ج. ف. سیمونز

آشنایی با

توپولوژی و آنالیز نوین

ترجمهٔ اسدالله نیکنام

آشنایی با

توپولوژی و آنالیز نوین

ج. ف. سیمونز

ترجمهٔ اسدالله نیکنام

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست

عنوان	صفحه

پیشگفتار مؤلف

اکنون مدتی است که توپولوژی موقعیت خود را به عنوان یکی از مبانی تعلیم ریاضیات محض تثبیت کرده است. ایده‌ها و روشهای توپولوژی بخشهای وسیعی از هندسه وآنالیز را آنچنان دگرگون کرده که تشخیص آنها تقریباً ناممکن شده است. توپولوژی در پیشرفت جبر مجرد نیز بسیار مؤثر بوده است. دروضع کنونی برشخصی که لااقل به مبانی توپولوژی آشنایی ندارد، راه مطالعهٔ قسمت اعظم ریاضیات محض نوین بسته است.

مباحث پهنهٔ وسیع توپولوژی بسیارند، موضوعات زیر فقط چندتایی از آنها هستند: نظریهٔ همولوژی و کوهومولوژی همبافتها و فضاهای کلیتر با نظریهٔ بعد؛ نظریهٔ چند‌گوناهای مشتقپذیر و ریمانی و گروههای لی[1]؛ نظریهٔ منحنی‌های پیوسته؛ نظریهٔ فضاهای باناخ[2] و هیلبرت[3] و عملگرهای آنها، و نظریه جبرهای باناخ؛ وآنالیز همساز مجرد روی گروههای فشردهٔ موضعی. هر یک از این موضوعات تقریباً با معلومات بنیادی مشترکی آغاز می‌شود و هر موضوع روشهای خود را در پرداختن به مسائل مختص به خود، گسترش می‌دهد. هدف قسمت اول این کتاب آن است که این «زیربنا»ی توپولوژی بنیادی را در دسترس دانشجویان قرار دهد؛ و بالاخص این مطالب را، دور از تکلفات و تصنعاتی که بهترین جا برای آنها مجلات تحقیقی است، در کلیتی که اقتضای ریاضیات نوین است عرضه کند.

فضای توپولوژیک را می‌توان مجموعه‌ای تصور کرد که ازآن کلیهٔ ساختمانهایی که به پیوستگی توابع تعریف شده برآن مربوط نیستند، حذف شده‌اند. از اینرو قسمت اول، با بحثی غیر رسمی (ولی کاملاً جامع) از مجموعه‌ها و توابع شروع می‌شود. برخی از نویسندگان طوری با نظریهٔ فضاهای متریک برخورد می‌کنند که گویی صرفاً بخشی ازنظریهٔ عمومی فضاهای توپولوژیک است. بی‌شک این رویه ازنظرمنطقی صحیح است، اما به‌نظر من رابطهٔ طبیعی موجودمیان این مباحث را، یعنی این‌را که فضاهای متریک القاکنندهٔ نظریهٔ عمومی‌تر می‌باشند، برهم‌می‌زند. بنابراین مافضاهای متریک را بطورنسبتاً کامل درفصل ۲

1. Lie　2. Banach　3. Hilbert

مـورد بحث قـرار داده‌ایـم و فضاهـای توپولوژیک را در فصل ۳ آورده‌ایـم. چهار فصل باقیماندهٔ قسمت اول کتاب بـه اقسام مختلف فضاهای توپولوژیکی کـه از حیث کاربـرد از اهمیت خاصی برخوردارند، و به توابع پیوسته‌ای که این فضاها به همراه دارند، اختصاص داده شده‌اند.

لازم به گفتن نیست که یک جنبهٔ این نوع ریاضیات دقت منطقی آن است. به‌هرحال تعدادکثیری از نویسندگان از این بابت راضی‌اند و کمتر تلاش می‌کنند خواننده را درحفظ جهت خود درگیرودار جزئیات یاری کنند. یکی ازویژگیهای اصلی این کتاب توجهی است که به انگیزهٔ مفاهیم مـورد بحث مبذول شده است. در هر موقع مناسب من سعی کرده‌ام که مفاهیم شهودی ازآنچه روی می‌دهد را روشن کنم وهرجا امکانپذیر بوده از تصاویر استفاده شده است تا به‌شم ومهارت خواننده دربه‌کاربردن قوهٔ ذهنی برای تجسم مفاهیم مجرد کمک نماید. همچنین هر فصل با یک مقدمهٔ مختصر شروع شده که منظور اصلی‌آن فصل را بطور کلی شرح می‌دهد. تدریس توپولوژی در دورهٔ لیسانس‌کالج و دانشگاههای ما درحال‌توسعه است، و من امیدوارم این ویژگیهای کتاب، کـه قالب خشن تعاریف، قضایا و برهانهـا را نرمتر می‌کنـد ، موجب شود که خواندن‌آن‌آسان و برای تدریس مناسب باشد.

ازنظر تاریخی، توپولوژی دردو مسیر توسعه یافته است. در نظریه همولوژی، نظریه بعد و مطالعهٔ چند گوناها، انگیزهٔ اصلی ازهندسه ناشی شده است. دراین شاخه‌ها، فضاهای توپولوژیک بصورت مفاهیم هندسی تعمیم یافته در مد نظر می‌باشد، و در اینجا تأکید روی ساختمانهـای خـود فضاست. در مسیر دیگـر، انگیزهٔ اصلـی آنـالیز بـوده است. توابع پیوسته دراینجا موضوع جالب اصلی است وفضاهای توپولوژیکی فقط به‌عنوان حامل چنین توابعی و به‌عنوان حوزه‌ای کـه روی آن مـی‌توان از توابع انتگرال گرفت، درنظـر گرفته می‌شوند. این ایده‌ها طبیعتاً به‌نظریهٔ باناخ وفضاهای هیلبرت و جبرهای باناخ؛ نظریهٔ نوین انتگرال‌گیری، وآنالیز همساز مجرد بر گروههای فشردهٔ موضعی، منجر می‌شوند.

درقسمت اول این‌کتاب، من سعی کرده‌ام که بین این دونقطهٔ نظر توازن برقرارباشد. این قسمت برای یک درس پـایهٔ نیمسال مناسب است؛ اکثر موضوعات مورد بحث در این قسمت تقریباً برای ادامهٔ مطالعه در هرجهتی، مورد نیازهستند. اگر معلم مایل باشد که‌نیمسال دوم را برای برخی گسترش‌ها وکاربردهای توپولوژی اختصاص دهد، امکـانـات زیادی در اختیار دارد. اگر تمایل بـه کاربردهایی درآنالیز نوین دارد، می‌تواند قسمت دوم کتاب را ادامه دهد و شاید بحث مختصری از اندازه و انتگرال را بـه منظور بیان صورت کلی قضیهٔ نمایش ریس[1] به‌آن بیفزاید؛ یا اگرعلاقهٔ اومتمایل به جنبهٔ هندسی توپولوژی باشد، می‌تواند به یکی از کتابهای بسیار خوبی که در این موضوعها نوشته شده است روی‌آورد.

معلمی که قسمت دوم را برای ادامهٔ تدریس انتخاب می‌کند با سؤالـی روبرو می‌شود که تنها اومی‌تواند پاسخگو باشد. آیا دانشجویانش بقدرکافی به‌جبر‌آشنا هستند؟ طرح این سؤال نـاشی از ایـن است کـه فصول ۹ تا ۱۱ به‌همان اندازه که بـه‌جبر مربوط هستند در ارتباط با توپولوژی وآنالیز می‌باشند. اگر دانشجویانش هیچ‌آشنایی به‌جبر نوین ندارند

1. Riesz

یا آشنایی اندکی به‌آن دارند، مباحثه‌ای دقیق و عمیق از فصل ۸ ادامهٔ بحث را بدون اشکال میسر می‌سازد. اگر دانشجویانش معلومات خوبی در این زمینه دارند، بیان سریع رئوس مطالب فصل ۸ کافی است. عقیدهٔ شخصی من این است که تعلیم ریاضیات مجرد باید در سال دوم یا سوم با یک درس جبر نوین آغاز شود و درس توپولوژی فقط به دانشجویانی داده شود که در خلال درس جبر آشنایی مختصری با روشهای مجرد کسب کرده‌اند.

قسمت سوم برای مطالعهٔ شخصی دانشجویان ممتازی که در زمینهٔ آنالیز مختلط معلومات کافی دارند، در نظر گرفته شده است. هدف اصلی این قسمت یکی کردن قسمتهای اول و دوم در یک قالب اندیشه، در راستای آخرین بخش فصل ۱۱ است.

به طور کلی، کتاب حاضر مقدمه‌ای است بر کتابهای خیلی پیشرفتهٔ ریکارت [۳۴]، لومیس [۲۷] و نی‌مارک [۳۲] و بیشتر موضوعات آن‌را می‌توان (به صورتی مختلف و با کاربردهای بیشمار درآنالیز) درکتابهای جامع دایرةالمعارفی دانفورد وشوارتس[۸] و هیل وفیلیپس [۲۰] یافت[۱]. منظوراین بوده‌استکه کتاب مقدماتی باشد بدین معنی که دانشجویان خوب تعلیم یافتهٔ دورهٔ لیسانس از عهدهٔ فهم‌آن برآیند، اما کتابهایی که نامبرده شد چنین نیستند. این کتاب پیشنیاز چندانی ندارد. در فصل ۱۱ بعضی مطالب در مورد دترمینان بدون اثبات به کار برده شده است و فصل ۱۲ بر قضیهٔ لیوویل و بسط لوران از آنالیز مختلط بسیار تکیه می‌کند. گذشته از این استثناها، کتاب اساساً خودکفاست.

به‌نظر من می‌توان ریاضی محض را به دونوع متمایز تقسیم کرد. در نوع اول ــ که متأسفانه درحال حاضر از مدنظر افتاده است ــ توجه به‌توابع وقضایای معینی متمرکز می‌شود که مفهوم و تاریخی غنی دارند؛ مانند تابع گاما و قضیهٔ عدد اول، یا مطالبی که خود جالب‌اند، مانند فرمول شگفت‌انگیز اویلر

$$۱ + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۹} + \dots = \frac{\pi^۲}{۶}$$

نوع دوم، اصولاً به صورت و ساختمان مربوط است. کتاب حاضر متعلق به این نوع است، زیرا اهم موضوع‌آن را می‌توان دردو کلمهٔ پیوستگی و خطی بودن بیان کرد، و هدف این کتاب روشن کردن مفهوم این دو کلمه و ارتباط آنها با یکدیگر است. این نوع ریاضی خیلی به‌ندرت نتایج بزرگ و به‌خاطرسپردنی همچون قضیهٔ عدد اول وفرمول اویلر، به‌دست می‌دهد. به‌عکس، قضایای آن عموماً اجزای کوچکی از یک‌کل خیلی بزرگتر هستند و معنی اصلیشان از محلی که در آن کل قرار دارند، به‌دست می‌آید. به‌عقیدهٔ من برای اینکه این نوع قالب ریاضی مقبول نظر باشد، باید همانند یک ساختمان خوب معماری از کیفیتهای زیبایی برخوردار باشد. باید زیربنای محکمی داشته باشد، دیوارها و ستونهایش به‌طور استوار و صحیح کار گذاشته شده باشند، هر قسمت با قسمت های دیگر ارتباط بامعنایی داشته باشد و برج و باروهای آن انسان را به هیجان آورد. امیدوارم این کتاب بتواند در شناخت بیشتر این مفاهیم ریاضی و ارج نهادن به‌آنها سهیم باشد.

جرج ف. سیمونز

۱. اعداد داخل کروشه به‌کتب مندرج در فهرست منابع ارجاع می‌دهند.

تذکری به خواننده

دوموضوع احتیاج به‌تفسیر خاص دارد: مسائل وبرهانها.

بیشتر مسائل نتایج وگسترشهای قضایایی هستند که درمتن کتاب اثبات شده‌اند و به این مسائل آزادانه درتمام مراحل بعدیکتاب اشاره شده است. به‌طورکلی، اینها نقش پلی را ایفا می‌کنند که میان ایده‌های بحث شده وتعمیم‌هایی که داده خواهد شد، قراردارد. به خواننده اکیداً توصیه می‌شود که به‌هرمسئله که می‌رسد بر آن مسلط شود.

درفصول‌اولیه، به‌منظورهموارکردن راه‌برای‌مبتدی، برهانها باجزئیات‌قابل‌ملاحظه‌ای عرضه شده‌اند. به همان اندازه‌که اساس‌کار ما درفصول متوالی آشکارتر می‌شود وخواننده تجربهٔ تعقیب‌استدلالهای ریاضی مجرددرا کسب می‌کند، برهانها خلاصه‌ترمی‌شوند وتفاصیل جزئی بیشتر وبیشتر به‌عهدهٔ خواننده گذاشته می‌شودکه خود آنهارا تکمیل کند. دانشجوی جدی‌خود می‌آموزدکه درجستجوی شکافها دربرهانها برآید، وبایدآنهارا به‌عنوان دعوتهای ضمنی به‌کمی‌فکرکردن درنظر بگیرد. جملاتی‌مانند «به‌سادگی دیده‌می‌شود»، «به‌سادگی می‌توان نشان داد»، «بدیهی است که ...»، «واضح است که...» و امثال آنها، همیشه به‌عنوان علایم هشدار دهنده به‌کار برده می‌شوند که حضور ناگفته‌ای را تذکر می‌دهد، وخواننده باید با مشاهدهٔ این علایم برای تفکر آماده شود.

یک اصل اساسی درمطالعهٔ ریاضیات که خیلی به‌ندرت روی آن تأکید می‌شود، این است که یک برهان واقعاً فهمیده نشده است مگر اینکه به مرحله‌ای رسیده باشد که درک کلی آن حاصل وبه‌صورت یک‌ایده دیده‌شود. فهم جزء به‌جزء استدلالها مرحلهٔ اول‌است وبرای رسیدن به‌مقصود، مراحل به‌مراتب بیشتری باید طی شود. یک برهان باید جویده‌شود، از گلو پایین رود وهضم گردد، واین روند جذب باید آنقدر ادامه یابد تا به عنوان درکی کامل در الگوی فکر واندیشه قرارگیرد.

فصل اول

مجموعه و تابع

گاهی اوقات اظهار می‌شود که ریاضیات یعنی مطالعهٔ مجموعه و توابع. البته این طرز تلقی ساده‌نگرانه است، ولی تا آنجا که در حد کلمات قصار است، به حقیقت نزدیک است.

پرداختن به‌مجموعه‌ها و توابع به‌دوطریق ممکن است. یک‌راه درژرفای منطق، فلسفه ومبانی ریاضیات فرومی‌رود. راه دیگر به‌سطوح بالای خود ریاضی صعود می‌کند. امروزه، این مفاهیم تقریباً درتمام ریاضیات محض در این سطوح اجتناب‌ناپذیر است. لازم به تذکر نیست که مامسیر دوم را تعقیب می‌کنیم. ما به‌مجموعه‌ها و توابع به‌صورت ابزار اندیشیدن می‌نگریم و هدف ما در این فصل این است که این ابزار را به‌آن حد وسعت دهیم که به‌قدر کافی قادر به‌رفع نیازمان در بقیهٔ کتاب باشد.

خواننده، ضمن مطالعهٔ کتاب درک خواهد کردکه کلمات مجموعه وتابع آن‌طوری‌که به‌نظرمی‌رسد ساده نیستند. این کلمات به‌تعبیری ساده‌اند، اما واژه‌های بسیار نیرومندی هستند و سادگی آنها پس ازطی مراحل پیچیدگی حاصل شده است. مثل بذر که ظاهری ساده دارد اما ظرفیت رشد آن زیاد وپیچیده است.

۱. مجموعه وشمول مجموعه

ما در بررسی خودمان از مجموعه‌ها بیان ساده‌ای به‌کار برده فرض می‌کنیم که مفاهیم عضوومجموعه‌ای از اعضاء به‌وضوح معلوم است. منظورما ازعضو، نوعی شیء یا ذات است مثل عددی صحیح و مثبت، نقطه‌ای روی خط اعداد حقیقی (= عددی حقیقی)، یا نقطه‌ای روی صفحهٔ مختلط (= عددی مختلط). مجموعه، توده یادسته‌ای است ازچنین اعضایی که با هم به صورت یک کل درنظر گرفته شده باشند. اینها چند نمونه از مجموعه‌ها هستند: مجموعهٔ تمام‌اعداد صحیح مثبت وزوج، مجموعهٔ تمام نقاط‌گویا روی‌خط‌حقیقی، ومجموعهٔ تمام‌نقاط صفحهٔ مختلط‌که فاصله‌آنها ازمبدأ برابر یک است (= دایرهٔ واحددرصفحه). کلمهٔ

رده را منحصراً به‌معنی مجموعه‌ای از مجموعه‌ها بکارمی بریم. برای نمونه می‌توان ردهٔ همهٔ دوایر صفحه را ذکرکرد (اگرهردایره به‌صورت مجموعه‌ای ازنقاط درنظرگرفته شده باشد). ازلحاظ کارما مفید است که به‌این سلسلهٔ مراتب، یکی دیگرهم اضافه‌کنیم وخانواده را به معنی مجموعه‌ای از رده‌ها به‌کاربریم. یک تذکردیگر: استعمال کلمات عضو، مجموعه، رده وخانواده نباید کاملا ثابت درنظر گرفته شود، درواقع ما برای اظهار طرز تلقی خودمان از اشیاء ودستگاههای ریاضی موردمطالعه، این‌کلمات را به‌صورتی انعطاف‌پذیراستعمال می‌کنیم. برای نمونه، کاملاً معقول است که دایره را نه به‌عنوان مجموعه‌ای ازنقاط، بلکه به‌عنوان موجودی واحد، درنظربگیریم، تابتوانیم بعداً ازمجموعهٔ همهٔ دایره‌های صفحه صحبت‌کنیم.

برای معرفی مجموعهٔ خاص دوعلامت استاندارد وجود دارد. مواقعی‌که عملی باشد، می‌توان اعضای مجموعه را بین‌دونشان { } فهرست‌کرد. مثلاً $\{۱, ۲, ۳\}$ نمایش مجموعه‌ای است که از اولین سه عدد صحیح مثبت تشکیل شده است، $\{۱, i, -۱, -i\}$ مجموعهٔ ریشه‌های‌چهارم واحد است، و $\{\pm ۱, \pm ۳, \pm ۵, \ldots\}$ مجموعهٔ تمام اعداد فرد است. این روش مشخص کردن مجموعه، با فهرست کردن اعضا، در خیلی موارد عملی نیست. در چنین مواردی ما مجبوریم به روش دوم، که استفاده از خاصیت یا صفتی است که اعضای مجموعه مورد بحث‌را مشخص می‌کند، متوسل شویم. اگر P نمایانگر خاصیتی باشد،آنگاه مجموعهٔ تمام xهایی راکه برای آنها خاصیت P بامعنی ودرست است به $\{x:P\}$ نمایش‌می‌دهیم. مثلاً عبارت

$$\{x : \text{حقیقی و اصم است } x\}$$

که مجموعهٔ تمام xهایی که x حقیقی و اصم است خوانده می‌شود، نمایانگر مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی است که نمی‌توان آنها را به‌صورت خارج قسمت دوعدد صحیح نوشت. مجموعهٔ موردبحث شامل تمام اعضایی است (نه چیزدیگری)که خاصیت بیان شده را دارا۔ هستند. سه مجموعه‌ای را که در آغاز این پاراگراف شرح داده شد می‌توان به صورتهای ذیل نوشت

$$\{۱, ۲, ۳\} = \{n : \text{عدد صحیح است } n \text{ و } ۰ < n < ۴\}$$
$$\{۱, i, -۱, -i\} = \{z : \text{عدد مختلط است } z \text{ و } z^۴ = ۱\}$$
$$\{\pm ۱, \pm ۳, \pm ۵, \ldots\} = \{n : \text{عدد صحیح فرد است } n\}$$

ما اغلب نمادها را مختصر می‌کنیم. مثلاً، دو مجموعهٔ آخر را می‌توان بی هیچ اشکالی به صورت‌های $\{z : z^۴ = ۱\}$ و $\{n : \text{فرد است } n\}$ نوشت. هدف ماروشن کردن مطلب و اجتناب‌ازسوءتفاهم است، وچه بهتراگراین‌مقصود با به‌کاربردن نمادهای‌کوتاه‌تر حاصل شود. به همین وجه می‌توان نوشت

$$\text{دایرهٔ واحد} = \{z : |z| = ۱\}$$
$$\text{قرص بسته واحد} = \{z : |z| \leqslant ۱\}$$
$$\text{قرص باز واحد} = \{z : |z| < ۱\}$$

برای نمایش انواع مختلف بازه‌ها روی خط حقیقی، یک دستگاه خاص اختصارات

به کار می‌بریم. اگر a و b اعداد حقیقی باشند به‌طوری که $a < b$ آنگاه نمادهای سمت چپ ذیل برای نشان دادن مجموعه‌های سمت راست تعریف می‌شوند

$$[a, b] = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}$$
$$(a, b] = \{x : a < x \leqslant b\}$$
$$[a, b) = \{x : a \leqslant x < b\}$$
$$(a, b) = \{x : a < x < b\}$$

اینها را به ترتیب بازهٔ بسته، بازهٔ باز ـ بسته، بازهٔ بسته ـ باز، و بازهٔ باز از a تا b می‌نامیم. بالاخص، [۰, ۱] بازهٔ بستهٔ واحد، و (۰, ۱) بازهٔ باز واحد نامیده می‌شود.

در مبانی نظریهٔ مجموعه‌ها، بعضی مشکلات منطقی وجود دارد (به مسألهٔ ۱ رجوع‌شود). ما با این فرض که در هر بحثی مجموعه‌های ذکر شده، زیر مجموعهٔ یک مجموعهٔ ثابت هستند، از این مشکلات اجتناب می‌کنیم. این مجموعهٔ ثابت واحد را مجموعهٔ مرجع می‌نامند. در این بخش و بخش بعدی مجموعهٔ مرجع را به U نشان می‌دهیم، وفرض براین است که هرمجموعه‌ای که ذکر می‌شود از اعضای U تشکیل شده است. در فصول بعدی همیشه فضایی که درآن کار می‌کنیم، مفروض ومعلوم است، این فضا، بدون هیچگونه تذکری، نقش مجموعهٔ مرجع مارا ایفا خواهدکرد[۱]. غالباًمناسب است مجموعه‌ای در U که هیچ عضوی‌ندارد، دراختیارداشته باشیم این مجموعه را مجموعهٔ تهی می‌نامیم وبه‌علامت $\varnothing$ نمایش‌می‌دهیم. مجموعه‌ای را متناهی گوئیم‌که یا تهی باشدیا از n عضو تشکیل شده باشد (nعددی صحیح ومثبت است)، اگر مجموعه‌ای متناهی نباشد، آنرا نامتناهی می‌نامیم.

معمولا اعضای مجموعه‌هارا باحروف کوچک و خود مجموعه‌ها را با حروف بزرگ نشان می‌دهیم. اگر x یک عضو و A یک مجموعه باشد، گزارهٔ «x عضو A است» (یا x در A واقع است» یا «x متعلق به A است») با «$x \in A$» نمایش داده می‌شود. نقیض این گزاره‌ها یعنی این را که «x عضو A نیست» به «$x \notin A$» نشان می‌دهیم.

دومجموعهٔ A و B را مساوی‌گوئیم اگراعضای آنهادقیقاً یکی باشند، این رابطه‌رابا $A = B$ونقیض آنرابا $A \neq B$ نشان می‌دهیم. A را زیرمجموعهٔ B (یا مشمول B) گوئیم: اگر هرعضوA، عضو B نیز باشد. این رابطه‌به $A \subseteq B$ نمایش‌داده می‌شود. گاهی این‌مطلب رابا گفتن «B فوق مجموعهٔ A است» (یا B شامل A است) اظهارمی‌کنیم. $A \subseteq B$ امکان تساوی A و B را مجاز می‌دارد. اگر A زیرمجموعهٔ B ومساوی B نباشد، آنگاه A را زیرمجموعهٔ سرهٔ B (یا به‌طورسره مشمول B) می‌گوئیم. این رابطه را با $A \subset B$ نشان می‌دهیم. همچنین می‌توانیم مفهوم $A \subset B$ را باگفتن این‌که B فوق مجموعهٔ سرهٔ A است (یا B به‌طورسره A را دربر دارد)، بیان کرد. معمولا $\subseteq$ را رابطهٔ شمول در مجموعه‌ها می‌نامند.

گاهی اوقات نمادهای معرفی شده در پاراگراف قبل را بالعکس می‌نویسیم. مثلاً

---

۱. کلمات مجموعه وفضااغلب ازلحاظ‌معنی، اختلاف‌کوچکی دارند. مجموعه صرفاًگردایه‌ای بی‌نظم ازاعضاست بدون قالب یا ارتباطی. وقتی نوعی ساختمان جبری یا هندسی روی مجموعه وضع شود، به طوری که اعضاء، یک کل منظم تشکیل دهند، آنگاه این مجموعه، فضا نامیده‌ـ می‌شود.

$B \supseteq A$ و $A \subseteq B$ را گاهی به شکلهای دیگر $A \supseteq B$ و $A \subset B$ و $B \supset A$ که با آنها معادلند، می‌نویسیم.

اغلب مناسب خواهد بود که علامتی برای استلزام منطقی داشته‌باشیم، و $\Longrightarrow$ علامتی است‌که ما برای این منظور به‌کار می‌بریم. اگر p و q گزاره باشند، آنگاه $p \Longrightarrow q$ بدین معنی است‌که گزارهٔ p گزارهٔ q را نتیجه می‌دهد، یا اگر p راست باشد، q نیز راست است. همین‌طور، $\Longleftrightarrow$ علامت ما برای استلزام دو طرفه یا تعادل منطقی است. این علامت بدین معنی است که گزارهٔ هر طرف گزارهٔ طرف دیگر را نتیجه می‌دهد، ومعمولاً اگر و فقط اگر یا معادل است با خوانده می‌شود.

خواص اصلی شمول مجموعه‌ها واضح‌اند. این خواص عبارتند از:

$$A \subseteq A, \quad \text{برای هر مجموعهٔ } A \qquad (۱)$$

$$A \subseteq B \text{ و } B \subseteq A \Longrightarrow A = B \qquad (۲)$$

$$A \subseteq B \text{ و } B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C \qquad (۳)$$

ملاحظهٔ این که دو رابطهٔ (۱) و (۲) را می‌توان در یک عبارت واحد، یعنی $(A \subseteq B, B \subseteq A) \Longleftrightarrow A = B$ خلاصه کرد، حائز اهمیت است. این تبصره، قاعدهٔ مفیدی برای اثبات به‌دست می‌دهد، یعنی، تنها راه اثبات تساوی دومجموعه (صرفنظر از بررسی عینی آنها) این است که نشان دهیم هریک زیرمجموعهٔ دیگری است.

مسائل

۱. شاید معروفترین مشکل منطقی که در متن بدانها اشاره شد پارادکس راسل باشد، برای توضیح این تناقض ابتدا توجه می‌کنیم که مجموعه ممکن است اعضایی داشته باشد که خودشان مجموعه باشند، مثلاً $\{۱, \{۲, ۳\}, ۴\}$. این موضوع، امکان این‌که مجموعه خودش‌را به‌عنوان یک عضودر بر داشته باشد مطرح می‌سازد. ماچنین مجموعه‌ای رامجموعهٔ غیر عادی می‌نامیم، و هر مجموعه‌ای که خودش را به‌عنوان یک عضو در برنداشته باشد مجموعهٔ عادی می‌گوئیم. بیشتر مجموعه‌ها عادی هستند، و اگر فکر می‌کنیم که مجموعه‌های غیرعادی از بعضی جهات نامطلوبند، می‌توانیم توجه خود را به مجموعهٔ N متشکل از تمام مجموعه‌های عادی معطوف کنیم. حال‌مسلماً این سؤال پیش می‌آیدکه، آیا N خودش عادی است‌یا غیرعادی؟ واضح است‌که فقط یکی ازاین دو شق می‌تواند درست‌باشد. نشان دهیدکه اگر Nعادی باشد، آنگاه می‌بایست غیرعادی باشد. همچنین نشان دهیدکه اگر N غیرعادی باشد، آنگاه می‌بایست عادی باشد. به این طریق ملاحظه می‌کنیم که هر کدام از این دوشق باخود درتناقض است، وظاهراً فرض‌وجود N به‌عنوان مجموعه، مارا به‌این بن‌بست‌کشانده است. برای توضیح بیشتراین مطالب، خوانندهٔ علاقمند را به(کتاب) ویلدر[1] [۴۲، ص ۵۵] یا فرنکل[2] و بار-هیلل[3] [۱۰، ص ۶] رجوع می‌دهیم. توضیح خود راسل درمورد چگونگی کشف این تناقض را می‌توان در راسل [۳۶، ص ۸۵] پیدا کرد.

۲. علامتی که برای شمول مجموعه به‌کار برده‌ایم مشابه علامت آشنای رابطهٔ ترتیب

---

1. Wilder 2. Fraenkel 3. Bar - Hillel

روی خط حقیقی است: اگر x و y اعداد حقیقی باشند، $x \leqslant y$ بدین معنی است که $y-x$ نامنفی است. رابطهٔ ترتیب روی خط حقیقی دارای تمام خواص ذکر شده (برای شمول مجموعه‌ها) درمتن است

$$x \leqslant x \quad \text{بەازای هر } x \quad (1')$$
$$x \leqslant y \text{ و } y \leqslant x \Longrightarrow x = y \quad (2')$$
$$x \leqslant y \text{ و } y \leqslant z \Longrightarrow x \leqslant z \quad (3')$$

این رابطه یک خاصیت مهم دیگر نیز دارد

$(4')$ به‌ازای هر x و y یا $x \leqslant y$ یا $y \leqslant x$.

خاصیت $(4')$ بیان می‌کند که، نسبت به‌رابطهٔ مورد بحث، هر دو عدد حقیقی قابل مقایسه‌اند. با توجه به این خاصیت است که رابطهٔ ترتیب روی خط حقیقی را رابطهٔ ترتیبی کلی (یا خطی) نامیده‌اند. با مثالی نشان دهید که برای شمول مجموعه‌ها این خاصیت برقرار نیست. به‌همین دلیل، شمول مجموعه‌ها رابطهٔ ترتیبی جزئی نامیده می‌شود.

۳. (الف) فرض کنید U مجموعهٔ تک‌عضوی $\{۱\}$ باشد. این مجموعه، دوزیرمجموعه دارد، مجموعهٔ تهی $\varnothing$ وخود $\{۱\}$. اگر A و B زیرمجموعه‌های دلخواه U باشند، چهاررابطهٔ ممکن به صورت $A \subseteq B$ وجود دارد: ببینید بین این چهار رابطه، چندتای آنها درست‌است.

(ب) فرض‌کنید U مجموعهٔ $\{۱, ۲\}$ باشد. U چهارزیرمجموعه دارد. آنهارافهرست‌کنید. اگر A و B دو زیرمجموعهٔ دلخواه U باشند، ۱۶ رابطهٔ ممکن به صورت $A \subseteq B$ وجود دارد. چندتا ازاین روابط درست‌است؟

(ج) فرض‌کنید U مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳\}$ باشد. U هشت‌زیرمجموعه‌دارد. اینهاکدامند؟ ۶۴ رابطهٔ ممکن به‌صورت $A \subseteq B$ وجود دارد. چندتا ازاین روابط درست است؟

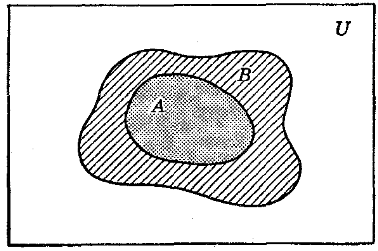
(د) به‌ازای هرعدد صحیح مثبت n فرض‌کنید U مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$ باشد. U چند زیرمجموعه دارد؟ چند رابطه به صورت $A \subseteq B$ ممکن است؟ آیا می‌توانید حدس معقولی بزنید که چه تعداد از این رابطه‌ها درست است؟

۲. جبر مجموعه‌ها

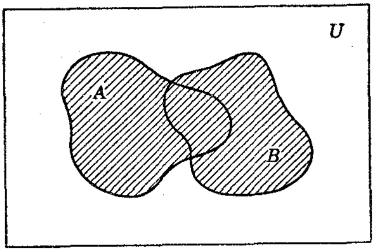
دراین بخش چندطریق سودمند ترکیب مجموعه‌ها بایکدیگر را مورد بررسی قرار می‌دهیم، و به بسط خواص مهم این اعمال ترکیب می‌پردازیم.

همان طوری‌که قبلاً تأکید کردیم، تمام مجموعه‌هایی که دراین بخش ذکر می‌کنیم زیرمجموعه‌های مجموعهٔ مرجع U فرض شده‌اند. U دستگاه مرجع یا جهان بحث کنونی ماست. درکارهای بعدی ما، دستگاه مرجع درهرزمینهٔ خاص، طبعاً بستگی به‌مفاهیم موردنظر ماخواهد داشت، اگر هدف مطالعهٔ مجموعه‌های اعداد حقیقی باشد، آنگاه U مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی R خواهد بود. اگر مایل به مطالعهٔ مجموعه‌هایی از اعداد مختلط باشیم، آنگاه U را مجموعهٔ تمام اعداد مختلط C می‌گیریم. گاهی اوقات می‌خواهیم دستگاه مرجع را محدودتر کرده مثلاً فقط به‌بررسی زیرمجموعه‌های بازهٔ بستهٔ واحد $[۰, ۱]$، یا قرص بستهٔ واحد $\{z : |z| \leqslant ۱\}$ بپردازیم، و دراین حالات U راهم مساوی همینها اختیار-

می‌کنیم. به‌طور کلی، مجموعهٔ مرجع U در حیطهٔ انتخاب ماست، و بـرای رفع نیازهـای آنی در انتخاب آن آزاد هستیم. البته، درحـال حاضر U را باید مجموعه‌ای ثابت ولـی دلخواه درنظر گرفت. این عمومیت، به‌ما اجازه می‌دهد که مفاهیم بسط داده شده در زیر را، در هرموقعیتی که در کارهای بعدی ما پیش می‌آید، به‌کار گیریم.



شکل ۰۱ شمول مجموعه‌ها



شکل ۰۲ اجتماع A و B

در دسترس داشتن تصویری هندسی که با آن بتوانیم مجموعه‌ها و اعمال مربوطه را متصور سازیم، به تجسم مطلب کمک فوق‌العاده‌ای خواهد کرد. یک طریق مناسب بـرای به انجام رساندن این امر آن است که U را بایک ناحیهٔ مستطیلی دریک صفحه نشان دهیم، و نقاط این ناحیه، نمایشگر اعضای U باشند. مجموعه‌ها را می‌توان بـا نواحیی در داخـل این مستطیل مجسم کرد، و نمودارهایی می‌توان رسم‌کرد که اعمال روی مجموعه‌ها و روابط بین آنها را روشن نمایند. برای مثال اگر A و B دو مجموعه باشند، آنگاه شکل ۱، حالتی را که A زیرمجموعهٔ B است، نشان می‌دهد (هرمجموعه را برابرمجموعهٔ نقاط داخل منحنی بستهٔ متناظر آن، در نظر می‌گیریم). این نوع تفکر نموداری، مسلماً سست و بی‌دقت است؛ با وجود این، خواننده متوجه خواهد شد کـه وسیلهٔ مفیدی است. هیچ قسمت ریاضیات، هر قدر هم که ظاهراً مجرد باشد، بدون نوعی تصاویر ذهنی بـه‌وجود نیامده است. این تصاویر ذهنی اغلب مبهم و پیچیده و شخصی است و تشریح آنها مشکل است.

اولین عملی که در جبر مجموعه‌ها شرح می‌دهیم عمل اجتماع‌گیری است. اجتماع دو مجموعهٔ A و B، که به صورت $A \cup B$ نوشته می‌شود، بنا به تعریف، مجموعهٔ تمام اعضایی است کـه در A یا در B هستند (به‌انضمام اعضایی کـه احتمالاً در هر دو مجموعه هستند). $A \cup B$ از یک کاسه کـردن اعضای A و B و درنظـر گرفتن آنها بـه‌عنوان تشکیل دهندهٔ یک مجموعهٔ واحد، به‌دست می‌آید. درشکل ۲، $A \cup B$ با ناحیهٔ هاشور زده نشان داده‌شده است. تعریف فوق را می‌توان با نمادها به صورت زیر نیز بیان کرد:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

عمل تشکیل اجتماعها، جابجایی و شرکت‌پذیر است

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{و} \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

این عمل، خواص دیگر زیر را نیز دارد

$$A \cup A = A, \quad A \cup \varnothing = A, \quad A \cup U = U$$

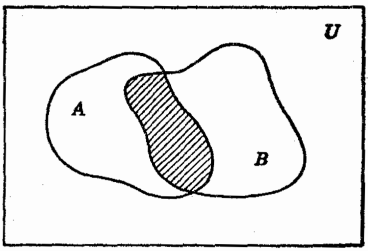
همچنین متذکر می‌شویم که

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cup B = B$$

بنابراین شمول مجموعه‌ها را می‌توان برحسب عمل اجتماع‌گیری بیان کرد.

عمل بعدی ما تشکیل اشتراکهاست. اشتراک دو مجموعهٔ A و B که به صورت $A \cap B$ نوشته می‌شود، مجموعهٔ تمام اعضایی است که در هر دو مجموعهٔ A و B هستند. یا به زبان نمادها:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ و } x \in B\}$$



شکل ۳. اشتراک A و B

$A \cap B$ قسمت‌مشترک مجموعه‌های A و B است. در شکل ۳، $A \cap B$ با ناحیهٔ هاشور زده نشان داده شده است. اگر $A \cap B$ ناتهی باشد، گوییم: «مجموعهٔ A مجموعهٔ B را قطع می‌کند» ازطرف دیگر، اگر A و B قسمت مشترک نداشته‌باشند (به‌عبارت دیگر: $A \cap B = \varnothing$) آنگاه‌گوییم: مجموعهٔ A مجموعهٔ B راقطع نمی‌کند، «یا» A و B مجزا هستند. رده‌ای از مجموعه‌ها که در آن هر دومجموعهٔ متمایز، مجزا باشند، ردهٔ مجزای مجموعه‌ها نامیده می‌شود. عمل تشکیل اشتراکها نیز جابجایی و شرکت پذیر است

$$A \cap B = B \cap A \text{ و } A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

این عمل خواص دیگر زیر را نیز دارد

$$A \cap A = A, \; A \cap \varnothing = \varnothing \text{ و } A \cap U = A$$

و از

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cap B = A$$

دیده می‌شود که شمول مجموعه‌ها را برحسب عمل اشتراک‌گیری نیز می‌توان بیان کرد.

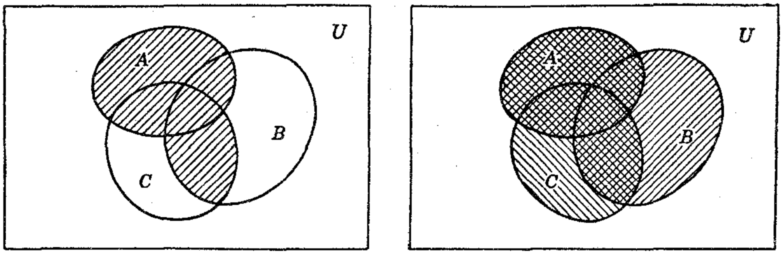
تا کنون دو عمل اساسی روی مجموعه‌ها تعریف کرده‌ایم، و دیده‌ایم که چگونه هر کدام از این اعمال با شمول مجموعه‌ها ارتباط دارند. اقدام بدیهی بعدی اینست که ببینیم که این اعمال چگونه با خود ارتباط دارند. این ارتباط عبارت است از قوانین توزیعی:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

و

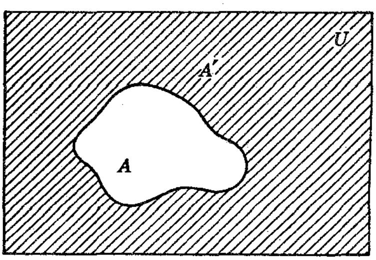
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

این خواص صرفاً از اعمال منطق مقدماتی در مورد معانی نمادهای مورد بحث حاصل می‌شود. به عنوان مثال، اولین قانون توزیعی چنین بیان می‌کند که عضوی در A و در B یا C است وقتی این عضو هم در A و هم در B یا هم در A و هم در C باشد، با رسم تصاویر می‌توانیم خود را به‌طور شهودی، از برقراری این قوانین، قانع کنیم. قانون دوم توزیعی در شکل ۴ نشان داده شده است، که در آن $A \cup (B \cap C)$ در سمت چپ با



شکل ۴. $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$

هاشور ساده و $(A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$ در سمت راست با هاشور ضربی مشخص شده است. یک نظر به این نمودارها خواننده را متقاعد می‌کند که از هر دو حالت، مجموعهٔ یکسانی حاصل می‌شود.



شکل ۵. مکمل مجموعهٔ A

آخرین عمل اصلی ماروی مجموعه‌ها تشکیل مکمل‌هاست. مکمل مجموعهٔ A که به A' نمایش داده می‌شود، مجموعهٔ تمام اعضایی است که در A نیستند. چون اعضایی که مورد بررسی قرار می‌دهیم صرفاً اعضای U هستند، بدون تذکر مشخص است (ولی بهتر است تذکر داده شود) که A' از تمام آن اعضای U تشکیل شده است که در A نیستند. به زبان نمادها:

$$A' = \{x : x \notin A\}.$$

شکل ۵ (که درآن A' هاشور زده شده‌است) این عمل‌را نشان می‌دهد. عمل تشکیل مکمل‌ها خواص واضح زیر را دارد

$$(A')' = A, \varnothing' = U, U' = \varnothing$$
$$A \bigcup A' = U \quad \text{و} \quad A \bigcap A' = \varnothing$$

به‌علاوه، این عمل با شمول مجموعه‌ها به صورت

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow B' \subseteq A'$$

و با تشکیل اجتماعات و اشتراکها به صورت

$$\begin{aligned}(A \bigcup B)' &= A' \bigcap B' \\ (A \bigcap B)' &= A' \bigcup B'\end{aligned} \qquad (۱)$$

ارتباط دارد. رابطهٔ اول (۱) می‌گوید که عضوی در هیچکدام از دو مجموعه نیست، اگر و فقط اگر خارج هر دو مجموعه باشد، و رابطهٔ دوم می‌گوید که عضوی در هر دو مجموعه نیست اگر و فقط اگر خارج یکی از دو مجموعه باشد.

اعمال تشکیل اجتماعات و اشتراکات در اصل، اعمال دوتایی هستند، بدین معنی که،

هر کدام از این اعمال روی یک زوج مجموعه، عمل کرده مجموعهٔ سومی ایجاد می‌کند. برای تأکید بر دوتایی بودن عمل، ترتیب اجرای اعمال را با پرانتز نشان داده‌ایم، مانند $(A_1 \cup A_2) \cup A_3$، که پرانتز به‌ما حکم می‌کند اول A_1 و A_2 را مجتمع کرده و سپس حاصل را با A_3 مجتمع نماییم. خاصیت شرکت پذیری این امکان را می‌دهد که در این‌گونه عبارات از پرانتزها صرفنظر کنیم و آنها را به صورت $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ بنویسیم، از شرکت‌پذیری نتیجه می‌شود که این مجموعه‌ها را به‌هر ترتیبی می‌توان مجتمع کرد و نتیجه به ترتیبی‌که اعمال اجرا می‌شوند، بستگی ندارد. $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ نیز همین حکم را دارد. به‌طورکلی‌تر، به ازای هر ردهٔ متناهی از مجموعه‌ها مانند $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ عبارات

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \quad و \quad A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

خالی از ابهام است. برای کوتاه‌تر کردن نمادها، فرض می‌کنیم $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ مجموعهٔ اندیسهایی باشد که مجموعه‌های مورد بحث را اندیسگذاری می‌کند. I مجموعهٔ اندیسگذار نامیده می‌شود. حال دو عبارت اجتماع و اشتراک اخیرالذکر را می‌توانیم به صورتهای فشردهٔ $\bigcup_{i \in I} A_i$ و $\bigcap_{i \in I} A_i$ نشان دهیم. وقتی ازسیاق مطلب کاملاً معلوم است که مجموعهٔ اندیسگذار چیست، این دو نماد را، حتی از اینهم می‌توان فشرده‌تر کرد و آنها را به صورتهای $\bigcup_i A_i$ و $\bigcap_i A_i$ نوشت. برای‌آن که هم اختصار و هم‌روشنی بیان رعایت‌شده باشد، این مجموعه‌ها اغلب به صورتهای $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ و $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ نوشته می‌شوند.

این تعمیم مفاهیم ونمادها، هنوز به‌قدر کافی وسیع نیست. تشکیل اجتماع و اشتراک رده‌های وسیع (وبه‌راستی وسیع) مجموعه‌ها اغلب لازم‌است. $\{A_i\}$ را ردهٔ کاملاً دلخواهی از مجموعه‌های اندیسگذاری شده با مجموعهٔ اندیسگذار I فرض کنید. در این صورت، اجتماع و اشتراک آنها بنا به تعریف، برابر است با

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \text{ ،به‌ازای لااقل یک } i \in I\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \text{ ،به‌ازای هر } i \in I\}$$

و مانند حالت فوق معمولاً این نمادها را به صورتهای مختصر شدهٔ $\bigcup_i A_i$ و $\bigcap_i A_i$ به‌کار می‌بریم، و اگر ردهٔ $\{A_i\}$ از دنباله‌ای از مجموعه‌ها تشکیل شده باشد، یعنی اگر $\{A_i\} = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$، آنگاه اجتماع و اشتراک آنها اغلب به صورت $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ و $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ نوشته می‌شوند. توجه کنید که ما فرض نکردیم که ردهٔ $\{A_i\}$ ناتهی است، اگر اتفاقاً این رده تهی باشد،آنگاه از تعاریف فوق (با به‌خاطر داشتن این که تمام مجموعه‌ها زیرمجموعه‌های U هستند) نتیجه می‌شود که $\bigcup_i A_i = \emptyset$ و $\bigcap_i A_i = U$. تساوی دوم این را به‌ما می‌گوید که: اگر بخواهیم که عضوی، متعلق به تمام مجموعه‌های یک ردهٔ مفروض باشد، و اگر در این رده، هیچ مجموعه‌ای نباشد، آنگاه هر عضوی این خواستهٔ ما را برآورده می‌کند. اگر توافق نمی‌کردیم که تمام اعضای مورد بحث، اعضای U هستند، قادر نبودیم که به اشتراک یک ردهٔ خالی از مجموعه‌ها، معنی بدهیم. با کمی تأمل معلوم می‌شود که تساویهای (۱) برای هرنوع اجتماع و اشتراکی برقرار است:

$$
\begin{aligned}
(\bigcup_i A_i)' &= \bigcap_i A_i' \\
(\bigcap_i A_i)' &= \bigcup_i A_i'.
\end{aligned}
\qquad (۲)
$$

تحقیق در درستی این تساویها درحالتی که ردهٔ $\{A_i\}$ *تهی* است، آموزنده است.

بحث نظریهٔ عمومی‌مجموعه‌ها را با بررسی مختصری از رده‌های‌خاصی از مجموعه‌ها که در توپولوژی، منطق و نظریهٔ اندازه اهمیت معتنابهی دارند، به‌پایان می‌رسانیم. معمولاً رده‌های مجموعه‌ها را با حروف بزرگ سیاه نشان می‌دهیم.

