دانشگاه آزاد ایران

آشتی با ریاضیات

۴

زمستان ۲۵۳۶

آشتی با ریاضیات

سردبیر: پرویز شهریاری
مدیر داخلی: محمد حسین احمدی
زیر نظر هیئت تحریریه
از انتشارات جانبی دانشگاه آزاد ایران
نشانی: تهران ـ خیابان کریمخان‌زند ـ اول آبان شمالی ـ دانشگاه‌آزادایران

فهرست مطالب

۵۵ ریال

از یك نامه

یاد دارم که وقتی به‌مدرسه می‌رفتم وحساب وهندسه می‌خواندم از هر کس که در باب فایدهٔ این کار می‌پرسیدم می‌گفت: معلوم است. هر کس باید بتواند بدهکاری و بستانکاری و سود و زیانش را حساب کند و مساحت‌اطاق وزمین و ملکش را اندازه بگیرد. من که نه زمین وملکی داشتم، نه‌بدهکاری‌وبستانکاری، ونه‌می‌خواستم‌فروشنده و بازرگان شوم، هیچ‌ندانستم چرابايد اینهمه‌روزهایم صرف حساب سودوزیان وبده‌وبستان بازرگانان مسئله‌هایم شود.

سالها گذشت و اصول و مقدمات ریاضی‌راطوطی‌وار فراگرفتم وامتحانها را یکی پس از دیگری گذراندم. نوبت به‌جبر وهندسهٔ استدلالی رسید و اندك اندك جنبهٔ منطقی ریاضیات چهرهٔ زیبایش را آشکار ساخت و من شیفتهٔ این زیبایی شدم ــ حس وجمالی که در تقارن، استحکام وبیکرانگی آن نهفته بود.

البته زندگی کوتاهتر و دشوارتر از آنست که بتوان به‌هرآنچه دوست داشتنی است دست یافت و من همچنانکه از موسیقی بهره‌ای نبردم، جهانگرد نشدم... ریاضی‌دان هم نشدم، اما قلبم همچنان از محبت آنها مالامال ماند و یادشان را عزیز داشتم.

انتشار «آشتی باریاضیات» برای من درحکم‌بازیافتن نامه‌های عاشقانه و بازدیدن عشق کهنه بود ــ

من که از ریاضیات جز مقدماتی نمی‌دانم، دیدم که به‌یاری همان مقدمات می‌توانم مقاله‌های آشتی باریاضیات را بخوانم و از آن چیزهـای فراوان تازه‌ای بیاموزم و دریافتم که خودم هم می‌توانم در این آموزش شرکت کنم

آشتی باریاضیات یك نشریهٔ علمی‌ساده وغیرتخصصی است، ولی بهیچـروی عوامانـه نیست. مطالب آن پوچ، بی‌فایده وپیش‌پاافتاده نیست ـ یعنی چیزهایی نیست که، نقل مجلس عوام باشد و در هـر جزوهٔ درسـی بتوانش یافت. ازینرو وقتی منتشر شد و به‌دست مردم رسید دانستم که نه‌تنها دانش‌آموز دبیرستان ودانشجوی دانشگاه آن‌را با رغبت، می‌خواند، نه‌تنها پزشك ومهندس وسردفتر درآن مطالب خواندنی پیدا می‌کند، بلکه برخی مطالبش برای، ریاضی‌دان یا معلم ریاضی هم جالب، یادآور ویاری کننده است. واین سخن را به‌استناد گفتگوهایی کـه بـا مردم و فروشندگان داشته‌ام، می‌گویم.

این مردم‌پذیری آشتی‌باریاضیات به‌خـاطر آنست که می‌کوشد همبستگی دانشهاوهمبستگی کوششهای بشری رابرای‌پرورش وپیشبردآن‌نشان‌دهدوجای‌واقعی ریاضیات را در زندگی روزانه و درفرهنگ بشری آشکار سازد.

سعی آشتی با ریاضیات در این نیست‌که با بالابردن جایگاه ریاضیات و دور از دسترس ساختن آن برارزش و اعتبارش بیفزاید، بلکه می‌کوشد با بردن آن به‌میان مردم وقراردادنش دردسترس، همه‌را بدان‌علاقه‌مندودلبسته‌سازد

حال تو ای خوانندهٔ عزیز، بگو که تو برای آشتی باریاضیات چه می‌کنی؟

آیا آن‌را به‌دیگران می‌شناسانی؟

آیا برایش چیزی می‌نویسی؟

آیا آن را به‌محك نقد می‌آزمایی؟

اواریست گالوا

اواریست گالوا Evarist Galois در ۲۵ اکتبر ۱۸۱۱ در بورگ ـ لا ـ رن نزدیك پاریس متولد شد. پدرش نیکولا گابریل گالوا جمهوریخواه و رییس حزب آزادیخواه دهکده بود، و بعد از آنکه در سال ۱۸۱۴ لوئی هجدهم دوباره به‌سلطنت رسید، او شهردار شد. مادر اواریست ماری ـ آدلد Adelaide-Marie (متولد دمان) Dement دختر یك مشاور حقوقی بود، او د رنتیجه تعلیمات خشك مذهبی و کلاسیك در خواندن لاتین بسیار روان بود.

گالوا دوازده سال ابتدایی زندگیش را تحت تعلیم مادرش بود که او را با زمینه‌ای کلی از دروس کلاسیك آشنا کرد. به‌نظر می‌رسد که دوران کودکیش سرشار از شادی بوده است. در ده‌سالگی جایی در کالج رایم به‌او پیشنهاد شد، اما مادرش ترجیح می‌داد که او درخانه تعلیم‌ببیند. در اکتبر ۱۸۲۳ وارد مدرسهٔ لوئی ـ لو ـ گران شد. در اولین ترم؛ دانشجویان اعتصاب، و از خواندن سرودهای مذهبی,خودداری کردند، و صد نفر از آنها اخراج شدند.

دو سال اول مدرسه را گالوا بسیار خوب پیشرفت کرد و جایـزه‌ای در درس لاتین برد. اما بعد دیگر علاقه‌ای نشان نداد. او مجبور شد کـه کلاسهای سال بعد را تکرار کند، اما این مسئله فقط کسالت او را بیشتر کرد. درهمین اوان بود که گالوا به‌طور جدی به‌ریاضیات علاقه‌مند شد. او به‌نسخه‌ای از «مقدمات هندسه» لژاندرکه سبکی کلاسیك داشت و با اصول اقلیدسی که در مدرسه فرا گرفته بود متفاوت بـود، برخـورد. گفته‌اند که گالوا این کتاب را همچون داستانی خواند و با یکبار خواندن آن را فرا گرفت. مباحث جبری مدرسه نمی‌توانستند با شاهکار لژاندر رقابت کنند و گالوا در عوض به‌مقالات کلی لاگرانژوآبل روی آورد. در پانزده سالگی مقالاتی را که برای ریاضیدانان حرفه‌ای نوشته شده‌بود می‌خواند. اما تکالیف مدرسه‌اش باقی می‌ماند. به‌نظر می‌رسید که علاقه‌اش را نسبت به‌مدرسه از دست داده است. معلمین گالوا این کار او رابد تعبیر کردند و به‌جاه‌طلبی و تنبلی متهم شد.

گالوا همان گونه که از بعضی دست‌نوشته‌هایش دیده می‌شود، بسیار نامنظم کار می‌کرد. بیشتر علاقه داشت در ذهنش کار کند و فقط نتایج مقاصدش را به‌روی کاغذ می‌آورد. معلم گالوا، ورنیه Vernier از او خواست که به‌طور منظم کار کند، اما گالوا به‌پند او اعتنایی نکرد. بدون آمادگی کافی در امتحان مسابقه ورودی مدرسهٔ پلی‌تکنیك شرکت کرد. به‌دست‌آوردن نمره، موفقیت او را حتمی می‌کرد، زیرا پلی‌تکنیك زمینهٔ پرورش ریاضیات فرانسه بود. گالوا شکست خورد. بیست سال بعد ترکم Terquem (سردبیر سالنامهٔ اخبار ریاضی) این عبارت را اظهار داشت: «یك داوطلب با هوش سرشار توسط ممتحنی باهوش کمتر از دست‌می‌رود. من یك وحشی هستم زیرا آنها مرا درك نمی‌کنند.»

در ۱۸۲۸ وارد دانشسرای مقدماتی (Ecole Normale) شد (سایهٔ کمرنگی از پلی تکنیك) و در کلاس ریاضیات پیشرفته، تحت نظارت ریشارد، که نسبت به‌او بسیار همدردی می‌کرد، شرکت جست. ریشارد عقیده داشت که گالوا می‌بایست بدون امتحان در پلی تکنیك پذیرفته می‌شد. سال بعد شاهد انتشار اولین مقالهٔ گالوا دربارهٔ کسر های مسلسل بود، که اگرچه مقالهٔ صلاحیت‌داری بود، هیچ‌اثر نبوغی از آن آشکار نمی‌شد. در همین ضمن گالوا کشفهای اصلی خود را در بـارهٔ نظریـهٔ معادلات چند جمله‌ای انجام داده بود و نتیجهٔ بعضی از کشفـهایش را به‌فرهنگستان علوم تقدیم کرد. داور فرهنگستان کوشی بود که به‌تازگی

On pourra voir ensuite qu'on peut toujours transformer une intégrale en une autre dans laquelle une période de la première sorte devienne divisée par le nombre premier p, et les $2n-1$ autres restent les mêmes.

Il ne reste donc à comparer que des intégrales où les périodes seront les mêmes de part et d'autre, et telles par conséquent que n termes de l'une s'expriment sans autre équation qu'une seule du degré n, au moyen de ceux de l'autre, et réciproquement. Ici nous ne savons rien.

Tu sais, mon cher Auguste, que ces sujets ne sont pas les seuls que j'aie explorés. Mes principales méditations depuis quelque temps étaient dirigées sur l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambiguïté. Il s'agissait de voir à priori dans une relation entre des quantités ou fonctions transcendantes quels échanges on pouvait faire, quelles quantités on pouvait substituer aux quantités données sans que la relation pût cesser d'avoir lieu. Cela fait reconnaître tout de suite l'impossibilité de beaucoup d'expressions que l'on pourrait chercher. Mais je n'ai pas le temps et mes idées ne sont pas encore bien développées sur ce terrain qui est immense.

Tu feras imprimer cette lettre dans la Revue encyclopédique.

Je me suis souvent hasardé dans ma vie à avancer des propositions dont je n'étais pas sûr. Mais tout ce que j'ai écrit là est depuis bientôt un an dans ma tête, et il est trop de mon intérêt de ne pas me tromper pour qu'on me soupçonne d'avoir énoncé des théorèmes dont je n'aurais pas la démonstration complète.

Tu prieras publiquement Jacobi ou Gauss de donner leur avis non sur la vérité, mais sur l'importance des théorèmes.

Après cela il y aura, j'espère, des gens qui trouveront leur profit à déchiffrer tout ce gâchis.

Je t'embrasse avec effusion. E. Galois Le 29 Mai 1832.

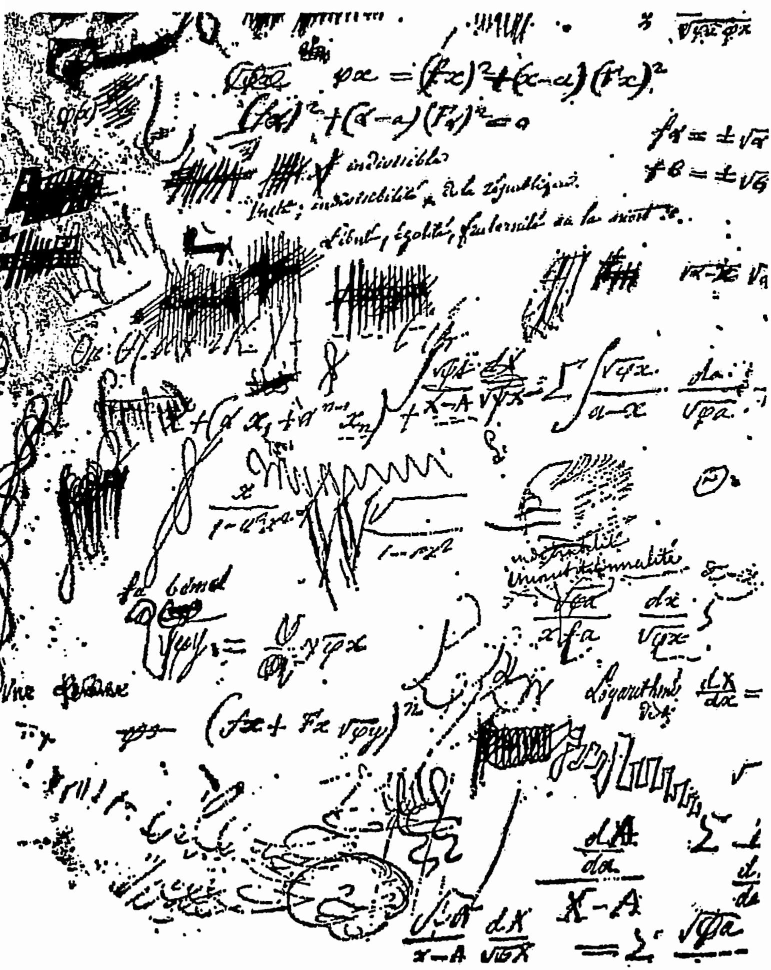
آخرین صفحه از نامهٔ گالوا به اگوست شوالیه[1]

اثری دربارهٔ رفتار تابعها تحت جایگشت متغیرها ــ که‌عنوان اصلی مبحث نظریهٔ گالوا بود ــ منتشر کرده بود. کوشی مقاله را نپذیرفت و مقالـهٔ دیگری را نیز که هشت روز بعد تسلیم او کرد تقریباً به‌همان سرنوشت دچار کرد. دستخطها گم شد و هرگز به‌دست‌نیامد.

در همان سال دو مصیبت دیگر برسر او آمد. در دوم ژوئیهٔ ۱۸۲۹ پدر گالوا بعد از یك دعوای تلخ سیاسی با کشیش دهکده خود کشی‌کرد. چند روز بعد گالوا دوباره قرار شد د رامتحان ورودی پلی‌تکنیك‌شرکت کند ــ آخرین شانس او. روایتی است که او از جادررفت و تخته‌پاك‌کن را به‌صورت ممتحن خود پرتاب‌کرد. اما برطبق نوشتهٔ برتران Bertrand این روایت صحیح نیست. ممتحن، دینه Dinet از گالوا خواست تـا به‌طور مختصر تئوری «لگاریتمهای حسابی» را شرح دهد و گالوا در جواب او گفت که اصلا: «لگاریتمهای حسابی» وجود ندارد. دینه هم او را رد کرد.

در فوریهٔ ۱۸۳۰ گالوا مقالات تحقیقی خود را به‌فرهنگستان علوم تقدیم کرد تا در مسابقهٔ جایزهٔ بزرگ ریاضیات ــ کنگرهٔ افتـخارات ریاضی ــ شرکت کند. اثر او را با ارزشتر از آن دانستندکه‌جایزه را به‌او بدهند. دستخط به‌فوریه دبیر آکادمی رسید که آن را برای بررسی دقیق به‌خانه برد. اما قبل از مطالعهٔ آن درگذشت و دستخط را نتوانستند از میان اوراقش پیدا کنند. بنا بگفته دوپوئی Dupuy ، گالوا عقیده داشت که گم شدن مکرر مقالاتِ او صرفاً تصادفی نیست. او اینها را ناشی از اجتماعی می‌دانست که در آن نوابغ را مورد انکار دایم قرار می‌داد، و نظام سیاسی ظالمانهٔ بوربونها Bourbon را سرزنش می‌کرد.

در ۱۸۲۴ شارل دهم جانشین لوئی هیجدهم شده بود. دو انتخاباتی که در محیط خفقان سالهای ۱۸۲۷ــ۱۸۳۰ برگزار شد، مخالفت اکثریت را برانگیخت. شارل که با استعفا روبرو شد، مبادرت به‌کودتا کرد. در ۲۵ ژوئیه فرمانهای مشهور خود را مبنی بر متوقـف ساخـتن آزادی مطبوعات صادر کرد. تودهٔ مردم قدرت تحمل این مراحل را نداشتند و دست به‌انقلاب زدند. شورش سه‌روز ادامه داشت، که بعد از آن به‌عنوان مصالحه، دوك اورلئان، لوئی‌فیلیپ پادشاه شد. در طول ایـن سه روز، هنگامی که دانشجویان پلی‌تکنیك در خیابانها تاریخ را می‌ساختند، گالوا و شاگردان خصوصیش توسط گینول Guignault رییس مـدرسهٔ نرمال حبس شده بودند. خشم گالوا برانگیخته شد و نامهٔ تندی راجع‌به او



آزادی - برابری - برادری»، یکی از چرکنویسهایی که اواریست گالـوا، قبل از حرکت برای دوئل، روی میزش باقی گذاشت

در مجلهٔ مدارس Gazette des écoles ،با امضای نام کامل خود نوشت. ناشر امضا را جابجا کرد و گالوا در نتیجهٔ نوشتن نامهٔ بدون امضا اخراج شد.

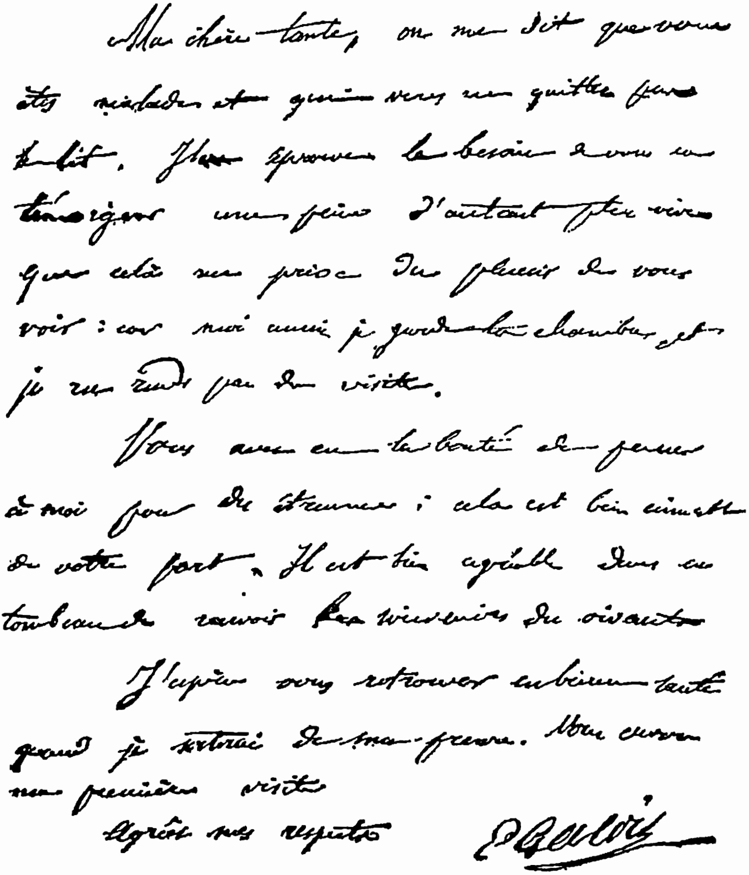
در ۱۳ ژانویه ۱۸۳۱، گالوا سعی کرد که به‌عنوان معلم خصوصی ریاضیات شروع به‌کار کند و درسی در جبر عالی بگیرد. او با موفقیت کمی روبرو شد. در ۱۷ ژانویه بار دیگر مقاله‌ای دربارهٔ «شرایط حل‌پذیری معادلات به‌وسیلهٔ رادیکالها» به‌فرهنگستان فرستاد.

کوشی دیگر در پاریس نبود و پواسون Poisson و لاکروا Lacroix برای داوری در نظر گرفته شدند. دوماه گذشت و گالوا هیچ خبری از آنها نشنید، بنابراین نامه‌ای به‌معاون فرهنگستان نوشت تا از موضوع با خبر شود. اما هیچ جوابی دریافت نکرد.

او به‌توپخانهٔ گارد ملی سازمانی جمهوریخواه پیوست. چندی‌نگذشت که افسران آن به‌عنوان همدستی در توطئه دستگیر شدند، اما هیئت منصفه آنها را تبرئه کرد. توپخانه به‌دستور شاه منحل شد. در ۹ ماه مه مهمانی به‌عنوان اعتراض برپا شد. عملیات بیشتر آشوبگرانه می‌شدند. و گالوا تکه‌نانی باکاردی در دست به‌لوئی فیلیپ تعارف کرد. دوستان او این کار را نوعی تهدید زندگی پادشاه تعبیر کرده و بشدت دست‌زدند. مجلس‌رقص تمام شد و همه فریادکنان در خیابان می‌رفتند. روز بعد گالوا دستگیر شد. در محاکمه او به‌همه‌چیز اعتراف کرد، اما ادعا کرد که آن نان حقیقتاً تعارفی برای لوئی فیلیپ است، «اگر خیانت کند» هیئت داوری او را تبرئه کرد و در ۱۵ ژوئن آزاد شد.

در ۴ ژوئیه او از سرنوشت مقاله‌اش باخبر شد. پواسون آن‌را «غیر قابل درك» قلمداد کرد. گزارش اینگونه ختم می‌شد:

ما هرنوع کوششی را برای درك اثبات گالوا به‌کار بردیم. دلیل او برای ما به‌قدر کافی روشن نیست تا برصحت آن قضاوت کنیم و دراین گزارش هیچ عقیده‌ای را دربارهٔ آن نمی‌توانیم ابراز کنیم. نویسنده می‌گوید قضیه‌ای که موضوع اصلی این مقاله است قسمتی از یك نظریهٔ عمومی است که کاربردهای بسیار دارد. به‌نظر می‌رسد که قسمتهای مختلف یك نظریه بتوانند روشنگر یکدیگر باشند و اگر مجموعهٔ آنها در دسترس باشد، بهتر بتوان قضاوت کرد از اینرو پیشنهاد می‌کنیم که نویسنده تمام آثار خود را منتشر کند تا بتوان به‌یك نظر قطعی رسید. اما مانمی‌توانیم، قسمتی را که او در حال حاضر تقدیم فرهنگستان کرده است، تصویب کنیم.



Ma chère tante, on me dit que vous êtes malade et que vous ne quittez pas le lit. J'éprouve le besoin de vous témoigner une peine d'autant plus vive que cela me prive du plaisir de vous voir : car moi aussi je garde la chambre, et je ne rends pas de visites.

Vous avez eu la bonté de penser à moi pour des étrennes ; cela est bien aimable de votre part. Il est bien agréable dans un tombeau de recevoir des souvenirs des vivants.

J'espère vous retrouver en bonne santé quand je sortirai de ma prison. Vous aurez ma première visite.

Agréez mes respects

E Galois

«... در یك قبر...». نامهٔ اواریست از زندان سن‌پلاژی به‌عمه‌اش - ژانویهٔ ۱۸۳۲

در ۱۴ ژوئیه گالوا در رأس یك تظاهرات جمهوریخواهی، با اونیفورم توپخانهٔ منحل شده، در حالی که یك کارد و یك اسلحه را حمل می‌کرد، به‌جرم پوشیدن غیر قانونی اونیفورم دستگیر شد. او را به‌شش‌ماه، حبس در زندان سنت‌پلاژی Sainte Pélagie محکوم کردند. مدتی در بارهٔ ریاضیات کار کرد و بعد که وبا شیوع یافت در ۱۸۳۲ او را

تصویری از اواریست گالوا که در سال ۱۷۴۸ توسط برادرش بطور ذهنی کشیده شده است.

به‌بیمارستان منتقل کردند. بزودی با قید تعهد آزاد شد.

به‌موازات آزاد شدنش اولین و تنها تجربهٔ عشقی خویش را آزمود. با دختری به‌نام استفانی Stéphanie که نام خانوادگیش نامعلوم است. این عشق در یکی از دستخطهای گالوا ابراز می‌شود، اما به‌سرعت از آن می‌گذرد. پاره‌های نامه‌هانشان می‌دهند که گالوا در عشق شکست می‌خورد. طولی نمی‌کشد که به‌یك دوئل دعوت می‌شود، و این دوئل ظاهراً به‌خاطر علاقهٔ به‌آن دختر بوده است. در اینجا هم پرده‌ای از اسرار، مانع روشن شدن حقایق است. بعضی از محققین اظهار می‌دارند

که این دختر بهانه‌ای برای از بین بردن یك حریف سیاسی قرار گرفت. در تأیید این بیان، جمله‌ای صریح از آلکساندر دوما (درخاطراتش) داریم که یکی‌از مخالفین پشودربن‌ویل Pécheux D’ Herbinville بود. اما دوما به‌مدرکی از گزارش پلیس استناد می‌کند که می‌گوید دوئل کنندهٔ دیگر یك جمهوریخواه بوده، و احتمالا یك رفیق انقلابی گالوا. و اینکه دوئل همانگونه‌ای بود که به‌ظاهر انجام شد. و این نظریه تا حد بسیار زیادی از کلمات خود گالوا دربارهٔ این موضوع استنتاج می‌شود:

«من از هموطنان و دوستانم می‌خواهم که مرا به‌خاطر مردن جز به‌خاطر وطنم سرزنش نکنند. من قربانی عشق یك زن پست شدم. درغوغای رقت‌باری زندگی من خاموش می‌شود. آه! چرا به‌خاطر چیزی اینقدر جزئی، باید تا این حد حقیر مرد؟... برای آنان که مرا کشته‌اند طلب آمرزش کنید، آنها نیت پاك‌دارند.»

بعد از ظهر روز، ۲۹ مه یعنی روز پیش از دوئل، او نامهٔ معروف خود را به‌دوستش اوگوست شوالیه می‌نویسد و درآن اکتشافات‌خودرا بطور مختصر شرح می‌دهد که بعدها به‌وسیله شوالیه در مجلهٔ Revue Encyclopédique دائرةالمعارف منتشرشد. دراین نامه او به‌طور خلاصه ارتباط بین گروهها و معادلات چند جمله‌ای را شرح می‌دهد ــ باضافهٔ اینکه هر معادله به‌وسیلهٔ رادیکالها قابل حل است مشروط برآنکه گروه مربوط به‌آن نیز قابل حل باشد. او نظریات بسیاری را نیز دربارهٔ تابعهای بیضوی وانتگرال‌گیری تابعهای جبری، وچیزهای دیگری که بسیار مبهمتر از آنند که به‌سادگی درك شوند، ذکرکرد. این نامه از خیلی جهات یك مدرك احساساتی است، با نظریاتی که بطور بدخط در حاشیه‌ها نوشته‌شده‌اند: (من هیچ‌وقت‌ندارم) دوئل با تپانچه‌هایی در ۲۵ قدمی واقع شد. گالوا از ناحیهٔ شکم مجروح شد و روز بعد در ۳۱ مه از ورم صفاق جان‌سپرد. او از حضور کشیش امتناع ورزید. در ۲ ژوئن ۱۸۳۲ در قبری معمولی در گورستان مون پارناس دفن شد.

نامهٔ او به‌شوالیه با این کلمات ختم شد:

علناً از ژاکوبی یا گوس، نظرشان را در بارهٔ این نظریه‌ها بپرس، نه‌اینکه حقیقت آنها را، بلکه اهمیت این نظریه‌هارا. امیدوارم، بعدها مردمی باشند که از این مطالب درهم بهره‌هایی ببرند.

دکترعلیرضا امیرمعز

تقسیم طلائی

از ملا پرسیدند:
تقسیم طلائی چیست؟
گفت:
هروقت سکه‌ها را
تقسیم می‌کنی، طلاها
را خودت بردار.

بررسی شکل اطاقهـا و تالارهای مختلف در دنیا به‌این نتیجه رسیده است‌که درازا و پهنای بیشتر آنها نسبت طلائی دارد. معلوم نیست کـه به‌حقیقت این اطاقها را چنین ساخته‌اند یااتفاقاً این‌نسبت به‌چشم خوش‌آیند بوده است. تحقیقات در عتیقه شناسی، تاریخ ومردم‌شناسی نیز به‌این نتیجه رسیده‌است‌که عمداً نسبت طلائی درساختمانها به‌کار رفته است. مثلا، ضلع و ارتفاع اهرام مصر تقریباً نسبت طلائـی دارند. از این نمونه‌ها در دنیا فراوان است وخواننده می‌تواند نظیر آنچه راجع به‌اهرام گفته شددرکتابها دربارهٔ بناهای دیگر تاریخی بیابد.

آنچه دراین مختصر بررسی می‌شود تقسیم طلائی وریاضیات‌مربوط

به‌آن است. قضاوت دربارهٔ دیگرمطالب را به‌خواننده واگذارمی‌کنیم.

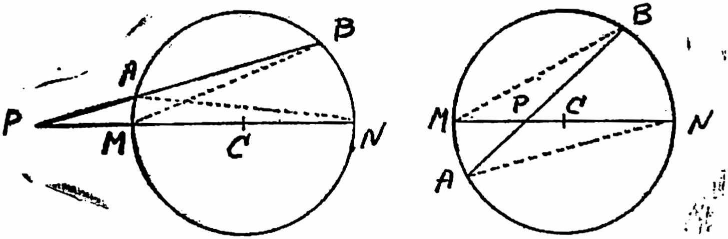
۱ـ تقسیم طلائی: قطعه خط AB داده شده است (شکل۱). نقطهٔ C را چنان بدست آورید که داشته باشیم:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{CB}$$

شکل ۱

ساختن هندسی این تقسیم، راه حلهای متعدد دارد و خواننده می‌تواند کتابهای هندسه را زیر و روکنـد و چندین حل بدست آورد. در این مقاله حل آنرا با معادلهٔ درجه دوم بررسی می‌کنیم.

۲ـقوت نقطه نسبت به‌یك‌دایره: فرض‌کنیم‌که دایره (c) به‌مرکز C و نقطهٔ P در صفحه دایره داده شده باشند. (شکل ۲). فرض‌کنیم کـه خط راستی‌که از نقطهٔPمی‌گذرد دایره رادر دو نقطهٔ A و B قطع‌کند.(ملاحظه



شکل ۲

شودکه شکل ۲ شامل دوقسمت است. دریکی P درون و در دیگری نقطهٔ P بیرون (c) قرارگرفته است) . حاصلضرب دو قطعهٔ جهت‌دار PAوPB بستگی به‌امتداد خط ندارد و مقداری است ثابت. این مقدار ثابت را قوت نقطهٔ P نسبت به‌دایره (c) گویند.

برهان: برهان بسیار ساده است واز تشابه دو مثلث به‌دست می‌آید. نقطهٔ P را به Cوصل می‌کنیم. خط PC دایره را در M و N قطع‌می‌کند. به‌آسانی دیده می‌شود کـه دو سه بر PAN و PMB متشابه‌اند. ازاینـرو

$$\frac{PA}{PM}=\frac{PN}{PB}$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$(PA)\ (PB)=(PM)\ (PN)$$

هرگاه روی هرخط جهتی انتخاب کنیم، نتیجه می گیریم که تساوی بالا شامل جهت نیز می‌باشد. اکنون فرض کنیم که $PC=d$ و شعاع دایره r باشد. لذا

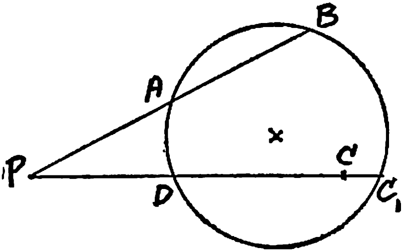
$$(PA)\ (PB)=d^{2}-r^{2}.$$

۳ـ **قضیه وارون**: فرض کنیم که چهارنقطهٔ A، B، C و D چنان‌داده شده باشند که

$$(PA)(PB)=(PC)\ (PD)$$

که در آن P محل تلاقـی خطوط AB و CD است. در اینصورت نقاط A، B، C و D روی یکدایره‌اند.

برهان: فرض کنیم که A، B، D بر یك خط مستقیم نباشد (شکل۳) دایرهٔ شامل این سه نقطه خط PD را در نقطه‌ای مانند C_1 قطع می کند.



شکل ۳

لذابدست می آید:

$$(PD)(PC_1)=(PD)(PC)$$

که‌ناچار $C=C_1$ ازآن نتیجه می‌شود.

البته اگر نقاط A، B، D بریك استقامت باشند، نقطه P دلخواه می‌شود و قضیه در اینصورت بی‌معنی است.

۴ـ **ترسیم ریشه‌های معادله درجهٔ دوم**: فرض کنیم که معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^{2}+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ که درآن a، b، c عددصحیح اندداده‌شده باشد. ملاحظه‌می‌شودکه‌ریشه‌های این معادله، یعنی x_1وx_2 در تساویهای زیر صدق می کنند:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\quad \text{و}\quad x_1x_2=\frac{c}{a}$$

دستگاه مختصات xy را درنظر می گیریم (شکل ۴). فرض کنیم که U بـه‌عرض واحد و C بـه‌عرض $\frac{c}{a}$ باشد. هـرگاه A و B روی محور xها

نمایش x_1 و x_2 باشد، ملاحظه میشود که:

$$(OA)\ (OB) = (OU)(OC) = x_1 x_2$$

لذا چهارنقطهٔ A، B، U و C روی یکدایره‌اند. اگر M وسطقطعه خط AB باشد، درآنصورت

$$OM = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{-b}{2a}$$

ازاینرو مرکز دایره‌ایکه نقاط A و B را می‌دهد روی محل تلاقی عمود منصف UC و عمود منصف AB است. چون U، C و M را از روی معادلـه می‌توان بدست آورد، نقطهٔ D، مرکز دایره به‌آسانی بدست می‌آید. شعاع این دایر DC است. البته اگر دایره محور xها را در دونقطه قطع کند معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی است. اگر دایره برمحورxها مماس باشد، ریشه مضاعف داریم و اگر دایره محور xها را قطع نکند ریشه‌های مختلط داریم که در هندسه گوییم مسئله جواب ندارد.

۵- معادله‌تقسیم‌طلائی:

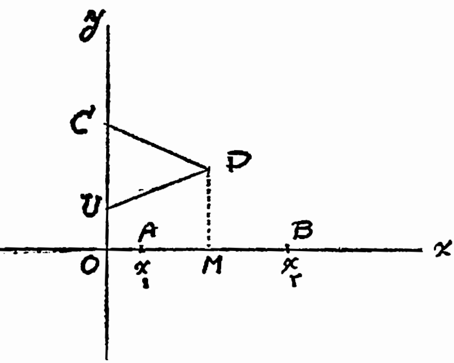
دوباره‌شکل۱ را درنظرمی‌گیریم. فرض کنیم که $AB = 1$ و $AC = x$ باشد. لذا از

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC'}{C'B}$$

نتیجه میشود که

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{2 - x}$$

که از آن معادلهٔ درجه دوم زیر بدست می‌آید:



شکل ۴

$$x^2 + x - 1 = 0$$

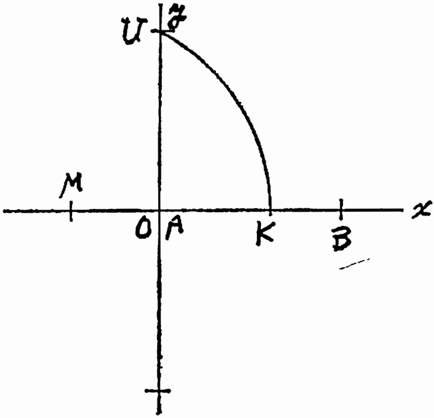
این معادله دارای دو ریشه است.

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ و } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

در این مسئله جواب منفی قابل قبول نیست زیرا x نمایش یك قطعه خط است. اکنون برای‌رسم ریشه یك دستگاه مختصات می گیریم (شکل۵) ملاحظه میشود که:

$$x_1 . x_2 = -1$$

$$\frac{1}{2}\ (x_1 + x_2) = \frac{-1}{2}$$



شکل ۵

از اینـرو C مربوط به ۱- روی محور yها و M مربوط به $-\frac{1}{2}$ روی محور xهاست. دایرهٔ بمرکز M وشعاع MU قسمت مثبت محور xهارا در نقطه K قطع می‌کند. لذا $OK = x$ است، خواننده به‌آسانی ملاحظه می‌کندکه هرگاه $A = O$ ویك واحد روی محور xها بگیریم کـه ۱ $= OB$ شود، نقطهٔ K پاره خط AB را به‌نسبت طلائی تقسیم می‌کند.

