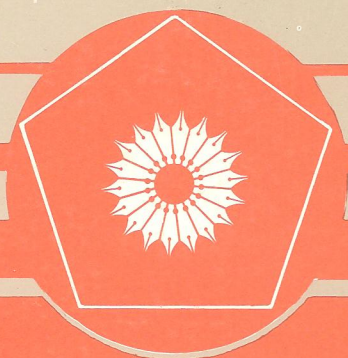


هاورد و. ایوز



آشنایی با
تاریخ ریاضیات

جلد اول

(ویرایش دوم)

ترجمه دکتر محمد قاسم وحیدی اصل



آشنایی با
تاریخ ریاضیات

جلد اول
(ویرایش دوم)

هاورد و. ایوز

ترجمه محمدقاسم وحیدی اصل



An Introduction to the History of Mathematics

Howard W. Eves

Fifth Edition

Saunders College Publishing, 1983

آشنایی با تاریخ ریاضیات

جلد اول

تألیف هاورد و. ایوز

ترجمه دکتر محمدقاسم وحیدی اصل

ویراسته دکتر محمدهادی شفیعها

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

چاپ دوم ۱۳۶۹ (با تجدید نظر کلی)

چاپ چهارم ۱۳۷۹

تعداد ۳۰۰۰

حروفچینی: مهدی

لیتوگرافی: رحیمی

چاپ: مروی

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرستتویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

Eves, Howard Whitley

ایوز، هوارد ویتلی، ۱۹۱۱ -

آشنایی با تاریخ ریاضیات / تألیف هاورد و. ایوز؛ ترجمه محمدقاسم وحیدی اصل. -

[ویرایش ۲]. - تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۹ -

۲ ج. : مصور، نقشه، جدول، عکس، نمودار. - (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۵۵۲، ریاضی،

آمار، و کامپیوتر ۷۱)

فهرستتویسی بر اساس اطلاعات فیبا.

An introduction to the history of mathematics.

عنوان اصلی:

واژه نامه.

کتابنامه.

چاپ چهارم: ۱۳۷۹

ISBN 964-01-8043-2

۱. ریاضیات - تاریخ. ۲. ریاضیات - مسائل، تمرینها و غیره. الف. وحیدی اصل،

محمدقاسم، ۱۳۲۶ - ، مترجم، ب. مرکز نشر دانشگاهی. ج. عنوان.

۵۱۰/۹

QA۲۱/الف

۱۳۶۹

م۷۰ - ۴۷۹/۷۴

کتابخانه ملی ایران

فهرست

صفحه	دوازده	عنوان
۱		پیشگفتار مترجم
۳		پیشگفتار مؤلف
		مقدمه
۷		فصل ۱ دستگاههای عددنویسی
۷		۱-۱ شمارشهای ابتدایی
۸		۲-۱ پایه اعداد
۱۰		۳-۱ دستگاه عددی نوشتاری
۱۱		۴-۱ دستگاههای گروه بندی ساده
۱۵		۵-۱ دستگاههای گروه بندی ضربی
۱۶		۶-۱ دستگاههای شمار رمزی
۱۷		۷-۱ دستگاههای شمار موضعی
۱۸		۸-۱ محاسبات نخستین
۲۱		۹-۱ دستگاه شمار هندی-عربی
۲۳		۱۰-۱ پایدهای دلخواه
۲۵		مطالعه مسئله‌های
۲۵		۱۰.۱ نامهای عددی
۲۶		۲۰.۱ اعداد نوشتاری
۲۶		۳۰.۱ دستگاه شمار یونانی الفبایی
۲۶		۴۰.۱ دستگاههای شمار قدیمی و فرضی
۲۷		۵۰.۱ اعداد انگشتی
۲۸		۶۰.۱ کسرهای مبنایی

۷۰.۱	عملیات حساب در سایر پایه‌ها	۲۸
۸۰.۱	مسائلی درباره پایه‌های نمایش اعداد	۲۹
۹۰.۱	چندجنبه تفریحی پایه دودویی	۲۹
۱۰۰.۱	چندحیله با اعداد	۳۰
	عنوان مقاله	۳۰
	کتابنامه	۳۱

فصل ۲ ریاضیات بابلی و مصری

۱-۲	شرق باستان	۳۳
۲-۲	منابع	۳۳
۳-۲	ریاضیات بازرگانی و ارضی	۳۵
۴-۲	هندسه	۳۵
۵-۲	جبر	۳۶
۶-۲	پلیمپتن ۳۲۲	۳۷
	مصر	۳۸
۷-۲	منابع و تاریخها	۴۰
۸-۲	حساب و جبر	۴۴
۹-۲	هندسه	۴۴
۱۰-۲	یک مسئله عجیب در پاپيروس ریند	۴۵
	مطالعه مسئله‌ای	۴۹
۱.۲	اعداد منظم	۵۱
۲.۲	ربح مرکب	۵۱
۳.۲	معادلات درجه دوم	۵۲
۴.۲	هندسه جبری	۵۳
۵.۲	لوحهای شوش	۵۴
۶.۲	معادلات درجه سوم	۵۴
۷.۲	تقریبات جذر	۵۵
۸.۲	تضعیف و تنصیف	۵۶
۹.۲	کسرهای واحد	۵۶
۱۰.۲	فرایند سیلوستر	۵۷
۱۱.۲	سکت هرم	۵۸
۱۲.۲	جبر مصری	۵۸
۱۳.۲	هندسه مصری	۵۹

۵۹	۱۴۰۲ عظیمترین هرم مصری
۶۱	۱۵۰۲ چندمسئله از پاپيروس مسکو
۶۱	۱۶۰۲ مثلث ۳، ۴، ۵
۶۲	عنوان مقاله
۶۳	کتابنامه
۶۴	فصل ۳ ریاضیات فیثاغورسی
۶۴	۱-۳ پیدایش ریاضیات برهانی
۶۷	۲-۳ فیثاغورس و فیثاغورسیان
۶۹	۳-۳ حساب فیثاغورسی
۷۵	۴-۳ قضیه فیثاغورس و سه تاییهای فیثاغورسی
۷۶	۵-۳ کشف کمیتهای گنگگ
۷۹	۶-۳ اتحادهای جبری
۸۲	۷-۳ حل هندسی معادلات درجه دوم
۸۶	۸-۳ تبدیل مساحتها
۸۷	۹-۳ اجسام منتظم
۸۸	۱۰-۳ تفکر اصل موضوعی
۸۹	مطالعه مسئله ای
۸۹	۱۰۳ مسائل عملی تالس
۸۹	۲۰۳ اعداد تام و متحابه
۹۰	۳۰۳ اعداد مصور
۹۱	۴۰۳ میانگینها
۹۲	۵۰۳ اثباتهای تقطیعی قضیه فیثاغورس
۹۳	۶۰۳ سه تاییهای فیثاغورسی
۹۴	۷۰۳ اعداد گنگگ
۹۵	۸۰۳ اتحادهای جبری
۹۵	۹۰۳ جبر هندسی
۹۶	۱۰۰۳ راهحلهای هندسی معادلات درجه دوم
۹۷	۱۱۰۳ تبدیل مساحت
۹۸	۱۲۰۳ اجسام منتظم
۹۸	۱۳۰۳ چندمسئله درباب اجسام منتظم
۹۹	۱۴۰۳ بخش طلایی
۹۹	۱۵۰۳ يك رابطه جالب
۱۰۰	عنوان مقاله

۱۰۰	کتابنامه
۱۰۲	فصل ۴ تضعیف، تثلیث و تربیع
۱۰۲	۱-۴ دوره از نالس تا اقلیدس
۱۰۵	۲-۴ مسیرهای تکامل ریاضیات
۱۰۶	۳-۴ سه مسئله مشهور
۱۰۷	۴-۴ ابزارهای اقلیدسی
۱۰۸	۵-۴ تضعیف مکعب
۱۱۰	۶-۴ تثلیث زاویه
۱۱۴	۷-۴ تربیع دایره
۱۱۵	۸-۴ گاهشمار π
۱۲۴	مطالعه مسئله‌ای
۱۲۴	۱۰۴ پرگارهای اقلیدسی و پرگارهای امروزی
۱۲۵	۲۰۴ تضعیف توسط آرخوتاس و منایخموس
۱۲۶	۳۰۴ تضعیف مکعب به وسیله آپولونیوس و اراتستن
۱۲۶	۴۰۴ سیسوئید دیوکلس
۱۲۷	۵۰۴ چندتضعیف مربوط به قرن هفدهم
۱۲۸	۶۰۴ کاربردهای اصل درج
۱۲۸	۷۰۴ کونکوئید نیکومدس
۱۲۹	۸۰۴ تثلیث به وسیله مقاطع مخروطی
۱۳۰	۹۰۴ ساختمانهای اقلیدسی مجانبی
۱۳۰	۱۰۰۴ مربع‌ساز
۱۳۱	۱۱۰۴ راستش تقریبی
۱۳۱	۱۲۰۴ هلالهای بقراط
۱۳۲	۱۳۰۴ محاسبه π
۱۳۳	۱۴۰۴ تقریب اسنل
۱۳۴	۱۵۰۴ یادآورهایی برای π
۱۳۴	عنوان مقاله
۱۳۵	کتابنامه
۱۳۶	فصل ۵ اقلیدس و اصول وی
۱۳۶	۱-۵ اسکندریه
۱۳۷	۲-۵ اقلیدس

۱۳۹	۳-۵ «اصول» اقلیدس
۱۴۰	۴-۵ مندرجات «اصول»
۱۴۶	۵-۵ نظریه تناسب
۱۴۸	۶-۵ چندضلعیهای منتظم
۱۴۹	۷-۵ جنبه صوری «اصول»
۱۵۱	۸-۵ سایر آثار اقلیدس
۱۵۲	مطالعه مسئله‌ای
۱۵۲	۱۰۵ الگوریتم اقلیدسی
۱۵۳	۲۰۵ کاربردهای الگوریتمی اقلیدسی
۱۵۳	۳۰۵ قضیه فیثاغورس
۱۵۵	۴۰۵ مقاله دوم اقلیدس
۱۵۵	۵۰۵ کاربردهای قضیه اصلی علم حساب
۱۵۶	۶۰۵ نظریه ائودوکسوسی تناسب
۱۵۶	۷۰۵ چندضلعیهای منتظم
۱۵۷	۸۰۵ مجموع زوایای یک مثلث
۱۵۷	۹۰۵ چند قیاس راجع به مساحتها
۱۵۷	۱۰۰۵ چند قیاس راجع بدزوا یا
۱۵۸	۱۱۰۵ اصول
۱۵۸	۱۲۰۵ داده‌ها
۱۵۹	۱۳۰۵ رسم شکلها با استفاده از داده‌ها
۱۵۹	۱۴۰۵ تقسیمات
۱۶۰	عنوان مقاله
۱۶۰	کتابنامه
۱۶۲	فصل ۶ ریاضیات یونان پس از اقلیدس
۱۶۲	۱-۶ وضع تاریخی
۱۶۳	۲-۶ ارشمیدس
۱۶۹	۳-۶ اراتستن
۱۷۰	۴-۶ آپولونیوس
۱۷۴	۵-۶ هیپارخوس، منلائوس، بطلمیوس، ومثلثات یونانی
۱۷۸	۶-۶ هرون
۱۷۹	۷-۶ جبر یونان باستان
۱۸۰	۸-۶ دیوفانتوس

۱۸۳	۹-۶ پاپوس
۱۸۶	۱۰-۶ شارحین
۱۸۷	مطالعه مسئله‌ای
۱۸۷	۱۰۶ اندازه گیریهای آریستارخوس و اراتستن
۱۸۸	۲۰۶ در باب کره و استوانه
۱۸۹	۳۰۶ مسئله تاج
۱۹۰	۴۰۶ گزن و سالینون
۱۹۱	۵۰۶ قضیه وترشکسته
۱۹۲	۶۰۶ خاصیت کانون-هادی
۱۹۳	۷۰۶ تماسها
۱۹۴	۸۰۶ مسائلی از آپولونیوس
۱۹۴	۹۰۶ جدول اوتار بطلمیوس
۱۹۵	۱۰۰۶ تصویر گنجنگاشتی
۱۹۶	۱۱۰۶ مسائلی از هرون
۱۹۸	۱۲۰۶ دستگاه معادلات همزمان
۱۹۹	۱۳۰۶ مسائلی از «آنتولوژی یونانی»
۲۰۰	۱۴۰۶ مسئله گونه‌ها از «آنتولوژی یونانی»
۲۰۰	۱۵۰۶ دیوفانتوس
۲۰۱	۱۶۰۶ مطالبی از نظریه اعداد «آریشمتیکا»
۲۰۲	۱۷۰۶ مسائلی از پاپوس
۲۰۳	۱۸۰۶ قضایای مربوط به مرکز ثقل
۲۰۴	۱۹۰۶ رسم بیضی با پرگار بازودار
۲۰۴	۲۰۰۶ قضیه منلائوس
۲۰۵	۲۱۰۶ مطالب دیگری درباره میانگینها
۲۰۷	عنوان مقاله
۲۰۷	کتابنامه

فصل ۷ ریاضیات چینی، هندی، و عربی

۲۰۹	چین
۲۰۹	۱-۷ منابع و ادوار
۲۱۰	۲-۷ از چو تا تانگ
۲۱۲	۳-۷ از تانگ تا مینگ
۲۱۶	هند

۲۱۶	۴-۷ بررسی کلی
۲۱۹	۵-۷ محاسبات عددی
۲۲۲	۶-۷ حساب وجبر
۲۲۴	۷-۷ هندسه و مثلثات
۲۲۷	۸-۷ مقایسه ریاضیات یونانی و هندی
۲۲۷	اعراب
۲۲۷	۹-۷ ظهور فرهنگ اسلامی
۲۳۰	۱۰-۷ حساب وجبر
۲۳۲	۱۱-۷ هندسه و مثلثات
۲۳۳	۱۲-۷ کمی در علم اشتقاق
۲۳۵	۱۳-۷ سهم اعراب
۲۳۵	مطالعه مسئله‌ای
۲۳۵	۱۰۷ مسائلی از «حساب در نه بخش»
۲۳۶	۲۰۷ قضیه فیثاغورس
۲۳۷	۳۰۷ مربعهای جادویی
۲۳۹	۴۰۷ چندمسئله قدیمی هندی
۲۳۹	۵۰۷ مسائلی از مهاویره
۲۴۰	۶۰۷ مسائلی از بهاسکره
۲۴۱	۷۰۷ اعداد اصم درجه دوم
۲۴۱	۸۰۷ معادلات سیاله درجه اول
۲۴۲	۹۰۷ قطرهای يك چهارضلعی محاطی
۲۴۳	۱۰۰۷ چهارضلعیهای برهمگوپته
۲۴۳	۱۱۰۷ ثابت بن قره، کرنخی، و نصیرالدین
۲۴۴	۱۲۰۷ طرح نه نه
۲۴۵	۱۳۰۷ طرح یازده یازده
۲۴۶	۱۴۰۷ قاعده خطاين
۲۴۷	۱۵۰۷ روش خیام برای حل معادلات درجه سوم
۲۴۸	۱۶۰۷ يك راه حل هندسی برای معادلات درجه سوم
۲۴۸	۱۷۰۷ ترسیمهای هندسی بر يك کره
۲۴۹	عنوان مقاله
۲۴۹	کتابنامه

فصل ۸ ریاضیات اروپایی، ۵۰۰ تا ۱۶۰۰

۲۵۱ ۱-۸ عصر تاریکی

۲۵۳ ۲-۸ دوره انتقال

۲۵۴	۳-۸	فیونانتچی و قرن سیزدهم
۲۵۷	۴-۸	قرن چهاردهم
۲۵۸	۵-۸	قرن پانزدهم
۲۶۱	۶-۸	حسابهای اولیه
۲۶۳	۷-۸	آغاز نمادگرایی در جبر
۲۶۶	۸-۸	معادلات درجه سوم و درجه چهارم
۲۷۲	۹-۸	فرانسوا ویت
۲۷۵	۱۰-۸	دیگر ریاضیدانان قرن شانزدهم
۲۷۸		مطالعه مسئله‌ای
۲۷۸	۱۰.۸	مسائلی از عصر تاریکی
۲۷۹	۲۰.۸	دنباله فیونانتچی
۲۷۹	۳۰.۸	مسائلی از «لیبر آباکی»
۲۸۰	۴۰.۸	مسائل دیگری از فیونانتچی
۲۸۱	۵۰.۸	چندضلعیهای ستاره‌ای
۲۸۱	۶۰.۸	یوردانوس و کوزا
۲۸۲	۷۰.۸	دورر و مربعات جادویی از مرتبه زوج مضاعف
۲۸۵	۸۰.۸	مسائلی از رگیومونتانوس
۲۸۵	۹۰.۸	مسائلی از شوکه
۲۸۶	۱۰۰.۸	مسائلی از پاچولی
۲۸۶	۱۱۰.۸	مسائل بازرگانی قدیم
۲۸۸	۱۲۰.۸	الگوریتمهای جلوزیا و گالی
۲۹۰	۱۳۰.۸	جمتریا یا آریتموگرافی
۲۹۱	۱۴۰.۸	معادلات درجه سوم
۲۹۱	۱۵۰.۸	معادلات درجه چهارم
۲۹۲	۱۶۰.۸	نمادگذاری قرن شانزدهم
۲۹۲	۱۷۰.۸	مسائلی از ویت
۲۹۴	۱۸۰.۸	مسائلی از کلاویوس
۲۹۴	۱۹۰.۸	کمی هندسه
۲۹۵		عنوان مقاله
۲۹۵		کتابنامه
۲۹۸		جوابها و راهنماییهایی برای حل مطالعه‌های مسئله‌ای
۳۲۵		واژه‌نامه
۳۳۰		فهرست راهنما

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار

مایه خوشوقتی است که با انتشار این مجلد، که از ویرایش پنجم متن اصلی، آخرین ویرایش انگلیسی آن، برگردانده شده ترجمه کامل آشنایی با تاریخ ریاضیات در اختیار مشتاقان قرار داده می‌شود. در این ویرایش تغییرات قابل ملاحظه‌ای به عمل آمده که اهم آنها افزوده شدن تعدادی عناوین مقاله‌های دانشجویی در پایان هر فصل و روزآمد کردن اطلاعات علمی، مثلاً در خصوص اعداد متحابه و جز آن است. ترجمه پس از تطبیق با این آخرین ویرایش مجدداً ویراستاری و حروفچینی شده است.

در ترجمه کتاب، درعین پابندی به امانت، روانی و سلامت جمله‌ها مد نظر بوده است. ترجمه عناوین کتابها در متن و عناوین اصلی در پانوشت آمده‌اند. توضیحات مختصری، هر جا که به نظر مترجم لازم آمده در داخل علامت [] در متن یا پانوشت افزوده شده است. در نحوه نوشتن اسامی کتابها و اشخاص و محلها به فارسی، از دایرةالمعارف فارسی بهره گرفته شده است. در ضبط نامها و اصطلاحات چینی و هندی از راهنمای مختصری که در متن اصلی موجود بوده استفاده شده است. در هسر مورد در صورت وجود شکلی مصطلحتر یا مقبولتر در فارسی، از آن استفاده شده است.

در این ویرایش جدید، برخلاف ویرایش پیشین، جوایهای مسائل، واژه‌نامه، و فهرست راهنما آورده شده، و بدین ترتیب با دادن هویتی مستقل به آن از بخش دوم، که در مجلدی جداگانه قبلاً انتشار یافته، خوانندگان را که تنها خواهان آشنایی با تاریخ ریاضیات تا عصر رنسانس هستند، برآورده می‌کند. ولی از آنجا که به نظر مترجم مجلد اول در حکم مقدمه و مجلد دوم در حکم مؤخره‌ای برای آشنایی با تاریخ ریاضیات است، این مجلد زمانی جوایگویی نیازهای خوانندگان خواهد بود که همراه با مجلد دوم مورد استفاده قرار گیرد.

پیشگفتار مؤلف

این ویرایش پنجم شامل تعداد زیادی اضافات و تغییرات جزئی و کلی است. اضافات و تغییرات جزئی عمدتاً شرح و تفصیل مطالب تاریخی و روزآمد کردن آنهاست (نظیر آخرین اطلاعات دربارهٔ اعداد تام و حل حدس مشهور چهاررنگ در سال ۱۹۷۶). در بین تغییرات عمده می‌توان از اینها نام برد (۱) اضافه کردن چندین بخش جدید (شامل دستگاه متری و بخشی دربارهٔ «ریاضی جدید» و بورباکی)، (۲) بازنویسی و مبسوط گردانیدن قسمت عمدهٔ بخش دوم کتاب، (۳) افزایشی عمده در اطلاعات مربوط به زندگی ریاضیدانان متأخر، (۴) افزایش بازهم بیشتر تعداد داستانها و ماجراهای جالب از زندگی ریاضیدانان بزرگ، (۵) افزوده شدن ده دوازده پیکره و تصویر، (۶) مفصل کردن مطالعه‌های مسئله‌ای و افزودن بر آنها، (۷) افزوده شدن فهرستی از عناوین مقاله‌ها به هر فصل که ممکن است به عنوان مقاله‌های دانشجویی به کار آیند.

جای مسرت خاطر است که یکبار دیگر مراتب حقشناسی خود را از استقبال گرمی که هم از جانب معلمان مدارس و هم از جانب استادان دانشگاه از این کتاب به عمل آمده است، ابراز دارم. استفادهٔ گسترده از مطالعه‌های مسئله‌ای برای آشنا کردن دانشجویان جوان با تحقیقات سادهٔ ریاضی به ویژه مایهٔ خوشحالی من است.

بسیاری از مدرسان مدارس و دانشگاهها از این مطالب برای روح دادن و تکمیل دروس مختلف نیز استفاده کرده‌اند، و عدهٔ زیادی از دانش آموزان دبیرستانها این مطالب را در نمایشگاههای ریاضی دبیرستانها مورد استفاده قرار داده‌اند. از آنجا که مسئله‌ها قلب ریاضیات اند، دروسی صرفاً متشکل از مسئله منحصرأ بر پایهٔ مطالعه‌های مسئله‌ای این کتاب عرضه شده است.

* نگاه کنید به پ. ر. هالموس، «قلب ریاضیات» در

میل دارم مراتب تشکر خود را به گریگوریو جی. فونتس^۱ از دانشگاه مین^۲، ولیمپ ا. جانسن^۳ از دانشگاه کارولینای شمالی^۴، و جسانی و. لات^۵ از دانشگاه مونتانا^۶ که هر یک از آنها تذکرات سودمندی برای ویرایش جدید دادند، ابراز دارم، و به خصوص از رابرت م. تامس^۷ به خاطر یاوریهای توأم با صبرش سپاسگزارم. و باز هم تشکرات صمیمانه خود را از همه کسانی که از کتاب استفاده کرده‌اند، به ویژه آنهایی که با صرف وقت و تحمل زحمت جملات محبت آمیزی درباره آن نوشته‌اند، و پیشنهادهایی برای اصلاحات بیشتر داده‌اند، اعلام می‌دارم. هر ویرایش جدید کتاب عمدتاً از گردآوری دقیق این پیشنهادهای سرشته شده است.

فاکس‌ها لو^۸، لوبک^۹، مین

تابستان ۱۹۸۱

ا.ا.ه

-
- | | |
|------------------------|---------------------------------|
| 1. Gregorio J. Fuentes | 2. University of Maine |
| 3. Phillip E. Johnson | 4. University of North Carolina |
| 5. Johnny W. Lott | 6. University of Montana |
| 7. Robert M. Thomas | 8. Fox Hollow |
| | 9. Lubec |

مقدمه

این کتاب با اغلب کتابهای تاریخی ریاضی موجود تفاوت دارد، زیرا اثری نیست که فقط برای قسمت مراجع [در کتابخانه‌ها] تهیه شده باشد؛ بلکه کوششی است برای معرفی تاریخ ریاضیات به صورتی که قابل استفاده در کلاسهای درس دوره لیسانس باشد. بنابراین، علاوه بر روایت تاریخ، از ابزارهای آموزشی هم برای علاقه‌مند ساختن و به میدان آوردن دانشجو استفاده شده است. همچنین، با اعتقاد به اینکه درس تاریخ ریاضیات باید در وهله اول یک درس دیپلاسی باشد، کوشش شده است تا مقدار قابل ملاحظه‌ای ریاضیات اصیل در آن گنجانده شود.

عمده‌ترین ابزارهای آموزشی و ریاضی در این کتاب، «مطالعه‌های مسئله‌ای» هستند که در خاتمه هر فصل آمده‌اند. هر مطالعه مسئله‌ای شامل تعدادی مسئله وابسته و سؤالاتی راجع به برخی از قسمتهای مطالب آن فصل است. به نظر من با طرح تعدادی از این مطالعه‌های مسئله‌ای در کلاس و واگذار کردن بقیه برای حل در منزل، این درس برای دانشجو ملموس‌تر و پرمعنی‌تر خواهد شد و دانشجو بر برخی از مفاهیمی که اهمیت تاریخی دارند، بیشتر احاطه خواهد یافت. به عنوان مثال، درک و فهم دستگاههای عددی به بهترین صورت، جز از طریق کار کردن عملی با این دستگاهها حاصل نخواهد شد. به جای اینکه صرفاً به دانشجو بگویید که یونانیان باستان معادلات درجه دوم را به طریق هندسی حل کرده‌اند، از او بخواهید که چندتایی از این معادلات را به روش یونانی حل کند؛ با این عمل وی نه تنها روش یونانی را به طور کامل خواهد فهمید، بلکه دستاوردهای ریاضیات یونانی را هم عمیقتر درک خواهد کرد. بدین ترتیب امید می‌رود که دانشجو قسمت اعظم تاریخ ریاضیات و همچنین نکات جالبی در ریاضیات را از طریق این مطالعه‌های مسئله‌ای بیاموزد. برخی از مطالعه‌های مسئله‌ای به مسائل و روشهایی که از نظر تاریخی مهم‌اند، می‌پردازند؛ بعضی دیگر مطالب پرارزشی در اختیار معلمین آینده دبیرستانها و مدارس عالی می‌گذارند؛ برخی دیگر هم صرفاً جنبه تفریحی دارند، و بسیاری از آنها می‌توانند منشأ مقاله‌های تحقیقی کوتاه توسط دانشجویان شوند.

البته، تعداد مطالعه‌های مسئله‌ای بیش از آن است که امکان طرح همه آنها در يك يا دو نیمسال مقدور باشد، و از لحاظ دشواری نیز باهم تفاوت دارند. این موضوع به معلم امکان می‌دهد که مسائلی را که مناسب استعداد دانشجویانش می‌بیند، انتخاب کند و تکالیف را سال به سال تغییر دهد. در پایان کتاب مجموعه‌ای از راهنماییها برای حل بسیاری از مطالعه‌های مسئله‌ای وجود دارد.

برخی از مدرسان تاریخ ریاضیات مایل اند نوشتن مقاله‌هایی را به دانشجویان خود واگذار کنند. بنا بر این در پایان هر فصل، بلافاصله بعد از مطالعه مسئله‌ای، تعدادی عنوان مقاله فهرست شده که به مطالب مندرج در همان فصل مربوط می‌شوند. این عنوانها صرفاً جنبه پیشنهادی دارند. هر مدرسی می‌تواند فهرست جامعتری از عناوین از این نوع را برای خود تهیه کند. عنوان مقاله‌ای که به دانشجو واگذار می‌شود باید مستلزم آن باشد که وی مطالبی بیش از متن کتاب را مطالعه کند و خود را نیازمند آن ببیند که کندوکاوی در کتبی که فهرستان در کتابنامه فصل مربوطه داده شده‌اند، بنماید.

مسلم است که تاريخ يك موضوع را دست کم بدون آشنایی اجمالی با خود موضوع نمی‌توان به طور شایسته‌ای درك كرد. از این رو کوشش به عمل آمده است که، به خصوص در فصول نهایی که مطالب پیشرفته‌ترند، مطالب مورد بحث توضیح داده شوند. بنا بر این دانشجوی مبتدی می‌تواند علاوه بر تاریخ ریاضیات، مقدار نسبتاً زیادی ریاضیات از مطالعه این کتاب بیاموزد. موضوعات تاریخی به ترتیب گاهشناختی عرضه شده‌اند، و خواننده درخواهد یافت که اطلاع از حساب معمولی و جبر، هندسه، و مثلثات دبیرستانی عموماً برای فهم نه فصل اول کافی است. دانستن مقدمات هندسه تحلیلی در صفحه برای فصل ۱۵ ضروری است و آگاهی بر مفاهیم اولیه حسابان برای فصول باقیمانده از ۱۱ تا ۱۵ مورد نیاز است. امیدواریم که هر مفهوم یا مبحثی که در این کتاب ظاهر می‌شود و ماهیت پیشرفته‌تری دارد به حدکافی در جایی که معرفی شده است، توضیح داده شده باشد. البته بهتر است که دانشجو در ریاضیات تاحدودی خبرگی داشته باشد، اما اینکه فصلهای نهم، دهم، یازدهم یا همه پانزده فصل تدریس شوند به وقت کلاس و آمادگی قبلی دانشجویان بستگی دارد.

پیدااست که پرداختن به همه تاریخ ریاضیات از عهد باستان تا اعصار جدید تنها در يك درس نیمسالسی با سه ساعت درس در هفته آسان نیست؛ زیرا چنین کاری مستلزم این است که دانشجو مقدار بسیار زیادی از مطالب را شخصاً مطالعه کند و از قسمتهای مربوط

* بالعکس جالب و در خور ذکر است که درك درست هرشاخه‌ای از ریاضیات بدون آشنایی با تاریخ این موضوع غیرممکن است؛ زیرا ریاضیات عمدتاً مطالعه اندیشه‌هاست، و فهم صحیح اندیشه‌ها بدون تحلیل سرچشمه‌های آنها مقدور نیست. مثال بسیار واضح در این مورد، مطالعه هندسه ناقلیدسی است. گفته ج. و. ل. گلیشر (J.W.L. Glaisher) بجاست که «من یقین دارم هیچ موضوعی بیشتر از ریاضیات از تلاش برای جدا کردن آن از تاریخش آسیب نمی‌بیند».

به مسائل تقریباً به‌طور کامل چشم‌پوشی نماید. وضعیت مطلوب، این است که درسی در این موضوع به مدت یک سال ارائه شود که در نیمسال اول (هشت فصل اول) یا بخش ۱ [جلد ۱ ترجمه] را همراه با گزیده‌هایی از فصول ۹، ۱۰، ۱۱ شامل شود، و در نیمسال دوم شامل بخش ۲ [جلد ۲ ترجمه] یا مطالب باقیمانده باشد و دانشجویان پیشرفته و دانشجویان رشته ریاضی در هر دو ترم ثبت‌نام کنند. دانشجویان مبتدی و کسانی که در آینده معلم ریاضی در دبیرستان می‌شوند احتمالاً فقط در نیمسال اول ثبت‌نام می‌نمایند. تاریخ ریاضیات آن‌چنان گسترده است که حتی در دو نیمسال، فقط آشنایی اجمالی با آن امکان‌پذیر است. دانشجوی علاقه‌مند طالب مراجعه به آثار دیگر خواهد شد. از این‌رو، به هر فصل، کتابنامه‌ای منضم شده است که مربوط به مطالب آن فصل است. یک کتابنامه عمومی، که بلافاصله بعد از فصل آخر آمده است، تقریباً برای همه فصلها به‌کار می‌آید. باید توجه شود که این کتابنامه، هر چند که گسترده است، ادعای کمال ندارد و صرفاً منظور آن است که نقطه شروعی باشد برای یافتن مطالب بیشتر. تنها به معدودی مأخذ ادواری اشاره شده است، اما منبعی عالی از چنین مأخذی در انتهای کتابنامه عمومی دیده می‌شود؛ این نوع مأخذ فراوانند و دانشجوی جستجوگر در یافتن آنها مشکلی نخواهد داشت؛ مأخذی که در اینجا داده شده‌اند عموماً در دسترس و به زبان انگلیسی هستند. بخشهایی از مطالب فصول نهایی این کتاب از هاورد ایوز و س. و. نیوسام، آشنایی با مبانی و مفاهیم اساسی ریاضیات^۱، چاپ تجدید نظر شده، اقتباس شده‌اند.

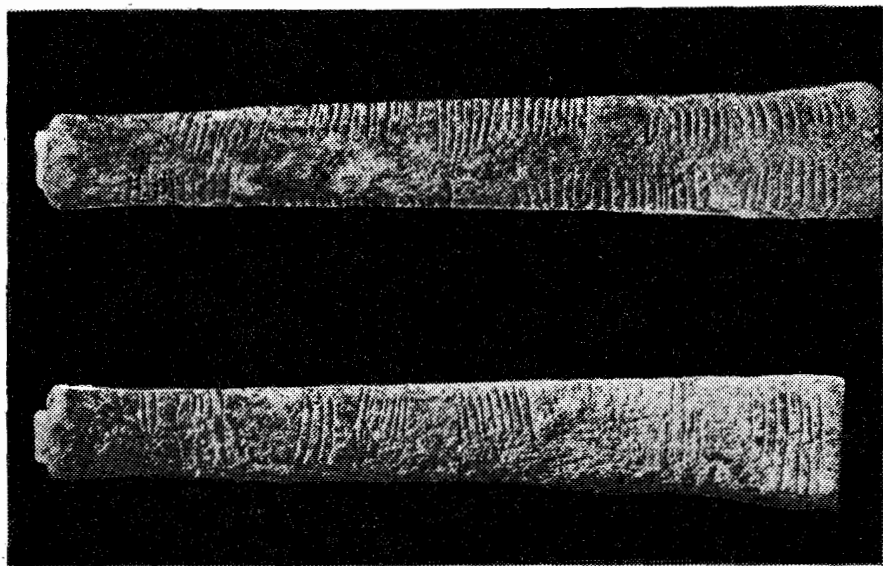
1. Howard Eves and C.V. Newsom, *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*, revised edition. Holt, Rinehart and Winston, 1965.

دستگاههای عددنویسی

۱-۱ شمارشهای ابتدایی

مفهوم عدد و فرایند شمارش به قدری پیش از تاریخ مضبوط تکوین یافته که کیفیت این تکوین تا حدود زیادی حدسی است. با این حال، تصور چگونگی ظهور احتمالی آن، دشوار نیست. می توان گفت که بشر، حتی در قدیمیترین اعصار، در کسی از عدد داشته، یعنی دست کم مفهوم بیش و کمی را وقتی که اشیایی به گروه کوچکی اضافه یا از آن برداشته می شدند، درک می کرده است؛ زیرا مطالعات نشان داده اند که بعضی حیوانات از این درک برخوردارند. با تکامل تدریجی جامعه، شمارشهای ساده ضروری شد. هر قبیله باید می دانست که چند عضو و چند دشمن دارد، و هر فرد باید می دانست که آیا گله گوسفندانش در حال کاهش است یا نه. شاید قدیمیترین راه نگهداشتن حساب، نوعی روش ساده چوبخط بوده که در آن از اصل تناظر يك به يك استفاده می شده است. به عنوان مثال، در ضبط شماره گوسفندان برای هر گوسفند يك انگشت تا می شده است. نگهداشتن حساب با دسته کردن سنگریزه یا چوب، با کشیدن شیارهایی روی گل یا سنگ، با کندن دندانهای بر يك قطعه چوب، یا زدن گرههایی بر يك نخ نیز میسر بود. از این رو، شاید بعدها، ترکیبی از اصوات زبانی به عنوان يك چوبخط صوتی در قبال شماره اشیای موجود در يك گروه کوچک پدید آمده است. و زمانی بعدتر، با بهبود کار نوشتن، ترکیبی از علائم برای نمایش این اعداد، تکوین یافته اند. این سیر تکوین تخیلی را گزارشهای مطالعات انسان شناسان در اقوام بدوی امروزی تأیید می کند.

در مراحل اولیه دوره شمارش شفاهی، مثلاً برای دو گوسفند و دو مرد از اصوات



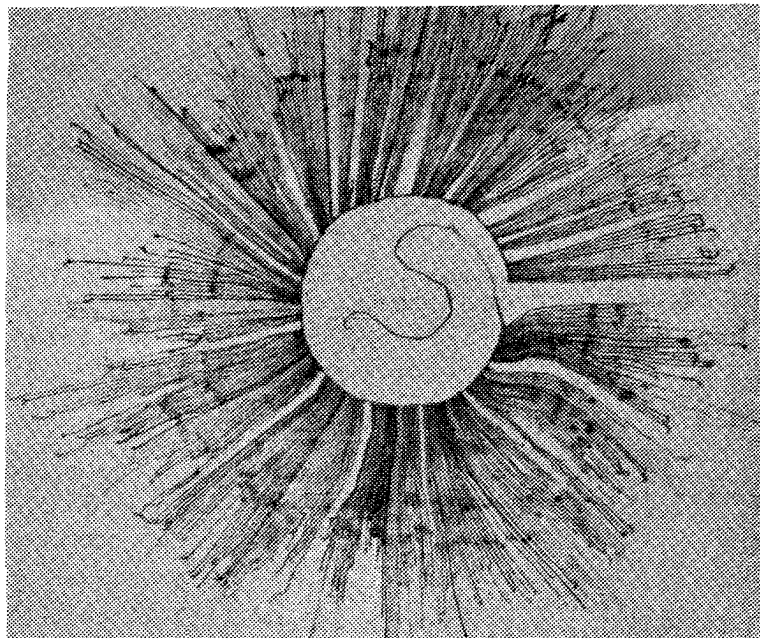
در منظر از استخوان ایشانگو^۱ که متجاوز از ۸۵۰۰ سال قدمت دارد و در ایشانگو، بر ساحل دریاچه ادوارد^۲ در زئیر (کنگو) پیدا شده و اعدادی را نشان می‌دهد که با کندن دندان‌هایی بر استخوان ثبت گردیده‌اند (دکتر دو هاینتسلین^۳).

(کلمات) مختلف استفاده می‌شده است. (مثلاً، در زبان انگلیسی، ترکیبهای تیم اسپها^۴، یک جفت گاوه^۵، یک زوج کبک^۶، یک جفت کفش^۷ را در نظر بگیرید.) تجرید خاصیت مشترک دو، از طریق نمایش آن با صوتی که مستقل از هر تداعی مشخص تلقی شود، احتمالاً مدت زیادی طول کشیده است. کلمات عددی امروزی، به احتمال قوی بدو^۸ اشاره به مجموعه‌هایی از برخی اشیای مادی مشخص داشته‌اند، اما این پیوندها، بجز در مورد آنکه شاید پنج و دست را به هم مربوط می‌کند، اکنون بر ما نامعلوم است.

۱-۲ پایه اعداد

وقتی انجام شمارشهای وسیعتر لازم گردید، لازم بود عمل شمارش به صورت منسجمی درآید. این کار با مرتب کردن اعداد در گروههای پایه‌ای مناسب انجام شد که اندازه گروهها عمدتاً با عمل تطابق به کار گرفته شده معین می‌گردید. به بیانی ساده‌تر، روش مزبور چنین بود: عددی مانند b به عنوان پایه شمارش (که هینا یا هقیاس نیز خوانده می‌شود) انتخاب می‌شد و نامهایی به اعداد ۱، ۲، ...، b داده می‌شد. سپس نامهای اعداد

-
1. Ishango
 2. Edward
 3. Dr. de Heinzelin
 4. team of horses
 5. yoke of oxen
 6. brace of partridge
 7. pair of shoes



يك كیبوی^۱ سرشماری بومیان یسرو که ثبت اعداد را به کمک گرههایی بر نخ نشان می‌دهد. گرههای بزرگتر مضاربی از گرههای کوچکترند و رنگ نخ، نر را از ماده متمایز می‌کند. (مجموعه موزه انسان‌شناسی^۲، پاریس.)

بزرگتر از b، اساساً با ترکیب نامهای اعدادی که قبلاً انتخاب شده بود، تعیین می‌شد. از آنجا که انگشتان انسان چنین وسیله بسیار آسانی را برای تطابق در اختیار قرار می‌دهد، تعجب آور نیست که نهایتاً ۱۰ در غالب موارد به عنوان پایه b انتخاب شده است. برای مثال، کلمه‌های عددی امروزی انگلیسی را در نظر بگیرید که بر اساس انتخاب ۱۰ به عنوان پایه ساخته شده‌اند. ما اسامی خاص *one*، *two*، *three*، *four*، *five*، *six*، *seven*، *eight*، *nine*، *ten* را برای اعداد ۱، ۲، ۳، ...، ۱۰ داریم. وقتی به ۱۱ می‌رسیم، می‌گوییم *eleven*، که بنا به گفته زبانشناسان از *ein* *lifon* به معنی «یکسی باقیمانده»، یا *يك* روی ده، مشتق شده است. به طور مشابه، *twelve* از *two lif* به معنی «دو روی ده» گرفته شده است. پس از آن داریم، *thirteen* «سه و ده»، *fourteen* «چهار و ده»، تا *nineteen* «نه و ده». سپس *twenty* (*two-tig*) یا «دو ده»، *twenty-one* «دو ده و یک» و غیره می‌آیند. گفته می‌شود که کلمه *hundred* در اصل مشتق از واژه‌ای است که به معنی «ده برابر» (ده) می‌باشد.

۱. *quipu* وسیله‌ای که از *يك* نخ اصلی و تعدادی نخهای الوان کوچکتر ساخته می‌شد و بومیان پرو با زدن گرههایی بر آن، از آن برای انجام محاسبات استفاده می‌کردند. — ۴.

شواهدی وجود دارد که ۲، ۳، و ۴ به عنوان پایه‌های عددی اولیه مورد استفاده بوده‌اند. برای مثال روش شمارش برخی از بومیان کوئینزلند چنین است: «يك، دو، دو و يك، دو، دو، خیلی» و بعضی از پیگمه‌های افریقا از اصوات 'oa-oa-a-oa-oa-ua-oa-a' و 'oa-oa-oa' برای شمارش ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، و ۶ استفاده می‌کنند. قبیله‌ای از تی‌پرا دل فوئنگو^۲ برای نامهای چندعدد نخستین، پایه ۳ را دارند و بعضی قبایل آمریکای جنوبی نیز از ۴ استفاده می‌کنند.

همچنانکه انتظار می‌رود، مقیاس پنج پنجمی، یا دستگاه عددی به مبنای ۵، اولین مقیاسی بود که به طور وسیعی مورد استفاده واقع شد. در حال حاضر نیز بعضی قبایل آمریکای جنوبی با دست می‌شمارند: «يك، دو، سه، چهار، دست، دست و يك»، والی آخر. یوکاگیر^۳های سبیری از مقیاس مرکبی برای شمارش استفاده می‌کنند «يك، دو، سه، سه و يك، پنج، دوسه، یکی بیشتر، دوچهار، ده یکی کم، ده». در تقویمهای دهقانی آلمان تا حدود سال ۱۸۵۰ از مقیاس پنج پنجمی استفاده می‌شد.

همچنین شواهدی در دست است که احتمالاً ۱۲ به عنوان پایه در دوره‌های پیش از تاریخ، عمدتاً در اندازه‌گیریها، مورد استفاده بوده است. این پایه ممکن است به خاطر تعداد تقریبی ماههای قمری در يك سال، یا شاید به دلیل اینکه ۱۲ دارای مقسوم‌علیه‌های زیادی است، مطرح شده باشد. به هر صورت، ۱۲ را به عنوان تعداد اینچه‌های موجود در يك فوت، اونسهای يك پوند قدیم، پنجهای يك شیلینگ، تقسیم‌بندی ساعتها، و تعداد ماههای سال داریم، و از کلمات دوچین و قراضی^۴ به عنوان واحدهای بالاتر استفاده شده است. مقیاس بیست بیستی، یا دستگاه اعداد به مبنای ۲۰، به طور وسیعی به کار می‌رفته و یادآور روزهای پابرهنگی انسان است. این مقیاس را اقوام سرخ‌پوست آمریکا به کار می‌بردند و شناخته‌شده‌ترین مورد آن، دستگاه عددی کاملاً پیشرفته قوم مایاست. آثاری از وجود پایه ۲۰، که ریشه سلتی^۵ دارند، در کلمات فرانسوی *quatre-vingt* [چهار بیست] به جای *huitante* [هشتاد] و *quatre-vingt-dix* [چهار بیست - ده] به جای *nonante* [نود] دیده می‌شود. چنین اثراتی در زبانهای گیلی^۶، دانمارکی^۷، و ویلزی^۸ نیز یافت می‌شود. گرینلندیها^۹ از عبارت «يك مرد» به معنی ۲۰، «دو مرد» به معنی ۴۰، و الی آخر، استفاده می‌کنند. در زبان انگلیسی کلمه بسیار رایج *score* هم به معنی چوبخط و هم به معنی گروه بیست‌تایی را داریم.

مقیاس شصتگانی، دستگاه عددی به مبنای ۶۰ مورد استفاده با بلیهای باستان بوده است و هنوز هم در اندازه‌گیری زمان و زوایا بر حسب دقیقه و ثانیه به کار می‌رود.

۱-۳ دستگاه عددی نوشتاری

علاوه بر اعداد لفظی، اعداد انگشتی زمانی به طور وسیع مورد استفاده بوده‌اند. در واقع،

- | | | | |
|---------------|---------------------|-------------|--------------|
| 1. Queensland | 2. Tierra del Fuego | 3. Yukaghir | 4. gross |
| 5. Celtic | 6. Gaelic | 7. Danish | 8. Welsh |
| | | | 9. Greenland |

نمایش اعداد به وسیلهٔ وضعیتهای مختلف انگشتان و دستها، احتمالاً قدمتی بیش از ۴۰۰۰ ساله دارد. مثلاً، علامت نوشتاری برای ۱، ۲، ۳، ۴ همیشه عبارت از تعداد مناسبی از پاره‌خطهای قائم یا افقی بودند که تعداد انگشتهای بلند شده یا کشیده شده را نمایش می‌دادند، و کلمهٔ دیجیت (به معنی انگشت در لاتین) برای اعداد ۱ تا ۹ نیز از همان منشأ آمده است.

به مرور زمان، اعداد انگشتی برای دربرگرفتن بزرگترین اعدادی که در داد و ستدهای بازرگانی مطرح می‌شدند، گسترش یافتند و در آغاز قرون وسطی در سراسر جهان به کار می‌رفتند. در مرحلهٔ نهایی این تحول، اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰، ۶۰، ۷۰، ۸۰، ۹۰ روی دست چپ، و اعداد ۱۰۰، ۲۰۰، ۳۰۰، ۴۰۰، ۵۰۰، ۶۰۰، ۷۰۰، ۸۰۰، ۹۰۰ روی دست راست نمایش داده می‌شدند. بدین طریق، هر عدد تا ۱۰۰۰۰ با استفاده از دو دست قابل نمایش بود. تصاویری از این اعداد انگشتی در کتابهای حساب متأخرتر داده شده‌اند. به عنوان مثال، روی دست چپ عدد ۱ با تا کردن جزئی انگشت کوچک، ۲ با تا کردن جزئی انگشت کوچک و انگشت حلقه، ۳ با تا کردن جزئی انگشت کوچک، حلقه، و وسطی، ۴ با تا کردن انگشتهای وسطی و حلقه، ۵ با تا کردن انگشت وسطی، ۶ با تا کردن انگشت حلقه، ۷ با تا کردن کامل انگشت کوچک، ۸ با تا کردن کامل انگشتهای کوچک و حلقه، و ۹ با تا کردن کامل انگشتهای کوچک، حلقه، و وسطی.

اعداد انگشتی دارای این مزیت بودند که بر اختلافات زبانی غالب می‌آمدند، اما نظیر اعداد صوتی استمرار نداشتند و برای انجام محاسبات مناسب نبودند. قبلاً از به کارگیری نشانه‌ها و نودانه‌ها به عنوان راههای اولیهٔ ضبط اعداد یاد کرده‌ایم. احتمالاً نخستین کوششهای بشر را برای نوشتن باید در چنین تدابیری جستجو کرد. به هر صورت، دستگاههای اعداد نوشتاری مختلف، تسذریجاً از این تلاشهای اولیه برای ضبط ماندگار اعداد صوتی پدیدار شده‌اند. هر عدد نوشتاری يك شمار نامیده می‌شود و ما اکنون توجه خود را به دسته‌بندی ساده‌ای از دستگاههای شمار اولیه معطوف می‌کنیم.



۱-۳ دستگاههای گروه‌بندی ساده

شاید تقریباً قدیمیترین دستگاه شماری که تکوین یافته همان باشد که دستگاه گروه‌بندی ساده نامیده شده است. در این دستگاه، عددی مانند b برای پایهٔ اعداد انتخاب و علامتی برای b^1 ، b^2 ، b^3 ، و الی آخر اختیار می‌شود. سپس هر عدد با استفاده از این علامت به‌طور جمعی بیان می‌گردد، و هر علامتی به دفعات مورد لزوم تکرار می‌شود. مثال زیر اصل مندرج در آن را روشن می‌کند.

یکی از قدیمیترین مثالهای دستگاه گروه‌بندی ساده، دستگاه هیروگلیفی مصری است که از حدود ۳۴۵۰ ق.م. به کار می‌رفته و عمدتاً مصریان آن را در کتیبه‌هایی که روی سنگ می‌نوشته‌اند مورد استفاده قرار می‌دادند. گرچه گاهی برای نوشتن روی چیزهایی غیر از سنگ نیز از خط هیروگلیفی استفاده می‌شد، مصریان به زودی دو شیوهٔ نوشتن نسبتاً


سریمتر را برای کار روی پایپروس، چوب، و سفال ابداع کردند. قدیمیترین این دو، خطی بود با حروف پیوسته، موسوم به خط هیراتی^۱ [خط کاهنان] که از خط هیروگلیفی مشتق شده و مورد استفاده روحانیت بود. بعد از هیراتی خط دموتی^۲ [خط عوام] پدید آمد، که کاربرد همگانی یافت. دستگاههای شمار هیراتی و دموتی از نوع گروه‌بندی ساده نیستند. دستگاه شمار هیروگلیفی مصری مبتنی بر پایه ۱۰ است. علایم اختیار شده برای ۱ و چند توان اول ۱۰ چنین‌اند.

طومار، یا کلاف طناب ۱۰^۲  يك خط قائم | ۱

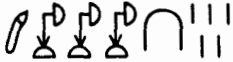
نیلوفر آبی مصری ۱۰^۳  استخوان پاشنه، یا حلقه بخو، یا یوغ ۱۰ 

انگشتی در حال اشاره ۱۰^۴ 

ماهی ریشدار، یا بچه قورباغه ۱۰^۵ 

مردی در حال تعجب، یا یکی از خدایان که جهان را روی دست گرفته است. ۱۰^۶ 

حال هر عدد را می‌توان با استفاده از این علایم به طور جمعی بیان کرد، که در آن هر علامتی به تعداد دفعات مورد لزوم تکرار می‌شود. مثلاً

$$۱۳۰۱۵ = ۱(۱۰^۴) + ۳(۱۰^۳) + ۱(۱۰) + ۵ = $$

ما این عدد را از چپ به راست نوشته‌ایم اگر چه مصریان بیشتر عادت داشتند که از راست به چپ بنویسند.

با بلیان قدیم که پایپروس نداشتند و به سنگهای مناسب دسترسی کمی داشتند، برای نوشتن عمدتاً از گل رس استفاده می‌کردند. آنان کتیبه را به وسیله فشردن قلمی، که نوک آن به شکل مثلث متساوی‌الساقین تیزی بود، بر یک لوح گل رس مرطوب نقش می‌کردند. با کمی کج کردن قلم از حالت قائم، ایسن امکان وجود داشت که زاویه رأس یا زاویه مجاور به قاعده مثلث متساوی‌الساقین بر گل رس نقش شود که بدین ترتیب دو نوع نشانه گوه-شکل (میخی) به وجود می‌آمد. سپس لوح آماده در کوره‌ای پخته می‌شد تا به درجه‌ای

از سختی برسد که در مقابل گذشت زمان مقاوم و به يك سند دائمی بدل شود. بر روی لوحهای میخی که به فاصلهٔ زمانی ۲۰۰۰ ق.م. تا ۲۰۰ ق.م. تعلق دارند، اعداد کوچکتر از ۶۰ به کمک دستگاه گروه‌بندی ساده‌ای به پایهٔ ۱۰ بیان شده‌اند، و جالب اینکه عمل نوشتن اغلب با استفاده از علامت تفریق ساده شده است. علامت تفریق و علامت به کار رفته برای ۱۰۹۱ از چپ به راست عبارت‌اند از:



که در آن علامت به کار رفته برای ۱ و دو قسمتی که علامت تفریق را می‌سازند با استفاده از زاویهٔ رأس مثلث متساوی‌الساقین به دست آمده‌اند، و علامت به کار رفته برای ۱۰ با استفاده از یکی از زوایای مجاور به قاعده حاصل شده است. به عنوان مثالهایی از اعداد نوشتاری که از این علامت در آنها استفاده شده، داریم:

$$۲۵ = ۲(۱۰) + ۵ = \triangleleft \triangleleft \begin{matrix} \triangle \triangle \\ \triangle \triangle \end{matrix}$$

$$۳۸ = ۴۰ - ۲ = \begin{matrix} \triangle \triangle \\ \triangle \triangle \end{matrix} \triangle \triangle \triangle \triangle$$

روشی که با بلیها برای نوشتن اعداد بزرگتر به کار می‌بردند، در بخش ۱-۷ بررسی خواهد شد. شمارهای یونانی آتیکی^۱، یا هرودینی^۲ زمانی پیش از قرن سوم قبل از میلاد ظهور یافتند و دستگاه گروه‌بندی ساده‌ای بر مبنای ۱۰ تشکیل می‌دهند که از حروف اول نامهای عددی ساخته شده‌اند. علاوه بر علامت M, X, H, Δ, I برای ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰، ۱۰۰۰۰، ۱۰۰۰۰۰، علامت خاصی برای ۵ وجود دارد. این علامت خاص، شکلی قدیمی از Π است، که حرف اول کلمهٔ یونانی پنته^۳ («پنج») است، و Δ حرف اول دکا^۴ («ده») یونانی است. سایر علامت را نیز می‌توان به همین نحو توضیح داد. از علامت به کار رفته برای ۵، اغلب هم به طور منفرد و هم در ترکیب با سایر علامت استفاده می‌شد تا نمایش عددی کوتاه‌تر شود. به عنوان مثال، در این دستگاه شمار داریم

1. Attic

۲. منسوب به هرودین (Herodian)، صرف و نحو دان یونانی که در حوالی سال ۱۷۰ پیش از میلاد در ۲ دستور زبان درس می‌داد و یکی از آثار معروفش «قاموس زبان یونانی آتن» است. ۴.

3. pente

4. deka

$$2857 = \text{XXVIIIHLII}$$

که در آن می توان علامت خاص برای ۵ را که يك بار تنها و دوبار در ترکیب با سایر علائم ظاهر شده، تشخیص داد.

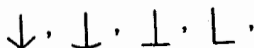
به عنوان آخرین مثال دستگاه گروه بندی ساده، بازهم در پایه ۱۰، شمارهای آشنای رومی را داریم. در اینجا به علائم اصلی I، V، X، C، M برای ۱، ۵، ۱۰، ۵۰، ۱۰۰، ۵۰۰، ۱۰۰۰، ۵۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ افزوده می شوند. اصل تفریق، که مطابق آن، وقتی علامتی برای واحد کوچکتر قبل از علامت به کار رفته برای واحد بزرگتر قرار گیرد، معنی تفاضل این دو واحد را دارد، فقط به ندرت در دوره های باستان و میانسه به کار می رفت. استفاده کاملتر این اصل در اعصار جدید معمول گردید. به عنوان مثال، در این دستگاه داریم

$$1944 = \text{MDCCCCXXXIII}$$

یا در اعصار جدیدتر، با متداول شدن اصل تفریق،

$$1944 = \text{MCMXLIV}$$

در کوشهایی که برای توضیح ریشه های دستگاه اعداد رومی می شود، حدس و گمان نیز بی دخالت نبوده است. یکی از توضیحات موجه تر، که مورد قبول عدد زیادی از صاحب نظران در تاریخ لاتین و علم کتیبه خوانی است، این است که I، II، III، IIII از شکل انگشتان بلند شده گرفته شده اند. علامت X هم ممکن است ترکیبی از V باشد یا شاید از شکل دستها یا انگشتان صلیب شده به ذهن راه یافته باشد، یا شاید هم ناشی از این عادت رایج بوده باشد که موقع شمارش با پاره خطها، خطی بر روی گروههای ده تایی می کشیده اند. شواهدی در دست است که علائم اصلی برای ۵۰، ۱۰۰، و ۱۰۰۰ احتمالا آواهای دمیده یونانی Ψ (پسی)، θ (تتا)، و Φ (فی) بوده اند. اشکال قدیمی برای پسی



بوده اند که همه آنها در کتیبه های اولیه به جای ۵۰ به کار رفته اند. علامت θ برای ۱۰۰ احتمالا بعدها به علامت C که تا حدودی مشابه آن است تحول یافت؛ و این حقیقت که حرف اول کلمه لاتین مستوم (صد) است در این امر تأثیر داشته است. يك علامت متداول در قدیم برای ۱۰۰۰، C|D است، که شاید صورت دیگری از Φ باشد. تحت تأثیر این امر که M حرف اول کلمه لاتین میله (هزار) است، علامت مورد استفاده برای ۱۰۰۰ به صورت M در آمد. پانصد، به خاطر اینکه نصف ۱۰۰۰ است، با $\frac{1}{2}D$ نمایش داده شد، که بعدها به D بدل گردید. کاربرد علائم C|D و $\frac{1}{2}D$ برای ۱۰۰۰ و ۵۰۰ تا سال ۱۷۱۵، مشاهده شده است.

۵-۱ دستگاههای گروه بندی ضربی

مواردی وجود دارند که در آنها يك دستگاه گروه بندی ساده به آنچه شاید بتوان آن را دستگاه گروه بندی ضربی نامید، تحول یافته است. در چنین دستگاهی، بعد از انتخاب پایه b ، علایمی برای ۱، ۲، ...، $b-1$ و مجموعه علایمی برای b ، b^2 ، b^3 ، ...، اختیار می شوند. از علایم این دو مجموعه به طود ضربی برای نشان دادن اینکه چند واحد از گروههای بالاتر مورد نیازند، استفاده می شود. مثلاً اگر نه عدد اول را با علایم معمولی نشان دهیم و لی ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ را مثلاً با a و b و c نشان دهیم، در این صورت در دستگاه شمار ضربی می نویسیم:

$$۵۶۲۵ = ۵c۶b۲a۵.$$

دستگاه شمار سنتی چینی-ژاپنی، يك دستگاه گروه بندی ضربی در پایه ۱۰ است. علایم دو گروه اساسی و عدد ۵۶۲۵ که عمودی نوشته می شوند، به صورت زیرند:

۱	一	۱۰	十	五
۲	二	۱۰ ^۲	百	千
۳	三	۱۰ ^۳	千	六
۴	四			百
۵	五			二
۶	六			十
۷	七			五
۸	八			
۹	九			

مثال: ۵۶۲۵

۶-۱ دستگاه‌های شمار رمزی

در يك دستگاه شمار رمزی، بعد از اینکه يك پایه b انتخاب گردید، علامی برای $۲، ۱، \dots$ ، $b-1$ ؛ b ؛ $۲b$ ؛ b ؛ \dots ؛ $(b-1)b$ ؛ b^2 ؛ $۲b^2$ ؛ \dots ؛ $b^2(b-1)$ ؛ و غیره اختیار می‌شود. اگرچه در چنین دستگاهی علامی زیادی باید به حافظه سپرده شود، نمایش اعداد در آن فشرده است.

دستگاه شمار یونانی به اصطلاح یونانی^۱، یا الفبایی، از نوع رمزی است و می‌توان رد آن را تا ۴۵۰ ق.م. پیگیری کرد. این دستگاه در پایه ۱۰ است و در آن از ۲۷ نشانه ۲۴- حرف الفبای یونانی همراه با علامی حروف منسوخ دیگاما^۲، کوپا^۳، و سامپی^۴ استفاده می‌شود. گرچه در این دستگاه از حروف بزرگ استفاده می‌شد و حروف کوچک خیلی دیرتر جانشین آنها گردیدند، در اینجا دستگاه را با حروف کوچک شرح خواهیم داد. معادلهای زیر باید به حافظه سپرده می‌شدند:

۱	α	آلفا	۱۰	ι	یوتا	۱۰۰	ρ	رو
۲	β	بتا	۲۰	κ	کاپا	۲۰۰	σ	سیگما
۳	γ	گاما	۳۰	λ	لامبدا [لاندا]	۳۰۰	τ	تاو
۴	δ	دلتا	۴۰	μ	مو	۴۰۰	ν	اوپسیلون
۵	ϵ	اپسیلون	۵۰	ν	نو	۵۰۰	ϕ	فی
۶		منسوخ دیگاما	۶۰	ξ	کسی	۶۰۰	χ	خی
۷	ζ	زتا	۷۰	\omicron	اومیکرون	۷۰۰	ψ	پسی
۸	η	اتا	۸۰	π	پی	۸۰۰	ω	اومگا
۹	θ	تا	۹۰		منسوخ کوپا	۹۰۰		منسوخ سامپی

به عنوان مثالهایی از موارد کاربرد این علامی، داریم

$$۱۲ = \iota\beta, \quad ۲۱ = \kappa\alpha, \quad ۲۴۷ = \sigma\mu\xi.$$

برای مشخص کردن اعداد بزرگ، از تیره‌ها و آکسانهایی که همراه حروف به کار می‌رفت استفاده می‌شد.

علامتهای حروف منسوخ دیگاما، کوپا، و سامپی، به ترتیب زیرند.

$\varsigma, \varphi, \pi.$

سایر دستگاهها با شمار رمزی عبارت‌اند از هیراتی و دموئی مصری، قبطی، هندی برهمایی، عبری، سوری، و عربی بدوی. سه‌تای آخر، مانند یونانی یونایی، دستگاههای شمار رمزی الفبایی هستند.

۷-۱ دستگاههای شمار موضوعی

دستگاه شمار کنونی، نمونه‌ای از يك دستگاه شمار موضوعی با پایه ۱۰ است. برای چنین دستگاهی، بعد از انتخاب پایه b ، علائم اصلی برای $۰, ۱, ۲, \dots, b-1$ اختیاری شوند. بنا بر این b علامت اصلی وجود دارند که غالباً در دستگاه معمولی امروزی ارقام نامیده می‌شوند. حال هر عدد (طبیعی) N را می‌توان به طور یکتا به صورت:

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$$

نوشت که در آن $0 \leq a_i < b$ ، $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ؛ n سپس عدد N را در پایه b با رشته‌ای از علامتهای اصلی به صورت

$$a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$$

نشان می‌دهیم. از این رو هر علامت اصلی در هر عدد مفروض، نمایش مضرب توانی از پایه است و این توان به موضعی بستگی دارد که علامت اصلی در آن ظاهر می‌شود. مثلاً در دستگاه شمار هندی-عربی خودما، ۲ در ۲۰۶ نشانه (۱۰۲) ۲، یا ۲۰۰ است، در حالی که در ۲، ۲۷ نشانه (۱۰) ۲، یا ۲۰ است. باید توجه داشت که برای وضوح کامل، علامتی برای صفر مورد نیاز است تا توانهایی از پایه را که ممکن است وجود نداشته باشند، نشان دهد. هر دستگاه شمار موضعی، محصول منطقی ولی نه لزوماً تاریخی يك دستگاه گروه‌بندی ضربی است.

با بلیه‌های قدیم، در زمانی بین سالهای ۳۰۰۰ و ۲۰۰۰ ق.م. يك دستگاه شصتگانی پدید آوردند که از اصل ارزش موضعی استفاده می‌کرد. مع‌هذا این دستگاه شمار در واقع مختلط است، زیرا گرچه اعداد بزرگتر از ۶۰ بر طبق اصل ارزش موضعی نوشته می‌شوند، اعداد درون گروه ۶۰ تایی اصلی، مطابق آنچه در بخش ۱-۴ تشریح شد، به کمک يك دستگاه گروه‌بندی ساده در مبنای ۱۰ نوشته می‌شوند. به عنوان مثال، داریم:

$$524,551 = 2(60^3) + 25(60^2) + 42(60) + 31 = \text{V V V V V V V V V V V V V V V V}$$


این دستگاه شمار موضعی، تا بعد از سال ۳۰۰ ق.م. علامتی برای صفر نداشت. ابهامی را که از این امر در لوحهای گلی پدید می‌آید، غالباً می‌توان تنها با مطالعه دقیق متن برطرف کرد.

آنچه بسیار جالب توجه است دستگاه شمار مایایی، با میدتی دور و نامعلوم، است که توسط هیئت‌های اعزامی اسپانیایی به یوکاتان^۱ در اوایل قرن شانزدهم کشف شد. این دستگاه اساساً بیست بیستی است، بجز اینکه گروه عددی دوم به جای اینکه $400 = 20^2$ باشد، $360 = 18(20)$ است. گروههای بالاتر به صورت $18(20^n)$ هستند. توضیح این اختلاف احتمالاً در این حقیقت نهفته است که سال رسمی مایایی از ۳۶۰ روز تشکیل

می‌شد. علامت صفر که در جدول زیر داده شده، یا صورت دیگری از این علامت، پیوسته مورد استفاده قرار می‌گیرد. اعداد درون گروه ۲۰ تایی اصلی به صورتی بسیار ساده با استفاده از نقطه و خط تیره (سنگریزه و تکه چوب) بر طبق طرح گروه بندی ساده زیر نوشته می‌شوند که در آن نقطه نمایش ۱ و خط تیره نمایش ۵ است.

۱	•	۶	—•	۱۱	==•	۱۶	===•
۲	••	۷	—••	۱۲	==••	۱۷	===••
۳	•••	۸	—•••	۱۳	==•••	۱۸	===•••
۴	••••	۹	—••••	۱۴	==••••	۱۹	===••••
۵	—	۱۰	==	۱۵	===	۰	—○—

مثالی از يك عدد بزرگ که به روش عمودی مایایی نوشته شده، در زیر نشان داده می‌شود:

$$۴۳۴۸۷ = ۶(۱۸)(۲۰^۲) + ۰(۱۸)(۲۰) + ۱۴(۲۰) + ۷ =$$


دستگاه مختلط-پایه‌ای که شرحش را دادیم، مورد استفاده طبقه روحانیون بود. گزارشهایی از يك دستگاه بیست بیستی خالص در دست است که مورد استفاده مردم عادی بود، ولی به صورت نوشته باقی نمانده است.

۸-۱ محاسبات نخستین

بسیاری از الگوهای محاسبه که امروزه در حساب مقدماتی به کار می‌روند، نظیر آنها که برای انجام ضرب و تقسیمهای طولانی مورد استفاده‌اند، در حوالی قرن پانزدهم ابداع شدند. معمولاً دو دلیل برای توضیح این پیدایش دیررس اقامه می‌شود که عبارت از مشکلات ذهنی و مشکلات مادی هستند که در چنین کاری موجود بود.

به مورد اول، یعنی مشکلات ذهنی، زیاد نباید توجه کرد. این گمان که حتی ساده‌ترین محاسبات در دستگاههای شمار قدیم عملی نیست، عمدتاً ناشی از ناآشنایی با این دستگاههاست. روشن است که جمع و تفریق در يك دستگاه گروه بندی ساده تنها نیازمند توانایی شمردن انواع مختلف علائم و سپس تبدیل آنها به واحدهای بالاتر است. در اینجاست ضرورتی به از حفظ داشتن ترکیبهای عددی وجود ندارد.* در دستگاه شمار رمزی، اگر جدول جمع

* برای ملاحظه چگونگی انجام ضرب و تقسیمهای طولانی با شمارهای یونانی، نگاه کنید، مثلاً، به James G. Kennedy, "Arithmetic with Roman numerals," *The American Mathematical Monthly* 88(1981): 29-33.

و ضرب به میزان کافی به حافظه سپرده شوند، کار را می توان بسیار شبیه به آنچه که امروزه انجام می شود، پیش برد. پل تانری، ریاضیدان فرانسوی، مهارت زیادی در ضرب بادستگاه شمار یونانی یونانی کسب کرد و حتی نتیجه گرفت که این دستگاه مزیت هایی بر دستگاه امروزی ما دارد.

با این حال مشکلات مادی موجود، واقعیت کامل داشتند. نبودن ذخیره ای فراوان و مناسب از ماده مطلوبی که بتوان بر آن نوشت، مانع از هر گونه پیشرفت روند حساب می شد. باید به خاطر داشت که کاغذ امروزی ساخته شده از خمیر که توسط ماشین ساخته می شود، کمی بیش از یک صدسال عمر دارد. کاغذ قدیمتر ساخته شده از پارچه کهنه با دست ساخته می شد و در نتیجه گران و کمیاب بود، و حتی این نوع کاغذ هم تا قرن دوازدهم به اروپا آورده نشد، گرچه محتمل است که چینیها هزار سال قبل طرز ساختن آن را می دانسته اند. یک ماده قدیمی کاغذ مانند برای نوشتن، که پاپیروس خوانده می شد، به وسیله مصریان قدیم اختراع و قبل از سال ۵۰۰ ق.م. در یونان معمول شده بود. پاپیروس از نوعی نی آبی به نام پاپوس^۲ ساخته می شد. ساقه های نی به صورت نوارهای بلند و نازکی بریده و کنار هم گذاشته می شدند تا به شکل ورقه ای در آیند. لایه دیگری از این نوارها را به روی آن گذاشته و همرا در آب خیس می کردند، سپس ورقه را فشرده و در آفتاب خشک می کردند. احتمالاً به علت وجود صمغ طبیعی در گیاه، لایه ها به هم می چسبیدند. بعد از خشک شدن ورقه ها، آنها را با زحمت بسیار به کمک جسم سخت و گردی هموار می کردند تا آماده نوشتن شود. پاپیروس ارزشمندتر از آن بود که هر مقداری از آن صرفاً به عنوان کاغذ مسوده به کار رود.

وسیله قدیمی دیگری که بر آن می نوشتند، کاغذ پوستی بود، که از پوست حیوانات و معمولاً از پوست گوسفند یا بره ساخته می شد. این وسیله طبیعتاً کمیاب و به دست آوردن آن مشکل بود. وسیله با ارزشتر از آن، رق، کاغذ پوستی ساخته شده از پوست گوساله بود. در واقع، کاغذ پوستی آن چنان گران بود که شستن مرکب دستخطهای کاغذهای پوستی قدیم و استفاده مجدد از آنها در قرون وسطی مرسوم گردید. چنان دستنویسهایی پالیمپست^۳ (پالین، دوباره؛ پسا، با؛ سا، بیدن هموار گردان) نامیده می شد. در بعضی موارد، بعد از گذشت سالیان، نوشته اصلی یک پالیمپست به طور کم رنگی زیر نوشته بعدی ظاهر می شد. آثار جالبی بدین طریق بازسازی شده اند.

تخته های کوچکی با پوشش نازکی از موم، همراه با یک قلم، وسیله ای بود که رومیان تقریباً دو هزار سال پیش برای نوشتن به کار می بردند. قبل از دوران امپراطوری روم وطی آن سینه های شن اغلب برای شمارش های ساده و رسم اشکال هندسی به کار می رفتند. و البته سنگ و لوح گلی از خیلی قبل برای تهیه مدارک کتبی مورد استفاده بود.

راه خروج از این مشکلات ذهنی و مادی اختراع چرتکه (آباکس^۴)، در یونانی به معنی «سینی شن» بود که می توان آن را قدیمیترین ابزار مکانیکی برای محاسبه خواند که

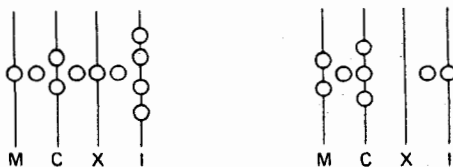
به دست نوع بشر به کار رفته است. چرتکه در اشکال مختلف در قسمت‌هایی از دنیای قدیم و وسطی ظاهر گردید. در اینجا یکی از اشکال ابتدایی آن را توصیف می‌کنیم و استفاده از آن را در جمع و تفریق چند عدد رومی نشان می‌دهیم. چهارخط موازی عمودی رسم کنید و آنها را از چپ به راست M, X, C, I بنامید و مقداری وسیله شمارش مناسب، مانند مهره یا سکه، تهیه کنید. هر مهره معرف $1, 10, 100, 1000$ واحد خواهد بود، بسته به اینکه روی خط I, X, C, M یا M قرار داشته باشد. برای تقلیل تعداد مهره‌هایی که ممکن است بعداً روی هر خط ظاهر شوند، قرار می‌گذاریم که به جای هر پنج مهره روی یک خط، در محلی درست در طرف چپ آن خط، در فضای بین آن خط و خط سمت چپ آن، مهره‌ای بگذاریم. در این صورت هر عدد کوچکتر از 10000 را می‌توان در این دستگاه خطوط با قرار دادن مهره‌هایی نمایش داد که تعدادشان در هر خط از چهار بیشتر و در موضع طرف چپ هر خط از یکی بیشتر نیست.

حال دو عدد رومی

MDCCLXIX و MXXXVII

را با هم جمع می‌کنیم. از دو عدد بالا، عدد سمت چپ را به کمک مهره‌ها، چنان که در سمت چپ شکل ۱ نشان داده شده، در دستگاه نمایش می‌دهیم. اکنون با اقدام از راست به چپ به افزودن عدد دوم می‌پردازیم. برای جمع VII ، مهره دیگری را بین خطوط X و I و دو مهره دیگر را روی خط I می‌گذاریم. بر روی خط I اکنون شش مهره قرار دارد. پنج‌تای آنها را برمی‌داریم و به جایشان مهره دیگری بین خطوط X و I قرار می‌دهیم. از سه مهره‌ای که حالا بین خطوط X و I قرار دارند، دو تایشان را به صورت یک مهره واحد به خط X نقل می‌کنیم. حال XXX را با گذاشتن سه مهره دیگر روی خط X اضافه می‌کنیم. چون اکنون جمعاً پنج مهره در خط X داریم، به جای آنها یک مهره بین خطوط C و X می‌گذاریم و دو مهره‌ای را که حالا در آنجا هستند، به صورت مهره واحدی به خط C نقل می‌کنیم. بالاخره M را با گذاشتن مهره دیگری بر روی خط M ، اضافه می‌کنیم. صورت نهایی دستگاه در طرف راست شکل ۱ نشان داده شده، و مجموع $MMDCCLXIX$ را می‌توان از روی آن اعلام کرد. مجموع این دو عدد را با اعمال مکانیکی ساده و بی‌نیاز از کاغذ مسوده یا به کمک از حفظ داشتن هر گونه جدول جمع به دست آورده‌ایم.

تفریق به‌طور مشابه انجام می‌شود، بجز اینکه در این حالت به جای «نقل کردن» به چپ ممکن است لازم شود که از چپ «قرض» کنیم.



شکل ۱

دستگاه شمار موضعی هندی - عربی هر عدد را صرفاً با ضبط تعداد مهره‌های متعلق به خطوط مختلف چرتکه با رعایت ترتیب نشان می‌دهد. علامت ۰ نشانهٔ خطی است که مهره‌ای بر روی آن وجود ندارد. الگوهای جمع و تفریق امروزی، همراه با مفاهیم «نقل کردن» و «قرض کردن» ممکن است در جریسان انجام این اعمال روی چرتکه پدید آمده باشند. چون، در دستگاه شمار هندی - عربی به جای مهره‌های واقعی با علائم کار می‌کنیم، لازم می‌آید که جمعهای سادهٔ عددی را به ذهن سپاریم یا به جداول ابتدایی جمع توسل جویم.

۹-۱ دستگاه شمار هندی-عربی

دستگاه شمار هندی-عربی به هندیان، که احتمالاً مخترع آن هستند، و به اعراب، که آن را به اروپای غربی انتقال دادند، منسوب است. قدیمیترین نمونه‌های محفوظ مانده از علائم عددی امروزی، بر روی چند ستون سنگی که در حدود ۲۵۰ ق.م. به وسیلهٔ شاه آشوکا در هند برپا شدند، یافت می‌شود. نمونه‌های قدیمی دیگری، اگر به درستی تعبیر شده باشند در هند، در آثاری که حدود سال ۱۰۰ ق.م. بر دیوارهای غاری در تپه‌ای نزدیک پونه^۲ کنده شده‌اند و در بعضی کتیبه‌های حفاری شده متعلق به حدود سال ۲۰۰ ق.م. در غارهایی واقع در ناسیک^۳ پیدا شده‌اند. در این نمونه‌های قدیمی صفر وجود ندارد و در آنها از نمادگذاری موضعی استفاده نشده است. با این حال ارزش موضعی، و نیز صفر، می‌بایستی در زمانی قبل از ۸۰۰ ق.م. در هند معمول شده باشد، زیرا خوارزمی ریاضیدان ایرانی چنین صورت‌کاملی از دستگاه هندی را در کتابی متعلق به سال ۸۲۵ ق.م. شرح می‌دهد. اینکه علائم شمار جدید چگونه و در چه زمانی برای اولین بار وارد اروپا شده‌اند، معین نیست. به احتمال قوی انتقال آنها توسط بازرگانان و سیاحان سواحل مدیترانه صورت گرفته است. این علائم در یک دستنوشتهٔ اسپانیایی متعلق به قرن دهم دیده می‌شوند و ممکن است به وسیلهٔ اعراب که در سال ۷۱۱ ق.م. به این شبه جزیره حمله کردند و صدها سال در آنجا ماندند، در اسپانیا معمول شده باشند. دستگاه کامل شده با ترجمهٔ لاتین رسالهٔ خوارزمی در قرن دوازدهم و کارهای بعدی اروپاییان در این باره به طور وسیعتری رواج یافت. طی ۴۰۰ سال پس از آن، نزاعهایی بین طرفداران چرتکه و الگوریست‌ها^۴، نامی که به‌خواهان دستگاه جدید اطلاق می‌شد، در گرفت و پیش از سال ۱۵۰۰ ق.م. قواعد کنونی ما در محاسبات چیرگی یافتند. با گذشت صد سال دیگر، طرفداران چرتکه تقریباً از یاد رفته بودند و با آغاز قرن هجدهم هیچ اثری از چرتکه در اروپای غربی دیده نمی‌شد. پیدایش مجدد آن، به عنوان یک تحفه، مدیون پونسله^۵ مهندس فرانسوی بود که بعد از آزاد شدن از زندان روسها، که به دنبال لشکرکشی ناپلئون به روسیه بدان گرفتار شده بود، نمونه‌ای از آن را به فرانسه آورد.

علایم عددی، قبل از آنکه با پیدایش صنعت چاپ تثبیت شوند، صورتهای مختلفی به خود گرفتند. کلمهٔ زیدروا انگلیسی احتمالاً از زفیروم^۲ که صورت لاتینی شدهٔ صفر عربی است گرفته شده است، و این کلمه به‌نوبهٔ خود ترجمهٔ سونیا^۳ هندی، به‌معنی «سوج» یا



طرفدار چرتکه در مقابل ال‌کوریست. (از گریگور رایش^۴، مارگاریتا فیلسوفیکا^۵، استراسبورگ، سال ۱۵۰۴.)

1. zero
2. zephirum
3. sunya
4. Gregor Reisch
5. Margarita Philosophica

«تهی» است. صفر عربی در قرن سیزدهم به صورت صیغه^{۱۱} توسط نمودار یوس^۲ وارد آلمان شد که واژه کنونی *cipher* انگلیسی به معنای صفر، مأخوذ از آن است.

۱-۱۰ پایه‌های دلخواه

یادآوری می‌کنیم که برای نمایش عددی در یک دستگاه شمار موضعی با پایه b به‌علایمی اصلی برای اعداد صحیح صفر تا $b-1$ نیاز داریم. با آنکه پایه $b=10$ بخش مهمی از فرهنگ کنونی را تشکیل می‌دهد، انتخاب 10 در واقع کاملاً اختیاری است و پایه‌های دیگر هم اهمیت عملی و نظری زیادی دارند. اگر $b \leq 10$ ، می‌توانیم از علائم ارقام معمولی استفاده کنیم. مثلاً، می‌توانیم 3012 را به عنوان عددی که در پایه 4 با علائم اصلی $0, 1, 2, 3$ بیان شده تلقی کنیم. برای روشن ساختن اینکه نمایش عدد در پایه 4 در نظر گرفته شده است، آن را به صورت $(3012)_4$ می‌نویسیم. وقتی هیچ‌زیر نویسی نوشته نشود، استنباط ما چنین خواهد بود که عدد در پایه معمولی 10 بیان شده است. اگر $b > 10$ ، باید علائم اصلی جدیدی به‌علایم رقمی خود بیفزاییم زیرا همواره b علامت اصلی لازم داریم. بنا بر این، اگر $b=12$ ، می‌توانیم $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, e, z$ را به عنوان علائم اصلی اختیار کنیم که در آن e و z علائمی برای ده و یازده هستند. به‌عنوان مثال می‌توانیم داشته باشیم $(321e)_{12}$.

تبدیل عددی در پایه دلخواه به پایه معمولی 10 آسان است. مثلاً داریم:

$$(3012)_4 = 3(4^3) + 0(4^2) + 1(4) + 2 = 198$$

و

$$(321e)_{12} = 3(12^3) + 10(12^2) + 1(12) + 11 = 6647$$

اگر عددی در مقیاس معمولی داشته باشیم می‌توانیم آن را به ترتیب زیر در پایه b بیان کنیم. با فرض اینکه N چنین عددی باشد، لازم است که اعداد صحیح a_0, a_1, \dots, a_{n-1} را در عبارت

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0$$

که در آن $0 \leq a_i < b$ ، معین کنیم. از تقسیم معادله بالا بر b داریم:

$$\frac{N}{b} = a_n b^{n-1} + a_{n-1} b^{n-2} + \dots + a_1 + \frac{a_0}{b} = N' + \frac{a_0}{b}$$

یعنی، باقیمانده این تقسیم، a_0 ، آخرین رقم در نمایش مطلوب است. با تقسیم N' بر b

$$\frac{N'}{b} = a_n b^{n-2} + a_{n-1} b^{n-3} + \dots + a_1 + \frac{a_1}{b}$$

را به دست می آوریم و باقیماندهٔ این تقسیم، رقم ماقبل آخر در نمایش مطلوب است. با ادامهٔ کار بدین روال همهٔ ارقام a_0, a_1, \dots, a_n به دست می آیند. این شیوهٔ کار را می توان به طور کاملاً ساده ای، همچنان که در زیر نشان داده شده به صورت منظم در آورد. برای مثال، فرض کنید که بخواهیم ۱۹۸ را در پایهٔ ۴ نشان دهیم. داریم

$$\begin{array}{r} 4 \overline{) 198} \\ \underline{4} \\ 49 \\ \underline{4} \\ 12 \\ \underline{4} \\ 3 \\ \underline{0} \\ 0 \end{array}$$

باقیمانده ۲
باقیمانده ۱
باقیمانده ۰
باقیمانده ۳

نمایش مورد نظر $(3012)_4$ است. باز فرض کنید بخواهیم ۶۶۴۷ را در پایهٔ ۱۲ بیان کنیم که در آن، دوباره t و e به ترتیب برای نمایش ده و یازده به کار رفته اند. داریم

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) 6647} \\ \underline{12} \\ 553 \\ \underline{12} \\ 46 \\ \underline{12} \\ 3 \\ \underline{0} \\ 0 \end{array}$$

باقیمانده e
باقیمانده ۱
باقیمانده t
باقیمانده ۳

نمایش مورد نظر $(3t1e)_{12}$ است.

در هنگام جمع و ضرب در دستگاه معمولی، ممکن است فراموش کنیم که کار واقعی به طور ذهنی انجام می شود و علایم عددی صرفاً برای ثبت نتایج ذهنی به کار می روند. توفیق و کار آیی ما در انجام چنین عملیات حسابی بستگی به این دارد که تا چه حد جداول جمع و ضرب را، که وقت زیادی برای آموختنشان در کلاسهای ابتدایی صرف کرده ایم، به خاطر داریم. با جداول متناظر برای پایهٔ مفروض b ، می توانیم به طور مشابه جمع و ضرب را در این دستگاه جدید، بدون مراجعه به دستگاه معمولی، انجام دهیم.

مطلب را با مثالی در پایهٔ ۴ روشن می کنیم. ابتدا جداول جمع و ضرب را، مطابق جداول صفحهٔ بعد، برای پایهٔ ۴ تشکیل می دهیم. از این قرار، مجموع ۳۰۲، با مراجعه به جدول، ۱۱، و حاصلضرب ۳۰۲ برابر با ۱۲ است. اکنون با استفاده از این جدولها، درست همان طور که به استفاده از جدولهای مربوط به پایهٔ ۱۰ عادت داریم، می توانیم به جمع و ضرب پردازیم. به عنوان مثال، برای ضرب $(3012)_4$ در $(233)_4$ ،

جدول جمع

	۰	۱	۲	۳
۰	۰	۱	۲	۳
۱	۱	۲	۳	۱۰
۲	۲	۳	۱۰	۱۱
۳	۳	۱۰	۱۱	۱۲

جدول ضرب

	۰	۱	۲	۳
۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۲	۳
۲	۰	۲	۱۰	۱۲
۳	۰	۳	۱۲	۲۱

با حذف زیر نویس ۴، داریم:

$$\begin{array}{r}
 ۳۰۱۲ \\
 ۲۳۳ \\
 \hline
 ۲۱۱۰۲ \\
 ۲۱۱۰۲ \\
 ۱۲۰۳۰ \\
 \hline
 ۲۱۰۱۱۲۲
 \end{array}$$

برای انجام اعمال معکوس تفریق و تقسیم، آشنایی زیادی با جداول مورد نیاز خواهد بود. البته این امر برای پایه ۱۰ نیز صادق است و موجب اغلب مشکلاتی است که در آموزش اعمال معکوس در مدارس ابتدایی پیش می‌آید.

مطالعه مسئله‌ای

۱۰۱ نامهای عددی

نامهای عددی زیر را توضیح دهید.

(الف) برای یکی از قبایل پاپوآ در جنوب شرقی گینه جدید لازم دیدند که آیه زیر از کتاب مقدس (یوحنا ۵:۵): «مردی آنجا بود که ۸۹۳۰ سال زمینگیر بود» را به صورت «مردی يك مرد، دودست، ۳۰۵ سال بیمار بود» ترجمه کنند.

(ب) در گینه جدید (بریتانیا)، عدد ۹۹ به صورت «چهارمرد در می گذرند، دودست به پایان می آیند يك پا به پایان می آید، و چهار» درمی آید.

(ج) قبیله کامایورا در آمریکای جنوبی از کلمه «انگشت قله» برای کلمه ۳ استفاده می‌کنند و «۳روز» به صورت «روزهای انگشت قله» درمی آید.

(د) زولوهای آفریقای جنوبی از معادله‌های زیر استفاده می‌کنند: ۶ «بلند کردن شست»، ۷ «او اشاره کرد».

(ه) مالینکه‌های غرب سودان از کلمهٔ دیبی^۲ برای ۴۵ استفاده می‌کنند. این کلمه به‌طور تحت‌اللفظی به‌معنی «تَشک» است.

(و) قبیلهٔ ماندینگو^۴ در غرب آفریقا از کلمهٔ کونونتو^۵ برای ۹ استفاده می‌کنند. این کلمه به‌طور تحت‌اللفظی معنی می‌دهد: «برای کسی که در شکم است».

۲۰۱ اعداد نوشتاری

۵۷۴ و ۴۷۵ رادر (الف) هیروگلیفی مصری، (ب) شمارهای رومی، (ج) شمارهای یونانی آتیکی، (د) خط میخی بابلی، (ه) دستگاه سستی چینی-ژاپنی، (و) یونانی القبایی، (ز) شمارهای مایایی بنویسید.

۳۰۱ دستگاه شمار یونانی القبایی

(الف) برای نوشتن اعداد کوچکتر از ۱۰۰۰ در یونانی القبایی چندعلامت مختلف باید به‌خاطر سپرده شوند؟ در هیروگلیفی مصری چطور؟ در میخی بابلی چطور؟

(ب) در دستگاه شمار یونانی القبایی اعداد ۱۰۰۰، ۲۰۰۰، ۳۰۰۰، ۴۰۰۰، ۵۰۰۰، ۶۰۰۰، ۷۰۰۰، ۸۰۰۰، ۹۰۰۰ اغلب با گذاشتن نشانهٔ پریم‌روی علامتهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ نشان‌داده می‌شوند. بدین‌ترتیب ۱۰۰۰ را می‌شد به‌صورت α نشان‌داد عدد ۱۰۰۰۰۰ یا میریاد^۶، با M نشان‌داده می‌شد. اصل ضرب برای مضارب ۱۰۰۰۰۰ به‌کار می‌رفت. از این‌رو ۲۰۰۰۰۰، ۳۰۰۰۰۰۰ و ۴۰۰۰۰۰۰۰ به‌صورت βM ، γM و νM نوشته می‌شدند. اعداد ۵۷۸۰، ۷۲۸۰۳، ۴۵۰۰۰۸۲، ۳۲۵۷۸۸۸ را در یونانی القبایی بنویسید.

(ج) یک جدول جمع تا با ۱۰+۱۰ و یک جدول ضرب تا با ۱۰×۱۰ برای دستگاه شمار یونانی القبایی بنویسید.

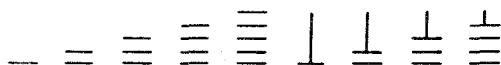
۴۰۱ دستگاه‌های شمار قدیمی و فرضی

(الف) به‌عنوان شق دیگری در برابر علایم شمار میخی، یا گوه شکل، با بلیهای قدیم گاهی از علایم شمار حدود استفاده می‌کردند. این‌وجه تسمیه از آن‌روست که این علایم از نقوش دایره شکلی تشکیل می‌شدند که به‌جای قلمهایی بانوک هثلثی، با قلمهایی ته‌گرد، بر لوحهای گلی ایجاد می‌شدند. در اینجا علایم ۱ و ۱۰ به‌صورت Δ و \circ هستند. اعداد ۵۷۸۰۳، ۷۲۸۰۳، ۴۵۰۰۰۸۲، ۳۲۵۷۸۸۸ را با نمادهای مدور بنویسید.

1. Zulu
2. Malinké
3. dibi
4. Mandingo
5. kononto
6. myriad



شکل ۲



شکل ۳

(ب) قاعده ساده‌ای برای ضرب ۱۰ در عددی که در دستگاه هیر و گلیفی مصری نوشته شده، بیان کنید.

(ج) يك دستگاه شمار جالب دستگاه‌شمار علمی (یا هیله‌ای) چینی است که، احتمالاً ۲۰۰۰ سال یا بیشتر قدمت دارد. این دستگاه اساساً موضعی، با پایه ۱۰ است. شکل ۲ طرز نمایش ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ را وقتی در يك موضع فرد (یکان، صدگان و الی آخر) ظاهر می‌شوند، نشان می‌دهد. اما وقتی این ارقام در موضع زوج (دهگان، هزارگان و الی آخر) ظاهر می‌شوند، نمایش آنها به صورتی است که در شکل ۳ نشان داده شده است. در دوران سلسله سونگ^۱ (۱۱۲۶-۹۶۰) و بعد از آن، در این دستگاه يك دایره ۰، به نشانه صفر به کار می‌رفت. با استفاده از شمارهای میله‌ای، اعداد ۵۷۸۰، ۷۲۸۰۳، ۴۵۰۰۸۲، ۳۲۵۷۸۸۸ را بنویسید.

(د) در يك دستگاه گروه بندی ساده در پایه ۵، فرض کنید که ۱، ۵، ۲۵، ۵۳ با /، *، ()، نمایش داده می‌شوند. اعداد ۳۶۰، ۲۵۲، ۷۸، ۳۳ را در این دستگاه نشان دهید.
 (ه) در يك دستگاه شمار موضعی در پایه ۵، فرض کنید که ۱، ۵، ۲۵، ۱۰۰، ۲۵۰ با #، /، *، ()، نمایش داده می‌شوند. اعداد ۳۶۰، ۲۵۲، ۷۸، ۳۳ را در این دستگاه بیان کنید.

۵.۱ اعداد انگشتی

(الف) اعداد انگشتی قرنهای متمادی وسیعاً مورد استفاده بودند و از این راه روشهای انگشتی برای بعضی محاسبات ساده به وجود آمدند. یکی از این روشها که حاصل ضرب دو عدد بین ۵ و ۱۰ را می‌دهد، برای تقلیل کار حافظه در ارتباط با جدا اول ضرب به کار می‌رفت. مثلاً، برای ضرب ۷ در ۹، $۲ = ۹ - ۷$ انگشت يك دست و $۴ = ۹ - ۵$ انگشت دست دیگر را بلند کنید. حال انگشتان بلند شده را جمع کنید، $۶ = ۴ + ۲$ ، که رقم دهگان حاصل ضرب است، و انگشتان بسته را در هم ضرب کنید، $۳ = ۱ \times ۳$ ، که رقم یکان حاصل ضرب است، و نتیجه ۶۳ به دست می‌آید. این عمل هنوز توسط برخی از روستاییان اروپا به کار می‌رود. ثابت کنید که این روش به نتایج درست می‌انجامد.

(ب) این معمای متعلق به قرن نهم را که گاهی به آلکویین^۲ (حوالی ۷۷۵) نسبت داده می‌شود، توضیح دهید: «مردی را دیدم که هشت در دست داشت، و از هشت، هفت برداشت

و شش باقی ماند.»

(ج) آنچه را که در زیر می آید، و در دهمین شعر هجایی یونانی دیده می شود، شرح دهید: «خوشبخت در واقع کسی است که ساعت مرگش را آنقدر به تعویق افکند که سالهای عمرش را بر دست راست خود شماره کند.»

۶.۱ کسره های مبنایی

اعداد کسری را در پایه معمولی می توان با ارقام بعد از ممیز نشان داد. از همان نماد گذاری در مورد سایر پایه ها نیز استفاده می شود. از این رو درست همچنان که عبارت ۰۳۰۱۲ به معنی

$$\frac{۳}{۱۰} + \frac{۰}{۱۰^۲} + \frac{۱}{۱۰^۳} + \frac{۲}{۱۰^۴}$$

است، عبارت $(۰۳۰۱۲)_b$ نیز نشانه

$$\frac{۳}{b} + \frac{۰}{b^۲} + \frac{۱}{b^۳} + \frac{۲}{b^۴}$$

است. عبارتی مثل $(۰۳۰۱۲)_b$ ، کسر مبنایی در پایه b نامیده می شود. کسر مبنایی در پایه ۱۰ را معمولاً کسر اعشاری می نامند.

(الف) نشان دهید که چگونه می توان کسر مبنایی در پایه b را به کسر اعشاری تبدیل کرد.

(ب) نشان دهید که چگونه می توان کسر اعشاری را به کسر مبنایی در پایه b تبدیل کرد.

(ج) $(۰۳۰۱۲)_۴$ و $(۰۳۲۱۰۰۱۰۰)_۲$ را به صورت کسره های اعشاری بیان کنید.

(د) ۰۰۴۴۰۵۲ را ابتدا به صورت کسر مبنایی در پایه ۷، و سپس در پایه ۱۲ بیان کنید.

۷.۱ عملیات حساب در سایر پایه ها

(الف) جداول جمع و ضرب برای پایه های ۱۲ و ۷ را تشکیل دهید.

(ب) $(۳۴۰۶)_۷$ و $(۲۵۱)_۷$ را ابتدا با استفاده از جداول قسمت (الف) و سپس با تبدیل به پایه ۱۰، اول با هم جمع و آنگاه در هم ضرب کنید. به همین نحو، $(۳۲۰۴۰۰۰)_۱۲$ و $(۵۱۲۲)_۱۲$ را اول جمع و سپس ضرب کنید.

(ج) جداول پایه ۱۲ را می توانیم برای مسائل مساحی ساده که متضمن فوت و اینچ هستند، به کار ببریم. برای مثال، اگر یک فوت را به عنوان واحد اختیار کنیم، آنگاه ۳ فوت

و ۷ اینج می‌شود $۱۲(۳۷)$. برای پیدا کردن مساحت مستطیلی به طول ۳ فوت و ۷ اینچ و عرض ۲ فوت و ۴ اینچ، با تقریب به نزدیکترین اینچ مربع، می‌توانیم $۱۲(۳۷)$ را در $۱۲(۲۴)$ ضرب و سپس نتیجه را به فوت و اینچ مربع تبدیل کنیم. این مثال را کامل کنید.

۸.۱ مسائلی درباره پایه‌های نمایش اعداد

(الف) $۵(۳۰۱۲)$ را در پایه ۸ بیان کنید.

(ب) در چه مبنایی $۱۵ = ۳ \times ۳$ ؟ در چه مبنایی $۱۱ = ۳ \times ۳$ ؟ در چه مبنایی

$$۱۲ = ۳ \times ۳$$

(ج) آیا ۲۷ می‌تواند در هیچ مبنایی معرّف يك عدد زوج باشد؟ ۳۷ چطور؟ آیا

۷۲ می‌تواند در هیچ مبنایی عدد فردی را نشان دهد؟ ۸۲ چطور؟

(د) b را چنان بیابید که $۵(۱۴۲) = ۰.۷۹b$ را چنان بیابید که $۵(۲۲۰۰) = ۰.۷۲$.

(ه) يك عدد سه رقمی در مبنای ۷ وقتی در پایه ۹ بیان می‌شود، ارقامش معکوس

می‌شوند. این سه رقم را پیدا کنید.

(و) کوچکترین پایه‌ای را که در آن ۳۰۱ نمایش يك مجذور کامل باشد، بیابید.

(ز) اگر $b > ۲$ ، نشان دهید که $۵(۱۲۱)$ يك مجذور کامل است. اگر $b > ۴$ ، نشان

دهید که $۵(۴۰۰۰۱)$ بر $۵(۲۲۱)$ قابل قسمت است.

۹.۱ چند جنبه تفریحی پایه دودویی

دستگاه عددنویسی موضعی با پایه ۲ در شاخه‌های مختلف ریاضیات کاربرد دارد. بازیها و معماهای زیادی نیز، مانند بازی معروف نيم و معمای حلقه‌های چینی، وجود دارند که جوابهایشان به این دستگاه بستگی دارد. آنچه در زیر می‌آید دو معمای ساده از این گونه است.

(الف) نشان دهید که چگونه با استفاده از يك ترازوی معمولی [شاهینی] می‌توان

هروزی را که بر حسب پوند عدد صحیحی است، با استفاده از مجموعه‌ای از وزنه‌های ۱ پوندی، ۲ پوندی، ۲ پوندی، ۳ پوندی و غیره، وزن کرد، در صورتی که تنها يك وزنه از هر نوع موجود باشد.

(ب) چهار کارت زیر را که شامل اعداد از ۱ تا ۱۵ هستند، در نظر بگیرید.

۱	۹
۳	۱۱
۵	۱۳
۷	۱۵

۲	۱۰
۳	۱۱
۶	۱۴
۷	۱۵

۴	۱۲
۵	۱۳
۶	۱۴
۷	۱۵

۸	۱۲
۹	۱۳
۱۰	۱۴
۱۱	۱۵

در کارت اول تمام اعدادی که رقم آخرشان در دستگاه دودویی ۱ است، قرار دارند؛ دومی شامل همه اعدادی است که رقم ماقبل آخرشان ۱ است؛ سومی شامل همه اعدادی است که رقم دوم مانده به آخرشان ۱ است؛ چهارمی شامل همه اعدادی است که رقم سه تا مانده به آخرشان ۱ است. حال از کسی خواسته می‌شود که عددی مانند N بین ۱ تا ۱۸ را در نظر بگیرد و بگوید که N روی چه کارتهایی قرار دارد. در این صورت عدد N را می‌توان به سادگی تنها با جمع کردن اعداد سمت چپ سطر اول کارتهایی که این عدد بر آنها واقع است، پیدا کرد. مجموعه مشابهی ارزشش کارت برای یافتن هر عدد بین ۱ تا ۶۳ بسازید. توجه کنید که اگر اعداد بر کارتهایی که ۱، ۲، ۴، ۸، ... واحد وزن دارند نوشته شوند، در این صورت روش خودکاری به صورت یک ترازوی پستی می‌تواند هر عدد N را بیان کند.

۱۰۰۱ چند حيله با اعداد

بسیاری از حيله‌های ساده با اعداد، که در آنها باید عدد انتخاب شده‌ای را حدس زد، دارای توجیهاتی هستند که به مقیاس موضعی بستگی دارند. حيله‌هایی از این قبیل را که در زیر می‌آیند توضیح دهید.

(الف) از شخصی خواسته می‌شود که یک عدد دو رقمی در نظر بگیرد. سپس از وی خواسته می‌شود که رقم دهگان را در ۵ ضرب و با ۷ جمع کند، حاصل را دو برابر کند و رقم یکان عدد اصلی را به آن اضافه، و نتیجه نهایی را اعلام نماید. از این نتیجه، شخص درخواست کننده در نهان ۱۴ را کم می‌کند و عدد اصلی را به دست می‌آورد.

(ب) از شخصی خواسته می‌شود که یک عدد سه رقمی در نظر بگیرد. سپس از وی خواسته می‌شود رقم صدگان را در ۲ ضرب و با ۳ جمع کند، حاصل را در ۵ ضرب و سپس با ۷ جمع کند، رقم دهگان را به آن بیفزاید، حاصل را در ۲ ضرب و با ۳ جمع کند، این حاصل جمع را در ۵ ضرب کند و رقم یکان را به آن بیفزاید، و نتیجه را اعلام کند. از این نتیجه، شخص درخواست کننده در نهان ۲۳۵ را کم می‌کند و عدد اصلی را به دست می‌آورد.

(ج) از شخصی خواسته می‌شود که عددی سه رقمی که ارقام اول و سوم آن متفاوت اند، در نظر بگیرد. سپس از وی خواسته می‌شود که تفاضل بین این عدد و عددی را که با عکس ترتیب سه رقم مزبور به دست می‌آید، بیابد. تنها با معلوم شدن آخرین رقم این تفاضل، شخص تر دست تمام تفاضل را اعلام می‌کند. او چگونه این کار را انجام می‌دهد؟

عنوان مقاله

- ۲/۱ شواهد زبانی استفاده از پایه‌هایی جز پایه ده در زمانی در گذشته.
 ۳/۱ مزایا و معایب پایه‌های غیر از ده.
 ۴/۱ تاریخچه نوشت افزار.
 ۵/۱ منازعه طرفداران چرتکه با الگوریست‌ها.
 ۶/۱ اعداد انگشتی و حساب انگشتی.
 ۷/۱ حساب با چرتکه.
 ۸/۱ کیبوی باستان.
 ۹/۱ حساب مایایی.
 ۱۰/۱ چوبخط.
 ۱۱/۱ صفر با بلیها.
 ۱۲/۱ سه به نشانه جمع.
 ۱۳/۱ تابوهای عددی.
 ۱۴/۱ راز سنگ کتزینگتون.
 ۱۵/۱ برخی مبداهای تخیل آمیز علامتهای عددی امروزی.
 ۱۶/۱ مسابقه‌هایی بین چرتکه و ماشین حساب رومیزی.

کتابنامه*

- ANDREWS, F. E., *New Numbers*. New York: Harcourt, Brace & World, 1935.
 BALL, W. W. R., and H. S. M. COXETER, *Mathematical Recreations and Essays*. 11th ed. New York: Macmillan, 1939.
 CAJORI, FLORIAN, *A History of Mathematical Notations*. 2 vols. Chicago: Open Court Publishing, 1928-29.
 CONANT, L. L., *The Number Concept, Its Origin and Development*. New York: Macmillan, 1923.
 CUNNINGTON, SUSAN, *The Story of Arithmetic, A Short History of Its Origin and Development*. London: Swan Sonnenschein, 1904.
 DANTZIG, TOBIAS, *Number, The Language of Science*. New York: Macmillan, 1946.
 FREITAG, H. T., and A. H. FREITAG, *The Number Story*. Washington: National Council of Teachers of Mathematics, 1960.
 GALLENKAMP, CHARLES, *Maya*. New York: McKay, 1959.
 GATES, W. E., *Yucatan Before and After the Conquest*, by Friar Diego de Landa, etc. Translated with notes. Maya Society Publication No. 20, Baltimore: The Maya Society, 1937.
 GLASER, ANTON, *History of Binary and Other Nondecimal Numeration*. Published by Anton Glaser, 1237 Whitney Road, Southampton, Pennsylvania 18966, 1971.
 HILL, G. F., *The Development of Arabic Numerals in Europe*. New York: Oxford University Press, 1915.

1. Kensington

* به عنوان متممی بر این کتابنامه و کتابنامه‌های فصول آتی، به کتابنامه عمومی، صفحه ۳۶۵ [جلد ۲] مراجعه کنید.

- KARPINSKI, LOUIS CHARLES, *The History of Arithmetic*. New York: Russell & Russell, 1965.
- KRAITCHIK, MAURICE, *Mathematical Recreations*. New York: W. W. Norton, 1942.
- LARSON, H. D., *Arithmetic for Colleges*. New York: Macmillan, 1950.
- LOCKE, L. LELAND, *The Ancient Quipu or Peruvian Knot Record*. New York: American Museum of Natural History, 1923.
- MENNINGER, KARL, *Number Words and Number Symbols, A Cultural History of Numbers*. Cambridge, Mass.: The M.I.T. Press, 1969.
- MORLEY, S. G., *An Introduction to the Study of the Maya Hieroglyphs*. Washington: Government Printing Office, 1915.
- , *The Ancient Maya*. Stanford, Calif.: Stanford University Press, 1956.
- ORE, OYSTEIN, *Number Theory and Its History*. New York: McGraw-Hill, 1948.
- PULLAN, J. M., *The History of the Abacus*. New York: Praeger, 1968.
- RINGENBERG, L. A., *A Portrait of 2*. Washington: National Council of Teachers of Mathematics, 1956.
- SMELTZER, DONALD, *Man and Number*. New York: Emerson Books, 1958.
- SMITH, D. E., *Number Stories of Long Ago*. Washington: National Council of Teachers of Mathematics, 1958.
- , and JEKUTHIEL GINSBURG, *Numbers and Numerals*. Washington: National Council of Teachers of Mathematics, 1958.
- , and L. C. KARPINSKI, *The Hindu-Arabic Numerals*. Boston: Ginn, 1911.
- SWAIN, R. L., *Understanding Arithmetic*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1957.
- TERRY, G. S., *The Dozen System*. London: Longmans, Green, 1941.
- , *Duodecimal Arithmetic*. London: Longmans, Green, 1938.
- THOMPSON, J. E. S., "Maya arithmetic." *Contributions to American Anthropology and History*. vol. 36: 37-62. Washington: Carnegie Institution of Washington Publication No. 528, 1941.
- , *The Rise and Fall of Maya Civilization*. Norman, Okla: University of Oklahoma Press, 1954.
- VON HAGEN, VICTOR M., *Maya, Land of the Turkey and the Deer*. Cleveland: World Publishing, 1960.
- YOSHINO, Y., *The Japanese Abacus Explained*. New York: Dover, 1963.
- ZASLAVSKY, CLAUDIA, *Africa Counts, Number and Pattern in African Culture*. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1973.

ریاضیات بابلی و مصری

۱-۲ شرق باستان

ریاضیات اولیه برای توسعه خود به يك پایه عملی نیازمند بود و چنین پایه‌ای با پیدایش اشکال پیشرفته‌تر جامعه به وجود آمد. در امتداد برخی از رودخانه‌های بزرگ افریقا و آسیا یعنی نیل در افریقا، دجله و فرات در آسیای غربی، سند و پس از آن گنگگ در آسیای جنوبی میانه، و هوانگ‌هو^۱ و پس از آن یانگ‌تسه^۲ در آسیای شرقی بود که اشکال جدید جامعه ظاهر شدند. باخشک کردن باتلاقها، کنترل سیلاب، و آبیاری، این امکان وجود داشت که زمینهایی واقع در امتداد این رودخانه‌ها به نواحی کشاورزی ثروتمندی تبدیل شوند. طرحهای گسترده‌ای از این نوع، نه تنها این مکانهای سابقاً جدا از هم را بهم متصل کردند، بلکه مهندسی، علوم مالی، و مدیریت طرحها و مقاصدی که این طرحها برای آنها ابداع می‌شدند، توسعه دانش فنی و ریاضیات ملازم با آن را ایجاد کردند. از این رو، می‌توان گفت که ریاضیات اولیه در نواحی معینی از شرق باستان و بدو^۳ به عنوان دانشی عملی برای کمک به کارهای کشاورزی و مهندسی پدید آمده است. این کارها به محاسبه يك تقویم قابل استفاده، ایجاد دستگاههای اوزان و مقادیر برای استفاده در برداشت محصول، انبار کردن و تقسیم غذا، ایجاد روشهای نقشه برداری برای ساختن آبرها و آب بندها و برای توزیع زمین، و کسب تجربیات مالی و بازرگانی برای وضع و جمع‌آوری مالیاتها و برای مقاصد

داد و ستد نیاز داشتند.*

همچنان که دیدیم، تأکید اولیهٔ ریاضیات بر حساب عملی و مساحی بود. حرفهٔ خاصی برای پرورش، به کارگیری، و آموزش این دانش عملی به وجود آمد. مع هذا در چنین احوالی گرایش به تجرید به ناچار می‌بایست پدید می‌آمد و از آن پس علم مزبور تا حدودی به خاطر خود علم مورد مطالعه قرار گرفت. بدین طریق بود که جبر مآلاً از تکامل حساب به وجود آمد و مقدمات هندسهٔ نظری از بطن مساحی رشد یافت.

با این حال باید توجه داشت که در تمام ریاضیات شرق باستان، حتی يك مسورد از آنچه که امروزه آن را برهان می‌نامیم، نمی‌توان پیدا کرد. به جای استدلال، صرفاً توصیفی از يك سلسله عملیات وجود دارد. به شخص دستور داده می‌شود که «چنین کن و چنان کن». بعلاوه، بجز احتمالاً در چند مورد معدود، این دستورها حتی به صورت قواعد کلی داده نشده، بلکه صرفاً برای رشته‌هایی از حالات خاص به کار گرفته شده‌اند. مثلاً، در توضیح حل معادلات درجهٔ دوم، نه نحوهٔ استخراج سلسله اعمال به کار گرفته را مشاهده می‌کنیم، و نه شاهد توصیف این سلسله عملیات در قالب عبارات کلی هستیم؛ بلکه به جای آن، تعداد معتابیهی از معادلات درجهٔ دوم عرضه می‌شود و در هر مرحله گفته می‌شود که هر يك از این موارد خاص را چگونه حل کنیم. روشهای «چنین کن و چنان کن» هر چند که نامقبول به نظر آیند، نباید تعجب آور باشند، زیرا که اینها تا حد زیادی همان روشهایی هستند که خود ما اغلب در تدریس قسمتهایی از ریاضیات در دبستانها و دبیرستانها به کار می‌بریم.

در تعیین قدمت اکتشافاتی که در شرق باستان به عمل آمده است، مشکلاتی وجود دارد. یکی از این مشکلات در ماهیت ایستای ساخت اجتماعی و انزوای طولانی برخی نواحی نهفته است. مشکل دیگر معلول جنس موادی است که کشفیات بر آنها ثبت می‌شدند. بابلها از لوحهای سفالی پر دوام استفاده می‌کردند و مصریها سنگ و پاپیروس را به کار می‌بردند، که خوشبختانه این دو می‌به علت آب و هوای فوق‌العاده خشک منطقه پر دوام بود. اما چینیان و هندیان اولیه از وسایل کاملاً بی‌دوام مانند پوست درخت و خیزران استفاده می‌کردند. بدین ترتیب در حالی که اکنون کمیت نسبتاً قابل ملاحظه‌ای از اطلاعات قطعی راجع به

* فرضیهٔ دیگری وجود دارد که ریشهٔ ریاضیات را در شعائر مذهبی می‌داند و نقش کشاورزی، داد و ستد، و مساحی را در مراحل بعد قرار می‌دهد. رجوع کنید به

A. Seidenberg, "The ritual origin of geometry," *Archive for History of Exact Sciences*, 1 (1962), pp. 488–527, and "The ritual origin of counting," *Archive for History of Exact Sciences* 2 (1962), pp. 1–40.

می‌توان فرضیهٔ دیگری هم اقامه کرد که مبدأ ریاضیات را در هنر، زبان جهان‌شمول انسان، بداند. یا آیا ریاضیات پیش از پیدایش انسان، سرچشمه در دنیای حیوانات، حشرات، و نباتات داشته است؛ یا ریشهٔ آن در سحابیهایی مارپیچی، مسیرهای سیارات و ستارگان دنباله‌دار، و تبلور اجسام کانی در دورهٔ مقدم بر مواد آلی بوده است؛ یا آیا ریاضیات همواره موجود و صرفاً منتظر اکتشاف بوده است؟

علوم و ریاضیات بابلیان و مصریان باستان موجود است، درباره این مطالعات در چین و هند باستان اطلاعات کمی، ولو با میزان قطعیت اندک، وجود دارد. از این رو فصل حاضر، که عمدتاً بدریاضیات در قرنهای پیش از دوره ریاضیات یونانی اختصاص دارد، محدود به بابل و مصر خواهد بود.

بابل

۲-۳ منابع

باستان‌شناسانی که در بین‌النهرین کار می‌کنند، از قبل از اواسط قرن نوزدهم تاکنون حدود نیم میلیون لوح سفالی منقوش را به طور منظم از زیر خاک در آورده‌اند. بالغ بر ۵۰۰۰۰ لوح تنها در محل شهر باستانی نیپور در حفاریها به دست آمده است. مجموعه‌های نفیس کثیری از این لوحها، نظیر مجموعه‌های موزه‌های بزرگ پاریس، برلین، ولندن، ودر نمایشگاههای بلستان‌شناسی دانشگاههای ییل، کلمبیا و پنسیلوانیا، موجودند. اندازه لوحها متفاوت است و بین آنها از لوحهایی به مساحت چند اینچ مربع گرفته تا لوحهایی تقریباً به ابعاد کتاب حاضر وجود دارد که ضخامت این لوحهای بزرگ در وسط، در حدود یک اینچ و نیم است. گاهی نوشته تنها در یک طرف، گاهی در دو طرف، و اغلب بر لبه‌های پخ لوح ظاهر می‌شود.

از نیم میلیون لوح، تقریباً ۳۰۰ تا به عنوان لوحهای صرفاً ریاضی شناسایی شده‌اند که شامل جداول و سیاهه‌هایی از مسائل ریاضی‌اند. ما دانش خود را از ریاضیات بابلی* باستان مدیون کشف رمز و تفسیر فاضلانۀ عدۀ بسیاری از این لوحهای ریاضی هستیم. تا پیش از سال ۱۸۰۰ کوششی برای کشف رمز خط میخی به عمل نیامد، و در این سال عده‌ای مسافر اروپایی متوجه کتیبه‌هایی شدند که در کنار نقوش برجسته در حدود ۳۰ پایی از سطح زمین بر صخره‌های آهکی عظیمی نزدیک دهکده بیستون، در شمال غرب ایران کنونی، کنده شده بودند. معمای کتیبه‌ها سرانجام توسط سر هنری کرسویک رالینسون^۲ (۱۸۹۵-۱۸۱۰)، دیپلمات و آشورشناس کشف شد که او کلیدی را که باستان‌شناس و زبان‌شناس آلمانی گئورگ فریدریش گروتفند^۳ (۱۸۵۳-۱۷۷۵) پیشنهاد کرده بود، تکمیل کرد.

با به وجود آمدن توانایی لازم برای خواندن متون میخی لوحهای بابلی حفاری شده،

1. Nippur

* باید توجه شود که واژه توصیفی بابلی صرفاً برای سهولت امر به کار می‌رود، و اقوام دیگری علاوه بر بابلیها - مانند سومریها، اکدیها (Akkadians)، کلدانیها، آسوریها، و سایر اقوام عهد باستان که ساکن آن منطقه بودند - نیز مشمول این اصطلاح می‌شوند.

2. Sir Henry Creswicke Rawlinson 3. Georg Friedrich Grotefend

معلوم شد که این لوحها ظاهراً به کلبهٔ مراحل و علایق زندگی آن اعصار مربوط بوده و ادوار مختلف تاریخ بابل را شامل می‌شوند. برخی متون ریاضی وجود دارد که سابقهٔ آنها به دورهٔ نهایی سومری، احتمالاً در ۲۱۰۰ ق.م. می‌رسد؛ دومین گروه که گروه بسیار بزرگی است به سلسلهٔ بابلی اول که جانشین آنها شدند، یعنی به دوره‌ای از شاه حمورابی^۱ تا حدود ۱۶۰۰ ق.م. برمی‌گردد؛ و گروه پرشمار سومی که به سالهای ۶۰۰ ق.م. تا ۳۰۰ ب.م. مربوط می‌شود و امپراطوری بابلسی جدید نبوکدنصر^۲ [بخت‌انصر] و دوره‌های بعدی پارسی و سلوکی را در برمی‌گیرد. خلاصهٔ بین دومین و سومین گروه با یک دورهٔ به‌ویژه بحرانی از تاریخ بابل انطباق می‌یابد. قسمت عمدهٔ دانش ما از محتویات این لوحهای ریاضی به بعد از سال ۱۹۳۵ مربوط می‌شود و عمدتاً مرهون اکتشافات قابل تحسین اوتونوگه باوئر^۳ و ف. تورو-دانژن^۴ است. از آنجا که کار تفسیر این لوحها هنوز در دست اقدام است، کشفیات جدید، و شاید چشمگیری در آیندهٔ نزدیک بسیار محتمل است.

۳-۲ ریاضیات بازرگانی و ارضی

حتی قدیمترین لوحها نشانی از مهارت در محاسبه در سطحی عالی داشته و وجود دستگاه موضعی شصتگانی [ستینی] را طی مدت زمانی طولانی آشکار می‌کنند. متون متعددی از این دورهٔ اولیه که به واگذاری مزارع و محاسبات حسابی بر پایهٔ این معاملات می‌پردازند، در دست است. این لوحها نشان می‌دهند که سومریهای باستان با کلیهٔ انواع قراردادهای رسمی و غیر رسمی، مانند صورت حساب، رسید، سفته، حساب، مراهجهٔ ساده و مرکب، رهن، قباله، و ضمانت آشنا بوده‌اند. لوحهایی وجود دارند که اسناد شرکتی بازرگانی اند، و لوحهای دیگری که با دستگاههای اوزان و مقادیر سروکار دارند.

بسیاری از عملیات حسابی به کمک جداول مختلف انجام می‌شد. از ۳۰۰ لوح ریاضی در حدود ۲۰۰ تایشان لوحهای جدولی اند. این لوحهای جدولی، جداول ضرب، جداول عکسها، جداول مربعات و مکعبات، و حتی جداول توان را نشان می‌دهند. جداول اخیر احتمالاً، همراه با درونیایی، در مسائل راجع به ربح مرکب به کار می‌رفتند. جداول عکسها برای تحویل تقسیم به ضرب مورد استفاده بودند.

گواه این امر که تقویم مورد استفادهٔ بابلیها در اعصار قدیمتر ایجاد گردیده بود، این حقایق اند که سال آنها با اعتدال ربیعی شروع می‌شد و بر اولین ماه نام‌نور^۵ نهاده شده بود. از آنجا که در این اعتدال در حدود سال ۴۷۰۰ ق.م. خورشید در برج ثور بود، به جرات می‌توان گفت که بابلیها از همان هزاره‌های چهارم یا پنجم قبل از میلاد، نوعی حساب داشته‌اند.

-
1. Hammurabi
 2. Nebuchadnezzar
 3. Otto Neugebauer
 4. F. Thureau-Dangin
 5. Taurus



۴-۲ هندسه

هندسهٔ بابلی پیوند نزدیکی با مساحتی عملی دارد. از مثالهای عینی متعدد چنین برمی آید که بابلیهای ۲۵۰۰ تا ۱۶۰۰ ق.م. بایستی با قواعد کلی محاسبهٔ مساحت مستطیل، مساحت مثلثهای قائم الزاویه و متساوی الساقین (و شاید مثلث کلی)، مساحت ذوزنقهٔ قائم الزاویه، حجم مکعب مستطیل، و کلیتر از آن، حجم منشور قائمی که قاعدهٔ آن ذوزنقهٔ خاصی است، آشنا بوده باشند. محیط دایره سه برابر قطر و مساحت آن یک دوازدهم مجذور محیط گرفته می‌شد (که هر دو به ازای $\pi = 3$ درست اند)، و حجم استوانهٔ مستدیر قائم باید ا کردن حاصل ضرب قاعده در ارتفاع به دست می‌آمد. حجم مخروط ناقص یا هرم ناقص مربع القاعده به غلط به صورت حاصل ضرب ارتفاع در نصف مجموع قاعده‌ها داده می‌شد. بابلیها همچنین می‌دانستند که اضلاع متناظر در دو مثلث قائم الزاویه مشابه متناسب اند و اینکه عمود رسم شده از رأس مثلث متساوی الساقین قاعده را نصف می‌کند، همچنین می‌دانستند که زاویهٔ محاط در یک نیمدایره قائمه است. قضیهٔ فیثاغورس نیز بر آنها معلوم بود. (در این خصوص به بخش ۲-۶ رجوع کنید.) لوح نویافته‌ای وجود دارد که در آن از $\frac{3}{8}$ به عنوان تقریب π استفاده شده است (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۵.۲ (ج)).

