{R^2}{z}\cos\theta-R)}{(R^2+\frac{R^4}{z^2}-2R\times\frac{R^2}{z}\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\right]\hat{r}$$

$$=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\left(z\cos\theta-R\right)-\frac{z^2}{R^2}\left(\frac{R^2}{z}\cos\theta-R\right)}{\left(R^2+z^2-2Rz\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\right]\hat{r}=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{\left(\frac{z^2}{R}-R\right)\hat{r}}{\left(R^2+z^2-2Rz\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\sigma\left(\theta\right)=\varepsilon_0\left|\vec{E}\right|=\frac{-q}{4\pi R}\times\frac{z^2-R^2}{\left(R^2+z^2-2Rz\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}$$

الف-۳)

$$Q_2=\int\sigma da=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\left(\theta\right)\times 2\pi R^2\sin\theta d\theta=$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-q\times R\left(z^2-R^2\right)\sin\theta d\theta}{2\left(R^2+z^2-2Rz\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{+qR\left(z^2-R^2\right)}{2Rz\times\left(R^2+z^2-2Rz\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow Q_2=\frac{q\left(z^2-R^2\right)}{2z}\times\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}-\frac{1}{z-R}\right]$$

$$Q_3=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sigma\left(\theta\right)d\theta=\frac{q\left(z^2-R^2\right)}{2z\left(R^2+z^2-2Rz\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{q\left(z^2-R^2\right)}{2z}\left[\frac{1}{R+z}-\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]$$

ب ۱)

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\varphi_2=0=P_{21}q+P_{22}Q_2+P_{23}Q_3\\ \varphi_3=0=P_{31}q+P_{23}Q_2+P_{33}Q_3\end{cases}\qquad(1)$$

$$\Rightarrow P_{12}=-\frac{P_{22}Q_2+P_{23}Q_3}{q}$$

$$P_{13}=-\frac{P_{23}Q_2+P_{33}Q_3}{q}$$

ب ۲)

$$\begin{cases} \varphi_1 = P_{11}Q'_1 + P_{12}Q'_2 + P_{13}Q'_3 \\ V = P_{12}Q'_1 + P_{22}Q'_2 + P_{23}Q'_3 \\ -V = P_{13}Q'_1 + P_{23}Q'_2 + P_{33}Q'_3 \end{cases} \qquad (۲)$$

$$Q'_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} Q'_2 = \dfrac{V - P_{23}Q'_3}{P_{22}} \\ Q'_2 = \dfrac{-V - P_{33}Q'_3}{P_{23}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q'_3 = \dfrac{V(P_{23} + P_{22})}{P_{23}^2 - P_{22}P_{33}} \\ Q'_2 = \dfrac{-V\left(P_{33} + P_{23}\right)}{P_{23}^2 - P_{22}P_{33}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = \frac{V}{P_{23}^2 - P_{22}P_{33}}\left(P_{13}\left(P_{23} + P_{22}\right) - P_{12}\left(P_{33} + P_{23}\right)\right)$$

ب ۳) با استفاده از قسمت ۱ و ۲:

$$\varphi_1 = \frac{-V}{q\left(P_{23}^2 - P_{22}P_{33}\right)}\left[\left(P_{23}Q_2 + P_{33}Q_3\right)\left(P_{23} + P_{22}\right) - \left(P_{22}Q_2 + P_{23}Q_3\right)\left(P_{33} + P_{23}\right)\right]$$

$$= \frac{-V}{q\left(P_{23}^2 - P_{22}P_{33}\right)}\left[\left(P_{23}^2 - P_{22}P_{33}\right)\left(Q_2 - Q_3\right)\right] = \frac{V\left(Q_3 - Q_2\right)}{q}$$

$$Q_3 - Q_2 = \frac{q\left(z^2 - R^2\right)}{2z}\left[\frac{1}{R+z} - \frac{2}{\sqrt{R^2 + z^2}} + \frac{1}{z-R}\right] = \frac{q\left(z^2 - R^2\right)}{2z}\left[\frac{2z}{z^2 - R^2} - \frac{2}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right]$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = V\left(1 - \frac{z^2 - R^2}{z\sqrt{R^2 + z^2}}\right)$$

ج)

$$\varphi_1 = V\left(1 - \frac{1 - \dfrac{R^2}{z^2}}{\sqrt{1 + \dfrac{R^2}{z^2}}}\right) = V\left(1 - \left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) \times \left(1 - \frac{R^2}{2z^2}\right)\right) = V\left(\frac{3}{2}\frac{R^2}{z^2}\right)$$

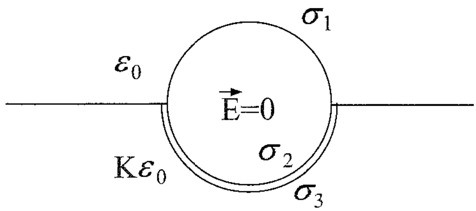
$$\Rightarrow \varphi_1(z) = \frac{3}{2}\frac{R^2}{z^2}V$$

$$\varphi(r, A) = \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2}\cos\theta \Rightarrow \varphi(z, 0) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2}$$

$$\Rightarrow A = 0, B = \frac{3}{2}R^2V$$

۱۰- فرض کنید که کره تا نیمه در مایع فرو رفته باشد. با توجه به راهنمایی صورت سوال داریم که

$$V(r)=\frac{A}{r}\Rightarrow \vec{E}=\frac{A\vec{r}}{r^3},(r\geq R)$$



شکل ۱

و با استفاده از قانون گوس برای سطح مرزی و پیوستگی مولفه عمودی جابجایی الکتریکی داریم که

$$\sigma_1=\varepsilon_0\frac{A}{R^2} \qquad (۱)$$

$$\sigma_2=K\varepsilon_0\frac{A}{R^2} \qquad (۲)$$

$$\sigma_3=-(K-1)\varepsilon_0\frac{A}{R^2} \qquad (۳)$$

که برای یافتن معادله (۳) از این استفاده شد که کل بار آزاد در یک حجم V برابر است با $\int_{\partial V} K\varepsilon_0\vec{E}.d\vec{s}$ که K ضریب دی الکتریک خطی محیط است و می‌تواند تابع مکان باشد.

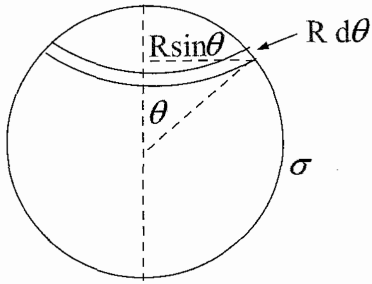
فرض کنیم که σ_1 برابر σ باشد. در این صورت

$$\sigma_1=\sigma,\sigma_2=K\sigma,\sigma_3=-(K-1)\sigma$$

واضح است که باید نیرویی را که بار σ_3 به بارهای σ_1 و σ_2 وارد می‌کند را بیابیم. ابتدا نیرویی را که میان دو نیم کره در نزدیکی هم با چگالی بار سطحی σ **را** می‌یابیم.

میدان خارج یک کره با چگالی بار سطحی σ برابر $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ است و در داخل آن برابر صفر است. این ناپیوستگی از داخل به خارج به خاطر بار سطحی **است** که میدان آن در داخل $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ به سمت درون و در خارج $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ به سمت بیرون است و در نتیجه میدان کره دقیقا روی سطح برابر $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ است. (کره را به صورت دو قسمت در نظر بگیرید. یک عرقچین با شعاع خیلی کم به مرکزیت نقطه مشاهده میدان و بقیه کره. عرقچین خیلی کوچک مانند یک صفحه تخت است و میدان روی خودش صفر است و $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ میدان بقیه کره است که شامل عرقچین نمی‌شود.)

برای محاسبه نیرویی که نیم کره پایین به نیم کره بالا در شکل (۲) وارد می‌کند از میدان روی سطح نیم کره بالایی انتگرال می‌گیریم و دقت داریم که نیروهای داخلی یکدیگر را خنثی می‌کنند.



شکل ۲

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sigma\cos\theta\, 2\pi R\sin\theta R d\theta = \frac{\pi R^2\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

که دافعه و رو به بالا است.