۶- تقریب نسبت طلائی: دوباره (شکل ۱) را درنظر مـی‌گیریم و فرض می‌کنیم که

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} = y$$

باشد. نتیجه می‌شودکه

$$\frac{AB}{AC} = y \quad \text{و} \quad \frac{AC + CB}{CB} = y + 1 = \frac{AB}{CB}$$

لذا

$$\frac{y(AC)}{(y+1)(CB)} = 1$$

از آنجا

$$y^2 = y + 1$$

در نتیجه نسبت طلائی در معادله درجه دوم زیرصدق می‌کند

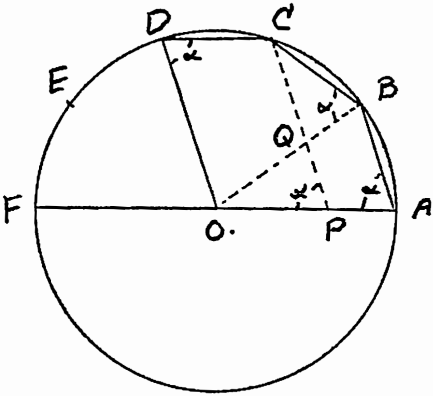
$$y^2 - y - 1 = 0$$

ریشه مثبت این معادله‌عبارتست از

$$y=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\simeq ۱/۶۱۸$$

این نسبت نزدیک $\frac{۸}{۵}$ است. عملاً این کسر را برای تقریب نسبت طلائی بکار می‌برند.

۷- **ده ضلعی منتظم:** نسبت شعاع دایره محاطی ده ضلعی منتظم به ضلع آن نسبت طلائی است.



شکل ۶

برهان: فرض کنیم که AB ضلع ده ضلعی منتظم باشد (شکل ۶). سه ضلع $BC=CD$ $=AB$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم که زاویهٔ OAB برابر α باشد. خط CP را به‌موازات OD رسم می‌کنیم. ملاحظه می‌شود که CP نیز به‌موازات AB می‌باشد. از طرف دیگر دو مثلث OPQ و CBQ برابرند. از آن نتیجه می‌شود که:

$$QP=QB=PA.$$

اکنون فرض می‌کنیم که: $OP=DC=AB=x.$ و $OA=۱$

از اینرو $AP=PQ=QB=۱-x$

از تشابه دو مثلث OPQ و OAB نتیجه می‌شود که:

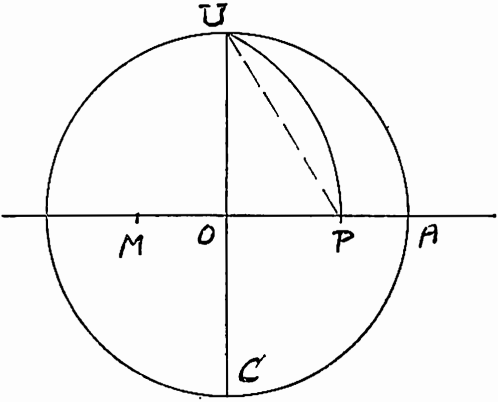
$$\frac{OA}{OP}=\frac{AB}{PQ}$$

از این تساوی معادلهٔ زیر بدست می‌آید: $\frac{۱}{x}=\frac{x}{۱-x}$

یا $x^۲+x-۱=۰$. بالنتیجه برهان کامل است.

۸- **ترسیم ده‌ضلعی منتظم:** همانطور که در بخش ۵ دیدیم، معادله درجه دوم $x^۲+x-۱=۰$ دارای دو ریشه است و ریشه مثبت آن طول ضلع ده ضلعی منتظم در دایره بشعاع واحدی می‌باشد (شکل ۷). ملاحظه می‌شود که

$OA = ۱$ و $OM = \frac{-۱}{۲}$ گرفته شده است. از اینرو OP برای ضلع ده ضلعی منتظم است. البته وقتیکه دایره را به ده قسمت مساوی تقسیم کردیم، طرز قسمت بر پنج نیز از آن نتیجه می‌شود. ولی قضیهٔ زیر روش تقسیم دایره به پنج قسمت مساوی را تسریع می‌کند.



شکل ۷

۹- قضیه: هرگاه اضلاع پنج ضلعی، شش ضلعی وده ضلعی منتظم را بترتیب $s_۵$، $s_۶$ و $s_{۱۰}$ بگیریم، نتیجه شودکه:

$$s_۵^۲ = s_۶^۲ + s_{۱۰}^۲$$

برهان: اثبات این قضیه بسیار ساده است. خواننده می‌تواند از روی ضلع پنج ضلعی منتظم ضلع ده‌ضلعی منتظم را به‌دست آوردکه می‌شود.

$$s_۵ = \frac{۵ - \sqrt{۵}}{۲}$$

هرگاه به شکل۷ بنگریم، ملاحظه می‌شودکه پاره خط PU به‌اندازه ضلع پنج ضلعی منتظم است.

خواننده به‌آسانی ملاحظه می‌کند کـه قدرمطلق ریشهٔ منفی معادلهٔ $x^۲ + x - ۱ = ۰$، یعنی

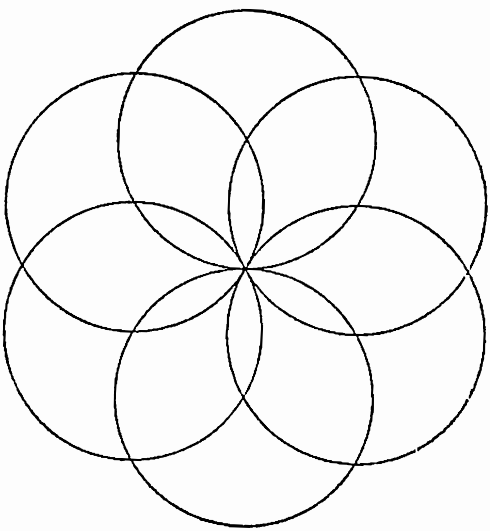
$$\frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}$$

همان نسبت طلائـی است. تعبیرهای دیگر ریشهٔ منفـی را بعهدهٔخواننده واگذارمی‌کنیم.

هانس فروید نتال[1]

نظریهٔ گروهها در ریاضیات و در آموزش ریاضی

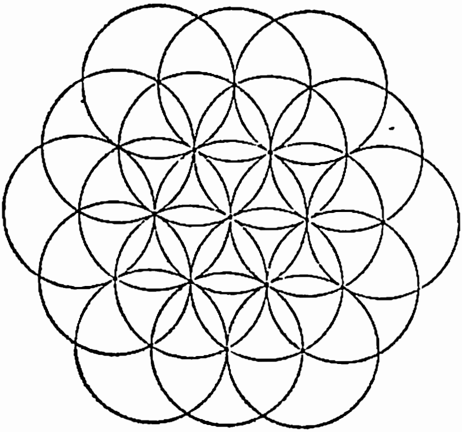
ساده‌دلی است که برسر این که شما تا به حال به چیزی مانند آنچه در شکل ۱ـ رسم شده است برخورده‌اید یا برنخورده‌اید شرطبندی کنیم. سالهاست که این شکل اولین چیزی است که بچه‌ها وقتی پرگار بدست می‌آورند رسم می‌کنند. این شکل را دخترکی هشت ساله کشیده است.



شکل ۱

1. Hans Freudenthal

دخترك در بکاربردن پرگار، کـه برای بچه‌های به‌این سن و سال‌کار مشکلی است، کاملاً ماهر بوده است.



شکل ۲

او کار دیگری هم‌کـرد و آن افزودن حلقهٔ دیگری از دوایر بـود، مانند شکل ۲. بعد به‌او گفتم‌که جای آن داردکه شکل را رنگ بزنند، هر چند اگرکسی هم نمـی‌گفت این‌کار را مـی‌کرد زیرا کـه چنین سنی برای رنگ‌آمیزی جان می‌دهد. حیرت‌انگیزترین نکتهٔ‌کاردخترك این بودکه همهٔ تقارنهای موجود در شکل را بی‌یك ذره عیب رعایت‌کرد. البته با این‌کـه این دختر به‌غریزه، همهٔ‌نتایج مـربوط به‌نظریهٔ‌تقارن را دریافته بود، نمی‌توانست، مانند ریاضیدانان، برای‌کار خود دلیل و برهان بیاورد.

از آرایش ظـروف عهد حجر تا تزئینات قصر**الحمراء** وهنر ترسیمی پیچیدهٔ **اشر**[1]، تقارن هـمواره نقش مهمـی در نقاشی و مجسمه‌سازی داشته است. علم نیز از زمانهای قدیم به‌وجود تقارن پی‌برده، و از آن به‌عنوان اصلی استفاده‌کرده است. ازجملهٔ اطلاعات قلیلی‌که ما دربارهٔ تالس ملطی[2]، اولین هندسه‌دان دریونان واولین دانشمند شناخته شدهٔ تاریخ بشر، داریم یکی این است‌که او قضایای هندسی مربوط به‌تقارن را بیان‌کرد و بکاربرد. آناکسیماندروس[3] یونانی با استدلالی به‌کمك تقارن توضیح‌کردکه چرا قرص

1. Escher   2. Thales of Milete   3. Anaximander

زمین که در جهان معلق بود، نه کج می‌شد و نه می‌افتاد ـ به‌دلیل آن‌که از همهٔ قسمتهای آسمان به‌یك فاصله بود. شاید شما داستان بوریدان[1]، آن طلبهٔ قرون وسطائی را بدانیدکه خری را فرض کرد بین دو تودهٔ علف، با یك حجم و یك بو، ازگرسنگی مرد زیراکه دلیلی نبود برای آن‌که حیوان مصمم شودکه از این بخورد یا از آن. به‌موجب اصول موضوع تقارن ارشمیدس به‌بررسی قوانین اهرم، وسیمون استون[2] به‌مطالعهٔ قوانین صفحهٔ شیب‌دار، و هویگنس[3] به‌پژوهش در قوانین تصادم[4] پرداخت. امروزه فیزیکدانان این راکه «هر تقارنی‌که در علت وجود داشته باشد در معلول حفظ می‌شود» قانون پی‌یر کوری[5] می‌نامند. کوری آن را در مبحث بلورشناسی بکاربست ، امروزه قانون‌کوری مهمترین اصل نظریهٔ‌کوانتم شمرده می‌شود.

ازنزدیکتر نظری به‌ریاضیات بیفکنیم. زیبایی یك شش ضلعی منتظم یا اشکال منتظمی نظیر آنچه در بالا مصور شده‌اند در چیست؟ این اشکال نگاشتهائی بر روی خودشان می‌پذیرندکه سیمای آنها را تغییر نمی‌دهند. چند نگاشت؟ در شش‌ضلعی سه‌تقارن نسبت به‌اقطار، سه تقارن نسبت به خطوطی‌که اوساط اضلاع مقابل را به‌هم وصل می‌کنند، وتعدادی هم دوران که درهریك ازآنها زاویهٔ دوران مضربی است از 60° (مضرب صفر نگاشت همانی را موجب می‌شود). ازکجا می‌دانیدکه تعداد این نگاشتها ۱۲ است، نه‌کمتر ونه‌بیشتر؟ جواب این سؤال آن‌قدرهاکه تصورمی‌کنید ساده نیست ـ بعداً به‌چنین مسائلی باز خواهم‌گشت.

عددهای‌مختلطرا می‌شناسیدکه‌عبارتند ازجفتهای‌اعدادحقیقی به‌صورت $a+bi$. این عددها تشکیل میدانی عددی می‌دهند، برخورداراز‌چهارعمل اصلی وقانونهای معمولی ، i یکهٔ موهومی است ومربع آن مساوی -1 فرض می‌شود. تبدیل i به $-i$ را تزویج می‌نامند بااین عمل $\gamma = a+bi$ به $\overline{\gamma} = a-bi$ بدل می‌شود. تزویج یك خودسانی[6] این میدان است ـ روابط جبری اساسی این میدان، یعنی جمع و ضرب، را حفظ می‌کند:

$$\overline{\alpha+\beta} = \overline{\alpha}+\overline{\beta}$$

$$\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}.\overline{\beta}$$

و در نتیجه همهٔ روابط جبری دیگر نیز حفظ خواهند شد. با عمل تزویج

1. Buridan 2. Simon Stevin 3. Huygens 4. Collision
5. Pierre Curie 6. Automorphism

هر رابطهٔ صحیح در مورد عددهای مختلط به‌رابطهٔ صحیح دیگری منجر می‌شود.

از جنبهٔ جبری سه جواب α_1، α_2، و α_3 معادلهٔ

$$x^3 - x - 1 = 0$$

تمایزناپذیرند. آنچه از نظر جبری دربارهٔ یکی از آنها صادق باشد دربارهٔ هریك از دو ریشهٔ دیگر نیز صدق می‌کند. این سه ریشه در روابطی مانند

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0,$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = -1,$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 1,$$

وروابط حسابی دیگری با متقارنترین وجه نسبت به‌یکدیگر وقوع می‌یابند.

معادلهٔ

$$2x^3 - 7x^2y - 7xy^2 + 2y^3 = 0$$

نسبت به x و y متقارن است. آیا این بدان معنی است که همهٔ جوابهای (x,y) آن نیز متقارن، یعنی به‌صورت (a,a)، هستند؟ البته چنین نیست. اما به‌این معنی است که هرگاه (a,b) یك جواب معادلهٔ بالا باشد، (b,a) جوابی دیگر خواهد بود.

چرا رابطهٔ

$$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = (x+y+z)^3 + 6xyz$$

نمی‌تواند اتحاد صحیحی باشد؟ بدین دلیل که عضو طرف راست آن نسبت به x و y و z متقارن است، حال‌آن‌که علامت طرف چپ آن تحت اثر جایگشت فردی از x، y و z تغییر می‌کند.

چرا خط‌کش برای ساختن مرکز بیضی کفایت‌نمی‌کند؟ زیراکه‌نگاشتهائی وجود دارندکه، با وجود محفوظ نگهداشتن خطوط ونگاشتن بیضی برروی خودش، مرکز آن را به‌هرنقطهٔ مفروض غیر واقع بربیضی منتقل می‌کنند.

چراچنین است‌که می‌توانیم معادله‌های تا درجهٔ چهارم راباریشه‌گیری حل‌کنیم، اما این‌کار را درمورد معادله‌های درجهٔ پنجم نمی‌توانیم‌کرد؟ به این دلیل‌که معادله‌هائی‌که با ریشه‌گیری قابل حل هستند بطورکلی تقارن بسیار کمتری نشان می‌دهند تا معادلات درجهٔ پنجم ـ این مطلب به‌توسط روفینی[1] و آبل[2] به‌اثبات رسیده است.

استدلالهای مبتنی برتقارن نیروی مجاب‌کنندهٔ خودرا هیچ‌جا به‌اندازهٔ

1. Ruffini 2. Abel

مبحث احتمالات بروزنمی‌دهند. چرا دریك ظرف احتمال بیرون‌آمدن برای همهٔ گویها یکی است؟ به‌سبب آن‌که ظرف و عمل قرعه‌کشی، و در نتیجه احتمالات هیچ‌یك براثرجایگشت محتوای ظرف تغییر نمی‌کند؛ و اینك مثالی عالمانه‌تر:

شش نفر از A تا F به‌تصادف در یك صف قرارداده شده‌اند. احتمال این‌که A جائی در طرف چپ B ایستاده باشد چیست؟گوییم، احتمال این‌که A سمت چپ B ایستاده باشد همان احتمال ایستادن B در طرف چپ A است؛ و با هم جا برای هیچ‌احتمال دیگری نمی‌گذارند، پس هریك دارای احتمال $\frac{1}{2}$ است. همچنین احتمال اینکه

A طرف چپ B و C طرف چپ D قرار گیرد

همان است‌که

A طرف چپ B و D طرف چپ C،

B طرف چپ A و C طرف چپ D،

B طرف چپ A و D طرف چپ C

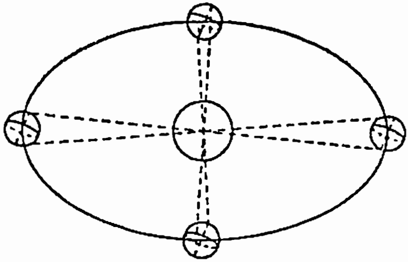
واقع گردند، درنتیجه برای‌هریك احتمال $\frac{1}{4}$ خواهد بود، و نیز با استدلالی مشابه معلوم می‌شودکه احتمال این‌که

A طرف چپ B و B طرف چپ C قرار گیرد

مساوی است با $\frac{1}{6}$.

این استدلال، علی‌رغم همهٔ بی‌اعتمادی به‌احتمالات از پیش، که مد روز شده است، استدلالی است متقن. وقتی‌که واقعیت به‌وسیلهٔ نمونه‌های ریاضی مورد تفسیر قرارگیرد، خود را محق بلکه ملزم می‌دانم‌که همهٔ تقارنهائی راکه در واقعیت پیدا شوند در یك نمونهٔ ریاضی بنشانم، و این همان‌کاری است‌که درمثالهای بالاکرده‌ام. آراستن عده‌ای به‌طور اتفاقی در صف بدان معنی است‌که همهٔ گزاره‌های مربوط به‌چگونگی آرایش آنان در صف بایدبراثرهربرخوردنی، یابه‌قول‌ریاضیدانان براثرهرجایگشتی، نامتغیر باقی بماند؛ واز این اصل است‌که درمسأله‌ای‌که هم‌اکنون مورد بحث قرار دادم می‌توان همهٔ احتمالات وابسته را بدست آورد.

اینك ازاحتمالات به‌نجوم رجوع می‌کنیم. همه می‌دانندکه ازدیدگاه آب وهوا وفصول نیمکره‌های شمالی وجنوبی زمین درحکم تصاویریکدیگر در آئینه‌اند، بدین معنی‌که در حالی‌که ما (در نیمکرهٔ شمالی) از آخرین



شکل ۳

هفته‌های‌تابستان محظوظ می‌شویم، نقطهٔ متقاطرمحل ما منتظر آمدن بهار است. و تا وقتی‌که خورشید در منطقهٔ قطب شمال فرو ننشیند، در منطقهٔ قطب جنوب برنمی‌آید. اما چرا چنین است؟ جای آن داردکه دلایل تقارنی این پدیده‌ها را بصراحت با اصطلاحهای ریاضی بیان‌کنیم.

زمین برمداری تقریباً مستدیر به‌دور خورشید در حرکت است، ودر همان زمان حول‌محوری‌حرکت وضعی داردکه نسبت به‌صفحهٔ مدار مورب، اما در فضا ثابت، است. این دستگاه دارای چند تقارن است (رك.شکل۳). نخستین، تقارن مرکزی نسبت به‌مرکز (خورشید) است‌که زمین را دریك نیمسال برمدارخود جابه‌جا می‌کند ودر همان‌حال نیمکره‌های شمالی‌وجنوبی را باهم‌عوض می‌کند. این تقارن توضیحی است برای قسمت اعظم آن‌پدیدهٔ جغرافیائی‌که‌ذکرش‌گذشت؛ دومین، تقارن‌صفحه‌ای‌است‌نسبت‌به‌صفحهٔ عمود برمدارکه برنقاط انقلاب تابستانی وزمستانی می‌گذرد ومسیر حرکت‌زمین را برمی‌گرداند؛ سومین، دوران نیمدور دستگاه است حول محوری که نقاط اعتدال بهاری وپائیزی‌را به‌هم وصل می‌کند،که این نیز مسیر حرکت‌زمین را برمی‌گرداند اما در عین حال جای دونیمکره را باهم عوض می‌کند. دو تقارن اخیر توصیف می‌کنندکه چرا فصول درمورد پدیده‌هائی بصری‌مانند طلوع وغروب خورشید ودرازای روز نسبت به‌نقاط اعتدال وانقلاب قرینهٔ یکدیگرند. اما چون این‌تقارنها مسیرحرکت زمین، ودرنتیجه جهت زمان، را برمی‌گردانند، اطلاق آنها به‌پدیده‌هائی مانند پخش حرارت و تغییرهوا، که برای‌گسترده شدن‌نیاز به‌زمان دارند، دارای اعتبار نیست، واین مطلب است‌که توضیح می‌دهد چرا آب وهوای نقاط مختلـف کرهٔ زمین قرینه‌های یکدیگر نسبت به‌نقاط‌اعتدال وانقلاب نیستند،یعنی‌چرا اول تیرماه‌گرمترین روز نیست، واول دیماه سردترین آن. توجه داشته‌باشید که هریك ازایـن

سه تقارن حاصل دوتای دیگر است.
حال بیشتر به‌ریاضیاتی که‌درواقعیتها بکار بسته می‌شود نظرمی‌افکنیم. یك جرم یایك باربرقی میدان نیروئی را معین می‌کند. اگر برتقارنی دراین جرم یاتوزیع‌بار وقـوف داشته باشیـم، می‌توانیم مطمئن باشیم که میدان حاصل ازآن نیز همـان تقارن را نشان خواهد داد. مثلاً یك جرم یاهادی برقی‌که دارای تقارن دورانی باشد، میـدان نیرو وپتانسیلی تولید خواهد کردکه نیز دارای تقـارن دورانی باشند. بهره‌گیری از این تقارن پیش از اقدام به‌محاسبهٔ پتانسیل ومیدان نیرو عمل ریاضی صحیحی است.
از سوی دیگـر، اگر یك نوسان کنندهٔ همساز براثر نیروی خارجی $f(t)$ بادورهٔ تناوب T شروع به‌نوسان‌کند، یعنی
$$x''(t)+\alpha x'(t)\ +\beta x(t)=f(t)$$
من حق ندارم ادعا کنم کـه همهٔ ارتعاشات آن دارای همین دورهٔ تنـاوب T خواهند بود. آنچه‌که براثر نگاشت $t\to t+T$ نامتغیر است هرارتعاش خاص نیست، بلکه مجموعهٔ همهٔ آنهاست؛ و این بدان معنی است که اگر یکی ازجوابها مثلاً $\varphi(t)$ به‌اندازهٔ Tتغییر مکان داده شود، جواب جدیدی که به‌دست‌می‌آید($\varphi(t+T)$ است.
حل معادلات دیفرانسیل که از مسائل فیزیکی ناشی می‌شوند ممکن است‌کار شاقی باشد. اغلب اطلاعاتی‌کیفـی دربارهٔ سرشت تقارنی جوابها تنها چیزی است‌که بدست مامی‌آید، و درست همان چیزی است که مورد نیاز ماست. اگر بخواهیم معادلات دیفرانسیل راکه در مکانیك کوانتمی پیش می‌آیند تعبیر و تفسیر کنیم، تقارنهای فضا، وذراتی‌که باهم تعویض می‌شوند، وبارهائی که تغییر می‌کنند، و چرخشها، و میدانهای مغناطیسی نقشی والا برعهده‌دارند.
کارشناسان در مثالهائی‌که آورده‌ام وجه مشترکی می‌یابند: هریك از آنها به‌طریقی خاص خود نشان می‌دهدکه‌گروهها چگونه پیدا می‌شوندوبه چه‌نحو درمطالعهٔ نظم در طبیعت ودر ریاضی بکار می‌روند. چرا از استعمال واژهٔ‌گروه امتناع کرده‌ام؟ اگر از اصول پیروی شود، باید با تعریف گروه شروع کرد، وچنـد قضیهٔ‌کلی دربارهٔ مفهوم‌گروه اثبات نمود. سپس اصولی کلی راکه برطبق‌آنها گروهها بکار می‌روند گسترش‌داد، وبالفرجام‌به‌کاربردی چند ازگروهها، که بااین اصول هم‌آهنگ باشند، دست زد، البته به‌شرط آن که وقت‌کافی برای پرداختن به‌این امرکم اهمیت‌تر باقی مانده باشد. بااین حال ریاضیات فقط دریك «ذهن فعال» به‌طور اصولی گسترده می‌شود. درذهن

افراد از حالتی خاص به‌اصلی کلی، واز عینی به‌مجردتر ره می‌پیماید، و در طی‌تاریخ هم‌چنین شده است. گروهها‌وروشهای نظریهٔ گروهها لااقل نیم‌قرن پیش از سازمان آگاه مرکب از این تفحصات پیچیده برحسب مفهوم صریح گروه وجود داشته‌اند. این وضع در ریاضیات امری است عادی. برای‌آن‌که به‌حیطه‌ای از معرفت شکـل داده شود، نخست باید اطلاعات راجع به‌آن حیطه را بامکاشفه درآن بدست آورد. تعاریف اساسی نه‌در آغاز این‌تجسس بلکه درپایان آن تبلور پیدا می‌کنند، زیراکه برای تعریف‌کردن هرچیز باید دانست که‌چیست وبه‌چه‌کار می‌خورد.

«رسالهٔ جانشینی‌ها»ی معروف کامیل‌ژردان[1] که در ۱۸۷۰ نوشته شد قوانین‌گروه را مدون ساخت وکارهائی راکه ریاضیدانان درطول نیم‌قرن از روی غریزه انجام‌داده بودند، بصراحت روشن‌کرد: تحلیل دستگاههای‌هندسی و جبری بوسیلهٔ گروهـا و تکمیل اصول نظریهٔ گروهها.[2] جالبترین کار در این نظریهٔ‌گروهها‌که به‌طور غریزی‌در طول آن پنجاه سال صورت‌پذیرفت استفادهٔ موسع هرمان‌فن هلم‌هلتز[3] ازگروههای‌لی[4] در مسألهٔ فضائی‌مشهور خود بود، واین‌کار مدتها پیش‌از آن‌که لی‌این گروهها را کشف کند صورت گرفت. در نوشته‌های هلم‌هلتز در بارهٔ نظریهٔ‌گروهها حتی اصطلاح «گروه» به‌چشم نمی‌خورد، ودر نتیجه ممکن است مسلم باشدکه او در زمان نوشتن آنها چیزی دربارهٔ‌گروهها نمی‌دانسته است.

درنوشتهٔ هلم‌هلتزکه تحقیقی است در مبانی هندسه،توجه به‌چگونگی پیدایش‌گروهها آموزنده است. هلم‌هلتز فضا را به‌عنوان یك چندگونای[5] برخوردار ازیك «متر» درنظر می‌گیرد، به‌طوری‌که این چندگوناگروه‌خود متریها[6] داشته باشد، یعنی دارای نگاشتهائی برروی خود باشد که مترفضا را نامتغیر نگهدارند. فضای‌اقلیدسی وناااقلیدسی بوسیلهٔ تحرك‌آزاد[7] مشخص می‌شوند، یعنی وجودگروه خود متریها که هرقدر ممکن است وسیع باشد. بنابرپژوهشهای اخیر، هندسهٔ یك فضا در صورتی اقلیدسی یانااقلیدسی است کـه به‌ازای عدد مثبتی چون α، هردو سه‌تائی از نقاط مانند a_i و b_i ($i = ۱،۲،۳$) راکه‌دارای خاصیت

---

1. Camille Jardan: Traite des Substituti-ns

۲. راست است‌که پیشتر از آن، در ۱۸۵۴، Arthur Cayley گروهها را به‌طریقه‌ای مجرد تعریف‌کرد، اما این‌کاری بود پیشرس،که نه در تحقیقات کی‌لی منمرثمر واقع شد و نه در کار دیگران.

3. Hermann Von Helmholtz 4. Lie groups 5. Manifold

6. Autometries 7. Free Mobility

(a_i, a_j) فاصلهٔ (b_i, b_j) فاصله $= \alpha$ و $(i \neq j)$
باشند بتوان باخود متریهای فضا بریکدیگر نگاشت.

هلم‌هلتز اسمی ازگروه نبرد اما از هر نوع ابزار نظریهٔ گروهها در پژوهش خود استفاده‌کرد. اولین‌ریاضیدانانی‌که، زیرنفوذژردان، وضع‌نظریهٔ گروههارا درهندسه روشن‌ساختند فلیکس[1] کلاین‌وسفوس‌لی[2] بودند. لی‌مبحثی را به‌روی ماگشودکه‌امروزه به‌گروههای‌لی معروف‌است، درحالی‌که‌کلاین همت خود را در موضوع اصلی به‌زیرگروههای‌گروه تصویری و درروش کار به‌نظریهٔ قدیمی نامتغیرها مقصود ساخت. کلاین مواد اولیه‌کارخود را ازکی‌لی گرفت. کی‌لی از یـك مقطع مخروطی درصفحه متری بدست آورده بود بااین ضرورت‌که براثر هرتبدیل تصویری‌که مقطع مخروطی رانامتغیر دارد متر نیز نامتغیر بماند. او ندانسته بااین عمل اولین نمونهٔ هندسهٔ هذ-لولوی مجرد تاآن زمان راساخته بود. کار بزرگ‌کلاین این بود که وضع این نمونه را روشن‌کرد، وبا همان‌کشف مفهوم «نمونـه» را ابداع نمود، مفهومی کـه در زمان مادر ریاضیات و بیرون از آن اهمیت اساسی یـافته اسـت.

بااین مثال‌کلاین دریافت‌که چگونه گروههای خودسانی هندسه‌ای را ارزیابی کندوبکار بندد. بتصادف به‌این فکر افتادکه‌گروهها می‌توانندابزار-هائی باشند برای رده‌بندی خاصیتهای هندسی، واین فکر را در موردگروه تصویری وزیرگروههای آن بکاربست. درواقع نیز تشخیص این‌که خاصیتی یاگزاره‌ای یاتعریفی، متری است یـا مستوی، ویا تصویری، وسیلهٔ مؤثر است برای ایجاد نظم در آشفتگی هندسه.

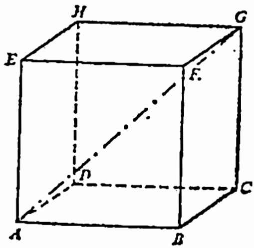
این نظرموضوع اصلی طرحی است‌که‌به‌اصطلاح طرح‌ارلانگن[3] نامیده می‌شود. آن را غالباً به‌صورت سخن‌کوتاه ووالا،که از خودکلاین تراوش کرده اسـت، بیان می‌کنند: هندسه عبارت است از نظریهٔ نامتغیرهای یـك گروه. کلاین خود اولین‌کس از بسیاری از ریاضیدانان بود که بوسیلهٔ این کلام‌گمراه شد. مقدار زیادی هندسه هست که نمی‌توان آن‌را دراین قالب ریخت، وهندسه‌های‌متعددی وجوددارندکه‌به‌آنها گروهها مربوط نمی‌شوند. نظرکلاین‌که به‌گروه تصویری ونظریهٔ جبری نامتغیرها محدود بود بوسیلهٔ لی وبعد ازاو بوسیلهٔ الی‌کارتان، که طرح ارلانگن را خیلی بهتر از کلاین تعبیرکرد، وسعت یافت.

از سوی دیگـرکلاین، با تأکید در این‌که‌گروهها وسائلی صوری در

1. Felix Klein 2. Sophus Lie 3. Erlangen Programm

رده‌بندی هندسه‌ها هستند، این مطلب را از یاد برد که گروهها دردرون هندسه ابزارهائی عملی بشمار می‌آیند. بدین دلیل بود که هیچگاه طرح ارلانگن در هندسهٔ دبیرستانی نفوذ نکرد.

طرح ارلانگن کلاین هم‌مانند «ریاضیات مقدماتی ازدیدگاهی پیشرفته[1]» او آن قدر بالاتر از ریاضیات دبیرستانی بال گسترد که نتوانست در آن نفوذ کند تا وقتی که تازه‌ترین اصلاحات بعمل نیامدند گروههای هندسی به‌هندسهٔ دبیرستانها راه نیافتند. نگاشتهای هندسی در ابتدای پیدایش هندسه کارامد بودند، و حتی در آخرین اصول هندسی قبل از اقلیدس نیز نقشی برعهده داشتند. اقلیدس به‌دلایلی، شاید فلسفی، هندسهٔ تبدیلات را کنار گذاشت. روش زنجیرهائی از مثلثهای همنهشت که وی جانشین تبدیلها کرد به‌صورت چنان اصل مسلمی درآمد که قرنها کسی یارای تردید دراعتبار آن‌رانداشت. به‌عنوان نمونه، قضیهٔ مربوط به‌مکعب را در نظر می‌گیریم که سه‌نقطهٔ B وD و E انتهای اضلاع‌مار برراس A صفحه‌ای را مشخص می‌کنندکه برقطر AG عمود است (رك. شکل۴).



شکل ۴

برهان قدیمی این قضیه پیچیده ومستلزم استفاده از زنجیره‌ای از مثلثهای همنهشت تصنعی است. به‌کمك نگاشتها حکم واضح است. مکعب رامی‌توان حول‌قطر AG دورانهائی داد؛ چون این دورانها جای BوDوE را باهم عوض می‌کنند، پس صفحهٔ BDE نامتغیر می‌ماند، درنتیجه برمحور AG عمود خواهد بود- استدلالی که در مقایسه‌باتصنع وابهام روش اقلیدس طبیعی‌ترین وروشن‌ترین برهانها بنظر می‌رسد.

چند روز قبل بود که برحسب تصادف به‌تعدادی کتاب درسی مراجعه کردم تاببینم این‌که مقطع دوکره یك دایره است چگونه اثبات شده است.

1. Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint

ودیدم که راه اثبات بازهم برطبق روش اقلیدسی مثلثهای همنهشت است. بعداز اندك سالی لفاظی دربارهٔ مفهوم گروه، هنوز روش طبیعی استفاده از دورانهائی حول خط المرکزین دوکره متداول نیست.

گروهها رسماً در دبیرستانها پذیرفته شده‌اند، ولی تردید دارم که روحیهٔ نظریهٔ گروهها نیز در ریاضیات دبیرستانی نفوذکرده باشد.

بعد از این همه مثال دربارهٔ معنی گروهها در ریاضیات ومباحث دیگر وقت آن رسیده است که به‌تنها عامل مشترك همهٔ آنها اشاره کنیم:

گروه‌ها مهم‌اند زیراکه از نهادها، و به‌عنوان دستگاههائی از خودسانیهای آن نهادها، بر می‌خیزند.

نهاد چیست وخودسانیهای آن چیستند؟

چند مثال. نهاد فضای اقلیدسی، خطهای راست و دایره‌های آن. نگاشتهائی که خطها را به‌خطهای دیگر ودایره‌ها را به‌دایره‌های دیگر می‌نگارند این نهاد را محفوظ می‌دارند! این نگاشتها خودسانیهای این فضا هستند.

نهاد یك بلورنمك، یعنی شبکه‌ای که اتمهای سدیم Na وکلر Cl به‌تناوب در گوشه‌های شبکه در می‌آیند. انتقالها ودورانها و تقارنهائی که اتمهای سدیم رابر اتمهای سدیم، و اتمهای کلررا براتمها کلر بنگارند این نهادرا محفوظ می‌دارند.

میدان عددهای $a+b\sqrt{۲}$ که درآنها $a،b\in Q$ باهمهٔ رابطه‌های جمع وضرب‌آن، $\alpha+\beta=\gamma$ و $\alpha\beta=\delta$، نگاشت $a+b\sqrt{۲}\rightarrow a\text{-}b\sqrt{۲}$ ونگاشت همانی نهادرا نامتغیر نگاه می‌دارند.

نهاد S عبارت است از مجموعه‌ای چون M بارابطه‌ای مانند R یا دستگاه روابطی چون φ. یك خودسانی S عبارت است از یك نگاشت یك به‌یك‌مجموعهٔ M برخود آن مانند f به‌قسمی که به‌ازای‌هررابطه‌مانند $R\in\varphi$،

$$R(x،y،z، \ldots) \Longleftrightarrow R(fx،fy، fz....).$$

به‌بیانی دیگر، f باید هررابطهٔ عضو φ، ونیز نقیض آن، رامحفوظ بدارد؛ x و y و z و... باید وقتی، وفقط وقتی، در رابطه صادق باشند که fx و fy و fz و.... درآن صدق کنند.