جنبهٔ عمدهٔ هندسهٔ بابلی در ماهیت جبری آن است. مسائل بفرنجتری که در قالب اصطلاحات هندسی آمده‌اند، اساساً مسائل نابدهی جبری اند. نمونه‌ای از این گونه مسائل را می‌توانید در مطالعهٔ مسئله‌ای ۳.۲ بیابید. مسائل متعددی راجع به خط قاطع موازی با یک

ضلع مثلث قائم الزاویه وجود دارند که منجر به معادلات درجه دوم می شوند؛ مسائل دیگری وجود دارند که منتهی به دستگاه معادلات می شوند، و در يك مورد ده معادله باده مجهول به دست می آید. لوحی در دانشگاه ییل وجود دارد که احتمالاً مربوط به ۱۶۰۰ ق.م. است و در آن يك معادله درجه سوم کلی در بحث هرهای ناقص پیش می آید که نتیجه حذف z از دستگاه معادلات از نوع زیر می باشد

$$z(x^2 + y^2) = A, \quad z = ay + b, \quad x = c.$$

تقسیم محیط دایره به ۳۶۰ جزء مساوی را بدون تردید به بابلیهای عهد باستان مدیونیم. توضیحات عدیده ای در توجیه انتخاب این عدد ارائه شده است، اما هیچیک سوجه تراز آنچه در زیر می آید، و اوتونوگه باوثر نیز از آن هواداری کرده، نیست. در دوره های آغازین سومری، واحد بزرگی برای اندازه گیری فاصله، که نوعی میل بابلی بود، تقریباً معادل هفت مایل امروزی، وجود داشت. چون میل بابلی برای اندازه گیری فاصله های طولانی به کار می رفت، بالطبع می بایست به صورت واحد زمان، یعنی، زمانی که برای پیمودن يك میل بابلی لازم است، نیز درمی آمد. بعدها، در حوالی هزاره اول قبل از میلاد، وقتی که نجوم بابلی به مقامی رسید که سوابق پدیده های سماوی به طور منظم نگهداری می شدند، میل زمانی بابلی برای اندازه گیری فواصل زمان مورد پذیرش قرار گرفت. چون مشاهده گردید که يك شبانه روز مساوی ۱۲ میل زمانی است و يك شبانه روز معادل يك چرخش کامل آسمان است، هر دوره کامل به ۱۲ جزء مساوی تقسیم گردید. اما، برای سهولت، میل بابلی به ۳۰ جزء مساوی تقسیم گردیده بود. بدین ترتیب به $30(12) = 360$ جزء مساوی برای يك دور کامل می رسمیم.

۵-۲ جبر

تا سال ۲۰۰۰ ق.م. حساب بابلی به جبری بیانی، یا منشور متکامل گشته بود. نه تنها معادلات درجه دوم، هم باروشی که معادل جایگزینی دريك فرمول کلی است و هم از راه مربع کامل کردن حل شده بودند، بلکه برخی معادلات درجه سوم و درجه چهارم نیز مورد بحث قرار گرفته بودند. لوحی پیدا شده که نه تنها جدولی از مربعات و مکعبات اعداد درست از ۱ تا ۳۰، بلکه همچنین جدولی از ترکیب $n^3 + n^2$ را برای این فاصله به دست می دهد. تعدادی مسئله داده شده اند که به معادلات درجه سومی از نوع $x^3 + x^2 = b$ منجر می شوند. این معادلات را می توان با استفاده از جدول $n^3 + n^2$ حل کرد. مطالعه مسئله ای ۴۰۲ راجع به موارد استفاده ممکن این جدول خاص است.

برخی لوحهای مربوط به ۱۶۰۰ ق.م. در دانشگاه ییل وجود دارند که صدها مسئله حل نشده را ذکر کرده اند. این مسائل متضمن دستگاه معادلاتی هستند که حل آنها منجر به معادلات دو مجذوری می شود. به عنوان مثال داریم

$$xy = 600, \quad 150(x - y) - (x + y)^2 = -1000.$$

به عنوان مثال دیگری از همان لوحها، يك جفت معادله به صورت زیر را داریم

$$xy = a, \quad bx^2/y + cy^2/x + d = 0$$

که به معادله‌ای درجه ششم بر حسب x ، اما درجه دوم نسبت به x^3 ، منجر می‌شود. نوگه باوثر دو مسئله جالب راجع به سریها را بر لوحی مربوط به حدود ۳۰۰ ق.م. در موزه لوور پیدا کرده است. یکی از آنها بیان می‌کند که

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^9 = 2^9 + 2^9 - 1$$

و در لوح دیگر آمده است که

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 = \left[1 \left(\frac{1}{3} \right) + 10 \left(\frac{2}{3} \right) \right] 55 = 385.$$

برما روشن نیست که آیا بابلیها با فرمولهای

$$\sum_{i=0}^n r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

و

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{2n+1}{3} \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

آشنا بوده‌اند یا نه. اولین این دو برای یونانیان آن عصر معلوم بود، و ارشمیدس عملاً معادلی برای دومی پیدا کرد.

بابلیها تقریبهای جالب توجهی برای جذر اعداد غیر مربع، مانند $17/12$ برای $\sqrt{2}$ و $17/24$ برای $1/\sqrt{2}$ ارائه کردند. شاید بابلیها از فرمول تقریب

$$(a^2 + h)^{1/2} \approx a + h/2a$$

استفاده می‌کرده‌اند. تقریب بسیار قابل توجهی برای $\sqrt{2}$ ، به صورت

$$1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 = 1.4142155$$

است که بر لوح شماره ۷۲۸۹ دانشگاه ییل، مربوط به حدود ۱۶۰۰ ق.م. دیده می‌شود. جداول نجومی مربوط به قرن سوم قبل از میلاد موجودند که در آنها به طور آشکاری از قاعده علامتها در ضرب استفاده شده است.

به طور خلاصه، نتیجه می‌گیریم که بابلیهای باستان جدول‌سازهای خستگی‌ناپذیر، محاسبین چیره‌دست، و به طور قطع در جبر قویتر از هندسه بوده‌اند. عمق و تنوع مسائلی که مورد مطالعه آنها قرار گرفته، بی‌شک مایهٔ اعجاب است.

۲-۶ پلیمپتن ۳۲۲

شاید مهمترین لوح ریاضی که تاکنون تجزیه و تحلیل شده، لوحی باشد که به پلیمپتن ۳۲۲ معروف است، بدین معنی که این لوح فقره‌ای است به شماره کاتالوگ ۳۲۲ در مجموعه ج. ا. پلیمپتن^۱ در دانشگاه کلمبیا. این لوح به خط بابلی قدیم نوشته شده، که قدمتی بین ۱۹۰۰ تا ۱۶۰۰ ق.م. دارد، و برای اولین بار توسط نوگه باوئر و زاکس^۲ در سال ۱۹۴۵ توصیف شده است.*

شکل ۴ تصویری از این لوح را به دست می‌دهد. متأسفانه قسمتی از سرتاسر لبه چپ شکسته و گم شده، و یک لب پریدگی عمیق نزدیک قسمت میانی لبه راست و ناحیه پوسته

۱۱۹	۱۶۹	۱
۲۳۶۷	۴۸۲۵	(۱۱۵۲۱) ۲
۴۶۰۱	۶۶۴۹	۳
۱۲۷۰۹	۱۸۵۴۱	۴
۶۵	۹۷	۵
۳۱۹	۴۸۱	۶
۲۲۹۱	۳۵۴۱	۷
۷۹۹	۱۲۴۹	۸
۴۸۱ (۵۴۱)	۷۶۹	۹
۴۹۶۱	۸۱۶۱	۱۰
۴۵	۷۵	۱۱
۱۶۷۹	۲۹۲۹	۱۲
۱۶۱ (۲۵۹۲۱)	۲۸۹	۱۳
۱۷۷۱	۳۲۲۹	۱۴
۵۶	۱۰۶ (۵۳)	۱۵

شکل ۴

1. G. A. Plimpton 2. Sachs

* مطالعه مبسوطی از این لوح اخیراً توسط یوران فریبرگ (Jöran Friberg) انجام شده است. نگاه کنید به

"Methods and traditions of Babylonian mathematics," *Historia Mathematica* 8, no. 3, (August 1981): 277-318.



پلیمپتن ۳۲۲. (دانشگاه کلمبیا)

پوسته شده‌ای در گوشه بالای سمت چپ صدمه بیشتری به آن زده‌اند. در موقع معاینه، پلورهایی از انواع چسب امروزی در امتداد لبه شکسته سمت چپ لوح مشاهده شد. این، می‌رساند که لوح احتمالاً در موقع حفاری کامل بوده و بعداً شکسته و کوشش شده تا قطعات دوباره به هم چسبانده شوند، و قطعات مزبور بعدها از نو از هم جدا شده‌اند. بنابراین، ممکن است قطعه گمشده لوح هنوز موجود باشد، اما چون سوزنی در انبارگاه، در جایی بین این مجموعه‌های لوح‌های باستانی گم شده است. خواهیم دید که اگر این قطعه مفقود شده پیدا می‌شد، چقدر جالب می‌بود.

این لوح شامل سه ستون اساساً کامل اعداد است که، برای سهولت، در شکل ۴ با نمادگذاری دهدهی معمولی بازنویسی شده‌اند. ستون چهارمی در امتداد لبه شکسته وجود دارد که بخشی از آن ناقص است. این ستون را بعداً بازسازی خواهیم کرد.

روشن است که ستون واقع در منتهی‌الیه سمت راست صرفاً برای شمارش سطرها به کار می‌آید. در نگاه اول به نظر می‌رسد که دو ستون بعدی چندان ترتیب و معنای مشخصی نداشته باشند. اما، ضمن مطالعه معلوم می‌شود که اعداد متناظر در این ستونها بجز در چهار مورد استثنایی نامقبول، تشکیل وتر و ساق مثلث قائم‌الزاویه‌ای را می‌دهند که اضلاع آن مقادیر صحیح دارند. چهار مورد استثنایی شکل ۴ با قراردادن مقادیر اولیه در داخل پراوتری در سمت راست مقادیر تصحیح شده، ذکر شده‌اند. برای مورد استثنایی واقع در

سطر دوم توضیح پیچیده‌ای داده شده است^۵، ولی علت سه استثنای دیگر را به سادگی می‌توان بیان کرد. مثلاً، در سطر نهم، ۴۸۱ و ۵۴۱ در دستگاه شصتگانی به صورت (۸،۱) و (۹،۱) ظاهر می‌شوند. ظهور ۹ به جای ۸ به روشنی می‌تواند تنها ناشی از لغزش قلم در موقع نوشتن این اعداد به خط میخی باشد. عدد واقع در سطر ۱۳ مجدداً مقدار تصحیح شده است، و عدد واقع در سطر آخر نصف مقدار تصحیح شده است.

مجموعه‌ای از سه عدد صحیح مثبت، مانند (۵، ۴، ۳)، که می‌تواند اضلاع يك مثلث قائم‌الزاویه باشد، به سه‌تایی فیثاغورسی معروف است. همچنین، در صورتی که سه‌تایی مزبور شامل هیچ عامل مشترك صحیحی بجز واحد نباشد، سه‌تایی فیثاغورسی اولیه نامیده می‌شود. مثلاً (۵، ۴، ۳) يك سه‌تایی اولیه است، در حالی که (۱۰، ۸، ۶) چنین نیست. یکی از دستاوردهای ریاضی متجاوز بريك هزاره بعد از زمان لوح پلیمپتن نشان دادن این مطلب بود که کلیه سه‌تاییهای فیثاغورسی اولیه (c, b, a) به صورت پارامتری به وسیله روابط

$$a = 2uv, \quad b = u^2 - v^2, \quad c = u^2 + v^2$$

داده می‌شوند که در آنها u و v نسبت به هم اول‌اند، دارای زوجیت متفاوت هستند، و $u > v$. مثلاً، اگر $u = 2$ و $v = 1$ ، سه‌تایی اولیه $a = 4$ ، $b = 3$ ، $c = 5$ را به دست می‌آوریم.

فرض کنید که بخواهیم a ، ساق دیگر مثلثهای قائم‌الزاویه به اضلاع صحیح را محاسبه کنیم که با وتر c و ساق b مفروض در لوح پلیمپتن معین می‌شوند. سه‌تاییهای فیثاغورسی جدول صفحه بعد را پیدا خواهیم کرد. ملاحظه می‌شود که همه این سه‌تاییها، بجز آنها که در سطرهای ۱۱ و ۱۵ واقع‌اند، سه‌تاییهای اولیه‌اند. برای سهولت بحث، مقادیر پارامترهای u و v را نیز که به این سه‌تاییهای فیثاغورسی منجر می‌شوند، در جدول آورده‌ایم. شواهد خوبی گویای آن‌اند که بابلیهای آن دوره دیرین با نمایش کلی پارامتری سه‌تاییهای فیثاغورسی اولیه، به گونه‌ای که در بالا نشان داده شده، آشنا بوده‌اند. این شواهد زمانی تقویت می‌شوند که توجه کنیم u و v ، و لذا a نیز (چون $a = 2uv$)، اعداد شصتگانی منظمی هستند (به مطالعه مسئله‌ای ۱۰۴ رجوع کنید) به نظر می‌رسد که جدول روی لوح با انتخاب سنجیده اعداد منظم کوچک برای پارامترهای u و v تشکیل شده باشد.

قاعدتاً انگیزه انتخاب u و v به صورت فوق، بایستی عمل بعدی که متضمن تقسیم است بوده باشد. زیرا اعداد منظم در جداول معکوسها ظاهر می‌شوند و برای تحویل تقسیم به ضرب به کار می‌روند. بررسی ستون چهارم که نیمی از آن از بین رفته است،

* رجوع کنید به

R.J. Gillings, *The Australian Journal of Science*, 16(1953), pp. 34-36.

یا

Otto Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*, 2nd ed., 1962.

a	b	c	u	v
۱۲۰	۱۱۹	۱۶۹	۱۲	۵
۳۴۵۶	۳۳۶۷	۴۸۲۵	۶۴	۲۷
۴۸۰۰	۴۶۰۱	۶۶۴۹	۷۵	۳۲
۱۳۵۰۰	۱۲۷۰۹	۱۸۵۴۱	۱۲۵	۵۴
۷۲	۶۵	۹۷	۹	۴
۳۶۰	۳۱۹	۴۸۱	۲۰	۹
۲۷۰۰	۲۲۹۱	۳۵۴۱	۵۴	۲۵
۹۶۰	۷۹۹	۱۲۴۹	۳۲	۱۵
۶۰۰	۴۸۱	۷۶۹	۲۵	۱۲
۶۴۸۰	۴۹۶۱	۸۱۶۱	۸۱	۴۰
۶۰	۴۵	۷۵	۲	۱
۲۴۰۰	۱۶۷۹	۲۹۲۹	۴۸	۲۵
۲۴۰	۱۶۱	۲۸۹	۱۵	۸
۲۷۰۰	۱۷۷۱	۳۲۲۹	۵۰	۲۷
۹۰	۵۶	۱۰۶	۹	۵

پاسخ را می‌دهد. زیرا دیده می‌شود که این ستون شامل مقادیر $(c/a)^2$ برای مثلثهای مختلف است. برای انجام این تقسیم، ضلع a ، و در نتیجه اعداد u و v ، باید منظم می‌بودند. جا دارد که ستون مقادیر $(c/a)^2$ را قدری دقیقتر بررسی کنیم. البته، این ستون جدولی است که مجذور سکانت زاویه B مقابل به ضلع b از مثلث قائم‌الزاویه را به دست می‌دهد. چون ضلع a منظم است، $\sec B$ دارای بسط شخصگانی متناهی است. بعلاوه، با انتخاب خاص مثلثها به صورتی که داده شده، چنین نتیجه می‌شود که مقادیر $\sec B$ دنباله‌ای بانظم شگفت‌انگیز تشکیل می‌دهند که وقتی از سطری به سطر دیگر جدول می‌رویم، تقریباً درست به اندازه $1/60$ کاهش می‌یابند، و زاویه متناظر از 45° به 31° تنزل می‌یابد. بدین ترتیب یک جدول سکانت برای زوایای از 45° تا 31° در دست داریم که به کمک مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع صحیح ساخته شده‌است و در آن به جای زاویه متناظر، تابع دارای جهش منظمی است. همه اینها در واقع درخسور توجه‌اند. بسیار محتمل به نظر می‌رسد که جداول دیگری همراه آنها با اطلاعات مشابهی برای زوایای بین 30° تا 16° و از 15° تا 1° موجود بوده‌اند.

این تجزیه و تحلیل لوح پلیمپتن به شماره ۳۲۲ لزوم توجه دقیقی را که باید به برخی از لوحهای ریاضی بابلی معطوف شود، نشان می‌دهد. سابقاً، ممکن بود که چنین لوحی را به تصور اینکه صرفاً یک فهرست یا سند بازرگانی است با بی‌توجهی کنار گذارند.

مصر

۲-۷ منابع و تاریخها

ریاضیات مصر باستان، برخلاف اعتقاد عموم، هرگز به سطحی که ریاضیات بابلی به آن نایل شد، نرسید. شاید این امر معلول توسعه پیشرفته‌تر اقتصادی بابل بوده باشد. بابل بر سر راه تعدادی جاده‌های کاروان‌رو بزرگ قرار داشت، در حالی که مصر نیمه‌منزوی بود. نیل نسبتاً آرام هم نیازمند مهندسی و امور اداری چندان گسترده‌ای در حد رودخانه‌های با جریان متغیر دجله و فرات نبود.

با این حال، تاکشف رمز تعداد زیادی لوح ریاضی بابلی در این اواخر، مصر برای مدت مدیدی غنیترین منبع پژوهشهای تاریخی عهد باستان بود. دلایل این امر در احترامی که مصریان برای مردگان خود قایل بودند و در آب و هوای آن ناحیه که به‌طور نامعمول خشک بود، نهفته است. اولی منجر به بنای قبور و معابد دیرپا با دیوارهایی پراز نقش و نگار گردید و دومی در حفظ بسیاری از پاپیروسها و اشیایی که در غیر این صورت از بین می‌رفتند، نقش برجسته‌ای داشت.

در زیر، فهرستی گاهشناختی، از برخی نمونه‌های برجسته که مطالبی از ریاضیات مصر باستان را در خود دارند، می‌آید.

۱. ۳۱۵۵ ق.م. در موزه‌ای واقع در آکسفورد يك گرز سلطنتی مصری به همین قدمت وجود دارد. در روی گرز اعدادی از مرتبهٔ میلیون و صد هزار، نوشته شده به هیروگلیفی مصری، موجودند که نتایج يك لشکرکشی موفقیت‌آمیز نظامی بر آنها ثبت شده است.

۲. ۲۹۵۵ ق.م. هر م بزرگ جیزه^۱ در حدود سال ۲۹۵۵ ق.م. برپا گردید و بدون شك ساختن آن متضمن برخی مسائل ریاضی و مهندسی بود. این بنا ۱۳ جریب^۲ رمی پوشاند و مشتمل بر ۲۵۰۰۰۰۰۰ قطعه سنگ است که وزن متوسطی برابر ۲۵ تن دارند و بادقت بسیار باهم جفت شده‌اند. این قطعه سنگها از معادن سنگ سیاه واقع در آن سوی نیل آورده شده بودند. سقف بعضی از اتاقها از قطعات سنگ خاراى ۵۴ تنی، به طول ۲۷ فوت و ضخامت ۴ فوت ساخته شده‌اند که از معدن سنگی واقع در فاصلهٔ ۶۰۰ مایلی به آنجا کشیده و در ارتفاع ۲۰۰ فوتی از سطح زمین نصب شده‌اند. گزارش شده است که خطای نسبی در قاعدهٔ مربع شکل، کمتر از $1/14000$ و خطای نسبی در زوایای قائمهٔ گوشه‌ها از $1/27000$ تجاوز نمی‌کند. درجهٔ مهارت مهندسی که این آمار تکان‌دهنده مستلزم آن است به‌طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد وقتی که پی بریم این مهم توسط يك سپاه ۱۰۰۰۰۰ نفری از کارگران که به مدت ۲۰ سال کار کرده‌اند، انجام شده است.

۳. ۱۸۵۰ ق.م. این تاریخ تقریبی پاپیروس مسکو است، متنی ریاضی مشتمل بر ۲۵ مسئله که در همان موقع تدوین نوشتهٔ مزبور قدیمی بوده‌اند. پاپیروس مسکو در ۱۸۹۳ در مصر خریداری و در ۱۹۳۵ با توضیحات و براستاری منتشر گردید. این پاپیروس ۱۸ فوت

درازا و در حدود ۳ اینچ پهنا دارد.

۴. ۱۸۵۰ ق.م. سابقه قدیمترین وسیله نجومی موجود که ترکیبی از يك شاقول و میله دیدگری است، به همین تاریخ برمی گردد و در موزه برلین نگهداری می شود.

۵. ۱۶۵۰ ق.م. این تاریخ تقریبی پاپیروس ریند (یا احمس) است، يك متن ریاضی که تاحدی ماهیت يك کتاب راهنما را دارد و شامل ۸۵ مسئله است که به خط هیراتی به وسیله احمس کاتب از روی يك اثر قدیمتر نسخه برداری شده است. این پاپیروس در ۱۸۵۸ به وسیله مصرشناس اسکاتلندی، ا. هنری ریند^۱، در مصر خریداری شده و سپس به موزه بریتانیا رسیده است. پاپیروسهای ریند و مسکو از منابع اصلی اطلاعات ما درباره ریاضیات مصر باستان هستند. پاپیروس ریند در سال ۱۹۲۷ منتشر شد. این پاپیروس ۱۸ فوت درازا و ۱ فوت پهنا دارد.

۶. ۱۵۰۰ ق.م. بزرگترین مسئله [ستون هرمی شکل سنگی] موجود، که در مقابل معبد خورشید در تبس^۲ برپا شده، در حدود این تاریخ از معدن سنگ استخراج شد. این ستون ۱۰۵ فوت درازا دارد با پایه ای مربع شکل به ضلع ۱۰ فوت و وزن آن تقریباً ۴۳۰ تن است.

۷. ۱۵۰۰ ق.م. موزه برلین يك ساعت آفتابی مصری دارد که قدمت آن به این دوره برمی گردد و قدیمترین ساعت آفتابی موجود است.

۸. ۱۳۵۰ ق.م. پاپیروس رولن^۳ مربوط به حدود ۱۳۵۰ ق.م.، که اکنون در موزه لسور نگهداری می شود، شامل تعدادی صورتحساب دقیق نان است که استفاده عملی از اعداد بزرگ را در آن زمان نشان می دهد.

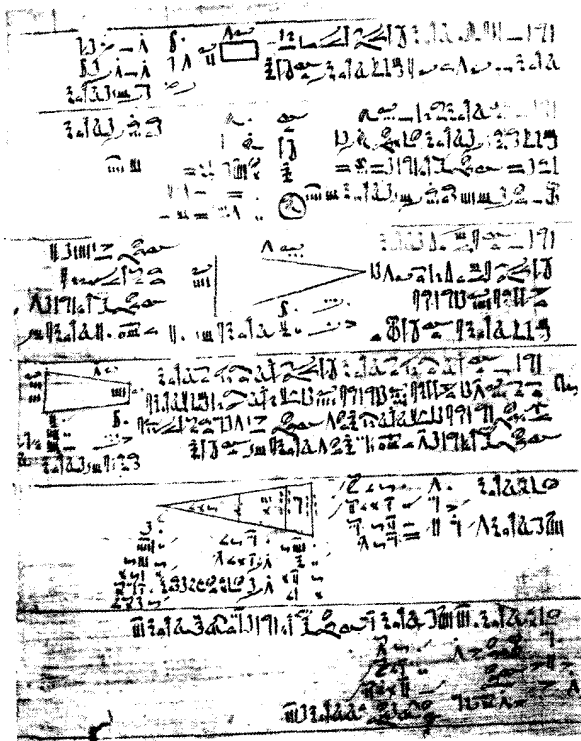
۹. ۱۱۶۲ ق.م. این تاریخ پاپیروس هریس^۴ است. سندی که رامسس^۵ چهارم در موقع جلوس به تخت شاهی تهیه کرده است. این پاپیروس شرح کارهای برجسته پدر وی، رامسس سوم است. سیاهه دارایی معبد آن عهد بهترین نمونه از حساب عملی را که از مصر باستان به ما رسیده، عرضه می کند.

منابعی از مصر باستان که مربوط به سالهای بعدتر از زمانهای فوق الذکر است دستاورد شایان توجهی را چه در دانش ریاضی و چه در فن ریاضی نشان نمی دهد. در واقع مواردی وجود دارند که مشخصاً نشان از سیر قهقراپی دارند.

۸-۲ حساب و جبر

کلیه ۱۱۰ مسئله ای که در پاپیروسهای مسکو و ریند دیده می شوند، عددی اند و عده زیادی از آنها بسیار ساده اند. اگرچه اغلب این مسائل ریشه عملی دارند، برخی از آنها نیز دارای ماهیت نظری اند.

- | | | | |
|-----------|-------------------|-----------|-----------|
| 1. Ahmes | 2. A. Henry Rhind | 3. Thebes | 4. Rollin |
| 5. Harris | 6. Rameses | | |



بخشی از پایروس ریند. (موزه بریتانیا)

يك پیامد دستگاه شمار مصری خصلت جمعی حساب وابسته به آن است. مثلا، ضرب و تقسیم معمولا با يك سلسله اعمال دو برابر سازی انجام می شد و مبتنی بر این حقیقت بود که هر عدد را می توان به صورت مجموعی از توانهای ۲ نمایش داد. به عنوان مثالی از این شیوه ضرب، حاصل ضرب ۲۶ و ۳۳ را پیدا می کنیم. چون $26 = 2 + 8 + 16$ تنها لازم است که این مضارب ۳۳ را با هم جمع کنیم. این کار را می توان به طریق زیر ترتیب داد:

۱	۳۳
*۲	۶۶
۴	۱۳۲
*۸	۲۶۴
*۱۶	۵۲۸
	۸۵۸

جمع مضارب مناسب ۳۳، یعنی آنها که با ستاره مشخص شده اند، جواب ۸۵۸ را می دهد.

همچنین، مثلاً، برای تقسیم ۷۵۳ بر ۲۶، مقسوم‌علیه یعنی ۲۶ را به‌طور پیاپی تا مرحله‌ای دو برابر می‌کنیم که دو برابر سازی بعدی از مقسوم، یعنی از ۷۵۳ متجاوز شود. نحوه‌کار در زیر نشان داده شده است.

۱	۲۶
۲	۵۲
*۴	۱۰۴
*۸	۲۰۸
*۱۶	۴۱۶
—	
۲۸	

حال، چون

$$\begin{aligned} 753 &= 416 + 337 \\ &= 416 + 208 + 129 \\ &= 416 + 208 + 104 + 25 \end{aligned}$$

با توجه به ارقام ستاره‌دار در ستون فوق، ملاحظه می‌کنیم که خارج قسمت $28 = 4 + 8 + 16$ و باقیمانده ۲۵ است. این روش مصری ضرب و تقسیم نه تنها از روش یادگیری یک جدول ضرب را منتفی می‌کند، بلکه انجام آن روی چرتکه چنان آسان است که روش مزبور تا زمانی که این وسیله مورد استفاده بود، و حتی مدتی بعد از آن، دوام آورد.

مصریان سعی کردند با نمایش دادن همه کسرها، بجز $2/3$ ، به‌صورت مجموعی از به‌اصطلاح کسرهای واحد، یا کسرهایی با صورت واحد، از برخی مشکلات محاسبه‌ای که در مواجهه با کسرها پیش می‌آیند، احتراز کنند. این تبدیل به کمک جداولی مقدور می‌گردید که کسرهای به‌شکل $2/n$ را، که به‌علت ماهیت ثنائی ضرب مصری تنها موارد ضروری بودند، به این صورت نمایش می‌دادند. پیشاپیش مسائل پاپیروس ریند چنین جداولی برای کلیه اعداد فرد از ۵ تا ۱۰۱ آمده است. مثلاً دیده می‌شود که $2/7$ به‌صورت $1/28 + 1/4 + 1/98$ ، $2/97$ به‌صورت $1/776 + 1/679 + 1/56 + 1/99$ و به صورت $1/198 + 1/66$ بیان شده، و برای هر حالت خاص فقط یک تجزیه عرضه شده است. این جدول در بعضی مسائل پاپیروس مزبور مورد بهره‌برداری قرار گرفته است.

کسرهای واحد در خط هیروگلیفی مصری با قرار دادن یک نماد بیضی‌شکل روی عدد مخرج نشان داده می‌شد. نماد خاصی نیز برای مورد استثنایی $2/3$ به‌کار می‌رفت. گاهی نماد دیگری برای نشان دادن $1/2$ ظاهر می‌گردید. این نمادها همراه با چند شمار امروزی در شکل بعد نشان داده شده‌اند.

$$\bigcirc_3 = 1/3 \quad \bigcirc_4 = 1/4$$

$$\bigcirc_2 \text{ یا } \llcorner = 1/2$$

$$\oplus = 2/3.$$

نظریه‌های جالبی در توضیح اینکه مصریان چگونه تجزیه به کسره‌های واحد را به دست آوردند، وجود دارد (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۹۰۲).

اغلب ۱۱۰ مسئله پایپروسهای ریند و مسکو از آنجا که با مسائلی راجع به قوت نان و آبجو، ترکیب خوراک برای دام و طیور خانگی، و انبار کردن غله سروکار دارند، مبدأ عملی آنها را نشان می‌دهند. اکثر آنها به چیزی بیش از یک معادله خطی ساده نیاز ندارند و عموماً با روشی حل می‌شوند که بعدها در اروپا به قاعده امتحان و تصحیح معروف گردید. به عنوان مثال، برای حل

$$x + x/7 = 24$$

مقدار مناسبی برای x در نظر بگیرید، مثلاً $x = 7$. آنگاه مقدار طرف دوم به جای ۲۴ برابر ۸ به دست می‌آید. چون ۸ باید در ۳ ضرب شود تا مقدار مورد نظر ۲۴ را عاید کند، مقدار صحیح x باید $3(7)$ ، یا ۲۱ باشد.

برخی مسائل نظری وجود دارند که متضمن تصاعد‌های حسابی و هندسی اند. (برای مثال، نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۱۲۰۲ (ج) و بخش ۲-۱۰). پایپروسی به تاریخ ۱۹۵۰ ق.م. که در کاهون^۳ پیدا شده، حاوی مسئله زیر است: «سطح مفروضی با ۱۰۰ واحد مساحت باید به صورت مجموع دو مربع که نسبت اضلاع آنها به هم مثل $3/4$ است، نشان داده شود». در این جا داریم $x^2 + y^2 = 100$ یا $x^2 = 100 - y^2$. حذف x ، معادله درجه دوم یکدستی بر حسب y به دست می‌دهد. مع هذا، می‌توانیم مسئله را به روش امتحان و تصحیح حل کنیم. مثلاً، فرض کنید $y = 4$. آنگاه $x = 3$ ، و به جای ۱۰۰ داریم، $25 = 3^2 + 4^2$. بنابراین، باید مقادیر x و y را بادو برابر ساختن مقادیر اولیه تصحیح کنیم که $x = 6$ و $y = 8$ را به دست می‌آوریم.

در جبر مصری تاحدی نمادگرایی وجود دارد. در پایپروس ریند نمادهایی را برای باضافه و منها مشاهده می‌کنیم. اولین این نمادها یک جفت پا را که در حال راه رفتن از راست به چپ، که جهت معمولی نوشتن خط مصری است و نماد دیگر یک جفت پارا که در حال راه رفتن از چپ به راست، یعنی در جهت مخالف نگارش خط مصری است، نشان می‌دهد. برای تساوی و مجهول نیز نمادها یا ایدئوگرامهایی وجود داشته‌اند.

بيست و شش مورد از ۱۱۰ مسئله موجود در پا پيروسهاى مسكو و ريند هندسى هستند. اغلب اين مسائل از فرمولهاى مساحى لازم براى محاسبه مساحت زمينها و حجم انبارهاى غله ناشى مى شوند. مساحت دايره مساوى مساحت مربعى كه روى $\frac{8}{9}$ قطر ساخته شود، و حجم استوانه قائم به صورت حاصلضرب مساحت قاعده در طول ارتفاع آن گرفته مى شود. از تحقيقات جديد به نظر مى رسد كه مصريان قديم مى دانسته اند كه مساحت هر مثلث با نصف حاصلضرب قاعده در ارتفاع داده مى شود. برخى از مسائل به كتانوانت فرجه بين قاعده و جيبى از يك هرم مى پردازند (به مطالعه مسئله اى ۱۱۰۲ رجوع كنيد)، مسائل ديگرى آشنائى مصريان را با نظريه مقدماتى تناسب نشان مى دهند. برخلاف داستانهائى مكرر و مسلماً بى اساس، هيچ دليل مستندى حاكى از اينكه مصريان حتى از حالت خاصى از قضيه فيثاغورس با اطلاع بوده اند، يافته نشده است. در منابع جديدتر مصرى، فرمول نادرست $K = (a+c)(b+d)/4$ براى پيدا كردن مساحت يك چهار ضلعى دلخواه با اضلاع متوالى به طولهاى a, b, c, d به كار رفته است.

در پا پيروس مسكو، وجود يك مثال عددى از فرمول درست حجم هرم ناقص مربع- القاعده خيلى شايان توجه است (به مطالعه مسئله اى ۱۴۰۲ (الف) رجوع كنيد). هيچ مثال ديگرى از اين فرمول كه در وثوق آن جاى ترديد نباشد، در رياضيات شرق باستان ديده نشده و جوابهاى متعددى براى شرح چگونگى پيدايش آن ابراز شده است. ات. بل^۱ از اين نخستين مثال مصرى بحق به عنوان «بزرگترين هرم مصرى» ياد مى كند.

۱۰۴ يك مسئله عجيب در پا پيروس ريند

گرچه در كشف رمز و بعداً در تفسير اغلب مسائل پا پيروس ريند مشكل كمى پيش آمد، مسئله اى (مسئله شماره ۷۹) وجود دارد كه تفسير آن چندان قطعى نيست. در اين مسئله، مجموعه عجيبى از داده ها ظاهر مى شوند كه برگردان آن به صورت زير است:

ملك	
۷	خانه
۲۹	گر به
۳۴۳	موش
۲۴۰۱	دانه گندم
۱۶۸۰۷	ميزان هكات ^۲
۱۹۶۰۷	

به سادگی می توان تشخیص داد که این اعداد پنج توان اول ۷، همراه با مجموع آنها، هستند. بدین خاطر، در وهله اول تصور شد که نویسنده در اینجا قصد ارائه نامهای نمادی خانه، گربه، و غیره را، برای توان اول، توان دوم، و غیره دارد.

با این حال، توضیح موجه تر و جالبی به وسیله موریتس کانتور^۱ مورخ، در ۱۹۰۷ داده شده است. وی در این مسئله، پیشاهنگ باستانی مسئله ای را دید که در قرون وسطی رایج بود، و لئوناردو فیبوناچی^۲ آن را در لیبر آباکی^۳ [کتاب حساب] خود آورده است. یکی از مسائل زیادی که در این اثر دیده می شود، بدین صورت است: «هفت پیرزن در راه رم هستند؛ هر زن هفت قاطر دارد؛ هر قاطر هفت توبره حمل می کند؛ هر توبره محتوی هفت قرص نسان است، با هر قرص نان هفت چاقو همراه است، و هر چاقو در هفت غلاف نهاده شده است. زنان، قاطرها، توبرهها، قرصهای نان، چاقوها، و غلافها، مجموعاً چندتا در راه رم هستند؟» به عنوان روایت دیگری از همین مسئله که جدیدتر و برای انگلیسی زبانان آشنا تر است، شعری است برای کودکان و به زبان انگلیسی قدیم بدین مضمون:

وقتی در راه سنت آیوز بودم؛

مردی را با هفت زن ملاقات نمودم؛

هر زن هفت تا توبره داشت؛

هر توبره هفت تا گربه داشت؛

هر گربه هفت تا بچه داشت.

بچه گربهها، گربهها، توبرهها، و زنهای،

چندتا راهی سنت آیوز بودند؟^۴

بنابر تفسیر کانتور، مسئله اصلی در پاپیروس ریند را شاید بتوان تا حدی به صورت زیر فرمولبندی کرد: «ملکی متشکل از ۷ خانه بود؛ هر خانه هفت گربه داشت؛ هر گربه هفت موش خورد؛ هر موش هفت دانه گندم خورد؛ هر دانه گندم قادر به تولید محصولی برابر هفت واحد هکات غله است. خانهها، گربهها، موشها، دانههای گندم، میزان غله به هکات، چندتا از اینها در مجموع در این ملک وجود داشتند؟»

پس احتمالاً در اینجا مسئله ای داریم که به عنوان قسمتی از فرهنگ معاصر دنیا محفوظ مانده است. مسلماً این مسئله در همان زمانی که احمس آن را استنساخ کرده قدیمی بوده

1. Moritz Cantor 2. Leonardo Fibonacci 3. *Liber abaci*

4. As I was going to St. Ives

I met a man with seven wives;

Every wife had seven sacks;

Every sack had seven cats;

Every cat had seven kits.

Kits, cats, sacks, and wives,

How many were going to St. Ives?

است، و آنگاه که فیوناچچی صورتی از آن را در کتاب لیبر آباکی خود نقل می‌کرده قدمت بیشتری نزدیک به سه‌هزار سال داشته است. متجاوز بر هفتصد و پنجاه سال بعد از آن، غریبان صورت دیگری از آن را برای بچه‌های خود می‌خوانند. نمی‌توان در شگفت نشد که آن تغییر خیرت آوری که در این شعر انگلیسی قدیم پیش آمده در مسئله مصر باستان نیز روی نداده باشد.

مسائل معمایی زیادی هر از چندگاه بی‌مقدمه در مجلات امروزی ظاهر می‌شوند که همتهایی قرون وسطایی دارند. تعیین قدمت بعضی از آنها اکنون تقریباً از محالات است.*

مطالعه مسئله‌ای

۱۰۲ اعداد منظم

عددی را (شصتگانی) منظم گویند اگر معکوس آن دارای بسط شصتگانی متناهی باشد. (یعنی، یک بسط متناهی وقتی که به صورت کسری مینایی در پایه ۶۰ بیان شود). به استثنای تنها یک لوح در مجموعه پیل، همه جداول عکس بابلی فقط شامل معکوسهای اعداد منظم اند. یک لوح در موزه لوور متعلق به حدود ۳۰۰ ق.م. شامل عدد منظمی با ۷ رقم شصتگانی است و معکوس آن ۱۷ رقم شصتگانی دارد.

(الف) نشان دهید یک شرط لازم و کافی برای منظم بودن n آن است که $5^c 3^b 2^a = n$ ، که در آن a, b, c اعداد صحیح نامنفی اند.

(ب) اعداد $1/2, 1/3, 1/5, 1/15, 1/360, 1/3600$ را با بسط شصتگانی متناهی نشان دهید.

(ج) حالت (الف) را به اعدادی تعمیم دهید که پایه کلی b دارند.

(د) همه اعداد منظم شصتگانی کوچکتر از ۱۰۰ را فهرست کرده، سپس همه اعداد منظم دهدهی کوچکتر از ۱۰۰ را فهرست کنید.

(ه) نشان دهید که نمایش دهدهی $1/7$ دارای دوره تناوب شش رقمی است. در دوره تناوب نمایش شصتگانی $1/7$ چند رقم وجود دارد؟

۲۰۲ ریح مرکب

لوحهایی در مجموعه‌های برلین، پیل، ولوور محتوی مسائلی در ریح مرکب وجود دارند، و چند لوح هم در استانبول موجودند که ظاهراً در اصل جداولی از a^n برای $n=1$ تا

* نگاه کنید به

$n = 10$ و $a = 9,160,100,225$ داشته‌اند. با چنین جداولی می‌توان معادلات نمایی از نوع $a^x = b$ را حل کرد.

(الف) بريك لوح لوور متعلق به حدود ۱۷۰۰ ق.م. این مسئله دیده می‌شود: مدتی را پیدا کنید که مبلغ معینی پول با ربح مرکب سالانه ۲۰ درصد دو برابر شود. این مسئله را به روشهای امروزی حل کنید.

(ب) مسئله (الف) را اول با پیدا کردن $(12)^3$ و $(12)^4$ و سپس بسایافتن x از طریق درونیابی خطی، به طوری که $2 = (12)^x$ ، حل کنید. نشان دهید نتیجه‌ای که بدین ترتیب به دست می‌آید با جواب بابلی $3;47,13,20$ این مسئله (که به صورت شصتگانی بیان شده) تطبیق می‌کند.*

۳.۴ معادلات درجه دوم

(الف) در يك مسئله بابلی، ضلع مربعی خواسته می‌شود هر گاه مساحت مربع منهای اندازه ضلع آن (در دستگاه شصتگانی) عدد $14,30$ باشد. حل مسئله چنین توصیف شده است: «نصف ۱ را اختیار کنید، که 30 است؛ 30 را در 30 ضرب کنید که 15 است؛ 15 را به $14,30$ اضافه کنید تا $15,30$ را به دست آورید. عدد اخیر مربع 30 است. حال 30 را با $29,30$ جمع کنید، نتیجه 30 است، که ضلع مربع است.» نشان دهید که این راه حل بابلی دقیقاً معادل حل معادله درجه دوم

$$x^2 - px = q$$

با گذاشتن

$$x = \sqrt{(p/2)^2 + q} + p/2$$

در فرمول فوق است.

(ب) متن بابلی دیگری برای حل معادله درجه دوم

$$11x^2 + 7x = 6;15$$

اول آن را در ۱۱ ضرب می‌کند و معادله

$$(11x)^2 + 7(11)x = 108;45$$

را به دست می‌آورد، که با قرار دادن $y = 11x$ ، «صورت نرمال»

* به عنوان مثال، عبارت

$$9(60)^2 + 20(60) + 8 + 30/60 + 10/(60)^2 + 23/(60)^3 \text{ به معنی } 9,20,8,30,10,23 \text{ است.}$$

$$y^2 + py = q$$

را دارد. این معادله را می توان با گذاشتن

$$y = \sqrt{(p/2)^2 + q} - p/2$$

در فرمول حل کرد و بالاخره، $x = y/11$.

نشان دهید که هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را می توان، با تبدیل مشابهی، به یکی از صورتهای نرمال

$$y^2 + py = q, \quad y^2 = py + q, \quad y^2 + q = py,$$

که در آن p و q هر دو نامنفی اند، تبدیل کرد. حل چنان معادله سه جمله ای درجه دوم ظاهراً خارج از قابلیت های مصریان باستان بوده است.

۴.۲ هندسه جبری

(الف) خصلت جبری مسائل هندسه بابلی با آنچه در زیر می آید، و در یک لوح موجود در استراسبورگ مربوط به حدود ۱۸۰۰ ق.م. درج شده، روشن می شود. «مساحت A ، متشکل از مجموع دو مربع، ۱۰۰۰ است. ضلع یک مربع ۱۰ واحد کمتر از $2/3$ ضلع مربع دیگر است. اضلاع مربعا چقدر هستند؟» این مسئله را حل کنید.

(ب) در یک لوح موجود در موزه لوور، متعلق به حوالی ۳۰۰ ق.م. چهار مسئله درباره مستطیلی با مساحت واحد و نصف محیط معلوم، وجود دارند. اضلاع و نصف محیط را x ، y ، و a بگیرد. در این صورت

$$xy = 1, \quad x + y = a.$$

این دستگاه را با حذف y و به دست آوردن یک معادله درجه دوم بر حسب x ، حل کنید.

(ج) دستگاه (ب) را با استفاده از اتحاد

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy$$

حل کنید. این روش، اساساً همان روش به کار رفته در لوح موزه لوور است. جالب است که این اتحاد در همان زمان به عنوان قضیه ۵ در مقاله دوم اصول اقلیدس آمده است.

(د) یک مسئله بابلی قدیم بدین صورت است: «طول یک ساق مثلث قائم الزاویه ای ۵۰ است. خطی به موازات ساق دیگر و به فاصله ۲۰ واحد از آن ساق، ذوزنقه قائم-الزاویه ای به مساحت ۲۰، ۵، از آن جدا می کند. طول قاعده های ذوزنقه چقدر است؟» این مسئله را حل کنید.

(ه) مسئله بابلی قدیم دیگری بر این ادعاست که دوزنقه متساوی الساقینی باقاعده‌های ۱۴ و ۵۰ و ساقهای ۳۰ دارای مساحت ۱۲۰۴۸ است. صحت و سقم آن را تعیین کنید.
(و) باز مسئله بابلی قدیم دیگری راجع به نردبانی به طول ۳۰؛ ۵ است که به طور عمودی کنار دیوار گذاشته شده است. مسئله عبارت است از تعیین مسافتی که انتهای پایینی از دیوار دور می‌شود، هرگاه انتهای بالایی به اندازه ۶؛ ۰ واحد به طرف پایین بلغزد. این مسئله را حل کنید.

(ز) يك لوح سلوکی مربوط به ۱۵۰۰ سال بعد، مسئله‌ای مشابه با قسمت (و) را مطرح می‌کند. در اینجا يك ساقه نی داریم که به طور قائم در مقابل دیوار نهاده شده است. مسئله طول نی را می‌خواهد در صورتی که وقتی انتهای پایینی نی ۹ واحد از دیوار دور شود، انتهای بالایی آن ۳ واحد از دیوار به پایین بلغزد. ۱۵ به عنوان جواب داده شده است. آیا این جواب درست است؟

۵.۲ لوحهای شوش

(الف) در سال ۱۹۳۶ تعدادی از لوحهای بابلی قدیم در شوش^۱، که در حدود ۲۰۰۰ مایل از بابل فاصله داشت، از خاک در آورده شدند. در یکی از این لوحها مساحت و مربعات اضلاع چند ضلعیهای منتظم ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ ضلعی باهم مقایسه شده است. در مورد پنج ضلعی، شش ضلعی، و هفت ضلعی این نسبتها به صورت ۱؛ ۴۰، ۲؛ ۳۷؛ ۳۰ و ۳؛ ۴۱ داده شده‌اند. در صحت این مقادیر تحقیق کنید.

(ب) در همان لوح قسمت (الف) نسبت محیط يك شش ضلعی منتظم به محیط دایره محیطی به صورت ۳۶؛ ۵۷؛ ۵ داده شده است. نشان دهید که این مقدار به ۳؛ ۷؛ ۳۰ یا $\frac{3}{8}$ به عنوان تقریبی برای π منتهی می‌شود.

(ج) در یکی از لوحهای شوش این مسئله دیده می‌شود: «شعاع دایره محیطی مثلثی را بیابید که اضلاع آن ۵۰، ۵۰، ۶۰ هستند.» این مسئله را حل کنید.

(د) در یکی دیگر از الواح شوش، اضلاع x و y مستطیلی با روابط زیر خواسته شده است

$$xy = 2050 \quad \text{و} \quad x^3d = 14,48,53,20$$

که در آن d یکی از اقطار مستطیل است. این مسئله را حل کنید.

۶.۲ معادلات درجه سوم

(الف) يك لوح بابلی کشف شده است که مقادیر $n^2 + n$ را برای $n = 1$ تا $n = 30$ می‌دهد. چنین جدولی را برای $n = 1$ تا $n = 90$ تشکیل دهید.

(ب) يك ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ سوم $x^3 + 2x^2 - 3136 = 0$ را، به كمك جدول بالا، بياييد.

(ج) يك مسئلهٔ با بلسی مربوط به حدود ۱۸۰۰ ق.م. ظاهراً مستلزم حل دستگاه قسمت (الف) حل كنيد.

(د) اوتسونوگه باوئر براي ن باور است كه با بليها كاملا قادر به تبديل معادلهٔ درجهٔ سوم كلي به «صورت نرمال» $n^3 + n^2 = c$ بوده اند، گرچه هنوز هيچ مدركي حاكي از اينكه آنها چنين كاري را كرده باشند، در دست نيست. نشان دهيد انجام چنين تحويلي چگونه ممكن است.

(ه) در رابطه با جدول قسمت (الف)، نوگه باوئر متذكر شده است كه با بليها احتمالا به وجود رابطهٔ $\sum_{i=1}^n i^3 = (\sum_{i=1}^n i)^2$ براي مقادير مختلف n پي برده بودند. اين رابطه را با استقراي رياضي ثابت كنيد.

۷.۲ تقریبات جذر

می دانیم که سری نامتناهی به دست آمده از بسط $(a^2 + h)^{1/2}$ به روش قضیهٔ دو جمله ای، به شرطی که $-a^2 < h < a^2$ ، به $(a^2 + h)^{1/2}$ میل می کند.

(الف) فرمول تقریب زیر را ثابت کنید.

$$(a^2 + h)^{1/2} \approx a + \frac{h}{2a}, \quad 0 < |h| < a^2.$$

(ب) در فرمول تقریب قسمت (الف)، $a = 4/3$ و $h = 2/9$ اختیار کنید و بدین ترتیب يك تقریب گویای بابلی برای $\sqrt{2}$ بياييد. تقریب گویای برای $\sqrt{5}$ با اختیار $a = 2$ ، $h = 1$ بياييد.

(ج) فرمول تقریب بهتر زیر را ثابت کنید.

$$(a^2 + h)^{1/2} \approx a + \frac{h}{2a} - \frac{h^2}{8a^3}, \quad 0 < |h| < a^2$$

و $\sqrt{2}$ و $\sqrt{5}$ را با استفاده از همان مقادیر قسمت (ب) برای a و h ، تقریب کنید.

(د) در فرمول قسمت (الف)، $a = 3/2$ و $h = -1/4$ اختیار کرده و تقریب بابلی باستان ۱۷/۱۲ را برای $\sqrt{2}$ پیدا کنید.

(ه) در فرمول قسمت (الف)، $a = 17/12$ و $h = -1/144$ گرفته و مقدار

۱۰۱۵۲۴۱ را، که در جدول شماره ۷۲۸۹ لوح دانشگاه ییل برای $\sqrt{2}$ داده شده است، پیدا کنید.

۸.۳ تضعیف و تنصیف

روش ضرب مصری بعدها به صورت روش نسبتاً اصلاح شده‌ای معروف به تضعیف و تنصیف [دو برابر کردن و نصف کردن] درآمد که هدف آن انتخاب مضارب مورد نظر یکی از عوامل ضرب به طور مکانیکی بود تا با افزودن آنها حاصلضرب مطلوب به دست آید. حال، با انتخاب مثال متن کتاب، فرض کنید می‌خواهیم ۲۶ را در ۳۳ ضرب کنیم. می‌توانیم ۲۶ را به طور متوالی نصف و ۳۳ را دو برابر کنیم، لذا

۲۶	۳۳
۱۳	۶۶*
۶	۱۳۲
۳	۲۶۴*
۱	۵۲۸*
	—
	۸۵۸

اکنون در ستون دو برابرها، آن مضاربی از ۳۳ را که متناظر با اعداد فرد در ستون نصفها هستند، باهم جمع می‌کنیم. بنا براین، ۶۶، ۲۶۴، و ۵۲۸ را جمع می‌کنیم تا حاصلضرب مورد نظر یعنی ۸۵۸ را به دست آوریم. فرایند تضعیف و تنصیف در ماشینهای محاسب الکترونیکی پرسرعت مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرد.

(الف) ۴۲۴ را با استفاده از تضعیف و تنصیف در ۱۳۷ ضرب کنید.

(ب) ثابت کنید که روش تضعیف و تنصیف ضرب به نتایج درست می‌انجامد.

(ج) خارج قسمت و باقیمانده تقسیم ۱۰۴۳ بر ۲۸ را، به روش مصری، پیدا کنید.

۹.۲ کسرهای واحد

(الف) نشان دهید $z/pq = 1/pr + 1/qr$ که در آن $z = (p+q)r$. این روش برای پیدا کردن تجزیه‌های ممکن يك کسر به کسرهای واحد در پایروسی به زبان یونانی که احتمالاً در زمانی بین ۵۰۰ و ۸۰۰ ق.م. نوشته شده و در اخمیم، شهری در کنار رودخانه نیل، پیدا شده، آمده است.

(ب) مقادیر $z=2$ ، $p=1$ ، و $q=7$ را اختیار کنید و بسدین ترتیب تجزیه به کسرهای واحد را برای $2/7$ به صورتی که در پاپيروس ریند داده شده، به دست آورید.
(ج) $2/99$ را به سه روش مختلف به صورت مجموع دو کسر واحد متفاوت نمایش دهید.

(د) با اختیار $z=1$ ، $p=1$ ، و $q=n$ در رابطه قسمت (الف) رابطه خاصتر

$$1/n = 1/(n+1) + 1/n(n+1)$$

را به دست آورید و نشان دهید که وقتی n فرد است، این رابطه به نمایشی برای $2/n$ به صورت مجموع دو کسر واحد منجر می‌شود. بسیاری از موارد موجود در پاپيروس ریند را می‌توان بدین طریق به دست آورد.

(ه) نشان دهید که اگر n مضربی از ۳ باشد، در این صورت $2/n$ را می‌توان به مجموع دو کسر واحد که یکی از آنها $1/(2n)$ است، تجزیه کرد.

(و) نشان دهید که اگر n مضربی از ۵ باشد، در این صورت $2/n$ را می‌توان به مجموع دو کسر واحد که یکی از آنها $1/(3n)$ است، تجزیه کرد.

(ز) نشان دهید که به ازای هر عدد صحیح مثبت مانند n ، $2/n$ را می‌توان با مجموع $2/101$ با استفاده از این تجزیه، بیان شده است.

(ح) نشان دهید که اگر عددگویایی را بتوان به یک طریق به صورت مجموعی از کسرهای واحد نمایش داد، در این صورت می‌توان آن را به بینهایت طریق به صورت مجموعی از کسرهای واحد نمایش داد.

۱۰.۴ فرایند سیلوستر

ریاضیدان بریتانیایی ج.ج. سیلوستر^۱ (۱۸۹۷-۱۸۱۴) روش زیر را برای بیان منحصر به فرد هر کسر گویای بین ۰ و ۱ به صورت مجموعی از کسرهای واحد، ارائه داد: (۱) بزرگترین کسر واحد (یعنی کسری که کوچکترین مخرج را داشته باشد) کوچکتر از کسر مفروض را پیدا کنید، (۲) این کسر را از کسر مفروض تفریق کنید، (۳) بزرگترین کسر واحد کوچکتر از تفاضل حاصل را پیدا کنید، (۴) دوباره تفریق کنید و فرایند را ادامه دهید، (۵) برای پیدا کردن بزرگترین کسر واحد کوچکتر از کسر مفروض، مخرج کسر مفروض را بر صورت کسر تقسیم کنید و تالی خارج قسمت را به عنوان مخرج کسر واحد مورد نظر اختیار کنید.

(الف) $2/7$ را با استفاده از فرایند سیلوستر به صورت مجموعی از کسرهای واحد بیان کنید. توجه کنید که این تجزیه همان است که در جدول $2/n$ پاپيروس ریند داده شده است.

(ب) $2/97$ را با استفاده از فرایند سیلستر به صورت مجموعی از کسرهای واحد بیان کنید. توجه کنید که این تجزیه با تجزیه داده شده در جدول $2/n$ پاپيروس ریند تفاوت دارد.

(ج) قاعده‌ای را که در مرحله (۵) فرایند سیلستر داده شده، ثابت کنید.

۱۱۰۴ سکت هرم

(الف) مصریان شیب يك وجه هرم را با نسبت «خفت»^۱ به «خیز»^۲، یعنی، با دادن فاصله افقی وجه اریب از وضعیت قائم، به‌ازای هر واحد ارتفاع، اندازه می‌گرفتند. واحد قائم ذراع و واحد افقی دست گرفته می‌شد، به طوری که هر ذراع هفت دست می‌شد. با بهره‌گیری از این واحدهای اندازه‌گیری، اندازه شیب فوق «سکت»^۳ هرم نامیده می‌شد. نشان دهید که سکت هرم هفت برابر کتانژانت زاویه مسطحه فرجه‌ای است که بین قاعده و يك وجه هرم تشکیل می‌شود.

(ب) در مسئله ۵۶ پاپيروس ریند، یافتن سکت هرمی به ارتفاع ۲۵۰ ذراع دارای قاعده مربع شکلی به ضلع ۳۶۰ ذراع خواسته می‌شود. جواب به صورت $5 \frac{1}{25}$ دست در هر ذراع داده شده است. آیا این جواب درست است؟

(ج) هرم عظیم خوفو^۴ دارای قاعده مربع شکلی به ضلع ۴۴۰ ذراع و ارتفاع ۲۸۰ ذراع است. سکت این هرم چقدر است؟

(د) مسئله ۵۷ پاپيروس ریند خواستار تعیین ارتفاع هرم مربع القاعده‌ای با سکتی برابر پنج‌دست و يك انگشت در هر ذراع و با قاعده‌ای به ضلع ۱۴۰ ذراع است. این مسئله را حل کنید، با توجه به اینکه هر دست شامل پنج انگشت است.

۱۲۰۴ جبر مصری

مسائل زیر در پاپيروس ریند دیده می‌شوند.

(الف) «اگر از شما سؤال شود که $2/3$ عدد $1/5$ چیست، دو برابر آن و شش برابر آن را بردارید، می‌شود $2/3$ آن. برای هر کسر دیگری می‌توان به همین ترتیب عمل کرد». این را تعبیر و حکم کلی را ثابت کنید.

(ب) «کمیتی، $2/3$ آن، $1/2$ آن، و $1/7$ آن، وقتی به هم اضافه شوند، ۳۳ حاصل می‌شود. این کمیت چقدر است؟» این مسئله را با قاعده امتحان و تصحیح حل کنید.

(ج) «۱۰۰ قرص نان را بین پنج مرد چنان تقسیم کنید که سهمهای دریافت شده تصاعد حسابی تشکیل دهند و يك هفتم مجموع سه سهم بزرگتر، مساوی مجموع دو سهم کوچکتر باشد.» این مسئله را با استفاده از روشهای نوین حل کنید.

(الف) در پاپیروس ریند مساحت دایره کراراً مساوی مساحت مربعی به ضلع $8/9$ قطر دایره گرفته شده است. این کار به چه مقداری برای π منجر می شود؟

(ب) يك هشت ضلعی از مربعی به ضلع نه واحد باثلاث کردن اضلاع مربع و سپس بریدن مثلثهای چهار گوشه آن، تشکیل دهید. به چشم چنین می نماید که مساحت هشت ضلعی خیلی کم با مساحت دایره ای که در مربع محاط شده، متفاوت باشد. نشان دهید که مساحت هشت ضلعی 63 واحد است، درحالی که مساحت دایره نمی تواند از مساحت مربعی به ضلع هشت واحد چندان دور باشد. شواهدی در مسئله ۴۸ پاپیروس ریند وجود دارد مبنی بر اینکه فرمول مساحت دایره که در قسمت (الف) داده شد، ممکن است از این طریق حاصل شده باشد.

(ج) ثابت کنید که از همه مثلثهایی که دو ضلع معلوم دارند، مثلثی که در آن این دو ضلع تشکیل زاویه قائمه می دهند، [دارای مساحت] ماکسیمم است.

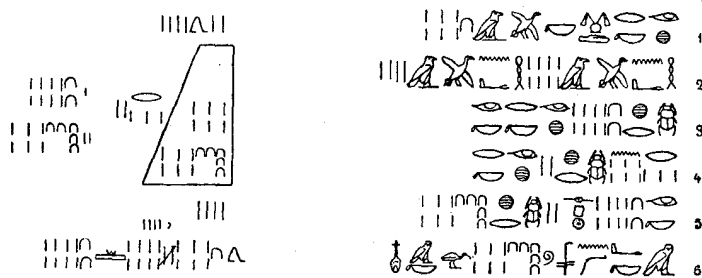
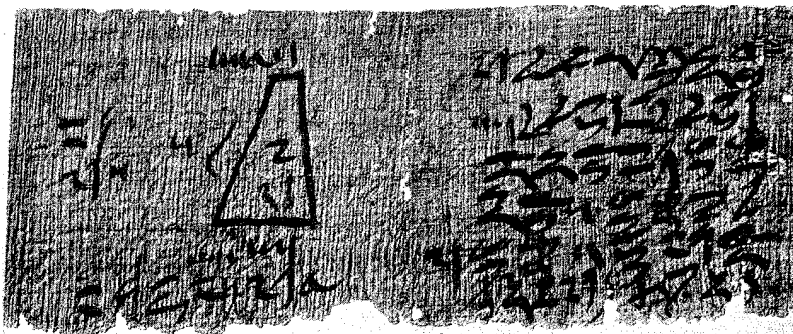
(د) طول اضلاع AB, BC, CD, DA يك چهار ضلعی $ABCD$ را با a, b, c, d نشان دهید، و فرض کنید K مساحت چهار ضلعی باشد. نشان دهید $K \leq (ad+bc)/2$ ، تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار است که زوایای A و C قائمه باشند.

(ه) برای فرض مذکور در (د)، اکنون نشان دهید $K \leq (a+c)(b+d)/4$ ، تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار است که $ABCD$ مستطیل باشد. بنابراین، فرمول مصری مساحت چهار ضلعی، مسدود در بخش ۲-۹، جواب بسیار بزرگتری برای همه چهار ضلعیهایی که مستطیل نیستند، می دهد.

(و) سندی از ادفوا، که باقی است، و به تاریخ حدود ۱۵۰۰ سال بعد از پاپیروس ریند تعلق دارد، فرمول نادقیق مصری برای مساحت چهار ضلعی را به کار می گیرد. مصنف سند مزبور از این فرمول، به عنوان يك نتیجه، استنتاج می کند که مساحت مثلث برابر نصف مجموع دو ضلع ضربدر نصف ضلع سوم است. نشان دهید چگونه این نتیجه را می توان به این صورت استنتاج کرد. آیا نتیجه درست است؟

۱۴۰۲ عظیمترین هرم مصری

(الف) در مسئله ۱۴ پاپیروس مسکو مثال عددی زیر را می یابیم: «اگر به شما گفته شود: هرم ناقصی به ارتفاع ۶، به ضلع قاعده تحتانی ۴ و ضلع قاعده فوقانی ۲ داریم، باید این ۴ را مجذور کنید، نتیجه ۱۶ می شود. باید ۴ را دو برابر کنید، نتیجه ۸ می شود. باید ۲ را مجذور کنید، نتیجه ۴ می شود. باید ۱۶، ۸، ۴ را جمع کنید، نتیجه ۲۸ می شود. باید يك سوم ۶ را اختیار کنید، نتیجه ۲ می شود. باید ۲۸ را دو بار اختیار کنید، نتیجه ۵۶



مسئله ۱۴ پایروس مسکو، با رو فوشت هیرو گلیفی از متن هیراتی

می‌شود. ببینید، جواب همین ۵۶ است و این را صحیح خواهید یافت.» نشان دهید که این مثالی از فرمول کلی

$$V = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$$

است، که حجم هرم ناقص مربع القاعده را بر حسب ارتفاع h و اضلاع قاعده a و b به دست می‌دهد.

(ب) اگر m و n دو عدد مثبت باشند، $m \geq n$ ، آنگاه میانگین حسابی، میانگین هارونی، و میانگین هندسی m و n ، $R = (m + \sqrt{mn} + n)/3$ ، $A = (m + n)/2$ ، n و m هستند. نشان دهید که $A \geq R \geq G$ ، تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار است که $m = n$.

(ج) با قبول فرمول آشنای حجم هرم (حجم برابر است با یک سوم حاصلضرب قاعده در ارتفاع)، نشان دهید که حجم هرم ناقص با حاصلضرب ارتفاع آن در میانگین هارونی دو قاعده آن داده می‌شود.

۱. Heron، در مآخذ اسلامی با نام ایرون اسکندرانی از وی یاد می‌شود. - ۴.

(د) فرض کنید که a, b, h و طول یک ضلع قاعده پایینی، یک ضلع قاعده بالایی، و ارتفاع هرم ناقص منتظم مربع القاعده‌ای مانند T باشد. هرم ناقص را به صورت‌های زیر چند قطعه کنید (۱) مکعب مستطیل P با قاعده بالایی b^2 و ارتفاع h ؛ (۲) چهار منشور قائم مثلث القاعده A, B, C ، و D هر یک با حجم $h/4 \cdot b(a-b)$ ؛ (۳) چهار هرم مربع القاعده E, F, G, H و هر یک به حجم $h/12 \cdot (a-b)^2$. اکنون فرمول قسمت (الف) را برای حجم T به دست آورید.

(ه) هرم ناقص چند قطعه شده قسمت (د) را در نظر بگیرید. P را به طور افقی به سه قسمت مساوی هر یک به ارتفاع $h/3$ برش دهید و یکی از قطعات را با J نشان دهید. A, B, C, D را با هم به صورت مکعب مستطیل Q به قاعده $b(a-b)$ و ارتفاع h ترکیب کنید و Q را به طور افقی به سه بخش مساوی هر یک به ارتفاع $h/3$ برش دهید. E, F, G, H را با یک مکعب مستطیل R به قاعده $(a-b)^2$ و ارتفاع $h/3$ جانشین کنید. یک قاچ از P را با قاچی از Q ترکیب نمایید تا مکعب مستطیل K به قاعده ab و ارتفاع $h/3$ تشکیل شود. یک قاچ از P ، دو قاچ Q ، و R را برای تشکیل مکعب مستطیل L به قاعده a^2 و ارتفاع $h/3$ ترکیب کنید. در این صورت حجم T برابر است با مجموع حجم‌های سه مستطیل J, K, L . با استفاده از این نتیجه، فرمول قسمت (الف) را برای حجم T پیدا کنید. گفته شده است که فرمول مصری قسمت (الف) ممکن است به این روال به دست آمده باشد. در این روش، با فرمول حجم هرم (منتظم مربع القاعده)، دانسته فرض می‌شود.

۱۵۰۲ چندمسئله از پایروس مسکو

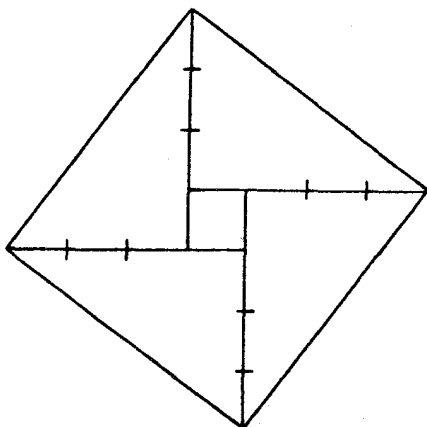
دو مسئله زیر را که در پایروس مسکو دیده می‌شوند، حل کنید:

- (الف) مساحت یک مستطیل ۱۲ و پهنای آن $3/4$ درازاست. ابعاد آن چقدر هستند؟
 (ب) یک ساق مثلث قائم‌الزاویه‌ای $2\frac{1}{4}$ برابر ساق دیگر و مساحت آن ۲۵ است. ابعاد آن چقدر هستند؟

۱۶۰۲ مثلث ۳، ۴، ۵

اطلاعاتی در دست است مبنی بر اینکه نقشه برداران مصری زوایای قائمه را با ساختن مثلث‌های ۳، ۴، ۵ باطنایی که به کمک یازده گره به ۱۲ قسمت مساوی تقسیم شده بود، طرح می‌کردند. چون هیچ‌گونه شواهد مستندی دال بر اینکه مصریان حتی از حالت خاصی از قضیه فیثاغورس آگاه بوده‌اند وجود ندارد، مسئله صرفاً آکادمیک زیر پیش می‌آید: بدون استفاده از قضیه فیثاغورس، عکس آن، یا هر پیامدی از آن، نشان دهید که مثلث ۳، ۴، ۵، مثلث قائم‌الزاویه

* نگاه کنید به



شکل ۵

است. این مسئله را به کمک شکل ۵ حل کنید. این شکل در چوئوپای^۱، قدیمی ترین اثر شناخته شده ریاضیات چینی، ظاهر می شود و ممکن است سابقه آن به هزاره دوم قبل از میلاد برگردد.

عنوان مقاله

- ۱/۲ روشهای «چنین کن و چنان کن» در آموزش بخشهایی از ریاضیات مقدماتی امروزی.
 ۲/۲ مواردی بر له وجود ریاضیات در جهان پیش از ظهور حیات.
 ۳/۲ امکان تشخیص اشکال هندسی ساده توسط حیوانات، پرندگان، حشرات.
 ۴/۲ انواع شواهدی که می توان بر مبنای آنها شرحی از ریاضیات پیش از تاریخ ارائه داد.
 ۵/۲ هندسه ناخود آگاه در تقدم بر هندسه علمی (تجربی).
 ۶/۲ تأثیر نسبی علاقه به ستاره شناسی و ضرورت مساحی در پیدایش هندسه آغازین.
 ۷/۲ نقش شعائر مذاهب اولیه در پیدایش هندسه.
 ۸/۲ اشکال هندسی در تزیینات کهن.
 ۹/۲ منشأ برخی مسائل نوعی.
 ۱۰/۲ نمایش به کمک کسره های واحد.

کتابنامه

AABOE, ASGER, Episodes from the Early History of Mathematics. New Mathematical Library

no. 13. New York: Random House and L. W. Singer, 1964.

- BALL, W. W. R., and H. S. M. COXETER, *Mathematical Recreations and Essays*. 11th ed. New York: Macmillan, 1939.
- BUNT, L. N. H.; P. S. JONES; and J. D. BEDIANT, *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1976.
- CHACE, A. B.; L. S. BULL; H. P. MANNING; and R. C. ARCHIBALD, eds., *The Rhind Mathematical Papyrus*. 2 vols. Buffalo, N.Y.: Mathematical Association of America, 1927-29.
- CHIERA, EDWARD, *They Wrote on Clay*. Chicago: University of Chicago Press, 1938.
- COOLIDGE, J. L., *A History of Geometrical Methods*. New York: Oxford University Press, 1940.
- DATTA, B., and A. N. SINGH, *History of Hindu Mathematics*. Bombay: Asia Publishing House, 1962.
- GILLINGS, R. J., *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. Cambridge, Mass.: The M.I.T. Press, 1972.
- KRAITCHIK, MAURICE, *Mathematical Recreations*. New York: W. W. Norton, 1942.
- MIKAMI, YOSHIO, *The Development of Mathematics in China and Japan*. New York: Hafner, 1913. Reprinted by Chelsea, New York, 1961.
- NEEDHAM, J., with the collaboration of WANG LING, *Science and Civilization in China*. Vol. 3. New York: Cambridge University Press, 1959.
- NEUGEBAUER, OTTO, *The Exact Sciences in Antiquity*. 2d ed. New York: Harper and Row, 1962. Dover reprint available.
- , and A. J. SACHS, eds., *Mathematical Cuneiform Texts*. American Oriental Series, vol. 29. New Haven: American Oriental Society, 1946.
- ORE, OYSTEIN, *Number Theory and Its History*. New York: McGraw-Hill, 1948.
- PARKER, R. A., *The Calendars of Ancient Egypt*. Chicago: University of Chicago Press, 1950.
- SANFORD, VERA, *The History and Significance of Certain Standard Problems in Algebra*. New York: Teachers College, Columbia University, 1927.
- SMITH, D. E., and YOSHIO MIKAMI, *A History of Japanese Mathematics*. Chicago: Open Court, 1914.
- VAN DER WAERDEN, B. L., *Science Awakening*. Translated by Arnold Dresden. New York: Oxford University Press, 1961. Paperback ed. New York: John Wiley, 1963.

ریاضیات فیثاغورسی

۳-۱ پیدایش ریاضیات برهانی

قرنهای آخر هزارهٔ دوم قبل از میلاد شاهد دگرگونیهای اقتصادی و سیاسی بسیاری بود. برخی تمدنها از بین رفتند، قدرت مصر و بابل فروغ باخت، و مردمان جدیدی، به ویژه عبریان، آسوریان، فنیقیان و یونانیان پا به عرصه نهادند. عصر آهن بشارت داده شد و تغییرات همه جانبه‌ای را در امور جنگی و در کلیهٔ زمینه‌هایی که نیاز به ابزار داشت، با خود به همراه آورد. داد و ستد به نحو روزافزونی رونق یافت و اکتشافات جغرافیایی انجام گرفت. دنیا برای نوع جدیدی از تمدن آماده بود.

تمدن جدید در شهرهای تجاری که در کناره‌های ساحلی آسیای صغیر سر بر آوردند و بعد در سرزمین اصلی یونان، سیسیل، و در کرانه‌های ساحلی ایتالیا چهرهٔ خود را نشان داد. دیدگاه ایستای شرق باستان ناممکن گردید و در جو رو به گسترشی از عقلگرایی، انسانها به چوون و چرا پرداختند.

برای نخستین بار، در ریاضیات، همچون در دیگر زمینه‌ها، انسانها شروع به پرسش سؤالهایی اساسی نظیر «چرا زوایای مجاور به قاعدهٔ مثلث متساوی الساقین مساوی اند؟ و چرا قطر دایره آن را نصف می‌کند؟» کردند. روشهای تجربی شرق باستان که برای پاسخگویی به سؤال چگونگی کاملاً کافی بود، دیگر برای پاسخ دادن به این پرسشهای علمیترا راجع به جرابی کفایت نداشتند. کوششهایی در روشهای برهانی باید ابراز وجود می‌کردند، و جنبهٔ قیاسی، که دانشمندان کنونی آن را مشخصهٔ بنیادی ریاضیات می‌شمارند،

اهمیت یافت. بنا براین، چنین شد که ریاضیات به معنی امروزی کلمه در این جو عقلگرایی، و در یکی از شهرهای جدید تجاری واقع بر ساحل غربی آسیای صغیر آغاز شد. زیرا بنا به روایات، هندسه برهانی یا تالس^۱ میلوسی^۲ [ملطی]، یکی از «حکمای سبعة» عهد عتیق، در نیمه اول قرن ششم قبل از میلاد آغاز شده است.*

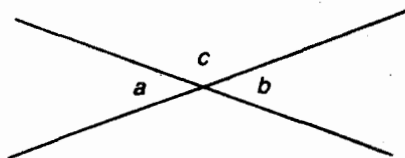
ظاهراً تالس بخش اول زندگانی خود را به عنوان بازرگان گذرانده و به آن اندازه ثروتمند گشته که بتواند بخش دوم زندگی خود را وقف مطالعه و کمی سفر نماید. گفته شده است که وی مدتی در مصر اقامت کرد و در آنجا با محاسبه ارتفاع یکی از هرمها به وسیله سایه‌ها (به مطالعه مسئله‌ای ۱۰۳ رجوع کنید) تحسین همگان را برانگیخت. در بازگشت به میلوس نبوغ چند جانبه وی شهرتی به عنوان سیاستمدار، رایزن، مهندس، تاجر، فیلسوف، ریاضیدان، و منجم برای او به ارمغان آورد. تالس اولین فرد شناخته شده‌ای است که کشفیات ریاضی به او نسبت داده شده است. نتایج مقدماتی زیر در هندسه منسوب به اوست:

- ۱- يك دایره با هر قطرش به دو نیم می‌شود.
- ۲- زوایای مجاور به قاعده در هر مثلث متساوی الساقین، مساوی‌اند.
- ۳- زوایای متقابل به رأس که از تقاطع دو خط به وجود می‌آیند، مساوی‌اند.
- ۴- دو مثلث مساوی‌اند در صورتی که دو زاویه و يك ضلع نظیر مساوی داشته باشند. تالس شاید از این نتیجه در تعیین فاصله کشتی از ساحل استفاده کرده باشد (به مطالعه مسئله‌ای ۱۰۳ رجوع کنید).
- ۵- زاویه محاط در نیم‌دایره، قائمه است. (این نکته در حدود ۱۴۰۰ سال پیشتر بر بابلیان مکشوف بوده است.)

ارزش این نتایج نباید با خود قضایا و بلکه با این باور سنجیده شوند که تالس آنها را به جای استفاده از شهود و تجربه، با نوعی استدلال منطقی اثبات کرده است. مثلاً، موضوع تساوی زوجی از زوایای متقابل به رأس را که از تقاطع دو خط به وجود می‌آیند، در نظر گیرید. در شکل ۶ می‌خواهیم نشان دهیم که زاویه a مساوی زاویه b است. در دوره‌های پیش از دوره یونان، تساوی این دو زاویه را احتمالاً کاملاً واضح تلقی می‌کردند، و اگر کسی دچار تردید می‌شد، او را با انجام این تجربه ساده که در آن زاویه‌ها را می‌بریدند و یکی را بر روی دیگری قرار می‌دادند، متقاعد می‌کردند. اما تالس ترجیح داد که تساوی زاویه‌های a و b را به کمک استدلال منطقی، شاید بسیار

1. Thales 2. Miletus

* بعضی از مورخین تاریخ ریاضیات قدیم، به ویژه اوتونوگه باوئر و ب. ل. واندرواردن، B. L. Van der Waerden با توضیح تکاملی سنتی در مورد مبدأ ریاضیات برهانی موافق نیستند و بلکه از توضیح انقلابی‌تری حمایت می‌کنند که در آن، تحول احتمالاً با کشف گنگه بودن $\sqrt{2}$ به میان آمده است.



شکل ۶

شبیبه به روشی که امروزه در کتابهای هندسه مقدماتی خود به کار می‌بریم، ثابت کنند. در شکل ۶، زاویه a به اضافه زاویه c برابر زاویه نیمصفحه است، همچنین زاویه b به اضافه زاویه c برابر زاویه نیمصفحه است. بنابراین، چون کلیه زوایای نیمصفحه مساوی‌اند، زاویه a مساوی زاویه b است. (اگر چیزهای مساوی از چیزهای مساوی کاسته شوند، باقیمانده‌ها مساوی‌اند) تساوی زاویه‌های a و b با استفاده از سلسله‌ای کوتاه از استدلال قیاسی و با شروع از اصول اساسیتر ثابت شده است.

در مورد تالس نیز مانند سایر مردان بزرگ، حکایات جذاب بسیاری گفته شده است که اگر درست هم نباشند، دست کم در فراخور حال‌اند. زمانی وی نشان داد کسب ثروت چقدر آسان است؛ با این پیشینی که محصول زیتون فراوانی در پیش است، وی انحصار کلیه دستگاههای روغن‌کشی ناحیه را به دست آورد و بعداً با اجازه دادن آنها ثروت هنگفتی تحصیل کرد. مورد دیگر، داستان قاطر چموشی است که به وقت حمل نمک، پی‌می‌برد که با غلطیدن در جوی آب می‌تواند محتویات بارخود را حل کند و بدین ترتیب بارخود را سبکتر نماید - تالس وی را از این عادت مزاحم از راه بارکردنش با اسفنج رها کنید. عکس‌العمل او به این ایراد سولون^۱ که چرا هرگز ننگرفته این بود که روز بعد چاپاری را با پیامی ساختگی پیش سولون فرستاد که فرزند دل‌بندش به ناگهان در حادثه‌ای به قتل رسیده است. تالس آنگاه پدر محنت‌زده را با توضیح همه چیز آرام نمود و گفت، «من تنها خواستم به تو بگویم که چرا تاکنون ازدواج نکرده‌ام.» مورد دیگر وقتی است که به هنگام مشاهده ستارگان در گودالسی افتاده بوده است و پیرزنی وی را مورد سؤال قرار می‌دهد که چگونه امید به دیدن چیزی در آسمانها دارد در حالی که حتی نمی‌تواند آنچه را که زیر پای خودش است، ببیند. وقتی از او پرسیدند که چگونه می‌توان زندگی شرافتمندانه‌تری داشت، چنین اندرز داد، «با خودداری از انجام آنچه دیگران را به خاطر آن سرزنش می‌کنیم.» یک بار وقتی از او پرسیدند که در مقابل یکی از کشفیاتش چه دریافت خواهد کرد وی پاسخ داد، «من به اندازه کافی پاداش خواهم گرفت اگر موقعی که آن را به دیگران می‌گویید، ادعا نکنید که این کشف از آن خود شماست، بلکه بگویید که مال من بوده است.» و وقتی از او پرسیدند که عجیبترین چیزی که در عمرش دیده چیست پاسخ داد، «یک مستبد سالخورده.»

تحقیقات اخیر نشان می‌دهند که هیچ مدرکی در تأیید داستان کسراراً گفته شده‌ای که تالس یک آفتاب گرفتگی را که در ۵۸۵ ق.م. به وقوع پیوسته بود پیشگویی کرده است، وجود ندارد.

۳-۲ فیثاغورس و فیثاغورسیان

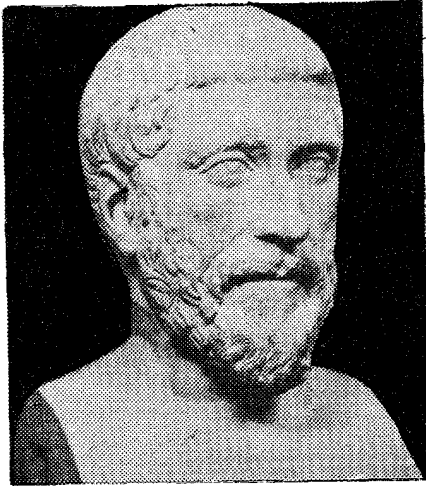
تاریخ ۳۰۰ سال اول ریاضیات یونانی در محاق عظمت اصول اقلیدس، که حدود ۳۰۰ سال قبل از میلاد نوشته شده، فرورفته است؛ زیرا این اثر به اندازه‌ای نوشته‌های پیشین در ریاضیات را تحت الشعاع قرار داده که این آثار پیشین از آن پس دورافکنده شده و از دسترس ما خارج شده‌اند. آن گونه که ریاضیدان برجسته قرن بیستم، داوید هیلبرت^۱ خاطر نشان کرده، می‌توان اهمیت یک اثر علمی را با توجه به تعداد نشریاتی سنجید که با وجود آن از حیز انتفاع افتاده‌اند.

در نتیجه، برخلاف ریاضیات مصر و بابل باستان، در واقع هیچ منبع دست اولی که اندک پرتوی بر ریاضیات اولیه یونان بیفکند، وجود ندارد. مامجوریم که بردست‌نوشته‌ها و شرح‌هایی تکیه کنیم که تاریخی چند صد سال بعد از آنکه مطالعات اصلی به نگارش درآمده‌اند، دارند. مع‌هذا، به رغم این مشکل، علمایی که دوره کلاسیک را بررسی می‌کنند، توانسته‌اند شرحی نسبتاً منسجم ولی تاحدی فرضی از تاریخ ریاضیات اولیه یونانی ارائه کنند و حتی به نحو به ظاهر موجهی بسیاری از متون یونانی اصلی را احیا کرده‌اند. این کار نبوغ و شکیبایی حیرت‌آوری طلب می‌کرد و از طریق مقایسه‌های طاقت‌فرسای متون استخراج شده و با معاینه قطعات ادبی بی‌شمار و تذکراهای پراکنده مؤلفین، فیلسوفان، و مفسرین بعدی انجام پذیرفته است.*

ارزیابی دین ریاضیات اولیه یونانی به ریاضیات شرق باستان کاردشواری است و مسیر انتقال از سویی به سوی دیگر نیز هنوز به نحو رضایتبخشی معلوم نشده است. این حقیقت که دین مزبور بسیار بیشتر از آن است که قبلاً تصور می‌شد با پژوهشهای انجام شده روی اسناد بابل و مصر آشکار گردید. خود نویسندگان یونانی، حکمت شرق را ستوده‌اند و این حکمت در دسترس هر کس که می‌توانست به شرق سفر کند، قرار داشته است. شواهد باطنی نیز از وجود ارتباطی با شرق خبر می‌دهد. رازگرایی اولیه یونانی در ریاضیات، نشانی محکم از نفوذ شرق دارد، و برخی از نوشته‌های یونانی بیشتر سنت حسابی شرق است که جاودانگی یونانی یافته است. همچنین، حلقه‌های ارتباط محکمی نجوم یونانی و بین‌النهرینی را پیوند می‌دهد.

1. David Hilbert

* در این راه مدیون تحقیقات ژرف و فاضلانۀ مردانی چون پل تانری (Paul Tannery)، ت. ل. هیث (T. L. Heath)، ه. ج. تسوتین (H. G. Zeuthen)، ا. ر. م (A. Rome)، ج. ل. هایبرگ (J. L. Heiberg) و ا. فرانک (E. Frank)، هستیم.



فیثاغورس
(مجموعه دیوید اسمیت)

منبع اصلی اطلاعات ما راجع به ریاضیات یونانی خیلسی قدیم اثری موسوم به خلاصه انودموسی^۱ پروکلوس^۲ است. این خلاصه متشکل از صفحات افتتاحیه شرح مقاله اول اقلیدس اثر پروکلوس بوده، و شرح بسیار کوتاهی از رشد هندسه یونانی از قدیمترین ازمه تا زمان اقلیدس است. اگرچه پروکلوس در قرن پنجم بعد از میلاد، حدود هزار سال بعد از آغاز ریاضیات یونانی، می زیسته، با این حال به تعدادی از آثار تاریخی و انتقادی دسترسی داشته که اینک، بجز بخشها و اشاراتی که توسط وی و دیگران حفظ گردیده، از دست رفته اند. در بین این آثار از دست رفته، خلاصه ای بوده از تاریخ ظاهراً کامل هندسه یونانی، مفقود در همان زمان پروکلوس، و در بردارنده دوره قبل از ۳۳۵ ق.م. نوشته انودموس^۳، یکی از شاگردان ارسطو. خلاصه انودموسی از آن مناسبت چنین نام یافته که بر مبنای این اثر قدیمتر قرار دارد. شرح دستاوردهای ریاضی تالس، که به طور خلاصه در بخش قبل آمد، به کمک خلاصه انودموسی تهیه شده بود.

ریاضیدان برجسته دیگریونانی که در خلاصه انودموسی از وی یاد شده، فیثاغورس^۴ است که پیر وانش او را در چنان حاله ای از اساطیر پوشانند که درباره وی، با هر میزان قطعیت، اطلاع بسیار کمی وجود دارد. وی ظاهر آرد حدود ۵۷۲ ق.م. در جزیره ساموس واقع در دریای اژه تولد یافته است. شاید فیثاغورس که حدود ۵ سال از تالس جوانتر بوده و تا این حد نزدیک به زادگاه وی، میلتوس، می زیسته است، نزد وی تحصیل کرده باشد. به نظر می آید که بعداً به طور موقت در مصر رحل اقامت افکنده و حتی شاید سفرهای گسترده تری در پیش گرفته

-
1. Eudemian Summary
 2. Proclus
 3. Eudemus
 4. Pythagoras

است. در مراجعت به وطن، وی ساموس را تحت حکومت ظالمانهٔ پولی کراتس^۱ و یونیا را تحت سلطهٔ ایرانیان یافت، و از این رو به دریابندر کرو تونا^۲ ای یونان واقع در ایتالیا ی جنوبی، مهاجرت کرد. در آنجا وی مدرسهٔ مشهور فیثاغورسی را تأسیس کرد کسه علاوه بر اینکه فرهنگستانی بود برای مطالعهٔ فلسفه، ریاضیات، و علوم طبیعی، به یک انجمن اخوت شدیداً متحدی باشعائر و مناسک سری تحول یافت. زمانی رسید که تأثیر انجمن و تمایلات اشرافی آن چنان شدت یافت که نیروهای آزادیخواه ایتالیا ی جنوبی ساختمانهای مدرسه را ویران کردند و سبب پراکنده شدن انجمن گردیدند. بنا بر روایتی، فیثاغورس به بین النهرین گریخت و در همانجا در سنین ۷۵ تا ۸۵ در گذشت، یا شاید به قتل رسید. انجمن برادری، گرچه به صورت پراکنده، حداقل تا دو قرن بعد به موجودیت خود ادامه داد.

فلسفهٔ فیثاغورسی بر این فرض متکی بود که عدد صحیح سبب کیفیات مختلف انسان و ماده است. این امر منجر به تعالسی و مطالعهٔ خواص اعداد گردید و حساب (به عنوان نظریهٔ اعداد)، همراه با هندسه، موسیقی، و علم افلاک (نجوم) علوم انسانی اساسی بر نامهٔ تحصیلی فیثاغورسی را تشکیل می داد. این گروه موضوعات در قرون وسطی به علوم چهارگانهٔ شهرت یافت، که به آن علوم سه گانه^۳ دستور زبان، منطق و معانی بیان افزوده شد. این علوم انسانی سبعة، تجهیزات مورد نیاز یک فرد تحصیل کرده محسوب می شد.

چون تعلیمات فیثاغورس همه شفاهی بود و از آنجا که رسم انجمن اخوت بر آن بود که همهٔ کشفیات را به مؤسس عالیقدر منسوب کنند، اکتسون به دشواری می توان دانست که دقیقاً کدام یک از مکشوفات ریاضی باید به خود فیثاغورس اسناد شود و کدام یک به سایر اعضای انجمن برادری.

۳-۳ حساب فیثاغورسی

یونانیان باستان بین مطالعهٔ روابط مجردی که اعداد را به هم پیوند می دهند و فن عملی محاسبهٔ با اعداد تمایز قایل بودند. اولی به آریتمتیک^۴ معروف بود و دومی به لوژیستیک^۵. ایسن رده بندی تا حدود اواخر قرن پانزدهم در قرون وسطی دوام آورد و در این زمان متونی ظاهر شدند که در آنها جنبه های نظری و عملی کار با اعداد تحت نام واحد حساب مورد بررسی قرار می گرفت. جالب آنکه امروزه حساب مدلول اصلی خود را در اروپای قاره ای دارد، در حالی که در انگلستان و آمریکا معنی عامیانهٔ حساب مترادف بالوژیستیک باستان است، و در این دو کشور اصطلاح توصیفی نظریهٔ اعداد برای نشان دادن وجه مجرد مطالعهٔ اعداد به کار می رود.

عقیدهٔ عمومی بر این است که فیثاغورس و پیروانش، همراه با فلسفهٔ انجمن اخوت،

1. Polycrates
2. Crotona
3. quadrivium
4. trivium
5. arithmetic [دیشماطیقی، در مآخذ اسلامی، که می توان آن را علم حساب نامید].
6. logistic

اولین قدمها را در رشد نظریهٔ اعداد برداشته‌اند و درعین حال قسمت اعظم شالودهٔ رازگرایی عددی آینده را ایجاد کرده‌اند. لذا یامبلخوس^۱، فیلسوف صاحب نفوذ نوافلاطونی حدود ۳۲۰ ق.م. کشف اعداد متحابه را به فیثاغورس نسبت داده است. دو عدد متحابه‌اند اگر هر یک از آنها مساوی مجموع مقسوم‌علیه‌های حقیقی^{*} دیگری باشد. برای مثال، ۲۸۴ و ۲۲۰، که زوج منسوب به فیثاغورس را تشکیل می‌دهند، متحابه‌اند؛ زیرا مقسوم‌علیه‌های حقیقی ۲۲۰ عبارت‌اند از ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۱۱، ۲۰، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۴۴، ۵۵، ۱۱۰، ۱۱۰ و مجموع اینها ۲۸۴ است، درحالی‌که مقسوم‌علیه‌های حقیقی ۲۸۴ عبارت‌اند از ۱، ۲، ۴، ۷۱، ۱۴۲ و مجموع اینها ۲۲۰ است. این زوج اعداد در هاله‌ای عرفانی پوشیده شدند و بعدها این عقیدهٔ خرافی پدید آمد که دوطلمس حاوی این اعداد، دوستی تمام‌عیاری بین حاملین آنها ایجاد خواهند کرد. این اعداد نقش مهمی در سحر، جادو، احکام نجوم، و طالع‌بینی پیدا کردند. به نظر می‌رسید هیچ زوج عدد متحابه جدیدی تا زمان اعلام اعداد فرانسوی ۱۷۲۹۶ و ۱۸۴۱۶ به‌عنوان زوج دیگری از طرف پیر دو فرما^۲ نظریهٔ اعداددان بزرگ فرانسوی ۱۶۳۶، کشف نگردیده بود. مع‌هذا، در همین اواخر ثابت شده است که این کشف مجددی بوده، و این زوج عدد را قبلاً ابن‌البنای مراکشی (۱۲۵۶-۱۲۳۱) در اواخر قرن سیزدهم یا اوایل قرن چهاردهم، شاید با استفاده از فرمول ثابت بن‌قره (برای ملاحظهٔ این فرمول، به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۱۰۷ رجوع کنید) کشف کرده بوده است. دو سال بعد ریاضیدان و فیلسوف فرانسوی، رنه دکارت^۳ زوج سومی ارائه داد. ریاضیدان سویسی، لئونهارت اویلر^۴ جستجوی سازمان‌یافته‌ای برای یافتن اعداد متحابه به عمل آورد و، در ۱۷۴۷، سیاهه‌ای از ۳۰ زوج را عرضه کرد که بعداً به بیش از ۶۰ زوج گسترش یافت. امرعجیب دیگر در تاریخ این اعداد، کشف اعداد متحابه دوران نظر مانده و نسبتاً کوچک ۱۱۸۴ و ۱۲۱۰، به وسیلهٔ پرسک شانزده‌سالهٔ ایتالیایی، نیکولو پاگانینی^۵، در سال ۱۸۶۶ بود. امروزه بیش از ۱۰۰۰ زوج عدد متحابه معلوم شده‌اند.

اعداد دیگری با روابط جادویی که در تحقیقات نظری عددشناسی اساسی‌اند، و گاهی به فیثاغورسیان نسبت داده می‌شوند، اعداد تام، ناقص و زاید هستند. يك عدد تام است هر گاه مساوی مجموع مقسوم‌علیه‌های حقیقی خود باشد، ناقص است اگر از مجموع مقسوم‌علیه‌های حقیقی‌اش تجاوز نماید، و زاید است اگر کوچکتر از مجموع مقسوم‌علیه‌های حقیقی‌اش باشد. بنابراین، خداوند دنیا را در شش روز آفرید که يك عدد تام است، زیرا $3 + 2 + 1 = 6$ ، از دیگر سو، بنابه اظهار آلکوین (۷۳۵-۸۰۴)، نوع بشر از اختلاف هشت انسان‌کشتی نوح هستند و این آفرینش ثانی نا کامل بود، زیرا $8 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$ ، که از 36 کمتر است.

1. Iamblichus

* مقسوم‌علیه‌های حقیقی هر عدد صحیح مثبت N ، تمام مقسوم‌علیه‌های صحیح و مثبت N بجز خود N هستند. توجه کنید که ۱، يك مقسوم‌علیه حقیقی N است. مترادف نسبتاً منسوخ مقسوم‌علیه حقیقی جزء صحیح می‌باشد.

2. Pierre de Fermat
3. René Descartes
4. Leonhard Euler
5. Nicolo Paganini

بزرگتر است، ناقص است. تا سال ۱۹۵۲، تنها ۱۲ عدد تام شناخته شده موجود بود که همه آنها اعداد زوج بودند و از بین آنها سه تای اول ۲، ۶، ۲۸، و ۴۹۶ هستند. آخرین قضیه مقاله نهم اصول اقلیدس (حدود ۳۰۰ ق. م.) ثابت می کند که اگر $1 - 2^n$ يك عدد اول* باشد، آنگاه $(2^n - 1)$ يك عدد تام است. اعداد تامی که به وسیله اقلیدس داده شده اند، اعداد زوج هستند، و اوایلر نشان داده است که هر عدد زوج تام باید بدین صورت باشد. وجود یا عدم وجود اعداد تام فرد یکی از مسائل حل نشده معروف در نظریه اعداد است. مطمئناً هیچ عددی از این نوع که کمتر از صد رقم داشته باشد، وجود ندارد.

در سال ۱۹۵۲، به کمک کامپیوتر رقمی SWAC، پنج عدد تام دیگر، متناظر با $n = 521, 607, 1279, 2203, 2281$ در فرمول اقلیدس کشف گردید. در سال ۱۹۵۷ با استفاده از ماشین محاسبه سوئیسی BESK عدد تام دیگری پیدا شد که متناظر با $n = 3217$ بود، و در سال ۱۹۶۱ با يك کامپیوتر IBM 7090 دو عدد دیگر، به ازای $n = 4253$ و $n = 4423$ پیدا شدند. هیچ عدد تام زوج دیگری برای $n > 5000$ وجود ندارد. از مقادیر $n = 9698, 9941, 11213, 19937, 21701, 23209, 4497$ نیز اعداد تام حاصل می شوند که سیاهه اعداد تام معلوم را به ۲۷ می رسانند.

برخی از ریاضیدانان جدید با الهام از مفهوم اعداد تام به تعمیم آن پرداخته اند. اگر $\sigma(n)$ را معرّف مجموع کلیه مقسوم علیه های حقیقی n (از جمله خود n) بگیریم، آنگاه n تام است اگر و فقط اگر $\sigma(n) = 2n$. در حالت کلی اگر داشته باشیم $\sigma(n) = kn$ ، که در آن k يك عدد طبیعی است، n را تام k -تایی می نامند. مثلاً می توان نشان داد که ۱۲۰ و ۶۷۲ تام سه تایی می اند. معلوم نیست که بینهایت عدد تام چند تایی می وجود دارد یا نه، بنابراین در مورد اعداد تام کمتر از آن می دانیم. این هم معلوم نیست که عدد تام چند تایی می فردی موجود است یا نه. در سال ۱۹۴۴، مفهوم اعداد فوق زاید خلق شد. عدد طبیعی n را فوق زاید نامند اگر و فقط اگر به ازای هر $k < n$ $\sigma(k)/k > \sigma(n)/n$ معلوم شده است که بینهایت عدد فوق زاید وجود دارد. اعداد دیگری که جدیداً در ارتباط با اعداد تام، ناقص، و زاید معرفی شده اند عبارت اند از اعداد عملی، اعداد شبه تام، اعداد نیم تام، و اعداد غریب. ما صرفاً این مفاهیم را ذکر کردیم تا روشن کرده باشیم که چطور کار قدیمیان با اعداد، الهام بخش پژوهشهای جدید مرتبط با آن شده است.

اگر چه همه مورخین ریاضیات بر این عقیده نیستند که کشف اعداد متحابه و تام را می توان به فیثاغورسیان نسبت داد، به نظر می رسد که توافق عمومی وجود داشته باشد مبنی بر اینکه اعداد مصور از قدیمیترین اعضای انجمن نشأت گرفته اند. این اعداد که به عنوان عده نقاط صورتهای هندسی خاصی در نظر گرفته می شوند، نمایشگر پیوندی بین هندسه و حساب هستند. اشکال ۷، ۸، ۹ و وجه تسمیه اعداد مثلثی، اعداد مربعی، اعداد مخمسی، و

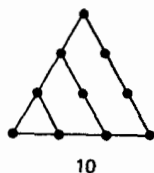
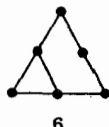
* هر عدد اول، يك عدد صحیح مثبت بزرگتر از ۱ است که دارای هیچ مقسوم علیه صحیح مثبتی بجز خودش و واحد نیست. هر عدد صحیح مثبت بزرگتر از ۱ که اول نیست، عدد مرکب نامیده می شود. مثلاً، ۷ يك عدد اول است، در حالی که ۱۲ عددی مرکب است.

غیره را نشان می‌دهند.

قضایای جالب بسیاری دربارهٔ اعداد مصور را می‌توان به سبک هندسی محض ثابت کرد. مثلاً، برای نشان دادن قضیهٔ ۱ - که هر عدد مربعی برابر مجموع دو عدد مثلثی متوالی است - ملاحظه می‌کنیم که هر عدد مربعی را، در شکل هندسایش، می‌توان مثل شکل ۱۰ تقسیم کرد.

اعداد مثلثی

•
1



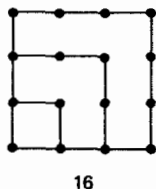
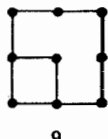
و غیره

و غیره

شکل ۷

اعداد مربعی

•
1



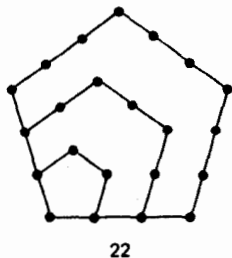
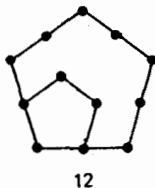
و غیره

و غیره

شکل ۸

اعداد منجمسی

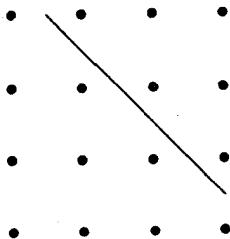
•
1



و غیره

و غیره

شکل ۹



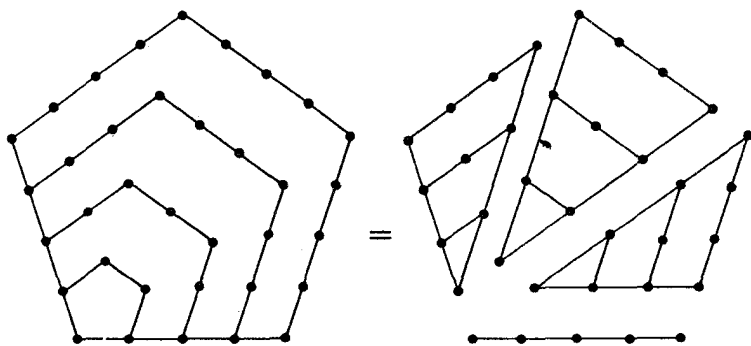
شکل ۱۰

همچنین شکل ۱۱ قضیه ۲ را نشان می‌دهد - که n امین عدد مخمسی مساوی است با n به اضافه سه برابر $(n-1)$ امین عدد مثلثی. قضیه ۳ - که مجموع هر تعداد عدد صحیح فرد متوالی، با شروع از ۱، مربع کامل است - به طور هندسی به وسیله شکل ۱۲ نمایش داده شده است.

البته، این قضایا را می‌توان به طور جبری، با یافتن نمایش جبری اعداد مثلثی، مربعی، و مخمسی کلی، ثابت کرد. روشن است که n امین عدد مثلثی، T_n ، به وسیله مجموع یک سری حسابی*

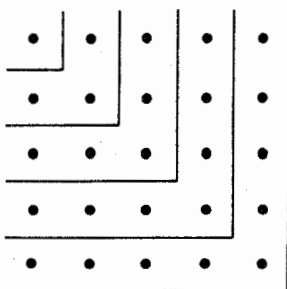
$$T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

داده می‌شود و البته n امین عدد مربعی، S_n ، n^2 است. قضیه اول ما را می‌توان به طور



شکل ۱۱

* مجموع سری حسابی مساوی است با حاصلضرب تعداد جملات در نصف مجموع جمله اول و آخر.



شکل ۱۲

جبری به کمک اتحادی به صورت زیر، از نو ثابت کرد:

$$S_n = n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = T_n + T_{n-1}$$

n امین عدد مخمس، P_n ، نیز به وسیلهٔ مجموع یک سری حسابی داده می‌شود

$$\begin{aligned} P_n &= 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) \\ &= \frac{n(3n - 1)}{2} = n + \frac{3n(n - 1)}{2} \\ &= n + 3T_{n-1} \end{aligned}$$

این مطلب، قضیهٔ دوم را ثابت می‌کند. قضیهٔ سوم به طور جبری با جمع کردن سری حسابی

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \frac{n(2n)}{2} = n^2$$

به دست می‌آید.

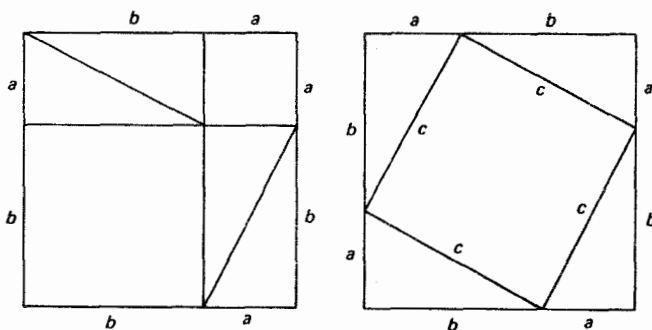
به عنوان آخرین کشف بسیار قابل توجه دربارهٔ اعداد، که به وسیلهٔ فیثاغورسیان صورت گرفته، می‌توانیم از بستگی فواصل موسیقی به نسبت‌های عددی یاد کنیم. فیثاغورسیان تشخیص دادند که برای تارهای تحت کشش یکسان، طولها باید به نسبت ۱ به ۲ برای اوکتاو، ۳ به ۴ برای فاصلهٔ پنجم، و ۴ به ۳ برای فاصلهٔ چهارم باشند. این نتایج که اولین واقعیت‌های مضبوط در فیزیک ریاضی بودند، فیثاغورسیان را به آغاز مطالعهٔ علمی گام‌های موسیقی هدایت کردند.

۳-۴ قضیه فیثاغورس و سه تایمهای فیثاغورسی

روایات در اسناد کشف مستقل قضیهٔ مربوط به مثلث قائم‌الزاویه به فیثاغورس، که اکنون در همه‌جا نام وی را بر خود دارد، اتفاق نظر دارند که مجذور وتر مثلث قائم‌الزاویه مساوی مجموع مجذورات دو ساق آن است. دیدیم که این قضیه بر بابلیان عصر حمورابی، متجاوز از هزار سال پیشتر، معلوم بوده است، ولی اولین برهان کلی می‌تواند توسط فیثاغورس ارائه شده باشد.

مدلهای زیادی دربارهٔ برهانی که فیثاغورس ممکن است عرضه کرده باشد، وجود دارد و عموماً چنین تصویری شود که برهان مزبور احتمالاً برهانی از نوع تقطیع* مثلثات زیر بوده که در شکل ۱۳ تصویر شده است. فرض کنید a, b, c معرف طولهای ساقها و وتر مثلث قائم‌الزاویه مفروض باشند و دو مربع شکل زیر را در نظر بگیرید که هر یک دارای ضلع $a+b$ هستند. اولین مربع به شش قطعه، یعنی به دو مربع روی ساقها و چهار مثلث قائم‌الزاویهٔ مساوی با مثلث مفروض تقطیع شده است. دومین مربع به پنج قطعه، یعنی مربع روی وتر و دو باره چهار مثلث قائم‌الزاویهٔ مساوی با مثلث قائم‌الزاویهٔ مفروض تقطیع شده است. با تفریق مقادیر مساوی، حال نتیجه می‌شود که مربع روی وتر برابر مجموع مربعهای روی ساقهاست.

برای اثبات اینکه قطعهٔ مرکزی تقطیع دوم واقعاً مربعی به ضلع c است، لازم است این حقیقت را به کار بریم که مجموع زوایای هر مثلث قائم‌الزاویه، مساوی دو قائمه است. اما خلاصهٔ اثودوموسی این قضیه را برای مثلث کلی به فیثاغورسیان نسبت می‌دهد. چون برهانی از این قضیه، به نوبهٔ خود، نیازمند اطلاعی از بعضی خواص خطوط موازی است،



شکل ۱۳

* با این حال، نگاه کنید به

بسط این نظریه نیز به فیثاغورسیان اولیه نسبت داده می‌شود.

از زمان فیثاغورس، برهانهای متعددی از قضیه فیثاغورس تهیه شده است. ا. س. لومیس^۱، در ویرایش دوم کتابش به نام قضیه فیثاغورس، ۳۷۰ برهان این قضیه مشهور را گردآوری و رده‌بندی کرده است.

يك مسئلهٔ كاملاً مرتبط با قضیه فیثاغورس پیدا کردن اعداد صحیح a ، b ، c است به طوری که ساقها و وتر مثلث قائمه‌ای را نمایش دهند. سه تاییهای اعداد از این نوع، به سه تاییهای فیثاغورسی معروف‌اند و، همچنانکه در بخش ۲-۶ دیده‌ایم، تحلیل لوح پلیمپتن ۳۲۲، شواهد نسبتاً متقاعدکننده‌ای عرضه می‌دارد مبنی بر اینکه با بلیان قدیم چگونگی محاسبهٔ چنین سه تاییهایی را می‌دانسته‌اند. فرمول

$$m^2 + \left(\frac{m^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2 + 1}{2}\right)^2,$$

که سه جملهٔ آن، به ازای هر عدد فرد m ، يك سه تایی فیثاغورسی را نتیجه می‌دهد، به فیثاغورسیان منسوب شده است. فرمول مشابه

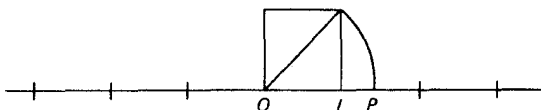
$$(2m)^2 + (m^2 - 1)^2 = (m^2 + 1)^2,$$

که در آن m می‌تواند فرد یا زوج باشد، به همین منظور ساخته شده است و به افلاطون (حدود ۳۸۰ ق.م) نسبت داده می‌شود. هیچ يك از این فرمولها همهٔ سه تاییهای فیثاغورسی را نمی‌دهد.

۳-۵ کشف کمیت‌های گنگ

اعداد صحیح تجزیدنی هستند که از روند شمارش دسته‌های متناهی اشیا ناشی می‌شوند. نیازهای زندگی روزمره ما را ملزم می‌سازند که علاوه بر شمارش اشیای منفرد، کمیت‌های مختلفی از قبیل طول، وزن، و زمان را اندازه بگیریم. برای برآوردن این احتیاجات سادهٔ اندازه‌گیری، کسرها را لازم داریم؛ زیرا، به عنوان مثال، به ندرت پیش می‌آید که طولی شامل عدد دقیقاً صحیحی از واحدهای خطی باشد. بنا براین، اگر عددگویا را به صورت خارج قسمت دو عدد صحیح تعریف کنیم، p/q ، که در آن $q \neq 0$ ، این دستگاه اعدادگویا، از آنجا که شامل همهٔ اعداد صحیح و کسرهاست، برای مقاصد عملی اندازه‌گیری کفایت می‌کند.

اعدادگویا تعمیم هندسی ساده‌ای دارند. دو نقطهٔ متمایز I و O را بر يك خط مستقیم افقی مشخص کنید به طوری که I در طرف راست O باشد و قطعه خط OI را به عنوان واحد طول انتخاب کنید. اگر فرض کنیم که I و O به ترتیب معرف اعداد 1 و 0 باشند



شکل ۱۴

آنگاه اعداد صحیح مثبت و منفی را می‌توان با مجموعه نقاطی بر خط که به اندازه یک واحد از هم فاصله داشته باشند، نمایش داد؛ اعداد صحیح مثبت در طرف راست O و اعداد صحیح منفی در طرف چپ O نمایش داده می‌شوند. در این صورت کسرهای به‌مخرج q را می‌توان با نقاطی که هر فاصله به طول واحد را به q قسمت مساوی تقسیم می‌کنند، نمایش داد. لذا به ازای هر عدد گویا نقطه‌ای در روی این خط وجود دارد. برای ریاضیدانان اولیه بدیهی به نظر می‌رسید که بدین طریق همه نقاط خط به‌کار گرفته خواهند شد. اطلاع از این که نقاطی بر خط وجود دارند که متناظر با هیچ عدد گویایی نیستند، قاعدتاً می‌باید تکان‌دهنده بوده باشد. این کشف یکی از بزرگترین دستاوردهای فیثاغورسیان بود. فیثاغورسیان به ویژه نشان دادند که هیچ عدد گویایی نظیر نقطه P بر روی خط به‌طوری که فاصله OP در آن مساوی قطر مربعی به ضلع واحد باشد، وجود ندارد (نگاه کنید به شکل ۱۴). اکنون لازم بود اعداد جدیدی ابداع شوند که متناظر با چنان نقاطی باشند، و چون این اعداد نمی‌توانند گویا باشند اعداد گنگ نام یافتند. کشف آنها یکی از حوادث برجسته را در تاریخ ریاضیات مشخص می‌کند.

برای اثبات اینکه طول قطر مربعی به ضلع واحد را نمی‌توان با یک عدد گویا نمایش داد، کافی است نشان دهیم که $\sqrt{2}$ گنگ است. برای این منظور، اول ملاحظه می‌کنیم که برای عدد صحیح مثبت s ، s^2 وقتی و فقط وقتی زوج است که s زوج باشد. حال، فرض کنید که $\sqrt{2}$ گویاست، یعنی $\sqrt{2} = a/b$ که در آن a و b اعداد صحیح متباین هستند.* در این صورت

$$a = b\sqrt{2}$$

یا

$$a^2 = 2b^2.$$

چون a^2 دو برابر یک عدد صحیح است، می‌بینیم که a^2 ، و بنابراین a ، باید زوج باشد. قرار دهید $a = 2c$. آنگاه معادله اخیر به صورت

$$4c^2 = 2b^2$$

* دو عدد صحیح متباین هستند هرگاه هیچ عامل صحیح مشترکی بجز واحد نداشته باشند. مثلاً ۱۸ و ۵ متباین هستند، در حالی که ۱۲ و ۱۸ متباین نیستند.

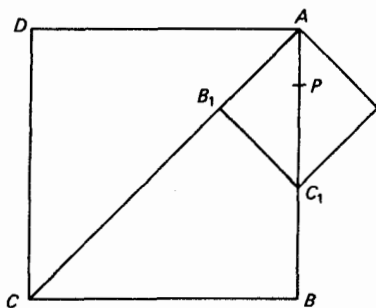
$$2c^2 = b^2$$

درمی آید، که از آن نتیجه می گیریم b^2 ، و از این رو b ، باید زوج باشد. اما این غیرممکن است، زیرا boa متباین فرض شده بودند. لذا فرض گویا بودن $\sqrt{2}$ به این وضعیت محال منجر شده و باید کنار گذاشته شود.

کشف وجود اعداد گنگ، برای فیثاغورسیان حیرت آور و نگران کننده بود. قبل از همه، این کشف ضربه مهلکی بر فلسفه فیثاغورسی، که همه چیز را به اعداد صحیح وابسته می دانست، تلقی شد. دیگر آنکه، این مطلب مغایر با عقل سلیم به نظرمی آمد، زیرا به طور شهودی حس می شد که هر کمیتی با یک عدد گویا قابل بیان است. همتای هندسی آن نیز همان قدر تکان دهنده بود، زیرا چه کسی می توانست در این تردید کند که به ازای هر دو قطعه خط مفروض می توان قطعه خط سومی، هر چند بسیار بسیار کوچک، پیدا کرد به طوری که به تعداد دفعات صحیح در هر یک از دو خط مفروض بگنجد؟ اما به عنوان این دو قطعه خط، یک ضلع s و یک قطر d از مربعی را اختیار کنید. حال اگر قطعه خط سومی مانند t وجود داشته باشد که به تعداد دفعات صحیح در s و d بگنجد، خواهیسم داشت $d = at$ و $s = bt$ ، که در آن boa اعداد صحیح مثبت هستند، اما $d = s\sqrt{2}$ ، که از آن نتیجه می شود $at = b\sqrt{2}$. یعنی، $a = b\sqrt{2}$ یا $a/b = \sqrt{2}$ ، پس $\sqrt{2}$ یک عدد گویاست. بدین ترتیب، برخلاف برداشت شهودی ما، قطعه خطهایی نامتوافق وجود دارند، یعنی قطعه خطهایی که دارای مقیاس اندازه گیری مشترکی نیستند.

برهان دیگری از گنگ بودن $\sqrt{2}$ را به شیوه هندسی و با نشان دادن اینکه ضلع و قطر هر مربع نامتوافق اند، به طور خلاصه بیان می کنیم. فرض کنید خلاف این مطلب درست باشد. در این صورت، مطابق این فرض، قطعه خطی مانند AP وجود دارد (نگاه کنید به شکل ۱۵) به طوری که هم قطر AC و هم ضلع AB از مربع $ABCD$ مضارب صحیحی از AP اند؛ یعنی AC و AB نسبت به AP متوافق اند. روی CB ، $CB_1 = AB$ را جدا کرده و B_1C_1 را عمود بر CA رسم کنید. می توان به آسانی ثابت کرد که $C_1B = C_1B_1 = AB_1$. در این صورت $AC_1 = AB - AB_1$ و AB_1 نسبت به AP متوافق اند. اما AB_1 و AC_1 قطر و ضلع مربعی با ابعادی کوچکتر از نصف ابعاد مربع اصلی اند. نتیجه می شود که با تکرار این عمل می توانیم مربعی به دست آوریم که قطر آن، AC_n ، و ضلع آن AB_n نسبت به AP متوافق اند، $AC_n < AP$. این امر محال، قضیه را ثابت می کند.

بسرهان اول اساساً همان برهان سنتی است که بر ارسطو (۳۸۴-۳۲۲ ق.م) معلوم بود. این کشف گنگ بودن $\sqrt{2}$ بهی را در صفوف فیثاغورسیان باعث شد. این امر نه تنها فرض اساسی وابسته بودن همه چیز را به اعداد درست ظاهرأ برهم می زد، بلکه چون تعریف فیثاغورسی تناسب، هر دو کمیت همجنس را متوافق فرض می کرد همه قضایای نظریه فیثاغورسی تناسب باید به کمیتهای متوافق محدود می گردید و لذا نظریه عمومی



شکل ۱۵

اشکال متشابه آنها از اعتبار افتاد. این «رسوایی منطقی» آن چنان عظیم بود که برای مدتی سعی می‌شد موضوع مخفی نگه‌داشته شود، و افسانه‌ای بسا این مضمون وجود دارد که هیپاسوس^۱ فیثاغورسی (یا شاید شخص دیگری) به خاطر عدم تقوایش در افشای این راز نزد اجانب، در دریا به هلاکت رسید یا (مطابق روایت دیگری) از جامعه فیثاغورسیان طرد شد و قبری برای وی برپا گردید آن چنان که گویی مرده است.

تامدتها، $\sqrt{2}$ تنها عدد گنگ شناخته شده بود.* بعدها، به گفته افلاطون، ثئودوروس^۲ کورنه‌یی^۳ (حدود ۴۲۵ ق.م.) نشان داد که $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{6}$ ، $\sqrt{7}$ ، $\sqrt{8}$ ، $\sqrt{10}$ ، $\sqrt{11}$ ، $\sqrt{12}$ ، $\sqrt{13}$ ، $\sqrt{14}$ ، $\sqrt{15}$ ، $\sqrt{17}$ نیز گنگ هستند. سپس، در حدود ۳۷۰ ق.م. این «رسوایی» توسط ائودوکسوس^۴ زیرک، شاگرد افلاطون و آرخوتاس^۵، که از فیثاغورسیان بود، با ارائه تعریف جدیدی از تناسب مرتفع گردید. بررسی ماهرانه ائودوکسوس در مورد کمیتهای نامتوافق در مقاله پنجم اصول اقلیدس ظاهر می‌شود، و اساساً با توصیف نوین اعداد گنگ که به وسیله ریشارد دکیند^۶ در سال ۱۸۷۲ داده شد، منطبق است. مطالعه مثلثهای متشابه در کتب هندسه دبیرستانی امروزی هنوز برخی از مشکلات و ظرافتهایی را که به واسطه کمیتهای نامتوافق به میان آمده‌اند، نشان می‌دهد.

۳-۶ اتحادهای جبری

یونانیان اولیه با الهام از نمایش عدد به وسیله طول، و بدون در اختیار داشتن هر گونه نمادگذاری جبری مناسب، روشهای هندسی هوشمندانه‌ای را برای انجام اعمال جبری ابداع کردند. قسمت عمده این جبرهندسی به فیثاغورسیان منسوب و در چندین مقاله آغازین

1. Hippasus

* امکان دارد که $(\sqrt{5}-1)/2$ ، که نسبت ضلع پنج ضلعی منتظم به قطر آن است، اولین عدد گنگ شناخته شده باشد.

2. Theodorus

3. Cyrene

4. Eudoxus

5. Archytas

6. Richard Dedekind

اصول اقلیدس پراکنده شده است. مثلاً، مقاله دوم اصول شامل تعدادی قضایاست که در حقیقت اتحادهای جبری اند که در قالب اصطلاحات هندسی بیان شده اند. کاملاً قطعی به نظر می‌رسد که این قضایا توسط فیثاغورسیان اولیه، از طریق روش تقطیع، بسط یافته‌اند. این روش را می‌توانیم با در نظر گرفتن چند قضیه مقاله دوم توضیح دهیم.

قضیه ۴ مقاله دوم به‌طور هندسی اتحاد

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

را با تقطیع مربعی به ضلع $a+b$ به دو مربع و دو مستطیل که دارای مساحت‌های a^2 ، b^2 ، ab و ab هستند، آن چنان که در شکل ۱۶ نشان داده شده، ثابت می‌کند. بیان اقلیدس از این قضیه چنین است: اگر خط راستی به دو قسمت دلخواه تقسیم شود، مربع ساخته شده روی تمام خط برابر است با مجموع مربعات ساخته شده روی دو قسمت، به علاوه دو برابر مستطیلی که اضلاع آن از این دو قسمت تشکیل می‌شود.