حال اگر به مساله خودمان برگردیم، خواهیم دید که میدان درست روی سطح σ_3 برابر است با

$$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}$$

چون میدان به مقدار $\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}$ با میدان در فضای اطراف سطح متفاوت است.

پس با انتگرال گیری مثل کره با بار یکنواخت سطحی می‌توانیم نیروی وارد بر دی‌الکتریک را که از طرف کره است و به سمت پایین، بیابیم. این نیرو برابر است با:

$$F_e = \frac{\pi R^2\sigma_3}{\varepsilon_0}\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_3}{2}\right)$$

با استفاده از قانون سوم نیوتن این نیرو از طرف دی‌الکتریک به کره رو به بالا وارد می‌شود.

پس با جایگذاری σ در F_e و نوشتن تعادل نیروها می‌توان σ را به دست آورد.

$$\frac{\pi R^2\sigma(K-1)}{\varepsilon_0}\frac{(K+1)\sigma}{2} + \frac{4}{3}\pi R^3\rho_1 g = \frac{2}{3}\pi R^3\rho_2 g \Rightarrow$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{4Rg(\rho_2 - 2\rho_1)\varepsilon_0}{3(K-1)(K+1)}}$$

و Q یعنی بار سطحی رسانا برابر است با

$$2\pi R^2(K+1)\sigma = 4\pi R^2\sqrt{\frac{Rg(\rho_2 - 2\rho_1)(K+1)\varepsilon_0}{3(K-1)}}$$

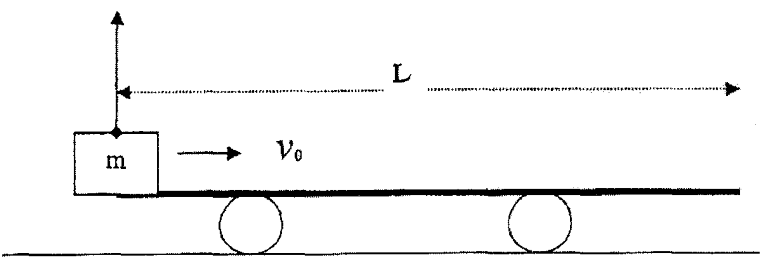
سؤال‌های بیست و یکمین
دوره آزمون‌های المپیاد فیزیک

تابستان ۱۳۸۷

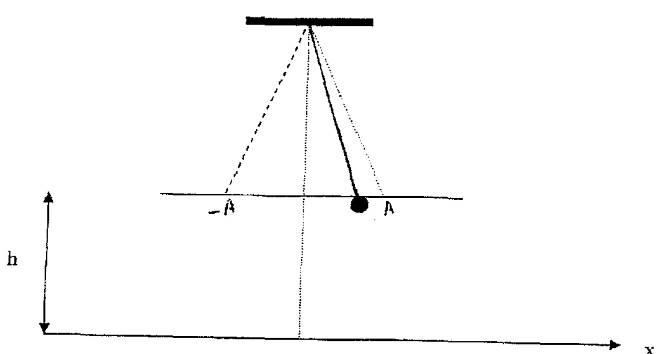
سؤال‌های امتحان اول المپیاد فیزیک ـ بیست و یکمین دوره ـ تابستان ۸۷

وقت: ۳ ساعت و ۳۰ دقیقه

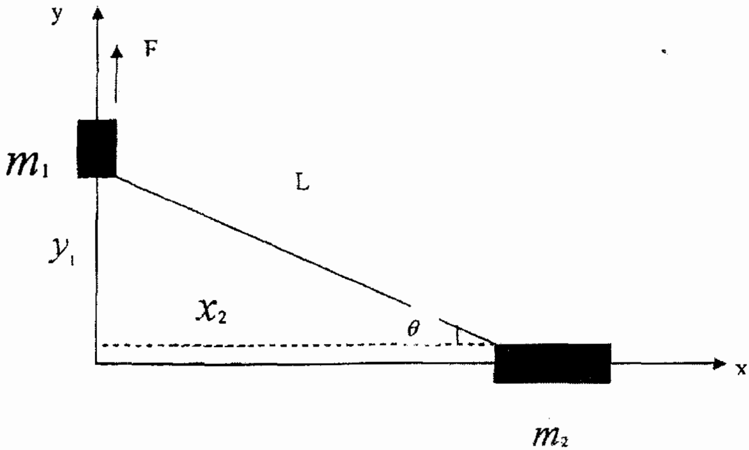
۱- جسم m مطابق شکل در انتهای ارابه‌ای به جرم M قرار دارد و درشروع، فاصله آن تا انتهای دیگر ارابه L است. در لحظه $t = 0$ جسم m را با سرعت اولیه v_0 روی ارابه به حرکت در می‌آوریم. ضریب اصطکاک دو جسم μ است و ارابه روی چرخ‌های سبک و بدون اصطکاک در سطح افق حرکت می‌کند.
اگر v_0 از سرعت معینی بیشتر باشد جرم m از انتهای ارابه می‌افتد. این سرعت را تعیین کنید. در این حالت زمان افتادن جرم m از انتهای ارابه را نیز به دست آورید.
چنانچه جسم m از انتهای ارابه نیفتد چه طولی را روی آن طی می‌کند؟ این طول را در چه زمانی طی می‌کند؟ پس از آن حرکت دستگاه چگونه است و سرعت آن چیست؟



۲- آونگ طویلی مطابق شکل نوسان‌های کم دامنه انجام می‌دهد، به طوری که مسیر وزنه آونگ را می‌توان تقریباً خط راستی به موازات محور x گرفت که با معادله $\chi_1(t) = a\sin(\omega t)$ توصیف می‌شود. فرض کنید وزنه آونگ، مخزنی محتوی شن است و از سوراخ کوچکی در زیر آن دانه‌های ریز شن به سطح زمین که در فاصله عمودی h از مسیر آونگ است فرو می‌ریزند. از تأثیر ریزش شن‌ها بر حرکت آونگ چشم می‌پوشیم.
اگر در لحظه t ذرات شن به نقطه $\chi_2(t)$ روی محور x اصابت کنند، تابع $\chi_2(t)$ را بیابید.

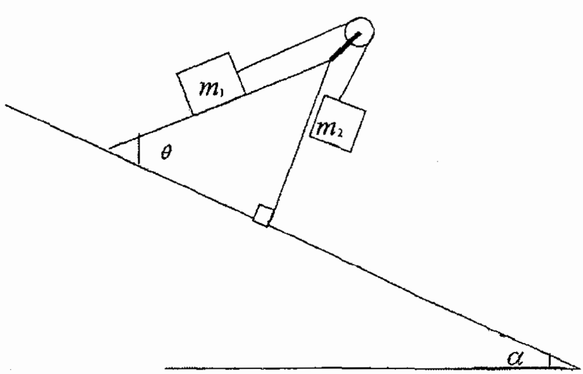


۳- در دستگاه شکل مقابل وزنه‌های m_1 و m_2 روی میله‌های بدون اصطکاک حرکت می‌کنند و صفحه x-y افقی است. نیروی ثابت F در راستای y به وزنه m_1 وارد می‌شود. وزنه‌ها با ریسمانی به طول L به یکدیگر وصل‌اند. در لحظه $t = 0$ زاویه θ، ۳۰ درجه و سرعت m_2، $-v_0$ است. در این لحظه شتاب‌های $\ddot{x}_2$ و $\ddot{y}_1$ و نیروی کشش ریسمان چه قدر است؟



۴- جرم‌های m_1 و m_2 مطابق شکل روی گوه‌ای به زاویه θ قرار دارند و با نخ سبکی که از روی قرقره‌ای سبک و بدون اصطکاک عبور کرده به یکدیگر متصل‌اند. گوه روی سطح شیبداری که زاویه α با افق می‌سازد قرار دارد. کلیه سطوح بدون اصطکاک فرض می‌شوند.

برای دو نوع حرکت ممکن دستگاه روابطی را بنویسید که از حل آن‌ها شتاب گوه، شتاب جرم‌های m_1 و m_2 نسبت به گوه و نیروهای قیدی وارد بر m_1 و m_2 به دست آیند. حل معادلات لازم نیست و حرکت‌هایی که تفاوت آن‌ها فقط در جهت شتاب‌ها است را یکی بگیرید.