فرض کنیم که S یك نهاد، و G مجموعهٔ خودسانیهای آن باشد. دراین صورت آشکار است که نگاشت همانی عضو G است، واگر f به G تعلق داشته باشد معکوس آن نیز به G تعلق دارد، و اگر f و g هردو عضوهای G باشند ترکیبشان fog نیز چنان خواهد بود.

خودسانیهای هر نهاد گروهـی تشکیل می‌دهند که «ترکیب» عمل آن است.

وقتی که از گـروههائی صحبت شود غالباً منظور گروههای خودسانی برخی نهادها است. روش تعریف خود تضمین می‌کند که آنچه تعریف شده است گروه است؛ به‌جای آن که صحت موضوع بامحاسبه تحقیق شود نتیجه ازیك تحقیق باتصور بدست می‌آید. مرجح شناختن راه‌ورسم تصوربرروش محاسبه یکی از خصایص‌بارز چیزی است که درریاضیات جدید براستی‌جدید است.

اگر مسأله‌ای که مطرح است تعریف‌کردن یك گروه G باشد، البته معرفی G به‌صورت گروهٔ خودسانیهای نهادی چون S به‌معنی تغییری است درمسأله. زیرا که باید اطمینان یافت که این گروه G که تعریف می‌شود همان گروهی است که بایستی تعریف شود. اما برای امتحان درستی چیزی کـه گروه خودسانیهای نهاد مورد بحث S است بازهم بوسیلهٔ تصور و برپایهٔ برخی اصلهای برتر اقدام می‌شود. ترجیح می‌دهم که طرز انجام این کار را با مثالی نشان دهم.

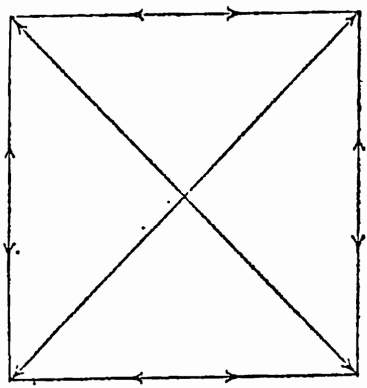
فرض کنیم که S شبکهٔ مربع درصفحه (یعنی نقطه‌هائی که مختصاتشان عددهای صحیح‌اند) باشد. گروه همنشتیهای G که در S تغییری پدید نمی‌آورند کدام‌است؟ انتقال t_a همسنگ بردار $\vec{a}$ عضو G است، ونیز دورانهای d_j حول مرکز با زاویه‌های $\frac{1}{2}\pi j$ $(j = 0, 1, 2, 3)$، و تقارن s نسبت به محور x. چگونه همهٔ عضوهای G را پیدا می‌کنیم؟

فرض کنیم f عضو G باشد. پس f مبداء را بریکی از نقاط شبکـه مانند a مـی‌نگارد. بنابراین $a = f(0,0)$. انتقال t_a چنین مـی‌کند، پس $f_1 = t_a^{-1} f$ نقطهٔ $(0,0)$ راتثبیت می‌نماید. اما f_1 نقطهٔ $(1,0)$ را روی یکی ازنقاط شبکه که باید همسایهٔ $(0,0)$ باشد یعنی بریکی ازچهارنقطهٔ $(1,0)$ $(0,1)$، $(-1,0)$، $(0,-1)$ می‌نگارد. d_0 و d_1 و d_2 و d_3 هم بترتیب چنین می‌کنند، بنابراین اگر j درست انتخاب شود، $f_2 = d_j^{-1} f_1$ هردو نقطهٔ $(0,0)$ و $(1,0)$ را، یعنی بالمآل تمام محور افقی را، تثبیت می‌نماید. بدین ترتیب f_2 نگاشت همانی یاتقارن s است. اگربه‌عقب بسوی f محاسبه شود، این نتیجه حاصل می‌گردد:

$$f = t_a d_j \text{ یا مساوی } t_a d_{sj}.$$

این کلی‌ترین عضو G است. انتقالهای توسط عددهای صحیح و دورانهای به‌زاویهٔ $\frac{1}{2}\pi j$ ($j = 0،1،2،3$) و تقارن S، با هم، G را تولید می‌کنند.

گروهها به‌صورتی که تعلیم می‌شوند، یا طراحان پیشنهاد می‌کنند که بدان صورت درمدارس تعلیم شود، چیزدیگری است. این گروهها معمولاً باگروه ۲دوری یا گروه‌کلاین‌آغازمی‌شوند. اعضای گروه بوسیلهٔ نگاشتهای خاصی که منشاءِ هندسی یا منشاءِ دیگری دارند نمایش داده می‌شوند؛ چهار رأس مربعی بوسیلهٔ یك تبدیل افقی یا عمودی یا قطری بریکدیگر نگاشته می‌شوند (رك. شکل ۵). یا مجموعهٔ مثلث سرخ و یك مثلث آبی، و یك

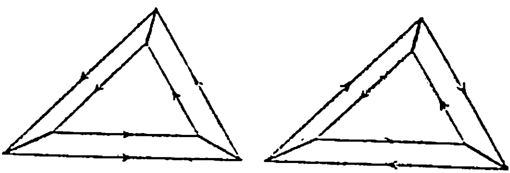


شکل ۵

مربع سرخ و یك مربع آبی برخودش بوسیلهٔ یك مبادلهٔ شکل، یا مبادلهٔ رنگ، یا مبادلهٔ هم‌شکل و هم‌رنگ، نگاشته می‌شود. با محاسبهٔ صریح آزموده شده است که این سه نگاشت همراه بانگاشت همانی تشکیل یك گروه می‌دهند. این فرایند، به‌خودی خود، صحیح است؛آنچه دراین میان خطاست این است که بااین مقدمه زمینه برای تعمیم‌هائی فراهم می‌آیدکه (ازجنبه‌های ریاضی و تربیتی) نادرست هستند. و کار به‌همین منوال پیش می‌رود. گروههای تازه‌ای با ۶، ۸، ۱۲، و۲۴ عضو معرفی می‌شوندکه همه ازجمع کردن یك‌به‌یك عضوهای خود، معمولاً به‌صورت نگاشتهائی از انواع مختلف و با تکیه بر تنظیم جدولهای گروه، بوجود آمده‌اند. دراین چهار چوب تحقیق آن‌که آنچه ساخته شده است براستی گروه است وظیفه‌ای بی‌انتها خواهد بود مگر این‌که تعداد عضوها خیلی‌کم باشد، اما حتی در این

صورت هم اعتمادکردن به‌محاسبه بیشتـر از اعتقاد داشتن به‌بینش ریاضیات خوبی نیست.

بدیـن ترتیب آنچه روی می‌دهد این است که نوجوان به‌سوی این اعتقادسوق داده می‌شودکه هردستگاهی بایك‌عمل دوتائی گروه‌است،یادست کم دبیر هیچگاه چنین دستگاههائی راکه‌گروه نباشند مشخص نخواهدکرد. خواص‌گروه یابادلایل سطحی وساختگی‌آموخته می‌شوند یابا دلایل‌صحیحی که متعلم نمی‌تواند آنها را جذب کند. در ایـن روش نمودارهای گروهها می‌توانند نقش مهمی داشته باشند. نمودار دوگروه را درشکل ۶ بنگرید. مجمـوعهٔ شش نقطه‌ای رؤس با دونگاشت به یکدیگر تبدیل شده‌اند، یـك



شکل ۶

نگاشت از مرتبهٔ ۲که باخطوط ضخیمتر نموده شده است ودر انتهای‌هرخط ضخیم رابه‌هم تبدیل می‌کند؛ نگاشت دیگر ازمرتبهٔ ۳ است وبا پیکان‌نشان داده شده است وآخر هر پیکان را به‌سرآن می‌نگارد. این دونگاشت گروه G جایگشتهای شش رأس را تولید می‌کنند. اکنون این فکر القا می‌شودکه G درنگاشت رأسها بریکدیگر متعدی ساده است (یعنی عضوی از Gکه یك راس رابردیگری می‌نگارد منحصر به‌فرد است)، بدین ترتیب‌که Gگروهی ازمرتبهٔ۶است. این گفته واقعاً حقیقت دارد. درموردگروه اول‌نمودارمطلب واضح است. این وضوح به‌دغل به‌دومی نقل شده است، زیراکه دراین‌جـا بهیچ روی واضح نیست. راه صحیح برای پرداختن به حالت دوم این است که درآن بچشم نمودار نگریسته شود نـه نمایش‌گروه، وبعد خودسانی آن یافته شود. جدولهای‌گروهها یانمودارهای آنها وسایلی هستند برای‌واضح ساختن‌گروهها یامجسم‌کردن آنها، اما برای شناساندن‌گروهها یااثبات این که دستگاه معینی‌گروه است بکلی نارسا هستند.

راست است‌که دراین‌گونه نظریهٔ‌گروههای دبیرستانی، اگردربندرگاه امن محاسبه قدم به‌ساحل‌بگذاریم همه چیز روبراه می‌شود. در مجموعه‌ای متناهی مرکب از حداکثر ۲۶ حرف‌که هریك درمعنی عضوگروهی پایاست

سروکار بامحاسبه است- ومحاسبه‌ای خطرناك، زیراکه اگر زودتر از وقت مقتضی به‌آن پرداخته شود به‌تعبیر از حروف الفبا به‌عنوان نمادهای‌چیز-های‌متغیر لطمه وارد می‌سازد- واین تمایل‌خطرناکی است‌که امروزدرنظریهٔ مجموعه‌ها در دبیرستانها قویاً احساس می‌شود.

آیا برای تعلیم نظریهٔ‌گروهها در دبیرستانها به‌صورتی‌که بااصل آن تفاوت داشته باشد دلایل معتبری هست؟ من‌که تردید دارم.

بنا بر فرضیهٔ مشهور جرم برونر:

«درهر مرحله از تربیت‌کودك می‌توان هرمطلبی را به‌نحوی مؤثر با روشی‌که ازجنبهٔ فکری درست باشد به‌اوآموخت[1]»

درحقیقت‌این‌جا برونراز باربل اینهلدر[2] نقل قول‌می‌کند،که‌محتاطانه قیدی را می‌افزاید:

«مشروط‌به‌آن‌که‌جنبهٔ ریاضی‌خودراکنارگذاشته باشند وبوسیلهٔوسایلی مورد تعلیم قرارگرفته باشند.که خودکودك بتواند باآنهاکارکند.»

در مورد تعلیم برخی از مطالب ، استدلالهای متقن تری از آنچه استعداد ماانجام می‌دهدوجود دارند. اما حتی‌اگر چنین استدلالی‌درآموزش ریاضی مورد قبول باشد، نمی‌بایست دفعتاً بااعمال شرطی‌که مستلزم‌تبدیل (تعلیم) ریاضی موضوع به‌صورتی غیر ریاضی است، آن را از اعتبار ساقط کنیم.

هرگاه بخواهیم بخشی از ریاضیات عالی را درسطح پائین‌تری عرضه کنیم، باید دقیق ودرستکار باشیم. ساده کردن مطلب چیز خوبی است، اما مقدماتی سازی به‌صورتی غلط خطری خواهد بود، واین تقلیدی است تصنعی از صورتهای اصلی‌که به‌قیمت نابودی مفاهیم مهم نظریه‌ای‌ریاضی تمام می‌شود. اگر به‌کودکان گروهها آموخته می‌شود، محق هستندکه‌نظریهٔ اصلی‌گروهها را بیاموزند نه‌روایتی‌کودکانه از آن. ریاضیات درگذشته‌بر-اثر تمایلات نادرست درعرضهٔ‌مطالب ریاضی در سطح دبیرستان رنج‌فراوان برده است. بیائیم درآینده‌کمی محتاطتر شویم. درستکاری حسن بزرگی در آموزش است. اگر مطلبی را نتوان نابهنگام آموخت چیزی از دست‌نمی-رود، واگر به‌روشی درست آموخته شود حاصل بسیار خواهد داشت.

ترجمه: احمد بیرشك- علی‌اکبر عالم‌زاده

---

1. Jerome Bruner, Ths Process Of Education, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1960, P. 33.
2. Bärbel Inhelder

ژان پدرسن[1]

اری‌گامی[2]

اری‌گامی یك هنر باستانی ژاپنی‌هاست در تاکردن یك ورق کاغذ به قسمی که این کاغذ بریده نشود و یا چیزی به‌آن اضافه نشود. پس‌ازبررسی اجسام افلاطونی، نمونه‌ای از N ـ گامی[3] را می‌توان به‌عنوان برنامه بعدی مورد مطالعه قرارداد. بدیهی است‌که در ریاضیات به‌کرات به‌اجسام افلاطونی برخورد می‌کنیم واهمیت‌آموزشی آنها هم برکسی‌پوشیده‌نیست: این اجسام را به‌سهولت می‌توان ساخت، اما تحقیق و بررسی سایراجسام، به‌دانش‌آموزان ایـن فرصت را می‌دهدکه در حل یك مسئله تازهٔ هندسی و در روند طبیعی‌جنبه‌های ریاضی آن، خود را سهیم بدانند. به‌این ترتیب‌که ابتدا با مفاهیم بازی می‌کنند، سپس آنها را به‌صورت فرمول درمی‌آورند و سرآخر متوجه می‌شوندکه آیا حدس اولیهٔ آنها درست بوده است یا نه. از اینرو، این دانش‌آموزان به‌جای آنکه ناظر و تماشاچی باشند خودشان نیز مانند یك ریاضیدان، در حل و فصل مسائل سهیم می‌شوند.

نکته قابل توجه این است‌که هرگاه بخواهیم مدلهائی با روش اری‌ـ گامی بسازیم باید در تاکردن،کمال دقت را بنمائیم، چرا کـه باید با دقت کامل بتوانیم خطهای مساوی را به‌وسیلهٔ خط‌کش و پرگار رسم‌کنیم.

فرض می‌کنیم‌که دانش‌آموزان قطعات‌کاغذی مربعی شکل رامطابق

---

1. Jean J. Pedersen

۲. اری‌گامی (Origami) واژه‌ای است چینی به‌معنی کاغذ تاکردن. این واژه را در همه زبانهای دنیا، به همین صورت به‌کار می‌برند و ترجمهٔ آن، معمول نیست. N ـ گامی نمونه‌ای از اری‌گامی است.

3- N - Gami

شکل ۱، تاکنند در اینصورت **خطهای تا:**

الف ـ هر زاویه رأس مربع را به‌چهار زاویه متساوی، تقسیم می کنند.

ب ـ عمود منصف‌های هر ضلع این مربع‌اند.

ج ـ عمود منصف‌های خطوطی هستندکه زاویه‌های راس مربع را نصف می کنند.

خاصیت (ج) برای n ـ ضلعی‌ها ـ وقتی که n زوج باشد ـ الزامی نیست، اما در صورتیکه n فرد باشد، خاصیت (ج) در مورد n ـ ضلعی‌ها حتماً صادق است.

قبل از اینکه به‌ادامه مطلب بپردازیم ذکر توضیحاتی در باب «خط دره‌ای» و «خط‌کوهی» ضروری است. در اینجا، اصطلاحاً اگر برجستگی خط تا بطرف بالا (یا محل تا، برآمده) باشد آنرا خط‌کوهی («تا»کوهی)[1] و اگر این برجستگی بطرف پائین (و یا محل تا، فرو رفته) باشد آنرا خط دره‌ای («تا» دره‌ای)[2] می‌نامیم. با اتکای به این مطلب، تمام قسمتهای نقطه چین را به‌صورت‌خط دره‌ای یا «تا» دره‌ای تا می‌کنیم و سپس‌قسمتهای خط چین را به‌صورت خط‌کوهی یا «تا»کوهی، مجدداً تا می‌زنیم. وقتی که رئوس A، B، C وD را برهم منطبق کنیم و قسمتهای مثلثی هاشورزده (رنگ زده) را، تو بزنیم در اینصورت، یك چند وجهی با ۱۶ وجه مثلثی شکل، به‌وجودمی‌آیداین‌چندوجهی دربین علاقه‌مندان به‌بازی **«اری‌گامی»** عموماً به‌عنوان **زنگ‌آلمانی**[3]معروف و مشهور است.

در اینجا چند سئوال مطرح می‌شود:

۱ـ اگر چند ضلعی‌های‌محدب منتظم دیگری را درست به‌همان‌روش، تاکنیم چه‌اتفاقی می‌افتد؟

۲ـ آیا چند وجهی‌ها متشابه‌اند؟

دانش‌آموزان شجاع و بی‌باك، چند ضلعی‌های منتظم از قبیل مثلث، مربع، پنج ضلعی و شش ضلعی را آزمایش‌کردند، به‌طوریکه این تجربه و آزمایش به‌آنان یاری داد تادریابندکه تمام n ـ ضلعی‌های منتظم محدب، چنین چند وجهی‌هائی را نمی‌سازند. در واقع، تنها چندضلعی‌های منتظمی که چنین عمل‌می کنند عبارتند از چند وجهی‌هائی‌که وجه‌های اجسام افلاطونی را تشکیل می‌دهند.

---

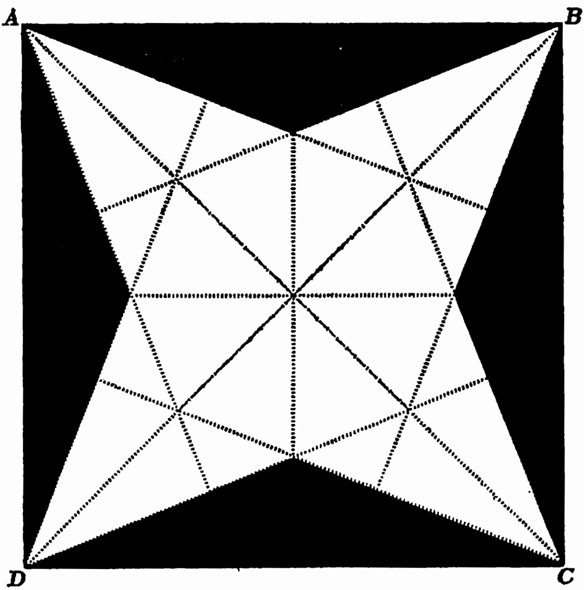
1. Mountain fold 2. Valley fold 3. German Bell

دانش‌آموزان شاید بخواهند ثابت کنند کـه این نوع چند وجهی را نمی‌توان از n ـ ضلعی‌ها ساخت مگر در حالتیکه n برابر۳، ۴ ویا ۵ باشد. یکی از روشهای‌مناسب جهت اثبات این‌امر را ذیلاً ازنظرتان می‌گذرانیم:

در یك n ـ ضلعی منتظم محدب، زاویـه خارجی θ، در معادلهٔ «$n\theta = ۲\pi$» صدق مـی‌کند از اینرو: $\theta = \frac{۲\pi}{n}$ در نتیجه، زاویـه داخلی هر رأس n ـ ضلعی برابر $\pi - \frac{۲\pi}{n}$ و $\frac{(n-۲)\pi}{n}$ خواهد بود.

زاویه‌های هرگوشهٔ n ـ ضلعی را کـه اشتراك رأسهایشان، رأس یك چند وجهی را تشکیل می‌دهند درنظرمی‌گیریم. چون نصف هرزاویه‌داخلی چند وجهی برای ساختن وجهای اطراف رأس زنگ، به‌کار رفته است لـذا حاصلجمع این زاویه‌ها برابراست با:

$$n.\frac{۱}{۲}.\left(\frac{n-۲}{n}\right)\pi = \left(\frac{n-۲}{۲}\right)\pi$$



شکل ۱

«تا» دره‌ای . . . . . .

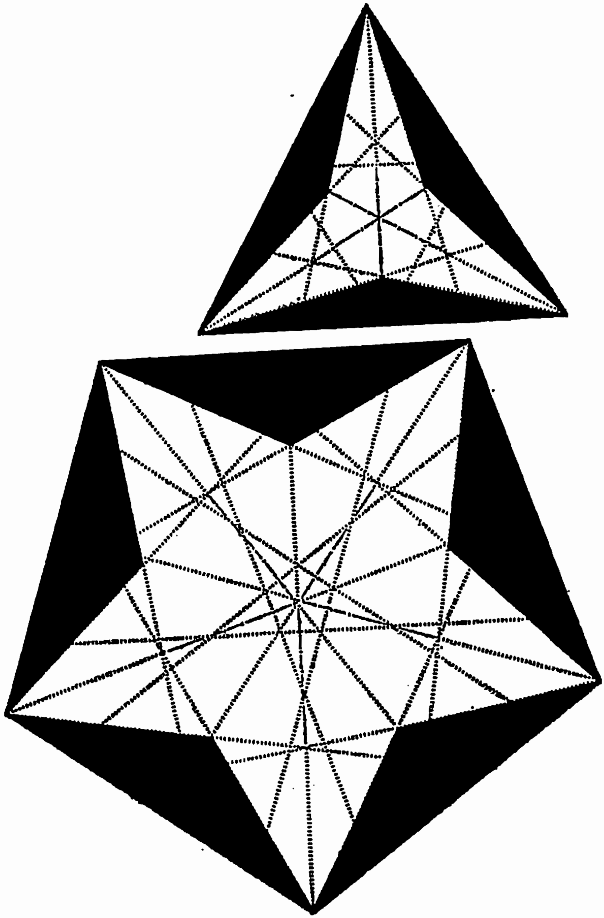
«تا» کوهی - . - . - . -

اکنون حاصلجمع‌زاویه‌های هر رأس یك چند وجهی محدب بایدکمتر

از 2π و بیشتر از صفر باشد. بنابراین خواهیم داشت.

$$0<\frac{(n-2)\pi}{2}<2\pi \text{، } (n=1\text{ و }2\text{ و }3\text{ و }4\text{ و }\ldots)$$

و این شرط فقط به‌ازای ($n=3$ و ۴ یا ۵) برقرار است. نمونه‌های مربوط به‌زنگهای مثلثی و پنج ضلعی، در شکل ۲ نشان داده شده است.



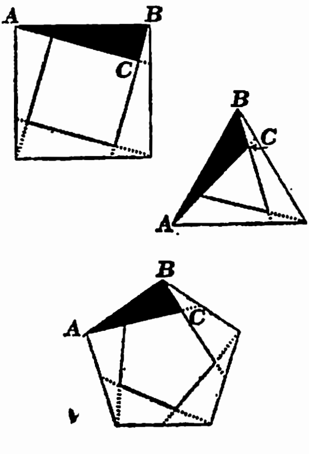
شکل ۲

دانش‌آموزان، هنگام بازی‌و تجربه، باید توجه داشته باشندکه‌همیشه آندسته از خطهای «تا» ـ که ازرئوس n ـ ضلعی می‌گذرند ـ دو nـ ضلعی

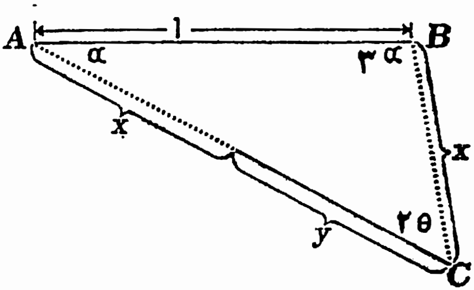
متشابه در داخل هر n ـ ضلعی ساخته می‌شود. بعضی از اینها، در شکل ۳ با خطهای پر، نشان داده شده است. این وضع در حالتیکه n بزرگتر از ۵ باشد نیز اتفاق می‌افتد.

برای پیداکردن طول ضلع nـ ضلعی داخلی می‌توان مثلثات‌رابخدمت گرفت مشروط برآنکه طول ضلع n ـ ضلعی اصلی را، یك واحد فرض کنیم. به‌منظور نمایش حالت تعمیـم مثلثهای رنگ زره (سایه زده) در شکل ۳، دیاگرام مناسبی درشکل ۴ رسم شده است. باید توجه داشت‌که درشکل۴، ۲θ، اندازهٔ زاویهٔ خارجی یکی از چند ضلعی‌های متشابه را معلوم می‌کند.

بنابراین: $n(۲\theta) = ۲\pi$. از اینرو: $\theta = \frac{\pi}{n}$ همچنین α برابر $\frac{۱}{۴}$ انـدازهٔ زاویهٔ‌داخلی یکی‌ازچند ضلعی‌هاست نتیجه‌ای‌که فی‌البداهه‌از این‌امرعایدمان می‌شودآنستکه $(\pi - ۲\theta)$ $\alpha = \frac{۱}{۴}$ یا $\alpha = \frac{\pi}{۴} - \frac{\theta}{۲}$ اولین نتیجه‌ای که به دست‌می‌آیدآنستکه‌آخرین زاویه‌این‌مثلث مقدارش برابر α ۳ است. زیرا این زاویه‌برابر $\frac{۳}{۴}$ اندازهٔ زاویهٔ داخلی یکی از چند ضلعی‌های متشابه است.



شکل ۳



شکل ۴

n= تعداد ضلعهای n ضلعی

y= طول ضلع n- ضلعی داخلی متشابه

حال، با توجه به‌قانون سینوسها خواهیم داشت:

$$\frac{x+y}{\sin ۳\alpha}=\frac{۱}{\sin ۲\theta} \text{ و } \frac{x}{\sin\alpha}=\frac{۱}{\sin ۲\theta}$$

بنابراین

$$x=\frac{\sin\alpha}{\sin ۲\theta} \text{ و } x+y=\frac{\sin ۳\alpha}{\sin ۲\theta}$$

از اینرو

$$y=(x+y)-x=\frac{\sin ۳\alpha}{\sin ۲\theta}-\frac{\sin\alpha}{\sin ۲\theta}=\frac{\sin ۲\alpha-\sin\alpha}{\sin ۲\theta}$$

بااستفاده ازقانون تبدیل تفاضل سینوسها به‌حاصلضرب عوامل، خواهیم داشت:

$$y=\frac{۲\cos ۲\alpha\sin\alpha}{\sin ۲\theta} \qquad (۱)$$

ازطرفی چون: $\alpha=\frac{\pi}{۴}-\frac{\theta}{۲}$ ، $۲\alpha=\frac{\pi}{۲}-\theta$ و

$$\cos ۲\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\theta\right)=\sin\theta$$

بنابراین با جاگذاری این روابط و رابطهٔ $\sin ۲\theta=۲\sin\theta\cos\theta$ در رابطهٔ (۱) خواهیم داشت:

$$y=\frac{۲\sin\theta\sin\alpha}{۲\sin\theta\cos\theta}$$

در نتیجه

$$y = \frac{\sin\alpha}{\cos\theta}$$

از طرفی می‌دانیم که

$$\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{۴} - \frac{\theta}{۲}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{۴}\cos\frac{\theta}{۲} - \cos\frac{\pi}{۴}\sin\frac{\theta}{۲}$$

$$= \frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(\cos\frac{\theta}{۲} - \sin\frac{\theta}{۲}\right)$$

و نیز داریم

$$\sin\frac{\theta}{۲} = \sqrt{\frac{۱ - \cos\theta}{۲}} \quad \text{و} \quad \cos\frac{\theta}{۲} = \sqrt{\frac{۱ + \cos\theta}{۲}}$$

بنابراین

$$\sin\alpha = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(\sqrt{\frac{۱ + \cos\theta}{۲}} - \sqrt{\frac{۱ - \cos\theta}{۲}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{۱ + \cos\theta} - \sqrt{۱ - \cos\theta}}{۲}$$

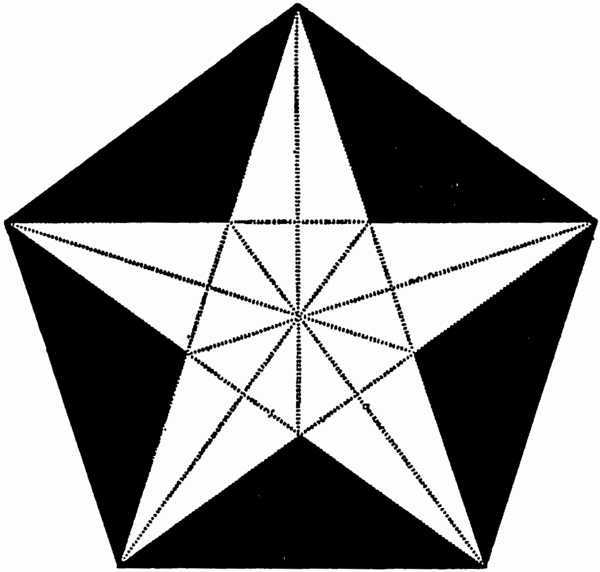
در نتیجه رابطهٔ $y = \frac{\sin\alpha}{\cos\theta}$ بصورت زیر خلاصه می‌شود:

$$y = \frac{\sqrt{۱ + \cos\theta} - \sqrt{۱ - \cos\theta}}{۲\cos\theta}$$

همچنین، چون : $x = \frac{\sin\alpha}{\sin ۲\theta}$ لذا رابطه‌ای $\sin\theta = \frac{y}{۲x}$ را می‌توان به‌دست آورد. رابطه‌ای که می‌توان آنرا در چند ضلعی‌های شکل ۳ کنترل کرد.

نمونه‌های دیگر اری گامی

یك نمونه جالب شکلهای اصلی، در شکل ۵ نشان داده شده است این نمونه، یك هرم‌مخمس‌القاعده به‌وجود می‌آورد و با دوازده تااز اینها، می‌توان یك‌جسم‌دوازده وجهی ساخت. برای به‌دست آوردن خواص (الف)، (ب) و (ج) می‌توان به‌جای مربع، چند مستطیل را تاکرد و نمونهٔ‌دیگری از یك چند وجهی را ساخت. البته برای دانش‌آموزانی که علاقمند به‌بازی



شکل ۵

با هنر Nـ گامی هستند علاوه برمربع و مستطیل، امکانات بسیار زیادی از قبیل لوزی، دایره و امثال آن وجود دارد.

ترجمه: محمد حسین احمدی

هندسه، بهترین و ساده‌ترین منطقها ومناسبترین راه پایدار ساختن اندیشه‌هاست.

دیدرو

زندگی تنها به‌این درد می‌خوردکه انسان به‌دوکار مشغول شود: اول ریاضیات بخواند، دوم ریاضیات را به‌دیگران بیاموزد

پواسون

نقطهٔ اتکائی به‌من بدهید تا بیاری اهرم، جهان را ازجای خود تکان دهم.

ارشمیدس

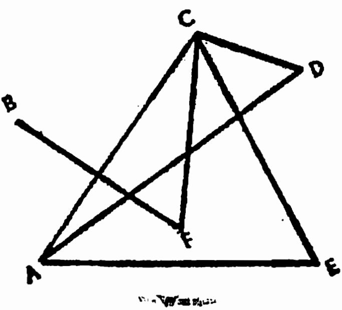
ل. ن. گولووینا

گرافها وکاربرد آنها

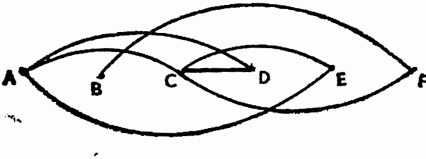
مقدمه

از زمانی که واژه «گراف» وارد در ادبیات ریاضی شده است، سالهای زیادی نمی‌گذرد. درضمن، مفهوم گراف، نه‌تنها در ریاضیات، بلکه در فیزیك، شیمی، زیست‌ـ شناسی، صنعت و حتی در زندگی روزانه، بانامهای گوناگونی چون طرح، نگاره، دیاگرام، نقشه، ماز (لابیرنت) وغیرآن، به‌کارمی‌رود. اغلب، و به‌بهانه‌های مختلف، شکلی را رسم می‌کنیم که ازنقطه‌ـ هایی که نمایندهٔ چیزهایی هستند، تشکیل شده است؛ و در حالتی که بین این چیزها، رابطه‌هایی وجود داشته باشد، نقطه‌ها را به‌کمك خطهایی به‌هم وصل می‌کنیم.

مثلا، فرض کنیم چندنفر رابه‌نامهای A، B، C، D، E و F به‌مهمانی نزد خود دعوت کرده باشید و در بین آنها قوم‌وخویش، دوست، همسایه و آشناهای دور شما وجود داشته باشد. به این ترتیب، بعضی ازآنها، همدیگر را نمی‌شناسند. شماکوشش می‌کنید به خاطر بیاورید‌که هرکدام ازآنها با چه‌کسی‌آشناست. برای‌این‌منظور، مثلا شش نقطهٔ A، B، C، D، E و F را روی کاغذ، علامت می‌گذارید و بعد هردونقطه‌ای را، که متناظر با دو فرد آشنای باهم باشد، به‌وسیلهٔ خطی به‌هم وصل می‌کنید. دراینصورت، شما شکلی به‌دست می‌آورید که یك **گراف** است. این‌گراف شامل‌چند نقطه و



شکل ۱



شکل ۲

چند خط است، که هر نقطه‌را یك راس و هرخط را یك **یال** گراف نام‌گذاشته‌اند. مثلا فرض‌کنیدکه به‌این ترتیب، شکل ۱ را به‌دست آورید.

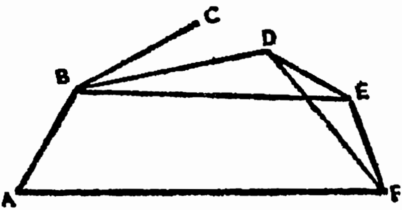
روشن‌است‌که‌درچنین‌وضعی، نه‌جای نقطه‌های A، B،...، ونه نوع خطهایی‌که این‌نقطه‌هارابه‌هم وصل‌کرده است، هیچ‌اهمیتی برای ما ندارد. همان نتیجه‌ای‌را که از شکل۱ گرفتیم و همان هدفی‌را که در آنجا دنبال می‌کردیم، می‌توانستیم، مثلا به‌کمك شکل۲ به‌دست آوریم. این دوگراف، متفاوت به‌حساب نمی‌آیند و ریاضیدانان آنها را **یکدیسه** (*isomorphic*) گویند. دوگراف یکدیسه‌اند، وقتی‌که تعداد رأسها‌یشان برابر باشد، به‌نحوی‌که هر دو رأس متناظر را در دوگراف با یك حرف نامگذاری کنیم، آنگاه وقتی دو رأس در یکی از گرافها به‌وسیلهٔ یالی به‌هم وصل شده‌اند، رأسهای همنام آنها درگراف دوم هم به‌وسیلهٔ یالی به‌هم مربوط‌شده باشند.

ممکن بودکه همهٔ مهمانان شمابا هم‌آشنا باشند؛ دراین‌صورت هر دو رأس دلخواه‌گراف، به‌وسیلهٔ یك یال، به‌هم مربوط می‌شود. چنین گرافی را **کامل** گویند. در حالت دیگر، ممکن‌بودکه‌هیچکدام ازمهمانان شما باهم‌آشنایی نداشته باشند و گراف تنها از رأسهای **منفردی**، که هیچ یالی آنهارا به هم مربوط نکرده است، تشکیل شده‌باشد؛چنین گرافی را**گراف‌صفر** گویند. ولی اینها، دوحالت‌مرزی هستند، درحالتهای بینابینی، بعضی ازرأسها به‌هم‌وصل شده‌اندو بعضی دیگر، دارای یال ارتباطی نیستند.

فرض‌کنیم که شما بخواهید بدانیدکه‌آیا مهمانان شما دروضعی هستندکه بتوانند خودشان، وبدون کمك‌شما، با هم آشنا شوند.روشن است‌که این امکان وقتی‌وجوددارد که از هررأس دلخواه‌گراف، بتوان با حرکت در امتداد یالها، به هر رأس دلخواه دیگری رسید. چنین گرافی را **همبسته** گویند و باز روشن است که یك‌گراف همبسته ازیك قطعه درست شده است.وقتی که چنین وضعی وجودنداشته‌باشد، گراف ازچندقطعه جداگانه‌تشکیل شده است‌که بین آنها، یالی وجود ندارد؛و آنرا **ناهمبسته** گویند. قطعه‌هایی را، که گراف از آنها

تشکیل شده است، **همنه‌های همبستهٔ** آن می‌نامند. گراف کامل، یك همنهٔ همبسته، و گراف صفر، به‌تعداد رأسهای خود، همنه‌های همبسته دارد.