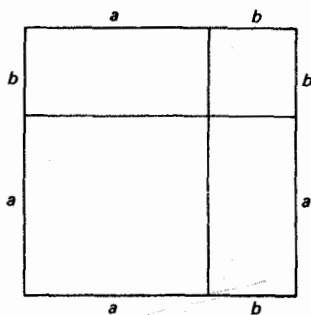
بیان قضیه ۵ مقاله دوم چنین است: اگر خط راستی به طور مساوی، و نیز به‌طور نامساوی تقسیم شود، مستطیل تشکیل شده از قسمت‌های نامساوی به علاوه مربع روی خط واقع بین نقاط تقسیم، برابر است با مربع روی نیمه خط. فرض کنید AB پاره‌خط راست مفروض باشد، و فرض کنید که این پاره‌خط در P به‌طور مساوی و در Q به‌طور نامساوی به دو قسمت تقسیم شود. در این صورت قضیه فوق می‌گوید که

$$(AQ)(QB) + (PQ)^2 = (PB)^2.$$

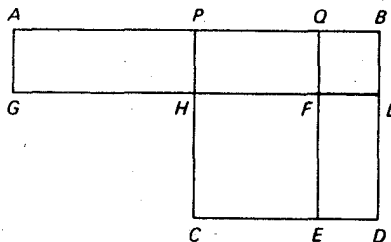
اگر قرار دهیم $AQ = 2a$ و $QB = 2b$ ، اتحاد جبری زیر را خواهیم داشت:

$$2ab + (a-b)^2 = (a+b)^2.$$

یا، اگر قرار دهیم $AB = 2a$ و $PQ = b$ به اتحاد زیر می‌رسیم



شکل ۱۶



شکل ۱۷

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

تقطیع ارائه شده در اصول برای اثبات این قضیه، پیچیده تر از تقطیع داده شده برای قضیه ۴ است و در شکل ۱۷ نشان داده شده است. در این شکل، $QFLB$ و $PCDB$ مربعهایی هستند که بر روی اضلاع PB و QB رسم شده اند. در این صورت

$$\begin{aligned} (AQ)(QB) + (PQ)^2 &= AGFQ + HCEF = AGHP + PHFQ + HCEF \\ &= PHLB + PHFQ + HCEF \\ &= PHLB + FEDL + HCEF = (PB)^2. \end{aligned}$$

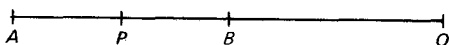
بیان قضیه ۶ در مقاله دوم این است: اگر خط داستی به دو نیم شود و تا نقطه دلخواهی امتداد یابد، مستطیلی که از تمام خط امتداد داده شده و بخشی از آن که امتداد یافته است، تشکیل شود به علاوه مربع روی نصف خط دو نیم شده. برابر است با مربع روی خط داستی که از نصف پاره خط اولیه و قسمت امتداد داده شده ساخته شود. در اینجا (نگاه کنید به شکل ۱۸) اگر پاره خط راست AB با نقطه وسط P تا نقطه Q امتداد داده شود، باید نشان دهیم که

$$(AQ)(BQ) + (PB)^2 = (PQ)^2.$$

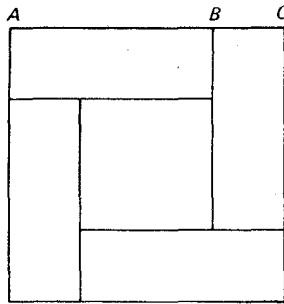
اگر قرار دهیم $AQ = 2a$ و $BQ = 2b$. دوباره به اتحاد

$$4ab + (a-b)^2 = (a+b)^2$$

می‌رسیم، و تقطیعی مشابه با آنچه برای قضیه ۵ بدکار رفت، در اینجا نیز می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.



شکل ۱۸



شکل ۱۹

شکل ۱۹، با $AB = a$ و $BC = b$ ، برهان کم‌زحمت‌تری را برای اتحاد

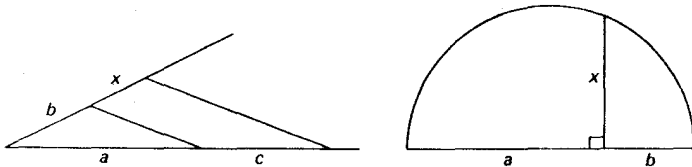
$$4ab + (a-b)^2 = (a+b)^2.$$

مطرح می‌کند.

۷-۳ حل هندسی معادلات درجهٔ دوم

یونانیان در جبر هندسی خود، دو روش اصلی را برای حل برخی معادلات ساده به کار بردند - روش تناسبها و روش اضافه کردن مساحتها^۱. شواهدی در دست است که هردوی این روشها از ابداعات فیثاغورسیان بوده است.

روش تناسبها ترسیم [ساختن] پاره‌خط X را (دقیقاً به همان صورت که امروزه در دروس هندسهٔ دبیرستانی عمل می‌کنیم؛ نگاه کنید به شکل ۲۰)، که یا با $a:b = c:x$ و یا با $a:x = x:b$ داده می‌شود، که در آن c, b, a پاره‌خطهایی معلوم‌اند، امکان‌پذیر می‌سازد. یعنی، روش تناسبها راه‌حلهای هندسی برای معادلات



شکل ۲۰

۱. موضوع این روش، «قرار دادن متوازی‌الاضلاعی برکنار خطی است»، که ریاضیون دورهٔ اسلامی از آن به «اضافه کردن» متوازی‌الاضلاعی برقطعه خط مفروض تعبیر کرده‌اند. ما نیز بعد از این همین اصطلاح را به کار خواهیم بردیم.

$$ax = bc \quad \text{و} \quad x^2 = ab.$$

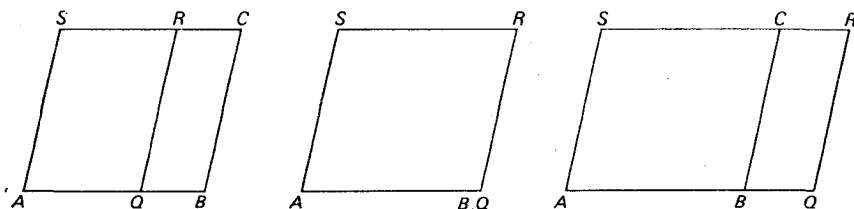
را فراهم می آورد.

برای تشریح روش اضافه کردن مساحتها، پاره خط AB و متوازی الاضلاع $AQRS$ را که ضلع AQ آن در امتداد خط AB است، در نظر بگیرید (نگاه کنید به شکل ۲۱). اگر Q در B نباشد، C را چنان اختیار کنید که $QBCR$ یک متوازی الاضلاع باشد. وقتی Q بین B و A است، متوازی الاضلاع $AQRS$ ، مضاف برقطعه خط AB ، با نقصانی به مقدار متوازی الاضلاع $QBCR$ خوانده می شود، وقتی Q بر B منطبق شود، متوازی الاضلاع $AQRS$ مضاف برقطعه خط AB خوانده می شود. وقتی Q بر امتداد AB از طرف B واقع شود، متوازی الاضلاع $AQRS$ مضاف برقطعه خط AB ، با زیادتی به مقدار متوازی الاضلاع $QBCR$ خوانده می شود.

قضیه ۴۴ مقاله اول اصول اقلیدس مسئله ترسیمی زیر را حل می کند: اضافه کردن متوازی الاضلاعی با مساحت مفروض و زوایای مجاور به قاعده مفروض بر قطعه خط مفروض AB . حالت خاصی را در نظر بگیرید که در آن زوایای مجاور به قاعده قائمه هستند، به طوری که متوازی الاضلاع مضاف مستطیل باشد. طول AB را با a ، ارتفاع مستطیل مضاف را با x ، و ابعاد مستطیلی را که مساحتی برابر با مساحت مستطیل مضاف دارد با b و c نشان دهید. در این صورت

$$ax = bc, \quad \text{یا} \quad x = \frac{bc}{a}.$$

قضیه ۲۸ مقاله ششم اصول حل مسئله ترسیمی زیر است: اضافه کردن متوازی الاضلاعی مانند $AQRS$ برقطعه خط مفروض AB که مساحت آن برابر باشد با شکل مستقیم الخط F ، با نقصانی به اندازه متوازی الاضلاع $QBCR$ متشابه با متوازی الاضلاع مفروض؛ مساحت F نباید از مساحت متوازی الاضلاع رسم شده روی نیمه خط AB و متشابه با نقصان $QBCR$ تجاوز نماید. حالت خاصی را در نظر بگیرید که در آن متوازی الاضلاع مفروض، یک مربع است. طول AB را با a ، قاعده متوازی الاضلاع مضاف



شکل ۲۱

AQ را (که اکنون مستطیل است) با x و ضلع مربع F را که مساحت آن با مساحت مستطیل مضاف برابر است، با b نشان دهید. در این صورت

$$x(a-x) = b^2, \quad \text{یا} \quad x^2 - ax + b^2 = 0. \quad (1)$$

قضیه ۲۹ مقاله ششم مسئله ترسیمی زیر را حل می کند: اضافه نمودن متوازی الاضلاعی مانند $AQRS$ بر پاره خط مفروض AB با مساحتی مساوی مساحت شکل مستقیم الخط F و با زیادتی به اندازه متوازی الاضلاع $QBCR$ متشابه با متوازی الاضلاع مفروض. حالت خاصی را در نظر بگیرید که در آن، متوازی الاضلاع مفروض یک مربع باشد. طول AB را با a ، قاعده AQ از متوازی الاضلاع مضاف را (که اکنون یک مستطیل است) با x و ضلع مربعی مانند F با مساحتی مساوی مساحت مستطیل مضاف را با b نشان دهید. در این صورت

$$x(x-a) = b^2, \quad \text{یا} \quad x^2 - ax - b^2 = 0. \quad (2)$$

نتیجه می شود که قضیه ۴۴ مقاله اول اصول راه حل‌سی هندسی برای معادله خطی $ax = bc$ ارائه می کند، و قضایای ۲۸ و ۲۹ مقاله ششم اصول راه‌حلهایی هندسی به ترتیب برای معادلات درجه دوم $x^2 - ax - b^2 = 0$ و $x^2 - ax + b^2 = 0$ ، به دست می دهند.

به آسانی می توان روشهای ترسیمی برای حالت‌های خاص قضایای ۲۸ و ۲۹ مقاله ششم ابداع کرد که به طور قابل ملاحظه‌ای ساده‌تر از ترسیمهای عمومیتر داده شده در اصول باشند.

برای مثال، حالت خاص قضیه ۲۸ مقاله ششم را در نظر بگیرید. در اینجا می خواهیم بر پاره خط مفروضی، مستطیلی اضافه کنیم که به اندازه یک مربع نقصان داشته باشد. با توجه به معادله اول (۱) ملاحظه می کنیم که قضیه را می توان به صورت زیر بیان کرد: تقسیم پاره خط مفروضی بدان گونه که مستطیل تشکیل شده از قطعات آن برابر مربع مفروضی باشد، در حالتی که این مربع از مربع بنا شده روی نیمه پاره خط مفروض بزرگتر نباشد. برای روشنتر شدن مسئله، فرض کنید AB و b دو پاره خط باشند، به طوری که b از نصف AB بزرگتر نیست. باید AB را به وسیله نقطه‌ای مانند Q چنان تقسیم کنیم که $(AQ)(QB) = b^2$. برای انجام این امر $PE = b$ را روی عمود رسم شده بر AB در نقطه وسط آن، P ، جدا می کنیم و به مرکز E و به شعاع PB قوسی رسم می کنیم که AB را، مثل شکل ۲۲، در نقطه مطلوب Q قطع کند. اثبات درستی این روش در قضیه ۵ مقاله دوم (که احتمالاً توسط فیثاغورسیان برای استفاده در همین مورد ابداع شده) آمده است، زیرا بنا بر آن قضیه

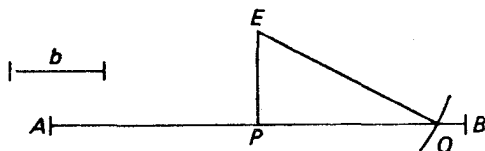
$$(AQ)(QB) = (PB)^2 - (PQ)^2 = (EQ)^2 - (PQ)^2 = (EP)^2 = b^2.$$

با نشان دادن طول AB با a و طول AQ با x ، معادله درجه دوم $x^2 - ax + b^2 = 0$ را حل

کرده‌ایم؛ ریشه‌ها با AQ و QB نمایش داده می‌شوند. ریشه‌های معادله درجه دوم

$$x^2 + ax + b^2 = 0$$

با طول‌های AQ و QB با علامت منفی نمایش داده می‌شوند.

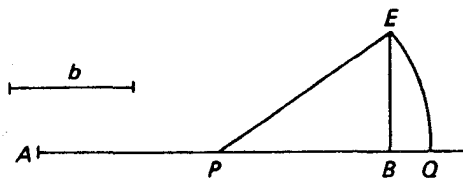


شکل ۲۲

برای حالت خاص قضیه ۲۹ مقاله ششم، می‌خواهیم بر پاره‌خط مفروضی، مستطیلی اضافه کنیم که به اندازه یک مربع زیادتی داشته باشد. با توجه به معادله اول (۲)، می‌بینیم که مسئله را می‌توان به صورت زیر دوباره بیان کرد: امتداد دادن پاره‌خط مفروضی بدان گونه که مستطیل تشکیل شده از پاره‌خط امتداد داده شده و قسمت امتداد داده شده برابر با مربع مفروضی باشد. دوباره، فرض کنید AB و b دو پاره‌خط باشند. باید AB را تا نقطه Q چنان امتداد دهیم که $(AQ)(QB) = b^2$. برای این منظور $BE = b$ را روی عمود مرسوم بر AB در B جدا می‌کنیم، و به مرکز P ، نقطه وسط AB ، و به شعاع PE قوسی رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطه مطلوب Q قطع کند، مثل شکل ۲۳. این دفعه، برهان به وسیله قضیه ۶ مقاله دوم عرضه شده، زیرا بنا بر آن قضیه

$$(AQ)(QB) = (PQ)^2 - (PB)^2 = (PE)^2 - (PB)^2 = (BE)^2 = b^2$$

مانند قبل، ملاحظه می‌کنیم که AQ و QB ، که اولی را مثبت و دومی را منفی می‌گیریم، ریشه‌های معادله درجه دوم



شکل ۲۳

* اگر r و s ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - ax + b^2 = 0$ باشند، با توجه به جبر مقدماتی می‌دانیم که $r + s = a$ و $rs = b^2$. اما AQ و QB اند که مجموعشان AB ؛ یا a ، و حاصلضربشان b^2 است.

$$x^2 - ax - b^2 = 0$$

هستند، که در آن a طول AB است. ریشه‌های

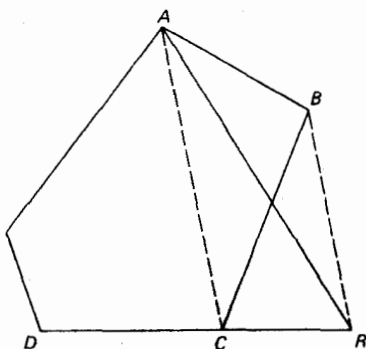
$$x^2 + ax - b^2 = 0$$

همان ریشه‌های معادله $x^2 - ax - b^2 = 0$ هستند، بجز اینکه علامت آنها عوض شده است.

جبر هندسی فیثاغورسیان، هر چند که حکایت از نبوغ می‌کند، ارزش سادگی و سهولت نهفته در نمادگذاری جبری امروزی را بیشتر نشان می‌دهد.

۸-۳ تبدیل مساحتها

فیثاغورسیان علاقه‌مند بودند که مساحت يك شكل مستقيم الخط را به شكل مستقيم الخط ديگر تبديل کنند. حل مسئله اساسی ساختن مربعی، هم مساحت با چند ضلعی مفروض، توسط آنها را می‌توان در قضایای ۴۲، ۴۴، ۴۵، از مقاله اول و قضیه ۱۴ از مقاله دوم اصول اقلیدس پیدا کرد. راه حل ساده‌ای، که احتمالاً بر فیثاغورسیان نیز معلوم بود، به قرار زیر است. چند ضلعی دلخواه $ABCD\dots$ را در نظر بگیرید (نگاه کنید به شکل ۲۴). BR را موازی AC رسم کنید تا DC را در R قطع کند. آنگاه، چون مثلثهای ABC و ARC دارای قاعده مشترک AC و ارتفاعهای برابر وارد بر این قاعده مشترک اند، این مثلثها دارای مساحتهاى برابر می‌باشند. در نتیجه چندضلعیهای $ABCD\dots$ و $ARD\dots$ مساحتهاى مساوی دارند. اما چند ضلعی به دست آمده يك ضلع کمتر از چند ضلعی مفروض دارد. با تکرار این عمل، سرانجام به مثلثی دست می‌یابیم که دارای مساحتی برابر مساحت چند ضلعی مفروض است. حال اگر b ضلعی از این مثلث و h ارتفاع وارد بر b باشد، ضلع يك مربع معادل، با $\sqrt{(bh)}/2$ ، یعنی، با واسطه هندسی بین b و $h/2$ ، داده می‌شود. چون



شکل ۲۴

این واسطهٔ هندسی با ستاره [خط کش غیر مدرج] و پرگار به آسانی قابل ساختن است، تمام مسئله را می توان به مدد این وسایل حل کرد.

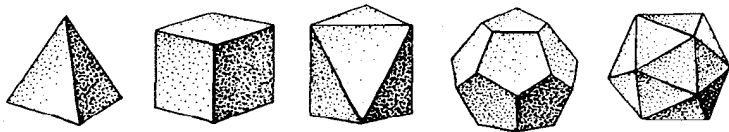
مسائل جالب زیادی دربارهٔ مساحتها را با این روش رسم خطوط موازی می توان حل کرد (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله ای ۱۱۰۳).

۹-۳ اجسام منتظم

یک چندوجهی را منتظم نامند هر گاه وجوه آن چندضلعیهای منتظم مساوی و کنجهای آن همه مساوی باشند. گرچه چندضلعیهای منتظم از هر مرتبه ای موجودند، معلوم می شود که تنها پنج چندوجهی منتظم متفاوت وجود دارند (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله ای ۱۲۰۳). چند وجهیهای منتظم از روی تعداد وجوه آنها نامگذاری می شوند. مثلاً چهاروجهی با ۴ وجه مثلثی، شش وجهی، یا مکعب، با ۶ وجه مربعی، هشت وجهی با ۸ وجه مثلثی، دوازده وجهی با ۱۲ وجه پنج ضلعی، و بیست وجهی با ۲۰ وجه مثلثی را داریم (نگاه کنید به شکل ۲۵).

تاریخ اولیهٔ این چند وجهیهای منتظم در تاریکی ایام گذشته محو شده است. بررسی ریاضی آنها در مقالهٔ هشتم اصول اقلیدس آغاز شد. اولین حاشیه برای مقاله خاطر نشان می سازد که این مقاله «اجسام موسوم به افلاطونی را بررسی می کند، که به غلط چنین نام یافته اند، زیرا سه تا از آنها، یعنی چهاروجهی، مکعب، و دوازده وجهی منسوب به فیثاغورسیان است، در حالی که هشت وجهی و بیست وجهی به تثابتوس^۱ منسوب می باشد.» این مطلب می تواند حقیقت داشته باشد.

به هر حال، توصیفی از هر پنج چند وجهی منتظم به وسیلهٔ افلاطون داده شده است؛ وی در کتاب تیمایوس^۲ خود نشان می دهد که چگونه می توان مدلهایی از اجسام صلب را با ترکیب مثلثها، مربعها، و پنج ضلعیهای که وجوه آنها را تشکیل می دهند، ساخت. تیمایوس افلاطون همان تیمایوس لوکریسی^۳ پیرو فیثاغورس است که از قرار معلوم افلاطون وی را در موقع دیدار از ایتالیا ملاقات کرد. در این اثر افلاطون، تیمایوس چهار جسم صلبی را که به آسانی قابل ساختن است - چهار وجهی، هشت وجهی، بیست



شکل ۲۵

1. Theaetetus

2. Timaeus

3. Timaeus of Locri

وجهی، و مکعب - به صورت رمز گونه‌ای با چهار «عنصر» اولیه امپدوکلسی^۱ کلیه اجسام مادی - آتش، باد، آب، و خاک - مربوط می‌سازد. اشکال مربوط به توجیه جسم صلب پنجم، دوازده وجهی، با انتساب آن به جهان پیرامون حل می‌شود.

یوهان کپلر^۲ (۱۶۳۰-۱۵۷۱)، سرمنجم، ریاضیدان، و عالم معانی باطنی اعداد^۳ توضیح استادانه‌ای برای انتسابهای تیمایوس ارائه کرد. وی به طور شهودی پذیرفت که از بین اجسام صلب منتظم، چهار وجهی کوچکترین حجم را نسبت به سطح خود محصور می‌کند، در حالی که بیست وجهی بیشترین حجم را در بر می‌گیرد. حال این نسبت‌های حجم به سطح به ترتیب کیفیتهای خشکی و رطوبت هستند، و چون آتش خشکترین این چهار «عنصر» و آب مرطوبترین آنهاست، چهاروجهی بسایند مظهر آتش و بیست وجهی مظهر آب باشد. مکعب باخاک مربوط است زیرا مکعب، که استوار بر یکی از وجوه مربع شکل خود تکیه می‌کند، بیشترین پایداری را دارد. از سوی دیگر، هشت وجهی وقتی که دو رأس متقابل آن به آرامی بین دو انگشت سبابه و شست نگهداشته شود، به آسانی می‌چرخد و ناپایداری باد را دارد. بالاخره، دوازده وجهی با جهان مربوط می‌شود، زیرا دوازده وجهی دارای ۱۲ وجه است و منطقه البروج نیز ۱۲ علامت دارد.

چهاروجهی، مکعب، و هشت وجهی را در طبیعت به صورت بلور، مثلاً، به ترتیب در سدیم سولفات تیمونات^۴، نمک معمولی، و زاج کروم^۵ می‌توان یافت. دوتای دیگر نمی‌توانند به شکل بلور پدید آیند، ولی به صورت اسکلت حیوانات دریایی ذره بینی که (ادیولا)^۶ نامیده می‌شوند، مشاهده شده‌اند. در سال ۱۸۸۵ یک چهار وجهی منتظم اسباب بازی از ریشه اتروسکی^۷، که تصور می‌شود به ۵۵۰ ق.م. برگردد، در مونته لوفاف^۸ نزدیک پادوا^۹ از زیر خاک در آمد.

۱۰-۳ تفکر اصل موضوعی

در زمانی بین تالس در ۶۰۰ ق.م. و اقلیدس در ۳۰۰ ق.م. مفهوم یک بحث منطقی به صورت سلسله استنتاج‌هایی دقیق از چند فرض آغازین و صریحاً بیان شده، کمال یافت. این روند، موسوم به روش اصل موضوعی، به صورت هسته اصلی ریاضیات جدید در آمده و بدون تردید قسمت عمده رشد هندسه با این الگو، مدیون فیثاغورسیان است. به طور قطع یکی از عمده‌ترین کارهای یونانیان اولیه بسط این روش موضوعی تفکر بوده است. در بخش‌های ۷-۵ و ۱۵-۲ [جلد ۲] به بحث جامعتری از این موضوع باز خواهیم گشت.

1. Empedoclus
2. Johann Kepler
3. numerologist
4. sodium sulphantimoniate
5. chrome alum
6. radiolaria
7. Etruscan
8. Monte Loffa
9. Padua

مطالعه مسئله‌ای

۱.۳ مسائل عملی تالس

(الف) دو روایت از چگونگی محاسبه بلندی يك هرم مصری به كمك سایه‌ها توسط تالس در دست است. شرح قدیمتر، که به وسیله هیرونوموس، یکی از شاگردان ارسطو داده شده، می‌گوید که تالس طول سایه هرم را در لحظه‌ای که سایه وی به درازای خود او بود، یادداشت کرد. روایت جدیدتر، که به وسیله پلوتارک داده شده، حاکی از آن است که وی چوبی را بر زمین نصب کرد و سپس از مثلثهای متشابه استفاده نمود. هیچیک از دو روایت ذکرى از مشکل به دست آوردن طول سایه هرم، یعنی، فاصله از رأس سایه تا مرکز قاعده هرم به میان نمی‌آورند.

روشی، بر پایه مثلثهای متشابه و مستقل از عرض جغرافیایی و موقع سال، برای تعیین بلندی هرم از روی دو اندازه مشاهده شده سایه، طرح کنید.

(ب) گفته شده است که تالس فاصله يك کشتی را از ساحل با استفاده از این واقعیت اندازه گرفت که هرگاه دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلثی با دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلث دیگر برابر باشد. آن دو مثلث مساوی‌اند. هیث حدس زده است که این کار احتمالاً با دستگاهی متشکل از دو میله AD و AC ، که با لولایی در A بهم متصل‌اند، آن گونه که در شکل ۲۶ نشان داده شده، صورت گرفته است. میله AD به طور عمودی بر فراز نقطه B در ساحل گرفته شده، در حالی که میله AC به طرف کشتی P ، نشانه رفته است. آنگاه، بدون تغییر زاویه DAC ، دستگاه حول AD چرخانده شده و نقطه Q در روی زمین در امتداد بازوی AC مشخص شده است. برای پیدا کردن فاصله B تا نقطه غیر قابل دسترس P ، کدام فاصله باید اندازه گرفته شود؟

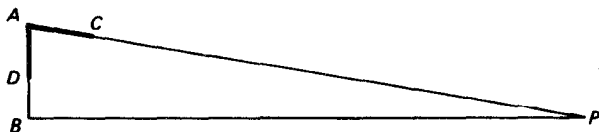
۲.۳ اعداد تام و متحابه

(الف) نشان دهید که در فرمول اقلیدس برای اعداد تام، m باید اول باشد.

(ب) چهارمین عدد تامی که از فرمول اقلیدس به دست می‌آید، کدام است؟

(ج) ثابت کنید که مجموع معکوسهای کلیه مقسوم‌علیه‌های هر عدد تام مساوی

۲ است.



شکل ۲۶

- (د) نشان دهید که اگر p اول باشد، آنگاه p^n ناقص است.
- (ه) نشان دهید که اعداد نیکولو پانگانی، ۱۱۸۴ و ۱۲۱۰، متحابه‌اند.
- (و) نشان دهید که هر مضرب یک عدد زاید یا تام، یک عدد زاید است.
- (ز) ۲۱ عدد زاید کوچکتر از ۱۰۰ را پیدا کنید. متوجه خواهید شد که همه آنها اعداد زوج‌اند. برای نشان دادن اینکه همه اعداد زاید زوج نیستند، نشان دهید که $۳ \times ۵ \times ۷ = ۹۴۵$ زاید است. این کوچکترین عدد زاید فرد است.
- (ح) دنباله‌ای دوری از ۳ عدد یا بیشتر، به طوری که مجموع مقسوم‌علیه‌های حقیقی هر یک برابر عدد بعدی در دنباله باشد به عنوان یک زنجیر اجتماعی اعداد مشهور است. تنها دو زنجیر اجتماعی شناخته شده است، یکی با ۵ «حلقه» (که بدوسیله پ. پوله فرانسوی پیدا شده) و با ۱۲۴۹۶ شروع می‌شود، و یکی با ۲۸ حلقه که با ۱۴۳۱۶ شروع می‌شود. این زنجیرهای اجتماعی را پیدا کنید. زنجیر اجتماعی را که دقیقاً ۳ حلقه داشته باشد، یک جمعیت می‌نامند؛ تاکنون هیچ جمعیتی به دست نیامده است.

۳.۳ اعداد مصور

(الف) اولین چهار عدد مسدسی را بنویسید.

(ب) یک عدد مستطیلی عبارت از عددی نقطه‌های یک آرایه مستطیلی است که تعداد ستونهایش یکی بیش از تعداد سطرهاست. به طریق هندسی و جبری نشان دهید که مجموع نخستین n عدد صحیح زوج مثبت، یک عدد مستطیلی است.

(ج) به طریق هندسی و جبری نشان دهید که هر عدد مستطیلی، مجموع دو عدد مثلثی مساوی است.

(د) هم به طور هندسی و هم به طور جبری نشان دهید، که ۸ برابر هر عدد مثلثی به اضافه ۱، یک عدد مربعی است.

(ه) ثابت کنید که هر عدد زوج تام، یک عدد مثلثی نیز هست.

(و) ثابت کنید که دنباله اعداد m ضلعی، به ازای زوجی از اعداد گویای ثابت

a و b ، با

$$an^2 + bn, \quad n = 1, 2, \dots$$

داده می‌شود.

(ز) a و b را در (و) وقتی $m = 7$ ، پیدا کنید.

۴.۳ میانگینها

خلاصهٔ انودموسی می‌گوید که در عهد فیثاغورس سه میانگین وجود داشته، حسابی، هندسی و مغالی، که نام اخیر بعدها به وسیلهٔ آرخوتاس و هیپاسوس به توافقی تغییر یافت. این سه میانگین را برای دو عدد مثبت می‌توانیم به ترتیب به صورت

$$A = \frac{a+b}{2}, \quad G = \sqrt{ab}, \quad H = \frac{2ab}{a+b}$$

تعریف کنیم.

(الف) نشان دهید که $A \geq G \geq H$ ، تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار است که

$$a = b$$

(ب) نشان دهید که $a:A = H:b$. این نسبت به تناسب «موسیقی» معروف بود.
 (ج) نشان دهید که H میانگین توافقی بین a و b است در صورتی که عددی مانند n موجود باشد به طوری که $a = H + a/n$ و $H = b + b/n$. این، تعریف فیثاغورس از میانگین توافقی a و b بود.

$$(د) \quad \frac{1}{H-a} + \frac{1}{H-b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

(ه) چون ۸ میانگین توافقی ۱۲ و ۶ است، فیلولانوس^۱، یکی از پیروان فیثاغورس در حدود سال ۴۲۵ ق.م، مکعب را «توافق هندسی» نامید. در این مورد توضیح دهید.
 (و) نشان دهید که اگر a, b, c اجزای یک تصاعد توافقی باشند، اعداد $a/(b+c)$ ، $b/(c+a)$ ، $c/(a+b)$ نیز چنین اند.

(ز) اگر $a < c$ ، دو عدد مثبت باشند، در این صورت هر عدد b بین a و c ، به یک معنی، یک میانگین (باعدل) a و c است. فیثاغورسیان بعدی ده میانگین b از a و c را، که به ترتیب زیر تعریف می‌شوند، در نظر گرفتند:

$$\begin{array}{ll} (۱) & (b-a)/(c-b) = a/a \\ (۲) & (b-a)/(c-b) = a/b \\ (۳) & (b-a)/(c-b) = a/c \\ (۴) & (b-a)/(c-b) = c/a \\ (۵) & (b-a)/(c-b) = b/a \end{array} \quad \begin{array}{ll} (۶) & (b-a)/(c-b) = c/b \\ (۷) & (c-a)/(b-a) = c/a \\ (۸) & (c-a)/(c-b) = c/a \\ (۹) & (c-a)/(b-a) = b/a, \quad a < b \\ (۱۰) & (c-a)/(c-b) = b/a, \quad a < b \end{array}$$

با فرض اینکه $a < c$ ، نشان دهید که در هر ده حالت $a < b < c$.

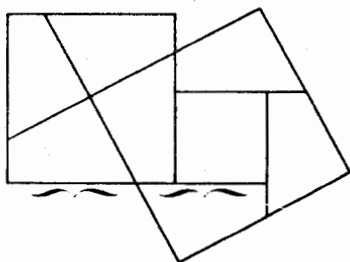
(ح) نشان دهید که (۱)، (۲)، و (۳) در (ز) به ترتیب میانگین حسابی، هندسی و توافقی a و c را به دست می‌دهند.

۵.۳ اثباتهای تقطیعی قضیه فیثاغورس

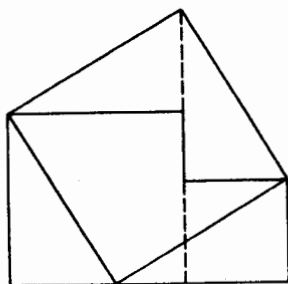
(الف، ب) دو مساحت، یا دو حجم، Q و P مساوی جمعی خوانده می‌شوند، در صورتی که بتوان آنها را به زوج قطعه‌های مساوی متناظر تقطیع کرد. آنها را مساوی تفریقی گویند اگر بتوان زوج قطعه‌های مساوی متناظر به Q و P افزود تا اشکال جدیدی که مساوی جمعی‌اند، به دست آیند. برهانهای متعددی از قضیه فیثاغورس وجود دارند که با نشان دادن اینکه مربع روی وتر مثلث قائم‌الزاویه با مجموع مربعهای روی ساقها یا مساوی جمعی و یا مساوی تفریقی هستند، به مقصود خود نایل می‌شوند. برهان داده شده در بخش ۳-۴ یک برهان بر اساس مساوی تفریقی است. دو برهان مساوی جمعی برای قضیه فیثاغورس ارائه دهید که با شکلهای ۲۷ و ۲۸ به ذهن القا می‌شوند، اولی به وسیله ه. پریگال^۱ در سال ۱۸۷۳* و دومی به وسیله ا. دودنی^۲ در سال ۱۹۱۷ داده شده است.

جالب اینکه هر دو مساحت چند ضلعی برابر، مساوی جمعی می‌باشند، و تقطیع را همواره می‌توان با ستاره و پرگار صورت داد. از دیگر سو، در سال ۱۹۰۱، ماکس دهن^۳ نشان داد که دو حجم چند وجهی برابر، لزوماً، چه با جمع و چه با تفریق مساوی نیستند. به ویژه، امکان تقطیع یک چهاروجهی منتظم به چند قطعه چندوجهی به طوری که بتوان با روی هم گذاشتن آنها یک مکعب تشکیل داد، وجود ندارد.

(ج) یک برهان بر اساس مساوی تفریقی از قضیه فیثاغورس ارائه دهید که با شکل ۲۹، که گفته می‌شود توسط لئوناردو داوینچی^۴ (۱۵۱۹-۱۴۵۲) داده شد، القا می‌شود.



شکل ۲۸



شکل ۲۷

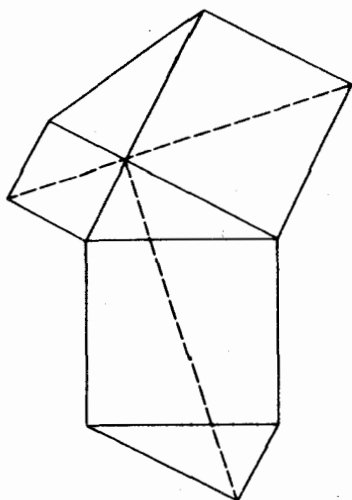
1. H. Perigal

* این یک کشف مجدد بود، چرا که این تقطیع بر ثابت بن قوه (۹۰۱-۸۲۶) معلوم بوده است.

2. H. E. Dudeney

3. Max Dehn

4. Leonardo da Vinci



شکل ۲۹

۶.۳ سه تاییهای فیثاغورسی

- (الف) نسبت بین وتر و ساق طویلتر مثلث قائم‌الزاویه صحیح‌الاضلاعی که بدوسیله فرمول فیثاغورس بخش ۳-۴ داده می‌شود، چیست؟
- (ب) سه تاییهای فیثاغورسی داده شده با فرمول فیثاغورس بخش ۳-۴ را که برای آنها وتر از ۱۰۰ تجاوز نمی‌کند، پیدا کنید.
- (ج) ثابت کنید که هیچ مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقینی وجود ندارد که اضلاع آن اعداد صحیح باشند.
- (د) ثابت کنید که هیچ سه تایی فیثاغورسی موجود نیست که در آن، یکی از اعداد صحیح واسطه هندسی بین دو تای دیگر باشد.
- (ه) ۱۶ سه تایی فیثاغورسی اولیه (a, b, c) را که برای آنها b زوج است و $c < 100$ ، پیدا کنید. اکنون نشان دهید که دقیقاً ۱۰۰ سه تایی فیثاغورسی (a, b, c) متمایز با شرط $c < 100$ وجود دارند.
- (و) نشان دهید که اگر $(a, a+1, c)$ یک سه تایی فیثاغورسی باشد،

$$(3a+2c+1, 3a+2c+2, 4a+3c+2).$$

نیز چنین است. نتیجه می‌شود که از یک سه تایی فیثاغورسی مفروض که ساقهای آن اعداد طبیعی متوالی باشند، می‌توانیم سه تایی فیثاغورسی دیگری به صورت فوق، با اضلاع بزرگتر به دست آوریم.

(ز) با شروع از سه‌تایی فیثاغورسی (۳، ۴، ۵)، پنج سه‌تایی فیثاغورسی دیگر را که ساقهای آنها اعداد طبیعی متوالی هستند و اضلاع آنها با هم تصاعد عددی تشکیل می‌دهند، پیدا کنید.

(ح) ثابت کنید که در هر سه‌تایی فیثاغورسی: (۱) حداقل يك ساق مضرب ۴ است، (۲) حداقل يك ساق مضرب ۳ است، (۳) حداقل يك ضلع مضرب ۵ است.

(ط) ثابت کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی $n > 2$ يك سه‌تایی فیثاغورسی با ساقی مساوی n وجود دارد.

(ی) ثابت کنید که تنها يك عدد متناهی از سه‌تاییهای فیثاغورسی با يك ساق مفروض a وجود دارند.

(ك) نشان دهید که به‌ازای هر عدد طبیعی n و به‌ازای $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

$$[2^{n+1}, 2^k(2^{2n-2k} - 1), 2^k(2^{2n-2k} + 1)]$$

سه‌تاییهای فیثاغورسی هستند. نتیجه می‌شود که به‌ازای هر عدد طبیعی n ، حداقل n سه‌تایی فیثاغورسی مختلف با ساق مشترك $a = 2^{n+1}$ وجود دارند. با دشواری بیشتری می‌توان نشان داد که به‌ازای هر عدد طبیعی n ، حداقل n سه‌تایی فیثاغورسی اولیه مختلف با يك ساق مشترك وجود دارند.

(ل) فرض کنید (a_k, b_k, c_k) ، $k = 1, 2, \dots, n$ سه‌تایی فیثاغورسی اولیه متمایز باشند، بنویسید

$$s_k = a_k + b_k + c_k \text{ و } s = s_1 s_2 \dots s_n.$$

اکنون برای $k = 1, 2, \dots, n$ قرار دهید

$$c'_k = c_k s / s_k, \quad b'_k = b_k s / s_k, \quad a'_k = a_k s / s_k.$$

نشان دهید که (a'_k, b'_k, c'_k) يك سه‌تایی فیثاغورسی با $s = a'_k + b'_k + c'_k$ است. حال نتیجه می‌شود که به‌ازای هر عدد طبیعی n ، حداقل n سه‌تایی فیثاغورسی نامساوی با محیطهای یکسان وجود دارند.

۷.۳ اعداد گنگ

(الف) ثابت کنید خط مستیمی که از نقاط $(0, 0)$ و $(1, \sqrt{2})$ می‌گذرد از هیچ نقطه دیگری بجز $(0, 0)$ ، در شبکه مختصات [مجموعه نقاط دارای مختصات صحیح] نمی‌گذرد.

(ب) نشان دهید که چگونه شبکه مختصات را می‌توان برای یافتن تقریبات گویای $\sqrt{2}$ مورد استفاده قرار داد.

(ج) اگر p يك عدد اول باشد. نشان دهید که \sqrt{p} گنگ است.

(د) نشان دهید که $\log_{10} 2$ گنگ است.

(ه) (د) را بانشان دادن اینکه اگر a و b اعداد صحیح مثبت بوده و یکی از آنها

دارای عامل اولی باشد که در دیگری نمی‌گنجد، آنگاه $\log_a b$ گنگ است، تممیم دهید.

(و) يك مثلث قائمه $30-60-90$ رسم کنید، به اندازه ساق بزرگتر، از رأس زاویه 30° ،

روی وتر جدا کنید؛ وعمودی از نقطه تقسیم بر وتر رسم نمایید. با استفاده از این شکل،

يك اثبات هندسی از گنگ بودن $\sqrt{3}$ را بیان کنید.

۸.۳ اتحادهای جبری

نشان دهید که چگونه هر يك از اتحادهای جبری زیر را می‌توان به طور هندسی اثبات کرد.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (\text{الف})$$

$$a(b+c) = ab + ac \quad (\text{ب})$$

$$(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd \quad (\text{ج})$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \quad (\text{د})$$

(ه) صورت قضیه ۹ مقاله دوم اصول اقلیدس این است: اگر خط مستقیمی به طور

برابر و نیز به طور نابرابر تقسیم شود، مجموع مربعات روی دو قسمت نابرابر، دو برابر مجموع

مربعات روی نصف خط و روی خط واحد نقاط تقسیم است. از این قضیه، اتحاد جبری

زیر را به دست آورید.

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

۹.۳ جبر هندسی

سه پاره‌خط نابرابر رسم کنید. طویاترین آنها را با a ، و پاره‌خط متوسط را با b مشخص

کنید، و کوچکترین آنها را 1 واحد اختیار کنید. با ستاره و پرگار پاره‌خطهایی با طولهای

زیر بسازید.

$$a-b \text{ و } a+b \quad (\text{الف})$$

$$ab \quad (\text{ب})$$

$$a/b \quad (\text{ج})$$

$$\sqrt{a} \quad (\text{د})$$

(ه) a/n ، n يك عدد صحيح مثبت،(و) \sqrt{ab} (ز) $a\sqrt{n}$ ، n يك عدد صحيح مثبت،(ح) $(a^3 + b^3)/(a^2 + b^2)$ (ط) $[a(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})]^{1/2}$ (ی) $(abcd)^{1/4}$ ، که در آن c و d دو پاره‌خط مفروض دیگرند،(ک) $x = (a^2 + b^2 - ab)^{1/2}$. اگر مثلثی با اضلاع a ، b ، x تشکیل دهیم،اندازه زاویه بین اضلاع a و b چیست؟(ل) نشان دهید که $x = ab/(a^2 + b^2)^{1/2}$ برابر با ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه‌ایباساقهای a و b است.

۱۰۰۳ راه‌های هندسی معادلات درجه دوم

(الف) با داشتن پاره‌خطی به طول واحد، معادله درجه دوم $x^2 - 7x + 12 = 0$

را به روش فیثاغورسی حل کنید.

(ب) با داشتن پاره‌خطی به طول واحد، معادله درجه دوم $x^2 + 4x - 21 = 0$ را

به روش فیثاغورسی حل کنید.

(ج) با ستاره و پرگار پاره‌خط a را به دو بخش تقسیم کنید به طوری که تفاضل

مربعات آنها مساوی حاصلضربشان باشد.

(د) در (ج)، نشان دهید که بخش بزرگتر، واسطه هندسی بین بخش کوچکتر و

تمام پاره‌خط است. گفته می‌شود که پاره‌خط به نسبت ذات وسط و طرفین یا بخش طلایی،

تقسیم شده است.

(ه) معادله درجه دوم $x^2 - gx + h = 0$ داده شده است. در یک دستگاه مختصاتقائم‌دکارتی، نقاط $B : (0, 1)$ و $Q : (g, h)$ را مشخص کنید. دایره‌ای به قطر BQ رسمو فرض کنید که این دایره محور x ها را در M و N قطع کند. نشان دهید که طولهایعلامت‌دار OM و ON نمایش ریشه‌های معادله درجه دوم مفروض هستند. این حل هندسیمعادلات درجه دوم در مقدمات هندسه لژی^۱ با این تذکر آمده است: «راه حل این مسئلهمهم که اکنون در این کتاب مندرج است، به وسیله آقای تامس کارلایل^۲، ریاضیدان مستعد

جوان، از شاگردان سابقم، به من پیشنهاد شده است.»

(و) معادلات درجه دوم $x^2 - x7 + 12 = 0$ و $x^2 + 4x - 21 = 0$ را به روش

کارلایل حل کنید.

(ز) دوباره معادله درجه دوم $x^2 - gx + h = 0$ داده شده است. در یک دستگاه مختصاتقائم‌دکارتی نقاط $(h/g, 0)$ و $(4/g, 2)$ را مشخص و فرض کنید که خط واصل این دو

نقطه دایره واحد به مرکز $(0, 1)$ را در نقاط R و S قطع کند. نقاط R و S را از نقطه $(0, 2)$ بر نقاط $(r, 0)$ و $(s, 0)$ روی محور x ها تصویر کنید. نشان دهید که r و s ریشه‌های معادله مفروض هستند. این راه حل هندسی معادله درجه دوم به وسیله هندسه دان آلمانی کارل گئورگ کریستیان فون اشتات^۱ (۱۸۶۷-۱۷۹۸) ارائه شده است.

(ح) معادلات درجه دوم $x^2 - 7x + 12 = 0$ و $x^2 + 4x - 21 = 0$ را با روش اشتات حل کنید.

(ط) صحت و سقم راه حل هندسی زیر را برای معادله درجه دوم $x^2 - gx + h = 0$ ، $h > 0$ ، تحقیق کنید. اول \sqrt{b} را به عنوان واسطه هندسی بین ۱ و h بسازید. سپس نیمدایره‌ای به قطر $AB = |g|$ ساخته و نیم - وتر $CD = \sqrt{b}$ را، که در آن D بر AB واقع است، بر AB عمود کنید. آنگاه AD و DB ، که هر دو هم‌علامت با g اختیار می‌شوند، ریشه‌های معادله درجه دوم هستند. با این روش، معادله درجه دوم $x^2 - 7x + 12 = 0$ را حل کنید.

(ی) صحت و سقم راه حل هندسی زیر را برای معادله درجه دوم $x^2 - gx + h = 0$ ، $h < 0$ ، تحقیق کنید. دایره‌ای به قطر $AB = |g|$ و مماس $AC = \sqrt{-b}$ بر آن را رسم کنید. قاطع قطری CDE را از C رسم کنید تا دایره را در D و E قطع کند. آنگاه CD و CE ، که با علامات مخالف اختیار شوند و CE هم‌علامت با g باشد، ریشه‌های معادله درجه دوم را نمایش می‌دهند. با این روش، معادله درجه دوم $x^2 + 4x - 21 = 0$ را حل کنید.

۱۱.۳ تبدیل مساحات

(الف) یک شش ضلعی نامنتظم رسم کنید و سپس، با ستاره و پرگار، مربعی با همان مساحت بسازید.

(ب) با ستاره و پرگار، یک چهارضلعی $ABCD$ را با رسم خطوط مستقیمی گذرنده بر رأس A به سه قسمت مساوی تقسیم کنید.

(ج) دوزنقه‌ای را به وسیله خطی که از نقطه‌ای مانند P واقع بر قاعده کوچک رسم می‌شود، به دو نیم کنید.

(د) مثلث ABC را چنان تبدیل کنید که زاویه A تغییر نکند، ولی ضلع مقابل به زاویه A با یک خط مفروض MN موازی گردد.

(ه) مثلث مفروضی را به مثلث متساوی‌الساقینی که زاویه رأس آن معلوم باشد، تبدیل کنید.

۱۳۰۳ اجسام منتظم

(الف) نشان دهید که نمی‌توان بیش از پنج چندوجهی منتظم داشت.

(ب) حجم و سطح يك هشت‌وجهی منتظم به ضلع e را پیدا کنید.

(ج) برای هر يك از پنج چندوجهی منتظم، تعداد رأسها v ، اضلاع e ، و وجوه f را

شمرده سپس کمیت $f + e - v$ را محاسبه کنید. یکی از جالبترین قضایای مربوط به هر

چندوجهی محدب (یا به‌طور کلیتر هر چندوجهی مرتبط ساده)، آن است که $v - e + f = 2$.

این، شاید برارشمیدس (حوالی ۲۲۵ ق.م.) معلوم بوده، ولی آن را نخستین بار دکارت

به‌طور صریح در حدود سال ۱۶۳۵ بیان کرد. چون اوایلر بعداً در سال ۱۷۵۲ آن را به

طور مستقل اعلام کرد، اغلب به این نتیجه فرمول اوایلر-دکارت گفته می‌شود.

(د) هشت‌وجهی مکعبی، جسم صلبی است که اضلاع آن از به هم وصل کردن

اوساط اضلاع مجاور يك مکعب به دست می‌آید. v ، e ، و f را برای يك هشت‌وجهی

مکعبی بشمارید.

(ه) مکعب توپری را در نظر بگیرید که دو هرم منتظم بر دو وجه متقابل آن، که

قاعدهٔ هرما را تشکیل می‌دهند، ساخته شده‌اند. حال فرض کنید سوراخی که مقطع عرضی

آن مربع و محور آن روی خطی است که رأس هرما را به هم وصل می‌کند، در این جسم

ایجاد شود. مقدار $f + e - v$ را برای این جسم حلقوی شکل محاسبه کنید.

الگوهای ساختن ۱۰۰ جسم مختلف را می‌توان در کتاب میلز س. هارتلی، به نام

الگوهای چند وجهیها، پیدا کرد.

۱۳۰۴ چند مسئله در باب اجسام منتظم

(الف) در بخش ۳-۹، تعریف منتظم بودن يك چندوجهی متضمن سه خاصیت است:

منتظم بودن وجوه، مساوی بودن وجوه، مساوی بودن کنجها. اغلب کتابهای درسی در

هندسهٔ فضایی هر سه خاصیت تعریف‌کننده را نمی‌دهند. بامثالهای نقضی، نشان دهید که

همهٔ خاصیتها مورد نیازند.

(ب) از سه خاصیت تعریف‌کننده‌ای که در (الف) ذکر شدند، می‌توان منتظم بودن

کنجها را نتیجه گرفت. این کار را انجام دهید و سپس نشان دهید که به‌جای سه خاصیت

تعریف‌کننده می‌توان تنها دو خاصیت زیر را قرار داد: منتظم بودن وجوه و منتظم بودن کنجها.

(ج) شخص ناوارد اغلب به‌طور شهودی چنین تصور می‌کند که از بین دوازده

وجهی و بیست‌وجهی منتظم محاط در يك کره، بیست‌وجهی حجم بیشتری دارد. نشان دهید که

در واقع عکس آن صحت دارد، و نیز نشان دهید که از بین يك مکعب و يك هشت‌وجهی

منتظم محاط در يك کره، مکعب حجم بیشتری دارد.

(د) نشان دهید که یک دوازده‌وجهی منتظم و یک بیست‌وجهی منتظم محاط در یک کره دارای کره محاطی واحدی هستند.

(ه) در بخش ۳-۹، توجه کردیم که کپلر به طور شهودی پذیرفت که از پنج جسم منتظم، با سطح جانبی مفروض، بیست‌وجهی دارای بیشترین حجم است. آیا چنین است؟
 (و) یک دوازده‌وجهی منتظم، یک بیست‌وجهی منتظم، و یک مکعب در کسره‌ای محاط شده‌اند. ثابت کنید که نسبت حجم دوازده‌وجهی به حجم بیست‌وجهی برابر است با نسبت طول یک ضلع مکعب به طول یک ضلع بیست‌وجهی.

۱۴.۳ بخش طلایی

گفته می‌شود که نقطه‌ای خطی را به نسبت ذات وسط و طرفین یا بخش طلایی تقسیم می‌کند؛ هرگاه از دو پاره‌خط تشکیل شده آنکه طولتر است واسطه هندسی بین پاره‌خط کوتاهتر و تمام خط باشد. نسبت پاره‌خط کوتاهتر به پاره‌خط طولتر، نسبت طلایی نامیده می‌شود. فیثاغورسیان علاقه زاید الوصفی به بخش طلایی و نسبت طلایی نشان می‌دادند.

(الف) نشان دهید که نسبت طلایی $(\sqrt{5}-1)/2$ است.

(ب) آرم انجمن برادری فیثاغورسی، پنتاگرام ۱، یا ستاره پنج‌پره تشکیل شده از پنج قطریک پنج ضلعی منتظم بود. ثابت کنید که هر یک از پنج ضلع یک پنتاگرام در بر خورد با دو ضلع دیگر از پنتاگرام، آنها را به بخش طلایی تقسیم می‌کند.

(ج) فرض کنید که نقطه G پاره‌خط AB را به بخش طلایی تقسیم کند که در آن AG پاره‌خط بزرگتر است. بر AB ، $GH = GB$ را جدا کنید. نشان دهید که H ، AG را به بخش طلایی تقسیم می‌کند.

(د) با ستاره و پرگار، یک پنج ضلعی منتظم را در صورتی که یک ضلع آن داده شده باشد، رسم کنید.

(ه) با ستاره و پرگار، یک پنج ضلعی منتظم را با معلوم بودن یک قطر پنج ضلعی رسم کنید.

(و) یک پنج ضلعی منتظم را در دایره مفروضی، تنها با استفاده از ستاره و پرگار، محاط کنید.

۱۵.۳ یک رابطه جالب

به روش هندسی ثابت کنید که

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = (1 + 2 + \dots + n)^2.$$

عنوان مقاله

- ۱/۳ هندسه علمی (تجربی) در مقابل هندسه برهانی.
- ۲/۳ دلایل احتمالی معمول شدن قیاس در ریاضیات از طرف یونانیان.
- ۳/۳ داستانهایی از استعداد خارق العاده نالس در مهندسی و نجوم، و میزان اعتبار آنها.
- ۴/۳ رازگرایی عددی فیثاغورسی.
- ۵/۳ دلایلی که فیثاغورسگرایی، به استناد فرمولهای فیزیک جدید.
- ۶/۳ توجیه فیثاغورس، تا آنجا که به ریاضیات مربوط می شود.
- ۷/۳ چگونه کشف کمیت‌های ناموافق بحرانی در توسعه ریاضیات پدید آورد.
- ۸/۳ نسبت طلایی در هنر و معماری.
- ۹/۳ مثالهای ساده‌ای از هندسه عملی برای درس هندسه ابتدایی.
- ۱۰/۳ تاریخ اولیه اجسام صلب، بالگوهایی برای ساختن آنها.
- ۱۱/۳ دین ریاضیات یونانی به بین‌النهرین و مصر.
- ۱۲/۳ دلایل تلقی لوزیستیک و آریتمیک به عنوان موضوعاتی بدون ارتباط باهم.
- ۱۳/۳ مزایا و معایب روش یونانی نگرش هندسی به حساب.

کتابنامه

- AABOE, ASGER, *Episodes from the Early History of Mathematics*. New Mathematical Library, no. 13. New York: Random House and L. W. Singer, 1964.
- ALLMAN, G. J., *Greek Geometry from Thales to Euclid*. Dublin: University Press, 1889. Reprint available from Bell & Howell, Cleveland, Ohio.
- BELL, E. T., *The Magic of Numbers*. New York: McGraw-Hill, 1946.
- BUNT, L. N. H.; P. S. JONES; and J. D. BEDIENT, *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1976.
- COOLIDGE, J. L., *A History of Geometrical Methods*. New York: Oxford University Press, 1940.
- COURANT, RICHARD, and H. E. ROBBINS, *What is Mathematics?* New York: Oxford University Press, 1941.
- DANTZIG, T., *Number, The Language of Science*. 3rd ed. New York: Macmillan, 1939.
- , *The Bequest of the Greeks*. New York: Charles Scribner's, 1955.
- GOW, JAMES, *A Short History of Greek Mathematics*. New York: Hafner, 1923. Reprint available from Bell & Howell, Cleveland, Ohio.
- HEATH, T. L., *History of Greek Mathematics*. Vol. 1. New York: Oxford University Press, 1921. Reprinted by Dover, 1981.
- , *A Manual of Greek Mathematics*. New York: Oxford University Press, 1931.
- , *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. 2d ed., 3 vols. New York: Cambridge University Press, 1926. Reprinted by Dover, New York.
- LESLIE, SIR JOHN, *Elements of Geometry, Geometrical Analysis, and Plane Trigonometry*. Edinburgh: Oliphant, 1809. Reprint available from Bell & Howell, Cleveland, Ohio.
- LOOMIS, E. S., *The Pythagorean Proposition*. 2d ed. Ann Arbor, Mich.: private printing, Edwards Brothers, 1940. Reprinted by the National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C., 1968.
- MESCHKOWSKI, HERBERT, *Ways of Thought of Great Mathematicians*. Translated by John Dyer-Bennet. San Francisco: Holden-Day, 1964.
- MUIR, JANE, *Of Men and Numbers*. New York: Dodd, Mead, 1961.
- PROCLUS, *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Translated by G. R. Morrow. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1970.

- SHANKS, DANIEL, *Solved and Unsolved Problems in Number Theory*, vol. 1. Washington, D.C.: Spartan Books, 1962.
- SIERPINSKI, WACLAW, *Pythagorean Triangles*. Scripta Mathematica Studies Number Nine. Translated by Ambikeshwar Sharma. New York: Yeshiva University, 1962.
- THOMAS, IVOR, ed., *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*. 2 vols. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1939-1941.
- TURNBULL, H. W., *The Great Mathematicians*. New York: New York University Press, 1961.
- VAN DER WAERDEN, B. L., *Science Awakening*. Translated by Arnold Dresden. New York: Oxford University Press, 1961; (paperback ed.) New York: John Wiley, 1963.
- WENNINGER, M. J., *Polyhedron Models for the Classroom*. Washington, D.C.: National Council of Teachers of Mathematics, 1966.
- *Polyhedron Models*. New York: Cambridge University Press, 1970.

تضعیف، تثلیث و تربیع

۳-۱ دوره از تالس تا اقلیدس

سه قرن اول ریاضیات یونانی، که با تلاشهای اولیه در هندسهٔ برهانی به وسیلهٔ تالس در حدود ۶۰۰ ق.م. شروع شده و با کتاب برجستهٔ اصول اقلیدس در حدود ۳۰۰ ق.م. به اوج رسید، دوره‌ای از دستاوردهای خارق‌العاده را تشکیل می‌دهد. در فصل پیشین برخی از سهمهای فیثاغورسیان در این دستاوردها را ملاحظه کردیم. علاوه بر مدرسهٔ یونانی که به دست تالس در میلوس تأسیس گردید و مدرسهٔ اولیهٔ فیثاغورسی در کروتونا، شماری از مراکز ریاضی در جاهایی و در طی ادواری که به‌طور عمده تحت تأثیرزمینه‌ای از تاریخ سیاسی یونانی بودند، به‌وجود آمدند و رونق یافتند.

در حدود ۱۲۰۰ ق.م. بود که قبایل بدوی دوریایی^۱ با ترك دژه‌های کوهستانی شمال برای دستیابی به قلمروهای مساعدتر در امتداد جنوب راهی شبه‌جزیرهٔ یونان شدند و متعاقب آن قبیلهٔ عمدهٔ آنها، یعنی اسپارته‌ها، شهر اسپارت را بنا کردند. بخش مهمی از سکنهٔ قبلی ناحیهٔ مورد تهاجم، برای حفظ جان، به آسیای صغیر و جزایر یونانی دریای اژه گریختند و بعدها در آنجا مهاجرنشینهای تجاری یونانی را برپا کردند. در این مهاجرنشینها بود که، در قرن ششم ق.م. اساس مکتب یونانی نهاده شد و فلسفهٔ یونانی شکوفا گردید و هندسهٔ برهانی تولد یافت.

در این ضمن، ایران بدل به يك امپراطوری بزرگ نظامی شده بود، و، به پیروی از يك بر نامه اجتناب ناپذیر توسعه طلبانه ناشی از اقتصاد مبتنی بر برده داری، در سال ۵۴۶ ق.م. شهرهای یونیا و مهاجر نشینهای یونانی آسیای صغیر را تسخیر نمود. در نتیجه، عده ای از فیلسوفان یونانی، مانند فیثاغورس و کسنوفانس^۱، موطن خود را ترك و به مهاجر نشینهای در حال رونق جنوب ایتالیا کوچ کردند. مدارس فلسفه و ریاضیات در کروتونا، زیر نظر فیثاغورس، و در الیا^۲، زیر نظر کسنوفانس، زنون، و پارمنیدس^۳ پدید آمدند.

شهرهای مسخر شده یونیا بشدت تحت یوغ ستم بسودند، و در ۴۹۹ ق.م. شورش بر پا شد. آتن، که بدل به مرکزی برای تمدن غرب با پیشرفت سیاسی به سوی دموکراسی می گردید، با اعزام قشون به انقلاب کمک کرد. اگرچه شورش سرکوب شد، داریوش شاه ایران که از این ماجرا به خشم آمده بود، عزم به تنبیه آتن کرد. در ۴۹۲ ق.م. وی قوای زمینی و دریایی عظیمی را برای حمله به سرزمین اصلی یونان سازمان داد، و لسی ناوگان وی در يك طوفان نابود شد و قوای زمینی اش متحمل مشکلات ناشی از لشکر کشی گردیدند. دو سال بعد، لشکریان ایران به آتیک^۴ نفوذ کردند که در آنجا در ماراتون به دست آتنیها شکستی قطعی یافتند. بدین ترتیب آتن رهبری یونان را به دست آورد.

در ۴۸۵ ق.م. خشایار، پسر داریوش، به تهاجم زمینی و دریایی دیگری علیه یونان دست زد. آتنیها با ناوگان ایران در جنگ بزرگ دریایی سالامیس^۵ مصاف داده و پیروز شدند، و با آنکه نیروهای زمینی یونان به رهبری اسپارته^۶ در ترموپیل شکست خوردند و تار و مار شدند، یونانیها در سال بعد در پلاته^۷ بر ایرانیان فایز آمدند و مهاجمین را از یونان بیرون راندند. چیرگی آتنیها مستحکم گردید و آرامش پنجاه ساله بعد از آن، دوره درخشانی در تاریخ آتن بود. این شهر پرریکلس^۸ و سقراط مرکز رشد دموکراسی و شکوفایی اندیشه ها گردید. ریاضیدانان از هر گوشه جهان یونان به این شهر جذب شدند. آناکساگوراس^۹، آخرین عضو برجسته مدرسه یونیا، در آنجا سکونت گزید. بسیاری از فیثاغورسیان پراکنده به آتن راه یافتند، و زنون و پارمنیدس که وابسته به مدرسه الیایی [نحله الیایی] بودند، برای تدریس به آتن رفتند. بقراط^{۱۰}، از مردم جزیره یونیا یی خیوس^{۱۱} از آتن دیدار کرد و نویسندگان باستان شهرت داده اند که وی اولین کتاب منسجم هندسه را در آنجا انتشار داده است.

در سال ۴۳۱ ق.م. با آغاز جنگ پلوپونزی بین آتنیها و اسپارتهها، صلح به پایان رسید. این ستیز، طولانی و بی فرجام از کار درآمد. آتن که در ابتدا پیروزمند بود، بعداً متحمل طاعون نابود کننده ای گردید که يك چهارم جمعیت آن را هلاک کرد، و سرانجام در

1. Xenophanes
2. Elea
3. Parmenides
4. Attica
5. Salamis
6. Thermopylae
7. Plataea
8. Pericles
9. Anaxagoras
10. Hippocrates

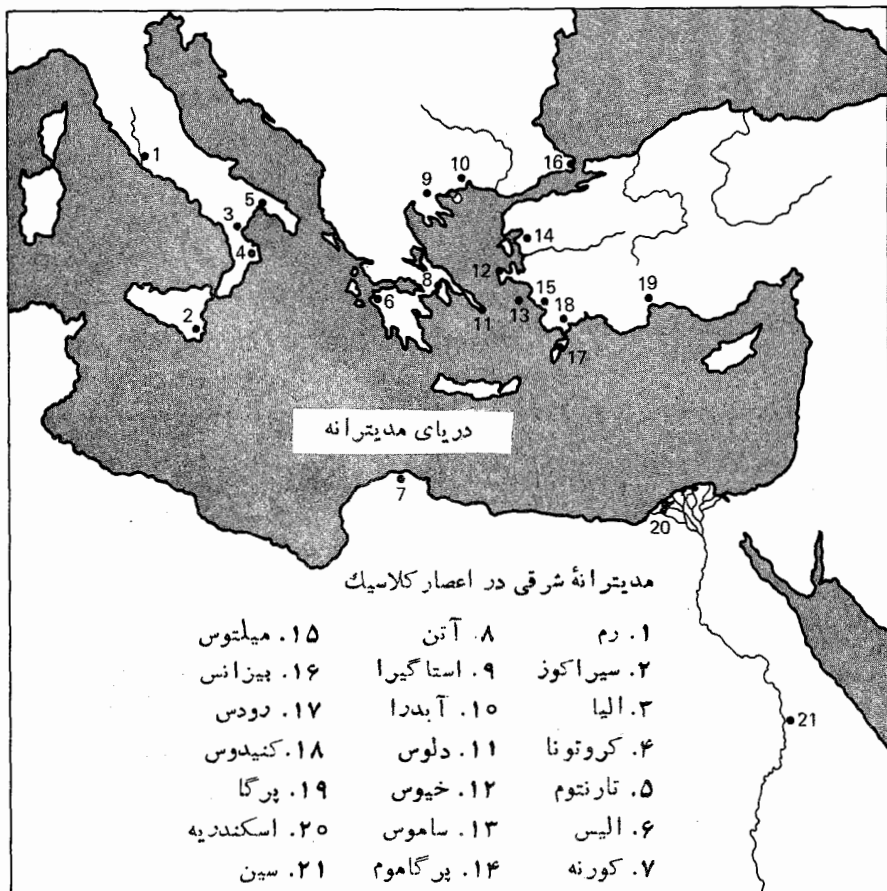
* نباید با بقراط اهل کوس (Cos)، طبیب مشهور یونان کهن اشتباه شود.

سال ۴۵۴ ق.م. مجبور به پذیرش شکست تحقیر آمیزی شد. اسپارتها رهبری سیاسی را در اختیار گرفتند، اما در سال ۳۷۱ ق.م. در اثر شکست به دست گروسی متفق از شهرهای خود مختار شورش آنرا از کف دادند. در جریان این مبارزات، پیشرفت کمی در هندسه در آتن حاصل شد، و یک بار دیگر پیشرفت در نواحی آرامتر ماگنا گریا^۱ [یونان بزرگ] پدید آمد. به فیثاغورسیان ایتالیای جنوبی، که از وابستگی سیاسی تطهیر شده بودند، اجازه بازگشت داده شد و مدرسه فیثاغورسی جدیدی در تارنتوم^۲، تحت نفوذ آرخوتاس با استعداد و پر آوازه، برپا شد.

اگرچه آتن با پایان یافتن جنگ پلوپونزی بدل به قدرت سیاسی کم اهمیت تری شد، ولی رهبری فرهنگی خود را دوباره به دست آورد. افلاطون در آتن یا حوالی آن در سال ۴۲۷ ق.م.، که همان سال طاعون بزرگ بود، به دنیا آمد. وی فلسفه را در آنجا زیر نظر سقراط خواند و سپس در پی کسب حکمت عازم سیر و سفرهای طولانی شد، که بدین ترتیب ریاضیات را زیر نظر تئودوروس کورنه‌ای در ساحل افریقا تحصیل کرد و دوست صمیمی آرخوتاس نام آور شد. در بازگشت به آتن در حدود سال ۳۸۷ ق.م.، وی آکادمی مشهور خود را در آنجا تأسیس کرد که مؤسسه‌ای برای پیگیری منظم و اصولی تبعات فلسفی و علمی بود. در باقی عمر آکادمی خود را سرپرستی نمود و در سال ۳۴۷ ق.م. در سن ۸۵ سالگی در آتن درگذشت. تقریباً تمام کارهای مهم ریاضی قرن چهارم ق.م. به وسیله دوستان یا شاگردان افلاطون انجام شده بود؛ که آکادمی وی را به عنوان حلقه ارتباط ریاضیات فیثاغورسیان اولیه و ریاضیات مدرسه ریاضی دیرپاتر بعدی در اسکندریه در آورد. تأثیر افلاطون بر ریاضیات، معلول هیچیک از کشفیات ریاضی وی نبوده، بلکه به خاطر این اعتقاد شور آمیز وی بود که مطالعه ریاضیات عالیترین زمینه را برای تعلیم ذهن فراهم می آورد، و از این رو در پرورش فیلسوفان و کسانی که می‌بایست دولت آرمانی وی را اداره می‌کردند، نقش اساسی داشت. این اعتقاد، شعار معروف او را بر سر در آکادمی وی توجیه می‌کند: کسی که هندسه نمی‌داند داخل نشود. بنا بر این، به دلیل رکن منطقی و نحوه برخورد ذهنی نابی که تصور می‌کرد مطالعه ریاضیات در شخص ایجاد می‌کند، ریاضیات به نظر افلاطون از بیشترین اهمیت برخوردار بود، و به همین جهت بود که جای پرارزشی را در برنامه درسی آکادمی اشغال کرد. برخی در پاره‌ای از گفتارهای افلاطون آنچه را که ممکن است اولین تلاش جدی در فلسفه ریاضیات تلقی شود، مشاهده می‌کنند.

اثودوکسوس، که هم پیش آرخوتاس و هم نزد افلاطون درس خوانده بود، مدرسه‌ای در سیزیکوس^۳ در آسیای صغیر شمالی تأسیس کرد. مناخموس^۴، از معاصرین افلاطون و یکی از شاگردان اثودوکسوس، مقاطع مخروطی را ابداع کرد. دینوستراتوس^۵، برادر مناخموس، هندسه دانی ماهر و از شاگردان افلاطون بود. تثایتوس، مردی با استعدادهای جبلی غیرعادی، که احتمالاً قسمت اعظم مطالب مقاله‌های دهم و سیزدهم اقلیدس را نیز به

1. Magna Graecia
2. Tarentum
3. Cyzicus
4. Menaechmus
5. Dinostratus



او مدیونیم، یکی دیگر از شاگردان آتنی تئودوروس بود. باید از ارسطو نیز ذکر کرد که به میان آید، که گرچه ادعای ریاضیدان بودن نداشت، سازمان‌دهندهٔ منطق قیاسی و نویسندهٔ آثاری در باب موضوعات فیزیکی بود؛ بعضی از قسمتهای آنالوتیکا پوستریودای [آنالوتیکا قیاسی] وی تسلط خارق‌العاده‌ای را بر روشهای ریاضی نشان می‌دهند.

۴-۲ مسیرهای تکامل ریاضیات

در تکامل ریاضیات طی ۳۰۰ سال اول ریاضیات یونانی، سه خط سیر مهم و متمایز را می‌توان تشخیص داد. ابتدا، بسط مطالبی است که مآلاً در اصول مدون شد، که با توانایی توسط فیثاغورسیان شروع شد و بعداً بقرط، ائسودوکسوس، تئودوروس، تئایتوس، و

دیگران مطالبی به آن اضافه کردند. قبلا گوشه‌هایی از این پیشرفتها را بررسی کرده‌ایم، و در فصل بعد به آن باز خواهیم گشت.

خط سیر دوم شامل بسط مفاهیمی است در رابطه با بینهایت کوچکها و روندهای حدی و مجموعیایی که تا بعد از اختراع حساب دیفرانسیل و انتگرال در دوران معاصر به وضوح نهایی دست نیافتند. پارادوکسهای زنون، روش افنای آنتیفون^۱ و ائودوکسوس و نظریه اتمی بودن جهان که بانام دموکریتوس مربوط است، به سیر رشد دوم تعلق دارند، و در یکی از فصول آتی که به مبدأ حساب دیفرانسیل و انتگرال اختصاص داده شده، مورد بحث قرار خواهند گرفت. سوین مسیر تکامل مربوط به هندسه عالی یا هندسه منحنیهای بجز دایره و خط مستقیم و سطوحی غیر از کره و صفحه است. شگفت آنکه، قسمت عمده این هندسه عالی در تلاشهای مستمر برای حل سه مسئله ترسیم، که امروزه مشهورند، به وجود آمد. در این فصل این سه مسئله مشهور مورد بحث قرار می‌گیرند.

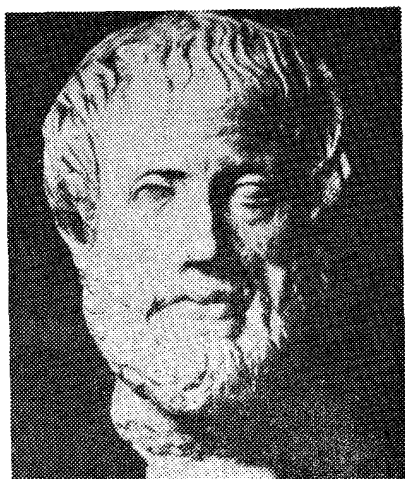
۳-۴ سه مسئله مشهور

سه مسئله مشهور عبارت‌اند از:

- ۱- تضعیف مکعب، یا مسئله ترسیم ضلعی از یک مکعب که حجم آن دو برابر حجم یک مکعب مفروض است.
- ۲- تثلیث زاویه، یا مسئله تقسیم یک زاویه مفروض دلخواه به سه قسمت مساوی.
- ۳- تربیع دایره، یا مسئله ساختن مربعی که دارای مساحتی برابر با مساحت دایره مفروضی است.



افلاطون
(مجموعه دیوید اسمیت)



ارسطو

(برادران براون)

اهمیت این مسائل در این حقیقت نهفته است که آنها را نمی‌توان، جز به تقریب، با ستاره و پرگار حل کرد، اگرچه این ادوات برای حل آن همه مسائل ترسیمی دیگر به کار می‌آیند. جستجوی پرتلاش برای یافتن جوابهای این سه مسئله برهمنده یونانی عمیقاً اثر گذاشت و منجر به کشفیات پرثمر بسیاری، از قبیل مقاطع مخروطی، بسیاری از منحنیهای درجه سوم و چهارم، و منحنیهای متعالی متعدد گردید. نتیجه‌ای که مدت‌ها بعد، از آن ناشی شد، پیدایش بخشهایی از نظریه معادلات درباره حوزه‌های گویایی، اعداد جبری، و نظریه گروه‌ها بود. ناممکن بودن این سه ترسیم تحت محدودیتهای پذیرفته شده مبنی بر اینکه تنها از ستاره و پرگار می‌توان استفاده کرد، تا قرن نوزدهم، یعنی تا متجاوز از ۲۰۰۰ سال بعد از آنکه این مسائل متصور شده بودند، ثابت نشده بود.

حرکت عظیمی که بر اثر کوششهای مداوم برای حل این سه مسئله مشهور عهد عتیق، در بسط ریاضیات جدید داده شد، نشان‌دهنده ارزش رهگشا یانه مسائل جالب و حل‌نشده در ریاضیات است.

۴-۴ ابزارهای اقلیدسی

تصریح بر اینکه مجاز به انجام چه اعمالی با ستاره و پرگار هستیم، اهمیت دارد. با ستاره مجازیم که خط مستقیمی با طولی نامعین از هر دو نقطه متمایز مفروض رسم کنیم؛ با پرگار می‌توانیم دایره‌ای، با هر نقطه مفروضی به عنوان مرکز آن و ماد بر هر نقطه مفروض دیگر رسم کنیم. انجام ترسیمها با ستاره و پرگار به عنوان یک بازی با این دو قاعده، یکی از دل‌انگیزترین و جذابترین بازیهای از کار درآمده که تا کنون وضع شده‌اند. ترسیمهای واقعا بغرنجی که بدین منوال می‌توان به آنها دست یافت، مایه تعجب می‌شوند و از این روبه سختی می‌توان باور کرد که مسائل ظاهراً ساده‌ای نیز که در بخش ۳-۴ ارائه شده‌اند، بدین ترتیب قابل حل نیستند.

چون اصول موضوعه اصول اقلیدس استفاده از ستاره و پسرگار را طبق قواعد بالا محدود می‌کند، این وسایل با این نحوه استفاده، به ابزارهای اقلیدسی شهرت یافته‌اند. باید توجه داشت که ستاره خط‌کشی است که هدرج نیست. خواهیم دید که بایک خط‌کش مدرج، تثلیث يك زاویه مفروض میسر است. همچنین، توجه داریم که پسرگار اقلیدسی با پرگارهای امروزی متفاوت است، زیرا با پرگارهای امروزی قادر به رسم دایره‌ای به مرکز C و به شعاعی برابر با هر پاره‌خط AB هستیم. به عبارت دیگر، مجازیم که فاصله AB را به مرکز C، با استفاده از پرگار به عنوان پرگار دوسر، انتقال دهیم. پرگارهای اقلیدسی، از سوی دیگر، فرضاً با برداشتن يك ساق آن از روی کاغذ فرو می‌ریزند. ممکن است به نظر آید که پرگارهای مدرن قدری قویتر از پرگار اقلیدسی، یا فروریزنده، باشند. عجیب آنکه، این دو، ابزارهایی معادل‌اند (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۱۰۴).

۵-۴ تضعیف مکعب

شواهدی وجود دارد مبنی بر اینکه مسئله تضعیف مکعب ممکن است نخستین بار در گفته‌های شاعری گمنام و ریاضی‌نخوانده از یونان باستان عنوان شده باشد که نارضایی شاه‌مینوس^۱ افسانه‌ای را از آرامگاه بناشده برای پسرش، گلائوکوس^۲ شرح می‌دهد. مینوس فرمان داده بود که قبر از نظر اندازه دو برابر شود. آنگاه شاعر از زبان مینوس، به غلط، اضافه می‌کند که این کار را می‌توان با مضاعف نمودن هر يك از ابعاد قبر صورت داد. این تدبیر ریاضی نادرست از سوی شاعر، هندسه‌دانان را بر آن داشت که مسئله یافتن نحوه دو برابر کردن جسم مفروضی را با حفظ شکل اولیه آن در پیش‌رو گذارند. به نظر نمی‌رسد که تا مدت‌ها بعد، یعنی هنوز تا وقتی که بقراط تحویل مشهور خود را که در زیر ارائه می‌کنیم کشف نکرده بود، هیچ پیشرفتی در این مسئله صورت گرفته باشد. همچنین بعدها گفته شده که دلوسی^۳ آنها از کاهنان خود دستور گرفتند که برای رهایی از بیماری طاعون شیوع یافته‌ای، اندازه مذبح مکعب شکل آپولون^۴ را دو برابر کنند. مشهور است که مسئله را پیش افلاطون بردند و وی آن را به هندسه‌دانها تسلیم کرد. داستان اخیر است که سبب شده بد مسئله تضعیف، اغلب عنوان مسئله دلوسی داده شود. خواه داستان درست باشد یا نه، این مسئله در آکادمی افلاطون مورد مطالعه قرار گرفت و جوابهایی در سطح هندسه عالی منسوب به ائودوکسوس^۵، میناخموس، و حتی (گرچه احتمالاً به خطا) به خود افلاطون موجودند.

اولین پیشرفت واقعی در مسئله تضعیف، بدون شك تحویل مسئله به وسیله بقراط (حوالی ۴۴۰ ق.م.) به ترسیم دو واسطه هندسی بین دو پاره‌خط مفروض به طولهای s و $2s$ بود. اگر دو واسطه هندسی را با x و y نشان دهیم، آنگاه

$$s:x = x:y = y:2s$$

از این تناسبها داریم $yx^2 = sy^2$ و $yx^2 = 2sx^2$. با حذف y داریم $x^3 = 2s^3$. بنا بر این x ضلع مکعبی است که حجمی دو برابر حجم مکعب به ضلع s دارد.

بعد از ابداع این تحویل توسط بقراط، تلاشهای بعدی در تضعیف مکعب، به صورت ترسیم دو واسطه هندسی بین دو پاره خط مفروض در آمد. یکی از قدیمیترین و یقیناً یکی از مهمترین جوابهای مسئله به صورت اخیر و مبتنی بر هندسه عالی به وسیله آرخوتاس (حدود ۴۰۰ ق.م.) داده شده است. این جواب متکی است بر یافتن یکی از نقاط تلاقی يك استوانه مستدیر قائم، يك چنبره به قطر داخلی صفر، و يك مخروط مستدیر قائم! این جواب تا حدی میزان نامعمول پیشرفتی را که هندسه باید در آن زمان دور بدان رسیده باشد، نشان می دهد. حل ائودوکسوس (حوالی ۳۷۰ ق.م.) در دست نیست. مانیخموس (حدود ۳۵۰ ق.م.) دو راه حل برای این مسئله ارائه داد و تا آنجا که معلوم شده، مقاطع مخروطی را به همین منظور ابداع کرد. راه حل بعدتری که از شیوه ای مکانیکی استفاده می کند به اراتستن^۱ (حدود ۲۳۰ ق.م.) و دیگری که تقریباً مربوط به همان زمان است، به نیکومدس^۲ نسبت داده شده است. راه حل دیگری بعداً به وسیله آپولونیوس^۳ (حدود ۲۲۵ ق.م.) عرضه شده است. دیوکلس^۴ (حدود ۱۸۰ ق.م.) منحنی سیسویید را برای به دست آوردن نتیجه مطلوب ابداع کرد. البته، راه حل های بسیاری با استفاده از منحنیهای مسطحه درجات بالاتر از دو در دوره های معاصر ابداع شده اند.

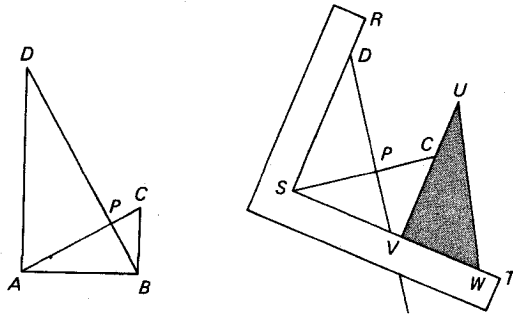
تعدادی از راه حل های مورد اشاره در بالا را در پایان این فصل می توان یافت. برای اینکه روح این تلاشها را تشریح کنیم، راه حلی را که ائوتوکیوس^۵ به افلاطون نسبت داده، در اینجا دوباره مطرح می کنیم. چون این راه حل از طریق وسایل مکانیکی است و چون می دانیم که افلاطون با چنین روشهایی مخالف بوده، احساس می شود که اسناد آن به افلاطون اشتباه آمیز باشد.

دو مثلث CBA و DAB ، را که به ترتیب در B و A قائمه اند و هر دو در يك طرف ساق مشترك AB قرار دارند، در نظر بگیرید (به اولین قسمت شکل ۳۰ نگاه کنید). فرض کنید که وترهای AC و BD از دو مثلث یکدیگر را به زاویه قائم در P قطع کنند. با توجه به مثلثهای متشابه APD ، BPA ، CPB ، نتیجه می شود که

$$PC:PB = PB:PA = PA:PD.$$

بنا بر این PA و PB دو واسطه هندسی بین PC و PD هستند. نتیجه می شود که مسئله در صورتی که بتوان شکلی ساخت که در آن $PD = 2(PC)$ ، حل شده است. قسمت دوم شکل ۳۰ نشان می دهد که چگونه می توان چنین شکلی را با استفاده از وسایل مکانیکی ترسیم کرد. دو خط عمود متقاطع در P را رسم و PC و PD را بسا $PD = 2(PC)$ روی آن جدا کنید. حال، يك گونیای نجاری باله داخلی RST را روی شکل چنان قرار دهید که SR

1. Eratosthenes
2. Nicomedes
3. Apollonius
4. Diocles
5. Eutocius



شکل ۳۰

از D گذشته و رأس S زاویه قائمه، روی امتداد CP قرار گیرد. بر ST يك مثلث قائم-الزاویه UVW را، با ساق VW واقع بر ST ، بلغزائید تا ساق VU از نقطه C بگذرد. حال دستگاه* را بادیست حرکت دهید تا V بر امتداد DP قرار گیرد.

۴-۶ تثلیث زاویه

از سه مسئله مشهور یونان قدیم، تثلیث زاویه به نحو بارزی در بین افراد ناوارد از نظر ریاضی در آمریکای امروز از همه بیشتر مورد توجه است. همه ساله مجلات ریاضی و دست اندرکاران آموزش ریاضی این کشور مراسلات متعددی از «تثلیث کنندگان زاویه» دریافت می‌دارند و استبدادی ندارد اگر در روزنامه‌ها بخوانیم که شخصی سرانجام این مسئله فسرینده را «حل» کرده است. این مسئله به طور قطع در بین سه مسئله مشهور از نظر فهم ساده‌تر از همه است، چون دو نیم کردن يك زاویه بسیار ساده است، طبیعی است اگر تعجب کنیم که چرا تثلیث آن همین قدر آسان نیست.

تقسیم يك پاره‌خط به چند قسمت مساوی با ابزارهای اقلیدسی کار ساده‌ای است و ممکن است چنین باشد که یونانیان باستان در تلاش برای حل مسئله مشابه تقسیم زاویه به چند قسمت، به مسئله تثلیث رسیده باشند. یا شاید به‌طور محتملتر، مسئله در تلاشهایی برای ساختن يك نه ضلعی منتظم، که در آن تثلیث يك زاویه 60° لزوم پیدا می‌کرد، مطرح شده باشد.

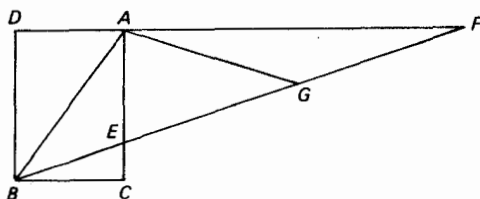
در مطالعه مسئله تثلیث به نظر می‌رسد که یونانیان ابتدا آن را به آنچه مسئله گرایش

* برای شکل اصلاح شده‌ای از این دستگاه، به عنوان نمونه، نگاه کنید به

Richard Courant and H. E. Robbins, *What Is Mathematics* p.147.

[این کتاب توسط آقای حسن صفاری به فارسی ترجمه شده است. شماره صفحه فوق‌الذکر اشاره

به متن انگلیسی دارد. - م.]



شکل ۳۱

نامیدند، تحویل کردند. هر زاویه حاده ABC (نگاه کنید به شکل ۳۱) را می توان به صورت زاویه بین یک قطر BA و یک ضلع BC از یک مستطیل $BCAD$ اختیار نمود. خطی مار بر B که CA را در E و امتداد DA را در F قطع می کند، به طوری که $EF = 2(BA)$ ، در نظر بگیرد. فرض کنید G وسط EF باشد. در این صورت

$$EG = GF = GA = BA$$

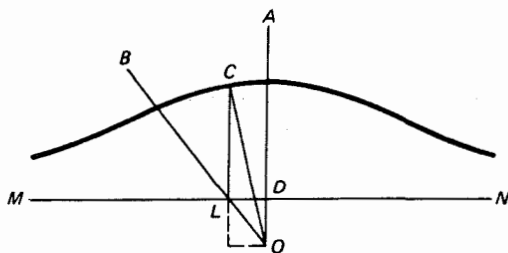
که در نتیجه

$$\angle ABG = \angle AGB = \angle GAF + \angle GFA = 2\angle GFA = 2\angle GBC$$

و BEF زاویه ABC را ثلث می کند. بنا بر این، مسئله به ترسیم پاره خط مستقیمی مانند EF به طول معلوم $2(BA)$ بین AC و امتداد DA باز می گردد به طوری که FE به نقطه B بگراید.

اگر برخلاف فرضهای اقلیدسی خود را مجاز بدانیم که بر روی ستاره خود، قطعه خط $E'F' = 2(BA)$ را جدا کنیم و سپس ستاره را چنان میزان کنیم که از نقطه B بگذرد و نقاط مشخص شده E' و F' بر AC و امتداد DA قرار گیرند، زاویه ABC تثلیث خواهد شد. می توانیم از این استفاده غیر مجاز از ستاره به عنوان کاربردی از اصل درج نام ببریم. برای سایر کاربردهای این اصل به مطالعه مسئله ای ۶۰۴ رجوع کنید. منحنیهای مسطحه مختلفی کشف شده اند که مسئله گرایش را، که مسئله تثلیث قابل تحویل به آن است، حل می کنند. یکی از قدیمیترین آنها کونکوئید است که توسط نیکومدس (حوالی ۲۴۰ ق.م.) ابداع شد. فرض کنید که خطی مستقیم و نقطه دلخواهی باشد که بر c واقع نیست. بر امتداد OP ، که P نقطه دلخواهی روی c است، PQ را برابر طول ثابت مفروض k جدا کنید. در این صورت مکان هندسی Q ، وقتی P روی c حرکت می کند، (یکی از شاخه های) کونکوئید c به قطب O و ثابت k است. طرح دستگاهی که کونکوئیدها را رسم کند، دشوار نیست*، و با چنان دستگاهی به آسانی می توان زوایا را تثلیث کرد. مثلاً فرض کنید که AOB زاویه حاده مفروضی باشد. خطی مانند MN عمود بر OA رسم کنید تا OA و OB را، همچنان که در شکل ۳۲ نشان داده شده، در D و L قطع کند.

* به عنوان مثال نگاه کنید به



شکل ۳۲

حال، کونکوئید MN را به قطب O و ثابت (OL) رسم کنید. در L خطی به موازات OA رسم کنید تا کونکوئید را در C قطع کند. در این صورت OC زاویه AOB را ثلث می‌کند.

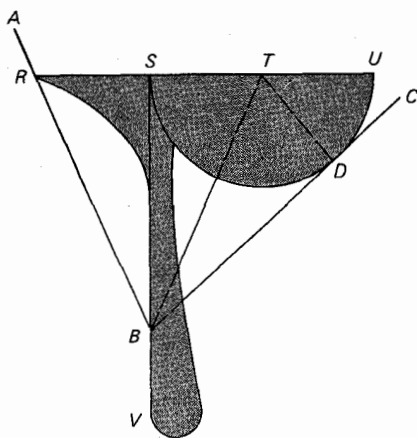
هر زاویه کلی را می‌توان به کمک یک مقطع مخروطی تثلیث نمود. یونانیان قدیم برای انجام این کار به اندازه کافی با مقاطع مخروطی آشنا نبودند و اولین برهان از این نوع به وسیله پاپوس^۱ (حدود ۳۰۰ ب.م.ج) داده شده است که از خواص کانسون و هادی مقاطع مخروطی استفاده می‌کند. دو تثلیث با استفاده از مقاطع مخروطی را می‌توان در مطالعه مسئله‌ای ۸.۴ دید.

برخی منحنیهای متعالی (غیر جبری) وجود دارند که نه تنها زاویه مفروضی را تثلیث می‌کنند بلکه، به طور کلیتر، آن را به هر چند قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. در بین این منحنیها مربع‌ساز [کوادر اتریکس] که به وسیله هیپاس^۲ (حدود ۴۲۵ ب.م.ج) ابداع شد، و حلزونی اشمیدس را می‌توان نام برد. این دو منحنی همچنین مسئله تریب دایره را حل می‌کنند. کاربرد مربع‌ساز در تثلیث و تریب، در مطالعه مسئله‌ای ۱۰.۴ ظاهر می‌شود.

طی سالها، وسایل مکانیکی، دستگاههای مفصلی، و پرگارهای مرکب متعددی برای حل مسئله تثلیث ابداع شده‌اند.* یک وسیله جالب و ابتدایی از این قبیل، به اصطلاح تبرزین است. مخترع تبرزین معلوم نیست، اما این وسیله در کتابی متعلق به سال ۱۸۳۵ توصیف شده است. برای ساختن یک تبرزین، از پاره‌خطی مانند RU که در S و T تثلیث شده (نگاه کنید به شکل ۳۳)، شروع کنید. نیمدایره‌ای به قطر SU رسم و SV را بر RU عمود نمایید. وسیله را همچنان که در شکل مزبور نشان داده شده، کامل کنید. برای تثلیث زاویه‌ای مانند ABC به وسیله تبرزین، ابزار را روی زاویه طوری قرار دهید که R روی BA قرار گیرد، SV از نقطه B بگذرد، و نیمدایره بر BC ، مثلاً در D ، مماس باشد. آنگاه چون می‌توان نشان داد که مثلثهای RSB ، TSB ، TDB همه مساوی‌اند، BS و BT زاویه مفروض را تثلیث می‌کنند. تبرزین را می‌توان بر کاغذ کالک با ستاره و پرگار ساخته و سپس

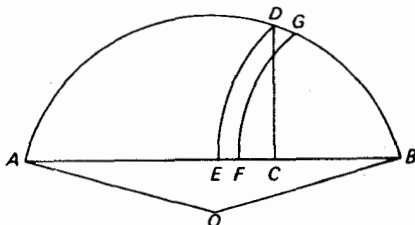
1. Pappus 2. Hippias

* نگاه کنید به



شکل ۳۳

بر روی زاویه مفروض تنظیم کرد. با این تدبیر می‌توانیم يك زاویه را با ستاره و پرگار ثلث کنیم. (بادو تبرزین می‌توان يك زاویه را به پنج قسمت مساوی تقسیم کرد.) اگرچه زاویه دلخواه را نمی‌توان با ابزارهای اقلیدسی دقیقاً تثلیت نمود، ترسیمهایی با استفاده از این ابزارها وجود دارند که تثلیتهای تقریبی بسیار خوبی را به دست می‌دهند. يك مثال عالی، ترسیمی است که در سال ۱۵۲۵ به وسیله حکاک و نقاش معروف، آلبرشت دورر داده شده است. زاویه مفروض AOB را به عنوان زاویه مرکزی يك دایره اختیار کنید (نگاه کنید به شکل ۳۴). فرض کنید که C آن نقطه تثلیت و AB باشد که به B نزدیکتر است. در C عمود بر AB را خارج کنید تا دایره را در D قطع کند. به مرکز B شعاع BD قوسی رسم کنید تا AB را در E قطع کند. فرض کنید که F آن نقطه تثلیت EC باشد که به E نزدیکتر است. دوباره به مرکز B و به شعاع BF ، قوسی رسم کنید که دایره را در G قطع کند. آنگاه OG يك خط تثلیت کننده تقریبی AOB است. می‌توان نشان داد که اشتباه در تثلیت با اندازه زاویه AOB افزایش می‌یابد، ولی برای زاویه $AOB = 60^\circ$



شکل ۳۴

تنها حدود $1''$ و برای زاویه $\angle AOB = 90^\circ$ حدود $18''$ است.

مطالعه مسئله ای 9.4 يك تثلیث تقریبی را، با استفاده از ابزارهای اقلیدسی، توصیف می کند که می توان آن را تاهر مقدار مورد نظر به تثلیث واقعی نزدیک کرد.

۴-۷ تربیع دایره

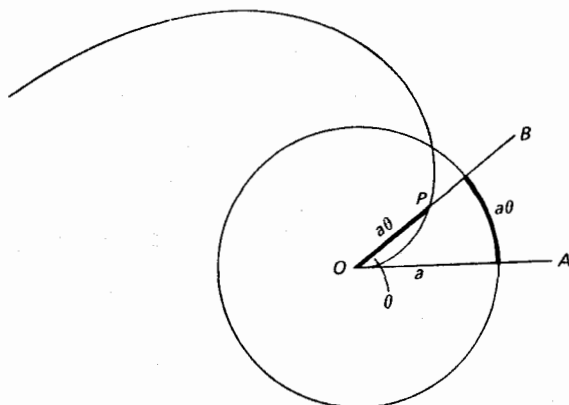
احتمالا هیچ مسئله دیگری به اندازه ترسیم مربعی هم مساحت بادایره ای مفروض، توجه بیشتر و طولانیتری را به خود مشغول نکرده است. در حوالی سالهای 1800 ق.م. مصریان باستان مسئله را با برابر گرفتن يك ضلع مربع با $8/9$ قطر دایره مفروض، حل کردند. از آن زمان به بعد بی اغراق هزاران نفر روی این مسئله کار کرده اند، و علی رغم آنکه امروزه ثابت می شود که این ترسیم را نمی توان با ابزارهای اقلیدسی انجام داد، هر ساله تعداد زیادی «مربع کننده دایره» پیدا می شوند.

اولین فرد یونانی که ارتباطش با مسئله معلوم است، آناکساگوراس (حدود 499 - حدود 427 ق.م.) می باشد، ولی از میزان سهم او در حل این مسئله چیزی نمی دانیم. بقراط خیوسی، که معاصر آناکساگوراس بود، در تربیع نوع خاصی از هلالها یا اشکال ماه شکلی که به وسیله دو قوس دایره ای محدود می شوند، احتمالا به این امید که تحقیقات وی ممکن است به راه حلی برای مسئله تربیع منجر شود، توفیق حاصل کرد. چند سالی بعد هیپاس الیسی^۱ (حدود 425 ق.م.) منحنی را که به هر چه ساز شهرت یافت، ابداع کرد. این منحنی، هم مسئله تثلیث و هم مسئله تربیع را حل می کند، اما روایات در مورد اینکه اولین بار چه کسی آن را در نقش تربیع به کار برد، متفاوت است. شاید چنین باشد که هیپاس آن را برای تثلیث زوایا به کار برده، و اینکه دینوستراتوس (حدود 350 ق.م.)، یا هندسه دان متأخر دیگری به کار برد آن در مسئله تربیع پی برده است. بعضی از هلالهای بقراط در مطالعه مسئله ای 12.4 بررسی شده اند؛ مربع ساز، در نقش دو گانه اش، در مطالعه مسئله ای 10.4 بررسی شده؛ و چند تربیع تقریبی در مطالعه مسئله ای 11.4 توصیف شده اند.

با منحنی حلزونی ارشمیدس می توان به راه حل زیبایی از مسئله تربیع دست یافت، و گفته اند که ارشمیدس (حدود 225 ق.م.) عملا حلزونی خود را بدین منظور به کار برد. حلزونی را، در قالب اصطلاحات دینامیک، می توان به عنوان مکان هندسی نقطه ای مانند P تعریف کرد که به طور یکنواخت در امتداد نیمخطی که به نوبه خود در صفحه ای حول مبدأ خود دوران می کند، در حرکت است. اگر وضعیت OA از نیمخط دوار را وقتی که P بر O ، مبدأ آن، منطبق است به عنوان دستگاه مختصات قطبی اختیار کنیم، در این صورت OP با زاویه AOP متناسب است، و معادله قطبی حلزونی $r = a\theta$ است که a ثابت تناسب می باشد.

* به عنوان نمونه، نگاه کنید به

Howard Eves, *A Survey of Geometry*, vol. 2, pp. 30 - 38.



شکل ۳۵

دایره‌ای به مرکز O و شعاع a رسم می‌کنیم. آنگاه OP و قوسی از این دایره بین خطوط OA و OP برابرند، زیرا هر يك با $a\theta$ داده می‌شوند (نگاه کنید به شکل ۳۵). نتیجه می‌شود که اگر OP را عمود بر OA اختیار کنیم، آنگاه OP طولی برابر با يك چهارم محیط دایره خواهد داشت. چون K ، مساحت دایره، برابر با نصف شعاع آن ضربدر محیط آن است، داریم

$$K = \left(\frac{a}{2}\right)(\pi OP) = (\pi a)(OP).$$

بدین ترتیب ضلع مربع مطلوب واسطه هندسی بین OP و πa ، یا بین قطر دایره و طول آن بردار شعاعی حلزونی است که بر OA عمود می‌باشد.

می‌توانیم زاویه‌ای مانند AOB را با حلزونی ارشمیدس تثلیث (یا کلیتر از آن به چند قسمت) کنیم. فرض کنید که OB حلزونی را در P تلاقی کند و قطعه خط OP را به وسیله نقاط P_1 و P_2 بدسه قسمت کند. اگر دواير به مرکز O و به شعاعهای OP_1 و OP_2 حلزونی را در T_1 و T_2 قطع کنند، آنگاه OT_1 و OT_2 زاویه AOB را تثلیث می‌کنند.

۴-۸ گاهشمار π *

مسئله تریبوع، پیوند نزدیکی با محاسبه π ، نسبت محیط يك دایره بدقطر آن، دارد. دیده‌ایم

* برای گاهشمار کاملتری از π ، شامل متجاوز بر ۱۲۰ مدخل، نگاه کنید به

H.C. Schepler, "The chronology of pi," *Mathematics Magazine* (January-February 1950): 165-70; (March-April 1950): 216-28; (May-June 1950): 279-83.

که در شرق باستان مقدار π اغلب 3^* گرفته می‌شد، و در مورد تربیع دایره توسط مصریان که در پایروس ریند داده شده، داریم $3^* = (4/3)^4 = 3^*1604...$ اما اولین کوشش علمی برای محاسبه π ظاهراً از آن ارشمیدس است، و ما این گاهشمار را با دستاورد او آغاز می‌کنیم.

حدود ۲۴۴۰ ق.م. برای سهولت امر، فرض کنید که دایره‌ای به قطر واحد اختیار می‌کنیم. حال (طول) محیط یک دایره بین محیط یک چندضلعی منتظم محاطی و محیط یک چندضلعی منتظم محیطی قرار دارد. چون محاسبه محیطهای شش ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی کار ساده‌ای است، به آسانی کرانهایی برای π به دست می‌آوریم. اما فرمولهایی وجود دارند (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۱۳.۴) که به ما می‌گویند چگونه می‌توانیم با داشتن محیطهای چند ضلعیهای منتظم محیطی و محاطی، محیطهای چندضلعیهای محیطی و محاطی را به دست آوریم که تعداد اضلاعشان دو برابرند. از کاربرد متوالی این روش، با شروع از شش ضلعیهای منتظم محیطی و محاطی، می‌توانیم محیطهای چند ضلعیهای منتظم محیطی و محاطی با ۱۲، ۲۴، ۴۸، ۹۶ ضلع را محاسبه کنیم و بدین ترتیب کرانههای نزدیکتر و نزدیکتری برای π به دست آوریم. این اساساً همان کاری است که ارشمیدس انجام داد و در نهایت به این حقیقت رسید که π بین $223/71$ و $22/7$ قرار دارد، یا اینکه، π ، بادو رقم اعشار، 3.14 است. این نتیجه در رساله ارشمیدس به نام اندازه‌گیری دایره که تنها شامل سه قضیه است، دیده می‌شود. این رساله آن گونه که به دست ما رسیده شکل اولیه آن نیست و ممکن است تنها بخشی از یک بحث طولانیتر باشد. با توجه به دستگاه شمار ضعیفی که در آن زمان مورد استفاده بود، به ناگزیر نتیجه می‌توان گرفت که ارشمیدس محاسبی بسیار توانا بوده است. در این اثر ارشمیدس، تقریبات گویای قابل توجهی برای جذرهای گنگک یافت می‌شوند.

روش بالا برای محاسبه π با استفاده از چند ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی به روش کلاسیک محاسبه π معروف است.

حدود ۱۵۰ ق.م. اولین مقدار قابل توجه برای π بعد از مقدار ارشمیدس به وسیله کلاودیوس پتلمیوس^۱ اسکندرانی در اثر معروفش *سینتاکسیس ماثماتیکا*^۲ (که با عنوان عربی *المجسطی*^۳ معروفیت بیشتری دارد)، بزرگترین اثر یونان باستان در باب نجوم، داده

* نگاه کنید به تورات [متن انگلیسی]:

I. Kings 7: 23; II Chron. 4:2.

[آیه بیست و سوم، باب هفتم، کتاب اول پادشاهان و آیه دوم، باب چهارم، کتاب دوم تواریخ ایام به شرح زیر است: و دریاچه ریخته‌شده را ساخت که از لب تا لبش ده ذراع بود و از هر طرف مدور بود و بلندی‌اش پنج ذراع و ریسمانی سی ذراعی آن را گرداگرد احاطه داشت.]

شده است. در این اثر π ، در دستنگاه شصتگانی، به صورت $38'30''$ داده می شود که عبارت از $377/120$ ، یا 31416 است. این مقدار بدون تردید از جدول وترها، که در رساله ظاهر می شود، استخراج شده است. این جدول طول وترهای يك دایره را که در مقابل زوایای مرکزی هر درجه و نصف درجه قرار دارند، می دهد. اگر طول وتر زاویه مرکزی 1° در 360 ضرب و نتیجه بر طول قطر دایره تقسیم شود، مقدار فوق برای π حاصل خواهد شد.

حدود ۴۸۰ تسو چونگ چی^۱، از اولین چینیانی که در مکانیک کار می کرد، تقریب گویای جالب توجه ... $31415929 = 355/113$ را داد، که تا شش رقم اعشار صحیح است. به مطالعه مسئله ای 11.4 (ج) برای کاربردی از این نسبت در مسئله تربیع نگاه کنید.

حدود ۵۳۰ ریاضیدان قدیم هندی، آریبته^۲، $31416 = 62832/20000$ را به عنوان مقدار تقریبی برای π داد. معلوم نیست که این نتیجه چگونه به دست آمده است. ممکن است که این از يك منبع قدیمتر یونانی یا، شاید از محاسبه محیط يك چندضلعی منتظم محاطی 384 ضلع حاصل شده باشد.

حدود ۱۱۵۰ ریاضیدان متأخر هندی، بهاسکره^۳، تقریبات متعددی برای π عرضه کرد. وی $3927/1250$ را به عنوان مقدار دقیق، $22/7$ را به عنوان مقدار نادرست، و $1/10$ را برای کارهای معمولی ارائه کرد. اولین مقدار ممکن است از آریبته اخذ شده باشد. مقدار دیگری، $31416 = 754/240$ ، که به وسیله بهاسکره داده شده، مبدأ نامعلومی دارد؛ این همان مقداری است که به وسیله بظلمیوس داده شده است.

۱۴۲۹ کاشانی، منجم دربار الخ بیگ، π را به روش کلاسیک تا 16 رقم اعشار صحیح حساب کرد.

۱۵۷۹ ریاضیدان برجسته فرانسوی، فرانسوا ویت^۴ مقدار π را به روش کلاسیک، با استفاده از چند ضلعیهای که $393216 = 6(2^6)$ ضلع دارند، تا 9 رقم اعشار پیدا کرد. وی همچنین معادل حاصل ضرب نامتناهی جالب زیر را پیدا کرد (نگاه کنید به مطالعه مسئله ای 13.4).

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2} \frac{\sqrt{\{2+\sqrt{(2+\sqrt{2})}\}}}{2} \dots$$

۱۵۸۵ آدرین آنتونیزون^۵ نسبت چینی باستانی $355/113$ را مجدداً کشف کرد. این آشکارا از حسن تصادف بود زیرا وی فقط نشان داد که $377/120 > \pi > 333/106$. وی سپس متوسط صورتها و مخرجها را پیدا کرد تا مقدار دقیق π را به دست آورد.

1. Tsu Ch'ung-chih
2. Āryabhata
3. Bhāskara
4. François Viète
5. Adriaen Anthoniszoon

شواهدی وجود دارد مبنی بر اینکه والتین اوتوا، یکی از شاگردان جدولساز قدیم، راتئیکوس^۲، ممکن است این نسبت را برای π اندکی پیشتر، یعنی در سال ۱۵۷۳، به دنیای غرب شناسانده باشد.

۱۵۹۳ آدریان وان رومن^۳، که معمولا به نام آدریانوس رومانوس^۴ از وی یاد می‌شود، از اهالی هلند، π را به طور صحیح تا ۱۵ رقم اعشار به روش کلاسیک، با استفاده از چند ضلعیهای با ۲۳۰ ضلع، پیدا کرد.

۱۶۱۰ لودولف وان کولن^۵ از آلمان π را تا ۳۵ رقم اعشار به روش کلاسیک، با استفاده از چند ضلعیهای با ۲۶۲ ضلع، محاسبه کرد. وی قسمت زیادی از عمر خود را در این مهم صرف کرد و دستاورد وی آنچنان خارق‌العاده تلقی شد که این عدد بر سنگ قبر وی کنده شد، و هنوز هم گاهی در آلمان از آن با عنوان «عدد لودولفی» یاد می‌شود.

۱۶۲۱ ویلبرور اسنل^۶، فیزیکدان هلندی، که به سبب کشف قانون انکسار شهرت دارد، یک پیرایش مثلثاتی از روش کلاسیک محاسبه π را ابداع کرد، به گونه‌ای که از هر زوج کران حاصل شده از روش کلاسیک برای π ، وی می‌توانست کرانهایی به دست آورد که به طور قابل ملاحظه‌ای به π نزدیکتر باشند. وی قادر بود که با روش خود ۳۵ رقم اعشار وان کولن را با استفاده از چند ضلعیهای که تنها ۲۳۰ ضلع دارند، به دست آورد. روش کلاسیک با این چند ضلعیها تنها ۱۵ رقم اعشار را می‌دهد. برای چند ضلعیهای با ۹۶ ضلع، روش کلاسیک ۲ رقم اعشار را عاید می‌کند در حالی که پیرایش اسنل ۷ رقم اعشار را به دست می‌دهد. برهان صحیحی برای تصحیح اسنل در سال ۱۶۵۴ به وسیله ریاضیدان و فیزیکدان هلندی، کریستیان هویگنس^۷، داده شد.

۱۶۳۰ گرین برگر^۸، با استفاده از روش بهبود یافته اسنل، π را تا ۳۹ رقم اعشار محاسبه کرد. این آخرین تلاش عمده برای محاسبه π با استفاده از روش محیطها بود. ۱۶۵۰ ریاضیدان انگلیسی جان والیس^۹ بسط جاب زی را به دست آورد

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \times 2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \dots}{1 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \dots}$$

لرد برونکر^{۱۰}، اولین رئیس انجمن سلطنتی، نتیجه والیس را به کسر مسلسل

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2} + \frac{3^2}{2 + 5^2} + \dots$$

-
- | | | |
|---------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1. Valentin Otho | 2. Rhaeticus | 3. Adriaen van Roomen |
| 4. Adrianus Romanus | 5. Ludolph van Ceulen | |
| 6. Willebrord Snell | 7. Christiaan Huygens | 8. Grienberger |
| 9. John Wallis | 10. Lord Brouncker | |

تبدیل کرد. مع هذا هیچیک از این عبارات برای محاسبه گسترده ۳ مورد استفاده قرار نگرفتند.

۱۶۷۱ ریاضیدان اسکاتلندی جیمز گریگوری^۱ سری نامتناهی

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

را به دست آورد. گریگوری به این حقیقت توجه نکرد که برای $x = 1$ سری به صورت

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

درمی آید. این سری که همگرایی آن بسیار کند است، در سال ۱۶۷۴ برلایبیتز معلوم بود. گریگوری تلاش کرد که ثابت کند حل اقلیدسی مسئله تربیع غیر ممکن است.

۱۶۹۹ آبراهام شارپ^۲ ۷۱ رقم اعشار درست را با استفاده از سری گریگوری با

$$x = \sqrt{1/3}$$
 پیدا کرد.

۱۷۰۶ جان ماخین^۳ ۱۰۰ رقم اعشار را با استفاده از سری گریگوری در ارتباط

با رابطه زیر به دست آورد

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

۱۷۱۹ ریاضیدان فرانسوی دو لانی^۴ ۱۱۲ رقم اعشار را با استفاده از سری

گریگوری با $x = \sqrt{1/3}$ به دست آورد.

۱۷۲۷ نماد π توسط ریاضیدانان متقدم انگلیسی ویلیام اوترد^۵، آیزک بروک^۶، و دیوید

گریگوری^۷ برای تعیین محیط، یا پیرامون، یک دایره مورد استفاده واقع شد. اولین کسی که این نماد را به نشانه نسبت محیط به قطر به کار برد نویسنده انگلیسی، ویلیام جونز^۸، در اثری متعلق به سال ۱۷۰۶ بود. مع هذا این نماد تا زمان پذیرش آن از طرف اوپلر در سال ۱۷۳۷، از طرف عموم با این معنی، مورد استفاده قرار نگرفت.

۱۷۵۴ ژان اتین مونتوکلا^۹، از تاریخ ریاضی نویسان متقدم فرانسوی، تاریخی

در باب مسئله تربیع دایره نگاشت.

۱۷۵۵ آکادمی علوم فرانسه از بررسی همراه حل دیگری برای مسئله تربیع دایره

امتناع ورزید.

- | | | |
|--------------------------|---------------------|-----------------|
| 1. James Gregory | 2. Abraham Sharp | 3. John Machin |
| 4. De Lagny | 5. William Oughtred | 6. Isaac Barrow |
| 7. David Gregory | 8. William Jones | |
| 9. Jean Etienne Montucla | | |

۱۷۶۷ یوهان هاینریش لامبرت^۱ نشان داد که π گنگ است.

۱۷۷۷ کنت دو بوفون^۲ مسئله سوزن مشهور خود را ابداع کرد که به وسیله آن π

را می توان به روشهای احتمالاتی تقریب نمود. فرض کنید که تعدادی خط موازی که به فاصله a از هم قرار دارند، بر یک صفحه افقی رسم شده باشند، و فرض کنید که میله همگن یکنواختی به طول $a < l$ به تصادف بر روی صفحه انداخته می شود. بوفون نشان داد که احتمال* اینکه میله یکی از خطوط صفحه را قطع کند، به وسیله

$$p = \frac{2l}{\pi a}$$

داده می شود. با انجام عملی این آزمایش به تعداد دفعات زیاد مفروض و ثبت تعداد حالات توأم با پیروزی، و بدین ترتیب با به دست آوردن یک مقدار تجربی برای p ، می توانیم فرمول بالا را برای محاسبه تقریبی π به کار ببریم. بهترین نتیجه ای که بدین طریق به دست آمد به وسیله لازرینی^۳ ایتالیایی در ۱۹۰۱ داده شد. تنها با ۳۴۰۸ بار پرتاب میله، وی مقداری برای π یافت که تا ۶ رقم اعشار درست بود! نتیجه وی آن قدر از نتایج به دست آمده به وسیله دیگران بهتر بود که گاهی با تردید به آن نگریسته می شود. روشهای دیگری هم بر اساس احتمال برای محاسبه π وجود دارد. مثلاً، در ۱۹۰۴، ر. شارتر^۴ گزارشی از کاربرد این حقیقت معلوم ارائه کرد که اگر دو عدد صحیح مثبت به طور تصادفی نوشته شوند، احتمال اینکه نسبت به هم اول باشند، $6/\pi^2$ است.

۱۷۹۴ آدرین - ماری لواندره^۵ نشان داد که π^2 گنگ است.

۱۸۴۱ ویلیام راترفورد^۶ انگلیسی π را تا ۲۰۸ رقم اعشار، که بعداً معلوم شد از

آن بین فقط ۱۵۲ رقم صحیح بوده اند، با استفاده از سری گریگوری در ارتباط با رابطه

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) + \arctan\left(\frac{1}{67}\right)$$

حساب کرد.

۱۸۴۴ زاخاریاس دازه^۷، محاسب برق آسا، π را به طور صحیح تا ۲۰۰ رقم اعشار

با استفاده از سری گریگوری در ارتباط با رابطه

1. Johann Heinrich Lambert 2. Comte de Buffon

* اگر پیشامد مفروضی به b طریق امکان وقوع داشته و به f طریق امکان عدم وقوع داشته باشد، و اگر وقوع هر یک از $b+f$ طریق به یک اندازه محتمل باشد، احتمال ریاضی p برای وقوع پیشامد عبارت است از $p = b/(b+f)$.

3. Lazzarini 4. R. Chartres 5. Adrien-Marie Legendre

6. William Rutherford 7. Zacharias Dase

$$\left(\frac{\pi}{4}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right)$$

پیدا کرد. دازه، که در ۱۸۲۴ در هامبورگ متولد شد، در ۳۷ سالگی درگذشت. وی شاید خارق العاده ترین محاسب ذهنی بوده که تاکنون زیسته است. از کارهای وی محاسبه ذهنی حاصل ضرب دو عدد ۸ رقمی در ۵۴ ثانیه، دو عدد ۲۰ رقمی در ۶ دقیقه، دو عدد ۴۰ رقمی در ۴۰ دقیقه، و دو عدد ۱۰۰ رقمی در ۸ ساعت و ۴۵ دقیقه بوده است. وی به طور ذهنی جذر يك عدد ۱۰۰ رقمی را در ۵۲ دقیقه محاسبه می کرد. دازه بعدها توانا بیهای خود را با تنظیم جدول لگاریتم طبیعی هفت رقمی و جدول سازه های همه اعداد بین ۷۰۰۰۰۰۰۰ و ۱۰۰۰۰۰۰۰۰ به نحو شایسته تری به کار برد.

۱۸۵۳ راتر فورد دوباره به این مسئله روی آورد و π را تا ۴۰۰ رقم اعشار یافت. ۱۸۷۳ ویلیام شنکس^۱ از انگلستان، با استفاده از فرمول ماخین، π را تا ۷۰۷ رقم محاسبه کرد. برای مدت مدیدی این کار، به صورت افسانه ایترین نمونه کار محاسباتی انجام شده باقی ماند.

۱۸۸۲ عددی را جبری نامند که ریشه یک چند جمله ای با ضرایب گویا باشد، در غیر این صورت آن را متعالی نامند. ف. لیندمان^۲ نشان داد که π متعالی است. این حقیقت ثابت می کند که (نگاه کنید به بخش ۱۴-۲ [جلد دوم]) مسئله تریسیرا نمی توان با ابزارهای اقلیدسی حل کرد.

۱۹۰۶ در میان چیزهای جالبی که با π مربوط می شوند «یادآور»^۳های مختلفی هستند که به منظور در یاد نگاهداشتن π تا تعداد اعشار زیاد طرح شده اند. آنچه در زیر می آید، از اور^۴ است که در نشریه لیترری دایجست^۵ منتشر شد. کافی است به جای هر کلمه، تعداد حروف آن را قرار دهیم تا π به طور صحیح تا ۳۰ رقم اعشار به دست آید.

Now I, even I, would celebrate
In rhymes unapt, the great
Immortal Syracusan, rivaled nevermore,
Who in his wondrous Lore,
Passed on before,
Left men his guidance
How to circles mensurate.

چند سال بعد، در سال ۱۹۱۴ یادآور مشابه زیر در مجله ساینتیفیک امریکن^۶ چاپ شد:
"See, I have a rhyme assisting my feeble brain, its tasks
ofttimes resisting."

1. William Shanks
2. F. Lindemann
3. mnemonic
4. A. C. Orr
5. Literary Digest
6. Scientific American

و یادآور دیگری از این گونه چنین است:

“May I have a large container of coffee?”

۱۹۴۸ در سال ۱۹۴۶، د.ف. فرگوسن^۲ از انگلستان در مقدار یسافته شده توسط شنکس برای π خطاهایی را که از رقم ۵۲۸ شروع می‌شوند، کشف کرد و در ژانویه سال ۱۹۴۷ مقدار تصحیح شده‌ای با ۷۱۵ رقم ارائه داد. در همان ماه ج.و. رنج جونیور^۳ آمریکایی مقداری برای π با ۸۵۸ رقم انتشار داد، ولی فرگوسن به‌زودی خطایی در رقم ۷۲۳م آن پیدا کرد. در ژانویه ۱۹۴۸، فرگوسن و رنج مشترکاً مقدار تصحیح و کنترل شده‌ای را برای π با ۸۵۸ رقم اعشار منتشر کردند. رنج از فرمول ماسخین استفاده کرد، در حالی که فرگوسن فرمول

$$\frac{\pi}{4} = 3 \arctan\left(\frac{1}{4}\right) + \arctan\left(\frac{1}{20}\right) + \arctan\left(\frac{1}{1985}\right)$$

را بدکار برد.

۱۹۴۹ کامپیوتر الکترونیکی، ENIAC در آزمایشگاه‌های تحقیقات بالیستیکی نظامی^۴ در آبردین^۵، π را تا ۲۵۳۷ رقم اعشار حساب کرد.
 ۱۹۵۹ فرانسوا ژنوی^۶، در پاریس، π را با استفاده از آی. بی. ام. ۷۵۴ تا ۱۶،۱۶۷ رقم اعشار، محاسبه کرد.
 ۱۹۶۱ رنج و دانیل شنکس، از واشنگتن دی. سی. π را با استفاده از آی. بی. ام. ۷۵۹۵ تا ۱۰۰،۲۶۵ رقم اعشار محاسبه کردند.
 ۱۹۶۵ قطعات ENIAC را، که دیگر متروک شده بود، از هم باز کردند و به‌عنوان یک اثر عقیقه به انستیتوی اسمیتسونی^۷ انتقال دادند.

۱. در زبان فارسی نیز چنین یادآورهایی ابداع شده‌اند، نمونه‌ای از آن را که در زیر نقل می‌شود می‌توان در کتاب هندسه سال دوم رشته ریاضی فیزیک، یافت.

گر کسی از تو بپرسد ره آمختن π پاسخی ده که خردمند ترا آموزد

خرد و بینش و آگاهی دانشمندان ره سرمنزله توفیق ترا آموزد

این شعر عدد π را با ده رقم اعشار مشخص می‌کند. در همانجا شعر یادآور فرانسوی نیز آمده و ادعا شده قدیمیترین شعر در این زمینه است. م.

2. D. F. Ferguson

3. J. W. Wrench Junior

4. Army Ballistic Research Laboratories

5. Aberdeen

6. François Genuys

۷. Smithsonian Institution، بنیاد و موزه‌ای که در سال ۱۸۴۶ در شهر واشنگتن دی.

سی. از ماترک James Smithson (۱۸۲۹-۱۷۶۵) دانشمند انگلیسی تأسیس شد. این

مؤسسه شعبه‌های متعددی دارد که به‌هنر و علوم اختصاص دارند. م.

۱۹۶۶ در ۲۲ فوریه، م. ژان گیوا، وهمکاران وی در هیئت انرژی اتمی در پاریس، با یک کامپیوتر STRETCH به تقریبی برای π که تعداد ارقام اعشارش تسا ۲۵۰۰۰۰۰ می رسید، دست یافتند.

۱۹۶۷ دقیقاً یک سال بعد، این افراد π را با یک کامپیوتر CDC ۶۶۰۰ تسا ۵۰۰،۰۰۰ رقم اعشار پیدا کردند.

۱۹۷۴ گیوا و همکارانش π را با یک کامپیوتر CDC ۷۶۰۰ تا ۱،۰۰۰،۰۰۰ رقم اعشار پیدا کردند.

۱۹۸۱ دو ریاضیدان ژاپنی کازونوری میوشی^۲ و کازوهیکا ناکایاما^۳ از دانشگاه تسوکوبا^۴ π را با یک کامپیوتر FACOM-۲۰۰ در ۱۳۷/۳ دقیقه تا ۲،۰۰۰،۰۳۸ رقم حساب کردند. آنها از فرمول

$$\pi = ۳۲ \arctan\left(\frac{1}{1۰}\right) - ۴ \arctan\left(\frac{1}{۲۳۹}\right) - ۱۶ \arctan\left(\frac{1}{۵۱۵}\right)$$

استفاده کردند و نتیجه را با فرمول مایخین امتحان کردند.