سؤال‌های امتحان دوم المپیاد فیزیک ـ بیست و یکمین دوره ـ تابستان ۸۷

وقت: ٤ ساعت

۱- توزیع بار الکتریکی در بعضی هسته‌ها را می‌توان به طور تقریبی با چگالی بار حجمی

$$\rho(r)=\begin{cases}\rho_0(1-\frac{r^2}{a^2}) & r\le a\\ 0 & r\ge a\end{cases}$$

در نظر گرفت، که ρ_0 و a و r فاصله شعاعی تا مرکز هسته است.

الف) بار کل داخل هسته، Q، را به دست آورید.

ب) میدان الکتریکی داخل هسته را در فاصله r از مرکز هسته، $E_{in}(r)$، به دست آورید.

ج) میدان الکتریکی خارج هسته را در فاصله r از مرکز هسته، $E_{out}(r)$ به دست آورید.

د) پتانسیل الکتریکی داخل هسته را در فاصله r از مرکز هسته، $V_{in}(r)$، به دست آورید. (مبدأ پتانسیل را در بینهایت بگیرید.)

ه) پتانسیل الکتریکی خارج هسته را در فاصله r از مرکز هسته، $V_{out}(r)$، به دست آورید.

و) در چه فاصله‌ای از مرکز هسته میدان الکتریکی بیشنیه است؟

ز) به ازای $\rho_0=5/0\times10^{25}C/m^3$ و $a=3/4\times10^{-15}m$ مقادیر عددی Q، میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی بر روی سطح هسته و مقدار پتانسیل الکتریکی را در مرکز هسته محاسبه کنید.

ح) نمودار $E/(\rho_0/\varepsilon_0)$ و $V/(\rho_0/\varepsilon_0)$ را بر حسب تابعی از r در فاصله‌ی $0\le r\le 5a$ را رسم کنید.

۲-بار الکتریکی q به طور یکنواخت بر روی میله نارسانای نازکی به طول l توزیع شده است.

الف) پتانسیل الکتریکی را در نقطه دلخواهی مانند p که مختصات استوانه‌ای آن (ρ,z) است بدست آورید. (مبدأ پتانسیل را در بینهایت بگیرید.)

ب) بردار میدان الکتریکی را در نقطه p، در مختصات استوانه‌ای به دست آورید.

ج) میدان الکتریکی را در نقطه‌ای به مختصات $(0,z)$ بنویسید.

د) معادله سطح هم پتانسیل، با پتانسیل V_0 را بنویسید.

ه) عبارتی برای مجموع فواصل یک نقطه مانند (ρ_0,z_0) روی سطح هم پتانسیل V_0 دو سر میله بنویسید و آن را تا حد امکان ساده کنید.

اکنون دو میله نارسانای نازک به طول‌های l_1 و l_2 که به فاصله d از هم قرار گرفته‌اند و بار الکتریکی q_1 و q_2 به طور یکنواخت روی آن‌ها توزیع شده است، در نظر بگیرید.

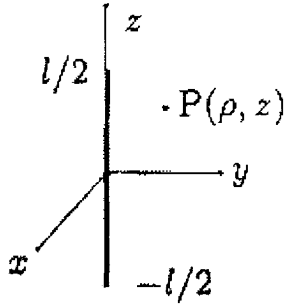
و) نیروی الکتریکی که هر میله به میله دیگر وارد می‌کند چقدر است؟

ز) در حد $l_2 \gg l_1 + d$ و $l_1 \gg d$ این نیرو چقدر است؟

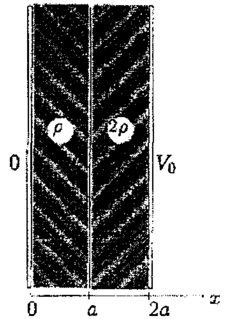
ح) در حد $d \gg l_1$ و $d \gg l_2$ این نیرو چقدر است؟

در صورت نیاز:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + C$$



۳- دو صفحه تخت نامتناهی رسانا به فاصله 2a از یکدیگر و موازی هم قرار دارند و در پتانسیل 0 و V_0 ثابت نگه داشته شده‌اند. ناحیه $0 < x < a$ با بار حجمی با چگالی یکنواخت ρ و ناحیه $a < x < 2a$ با بار حجمی با چگالی یکنواخت 2ρ پر شده است.



الف) میدان الکتریکی، $E(x)$، را در نواحی مختلف در بازه $-\infty < x < +\infty$ به دست آورید.

ب) پتانسیل الکتریکی، $V(x)$، را در نواحی مختلف در بازه $-\infty < x < +\infty$ به دست آورید.

ج) چگالی بار سطحی روی دو طرف هر یک از صفحه‌های رسانا را به دست آورید.

د) نمودار $E(x)$ را رسم کنید.

ه) نمودار $V(x)$ را رسم کنید.

۴- شناگری می‌خواهد با شناکردن از نقطه A روی دریاچه‌ای به نقطه ثابت O که یک جزیره است برود. مبدأ مختصات را نقطه O و مختصات A را (x_0, y_0) بگیرید. سرعت شناکردن او در آب ساکن u و جهت شنا کردن او همواره به سمت نقطه O است. اگر آب دریاچه ساکن بود او در خطی راست به سمت O می‌رفت. اما آب دریاچه ساکن نیست. موج‌هایی وجود دارند که باعث می‌شوند آب سطح دریاچه با سرعت u در جهت ثابت I حرکت کند. r و θ مختصات قطبی شناگر نسبت به چارچوب xy هستند.

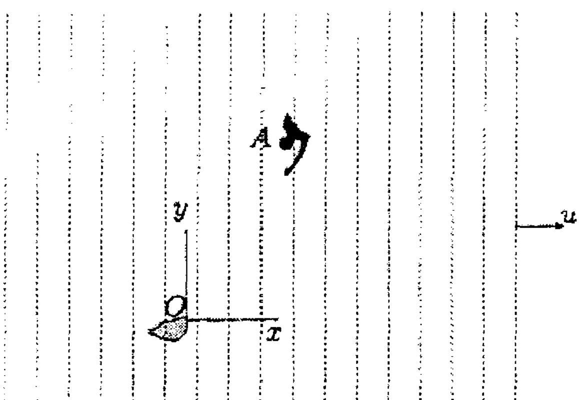
الف) v_x و v_y مؤلفه های x و y سرعت شناگر را نسبت به چارچوبxy بر حسب u و θ به دست آورید.

ب) v_r و v_θ مؤلفه‌های r و θ سرعت شناگر را نسبت به چارچوب xy بر حسب u و θ به دست آورید.

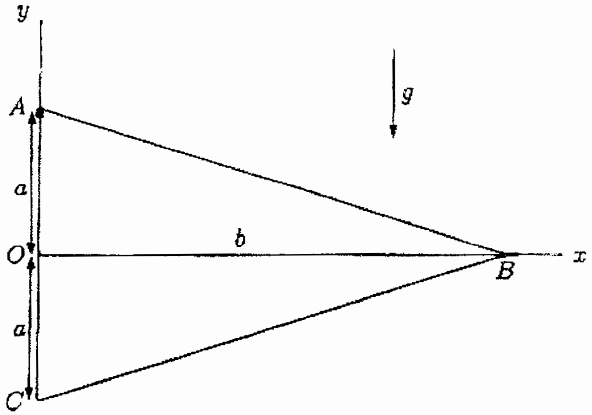
ج) $r(\theta)$ مسیر شناگر را به دست آورید.

د) معادله‌ای به صورت $dt = f(\theta)d\theta$ به دست آورید. از این جا، T، زمانی که شناگر به محور x می‌رسد را به دست آورید.

راهنمایی: احتمالاً با انتگرالی مواجه می‌شودی که نمی توانید آن رامحاسبه کنید. زمانی که شناگر از نقطه‌ای در نزدیکی محور x به آن می‌رسد را محاسبه کنید.



۵- سه دانه تسبیح بسیار کوچک با جرم‌های یکسان m می‌توانند از نقطه A بدون اصطکاک روی سه سیم بلغزند. یک سیم AB، دیگری AOB، و سومی ACB است. هر سه سیم درانتها یعنی نقطه B افقی شده‌اند. هر جا که سیم‌ها خم شده‌اند انحنای کوچکی وجود دارد به طوری که دانه‌ی تسبیح این نقاط را به راحتی دور می‌زند و اندازه‌ی سرعت درست قبل و پس از این نقاط یکی است.