بالاخره، اگر شما بخواهید معلوم کنید که کدامیك از مهمانان شما، احتیاج به آشنایی با هم دارند، می‌توانید دوباره همان رأسها را رسم کنید و این بار یالهایی از آنرا رسم کنید که در شکل قبل وجود نداشت؛ این گراف را **متمم** گراف نخست گویند. مثلا، متمم گرافی که در شکل ۱ رسم شده است، گرافی است که در شکل ۳ نشان داده‌ایم.



شکل ۳

تعداد یالهایی را که به هر رأس می‌رسد، می‌شماریم، این عدد، برای هریك از مهمانان شما نشان می‌دهد که با چند نفر از دیگران آشناست. تعداد یالهای $\rho(A)$، که به رأس A از گراف رسیده است، **درجهٔ** این رأس نامیده می‌شود. روشن است که در گراف کامل، درجهٔ هرکدام از n رأس گراف برابر $(n-1)$؛ و در گراف صفر، درجهٔ هر رأس برابر صفر است. رأسهایی را که درجهٔ آنها زوج باشد، **رأسهای زوج** و رأسهایی را که درجهٔ آنها فرد باشد، **رأسهای فرد** گویند. اگر درجهٔ همهٔ رأسهای یك گراف باهم برابر، و مساوی r باشد، گراف را **همگون و از درجهٔ r** گویند. مثلا گراف کامل، وقتی که دارای n رأس باشد، گرافی همگون و از درجهٔ $(n-1)$ است، همچنین گراف صفر، همگون و از درجهٔ صفر است.

اگر گرافی با رأسهای A_1، A_2، ...، A_n در نظر بگیریم، روشن است که

$$\rho(A_1)+\rho(A_2)+\ldots+\rho(A_n) \qquad (1)$$

برابر است با دوبرابر تعداد یالهای گراف، زیرا، در اینصورت هر یال دوبار به‌حساب می‌آید (هربار به خاطر یکی از دو انتهای خود). بنابراین، اگر تعداد کل یالهای گراف را l بگیریم، داریم:

$$l=\frac{1}{2}[\rho(A_1)+\rho(A_2)+\ldots+\rho(A_n)]$$

از اینجا نتیجه می‌شود که مجموع (۱) ــ مجموع درجه‌های همهٔ رأسهای گراف ــ عددی زوج است، زیرا همیشه برابر با دوبرابر یالهای گراف می‌شود، و این به معنای آنست

که **تعدادرأسهای فرددرهرگراف زوج است.**

گرافهایی را هم می‌توان درنظر گرفت که تعداد رأسها ویالهای آن بینهایت باشد، که در اینصورت **گراف نامتناهی** نامیده می‌شود. وبه‌همین مناسبت، اگرتعدادرأسها و یالهای یك گراف، محدود باشد، **گراف متناهی** نامیده می‌شود.

به‌مفهوم مهم دیگری‌ازگراف، یعنی **زنجیر** هم باید توجه کرد: زنجیر عبارتست از خط پیوسته‌ای که از بعضی یالهای گراف‌می‌گذرد (می‌شودگفت‌که زنجیر عبارتست‌از دنباله‌ای‌ازیالها که‌یك‌خط پیوسته‌را تشکیل‌می‌دهند). زنجیر بسته، یعنی زنجیری که‌ابتدا و انتهای‌آن برهم منطبق‌باشد، **دور** نامیده می‌شود.

ما، مفهومهای اصلی نظریهٔ گرافها را، روی یك مثال عادی، توضیح دادیم. از اینگونه مثالها، هرچه بخواهید، می‌توان پیدا کرد. مثلا، هرنقشه‌ای از جاده‌ها، یك گراف است، به‌شرطی که شهرها یا ایستگاههای سر راه را به‌عنوان رأسها، و خود مسیر راه آهن و یا جادهٔشوسه‌رابه‌عنوان‌یالها، درنظر بگیریم. ممکن است دوایستگاه، با بیش از یك جاده به‌هم مربوطشده باشند، یعنی دو رأس این گراف را ممکن‌است چند یال به‌هم‌وصل‌کرده باشد؛ چنین‌یالهایی‌را **مکرر** گویند.

هرطرحی ازشبکهٔ برق، وهرطرحی از لوله‌کشی آب و یاگاز را هم می‌توان یك گراف به‌حساب آورد.

در این مقاله، نمونه‌هایی، از گرافهای مختلف را می‌آوریم وبه خصوص نشان می‌دهیم که هرنقشهٔ جغرافیائی، می‌تواند یك گراف به حساب آید.

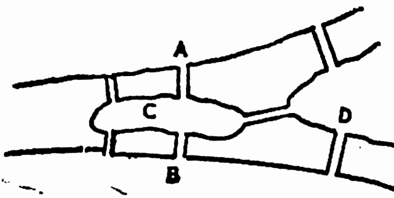
همهٔ گرافهایی راکه در اینجا می‌آوریم، متناهی و همبسته‌اند. بندهای ۱ تا ۷ را می‌توانید بدون ارتباط باهم وبه‌هرترتیبی که مایلید بخوانید، ولی بند ۸ را بعداز بند ۷ مطالعه کنید.

§۱. گراف اولر

نخستین نوشته دربارهٔگرافهارا می‌توان در انتشارات فرهنگستان علوم پترزبورگ، در سال ۱۷۳۶ میلادی، پیداکرد؛ این نوشته، از **لئونارد اولر** بودکه‌درآن‌مساله‌ای دربارهٔپلهای **کنیگسبرگ** را مطرح کرده بود مسأله چنین‌بود:

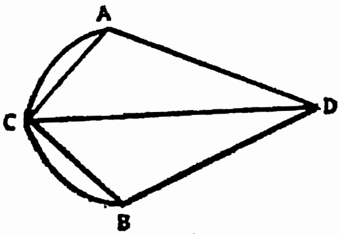
کنیگسبرگ(که‌حالا **کالینین گراد** نامیده می‌شود) در کرانه های رودخانهٔ **پره‌گل** و دو جزیرهٔ آن قراردارد. در شهر، ۷ پل وجود داردکه طرح‌آنرا می‌توان درشکل ۴ دید.

درروزهای تعطیل، مردم‌شهر، درکرانه‌های رودخانه، روی‌پلها و جزیره‌ها گردش می‌کنند. پرسشی



شکل ۴

که‌مطرح شده،اینست: آیامی‌توان از یك نقطه آغاز به‌حرکت کرد و ضمن اینکه ازهمهٔ پلها، وازهرکدام دقیقاً یکبار، عبور می‌کنیم، دوباره به‌همان جای اول برگردیم؟ **اولر** برای‌حل این مسأله، گرافی‌ساخت که راسهای آن A، B، C و D، از کرانه‌های A و B و جزیره‌های C و D، و یالهای آن، از پلهایی که این نقطه‌ها را به هم وصل می‌کرد، تشکیل‌شده بود (شکل۵)



شکل ۵

(باوجوداین،خوداصطلاح «گراف» درست ۲۰۰ سال بعداز طرح این مسأله، و دراثر **کونیك**، پیداشد).

در اینصورت، مساله به‌اینجا منجر می‌شودکه روی این گراف، دوری پیداکنیم که از همهٔ یالها، و دقیقاً ازهرکدام یکبار، عبور کرده باشد. وقتی که‌مساله، به‌این‌ترتیب طرح شده باشد، به‌روشنی معلوم می‌شودکه راه حلی ندارد، زیرا، اگرچنین دوری وجود داشته‌باشد، هربارکه به‌رأسی واردمی‌شود، باید ضمناً ازآن خارج هم بشود، واین به‌معنای آنست که همهٔ رأسهای گراف باید زوج باشد، در حالیکه از روی شکل دیده می‌شودکه این وضع برای‌گراف ما وجود ندارد.

همچنین روشن است که هیچ زنجیر غیر بسته‌ای هم وجودندارد که شامل همهٔ یالها، و از هرکدام تنهایکبار،باشد. اگرچنین زنجیری وجود داشته باشد، باید دو رأس ابتدا وانتهای آن فرد ودیگررأسها زوج باشد، در حالیکه روی‌گرافی که در شکل ۵ دیده می‌شود، همهٔ رأسها فرد هستند.

اولر، ضمن حل مسألهٔ مربوط به‌پلهای **کنیگسبرگ**، پرسش کلیتری را هم مطرح کرد: با چه شرطی می‌توان روی یك‌گراف، دوری پیداکردکه ازهمهٔ یالهای آن، واز هریال تنها یکبار، گذشته باشد! از آنچه‌که گفتیم، معلوم می‌شود که برای این منظور، لازم است‌که همهٔ راسهای گراف‌زوج‌باشد. و**اولر**ثابت کردکه این شرط‌کافی هم نیست.

گراف G را در نظر مـی گیریم

که همهٔ رأسهای آن زوج باشد، رأس دلخواه A را انتخاب می‌کنیم واز آنجا، مسیر خود را روی یال آغاز می‌کنیم و هرچقدر که ممکن باشد جلو می‌رویم. این زنجیر، نمی‌تواند در هیچ رأسی، به‌جز A، پاره شود، زیرا به‌مناسبت زوج بودن رأسها، خروج از هر رأسی که به آن وارد شده‌ایم، ممکن است. بنا براین، چنین زنجیری، تنها می‌تواند در رأس A به‌پایان راه خود برسد، و این به‌معنای آنست که یك دور تشکیل می‌دهد. اگر این دور، تمامی گراف را پوشانده باشد، قضیه ثابت است. در غیراینصورت، روی آن، رأسی مثل B پیدا خواهد شد که یال عبورنشده‌ای به‌آن رسیده‌است. اگردرذهن خود تصورکنیم که همهٔ یالهای عبورشده، حذف شده‌باشند، آنوقت در همهٔ رأسهای گراف، به تعداد زوجی از یالها (که دور ما ازآنها عبور نکرده است) باقی می‌ماند، که البته این تعداد ممکن است برابرصفر هم باشد. بنابراین می‌توانیم از B، زنجیر تازه‌ای را آغاز کنیم و با عبور از یالهای باقیمانده، تا آنجا جلو برویم که دوباره به‌نقطهٔ B برسیم. دراینصورت می‌توانیم، دور نخستین را به‌این ترتیب اصلاح کنیم که درمسیر اول از A به B برگردیم وازآنجا ابتدا، روی دورتازه حرکت‌کنیم تادوباره به B برسیم وسپس قسمت باقیماندهٔ دور اول را، از B به A، طی کنیم. اگر بازهم، این دوراصلاح شده، تمامی یالهارادربرنگیرد، می‌توان دوباره، وبا همان روش آنرا اصلاح کرد. با توجه به‌اینکه تعداد یالهارا محدود گرفته‌ایم، بدون تردید، سرآخر به دوری می‌رسیم که شامل تمامی یالها و از هرکدام تنها یکبار، می‌باشد. چنین مسیری راکه روی گراف به دست می‌آید، **خط اولری**، وگرافی را که شامل خط اولری باشد، **گراف اولری** نامیده‌اند.

به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت‌کرد: برای اینکه روی گراف زنجیر (غیربستهٔ) AB وجود داشته باشد، به‌نحوی‌که از همهٔ یالها، و از هرکدام تنها یکبار عبور کند. لازم و کافی است‌که A و B تنها رأسهای فرد گراف باشند. با وجود این، ما حتی قضیهٔ کلیتری را هم ثابت می‌کنیم. همانطورکه درمقدمه دیدیم، تعدادرأسهای فرد هرگراف زوج است و ما این تعداد را $2k$ می‌گیریم. این پرسش پیش می‌آید: دست‌کم، چند زنجیر وجود دارد، به‌نحوی که‌مجموعهٔ‌همهٔ آنها، ازهمهٔ یالهای گراف، وازهریال تنهایکبار، گذشته باشد؟ از آنجاکه هر رأس فرد، یا آغاز ویا پایان یکی ازاین

زنجیرهاست، روشن است که تعداد آنها کمتر از k نیست. ثابت می‌کنیم که عکس این حکم هم درست است، یعنی در اینحالت، همیشه k زنجیر پیدا می‌شود، به‌نحوی که مجموعهٔ همهٔ آنها، تمامی گراف را پوشانده باشند.

فرض می‌کنیم که A_1، A_2، A_3، ...، A_{2k}، رأسهای فرد گراف باشند. آنها را دوبه‌دو با یالهایی مثل

$$A_1A_2,\ A_3A_4,\ \ldots,\ A_{2k-1}A_{2k} \quad (2)$$

به‌هم‌وصل می‌کنیم، درگراف تازه‌ای که به‌دست می‌آید، همهٔ رأسهازوج‌اند، و بنابراین، دوری پیدا می‌شودکه از همهٔ یالها، واز هرکدام تنها یکبار، گذشته باشد. اگر از این دور، k یال اضافه شدهٔ (۲) را حذف کنیم، به k زنجیر تبدیل می‌شودکه‌مجموعهٔ همهٔ‌آنها،تمامی گراف اولیه را می‌پوشاند.

اگر برای مسالهٔ مربوط به جستجوی‌دوری که‌شامل همهٔ یالها واز هرکدام تنها یکبار، باشد، راه حل کاملی پیدا شد، برای مسالهٔ شبیه آن، یعنی جستجوی دوری‌که شامل همهٔ رأسهای‌گراف، و از هر کدام تنها یکبار، باشد (به‌چنین خطی، **خط هامیلتونی** گویند)، به هیچوجه‌نمی‌توان‌به‌سادگی به‌نتیجه رسید. در حالت‌کلی، هیچ معیاری وجود نداردکه به‌وسیلهٔ آن بتوان معلوم‌کردکه آیا درمورد یك‌گراف داده شده، خط هامیلتونی پیدا می‌شود یا نه.

§۲. مساله مربوط به‌مازها (لابیرنتها)

در§۱ ثابت‌کردیم: برای‌اینکه‌بتوان تمامی‌گراف را دور زد، به‌نحوی که ازهریال یکباروتنها یکبارعبور کرده باشیم، لازم وکافی است‌که همهٔ رأسهای گراف زوج باشد. و البته، این شرط بسیارسنگینی است و مانع ازاین می‌شودکه هر گرافی بتواند دارای خط اولری باشد. ضمناً، می‌توان‌ثابت‌کردکه هر گراف (همبسته) را می‌شود به‌این ترتیب دورزدکه ازهریال‌آن درست دوبار، و هربار در جهتی، عبورکنیم. این دور زدن را، مثلاً می‌توان بنابر **قانون تاری** انجام داد

مسیرخود را، از رأس دلخواه A، و مثلاً درطول یال AB،آغاز می‌کنیم. این یال را با پیکانی در جهت از A به B نشان می گذاریم و با نشانهٔ خاصی مشخص می‌کنیم که روی این یال برای نخستین‌بار به B رسیده‌ایم. به‌همین ترتیب، روی یالهای‌گراف جلو می‌رویم و روی هر یال پیکانی می گذاریم تا جهت حرکت راروی این یال نشان

دهد و روی هر یالی که از طریق آن، برای نخستین بار به رأس تازه‌ای رسیده‌ایم، نشانهٔ خاصی می‌گذاریم برای خروج از یك رأس، می‌توانیم از هر یالی که تاکنون برای خروج مورد استفاده قرار نگرفته است، استفاده کنیم، ولی، **از یالی که از طریق آن برای نخستین بار به این رأس وارد شده‌ایم، تنها وقتی باید برای خروج استفاده کرد که امکان دیگری وجود نداشته باشد.**
ثابت می‌کنیم که به این ترتیب، تمامی گراف دور زده می‌شود به نحوی که از هر یال درست یکبار، و در دو جهت مختلف، استفاده شده باشد.

روشن است که مسیر ما، تنها در نقطهٔ A می‌تواند به پایان برسد، زیرا در همهٔ رأسهای دیگر، به اندازهٔ امکانی که برای ورود وجود دارد، برای خروج هم پیدا می‌شود. اگر در این ضمن، یکی از یالهای رأس A، به عنوان ورود مورد استفاده قرار نگرفته باشد، حتماً یال دیگری در این رأس وجود دارد که به عنوان خروج به کار نرفته است و بنابراین مسیر ما می‌تواند ادامه پیدا کند. درنتیجه، همهٔ یالهای رأس A، هم به عنوان ورود و هم به عنوان خروج مورد استفاده قرار می‌گیرد. مثلاً یال AB (و همچنین هر یال دیگر به رأس A) در هر دو جهت، مورد عبور قرار می‌گیرد.

حالا، نقطهٔ B را در نظر می‌گیریم. چون یال AB در هر دو جهت طی شده است، همهٔ یالهای دیگر رأس B هم، برای خروج مورد استفاده قرار گرفته‌اند (زیرا، بنابر شرط، یال AB برای خروج از B به طرف A، تنها در نوبت آخر باید مورد استفاده قرار گیرد)، و این به معنای آنست که همهٔ آنها، برای ورود به B هم، به کار رفته‌اند. یعنی از همهٔ یالهای رأس B هم، در دو جهت عبور شده است. به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که در همهٔ رأسهایی هم که به وسیلهٔ یالی به B وصل شده‌اند، همهٔ یالها و از دو جهت، مورد استفاده قرار گرفته‌اند. سرآخر، به این نتیجه می‌رسیم که مسیر ما از تمامی یالهای گراف، هر کدام یکبار در هر جهت، عبور کرده است.

به عنوان مثال، کسی که از نقشهٔ یك لابیرنت آگاهی نداشته باشد و بخواهد از همهٔ پیچ و خمهای آن عبور کند، می‌تواند از این روش استفاده کند. این شخص ضمن خروج از رأسها (تقاطعها) و ورود به یالها (راهروها یا کوچه‌ها) باید به این نکته‌ها توجه کند: وقتی که از یك رأس خارج می‌شود و در طول یالی حرکت می‌کند، نشانه‌ای بگذارد تا معلوم باشد که در طول این یال

از چه جهتی حرکت کرده است (و مثلاً در ابتدای این یال نشانهٔ «ورود ممنوع» را بگذارد)؛ ضمناً وقتی برای نخستین بار ازطریق یک یال به‌رأسی می‌رسد، نشانهٔ خاصی درانتهای آن قرار دهد تا متوجه باشد که ورود به‌آنرا ــ ضمن خروج از این رأس ــ برای نوبت آخر بگذارد.

روش تاری می‌تواند برای جستجوی راه خروج از پیچ و خمها، مورد استفادهٔ کسی که دریک لابیرنت گم شده است، قرار گیرد، زیرا به‌این طریق، بالاخره به‌نقطهٔ خروج، مثل هر رأس دیگر گراف، خواهد رسید.

§۳. مسالهٔ مربوط به‌ارتباط شهرها

فرض کنیم بخواهیم خطی (مثل مسیرراه‌آهن، مسیرسیم برق‌وغیره) رسم کنیم، تاشهرهای A_1، A_2، ... A_n را، به‌هم‌وصل کند. میزان ارزش $C(A_i,A_k)$، یعنی خطی که‌هردوشهر رابه‌هم وصل می‌کند، معلوم است. چگونه می‌توان این کار راباحداکثر صرفه‌جویی انجام داد، یعنی شبکه ارتباطی را، چگونه بسازیم تاارزش همهٔ آنها، به‌حداقل ممکن برسد؟

روشن است که چنین شبکه‌ای شامل هیچ دوری نیست، زیرا در غیر اینصورت، می‌توان یکی از حلقه‌های این دور را حذف کرد، بدون اینکه به‌ارتباط شهرها لطمه‌ای وارد شود، که البته با حذف این حلقه، ارزش شبکه کمتر می‌شود. گراف همبسته‌ای راکه شامل دور نباشد، **درخت** و متناظر با آن، گراف ناهمبستهٔ بدون دور را **جنگل** گویند. روشن است که هر جزء همبستهٔ جنگل، یك درخت است.

تعداد یالهای درختی را، که دارای n رأس است، حساب می‌کنیم. برای این منظور، توجه می‌کنیم که هر درختی را می‌توان به این ترتیب، ساخت: یکی ازرأسهای آنرا (به‌دلخواه)، به‌عنوان **ریشه**، انتخاب می‌کنیم و A می‌نامیم؛ از این رأس همهٔ یالهای به‌صورت AB_k را رسم می‌کنیم، سپس از هر نقطهٔ B_k، همهٔ یالهای به‌صورت B_kC_l را و غیره. هر بارکه یالی را رسم می‌کنیم، رأس تازه‌ای را به‌حساب می‌آوریم، و اگر رأس A راکنار بگذاریم، معلوم می‌شود که تعداد یالهای درخت، یك واحد کمتر از تعداد رأسهای آنست، یعنی تعداد یالهای درختی که n رأس‌دارد، برابر است با $n-1$،

هر گراف همبسته‌ای را، باکنار گذاشتن بعضی ازیالهای آن، می‌توان به درخت تبدیل کرد. به خصوص، وقتی که در گراف، یك دور وجود داشته باشد، یکی از

یالهای این دو را حذف می‌کنیم. اگر بعد ازاین حذف، بازهم دوری درگراف باقی مانده باشد، دوباره یکی از یالهای آنرا کنارمی‌گذاریم وغیره، تا وقتی که دیگرهیچ دوری درگراف باقی نماند، یعنی به‌درخت تبدیل شود. تعداد رأسهای گراف رابرابر n، تعداد یالهای اولیه را برابر l و تعداد یالهایی راکه باید حذف‌کنیم، برابر γ می گیریم. چون سرآخر، گرافی به‌دست می‌آیدکه n رأس و $n-1$ یال دارد، باید داشته باشیم:

$$n-1=l-\gamma$$

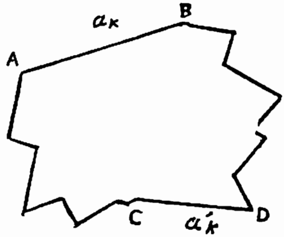
و از آنجا

$$\gamma=l-n+1$$

عـدد $\gamma=l-n+1$ را، **عدد دورسنج** گراف (همبستهٔ) مفروض گویند این عدد برابراست با تعداد دورهای‌جداگانه‌ای‌که دریك گراف وجود دارد وروشن است کـه عدد دورسنج یك درخت، برابر است با صفر.

به‌مسالهٔارتباطشهرهابرگردیم. ثابت می‌کنیم‌کـه ارزانترین شبکهٔ ارتباطی، به‌ترتیب زیرساخته مـی شود. یال A_iA_k را، که‌ارزانترین یالهای گراف‌است، به‌عنوان نخستین حلقه‌انتخاب می‌کنیم. اگر m حلقه را انتخاب‌کرده‌ایم، به‌عنوان حلقه $(m+1)$ام، ارزانترین حـلقهٔ باقیمانده را، به‌شرطی که‌باحلقه‌های انتخاب شده هیچ دوری تشکیل ندهد، درنظرمی گیریم. این‌ساختمان را تا آنجا که ممکن باشد، ادامه می‌دهیم. گرافی‌که به‌دست می‌آید، یك درخت همبسته است، زیرا در غیر اینصورت، هنوز می‌توان در آن یالی را رسم‌کرد، به‌نحوی که هیچ دوری را به‌وجود نیاورد. بنا براین، همهٔ n نقطهٔ A_1، A_2، ... A_n به‌وسیلـهٔ یك درخت، به‌هم مربوط می‌شوند. چون‌تعداد رأسها برابر n است، تعداد یالها بـرابر $(n-1)$ می‌شود.

ثابت می‌کنیم، درخت R که به این ترتیب به‌دست می‌آید، درواقع، کم‌بهاترین درختهاست. برای این منظور، همهٔ یالهای این درخت را به‌ترتیبی که‌ضمن ساختن R به‌وجود آمده‌اند، نامگذاری می‌کنیم: a_1، a_2، ...،وفرض می‌کنیم‌که درخت دیگری به‌نام R_1، کمترین بهای ممکن را داشته باشد. ممکن است بعضی ازیالهای اولیهٔ a_1، a_2،... متعلق به R_1 هم باشد. فرض‌کنید $a_k=AB$، نخستین یالی باشدکه به R_1 تعلق ندارد. درگراف R_1، زنجیری پیدا می‌شودکه رأسهای A و B را به‌هم مـربوط کـرده است (شکل۶)؛ که اگرآنرابه R وصل کنیم، یك دور به‌دست مـی‌آید.



شکل ۶

بنابراین، دست‌کم یکی از یالهای این دور، به R تعلق ندارد. این‌یال را $a_k' = CD$ می‌نامیم. از R_1، یال a_k' را بیرون می‌آوریم و به جای آن یال a_k را مـی گذاریم، درخت جدید R_2 به‌دست می‌آید، که بازهم رأسهای A_1، A_2، ...، A_n را به‌هم مـربوط کرده است. چون‌درخت R_1 کمترین‌بهای ممکن را دارد، با این تغییر نباید ارزش آن تنزل کند، یعنی

$$C(a_k) \geqslant C(a_k') \qquad (۳)$$

ولی a_k، کم‌بهاترین یالی بودکه‌از ارتباط آن با a_1، a_2، ...، a_{k-1} هیچ دوری پیدا نمـی‌شد. و چون از وصل یال a_k' به‌همین یالهای a_1، a_2، ...، a_{k-1}، باز هم هیچ دوری به‌دست نمی‌آید (زیرا همهٔ این یالها به R_1 تعلق دارند)، باید برعکس داشته باشیم:

$$C(a_k) \leqslant C(a_k') \qquad (۴)$$

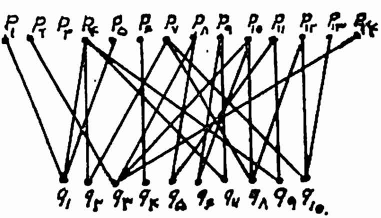
و از دونامساوی (۳) و(۴) نتیجه می‌شود

$$C(a_k) = C(a_k')$$

به‌این ترتیب، ارزش درخت تازهٔ R_2، برابر است با ارزش R_1، در حالیکه نسبت به‌درخت R_1، یك یال بیشتر از درخت R دارد. اگر این ساختمان‌راادامه دهیم،درختی باکمترین بها پیدا می‌کنیم‌که بر R منطبق‌است: یعنی خود R، کمترین بهای ممکن را دارد.

§۴. مسالهٔ‌مربوط به‌تعیین‌شغل

فرض‌کنیم‌که پستهای p_1، p_2، ...، p_m خالی و افراد q_1، q_2، ...، q_n، داوطلب خدمت در این پستها باشند. هرکدام از این افراد می‌تواند چندتا ازکارهای موردنیاز را انجام دهد (هم بـه مناسبت تخصصهایی‌که این افراد دارند و هم به‌مناسبت اینکـه ممکن است کارهایی که‌یکنوع تخصص‌بخواهد، وجود داشته باشد).



شکل ۷

گـرافی می‌سازیم کـه رأسهای ردیف‌بالای‌آن (شکل۷) p_1، p_2،

...، p_m به‌معنای عرضه شغلها، و رأسهای ردیف پایین q_1، q_2، ... q_n نمایندهٔ افـراد علاقمند به‌آنها باشد. یال $q_i p_s$ را، ازردیف پایین به‌ردیف بالا به‌شرطی وصل می‌کنیم که فرد q_i بتواندکار p_s را انجام دهد. چنین گرافی را، **گراف دورده** گویند. درهر گراف‌دورده، مجموعهٔ رأسها به‌دو دسته تقسیم شده است (در مثال ما، دوردیف بالا وپایین) به‌نحوی که در هر دسته، هیچ دو رأسی به‌وسیلهٔ یال به‌هم مربوط نشده‌باشند. پرسش اینست: چگونه می‌توان هر فردی را به‌کار مورد علاقهٔ‌خودش‌مشغول کرد؟شرطهای لازم و کافی برای این منظورچنین است (**قضیهٔ کونیگ ـ هول**):

به‌ازای هر تعداد k ‏(n ،... ،۱،۲ = k) **ازافراد، باید دست‌کم** k **کار وجود داشته باشد که این افراد بتوانند باهم آنها را انجام دهند** (یعنی، هر کدام از کارها، لااقل به‌وسیلهٔ یکی از افراد انجام شود).

لازم‌بودن‌این شرط روشن‌است: اگر برای هر گروه k نفری، k پست خالی برای کار پیدا نشود، در اینصورت، همهٔ این افرادموفق نمی‌شوندکار خودرا به‌دست‌آورند. کافی بودن شرط رابه‌کمك استقراء روی عدد n (تعداد افراد)، ثابت می‌کنیم.

به‌ازای $n=1$، درستی حکم روشن‌است: اگر تنهایکنفرداوطلب کار باشد، واگر دست‌کم یك شغل مناسب او وجود داشته باشد، او می‌تواند این شغل را به‌دست‌آورد. حالا، فرض می‌کنیم‌که قضیهٔ برای افرادی‌که تعدادشان‌از n کمتراست، درست باشد، ثابت می‌کنیم که در اینصورت، برای n نفر هم درست است.

ابتدا حالتی را درنظرمی‌گیریم که برای هر k نفر، **بیش از k محل**، که درخور آنهاست، وجود داشته باشد. یکی ازاین افراد را انتخاب می‌کنیم و او را به‌یکی ازپستهایی که مناسب اوست می‌گماریم. ثابت می‌کنیم‌که‌برای بقیهٔ $(n-1)$نفر، شرطهای‌اولیهٔ مابه‌قوت خود باقی می‌ماند. درواقع، اگراز بین‌آنها، k نفر را به‌دلخواه انتخاب کنیم، درابتدا بیش از k محل کار، وجود داشت‌کـه با تخصص آنها مناسب باشد؛ حالا تنهایکی ازپستها ممکن است اشغال شده باشد، بنابراین، هنوز دست‌کم k شغل بـاقی مانده است‌که این افراد می‌توانند با هم آنهارا[1] انجام دهند، به‌این ترتیب، بنا به‌فرض‌استقراء، این $(n-1)$نفر هم می‌توانند به‌کار مشغول‌شوند.

حالت دیگر، وقتی‌است‌که شرط **کونیگ ـ هول** به‌اینصورت‌باشد: گروه A از s نفر وجود دارد، به

نحوی‌که با هم می‌توانند درست s کار راانجام دهند. چون برای خود مجموعهٔ A، شرط‌قضیه برقراراست، در اینصورت، بنابر فرض استقراء، همهٔ این s نفرهم می‌توانند به‌کار مشغول شوند. حالا، گروه B از $(n-s)$ نفر بقیه و محلهای باقیماندهٔ کار را، درنظر می‌گیریم. ثابت می‌کنیم که برای آنها هم، همان شرط برقرار است. در واقع، اگر برای گروهی مثل $C\subset B$، که از k نفر تشکیل شده است، تنها به‌اندازهٔ $l<k$ محل کار پیدا شود، آنوقت برای $(s+k)$ نفر از گروه $A+C$، تنها $s+l<s+k$ محل وجود خواهد داشت که متناقض با فرض است. بنابراین، همهٔ افراد گروه Bهم، می‌توانندبه کارمشغول شوند

§۵. یك معمای ورزشی

فرض می‌کنیم، یك مسابقهٔ ورزشی بین تیمهای A،B،C،... جریان‌داشته‌باشد. گرافی بارأسهای A،B،C،... می‌سازیم، و شرط می‌کنیم‌که دو رأس را به‌وسیلهٔ‌یك یال وقتی، وتنها وقتی به‌هم‌مربوط کنیم که‌تیمهای متناظربه‌این‌رأسها، با هم بازی‌کرده باشند. در ابتدا، وقتی که هنوز هیچ دو تیمی با هم بازی نکرده‌اند، یك گراف صفر داریم، و درپایان‌کار، وقتی‌که هر تیم با هرکدام از تیمهای دیگر، درست یکبار بازی کرده است، یك گراف کامل به‌دست می‌آید.

روی این گراف می‌توان نتیجهٔ بازیها را هم به‌این ترتیب‌منعکس کردکه اگر مثلا تیم A از تیم B برده است، روی یال AB پیکانی در جهت از A به B قرار دهیم. گرافی‌که همهٔ یالهای آن دارای جهت معینی باشند، **گراف‌توجیه شده** نامیده می‌شود. در حالتی که دو تیم، مساوی کنند روی‌یالی‌که آنها را به‌هم وصل می‌کند، هیچ جهتی‌رانمی‌گذاریم. گرافی که‌شامل هم یالهای توجیه شده وهم‌یالهای توجیه نشده باشد، **گراف‌هم‌بافته** نامیده می‌شود.

فرض‌می‌کنیم که‌درپایان‌مسابقه، یك گراف توجیه شدهٔ‌کامل به‌دست آوریم (یعنی هردو تیمی، درست یکبار باهم بازی کرده باشند و در هیچکدام ازبازیهاهم، نتیجه‌مساوی به‌دست‌نیامده باشد). ضمناً، فرض کنیم‌که به‌دلیلی، و مثلا بامحاسبهٔ امتیازها، تیم S برنده اعلام شود و تیم T در ردیف آخر قرارگیرد. ولی، باکمال تعجب، وقتی که به جدول مسابقه‌هامراجعه می‌کنیم، می‌بینیم‌که در یك بازی، تیم Tاز تیم A برده‌است، در بازی‌دیگری، تیم A از تیم B برده‌است وغیره، و این زنجیر راکه دنبال می‌کنیم

تا انتهای آن به‌نام تیم برندهٔ S برخورد نمی‌کنیم.

در برخورد اول، به‌نظرمی‌رسد که با یك معما سر و کار داریم، ولی در واقع، هیچ چیز خلاف قانونی‌درآن وجود ندارد.می‌توان ثابت‌کردکه با یك فرض اضافـی، حتماً چنین زنجیری پیدا می‌شود. این فرض چیست؟ روشن است‌کـه اگر تیم T به‌طورکلی از هیچ‌تیمی نبرده‌باشد و یا T بین گروه‌تیمهایی باشد، که در هیچکدام ازبازیهایی که با تیمهای دیگر کرده‌اند، برد نداشته باشند، نمی‌تواند چنیـن زنجیری پیدا شود. ماچنین گروهی را (که تیمهای عضو آن‌هیچ‌بردی نداشته باشند)، «گروه مغلوب» می‌نامیم.

حالا، این‌قضیه راثابت‌می‌کنیم:

اگر بین تیمهایی که‌درمسابقه شرکت دارند، حتی یك گروه مغلوب‌وجودنداشته‌باشد،می‌توان همهٔ تیمها را در یك دورتوجیه شده منظم کرد:

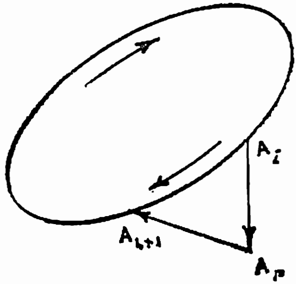
$$A_1 \to A_2 \to A_3 \to \ldots \to A_n \to A_1$$

(یعنی، در یك بازی، A_2ازA_1 برده است، در بازی دیگری،A_2از A_3 برده‌است وغیره). دراینصورت، روشن‌است که‌می‌توان زنجیرتوجیه شده‌ای هم پیداکردکه از هرتیم تا هرتیم دیگر ادامه داشته باشد.