نخست چند تذکر کلی می‌دهیم که اکنون و بعدها، بخصوص در مورد فضاهای توپولوژیک مورد استفاده قرار می‌گیرند. غالباً اصطلاحاتی به کار خواهیم برد از قبیل اجتماع متناهی و اشتراک متناهی که مقصود اجتماع و اشتراک یک ردهٔ متناهی از مجموعه‌هاست، و منظور از ردهٔ متناهی از مجموعه‌ها، همیشه، رده‌ای است که یا تهی است و یا از n مجموعه تشکیل شده است (n عددی صحیح و مثبت است). اگر بگوییم که ردهٔ **A** از مجموعه‌ها، تحت تشکیل اجتماع متناهی بسته است، منظور این است که **A** اجتماع هر زیرردهٔ متناهی خود را در بر دارد، و چون زیرردهٔ *تهی* به‌عنوان زیرردهٔ متناهی **A** محسوب می‌شود، پس اجتماع این زیررده، یعنی مجموعهٔ *تهی*، الزاماً عضو **A** است. مشابهاً، هر رده از مجموعه‌ها که تحت تشکیل اشتراک متناهی بسته باشد، الزاماً مجموعهٔ مرجع را در بر دارد.

حال دربارهٔ رده‌های خاصی که در بالا به آنها اشاره شد، بحث می‌کنیم. در بقیهٔ این بخش مشخصاً فرض می‌کنیم که مجموعهٔ مرجع U ناتهی است. جبر بولی مجموعه‌ها عبارت است از رده‌ای ناتهی‌مانند **A** از زیرمجموعه‌های U به‌طوری که خواص زیر را دارا باشد

$$
\begin{aligned}
&A \text{ و } B \in \mathbf{A} \Longrightarrow A \cup B \in \mathbf{A} \quad (۱)\\
&A \text{ و } B \in \mathbf{A} \Longrightarrow A \cap B \in \mathbf{A} \quad (۲)\\
&A \in \mathbf{A} \Longrightarrow A' \in \mathbf{A} \quad (۳)
\end{aligned}
$$

چون بنا بر فرض **A** ناتهی است، حداقل باید مجموعه‌ای مانند A را در بر داشته باشد. خاصیت (۳) نشان می‌دهد که علاوه بر A مجموعهٔ A' نیز در **A** است، و چون $A \cap A' = \emptyset$ و $A \cup A' = U$، (۱) و (۲) تضمین می‌کنند که **A** مجموعهٔ تهی $\emptyset$ و مجموعهٔ مرجع U را در بر دارد. چون رده‌ای که فقط از مجموعهٔ تهی و مجموعهٔ مرجع تشکیل شده است، به‌وضوح جبر بولی مجموعه‌هاست، این دو مجموعهٔ متمایز، تنها مجموعه‌هایی هستند که هر جبر بولی باید دربر داشته باشد. اینهم واضح است که ردهٔ تمام زیرمجموعه‌های U نیز جبر بولی مجموعه‌هاست. انواع زیاد دیگری از جبر بولی وجود دارند که کمتر بدیهی هستند و در زمینه‌های بسیار متنوع، از آمار گرفته تا الکترونیک، کاربردهای وسیع دارند.

فرض کنید **A** جبربولی مجموعه‌ها باشد. واضح است که اگر $\{A_۱, A_۲, \ldots, A_n\}$ یک زیرردهٔ متناهی ناتهی از **A** باشد، آنگاه

$$A_۱ \cap A_۲ \cap \cdots \cap A_n \text{ و } A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_n$$

هر دو در A واقع‌اند، و چون A مجموعهٔ تهی و مجموعهٔ مرجع را دربر دارد، به‌سادگی می‌توان دید که A رده‌ای از مجموعه‌هاست که تحت تشکیل اجتماع و اشتراک متناهی و مکمل‌ها بسته است. اکنون از جهت دیگر نظر می‌کنیم، و فرض می‌کنیم که A رده‌ای از مجموعه‌هاست که تحت تشکیل اجتماع و اشتراک متناهی و مکمل‌ها بسته است. با این مفروضات A خود به‌خود مجموعهٔ تهی و مجموعهٔ مرجع را در بر دارد، بنابراین ناتهی است و به‌سادگی مشاهده می‌شودکه جبر بولی مجموعه‌هاست. از این تذکرات نتیجه می‌گیریم که جبرهای بولی را می‌توان منحصراً همچون رده‌هایی از مجموعه‌ها که تحت تشکیل اجتماع و اشتراک متناهی و مکمل‌ها بسته‌اند، توصیف کرد. یک بار دیگر تأکید می‌کنیم که در بحث جبرهای بولی مجموعه‌ها، همیشه فرض می‌کنیم‌که مجموعهٔ مرجع ناتهی است.

یک تبصرهٔ نهایی: می‌گوییم «جبر بولی مجموعه‌ها»، زیرا انواع دیگر جبرهای بولی غیر از آنهایی که از مجموعه‌ها تشکیل شده‌اند، وجود دارند، و می‌خواهیم که فرق بین آنها را محفوظ نگهداریم. این مبحث را در ضمیمهٔ مربوط به‌جبرهای بولی، بیشتر بسط می‌دهیم.

مسائل

۱. اگر $\{A_i\}$ و $\{B_j\}$ دو رده ازمجموعه‌ها باشند به‌طوری‌که $\{A_i\} \subseteq \{B_j\}$، نشان دهید که

$$\bigcup_i A_i \subseteq \bigcup_j B_j \quad \text{و} \quad \bigcap_j B_j \subseteq \bigcap_i A_i$$

۲. تفاضل بین دو مجموعهٔ A و B، که به $A - B$ نمایش می‌دهیم، مجموعهٔ تمام اعضایی از A است که در B نیستند، بنابراین $A - B = A \cap B'$. نشان دهید که

$$A - B = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B$$
$$(A - B) - C = A - (B \cup C)$$
$$A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$$
$$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$$
$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

۳. تفاضل متقارن دو مجموعهٔ A و B، که به $A \Delta B$ نمایش داده می‌شود، بنا به تعریف برابر است با

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

یعنی اجتماع تفاضل‌های دو مجموعه با ترتیبهای عکس. نشان دهید که

$$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$$
$$A \Delta A = \varnothing; \quad A \Delta \varnothing = A$$
$$A \Delta B = B \Delta A$$
$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

۴. حلقهٔ مجموعه‌ها رده‌ای ناتهی مانند A از مجموعه‌هاست به‌طوری که اگر A و B در A باشند، آنگاه $A \Delta B$ و $A \cap B$ نیز در A هستند. نشان دهید که A باید مجموعهٔ تهی،

$A \cup B$ و $A - B$ را نیز در بر داشته باشد. همچنین نشان دهید که اگر ردهٔ ناتهی مجموعه‌ها، اجتماع و تفاضل هر زوجی از مجموعه هایش را دربر داشته باشد، آنگاه حلقهٔ مجموعه هاست.

۵. نشان دهید که ردهٔ تمام زیرمجموعه‌های متناهی (شامل مجموعهٔ تهی) از یک مجموعهٔ نامتناهی، حلقهٔ مجموعه‌هاست ولی جبر بولی مجموعه‌ها نیست.

۶. نشان دهید که ردهٔ تمام اجتماعهای متناهی بازه‌های بسته ـ باز روی خط حقیقی، حلقهٔ مجموعه‌هاست ولی جبر بولی مجموعه‌ها نیست.

۷. با فرض اینکه مجموعهٔ مرجع U ناتهی است، نشان دهید که جبرهای بولی مجموعه‌ها را می‌توان همچون حلقه‌هایی از مجموعه‌ها که U را در بر دارند، تعریف کرد.

۳. تابع

انواع زیادی تابع در حالتهای بسیار متنوع، در توپولوژی دیده می‌شوند. ما در کار بعدی‌مان، به مفهوم کلی تابع با تمام نیرویی که دارد، احتیاج خواهیم داشت؛ وچون معنی جدید تابع خیلی کلیتر و عمیقتر از معنی مقدماتی‌آن است، ما این مفهوم را با تفصیل قابل‌ملاحظه‌ای شرح داده به بسط خواص مجرد اصلی آن می‌پردازیم.

ابتدا مختصراً به بررسی چند مثال ساده می‌پردازیم. به تابع مقدماتی $y = x^۲$ با متغیر حقیقی توجه کنید. وقتی می‌گوییم که این یک تابع است و y تابع x است چه مفهومی در ذهن داریم؟ جواب به‌طورخلاصه این است‌که ما توجه خودرا به‌این امرمعطوف‌می‌داریم که به هر عدد حقیقی x عدد حقیقی معین y مربوط شده است، که آن‌را می‌توان از روی ضابطه یا قانون تناظری که با فرمول داده شده است، محاسبه کرد. دراینجا ما فرایندی داریم که اگر درمورد هر عدد حقیقی x به‌کار گرفته شود روی‌آن عملی انجام می‌دهد (آنرا مربع می‌کند) تا عدد حقیقی دیگر y (مربع x) را تولید کند. بطور مشابه،

$$y = (x^۲ + ۱)^{-۱} \text{ و } y = x^۳ - ۳x$$

دو تابع سادهٔ دیگر با متغیر حقیقی x هستند، که ضابطهٔ هر کدام‌آنها به صورت یک عبارت جبری داده شده است و این عبارات جبری طریق بستگی مقدار y به مقدار x را دقیقاً معین می‌کند.

ضابطه‌هایی که‌اکنون برای‌توابع برشمردیم بافرمول شرح‌داده‌شده‌اند،امادرحالت‌کلی، به‌صورت فرمول درآوردن، فقط برای‌آن دسته از توابع امکانپذیر است که یا نوعاً خیلی ساده هستند ویا آنقدر مهم هستند که علامت مخصوصی برای‌آنها اختصاص داده شده است. مثلاً، تابع با متغیر حقیقی x را که به‌صورت زیر تعریف شده است، در نظر بگیرید: به ازای هرعددحقیقی x، x را به‌صورت عدد اعشاری نامتناهی می‌نویسیم (با استفاده ازنمایش بسط اعشاری که درآن اززنجیرهای نامتناهی ۹ ها اجتناب شده است ــ مثلاً ۱/۴ به‌صورت ۰٫۲۵۰۰۰ . . . نمایش داده می‌شود و نه به صورت ۰٫۲۴۹۹۹ . . .)، حال فرض کنید y برابر رقم پنجاه و نهم بعد از ممیز باشد. البته هیچ فرمول استانداردی برای این تابع وجودندارد، ولی به‌هرحال این تابع، تابع‌کاملاً با ارزشی است که ضابطهٔ آن به طور لفظی

بیان شده است. از طرف دیگر، تابع $y = \sin x$ با متغیر حقیقی x، به اندازه‌ای اهمیت دارد که ضابطهٔ آن با وجود اینکه کاملاً به اندازهٔ تابع تعریف شدهٔ قبلی پیچیده است، با علامت مخصوص $\sin$ مشخص شده است. وقتی توابع را در حالت کلی بررسی می‌کنیم، می‌خواهیم که هر نوع ضابطه‌ای مجاز باشد و بتوانیم دربارهٔ تمام آنها یکجا صحبت کنیم، بنابراین معمولاً از نمادهایی مانند $y = f(x)$ و $y = g(x)$ وغیره که الزامی به‌وجود نمی‌آورند استفاده می‌کنیم.

هر یک از توابعی که در فوق به آنها اشاره شد برای تمام اعداد حقیقی x تعریف شده است. مثال $y = 1/x$ نشان می‌دهد که این محدودیت بیش ازحد دست وپاگیر است، زیرا این تابع فقط برای مقادیر مخالف صفر x تعریف می‌شود. مشابهاً $y = \log x$ فقط برای مقادیر مثبت x تعریف شده است و $y = \sin^{-1}x$ فقط برای مقادیر x در بازهٔ $[-1, 1]$ تعریف شده است. مفهوم ما از تابع هرچه باشد، مطمئناً باید به‌قدری‌کلی باشد که مثالهای نظیر این توابع را که فقط برای بعضی مقادیر از متغیرهای حقیقی x تعریف شده‌اند، شامل شود.

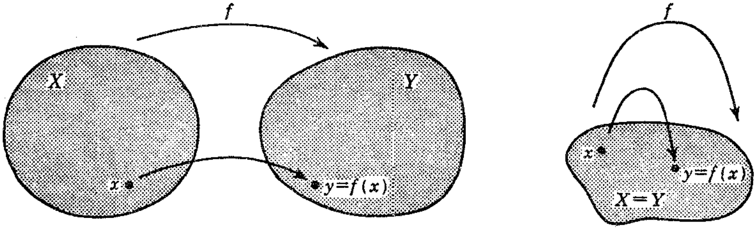
درآنالیز حقیقی مفهوم تابع به طریق زیر تعریف شده است. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی از اعداد حقیقی باشد. گوئیم تابع $y = f(x)$ روی X تعریف شده است اگر ضابطهٔ f، به هر عدد حقیقی x در X یک عدد حقیقی مشخص y مربوط کند. اینکه ضابطهٔ تعریف f نوعاً چگونه باشد، هیچ ربطی به مفهوم تابع ندارد. مجموعهٔ X حوزهٔ تعریف تابع f گفته می‌شود، و مجموعهٔ Y متشکل از تمام مقادیری که تابع f می‌پذیرد به حوزهٔ مقادیر تابع موسوم است. اگر در اینجا به‌جای اعداد حقیقی از اعداد مختلط صحبت شود، همان‌مفهوم تابع‌که درآنالیز مختلط به‌کارمی‌رود، به‌دست می‌آید.

درواقع این دید در مورد توابع، ازآنچه برای اهداف آنالیز لازم است‌کمی فراتر می‌رود، ولی برای منظور ما هنوز به‌قدرکافی کلی نیست. مجموعه‌های X و Y در فوق به عنوان مجموعه‌های اعداد انتخاب شده‌اند. حال اگر این محدودیت را برداریم و بگذاریم که X و Y مجموعه‌های ناتهی‌کاملاً دلخواهی باشند،آنگاه به‌جامعترین مفهوم تابع دسترسی پیدا می‌کنیم. من‌باب مثال، فرض کنید X مجموعهٔ تمام مربعهای یک صفحه و Y مجموعه تمام دایره‌های همان صفحه باشند. تابع $y = f(x)$ را به این صورت تعریف می‌کنیم که ضابطهٔ f، به‌هر مربع x دایرهٔ y محاط درآن مربع را مربوط کند. در حالت کلی، مطلقاً لازم نیست که مجموعهٔ X یا Y مجموعهٔ اعداد باشند. تمام آن چیزی که حقیقتاً برای یک تابع لازم است عبارت است از دومجموعهٔ ناتهی X و Y و یک قاعدهٔ f که به‌طوربامعنی و بی‌ابهام به‌هر عضو x در X یک عضو مشخص y در Y را نسبت دهد.

بااین تذکرات توصیفی مقدماتی، اکنون به‌سراغ‌آن اندیشه‌های نسبتاً‌مجرد ولی بسیار دقیقی می‌رویم که هدف این توضیحات مقدماتی بوده است.

تابع ازسه چیز تشکیل شده است: دو مجموعهٔ ناتهی X و Y (که ممکن است مساوی باشند ولی لزوماً چنین نیستند) و یک ضابطهٔ f که به هر عضو x در X یک عضو منحصر به‌فرد کاملاً مشخص y در Y را، نسبت دهد. معمولاً عضو y، که به این طریق با یک عضو

دادهٔ شدهٔ x متناظر است، به صورت $f(x)$ نوشته می‌شود و نگـارهٔ x تحت ضابطهٔ f، یا مقدار f در عضو x، نامیده می‌شود. اتخاذ این نماد برای القای این تصویر ذهنی است که



شکل ۶. یک طریق تجسم نگاشتها

ضابطهٔ f عضو x را برداشته،روی آن عملی انجام می‌دهد تا عضو $y = f(x)$ تولید شود. برای قوت بخشیدن بـه ایـن مفهوم تـابع، غالباً ضابطهٔ f را نگاشت، یا تبدیل، یا عملگر می‌نامند. سپس f را به صورت نگاشتن xها در yها، یـا تبدیل کـردن xها بـه yها، یا عمل کـردن روی xها برای تولید yها، در نظر می‌آوریم. مجموعهٔ X، حوزهٔ تعریف تابع، مجموعهٔ همهٔ $f(x)$هـا، بـرای تمام xهـای X، حوزهٔ مقادیر تابع نامیده می‌شود. تابعی که حوزهٔ مقادیرآن فقط از یک عضو تشکیل شده باشد تابع ثابت نامیده می‌شود.

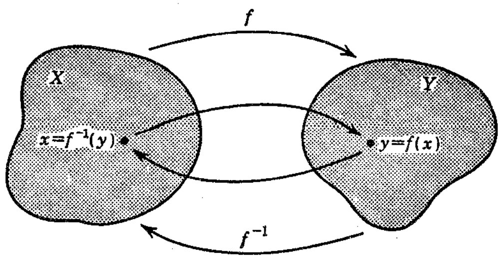
ما غالباً تابعی با ضابطهٔ f، حوزهٔ تعریف X وحوزهٔ مقادیرمشمول Y را به $f:X \to Y$ نمایش می‌دهیم. این نمادگذاری مفید است، زیرا قسمتهای اساسی تابع به سبکی جلوه داده شده که تأکید براین داردکه تابع یک شیء مرکب است وقسمت اصلی‌آن ضابطه یا نگاشت f است. شکل ۶ یک طریق مناسب بـرای مجسم کردن تابع ارائه می‌دهد. در قسمت چپ تصویر، X و Y دو مجموعهٔ متفاوت هستند، و در قسمت راست، دو مجموعهٔ برابرند ــ که در این حالت معمولاً f را نگاشتی از X بتوی خودش می‌نـامیم. اگر از قراین برآید که مجموعه های X و Y چه هستند، یا اگر نیاز واقعی به تصریح این مجموعه‌ها نباشد، معمول است که تابع $f:X \to Y$ را با ضابطهٔ f یکـی می‌انگـارنـد، و از f تنها (بدون اشاره به مجموعه‌های X و Y) چنان صحبت می‌شود که گویی همان تابع تحت بررسی است.

گاهی اوقات اتفاق می‌افتد که دو مجموعهٔ کاملا مشخص X و Y مورد بررسی هستند ونگاشتی از X بتوی Y مطرح می‌شود که نمادطبیعی منتسب به‌خود ندارد. اگرالزامی برای ابداع یک نماد برای این نگاشت نباشد، واگرکاملاً واضح باشد که نگاشت چیست، غالباً مناسب است که آنرا با $x \to y$ معرفی کنیم. مثلا تابع $y = x^2$ را که درابتدای این‌بخش ازآن یـاد شد می‌توان به‌صورت $x \to x^2$ یـا $x \to y$ (که y، بنا بـه فرض قبلی مربع x است) نوشت.

تابع f گسترش تابع g نامیده می‌شود (و g تحدید f) اگر حوزهٔ تعریف f شامل حوزهٔ تعریف g باشد وبه‌ازای هر x درحوزهٔ تعریف g، $f(x) = g(x)$.

قسمت‌اعظم آنالیز ریاضی، هم‌کلاسیک وهم نوین، اقدام به‌بررسی‌توابعی می‌کندکه مقادیـر آنها اعداد حقیقی یا اعداد مختلط هستند. این موضوع همچنین برای آن قسمتهایی از توپولوژی کـه بـه مبانی آنالیز مربـوط است، صادق است. اگر حوزهٔ مقادیر تابع، از

اعداد حقیقی تشکیل شده باشد آن تابع را تابع حقیقی می‌نامیم، مشابهاً تابع مختلط،



شکل ۷. وارون یک نگاشت

تابعی است که حوزهٔ مقادیر آن از اعداد مختلط تشکیل شده است. بدیهی است‌که هر تابع حقیقی، تابع مختلط نیزهست. ما در سرتاسر کارمان تأکید خیلی زیادی روی توابع حقیقی ومختلط می‌کنیم.

ازنظر لغوی، عموماً ترجیح می‌دهیم‌که اصطلاح تابع را برای تابع حقیقی یا مختلط به‌کاربریم ووقتی باتوابعی سروکارداریم که مقادیرشان الزاماً اعداد نیستند، آنهارا نگاشت بنامیم.

یک نگاشت $f: X \to Y$ درنظر بگیرید. وقتی می‌گوییم‌که f نگاشت از X بتوی Y است مقصود این است که اعضای $f(x)$ — هنگامی که x روی تمام اعضای X تغییر می‌کند — لزوماً Y را نمی‌پوشانند، اما اگر قطعاً حوزهٔ مقادیر f مساوی Y باشد یا اگر بخواهیم که این چنین فرض کنیم، آنگاه f را نگاشت از X بروی Y می‌نامیم. اگر هردو عضو متمایز در X تحت f، نگاره‌های متمایزی داشته باشند، آنگاه f رانگاشت یک به‌یک از X بتوی Y می‌نامیم. اگر $f: X \to Y$ بروی ویک به‌یک‌باشدآنگاه می‌توانیم نگاشت وارون‌آن $f^{-1}: Y \to X$ رابه‌صورت زیرتعریف کنیم: به‌ازای هر y در Y آن عضو منحصر-به‌فرد x در X را پیدا می‌کنیم که $f(x) = y$ (x وجود دارد ومنحصر به‌فرد است، زیرا f بروی و یک‌به‌یک است)، وبعد x را $f^{-1}(y)$ تعریف می‌کنیم. معادلهٔ $x = f^{-1}(y)$ نتیجهٔ حل $y = f(x)$ است برحسب x به‌همان صورتی که $x = \log y$ نتیجهٔ حل $y = e^x$ برحسب x می‌باشد. شکل ۷ مفهوم وارون نگاشت را روشن می‌کند.

اگر f نگاشت یک به‌یک از X بروی Y باشد، بعضی اوقات مناسب است‌که معنی اصلی f را، یعنی این را که f نگاشتی است که xها را به y ها می‌فرستد کمی نادیده بگیریم وروی نقش آن به‌عنوان «رابط» بین xها و y ها تأکید کنیم. به هر x دقیقاً یک $y = f(x)$ مربوط شده است (یا متناظر شده است)، و برعکس، به هر y فقط یک $x = f^{-1}(y)$ مربوط شده است (یا متناظرشده است)، وقتی توجه مامعطوف به‌جنبهٔ یک-به‌یک وبروی بودن‌نگاشت است، معمولا آن‌را تناظریک به‌یک می‌نامیم. بنابراین f یک تناظر یک به‌یک بین X و Y است و f^{-1} یک تناظر یک به‌یک بین Y و X.

حال نگاشت دلخواه $f: X \to Y$ را درنظر بگیرید. نگاشت f که هر عضو X را به یک عضو Y می‌فرستد، دو نگاشت مجموعه‌ای مهم زیر را القاء می‌کند. اگر A

زیرمجموعهٔ X باشد، آنگاه نگارهٔ آن، $f(A)$، زیرمجموعه‌ای است از Y که به‌صورت

$$f(A) = \{f(x): x \in A\}$$

تعریف می‌شود و اولین نگاشت مجموعه‌ای ما نگاشتی است که هر A را به‌متناظر آن $f(A)$ می‌برد. مشابهاً اگر B زیرمجموعهٔ Y باشد، آنگاه نگارهٔ وارون آن $f^{-1}(B)$، زیرمجموعه‌ای از X است که به‌صورت

$$f^{-1}(B) = \{x: f(x) \in B\}$$

تعریف می‌شود و دومین نگاشت مجموعه‌ای ما، هر B را به متناظر آن $f^{-1}(B)$ برمی‌گرداند. دانستن اینکه رفتار این دو نگاشت مجموعه‌ای، با شمول مجموعه‌ها و اعمال روی مجموعه‌ها چگونه است اغلب اهمیت اساسی دارد. در دو پاراگراف زیر اهم این‌گونه جنبه‌ها را ذکر می‌کنیم. خواص اصلی اولین نگاشت مجموعه‌ای، عبارتند از:

$$\begin{gathered} f(\varnothing) = \varnothing; \quad f(X) \subseteq Y \\ A_1 \subseteq A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2) \\ f(\textstyle\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f(A_i) \\ f(\textstyle\bigcap_i A_i) \subseteq \bigcap_i f(A_i) \end{gathered} \tag{1}$$

خواننده باید درست بودن این گزاره‌ها را خود ثابت کند. مثلاً برای اثبات (۱) می‌توانیم اول ثابت کنیم‌که $f(\bigcup_i A_i)$ زیرمجموعهٔ $\bigcup_i f(A_i)$ است، وسپس ثابت کنیم‌که $\bigcup_i f(A_i)$ زیرمجموعهٔ $f(\bigcup_i A_i)$ است. برای اثبات شمول اول، می‌توان برهانی به این ترتیب آورد: هرعضو $f(\bigcup_i A_i)$ نگارهٔ عضوی از $\bigcup_i A_i$ است، یعنی‌نگارهٔ عضوی دریک A_i، پس هر عضو $f(\bigcup_i A_i)$ در یکی از $f(A_i)$ها و بنابراین در $\bigcup_i f(A_i)$ واقع است، بی‌قاعدگیها و رخنه‌هایی‌که خواننده درگزاره‌های فوق ملاحظه می‌کند، از کیفیتهای ذاتی این نگاشت مجموعه‌ای هستند. برای مثال، نگارهٔ اشتراک لازم نیست که برابر اشتراک نگاره‌ها باشد، زیرا دو مجموعهٔ مجزا بسادگی می‌توانند نگاره‌هایی داشته باشند که مجزا نیستند. به‌علاوه، هیچ چیز دربارهٔ رابطهٔ بین $f(A)'$ و $f(A')$ بدون فرضهای خاصی، نمی‌توان گفت (به مسئلهٔ ۶ رجوع کنید).

رفتار دومین نگاشت مجموعه‌ای، خیلی بهتر است. خواص آن به‌طور رضایت‌بخشی کامل است ومی‌توان آنها به‌صورت زیربیان کرد:

$$f^{-1}(\varnothing) = \varnothing; \quad f^{-1}(Y) = X$$

$$B_1 \subseteq B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$$

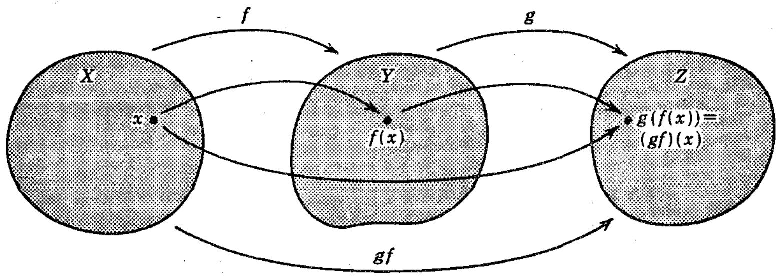
$$f^{-1}(\textstyle\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f^{-1}(B_i) \tag{2}$$

$$f^{-1}(\textstyle\bigcap_i B_i) = \bigcap_i f^{-1}(B_i) \tag{3}$$

$$f^{-1}(B') = f^{-1}(B)' \tag{4}$$

خواننده باید هریک از این گزاره‌هارا نیز خود ثابت کند.

این بخش را با بحث در مفهوم دیگری که ضرب (یا ترکیب) نگاشتها است خاتمه



شکل ۸. ضرب نگاشتها

می‌دهیم. اگر $y=f(x)=x^2+1$ و $z=g(y)=\sin y$، این دو تابع را می‌توان با هم تلفیق کرد و تابع $z=(gf)(x)=g(f(x))=g(x^2+1)=\sin(x^2+1)$ را تشکیل داد. یکی از مهمترین ابزارهای حساب انتگرال و دیفرانسیل (قاعدهٔ زنجیری)، شرح چگونگی مشتق‌گرفتن از این نوع توابع است. این طریق ضرب کردن توابع برای ما نیز حائز اهمیت اساسی است، و ما در حالت کلی آن را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم: فرض کنید $f: X\to Y$ و $g: Y\to Z$ دو نگاشت باشند. حاصلضرب این دو نگاشت را که به $gf: X\to Z$ نمایش داده می‌شود، با $(gf)(x)=g(f(x))$ تعریف‌می‌کنیم. بیان لفظی چنین است: هر عضو x در X توسط f به عضوی مانند $f(x)$ در Y برده می‌شود، وسپس g عضو $f(x)$ را به‌عضو $g(f(x))$ از Z می‌نگارد. شکل ۸، تصویری از این فرایند است. ملاحظه می‌کنیم که دو نگاشتی که در اینجا به کار گرفته شده‌اند، کاملاً دلخواه نیستند، زیرا مجموعهٔ Y ،که حوزهٔ مقادیر نگاشت اولی را در بردارد، مساوی حوزهٔ تعریف نگاشت دومی است. به‌طور کلی، حاصلضرب دو نگاشت وقتی معنی دارد که حوزهٔ مقادیر اولی زیرمجموعهٔ حوزهٔ تعریف دومی باشد. ما f رانگاشت اول و g را نگاشت دوم محسوب کرده‌ایم، و در تشکیل gf، حاصلضرب آنها، ترتیب نمادهای آنها عوض شده است. این پدیده‌ای نسبتاً ناخوشایند است، و در اینجا ما به‌نمادهای ریاضی ایراد می‌گیریم که گهگاه موجب سوء تعبیر می‌شوند. برای آنکه این مطلب به یاد خواننده بماند شاید مفید باشد که حاصلضرب gf را از راست به چپ بخوانند: اول f اعمال می‌شود وبعد g.

مسائل

۱. دو نگاشت $f: X\to Y$ و $g: X\to Y$ مساوی گفته می‌شوند (و می‌نویسیم $f=g$) اگر به ازای هر x در X، $f(x)=g(x)$. فرض کنید f و g و h سه نگاشت از مجموعهٔ ناتهی X بتوی خودش باشند، وسپس نشان دهید که ضرب نگاشتها شرکت‌پذیر است، یعنی

$$f(gh)=(fg)h$$

۲. فرض کنید X یک مجموعهٔ ناتهی باشد. نگاشت همانی i_X روی X نگاشتی از X بروی خودش است‌که به‌صورت $i_X(x)=x$ (به ازای هر x) تعریف می‌شود. بنابراین i_X

هرعضو X را بــه خودش می‌فرستد، یعنی، این نگاشت هـرعضو X را ثابت نگه می‌دارد. نشان دهید که به‌ازای هرنگاشت f از X بتوی خودش، $fi_X = i_Xf = f$. اگر f یک‌ـبه یک و بروی بــاشـد، که در این صورت وارون آن f^{-1} وجــود دارد، نشان دهید کــه $ff^{-1} = f^{-1}f = i_X$. بعلاوه، نشان دهیـد کــه f^{-1} تنها نگاشتی از X بتوی خودش است که دارای این خاصیت است؛ به‌عبارت دیگر، نشان دهید کــه اگــر g نگاشتی از X بتوی خودش باشد بطوری‌که $fg = gf = i_X$، آنگاه $g = f^{-1}$

(راهنمایی: $g = gi_X = g(ff^{-1}) = (gf)f^{-1} = i_Xf^{-1} = f^{-1}$، یا $(g = i_Xg = (f^{-1}f)g = f^{-1}(fg) = f^{-1}i_X = f^{-1}$.)

۳. X و Y را مجموعه‌های ناتهی و f را نگاشتی از X بتوی Y فرض کنید. نشان دهید که:

(الف) f یک به‌یک است $\Longleftrightarrow$ نگاشت g از Y بتوی X وجـود دارد به‌طـوری کـه $gf = i_X$؛

(ب) f بروی است $\Longleftrightarrow$ نگاشت h از Y بتوی X وجود دارد به طوری که $fh = i_Y$.

۴. فرض کنید X یک مجموعهٔ ناتهی و f یک نگاشت از X بتوی خودش بـاشد. نشان دهید که f یک به‌یک و بروی است $\Longleftrightarrow$ نگاشت g از X بتوی خودش مـوجـود است بطوری کــه $fg = gf = i_X$. اگر نگاشت g با این خاصیت وجود داشته باشد، آنگاه این نگاشت یکتاست. چرا؟

۵. X را مجموعهٔ ناتهی، و f و g را دونگاشت یک به‌یک از X بروی خودش فرض‌کنید. نشان دهید که fg نیز نگاشت یک به‌یک از X بروی خودش‌است و $(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$.

۶. X و Y را دو مجموعهٔ ناتهی و f را نگاشتی از X بتوی Y فرض کنید. اگر A و B، به‌ترتیب، زیرمجموعه‌های X و Y باشند، نشان دهید که:

(الف) $ff^{-1}(B) \subseteq B$، و شرط لازم و کافی بــرای اینکـه به‌ازای هـر B داشته باشیم $ff^{-1}(B) = B$ آن است که f بروی باشد؛

(ب) $A \subseteq f^{-1}f(A)$، و شرط لازم و کافی بــرای اینکـه بــه‌ازای هـر A داشته باشیم $f^{-1}f(A) = A$ این است‌که f یک به‌یک باشد؛

(ج) به‌ازای هر A_1 و A_2، $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2) \Longleftrightarrow f$ یک به‌یک است؛

(د) به‌ازای هر A، $f(A)' \subseteq f(A') \Longleftrightarrow f$ بروی است؛

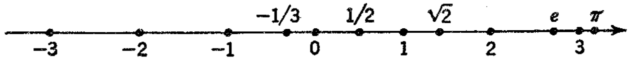
(ه) اگر f بروی باشد، که در ایـن صورت به ازای هر A، $f(A)' \subseteq f(A')$، آنگاه به ازای هر A، $f(A)' = f(A') \Longleftrightarrow f$ یک به‌یک نیز هست.

۴. حاصلضرب مجموعه‌ها

در کارهای بعدی ما، اغلب مواردی پیش می‌آید که مجموعه‌های یک ردهٔ مفروض را با هم ترکیب می‌کنیم تا مجموعهٔ جـدیـدی کـه حاصلضرب آنهـا (یا حاصلضرب دکارتی آنهـا) نامیده می‌شود، به‌وجـود آوریم. منشأ ایـن مفهوم صفحهٔ مختصات در هندسه تحلیلی است، یعنی صفحه‌ای کــه با دستگاه مختصات قائم معمولی مجهز شده است. حــال بـه شرح این

اندیشهٔ بنیادی می‌پردازیم تا راهگشایی باشد برای بحثمان در حالت عمومی حاصلضرب مجموعه‌ها.

اولاً، چند تذکر مقدماتی دربارهٔ خط حقیقی. تاکنون اصطلاح خط حقیقی را چندین مرتبه بدون توضیح به کار برده‌ایم، البته منظور ما از خط حقیقی، یک خط راست هندسی معمولی است (به شکل ۹ رجوع شود) که نقاط آن با R، مجموعهٔ اعداد حقیقی، یکی

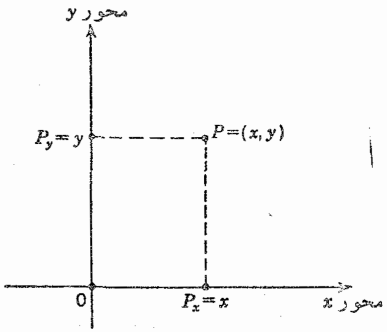


شکل ۹. خط حقیقی

انگاشته شده است. هم خط حقیقی و هم مجموعهٔ اعداد حقیقی را به R نشان می‌دهیم، و غالباً چنان از اعداد حقیقی صحبت می‌کنیم که گویی نقاط روی خط حقیقی‌اند، و از نقاط روی خط حقیقی چنان صحبت می‌کنیم که گویی اعداد حقیقی می‌باشند. نباید کسی را با این فکر که خط حقیقی چیز ساده‌ای است، فریب دهیم، زیرا ساخت آن بسیار پیچیده است. البته دید فعلی ما از خط حقیقی به‌همان سادگی و غیرپیچیدگی تصویر آن است که در شکل ۹ دیده می‌شود. به طور کلی، فرض می‌کنیم که خواننده با خواص ساده‌تر خط حقیقی آشناست ــ خواص مربوط به نامساویها (به مسئلهٔ ۱-۲ رجوع شود) و اعمال جبری اصلی جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم. یکی از مهمترین خواص دستگاه اعداد حقیقی، که شاید کمتر معروف باشد، به خاصیت کوچکترین کران بالا موسوم است. بنا به این خاصیت، هرمجموعهٔ ناتهی از اعداد حقیقی که دارای کران بالاست، دارای کوچکترین کران بالاست، از این خاصیت به سادگی نتیجه می‌شود که هرمجموعهٔ ناتهی از اعداد حقیقی که کران پایین دارد، دارای بزرگترین کران پایین است. تمام این مطالب را می‌توان از تعدادکمی اصول موضوعه، به‌دقت نتیجه گرفت، بحث تفصیلی دراین مورد را اغلب می‌توان در کتابهای جبر مجرد مقدماتی یافت.

اکنون برای ساختن صفحهٔ مختصات، به صورت زیر عمل می‌کنیم: دو خط حقیقی که یکی را محور x و دیگری را محور y می‌نامیم، اختیار کرده آنها را با زاویهٔ قائمه به‌هم متصل می‌کنیم به طوری که یکدیگر را در نقطهٔ صفرشان قطع کنند. تصویر معمولی در شکل ۱۰ عرضه شده است. حال فرض کنیم P نقطه‌ای در صفحه باشد. تصویر قائم P را روی محورها P_x و P_y می‌نامیم. اگر x و y مختصات P_x و P_y روی محورهای مربوطه باشند، این فرایند ما را از نقطهٔ P به زوج مرتب منحصر به فرد (x, y) از اعداد حقیقی می‌رساند که درآن x و y، مختص x و مختص y نقطهٔ P نامیده می‌شوند. می‌توانیم این فرایند را معکوس کرده، با شروع از این زوج مرتب اعداد حقیقی، به همان نقطه برسیم. این همان روشی است که با آن تناظر یک به‌یک معروف بین نقاط P در صفحه وزوجهای مرتب (x, y) از اعداد حقیقی را برقرار می‌کنیم. در حقیقت ما در بارهٔ یک نقطه درصفحه (که یک شیء هندسی است) و زوج مرتب اعداد حقیقی متناظر آن (که یک شیء جبری است) چنان فکر می‌کنیم که گویی آنها ــ برای تمام اهداف و مقاصد ــ یکی هستند.

جوهر هندسهٔ تحلیلی همین است که می‌توان از این همسانی استفاده کرد و در براهین هندسی از وسایل جبری سود جست و به محاسبات جبری تعبیر هندسی داد.



شکل ۱۵. صفحهٔ مختصات

طرز برخورد سنتی با صفحهٔ مختصات در هندسه‌تحلیلی این‌است‌که توجه‌اصلی به‌هندسه‌است و جبر زوجهای مرتب صرفاً یک وسیلهٔ مناسب تلقی می‌شود. دراینجا ما عکس این دید را اختیار می‌کنیم. برای ما صفحهٔ مختصات بنا به تعریف مجموعهٔ تمام زوجهای مرتب (x, y) از اعداد حقیقی است. با به‌کار بردن شکل ۱۵ و نقطه نامیدن زوج مرتب، می‌توانیم تصاویر بصری مورد نظر را به‌دست آوریم. البته اتخاذ این زبان هندسی برای سهولت است واجتناب‌ناپذیر نیست.

نماد ما برای صفحهٔ مختصات، $R \times R$ یا R^2 است. این نماد منعکس کنندهٔ این ایده است که صفحهٔ مختصات، حاصل «درهم ضرب کردن» دو نسخه از خط حقیقی R است.

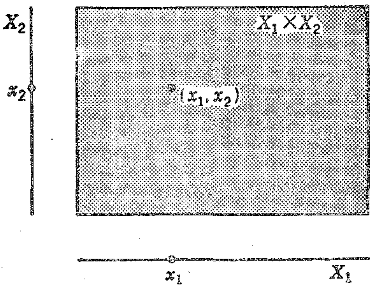
شاید لازم باشد که دربارهٔ یک منشأ احتمالی بعضی سوء تفاهمات، تذکری بدهیم. وقتی از R^2 به مثابهٔ یک صفحه صحبت می‌کنیم، فقط به‌خاطر آن است که نوعی ارتباط بین این مجموعه و تجربیات گذشتهٔ خواننده در هندسه تحلیلی برقرار سازیم. طرز برخورد فعلی ما این است که R^2 یک مجموعهٔ محض است و هیچ ساخت دیگری ندارد، زیرا هنوز هیچ ساختی درآن تعریف نکرده‌ایم. قبلاً (با ابهام عمدی) گفتیم که فضا مجموعه‌ای است که به آن نوعی ساخت جبری یا هندسی ملحق شده است. در بخش ۱۵، با تعریف کردن فاصله بین هر دو نقطهٔ (x_1, y_1) و (x_2, y_2) به‌صورت

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

مجموعهٔ R^2 را به فضای هندسه تحلیلی تبدیل خواهیم کرد. این فاصله، به مجموعهٔ R^2 نوعی تشخص «فضایی» می‌دهد و ما برای تصریح به این امر آن را، به‌جای «صفحهٔ مختصات» صفحهٔ اقلیدسی می‌نامیم.

فرض می‌کنیم خواننده به‌روشی که طبق آن مجموعهٔ اعداد مختلط C (به‌عنوان مجموعه) می‌تواند با صفحهٔ مختصات R^2 یکی انگاشته شود، کاملاً آشناست. اگر z عدد مختلط باشد، و اگر z صورت استاندارد $x + iy$ را داشته باشد که در آن x و y اعداد حقیقی‌اند، آنگاه z را با زوج (x, y) و در نتیجه با یک عضو R^2 یکی می‌انگاریم، معهذا اعداد مختلط، تنها یک مجموعه نیست بلکه خیلی بیش از آن است. این اعداد با اعمال جمع، ضرب، مزدوج گیری و غیره یک دستگاه اعداد تشکیل می‌دهند. اگر صفحهٔ مختصات R^2 بمثابهٔ مجموعهٔ متشکل از اعداد مختلط منظور شود و توسط ساخت جبری به‌دست آمده ازاین طریق غنی گردد، صفحهٔ مختلط نامیده می‌شود. حرف C برای نمایش‌دادن مجموعهٔ اعداد مختلط یا صفحهٔ مختلط به‌کار برده می‌شود. ما در بخش ۹ از صفحهٔ مختلط یک فضا می‌سازیم.

اکنون فرض کنید X_1 و X_2 دو مجموعهٔ نا تهی هستند. مشابه آنچه فوقاً بیان شد $X_1 \times X_2$، حاصلضرب آنها، به‌صورت مجموعهٔ تمام زوجهای مرتب (x_1, x_2) که x_1 در X_1 و x_2 در X_2 است، تعریف می‌شود. با اینکه ماهیت مجموعه‌های X_1 و X_2 دلخواه و نامشخص است، حاصلضرب آنها را می‌توان به وسیلهٔ تصویری (به شکل ۱۱ رجوع شود) که تقریباً شبیه تصویر معمولی صفحهٔ مختصات است، نمایش داد. دلیل اینکه اصطلاح حاصلضرب برای این مجموعه به کار برده شده، و این مجموعه به‌عنوان حاصل «در هم ضرب کردن» X_1 و X_2 شناخته شده است، این است که اگر X_1 و X_2 مجموعه‌های متناهی با m و n عضو باشند، آنگاه به‌وضوح $X_1 \times X_2$ دارای mn عضو خواهد بود. اگر $f: X_1 \to X_2$ نگاشتی با حوزهٔ تعریف X_1 وحوزهٔ مقادیر واقع در X_2 باشد، نمودار این تابع آن زیرمجموعهٔ $X_1 \times X_2$ است که از تمام زوجهای مرتب به صورت $(x_1, f(x_1))$ تشکیل شده است. ملاحظه می‌کنیم که این تعمیم خوبی از مفهوم نمودار تابع در ریاضیات مقدماتی است.



شکل ۱۱. یک طریق تجسم $X_1 \times X_2$

تعریف حاصلضرب دو مجموعه، به‌سادگی به حالت n مجموعه (به ازای هر n صحیح و مثبت) تعمیم داده می‌شود. اگر مجموعه‌های X_1، X_2، . . .، X_n نا تهی باشند، آنگاه حاصلضرب $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n)$ آنها مجموعهٔ تمام nتایی‌های مرتب $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ می‌باشد که به ازای هر اندیس تحتانی i، عضو x_i در X_i است. اگر همهٔ X_iها مساوی مجموعهٔ واحد X باشند، یعنی اگر

$$X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$$

آنگاه معمولاً حاصلضرب آنها به‌صورت X^n نشان داده می‌شود.

مجموعه‌های مهم R^n و C^n حالتهای خاص این مفهوم هستند. R^1 همان خط حقیقی R، و R^2 صفحهٔ مختصات است. R^3ـ مجموعهٔ تمام سه تایی های مرتب اعداد حقیقی ـ مجموعه‌ای است که بنیان هندسهٔ تحلیلی فضایی را تشکیل می‌دهد. ما فرض می‌کنیم که خواننده با چگونگی به‌وجود آمدن این مجموعه از طریق دستگاه مختصات متعامد درفضای سه بعدی معمولی آشناست. در این مورد عیناً مانند حالت صفحهٔ مختصات می‌توانیم تصاویری رسم کنیم و هرقدر بخواهیم از زبان هندسی استفاده کنیم ولی باید توجه کرد که این مجموعه از جنبهٔ ریاضی صرفاً مجموعهٔ همهٔ سه تایی‌های مرتب اعداد حقیقی است و تصاویر فقط به تجسم مطلب کمک می‌کنند. اگر لب این تذکاررا دریابیم، آنگاه می‌توان براحتی و بی‌آنکه مشکلی پیش آید بدون مقدمه به بررسی مجموعهٔ R^n متشکل از تمام nتایی‌های مرتب $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ از اعداد حقیقی (به ازای عدد صحیح مثبت n)، پرداخت. البته این کاملاً صحیح است که وقتی n از ۳ بزرگتر باشد دیگر امکان این وجود

ندارد که بازهم تصاویری که مطالب را بسیار خوب مجسم می‌کنند رسم کنیم. اما این امر حداکثر قدری موضوع را مشکلتر می‌کند. ما بازهم می‌توانیم از زبان هندسی که قدرت القای مفاهیم را دارد استفاده کنیم و چنین نیز خواهیم کرد. درنتیجه همه چیز از دست نرفته است. مجموعهٔ C^n مشابهاً به صورت زیر تعریف می‌شود: مجموعه C^n مجموعهٔ تمام n تایی های مرتب $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ از اعداد مختلط است. هر یک از مجموعه‌های R^n و C^n در کارهای بعدی ما نقشی اساسی ایفا خواهند کرد.

در بالا تأکید کردیم که در حال حاضر صفحهٔ مختصات صرفاً به عنوان یک مجموعه و نه یک فضا، درنظر گرفته می‌شود. همین مطلب درمورد R^n و C^n صادق است. اما به‌موقع خود (در بخش ۱۵) به این دو مجموعه، به کمک تعاریف مقتضی، صورت و محتوایی خواهیم بخشید و این مجموعه‌ها را بـه فضاهای اقلیدسی و یکانی n بعدی تبدیل می‌کنیم. زمینه‌ساز و محرک بسیاری از پیشرفتهای ریاضیات محض نوین، همین دو فضا هستند و ما تا آخرین صفحات کتاب، به کشف خواص ساخت جبری و توپولوژیکی این فضاها ادامه خواهیم داد. ولی به‌صورت کنونی ــ واین نکته‌ای است که روی آن پافشاری می‌کنیم ــ هیچ کدام از این مجموعه‌ها ساختی ندارند.

همچنانکه خواننده محققاً حدس زده است، کافی نیست کـه صرفاً حاصلضرب رده‌های متناهی مجموعه‌ها را درنظر بگیریم. نیازهای توپولوژی ما را مجبور می‌کند که این مفاهیم را به رده‌های دلخواه مجموعه‌ها تعمیم دهیم.

حاصلضرب $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ را بـه صورت مجموعهٔ تمام n تایی‌های مرتب $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ تعریف کردیم به قسمی که به ازای هر اندیس تحتانی i، عضو x_i در X_i باشد. برای مشاهدهٔ چگونگی تعمیم این تعریف، آن‌را دوباره به‌صورت زیر بیان می‌کنیم. یک مجموعه اندیسگذار I متشکل ازاعداد صحیح از ۱ تا n داریم، ومتناظر باهر اندیس (یا اندیس تحتانی) i یک مجموعهٔ ناتهی X_i داریـم. n تایـی $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ تابعی‌است (آن‌را x بنامید) که روی مجموعهٔ اندیسگذار I تعریف شده است، با این شرط که به ازای هر i در I، مقدار آن $x(i) = x_i$، یک عضو X_i باشد. در اینجا دید ما این است که تابع x با معلوم بودن آرایهٔ مقادیرش، یعنی $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$، کاملاً مشخص می‌شود و اساساً با آن یکی است.