در گاهشمار بالا هیچ موردی از آثار فراوانی را که توسط مبتلایان به بیماری مودبوس کوکلومتريکوس^۵، یا بیماری تربیع دایره، فراهم آمده، نگنجانده ایم. این کارها، که اغلب سرگرم کننده و در مواردی تقریباً باورنکردنی اند، مستلزم انتشار مجموعه جداگانه ای هستند. برای آنکه مفاد آنها روشن شود، موردی را در سال ۱۸۹۲ در نظر بگیریم که در آن نویسنده ای در نیویورک تردیون^۶ کشف مجدد راز مدت ها گم شده ای را اعلام کرد که بعد از ۳۲ به عنوان مقدار دقیق π منجر می گردید. بحث پرشوری که بعد از این اعلام به میان آمد، هواداران زیادی را برای این مقدار جدید جلب کرد. همچنین، بعد از انتشار در ۱۹۳۱، تعداد زیادی از کتابخانه های دانشگاهها و کتابخانه های عمومی دسراسر ایالات متحده، نسخه هایی اهدایی از کتاب قطوری را که به اثبات $\pi = \frac{3۳۵}{۸۱}$ اختصاص داده شده. از مؤلف آن دریافت داشته اند. ضمناً لایحه قانونی شماره ۲۴۶۰ مجلس مقننه ایالت ایندیانا را داریم که، در ۱۸۹۷، دست بد تعیین مقدار π از طریق قانون گذاری زد. در بخش I این لایحه می خوانیم: «به تصویب مجمع عمومی ایالت ایندیانا برسد: معلوم گردیده است که نسبت یک سطح مستدیر به مربعی که بر خطی برابر با ربع محیط ساخته شود، برابر است با مساحت یک مستطیل مساوی الاضلاع به مساحت مربعی بزرگ ضلع آن...». این لایحه از تصویب مجلس گذشت ولی به علت برخی استهزاها در روزنامه ها، علی رغم پشتیبانی شدید

1. M. Jean Guilloud
2. Kazunori Miyoshi
3. Kazuhika Nakayama
4. Tsukuba
5. morbus cyclometricus
6. New York Tribune

ناظر ایالتی تعلیمات عمومی^۱، در سنا بایگانی شد.*

از محاسبه π با تعداد زیادی ارقام اعشاری، چیزی بیش از مبارزه طلبی متضمن در آن، مورد نظر است. يك علت، تأمین اطلاعات آماری مربوط به «نرمال بودن» π است. يك عدد حقیقی نرمال ساده نامیده می‌شود در صورتی که در بسط اعشاری آن همه ارقام با فراوانیهای مساوی ظاهر شوند، و آن را نرمال می‌نامند هر گاه که هر دسته ارقام با طولهای برابر، با فراوانیهای مساوی ظاهر شوند. معلوم نیست که π (یا از این نظر حتی $\sqrt{2}$) نرمال یا حتی نرمال ساده باشد. محاسبه‌های مقدماتی π ، که شروع آنها محاسبه با کامپیوتر ENIAC در ۱۹۴۹ بود، برای فراهم آوردن اطلاعات آماری در باب این موضوع صورت گرفته بودند. از شمارشهای انجام شده بر روی این بسطهای گسترده π ، به نظر می‌رسد که این عدد احتمالاً نرمال است. محاسبه π با اشتباهی در رقم ۱۷۰۷م آن که به وسیله شنکس در سال ۱۸۳۷ انجام شد، ظاهراً دلالت بر این می‌کرد که π حتی نرمال ساده هم نیست.

مطالعه مسئله‌ای

۱۰۴ پرگارهای اقلیدسی و پرگارهای امروزی

دانشجویی که اصول اقلیدس را برای اولین بار می‌خواند، ممکن است در قضایای آغازین مقاله اول دچار شگفتی شود. سه قضیه اول مسائل ترسیمی زیر هستند.

- ۱- رسم مثلث متساوی‌الاضلاعی بر يك خط مستقیم منتهای مفروض.
 - ۲- رسم خط مستقیم، از نقطه مفروض، برابر با يك خط مستقیم مفروض.
 - ۳- باداشتن دو خط مستقیم، جدا کردن طولی برابر خط کوچکتر از خط بزرگتر.
- این سه مسئله ترسیمی با ستاره و پرگارهای امروزی بدیهی‌انسد، ولی با ستاره و پرگار اقلیدسی به کمی فراست نیاز است.

(الف) قضیه ۱ از مقاله اول را با ابزارهای اقلیدسی حل کنید.

(ب) قضیه ۲ از مقاله اول را با ابزارهای اقلیدسی حل کنید.

(ج) قضیه ۳ از مقاله اول را با ابزارهای اقلیدسی حل کنید.

(د) نشان دهید که قضیه ۲ از مقاله اول ثابت می‌کند که ستاره و پرگار اقلیدسی

با ستاره و پرگارهای امروزی معادل‌اند.

1. State Superintendent of Public Instruction

* نگاه کنید به

W.E. Edington, "House Bill No. 246, Indiana State Legislature, 1897,"

Proceedings of the Indiana Academy of Science 45 (1935): 206-210.

۲.۴ تضعیف توسط آرخوتاس و مناخموس

الف) آرخوتاس (حدود ۴۰۰ ق.م.)، فیلسوف فیثاغورسی؛ ریاضیدان، فرمانده نظامی و سیاستمدار، یکی از محترمترین و پرنفوذترین شهروندان تارتوتوم (تارتوتوی کنونی) در ایتالیا بود. گفته‌اند که وی هفت بار به‌عنوان فرمانده نیروهای تارتوتوم انتخاب شده بوده، و به‌لحاظ علاقه‌ای که به رفاه و تحصیل کودکان تارتوتوم نشان می‌داده، شهرت به‌هم رسانده بود. وی به‌طور غم‌انگیزی در يك کشتی شکستگی در نزدیکی تارتوتوم غرق شد. آنچه در زیر می‌آید شرح راه حل جالب وی برای مسئله درج دو واسطه هندسی بین دو پاره‌خط مفروض است.

فرض کنید که $a > b$ ، b و a ، دو پاره‌خط مفروض باشند. در يك صفحه افقی دایره‌ای به قطر $AD = a$ رسم و وتر $AB = b$ را رسم کنید. فرض کنید که امتداد AB مماس بر دایره در D را در نقطه P تلاقی کند. نیمه بالایی نیم استوانه مستدیر قائمی به‌قاعده نیم‌دایره ABD را برپا سازید؛ مخروط مستدیر قائمی را با دوران دادن AP در حول AD تولید کنید؛ چنبره‌ای با شعاع داخلی صفر را با دوران دادن دایره‌ای عمودی بر قطر AD ، حول مولدی از استوانه که از A می‌گذرد، تولید کنید. نقطه مشترک نیم استوانه، مخروط، و چنبره را با K نشان دهید، و فرض کنید I پای مولدی از نیم استوانه، ماربر K و وارد بر نیم‌دایره ABD باشد. ثابت کنید که AI و AK دو واسطه هندسی بین a و b هستند. یعنی نشان دهید که $AD:AK = AK:AI = AI:AB$.

ب) مناخموس (حدود ۳۵۰ ق.م.) دو راه حل زیر را برای مسئله تضعیف عرضه کرد. در این راه حلها از مقاطع مخروطی خاصی استفاده می‌شود که، ظاهراً، به وسیله مناخموس برای مسئله حاضر ابداع شده‌اند.

۱- دو سهمی را که رأس مشترک و محورهای متعامد دارند رسم کنید، به طوری که پارامتر یکی دو برابر پارامتر دیگری باشد. طول عمود وارد از نقطه تلاقی دیگر دو سهمی بر محور سهمی کوچکتر را با x نشان دهید. در این صورت x یال مکعبی است که حجمی دو برابر حجم مکعبی دارد که پارامتر کوچکتر AK یال آن است. با استفاده از هندسه تحلیلی نوین ثابت کنید که این ترسیم درست است.

۲- يك سهمی با پارامتر s ، و سپس يك هذلولی متساوی‌الساقین با محور قاطعی مساوی $۲s$ رسم کنید که مجانبهای آن محور سهمی و مماس بر سهمی در رأس آن باشند. فرض کنید x طول عمود وارد از نقطه تلاقی دو منحنی بر محور سهمی باشد. در این صورت $۲s^۳ = x^۳$. با استفاده از هندسه تحلیلی نوین ثابت کنید که این ترسیم درست است.

۳.۴ تضعیف مکعب به وسیله آپولونیوس و اراتستن

آپولونیوس (حدود ۲۲۵ ق.م.) مسئله تضعیف را به ترتیب زیر حل کرد. يك مستطیل $OADB$ ، و سپس دایره‌ای هم‌مرکز با مستطیل رسم کنید که امتدادهای OA و OB را در

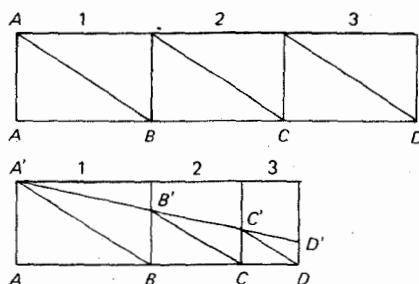
A' و B' به طریقی قطع کند که A', D, B' هممخط باشند. در واقع ساختن این دایره با ابزارهای اقلیدسی غیر ممکن است، اما آپولونیوس یک روش مکانیکی برای رسم آن ارائه داد.

(الف) نشان دهید که AA' و BB' دو واسطه هندسی بین OA و OB هستند.

(ب) اگر $OB = 2(OA)$ ، نشان دهید که $(BB')^2 = 2(OA)^3$.

(ج) اراتستن (حدود ۲۳۰ ق.م.) یک «میانگین یاب» مکانیکی ابداع کرد، متشکل از

سه قاب مستطیلی مساوی، با مجموعهای از قطرهای متناظر، که قابلیت لغزیدن در امتداد شیارهایی را داشتند به طوری که قاب دوم می توانست زیر اولی، و سوم می توانست زیر دومی بلغزد. فرض کنید که قابها، همچنانکه در شکل ۳۶ نشان داده شده، لغزنده شوند به طوری که نقاط A', B', C', D' هممخط باشند. نشان دهید که BB' و CC' دو واسطه هندسی بین AA' و DD' هستند. یک «میانگین یاب» از این نوع به آسانی از یک دسته مستطیلهای کاغذی ساخته می شود و می توان آن را چنان تعمیم داد که n میانگین بین دو پاره خط مفروض درج شوند.*



شکل ۳۶

۴.۴ سیسوئید دیوکلس

دیوکلس (حدود ۱۸۵ ق.م.) منحنی سیسوئید را برای حل مسئله تضعیف ابداع کرد. یک سیسوئید کلی را می توان به صورت زیر تعریف نمود: فرض کنید C_1 و C_2 دو منحنی مفروض باشند و فرض کنید O نقطه ثابتی باشد. فرض کنید P_1 و P_2 نقاط تلاقی یک خط متغیر مار برون O با دو منحنی مفروض باشند. مکان هندسی P بر این خط به طوری که $OP = OP_2 - OP_1 = P_1P_2$ ، سیسوئید C_1 و C_2 به قطب O نامیده می شود. اگر C_1 یک دایره، C_2 مماس بر C_1 در

* برای یک رهیافت مکانیکی جدیدتر نگاه کنید به

George E. Martin, "Duplicating the cube with a mira," *The Mathematics Teacher* (March 1979) : 204-208.

نقطه A ، و O نقطه متقاطع A بر C_1 باشد، در این صورت سیسویید C_1 و C_2 به قطب O سیسویید دیوکلس است.

(الف) با اختیار O به‌عنوان مبدأ و OA به‌عنوان نیمه مثبت محور x ها، نشان دهید که معادلهٔ دکارتی سیسویید دیوکلس به‌صورت $y^2 = x^3 / (2a - x)$ است که در آن a شعاع C_1 می‌باشد. نشان دهید که معادلهٔ قطبی متناظر $r = 2a \sin\theta \tan\theta$ است.

(ب) بر نیمه مثبت محور y ها $OD = n(OA)$ را جدا کنید. DA را رسم کنید تا سیسویید را در P قطع کند. فرض کنید OP خط C_2 را در Q قطع کند. نشان دهید که $(AQ)^2 = n(OA)^2$. وقتی $n = 2$ ، جوابی برای مسئلهٔ تضعیف داریم.

(ج) نیوتن نشان داده‌است که چگونه می‌توان سیسویید دیوکلس را با یک گونیای نجاری تولید کرد. فرض کنید کسه لبهٔ بیرونی گونیا ACB باشد که در آن AC بازوی کوتاه‌تر است. خطی مانند MN رسم و نقطه‌ای مانند R را به‌فاصلهٔ AC از MN مشخص کنید. گونیا را طوری حرکت دهید که A همواره بر MN قرار گیرد و BC همواره از نقطهٔ R بگذرد. نشان دهید که P ، وسط AC ، سیسویید دیوکلس را رسم می‌کند.

(د) سیسویید دو دایرهٔ متحد‌المرکز نسبت به‌مرکز مشترک آنان چیست؟ سیسویید یک جفت خط موازی نسبت به نقطه‌ای که بر هیچ‌یک از دو خط واقع نباشد، چیست؟

(ه) اگر C_1 و C_2 یکدیگر را در P قطع کنند، نشان دهید که OP در نقطهٔ O بر سیسویید C_1 و C_2 به‌قطب O مماس است.

۵.۴ چند تضعیف مربوط به قرن هفدهم

بسیاری از ریاضیدانان برجستهٔ قرن هفدهم، مانند هویگنس، دکارت، گرگوار دوسن-ونسان، و نیوتن، ساختمان‌هایی برای تضعیف مکعب ابداع کردند. در زیر دو تا از این ساختمانها می‌آید.

(الف) گرگوار دوسن-ونسان (۱۶۴۷) ساختمانی برای پیدا کردن دو واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط مفروض بر مبنای قضیهٔ زیر ارائه داد. هذلولی که از یک رأس مستطیلی رسم شود و دو ضلع مقابل به‌این رأس را به‌عنوان مجانبهای خود داشته باشد دایرهٔ محیطی مستطیل را در نقطه‌ای قطع می‌کند که فواصل آن از مجانبها واسطه‌های هندسی بین اضلاع مجاور مستطیل هستند. این قضیه را ثابت کنید.

(ب) دکارت (۱۶۵۹) خاطر نشان کرد که منحنیهای

$$x^2 = ay, \quad x^2 + y^2 = ay + bx$$

در نقطه‌ای مانند (x, y) متقاطع‌اند به‌طوری که x و y دو واسطهٔ هندسی بین a و b هستند. درستی این مطلب را نشان دهید.

۶.۴ کاربردهای اصل درج

فرض کنید که دو منحنی m و n ، و یک نقطه مانند O مفروض باشند. فرض کنید که خود را مجاز بدانیم که، بزرگ خط کش، قطعه خطی مانند MN جدا کرده سپس خط کش را چنان میزبان کنیم که از نقطه O گذشته و منحنیهای nom را در M بر m و N بر n قطع کند. در این صورت گفته می شود که خط رسم شده در امتداد خط کش بنا بر اصل درج رسم شده است. مسئله های خارج از حیطه ابزارهای اقلیدسی را اغلب می توان با این ابزارها حل کرد در صورتی که به خود اجازه دهیم که از اصل درج نیز استفاده کنیم.

(الف) فرض کنید که AB پاره خط مفروضی باشد. زاویه $ABM = 90^\circ$ و زاویه $ABN = 120^\circ$ را رسم کنید. حال ACD را رسم کنید تا BM را در C و BN را در D قطع نماید به طوری که $CD = AB$. در این صورت $2(AB)^2 = (AC)^2$. این ترسیم در اساس در آثار انتشار یافته ویت (۱۶۴۶) و نیوتن (۱۷۲۸) داده شده بود.

(ب) فرض کنید که AOB زاویه مرکزی دلخواهی در دایره مفروضی باشد. از B خطی مانند BCD رسم کنید که دایره را مجدداً در C و امتداد AO را در D قطع کند. به طوری که $CD = OA$ ، که در آن شعاع دایره است. در این صورت، (زاویه AOB) $\frac{1}{3}$ = (زاویه ADB). این راه حل مسئله تثلیث، از قضیه ای که توسط ارشمیدس (در حدود ۲۴۰ ق.م) داده شده، نتیجه می شود.

۷.۴ کونکوئید نیکومدس

در باره نیکومدس (حدود ۲۴۰ ق.م) صرف نظر از ابداع کونکوئید، منحنیی که با آن هم مسئله تثلیث و هم مسئله تضعیف را می توان حل کرد، اطلاع کمی در دست است. یک کونکوئید کلی را می توان به صورت زیر تعریف کرد. فرض کنید c یک منحنی مفروض O نقطه ثابتی باشد. بر بردار شعاعی OP از O تا نقطه ای مانند P بر c ، طول $PQ = \pm k$ را، که در آن k مقداری ثابت است. جدا کنید. در این صورت مکان هندسی Q کونکوئید c به قطب O و مقدار ثابت k نامیده می شود. منحنی کامل متشکل از دو شاخه است، یکی متناظر با $PQ = +k$ و دیگری با $PQ = -k$. اگر c مستقیم و O نقطه دلخواهی غیر واقع بر c باشد، کونکوئید نیکومدس به دست می آید.

(الف) با اختیار O به عنوان مبدأ و خط ماربر O موازی خط مفروض c به عنوان محور x ها، نشان دهید که معادله دکارتی کونکوئید نیکومدس برای ثابت k عبارت است از $ay^2 = k^2(x^2 + y^2) + (y - a)^2$ ، که در آن a فاصله O از c است.

(ب) نشان دهید که چگونه می توان کونکوئید نیکومدس را برای حل مسئله تضعیف به کار برد.

(ج) کونکوئید یک دایره برای نقطه ثابتی در روی دایره لیماسون پاسکال (به نام

کاشف آن اتین پاسکال^۱ (۱۶۴۰-۱۵۸۸)، پدر بلز پاسکال مشهور، نامیده می‌شود. اگر $k = a$ ، که در آن شعاع دایره مفروض است، ایماسون خاصی به دست می‌آوریم که به ثلث‌ساز مشهور است. درستی ترسیم زیر برای تثلیث يك زاویه را با ثلث‌ساز، ثابت کنید. فرض کنید که AOB زاویه مرکزی دلخواهی در دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA باشد. ثلث‌ساز دایره را که قطب آن در A است، رسم و فرض کنید که امتداد BO ثلث‌ساز را در C قطع کند، در این صورت (زاویه AOB) $= \frac{1}{3}$ (زاویه ACB).

(د) نشان دهید که دوشاخه کونکوئید منحنی c به قطب O و ثابت k ، سیسوئید s و c به قطب O را تشکیل می‌دهد، که در آن s دایره‌ای است به مرکز O و شعاع k (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۴۰۴).

۸۰۴ تثلیث به وسیله مقاطع مخروطی

يك زاویه کلی را می‌توان به کمک مقاطع مخروطی به آسانی تثلیث کرد. ساختمانهایی از این قبیل را که در زیر می‌آیند، ثابت کنید.

(الف) فرض کنید که زاویه مفروض، AOB باشد. شاخه‌ای از هذلولی متساوی - الساقینی را که O مرکز و OA يك مجانب آن است، رسم کنید به طوری که OB را در P قطع کند. به مرکز P و به شعاع (PO) دایره‌ای رسم کنید تا هذلولی را در R قطع کند. PM را موازی OA و RM را عمود بر OA رسم کنید تا یکدیگر را در M قطع کنند. در این صورت (زاویه AOB) $= \frac{1}{3}$ (زاویه AOM).

(ب) فرض کنید که AOB زاویه مرکزی يك دایره و OC نیم‌ساز زاویه AOB باشد. شاخه‌ای از هذلولی با خروج از مرکز ۲ را که A يك کانون و OC هادی نظیر آن باشد، رسم و فرض کنید که این شاخه قوس AB را در P قطع کند. در این صورت

$$(زاویه AOB) = \frac{1}{3} (زاویه AOP).$$

این ترسیم به وسیله پاپوس (حدود ۳۰۰ ب.م.) ذکر شده است.

(ج) تثلیث ماهرانه‌ای از يك زاویه دلخواه را می‌توان، نه بایک مقطع مخروطی، بلکه به وسیله خود مخروط دوار قائمی صورت داد. يك چنان مخروطی را (مثلاً، ساخته شده از چوب) که مولد جانبی آن سه برابر شعاع قاعده آن باشد، در نظر بگیرید. بر محیط مستدیر قاعده مخروط، قوس AB مربوط به زاویه مرکزی AOB را که برابر با زاویه‌ای است که می‌خواهیم تثلیث کنیم، جدا سازید. حال صفحه کاغذی دور مخروط پیچیده و روی کاغذ محل‌های نقاط A و B و رأس V مخروط را علامت بگذارید. نشان دهید که وقتی کاغذ را باز می‌کنید زاویه AVB يك سوم زاویه AOB است. شرح این روش بدیع

به وسیلهٔ اوبری^۱ در سال ۱۸۹۶ داده شده است.*

۹۰۴ ساختمانهای اقلیدسی مجانبی

ساختمانی که از ابزارهای اقلیدسی استفاده می‌کند اما نیاز به تعداد بینهایتی عمل دارد، ساختمان اقلیدسی مجانبی نامیده می‌شود. صحت دو ساختمان زیر از این گونه را برای حل مسائل تثلیث و تربیع ثابت کنید. (برای راه‌حل مجانبی اقلیدسی مسئلهٔ تضعیف، نگاه کنید به ت. ل. هیث، تاریخ ریاضیات یونانی، جلد ۱، صفحات ۲۶۸-۲۷۰، متن اصلی^۲).

(الف) فرض کنید که OT_1 نیمساز زاویه AOB ، OT_2 نیمساز زاویه AOT_1 ، OT_3 نیمساز زاویه T_1OT_2 ، OT_4 نیمساز زاویه T_2OT_3 و به همین نحو الی آخر، باشند. در این صورت $\lim_{i \rightarrow \infty} OT_i = OT$ ، یکی از خطوطی است که زاویه AOB را ثلث می‌کنند. (این ساختمان به وسیلهٔ فیالکوفسکی^۳ در سال ۱۸۶۰ داده شده است.)

(ب) پاره‌خطهای AB_1 ، $B_1B_2 = 2(B_1B_2)$ ، $B_2B_3 = 2(B_2B_3)$ ، $B_3B_4 = 2(B_3B_4)$ ، ... دایره‌های الی آخر را بر امتداد پاره‌خط AB_1 جدا کنید. به مراکز B_1 ، B_2 ، B_3 ، ... دایره‌های $B_1(A)$ ، $B_2(A)$ ، $B_3(A)$ ، ... را رسم و فرض کنید که M_1 وسط نیمدایره AB_1 باشد. B_2M_1 را رسم کنید تا دایره $B_1(A)$ را در M_2 قطع کند، M_2 قطع کند، $B_3(A)$ را در M_3 قطع کند، و الی آخر. فرض کنید که N_i تصویر M_i بر مماس مشترک دایره A باشد. در این صورت، $\lim_{i \rightarrow \infty} AN_i = (B_1(A))$ (ربع دایره $B_1(A)$).

۱۰۰۴ مربع‌ساز

هیپاس (حدود ۴۲۵ ق.م.) یک منحنی متعالی، به نام مربع‌ساز، ابداع کرد که به وسیلهٔ آن می‌توان زوایا را چند قسمت و دایره را تربیع کرد. مربع‌ساز را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد: فرض کنید که شعاع OX دایره‌ای به‌طور یکنواخت حول مرکز O دوران کند و از وضع OC به وضع OA ، که با OC زاویه قائمه می‌سازد، درآید. همچنین فرض کنید که همزمان با آن خطی مانند MN که موازی با OA است به‌طور یکنواخت به موازات خود از C به سوی O حرکت کند. مکان هندسی P ، نقطهٔ تقاطع OX و MN ، منحنی مربع‌ساز است.

1. Aubry

* برای رهیافت مکانیکی جدیدتری نگاه کنید به

Johnny W. Lott and Iris Mack Dayoub "What can be done with a mira?" *The Mathematics Teacher* (May 1977):394-399.

2. T.L. Heath, *History of Greek Mathematics* 3. Fialkowski

- (الف) با اختیار $OA = 1$ و محورهای مثبت در امتداد OA ، نشان دهید که معادله دکارتی مربع ساز $y = x \tan(\pi/2)$ است.
- (ب) نشان دهید که چگونه می توان يك زاویه را با مربع ساز به چند قسمت تقسیم کرد.
- (ج) برخوردگاه مربع ساز را با محور xy ها پیدا کنید و نشان دهید که چگونه می توان این منحنی را برای تریبوع دایره به کار برد.

۱۱.۴ راستش تقریبی

ساختمانهای تقریبی زیادی برای پیدا کردن پاره خطی، هم طول با محیط دایره مفروض، وجود دارند. تریبوع تقریبی دایره را می توان بدین ترتیب به آسانی، با ساختن مربع روی واسطه هندسی بین شعاع دایره و پاره خطی که از نظر طول برابر با نصف محیط دایره است، به دست آورد.

(الف) نشان دهید که محیط دایره به طور تقریبی، با سه برابر قطر دایره داده می شود که به آن يك پنجم ضلع مربع محاطی افزوده شده باشد. این به چه تقریبی برای π منجر می شود؟

(ب) فرض کنید که AOB یکی از قطرهای دایره مفروضی باشد. C را بر مماس در B چنان بیابید که $\angle COB = 30^\circ$ (زاویه COB)، CBD را روی مماس، مساوی با سه برابر شعاع دایره جدا کنید. در این صورت $AD \approx 2$ تقریباً برابر با محیط دایره است. این به چه تقریبی برای π منجر می شود؟ این ساختمان در سال ۱۶۸۵ به وسیله یسوعی لهستانی، کوخانسکی^۱، داده شد.

(ج) فرض کنید $AB = 1$ یکی از قطرهای دایره مفروض باشد. $BC = \sqrt{8}$ را عمود بر AB در B ، رسم کنید. $AD = AC$ را بر امتداد AB جدا کنید. $DE = 1/2$ را، عمود بر AD در D ، رسم و فرض کنید که F پای عمود وارد از D بر AE باشد. EG را موازی FB رسم کنید تا BD را در G قطع کند. در این صورت GB به طور تقریبی قسمت اعشاری π است. طول GB را تا ۷ رقم اعشار پیدا کنید. این ساختمان در سال ۱۸۴۹ به وسیله دو گلدرا^۲ داده شد.

۱۲.۴ هلالهای بقراط

بقراط خیوسی (حدود ۴۴۰ ق.م.) هلالهای معینی را تریبوع کرد، شاید به این امید که تحقیقات او بتواند کمی روشنایی بر مسئله تریبوع بیفکند. در زیر دو روش تریبوع هلال بقراط می آید.

(الف) فرض کنید که AOB يك ربع دایره باشد. نیمدایره ای به قطر AB رسم کنید که خارج از این ربع دایره واقع شود. نشان دهید که هلال محدود شده به وسیله این ربع-

دایره و نیمدایره، دارای همان مساحت مثلث AOB است.

(ب) فرض کنید که $ABCD$ نصف يك شش ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به قطر AD باشد. هلالی را با رسم نیمدایره‌ای به قطر AB در خارج از دایره رسم کنید. نشان دهید که مساحت دوزنقه $ABCD$ مساوی است با سه برابر مساحت هلال به اضافه مساحت نیمدایره روی AB .

۱۳۰۴ محاسبه π

(الف) نشان دهید که $\pi/4 = 4 \tan^{-1}(1/5) - \tan^{-1}(1/239)$ این فرمولی است که در سال ۱۷۰۶ به وسیله ماخین برای محاسبه π تا ۱۰۰ رقم اعشار مورد استفاده قرار گرفت.

(ب) فرمول ویت را که در بخش ۴-۸، زیر تاریخ ۱۵۷۹ داده شده، ثابت کنید.

(ج) نشان دهید که

$$\pi/6 = \sqrt{1/3} \{ 1 - 1/(3) + 1/(3^2) - 1/(3^3) + \dots \}.$$

(د) تقریب متداولی برای جذر در قرون وسطی، به صورت

$$\sqrt{n} = \sqrt{a^2 + b} = a + b/(2a + 1)$$

بود. با اختیار $n = 10 = 3^2 + 1$ ، دلیل احتمالی استفاده زیاد از $\sqrt{10}$ را به جای π نشان دهید.

(ه) نشان دهید که قضیه مندرج در لایحه شماره ۲۴۶ مجلس مقننه ایالت ایندیانا در سال ۱۸۹۷ (نگاه کنید به بخش ۴-۸) به طور نادرست چنین فرض می کند که يك دایره و يك مربع در صورتی که محیطهای برابر داشته باشند، دارای مساحتی برابرند. این فرض به چه مقداری برای π منتهی می شود؟

(و) اگر S_k معرف ضلع يك k ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع R باشد، نشان دهید که

$$S_{2n} = \{ 2R^2 - R(4R^2 - S_n^2)^{1/2} \}^{1/2}.$$

(ز) اگر S_k معرف ضلع يك k ضلعی منتظم محیط بردایره‌ای به شعاع r باشد، نشان دهید که

$$S_{2n} = \frac{2rS_n}{2r + (4r^2 + S_n^2)^{1/2}}$$

(ح) اگر p_k و P_k ، به ترتیب، معرف محیطهای k ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی يك دایره باشند، نشان دهید که

$$P_{2n} = \frac{2p_n P_n}{p_n + P_n}, \quad p_{2n} = (p_n P_{2n})^{1/2}$$

(ط) اگر a_k و A_k ، به ترتیب، معرف مساحت‌های k ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی يك دایره باشند، نشان دهید که

$$a_{\sqrt{n}} = (a_n A_n)^{1/\sqrt{n}}, \quad A_{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} a_n A_n}{a_{\sqrt{n}} + A_n}.$$

۱۴۰۴ تقریب اسنل

فرض کنید که زاویه AOP (نگاه کنید به شکل ۳۷) يك زاویه مرکزی حاده در دایره‌ای به شعاع واحد باشد. قطر AOB را تا نقطه S امتداد دهید به طوری که $BS = AO$ را رسم کنید تا، در نقطه T ، مماس بر دایره در نقطه A را قطع کند. اسنل متوجه شد که اگر زاویه AOP به اندازه کافی کوچک باشد، قطعه مماسی AT تقریباً برابر با طول قوس AP است.

(الف) خطای تقریب اسنل را، وقتی که $\theta = 90^\circ$ (زاویه AOP) پیدا کنید.

(ب) بانشان دادن زاویه AOP با θ و زاویه AST با ϕ ، ثابت کنید که

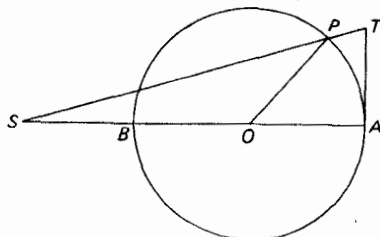
$$AT = \frac{3 \sin \theta}{2 + \cos \theta} = 3 \tan \phi.$$

(ج) نشان دهید که $\phi < \theta/3$ ، که بنا بر آن

$$\frac{\sin \theta}{2 + \cos \theta} < \tan\left(\frac{\theta}{3}\right).$$

(د) نشان دهید که چگونه می‌توان تقریب اسنل را برای چند قسمت کردن تقریبی زوایا به کار برد.

(ه) نشان دهید که چگونه می‌توان تقریب اسنل را برای تقسیم تقریبی محیط دایره به n قسمت مساوی به کار برد.



(و) نشان دهید که چگونه می‌توان تقریب اسنل را برای تربیع تقریبی دایره به کار برد.

۱۵۰۴ یادآورهای برای π

(الف) موفقترین یادآور جمله‌ای داده شده در متن، برای به یاد نگاه داشتن بسط اعشاری π ، ۳۵ رقم اعشار صحیح به دست می‌دهد. تا کنون هیچکس قادر نبوده، یادآور جمله‌ای بسازد که π را با بیش از ۳۱ رقم اعشار صحیح بدهد. چرا چنین است؟

(ب) یادآور زیر چند رقم اعشاری صحیح برای π حاصل می‌کند؟

Sir, I bear a rhyme excelling
In mystic force and magic spelling
Celestial sprites elucidate
All my own striving can't relate.

(ج) عدد π را می‌توان با اعداد گویا تقریب زد. برای مثال

$$22/7 = 3.14159$$

$$355/113 = 3.1415926$$

$$104348/33215 = 3.141592653$$

$$833719/265381 = 3.14159265358$$

که به نوبه خود، π را به طور صحیح با ۲، ۶، ۹، و ۱۱ رقم اعشار می‌دهد. نشان دهید که یادآور زیر را می‌توان برای به خاطر داشتن دو کسر آخر به کار برد:

calculator will get fair accuracy ,
but not to π exact

dividing top lot through (a nightmare)
by number below, you approach π

عنوان مقاله

۱/۴ تأثیر افلاطون بر ریاضیات.

۲/۴ تأثیر ارسطو بر ریاضیات.

۳/۴ اهمیت مسائل حل نشده در ریاضیات.

۴/۴ گامهای نخستین در تاریخچه مقاطع مخروطی.

- ۵/۴ ساختمانهای اقلیدسی به سان يك بازی هندسی.
 ۶/۴ پرگار مدرن در مقابل پرگار اقلیدسی.
 ۷/۴ مطالعه منحنیهای مسطحه از درجات بالا بین یونانیان قدیم.
 ۸/۴ هلالهای تربیع شدنی.
 ۹/۴ اعداد نرمال.
 ۱۰/۴ یادآورها در ریاضیات مقدماتی.
 ۱۱/۴ مفهوم آموزشی افلاطونی «انتقال تعلیم».
 ۱۲/۴ شبه ریاضیات.

کتابنامه

- ALLMAN, G. J., *Greek Geometry from Thales to Euclid*. Dublin: University Press, 1889.
 BALL, W. W. R., and H. S. M. COXETER, *Mathematical Recreations and Essays*. 11th ed. New York: Macmillan, 1939.
 BECKMANN, PETR, *A History of Pi*. Boulder, Col.: Golem, 1970.
 BOROFSKY, SAMUEL, *Elementary Theory of Equations*. New York: Macmillan, 1950.
 BRAUMBAGH, R. S., *Plato's Mathematical Imagination; The Mathematical Passages in the Dialogues, and their Interpretation*. Bloomington, Ind.: Indiana University Press, 1954.
 BUNT, L. N. H.; P. S. JONES; and J. D. BEDIANT, *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1976.
 COOLIDGE, J. L., *The Mathematics of Great Amateurs*. New York: Oxford University Press, 1949.
 COURANT, RICHARD, and HERBERT ROBBINS, *What Is Mathematics?* New York: Oxford University Press, 1941.
 DANTZIG, TOBIAS, *The Bequest of the Greeks*. New York: Charles Scribner's, 1955.
 DE MORGAN, AUGUSTUS, *A Budget of Paradoxes*. 2 vols., 2d ed., ed. D. E. Smith. Chicago: Open Court, 1915.
 DICKSON, L. E., *New First Course in the Theory of Equations*. New York: John Wiley, 1939.
 EVES, HOWARD, *A Survey of Geometry*. 2 vols. Boston: Allyn and Bacon, 1963 and 1965.
 GOW, JAMES, *A Short History of Greek Mathematics*. New York: Hafner, 1923.
 HEATH, T. L., *History of Greek Mathematics*. Vol. 1. New York: Oxford University Press, 1921. Reprinted by Dover, 1981.
 ———, *A Manual of Greek Mathematics*. New York: Oxford University Press, 1931.
 ———, *Mathematics in Aristotle*. New York: Oxford University Press, 1949.
 HOBSON, E. W., "Squaring the Circle," *A History of the Problem*. New York: Chelsea, 1953.
 LEE, H. D. P., ed., *Zeno of Elea*. New York: Cambridge University Press, 1935.
 LOVITT, W. V., *Elementary Theory of Equations*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1939.
 PHIN, JOHN, *The Seven Follies of Science*. 3rd ed. Princeton, N.J.: D. Van Nostrand, 1911.
 THOMAS, IVOR, ed., *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*. 2 vols. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1939 and 1941.
 VAN DER WAERDEN, B. L., *Science Awakening*. Translated by Arnold Dresden. New York: Oxford University Press, 1961; (paperback ed.) New York: John Wiley, 1963.
 WEDBERG, ANDERS, *Plato's Philosophy of Mathematics*. Stockholm: Almqvist & Wiksell, 1955.
 WEISNER, LOUIS, *Introduction to the Theory of Equations*. New York: Macmillan, 1938.
 YATES, R. C., *The Trisection Problem*. Ann Arbor, Mich.: Edward Bros., 1947; reprinted by the National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C., 1974.

اقلیدس و اصول وی

۱-۵ اسکندریه*

جنگ پلوپونزی یکی از دوره‌های تفرقه سیاسی بین ایالات یونان را در پی داشت و آنها را به صورت طعمه آسانی برای پادشاهی مقدونیه در شمال که قدرتی یافته بود، در آورد. شاه فیلیپ مقدونی تدریجاً قلمرو قدرت خود را در جهت جنوب گسترش می‌داد و به اعلام خطرهای دموستن^۱ در نطقهای آتشینش اعتنایی نمی‌شد. یونانیان دیرتر از آنکه بتوانند دفاع موفقیت آمیزی داشته باشند، گردهم آمدند و باشکست آتن در کرنیه^۲ در ۳۳۸ ق.م. یونان به قسمتی از امپراطوری مقدونی بدل گردید.

دو سال پس از سقوط ایالات یونانی، اسکندر کبیر جاه طلب، جانشین پدر خود فیلیپ شد و پا در مسیر فتوحات بی‌مانند خود نهاد. بخشهای وسیعی از دنیای متمدن را به قلمرو در حال گسترش مقدونی افزود. او به هر جا که سپاه ظفرمند خود را هدایت کرد، در پشت سر خود و در نقاطی که به طور مناسب انتخاب می‌شدند، رشته‌ای از شهرهای جدید احداث کرد. بدین طریق بود که وقتی اسکندر وارد مصر شد، شهر اسکندریه در ۳۳۲ ق.م.

* نگاه کنید به،

R. E. Langer, "Alexandria-shrine of mathematics," *American Mathematical Monthly*, 48 (February 1941), pp. 109-125.

1. Demosthenes
2. Chaeronea

بنا گردید.

گفته‌اند که انتخاب محل، رسم نقشه زمین، و روند مستعمره کردن اسکندریه به وسیله خود اسکندر رهبری شد، و بنای شهر عملاً به معمار برجسته دینوکراتس^۱ واگذار گردید. از همان آغاز، کلیه نشانه‌های تحقق یک آینده درخشان در اسکندریه ظاهر شد. در زمانی به طور باورنکردنی کوتاه، عمدتاً به دلیل موقعیت مساعد آن در محل تلاقی طبیعی چند جاده بازرگانی مهم، ثروتش افزایش یافت و به باشکوه‌ترین و عمده‌ترین مرکز بین‌المللی دنیا بدل گردید و پیش از سال ۳۰۰ ق.م. جمعیتش به ۵۰۰۰۰۰ نفر بالغ شد.

بعد از درگذشت اسکندر کبیر در سال ۳۲۳ ق.م.، امپراطوری وی بین عده‌ای از سران نظامی تقسیم شد، که نتیجه آن ظهور نهایی سه امپراطوری تحت فرمانرواییهای مختلف ولی در عین حال متحد، به خاطر پیوندهای تمدن هلنیستی [یونانیایی] ناشی از فتوحات اسکندر، بود. قرعه مصر به نام بطلمیوس افتاد. در واقع در حدود ۳۰۶ ق.م. بود که بطلمیوس حکومت خود را شروع کرد. وی اسکندریه را به عنوان پایتخت خود برگزید و، برای جلب علما به شهر خود، بلافاصله بنای دانشگاه مشهور اسکندریه را آغاز کرد. این اولین مؤسسه از نوع خود بود و از نظر وسعت و وضع به زودی به صورت دانشگاههای امروزی درآمد. گفته‌اند که این مؤسسه بسیار مجهز بوده و نقشه جالب و استادانه آن شامل سالنهای خطابه، آزمایشگاهها، باغها، موزهها، امکانات کتابخانه، و خوابگاهها بوده است. مهم‌ترین قسمت این مؤسسه کتابخانه بزرگ آن بود که برای مدت مدیدی بزرگترین مخزن آثار علمی بود که در دنیا می‌شد یافت، و، در عرض ۴۰ سال تأسیس خود، با داشتن متجاوز بر ۶۰۰۰۰۰ طومار پاپیروس به خود می‌بالید. در حدود ۳۰۰ ق.م. بود که درهای دانشگاه گشوده شد و اسکندریه مرکز فرهنگی نژاد یونانی گشت، و قریب به هزار سال چنین ماند.

برای یافتن فضایی سرشناسی که کادر دانشگاه را تشکیل دهند، بطلمیوس به آتن روی آورد و از دیمتریوس فالسرتوس^۲ نامدار دعوت کرد تا مسئولیت کتابخانه بزرگ را به عهده گیرد. مردان قابل و با استعداد برای بسط زمینه‌های مختلف تحصیل گزیده شدند. اقلیدس، که محتملاً وی نیز از آتن آمده بود، به ریاست بخش ریاضی انتخاب شد.

۲-۵ اقلیدس

متأسفانه درباره زندگی و شخصیت اقلیدس اطلاع کمی در دست است بجز آنکه وی استاد ریاضیات در دانشگاه اسکندریه و ظاهراً مؤسس حوزه معروف و دیرپای ریاضیات اسکندریه بود. حتی تاریخ وقایع عمده زندگی و محل تولد وی معلوم نیست، اما محتمل به نظر می‌رسد که وی تعلیمات ریاضی خود را در مدرسه افلاطونی آتن فرا گرفته باشد. سالها بعد، پاپوس هنگام مقایسه اقلیدس و آپولونیوس و برای بی‌اعتبار

1. Dinocrates

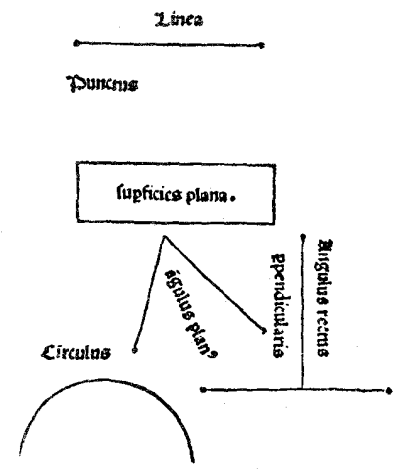
2. Demetrius Phalereus

Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi. in artem Geometrie incipit quaesoelicissime:



Lineus est cuius pars non est. **L**inea est longitudo sine latitudine cuius quidem extremitates sunt duo puncta. **L**inea recta est ab uno puncto ad alium brevissima extensio in extremitates suas utriusque eorum recipiens. **S**uperficies est quae longitudine et latitudine terminatur: cuius termini quidem sunt lineae. **S**uperficies plana est ab una linea ad aliam extensio in extremitates suas recipiens. **A**ngulus planus est duarum linearum alternus contactus: quarum expansio est super superficiem applicatioque non directa. **Q**uando autem angulum pertinet duae lineae recte rectilineus angulus nominatur. **E**t si recta linea super rectam steterit duosque anguli utrobique fuerint aequales: eorum uterque rectus erit. **L**ineaque lineae superstantes ei cui superstat perpendicularis vocatur. **A**ngulus vero qui recto maior est obtusus dicitur. **A**ngulus vero minor recto acutus appellatur. **T**erminus est quod uniuscuiusque finis est. **F**igura est quae termino vel terminis pertinet. **C**irculus est figura plana una eadem li-

De principijs per se notis: et primo de definitionibus earundem.



کردن دومی، از اقلیدس به خاطر فروتنی و توجهش به دیگران ستایش کرد. پروکلووس خلاصهٔ اثودوموسی خود را با داستان مکرر گفته شدهٔ جواب اقلیدس به سؤال بطلمیوس دربارهٔ راه میان‌بر در دانش هندسه کامل می‌کند که «هیچ راه شاهانه‌ای در هندسه وجود ندارد.» اما همان داستان دربارهٔ منایخموس، وقتی به عنوان معلم در خدمت اسکندر کبیر بود، نیز نقل شده است. استوبائیوس^۱ حکایت دیگری دارد - داستان دانش‌آموزی که پیش اقلیدس درس می‌خواند و پرسید از آموختن این موضوع چه چیزی عاید وی خواهد شد، در نتیجه اقلیدس به غلامش امر کرد تا سکه‌ای به او دهد، «زیرا او از آنچه می‌آموزد باید سودی عایدش شود».

۳-۵ «اصول» اقلیدس

گرچه اقلیدس مؤلف حداقل ده اثر بوده، و متون نسبتاً کامل پنج‌تای آنها به دست ما رسیده است، اما شهرت وی عمدتاً به خاطر اصول اوست. به نظر می‌رسد که این اثر مهم بلافاصله و به طور کامل جای کلیهٔ اصول قبلی را گسرفته باشد؛ در واقع، هیچ اثری از تلاش‌های قبلی بر جا نمانده است. به محض اینکه این اثر پدید آمد، مورد نهایت توجه قرار گرفت و از جانشینان اقلیدس گرفته تا اعصار جدید، تنها ذکر شمارهٔ مقاله و شمارهٔ قضا یا برای مشخص کردن قضیه یا ساختمان خاصی کافی محسوب می‌شد. هیچ اثری، بجز کتاب مقدس، به این وسعت مورد استفاده و ویرایش، یا مطالعه نبوده، و احتمالاً هیچ اثر دیگری بیشتر از آن بر تفکر علمی تأثیر نداشته است. از زمان اولین چاپ آن در سال ۱۴۸۲، اصول اقلیدس متجاوز از هزار بار تجدید چاپ شده، و برای بیش از دو هزاره، این اثر تمام تعالیم هندسه را تحت سیطره داشته است.

متأسفانه هیچ نسخه‌ای از اصول اقلیدس که تاریخ آن به زمان مؤلف بازگردد، یافته نشده است. چاپ‌های جدید اصول مبتنی بر متن تجدیدنظرشده به وسیلهٔ تئون^۲ اسکندرانی است که تقریباً ۷۰۰ سال بعد از نوشته شدن اثر اصلی، تهیه شده است. در اوایل قرن نوزدهم بود که نسخهٔ قدیمی‌تری، که تنها اختلافاتی جزئی با تحریر تئون داشت، در کتابخانهٔ واتیکان کشف شد. مطالعهٔ دقیق نقل قول‌ها و توضیحاتی که نویسندگان اولیه داده‌اند نشان می‌دهد که تعریف‌ها، اصول متعارفی، و اصول موضوعهٔ رسالهٔ اصلی با متون تجدیدنظرهای بعدی اندکی تفاوت دارند ولی قضا یا و براین آنها اساساً به همان صورتی مانده‌اند که نگارش اقلیدس بوده است.

اولین ترجمه‌های لاتینی کامل اصول نه از یونانی و بلکه از عربی صورت گرفتند. در قرن هشتم، تعدادی از دست‌نوشته‌های آثار یونانی موجود در بیزانس^۳ به وسیلهٔ اعراب ترجمه شد. و در ۱۲۵۰، محقق انگلیسی، آدلارد باثی^۴ ترجمهٔ لاتینی از اصول را از روی یکی از این ترجمه‌های عربی قدیمیتر به عمل آورد. ترجمه‌های لاتینی دیگر از عربی توسط

گزاردوی کرمونایی^۱ (۱۱۸۷-۱۱۱۴) و، ۱۵۰ سال بعد از آدلارد، به وسیله یوهانس کمپانوس^۲ صورت گرفت. اولین انتشار چاپی اصول در ۱۴۸۲ در ونیز صورت گرفت و ترجمه کمپانوس را در برداشت. این کتاب بسیار نادر به طرز نفیسی تهیه گردید و اولین کتاب ریاضی مهمی بود که به چاپ می‌رسید. ترجمه لاتینی مهمی از یونانی توسط کوماندینو^۳ در ۱۵۷۲ انجام شد. این ترجمه به عنوان مبنایی برای بسیاری از ترجمه‌های بعدی، از جمله اثر بسیار معتبر رابرت سیمسن^۴، به کار گرفته شد، که از اثر اخیر، به نوبه خود، نسخ انگلیسی متعددی اقتباس شدند. اولین ترجمه انگلیسی کامل اصول ترجمه جاودانی بیلینگزلی^۵ منتشره در سال ۱۵۷۰ بود.*

وجود کتابهای اصول دیگر پیش از اصول اقلیدس از ارزش کار او نمی‌کاهد. به استاد خلاصه ائودوموسی، بقراط خیوسی اولین تلاش را در این راه به عمل آورد و بعد از او لئون^۶، که از لحاظ تاریخی بین افلاطون و ائودوکسوس قرار دارد، به این تلاش دست زد. گفته‌اند که در اثر لئون در مقایسه با اثر بقراط، قضایا سنجیده‌تر انتخاب شده‌اند، و این قضایا تعدادشان بیشتر و سودمندتر بوده‌اند. کتاب درسی آکادمی افلاطون توسط تئودیوس مگنزایی^۷ نوشته شده بود و از آن به عنوان مجموعه اصول تحسین آمیزی ستایش شده است. ظاهراً هندسه تئودیوس پیشرو بلافضل اثر اقلیدس و بسودن شک در دسترس وی بوده است، به ویژه اگر اقلیدس در آکادمی افلاطونی درس خوانده باشد. اقلیدس با کار مهم تئایتوس و ائودوکسوس هم آشنا بوده است. بنا بر این، محتمل است که اصول اقلیدس، عمدتاً، تألیفی بسیار موفقیت آمیز و تدوینی منظم از آثار نویسندگان پیشین بوده باشد. تردیدی نیست که اقلیدس می‌بایست تعدادی از براهین را خود پیدا و تعداد کثیری را کامل کند، ولی حسن عمده اثر او در گزینش ماهرانه قضایا و دادن ترتیب منطقی به آنهاست که از قرار معلوم از مشتی فرضهای آغازین استنتاج شده‌اند.

۴-۵ مندرجات «اصول»

برخلاف تصورات رایج، اصول اقلیدس تنها منحصر به هندسه نبوده و بلکه شامل

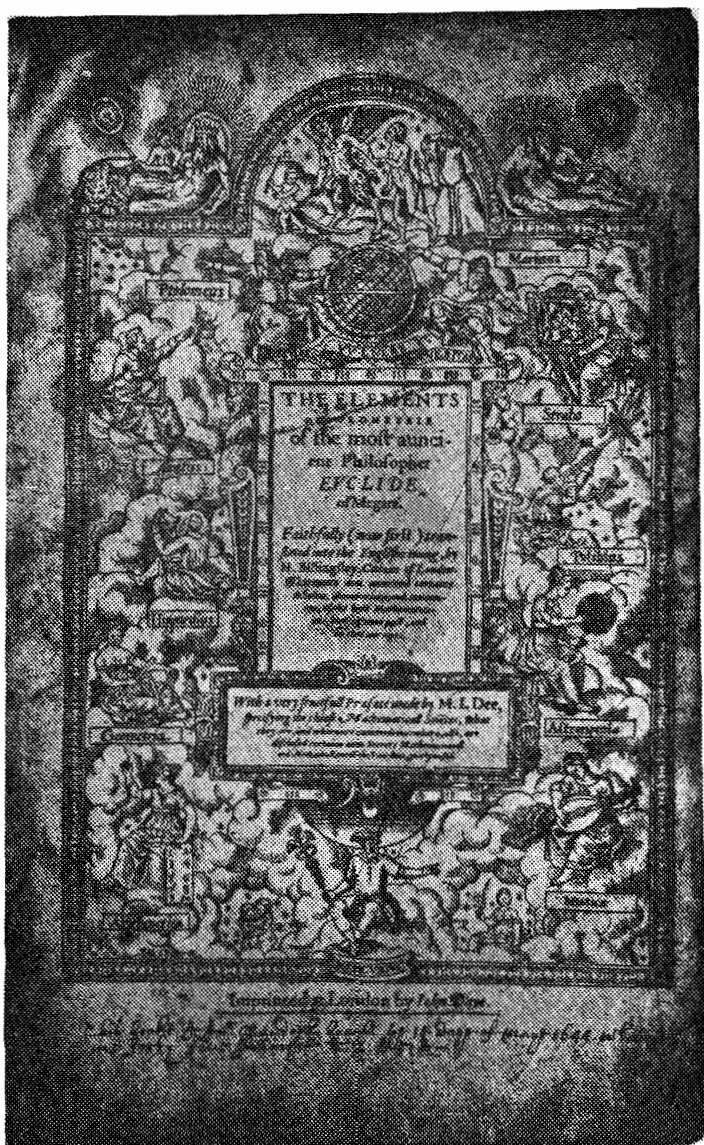
1. Gherardo of Cremona
2. Johannes Campanus
3. Commandino
4. Robert Simson
5. Billingsley

* نگاه کنید به

R. C. Archibald "The first translation of Euclid's *Elements* into English and its source," *American Mathematical Monthly*, 57 (August-September 1950), pp. 443-452. and W.F. Shenton, "The first English Euclid," *American Mathematical Monthly*, 35 (December, 1928) pp. 505-512.

6. Leon
7. Theudius of Magnesia

مقدار قابل ملاحظه‌ای مطالب راجع به نظریهٔ اعداد و جبر مقدماتی (هندسی) است. این اثر مشتمل بر ۱۳ مقاله و کلا حاوی ۴۶۵ قضیه است. کتابهای درسی هندسهٔ مسطحه و فضایی دبیرستانهای آمریکا شامل قسمت اعظم مطالبی است که در مقاله‌های I, III, IV, VI, XI, XII



صفحهٔ عنوان اقلیدس بیلینگزلی (سال ۱۵۷۰).

یافته می‌شوند.

مقاله I، البته، با تعاریف مقدماتی لازم، اصول موضوعه، و اصول متعارفی آغاز می‌شود؛ ما در بخش ۵-۷ به این مطالب باز می‌گردیم. ۴۸ قضیه اول مقاله اول به سه گروه تقسیم می‌شوند. ۲۶ تا اول عمدتاً به خواص مثلثها می‌پردازند و سه قضیه تساوی را در بر دارند. قضایای ۲۷ تا ۳۲ مقاله I نظریه خطوط موازی را بنا می‌نهند و ثابت می‌کنند که مجموع زوایای هر مثلث برابر دو قائمه است. قضایای باقیمانده مقاله به متوازی‌الاضلاعها، مثلثها و مربعها همراه با اشارات خاص به روابط مربوط به مساحتها مربوط اند. قضیه ۴۷ I، همان قضیه فیثاغورس است، با برهانی که عموماً به خود اقلیدس منتسب می‌شد، و قضیه آخر، ۴۸ I، عکس قضیه فیثاغورس است. مطالب این کتاب به وسیله فیثاغورسیان اولیه بسط یافته است.

مقاله II، مقاله کوتاهی با تنها ۱۴ قضیه، به تبدیل مساحتها و جبر هندسی مکتب فیثاغورس می‌پردازد. ما برخی از قضایای این مقاله را در فصل ۳ بررسی کرده‌ایم. در همین مقاله است که معادلهای هندسی تعدادی از اتحادهای جبری را می‌یابیم. قضایای ۱۲ II و ۱۳ III از اهمیت خاصی برخوردارند. این قضایا، همراه باهم و به زبان امروزی تر، از این قرارند: در یک مثلث منفرج‌الزاویه (حاده‌الزاویه)، مربع ضلع مقابل به زاویه منفرجه (حاده) برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر مثلث به اضافه (منهای) دو برابر حاصلضرب یکی از این دو ضلع در تصویر دیگری بر روی این ضلع. لذا این دو قضیه، تعمیم قضیه فیثاغورس هستند که امروزه از آن با نام «قانون کسینوسها» یاد می‌کنیم.

مقاله III، مرکب از ۳۹ قضیه، شامل بسیاری از قضایای آشنا درباره دایره‌ها، وترها، قاطعها، مماسها، و اندازه‌گیری زوایای مربوط به آنهاست که در کتابهای هندسه دبیرستانی دیده می‌شوند. مقاله IV، با تنها ۱۶ قضیه، ساختمانهای هندسی به وسیله ستاره و پرگار برای چند ضلعیهای منتظم سه، چهار، پنج، شش، و پانزده ضلعی، و محاط کردن این چند ضلعیها را در داخل یک دایره مفروض و محیط کردن آنها بر یک دایره مفروض را مورد بحث قرار می‌دهد. چون از هندسه دوازده که در مقاله‌های III و IV آمده است در آثار فیثاغورس چندان چیزی یافت نمی‌شود، مطالب این مقاله احتمالاً به وسیله سوفسطائیان اولیه و تحقیق کنندگان درسه مسئله مشهور بحث شده در فصل ۴ تهیه شده است. مقاله V بیان استادانه‌ای از نظریه ائودوکسوس در مورد تناسب است. این نظریه قابل استفاده در کمیتهای نامتوافق و متوافق، «رسوایی منطقی» ناشی از کشف اعداد گنگک به وسیله فیثاغورس را حل کرد. تعریف ائودوکسوس از تناسب، یا تساوی دو نسبت، قابل توجه است، و ارزش آن را دارد که در اینجا تکرار شود. گویند کمیتهایی به یک نسبت اند، اولی به دومی و سومی به چهارمی، هرگاه، اگر مضارب همضرب دلخواه از اولی و سومی، و مضارب همضرب دلخواه از دومی و چهارمی اختیار شود، مضربهای اول به یک گونه بیشتر از، سه یک گونه مساوی با، به یک گونه کوچکتر از مضربهای دوم اند که به ترتیب همتاظر اختیار شوند. به عبارت دیگر، اگر A, B, C, D چهار کمیت بی‌علامت دلخواه

Item, sub aequalibus rectis lineis contentum, & basim BC basi EF aequalem habebunt; eritque triangulum BAC triangulo EDF aequale, ac reliqui anguli B, C reliquis angulis E, F aequales erunt, uterque utriusque, sub quibus aequalia latera subtenduntur.

Si punctum D puncto A applicetur, & recta DE rectae AB superponatur, cadet punctum E in B, quia $DE^2 = AB$. Item recta DF cadet in AC, quia ang. $A^2 = D$. Quoniam punctum E puncto C coincidet, quia $AC^2 = DF$. Ergo rectae EF, BC, cum eisdem habeant terminos, congruent, & proinde aequales sunt. Quare triangula BAC, EDF; & anguli B, E; itemque anguli C, F etiam congruunt, & aquantur. Quod erat Demonstrandum.

PROP. V.



Isoscelium triangulorum ABC qui ad basim sunt anguli ABC, ACB inter se sunt aequales. Et productis aequalibus rectis lineis AB, AC qui sub base sunt anguli CBD; BCE inter se aequales erunt.

Accipe $AF = AD$, & junge CD, ac BF.

Quoniam in triangulis ACD, ABF, sunt $AB^c = AC^c$, & $AF^d = AD^d$, angulusque A communis, erit ang. $ABF^e = ACD^e$, & ang. $AFB^f = ADC^f$, & bas. $BF^g = DC^g$; item $FC^h = DB^h$. ergo in triangulis BFC, BDC erit ang. $FCE^i = DBC^i$. Q. E. D. Item ideo ang. $FBC^j = DCB^j$. atqui ang. $ABF^k = ACD^k$. ergo ang. $ABC^l = ACB^l$. Q. E. D.

Corollarium.

Hinc, Omne triangulum aequilaterum est quoque aequiangulum.

PROP.

برهان اقلیدس برای قضیه ۱۵ (زوایای مجاور به قاعده یک مثلث متساوی الساقین باهم برابرند) مطابق آنچه در اقلیدس آیزک برو داده شده است.

باشند. که A و B از يك جنس (هر دو یا قطعه خط، یا زاویه، یا مساحت، یا حجم)، C و D هم از يك جنس اند، در این صورت نسبت A به B برابر است با نسبت C به D ، هر گاه

به ازای اعداد صحیح مثبت دلخواه m و n داشته باشیم $mA \gtrless nB$ ، بسته به اینکه

$mC \gtrless nD$. نظریهٔ ائودوکسوس دربارهٔ تناسب شالوده‌ای برای دستگاه اعداد حقیقی در

آنالیز ریاضی عرضه کرد، که بعدها توسط دکیند و وایرستراس^۱ بسط یافت.

مقالهٔ VI، نظریه ائودوکسوس دربارهٔ تناسب را در هندسهٔ مسطحه به کار می‌برد. در اینجا قضایای بنیادی دربارهٔ مثلثهای متشابه، ساختمانهایی که جزءهای سوم و چهارم تناسب، و واسطهٔ هندسی را می‌دهند؛ حل هندسی معادلات درجهٔ دوم که ما در فصل ۳ آنها را مطالعه کردیم؛ قضیه‌ای مبنی بر اینکه نیمساز داخلی هر زاویه از مثلث ضلع مقابل را به پاره‌خطهایی متناسب با دو ضلع دیگر تقسیم می‌کند؛ تعمیمی از قضیهٔ فیثاغورس که در آن، به جای مربعها، سه شکل متشابه و به طور متشابه ترسیم شده در روی سه ضلع يك مثلث قائم‌الزاویه رسم شده‌اند، و بسیاری قضایای دیگر را می‌بینیم. احتمالاً در این مقاله قضیه‌ای نیست کسه بر فیثاغورسیان اولیه معلوم نبوده، اما برهانهای قبل از ائودوکسوس بسیاری از آنها مغلوب بوده‌اند، زیرا که بر نظریهٔ ناقصی در مورد تناسب مبتنی بوده‌اند.

مقاله‌های VII، VIII، و IX، که مجموعاً شامل ۱۰۲ قضیه‌اند، به نظریهٔ مقدماتی اعداد پرداخته‌اند. مقالهٔ VII با فرایندی برای یافتن بزرگترین مقسوم‌علیهٔ صحیح مشترک دو عدد یا بیشتر، که امروزه به آن الگوریتم اقلیدسی می‌گوییم، آغاز می‌شود و آن را به عنوان آزمایشی برای متابین بودن دو عدد به کار می‌برد (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۰۵). در اینجا همچنین شرحی از نظریهٔ عددی، یا فیثاغورسی، تناسب یافت می‌شود. بسیاری از خواص اساسی اعداد در این مقاله اثبات شده‌اند.

مقالهٔ VIII بیشتر با تناسبهای مسلسل و تصاعدهای هندسی مربوط سرو کار دارد. اگر تناسب مسلسل $a:b = b:c = c:d$ را داشته باشیم، در این صورت d, c, b, a يك تصاعد هندسی تشکیل می‌دهند.

در مقالهٔ IX قضایای مهمی یافت می‌شوند. قضیهٔ IX ۱۴ معادل است با قضیهٔ مهمی که قضیهٔ اصلی حساب خوانده می‌شود، یعنی اینکه هر عدد صحیح بزرگتر از ۱ را می‌توان به يك صورت و دقیقاً به يك صورت به شکل حاصلضرب اعداد اول نشان داد. قضیهٔ IX ۳۵ روش استخراج هندسی فرمول مجموع n جملهٔ اول يك تصاعد هندسی را می‌دهد، و آخرین قضیه، IX ۳۶، فرمول مهم اعداد تام را که در بخش ۳-۳ بیان شد، ثابت می‌کند.

برهان اقلیدس در مورد IX ۲۰ - که تعداد اعداد اول بینهایت است - عموماً به وسیلهٔ ریاضیدانان به عنوان نمونه‌ای از ظرافت ریاضی تلقی شده است. این برهان

روش غیرمستقیم*، یا برهان خلف را به کار می‌گیرد، و اساساً به قرار زیر است. فرض کنید تنها تعدادی متناهی عدد اول موجود باشند، که آنها را b, a, \dots, k نشان می‌دهیم. حال P را به صورت $P = ab \dots k$ در نظر بگیرید. در این صورت $P+1$ یا اول است یا مرکب. اما چون b, a, \dots, k همه اعداد اول اند، $P+1$ ، که از هر یک از اعداد b, a, \dots, k بزرگتر است، نمی‌تواند اول باشد. از دیگر سو، اگر $P+1$ مرکب باشد، باید به عدد اولی مانند p قابل قسمت باشد. اما p باید یکی از اعضای مجموعه b, a, \dots, k از کلیه اعداد اول باشد، یعنی اینکه p یکی از مقسوم‌علیه‌های P است. در نتیجه، p نمی‌تواند $P+1$ را عاد کند، زیرا $p > P$. بنابراین، فرض آغازین ما که عددها اعداد اول متناهی است، غیر قابل قبول است، و قضیه ثابت می‌شود.

مقاله X با اعداد گنگ، یعنی، با پاره‌خطهایی که نسبت به پاره‌خط مفروضی ناموافق‌اند، سر و کار دارد. محققین بسیاری این مقاله را شاید بهترین مقاله اصول تلقی می‌کنند. تصور می‌شود که قسمت زیادی از این مقاله کار تثبیت‌توس باشد، و لسی کمال خارق‌العاده، دسته‌بندی استادانه، و پرداخت آن معمولاً به اقلیدس نسبت داده می‌شود. تصور اینکه نتایج این مقاله فقط به استدلال انتزاعی و بدون استفاده از نمادهای جبری مناسب حاصل شده باشد به باور نمی‌گنجد. اولین قضیه (XI)، پایه روش افناست که بعداً در مقاله XII به کار گرفته شده، بدین معنی که، اگر از هر کمیتی قسمتی که از نصف آن کوچکتر نیست، کم شود، از باقیمانده قسمت دیگری که از نصف آن کوچکتر نیست کم شود، و الی آخر، در نهایت کمیتی به جا خواهد ماند که از هر کمیت معین، همجنس با کمیت اول کوچکتر است. در این مقاله همچنین فرمولهایی را می‌یابیم که اعداد سه‌تایی فیثاغورسی را می‌دهند، فرمولهایی که بابلیهای قدیم شاید آنها را هزار سال پیشتر از آن می‌دانسته‌اند (نگاه کنید به بخش ۲-۶).

سه مقاله باقیمانده، XI، XII، و XIII به هندسه فضایی مربوط‌اند، که همه مطالبی را که عموماً در کتابهای دبیرستانی می‌توان یافت، به استثنای مبحث مربوط به کره‌ها را، در برمی‌گیرند. تعاریف و قضایای مربوط به خطها و صفحه‌ها در فضا، قضایای مربوط به متوازی‌السطوحها در مقاله XI یافت می‌شوند. روش افنا در مطالعه احجام در مقاله XII نقش مهمی دارد، و در فصل ۱۱ [جلد دوم] با کمی تفصیل از نو در نظر گرفته خواهد شد. در مقاله XIII ساختمانهایی برای محاط کردن پنج چندوجهی منتظم در یک کره عرضه شده‌اند.

این نکته مکرراً گفته شده، که منظور از اصول اقلیدس در واقع آن بوده که صرفاً به عنوان شرح مطولی از پنج چندوجهی منتظم به کار آید، ارزیابی نامصفا‌نانه‌ای به نظر می‌آید. ظاهراً ارزیابی درست‌تر چنین است که قصد از این کتاب این بوده که در زمان خود به عنوان یک کتاب درسی مقدماتی در ریاضیات عمومی مورد استفاده قرار گیرد. اقلیدس در ریاضیات عالی نیز کتابهای درسی نگاشته است.

* فرمولبندی این برهان به طوری که از روش غیرمستقیم اجتناب شود، آسان است.

در خاتمه، اشاره‌ای به معنی اصطلاح «اصول» می‌کنیم. پروکلووس به ما گفته است که منظور یونانیان قدیم از «اصول» يك مطالعه قیاسی، قضایای عمده یا کلیدی بوده است که مورد استفاده وسیع و عمومی در موضوع مورد بحث بوده‌اند. کار آنها با نقشی که حروف الفبا در رابطه با زبان دارد مقایسه شده است؛ در حقیقت حروف را هم در زبان یونانی به همین اسم می‌نامند. ارسطو، در کتاب *ما بعدالطبیعه*^۱ خود، به همین معنی درباره «اصول» می‌گوید که «در بین قضایای هندسی، آنهایی را «اصول» می‌نامیم که اثباتشان در اثبات همه یا اغلب قضایای هندسی می‌آیند.» انتخاب قضایایی که باید به عنوان اصول در موضوع مورد بحث اختیار شوند، نیازمند تشخیص درست است، و مزیت اصول اقلیدس بر همه آثار قبلی از جمله در همین نکته نهفته است.

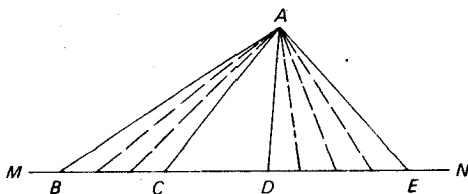
پس نتیجه می‌شود که نکته مکرراً بیان شده دیگر - که در اصول اقلیدس قصد آن بوده که اساساً همه هندسه مسطحه و فضایی معلوم در آن عصر گنجانده شود - آشکارا نادرست است. اقلیدس خیلی بیش از آنچه در اصول وی آمده، هندسه می‌دانسته است.

۵۵ نظریه تناسب

جالب است که به تفاوت بین برهان فیثاغورسی، اثودوکوسی، و کتابهای درسی جدید برای قضیه ساده مربوط به تناسبها، توجه شود. قضیه VII را انتخاب می‌کنیم: نسبت مساحت‌های دو مثلث که ارتفاعشان یکی است، همان نسبت قاعده‌های آنهاست. به خود اجازه می‌دهیم که از قضیه I ۳۸ استفاده کنیم که می‌گوید مثلثهایی که قاعده‌های برابر و ارتفاعهای برابر داشته باشند، مساحت‌های برابر دارند، و از يك نتیجه قضیه I ۳۸ حاکی از اینکه از دو مثلث که ارتفاعشان یکی است، آنکه قاعده بزرگتر دارد مساحت بیشتری دارد.

فرض کنید که این مثلثها ABC و ADE باشند. و قاعده‌های BC و DE بر روی خط مستقیم MN ، مانند شکل ۳۸، قرار داشته باشند. فیثاغورسیان، قبل از کشف اعداد گنگ، تلویحاً می‌پذیرفتند که هر دو پاره خط دلخواه متوافق‌اند. بنا بر این، فرض می‌شود که BC و DE دارای يك واحد مشترك برای اندازه‌گیری‌اند، که، به عنوان مثال، در BC ، p بار و در DE ، q بار می‌گنجد. این نقاط تقسیم را بر BC و DE مشخص کرده آنها را به رأس A وصل کنید. در این صورت مثلثهای ABC و ADE ، به ترتیب، به p و q مثلث کوچکتر تقسیم می‌شوند، که همه، بنا بر I ۳۸، مساحت واحدی دارند. نتیجه می‌شود که $\Delta ABC : \Delta ADE = p : q = BC : DE$ و قضیه ثابت می‌شود. بعداً با این کشف، که دو پاره خط لزوماً متوافق نیستند، نارسایی این برهان همراه با برهانهای دیگر آشکار گردید، و لذا، آن «رسوایی منطقی» اضطراب آور به وجود آمد.

نظریه اثودوکوسی تناسب، این «رسوایی» را، آن گونه که اکنون با اثبات مجدد



شکل ۳۸

VI ۱ به منوالی که در اصول می توان دید، شرح می دهیم، به طور ماهرانه ای مرتفع کرد. بر امتداد CB ، به طور متوالی از نقطه B ، $m-1$ پاره خط مساوی با CB جدا کنید، و نقاط تقسیم B_1, B_2, \dots, B_m را، هم چنان که در شکل ۳۹ دیده می شود، به A وصل کنید. به همین نحو، بر امتداد DE ، متوالیاً از نقطه E ، $n-1$ پاره خط مساوی با DE جدا کنید، و نقاط تقسیم، E_1, E_2, \dots, E_n را به رأس A وصل کنید. در این صورت $B_m C = m(BC)$ و $\Delta ADE_n = n(\Delta ADE)$ ، همچنین، بنا بر I ۳۸ و نتیجه آن، $\Delta A B_m C \geq \Delta ADE_n$ ؛ بسته به اینکه $B_m C \geq DE_n$ یعنی

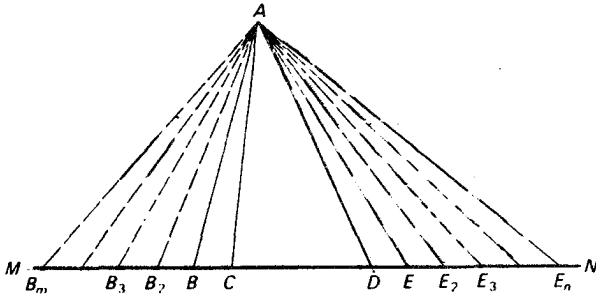
$$m(\Delta ABC) \geq n(\Delta ADE) \quad \text{بسته به اینکه} \quad m(BC) \geq n(DE) \quad \text{که از آن، بنا بر تعریف}$$

اژودوکوسی تناسب

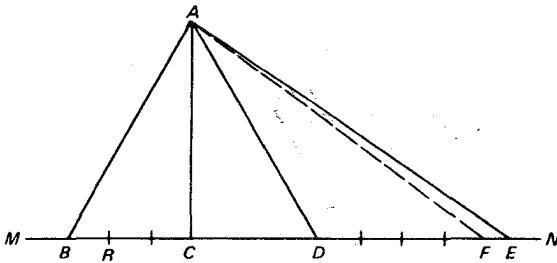
$$\Delta ABC : \Delta ADE = BC : DE,$$

و قضیه ثابت می شود. در اینجا هیچ ذکر سری از کمیت های متوافق و نامتوافق به میان نیامده، زیرا تعریف اژودوکوسی تناسب را در هر دو حالت می توان به کار برد.

بسیاری از کتا بهای دبیرستانی امروزه با برهانی از این مسئله موافق هستند که متضمن دو حالت است، بسته به اینکه BC و DE متوافق باشند یا نباشند. در حالت متوافق، مانند راه حل فیثاغورسی عمل می شود، و برای پرداختن به حالت نامتوافق، مفاهیم حدی ساده مورد استفاده قرار می گیرند. مثلاً فرض کنید که BC و DE نامتوافق باشند. BC را به n قسمت مساوی تقسیم نمایید، به طوری که BR یکی از قسمت ها باشد (نگاه کنید به شکل ۴۰). بر DE پاره خط هایی متوالی به طول BR جدا کنید تا سرانجام به نقطه ای مانند F برسید به طوری که $EF < BR$. بنا بر حالت متوافق، که قبلاً ثابت شده، $\Delta ABC : \Delta ADF = BC : DF$. حال فرض کنید $n \rightarrow \infty$. آنگاه $DF \rightarrow DE$ و $\Delta ADF \rightarrow \Delta ADE$. لذا، در حد، $\Delta ABC : \Delta ADE = BC : DE$. این روش مبتنی بر این حقیقت است که هر عدد گنگ را می توان به عنوان حد دنباله ای از اعداد گویا به شمار آورد؛



شکل ۳۹



شکل ۴۰

روشی که به طور دقیق در اعصار جدید به وسیله گئورگ کانتور^۱ (۱۸۴۵-۱۹۱۸) بسط یافت.

۵-۶ چند ضلعیهای منتظم

متذکر شده‌ایم که اقلیدس، در مقاله IV اصول خود، ساختمان چند ضلعیهای منتظم با سه، چهار، پنج، شش، و پانزده ضلع را، بدکمک ستاره و پرگار، مورد بحث قرار می‌دهد. بدین ترتیب، با دونیم کردن متوالی زوایا، یا قوسها، می‌توانیم با ابزارهای اقلیدسی چندضلعیهای منتظمی بسازیم که 2^n ، $3(2^n)$ ، $5(2^n)$ ، یا $15(2^n)$ ضلع داشته باشند. تقریباً تا قرن نوزده معلوم نشده بود که می‌توان چندضلعی منتظم دیگری را با این ابزارهای محدود ساخت. در سال ۱۷۹۶، کارل فریدریش گاوس^۲ ریاضیدان برجسته آلمانی نظریه‌ای را ابداع کرد که نشان می‌دهد هر چند ضلعی منتظم را، که تعداد اضلاع آن اول باشد، می‌توان با ابزارهای اقلیدسی ساخت اگر فقط اگر آن عدد به صورت $f(n) = 2^{2^n} + 1$ باشد. برای $n = 0, 1, 2, 3, 4$ مقادیر $n = 3, 5, 17, 257, 65537$ $f(n)$ را می‌یابیم، که

1. Georg Cantor 2. Carl Friedrich Gauss

همه اعداد اول اند. بنا براین، چند ضلعیهای ۱۷، ۲۵۷، ۶۵۵۳۷ ضلعی را می توان با ستاره و پرگار رسم کرد و این نکته ای است که بر یونانیان نامعلوم بود. برای هیچ مقدار دیگری از n بجز آنها که در بالا آمده اول بودن $f(n)$ معلوم نیست.

ساختمانهای اقلیدسی زیادی برای هفده ضلعی منتظم داده شده اند. در سال ۱۸۳۲، ریشلوت^۱ تحقیقی درباره ۲۵۷ ضلعی منتظم منتشر نمود، و پروفورهرمس^۲ از شهر لینگین^۳ ده سال از زندگی خود را در راه مسئله ساختن ۶۵۵۳۷ ضلعی منتظم صرف کرد. گفته شده که کشف گاوس، در سن ۱۹ سالگی، مبنی بر امکان رسم ۱۷ ضلعی منتظم با ستاره و پرگار بود که وی را مصمم ساخت تا زندگی خود را وقف ریاضیات کند. وصیت وی که یک ۱۷ ضلعی بر سنگ قبرش کنده شود، نشانه مباحث او به این کشف است. اگرچه این وصیت وی هرگز جامه عمل نپوشید، چنین چندضلعی روی پایه بنای یادبودی که برای گاوس در زادگاه وی، برونسویک^۴، بر پا شده، دیده می شود.

۷-۵ جنبه صوری «اصول»

با آنکه مندرجات اصول مهم است، شاید آنچه مهمتر است روش صوری عرضه مندرجات و قضایای آن است. در حقیقت، اصول اقلیدس به صورت نمونه ای از فرم ریاضی جدید در آمده است.

قطعاً یکی از بزرگترین دستاوردهای ریاضیدانان یونان قدیم، آفرینش شکل تفکر اصل موضوعی است. برای اینکه گزاره ای در یک دستگاه قیاسی اثبات شود، باید نشان داد که این گزاره پیامد منطقی لازم از چند گزاره است که قبلاً به اثبات رسیده اند. گزاره های اخیر، به نوبه خود، باید به کمک گزاره هایی که قبلاً اثبات شده اند، ثابت شوند، و به همین ترتیب الی آخر. چون این تسلسل را نمی توان به طور نامحدود ادامه داد، در بدو امر، باید مجموعه محدودی از گزاره ها بدون اثبات پذیرفته شوند، یا در غیر این صورت گناه نابخشودنی دور و تسلسل با استنتاج گزاره A از گزاره B و سپس B از A را باید مرتکب شد. این گزاره های بدو پذیرفته شده پوستولاهای [اصول موضوعه] یا اکسیومهای^۵ [اصول متعارفی] مبحث نامیده می شوند، و تمام گزاره های دیگر مبحث بایستی به طور منطقی از آنها لازم آیند. وقتی که گزاره های یک مبحث بدین صورت منظم شوند، گفته می شود که مبحث در فرم اصل موضوعی عرضه شده است.

تأثیر جنبه صوری اصول اقلیدس بر نسلهای بعدی آن چنان عظیم بود که این اثر به صورت الگویی برای نمایش ریاضی دقیق در آمد. به رغم متروک شدن قابل ملاحظه فرم اقلیدسی در طول قرون هفدهم و هجدهم، تفکر اصل موضوعی امروزه تقریباً در هر زمینه ای از ریاضیات نفوذ کرده، و بسیاری از ریاضیدانان از این نظریه هواداری می کنند که نه تنها

1. Richelot 2. Hermes 3. Lingen 4. Brunswick
5. postulate 6. axiom

تفکر ریاضی، اصل موضوعی است بلکه، برعکس، تفکر اصل موضوعی، خود تفکر ریاضی می باشد. يك نتیجه نسبتاً جدید، به وجود آمدن زمینه‌ای از مطالعات بوده است که علم اصول موضوعه^۱ نامیده می شود و به بررسی خواص عمومی مجموعه‌های اصول موضوعه و تفکر اصل موضوعی اختصاص دارد. در بخش ۱۵-۲ به این مطلب بازمی گردیم.

اغلب ریاضیدانان و فیلسوفان یونانی قدیم بین «اصول موضوعه» و «اصول متعارفی» فرق می نهادند. حداقل سه وجه تمایز توسط دسته‌های مختلف عنوان شده است.

۱- اصل متعارفی يك گزاره بدیهی پذیرفته شده است درباره چیزی، و اصل موضوع يك ساختمان بدیهی پذیرفته شده درباره چیزی است؛ بنابراین اصول متعارفی و اصول موضوعه تا حد زیادی همان رابطه را باهم دارند که بین قضایا و مسائل ساختمانی موجود است.

۲- اصل متعارفی فرضی است مشترك در همه علوم، در حالی که اصل موضوع فرضی است که مختص علم خاص تحت مطالعه می باشد.

۳- اصل متعارفی فرضی است در مورد چیزی که بر متعلم، هم آشکار و هم قابل قبول است؛ اصل موضوع فرضی است از چیزی که بر متعلم نه لزوماً آشکار است و نه لزوماً قابل قبول. مورد اخیر اساساً وجه ممیزه بیسان شده توسط ارسطو است. در ریاضیات جدید از این لحاظ هیچ تمایزی قائل نمی شوند و صفات بدیهی بودن و آشکار بودن نیز مورد نظر نیستند. پاره‌ای از ریاضیدانان یونان قدیم به این نقطه نظر متمایل بودند.

دقیقاً محقق نیست که اقلیدس چه گزاره‌هایی را برای اصول موضوعه و اصول متعارفی خود پذیرفته و همچنین، معین نیست که تعداد گزاره‌ها برای این منظور دقیقاً چندتا بوده‌اند، زیرا تغییرات و اضافاتی توسط مصححین بعدی به عمل آمده است. مع هذا، شواهد کافی وجود دارد مبنی بر اینکه وی با وجه تمایز دوم موافق بوده و اینکه احتمالاً معادله‌های ده گزاره زیر را پذیرفته بوده است، پنج «اصل متعارفی»، یا مفهوم عمومی، و پنج «اصل موضوع» هندسی:

- ۱A چیزهایی که با يك چیز مساوی‌اند، با یکدیگر نیز مساوی‌اند.
- ۲A اگر چیزهای مساوی به چیزهای مساوی اضافه شوند، کلها مساوی‌اند.
- ۳A اگر چیزهای مساوی از چیزهای مساوی کم شوند، باقیمانده‌ها مساوی‌اند.
- ۴A چیزهایی که بر یکدیگر منطبق شوند با یکدیگر مساوی‌اند.
- ۵A کل از جزء بزرگتر است.
- ۱P از هر نقطه می توان خط مستقیمی به هر نقطه دیگر کشید.
- ۲P هر خط مستقیم متناهی را می توان روی همان خط به طور نامحدود امتداد داد.
- ۳P می توان دایره‌ای با هر نقطه دلخواه به عنوان مرکز آن و با شعاعی مساوی هر پاره خط رسم شده از مرکز آن ترسیم کرد.

۴P. همه زوایای قائمه با هم مساوی اند.

۵P اگر خط مستقیمی دو خط مستقیم را قطع کند به طوری که مجموع زوایای داخلی يك طرف آن کمتر از دو قائمه باشد، این دو خط مستقیم، اگر به طور نامحدود امتداد داده شوند، در طرفی که دو زاویه مجموعاً از دو قائمه کمترند، همدیگر را قطع خواهند کرد.

اصول بر آن است که همه ۴۶۵ قضیه خود را از این ده گزاره استخراج کند. ابطال مطلب از نوع ترکیبی می باشد یعنی رسیدن از آنچه معلوم و ساده تر است به مجهول و موارد پیچیده تر. بدون تردید فرایند عکس، که تحلیل^{۲*} نامیده می شود، یعنی تحویل مجهول و موارد پیچیده تر به معلوم، در کشف برهانهای بسیاری از قضایا نقش داشته است، اما هیچ نقشی در ارائه مطالب هندسی ندارد.

۵-۸ سایر آثار اقلیدس

اقلیدس علاوه بر اصول رسالات متعددی نوشته است، که بعضی از آنها تا به امروز محفوظ مانده اند. یکی از اینها که داده^۳ [معطیات] نامیده می شود، با مطالب شش مقاله اول اصول مرتبط است. يك داده را می توان به عنوان مجموعه ای از اجزاء یا روابط يك شکل تعریف کرد به طوری که اگر همه جز یکی داده شوند، بتوان آن یکی را تعیین کرد. مثلاً اجزاء A, a, R يك مثلث، که در آن A يك زاویه، a ضلع مقابل به این زاویه، و R شعاع دایره محیطی است، يك داده را تشکیل می دهند، چون با معلوم بودن هر دو تایى از این اجزاء، سومی به موجب آنها تعیین می شود. این نکته، هم به طریق هندسی و هم از رابطه $a = 2R \sin A$ روشن است. آشکار است که مجموعه ای از داده های از این قبیل می توانند در تحلیلی که مقدم بر کشف يك ساختمان یا يك برهان می باشد، سودمند باشند، و نیت کتاب مزبور بدون تردید همین است.

اثر دیگر اقلیدس در هندسه، که از طریق ترجمه عربی به دست ما رسیده، کتاب ددباب تقسیم اشکال^۴ است. در اینجا مسائل ساختمانی را می یابیم که در آنها تقسیم شکلی با يك خط تحدید شده ای مورد نظر است به طوری که اجزاء آن دارای مساحتی بديك نسبت مورد نظر باشند. مثالی از این مسائل، مسئله تقسیم مثلث مفروضی به دو مساحت مساوی به وسیله خطی است که بر نقطه مفروضی در داخل مثلث رسم می شود. مثالهای دیگر در مطالعه مسئله ای ۱۱.۳ (ب) و ۱۱.۳ (ج) یافت می شوند.

1. synthetic 2. analysis

* واژه های تحلیل و تحلیلی (*analytic*) با مضامین متعددی در ریاضیات به کار رفته اند. از این قرار هندسه تحلیلی، شاخه عظیمی از ریاضیات را که آنالیز نامیده می شود، توابع تحلیلی و غیره را داریم.

3. Data 4. On Divisions

سایر آثار هندسی اقلیدس که اکنون در دست نیست و وجودشان تنها از شروح بعدی معلوم است، عبارت اند از پ سوداریا^۱، یا کتاب مغالطه‌های هندسی، پودیسیم^۲، که درباره آن حدسیات زیادی زده می‌شود، مقاطع مخروطی، رساله‌ای در چهار مقاله که بعداً کامل و به دست آپولونیوس بر آن مطالبی افزوده شده است، مکانهای (دویه‌ای)^۳ [یا مکانهای واقع روی رویه‌ها]، که درباره آن هیچ چیز به یقین نمی‌دانیم.

دیگر آثار اقلیدس درباره ریاضیات عملی است، و دوتا از اینها باقی هستند: فاینومنا^۴ [الظواهرات]، که به هندسه کروی مورد نیاز در نجوم رصدی می‌پردازد، و رساله^۵ نوزده، که رساله‌ای مقدماتی در مورد مناظر و مرایاست. تصویری می‌شود که اقلیدس اثری نیز در باب مقدمات موسیقی نگاشته باشد.

مطالعه مسئله‌ای

۱۰۵ الگوریتم اقلیدسی

الگوریتم اقلیدسی، یا فرایند اقلیدسی، برای پیدا کردن بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م.) دو عدد صحیح مثبت از آن جهت چنین نام یافته است که در شروع مقاله هفتم اصول اقلیدس دیده می‌شود، اگرچه این فرایند بدون تردید خیلی پیشتر از آن معلوم بوده است. این الگوریتم جزو مابانی بسیاری از پیشرفتهای ریاضیات نوین قرار دارد. این فرایند که به شکل قاعده‌ای بیان می‌شود، چنین است: از دو عدد آن را که بزرگتر است بر عدد کوچکتر تقسیم نمایید. مقسوم‌علیه را بر باقیمانده تقسیم کنید. این عمل، تقسیم آخرین مقسوم‌علیه بر آخرین باقیمانده را ادامه دهید، تا آنکه تقسیم بی باقیمانده شود. آخرین مقسوم‌علیه ب.م.م. مورد نظر دو عدد صحیح و مثبت اولیه است.

(الف) ب.م.م. ۵۹۱۳ و ۷۵۹۲ را، با الگوریتم اقلیدسی، پیدا کنید.

(ب) ب.م.م. ۱۸۲۷، ۲۵۲۳، و ۳۲۴۸ را با الگوریتم اقلیدسی، پیدا کنید.

(ج) ثابت کنید که الگوریتم اقلیدسی به ب.م.م. منتهی می‌شود.

(د) فرض کنید که h ب.م.م. اعداد a و b باشد. نشان دهید که اعداد صحیحی مانند $pa + qb = h$ (نه لزوماً مثبت) وجود دارند به طوری که

1. Pseudaria

* پورسیم (Porism) امروزه به عنوان گزاره‌ای گرفته می‌شود، بیانگر شرطی که مسئله معینی را قابل حل می‌گرداند، و در این صورت مسئله بینهایت جواب دارد. برای مثال، اگر r و R شعاعهای دو دایره و d فاصله بین مراکز آنها باشد، مسئله محاط کردن مثلثی در دایره به شعاع R که بر دایره به شعاع r محیط شود، فقط و فقط وقتی قابل حل است که $R^2 - d^2 = 2Rr$ ، و در این صورت بینهایت مثلث از این قبیل وجود خواهد داشت. ما از منظور اقلیدس از این واژه اطلاع دقیقی نداریم.

(ه) q و p را برای اعداد صحیح قسمت (الف) پیدا کنید.
 (و) ثابت کنید که a و b وقتی و فقط وقتی متباین هستند که اعداد صحیحی مانند q و p وجود داشته باشند به طوری که $pa + qb = 1$.

۳.۵ کاربردهای الگوریتمی اقلیدسی

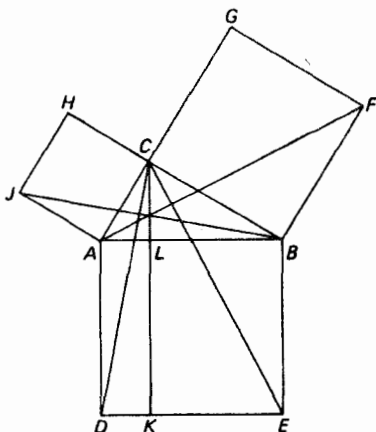
(الف) با استفاده از مطالعه مسئله‌ای ۱.۵ (و) ثابت کنید که اگر p اول باشد و حاصلضرب uv را عاد کند، آنگاه p یا u را عاد می‌کند یا v را.
 (ب) از قسمت (الف) قضیه اصلی حساب را ثابت کنید: هر عدد صحیح بزرگتر از ۱ می‌توان به طور منحصر به فرد به حاصلضرب عوامل اول تجزیه کرد.

۳.۵ قضیه فیثاغورس

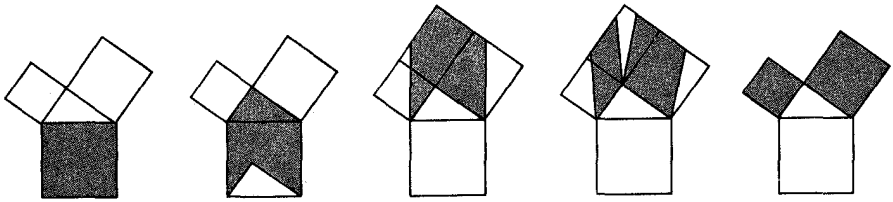
(الف) برهان ظریف اقلیدس برای قضیه فیثاغورس مبتنی بر نمودار شکل ۴۱ است، که از آن گاهی با عنوان باشلق فرانسوسی، یا صندلی عروس یاد می‌شود. خلاصه برهان مزبور از این قرار است: $(AC)^2 = \Delta JAB = \Delta CAD = ADKL = (BC)^2 = BEKL$. جزئیات برهان را کامل کنید.

(ب) نشان دهید که شکل ۴۲ چگونه برهانی پویا برای قضیه فیثاغورس است، که می‌توان آن را روی پرده سینما نشان داد، و در آن مربع روی و تر به‌طور پیوسته به مجموع مربعات روی ساقهای مثلث قائم‌الزاویه تبدیل می‌شود.

(ج) عده‌ای از رؤسای جمهور آمریکا اندکی با ریاضیات سروکار داشته‌اند.

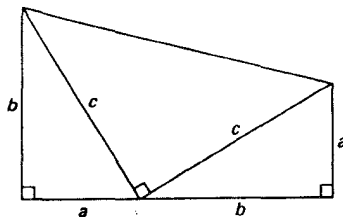


شکل ۴۱



جورج واشینگتن^۱ مساح مشهوری بود، تامس جفرسون^۲ سهم عمده‌ای در ترغیب آموزش ریاضیات عالی در ایالات متحده داشته است، و اعتقاد بر این است که آبراهام لینکلن^۳ با مطالعه اصول اقلیدس، منطق را آموخته است. خلافت از آنها جیمز آبرام گارفیلد^۴ (۱۸۳۱-۱۸۸۱)، بیستمین رئیس جمهور آمریکا بوده، که در ایام تحصیلش علاقه شدیدی و مهارت نسبتاً خوبی در ریاضیات مقدماتی نشان داد. در سال ۱۸۷۶، وقتی که عضو مجلس نمایندگان بود و پنج سال قبل از آنکه رئیس جمهور ایالات متحده شود، به طور مستقل برهان بسیار زیبایی از قضیه فیثاغورس را کشف کرد. وی در یک بحث ریاضی با عده‌ای دیگر از اعضای کنگره، به جواب مسئله دست یافت، و متعاقب آن برهان در مجله تعلیم و تربیت نیوانگلند^۵ چاپ شد. برهان مزبور به محاسبه مساحت ذوزنقه شکل ۴۳ از دو طریق مختلف بستگی دارد - اول به وسیله فرمول محاسبه مساحت ذوزنقه و دوم به عنوان مجموع سه مثلث قائم الزاویه‌ای که ذوزنقه را می‌توان به آنها تقطیع کرد. این برهان را به تفصیل انجام دهید.

(د) عکس قضیه فیثاغورس را بیان و آن را ثابت کنید.



شکل ۴۳

-
1. George Washington
 2. Thomas Jefferson
 3. Abraham Lincoln
 4. James Abram Garfield
 5. New England Journal of Education

۴.۵ مقاله دوم اقلیدس

(الف) قضیه II ۱ اقلیدس چنین است: اگر دوخط مستقیم موجود باشند، و یکی از آنها به تعدادی پاره‌خط دلخواه بریده شود، مستطیلی که این دو خط مستقیم اضلاع آن باشند برابر است با مستطیلهایی که اضلاع آنها متشکل از خط مستقیم نابریده و هر يك از پاره‌خطها باشد. این، همتای هندسی کدام قانون آشنای جبری است؟

(ب) نشان دهید که قضایای II ۱۲ و II ۱۳ اساساً همان قانون کسینوسها هستند.

(ج) نشان دهید که چگونه می‌توان قضیه فیثاغورس را به‌عنوان حالت خاصی از قانون کسینوسها در نظر گرفت.

۵.۵ کاربردهای قضیه اصلی علم حساب

قضیه اصلی علم حساب می‌گوید که، به ازای هر عدد صحیح مفروض a ، اعداد صحیح نامنفی یکتای a_1, a_2, a_3, \dots که تنها عده‌ای متناهی از آنها مخالف صفرند، وجود دارند به طوری که

$$a = 2^{a_1} 3^{a_2} 5^{a_3} \dots$$

که در آن $2, 3, 5, \dots$ اعداد اول متوالی هستند. این حکم، نماد گذاری مفیدی را به‌ذهن‌الفا می‌کند؛ می‌نویسیم

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

که در آن a_n آخرین توان غیر صفر است. مثلاً داریم $(2, 1) = 2$ ، $(1, 0, 0, 1) = 14$ ، $(0, 3) = 27$ و $(3, 2, 1) = 360$.

قضایای زیر را ثابت کنید:

$$ab = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots) \quad (\text{الف})$$

(ب) b يك مقسوم‌علیه a است اگر و فقط اگر به ازای هر i ، $b_i \leq a_i$.

(ج) عده مقسوم‌علیه‌های a عبارت است از $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_n + 1)$.

(د) يك شرط لازم و کافی برای آنکه عددی مانند n مربع کامل باشد، این است که

عده مقسوم‌علیه‌های n فرد باشد.

(ه) اگر $a_i \neq b_i$ ، از بین دو عدد a_i و b_i کوچکترین آنها را، مساوی g_i می‌گیریم

و اگر $a_i = b_i$ ، g_i را مساوی a_i یا b_i می‌گیریم. در این صورت ثابت کنید که $g = (g_1, g_2, \dots)$ ب.م.م. a و b است.

(و) اگر a و b متباین باشند و ac را عاقد کند، آنگاه b, c را عاقد می‌کند.

(ز) اگر a و b متباین باشند و اگر a, c را و b, c را عاقد کند، آنگاه ab, c را

عاقد می‌کند.

(ح) نشان دهید که $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ گنگ هستند.

۶.۵ نظریه ائودوکوسی تناسب

(الف) با روش ائودوکوسی و با روش کتابهای درسی جدید، قضیه VI۳۳ را ثابت کنید: نسبت زوایای مرکزی در یک دایره یا دو دایره مساوی، با نسبت کمانهای جدا شده به وسیله آنان برابر است.

(ب) با روش ائودوکوسی و سپس تکمیل آن با روش کتابهای درسی جدید، قضیه VI۲ را ثابت کنید: خطی که به موازات یک ضلع مثلثی رسم شود، دو ضلع دیگر را به یک نسبت تقسیم می کند.

(ج) قضیه VI۲ را با استفاده از قضیه VII ثابت کنید (نگاه کنید به بخش ۵-۵).

۷.۵ چند ضلعیهای منتظم

(الف) فرض کنید $n = 3s$ ، که در آن n, s, r اعداد صحیح مثبت اند. نشان دهید که اگر یک n ضلعی منتظم با ابزارهای اقلیدسی قابل ساختن باشد، آنگاه هر r ضلعی و هر s ضلعی نیز چنین است.

(ب) نشان دهید که ساختن ۲۷ ضلعی منتظم با ابزارهای اقلیدسی غیر ممکن است.

(ج) فرض کنید که s و s اعداد صحیح مثبت متباین باشند و s ضلعی منتظم و s ضلعی منتظم نیز بدین طریق قابل ساختن است. نشان دهید که یک rs ضلعی منتظم نیز بدین طریق قابل ساختن است.

(د) از چند ضلعیهای منتظم با کمتر از ۲۵ ضلع، چند ضلعیهای منتظمی با ۳، ۴، ۵، ۶، ۸، ۱۰، ۱۲، ۱۵، ۱۶، ۱۷ ضلع را می توان با ابزارهای اقلیدسی ترسیم کرد. این چند ضلعیها را، به استثنای ۱۷ ضلعی منتظم، عملاً بسازید.

(ه) یک ۱۷ ضلعی منتظم به روش مذکور در مقاله ۵. و ریچموند در سالنامه ریاضی

(سال ۱۹۰۹) رسم کنید.

فرض کنید که OA و OB دو شعاع متعامد یک دایره مفروض به مرکز O باشند. C را بر OB چنان بیابید که $OC = OB/4$. حال D را بر OA طوری بیابید که (زاویه $OC D$) $= (زاویه $O C A$) = 45° . سپس E را بر امتداد AO چنان بیابید که $\angle DCE = 45^\circ$. دایره ای به قطر AE رسم کنید که OB را در F قطع کند، و سپس دایره $D(F)$ را رسم کنید تا OA و امتداد AO را در G_4 و G_6 قطع کند. از نقاط G_4 و G_6 عمودهایی بر OA خارج کنید تا دایره مفروض را در P_4 و P_6 قطع کنند. نقاط اخیر چهارمین و ششمین رئوس ۱۷ ضلعی هستند که اولین رأس آن A است.$

(و) قضیه XIII۱۰ را ثابت کنید: ضلعی از یک پنج ضلعی منتظم، از یک شش ضلعی منتظم، و از یک ده ضلعی منتظم محاط در یک دایره، تشکیل یک مثلث قائم الزاویه می دهند.

(ز) نشان دهید که در يك مثلث قائم الزاویه با ساقهای ۳ و ۱۶ زاویه حاده کوچکتر خیلی نزدیک به نصف زاویه مرکزی مقابل به يك ضلع ۱۷ ضلعی منتظم است. با استفاده از این حقیقت، يك ساختمان تقریبی اقلیدسی برای ۱۷ ضلعی منتظم ارائه دهید.

۸.۵ مجموع زوایای يك مثلث

با فرض تساوی زوایای متبادل داخلی تشکیل شده به وسیله خط موربی که يك زوج خط موازی را قطع می‌کند، ثابت کنید که:

(الف) مجموع زوایای يك مثلث برابر است با يك زاویه نیمصفاحه.

(ب) مجموع زوایای داخلی يك n ضلعی محدب، برابر است با $2 - n$ زاویه نیمصفاحه.

۹.۵ چند قیاس راجع به مساحتها

با فرض اینکه مساحت يك مستطیل با حاصلضرب ابعاد آن داده می‌شود، سلسله قضایای زیر را ثابت کنید.

(الف) مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصلضرب قاعده در ارتفاع آن.

(ب) مساحت مثلث برابر است با نصف حاصلضرب یکی از اضلاع در ارتفاع وارد بر آن.

(ج) مساحت مثلث قائم‌الزاویه برابر است با نصف حاصلضرب دو ساق آن.

(د) مساحت مثلث برابر است با نصف حاصلضرب محیط در شعاع دایره محاطی آن.

(ه) مساحت زوزنقه برابر است با حاصلضرب ارتفاع در نصف مجموع قاعده‌های آن.

(و) مساحت چند ضلعی منتظم برابر است با نصف حاصلضرب محیط در سهم آن.

(ز) مساحت دایره برابر است با نصف حاصلضرب محیط در شعاع آن.

۱۰.۵ چند قیاس راجع به زوایا

فرض کنید: (۱) زاویه مرکزی دایره به وسیله کمان مقابل به آن اندازه گرفته می‌شود؛ (۲) مجموع زوایای يك مثلث برابر است با يك زاویه نیمصفاحه؛ (۳) زوایای مجاور به قاعده هر مثلث متساوی الساقین برابرند؛ (۴) مماس بريك دایره، بر شعاعی که به نقطه تماس رسم شود، عمود است. سلسله قضایای زیر را ثابت کنید:

(الف) هر زاویه خارجی يك مثلث برابر است با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور آن.

(ب) اندازه هر زاویه محاطی در يك دایره با نصف قوس مقابل برابر است.

(ج) هر زاویه محاط در نیمدایره قائمه است.

(د) اندازه زاویه‌ای که توسط دو وتر متقاطع در يك دایره تشکیل می‌شود با نصف

مجموع دو قوس مقابل برابر است.

(ه) اندازه زاویه‌ای که از تلاقی دو قاطع در يك دایره به وجود می‌آید با نصف تفاضل دو قوس مقابل آن برابر است.

(و) اندازه زاویه‌ای که از مماس بريك دایره و وتر مار بسر نقطه تماس تشکیل می‌شود با نصف قوس مقابل برابر است.

(ز) زاویه‌ای که از يك خط مماس و قاطعی بريك دایره تشکیل می‌شود، با نصف تفاضل دو قوس مقابل اندازه گرفته می‌شود.

(ح) زاویه‌ای که از دو مماس متقاطع بر يك دایره تشکیل می‌شود، با نصف تفاضل دو قوس مقابل اندازه گرفته می‌شود.

۱۱۰۵ اصول

(الف) اگر می‌خواستید دو تا از قضایای زیر را به عنوان «اصول» در يك درس هندسه مسطحه انتخاب کنید، کدامها را انتخاب می‌کردید؟

۱. سه ارتفاع يك مثلث، که در صورت لزوم امتداد داده می‌شوند، در يك نقطه متلاقی هستند.

۲. مجموع سه زاویه يك مثلث برابر است با دو زاویه قائمه.

۳. اندازه زاویه محاط در يك دایره با نصف قوس مقابل به آن برابر است.

۴. طولهای مماسهای مرسوم از هر نقطه واقع بر امتداد وتر مشترك دو دایره متقاطع برابرند.

(ب) يك معلم هندسه در نظر دارد که مبحث متوازی‌الاضلاعها را در کلاس خود تدریس کند. بعد از تعریف متوازی‌الاضلاع، این معلم چه قضایایی درباره متوازی‌الاضلاع را به عنوان «اصول» باید عرضه کند؟

(ج) يك معلم هندسه به عنوان مقدمه‌ای بر تدریس مبحث اشکال متشابه، يك یا دو جلسه درس درباره نظریه تناسبها ارائه می‌کند. وی چه قضایایی را باید به عنوان «اصول» این مبحث برگزیند، و به چه ترتیبی باید آنها را تنظیم کند؟

۱۲۰۵ داده‌ها

فرض کنید که C, B, A زوایای يك مثلث؛ c, b, a اضلاع مقابل به آنها؛ h_c, h_b, h_a ارتفاعهای وارد بر این اضلاع؛ m_c, m_b, m_a میانهمهای این اضلاع؛ t_c, t_b, t_a نیمسازهای مرسوم بر این اضلاع؛ r و R شعاعهای دایره محاطی و محیطی؛ b_c و c_a تصویرهای اضلاع b و c بر a ، و r_a دایره مماس بر ضلع a و امتدادهای اضلاع b و c ، باشند. نشان دهید که هر يك از اینها که در زیر می‌آیند، تشکیل داده‌ای را برای يك مثلث می‌دهند.

$$c/a, b/c, a/b \quad (\text{ب})$$

$$C, B, A \quad (\text{الف})$$

$h_b + h_c, A, b + c$	(د)	h_c, A, b	(ج)
$B - C, r_a, h_a$	(و)	$h_c - h_b, A, b - c$	(ه)
$b_a - c_a, B - C, R$	(ح)	$b_a - c_a, m_a, h_a$	(ز)
r_a, r, h_a	(ی)	$a, r_a - r, R$	(ط)

۱۴۰۵ رسم شکلها با استفاده از داده‌ها

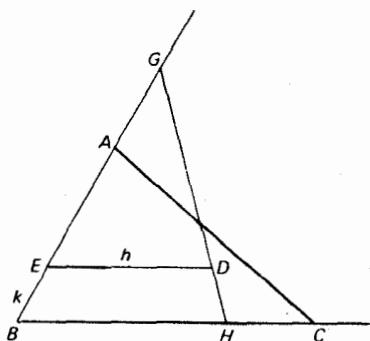
يك داده در صورتی می‌تواند در حل يك مسئله ترسیمی مفید باشد که هر يك از اجزای داده را بتوان از سایر اجزا ساخت. مثلی را در صورت مفروض بودن اجزای زیر رسم کنید (برای نماد گذاری نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۱۲۰۵):

$h_b + h_c, A, a$	(الف)
h_a, r, R	(ج)
$A, h_b + h_c, a - b$	(ب)

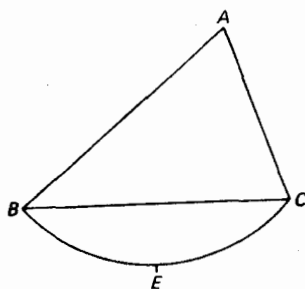
۱۴۰۵ تقسیمات

(الف) جزئیات راه حل زیر را (که اساساً در اثر در باب تقسیم اشکال اقلیدس یافت می‌شود) کامل کنید. این حل مربوط است به مسئله رسم يك خط مستقیم GH که بر نقطه مفروض D در داخل مثلث ABC می‌گذرد، اضلاع BA و BC را به ترتیب در G و H قطع می‌کند، و به طوری که مساحت‌های مثلث‌های GBH و ABC برابر باشند (نگاه کنید به شکل ۴۴).

DE را به موازات CB رسم کنید تا AB را در E قطع کند. طولهای DE و EB را به ترتیب به وسیله h و k ، و طول GB را با x نشان دهید. در این صورت $x(BH) = ac$. اما $BH/h = x/(x-k)$ ، با حذف BH ، معادله $0 = x^2 - mx + mk$ را به دست می‌آوریم، که در آن $m = ac/h$ ، و الی آخر.



شکل ۴۴



شکل ۴۵

(ب) مسئله زیر را، که قضیه ۲۸ در کتاب درباب تقسیم اشکال اقلیدس است، حل کنید: در شکل ۴۵، سطح $ABEC$ را به وسیله خط مستقیمی که از E ، نقطه وسط قوس مستدیر BC می‌گذرد، به دو نیم کنید.

(ج) در کتاب درباب تقسیم اشکال اقلیدس مسئله دو نیم کردن سطح ذوزنقه مفروضی توسط خطی به موازات قاعده ذوزنقه مطرح می‌شود. این مسئله را با ستاره و پرگار حل کنید.

عنوان مقاله

- ۱/۵ مبدأ روش اصل موضوعی: توضیحات تکاملی و انقلابی.
 ۲/۵ نظر ارسطو و پروکلس درباره روش اصل موضوعی.
 ۳/۵ مباحث اصل موضوعی مادی در مقابل مباحث اصل موضوعی صوری.
 ۴/۵ سرگذشت، آثار، و تأثیر اقلیدس.
 ۵/۵ مراجع اصول اقلیدس.
 ۶/۵ جبر در اصول اقلیدس.
 ۷/۵ نظریه اعداد در اصول اقلیدس.
 ۸/۵ کاربردهای نظریه ائودوکسوسی تناسب در هندسه مسطحه.
 ۹/۵ آیا راهی شاهانه در هندسه وجود دارد؟
 ۱۰/۵ مشهورترین تک‌سخن در تاریخ ریاضیات (اصل موضوع توازی اقلیدس).

کتابنامه

- AABOE, ASGER, *Episodes from the Early History of Mathematics*. (New Mathematical Library, no. 13.) New York: Random House and L. W. Singer, 1964.
 ARCHIBALD, R. C., *Euclid's Book on Division of Figures*. New York: Cambridge University Press, 1915.
 BELL, E. T., *The Magic of Numbers*. New York: McGraw-Hill, 1946.

- BUNT, L. N. H.; P. S. JONES; and J. D. BEDIANT, *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1976.
- COHEN, M. R., and I. E. DRABKIN, *A Source Book in Greek Science*. New York: McGraw-Hill, 1948. Reprinted by Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1958.
- COOLIDGE, J. L., *A History of Geometrical Methods*. New York: Oxford University Press, 1940.
- DANTZIG, TOBIAS, *The Bequest of the Greeks*. New York: Charles Scribner, 1955.
- DAVIS, H. T., *Alexandria, the Golden City*. 2 vols. Evanston, Ill.: Principia Press of Illinois, 1957.
- DUNNINGTON, G. W., *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science*. New York: Hafner, 1955.
- EVES, HOWARD, and C. V. NEWSOM, *An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*. rev. ed. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1965.
- FORDER, H. G., *The Foundations of Euclidean Geometry*. New York: Cambridge University Press, 1927.
- FRANKLAND, W. B., *The First Book of Euclid's Elements with a Commentary Based Principally upon that of Proclus Diadochus*. New York: Cambridge University Press, 1905.
- GOW, JAMES, *A Short History of Greek Mathematics*. New York: Hafner, 1923.
- HEATH, T. L., *History of Greek Mathematics*. vol. 1, New York: Oxford University Press, 1921. Reprinted by Dover, 1981.
- , *A Manual of Greek Mathematics*. New York: Oxford University Press, 1931.
- , *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. 2d ed., 3 vols. New York: Cambridge University Press, 1926. Reprinted by Dover, 1956.
- JAMES, GLENN, ed., *The Tree of Mathematics*. Pacoima, Calif.: The Digest Press, 1957.
- PROCLUS, *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Translated by G. R. Morrow. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1970.
- SARTON, GEORGE, *Ancient Science and Modern Civilization*. Lincoln, Neb.: The University of Nebraska Press, 1954.
- SMITH, D. E., *A Source Book in Mathematics*. New York: McGraw-Hill, 1929.
- THOMAS, IVOR, ed., *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*. 2 vols. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1939-41.
- THOMAS-STANFORD, CHARLES, *Early Editions of Euclid's Elements*. London: Bibliographical Society, 1926.
- VAN DER WAERDEN, B. L., *Science Awakening*. Translated by Arnold Dresden. New York: Oxford University Press, 1961. Paperback ed. New York: John Wiley, 1963.

ریاضیات یونان پس از اقلیدس

۶-۱ وضع تاریخی

شهر اسکندریه از مزایای زیادی برخوردار بود، و یکی از این امتیازات رشک برانگیز در صلح پایدار بودن آن با بقیه مناطق جهان بود. اگرچه این شهر در طول سلطنت بطالسه، که تقریباً ۳۵۰ سال دوام آورد، گهگاه دستخوش نبردهای قدرت داخلی شد، اما از ستیزهای خارجی مصون ماند. این وضع، پس از یک دوران کوتاه درگیری که طی آن مصر به صورت قسمتی از امپراطوری روم درآمد، خاتمه یافت. از آن پس پاکس رومانا^۱ در این سرزمین مستقر گردید. تعجب آور نیست که اسکندریه به صورت مأوایی برای فضلا درآمد و در مدت بیش از نیم هزاره آن همه فضایل علمی دنیای کهن، از آن شهر نشأت گرفت. تقریباً هر ریاضیدان عهد عتیقی که در این فصل مورد بحث قرار می گیرد، در دانشگاه اسکندریه استاد یا شاگرد بوده است.

در دوره پایانی اعصار قدیم تسلط با رومیان بود. در سال ۲۱۲ ق.م. سیراکوز^۲ به دنبال محاصره رومیان تن به تسلیم داد؛ در سال ۱۴۶ ق.م. کارتاژ^۳ در مقابل قدرت امپراطوری روم سقوط کرد؛ و در همان سال، آخرین شهر یونانی، کورنت^۴، نیز سقوط نمود، و یونان به صورت استانی از امپراطوری روم درآمد. بین النهرین تا سال ۶۵ ق.م.

۱. پاکس رومانا (Pax Romana) یا صلح رومی مواد قراردادی بود که توسط روم بر هر یک از کشورهای تحت فرمان اعمال می شد. م.

فتح نشد، و مصر تا سال ۳۰ ق.م. تحت اداره بطالسه باقی ماند. تمدن یونانی در زندگی روم نفوذ کرد، و مسیحیت، علی الخصوص در بین بردگان و فقرا، روبه گسترش نهاد. حکمرانان رومی مالیاتهای سنگینی می گرفتند، اما از سایر جهات در سازمان اقتصادی مستعمرات شرقی دخالتی نمی کردند.

کنستانتین^۱ کبیر اولین امپراطور روم بود که به مسیحیت گروید و آن را دین رسمی اعلام نمود. در ۳۳۰ ب.م. کنستانتین پایتخت خود را به بیزانس یا بوزانتیوم^۲، که نام جدید کنستانتینوپول^۳ [قسطنطنیه] را بر آن نهاد، منتقل کرد. در ۳۹۵ ب.م. امپراطوری روم به امپراطوریهای شرقی و غربی تقسیم شد، که یونان پاره‌ای از قسمت شرقی آن بود. ساخت اقتصادی هر دو امپراطوری اساساً مبتنی بر کشاورزی، با استفاده فزاینده از کار برده‌ها بود. چنان شرایطی مانعی در برابر کار خلاق علمی بود و افولی تدریجی در تفکر سازنده آغاز، گردید، که در قسمت‌های غربی، که در آنجا بردگی در مقیاس وسیعتری به کار گرفته می‌شد، مشخصتر بود. افول نهایی بازار برده، با تأثیر اسفبار آن بر اقتصاد روم، مواجهه با تنزل علم به یک سطح متوسط بود. مدرسه اسکندریه تدریجاً، همراه با فروریزی جامعه باستان، رنگ باخت. تفکر خلاق جای خود را به انباشتن و تفسیر مطالب قبلی داد. روزهای تیره و تاری در پی جنگ مسیحیت با کفر سپری شد، و سرانجام، در ۴۳۱ ب.م. اسکندریه به دست اعراب تصرف شد.

۲-۶ ارشمیدس

یکی از بزرگترین ریاضیدانان همه اعصار، و سه یقین بزرگترین آنان در دوران باستان، ارشمیدس، از اهالی شهر یونانی سیراکوز واقع در جزیره سسیل بود. وی در حدود سال ۲۸۷ ق.م. به دنیا آمد و در زمان غارت سیراکوز به دست رومیان، در سال ۲۱۲ ق.م. کشته شد. او پسر یک منجم و مورد التفات (و حتی شاید از منسوبان) شاه هیرون^۴ سیراکوزی بود. بنا به روایتی وی بخشی از ایام عمر را در مصر، و به احتمال قوی در دانشگاه اسکندریه، سپری کرد. زیرا، کونون^۵ و دوسیتوس^۶ و اراتستن را در زمره دوستان خود به حساب آورده؛ که دو نفر اول از اخلاف اقلیدس بودند، و آخری یک کناندار دانشگاه بود. بسیاری از کشفیات ریاضی ارشمیدس در خطاب به این افراد نوشته شده‌اند. مورخین رومی داستانهای جالبی درباره ارشمیدس نقل کرده‌اند. در این میان از همه آشناتر توصیفات از تدابیر استادانه وی برای کمک به دفاع از سیراکوز است در مقابل محاصره‌ای که به وسیله سردار رومی، مارسلوس^۷ رهبری می‌شد. از جمله این ابداعات وی منجنیق‌هایی بودند با بردهای قابل تنظیم، سنگ افکنهای متحرک برای انداختن وزنه‌های سنگین بر روی کشتیهای دشمن و قتی که خیلی به دیوار شهر نزدیک می‌شدند، و جرثقیلهای

1. Constantine
2. Byzantium
3. Constantinople
4. Hieron
5. Conon
6. Dositheus
7. Marcellus

چنگک‌دار بزرگی که کشتیهای دشمن را از روی آب بلند می‌کردند. این داستان که وی از آینه‌های محرقه بزرگی برای به آتش کشیدن کشتیهای دشمن استفاده کرده، بعدها عنوان شده است، اما می‌تواند درست باشد. داستانی هم در این باره وجود دارد که وی چگونگی برای این گفته خود که «جایی برای ایستادن به من بدهید تا زمین را بلند کنم»، اعتبار بخشید. به این ترتیب که کشتی با بار سنگین را که قبلاً جمع‌کنی از کارگران به زحمت قادر به کشیدن آن به ساحل بودند، یک تنه و بدون کوشش زیاد، با استفاده از قرقره‌های مرکب حرکت داد.

ظاهراً ارشمیدس از یک تمرکز ذهنی قدرتمندی برخوردار بوده، و داستانهایی از بی‌خبری او از پیرامون خود، وقتی که به مسئله‌ای اشتغال خاطر داشته، گفته شده است. نمونه‌ای از اینها که مکرراً گفته شده، تاج شاه هیرون و زرگر مورد سوء ظن است. گویا شاه هیرون تاجی زرین داشته و نگران از آنکه مبادا در ساختن آن به طور پنهانی نقره به کار رفته باشد، مطلب را به ارشمیدس ارجاع می‌کند، که او، روزی در حال استحمام، با کشف اولین قانون ئیدروستاتیک به راه حل مسئله دست می‌یابد. با فراموش کردن اینکه جامه بر تن کند، از حمام درمی‌آید و در خیابانها به سوی خانه خود می‌دود، در حالی که فریاد می‌زده «ایورکا، ایورکا!» (یا فتم، یا فتم!).

ارشمیدس قسمت زیادی از کارندسه خود را به کمک اشکال مرسوم در خاکستر یا روغن بعد از استحمام که بر تن خود می‌مالیده، انجام می‌داد. در واقع، نقل شده است که اجل وی به وقت تاراج سیراکوز در حالی فرا رسید که ذهنش مشغول نموداری رسم شده بر یک سینی شن بوده است. مطابق یکی از این روایات، وی به یک رومی در حال چپاول فرمان می‌دهد تا از روی نمودار او کنار برود، که در این هنگام غارتگر به خشم آمده نیزه‌اش را در بدن مرد سالخورده فرو می‌کند.

وجود تجهیزات دفاعی ارشمیدس باعث شد که سیراکوز نزدیک سه سال در مقابل محاصره رومیان تاب بیاورد. خطوط دفاعی شهر سرانجام وقتی شکسته شد که سیراکوزیهای مغرور، طی جشنی در داخل شهر، از ننگبانی غافل ماندند. در مارسلوس نسبت به دشمن نابغه‌اش حس احترام شدیدی به وجود آمده بود، و سرانجام وقتی که به حصار شهر رخنه کرد، اکیداً دستور داد که گزندى به ریاضیدان نامی شهر وارد نیاید. دریافت خبر مرگ ارشمیدس، مارسلوس را سخت اندوهگین کرد و با عزت و احترام زیاد این دانشمند برجسته را به خاک سپرد. ارشمیدس که به حق به یکی از کشفیات هندسی عظیم خود (که بعداً شرح آن خواهد آمد) می‌بالید، علاقه خود را به حک کره و منشور مستطیر قائمی محاط در آن بر سنگ قبرش ابراز کرده بود. مارسلوس دستور داد که وصیت او به جا آورده شود.

سالها بعد، در ۷۵ ق.م. وقتی که کیکرو^۲ [سیسرون] به عنوان خزانه‌دار دولت روم

در سیسیل خدمت می کرد، در مورد محل گور ارشمیدس به پرس و جو پرداخت. برای او شگفت آور بود که سیراکوزیها چیزی درباره آن نمی دانستند. کیکرو و باتلاش فراوان همه یادواره ها را در گورستان شهر، که تعدادشان بسیار زیاد بود، بررسی کرد. بالاخره متوجه ستون کوچکی شد که کمی بالاتر از بته ها و خاربنهایی که روی آن را پوشانده بودند، قرار داشت و شکل کره و استوانه محاط در آن بر روی آن بود. بدین ترتیب بود که قبر مدت ها در بوتۀ غفلت و فراموشی مانده بزرگمرد سیراکوز پیدا شد. کیکرو مردانی را برای درو کردن خار و خاشاک گماشت و دستور داد که آن اطراف را بعد از آن به همان صورت نگاهدارند. این را که چنین تکریمی تاجه زمانی استمرار داشته، نمی دانیم، زیرا دوباره قبر ارشمیدس کاملا ناپدید شده بود. باز، در سال ۱۹۶۵، موقعی که برای بنای يك هتل در سیراکوز، خاکبرداری می شد، در بین توده خاك درون بیل مکانیکی سنگ قبری مشاهده شد که کره و استوانه ای محاط در آن بر آن حك شده بود. بدین ترتیب قبر ناپدید شده يك بار دیگر پیدا شد.