الف) منحنی‌های v_x بر حسب t را برای سه دانه تسبیح به طور کیفی در پاسخ نامه بکشید.

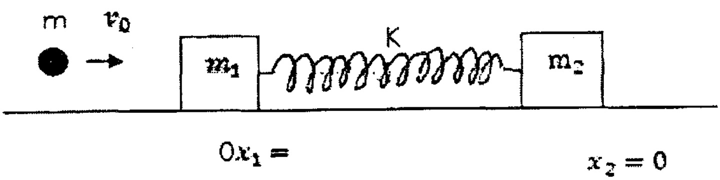
ب) زمان رسیدن هر کدام از تسبیح‌ها به نقطه B از سه مسیر مختلف را $T_1 : T_{AB}$ ،$T_2 := T_{AOB}$ ،$T_3 := T_{ACB}$، بنامید. این زمان‌ها را حساب کنید.

ج) در حد $a / b \to 0$، یعنی در حد که شکل سه سیم به هم نزدیک می‌شود، نسبت T_2 / T_1 و T_3 / T_1 را حساب کنید. نتیجه را تا حد امکان ساده کنید.

سؤال‌های امتحان سوم المپیاد فیزیک ـ بیست و یکمین دوره ـ تابستان ۸۷

وقت: ٤ ساعت و ۳۰ دقیقه

۱- دو قطعه چوب به جرم‌های m_1 و m_2 مطابق شکل در ابتدا روی میز افقی بدون اصطکاکی ساکن هستند و با فنر بدون جرمی به ضریب k به یکدیگر متصل‌اند. گلوله ای به جرم m با سرعت اولیه v_0 به سمت m_1 شلیک می‌شود و در آن فرو می‌رود. زمان متوقف شدن گلوله نسبت به m_1 ناچیز است. مبدأ زمان (لحظه $t=0$) را لحظه برخورد گلوله با m_1 و مبدأ مکان را برای جرم‌های m_1 و m_2 به ترتیب محل قرار گرفتن (مثلاً لبه راست) آن‌ها در این لحظه بگیرید به طوری که $x_2(0)=x_1(0)=0$. پاسخ هر قسمت را بر حسب پارامترهای داده شده در صورت مساله و یا پارامترهای معرفی شده در قسمت‌های قبل از آن بیان کنید.



۱- سرعت جرم‌ها بلافاصله بعد از برخورد گلوله چیست؟ (v_{20}, v_{10})

۲- اگر فنر حداکثر به اندازه طول d قابل فشرده شدن باشد، حداکثر v_0 چه قدر باشد تا فنر به این حالت، یعنی فشردگی کامل نرسد؟ $(v_{0\max})$ در بخش‌های ۳، ۴ و ۵ این مساله فرض کنید $v_0 < v_{0\max}$

۳- چه مدت طول می‌کشد تا جرم‌ها برای نخستین بار به کمترین فاصله از هم برسند؟ (τ)

۴- $X_1(t)$ و $X_2(t)$ را به دست آورید.

۵- شرط آن که m_1 به توقف لحظه‌ای برسد چیست؟ در صورت برقرار بودن این شرط، توقف m_1 نخستین بار در چه لحظه‌ای اتفاق می‌افتد؟ (t_1) و سرعت m_2 در این لحظه چیست؟ $(V_2(t_1))$

۶- اگر v_0 از مقدار فوق یعنی $v_{0\max}$ بیشتر باشد، لحظه t_2 که در آن فنر کاملاً فشرده می‌شود را پیدا کنید.

۷- اگر پس از رسیدن به فشردگی کامل، دو قطعه چوب مدت بسیار کوتاهی با هم حرکت کنند، $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را پس از آن (با همان مبدأهای زمان و مکان ذکر شده) به دست آورید.

۲- ذره‌ای به جرم m دریک بُعد تحت تأثیر نیرویی با انرژی پتانسیل $V(x)$ که در x_0 بیشینه است، قرار دارد. وقتی ذره در x_1 $(x_1 < x_0)$ است، انرژی اش با بیشینه انرژی پتانسیل $V(x_0)$، برابر است و به سمت x_0 می‌رود.

الف) انرژی پتانسیل را تحلیلی بگیرید، در این صورت $V(x)$ در نزدیکی x_0 بسط تیلور دارد و خودش به آن هم گرا است، یعنی

$$V(x) = V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + \frac{V''(x_0)}{2}(x - x_0) + \cdots$$

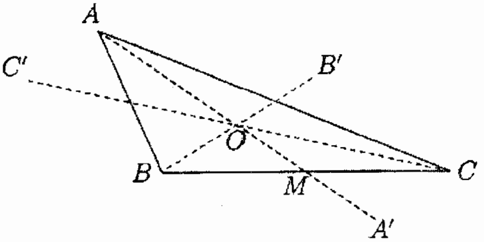
T_1 زمانی که ذره از نقطه x_1 به x_0 می‌رسد را به صورت یک انتگرال بنویسید.

$$T_1 = \int_{x_1}^{x_0} dx\ f(x)$$

$f(x)$ چیست؟ اگر فرض کنیم که x_1 خیلی به x_0 نزدیک است $(x_1 := x_0 - \varepsilon)$، مقدار انتگرالی را که داشتید حساب کنید.

ب) فرض کنید پتانسیل در نقطه‌ای که بیشینه است تحلیلی نیست، مثلاً $V(x) = -\beta|x|^{3/2}$ در $x = 0$. T_2 زمانی که ذره از نقطه x_1 به $x = 0$ می‌رسد چه قدر است؟ β ثابتی مثبت است.

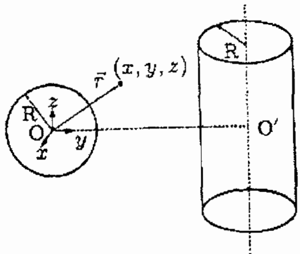
۳- سطحی به شکل یک مثلث با ضلع‌های $BC := a$، $AC := b$ و $AB := c$ با چگالی بار سطحی یک نواخت σ باردار شده است. مطابق شکل O مرکز مثلث (محل تقاطع میانه‌ها)، و A' در امتداد میانه AM است به طوری که $AA' = 2AO$. نقاط B'، و C' نیز به همین ترتیب در امتداد دو میانه دیگر هستند. صفحه مثلث را صفحه x, y و O مرکز مثلث را مبدأ مختصات بگیرید.



الف) پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ای با مختصات x, y علاوه بر x, y به ابعاد مثلث a، b، c و چگالی σ بستگی دارد، $\Phi(x, y) = F(x, y, a, b, c, \sigma)$. با استفاده از تحلیل ابعادی کلی ترین شکل بستگی تابع F و در نتیجه $\Phi(x, y)$ به پارامترهای مربوطه چیست؟ با استفاده از تحلیل ابعادی کلی‌ترین شکل بستگی پتانسیل الکتریکی در نقطه O، Φo، چیست؟

ب) با استفاده از تحلیل ابعادی رابطه‌ای بین Φ_O پتانسیل الکتریکی در نقطه O مرکز مثلث، و $\Phi_{A'}$، $\Phi_{B'}$، و $\Phi_{C'}$ پتانسیل الکتریکی درنقاط A'، B'، و C' به دست آورید.

۴- یک کره عایق به شعاع R با چگالی بار حجمی یکنواخت ρ و یک استوانه عایق به طول نامتناهی، شعاع R و چگالی بار حجمی یکنواخت ρ در نظر بگیرید.



محور استوانه‌ای موازی محور z و $O\vec{O}' = 4R\hat{j}$ است. اگر $\vec{r}$ بردار مکان یک نقطه دلخواه مانند (x,y,z) در فضا نسبت به مبدأ O باشد، بردار میدان الکتریکی را در نقاط زیر بر حسب x,y,z و سایر پارامترها به دست آورید.