اکنون بـرای تعریف حاصلضرب درحالت عمومی، راه هموار شده است. فرض کنید $\{X_i\}$ رده‌ای ناتهی از مجموعه‌های ناتهی باشد که با اعضای مجموعهٔ اندیسگذار I، مانند i اندیسگذاری شده است. لازم نیست کـه مجموعه‌هـای X_i متفاوت باشند، در واقع، امکان دارد کـه همهٔ ایـن مجموعـه‌هـا نسخه‌هـای مجموعـهٔ واحـدی باشند و تنها اختلاف آنها در اندیسهایشان بـاشد. حاصلضرب مجموعه‌های X_i که به‌صورت $P_{i \in I} X_i$ نوشته می‌شود، بنا به تعریف مجموعهٔ تمام تـوابع x روی I است به طوری کـه بـه ازای هر اندیس i، $x(i)$ عضو مجموعـهٔ X_i بـاشد. X_i را i امین مجموعهٔ مختص مـی‌نـامیم. وقتی کـه در مـورد مجموعهٔ اندیسگذار بیم سوء تفاهـم نمـی‌رود، غالباً علامت $P_{i \in I} X_i$ به‌صورت $P_i X_i$ مختصر می‌شود. مطابق تعریفی که دراینجا کردیم، اگر یکی ازمجموعه‌های مورد بحث، تهی باشد،

حاصلضرب آنها را نمی‌توان تشکیل داد، معهذا مفید خواهد بود اگر این تعریف را تعمیم دهیم و در حالتی که بعضی از مجموعه‌ها تهی هستند، حاصلضرب آنها را نیز مجموعهٔ تهی تعریف کنیم.

این طرز بیان حاصلضرب ردهٔ مجموعه‌ها به وسیلهٔ توابع تعریف شده روی مجموعهٔ اندیسگذار، بیشتر درارائهٔ تعریف مفیداست. درعمل، خیلی راحتتر است‌که به‌جای نماد تابعی $x(i)$ ازنماد اندیسی x_i استفاده‌کنیم. بااین نماد، حاصلضرب P_iX_i را مجموعهٔ xهایی تعبیر می‌کنیم‌که درآن هر x باآرایهٔ مقادیر $\{x_i\}$، که x_i متعلق است به‌مجموعهٔ مختص X_i، مشخص می‌شود. x_i را مختص iاُم عضو $x = \{x_i\}$ می‌نامیم.

نگاشت p_i از حاصلضرب P_iX_i بروی i امین مجموعهٔ مختص X_i که به‌صورت $p_i(x) = x_i$ تعریف می‌شود ـ یعنی، نگاشتی که مقدار آن در یک عضودلخواه حاصلضرب، برابر مختص iاُم آن عضو است ـ افکنش بروی iامین مجموعهٔ مختص نامیده می‌شود. افکنش p_i، مختص iاُم هر عضو در حوزهٔ تعریفش را بر می‌گزیند. واضح است که به ازای هر عضو مجموعهٔ اندیسگذار I، تنها یک افکنش وجود دارد، مجموعهٔ تمام افکنش‌ها در نظریهٔ عمومی فضاهای توپولوژیک نقش مهمی ایفا می‌کنند.

مسائل

۱. نمودار نگاشت $f: X \to Y$ یک زیرمجموعهٔ حاصلضرب $X \times Y$ است. چه خواصی نمودارهای نگاشتها را در میان تمام زیرمجموعه‌های $X \times Y$ مشخص می‌کند؟

۲. فرض کنید X و Y مجموعه های ناتهی باشند. اگر A_1 و A_2 زیرمجموعه‌های X، و B_1 و B_2 زیرمجموعه‌های Y باشند، نشان دهید:

$$
\begin{aligned}
(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) &= (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \\
(A_1 \times B_1) - (A_2 \times B_2) &= (A_1 - A_2) \times (B_1 - B_2) \\
&\cup (A_1 \cap A_2) \times (B_1 - B_2) \\
&\cup (A_1 - A_2) \times (B_1 \cap B_2)
\end{aligned}
$$

۳. فرض کنید X و Y دو مجموعهٔ ناتهی باشند و فرض کنید $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ به‌ترتیب حلقه‌های زیرمجموعه‌های X و Y باشند. نشان دهیدکه ردهٔ تمام اجتماعات متناهی مجموعه‌های به‌صورت $A \times B$ که درآن $A \in \mathbf{A}$ و $B \in \mathbf{B}$ حلقه‌ای از زیرمجموعه‌های $X \times Y$ است.

۵. افراز و رابطهٔ هم ارزی

در قسمت اول این بخش، مجموعهٔ ناتهی X را در نظر می‌گیریم، و به مطالعهٔ تجزیه‌های X به‌زیرمجموعه‌هایی که با یکدیگر عضو مشترکی ندارند و X را می‌پوشانند، می‌پردازیم. توجه ما معطوف ابزارهایی (روابط هم ارزی) است که معمولاً برای تولید چنین‌تجزیه‌هایی به کار می‌روند.

افراز X یک ردهٔ مجزای $\{X_i\}$ از زیرمجموعه‌های ناتهی X است که اجتماع آنها برابرخود X باشد. X_iها را مجموعه‌های افرازی می‌نامند. به‌عبارت دیگر، افراز X حاصل

تفکیک (یا تقسیم) X به مجموعه‌های ناتهی است به طریقی که هر عضو X متعلق به یکی و فقط یکی از این زیرمجموعه‌ها باشد.

اگر X مجموعهٔ {۱، ۲، ۳، ۴، ۵} باشد، آنگاه {۱، ۳، ۵}، {۲، ۴} و {۱، ۲، ۳}، {۴، ۵} دو افراز مختلف X هستند. اگر X مجموعهٔ اعداد حقیقی R باشد، آنگاه می‌توان R را به مجموعهٔ اعداد گویا و مجموعه اعداد اصم و یا به تعداد نامتناهی بازه‌های بسته ـ باز به‌صورت $[n, n+1)$ (که n عددی صحیح است) افرازکرد. اگر X مجموعهٔ تمام نقاط صفحهٔ مختصات باشد، آنگاه می‌توان X را طوری افراز کرد که هر مجموعهٔ افرازی، از نقاطی تشکیل شده باشد که مختص x آنها با هم برابر باشند (خطوط عمودی)، یا به قسمی افراز کرد که مختص y نقاط هر مجموعهٔ افرازی، مساوی باشند (خطوط افقی).

خواننده به‌سادگی می‌تواند افرازهای دیگری برای مجموعه‌های فوق بیابد. به‌طورکلی راههای بسیاری برای افرازهر مجموعهٔ مفروض، وجود دارد. البته مثالهای فوق زیاد الهام‌بخش نیستند و ما آنها را صرفاً برای ملموس کردن تعاریف مجرد آورده‌ایم. بعداً در همین بخش، مثالهای دیگری ذکر می‌کنیم که به اهداف کنونی ما بیشتر مربوط می‌شوند.

رابطهٔ دوتایی در مجموعهٔ X، یک نماد ریاضی یا عبارتی لفظی است که در این پاراگراف آن را به R نمایش می‌دهیم، به طوری که به ازای هر زوج مرتب (x, y) از اعضای X گزارهٔ $x\mathrm{R}y$ با معنی باشد (یعنی، مشخص باشد راست است یا دروغ). برای چنین رابطهٔ دوتایی، معنی علامت $x\mathrm{R}y$ این است‌که x توسط R به y مربوط است، و $x\not\mathrm{R}y$ نفی آن است، یعنی x توسط R به y مربوط نیست. مثالهای فراوانی از رابطه‌های دوتایی می‌توان ارائه کرد که با بعضی از آنها آشنا و با بعضی کمتر آشنا هستیم، بعضی از مثالها ریاضی و بعضی غیرریاضی هستند. مثلاً اگر X مجموعهٔ تمام اعداد صحیح باشد و R به‌معنی «کوچکتر است از» تعبیر شود (که البته معمولاً با نماد $>$ نمایش داده می‌شود)، آنگاه به‌وضوح داریم $۷ > ۴$ و $۲ \not> ۵$. در اینجا گفتگوی ما از رابطه‌های دوتایی بوده است، علت «دوتایی» نامیدن آنها این است که صرفاً در مورد زوجهای مرتب به کار می‌روند و نه درمورد سه تایی‌های مرتب و غیره. ما از این صفت صرفنظر کرده و اصطلاح خلاصهٔ رابطه‌ای در X را به کار می‌بریم، زیرا تنها ازاین نوع رابطه گفتگو خواهیم کرد.[۱]

اکنون فرض می‌کنیم یک افراز مجموعهٔ ناتهی X داده شده است و به این افراز یک رابطه در X نسبت می‌دهیم. این رابطه به طریق زیر تعریف می‌شود: x را هم‌ارز y گوییم و به‌صورت $x \sim y$ (علامت $\sim$، ویگل تلفظ شود) می‌نویسیم اگر x و y هر دومتعلق به یک مجموعهٔ افرازی باشند. واضح است که رابطهٔ $\sim$ خواص زیر را دارد:

(۱) به‌ازای هر x، $x \sim x$ (انعکاسی)

(۲) $x \sim y \Longrightarrow y \sim x$ (تقارن)

---

۱. بعضی‌مؤلفین‌ترجیح می‌دهند که‌رابطهٔ R در X را به‌مثابهٔ یک‌زیرمجموعهٔ R از $X \times X$ درنظر بگیرند. ازاین دید، $x\mathrm{R}y$ و $x\not\mathrm{R}y$ به همان معنی $(x, y)\in\mathrm{R}$ و $(x, y)\notin\mathrm{R}$ خواهند بود. مزیت این تعریف این است‌که بهتر از تعریف ما حس می‌شود. و زیان آن این است‌که، عدهٔ قلیلی افراد واقعاً «رابطه» را به‌این صورت درنظر می‌گیرند.

$(3)\quad z \sim x \Longrightarrow (z \sim y$ و $y \sim x)$ (تعدی).

این رابطهٔ خاص در X، از نظر بستگی آن با افراز مفروض در X به‌طریق ویژه‌ای به‌دست آمده است و خواص آن، نتایج فوری تعریفش می‌باشند. هر رابطه‌ای در X که این سه خاصیت را داشته باشد، رابطهٔ هم ارزی در X نامیده می‌شود.

الان مشاهده کردیم که به هر افراز X، یک رابطهٔ هم ارزی طبیعی در X مربوط می‌شود. اکنون وضعیت را برعکس می‌کنیم و نشان می‌دهیم که یک رابطهٔ هم ارزی داده شده در X، یک افراز طبیعی X را معین می‌کند. فرض می‌کنیم $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی در X باشد یعنی فرض می‌کنیم که این رابطه با مفهومی که در بالا شرح داده شد، انعکاسی، متقارن، و متعدی است. اگر x عضو X باشد، زیرمجموعه‌ای از X را که به‌صورت $[x] = \{y : y \sim x\}$ تعریف شده است، مجموعهٔ هم ارزی x می‌نامیم. بنابراین مجموعهٔ هم‌ارزی x مجموعهٔ تمام اعضایی است که با x هم‌ارز هستند. نشان می‌دهیم که ردهٔ تمام مجموعه‌های هم‌ارزی متمایز یک افراز X را تشکیل می‌دهند. به‌واسطهٔ خاصیت انعکاسی، به ازای هر x در X داریم $x \in [x]$، در نتیجه هر مجموعهٔ هم ارزی ناتهی است و اجتماع مجموعه‌های هم ارزی برابر X است. آنچه باقی می‌ماند این است که نشان داده شود هر دو مجموعه هم ارزی $[x_1]$ و $[x_2]$ یا مجزا هستند و یا مساوی. این مطلب را با نشان دادن اینکه اگر $[x_1]$ و $[x_2]$ مجزا نباشند، آنگاه باید مساوی باشند، ثابت می‌کنیم. فرض کنید $[x_1]$ و $[x_2]$ مجزا نباشند، یعنی، فرض کنید یک عضو مشترک z داشته باشند. چون z به هر دو مجموعهٔ هم ارزی تعلق دارد، $z \sim x_1$ و $z \sim x_2$ و بنا بر خاصیت تقارنی، $x_1 \sim z$. اگر y یک عضو $[x_1]$ باشد، آنگاه $y \sim x_1$. چون $y \sim x_1$ و $x_1 \sim z$، خاصیت تعدی نشان می‌دهد که $y \sim z$. با به‌کار بردن مجدد خاصیت تعدی، از $y \sim z$ و $z \sim x_2$ نتیجه می‌شود که $y \sim x_2$. بنابراین y در $[x_2]$ است. چون y به‌دلخواه در $[x_1]$ انتخاب شده بود، از این رو مشاهده می‌کنیم که $[x_1] \subseteq [x_2]$. همین استدلال نشان می‌دهد که $[x_2] \subseteq [x_1]$ و از این نتیجه می‌گیریم که $[x_1] = [x_2]$ (به پاراگراف آخر بخش ۱ مراجعه شود).

بحث و بررسی فوق ثابت می‌کند که تفاوت بزرگی (غیر از اختلاف در بیان) بین افرازهای مجموعه و رابطه‌های هم ارزی در آن مجموعه وجود ندارد. اگر با یک افراز شروع کنیم و اعضای هر مجموعهٔ افرازی را هم ارز بگیریم یک رابطهٔ هم‌ارزی به‌دست می‌آوریم، و اگر با رابطهٔ هم ارزی شروع کنیم، با زیرمجموعه‌های حاصل از یکجا دسته‌بندی کردن اعضایی که با یکدیگر هم‌ارزند یک افراز به‌دست می‌آوریم. ما در اینجا یک مفهوم ریاضی را از دو دید متفاوت درنظر گرفته‌ایم و انتخاب دید در هرکاربرد خاص، کاملاً بستگی به تشخیص خودمان دارد. درعمل، تقریباً همیشه این طوراست که از رابطه‌های هم‌ارزی (که معمولاً به‌سادگی تعریف می‌شوند) برای به‌دست آوردن افرازها (که گاهی اوقات توصیف کامل آن مشکل است) استفاده می‌کنیم.

اکنون به چند مثال ساده و بسیار مهم رابطه‌های هم ارزی می‌پردازیم.

فرض کنید I مجموعهٔ تمام اعداد صحیح باشد. اگر a و b اعضای این مجموعه

باشند، می‌نویسیم $a = b$ (و می‌گوئیم a برابر است با b) اگر a و b نشان دهندهٔ یک عدد صحیح باشند. بنابراین ۵ = ۳ + ۲ به‌این معنی است‌که عبارات طرف چپ و طرف راست، طرق مختلف نوشتن یک عدد صحیح است. واضح است که $=$ که به‌این مفهوم به کار برده می‌شود، یک رابطهٔ هم ارزی در مجموعه است:

(۱) به ازای هر a، $a = a$

(۲) $a = b \Longrightarrow b = a$

(۳) $(a = b$ و $b = c) \Longrightarrow a = c$

واضح است که هر مجموعهٔ هم‌ارزی دقیقاً از یک عدد صحیح تشکیل شده است.

مثال آشنای دیگر، رابطه تساوی کسرها است. به خواننده یادآوری می‌کنیم که (اگر بخواهیم دقیق شویم) کسر صرفاً علامتی به‌صورت a/b است، که a و b اعداد صحیح می‌باشند و b صفر نیست. روشن است که دوکسر ۲/۳ و ۴/۶ از نظر نمادی، یکی نیستند، ولی معذالک ما آنها را مساوی فرض می‌کنیم. در حالت کلی، دو کسر a/b و c/d را مساوی گوییم، و به‌صورت $a/b = c/d$ می‌نویسیم، اگر ad و bc به عنوان اعداد صحیح به معنای عادی تساوی (به پاراگراف فوق مراجعه شود) مساوی باشند. اثبات این را که تساوی، یک رابطهٔ هم ارزی در مجموعهٔ تمام کسرها است، به عهدهٔ خواننده واگذار می‌کنیم. مجموعه هم ارزی کسرها، همان چیزی است که به‌آن عدد گویا می‌گوییم. درعرف عام تفاوت بین کسرها و اعداد گویا نادیده گرفته می‌شود. ولی توجه به این نکته حائز اهمیت است که با بیانی دقیق این اعداد گویا (و نه کسرها) هستند که قسمتی از دستگاه اعداد حقیقی را تشکیل می‌دهند.

مثال پایانی ما اهمیت زیادتری دارد، زیرا این مثال ابزار اصلی کارمان را برای دو بخش بعدی مهیا می‌کند.

در بقیهٔ این بخش رابطهٔ بین زوجهای مجموعه‌های ناتهی را در نظر می‌گیریم و هر مجموعه‌ای که بدان اشاره می‌شود ناتهی فرض می‌شود (خواه این را صریحاً بگوییم یا نگوییم). اگر X و Y دو مجموعه باشند، گوییم که X به‌طور عددی هم‌ارز با Y است اگر یک تناظر یک به‌یک بین X و Y وجود داشته باشد، یعنی، اگر یک نگاشت یک به‌یک از X بروی Y موجود باشد. این رابطه انعکاسی است، زیرا نگاشت همانی $i_x : X \to X$ یک‌به یك و بروی است، این رابطه متقارن است، زیرا اگر $f : X \to Y$ یك به یك و بروی باشد، آنگاه نگاشت وارون آن $f^{-1} : Y \to X$ نیز یك به‌یك و بروی است، و این رابطه متعدی است، زیرا اگر $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ یك به‌یك و بروی باشند، آنگاه $gf : X \to Z$ نیز یك به‌یك و بروی است. هم‌ارزی عددی، تمام خواص رابطهٔ هم ارزی را دارد، واگر آن را بمثابهٔ رابطهٔ هم ارزی در ردهٔ تمام زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعهٔ مرجع U در نظر بگیریم، این رابطه تمام زیرمجموعه‌های U را که به یک تعداد عضو دارند، در یک مجموعه دسته‌بندی می‌کند. بعد از بیان و اثبات قضیهٔ بسیار مفید ولی نسبتاً فنی زیر، بحث را با کاوشی از استنتاجهای ضمنی این مفاهیم، در بخش ۶ و ۷ ادامه خواهیم داد.

قضیه‌ای کــه منظور ماست ــ قضیهٔ شرودر[1] - برنشتاین[2] ــ این است: اگر X و Y دو مجموعه باشند به قسمی که هر یک از آنها بــه‌طور عددی هم‌ارز زیرمجموعه‌ای از دیگری باشد، آنگاه مجموعهٔ X به‌طورعددی هم‌ارز مجموعهٔ Y است. چندین برهان برای این قضیهٔ کلاسیک وجود دارد که برخی از آنها خیلی مشکل است. برهان بسیار زیبایی که در اینجا عرضه می‌کنیم، اساساً از برکاف[3] و مک‌لین[4] است.

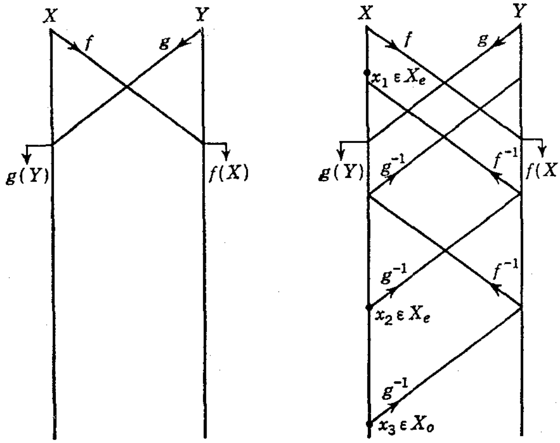
واما برهان آن: فرض می‌کنیم که $f: X \to Y$ یک نگاشت یک به‌یک از X بتوی Y باشد و $g: Y \to X$ یک نگاشت یک به‌یک از Y بتوی X. قصد ما این‌است که یک نگاشت $F: X \to Y$ که‌یك به‌یك و بروی باشد تولید‌کنیم. می‌توان فرض کرد که f و g بروی نباشند، زیرا اگر f بروی باشد، F را بــرابــر f تعریف می‌کنیم، و اگر g بروی باشد، F را برابر g^{-1} تعریف می‌کنیم. چون f و g هردو یك به یك هستند، می‌توان نگاشتهای f^{-1} و g^{-1} را بــا تــوجــه بــه‌این کــه f^{-1} صرفاً روی $f(X)$ و g^{-1} صرفاً روی $g(Y)$ تعریف‌شده‌اند، به‌کاربرد. برای به‌دست‌آوردن نگاشت F، X و Y را برحسب نیاکان‌اعضای آنها، بــه‌زیر مجموعه‌هایی تقسیم می‌کنیم. فــرض کنید x یک عضو X بــاشد. g^{-1} را (در صورت امکان) بر x اعمال می‌کنیم تا عضو $g^{-1}(x)$ را در Y به‌دست آوریم. اگر $g^{-1}(x)$ وجود داشته باشد، آن را نیای اول x گوییم. خود عضو x رانیای صفرم x می‌گوییم. حال، در صورت امکان، f^{-1} را بر $g^{-1}(x)$ اعمال می‌کنیم، و اگر $(f^{-1}g^{-1})(x)$ وجود داشته باشد، آن را نیای دوم x می‌گوییم. اکنون، در صــورت امکان، g^{-1} را بر $(f^{-1}g^{-1})(x)$ اعمال می‌کنیم، و اگر $(g^{-1}f^{-1}g^{-1})(x)$ وجودداشته باشد، آن‌را نیای سوم x می‌گوییم. چنانچه این روند دنبال کردن نیاکان x را، ادامه دهیم، آشکار می‌شود کــه سه امکان وجود دارد. (۱) x به‌تعداد نامتناهی نیا دارد. زیرمجموعهٔ X را که از اعضایی تشکیل شده است که تعداد نامتناهی نیا دارند، به X_i نمایش می‌دهیم. (۲) تعداد نیاهای x زوج است، مفهوم آن این استکه آخرین نیای x (یعنی نیایی‌که خود نیا ندارد) در X است. زیر مجموعهٔ X متشکل از اعضایی که تعداد زوج نیا دارند را به X_e نمایش می‌دهیم. (۳) تعداد نیاهای x فرد است، مفهوم‌آن این‌استکه آخرین نیای x در Y است. زیرمجموعهٔ X راکه ازاعضایی تشکیل شده استکه تعداد فرد نیا دارند به X_o نمایش می‌دهیم. سه مجموعهٔ X_i، X_e و X_o یک ردهٔمجزا تشکیل می‌دهندکه اجتماع‌آنها X است. به‌همین ترتیب Y را به‌سه زیرمجموعهٔ Y_i، Y_e و Y_o تجزیه‌می‌کنیم. به‌سادگی مشاهده می‌شودکه f مجموعهٔ X_i را به‌روی Y_i و X_e را بروی Y_o می‌نگارد، و g^{-1} مجموعهٔ X_o را بروی Y_e می‌نگارد، بــا تعریف F بــه صورت قطعات زیر، اثبات را تکمیل می‌کنیم:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{اگر } x \in X_i \cup X_e \\ g^{-1}(x) & \text{اگر } x \in X_o \end{cases}$$

حال کوشش می‌کنیم کــه مفاهیم فوق را در شکل ۱۲ بــه تصور درآوریم. در این شکل دو نسخه از وضعیت را نشان داده‌ایم: در سمت چپ تصویر، X و Y با خطوط عمودی و f و

1. Schroeder 2. Bernstein 3. Birkhoff 4. MacLane

g با خطوط مایل به پایین به‌طرف راست و چپ نمایش داده شده‌اند، و در سمت راست تصویر، رد پای نیاکان سه عضو در X را به‌طور ترسیمی دنبال می‌کنیم، عضو x_1 نیای اول ندارد، x_2 نیای اول و دوم دارد، و x_3 نیای اول و دوم و سوم دارد.



شکل ۱۲. اثبات قضیهٔ شرودر ـ برنشتاین

قضیهٔ شرودر ـ برنشتاین اهمیت نظری و عملی زیادی دارد. ارزش اصلی این قضیه برای ما، در نقش آن به‌عنوان ابزاری است که به‌وسیلهٔ آن می‌توانیم هم‌ارزی عددی بسیاری از مجموعه‌های خاص را، با حداقل تلاش، اثبات کنیم. در بخش ۷ این قضیه را به کار خواهیم برد.

مسائل

۱. $f: X \to Y$ را نگاشتی دلخواه فرض‌کنید. رابطه‌ای در X به‌صورت زیر تعریف کنید: $x_1 \sim x_2$ یعنی $f(x_1) = f(x_2)$. نشان دهید که این یک‌رابطهٔ هم‌ارزی است ومجموعه‌های هم‌ارزی را شرح دهید.

۲. در مجموعهٔ اعداد حقیقی R، فرض کنیم $x \sim y$ به این معنی باشد که $x - y$ عدد صحیح است. نشان دهید که این یک رابطه هم ارزی است و مجموعه های هم ارزی را شرح دهید.

۳. I را مجموعهٔ تمام اعداد صحیح، و m را عددی صحیح، مثبت و ثابت فرض کنید. دو عدد صحیح a و b را همنهشت به پیمانهٔ m می‌گوییم (و آن را با $a \equiv b \pmod m$ نشان می‌دهیم) اگر $a - b$ بر m قابل قسمت باشد، یعنی اگر $a - b$ مضرب صحیح m باشد. نشان دهید که این یک رابطهٔ هم‌ارزی است، مجموعه‌های هم ارزی را شرح دهید، و تعداد مجموعه‌های هم‌ارزی مجزا را تعیین کنید.

۴. تعیین کنید کدامیک از سه خاصیت انعکاسی، تقارن، و تعدی برای رابطه‌های ذیل در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت، برقرار است: $m \leqslant n$، $m < n$، n بر m قابل قسمت است.

آیا بعضی از این‌ها رابطه هم‌ارزی هستند؟

۵. مثالی از رابطه ارائه دهید که (الف) منعکس باشد ولی متقارن یا متعدی نباشد، (ب) متقارن باشد ولی منعکس یا متعدی نباشد، (ج) متعدی باشد ولی منعکس یا متقارن نباشد، (د) انعکاسی و متقارن باشد ولی متعدی نباشد، (ه) منعکس و متعدی باشد ولی متقارن نباشد، (و) متقارن و متعدی باشد ولی منعکس نباشد.

۶. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و $\sim$ رابطه‌ای در X باشد. به نظر می‌آید که مطالب زیر ثابت می‌کند که اگر این رابطه متقارن و متعدی باشد، آنگاه الزاماً منعکس است: $x \sim y \Longrightarrow y \sim x$؛ $(x \sim y$ و $y \sim x) \Longrightarrow x \sim x$؛ بنابراین به ازای هر x داریم $x \sim x$. با توجه به مسئلهٔ ۵ (و)، این برهان نمی‌تواند درست باشد. در این برهان چه اشتباهی وجود دارد؟

۷. X را مجموعهٔ ناتهی فرض کنید. رابطه $\sim$ در X را مستدیر گوییم اگر $(x \sim y$ و $y \sim z) \Longrightarrow z \sim x$ و مثلثی گوییم اگر $(x \sim y$ و $x \sim z) \Longrightarrow y \sim z$. ثابت‌کنید: رابطه در X، رابطهٔ هم‌ارزی است $\Longleftrightarrow$ رابطهٔ منعکس و مستدیراست $\Longleftrightarrow$ رابطهٔ منعکس و مثلثی است.

۶. مجموعه‌های شمارا

موضوع این بخش و بخش بعدی ــ اعداد اصلی نامتناهی ــ یکی از قسمتهای اساسی ریاضیات نوین است. عدد اصلی، ازجملهٔ ابزار حیاتی متداول بسیاری از ریاضیدانان است و خود ما آن را بسیار به‌کار خواهیم برد. این نظریه، که به‌وسیلهٔ کانتور ریاضیدان آلمانی به‌وجود آمد، همچنین دارای جاذبهٔ زیبایی‌شناسی زیادی است. زیرا این نظریه بامفاهیمی که درنهایت سادگی هستند شروع می‌شود و طی‌مراحل طبیعی به یک ساخت فکری استادانه و زیبا توسعه می‌یابد. در طی بحثمان به سؤالاتی جواب خواهیم داد که قبل از زمان کانتور هیچ کس فکر پرسیدن آنها را نمی‌کرد، و یک سؤال مطرح می‌کنیم که هیچکس تا کنون نتوانسته به آن جواب دهد.

بدون تمهید، می‌توان گفت که اعداد اصلی آنهایی هستند که در شمارش به کار می‌روند، مثل اعداد صحیح مثبت (یا اعداد طبیعی) ۱، ۲، ۳، ... که همهٔ ما با آن آشنا هستیم. ولی داستان خیلی بیشتر از این‌ها است.

عمل شمارش، بدون شک یکی از قدیمیترین فعالیتهای بشر است. احتمالاً از همان موقع که انسان شروع به نطق کرده است، به‌صورتی بدوی شمارش را هم آموخته است. قدیمی‌ترین انسانهای اجتماعی که با استفاده از حیوانات اهلی زندگی می‌کرده‌اند احتمالاً لازم می‌دیده‌اند که تعداد بزهای گلهٔ ده را به‌وسیلهٔ توده‌ای از سنگها یا روشی شبیه به آن، ثبت کنند. توده سنگی به تعداد بزهای گله داشته‌اند و هرشب تعداد بزها را با کنار گذاشتن یک سنگ برای هر بز، می‌شمرده‌اند و سنگهای باقیمانده نشان دهندهٔ تعداد بزهای گم شده می‌بوده و درصدد یافتن آنها برمی‌آمدند. برای آنها اسامی اعداد و نمادهایی نظیر ۱، ۲، ۳، ... که ما به کار می‌بریم غیر ضروری بوده است. همین

ایدهٔ ساده اما عمیق تناظر یک به یک بین ریگها و بزها، نیازهای آن زمان را برآورده می‌کرده است.

به معنایی می‌شود گفت که خود ما مجموعهٔ نامتناهی اعداد صحیح مثبت

$$N = \{۱, ۲, ۳, \ldots\}$$

را به‌مثابهٔ یک «تودهٔ سنگ» به‌کار می‌بریم. ما این مجموعه را همه جا به‌عنوان قسمتی از تجهیزات عقلانی خودمان همراه می‌بریم. هروقت می‌خواهیم یک مجموعه، مثلاً، یک دسته اسکناس، را بشماریم در مجموعهٔ N با عدد یک آغاز می‌کنیم و هر اسکناس را با عدد صحیح مثبتی که به آن می‌رسیم منطبق می‌کنیم. آخرین عدد متناظر با آخرین اسکناس را تعداد اسکناسهای این دسته می‌نامیم. اگر اتفاقاً آخرین عدد ۱۰ باشد، آنگاه «۱۰» علامت ما برای تعداد اسکناسهای این دسته و همچنین برای تعداد انگشتان دست و تعداد انگشتان پا و برای تعداد اعضای هر مجموعه‌ای که بتوان آن‌را، به‌طوریک به‌یک با مجموعهٔ متناهی $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۰\}$ متناظر کرد، می‌باشد. روش ما اندکی پیچیده‌تر از روش انسانهای اولیه است. ما نمادهای ۱، ۲، ۳، . . . را برای اعدادی که در شمارش پیش می‌آیند در اختیار داریم و می‌توانیم آنها را برای استفاده‌های آتی ثبت کنیم و در دسترس افراد دیگر بگذاریم، وروی آنها اعمال حساب انجام دهیم. ولی ایدهٔ اساسی، یعنی تناظر یک به‌یک، همچنانکه احتمالاً برای انسان نخستین مطرح بوده برای ما نیز مطرح است.

اعداد صحیح مثبت برای شمارش مجموعه‌های متناهی ناتهی مناسب است، و چون در خارج ریاضیات تمام مجموعه‌ها از این نوع‌اند، این اعداد برای تمام شمارش‌های غیر-ریاضی کافی هستند. اما در دنیای ریاضیات، ما ناگزیریم تعداد زیادی مجموعه‌های نامتناهی را در نظر بگیریم، مانند خود مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت، مجموعهٔ اعداد صحیح، مجموعهٔ تمام اعداد گویا، مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی، مجموعه تمام نقاط صفحه، وغیره. اغلب اهمیت دارد که بتوانیم چنین مجموعه‌هایی را بشماریم و کانتور برآن بود که چنین کاری را انجام دهد، و بوسیلهٔ تناظرهای یک به‌یک، یک تئوری اعداد اصلی نامتناهی بناکند.

در مقایسهٔ اندازهٔ دو مجموعه، مفهوم اساسی همان هم‌ارزی عددی است که در بخش قبل تعریف شد. یادآوری می‌کنیم که دو مجموعهٔ ناتهی X و Y را به‌طور عددی هم‌ارز گوئیم اگرنگاشت یک به‌یک از یکی بروی دیگری وجودداشته باشد. یا ــ و این به همان معنی است ــ اگربتوان تناظر یک به‌یکی بین آنها پیدا کرد. وقتی می‌گوییم که دو مجموعهٔ متناهی ناتهی، به‌طور عددی هم ارزند به همان معنی است که، به‌مفهوم عادی، بگوییم تعداد اعضای دو مجموعه با هم برابرند. اگر یکی از آنها را شمارش کنیم، یک تناظر یک‌به‌یک بین اعضای آن و یک مجموعه از اعداد صحیح مثبت به‌صورت $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ برقرار می‌کنیم، و آنگاه می‌گوییم که تعداد اعضای هر دو مجموعه، یا عدد اصلی هر دو مجموعهٔ، n است. اعداد صحیح مثبت، اعداد اصلی متناهی هستند. ما ضمن تعقیب کارهای کانتور و درنظر گرفتن هم‌ارزی عددی برای مجموعه‌های نامتناهی، با شگفتیهای زیادی مواجه می‌شویم.

بدیهی است‌که مجموعهٔ تمام اعداد صحیح مثبت $\{۱, ۲, ۳, \ldots\} = N$ ازمجموعهٔ

تمام اعداد صحیح مثبت زوج $\{\ldots, ۶, ۴, ۲\}$ «بزرگتر» است، زیرا N مجموعهٔ $\{\ldots, ۶, ۴, ۲\}$ را به عنوان یک زیرمجموعهٔ سره در بر دارد. با نگاهی سطحی تعداد اعضای N «بیشتر» است. ولی این نکته حائزاهمیت است که وقتی با مجموعه‌های نامتناهی سروکار داریم باید درقضاوت تأمل کرد و به‌خاطر سپرد که مقیاس ما دراین مورد این است که، آیا یک تناظر یک به‌یک بین مجموعه‌ها موجود است؟ (نه‌اینکه آیا یک مجموعه زیرمجموعهٔ سره دیگری هست یا نیست). حقیقت امر این است که از تقابل زیر

$$\begin{array}{l} ۱, ۲, ۳, \ldots, \ n, \ldots \\ ۲, ۴, ۶, \ldots, ۲n, \ldots \end{array}$$

می‌توان برای برقرارکردن یک تناظر یک به‌یک بین این دو مجموعه استفاده کرد که در آن هرعددصحیح مثبت سطر بالا با یک عددصحیح مثبت زوج (دوبرابرآن) که در زیرآن قرار دارد، متناظر می‌شود. پس به این دو مجموعه باید به عنوان دو مجموعه‌ای که دارای تعداد اعضای برابر هستند، نظر شود. این مورد بسیار قابل توجه است، زیرا به نظر می‌آید که ناقض درک مستقیم ماست و درعین حال صرفاً بر پایه محکمی که مورد قبول همه است، استوار است. ذیلاً مشاهده خواهیم کرد (در مسائل ۶ و ۴ــ۷) که هر مجموعهٔ نامتناهی به‌طور عددی هم‌ارز یک زیرمجموعهٔ سرهٔ خودش است. چون به‌طور واضح این خاصیت برای مجموعهٔ متناهی برقرار نیست، بعضی مؤلفین، این خاصیت را، حتی به عنوان تعریف مجموعهٔ نامتناهی به‌کار می‌برند.

کم و بیش به طریق مشابه فوق، می‌توانیم نشان دهیم که N با مجموعهٔ تمام اعداد صحیح زوج به‌طور عددی هم‌ارز است:

$$\begin{array}{l} ۱, ۲, \quad ۳, ۴, \quad ۵, ۶, \quad ۷, \ldots \\ ۰, ۲, -۲, ۴, -۴, ۶, -۶, \ldots \end{array}$$

دراین روش با ۰ شروع می‌کنیم و پیش می‌رویم و به‌دنبال هرعدد مثبت زوج، منفی‌آن عددرا قرار می‌دهیم.

مشابهاً N با مجموعهٔ تمام اعداد صحیح به طور عددی هم‌ارز است:

$$\begin{array}{l} ۱, ۲, \quad ۳, ۴, \quad ۵, ۶, \quad ۷, \ldots \\ ۰, ۱, -۱, ۲, -۲, ۳, -۳, \ldots \end{array}$$

از جنبهٔ تاریخی قابل‌توجه است که گالیله در اوایل قرن هفدهم مشاهده کرد که تعداد مربعهای کامل (۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، وغیره) در میان اعداد صحیح مثبت دقیقاً با تعداد تمام اعداد صحیح مثبت برابر است. با تناظر زیر درستی این ادعا آشکار می‌شود.

$$\begin{array}{l} ۱, \ ۲, \ ۳, \ ۴, \ ۵, \ \ldots \\ ۱^۲, ۲^۲, ۳^۲, ۴^۲, ۵^۲, \ldots \end{array}$$

با توجه به اینکه اعداد مربع کامل در میان اعداد صحیح مثبت نسبتاً نادرند، برای گالیله بسیارعجیب بود که این دو،هم ارز عددی باشند. اما ظاهراً یا زمانه برای کاوش این پدیده

مستعد نبوده است، یا گالیله اشتغالات ذهنی دیگری داشته است، به هر صورت، گالیله این فکر را تعقیب نکرد.

این مثالها باید روشن کرده باشد که برای نشان دادن اینکه مجموعهٔ نامتناهی X با N به‌طورعددی هم‌ارز است، آنچه حقیقتاً لازم است این است که بتوانیم اعضای X را به‌صورت، اولی، دومی، سومی، و غیره به طریقی فهرست کنیم که این شمارش همهٔ اعضای آن را در برگیرد. به‌این دلیل است که هرمجموعهٔ نامتناهی را که به‌طور عددی هم ارز N باشد شمارای نامتناهی می‌نامند. مجموعه را شمارا گوییم اگر ناتهی و متناهی (بدیهی است که در این حالت، این مجموعه قابل شمارش است) یا شمارای نامتناهی باشد.

یکی ازکشفیات اولیهٔ کانتور درمجموعه‌های نامتناهی آن بود که مجموعهٔ تمام اعداد گویای مثبت (که خیلی بزرگ است: تمام N و نیزمقدار زیادی اعداد دیگر را در بردارد) در واقع شماراست. اعداد صحیح مثبت را می‌توانیم بر حسب اندازهٔ آنها فهرست کنیم (با شروع از کوچکترین عدد و سپس کوچکترین عدد بعدی و ادامه این روش) اما اعداد گویای مثبت را نمی‌توانیم به این صورت فهرست کنیم زیرا کوچکترین عدد گویای مثبت وجود ندارد و بین هر دو عدد گویای مثبت، به تعداد نامتناهی، اعداد گویای مثبت دیگری وجود دارد. بنابراین باید روش دیگری برای شمردن آنها پیدا کنیم و به پیروی از کانتور آنهارا نه‌برحسب اندازه بلکه به‌ترتیب اندازهٔ مجموع‌صورت ومخرج مرتب می‌کنیم. ابتدا اعداد گویای مثبتی در نظر می‌گیریم که مجموع صورت و مخرج آنها ۲ باشند. فقط یکی موجود است: $۱ = ۱/۱$. بعداً آنهایی را فهرست می‌کنیم (با مخرجهای نزولی) که این مجموع برابر ۳ باشد: $۲ = ۲/۱, ۱/۲$. بعداً آنهایی که این مجموع برابر ۴ باشد: $۳ = ۳/۱, ۱ = ۲/۲, ۱/۳$. بعد از آن، اعدادی که این مجموع برابر ۵ باشد: $۴ = ۴/۱, ۳/۲, ۲/۳, ۱/۴$. بعداً آنهایی‌که این مجموع برابر ۶ باشد:

$$۵ = ۵/۱, ۲ = ۴/۲, ۱ = ۳/۳, ۱/۲ = ۲/۴, ۱/۵$$

وهمین‌طورادامه می‌دهیم. حال اگرهمهٔ اینهارا ازآغاز فهرست کنیم ووقتی به‌عضوی می‌رسیم که قبلاً فهرست شده است آن را حذف کنیم، دنبالهٔ

$$۱, ۱/۲, ۲, ۱/۳, ۳, ۱/۴, ۲/۳, ۳/۲, ۴, ۱/۵, ۵, \ldots$$

را بدست می‌آوریم که هرعدد گویای مثبت را یک‌بار و فقط یک‌بار دربر دارد. شکل ۱۳ این طریقهٔ فهرست کردن اعداد گویای مثبت را نشان می‌دهد. در این شکل اولین سطر از تمام اعداد گویای مثبت با صورت ۱ تشکیل شده است، سطر دوم تمام اعداد گویای مثبت با صورت ۲ و . . . . ستون اول تمام اعداد گویای مثبت با مخرج ۱ را دربر دارد، ستون دوم تمام اعداد گویای مثبت با مخرج ۲ و . . . . این فهرست به‌این ترتیب بدست می‌آید که همهٔ اعداد این آرایهٔ عددی را در جهت پیکان طی کنیم والبته آن اعدادی راکه قبلاً در مسیرمان به آنها برخورد کرده‌ایم، کنار بگذاریم.

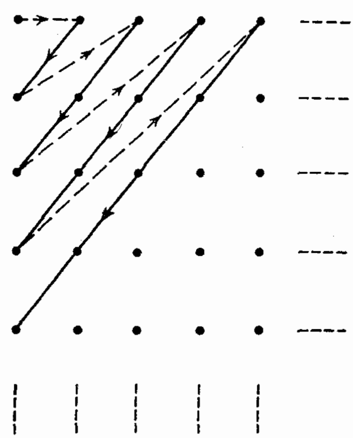
موقع آن رسیده است که اعداد اصلی مورد بحثمان را نامگذاری کنیم. برای این منظور اولین حرف الفبای عبری (א، «الف» تلفظ می‌شود) را با اندیس ۰ به کار می‌بریم.

تعداد اعضای هر مجموعهٔ نامتناهی شمارا را $\aleph_0$ می‌نامیم. فهرست کامل اعداد اصلی‌ای‌که تا کنون مورد بحث قرار داده‌ایم، چنین است

$$۱, ۲, ۳, \ldots, \aleph_0$$

در بخش بعد این فهرست را بسط می‌دهیم.

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \cdots \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \cdots \\
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \cdots \\
\frac{5}{1} & \frac{5}{2} & \frac{5}{3} & \frac{5}{4} & \frac{5}{5} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$



شکل ۱۳. فهرستی از اعدادگویای مثبت

اکنون فرض می‌کنیم که m و n دوعدد اصلی (متناهی یا نامتناهی) باشند، معنی گزارهٔ m کوچکتر از n است (نوشته مـی‌شود $m < n$) بنا بـه تعریف، ایـن است: اگـر X و Y مجموعـه‌هایی با m و n عضو باشند، آنگاه (۱) نگاشتی یک به‌یک از X بتوی Y وجود دارد، و (۲) نگاشتی یک به‌یک از X بروی Y وجـود نـدارد. بـا استفاده از ایـن مفهوم، بآسانی می‌توان دریافت که بین اعداد اصلی فوق این رابطه برقرار است:

$$۱ < ۲ < ۳ < \cdots < \aleph_0$$

در مورد اعداد اصلی متناهی، این ترتیب همان ترتیب معمولی اعداد حقیقی است.

مسائل

۱. ثابت کنید که مجموعهٔ تمام اعداد گویا (مثبت، منفی، و صفر) شماراست. (راهنمایی: به‌روشی که ما در اثبات شمارایی مجموعهٔ تمام اعداد صحیح به‌کار برده‌ایم، مراجعه شود.)

۲. با استفاده از مفهـوم نهفته در شکـل ۱۳، ثابت کنید کـه اگـر $\{X_i\}$ یک ردهٔ شمارا از مجموعه‌های شمارا باشد، آنگاه $\bigcup_i X_i$ نیز شماراست. ایـن موضوع را معمولاً چنین بیان می‌کنیم: «هر اجتماع شمارا از مجموعه‌های شمارا، خود شماراست.»

۳. ثابت کنید که مجموعهٔ تمام نقاط گویا درصفحهٔ مختصات R^2 (یعنی، تمام نقاطی که هر دو مختصات آنها گویا هستند) شماراست.

۴. ثابت کنید اگر X_1 و X_2 شمارا باشند، آنگاه $X_1 \times X_2$ نیز شماراست.

۵. ثابت‌کنید اگر X_1، X_2، ...، X_n شمارا باشند،(n یک عدد صحیح مثبت است) آنگاه $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ نیز شماراست.

۶. ثابت کنید هرمجموعهٔ شمارای نامتناهی با یک زیرمجموعهٔ سره خودش به‌طور عددی هم ارز است.

۷. ثابت کنید هر زیر مجموعهٔ ناتهی از مجموعهٔ شمارا، خود شماراست.

۸. فرض کنید X و Y دو مجموعهٔ ناتهی باشند، و f نگاشتی از X بروی Y باشد. ثابت کنید که اگر X شمارا باشد Y نیز شماراست.

۷. مجموعه‌های ناشمارا

تمام مجموعه‌های نامتناهی که دربخش قبل دیدیم، شمارا بودند. بنابراین ممکن است چنین به‌نظر رسد که تمام مجموعه‌های نامتناهی، شمارا هستند. اگر این موضوع حقیقت داشت و اگر نتیجهٔ غایی همهٔ تجزیه و تحلیلهای مجموعه‌های نامتناهی آن بود که تمام آنها با یکدیگر به‌طورعددی هم‌ارزند، آنگاه نظریهٔ کانتور ارزشی نداشت. ولی چنین نیست، زیرا کانتورکشف کردکه مجموعهٔ نامتناهی R شمارا نیست یا به اصطلاح ما، R ناشمارا یا به‌طور ناشمارا نامتناهی است. چون ما معمولاً اعضای R را با نقاط خط حقیقی یکی می‌انگاریم (به بخش ۴ رجوع شود)، ماحصل این کشف این می‌شود که مجموعهٔ همهٔ نقاط خط حقیقی «بینهایتی است از درجهٔ بالاتر» از نقاط صحیح یا نقاط گویا.

برهان کانتور خیلی ماهرانه‌ولی درحقیقت بسیارساده است. روندبرهان اجمالاً به‌شرح زیر است: فرض می‌کنیم که تمام اعداد حقیقی (به‌صورت اعشاری) را بتوان فهرست کرد، و درحقیقت فهرست شده باشند. سپس یک‌عددحقیقی معرفی می‌کنیم‌که دراین‌فهرست نیست— و به‌این‌ترتیب فرض‌امکان این‌فهرست‌را نقض‌می‌کنیم. درنمایش اعدادحقیقی به‌صورت‌اعشاری، آن شیوه‌ای را به‌کار می‌بریم که درآن از زنجیرهای نامتناهی ۹ها اجتناب شده است، برای مثال ۱/۲ را به‌صورت ...۵۰۰۰ر۰ می‌نویسیم ونه به‌صورت ...۴۹۹۹ر۰. بدین طریق تضمین می‌کنیم که هرعدد حقیقی یک و فقط یک نمایش اعشاری دارد. حال فرض می‌کنیم که تمام اعداد حقیقی را می‌توانیم فهرست کنیم و در واقع آنها را به‌صورت زیر فهرست کرده‌ایم (اگر اعداد «خاصی» را در این جدول نوشته‌ایم، محض سهولت در بیان است.):

اولین عدد ... ۱۳ + ۰ر۷۱۲۹۸۳ ...
دومین عدد ... − ۴ + ۰ر۹۱۳۵۷۲ ...
سومین عدد ... ۰ + ۰ر۸۴۳۲۶۵ ...
....