در اشاره به مرگ ارشمیدس، سرویلیام روان همیلتن^۱ خاطر نشان کرده است که «آیا کسی هست که شهرت ارشمیدس را بر شهرت فاتحش مارسلوس ترجیح ندهد؟» و آلفرد نورث وایتهد^۲ در همین مضمون گفته است که «هیچ رومی هرگز در حال اندیشه بر يك تصویر هندسی جان نباخته است». گ. ه. هاردی، ریاضیدان انگلیسی قرن بیستم گفته است که «وقتی هم اخیلوس^۳ [آشیل] فراموش شده باشد، باز ارشمیدس در یادها خواهد بود، زیرا زبانه ها می میرند ولی اندیشه های ریاضی زنده می مانند». ولتر^۴ به همین نحو خاطر نشان کرده است که «ارشمیدس مخیله ای قویتر از هومر داشته است».

آثار ارشمیدس شاهکارهایی از بیسان ریاضی اند و تا حد قابل توجهی به مقالات مندرج در مجله های ریاضی امروزی شباهت دارند. این آثار با پرداختنی عالی و با ایجاز در کلام نوشته شده اند و خلاقیت عظیم، مهارت در محاسبه، و دقت در استدلال را به نمایش می گذارند. حدود ده رساله به دست ما رسیده است، و نشانه هایی از آثار مفقود وی وجود دارند. احتمالاً مهمترین سهمی که این آثار در ریاضیات دارند بسط اولیه چند روش حساب انتگرال است. در یکی از فصول آتی [جلد دوم کتاب] به این مطلب بازمی گردیم. سه اثر از آثار باقیمانده ارشمیدس، به هندسه مسطحه اختصاص دارند. این آثار عبارت اند از اندازه گیری دایره^۵، تربیع سهمی^۶، و در باب مارپیچها^۷. در اولین این آثار بود که ارشمیدس روش کلاسیک محاسبه π را فتح باب کرد، که قبلاً در بخش ۴-۸ به توصیف آن پرداخته ایم. در اثر دوم، که مشتمل بر ۲۴ قضیه است، نشان داده می شود که مساحت يك قطعه سهموی عبارت از چهار سوم مساحت مثلث محاط شده ای است که دارای

1. Sir William Rowan Hamilton
2. Alfred North Whitehead
3. Aeschylus
4. Voltaire
5. *Measurement of a Circle*
6. *Quadrature of the Parabola*
7. *On Spirals*



ارشمیدس

(کولود سرویس)^۱

همان قاعده سهموی بوده و رأس متقابل آن در نقطه‌ای است که در آن مماس با قاعده موازی است. این امر متضمن مجموعیابی یک سری هندسی همگراست. اثر سوم شامل ۲۸ قضیه است که به خواص منحنیسی اختصاص یافته است که امروزه به ماریسج ارشمیدس معروف و معادله قطبی آن $r = k\theta$ است. به ویژه، مساحت محصور به وسیله منحنی و دو بردار شعاعی اساساً به همان صورتی به دست آمده است که امروزه در تمرینهای حساب دیفرانسیل و انتگرال عمل می‌شود. اشاراتی بر بسیاری از آثار مفقود ارشمیدس در باره هندسه مسطحه وجود دارد و دلیلی در دست است برای اینکه باور کنیم که بعضی از قضایای این آثار در *لیبر اسومپتوروم*^۲ [مأخوذات]، مجموعه‌ای که از طریق اعراب به ما رسیده، حفظ شده است (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۴۰۶). یک نویسنده عرب [عربی نویسنده] برای ادعاست که ارشمیدس کاشف فرمول مشهور،

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

برای مساحت یک مثلث بر حسب سه ضلع آن است. این فرمول سابق برای به هرون اسکندران منسوب می‌شده است.

دو اثر از آثار باقیمانده ارشمیدس به هندسه سه بعدی اختصاص دارند، که عبارت‌اند از درباب کره و استوانه^۳ و درباب شبه مخروطها و شبه کره‌ها^۴. در اولین این دو، که در دو مقاله نگاشته شده و شامل ۶۰ قضیه است، قضایایی ظاهری می‌شوند که مساحت کره و منطقه‌ای با یک

1. Culver Service

2. *Liber assumptorum*

۳. منظور نویسنده کتاب، اپوریخان بیرونی ایرانی است. —

4. *On the Sphere and Cylinder*5. *On Conoids and Spheroids*

قاعدۀ [عرفین] و حجم کره و قطعه‌ای بایک قاعدۀ را می‌دهند (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۲۰۶). در مقاله دوم مسئله تقسیم کره به وسیله صفحه‌ای به دو قطعه که حجم آنها به یک نسبت مفروض باشند، دیده می‌شود. این مسئله به معادله درجه سومی منجر می‌شود که حل آن در متن، به صورتی که به دست مارسیده است، دیده نمی‌شود، ولی توسط ائوتوکوس در یکی از قطعات آثار ارشمیدس پیدا شده است. بحثی درباره شرایطی که تحت آنها معادله درجه سوم دارای یک ریشه حقیقی و مثبت باشد، وجود دارد. این گونه ملاحظات تا متجاوز بر یک هزار سال بعد در ریاضیات اروپایی دیگر ظاهر نمی‌شوند. رساله با دو قضیه جالب به پایان می‌رسد. (۱) اگر V و V' و S و S' حجمهای قطعه‌ها و مساحت‌های منطقه‌هایی باشند که از بریدن کره‌ای به وسیله یک صفحه غیرقطری به وجود می‌آیند، به طوری که V و S به تکه بزرگتر مربوط باشند، در این صورت

$$S^{2/3} : S'^{2/3} < V : V' < S^2 : S'^2.$$

(۲) از بین همه قطعه‌های کروی با یک قاعدۀ که دارای مساحت منطوقی برابر باشند، نیمکره بزرگترین حجم را دارد. رساله در باب شبه مخروطها و شبه کره‌ها مشتمل بر ۴۵ قضیه است، که عمدتاً به تفحصی درباره احجام اجسام درجه دوم می‌پردازد. پاپوس ۱۳ چندوجهی نیمه منظم را به ارشمیدس منسوب نموده، اما متأسفانه شرح خود ارشمیدس از آنها مفقود شده است.*

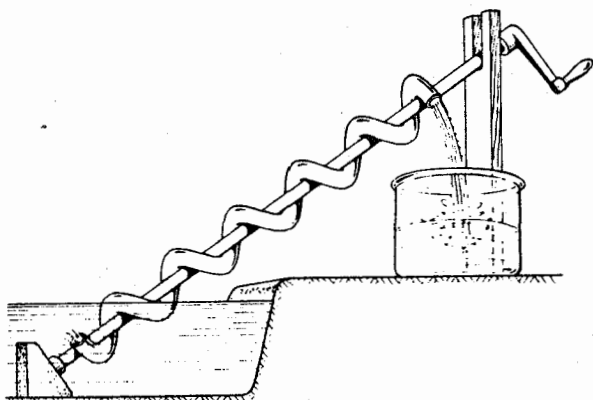
ارشمیدس دو مقاله مربوط به هم درباره حساب نوشته، که یکی از آنها در دست نیست. مقاله موجود، تحت عنوان هاسه شمارا، در خطاب به گلون^۲، پسر شاه هیرون، است، و یک دستگاه حسابی برای نمایش اعداد بزرگ، در یافتن حد بالایی برای تعداد دانه‌های شنی که کره‌ای به مرکز زمین و به شعاع زمین تا خورشید را پر نماید، به کار می‌برد. از میان نکات منقول درباره نجوم در اینجاست که درمی یابیم که آریستارخوس^۳ (حدود ۲۳۰-۳۱۰ ق.م.) نظریه کپرنیکی منظومه شمسی را عرضه کرده بوده است. علاوه بر این دو مقاله راجع به حساب، مسئله موسوم به مسئله گاوها^۴ را داریم، که از تعارفات موجود در آن چنین به نظر می‌رسد که توسط ارشمیدس در خطاب به اراتستن نوشته شده است. مسئله مزبور از مسائل مشکل معادلات سیاله و متضمن هشت مجهول با مقادیر صحیح است که به وسیله هفت معادله خطی به هم مربوط شده‌اند، با این دو شرط اضافی که مجموع یک جفت از مجهولها یک مربع کامل است در حالی که مجموع یک جفت دیگر، یک عدد مثلثی می‌باشد. بدون دو شرط اضافی کوچکترین مقادیر مجهولات اعدادی هستند که سر به

* الگوهای ساختمان برای اجسام ارشمیدی را می‌توان در

Miles C. Hartley, *Patterns of Polyhedra*, rev. ed.

یافت.

1. Sand Reckoner
2. Gelon
3. Aristarchus
4. Cattle Problem



نقشه يك پیچ آبی ارشمیدسی

میلیونها می‌زنند، و باوجود دو شرط اضافی یکی از مجهولات عددی است با بیش از ۲۵۶۵۰۰ رقم!

دو رساله دربارهٔ ریاضیات کاربردی از ارشمیدس در دست است، در باب تعادل در صفحه ۱ و در باب اجسام شناور^۲. اولین این دو، در دو مجلد و شامل ۲۵ قضیه است. در اینجا، ضمن مطالعه‌ای اصل موضوعی، خواص ابتدایی مراکز هندسی و تعیین مراکز هندسی سطوح مسطحهٔ مختلفی دیده می‌شوند، و بایافتن مرکز يك قطعهٔ سهموی و سطحی محدود به يك سهمی و دو وتر موازی خاتمه می‌یابد. کتاب در باب اجسام شناور نیز در دو مقاله است، که شامل ۱۹ قضیه بوده و اولین کاربرد ریاضیات در ئیدروستاتیک می‌باشد. این رساله، که مبتنی بر دو اصل موضوع است، ابتدا آن قوانین آشنای ئیدروستاتیک را که امروزه در يك درس مقدماتی فیزیک با آن روبرو می‌شویم، بسط می‌دهد و سپس چند مسئلهٔ نسبتاً مشکل را مورد تأمل قرار می‌دهد و با تانحص جالب توجهی از وضعیتهای سکون و پایداری قطعهٔ قائمی از يك سهمیوار دوار شناور در يك مایع پایان می‌یابد. ارشمیدس رسالات دیگری هم دربارهٔ فیزیک ریاضی نوشته است، که فعلاً در دست نیستند. به عنوان مثال پاپوس از اثر دباب اهرمها^۳ یاد می‌کند، و ثئون اسکندرانی قضیه‌ای را از اثر دیگری که محتوای آن دربارهٔ خواص آینه‌ها بوده، نقل می‌کند. شاید چنین بوده که در اصل اثر بزرگ‌تری از ارشمیدس وجود داشته که دو مقالهٔ دباب تعادل در صفحه تنها بخشی از آن را تشکیل می‌داده‌اند. تازمان نگارش اثر سیمون استوین^۴ در قرن شانزدهم علم استاتیک و نظریهٔ ئیدروستاتیک از حدی که ارشمیدس بدان رسیده بود، چندان فراتر نرفت.

-
1. On Plane Equilibriums
 2. On Floating Bodies
 3. On Levers
 4. Simon Stevin

یکی از مهیجترین کشفیات اعصار جدید در تاریخ ریاضیات، کشف رساله گمشده ارشمیدس تحت عنوان «روش^۱»، توسط هایبرگ^۲، در قسطنطنیه بود که در سال ۱۹۰۶ روی داد. این رساله به صورت نامه‌ای است خطاب به اراتستن و اهمیت آن به دلیل اطلاعی است که دربارهٔ يك «روش» که ارشمیدس در کشف بسیاری از قضایای خود از آن استفاده کرده، به دست می‌دهد. اگرچه «روش» را امروزه می‌توان به وسیلهٔ اعمال انتگرالگیری امروزی دقیقتر نمود، ارشمیدس «روش» را تنها برای کشف قضایایی به کار برد که بعداً با استفاده از روش افنا آنها را به‌طور دقیقتر ثابت کرد. از آنجا که «روش» با مفاهیم حساب انتگرال ارتباط خیلی نزدیک دارد، بررسی آن را به یکی از فصول آتی [جلد دوم]، که به‌منشأ و توسعهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال اختصاص دارد، واگذار می‌کنیم.

۳-۶ اراتستن

اراتستن از اهالی کورنه در ساحل جنوبی دریای مدیترانه و تنها چند سال جوانتر از ارشمیدس بود. وی سالهای زیادی از اوایل عمر را در آتن گذراند و، وقتی حدود ۴۰ سال داشت، توسط بطلمیوس سوم فرمانروای مصر برای رفتن به اسکندریه به عنوان معلم پسر وی و برای خدمت به عنوان سرکتابدار در دانشگاه آنجا دعوت شد. گفته‌اند که در سنین پیری، در حدود سال ۱۹۴ ق.م. وی از بیماری آماس چشم کور شد و با گرسنگی کشیدن عمدی خود را کشت.

اراتستن به‌طور استثنایی در همهٔ رشته‌های دانش عصر خود صاحب استعداد بود. وی به عنوان ریاضیدان، منجم، مورخ، فیلسوف، شاعر، و ورزشکار مشخص بود. گفته‌اند که دانشجویان دانشگاه اسکندریه وی را پنتاتلوس^۳، یعنی قهرمان پنج رشتهٔ ورزشی می‌خواندند. او را پنتا^۴ نیز نامیده‌اند، و نظراتی در خصوص ریشهٔ احتمالی این لقب، داده شده است. عده‌ای بر این باورند که علت آن دانش وسیع و درخشان وی بوده که باعث شده به وی به نظر يك افلاطون ثانی بنگرند. توضیحی که کمتر التفات آمیز است، آنکه، گرچه وی در زمینه‌های زیادی استعداد داشته اما در هیچیک از رشته‌ها سرآمد معاصرین خود نبوده است؛ به عبارت دیگر، همیشه رتبهٔ دوم را داشته است. هر یک از این توضیحات، وقتی که درمی‌یابیم منجمی به نام آپولونیوس (به احتمال زیاد آپولونیوس پرگاسی^۵) اپسیلون^۶ نامیده می‌شده، تضعیف می‌شود. به این دلیل مورخی به نام جیمز گائو^۷ عقیده دارد که شاید بتا و اپسیلون صرفاً از شماره‌های یونانی (۲ و ۵) محل‌های کار یا اتاقهای درس دانشگاه مختص به این دو، ناشی شده‌اند. از سوی دیگر، بطلمیوس هفایستیوس^۸ مدعی است که آپولونیوس به این دلیل اپسیلون نامیده شده که ماه را، که ع از علامات آن بوده، مورد مطالعه قرار داده است.

-
- | | | | |
|-----------|------------|---------------|-----------------------|
| 1. Method | 2. Heiberg | 3. Pentathlus | 4. Beta |
| 5. Perga | 6. Epsilon | 7. James Gow | 8. Ptolemy Hephaestio |

آثار متعددی از اراتستن توسط نویسندگان بعدی ذکر شده‌اند. قبلاً، در مطالعه مسئله‌ای ۳.۴ (ج)، حل مکانیکی مسئله تضعیف را از وی دیده‌ایم. مهمترین دستاورد علمی او، اندازه‌گیری زمین، در مطالعه مسئله‌ای ۱.۶ (ج) بررسی می‌شود.

از اراتستن در حساب به خاطر شیوه زیر، موسوم به غربال^۱، برای یافتن کلیه اعداد اول کوچکتر از یک عدد مفروض یاد می‌شود. به ترتیب و با شروع از ۳، کلیه اعداد فرد کمتر از n را می‌نویسیم. پس از آن اعداد مرکب دنباله را به صورت زیر غربال می‌کنیم، بعد از ۳، اعداد را سه درمیان، سپس بعد از اولین عدد باقیمانده، یعنی ۵، اعداد را پنج درمیان، سپس بعد از اولین عدد باقیمانده، ۷، اعداد را هفت درمیان، بعد از اولین عدد باقیمانده، یعنی ۱۱، اعداد را یازده درمیان، و الی آخر، خط می‌زنیم. در این روند بعضی از اعداد بیش از یک بار خط می‌خورند. کلیه اعداد باقیمانده، همراه با عدد ۲، فهرست اعداد اول کمتر از n را تشکیل می‌دهند.

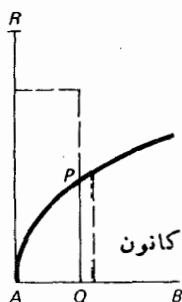
۶-۴ آپولونیوس

اقلیدس، ارشمیدس، آپولونیوس سه غول ریاضی قرن سوم قبل از میلاد هستند. آپولونیوس، که ۲۵ سالگی از ارشمیدس جوانتر بود، در حدود ۲۶۲ ق.م. در پرگا واقع در آسیای صغیر جنوبی متولد شد. اطلاع کمی را که از زندگی آپولونیوس معلوم است به اختصار می‌گوییم. در جوانی به اسکندریه رفت، زیر نظر جانشینان اقلیدس درس خواند، و مدت مدیدی در همانجا ماند. بعداً از پرگاموم^۲، در آسیای غربی، جایی که در همان اوخر دانشگاه و کتابخانه‌ای بر اساس الگوی دانشگاه اسکندریه برپا شده بود، دیدار کرد. او به اسکندریه مراجعت کرد و در همانجا در حدود سال ۲۵۰ ق.م. درگذشت.

گرچه آپولونیوس منجمی برجسته بود و اگر چه در باره موضوعات مختلف ریاضی چیز نوشته است، عامل عمده شهرت وی کتاب برجسته مقاطع مخروطی^۳ اوست، اثری که نام «هندسه‌دان کبیر»^۴ را در بین معاصرانش، برای وی کسب نمود. مقاطع مخروطی آپولونیوس، در هشت مقاله و شامل حدود ۴۰۰ قضیه، تحقیق جامعی است از این مقاطع و جای آثار قبلی منایخموس، آریستایوس^۵، و اقلیدس را در این مبحث می‌گیرد. تنها هفت تا از این هشت مقاله به دست ما رسیده است، چهارتای اول به یونانی و سه‌تای بعد از روی یک ترجمه عربی مربوط به قرن نهم میلادی. چهارم مقاله اول، که از آن میان مقاله‌های I، II، و III از قرار معلوم بر اساس کار قبلی اقلیدس می‌باشند، به نظریه مقدماتی عمومی مقاطع مخروطی می‌پردازند در حالی که مقاله‌های بعدی وقف تحقیقات تخصصی‌تری شده‌اند.

پیش از آپولونیوس، یونانیان مقاطع مخروطی را از سه نوع مخروط دوار، بسته به اینکه زاویه رأس کوچکتر از قائمه، مساوی با آن یا بزرگتر از آن باشد، استخراج

1. sieve
2. Pergamum
3. Conic Sections
4. The Great Geometer
5. Aristaeus



شکل ۴۶

می کردند. با قطع دادن هر يك از این مخروطها باصفحه‌ای عمود بر مولد مخروط، به ترتیب، بیضی، سهمی، و هذلولی نتیجه می شود. تنها يك شاخه هذلولی مورد نظر بود. اما آپولونیوس، در مقاله I رساله خود، همه مقاطع مخروطی را به طریق معمول امروزی از يك مخروط دویادچه مستدیر قائم یا مایل به دست می آورد.

نامهای [یونانی] بیضی، سهمی، و هذلولی به وسیله آپولونیوس داده شده، و از اصطلاحات قدیمی فیثاغورسی مربوط به اضافه کردن مساحتها اخذ شده است. وقتی که فیثاغورسیان مستطیلی را بر پاره خطی اضافه می کردند (یعنی، قاعده مستطیل را در روی پاره خط می نهادند، به طوری که یکی از دوسر قاعده بريك انتهای پاره خط منطبق می شد)، می گفتند که حالتی از «الیپسیس»^۱ [ناقص]، «پارابوله»^۲ [مکافی] یا «هوپربوله»^۳ [زیاد] را دارند، بسته به اینکه قاعده مستطیل مضاف کوناثر از پاره خط، دقیقاً منطبق بر آن، یا افزون بر آن بود. حال فرض کنید که AB محور اصلی مقطع مخروطی، P نقطه دلخواهی بر مقطع مخروطی، و Q پای عمود وارد بر AB از P باشد (نگاه کنید به شکل ۴۶). در A ، که یکی از رئوس مقطع مخروطی است، عمودی بر AB رسم کرده و بر آن طولی مانند AR برابر آنچه امروزه آن را لاتوس (کتوم)^۴ [ضلع قائم]، یا پارادوتر p ، مقطع مخروطی می نامیم، جدا کنید. بر پاره خط AR ، مستطیلی اضافه کنید که AQ يك ضلع آن و PQ مساحت آن باشد. بسته به اینکه مضاف کوناثر از پاره خط AR ، منطبق بر آن یا زیادتر از آن باشد، آپولونیوس مقطع مخروطی را يك الیپسیس^۵ [بیضی]، يك پارادابولا^۶ [سهمی]، یا يك هیپربول^۷ [هذلولی] می نامد. به عبارت دیگر، اگر منحنی را نسبت به يك دستگاه مختصات دکارتی که محورهای x و y آن به ترتیب در امتداد AB و AR است، در نظر بگیریم، و اگر مختصات P را با x و y نشان دهیم، در این صورت منحنی يك بیضی، سهمی، یا هذلولی

است، بسته به اینکه $px \geq y^2$ در واقع در مورد بیضی و هذلولی،

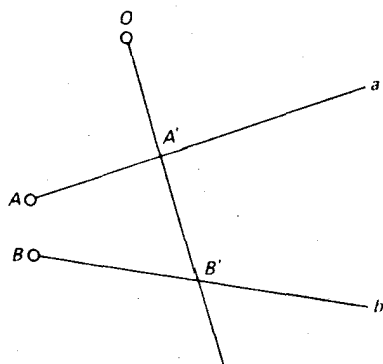
- | | | | |
|-------------|-------------|--------------|-----------------|
| 1. ellipsis | 2. parabole | 3. hyperbole | 4. latus rectum |
| 5. ellipse | 6. parabola | 7. hyperbola | |

$$y^2 = px \mp \frac{px^2}{d},$$

که در آن d طول قطر مار بر رأس A است. آپولونیوس، قسمت عمده هندسه مقاطع مخروطی را از معادله‌های هندسی این معادلات دکارتی استخراج می‌کند. حقایقی از این قبیل سبب دفاع عسده‌ای از این فرضیه می‌شود که هندسه تحلیلی از اختراعات یونانیان بوده است.

مقاله II رساله آپولونیوس درباره مقاطع مخروطی به خواص مجانبها و هذلولیهای مزدوج، و رسم مماسها می‌پردازد. مقاله III حاوی طبقه‌بندی از قضاهاست. در اینجا مثلاً قضایایی درباره سطوح وجود دارند نظیر: اگر مماسهای يك مقطع مخروطی در هر دو نقطه دلخواه A و B در C متقاطع بوده، و نیز قطرهای مادبر B و A را در D و E قطع کنند، در این صورت مثلثهای CBD و CAE از نظر مساحت برابرند. در اینجا همچنین خواص همساز قطبها و قطبها (موضوعی که برای آنها که درسی مقدماتی در هندسه تصویری داشته‌اند، آشناست) و قضایایی راجع به حاصلضرب قطعات وترهای متقاطع را می‌توان دید. به‌عنوان مثالی از مطلب اخیر قضیه زیر را داریم (که امروزه گاهی قضیه نیوتون نامیده می‌شود): اگر دو وتر PQ و MN ، موازی با دو امتداد مفروض، یکدیگر را در O قطع کنند، در این صورت $(MO)(ON) / (PO)(OQ)$ مقدار ثابتی مستقل از وضعیت O است. خواص کانونی مشهور مخروطیهای مرکزدار [بیضیها و هذلولیها] در انتهای مقاله III کتاب مزبور ظاهر می‌شوند. در سرتاسر رساله، نه ذکری از خاصیت کانون - هادی مقاطع مخروطی در میان است و نه، از این نظر، از کانون سهمی صحبتی می‌شود. این مایه شگفتی است چرا که، به عقیده پاپوس، اقلیدس از این خواص مطلع بوده است. مقاله IV رساله، عکس برخی از قضایای مقاله III درباره خواص همساز قطبها و قطبها را ثابت می‌کند. قضایایی نیز درباره زوج مقاطع مخروطی متقاطع وجود دارد. از این مقاله‌های باقیمانده از آپولونیوس مقاله V از همه مهمتر و بدیعتر است. این مقاله به بررسی قائمهای می‌پردازد که به عنوان پاره‌خطهای ماکسیم یا مینیم مرسوم از نقطه‌ای بر يك منحنی در نظر گرفته می‌شوند. ساختمان و شمارش قائمهای مرسوم از يك نقطه مفروض در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته‌اند. موضوع تا به‌جایی پیش برده شده است که می‌توان معادلات دکارتی گسترده‌های (پوشهای قائمهای) سه مخروطی را نوشت! مقاله VI مشتمل بر قضایا و مسائل ساختمان درباره مخروطیهای متساوی و مشابه است. مثلاً نشان داده شده است که چگونه در يك مخروط قائم مفروض می‌توان مقطعی برابر با يك مقطع مخروطی مفروض یافت. مقاله VII شامل تعدادی قضایا متضمن اقطار مزدوج است، مثل ثابت بودن مساحت متوازی‌الاضلاعی که از خطوط مماس بر دو سر دو قطر مزدوج در يك مقطع مخروطی مرکزدار تشکیل می‌شود.

مقاطع مخروطی رساله بزرگی است، اما، به‌علت وسعت و وسواس در بیان و غیرعادی بودن عبارات بسیاری از قضایای پیچیده آن، خواندنش تا حدی سخت است. حتی از توضیح



شکل ۴۷

خلاصه مندرجات آن در فوق، ملاحظه می‌شود که رساله مزبور خیلی کاملتر از دروس امروزی معمول در دانشگاهها در این مبحث است.

پاپوس نشانه‌های مختصری از مندرجات شش اثر دیگر آپولونیوس داده است. این آثار عبارت اند از در باب قطعهای متناسب^۱ (۱۸۱ قضیه)، در باب قطع فاصله‌ای^۲ (۱۲۴ قضیه)، در باب قطع معین^۳ (۸۳ قضیه)، تماسها^۴ (۱۲۴ قضیه)، گرایشها^۵ (۱۲۵ قضیه)، و مکانهای مسطح^۶ (۱۴۷ قضیه). از میان اینها فقط اولی باقی مانده که به عربی است. این اثر به مسئله کلی زیر می‌پردازد. (نگاه کنید به شکل ۴۷): دو خط a و b با دو نقطه ثابت A بر a و B بر b مفروض‌اند، بر نقطه مفروض O باید خطی مانند $OA'B'$ رسم شود که a را در A' و b را در B' قطع کند به طوری که $AA'/BB' = k$ یک ثابت مفروض است. جامعیت مطالعه با این حقیقت مشخص می‌شود که آپولونیوس ۷۷ حالت مجزا را در نظر می‌گیرد. اثر دوم، مسئله مشابهی را مورد رسیدگی قرار داده، با این تفاوت که در اینجا می‌خواهیم داشته باشیم، $(AA')(BB') = k$. اثر سوم، مسئله زیر را مورد تأمل قرار می‌دهد: با چهار نقطه A, B, C, D مفروض بر یک خط، باید نقطه‌ای مانند P بر خط پیدا کنیم به طوری که داشته باشیم $(AP)(CP)/(BP)(DP) = k$. اثری که درباره تماسها است به مسئله رسم دایره‌ای مماس بر سه دایره مفروض می‌پردازد که در آن دایره‌های مفروض می‌توانند به طور مستقل به خطوط مستقیم یا به نقاط تبدیل شوند. این مسئله که اکنون به مسئله آپولونیوس معروف است، ریاضیدانان زیادی، از جمله ویت، اوپلر، و نیوتن را به خود جلب کرده است. یکی از اولین راه‌حلها که هندسه دکارتی جدید را به کار برده به وسیله

- | | |
|-----------------------------|-----------------------|
| 1. On Proportional Sections | 2. On Spatial Section |
| 3. On Determinate Section | 4. Tangencies |
| 6. Plane Loci | 5. Vergings |

شاگرد دکارت، پرنسس الیزابت^۱، دختر فردریک^۲ پنجم، بوهم^۳ داده شده است. احتمالاً زیباترین راه حل همان است که به وسیله افسر توپخانه و استاد ریاضی فرانسوی، ژوزف دیه‌ژرگون^۴ (۱۸۵۹-۱۷۷۱) داده شده است. مسئله کلی در گرایشها عبارت بود از درج پاره‌خطی بین دو مکان مفروض به طوری که محمل این پاره‌خط از نقطه مفروض بگذرد.

آخرین اثر، مکانهای مسطح، از جمله موارد دیگر، شامل دو قضیه زیر است:
 ۱. اگر A و B نقاط ثابت و k ثابت مفروضی باشد، در این صورت مکان هندسی نقطه‌ای مانند P ، به طوری که $AP/BP = k$ ، یا یک دایره است (اگر $k \neq 1$) یا یک خط مستقیم (اگر $k = 1$).

۲. اگر A و B و ... نقاط ثابت و a, b, \dots, k مقادیر ثابت مفروض باشند، در این صورت مکان هندسی نقطه‌ای مانند P ، به طوری که $a(AP)^2 + b(BP)^2 + \dots = k$ ، یک دایره است. دایره (۱) در کتابهای جدید هندسه دانشگاهها به دایره آپولونیوس معروف است.

کوششهایی برای احیای هر شش اثر بالا به عمل آمده است: دو اثر اول به وسیله آدموند هالی^۵ در سال ۱۷۵۶، سومی به وسیله رابرت سیمن در سال ۱۷۴۹، چهارمی به وسیله ویت در سال ۱۶۵۵، پنجمی به وسیله گتالدی^۶ در سالهای ۱۶۰۷ و ۱۶۱۳، آلکساندر اندرسون^۷ در سال ۱۶۱۲، و سموئل هورسلی^۸ در سال ۱۷۷۵، و آخری توسط فرما در سال ۱۶۳۷ و به طور کاملتر، به وسیله سیمن در سال ۱۷۴۶. علاوه بر این شش اثر، به کتابهای مفقود دیگری از آپولونیوس توسط نویسندگان قدیمی اشاره شده است.

۵-۶ هیپارخوس، منلائوس، بظلمیوس، و مثلثات یونانی

منشأ مثلثات نامعلوم است. مسائلی در پاپیروس ریند وجود دارند که متضمن کتانژانت فرجه‌های قاعده هرم می‌باشند، و همچنان که در بخش ۲-۶ دیدیم، لوح میخی بابلی پلیمپتن ۳۲۲ اساساً شامل جدول مهمی از سکانتهاست. شاید تحقیقات جدید در ریاضیات بین‌النهرین باستان بسط قابل ملاحظه مثلثات عملی را آشکار کند. منجمین بابلی قرنهای چهارم و پنجم ق.م. حجم معتنا بیهی از داده‌های رصدی را گرد آورده بودند، و اکنون معلوم شده است که مقدار زیادی از این اطلاعات به یونانیان منتقل گردیده بوده است. این نجوم اولیه بود که مثلثات کروی را به وجود آورد.

احتمالاً برجسته‌ترین منجم عهد باستان هیپارخوس^۹ [ابرخس] بوده، که در حدود ۱۴۵ ق.م. رونق یافت. گرچه رصدی از اعتدال ربیعی توسط هیپارخوس در ۱۴۶ ق.م.

- | | | |
|-------------------------|-------------------|---------------|
| 1. Princess Elizabeth | 2. Frederick | 3. Bohemia |
| 4. Joseph-Diez Gergonne | 5. Edmund Halley | 6. Ghetaldi |
| 7. Alexander Anderson | 8. Samuel Horsley | 9. Hipparchus |

در اسکندریه ثبت شده است، مهمترین رصدهای وی در رصدخانه مشهور مرکز تجارتنی رودس انجام شده است. هیپارخوس رصدگری بینهایت دقیق بود، و در نجوم، باکارهای برجسته‌ای مانند تعیین طول متوسط یک ماه قمری با تقریب کمتر از ۱" نسبت به مقادیر قابل قبول امروزی، محاسبه دقیقی از میل دایره البروج و کشف و برآورد تقدیم اعتدالین سالانه اعتبار یافته است. گفته اند که وی اختلاف منظر ماه را نیز محاسبه کرده، حضيض و حرکت متوسط ماه را تعیین کرده، و ۸۵۰ ستاره ثابت را فهرست کرده است. هیپارخوس، یا شاید هیپسکلِس^۲ (حدود ۱۸۰ ق.م.)، تقسیم یک دایره به ۳۶۰ را در یونان متداول کرد، و به جانبداری از تعیین موضع نقاط روی زمین به کمک عرض و طول جغرافیایی معروفیت یافته است. آگاهی به این دستاوردها جنبه دست دوم دارد، زیرا تقریباً هیچیک از نوشته‌های هیپارخوس به دست ما نرسیده است.

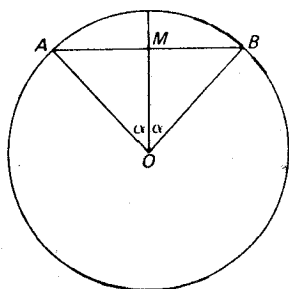
با این حال، مهمتر از دستاوردهای هیپارخوس در نجوم، نقشی است که وی در بسط مثلثات ایفا کرده است. شارح قرن چهارم، تئون اسکندرانی، یک رساله ۱۲ مقاله‌ای راجع به تشکیل جدول و ترها را به هیپارخوس منسوب نموده است. جدولی که بعداً توسط کلاودیوس بطلمیوس داده شده و تصور می‌شود که از رساله هیپارخوس اخذ شده باشد، طول وترهای همه زوایای مرکزی دایره مفروضی را با فاصله‌های نیم درجه و از $\frac{1}{4}^{\circ}$ تا ۱۸۰° می‌دهد. شعاع دایره به ۶۰ قسمت مساوی تقسیم می‌شود و سپس طول وترها در دستگاه شصتگانی بر حسب یکی از این قسمت‌ها به عنوان واحد بیان می‌شوند. مثلاً، با استفاده از نماد $\text{crd } \alpha$ [وتر α] برای نمایش دادن طول وتر یک زاویه مرکزی مانند α ، مواردی نظیر

$$\text{crd } ۳۶^{\circ} = ۳۷^{\circ}۲۴'۵۵''$$

دیده می‌شوند، که البته بدین معنی است که وتر یک زاویه مرکزی ۳۶° برابر است با $۳۷/۶۰$ (یا $۳۷/۶۰$ قسمت جزء) شعاع، به اضافه $۴/۶۰$ یکی از این قسمت‌های جزء، به اضافه $۵۵/۳۶۰۰$ دیگری از قسمت‌های جزء. از شکل ۴۸ دیده می‌شود که جدول وترها معادل است با جدول سینوسهای مثلثاتی، زیرا

$$\sin \alpha = \frac{AM}{OA} = \frac{AB}{\text{قطر دایره}} = \frac{\text{crd } ۲\alpha}{۱۲۰}$$

بنابراین جدول وترهای بطلمیوس، اساساً، سینوسهای زوایا را با فاصله‌های $۱۵'$ ، از ۰° تا ۹۰° می‌دهد. طرز محاسبه این طول و ترها، که به طریقه زیبایی به وسیله بطلمیوس تشریح شده، به احتمال زیاد بر هیپارخوس معلوم بوده است. شواهد نشان می‌دهند که هیپارخوس از جدول خود منظم‌اً استفاده کرده و از معادله‌های چندین فرمول که امروزه در



شکل ۴۸

حل مثلثهای قائم‌الزاویهٔ کروی به کار می‌روند، مطلع بوده است.

تئون همچنین از یک رسالهٔ شش مقالهای دربارهٔ وترهای یک دایره که به وسیلهٔ منلائوس^۱ اسکندرانی، یکی از معاصرین پلوتارک^۲ (حدود ۱۰۰ ب. م.)، نوشته شده، یاد کرده است. این اثر، همراه با آثار گوناگون دیگری از منلائوس، مفقود شده‌اند. با این حال، خوشبختانه رسالهٔ سه مقالهای منلائوس، اسفایریکا^۳ [اکسرا]، به زبان عربی محفوظ مانده است. این اثر به طرز قابل توجهی بسط یونانی مثلثات را روشن می‌کند. در مقالهٔ I، تعریف مثلث کروی برای اولین بار ظاهر می‌شود. این مقاله به اثبات تعداد زیادی از قضایایی که اقلیدس در مورد مثلثهای مسطحه ثابت نموده، برای مثلثهای کروی اختصاص دارد، مانند قضایای همنهشتی معمولی [= تساوی]، قضایایی دربارهٔ مثلثهای متساوی‌الساقین و غیره. علاوه بر آن همنهشتی دو مثلث کروی که زوایای یکی برابر زوایای دیگری است (که مشابهی برای آن در صفحه نیست)، و این حقیقت که مجموع زوایای یک مثلث کروی بزرگتر از دو قائمه می‌باشد، اثبات شده است. مثلثهای کروی مقارن همنهشت تلقی شده‌اند. مقالهٔ II شامل قضایای مورد نظر در نجوم است. در مقالهٔ III مثلثات کروی ضربها بسط یافته، که عمدتاً از حالت کسروی قضیه پرتوانی که برای دانشجویان هندسهٔ دانشگاهی به عنوان قضیهٔ منلائوس معروف است، استنتاج شده است: اگر خط قاطعی اضلاع BC ، CA ، AB مثلثی مانند ABC را به ترتیب در نقاط L و M و N قطع کند، آنگاه

$$\left(\frac{AN}{NB}\right)\left(\frac{BL}{LC}\right)\left(\frac{CM}{MA}\right) = -1.$$

در مشابه کروی آن، دایرهٔ عظیمهٔ قاطعی اضلاع BC و CA و AB یک مثلث کروی مانند ABC را به ترتیب در نقاط L و M و N قطع می‌کند. در این صورت نتیجهٔ متناظر معادل است با

$$\left(\frac{\widehat{\sin AN}}{\widehat{\sin NB}}\right) \left(\frac{\widehat{\sin BL}}{\widehat{\sin LC}}\right) \left(\frac{\widehat{\sin CM}}{\widehat{\sin MA}}\right) = -1.$$

حالت مسطحه به وسیله منلائوس معلوم فرض شده و توسط وی برای اثبات حالت کروی به کار رفته است. مقدار زیادی از مثلثات کروی را می توان از این قضیه، با اختیار کردن مثلثها و قاطعهای خاص نتیجه گرفت. عکس قضیه هم، چه در حالت مسطحه و چه در حالت کروی درست است.

اثر کامل یونانی در نجوم توسط کلاودیوس بطلمیوس اسکندرانی در حدود ۱۵۰ ب.م. نوشته شد. این رساله بسیار پر نفوذ، که سوفتاکسیس ماثماتیکا، یا «مجموعه ریاضی» نامیده می شود، بر نوشته های هیپارخوس مبتنی است و به خاطر فشردگی و زیبایی چشمگیرش مورد توجه است. برای متمایز ساختن آن از سایر آثار کم اهمیت تر نجوم، شارحین بعدی صفت عالی مگیسته^۱ [مجسطی]، یا «بزرگترین» را به آن نسبت داده اند. بعداً نیز، مترجمین عرب حرف تعریف عربی ال را پیشوند آن کردند، و از آن به بعد این اثر با عنوان المجسطی معروف شده است. این رساله مشتمل بر سیزده مقاله است. مقاله I، علاوه بر برخی مطالب مقدماتی نجومی، شامل جدول وترهاست که در بالا به آن اشاره شد، همراه با توضیح مجملی از استخراج آن از قضیه هندسی پرباری که اکنون به قضیه بطلمیوس معروف است: در یک چهار ضلعی محاطی حاصلضرب قطرهای برابر است با مجموع حاصلضربهای اضلاع مقابل (نگاه کنید به مطالعه مسئله ای ۹.۶). مقاله II پدیده هایی را بررسی می کند که بستگی به کرویت زمین دارند. مقاله های III، IV، و V دستگاه زمین مرکزی نجوم را به کمک افلاک تدویر مطرح می کنند. در مقاله IV راه حلی از مسئله سه نقطه مساحی دیده می شود: تعیین نقطه ای که از آن، سه نقطه مفروض دو به دو تحت زوایای مفروضی دیده می شوند. این مسئله، سابقه ای طولانی داشته است و گاهی «مسئله اسنل» (۱۶۱۷) یا «مسئله پوتنوت»^۲ (۱۶۹۲) به آن اطلاق می شود. در مقاله VI، که نظریه بیضیها را عرضه می کند، مقدار π تا چهار رقم اعشار که در بخش ۴-۸ به آن اشاره شد، یافت می شود. مقاله های VII و VIII به فهرست ۱۰۲۸ ستاره ثابت اختصاص یافته اند. مقاله های دیگر به سیارات اختصاص دارند. المجسطی تا زمان کپرنیک^۳ و کپلر به عنوان یک اثر استانده در نجوم باقی ماند.

بطلمیوس در باب تصویر کردن نقشه ها (نگاه کنید به مطالعه مسئله ای ۱۰.۶)، نور-شناسی، و موسیقی نوشته هایی دارد. وی همچنین اقدام به استخراج اصل موضوع پنجم (یا توازی) اقلیدس از سایر اصول متعارفی و اصول موضوعه اصول، در تلاش بیهوده ای برای حذف این اصل موضوع از فهرست مفروضات اولیه اقلیدس، کرده است.

۶-۶ هرون

از دیگر کسانی که در ریاضیات کاربردی کار می‌کردند و به این دوره تعلق دارند، هرون اسکندران است. زمان زندگی او که درباره آن گفته‌ها بسیار متفاوت بود و از ۱۵۰ ق.م. تا ۲۵۰ ب.م. را در برمی‌گرفت، اخیراً به طرز موجهی در نیمه دوم قرن اول ب.م. قرار داده شده است. آثار وی در موضوعات ریاضی و فیزیکی آن چنان متعدد و گوناگون‌اند که معمولاً وی را نویسنده دایرةالمعارفی در این زمینه‌ها توصیف می‌کنند. دلایلی در دست است دایره بر اینکه وی را يك مصری با تعلیمات یونانی بینگاریم. به هر صورت نوشته‌های وی، که اغلب به استفاده عملی توجه دارد تا به کمال نظری، آمیختگی غربی از نوشته‌های یونانی و شرقی را نشان می‌دهند. وی کار زیادی برای تهیه يك شالوده علمی برای مهندسی و مساحی زمین انجام داد. در حدود چهارده رساله از هرون، که بعضی از آنها مسلماً به مقدار زیادی تنقیح شده‌اند، به دست ما رسیده است؛ و اشاراتی هم به آثار مفقود شده بیشتری رفته است.

آثار هرون را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد، هندسی و مکانیکی. آثار هندسی عمدتاً به مسائل اندازه‌گیری زمین و آثار مکانیکی به توصیف آلات مکانیکی استادانهای می‌پردازند.

مهمترین اثر هندسی هرون هتريکا^۱ است، که در سه مقاله نوشته شده و به وسیله ر. شون^۲ در سال ۱۸۹۶ در قسطنطنیه کشف شده است. مقاله [به اندازه‌گیری مساحت مربعها، مستطیلهها، مثلثها، وزونقه‌ها، و انواع مختلف چهار ضلعیهای خاص دیگر، چند ضلعیهای منتظم، از مثلث متساوی الاضلاع گرفته تا دوازده ضلعی منتظم، دایره‌ها و قطعه‌های آنها، بیضیها، قطعه‌های سهموی، و سطوح استوانه، مخروط، کره، و منطقه‌های کروی می‌پردازد. در این مقاله است که استخراج زیرکانه فرمول مساحت يك مثلث بر حسب سه ضلع آن را می‌یابیم (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۱۱۰۶ (د)). نکته دیگری در این مقاله که از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، روش هرون در یافتن جذر تقریبی اعداد صحیح غیر مربع است. این عبارت از فرایندی است که امروزه اغلب به وسیله کامپیوترها به کار گرفته می‌شود، یعنی: اگر $n = ab$ ، آنگاه \sqrt{n} با $(a+b)/2$ تقریب زده می‌شود، که تقریب با میزان نزدیکی a به b بهبود می‌یابد. این روش تقریبات متوالی را مقدور می‌سازد. مثلاً، اگر a_1 تقریب اولیه‌ای برای \sqrt{n} باشد، آنگاه

$$a_2 = \frac{a_1 + \frac{n}{a_1}}{2}$$

تقریب بهتری است، و

$$a_2 + \frac{n}{a_2}$$

$$a_2 = -\frac{p}{q}$$

بهرتر از آن است، و قس علی هذا. مقاله II هتريکا به اندازه گیری حجم مخروط، استوانه، متوازی السطوح، منشور، هرم، مخروط و هرم ناقص، کره، قطعه کروی، چنبره، اجسام منظم پنجگانه، و برخی منشور نماها می بردارد (نگاه کنید به مطالعه مسئله ای ۱۱۰۶ (ز)). مقاله III با تقسیم برخی سطوح و احجام معین به قسمت هایی با نسبت های مفروض سروکار دارد. ما چنین مسائلی را در مطالعه مسئله ای ۱۱۰۳ (ب) و ۱۱۰۳ (ج) دیده ایم.

در کتاب پنوها تیکا^۱ هرون توصیفات ای از حدود ۱۵۰ ماشین و بازیچه، نظیر سیفون [صفاره]، ماشین اطفای حریق، آلتی برای باز کردن درهای معابد با آتش در محراب، و یک ارگ بادی دیده می شود. اثر وی به نام دیوپترا^۲ اختصاص به توصیف و کار بردهای مهندسی یک شکل قدیمی از تودولیت، یا زاویه یاب مساحی دارد. در کاتوپتیکا^۳، خواص مقدماتی آینه ها و مسائل راجع به ساختن آینه هایی با خواص معین، مثلاً برای اینکه شخصی پشت سر خود را ببیند یا وارونه دیده شود، و از این قبیل، یافت می شود. آثار هرون در مکانیک نشانه درک عالی وی از اصول اساسی مهم این رشته است.

۶-۷ جبر یونان باستان

در سال ۱۸۴۲، گگ. ه. ف. نسلمان^۴، به طرز مناسبی سه مرحله را در توسعه تاریخی نماد گذاری جبری مشخص کرد. اول، جبر لفظی [یا بیانی] را داریم، که در آن حل یک مسئله، بدون علائم اختصاری یا نمادها، به شکل استدلالی به نثر خالص نوشته می شود. پس از آن جبر تلخیصی می آید، که در آن علائم اختصاری برای بعضی از کمیتها و اعمالی که اغلب تکرار می شوند، اختیار می شود. سرانجام، به عنوان آخرین مرحله، جبر علامتی را داریم، که در آن راه حلها عمدتاً به صورت نوعی تند نویسی ریاضی ظاهر می شوند، که مشکل است از نمادهایی که ارتباط ظاهری کمی با آنچه که معرف آن می باشند، دارند. نسبتاً صحیح است اگر بگوییم که تمام جبر پیش از دیوفانتوس (که درباره وی در بخش ۶-۸ صحبت خواهد شد) لفظی بوده است. یکی از برجسته ترین کارهای دیوفانتوس در ریاضیات، تلخیصی کردن جبر یونانی بود. با این حال جبر لفظی در دیگر جاهای دنیا، بجز در هند، به صورتی کاملاً عمومی برای چندین صدسال دوام آورد. بالاخص، در اروپای غربی، قسمت اعظم جبر تا قرن پانزدهم لفظی باقی ماند. جبر علامتی در اروپای غربی برای اولین بار در قرن شانزدهم ظاهر شد، اما تا اواسط قرن هفدهم متداول نگردید. خیلی ها نمی دانند که قسمت زیادی از علائم موجود در کتابهای جبر مقدماتی کنونی کمتر از چهار صد سال

1. *Pneumatica* 2. *Dioptra* 3. *Catoptrica*
4. G. H. F. Nesselmann

عمر دارند.

یکی از مهمترین منابع ما در مسائل جبر یونانی قدیم، مجموعه‌ای است معروف به آنتولوژی [جنگک] پالاتین^۱، یا یونانی. این کتاب شامل گروهی از ۴۶ مسئله عددی به شکل معما است، که حدود ۵۰۰ ب.م. توسط مترودوروس^۲ دستوردان جمع آوری شده است. گرچه بعضی از مسائل ممکن است از خود مؤلف باشند، دلایل کافی وجود دارد که بپذیریم بسیاری از این مسائل ریشه کاملاً قدیمیتری داشته‌اند. این مسائل ظاهراً به منظور تفریح فکری، از نوعی هستند که افلاطون به آنها اشاره کرده و شباهت نزدیکی به برخی از مسائل پایروس ریند دارند. نصف آنها منجر به معادلات خطی ساده‌ای بر حسب یک مجهول می‌گردند، یک دوجین دیگر به دستگاه معادلاتی بر حسب دو مجهول، یکی به سه معادله با سه مجهول، و یکی به چهار معادله با چهار مجهول؛ و در دو مورد معادلات سیاله درجه اول وجود دارند. تعدادی از مسائل بسیار شبیه به اغلب مسائلی هستند که در کتابهای جبر مقدماتی امروزی دیده می‌شوند. چند مثال از آنتولوژی یونانی در مطالعه‌های مسئله‌ای ۱۳۰۶ و ۱۴۰۶ داده شده‌اند. اگرچه این مسائل با نمادهای جبری امروزی به سادگی حل می‌شوند، باید تصدیق کرد که حل لفظی آنها مستلزم تمرکز ذهنی کاملاً دقیقی است. خاطر نشان شده است که بسیاری از این مسائل را می‌توان با جبر هندسی فوراً حل نمود، ولی اعتقاد بر این است که در واقع آنها به طریقه حساسی، شاید با به کار بردن قاعده امتحان و تصحیح (نگاه کنید به بخش ۲-۸)، حل شده بودند. اینکه دقیقاً در چه زمانی جبر یونانی از شکل هندسی به حسابی تغییر یافته، معلوم نیست؛ اما احتمالاً این امر در حوالی عصر اقلیدس بوده است.

۸-۶ دیوفانتوس

از کسانی که اهمیت وافری در بسط جبر و تأثیری عظیم بر دانشمندان اروپایی نظریه اعداد داشتند، دیوفانتوس^۳ اسکندرانی بود. دیوفانتوس، همچون هرون، ریاضیدان دیگری با تاریخ ولایت نامعلوم است. گرچه شواهد ضعیفی وجود دارند مبنی بر اینکه وی شاید از معاصرین یا تقریباً از معاصرین هرون بوده، اغلب مورخین مایل اند که او را در قرن سوم عصر حاضر قرار دهند. سوای این حقیقت که او در اسکندریه رونق یافته چیزی قطعی درباره وی معلوم نیست، گرچه معمایی در آنتولوژی یونانی وجود دارد که کمی از جزئیات زندگی وی از آن مستفاد می‌شود (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۱۵۰۶ (الف)).

دیوفانتوس سه اثر نوشته است: آریتمتیکا^۴، مهمترین اثر وی که ۶ مقاله از ۱۳ مقاله آن باقی است، درباره اعداد چند ضلعی^۵، که تنها قطعه‌ای از آن باقی است، و پودیسماها، که مفقود شده است. آریتمتیکا شارجین زیادی داشته، اما این رگیومونتانوس^۶ بود که در

-
1. *Palatine Anthology*
 2. *Metrodorus*
 3. *Diophantus*
 4. *Arithmetica*
 5. *On Polygonal Numbers*
 6. *Regiomontanus*

سال ۱۴۶۳، برای ترجمه لاتین متن موجود یونانی دعوت به عمل آورد. ترجمه شایسته‌ای از آن، همراه با شرح، در ۱۵۷۵ توسط کسیلاندر^۱ (نامی یونانی که ویلهلم هولسمان^۲، استادی در دانشگاه هایدلبرگ^۳ اختیار کرده بود) انجام شد. این ترجمه به نوبه خود توسط باشه دومزیریاک^۴ فرانسوی مورد استفاده قرار گرفت، و وی در ۱۶۲۱ اولین چاپ متن یونانی را همراه با ترجمه لاتین و حاشیه‌هایی بر آن منتشر کرد. چاپ دومی، که با بی‌مبالاتی صورت گرفته بود، در ۱۶۷۵ انتشار یافت، و از نظر تاریخی بدان سبب اهمیت دارد که حواشی نوشته شده توسط فرما را، که انگیزه تحقیقات گسترده‌ای در نظریه اعداد شد، شامل می‌شد. ترجمه‌های فرانسوی، آلمانی، و انگلیسی بعداً ظاهر شدند.

آریشمتیکا یک بررسی تحلیلی از نظریه جبری اعداد است و دلالت بر نبوغ مؤلف آن در این زمینه دارد. بخش موجود این اثر به حل حدود ۱۳۵ مسئله، که تنوع قابل ملاحظه‌ای دارند، اختصاص یافته است، و منجر به معادلاتی از درجه اول و دوم می‌شوند. در این اثر حالت بسیار خاصی از معادله درجه سوم حل شده است. مقاله اول به معادلات معین با یک مجهول مربوط است، و مقاله‌های دیگر به معادلات نامعین [سیاله] از درجه دوم، و گاهی بیشتر، با دو یا سه مجهول می‌پردازند. آنچه قابل توجه است فقدان روشهای کلی، و کاربردهای مکررتدا بیرهوشمندانه‌ای است که به اقتضای هر مسئله طرح می‌شوند. دیوفانتوس تنها جوابهای گویای مثبت را قبول داشت و، در اغلب حالات، فقط به یک جواب برای مسئله قانع بود.

چند قضیه مؤثر درباره اعداد در آریشمتیکا وجود دارند. مثلاً، بدون برهان ولی با اشاراتی به پودیسماها، گفته می‌شود که تفاضل دو مکعب گویا مجموع دو مکعب گویا نیز هست. مطلبی که بعداً توسط ویت، باشه، و فرما تحقیق شد. قضایای زیادی درباره نمایش اعداد به صورت مجموع دو، سه، یا چهار مربع وجود دارند، این زمینه تحقیق بعدها به وسیله فرما، اوپلر، و لاگرانژ^۵ تکمیل شد. شاید ذکر برخی از مسائلی که در آریشمتیکا دیده می‌شوند، جالب باشد، همه آنها جذاب و بعضی از آنها مستلزم تلاش فراوان هستند. باید در نظر داشت که منظور از «عدد»، «عدد مثبت گویا» است.

مسئله ۲۸، مقاله II: دو عدد مربع کامل بیابید که اگر حاصلضرب آنها بر هر یک از آنها افزوده شود، یک مربع کامل عاید نماید (جواب دیوفانتوس: $(\frac{3}{4})^2$ ، $(\frac{7}{24})^2$).
مسئله ۶، مقاله III: سه عدد پیدا کنید که مجموع آنها یک مربع کامل و مجموع هر زوج آنها یک مربع کامل باشد (جواب دیوفانتوس: ۸۵، ۳۲۵، ۴۱).
مسئله ۷، مقاله III: سه عدد که تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند، پیدا کنید که مجموع

1. Xylander
2. Wilhelm Holzmann
3. Heidelberg
4. Bachet de Méziriac
5. Lagrange

* شماره گذاری این مسائل به همان ترتیبی است که ت. ل. هیت در *Diophantus of Alexandria* چاپ دوم، به کار برده است.

هر زوج از آنها يك مربع كامل باشد (جواب دیوفانتوس: $\frac{1}{4} \cdot 120$ ، $\frac{1}{4} \cdot 840$ ، $\frac{1}{4} \cdot 1560$). مسئله ۱۳، مقاله III: سه عدد پیدا کنید که وقتی حاصلضرب هر دو تا از آنها به سوی افزوده شود، حاصل يك مربع كامل باشد (نگاه کنید به مطالعه مسئله ای ۱۶.۶ (د)). مسئله ۱۵، مقاله III: سه عدد پیدا کنید که اگر حاصلضرب هر دو تا از آنها به مجموع آن دو افزوده شود، حاصل يك مربع كامل باشد (نگاه کنید به مطالعه مسئله ای ۱۶.۶ (د)). مسئله ۱۰، مقاله IV: دو عدد پیدا کنید که مجموع آنها برابر با مجموع مکعبات آنها باشد (جواب دیوفانتوس: $\frac{5}{7}$ ، $\frac{8}{7}$).

مسئله ۲۱، مقاله IV: سه عدد، که تصاعد هندسی تشکیل می دهند، پیدا کنید که تفاضل هر دو تایشان يك مربع كامل باشد (جواب دیوفانتوس: $\frac{7}{81}$ ، $\frac{7}{144}$ ، $\frac{7}{256}$). مسئله ۱، مقاله VI: يك مثلث فیثاغورسی پیدا کنید که در آن وتر منهای هر يك از ساقها، يك مكعب كامل باشد (جواب دیوفانتوس: ۳۰، ۹۶، ۱۰۴). مسئله ۱۶، مقاله VI: يك مثلث فیثاغورسی پیدا کنید که در آن طول نیمساز یکی از زوایای حاده، گویا باشد (نگاه کنید به مطالعه مسئله ای ۱۵.۶ (ج)).

مسائل جبری نامعین [معادلات سیاله] که در آن تنها باید جوابهای گویا را یافت، به مسائل دیوفانتوسی معروف شده اند. در واقع، موارد استفاده امروزی این اصطلاح اغلب متضمن تحدید جوابها به اعداد صحیح است. اما دیوفانتوس خود ابداع کننده مسائلی از این قبیل نبوده است. همچنین برخلاف آنچه گاهی گفته می شود، اولین کسی نبوده است که با معادلات سیاله کار کرده، و اولین کسی نبوده که معادلات درجه دوم را به روش غیر هندسی حل کرده است. مع هذا، وی شاید اولین کسی بوده که گامهایی در جهت نمادگذاری جبری برداشته است. این گامها ماهیتاً از نوع علائم اختصاری تندنویسی بودند.

دیوفانتوس علائم اختصاری برای مجهول، توانهای مجهول تا مرتبه ششم، تفریق، تساوی، و معکوسها داشت. کلمه «اریتمتیک»^۱ انگلیسی کنونی از کلمه یونانی آریتمتیکه^۲ ترکیبی از کلمات آریتموس^۳ برای «عدد» و تکنه^۴ برای «علم»، ناشی می شود. هیت به طور نسبتاً متقاعد کننده ای خاطر نشان کرده است که نماد دیوفانتوس برای مجهول احتمالاً از ادغام دو حرف یونانی α و ρ ، در کلمه آریتموس مشتق شده است، که با گذشت زمان، به سیگمای نهایی یونانی ς شباهت پیدا کرده است. با وجود اینکه در این مورد تردید وجود دارد، معنی نماد برای توانهای مجهول کاملاً روشن است. مثلاً «توان دوم مجهول» با Δ^2 ، دو حرف اول کلمه یونانی دوناامیس^۵ ($\Delta\tau\text{NAMIS}$) برای «توان» نشان داده می شود. همینطور «مکعب مجهول» یا K^3 ، دو حرف اول کلمه یونانی کوبوس^۶ ($K\tau\text{BOS}$) برای «مکعب» نشان داده می شود. می توان به سادگی توضیحاتی برای توانهای بعدی

1. arithmetic

2. arithmetike

3. arithmos

4. techne

5. dunamis

6. kubos

مجهول داد، $\Delta^2 \Delta$ (مربع - مربع)، ΔK^2 (مربع - مکعب)، و $K^2 K$ (مکعب - مکعب) عرضه کرد. نماد دیوفانتوس برای «منها» شبیه يك V وارون است که نیمساز زاویه آن رسم شده باشد. این سه عنوان ترکیبی از Λ و I ، حروفی در کلمه یونانی لاپیس (ΛΕΙΨΙΣ) برای «فاقد بودن»، تعبیر شده است. کلیه جملات منفی در يك عبارت يك جا جمع می شوند و نماد منها پیش از آنها می آید. جمع با پهلو ی هم نهادن نشان داده می شود، و ضریب هر توان مجهول با ارقام یونانی القیابی (نگاه کنید به بخش ۱-۶) بعد از نماد توان، نمایش داده می شود. اگر جمله ثابتی موجود باشد آنگاه M ، مخففی از کلمه یونانی مونادس (ΜΟΝΑΔΕΣ) برای «آحاد»، با ضریب عددی مناسب، برای نمایش آن به کار می رود. مثلا $x^3 + 13x^2 + 5x$ و $x^3 - 5x^2 + 8x - 1$ به صورت

$$K^T \alpha \Delta^T \epsilon \gamma \sigma \epsilon \quad \text{و} \quad K^T \alpha \sigma \eta \Lambda \Delta^T \epsilon \tilde{M} \alpha,$$

ظاهر می شوند، که به طور تحت اللفظی چنین خوانده می شوند

مکعب مجهول ۱، مربع مجهول ۱۳، مجهول ۵

و

(مکعب مجهول ۱، مجهول ۸) منهای (مربع مجهول ۵، آحاد ۱).

بدین ترتیب بود که جبر لفظی به جبر تلخیصی بدل شد.

۹-۶ پاپوس

جانشینان بلافضل اقلیدس، ارشمیدس، و آپولونیوس برای مدتی سنت والای هندسی یونان را ادامه دادند، ولی این سنت بعداً به تدریج روبرو ضعف نهاد، و پیشرفتهای جدید به نجوم، مثلثات، و جبر محدود شد. پس از آن در اواخر قرن سوم ب.م. ۵۰۰ سال بعد از آپولونیوس، مردی پرشور و شوق و توانا به نام پاپوس اسکندرانی پا به عرصه گذاشت که سعی کرد تا علاقه تازه ای را از نو نسبت به این موضوع برانگیزد.

پاپوس شروخی بر اصول و داده های اقلیدس، و درباره المجسطی و پلانیسفریوم^۳ [تسطیح کره] بظلمیوس نوشت، ولی تقریباً همه آنچه ما در این باره می دانیم از طریق تأثیر آنها در نوشته های شارحین بعدی است. اثرواقعاً عظیم پاپوس مجموعه ریاضی^۴ وی است، که ترکیبی از شرح و راهنمای آثار هندسی موجود در زمان او، مملو از قضایای بدیع متعدد، اصلاحات، تعمیمها، و تذکرات تاریخی است. از بین هشت مقاله آن، اولی و قسمتی ازدومی مفقود شده اند.

از قضاوت نسبت به آنچه باقی مانده، مقاله II مجموعه ریاضی به روشی برای نوشتن و کار با اعداد بزرگ، که توسط آپولونیوس به وجود آمده بود، می پردازد. مقاله III

1. leipsis
2. monades
3. Planispherium
4. Mathematical Collection

دارای چهاربخش است، دو بخش اول به نظریه میانگینها (برای مثال، نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۱۷.۶ (الف)) می‌پردازند، و در آنها اشاره‌ای به مسئله درج دو واسطه هندسی بین دوطرفه خط مفروض شده است، سومی برخی نامساویها را در یک مثلث، و چهارمی محاط کردن پنج چندوجهی منظم در یک کره را مورد بررسی قرار می‌دهد.

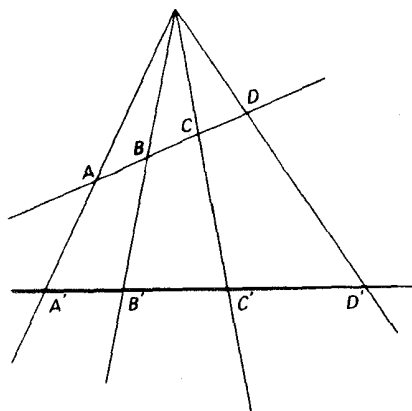
در مقاله IV، تعمیم پاپوس از قضیه فیثاغورس (که در مطالعه مسئله‌ای ۱۷.۶ (ج) داده شده)، «قضیه قدیمی» درباره گزن (که در انتهای مطالعه مسئله‌ای ۴.۶ بیان شده)، توصیف، تکوین، و بعضی خواص حلزونی ارشمیدس، کونکوئید نیکومدس، مربع‌ساز دینوستراتوس، باکاربردهایی در سه مسئله مشهور، و بحثی از حلزونی خاصی که بر کره‌ای رسم شده، دیده می‌شود.

مقاله V عمدتاً به برابرمحیطی، یا مقایسه مساحت دو شکل که دارای محیطهای محصورکننده مساوی‌اند و حجم اجسامی که دارای سطوح محصورکننده برابرند، اختصاص دارد. این کتاب همچنین شامل قطعه جالبی درباره زنبورها و خواص ماگسیم - مینیمم حجره‌های شانهای عسل است. در این کتاب است که اشاره پاپوس به ۱۳ چندوجهی نیمه منظم ارشمیدس را، که در بخش ۶-۲ ذکر شد، می‌بینیم. مقاله VI درباره نجوم است و به رسالاتی می‌پردازد که می‌بایست به عنوان مقدمه‌ای بر المجسطی بطلمیوس مطالعه می‌شده‌اند.

مقاله VII از نظر تاریخی بسیار مهم است، زیرا شرح آثاری است که گنجینه آنالیز را تشکیل می‌دهند. این مجموعه، بعد از اصول اقلیدس، مدعی در برداشتن مطالبی بوده که برای ریاضیدانان حرفه‌ای از لوازم اساسی تلقی می‌شده است. ۱۲ رساله مورد بحث عبارت‌اند از داده‌ها، پودیسپها، و مکانهای دویه‌ای اقلیدس، مقاطع مخروطی آپولونیوس، و شش اثری که در انتهای بخش ۶-۴ مورد بررسی قرار گرفتند، مکانهای فضایی آریستایوس، و در باب میانگینهای اراتستن. در این مقاله صورت بدوی قضیه مرکز هندسی پ. گولدین^۴ را می‌بینیم (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۱۸.۶). همچنین بحثی درباره «مکانهای هندسی نسبت به سه یا چهار خط» داده شده است: اگر p_1, p_2, p_3, p_4 طول چهار پاره‌خطی باشند که از نقطه‌ای مانند P ، و متکی بر چهار خط مفروض P رسم می‌شوند، و زوایای مفروضی با این خطوط می‌سازند، اگر $p_1 p_2 = k p_3 p_4$ یا $p_1 p_2 = k p_3 p_4$ که در آن k یک مقدار ثابت است، آنگاه مکان هندسی P یک مقطع مخروطی است. این مسئله، که به وسیله آپولونیوس حل شده، از نظر تاریخی بدان جهت اهمیت دارد که در تلاش برای تعمیم آن به n خط بود که دکارت در سال ۱۶۳۷ به تبیین روش مختصاتی هدایت شد؛ معاصرین پاپوس بدون موفقیت سعی به تعمیم دادن این مسئله کرده بودند. حالت خطی، به اصطلاح قضیه استوارت^۵، که در کتابهای هندسه دانشگاهی ظاهر می‌شود، نیز در این کتاب دیده می‌شود، یعنی: اگر A, B, C, D چهار نقطه دلخواه برخطی باشند، آنگاه

$$(AD)^2(BC) + (BD)^2(CA) + (CD)^2(AB) + (BC)(CA)(AB) = 0$$

1. *Treasury of Analysis*
2. *Solid Loci*
3. *On Means*
4. P. Guldin
5. Stewart



شکل ۴۹

که در آن پاره‌خطهای مورد بحث، پاره‌خطهای علامت دار هستند. در واقع، رابرت سیمسن در کشف قضیه‌ای برای حالت کلیتر که در آن D ممکن است خارج از خط ABC باشد، براستوارت پیشی گرفت. نسبت ناتوافقی، یا حاجی (AB, CD) چهار نقطه همخط A, B, C, D و D را می‌توان به صورت $(AD/DB) / (AC/CB)$ ، یعنی؛ به صورت نسبت نسبت‌هایی که C و D پاره‌خط AB را به آنها تقسیم می‌کنند، تعریف کرد. در مقاله VII مجموعه دیاخی، پاپوس ثابت می‌کند که اگر چهار نیمخط متقارب (نگاه کنید به شکل ۴۹) به وسیله دو مورب قطع شوند، به طوری که نقاط متناظر A, B, C, D ، A', B', C', D' بر این دو دست آیند، در این صورت دو نسبت حاجی (AB, CD) و $(A'B', C'D')$ برابرند. به عبارت دیگر، نسبت حاجی چهار نقطه همخط نسبت به عمل تصویر کردن پایاست. این از قضایای بنیادی هندسه تصویری است. مقاله VII راه‌حلی برای مسئله زیر را در بردارد: محاط کردن مثلثی در دایره مفروض به طوری که اضلاع آن، یاد صورت لزوم امتداد آنها، از سه نقطه همخط بگذرند. این مسئله به عنوان مسئله کاستیون^۱ - کرامر^۲ شهرت یافته است، زیرا در قرن هجدهم مسئله توسط کرامر به حالتی که در آن سه نقطه لزوماً همخط نیستند، تعمیم داده شد، و حلی از این تعمیم به وسیله کاستیون در سال ۱۷۷۶ منتشر گردید. همچنین راه‌حلهایی توسط لاگرانژ، اولبر، لویلیه^۳، فوس^۴، و لکسل^۵ در ۱۷۸۰ داده شدند. چند سال بعد، پسر بچه ۱۶ ساله صاحب قریحه‌ای از ایتالیا، به نام جیوردانو^۶، مسئله را به محاط کردن یک n ضلعی، که اضلاع آن از n نقطه مفروض می‌گذرند، در یک دایره تعمیم و راه‌حل زیبایی برای آن ارائه داد. پونسله مسئله را با گذاشتن مقطع مخروطی دلخواهی به جای دایره تعمیم بیشتری داد. در مقاله VII، اولین بیان مضبوط خاصیت قانون هادی سه‌مقطع

- | | | | |
|--------------|-------------|--------------|---------|
| 1. Castillon | 2. Cramer | 3. Lhuillier | 4. Fuss |
| 5. Lexell | 6. Giordano | | |

مخروطی ظاهر می‌شود.

مقاله VIII، مانند مقاله VII، شامل مطالبی است که بیشتر آن احتمالاً ابداع خود پاپوس است. در اینجا ما راه حلی از مسئله ساختن يك مقطع مخروطی مار بر پنج نقطه مفروض را می‌بینیم. قضیه جالبی که احتمالاً کار پاپوس بوده و در این مقاله دیده می‌شود، در مطالعه مسئله‌ای ۱۷۰۶ (ه) داده شده است.

مجموعه ریاضی پاپوس منبعی است واقعی سرشار از قطعات هندسی. مقایسه‌هایی که در حد امکان به عمل آمده، نشان داده‌اند که شرحهای تاریخی مشمول در این اثر موثق‌اند. ما قسمت عمده دانش خود را از هندسه یونانی به این رساله عظیم مدیونیم، که از آثار بیش از ۳۰ ریاضیدان باستانی مختلف شاهد می‌آورد یا به آنها ارجاع می‌دهد. شاید بتوان آن را تذکره هندسه یونانی نامید.

۱۰-۶ شارحین

بعد از پاپوس، ریاضیات یونانی از حالت يك مطالعه زنده خارج گردید و ما صرفاً تداوم خاطره آن را توسط نویسندگان و شارحین کم‌اهمیت ترمی بینیم. در بین اینها تئون، اسکندرانی، دختر وی هوباتیا، پروکلوس، سیمپلیکیوس^۲، و اثوتوکیوس قرار دارند. تئون در دوره متلاطم اواخر قرن چهارم ب.م. می‌زیست و مؤلف شرحی، در ۱۱ مقاله، برالمجسطی بطلمیوس است. همچنین، یادآوری می‌کنیم که، چاپهای جدید اصول اقلیدس مبتنی بر تجدیدنظر تئون در متن اصلی است.

دختر تئون، هوباتیا، در ریاضیات، طب، و فلسفه متشخص بود، و بنابر روایات، شروخی بر آدیمتیکای دیوفانتوس و مقاطع مخروطی آپولونیوس نوشته است. وی اولین بانوی ریاضیدان است که در تاریخ ریاضیات از او یاد شده است. زندگی و قتل وحشیانه او به دست دسته‌ای از مسیحیان متعصب در مارس سال ۴۱۵ میلادی، در زمان چارلز کینگزلی^۳ باز آفرینی شده است.*

مورخین ریاضی به فیلسوف و ریاضیدان نوافلاطونی، پروکلوس، به خاطر شرح مقاله اول اقلیدس^۴ او، که یکی از منابع اصلی اطلاعات ما درباره تاریخ اولیه هندسه مقدماتی است، مدیون‌اند. پروکلوس به آثار تاریخی و انتقادی (یا شروح برجسته آناری) که اکنون مفقود شده‌اند، دسترسی داشته، که از اهم آنها تاریخ هندسه^۵ اثودموس در چهار مقاله و اثر ظاهراً جامع گمینوس^۶ به نام نظریه علوم ریاضی^۷ می‌باشند. شرح

1. Hypatia
2. Simplicius
3. Charles Kingsley

* *Hypatia or New Foes with an Old Face.* (New York: E. P. Dutton, 1907).

4. *Commentary on Euclid, Book 1*
5. *History of Geometry*
6. Geminus
7. *Theory of the Mathematical Sciences*

پروکلوس بر جهودیت^۱ افلاطون نیز شامل عبارات جالبی برای مورخین ریاضی است. پروکلوس در اسکندریه درس خواند، در رأس مدرسه آتنی قرار گرفت، و در سال ۴۸۵ وقتی حدود ۷۵ سال داشت، در آتن درگذشت.

به سیمپلیکیوس، شارح ارسطو، نیز دینی برعهده داریم. وی شرحهایی از کوششهای آنتیفون را برای تریب دایره، از هلالهای بقرط، و از دستگاه کرات متحدالمرکز که به وسیله ائودوکسوس برای توضیح حرکات ظاهری اعضای منظومه شمسی ابداع شده بود، داده است. او شرحی نیز بر مقاله اول اصول اقلیدس نوشت، که گزیده‌هایی به زبان عربی بعداً از آن صورت گرفت. سیمپلیکیوس در نیمه اول قرن ششم می‌زیست و هم در اسکندریه و هم در آتن درس خواند.

احتمالاً یکی از معاصرین سیمپلیکیوس، ائوتوکیوس بوده، که شروحنی بر درباب کره‌ها و استوانه‌ها، اندازه‌گیری دایره، و در باب تعادل در صفحه ارشمیدس، و مقاطع مخروطی آپولونیوس نوشت.

مدرسه آتنی به مبارزات خود در برابر اوچگیری ضدیت مسیحیان ادامه داد تا اینکه اینان، در ۵۲۹ ب.م. فرمانی از امپراطور یوستینیانوس^۲ دریافت کردند که درهای مدرسه را برای همیشه بست. سیمپلیکیوس و برخی دیگر از فلاسفه و دانشمندان به ایران گریختند، که در آنجا خسرو اول پادشاه ایران به نیکی آنها را پذیرا شد و در ایران آنچه را که شاید بتوان آکادمی آتنی ایران نامید، برپا کردند. بذرهای علوم یونانی که به این ترتیب کاشته شدند، قرن‌ها بعد در کنف حمایت مسلمین شکوفا شدند.*

مدرسه اسکندریه در دست مسیحیان روزگار چندان بهتری نداشت. اما، دست کم، تا زمان سقوط اسکندریه به دست اعراب در ۶۴۱ نیمه موجودیتی داشت. اینان پس از آن بر هرچه که از مسیحیان باقی مانده بود، آتش افکندند.^۳ تاریخ طولانی و باشکوه ریاضیات یونان این گونه به پایان رسید.

مطالعه مسئله‌ای

۱۰۶ اندازه‌گیریهای آریستارخوس و اراتستن

آریستارخوس ساموسی (حدود ۲۸۷ ق.م.) ریاضیات را در نجوم به کار برد. چون وی

1. Republic
2. Justinian

* نگاه کنید به

George Sarton, *The History of Science*, Vol. 1, p. 400.

[این کتاب توسط غلامحسین صدری افشار به فارسی ترجمه شده است].

۳. برای اطلاع از نظریات موافق و مخالف در این باره رجوع کنید به دکتر ذبیح‌الله صفا، تاریخ علوم عقلی در تمدن اسلامی؛ انتشارات مؤسسه امیرکبیر و استاد شهید مرتضی مطهری، کتابسوزی ایران و مصر، انتشارات صدرا - م.

فرضیه خورشید مرکزی منظومه شمسی را ارائه داد، به عنوان کپرنیک عهد باستان شهرت یافته است.

(الف) آریستارخوس با استفاده از ابزارهای ابتدایی، مشاهده کرد که فاصله زاویه‌ای بین ماه، وقتی که در تریبک اول باشد، و خورشید $29/30$ زاویه قائمه است. وی بر مبنای این اندازه گیری (بدون استفاده از مثلثات) نشان داد که فاصله زمین تا خورشید بین ۱۸ تا ۲۰ برابر فاصله زمین تا ماه است. صحت و سقم این مطلب را با استفاده از نتیجه مشاهده آریستارخوس تعیین کنید (زاویه مورد نظر، در واقع حدود $89^{\circ}50'$ است).

(ب) آریستارخوس، در رساله خود، در باب اندازه‌ها و فاصله‌های خورشید و ماه، معادل حقیقت زیر را

$$\frac{\sin a}{\sin b} < \frac{a}{b} < \frac{\tan a}{\tan b},$$

کله در آن $0 < b < a < \pi/2$ ، به کاربرد. بادر دست داشتن منحنیهای نمایش توابع $\sin x$ و $\tan x$ نشان دهید که با افزایش x از 0 تا $\pi/2$ ، $(\sin x)/x$ کاهش یافته، و $(\tan x)/x$ افزایش می‌یابد، و بدین طریق نامساویهای بالا را ثابت کنید.

(ج) اراتستن (حدود ۲۳۰ ق.م.) اندازه گیری مشهوری را درباره زمین انجام داد. وی در سوئنه^۱ [آسوان فعلی] به هنگام ظهر و در موقع انقلاب تابستانی، مشاهده کرد که یک تکه چوب قائم هیچ سایه‌ای ندارد، در حالی که در اسکندریه (که وی تصور می‌کرد با سوئنه در یک نصف النهار قرار دارد) اشعه خورشید به اندازه $1/50$ یک دایره کامل نسبت به حالت قائم انحراف دارد. وی سپس محیط زمین را بر اساس فاصله معلوم ۵۰۰۰ استاد^۲ [یا استادیوم، نزد یونانیان واحد طول بوده، معادل ۱۸۰ گز] بین اسکندریه و سوئنه محاسبه کرد. نتیجه اراتستن را دایر برای آنکه محیط زمین ۲۵۰۰۰۰ استاد است، به دست آورد. دلیلی در دست است که فرض کنیم یک استاد اراتستنی تقریباً برابر با ۵۵۹ پا بوده است. با فرض اخیر، از نتیجه فوق قطر قطبی زمین را بر حسب مایل حساب کنید: (قطر قطبی زمین با تقریب به نزدیکترین مایل ۷۹۰۰ مایل است).

۲۰۶ در باب کره و استوانه

(الف) صحت دو نتیجه زیر را که توسط ارشمیدس در اثر او به نام دو باب کره و استوانه ثابت شده، تحقیق کنید.

۱. حجم کره برابر است با دوسوم حجم استوانه محیطی آن.
۲. سطح کره برابر است با دوسوم سطح کل استوانه محیطی آن.

(ب) منطقه‌کروی (با یک و دو قاعده)، قطعه‌کروی (با یک و دو قاعده)، و قطاع کروی را تعریف کنید.

(ج) با مفروض بودن قضیه زیر: مساحت یک منطقه کروی برابر است با حاصلضرب محیط دایره عظیمه در ارتفاع منطقه، فرمول متداول مساحت کره را به دست آورید و قضیه زیر را ثابت کنید: مساحت یک منطقه کروی با یک قاعده [عرقچین کروی] برابر است با مساحت دایره‌ای که شعاع آن وتر قوس مولد باشد.

(د) با فرض اینکه حجم یک قطاع کروی با یک سوم حاصلضرب مساحت قاعده آن و شعاع کره داده می‌شود، نتایج زیر را به دست آورید:

۱. حجم یک قطعه کروی با یک قاعده، به ارتفاع h و به شعاع قاعده a که از کره‌ای به شعاع R بریده شود، با رابطه

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) = \pi h \left(\frac{3a^2 + h^2}{6} \right)$$

داده می‌شود.

۲. حجم یک قطعه کروی با دو قاعده، به ارتفاع h و با شعاعهای قاعده a و b با رابطه

$$V = \frac{\pi h(3a^2 + 3b^2 + h^2)}{6}$$

داده می‌شود.

۳. قطعه کروی (۲) معادل است با مجموع کره‌ای به شعاع $h/2$ و دو استوانه که ارتفاعهای آنها هر یک $h/2$ و شعاعهای قاعده‌شان، به ترتیب، a و b است.

(ه) ارشمیدس در مقاله II در باب کره و استوانه، مسئله قطع دادن کره مفروضی را با صفحه‌ای در نظر می‌گیرد به طوری که حجمهای دو قطعه تشکیل شده به نسبت مفروضی باشند. نشان دهید که، در نمادگذاری امروزی، این کار به معادله

$$n(R-x)^2(2R+x) = m(R+x)^2(2R-x).$$

منجر می‌شود که در آن شعاع کره، x فاصله صفحه قاطع از مرکز کره، و $m/n < 1$ نسبت مفروض است.

(و) نشان دهید که چگونه می‌توان سطح یک کره را به کمک دو صفحه موازی به سه قسمت با مساحت‌های برابر تقسیم کرد.

۳۰۶ مسئله تاج

قضیه ۷ مقاله اول اثر ارشمیدس به نام در باب اجسام شناور، قانون مشهور ژیروساتیک

است: هر جسم غوطه‌ور در يك مایع به اندازه نیرویی برابر با وزن مایع جا به جا شده، به سمت بالا رانده می‌شود.

(الف) فرض کنید تاجی به وزن w پوند از w_1 پوند طلا و w_2 پوند نقره ساخته شده باشد. فرض کنید که w پوند طلای خالص وقتی در آب وزن شود، به اندازه f_1 پوند و w پوند نقره خالص وقتی در آب وزن شود، به اندازه f_2 پوند، کاهش وزن یابد، و وقتی تاج در آب وزن شود، f پوند از وزن آن کاسته می‌شود. نشان دهید که

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{f_2 - f}{f - f_1}.$$

(ب) فرض کنید که تاج قسمت (الف)، وقتی در آب غوطه‌ور شود، حجمی به اندازه V اینچ مکعب آب را جا به جا کند و تکه‌هایی از طلا و نقره خالص، با وزنی به اندازه تاج، به ترتیب، V_1 و V_2 اینچ مکعب آب را، وقتی در آن غوطه‌ور شوند، جا به جا نمایند. نشان دهید که

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{V_2 - V}{V - V_1}.$$

۴.۶ گزن و سالیون

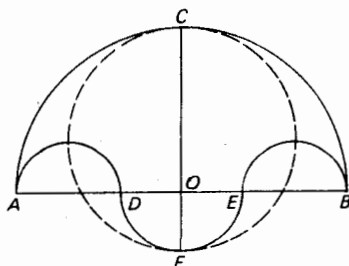
لیبراسومپتودوم، یا کتاب لمها [مأخوذات] که از طریق ترجمه عربی محفوظ مانده است، شامل برخی قضایای هندسی ظریف منسوب به ارشمیدس است. در بین اینها بعضی خواص گزن یا «کارد کفافی» قرار دارند. فرض کنید که A ، B ، C سه نقطه واقع بر يك خط راست باشند، به طوری که C بین A و B قرار دارد. نیمدایره‌هایی در يك طرف خط و به قطرهای AC ، CB ، AB رسم می‌شوند. گزن، شکلی است که به وسیله این سه نیمدایره محصور شده است. در C ، عمودی بر AB اخراج کنید تا بزرگترین دایره را در G قطع کند. فرض کنید که T و W نقاط تماس مماس مشترک خارجی دو نیمدایره کوچکتر باشند. AC ، CB ، AB را با ρ_1 ، ρ_2 ، ρ نشان دهید. خواص مقدماتی گزن را که در زیر می‌آیند، ثابت کنید:

(الف) GC و TW مساوی و منصف یکدیگرند.

(ب) مساحت گزن برابر است با مساحت دایره‌ای به قطر GC .

(ج) خطوط GA و GB به ترتیب، از T و W می‌گذرند.

گزن دارای خاصیت‌های بسیاری است که اثبات آنها چندان ساده نیست. به عنوان مثال چنین گفته می‌شود که ارشمیدس نشان داده که دو ایرمحاطی داخلی مثلثهای منحنی‌الخط ACG و BCG مساوی‌اند، و قطر هر یک $\frac{2}{3}\rho$ است. کوچکترین دایره‌ای که بر این دو دایره مماس بوده و بر آنها محیط است برابر با دایره‌ای به قطر GC ، و بنابراین از نظر مساحت با گزن مساوی است. در گزن، زنجیری از دایره‌های C_1 ، C_2 ، ...، را در نظر بگیرید



شکل ۵۰

که همه بر نیمدایره‌های به قطر AB و AC مماس باشند، و در آن C_1 همچنین بر نیمدایره به قطر BC مماس است، C_1 بر C_2 مماس است و قس علی‌هذا. در این صورت اگر r_n نمایش شعاع C_n و h_n فاصله مرکز آن از ACB باشد، داریم $h_n = 2nr_n$. قضیه اخیر در مقاله IV مجموعه ریاضی پاپوس دیده می‌شود و در آنجا به عنوان يك «قضیه باستانی» به آن اشاره شده است.

(د) قضیه ۱۴ لیبراسومپتودو دربارهٔ شکلی است به نام سالینون^۱ («انبار نمک») که در شکل ۵۰ تصویر شده و در آن نیمدایره‌هایی بر روی پاره‌خط‌های AD ، DE ، EB و به قطر این پاره‌خطها، با $AD = EB$ ، رسم می‌شوند. قضیه مزبور بیان می‌کند که مساحت کل سالینون (که به طور کامل با کمانهای نیمدایره شکل محصور است) برابر با مساحت دایره‌ای است که قطر آن خط تقارن شکل، FOC ، است. این حکم را ثابت کنید.

۵.۶ قضیه وتر شکسته

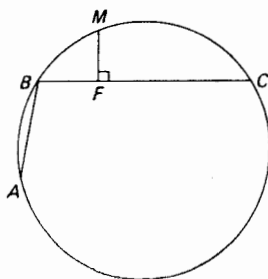
ابوریحان بیرونی (۱۰۴۸-۹۷۳) قضیه وتر شکسته را به ارشمیدس نسبت داده است، که بیان می‌کند هر گاه، هم‌چنان که در شکل ۵۱ نشان داده شده، BC و AB وتر شکسته‌ای را در يك دایره تشکیل دهند و $BC > AB$ ، و اگر M نقطهٔ وسط قوس ABC باشد، پای عمود وارد از M بر BC نقطهٔ وسط وتر شکسته ABC است.

(الف) قضیه وتر شکسته را ثابت کنید.

(ب) با قراردادن $(\text{قوس } MC) = 2x$ و $(\text{قوس } BM) = 2y$ ، متوالیاً نشان دهید $FC = 2 \sin x \cos y$ ، $AB = 2 \sin(x-y)$ ، $BM = 2 \sin y$ ، $MC = 2 \sin x$ $FB = 2 \sin y \cos x$. حال نشان دهید که از قضیه وتر شکسته اتحاد

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x.$$

نتیجه می‌شود.



شکل ۵۱

(ج) با استفاده از قضیه وتر شکسته، اتحاد زیر را به دست آورید

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x.$$

۶.۶ خاصیت کانون - هادی

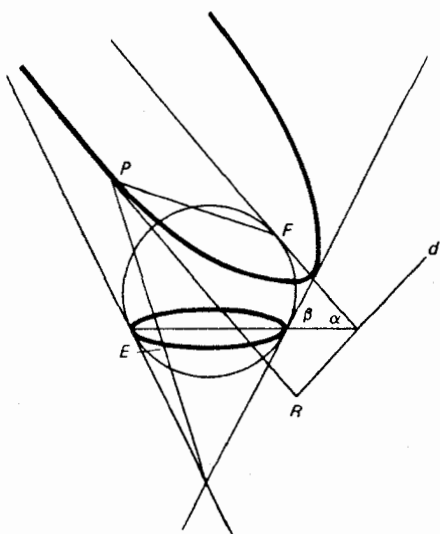
(الف) گرچه یونانیان مقاطع مخروطی را به عنوان مقطعهایی از مخروطها تعریف کرده‌اند، در دروس دانشگاهی در هندسه تحلیلی مرسوم است که آنها را با خاصیت کانون - هادی تعریف کنند. لم (۱) زیر را ثابت کرده و سپس برهان ساده (۲) را که هر مقطع از مخروط مستدیر قائم دارای خاصیت کانون - هادی است، تکمیل کنید.

۱. طولهای دو پاره‌خط دلخواه محدود بیسن یک نقطه و یک صفحه به نسبت عکس سینوس زوایایی است که این خطوط با صفحه می‌سازند.

۲. صفحه مقطع یک مخروط مستدیر قائم را با p نشان دهید. فرض کنید که کره‌ای در امتداد یک دایره که صفحه آن را q می‌نامیم بر مخروط مماس و نیز با صفحه p در نقطه F مماس باشد (نگاه کنید به شکل ۵۲). فرض کنید p و q در امتداد خط d یکدیگر را قطع نمایند. از p ، که نقطه دلخواهی بر مقطع مخروطی است، عمودی مانند PR بر خط d وارد کنید. فرض کنید که مولدی از مخروط که از p می‌گذرد صفحه q را در نقطه‌ای مانند E قطع کند. بالاخره، فرض کنید که α زاویه بین صفحات p و q و β زاویه‌ای باشد که یکی از مولدهای مخروط با صفحه q می‌سازد، نشان دهید که $PF/PR = PE/PR = (\sin \alpha)/(\sin \beta) = e$ که در آن e یک مقدار ثابت است. بنابراین F یک کانون، d هادی نظیر آن، و e خروج از مرکز مقطع مخروطی است. (این روش ساده و زیبا در حدود ربع اول قرن نوزدهم به وسیله دو ریاضیدان بلژیکی به اسامی آدولف کتله^۱ (۱۸۷۴-۱۷۹۶) و ژرمینال داندلین^۲ (۱۸۴۷-۱۷۹۴) کشف شد.) (ب) نشان دهید که اگر p کلیه مولدهای یکی از دو پارچه مخروط را قطع کند،

1. Adolphe Quetelet

2. Germinal Dandelin



شکل ۵۲

آنگاه $e < 1$ ؛ اگر p بایکی و فقط بایکی از مولدهای مخروط موازی باشد آنگاه $e = 1$ ؛ اگر p هر دو پارچه مخروط را قطع کند، آنگاه $e > 1$.

۷.۶ تماسها

در رساله مفقود خود درباره تماسها، آپولونیوس مسئله رسم دایره‌های مماس بر سه دایره مفروض A, B, C را بررسی نمود، که در آن A, B, C هر یک می‌توانند به طور مستقل یکی از اشکال تبهگن نقطه یا خط راست را به خود گیرند. این مسئله به مسئله آپولونیوس شهرت یافته است.

(الف) نشان دهید که برای مسئله آپولونیوس، بسته به اینکه هر یک از A, B, C نقطه، خط، یا دایره باشند، ده حالت وجود دارد. تعداد جوابها در هر حالت کلی چیست؟

(ب) مسئله را وقتی که A, B, C دو نقطه و یک خط باشند، حل کنید.

(ج) مسئله را وقتی که A, B, C دو خط و یک نقطه باشند به حالت (ب) تحویل

نمایند.

(د) کانون و هادی یک سهمی p ، و خطی مانند m داده شده‌اند. با ابزارهای اقلیدسی

نقاط تلاقی p و m را پیدا کنید.

۸.۶ مسائلی از آپولونیوس

(الف) مسئله ساده گرایشی زیر را که توسط آپولونیوس در کتاب گرایشها مورد مطالعه قرار گرفته اند، حل کنید: درج و تری با طول مفروض در يك دایره مفروض که بر يك نقطه مفروض گرایش داشته باشد.

يك مسئله مشکلتر مربوط به گرایشها که به وسیله آپولونیوس مطالعه شده، چنین است: يك لوزی که یکی از اضلاع آن امتداد داده شده، مفروض است. مطلوب است درج پاره‌خطی به طول مفروض در زاویه خارجی آن به طوری که امتدادش بر رأس مقابل گرایش داشته باشد. راه‌های متعددی برای این مسئله به وسیله هویگنس (۱۶۹۵-۱۶۲۹) داده شده است.

(ب) به کمک هندسه تحلیلی، دو مسئله (۱) و (۲) را که در بخش ۶-۴ در رابطه با کتاب مکانهای مسطح آپولونیوس بیان شد، ثابت کنید.

(ج) به طور ترکیبی اولین مسئله در (ب) و نیز حالت خاص زیر از مسئله دوم در (ب) را حل کنید: مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربعات فواصلش از دو نقطه معین، ثابت باشد، دایره‌ای است که مرکز آن وسط پاره‌خطی است که دو نقطه مزبور را بهم وصل می‌کند.

۹.۶ جدول اوتار بطلمیوس

(الف) قضیه بطلمیوس را ثابت کنید: در يك چهارضلعی محاطی حاصلضرب قطرها برابر است با مجموع حاصلضربهای اضلاع مقابل.

(ب) از قضیه بطلمیوس، روابط زیر را استخراج کنید:

۱. اگر a و b وترهای دو قوس از دایره‌ای به شعاع واحد باشند، آنگاه

$$s = \frac{a}{4}(\sqrt{4-b^2}) + \frac{b}{4}(\sqrt{4-a^2})$$

وتر مجموع دو قوس است.

۲. اگر a و b ، که در آن $a \geq b$ ، وترهای دو قوس از دایره‌ای به شعاع واحد باشند، آنگاه

$$d = \frac{a}{4}(\sqrt{4-b^2}) - \frac{b}{4}(\sqrt{4-a^2})$$

وتر تفاضل دو قوس است.

۳. اگر t وتر قوسی از يك دایره به شعاع واحد باشد، آنگاه

$$s = \{2 - (4-t^2)^{1/2}\}^{1/2}$$

وتر نصف قوس است.

در دایره‌ای به شعاع واحد $\text{crd } 60^\circ = 1$ ، و می‌توان نشان داد که $\text{crd } 36^\circ = 0.6180$ ، که برابر است با قطعه بزرگتر شعاع وقتی که به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شود (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۱۰۳ (د)). بنا بر (۲)، $\text{crd } 24^\circ = \text{crd } (60^\circ - 36^\circ) = 0.4158$ ، $30'$ ، $90'$ و $45'$ را حساب کنیم و $\text{crd } 90' = 0.0262$ و $\text{crd } 45' = 0.0131$ را $\text{crd } 45' = 0.0131$ یا به دست آوریم. از مطالعه مسئله‌ای ۱۰۶ (ب)، $\frac{\text{crd } 60'}{\text{crd } 45'} < \frac{60}{45} = \frac{4}{3}$ ، یا $\text{crd } 1^\circ < (\frac{4}{3})(0.0131) = 0.0175$ همچنین

$$\text{crd } 90' / \text{crd } 60' < 90/60 = 3/2$$

یا $\text{crd } 1^\circ > (\frac{2}{3})(0.0262) = 0.0175$. بنا بر این $\text{crd } 1^\circ = 0.0175$. از (۳) می‌توانیم $\text{crd } (1/2)^\circ$ را پیدا کنیم. حال می‌توان جدول اوتاری به فاصله‌های $(1/2)^\circ$ ساخت. این هسته اصلی روش بطلمیوس برای ساختن جدول اوتار خود است.
(ج) نشان دهید که روابط (۱)، (۲)، و (۳) در (ب) معادله‌های فرمولهای مثلثاتی برای $\sin(\alpha + \beta)$ ، $\sin(\alpha - \beta)$ ، و $\sin(\theta/2)$ هستند.
(د) قضایای جالب زیر را به عنوان پیامدهای قضیه بطلمیوس ثابت کنید: اگر P نقطه‌ای بر قوس AB از دایره محیطی:

۱. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC باشد، آنگاه $PC = PA + PB$.

۲. مربع $ABCD$ باشد، آنگاه $(PA + PC)PC = (PB + PD)PD$.

۳. پنج ضلعی منتظم $ABCDE$ باشد، آنگاه $PC + PE = PA + PB + PD$.

۴. شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ باشد، آنگاه

$$PD + PE = PA + PB + PC + PF.$$

۱۰۰۶ تصویر گنجنگاشتی

در کتاب پلانیسفیدیوم [تسطیح کره] خود، بطلمیوس تصویر گنجنگاشتی را به عنوان نگاشتی مطرح کرد که ضمن آن نقاط روی کره، با تصویر از قطب جنوب، بر صفحه استوای کره نمایش داده می‌شوند. تحت این نگاشت (نگاه کنید به شکل ۵۳)

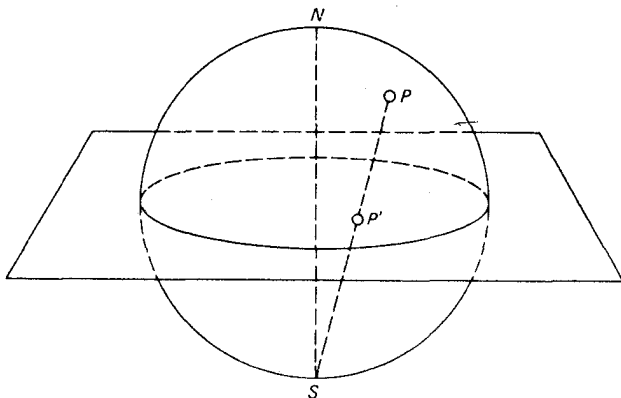
(الف) مدارهای جغرافیایی،

(ب) دایره‌های نصف النهار،

(ج) دایره‌های صغیره، روی کره، که از قطب جنوب می‌گذرند،

به چه صورت درمی‌آیند؟

می‌توان نشان داد که هر دایره‌ای بر کره که بر قطب جنوب نگذرد، بردایره‌ای بر روی صفحه نگاشته می‌شود. یک خاصیت بسیار مهم این است که تصویر گنجنگاشتی، یک نگاشت هم‌دیس است، یعنی، نگاشتی که زوایای بین منحنیها را حفظ می‌کند. چرا این خاصیت در نگاشت قسمت کوچکی از سطح زمین بر یک صفحه اهمیت دارد؟ (بسط جالب توجهی از



شکل ۵۳

مثلثات کروی از روی مثلثات مسطحه و به کمک تصویر گنجانگاشتی در کتاب ج. د. ه. دونی، تحت عنوان مثلثات کروی به تقلید از روش چزاردا داده شده است.

۱۱.۶ مسائلی از هرون

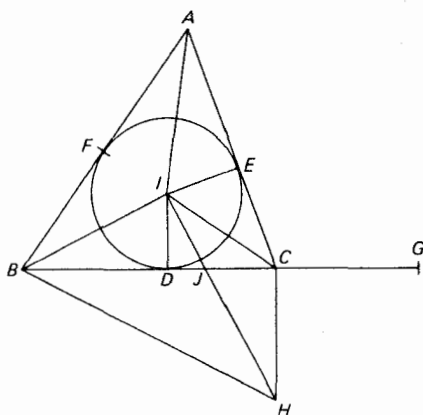
(الف) هفت ضلعی منتظم را نمی توان با ابزارهای اقلیدسی رسم کرد. هرون در اثر خودش، هترویکا، برای یک ترسیم تقریبی، ضلع هفت ضلعی منتظم را با سه شش ضلعی منتظمی که دایره محیطی آن با دایره محیطی هفت ضلعی منتظم یکی است، برابر می گیرد. این تقریب تا چه حد مناسب است؟

(ب) هرون در کاتوپتیکا، بر مبنای این فرض که نور در کوتاهترین مسیر حرکت می کند، ثابت می کند که زوایای تابش و بازتابش در یک آئینه مساوی اند. این مطلب را ثابت کنید.

(ج) مردی قصد دارد برای آوردن یک سطل آب از خانه خود به ساحل رودخانه ای که لبه مستقیم دارد، برود و بعداً آن را به طویله اش، که با خانه در یک طرف رودخانه قرار دارد، ببرد. نقطه ای از ساحل رودخانه را پیدا کنید که مسافتی را که وی باید طی نماید، مینیمم می سازد.

(د) جزئیات استخراج فرمول Δ برای مساحت یک مثلث ABC بر حسب اضلاع a, b, c آن توسط هرون را که در زیر ذکر می شود، کامل کنید.

۱. فرض کنید که دایره محاطی، به مرکز I و شعاع r بر اضلاع AB, CA, BC



شکل ۵۴

در نقاط D, E, F ، مطابق شکل ۵۴، مماس باشد. بر امتداد BC ، G را چنان اختیار کنید که $CG = AE$. پاره خط IH را بر BI عمود کنید تا BC را در J و خط عمود بر BC در C را در H قطع کند.

۲. اگر $s = (a+b+c)/2$. آنگاه $\Delta = rs = (BG)(ID)$.

۳. B, I, C, H بر یک دایره واقع اند، از این رو $\angle CHB$ مکمل $\angle BIC$ و بنابراین برابر با $\angle EIA$ است.

$$BC/CG = BC/AE = CH/IE = CH/ID = CJ/JD \quad ۴.$$

$$BG/CG = CD/JD \quad ۵.$$

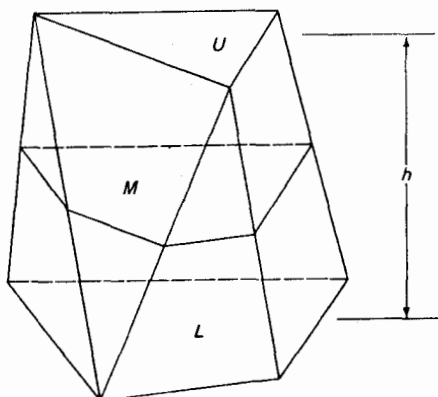
$$(BG)^2 / (CG)(BG) = (CD)(BD) / (JD)(BD) \\ = (CD)(BD) / (ID)^2 \quad ۶.$$

$$\Delta = (BG)(ID) = \{(BG)(CG)(BD)(CD)\}^{1/2} \\ = \{s(s-a)(s-b)(s-c)\}^{1/2} \quad ۷.$$

(ه) فرمول (د) را باروش زیر استخراج کنید: فرض کنید h ارتفاع وارد بر ضلع c و m تصویر ضلع b بر ضلع c باشد. (۱) نشان دهید که $m = (b^2 + c^2 - a^2) / 2c$ (۲) این مقدار برای m را در $h = (b^2 - m^2)^{1/2}$ بگذارید. (۳) این مقدار را به جای h در $\Delta = (ch) / 2$ بگذارید.

(و) از راه تقریبات متوالی، به روش هرون، $\sqrt{3}$ و $\sqrt{720}$ را تقریب کنید.

(ز) منشور نما [پریسماتوئید] چند وجهی است که رأسهای آن در دو صفحه موازی قرار دارند. دو وجه واقع در این دو صفحه موازی قاعده‌های منشور نما خوانده می‌شوند، فاصله عمودی بین دو صفحه، ارتفاع منشور نما، نام دارد، و مقطع موازی با قاعده‌ها



شکل ۵۵

و به يك فاصله از آنها مقطع میانی منشور نما نامیده می شود. حجم منشور نما را با V ، مساحت های قاعده بالا، قاعده پایین، و مقطع میانی را با U ، L ، M ، و ارتفاع را با h ، همچنان که در شکل ۵۵ نشان داده شده، نمایش می دهیم. در کتابهای مربوط به هندسه فضایی نشان داده شده است که

$$V = \frac{h(U + L + \sqrt{3}M)}{6}.$$

در مقاله دوم متریکا، هرون برای حجم منشورنمایی که دارای قاعده های مستطیل شکل هم جهت و با زوج اضلاع متناظر a ، b و c ، d است، فرمول

$$V = h \left[\frac{(a+c)(b+d)}{4} + \frac{(a-c)(b-d)}{12} \right]$$

را می دهد. نشان دهید که این نتیجه معادل است با آنچه که به وسیله فرمول منشور نما در بالا داده شده است.

(ح) نشان دهید که «عظیمترین هرم مصری» (نگاه کنید به مطالعه مسئله ای ۱۳.۲ (الف)) حالت خاصی از فرمول منشورنمای (ز) است.

۱۳.۶ دستگاه معادلات همزمان

(الف) تومازیداس^۱، ریاضیدان کم اهمیت تری مربوط به قرن چهارم ق.م.، قاعده زیر را برای حل مجموعه ای از n معادله خطی همزمان، با n مجهول ارائه کرد. این قاعده

به قدری مشهور شد که عنوان *گل توماریداس* به آن داده شد. اگر مجموع n کمیت، و همچنین مجموع همه زوجیهایی که شامل کمیت خاصی از این n کمیت است، معلوم باشند در این صورت این کمیت خاص برابر است با $1/(n-2)$ برابر تفاضل بین مجموع این زوجها و اولین مجموع داده شده. این قاعده را ثابت کنید.

(ب) در بعضی مسائل داده شده در مجموعه هرونی فرمولهای

$$a, b = \frac{(r+s) \pm \{(r+s)^2 - 4rs\}^{1/2}}{2}$$

برای ساقهای a و b یک مثلث قائم‌الزاویه با محیط s و شعاع دایره محاطی r ظاهر می‌شود. این فرمولها را به دست آورید.

۱۳.۶ مسائلی از «آنتولوژی یونانی»

(الف) چند سیب لازم است تا چهار نفر از بین شش نفر، به ترتیب، یک سوم، یک هشتم، یک چهارم، و یک پنجم تعداد کل آنها را دریافت کنند و پنجمی ده سیب دریافت کند، و یک سیب برای نفر ششم باقی بماند؟

(ب) دموخارس یک چهارم زندگی خود را در کودکی، یک پنجم آن را در جوانی، یک سوم آن را در سنین میان‌سالی و ۱۳ سال را در کهنسالی گذرانده است. وی چند سال دارد؟

(ج) با آنکه برای افزونتر کردن تو، ای طلایی که همه را مقهور خودداری، از راه عدالت خارج شدم، خود را تهیدست می‌بینم؛ زیرا که از بخت بد ۴۰ تالان^۲ آن را بیهوده به دوستان دادم، درحالی که اکنون، آه ای مایه نامرادیهای گوناگون بشر، می‌بینم که دشمنانم، نیم، ثلث، و یک هشتم دارایی مرا در چنگ دارند. (این مرد نگون بخت در ابتدا چند تالان داشته؟)

(د) خارس^۳ها سبدهایی از سیب حمل می‌کردند که در هر یک تعدادی مساوی سیب

1. Demochares

2. talent [در یونان قدیم]

۳. در متن Graces جمع Grace که مبدل از Charis (خارس) یونانی است که جمع آن Charites می‌باشد و اینان، در افسانه‌های یونان باستان، سه الهه بودند و خوشی، فریبندگی، و زیبایی در زندگی انسانها و در طبیعت به دست آنان بوده است و عبارت بوده‌اند از: آگالیا (Agalia) = زیرکی، ائوفروزون (Euphrosyne) = خوشی، و تالیسا (Talia) = شکوفه. — م.

قرار داشت. موساهای به آنها برخوردند و از هر يك از آنها سیب خواستند و آنها تعدادی مساوی سیب به هر يك از موساهای دادند و اکنون هر کدام از نه موسا و سه خارس تعداد مساوی سیب دارند. به من بگو که آنها چندتا سیب دادند و چگونه تعداد سیبهای آنها مساوی شد. (این مسئله‌ای در معادلات سیاله است. کوچکترین جواب قابل قبول را پیدا کنید.)

۱۴۰۶ مسئله گوناها از «آنتولوژی یونانی»

مسائلی از نوع متعارف در کتابهای جبر مقدماتی امروزه یافت می‌شوند که به زمانهای قدیم بازمی‌گردند. برای مثال مسئله «کار»، مسئله «آب انبار»، و مسئله «اختلاط و امتزاج» زیرین را که در کتاب آنتولوژی یونانی دیده می‌شوند، در نظر بگیرید.

(الف) آجرساز، من در تمام این خانه تعجیل دارم. امروز هوا صاف است و من دیگر خیلی آجر لازم ندارم. زیرا تمام آنچه را که می‌خواهم بجز سیصدتا دارم. توبه تنهایی در يك روز می‌توانی این قدر آجر بسازی، اما پست وقتی کار دوپست آجر را تمام کرد، و داماد وقتی دوپست و پنجاه آجر ساخته بود، دست از کار کشیدند. اگر همه باهم کار کنید، این تعداد آجر را چند روزه می‌سازید؟

(ب) من يك شیر برنجین هستم؛ فواره‌های من دو چشم من، دهانم، و کف پای راستم است. چشم راستم کوزه‌ای را در دو، چشم چپم در سه، و پای راستم در چهار روز (۱ روز = ۱۲ ساعت) پر می‌کند. دهانم قادر به پر کردن آن در شش ساعت است. به من بگو این چهار فواره بر روی هم در چه مدت آن را پر خواهند کرد؟

(ج) تاجی از طلا، مس، قلع، و آهن به وزن ۶۰ مینا^۲ بسازید، به طوری که دوسوم آن طلا و مس، سه‌چهارم آن طلا و قلع، و سه‌پنجم آن طلا و آهن باشد. وزن طلا، مس، قلع، و آهن مورد نیاز را پیدا کنید. این يك مثال عددی از گل توماریداس است (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۱۲۰۶ (الف)).

۱۵۰۶ دیوفانتوس

(الف) تقریباً همه آنچه از زندگی شخصی دیوفانتوس می‌دانیم همان است که

۱. در متن Muse، مبدل از کلمه یونانی mousa است. این کلمه در افسانه‌های یونان باستان اشارت به هر يك از نه الهه‌ای دارد که فرمانروای ادبیات و هنرها و علوم بوده‌اند. اینها عبارت بوده‌اند از کالیوپ (Calliope)، کلیو (Clio) ائوتسروپ (Eutrope)، ملپومن (Melpomene)، ترپزیخور (Therpsichor)، اراتو (Erato)، پولومینا (Polymina)، اورانیا (Urania)، و تالیا (Talia).—م.

۲. mina واحد وزنی بوده متغیر و متداول در یونان، مصر باستان، و غیره و عموماً معادل ۱۰۰ درهم گرفته می‌شده. —م.

در خلاصه زیر از کتیبه گوری که در آنتولوژی یونانی داده شده، مندرج است: «دیوفانتوس يك ششم زندگانی خود را در کودکی به سر برد، يك دوازدهم آن را در جوانی، و يك هفتم دیگر را در تجرد. پنج سال بعد از ازدواجش صاحب پسری شد که چهار سال پیش از پدر، در سنی که نصف سن (نهایی) پدرش بود، در گذشت». دیوفانتوس به هنگام وفات چند سال داشت؟

(ب) مسئله زیر را، که در آریتمتیکای دیوفانتوس آمده است (مسئله ۱۷، مقاله اول) حل کنید: چهار عدد پیدا کنید، که مجموع هر آرایش سه به سه آنها معلوم باشد، مثلاً ۲۲، ۲۴، ۲۷، و ۲۰.

(ج) مسئله زیر را، که آن نیز در آریتمتیکا (مسئله ۱۶، مقاله ششم) یافت می شود، حل کنید:

در مثلث قائم الزویه ABC ، که در C قائمه است، AD زاویه A را نصف می کند. مجموعه کوچکترین اعداد صحیح را برای AB ، AD ، AC ، BD ، DC پیدا کنید به طوری که $DC : CA : AD = 3 : 4 : 5$.

(د) اوگاستس دموگن^۱، که در قرن نوزدهم می زیست، معمای زیر را مطرح کرد: «من در سال x^2 ، x ساله بودم». وی چه موقع به دنیا آمده بوده؟

۱۶.۶ مطالبی از نظریه اعداد «آریتمتیکا» (الف) اتحادهای

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2$$

را ثابت و از آنها برای بیان $(37)(13) = 481$ به صورت مجموع دو مربع کامل به دو طریق مختلف، استفاده کنید.

این اتحادها بعدها، در سال ۱۲۰۲، توسط فیوناتچی در لیبر آباکی وی داده شدند و نشان می دهند که حاصلضرب دو عدد که هر يك از آنها به صورت مجموع دو مربع کامل قابل بیان باشد، به صورت مجموع دو مربع کامل نیز قابل بیان است. می توان نشان داد که این اتحادها فرمولهای جمع برای سینوس و کسینوس را در بر می گیرند. اتحادها بعداً منشأ نظریه گاوسی صورتهای درجه دوم حسابی و برخی پیشرفتهای در جبر نوین شدند.

(ب) $(17)(13)(5) = 1105$ را به چهار طریق مختلف به صورت مجموع دو مربع کامل نشان دهید.

در دو مسئله زیر «عدد» به معنی «عدد گویای مثبت» است.

(ج) اگر m و n اعدادی با اختلاف ۱ باشند، واگر x ، y ، a اعدادی باشند به طوری که $x + a = m^2$ ، $y + a = n^2$ ، نشان دهید که $xy + a$ يك مربع کامل است.

(د) اگر m عدد دلخواهی باشد و $x = m^2$ ، $y = (m+1)^2$ ، $z = 2(x+y+1)$ ، نشان دهید که شش عدد $xy+x+y$ ، $yz+y+z$ ، $zx+z+x$ ، $yz+x$ ، $xy+z$ ، $zx+y$ همه مجذور کامل اند.

۱۷.۶ مسائلی از پاپوس

(الف) در مقاله III مجموعه ریاضی پاپوس، نمایش هندسی جالب زیر را از بعضی میانگینها می یابیم. B را روی پاره خط AC اختیار کنید، به طوری که B نقطه وسط AC ، یعنی O نباشد. عمود بر AC در B را خارج کنید تا نیمدایره به قطر AC را در D قطع کند، و فرض کنید که F پای عمود وارد از B بر OD باشد. نشان دهید که BD ، FD نمایش میانگین حسابی، میانگین هندسی و میانگین همساز پاره خطهای AB و BC اند، و نشان دهید که، اگر $AB \neq BC$

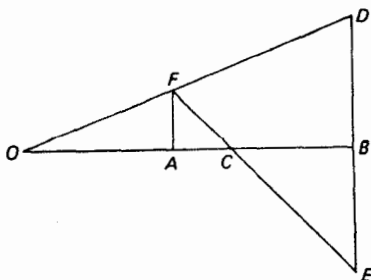
میانگین همساز > میانگین هندسی > میانگین حسابی.

(ب) در مقاله III مجموعه ریاضی، پاپوس ترسیم زیرکانه زیر را برای میانگین همساز دو پاره خط مفروض OA و OB در شکل ۵۶ می دهد. بر روی عمود بر OB در B ، $BD = BE$ را جدا و فرض کنید که عمود بر OB در A ، OD را در F قطع کند. EF را رسم کنید تا OB را در C قطع نماید. در این صورت OC میانگین همساز مطلوب است. این را ثابت کنید.

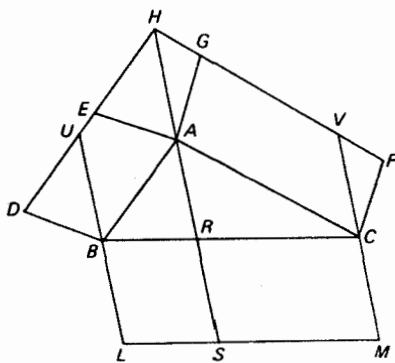
(ج) تعمیم زیر از قضیه فیثاغورس را، که به وسیله پاپوس در مقاله IV مجموعه ریاضی داده شده، ثابت کنید. ABC (نگاه کنید به شکل ۵۷) مثلث دلخواهی بوده و $ACFG$ ، $ABDE$ متوازی الاضلاعهای دلخواهی باشند که در خارج آن دو AB و AC رسم شده اند. فرض کنید که DE و FG یکدیگر را در H قطع کنند و BL و CM را مساوی و موازی با HA رسم کنید. در این صورت

$$\square BCML = \square ABDE + \square ACFG.$$

(د) قضیه (ج) را با گذاشتن يك چهار وجهی به جای مثلث و منشورهای مثلث القاعده



شکل ۵۶



شکل ۵۷

بروجه چهار وجهی به جای متوازی الاضلاعهای روی اضلاع مثلث، به فضای سه بعدی تعمیم دهید.

(ه) در مقاله VIII مجموعه ریاضی، پاپوس قضیه زیر را ثابت می‌کند: اگر D ، E ، F نقاطی بر اضلاع BC ، CA ، AB ، مثلث ABC باشند به طوری که $BD/DC = CE/EA = AF/FB$ ، آنگاه مثلثهای DEF و ABC دارای یک مرکز هندسی مشترک اند. این حکم را به طریقه ترکیبی یا تحلیلی ثابت کنید.

۱۸۰۶ قضایای مربوط به مرکز ثقل

در مقاله VII مجموعه ریاضی، پاپوس در آوردن یکی از قضایای مرکز ثقل که گاهی به پ. گولدین (۱۶۴۲-۱۵۷۷) اسناد داده می‌شود، متقدم بوده است. این قضایا را می‌توان به صورت زیر بیان کرد: (۱) اگر یک قوس مستوی حول محوری در صفحه منحنی که ضمناً منحنی را قطع نمی‌کند دوران داده شود، مساحت سطح دوری که بدین ترتیب تشکیل می‌شود برابر است با حاصلضرب طول قوس و طول مسیری که به وسیله مرکز ثقل قوس پیچیده می‌شود. (۲) اگر یک سطح مستوی حول محوری در صفحه‌اش، که سطح را قطع نمی‌کند، دوران داده شود، حجم جسم دوری که بدین ترتیب تشکیل می‌شود برابر است با حاصلضرب آن سطح در طول مسیری که به وسیله مرکز ثقل آن سطح پیچیده می‌شود. با استفاده از این قضایا پیدا کنید:

(الف) حجم و مساحت رویه چنبره‌ای را که از دوران دایره‌ای به شعاع r حول محوری واقع در صفحه دایره و به فاصله $R > r$ از مرکز دایره تشکیل می‌شود.

(ب) مرکز ثقل یک قوس نیم‌دایره‌ای.

(ج) مرکز ثقل یک سطح نیم‌دایره‌ای.

(دومین قضیه بالا بود که توسط پاپوس پیشینی شد - عامترین قضیه متضمن حسابان

که در عهد باستان مطرح شده بود.)

۱۹.۶ رسم بیضی با پرگار بازودار

قضیه زیر به پروکلوس نسبت داده شده است: اگر پاره‌خطی به طول ثابت درحالی که دو سر آن بر روی دو خط متقاطع قراردارند، حرکت کند، آنگاه هر نقطه ثابت روی پاره‌خط، یا بر امتداد آن، بخشی از یک بیضی را رسم می‌نماید.

(الف) یک زوج محورهای متعامد Ox و Oy را به عنوان دو خط قضیه پروکلوس انتخاب و فرض کنید AB قطعه خطی با طول ثابت باشد. P را بر AB (یا در صورت لزوم بر امتداد آن) انتخاب کنید و AP را با a و BP را با b نشان دهید. نشان دهید که وقتی A بر محور y ها و B بر محور x ها حرکت می‌کند، P بیضی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

را رسم می‌کند.

(ب) مکانیسم ساده‌ای (بیضی نگار) بر مبنای نتیجه قسمت (الف) برای رسم یک بیضی با نیم‌قطرهای معلوم a و b طرح کنید.

۲۰.۶ قضیه منلائوس

نقطه‌ای که بر یک ضلع مثلث یا بر امتداد آن واقع است، ولی بر یکی از رئوس مثلث نیست یک نقطه منلائوس مثلث برای این ضلع نامیده می‌شود. سلسله قضایای زیر را، که در آن همه پاره‌خطها و زوایا، پاره‌خطها و زوایای جهت‌دار (یا سودار) می‌باشند، ثابت کنید:

(الف) قضیه منلائوس: شرط لازم و کافی برای اینکه سه نقطه منلائوس F, E, D از اضلاع BC, CA, AB از یک مثلث ABC همخط باشند، آن است که

$$\left(\frac{BD}{DC}\right)\left(\frac{CE}{EA}\right)\left(\frac{AF}{FB}\right) = -1.$$

(ب) اگر رأس O در یک مثلث BOC به نقطه‌ای مانند D (غیر از B یا C) واقع بر خط BC وصل شود، آنگاه

$$\frac{BD}{DC} = \frac{OB \sin BOD}{OC \sin DOC}.$$

(ج) فرض کنید F, E, D نقاط منلائوس از اضلاع BC, CA, AB یک مثلث ABC باشند، و فرض کنید O نقطه‌ای در فضا باشد که در صفحه مثلث ABC نیست. در این صورت نقاط F, E, D وقتی و فقط وقتی همخط هستند که

$$\left(\frac{\sin BOD}{\sin DOC}\right)\left(\frac{\sin COE}{\sin EOA}\right)\left(\frac{\sin AOF}{\sin FOB}\right) = -1.$$

(د) فرض کنید که F', E', D' سه نقطهٔ مثلثوس از اضلاع $A'B', C'A', B'C'$ يك مثلث كروي $A'B'C'$ باشند. در این صورت F', E', D' بر روی دایرهٔ عظیمه‌ای از کره قرار دارند اگر و فقط اگر

$$\left(\frac{\sin \widehat{B'D'}}{\sin \widehat{D'C'}}\right) \left(\frac{\sin \widehat{C'E'}}{\sin \widehat{E'A'}}\right) \left(\frac{\sin \widehat{A'F'}}{\sin \widehat{F'B'}}\right) = -1.$$

(این حالت کسروی قضیهٔ مثلثوس است که مثلثوس آن را در اسفایریکای خود به کار برده است.)