برای‌اثبات،رأسی‌مثلA_1رادرنظر می‌گیریم، چون این رأس متعلق به‌گروه مغلوب نیست، بنابراین یالی مثل A_1A_2 از آن خـارج می‌شود. همینطور، چون A_2هم‌به گروه مغلوب تعلق نداردیالی مثل A_2A_3 از آن خارج می‌شود. این زنجیر راتاآنجاکه ممکن است‌ادامه مـی‌دهیم. نقطهٔ آخری A_n — نقطه‌ای کـه دیگر از آن خروجی وجودندارد ـ نمی‌تواند رأسی‌باشد کـه قبلاً از آن عبور نکرده‌ایم، زیرا، در اینصورت، A_n یك تیم مغلوب خواهد بود. بنابراین، این رأس به‌یکی از رأسهایی که قبلاً عبورکرده‌ایم، ختم می‌شود. به‌این ترتیب، مابه‌دور توجیه شدهٔ $\sigma(A_k, A_{k+1}, \ldots, A_n)$ می‌رسیم که از یالهای‌گراف‌گذشته است. اگر این دور،شامل تمامی‌یالهای‌گراف باشد، قضیه ثابت شده است؛ ولی اگر این دور از همهٔ یالهای‌گراف عبور نکرده باشد، دو حالت پیش می‌آید:

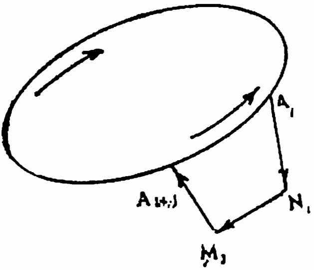
۱. رأسی مثل A_p وجود دارد، که متعلق به σ نیست، ویالهائی، آنرا به σ در هر دو جهت مربوط کرده است. دراینصورت، دردنبالهٔ یالهای A_kA_p، $A_{k+1}A_p$، ...، A_nA_p، A_kA_p، دو یال مجاور A_iA_p و $A_{i+1}A_p$ پیدا می‌شودکه جهت‌اولی ازσبه‌طرف A_p وجهت

دومی از A_p به‌طرف σ است. رأس A_p را، با تبدیل یال A_iA_{i+1} به دویال A_iA_p، و $A_pA_i + 1$، به σ مربوط می‌کنیم (شکل ۸).



شکل ۸

۲. چنین رأسی وجود ندارد. در اینصورت، همهٔ رأسهایی راکه به σ تعلق ندارند، می‌توان به دو دسته تقسیم کرد: دستهٔ M، رأسهایی که از آنها همهٔ یالها جهتی به‌طرف σ دارند؛ و دستهٔ N، رأسهائی که همهٔ یالهای آنها جهتی از طرف σ دارند. از این دودسته، هیچکدام تهی نیستند (یعنی، دست کم شامل یك عضو هستند). در واقع، اگر M تهی باشد، در آنصورت N گروهی مغلوب می‌شود، و اگر N تهی باشد، در آنصورت σ گروه مغلوب خواهد شد. بالاخره، یالی مثل N_1M_1 پیدا می‌شود که جهت آن از N_1 (عضوی ازمجموعهٔ N) به M_1 (عضوی از مجموعهٔ M) می‌باشد، زیرا در غیر اینصورت، M گروهی مغلوب خواهد بود. A_i را رأس دلخواهی متعلق به σ می‌گیریم، در اینصورت، یال A_iN_1 جهتی از طرف σ و یال M_1A_{i+1} جهتی به طرف σ دارد. یال A_iA_{i+1} از σ را با سه یال A_iN_1، N_1M_1 و M_1A_{i+1} عوض می‌کنیم (شکل ۹). و روشن است که این روش را می‌توان، تاجایی که ازهمهٔ رأسهای گراف عبور کنیم، ادامه داد.



شکل ۹

§۶. عبور یك طرفه

دربیشتر شهرهای بزرگ، خیلی از خیابانها را یکطرفه می‌کنند، و روز به‌روز هم تعداد این خیابانها بیشتر می‌شود؛ و طبیعی است که از خود بپرسیم: آیا به‌این ترتیب به تناقضی برخورد نمی‌کنیم؟ آیا ممکن نیست وضعی پیش‌آید که وقتی از جایی به‌جایی می‌رویم، راهی برای عبور از یکی از خیابانهای یکطرفه وجود نداشته باشد؟ به‌نظر می‌رسد

که دلیلی برای این نگرانی وجود ندارد. می‌توان ثابت کرد که تقریباً همهٔ خیابانهای یك شهر را می‌توان به‌صورت یکطرفه عبور کرد.

پیش از همه ببینیم، در چه حالتهایی این عبور ممکن نیست! روشن است که اگر در شهر رودخانه‌ای وجود داشته باشد و تنها یك پل روی آن زده باشند، نمی‌شود عبور از این پل را یکطرفه اعلام کرد؛ همچنین، برای کوچه بن‌بست هم نمی‌توان عبور یکطرفه درنظر گرفت. همهٔ خیابانهای دیگر شهر را می‌توان با عبور یکطرفه به‌حساب آورد، بدون اینکه امکان رفتن از هر نقطه به‌هر نقطهٔ شهر ازبین برود.

برای اینکه بتوانیم قضیهٔ مربوط را به‌زبان نظریهٔ گرافها درآوریم، به‌چند تعریف نیاز داریم. یال AB را **منفرد** گوییم وقتی که تنها یك مسیر بین A و B وجود داشته باشد. در حالتی که یال AB منفرد نباشد، مسیر دیگری هم پیدا می‌شود که A را به B متصل می‌کند، یعنی در این حالت، یال AB متعلق به‌یك دور است. چنین یالی را **دوره‌ای** گوییم. روی نقشهٔ یك شهر، پلهای منحصر به‌فرد و بن بستها، یالهای منفرد و همهٔ دیگر خیابانها، یالهای دوره‌ای را تشکیل می‌دهند.

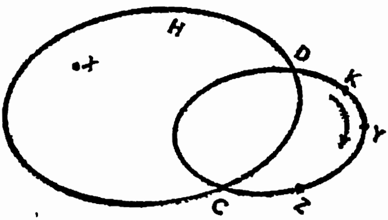
حالا این قضیه را ثابت می‌کنیم:

اگر یالهای منفرد گراف توجیه نشده باقی بمانند (ویا دقیقتر، آنها را در هر دو جهت در نظر گرفته باشیم)، **در اینصورت، می‌توان به همهٔ یالهای دیگر گراف، طوری جهت داد که برای هردو راس دلخواه A و B از گراف، مسیری از طریق یالهای جهت‌دار وجود داشته باشد.**

اثبات. یال دلخواهی مثل AB را در نظر می‌گیریم. اگر این یال منفرد باشد، توجیه نشده باقی می‌ماند و روی آن می‌توان درهر دو جهت، هم از A به‌طرف B و هم از B به‌طرف A، حرکت کرد. اگر AB یك یال دوره‌ای باشد، متعلق به‌یك دور است. روی این دور، یکی از دو جهت ممکن را (در جهت یا خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت) انتخاب می‌کنیم. در اینصورت، از هر رأس این دور می‌توان به هر رأس دیگری، و در جهتی که انتخاب شده است، رسید. حالا باید این قسمت توجیه شدهٔ گراف را توسعه دهیم.

H را، قسمتی از گراف می‌گیریم که کاملا توجیه شده است و روی آن می‌توان از هر رأس به‌هر رأس دیگر رسید. اگر H، تمامی گراف را دربر نگرفته باشد، رأسی مثل D پیدا می‌کنیم، به‌نحوی که متعلق به H وضمناً انتهای یالی مثل DK- که متعلق به H نیست - باشد. اگر این یال منفرد باشد، بنا بر شرط

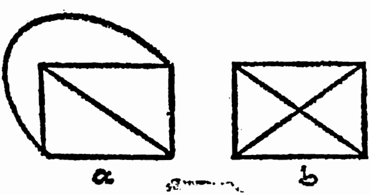
قضیه، می‌توان درهردو جهت روی آن حرکت کرد و بنابراین، اگر آنرا به H اضافه کنیم، قسمت بزرگتری ازگراف را به‌دست می‌آوریم که روشن است روی آن می‌توان از هر رأس به‌هر رأس دیگر رسید. اگر DK منفرد نباشد، ناچار به‌دوری مثل ρ تعلق دارد. روی این دور، جهت را از D به K انتخاب می‌کنیم و آنقدر جلو می‌رویم تا برای نخستین بار به‌رأس C – که متعلق به H است – برسیم. چنین رأسی بدون تردید پیدا می‌شود، زیرا مثلا خود D متعلق به H است. البته، ممکن است که C، همان رأس K باشد، ولی در حالت کلی بین D و K قرار دارد. قسمتی از دور ρ را، که در مسیر از D به C قرار گرفته است، به H ملحق می‌کنیم (با همان جهتی که قبلا انتخاب شده بود) و ثابت می‌کنیم که روی این قسمت توسعه یافتهٔ گراف، شرط قضیه صدق می‌کند: از هر رأس به هر رأس دیگر آن، در جهتهایی که مشخص شده است، می‌توان رسید. در واقع، فرض کنید که X رأس دلخواهی از H و Y رأس دلخواهی از ρ (که قسمتی از آن به H وصل شده است) باشد. دراینصورت، از X به Y می‌توان به‌این ترتیب رسید: اول از X به D روی H، و سپس روی دور ρ از D به Y. برعکس، برای رسیدن از Y به X: از Y به C روی دور ρ، و سپس از C به X ازطریق H. اگر Y و Z، دو رأس متعلق به ρ (که قسمتی از آن به H وصل شده است) باشد، می‌توان از Y به Z روی دور ρ حرکت کرد، و از Z به Y به‌این ترتیب: ابتدا از Z به C ازطریق ρ، سپس از C به D از طریق H، وبالاخره از D به Y از طریق ρ (شکل ۱۰) قضیه به‌طور کامل ثابت شد.



شکل ۱۰

§ ۷. گرافهای مسطح

یک گراف مشخص‌را می‌توان‌به صورتهای مختلف روی‌صفحه‌نشان داد. مثلاقبول می‌کنیم که گرافهای



شکل ۱۱

a و b در شکل ۱۱، دو گراف متفاوت نیستند (آنها **یکدیسه‌اند**) با وجوداین، درنمایش‌این‌دو گراف روی صفحه، یك تفاوت اساسی وجوددارد: یالهای گراف اول، تنها در رأسهای آن به‌هم‌رسیده‌اند، در حالیکه یالهای گراف دوم، نقطهٔ برخورد دیگری هم (به جزرأسها) دارند. در واقع، این نقطهٔ‌برخورد تنها به‌نوع نمایش گراف بستگی دارد و به خودگراف ارتباطی‌ندارد یالهای‌گراف را باید مثل دو نخ نازکی که یکی‌از روی دیگری‌عبور می‌کند، درنظر گرفت.

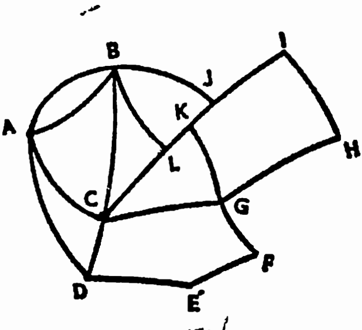
با همهٔ اینها، در بعضی موارد، این‌مطلب‌مهم‌است‌که آیایك گراف مفروض را می‌توان طوری روی صفحه رسم‌کرد که یالهای آن در نقطه‌های اضافی (یعنی نقطه‌هایی که رأس گراف نیستند)، یکدیگر را قطع نکنند. اگر چنین امکانی وجود داشته باشد، گراف‌را**مسطح** گویند.

مثلا هرگراف **چند ضلعی** را، که ازکنارهم‌گذاشتن چندضلعیهای منحنی‌الخط به‌دست آمده باشد، یعنی‌چند ضلعیهائی که‌مستقیم‌بودن ضلعهای آنها لزومی ندارد، ولی یکدیگر را قطع‌نکرده‌اند، می‌توان به‌عنوان یك‌گراف مسطح در نظر گرفت.

مثلاگرافی‌که درشکل۱۲ نشان داده‌شده است، **یك گراف‌چندضلعی** است. هرچند ضلعی منحنی‌الخطی از این‌گراف که در داخل خود، شامل هیچ رأس یا یالی از گراف نباشد، یك **محدوده** از این‌گراف نامیده می‌شود. بهتراست، حوزهٔ نامتناهی را هم‌که در بیرون‌گراف قراردارد، به‌عنوان یکی از مرزها به‌حساب‌آوریم (که ماآنرا**محدودهٔ نامتناهی**می‌نامیم). اگرگراف‌چند ضلعی، دارای n رأس، l یـال و s محدوده‌باشد، بنابر قضیهٔ مشهور اولر داریم:

$$n-۱+s=۲$$

این رابطه را، مثلا می‌توان به این ترتیب ثابت کرد: کمترین



شکل ۱۲

تعدادی‌که برای محدوده‌های گراف می‌توان درنظر گرفت، برابراست‌با ۲؛ این‌گراف عبارتست ازیك چند ضلعی منحنی‌الخط (محدودهٔ دوم آن، محدودهٔ نامتناهی خارجی

آنست). اگر تعداد رأسهای این چند ضلعی برابر n باشد، تعداد یالهای آنهم مساوی n می‌شود و

$$n-n+2=2$$

قضیهٔ اولر، در این حالت درست است.

هر گراف چند ضلعی را می‌توان از این راه به‌دست آورد که هر بار یك چندضلعی منحنی‌الخط را، به چند ضلعی نخستین اضافه کنیم. در نتیجه، هر بار، یك واحد به s اضافه می‌شود: برای گراف جدید $s'=s+1$؛ و اگر چند ضلعی اتصالی دوم، m رأس داشته باشد، به‌تعداد رأسهای گراف، $(m-2)$ واحد اضافه می‌شود: $n'=n+(m-2)$، و به تعداد یالها به اندازهٔ $(m-1)$ واحد: $l'=l+(m-1)$، و برای گراف تازه:

$$n'-l'+s'=(n+m-2)-(l+m-1)+(s+1)=n-l+s=2$$

در واقع، قضیهٔ اولر، نه تنها برای گرافهای چند ضلعی، بلکه برای هر گراف مسطح درست است.

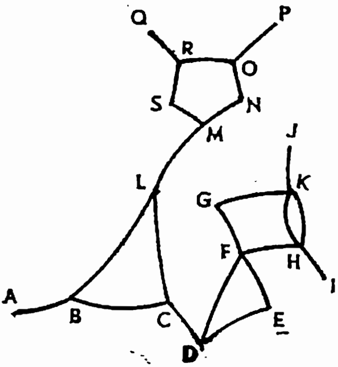
مثلاً، در شکل ۱۳ داریم:

$l=23$، $n=19$ و $s=6$

و

$$n-l+s=19-23+6=2$$

این حالت کلیتر قضیهٔ اولر را هم می‌توان با استقراء روی تعداد یالها و یا روی تعداد رأسها، ثابت کرد. اگر از مفهوم عدد دورسنج که در § ۳ آوردیم، استفاده کنیم، اثبات این قضیه خیلی آسان می‌شود.



شکل ۱۳

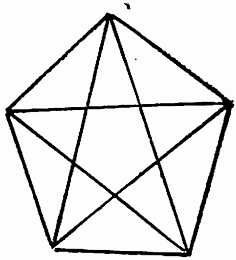
اگر گراف مسطح دارای s محدوده باشد (یعنی $s-1$ محدودهٔ متناهی)، روشن است که γ، عدد دور سنج آن، برابر $s-1$ می‌شود. ازطرف دیگر، همانطور که در § ۳ دیدیم داریم: $\gamma=l-n+1$. وازرابطهٔ $l-n+1=s-1$، به دست می‌آید: $n-l+s=2$.[1]

یك گراف چند ضلعی دلخواه در نظر می‌گیریم. فرض کنید تعداد محدوده‌های دو ضلعی آن مساوی α_2، تعداد محدوده‌های سه ضلعی

۱. یادآوری می‌کنیم که قضیه اولر، برای چندوجهیها هم درست است. مثلا درمورد مکعب داریم:

$n=8$، $l=12$، $s=6$ و

$$n-l+s=8-12+6=2$$



شکل ۱۴

برابر α_3، تعداد محدوده‌های چهار-ضلعی برابر α_4 وغیره باشد (تعداد ضلعهای محدودهٔ نا متناهی، عبارتست از تعداد یالهای بزرگترین دوره‌ای که گراف را احاطه کرده است؛ مثلاً روی شکل ۱۲، محدودهٔ نامتناهی، نه‌ضلعی است). در اینصورت، روشن است که

$$\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\ldots=s \quad (5)$$

و

$$2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4+\ldots=2l \quad (6)$$

زیرا هر یال متعلق به‌دو محدوده است.

از این تساویها، می‌توان مثلاً برای اثبات اینکه یک **گراف کامل با پنج رأس** (شکل ۱۴) **مسطح نیست**، استفاده می‌کنیم. در واقع، اگر این گراف مسطح باشد، باید بتوان آنرا روی صفحه، به‌صورت یک گراف چندضلعی نشان داد، که تعداد رأسهای آن برابر ۵، تعداد یالها $l=\frac{5\times 4}{2}=10$ است، و بنا بر قضیهٔ اولر، تعداد محدوده‌های آن برابر ۷ می‌شود چون، این گراف، محدوده‌های دوضلعی ندارد (هر دو رأس آن، تنها با یک یال به‌هم وصل شده است، $\alpha_2=0$ و بنابراین

$$s=7=\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\ldots$$

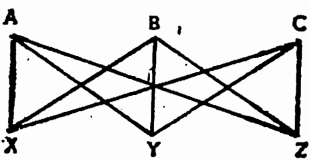
$$2l=20=3\alpha_3+4\alpha_4+5\alpha_5+\ldots$$

اگر تساوی نخست را درسه ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$21=3\alpha_3+3\alpha_4+3\alpha_5+\ldots$$

ولی، روشن است که این مجموع باید کمتر از مجموع قبلی ـ که برابر ۲۰ بود ـ باشد. و این تناقض نادرستی فرض ما را ثابت می‌کند.

یک گراف غیر مسطح هم، در **مسالهٔ مشهور مربوط به‌سه خانه‌و سه چاه**، به‌دست می‌آید. این مساله چنین است. سه خانه A، B، C و سه‌چاه X، Y، Z وجود دارد. چون، این چاهها گاهی خشک می‌شوند، باید از هر کدام از خانه‌ها جاده‌ائی به‌طرف هرسه‌چاه وجود داشته‌باشد (شکل ۱۵). آیا می‌توان، این



شکل ۱۵

جاده‌ها را طوری کشید که یکدیگر را قطع نکنند؟ اگر چنین امکانی

وجودداشته‌باشد، دوباره یك گراف مسطح (چند ضلعی) به‌دست می‌آید که در آن $n=6$، $l=3\times 3=9$ و بنابرقضیهٔ اولر $s=5$ می‌شود. روشن است که‌این گراف محدوده‌های دوضلعی ندارد: $\alpha_2=0$؛ مرزهای سه ضلعی هم ندارد، زیرا دوخانه یا دوچاه به‌هم وصل نمی‌شوند(در §۴، چنین گرافی را دو رده‌ای نامیدیم)، یعنی $\alpha_3=0$. داریم.

$$s=5=\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\dots$$

و

$$2l=18=4\alpha_4+5\alpha_5+6\alpha_4+\dots$$

تساوی نخست را در ۴ ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$20=4\alpha_4+4\alpha_5+4\alpha_6+\dots$$

ولی، روشن است که این‌مجموع باید کمتر ازمجموع قبلی ـ که برابر ۱۸ است‌باشد و این‌تناقض به‌معنای آنست که‌نمی‌توان جاده‌هایی از خانه‌ها به‌چاهها کشید، به‌نحوی که یکدیگر را قطع نکنند.

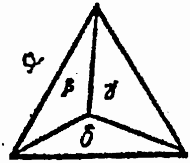
این دو گراف غیر مسطح (شکلهای ۱۴ و ۱۵)، از اینجهت جالب است که همه دیگر گرافهای غیرمسطح، به‌مفهومی‌منجر به‌آنها می‌شود: درهر گراف غیر مسطح می‌توان یا گراف کامل با۵ رأس و یاگراف مساله مربوط‌به‌سه‌خانه و سه چاه را مشاهده کرد؛ تنها ممکن‌است‌روی یالهای‌این گرافها، رأسهای جدیدی اضافه شده باشد.

و همین حکم هم، محتوی **قضیهٔ کوراتوسکی** را تشکیل می‌دهد.

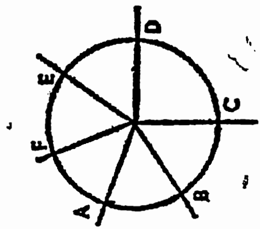
§۸. مسالهٔ مربوط به‌رنگ کردن نقشه‌ها

هر نقشه‌جغرافیائی‌هم، یك گراف چند ضلعی است. خود کشورها، محدوده‌های این گراف وسرحدهای بین‌کشورها، یالهای گراف وپهنه اقیانوسها، محدودهٔ‌نامتناهی آنست. وقتی قبول می‌کنیم چنین نقشه‌ای **به‌درستی رنگ‌آمیزی شده‌است،** که هردو کشوری که مرز مشترکی دارند، با دو رنگ مختلف نشان داده شده باشد. **مسالهٔ چهاررنگ** که بسیار مشهور است ـ مربوط به‌اینست که ثابت‌کنیم هرنقشه را می‌توان با چهار رنگ به‌درستی رنگ‌کرد و یا اینکه نمونه‌نقشه‌ای را پیداکنیم که رنگ‌آمیزی درست آن، با چهار رنگ ممکن نباشد. ظاهراً، این‌مساله‌را، برای‌نخستین بار **موبیوس** درسال ۱۸۴۰ مطرح کرد و تا امروز تلاشهای زیادی برای حل آن انجام گرفته است.[1] می‌توان ثابت کرد که با سه رنگ نمی‌توان هرنقشه‌ای را رنگ‌کرد. مثلاً، حتی نقشه شکل ۱۶ را هم نمی‌توان باسه رنگ، درست کرد.

۱. این مساله، سرانجام به‌وسیلهٔ یکی ازاستادان دانشگاه ایلینوی امریکا حل و درستی حکم مسالهٔ چهار رنگ تایید شد. شماره سوم آشتی با ریاضیات را ببینید.



شکل ۱۶



شکل ۱۷

از طرف دیگر به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که **هر نقشه‌ای** را می‌توان با پنج رنگ مختلف به‌درستی رنگ کرد. این حکم را ثابت می‌کنیم.

ابتدا یادآوری می‌کنیم که کافی است تنها حالتی را در نظر بگیریم که در هر رأس نقشه، درست سه یال به‌هم رسیده باشند. ما چنین نقشه‌ای را **متعارف** گوییم. درواقع، اگر در رأسی از نقشه دو یال به‌هم رسیده باشد، به سادگی می‌توان چنین رأسی را حذف کرد، بدون اینکه تغییری در رنگ‌آمیزی نقشه به‌وجود آید. اگر هم در رأسی بیش از سه یال به‌هم رسیده باشد، دایره‌ای به مرکز این نقطه و با شعاع کوچک، طوری رسم می‌کنیم که به‌هیچکدام از رأسهای دیگر نرسد. تمامی قسمت داخلی این دایره را، محدوده تازه‌ای به‌حساب می‌آوریم (شکل ۱۷). اگر در مورد هرکدام از رأسهایی که درآنها بیش از سه یال به‌هم رسیده‌اند، همین عمل را انجام دهیم، نقشه‌تازه‌ای به‌دست می‌آوریم که یك نقشه متعارف است. وقتی که توانستیم نقشه تازه را رنگ‌آمیزی کنیم، باکوچك کردن این دایره‌ها و تبدیل کردن هرکدام از آنها به‌یك نقطه، رنگ‌آمیزی تمامی نقشه اصلی را به‌دست می‌آوریم. به‌این ترتیب، کافی است قضیه مربوط به‌پنج رنگ را، برای نقشه متعارف ثابت کنیم.

اگر تعدادکلی رأسهای این نقشه را حساب کنیم، چون هرمحدودهٔ kضلعی از آن، دارای k رأس است، و تعداد این محدوده‌ها برابر a_k، دراینصورت مجموع

$$2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + \ldots = 3n \quad (7)$$

برابر با سه برابر تعداد رأسها می‌شود، زیرا درهر رأس سه محدوده به‌هم رسیده‌اند، یعنی هر رأس سه بار به‌حساب می‌آید، هربار دریکی از این محدوده‌ها. دوطرف رابطه (۷) را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$6n = 4a_2 + 6a_3 + 8a_4 + \\ + 10a_5 + 12a_6 + 14a_7 + \\ + 16a_8 + \ldots$$

و دو طرف تساوی (۶) را در ۳:

$$6l = 6\alpha_2 + 9\alpha_3 + 12\alpha_4 + 15\alpha_5 + 18\alpha_6 + 21\alpha_7 + 24\alpha + \ldots$$

و دو طرف تساوی (۵) را در ۶:

$$6s = 6\alpha_2 + 6\alpha_3 + 6\alpha_4 + 6\alpha_5 + 6\alpha_6 + 6\alpha_7 + 6\alpha_8 + \ldots$$

و چون بنابر قضیهٔ اولر:

$$6n - 6l + 6s = 12$$

به‌دست می‌آید:

$$12 = 4\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_7 - 2\alpha_8 - \ldots$$

و تمام جمله‌های بقیه در آن، منفی است. ولی، چون سمت چپ تساوی برابر ۱۲ است، باید داشته باشیم:

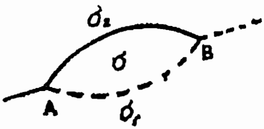
$$4\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 \geqslant 12$$

یعنی دست کم یکی از عددهای α_2، α_3، α_4، α_5، مخالف صفر است، یعنی **هر نقشهٔ متعارف، دست کم شامل یك محدودهٔ σ است، که تعداد مرزهای آن از پنج تجاوز نمی‌کند.**

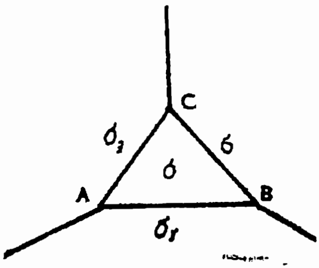
حکم اصلی را، با روش استقراء ریاضی روی تعداد کشورهای نقشه، ثابت می‌کنیم. برای نقشه‌ای که تعداد کشورهای آن از پنج، تجاوز نمی‌کند، درستی حکم روشن است. فرض می‌کنیم که این حکم برای هر نقشه متعارفی که تعداد کشورهای آن از s تجاوز نمی‌کند، درست باشد؛ و ثابت می‌کنیم که با این فرض، حکم قضیه برای نقشه‌ای هم که دارای s کشور باشد، درست است.

چهار حالت مختلف را برای محدودهٔ σ، به‌طور جداگانه، درنظر می‌گیریم: ۱) دو ضلعی، ۲) سه ضلعی، ۳) چهار ضلعی، ۴) پنج ضلعی.

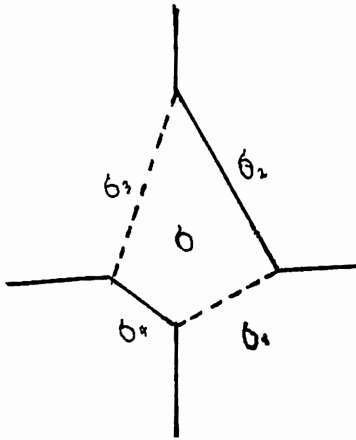
۱. σ، یك محدودهٔ دو ضلعی است (شکل ۱۸). اگر σ_1 و σ_2، کشورهای همسایه σ باشند، یکی از مرزهای کشور σ را، مثلا AB، حذف می‌کنیم و σ را به σ_1 ملحق می‌کنیم. نقشه‌ای به‌دست می‌آوریم که تعداد کشورهای آن کمتر است و بنا برفرض استقراء، می‌توانیم آنرا به کمك پنج رنگ مختلف، رنگ‌آمیزی کنیم. ضمناً کشورهای σ_2 و $\sigma + \sigma_1$ دارای دو رنگ متفاوت می‌شوند. حالا، دو باره کشور σ را به‌حالت قبلی خود



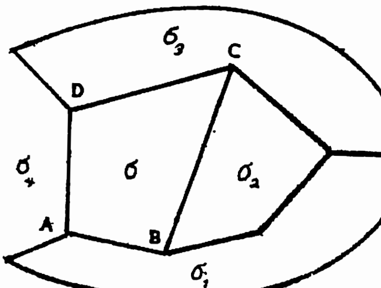
شکل ۱۸



شکل ۱۹



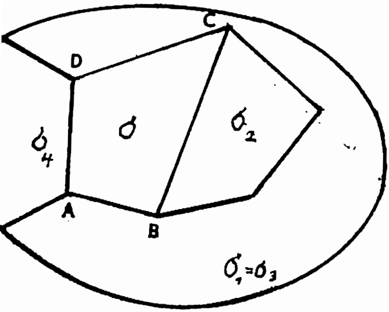
شکل ۲۰



شکل ۲۱- a

برمی‌گردانیم و آنرا به یکی ازسه رنگ باقیمانده درمی‌آوریم.

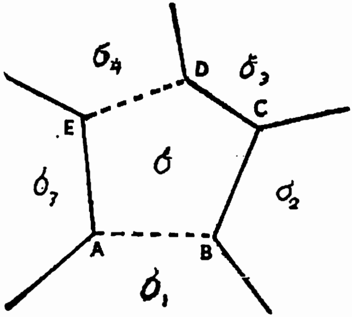
۲. σ، یك محدودهٔ سه ضلعی است (شکل ۱۹). سرحد AB را حذف، وσ را به σ_1 ملحق می‌کنیم. نقشه متعارفی به‌دست می‌آید که تعداد کشورهای آن کمتر است و بنا برفرض استقراء می‌توانیم آنرا با پنج رنگ متفاوت، رنگ آمیزی کنیم. در این ضمن، کشورهای



شکل ۲۱-b

$\sigma + \sigma_1$، σ_2 و σ_3، با سه رنگ متفاوت‌مشخص می‌شوند. کشور σ را به‌حالت اصلی برمی‌گردانیم و آنرا به‌یکی از دو رنگ باقیمانده درمی‌آوریم.

۳. σ، یك محدودهٔ چهارضلعی است (شکل ۲۰). ممکن است که دو تا از محدوده‌های متقابل به‌هم و چسبیده به σ (σ_1 و σ_3 یا σ_2 و σ_4)، همسایه هم باشند (شکل $a - ۲۱$). روشن است که‌هردوزوج σ_1، σ_3 و σ_2، σ_4 نمی‌توانند چنین باشند. فرض کنید، مثلاً σ_1 و σ_3 با هم همسایه باشند (اگرچه ممکن است، آنها برهم منطبق باشند، مثل شکل $b - ۲۱$). هر دو یال AD و BC راحذف، ومحدوده‌های σ_2، σ و σ_4 رابه‌هم ملحق می‌کنیم.



شکل ۲۲

این نقشهٔ متعارفی که به‌دست‌می‌آید، دارای $(s-2)$ محدوده است و بنا برفرض با پنج رنگ، به‌درستی قابل‌رنگ‌کردن است. دراین‌ضمن، برای کشورهای $\sigma_2+\sigma+\sigma_4$، σ_1 و σ_3، از سه رنگ مختلف استفاده شده است. کشور σ را بازسازی، و برای آن، از یکی از دو رنگ باقیمانده استفاده‌می‌کنیم.

۴. σ، یک محدودهٔ پنج ضلعی است (شکل ۲۲). مثل حالت (۳)، می‌توان دو محدودهٔ متقابل، مثل σ_1 و σ_4، پیدا کرد، به‌نحوی که همسایهٔ یکدیگر نباشند. یالهای AB و ED را حذف، و محدوده های σ_1، σ و σ_4 را به‌هم ملحق‌می‌کنیم. نقشه متعارفی با $(s-2)$ کشور به‌دست می‌آید، که بنا بر فرض استقراء، با پنج رنگ متفاوت، به‌درستی قابل رنگ‌آمیزی است. در این ضمن، کشورهای $\sigma_4+\sigma+\sigma_1$، σ_2، σ_3 و σ_5، هرکدام به یکی از چهار رنگ متفاوتند. کشور σ را بازسازی می‌کنیم و برای آن، از رنگ‌پنجم استفاده می‌کنیم.

ترجمهٔ پرویز شهریاری

دانشگاههای اروپا در سدهٔ سیزدهم میلادی

روزی یکی از تجار آلمانی‌که علاقه‌مند بود تعلیمات دقیق تجارتی به‌فرزند خود بدهد، یکی ازاستادان دانشمند را ملاقات‌کرده ازاو سئوال کرد که باید فرزند خود را به‌کدام دانشکده بسپارد. دانشمند بزرگ مزبور به‌او جواب داد: «موضوع دوتاست، اگرمی‌خواهید فرزند شما فقط جمع و تفریق را بیاموزد، می‌توانید او را در هرکدام از دانشگاههای آلمان‌که مایل هستید بگذارید. اما اگر علاوه براین، سودای آموختن عمل خوب را نیز در سرمی‌پرورانید، فقط یکی ازدانشگاههای ایتالیست که ممکن است این موضوع را به‌او یاد بدهد».

پی‌یر رسو در تاریخ علوم

تعمیم ریاضی

ریاضیدانان داستانی ساخته‌اند دربارهٔ منطق علمی.

ریاضیدان می‌گوید: یك فیزیکدان یقین می‌کند ۶۰ برتمامی عددها بخش‌پذیر است. متوجه می‌شود فرضیه‌اش برای عددهای ۱،۲،۳،۴،۵، و ۶ درست است.

چند عدد دیگر ۱۰، ۱۵، ۲۰ و۳۰ راکه «تصادفاً» انتخاب کرده است، تجربه می‌کند. چون ۶۰ براین اعداد هم بخش‌پذیر است، نتیجه می‌گیرد که داده‌های تجربی کافی است تا فرضیه‌اش ثابت شود.

فیزیکدان می‌گوید: پس دربارهٔ مهندسان چی می‌گویید؟ یك مهندس فکر می‌کند تمام عددهای فرد عدد اول هم هستند. ثابت می‌کندکه ۱ عدد اول است، بعد ۳ و۵ و۷ هم که قطعا عددهایی اول هستند. بعد نوبت ۹ می‌رسد که متاسفانه ۹ عدد اول نیست ولی ۱۱ و۱۳که بعد می‌آیند باز عددهایی اولند. تصمیم می‌گیرد دوباره به‌سراغ ۹ برگردد. کلنجار می‌رود وعاقبت به‌این نتیجه می‌رسد که ۹ یك‌اشتباه آزمایشی است.

مهندس می‌گوید: پس پزشکان چی؟ یك پزشك برای بیماری که مسمومیت خونی دارد وهیچ امیدی به‌نجاتش نیست شوربا تجویزمی‌کند. تصادفاً بیمار شوربا می‌خورد ومعالجه می‌شود. پزشك می‌نشیند یك‌کتاب علمی می‌نویسد و در آن اعلام می‌کند. شوربا مسمومیت خونی را رفع می‌کند. بعد یك نیمار دیگر باز مسمومیت خونی دارد پیشش می‌آید و پزشك ما باز شوربا تجویز می‌کند. بیمار شوربا می‌خورد و می‌میرد. آنوقت پزشك کتابش را تصحیح می‌کند واینطور می‌نویسدکه شوربا فقط در ۵۰درصد موارد مسمومیت خونی را برطرف می‌کند.

پزشك می‌گوید: پس خود ریاضیدان چطور وقتی از او بپرسید: چطور می‌شود یك شیر را در بیابان به‌دام انداخت؟ می‌گوید: «به‌دام انداخت یعنی چه؟ بنابر تعریف اصولا شیر باید پشت‌میله‌های قفس‌باشد. پس کافی است شکارچی این طرف میله‌ها باشد تا شیر درقفس بماند.»

از کتاب «همه‌جا ریاضی...»

کار علمی یعنی ارضای حس کنجکاوی با هزینهٔ دولت.

از یك دانشمند معاصر.

مهندس ناصر کنعانی

تکامل تاریخی وسایل حساب[1]

مقدمه

نوشته حاضر فشرده و خلاصه‌ای از کتابی است که نگارنده درباره تاریخ تکامل حساب در دست تحریر دارد. شك نیست که درچارچوب مقاله‌ای کوتاه نمی‌توان شرحی جامع در باب پیدایش، تحول و تکامل وسائل وابزار محاسبه بیان داشت. لیکن به‌نظر چنین می‌رسدکه نگارش چنین مقاله‌ی مختصر وناچیزی در این زمینه شاید باب تحقیق و تفحص را برای پژوهندگان وعلاقه‌مندان باز کند. بویژه از اینرو که ظاهراً در این مورد هنوز نوشته و یا مرجعی بزبان پارسی موجود نیست.