چون نوشتن این فهرست نامتناهی عملاً غیر ممکن است، فرض اینکه تمام اعداد حقیقی را بدین طریق می‌توان فهرست کرد به این معنی است که فرض کنیم یک قاعدهٔ کلی برای ساختن فهرست، وجود دارد (مشابه آن قاعده‌ای که برای فهرست کردن اعداد گویای مثبت

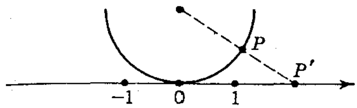
به‌کار بردیم) به طوری که هر عدد حقیقی، جایی در این فهرست ظاهر می‌شود. اکنون یک عدد اعشاری $\ldots a_1a_2a_3$ره طوری می‌سازیم که در فهرست نباشد و به این ترتیب نشان می‌دهیم که فرض شمارا بودن R نادرست است. اگر در اولین عدد فهرست، اولین رقم بعد از اعشار ۱ نباشد، a_1 را برابر ۱، و در غیر این صورت برابر ۲ انتخاب می‌کنیم. واضح است که صرفنظر ازچگونگی رقمهای دیگر، عدد اعشاری جدید ما از اولین عدد درفهرست متمایز است، در مرحلهٔ بعد، در صورتی‌که در دومین عدد فهرست، دومین رقم بعد ازاعشار ۱ نباشد، a_2 را برابر ۱ و در غیر این صورت برابر ۲ انتخاب می‌کنیم. همانند فوق، عدد جدید ما لزوماً از دومین عدد فهرست متمایز خواهد بود. به همین طریق، به ساختن عدد $\ldots a_1a_2a_3$ره ادامه می‌دهیم، و چون این روند به‌طور نامتناهی می‌تواند ادامه یابد، با این روش یک عدد حقیقی اعشاری تعریف می‌شود (عدد ...۱۲۱ره در حالت مثال توضیحی ما) که از هرعددی در فهرست متمایز است. این با فرض امکان فهرست کردن تمام اعداد حقیقی متناقض است و برهان ناشمارا بودن اعداد حقیقی R را کامل می‌کند.

دیدیم (در مسئلهٔ ۶-۱) که مجموعهٔ تمام نقاط گویای خط حقیقی شماراست، و ثابت کردیم که مجموعهٔ تمام نقاط خط حقیقی ناشماراست. از اینجا فوراً نتیجه می‌گیریم که روی خط حقیقی باید نقاط اصم (یعنی اعداد اصم) وجود داشته باشند. درحقیقت، به‌کمک مسئلهٔ ۶-۲ به سادگی معلوم می‌شود که مجموعهٔ تمام اعداد اصم به طور ناشمارا نامتناهی است. با اندک تغییری در تشبیه گیرای ا. ت. بل[1]، می‌توان گفت که اعداد گویا در میان اعداد حقیقی مانند ستارگان درمیان آسمان تاریک‌اند و تاریکی انبوه آسمان، حیطهٔ اعداد اصم است. خواننده احتمالاً با برهان اصم بودن ریشهٔ دوم عدد ۲ آشناست. این برهان وجود اعداد اصم را، با ارائهٔ یک نمونه، ثابت می‌کند. از طرف دیگر آنچه ما گفته‌ایم راهی برای شناسایی اعداد اصم به‌دست نمی‌دهد، بلکه صرفاً نشان می‌دهدکه چنین اعدادی باید وجود داشته باشند، و به‌علاوه اینکه باید به مقدار بسیار زیادی وجود داشته باشند.

اگر خواننده چنین گمان می‌کند که مجموعهٔ تمام نقاط خط حقیقی به‌دلیل نامتناهی بودن طول خط R، ناشماراست، آنگاه می‌توان با استدلال زیر، که نشان می‌دهد هر بازهٔ باز R (هرچقدر هم کوتاه باشد) دقیقاً به‌اندازهٔ خود R نقطه دارد، اورا ازاین اشتباه به در آورد. فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشد به‌طوری که $a < b$ و بازهٔ باز (a, b) را در نظر بگیرید. شکل ۱۴ نشان می‌دهد که چگونه یک تناظر یک به یک بین نقاط P از (a, b) و نقاط P' از R برقرار کنیم: (a, b) را به شکل یک نیم دایره خم می‌کنیم، و این نیم دایره را به طور مماس به صورتی که در شکل نشان داده شده روی خط حقیقی R قرار می‌دهیم، و P و P' را توسط پرتویی که از مرکز نیم دایره می‌گذرد به یکدیگر مربوط می‌کنیم. اگر فرمولها را به این قبیل دلایل هندسی ترجیح می‌دهید، ملاحظه کنید که $y = a + (b - a)x$ یک هم ارزی عددی بین اعدادحقیقی $x \in (0, 1)$ و اعدادحقیقی $y \in (a, b)$ است، و $z = \tan \pi(x - 1/2)$ هم‌ارزی عددی دیگری بین $(0, 1)$ و تمام R است. حال نتیجه می‌شود که (a, b) و R با یکدیگر هم‌ارز عددی‌اند.

---

1. E.T.Bell



شکل ۱۴. تناظر یک به‌یک بین یک بازهٔ باز و محور حقیقی

اکنون آمادگی داریم که نشان دهیم هر زیر مجموعهٔ خط حقیقی R، مانند X، که یک بازهٔ باز I را دربر دارد، به‌طور عددی هم‌ارز R است، حتی اگر ساختمان X بسیار پیچیده باشد. اثبات این امر بسیار آسان است، و صرفاً قضیهٔ شرودر ـ برنشتاین و نتیجهٔ بالا، که I به‌طور عددی هم‌ارز R است، به کار برده می‌شود. استدلال را می‌توان در دو جمله خلاصه کرد. چون X به‌طور عددی هم‌ارزخودش است، می‌توان گفت که به‌طورعددی هم‌ارز یک زیرمجموعهٔ R است، و ازطرف دیگر R به‌طورعددی هم‌ارز یک زیرمجموعهٔ X است (یعنی I). حال از قضیهٔ شرودر ـ برنشتاین فوراً نتیجه می‌شود که R و X به‌طور عددی هم‌ارزند. توجه کنید که تا اینجا تمام هم ارزیهای عددی توسط یک تناظر یک‌ـبه‌یک بین خود مجموعه‌های مورد بحث، اثبات شده است؛ ولی درحالت اخیر انجام این امرامکان ندارد، زیرا درمورد سرشت خاص مجموعهٔ X مفروضات خیلی‌کمی داده‌شده است. بدون استفاده ازقضیهٔ شرودر ـ برنشتاین اثبات قضایایی از نوع بالا بسیار مشکل خواهد بود.

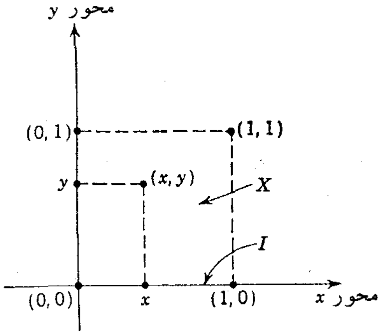
کاربرد جالب دیگری از قضیهٔ شرودر ـ برنشتاین ارائه می‌دهیم. صفحهٔ مختصات $R^۲$ و زیرمجموعهٔ X از $R^۲$ که به‌صورت $X=\{(x, y): ۰ \leqslant x < ۱,\ ۰ \leqslant y < ۱\}$ تعریف شده درنظر بگیرید. نشان می‌دهیم که X به‌طور عددی با بازهٔ بسته ـ باز

$$I=\{(x, y): ۰ \leqslant x < ۱,\ y = ۰\}$$

که قاعدهٔ X را تشکیل می‌دهد، هم‌ارز است (به‌شکل ۱۵ رجوع کنید) چون I به‌طور عددی هم ارز یک زیر مجموعهٔ X است (یعنی خود I)، اگر بتوانیم نگاشتی یک به‌یک از X بتوی I برقرار کنیم، حکم ما از قضیهٔ شرودر ـ برنشتاین فوراً نتیجه می‌شود. این نگاشت را هم اکنون می‌سازیم. فرض کنید (x, y) نقطهٔ دلخواهی از X باشد. هریک از x و y یک بسط اعشاری منحصر به‌فرد دارد که به‌زنجیر نامتناهی ۹ها خاتمه نمی‌یابد، عدد z را از این دو بسط با یک درمیان قرار دادن ارقام آنها تشکیل می‌دهیم، برای مثال، اگر $x = ۰٫۳۲۷\ldots$ و $y = ۰٫۶۱۴\ldots$ آنگاه $z = ۰٫۳۶۲۱۷۴\ldots$. حال z را (که به‌زنجیر نامتناهی ۹ ها ختم نمی‌شود) با یک نقطهٔ I یکی می‌انگاریم. این روش، نگاشت یک به‌یک مطلوب از X بتوی I را ارائه می‌دهد و این نتیجهٔ شگفت‌انگیز را ثابت می‌کند که تعداد نقاط داخل یک مربع بیش از نقاط روی یکی از اضلاعش نیست.

در بخش ۶ علامت $\aleph_۰$ را برای تعداد اعضای هر مجموعهٔ شمارای نامتناهی معرفی کردیم، درآغاز بخش کنونی ثابت کردیم که مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی R (یا تمام نقاط روی خط حقیقی) به‌طورناشمارا نامتناهی است. حال علامت c (که عدداصلی متصله نامیده می‌شود) رابرای تعداد اعضای R به‌کارمی‌بریم. c عدد اصلی R و عدداصلی هرمجموعه‌ای است که به‌طور عددی هم‌ارز R باشد، در سه پاراگراف فوق نشان دادیم که c عدد اصلی

هر بازهٔ باز است، عدد اصلی هر زیرمجموعه‌ای از R است که یک بازهٔ باز در بر داشته باشد، و همچنین عدد اصلی مجموعهٔ X است که X همان زیرمجموعهٔ صفحهٔ مختصات است که در شکل ۱۵ نشان داده شده است. حال فهرست اعداد اصلی، به صورت ذیل توسعه یافته است:



شکل ۱۵

$$۱, ۲, ۳, \ldots, \aleph_0, c,$$

و این اعداد اصلی به‌صورت

$$۱ < ۲ < ۳ < \cdots < \aleph_0 < c$$

به‌یکدیگر مربوطند. در اینجا ما با یکی از معروفترین مسائل حل نشدهٔ ریاضیات مواجه می‌شویم. آیا عددی اصلی که بزرگتر از $\aleph_0$ و کوچکتر از c باشد، وجود دارد؟ هیچکس جواب این سؤال را نمی‌داند. خود کانتور فکر می‌کرد که چنین عددی اصلی وجود ندارد، به‌عبارت دیگر، او فکر می‌کرد که c اولین عدد اصلی نامتناهی بزرگتر از $\aleph_0$ است و این حدس او به عنوان فرض متصلهٔ کانتور معروف شده است. فرض متصله را به این صورت نیز می‌توان بیان کرد: c عدد اصلی هر مجموعهٔ ناشمارا از اعداد حقیقی است.[1]

سؤال دیگری در این جا به‌طور طبیعی مطرح می‌شود و خوشبختانه ما قادر به‌جواب دادن آن هستیم. آیا عدد اصلی بزرگتر از c وجود دارد؟ بله وجود دارد، برای مثال، عدد اصلی ردهٔ تمام زیر مجموعه‌های R. این جواب از حقیقت کلیتر زیر نتیجه می‌شود: اگر X مجموعه‌ای ناتهی باشد، آنگاه عدد اصلی X از عدد اصلی ردهٔ تمام زیرمجموعه‌های X کوچکتر است.

ما این گزاره را به صورت ذیل ثابت می‌کنیم. برطبق تعریفی که در آخرین پاراگراف بخش قبلی داده شد، باید نشان دهیم که (۱) نگاشت یک به‌یک از X بتوی ردهٔ تمام زیر مجموعه‌های X وجود دارد، و (۲) نشان دهیم که چنین نگاشتی از X بروی این رده وجود ندارد. برای اثبات (۱) کافی است نگاشت $x \rightarrow \{x\}$ را ذکر کنیم که به هر عضو x مجموعه‌ای متناظر می‌کند که تنها از عضو x تشکیل شده است. (۲) را به‌طور غیرمستقیم ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم که نگاشت یک به‌یک f از X بروی ردهٔ تمام زیرمجموعه‌های X وجود دارد. حال از فرض وجود چنین نگاشتی به یک تناقض می‌رسیم. فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از X است که به صورت $A = \{x : x \notin f(x)\}$ تعریف شده است. چون نگاشت f بروی است عضوی مانند a در X باید وجود داشته باشد به‌طوری‌که $f(a) = A$. a کجاست؟ اگر a در A باشد، آنگاه بنا بر تعریف A، $a \notin f(a)$ و چون $f(a) = A$، $a \notin A$. این یک تناقض است، بنابراین a نمی‌تواند در A باشد. اما اگر a در A نباشد، آنگاه مجدداً از تعریف A داریم که $a \in f(a)$ یا $a \in A$ که تناقض دیگری است. این‌وضع غیر-

---

۱. برای اطلاع بیشتر دربارهٔ فرضیهٔ متصله به‌صفحه ۱۲۵ کتاب ویلدر [۴۲] و گودل [۱۲] رجوع شود.

ممکن است، بنابراین فرض ما مبنی بر اینکه چنین نگاشتی وجود دارد نادرست است.

این نتیجه تضمین می‌کند که هر عدد اصلی که داده شود همیشه عدد اصلی بزرگتر از آن وجود دارد. اگر از مجموعهٔ $X_1 = \{۱\}$ که شامل فقط یک عضو است شروع کنیم، آنگاه دوزیرمجموعه وجود دارند، مجموعهٔ تهی $\varnothing$ وخود مجموعهٔ $\{۱\}$. اگر $X_۲ = \{۱, ۲\}$ مجموعه‌ای شامل دوعضو باشد، آنگاه چهار زیرمجموعه وجود دارد: $\varnothing, \{۱\}, \{۲\}, \{۱, ۲\}$ اگر $X_۳ = \{۱, ۲, ۳\}$ مجموعه‌ای شامل سه عضو باشد، آنگاه هشت زیرمجموعه وجود دارد: $\varnothing, \{۱\}, \{۲\}, \{۳\}, \{۱, ۲\}, \{۱, ۳\}, \{۲, ۳\}, \{۱, ۲, ۳\}$. به‌طور کلی، اگر X_n مجموعه‌ای با n عضو باشد (که n یک عدداصلی متناهی است)، آنگاه X_n دارای ۲^n زیر-مجموعه است. حال اگر n را یک عدد اصلی نامتناهی بگیریم، مطلب اخیر، ما را به فکر می‌اندازد که ۲^n را تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی دلخواه، تعریف کنیم. اگر n اولین عدد اصلی نامتناهی، یعنی $\aleph_0$، باشد، آنگاه می‌توان نشان داد که

$$۲^{\aleph_0} = c.$$

آسانترین اثبات این حقیقت، بستگی به مفاهیمی دارد که درپاراگراف ذیل بحث شده است.

بازهٔ بسته ــ باز $[۰, ۱)$ و عدد حقیقی x را در این بازه در نظر بگیرید. در اینجا می‌خواهیم معنی بسط اعشاری، دوتائی و سه‌تائی x راشرح دهیم. برای سهولت دربیان، x را برابر $۱/۴$ می‌گیریم. چگونه ما به‌بسط اعشاری $۱/۴$ می‌رسیم؟ اول $[۰, ۱)$ را به ۱۰ بازهٔ بسته ـ باز به صورت زیر تقسیم می‌کنیم

$$[۰, ۱/۱۰), [۱/۱۰, ۲/۱۰), \ldots, [۹/۱۰, ۱),$$

و ۱۰ رقم ۰، ۱، ۲، ...، ۹ را به‌ترتیب برای شماره‌گذاری آنها به‌کارمی بریم. عدد $۱/۴$ دقیقاً به‌یکی ازاین بازه‌ها متعلق است، یعنی بــه $[۲/۱۰, ۳/۱۰)$. این بازه را با رقم ۲ نشان کرده‌ایم، بنابراین ۲ اولین رقم بعد از اعشار در بسط اعشاری $۱/۴$ است.

$$۱/۴ = ۰٫۲\ldots$$

سپس بازهٔ $[۲/۱۰, ۳/۱۰)$ را به ۱۰ بازهٔ بسته ــ باز به‌صورت زیر تقسیم می‌کنیم:

$$[۲/۱۰, ۲۱/۱۰۰), [۲۱/۱۰۰, ۲۲/۱۰۰), \ldots, [۲۹/۱۰۰, ۳/۱۰),$$

حال ارقام دهگانی را به‌ترتیب برای‌شماره‌گذاری این‌بازه‌ها به‌کارمی بریم. عدد $۱/۴$ متعلق به $[۲۵/۱۰۰, ۲۶/۱۰۰)$ می‌باشد، کــه ایــن بازه با رقم ۵ نشان شده است، بنابراین ۵ دومین رقم بعد از اعشار در بسط اعشاری $۱/۴$ است:

$$۱/۴ = ۰٫۲۵\ldots$$

اگر این روند را دقیقاً همان‌طور که آغاز کردیم ادامه دهیم، می‌توانیم بسط اعشاری $۱/۴$ را با هرتعداد رقمی‌که مایل باشیم به‌دست آوریم. با ادامهٔ این روش، تصادفاً از این به‌بعد در هر مرحله، ۰ به‌دست می‌آوریم:

$$۱/۴ = ۰٫۲۵۰۰۰\ldots$$

خواننده باید توجه داشته باشد که به‌صورتی که این دستگاه را شرح داده‌ایم هیچ ابهامی در آن وجود ندارد: بر خلاف آنچه مرسوم است ۰ر۲۴۹۹۹ . . . را نباید به‌عنوان بسط اعشاری دیگری از ۱/۴ که «معادل» ۰ر۲۵۰۰۰ . . . است، درنظر گرفت. در این دستگاه، هرعدد حقیقی x در (۱ و ۰] دارای یك و فقط یك بسط اعشاری است که هیچگاه به‌زنجیر نامتناهی ۹ها ختم نمی‌شود. در بحث فوق عدد ۱۰ هیچ نقش سحرآمیزی ندارد. اگر در هر مرحله، بازۀ بسته ــ باز (۱ و ۰] را به دو قسمت متساوی تقسیم کنیم، و اگر دو رقم ۰ و ۱ را برای نامگذاری آنها به‌کار بریم، بسط دوتایی هرعددحقیقی x در (۱ و ۰] را به‌دست می‌آوریم. به‌سادگی دیده می‌شود که بسط دوتایی عدد ۱/۴ برابر ۰ر۰۱۰۰۰ . . . است. بسط سه‌تایی عدد x به صورت مشابه پیدا می‌شود: در هر مرحله، بازۀ بسته ــ باز را به سه بازۀ بسته ــ بازمساوی تقسیم می‌کنیم، وسه رقم ۰ و ۱ و ۲ را برای نامگذاری‌آنها به‌کار می‌بریم. با یک لحظه تفکر خواننده درمی‌یابد که بسط سه‌تایی ۱/۴ برابر ۰ر۰۲۰۲ . . . است. همان‌طورکه (دردستگاه ما) بسط اعشاری یک عدد در (۱ و ۰] نمی‌تواند به‌زنجیری نامتناهی از ۹ها ختم شود، به همان ترتیب بسط دوتایی آن عدد به‌زنجیری نامتناهی از ۱ها، و بسط سه‌تایی آن به زنجیری نامتناهی از ۲ها ختم نمی‌شود.

اکنون این مطالب را برای اثبات

$$۲^{\aleph_0} = c$$

به‌کار می‌بریم. دومجموعۀ $N = \{۱, ۲, ۳, . . .\}$ و $I = [۰, ۱)$ را درنظر بگیرید، عدد اصلی مجموعۀ اولی $\aleph_0$ وعدداصلی مجموعۀ دومی c است. اگر N نمایانگر ردۀ‌تمام زیر-مجموعه‌های N باشد، آنگاه‌بنا بر تعریف، عدداصلی N برابر $۲^{\aleph_0}$ است. برهان‌ما برمی‌گردد به‌این که نشان دهیم یک تناظر یک به‌یک بین N و I وجوددارد. ابتدا یک نگاشت یک به‌یک f از N بتوی I می‌سازیم. اگر A یک زیرمجموعۀ N باشد آنگاه $f(A)$ آن عدد حقیقی x در I است‌که بسط اعشاری‌آن $x = ۰ر d_۱ d_۲ d_۳ . . .$ است بااین شرط‌که d_n برابر ۳ است‌اگر n در A باشد وبرابر ۵ است اگر n در A نباشد. هردورقم دیگری غیر از ۹ را برای‌این تعریف می‌توان به‌کاربرد. سپس‌یک نگاشت یک‌به‌یک g از I بتوی N می‌سازیم. اگرx یک عددحقیقی در I باشد، و اگر $x = ۰ر b_۱ b_۲ b_۳ . . .$ بسط دوتایی آن باشد (هر b_n یا ۱ است یا ۰)، آنگاه $g(x)$ آن زیرمجموعۀ N است‌که به‌صورت $A = \{n : b_n = ۱\}$ تعریف می‌شود. با رجوع به قضیۀ شرودر ـ برنشتاین که هم‌ارزی عددی N و I را تحت این شرایط تضمین می‌کند، اثبات خاتمه می‌یابد.

اگر اشاره‌ای را که در $c = ۲^{\aleph_0}$ نهفته است تعقیب کنیم، و ۲^c و $۲^{۲^c}$ و غیره را پی در پی تشکیل دهیم، زنجیری از اعداد اصلی که درآن تعدادی نامتناهی از اعداد اصلی نامتناهی وجود دارد، به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$۱ < ۲ < ۳ < \cdots < \aleph_0 < c < ۲^c < ۲^{۲^c} < \cdots$$

واضح است که فقط یک قسم نامتناهی شمارا وجود دارد، نماد آن $\aleph_0$ است، و بعد ازآن دنباله‌ای نامتناهی از نامتناهی‌های ناشمارا وجود دارد که همۀ آنها از یکدیگرمتمایزهستند.

در این جا بحث در مورد این موضوعات را به پایان می‌رسانیم. ما فقط به نظریهٔ کانتور اشاره‌ای کرده‌ایم و مسائل دیگر از قبیل مسائل مربوط به‌جمع و ضرب اعداد اصلی نامتناهی وقوانین حاکم برآنها را کاملاً کنار گذاشته‌ایم. مفاهیم فوق را نه به‌خاطرخودشان، بلکه برای کاربردی که در جبر و توپولوژی دارند بیان کرده‌ایم، و منظور اصلی ما در سرتاسر دو بخش گذشته این بوده است که خواننده را با بعضی نکات لازم در مورد مجموعه‌های شمارا و ناشمارا و فرق بین آنها آشنا سازیم.[۱]

مسائل

۱. به‌طور هندسی نشان دهید که مجموعهٔ تمام نقاط صفحهٔ مختصات $R^{۲}$ به‌طور عددی هم‌ارز آن زیرمجموعه X از $R^{۲}$ است که در شکل ۱۵ نشان داده شده و به صورت $X = \{(x, y): ۰ \leqslant x < ۱, ۰ \leqslant y < ۱\}$ تعریف شده است. بنابراین c عدد اصلی $R^{۲}$ است. [راهنمایی: یک نیمکرهٔ باز (= نیمکره منهای مرزآن) را به‌طورمماس برمرکز X قراردهید ویک‌بارنقاط نیمکره را توسط خطی‌که ازمرکزآن می‌گذرد، برصفحه مختصات تصویر کنید و باردیگر تصویر قائم نیمکره را روی صفحهٔ مختصات ($R^{۲}$) به‌دست آورید و سپس قضیهٔ شرودر- برنشتاین را به‌کار برید.]

۲. نشان دهید که عدد اصلی زیرمجموعهٔ X از $R^{۳}$ که به صورت

$$X = \{(x_{۱}, x_{۲}, x_{۳}): ۰ \leqslant x_i < ۱, i = ۱, ۲, ۳\}$$

تعریف شده، c است.

۳. فرض‌کنید n یک‌عددصحیح‌مثبت‌باشدو یک‌معادلهٔکثیرالجمله‌ای باضرایب‌صحیح به‌صورت

$$a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \cdots + a_۰ = ۰$$

درنظربگیریدکه درآن $a_n \neq ۰$. چنین معادله‌ای دقیقاً n ریشهٔ‌مختلط دارد (البته بعضی ازاین ریشه‌ها ممکن‌است حقیقی‌باشد). عدد جبری،‌عددمختلطی است‌که ریشهٔ چنین معادله‌ای باشد. مجموعهٔ تمام‌اعدادجبری شامل مجموعهٔ تمام اعدادگویاست (به‌عنوان‌مثال ۲/۳ ریشهٔ معادلهٔ $۳x - ۲ = ۰$ است) و اعداد دیگری نیز دربر دارد (ریشهٔ دوم عدد ۲ یک ریشهٔ معادلهٔ $x^{۲} - ۲ = ۰$ است، و $۱ + i$ یک ریشهٔ معادلهٔ $x^{۲} - ۲x + ۲ = ۰$ می‌باشد). اعداد مختلطی که جبری‌نباشند، اعدادمتعالی نامیده می‌شوند. عدد e و π معروفترین اعداد متعالی هستند، هرچندمتعالی‌بودن آنها به‌سختی اثبات می‌شود (رجوع شود به‌فصل ۹ کتاب نی‌ون [۳۳]). ثابت کنید که اعداد متعالی حقیقی وجود دارند (راهنمایی: رجوع شود به مسئلهٔ ۶ - ۵) همچنین ثابت کنید که مجموعهٔ تمام اعداد متعالی حقیقی به‌طور ناشمارا نامتناهی است.

۴. ثابت کنید هر مجموعهٔ نامتناهی با یک زیرمجموعهٔ سرهٔ خودش به‌طور عددی هم‌ارز است (راهنمایی: رجوع شود به مسئلهٔ ۶ - ۶).

---

۱. به خواننده‌ای که مایل است چیزی درباره حساب اعداد اصلی نامتناهی بیاموزد، منابع زیر را توصیه می‌کنیم: بخش ۲۴ کتاب هالموس [۱۶]، فصل ۲ کتاب کامکه [۱۴]، فصول ۷- ۱۰ کتاب سرپینسکی [۳۷]، فصل ۲ کتاب فرنکل [۹].

۵. ثابت کنید که عدد اصلی مجموعهٔ تمام توابع حقیقی که روی بازهٔ بستهٔ واحد تعریف شده‌اند 2^c است. [راهنمایی: تعداد این توابع لااقل به اندازهٔ تعداد توابع مشخصه‌ای است (یعنی توابعی که مقادیر آنها ۰ یا ۱ است) که روی بازهٔ بستهٔ واحد تعریف شده‌اند.]

۸. مجموعه های جزئاً مرتب و شبکه‌ها

غالباً دو نوع رابطه در ریاضیات ظاهر می‌شود: رابطهٔ ترتیبی و رابطهٔ هم ارزی. ما درمسئلهٔ ۱-۲ به رابطهٔ ترتیبی اشاره کردیم، و در بخش ۵ رابطهٔ هم‌ارزی را نسبتاً به‌تفصیل شرح دادیم. اکنون به بحث رابطهٔ ترتیبی برمی‌گردیم و به بسط آن قسمتهایی از این مبحث که برای کارهای بعدی ما لازم است می‌پردازیم. برای خواننده مفید است به خاطر بسپارد که رابطهٔ ترتیبی جزئی (به صورتی که در زیر تعریف می‌کنیم) تعمیمی است از مفاهیم شمول مجموعه‌ها و رابطهٔ ترتیبی روی خط حقیقی.

فرض کنید P مجموعهٔ ناتهی باشد. یک رابطهٔ ترتیبی جزئی در P، بنا به تعریف، رابطه‌ای است که با $\leqslant$ نمایش داده می‌شود و دارای خواص زیر است:

(۱) به‌ازای هر x، $x \leqslant x$ (انعکاسی)

(۲) $x \leqslant y, y \leqslant x \Longrightarrow y = x$ (پاد تقارنی)

(۳) $x \leqslant y, y \leqslant z \Longrightarrow x \leqslant z$ (تعدی)

بعضی اوقات $x \leqslant y$ را به صورت معادلش $y \geqslant x$ می‌نویسیم. مجموعهٔ ناتهی P را که درآن رابطهٔ ترتیبی جزئی تعریف شده باشد، مجموعه جزئاً مرتب گوییم. واضح است که هر زیرمجموعهٔ ناتهی از مجموعهٔ جزئاً مرتب به نوبهٔ خود مجموعهٔ جزئاً مرتب است.

مجموعه‌های جزئاً مرتب در تمام شاخه‌های ریاضیات به مقدار زیادی وجود دارند. بعضی از این مجموعه‌ها ساده‌اند و به آسانی به دست می‌آیند، در صورتی که بعضی دیگر پیچیده‌اند و کم و بیش غیرقابل دسترسی. ما چهار مثال ارائه می‌دهیم که ذاتاً با یکدیگر متفاوت‌اند ولی در اهمیت و در اینکه به‌سادگی توصیف می‌شوند با یکدیگر وجه اشتراک دارند.

مثال ۱. P را مجموعهٔ تمام اعدادصحیح فرض کنید و $m \leqslant n$ را به‌معنی «m، n را عاد می‌کند» بگیرید.

مثال ۲. P را مجموعهٔ اعداد حقیقی R و $x \leqslant y$ را به‌معنی معمولی‌آن فرض‌کنید (رجوع شود به مسئلهٔ ۱-۲).

مثال ۳. فرض کنید P ردهٔ تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ مرجع U باشد، و $A \leqslant B$ به‌این معنی باشد که A زیرمجموعهٔ B است.

مثال ۴. فرض‌کنید P مجموعهٔ تمام توابع حقیقی باشدکه روی یک مجموعهٔ ناتهی X تعریف شده، و $f \leqslant g$ به‌این معنی باشد که به‌ازای هر x، $f(x) \leqslant g(x)$.

دو عضو x و y از یک مجموعهٔ جزئاً مرتب را قابل مقایسه گوییم اگر یکی از آنها کوچکتر از دیگری یا مساوی آن باشد، یعنی، اگر $x \leqslant y$ یا $y \leqslant x$. کلمهٔ «جزئاً»

در عبارت «مجموعهٔ جزئاً مرتب» به این منظور است که بر امکان وجود دو عضو غیر قابل مقایسه در مجموعه تأکید شود، مثلاً در مثال (۱)، اعداد صحیح ۴ و ۶ قابل مقایسه نیستند، زیرا هیچکدام دیگری را عاد نمی‌کند، و در مثال ۳، اگر مجموعهٔ مرجع U بیش از یک عضو داشته‌باشد، همیشه دو زیرمجموعه در U می‌توان یافت‌که هیچکدام ازآنها زیرمجموعهٔ دیگری نیست.

بعضی رابطه‌های ترتیبی جزئی علاوه بر سه خاصیت مطلوب، خاصیت چهارمی نیز به صورت زیر دارند:

(۴) هر دو عضو قابل مقایسه‌اند.

هر رابطهٔ ترتیبی جزئی با خاصیت (۴)، رابطهٔ ترتیبی کلی (یا خطی) نامیده می‌شود، و اگر رابطهٔ مجموعهٔ جزئاً مرتب در شرط (۴) صدق کند، مجموعه را کلاً مرتب، یا مجموعهٔ مرتب خطی، یا بیشتر اوقات زنجیر می‌نامند. مثال ۲ و زیرمجموعهٔ $\{2^n, \ldots, 8, 4, 2\}$ از مثال ۱، زنجیر می‌باشند. فرض کنید P مجموعهٔ جزئاً مرتب باشد. عضو x در P را ماکسیمال گوییم اگر x. $y = x \Longrightarrow y \geqslant x$، یعنی، اگر هیچ عضوی به‌غیر از x بزرگتراز x یا مساوی‌آن نباشد. بنابراین یک عضو ماکسیمال در P، عضوی است در P که‌کوچکتر-از یا مساوی هیچ عضو دیگر P نباشد. مثالهای ۱، ۲، ۴ اعضای ماکسیمال ندارند. مثال ۳ یک عضو ماکسیمال واحد دارد: خود مجموعهٔ U.

فرض کنید A یک زیرمجموعهٔ ناتهی ازیک مجموعهٔ جزئاً مرتب P باشد. عضو x در P کران پایین A نامیده می‌شود اگر به ازای هر $a \in A$، $a \geqslant x$؛ و کران پایین A بزرگترین کران پایین A نامیده می‌شود اگر از هر کران پایین A بزرگتر یا مساوی با آن باشد. مشابهاً، عضو y در P را کران بالای A گوییم اگر به‌ازای هر $a \in A$، $a \leqslant y$ و کوچکترین کران بالای A عبارت است از یک کران بالای A که از هر کران بالای A کوچکتر یا مساوی با آن باشد. درحالت کلی، A می‌تواند تعداد زیادی کران پایین و کران بالا داشته باشد، ولی به سادگی ثابت می‌شود (رجوع شود به مسئلهٔ ۱) که بزرگترین کران پایین (یا کوچکترین کران بالا)، در صورت وجود، منحصر به‌فرد است. بنابراین درصورت وجود، «بزرگترین کران پایین» و «کوچکترین کران بالا» را می‌توان به صورت معرفه به کار برد.

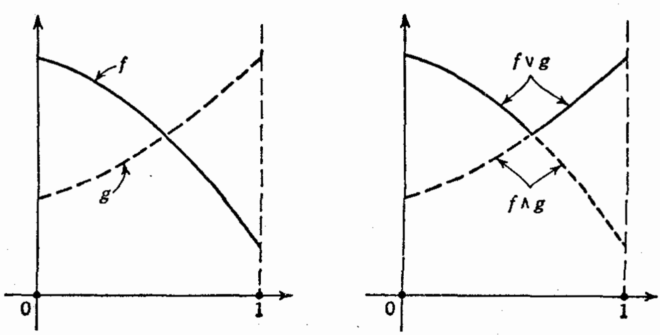
ما این مفاهیم را به کمک بعضی از مجموعه‌های جزئاً مرتب که در بالا ذکر شده است روشن می‌کنیم.

در مثال ۱، فرض کنید زیر مجموعهٔ A از اعداد صحیح ۴ و ۶ تشکیل شده باشد. هر عدد صحیحی‌که بر ۴ و ۶ بخش‌پذیر باشد یک کران بالای $\{6, 4\}$ است. ۱۲، ۲۴، ۳۶ و غیره، همه‌کرانهای بالای $\{6, 4\}$ هستند. به‌وضوح ۱۲ کوچکترین کران بالای $\{6, 4\}$ است، زیرا ۱۲ کوچکتر از هر کران بالا یا مساوی با آن است (۱۲ هر کران بالا را عاد می‌کند.) در مثال ۱ بزرگترین کران پایین هر زوج از اعداد صحیح بزرگترین مقسوم علیه مشترک آنها، و کوچکترین کران بالای آنها کوچکترین مضرب مشترک آنها است و با هر دوی این مفاهیم در حساب مقدماتی آشنا شده‌ایم.

حال مثال ۲، خط حقیقی با رابطهٔ ترتیبی طبیعی آن، را در نظر می‌گیریم. خواننده بدون شک از اطلاعات خود در حساب دیفرانسیل و انتگرال به یاد می‌آورد که ۳ یک کران بالای مجموعهٔ $\{(1 + 1/n)^n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ است و کوچکترین کران بالای این مجموعه ثابت بنیادی $e = 2{,}71828\ldots$ است. همان طور که قبلاً بیان کردیم، یک خاصیت اساسی خط حقیقی این است که هر زیر مجموعهٔ ناتهی آن که یک کران پایین (یا کران بالا) داشته باشد، دارای بزرگترین کران پایین (یا کوچکترین کران بالا) است. چندین علامت و اصطلاح استانده در مورد این مثال وجود دارد که می‌باید ذکر شوند. فرض کنید A مجموعه‌ای ناتهی از اعداد حقیقی باشد. اگر A یک کران پایین داشته باشد، آنگاه بزرگترین کران پایین A را معمولاً اینفیموم A می‌نامند و به صورت $\inf A$ نمایش می‌دهند. به همین روال، اگر A یک کران بالا داشته باشد، آنگاه کوچکترین کران بالای A سوپرموم A نامیده می‌شود و به صورت $\sup A$ نوشته می‌شود. اگر A متناهی باشد، آنگاه $\inf A$ و $\sup A$ هر دو موجود و متعلق‌اند به A. در این حالت اغلب آنها را مینیموم و ماکسیموم A می‌نامند و به $\min A$ و $\max A$ نمایش می‌دهند. اگر A از دو عضو a_1 و a_2 تشکیل شده باشد، آنگاه $\min A$ کوچکترین دو عضو a_1 و a_2 و $\max A$ بزرگترین دو عضو a_1 و a_2 می‌باشد.

در خاتمه مثال ۳ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\mathbf{A}$ رده‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های U باشد. یک کران پایین $\mathbf{A}$ عبارت است از مجموعه‌ای از U که مشمول هرعضو $\mathbf{A}$ باشد، و بزرگترین کران پایین $\mathbf{A}$ عبارت است از اشتراک تمام مجموعه‌های آن. به همین ترتیب کوچکترین کران بالای $\mathbf{A}$، اجتماع تمام مجموعه‌های آن است.

یکی از اهداف اصلی ما در این بخش بیان لم تسورن است، لمی، که ابزار بسیار توانایی در برهان است و تقریباً در همهٔ قسمتهای ریاضیات محض غیرقابل اجتناب. لم تسورن می‌گوید: اگر P مجموعه‌ای جزئاً مرتب باشد که در آن هر زنجیر، یک کران بالا داشته باشد، آنگاه P یک عضو ماکسیمال دارد. به معنی معمولی این لم قابل اثبات نیست. مع‌هذا می‌توان نشان داد که لم تسورن با اصل انتخاب که به صورت زیر بیان می‌شود منطقاً معادل است: در هر ردهٔ ناتهی از مجموعه‌های ناتهی، مجموعه‌ای می‌توان تشکیل داد که از هر مجموعهٔ آن رده دقیقاً یک عضو در بر داشته باشد. اصل انتخاب ممکن است



شکل ۱۶. معنی هندسی $f \wedge g$ و $f \vee g$

برای خواننده، به‌طور شهودی واضح باشد، و در حقیقت این اصل یا هر اصل معادل آن، در منطقی که ما به کار می‌بریم، معمولاً به‌عنوان اصل موضوع پذیرفته می‌شود. بنابراین، ما در استدلالها لم تسورن را به‌عنوان یک اصل منطق قبول می‌کنیم. به خوانندهٔ علاقه‌مند به این موضوعات توصیه می‌کنیم که به کتابهای دیگر رجوع کند.[۱]

شبکه، مجموعه‌ای جزئاًمرتب مانند L است‌که درآن هرزوج ازاعضا بزرگترین‌کران پایین و کوچکترین کران بالا دارد. اگر x و y دو عضو L باشند، بزرگترین کران پایین و کوچکترین‌کران‌بالای آنها رابه‌ترتیب به $x \wedge y$ و $x \vee y$ نمایش می‌دهیم. این نمادها عمداً طوری انتخاب شده‌اندکه شبیه نمادهای اشتراک واجتماع دومجموعه باشند وآنها را به‌ذهن القا کنند. ما حتی برای نمایان‌تر کردن این تشابه $x \wedge y$ و $x \vee y$ را به ترتیب، مشترک و مجتمع x و y می‌نامیم. حال ممکن است به این فکر بیفتیم که تمام خواص اشتراک و اجتماع در جبر مجموعه‌ها را می‌توان به شبکه انتقال داد، اما این درست نیست، بعضی خواص منتقل می‌شوند (رجوع شود به مسئلهٔ ۵)، ولی بعضی خواص دیگر، مثل قوانین توزیعپذیری، در بعضی شبکه‌ها نادرست است.

به‌سادگی مشاهده می‌شود که هر چهار مثال قبلی ما شبکه هستند. در مثال ۱، $m \wedge n$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک m و n، و $m \vee n$ کوچکترین مضرب مشترک n و m هستند، و در مثال ۳، $A \wedge B = A \cap B$ و $A \vee B = A \cup B$. در مثال ۲، اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، آنگاه $x \wedge y$، $\min\{x, y\}$ و $x \vee y$، $\max\{x, y\}$ است. در مثال ۴، $f \wedge g$ تابعی حقیقی است که روی X به‌صورت

$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

تعریف می‌شود، $f \vee g$ تابعی است که به‌صورت $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ تعریف شده است. شکل ۱۶، معنی هندسی $f \wedge g$ و $f \vee g$ را برای دوتابع حقیقی f و g که روی بازهٔ بستهٔ واحد [۰, ۱] تعریف شده‌اند نشان می‌دهد.

فرض کنید L یک شبکه باشد. یک زیر شبکهٔ L، زیر مجموعه‌ای ناتهی از L مانند L_1 است، با این خاصیت که اگر x و y در L_1 باشند، آنگاه $x \wedge y$ و $x \vee y$ نیز در L_1 باشند. اگر L شبکهٔ تمام توابع حقیقی که روی بازهٔ بستهٔ واحد تعریف شده‌اند باشد، واگر L_1 مجموعهٔ تمام توابع پیوسته در L باشد،آنگاه به‌سادگی دیده می‌شود که L_1 یک زیر-شبکهٔ L است.

اگر یک شبکه این خاصیت اضافی را نیز داشته باشد که هر زیرمجموعهٔ ناتهی آن دارای بزرگترین کران پایین و کوچکترین کران بالا باشد، آنگاه این شبکه، شبکهٔ کامل نامیده می‌شود. مثال ۳ تنها شبکهٔ کامل در فهرست ما می‌باشد.

چندین نوع مختلف شبکه وجود دارد و نظریهٔ این دستگاهها کاربردهای بسیار متنوع

---

۱. مثلا رجوع شود به کتاب ویلدرصفحات ۱۲۹ــ۱۳۲ [۴۲]، بخشهای ۱۵ــ۱۶ کتاب‌هالموس [۱۶]، صفحهٔ ۴۲ کتاب برکاف [۴]، بخش ۶ کتاب سرپینسکی [۳۷]، یا صفحهٔ ۴۴ کتاب فرنکل و بار-هیلل [۱۰]

مفید و قابل توجه دارد (رجوع شود به برکاف [۴]). ما چند نوع از این شبکه‌ها را در ضمیمهٔ مربوط به‌جبرهای بولی شرح می‌دهیم.

مسائل

۱. فرض کنید A یک زیرمجموعهٔ ناتهی یک مجموعهٔ جزئاً مرتب P باشد. نشان دهید که A حداکثر یک بزرگترین کران پایین و حداکثر یک کوچکترین کران بالا دارد.

۲. مجموعهٔ {۵ ,۴ ,۳ ,۲ ,۱} را در نظر بگیرید. چه اعضایی ماکسیمال هستند اگر این مجموعه به صورت مثال ۱ مرتب شده‌باشد؟ وچه اعضایی ماکسیمال هستند اگر این مجموعه به صورت مثال ۲ مرتب شده باشد؟

۳. تحت چه شرایطی مثال ۴ یک زنجیر خواهد بود؟

۴. مثالی از یک مجموعهٔ جزئاً مرتب ارائه دهید که شبکه نباشد.

۵. فرض کنید L یک شبکه باشد. اگر x، y و z اعضای L باشند، صحت روابط زیر را تحقیق کنید:

$$x\wedge x=x,\ x\vee x=x,\ x\wedge y=y\wedge x,\ x\vee y=y\vee x,$$
$$x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z,$$
$$x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z,\ (x\wedge y)\vee x=x,\ (x\vee y)\wedge x=x$$

۶. فرض کنید $\mathbf{A}$ یک رده از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ مرجع U باشد. گوییم $\mathbf{A}$ دارای خاصیت اشتراک متناهی است، اگر اشتراک اعضای هر زیرردهٔ متناهی از $\mathbf{A}$ ناتهی باشد. با به کار بردن لم تسورن ثابت کنید که اگر $\mathbf{A}$ دارای خاصیت اشتراک متناهی باشد، آنگاه $\mathbf{A}$ زیرمجموعهٔ یک‌ردهٔ ماکسیمال $\mathbf{B}$ باهمین خاصیت است (معنی اینکه $\mathbf{B}$ یک ردهٔ ماکسیمال با این خاصیت است این است که هر رده‌ای که $\mathbf{B}$ زیرمجموعهٔ سره آن باشد این خاصیت را ندارد). (راهنمایی: خانوادهٔ تمام رده‌هایی را که $\mathbf{A}$ را در بر دارند و دارای خاصیت اشتراک متناهی هستند در نظر بگیرید، این خانواده را با رابطهٔ شمول رده‌ها مرتب کنید، و نشان دهید که هر زنجیر در این خانواده، دارای یک کران بالا درخانواده است.)

۷. ثابت کنید که اگر X و Y دو مجموعهٔ ناتهی باشند، آنگاه نگاشتی یک به‌یک ازیکی بتوی دیگری موجود است. (راهنمایی: یک عضو x در X و یک عضو y در Y انتخاب کنید، و بین دو مجموعهٔ یک عضوی $\{x\}$ و $\{y\}$ تناظر یک به‌یک بدیهی را برقرار کنید، یک گسترش به‌صورت زوجی از زیرمجموعه‌های A از X و B از Y به‌طوری که $\{x\}\subseteq A$ و $\{y\}\subseteq B$، به‌همراه تناظری یک به‌یک بین A و B که تحت آن x و y به‌یکدیگر نظیر می‌شوند، تعریف کنید؛ مجموعهٔ تمام این گسترشها را به طور طبیعی مرتب کنید. و لم تسورن را به‌کار برید.)

۸. فرض کنید m و n دوعدد اصلی (متناهی یا نامتناهی) باشند. گزارهٔ m کوچکتر از n یا مساوی n است (که نوشته می‌شود $m\leqslant n$) به معنی زیر تعریف می‌شود: اگر X و Y مجموعه‌هایی با تعداد m و n عضو باشند، آنگاه نگاشت یک به‌یک از X بتوی Y وجود

دارد. ثابت کنید که هر مجموعهٔ ناتهی از اعداد اصلی که به این صورت مرتب شده باشد، یک زنجیر است. این امرکه به ازای هر دو عدد اصلی یکی کوچکتر از دیگری یا مساوی آن است معمولاً قضیهٔ مقایسه پذیری اعداد اصلی نامیده می‌شود.

۹. فرض کنید X و Y دو مجموعهٔ ناتهی باشند، و نشان دهید که عدد اصلی X کوچکتر از یا مساوی عدد اصلی Y است $\Longleftrightarrow$ یک نگاشت از Y بروی X موجود است.

۱۰. فرض کنید $\{X_i\}$ ردهٔ نامتناهی دلخواهی از مجموعه‌های شمارا باشد که با اعضای i از یک مجموعهٔ اندیسگذار I اندیسگذاری شده‌اند. نشان دهید که عدد اصلی U_iX_i کوچکتر از یا مساوی عدداصلی I است. (راهنمایی: اگر I نامتناهی شمارا باشد، این مطلب ازمسئلهٔ ۲-۶ نتیجه می‌شود، واگر I ناشمارا باشد، می‌توان بااستفاده از لم تسورن آن‌را به صورت اجتماع یک ردهٔ مجزا از زیرمجموعه‌های نامتناهی شمارا، بیان کرد.)

فصل دوم

فضاهای متری

می‌توان گفت آنالیز کلاسیک آن قسمت از ریاضیات است که با حساب دیفرانسیل و انتگرال آغاز می‌شود و اساساً با همان طرز فکر مطالب مشابه را خیلی گسترده‌تر و در جهات مختلف توسعه می‌دهد. در دنیای ریاضیات، آنالیز کلاسیک یک کشور بزرگ با استانهای متعددی است که چندتایی از آنها عبارت‌اند از معادلات دیفرانسیل معمولی و با مشتقات جزئی، سریهای نامتناهی (وبالاخص سری توانی و سری فوریه)، و توابع تحلیلی از یک متغیر مختلط. هر یک از این مطالب درطی یک دورهٔ طولانی تاریخی، رشد بسیار زیادی یافته‌اند و هر کدام از آنها به قدری در محتوا غنی هستند که شایستگی یک عمر مطالعه را دارند.