آ) داخل کره

ب) خارج ازکره و استوانه

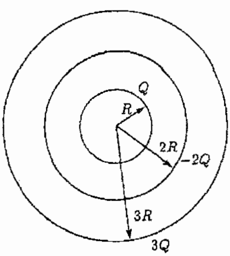
ج) داخل استوانه

اختلاف پتانسیل بین نقاط خواسته شده در زیر را به دست آورید.

د) $V_o - V_{o'}$

ه) $V_A - V_B$ که A نقطه‌ای روی سطح کره به مختصات $(R,0,0)$ و B نقطه‌ای روی سطح جانبی استوانه به مختصات $(R,4R,0)$ است.

۵- سه پوسته کروی هم مرکز رسانا به شعاع‌های R، 2R و 3R که به ترتیب دارای بار الکتریکی Q، 2Q- و 3Q هستند. در نظر بگیرید.



الف) میدان الکتریکی را در نواحی: $r < R$، $R \le r < 2R$، $2R \le r < 3R$ و $r \ge 3R$ بنویسید.

ب) $V(R)$ و $V(3R)$ چقدر است؟ مبدأ پتانسیل را در بینهایت بگیرید.

ج) انرژی الکتریکی ذخیره شده در این دستگاه چقدر است؟

پوسته داخلی را با سیم نازکی که روکش عایق دارد و از سوراخ کوچکی که در پوسته وسطی تعبیه شده، می‌گذرد به پوسته بیرونی وصل می‌کنیم. فرض کنید توزیع بار روی هر پوسته هنوز هم متقارن است.

د) بار الکتریکی هر پوسته را به دست آورید.

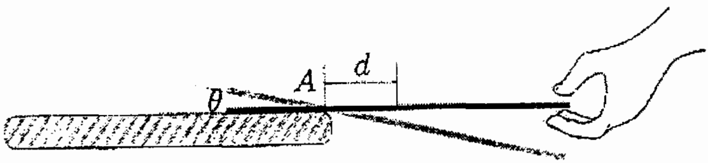
ه) بار الکتریکی روی سطح داخلی و خارجی هر پوسته چقدر است؟

و) انرژی الکتریکی ذخیره شده در این دستگاه چقدر است؟

سؤال‌های امتحان چهارم المپیاد فیزیک ـ بیست و یکمین دوره ـ تابستان ۸۷

وقت: ٤ ساعت

۱- میله یک نواختی به طول L و جرم m را کنار میزی با دست نگه داشته ایم. مرکز جرم میله، در فاصله d از گوشه میز است. میله را را رها می‌کنیم. ابتدا میله مدتی حول نقطه A دوران می‌کند تا آن که ناگهان شروع به لغزیدن می‌کند. ضریب اصطکاک ایستایی میله و میز μ است. لبه میز در نزدیکی نقطه A را بخشی از دایره با شعاع بسیار کوچک بگیرید.



الف) سرعت زاویه‌ای میله قبل از لیز خوردن (که آن را با ω نشان می‌دهیم) را بر حسب θ زاویه دوران میله، شتاب ثقل g، d، و L به دست آورید.

ب) نیرویی عمودی‌ای که میز به میله وارد می‌کند را با N نشان می‌دهیم. تا قبل از لیز خوردن N را بر حسب θ، g، d، m و L را به دست آورید.N همواره بر میله عمود است.

ج) زاویه لیز خوردن میله، θ_0 را بر حسب μ، d، و L به دست آورید. با فرض $\mu = 0.25$ و $d = L/3$ مقدار عددی $\theta_\circ$ چند درجه است.

۲- مطابق شکل طنابی به طول L و جرم یکنواخت M در نظر بگیرید که بین دو نقطه ثابت A و B بسته شده و با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول خط مستقیم AB می‌چرخد. فاصله هر نقطه از طناب تا محور دوران را با طول r نشان می‌دهیم. (توجه کنید مقدار r بسته به هر نقطه طناب تغییر می‌کند.) خط مماس بر طناب در هر نقطه با محور دوران زاویه θ می‌سازد. زاویه مماس بر دو انتهای طناب با محور دوران، $+\theta_\circ$ و $-\theta_\circ$ است.

فرض کنید فاصله مرکز جرم طناب تا محور دوران R_{cm} است.

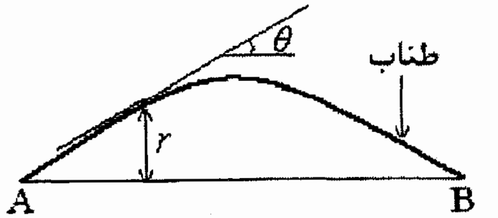
الف) کشش طناب در نقاط A و B را بر حسب M، ω، R_{cm}، و θ_0 به دست آورید. $(T_0 = ?)$

ب) معادله حرکت یک عنصر کوچک روی طناب را بنویسید و کشش طناب در هر نقطه طناب را بر حسب زاویه θ، θ_0 و T_0 به دست آورید.

ج) می‌توان از معادله‌های حرکت رابطه‌ای به صورت $r^2 = f(\theta)$ به دست آورد. $f(\theta)$ را به دست آورید.

د) با توجه به روابط بدست آمده کشش طناب در هر نقطه را بر حسب فاصله آن نقطه تا محور دوران (r) و ثابت‌های دیگر به دست آورید.

ه) بیشترین فاصله طناب از محور دوران چه قدر است؟ $r_{max} = ?$



۳- دو صفحه رسانای نیمه بی نهایت عمود بر هم‌اند و پتانسیل الکتریکی صفر دارند. خط مشترک دو صفحه، محور z است. بار نقطه‌ای q در نقطه $(a,b,0)$ قرار دارد.

الف) پتانسیل الکتریکی را در ربع فضایی که بار q در آن است به دست آورید.

ب) چگالی سطحی بار الکتریکی القا شده روی هریک از دو صفحه رسانا را پیدا کنید.

ج) روی صفحه رسانایی که در صفحه xz قرار دارد، نوار باریکی به ضخامت dx، به موازات محور z و در فاصله x از آن در نظر بگیرید. این نوار از $z \to -\infty$ تا $z \to +\infty$ واقع است. بار الکتریکی روی این نوار را به دست آورید.

د) با توجه به قسمت (ج) بار کل روی رسانایی که در صفحه xz است را به دست آورید.

ه) بار کل روی رسانایی که در صفحه yz است را نیز به دست آورید.

و) مجموع بار کل روی دو رسانا را حساب کنید.

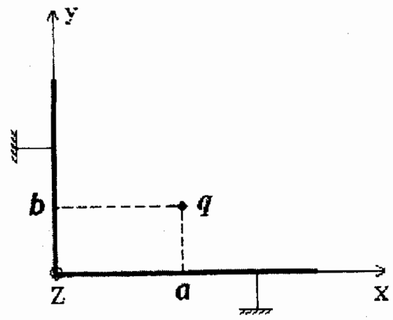
توجه: انتگرال‌های زیر ممکن است مفید باشند.

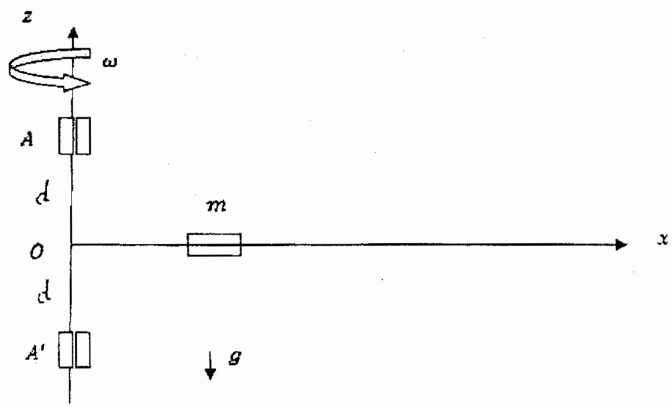
$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)} = \frac{1}{a}\operatorname{Arc}\tan(\frac{x}{a})$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$$

$$\int \frac{xdx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2}\ln(a^2+x^2)$$





۴- دستگاه شکل فوق از دو میله بسیار سبک که در نقطه O به هم جوش داده شده‌اند تشکیل شده است. وزنه m روی بازوی بسیار طویل Ox قرار دارد و ضریب اصطکاک (جنبشی) آن با میله μ است. بازوی عمودی توسط یاتاقان‌های A و A' در امتداد محور z نگه داشته شده و با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد. شتاب ثقل در راستای $(-z)$ است.