امروزه اهمیت و لزوم دستگاه‌های بزرگ و پرتوان محاسبه در راه پیشبرد علوم و فنون برکسی پوشیده نیست چه ترقیات شگفت‌انگیز علم و صنعت در عصر حاضر بی‌آنها ممکن نبوده و در آتیه نیز میسر نخواهد بود. شاید از اینرو باشد که بسیاری قدرت وتوانائی خارق‌العاده‌ای برای محاسب‌های الکترونیك مدرن قائل شده و سخن از «مغز الکتریکی» و یا «ماشین‌های متفکر» می‌رانند. در عین حال که در مقابل توانائی و قدرت ماوراء انسانی این دستگاه‌ها انگشت حیرت و شگفتی بدهان می‌بریم، نباید فراموش کنیم که آنها چیزی جز مخلوق ذات خلاق انسانی نبوده و در خدمت او هستند. طرح مسائلی از قبیل اینکه در آتیه‌ای نه‌چندان دور

۱ــ با وجودی که این مقاله نزدیك به‌هفت سال قبل نوشته شده است، همچنان تازگی خود را حفظ کرده است. از آقای مهندس ناصر کنعانی خواهش می‌کنیم که با دفتر «آشتی با ریاضیات» تماس بگیرند.

بشر خود در چنگال آفریدگان تیزهوش و قدرتمند خود اسیر گشته و بنده‌ای ذلیل بیش نخواهد بود، تنها در خور رمانهای تخیلی است.

کوشش در جهت تسهیل و بهبود شرایط زندگی و فراهم ساختن امکانات هرچه بیشتر در راه ترفیع سطح زندگانی از خصوصیات بشر و یکی از وجوه تمایز او از سایر موجودات است. در تمام مراحل تاریخی انسان کوشیده است تا بیاری و اسبابی‌که زائیده نبوغ خلاق خود بوده، از یك سو از شدت و کثرت کار بدنی و فکری خویش کاسته و از سوی دیگر بر بازده و نتیجه کار خود بیافزاید.

الهام بخش او در این رهگذر بدون شك و بمیزان قابل توجهی طبیعت بوده است که آدمی در دامنش پرورش یافته.

پیشرفت علوم و صعود سطح آگاهی انسان در طول تاریخ نیز موجب موفقیت‌های شگفت‌او در زمینه ابداع و اختراع وسائل و لوازمی که نیازمندیهای او را برطرف کند فراهم آورده است.

فاز نخستین این فرایند تکاملی در آغاز چیزی جز تقلید ابتدائی و ناشیانه انسان از طبیعت نبود. برای نمونه می‌توان از کشف قوانین اهرم‌ها و ماشین‌های ساده نام برد. الهام‌بخش انسان در اختراع وسائل مزبور بدون شك ارگانهای بدنی خود و نحوه کار آنها بوده است. در تحلیل نهائی می‌توان اصولا اکتشاف و تکامل مکانیك کلاسیك را از پدیده‌های همین دوره دانست.

باگذشت قرون و چیرگی عصیان‌آمیز انسانی بربسیاری از نیروهای طبیعت، دوران تکامل بعدی آغاز گردید، و این دوران منطبق و مصادف با عصری است که جوامع مدرن و صنعتی نضج میگرفتند. مکانیزه و سپس ماشینیزه کردن فنون دستی که انقلاب صنعتی را بدنبال داشت چهره و سیمای جوامع را تغییری بنیادی داد. مسأله کار و تقسیم آن از یك سو و مناسبات تولیدی در جوامع انسانی از سوی دیگر فصل نوینی در زندگانی سیاسی و اقتصادی بشر آغاز کرد.

در این دوره که تا عصر حاضر ادامه دارد، انسان نیرو وهم خود را در خدمت ماشین گذاشته و خود تابع و مشمول تغییرات تکاملی آن شده است و می‌توان گفت که حتی مبدل به‌جزئی از آن میشود، بدین ترتیب که در راه استفاده، بهره‌گیری و هدایت کار و حرکت ماشین‌ها، حرکات و کار بدنی خود را با ویژگی‌های آنها وفق می‌دهد.

عصر حاضر را می‌توان سرآغاز دوره جدیدی در تاریخ تکامل

جوامع بشری دانست. کوشش در راه اتوماتیزه کردن در تولید و توزیع کالا و کاهش هرچه بیشتر رنج و تعب و دشواری کار بـــدنی انسان و بالاخره بهره‌گیری هرچه بیشتر از نیروهای طبیعی از مشخصات این دو می‌باشد. نیروی محرك جوامع مترقی در راه اتوماتیزه کـــردن صنعت چیزی جز میل و نیاز به‌تولید اکونومیك و رفع نیازمندیهای مادی‌انسانی ازطریق عقلی نیست. گواینـــکه در این رهگـــذر کامرانی‌هـــا و موفقیت های سرسام‌آور دیگری نصیب آدمی می‌شود.

پیدایش حساب

لوحه‌ها و کتیبه‌های یافت شده حکایت از این می‌کنند که بشرحداقل قریب ۷۰۰۰ سال است که به‌کمك‌اعداد وعلائم‌خودساخته، محاسبهٔ روزانه خود را تسهیل و عملی ساخته است. بدین معنی که قرنها قبل از رسوخ و ترویج تمدن‌های ابتدائی در بین اقوام و قبائل محاسبه و شمارش کمیات اندیشه انسانی را به‌خود مشغول داشته است.

اقوام سومری[۱] که اوج تمدن آنها مصادف با شش تا هفت هزار سال پیش است علائمی راکه برای نمایش کمیاب بکار می‌بردند. ابتداء روی لوحه‌های خاك رس حك کرده و سپس آنها را در کوره‌هـــای آتشین می‌پختند.

سومری‌ها اعداد یك، دو و سه و... را به‌صورت یك، دو ویا ســه و... خط کوچك قائم نمایش می‌دادند. در یکی از اهرام ثلاثه واقع در غزه[۲] Gizeh علائمی که مصریان باستان جهت نمایش کمیات و اعداد بکار می‌بردند در روی لوحه‌ها و سنگ‌نبشته‌ها دیده می‌شوند. در کتیبه‌های مزبور عدد یك‌به‌وسیله یك‌خط‌قائم، عدد ۱۰ بصورت نعل اسب، عدد صد به‌صورت یك منحنی حلزونی، عدد هزار به‌کمك انگشت سبابه و بالاخره عدد یك میلیون به‌صورت مردی که آثار شگفـــتی و حیـــرت فـــراوان برچهره‌اش نقش بسته نمایش داده می‌شدند.

اقوام و قبائل بدوی و نیز دیگر ملل متمدن دنیای قدیـــم دارای دستگاه‌ها و طرق دیگر محاسبه بودند که ذکر آنها در اینجا غیرمقدور و سبب اطناب کلام خواهد شد.

یکی از ساده‌ترین طرق نمایش و محاسبه اعداد و کمیات در دوران باستان عبارت از حك آنها روی تنه درختان و یا روی پوست حیوانات

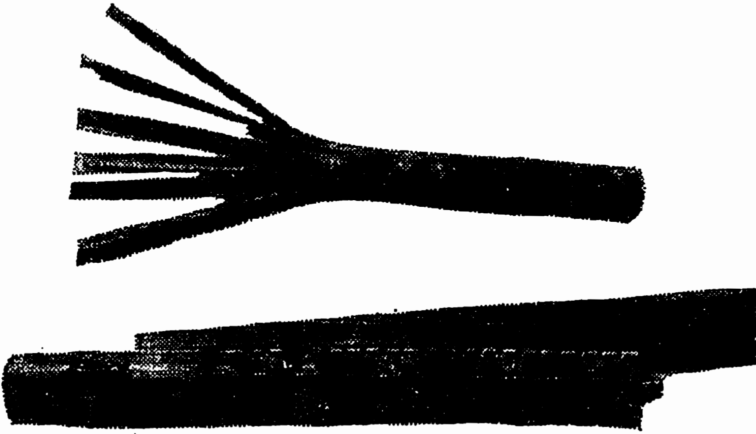
و یا روی زمین بوده است. این کار هنوز نیز در بین بسیاری از قبایل معمول و متداول است.

دانیل دفو[3] Daniel Defoe مثلا در اثر مشهور و دلربای خود به‌نام رابینسن کروزو Robinson Crusoe نیز حکایت می‌کند که چگـونه قهرمان این سرگذشت روزها و هفته‌ها را به‌وسیله خطوط کوچکی که در روی تنهٔ درختان حك می‌کرده، به‌خاطر خود می‌سپرد.

نیاز به‌تذکر نیست که استفاده از این طریقه هنگام نمایش اعـداد بزرگ تا چه حد ایجاد اشکال کرده و عملا غیر مقدور است.

ازجمله طرق دیگر نمایش کمیات که خاصه برای محاسبه و یادداشت قرض وطلب درزمانهای گذشته بکار می‌رفته‌اند، می‌توان از چوب‌خط[4] نام برد که برحسب نیاز علائم و خطوط مخصوصی روی آنها حك می‌شدند.

در برخی از زبانهای اروپائی از جمله در زبان آلمانی اصطـلاح «او هنوز خطی روی چوب خط دارد»[5] حاکی از این است که ظاهراً روش مزبور مدتهای مدید در اروپا معمول بوده است. در شکل ۱ دونمونه از چنین چوب‌خطها دیده می‌شود.



شکل ۱ ــ دو نمونه از چوب‌خطهای باستانی که در امور تجاری و مالی مورد استفاده بودند.

این طریقه نیز طبعاً برای نمایش اعداد بزرگ کم‌فایده وای بسا

بی‌فایده است. از این رو فکر نمایش گروه معینی از اعداد و کمیات بکمك يك علامت خاص تدریجاً بین ریاضیدانان قبایل وملل باستانی رسوخ پیدا کرده و موجب شد که دستگاه‌های شمارش بمرور زمان تکامل یافته‌وبشکل امروزی خود درآیند.

دستگاههای شمارش

در اغلب تمدنهای باستانی معمولا دو نوع دستگاه شمارش مشاهده می‌شود. ایندو عبارتند از:

۱ ـ دستگاه تجمیعی Additions system

۲ ـ دستگاه موضعی Positions system

نمونه بارز دستگاه تجمیعی سیستم شمارش اعداد رومی است. در این دستگاه هر ۱۰ کمیتی بشکل تازه و معینی نمایش داده می‌شوند:

I	X	C	M
۱	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰

و برای تسهیل کار شمارش در این دستگاه علائم فرعی دیگری‌نیز به‌چشم می‌خورند:

V	L	D
۵	۵۰	۵۰۰

نمایش اعداد در دستگاه مزبور بدین صورت انجام می‌گیرد که علائم مورد نظر در کنار یکدیگر گذارده می‌شوند:

یعنی
$$\mathrm{MDCCLXVIII} = ۱۷۶۸$$
$$\mathrm{MCMLXX} = ۱۹۷۰$$

قاعده براین است که همواره عدد بزرگتر در طرف‌چپ‌عددکوچکتر قرار گیرد:

$$\mathrm{XII} = ۱۲ \qquad (\mathrm{X}>\mathrm{II})$$
$$\mathrm{XXV} = ۲۵ \qquad (\mathrm{X}>\mathrm{V})$$

لیکن این قاعده هنگام نمایش برخی از اعداد رعایت نمی‌شود و این امر ناشی از میل به‌صرفه‌جوئی درجا می‌باشد. مثلا برطبق قاعده فوق می‌بایست عدد ۹ بصورت ۵+۴= VIIII نمایش داده شود، در حالیکه بصورت ۱ ـ ۱۰= IX نه‌تنها عدد ۹ ساده‌تر نمایش داده می‌شود بلکه درجا نیز صرفه‌جوئی می‌گردد. از اینرو روش دوم تدریجاً‌جایگزین‌طریقه

اول گردیده است.

درحال حاضر هنوز معلوم نیست که علائم نامبرده واصولا دستگاه اعداد رومی برای اولین بار به‌وسیله چه‌کسی و یا کسانی و درچه‌تاریخی متداول شده است. لیکن این نکته آشکار است که علائم فوق همواره‌وجود نداشته‌اند. مثلا رومی‌ها عدد ۱۰۰۰ را بصورت (I) نمایش می‌دادنـد. علامت M برای نمایش این عدد بعدها در قرون وسطی معمول شد وظاهراً از واژه لاتین mille بمعنی هزار مشتق شده است. اکنون نیز گاه‌وبیگاه اعداد ۲۰۰ و ۳۰۰ بصورت II^c و III^c نمایش داده می‌شوند. C نیزحرف اول واژه لاتین *Cent* بمعنی صد می‌باشد.

معمولا اعداد در این دستگاه شکل طویل و جسیمی بخود می‌گیرند آنچنانکه خواندن و تشخیص آنها در بسیار اوقات مشکل و دشوار است. از سوی دیگر همواره برتعداد علائم جدید که نشانه گروه معینی ازکمیات هستند افزوده می‌شود. و می‌توان گفت که فراگیری و تسلط به‌دستگاه تجمیعی خود مبدل به‌نیمه‌دانشی می‌گردد. صرف‌نظر ازاین‌گونه نقایص محاسبه و اجرای چهار عمل اصلی نیز در این سیستم مشکل و دشوار بوده و با هیچ‌یك از قواعد جمع و تفریق مذکور ذهن ما وفق نمی‌دهد. برای نمونه دو مثال کوچك ذکر می‌شوند:

۸ +	VIII +
۳۶	XXXVI
۴۴	XLIV

۱۹۴۵ +	MCMXLV +
۱۰۰۰	M
۳۶۳	CCCLXIII
۳۷۴	CCCLXXIV
۲۰۰	CC
۹۹	XCIX
۳۹۸۱	MMMCMLXXXI

چنانچه ملاحظه می‌شود تعداد ارقام یك عدد دلخواه هیچ‌گونه رابطه منطقی با مقدار و بزرگی آن ندارد. گاه مجموع دو یـا چند عدد از نظرتعداد ارقام کوچکتر ازاجزاء تشکیل دهنده آن می‌باشد. بعبارت دیگر

در بسیاری موارد اعداد بزرگ دارای ارقام و طول کوچکتری هستند تا اعداد کوچکتر. برای نمونه می‌توان بدو عدد ۳۶۳ = CCCLXIII و ۱۰۰۰ = M توجه کرد.

نمونه بارز دستگاه دوم یعنی دستگاه موضعی، سیستم اعدادی است که امروزه متداول و از ابداعات هندیان است. دستگاه نامبرده در طی قرون وسیله اعراب در اروپا ترویج شده و بزودی جایگزین دستگاه شمارش رومی گردید. علائم و ارقام این دستگاه بهمین دلیل در زبان‌های اروپائی به‌اعداد عربی موسوم هستند[6].

در این سیستم که به‌دستگاه اعشاری یا سیستم دسیمال ــ مشتق ازواژه لاتینی ***decen*** بمعنی ۱۰ ــ موسوم است می‌توان جمیع کمیات دلخواه را به‌کمك اعداد دهگانه صفر تا ۹ نمایش داد. بدین ترتیب که هر ده یکان تشکیل یك دهگان و هر ده دهگان تشکیل یك‌صدگان و ... می‌دهند. مثلا عدد ۳۲۱ از سه صدگان، دو دهگان و یك یکان به‌ترتیب زیر تشکیل شده است:

$$۳۲۱ = ۳ \times ۱۰۰ + ۲ \times ۱۰ + ۱ \times ۱$$
$$= ۳ \times ۱۰^{۲} + ۲ \times ۱۰^{۱} + ۱ \times ۱۰^{۰}$$

دستگاه اعشاری به‌خاطر مزایای بیشماری که دارد در واقع امروزه تنها دستگاهی است که در زندگی روزانه بکار می‌رود. در اینجا لازم به‌تذکر است که دستگاه‌های شمارش دیگری نیز وجود دارند که در زمینه‌های دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای نمونه می‌توان ازسیستم دوآل Dualsystem نام برد که تنها از دو عدد صفر و یك تشکیل شده و در محاسبات ریاضی و بویژه در تکنیك ماشین‌های مدرن حساب اهمیتی فوق‌العاده دارد. برای تفهیم بهتر مطالب بعدی در اینجا بطور بسیارمختصر ساختمان این دستگاه ذکر می‌شود.*

در دستگاه اعشاری برای نمایش کمیات از علائم و اعداد صفر تا ۹ استفاده می‌شود و هر عدد دلخواه را می‌توان در این دستگاه به‌صورت مجموعی از توانهای مختلف عدد ۱۰ نمایش داد:

$$۱۹۵۱ = ۱ \times ۱۰^{۳} + ۹ \times ۱۰^{۲} + ۵ \times ۱۰^{۱} + ۱ \times ۱۰^{۰} \quad **$$

---

* برای اطلاع بیشتر لطفاً رجوع کنید به‌مقاله نگارنده در باره «حساب‌بی‌نر» در مجله سخن علمی شماره ۹ دی‌ماه ۱۳۴۸

** هر عدد دلخواه به‌قوه صفر برابراست با واحد: $a^{0} = ۱$

که معمولا از ذکر توانهای مختلف عدد ۱۰ خودداری وتنها به‌نگارش ضرایب آن در کنار یکدیگر اکتفا می‌شود.

در دستگاه دوآل برای نمایش کمیات تنها از دو عدد صفر و یك استفاده شده و هر عدد دلخواه در این دستگاه بصورت مجموعی از توانهای عدد ۲ بیان می‌شود:

$$۱ = ۱ \times ۲^{۰}$$
$$۲ = ۱ \times ۲^{۱} + ۰ \times ۲^{۰} = ۱۰$$
$$۴ = ۱ \times ۲^{۲} + ۰ \times ۲^{۱} + ۰ \times ۲^{۰} = ۱۰۰$$
$$۷ = ۱ \times ۲^{۲} + ۱ \times ۲^{۱} + ۱ \times ۲^{۰} = ۱۱۱$$

در اینجا نیز از ذکرتوانهای مختلف عدد ۲ (مثل $۲^{۲}$، $۲^{۱}$، $۲^{۰}$) صرف‌نظر شده وتنها به‌نوشتن ضرایب آنها (۱،۰) درکنار یکدیگر قناعت می‌شود.

بدیهی است که اعداد غیر صحیح را نیز می‌توان در این دستگاه نمایش داد:

$$۳/۶۸۷۵ = ۱ \times ۲^{۱} + ۱ \times ۲^{۰} + ۱ \times \frac{۱}{۲^{۱}} + ۰ \times \frac{۱}{۲^{۲}} + ۱ \times \frac{۱}{۲^{۳}} + ۱ \times \frac{۱}{۲^{۴}}$$
$$= ۲ + ۱ + \frac{۱}{۲} + ۰ + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶}$$

هرگاه از ذکر توانهای مختلف عدد ۲ صرف‌نظر کرده و تنهاضرایب آنها را درکنار یکدیگر قرار دهیم در آنصورت خواهیم داشت:

$$۳/۶۸۷۵ = ۱۱/۱۰۱۱$$

عدد ۱۹۵۱ که در بالا نیز از آن ذکر رفت، در دستگاه دوآل شکل زیر را خواهد داشت:

$$۱۹۵۱ = ۱۰۲۴ + ۵۱۲ + ۲۵۶ + ۱۲۸ + ۰ + ۰ + ۱۶ + ۸ + ۴ + ۲ + ۱ = ۱ \times ۲^{۱۰} + ۱ \times ۲^{۹} + ۱ \times ۲^{۸} + ۱ \times ۲^{۷} + ۰ \times ۲^{۶} + ۰ \times ۲^{۵} + ۱ \times ۲^{۴} + ۱ \times ۲^{۳} + ۱ \times ۲^{۲} + ۱ \times ۲^{۱} + ۱ \times ۲^{۰}$$

هرگاه تنها ضرایب توانهای مختلف عدد ۲ را در کنار هم بنویسیم، در آنصورت حاصل خواهد شد:

$$۱۹۵۱ = ۱۱۱۱۰۰۱۱۱۱۱$$

معمولا اعداد صفر و یك دستگاه دوآل را برای تمایز بیشتر آن از دستگاه‌های دیگر و بویژه دستگاه‌اعشاری بصورت O و L نمایش‌می‌دهند.

بدین ترتیب عدد ۱۹۵۱ شکل زیر را بخود خواهد گرفت:

۱۹۵۱ = LLLLOOLLLLL

بدیهی‌است که هر عدد دلخواه اعشاری را می‌توان به‌یك عدد دوآل تبدیل کرد و برعکس. در اینجا به‌عنوان مثال طرز تبدیل عدد ۱۹۵۱ را به‌متناظر خودش در دستگاه دوآل ذکر می‌شود:

۱۹۵۱	:	۲	=	۹۷۵	باقی‌مانده	=	۱
۹۷۵	:	۲	=	۴۸۷	«	=	۱
۴۸۷	:	۲	=	۲۴۳	«	=	۱
۲۴۳	:	۲	=	۱۲۱	«	=	۱
۱۲۱	:	۲	=	۶۰	«	=	۱
۶۰	:	۲	=	۳۰	«	=	۰
۳۰	:	۲	=	۱۵	«	=	۰
۱۵	:	۲	=	۷	«	=	۱
۷	:	۲	=	۳	«	=	۱
۳	:	۲	=	۱	«	=	۱
۱	:	۲	=	۰	«	=	۱

حال هرگاه اعداد باقی مانده را از پائین به‌بالا در کنار هم قرار دهیم عدد ۱۱۱۱۰۰۱۱۱۱۱ یعنی ۱۹۵۱ در دستگاه دوآل بدست می‌آید.

همانگونه که ملاحظه می‌شود بزرگترین عیب دستگاه دوآل در این است‌که اعداد طولانی و جسیم هستند. مثلا عدد ۱۹۵۱ که در دستگاه اعشاری از ۴ رقم تشکیل یافته در دستگاه دوآل از ۱۱ رقم تشکیل‌می‌یابد. علت این امر نیز واضح است. زیرا در دستگاه اعشاری ما ده علامت و عدد مختلف در اختیار داریم، در حالیکه در دستگاه دوآل تنها از دو علامت صفر و یك استفاده می‌کنیم. بطورکلی اعداد در دستگاه دوآل ۳/۳ برابر طویل‌تر از دستگاه اعشاری هستند.

با وجود این نقص بزرگ دستگاه دوآل و حساب بی‌نر امروزه پایه و اساس ماشین‌های مدرن حساب را تشکیل می‌دهند و استفاده از آن بسی مفیدتر از دستگاه اعشاری است. زیرا در اینجا می‌توان عدد یك را بصورت عبور جریان برق و عدد صفر را بصورت عدم عبور جریان برق نمایش داد. توضیح بیشتر در این مورد در اینجا سبب اطناب کلام خواهد شد. تنها به‌تذکر این نکته اکتفا می‌شود که محاسبه و اجرای چهار عمل اصلی نیز در این دستگاه فوق‌العاده ساده تر است تا در دستگاه اعشاری.

زیرا تنها دانستن چهار قاعده ساده زیر لازم است:

$$۰ + ۰ = ۰$$
$$۰ + ۱ = ۱$$
$$۱ + ۰ = ۱$$
$$۱ + ۱ = ۱۰$$

از چهار قاعده فوق تنها آخرین آنها اندکی غیرمعقول بنظر می‌رسد. شك نیست که حاصل جمع یك باضافه یك برابر با دو می‌باشد. ولی عدد ۲ در دستگاه دوآل بصورت ۱۰ نشان داده می‌شود.

اینك از توضیح بیشتر در این زمینه خودداری کرده و به‌ذکر ابتدائی‌ترین وسائل محاسبه می‌پردازیم.

پیدایش «آباکوس»

۱

از جمله قدیمی‌ترین وسائلی که در اعصار گذشته برای تسهیل امر محاسبه و شمارش بکار می‌رفته، دستگاهی است بنام سوآن ـ پان Suan-pan یا Swanpan که در حدود ۱۱۰۰ قبل از میلاد در چین معمول بوده است.

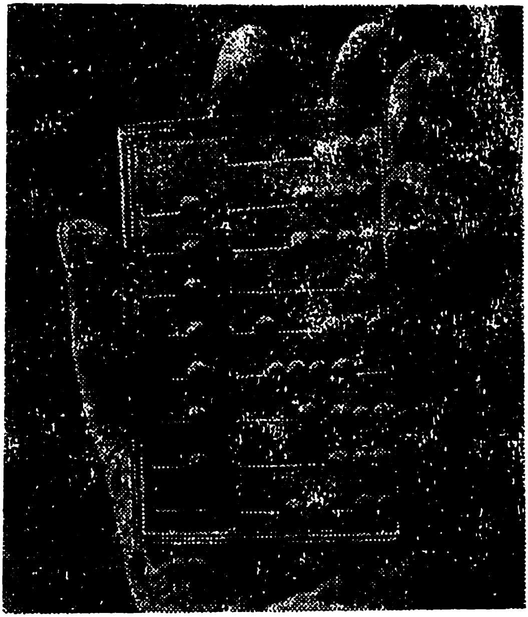
سوآن ـ پان از یك تخته چهارگوش منقسم به‌ده‌حوزه افقی و یك حوزه عمودی تشکیل شده و هر حوزه نمایانگر کمیت معینی بود. هنگام محاسبه ابتداء حوزه‌های دهگانه افقی و سپس حوزه عمودی با سنگ‌های کوچك پر می‌شدند.

در یونان باستان دستگاهی برای محاسبه معمول بود بنام آباکوس abacus که فرق چندانی از نظر ساختمان با سوآن ـ پان نداشت. آباکوس یونانی از قطعه تخته چهارگوش کوچکی تشکیل می‌شد که پیرامون آنرا لبه‌کوتاهی محاط می‌کرد و اعداد بکمك انگشتان‌دست‌روی سطح داخلی آباکوس که با شن ریز و گرد ظریفی پوشیده بود* ترسیم می‌گردیدند.

نمونه‌کامل‌تر آباکوس یونانی در تمدن روم بچشم میخورد. رومی‌ها تغییرات عمده‌ای در شکل و طرز کار آباکوس یونانی داده و آنرا

* واژه یونانی abax بمعنی گرد و غبار است. از همین‌رو دستگاه مزبور آباکوس نامیده می‌شد.

برای محاسبات روزانه عملی‌تر ساختند. آباکوس رومی همانگونه که در شکل ۲ دیده می‌شود به‌بزرگی یك کارت‌پستال بود و در سطح آن در قسمت تحتانی ده شیار و در قسمت فوقانی هشت شیار حفر شده بود.

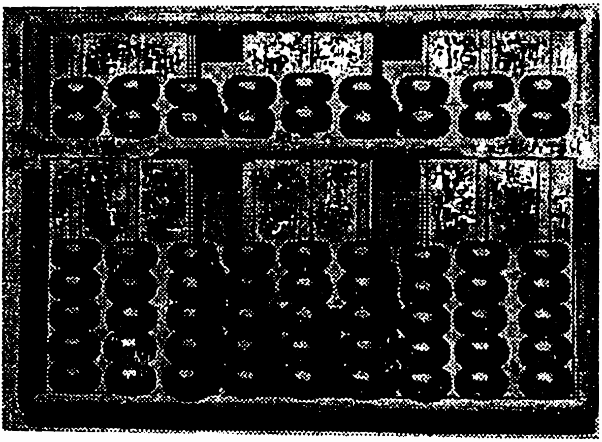


شکل ۲ ــ آباکوس رومی که در روم باستان در محاسبات روزانه بکار می‌رفت. حسابگران چیره‌دست رومی حتی محاسباتی بیش از یك‌میلیون روی آن انجام می‌دادند.

در این شیارها گلوله‌های کوچکی از سنگ یا چوب قرار داشتند که به‌کمك انگشتان دست بحرکت درآمده و در مواضع مختلف اعداد و کمیات معلوم و مشخص را نشان می‌دادند. رومی‌ها خود در محاسبه با آباکوس مهارتی تام داشته و محاسبات نسبتاً دشواری را روی آن انجام می‌دادند.

پس از اضمحلال امپراتوری روم و انتقال تمدن رومی به‌سرزمین‌های دیگر اروپائی آباکوس نیز دستخوش تطور و تکامل فراوان شد. انواع کامل‌تر آن در طی قرون متمادی در اروپا معمول ومتداول بودند. مثلا در شکل ۳ نوعی آباکوس رومی که به تخته حساب موسوم است دیده می‌شود که تا سال ۱۲۰۰ میلادی و حتی بعد از آن نیز در اکثر کشورهای اروپائی

بکار می‌رفته است. تخته حساب مزبور از یك قاب چوبین مجهز به۹میله آهنین تشکیل می‌شد. میله‌های نامبرده هر یك در قسمت فوقانی حامل‌دو و در قسمت تهتانی حامل پنج مهره کوچك عاجی بودند. شمارش‌ومحاسبه به‌کمك تخته حساب مبنی براساس آباکوس دیرین بود. با این تفاوت که نمایش اعداد بسیار بزرگ و محاسبه با آنها در روی تخته‌حساب‌بسی‌ساده‌تر و راحت‌تر از آباکوس صورت می‌گرفت. نمونه‌های دیگر وکامل‌تر این نوع وسائل حساب هنوز نیز درکشورهای آسیائـی وبین ملل و قبائـل مختلف دیده می‌شوند. بعنوان مثال می‌توان از چرتکه‌های معمول درکشور خودمان و یا از Stschoty در روسیه شوروی نام برد که هنوز مـورد استفاده عام هستند.



شکل ۳ ـ این تخته حساب تا چندصد سال پیش در اروپا متداول بود و همانگونه که در این شکل دیده می‌شود شباهت بسیار به‌چرتکه خودمان دارد.

ترویج سریع دستگاه اعشاری و اعداد عربی در اروپا و سایرنقاط تدریجاًازاهمیت اینگونه وسائل کاسته و محاسبه با اعداد و کار برد چهار عمل اصلی را جایگزین اینگونه اصول ابتدائی کرد.

مثلا شکل ۴ که در سال ۱۵۵۴ میلادی ترسیم شده و نام نقاش آن برنگارنده مجهول است، حکایت از این امر می‌کند که چگونه دستگاه اعشاری با مزایای گوناگون خود در بین مردم راه یافته و سبب کسادی بازار وسائل ابتدائی محاسبه از قبیل آباکوس و تخته‌حساب شد.

شکل ۴ ــ در اینجا نقاش ناشناسی می‌کوشد تا برتری محاسبه‌بادستگاه اعشاری را بروسائل ابتدائی حساب از قبیل آباکوس به‌شکل مسابقه‌ای نمایش دهد.

در این تصویر فیثاغورث[۷] بعنوان مخترع آباکوس با چهره‌ای غمگین و اندوهناك مشغول محاسبه با آن است و حیران و سرگردان میکوشد تا هرچه زودتر به‌نتیجه‌ای برسد. در حالیکه‌بوتیوس[۸] Boethius مبتکر و مخترع دستگاه اعشاری(!) محاسبه دشوار خود را مدتی است که تمام کرده و از پیروزی خویش بر استاد دیرین شادمان است. الهه ریاضیات آریت متیکا Arithmetica نیز که این مسابقه را داوری کرده شاهد این پیروزیست.

با انتشار اثر مشهور آدام‌ریس[۹] Adam Ries استاد ریاضیات شهر «ارفورت» Erfurt در سال ۱۵۲۲ بنام "Rechnung auff der Linihen und Federn» فصل جدیدی در تاریخ حساب آغاز شد. آدام‌ریس

در این کتاب به‌تشریح و توضیح اصول ابتدائی و عملی ریاضیات پرداخته وفواید دستگاه اعشاری را روشن ساخت. طولی نکشید که کتاب مزبور بهر کوی و خانه‌ای راه یافت و تاکنون ۹۰ بار تجدید چاپ شده است. شکل‌های ۵، ۶ و ۷ روی جلد وصفحه‌ای ازاین کتاب را نشان می‌دهنـــد

شکل ۵ ــ روی جلد کتاب مشهور آدام‌ریس که در سال ۱۵۳۷ در ارفـورت تـوسط ملخیور ساکسه Melchior Sachse بچاپ رسید.

لگاریتم و فواید عملی آن

پیشرفت وتکامل علوم بویژه علوم ریاضی امکانات ابداع و ابتکار وسائل و لوازم دقیق‌تر و کامل‌تری را برای محاسبه فراهم آورد. خاصه کشف و اختراع لگاریتم و استفاده از قوانین آن فصل جدیدی را در تاریخ علوم ریاضی گشوده و مبداء کشفیات و اختراعات معظمی قرار

Rechenung nach der lenge/ auff den Linihen vnd Feder.

Darzu forteil vnd behendigkeit durch die Proportiones/Practica genant/Mit gründlichem vnterricht des visierens.

Durch Adam Riesen.

im 1550. Jar.

Cum gratia & priuilegio Cæsareo.

شکل ۶ ــ روی جلد کتاب مزبور که در سال ۱۵۵۰ برای بار دیگر به‌چاپ‌رسید. در این شکل تصویر مؤلف آن نیز دیده می‌شود.

Adam Risen.

Vihekauff.

شکل ۷ ــ صفحه‌ای از کتاب مزبور آدام‌ریس در اینجا بازبانی ساده‌درباره خرید و فروش گاو و گوسفند سخن‌گفته و نحوه محاسبه با اعداد اعشاری را تشریح می‌کند.

گرفت.

نوالیس[10] Novalis در اهمیت لگاریتم می‌گوید:

«لگاریتم برای علوم ریاضی همان اهمیتی را دارد که علوم ریاضی برای دیگر دانش‌ها»

تاریخ ریاضیات اکتشاف لگاریتم و قوانین آن را مدیون یوست‌بورگی[11] Jost Buergi (۱۶۰۷)، جان ناپیر[12] John Napier (۱۶۱۴) و هنری بریگز[13] Henry Briggs (۱۶۲۴) است.

با استفاده از قوانین و اصول لگاریتم، در اوائل قرن هفدهم ادموند گونتر Edmund Gunter (۱۶۲۶ ـ ۱۵۶۱) موفق به‌اختراع یك نوع خط‌کش محاسباتی * شد که اساس انواع مختلف و کامل امروزی آنها بشمار می‌رود.

بی‌فایده نیست که دراینجا توضیح مختصری درباره لگاریتم وقوانین آن جهت تسهیل تفهیم اصول و قواعد خط‌کش محاسباتی ذکر شود.

درمعادله $a^n = b$ برحسب اینکه کدامیك ازکمیات n ، b ، a مجهول باشد سه‌حالت پیش می‌آید:

۱ـ هرگاه b مجهول، n و a معلوم باشند، کافی است‌که a را بقوه n برسانیم تا b حاصل شود: $a^n = b$

۲ـ هرگاه a مجهول، n و b معلوم باشند، کافی است که ریشه nـام عدد b را محاسبه‌کنیم تا حاصل شود: $\sqrt[n]{b} = a$

۳ـ هرگاه n مجهول، b و a معلوم باشند، طبق‌تعریف، n عبارت خواهد بود از لگاریتم b در پایه a:

$$n = {}_{a}\log b$$

n و b و a کمیات دلخواهی هستند و بر حسب اینکه چه اعدادبه‌عنوان‌پایهٔ لگاریتم a انتخاب شوند سیستم‌های گوناگون لگاریتم بوجود خواهد آمد. معمولاً سه نوع لگاریتم در حال حاضر متداول هستندکه عبارتند از:

۱ـ لگاریتم برپایهٔ $a = ۱۰$: $n = {}_{۱۰}\log b \equiv lg b$ **

۲ـ لگاریتم برپایهٔ $a = e = (n + \frac{۱}{n})^n = ۲/۷$ $n = {}_{e}\log b \equiv ln b$

۳ـ لگاریتم برپایهٔ $a = ۲$: $n = {}_{۲}\log b \equiv ld b$

* به‌انگلیسی slide rule و به‌آلمانی der Rechenschieber

** $\equiv$ یعنی طبق تعریف

تبدیل لگاریتم‌های مختلف بیکدیگر بآسانی صورت‌پذیر است.