آنالیز کلاسیک در طی توسعه و پیشرفت، به قدری پیچیده و دگرگون شد که حتی متخصصین فن‌هم به‌سختی می‌توانستند درآن میان راه خودرا بیابند. دراین اوضاع و احوال بودکه بعضی ریاضیدانان علاقه‌مند شدند تا اصولی راکه تمام آنالیز برآنها استوار است، آشکار کنند. بسیاری از نام‌آوران ریاضی قرن گذشته در این حرکت سهیم بودند: ریمان، وایرشتراس، کانتور، لبگ، هیلبرت، ریس وسایرین. این حرکت سهم بزرگی دربروزاهمیت توپولوژی، جبرنوین، ونظریهٔ اندازه و انتگرالگیری داشت، و وقتی این اندیشه‌های جدید در آنالیز کلاسیک اعمال شد آنالیز نوین را به‌وجود آورد.

ضمن اینکه آنالیز نوین به دست آفرینندگانش توسعه می‌یافت، وضمن تلاش برای آشکارسازی کنه قضایای اصلی، برای بسیاری از این قضایا، برهانی ساده‌تر و با شرایط کلی‌تر به دست آمد، تجزیه و تحلیل بافت دستگاههای اعداد حقیقی و مختلط که زمینهٔ آنالیز هستند، اندیشه‌های زیادی را به‌خود مشغول داشت. انتظار می‌رفت (و این انتظار موجه‌بود) که آنالیز را بتوان واضح‌تر وساده‌تر کرد، و حذف زواید باعث تأکید جدیدی روی مطالبی

بشود که واقعاً از نظر اساس نظریه اهمیت دارند.[1]

آنالیز اصلاً با فرایندهای حدی و پیوستگی سروکار دارد، بنابراین تعجب‌آور نیست که ریاضیدانان با تفکر در این مسیرها به مطالعه (و تعمیم) دو مفهوم مقدماتی کشیده شوند: مفهوم دنبالهٔ همگرای اعداد حقیقی یا مختلط، و مفهوم تابع پیوسته با متغیر حقیقی یا مختلط.

تعاریف مربوط را به‌خواننده یادآوری می‌کنیم. اولا، دنبالهٔ

$$\{x_n\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

از اعداد حقیقی را همگرا گوییم اگر عدد حقیقی x (کـه حد دنباله نامیده می‌شود) وجود داشته باشد بـه‌طوری که به ازای هر $\varepsilon > 0$ داده شده، یک عـدد صحیح مثبت n_0 بتوان یافت به طوری که خاصیت زیر برقرار باشد:

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow |x_n - x| < \varepsilon$$

این شرط به این معنی است که بـه‌ازای تمام n های «به‌قدر کافی بزرگ»، x_n بایـد بـه x «نزدیک» باشد، و این را به زبان نمادها، معمولاً چنین می‌نویسند:

$$\lim x_n = x \quad \text{یا} \quad x_n \to x$$

و بـه این صورت بیان می‌شود که x_n به x میل می‌کند یا x_n همگرا به x است. ثانیاً، تابع حقیقی f را که روی زیرمجموعهٔ ناتهی X از خط حقیقی تعریف شده، در x_0 متعلق به X، پیوسته گوییم اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$، عدد $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$(x \in X \,,\, |x - x_0| < \delta) \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

و f را پیوسته گوییم اگر در هر نقطهٔ X پیوسته باشد. وقتی X یک بـازه باشد، تعریف پیوستگی، بیـان دقیق ایـن مفهـوم شهـودی است کـه نمودار f بـدون شکاف یـا رخنه است. این تعاریف‌را می‌توان درمورد دنباله‌های اعداد مختلط و توابع مختلط با متغیر مختلط، کلمه به کلمه به کار برد.

از ارائهٔ تفصیلی این تعاریف در اینجا منظور ساده‌ای داریم. مـا می‌خواهیم صریحاً خاطرنشان کنیم که مفهوم این دو تعریف به مفهوم قدر مطلق تفاضل دو عدد حقیقی یا مختلط بستگی دارد وهمچنین می‌خواهیم توجه شودکه وقتی اعداد به عنوان نقاط روی خط حقیقی یا صفحهٔ مختلط در نظر گرفته می‌شوند، این قدر مطلق، فاصلهٔ بین ۱عداد می‌باشد.

در بسیاری از رشته‌های ریاضی (در هندسه و نیز در آنالیز) دیـده شده است که در دست داشتن مفهوم فاصله در مورد اعضای مجموعه‌های مجرد بسیار مفید است. فضای متری (چنانکه آن را در زیر تعریف می‌کنیم) چیزی نیست جز مجموعه‌ای ناتهی مجهز به‌مفهومی کلی ازفاصله که برای بررسی دنباله‌های همگرا درآن مجموعه وتوابع پیوستهٔ تعریف شده روی آن، مناسب است. ما دراین فصل خواص اصلی ومقدماتی فضاهای متری را بـه طور

---

۱. این نکات را درضمیمهٔ شمارهٔ ۱ شرح می‌دهیم، در این ضمیمه برای یکی از قضایای وجودی که درنظریهٔ معادلات دیفرانسیل اساسی است، یک برهان کوتاه ومنظم عرضه می‌شودکه صرفاً به مفاهیم این فصل بستگی دارد.

منظم بحث خواهیم‌کرد. این خواص‌هم فی‌نفسه مفیدند وهم به‌این خاطر که در کارهای بعدی ما در فضاهای توپولوژیک الهامبخش هستند.

۹. تعریف و چند مثال

فرض‌کنید X یک مجموعهٔ ناتهی باشد. یک متریک بر X، یک تابع‌حقیقی d است‌که حوزهٔ تعریف آن زوجهای مرتب اعضای X است و در سه شرط زیر صدق می‌کند

$$(۱) \quad d(x,y) \geqslant 0 \text{ ، و } d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$$

$$(۲) \quad d(x,y) = d(y,x) \quad \text{(تقارن)}$$

$$(۳) \quad d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) \quad \text{(نامساوی مثلثی).}$$

تابع d به هر زوج (x, y) از اعضای X، یک عدد حقیقی نامنفی $d(x,y)$ مربوط می‌کند که بنا برخاصیت تقارن بستگی به ترتیب اعضا ندارد، $d(x,y)$ را فاصله بین x و y می‌نامند. فضای متری از دوشیء تشکیل شده است: یک مجموعهٔ ناتهی X و یک متریک بر X. اعضای X را نقاط فضای متری (X, d) می‌نامند. وقتی بیم ابهام نرود، فضای متری (X,d) را با نماد X که مجموعهٔ زیربنای نقاط فضاست، نمایش می‌دهیم. البته همیشه باید به‌خاطر داشته باشیم که فضای متری منحصراً یک مجموعهٔ ناتهی نیست، بلکه یک مجموعهٔ ناتهی همراه با یک متریک است. اغلب اتفاق می‌افتد که چندین متریک متفاوت بریک مجموعهٔ ناتهی می‌توان تعریف کرد، و در این حالت متریکهای مختلف، مجموعهٔ مورد نظر را به فضاهای متری مختلف تبدیل می‌کنند.

فضاهای متری انواع‌مختلف بسیاری دارند، برخی ازآنها نقش خیلی مهمی درهندسه و آنالیز ایفا می‌کنند؛ مثال اول نسبتاً بیمایه است، ولی این مثال اغلب برای نشان دادن نادرستی بعضی احکام که ممکن است به ذهن ما خطور کند، مفید است. همچنین وجود این متریک نشان می‌دهد که هر مجموعهٔ ناتهی را می‌توان به مثابهٔ یک فضای متری در نظر گرفت.

مثال ۱. فرض کنید X مجموعهٔ ناتهی دلخواهی باشد، و d را به صورت زیر تعریف کنید

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x = y \\ 1 & \text{اگر } x \neq y \end{cases}$$

خواننده خود به‌سادگی می‌تواند تحقیق کند که با این تعریف، d یک متریک بر X است.

دو مثال بعدی ما دستگاههای اصلی اعداد در ریاضیات‌اند.

مثال ۲. خط حقیقی R و تابع حقیقی $|x|$ را که روی R تعریف شده است، درنظر بگیرید. برای اهداف ما سه خاصیت مقدماتی تابع قدر مطلق، که در زیر می‌آیند، مهم هستند

$$\text{(الف)} \quad |x| \geqslant 0 \text{ ، و } |x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

(ب) $|-x| = |x|$

(ج) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$

حال روی R یک متریک به صورت

$$d(x,y) = |x-y|$$

تعریف می‌کنیم. این متریک را متریک معمولی روی R می‌نامند، و وقتی خط حقیقی را به معنای فضای متری به‌کار می‌بریم، همیشه مستتر است که متریک آن، متریک معمولی است. این امر که d در واقع یک متریک است از سه خاصیت بیان شده در فوق نتیجه می‌شود. چون این قسم استدلال اغلب در کار ما پیش می‌آید، جزئیات آن را شرح می‌دهیم. بنابر (الف)، $d(x, y) = |x-y|$ یک عدد حقیقی نامنفی است که برابر ۰ است $\Longleftrightarrow x - y = 0 \Longleftrightarrow x = y$. بنابر (ب)

$$d(x, y) = |x-y| = |-(y-x)| = |y-x| = d(y, x)$$

و بنابر (ج)

$$\begin{aligned} d(x, y) = |x-y| = |(x-z)+(z-y)| &\leqslant |x-z| + |z-y| \\ &= d(x, z) + d(z, y) \end{aligned}$$

مثال ۴. صفحهٔ مختلط C را درنظر بگیرید. ما در بخش ۴ اشارهٔ مختصری به C کردیم و توضیح دادیم که چگونه می‌توان C را، به‌عنوان یک مجموعه، با صفحهٔ مختصات $R^۲$ یکی انگاشت. اکنون به بحث نسبتاً کاملتری می‌پردازیم. اگر z یک عدد مختلط باشد، و اگر $z = a + ib$ که در آن a و b اعداد حقیقی هستند، آنگاه a و b را بترتیب قسمت حقیقی و قسمت موهومی z می‌نامند و به $R(z)$ و $I(z)$ نمایش می‌دهند. دوعدد مختلط را برابر گویند اگر قسمت حقیقی و قسمت موهومی آنها با یکدیگر برابر باشند

$$a + ib = c + id \Longleftrightarrow a = c \text{ و } b = d$$

برای جمع (یا تفریق) دو عدد مختلط قسمت حقیقی و قسمت موهومی آنها را جمع (یا تفریق) می‌کنیم، و برای ضرب دو عدد مختلط، آنها را مانند ضرب چندجمله‌ایها در جبر مقدماتی در هم ضرب می‌کنیم وهرجا $i^۲$ ظاهر می‌شود، به جایش ۱ — می‌گذاریم

$$\begin{aligned} (a+ib) \pm (c+id) &= (a \pm c) + i(b \pm d) \\ (a+ib)(c+id) &= ac + iad + ibc + i^۲ bd \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc) \end{aligned}$$

تقسیم به صورت زیر انجام می‌شود

$$\begin{aligned} \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} &= \frac{(ac+bd) + i(bc-ad)}{c^۲+d^۲} \\ &= \frac{ac+bd}{c^۲+d^۲} + i\frac{bc-ad}{c^۲+d^۲} \end{aligned}$$

با این شرط کــه $c^2 + d^2$ باید مخالف صفر باشد. اگر $z = a + ib$ یک عــدد مختلط باشد، آنگاه $-z$ ، منفی آن، و $\bar{z}$، مزدوج آن، به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$-z = (-a) + i(-b)$$

و $\bar{z} = a + i(-b)$، که معمولاً به‌صورت $-z = -a - ib$ و $\bar{z} = a - ib$ نوشته می‌شوند. به‌سادگی دیده می‌شود که

$$R(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{و} \quad I(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

معمولاً خط حقیقی R به مثابه قسمتی از صفحهٔ مختلط در نظر گرفته می‌شود

$$R = \{z : I(z) = 0\} = \{z : \bar{z} = z\}$$

محاسباتی ساده نشان می‌دهد که

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2} \quad \text{و} \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2} \quad \text{و} \quad \bar{\bar{z}} = z$$

مبدأ، یا صفر، عدد مختلط $0 = 0 + i0$ است. فاصلهٔ معمولی $z = a + ib$ تامبدأ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$|z| = (a^2 + b^2)^{1/2}$$

$|z|$، قدر مطلق z نامیده می‌شود، و به‌سادگی دیده می‌شود که

$$|z|^2 = z\bar{z} \quad \text{و} \quad |\bar{z}| = |z|$$

متریک معمولی C به صورت زیر تعریف می‌شود

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

این امر کــه d یک متریک است، مانند مثال ۲، از خواص تابع حقیقی $|z|$، کــه در زیر می‌آید، نتیجه می‌شود

(الف) $|z| \geqslant 0$، و $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$

(ب) $|-z| = |z|$

(ج) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

خواص (الف) و (ب) واضح‌اند. چون $-z = (-1)z$، خاصیت (ب) نیز حالت خاصی از $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ است. این خاصیت به صورت زیر اثبات می‌شود

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 \bar{z_1} z_2 \bar{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2 = (|z_1||z_2|)^2$$

با استفاده از این حقیقت که $|R(z)| \leqslant |z|$ به‌ازای هر z، خاصیت (ج) مستقیماً به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\bar{z_1} + \bar{z_2}) \\ &= z_1 \bar{z_1} + z_2 \bar{z_2} + z_1 \bar{z_2} + \bar{z_1} z_2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + (z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1 \overline{z}_2}) \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2R(z_1 \overline{z}_2) \\
&\leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \overline{z_2}| \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||\overline{z_2}| \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\
&= (|z_1| + |z_2|)^2
\end{aligned}
$$

هر وقت صفحهٔ مختلط C به‌عنوان یک فضای متری ذکر می‌شود، همیشه فرض بر آن است که متریک آن، متریک معمولی تعریف شده در بالا است.

بقیهٔ مثالهایی که در این بخش ارائه می‌شوند، یک طرح مشترک دارند و ما در مثالهای ۲ و ۳ کوشش کرده‌ایم که این طرح را نمایان کنیم. اکنون چند خاصیت مهم این طرح را بیان می‌کنیم، تا خواننده بتواند به‌روشنی مشاهده کند که در مثالهای کمی پیچیده‌تر که بعداً می‌آید، این طرح چگونه به‌کار گرفته می‌شود.

الف. اعضای هرفضا را می‌توان به‌طور طبیعی جمع و تفریق کرد و هر عضو یک منفی دارد. هر فضا یک عضو خاص دارد، که مبدأ یا عضو صفر نامیده می‌شود و به 0 نمایش داده می‌شود.

ب. در هر فضا مفهوم فاصلهٔ یک عضو دلخواه تا مبدأ یعنی، مفهوم «اندازهٔ» عضو دلخواه، تعریف شده است. اندازهٔ عضو x یک عدد حقیقی است که به صورت $\|x\|$ نمایش داده می‌شود و نرم x نامیده می‌شود. دوخط عمودی برای تأکید براین مطلب‌که نرم، یک تعمیم تابع قدرمطلق در مثال ۲ و ۳ می‌باشد، به کار رفته است، به این معنی که نرم در سه شرط زیرصدق می‌کند: (الف) $\|x\| \geqslant 0$، و $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$؛ (ب) $\|-x\| = \|x\|$؛ (ج) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

ج. نکته آخر اینکه همه متریکها از نرم تفاضل بین دوعضو، ناشی می‌شوند: $d(x, y) = \|x - y\|$. مانند مثال ۲، اینکه d یک متریک است از خواص نرم که در **ب** فهرست شده است، نتیجه می‌شود. این متریک را متریک القایی نرم موردنظر می‌نامند.

خواننده‌ای که با این مباحث آشناست، فوراً متوجه می‌شود که ما اینجا (البته نه به‌طور کامل و دقیق) مفهوم فضاهای خطی نرمدار راشرح داده‌ایم. فضاهای متری بسیار مهم آنالیز بیشتر از این نوع می‌باشند.

مثال ۴. f را تابعی حقیقی فرض‌کنید که روی بازهٔ بسته $[0, 1]$ تعریف شده است، f را تابع کراندار گوییم اگر یک عدد حقیقی K وجود داشته باشد به طوری که $|f(x)| \leqslant K$ به ازای هر $x \in [0, 1]$. خواننده در آنالیز مقدماتی بااین مفهوم و همچنین با مفهوم پیوستگی f که در مقدمهٔ این فصل تعریف شد، آشنا شده است. مجموعهٔ زیربنای نقاط در این مثال، عبارت است از مجموعهٔ تمام توابع حقیقی پیوستهٔ کراندار که روی

بازهٔ واحد بسته تعریف شده‌اند. در واقع، کراندار بودن چنین توابعی از خواص دیگر آنها نتیجه می‌شود، ولی ما در اینجا کراندار بودن این توابع را صریحاً فرض می‌کنیم. اگر f و g دوتابع حقیقی پیوستهٔ کراندار باشند، آنها را به صورت نقطه‌ای جمع و تفریق می‌کنیم و منفی آنهارا تشکیل می‌دهیم

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(-f)(x) = -f(x)$$

مبدأ (که با $\circ$ نمایش داده می‌شود) تابع ثابتی است که متحد با صفر است

$$\circ(x) = \circ$$

به ازای هر $x \in [\circ, ۱]$، نرم تابع f را با

$$\|f\| = \int_\circ^۱ |f(x)|\,dx$$

متریک القائی را با

$$d(f,g) = \|f-g\| = \int_\circ^۱ |f(x) - g(x)|\,dx$$

تعریف می‌کنیم. انتگرالی که در این تعریف به کار گرفته می‌شود، انتگرال ریمانی حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی است. خواص (الف) و (ب) نرم به‌سادگی ثابت می‌شوند، و خاصیت (ج) به طریق زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned}\|f+g\| &= \int_\circ^۱ |f(x) + g(x)|\,dx \leqslant \int_\circ^۱ (|f(x)| + |g(x)|)\,dx \\ &= \int_\circ^۱ |f(x)|\,dx + \int_\circ^۱ |g(x)|\,dx \\ &= \|f\| + \|g\|\end{aligned}$$

مثال ۵. مجموعهٔ نقاط مثال قبل یعنی، مجموعهٔ همهٔ توابع حقیقی پیوستهٔ کراندار روی بازهٔ بستهٔ $[\circ, ۱]$، دارای متریک دیگری است که برای اهداف ما به مراتب اهمیت بیشتری دارد. این متریک توسط نرم زیر تعریف می‌شود

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [\circ, ۱]\}$$

که معمولاً آن را مختصرتر و به‌صورت

$$\|f\| = \sup|f(x)|$$

و متریک را به‌صورت $d(f,g) = \|f-g\| = \sup|f(x) - g(x)|$ می‌نویسیم. خواص (الف) و (ب) نرم واضح هستند، و در مسئلهٔ ۵ از خواننده می‌خواهیم که (ج) را در حالت کلیتری ثابت کند. این مثال، نمونه‌ای از یک ردهٔ بزرگ فضاهای متری است که نقش مهمی در تمام کارهای ما در سرتاسر بقیهٔ این کتاب ایفا می‌کند. این

فضا را با $\mathcal{C}[0, 1]$ نمایش می‌دهیم.

همین قدر برای عرضهٔ مثالهای خاص کافی است. اکنون به طور کلی به‌چند اصل بنیادی در مورد فضاهای متری می‌پردازیم.

فرض‌کنید X یک‌فضای متری بامتریک d باشد، وفرض‌کنید Y یک‌زیرمجموعهٔ ناتهی X باشد. اگرفرض کنیم تابع d صرفاً برای نقاط Y تعریف شده است، آنگاه بدیهی است‌که (Y,d)خودیک‌فضای‌متری‌است. مجموعهٔ Y با d که‌بهاین‌صورت‌محدودشده‌است، زیرفضای X نامیده می‌شود. این روش ساختن زیرفضا از یک فضای متری داده شده، ما را قادر می‌کند که از چند مثالی که در فوق شرح دادیم، تعداد نامتناهی مثال به دست آوریم. مثلاً بازهٔ بستهٔ واحد $[0, 1]$ و مجموعهٔ نقاط گویا، زیر فضاهای خط حقیقی هستند؛ و دایرهٔ واحد، قرص واحد بسته، و قرص واحد باز، زیرفضاهای صفحهٔ مختلط می‌باشند. همچنین خود خط حقیقی یک زیرفضای صفحهٔ مختلط است.

در اینجا مناسب است که دستگاه اعداد حقیقی گسترده را معرفی کنیم. منظور از دستگاه اعداد حقیقی گسترده، دستگاه اعداد حقیقی معمولی R است که دو علامت

$$+\infty \quad \text{و} \quad -\infty$$

به آن ملحق شده اند. بنابراین، یک عدد حقیقی گسترده یا عددی حقیقی یا یکی از این دو علامت است. (بنابر تعریف) گوییم

$$-\infty < +\infty$$

همچنین اگر x عددی حقیقی باشد، آنگاه

$$-\infty < x < +\infty$$

علائم $\infty -$ و $\infty +$ به مفهومی که از اعداد حقیقی داریم چیزی نمی‌افزایند. این علامتها، همان طوری که در زیر مشاهده خواهیم کرد، اصولاً برای سهولت در بیان به‌کار گرفته می‌شوند.

فرض کنید A یک مجموعهٔ ناتهی از اعدادحقیقی باشدکه دارای یک کران‌بالا است. در بخش ۸ کوچکترین کران بالا (یا سوپریموم) A را تعریف کردیم: $\sup A$ کوچکترین کران بالای A است، یعنی، کوچکترین عدد حقیقی y است که به ازای هر a در A، $a \leqslant y$. با مفروضات بیان شده در مورد A، $\sup A$ همیشه وجود دارد و یک عدد حقیقی است. اگر A یک مجموعهٔ ناتهی از اعداد حقیقی باشد که کران بالایی نداشته باشد، در این صورت در R کوچکترین کران بالا نخواهد داشت، این مطلب را با نوشتن

$$\sup A = +\infty$$

بیان می‌کنیم، و اگر A زیرمجموعهٔ تهی R باشد می‌نویسیم

$$\sup A = -\infty$$

بزرگترین کران‌پایین (اینفیموم) A به‌طریق مشابه تعریف می‌شود: اگر A ناتهی باشد ویک کران پایین داشته باشد، $\inf A$ بزرگترین عدد حقیقی x است‌که به ازای هر a در A، $x \leqslant a$. اگر A ناتهی باشد و کران پایینی نداشته باشد، می‌نویسیم

$$\inf A = -\infty$$

و اگر A تهی باشد می‌نویسیم

$$\inf A = +\infty$$

این تذکرات امتیاز دستگاه اعداد حقیقی گسترده را نشان می‌دهد: در دستگاه اعداد حقیقی گسترده، هر زیرمجموعهٔ A از خط حقیقی سوپریموم و اینفیموم دارد ومی‌توانیم $\sup A$ و $\inf A$ رابه کار بریم بی‌آنکه محدودیتی برای A قایل شویم.

امتیاز دیگر داشتن نمادهای $\infty-$ و $\infty+$ این است‌که این نمادها گسترش معقولی از مفهوم بازه روی خط حقیقی را به دست می‌دهند. توجه خواننده را به تعریفی که در بخش ۱ ازاقسام مختلف بازه‌ها داده شده است جلب می‌کنیم، زیرا می‌خواهیم اکنون این تعاریف را گسترش دهیم. فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی باشند به‌طوری که $a \leqslant b$، آنگاه بازهٔ بستهٔ از a به b زیرمجموعه‌ای است از خط حقیقی R که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$[a,b] = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}$$

این تعریف مفهوم قبلی ما را گسترش می‌دهد زیرا، اکنون با این تعریف بازهٔ بسته می‌تواند از یک عضو منفرد (اگر $a = b$) تشکیل شود. اگر b یک عدد حقیقی و a یک عدد حقیقی گسترده باشد به‌طوری که $a < b$، آنگاه بازهٔ باز-بستهٔ از a به b عبارت است از

$$(a,b] = \{x : a < x \leqslant b\}$$

این تعریف شامل بازه‌های باز- بسته به شکل $(-\infty, b]$ نیز می‌شود. اگر a یک عدد حقیقی و b یک عدد حقیقی گسترده باشد به‌طوری که $a < b$، آنگاه بازهٔ بسته- باز از a به b عبارت است از

$$[a,b) = \{x : a \leqslant x < b\}$$

با این تعریف می‌توانیم $[a, +\infty)$ را به عنوان یک بازهٔ بسته- باز درنظر بگیریم. اگر a و b اعداد حقیقی گسترده باشند به طوری که $a < b$، آنگاه بازهٔ باز از a به b عبارت است از

$$(a,b) = \{x : a < x < b\}$$

این تعریف علاوه‌بر بازه‌های بازی که قبلاً تعریف شده‌اند، شامل $(-\infty, b)$ که b حقیقی است، $(a, +\infty)$ که a حقیقی است، و $(-\infty, +\infty)$ نیز می‌شود. در سرتاسر بقیهٔ این‌کتاب، اصطلاح بازه همیشه به‌یکی از چهارنوعی که دراین پاراگراف تعریف شدند، اطلاق می‌شود. اعداد حقیقی گسترده a و b را نقاط انتهایی این بازه‌ها می‌نامند. نمادهای $\infty-$ و $\infty+$ را با آزادی بسیار زیادی به‌کار برده‌ایم، و بنابراین جا دارد براین مطلب تأکید کنیم که در معنی کنونی هم، بازه همیشه زیرمجموعه‌ای ناتهی از دستگاه اعداد حقیقی است: در واقع، هرگز نمادهای $\infty-$ و $\infty+$ عضو بازه نیستند.

در خود تعریف فضای متری، مفهوم فاصلهٔ یک نقطه ازنقطهٔ دیگر آمده است. حال فاصلهٔ یک نقطه از یک مجموعه، و قطر یک مجموعه را تعریف می‌کنیم.

فرض می‌کنیم X یک فضای متری با متریک d است، و فرض می‌کنیم A یک زیر-مجموعهٔ X است. اگر x نقطه‌ای از X باشد، آنگاه فاصلهٔ x از A به صورت زیر تعریف می‌شود

$$d(x, A) = \inf \{d(x, a) : a \in A\}$$

به عبارت دیگر، $d(x,A)$ بزرگترین کران پایین فواصل x از نقاط A است. قطر مجموعهٔ A به صورت زیر تعریف می‌شود

$$d(A) = \sup \{d(a_۱, a_۲) : a_۱, a_۲ \in A\}$$

بنابراین قطر A کوچکترین کران بالای مجموعهٔ فواصل بین نقاط A است. بسته به اینکه $d(A)$ عدد حقیقی یا $\pm\infty$ باشد، گوییم A قطر متناهی یا قطر نامتناهی دارد. ملاحظه می‌کنیم که مجموعهٔ تهی قطر نامتناهی دارد، زیرا $d(\varnothing) = -\infty$. مجموعهٔ کراندار، بنا به تعریف، مجموعه‌ای است که قطرش متناهی است. یک نگاشت از یک مجموعهٔ ناتهی بتوی یک فضای متری، نگاشت کراندار نامیده می‌شود اگر حوزهٔ مقادیر آن یک مجموعهٔ کراندار باشد. چند مطلب ساده در مورد این مفاهیم در مسائل ذیل آورده شده است.

مسائل

۱. فرض کنید X یک فضای متری با متریک d باشد. نشان دهید $d_۱$ که به صورت

$$d_۱(x, y) = d(x, y)/[۱ + d(x, y)]$$

تعریف می‌شود، نیز یک متریک روی X است. توجه کنید که خود X در فضای متری $(X, d_۱)$ یک مجموعهٔ کراندار است.

۲. فرض کنید X یک مجموعهٔ ناتهی باشد، و فرض کنید d تابعی حقیقی بر زوجهای مرتب اعضای X است که در دو شرط زیر صدق می‌کند

$$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(y, z) \quad \text{و} \quad d(x, y) = ۰ \Longleftrightarrow x = y$$

نشان دهید که d یک متریک روی X است.

۳. فرض کنید X یک مجموعهٔ ناتهی باشد، و فرض کنید d یک تابع حقیقی بر زوجهای مرتب اعضای X باشد که در سه شرط زیر صدق می‌کند

$$d(x, y) \geqslant ۰ \text{ ; } x = y \Longrightarrow d(x, y) = ۰$$
$$d(x, y) = d(y, x)$$
$$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$$

یک تابع d با این خواص یک شبه متریک روی X نامیده می‌شود. واضح است که هر متریک شبه متریک نیز هست. مثالی از شبه متریک بیاورید که متریک نیست. فرض کنید d شبه‌متریکی بر X باشد، رابطه $\sim$ را در X به صورت زیر تعریف کنید

$$x \sim y \Longleftrightarrow d(x, y) = ۰$$

و نشان دهید که این رابطه یک رابطهٔ هم‌ارزی است و ردهٔ تمام مجموعه‌های هم‌ارزی آن‌را می‌توان به روشی طبیعی به یک فضای متری تبدیل کرد.

۴. فرض کنید X_1، X_2، . . . ، X_n یک ردهٔ متناهی از فضاهای متری با متریکهای d_1، d_2، . . . ، d_n باشد. نشان دهید که هریک از توابع d و $\bar{d}$ که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند، یک متریک روی حاصلضرب $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ می‌باشد

$$d(\{x_i\}, \{y_i\}) = \max d_i(x_i, y_i)$$

$$\bar{d}(\{x_i\}, \{y_i\}) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)$$

۵. فرض کنید X یک مجموعهٔ ناتهی و f یک تابع حقیقی باشد که روی X تعریف شده است. نشان دهید که f کراندار است (به مفهوم تعریفی که در آخرین پاراگراف متن داده شده است) $\Longleftrightarrow$ یک عدد حقیقی K وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in X$، $|f(x)| \leqslant K$ $\Longleftrightarrow$ $\sup|f(x)| < +\infty$. مجموعهٔ تمام توابع حقیقی کراندار تعریف شده روی X را در نظر بگیرید و نرم تابع f در این مجموعه را به صورت زیر تعریف کنید

$$\|f\| = \sup|f(x)|$$

واضح است که $\|f\|$ یک عدد حقیقی نامنفی است و $\|-f\| = \|f\|$؛ و $f = 0 \Longleftrightarrow \|f\| = 0$. به‌تفصیل ثابت کنید که $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$.

۶. فرض کنید I یک زیرمجموعهٔ محور حقیقی باشد. نشان دهید که I یک بازه است $\Longleftrightarrow$ I ناتهی است و نقاط بین هر دو نقطه‌اش را دربر دارد (به‌این معنی که اگر x و z در I باشند و $x \leqslant y \leqslant z$، آنگاه y در I است). اگر $\{I_i\}$ یک ردهٔ ناتهی از بازه‌های روی خط حقیقی و $\bigcap_i I_i$ ناتهی باشد، نشان‌دهید که $\bigcup_i I_i$ نیز یک بازه است.

۷. فرض کنید X یک فضای متری با متریک d باشد، و x یک نقطهٔ X و A یک زیرمجموعهٔ X باشند. نشان دهید که: اگر A ناتهی باشد، $d(x,A)$ یک عدد حقیقی نامنفی است؛ و A تهی است $\Longleftrightarrow$ $d(x, A) = +\infty$.

۸. فرض کنید X یک فضای متری با متریک d و A یک زیرمجموعهٔ X باشد. نشان دهید که اگر A ناتهی باشد، $d(A)$ یک عدد حقیقی گستردهٔ نامنفی است؛ A تهی است $\Longleftrightarrow$ $d(A) = -\infty$؛ و اگر A کراندار باشد، آنگاه A ناتهی است.

۱۰. مجموعه‌های باز

X را یک فضای متری با متریک d فرض کنید. اگر x_0 یک نقطهٔ X و r یک عدد حقیقی مثبت باشد، گوی باز $S_r(x_0)$ به مرکز x_0 و شعاع r، زیرمجموعه‌ای است از X که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

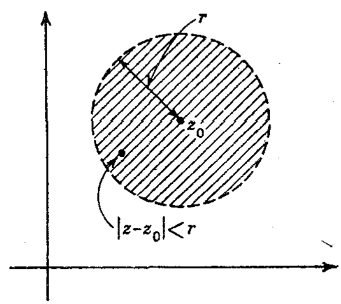
$$S_r(x_0) = \{x : d(x, x_0) < r\}$$

گوی باز همیشه ناتهی است، زیرا مرکز خود را دربر دارد. در مثال ۹-۱، گوی باز

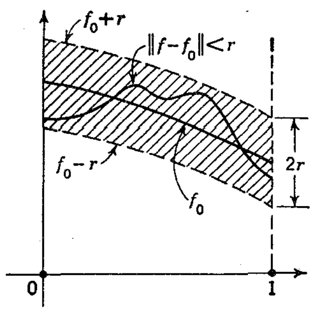
به شعاع ۱، فقط مرکزش را در بر دارد. به طور شهودی می‌توان گفت که اگر r را مقیاس نزدیکی بگیریم، $S_r(x_0)$ تشکیل شده است از تمام نقاط X که به x_0 «نزدیک» هستند.

بجاست دراینجا چند مثال قابل تصور بیاوریم. تجسم گوی باز $S_r(x_0)$ بر خط حقیقی آسان است: این گوی باز، بازهٔ باز کراندار (x_0-r, x_0+r) با نقطهٔ وسط x_0 وطول $2r$ است. بالعکس، واضح است‌که هر بازهٔ باز کراندار برخط حقیقی، یک‌گوی باز است، بنابراین گویهای باز برخط حقیقی دقیقاً همان بازه‌های باز کراندار می‌باشند. گوی‌باز $S_r(z_0)$ در صفحهٔ مختلط (رجوع شود به شکل ۱۷) عبارت است از داخل دایره‌ای به مرکز x_0 و شعاع r. شکل ۱۸ یک گوی باز در فضای $\mathcal{C}[0,1]$ را نشان می‌دهد: $S_r(f_0)$ تشکیل شده است از تمام توابع f در $\mathcal{C}[0,1]$ که نمودار آنها بین نوارهای هاشور زده به عرض $2r$ و به مرکز نمودار f_0 واقع‌اند.

زیرمجموعهٔ G از فضای متری X را مجموعهٔ باز می‌نامیم اگر، به ازای هر نقطهٔ x در G، یک عدد حقیقی مثبت r وجود داشته باشد به‌طوری که $S_r(x) \subseteq G$، یعنی، اگر هر



شکل ۱۷. یک گوی باز در صفحهٔ مختلط



شکل ۱۸. یک گوی باز در $C[0,1]$

نقطهٔ G مرکز یک گوی باز مشمول G باشد. باکمی مسامحه می‌توان گفت که یک مجموعه بازاست، اگر هر نقطهٔ آن «درون» مجموعه (به معنی دقیقی که درتعریف آمده است) باشد. درخط حقیقی، مجموعه‌ای که از یک نقطهٔ منفرد تشکیل شده است باز نیست، زیرا هر بازهٔ کراندار به مرکز این نقطه، شامل نقاطی است که در آن مجموعه نیستند. به طریقی مشابه، زیرمجموعهٔ $[0,1)$ از خط حقیقی باز نیست، زیرا نقطهٔ ۰ در $[0,1)$ دارای این خاصیت است که هر بازهٔ باز کراندار به‌مرکز ۰ (هر اندازه‌هم که کوچک باشد) نقاطی در بردارد که در $[0,1)$ نیستند، مثلاً نقاط منفی. اگر نقطهٔ ۰ را حذف کنیم، بازهٔ باز کراندار $(0,1)$ به دست می‌آید که یک مجموعهٔ باز است (این موضوع به‌سادگی ثابت می‌شود وحالت خاصی از قضیهٔ ب است که در زیر می‌آید). به‌علاوه، کاملاً واضح است که هر بازهٔ باز (کراندار یا بیکران) مجموعهٔ باز است، و بازه‌های باز، تنها بازه‌هایی هستند که مجموعهٔ باز می‌باشند.

قضیهٔ الف. درهر فضای متری X، مجموعهٔ تهی $\emptyset$ وکل فضای X مجموعه‌های باز هستند.

برهان: برای نشان دادن اینکه $\emptyset$ باز است، باید نشان دهیم که هر نقطهٔ $\emptyset$ مرکز یک گوی باز مشمول $\emptyset$ است، ولی چون هیچ نقطه‌ای در $\emptyset$ نیست، این خواسته خود به خود برآورده می‌شود. واضح است که X باز است، زیرا هر گوی باز به مرکز هر نقطهٔ X، در X قرار دارد.

مشاهده کردیم که $[0,1)$ به عنوان زیر مجموعهٔ خط حقیقی، باز نیست. با این حال اگر خود $[0,1)$ را به عنوان فضای متری X (و به صورت یک زیر فضای خط حقیقی) در نظر بگیریم، آنگاه $[0,1)$، به عنوان یک زیرمجموعهٔ X، باز است، زیرا از این دید، $[0,1)$ کل فضا است. این پارادکس بر طرف می‌شود، اگر توجه کنیم در مواردی که در قالب فضا بحث می‌کنیم، نقاط خارج فضا مورد نظر نیستند و به بحث ما مربوط نمی‌شوند. تنها می‌توان گفت مجموعه نسبت به فضای متری بخصوصی که شامل مجموعه است، باز است یا باز نیست و هرگز باز بودن یا نبودن مجموعه به طور مطلق مطرح نیست.

قضیهٔ بعدی وجود صفت «باز» در عبارت «گوی باز» را توجیه می‌کند.

قضیهٔ ب. در هرفضای متری X، هر گوی باز مجموعهٔ باز است.

برهان : فرض کنیم $S_r(x_0)$ یک گوی باز در X باشد و فرض کنیم x یک نقطه در $S_r(x_0)$ باشد. باید گوی بازی به مرکز x به دست آوریم که در $S_r(x_0)$ قرارگرفته باشد. چون $d(x, x_0) < r$، $r_1 = r - d(x, x_0)$ یک عدد حقیقی مثبت است. نشان می‌دهیم که $S_{r_1}(x) \subseteq S_r(x_0)$. اگر y یک نقطه در $S_{r_1}(x)$ باشد، آنگاه $d(y, x) < r_1$ و نامساوی

$$d(y, x_0) \leqslant d(y, x) + d(x, x_0) < r_1 + d(x, x_0) = [r - d(x, x_0)] + d(x, x_0) = r$$

نشان می‌دهد که y در $S_r(x_0)$ است.

تشخیص مجموعه‌های باز برحسب گوی‌های باز که در زیر بیان شده است، ابزار مفیدی است.

قضیهٔ ج. فرض کنید X یک فضای متری باشد. زیرمجموعهٔ G از X باز است $\Longleftrightarrow$ G اجتماعی از گویهای باز است.

برهان: اول فرض می‌کنیم که G باز باشد و نشان می‌دهیم که G اجتماعی از گویهای باز است. اگر G تهی باشد، آنگاه G اجتماع ردهٔ خالی از گویهای باز است. اگر G ناتهی باشد، آنگاه چون باز است، هر نقطهٔ G، مرکز گوی بازی است که در G قرار دارد، و G اجتماع این گوی‌های باز است.

اکنون فرض می‌کنیم G اجتماع یک ردهٔ $\mathbf{S}$ از گویهای باز باشد. باید نشان دهیم که G باز است. اگر $\mathbf{S}$ تهی باشد، آنگاه G نیز تهی است، و بنا برقضیهٔ الف، G باز است. فرض کنید $\mathbf{S}$ ناتهی باشد، در این صورت G نیز ناتهی خواهد بود. اگر x یک نقطهٔ G باشد، چون G اجتماع گویهای باز در $\mathbf{S}$ است، x متعلق به یک گوی باز $S_r(x_0)$ در $\mathbf{S}$ است. بنا بر قضیهٔ ب، x مرکز یک گوی باز $S_{r_1}(x)$ است به طوری که $S_{r_1}(x) \subseteq S_r(x_0)$. چون

$S_r(x_\circ) \subseteq G$، داریم $S_{r_1}(x) \subseteq G$. پس یک گوی باز بـه مرکز x داریم که در G قرار دارد بنابراین G باز است.

در فضای متری، خواص بنیادی مجموعه‌های باز، آن خواصی است کـه در قضیهٔ زیر بیان شده است.

قضیهٔ د. فرض‌کنید X یک فضای‌متری باشد. آنگاه (۱) هراجتماع مجموعه‌های باز در X، یک‌مجموعهٔ بازاست؛ و(۲) هراشتراک‌متناهی مجموعه‌های‌باز در X، یک‌مجموعهٔ باز است.

برهان: بـرای اثبات (۱)، فـرض کنید $\{G_i\}$ ردهٔ دلخـواهی از مجموعه‌های بـاز در X باشد. باید نشان دهیم‌که $G = \bigcup_i G_i$ بازاست. اگر $\{G_i\}$ تهی باشدآنگاه G نیز تهی است و بنابر قضیه **الف**، G باز است. فرض کنید $\{G_i\}$ ناتهی باشد. بنابر قضیهٔ **ج** هر G_i (چون مجموعهٔ بـاز است) اجتماعی از گویهای باز می‌باشد، پس G اجتماع تمام گویهای بازی است که از این طریق به‌دست می‌آیند، و بنابر قضیهٔ **ج**، G باز است.

برای اثبات (۲)، فرض کنید $\{G_i\}$ یک ردهٔ متناهی ازمجموعه‌های باز در X باشد. باید نشان دهیم کـه $G = \bigcap_i G_i$ بـاز است. اگر $\{G_i\}$ تهی باشد، آنگاه $G = X$ و بنابر قضیهٔ **الف**، G بازاست. فرض کنید $\{G_i\}$ ناتهی است، و فرض کنید به‌ازای یک عدد صحیح مثبت n، $\{G_i\} = \{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$. اگر G تهی باشد، آنگاه بنابر قضیهٔ **الف**، G بـاز است، پس می‌توانیم فرض کنیم که G ناتهی است. x را نقطه‌ای در G بگیرید. چون x در هر G_i است، وهر G_i باز است، به‌ازای هر i یک عدد حقیقی مثبت r_i وجود دارد به‌طوری کـه $S_{r_i}(x) \subseteq G_i$. کوچکترین عدد درمجموعهٔ $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ را r می‌نامیم. r، یک عددحقیقی مثبت است وبه‌ازای هر i، $S_r(x) \subseteq S_{r_i}(x)$ بنابراین به‌ازای‌هر i، $S_r(x) \subseteq G_i$ و در نتیجه $S_r(x) \subseteq G$. چون $S_r(x)$ گویی به مرکز x و مشمول G است، G باز است.

قضیهٔ فوق بیان می‌کند که «ردهٔ تمام مجموعه‌های باز در یک فضای متری، نسبت بـه تشکیل اجتماعهای دلخواه واشتراکهای متناهی، بسته است». خواننده باید به‌وضوح دریابد که قضیهٔ **الف** یک نتیجهٔ فوری این‌گزاره است، زیرامجموعهٔ تهی اجتماع اعضای ردهٔ تهی ازمجموعه‌های باز است، وکل فضا، اشتراک اعضای این‌ردهٔ تهی است. قید اشتراک متناهی در این قضیه لازم است. برای توجه به این الزام، کافی است مثال زیر را که یک دنبالـه از بازه‌های باز بر خط حقیقی است، درنظر بگیرید

$$(-1, 1), (-1/2, 1/2), (-1/3, 1/3), \ldots$$

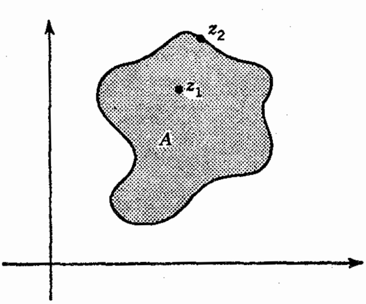
اشتراک این مجموعه‌های باز مجموعهٔ $\{0\}$ است کـه از نقطهٔ منفرد ۰ تشکیل شده است و این مجموعه باز نیست.

درواقع ساختمان‌مجموعه‌های بازدریک فضای‌متری‌دلخواه، ممکن‌است‌خیلی پیچیده باشد. قضیهٔ **ج** شامل بهترین اطلاعی است که در حالت عمومی می‌توان به دست آورد: هر مجموعهٔ بازاجتماعی ازگویهای باز است. البته درحالت خط حقیقی، توصیفی از مجموعه‌های باز می‌توان عرضه کرد که نسبتاً صریح وملموس باشد.

قضیهٔ ه. هر مجموعهٔ باز ناتهی بر خط حقیقی اجتماع رده‌ای مجزا و شمارا از بازه‌های باز است.

برهان: G را یک زیر مجموعهٔ باز ناتهی از خط حقیقی فرض کنید و x را نقطه‌ای در G. چون G باز است، x مرکز یک بازهٔ باز کراندار مشمول G است. I_x را اجتماع تمام بازه‌های بازی که x را در بر دارند و مشمول G هستند، تعریف کنید. سه امر زیر به‌سادگی اثبات می‌شوند: I_x بازهٔ بازی است (بنابر قضیهٔ د و مسئلهٔ ۹-۶) که x را دربر دارد و مشمول G است؛ I_x هر بازهٔ بازی را که x را در بر داشته و مشمول G باشد، شامل است؛ و اگر y نقطهٔ دیگری در I_x باشد، آنگاه $I_y = I_x$. سپس ملاحظه می‌کنیم که اگر x و y دو نقطهٔ متمایز G باشند، آنگاه I_x و I_y یا مجزا هستند و یا با یکدیگر برابرند، زیرا اگر یک نقطهٔ مشترک z داشته باشند، آنگاه $I_x = I_z$ و $I_y = I_z$، در نتیجه $I_x = I_y$. $\mathbf{I}$، ردهٔ تمام مجموعه‌های متمایز به‌شکل I_x به‌ازای نقاط x در G را، در نظر بگیرید. $\mathbf{I}$ رده‌ای مجزا از بازه‌های باز است. واضح است که G اجتماع اعضای این رده می‌باشد. باقی‌می‌ماند که ثابت شود $\mathbf{I}$ شماراست. فرض کنید G_r مجموعهٔ نقاط گویا در G باشد. آشکارا G_r ناتهی است. نگاشت f از G_r بروی $\mathbf{I}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: به ازای هر r در G_r، فرض کنید $f(r)$ آن بازهٔ منحصر به‌فرد در $\mathbf{I}$ باشد که r را دربر دارد. بنابر مسئلهٔ ۶-۷، G_r شماراست، و این امر که $\mathbf{I}$ شماراست از مسئلهٔ ۶-۸ نتیجه می‌شود.

احاطه به مفاهیمی که در نظریهٔ فضاهای متری مورد بحث قرار می‌گیرند، به استعداد فرد در «مشاهدهٔ» این فضاها با دید ذهنی، بستگی دارد. صفحهٔ مختلط شاید بهترین فضای متری‌ای باشد که می‌توان از آن برای کسب درک شهودی مورد نظر استفاده کرد. وقتی می‌خواهیم مجموعهٔ دلخواه A از اعداد حقیقی را در نظر بگیریم، معمولاً آن را مانند شکل ۱۹ به‌صورت ناحیه‌ای که توسط یک منحنی، محصورشده، تصویر می‌کنیم. نقطهٔ z_1 را، که کاملاً توسط نقاط A احاطه شده است، یک نقطهٔ «داخلی» مجموعهٔ A یا نقطه‌ای در «درون» مجموعهٔ A می‌دانیم. در صورتی که نقطهٔ z_2 روی «مرز» A است. به‌طور دقیقتر، z_1 مرکز یک گوی باز مشمول A است و هر گوی باز به مرکز z_2، A و مکملش A' را قطع می‌کند. ما این مفاهیم را برای فضای متری کلی در پاراگراف بعد و در انتهای بخش بعد بیان می‌کنیم.