۱. ابتدا فرض کنید شتاب ثقل وجود ندارد. معادله‌ای برای $r(t)$ به دست آورید.
۲. a چه باشد تا e^{at} حل معادله‌ی فوق باشد.
۳. نیروی عمودی میله بر جسم، $N(t)$ را به دست آورید.
۴. تکانه زاویه‌ای دستگاه $L(t)$ نسبت به نقطه O را به دست آورید.
۵. گشتاور خارجی وارد بر دستگاه $T_{ov}(t)$ نسبت به نقطه O را به دست آورید.
۶. نیروی افقی یاتاقانهای A و A' بر میله عمودی $F(t)$ را به دست آورید و گشتاور آن‌ها نسبت به نقطه O را به دست آورید.
۷. حال شتاب ثقل را در نظر بگیرید و معادله‌ای برای $r(t)$ به دست آورید.
۸. a چه باشد تا $r(t) = r_{\circ} \cosh at$ حل معادله‌ی فوق باشد.

۹. $N(t)$ را به دست آورید.

راهنمایی: سینوس و کسینوس هذلولوی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) \qquad \cosh x = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$$

و برخی از خواص آن‌ها چنین است:

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1 \qquad \cosh(0) = 1 \qquad \sinh(0) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$$

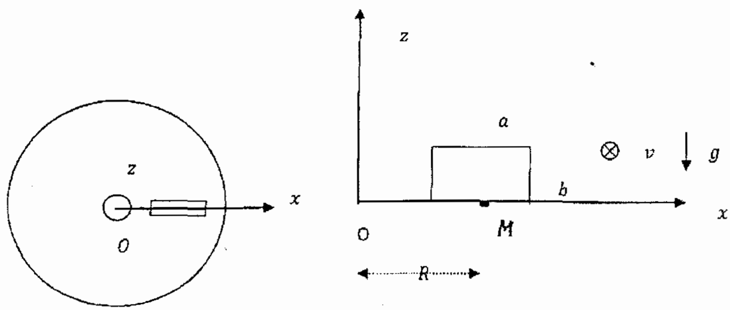
و

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$$

سؤال‌های امتحان نهایی المپیاد فیزیک ـ بیست و یکمین دوره ـ تابستان ۸۷

وقت: ۱۰ ساعت

۱- جعبه‌ای به ابعاد a، b و d روی یک صفحه افقی که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور قائم Z می‌چرخد قرار دارد و همراه آن می‌چرخد. شکل سمت چپ نمای دستگاه را از بالا نشان می‌دهد و شکل سمت راست نمای جانبی دستگاه را در شرایطی نشان می‌دهد که سرعت جعبه به سمت داخل شکل است. فرض کنید $d \ll R$ و ضریب اصطکاک ایستایی جسم با صفحه چرخان μ_s است و تغییرات سرعت زاویه‌ای به حدی آرام صورت می‌گیرد که همواره می‌توان حرکت دستگاه را با سرعت زاویه‌ای ثابت گرفت، به طوری که در دستگاه چرخان، جعبه در جهت مماس هیچ نوع جابه‌جایی ندارد.



۱. به ازای ω معین، حداقل μ_s چه قدر باشد تا جعبه سر نخورد.

۲. چنانچه جعبه سر نخورد، نقطه اثر نیروی گریز از مرکز را به دست آورید.

۳. چنانچه جعبه سر نخورد، فاصله نقطه اثر نیروی عمودی سطح از نقطه M را به دست آورید.

۴. اگر ω به آرامی زیاد شود و اصطکاک به اندازه کافی بزرگ باشد به ازای سرعت زاویه‌ای معینی جعبه کله پا می‌شود، یعنی حول لبه بیرونی خود می‌چرخد و روی وجه دیگر قرار می‌گیرد.
برای سهولت فرض می‌کنیم پس از ۹۰ درجه چرخش جعبه مجدداً روی صفحه ساکن شود.
این سرعت زاویه‌ای حدی ω_m را به دست آورید.

۵. به ازای مقادیر مختلف پارامترها معلوم کنید با افزایش بسیار آرام سرعت زاویه‌ای در چه صورتی جعبه ابتدا سر می‌خورد و در چه صورتی ابتدا کله پا می‌شود.

۶. در هر یک از دو صورت فوق معلوم کنید با توجه به پارامترها حرکت بعدی سرخوردن است یا کله پا شدن. سپس مشخص کنید حرکت‌های بعدی با افزایش تدریجی ω چگونه است.

۲- N پره به طول R در نظر بگیرید که روی یک صفحه قرار گرفته‌اند. یک انتهای پره‌ها در نقطه O به هم لولا شده‌اند و زاویه بین دو پره متوالی $\frac{2\pi}{N}$ است. کشی به طول آزاد l_0 و ضریب سختی k_0 در

نظر بگیرید. دو انتهای این کش را به هم گره می‌زنیم و سپس آن را دور انتهای دیگر پره‌ها می‌اندازیم، به طوری که از انتهای هر N پره عبور کند و تشکیل یک N ضلعی منتظم دهد (مطابق شکل). فرض کنید هیچ اصطکاکی بین کش و پره‌ها وجود ندارد. برای راحتی کار فرض کنید $l_0 = 0$ است.

الف) انرژی پتانسیل ذخیره شده در کش (U) را به دست آورید.

ب) کشش کش (T) و نیرویی که به هر پره از طرف کش وارد می‌شود (F) را به دست آورید.

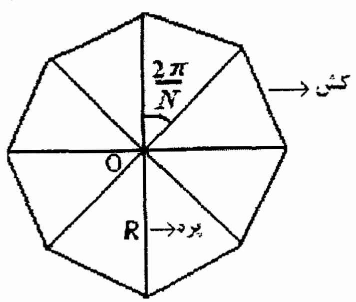
ج) U، T، و F را در حد $N \to \infty$ پیدا کنید.

فرض کنید پره‌ها حول محوری عمود بر صفحه N ضلعی و گذرنده از O (مرکز N ضلعی) به راحتی بچرخند. همچنین فرض کنید زاویه بین پره i ام و $(i+1)$ام به اندازه $\Delta\theta_i$ تغییر کند.

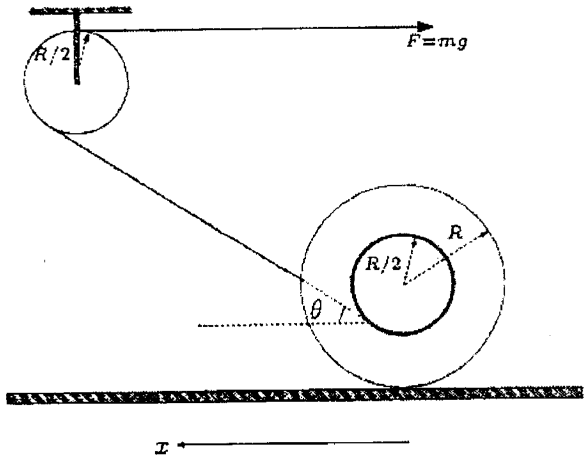
د) تغییر طول بخشی از کش که بین دو پره متوالی i ام و $(i+1)$ام است را نسبت به طول همین بخش در حالت قبل $(\Delta\theta_i = 0)$ تا مرتبه دوم نسبت به $\Delta\theta_i$ پیدا کنید.

ه) تغییر کل طول کش را نسبت به طول آن در حالت قبل $(\Delta\theta_i = 0)$ تا مرتبه دوم نسبت به $\Delta\theta_i$ حساب کنید. انرژی پتانسیل ذخیره شده در کش (U') را در این حالت تا همین مرتبه نسبت به $\Delta\theta_i$ به دست آورید.

و) تفاوت انرژی پتانسیل در حالت اول $(\Delta\theta_i = 0)$ و حالت جدید $(\Delta\theta_i \neq 0)$ را پیدا کنید.