قوانین لگاریتم که درمحاسبات ریاضی مورد استفاده بوده وامر محاسبه با اعداد وکمیات بسیار بزرگ را بسیار ساده می‌سازند از قرار زیرند. که البته در اینجا بذکر آنها اکتفا و از اثبات ریاضی آنها خودداری می‌شود.

۱- لگاریتم حاصل‌ضرب دو یا چند عدد دلخواه ... و B و A برابر است با مجموع لگاریتم‌های اعداد ... ، B ، A :

$$log(A \times B \times \ldots) = logA + logB + \ldots$$

۲- لگاریتم حاصل تقسیم دو یا چند عدد دلخواه ...، B ، A برابر است با تفریق لگاریتم‌های اعداد ...، B ، A :

$$log(A : B : \ldots) = logA - logB - \ldots$$

۳- لگاریتم هرعدد دلخواه بقوه n برابراست با n برابرلگاریتم عدد مزبور:

$$logA^{n} = n \times logA$$

۴- لگاریتم ریشه‌n-ام عدد دلخواه A برابر است با $\frac{1}{n}$ لگاریتم A :

$$log \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} logA$$

ضرب، تقسیم، تعیین جذر و کعب و سایر محاسبات ریاضی‌رامی‌توان با استفاده از قوانین نامبرده بکمك خط‌کش محاسباتی انجام داد. در اینجا لازم به‌تذکر است‌که قوانین مزبور بستگی به‌پایه لگاریتم نداشته و در تمام سیستم های لگاریتم صادق‌اند.

خط‌کش محاسباتی ادموند گونتر که قبلا بدان اشاره شد از یك خط‌کش چوبی تشکیل شده بود که در روی آن لگاریتم اعداد از یك تا ده حك شده بودند. ضرب دوعدد با استفاده از قاعده اول لگاریتم که طبق آن لگاریتم حاصل ضرب دو عدد دلخواه برابر با مجموع لگاریتم‌های دوعدد مزبور می‌باشد، صورت می‌گرفت. بدین‌ترتیب‌که بوسیله یك پرگار قطعات متناظر با لگاریتم‌های دو عدد مورد نظر از روی خط‌کش مزبور برروی کاغذی نقل شده و در کنار هم گذارده می‌شدند. تفاضل این قطعات طبق قاعده دوم لگاریتم‌ها متناظر با حاصل تفریق دو عدد مزبور بود.

نمونه‌های این خط‌کش محاسباتی مدتها بوسیله شفلت Scheffelt در شهر اولم Ulm آلمان ساخته می‌شد و استفاده از آن معمول و متداول بود. مثلا افسران نیروی دریائی انگلیس که تحت فرماندهی نلسون[14] Nelson علیه ناپلئون می‌جنگیدند، مواضع خود را به‌کمك نوعی از این خط‌کش محاسبه ومیزان می‌کردند.

در سال ۱۶۶۰ ویلیام اوترد William Oughtred (۱۶۶۰-۱۵۷۴) بدین فکر افتاد که بجای پرگار از خط‌کش دیگری که روی آن نیز لگاریتم اعداد حك شده بودند استفاده کرده و دو خط‌کش را در کنار یکدیگر قرار دهد. بطوریکه بتوان در هنگام محاسبه آندو را در کنار یکدیگر بحرکت درآورد. نحوه کار خط‌کش‌های محاسباتی مدرن امروز نیز در واقع برهمین اساس است. با لغزش زبانه خط‌کش‌در داخل‌بدنه‌اصلی آن ضرب و یا تقسیم دو یا چند عدد تبدیل به‌ضرب و یا تقسیم قطعات متناظر بالگاریتم‌های آنها می‌شود.

از ابداعات دیگری که می‌توان در این زمینه ذکر کرد خط‌کش محاسباتی جیمزوات[15] James Watt است که دارای شکلی *U* مانند بود و در بطن آن خط‌کش دیگری با تقسیم‌بندی لگاریتمی حرکت، می‌کرد. بیاری این خط‌کش وات قادر به‌تعیین مربع و جذر دوم اعداد نیز بود.

ذکر نام تمام کسانی که در تکامل روزافزون خط‌کش‌های‌محاسباتی کوشیده‌اند از عهده این مقال خارج است. تنها به‌ذکر نام یك فرد دیگر که شکل کنونی خط‌کش‌های محاسباتی را مدیون او هستیم یعنی ادموند وینگیت Edmund Wingate (۱۶۵۶ ــ ۱۵۹۳) اقدام می‌شود که در راه تکامل اینگونه ابزار محاسبه کوشش های ارزنده‌ای کرده است.

شکل ۸ یك نوع از چنین خط‌کش‌ها را نشان می‌دهد که ازدوقسمت اساسی یعنی زبانه و بدنه اصلی تشکیل شده است. تقسیم‌بندی خط‌کش مزبور نیز لگاریتمی بوده و بکمك آن می‌توان بسیاری از محاسبات ساده از قبیل تعیین مربع، مکعب، لگاریتم و کمیات مثلثاتی اعداد را براحتی

انجام داد.

خط‌کش محاسباتی از ابتدائی‌ترین و مهمترین وسائل محاسبات مهندسی بشمار رفته و از اینرو همواره دستخوش تکامل و تطور است. امروزه انواع و اقسام بسیار آنها وجود دارد که بیاری آنها می‌توان بسیاری از محاسبات سهل و دشوار را براحتی و در زمان کوتاهی انجام داد.

شکل ۹ نمونه‌ای از صفحات مدور محاسباتی را بدست می‌دهد* اینگونه دوایر محاسباتی معمولا از دو صفحه مدور داخلی و خارجی مشترك‌المرکز تشکیل شده که حول محور مشترکی قابل گردش هستند. همانگونه‌که ملاحظه می‌شود. فواصل‌تقسیم‌بندیهای مختلف ازداخل‌به‌خارج کوچکتر می‌شوند و این خود عیبی است که در مقابل محسنات دیگر اینگونه دوایر محاسباتی قرار می‌گیرد.

امورحسابداری بانك‌ها و محاسبه بورس‌ها سبب شده‌که نوع دیگری از اینگونه وسائل ساده محاسبه ببازار آید. شکل ۱۰ یك‌نمونه از چنین غلطك‌های محاسباتی** Rechentrommel نشان می‌دهد که از دو استوانه باریك که حول محور مشترکی بگردش درمی‌آیند، تشکیل شده است. طرز عمل صفحات مدور و غلطك‌های محاسباتی در اصل نیز مبنی برمحاسبات لگاریتمی است و از این رو تشابه فراوانی به‌خط‌کش‌های محاسباتی دارد. تنها نحوه محاسبه با آنها متفاوت است.

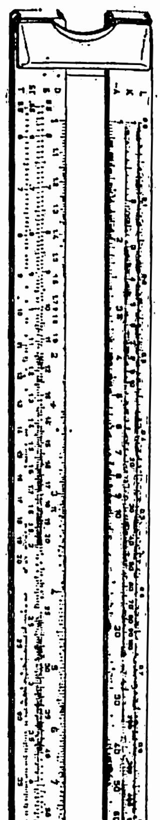
از آخرین تحولات در این زمینه می‌توان از یك نوع صفحه محاسباتی محصول A.U. Faber-Castell نام برد که در ساختمان آن‌علاوه براصول و قواعد معمولی در سایر سیستم‌ها از خواص بردارها نیزاستفاده شده است.

در این‌جا لازم است یادآوری شود که نوعی خط‌کش محاسباتی که تا حدود ۱۶۶۰ در چین معمول بوده دردست است. شکل ۱۱ نشان می‌دهد که از نظر ساختمان و طرز کارشباهت بسیاری با خط‌کش‌های مدرن امروزی دارد.

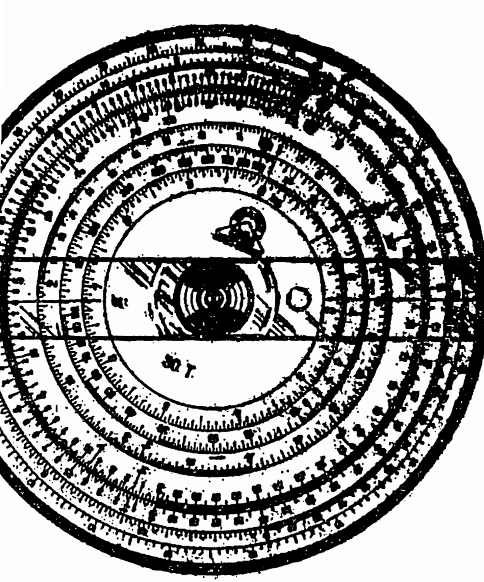
---

* صفحه مدور محاسباتی Rechenscheibe که در اینجا ملاحظه می‌کنید از محصولات Calculator AG می‌باشد.

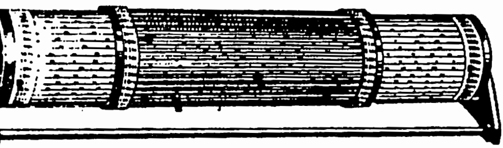
** غلطك محاسباتی مزبور از محصولات کارخانه فوق است.



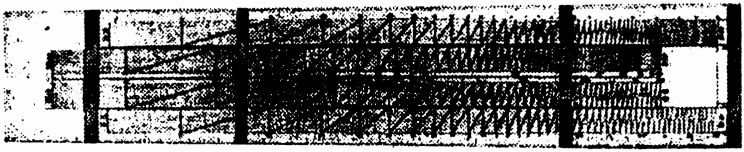
شکل ۸ ـ یك نمونه از خط کش‌های محاسباتی را نشان میدهد که بکمك آن مربع، مکعب، لگاریتم اعداد و نیز خطوط مثلثاتی زوایا بسادگی محاسبه می‌شوند.



شکل ۹ ـ نمونه‌ای از ص
مدور محاسباتی که ا
بویژه در امور حسابدار
می‌روند.



شکل ۱۰ ـ غلطك محاسباتی که غالبا در امر حسابداری بانك‌ها و مؤسسات بورس بکار می‌رود.



شکل ۱۱ ــ یك نوع خط‌کش محاسباتی که تا اواخر قرن هفدهم در چین متداول بوده است.

ظاهراً چینی‌ها به‌قواعد وخواص لگاریتم‌ها نیز آشنائی داشته و در ساختمان خط‌کش‌های محاسباتی خود از آنها استفاده می‌کرده‌اند.

اختراع اولین ماشین های حساب

با پیشرفت صنعت و فنون مختلفه و بویژه صنعت ظریف ساعت‌سازی اندیشه ابداع و اختراع ماشین‌های حساب در خاطرها خطور کرده و تبلور بیشتری یافت. کوشش در این زمینه بین فعالیت‌های دیگر فکری انسانی جای خاصی را اشغال می‌کند. خاصه از این نظر که محاسبه وشمارش جزئی جدانشدنی از زندگانی روزانه بشمار می‌رود و هرفردی به‌طریقی در کار روزانه خود با اعداد و کمیات سر و کار دارد. از اینرو لزوم وجود ماشین‌های حسابی که قادر به‌انجام محاسبات بزرگ و مشکل ریاضی ونجومی باشند همواره بچشم خورده وافکار بسیاری از دانشمندان را بخود مشغول داشته است.

سرانجام این فکر در سال ۱۶۲۳ برای اولین بار جامه عمل بخود پوشید. در این سال ویلهلم شیکهارد Wilhelm Schickhard (۱۶۳۵ ــ ۱۵۹۲) ریاضی‌دان آلمانی که خود در دانشگاه توبینگن Thuebingen بتدریس ریاضیات و نجوم اشتغال داشت و به‌مشکلات طاقت‌فرسای محاسبات نجومی آگاه بود با تشویق و توصیه دوستش کپلر[۱۶] Kepler دست به‌اختراع اولین ماشین‌حساب زد. وی درساختمان این ماشین از آلات و ادوات مکانیکی از قبیل چرخ‌دنده و اهرم‌استفاده کرده و این اصول بعدها نیز سرمشق سایر مخترعین قرار گرفت. اعداد از صفر تا ۹ به‌کمك ده‌دندانه یك چرخ دنده‌نمایش داده‌می‌شدند و هر چرخ دنده پس از یك دوران کامل چرخ دیگری را به‌میزان یك واحد به‌گردش درمی‌آورد. نه‌تنها جمع و تفریق بیاری این‌ماشین مقدور بود،

بلکه ضرب نیز به‌صورت جمع متوالی به‌کمك آن مقدور بود. نکته بسیار جالبی که در ساختمان این ماشین بچشم می‌خورد وجود انباره ضابطی است که حاصل محاسبات در آن ضبط شده و در موقع لزوم مورد استفاده قرار می‌گرفت.*

شیکهارد در نامه‌ای که یك‌سال پس از اختراع این ماشین به‌کپلر می‌نویسد طرحی از آن را ضمن توضیحات دیگر ضمیمه می‌کند و قید می‌نماید که ماشین مزبور کمی بعد از اختراع طعمه حریق شده و از بین رفته است (شکل ۱۲).

وجود طرحها، ترسیمات و توضیحات مفصل شیکهارد در مورد این ماشین حساب هرگونه شك و تردیدی را در حقانیت این اختراع از بین می‌برد. کما اینکه در سال ۱۹۵۷ فون فرای‌تاگ ـ لورینهوف Von Freytag Loerinhoff استاد ریاضیات دانشگاه توبینگن با استفاده از این طرحها موفق به‌ساخت ماشین حساب وی می‌شود که در شکل ۱۳ ملاحظه می‌کنید.

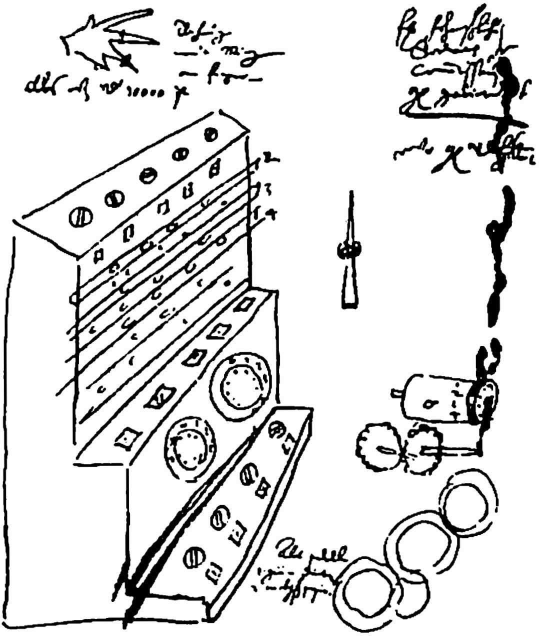
دومین شخصی که موفق به‌اختراع ماشین حساب شد. ریاضیدان و فیلسوف فرانسوی پاسکال[۱۷] Pascal است که در سال ۱۶۴۲ در حالیکه بیش از نوزده سال نداشت برای کمك به‌پدرش که در اداره مالیه کار می‌کرد ماشین حسابی اختراع کرد که قادر به‌انجام عمل ضرب وتقسیم بود.

در این ماشین نیز که درشکل ۱۵ دیده می‌شود مکانیسمی بچشم می‌خورد که در اکثر ماشین‌های قرن اخیر دیده می‌شود. بدین ترتیب که اعداد بکمك چرخ‌دنده‌ها نمایش داده شده و هر چرخ دنده‌ای پس از یك دوران کامل چرخ دنده دیگری را به‌میزان یك واحد به‌گردش درمی‌آورد.

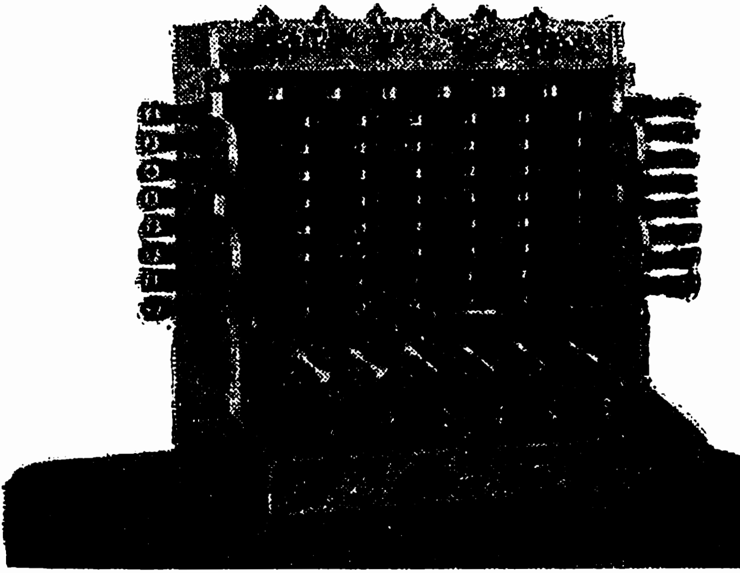
قریب سی‌سال بعد یعنی در سال ۱۶۷۱ فیلسوف، مرد الهی و ریاضیدان مشهور آلمانی لایب نیتز[۱۸] Leibniz بفکر اختراع ماشین

---

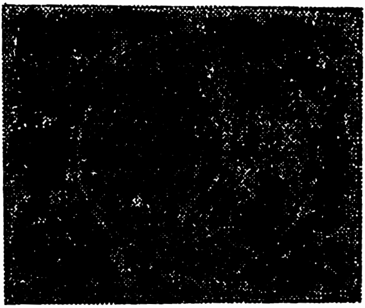
* نه‌تنها تصور ماشین‌های مدرن حساب بدون چنین انباره‌هائی است، بلکه گنجایش و ظرفیت این‌گونه انباره‌ها در ضبط کمیاب خود از وجود تمایز و برتری ماشین‌های حساب است.



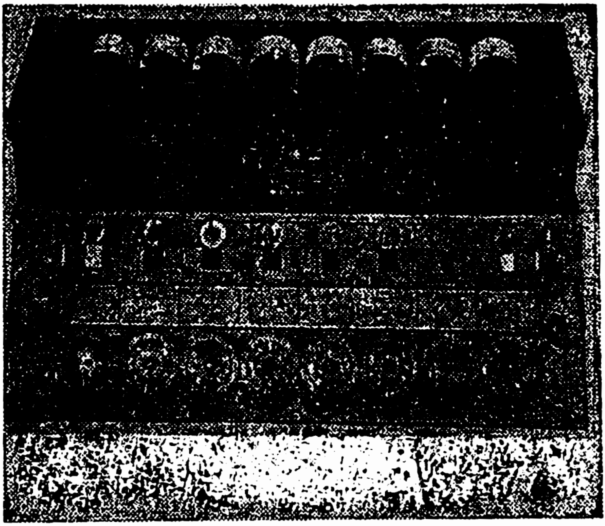
شکل ۱۲ ــ شیکهارد در نامه‌ای که به کپلر می‌نویسد ضمن توضیحات مفصل این طرح از ماشین حساب‌اش را نیز ضمیمه می‌کند.



شکل ۱۳ ــ ماشین حسابی که در این شکل مشاهده می‌کنید از روی طرح‌ها و توضیحات شیکهارد در سال ۱۹۵۷ مجدداً ساخته شده است.



شکل ۱۴ ـ بلز پاسکال ریاضی‌دان و فیلسوف مشهور فرانسوی



شکل ۱۵ ـ این ماشین حساب را فیلسوف و ریاضی‌دان فرانسوی پاسکال در سال ۱۶۴۲ یعنی در حالیکه بیش از ۱۹ سال نداشت اختراع کرد.

حسابی افتاد که بیاری آن بتوان جمیع محاسبات ریاضی را براحتی انجام داد. وی حتی در این مورد استفاده از سیستم دوآل را بجای دستگاه اعشاری پیشنهاد می‌کرد*. وی در طرح‌ریزی ماشین مزبور نه‌تنها اهرم‌ها و چرخ‌دنده‌ها بلکه غلطك‌های چوبین را نیز مورد استفاده قرار داده بود.

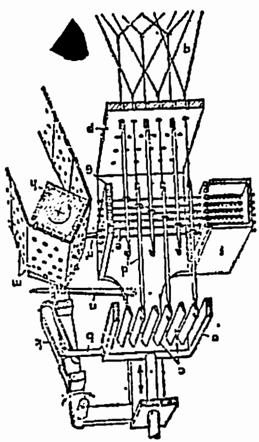
---

* رجوع شود به‌مقاله نگارنده درباره لایب‌نیتز در مجله سخن علمی شماره ۹ دیماه ۱۳۴۸

بدیهی است که ساختن اینگونه ماشین‌های ظریف و دقیق باوجود رونق فن ساعت‌سازی و ساعت‌سازان ماهر مع‌الوصف در قرون هفده و هجده کاری بس مشکل و گاه ناممکن بود. زیرا آلات و ادوات مورد نظر مانند اهرم‌ها و چرخ‌دنده‌ها که مکانیسم داخلی این ماشین‌ها را تشکیل می‌دادند با دست ساخته شده و بناچار عاری از ظرافت و دقت لازم بودند.

چرخ ریسندگی خودکار ژاکار

یکی از مهمترین ابداعات واختراعات‌قرن هجدهم را می‌توان اختراع چرخ ریسندگی خودکار دانست که راه را برای تکامل هرچه بیشتر ماشین‌های حساب، به‌شرحی که خواهد آمد، هموار ساخت. درسال ۱۸۵۸ ژوزف ـ ماری‌ژاکار Joseph-Marie Jacquard (۱۸۳۴ـ ۱۷۵۲) موفق به‌اختراع چرخ ریسندگی اتوماتیك خود شده و آن را در لیون Lyon به‌معرض تماشا گذارد. جرخ ریسندگی مزبور به‌نحوی‌که در شکل ۱۶ دیده میشود دارای صفحات مقوائی مشبکی بود که درحول منشوری حرکت می‌کردند. این‌منشور دارای‌میخك‌های کوچکی درسطح جانبی خود بود و هنگام گردش تنها میخك‌های معینی در حفره‌های صفحات مشبك قرار می‌گرفتند وبدین ترتیب طرح نقش‌های مختلف روی پارچه بدلخواه و بکمك تعداد و محل سوراخ‌های کارت‌های مشبك انجام می‌شد.

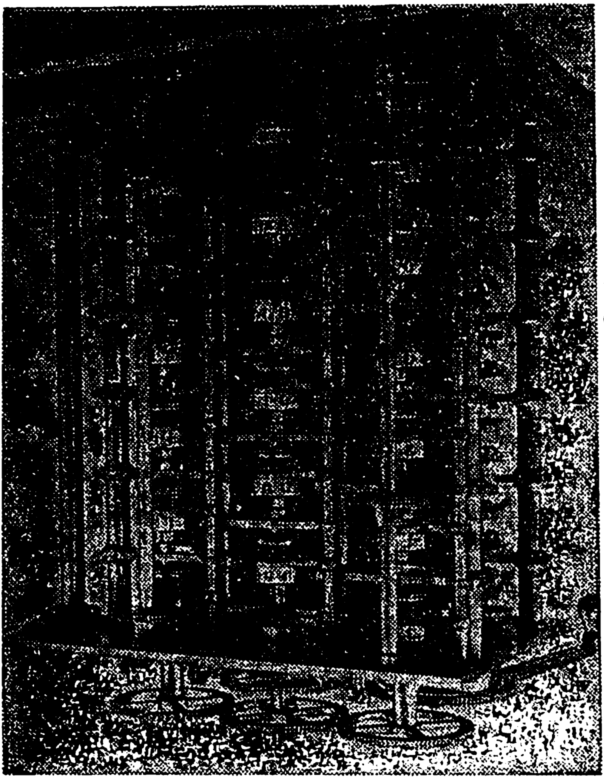


شکل ۱۶ ـ ماشین ریسندگی ژاکار که در ساختمان آن برای اولین بار از صفحات مشبك استفاده شد.

فواید عملی و نتایج رضایت‌بخشی که اختراع ژاکــار در زمینــه ریسندگی با خود همراه آورد یکی از استادان ریاضیات دانشگاه کمبریج Cambridge بنام چارلز بابیج Charls Babbage (۱۷۹۲–۱۸۷۱) را بدین فکر انداخت که براساس ساختمان و طرز کار آن ماشین حسابی بسازد. طبق طرح‌های بابیج می‌بایستی ماشین مزبور طــبق بــرنامــه معین و مشخصی کــه قبلا تهیه مــی‌شد قــادر به‌انجام انواع و اقسام محاسبات دشوار ریــاضی باشد. چــارلزبابیج با استفاده از کمــك‌های مالی دولت انگلستان مدت بیست و پنج‌سال یعنی بین سال‌های ۱۸۳۵/۶۰ مشغول طرح و تکمیل ماشین حساب خود شده و در ۱۸۶۰ طرح کامل و آماده خود را در اختیار مقامات مربوطه گذارد. لیکن طرح مزبــور آنچنان پیچیده و بنای ماشین‌حسابی براساس آن آنقدر مشکل بود که اندکی بعد امید ساختن چنین ماشینی به‌یکباره مبدل به‌یأس گردید. بابیج نیز خود مورد تمسخر و استهزاء همکارانش قرار گرفت که معتقد بودند ساختن چنین ماشینی نه‌تنها بعلت ضعف صنعت دشوار است، بلکه شایــد اصولا غیرممکن باشد. او خود نیز به‌سبب عدم توانائی مالی از کوشش و فعالیت بیشتر در این زمینه منصرف شد. براستی ساختن ماشینی که درآن بیش از ۲۵ چرخ‌دنده درآن واحد یکدیگر را به‌گردش درمی‌آوردند در آن زمان عملی نبود.

در شکل ۱۷ جزئی از ماشین مزبور دیده میشود.

چارلز بابیج در کتاب خود بنام «گوشه‌هائی از زندگانی یك مرد فیلسوف» Passages from the Life of a philosopher کــه در سال ۱۸۶۴ در لندن منتشر شد. ضمن اعتراف بدین اشکالات به‌تشریح وتوضیح ماشین حساب خود پرداخته است. کتاب مزبور حاکی از تصورات روشن او از طرح‌ها و نقشه‌هایش در این مورد است که بعدها الهام‌بخش‌سازندگان و مخترعین ماشین‌های مدرن الکترونیکی گردیدند. براساس طرح‌هــای موجود، ماشین وی قادر بود حتی ۲۰۰ عدد ۲۵ رقمی را در انباره ضابط خود نگاهداشته و در مواقع لازم اقسام و انواع محاسبات را با آنها انجام دهد. متاسفانه بابیج درباره برنامه‌ای که می‌بایست این‌ماشین طبق آن کار کند اطلاعات دقیقی نمی‌دهد گواینکه شواهد بسیار برآنند که او خود

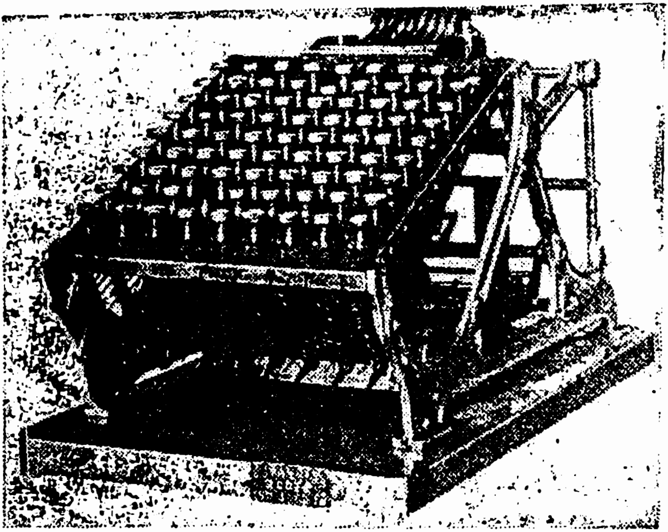


شکـــل ۱۷ ـ جزئی از ماشین حساب تخیلی بابیج که اینك در موزه لنـــدن موجود است.

در این زمینه نیز تصورات کاملا روشنی داشته است. بهرتقدیر خواست سرنوشت بود که پس از گذشت یك‌قرن آمال و آرزوهای این مرد جامه عمل بخود پوشند.

لازم است که در اینجا از زحمات موفقیت‌آمیز یك‌نفر آمریکائی بنام ویلیم‌سواردبورو William Sward Burrough یاد شود. او در سال ۱۸۹۱ موفق به‌اختراع ماشین حسابی شد که بزودی شهـــرت عـــام پیدا کرده و محبوبیت فراوان یافت و شکل ۱۸ یك‌نمونه از آنرا نشان می‌دهد.

بورو که خود حسابداری ورزیده بود بکمك ماشین مزبور در مدت نسبتاً کوتاهی و باسرعت و دقت فراوانی قادر به‌انجام محاسبات متعددی



شکل ۱۸ ــ ماشین حساب بورو که از سال ۱۸۹۱ استفاده از آن در ادارات معمول گردید.

بود. از مشخصات بسیار جالب ماشین مزبور وجود کلیدهائی* است که امروز نیز در ماشین‌های حساب کوچك غالباً دیده می‌شوند. طولی نکشید، که دستگاه محاسب بورو بزودی برای استفاده در ادارات و مؤسسات‌مالی بمقدار زیاد ساخته شده و در دسترس عموم قرار گرفت.

کارت‌های مشبك**

استفاده از کارتهای مشبك و یا حداقل از ابتدائی‌ترین نوع آنها از سال ۱۸۵۸ یعنی از زمانیکه که ژاکار موفق به‌اختراع چرخ ریسندگی اتوماتیك خود شد، معمول گردید. لیکن شکل امروزی آنها از ابداعات هرمان هولریت Hermann Hollerith (۱۹۲۹ ــ ۱۸۶۰) می‌باشد. هولریت پس از اتمام تحصیل در دانشکده معدن‌شناسی دانشگاه کلمبیا به‌سال ۱۸۸۵ در اداره آمار شهر واشنگتن به‌کار مشغول شد. در آن زمان به‌علت هجوم مهاجرین ونوواردین به‌آمریکا جمعیت این کشور متوالیاً در حال تغییر و تکثیر بود. از اینرو طبق قانون اساسی ممالك متحده

---

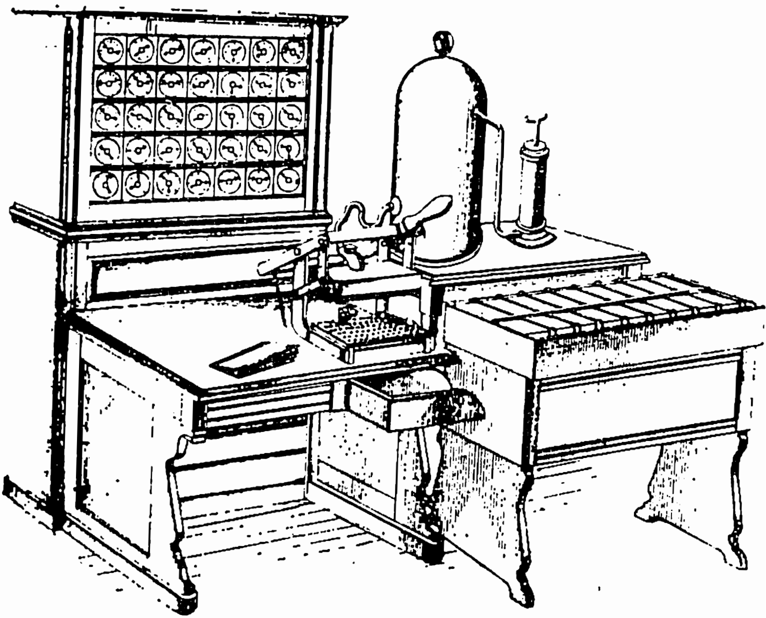
* به‌انگلیسی Keys و Key-board به‌آلمانی Tasten و Tastatur

** به انگلیسی Punched card. به‌آلمانی Lochkarte

شمالی هرده سال یك‌بار سرشماری عمومی صورت می‌گرفت. بررسی نتایج سرشماری و اعلان آمار نهائی خود مدت ده‌سال بطول می‌انجامید. هولریت بلافاصله پس از اشتغال بکار در سال ۱۸۸۰ مأموریت یافت تا بکمك ۵۰۰ نفر همکار دیگر به‌مدت هفت‌سال جمعیت آمریکا را که در آن زمان بالغ بر ۵۵ میلیون نفر بود براساس ۳۶ نقطه‌نظر مختلف از قبیل سن، شغل، مذهب و... تقسیم‌بندی کرده و نتایج حاصله را در فرم‌های مخصوصی ضبط و بایگانی نماید. هولریت مدت دو سال ریاست این هیأت را بعهده داشت و اندیشه اینکه این کار طاقت‌فرسا و غیر اخلاقی را به‌طریقی‌آسان وسهل سازد همواره او را بخود مشغول می‌داشت. سرانجام پس از سالها کوشش و زحمت در هشتم ژانویهٔ ۱۸۸۶ موفق شد اختراع خود را تحت حق‌الامتیاز شماره ۳۹۵۷۸۲ به‌ثبت برساند. کار او در واقع تکمیل اختراع ژاکار و تهیه کارتهای یك‌اندازه بود که روی آنها برای‌مشخصات افراد محل‌های بخصوص در نظر گرفته شده بود. این‌کارت‌ها برحسب مشخصات مورد نظر در محل‌های معین سوراخ شده و توسط هولریت (شکل ۱۹) جدا و بایگانی می‌شدند.

برای روشن شدن طرز کار باکارت‌های مشبك می‌توان آنها را با علائم والفبای خط نابینایان مقایسه کرد. همانگونه که افراد نابینا به‌یاری حس لامسه و انگشتان خود قادر به‌احساس و قرائت‌الفباء برجسته «برای[19] Braille » هستند ماشین هولریت نیز بوسیله جاروبك‌های الکتریکی سوراخ های کارت‌های مشبك را لمس کرده و معنی و مفهوم آنها را برحسب اینکه درچه‌ردیف و موضعی قرار گرفته‌اند درك می‌کند. بدین ترتیب که سوراخ‌های کارتهای مشبك عبور جریان برق را بین کنتاکت های زیرین آنها و این‌جاروبك‌ها ممکن ساخته و ماشین را بحرکت درمی‌آورند.

در سرشماری بعدی که در سال ۱۸۹۰ صورت گرفت مزایا وفوائد فوق‌العاده ماشین هولریت سرسخت‌ترین و لجوج‌ترین مخالفین او را قانع کردند. کافی است که گفته‌شود، پس از سرشماری مزبور برای رسیدگی و بررسی نتایج حاصله دیگر نیازی به‌هفت‌سال کار مداوم و طاقت‌فرسای



شکل ۱۹ — طرحی از ماشین هولریت که توسط فشار هوا کار کرده و برای سوراخ‌کردن، شمارش ودسته‌بندی‌کارت‌های مشبك بکار می‌رفت.

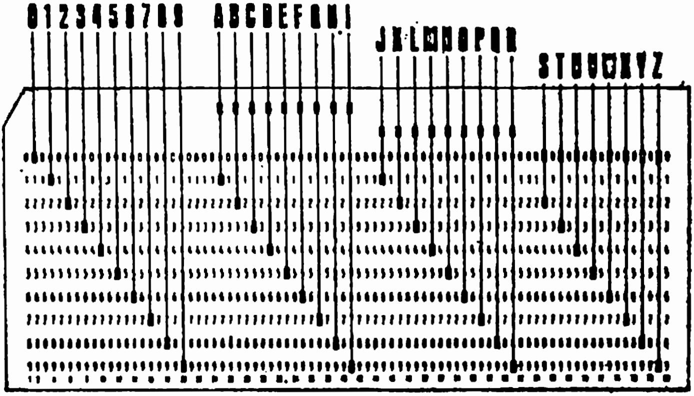
بیش از ۵۰۰ نفر نبود، بلکه تنها در مدت ۴ هفته و با استفاده از ۴۳ماشین هولریت که هر یك وسیله یك‌نفر اداره می‌شد، این کار صورت گرفت.

در سال ۱۸۹۶ هولریت کارخانه‌ای برای ساخت و پخش ماشین‌های مزبور تأسیس کرد.*

اختراع کارت‌های مشبك تحرك و تحول فراوان در زمینه تکمیل ماشین‌های حساب مدرن بوجود آورد. کارتهای مزبور از یك‌نوع کاغذ عایق مخصوص بطول ۱۸٫۸ و عرض ۸٫۴ سانتی متر و ۰٫۱۷ میلی متر تهیه می‌شوند. ارقام دهگانه وحروف‌الفباء به‌ترتیب بکمك یك یادوسوراخ نمایش داده می‌شوند (شکل ۲۰).