۲۱۰۶ مطالب دیگری دربارهٔ میانگینها

اگر a و b دو عدد حقیقی باشند میانگینهای زیر برای a و b مفید تشخیص داده شده‌اند:

$$\text{حسابی: } A = (a+b)/2$$

$$\text{هندسی: } G = (ab)^{1/2}$$

$$\text{همساز: } H = 2ab/(a+b)$$

$$\text{هرونی: } h = [a + (ab)^{1/2} + b]/3$$

$$\text{پاد همساز: } c = (a^2 + b^2)/(a+b)$$

$$\text{جذر میانگین مربعات: } r = [(a^2 + b^2)/2]^{1/2}$$

$$\text{مرکز ثقلی: } g = 2(a^2 + ab + b^2)/3(a+b)$$

(الف) اگر $a \neq b$ ، نشان دهید که

$$c > r > g > A > h > G > H.$$

(ب) اگر a^2, b^2, c^2 تصاعد حسابی تشکیل دهند، آنگاه $a+b, c+a, b+c$ تصاعد همساز تشکیل می‌دهد.

(ج) اگر a, b, c تصاعد همساز تشکیل دهند، $c/(a+b), b/(c+a), a/(b+c)$ نیز چنین‌اند.

(د) اگر بین a و b دو میانگین حسابی A_1 و A_2 ، دو میانگین هندسی G_1 و G_2 و دو میانگین همساز H_1 و H_2 درج شوند، آنگاه $A_1 + A_2 : H_1 + H_2 = G_1 : G_2$.

(ه) فرض کنید که $a > b > a$ ، طولهای قاعده‌های پایینی و بالایی يك ذوزنقه را نشان دهند. آنگاه هر پاره‌خط موازی قاعده و محصور بین دو ساق ذوزنقه نوعی میانگین قاعده‌های a و b است. نشان دهید که:

۱. میانگین حسابی ساقهای ذوزنقه را نصف می‌کند.

۲. میانگین هندسی ذوزنقه را به دو ذوزنقهٔ متشابه تقسیم می‌کند.

۳. میانگین همساز بر نقطهٔ تلاقی قطرهای ذوزنقه می‌گذرد.

۴. میانگین هرونی در ثلث راه بین میانگین حسابی و میانگین هندسی قرار دارد.

۵. میانگین پاد همساز به اندازه‌ای که میانگین همساز بالای میانگین حسابی قرار دارد، از این میانگین پایینتر است.

۶. جذر میانگین مربعات مساحت ذوزنقه را نصف می‌کند.

۷. میانگین مرکز ثقلی از مرکز هندسی مساحت ذوزنقه می‌گذرد.

(و) ذوزنقه‌ای با قاعده‌های a و b رسم کرده و قطعات قسمت (ه) را بسازید.

اکنون به طور هندسی صحت نامساویهای قسمت (الف) را تحقیق کنید.

(ز) عدد $(a+wb)/(1+w)$ ، که در آن $w > 0$ ، میانگین وزندار a و b ، برای

وزن w ، نامیده می‌شود. نشان دهید که میانگینهای زیر دارای وزنهای ذکر شده‌اند:

$$۱. \text{ حسابی: } w=1$$

$$۲. \text{ هندسی: } w=\sqrt{a/b}$$

$$۳. \text{ همساز: } w=a/b$$

$$۴. \text{ هرونی: } w=-(\sqrt{ab}+b-2a)/(\sqrt{ab}+a-2b)$$

$$۵. \text{ پاد همساز: } w=b/a$$

$$۶. \text{ جذر میانگین مربعات}$$

$$w=-(\sqrt{a^2+b^2}-a\sqrt{2})/(\sqrt{a^2+b^2}-b\sqrt{2})$$

$$۷. \text{ مرکز ثقلی: } w=-(a^2+ab-2b^2)/(b^2+ab-2a^2)$$

(ح) فرض کنید PT و PS مماسهای مرسوم بر دایره مفروض از یک نقطه خارجی

مانند P باشند، و فرض کنید TS قاطع قطری PBA را در C قطع کند. نشان دهید که PC میانگین همساز PA و PB است.

(ط) فرض کنید CD و CE نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه C از مثلثی مانند

ABC باشند. نشان دهید که AB میانگین همساز AD و AE است.

(ی) فرض کنید S ضلع یک مربع محاط در یک مثلث و یک ضلع آن در امتداد قاعده

مثلث واقع باشد. نشان دهید که S نصف میانگین همساز قاعده و ارتفاع وارد بر این ضلع از مثلث است.

(ک) فرض کنید S یک ضلع مربع محاط در داخل یک مثلث قائم‌الزاویه بوده و یک

زاویه آن منطبق بر زاویه قائمه مثلث باشد. نشان دهید که S نصف میانگین همساز ساقهای مثلث است.

(ل) فرض کنید که ABC مثلثی با یک زاویه 120° در B باشد، و فرض کنید BT

منصف‌الزاویه B باشد. نشان دهید که BT نصف میانگین همساز BA و BC است.

(م) فرض کنید که S ، a ، b کمانهای یک هفتم، دو هفتم، و سه هفتم محیط یک دایره

باشند. نشان دهید که S نصف واسطه هندسی بین a و b است.

(ن) اتومبیلی با سرعت r مایل در ساعت از A به B سفر می‌کند و سپس با سرعت

۳۴ مایل در ساعت از B به A باز می‌گردد. نشان دهید که سرعت متوسط در رفت و برگشت میانگین همساز ۳۴ و ۳۱ است.

(س) یک روش احتیاطی معمول که در رابطه بایک ترازوی دو کفه، وقتی که وزن عدم برابری بازوها می‌رود، به کار گرفته می‌شود، به توزین دو گانه شهرت دارد. در اینجا وزن مجهول در کفه طرف چپ گذاشته شده و با وزنه‌ای مانند w_1 وزن می‌شود، سپس وزن مجهول در کفه طرف راست گذاشته شده و با وزنه‌ای مانند w_2 توزین می‌شود. نشان دهید که وزن مجهول واسطه هندسی بین w_1 و w_2 است.

(ع) نشان دهید که میانگین مرکز ثقلی a و b برابر است با میانگین هرونی a^2 و b^2 تقسیم بر میانگین حسابی a و b .

$$(ف) \text{ نشان دهید که } g = (H + 2c)/3 = (2A + c)/3$$

عنوان مقاله

- | | |
|------|--|
| ۱/۶ | چرا ارشمیدس را بزرگترین ریاضیدان دوران باستان می‌دانند؟ |
| ۲/۶ | اجسام صلب ارشمیدسی، با الگوهای ساختمان آنها. |
| ۳/۶ | اقامه ادله مبنی بر اینکه ارشمیدس مخترع حساب انتگرال بوده است. |
| ۴/۶ | اقامه ادله به نفع منایموس و آپولونیوس به عنوان مخترعین هندسه تحلیلی. |
| ۵/۶ | آثار اراتستن. |
| ۶/۶ | دستاوردهای ریاضی منجمین یونانی. |
| ۷/۶ | تأثیر هرون در بسط ریاضیات کاربردی. |
| ۸/۶ | اولین بانوی ریاضیدان. |
| ۹/۶ | مکتب ریاضیات اسکندریه. |
| ۱۰/۶ | میانگینها. |
| ۱۱/۶ | ریاضیات در تمدن روم. |
| ۱۲/۶ | «آنتولوژی یونانی». |

کتابنامه

- AABOE, ASGER, *Episodes from the Early History of Mathematics* (New Mathematical Library, No. 13.) New York: Random House and L. W. Singer, 1964.
- APOLLONIUS OF PERGA, *Conics*. 3 vols. Translated by R. Catesby Taliaferro. (Classics of the St. John's program.) Annapolis, Md.: R. C. Taliaferro, 1939.
- BUNT, L. N. H.; P. S. JONES; and J. D. BEDIANT, *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1976.
- CLAGETT, MARSHALL, *Archimedes in the Middle Ages*. 2 vols. Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1964.
- , *Greek Science in Antiquity*. New York: Abelard Schuman, 1955. Paperback ed. New York: Collier Books, 1963.
- COHEN, M. R., and I. E. DRABKIN, *A Source Book in Greek Science*. New York: McGraw-

- Hill, 1948. Reprinted by Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1958.
- COOLIDGE, J. L., *History of the Conic Sections and Quadric Surfaces*. New York: Oxford University Press, 1945.
- , *History of Geometric Methods*. New York: Oxford University Press. Paperback ed. New York: Dover, 1963.
- DANTZIG, TOBIAS, *The Bequest of the Greeks*. New York: Charles Scribner's, 1955.
- DIJKSTERHUIS, E. J., *Archimedes*. New York: Humanities Press, 1957.
- EVES, HOWARD, *A Survey of Geometry*. Vol. 1. Boston: Allyn and Bacon, 1963.
- GOW, JAMES, *A Short History of Greek Mathematics*. New York: Hafner, 1923.
- HARTLEY, MILES C., *Patterns of Polyhedra*. Rev. ed. Ann Arbor, Mich.: Edwards Brothers, 1957.
- HEATH, T. L., *Apollonius of Perga, Treatise on Conic Sections*. New York: Barnes and Noble, 1961.
- , *Aristarchus of Sama*. New York: Oxford University Press, 1913. Reprinted by Dover, 1981.
- , *Diophantus of Alexandria*. Rev. ed. New York: Cambridge University Press, 1910.
- , *History of Greek Mathematics*. Vol. 2. New York: Oxford University Press, 1921. Reprinted by Dover, 1981.
- , *A Manual of Greek Mathematics*. New York: Oxford University Press, 1931.
- , *The Works of Archimedes*. New York: Cambridge University Press, 1897. Reprinted by Dover.
- MESCHKOWSKI, HERBERT, *Ways of Thought of Great Mathematicians*. Translated by John Dyer-Bennet. San Francisco: Holden-Day, 1964.
- ORE, OYSTEIN, *Number Theory and Its History*. New York: McGraw-Hill, 1948.
- PETERS, C. H. F., and E. B. KNOBEL, *Ptolemy's Catalogue of Stars; A Revision of the Almagest*. Washington, D.C.: Carnegie Institution, 1915.
- SARTON, GEORGE, *Ancient Science and Modern Civilization*. Lincoln, Neb.: The University of Nebraska Press, 1954.
- STAHL, W. H., *Ptolemy's Geography; A Select Bibliography*. Lincoln, Neb.: University of Nebraska Press, 1954.
- , *Roman Science*. Madison, Wis.: University of Wisconsin Press, 1962.
- THOMAS, IVOR, *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*. 2 vols. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1939-41.
- VAN DER WAERDEN, B. L., *Science Awakening*. Translated by Arnold Dresden. New York: Oxford University Press, 1961. Paperback ed. New York: John Wiley, 1963.



ریاضیات چینی، هندی، و عربی

چین^۱

۱-۷ منابع و ادوار

راجع به ریاضیات باستانی چین اساساً چیزی که دارای ماهیت دست اولی باشد، به یادگار نمانده است. این امر ناشی از این واقعیت است که چینیان باستان کشفیات خود را بر خیزران ثبت می کردند که با سیر ایام دوام نمی آورد. به عنوان معضلی افزون بر این، کتا بسوزان فزاحت باری است که به دستور امپراطور خود خواه شی هو آنگ-تی^۱ در ۲۱۳ ق.م. صورت گرفت. اگر چه فرمان امپراطور یقیناً بطور کامل اجرا نشد، و اگر چه بسیاری از کتابهایی که سوزانده شدند بعدها از روی حافظه مجدداً به نگارش درآمدند، ما اکنون به اصالت هر آنچه مدعی قدمتی قبل از آن زمان نامیمون است، تردید داریم. از این رو دانش ما از ریاضیات قدیمی چین تقریباً به طور کامل بر پایه مسموعات است. همچنین، تا همین اواخر، عدم آشنایی با زبان چینی مانع بزرگی برای محققین بود و آنها مجبور بودند که عمدتاً بر یک کتاب، به نام، رشد ریاضیات در چین و ژاپن^۲ منتشره در سال ۱۹۱۳ به وسیله ریاضیدان

* مطالب بخشهای بعدی درباره چین به طور عمده از د.ج. استرویک

D.J. Struik, "On ancient Chinese mathematics," *The Mathematics Teacher*, 56 (1963): pp. 424 - 432

اقتباس شده است.

1. Shi Huang - ti

2. *The Development of Mathematics in China and Japan*

ژاپنی یوشومی کامی^۱ و معدودی مقالات پراکنده که توسط اروپاییان قرن نوزدهم نوشته شده بود، تکیه کنند. با انتشار جلد سوم کتاب بسیار فاضلانج. نیدهام^۲، به نام علم و تمدن در چین^۳، در سال ۱۹۵۹، وضع به طور قابل ملاحظه‌ای بهبود یافته است.

شاید درست تر باشد که اول، ولو به اختصار، ادوار اصلی تاریخ چین مقدم بر سال ۱۶۴۴ شرح داده شوند. ما بحث را با دوره فتودالی جو^۴، که از حدود ۱۰۳۰ ق.م. تا ۲۲۱ ق.م. را دربر می‌گیرد، آغاز می‌کنیم. این دوره با امپراطوری متحد تحت سلسله هان^۵ (۲۰۶ ق.م. - ۲۲۲ ب.م.) به اوج خود رسید و با آن ادامه یافت و یک دوره تجزیه را به دنبال داشت که تا حدود ۶۰۰ ب.م. طول کشید. در این دوره بود که آیین بودا به طور کامل در چین مستقر گردید. سپس، چین متحد جدید تحت رهبری تانگ^۶ (۹۰۶-۶۱۸)، پنج سلسله حکومت‌های مستقل^۷ (۹۶۰-۹۰۷)، سونگ^۸ (۱۲۷۹-۹۶۰)، یوئان^۹ (۱۳۶۸-۱۲۶۰)، و مینگ^{۱۰} (۱۶۴۴-۱۳۶۸) اداره شد. سه سلسله اخیر همه بزرگ چین متحد فرمان رانند. نفوذ اروپاییان در ریاضیات، همانند سایر موضوعات، با ورود هیأت‌های مذهبی یسوعی، در زمان رهبری دودمان مینگ آغاز شد.

مارکوپولو^{۱۱} (۱۳۲۴-۱۲۵۴؟) از ۱۲۷۵ تا ۱۲۹۲ از چین دیدار کرد و وقویلای قآن «وحشی» (۱۲۹۴-۱۲۱۶) با تکمیل فتوحاتش در چین در سال ۱۲۷۹، این کشور را تحت رهبری سلسله یوئان یکپارچه نمود.

۲-۲ از چو تا تانگ

حتی در ایام ماقبل چو، شمارش چینی دهدهی بود و از آن پس هم چنین مانده است. در دوره رهبری سلسله هان، یا شاید پیشتر، دستگاه شمار میله‌ای، که آن چنان که در مطالعه مسئله‌ای ۴۰۱ (ج) توصیف شد ردیف کردن تکه‌های خیزران را به کار می‌گرفت، استقرار یافت، جاهای خالی در این دستگاه نمایش صفر بودند. اعمال مقدماتی حساب بانکه‌های خیزران بر روی تخته‌های شمارش انجام می‌شدند. از چرتکه معروف چینی کنونی، سوئان پان^{۱۲}، متشکل از مهره‌های متحرکی بر میله‌ها یا سیم‌های موازی، برای اولین بار در اثری به تاریخ ۱۴۳۶ یاد می‌شود، گرچه می‌تواند بسیار قدیمتر از این به وجود آمده باشد. کاملاً محتمل است که مربع‌های جادویی نیز در روزگاران پیش از چو پدید آمده باشند (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۳۰۷).

مهمترین کتاب ریاضی چین باستان، حساب در نه بخش^{۱۳}، یا کوی - چانگ سوئان -

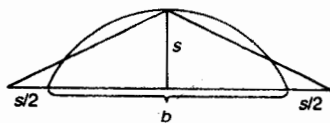
1. Yoshō Mikami
2. J. Needham
3. *Science and Civilization in China*
4. Chou
5. Han
6. Tang
7. Five Dynasties of the Independent States
8. Sung
9. Yuan
10. Ming
11. Marco Polo
12. suan pan
13. *Arithmetic in Nine Sections*

شوا به‌دوره‌ها ن برمی‌گردد و بسیار محتمل است که شامل مطالب بسیار قدیمیتر از این دوره نیز باشد. این کتاب مجموعه‌ای از ۲۴۶ مسئله در کشاورزی، روشهای بازرگانی، مهندسی، مساحتی، حل معادلات، و خواص مثلثهای قائم‌الزاویه است. قواعد حل داده‌شده‌اند ولی به‌تعبیر یونانی آن برهانی وجود ندارد. در مسئله ۳۶ بخش ۱، مساحت يك قطعه دایره به‌قاعدۀ b و سهم (ارتفاع) s با $(b+s)/2$ داده‌می‌شود، این نتیجه، ممکن است به‌طریقی که شکل ۵۸ نشان می‌دهد حاصل شده باشد. در این شکل وقتی خطهای قاطع به‌گونه‌ای رسم شوند که مساحت مثلث متساوی‌الساقین با مساحت قطعه دایره مساوی به نظر آید، چنین می‌نماید که این قاطعها امتداد قاعده را در نقاطی به فاصله $s/2$ در طرفین آن قطع می‌کنند. این فرمول تجربی در مورد يك نیم‌دایره، منجر به مقدار ۳ برای π می‌گردد. در این کتاب مسائلی موجودند که منتهی به دستگاههای معادلات خطی همزمان می‌شوند، که به مدد آنچه که امروزه آنها را روشهای ماتریسی می‌نامیم، حل شده‌اند. نمونه برخی از مسائل این اثر را می‌توان در مطالعه مسئله‌های ۱۰۷ و ۲۰۷ یافت.

اثر کلاسیک مشهور دیگری، شاید حتی قدیمیتر از حساب در نه بخش، کتاب چوئو-چی^۲ است، که فقط تا اندازه‌ای جنبه ریاضی دارد. عمده اهمیت آن برای ما ناشی از بحثی است بر مبنای نمودار شکل ۵۹ (ولی بدون برهان)، از قضیه فیثاغورس.

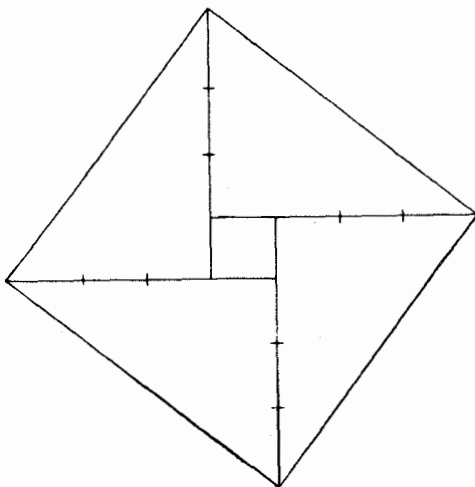
بعد از دوره‌ها ن، دوران زندگی سون - تزی^۳ ریاضیدان می‌رسد، که کتابی شامل مطالب زیادی شبیه به محتویات کتاب حساب در نه بخش نوشت. در همین اثر است که با نخستین مسئله چینی در آنالیز نامعینها [معادلات سیاله] مواجه می‌شویم: «اشیائی به تعداد نامعلوم موجودند که چون بر ۳ تقسیم شوند باقیمانده ۲، چون بر ۵ تقسیم شوند باقیمانده ۳، و چون بر ۷ تقسیم شوند، باقیمانده ۲ دارند. این عدد (کوچکترین آن) کدام است؟» در اینجا سرآغازهای قضیه باقیمانده چینی مشهور از نظریه مقدماتی اعداد را می‌یابیم.

در دوره بعد از هان، همچنین عده‌ای از ریاضیدانان را می‌بینیم که توجه خود را به محاسبه π ، نسبت محیط دایره به قطر آن، معطوف داشته‌اند. تقریب گویای $142/45$ برای π ، که $\pi = 3.155$ را به دست می‌دهد، به‌یک صاحب‌منصب نظامی به نام وانگ‌فان^۴، مربوط به قرن سوم، نسبت داده شده است. یکی از معاصرین وانگ‌فان، به نام لیوهوی^۵



شکل ۵۸

1. K'ui - ch'ang suan - shu
2. Chou - pei
3. Sun - tzi
4. Wang Fan
5. Liu Hui



شکل ۵۹

شرح کوتاهی بر حساب در نه بخش نوشت که کتابچه ریاضی سی آیلندا نامیده شد. در این اثر مطالب جدیدی را در مساحی می یابیم، که رابطه

$$3.14159 < \pi < 3.1416$$

از آن جمله است. در حدود دو قرن بعد، تسو چونگ-چی (۵۰۱ - ۴۳۰) و پسرش، که کتاب مشترکشان امروزه در دست نیست، مقدار

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$

و تقریب گویای قابل ملاحظه $355/113$ را یافتند، که π را به طور صحیح تا ۶ رقم اعشار به دست می دهد. کشف مجدد این تقریب گویا در اروپا تا سال ۱۵۸۵ صورت نگرفت (نگاه کنید به بخش ۴-۸). به نظر می رسد که بر دقت محاسبه π که تسوها بر آن دست یافتند تا سال ۱۴۲۹ توفقی حاصل نگردید. در این سال غیاث الدین جمشید کاشانی (متوفی به حدود سال ۱۴۳۶) π را به طور صحیح تا ۱۶ رقم اعشاری به دست آورد. ریاضیدانان غربی تا حوالی ۱۶۰۰ بر تقریب تسوها پیشی نگرفتند.

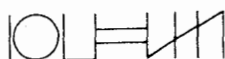
۳-۷ از نانگ تا مینگ

در دوره سلسله نانگ مجموعه ای از مهمترین کتابهای ریاضی گرد آورده شدند تا در برسیهای دولتی مورد استفاده رسمی قرار گیرند. صنعت چاپ در قرن هشتم ابداع گردید، اما اولین اثر ریاضی به چاپ رسیده، تا آنجا که اطلاع داریم، تا سال ۱۰۸۴ منتشر نشده است.

دراثری تقریباً به سال ۶۲۵ء، که وانگ هسیائو تونگ^۱ نامی آن را نوشته است، اولین معادله درجه سوم در ریاضیات چینی ظاهر می شود که از معادله $x^3 = a$ ، مربوط به حساب در نه بخش پیچیده تر است.

یک نسخه مهم چاپی حساب دهنه بخش در دوره سلسله سونگ در سال ۱۱۱۵ ظاهر شد. اواخر حکومت سلسله سونگ تا اوایل حکومت سلسله یسوان مهمترین دوره را در ریاضیات باستانی چین مشخص می سازد. ریاضیدانان برجسته زیادی رونق یافتند و کتب ریاضی با ارزشی پدید آمدند. از جمله این ریاضیدانان چین کیوشائو^۲ (که کتابش به تاریخ ۱۲۴۷ است)، لی یه^۳ (با کتابهایی به تاریخهای ۱۲۴۸ و ۱۲۵۹)، یانگ هوی^۴ (با کتابهایی به تاریخهای ۱۲۶۱ و ۱۲۷۵)، و بزرگترین آنها، چوشی کیشه^۵ (با کتابهایی به تاریخهای ۱۲۹۹ و ۱۳۰۳) هستند.

چین معادلات نامعین را از جایی که سون تزی ناتمام گذاشته بود، ادامه داد. وی همچنین اولین چینی بود که علامت مجزایی، یک دایره، را برای صفر ارائه داد. وی یکی از ریاضیدانانی بود که روش استخراج ریشه دوم را (آن گونه که در حساب در نه بخش آمده) به معادلات از درجه های بالاتر تعمیم داد و این کار منجر به روش عددی حل معادلات جبری شد که امروزه به آن روش هورنر اطلاق می کنیم، زیرا این روش به طور مستقل توسط مدیر مدرسه انگلیسی، ویلیام جورج هورنر^۶ (۱۸۳۷-۱۷۸۶) کشف و توسط وی در ۱۸۱۹ نشر گردید. وی بکلی از این واقعیت که یک طرح محاسباتی قدیمی چینی را از نو کشف کرده، بی اطلاع بود. لی یه از این لحاظ از اهمیت خاصی برخوردار است که نمادی را برای اعداد منفی، با قراردادن خط موربی بر روی رقم سمت راست عدد که در دستگاه علمی، یا میله ای، چینی نوشته شود، ارائه داد. مثلاً ۱۰۷۲۴ - به صورت



ظاهر می شود. یانگ هوی، که کتابهایش به گونه ای بسط حساب در نه بخش است، به طوری ماهرانه، اساساً با همان روشهای کنونی، با کسرهای اعشاری کار کرد. یانگ هوی همچنین قدیمیترین نمایش موجود از آنچه را که به نام مثلث حسابی پاسکال شهرت دارد، به ما داده است (نگاه کنید به بخش ۹-۹ [جلد دوم])، که دوباره در کتاب جدیدتری که به وسیله چوشی کیشه در ۱۳۰۳ نگارش یافته، دیده می شود. چوسخن از مثلثی به میان می آورد که در زمان خود او جنبه باستانی داشته است. بدین گونه به نظر می رسد که قضیه دو جمله ای را برای مدت مدیدی در چین می شناخته اند. کتابهای چو کاملترین نمایش روشهای حسابی - جبری را که به دست ما رسیده، ارائه می دهند. وی روشهای ماتریسی آشنای امروزی را به کار می برد، و روش حذف و جاگذاری او با کار ج. سیلوستر^۷

1. Wagn Hs'iao - t'ung
2. Ch'in Kiu-shao
3. Li Yeh
4. Yang Hui
5. Chu Shi-kie
6. William George Horner
7. J. J. Sylvester

(۱۸۹۷-۱۸۱۴) مقایسه شده است.

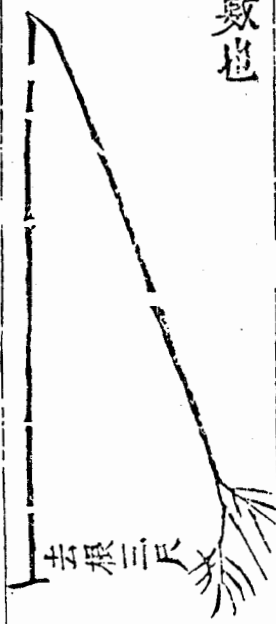
در دوره بعد از سونگ پیدایش ریاضیدانانی که اغلب به عنوان منجم کار می کردند، ادامه یافت، اما چیزی که اساساً نو باشد، کمتر در ریاضیات آنها ظاهر گردید. در حالی که

言角九章算術

三

三〇七

折抵地爲弦以句及股弦并求股故先令句自乘見矩
 羈令如高而一凡爲高一丈爲股弦并之以除此羈得
 差所得以減竹高而半其餘卽折者之高也此率與係
 索之類更相返覆也亦可如上術令高自乘爲股弦并
 羈去本自乘爲矩羈減之餘爲實倍高爲法則得折之
 高數也

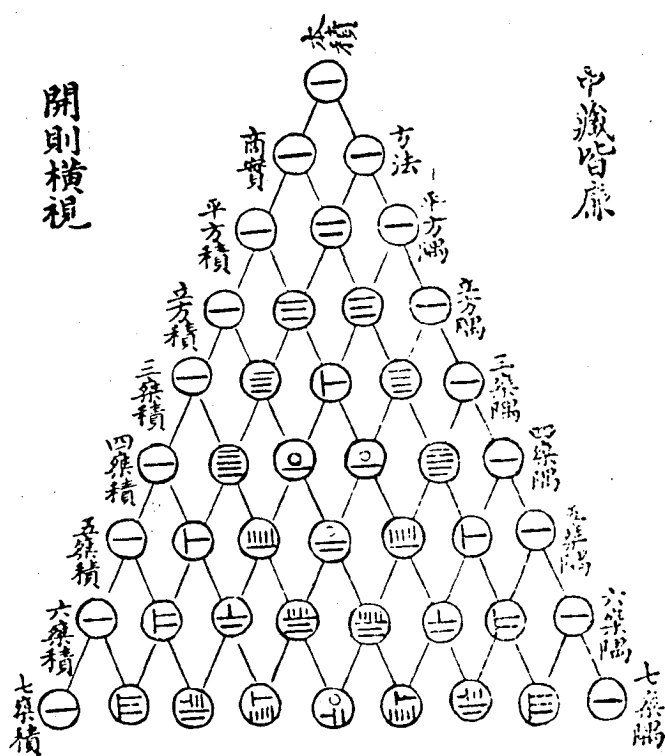


去根如勾折處
 如股折梢如弦
 通長如股弦和

股弦和與勾求股法曰勾自乘爲實變股弦較乘股弦
 和如股弦和一正除得股弦較以減股弦和餘二段

در دوره قدیمتر تانگ می توان نفوذ هندی را تجسس نمود، در دوره بعدتر یوئان می توان اثراتی از نفوذ اعراب را دید. در ریاضیات چین باستان به ندرت می توان چیزی یافت که مستقیماً نشانی از ریاضیات اروپایی (یونانی یا لاتین) داشته باشد. تنها در ریاضیات عصر مینگ، پس از آنکه هیأت های مذهبی یسوعی در چین رخنه کردند، نفوذ غربی مشهود است.

古法七乘方圖



開則橫視

中藏皆廉

本積	方法	一廉	二廉	三廉	四廉	五廉	六廉	七廉
----	----	----	----	----	----	----	----	----

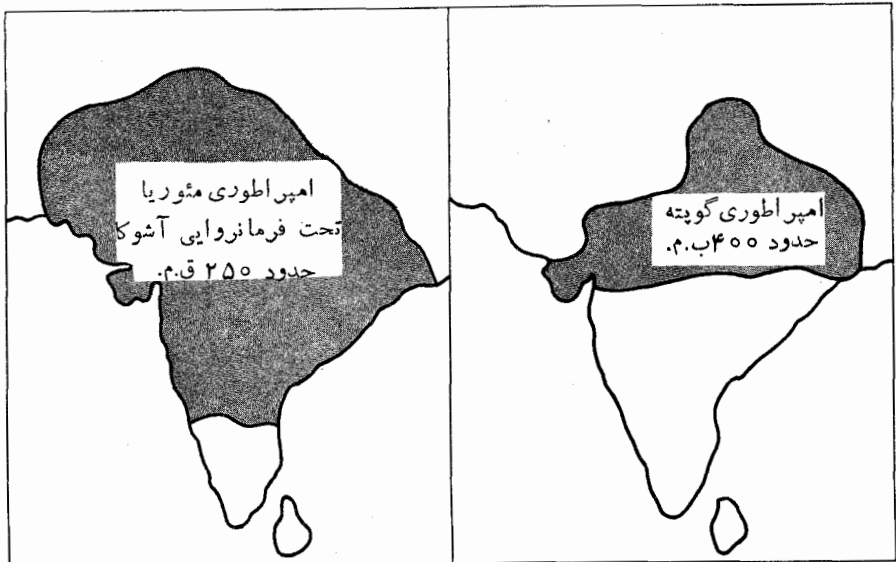
مثلت حسابی پاسکال به صورتی که در ۱۳۰۳ توسط چوشی کیتیه ترسیم شده است.

هند

۴-۷ بررسی کلی

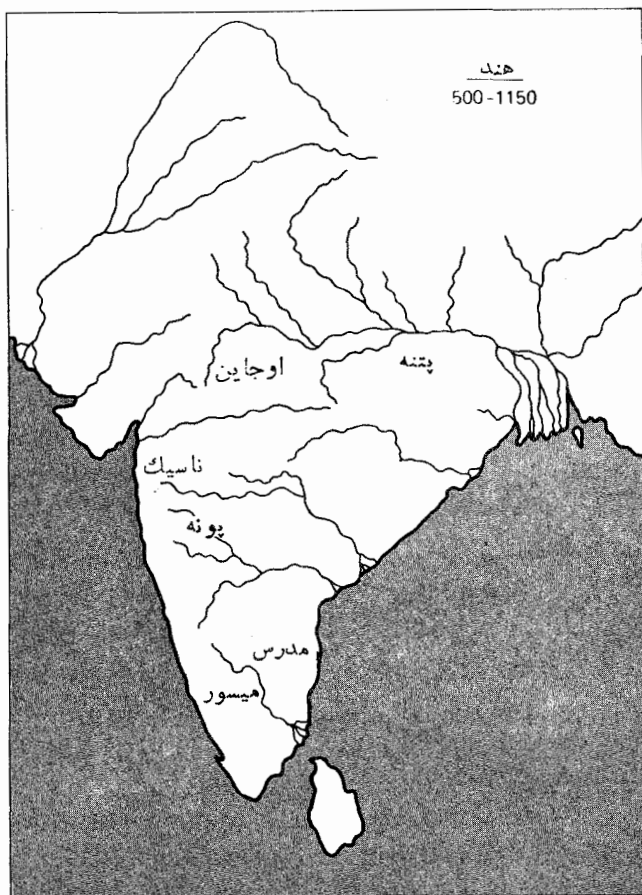
به جهت فقدان مدارک موثق، از چگونگی پیدایش ریاضیات هندی باستان اطلاع بسیار کمی در دست است. قدیمیترین تاریخ درخرا به‌های ۵۰۰۰ ساله شهری در موهنجودارو حفظ شده است. شواهدی از خیا بانهای عریض، منازل آجری، خانه‌های آبارتمانی با حمامهای کاشیکاری شده، آبراهه‌های سرپوشیده شهری، و استخرهای شنای عمومی نشان از تمدنی دارد که به اندازه تمدنهایی که در هر جای دیگر در شرق باستان یافت می‌شد، پیشرفته بوده است. این اقوام اولیه دستگاههای نگارش، شمارش، سنجش وزن، و اندازه‌گیری داشتند، و کانالهایی برای آبیاری می‌کنند. همه این کارها نیاز قابل ملاحظه‌ای به ریاضیات بنیادی و مهندسی داشتند. از آنچه بر سر این اقوام آمده، اطلاعی نداریم.

در حدود ۴۰۰۰ سال پیش بود که دسته‌های سرگردان از جلگه‌های بزرگ آسیای مرکزی، با عبور از گذرگاههای هیمالیا به هندوستان رفتند. این قوم آریایی نامیده می‌شدند، که از کلمه‌های سانسکریت به معنی «اشراف» یا «زمینداران» گرفته شده است. بسیاری از آنها در همانجا ماندند، و بقیه راهی اروپا شدند و ریشه دودمان هندواروپایی را تشکیل دادند. نفوذ آریاییها تدریجاً در سراسر هند گسترش یافت. در هزار سال اول اقامت خود هم سانسکریت نوشتاری و هم سانسکریت گفتاری را تعالی بخشیدند. اینان بسانی رواج



نظام کاستی نیز بودند. در قرن ششم ق.م. لشکریان ایران تحت فرماندهی داریوش وارد هند شدند اما فتوحات دائمی به عمل نیاوردند. دو شخصیت برجسته از هند قدیم، پانینی^۱ دستور دان و بودا، معلم مذهبی به این دوره تعلق دارند. احتمالاً این دوره، زمان تقریبی شولوسوتره‌ها^۲ («قواعد ریسمان») نیز هست، که عبارت از برخی نوشته‌های مذهبی مورد توجه در تاریخ ریاضی است، از آن جهت که اینها متضمن قواعدی هندسی برای ساختن محرابها به مدد کشیدن طناب هستند و نشان از آشنایی با سه تاییهای فیثاغورسی دارند.

بعد از فتح موقت شمال غربی هندوستان به دست اسکندر کبیر در ۳۲۶ ق.م. امپراطوری مئوریا^۳ تأسیس شد و به تدریج بر سرتاسر هند و قسمتهایی از آسیای مرکزی گسترش یافت. مشهورترین فرمانروای مائوریا شاه آشوکا (۲۳۲-۲۷۲ ق.م.) بود که



تعدادی از ستونهای عظیم سنگی وی، که در هر شهر مهم زمان او در هند بنا شده بودند، هنوز با برجا هستند. این ستونها از این لحاظ برای ما اهمیت دارند که، چنانچه در بخش ۱-۹ بیان شد، بعضی از آنها ابتدا بیترین نمونه‌های محفوظ علایم عددی کنونی را بر خود دارند. بعد از آشوکا، هندوستان دستخوش يك رشته تهاجمات گردید که نهایتاً سلسله گوپته^۱ را تحت حکومت امپراطوران بومی هند در پی داشت. دوره گوپته به صورت عصر طلایی رنسانس سانسکریت درآمد و هند، مرکزی برای کسب دانش، هنر، و طب گردید. شهرهای ثروتمند سربر آوردند و دانشگاهها بنا گردیدند. اولین اثر مهم در زمینه نجوم، کتاب مجهول المؤلف، به نام سوریه سدها^۲ («شناسایی خورشید»)، به همین دوره که احتمالاً اوایل قرن پنجم بود، برمی گردد. ریاضیات هندی از اینجا در خدمت نجوم، و نه مذهب در می آید. کتاب مربوط به قرن ششم پنج سدها^۳، اثر وراهمیپهره^۴ منجم از اهالی او جاین^۵ و بر مبنای کتاب سوریه سدها^۲ قبلی، شامل خلاصه سودمندی است از مثلثات اولیه هند و يك جدول سینوسها که ظاهراً از جدول اوتار بطلمیوس استخراج شده است. در میزان نفوذ ریاضیات یونانی، بابلی، و چینی بر ریاضیات هند، و بالعکس، هنوز نظر قاطعی ابراز نشده است، اما شواهد فراوانی مبنی بر اینکه نفوذ از هر دو سو قابل ملاحظه بوده است، وجود دارد. یکی از فواید مشخص پاکس رومانا، نشر دانش بین شرق و غرب بود، و از زمانی بسیار دور، هند نمایندگانی را هم با غرب و هم با خاور دور مبادله می کرد.

از حدود ۳۵۰ ب.م. تا حوالی پایان سالهای ۱۴۰۰، هند دوباره به دفعات در معرض هجوم بیگانه قرار گرفت. ابتدا نوبت هونها بود، بعداً اعراب در قرن هشتم، و ایرانیها در قرن یازدهم. چندین ریاضیدان سرشناس هندی در این دوران می زیستند. دو آریبیطه، برهمگوپته^۶، مهاویره^۷، و بهاسکره از آن زمره بودند. آریبیطه بزرگ رونقش در قرن ششم بود و در مجاورت پته^۸ کنونی در کنار رود گنگ به دنیا آمد. وی اثری در نجوم به نام آریبیطه نگاشت که فصل سوم آن به ریاضیات اختصاص دارد. دو آریبیطه تا اندازه ای با هم مشتبه می شوند، و امکان آن هست که آثار آنها به درستی از هم تمیز داده نشده باشد. برهمگوپته برجسته ترین ریاضیدان هندی قرن هفتم بود. وی در مرکز نجومی او جاین، در هند مرکزی، به سر می برده و کار می کرده است. در سال ۶۲۸، وی کتاب برهمسپوته سدها^۹ («دستگاه تجدید نظر شده بر همه») را نوشت، که اثری در نجوم است مشتمل بر ۲۱ فصل که فصول ۱۸ و ۱۹ آن راجع به ریاضیات است. مهاویره که حوالی سال ۸۵۰ روتی یافت، از اهالی میسور^{۱۱} در هند جنوبی بود و آثاری در ریاضیات مقدماتی نوشت. بهاسکره در او جاین،

1. Gupta
2. Sūrya Siddhānta
3. Pānca Siddhāntikā
4. Varāhamihira
5. Ujjain
6. Brahmagupta
7. Mahāvira
8. Patna
9. Brahma - sphuta - sidd'hānta
10. the revised system of Brahma
11. Mysore

شهر محل اقامت و راهمیهیره و برهمگوپته می زیست. اثر او سدهاخته شیروهنی^۱ (دهیمیک یک دستگاه نجومی)^۲ در ۱۱۵۰ نوشته شده و پیشرفت کمی نسبت به کار برهمگوپته که متعلق به متجاوز بر ۵۰۰ سال پیش بود، نشان می دهد. قسمتهای ریاضی مهم اثر بهاسکره لیلواتی^۳ («زیبا») و ویجگنیتنه^۴ («حساب بذر») ^۵ هستند که به ترتیب سروکار با حساب و جبر دارند. قسمتهای ریاضی آثار برهمگوپته و بهاسکره توسط ه. ت. کولبروک^۶ در ۱۸۱۷ به انگلیسی برگردانده شدند. سوریه سدهاخته توسط ا. برگس^۷ در ۱۸۶۰ ترجمه شده، و اثر مهاویره به وسیله م. رنگاچاریه^۸ در ۱۹۱۲ منتشر گردید.

ریاضیات هندی بعد از بهاسکره تا اعصار جدید در واقع به انحطاط گرایید. در ۱۹۰۷ انجمن ریاضی هند تأسیس شد، و در سال بعد انتشار مجله انجمن ریاضی هند^۹ در مدرس آغاز شد. مجله آمار هند، سنخیا^{۱۰}، در ۱۹۳۳ آغاز به نشر کرد.

شاید جالبترین ریاضیدان هندی اعصار جدید میرزای فقیر و نسا بغه تعلیم نیاخته، سرینیواسا رامانوجان^{۱۱} (۱۸۸۷-۱۹۲۰) بود که توانایی حیرت آوری در درک سریع و عمیق روابط بفرنج عددی داشت. وی در سال ۱۹۱۳ توسط استاد برجسته انگلیسی، در نظریه اعداد، ج. ه. هاردی^{۱۲} (۱۸۴۷-۱۸۷۷) «کشف» گردید، و تلاشهای وی رامانوجان را در سال بعد برای تحصیل در دانشگاه کیمبریج به انگلستان آورد. این امر به یکی از پراهمیت ترین همکاریهای ریاضی بین این دو انجامید.

در کتابهای درسی تاریخ ریاضیات تناقضات و سردرگمیهایی به هنگام بررسی ریاضیات هند دیده می شود. این امر، ونه در حد کمی، معلول مبهم بودن و در مواردی تقریباً نامفهوم بودن نوشته های مؤلفان هندی است. تاریخ ریاضیات هندی همچنان در انتظار یک بررسی قابل اعتمادتر و محققانه تری است.

۵-۷ محاسبات عددی

در بخش ۱-۹ اطلاعات اندکی را که راجع به نقش ایفا شده توسط هندیان در بسط دستگاه عددنویسی موضعی کنونی در دست است به اجمال بررسی کردیم. اکنون شرح کوتاهی از روشهای هندی محاسبه در این دستگاه را ارائه می دهیم. رمز فهم الگوریتمهای ابداع شده در پی بردن به کیفیت نوشت افزاری است که در اختیار محاسبین بوده است. به عقیده مورخ

1. *Siddhānta Śīromani*
2. diadem of an astronomical system
3. *Lilāvati*
4. *Vijaganita*
5. seed arithmetic

* به یقین نمی دانیم که لیلواتی و ویجگنیتنه قسمتهایی از سدهاخته شیروهنی باشند. امکان دارد که اینها دو اثر مجزا باشند.

6. H. T. Colebrooke
7. E. Burgess
8. M. Rangācārya
9. *Journal of the Indian Mathematical Society*
10. *Sankhyā*
11. Srinivasa Ramanujan
12. G. H. Hardy

آلمانی ه. هانکل آنها عموماً با قلم نیی که در رنگ سفید و رقیقی فرو می بردند، بر تخته سیاه کوچکی می نوشتند، که به سادگی می شد آن را پاک کرد، و یا با چوبی بزرگ لوح سفید که مساحتی کمتر از یک فوت مربع داشت و روی آن را با پاشیدن آرد سرخ رنگی پوشانده بودند، می نوشتند. در هر مورد جای نوشتن کوچک بود و برای آنکه نوشته خوانا باشد به ارقام نسبتاً بزرگی نیاز بود، مع هذا حک و اصلاح کاملاً به سادگی انجام می شد. از این رو مراحل محاسبه طوری طرح ریزی شده بودند که با پاک کردن هر رقمی که نقش خود را ایفا کرده بود، جا برای نوشتن باز شود.

عمل جمع هندی قدیم احتمالاً، به جای اینکه مطابق سلیقه کنونی ما از راست به چپ باشد، از چپ به راست انجام می شده. به عنوان مثال جمع ۳۴۵ و ۴۸۸ را در نظر بگیرید. احتمالاً اینها، یکی در زیر دیگری و کمی پایینتر از لبه فوقانی لوح محاسبه، همچنانکه در تصویر همراه دیده می شود، نوشته می شده اند. محاسب می گفته،

$$۳ + ۸ = ۱۱$$

که ۱۱ را به ۳ و ۸ می نویسد. سپس $۴ + ۸ = ۱۲$ را به ۲ و ۱۲ می نویسد. بنا بر این ۷ پاک شده ۳ ۴ ۵ و ۸۲ نوشته می شود. ما در مثال خود، به جای پاک کردن، ۷ را خط زده و ۸ ۸ را بالای آن نوشته ایم. حال $۵ + ۸ = ۱۳$ ، که ۲ را به یک ۳ که ۳ دیگری به دنبال دارد، تبدیل می کند. دو مرتبه همه چیز با مالش سریع انگشتی تصحیح و جواب نهایی بر بالای لوح ظاهر می شود. حال می توان ۳۴۵ و ۴۸۸ را پاک کرد و بقیه لوح را برای کارهای بعدی در اختیار داشت.

در یک شرح فاقد تاریخ بر لیلادتی بهاسکره روش دیگری را می یابیم که به مدد آن جمع ۳۴۵ و ۴۸۸ به صورت زیر انجام می شود:

$$\text{مجموع یکانها} \quad ۵ + ۸ = ۱۳$$

$$\text{مجموع دهگانها} \quad ۴ + ۸ = ۱۲$$

$$\text{مجموع صدگانها} \quad ۳ + ۴ = ۷$$

$$\text{مجموع مجموعهها} \quad = ۸۳۳$$

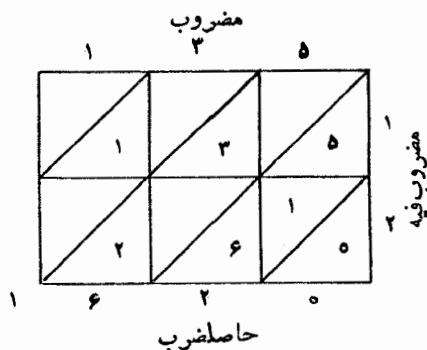
برای عمل ضرب از روشهای متعددی استفاده می شده است. صورت نوشته شده ضرب ساده مثلاً، ۵۶۹ در ۵، ممکن است به شکل زیر ظاهر شود، که مجدداً عمل از چپ به راست انجام می شود. بر روی لوح، کمی پایینتر از لبه فوقانی آن، ۵۶۹ و به دنبال آن در همان خط، مضروب فیه، ۵، را بنویسید. سپس، چون $۵ \times ۵ = ۲۵$ ، در بالای ۵۶۹، به صورتی که در شکل مقابل نشان داده شده، نوشته می شود. حال، $۵ \times ۶ = ۳۰$ ، که ۵ موجود در ۲۵ را به یک ۸ بدل می کند و به دنبال آن هم یک ۵ می آید. این بعد از حک سریعی تثبیت می شود. در این

مثال، مجدداً به جای پاك کردن، ۵ را خط زده ایم و ۸ را بالای آن نوشته ایم. حال $۴۵ = ۵ \times ۹$ ، که ۵ را به يك ۴ که به دنبال آن يك ۵ می آید، بدل می کند. حاصلضرب نهایی، ۲۸۴۵، اکنون در بالای لوح محاسبه آشکار می شود.

ضرب پیچیده تری، مثلاً نظیر ۱۲×۱۳۵ ، ابتدا با پیدا کردن $۴ \times ۱۳۵ = ۵۴۰$ ، مانند بالا، سپس $۱۶۲۰ = ۳ \times ۵۴۰$ ، و یا با جمع کردن $۱۳۵ \times ۱۰ = ۱۳۵۰$ و $۲۷۰ = ۲ \times ۱۳۵$ برای به دست آوردن ۱۶۲۰ ، انجام می شود. یا ممکن است، بنا به گفته هانکل، آن را به صورت زیر ترتیب داد. کمی پایینتر از بالای لوح، مضروب ۱۳۵ و مضروب فیه ۱۲ را به قسمی بنویسید که رقم یکان مضروب زیر آخرین رقم سمت چپ مضروب فیه قرار گیرد. حال $۱ \times ۱۳۵ = ۱۳۵$ ، که در بالای لوح نوشته می شود. سپس، با پاك کردن، مضروب ۱۳۵ را يك رقم به راست منتقل و در ۲ مربوط به ۱۲ ضرب کنید. با انجام این کار داریم $۲ \times ۱۳۵ = ۲۷۰$ ، که ۳ موجود در حاصلضرب جزئی را به ۵ بدل می کند. حال $۳ \times ۱۳۵ = ۴۰۵$ ، که دو حاصلضرب جزئی جدید را به ۶ تبدیل می کند. سرانجام، $۵ \times ۱۳۵ = ۶۷۵$ ، که ۱ آخری در حاصلضرب جزئی را به ۲ بی ۵ که در پی دارد، بدل می کند. حاصلضرب کامل، ۱۶۲۰ ، اکنون در بالای لوح ظاهر می شود.

روش دیگری برای ضرب، که بر اعراب معلوم بوده، و احتمالاً از هندوان گرفته شده و نیز شباهت زیادی به عمل ضرب امروزی دارد، در تصویر زیر دیده می شود که در آن دوباره حاصلضرب ۱۳۵ را در ۱۲ پیدا می کنیم. نمودار شبکه ای عملاً رسم و عمل جمع به طور قطری انجام می شود. توجه کنید که، به دلیل نحوه تقسیم هر خانه به دو بخش به وسیله يك قطر، هیچگونه نیازی به ده بریکها در موقع ضرب نیست.

اعراب، که بعدها برخی روشهای هندیان را به عاریت گرفتند، قادر به بهبود آنها نبودند و لذا به تطبیق آنها با کار «کاغذی»، که عمل حك به آسانی بر آن صورت نمی گیرد، پرداختند، که در این صورت ارقام نامطلوب، خط خورده و ارقام جدید بر بالا یا زیر ارقام



قبلی، هم چنان که ما در شکل صفحه قبل عمل کرده ایم، نوشته می شوند.
 بسط الگوریتمهای جدید برای اعمال حسابی ابتدایی امروز ما که محتملاً در
 قرنهای دهم و یازدهم در هندوستان آغاز شد، توسط اعراب اخذ گردید و بعدها به اروپای
 غربی انتقال یافت، و در اینجا بود که این الگوریتمها به اشکال امروزی خود تغییر یافتند.
 این کار به نحو قابل ملاحظه ای از طرف نویسندگان قرن پانزدهم اروپا که درباره حساب
 چیز می نوشتند، مورد توجه قرار گرفت.

۶-۷ حساب و جبر

هندیان حسابدانان با استعدادی بودند و خدمات شایانی به علم جبر کردند.
 بسیاری از مسائل در حساب به روش امتحان و تصحیح حل می شدند. روش مقبول
 دیگری همان روش معکوس کردن بود، که شخص با داشتن مقداری اطلاع در جهت عکس عمل
 می کند. برای مثال، مسئله زیر را در نظر بگیرید که در لیلواقی اثر بهاسکره ارائه شده:
 «دخترک زیبا که چشمانی درخشان داری، به من بگو، از آنجا که روش صحیح عکس کردن
 را دریافته ای، چه عددی است که چون در ۳ ضرب شود، سپس به اندازه $\frac{3}{4}$
 حاصل ضرب افزایش یابد، آنگاه به ۷ تقسیم شود، به اندازه $\frac{1}{3}$ خارج قسمت کاهش یابد،
 در خود ضرب شود، به اندازه ۵۲ کاهش یابد، با استخراج ریشه دوم، اضافه کردن ۸،
 تقسیم بر ۱۵ عدد ۲ را عاید نماید؟» بنا به روش معکوس از ۲ شروع می کنیم و در جهت
 عکس عمل می کنیم. بدین ترتیب، $196 = 52 + [8 - (10)(2)]^2$ ، $\sqrt{196} = 14$ ،
 $28 = \frac{3}{4} \times (14) \times (7) \times (4/7) + 3$ ، که جواب مسئله است. توجه کنید آنجا که مسئله
 دستور تقسیم بر ۱۵ داده، ما در ۱۵ ضرب می کنیم، آنجا که گفته شده ۸ را اضافه کنیم
 ۸ را کم می کنیم، آنجا که گفته شده جذر بگیریم، مجذور می کنیم، و الی آخر. تعویض
 هر عمل با معکوس آن دلیل این نامگذاری است. البته اگر هم می خواستیم مسئله را
 به روشهای امروزی حل کنیم، دقیقاً چنین عمل می کردیم. بنابراین، اگر x را نمایش عدد
 مطلوب بگیریم، داریم:

$$\frac{\sqrt{\left[\frac{(2/3)(7/4)(3x)}{7}\right]^2 - 52 + 8}}{10} = 2.$$

برای حل این معادله دو طرف را در ۱۵ ضرب می کنیم، سپس از هر طرف ۸ کم می کنیم،
 بعداً طرفین را مجذور می کنیم، و قس علی هذا. این مسئله همچنین رویه هندیان را در
 پوشاندن جامعه شعر به مسائل حسابی نشان می دهد. این بدان جهت بود که کتابهای درسی
 مدارس به شعر نوشته می شدند، و نیز اینکه مسائل اغلب برای سرگرمی عموم مورد استفاده
 قرار می گرفتند.

هندیان مجموع تصاعدهای حسابی و هندسی را یافتند و مسائل تجاری در باب

مراجه‌های ساده و مرکب، تخفیف، و شراکت را حل کردند. آنها همچنین مسائل احتزاج و آب انبار را، مشابه با آنها که در کتابهای درسی امروزی یافت می‌شوند، حل کردند. نمونه‌های متعددی از مسائل حسابی هندیان را می‌توان در مطالعه‌های مسئله‌ای ۴.۷، ۵.۷، ۶.۷ یافت.

منشأ قسمت اعظم اطلاعات ما از حساب هندی، لیلادتی بهاسکره است. داستان شورانگیزی دربارهٔ این اثر گفته شده است. بنا بر این قصه، ستارگان پیشینی کرده بودند که اگر لیلادتی، تنها دختر بهاسکره، در ساعتی غیر از يك ساعت معین در روز نجسنة معینی ازدواج می‌کرد، طالع شومی در انتظارش بود. در آن روز به‌هنگامی که عروس نگران در حال نظارهٔ پایین رفتن سطح آب در ساعت آبی بود، مروریدی از تزیینات سرش، بی‌آنکه خود متوجه باشد افتاده و، با مسدود کردن سوراخ جام، جریان آب را به‌خارج بند می‌آورد، و بدین ترتیب لحظهٔ فرخنده بی‌خبر سپری می‌شود. برای تسکین دختر شوربخت خود، بهاسکره نام وی را بر کتابش می‌گذارد.

هندیان جبر خود را تلخیص نمودند. مانند دیوفانتوس، جمع را معمولاً با پهلوی هم نهادن نشان می‌دادند. تفریق را با نهادن نقطه‌ای بر بالای مفروق، ضرب را با نوشتن بیّه (هجای اول کلمه بهیوئته^۲ «حاصلضرب») بعد از عوامل ضرب، تقسیم را با نوشتن مقسوم‌علیه در زیر مقسوم، ریشهٔ دوم را با نوشتن که^۳ (از کلمهٔ کرئه^۴ «گنگک») قبل از کمیت مربوطه نشان می‌دادند. برهنگوپته مجهول را با پایه^۵ (از کلمهٔ یادتاوت^۶، «به قدری که») نشان داد. به اعداد صحیح معلوم پیشوند دو^۷ (از دوپه^۸، «عدد مطلق») اضافه می‌شد. مجهولهای اضافی با هجاهای اول واژه‌های معرف رنگهای مختلف نشان داده می‌شدند. مثلاً يك مجهول دیگر ممکن بود با کا^۹ (از کلمهٔ کالکه^{۱۰}، «سیاه») معرفی گردد و $xy + \sqrt{10} - 7$ به صورت زیر ظاهر شود

۲. رو ۱۰ که به کا یا

هندیان اعداد منفی و گنگک را پذیرفتند، و تشخیص دادند که يك مجذور (باجوابهای حقیقی) دارای دو ریشهٔ صوری است. آنها جواب جبری معادلات درجهٔ دوم را با استفاده از روش آشنای تکمیل مربع یکدست کردند. امروزه به روش اخیر اغلب روش هندی اطلاق می‌شود، بهاسکره دو اتحاد مهم

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{(a + \sqrt{a^2 - b})/2} \pm \sqrt{(a - \sqrt{a^2 - b})/2}$$

- | | | | | |
|---------------|------------|---------|-----------|------------|
| 1. bha | 2. bhavita | 3. ka | 4. karana | 5. yā |
| 6. yāvattāvat | 7. rū | 8. rūpa | 9. kā | 10. kālaka |

را عرضه کرد که در کتابهای جبری کنونی گاهی برای یافتن ریشهٔ دوم يك عدد اصم^۱ جمله‌ای به کار می‌رود. این اتحادها در مقالهٔ دهم اصول اقلیدس نیز دیده می‌شوند، اما در آنجا به زبان پیچیده‌ای عرضه شده‌اند که به زحمت قابل درک است.

هندیان توانایی قابل ملاحظه‌ای در آنالیز نامعینها از خود نشان دادند و شاید از اولین کسانی بودند که روشهایی کلی در این شاخه از ریاضیات ابداع نمودند. برخلاف دیوفانتوس که در پی يك جواب گویا برای يك معادلهٔ سیاله بود، هندیان به یافتن همهٔ جوابهای صحیح معادلات همت گماشتند. آریهطه و برهمگوپته جوابهای صحیح معادلهٔ سیالهٔ خطی $ax+by=c$ را، که در آن a, b, c اعداد صحیح‌اند، یافتند. معادلهٔ سیالهٔ درجهٔ دوم $xy=ax+by+c$ به روشی که بعدها وسیلهٔ اوپلر از نسو اختراع شد، حل گردید. کار برهمگوپته و بهاسکره روی معادلهٔ موسوم به معادلهٔ پل^۲، $x^2+1=ay^2$ ، که a در آن عدد صحیح نامجدوری است، از نظر عده‌ای مهم تلقی شده است. آنها نشان دادند که چگونه از يك جواب $x, y, xy \neq 0$ ، بینهایت جواب دیگر را می‌توان یافت. نظریهٔ کامل معادلهٔ پل سرانجام توسط لاگرانژ در ۱۷۶۹-۱۷۶۶ تدوین شد. کار هندیان بر روی معادلات سیاله دیرتر از آنکه تأثیر سودمندی را موجب شود، به‌غرب رسید.

۷-۷ هندسه و مثلثات

هندیان مهارتی در هندسه نداشتند. براهین دقیق نامعمول بود و مطالعات اصول موضوعه‌ای وجود نداشتند. هندسهٔ آنان عمدتاً تجربی و عموماً در رابطه با مساحی بود.

شولوسوتره‌های باستانی نشان می‌دهند که هندیان اولیه هندسه را در ساختن محرابها به کار می‌بستند و در این راه از رابطهٔ فیثاغورس استفاده می‌نمودند. این قواعد دستوراتی را برای یافتن مربعی برابر مجموع یا تفاضل دو مربع مفروض و مربعی برابر با مستطیل مفروضی در اختیار می‌گذاشتند. در همانجا جوابهایی برای مسئلهٔ تربیع دایره نیز ظاهر می‌شود که معادل با اختیار $d = \frac{2 + \sqrt{2}}{3}s$ و $s = \frac{13d}{15}$ است که در آن d قطر دایره و s ضلع مربع مساوی با آن است. همچنین عبارت

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{(3)(4)} - \frac{1}{(3)(4)(34)}$$

در همانجا ظاهر می‌شود که از آن جهت جالب است که کسرها همه کسره‌های با صورت واحدند، و از آن رو که عبارت مزبور تا پنج رقم اعشار صحیح است.

۱. surd، اگرچه این کلمه گاه به معنی irrational یا گنگ به کار می‌رود، اصلاً به معنی عددی است به صورت مجموع يك عدد گویا با ریشهٔ گنگ يك عدد گویا یا بیشتر، مانند $\sqrt{3}$ و $0.1 + \sqrt{2} + \sqrt{5}$.

هم برهمگوپته و هم مهاویره نه تنها فرمول هرون را برای مساحت مثلث برحسب سه ضلع آن ارائه دادند، بلکه تعمیم قابل ملاحظه آن را*

$$K = [(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)]^{1/2}$$

برای مساحت یک چهار ضلعی محاطی با اضلاع a, b, c, d و نصف محیط s عرضه کردند. به نظر می رسد که شارحین بعدی متوجه محدودیت اعمال شده بر چهار ضلعی نشده اند. فرمول برای حالت کلی چنین است

$$K^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right),$$

که در آن A و C دو رأس متقابل چهار ضلعی هستند. در هندسه هندی، مهمتر از همه و در حد اعلائی کیفیت، قضایای برهمگوپته اند، حاکی از اینکه قطرهای m و n یک چهار ضلعی محاطی که دارای اضلاع متوالی a, b, c, d هستند، با

$$m^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}$$

$$n^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$$

داده می شوند، و اینکه اگر a, b, c, A, B, C اعداد صحیح مثبت باشند به قسمی که $a^2 + b^2 = c^2$ و $A^2 + B^2 = C^2$ ، آنگاه چهار ضلعی محاطی که با اضلاع متوالی aC, bC, cA, bC (که شبه دوزنقه برهمگوپته نامیده می شود) دارای مساحت و قطرهای گویاست و قطرهایش برهم عمودند (نگاه کنید به مطالعه های مسئله ای ۹.۷ و ۱۰.۷). برهمگوپته قضیه بطلمیوس درباره چهار ضلعیهای محاطی را می دانسته است.

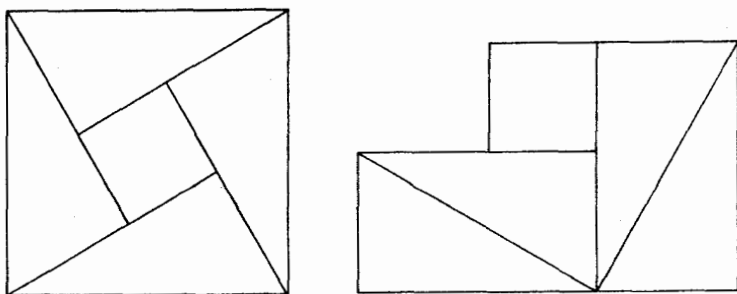
در فرمولهای مساحی هندی بی دقتیهای زیادی ظاهر می شوند. مثلاً آریهطه حجم هرم را به صورت نصف حاصلضرب قاعده در ارتفاع، و حجم کره را به صورت $\frac{3}{2}\pi r^3$ می دهد. هندیان چند مقدار دقیق برای π ارائه کردند، اما اغلب $\pi = 3$ و $\pi = \sqrt{10}$ را نیز به کار می بردند.

اغلب دانش آموزان در هندسه دبیرستانی اثبات بهاسکره برای قضیه فیثاغورس از راه تقطیع را دیده اند، که در آن مربع روی وتر، مثل شکل ۶۰، به چهار مثلث، که هر یک با مثلث مفروض مساوی است، به اضافه مربعی که ضلع آن برابر تفاضل ساقهای مثلث مفروض

* برای استخراج این فرمول، مثلاً رجوع کنید به

E. W. Hobson, *A Treatise on Plane Trigonometry* 4th ed. p. 204

R. A. Johnson, *Modern Geometry*, p. 81.



شکل ۶۰

است، تقسیم می‌شود. این قطعات را می‌توان به سادگی از نو مرتب نمود تا جمع مربعات بر روی دو ساق را پدید آورند. بهاسکره شکل را رسم نموده و توضیح بیشتری جز کلمه «بنگر!» نداده است. مع‌هذا، با کمی استفاده از جبر، برهان را می‌توان نوشت. زیرا اگر c وتر و a و b دوساق مثلث باشند

$$c^2 = 4\left(\frac{ab}{2}\right) + (b-a)^2 = a^2 + b^2.$$

این برهان از راه تقطیع بسیار پیش از این در چین وجود داشت. بهاسکره همچنین برهان دیگری را با رسم ارتفاع وارد بر وتر ارائه کرد. از مثلثهای متشابه شکل ۶۱ داریم

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{m}, \quad \frac{c}{a} = \frac{a}{n}$$

یا

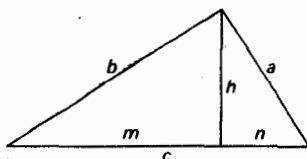
$$cm = b^2, \quad cn = a^2.$$

از جمع کردن، به دست می‌آوریم

$$a^2 + b^2 = c(m+n) = c^2.$$

این برهان توسط جان والیس^۱ در قرن هفدهم مجدداً کشف شد.

هندیان، همچون یونانیان مثلثات را به عنوان ابزاری در نجوم تلقی می‌کردند. آنها از تقسیمات درجه، دقیقه، و ثانیه معمول در بین ما استفاده می‌کردند و جداولی برای سینوسها ساختند. (البته آنها برخلاف یونانیان که جداول وتر ساخته بودند، جداول نصف



شکل ۶۱

و ترساختند. هندیان معادله‌های سینوس، کسینوس، و سهم $(\text{versin } A = 1 - \cos A)$ را به کار بردند. آنها سینوس نصف زاویه را به وسیله رابطه $\text{versin } 2A = 2 \sin^2 A$ محاسبه کردند. آنها در نجوم، مثلثهای مسطحه و کروی را حل کردند. کیفیت نجوم نزد آنها ضعیف است و نشان از بی‌استعدادی در ارساد، جمع‌آوری و مقابله و تطبیق وقایع، و استنتاج قوانین دارد. مثلثات آنها را می‌توان بیشتر و اجد جنبه حسابی توصیف نمود تا جنبه هندسی.

۸-۷ مقایسه ریاضیات یونانی و هندی

بین ریاضیات یونانی و هندی اختلاف زیادی وجود دارد. در وهله اول، هندیانی که در ریاضیات کار می‌کردند، خود را در اصل منجم می‌پنداشتند، و لذا ریاضیات هندی عمدتاً به صورت ابزاری در خدمت نجوم باقی ماند؛ اما در یونان، ریاضیات هستی‌مستقلی یافت و ریاضیات به خاطر خود ریاضیات مورد مطالعه قرار گرفت. همچنین، به خاطر وجود نظام کاستی، ریاضیات در هند تقریباً به طور کامل به وسیله روحانیون رشد و نمو یافت؛ در یونان باب ریاضیات بر هر کسی که پروای مطالعه آن را داشت، مفتوح بود. بعلاوه، هندیان حسابگرانی ممتاز ولی هندسه‌دانانی متوسط بودند، یونانیان در هندسه تفوق یافتند ولی به کارهای محاسباتی کمتر توجهی از خود نشان دادند. حتی مثلثات هندی، که قابل ستایش بود، ماهیت حسابی داشت؛ مثلثات یونانسی واجد خصیصه هندسی بود. هندیان به نظم می‌نوشتند و آثار خود را اغلب در قالب زبانی مبهم و مرموز در می‌آوردند، یونانیان سعی در بیان واضح و منطقی داشتند. ریاضیات هندی عمدتاً تجربی بود که براهین و روشهای استخراج به ندرت در آن عرضه می‌شد، صفت متمیزه ریاضیات یونانی در اصرار آن بر براهین دقیق است. ریاضیات هندی از نظر کیفیت اصلاً یک‌دست نیست، ریاضیات پرمایه و ضعیف اغلب در کنار هم ظاهر می‌شوند؛ یونانیان ظاهراً غریزه‌ای داشتند که آنها را در تمیز کیفیت مطلوب از ضعیف و حفظ اولی و رها کردن دومی رهنمون بود. به گفته نویسنده مسلمان ابوریحان بیرونی در کتاب معروفش تحقیق ماللهند، ریاضیات هندی، برخلاف ریاضیات یونانی که کیفیتی یکدست عالی دارد «مخلوطی است از صدف و خزف... یا مزوجی از در پربها و سنگریزه بی‌بها».

قسمتی از اختلاف بین ریاضیات یونانی و هندی، امروزه در تفاوت بین بسپاری از کتابهای درسی مقدماتی جبر و هندسه ما جنبه دائمی یافته است.

اعراب

۹- ظهور فرهنگ اسلامی

ظهور و افول امپراطوری عرب یکی از جالب توجه‌ترین وقایع تاریخ است. در ظرف دهه



بعد از هجرت [حضرت] محمد [ص] از مکه به مدینه در ۶۲۲ میلادی [سال ۱ هجری]، قبایل پراکنده و نامتحد شبه جزیره عربستان به یاری شور و شوق مذهبی شدید به يك ملت قدرتمند قوام یافتند. طی يك قرن، نیروی سلاح تحت لوای سبز و طلایی اسلام، حکومت و نفوذ ستاره و هلال پرچم اسلام را بر قلمروی بسط داده بود که از هند گرفته، ایران، بین النهرین، افریقای شمالی، و آشکارا تا اسپانیا را در برمی گرفت. اختلاف در بین مدعیان خلافت سبب يك جدایی شرقی - غربی در این حکومت در سال ۷۵۵ شد، که به حکومت خلیفه ای در بغداد و خلیفه دیگری در قرطبه منجر گردید. تقریباً تا سال ۱۰۰۰ امپراطوری شرقی از برتری معنوی برخوردار بود. ولی در این زمان قسمت اعظم قلمرو شرقی به وسیله ترکان بیرحم سلجوقی مورد تاخت و تاز قرار گرفت. بین سالهای ۱۱۰۰ و ۱۳۰۰، صلیبیون مسیحی در صدد بیرون راندن مسلمانان از بیت المقدس برآمدند. در سال ۱۲۵۸، بغداد به وسیله مغولها اشغال شد، خلیفه شرقی از قدرت ساقط شد، و امپراطوری عربی روبه انحطاط نهاد. در سال ۱۴۹۲، اسپانیا آخرین حاکم مسوری خود را برکنار کرد، و اعراب جای پای خود در اروپا را از دست دادند.

آنچه که برای حفظ قسمت اعظم فرهنگ جهان اهمیت شایانی داشت، نحوه دستیابی و بهره وری از فضایل یونانی و هندی توسط اعراب بود. خلقای بغداد نه تنها به خوبی حکومت کردند، بلکه به حامیان علم بدل گشتند و فضیلتی برجسته را به دربار خود فراخواندند.

۱. Moorish، مور (Moor) اصطلاحی است که برای مسلمانان حاکم بر اسپانیا در قرن هشتم به کار می رفت و اینها ترکیبی از اعراب و اقوام شمال افریقا بودند. م.

آثار هندی و یونانی متعددی در نجوم، طب، و ریاضیات با تلاش فراوان به زبان عربی برگردانده شدند و بدین ترتیب تا آن زمان که فضایی اروپایی قادر به ترجمه مجدد آنها به زبان لاتین یا سایر زبانها گردند، محفوظ ماندند. اگر کار فضایی عرب نمی بود، بیشتر علوم یونانی و هندی به طور جبران ناپذیری در طی دوره طولانی عصر تاریکی^۱ [قرون وسطی] از بین می رفت. در زمان فرمانروایی خلیفه منصور، آثار برهمگوپته به بغداد آورده شدند (تقریباً ۷۶۶) و تحت حمایت خلیفه، بدعربی ترجمه شدند. گفته شده که ارقام هندی بدین وسیله وارد ریاضیات عربی شده است. خلیفه بعدی هارون الرشید بود که از سال ۷۸۶ تا ۸۰۸ میلادی حکومت کرد و آشنایی غربیان با وی به داستانهای هزار و یکشب^۲ مربوط می شود. تحت حمایت وی بسیاری از آثار کلاسیک علمی یونان به عربی برگردانده شدند، که قسمتی از اصول اقلیدس از آن جمله است. همچنین در عهد حکومت او معارف هندی رخنه بیشتری به بغداد پیدا کرد. مأمون پسر هارون الرشید نیز، که از سال ۸۰۹ تا ۸۳۳ میلادی حکومت کرد، حامی علم و خود یک منجم بود. او رصدخانه ای در بغداد بنا کرد و اندازه گیری نصف النهار زمین را به عهده گرفت. کار شاق تهیه ترجمه های عربی رضایتبخش از آثار کلاسیک یونانی به فرمان وی ادامه پیدا کرد؛ المجسطی بدعربی درآمده و ترجمه اصول کامل گردید. دستوشسته های یونانی، به عنوان یکی از شرایط صلح، از امپراطوری بیزانس مصادره و سپس توسط فضایی مسیحی سریانی که به دربار مأمون فراخوانده شده بودند، به عربی ترجمه شدند. در عصر این حکومت فضایی زیادی به نوشتن آثار در زمینه ریاضیات و نجوم پرداختند، که مشهورترین آنها محمد بن موسی الخوارزمی بود. وی رساله ای در جبر و کتابی درباره ارقام هندی نگاشت، که بعدها وقتی در قرن دوازدهم به لاتین ترجمه شدند هر دو تأثیر فوق العاده ای در اروپا گذاشتند. از دانشمندان کمی متأخرتر ثابت بن قره (۹۰۱-۸۲۶) بود، که به عنوان پزشک، فیلسوف، زبان دان، و ریاضیدان شهرت داشت. وی اولین ترجمه عربی و واقعاً رضایتبخش را از اصول پدید آورد. ترجمه های وی از آپولونیوس، ارشمیدس، بطلمیوس، و ثئودوسیوس در ردیف بهترین ترجمه های انجام شده قلمداد می شود. او همچنین در نجوم، مخروطات، جبر مقدماتی، مربعات جادویی، و اعداد متحابه (نگاه کنید به مطالعه مسئله ای ۱۱۰۷) رسایلی دارد.

احتمالاً نام آورترین ریاضیدان مسلمان در قرن دهم ابوالوفای بوزجانی (۹۴۰-۹۹۸) است، که در خراسان، ناحیه ای کوهستانی در ایران، به دنیا آمد. اشتها وی به جهت ترجمه آثار دیوفانتوس، معرفی تابع تنازانت توسط وی به عالم مثلثات، و محاسبه جدولی از سینوسها و تنازانتها برای فواصلی به طول ۱۵' است. وی مطالبی در چندین مبحث ریاضیات نوشت. از ابوکامل و کرخی [کرخی] که از مؤلفین قرون دهم و یازدهم بودند، باید به خاطر کارهایشان در جبر یاد کرد. اولی متأثر از خوارزمی بود و به نوبه خود بر ریاضیدان اروپایی فیبوناچی (۱۲۰۲) تأثیر نهاد. کرخی، که از هواداران دیوفانتوس بود، اثری به نام فخری به وجود آورد که یکی از فاضلانزه ترین کارهای مسلمین در جبر است.

اما شاید عمیقترین و بدیعترین اثر جبری حل هندسی معادله درجه سوم توسط عمر خیام (حوالی ۱۱۰۰)، خراسانی زاده دیگری، است که دنیای غرب او را به عنوان مصنف رباعیات دلتشین می شناسد. از خیام همچنین به خاطر اصلاحیه دقیق پیشنهادی اش برای تقویم یاد شده است. نویسنده نسبتاً متأخر دیگر، [خواجه] نصیرالدین [طوسی] (حدود ۱۲۵۰) است، که اوهم خراسانی بود. وی اولین اثر در باب مثلثات مسطحه و کروی را، که از نجوم مستقل تلقی شود، نگاشت. ساکری^۱ (۱۷۳۳ - ۱۶۶۷) کارش در هندسه ناقلیدسی را با دانشی از نوشته های نصیرالدین در باب اصل توازی اقلیدس شروع کرد. این نوشته ها بعداً به وسیله جان والیس در قرن هفدهم به لاتین در آمده و توسط او برای تسدیس هندسه در آکسفورد مورد استفاده قرار گرفت. سرانجام الغ بیگک، منجمی ایرانی از تبار شاهی در قرن پانزدهم، است که جداول سینوس و تانژانت برجسته ای تدوین کرد، با فواصل ۱' و صحیح تا ۸ رقم اعشار یا بیشتر. کاشانی، که در بخش ۷-۲ از او به خاطر تقریب دقیق π یاد کرده ایم، در دربار او می زیست. کاشانی کارهای مهمی در رابطه با کسرهای اعشاری انجام داد و تسا آنجا که می دانیم اولین نویسنده عرب [= عربی نویس] است که به کار با قضیه دو جمله ای، در شکل «مثلث پاسکال» پرداخته است.

۷-۱۰ حساب و جبر

قبل از [حضرت] محمد [ص]، اعراب همه ارقام را به کلمات می نوشتند. بعدها مدیریت گسترده تر زمینهای تصرف شده، تاحدی در مطرح شدن یک نمادگذاری کوتاه دخیل بود. زمانی دستگاههای اعداد محلی مورد پذیرش بودند، و زمانی استفاده از دستگاه شمار رمزی، شبیه دستگاه یونانی یونیاپی، که از ۲۸ حرف عربی استفاده می کرد، تقریباً رواج عام یافت. این نمادها نیز به نوبه خود، جای خود را به نماد هندی دادند که اولین بار به وسیله بازرگانان و کسانی که در زمینه حساب چیز می نوشتند، پذیرفته شده بود. کاملاً عجیب آنکه ارقام هندی در برخی از حسابهای متأخر امپراطوری شرقی کنار گذاشته شده اند. مثلاً ابوالوفا و کرخی، در قرنهای دهم و یازدهم، حسابهایی نوشتند که در آنها همه اعداد دوباره با کلمات نوشته شده بودند. این نویسندگان عرب [= عربی نویس] متأخر، از تعالیم هندی دور شده و تحت تأثیر روشهای یونانی قرار گرفتند. هیچ اثری مبنی بر استفاده از چرتکه در بین اعراب قدیمی یافت نشده است.

اولین حساب عربی که بر آن وقوف داریم، از آن خوارزمی است؛ دسته ای از حسابهای عربی دیگر به وسیله مؤلفین بعدی از بی آن آمدند. این حسابها عموماً قواعد محاسبه را، که از روی الگوریتمهای هندی الگو برداری شده بودند، شرح می دادند. آنها همچنین عملی را که معروف به طرح نه نه است، ارائه دادند؛ که برای امتحان کردن محاسبات حسابی به کار می رود، و قاعده امتحان و تصحیح و قاعده خطاین که به کمک آنها برخی مسائل

جبری رامی توان به طریقه غیر جبری حل کرد، از آنهاست (به مطالعه مسئله‌های ۱۲۰۷ و ۱۴۰۷ رجوع کنید). جذر و کعب، کسرها، و قاعده سه نیز بارها تشریح شده‌اند.

به نظر می‌رسد که قاعده سه، مانند اغلب مطالب دیگر در حساب مقدماتی، از هندیان گرفته شده باشد، و در واقع توسط برهمگوپته و بهاسکره به همین نام خوانده شده است. تا قریبها، این قاعده در بین بازرگانان اعتبار عمده‌ای داشت. قاعده مزبور به طور مکانیکی و بدون استدلال بیان می‌شود، و ارتباط آن با تناسب تا پایان قرن چهاردهم تشخیص داده نشد. نحوه بیان این قاعده توسط برهمگوپته چنین است: در قاعده سه، مایه، بهره، و مطلوب نامهای جمله‌ها هستند. جمله‌های اول و آخر باید از یک جنس باشند. مطلوب ضرب در بهره، و تقسیم بر مایه، همانا محصول است. برای روشن شدن مطلب مسئله زیر را که بهاسکره داده است، در نظر بگیرید: اگر دو و نیم پله زعفران به سه هفتم نیسکه^۲ خریداری شود، با ۹ نیسکه چند پله می‌توان خرید؛ در اینجا $\frac{3}{7}$ و ۹، که از یک جنس اند، مایه و مطلوب هستند، و $\frac{5}{2}$ بهره است. جواب یا محصول، در این صورت با $(\frac{1}{2}) \times 52 = (\frac{3}{7}) \times (\frac{5}{2}) \times 9$ داده می‌شود. امروزه ما مسئله را کاربرد ساده‌ای از تناسب به حساب می‌آوریم،

$$x : 9 = 5/2 : 3/7.$$

نویسندگان اولیه حساب اروپایی مطالب زیادی را به قاعده سه اختصاص دادند و ماهیت مکانیکی آن را در اشعار هجایی و اشکال نموداری می‌توان مشاهده نمود. در جبر خوارزمی اصالت کمتری می‌توان دید. چهار عمل اصلی شرح داده شده و معادلات خطی و درجه دوم حل گردیده‌اند، و حل معادلات درجه دوم هم به طریق حسابی و هم به طریق هندسی صورت گرفته است. کاری شامل مقداری مساحی هندسی و چند مسئله در اثر است.

ریاضیدانان مسلمان بهترین کارهای خود را در زمینه جبر هندسی عرضه داشتند، که این امر با حل هندسی معادلات درجه سوم به وسیله عمر خیام به اوج خود رسید. در اینجا معادلات درجه سوم به طور منظم دسته بندی شده و یک ریشه معادله به عنوان طول نقطه برخورد یک دایره و یک هذلولی متساوی الساقین یا دو هذلولی متساوی الساقین به دست آمده است (به مطالعه مسئله‌های ۱۵۰۷ مراجعه کنید). خیام ریشه‌های منفی را در کرده و در اغلب موارد قادر به کشف همه ریشه‌های مثبت نبود. معادلات درجه سوم از مطالعه مسائل نظیر ساختن هفت ضلعی منتظم و مسئله ارشمیدسی بریدن یک کره به دو قطعه به نسبتی معین ناشی شده‌اند. ابوالوفا راه حل‌های هندسی برای برخی معادلات درجه چهارم ارائه داد.

بعضی از ریاضیدانان مسلمان به معادلات سیاله علاقه نشان دادند. مثلاً برهانی (که احتمالاً ناقص بود و اکنون در دسترس نیست) بر این قضیه که نمی‌توان دو عدد صحیح مثبت یافت که مجموع مکعبات آنها مکعب عدد صحیح ثالثی باشد، ارائه داده شد. این

حالت خاصی از آخرین «قضیه» مشهور فرماست، که در فصل ۱۰ [جلد دوم] دوباره به آن باز خواهیم گشت. قبلاً از قاعده ثابت بن قره برای یافتن اعداد متحابه یاد شده است. گفته شده است که این اولین نمونه کار ریاضی اصیل است که توسط اعراب انجام شده است. کرخی اولین نویسنده عرب [= عربی نویسنده] بود که قضایایی ارائه و ثابت نمود که مجموع مربعات و مکعبات اولین n عدد طبیعی را می داد.

جبر عربی، بجز آنچه که مربوط به اعراب غربی متأخر است، لفظی بود.

۷-۱۱ هندسه و مثلثات

نقش مهم اعراب [= عربی نویسان] در هندسه بیشتر از جنبه حفظ آن بود و نه از جنبه کشفیات جدید در آن. دنیا به جهت تلاشهای خستگی ناپذیر آنان در ترجمه های رضای بخش آثار بزرگ کلاسیک یونان، دین عظیمی در قبال آنها به عهده دارد.

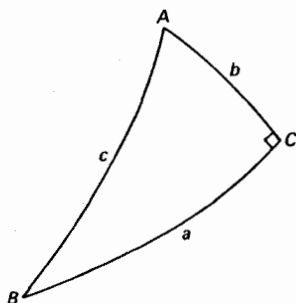
مطالعه زیبایی در هندسه توسط ابوالوفا انجام شده است، که در آن چگونگی قرار دادن رئوس چند وجهی منظم بر کره های محیطی آنها، با استفاده از پرگارهایی که فرجه ثابت دارند، نشان داده شده است. قبلاً از حل هندسی معادلات درجه سوم خیام و اثر پرنفوذ [خواجه] نصیرالدین در اصل توازی ذکر می به میان آورده ایم. نصیرالدین قسمتی از کار بیشتر خیام تحت عنوان بحثی از مشکلات در اقلیدس^۱ [شرح ما اشکل من مصادرات اقلیدس] را با شرح و «تصحیحاتی» منتشر نمود. در این قسمت کار پیشین، ما به آنچه که ظاهراً اولین بررسی سه حالتی که بعدها، توسط ساگری، نام فرضهای حاده، منفرجه و قائمه را یافتند، برمی خوریم (به بخش ۶-۱۳ رجوع کنید). برهان اصیلی از قضیه فیثاغورس نیز به نصیرالدین منسوب است. این برهان اساساً همان است که در یادداشتهای مربوط به مطالعه مسئله ای ۱۷.۶ (ج)، برای تعمیم پاپوس از قضیه فیثاغورس، پیشنهاد کرده ایم.

نام الهیثم، یا مشهورتر، الهازن^۲ (حوالی ۱۰۳۹-۹۶۵) در رابطه با مسئله موسوم به مسئله الهازن در ریاضیات حفظ شده است: رسم خطوطی بر دو نقطه مفروض واقع در صفحه یک دایره مفروض به طوری که یکدیگر را روی دایره قطع کنند و در آن نقطه زوایای متناوبی با دایره بسازند. مسئله منجر به یک معادله درجه چهارم می شود که به سبک یونانی بایک هذلولی و دایره متلاقی حل شده است. الهازن در شهر بصره واقع در جنوب عراق به دنیا آمد و شاید بتوان او را بزرگترین فیزیکدان مسلمان دانست. مسئله بالا در رابطه با رساله اپتیك وی، که بعدها نفوذ زیادی در اروپا گذاشت، مطرح شد.

در باره الهازن داستان رقت انگیزی گفته شده است. وی بدبختانه یک بار لاف زد که می تواند ماشین بسازد که قادر به کنترل و تنظیم طغیان سالانه رودخانه نیل باشد. از این رو به وسیله خلیفه حاکم به قاهره احضار شد تا ایده خود را شرح دهد و شاید هم آن را عملی نماید. الهازن که از عملی نبودن محض طرح خود آگاه بود و از خشم خلیفه می ترسید، خود

1. Discussion of the Difficulties in Euclid

2. Alhazen



شکل ۶۲

را به دیوانگی زد، زیرا که در آن زمان مجازین از حمایت ویژه‌ای برخوردار بودند. الهازن ناچار شد تا زمان مرگ خلیفه حاکم در سال ۱۵۲۱ با احتیاط زیاد بر این نیرنگ پافشارد. اغلب ریاضیدانان عرب، چون هندوان، خود را در وهله اول منجم به حساب می‌آوردند و از این رو علاقه قابل ملاحظه‌ای به مثلثات نشان می‌دادند. قبلا از برخی کارهای انجام شده توسط مسلمانان در ساختن جداول مثلثاتی یاد کرده‌ایم. شاید بتوان استفاده از هرشش تابع مثلثاتی و اصلاحات انجام شده در استخراج فرمولهای مثلثات کروی را به آنان منسوب کرد. قاعده کسینوسها برای يك مثلث غیر قائم کروی، یعنی

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

به وسیله بتانی (باصورت لاتینی آلباتگنیوس^۱، حوالی ۹۲۵) داده شد، و فرمول

$$\cos B = \cos b \sin A$$

برای مثلث کروی که زاویه قائمه‌ای در C دارد (به شکل ۶۲ رجوع کنید)، گاهی، به احترام منجم مسلمان غربی جابر بن افلاح (که اغلب جبر نامیده می‌شود و حوالی ۱۱۳۵ در سویل^۲ رونق یافت) قضیه جبر خوانده می‌شود.

۱۲-۷ کمی در علم اشتقاق

ریشه بسیاری از نامها و واژه‌های امروزی را می‌توان در دوره اعراب یافت، مثلاً هر فرد علاقه‌مند به نجوم ارضادی احتمالاً آگاه است که عده زیادی از نامهای ستارگان [در زبانهای اروپایی]، به ویژه ستاره‌های کم فروغ، عربی‌اند. به عنوان نمونه‌های مشهور دبران، نسر واقع، و رجل الجبار از جمله ستاره‌های پر فروغ، و غول، سها، و عناق از جمله ستاره‌های کم-فروغ می‌باشند. نامهای بسیاری از ستارگان در اصل عباراتی حاکی از موقعیت ستارگان در صورت‌های فلکی بودند. این عبارات توصیفی وقتی از فهرست بطلمیوس به تحریر عربی

1. Albategnius

2. Seville

در آمدند، بعدها به واژه‌های واحدی قلب شدند. به عنوان مثال منکب الجوزاء (زیر بغل جبار)، فم الحوت (دهان ماهی)، ذنب (دم پرنده)، رجل (ساق غول) را داریم، و قس علی هذا. قبلاً، در بخش ۵-۶، اشتقاق المجسطی را پی گرفتیم، که نامی است عربی که اغلب به اثر بزرگ بطلمیوس اطلاق می‌شود.

اشتقاق کلمه الجبرای انگلیسی از عنوان حساب الجبر والمقابلہ، رساله خوارزمی در این موضوع، بسیار جالب توجه است. این عنوان به طور تحت اللفظی به «Science of reunion and the opposition» یا به طور آزادتر به «Science of transposition and cancellation»^{*} ترجمه شد. این کتاب، که هنوز باقی است، در اروپا از طریق ترجمه‌های لاتین آن شناخته شد، و کلمه الجبر، یا الجبرا، را با علم معادلات مترادف نمود. البته از اواسط قرن نوزدهم به بعد، الجبرا معنی بسیار وسیعتری یافته است. واژه عربی الجبر، در کاربرد غیر ریاضی آن، از طریق مورهای اسپانیا به اروپا راه یافت. در آنجا الجبریستا^۱ یک شکسته بند (بدهم بر آورنده استخوانهای شکسته) بود، و نامعمول نبود که یک سلمانی آن زمان خود را الجبریستا بخواند، زیرا شکسته بندی و حجامت از کارهای جنی سلمانیهای قرون وسطی بود.

کتاب خوارزمی در باب استفاده از ارقام هندی نیز کلمه‌ای را به واژگان ریاضیات معرفی کرده است. این کتاب در صورت اصلی آن موجود نیست، ولی در ۱۸۵۷ یک ترجمه لاتینی آن به دست آمد که چنین شروع می‌شود، «روایت است از الگوریتمی...» در اینجا نام الخوارزمی به الگوریتمی بدل شده بود، که واژه امروزی «الگوریتم» به معنی فن محاسبه بهر شیوه خاص، به نوبه خود از آن مشتق شده است.

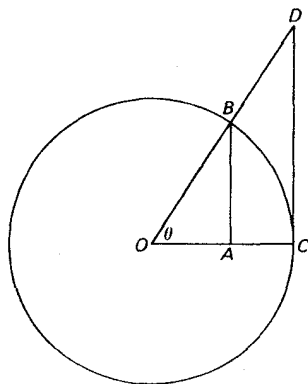
معانی نامهای کنونی توابع مثلثاتی، بجز سینوس از تعابیر هندسی آنها وقتی که زاویه بر مرکز دایره‌ای به شعاع واحد قرار داده شود، روشن است. مثلاً، در شکل ۶۳ اگر شعاع دایره یک واحد باشد، اندازه‌های $\tan \theta$ و $\sec \theta$ با طول قطعه خط مماس^۲ CD و قطعه خط قاطع^۳ OD داده می‌شوند. و البته کتانژانت به معنی متمم تانژانت است و قس علی هذا. توابع تانژانت، کتانژانت، سکانت و کسکانت به نامهای متعدد دیگری نیز شهرت داشتند، و نامهای فعلی در قرن شانزدهم ظاهر شده‌اند.

ریشه کلمه سینوس جالب است. آریهههه آن را اردها - جیا^۴ («نصف وتر») و نیز جیا - اردها^۵ («وتر نصف») نامید، و سپس این اصطلاح را صرفاً با به کاربردن جیا («وتر») مختصر نمود. اعراب جیب^۶ را مطابق قواعد آشناسازی از جیا گرفتند، که به پیروی از رسم اعراب در حذف حروف مصوت، به صورت جیب^۷ نوشته شد. در حال حاضر جیب

* برای تحلیل دقیقتری، رجوع کنید به مقاله

Solomon Gandz, "The origin of the term 'algebra'," *American Mathematical Monthly*, 33, (1926), pp. 437-440.

1. algebrista
2. tangent
3. secant
4. ardhā-jyā
5. jyā - ardhā
6. jība
7. jb



شکل ۶۳

در زبان عربی، جدا از معنی فنی آن، کلمه بی‌منهومی است. نویسندگان بعدی، که به‌جیب به‌عنوان مختصر شده‌جیب بی‌معنی برمی‌خورند تصمصیم گرفتند که جیب را به‌جای آن بگذارند، که شامل همان حروف است و کلمه عربی مناسبی به‌معنی «خلیج کوچک» یا «خلیج» است. بعدها، گزاردوی کره‌نویسی (حوالی ۱۱۵۰)، وقتی از عربی ترجمه می‌کرد، جیب عربی را با معادل لاتین آن، سینوس، جانشین کرد که از همان زمان کلمه کنونی *sine* پدید آمد.

۲-۱۳ سهم اعراب

ارزیابی سهم اعراب در بسط ریاضیات به‌هیچ‌وجه مورد توافق نیست. برخی برای نویسندگان مسلمان، به‌ویژه برای کار آنها در جبر و مثلثات، خلاقیت و نبوغ بسیار زیادی قائل‌اند. به‌نظر دیگران این‌ن نویسندگان شاید فاضل باشند ولی به‌ندرت خلاق‌اند، و خاطر نشان می‌کنند که کار آنان هم از نظر کمیت و هم از نظر کیفیت نسبت به‌کار یونانیان یا نویسندگان جدید کاملاً در درجه دوم قرار دارد. از سویی باید پذیرفت که آنان حداقل به‌بیشرفتهای کمی دست یافتند، و از سوی دیگر شاید چنین باشد که وقتی به‌بعضی دستاوردهای آنان در برابر زمینه عقیم علمی سایر قسمتهای دنیا نگریسته شود، از حد واقعی عظیمتر به‌نظر می‌آیند. واقعیت مهم دیگری، در برهم‌زدن تعادل به‌نفع آنها، این است که آنان به‌طور اعجاب‌انگیزی به‌عنوان نگهبانان بخش عمده ثروتهای معنوی دنیا خدمت نمودند، ثروتهایی که پس از سپری شدن عصر تاریکی به‌اروپاییان متأخر انتقال یافت.

مطالعه مسئله‌ای

۱۰۷ مسأله‌ای از «حساب در نه بخش»

مسائل زیر را که در حساب در نه بخش دیده می‌شود، حل کنید.

(الف) مسئله ۱۱، بخش IV. «مزرعه‌ای به عرض ۱، $1/2$ ، $1/3$ ، $1/4$ ، $1/5$ ، $1/6$ ، $1/7$ ، $1/8$ ، $1/9$ ، $1/10$ ، $1/11$ ، $1/12$ پو^۱ داده شده است، می‌دانیم که مساحت مزرعه ۱ مو^۲ است. طول مزرعه چیست؟ (یک پو برابر دو گام است؛ ۲۴۵ پوی مربع = ۱ مو، عرض مزرعه $1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/12$ پو است.)

(ب) مسئله ۱۴، بخش IV. «مزرعه مربعی به مساحت ۷۱۸۲۴ پوی مربع داده شده است. ضلع مربع چیست؟»

(ج) مسئله ۱۶، بخش I. «مزرعه‌ای به شکل قطعه‌ای از یک دایره داده شده است، که قاعده آن $78\frac{1}{4}$ پو و تیر آن $13\frac{7}{8}$ پو است. مساحت آن چیست؟» (از فرمول تقریب $A = s(b+s)/2$ استفاده کنید.)

(د) مسئله ۱، بخش VIII. «سه بافه محصول مرغوب، ۲ بافه محصول متوسط، و ۱ بافه محصول نامرغوب به ۳۹ دوئو^۴ فروخته می‌شوند. دو بافه مرغوب، ۳ بافه متوسط، و ۱ بافه نامرغوب به ۳۴ دوئو فروخته می‌شوند. یک بافه مرغوب، ۲ بافه متوسط، و ۳ بافه نامرغوب به ۲۶ دوئو فروخته می‌شوند. قیمت هر بافه از محصول مرغوب، متوسط، و نامرغوب چیست؟»

۲.۷ قضیه فیثاغورس

(الف) مسئله ۱۱، بخش IX، از حساب ده نه بخش از این قرار است: «دری هست که ارتفاع آن از عرض آن به اندازه ۶ چی^۵ و ۸ تسون^۶ بزرگتر است. حداکثر فاصله بین رأسها ۱ چانگ^۷ است. ارتفاع و عرض در چیست؟» (۱ چانگ = ۱۰ چی، ۱ چی = ۱۰ تسون.)

(ب) مسئله زیر را، که از یکی از مسائل حساب ده نه بخش اقتباس شده است، حل کنید: «در وسط یک استخر مدور که قطر آن ۱۰ فوت است، نیی روییده است که یک فوت بالاتر از آب قرار می‌گیرد. وقتی آن را خم می‌کنند، درست به لبه استخر می‌رسد. عمق آب چقدر است؟»

(ج) مسئله خیزدان شکسته را که در حساب ده نه بخش و بعداً در آثار یانگ هوی دیده می‌شود حل کنید: «خیزرانی است به ارتفاع ۱۰ پا، قسمت فوقانی آن که شکسته، به فاصله ۳ پا از ساق آن به زمین می‌رسد. فاصله نقطه شکستگی را تا زمین پیدا کنید.»

(د) با استفاده از تعمیمی از شکل ۵۹، برهانی برای قضیه فیثاغورس ابداع کنید. (ه) فرمول درست مساحت قطعه‌ای از یک دایره را بر حسب قاعده b و تیر s قطعه پیدا کنید.

1. pu 2. mu

۳. Sagitta خطی که وسط قوسی را به وسط وتر وصل می‌کند. م.

4. dou 5. ch'ih 6. ts'un 7. chang

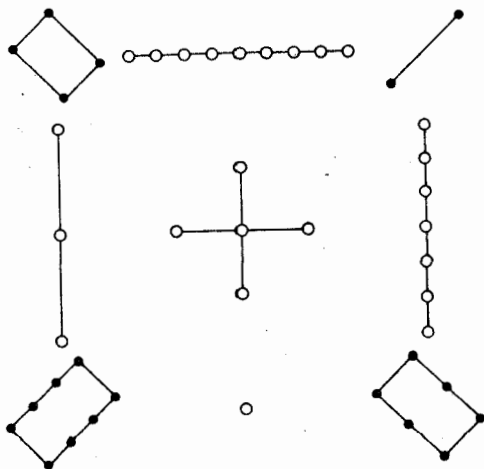
۳.۷ مربعهای جادویی

هیچ مطالعه‌ای از ریاضیات چین باستان، هر اندازه هم که مختصر باشد، نباید ذکری از به اصطلاح مربع جادویی لوشو^۱ را از قلم بیندازد.

یکی از قدیمیترین آثار کلاسیک ریاضیات چین ای - کینگ^۲، یا کتاب درباب جایگشتها^۳ است. در این کتاب نموداری از ارقام ظاهر می‌شود که بدلوشو معروف است و بعدها به صورت شکل ۶۴ تصویر شده است. لوشو قدیمیترین نمونه شناخته شده یک مربع جادویی است، و به روایت اساطیر این مربع اولین بار توسط امپراطور یو^۴، در حدود ۲۵۰۰ ق.م. مشاهده شد که بر پشت یک لاک‌پشت مقدس در امتداد کرانه رودخانه زرد، آذین شده بود. این یک آرایه مربعی از ارقام است که در شکل ۶۴ با گرههایی به رشته درآمده نشان داده شده است - گرههای سیاه برای اعداد زوج و گرههای سفید برای اعداد فرد.


(الف) یک مربع جادویی از مرتبه n آرایه‌ای مربعی از n^2 عدد صحیح متمایز با چنان ترتیبی است که n عدد روی هر سطر، ستون، یا قطر اصلی دارای مجموع یکسان می‌باشند که ثابت جادویی مربع نامیده می‌شود. مربع جادویی نرمال نامیده می‌شود هرگاه n^2 عدد مزبور، اولین n^2 عدد صحیح مثبت باشند. نشان دهید که ثابت جادویی یک مربع جادویی نرمال از مرتبه n m برابر با $n(n^2+1)/2$ است.

(ب) دولالوبر^۵، وقتی در سالهای ۱۶۸۷-۱۶۸۸ به عنوان فرستاده لوئی چهاردهم درسیام بود، روش ساده‌ای برای پیدا کردن مربعهای جادویی نرمال از هر مرتبه فرد را



شکل ۶۴

1. lo-shu
2. I-King
3. Book on Permutations
4. Yu
5. De laLoubère

	۱۸	۲۵	۲	۹	
۱۷	۲۴	۱	۸	۱۵	۱۷
۲۳	۵	۷	۱۴	۱۶	۲۳
۴	۶	۱۳	۲۰	۲۲	۴
۱۰	۱۲	۱۹	۲۱	۳	۱۰
۱۱	۱۸	۲۵	۲	۹	

شکل ۶۵

فراگرفت. با ساختن يك مربع جادویی از مرتبه پنجم این روش را شرح می‌دهیم. مربعی رسم و آن را به ۲۵ خانه تقسیم کنید (نگاه کنید به شکل ۶۵). با خانه‌هایی در کنار لبه‌های بالایی و راست حاشیه‌هایی بر مربع ایجاد کنید، و خانه اضافه شده در گوشه سمت راست بالا را سایه بزنید. در خانه وسطی بالای مربع اصلی عدد ۱ را بنویسید. در این صورت قاعده عمومی این است که در امتداد قطری به طرف بالا به سمت راست با اعداد صحیح متوالی پیش رویم. استثنائاتی بر این قاعده عمومی در مواقعی که چنان عملی ما را از مربع اصلی بیرون می‌برد یا ما را به خانه قبلا اشغال شده‌ای هدایت می‌کند، وجود دارد. در وضعیت اول با تغییر جا به سوی دیگر مربع، یا از بالا به پایین یا از راست به چپ، بسته به اینکه در چه حالتی باشیم، به داخل مربع اصلی بازمی‌گردیم و با قاعده عمومی کار را ادامه می‌دهیم. در وضعیت دوم عدد را در خانه‌ای که درست در زیر خانه‌ای که آخرین بار اشغال شده قرار دارد، نوشته و سپس طبق قاعده عمومی کار را ادامه می‌دهیم. خانه سایه خورده باید به عنوان اشغال شده تلقی شود. بنابراین، در مثال ما، قاعده عمومی ۲ را در امتداد قطر روبه بالا از ۱ در چهارمین خانه مرزی در امتداد لبه بالایی قرار خواهد داد. بنابراین، باید ۲ را به چهارمین خانه در سطر زیرین مربع اصلی منتقل کنیم. وقتی به ۴ می‌رسیم، این عدد ابتدا در سومین خانه مرزی از زیر در امتداد لبه راست قرار می‌گیرد. بنابراین، باید در طرف مقابل و چپ در سومین خانه از زیر، در اولین ستون مربع اصلی نوشته شود. قاعده عمومی ۶ را در خانه‌ای که قبلا به وسیله ۱ اشغال شده قرار می‌دهد. از این رو این عدد در خانه‌ای نوشته می‌شود که دقیقاً در زیر خانه‌ای است که با آخرین عدد نوشته شده، یعنی ۵، اشغال شده است، و همین طور الی آخر. يك مربع جادویی نرمال از مرتبه هفتم را بسازید.

(ج) نشان دهید که خانه مرکزی يك مربع جادویی نرمال از مرتبه سوم باید با ۵ اشغال شود.

(د) نشان دهید که در يك مربع جادویی از مرتبه سوم ۱ هرگز نمی‌تواند در يك خانه گوشه‌ای ظاهر شود.

۴.۷ چند مسئله قدیمی هندی

(الف) مسئله زیر را که تعمیم یکی از مسائل برهمگوپته (حدود ۶۳۰) است حل کنید: «دو مرتاض در بالای صخره‌ای به ارتفاع h می‌زیستند، که فاصله پای آن صخره از يك دهکده مجاور به اندازه d بود. یکی از آنها از صخره به پایین آمد و به دهکده رفت. دیگری، که يك ساحر بود، به ارتفاع x به سمت بالا و سپس در امتداد يك خط مستقیم به طرف دهکده پرواز کرد. مساحت پیموده شده توسط هر دو یکی بود. x را بیابید». در مسئله اصلی $h = 100$ و $d = 200$.

(ب) صورت دیگری از مسئله خیزدان شکسته (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۲.۷ (ج)) در زیر را که توسط برهمگوپته داده شده حل کنید: «خیزرانی به ارتفاع ۱۸ ذراع به وسیله باد شکسته است. رأس آن در فاصله ۶ ذراع از پای خیزران بازمین تماس دارد. طول قطعات خیزران را به من بگو».

(ج) يك حساب بی‌نام، مشهور به دستنویس بخشالی^۱، در سال ۱۸۸۱ در بخشالی، در شمال غربی هندوستان، از خاک درآورده شد. این اثر شامل ۷۰ صفحه از لیاف درخت غان بود. مبدأ و تاریخ آن، موضوع حدسیات زیادی بوده است. تخمینهایی از تاریخ آن از قرن سوم تا دوازدهم ب.م. تغییر می‌کنند. مسئله زیر را که در این دستنویس دیده می‌شود، حل کنید: «تاجری برای کالاهای معینی در سه نقطه مختلف عوارض می‌پردازد. در اولی وی $\frac{1}{3}$ کالاها را، در دومی $\frac{1}{4}$ (باقیمانده) را، و در سومی $\frac{1}{5}$ (باقیمانده) را می‌دهد. عوارض کل ۲۴ است. مقدار اصلی کالاها چقدر بوده است؟»

۵.۷ مسائلی از مهاویره

ماهیت بسیاری از مسائل حسابی هندی، از روی مسائل زیر، که از مهاویره (حدود ۸۵۰) اقتباس شده، سنجیده می‌شود. این مسائل را حل کنید.

(الف) يك مار براق سیاه قوی و سرسخت که ۸۰ انگوله^۲ درازی دارد با سرعت $7\frac{1}{4}$ انگوله در $5/14$ روز وارد سوراخی می‌شود، و در مدت $1/4$ روز دم آن به اندازه $11/4$ انگوله رشد می‌کند. آه ای زیور حسابدانان، به من بگو در چه مدت ایسن مار به طور کامل وارد سوراخ می‌شود؟

(ب) از يك مجموعه میوه‌های انبه، شاه $1/6$ ، ملکه $1/5$ باقیمانده، و سه تن از شاهزادگان درجه اول $1/4$ ، $1/3$ ، و $1/2$ باقیمانده‌های متوالی را برداشتند و جوانترین فرزند سه‌انبه باقیمانده را برداشت. ای آنکه در مسائل مختلف راجع به کسرهای هوشمندی،

1. *Bakhshali manuscript*

* نگاه کنید به

H. C. Midonick, "The Treasury of Mathematics" pp. 92-105.

2. *angula*

اندازه آن مجموعه از انبه‌ها را بده.

(ج) قیمت مخلوط ۹ لیمو و ۷ سیب جنگلی معطر ۱۰۷ است؛ همچنین، قیمت مخلوط ۷ لیمو و ۹ سیب جنگلی معطر ۱۰۱ است. آه ای حسابان، فوراً قیمت يك لیمو و يك سیب جنگلی را به من بگو، در حالی که به طور مشخص آن قیمت‌ها را از هم جدا کرده‌ای.

(د) يك چهارم يك گله شتر در جنگل دیده شده بود، دو برابر جذر آن گله به دامنه‌های کوهستان رفته بود؛ و سه برابر پنج شتر در کرانه رود باقی مانده بود. مقدار عددی این گله شتران چیست؟

۶.۷ مسائلی از بهاسکره

مسائل حسابی هندی معمولاً متضمن معادلات درجه دوم، قضیه فیثاغورس، تصاعد حسابی، و جایگشتها بودند. مسائل زیر را که از بهاسکره (حدود ۱۱۵۰) اخذ شده، در نظر بگیرید.

(الف) جذر نصف تعداد زنبورهای يك دسته زنبور عسل روی يك بوته گل یاس نشسته‌اند، $8/9$ دسته پشت سر باقی مانده‌اند، يك زنبور ماده دور زنبور نری پرواز می‌کند که در داخل گل نیلوفری، که به هنگام شب مجذوب بوی خوش آن شده و اکنون در داخل آن گرفتار شده، در حال وزوز کردن است. ای دلربا ترین بانو، تعداد زنبورها را به من بگو.

(ب) سوراخ ماری در پای ستونی است که ۱۵ ذراع ارتفاع دارد، و طاووس نری در بالای آن آشیان کرده است. بادیدن مار، که از فاصله سه برابر ارتفاع ستون، به طرف سوراخش در حال خزیدن است، به طور مایل ناگهان به روی او جست می‌زند. فوراً بگو که آنها در چند ذراع سوراخ مار به هم می‌رسند، در حالی که هر دو يك فاصله مساوی را می‌پیمایند؟

(ج) پادشاهی در يك لشکرکشی برای ربودن فیلهای دشمنش، در روز اول ۲ یوجنه^۱ راهپیمایی می‌کند. بگو، ای محاسب هوشمند، وی با چه میزان فزاینده‌ای از راهپیمایی روزانه پیش برود که در يك هفته، به شهر دشمن خود، به فاصله ۸۰ یوجنه برسد؟

(د) چند صورت مختلف در شکل سامبو^۲ (شیوا^۳) با تعویض ده نشانه که به طور وارونه در دستهای متعدد خود گرفته، حاصل می‌شود: یعنی، طناب، قلاب فیل، مار، دهل، جمجمه، نیزه سه سر، تختخواب، دشنه، تیر، کمان. همچنین در مورد هاری^۴ با تعویض گرز، حلقه آهن، نیلوفر، و صدف؟

(ه) ارجونه^۵، که در نبرد به خشم آمده بود، يك ترکش پر از تیرها می‌کند تا کرنه^۶

1. yojana
2. Sambu
3. Siva [ازخدایان هندوان]
4. Hari
5. Arjuna
6. Carna

را به قتل برسانند: با نصف تیرهایش تیرهای رقیب خود را دفع می‌کند؛ با چهار برابر جذر تمام تیرهایش ترکش، اسب او را می‌کشد؛ با شش تیر، سلیه^۱ (ارابه‌ران کرانه) را به قتل می‌رساند؛ با سه تیر چتر، علم و کمان او را خراب می‌کند؛ و بایکی سردشمن را از تن جدا می‌کند. ارچونه روی هم رفته چند تیر رها کرده است؟

۷.۷ اعداد اصم درجه دوم

یک رادیکال عددی که در آن عدد زیر رادیکال گویا و خود رادیکال گنگ است، یک عدد اصم نامیده می‌شود. یک عدد اصم، درجه دوم، درجه سوم، و غیره نامیده می‌شود بسته به اینکه فرجه رادیکال آن دو، سه، و غیره باشد.

(الف) نشان دهید که یک عدد اصم درجه دوم نمی‌تواند برابر با مجموع یک عدد گویای غیر صفر و یک عدد اصم درجه دوم باشد.

(ب) نشان دهید که اگر $a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$ ، که در آن \sqrt{d} و \sqrt{b} عدد اصم بوده و a و c گویا هستند، آنگاه $a = c$ و $b = d$.

(ج) اتحادهای بهاسکره را که در بخش ۶-۷ داده شده ثابت کنید و از یکی از آنها برای بیان $\sqrt{17} + \sqrt{245}$ به صورت مجموع دو عدد اصم درجه دوم استفاده کنید.

۸.۷ معادلات سیاله درجه اول

هندیان مسئله پیدا کردن همه جوابهای صحیح معادله سیاله خطی $ax + by = c$ را که در آن a و b و c اعداد صحیح اند، حل کردند.

(الف) اگر $ax + by = c$ دارای یک جواب صحیح باشد، نشان دهید که بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b یکی از مقسوم علیه‌های c است. (این قضیه می‌گوید که اگر a و b را متباین فرض کنیم، چیزی از کلیت کاسته نمی‌شود.)

(ب) اگر x_1 و y_1 یک جواب صحیح $ax + by = c$ را تشکیل دهند، که در آن a و b متباین اند، نشان دهید که همه جوابهای صحیح با $y = y_1 - ma$ و $x = x_1 + mb$ داده می‌شوند، که در آن m یک عدد صحیح دلخواه است. (این قضیه می‌گوید که همه جوابهای صحیح معلوم‌اند هر گاه تنها یک جواب صحیح را بتوان یافت. یک راه ساده برای پیدا کردن یک جواب صحیح، در راهنمایی مطالعه مسئله‌ای ۸.۷ (ج) داده می‌شود.)

(ج) $209 = 7x + 16y$ را برای یافتن جوابهای صحیح مثبت حل کنید.

(د) $3000 = 23x + 37y$ را برای یافتن جوابهای صحیح مثبت حل کنید.

(ه) به چند صورت می‌توان مبلغ پنجاه تومان را بر حسب پنج ریالی و بیست ریالی

پرداخت نمود؟

(و) کوچکترین جواب قابل قبول برای مسئله سیالۀ زیر از مهاویره را پیدا کنید: «در حواشی روشن و فرجبخش يك جنگل، پراز درختهای متعددی باشاخههایی که زیر بار گلها و میوهها خنم شده بودند، مانند درختهای جمبوا، درختهای لیمو ترش، موز، نخلهای فوفل، درختهای جک، نخلهای خرما، درختهای هینتله، پلمیره، درختهای پوناگه، و درختهای انبه. هر گوشۀ آن آکنده از الحان دستههایی از طوطیان و فاختهها، کنارچشمههایی با نیلوفرهای آبی در میان آنها و زنبورهایی که دور نیلوفرها در پرواز بودند. در این حواشی جنگل عدهای مسافر خسته با خوشحالی وارد شدند. در آنجا ۳ کپۀ مساوی موز به علاوه ۷ دانه موز دیگر وجود داشتند، و این میوهها به طور مساوی بین ۲۳ مسافر تقسیم شد به طوری که هیچ موزی باقی نماند. حال اندازه عددی يك کپه موز را به من بگو.»

۹.۷ قطرهای يك چهار ضلعی محاطی

سلسلۀ قضا یای زیر را ثابت کنید:

(الف) حاصلضرب دوضلع يك مثلث برابر است با حاصلضرب ارتفاع وارد بر ضلع سوم در قطر دایرۀ محیطی آن.

(ب) فرض کنید $ABCD$ يك چهار ضلعی محاطی به قطر دایرۀ محیطی δ باشد. طول اضلاع AB, BC, CD, DA را a, b, c, d ، قطرهای AC, BD را با m و n ، و زاویۀ بین یکی از قطرها و عمود بر دیگری را با θ نمایش دهید. نشان دهید که

$$m\delta \cos \theta = ab + cd, \quad n\delta \cos \theta = ad + bc.$$

(ج) برای چهار ضلعیهای بالا نشان دهید که

$$m^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}.$$

$$n^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}.$$

(د) اگر، در چهار ضلعی بالا، قطرها بر هم عمود باشند، آنگاه

$$\delta^2 = \frac{(ad + bc)(ab + cd)}{ac + bd}.$$

۱۰۰۷ چهار ضلعیهای برهمگوبته

(الف) برهمگوبته فرمول $K^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$ را برای K ، مساحت يك چهارضلعی محاطی به اضلاع a, b, c, d و نیم محیط s داد. نشان دهید که فرمول هرون برای مساحت يك مثلث حالت خاصی از این فرمول است.

(ب) با استفاده از فرمول برهمگوبته (الف) نشان دهید که مساحت يك چهار ضلعی که هم محاطی و هم محیطی باشد، برابر است با ریشهٔ دوم حاصلضرب اضلاع آن.

(ج) نشان دهید که يك چهار ضلعی دارای قطرهای متعامد است اگر و فقط اگر مجموع مربعات دو ضلع مقابل برابر باشد با مجموع مربعات دو ضلع مقابل دیگر.

(د) برهمگوبته نشان داد که اگر $a^2 + b^2 = c^2$ و $A^2 + B^2 = C^2$ ، آنگاه هر چهار ضلعی به اضلاع متوالی aC, bC, cB, aC دارای قطرهای متعامد است. این را ثابت کنید.

(ه) اضلاع، قطرها، قطر دایرهٔ محیطی، و مساحت شبه ذوزنقهٔ برهمگوبته را پیدا کنید (نگاه کنید به بخش ۷-۷) که با دوسه تایی فیثاغورسی (۳، ۴، ۵) و (۵، ۱۲، ۱۳) معین می شود.

۱۱۰۷ ثابت بن قره، کرخی، و نصیرالدین

(الف) ثابت بن قره (۹۰۱-۸۲۶) قاعدهٔ زیر را برای پیدا کردن اعداد متحابه ابداع نمود: اگر $p = 3 \times 2^n - 1$ ، $q = 3 \times 2^{n-1} - 1$ ، $r = 9 \times 2^{2n-1} - 1$ سه عدد اول فرد باشند، آنگاه p^2q و r^2 دو عدد متحابه اند. صحت آن را برای $n = 2$ و $n = 4$ تحقیق کنید (نگاه کنید به بخش ۳-۳).

(ب) تعمیم زیر از قضیهٔ فیثاغورس را که توسط ثابت بن قره داده شده است، ثابت کنید: اگر مثلث ABC مثلث دلخواهی باشد، و اگر B' و C' نقاطی بر BC باشند به طوری که $\angle AB'B = \angle AC'C = \angle A$ ، آنگاه $(AB)^2 + (AC)^2 = BC(BB' + CC')$. نشان دهید که وقتی زاویهٔ A يك زاویهٔ قائمه باشد، این قضیهٔ بدل به قضیهٔ فیثاغورس می شود.

(ج) دانشمندان عرب [= عربی نویسی] مدعی بودند که ارشمیدس کتابی به نام دربارهٔ هفت ضلعی در دایره نوشته است. چنین اثری از ارشمیدس، به دست ما نرسیده است، ولی این ادعا وقتی که قضیهٔ جالب زیر، که توسط ثابت بن قره به دست ما رسیده، معلوم شد، بیشتر اعتبار یافت: اگر C و D نقاطی بر يك پاره خط AB باشند به طوری که $(AD)(CD) = (DB)^2$ ، $(AC)(DB) = (CB)^2$ ، و اگر H چنان یافته شود که $CH = AC$ ، $DH = DB$ ، آنگاه HB ضلعی از يك هفت ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ محیطی AHB است؛ بعلاوه اگر امتدادهای HC و HD دایره را به ترتیب در E و F

قطع کنند، آنگاه A ، F و E سه رأس متوالی يك هفت ضلعي منتظم هستند. این قضیه را ثابت کنید.

(د) کرخی (حدود ۱۰۲۰) اثری در باب جبر به نام فخری نوشت، که به خاطر حامی وی فخرالملوک، صدراعظم بغداد در آن زمان، چنین نامیده شد. مسئله ۱ بخش ۵ فخری خواستار یافتن دو عدد گویاست به طوری که مجموع مکعبات آنها مربع يك عدد گویا باشد. به عبارت دیگر، اعداد گویای x و y و z را پیدا کنید به قسمی که

$$x^3 + y^3 = z^2.$$

کرخی اساساً مقادیر x و y و z را به صورت

$$x = \frac{n^2}{1+m^2}, \quad y = mx, \quad z = nx$$

اختیار می کند که در آن m و n اعداد گویای دلخواه هستند. صحت این امر را تحقیق و x و y و z را به ازای $m=2$ و $n=3$ پیدا کنید.

(ه) قضیه ساده زیر را که به نصیرالدین منسوب است، ثابت کنید: مجموع دو عدد فرد مربع خود نمی تواند يك مربع باشد.

۱۲۰۷ طرح نه نه

(الف) نشان دهید که وقتی مجموع ارقام يك عدد طبیعی بر ۹ تقسیم شود، همان باقیمانده ای به دست می آید که موقع تقسیم خود عدد بر ۹. عمل به دست آوردن باقیمانده، وقتی که يك عدد طبیعی مفروض بريك عدد صحیح n تقسیم می شود به طرح n ، n معروف است. قضیه بالا نشان می دهد که طرح نه نه علی الخصوص کار آسانی است.

(ب) فرض کنید که باقیمانده به دست آمده را وقتی که يك عدد طبیعی مفروض بر ۹ تقسیم می شود، زیادتی برای آن عدد بنامیم. دو قضیه زیر را ثابت کنید: (۱) زیادتی برای يك مجموع برابر است با زیادتی برای مجموع زیادتیهای عوامل جمع. (۲) زیادتی برای حاصلضرب دو عدد برابر است با زیادتی برای حاصلضرب زیادتیهای دو عدد. این دو قضیه پایه ای را برای امتحان جمع و ضرب با طرح نه نه عرضه می کند.

(ج) ۴۷۸ و ۹۹۳ را جمع و سپس ضرب کنید و با طرح نه نه امتحان کنید. (د) نشان دهید که اگر ترتیب ارقام يك عدد طبیعی به هر طریق ممکن جایگشت داده شود تا عدد جدیدی تشکیل شود، آنگاه تفاضل بین عدد قدیم و عدد جدید بر ۹ قابل قسمت است.

این مطلب اساس امتحان حسابدارها^۱ است. اگر مبالغ ستونهای بدهکار و بستانکار

در روش دفترداری دو بل باهم نخوانند، و اختلاف بین دو مبلغ بر ۹ قابل قسمت باشد، آنگاه بسیار محتمل است که اشتباه معلول جا به جا شدن ارقام در موقع ثبت يك بدهکاری یا بستانکاری باشد.

(ه) حیله عددی زیر را توضیح دهید: از کسی خواسته می شود که عددی را در نظر بگیرد؛ يك عدد جدید با معکوس نمودن ترتیب ارقام تشکیل دهد؛ عدد کوچکتر را از عدد بزرگتر کم کند؛ تفاضل را در عدد دلخواهی ضرب نماید؛ يك رقم دلخواه غیر صفر در حاصل ضرب را خط بزند و آنچه را که باقی مانده اعلام کند. شخصی که تردستی می کند رقم خط خورده را با محاسبه زیادتی عدد اعلام شده و سپس تفریق این زیادتی از ۹ پیدا می کند.