۳- نخ بلندی به دور قرقره‌ای به جرم m، شعاع خارجی R، و شعاع داخلی $R/2$ پیچیده شده است. مطابق شکل سر دیگر این نخ پس از گذشتن از قرقره ثابتی به شعاع $R/2$ با نیروی ثابت F $(F = mg)$ کشیده می‌شود. g شتاب ثقل است. لختی دورانی قرقره حول محور تقارنش $I = mR^2/2$ است. ضریب اصطکاک قرقره با زمین را μ بگیرید. زاویه‌ای که نخ بین دو قرقره با افق می‌سازد را θ بگیرید. مقدار اولیه θ, θ_0 است و در ابتدا قرقره بسیار دور است $(\theta_\circ \approx 0)$. جهت مثبت محور x در شکل نشان داده شده است. از جرم و لختی دورانی قرقره ثابت، جرم نخ و ضخامت نخ چشم پوشی کنید.



الف) فرض کنید ضریب اصطکاک آن قدر هست که قرقره می‌غلتد. معادلات لازم برای محاسبه شتاب را به دست آورید.

ب) فرض کنید ضریب اصطکاک آن قدر هست که قرقره می‌غلتد. شتاب آن، a، چه قدر است؟

ج) μ چه قدر باشد تا قرقره درست پس از این که در زاویه $\theta_0 \approx 0$ رها شد، بغلتد؟ جواب خود را تا مرتبه اول θ_0 به دست آورید.

د) به ازای چه مقداری از θ شتاب قرقره صفر می‌شود؟ این زاویه را θ_1 بگیرید. فرض کنید ضریب اصطکاک آن قدر هست که در این زاویه قرقره می‌غلتد.

ه) μ چه قدر باشد تا در تمام مدتی که قرقره از زاویه θ_0 شروع به حرکت کرده تا به جایی که شتابش صفر می‌شود، یعنی زاویه θ_1 بغلتد؟

۴- ابری کروی متقارن از ذرات با چگالی جرمی یکنواخت ρ_0 را در نظر بگیرید. مبدأ مختصات را مرکز کره بگیرید. سرعت ذرات در زمان $t = 0$ مطابق قانون هابل متناسب با r فاصله تا مرکز ابر است.

$$V(r) = Hr, \qquad (1)$$

H که ضریب هابل نامیده می‌شود مستقل از مکان است. این مدل، مدلی ساده برای انبساط جهان است. ضریب هابل در زمان $t = 0$، $H(0)$، چگالی جرمی ρ_0 و ثابت جهانی گرانش، G داده شده‌اند.

الف) لایه‌ای کروی و نازک به ضخامت $\delta r(0)$ در نظر بگیرید. سطح داخلی لایه در شعاع r_0 است. پس از زمان کوتاه δt ضخامت لایه $\delta r(\delta t)$ چه قدر است؟ جواب خود را تا مرتبه اول δt و بر حسب $\delta r(0)$، δt و $H(0)$ بنویسید.

ب) پس از این زمان سرعت نقاط سطح داخلی این لایه υ_1، و سرعت نقاط سطح خارجی این لایه υ_2 چه قدر است؟ جواب‌های خود را بر حسب $\delta r(0)$، δt، r_0، G، ρ_0 و $H(0)$ بنویسید. $v(r, \delta t)$

سرعت ذره‌ای در نقطه r در زمان δt چه قدر است؟ جواب خود را بر حسب δt، r، δt، ρ_0 و $H(0)$ بنویسید.

ج) چگالیی جرمی لایه در زمان δt یعنی $\rho(\delta t)$ چه می‌شود؟ جواب خود را تا مرتبه اول δt و بر حسب $\delta r(0)$، δt، ρ_0 و $H(0)$ بنویسید. آیا چگالی لایه بعد از این زمان هم چنان یکنواخت باقی می‌ماند؟ چرا؟

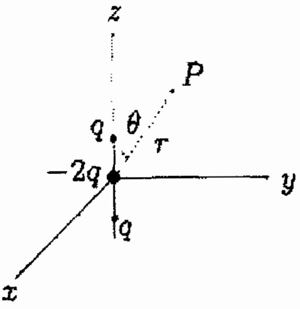
د) پس از گذشت زمان t، که کوچک هم نیست، ذره‌ای که در شعاع r_0 است به شعاع r می‌رسد. شتاب ذره در این لحظه را بر حسب r_0، G، ρ_0 و r به دست آورید.

ه) چگالی بحرانی‌ای مثل ρ_c وجود دارد که اگر چگالی اولیه، ρ_0، از آن کوچک تر باشد انبساط تا ابد ادامه پیدا می‌کند. ρ_c چه قدر است؟

راهنمایی: سرعت ذره در نقطه‌ی r را به دست آورید.

و) فرض کنید $\rho_0 = \rho_c$ باشد. ذره‌ای در ابتدا در شعاع r_0 است. مکان ذره در زمان t، $r(t)$ را بر حسب $\delta r(0)$، t و $H(0)$ به دست آورید. ضریب هابل را نیز بر حسب $H(0)$ و زمان به دست آورید.

۵- بار نقطه‌ای $-2q$ را در مبدأ مختصات و دو بار نقطه‌ای دیگر q در نقاط $(0,0,\ell)$ و $(0,0,-\ell)$ روی محور z در نظر بگیرید.



الف) پتانسیل الکتریکی را در نقطه P به مختصات (r,θ) به ازای $r \gg \ell$ تا اولین مرتبه غیرصفر، بر حسب r و θ بنویسید.

ب) بردار میدان الکتریکی را در نقطه P به مختصات (r,θ) به ازای $r \gg \ell$ تا اولین مرتبه غیر صفر، بر حسب r و θ بنویسید.

ج) معادله یک سطح هم پتانسیل مربوط به این توزیع بار را در همان شرایط $r \gg \ell$، بر حسب r و θ بنویسید.

د) مقطعی از سطوح هم پتانسیل الکتریکی $\pm\frac{1}{1000}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\ell}$ را در صفحه‌ی $y-z$ به دقت رسم کنید.

ه) معادله خطوط نیروی مربوط به این توزیع بار را در همان شرایط $r \gg \ell$، بر حسب r و θ به دست آورید.

و) یک دسته از خطوط نیروی قسمت (ه) را در صفحه‌ی $y-z$ به ازای $0 \le \theta \le 2\pi$ رسم کنید.

در صورت نیاز:

$$\int\frac{d\theta}{\sin\theta} = \ln\tan\frac{\theta}{2}$$

۶- بر رئوس مستطیلی به طول $2a$ و عرض $2b$ بارهای یکسان Q قرار داده شده است. طول مستطیل در امتداد محور x و عرض آن در امتداد محور y است و مبدأ مختصات بر مرکز آن منطبق است. بار نقطه‌ای q به جرم m در مبدأ مختصات به حال تعادل است. فرض کنید ساز و کاری (مثل یک لوله) وجود دارد که باعث می‌شود بار q فقط بتواند در امتداد یک خط راست از مبدأ منحرف شود.

الف) معین کنید برای جابه‌جایی‌های کوچک درهر یک از راستاهای x، y و z در چه صورتی تعادل بار q در مبدأ پایدار است. در این صورت دوره تناوب (پریود) نوسان‌های کوچک حول مبدأ را به دست آورید. جواب را بر حسب $C = \sqrt{a^2+b^2}$ و $A = tg^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ بیان کنید.

ب) tgA چه مقادیری داشته باشد تا بار q بتواند در صفحه xy روی یک مسیر بسته حرکت کند.

ج- اگر بار q در صفحه xy در امتداد محوری که با محور x زاویه ثابت φ می‌سازد حرکت کند،

ج-۱) زاویه φ_0 را چنان تعیین کنید که دوره نوسان بسیار بزرگ باشد.

ج-۲) چه شرطی روی tgA داشته باشیم تا به ازای هر φ دلخواه حرکت نوسانی (تعادل پایدار) باشد.

۷- در لحظه‌ای $t=0$ سه ذره به جرم‌های m_1 و m_2 و m_3 بر سه رأس یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ℓ_0 قرار دارند. مبدأ مختصه‌ها را مرکز جرم سه ذره می‌گیریم. تنها نیروی وارد بر هر ذره نیروی گرانش دو ذره دیگر است. فاصله‌ی ذره‌ی i ام از مبدأ r_i است.

الف) اندازه و جهت نیروی وارد بر ذره‌ی i ام را حساب کنید.