---

* کارخانه مزبور از سال ۱۹۲۴ متعلق به‌شرکت عظیم IBM
(International Business Machines Corporation)
می‌باشد. این شرکت در سال ۱۹۶۵ بیش از ۸۵٪ جمیع ماشین‌های مدرن الکترونیکی را در ممالك غربی ببازار آورده است.



شکل ۲۵ ــ ارقام از صفر تا ۹ بوسیله یك‌سوراخ و حروف الفباء به‌صورت دو سوراخ در روی کارت مشبك نمایش داده می‌شوند.

در سال ۱۹۳۶ شرکت آلمانی هولریت Deutsche Hollerith Gesellschaft که در سال ۱۹۱۰ در برلن تأسیس یافته بود Tabelliermaschine D11 خود را ببازار آورد که درنوع خود بی‌نظیر و اولین محاسب الکترونیکی بشمار می‌رفت. ماشین مزبور ترکیبی بود از ارگانیسم‌های الکترومکانیکی و سیستم کارت‌های مشبك و آغازکننده عصر ترقی و تکامل سریع ماشین‌های مدرن حساب بود.

طلیعه عصر جدید

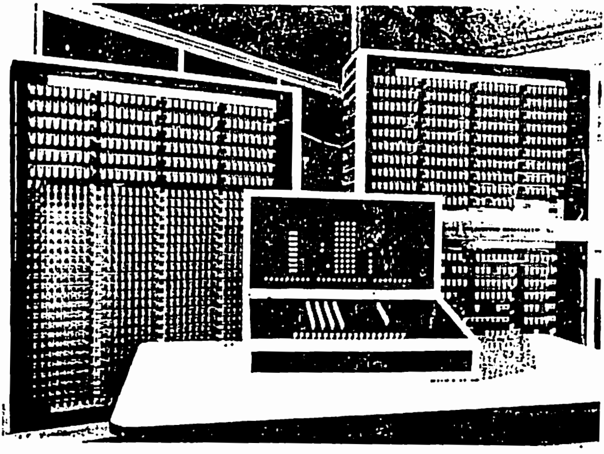
قابل توجه و تحسین فعالیت‌های مهندس آلمانی کنراد سوزه Konrad Zuse (متولد ۱۹۱۰) است که از سال ۱۹۳۴ به‌بعد شروع به‌ساختن و تکمیل ماشین‌های حساب براساس سیستم دوآل نمود که طبق برنامه معینی کارمی‌کردند.

از دستگاه‌های فراوان و متعددی که کنراد سوزه اختراع کرده است می‌توان از Z۳۱ و Z۲۳ و Z۲۲ و Z۳ را نام برد. یکی از جالب‌ترین ماشین‌های نامبرده Z۲۲ می‌باشد که در حال حاضر در انستیتو ریاضیات دانشگاه ساربروکن Saarbruecken آلمان غربی قرار دارد وقادربه‌انجام اعمال شگفت‌انگیزی از قبیل بازی شطرنج، نواختن ارگ و غیره است.

در سال ۱۹۳۹ کنراد سوزه از طرف انستیتو تحقیقات فضائی آلمان

Deutsche Versuchsanstalt fuer Luftfahrt مأموریت یافت تـا برای انجام محاسبات لازم محاسب بزرگ و پرتوانی را طرح ریزد. دو سال بعد یعنی در ۱۹۴۱ وی محاسب خود Z ۳ را براساس سیستم دوآل بپایان رسانید. ماشین حساب مزبور (شکل ۲۱) نه‌تنها از این نظر بلکه از این جهت که در ساختمان آن تنها از دستگاه‌هـای رله *Relais به‌تعداد ۲۶۰۰ استفاده شده بود در نوع خود نظیر نداشت. هزینه‌ای کـه برای ساخت این پروژه در نظر گرفته شده بود بالغ بر ۲۵۰۰۰ مارك گردید** و این مبلغ در مقابل وجوه هنگفتی که در همین زمان در آمریکا برای ساخت محاسب‌های مشابه در نظر گرفته شده بود بسی ناچیز جلوه می‌نماید.

شروع جنگ دوم جهانی نقشه‌های سوزه را غیرعملی و ادامه کار را برای او مدتی غیر مقدور ساخت. پس از پایان جنگ وی فعالیت خود را مجدداً آغاز کرد.



شکل ۲۱ ــ Z۳ اولین ماشین حساب بابرنامه که در سال ۱۹۴۱ بوسیله سوزه اختراع گشت. نمونه اصلی این محاسب پرتوان در حین جنگ از بین رفت.

---

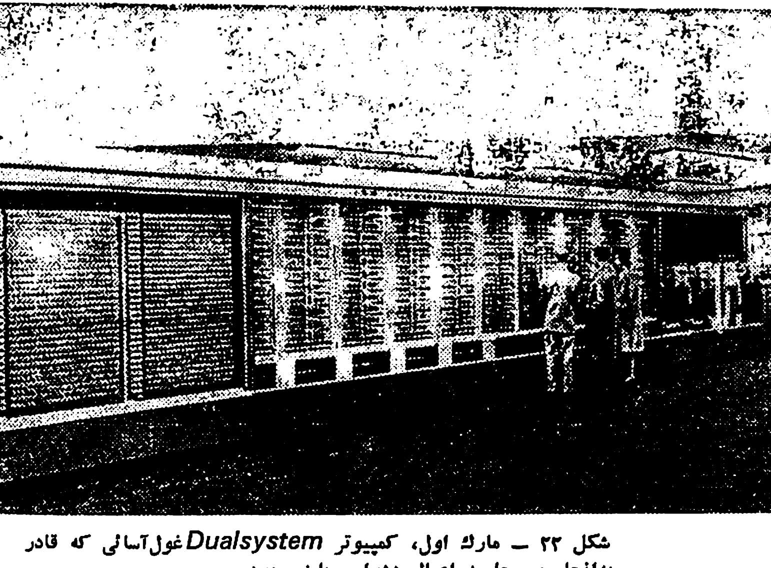
* رله Relais از آلات الکتریکی اسـت و برای تقویت کار مکانیکـی مـورد استفاده قرار می‌گیرد. اساس رله براین استوار است که لنگـری فلزی هنگام عبـور جریان برق از طرف بوبین مغناطیسی جذب شده و کلیدی را به‌حـرکت درمی‌آورد (زنگ‌اخبار). پس از قطع جریان برق بوبین مغناطیسی لنگر مزبور را دفع کرده و اتصال از بین می‌رود.

** Reichsmark علامت اختصار RM واحد پول آلمان تاپایان جنگ دوم جهانی.

همزمان با فعالیت‌های کنراد سوزه در آلمان، استاد ریاضیات دانشگاه هاروارد Harvard هوارد ــ هاثوی آیکن Howard Hathaway Aiken بدون اطلاع از کارهای او با توجه به‌طرح‌های چارلز بابیج در سال ۱۹۳۷ موفق به‌اختراع یك محاسب تمام اتوماتیك و اندکی بعد موفق به‌ساختن محاسب‌الکترونیکی خود به‌نام *ASCC گردید که قریب هفت سال او را بخود مشغول داشت و از ۱۹۴۴ برای نخستین بار آغاز بکار کرد. اختراع ASCC طلیعه نوینی در تاریخ تکنیك‌بشمار می‌رود و سخن‌ازاهمیت‌وفوایدآن‌راندن،خود کتابی قطورراشامل‌خواهدشد، بی‌سبب نیست که اندکی بعد آنرا مارك اول Mark I نام نهادند.

مارك اول (شکل ۲۲) از ۷۶۰۰۰۰ جزء کوچك و بزرگ، ۳۰۰۰ یاتاقان و ۸۰۰ کیلومتر کابل تشکیل شده و دارای انباره ضابطی‌به‌گنجایش ۷۲ عدد ۲۳ رقمی بود.

از اهمیت ASCC یا مارك اول همین‌بس که در طول جنگ دوم



شکل ۲۲ ــ مارك اول، کمپیوتر *Dualsystem* غول‌آسائی که قادر به‌انجام و محاسبه اعمال دشوار ریاضی بود.

---

* Automatic Sequence Controlled Calculator

جهانی و حتی پس از آن تنها معدودی از وجود آن آگاه بودند وپخش کوچکترین اطلاع درباره این سر عظیم top secret خیانت به‌اسرار دولتی محسوب می‌شد.

مخارج تهیه مارك اول بالغ بربیش از ۴۰۰۰۰۰ دلار گردید. این کمپیوتر عظیم عاری از هرگونه آلات و ادوات مکانیکی از قبیل اهرم و چرخ‌دنده بود و مکانیسم داخلی آنرا تنها دستگاه‌های رله ولامپ های الکتریکی تشکیل می‌دادند.

اندکی پس از پایان ساختمان مارك اول، آیکن و همکارانش موفق به‌اتمام مارك دوم Mark II شدند که در آن نیز برای اولین بار از تئوری و خواص سیستم دوآل استفاده شده بود. بیش از ۱۳۰۰ دستگاه رله که در ساختمان آن بکار رفته بودند، زمان لازم برای انجام هرگونه‌عمل ضرب را به ۲۵ر۰ ثانیه تقلیل می‌دادند.

بین سالهای ۱۹۴۴/۴۵ شرکت IBM با استفاده از طرح‌های آیکن و همکارانش محاسب *PSRC را ببازار آورد که ساختمان و طرز کار آن کم و بیش به‌مارك اول و دوم شبیه بود.

۱۹۴۸ آیکن مشغول ساختن محاسب پرتوان‌تری که سرعت عمل‌اش حتی از مارك دوم نیز بیشتر بود شده و این کار را در سال ۱۹۵۰ به‌اتمام رسانید. وجه‌تمایز بین مارك سوم و همنوع دیگرش در وحله اول دروجود غلطك‌های مغناطیسی بود که انباره‌های ضابط این محاسب را تشکیل داده و انباشت اطلاعات بیشتر را ممکن می‌ساختند.

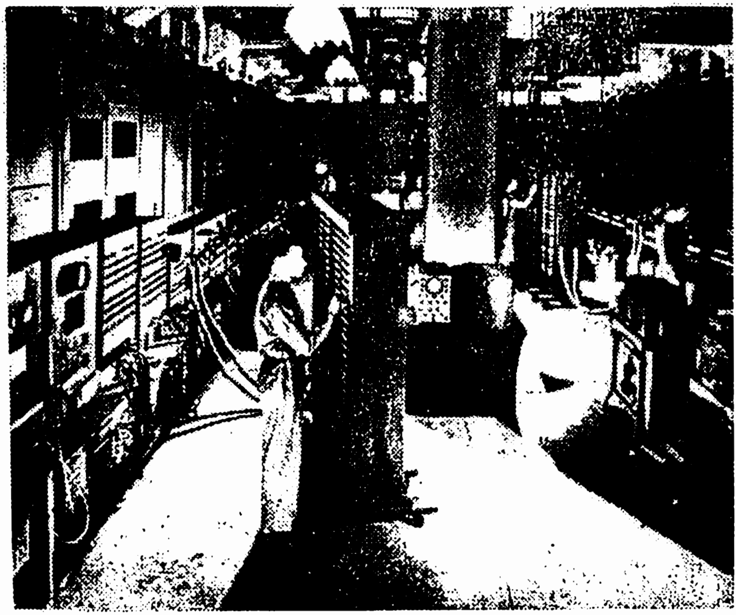
آیکن و همکارانش تنها افرادی نبودند که در آمریکا در این‌زمینه مشغول تحقیق و آزمایش بودند. در دانشگاه پنسیلوانیا Pennsylvania دو دانشمند جوان بنام پراسپراکرت Prosper Eckert و جان ماچلی John Mauchly در سال ۱۹۴۴ موفق به‌اختراع بزرگ‌ترین محاسب آنزمان بنام انیاك **ENIAC شدند. این کمپیوتر در نوع خودبی‌نظیر و در ساختمان آن ۱۸۰۰۰ لامپ الکتریکی، ۵۶۰۰۰۰ جزء کوچك و بزرگ، ۵۰۰۰ کلید قطع و وصل بکار رفته و بیش از ۳۰ تن وزن‌داشت. سرعت عمل آن دوهزار مرتبه بیشتر از مارك اول بود. مثلا مارك اول عمل ضرب دو عدد ده رقمی در یکدیگر را در عرض ۶ ثانیه انجام می‌داد در حالیکه انیاك برای چنین کاری‌نیاز به‌زمانی کمتراز ۰۰۲۸ر۰ ثانیه

* Pluggable Sequence Relay Calculator
** Electronic Numerical Integrator and Computer

داشت.***

متاسفانه این محاسب غول‌آسا که سهمگین‌ترین محاسبات ریاضـی، فیزیکی و نجومی را در عرض چند ثانیه و با وقتی غیرقابل تصور انجام می‌داد عاری از عیب ونقص نبود. مقدار قابـل ملاحظـه‌ای از انـرژی الکتریکی مصرفی تبدیل به‌انرژی گرمائی شده و حرارت حاصله ــ برابر با انرژی حرارتی ۵۰ بخاری الکتریکی ــ نه‌تنها سبب آزار و اذیت دانشمندان ومهندسین می‌شد وکار را برای آنان دشوار می‌ساخت، بلکه سبب ذوب بسیاری از اجزاء داخلی آن که تاب تحمل چنین حرارتی را نداشتند می‌گردید.

انیاک (شکل ۲۳) تا سال ۱۹۵۵ مورد استفاده بود و از آن‌پس جای



شکل ۲۳ ــ انیاک یکی از عظیم‌ترین کمپیوترهای عصر جدید که تنها چند سالی مورد استفاده قرار گرفت و اکنون همچون بسیاری دیگـر از محاسب‌های بزرگ اولیه در موزه جای گرفته است.

*** بدنیست در اینجا تذکر داد که محاسب‌های مدرن امروزی حتی هزاربار تند تر از انیاک کار می‌کنند.

خود را به‌ماشین‌های مدرنتر داد.

جمیع محاسب‌های نام‌برده دارای انباره‌های ضابط خارجی مانند کارت‌ها و نوارهای مشبك بودند. انباره‌های مزبور اطلاعات و نتایج محاسبات را ضبط کرده و در مورد لزوم با آنها محاسبات دیگری راانجام می‌دادند.

در سال ۱۹۴۷ دانشمند آلمانی ـ امریکائی جان‌فون‌نویمان[20] John von Neumann پیش‌نهاد کرد که نه‌تنها کمیات مورد محاسبه بلکه برنامه کار محاسب‌ها نیز در انباره‌های داخلی از قبیل نوارها و غلطك‌های مغناطیسی و یا انباره‌های حلقوی فریت Ferrit ضبط وبایگانی شوند. با عملی شدن این پیش‌نهاد نه‌تنها برسرعت عمل محاسب‌ها صدها برابر افزوده شد، بلکه تغییرات لازم در برنامه حین عمل نیز مقدور گردید. در سالهای ۱۹۵۲/۵۳ دومحاسب *EDVAC و **EDSAC که براساس نظریه نویمان ساخته شدند، پیشرفت‌های بزرگی به‌ارمغان آوردند.

اختراع ترانزیستورها Transistor که دارای مزایای بسیاری برلامپ‌های الکتریکی متداول هستند سبب پیشرفت بزرگی در تکنیك محاسب‌های الکترونیك مدرن گردید. بدانسان که امروزه در ساختمان تمام محاسب‌های مدرن تنها از ترانزیستور استفاده می‌شود. مصرف کم انرژی الکتریکی و در نتیجه ایجاد گرما و حرارت ناچیز، حجم بسیار کوچك، مقاومت و استحکام و طول عمر زیاد و ده‌ها حسن دیگر ترانزیستورها تسهیل فراوان در کار اختراع و تکامل ماشین‌های حساب فراهم آورده است.

سخنی چند درباره اهمیت ماشین‌های مدرن حساب

در سال ۱۹۴۶ هنگامی که اولین گام‌ها در جهت اختراع و تکمیل محاسب‌های بزرگ ومدرن برداشته می‌شدند. لردمون باتن Lord Mounbatten مدیر انستیتو رادیو لندن طی نطقی اظهار داشت: محاسب‌های بزرگ ومدرن برداشته می‌شدند لردمون باتن حساب که هم اکنون در مؤسسات علمی و اداری بکار می‌روند دارند.

---

* Electronic Discrete Variable Computer

**Electronic Delay Store Computer

ماشین‌های مزبور در مقابل این محاسب‌ها خط‌کش‌های کوچك محاسباتی بیش نیستند. این محاسب‌ها امروزه اطلاعاتی در اختیار ما می‌گذارند که در گذشته برای دست‌یابی به‌آنها به‌بیش از صدها هزار جلد کتاب‌نیازمند بودیم. مشکل‌ترین و پیچیده‌ترین مسائل فکری را در ظرف چندثانیه‌انجام داده و در زمینه‌های گوناگون یار و یاور ماهستند. در جائیکه قابل‌ترین فضلا ودانشمندان خسته شده و دچار اشتباه می‌شوند. اینها روز و شب مشغول به‌کار بوده وهرگز دچار اشتباه نمی‌شوند. تردید نکنیم و به‌آنها اطمینان داشته باشیم. اینها کودکان نابغه عصر نوین و کودکان ما هستند.»

براستی شرح و توصیف خدمات و کمك‌های دستگاه‌های محاسبه مزبور که خود مخلوق فکر و نبوغ انسانی هستند به‌پیشرفت صنایع وعلوم نامقدور است. به‌گفته یکی از دانشمندان در آتیه نزدیکی برای تاریخ‌علوم و نیز تاریخ بشر این سؤال پیش خواهد آمد که آیا اکتشاف اسرار اتم و یا اختراع این‌گونه محاسب‌ها تأثیر بیشتری در زندگانی انسانی نهاده و مسیر تمدن را تغییر داده‌اند؟

شاید آمار زیر قادر باشند ذره‌ای از اهمیت وجود این محاسب‌ها را بیان کنند:

درسال ۱۹۵۴ تنها ۳ کمپیوتر در آلمان غربی مشغول بکار بودند. پنج سال بعد یعنی در ۱۹۵۹ تعداد آن بالغ بر ۲۸۷ و در ژوئن ۱۹۶۴ بالغ‌بر ۱۲۷۴ عدد می‌شد ومؤسسات علمی این کشور سفارش ساخت ۸۵۸ محاسب دیگر را به‌سازندگان آنها داده بودند.

طبق گزارش مجمع دیبولد* در سال ۱۹۵۴ در ایالات متحده آمریکای شمالی تعداد ۲۵، در شوروی ۵ و در اروپای غربی ۱۰ محاسب مدرن مشغول کاربودند. ده سال بعد یعنی در سال ۱۹۶۴ تعداد محاسب‌ها در سراسر جهان بالغ بر ۲۹۰۰۰ می‌شد که بیش از دوسوم آنها یعنی ۱۶۰۰۰ در آمریکا و در اروپای غربی، ۱۶۰۰ در شوروی، ۸۰۰ عدد در ژاپن، ۴۷۰ در کانادا و ۵۰۰ عدد در سایر کشورها مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

درحال حاضر حدس زده می‌شود که تعداد محاسب‌ها در آمریکا بالغ‌بر ۳۰۰۰۰ و در اروپا بالغ‌بر ۱۶۰۰۰ می‌باشد. فواید استفاده ازچنین

---

* جان دیبولد John Diebold مؤسس Diebold group و مشاور شرکت‌ها و مؤسسات صنعتی، دارای نمایندگی‌های بزرگ در بروکسل، پاریس و فرانکفورت.

محاسب‌هائی تنها نصیب دانشمندان نمی‌شود. بلکه در زندگانی روزانه ما نیز آنها رل بزرگی را بازی می‌کنند.

کنترل و هدایت عبور و مرور و ترافیك، تنظیم حرکت قطارها و پرواز هواپیماها در شهرهای بزرگ، محاسبه حقوق و مالیات و سایر امور اداری و حسابداری، بررسی و کنترل تولید و توزیع مواد و محصولات غذائی وپوشاکی، تنظیم وهمگون ساختن کار دستگاه‌های مختلف در کارخانه‌های بزرگ و بویژه در کارخانه‌های ذوب فلز و ده‌ها کار دیگر نمونه‌هائی هستند حاکی از چگونگی و فواید استفاده از این محاسب‌ها.

درسالهای اخیردرکشورهای‌آمریکای‌شمالی، روسیه شوروی وآلمان غربی حتی در امر تدریس بدون معلم نیز از چنین محاسب‌هائی استفاده می‌شود و نتایج حاصله آنچنان مفید و ارزنده بوده و نوآموزان و دانشجویان طوری از این سیستم تعلیم و تربیت اظهار رضایت کرده‌اند که مرتب وسعت و دامنه تحقیق در این زمینه افزایش می‌یابد. فوائد استفاده از اینگونه محاسب‌ها از قبیل صرفه‌جوئی در وقت و سرمایه در رشته‌های تولیدی و توزیعی آنقدر زیاد است که امروزه بزحمت می‌توان عدم وجود آنها را متصور شد.

حواشی و توضیحات

۱ ــ سومر Sumer سرزمینی است که تا حدود ۴۰۰۰ سال قبل از میلاد شامل قسمت جنوبی بابل Babylonien می‌شد. سومریها از باستانی‌ترین اقوام غیر سامی هستند که ساکن بین‌النهرین Mesopotamien سفلی و دارای تمدنی عظیم بودند. اختراع خط میخی، نقاشی پلاستیك، کنده‌کاری احجار، معابد مکعبی، بروج و محاسبات نجومی از ابداعات این قوم است. سومریها در اواخر هزارهٔ سوم قبل از میلاد مغلوب اقوام سامی‌نژاد ساکن ارخ Erech و عور *Ur* شدند. ارخ که از بزرگترین شهرهای جهان باستان بشمار می‌رفت در کنار شط فرات قرار داشت و در سنگ‌نبشته‌های خط میخی به‌عوروك Uruk موسوم است. امروزه از این شهر باستانی‌بنام واراك Varak یاد می‌شود. عور زادگاه ابراهیم نبی و شهری بود در ناحیه فرات سفلی که خرابه‌های آن امروز در اطراف طل مخیر Mukajjar دیده می‌شود. زبان وادبیات سومری تا هزاره دوم قبل از میلاد زنده و متداول بود.

۲ ــ غزه Gizeh یا Gise پایتخت و مرکز ایالت غزه در مصر باستان‌که در کنار همفیس Hemphis واقع بود. اهرام ثلاثه خوفو Chufu به‌ارتفاع ۱۳۷ متر، خفرن Chefrên بارتفاع ۱۳۶ متر و میکرینوس Mykerinos به‌بلندی ۶۲ متر در همین شهر قرار دارند.

۳ ــ دانیل‌دفو Daniel Defoe (۱۷۳۱ ــ ۱۶۶۰) نویسنده شهیر انگلیسی که در آثار خود اخلاق و ارزش‌های انسانی را مورد بحث قرار داده و به‌تمجید از صفات عالیه‌ی او می‌پردازد.

۴ ــ به‌انگلیسی tally و به‌آلمانی das Kerbholz

۵ ــ Er hat noch etwas auf dem Kerbholz یعنی او باید هنوز مبلغی بپردازد.

۶ ــ به‌انگلیسی arabian numbers و به‌آلمانی die arabischen Zahlen

۷ ــ فیثاغورث ساموسی Pythagoras von Samos (۴۶۴ ــ ۵۷۵ ق.م.) ریاضی‌دان و حکیم بزرگ یونانی که صاحب تحقیقات و آثاری بسیار در علوم ریاضی و درباب قوانین نوسانات هارمونیك می‌باشد. وی از طرفداران مکتب خلود ارواح و مؤسس انجمنی مخفی بود. فیثاغورث علوم ریاضی و اعداد راحاوی و دربرگیرنده جمیع اسرار طبیعت می‌دانست. باحتمال قوی اقوام سومری، بابلی و مصری قبل از او به‌قضیه ریاضی مربع وتر در یك مثلث‌قائم‌الزاویه برابر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر است که بنام قضیه فیثاغورث مشهور است آشنائی داشته‌اند. از جمله ابداعاتی که باو نسبت داده شده اختراع آباکوس است که هیچ‌گونه پایه و اساسی ندارد.

۸ ــ بوتیوس Anicius Manlius Torquatus Serverinus Boetius (۵۲۴ــ۴۸۰) فیلسوف و سیاس رومی که در سال ۵۲۴ بنابراتهامات بی‌اساسی بفرمان تئودریش کبیر Theoderich der Grosse فرمانفرما و حاکم مطلق ایتالیا (از خاندان ژرمنی Ostgoten) در شهر پاویا Pavia بدار آویخته شد. از آثار مشهور او De consolatione philosophiae است که در زندان تحریر شده.

۹ ــ آدام ریس Adam Ries یا Riese ریاضی دان مشهور آلمانی (۱۵۵۹ ــ ۱۴۹۲). تالیفات او درباره علم حساب کمك فراوانی به‌ترویج ریاضیات و دستگاه اعشاری در بین عوام نمود. اصطلاح nach Adam Riese در زبان آلمانی هنوز متداول و مراد از آن بیان مسائل ریاضی به‌زبان بسیار ساده می‌باشد.

۱۰ ــ نوالیس Novalis که نام حقیقی او بارون فریدریش فون هاردنبرگ Freiherr Friedrich von Hardenberg می‌باشد بزرگترین شاعر دوره رومانتیك آلمان بشمار می‌رود (۱۸۵۱ ــ ۱۷۷۲). نوالیس در فلسفه و ریاضیات دست داشت و دو اثر معروف او بنام Frgmente و Lehrlinge Zu Sais شاهد و گواه این مدعا هستند.

۱۱ ــ یوست بورگی Jost Buergi (۱۶۳۲ ــ ۱۵۵۲) ریاضی‌دان آلمانی اولین جدول را برای محاسبه مربع اعداد طرح کرد.

۱۲ ــ جان‌ناپیر لردآومرکیستون John Napier Lord of Merchiston (۱۶۱۷ ــ ۱۵۵۰) ریاضی‌دان انگلیسی که در سال ۱۶۱۴ اولین جدول لگاریتم را تنظیم و تدوین کرده و در اثر خود بنام Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio منتشر نمود.

۱۳ ــ هنری بریگز Henry Briggs (۱۶۳۱ ــ ۱۵۶۱) ریاضی‌دان انگلیسی که پس از مرگ دوستش ناپیر باکمك فرزند او و هفت نفر محاسب دیگر مدت دوازده سال به‌تهیه و تکمیل جداول لگاریتم پرداخت.

۱۴ ــ هوراسیونلسون Horatio Nelson (۱۸۰۵ ــ ۱۷۵۸) آدمیرال نیروی دریائی انگلستان که در سال ۱۷۹۸ نیروی دریائی فرانسه را ابتداء در ابوکیر Abukir و پس از آن در سال ۱۸۰۵ در ترافالگار Trafalgar درهم شکست و خود نیز در همین سال طی نبردی وفات یافت. وی در سال ۱۸۵۱ مفتخر به‌دریافت لقب ویسکونت Viscount گردید. مجسمه‌ای از او نیز اینك در میدان ترافالگار لندن قرار دارد.

۱۵ ــ جیمزوات James Watt (۱۸۱۹ ــ ۱۷۳۶) مهندس انگلیسی و مخترع

ماشین بخار دستگاه تقطیر و دستگاهی برای میزان کردن دور اجسام در حال دوران.

۱۶ – یوهانس کپلر Johannes Kepler (۱۶۳۰ – ۱۵۷۱) منجم آلمانی که در سال ۱۶۰۰ عازم پراك شده و در ۱۶۰۹ هنگامیکه به‌عنوان ریاضی‌دان و منجم دربار مشغول تدریس و تفحص بود قوانین حرکات اجرام و کرات آسمانی را که به‌قوانین کپلر معروفند کشف کرد و در کتاب خود بنام Astronomia nova به‌تشریح آنها پرداخت. وی بین سالهای ۱۶۱۲/۲۶ در دانشگاه شهر لینتز Linz در اتریش بتدریس اشتغال داشت.

۱۷ – بلز پاسکال Blaise Pascal (۱۶۶۲ – ۱۶۲۳) ریاضی‌دان و فیزیکدان مشهور فرانسوی و صاحب تحقیقات و کشفیات فراوان در علوم هندسه و ریاضیات. پاسکال در سال ۱۶۵۴ برای همیشه دنیای مادی را وداع گفته و در پورت رویال Port-Royal گوشه عزلت برگزید. وی از پیروان مکتب یانزنیسم Jansenism و پایگذار آن اسقف کورنلیوس یانزن Cornelius Jansen (۱۸۳۸ – ۱۵۸۵) هلندی بود که در سال ۱۷۱۸ از طرف کلیسا طرد شده و مورد تعقیب قرار گرفت.

۱۸ – لایب نیتز Gottfried Wilhelm Leibniz (۱۷۱۶ – ۱۶۴۶) فیلسوف، حکیم و سیاس آلمانی ویکی از بزرگترین متفکرین تمدن غرب. او در راه تلفیق علوم طبیعی و فلسفه و الهیات کوشش فراوان مبذول داشته و در اثر مشهور خود بنام Theodizee (۱۷۱۵) اعلام داشت که جهان ما بهترین جهان ممکن می‌باشد. مکتب مونادولوژی Monadologie او (۱۷۱۴) که بر طبق آن جهان از مونادها که دارای روح و روان هستند درست شده مقابل فرضیه وحدت الهی اسپینوزا Baruch de Spinoza (۱۶۷۷ – ۱۶۳۲) و پیروانش قرار گرفت. لایب‌نیتز در اثر معروف خود بنام Die Lehre von der Praestabilierten Harmonie براین عقیده بود که خداوند، ذات هستی، جهان را آنچنان آفریده است که تمام اجزاء آن هارمونی ومطابقت تام با یکدیگر دارند.

۱۹ – لوئی‌برای Louis Braille (۱۸۵۲ – ۱۸۰۹) مخترع الفباء و خط نت برای نابینایان که امروزه در سراسر جهان برای تدریس و تعلیم افرادی که از نعمت حس باصره محرومند متداول است. برای، خود نیز کور و نابینا بود.

۲۰ – یوهان‌فون نویمان Johann von Neumann (۱۹۵۷ – ۱۹۰۳) یکی از بزرگترین ریاضیدانان عصر حاضر. وی پس از اتمام تحصیلات خود در آلمان ساکن آمریکا شده و در کنار آلبرت انیشتن در دانشگاه پرینستون Princeton بتدریس‌مشغول شد. معمولا عظمت و تاثیر شدید کارهای او را با تحقیقات و اختراعات ارشمیدس مقایسه کرده و لقب پدیده ثانی را بدو می‌دهند. نویمان بیشتر خود را با تئوری اعداد مشغول می‌داشت.

باید مردمان بسیاری از بین بروند تادانش به‌پیش برود

فردینان هوفر

تنها داشتن فکرخوب‌کافی نیست، مهم این است که آنرا خوب به‌کار ببریم.

دکارت

شگفتیهای عدد

سال ۱۹۷۷ به‌پایان رسید. زمانی، درگذشته‌های دور، کسانی بودند که به عدد، به‌عنوان «وجودی» اسرارآمیز می‌نگریستند و ضمن بازی با رقمها و عددها «پیشگوئی» می‌کردند و «راز» هستی را می‌گشودند. ولی، واقع اینست که با هرعددی، می‌توان «بازی» کرد و ازآن، عددی اسرارآمیزساخت. و ما در اینجا، به‌مناسبت پایان سال ۱۹۷۷ میلادی، این عدد را به «بازی» گرفته‌ایم.

الف) نشان دادن عدد به‌کمك رقمهای مساوی:

$$(۳۳۳-۳)\times ۳!-۳=۱۹۷۷ \qquad (\text{۶ رقم})$$

$$\left[\sqrt{\sqrt{\sqrt{(۴!-۴)^{۴!}}-۴}}\right]:۴+\sqrt{۴}-۴!=۱۹۷۷ \qquad (\text{۷ رقم})$$

$$(۵۵\times۵+۵!)\times۵+(۵+۵):۵=۱۹۷۷ \qquad (\text{۸ رقم})$$

$$۶۶\times(۶\times۶-۶)-[(۶\times۶):(۶+۶)]=۱۹۷۷ \qquad (\text{۹ رقم})$$

به‌داخل پرانتزهای سمت راست هم توجه‌کنید، آنها هم عددهای پشت سرهم هستند (به‌ترتیب: ۶، ۷، ۸ و ۹ رقم).

ب) نشان دادن عدد ۱۹۷۷؛ به‌کمك عددهای طبیعی متوالی از ۱ تا ۹:

$$۱۲^{۳}+(۴۵\times۶)-۷-۸-(\sqrt{۹})!=۱۹۷۷$$

$$-۱\times۲+(۳۴\times۵۶)+۷۸-\sqrt{۹}=۱۹۷۷$$

$$۱۲^{۳}-۴(۵-۶۷)-۸+۹=۱۹۷۷$$

ج) می‌توان همین ردیف عددهای طبیعی را، از جهت عکس (از ۹ تا ۱) برای ساختن ۱۹۷۷ به‌کاربرد:

$$(۹۸:۷)+(۶۵۴\times۳)+۲-۱=۱۹۷۷$$

$$\sqrt{۹}+۸+۷+(۶۵۴\times۳)-۲\times۱=۱۹۷۷$$

د) و یا از دوطرف (هم از ۱ تا ۹ و هم از ۹ تا ۱):

$$(-۱+۲)\times۳-۴۵۶+۷+۸۹۸۷-۶۵۴۳-۲۱=۱۹۷۷$$

ه) و اینهم یك رابطهٔ کلی:

$$۱۹۷۷=\frac{\overline{AAAA}-\overline{AAA}-\overline{AA}-A}{A}\cdot\frac{A+A}{A}+\frac{A}{A}$$

که به‌جای A می‌توانید هر رقم دلخواه (به‌جز صفر) قرار دهید.

و) و بالاخره یك تابع با ضابطهٔ

$$f(x)=۲x-۱۹۷۷$$

که درآن خواهیم داشت.

$$f(۱)+f(۲)+f(۳)+\dots+f(۱۹۷۷)=۱۹۷۷$$

فهرست موضوعی مقالات سال اول
آشتی با ریاضیات

۱. ریاضیات ناب

آشنایی با دانش

آشنائی با دانش

دریچه‌ای به‌روی آگاهیها
و کوششی برای همگانی
کردن دانش

۱
آذر ۲۵۳۶

مرکز انتشارات جانبی دانشگاه آزاد ایران در آذرماه امسال نشریه‌ای بانام آشنایی‌بادانش‌منتشر کرد. هدف آن «ترویج خواندنی‌های علمی در زبان‌فارسی»توصیف شده است. «هدف این کوشش آموختن دانش و فن نیست، بلکه کمك کردن به‌خواننده است تا با زبان دانش و فن خوگیرد، به‌دانش و فن بیندیشد، و اندیشه و بینش علمی را در خود بارور سازد.»

عنوان برخی‌مقاله‌های‌آن‌اینهاست:
در پیرامون اخلاق علمی
معرفت شهودی
آموزش آزاد در ژاپن
اگر دستها شش انگشت داشت
تاریخ علم چیست
فیزیك و فلسفه
ایوان پاولوف و برناردشاو
کلام تصویری
افسانهٔ دریاچهٔ پریشان
بزرگان دانش
آشنایی با کتابهای علمی
تازه‌های دانش و فن

این نشریه را می‌توان از کتابفروشیها یا از دفتر دانشگاه آزاد به‌دست آورد.

Reconciliation with Mathematics

Editor : Parviz Shahryari
Under the supervision of the editorial board
A supplementary publication of The Free University of Iran
Address : The Free Uuiversity of Iran
P. O. Box 11-1962
Aban Shomali St. / Karim-Khan Zand Boulevard
Tehran 15' Iran

Contents