(و) قضیه (الف) را برای يك پایه دلخواه مانند b تعمیم دهید.

۱۳۰۷ طرح یازده یازده

(الف) سه قضیه زیر راجع به طرح یازده یازده را ثابت کنید.

۱. فرض کنید s_1 مجموع ارقام در محل های فرد يك عدد طبیعی n و s_2 مجموع ارقام در محل های زوج آن باشد. در این صورت زیادتی 11 در n برابر است با زیادتی 11 در تفاضل $s_2 - s_1$ ، که در آن اگر $s_2 < s_1$ ، s_1 را با افزودن مضربی از 11 افزایش می دهیم.

۲. برای یافتن زیادتی 11 در هر عدد طبیعی، رقم سمت چپ را از همسایه آن کم کنید، این تفاضل را از رقم بعدی در سمت راست کم کنید، و الی آخر، و هر وقت که مفروق از مفروق منته بزرگتر شد، 11 را به مفروق منته اضافه کنید.

۳. در طرح یازده یازده می توانیم هر زوج ارقام متوالی مشابه را کنار بگذاریم.

(ب) زیادتی 11 را در 180927 و در 810297 ، با استفاده از قضیه الف - ۱ پیدا کنید. زیادتی 11 را در همان دو عدد با استفاده از قضیه الف - ۲ پیدا کنید. زیادتی 11 را در 148337 پیدا کنید.

(ج) چهار قضیه زیر را ثابت کنید:

۱. زیادتی 11 های يك مجموع برابر است با زیادتی مجموع زیادتی های عوامل جمع.

۲. زیادتی 11 های مفروق منته برابر است با زیادتی مجموع زیادتی های تفاضل و مفروق.

۳. زیادتی 11 های حاصل ضرب دو عدد برابر است با زیادتی در حاصل ضرب زیادتی های دو عدد.

۴. زیادتی 11 های مقسوم برابر است با زیادتی حاصل ضرب زیادتی های مقسوم علیه و خارج قسمت که به اندازه زیادتی باقیمانده به آن اضافه شود.

(د) جمع $11505 = 2090 + 3566 + 2195 + 1096 + 454 + 104$ را با طرح یازده یازده امتحان کنید.

- (ه) تفریق $۱۴۵۵۲ = ۸۲۷۶ - ۲۳۰۲۸$ را با طرح یازده یازده امتحان کنید.
 (و) ضرب $(۵۳۶)(۸۲۰۵) = ۴۳۹۷۸۸۰$ را با طرح یازده امتحان کنید.
 (ز) تقسیم $۶۲۵۴۰/۲۰۷ = ۳۰۲ + ۲۶/۲۰۷$ را با طرح یازده امتحان

کنید.

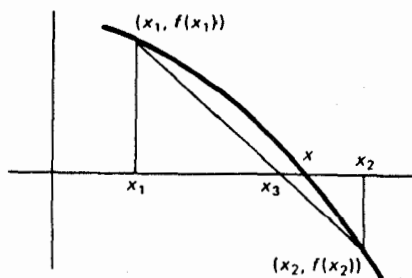
۱۴.۷ قاعده خطّین

(الف) یکی از قدیمیترین روشها برای تقریب ریشه‌های حقیقی يك معادله، قاعده‌ای است که به رگولا دونودوم فالسودوم معروف است که معمولاً قاعده خطّین نامیده می‌شود. به نظر می‌رسد که این روش از هند سرچشمه گرفته و توسط اعراب به کار رفته است. به طور خلاصه، و در صورت جدید آن، روش مزبور چنین است: فرض کنید x_1 و x_2 دو عدد باشند که نزدیک به يك ریشه x معادله $f(x) = 0$ ، و در طرفین آن قرار دارند. در این صورت محل تلاقی وترى که نقاط $(x_1, f(x_1))$ و $(x_2, f(x_2))$ را به هم وصل می‌کند با محور x ها، تقریبی مانند x_3 برای ریشه مطلوب می‌دهد (نگاه کنید به شکل ۶۶). نشان دهید که

$$x_3 = \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{f(x_1) - f(x_2)}$$

این عمل را اکنون می‌توان با زوج x_1, x_3 یا x_3, x_2 بسته به اینکه کدام مناسب باشد، ادامه داد.

- (ب) به کمک قاعده خطّین، آن ریشه معادله $0 = 72 - 36x + x^3$ را که بین ۳ و ۲ قرار دارد، تا سه رقم اعشار محاسبه کنید.
 (ج) به کمک قاعده خطّین، آن ریشه معادله $0 = \tan x - x$ را که بین ۴ و ۳ قرار دارد، تا سه رقم اعشار محاسبه کنید.



شکل ۶۶

۱۵۰۷ روش خیام برای حل معادلات درجه سوم

(الف) با پاره‌خطهای مفروض به طولهای a, b, n ، پاره‌خطی به طول $m = a^3/bn$ بسازید.

(ب) عمر خیام اول کسی بود که به مطالعه همه انواع معادلات درجه سوم که يك ریشه مثبت دارند، پرداخت. جزئیات طرح کلی زیر از حل هندسی خیام برای معادله درجه سوم

$$x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$$

را که در آن a, b, c, x طولهای پاره‌خطهایی در نظر گرفته می‌شوند، کامل کنید. خیام این نوع معادله درجه سوم را در قالب الفاظ چنین بیان کرده است: «يك مکعب، چند ضلع، و چند عدد برابر با چند مربع هستند.»

در شکل ۶۷، $AB = a^3/b^2$ (بنابر قسمت اول) و $BC = c$ را بسازید. نیم‌دایره‌ای به قطر AC رسم کنید. فرض کنید که عمود بر AC در B آن را در D قطع کند. بر BD ، $BE = b$ را جدا کنید و از E ، EF را موازی AC رسم کنید. G را بر BC چنان پیدا کنید که، $(BG)(ED) = (BE)(AB)$ و مستطیل $DBGH$ را کامل کنید. بر H يك هذلولی متساوی‌الساقین رسم کنید به قسمی که EF و ED مجانبهای آن باشند، و فرض کنید که این هذلولی، نیم‌دایره را در J قطع کند. فرض کنید که خط موازی با DE مار بر J ، EF را در K و BC را در L قطع کند. متوالیاً نشان دهید که:

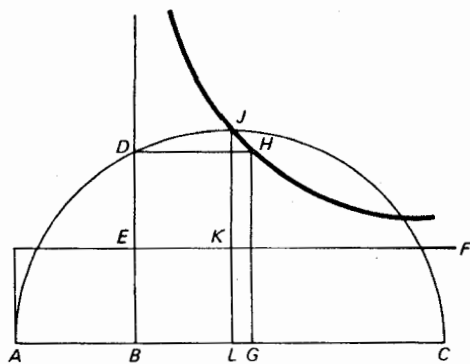
$$(1) (EK)(KJ) = (BG)(ED) = (BE)(AB), \quad (2) (BL)(LJ) = (BE)(AL)$$

$$(3) (LJ)^2 = (AL)(LC), \quad (4) (BE)^2 / (BL)^2 = (LJ)^2 / (AL)^2 = LC / AL$$

$$(5) b^2(BL + a^3/b^2) = (BL)^2(c - BL), \quad (6) (BE)^2(AL) = (BL)^2(LC)$$

$$(7) (BL)^3 + b^2(BL) + a^3 = c(BL)^2$$

مفروض است.



شکل ۶۷

(ج) به طور هندسی، به روش عمر خیام، ریشه‌های معادله درجه سوم

$$x^3 + 2x + 8 = 5x^2$$

را پیدا کنید. با اندک تعمیم این روش، ریشه منفی را پیدا کنید.

۱۶۰۷ يك راه حل هندسی برای معادلات درجه سوم

(الف) نشان دهید که معادله درجه سوم ناقص

$$ax^3 + bx + c = 0$$

را می‌توان در يك دستگاه مختصات دکارتی که منحنی درجه سوم $y = x^3$ قبلاً در آن رسم شده، صرفاً با رسم خط $ay + bx + c = 0$ ، به طور هندسی حل کرد و ریشه‌های حقیقی آن را یافت.

(ب) به روش (الف)، معادله درجه سوم $x^3 + 6x - 15 = 0$ را حل کنید.

(ج) معادله درجه سوم $4x^3 - 39x + 35 = 0$ را به طریق هندسی حل کنید.

(د) نشان دهید که هر معادله درجه سوم کامل

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

را می‌توان با جایگذاری $x = z - b/3$ به يك معادله درجه سوم ناقص بر حسب z تبدیل کرد.

(و) حال معادله درجه سوم $x^3 + 9x^2 + 20x + 12 = 0$ را به طریق هندسی حل کنید.

جالب اینکه ریشه‌های مختلط موهومی معادله‌های درجه سوم ناقص یا کامل را نیز می‌توان به طریق هندسی پیدا کرد. مثلاً، نگاه کنید به جبر نموداری اثر آرتشولتس^۱.

۱۷۰۷ ترسیمهای هندسی بر يك کره

دانشمندان عرب [= عربی نویس] به ترسیمهایی بر سطح يك کره علاقه نشان می‌دادند. مسائل زیر را در نظر بگیرید، که باید با ابزارهای اقلیدسی و ترسیمهای مسطحه مناسب حل شوند.

(الف) يك کره مادی مفروض است، قطر آن را پیدا کنید.

(ب) بر يك کره مادی جاهای رئوس يك مکعب محاطی را مشخص کنید.

(ج) بر يك کره مادی مفروض جاهای رئوس يك چهاروجهی منتظم محاطی را

مشخص کنید.

عنوان مقاله

- ۱/۷ کتابسوزی در چین در سال ۲۱۳ ق.م.
 ۲/۷ آثار ریاضی چینی، پیش از سال ۱۲۰۰.
 ۳/۷ تأثیرنسی ریاضیات چینی و هندی بر ریاضیات اروپایی.
 ۴/۷ آثار ریاضی هندی، پیش از سال ۱۲۰۰.
 ۵/۷ دو آریهطه.
 ۶/۷ مهاویره و کار او.
 ۷/۷ حوزه علمی بغداد.
 ۸/۷ سهم عمرخیام در ریاضیات.
 ۹/۷ آثار ریاضی یونانی که اگر اعراب نبودند، از بین می‌رفت.
 ۱۰/۷ علل انحطاط ریاضیات اسلامی.
 ۱۱/۷ تاریخ ریاضیات اولیه ژاپنی.
 ۱۲/۷ انتقال دانش ریاضی در پی فتوحات مقدونیه‌ها، مسلمین، و رومیها.

کتابنامه

- CAJORI, FLORIAN, *A History of Mathematical Notations*. 2 vols. Chicago: Open Court, 1928-29.
 CLARK, W. E., ed., *The Aryabhatiya of Aryabhata*. Chicago: Open Court, 1930.
 COOLIDGE, J. L., *A History of Geometrical Methods*. New York: Oxford University Press, 1940.
 ———, *The Mathematics of Great Amateurs*. New York: Oxford University Press, 1949.
 DATTA, B., *The Science of the Sulba: A Study in Early Hindu Geometry*. Calcutta: University of Calcutta, 1932.
 ———, and A. N. SINGH, *History of Hindu Mathematics*. Bombay: Asia Publishing House, 1962.
 HARDY, G. H., *A Mathematician's Apology*. Foreword by C. P. Snow. Cambridge: The University Press, 1967.
 HEATH, T. L., *A Manual of Greek Mathematics*. New York: Oxford University Press, 1931.
 HILL, G. F., *The Development of Arabic Numerals in Europe*. New York: Oxford University Press, 1915.
 HOBSON, E. W., *A Treatise on Plane Trigonometry*. 4th ed. New York: Macmillan, 1902. Reprinted by Dover, New York.
 JOHNSON, R. A., *Modern Geometry*. Boston: Houghton Mifflin Company, 1929. Reprinted by Dover Publications, New York.
 KAKHEL, ABDUL-KADER, *Al-Kashi on Root Extraction*. Lebanon: 1960.
 KASIR, D. S., ed., *The Algebra of Omar Khayyam*. New York: Columbia Teachers College, 1931.
 KARPINSKI, L. C., ed., *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of al-Khowarizmi*. New York: Macmillan, 1915.
 ———, *The History of Arithmetic*. New York: Russell & Russell, 1965.
 KRAITCHIK, MAURICE, *Mathematical Recreations*. New York: W. W. Norton, 1942.
 KÜSHYÄR IBN LABBÄN, *Principles of Hindu Reckoning*. Translated by Martin Levey and Marvin Petruck. Madison, Wis.: The University of Wisconsin Press, 1965.
 LAMB, HAROLD, *Omar Khayyam, A Life*. New York: Doubleday, 1936.
 LARSEN, H. D., *Arithmetic for Colleges*. New York: Macmillan, 1950.
 LEVEY, MARTIN, *The Algebra of Abū Kāmil*. Madison, Wis.: The University of Wisconsin Press, 1966.
 LOOMIS, E. S., *The Pythagorean Proposition*. 2d ed. Ann Arbor, Mich.: private printing,

- Edwards Bros., 1940. Reprinted by the National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C., 1968.
- MACFALL, HALDANE, *The Three Students*. New York: Alfred A. Knopf, 1926.
- MIKAMI, YOSHIO, *The Development of Mathematics in China and Japan*. New York: Hafner, 1913. Reprinted by Chelsea, New York, 1961.
- NEEDHAM, J., with the collaboration of WANG LING, *Science and Civilization in China*. Vol. 3. New York: Cambridge University Press, 1959.
- ORE, OYSTEIN, *Number Theory and Its History*. New York: McGraw-Hill, 1948.
- SAYILL, AYDIN, *Logical Necessities in Mixed Equations by 'Abd al Hamid ibn Turk and the Algebra of His Time*. Ankara: 1962.
- SMITH, D. E., and L. C. KARPINSKI, *The Hindu-Arabic Numerals*. Boston: Ginn, 1911.
- STORY, W. E., *Omar Khayyam as a Mathematician*. (Read at a meeting of the Omar Khayyam Club of America, April 6, 1918). Needham, Mass.: private printing, Rosemary Press, 1919.
- WINTER, H. J. J., *Eastern Science*. London: John Murray, 1952.
- WOLFE, H. E., *Introduction to Non-Euclidean Geometry*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1945.



ریاضیات اروپایی، ۵۰۰ تا ۱۶۰۰

۸-۱ عصر تاریکی

دوره‌ای که با سقوط امپراطوری روم در اواسط قرن پنجم شروع شده و تا قرن یازدهم ادامه می‌یابد، به عصر تاریکی اروپا معروف است، زیرا در طول این دوره، تمدن در اروپای غربی به سطح بسیار پایینی رسید. تعلیم و تربیت تقریباً از بین رفت، دانش یونانی در آستانه نابودی قرار گرفت، و اغلب هنرها و پیشه‌هایی که از دنیای باستان به ارث رسیده بودند، فراموش شدند. تنها راهبان دیرهای کاتولیک، و معدودی افراد غیر روحانی با فرهنگ، رشته باریکی از دانش یونانی و لاتین را حفظ کردند. این دوره با خشونت مادی زیاد و ایمان شدید مذهبی مشخص می‌شود. نظم اجتماعی قدیم برچیده شد و جامعه به صورت فئودالی و کلیسایی درآمد.

رومیان هرگز ریاضیات مجرد را پیش نگرفتند و بلکه صرفاً به جنبه‌های عملی این موضوع که با تجارت و شهرسازی مربوط می‌شد، اکتفا نمودند. با سقوط امپراطوری روم و تعطیلی قسمت عمده تجارت بین شرق و غرب در تعاقب آن و رها شدن طرح‌های مهندسی دولتی، حتی این علایق نیز روبه زوال گذاشتند، و اگراق آمیز نیست اگر بگوییم که در تمام نیم‌هزاره‌ای که عصر تاریکی را شامل می‌شود، صرف‌نظر از بسط تقویم مسیحی، در زمینه ریاضیات کار بسیار اندکی در غرب انجام گردید.

از جمله کسانی که خیرخواهانه با ایفای نقشی در تاریخ ریاضیات در عصر تاریکی

اعتباری یافته‌اند، می‌توانیم از شهروند رومی بوئتیوس^۱ شهید، از فضیلت انگلیسی وابسته به کلیسا، بید^۲ و آلکویین، و حکیم و روحانی مشهور فرانسوی ژربر^۳، که پاپ سیلوستر^۴ دوم شد، یاد کنیم.

در تاریخ ریاضیات اهمیت بوئتیوس (حدود ۵۲۴-۴۷۵) بر این پایه است که نوشته‌های وی در هندسه و حساب برای قرنهای متمادی به عنوان کتابهای درسی استاندارد در مدارس رهبانی باقی ماندند. این آثار بسیار ضعیف‌اوج دستاورد ریاضی تلقی می‌شدند، و بدین ترتیب به خوبی فقر این رشته علمی را در اروپای مسیحی در طول عصر تاریکی نشان می‌دهند. زیرا هندسه وی چیزی نیست جز بیان قضایای مقاله اول و معدودی قضایای منتخب از مقاله‌های سوم و چهارم اصول اقلیدس همراه با کاربردهایی در مساحی مقدماتی، و حساب اوبرمبنای اثر خسته‌کننده و نیمه‌رمزی نیکوماخوس مربوط به چهارقرن پیشتر، که البته زمانی شهرت بسیار داشت، قرار دارد. (عده‌ای بر این عقیده‌اند که حداقل قسمتی از این کتاب هندسه، ساختگی است.) بوئتیوس با این آثار، و با نوشته‌هایش در فلسفه مؤسس مکتب فلسفه مدرسی قرون وسطی گردید. آرمانهای اعلای وی و صداقت انعطاف‌ناپذیرش وی را دچار دردهای سیاسی نمود و سرگگ دردناکی را متحمل شد که کلیسا وی را به خاطر آن شهید اعلام نمود.

بید (حدود ۷۳۵-۶۷۳)، که بعدها عنوان بید بزرگوار^۵ یافت، در نورثامبرلند^۶ انگلستان، متولد شد، و یکی از بزرگترین فضیلت‌های کلیسای قرون وسطی گردید. آثار متعدد وی شامل نوشته‌هایی درباره موضوعات ریاضی است، که مهمترین آنها رساله وی درباره تقویم و حساب سرانگشتی است. آلکویین (۸۰۴-۷۳۵)، که در بورکشر^۷ متولد شد، حکیم انگلیسی دیگری بود. وی به فرانسه فراخوانده شد تا شارلمانی^۸ را در پروژه آموزشی بلند پروازانه‌اش یآوری کند. آلکویین درباره تعدادی مباحث ریاضی مطالبی نگاشت و مجموعه‌ای از مسائل معمایی که برای قرنهای متمادی بر نویسندگان کتابهای درسی تأثیر داشت، با تردید به وی منسوب شده است (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۱۰۸).

ژربر (حدود ۱۰۰۳-۹۵۰) در اوورنی^۹، در فرانسه، به دنیا آمد، و به زودی تواناییهای خارق‌العاده‌ای از خود نشان داد. او یکی از اولین مسیحیانی بود که در مدارس مسلمانان اسپانیا درس خواند و شواهدی در دست است که احتمالاً وی ارقام هندی-عربی را، بدون صفر، در مراجعت با خود به اروپای مسیحی آورده است. گفته‌اند که وی چرتکه، کره زمین و کره سماوی، یک ساعت، و احتمالاً یک ارغنون ساخته است. چنین دستاوردهایی سوءظن عده‌ای از معاصرانش را مبنی بر اینکه وی روح خود را به شیطان فروخته است، برانگیخت. با این حال، وی به تدریج در کلیسا ترقی نمود و سرانجام در سال ۹۹۹ به مقام

-
1. Boethius 2. Bede 3. Gerbert 4. Sylvester
 5. Bede the Venerable 6. Northumberland 7. Yorkshire
 8. Charlemagne 9. Auvergne

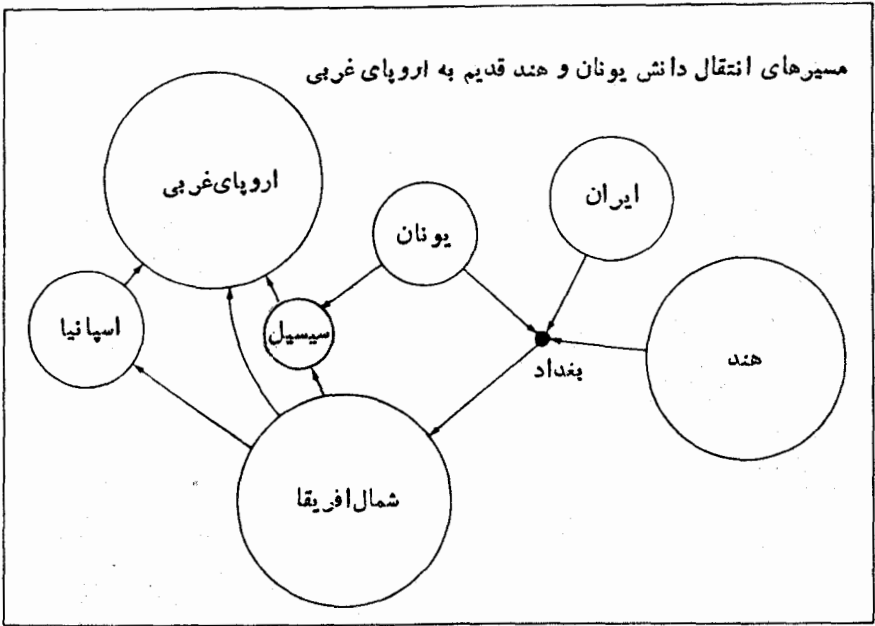
پای انتخاب شد. وی حکیمی ژرف‌اندیش تلقی می‌شد و درباره علم احکام نجوم، حساب، و هندسه آثار نوشت (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۱۰۸ (و)).

۲-۸ دوره انتقال

تقریباً هم‌زمان با ژربر نفوذ تدریجی آثار کلاسیک علوم و ریاضیات یونان به اروپای غربی آغاز شد. سپس يك دوره انتقال شروع شد که در طول آن دانش باستان، که به دست فرهنگ اسلامی محفوظ مانده بود، به اروپای غربی انتقال یافت. این کار از طریق ترجمه‌های لاتینی انجام شده توسط فضلالی مسیحی، که به مراکز دانش مسلمانان سفر می‌کردند، از طریق روابط بین پادشاهی نورمان^۱ سیسیل و شرق، و از طریق روابط تجاری اروپای غربی با دنیای لوانت^۲ [کرانه خاوری مدیترانه] و دنیای عرب، صورت گرفت. خارج شدن تولیدو^۳ [طلیطله] توسط مسیحیان از دست مسلمانان در ۱۰۸۵ هجوم فضلالی مسیحی را به آن شهر، برای کسب دانش مسلمانان در پی داشت. نفوذ به سایر مراکز مسلمین در اسپانیا نیز صورت گرفت و قرن دوازدهم، در تاریخ ریاضیات، بدل به قرن مترجمین شد. یکی از مقدمترین فضلالی مسیحی کسه به این حرفه پرداخت، یکه راهب انگلیسی به نام آدلارد بائی (حدود ۱۱۲۰) بود که طی سالهای ۱۱۲۹-۱۱۲۶ از اسپانیا دیدن کرد و به طور گسترده‌ای در یونان، سوریه، و مصر به سفر پرداخت. ترجمه‌هایی به زبان لاتین از اصول اقلیدس و جداول نجومی خوارزمی به آدلارد نسبت داده می‌شود. اشارات تکان دهنده‌ای به مخاطرات جانی که آدلارد برای کسب دانش عربی به آن تن داده، وجود دارد؛ برای به دست آوردن دانشی که با وسواس زیاد مورد محافظت بود، وی خود را در جامه يك طلبه مسلمان در آورد. مترجم متقدم دیگر پلاتوی تیولیایی^۴ اینالیایی (حدود ۱۱۲۰) بود که وی نجوم بائی، اگر تئودوسیوس و آثار متعدد دیگری را ترجمه کرد. کوشا ترین مترجم این عصر گاردوی کرمونایی (۱۱۸۷-۱۱۱۴) بود که بالغ بر ۹۰ اثر عربی را به لاتین در آورد، که المجسطی بطلمیوس، اصول اقلیدس، و جبر خوارزمی از آن جمله‌اند. در بخش ۷-۱۲، نقشی را که گاردوی کرمونایی در پیدایش کلمه امروزی سینومی به عهده دارد، ذکر کردیم. سایر مترجمین نامی قرن دوازدهم جان سویلی^۵ و رابرت چستری^۶ بودند.

موقعیت مکانی و تاریخ سیاسی سیسیل این جزیره را به صورت برخوردگاه طبیعی شرق و غرب در آورد. سیسیل در ابتدا مستعمره یونان بود، سپس بخشی از امپراطوری روم گردید، بعد از سقوط امپراطوری با قسطنطنیه پیوند یافت، در قرن نهم به مدت ۵۰ سال به دست اعراب افتاد، مجدداً به وسیله یونانیان مسخر گردید، و سپس تحت استیلای نورمانها درآمد. در دوران رژیم نورمان زبانهای یونانی، عربی، و لاتین در کنار هم مورد استفاده قرار می‌گرفت، و دیپلماتها بکرات به قسطنطنیه و بغداد سفر می‌کردند. دستویسهای

1. Norman
2. Levant
3. Toledo
4. Plato of Tivoli
5. John of Seville
6. Robert of Chester



یونانی و عربی زیادی در علوم و ریاضیات به دست آمد و به لاتین ترجمه شد. این کار به میزان زیادی توسط دو حاکم و مشوق علم، فردریک دوم (۱۲۵۰-۱۱۹۴) و پسر وی مانفردا (حدود ۱۲۶۶-۱۲۳۱) ترغیب شد.

در بین اولین شهرهایی که با دنیای عرب روابط تجارتمی برقرار کردند، مراکز تجارتی ایتالیا در جنوا، پیزا، ونیز، میلان، و فلورانس بودند. بازرگانان ایتالیایی با قسمت اعظم تمدن شرقی تماس یافتند و بدین ترتیب اطلاعات مفیدی در حساب و جبر کسب کردند. این بازرگانان نقش مهمی در رواج دستگاه شمار هندی-عربی بازی کردند.

دردوره انتقال مورد بحث، اسپانیا به صورت مهمترین حلقه ارتباط بین دنیای اسلام و دنیای مسیحی درآمد.

۸-۳ فیبوناتچی و قرن سیزدهم

در آستانه قرن سیزدهم لئوناردو فیبوناتچی («لئوناردو، پسر بوناتچی»، ۱۱۷۰-؟-۱۲۵۰؟)، با استعدادترین ریاضیدان قرون وسطی وارد عرصه شد. فیبوناتچی، که به



لئوناردو فیبوناچی
(مجموعه دیوید اسمیت)

لئوناردوی پیسایی^۱ (یا لئوناردو پیسانو^۲) نیز شهرت دارد، در مرکز تجارتی پیسا، که پدرش در آنجا در ارتباط با امور تجاری به کار مشغول بود، زاده شد. بسیاری از تجارتخانه‌های بزرگ ایتالیا بی آن ایام انبارهایی در نقاط مختلف منطقه مدیترانه نگهداری می‌کردند. بدین طریق بود که، وقتی پدرش به‌عنوان سرگمرکسدار خدمت می‌کرد، لئوناردوی جوان در بوژی^۳ در ساحل شمالی آفریقا تربیت شد. حرفة پدر از همسان سنین اولیه علاقه به حساب را در کودک برانگیخت. سفرهای گسترده بعدی به مصر، سیسیل، یونان، و سوریه وی را با تجربیات ریاضی شرقی و عربی در تماس قرار داد. فیبوناچی که به برتری روشهای هندی-عربی در محاسبات، متقاعد شده بود، در سال ۱۲۰۲، اندکی بعد از مراجعتش به موطن، اثر مشهور خود به نام لیبر آباکی [کتاب حساب] را منتشر نمود.

ما لیبر آباکی را از طریق چاپ دومی که در ۱۲۲۸ منتشر شد، می‌شناسیم. این اثر به حساب و جبر مقدماتی اختصاص دارد و، گرچه اساساً تحقیق مستقلی است، تأثیر جبر خوارزمی و ابوکامل را نشان می‌دهد. کتاب، نمادگذاری هندی-عربی را به طور مبسوط شرح داده و به شدت از آن جانبداری می‌کند و تأثیر زیادی در رواج این ارقام در اروپا داشته است. در ۱۵ فصل این اثر خواندن و نوشتن ارقام جدید، روشهای محاسبه با اعداد صحیح و کسرها، محاسبه ریشه‌های دوم و سوم، و حل معادلات خطی و درجه دوم هم باقاعده امتحان و تصحیح وهم با سلسله اعمال جبری توضیح داده می‌شوند. به ریشه‌های منفی و موهومی معادلات توجه نمی‌شود و جبر لفظی است. کاربردهایی متضمن معاملات پایا پای، مشارکت، اختلاط و امتزاج، و هندسه مساحی داده می‌شوند. این اثر شامل مجموعه وسیعی از مسائلی است که به عنوان گنجینه‌ای تا قرن‌ها در خدمت مؤلفین بعدی بود. در

1. Leonardo of Pisa 2. Leonardo Pisano
3. Bougie [بجایه کنونی در الجزایر]

بخش ۱۰-۲ يك مسئله جالب از این مجموعه را ذکر کرده‌ایم، که ظاهرأ از يك مسئله بسیار قدیمتر در پاپیروس ریند گرفته شده است. مسئله دیگر، که منشأ دنباله فیبوناچی به صورت: ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ...، x ، y ، $x+y$ ، ... است، و چند مسئله دیگر از لیبر آباکی، را می‌توان در مطالعه‌های مسئله‌ای ۲۰۸، ۳۰۸، ۴۰۸ یافت.

در ۱۲۲۵ پراکتیکا جنوهرتیا [هندسه عملی] فیبوناچی، مجموعه وسیعی از مطالب راجع به هندسه و مثلثات که به طور ماهرانه‌ای با دقت اقلیدسی و نسبتاً مبتکرانه تحت مطالعه قرار گرفته، ظاهر می‌شود، و در ۱۲۲۵ فیبوناچی لیبر کوادراتوروم^۲ [کتاب مجذورات] خود را نوشت و این کتاب اثری درخشان و مبتکرانه در آنالیز نامعینهاست، که وی را به عنوان ریاضیدان برجسته‌ای در این زمینه بین دیوفانتوس و فرما مشخص نمود. این آثار فراتر از تواناییهای اغلب فضایی معاصر وی بودند.

نبوغ فیبوناچی توجه امپراطور فردریک دوم را که حامی دانش بود، جلب کرد و در نتیجه فیبوناچی به دربار دعوت شد تا در يك مسابقه ریاضی شرکت جوید. سه مسئله توسط جان پالمویی^۳، یکی از ملزمین دربار امپراطور مطرح شد. اولین مسئله یافتن يك عدد گویای x بود به طوری که $x^2 + 5$ و $x^2 - 5$ مربع اعدادی گویا باشند. فیبوناچی جواب $x = 41/12$ را داد، که درست است، زیرا $(49/12)^2 + 5 = (41/12)^2 + 5$ و $(41/12)^2 - 5 = (31/12)^2$. راه حل مسئله در لیبر کوادراتوروم آمده است. مسئله دوم یافتن جوابی برای معادله درجه سوم $10x = x^3 + 2x^2 + x^2$ بود. فیبوناچی مبادرت به این اثبات کرد که هیچ ریشه معادله را نمی‌توان به وسیله صورت نهایی گنگ به شکل $\sqrt{a+b}$ بیان کرد، یا به عبارت دیگر، هیچ ریشه‌ای از آن را نمی‌توان با ستاره و پرگار ساخت. وی سپس يك جواب تقریبی به دست آورد که، وقتی در نماد اعشاری بیان شود، مساوی ۱۳۶۸۸۰۵۸۱۰۷۵ است، و تا ۹ رقم اعشار درست است. جواب، بدون هیچ بحثی همراه آن، در اثری از فیبوناچی تحت عنوان فلوس^۴ («شکوفه» یا «گل») ظاهر می‌شود و مایه شگفتی‌هایی شده است. مسئله سوم، که آن نیز در فلوس ضبط شده، آسانتر است و می‌توان آن را در مطالعه مسئله‌ای ۴۰۸ یافت.

گفته شده است که فیبوناچی، به دلیل فقدان معاصرینی هم‌تا با وی، عظمت از آنچه واقعاً بوده به نظر می‌رسد. مطمئناً درست است که قرن سیزدهم ریاضیدانان بسیار معدودی را که واجد اهمیتی باشند، به وجود آورده است. تالی فیبوناچی و معاصر با وی، یوردانوس نموداریوس^۵ بود، که معمولاً (ولی به احتمال قوی به اشتباه) با راهب آلمانی یوردانوس زاکسو^۶، که در ۱۲۲۲، به عنوان دومین رهبر فرقه سریراً در حال گسترش دومینیک^۷

1. *Practica geometriae*2. *Liber quadratorum*

3. John of Palermo

4. *Flos*

5. Jordanus Nemorarius

6. Jordanus Saxo

۷. فرقه مذهبی مسیحی که توسط سن دومینیک (St. Dominic) در ۱۲۹۲ تأسیس شد. آنها را زاکوبن (یعقوبین) نیز می‌نامند. - ۴.

انتخاب شد، یکی دانسته می‌شود. وی آثار متعددی درباره حساب، جبر، هندسه، نجوم، و (احتمالاً) استاتیک نوشت. این آثار مطول که بعضی از آنها زمانی به‌شهرت قابل ملاحظه‌ای دست یافتند، اکنون عمدتاً بی‌مایه به نظر می‌آیند. با این حال نورار یوس شاید اولین کسی بوده که از حروف به‌طور گسترده‌ای برای نمایش اعداد کلی استفاده کرده، گرچه این کار وی تأثیر کمی در مؤلفین بعد از وی داشت. تنها در یک مورد بود که فیوناچی چنین کرد.

شاید لازم باشد که از ساکروبووسکو^۱ (جان هالیوودی^۲ یا جان هالیفاکسی^۳)، کمپانوس، و راجر بیکن^۴ نیز ذکری به میان آید. اولی در پاریس ریاضیات درس می‌داد و مجموعه‌ای از قواعد حسابی و گردآیه‌ای قابل فهم از مطالبی که از المجسطی بطلمیوس و آثار منجمین عرب استخراج شده بود، نوشت. عامل عمده شهرت کمپانوس، ترجمه لاتینی وی از اصول اقلیدس است، که در بخش ۳-۵ ذکر شد. راجر بیکن، با آنکه ذاتاً یک نابغه بود، استعداد کمی در ریاضیات داشت ولی با بسیاری از آثار یونان در هندسه و نجوم آشنا شد، و آن‌گونه که در ستایش وی گفته شده، به ارزش این موضوع کاملاً وقوف داشت.

بخش اول قرن سیزدهم شاهد ظهور دانشگاه‌های پاریس، آکسفورد، کیمبریج، پادوا، و ناپل بود. دانشگاه‌ها بعداً عامل بسیار مؤثری در بسط ریاضیات شدند، و بسیاری از ریاضیدانان به یک یا چندین مؤسسه از این نوع وابسته بودند.

۴-۸ قرن چهاردهم

قرن چهاردهم از نظر ریاضیات قرن نسبتاً بی‌حاصلی بود. این قرن، قرن «مرگ سیاه»^۵ بود، که بیش از یک سوم جمعیت اروپا را در کام خود فرو برد، و در این قرن جنگ‌های صدساله، با تحولات سیاسی و اقتصادی ناشی از آن در شمال اروپا شروع شد.

بزرگترین ریاضیدان این دوره نیکول اورم^۶ بود، که در حدود ۱۳۲۳ در نورماندی متولد شد. وی در سال ۱۳۸۲ بعد از طی دوره‌ای از زندگانی که وی را از استادی کالج به اسقفی رساند، درگذشت. وی پنج اثر ریاضی نگاشت و بعضی از آثار ریاضی ارسطو را ترجمه کرد. در یکی از رسالات او اولین مورد استفاده از نماهای کسری (البته، نه با نمادگذاری امروزی) که بر ما معلوم است ظاهر می‌شود، و در رساله دیگری وی جای نقاط را با مختصات مشخص می‌کند، که بدین ترتیب نشانه پیدایش هندسه مختصاتی نوین

1. Sacrobosco 2. John of Holywood 3. John of Halifax

4. Roger Bacon

۵. طاعونی که در قرن چهاردهم در اروپا و آسیا شیوع یافت. این وجه تسمیه از آن روست که بر بدن قربانیان لکه‌های سیاهی ظاهر می‌شد. — م.

6. Nicole Oresme

است. این رساله يك قرن بعد به چندین چاپ رسید، و ممکن است که ریاضیدانان دورهٔ رنسانس و حتی دکارت را تحت تأثیر قرار داده باشد.

اگرچه ریاضیات اروپایی در دوران قرون وسطی اساساً جنبهٔ عملی داشت، ریاضیات نظری کاملاً محو نشد. تفکرات فیلسوفان مدرسی منجر به ایجاد تئوریهای ظریفی در زمینهٔ حرکت، بینهایت، و پیوستار شد، که همهٔ آنها از مفاهیم اساسی در ریاضیات نوین هستند. قرنهای نزاع مکتب مدرسی و دوپهلوگوییها می‌تواند، تا حدی، انتقال قابل ملاحظه از تفکر ریاضی باستان به تفکر ریاضی امروز را توضیح دهد، و شاید، هم‌چنان که ا. ت. بل عقیده دارد، بتواند شعبه‌ای از تحلیل ریاضی را تشکیل دهد. از این نقطه نظر، توماس آکویناس^۱ (۱۲۲۴-۱۲۲۶) را، که شاید تیزترین هوش قرن سیزدهم را داشته، می‌توان در بسط ریاضیات بواقع دارای نقشی دانست. از کسانی که قطعاً بیشتر جزو ریاضیدانان سنتی بودند، توماس برادواردین^۲ (۱۳۴۹-۱۲۹۰) است که وقتی عنوان اسقف اعظم کانتربری^۳ را داشت، وفات یافت. علاوه بر اندیشه‌هایی دربارهٔ مفاهیم اساسی پیوسته و گسسته و دربارهٔ بینهایت بزرگها و بینهایت کوچکها، برادواردین چهار رسالهٔ ریاضی در باب حساب و هندسه نوشت.

۵-۸ قرن پانزدهم

قرن پانزدهم شاهد آغاز رنسانس اروپا در هنر و دانش بود. با زوال امپراطوری بیزانس، که منجر به سقوط قسطنطنیه به دست ترکها در سال ۱۴۵۳ شد، آوارگان روانهٔ ایتالیا شدند و گنجینه‌های تمدن یونانی را با خود به همراه آوردند. بسیاری از آثار کلاسیک یونانی، که تا آن زمان آگاهی به آنها از طریق ترجمه‌های غالباً نامناسب عربی ممکن بود، اکنون از روی منابع اصلی قابل مطالعه بودند. همچنین، در حدود اواسط این قرن، صنعت چاپ اختراع شد و وضع تجاری کتاب را متحول نمود و نشر دانش را در سرعتی بی‌سابقه میسر کرد. در حوالی پایان این قرن، آمریکا کشف شد و به فاصلهٔ کمی کشتیرانی دور کرهٔ زمین صورت گرفت.

فعالیت ریاضی در قرن پانزدهم عمدتاً در شهرهای ایتالیا و در شهرهای مرکزی اروپا، یعنی نورمبرگ، وین، و پراگ تمرکز یافته، و حصول حساب، و جبر، و مثلثات متمرکز شده بود. بنابراین ریاضیات اصولاً بارشد شهرهای تجاری تحت تأثیر دادوستد، در پانوردی، نجوم، و مساحی رونق یافت.

بارعایت ترتیب گاهشناختی، ابتدا از نیکولاس کوزا^۴ یاد می‌کنیم که نام خود را از شهر کوزه در کرانهٔ موزل^۵، که در آنجا در سال ۱۴۰۱ به دنیا آمد، گرفت. وی که پسر

1. Thomas Aquinas
2. Thomas Bradwardine
3. Canterbury
4. Nicholas Cusa
5. Cues
6. Mosel [رودی که بین شمال فرانسه و غرب آلمان غربی جریان دارد]

ماهگیر فقیری بود به سرعت در کلیسا ترقی کرد و سرانجام به مقام کاردینالی رسید. در سال ۱۴۴۸، وی فرماندار رم گردید. او تنها يك ریاضیدان درجه دوم بود ولی به نوشتن چند رساله در این موضوع توفیق یافت. در اینجا عمدتاً از او به خاطر کارش در اصلاح تقویم و کوشش وی برای ترویج دایره و تثلیث يك زاویه کلی (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۶۰۸) یاد می‌شود. وی در سال ۱۴۶۴ در گذشت.

يك ریاضیدان برتر، گئورگ فون پویرباخ^۱ (۱۴۶۱-۱۴۲۳) بود، که نیکولاس کوزا را به عنوان یکی از معلمین خود بر شمرده است. وی بعد از تدریس ریاضیات در ایتالیا، در وین اقامت گزید و دانشگاه آنجا را مرکز ریاضی نسل خود کرد. او کتابی درباره حساب و چند اثر درباره نجوم نگاشت و یک جدول سینوسها گرد آورد. اغلب این آثار تا بعد از مرگ وی منتشر نشدند. وی همچنین ترجمه لاتینی *المجسطی بطلمیوس* را از روی متن یونانی شروع کرده بود.

توانا ترین و بانفوذترین ریاضیدان این قرن یوهان موار^۲ (۱۴۷۶-۱۴۳۶) بود، که بیشتر از روی صورت لاتینی نام زادگاهش کونیگسبرگ^۳ («کوه شاهی») به رگیومونتانوس معروف شده است. درسین جوانی زیر نظر پویرباخ در وین درس خواند و بعداً وظیفه تکمیل ترجمه نامبرده از *المجسطی* به وی واگذار شد. وی همچنین آثار آپولونیوس، هرون، و ارشمیدس را، از یونانی، ترجمه کرد. رساله او *د تریانگولیس اوینیمودیس*^۴ [درباره مثلثها به طور کلی]، که در حدود ۱۴۶۴ نوشته شد ولی بعد از مرگ وی در ۱۵۳۳ منتشر گردید، بزرگترین اثر منتشر شده وی است و اولین شرح منسجم از مثلثات مسطحه و کروی در اروپا بود که مستقل از نجوم مورد مطالعه قرار می‌گرفت. رگیومونتانوس در ایتالیا و آلمان به سفرهای فراوانی پرداخت و سرانجام در ۱۴۷۱ در نورمبرگ اقامت گزید که در آنجا رصدخانه‌ای برپاداشت، چاپخانه‌ای دایر نمود، و چند رساله درباره نجوم نوشت. گفته‌اند که وی يك عقاب مکانیکی ساخت که بالهای خود را به هم می‌زد و یکی از شگفتیهای روزگار تلقی می‌شد. در سال ۱۴۷۵، رگیومونتانوس توسط پاپ سیکستوس ۵ چهارم به رم دعوت شد تا در اصلاح تقویم شرکت جوید. به فاصله کوتاهی بعد از ورودش، در سن ۴۰ سالگی، به ناگهان در گذشت. هاله‌ای از اسرار مرگ او را پوشانده است، زیرا، گسرچه بنا بر اغلب گزارشها وی احتمالاً به مرض طاعون در گذشته است، شایع شده بود که وی به وسیله یکی از دشمنانش مسموم گردیده است.

د تریانگولیس اوینیمودیس رگیومونتانوس به پنج مقاله تقسیم می‌شود، دو مقاله اول به مثلثات مسطحه و سه‌تای دیگر به مثلثات کروی اختصاص دارند. در این کتاب، او به تعیین مثلثی که در سه شرط مفروض صدق نماید، علاقه نشان می‌دهد. وی در موارد متعددی از جبر استفاده می‌کند، مانند قضیه ۱۲ و ۲۳ مقاله دوم: (II ۱۲) مثلثی را تعیین کنید که يك

1. Georg von Peurbach
2. Johann Müller
3. Königsberg
4. *De triangulis omnimodis*
5. Sixtus

ضلع، ارتفاع وارد بر این ضلع، و نسبت دو ضلع دیگر معلوم باشند؛ (II۲۳) مثلی را تعیین کنید که تفاضل دو ضلع، ارتفاع وارد بر ضلع سوم، و تفاضل قطعاتی که ارتفاع روی ضلع سوم جدا می‌کند، معلوم باشند. در اینجا جبر لفظی است، و قسمت مجهول شکل به عنوان ریشه معادله درجه دوم یافته می‌شود. اگرچه وی بر آن بود که روشهای خود را کلی قلمداد کند، اما مقادیر عددی مشخصی را برای قسمتهای معلوم می‌دهد. تنها توابع مثلثاتی به کار گرفته شده در دتریانگولیس او منیمودیس سینوس و کسینوس اند. مع هذا، بعداً رگیومونتانوس یک جدول تانژانتها را محاسبه نمود. در اثر دیگری، رگیومونتانوس جبر و مثلثات را برای مسئله ساختن یک چهارضلعی محاطی با چهار ضلع مفروض به کار برده است.

برجسته‌ترین ریاضیدان فرانسوی قرن پانزدهم نیکولا شوکه^۱ بود که در پاریس به دنیا آمد ولی در لیون به سربرد و به طبابت پرداخت. در سال ۱۴۸۴ وی کتاب حسابی موسوم به سه قسمت در علم اعداد^۲ نوشت، که تا قرن نوزدهم چاپ نشد. در اولین قسمت از سه قسمت این اثر به محاسبه با اعداد گویا، در دومین قسمت به اعداد گنگ، و در سومین قسمت به نظریه معادلات پرداخته شده است. شوکه نماهای منفی و مثبت صحیح را تشخیص داد و قسمتی از جبر خود را به صورت تلخیصی در آورد. کار وی، برای آن زمان، پیشرفته‌تر از آن بود که تأثیر زیادی بر معاصرینش گذارد. وی در حدود سال ۱۵۰۰ درگذشت. مسائلی از شوکه را می‌توان در مطالعه مسئله‌ای ۹.۸ یافت.

در سال ۱۴۹۴ اولین نسخه چاپی مجموعه حساب، هندسه، نسبت و تناسب^۳، که معمولاً به آن به طور خلاصه *سوما* [مجموعه] اطلاق می‌شود از طرف راهب ایتالیایی لوکا پاچولی^۴ (حدود ۱۵۰۹ - حدود ۱۴۴۵) انتشار یافت. در این اثر، که به طور آزادانه از منابع زیادی گردآوری شده، هدف آن بود که خلاصه‌ای از حساب، جبر، و هندسه زمان تدوین شود. این کتاب شامل چیز مهمی که در لیبر آباکسی فیونانچی نتوان یافت، نیست ولی از نمادگذاری برتری استفاده می‌کند.

قسمت حسابی *سوما* با الگوریتمهایی برای اعمال اصلی و برای استخراج ریشه‌های دوم شروع می‌شود. عرضه‌داشت مطالب نسبتاً کامل است، مثلاً، تعداد روشهایی که برای انجام عمل ضرب آورده، از هشت کمتر نیست. به حساب بازرگانی به‌طور کامل پرداخته شده و از طریق مسائل متعددی توضیح داده می‌شود؛ مطالعه ارزشمندی از دفترداری دو بل نیز در این کتاب وجود دارد. قاعده امتحان و تصحیح مورد بحث قرار گرفته و به کار برده می‌شود. علی‌رغم اشتباهات عددی زیاد، قسمت حسابی اثر به صورت یک منبع موثق استاندارد در مشاغل آن زمان درآمده بود. جبر *سوما* در معادلات درجه دوم بحث می‌کند و مشتمل بر مسائل بسیار زیادی است که منجر به چنین معادلاتی می‌شوند. این مباحث جبر با استفاده

1. Nicolas Chuquet
2. *Triparty en la science des nombres*
3. *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita*
4. Luca Pacioli

از مخففهایی مانند p (از «بیشتر») برای بعلاوه، m (از «کمتر») برای منها، co (از «شیء») برای مجهول x ، ce (از $censo$) برای x^2 ، cu (از $cuba$) برای x^3 ، و $coce$ (از $censocenso$) برای x^4 تلخیص شده است. تساوی گاهی با ae (از $aequalis$) نشان داده می‌شود. اغلب خط تیره‌هایی روی علائم اختصاری ظاهر می‌شوند، ولی این رسم برای نشان دادن يك حذف بوده، مانند $Sūma$ برای $Summa$. این اثر شامل مطالب چندان جالبی در هندسه نیست. آن گونه که معمول رگیوموتانوس بوده، جبر برای حل مسائل هندسی به کار می‌رود.

پاچولی سفرهای فراوانی کرد، در جاهای مختلف درس داد، و تعدادی آثار دیگر نوشت که همه آنها چاپ نشدند. در ۱۵۰۹ وی کتاب *نسبت‌الهی*^۱ [نسبت طلایی] خود را منتشر نمود، که شامل اشکالی از اجسام منتظم است که گویا توسط لئوناردو داوینچی رسم شده‌اند.

ظهور علامات $+$ و $-$ کنونی برای نخستین بار در صورت چاپ شده، در کتاب حسابی است که در سال ۱۴۸۹ در لایپزیگ توسط یوهان ویدمان^۲ (متولد حدود ۱۴۶۰ در بوهم^۳) منتشر گردید. در اینجا علامتها نه به عنوان نمادهای اعمال و بلکه صرفاً برای نشان دادن زیادت و نقصان به کار رفته‌اند. به احتمال زیاد علامت بعلاوه، شکل ادغام یافته کلمه لاتینی et است که اغلب برای نشان دادن عمل جمع به کار می‌رفت، و علامت منها شاید شکل ادغام یافته‌ای از مخفف m به نشانه منها باشد. توضیحات معقول دیگری نیز در این موارد ارائه شده‌اند. علامتهای $+$ و $-$ به عنوان نمادهای اعمال جبری در سال ۱۵۱۴ توسط ریاضیدان هلندی واندر هوک^۴ به کار گرفته شدند و لسی احتمالاً قبل از آن هم به این منظور به کار رفته‌اند*.

۸-۶ حسابهای اولیه

با پیدایش علاقه به آموزش که با رنسانس همراه بود و با افزایش فوق‌العاده در فعالیت بازرگانی آن عهد، تعداد کثیری کتاب درسی در حساب منتشر شدند. از جمله سیصد جلد کتاب پیش از قرن هفدهم در اروپا به چاپ رسید. این کتابها عمدتاً بردونوع بودند، آنهایی که توسط فضلالی کلاسیک که اغلب به مدارس کلیسایی وابسته بودند، به لاتین نوشته می‌شدند، و آنهایی که به زبانهای بومی توسط معلمین عملی که علاقه به آماده

-
1. *De diuina proportione*
 2. Johann Widman
 3. Bohemia
 4. Vander Hoecke

* نگاه کنید به

J. W. L. Glaisher, "On the early history of the signs $+$ and $-$ and on the early German arithmeticians," *Messenger of Mathematics*. 51 (1921-1922), pp. 1-148.

نمودن اطفال برای پیشه‌های تجاری داشتند، به نگارش درمی آمدند. معلمین اخیر اغلب به عنوان مساحان شهری، سردفتران اسناد رسمی، مأمورین عوارض نیز خدمت می کردند، و شامل رشنامیستر^۱ [حسابرس]های بانفوذی بودند که توسط هانز ثاتیک لیگک^۲، اتحادیه حفاظتی نیرومندی از شهرهای بازرگانی در ممالک توتنی^۳، حمایت می شدند.

قدیمیترین کتاب حساب چاپ شده، کتابی است با مؤلف گمنام و اکنون فوق العاده نادر به نام حساب تروویزو^۴، که در ۱۴۷۸ در شهر تروویزو، واقع بر سر راه بازرگانی که ونیز را با شمال مرتبط می کند، منتشر شد. این اثر عمدتاً یک کتاب حساب بازرگانی است که به شرح نوشتن ارقام، محاسبه با آنها، و کاربردهایی در مشارکت، و مبادلات پایاپای، اختصاص دارد. نظیر «الگوریسمها»ی قدیمتر متعلق به قرن چهاردهم، این نیز شامل مسائل تفریحی چندی است.

در ایتالیا کتابی در حساب بازرگانی نوشته پیر و بورگی^۵ بسیار پرنفوذتر از حساب تروویزو بود. این اثر بسیار مفید در سال ۱۴۸۴ در ونیز چاپ و حداقل ۱۷ بار تجدید چاپ شد، که آخرین آن در ۱۵۵۷ منتشر شد. در سال ۱۴۹۱ کتاب حسابی در فلورانس توسط فیلیپو کالاندری^۶ عرضه شد، که کم اهمیت تر بود، اما به لحاظ اینکه شامل اولین نمونه چاپی از روش کنونی تقسیمهای طولانی و نیز اولین مسائل مصور چاپ شده در ایتالیا بود، برای ما جالب توجه است. قبلاً درباره سوهای پاچولی، منتشره در ۱۴۹۴، بحث کرده ایم که قسمت بزرگی از آن به حساب اختصاص دارد. اطلاعات زیادی راجع به رسوم بازرگانی آن زمان را می توان از مسائل این کتاب جمع آوری کرد.

در آلمان کتاب حساب ویدمان که در سال ۱۴۸۹ در لایپزیگ منتشر گردید، از اعتبار زیادی برخوردار بود. کتاب حساب مهم دیگر در آلمان، کتابی بود که توسط یاکوب کوبل^۷ (۱۵۳۳ - ۱۴۷۰)، رشنامیستر هایدلبرگ، نوشته شده بود. محبوبیت این کتاب حساب، که در سال ۱۵۱۴ منتشر شد، از اینجا پیداست که این اثر حداقل ۲۲ بار چاپ شد. اما شاید پرنفوذترین کتاب حساب بازرگانی در آلمان، کتاب حساب آدام ریز^۸ (حدود ۱۴۸۹ - ۱۵۵۹)، منتشره در ۱۵۲۲ بود. این اثر آن قدر مشهور بود که حتی امروزه در آلمان عبارت ناخ آدام ریز^۹ [به گفته آدام ریز] برای اشاره به محاسبه درست به کار می رود.

حکایت جالبی درباره آدام ریز گفته می شود. ظاهراً یک روز ریز و یک طراح وارد مسابقه دوستانه ای شدند تا ببینند کدامیک از آنها می تواند در یک دقیقه تعداد بیشتری زاویه

1. Rechenmeister

۲. Hanseatic League اتحادیه ای قرون وسطایی از شهرهای تجاری آزاد آلمان شمالی و

کشورهای وابسته، که به منظور ترفیع و حفظ منافع اقتصادی آنها تشکیل شد. - م.

۳. Teutonic توتنها قومی از ژرمانی قدیم بودند. - م.

4. Treviso Arithmetic 5. Piero Borghi 6. Filippo Calandri

7. Jacob Köbel 8. Adam Riese 9. nach Adam Riese

قائمة به کمک ستاره و پرگار رسم کند. طراح خط مستقیمی کشید، و سپس، مطابق با روش ترسیم متعارفی که امروزه در مدارس تدریس می‌شود، اقدام به برپا کردن عمودهایی برخط کرد. آدام‌ریز نیمدایره‌ای بريك خط مستقیم رسم کرد و سپس با سرعت زیاد به رسم تعداد بسیار زیادی زوایه قائمه محاطی پرداخت. بدین ترتیب وی به سهولت مسابقه را برد.

در انگلستان نیز، چند کتاب حساب مشهور به وجود آمد. اولین اثر منتشرشده در انگلستان که به طور انحصاری به ریاضیات اختصاص یافت، کتاب حسابی بود که توسط کاتبرت تونستال^۱ (۱۵۵۹-۱۴۷۴) نوشته شد. این کتاب، که مبتنی بر سوهای پاجولی است، در ۱۵۵۲ چاپ شد و به لاتین نوشته شده بود. تونستال درطول زندگی پرماجرایش چندین مقام روحانی و دیپلماتیک کسب کرد. توجه معاصرینش به فضیلت وی، از اینجا معلوم می‌شود که اولین نسخه چاپی اصول اقلیدس به یونانی (۱۵۳۳) به وی اهدا شده است. امامعتبرترین نویسنده انگلیسی کتابهای درسی قرن شانزدهم رابرت رکورد^۲ (حدود ۱۵۵۸-۱۵۱۰) بود. رکورد به زبان انگلیسی می‌نوشت و آثار وی به صورت مناظره‌هایی بین استاد و دانشجو عرضه شده‌اند. وی حداقل پنج کتاب نوشت، که اولین اثر وی کتاب حسابی بود که خیال‌پردازانه به آن عنوان مرزهمین هنرها^۳ داده شد و در حدود سال ۱۵۴۲ منتشر گردید. این کتاب حداقل به ۲۹ چاپ رسید. رکورد در آکسفورد درس خواند و سپس از کیمبریج درجه پزشکی گرفت. وی ریاضیات را در کلاسهای خصوصی هر دو مؤسسه فوق در زمانی که در آنجا رزیدنت بود، درس داد و پس از ترك کیمبریج به عنوان پزشک ادوارد ششم و ملکه مری به خدمت پرداخت. وی در اواخر زندگی بازرس معادن و مسکوکات^۴ ایرلند گردید. آخرین سالهای عمر خود را، احتمالاً به خاطر خلایف که در ارتباط با کارش در ایرلند مرتکب شده بود، در زندان سپری کرد.

۷-۸ آغاز نمادگرایی در جبر

رابرت رکورد علاوه بر کتاب حساب خود، که در بخش قبل ذکر شد، يك کتاب نجوم، يك کتاب هندسه، يك کتاب جبر، کتابی درباره طب، و احتمالاً چند اثر دیگر که اکنون مفقود شده، نوشت. کتاب وی درباره نجوم، که در سال ۱۵۵۱ چاپ شد، کاخ دانش^۵ نامیده می‌شود و یکی از اولین اثرهایی بود که دستگاه کپرنیکی را به خوانندگان انگلیسی معرفی نمود. کتاب هندسه رکورد، راه دانش^۶، نیز در سال ۱۵۵۱ چاپ شد و شامل خلاصه‌ای از اصول اقلیدس است. آنچه از اهمیت تاریخی برخوردار است کتاب جبر

1. Cuthbert Tonstall
2. Robert Recorde
3. *The Ground of Artes*
4. *Comptroller of the Mines and Monies*
5. *The Castle of Knowledge*
6. *Pathwaie to Knowledge*

رکورد است، که هوش پراونگیز^۱ نامیده می‌شود و در سال ۱۵۵۷ منتشر شده، زیرا در این کتاب بود که نماد کنونی برای تساوی برای اولین بار به کار رفت. رکورد اختیاریک جفت پاره خط موازی برابر برای نماد تساوی چنین توجیه نمود: «زیرا هیچ دو شیئی نمی‌توانند مساویتر از اینها باشند».

یکی دیگر از نمادهای جبر کنونی ما، علامت آشنای رادیکال (که شاید اختیاریک آن به جهت شباهت آن به یک $\sqrt{\quad}$ کوچک، به نشانه *radix* [ریشه]، بوده)، در ۱۵۲۵ توسط کریستوف رودولف^۲ در کتابش راجع به جبر تحت عنوان دی کوس^۳ معرفی شد. این کتاب در آلمان اعتبار بسیاری داشت و نسخه اصلاح شده‌ای از این اثر به وسیله میخائیل شتیفل^۴ (۱۵۶۷-۱۴۸۶) در سال ۱۵۵۳ تهیه گردید. شتیفل به عنوان بزرگترین جبردان آلمانی قرن شانزدهم توصیف شده است. مشهورترین اثر ریاضی وی آریتمیتیکا اینتگر^۵ است که در سال ۱۵۴۴ منتشر شده است. این کتاب سه سه قسمت، که به ترتیب، به اعداد گویا، اعداد گنگ، و جبر اختصاص دارند، تقسیم شده است. در اولین قسمت، شتیفل مسزایای ارتباط دادن یک تصاعد حسابی را با یک تصاعد هندسی خاطر نشان می‌کند و بدین ترتیب منادی اختراع لگاریتم در یک قرن بعد می‌شود. وی همچنین، در این قسمت، ضرایب دو جمله‌ای تا مرتبه هفدهم را می‌دهد. قسمت دوم کتاب اساساً یک بیان جبری از مقاله هفدهم اقلیدس است، و قسمت سوم راجع به معادلات است. ریشه‌های منفی معادلات کنار گذاشته می‌شوند، اما علامات $+$ ، $-$ ، $\sqrt{\quad}$ به کار می‌روند، و مجهول اغلب با یک حرف نمایش داده می‌شود.

شتیفل یکی از عجیبترین شخصیتها در تاریخ ریاضیات بود. وی در ابتدا یک راهب بود، توسط مارتین لوتر تغییر مذهب داد، و یک اصلاح طلب متعصب گردید. مغز آشفته‌اش وی را بر آن داشت که راز گرابی عددی [اعتماد به خواص فوق طبیعی اعداد] در پیش گیرد. از تحلیل نوشتنهای کتاب مقدس، وی آخر دنیا را در ۳ اکتبر ۱۵۳۳ پیش‌بینی کرد و بعد از خراب کردن زندگی عده بسیاری از دهقانان معتقد که کار و مایملک خود را ترک کرده بودند تا همراه او به بهشت بروند، مجبور شد که به زندانی پناه برد. یک مثال افراطی از استدلال راز گرایانه شتیفل اثبات وی است، به کمک آریتموگرافی^۶، از اینکه پاپ لئوی هفدهم «جانوری» است که در کتاب مکاشفات یوحنا ذکر شده است. از LEO DECIMVS وی حروف V, M, I, C, D, L را نگاه داشت، چون این حروف

1. *The Whetstone of Witte* 2. Christoff Rudolff

3. *Die Coss* [کلمه آلمانی که به نشانه «مجهول» یا همان «شیء» عربی به کار می‌رفت]

4. Michael Stifel 5. *Arithmetica integra* 6. *Arithmography*

* «بگذار آنکه فهمی دارد عدد جانور را بشمارد؛ زیرا آن عدد مردی است؛ و عدد او ششصد و سه بیست و شش است». نگاه کنید به

The Arte

as their workes doe extende) to distinge it onely into two partes. The firste is, when one number is equalle vnto one other. And the seconde is, when one number is compar'd as equalle vnto . . . other numbers.

Alwaies willyng you to remember, that you reduce your numbers, to their leaste denominations, and smalleste formes, befoze you procede any farther.

And again, if your equation be suche, that the greateste denomination be like, be ioined to any parte of a compounde number, you shall tourne it so, that the number of the greateste signe alone, maie stande as equalle to the reste.

And this is all that needeth to be taughte, concerning this worke.

Howbeit, for easie alteration of equations, I will propounde a fewe examples, because the extraction of their rootes, maie the more aptly bee broughte. And to avoide the tedious repetition of these wordes: I will sette as I doe often in worke use, a paire of paralleles, or Some whate lines of one length, thus: ———, because noe. 2. things, can be moare equalle. And now marke these numbers.

$$14. \text{---} + \text{---} 15. \text{---} = 71. \text{---}$$

$$20. \text{---} = 18. \text{---} = 102. \text{---}$$

$$26. \text{---} + 10 \text{---} = 9. \text{---} + 10 \text{---} + 213. \text{---}$$

$$19. \text{---} + 192. \text{---} = 103. \text{---} + 108 \text{---} = 19 \text{---}$$

$$18. \text{---} + 24. \text{---} = 8. \text{---} + 2. \text{---}$$

$$34 \text{---} = 12 \text{---} = 40 \text{---} + 480 \text{---} = 9. \text{---}$$

در دستگاه شمار رومی دارای معنی هستند. وی سپس X را به خاطر اثوی دهم و به دلیل اینکه *Leo decimus* دارای ده حرف است، اضافه و حرف M را، به دلیل اینکه نشانه *mysterium* [رمز] است، حذف کرد. مرتب نمودن دوباره این حروف DCLXVI، یا ۶۶۶، را می‌دهد، که «عدد جانور» در کتاب مکاشفات است. این کشف چنان آرامشی به شتیفل داد که وی معتقد شد که تعبیری می‌بایست نتیجه الهامی از جانب خداوند باشد. چند سال بعد، نپرا، مخترع لگاریتم، نشان داد که ۶۶۶ مبین پاپ رم است، و پدر بونگوس^۲ از یسوعیان معاصر وی اعلام کرد که این عدد مبین مارتین لوتر^۳ می‌باشد. استدلال پدر بونگوس به صورت زیر بود. اگر از A تا I نمایشگر از ۱ تا ۹، از K تا S نمایشگر از ۱۰ تا ۹۰ (ده‌به‌ده)، و از T تا Z نمایشگر از ۱۰۰ تا ۱۵۰۰ (صدبه‌صد) باشد، داریم

M	A	R	T	I	N	L	V	T	E	R	A
۳۰	۱	۸۰	۱۰۰	۹	۴۰	۲۰	۲۰۰	۱۰۰	۵	۸۰	۱

که عدد ۶۶۶ را به عنوان مجموع می‌دهد.

در طول جنگ جهانی اول آریتموگرافی برای نشان دادن اینکه ۶۶۶ بایسد به عنوان قیصر ویلهلم^۴ تعبیر شود، به کار رفت، و بعداً نشان داده شد که این عدد معرف همیتر است. نشان داده شده است که ۶۶۶ وقتی در نمادهای حرفی زبان آرامی که کتاب مکاشفات در اصل به آن زبان نوشته شده، بیان شود نرون^۵ را تهجی می‌کند.

۸-۸ معادلات درجه سوم و درجه چهارم

احتمالاً جالبترین دستاورد ریاضی قرن شانزدهم کشف راه حل جبری معادلات درجه سوم و درجه چهارم، توسط ریاضیدانان ایتالیایی بود. داستان این کشف، وقتی با آب و تاب نوشته شود، با هر صفحه از نوشته‌های بنونوتوچلینی^۶ رقابت می‌کند. به طور خلاصه، واقعیات ظاهراً چنین بوده‌اند. در حدود ۱۵۱۵ شیپونوئل فرو^۷ (۱۴۶۵-۱۵۲۶) استاد ریاضی دانشگاه بولونیا^۸، معادله درجه سوم $x^3 + mx = n$ را به طریقه جبری، احتمالاً با تکیه بر منابع عربی قدیمیتر، حل کرد. وی نتیجه‌ای را که یافته بود، منتشر نکرد و لسی راز خود را برای شاگردش آنتونیو فیور^۹ فاش کرد. اما در حدود سال ۱۵۳۵،

1. Napier 2. Father Bongus 3. Martin Luther

* الفبای لاتینی مثل انگلیسی است، جز آنکه فاقد j و w است. به علاوه، در حروف بزرگ جایی U به صورت V ظاهر می‌شود.

4. Kaiser Wilhelm 5. Nero

۶. Benvenuto Cellini، مجسمه‌ساز و جواهرساز ایتالیایی (۱۵۷۱-۱۵۰۰)، شهرت عمده وی به خاطر اتوبیوگرافی اوست... م.

7. Scipione del Ferro 8. Bologna 9. Antonio Fior

نیکولو برشایی^۱، که عموماً به خاطر آسیمی در دوران کودکی که بر قدرت تکلم او تأثیر نهاده بود، تارتاگلیا^۲ (الکن) نامیده می‌شد، مدعی گردید که حل جبری معادله درجه سوم $x^3 + px^2 = n$ را کشف کرده است. با اعتقاد بر اینکه این ادعایی دروغین بیش نیست، فیور، تارتاگلیا را در مسابقه‌ای عمومی برای حل معادلات درجه سوم به مبارزه دعوت کرد، در نتیجه آن تارتاگلیا به کوشش پرداخت و تنها چندروز پیش از موعد مسابقه، حل جبری معادلاتی را که فاقد جمله مربع بودند، پیدا کرد. تارتاگلیا که به راه حل دو نوع معادله درجه سوم مجهز بود، وارد مسابقه شد و بر فیور که تنها می‌توانست یک نوع آن را حل کند، به طور کامل پیروز گردید. بعداً جیرولامو کاردانو^۳ [کاردان] نابغه بی‌مسلمکی که در میلان ریاضیات درس می‌داد و طبابت می‌کرد، با دادن این قول که حفظ راز کند و با اغواگری کلید حل معادلات درجه سوم را از تارتاگلیا به دست آورد. در سال ۱۵۴۵، کاردان آرس ماگنا^۴ [فن کبیر]ی خود را، که رساله عظیمی در جبر بود، در نورمبرگ^۵ آلمان، منتشر نمود. و در آن راه حل تارتاگلیا برای معادلات درجه سوم ظاهر گردید. اعتراضات شدید تارتاگلیا با پاسخ لودوویکو فراری^۶، مستعدترین شاگرد کاردان، مواجه شد، که وی استدلال نمود که کاردان اطلاعات خود را از دل فرو از طریق شخص ثالثی دریافت کرده و تارتاگلیا را به دزدی ادبی از همان منبع متهم کرد. مشاجره شدیدی برپا شد که شاید بخت با تارتاگلیا یار بود که توانست از آن جان سالم بدربرد.

چون به نظر نمی‌رسد که بازیگران ماجرای بالا همیشه نهایت احترام را به صداقت قایل باشند، در جزئیات طرح اختلافاتی دیده می‌شود.

راه حل معادله درجه سوم $x^3 + mx = n$ که توسط کاردان در آرس ماگنای وی داده شده اساساً به صورت زیر است. اتحاد

$$(a-b)^3 + 3ab(a-b) = a^3 - b^3$$

را در نظر بگیرید. اگر a و b را چنان اختیار کنیم که

$$3ab = m, a^3 - b^3 = n$$

در این صورت x با $a-b$ برابر است. با حل دو معادله اخیر به طور همزمان بر حسب a و b داریم

$$a = \sqrt[3]{(n/2) + \sqrt{(n/2)^2 + (m/3)^3}}$$

$$b = \sqrt[3]{-(n/2) + \sqrt{(n/2)^2 + (m/3)^3}}$$

و بدین ترتیب x معین می‌شود.

-
1. Nicolo of Brescia 2. Tartaglia 3. Girolamo Cardano
4. Ars magna 5. Neuremberg 6. Ludovico Ferrari

مدت زیادی از حل معادلهٔ درجهٔ سوم نگذشته بود که يك راه حل جبری برای معادلهٔ درجهٔ چهارم (یا دو مجذوری) کلی کشف شد. در ۱۵۴۰، ریاضیدان ایتالیایی زوانه دتونینی داکوی^۱ مسئله‌ای را برای کاردان مطرح کرد که به يك معادلهٔ درجهٔ چهارم منجر می‌شد (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۱۵۰۸)، گرچه کاردان قادر به حل معادله نشد، شاگرد وی فراری موفق شد، و کاردان خوشنودی چاپ این راه حل را نیز در آدرس ماگنای خود پیدا کرد.

روش فراری برای حل معادلات درجهٔ چهارم، که با نمادگذاری امروزی تلخیص شود، به صورت زیر است. تبدیل ساده‌ای (نگاه کنید به مطالعه مسئله‌ای ۱۴۰۸ (الف)) معادلهٔ درجهٔ چهارم کامل را به معادلهٔ درجهٔ چهارمی به شکل

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

تبدیل می‌کند. از آن به دست می‌آوریم

$$x^4 + 2px^2 + p^2 = x^4 - qx - r + p^2$$

یا

$$(x^2 + p)^2 = px^2 - qx + p^2 - r$$

که از آن، به ازای y دلخواه خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} (x^2 + p + y)^2 &= px^2 - qx + p^2 - r + 2y(x^2 + p) + y^2 \\ &= (p + 2y)x^2 - qx + (p^2 - r + 2py + y^2). \end{aligned}$$

حال y را طوری انتخاب می‌کنیم که سمت راست معادلهٔ بالا مربع کامل باشد. چنین چیزی وقتی ممکن است که*

$$4(p + 2y)(p^2 - r + 2py + y^2) - q^2 = 0.$$

اما این يك معادلهٔ درجهٔ سوم بر حسب y است، و با روشهای پیشین قابل حل می‌باشد. این مقدار y مسئلهٔ اصلی را به مسئله‌ای تحویل می‌کند که کاری جز استخراج جذر ندارد.

راه‌های جبری دیگری نیز برای معادلات درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم کلی داده شده‌اند. در بخش بعد روشهای ابداع شده توسط ریاضیدان قرن شانزدهم فرانسه، فرانسوا ویت را بررسی خواهیم کرد. راهی برای حل معادلات درجهٔ چهارم را که در سال ۱۶۳۷ توسط دکارت عرضه شده، می‌توان در بسیاری از کتابهای درسی متعارف کالجها در زمینهٔ نظریهٔ معادلات پیدا کرد (نگاه کنید به مطالعهٔ مسئله‌ای ۴۰۱۰ (ه) [جلد دوم]).

1. Zuanne de Tonini da Coi

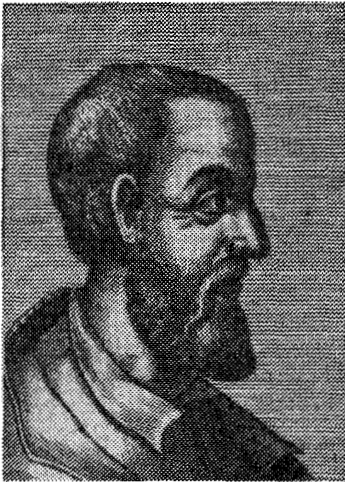
* شرط لازم و کافی برای اینکه عبارت درجهٔ دوم $Ax^2 + Bx + C$ مربع يك تابع خطی باشد، آن است که دترمینان، $B^2 - 4AC$ ، صفر شود.

چون حل يك معادله درجه چهارم كلي را می توان به حل يك معادله درجه سوم وابسته به آن مربوط كرد، اويلر، در حدود ۱۷۵۰، سعی كرد به طور مشابه حل معادله درجه پنجم كلي را به حل يك معادله درجه چهارم وابسته تحويل نمايد. وی در این كوشش، همان طور كه برای لاگرانژ در سی سال بعد پیش آمد، ناکام بود. يك پزشك ایتالیایی، پ. روفینی^۱ (۱۸۲۲-۱۷۶۵)، در سالهای ۱۸۰۳، ۱۸۰۵، و ۱۸۱۳ برهانی برای آنچه كه اکنون صحت آن را می دانیم، تهیه كرد مبنی بر اینکه ریشه های يك معادله درجه پنجم، یا بالاتر را در حالت كلي نمی توان به وسیله رادیکالهایی برحسب ضرایب معادله بیان كرد. این نتیجه مهم بعداً به طور مستقل، در سال ۱۸۲۴، توسط ریاضیدان مشهور نروژی نیلس هنريك آبل^۲ (۱۸۲۹-۱۸۰۲) اثبات شد. پیشرفتهای جدید در نظریه معادلات بسیار جالب توجه، ولی پیشرفته تر از آن اند كه در اینجا مورد بررسی قرار گیرند، و متضمن نامهایی هستند از قبیل برینگ^۳، جرارد^۴، چیرنهاوزن^۵، گالوا^۶، ژوردان^۷، و بسیاری دیگر.

جبر و لاموکاردانو یکی از خارق العاده ترین شخصیتها در تاریخ ریاضیات است. وی در پاریس^۸ در سال ۱۵۰۱ به عنوان فرزند نامشروع يك قاضی به دنیا آمد و به مردی با تضادهای عاطفی بدل گردید. وی زندگی شغلی متلاطم خود را به عنوان يك طیب شروع كرد، در حالی كه ضمن استمرار این پیشه به مطالعه، تدریس، و نوشتن ریاضیات اشتغال داشت. او يك بار تا اسكاتلند سفر كرد و در مراجعتش به ایتالیا كریسهای مهمی را متوالیاً در دانشگاههای پاریس و بولونیا اشغال كرد. برای مدتی به خاطر بدعتگذاری زندانی شد، چون زایچه ای برای زندگانی مسیح منتشر ساخت. با استعفا از پست خود در بولونیا، به رم كوچ كرد و در احكام نجوم عالم برجسته ای شد و تحت این عنوان در دربار پاپی به دریافت مقرری نایل گردید. در سال ۱۵۷۶، بنا به روایتی به زندگی خود خاتمه داد، زیرا كه می خواست پیشگویی قبلی خود را از زمان مرگش كه بنا بر احكام نجوم به دست آورده بود، عملی نماید. از شرارت او داستانهای متعددی گفته شده است، مثلاً وقتی در خشم بوده گوشهای پسر كوچكتر خود را بریده است. بعضی از داستانهایی می توانند اغراقگوییهای دشمنان وی باشند، و شاید هم بیش از حد درباره وی بدگویی شده باشد. البته اتوبیوگرافی او این دیدگاه را تأیید می كند.

كاردان كه یکی از با استعدادترین مردان زمان خود و در چندین فن جامع بود، آثاری درباره حساب، نجوم، فیزیک، طب و دیگر موضوعات نوشت. بزرگترین اثر وی، آرس ماگنا، اولین رساله عظیم به زبان لاتین است كه صرفاً به جبر اختصاص دارد. در اینجا به وجود ریشه های منفی يك معادله پی برده شده و به محاسبه بااعداد مرهومی تاحدی توجه شده است. در این اثر همچنین روش خامی برای به دست آوردن يك مقدار تقریبی برای ریشه معادله ای از درجه دلخواه وجود دارد. شواهدی در دست است كه او با «قاعده

1. P. Ruffini
2. Niels Henrik Abel
3. Bring
4. Jerrard
5. Tschirnhausen
6. Galois
7. Jordan
8. Pavia



جیرولامو کاردانو
(مجموعه کتابخانه عمومی نیویورک)

علامات دکارت»، که در مطالعه مسئله‌ای ۳۰۱۰ [جلد دوم] توضیح داده شده، آشنا بوده است. کاردان، که قمارباز کهنه‌کاری بود، یک راهنمای قمار نوشت که در آن سؤالات جالبی در احتمالات بررسی شده‌اند.

تارتاگلیا کودکی سختی داشت. وی در حدود سال ۱۴۹۹ در برشا از والدین فقیری به دنیا آمد و در زمان تسخیر برشا توسط فرانسو در ۱۵۱۲ حضور داشت. در جریان وحشیگریهایی که با این واقعه همراه بود، تارتاگلیا و پدرش (که یک نامهرسان پست در برشا بود) با عده بسیاری به کلیسای جامع پناه بردند، اما سربازان به تعقیب آنها پرداختند و قتل‌عامی در گرفت. پدر کشته شد، و پسر، باشکافی در جمجمه و زخم شمشیر سختی که آرواره ساق وی را شکافته بود، به‌حال مرگ رها شد. بعداً وقتی مادر تارتاگلیا در جستجوی خانواده خود به کلیسا رسید، پسرش را هنوز زنده یافت و توانست وی را بیرون برد. چون امکانات مالی برای مراجعه به پزشک نداشت، به خاطرش آمد که یک سنگ مجروح همواره جای زخم خود را لیس می‌زند، و تارتاگلیا بعدها بهبودی خود را مدیون این درمان می‌دانست. آسیب وارده به ساق وی سبب نقص مادام‌العمری در تکلم او شد، که وی از آن لقب «الکن» را یافت. مادرش پولی که برای ۱۵ روز به مدرسه‌فرستادن او کافی باشد، گرد آورد، و او با دزدیدن یک کتابچه خودآموز مشق بهترین استفاده را از فرصت کرد و از این طریق نوشتن و خواندن را پیش خود آموخت. گفته‌اند که به علت نداشتن امکانات برای خرید کاغذ، مجبور شد که از سنگ قبر به عنوان تخته استفاده کند. بعدها وی معاش خود را با تدریس علوم و ریاضیات در شهرهای مختلف ایتالیا تحصیل نمود. وی در سال ۱۵۵۷ در ونیز درگذشت.

تارتاگلیا ریاضیدان با استعدادی بود. ما قبلاً کار او را درباره معادلات درجه سوم



نیکولو تارتاگلیا
(مجموعه دیوید اسمیت)

ذکر کرده ایم. افتخار استفاده از ریاضیات در علم آتشیاری توپخانه برای نخستین بار نیز به وی نسبت داده شده است. وی آنچه را که عموماً بهترین کتاب حساب ایتالیایی قرن شانزدهم تلقی می‌شود، نوشت که رساله‌ای در دو مجلد شامل بحث کامل اعمال عددی و رسوم بازرگانی آن عصر است. او همچنین نسخی از آثار اقلیدس و ارشمیدس را منتشر نمود.

در سال ۱۵۷۲، چندسال قبل از درگذشت کاردان، رافائل بومبلی کتاب جبری منتشر نمود که سهم قابل ملاحظه‌ای در حل معادله درجه سوم داشت. در کتابهای درسی درباره نظریه معادلات نشان داده می‌شود که اگر $(m/3)^2 + (n/2)^2$ منفی باشد، در این صورت معادله درجه سوم $x^3 + mx = n$ دارای سه ریشه حقیقی است. اما در این حالت، در فرمول کاردان - تارتاگلیا، این ریشه‌ها به صورت تفاضل دو ریشه سوم اعداد مختلط بیان می‌شوند. این امر ظاهراً خلاف قاعده، به حالت تحویلناپذیر در معادلات درجه سوم معروف است و به طور قابل ملاحظه‌ای جبریون قدیمی را به زحمت انداخت. بومبلی حقیقی بودن ریشه‌های به‌ظاهر موهومی را در حالت تحویلناپذیر خاطر نشان کرد. بومبلی همچنین نماد گذاری رایج زمان را اصلاح کرد. یک مورد آن، استفاده وی از علامت کروهه است. مثلاً عبارت مرکب $\sqrt{7} + \sqrt{13}$ توسط پاچولسی به صورت $RV\sqrt{pR14}$ نوشته می‌شده، که در آن RV ، دایکسی او نیودسالیسی^۲، مین آن است که از همه آنچه بعد از آن می‌آید جذر گرفته می‌شود؛ بومبلی این را به صورت $R\sqrt{pR14}$ می‌نوشته است. بومبلی ریشه‌های دوم و سوم را با نوشتن Rc و Rq متمایز نمود، و $\sqrt{-11}$ را با $dim Rq11$ نشان داد.



فرانسوا ویت
(برادران براون)

۸-۹ فرانسوا ویت

بزرگترین ریاضیدان فرانسوی قرن شانزدهم فرانسوا ویت بود، که اغلب با نام نیمه‌لاتینی خود ویتا خوانده می‌شود. او که يك حقوق‌دان و عضو پارلمان بود اغلب اوقات فراغت خود را وقف ریاضیات می‌کرد. وی در ۱۵۴۰ در فونتنه^۲ متولد شد و در ۱۶۰۳ در پاریس درگذشت.

حکایات جالبی دربارهٔ ویت گفته شده است. مثلاً، داستان سفیری از ممالک سفلی که نزد شاه هنری چهارم به خود می‌بالید که در فرانسه ریاضیدانی نیست که قادر به حل مسئله‌ای باشد که در ۱۵۹۳ به وسیلهٔ هموطن وی آدریانوس رومانوس (۱۶۱۵-۱۵۶۱) مطرح شده و مستلزم حل يك معادلهٔ درجهٔ ۱۴۵ است. ویت احضار و معادله به وی نشان داده شد. با تشخیص يك رابطهٔ مثلثاتی در بطن مسئله، وی در عرض چند دقیقه توانست، دو جواب را پیدا کند، و متعاقب آن، ۲۱ جواب دیگر را داد. ریشه‌های منفی مورد توجه او قرار نگرفتند. در مقابل، ویت، رومانوس را برای حل مسئلهٔ آپولونیوس (نگاه کنید به بخش ۶-۴)، به مبارزه دعوت کرد، اما رومانوس قادر به به دست آوردن جوابی با استفاده از ابزارهای اقلیدسی نشد. وقتی حل زیبای پیشنهاد دهنده را به وی نشان دادند به فونتنه سفر کرد تا ویت را ملاقات کند. در نتیجهٔ آن دوستی گرمی بین آن دو به وجود آمد. داستان دیگری نیز هست مبنی بر اینکه چگونه ویت به طور موفقیت آمیزی يك رمز اسپانیایی را که شامل چند صد علامت بود، گشود و فرانسه بدین وسیله به مدت دو سال در جنگ خود علیه اسپانیا سود برد. شاه فیلیپ^۳ دوم آن‌چنان به ناگشودنی بودن رمز یقین داشت که به پاپ شکایت نمود که فرانسویان علیه کشور وی «برخلاف تعالیم دین مسیح» جادو به خدمت می‌گیرند. گفته‌اند که وقتی ویست غرق در ریاضیات می‌شد خود را روزها در اتاق مطالعه اش حبس می‌کرد.

ویت آثاری در زمینه مثلثات، جبر، و هندسه نوشت، که عمده ترین آنها کاربرد قوانین ریاضی در مثلثها^۱ (۱۵۷۹)، مدخل فنون تحلیل^۲ (۱۵۹۱)، متمم هندسه^۳ (۱۵۹۳)، در باب حل عددی توانها^۴ (۱۶۰۰)، در باب شناسایی و اصلاح معادلات^۵ (که بعد از درگذشت وی در سال ۱۶۱۵ چاپ شد) می باشند. این آثار بجز آخری به خرج خود ویت چاپ و توزیع شد.

از آثار بالا، اولین آنها سهم قابل ذکری در پیشرفت مثلثات دارد. این اثر شاید اولین کتاب در اروپای غربی است که، به طور منظم، روشهایی را برای حل مثلثهای مسطحه و کروی به کمک هر شش تابع مثلثاتی بسط می دهد. به مثلثات تحلیلی توجه شایانی شده است (نگاه کنید به مطالعه مسئله ای ۱۷۰۸). ویت عباراتی برای $\cos n\theta$ به عنوان تابعی از $\cos \theta$ به ازای $n = 1, 2, \dots, 9$ به دست آورد، و بعداً یک راه حل مثلثاتی برای حالت تحویلناپذیر در معادلات درجه سوم را پیشنهاد کرد.

مشهورترین اثر ویت مدخل فنون تحلیل وی است، که سهم زیادی در بسط جبر علامتی دارد. در اینجا ویت رویه استفاده از حروف مصوت را برای نمایش کمیتهای مجهول و حروف بی صدا را برای نمایش کمیتهای معلوم معرفی می کند. رسم کنونی ما در استفاده از حروف آخر القبا برای مجهولها و حروف اول برای معلومها توسط دکارت در ۱۶۳۷ معرفی شد. پیش از ویت، رسم رایج این بود که از حروف یا نمادهای متفاوتی برای توانهای مختلف یک کمیت استفاده شود. ویت از یک حرف، که به طرز مناسبی توصیف شود، استفاده کرد. مثلاً x^3, x^2, x کنونی توسط ویت به صورت $A \text{ quadratum}, A$ [به توان دو]، $A \text{ cubum}$ [به توان سه]، و توسط نویسندگان بعدی به اختصار به صورت Ac, Aq, A نوشته می شدند. ویت همچنین ضرایب یک معادله چند جمله ای را به گونه ای توصیف کرد که معادله به صورت همگن در آید. او از علامتهای $+$ و $-$ کنونی استفاده کرد، ولی هیچ نمادی برای تساوی نداشت. مثلاً وی

$$5BA^2 - 2CA + A^2 = D$$

را به صورت

$B \text{ 5 in } A \text{ quad} - C \text{ plano } 2 \text{ in } A + A \text{ cub aequatur } D \text{ solido}$

می نوشته است. توجه کنید که C و D چگونه توصیف شده اند تا هر جمله معادله سه بعدی شود. ویت نماد $=$ را بین دو کمیت، نه برای نشان دادن تساوی کمیتهای، بلکه برای تفضا آنها به کاربرد.

1. *Canon mathematicus seu ad triangula*

2. *In artem analyticam isagoge* 3. *Supplementum geometriae*

4. *De numerosa potestatum resolutione*

5. *De aequationum recognitione et emendatione*

در درباب حل عددی توانها، ویت يك فرايند منظم، که تا حدود سال ۱۶۸۵ مورد استفاده همگانی داشته، برای تقریب متوالی ریشه يك معادله ارائه می کند. این روش برای معادلات درجات بالا چنان پر زحمت می شود که يك رياضيدان قرن هفدهم آن را به عنوان «کاری که برای يك مسیحي نامناسب است» توصیف نمود. این روش وقتی در مورد معادله درجه دوم

$$x^2 + mx = n$$

به کار رود، از این قرار است. فرض کنید که x_1 مقدار تقریبی معلومی برای يك ریشه معادله باشد، به قسمی که ریشه مطلوب را بتوان به صورت $x_1 + x_2$ نوشت. جایگذاری در معادله مفروض نتیجه می دهد که

$$(x_1 + x_2)^2 + m(x_1 + x_2) = n,$$

یا

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + mx_1 + mx_2 = n.$$

با فرض اینکه x_2 آن قدر کوچک است که می توان از x_2^2 صرف نظر کرد، داریم

$$x_2 = \frac{n - x_1^2 - mx_1}{2x_1 + m}$$

حال از تقریب اصلاح شده، $x_1 + x_2$ ، به همان طریق تقریب بهتری را، $x_1 + x_2 + x_3$ ، محاسبه می کنیم و همینطور الی آخر. ویت این روش را برای تقریب يك ریشه معادله درجه ششم

$$x^6 + 6000x = 191246976$$

به کار برد.

رساله ای از ویت که بعد از وفات او منتشر شد، شامل مطالب قابل توجهی در نظریه معادلات است. در اینجا تبدیلهای معمول برای افزودن یا ضرب ریشه های يك معادله در يك مقدار ثابت را می بینیم. ویت از روابط بین ضرایب و ریشه های چند جمله ایها، تا درجه پنجم، به عنوان توابع متقارنی از ریشه ها مطلع بود، و در حالت کلی از تبدیلی که جمله پس از بزرگترین جمله از لحاظ توان را صفر می کند، آگاهی داشت. در این رساله راه حل زیبای زیر از معادله درجه سوم $x^3 + 3ax = 2b$ ، شکلی که هر معادله درجه سوم قابل تحویل به آن است، دیده می شود. با قراردادن

$$x = \frac{a}{y} - y$$

معادله مفروض به صورت

$$y^6 + 2by^3 = a^3,$$

يك معادله درجه دوم برحسب y^3 ، درمی آید. بدین ترتیب y^3 ، و سپس y ، و سپس x را پیدا می کنیم. راه حل ویت برای معادلات درجه چهارم شبیه به راه حل فرارای است. معادله درجه چهارم کلی ملخص

$$x^4 + ax^2 + bx = c,$$

را در نظر بگیرید که می توان آن را به صورت

$$x^4 = c - ax^2 - bx$$

نوشت. با افزودن $x^2y^2 + y^4/4$ به هر دو طرف، معادله

$$\left(x^2 + \frac{y^2}{4}\right)^2 = (y^2 - a)x^2 - bx + \left(\frac{y^4}{4} + c\right)$$

حاصل می شود. حال y را چنان انتخاب می کنیم که طرف راست مربع کامل شود. شرط این امر آن است که

$$y^6 - ay^4 + 4cy^2 = 4ac + b^2,$$

که يك معادله درجه سوم برحسب y^2 است. چنان y را می توان یافت و حل مسئله با استخراج ریشه های دوم کامل می شود.

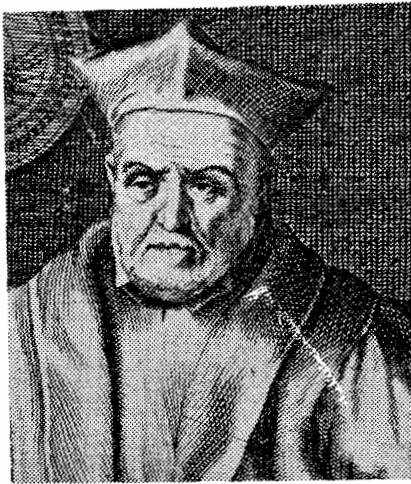
ویت جبردان برجسته ای بود و اطلاع از این حقیقت که وی جبر و مثلثات را در هندسه خود به کار برده، باعث شگفتی نمی شود. وی بانسان دادن اینکه هم مسئله تثلیث و هم مسئله تضعیف به حل معادلات درجه سوم بستگی دارند، به سه مسئله باستانی ایفای سهم کرد. در بخش ۴-۸ محاسبه ویت از مقدار π و حاصلضرب نامتناهی جالب توجه وی را که به $2/\pi$ همگراست، ذکر کرده ایم، و در بخش ۶-۴ از کوشش وی در احیای اثر مفقود آپولونیوس در تماسها یاد کرده ایم.

در ۱۵۹۴، ویت بادرگیری درمباحثه تندلی با کلاویوس در اصلاح تقویم گریگوری دچار رسوایی مصیبت باری شد. برخورد ویت نسبت به این موضوع کاملا غیرعلمی بود.

۸-۱۰ دیگر ریاضیدانان قرن شانزدهم

تاریخچه ریاضیات قرن شانزدهم بی آنکه حداقل از عده دیگری که در این راه سهی داشتند، ذکر کوتاهی شود، کامل نخواهد بود. ریاضیدانانی چون کلاویوس، کاتالدی، و استوین، و نجوم ریاضیدانانی مانند کپرنیک، راتیکوس، و پیتیسکوس از این جمله هستند.

کریستوفر کلاویوس^۱ در سال ۱۵۳۷ در بامبرگ^۲ آلمان متولد شد و در سال



کریستوفر کلاویوس
(مجموعه دیوید اسمیت)

۱۶۱۲ در رم درگذشت. وی از خود چیز زیادی به ریاضیات اضافه نکرد ولی احتمالاً بیش از هر دانشمند آلمانی دیگر آن قرن به ارتقای این دانش کمک کرد. او معلم با استعدادی بود و کتابهای بسیار معتبری را در حساب (۱۵۸۳) و جبر (۱۶۰۸) نوشت. در سال ۱۵۷۴ نسخه‌ای از اصول اقلیدس را منتشر کرد که به خاطر یادداشتها و حواشی گسترده آن واجد ارزش است. وی همچنین درباره مثلثات و نجوم مطالبی نگاشت، و نقش مهمی در اصلاح تقویم گریگوری ایفا نمود. به عنوان یک یسوعی، برای فرقه خود افتخاراتی کسب کرد.

پیتر و آنتونیو کاتالدی^۱ در ۱۵۴۸ در بولونیا به دنیا آمد، در فلورانس، پر و جاز، و بولونیا ریاضیات و نجوم تدریس کرد، و در شهر زادگاه خود در سال ۱۶۲۶ درگذشت. وی آثاری در ریاضیات نگاشت که یک کتاب حساب، رساله‌ای درباره اعداد تام، نسخه‌ای از شش مقاله اول اصول، و رساله کوتاهی در جبر از آن جمله هستند. برداشتن اولین گامها در نظریه کسرهای مسلسل به وی نسبت داده می‌شود.

مؤثرترین ریاضیدان ممالک سفلی در قرن شانزدهم سیمون استوین (۱۶۲۰-۱۵۴۸) بود. وی رئیس کل سررشته‌داری ارتش هلند شد و کارهای عام‌المنفعه زیادی را سرپرستی کرد. در تاریخ ریاضیات، استوین بیشترین شهرت را به عنوان اولین کسی که نظریه کسرهای اعشاری را تدوین کرد، دارد. در تاریخ فیزیک وی بیشتر به خاطر سهمی که در استاتیک و ئیدروستاتیک دارد، مشهور است. برای دانشمندان همعصرش، شهرت وی بیشتر به دلیل کارهای او در استحکامات و مهندسی نظامی بود. برای توده‌عامی زمان خود شهرت عمده او به خاطر اختراع درشکه‌ای بود که به کمک بادبانهایی به جلو رانده می‌شد و اینکه در امتداد ساحل دریا درحالی که ۲۸ نفر را حمل می‌کرد، به حرکت در آمد و یک اسب در حال تاخت

را پشت سر گذاشت.

علم نجوم سهم فراوانی در رشد ریاضیات داشت؛ در واقع، زمانی کلمه «ریاضیدان» به مفهوم منجم به کار می‌رفت. از جمله منجمان برجسته‌ای که سبب تحرکی در ریاضیات شد، نیکولاس کوپرنیکوس^۱ [کپرنیک] (۱۴۷۳-۱۵۴۳) لهستانی بود. وی در دانشگاه کراکو^۲ تعلیم یافت و در پادوا و بولونیا به تحصیل حقوق، طب، و نجوم پرداخت. نظریهٔ کیهان او در سال ۱۵۳۵ کامل شد، اما تا سال مرگش در ۱۵۴۳ منتشر نشد. کار کوپرنیکوس اصلاحاتی در مثلثات را ضروری نمود، خود کوپرنیکوس رساله‌ای در این باب عرضه کرد.

گئورگ یواخیم راتیکوس^۳ (۱۵۷۶-۱۵۱۴)، از منجمان برجسته آلمانی در قرن شانزدهم و از مریدان کوپرنیکوس بود. او ۱۲ سال را به اتفاق محاسبان اجیر شده برای تهیهٔ دو جدول مثلثاتی قابل توجه، که هنوز هم قابل استفاده است، صرف کرد. یکی از آنها جدولی بود ۱۵ رقمی، از هر شش تابع مثلثاتی، به فواصل ۱۰" کمانها، دیگری يك جدول ۱۵ رقمی سینوسها بود به فواصل ۱۰" کمانها، همراه با تفاضلهای اول، دوم، و سوم. راتیکوس اولین کسی بود که توابع مثلثاتی را به عنوان نسبت اضلاع يك مثلث قائمه تعریف نمود. به خاطر سماجتهای راتیکوس بود که اثر بزرگ کوپرنیکوس فقط اندکی قبل از مرگ مؤلف منتشر شد.

جدول سینوسهای راتیکوس در سال ۱۵۹۳ توسط بارتولومائوس پیتیسکوس^۴



نیکولاس کوپرنیکوس
(هوزه آمریکا)

-
1. Nicolaus Copernicus
 2. Cracow
 3. Georg Joachim Rhaeticus
 4. Bartholomaus Pitiscus

(۱۶۱۳-۱۵۶۱)، يك روحانی آلمانی كه علاقه به ریاضیات داشت، ویرایش و كامل شد. رساله بسیار رضایتبخش وی در مثلثات اولین اثری در این موضوع بود كه چنین عنوانی داشت.

به طور خلاصه، در مورد دستاوردهای ریاضی قرن شانزدهم، می توانیم بگوئیم كه آغاز جبر علامتی تقریباً در این زمان بود، محاسبه با ارقام هندی-عربی به صورت استانه‌ای درآمد، كسرهای اعشاری تكوین یافتند، و معادلات درجه سوم و درجه چهارم حل شدند. نظریه معادلات عموماً پیشرفت كرد، اعداد منفی مورد توجه قرار گرفتند، مثلثات به كمال رسید و به صورت منظم و اصولی درآمد، و چندین جدول عالی محاسبه شدند. صحنه برای گامهای بلندی كه باید در قرن بعد برداشته می شدند، آماده بود.

در اینجا ذكر این نکته جالب است كه اولین اثر ریاضی چاپ شده در ینگه‌دنیا در سال ۱۵۵۶ در مكزیكو سیتی پدیدار شد، كه يك خلاصه اعمال بازرگانی كوچك توسط خوان‌دیزا بود.

مطالعه مسئله‌ای

۱۰۸ مسائل از عصر تاریکی

گردآورنده مجموعه‌ای به زبان لاتین تحت عنوان مسائلی برای تقویت ذهن شاید آلکونین یورکی (حدود سال ۷۷۵) باشد. پنج مسئله زیر از این مجموعه را حل کنید.

(الف) اگر ۱۰۰ کیل ذرت بین ۱۰۰ نفر به چنان روالی توزیع شود كه هر مرد ۳ کیل، هر زن ۲ کیل، و هر كودك $\frac{1}{2}$ کیل دریافت كند، چند مرد، زن، و كودك وجود دارند؟

(ب) سی قمقمه، كه ده تا ایشان پر، ده تا نیم خالی، و ده تا خالی هستند، باید بین سه پسر تقسیم شوند به طوری كه قمقمه‌ها و محتویات آنها به طور مساوی تصاحب شوند. چگونه می توان این كار را انجام داد؟

(ج) سگی خرگوشی را دنبال می كند، كه ۱۵۰ پا جلوتر است، هر بار كه خرگوش جهشی به طول ۷ پا انجام می دهد، سگ ۹ پا می جهد. سگ در چند خیز به خرگوش می رسد؟

(د) يك گرگ، يك بز، و يك كلم را باید از عرض رودخانه‌ای به وسیله يك قایق كه تنها یکی از آنها را علاوه بر قایقران می تواند در خود جاهد، عبور داد. چگونه باید آنها را حمل كرد به طوری كه نه بز كلم را بخورد و نه گرگ بز را؟

(ه) مردی در حال احتضار وصیت می كند كه اگر زنش، كه آریستن است، پسری به دنیا آورد، پسر $\frac{3}{4}$ و بیوه $\frac{1}{4}$ دارایی را به ارث برند؛ اما اگر دختری زاده شود، وی $\frac{7}{12}$ و بیوه $\frac{5}{12}$ دارایی را ارث ببرند. دارایی وی را در صورتی كه هم يك پسر

و هم يك دختر متولد شوند، چگونه باید قسمت کرد؟ (این مسئله منشأ رومی دارد. راه حلی که در مجموعه آلکویین داده شده قابل قبول نیست.)

(و) ژربر در کتاب هندسه خود، مسئله تعیین ساقهای يك مثلث قائم‌الزاویه با وتر و مساحت معلوم را، که در آن زمان بسیار مشکل به نظر می‌رسید، حل کرد. این مسئله را حل کنید.

(ز) ژربر مساحت يك مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به صورت $(a/2)(a - a/2)$ بیان کرد. نشان دهید که این معادل با اختیار $\sqrt{3} = 1.732$ است.

۳۰۸ دنباله فیوناتچی

(الف) نشان دهید که مسئله زیر، که در لیبر آباکی آمده، دنباله فیوناتچی $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots, x, y, x+y, \dots$ را پدید می‌آورد.

چند زوج خرگوش از يك زوج در سال می‌تواند تولید شود در صورتی که هر زوج در هر ماه يك زوج جدید را به وجود می‌آورند که خود از ماه دوم به تولد مثل می‌پردازند.

(ب) اگر u_n معرف جمله n ام دنباله فیوناتچی باشد نشان دهید که

$$u_{n+1}u_{n-1} = u_n^2 + (-1)^n, n \geq 2 \quad 0.1$$

$$u_n = [(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n] / 2^n \sqrt{5} \quad 0.2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n / u_{n+1}) = (\sqrt{5} - 1) / 2 \quad 0.3$$

$$u_n \text{ و } u_{n+1} \text{ متباین هستند.} \quad 0.4$$

نوشتجات زیادی راجع به دنباله فیوناتچی وجود دارد. برای کاربردهای بسیار خاص در معماهای تقطیع، هنرها، آرایش برگها، و مارپیچ لگاریتمی، مثلاً، نگاه کنید به ا. پ. نورتروپ، معماهای ریاضی^۱.

۳۰۸ مسائلی از «لیبر آباکی»

مسائل زیر را که در لیبر آباکی (۱۲۰۲) آمده، حل کنید. اولین مسئله را يك مدرس مدارس کلیسایی در قسطنطنیه برای فیوناتچی مطرح کرد، دومی برای توضیح قاعده سه طرح شده؛ سومی مثالی از يك مسئله ارث است که در آثار بعدی توسط شوکه و اوپلر دوباره ظاهر شدند.

(الف) اگر A از B ، ۷ دناریوس^۱ [دینار] بگیرد، آنگاه پول A پنج برابر پول B می‌شود؛ اگر B از A ، ۵ دناریوس بگیرد؛ آنگاه پول B هفت برابر A می‌شود. هر کدام چقدر پول دارند؟

(ب) پادشاهی ۳۰ مرد را برای کاشتن درخت به باغ خود فرستاد. اگر آنها بتوانند ۱۰۰۰ درخت را در ۹ روز بنشانند، ۳۶ مرد در چند روز خواهند توانست ۴۴۰۰ درخت را بنشانند؟

(ج) مردی برای پسر ارشدش یک سولیدوس^۲ و یک هفتم باقیماندهٔ ثروتش را به ارث گذاشت، از باقیمانده، وی برای پسر دیگرش دو سولیدوس و یک هفتم باقیماندهٔ ثروتش را باقی گذاشت، سپس از باقیماندهٔ جدید، برای پسر سومش سه سولیدوس و یک هفتم باقیمانده را به ارث نهاد. وی به همین ترتیب ادامه داد، به هر پسر یک سولیدوس بیش از پسر قبلی و یک هفتم باقیماندهٔ ثروتش را باقی گذاشت. با چنین تقسیمی نتیجه آن شد که آخرین پسر هر چه را که باقی مانده بود دریافت کرد و سهم همهٔ پسرها یکی شد. این مرد چند پسر داشت و ماترک او چقدر بود؟

۴.۸ مسائل دیگری از فیوناتچی

(الف) نشان دهید که مربعات اعداد $a^2 - 2ab - b^2$ ، $a^2 + b^2$ ، $a^2 + 2ab - b^2$ تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند. اگر $a = ۵$ و $b = ۴$ ، قدرنسبت ۷۲۰ است، و اولین و سومین مربع $۳۱۲ = ۷۲۰ - ۴۱۲$ و $۴۹۲ = ۷۲۰ + ۴۱۲$ هستند. از تقسیم بر ۱۲ ، جواب فیوناتچی به اولین مسئلهٔ مسابقه، یعنی یافتن عددگویایی مانند x را به طوری که $x^2 + ۵ = x^2 - ۵$ هر دو مربع اعداد گویا باشند، به دست می‌آوریم (نگاه کنید به بخش ۸-۳). مسئله در صورتی که به جای ۵ اعداد ۱ ، ۲ ، ۳ ، یا ۴ گذاشته شود، غیر قابل حل است. فیوناتچی نشان داد که اگر hx و h اعداد صحیحی باشند به طوری که $x^2 + h = x^2 - h$ مربعهای کامل باشند، آنگاه h باید بر ۲۴ قابل قسمت باشد. به عنوان مثالهایی $۱۲ = ۲۴ - ۵^2$ و $۱۴۲ = ۹۶ + ۱۰۲$ ، $۲۲ = ۹۶ - ۱۰۲$ را داریم.

(ب) راه حلی برای مسئلهٔ زیر پیدا کنید، که سومین مسئله از مسائل مسابقه است که توسط فیوناتچی حل شد: سه مرد کپه‌ای پول دارند، سهم آنها $۱/۲$ ، $۱/۳$ ، $۱/۶$ است. هر مرد مقداری پول از کپه برمی‌دارد تا اینکه چیزی باقی نماند. اولین مرد $۱/۲$ آنچه را که برداشته، دومی $۱/۳$ ، و سومی $۱/۶$ آن را برمی‌گردانند. وقتی که مجموع پول برگرداننده شده به طور مساوی بین سه مرد تقسیم شود، دیده می‌شود که هر یک صاحب حصهٔ خود می‌شوند. در کپهٔ اصلی چقدر پول وجود داشت، و هر مرد چقدر از کپه برداشته بود؟

(ج) مسئلهٔ زیر را که توسط فیوناتچی در لیبر آباکی داده شده، حل کنید. این مسئله به دفعات زیادی در صورت‌های مختلف دوباره مطرح شد و اساس اندیشهٔ مندرج در مسائل

[سکه‌یی که در بین آنتین ضرب می‌شد] 1. denarius 2. solidus

قسط‌السنین است.

مردی از هفت دروازه داخل باغی شد، و تعداد معینی سیب برداشت. وقتی باغ را ترك كرد به نگهبان اول نصف سیبهایی را که داشت به اضافه يك سیب دیگر داد. به نگهبان دوم نصف سیبهای باقیمانده و يك سیب دیگر داد. وی در مورد پنج نگهبان باقیمانده نیز چنین کرد، و باغ را با يك سیب ترك نمود. او چند سیب از باغ جمع کرده بود؟

۵.۸ چند ضلعیهای ستاره‌ای

يك چند ضلعی ستاره‌ای منتظم، شکلی است که از وصل کردن n نقطه‌ای که محیط يك دایره را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنند، به a امین نقطه و با شروع از نقطه مفروضی، تشکیل می‌شود، که در آن n و a متباین هستند و $n > 2$. چنین چند ضلعی ستاره‌ای با نماد $\{n/a\}$ نمایش داده می‌شود، و گاهی يك n -گرام منتظم نامیده می‌شود. وقتی $a = 1$ ، يك چند ضلعی منتظم را خواهیم داشت. چند ضلعیهای ستاره‌ای در مدارس باستانی فیثاغورسی پدیدار شدند، که در آنجا چند ضلعی ستاره‌ای $\{5/2\}$ ، یا پنتاگرام، به عنوان يك نشان شناسایی به کار می‌رفت. چند ضلعیهای ستاره‌ای همچنین در هندسه بوئیوس و ترجمه‌های اقلیدس توسط آدلارد و کمپانوس از عربی ظاهر می‌شوند. برادواردین بعضی خواص هندسی آنها را بسط داد. آنها همچنین توسط رگیوموتانوس، شارل دو بوئل (۱۴۷۰-۱۵۳۳)، و یوهان کپلر (۱۵۷۱-۱۶۳۰) تحت مطالعه قرار گرفتند.

(الف) به کمک يك مقاله، چند ضلعیهای ستاره‌ای $\{5/2\}$ ، $\{7/2\}$ ، $\{7/3\}$ ، $\{8/3\}$ ، $\{9/2\}$ ، $\{9/4\}$ ، $\{10/3\}$ را بسازید.

(ب) فرض کنید $\phi(n)$ ، که تابع اویلر نامیده می‌شود، تعداد اعداد کوچکتر از n و اول نسبت به آن را نشان دهد. نشان دهید که $\phi(n)/2$ تا n -گرام منتظم وجود دارد.

(ج) نشان دهید که اگر n اول باشد، $(n-1)/2$ تا n -گرام منتظم وجود دارد.

(د) نشان دهید که مجموع زوایای «رئوس» چند ضلعی ستاره‌ای منتظم $\{n/a\}$ برابر با $180^\circ(n-2a)$ است. (این حکم توسط برادواردین داده شده است.)

۶.۸ یوردانوس و کوزا

(الف) کمپانوس در آخر مقاله چهارم ترجمه‌اش از کتاب اصول اقلیدس يك مسئله تثلیث زاویه را شرح می‌دهد که دقیقاً همانی است که توسط یوردانوس در دتریانگولیس، داده شده است، که اثری است در هندسه در چهار مقاله و شامل ۷۲ قضیه استانبده همراه با قضایای دیگری در مباحثی از قبیل مرکز ثقل مثلث، سطوح خمیده، و کمانهای متساویه.

این تثلیث، که اصل درج را به کار می برد (نگاه کنید به مطالعه مسئله ای ۶.۴)، از این قرار است: فرض کنید $\triangle AOB$ ، که به صورت یک زاویه مرکزی در دایره ای داده می شود، زاویه ای باشد که می خواهیم آن را ثلث کنیم، بر A وتر AD را رسم کنید تا قطر عمود بر OB را در E چنان قطع کند که $ED = OA$ ، در این صورت خط OF که موازی با DA است $\triangle AOB$ را ثلث می کند. درستی این ساختمان را ثابت کنید.

(ب) یوردانوس در ترکیکاتوس دنومریس داتیسی^۱ [رساله اعداد مفروض] مسائلی دارد که در آن عدد مفروضی باید به روالی که بیان شده تقسیم شود. مثلاً یکی از مسائل آغازین در این اثر چنین است: عدد مفروضی را به دو قسمت چنان تجزیه کنید که مجموع مربعات قسمتها برابر با عدد مفروض دیگری شود. این مسئله را وقتی که دو عدد مفروض به ترتیب ۵۸ و ۱۰ باشند، حل کنید.

(ج) کوزا راههایی را برای تقریب محیط دایره مفروض ارائه کرد. بهترین روش وی آن است که در زیر می آید: فرض کنید M مرکز یک مثلث متساوی الاضلاع مانند ABC و D وسط ضلع AB باشد. فرض کنید E وسط DB باشد. کوزا مدعی شد که در این صورت ME ($5/4$) شعاع دایره ای است که محیطش برابر با محیط مثلث متساوی الاضلاع است. حال مثلث قائم الزاویه ای با ساقهای ME ($5/4$) و RS ($3/2$) AB رسم کنید، و زاویه ای مانند α «از برنزیاً خوب» برابر با زاویه RST بسازید. برای راستیدن محیط دایره مفروضی، دو قطر متعامد UOV و XOY را رسم کنید؛ زاویه α را طوری قرار دهید که رأس آن در U و یکی از اضلاع آن در امتداد UOV باشد؛ آنگاه ضلع دیگر زاویه، امتداد XOY در Z را چنان قطع می کند که OZ نصف محیط مورد نظر است. نشان دهید که روش کوزا π را با $3.142337\dots$ با $(24/35)\sqrt{21}$ تقریب می کند.

۷۰۸ دور و مربعات جادویی از مرتبه زوج مضاعف

دراثر حکاکي مشهور آلبرشت دورر، مالمیخولیا^۲ مربع جادویی مرتبه چهارمی که در شکل ۶۸

۱۶	۳	۲	۱۳
۵	۱۰	۱۱	۸
۹	۶	۷	۱۲
۴	۱۵	۱۴	۱

شکل ۶۸

تصویر شده، ظاهر می‌شود، که در آنجا تاریخ، یعنی سال ۱۵۱۴ که حکاکی در آن انجام شده، در دو خانه وسطی سطر پایین ظاهر می‌شود. علاوه بر خواص «جادویی» معمول، نشان دهید که (الف) مجموع مربعات اعداد واقع در دو سطر بالایی برابر است با مجموع مربعات اعداد واقع در دو سطر زیرین.



مالیخولیا اثر آلبرشت دورر. (موزه بریتانیا)

(ب) مجموع مربعات اعداد واقع در سطر اول و سوم برابر است با مجموع مربعات اعداد واقع در سطرهای دوم و چهارم.

(ج) مجموع اعداد واقع در قطرها برابر است با مجموع اعدادی که بر قطرها واقع نیستند.

(د) مجموع مربعات اعداد واقع بر قطرها برابر است با مجموع مربعات اعداد غیر واقع بر قطرها.

(ه) مجموع مکعبات اعداد واقع بر قطرها برابر است با مجموع مکعبات اعداد غیر واقع بر قطرها.

راه ساده‌ای برای ساختن مربعهای جادویی از مرتبه زوج مضاعف، یعنی مربعهای جادویی که مرتبه آنها مضربی از ۴ است، وجود دارد. قبل از همه، مربعی از مرتبه ۴ را در نظر بگیرید و قطرهای آن را رسم شده تصور کنید (نگاه کنید به شکل ۶۹). با شروع از گوشه فوقانی سمت چپ، در امتداد سطرها از چپ به راست به ترتیب نزولی بشمارید، در حالی که اعداد را تنها در خانه‌هایی درج می‌کنید که توسط قطری قطع نشده‌اند، حال،

	۲	۳	
۵			۸
۹			۱۲
	۱۴	۱۵	

۱۶	۳	۲	۱۳
۵	۱۰	۱۱	۸
۹	۶	۷	۱۲
۴	۱۵	۱۴	۱

شکل ۶۹

	۲	۳		۶	۷	
۹			۱۲	۱۳		۱۶
۱۷			۲۰	۲۱		۲۴
	۲۶	۲۷		۳۰	۳۱	
	۳۴	۳۵		۳۸	۳۹	
۴۱			۴۴	۴۵		۴۸
۴۹			۵۲	۵۳		۵۶
	۵۸	۵۹		۶۲	۶۳	

۶۴	۲	۳	۶۱	۶۰	۶	۷	۵۷
۹	۵۵	۵۴	۱۲	۱۳	۵۱	۵۰	۱۶
۱۷	۴۷	۴۶	۲۰	۲۱	۴۳	۴۲	۲۴
۴۰	۲۶	۲۷	۲۷	۳۶	۳۰	۳۱	۳۳
۳۲	۳۴	۳۵	۲۹	۲۸	۳۸	۳۹	۲۵
۴۱	۲۳	۲۲	۴۴	۴۵	۱۹	۱۸	۴۸
۴۹	۱۵	۱۴	۵۲	۵۳	۱۱	۱۰	۵۶
۸	۵۸	۵۹	۵	۴	۶۲	۶۳	۱

شکل ۷۰

با شروع از گوشهٔ تحتانی سمت راست، در امتداد سطرها از راست به چپ به ترتیب صعودی بشمارید، درحالی که اعداد را تنها در خانه‌هایی که به وسیلهٔ يك قطر قطع شده‌اند درج می‌کنید، مربع جادویی حاصل فرق چندانی با مربع دورر ندارد. همان قاعده را می‌توان در مورد هر مربع جادویی از مرتبهٔ $4n$ ، در صورتی که کلیهٔ قطرهای $2n^2$ زیر بلوک چهاردرچهار اصلی را رسم شده تصور کنیم، به کار برد. شکل ۷۰ ساختمان يك مربع جادویی 8×8 با این قاعده را نشان می‌دهد.

(و) يك مربع جادویی از مرتبهٔ ۱۲ رسم کنید.

۸-۸ مسائلی از رگیومونتائوس

سه مسئلهٔ زیر را، که دوتای اول آنها را در تقریباً نگولیس اومینمودیس رگیومونتائوس (۱۴۶۴) دیده می‌شوند، حل کنید:

- (الف) مطلوب است تعیین مثلثی که تفاضل دو ضلع، ارتفاع وارد بر ضلع سوم، و تفاضل قطعاتی که این ارتفاع روی ضلع سوم جدا می‌کند، معلوم باشند. (مقادیر عددی که توسط رگیومونتائوس داده می‌شوند عبارت‌اند از ۳، ۱۰، ۱۲ و ۰.)
- (ب) مطلوب است تعیین مثلثی که يك ضلع، ارتفاع وارد بر آن، و نسبت دو ضلع دیگر معلوم باشند. (مقادیر عددی داده شده توسط رگیومونتائوس ۲۰، ۵، و $3/5$ هستند.)
- (ج) يك چهارضلعی محاطی را با چهار ضلع معلوم بسازید.

۹-۸ مسائلی از شوکه

- مسائل زیر را که از سه قسمت در علم اعداد شوکه (۱۴۸۴) اقتباس شده‌اند، حل کنید:
- (الف) بازرگانی از سه بازار مکاره دیدن کرد. در اولی پول خود را دو برابر نمود و ۳۰ دلار خرج کرد، در دومی پول خود را سه برابر کرد و ۵۴ دلار خرج نمود، در سومی پول خود را چهار برابر کرد و ۷۲ دلار خرج نمود و بعد ۴۸ دلار برایش باقی ماند. وی بدو آقدر پول داشته است؟
- (ب) نجاری موافقت می‌کند تحت این شرایط کار کند که به ازای هر روز کاره ۵۵ دلار دریافت کند، درحالی که به ازای هر روزی که کار نمی‌کند باید ۵۰ دلار بپردازد. در پایان ۳۰ روز متوجه می‌شود که به اندازهٔ دریافتی‌اش، پول پرداخت کرده است. وی چند روز کار کرده؟
- (ج) دو تاجر شراب وارد پاریس می‌شوند، یکی از آنها با ۶۴ قمقهٔ شراب و دیگری با ۲۰ قمقه. چون به اندازهٔ کافی پول ندارند که عوارض بپردازند، اولی ۵ قمقهٔ شراب و ۴۰ فرانک می‌دهد، و دومی ۲ قمقهٔ شراب می‌دهد و ۴۰ فرانک پس می‌گیرد. قیمت يك قمقهٔ شراب و عوارض آن چیست؟

(د) شو که قاعدهٔ کمیت‌های متوسط^۱ را ارائه داد، که می‌گوید اگر d, c, b, a اعداد مثبتی باشند آنگاه $(a+b)/(c+d)$ بین a/c و b/d قرار می‌گیرد. این را ثابت کنید.

۱۰۰۸ مسائلی از پاچولی

دو مسئلهٔ زیر را که در سومای پاچولی (سال ۱۴۹۴) یافت می‌شوند، حل کنید. مسئلهٔ دوم تفصیلی از «مسئلهٔ قورباغه در چاه»^۲ معروف است و صورت‌های متعددی دارد.

(الف) شعاع دایرهٔ محاطی يك مثلث ۴ است و طول قطعاتی از يك ضلع که توسط نقطهٔ تماس دایره با این ضلع جدا می‌شوند، ۶ و ۸ است. دو ضلع دیگر را تعیین کنید.

(ب) موشی در بالای يك درخت تبریزی است که ۶۰ پا ارتفاع دارد و گربه‌ای روی زمین در پای درخت است. موش هر روز $1/2$ پا پایین می‌آید و هر شب $1/6$ پا به بالا برمی‌گردد. گربه هر روز يك پا بالا می‌رود و هر شب $1/4$ پا به پایین می‌لغزد. در قسمت بین گربه و موش هر روز $1/4$ پا رشد می‌کند و هر شب $1/8$ پا کوتاه می‌شود. چه مدت طول خواهد کشید که گربه به موش برسد؟

۱۱۰۸ مسائل بازرسانی قدیم

مسائل زیر را که در کتب حساب اروپایی قدیم یافت می‌شود، حل کنید.

(الف) این مسئله، از حساب بوتو^۳ مربوط به سال ۱۵۵۹، بر پایهٔ مشکلات دریانوردان رومی قدیم است.