شکل ۱۹. مجموعه‌ای از اعداد مختلط با نقطهٔ درونی و نقطهٔ مرزی

X را یک فضای متری دلخواه، و A را یک زیر مجموعهٔ X فرض کنید. نقطه‌ای از A را یک نقطهٔ درونی A خوانیم اگر این نقطه مرکز یک گوی باز مشمول A باشد، و درون A که به $\operatorname{Int}(A)$ نمایش داده می‌شود، مجموعهٔ تمام نقاط درونی A است. به زبان نمادی

$$\operatorname{Int}(A) = \{x : S_r(x) \subseteq A \text{ به قسمی که } r \text{ و } x \in A \text{ وجود دارد}\}$$

خواص اصلی درون مجموعه‌ها در زیر آمده است

(۱) $\operatorname{Int}(A)$ یک زیرمجموعهٔ باز A و شامل هرزیرمجموعهٔ باز A است (این موضوع، اغلب به این صورت بیان می‌شود که درون A بزرگترین زیرمجموعه باز A است)

(۲) A باز است $A = \operatorname{Int}(A) \iff$

(۳) $\operatorname{Int}(A)$ برابر اجتماع تمام زیرمجموعه‌های باز A است

اثبات این خواص خیلی ساده است، و از خواننده می‌خواهیم که به عنوان تمرین، به‌تفصیل آنها را ثابت کند (رجوع شود به مسئلهٔ ۸).

مسائل

۱. فرض کنید X یک فضای متری باشد و نشان دهید که هر دو نقطهٔ متمایز X را به مفهوم زیر می‌توان توسط گویهای باز از هم جدا کرد: اگر x و y دو نقطهٔ متمایز X باشند، آنگاه یک زوج گوی باز مجزا یکی به‌مرکز x و دیگری به مرکز y وجود دارد.

۲. فرض‌کنید X یک فضای متری باشد. اگر $\{x\}$ یک زیرمجموعهٔ تک نقطه‌ای X باشد، نشان دهید که $\{x\}'$ (مکمل $\{x\}$) باز است. به طور کلیتر نشان دهید که اگر A زیرمجموعهٔ متناهی X باشد، A' باز است.

۳. فرض‌کنید X یک فضای متری و $S_r(x)$ گوی بازی به مرکز x و به‌شعاع r در X باشد. A را یک زیرمجموعهٔ X که قطرش کمتر از r است و $S_r(x)$ را قطع می‌کند فرض کنید. ثابت کنید

$$A \subseteq S_{2r}(x)$$

۴. فرض کنید X یک فضای متری باشد. نشان دهید که، هر زیرمجموعهٔ X باز است $\iff$ هر زیر مجموعهٔ تک عضوی X باز است.

۵. فرض کنید X یک فضای متری با متریک d باشد، و d_1 را متریکی که در مسئلهٔ ۹-۱ تعریف شده است، بگیرید. نشان دهید که ردهٔ مجموعه‌های باز در دو فضای متری (X, d) و (X, d_1) با هم برابرند. (راهنمایی: نشان دهید که گویهای باز این دو فضا، به استثنای یک مورد، یکسان‌اند. این استثنا کدام است؟)

۶. اگر $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ حاصلضرب مذکور در مسئلهٔ ۹-۴ باشد، و اگر d و $\bar{d}$ همان متریکهای X باشند که در مسئلهٔ مزبور تعریف شده‌اند. نشان دهید که ردهٔ مجموعه‌های باز دو فضای متری (X, d) و $(X, \bar{d})$ با هم برابرند. ملاحظه کنید که دراین حالت گویهای باز دو فضا، یکسان نیستند.

۷. فرض کنید Y زیرفضایی از فضای متری X باشد و A یک زیرمجموعهٔ فضای متری Y. نشان دهید که A به‌عنوان زیر مجموعهٔ Y باز است $\iff$ A مقطع یک مجموعهٔ باز X با Y است.

۸. گزاره‌های بیان شده در متن دربارهٔ درون مجموعه‌ها را ثابت کنید.

۹. درون هر یک از زیرمجموعه‌های زیر از خط حقیقی را شرح دهید: مجموعهٔ تمام اعداد

صحیح؛ مجموعهٔ تمام اعداد گویا؛ مجموعهٔ تمام اعداد اصم؛ $(۱ ,۰)$؛ $[۱ ,۰]$؛ $\{۲ ,۱\} \cup (۱ ,۰]$. همین کار را برای زیرمجموعه‌های زیر از صفحهٔ مختلط انجام دهید:

$\{z : |z| < ۱\}$؛ $\{z : |z| \leqslant ۱\}$؛ $\{z : I(z) = ۰\}$؛ $\{z :$ گویا است $R(z)\}$

۱۰. فرض کنید A و B دو زیرمجموعه از فضای متری X باشند و ثابت کنید که:

(الف) $\operatorname{Int}(A) \cup \operatorname{Int}(B) \subseteq \operatorname{Int}(A \cup B)$

(ب) $\operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B) = \operatorname{Int}(A \cap B)$

دو زیرمجموعهٔ A و B از خط حقیقی مثال بزنید به‌طوری‌که

$$\operatorname{Int}(A) \cup \operatorname{Int}(B) \neq \operatorname{Int}(A \cup B)$$

۱۱. مجموعه‌های بسته

فرض کنید X یک فضای متری با متریک d باشد. اگر A زیرمجموعهٔ X باشد، نقطهٔ x در X یک نقطهٔ حدی A نامیده می‌شود اگر هر گوی باز به مرکز x لااقل یک نقطهٔ A متمایز از x را دربر داشته باشد. ایدهٔ اصلی این تعریف این است که نقاط متمایز از x در A «به‌طور دلخواه به x نزدیک» می‌شوند یا در x «روی هم انباشته» می‌گردند.

نقطهٔ ۰، نقطهٔ حدی زیرمجموعهٔ $\{۱, ۱/۲, ۱/۳, \ldots\}$ از خط حقیقی است؛ در حقیقت، ۰ تنها نقطهٔ حدی این مجموعه است. بازهٔ بسته ـ باز $[۰, ۱)$ یک نقطهٔ حدی ۰ دارد که عضو آن است و نیز، یک نقطهٔ حدی ۱ دارد که عضو آن نیست؛ به‌علاوه، هر عدد حقیقی x به قسمی که $۰ < x < ۱$ نیز یک نقطهٔ حدی این مجموعه است. مجموعهٔ تمام نقاط صحیح روی محور حقیقی هیچ نقطهٔ حدی ندارد، و حال آنکه هر عدد حقیقی یک نقطهٔ حدی مجموعهٔ اعداد گویاست. در مثال ۹-۱ هر گوی باز به شعاع کمتر از ۱، فقط مرکزش را در بر دارد، بنابراین هیچ زیرمجموعهٔ این فضا نقطهٔ حدی ندارد.

زیرمجموعهٔ F از فضای متری X مجموعهٔ بسته نامیده می‌شود اگر تمام نقاط حدی خود را در بر داشته باشد. با کمی مسامحه می‌توان گفت که یک مجموعه بسته است اگر نقاط آن مجموعه به هیچ نقطهٔ واقع در خارج مجموعه، به طور دلخواه نزدیک نشوند. در میان زیرمجموعه‌های خط حقیقی که در پاراگراف قبل نام برده شد، تنها مجموعهٔ اعداد صحیح بسته است. در مثال ۹-۱، هر زیرمجموعه، بسته است.

قضیهٔ الف. درهر فضای متری X، مجموعهٔ تهی $\varnothing$ و کل فضای X، دو مجموعهٔ بسته‌اند.

برهان: مجموعهٔ تهی‌هیچ نقطهٔ حدی ندارد، بنابراین می‌توان گفت که تمام نقاط حدی خود را دربر دارد و درنتیجه بسته است. چون کل فضای X تمام نقاط را در بر دارد، خود به‌خود تمام نقاط حدی خود را نیزدربرخواهد داشت وبنابراین بسته است. قضیهٔ زیر، مجموعه‌های بسته را به وسیلهٔ مجموعه‌های باز مشخص می‌کند. در حال حاضر در مورد مجموعه‌های باز اطلاعات نسبتاً زیادی داریم، بنابراین این شاخص، ابزار مفیدی برای اثبات خواص مجموعه‌های بسته است.

قضیهٔ ب. فرض کنید X یك فضای متری باشد. زیرمجموعهٔ F از X بسته است $\Longleftrightarrow$ مکمل آن F' باز است.

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم که F بسته است و نشان می‌دهیم که در این صورت F' بازخواهد بود. اگر F' تهی باشد، بنابر قضیهٔ ۱۰ ـ الف، F باز است، پس می‌توان فرض کرد که F' ناتهی است. فرض کنید x یک عضو F' باشد. چون F بسته است و x در F نیست، x نقطهٔ حدی F نمی‌باشد. چون x در F نیست و نقطهٔ حدی F هم نمی‌باشد، یک گوی باز $S_r(x)$ وجود دارد که از F مجزا است. $S_r(x)$ گوی بازی است به مرکز x که مشمول F' است، و چون x نقطهٔ دلخواهی از F' بود، F' باز است.

حال فرض می‌کیم F' باز است و نشان می‌دهیم که F بسته است. تنها در صورتی F بسته نیست که یک نقطهٔ حدی در F' داشته باشد. این امر نمی‌تواند به وقوع بپیوندد، زیرا چون F' باز است، هر نقطه‌اش مرکز یک گوی باز مجزا از F است، وچنین نقطه‌ای نمی‌تواند نقطهٔ حدی F باشد.

اگر $x_\circ$ یک نقطهٔ فضای متری X و r یک عدد نامنفی باشد، گوی بستهٔ $S_r(x_\circ)$ به مرکز $x_\circ$ و شعاع r زیرمجموعه‌ای است از X که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$S_r[x_\circ] = \{x : d(x, x_\circ) \leqslant r\}$$

$S_r[x_\circ]$ مرکزش را در بر دارد، و وقتی $r = \circ$ فقط مرکزش را در بر دارد. گویهای بسته روی خط حقیقی، همان بازه‌های بسته‌اند. در این زمینه ملاحظه می‌کنیم که اگر چه گویهای باز روی خط حقیقی بازه‌های بازند، اما بازه‌های بازی وجود دارند که گوی باز نیستند، مانند $(-\infty, +\infty)$.

قضیهٔ زیر صفت «بسته» را در عبارت «گوی بسته» توجیه می‌کند.

قضیهٔ ج. در هرفضای متری X، هر گوی بسته، مجموعهٔ بسته است.

برهان: فرض کنید $S_r[x_\circ]$ یک گوی بسته در X باشد. بنابر قضیهٔ ب کافی است نشان دهیم که مکمل آن $S_r[x_\circ]'$ باز است. اگر $S_r[x_\circ]'$ تهی باشد باز است، بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که $S_r[x_\circ]'$ ناتهی است. فرض کنید x یک نقطه در $S_r[x_\circ]'$ باشد. چون $d(x, x_\circ) > r$، $r_1 = d(x, x_\circ) - r$ یک عدد حقیقی مثبت است. r_1 را به‌عنوان شعاع گوی باز $S_{r_1}(x)$ به مرکز x انتخاب می‌کنیم، و با نشان دادن اینکه $S_{r_1}(x) \subseteq S_r[x_\circ]'$ ثابت می‌کنیم که $S_r[x_\circ]'$ بازاست. فرض کنید y یک نقطه در $S_{r_1}(x)$ باشد، دراین‌صورت $d(y, x) < r_1$. بر اساس این نامساوی و نامساوی زیر

$$d(x_\circ, x) \leqslant d(x_\circ, y) + d(y, x)$$

می‌بینیم که

$$\begin{aligned} d(y, x_\circ) \geqslant d(x, x_\circ) - d(y, x) &> d(x, x_\circ) - r_1 \\ &= d(x, x_\circ) - [d(x, x_\circ) - r] = r \end{aligned}$$

بنابراین y در $S_r[x_\circ]'$ است.

اهم مطالب کلی راجع به مجموعه‌های بسته در قضیهٔ زیرآورده شده است.

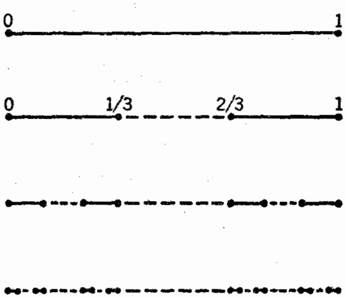
قضیهٔ د. فرض کنید X یک فضای متری باشد. آنگاه (۱) هراشتراک مجموعه‌های بسته‌در

X، بسته است، و (۲) هر اجتماع متناهی مجموعه‌های بسته در X، بسته است.

برهان: به اتکای روابط ۲-(۲) و قضیهٔ ب در فوق، این قضیه یک نتیجهٔ فوری قضیهٔ ۱۰-د است. (۱) را به صورت زیر ثابت می‌کنیم. اگر $\{F_i\}$ ردهٔ دلخواهی از زیرمجموعه‌های بستهٔ X باشد و $F = \bigcap_i F_i$، آنگاه بنابر قضیهٔ ب، F بسته است اگر F' باز باشد؛ ولی بنابر قضیهٔ ۱۰-د، $F' = \bigcup_i F'_i$ باز است، زیرا بنابر قضیهٔ ب هر F'_i باز است. گزارهٔ دوم به همین ترتیب اثبات می‌شود.

درقضیهٔ ه از بخش قبل، یک مشخصهٔ صریح مجموعه‌های باز برخط حقیقی را ارائه دادیم. حال به بررسی ساختمان مجموعه‌های بسته بر خط حقیقی می‌پردازیم. از جمله ساده‌ترین مجموعه‌های بسته بر خط حقیقی، بازه‌های بسته (که گویهای بسته‌اند) و اجتماع متناهی بازه‌های بسته هستند. مجموعه‌های متناهی در زمرهٔ اینها قراردارند، زیرا مجموعه‌ای که از یک نقطهٔ منفرد تشکیل شده است یک بازهٔ بسته‌ای است با نقاط انتهایی برابر. چه چیز کلیترین مجموعهٔ بستهٔ خط حقیقی را مشخص می‌کند؟ چون مجموعه‌های بسته مکمل مجموعه‌های باز هستند، قضیهٔ ۱۰-ه جواب کاملی به این سؤال می‌دهد: با حذف یک ردهٔ مجزای شمارا از بازه‌های باز، کلیترین زیرمجموعهٔ سرهٔ بستهٔ خط حقیقی به دست می‌آید. این مطلب ظاهراً خیلی ساده است، ولی در حقیقت به چند مثال نسبتاً غریب و پیچیده منجرمی‌شود. یکی ازاین مثالها از اهمیت خاصی برخوردار است. کانتور به مطالعهٔ این مثال پرداخت و معمولاً این مجموعه، مجموعهٔ کانتور نامیده می‌شود.

برای ساختن مجموعهٔ کانتور، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم (به شکل ۲۰ نگاه کنید). ابتدا بازهٔ بستهٔ واحد $[0, 1]$ را با F_1 نمایش می‌دهیم. سپس، از F_1 بازهٔ باز $(1/3, 2/3)$ را، که ثلث میانی آن است، حذف می‌کنیم، و مجموعهٔ بستهٔ باقیمانده را به F_2 نمایش می‌دهیم. آشکار است که



شکل ۲۰. مجموعهٔ کانتور

$$F_2 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$$

سپس از F_2 بازه‌های باز $(1/9, 2/9)$ و $(7/9, 8/9)$ را، که ثلث میانی دو تکهٔ آن است، حذف می‌کنیم و مجموعهٔ بستهٔ باقیمانده را به F_3 نمایش می‌دهیم. به‌سادگی دیده می‌شود که

$$F_3 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$$

اگر این روند را ادامه دهیم، یعنی در هر مرحله بازهٔ باز ثلث میانی هر بازهٔ بسته‌ای را که از مرحلهٔ قبل باقیمانده است حذف کنیم، دنباله‌ای از مجموعه‌های بستهٔ F_n به دست می‌آوریم که هر یک ازآنها، شامل مجموعه‌های مابعد خود هستند. مجموعهٔ کانتور F به صورت زیر تعریف می‌شود

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

و بنا بر قضیهٔ ۵، این مجموعه بسته است. نقاط بازهٔ بستهٔ واحد $[0, 1]$ که پس از حذف تمام بازه‌های باز $(1/3, 2/3)$، $(1/9, 2/9)$، $(7/9, 8/9)$، ... «باقی می‌مانند» مجموعهٔ F را تشکیل می‌دهند. چه نقاطی باقی می‌مانند؟ آشکار است که نقاط انتهایی تمام بازه‌های بسته‌ای که مجموعه‌های F_n را می‌سازند، در F هستند

$$0, 1, 1/3, 2/3, 1/9, 2/9, 7/9, 8/9, \ldots$$

آیا F نقاط دیگری را در بر دارد؟ به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم تا اثبات کند که $1/4$ در F است و نقطهٔ انتهایی نیست. در واقع سوای نقاط انتهایی فوق، F تعداد کثیری نقطهٔ دیگر را دربر دارد، زیرا مجموعهٔ نقاط انتهایی شمارا هستند، در صورتی که عدد اصلی خود F برابر c (عدد اصلی پیوستار) است. برای اثبات این موضوع، کافی است که نگاشتی یک‌به‌یک مانند f از $[0, 1]$ بتوی F بسازیم. چنین نگاشتی را به‌صورت زیر می‌سازیم. x را نقطه‌ای در $[0, 1]$ و $x = 0/b_1b_2b_3 \ldots$ را بسط دوتایی x فرض کنید (رجوع شود به بخش ۷). هر b_n یا ۰ یا ۱ است. قرار دهید $t_n = 2b_n$ و $0/t_1t_2t_3 \ldots$ را به عنوان بسط سه‌تایی عدد حقیقی $f(x)$ در $[0, 1]$ درنظر بگیرید. خواننده می‌تواند خود را به‌سادگی متقاعد کند که $f(x)$ در مجموعهٔ کانتور F است: چون t_1 برابر ۰ یا ۲ است، $f(x)$ در $[1/3, 2/3]$ نیست، چون t_2 برابر ۰ یا ۲ است، $f(x)$ در $[1/9, 2/9]$ یا $[7/9, 8/9]$ نیست، و به‌همین ترتیب .... همچنین، به‌سادگی دیده می‌شود که نگاشت $f : [0, 1] \to F$ یک‌به‌یک است. بنابراین F درست به اندازهٔ تمام نقاط بازهٔ بستهٔ واحد $[0, 1]$ نقطه دارد. جالب است این نتیجه را مقایسه کنیم با این حقیقت که مجموع طولهای تمام بازه‌های باز حذف شده دقیقاً برابر ۱ است

$$1/3 + 2/9 + 4/27 + \ldots = 1$$

همچنین جالب توجه است (با مختصری محاسبه دیده می‌شود) که F_{25} اجتماع ۱۶۷۷۷۲۱۶ بازهٔ بستهٔ مجزا با طولهای مساوی است و این بازه‌ها نسبتاً به‌طور نامنظم در طول $[0, 1]$ پخش شده‌اند. این حقایق شاید برای نشان دادن اینکه مجموعهٔ کانتور یک شیء ریاضی خیلی پیچیده است، کافی باشد و این درست همان چیزی است که ریاضیدانان به آن علاقه‌مندند. با این مجموعه گاهگاهی مواجه خواهیم شد، زیرا خواص آن بعضی از پدیده‌هایی را که در بخش‌های بعد مورد بحث قرار گرفته‌اند، روشن می‌سازد.

این بخش را با تعریف دو مفهوم دیگر که اغلب مفیدند، به پایان می‌رسانیم. X را یک فضای متری دلخواه و A را زیرمجموعهٔ X فرض کنید. بستار A که با $\bar{A}$ نمایش داده می‌شود عبارت است از اجتماع A و مجموعهٔ تمام نقاط حدی آن، یا به‌طور شهودی، $\bar{A}$ خود A است همراه با تمام نقاط دیگری در X که به اندازهٔ دلخواه نزدیک به A باشند. به عنوان مثال، اگر A قرص باز واحد $\{z : |z| < 1\}$ در صفحهٔ مختلط باشد، آنگاه $\bar{A}$ قرص بستهٔ واحد $\{z : |z| \leqslant 1\}$ است. خواص اصلی بستار مجموعه‌ها در زیر آمده است:

(۱) $\bar{A}$ فوق‌مجموعهٔ A و مشمول هر فوق‌مجموعهٔ بستهٔ A است (به عبارت دیگر، $\bar{A}$ کوچکترین فوق‌مجموعهٔ بستهٔ A است)

(۲) A بسته است $\Longleftrightarrow$ $A = \bar{A}$

(۳) $\bar{A}$ برابر است با اشتراک تمام فوق‌مجموعه‌های بستهٔ A.

اثبات این گزاره‌ها تمرین بسیارساده‌ای است وآن را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم (مسئلهٔ ۶).

مفهوم دوم مربوط است به‌بحث و بررسی شکل ۱۹ که درخاتمهٔ بخش قبل آمده است. دراینجاهم X را فضای متری و A را زیرمجموعهٔ آن فرض می‌کنیم. نقطه‌ای در X را نقطهٔ مرزی A می‌نامیم اگر هر گوی بازبه مرکز آن نقطه، A و A' را قطع کند و مرز A، مجموعهٔ تمام نقاط مرزی A است. مرز مجموعه دارای خواص زیر است:

(۱) مرز A، مساوی است با $A \cap \bar{A'}$

(۲) مرز A مجموعه‌ای بسته است

(۳) A مرز خودش را شامل است $\Longleftrightarrow$ A بسته است.

در مسئلهٔ ۱۱ اثبات این خواص را از خواننده می‌خواهیم.

مسائل

۱. فرض‌کنید X یک فضای متری باشد، وبا اثبات گزاره‌های زیر، مسئلهٔ ۱۰-۱ را تعمیم دهید

(الف) هر نقطه و هر مجموعهٔ بستهٔ مجزا در X را می‌توان توسط مجموعه‌های باز، ازهم جدا کرد، به این معنی که اگر x یک نقطه و F مجموعهٔ بسته‌ای باشد که x را دربر ندارد، آنگاه دو مجموعهٔ باز و مجزای G_1 و G_2 وجود دارند به قسمی که $x \in G_1$ و $F \subseteq G_2$؛

(ب) هر دو مجموعهٔ بستهٔ مجزا در X را می‌توان توسط مجموعه‌های باز از هم جدا کرد، به این معنی که اگر F_1 و F_2 دو مجموعهٔ بستهٔ مجزا باشند، آنگاه دو مجموعهٔ باز مجزای G_1 و G_2 وجود دارند به‌قسمی که $F_1 \subseteq G_1$ و $F_2 \subseteq G_2$.

۲. فرض کنید X یک فضای متری باشد، و A یک زیرمجموعهٔ X. اگر x نقطهٔ حدی A باشد، نشان دهید که هر گوی باز به مرکز x، تعدادی نامتناهی از نقاط متمایز A را دربر دارد. با استفاده از این نتیجه، نشان دهید که هر زیرمجموعهٔ متناهی X بسته است.

۳. نشان دهیدکه یک زیرمجموعهٔ یک فضای متری‌کرانداراست $\Longleftrightarrow$ این مجموعه ناتهی است و در یک گوی بسته واقع است.

۴. مثالی بزنید از یک ردهٔ نامتناهی از مجموعه‌های بسته که اجتماع آنها بسته نباشد. مثالی بزنید از یک مجموعه که (الف) هم باز و هم‌بسته باشد، (ب) نه باز باشد و نه بسته، (ج) نقطه‌ای داشته باشد که نقطهٔ حدی آن نباشد، و (د) هیچ نقطه‌ای نداشته باشد که نقطهٔ حدی آن نباشد.

۵. درون مجموعهٔ کانتور چیست؟

۶. گزاره‌هایی را که دربارهٔ بستار مجموعه‌ها در متن آمده است، ثابت کنید.

۷. X را یک فضای متری و A را یک زیرمجموعهٔ X فرض کنید. ثابت کنید

(الف) $(\bar{A})' = \text{Int}(A')$

(ب) $\bar{A} = \{x: d(x, A) = 0\}$

۸. بستار هر یک از زیرمجموعه‌های داده شده از خط حقیقی را پیدا کنید: اعداد صحیح؛ اعدادگویا؛ مجموعهٔ کانتور؛ $(0, \infty)$؛ $(-1, 0) \cup (0, 1)$. همین کار را درمورد زیرمجموعه‌های زیر از صفحهٔ مختلط انجام دهید

$\{z : |z|$ گویا است$\}$؛ $\{z :$ یک عددصحیح است $1/R(z)\}$؛ $\{z : |z| < 1$ و $I(z) < 0\}$.

۹. فرض کنید X یک فضای متری و x یک نقطهٔ X و r عددی حقیقی و مثبت است. این تمایل وجود دارد که بگوییم بستار $S_r(x)$ باید مساوی $S_r[x]$ باشد. مثالی بیاورید که نشان دهد این مطلب لزوماً صحیح نیست. (راهنمایی: رجوع شود به مثال ۹-۱.)

۱۰. فرض کنید X یک فضای متری باشد و G یک مجموعهٔ باز در X. ثابت کنید که G مجزا از مجموعهٔ A است $\Longleftrightarrow$ G مجزا از مجموعهٔ $\bar{A}$ است.

۱۱. خواص مرزها را که در متن بیان شده است، ثابت کنید.

۱۲. مرز هر یک از زیرمجموعه‌های خط حقیقی را که در زیر آمده است، پیدا کنید: اعدادصحیح، اعداد گویا؛ $[0, 1]$؛ $(0, 1)$. همین کار را برای هریک از زیرمجموعه‌های زیر از صفحهٔ مختلط انجام دهید

$$\{z : |z| < 1\}; \{z : |z| \leqslant 1\}; \{z : I(z) > 0\}$$

۱۳. X را یک فضای متری و A را یک زیرمجموعهٔ X فرض کنید، می‌گویند A چگال (یا همه جا چگال) است، اگر $\bar{A} = X$. ثابت کنید که A چگال است $\Longleftrightarrow$ X تنها فوق مجموعهٔ بستهٔ A است $\Longleftrightarrow$ $\varnothing$، تنها مجموعهٔ باز مجزا از A است $\Longleftrightarrow$ A هرمجموعهٔ باز ناتهی را قطع می‌کند $\Longleftrightarrow$ A هر گوی باز را قطع می‌کند.

۱۲. همگرایی، کمال، و قضیهٔ بئر

همچنانکه در مقدمهٔ این فصل تأکید کردیم، یکی از اهداف اصلی ما در بررسی فضاهای متری مطالعهٔ دنباله‌های همگرا در زمینه‌ای عمومیتر از آنالیز کلاسیک است. این مطالعه فواید زیاد دارد، و در زمرهٔ آنها بینش جدیدی است که در مورد همگرایی معمولی در آنالیز، حاصل می‌شود.

X را یک فضای متری با متریک d و

$$\{x_n\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$$

را دنباله‌ای از نقاط X فرض کنید. $\{x_n\}$ را همگرا گوییم اگر یک نقطهٔ x در X وجودداشته باشد به طوری که یکی از دوشرط معادل زیر برقرار باشد.

(۱) به ازای هر $\varepsilon > 0$، عدد صحیح و مثبت n_0 وجود دارد به طوری که

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

(۲) به‌ازای هر گوی باز $S_\varepsilon(x)$ به‌مرکز x، عدد صحیح ومثبت n_0 وجود دارد به طوری که به ازای هر $n \geqslant n_0$، x_n در $S_\varepsilon(x)$ است.

خواننده مشاهده می‌کند که شرط اول تعمیم مستقیمی است از همگرایی دنباله‌های اعداد به صورتی که در مقدمهٔ این فصل تعریف شده و شرط دوم را می‌توان به این صورت تعبیر کرد که هر گوی باز به مرکز x تمام نقاط دنباله را از مرتبه‌ای به بعد در بر دارد. اگر به آنچه در مورد معنای دنبالهٔ همگرای اعداد حقیقی می‌دانیم استناد کنیم، گزارهٔ $\{x_n\}$ راکه همگرا است می‌توان به‌صورت معادل زیر تعریف کرد: نقطه‌ای در X مانند x، وجود دارد به‌طوری که $d(x_n, x) \to ۰$. معمولاً این تعریف را به صورت خلاصهٔ زیر می‌نویسیم

$$x_n \to x$$

و می‌گوییم x_n به x میل می‌کند یا x_n به x همگراست. از شرط (۲) و مسئلهٔ ۱۰-۱ به آسانی دیده می‌شود که نقطهٔ x در این بحث منحصر به‌فرد است، یعنی غیرممکن است که $x_n \to y$ و $x \neq y$. نقطهٔ x را حد دنبالهٔ $\{x_n\}$ می‌نامند، و بعضی اوقات $x_n \to x$ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\lim x_n = x$$

معنی هر دو گزارهٔ

$$\lim x_n = x \quad \text{و} \quad x_n \to x$$

در واقع یکی است و آن این است که $\{x_n\}$ دنباله‌ای همگرا و حد آن x است.

هر دنبالهٔ همگرای $\{x_n\}$ دارای خواص زیر است: به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ عدد صحیح مثبت $n_\circ$ وجود دارد به طوری که

$$m, n \geqslant n_\circ \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

زیرا، اگر $x_n \to x$، آنگاه عدد صحیح مثبت $n_\circ$ وجود دارد به طوری که

$$n \geqslant n_\circ \Longrightarrow d(x_n, x) < \varepsilon/۲$$

و از این در می‌یابیم که

$$m, n \geqslant n_\circ \Longrightarrow d(x_m, x_n) \leqslant d(x_m, x) + d(x, x_n) < \varepsilon/۲ + \varepsilon/۲ = \varepsilon$$

هر دنبالهٔ با این خاصیت را دنبالهٔ کوشی[1] می‌نامند، و در جملات قبل دیدیم که هر دنبالهٔ همگرا، دنباله کوشی است. بدون دقت زیاد و با مسامحه می‌توان گفت که اگر جملات یک دنباله حد داشته باشند، آنگاه خود جملات به یکدیگر نزدیک می‌شوند. دانستن اینکه عکس این مطلب درست نیست، اهمیت اساسی دارد یعنی، یک دنبالهٔ کوشی لزوماً همگرا نیست. به‌عنوان مثال، زیرفضای $X = (۰, ۱]$ از خط حقیقی را درنظر بگیرید. به‌سادگی مشاهده می‌شود که دنباله‌ای که به صورت $x_n = ۱/n$ تعریف شده در این فضا یک دنبالهٔ کوشی است، اما این دنباله همگرا نیست، زیرا نقطهٔ ۰ (که دنباله میل همگرایی به آن را دارد) نقطه‌ای از این فضا نیست. مشکلی که اینجا پیش‌آمده ناشی از آن است که همگرایی دنباله فقط بستگی به خود دنباله ندارد، بلکه به ساختمان فضایی که در آن قرار دارد نیز مربوط است. یک دنبالهٔ همگرا «فی نفسه» همگرا نیست، دنباله باید به نقطه‌ای از فضا همگرا باشد. بعضی مؤلفین برای تأکید درتمایز بین دنباله‌های همگرا و دنباله‌های کوشی،

1. Cauchy

دنباله‌های کوشی را دنباله‌های «ذاتاً همگرا» می‌نامند.

فضای متری کامل، فضایی متری‌است که درآن هر دنبالهٔ کوشی همگراست. با بیانی خالی از دقت، فضای متری، کامل است اگر هر دنباله‌ای از آن که سعی در همگرایی دارد موفق شود، بدین معنی که نقطه‌ای در فضا بیابد که به آن همگرا شود. فضای (۰, ۱] که در بالا ذکر شد کامل نیست، ولی به‌وضوح با الحاق نقطهٔ ۰ به آن و تشکیل فضای اندکی بزرگتر [۰, ۱]، می‌توان‌آن را کامل کرد. درواقع هر فضای متری را، اگر قبلاً کامل نباشد، می‌توان با الحاق نقاط اضافی مناسب، کامل کرد. این روند را در مسئله‌ای در انتهای بخش ۱۴ اجمالاً بیان می‌کنیم.

یک قضیهٔ بنیادی آنالیز مقدماتی این است که خط حقیقی، یک فضای متری کامل است. چنانکه از استدلال زیر مشاهده می‌شود، صفحهٔ مختلط نیز کامل است. فرض کنید $\{z_n\}$، که در آن $z_n = a_n + ib_n$، یک دنبالهٔ کوشی از اعداد مختلط باشد. آنگاه $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ خود دنباله‌های کوشی از اعداد حقیقی خواهند بود، زیرا

$$|a_m - a_n| \leqslant |z_m - z_n|$$
$$|b_m - b_n| \leqslant |z_m - z_n|$$

چون خط حقیقی فضای کامل است، دوعدد حقیقی a و b وجود دارند به قسمی که $a_n \to a$ و $b_n \to b$. اکنون اگر بنویسیم $z = a + ib$، به کمک

$$\begin{aligned} |z_n - z| &= |(a_n + ib_n) - (a + ib)| \\ &= |(a_n - a) + i(b_n - b)| \\ &\leqslant |a_n - a| + |b_n - b| \end{aligned}$$

و ازاین امر که دو جملهٔ آخری سمت راست به ۰ میل می‌کنند، نتیجه می‌شود که $z_n \to z$. بنابراین کمال صفحهٔ مختلط مستقیماً به کمال خط حقیقی بستگی دارد. فضای متری تعریف‌شده در مثال ۹-۱ نیز کامل است، زیرا در این فضا هر دنبالهٔ کوشی از مرتبه‌ای به بعد باید ثابت باشد، یعنی، باید از یک نقطهٔ منفرد تکرار شده تشکیل شده باشد، و بنابراین به همان‌نقطه، همگرا خواهد بود.

سه فضای متری اول از پنج فضای متری‌ای که به عنوان مثال در بخش ۹ آمده است، کامل‌اند. دو فضای دیگر چه؟

در مسئلهٔ ۵ از خواننده می‌خواهیم نشان دهد که فضای ۹-۴ کامل نیست. کامل کردن این فضا منجر به نظریهٔ نوین انتگرال لبگ می‌شود، اما تعقیب این موضوع و به نتیجه رساندن آن، ما را از بحثی که داریم بسیار منحرف خواهد کرد.

از طرف دیگر، فضای $\mathcal{C}$[۰, ۱] که درمثال ۹-۵ تعریف شده است، کامل است، این مطلب را به‌صورت کلیتری در بخش ۱۴ ثابت می‌کنیم. کامل بودن این فضا، و فضاهای دیگر مشابه آن، یکی از هسته‌های اصلی توپولوژی و آنالیز نوین است.

اصطلاح حد و نقطهٔ حدی برای افرادی که به‌طور عمیق به‌آنها آشنایی ندارند، اغلب منشأ بروز اشتباه می‌شود. مثلاً برخط حقیقی دنبالهٔ ثابت {۱, ۱, ۰۰۰, ۱, ۰۰۰}

به حد ۱ همگراست، ولی مجموعهٔ نقاط این دنباله، مجموعهٔ متشکل از نقطهٔ منفرد ۱ است، و بنا بر مسئلهٔ ۱۱-۲، نقطهٔ ۱ نقطهٔ حدی این مجموعه نیست. لب مطلب این است که یک دنباله از نقاط یک مجموعه، زیرمجموعهٔ آن مجموعه نیست، بلکه تابعی است که روی اعداد صحیح مثبت تعریف شده است و مقادیر آن در آن مجموعه می‌باشند و معمولاً با فهرست کردن مقادیرش مشخص می‌شود، مانند

$$\{x_n\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$$

که در آن x_n مقدار تابع در عدد صحیح n است. دنباله ممکن است حد داشته باشد، اما ممکن نیست نقطهٔ حدی داشته باشد؛ و مجموعهٔ نقاط یک دنباله می‌تواند نقطهٔ حدی داشته باشد، اما نمی‌تواند حد داشته باشد.[1] قضیهٔ زیر این مفاهیم را به یکدیگر ربط میدهد و ابزار مفیدی برای بعضی از کارهای بعدی ماست.

قضیهٔ الف . اگر یک دنبالهٔ همگرا در یک فضای متری تعدادی نامتناهی نقاط متمایز داشته باشد، آنگاه حد این دنباله، یک نقطهٔ حدی مجموعهٔ نقاط دنباله است.

برهان : فرض کنید X یک فضای متری باشد و $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ همگرا در X با حد x. فرض می‌کنیم که x نقطهٔ حدی مجموعهٔ نقاط دنباله نباشد و نشان می‌دهیم که از این فرض نتیجه می‌شود که این دنباله فقط دارای تعداد متناهی نقاط متمایز است. از فرض ما نتیجه می‌شود که یک گوی باز $S_r(x)$ به مرکز x وجود دارد که هیچ نقطه‌ای از دنباله غیر از x را در بر ندارد. لیکن، چون x حد دنباله است، از مرتبه‌ای به بعد تمام x_nها باید در $S_r(x)$ باشند و بنابراین باید بر x منطبق باشند. از اینجا نتیجه می‌شود که فقط تعدادی متناهی از نقاط دنباله متمایز هستند.

قضیهٔ بعدی ما نشان می‌دهد که بسیاری از زیرفضاهای یک فضای متری کامل، کامل‌اند.

قضیهٔ ب . X را یک فضای متری کامل و Y را زیرفضای X فرض کنید. آنگاه Y کامل است $\Longleftrightarrow$ Y بسته است.

برهان : ابتدا فرض می‌کنیم که Y به مثابهٔ زیرفضای X کامل باشد، و نشان می‌دهیم که Y بسته است. فرض‌کنید y یک نقطهٔ حدی Y باشد. به ازای هرعدد صحیح مثبت n، $S_{1/n}(y)$ یک نقطهٔ y_n در Y را در بر دارد. واضح است که $\{y_n\}$ در X همگرا به y است و $\{y_n\}$ در Y یک دنبالهٔ کوشی است، و چون Y کامل است، نتیجه می‌شود که y در Y است. بنابراین Y بسته است.

حال فرض می‌کنیم که Y بسته باشد، و نشان می‌دهیم که کامل است. فرض کنید $\{y_n\}$ یک دنبالهٔ کوشی در Y باشد. این دنباله در X نیز دنبالهٔ کوشی خواهد بود، و چون X کامل است، $\{y_n\}$ به یک نقطهٔ x در X همگراست. نشان می‌دهیم که x در Y است. اگر $\{y_n\}$ فقط دارای تعداد متناهی نقاط متمایز باشد، آنگاه x آن نقطه‌ای است که به‌طور

---

۱. کافی است به یاد داشته باشید که «حد» فقط در مورد دنباله‌ها معنی دارد و «نقطهٔ حدی» فقط در مورد مجموعه‌ها. م.

نامتناهی تکرار شده و بنابراین x در Y است. از طرف دیگر، اگر $\{y_n\}$ دارای تعداد نامتناهی نقاط متمایز باشد، آنگاه بنابرقضیهٔ الف، x یک نقطهٔ حدی مجموعهٔ نقاط دنباله است، بنابراین x یک نقطهٔ حدی Y نیز می‌باشد، و چون Y بسته است، x در Y است.

دنبالهٔ $\{A_n\}$ از زیرمجموعه‌های یک فضای متری را دنبالهٔ نزولی می‌نامند اگر

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$$

قضیه زیرشروطی را ارائه می‌دهد که تحت آنها اشتراک چنین دنباله‌هایی ناتهی است.

قضیهٔ ج (قضیهٔ اشتراک کانتور). فرض کنید X فضای متری کامل باشد و فرض کنید $\{F_n\}$ یک دنبالهٔ نزولی از زیرمجموعه‌های بستهٔ ناتهی X باشد به‌طوری که $d(F_n) \to 0$. آنگاه $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ دقیقاً یک عضو دارد.

برهان: ابتدا گوییم از فرض $d(F_n) \to 0$ به‌وضوح دیده می‌شود که F نمی‌تواند بیش از یک عضو داشته باشد، بنابراین کافی است نشان دهیم که F ناتهی است. فرض کنید x_n نقطه‌ای در F_n باشد. چون $d(F_n) \to 0$، $\{x_n\}$ دنبالهٔ کوشی است. چون X کامل است، $\{x_n\}$ دارای حد x است. نشان می‌دهیم که x در F است، و برای اثبات این موضوع کافی است نشان دهیم که برای هر عدد ثابت ولی دلخواه n_0، x در F_{n_0} است. اگر $\{x_n\}$ فقط دارای تعداد متناهی نقطه باشد، آنگاه x آن نقطه‌ای است که به طور نامتناهی تکرار شده است، و بنابراین در F_{n_0} می‌باشد. اگر $\{x_n\}$ دارای تعداد نامتناهی نقطهٔ متمایز باشد، آنگاه x نقطهٔ حدی مجموعهٔ نقاط دنباله است، بنابراین نقطهٔ حدی زیرمجموعهٔ $\{x_n : n \geqslant n_0\}$ از مجموعهٔ نقاط دنباله و در نتیجه نقطهٔ حدی F_{n_0} است، پس (چون F_{n_0} بسته است) x در F_{n_0} می‌باشد.

زیرمجموعهٔ A از فضای متریک X را هیچ جاچگال نامند اگر درون بستار آن تهی باشد. به‌سادگی مشاهده می‌شودکه، A هیچ جاچگال است $\Longleftrightarrow$ $\bar{A}$ شامل هیچ مجموعهٔ باز ناتهی نیست $\Longleftrightarrow$ هر مجموعهٔ باز ناتهی، یک زیرمجموعهٔ باز ناتهی مجزا از $\bar{A}$ دارد $\Longleftrightarrow$ هر مجموعهٔ باز ناتهی یک زیرمجموعهٔ باز ناتهی مجزا از A دارد $\Longleftrightarrow$ هر مجموعهٔ باز ناتهی شامل یک گوی باز مجزا از A است. اگر مجموعهٔ هیچ جاچگال به مثابهٔ مجموعه‌ای تصور شود که قسمت زیادی از فضا را نمی‌پوشاند؛ قضیهٔ بعدی ما بیان می‌کند که فضای متری کامل توسط هیچ دنباله‌ای از چنین مجموعه‌هایی پوشیده نمی‌شود.

قضیهٔ د. اگر $\{A_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های هیچ‌جا چگال درفضای متری کامل X باشد، آنگاه نقطه‌ای در X وجود دارد که در هیچ یک از A_nها نیست.

برهان: برای طولانی نشدن برهان، علایم معمولیمان برای گویهای باز و بسته را به‌کار نمی‌بریم. چون X باز است و A_1 هیچ جا چگال، گوی باز S_1 به‌شعاع کمتر از ۱ وجود دارد که از A_1 مجزاست. فرض کنید F_1 گوی بسته‌ای باشد متحدالمرکز با S_1 و با شعاع نصف آن، و درون F_1 را در نظر بگیرید. چون A_2 هیچ جا چگال است، $\mathrm{Int}(F_1)$ شامل یک گوی باز S_2 و به‌شعاع کمتراز ۱/۲ است که از A_2 مجزاست. F_2 را گوی بستهٔ

متحدالمرکز با S_2 و با شعاع نصف آن فرض کنید، و درون F_2 را در نظر بگیرید. چون A_3 هیچ‌جا چگال است، $\operatorname{Int}(F_2)$ شامل یک گوی باز S_3 با شعاع کمتر از ۱/۴ است که از A_3 مجزاست. فرض کنید F_3 گوی بسته‌ای باشد با شعاع نصف S_3 و متحدالمرکز با آن. با ادامهٔ این روش، یک دنبالهٔ نزولی $\{F_n\}$ از زیرمجموعه‌های بستهٔ ناتهی X به دست می‌آوریم به‌طوری که $d(F_n) \to 0$. چون X کامل است، بنا به قضیهٔ ج، یک نقطهٔ x در X وجود دارد که در همهٔ F_n هاست. واضح است که این نقطه درهمهٔ S_n ها هست و بنابراین (چون S_n از A_n مجزاست) این نقطه در هیچیک از A_nها نیست.

قضیهٔ زیر که معادلی از قضیهٔ د است برای اهداف ما غالباً مناسبتر است.

قضیهٔ ه. اگر یک فضای متریک کامل، اجتماع دنباله‌ای از زیرمجموعه‌هایش باشد، آنگاه درون بستار لااقل یکی از مجموعه‌های این دنباله باید ناتهی باشد.

قضایای د و ه در واقع یک قضیه‌اند که به دو صورت متفاوت بیان شده‌اند. ما هر دوقضیه (یا هرکدام ازآنها) را قضیهٔ بئر می‌نامیم. ماهیت این قضیه، البته، بالنسبه فنی است و از خواننده نمی‌توان توقع داشت که اهمیت این قضیه را در مرحلهٔ فعلی کار درک کند. معهذا وی درخواهد یافت که ما گهگاه محتاج آن می‌شویم و هنگام بروز احتیاج، قضیهٔ بئر وسیله‌ای اجتناب ناپذیر است.[1]

مسائل

۱. فرض کنید X یک فضای متری باشد. ثابت کنید که: اگر $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌هایی در X باشند به‌طوری که $x_n \to x$ و $y_n \to y$، آنگاه $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.

۲. نشان دهید که یک دنبالهٔ کوشی همگراست $\Longleftrightarrow$ یک زیردنبالهٔ همگرا دارد.

۳. اگر $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ حاصلضرب مورد بحث درمسئلهٔ ۹-۴، و نیزاگر هر یک از فضاهای مختص X_1، X_2، ...، X_n کامل باشد، نشان دهید که X نسبت به هر یک از متریکهای d و $\bar{d}$ که در مسئلهٔ ۹-۴ تعریف شده، کامل است.

۴. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد. بنا بر مسئلهٔ ۹-۵ مجموعهٔ تمام توابع حقیقی کراندار تعریف شده بر X، نسبت به متریک القا شده توسط نرمی که در آن مسئله تعریف شده است، فضای متری است. نشان دهید که این فضای متری، کامل است. (راهنمایی: اگر $\{f_n\}$ یک دنبالهٔ کوشی باشد، آنگاه به‌ازای هر x در X، $\{f_n(x)\}$ یک دنبالهٔ کوشی از اعداد حقیقی است.)

---

۱. چند اصطلاح غیرتوصیفی در مورد قضیهٔ بئر وجود داردکه ما خود آنها را به کار نمی‌بریم ولی‌خواننده باید باآنها آشنا باشد. یک زیرمجموعه ازفضای متری را مجموعه‌ای از **کاتگوری اول** نامند اگر بتوان آن را به صورت اجتماع یک دنباله از مجموعه‌های هیچ جا چگال نمایش داد، وآن را مجموعه‌ای از کاتگوری دوم نامند اگر ازکاتگوری اول نباشد. حال قضیهٔ بئر را ــ که گاهی قضیهٔ کاتگوری بئر می‌نامند ــ می‌توان به صورت زیر بیان کرد، هر فضای متری کامل (به عنوان زیرمجموعه‌ای از خودش) مجموعه‌ای ازکاتگوری دوم است.

۵. نشان دهید که توابع f_n زیر که بر $[0, 1]$ تعریف شده‌اند، در فضای تعریف شده در مثال ۹-۴، یک دنبالهٔ کوشی تشکیل می‌دهند که همگرا نیست

$f_n(x) = 1$ اگر $0 \leqslant x \leqslant 1/2$،

$f_n(x) = -2^n(x - 1/2) + 1$ اگر $1/2 \leqslant x \leqslant 1/2 + (1/2)^n$،

$f_n(x) = 0$ اگر $1/2 + (1/2)^n \leqslant x \leqslant 1$،

۶. مثالی ارائه دهید که نشان دهد که اگر درقضیهٔ اشتراک کانتور فرض $d(F_n) \to 0$ را حذف کنیم، مجموعهٔ F می‌تواند تهی شود.

۷. نشان دهید که یک مجموعهٔ بسته هیچ‌جا چگال است $\Longleftrightarrow$ مکمل آن‌همه جا چگال است.

۸. نشان دهید که مجموعهٔ کانتور هیچ جاچگال است.

۱۳. نگاشتهای پیوسته

در بخش قبل مفهوم همگرایی را به‌فضای متری عمومی، تعمیم دادیم. اکنون همین کار را برای پیوستگی انجام می‌دهیم.