فرض کنید در $t=0$ اندازه سرعت ذره i ام v_i و جهت آن به سمت مرکز جرم باشد و داشته باشیم

$$\frac{v1}{r1}=\frac{v2}{r2}=\frac{v3}{r3}=b_0$$

در بازه‌ی زمانی بسیار کوچک $[o, \delta t]$ حرکت ذره‌ها را شتاب دار با شتاب ثابت بگیرید. در زمان $t = \delta t$ ذره i ام در فاصله‌ی $r_i - \delta r_i$ از مبدأ است.

ب) $\frac{\delta r_i}{r_i}$ را حساب کنید.

سرعت اولیه هر سه ذره را صفر بگیرید و فرض کنید که حرکت چنان است که مثلثی که رئوسش مکان سه ذره است همواره متساوی الاضلاع بماند. طول ضلع مثلث را $s\ell_0$ بگیرید. در این جا s تابع زمان است.

ج) با نوشتن قانون دوم نیوتن، یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه 2 برای s به دست آورید.

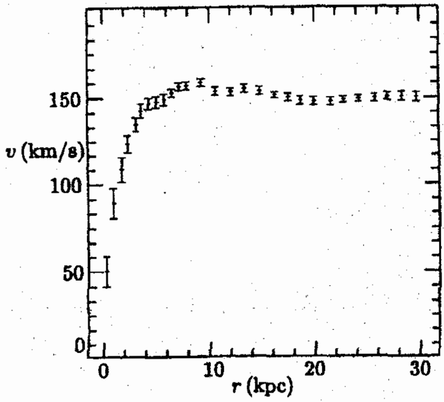
د) یک معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی 1 برای s بنویسید. راهنمایی: اگر به ذره‌ای یک نیروی پایستار وارد شود انرژی کل آن ثابت است.

ه) معادله بالا را برای s حل کنید (یعنی انتگرال بگیرید). شرط آغازین مناسب را اعمال کنید. و زمان رسیدن سه ذره به هم (یعنی صفر شدن s) را به دست آورید.

راهنمایی: انتگرال را با تغییر متغیر $s = \sin^2 \theta$ بگیرید.

۸- ستاره‌های کهکشان به دور مرکز آن با سرعت $v(r)$ می‌چرخند، که r فاصله ستاره تا مرکز کهکشان است. در شکل زیر داده‌های مربوط به این اندازه گیری برای یک کهکشان مارپیچی آمده است.

در حل مساله به تقریب چگالی جرم را پیوسته بگیرید و فرض کنید این جرم به طور همسانگرد پخش شده. یک پارسک برابر است با $1pc = 3\times10^{16} m$. ثابت جهانی گرانش $G = 7\times10^{-11} Nm^2kg^{-2}$ است.



الف) $v(r)$ چه رابطه‌ای با $M(r)$، جرم درون کره‌ای به مرکز کهکشان و شعاع r، دارد؟

ب) با توجه به این که برای $r > 10kpc$ منحنی سرعت بر حسب فاصله تقریباً تخت است، $M(r)$ را بدست آورید. به ازای این مقادیر r، چگالی جرم $\rho(r)$ بر حسب G، و r تقریباً چیست؟ $\rho(r)\big|_{r=20kpc}$ تقریباً چقدر است؟

ج) اگر شعاع کهکشان تقریباً $r = 100kpc$ باشد و سرعت بر حسب فاصله از $r = 30kpc$ تا $r = 100kpc$ همان مقدار ثابت قبلی باشد، جرم ماده کهکشان برای شعاع بیش از $r = 10kpc$ را به تقریب به دست آورید.

۹- یک پوسته کروی رسانای بدون بار به شعاع a در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}_0$ در نظر بگیرید. یک روش برای ایجاد میدان تقریباً یکنواخت $\vec{E}_0$ در نزدیکی مبدأ، قرار دادن دو بار نقطه‌ای $\pm Q$ در $z = \mp L$ است. میدان این دو بار نقطه‌ای در مبدأ $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{L^2}$ است. برای این که میدان یکنواخت اولیه $\vec{E}_0$ که کره در آن قرار گرفته، تولید شود، کافی است $Q \to \infty$ و $L \to \infty$ به طوری که $E_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{L^2}$ و E_0 مقدار ثابتی باشد.

الف) به کمک روش تصویر و توضیحات بالا پتانسیل الکتریکی را در نقطه p بر حسب r، θ، a، E_0 به دست آورید.

ب) بردار میدان الکتریکی را در نقطه‌ی p بنویسید.

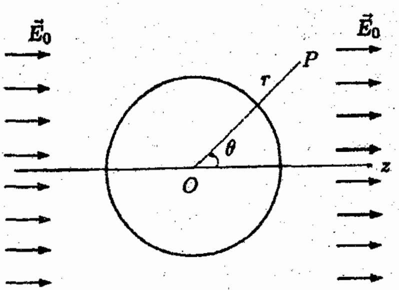
ج) چگالی بار سطحی القایی روی سطح کره را محاسبه کنید.

د) گشتاور دو قطبی الکتریکی وابسته به این توزیع بار چقدر است؟

ه) دو نیم کره‌ای که به وسیله‌ی یک صفحه فرضی عمود بر میدان الکتریکی از پوسته ایجاد می‌شوند چه نیرویی به هم وارد می‌کنند؟

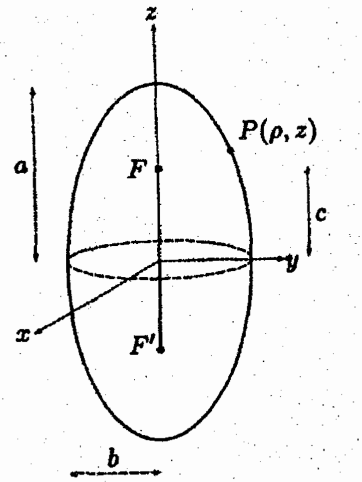
اکنون فرض کنید پوسته رسانا دارای بار خالص q است.

و) کمیت‌های خواسته شده در بندهای الف) تا ه) چقدراند؟



۱۰- در مساله دوم از امتحان دوم دیدیم، سطوح هم پتانسیل یک میله نازک به طول ℓ با توزیع بار یکنواخت، بیضی گون‌هایی هستند که کانون‌های آنها، F و F'، دو سر میله است. بیضی گون، مکان هندسی نقاطی است که مجموع فاصله هر یک از نقاط آن تا دو کانون مقدار ثابتی باشد. در شکل زیر این مقدار ثابت، $2a$ یعنی به اندازه طول قطر بزرگ بیضی گون است. اگر (ρ, z) مختصات استوانه‌ای (ρ فاصله تا محور z است) نقطه P روی سطح یک بیضی گون با مقطع دایره‌ای (در صفحه‌ی $x-y$) باشد داریم:

$$\frac{\rho^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$$



که b نصف قطر کوچک بیضی است. اگر c فاصله‌ی کانون تا مرکز بیضی باشد، بین a، b و c رابطه‌ی $b^2+c^2=a^2$ برقرار است. در ضمن بردار یکه عمود بر سطح بیضی گون در نقطه P

$$\hat{n}=\frac{\dfrac{\rho\hat{\rho}}{b^2}+\dfrac{z\hat{z}}{a^2}}{\sqrt{\dfrac{\rho^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{a^4}}}$$

است.

یک پوسته رسانا به شکل بیضی گون با نیم قطر بزرگ a و مقطع دایره‌ای با نیم قطر کوچک b و بار الکتریکی q در نظر بگیرید.

الف) پتانسیل الکتریکی روی سطح این رسانا را بر حسب a و b به دست آورید.

ب) ظرفیت این پوسته، C را بر حسب a و b به دست آورید.

ج) میدان الکتریکی قائم بر سطح رسانا در نقطه P را به دست آورید.

د) چگالی بارسطحی در نقطه P را بر حسب مختصات این نقطه و a و b محاسبه کنید و جواب را به ساده ترین شکل ممکن بنویسید.

ه) نیروی دافعه بین نیمه‌ی بالایی (بالای صفحه‌ی $x-y$) و پایینی (پایین صفحه‌ی $x-y$) این رسانای باردار را محاسبه کنید.

و) به ازای $a=b$ کمیت‌های خواسته شده در قسمت‌های ب) تا ه) را به دست آورید.