دو کشتی که ۲۰۰۰۰ استاد از هم فاصله دارند، لنگر برمی‌دارند تا به طور مستقیم به طرف یکدیگر حرکت کنند. اولین کشتی سپیده‌دم با وزش باد شمال بادبان برافراشت. نزدیک عصر، وقتی ۱۲۰۰ استاد راه پیموده بود، باد شمال ساکت شد و باد جنوب غربی برخاست. در این موقع، کشتی دیگر به راه افتاد و ۱۴۰۰ استاد به هنگام شب دریا را درنوردید. ولی، اولین کشتی با باد مخالف ۷۰۰ استاد به عقب رانده شد، اما با باد شمال صبحگاهی با افراشتن بادبان به روال معمول به پیش برده شد در حالی که دیگری ۶۰۰ استاد به عقب رانده شده بود. بنا بر این، متناوباً شب و روز، کشتیها با باد مساعد پیش می‌رفتند، و سپس با باد نامساعد به عقب رانده می‌شدند. می‌پرسم وقتی کشتیها به هم رسیدند مجموعاً چند استاد راه پیموده بودند و چه مدت در راه بودند؟

(ب) مسئلهٔ زیر توسط تارتاگلیسا برای توضیح يك مطلب مهم در مبادلات داده شده است.

اگر ۱۰۰ لیر پول مودون^۴ معادل ۱۱۵ لیر در ونیز باشد، و اگر ۱۸۰ لیر در ونیز

1. regle des nombres moyens

2. frog in the well problem

3. Buteo

4. Modon

هم‌ارز ۱۵۰ لیر در کورفو^۱ باشد، و اگر ۲۴۰ لیر پول کورفو به اندازه ۳۶۰ لیر در نگر و پونت^۲ ارزش داشته باشد، ارزش ۶۶۶ لیر پول نگر و پونت با مسکوکات مودون چیست؟

(ج) کتابهای حساب قدیم دارای مسائل زیادی راجع به عوارض گمرکی هستند. آنچه در زیر می‌آید مسئله‌ای است از این قبیل که از کتاب حساب کلاویوس مربوط به سال ۱۵۸۳ اقتباس شده است.

تاجری ۵۰۰۰۰۰ پوند فلفل را در پرتغال به ۱۰۰۰۰ اسکودو^۳ خرید و ۵۰۰ اسکودو عوارض پرداخت، آن را با هزینه ۳۰۰ اسکودو به ایتالیا حمل کرد و در آنجا عوارض دیگری به مبلغ ۲۰۰ اسکودو پرداخت. انتقال آن از ساحل به فلورانس ۱۰۰ اسکودو خرج برداشت و وی مجبور شد تا یک گم‌سرك ورودی به میزان ۱۰۰ اسکودو به آن شهر بپردازد. سرانجام، حکومت مالیاتی به میزان ۱۰۰۰ اسکودو از هر تاجر مطالبه کرد. وی اینک متحیر است که، بعد از این همه مخارج، هر پوند را به چه قیمتی بفروشد تا در هر پوند یک‌دهم اسکودو سود ببرد.

(د) در یک راهنمای عملی برای بازرگانان که توسط فلورنتین گالیگای^۴ در سال ۱۵۲۱ نوشته شده، مسئله زیر راجع به سود و زیان دیده می‌شود.

مردی تعدادی عدل پشم در لندن خرید، که هر عدل ۲۰۰ پوند، مقیاس انگلیسی، وزن داشت، و هر عدل ۲۴ فلورین^۵ برای او هزینه برداشت. وی پشم را به فلورانس فرستاد و هزینه حمل و نقل و مخارج دیگری، معادل با ۱۰ فلورین برای هر عدل پرداخت. او می‌خواهد که پشم را در فلورانس به چنان قیمتی بفروشد که ۲۰ درصد سرمایه‌اش سود ببرد. هر هاندر و دویست^۶ (۱۰۰ پوند) آن را چند باید بفروشد در صورتی که ۱۰۰ پوند لندن معادل ۱۳۳ پوند فلورانس باشد.

(ه) مسائل مباحه بسیار رایج بودند. در اینجا یکی را از لیبر آباکسی فیبوناتچی مربوط به سال ۱۲۰۲ می‌آوریم.

مردی یک دناریوس را با چنان نرخ به مباحه می‌گذارد که در پنج سال صاحب دو دناریوس می‌شود، و پنج سال بعد از آن پول دو برابر می‌شود. می‌پرسم که از این یک دناریوس وی بعد از ۱۰۰ سال چند دناریوس بهره خواهد برد.

(و) مسئله زیر از سرچشمه علوم^۷ هامفری بیکر^۸ (۱۵۶۸) است و راجع به مشارکت می‌باشد.

دو بازرگان با هم شریک شده‌اند، اولی در اول ژانویه، ۶۴۰ لی^۹ سرمایه‌گذاری کرد. دومی تا اول آوریل قادر به سرمایه‌گذاری نیست. مقدار سرمایه‌گذاری او را

-
1. Corfu 2. Negroponte 3. Scudi [از واحدهای پول ایتالیایی قدیم]
 4. Florentine Ghaligai 5. Florin 6. hundredweight
 7. The Well Spring of Sciences 8. Humphrey Baker 9. li

می‌خواهم، بدین منظور که وی بتواند صاحب نصف عایدی شود. (فرض کنید که مشارکت از تاریخ سرمایه‌گذاری اولی به مدت یک سال دوام خواهد آورد.)
(ز) در زیر مسئله‌ای از «مسئله عمومی» تارتاگلیا مربوط به سال ۱۵۵۶ آورده می‌شود که اساساً یک مسئله قسط‌السنین است. باید به‌خاطر داشت که این مسئله قبل از ابداع لگاریتم مطرح شده است.

بازرگانی ۲۸۱۴ دوکات^۲ به دانشگاهی برمی‌نای این توافق داد که به مدت نه سال ۶۱۸ دوکات در هر سال به وی بازپرداخت، و در پایان نه سال ۲۸۱۴ دوکات پرداخت شده تلقی شود. وی چه ربح مرکبی برای پول خود دریافت می‌کند؟

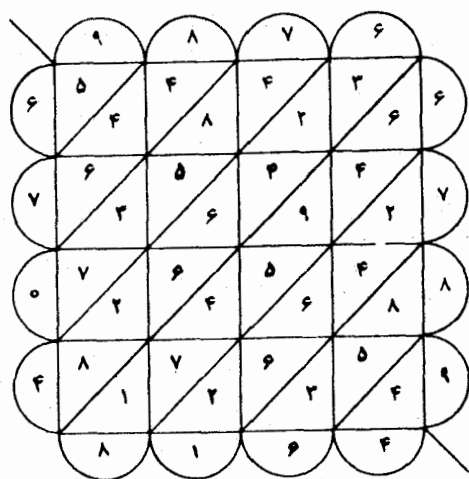
۱۲۰۸ الگوریتمهای جلوزیا وگالی

(الف) کتابهای حساب قرنهای پانزدهم و شانزدهم شامل توصیفاتنی از الگوریتمهایی برای اعمال اصلی هستند. از روشهای متعددی که برای انجام یک ضرب طولانی تدبیر شده، روش موسوم به روش جلوزیا^۳، یا روش مشبکه^۴ شاید از همه مقبولتر بوده است. این روش که در شکل ۷۱ با ضرب ۹۸۷۶ در ۶۷۸۹ برای به دست آوردن ۶۷۰۴۸۱۶۴ توضیح داده شده، بسیار قدیمی است. این روش احتمالاً برای اولین بار در هندوستان پدید آمده است (نگاه کنید به بخش ۷-۵)، زیرا که در شرحی بر لیلادتی و سایر آثار هندی ظاهر شده و از هندوستان راه خود را به آثار چینی، عربی، و ایرانی باز کرده است. این روش برای مدتی طولانی در بین اعراب محبوبیت داشت و از طریق آنها به اروپای غربی منتقل شد. به دلیل سادگی در کاربرد آن، در صورتی که مشکل چاپ، یا حتی رسم شبکه خطوط لازم وجود نمی‌داشت، این روش شاید هنوز هم کماکان مورد استفاده بود. این الگو به مشبکه، یا شبکه، که در بعضی از پنجره‌ها به کار می‌رود، شباهت دارد. اینها به «جلوزیا» موسوم بودند که نهایتاً بدل به «Jalousie» (به معنی «کرکره» در زبان فرانسه) شدند.

حاصل ضرب ۸۰۳۴۲ و ۷۳۱۸ را به روش جلوزیا پیدا کنید.

(ب) الگوریتمی که قبل از سال ۱۶۰۰ برای تقسیمات طولانی به مراتب بیش از دیگر روشها مورد استفاده بود، به اصطلاح «روش گالی»^۵، یا روش خط‌زدن^۶، است که به احتمال قوی ریشه هندی داشته است. برای روشن شدن این روش، گامهای زیر را در تقسیم ۹۴۱۳ بر ۳۷ در نظر بگیرید.

۱. مقسوم‌علیه، ۳۷، را همان‌طور که نشان داده شده، زیر
- مقسوم بنویسید. اولین رقم خارج قسمت، ۲، را به روال عادی



شکل ۷۱

۹۴۱۳ | ۲

۳۷

۲

۳۰

۹۴۱۳ | ۲

۳۷

۱

۴۵

۳۶۶

۹۴۲۳ | ۲۵

۳۳۳

۳

۱۴

۴۵۴

۳۶۶۵

۹۴۳۳ | ۲۵۴ - ۱

۳۳۳۳

۳۳

۱
۵

به دست آورید، و آن را در طرف راست مقسوم بنویسید.

۲. فکر کنید: $۶ = ۲ \times ۳$ ، $۳ = ۹ - ۶$ ، ۹ و ۳ را خط

بزنید و ۳ را بالای ۹ بنویسید. فکر کنید: $۱۴ = ۲ \times ۷$ ،

$۲۰ = ۱۴ - ۳۴$ ، ۷ ، ۳ ، ۴ را خط بزنید و ۲ را بالای ۳ و ۰ را

بالای ۴ بنویسید.

۳. مقسوم‌علیه، ۳۷ ، را قطروار، به اندازه یک رقم در

طرف راست بنویسید. مقسوم حاصل بعد از گام دوم ۲۰۱۳

است. رقم بعدی خارج قسمت را به دست آورید. فکر کنید:

$۱۵ = ۵ \times ۳$ ، $۵ = ۲۰ - ۱۵ = ۳$ ، ۲ ، ۰ را خط بزنید و ۵ را

بالای ۰ بنویسید. فکر کنید: $۳۵ = ۵ \times ۷$ ، $۱۶ = ۳۵ - ۵۱$.

۷ ، ۵ ، ۱ را خط بزنید و ۱ را بالای ۵ ، و ۶ را بالای ۱ بنویسید.

۴. مقسوم‌علیه، ۳۷ ، را به اندازه یک رقم دیگر به طرف

راست به طور قطری بنویسید. مقسوم حاصل پس از گام سوم ۱۶۳

است. رقم بعدی خارج قسمت را به دست آورید، ۴ . فکر کنید:

$۱۲ = ۴ \times ۳$ ، $۴ = ۱۲ - ۱۶ = ۳$ ، ۱ ، ۶ را خط بزنید و ۳ را

در بالای ۶ بنویسید. فکر کنید: $۲۸ = ۴ \times ۷$ ، $۱۵ = ۲۸ - ۴۳$.

۷ ، ۴ ، ۳ را خط بزنید و ۱ را در بالای ۴ ، ۵ را در بالای ۳ بنویسید.

۵. خارج قسمت ۲۵۴ است با باقیمانده ۱۵ .

بعد از کمی تمرین، معلوم می‌شود که روش گالی آن اندازه که به نظر می‌رسد، مشکل

نیست. محبوبیت آن معلول سهولت انجام آن بر روی چرتکه شنی بود، که در آن خط زدن در واقع پاك كردنى است كه يك جایگزینی احتمالی پس از آن انجام می شود. نام «گالی» به قایقی اطلاق می شد، که تصور می شد ظاهر مسئله پس از اتمام به آن شباهت پیدا می کند. این شباهت یا بانظر کردن به کار از ته صفحه، که در آن خارج قسمت مثل يك دیرك کناری بادبان کشتی به نظر می رسد، و یا بانظر کردن به کار از طرف چپ صفحه، که در آن خارج قسمت مثل يك دیرك به نظر می رسد، نتیجه می شود. از نقطه نظر دوم، باقیمانده اغلب (همچنان که در بالا نشان داده شده) طوری نوشته می شد که مثل پرچمی بر فراز دیرك باشد.

۶۵۲۸۴ را بر ۵۹۴، با استفاده از روش گالی، تقسیم کنید. (این مسئله، با حلی به روش بالا، در حساب تریوزد مربوط به سال ۱۴۷۸ ظاهر می شود.)

۱۳۰۸ جمتریا یا آریتموگرافی

چون اغلب دستگاههای شمار باستانی دستگاههای الفبایی بودند، طبیعی بود که به جای حروف يك اسم مقادیر عددی قرار داده شود. این کار منجر به پیدایش شبه دانشی رمزی موسوم به جمتریا یا آریتموگرافی شد، که در بین عبریان قدیم و سایرین بسیار مورد توجه بود، و در قرون وسطی از نو احیا گردید.

(الف) کلمه «amen» [آمین] وقتی که به یونانی نوشته شود به صورت $\alpha\mu\eta\eta$ است. بر این مبنی توضیح دهید که چرا، در بعضی دست نوشته های وابسته به مسیحیت، عدد ۹۹ در پایان دعا ظاهر می شود.

(ب) با استفاده از جمتریا و با استفاده از کلید زبان انگلیسی «ثابت کنید» که در بین سه شخصیت Roosevelt, Stalin و Churchill بزرگترین شخصیت سیاسی بود.

(ج) اسامی زیر را به اسامی «جانور» بدل کنید (همه جز آخری رومی هستند، آخری یونانی است): SILVESTER (ظاهر آلویی شانزدهم)، LUDOVICUS (ظاهر آلویی شانزدهم)، PAULO SECUNDUS (ژربر، که به عنوان پاپ سیلوستر دوم حکومت کرد)؛ PAULO FILII DEI DOCTOR ET REX VICARIUS؛ V. VICE-DEO VICARIUS GENERALIS DEI IN TERRIS LATINUS. GLADSTONE؛ DUX CLERI

(د) صحت آنچه را که در زیر می آید، و در مجموعه یادداشت های دموورگن یافت می شود، تحقیق کنید:

۱. آقای James Dunlop نامی، داشت با يك تفنگ ۶۶ خان به هواخواهان پاپ تیر می انداخت، که دکتر چالمرز به آهستگی به او گفت، «چرا، دنلوب، خودت این کار را می کنی، و به وی کاغذی داد که در آن اعداد واقع در IACOBVS DVNLOPVS

به هم اضافه شده بودند.»

۲. «آقای دیویس تام آفای جوانی به نام St. Claire را سرگرم کار با «عدد جانور» یافت: وی بی‌درنگ حروف $\sigma\tau\kappa\lambda\alpha\rho\epsilon$ را به هم افزود و ۶۶۶ را یافت.»

(۵) جان. ف. بوبالک عبارت زیر را مطابق حروف انگلیسی رمزگشایی کرد:

HOWARD W. EVES, A PROFESSOR OF MATHEMATICS
AND DOCTOR OF PHILOSOPHY.

اکتشافات ترس آور بوبالک را پیدا کنید.

۱۴۰۸ معادلات درجه سوم

(الف) نشان دهید که تبدیل $x = z - a_1/na_0$ معادله درجه n ام

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

را به معادله‌ای بر حسب z که فاقد جمله درجه $(n-1)$ ام است، بدل می‌کند.

(ب) بنا بر (الف) تبدیل $x = z - b/3a$ معادله درجه سوم

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

را به معادله درجه سوم $z^3 + 3Hz + G = 0$ به شکل بدل می‌کند. G و H را بر حسب a, b, c, d بیابید.

(ج) فرمول کاردان - تارتاگلیا

$$x = \sqrt[3]{(n/2) + \sqrt{(n/2)^2 + (m/3)^3}} - \sqrt[3]{-(n/2) + \sqrt{(n/2)^2 + (m/3)^3}}$$

را برای حل معادله درجه سوم $x^3 + mx = n$ استخراج کنید (نگاه کنید به بخش ۸-۸).

(د) $x^3 + 63x = 316$ را، هم با فرمول کاردان-تارتاگلیا و هم با روش ویت،

برای یافتن یک ریشه حل کنید.

(ه) به عنوان مثالی از حالت تحویلناپذیر در معادلات درجه سوم، $x^3 - 63x = 162$

را با فرمول کاردان - تارتاگلیا حل کنید. سپس نشان دهید که

$$(-3 + 2\sqrt{-3})^3 = 81 + 30\sqrt{-3} \quad \text{و} \quad (-3 - 2\sqrt{-3})^3 = 81 - 30\sqrt{-3}$$

بنابر آن ریشه‌ای که با فرمول داده می‌شود -6 است که تغییر ظاهر داده است.

۱۵۰۸ معادلات درجه چهارم

(الف) کاردان معادله درجه چهارم خاص $x^4 + 2x^2 + 2x + 1 = 13x^2$ را با

افزودن $3x^2$ به دو طرف حل کرد. این کار را انجام دهید و معادله را برای یافتن هر

چهار ریشه حل کنید.

(ب) داکوی در سال ۱۵۴۰ مسئله زیر را برای کاردان مطرح کرد: «۱۰ را به سه قسمت چنان تقسیم کنید که این قسمتها تناسب مسلسل تشکیل دهند و حاصلضرب دوتای اول ۶ باشد». اگر سه قسمت با a ، b ، c نشان داده شوند، داریم

$$a + b + c = 10, \quad ac = b^2, \quad ab = 6.$$

نشان دهید که وقتی a و c حذف شوند معادله درجه چهارم

$$b^4 + 6b^2 + 36 = 60b$$

را به دست می آوریم. در تلاش برای حل این مسئله بود که فراری شاگرد کاردان روش کلی خود را پیدا کرد.

(ج) هم باروش فراری و هم با روش ویت، معادله های درجه سوم وابسته به معادله درجه چهارم (ب) را به دست آورید.

۱۶۰۸ نمادگذاری قرن شانزدهم

(الف) با نمادگذاری بومبلی، عبارت

$$\sqrt{[\sqrt{(\sqrt{68+2})} - \sqrt{(\sqrt{68-2})}]}$$

را بنویسید.

(ب) با نمادگذاری کنونی، عبارت زیر را که در آثار بومبلی ظاهر می شود،

بنویسید:

$$Rc \ [4 \ p \ di \ m \ R \ q \ 11] \quad p \ R \ c \ [4 \ m \ di \ m \ R \ q \ 11]$$

(ج) با نمادگذاری ویت

$$A^3 - 3BA^2 + 4CA - 2D.$$

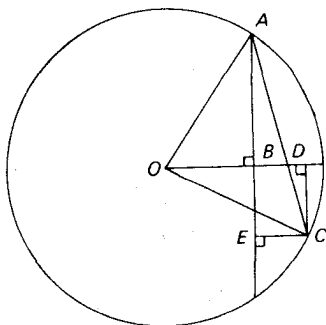
را بنویسید.

۱۷۰۸ مسائلی از ویت

(الف) اتحادهای زیر را که توسط ویت در کاربرد قوانین ریاضی در مثلثها

(۱۵۷۹) داده شده، ثابت کنید:

$$\sin \alpha = \sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha)$$



شکل ۷۲

$$\csc \alpha + \cot \alpha = \cot \frac{\alpha}{2}$$

$$\csc \alpha - \cot \alpha = \tan \frac{\alpha}{2}$$

(ب) $\cos 5\theta$ را به صورت تابعی از $\cos \theta$ بیان کنید.

(ج) با شروع از $x_1 = 200$ ، با روش ویت، یک ریشهٔ $x^2 + 7x = 60750$ را

تقریب کنید.

(د) x_7 را، در روش ویت در تقریبات متوالی، برای معادلهٔ درجهٔ سوم

$x^3 + px^2 + qx = r$ (نگاه کنید به بخش ۸-۹) پیدا کنید.

(ه) ویت فرمول

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

را از نمودار شکل ۷۲ پیدا کرد، که در آن زوایای $x = \angle DOA$ و $y = \angle COD$ به عنوان

زوایای مرکزی یک دایرهٔ واحد ظاهر می‌شوند. جزئیات طرح زیر از اثبات ویت را

کامل کنید:

$$\sin x + \sin y = AB + CD = AE = AC \cos \frac{x-y}{2}$$

$$= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

۱۸۰۸ مسائلی از کلاویوس

مسائل تفریحی زیر از کتاب جبر کلاویوس مربوط به سال ۱۶۰۸ را حل کنید.
(الف) برای تشویق پرسش به مطالعه حساب، پدري موافقت می کند تا برای هر مسئله که به طور صحیح حل شود ۸ سنت بپردازد و وی را به ازای هر جواب نادرست ۵ سنت جریمه نماید. در پایان ۲۶ مسئله کسی به دیگری بدهکار نیست. پسر چند مسئله را درست حل کرده بود؟

(ب) اگر می خواستم به هر گدایی که جلو در خانه من ایستاده است ۷ سنت بپردازم، از پولم ۲۴ سنت باقی می ماند. من برای دادن ۹ سنت به هر کدام ۳۲ سنت کم دارم. چند گدا جلو در خانه هستند، و من چقدر پول دارم؟

(ج) به خدمتکاری قول پرداخت ۱۰۰ دلار و یک ردا به عنوان مزد سالانه او داده می شود. بعد از ۷ ماه وی از خدمت کناره می گیرد و ردا و ۲۰ دلار به عنوان حق خود می گیرد. ارزش ردا چقدر است؟

۱۹۰۸ کمی هندسه

(الف) مقاله های IV و VI جبر بومبلی شامل تعدادی مسائل هندسه است که به طریق جبری حل شده اند. در یکی از مسائل، بومبلی ضلع مربعی محاط در مثلث ABC را می خواهد که در آن $AB = ۱۳$ ، $BC = ۱۴$ ، $CA = ۱۵$ ، به طوری که یک ضلع مربع بر امتداد BC قرار دارد. این مسئله را حل کنید.

(ب) یوهانس ورنر^۱ (۱۵۲۸-۱۴۶۸) اثری به زبان لاتین در ۲۲ مقاله درباره اصول مقاطع مخروطی^۲ نوشت که در سال ۱۵۲۲ در نورنبرگ به چاپ رسید. ورنر در این اثر روش زیر را برای پیدا کردن نقاط یک سهمی، به کمک ستاره و پرگار، با رأس معلوم V ، محور VW ، و ضلع قائم p ارائه می دهد. $VA = p$ را بر امتداد VW جدا کنید. دایره دلخواهی باشعاعی بزرگتر از $p/2$ رسم کنید که مرکز آن بر AW واقع باشد و از A بگذرد. فرض کنید که این دایره، AW را در B و عمود بر AW در V را در C و C' قطع کند. بر روی عمود وارد بر AW در B ، طولهای $VC = BP = BP'$ را جدا کنید. در این صورت P و P' نقاطی از سهمی هستند. با رسم تعدادی کافی از دایره ها، می توان هر تعداد از نقاط سهمی را که مورد نظر باشد، به دست آورد. ترسیم ورنر را ثابت کنید.
(ج) آلبرشت دورر ترسیم تقریبی زیر را برای یک نه ضلعی منتظم محاط در دایره مفروضی به مرکز O ارائه داد. دایره ای هم مرکز با دایره مفروض و به شعاعی سه برابر شعاع آن رسم و فرض کنید که $AC'BA'CB'$ شش ضلعی منتظمی محاط در دایره اخیر باشد. قوسهایی به مرکز B' و C' و به شعاعهای برابر OA که O و A را به هم وصل و دایره اصلی را در G و F قطع می کنند، رسم کنید. در این صورت FG تقریب بسیار خوبی برای

ضلع نه ضلعی منتظم مطلوب است. می توان نشان داد که اختلاف زاویه FOG با ۴۰° کمتر از ۱° است. يك نه ضلعی منتظم را به روش تقریبی دورر در دایره مفروضی محاط کنید.

عنوان مقاله

موجبات پایین بودن سطح ریاضیات در اروپا در بخش اعظم قرون وسطی.	۱/۸
تفریحات ریاضی در قرون وسطی.	۲/۸
بازی عددی ریتوموچیا ^۱ .	۳/۸
تأثیر خارج شدن تولیدو از دست مسلمانان در سال ۱۰۸۵ بر ریاضیات اروپایی.	۴/۸
دنباله همه جا حاضر فیوناچی.	۵/۸
عوامل مهم در گسترش ریاضیات دوره رنسانس.	۶/۸
اهمیت حل معادلات درجه سوم در گسترش اعداد موهومی.	۷/۸
ویت، واقعاً نخستین دانشمند در ریاضیات جدید.	۸/۸
تاریخچه کسره های اعشاری.	۹/۸
آثار ریاضی برجسته چاپ شده در قرن پانزدهم.	۱۰/۸
دلایل اهمیت حسابهای بازرگانی در نیمه دوم قرن پانزدهم.	۱۱/۸
رشنایسترها.	۱۲/۸
لئوناردو داوینچی و ریاضیات.	۱۳/۸
سرگذشت و آثار رابرت رکورد.	۱۴/۸
ماتئوریچی ^۲ (۱۶۱۰-۱۵۵۲)	۱۵/۸
جمتريا.	۱۶/۸
الگوریتمهایی برای ضربهای طولانی.	۱۷/۸
الگوریتمهایی برای تقسیمهای طولانی.	۱۸/۸

کتابنامه

- ARMITAGE, ANGUS, *The World of Copernicus*. New York: The New Library (a Mentor Book), 1947.
- CAJORI, FLORIAN, *A History of Mathematical Notations*. 2 vols. Chicago: Open Court, 1928-29.
- CARDAN, JEROME, *The Book of My Life*. Translated from the Latin by Jean Stoner. New York: Dover, 1963.
- CLAGETT, MARSHALL, *The Science of Mechanics in the Middle Ages*. Madison, Wis.: The University of Wisconsin Press, 1959.

1. Rithmomachia
2. Matteo Ricci

- , *Archimedes in the Middle Ages. The Arabo-Latin Tradition*, vol. 1. Madison, Wis.: The University of Wisconsin Press, 1964.
- COOLIDGE, J. L., *The Mathematics of Great Amateurs*. New York: Oxford University Press, 1949.
- CROSBY, H. L., JR., *Thomas of Bradwardine His Tractatus de Proportionibus: Its Significance for the Development of Mathematical Physics*. Madison, Wis.: The University of Wisconsin Press, 1955.
- CUNNINGTON, SUSAN, *The Story of Arithmetic, A Short History of Its Origin and Development*. London: Swan Sonnenschein, 1904.
- DAVID, F. N., *Games, Gods and Gambling*. New York: Hafner, 1962.
- DAY, M. S., *Scheubel as an Algebraist, Being a Study of Algebra in the Middle of the Sixteenth Century, Together with a Translation of and a Commentary upon an Unpublished Manuscript of Scheubel's Now in the Library of Columbia University*. New York: Teachers College, Columbia University, 1926.
- DE MORGAN, AUGUSTUS, *A Budget of Paradoxes*. 2 vols. New York: Dover, 1954.
- GRANT, EDWARD, ed., *Nicole Oresme: De proportionibus proportionum and Ad pauca respicientes*. Madison, Wis.: The University of Wisconsin Press, 1966.
- HAMBRIDGE, JAY, *Dynamic Symmetry in Composition*. New Haven: Yale University Press, 1923.
- , *Practical Applications of Dynamic Symmetry*. Ed. Mary C. Hambridge. New Haven: Yale University Press, 1932.
- HILL, G. F., *The Development of Arabic Numerals in Europe*. New York: Oxford University Press, 1915.
- HOGGATT, V. E., JR., *Fibonacci and Lucas Numbers*. Boston: Houghton Mifflin, 1969.
- HUGHES, BARNABAS, *Regiomontanus on Triangles*. Madison, Wis.: The University of Wisconsin Press, 1964.
- INFELD, LEOPOLD, *Whom the Gods Love, The Story of Evariste Galois*. New York: McGraw-Hill, 1948.
- JOHNSON, R. A., *Modern Geometry*. Boston: Houghton Mifflin Company, 1929.
- KARPINSKI, L. C., *The History of Arithmetic*. New York: Russell & Russell, 1965.
- KRAITCHIK, MAURICE, *Mathematical Recreations*. New York: W. W. Norton, 1942.
- MESCHKOWSKI, HERBERT, *Ways of Thought of Great Mathematicians*. San Francisco: Holden-Day, 1964.
- MOODY, E. A., and MARSHALL CLAGETT, *The Medieval Science of Weights*. Madison, Wis.: The University of Wisconsin Press, 1952.
- MORLEY, HENRY, *Jerome Cardan, The Life of Girolamo Cardano of Milan, Physician*. 2 vols. London: Chapman & Hall, 1854.
- NICOMACHUS OF GERASA, *Introduction to Arithmetic*. Translated by M. L. D'Ooge, with *Studies in Greek Arithmetic*, by F. E. Robbins and L. C. Karpinski. Ann Arbor, Mich.: University of Michigan Press, 1938.
- NORTHROP, E. P., *Riddles in Mathematics*. Princeton, N.J.: D. Van Nostrand, 1944.
- ORE, OYSTEIN, *Number Theory and Its History*. New York: McGraw-Hill, 1948.
- , *Cardano, The Gambling Scholar*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1953.
- , *Niels Henrik Abel, Mathematician Extraordinary*. Minneapolis: University of Minnesota Press, 1957.
- ORESME, NICOLE, *An Abstract of Nicholas Oréme's Treatise on the Breadths of Forms*. Translated by C. G. Wallis. Annapolis, Md.: St. John's Book Store, 1941.
- SMITH, D. E., *Rara Arithmetica*. Boston: Ginn, 1908.
- , *A Source Book in Mathematics*. New York: McGraw-Hill, 1929.
- , and L. C. KARPINSKI, *The Hindu-Arabic Numerals*. Boston: Ginn, 1911.
- SULLIVAN, J. W. N., *The History of Mathematics in Europe, from the Fall of Greek Science to the Rise of the Conception of Mathematical Rigour*. New York: Oxford University Press, 1925.
- TAYLOR, R. EMMETT, *No Royal Road. Luca Pacioli and His Time*. Chapel Hill, N.C.: University of North Carolina Press, 1942.
- WATERS, W. G., *Jerome Cardan, a Biographical Study*. London: Lawrence & Bullen, 1898.
- WHITE, W. F., *A Scrap-Book of Elementary Mathematics*. Chicago: Open Court, 1927.

- WILSON, CURTIS, *William Heytesbury, Medieval Logic and the Rise of Mathematical Physics*. Madison, Wis.: The University of Wisconsin Press, 1956.
- YATES, R. C., *The Trisection Problem*. Ann Arbor, Mich.: Edwards Bros., 1947.
- ZELLER, SISTER MARY CLAUDIA, *The Development of Trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus*. Ann Arbor, Mich.: University of Michigan, Ph.D. thesis, 1944.

جوابها و راهنماییهایی برای حل مطالعه‌های مسئله‌ای

۱۰۱ (الف) «يك مرد» = ۲۰ (۱۰ انگشت دست به علاوه ۱۰ انگشت پا)، و قس علی هذا.

(ب) اگر شخص به کمک انگشتان دست درحالی که دستش «باز» است به شمارش بپردازد و بعد از هر شمارش انگشتش را تا کند، وقتی به ۵ می‌رسد همه انگشتها تا شده‌اند و دست «به پایان رسیده» یا به اصطلاح «در گذشته است».

(ج) «انگشت قله» انگشت وسط است، که در موقع شمارش با انگشتان، وقتی از انگشت کوچک شروع کنیم، به نشانه ۳ خواهد بود.

(د) در اینجا نامهای عددی از وضعیتهای بدن که برای نمایش اعداد به کار می‌رفت، نشأت گرفته‌اند.

(ه) زن و شوهر از يك تشك استفاده می‌کنند.

(و) این یکی اشاره به ۹ ماه حاملگی دارد.

۳۰۱ (الف) ۲، ۳، ۲۷.

(ب) $۴۵۰۰۸۲ = \mu M \varepsilon M \pi \beta$ ، $۷۲۸۰۳ = \zeta M \beta' \omega \gamma$ ، $۵۷۸۰ = \varepsilon' \psi \pi$

$۰۳۲۵۷۸۸۸ = \tau M \kappa M \varepsilon M \zeta' \omega \pi \eta$

۴۰۱ (د) $۳۶۰ = ۲(۵)^۲ + ۲(۵)^۲ + ۲(۵) = ((()))^{**}$

$۲۵۲ = ۲(۵)^۳ + ۲(۱) = (//$

$۷۸ = ۲(۵)^۲ + ۳(۱) =))//$

$۳۳ = ۱(۵)^۲ + ۱(۵) + ۳(۱) =)'///$

(ه) $۳۶۰ = (* \#)$ ، $۲۵۲ = * = \#$ ، $۷۸ =) \#$ ، $۳۳ = //$

۵۰۱ (الف) توجه کنید که $۱۰ + (۱۰ - a)(۱۰ - b) = [(a - ۵) + (b - ۵)]$

۶۰۱ (ب) کسر اعشاری را در b ضرب کنید، سپس جزء اعشاری این حاصلضرب را در b ضرب کنید و همین‌طور الی آخر ادامه دهید.

$$(ج) \quad (0.3012)_4 = 99/128 = 0.7734375$$

۸۰۱ (الف) اول در مبنای ۱۰، و سپس در مبنای ۸ بیان کنید.

(ب) ۷، ۸، ۹.

(ج) نه، بلی، بلی، نه.

(د) در حالت اول داریم $79 = b^2 + 4b + 2$.

(ه) بانسان دادن ارقام با a, b, c داریم $81c + 9b + a = 49a + 7b + c$ ، که در آن a, b, c کوچکتر از ۷ هستند.

(و) باید داشته باشیم $1 + 3b^2 = 2^2$ و b اعداد صحیح مثبت، و $b > 3$.

۹۰۱ (الف) w را در پایهٔ ثنایی بیان کنید.

۱۰۰۱ (الف) فرض کنید i رقم دهگان و u رقم یکان باشد. به پیروی از دستورالعمل‌ها، تساوی

$$2(5i + 7) + u = (10i + u) + 14$$

را به عنوان نتیجهٔ اعلام شدهٔ نهایی به دست می‌آوریم. اکنون ماهیت حیلۀ روشن می‌شود.

۱۰۲ (الف) فرض کنید n منظم باشد. آنگاه، مثلاً

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &= a_0 + \frac{a_1}{60} + \dots + \frac{a_r}{60^r} \\ &= \frac{a_0 60^r + a_1 60^{r-1} + \dots + a_r}{60^r} \\ &= \frac{m}{60^r}. \end{aligned}$$

از اینجا نتیجه می‌شود $mn = 60^r$ و n نمی‌تواند هیچ عامل اولی جز عوامل اول ۶۰ داشته باشد.

(ه) سه.

۲۰۲ (الف) داریم $2 = (12)^x$ ، و بنابراین $x = (\log 2) / (\log 12)$.

۴۰۲ (الف) داریم $1000 = x^2 + y^2$ ، $100 = 3x - y$.

(د) ۲۰، ۱۲.

(ه) ارتفاع دوزنقه = ۲۴.

(و) ۱۸؛ ۰.

(ز) بلی.

۵۰۲ (ج) ۱۵؛ ۳۱.

(د) اگر عضوهای طرف راست معادلات مفروض را به ترتیب با a و b نشان دهیم،

$$x^1 + a^2 x^4 = b^2 \text{ می آوریم}$$

۶۰۲ (ب) قرار دهید $y = 2x$.(ج) با حذف x و y معادله‌ای درجه سوم بر حسب z به دست می‌آید.(د) معادله درجه سوم $x = y + m$ را که ضریب جمله پیشرو آن یک باشد، اختیارکنید و تبدیل خطی $x = y + m$ را در آن به عمل آورید. m را طوری تعیینکنید که معادله درجه سوم حاصل بر حسب y ، فاقد جمله خطی باشد.

۸۰۲ (ب) عاملی را که مرتباً نصف می‌شود، در پایه ثنایی بیان کنید.

۹۰۲ (ج) p را به نوبت ۱، ۳، ۹ اختیار کنید.(ا) اگر $n = 3a$ ، کسر واحد دیگر $1/2a$ است.(و) اگر $n = 5a$ ، کسر واحد دیگر $1/3a$ است.

(ح) رابطه‌ای را که در (د) داده شده به کار برید.

$$1002 \text{ (الف)} \quad 1/7 = 1/4 + 1/28$$

$$\text{(ب)} \quad 2/97 = 1/49 + 1/4753$$

(ج) کسر مفروض را با a/b نشان دهید که $a < b$ ، و فرض کنید

$$a/b = 1/(x+r/a), \quad 0 < r/a < 1, \quad r < a, \quad b/a = x + r/a$$

$$\text{اما } 1/x > 1/(x+r/a) > 1/(x+1)$$

۱۱۰۲ (ب) بلی.

$$\text{(ج)} \quad 5 \frac{1}{3}$$

$$\text{(د)} \quad (35)^2 / 13 \text{ ذراع.}$$

۱۲۰۲ (الف) منظور احمس از کسر، کسر واحد است. تنها مخمرجهای کسر واحد نوشته شده‌اند.

(ج) فرض کنید که x بزرگترین سهم و d تفاضل مشترک در تصاعد حسابی باشد. دراین صورت $100d = 5x - 10d$ و $11x - 46d = 0$ را به دست می‌آوریم.

$$1302 \text{ (الف)} \quad 256/81, \text{ یا تقریباً } 3.16$$

(ج) مثلث قائم‌الزاویه T_1 را با ساقهای a و b و یک مثلث دلخواه دیگر T_2 را بااضلاع a و b در نظر بگیرید. T_2 را چنان بروی T_1 قرار دهید که یک جفت ازاضلاع برابر برهم منطبق شوند. یا از فرمول $K = (1/2)ab \sin C$ استفاده کنید.(د) قطر DB را رسم و از قسمت (ج) استفاده کنید.

$$\text{(ه)} \quad (a+c)(b+d)/4 = [(ad+bc)/2 + (ab+cd)/2]/2$$

قسمت (د) استفاده کنید.

(ز) این نتیجه درست نیست.

۱۴.۲ (ب) با $\sqrt{m} - \sqrt{n} \geq 0$ شروع کنید.

(ج) هرمی را که هرم ناقص بخشی از آن است کامل کنید و حجم هرم ناقص را به صورت تفاضل بین حجمهای هرم کامل شده و هرم اضافه شده بیان کنید.

۱۵.۲ (الف) ۳، ۴.

(ب) ۴، ۱۰.

۱۶.۲ چهار مثلث قائم الزاویه با ساقهایی به طول ۳ و ۴، همراه با مربع واحد کوچک، مربعی تشکیل می دهند که مساحت آن ۲۵ است. نتیجه می شود که وتر یک مثلث قائم الزاویه با ساقهای ۳ و ۴، برابر ۵ است. چون یک مثلث با سه ضلعش معین می شود، نتیجه می شود که یک مثلث به اضلاع ۳، ۴، ۵ مثلث قائم الزاویه است.

۲.۳ (الف) نشان دهید که $2^{2^m} - 1$ بر $2^m - 1$ قابل قسمت است.

(ب) ۸۱۲۸

(ج) اگر a_1, a_2, \dots, a_n نمایش کلیه مقسوم علیه های N باشد، آنگاه $N/a_1, N/a_2, \dots, N/a_n$ نیز نمایش کلیه مقسوم علیه های N است.

(د) مجموع مقسوم علیه های حقیقی p^n عبارت است از $(p^n - 1)/(p - 1)$.

(ح) (۱) به ازای $n = 7$ داریم

$$2^6(2^7 - 1) = 2^{13} - 2^6 \approx 2^{13} \cdot \log 2^{13} = 13 \log 2 = 4^+.$$

بنابراین، جواب ۴ است.

(ط) زنجیر اجتماعی پنج حلقه ای عبارت است از ۱۲۴۹۶، ۱۴۲۸۸، ۱۵۴۷۲، ۱۴۲۶۴، ۱۴۵۳۶

۳.۳ (الف) ۱، ۶، ۱۵، ۲۸.

(ب) یک عدد مستطیلی به شکل $a(a+1)$ است.

(د) به شکل ۷۳ نگاه کنید.

$$(ه) 2^{n-1}(2^n - 1) = 2^n(2^n - 1)/2$$

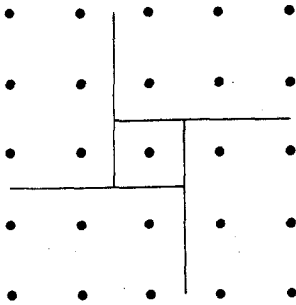
$$(و) b = (4 - m)/2, a = (m - 2)/2$$

$$(ز) b = -3/2, a = 5/2$$

۴.۳ (الف) از این حقیقت که $(a-b)^2 \geq 0$ ، استفاده کنید.

(ج) معادله اول را در b و دومی را در a ضرب و سپس ab/n را حذف کنید.

(ه) یک مکعب ۸ رأس، ۱۲ یال، و ۶ وجه دارد.



شکل ۷۳

(و) قرار دهید $m = a/(b+c)$ و $n = c/(a+b)$. با استفاده از این حقیقت که $b = 2ca/(c+a)$ ، نشان دهید که $2mn/(m+n) = b/(c+a)$.

۶۰۳ (ج) اگر مثلث متساوی الساقین قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع صحیح وجود می‌داشت، در این صورت $\sqrt{2}$ گویا می‌شد.

(د) اگر اعداد صحیح مثبتی مسانند a, b, c ($a \neq 1$) موجود باشند به قسمی که $a^2 + b^2 = c^2$ و $b^2 = ac$ ، آنگاه a, b, c نمی‌توانند نسبت به هم اول باشند، اما اگر یک سه‌تایی فیثاغورسی موجود باشد که در آن یکی از اعداد صحیح واسطه هندسی بین دو عدد دیگر باشد، باید یک سه‌تایی فیثاغورسی اولیه از این نوع موجود باشد.

(و) نشان دهید که اگر $a^2 + (a+1)^2 = c^2$ آنگاه،

$$(3a+2c+1)^2 + (3a+2c+2)^2 = (4a+3c+2)^2.$$

(ز) از قسمت (و) استفاده کنید.

(ح) در نمایش پارامتری سه‌تایی فیثاغورسی اولیه، که در بخش ۲-۶ داده شد، یا u باید زوج باشد یا v ، که از آنجا ساق a مضرب ۴ است. اگر u یا v مضربی از ۳ باشد، آنگاه ساق a مضرب ۳ است. اگر نه u و نه v مضربی از ۳ باشند، آنگاه u به شکل $3m \pm 1$ و v به شکل $3n \pm 1$ است، و نتیجه می‌شود که $v^2 - u^2$ مضرب ۳ است، و بنابراین ساق b مضرب ۳ است. اگر u یا v مضرب ۵ باشد، آنگاه a مضرب ۵ است. اگر نه u و نه v مضرب ۵ باشند، آنگاه u به شکل $5m \pm 1$ یا $5m \pm 2$ و v به شکل $5n \pm 1$ یا $5n \pm 2$ است، اگر $u = 5m \pm 1$ و $v = 5n \pm 1$ یا $u = 5m \pm 2$ و $v = 5n \pm 2$ ، آنگاه $v^2 - u^2$ مضرب ۵ است. اگر $u = 5m \pm 1$ و $v = 5n \pm 2$ یا $u = 5m \pm 2$ و $v = 5n \pm 1$ ، آنگاه $v^2 - u^2$ مضرب ۵ است. نتیجه می‌شود که یا ساق b مضربی از ۵ است یا وتر c مضربی از ۵ است.

(ط) اگر n فرد و بزرگتر از ۲ باشد، $(n^2+1)/2$ ، $(n^2-1)/2$ ، n ، يك سه تایی فیثاغورسی است. اگر n زوج و بزرگتر از ۲ باشد، $(n^2/4+1)$ ، $(n^2/4-1)$ ، n ، يك سه تایی فیثاغورسی است.

(ی) چون $a^2 = (c-b)(c+b)$ ، نتیجه می شود که $b+c$ يك عامل a^2 است. در نتیجه $b < a^2$ و $c < a^2$ ، و عدۀ ترکیبهای چنین اعداد طبیعی b و c متناهی است.

۷۰۳ الف) اگر خط از نقطۀ (a, b) از شبکه مختصات عبور کند، خواهیم داشت $\sqrt{2} = b/a$ که عدد گویایی است.

ج) فرض کنید $\sqrt{p} = a/b$ ، که در آن a و b متباین هستند.

د) فرض کنید $\log_{10} 2 = a/b$ ، که در آن a و b اعداد صحیح هستند. در این صورت باید داشته باشیم $10^a = 2^b$ ، که غیرممکن است.

و) فرض کنید (نگاه کنید به شکل ۷۴) AC و BC نسبت به AP متوافق باشد. نشان دهید که در این صورت DE و DB نیز نسبت به AP متوافق اند، همین طور

الی آخر.

۹۰۳ الف) ab چهارمین جزء تناسب برای a ، b است.

ج) a/b چهارمین جزء تناسب برای a ، b است.

د) \sqrt{a} واسطۀ هندسی بین a و ۱ است.

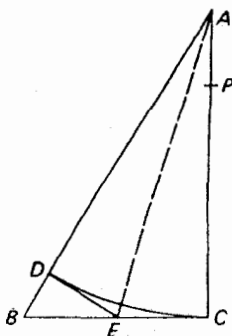
ز) واسطۀ هندسی بین a و na را بسازید.

ح) از این حقیقت که $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab)$ ، استفاده کنید.

ط) از این حقیقت استفاده کنید که

$$a(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^{1/2} = [a(a + a\sqrt{2} + a\sqrt{3})]^{1/2}$$

ی) از این حقیقت که $(abcd)^{1/4} = [(ab)^{1/2}(cd)^{1/2}]^{1/2}$ ، استفاده کنید.



شکل ۷۴

(ک) 60° .۱۰۰۳ الف) $\sqrt{12}$ را مانند ۹.۳ (د) به دست آورید.(ج) اجزاء را با x ، $a-x$ نشان دهید، آنگاه $x(a-x) = x^2 - (a-x)^2$ یا $x^2 + ax - a^2 = 0$.(ه) نشان دهید که $OM + ON = g$ و $(OM)(ON) = h$.(ز) فرض کنید که A نقطه $(2, 0)$ باشد و RS محور x ها را در L و مماس بر دایره در A را در T قطع کند. معادلات زیر را داریم

$$x^2 + y(y-2) = 0: \text{دایره}$$

$$2x + r(y-2) = 0: AR \text{ خط}$$

$$2x + s(y-2) = 0: AS \text{ خط}$$

بنا بر این از $0 = (دایره) - (خط AC) - (خط AR)$ نتیجه زیر حاصل می شود

$$(y-2)[2x(r+s) + rs(y-2) - 4y] = 0$$

که یک زوج خط مار بر محلهای تلاقی دایره با خطهای AR و AS می باشند. نتیجه می شود که از صفر قرار دادن عامل دوم خط RS حاصل می شود. با قرار دادن $y=0$ داریم $OL = rs/(r+s) = h/g$. با قرار دادن $y=2$ داریم $AT = 4/(r+s) = 4/g$.

۱۱۰۴ (ب) ابتدا قطر BD را توسط نقاط F و E به سه قسمت مساوی تقسیم کنید. در این صورت خطوط شکسته AEC و AFC ، شکل را به سه جزء معادل تقسیم می کنند. این اجزاء را طوری تبدیل کنید که شرایط را با رسم خطوطی به موازات AC از E و F بر آورده کنند.

(د) از B خط BD را به موازات MN رسم کنید تا AC را در D قطع کند. آنگاه، اگر مثلث مطلوب $AB'C'$ باشد، AC' واسطه هندسی بین AC و AD است.(ه) فرض کنید ABC مثلث مفروض باشد. خط AB' را رسم کنید تا با AC زاویه رأس مفروض را بسازد و خطی به موازات AC و مرسوم از B را در B' قطع کند. اینک از (د) استفاده کنید.

۱۲۰۴ الف) یک کنج محدب باید حداقل شامل سه وجه باشد، و مجموع زوایای وجوه آن کنج باید کمتر از 360° باشد.

$$(ب) A = 2e^2\sqrt{3}, V = e^3\sqrt{2}/3$$

۱۳۰۴ این مطالعه مسئله ای، پروژه تحقیقی مقدماتی ولی خوبی برای دانشجویان آماده تری است که می توانند به فرمولهای محاسبه سطح چند وجهیهای منظم هم به صورتی که،

مثلاً، در جداول ریاضی استاندهٔ CRC [مرکز تحقیق کامپیوتری] داده شده، رجوع کنند.

۱۴۰۳ (الف) قطعهٔ بزرگتر را با y و قطعهٔ کوچکتر را با x نشان دهید. در این صورت

یا $x^2 + xy - y^2 = 0$ یا $x + y : y = y : x$

یا $(x/y)^2 + x/y - 1 = 0$ یا $x/y = (\sqrt{5} - 1)/2$.

(ب) در شکل ۷۵، مثلثهای متساوی‌الساقین DGC و DAC متشابه‌اند. بنابراین

$$AD : DG = DC : GC$$

$$DB : DG = DG : GB$$

(ج)

$$AG : AH = AG : GB = AB : AG = AB - AG : AG - AH = GB : HG = AH : HG$$

(د) فرض کنید HG در شکل ۷۵ ضلع مفروض باشد. مثلث قائم‌الزاویهٔ PQR را با

ساقهای PR و QR به ترتیب برابر با HG و $HG/2$ رسم کنید. بر امتداد PQ

$QT = QR$ را جدا کنید. در این صورت $PT = GB = GC = HC$ ، والخ.

(ه) فرض کنید که DB در شکل ۷۵ قطر مفروض باشد. مثلث قائم‌الزاویه‌ای مانند

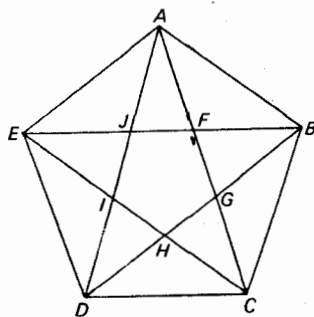
PQR که ساقهای PR و QR آن به ترتیب برابر $DB/2$ و DB باشند، رسم کنید.

بر PQ طول PT را برابر PR جدا کنید در این صورت $TQ = DG = DC$

و قس علی‌هذا.

۱۵۰۳ نگاه کنید به گاردنر ریاضی!

۱۰۴ (ب) فرض کنید A نقطهٔ مفروض و BC قطعه خط مفروض باشد. بنا بر قضیهٔ ۱، مثلث



شکل ۷۵

متساوی الاضلاع ABD را بسازید. دایره $B(C)$ را رسم و فرض کنید امتداد DB این دایره را در G قطع کند. حال دایره $D(G)$ را رسم کنید تا امتداد DA را در L قطع کند. در این صورت AL قطعه خط مطلوب است.
(ج) از قضیه ۲ مقاله I [اصول اقلیدس] استفاده کنید.

۲۰۴ (الف) نگاه کنید به ت. ل. هیث، کتاب دستی ریاضیات یونانی^۱.

(ب) (۱) معادلات سهمیها را می توان به صورت $x^2 = sy$ ، $y^2 = sx$ اختیار کرد که در آن s و s ضلعهای قائم سهمیها هستند. (۲) معادلات سهمی و هذلولی را می توان به صورت $x^2 = sy$ و $xy = 2s^2$ اختیار کرد.

۳۰۴ (الف) فرض کنید که M وسط OA و E مرکز مستطیل $OADB$ باشد. در این صورت، بنا بر قضیه ۶، مقاله II (نگاه کنید به بخش ۳-۶)،
 $(MA')^2 = (MA)^2 + (OA')^2$. با اضافه کردن $(ME)^2$ به طرفین داریم

$$(OA')(AA') + (EA)^2 = (EA')^2.$$

به همین نحو، $(EB')^2 = (EB)^2 + (OB')(BB')$. بنا بر این

$$(OA')(AA') = (OB')(BB').$$

۴۰۴ (الف) داریم $r = P_1 P_2 = AP$ ، $\tan \theta = 2a \sin \theta \tan \theta$ نتیجه می شود که

$$r^2 x = 2ay^2 \text{ یا } r = 2a(y/r)(y/x).$$

(ب) مختصات P را با (x, y) نشان دهید. در این صورت

$$(AQ)^2 / (OA)^2 = y^2 / x^2 = y / (2a - x) = RP / RA = OD / OA = n$$

که در آن R پای عمود وارد از P بر OA است.

(ج) فرض کنید S پای عمود وارد از R بر MN و T وسط RS باشد. دایره $S(T)$ را رسم کنید تا TP را در U قطع کند. در این صورت $SCPU$ یک متوازی الاضلاع است. فرض کنید TP خط MN را در V و مماس بر $S(T)$ در نقطه Q را که متقاطع T است در W قطع می کند. مثلثهای APV و SUV متساوی اند، و $UV = VP$ اکنون به آسانی می توان نشان داد که $TP = UW$. بنا بر این P بر سیسویید $S(T)$ و QW به قطب T قرار دارد.

۵۰۴ (الف) معادله هذلولی، که مجانبهای آن محورهای مختصات باشند، به صورت

$xy = ab$ است که در آن $(b/2, a/2)$ مرکز مستطیل است. معادله دایره محیطی مستطیل $0 = x^2 + y^2 - ax - by$ است. محل تلاقی هذلولی و دایره،

1. T.L.Heath, *A Manual of Greek Mathematics*, pp. 155-570.

غیر از نقطه (b, a) ، نقطه $(\sqrt{a^2b}, \sqrt{ab^2})$ است. اما $\sqrt{a^2b}$ و $\sqrt{ab^2}$ واسطه‌های هندسی بین a و b هستند.

۶۰۴ الف) AB را با a ، AC را با b ، BC را با c و زاویه ADB را با θ نشان دهید. در این صورت، بنا بر دستور سینوسها، که ابتدا در مورد مثلث BCD و سپس مثلث ABD به کار برده می‌شود، $\sin \theta / \sin 120^\circ = a / (b + a)$ ، $\sin 30^\circ / \sin \theta = a / c$ ، در نتیجه $1/\sqrt{3} = \tan 30^\circ = a^2 / c(b + a)$ ، اینک $b^2 = a^2 - c^2$ داریم $c^2 = b^2 - a^2$ ، یا $b^2 = 2a^2$ یا $2a^2(2a + b) = b^2(2a + b)$ ، $b^2 = 2a^2$ را رسم و از این حقیقت استفاده کنید که زاویه خارجی یک مثلث برابر با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور آن است.

۷۰۴ الف) فرض کنید R پای عمود وارد از Q بر محور xy ها باشد و RQ خط c را در S قطع کند. در این صورت $PQ/SQ = OQ/RQ$.
 ب) نگاه کنید به ۶۰۴ الف).
 ج) نگاه کنید به ۶۰۴ ب).
 د) نگاه کنید به ۴۰۴.

۸۰۴ الف) فرض کنید Q و N پای عمودهای وارد از P و M بر OA باشند و QP ، OM را در S قطع کند. چون RP و RQ بر هذلولی قرار دارند، داریم

$$(OQ)(QP) = (ON)(NR)$$

یا

$$NR = (OQ)(NM) / ON.$$

بنابراین $SP = RM$. اما از مثلثهای متشابه OQS و ONM داریم

$$QS = (OQ)(NM) / ON.$$

در نتیجه $SRMP$ مستطیل است. اگر T مرکز این مستطیل باشد،

$$OP = PT = TM.$$

ب) شعاع OA را برابر ۱ اختیار کنید و زاویه AOB را با θ نشان دهید. P را بر کمان AB طوری اختیار کنید که $(\text{زاویه } AOB) = \frac{1}{4} (\text{زاویه } AOP)$ ، و فرض کنید که Q پای عمود وارد از P بر OC باشد. در این صورت

$$AP = 2 \sin(\theta/2) = 2PQ.$$

۹۰۴ الف) از این حقیقت استفاده کنید که مجموع تصاعد هندسی نامتناهی

... + 1/16 - 1/8 + 1/4 - 1/2 + 1/3 است. برای حل اقلیدسی
 مجانبی مسئله تثلیث، نگاه کنید به ماهنامه آمریکایی ریاضی، دسامبر ۱۹۴۵، مسئله
 ۴۱۳۴، صفحات ۵۸۷-۵۸۹.

۱۰۰۴ الف) داریم، (زاویه AOP) $k\pi/2 = \pi/2$ در صورتی که $OM = k(OA) = k$
 بنا بر این، اگر مختصات P را با (x, y) نشان دهیم،

$$y = k = x \tan(k\pi/2) = x \tan(\pi y/2).$$

ج) فرض کنید مربع ساز، OA را در Q قطع کند، در این صورت بنا بر قاعده هوییتال
 در حسابان،

$$OQ = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan \frac{\pi y}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

اکنون به آسانی می توان نشان داد که

$$\widehat{AC} : OA = OA : OQ.$$

۱۱۰۴ الف) ۳۰۱۴۱۴

ب) ۳۰۱۴۱۵۳

ج) $GB/BA = EF/FA = (DE)^2/(DA)^2 = (DE)^2/[(BA)^2 + (BC)^2]$
 بنا بر این ... ۰۰۱۴۱۵۹۲۹ = ۱۶/۱۱۳ = $4^2/(7^2 + 8^2)$ GB = این، به عدد
 ۳۵۵/۱۱۳ به عنوان تقریب π منجر می شود.

۱۳۰۴ الف) فرض کنید $\alpha = \tan^{-1}(1/5)$ و $\beta = \tan^{-1}(1/239)$ آنگاه با نشان دادن
 اینکه $\tan(4\alpha - \beta) = 1$ ، نشان دهید که $4\alpha - \beta = \pi/4$.

ب) دایره ای به شعاع واحد در نظر بگیرید. در این صورت ضلع يك مربع محاطی
 $\sec \theta$ خواهد شد که در آن $\theta = 45^\circ$. مجموع ۲ ضلع يك هشت ضلعی منتظم
 محاطی با $\sec \theta \sec \theta / 2$ داده می شود؛ مجموع ۴ ضلع يك ۱۶ ضلعی منتظم محاطی
 با $\sec \theta \sec \theta / 2 \sec \theta / 4$ داده می شود و الخ. نتیجه می شود که

$$\sec \theta \sec \frac{\theta}{2} \sec \frac{\theta}{4} \dots \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

که طول ربع محیط دایره است. در نتیجه

$$\frac{\gamma}{\pi} = \cos \theta \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{4} \dots$$

حال از این حقیقت استفاده کنید که

$$\cos \theta / 2 = [(1 + \cos \theta) / 2]^{1/2} \text{ و } \cos \theta = \sqrt{2} / 2$$

$$\cos \theta / 4 = [(1 + \cos \theta / 2) / 2]^{1/2}$$

والخ.

(ج) در سری گریگوری قرار دهید $x = \sqrt{1/3}$.

(و) فرض کنید θ معرف $\pi/2n$ باشد. در این صورت $s_{2n} = 2R \sin \theta$

$\cos \theta = s_n / 2s_{2n}$. حال از این حقیقت استفاده کنید که $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$.

(ز) فرض کنید θ معرف $\pi/2n$ باشد. در این صورت $\tan 2\theta = S_n / 2r$

$\tan \theta = S_{2n} / 2r$. حال از این حقیقت استفاده کنید که

$$\tan 2\theta = (2 \tan \theta) / (1 - \tan^2 \theta).$$

(ح) ابتدا نشان دهید که $P_n = 2nR \tan(\pi/n)$ ، $p_n = 2nR \sin(\pi/n)$

(ی) ابتدا نشان دهید که $A_n = nR^2 \tan(\pi/n)$ ، $a_n = nR^2 \sin(\pi/n) \cos(\pi/n)$

$$14.4 \quad AT = 3/2, \text{ arc } AR = \pi/2 \quad (\text{الف})$$

(ب) فرض کنید M پای عمود وارد از P بر OA باشد. در این صورت

$$\tan \phi = \sin \theta / (2 + \cos \theta), \text{ و از آنجا } OM = \cos \theta, PM = \sin \theta$$

(ج) فرض کنید PS دایره را یک بار دیگر در N قطع کند. در این صورت، چون

$$ON < SN, \text{ زاویه } \phi + \epsilon = SON \text{ که در آن } \epsilon > 0. \text{ بنا بر این}$$

$$\text{زاویه } \theta = 3\phi + \epsilon \text{ و } 2\phi + \epsilon = ONP$$

15.4 (الف) سی و دومین رقم اعشاری در بسط π ، صفر است.

15.5 (ج) فرض کنید $a > b$. در این صورت الگوریتم را می‌توان چنین خلاصه کرد:

$$a = q_1 b + r_1 \quad 0 < r_1 < b$$

$$b = q_2 r_1 + r_2 \quad 0 < r_2 < r_1$$

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3 \quad 0 < r_3 < r_2$$

.....

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n \quad 0 < r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n$$

حال، از آخرین مرحله دیده می شود که r_n, r_{n-1} را عادی می کند. از مرحله ماقبل آخر دیده می شود r_n, r_{n-2} را عادی می کند، چون r_n هر دو جمله طرف راست را عادی می کند. به همین نحو r_n, r_{n-3} را عادی می کند، r_n متوالیاً هر r_i و سرانجام a و b را عادی می کند.

از طرف دیگر، از اولین مرحله دیده می شود که هر مرقوم علیه مشترك a و b مانند c, r_1 را عادی می کند. از مرحله دوم دیده می شود که در این صورت c, r_2 را عادی می کند. c متوالیاً هر r_i را عادی می کند. بنا بر این c, r_n را عادی می کند.

(د) با توجه به مرحله ماقبل آخر در الگوریتم، می توانیم r_n را بر حسب r_{n-1} و r_{n-2} بیان کنیم. در این صورت با توجه به مرحله قبلی می توانیم r_n را بر حسب r_{n-2} و r_{n-3} بیان کنیم. با ادامه کار بدین طریق سرانجام r_n را بر حسب a و b به دست می آوریم.

۲۰۵ الف) اگر p, r را عادی نکنند، در این صورت اعداد صحیحی مانند P و Q وجود

$$Ppv + Quv = v \text{ یا } Pp + Qu = 1$$

دارند به طوری که p, r را عادی نکنند، در این صورت اعداد صحیحی مانند P و Q وجود دارند به طوری که $Ppv + Quv = v$ یا $Pp + Qu = 1$ (ب) فرض کنید دو طریق تجزیه به عوامل اول برای عدد صحیح n موجود باشد. اگر p یکی از عوامل اول در اولین تجزیه باشد، بنا بر قسمت الف)، یکی از عوامل تجزیه دوم را عادی کند، یعنی بر یکی از عوامل منطبق باشد.

ج) توجه می کنیم که $(21)(13) = 273$. اعداد صحیح p و q را پیدا کنید (نگاه

کنید به ۱۰۵ (ه)) به قسمی که $13p + 21q = 1$. در این صورت با تقسیم طرفین

بر ۲۷۳ داریم $1/273 = p/21 + q/13$. به طور مشابه اعداد صحیحی مانند

$$r \text{ و } s \text{ پیدا می کنیم به قسمی که } 1/21 = r/3 + s/7$$

۵۰۵ ج) زیرا هر b_i در قسمت (ب) می تواند $a_i + 1$ مقدار داشته باشد.

و) چون a, b, ac را عادی می کند، داریم $b_i \leq a_i + c_i$. همچنین چون a و b متباین

هستند، داریم $a_i = 0$ یا $b_i = 0$. در هر حالت $b_i \leq c_i$.

ح) فرض کنید $\sqrt{2} = a/b$ ، که در آن a و b اعداد صحیح مثبتی هستند. در این صورت،

چون $a^2 = 2b^2$ ، داریم $(1 + 2b_1, 2b_2, \dots) = (2a_1, 2a_2, \dots)$ ، که از آن

نتیجه می شود $1 + 2b_1 = 2a_1$ ، که غیر ممکن است.

۶۰۵ ج) فرض کنید ABC مثلث مفروض باشد، و XY ، که به موازات BC رسم شده، AB

را در X و AC را در Y قطع کند. CX و BY را رسم کنید. نشان دهید که

$$\Delta BXY : \Delta AXY = \Delta CXY : \Delta AXY.$$

اما، بنا بر VI

$$\Delta CXY : \Delta AXY = CY : YA \text{ و } \Delta BXY : \Delta AXY = BX : XA$$

۷۰۵ ج) زیرا (نگاه کنید به ۱۰۵ و) اعداد صحیح مثبتی مانند p و q موجودند به طوری

$$pr - qs = \pm 1 \text{ که}$$

در این صورت تفاضل زاویه مرکزی مقابل به p ضلع s ضلعی و زاویه مرکزی به q ضلع r ضلعی برابر است با

$$p\left(\frac{360^\circ}{s}\right) - q\left(\frac{360^\circ}{r}\right) = (pr - qs)\frac{360^\circ}{rs} = \frac{\pm 360^\circ}{rs}.$$

(و) برای اینکه ببینید اقلیدس چگونه این قضیه را ثابت کرده است، رجوع کنید به هیث، سیزده مقاله اصول اقلیدس^۱. برهان مثلثاتی زیبایی را می توان در قالب زیر فرمولبندی کرد. فرض کنید $u = 18^\circ$. در این صورت $\sin 4u = \cos u$ ، $\cos 4u = \sin u$ نشان دهید که این روابط به ترتیب، رابطه های

$$-8\sin^4 u + 4\sin^2 u = \sin u$$

و

$$8\sin^4 u - 8\sin^2 u + 1 = \sin u$$

را ایجاد می کنند، که از آن رابطه

$$-16\sin^4 u + 12\sin^2 u = 1$$

را به دست می آوریم. حال اگر p و d معرف اضلاع یک پنج ضلعی منظم و یک ده ضلعی منظم محاط در دایره واحد باشند، نشان دهید که $p = 2\sin 2u$ و $d = 2\sin u$ که از آنجا

$$p^2 - d^2 = -16\sin^4 u + 12\sin^2 u = 1$$

که قضیه از آن ثابت می شود.

(ز) نشان دهید که $\tan(180^\circ/17)$ تقریباً برابر است با $3/16$.

$$h_c = b \sin A \quad (ج) \quad 12.5$$

$$h_a = t_a \cos [(B-C)/2] \quad (و)$$

$$4h_a^2 + (b-c)^2 = 4m_a^2 \quad (ز)$$

$$b_a - c_a = 2R \sin(B-C) \quad (ح)$$

(ط) $4R(r_a - r) = (r_a - r)^2 + a^2$ اگر M و N اوساط ضلع BC و قوس

BC باشند، آنگاه $MN = (r_a - r)/2$ ؛ آشکار است که هر دو کمیت از سه کمیت

MN ، a ، R ، سومی را معین می کند.

$$h_a = 2rr_a / (r_a - r) \quad (ی)$$

۱۳.۵ (ب) به مسئله ۳۳۳۶، ماهنامه آمریکایی ریاضی، اوت ۱۹۲۹ نگاه کنید.
 (ج) نگاه کنید به مسئله E1۴۴۷، ماهنامه آمریکایی ریاضی، سپتامبر ۱۹۶۱. جوابی که در این مأخذ داده شده کاربرد به غایت زیبایی از روش داده‌هاست.

۱۴.۵ (ب) فرض کنید M وسط BC باشد. خط شکسته EMA مساحت را به دو نیم می‌کند. از MN ، MN را به موازات AE رسم کنید تا ضلعی از مثلث ABC را در N قطع کند. در این صورت EN خط مطلوب است.

(ج) فرض کنید a, b, h معرف قاعده‌ها و ارتفاع دوزنقه مفروض باشند. فرض کنید c خط موازی مطلوب باشد، فرض کنید p ارتفاع دوزنقه با قاعده‌های a و c و q ارتفاع دوزنقه با قاعده‌های c و b باشد در این صورت داریم

$$(a+c) \cdot p = (a+b)h, p+q = h, (a+c)p = (c+b)q$$

با حذف p, q و حل بر حسب c داریم $c = [(a^2 + b^2) / 2]^{1/2}$ ، که جذر میانگین مربعات a و b است.

۱۰.۶ (الف) $\sec[(29/30)90^\circ] = \sec 87^\circ = 19.11$

۲۰.۶ (د-۱) حجم قطعه با یک قاعده، برابر با حجم قطاع کروی منهای حجم مخروط است. همچنین $a^2 = h(2R - h)$

(د-۲) این قطعه برابر با تفاضل دو قطعه یک قاعده‌ای است، که قاعده‌های آنها، قاعده‌های این قطعه و ارتفاعهای آنها، مثلاً u و v هستند. در این صورت

$$V = \pi R(u^2 - v^2) - \frac{\pi(u^3 - v^3)}{3}$$

$$= \pi h \left[(Ru + Rv) - \frac{u^3 + uv + v^3}{3} \right].$$

اما $u^3 + uv + v^3 = h^3 + 3uv$ و نیز $(2R - u)u = a^2$ و $(2R - v)v = b^2$ بنا بر این

$$V = \pi h \left(\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{u^2 + v^2}{2} - \frac{h^2}{3} - uv \right)$$

$$= \pi h \left(\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{h^2}{3} + uv - \frac{h^2}{3} - uv \right)$$

والخ.

(و) از نقاطی که قطر کره را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند صفحاتی بر آن عمود کنید.

$$۴۰۶ \text{ الف) } (GC)^2 = (TW)^2 = ۴r_1 r_2$$

۵۰۶ الف) CB را تا E امتداد دهید به قسمی که $BE = BA$. ثابت کنید که مثلثهای MBA و MBE همنهشت اند. برای يك برهان مخصوصاً ظریف دیگر، راه حل اول مسئله ۴۶۶ را در گردکس ماتماتیکو (۲۰) ببینید.

۷۰۶ ب) فرض کنید A و B دو نقطه و c يك خط مستقیم باشد. AB را امتداد دهید تا خط c را در S قطع کند. حال T را بر خط c چنان پیدا کنید که $(SA)(SB) = (ST)^2$. در حالت کلی دو جواب وجود دارد.

ج) قرینه نقطه مفروض را نسبت به نیمساز زاویه تشکیل شده از دو خط مفروض پیدا کنید.

د) قرینه کانون F را نسبت به خط m پیدا کنید تا نقطه F' به دست آید. حال، بنا بر قسمت ب)، مراکز دایره‌های مار بر F و F' و مماس بر هادی مفروض را پیدا کنید.

۸۰۶ ب) برای مسئله ۱)، B و A را بر محور x ها و قرینه هر يك را نسبت به مبدأ اختیار کنید.

ج) ۱. فرض کنید نیمسازهای داخلی و خارجی APB ، AB را در M و N قطع کنند. در این صورت M و N بر مکان هندسی مطلوب قرار دارند و MPN يك زاویه قائمه است.

۲. فرض کنید A و B نقاط ثابت، P نقطه متحرك، و O وسط AB باشد. عبارتهایی که برای $(PA)^2$ و $(PB)^2$ از کاربرد قاعده کسینوسها در مثلثهای PAO و PBO حاصل می شود، به هم اضافه کنید.

۹۰۶ الف) فرض کنید $ABCD$ چهارضای محاطی باشد. E را بر قطر AC به قسمی پیدا کنید که $\angle ABE = \angle DBC$. از مثلثهای متشابه ABE و DBC به دست می آوریم $(AB)(DC) = (AE)(BD)$. از مثلثهای متشابه ABD و EBC به دست می آوریم $(AD)(BC) = (EC)(BD)$.

ب-۱) در قسمت الف) AC را به عنوان قطر، $BC = a$ ، و $CD = b$ اختیار کنید.

ب-۲) در قسمت الف) AB را به عنوان قطر، $BD = a$ ، و $BC = b$ اختیار کنید.

ب-۳) در قسمت الف) AC را به عنوان قطر، $BD = t$ را عمود بر AC اختیار کنید.

د-۱) با انتخاب ضلع مثلث برابر با يك واحد، قضیه بطلمیوس را در مورد چهار

ضلعی $PACB$ به کار برید.

(د-۲) با انتخاب ضلع مربع برابر با يك واحد، قضیه بطلمیوس را در مورد چهار ضلعیهای $PBCD$ و $PCDA$ به کار برید.

(د-۳) با انتخاب ضلع پنج ضلعی برابر با يك واحد، قضیه بطلمیوس را در مورد چهار ضلعیهای $PBCD$ ، $PCDA$ ، $PCDE$ به کار برید.

(د-۴) با انتخاب ضلع شش ضلعی برابر با يك واحد، قضیه بطلمیوس را در مورد چهار ضلعیهای $PBCD$ ، $PEFA$ ، $PBCF$ ، $PCFA$ به کار برید.

۱۱۰۶ (ب) فرض کنید که شعاع نوری که از نقطه‌ای مانند A ساطع می‌شود در نقطه M با آئینه برخورد کند و به طرف نقطه‌ای مانند B منعکس شود. اگر B' تصویر B در آئینه باشد، صفحه آئینه عمود منصف BB' است، و باید AMB' يك خط راست باشد.

(ج) قسمت (ب) را به کار برید.

۱۲۰۶ (ب) با استفاده از يك شکل، نشان دهید که $ab = 2rs$ و $a + b = r + s$ و سپس معادلات را توأمأ حل کنید.

۱۳۰۶ (الف) ۱۲۰ سیب.

(ب) ۶۰ ساله.

(ج) ۹۶۰ تالان.

(د) هر خراس n ۴ سیب داشت، $3n$ تارا بخشید، و n تا برایش باقی ماند.

۱۴۰۶ (الف) ۲۵ روز.

(ب) $144/27$ ساعت.

(ج) ۳۰۵ میناطلا، ۹۰۵ مینا مس، ۱۴۵ مینا قلع، و ۵۰۵ مینا آهن.

۱۵۰۶ (الف) ۸۴ ساله.

(ب) ۹، ۱۱، ۴، ۷.

(ج) قرارداد دهید $CD = 3x$ ، $AC = 4x$ ، $AD = 5x$ ، $CB = 3y$. در این صورت

چون $AB/DB = AC/CD$ داریم $AB = 4(y-x)$. بنابر قضیه فیثاغورس

به $7y = 32x$ ، $AD = 35$ ، $AB = 100$ می‌آوریم

$DC = 21$ ، $BD = 75$ ، $AC = 28$

(د) ۱۸۰۶.

۱۶۰۶ (الف) $481 = 20^2 + 9^2 = 16^2 + 15^2$

(ب) داریم $5 = 2^2 + 1^2$ ، $13 = 3^2 + 2^2$ ، $17 = 4^2 + 1^2$ ، با استفاده از اتحادهای

قسمت (الف) داریم

$$(۵)(۱۳) = ۸^۲ + ۱^۲ = ۷^۲ + ۴^۲$$

$$(۵)(۱۷) = ۹^۲ + ۲^۲ = ۷^۲ + ۶^۲$$

$$(۱۳)(۱۷) = ۱۴^۲ + ۵^۲ = ۱۱^۲ + ۱۰^۲.$$

مجددآ، بنا بر اتحادهای قسمت (الف)، داریم

$$۱۱۰۵ = ۳۳^۲ + ۴^۲ = ۳۲^۲ + ۹^۲ = ۳۱^۲ + ۱۲^۲ = ۲۴^۲ + ۲۳^۲$$

۱۷.۶ (الف) از مثلثهای مشابه DFB ، DBO ، $FD/DB = DB/OD$ ، بنا براین

$$FD = (DB)^2 / OD = ۲(AB)(BC) / (AB + BC)$$

(ب) از مثلثهای قائم الزاویه مشابه،

$$\frac{OA}{OB} = \frac{AF}{BD} = \frac{AF}{BE} = \frac{AC}{CB} = \frac{OC - OA}{OB - OC}$$

حال بر حسب OC حل کنید.

(ج) فرض کنید HA ، BC را در R و LM را در S قطع کند، و فرض کنید DL ، LB را در U و MC ، FH را در V قطع کند. در این صورت

$$\square ABDE = \square ABUH = \square BRSL$$

و

$$\square ACFG = \square ACVH = \square RCMS$$

(ه) می توان يك راه حل تحلیلی را به آسانی پیدا کرد در صورتی که به یاد آوریم که مختصات نقطه ای که پاره خط واصل بین (a, b) و (c, d) را به نسبت m/n تقسیم می کند عبارت اند از $(na + mc) / (m + n)$ و $(nb + md) / (m + n)$ و مختصات مرکز ثقل مثلثی که توسط نقاط (a, b) ، (c, d) ، (e, f) معین می شوند عبارت اند از

$$\left(\frac{b+d+f}{۳} \right) \text{ و } \left(\frac{a+c+e}{۳} \right)$$

یافتن يك حل ترکیبی چندان ساده نیست. یکی، منسوب به فوهرمان^۱، در ر. ا. جانسن، هندسه جدیدآ، داده شده است.

$$۱۸.۶ (الف) S = ۴\pi^2 rR, V = ۲\pi^2 r^2 R$$

(ب) مرکز ثقل قوس نیمدایره ای بر شعاع منصف نیمدایره و در فاصله $۲r/\pi$ از

قطر نیمدایره قرار دارد؛ r شعاع نیمدایره است.

(ج) مرکز ثقل مساحت نیمدایره‌ای بر شعاع منصف نیمدایره و به فاصله $4r/3\pi$ از قطر نیمدایره قرار دارد؛ r شعاع نیمدایره است.

۱۹۰۶ (الف) فرض کنید P نقطه (x, y) باشد. در این صورت، از مثلثهای متشابه،
 $x^2/a^2 = (OB)^2/(AB)^2$ و $y^2/b^2 = (OA)^2/(AB)^2$ ، که از آنجا

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(ب) کمپانی کتوفل و اسر^۱ بیضی نگاری بر مبنای ساختمان پرگار بازودار ساخته است.

۲۰۰۶ نگاه کنید به هاورد ایوز، بردسی هندسه^۲. جلد اول، بخش ۲-۳ [متن انگلیسی].

۲۱۰۶ این مطالعه مسئله‌ای همراه با مطالعه‌های مسئله‌های ۱۴۰۲، ۴۰۳، ۱۳۰۴ (ح) و (ط)، و ۱۷۰۶ (الف)، و (ب)، موضوع پروژه تحقیقی مقدماتی با دشواری متوسط را تشکیل می‌دهند.

۱۰۷ (د) $37/4$ دوئو، $17/4$ دوئو، $11/4$ دوئو.

۲۰۷ (الف) ارتفاع = $6r$ چپی، عرض = $2r$ چپی.
 (ب) 12 فوت.

۳۰۷ (الف) ثابت جادویی $= (1 + 2 + 3 + \dots + n^2)/n$.

(ج) اعداد در مربع جادویی را با حروف نمایش دهید و سپس حروف سطر وسط، ستون وسط، و دو قطر را به هم اضافه کنید.
 (د) از قسمت (ج) و برهان خلف استفاده کنید.

۴۰۷ (الف) $x = hd/(2h+d)$

(ب) ۸ ذراع و ۱۰ ذراع.

(ج) ۴۰.

۵۰۷ (الف) ۸ روز.

(ب) ۱۸ انبه.

(ج) ۸ برای یک لیمو، ۵ برای یک سیب جنگلی.

(د) ۳۶ شتر.

۶۰۷ (الف) ۷۲ زنبور عسل.

(ب) ۲۰ ذراع.

(ج) $\frac{۲۲}{۷}$ یوجنه.

(د) $۴۱،۱۰!$

(ه) ۱۰۰ تیر.

۷۰۷ (الف) فرض کنید $\sqrt{a} = b + \sqrt{c}$. در این صورت $\sqrt{c} = (a - b^2 - c) / 2b$.
 (ب) اگر $a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$ ، آنگاه $\sqrt{b} = (c - a) + \sqrt{d}$. حال از قسمت (الف) استفاده کنید.

۸۰۷ (ب) به آسانی نشان داده می‌شود که $x = x_1 + mb$ و $y = y_1 - ma$ یک جواب است. برعکس، فرض کنید x و y یک جواب باشد. در این صورت

$$a(x - x_1) = b(y_1 - y)$$

$$x - x_1 = mb \text{ و } y_1 - y = ma$$

(ج) با تقسیم بر ۷ داریم

$$x + 2y + \frac{2}{7}y = 29 + \frac{6}{7}$$

بنابراین عدد صحیحی مانند z وجود دارد که

$$\frac{2}{7}y + z = \frac{6}{7}$$

یا

$$2y + 7z = 6.$$

می‌توان از طریق تجسس این معادله را حل کرد تا جوابهای $z_1 = 0$ ، $y_1 = 3$ از آن به دست آید. در این صورت $x_1 = 23$. لذا جواب عمومی معادله اصلی، بنا بر قسمت (ب)، عبارت است از

$$x = 23 + 16m, \quad y = 3 - 7m.$$

چون، بنا بر شرط $x > 0$ و $y > 0$ ، باید داشته باشیم $m \geq -1$ و $m \leq 0$. تنها مقادیر قابل قبول برای m عبارت‌اند از 0 و -1 . بنابراین جوابهای زیر را به دست می‌آوریم

$$x = 23, \quad y = 3 \text{ و } x = 7, \quad y = 10$$

یا، نظیر آنچه در ۱۰۵ (و) انجام شد، p و q را طوری پیدا کنید که $7p + 16q = 1$.

در این صورت می‌توانیم $x_1 = 209p$ و $y_1 = 209q$ اختیار کنیم.

(د) چهار جواب موجود است: $x = 124, x = 87, x = 27, x = 50$; $y = 4, y = 13, y = 50, y = 73$.

(ه) فرض کنید که x معرف تعداد پنج ریالیه‌ها و y تعداد بیست ریالیه‌ها باشد. در این صورت باید داشته باشیم $10x + 25y = 500$.

(و) فرض کنید x معرف تعداد میوه‌ها در یک کبه و y تعداد میوه‌هایی باشد که هر مسافر دریافت می‌کند. در این صورت داریم $63x + y = 237$. کوچکترین مقدار قابل قبول برای x ، ۵ است.

۹۰۷ (الف) قطر دایره محیطی مار بر رأسی را که ارتفاع بر آن می‌گذرد، رسم کنید. از مثلثهای متشابه استفاده کنید.

(ب) قسمت (الف) را در مورد مثلثهای DAB و DCB به کار برید.

(ج) نتیجه قسمت (ب) را همراه با رابطه بطلمیوس، یعنی $mn = ac + bd$ به کار برید.

(د) در اینجا $\theta = 0^\circ$ و $\cos \theta = 1$. حال از قسمتهای (ب) و (ج) استفاده کنید.

۱۰۰۷ (ب) چون چهار ضلعی دارای یک دایره محاطی داخلی است، داریم $a + c = b + d = s$. بنا بر این $s - d = b$ و $s - c = a, s - b = d, s - a = c$.

(ج) در شکل ۷۶ داریم

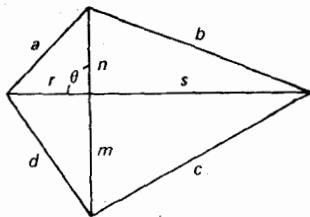
$$a^2 + c^2 = r^2 + s^2 + m^2 + n^2 - 2(rn + sm)\cos \theta$$

$$b^2 + d^2 = r^2 + s^2 + m^2 + n^2 + 2(sn + rm)\cos \theta$$

بنابراین $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ اگر و فقط اگر $\cos \theta = 0, \theta = 90^\circ$.

(د) از قسمت (ج) استفاده کنید.

(ه) اضلاع متوالی چهارضلعی عبارت اند از ۲۵، ۵۲، ۶۰، ۳۹؛ اقطار عبارت اند از



۶۳،۵۶، قطر دایره محیطی ۶۵ است؛ مساحت ۱۷۶۴ است.

۱۱۰۷ (ج) نگاه کنید به ت. ل. هیت، کتاب دستی ریاضیات یونانی، صفحات ۳۴۰-۳۴۲ [متن انگلیسی].

۱۲۰۷ (الف) ما برهان قضیه را برای عدد چهاررقمی N با a, b, c, d به عنوان ارقام هزارگان، صدگان، دهگان، یکان می‌آوریم؛ تعمیم آن آسان است. حال

$$N = 1000a + 100b + 10c + d.$$

فرض کنید $S = a + b + c + d$. در این صورت

$$N = 999a + 99b + 9c + S = 9(111a + 11b + c) + S$$

والخ.

(ب) فرض کنید M و N دو عدد دلخواه با زیادتیهای e و f باشند. در این صورت اعداد صحیحی مانند m و n وجود دارند به قسمی که

$$M = 9m + e, N = 9n + f.$$

اما

$$M + N = 9(m + n) + (e + f)$$

و

$$MN = 9(9mn + ne + mf) + ef$$

والخ.

(د) فرض کنید M عدد مفروض و N عددی باشد که از جایگشت ارقام M حاصل شده است. در این صورت، چون M و N متشکل از ارقام واحدی هستند، (بنا بر قسمت (الف)) دارای زیادتی یکسان e هستند. بنابراین داریم

$$M = 9m + e, N = 9n + e$$

و

$$M - N = 9(m - n).$$

(ه) بنا بر قسمت (د) حاصلضرب نهایی باید بر ۹ قابل قسمت باشد، که از آنجا، بنا بر (الف)، زیادتی برای مجموع ارقام حاصلضرب باید ۰ باشد.
(و) به جای ۹، $(b - 1)$ قرار دهید.

$$1407 \text{ (ب) } x = 203696.$$

$$(ج) \quad x = ۴۹۳۴$$

۱۵۷ (الف) z را طوری پیدا کنید که $b/a = a/z$ ، سپس m را طوری پیدا کنید که $n/z = a/m$

(ج) ریشه‌های مثبت ۴ و ۲ هستند و ریشه منفی ۱ - است.

۱۶۰۷ (الف) ریشه‌های حقیقی طولهای نقاط تلافی خط $e = ay + bx + c$ با منحنی درجه سوم $y = x^3$ هستند.

$$(ب) \quad x = ۱۷۷$$

$$(ج) \quad x = -۳۵۱۰۲۵$$

$$(د) \quad x = -۶، -۲، -۱$$

۱۷۰۷ (الف) دایره دلخواهی مانند Σ بر کره رسم کنید و سه نقطه دلخواه C, B, A را بر محیط آن مشخص کنید. بر روی یک صفحه مثلثی بسازید که با مثلث ABC هم‌نهشت باشد، دایره محیطی آن را پیدا کنید، و سپس شعاع Σ را به دست آورید. مثلث قائم‌الزاویه‌ای بسازید که یک ساق آن شعاع Σ ، و وتر آن وتر قطبی Σ باشد. اکنون یافتن قطر کره آسان است.

(ب) اگر d قطر کره و e یال مکعب محاطی باشد، در این صورت $e = (d\sqrt{3})/۳$ ، و از آنجا e یک سوم ارتفاع مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع $۲d$ است.

(ج) اگر d قطر کره و e یال چهاروجهی منتظم محاطی باشد، در این صورت $e = (d\sqrt{6})/۳$ ، که از آنجا e و وتر مثلث متساوی الساقین قائم‌الزاویه‌ای است که ساق آن برابر با یال مکعب محاطی است. به قسمت (الف) نگاه کنید.

۱۰۸ (الف) فرض کنید x, y, z به ترتیب معرف تعداد مردان، زنان، و کودکان باشند. در این صورت باید داشته باشیم

$$6x + 4y + z = ۲۰۰ \quad \text{و} \quad x + y + z = ۱۰۰$$

یا $5x + 3y = ۱۰۰$. نتیجه می‌شود که y باید مضربی از ۵، مثلاً $5n$ ، باشد. در این صورت $x = ۲۰ - ۳n$ و $z = ۸۰ - ۲n$. به آسانی می‌توان دید که تنها مقادیر قابل قبول برای n عبارت‌اند از ۱، ۲، ۳ و ۵ و ۶. جوابی که در مجموعه‌الکوپین داده شده به $n = ۳$ مربوط است؛ یعنی ۱۱ مرد، ۱۵ زن، ۷۴ کودک.

(ب) به آسانی می‌توان نشان داد که هر پسر باید همان تعداد قمقمه کاملاً خالی دریافت کند که قمقمه پر، جوابهای متعددی موجودند.

(ج) فرض کنید که x معرف تعداد جهشها باشد. در این صورت $9x - 7x = ۱۵۰$.

(د) دو جواب پیدا کنید. برای مسائل دیگری از این قبیل، نگاه کنید به مورس

کرچیک^۱، تفریحات ریاضی^۲، صفحات ۲۱۴-۲۲۲ [متن انگلیسی].

(ه) $5/27$ برای مادر، $15/27$ برای پسر، و $7/27$ برای دختر چطور است؟
 (و) فرض کنید ساقها، وتر، و مساحت مثلث به ترتیب a, b, c, K باشند. $a \geq b$ باشد. در این صورت

$$a^2 + b^2 = c^2, ab = 2K.$$

ازحل این دو معادله بر حسب a و b داریم

$$a = \frac{\sqrt{c^2 + 4K} + \sqrt{c^2 - 4K}}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{c^2 + 4K} - \sqrt{c^2 - 4K}}{2}$$

۳۰۸ (ب-۱) از استقرای ریاضی استفاده کنید. فرض کنید رابطه برای $n = k$ درست باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} u_{k+2}u_k &= (u_{k+1} + u_k)u_k \\ &= u_{k+1}u_k + u_k^2 \\ &= u_{k+1}u_k + u_{k+1}u_{k-1} - (-1)^k \\ &= u_{k+1}(u_k + u_{k-1}) + (-1)^{k+1} \\ &= u_{k+1}^2 + (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

والخ. یا از عبارتی که برای u_n در (ب-۲) داده شده، استفاده کنید.

(ب-۲) قرار دهید $[(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n] / 2^n \sqrt{5}$. v_n نشان دهید که

$$v_n = u_n \quad v_1 = v_2 = 1 \quad v_n + v_{n+1} = v_{n+2}$$

(ب-۳) از عبارتی که برای u در (ب-۲) داده شده، استفاده کنید.

(ب-۴) از رابطه‌ای که در (ب-۱) داده شده، استفاده کنید.

۳۰۸ (الف) $121/17, A$ دناریوس و $167/17, B$ دناریوس دارد.

(ب) ۳۳ روز. این مسئله را می‌توان به‌عنوان مسئله‌ای در داریاسیون [تغییرات] حل کرد.

(ج) فرض کنید x نمایش مقدار دارایی و y مقداری باشد که هر پسر می‌گیرد. در این

صورت پسر اول $(x-1)/7$ ، دومی

$$2 + \frac{x - \left(1 + \frac{x-1}{7}\right) - 2}{7}$$

را می‌گیرد. با برابر قرار دادن اینها، مقادیر $x=36$ ، $y=6$ را پیدا می‌کنیم،
و عده پسران $6=6/6=36/6$ می‌شود.

۴۰۸ (ب) آنچه در زیر می‌آید، اساساً جواب فیبوناتچی به مسئله است. فرض کنید s معرف مبلغ اصلی و $3x$ مبلغ کل بر گردانده شده باشد. قبل از آنکه هر مرد نلث مقدار بر گردانده شده را دریافت کند، سه مرد دارای x ، $s/2 - x$ ، $s/3 - x$ ، $s/6 - x$ بودند. چون اینها مبالغ دارایی بعد از بر گرداندن $1/2$ ، $1/3$ ، $1/6$ آنچه قبلاً برداشته بودند، می‌باشد، مبالغی که اول برداشته بودند عبارت اند از $2(s/2 - x)$ ، $(3/2)(s/3 - x)$ ، $(6/5)(s/6 - x)$ و مجموع این مقادیر s است. بنا بر این $47x = 7s$ و مسئله یک معادله سیاله است. فیبوناتچی $s=47$ و $x=7$ اختیار کرد. بنا بر این مبالغی که این مردان از کپه اصلی برداشته بودند، عبارت اند از ۱، ۱۳، ۳۳.

(ج) ۳۸۲ سیب.

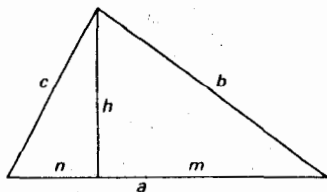
۶۰۸ (الف) زاویه مفروض را با y و زاویه AOF را با x نشان دهید. چون OF برابر و موازی DE است، $OFED$ یک متوازی الاضلاع است. نتیجه می‌شود که $FE=OD=FO$ و مثلث OFE متساوی الساقین است. حال،

$$(OFE \text{ زاویه}) = (ODE \text{ زاویه}) = (OAE \text{ زاویه}) = x.$$

بنا بر این، از جمع کردن ۳ زاویه مثلث OFE داریم $2(90 - y + x) + x = 180$ یا $x = 2y/3$.

(ب) با x و y نامیدن ۲ جزء، داریم $x + y = 10$ و $x^2 + y^2 = 58$. بنا بر این اختیار می‌کنیم $x=7$ ، $y=3$.

۸۰۸ (الف) آنچه در زیر می‌آید، اساساً جوابی است که ریگیمونتانوس داده است. مقادیر (نگاه کنید به شکل ۷۷) $p=b-c$ ، h ، $q=m-n$ به ما داده شده است. اما $b^2 - c^2 = h^2 = a^2 - n^2$ یا $b^2 - m^2 = n^2 - c^2$ یا $b^2 + c = qa/p$ در این صورت



شکل ۷۷

$$b = \frac{qa + p^2}{2p}, \quad m = \frac{a + q}{2}.$$

از قرار دادن این عبارات در رابطه $b^2 - m^2 = h^2$ ، يك معادله درجه دوم بر حسب a به دست می آوریم.
 (ب) آنچه در زیر می آید، جوابی است که توسط رگيومونتانوس داده شده است.
 در اینجا مقادیر (نگاه کنید به شکل ۷۷) $k = c/b \cdot h/a$ به ما داده شده اند. قرار دهید $2x = m - n$ در این صورت

$$2n^2 = (a - 2x)^2, \quad 4c^2 = 4h^2 + (a - 2x)^2$$

$$2m^2 = (a + 2x)^2, \quad 4b^2 = 4h^2 + (a + 2x)^2.$$

بنابراین

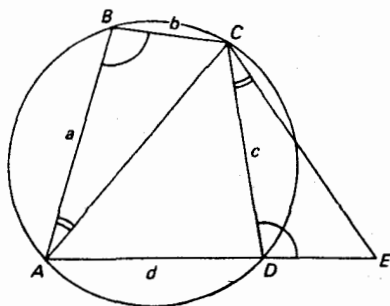
$$k^2 [4h^2 + (a + 2x)^2] = 4h^2 + (a - 2x)^2.$$

از حل این معادله درجه دوم، x و سپس b و c را به دست می آوریم.
 این مثلث را می توان با استفاده از يك دایره آپولونیوس به آسانی ساخت. به مطالعه مسئله ای ۸.۶ (ب) نگاه کنید.

(ج) بر امتداد AD (نگاه کنید به شکل ۷۸) $DE = bc/a$ ، جزء چهارم تناسب نسبت به قطعه های a, b, c ، را اختیار کنید. در این صورت مثلث های DCE و BAC متشابه اند و $CA/CE = a/c$ و بنابراین c در محل تلاقی دو مکان هندسی، يك دایره آپولونیوس و دایره ای به مرکز D و شعاع c واقع است.

۹۰۸ (الف) ۲۹ دلار.

(ب) ۱۸۵/۱۱ روز.



واژه‌نامه

insertion principle	اصل درج
axiom	اصل متعارفی
postulate	اصل موضوع
golden section	بخش طلایی
reductio ad absurdum	برهان خاف
vigesimal	بیست بیستی
ellipsograph	بیضی نگار
compasses	پرگار
trammel	پرگار بازودار
collapsing compasses	پرگار فروریزنده
pentagram	پنتاگرام
quinary	پنج پنجی
envelope	پوش
trisection	تثلیث
quadrature	تربیع
construction	توسیم
stereographic projection	مته ساختمان
duplication	تصویر گنجنگاشتی
	تضعیف

dissection	تقطیع
proportion	تناسب
mediation	تصیّف
triseatrix	ثلث‌ساز
algebra	جبر
syncopated algebra	- تلخیصی
symbolic algebra	- علامتی
rhetorical algebra	- لفظی
solid	جسم صلب
abacus	چرتکه
torus	چنبره
star-polygon	چند ضلعی ستاره‌ای
polyhedron	چندوجهی
spiral curve	خم حلزونی
datum	داده
rod numeral system	دستگاه شمار میله‌ای
binary	دودویی مته: ثنائی
rectification	راستش
ciphered	رمزی
method of exhaustion	روش افنا
sociable chain	زنجیر اجتماعی
salinon	سالینون
straightedge	ستاره
triple	سه‌تایی
versed sine, apothem, sagitta	سهم

trapezium	شبه ذوزنقه
spheroid	شبه کره
conoid	شبه مخروط
sexagesimal	شصتگانی
casting out	طرح کردن
number	عدد
surd number	- اصم
perfect number	- تام
abundant number	- زاید
quasi perfect number	- شبه تام
weird number	- غریب
superabundant number	- فوق زاید
triangular number	- مثلثی
pentagonal number	- مخمسی
square number	- مربعی
oblong number	- مستطیلی
figurate number	- مصور
deficient number	- ناقص
semiperfect number	- نیم تام
finger numbers	- های انگشتی
amicable numbers	- های متحابه
written numbers	- های نوشتاری
spherical zone of one base	عرقچین کروی
rule of false position	قاعده امتحان و تصحیح
rule of double false position	قاعده خطأین
fundamental theorem of arithmetic	قضیه اصلی علم حساب
sector	قطاع
radix fraction	کسر مبنایی
continued fraction	کسر مسلسل
polyhedral angle	کنج

verging	گرایش
evolute	گسترده
irrational	گنگ
rational	گویا
latus rectum	لاتوس رکتوم
limaçon	م: ضالع قائم لیماسون
radix	مینا
commensurable	متوافق
summation	مجموعیابی
magic square	مربع جادویی
quadratrix	م: مربع وقتی مربع ساز
centroid	مرکز ثقل
congruent	مساوی
congruent by subtraction	م: هم‌نهشت مساوی تفریقی
congruent by addition	مساوی جمعی
conic section	مقطع مخروطی
prismatoid	منشور نما
spherical zone	منطقه کروی
regular	منتظم
mean	م: منتظم میانگین
harmonic mean	- توافق، همساز م: همساز
arithmetic mean	- حسابی
contrary mean	- مخالف
centroidal mean	- مرکز ثقلی
weighted mean	- وزندار
heronian mean	- هرونی

simply normal
ratio

نرمال ساده
نسبت

cross ratio

- خاجی

extreme and mean ratio

- ذات وسط و طرفین

golden ratio

- طلایی

abharmonic ratio

- ناتوافقی

directrix

هادی

cuboctahedron

هشت وجهی مکعبی

lune

هلال

isoperimetry

هم‌محیطی

فهرست راهنما

- | | |
|---|--|
| <p>آکادمی افلاطون ۱۴۰</p> <p>آلکون ۲۷، ۲۷۸، ۲۵۲، ۷۰</p> <p>آنتولوژی یونانی ۱۸۰، ۲۰۱</p> <p>آنتیفون ۱۰۶</p> <p>روش افنای - ۱۰۶</p> <p>آناکساگوراس ۱۰۳، ۱۱۴</p> <p>اثوتوکیوس ۱۰۹</p> <p>اثودموس ۶۸، ۱۰۴، ۱۰۶</p> <p>تاریخ هندسه - ۱۸۶</p> <p>ابزارهای اقلیدسی ۱۰۷-۱۰۸، ۱۲۴</p> <p>ابن البنای مراکشی ۷۰</p> <p>ابوالوفای بوزجانی ۲۲۹</p> <p>ابوریحان بیرونی ۱۶۶ ذ، ۲۲۷</p> <p>ابوکامل ۲۲۹</p> <p>اتحادهای جبری ۷۹-۸۲، ۹۵</p> <p>اجسام</p> <p>- افلاطونی ۸۷، ۹۸</p> <p>- منظم ۸۷، ۹۸</p> <p>اراتستن ۱۰۹، ۱۶۹-۱۷۰</p> <p>درباب میانگینهای - ۱۸۲</p> <p>غربال - ۱۷۰</p> <p>میانگین یاب - ۱۲۶</p> <p>ارسطو ۱۰۵</p> | <p>آپولونیوس پرگایی ۱۰۹، ۱۳۷، ۱۷۰-۱۷۴</p> <p>۲۲۹</p> <p>تیماسهای - ۱۷۳، ۱۹۳</p> <p>دایره - ۱۷۴</p> <p>درباب قطع فاصله‌ای - ۱۷۳</p> <p>درباب قطع معین - ۱۷۳</p> <p>درباب قطعهای متناسب - ۱۷۳</p> <p>گرایشهای - ۱۷۳</p> <p>مسئله - ۱۷۳</p> <p>مقاطع مخروطی - ۱۷۰-۱۷۲</p> <p>مکانهای مسطح - ۱۷۳</p> <p>آدلاردبائی ۱۳۹، ۲۵۳</p> <p>آرخوتاس ۱۰۴، ۱۰۹، ۱۲۶، ۱۸۷</p> <p>آریهطه</p> <p>- بزرگ ۱۱۷، ۲۱۸، ۲۲۴</p> <p>- کوچک ۱۱۷</p> <p>آریشمتیک ۶۹</p> <p>آریشمتیکا ۲۰۱</p> <p>آریشموگرافی ۲۶۲، ۲۹۰</p> <p>آریستارخوس ۱۸۸</p> <p>درباب اندازه‌ها و فاصله‌های خورشید</p> <p>وماه - ۱۸۸</p> <p>آشوکا ۲۱، ۲۱۷</p> |
|---|--|

- تام ۷۰
 - تام k - تایی بی ۷۱
 - زاید ۷۰
 - شبه تام ۷۱
 - عملی ۷۱
 - غریب ۷۱
 - فوق زاید ۷۱
 - گنگ ۷۷، ۹۴-۹۵
 - متباین ۷۷
 - متحابه ۷۰
 - مثلثی ۷۱
 - مخمسی ۷۱
 - مربعی ۷۱
 - مصور ۷۱-۷۴
 - منظم ۵۱
 - ناقص ۷۰
 - نیم تام ۷۱
 افلاطون ۷۶، ۷۹، ۸۷، ۱۰۴، ۱۰۵،
 ۱۰۹، ۱۰۸
 آکادمی - ۱۴۰
 تصویر - ۱۰۶
 تیمایوس - ۸۷
 چهارچوبیت - ۱۸۷
 اقلیدس ۷۱، ۷۹، ۸۰، ۸۶، ۸۸، ۸۹،
 ۱۰۲، ۱۳۶، ۱۳۹، ۱۴۹، ۱۶۰
 پسوداریای - ۱۵۲
 پورسیم - ۱۵۲
 داده‌های - ۱۵۱
 درباب تقسیم اشکال - ۱۵۱، ۱۶۰
 رساله نور - ۱۵۲
 فاینومنا - ۱۵۲
 مقاطع مخروطی - ۱۵۲
 مقدمات موسیقی - ۱۵۲
 مکانهای (دوبه‌ای) - ۱۵۲
 آنالوتیکا پوستریورای - ۱۰۵
 مابعدالطبیعه - ۱۴۶
 ارشمیدس ۹۸، ۱۶۳-۱۶۹، ۲۲۹
 اندازه‌گیری دایره - ۱۱۶، ۱۶۵
 تریبوع سهمی ۱۶۵
 حلزونی - ۱۱۴
 درباب اجسام شناور - ۱۶۸، ۱۸۹
 درباب اهرمهای - ۱۶۸
 درباب تعادل درصفحه - ۱۶۸
 در باب شبه مخروطها و شبه کره‌های -
 ۱۶۶
 درباب کره و استوانه - ۱۶۶، ۱۸۸
 درباب مارپیچهای - ۱۶۵
 درباب هفت ضلعی در دایره - ۲۴۳
 روش - ۱۶۹
 لیبراسومپتوروم - ۱۶۶، ۱۹۰
 مسئله گادهای - ۱۶۷
 اریثماطیکی ۶۹ ز
 استاد ۱۸۸
 استوین، س. ۲۷۶
 اسنل، ۱۳۳
 تقریب - ۱۳۳
 اصل توازی اقلیدس ۲۳۰
 اصل درج ۱۲۸
 اصول اقلیدس ۵۳، ۶۷، ۷۱، ۷۹، ۸۰،
 ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۱۰۴، ۱۰۵،
 ۱۰۸، ۱۲۴، ۱۳۶، ۱۳۹، ۱۴۹، ۱۵۰،
 ۱۷۷، ۲۲۴
 اصول
 - متعارفی ۱۴۹، ۱۵۰
 - موضوعه ۱۴۹، ۱۵۰
 اعداد
 - اصم ۲۴۱
 - انگشتی ۲۷، ۲۸

- الغ بیک ۱۱۷، ۲۳۰
 الگوریتم
 - اقلیدسی ۱۴۴، ۱۵۲
 وجه تسمیه - ۲۸۸
 - های جلوزیا و گالی ۲۸۸
 الگوریستها ۲۱
 الممجسطی بطلمیوس ۱۷۷، ۲۲۹
 الیهیم [ابن هیثم] ۲۳۲-۲۳۳
 امتحان حسابدارها ۲۴۴
 انجمن ریاضی هند ۲۱۹
 اوترد، و. ۱۱۹
 اهرام مصر ۴۴
 ای-کینگک [در باب جایگشتها] ۲۳۷
 ایوز، ه.
 بردسی هندسی ۳۱۱
 بتانی ۲۳۳
 بخش طلایی ۹۹
 برو، آ. ۱۱۹
 برهمگوپته ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۳۹
 برهمسپهوتته سدهانته - ۲۱۸
 بطلمیوس ۱۱۶، ۲۲۹
 الممجسطی - ۱۱۶
 بقراط خیوسی ۱۰۳، ۱۰۵، ۱۰۹
 هلالهای - ۱۳۱-۱۳۲
 بوئتیوس ۲۵۲
 بورگی، پ. ۲۶۲
 بوفون، کنت دو ۱۲۰
 بهاسکره ۱۱۷، ۲۱۸، ۲۲۵، ۲۴۰
 سدهانته شیرومنی - ۲۱۹
 لیلادتی - ۲۱۹
 ویجگنیتته - ۲۱۹
 بید ۲۵۲
 مکر، ر. ۲۵۷
- پاپوس ۱۱۲، ۱۷۳، ۱۸۳، ۱۸۶،
 ۲۰۲-۲۰۳
 مجموعه ریاضی - ۱۸۳
 پاپیروس ۱۹
 - رولن ۴۵
 - ریند [احمس] ۴۵
 - مسکو ۶۱
 - هریس ۴۵
 پاچولی، ل. ۲۶۰، ۲۸۶
 مجموعه حساب، هندسه، نسبت و تناسب
 [سوما] - ۲۶۰-۲۶۱
 نسبت الهی - ۲۶۱
 پارادوکس زنون ۱۰۶
 پارمنیدس ۱۰۳
 پاسکال، بلز ۱۲۸
 لیماسون - ۱۲۸
 پالیمپست ۱۹
 پایه
 - های دلخواه ۲۳-۲۵
 - های عددی ۸-۱۰
 پرگار ۸۷
 - اقلیدسی ۱۰۸
 پروکلوس ۶۸، ۱۸۶
 خلاصه انودموسی - ۱۳۹
 شرح مقاله اول اقلیدس - ۶۸، ۱۸۶
 پلیمپتن ۳۲۲، ۴۰-۴۴
 پنتاگرام ۹۹
 پوریسم ۱۵۲
 پونسله، ژ. و. ۲۱
 پی (π)،
 روش احتمالاتی محاسبه - ۱۲۰
 روش کلاسیک محاسبه - ۱۱۶
 گاهشمار - ۱۱۵-۱۲۴
 محاسبه - ۱۳۲-۱۳۳

محاسبه - به وسیله بهاسکره ۱۱۷
 محاسبه - به وسیله تسوچانگچی ۱۱۷
 محاسبه - به وسیله کاشانی ۱۱۷
 محاسبه - به وسیله ویت ۱۱۷
 یادآورهای - ۱۲۱
 پیتیسکوس ۲۷۷

تونستال، ک. ۲۶۳
 تیمایوس لو کریسی ۸۷
 ثابت بن قره ۷۵، ۹۲، ۲۳۲، ۲۴۳
 جبر

- تلخیصی ۱۷۹
 - علامتی ۱۷۹
 - لفظی ۱۷۹
 جمتریا یا آریتموگرافی ۲۹۵
 جمع هندی ۲۲۵
 چرتکه ۱۹، ۲۱۰
 چندضلعی
 - های ستاره‌ای ۲۸۱
 - منظم ۱۴۸-۱۴۹، ۱۵۶-۱۵۷
 چهارضلعیهای برهمگوبته ۲۴۳
 چین کیوشائو ۲۱۳
 حالت تحویلنا پذیر در معادلات درجه سوم
 ۲۷۱
 حساب ترویزو ۲۶۲
 حساب درنه بخش ۲۱۰، ۲۱۳
 خاصیت کانون-هادی ۱۹۲
 خط
 - دموتی ۱۲
 - میخی ۱۲
 - هیراتی ۱۲
 خلاصه انودوموسی ۶۸، ۷۵، ۱۳۹، ۱۴۰
 خوارزمی ۲۳۵، ۲۵۳
 خیمام ۲۲۳
 بخشی از مشکلات در اقلیدس - ۲۳۲
 حل معادلات درجه سوم به توسط -

تثابتتوس ۸۷، ۱۰۴، ۱۰۵
 تابع Φ اویلر ۲۸
 تارتاگلیا ۲۶۷، ۲۷۰-۲۷۱
 رساله عمومی - ۲۸۸
 تالس ۶۵-۶۷، ۶۸، ۸۸، ۱۰۰، ۱۰۲
 قضایای - ۶۵
 مسائل - ۸۹
 تانری، پ. ۶۷
 تانزانت ۲۲۹
 تئودوروس ۱۰۵
 تئون ۱۳۹، ۱۷۶
 تبدیل مساحتها ۸۶، ۹۷
 تبرزین ۱۱۲
 تثلیث زاویه ۱۰۶، ۱۱۰-۱۱۴
 - بدوسیله مقاطع مخروطی ۱۲۹-۱۳۰
 تریبوع دایره ۱۰۶، ۱۱۴-۱۱۵
 تضعیف مکعب ۵۶، ۱۰۶، ۱۰۸-۱۱۰
 - بدوسیله آپولونیوس ۱۲۶
 - بدوسیله اراتستن ۱۲۶
 - توسط آرخوتاس ۱۲۵
 - توسط منایخموس ۱۲۵
 تصویر گنجنگاشتی ۱۹۵
 تقریب اسنل ۱۳۳
 تقویم بابلی ۳۶
 تناسب موسیقی ۹۱
 تنصیف ۵۶
 توزین دوگانه ۲۰۷

۲۴۸-۲۴۷

ریح مرکب ۵۱

رسم بیضی ۲۰۴

رکورد، ر. ۲۶۳

رگیومونانوس ۲۵۶-۲۶۰، ۲۸۵

دقریانگولیس اومنیمودیس - ۲۵۹

رودلف، ک. ۲۶۲

روش

- اضافه کردن مساحتها ۸۲

- افنای آنتیفون ۱۰۶

- جلوزیا ۲۸۸

- گالی، ه ۲۸۸

- مشبکه ۲۸۸

- هندی ۲۲۳

ریز آ. ۲۶۲

زنجیر اجتماعی ۹۰

زون ۱۰۳

پارادوکس - ۱۰۶

ژبر ۲۵۲

ساختمانهای اقلیدسی مجانبی ۱۳۰

ساکروبوسکو ۲۵۷

ساکری، ج. ۲۳۰

سالمینون ۱۹۱، ۱۹۰

ستاره ۸۷

سری گریگوری ۱۱۹

سنخیا ۲۱۹

سیسوئید ۱۰۹، ۱۲۶

سیلواستر، ج. ۵۷

سیمپلیکوس ۱۸۶

سیمسن، ر. ۱۸۵

سینوس

وجه تسمیه - ۲۳۴

داوینچی، ل. ۹۲

ددکینند، ر. ۷۹

دستگاه

- شمار علمی چینی ۲۷

- شمار هندی عربی ۲۱-۲۳

- شمار یونانی القبابی ۲۶

- عددی نوشتاری ۱۰-۱۱

- های شمار رمزی ۱۶

- های شمار قدیمی و فرضی ۲۶

- های شمار موضعی ۱۷-۱۸

- های گروه بندی ساده ۱۲-۱۵

- های گروه بندی ضربی ۱۵-۱۶

دستنویس بخشالی ۲۳۹

دکارت، ر. ۷۰

دمورگن، ا.

مجموعه پارادوکسهای - ۲۹۰

دموکریتوس ۱۰۶

دنباله فیبوناتچی ۲۷۹، ۲۵۶

دورر، آ. ۱۱۳، ۲۸۲

تثلیث تقریبی به وسیله - ۱۱۳

دینوستراتوس ۱۰۴، ۱۱۴

دیوفانتوس ۱۸۰-۱۸۱، ۲۰۰-۲۰۱

آریشمیتیکای - ۱۸۰

پورسیمهای - ۱۸۰

درباره اعداد چندضلعی - ۱۸۰

نماد گذاری - ۱۸۲-۱۸۳

دیوکلس ۱۰۹

سیسوئید - ۱۲۶، ۱۲۷

رائتیکوس، گ. ی. ۲۷۷

راستش تقریبی ۱۳۱

رامانوجان، س. ۲۱۹

- سوریه سدها نته ۲۱۸
سه تایی
- فیثاغورسی ۲۲، ۷۵، ۹۳-۹۴
— فیثاغورسی اولیه ۴۲
سه مسئله مشهور ۱۰۶
- غربال اراتستن ۱۷۰
- فخری ۲۴۴
فرایند سیلوستر ۵۷
فرما، پ. ۱۸۱
فرمول اویلر-دکارت ۹۸
فون اشنات، ک. ۹۷
فیبنوناتچی، ل. ۲۵۴-۲۵۷، ۲۷۹
پراکتیکا جنومتريای - ۲۵۶
دنباله - ۲۵۶
فلوس - ۲۵۶
لیبر آباکی - ۲۵۵-۲۵۶
لیبر کوادراتوروم - ۲۵۶
فیثاغورس ۶۷-۶۹، ۷۵، ۸۷، ۹۱،
۱۰۳
تصویر - ۶۸
قضیه - ۱۵۳-۱۵۴
فیثاغورسیان ۶۷-۶۸، ۷۵، ۷۷، ۷۸،
۷۹، ۸۰، ۸۶، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۵
فیلولائوس ۹۱
- قاعده
- امتحان و تصحیح ۴۸، ۲۳۰
— خطاين ۲۳۰، ۲۴۶
— سه ۲۳۱
— کمیتهای متوسط ۲۸۶
قضیه
- اثباتهای تقطیعی - فیثاغورس ۹۲-۹۳
— استوارت ۱۸۴
— اصلی حساب ۱۴۴
— بطلمیوس ۱۷۷، ۱۹۴
- شبه دوزنقه برهمگوبته ۲۲۵، ۲۴۳
شتیفل، م. ۲۶۴
ادیشمتیکا اینتگرای -
شرح مقاله اول اقلیدس پردکلوس ۱۸۶
شوکه، ن. ۲۶۰، ۲۸۵
سه قسمت دد علم اعداد - ۲۶۰، ۲۸۵
شولوسوترها [قواعد ریسمان] ۲۱۷،
۲۲۴
ضرب هندی ۲۲۱
طرح
- nn ۲۴۴
— نه نه ۲۳۰
— یازده یازده ۲۴۵
- عدد
- اصم ۲۴۴
— اول ۷۱
— تام ۷۱
— جبری ۱۲۱
— گویا ۷۶
— متعالی ۱۲۱
— مرکب ۷۱
— نرمال ۱۲۴
— نرمال ساده ۱۲۴
— علامات + و - ۲۶۱
— علامت رادیکال ۲۶۲

- جبر ۲۳۳
 - فرما ۲۳۲
 - فیثاغورس ۱۵۳-۱۵۴، ۲۳۶
 - منلائوس ۱۷۶، ۲۰۴، ۲۰۵
 - وتر شکسته ۱۹۱
 - کاتالدی، پ. آ. ۲۷۶
 - کاردان، ج. ۲۶۷، ۲۶۹-۲۷۰، ۲۷۱
 - آدس ماگنای - ۲۶۷
 - کاشانی، غیاث‌الدین ۱۱۷، ۲۳۰
 - کانتور، گک. ۱۴۸
 - کپرنیک، ن. ۱۷۷، ۲۷۵، ۲۷۷
 - کپلر، ی. ۸۸، ۹۹، ۱۷۷
 - کتابچه ریاضی سی آیلند ۲۱۲
 - کتانزانت ۴۹
 - کرخی [کرچی] ۲۲۹، ۲۴۳، ۲۴۴
 - فخری - ۲۲۹
 - کسر
 - اعشاری ۲۸
 - مبنایی ۲۸
 - های واحد ۴۷، ۵۶-۵۷
 - کسنوفانس ۱۰۳
 - کلاویوس، ک. ۲۷۵-۲۷۶
 - کمیت
 - های گنگگ ۷۶-۷۹
 - ناموافق ۷۶-۷۹
 - کوبل، ی. ۲۶۲
 - کوزا، ن. ۲۸۱، ۲۸۴
 - کونکوئید ۱۱۱، ۱۲۸
 - گاوس، ف. ۱۴۸
 - گرادوی کرمونایی ۱۴۰، ۲۵۳
 - گزن ۱۹۰
 - گمینوس ۱۸۶
 - نظریه علوم ریاضی - ۱۸۶
 - لاگرانژ ۱۸۱، ۱۸۵
 - لایبنتز، گک. ۱۱۹
 - لوحها
 - ی بابل ۳۵-۳۶
 - ی شوش
 - لوزیستیک ۶۹
 - لیبر آباکی ۴۵، ۲۰۱، ۲۷۹
 - لیلادتی ۲۲۲، ۲۲۳
 - لیماسون پاسکال ۱۲۸
 - مابعدالطبیعه ارسطو ۱۴۶
 - مبنا ۸
 - معسطی ۱۷۷
 - مجموعه ریاضی ۲۰۲، ۲۰۳
 - محاسبات نخستین ۱۸-۲۱
 - مربع‌ساز ۱۱۴، ۱۳۰
 - مربعهای جادویی ۲۳۷
 - مسائل دیوفانتوسی ۱۸۲
 - مسئله
 - آپولونیوس ۱۷۳، ۱۹۳
 - الهازن ۲۳۲
 - پوتنوت ۱۷۷
 - تاج ۱۸۹
 - خیزران شکسته ۲۳۹
 - دلوسی ۱۰۸
 - سوزن ۱۲۰
 - سه نقطه ۱۷۷
 - کاستیون-کرامر ۱۸۵
 - گاوها ۱۶۷
 - گرایش ۱۱۰
 - معادلات سیاله ۱۸۲، ۲۴۱
 - مقاطع مخروطی

- ۱۷۰ - آپولو نیوس
وجه تسمیه - ۱۷۱
مقیاس ۸
- بیست بیستی ۱۰
- پنج پنچی ۱۰
- شصتگانی ۱۰
مناپخموس ۱۰۴، ۱۲۵
منشور نما ۱۹۷-۱۹۸
منطقه کروی ۱۸۹
مناثوس ۱۷۶
اسفایریکای - ۱۷۶
مهاویره ۲۱۸، ۲۲۵، ۲۳۹
میانگین
- پادهمساز ۲۰۵
- توافقی ۹۱
- حسابی ۶۰، ۹۱، ۲۰۵
- مخالف ۹۱
- مرکز ثقلی ۹۱
- وزندار ۲۰۶
- هرونی ۶۰، ۲۰۵
- همساز ۲۰۵
- هندسی ۶۰، ۹۱، ۲۰۵
میل بابلی ۳۸
نپر، ج. ۲۶۶
نسبت
- ذات وسط و طرفین ۹۶، ۹۹
- طلایی ۹۹
- ناتوافقی ۱۸۵
نصیرالدین طوسی ۲۳۰، ۲۴۳، ۲۴۴
نظریه
- ائودوکسوسی تناسب ۱۴۴، ۱۴۶ -
۱۴۸، ۱۵۶
- اعداد ۶۹
- تناسب ۱۴۶
نموراریوس ۲۳
نوگه باوئر، ا. ۳۶، ۴۰، ۵۵، ۶۵
نیکومدس ۱۰۹
کونکوئید - ۱۲۸
نیوتن، آ. ۱۷۳
وان درواردن، ب. ۶۵
واندرهوک ۲۶۱
وراهمیره ۲۱۹
ویت، ف. ۱۱۷، ۱۷۳، ۲۶۸، ۲۷۲
در باب شناسایی و اصلاح معادلات -
۲۷۳
کاربرد قوانین ریاضی در مثلثهای -
۲۷۳، ۲۹۲
متمم هندسه - ۲۷۳
مدخل فنون تحلیل - ۲۷۳
هرودین ۱۳ ذ.
هرون ۶۰، ۱۷۸-۱۷۹، ۱۹۶، ۲۴۳
دیوپترای - ۱۷۹
روش - دریافتن جذر اعداد ۱۷۸
کاتوپتریکای - ۱۷۹، ۱۹۶
متریکای - ۱۷۸، ۱۹۶
هشت وجهی مکعبی ۹۸
هلالهای بقرات ۱۳۱-۱۳۲
همیلتن، و. ر. ۱۶۵
هو پاتیا ۱۸۶
هورینگنس، ک. ۱۹۴
هیپارخوس ۱۷۴-۱۷۵
جدول دترهای - ۱۷۵
هیپسیکلس ۱۷۵
هیپاس الیسی ۱۱۴
مربع ساز - ۱۳۰

یونان ۲۸
یوردانوس ۲۸۱، ۲۸۲
یامبلیخوس ۷۵
یوهان مولر ← رگیومونتانوس

هیث ت.ل. ۳۱۱
هیلبرت، د. ۶۷
یانگه هوی ۲۱۳