فرض کنید X و Y دوفضای متری، با متریکهای d_1 و d_2 باشند، و f نگاشتی از X بتوی Y باشد. f در نقطهٔ x_0 در X پیوسته است، اگر یکی از دو شرط معادل زیر برقرار باشد

(۱) به ازای هر $\varepsilon > 0$، عدد $\delta > 0$ وجود دارد به‌طوری که

$$d_1(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

(۲) به ازای هر گوی باز $S_\varepsilon(f(x_0))$ به مرکز $f(x_0)$، یک گوی باز $S_\delta(x_0)$ به مرکز x_0 وجود دارد به طوری که

$$f(S_\delta(x_0)) \subseteq S_\varepsilon(f(x_0))$$

خواننده توجه دارد که شرط اول، تعریف مقدماتیی را که در مقدمهٔ این فصل آمده است، تعمیم می‌دهد، و شرط دوم، تعریف اول را به زبان گویهای باز برمی‌گرداند.

اولین قضیهٔ ما، پیوستگی در یک نقطه را برحسب دنباله های همگرا به آن نقطه، بیان می‌کند.

قضیهٔ الف. X و Y را دو فضای متری و f را نگاشتی از X بتوی Y فرض کنید. آنگاه f در x_0 پیوسته است اگر و فقط اگر

$$x_n \to x_0 \Longrightarrow f(x_n) \to f(x_0)$$

برهان: ابتدا فرض کنیم f در x_0 پیوسته است. اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد به طوری که $x_n \to x_0$ باید نشان دهیم که $f(x_n) \to f(x_0)$. فرض کنید $S_\varepsilon(f(x_0))$ گوی بازی به‌مرکز $f(x_0)$ باشد. بنابه فرض، گوی باز $S_\delta(x_0)$ به‌مرکز x_0 وجود دارد به‌طوری که $f(S_\delta(x_0)) \subseteq S_\varepsilon(f(x_0))$. چون $x_n \to x_0$، از مرتبه‌ای به بعد همهٔ x_nها در $S_\delta(x_0)$

قرار می‌گیرند. چون $f(S_\delta(x_\circ)) \subseteq S_\epsilon(f(x_\circ))$، از مرتبه‌ای به بعد همهٔ $f(x_n)$ها در $S_\epsilon(f(x_\circ))$ قرار می‌گیرند. بنابراین $f(x_n) \to f(x_\circ)$.

برای اثبات نصف دیگر قضیه، فرض می‌کنیم f در $x_\circ$ پیوسته نباشد، و نشان می‌دهیم که از $x_n \to x_\circ$ نتیجه نمی‌شود که $f(x_n) \to f(x_\circ)$. بنابر فرض، یک گوی باز $S_\epsilon(f(x_\circ))$ وجود دارد که نگارهٔ هیچ گوی بازی به مرکز $x_\circ$ تحت f مشمول آن نیست. دنبالهٔ گویهای باز $S_1(x_\circ)$، $S_{1/2}(x_\circ)$، ...، $S_{1/n}(x_\circ)$، ...، را در نظر بگیرید و دنبالهٔ $\{x_n\}$ را طوری بسازید که $x_n \in S_{1/n}(x_\circ)$ و $f(x_n) \notin S_\epsilon(f(x_\circ))$. واضح است که x_n به $x_\circ$ همگراست و $f(x_n)$ همگرا به $f(x_\circ)$ نیست.

نگاشت‌ازیک فضای متری بتوی فضای متری دیگررا پیوسته‌گویند، اگراین نگاشت درهر نقطهٔ‌حوزه‌تعریفش‌پیوسته‌باشد. قضیهٔ‌زیر یک نتیجهٔ فوری‌قضیهٔ الف واین تعریف است.

قضیهٔ ب. فرض‌کنید X و Y دوفضای متری و f یک‌نگاشت از X بتوی Y باشد، آنگاه f پیوسته است اگر و فقط اگر

$$x_n \to x \Longrightarrow f(x_n) \to f(x)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که نگاشتهای پیوسته ازیک فضای متری بتوی فضای دیگر، دقیقاً آن نگاشتهایی‌اند که دنباله‌های همگرا را به دنباله‌های همگرا می‌فرستند، یا به عبارت دیگر، حافظ همگرایی‌اند. قضیهٔ بعدی ما، نگاشتهای پیوسته را برحسب مجموعه‌های باز مشخص می‌کند.

قضیهٔ ج. X و Y رافضاهای متری و f را یک‌نگاشت از X بتوی Y فرض کنید، آنگاه f پیوسته است $\Longleftrightarrow$ اگر G در Y باز باشد، آنگاه $f^{-1}(G)$ در X باز است.

برهان : ابتدا فرض می‌کنیم f پیوسته است. اگر G یک مجموعهٔ باز در Y باشد، باید نشان دهیم که $f^{-1}(G)$ در X باز است. اگر $f^{-1}(G)$ تهی باشد باز است، بنابراین می‌توان فرض کرد که $f^{-1}(G)$ ناتهی است. فرض کنید x نقطه‌ای در $f^{-1}(G)$ باشد. آنگاه $f(x)$ در G است، و چون G باز است، یک گوی باز $S_\epsilon(f(x))$ به‌مرکز $f(x)$ وجود دارد که مشمول G است. بنا به تعریف پیوستگی، یک گوی باز $S_\delta(x)$ وجود دارد به طوری که $f(S_\delta(x)) \subseteq S_\epsilon(f(x))$. چون $S_\epsilon(f(x)) \subseteq G$، همچنین داریم $f(S_\delta(x)) \subseteq G$، و از اینجا نتیجه می‌شود که $S_\delta(x) \subseteq f^{-1}(G)$. بنابراین $S_\delta(x)$ گوی بازی به مرکز x است و مشمول $f^{-1}(G)$ می‌باشد، درنتیجه $f^{-1}(G)$ باز است.

حال فرض می‌کنیم وقتی G باز باشد، $f^{-1}(G)$ نیز باز است، و نشان می‌دهیم که f پیوسته است. برای این منظورنشان می‌دهیم که f در هرنقطهٔ دلخواه x در X پیوسته است. فرض‌کنید $S_\epsilon(f(x))$ گوی بازی به‌مرکز $f(x)$ باشد. این‌گوی بازیک مجموعهٔ بازاست، بنابراین نگارهٔ وارون آن یک مجموعهٔ باز است که x را دربر دارد. پس، یک کرهٔ باز $S_\delta(x)$ وجود داردکه مشمول این نگارهٔ وارون است. واضح است‌که $f(S_\delta(x))$ مشمول $S_\epsilon(f(x))$ است، در نتیجه f در نقطهٔ x پیوسته است. بالاخره چون x یک نقطهٔ دلخواه

در X بود، f پیوسته است.

این مطلب که نگاشتهای پیوسته دقیقاً آن نگاشتهایی هستند که مجموعه‌های باز را به مجموعه‌های باز برمی‌گردانند، برای همهٔ کارهای ما از فصل ۳ به بعد حائز اهمیت فراوانی خواهد بود.

حال به مفهوم مفید پیوستگی یکنواخت می‌رسیم. برای توضیح پیوستگی یکنواخت، به‌تحلیل تعریف پیوستگی که درشرط (۱) درآغازاین بخش بیان شد، می‌پردازیم. X و Y را فضاهایی متری، با متریکهای d_1 و d_2، و f را نگاشتی از X بتوی Y فرض می‌کنیم. فرض می‌کنیم f پیوسته باشد، یعنی، به ازای هر نقطهٔ x_0 در X جملهٔ زیر درست باشد: به ازای $\epsilon > 0$ مفروض، یک عدد $\delta > 0$ می‌توان یافت به طوری که

$$d_1(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

خواننده بی‌شک به‌این مطلب توجه دارد که اگر x_0 ثابت نگهداشته شود و ϵ کوچکترشود، آنگاه، در حالت کلی، δ باید متقابلاً کوچکتر شود. مثلاً، در مورد تابع حقیقی f که به صورت $f(x) = 2x$ تعریف شده است، همیشه δ را می‌توان هر عدد مثبت کوچکتر از $\epsilon/2$ یا مساوی با آن انتخاب کرد، و با δهای بزرگتر، به نتیجهٔ مطلوب نمی‌رسیم. بنابراین، در حالت کلی δ به ϵ بستگی دارد اجازه دهید که به تحلیل تعریف برگردیم. این تعریف بیان می‌کند که برای ϵ مفروض ما، یک δ یافت می‌شود که در نقطهٔ خاص x_0 مورد بحث، به صورت فوق عمل کند. اما اگر ϵ را ثابت نگهداریم و به نقطهٔ x_0 دیگری تغییر مکان دهیم، آنگاه ممکن است که دیگر این δ عمل نکند، یعنی ممکن است لازم باشد که δی کوچکتری برای برآورد شرایط تعریف، اختیار کنیم. بدین طریق مشاهده می‌کنیم که در حالت کلی δ نه تنها به ϵ، بلکه به x_0 نیز بستگی دارد. پیوستگی یکنواخت اساساً همان پیوستگی است با این شرط اضافی که به ازای هر $\epsilon > 0$ یک $\delta > 0$ بتوان یافت که روی تمام فضای X، به طور یکنواخت عمل کند، به این معنی که به x_0 بستگی نداشته باشد. تعریف رسمی آن به صورت زیر است: اگر X و Y دو فضای متری با متریکهای d_1 و d_2 باشند، آنگاه نگاشت f از X بتوی Y را پیوستهٔ یکنواخت‌گوییم اگر به‌ازای هر $\epsilon > 0$ عدد $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$d_1(x, x') < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(x')) < \epsilon$$

واضح است که هر نگاشت پیوستهٔ یکنواخت، خود به‌خود پیوسته است. خواننده ملاحظه خواهد کرد که تابع حقیقی f فوق که روی تمام خط حقیقی به صورت $f(x) = 2x$ تعریف شده است، پیوستهٔ یکنواخت است. ازطرف دیگر، تابع g که روی R به صورت $g(x) = x^2$ تعریف شده، پیوسته است ولی پیوستهٔ یکنواخت نیست. همچنین، تابع پیوستهٔ h که روی $(0, 1)$ به‌صورت $h(x) = 1/x$ تعریف شده است، پیوستهٔ یکنواخت نیست.

نگاشتهای پیوستهٔ یکنواخت ــ در مقابل آنهایی که صرفاً پیوسته هستند ــ درآنالیز از اهمیت خاصی برخوردارند. قضیهٔ ذیل خاصیتی از این نگاشتها را بیان می‌کند که غالباً مفید است.

قضیهٔ د. X رافضای متری، Y را فضای متری کامل، و A را یک زیرفضای چگال X فرض کنید. اگر f یک نگاشت پیوستهٔ یکنواخت از A بتوی Y باشد، آنگاه f رامی‌توان به‌طور یکتا به‌یک نگاشت پیوستهٔ یکنواخت g از X بتوی Y گسترش داد.

برهان: فرض‌کنید d_1 و d_2 متریکهای X و Y باشند. اگر $A = X$، نتیجه بدیهی است. بنابراین فرض می‌کنیم $A \neq X$. ابتدا نشان می‌دهیم که چگونه نگاشت g تعریف می‌شود. اگر x یک نقطه در A باشد، $g(x)$ را برابر $f(x)$ تعریف می‌کنیم. حال فرض کنید x نقطه‌ای در $X - A$ باشد. چون A چگال است، x حد یک دنبالهٔ همگرای $\{a_n\}$ در A است. چون $\{a_n\}$ دنبالهٔ کوشی است و f پیوستهٔ یکنواخت است، $\{f(a_n)\}$ دنبالهٔ کوشی در Y است (رجوع شود به مسئلهٔ ۸). چون Y کامل است، یک نقطه در Y موجود است (این نقطه را $g(x)$ می‌نامیم) به‌طوری که $f(a_n) \to g(x)$. باید مطمئن شویم که $g(x)$ صرفاً به x بستگی دارد، و نه به دنبالهٔ $\{a_n\}$. فرض کنید $\{b_n\}$ دنبالهٔ دیگری در A باشد به طوری که $b_n \to x$. بنابراین

$$d_1(a_n, b_n) \to 0$$

و بنابر پیوستگی یکنواخت f، $d_2(f(a_n), f(b_n)) \to 0$. ازاین موضوع به‌سهولت نتیجه می‌شود که $f(b_n) \to g(x)$.

حال نشان می‌دهیم که g پیوستهٔ یکنواخت است. فرض‌کنید $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، و با استفاده از پیوستگی یکنواخت f عدد $\delta > 0$ را پیدا می‌کنیم به‌طوری که به‌ازای هر a و a' در A داشته باشیم $d_1(a, a') < \delta \Longrightarrow d_2(f(a), f(a')) < \varepsilon$. فرض کنید x و x' دو نقطهٔ دلخواه X باشند به‌طوری که $d_1(x, x') < \delta$. کافی است نشان دهیم که $d_2(g(x), g(x')) \leqslant \varepsilon$. فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{a'_n\}$ دنباله‌هایی در A باشند به‌طوری که $a_n \to x$ و $a'_n \to x'$. بنابر نامساوی مثلثی داریم

$$d_1(a_n, a'_n) \leqslant d_1(a_n, x) + d_1(x, x') + d_1(x', a'_n)$$

با توجه به‌این‌نامساوی واینکه $d_1(a_n, x) \to 0$، $d_1(x, x') < \delta$، و $d_1(x', a'_n) \to 0$، نتیجه می‌شود که به‌ازای هر n به‌قدر کافی بزرگ، $d_1(a_n, a'_n) < \delta$. حال از اینجا نتیجه می‌شود که به‌ازای هر n به‌قدر کافی بزرگ، $d_2(f(a_n), f(a'_n)) < \varepsilon$. بنا بر مسئلهٔ ۱۲-۱

$$d_2(g(x), g(x')) = \lim d_2(f(a_n), f(a'_n))$$

و از اینجا و نتیجهٔ قبلی می‌بینیم که $d_2(g(x), g(x')) \leqslant \varepsilon$. آنچه باقی می‌ماند نشان دادن یکتا بودن g است، و این مطلب به‌سادگی به‌وسیلهٔ مسئلهٔ ۳ که در زیرمی‌آید ثابت می‌شود.

نوع مهمی از نگاشتهای پیوستهٔ یکنواخت اغلب در عمل ظاهر می‌شود. اگر X و Y دو فضای متری با متریکهای d_1 و d_2 باشند، نگاشت f از X بروی Y را همانمتری (یا یک نگاشت همانمتر) می‌نامند اگر به‌ازای تمام نقاط x و x'

$$d_1(x, x') = d_2(f(x), f(x'))$$

و اگر چنین نگاشتی وجود داشته باشد، گوییم X با Y همانمتر است. واضح است که یک همانمتری لزوماً یک به یک است. اگر X با Y همانمتر باشد، آنگاه نقاط این فضا ها را به طریقی می‌توان در یک تناظر یک به یک قرار داد که فاصلهٔ بین هر دو نقطه و دو نقطهٔ متناظر یکی باشد. بنابراین این فضاها صرفاً در ماهیت نقاطشان تفاوت دارند و اغلب این فرق بی‌اهمیت است. ما معمولاً فضاهای همانمتر را متمایز از یکدیگر درنظر نمی‌گیریم. اغلب مناسب است که بتوانیم این اصطلاح را در حالتی هم که نگاشتها لزوماًبرویِ‌نیستند، به‌کار بریم. اگر f یک نگاشت از X بتوی Y باشد که به‌معنی فوق فواصل را حفظ می‌کند، آنگاه f را یک‌همانمتری از X بتوی Y، یا یک همانمتری‌از X بروی $f(X)$، زیرفضای Y، می‌نامیم. در این حالت اغلب گوییم که Y شامل یک نگارهٔ همانمتر X، یعنی $f(X)$ است.

مسائل

۱. X و Y را دو فضای متری و f را نگاشتی از X بتوی Y فرض کنید. اگر f نگاشت ثابت باشد، نشان دهید که f پیوسته است. با استفاده از این امر، نشان دهید که لازم نیست نگاشت پیوسته این خاصیت را داشته باشد که نگارهٔ هرمجموعهٔ باز، باز باشد.

۲. فرض کنید X یک فضای متری با متریک d باشد، و فرض کنید $x_\circ$ یک نقطهٔ ثابت X باشد. نشان دهید که تابع حقیقی $f_{x_\circ}$ که روی X به‌صورت $f_{x_\circ}(x) = d(x, x_\circ)$ تعریف‌شده، پیوسته است. آیا پیوستهٔ یکنواخت هم هست؟

۳. X و Y را دو فضای متری و A را یک زیرمجموعهٔ ناتهی از X فرض کنید. اگر f و g دونگاشت پیوسته از X بتوی Y باشند به‌طوری‌که به‌ازای هر x در A، $f(x)=g(x)$، نشان دهید که به ازای هر x در $\bar{A}$، $f(x) = g(x)$.

۴. X و Y را دو فضای متری و f را نگاشتی از X بتوی Y فرض کنید. نشان دهید که f پیوسته است $\Longleftrightarrow$ $f^{-1}(F)$ در X بسته است، اگر F در Y بسته باشد $\Longleftrightarrow$ به ازای هر زیرمجموعهٔ A از X، $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

۵. نشان دهیدکه هر نگاشتی از فضای متری تعریف شده در مثال ۹-۱ بتوی هرفضای متری دیگری، پیوسته است.

۶. تابع حقیقی f را که برخط حقیقی R به صورت $f(x) = x^۲$ تعریف شده است، در نظر بگیرید. اگر b عدد حقیقی مثبت مفروضی باشد، از $\epsilon > \circ$ شروع کنید و $\delta > \circ$ را به نحوی بیابید که در شرایط تعریف صدق کند، ثابت کنید که تحدید f به بازهٔ بستهٔ $[\circ, b]$ پیوستهٔ یکنواخت است.

۷. کدامیک از توابع زیر بر بازهٔ باز واحد $(\circ, ۱)$ پیوستهٔ یکنواخت‌اند؟ کدامیک بر بازهٔ باز $(\circ, +\infty)$ پیوستهٔ یکنواخت‌اند؟

$$۱/(۱ - x);\ \ ۱/(۲ - x);\ \ \sin x;\ \ \sin(۱/x);\ \ x^{۱/۲};\ \ x^۳$$

۸. در برهان قضیهٔ ۵ گفتیم: نگارهٔ هر دنبالهٔ کوشی تحت یک نگاشت پیوستهٔ یکنواخت، دنبالهٔ کوشی است. جزئیات برهان این حکم را عرضه کنید.

۹. فرض کنید f تابع حقیقی پیوسته‌ای باشد که بر R تعریف شده و در معادلهٔ تابعی زیر صدق می‌کند

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

نشان دهید کـه این تـابـع بـایـد بـه‌صورت $f(x)=mx$ باشد، m عـددی حقیقی است. (راهنمایی: زیر فضای اعداد گویا در فضای متری R چگال است.)

۱۴. فضاهای توابع پیوسته

در مثال ۹-۵ تـوصیف مختصری از فضـای متری $\mathscr{C}[0, 1]$ داده شد. خـواننده بـه یـاد دارد که نقاط این فضا، توابع پیوستهٔ کرانداری هستند کـه بـر بـازهٔ بستهٔ $[0, 1]$ تعریف شده‌اند و متریک این فضا بـه‌صورت $d(f, g)=\sup|f(x)-g(x)|$ تعریف شده است. دراین بخش دو هدف داریم: یکی تعمیم این مثال خیلی مهم با درنظر گرفتن توابعی که برفضای متری دلخواهی تعریف شده‌اند، و دیگری جـای دادن همهٔ این‌گونه فضاهـای تابعی در محل مخصوص خود، از طریق عـرضهٔ جزئیات طـرح ساختاری مشترک در آنها (این طرح ساختاری دربخش ۹ به اختصار بحث شده است.) با قسمت دوم شروع می‌کنیم، و به تعریف دستگاههایی جبری که به امور مورد توجه فعلی مـا مربوطاند، می‌پردازیم.

L را مجموعه‌ای ناتهی فرض کنید، و فرض کنیدکه هرزوج از اعضای x و y در L را طی روندی‌که جمع می‌نامند، می‌توان ترکیب‌کرد وعضو z در L را، که‌با $z=x+y$ نشان داده می‌شود، بـه‌دست آورد. همچنین فرض کنید کـه این عمل جمع در شرایط زیر صدق می‌کند

(۱) $x+y=y+x$

(۲) $x+(y+z)=(x+y)+z$

(۳) یک عضو یکتا در L وجود دارد کـه به 0 نمایش داده می‌شود و عضو صفر یا مبدأ نامیده می‌شود، به‌طوری که به ازای هر x، $x+0=x$

(۴) به هرعضو x در L، یک عضو یکتا در L متناظر است، کـه به $-x$ نمایش داده می‌شود و قرینهٔ x نامیده می‌شود، به‌طوری که $x+(-x)=0$.

به تبعیت از اصطلاحاتی که در این باب معمول است، دستگاه اعداد حقیقی یا دستگاه اعداد مختلط را مجموعهٔ اسکالرها می‌نامیم. حال فرض می‌کنیم کـه هر اسکالر α را با هر عضو x در L طی روندی که ضرب اسکالر نامیده می‌شود می‌توان ترکیب کرد تا عضو y در L کـه با $y=\alpha x$ نشان داده می‌شود، به‌دست آید به‌طوری‌که

(۵) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

(۶) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$

(۷) $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$

(۸) $1\cdot x=x$

دستگاه جبری L که با این اعمال و اصول موضوعه تعریف شد، فضای خطی نامیده می‌شود. برحسب اینکه چه اعدادی به‌عنوان اسکالر پذیرفته شوند (صرفاً اعداد حقیقی، یا همهٔ اعداد مختلط)، فضا را فضای خطی حقیقی یا فضای خطی مختلط می‌نامیم. به دلایل هندسی که در بخش بعد گفته می‌شود، فضای خطی را اغلب فضای برداری می‌نامند، و اعضای آن را بردار می‌گویند.

ما اینجا درنظر نداریم به‌بسط نظریهٔ‌جبری فضاهای‌خطی بپردازیم. تنها می‌خواهیم‌چند مفهوم و اصطلاح که به‌عنوان پایه برای فضاهای متری مورد مطالعهٔ ما مفید هستند در دسترس بگذاریم و این فضاها را از دریچه این اصطلاحات بنگریم. با این عزم، چند حکم ساده را ذکر می‌کنیم که اثبات آنها با استفاده از اصول موضوعهٔ فضاهای خطی آسان است

به‌ازای هر x، $\circ + x = x$؛ $\quad x + z = y + z \Longrightarrow x = y$

(راهنمایی: $-z$ را در سمت راست دو طرف تساوی، اضافه کنید)؛

$\alpha \cdot \circ = \circ$؛ $\quad$ (راهنمایی: $\alpha \cdot \circ + \alpha x = \alpha(\circ + x) = \alpha x = \circ + \alpha x$)

$\circ \cdot x = \circ$؛ $\quad$ (راهنمایی: $\circ \cdot x + \alpha x = (\circ + \alpha)x = \alpha x = \circ + \alpha x$)

$(-1)x = -x$؛

(راهنمایی: $\circ = \circ \cdot x = (1 + (-1))x = 1 \cdot x + (-1)x = x + (-1)x$).

خواننده توجه دارد که در رابطهٔ $\circ \cdot x = \circ$ علامت $\circ$ را با دو معنی متفاوت به کار برده‌ایم در چپ به‌عنوان یک اسکالر و در راست به‌عنوان یک بردار. معانی متعدد دیگری به این علامت $\circ$ داده خواهد شد، ولی خوشبختانه همیشه می‌توان از طریق دقت در سیاق متن از اشتباه پرهیز کرد. مناسب است عمل تفریق را به کمک علامت $x - y$ به عنوان خلاصهٔ $x + (-y)$، تعریف کنیم، $x - y$ تفاضل x و y نامیده می‌شود.

زیرمجموعهٔ ناتهی M از فضای خطی L را زیرفضای خطی L نامند اگر وقتی x و y در M است، $x + y$ نیز در M باشد و وقتی x در M است، به ازای هر اسکالر α، αx نیز در M باشد. چون M ناتهی است، $\circ \cdot x = \circ$ نشان می‌دهد که $\circ$ در M است. چون $(-1)x = -x$، اگر x در M باشد، $-x$ نیز در M خواهد بود. فوراً می‌توان دریافت که زیر فضای خطی از یک فضای خطی، نسبت به همان اعمال، خود فضای خطی است.

فضای خطی نرم‌دار یک فضای خطی است که روی آن نرم تعریف شده باشد، یعنی تابعی که به هر عضو x در فضا یک عدد حقیقی $\|x\|$ نسبت دهد، به طوری که

$$(1) \quad \|x\| \geqslant \circ \text{ و } \|x\| = \circ \Longleftrightarrow x = \circ$$

$$(2) \quad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

$$(3) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$$

اجمالاً می‌توان گفت که فضای خطی نرم‌دار یک فضای خطی است که در آن مفهومی رضایبخش از فاصلهٔ یک نقطهٔ دلخواه تا مبدأ، موجود باشد. با توجه به (۳) و این که $-x = (-1)x$، تساوی $\|-x\| = \|x\|$ به دست می‌آید. چنانکه در بخش ۹ دیدیم، فضای خطی نرم‌دار نسبت به متریک القائی، که به صورت زیر تعریف می‌شود، فضای متری است.

$$d(x, y) = \| x - y \|$$

فضای باناخ فضای خطی نرم‌داری است که به‌عنوان یک فضای متری، کامل باشد. بنا به‌قضیهٔ ۱۲-ب، هر زیرفضای خطی بسته از یک فضای باناخ، نسبت به‌همان اعمال جبری و همان نرم، خود یک فضای باناخ است.

همین اندازه دربارهٔ چهارچوب فنی موضوع کافی است. حال به فضاهایی متری می‌پردازیم که مورد توجه اصلی ما هستند. همهٔ این فضاها، فضاهای تابعی‌اند، به این معنی که اعضای این فضاهای خطی توابعی هستند که بر یک مجموعهٔ ناتهی X تعریف شده و جمع وضرب اسکالری آنها به‌صورت نقطه‌ای، یعنی با $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ و $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ تعریف شده‌اند. متذکرمی‌شویم که عضو صفر در یک چنین فضای خطی، تابع ثابت ۰ می‌باشد که تنها مقدار آن اسکالر ۰ است و

$$(-f)(x) = -f(x)$$

حال فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد، و L مجموعهٔ تمام توابع حقیقی تعریف‌شده روی X را در نظر بگیرید. واضح است که L نسبت به اعمال مشروح در فوق یک فضای خطی حقیقی است. حال خودمان را به زیرمجموعهٔ B متشکل از تمام توابع کراندار L، محدود می‌کنیم. بدیهی است که B یک زیرفضای خطی L است و بنابراین به نوبهٔ خود فضای خطی است. علاوه‌بر آن، اگر یک نرم‌روی B به صورت $\|f\| = \sup |f(x)|$ تعریف کنیم، آنگاه B یک فضای باناخ است (رجوع شود به مسائل ۹-۵ و ۱۲-۴).

سپس فرض می‌کنیم که مجموعهٔ زیربنای X، یک فضای متری باشد. بااین‌فرض می‌توان مطرح کرد که آیا تابعی که بر X تعریف شده، پیوسته است یا نه. $\mathcal{C}(X, R)$ را آن زیرمجموعهٔ B تعریف می‌کنیم که از تمام توابع پیوسته تشکیل شده باشد. در نتیجه $\mathcal{C}(X, R)$ مجموعهٔ تمام توابع حقیقی پیوستهٔ کراندار روی فضای متری X خواهد بود، و بنا برمسئلهٔ ۱۳-۱ $\mathcal{C}(X, R)$ ناتهی است.

لم. اگر f و g دو تابع حقیقی پیوسته باشند که روی فضای متری X تعریف شده‌اند، آنگاه $f + g$ و αf نیز، که در آن α عدد حقیقی دلخواهی است، پیوسته خواهند بود.

برهان: فرض کنید d متریک X باشد. با نشان‌دادن اینکه $f + g$ درنقطهٔ دلخواه x_0 در X پیوسته است، پیوستگی $f + g$ ثابت می‌شود. فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده‌باشد. چون f و g پیوسته‌اند، در نقطهٔ x_0 نیز پیوسته خواهند بود و لهذا $\delta_1 > 0$ و $\delta_2 > 0$ را می‌توانیم پیدا کنیم به‌طوری که

$$d(x, x_0) < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2$$

و

$$d(x, x_0) < \delta_2 \Longrightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon/2$$

بین δ_1 و δ_2، عدد کوچکتر را δ فرض کنید. آنگاه پیوستگی $f + g$ درنقطهٔ x_0 از روابط زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} d(x, x_\circ) < \delta \Longrightarrow & |(f+g)(x) - (f+g)(x_\circ)| \\ & = |[f(x)+g(x)] - [f(x_\circ)+g(x_\circ)]| \\ & = |[f(x)-f(x_\circ)] + [g(x)-g(x_\circ)]| \\ & \leqslant |f(x)-f(x_\circ)| + |g(x)-g(x_\circ)| \\ & < \varepsilon/۲ + \varepsilon/۲ = \varepsilon \end{aligned}$$

به عهدهٔ خواننده است که به روشی مشابه پیوستگی αf را ثابت کند.

از این لم نتیجه می‌شود که $\mathcal{C}(X, R)$ یک زیرفضای خطی از فضای خطی B است. حال ثابت می‌کنیم که $\mathcal{C}(X, R)$ به عنوان زیرمجموعهٔ فضای متری B، بسته است.

لم. $\mathcal{C}(X, R)$ یک زیرمجموعهٔ بسته فضای متری B است.

برهان: f را تابعی در B فرض کنید که در بستار $\mathcal{C}(X, R)$ باشد. با نشان دادن اینکه f در نقطهٔ دلخواه $x_\circ$ از X پیوسته است، ثابت می‌شود که f پیوسته است، و بنابراین در $\mathcal{C}(X, R)$ است. این برای اثبات لم کافی است، زیرا مجموعه‌ای که مساوی بستار خود باشد، بسته است. فرض کنید d متریک X باشد، و فرض کنید $\varepsilon > \circ$ داده شده باشد. چون f در بستار $\mathcal{C}(X, R)$ است، تابعی مانند $f_\circ$ در $\mathcal{C}(X, R)$ وجود دارد به‌طوری که $\|f - f_\circ\| < \varepsilon/۳$. از اینجا نتیجه می‌شود که به‌ازای هر x در X، $|f(x) - f_\circ(x)| < \varepsilon/۳$. چون $f_\circ$ پیوسته است، و بنابراین در $x_\circ$ پیوسته می‌باشد، یک $\delta > \circ$ می‌توان پیدا کرد به‌طوری که

$$d(x, x_\circ) < \delta \Longrightarrow |f_\circ(x) - f_\circ(x_\circ)| < \varepsilon/۳$$

اکنون از روابط زیر نتیجه می‌شود که f در $x_\circ$ پیوسته است

$$\begin{aligned} d(x,x_\circ) < \delta \Longrightarrow & |f(x) - f(x_\circ)| \\ & = |[f(x) - f_\circ(x)] + [f_\circ(x) - f_\circ(x_\circ)] + [f_\circ(x_\circ) - f(x_\circ)]| \\ & \leqslant |f(x) - f_\circ(x)| + |f_\circ(x) - f_\circ(x_\circ)| + |f_\circ(x_\circ) - f(x_\circ)| \\ & < \varepsilon/۳ + \varepsilon/۳ + \varepsilon/۳ = \varepsilon \end{aligned}$$

چون یک زیرفضای بسته از یک فضای باناخ، خود فضای باناخ است، می‌توانیم نتایج بحث و لم‌های فوق را در قضیهٔ زیر خلاصه کنیم.

قضیهٔ الف. $\mathcal{C}(X, R)$، مجموعهٔ تمام توابع حقیقی پیوستهٔ کراندار که روی X تعریف شده‌اند، نسبت به جمع و ضرب اسکالر نقطه‌ای با نرمی که با $\|f\| = \sup |f(x)|$ تعریف شده است، یک فضای باناخ حقیقی است.

در اینجا مناسب است که فرق بین دو نوع همگرایی یک دنباله از توابع حقیقی تعریف شده روی X را روشن کنیم. فرض کنید X فضای متری و $\{f_n\}$ یک دنباله از توابع حقیقی تعریف شده روی X باشد. اگر به ازای هر x در X، $\{f_n(x)\}$ دنبالهٔ کوشی از اعداد حقیقی باشد، آنگاه بنابر کامل بودن دستگاه اعداد حقیقی، می‌توانیم یک تابع

حدی f به‌صورت $f(x) = \lim f_n(x)$ تعریف کنیم. آنگاه می‌گوییم f_n به f همگرای نقطه‌ای است، یا f را حد نقطه‌ای f_n گوییم. دانستن اینکه چه خواصی از توابع f_n به تابع حدی f منتقل می‌شود، غالباً حائزاهمیت است، ولی تا طرز همگرایی را قویتر نکنیم، چیزهای خیلی کمی در این مورد می‌توان گفت. نوع قویتر همگرایی که معمولاً برای استنتاج این گونه خواص مورد احتیاج است، همگرایی یکنواخت نامیده می‌شود. برای شرح این نوع همگرایی، با دقت بیشتری به این نکته می‌پردازیم که در همگرایی نقطه‌ای چه چیزهایی دخیل است. معنی اینکه f_n به f همگرای نقطه‌ای است، این است: به ازای هر نقطهٔ x در X، اگر $\epsilon > 0$ داده شده باشد، آنگاه یک عدد صحیح مثبت n_0 می‌توان یافت به طوری که به ازای هر $n \geqslant n_0$، $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. در حالت کلی عدد صحیح n_0 ممکن است به x و به ϵ بستگی داشته باشد. ولی اگر به ازای هر ϵ داده شده یک عدد صحیح n_0 بتوان یافت که برای همهٔ نقاط x به کار آید، آنگاه گوییم f_n به f به طور یکنواخت همگراست، یا گوییم f حد یکنواخت f_n است. خواننده توجه خواهد کرد که این مفاهیم به فرض متری بودن فضای X هیچ بستگی ندارد و این مفاهیم برای توابع تعریف شده روی مجموعهٔ ناتهی دلخواه بامعنی است.

به سهولت دیده می‌شودکه همگرایی درفضای تابعی $\mathcal{C}(X, R)$ دقیقاً همان همگرایی یکنواختی است که الان تعریف کردیم. کامل بودن $\mathcal{C}(X, R)$ را می‌توان به زبان همگرایی یکنواخت به صورت زیر دوباره بیان کرد: اگر تابع حقیقی کراندار تعریف شده روی X، حد یکنواخت دنبالهٔ $\{f_n\}$ از توابع حقیقی پیوستهٔ کراندار تعریف شده روی X باشد، آنگاه f نیز پیوسته است. به عبارت دیگر، در صورتی که همگرایی یکنواخت باشد، خاصیت پیوستگی از توابع f_n به تابع حدی f منتقل می‌شود.

با کمی تفکر خواننده متقاعد خواهد شد که تمام بحثهای فوق را، ازآغاز تعریف فضای خطی L، می‌توان روی توابع مختلط بنا گذاشت. بدون آنکه دوباره وارد جزئیات شویم، صورت قضیهٔ زیر را می‌آوریم وآن را اثبات شده فرض می‌کنیم.

قضیهٔ ب. $\mathcal{C}(X, C)$، مجموعهٔ تمام توابع مختلط پیوستهٔ کراندار که روی X تعریف شده‌اند، نسبت به جمع و ضرب اسکالر نقطه‌ای، با نرمی که با

$$\|f\| = \sup |f(x)|$$

تعریف شده است، فضای باناخ مختلط است.

به‌طور خلاصه، به هر فضای متری X دو فضای خطی از توابع پیوستهٔ تعریف شده روی X، نسبت می‌دهیم. فضای اولی ــ $\mathcal{C}(X, R)$ ــ فقط توابع حقیقی را در بر دارد، و فضای دومی ــ $\mathcal{C}(X, C)$ ــ ازتوابع‌مختلط تشکیل شده است. به‌علاوه، تمام‌توابع مذکور، کراندار فرض شده‌اند، بنابراین نرمی که به‌صورت $\|f\| = \sup |f(x)|$ تعریف شده همیشه عددی حقیقی است. در حالت خاصی که X بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ روی خط حقیقی است، $\mathcal{C}(X, R)$ را به صورت ساده‌تر $\mathcal{C}[a, b]$ می‌نویسیم.

مسائل

۱. نشان دهید که زیرمجموعهٔ ناتهی A از یک فضای باناخ، کراندار است $\Longleftrightarrow$ عدد حقیقی K وجود دارد به‌طوری که، به ازای هر x در A، $K \leqslant \|x\|$.

۲. یک دنباله از توابع پیوستهٔ تعریف شده روی $[0, 1]$ بسازید که به یک حد پیوسته همگرای نقطه‌ای باشد ولی همگرای یکنواخت نباشد.

۳. یک دنباله از توابع پیوستهٔ تعریف شده روی $[0, 1]$ بسازید که به یک حد ناپیوسته همگرای نقطه‌ای باشد.

۴. X و Y را دوفضای متری، با متریکهای d_1 و d_2 فرض کنید، و فرض کنید $\{f_n\}$ یک دنباله از نگاشتهای از X بتوی Y باشد که به‌یک نگاشت f از X بتوی Y همگرای نقطه‌ای است، به‌این معنی‌که به‌ازای هر x در X، $f_n(x) \to f(x)$. مشخص‌کنید که دراین صورت همگرایی یکنواخت f_n به f به‌چه معنی باید باشد و ثابت کنید که با فرض یکنواخت بودن همگرایی، اگر f_nها پیوسته باشند، آنگاه f هم پیوسته خواهد بود.

۵. دراین مسئله ماروش ساختن X^*، تکمیل فضای متری X را ارائه می‌دهیم. متریک روی X را به d نمایش دهید. x_0 را یک نقطهٔ ثابت در X فرض کنید، و به هر x در X تابع حقیقی f_x را که با $f_x(y) = d(y, x) - d(y, x_0)$ تعریف می‌شود متناظر کنید.

(الف) نشان دهید که f_x کراندار است. (راهنمایی: $(|f_x(y)| \leqslant d(x, x_0))$)

(ب) نشان دهید که f_x پیوسته است.

$$(|f_x(y_1) - f_x(y_2)| \leqslant 2d(y_1, y_2) \text{ :راهنمایی})$$

بنا بر (الف) و (ب) نگاشت F که به صورت $F(x) = f_x$ تعریف می‌شود یک نگاشت از X بتوی $\mathcal{C}(X, R)$ است.

(ج) نشان دهید که F یک همانمتری است.

$$(|f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)| \leqslant d(x_1, x_2) \quad \text{ :راهنمایی})$$

درنتیجه F یک همانمتری از X بتوی فضای متری کامل $\mathcal{C}(X, R)$ است. X^*، تکمیل X را، بستار $F(X)$ در $\mathcal{C}(X, R)$ تعریف می‌کنیم.

(د) نشان دهید که X^* فضای متری کاملی است که شامل یک نگارهٔ همانمتر X است.

(ه) نشان دهید که یک همانمتری طبیعی از X^* بتوی هر فضای متری کامل Y که شامل یک نگارهٔ همانمتر X باشد وجود دارد (همانمتری از X^* به Y «طبیعی» است، به این معنی است که نگارهٔ یک نقطه در X^* که متناظر یک نقطه در X است، نقطه‌ای است در Y متناظر همان نقطه در X).

(و) نشان دهید که (د) و (ه) X^* را به معنی زیر مشخص می‌کند: اگر Z فضای متری کاملی باشد که شامل یک نگارهٔ همانمتر X است و اگریک همانمتری طبیعی از Z بتوی هر فضای متری کامل Y که شامل یک نگارهٔ همانمتر X است وجود داشته باشد، آنگاه یک همانمتری طبیعی از Z بروی X^* وجود دارد.

(ز) نشان دهید که اگر X یک زیرفضای متری کامل باشد، آنگاه یک همانمتری طبیعی از بستار X بروی X^* وجود دارد.

(ح) نشان دهید که یک همانمتری طبیعی از هر فضای متری کامل که شامل X به عنوان یک زیرفضای چگال باشد، بروی X^* وجود دارد.[۱]

۱۵. فضاهای اقلیدسی و یکانی

فرض کنید n عدد صحیح مثبت ثابتی باشد، و R^n، مجموعهٔ تمام n-تاییهای مرتب $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ از اعداد حقیقی را در نظر بگیرید.[۲] در بخش ۴ وعده کردیم که این مجموعه را به یک فضا تبدیل کنیم، و اکنون در وضعی هستیم که می‌توانیم به این وعده وفا کنیم.

با تعریف جمع و ضرب اسکالر در R^n شروع می‌کنیم. اگر $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ آنگاه $x + y$ و αx را (که α عدد حقیقی دلخواهی است) به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

و

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

R^n، با این اعمال جبری، که به طریق مختص به مختص تعریف شده‌اند، فضای خطی حقیقی است. واضح است که $0 = (0, 0, \ldots, 0)$، مبدأ یا عضو صفر است، و منفی عضو $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$،

$$-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$$

است. در این مرحله، وقتی می‌گوییم R^n فضای n بعدی است، منظور ما فقط این است که هر عضو $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ آرایهٔ مرتبی از n مختص x_1، x_2، ...، x_n است.

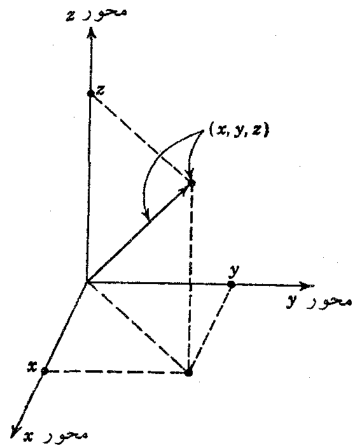
خواننده احتمالاً با جبر برداری در فضای سه بعدی معمولی، که قابل تجسم است آشنایی دارد. در این صورت وی عادت دارد که هر نقطهٔ این فضا را اساساً با پیکان (یا

---

۱. ساختمانی که در (الف) تا (ح) مختصراً بیان شد، آشکارا بستگی به انتخاب نقطهٔ ثابت اولیهٔ x_0 دارد. اگر نقطهٔ ثابت x_0 دیگری انتخاب شود، آنگاه همانمتری F دیگری از X بتوی $\mathcal{C}(X, R)$ به‌دست می‌آید. بنابراین ظاهراً مجاز نیستیم که X^* خاص مذکور را، «تکمیل» X به طور عام بنامیم. اما در عمل، معمولاً این روش معقول را که فضاهای همانمتر را متمایز از یکدیگر در نظر نمی‌گیریم، دنبال می‌کنیم. از این نظر، X^* که در اینجا تعریف شده، یک فضای متری کامل است که X را به عنوان یک زیرفضای چگال در بر دارد؛ و چون بنابر (ح) X^* تنها فضای متری کاملی است که این خاصیت را دارد، طبیعی است که آنرا تکمیل X بنامیم.

۲. از این به بعد، صفت «مرتب» را حذف می‌کنیم. باید به یاد بسپاریم که n-تایی همیشه مرتب است.

بردار) از مبدأ تا آن نقطه یکی گیرد. به این معنی که با داشتن نقطه، بردار، و با داشتن بردار، نقطه مشخص می‌شود. این امر در شکل ۲۱ نشان داده شده است.



شکل ۲۱. بردار (یا نقطه) در فضای معمولی

تعاریف جمع و ضرب اسکالر فوق در R^n متناظر با جمع برداری وضرب برداردرعدد حقیقی است. در اینجا تذکر زیر لازم است. در جبر برداری معمولی مبدأ بردار معمولا نقطهٔ دلخواهی از فضاست و انتهایش نقطهٔ دلخواه دیگری. اما باید کاملاً توجه شود که برای ما مبدأ بردار همواره مبدأ مختصات است. بر طبق این تصویر شهودی می‌توانیم اعضای فضای خطی حقیقی R^n را یا به صورت نقاط و یا به صورت بردارهای تعمیم داده شده از مبدأ به آن نقاط درنظر بگیریم. صورت دوم غالباً سودمندتر است و به بیان مطلب بیشتر کمک می‌کند.

در مورد اعضای R^n، تعبیر سومی هم وجود دارد که از نظر تعمیم حائز اهمیت زیاد است، nتایی $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ از اعداد حقیقی را می‌توان به عنوان تابعی حقیقی که روی مجموعهٔ $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ متشکل از اولین n عدد صحیح مثبت تعریف شده است، درنظر گرفت مقدار این تابع در عدد صحیح i، iامین مختص x، یعنی x_i، است ($f(i) = x_i$). به این ترتیب اعمالی که به کمک مختصات درفوق تعریف شدند، به اعمال نقطه‌ای تبدیل می‌شوند. اگر به اعضای R^n از این نظر نگاه کنیم هر شک و تردیدی که ممکن است در متصور بودن فضاهای n بعدی برای $n \geqslant 4$ ایجاد شود، برطرف می‌گردد. برای مثال، فضای چهار بعدی R^4، صرفاً فضای تمام توابع حقیقی است که روی مجموعهٔ متشکل از اولین چهار عدد صحیح مثبت، تعریف شده‌اند؛ و مطمئناً در این باره چیزی مرموز و غیر قابل فهم وجود ندارد. مزیتهای نماد تابعی به قدری است که ما غالباً (ولی نه همیشه) استفاده از آن را به نماد nتایی ترجیح می‌دهیم. به خواننده توصیه می‌شود که هر سه تعبیر اعضای R^nــ به صورت نقاط، به صورت بردارها و به صورت توابع ــ را به خاطر بسپارد وخود

را آماده کند که در هر حال تمرین کند که آن تعبیری (و نمادی) راکه بیشتر طبیعی به‌نظر می‌رسد، به کار برد.

کار بعدی ما تعریف نرم مناسب روی فضای خطی R^n است. یادآوری می‌کنیم که در هندسهٔ تحلیلی فضایی، فاصلهٔ معمولی نقطهٔ (x, y, z) از مبدأ (رجوع شود به شکل ۲۱) به وسیلهٔ عبارت جبری زیر داده می‌شود

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

اگر $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ یک عضو دلخواه R^n باشد، آنگاه طبیعی است که $\|x\|$ (فاصلهٔ نقطهٔ x تا مبدأ، یا طول بردار x) را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}\\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}\end{aligned}$$

اگر R^n را به عنوان مجموعهٔ تمام توابع حقیقی f که روی $\{1, 2, \ldots, n\}$ تعریف‌شده‌اند، در نظر بگیریم، آنگاه این تعریف به صورت زیر در می‌آید

$$\|f\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |f(i)|^2\right)^{1/2}$$

این را نرم اقلیدسی R^n می‌نامند، و فضای خطی حقیقی R^n را که به‌این روش نرم‌دار شده است، فضای اقلیدسی n بعدی می‌گویند. صفحهٔ اقلیدسی فضای خطی حقیقی R^2 با نرم اقلیدسی است؛ یعنی صفحهٔ مختصاتی که به اعمال جبری و نرم فوق مجهز شده است. به دلیلی‌که اندکی بعد روشن خواهد شد، فرمول فوق را برای تعریف $\|x\|$ در n تاییهای اعداد مختلط نیز می‌توان به‌کار برد.

البته هنوز ثابت نکرده‌ایم که عبارت $\|x\|$ فوق، در سه شرط تعریف نرم صدق می‌کند. روشن است که شروط اول و سوم نرم برقرار است. شرط دوم، یعنی

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

به‌سادگی دو شرط دیگر دیده نمی‌شود. ما این نامساوی را توسط دو لم زیر ثابت می‌کنیم، لم اول صرفاً وسیله‌ای است برای اثبات لم دوم.

لم (نامساوی کوشی). فرض کنید $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ دو n تایی از اعداد حقیقی یا مختلط باشند. آنگاه

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{1/2}$$

یا با علایم ما

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \|x\| \, \|y\|$$

برهان: ابتدا تذکر می‌دهیم که اگر a و b دو عدد حقیقی نامنفی باشند، آنگاه $a^{1/2}b^{1/2} \leqslant (a+b)/2$؛ زیرا اگر دو طرف را مجذور و جملات را جا به‌جا کنید می‌بینید که، این نامساوی معادل است با $(a-b)^2 \geqslant 0$ که به‌وضوح درست است. اگر $x = 0$ یا $y = 0$، آنگاه حکم به‌وضوح برقرار است. بنابراین فرض می‌کنیم $x \neq 0$، و $y \neq 0$. a_i و b_i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$a_i = (|x_i|/\|x\|)^2 \quad \text{و} \quad b_i = (|y_i|/\|y\|)^2$$

بنابر تذکر فوق، به ازای هر i، نامساوی زیر به دست می‌آید

$$\frac{|x_i y_i|}{\|x\|\,\|y\|} \leqslant \frac{|x_i|^2/\|x\|^2 + |y_i|^2/\|y\|^2}{2}$$

با تغییر i از ۱ تا n و جمع کردن نامساویها نتیجه می‌شود که

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|}{\|x\|\,\|y\|} \leqslant \frac{1+1}{2} = 1$$

و از آن، نتیجهٔ مطلوب به دست می‌آید.

لم (نامساوی مینکوفسکی). فرض کنید $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ دو nتایی از اعداد حقیقی یا مختلط باشند. آنگاه

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{1/2}$$

یا با علایم ما،

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

برهان: نامساوی کوشی را به‌کار می‌بریم و زنجیر روابط زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|\,|x_i + y_i| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|\,(|x_i| + |y_i|) \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|\,|x_i| + \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|\,|y_i| \\
&\leqslant \|x+y\|\,\|x\| + \|x+y\|\,\|y\| \\
&= \|x+y\|\,(\|x\| + \|y\|)
\end{aligned}$$

یا به طور خلاصه

$$\|x+y\|^2 \leqslant \|x+y\|\,(\|x\| + \|y\|)$$

اگر $\|x+y\| = 0$، لم ما به‌وضوح درست است، درغیر این صورت، اثبات لم از تقسیم

دو طرف نامساوی آخری بر $\|x+y\|$ نتیجه می‌شود.

اکنون به جایی رسیده‌ایم که می‌توانیم قضیهٔ زیر را بیان کنیم.

قضیهٔ الف. R^n، مجموعهٔ تمام nتاییهای $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ از اعداد حقیقی، نسبت به جمع و ضرب اسکالر مختصی و نرمی که با

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$$

تعریف می‌شود، فضای باناخ حقیقی است.

برهان: با توجه به‌بحثهای قبل، آنچه از اثبات باقی می‌ماند کامل بودن فضاست. در اینجا مناسب است که نماد تابعی را به کار بریم، بنابراین هرعضو فضا را به عنوان تابعی حقیقی که روی $\{1, 2, \dots, n\}$ تعریف شده است، در نظر می‌گیریم. $\{f_m\}$ را یک دنبالهٔ کوشی در R^n فرض کنید. اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، آنگاه به ازای هر m و m' که به قدر کافی بزرگ باشند داریم $\|f_m - f_{m'}\| < \varepsilon$، $\|f_m - f_{m'}\|^2 < \varepsilon^2$ و $\sum_{i=1}^{n} |f_m(i) - f_{m'}(i)|^2 < \varepsilon^2$؛ و از اینجا نتیجه می‌شود که به ازای هر i (و تمام m و m' های به قدر کافی بزرگ)، $|f_m(i) - f_{m'}(i)| < \varepsilon$. بنابراین دنبالهٔ $\{f_m\}$ به تابع حدی f که با $f(i) = \lim f_m(i)$ تعریف می‌شود، همگرای نقطه‌ای است. چون مجموعهٔ $\{1, 2, \dots, n\}$ متناهی است، این همگرایی یکنواخت است. در نتیجه می‌توان یک عدد صحیح m_0 یافت به طوری که به ازای هر $m \geqslant m_0$ و به ازای هر i، $|f_m(i) - f(i)| < \varepsilon/n^{1/2}$. دوطرف نامساوی رامجذورمی‌کنیم و i رااز ۱ تا n تغییر می‌دهیم، ازجمع نامساویها، نامساوی $\sum_{i=1}^{n}|f_m(i) - f(i)|^2 < \varepsilon^2$ یا $\|f_m - f\| < \varepsilon$ نتیجه می‌شود. این نشان می‌دهد که دنبالهٔ کوشی $\{f_m\}$ به حد f همگراست، بنابراین R^n کامل است.

کاملاً مانند بخش قبل، نظیر آنچه را دربارهٔ nتاییهای اعداد حقیقی (یا دربارهٔ توابع حقیقی تعریف شده روی $\{1, 2, \dots, n\}$) گفته شد، می‌توان در اعداد مختلط بیان کرد. بنابراین قضیهٔ زیر را کاملاً اثبات شده در نظر می‌گیریم.

قضیهٔ ب. C^n، مجموعهٔ تمام nتاییهای $z=(z_1, z_2, \dots, z_n)$ از اعداد مختلط نسبت به جمع و ضرب اسکالر مختصی و نرمی که با

$$\|z\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\right)^{1/2}$$

تعریف می‌شود، فضای باناخ مختلط است.

فضای C^n، با این اعمال جبری و این نرم، فضای یکانی n بعدی نامیده می‌شود. لازم به‌تذکر نیست که‌این فضا را همچنین می‌توان به‌عنوان فضای همهٔ توابع مختلط

f با حوزهٔ تعریف $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ در نظر گرفت کـه در آن جمع و ضـرب اسکالر (با اسکالرهای مختلط) به‌طور نقطه‌ای و نرم بـا رابطهٔ $\|f\| = (\sum_{i=۱}^{n} |f(i)|^{۲})^{۱/۲}$ تعریف شده‌اند.

چهارفضایی‌که دراین بخش وبخش قبل تعریف وبحث شد ــ $\mathcal{C}(X, R)$ و $\mathcal{C}(X, C)$ و R^n و C^n ــ بنیاد تمام کـارهـای آتی مـا هستند. در فصول ۳ تا ۷ دو فضای اول را، بـا تضعیف محدودیتهای فضای زیر بنای X، تعمیم می‌دهیم. در فصل ۹ تا ۱۱ هـرچهار فضا را ازدید بازتری و با تأکید خاص روی C^n مطالعه می‌کنیم. درسه فصل آخر، این خطوط تعمیم را یک‌جا مطرح می‌کنیم، به‌نحوی‌که هرجنبه ازکارما به‌روی تمام‌جنبه‌های دیگر پرتو افکند.

مسائل

۱. نشان دهید که زیـرمجموعهٔ ناتهی A از R^n کراندار است $\Longleftrightarrow$ عدد حقیقی K وجود دارد به‌طوری که به ازای هر $x = (x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ در A، $|x_i| \leqslant K$ به ازای هر اندیس i برقرار باشد.

۲. X را مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ با متریکی که در مثال ۹-۱ تعریف شده است فـرض کنید. آنگاه $\mathcal{C}(X, R)$ و R^n دو فضای باناخ‌اند که به‌عنوان فضاهای خطی، اساساً یکسان هستند ولی دارای نرمهای متفاوت می‌باشند. نشان دهید که ردهٔ مجموعه‌های باز در این دو فضا یکی است.

۳. تعمیم زیر از نامساوی مینکوفسکی را ثابت کنید. اگر $x = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_n, \ldots\}$ و $y = \{y_۱, y_۲, \ldots, y_n, \ldots\}$ دو دنباله از اعـداد حقیقی یا مختلط باشند به‌طوری کـه $\sum_{n=۱}^{\infty} |x_n|^{۲}$ و $\sum_{n=۱}^{\infty} |y_n|^{۲}$ همگـرا بـاشنـد، آنـگـاه $\sum_{n=۱}^{\infty} |x_n + y_n|^{۲}$ نـیـز همگراست و

$$\left(\sum_{n=۱}^{\infty} |x_n + y_n|^{۲}\right)^{۱/۲} \leqslant \left(\sum_{n=۱}^{\infty} |x_n|^{۲}\right)^{۱/۲} + \left(\sum_{n=۱}^{\infty} |y_n|^{۲}\right)^{۱/۲}$$

این عبارت را نیز نامساوی مینکوفسکی ــ برای مجموعهای نامتناهی ــ می‌نامند.

۴. مجموعهٔ تمام دنباله‌های $x = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_n, \ldots\}$ از اعداد حقیقی را به‌طوری که $\sum_{n=۱}^{\infty} |x_n|^{۲}$ همگرا باشد با R^{∞} نمایش می‌دهیم. اگر جمع و ضرب اسکالر به‌صورت مختصی (یا جمله‌ای) تعریف شوند، و اگـر نرم به صورت $\|x\| = (\sum_{n=۱}^{\infty} |x_n|^{۲})^{۱/۲}$ تعریف شود، نشان دهید که R^{∞} یک فضای باناخ حقیقی است. R^{∞} را فضای اقلیدسی با بعد نامتناهی می‌نامند. فضای یکانی با بعد نامتناهی C^{∞} بـه‌طـور مشابه تعریف می‌شود، و یک فضای باناخ مختلط است.

فصل سوم

فضاهای توپولوژیک

درفصل قبل مفهـوم نگـاشت پیوسته از یک فضـای متری بتـوی فضای متری دیگـر را تعریف کردیم، و این تعریف برحسب متریک فضاها، بیان گردید. البته غالباً بهتر است ـ حتی اساسی است ـ که بتوانیم نگاشتهای پیوسته را در حالاتی مورد بحث قرار دهیم که هیچ متریک مفیدی، تعریف نشده است و به سهولت هم تعریف شدنی نیست، یـا اصلا غیر قابل تعریف است. برای اینکه بتوانیم به نحو مؤثر در حالاتی از این نوع بحث کنیم، لازم است که مفهوم پیوستگی را از قید فضاهای متری آزاد سازیم.

قضیهٔ ۱۳.ج نشان می‌دهد کـه می‌توان پیوستگی یک نگاشت از یک فضای متری به‌توی فضای متری دیگر را، بدون رجوع مستقیم به متریکها، منحصراً برحسب مجموعه های باز بیان کرد. این موضوع این فکر را به وجود می آورد کـه امکان دارد متریکها را به‌کلی کنار بگذاریم و مجموعه‌های باز را، به عنوان منشأ نظریه، جایگزین آنها کنیم. با به خاطر سپردن این‌موضوع، توجه خود را به‌قضیهٔ ۱۰ـد ، که مهمترین خواص‌ذاتی ردهٔ مجموعه‌های باز یک‌فضای متری را ارائه می‌دهد، معطوف می‌کنیم، این دو قضیه در ایـن زمینه راهنمای مهمی‌هستند و تعمیم فضاهای متری به فضاهای توپولوژیک روی آنها بنا گذاشته می‌شود ـ فضای توپولوژیک بـه طـور خلاصه یک مجموعهٔ ناتهی است کـه در آن یک رده از زیرمجموعه ها (که آنها را مجموعه‌های باز می‌نامند) با خواص ذکر شده در قضیهٔ ۱۰. د، داده شده است.

هـدف اساسی ما در این فصل و چهار فصل بعد، مطالعهٔ فضاهـای توپولوژیک و نگاشتهای پیوسته از فضاهای توپولوژیک بتوی یکدیگرند. خواهیم دیـد که این فضاها زمینهٔ ایده‌آلی برای نظریهٔ پیوستگی در مجردترین شکل به‌وجود می‌آورند.

این فصل اصولاً بـه تـوضیح مفهوم فضـای توپولوژیک عمومی اختصاص دارد. همچنین در این فصل چند تکنیک ارائه می‌دهیم که در مطالعهٔ مشروح این فضاها مفید هستند.

علاقهٔ خاص و اصلی ما در چهار فصل آینده، در مورد توابع حقیقی یا مختلطی خواهد بود که روی انواع خاصی از فضاهای توپولوژیک تعریف شده‌اند، و این نظر را بسط می‌دهیم که ساخت این فضاها در خواص توابع پیوسته‌ای که همراه دارند تأثیر متقابل دائم دارد و در روشن ساختن یکدیگر مؤثرند.

۱۶. تعریف و چند مثال

X را مجموعه‌ای ناتهی فرض کنید. ردهٔ $\mathbf{T}$ از زیرمجموعه‌های X را یک توپولوژی روی X می‌نامند اگر در دو شرط زیر صدق کند:

(۱) اجتماع هر رده از مجموعه‌های $\mathbf{T}$ مجموعه‌ای در $\mathbf{T}$ است؛

(۲) اشتراک هر ردهٔ متناهی از مجموعه‌های $\mathbf{T}$، مجموعه‌ای در $\mathbf{T}$ است.

بنابراین، یک توپولوژی روی X رده‌ای از زیر مجموعه‌های X است که تحت تشکیل اجتماعهای دلخواه و اشتراکهای متناهی بسته است. فضای توپولوژیک مرکب از دو چیز است: یک مجموعهٔ ناتهی X و یک توپولوژی $\mathbf{T}$ روی X. مجموعه های ردهٔ $\mathbf{T}$ را مجموعه‌های باز فضای توپولوژیک $(X, \mathbf{T})$ می‌نامند، واعضای X را نقاط فضا می‌گویند. معمول است که فضای توپولوژیک $(X, \mathbf{T})$ را با نماد X، که برای مجموعهٔ زیربنای نقاط به کار برده می‌شود، نمایش دهند. این عمل مشکلی به بار نمی‌آورد، در صورتی که به خوبی توجه کنیم که فضای توپولوژیک چیزی بیش ازیک مجموعهٔ ناتهی صرف است: فضای توپولوژیک یک مجموعهٔ ناتهی است همراه با یک توپولوژی خاص روی آن مجموعه. ما درکارهای آتی خود اغلب چندین توپولوژی روی یک مجموعهٔ مفروض، در نظر خواهیم گرفت، و دراین شرایط، توپولوژیهای مختلف، فضاهای توپولوژیک مختلفی از آن مجموعه می‌سازند. توجه کنید که در هر فضای توپولوژیک، مجموعهٔ تهی و تمام فضا همواره بازند، زیرا به ترتیب، اجتماع و اشتراک ردهٔ تهی مجموعه‌ها، که زیرردهٔ هر توپولوژی است، می‌باشند.

اکنون چند مثال ساده از فضاهای توپولوژیک می‌آوریم. برای عرضهٔ یک فضای توپولوژیک، باید ابتدا یک مجموعهٔ ناتهی به دست داد و سپس بیان کرد که کدام زیرمجموعه‌ها باید به‌عنوان مجموعه‌های باز درنظرگرفته شوند، و آنگاه ثابت کرد که این رده ازمجموعه‌ها درشرایط (۱) و (۲) فوق صدق می‌کند. درمثالهای زیر تحقیق این مرحلهٔ سوم را به خواننده واگذار می‌کنیم.

مثال ۱. X رافضای متری دلخواه وردهٔ تمام‌زیرمجموعه هایی‌راکه به‌مفهوم تعریف بخش ۱۰ باز هستند، توپولوژی آن بگیرید. این توپولوژی را توپولوژی معمولی فضای متری‌می‌نامند،ومی‌گویندا ین‌مجموعه‌ها،مجموعه‌های بازی هستندکه‌ازمتریک‌فضاپدیدآمده‌اند. فضاهای متری، مهمترین فضاهای توپولوژیک‌اند، و هر وقت از فضای متری به عنوان فضای توپولوژیک یاد می‌کنیم، منظورفضایی است (مگر آنکه خلاف آن را تصریح کنیم) که توپولوژی آن، همین توپولوژی معمولی‌ای است که در اینجا بیان شد.

مثال ۲. X را مجموعه‌ای‌ناتهی بگیریدو توپولوژی آن‌راردهٔ تمام‌زیرمجموعه های

X تعریف کنید. این توپولوژی را توپولوژی گسستهٔ X، و هرفضای توپولوژیک را که توپولوژی آن گسسته باشد، فضای گسسته می‌نامند.

مثال ۳. X را مجموعه‌ای ناتهی بگیرید وفرض‌کنید توپولوژی‌آن تنها ازمجموعهٔ تهی و کل فضای X تشکیل شده است. این توپولوژی، درست نقطهٔ مقابل توپولوژی توصیف شده در مثال ۲ است، ولی وقتی X مجموعهٔ یک عضوی است این دو توپولوژی برهم منطبق هستند.

مثال ۴. فرض کنید X مجموعه‌ای نامتناهی باشد، و توپولوژی آن از مجموعهٔ تهی $\varnothing$ و تمام زیرمجموعه‌های X که مکملشان متناهی است تشکیل شده است.

مثال ۵. X را مجموعهٔ سه‌عضوی $\{a,b,c\}$ وتوپولوژی آن‌را زیرمجموعه‌های زیر

$$\varnothing, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, X$$

فرض‌کنید فضاهایی ازاین نوع، اصولاً برای نشان دادن بعضی ازجنبه‌های نظریه‌ای که در فصول بعدی ذکر خواهد شد، مفیدند.

فضای متریک‌پذیر عبارت است از یک فضای توپولوژیک X با این خاصیت که لااقل یک متریک روی مجموعهٔ X وجود دارد به قسمی که ردهٔ مجموعه‌های باز پدید آمده ازآن، دقیقاً همان توپولوژی X است. در نتیجه فضای متریک‌پذیر، فضای توپولوژیکی است‌که اساساً ـ تا آنجایی که به مجموعه‌های باز آن مربوط می‌شود ـ فضای متری است. ما بعداً به تعدادی فضاهای توپولوژیک مهم برمی‌خوریم که متریک‌پذیر نیستند، و وجود چنین فضاهایی است که نشان می‌دهد حوزهٔ عمل نظریهٔ حاضر، وسیعتر از فضاهای متری است. یک مسئله مهم قابل توجه این است که چه نوع از فضاهای توپولوژیک متریک‌پذیرند، وما در بخش ۲۹ به این سؤال می‌پردازیم.

فرض کنید X فضای توپولوژیک باشد و Y یک زیرمجموعه ناتهی X. مسئلهٔ ۱۵-۷ برای تبدیل Y به فضای توپولوژیک، یک روش طبیعی عرضه می‌کند. توپولوژی نسبی Y بنابه‌تعریف ردهٔ تمام اشتراکهای مجموعه‌های باز X با Y است، و وقتی Y با توپولوژی نسبی خود تجهیز شده باشد، زیرفضای X نامیده می‌شود.

X و Y را دوفضای توپولوژیک و f را نگاشتی از X بتوی Y فرض کنید. f نگاشت پیوسته نامیده می‌شوداگر برای هرمجموعهٔ باز G در Y، مجموعهٔ $f^{-1}(G)$ در X باز باشد، و نگاشت باز نامیده می‌شود اگر برای هرمجموعهٔ باز G در X، مجموعهٔ $f(G)$ در Y باز باشد. نگاشت پیوسته است اگر این نگاشت مجموعه‌های باز را به‌مجموعه‌های باز برگرداند، و نگاشت باز است اگر این نگاشت مجموعه‌های باز را به مجموعه‌های باز نظیر کند. هر نگارهٔ $f(X)$ از فضای توپولوژیک X تحت نگاشت پیوستهٔ f را یک نگارهٔ پیوستهٔ X می‌نامند.

هومئومورفیسم عبارت است از یک نگاشت پیوسته و یک به یک از یک فضای توپولوژیک بروی فضای توپولوژیک دیگراگر نگاشت‌بازنیز باشد. دوفضای توپولوژیک X و Y را هومئومورف گویند اگر یک هومئومورفیسم از X بروی Y وجود داشته باشد (و در این حالت Y را نگارهٔ هومئومورف X می‌نامند). اگر X و Y هومئومورف باشند،

آنگاه نقاط آنها را می‌توان به طریقی دریک تناظر یک به یک قرار داد که مجموعه‌های بازشان با یکدیگر متناظر باشند. در نتیجه دو فضا صرفاً در ماهیت نقاطشان اختلاف دارند، و از نظر توپولوژی می‌توان آنها را اساساً یکی درنظر گرفت.

کلمهٔ توپولوژی‌را به مفهوم اصلی‌آن به عنوان نام یک شاخهٔ ریاضیات به‌کاربرده‌ایم. این کلمه از دو کلمهٔ یونانی مشتق می‌شود، ومعنی تحت اللفظی آن «علم مکان» است. حال سعی مــی‌کنیم دلیل ایــن اصطلاح را توضیح دهیم. چنین مــی‌گوییم: خاصیت توپولوژیکی، خاصیتی است که اگر فضای توپولوژیک X دارا باشد، هـرنگارهٔ هومئومورف X نیز آن خاصیت را دارد. حال موضوع توپولوژی را می‌تـوان مطالعهٔ تمام خــواص توپولوژیکی فضاهــای توپولوژیک، تعریف کــرد. اگــر دقت را بــه کلی کنار بگــذاریم و فضای توپولوژیک را به‌نوعی‌کلی‌ازشکل هندسی، مثلا نموداری‌که روی یک ورقهٔ‌لاستیکی ترسیم شده است، تشبیه کنیم آنگاه هر تغییر شکل این نمودار را (با کش دادن، خم کردن، وغیره) که ورقه راپاره نکند، می‌توان به مثابهٔ یک هومئومورفیسم درنظر گرفت. مثلا از این طریق دایره را می‌توان به بیضی، مثلث، یا مربع تغییر شکل داد، ولی نمی‌توان آن را به صورت هشت لاتین (8)، نعل اسب، یا نقطهٔ منفرد درآورد. بنابرایــن، خاصیت توپولوژیکی هــر خاصیتی از نمودار است که تحت چنین تغییر شکل، پایا (یا تغییرناپذیر) بــاشد. فواصل، زوایا، وامثال‌آن، خواص‌توپولوژیک نیستند، زیراانیها باتغییرشکلهای مناسب «بدون‌پارگی» تغییر می‌کنند. چه قسم خواصی توپولوژیکی‌اند؟ در حالت دایره خاصیت یک درون ویک بــرون داشتن (نقطه درون نــدارد، و 8 دو درون دارد). همچنین ایــن خاصیت کــه اگــر دونقطه از دایره حذف شوندآن دایره به دوتکه تقسیم می‌شود، درصورتی که اگر فقط یک نقطه از دایره حذف شود، آنگاه دایره یک تکــه باقی می‌ماند. ایــن تذکرات می‌تواند دال بر این باشد کــه چرا توپولوژی اغلب توسط غیرریاضیدانان بــه عنوان «هندسهٔ ورقهٔ لاستیکی» توصیف‌می‌شود. بحث غیرفنی خیلی خوبی دربارهٔ توپولوژی، ازاین نظرهندسی در کورانت[1] و رابینز[2] [۶، فصل ۵] آمده است، می‌توانید به‌آن رجوع کنید.

مسائل

۱. فــرض کنید T_1 و T_2 دوتوپولــوژی روی مجموعهٔ ناتهــی X باشند. نشان دهید کــه $T_1 \cap T_2$ نیز یک توپولوژی روی X است.

۲. فرض کنید X یک مجموعهٔ نــاتهی بــاشد، و ردهٔ زیــرمجموعه‌هایی از X را کــه متشکل از مجموعهٔ تهی $\varnothing$ و تمام مجموعه‌هایی که مکملهای آنها شماراست، درنظر بگیرید. آیا این رده یک توپولوژی روی X است؟

۳. کدامیک از فضاهای توپولوژیک کــه بــه عنوان مثال درمتن عرضه شده‌انــد، متریک پذیر هستند؟ (راهنمایی: اگر فضا متریک‌پذیر باشد، آنگاه مجموعه های باز آن باید خواص معینی داشته باشند.)

۴. نشان دهید کــه اگــر یک فضای توپولوژیک متریک‌پذیــر باشد، آنگاه به بینهایت

1. Courant 2. Robbins

طریق، (یعنی، به وسیلهٔ بینهایت متریک متفاوت) متریک‌پذیر است.

۵. نشان دهیدکه زیرفضای یک فضای توپولوژیک، خود فضای توپولوژیک است.

۶. فرض کنید X فضای توپولوژیک باشد، و Y و Z را زیرفضاهایی از X فرض کنید به‌طوری که $Y \subseteq Z$. نشان دهید که توپولوژی Y به‌عنوان زیرفضای X با توپولوژی آن به‌عنوان زیرفضای Z یکی است.

۷. فرض کنید f نگاشتی پیوسته از فضای توپولوژیک X بتوی فضای توپولوژیک Y باشد. اگر Z یک زیرفضای X باشد، نشان دهید که تحدید f به Z پیوسته است.

۸. X و Y را فضاهای توپولوژیک، و f را یک نگاشت از X بتوی Y فرض کنید. نشان دهید که f پیوسته است $\Longleftrightarrow$ f به عنوان نگاشت از X بروی $f(X)$، زیرفضای Y، پیوسته است.

۹. X و Y و Z را سه فضای توپولوژیک فرض کنید. اگر $f:X \to Y$ و $g:Y \to Z$ دو نگاشت پیوسته باشند، نشان دهید که $gf:X \to Z$ نیز پیوسته است.

۱۰. f را نگاشت یک‌به‌یک ازیک فضای توپولوژیک بروی فضای توپولوژیک دیگر فرض کنید، و نشان دهید که f هومئومورفیسم است $\Longleftrightarrow$ f و f^{-1} هر دو پیوسته هستند.

۱۱. مثالی‌ارائه دهیدکه نشان دهدیک نگاشت‌پیوستهٔ یک‌به‌یک ازیک‌فضای توپولوژیک بروی فضای توپولوژیک دیگر لازم نیست که هومئورفیسم باشد. (راهنمایی: مثالهای ۲ و ۳ را ملاحظه کنید.)

۱۲. نشان دهید که فضای توپولوژیک X متریک‌پذیر است $\Longleftrightarrow$ یک هومئومورفیسم از X بروی یک زیرفضای فضایی متری مانند Y وجود دارد.

۱۳. X و Y را دوفضای توپولوژیک فرض کنید، $X \sim Y$ به این معنی است که X و Y هومئومورف هستند. نشان دهید که این رابطه منعکس، متقارن، و متعدی است.

۱۷. مفاهیم مقدماتی

ما مجموعه‌های باز را به عنوان نقطهٔ شروع در بحث توپولوژی اختیار کرده‌ایم و اکنون تعدادی از مفاهیم اساسی دیگر را برحسب مجموعه های باز تعریف می‌کنیم. خواننده با اکثر این مفاهیم از فصل قبل آشنایی دارد، و ملاحظه خواهد کرد که در هرحالت، تعریفی که در اینجا عرضه می‌شود یا تعمیم تعریف قبلی ماست یا معادل آن.

مجموعهٔ بسته در فضای توپولوژیک، مجموعه‌ای است که مکمل آن باز است. قضیهٔ زیر یک نتیجهٔ فوری از روابط ۲-(۲) وخواص مفروض مجموعه‌های باز است.

قضیهٔ الف. X را فضای توپولوژیک فرض‌کنید. آنگاه (۱) هراشتراکی ازمجموعه‌های بسته در X، بسته است، و (۲) هراجتماع متناهی از مجموعه‌های بسته در X بسته است.

با درنظر گرفتن ردهٔ تهی از مجموعه‌های بسته، فوراً مشاهده می‌کنیم که مجموعهٔ تهی و کل فضا (اجتماع و اشتراک ردهٔ تهی) همواره درهر فضای توپولوژیک، بسته‌اند. اگر A زیرمجموعهٔ یک فضای توپولوژیک باشد، آنگاه بستار آن (که به $\bar{A}$ نمایش

داده شده می‌شود) اشتراک تمام فوق مجموعه‌های بستهٔ A است. به سادگی دیده می‌شودکه بستار A یک فوق مجموعهٔ بستهٔ A ومشمول هرفوق مجموعهٔ بستهٔ A است، ونیزدیده می‌شود که A بسته است $\Longleftrightarrow A = \bar{A}$. زیرمجموعهٔ A از یک فضای توپولوژیک X را چگال (یا همه‌جا چگال) گوییم اگر $\bar{A} = X$؛ و X را فضای تفکیک‌پذیر نامند اگر دارای یک زیرمجموعهٔ چگال شمارا باشد. با دلایلی که در انتهای این بخش روشن می‌شود، خواص اصلی عمل بستارگیری را به صورت قضیهٔ زیر خلاصه می‌کنیم. برهان این قضیه کاربرد مستقیم مطالبی است که در بالا آمده است.

قضیهٔ ب. X را فضای توپولوژیک فرض کنید. اگر A و B زیرمجموعه‌های دلخواهی از X باشند، آنگاه عمل بستارگیری دارای چهار خاصیت زیر است

$$(۱)\ \bar{\varnothing} = \varnothing؛\ (۲)\ A \subseteq \bar{A}؛\ (۳)\ \bar{\bar{A}} = \bar{A}\ و\ (۴)\ \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

یک همسایگی یک نقطه (یا یک مجموعه) در فضای توپولوژیک، مجموعهٔ بازی است که آن نقطه (یا آن مجموعه) را در بردارد. یک رده از همسایگیهای یک نقطه را پایهٔ باز برای آن نقطه (یا پایهٔ باز در آن نقطه) می‌نامند، اگر هر همسایگی آن نقطه شامل یک همسایگی در این پایه باشد. در حالتی که نقطه در فضای متری باشد، گوی باز به‌مرکز آن نقطه، یک همسایگی آن نقطه است، و ردهٔ تمام چنین گویهای باز یک پایهٔ باز برای آن نقطه است. قضیهٔ بعدی ما مشخصهٔ مفیدی (برحسب همسایگیها) از بستار مجموعه را عرضه می‌کند.

قضیهٔ ج. X را فضای توپولوژیک و A را زیرمجموعهٔ دلخواه X فرض کنید. آنگاه

$$\bar{A} = \{x : \text{هرهمسایگی } x\text{، مجموعهٔ } A \text{ را قطع می‌کند}\}$$

برهان: ابتدا با نشان دادن اینکه هر نقطه‌ای که در مجموعهٔ داده شده در سمت راست رابطهٔ فوق نباشد در $\bar{A}$ نیست، ثابت می‌کنیم که $\bar{A}$ مشمول مجموعهٔ سمت راست است. فرض کنید نقطهٔ x دارای همسایگی‌ای است‌که A را قطع نمی‌کند. آنگاه مکمل این همسایگی یک فوق مجموعهٔ بستهٔ A است که x را در بر ندارد، و چون $\bar{A}$ اشتراک تمام فوق مجموعه‌های بستهٔ A است، x در $\bar{A}$ نیست. به طریق مشابه، و به‌سادگی می‌توان دیدکه $\bar{A}$ شامل مجموعهٔ سمت راست است.

X را فضای توپولوژیک فرض کنید و A را زیرمجموعهٔ X. یک نقطه در A، نقطهٔ منزوی A نامیده می‌شود اگر این نقطه یک همسایگی داشته باشد که هیچ نقطهٔ دیگری از A را در برندارد. نقطهٔ x در X نقطهٔ حدی A گفته می‌شود اگر هرهمسایگی این نقطه، نقطه‌ای از A غیر از x را در بر داشته باشد. مجموعهٔ مشتق A ــ که به $D(A)$ نمایش داده می‌شود ــ مجموعهٔ تمام نقاط حدی A است.

قضیهٔ د. فرض کنید X فضای توپولوژیک باشد و A یک زیر مجموعهٔ X. آنگاه

(۱) $\overline{A} = A \cup D(A)$؛ و (۲) ($A$ بسته است) $\Longleftrightarrow$ $A \supseteq D(A)$.

برهان: برای اثبات (۱)، با بـه کار بردن قضیهٔ ج نشان می‌دهیم که هر نقطه‌ای که در یک طرف تساوی نباشد درطرف دیگر تساوی نیز نیست. اگر x در $\overline{A}$ نباشد، آنگاه x دارای یک همسایگی مجزا از A است. بنابراین x در A و یا در $D(A)$ نیست؛ و اگر x در A یا $D(A)$ نباشد، آنگاه x دارای یک همسایگی مجزا از A خواهد بود، بنابراین x در $\overline{A}$ نمی‌تواند باشد.

(۲) را به صورت زیر ثابت می‌کنیم. اگر A بسته باشد، در نتیجه $A = \overline{A}$، آنگاه بنابر (۱)، $A = A \cup D(A)$، و بنـابـرایـن $A \supseteq D(A)$، و اگـر $A \supseteq D(A)$ در نتیجـه $A = A \cup D(A)$، آنگاه بنابر (۱) داریم $A = \overline{A}$، بنابراین A بسته است.

بنابرتعریف فـوق، هـر نقطه در یک مجموعه، یا نقطهٔ منزوی مجموعه است یا نقطهٔ حدی آن؛ ولی هر دو نمی‌تواند باشد. از این امـر، قضیهٔ بدیهی ولی نسبتاً مفید زیـر نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ه. X را فضای توپولوژیک فرض‌کنید. آنگاه هر زیرمجموعهٔ بسته X اجتماع مجزای مجموعهٔ نقاط منزوی خود و مجموعهٔ نقاط حدی خـود است، به ایـن معنی که شامل این مجموعه‌هاست، این مجموعه‌ها مجزا هستند، و X اجتماع این مجموعه‌هاست.

X را فضای توپولوژیک و A را زیـرمجموعهٔ X فـرض کنید. درون A (کـه بـه $\mathrm{Int}(A)$ نمایش داده می‌شود) اجتماع تمام زیـرمجموعه‌های بـاز A است، و هر نقطه در درون A را یک نقطهٔ درونی A می‌نامند. واضح است که درون A یک زیـرمجموعهٔ بـاز A و شامل هرزیرمجموعهٔ باز A است، و A باز است $\Longleftrightarrow$ $A = \mathrm{Int}(A)$. همچنین، یک نقطه در A نقطهٔ درونی A است $\Longleftrightarrow$ آن نقطه دارای یک همسایگی است کـه مشمول A است. مرز A، $\overline{A} \cap \overline{A'}$ است، و هرنقطه درمرز A یک نقطهٔ مرزی A نامیده می‌شود. فوراً از تعریف نتیجه می‌شود که مرز A، مجموعهٔ بسته است، و از نقاط x در X با این خاصیت که هر همسایگی x هر دو مجموعهٔ A و A' را قطع می‌کند، تشکیل شده است. از تعریفهای نقاط درونی و مـرزی برحسب همسایگی، به‌سادگی نتیجه مـی‌شود کـه یک نقطهٔ مجموعه، یا نقطهٔ درونی است یا نقطهٔ مرزی، و نمی‌تواند هر دو باشد. از این موضوع فوراً قضیهٔ زیر حاصل می‌شود، که مؤید درک شهودی ما از مفاهیم «درون» و «مرز» است.

قضیهٔ و. X را فضای توپولوژیک فرض‌کنید. آنگاه هر زیرمجموعهٔ بستهٔ X اجتماع مجزای درون ومرز خود است، به‌این معنی‌که شامل این مجموعه‌هاست، این مجموعه‌ها مجزاهستند، و X اجتماع این دومجموعه است.

در تعریف فضای توپولوژیک، ما «مجموعهٔ باز» را به عنوان اصطلاح تعریف نشدهٔ اولیهٔ خودمان انتخاب کردیم. قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد کـه «مجموعهٔ بسته» عیناً همان نقش را می‌تواند داشته باشد.

قضیهٔ ز. X را مجموعه‌ای ناتهی فرض کنید، و فرض کنید یک رده از زیرمجموعه‌های X داده شده است بــه طوری که تحت تشکیل اشتراکهای دلخواه و اجتماعهای متناهی، بسته است. آنگاه ردهٔ تمام مکملهای این مجموعه‌ها یک توپولوژی روی X است‌که مجموعه‌های بستهٔ این توپولوژی دقیقاً همان مجموعه‌های ارائه شدهٔ نخستین هستند.

برهان: این مطلب ازمعادلات ۲-(۲)، تعریف‌توپولوژی، وتعریف مجموعهٔ بسته‌فوراً نتیجه می‌شود.

همان طور که قضیهٔ زیر نشان می‌دهد، حتی می‌توانستیم اصطلاح «بستار»را به عنوان اصطلاح تعریف نشدهٔ خودمان، اختیار کنیم.

قضیهٔ ح. X را یک مجموعهٔ ناتهی فرض کنید، و فرض کنید یک عمل «بستارگیری» داده شده است‌که به هرزیرمجموعهٔ A از X یک زیرمجموعهٔ $\bar{A}$ در X نسبت می‌دهد به طوری‌که

$$(1)\ \bar{\varnothing} = \varnothing;\ (2)\ A \subseteq \bar{A};\ (3)\ \bar{\bar{A}} = \bar{A};\ \text{و}\ (4)\ \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

اگر مجموعهٔ A را هنگامی کــه $A = \bar{A}$، «بسته» تعریف کنیم، آنگاه ردهٔ تمام مکملهای چنین مجموعه‌هایی یک توپولوژی روی X است که عمل بستارگیری آن دقیقاً همان عمل داده شدهٔ نخستین است.

برهان: با توجه به‌قضیهٔ ز، کافی است‌که دوامرثابت شود: یکی اینکه ردهٔ تمام مجموعه‌های «بسته» تحت تشکیل اشتراکهای دلخواه واجتماعهای متناهی بسته است ودیگر اینکه به‌ازای هر مجموعهٔ A مجموعهٔ $\bar{A}$ اشتراک تمام فوق مجموعه‌های «بستهٔ» A است.

بنابر (۱)، مجموعهٔ تهی «بسته» است، از این مطلب و (۴) ملاحظه می‌کنیم کــه هر اجتماع متناهی از مجموعه‌های «بسته» مجموعه‌ای «بسته» است. بنابـر (۲)، کل فضای X «بسته» است، بنابر ایــن آنچه بــرای قسمت اول برهان ما باقی می‌ماند این است‌که نشان دهیم اگر $\{A_i\}$ یک ردهٔ ناتهی از مجموعه‌ها باشد به طوری کـه $A_i = \bar{A}_i$ به ازای هر i، آنگاه $\bigcap_i A_i = \overline{\bigcap_i A_i}$. بنابـر (۲)، کافی است ثابت کنیم که $\overline{\bigcap_i A_i} \subseteq \bigcap_i A_i$. برای اثبات این مطلب، کافی است نشان دهیم که $A \subseteq B \Longrightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$ (چون در این صورت به‌ازای هر i، از $\bigcap_i A_i \subseteq A_i$، نتیجه می‌شودکه به‌ازای هر i، $\overline{\bigcap_i A_i} \subseteq \bar{A}_i = A_i$ و از این نتیجه مـی‌شود $\overline{\bigcap_i A_i} \subseteq \bigcap_i A_i$). فرض‌کنید $A \subseteq B$، آنگاه $B = A \cup B$،وبنابر (۴) $\bar{B} = \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ یا $\bar{A} \subseteq \bar{B}$.

حال فرض می‌کنیم که A یک زیرمجموعهٔ دلخواه X باشد، و نشان می‌دهیم کـه $\bar{A}$ اشتراک تمام فوق مجموعه‌های «بستهٔ» A است. بنابر (۲) و(۳)، $\bar{A}$ فوق مجموعهٔ «بستهٔ» A است، بنابراین کافی است نشان دهیم‌که اگر $A \subseteq B$ و $B = \bar{B}$، آنگاه $\bar{A} \subseteq B$. چون $A \subseteq B$، $B = A \cup B$. بنابــر (۴) و فرض $B = \bar{B}$ داریم

$$B = \bar{B} = \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B} = \bar{A} \cup B$$

بنابراین $\bar{A} \subseteq B$.

چهارخاصیت عمل بستارگیری مفروض دراین قضیه اصول موضوعهٔ بستار کوراتوفسکی[1] نامیده می‌شوند. دوقضیهٔ آخر نشان‌می‌دهد که می‌توان مجموعه‌های بسته یا عمل بستارگیری را به عنوان مفهوم تعریف نشدهٔ اولیه اختیار کرد و موضوع فضاهای توپولوژیک را مورد بحث قرار داد. در اوایل پیدایش توپولوژی، تحقیق زیادی در این زمینه شده است. معلوم شده است که روشهای متفاوت بسیاری برای تعریف فضای توپولوژیک وجود دارد، که تمام آنها با یکدیگر معادل‌اند. چندین دهه تجربه، اکثر ریاضیدانان را متقاعد کرده است که انتخاب مجموعه‌های باز، ساده‌ترین، سلیس‌ترین و طبیعی‌ترین روش است.

مسائل

۱. فرض کنید $f: X \to Y$ نگاشتی ازیک فضای توپولوژیک بتوی فضای توپولوژیک دیگر باشد. نشان دهید که f پیوسته است $\Longleftrightarrow$ اگر F در Y بسته باشد، آنگاه $f^{-1}(F)$ در X بسته است $\Longleftrightarrow$ به ازای هر زیرمجموعهٔ A از X، $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

۲. X را فضای توپولوژیک، Y را فضای متری، و A را زیرفضای X فرض کنید. اگر f یک نگاشت‌پیوسته از A بتوی Y باشد، نشان دهیدکه f حداکثر به‌یک طریق می‌تواند به‌یک نگاشت پیوسته از$\overline{A}$ بتوی Y گسترش‌یابد. (راهنمایی: به‌مسئلهٔ ۱۳-۳ رجوع‌کنید.)

۳. نشان دهید کـــه زیرمجمـــوعهٔ یک فضای توپولوژیک چگال است $\Longleftrightarrow$ هر مجموعهٔ باز ناتهی راقطع می‌کند.

۴. فرض کنید A یک زیرمجموعهٔ ناتهی یک فضای توپولوژیک باشد. نشان دهید که A به‌عنوان زیرمجموعهٔ زیرفضای $\overline{A}$، چگال است.

۵. زیرمجموعهٔ A ازفضای توپولوژیک را مجموعهٔ بی‌کاست می‌نامند اگر $A = D(A)$. نشان دهیدکه یک‌مجموعه بی‌کاست است $\Longleftrightarrow$ آن مجموعه بسته است و نقاط منزوی ندارد. نشان دهید که مجموعهٔ کانتور بی‌کاست است.

۶. نشان دهید که به ازای هر زیرمجموعهٔ A از فضای توپولوژیک، $\text{Int}(A') = (\overline{A})'$.

۷. نشان دهید که زیرمجموعهٔ فضای توپولوژیک بسته است $\Longleftrightarrow$ آن مجموعه شامل مرز خود است.

۸. نشان دهیدکه زیرمجموعهٔ فضای توپولوژیک دارای مرز تهی است $\Longleftrightarrow$ آن مجموعه هم بسته و هم باز است. (هر فضای توپولوژیک X دارای این خاصیت است که مجموعهٔ تهی $\varnothing$ وکل فضای X، هم‌باز و هم بسته‌اند. درفصل ۶ شرایطی‌را مورد مطالعه قرارمی‌دهیم که تحت آن‌شرایط، این دو مجموعه تنها مجموعه‌هایی باشند که هم باز و هم بسته‌اند.)

۹. زیرمجموعهٔ A ازفضای توپولوژیک هیچ‌جا چگال‌گفته می‌شوداگر $\overline{A}$ دارای درون‌تهی باشد.

(الف) نشان دهید که مجموعهٔ A هیچ‌جا چگال است $\Longleftrightarrow$ هر مجموعهٔ باز ناتهی دارای یک زیرمجموعهٔ باز ناتهی مجزا از A است.

(ب) نشان دهید که یک مجموعهٔ بسته هیچ‌جا چگال است $\Longleftrightarrow$ مکمل آن همه‌جا

---

1. Kuratowski

چگال است. آیا این مطلب برای یک مجموعهٔ دلخواه درست است؟

(ج) نشان دهید که مرز یک مجموعهٔ بسته هیچ‌جا چگال است. آیا این مطلب برای یک مجموعهٔ دلخواه درست است؟

۱۸. پایه‌های باز و زیرپایه‌های باز

ردهٔ گویهای باز فضای متری در میان ردهٔ تمام مجموعه‌های باز آن، نقش خاصی ایفا می‌کند. قسمت برجستهٔ ارتباط آنها با مجموعه‌های باز این است که مجموعه های باز، اجتماعهای گویهای باز هستند، واز اینجا نتیجه می‌شودکه پیوستگی نگاشت را هم می‌توان برحسب گویهای باز بیان کرد و هم برحسب مجموعه‌های باز؛ و در هر مورد آن را که مناسبتر است به کار برد. در این بخش می‌خواهیم به بررسی نظیر این احکام در فضاهای توپولوژیک بپردازیم.

X رافضای توپولوژیک فرض کنید. یک پایهٔباز X رده‌ای ازمجموعه‌های بازاست با این خاصیت که هر مجموعهٔ باز فضا، اجتماعی از مجموعه های این رده است. این شرط می‌تواند به صورت معادل زیر نیز بیان شود: اگر G مجموعهٔ باز ناتهی دلخواه، و x یک نقطه‌در G باشد، آنگاه یک‌مجموعهٔ B درآن پایهٔ بازموجوداست به‌طوری که: $x\in B\subseteq G$. مجموعه‌های پایهٔ باز را مجموعه‌های بازپایه‌ای می‌گویند. واضح است‌که ردهٔ تمام‌گویهای باز فضای متری، یک پایهٔ باز است، و هررده از مجموعه‌های باز که شامل یک پایهٔ باز باشد خود نیز پایهٔ باز است.

به‌طور کلی، پایهٔ باز تنها وقتی مفید است که مجموعه های آن به شکل ساده یا به تعداد کمی باشند. مثلاً، فضایی که دارای پایهٔ باز شماراست دارای خواص جالب زیادی است، چنین فضایی را فضای شمارای دوم، یاصادق دراصل دوم شمارایی[1] گویند. به سادگی دیده می‌شود که هر زیرفضای فضای شمارای دوم نیز شمارای دوم است، زیرا معلوم است که ردهٔ تمام اشتراکهای مجموعه های یک پایهٔ باز با آن زیرفضا، یک پایهٔ باز برای آن زیرفضاست. خاصیت اصلی در مورد فضاهای شمارای دوم را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

قضیهٔ الف (قضیهٔ لیندلوف[2]). X را فضای شمارای دوم فرض کنید. اگرمجموعهٔ باز ناتهی G در X به صورت اجتماع ردهٔ $\{G_i\}$ از مجموعه‌های باز نمایش داده شده باشد، آنگاه G را می‌توان به‌صورت اجتماع شمارایی از G_iها نمایش داد.

برهان : فرض کنید $\{B_n\}$ یک پایهٔ باز شمارای X و x یک نقطه در G باشد. بنابراین نقطهٔ x در یک G_i است، و یک مجموعهٔ باز پایه‌ای B_n می‌توان یافت به طوری که $x\in B_n\subseteq G_i$. اگر به ازای هرنقطهٔ x در G چنین کاری انجام دهیم، یک زیررده از پایهٔ

---

۱. فضای شمارای اول ـ یافضایی که صادق در اصل اول شمارایی است ـ یک فضای توپولوژیک‌است که در هرنقطه‌اش دارای پایهٔ باز شماراست. (به بخش ۱۷ رجوع کنید.)

2. Lindelof

باز شمارای خود به دست می‌آوریم که اجتماع آن برابر G است، و این زیر رده لزوماً شماراست. به‌علاوه، به‌ازای هرمجموعهٔ باز پایه‌ای دراین زیررده می‌توان یک G_i انتخاب کرد که شامل آن مجموعهٔ بازپایه‌ای باشد. ردهٔ G_i هایی که از این طریق به دست می‌آید، به وضوح شماراست، و اجتماع آن G است.

بیشتر کاربردهای قضیهٔ لیندلوف، به نتیجهٔ سادهٔ زیر از این قضیه بستگی نزدیکتری دارند.

قضیهٔ ب. X را فضای شمارای دوم فرض کنید. آنگاه هرپایهٔ باز X دارای یک زیرردهٔ شماراست که خود نیز یک پایهٔ باز است.

برهان: فرض کنید $\{B_n\}$ یک پایهٔ بازشمارا و $\{B_i\}$ یک پایهٔ باز دلخواه باشد. چون هر B_n اجتماعی از B_iهاست، بنابر قضیهٔ لیندلوف، هر B_n ناتهی اجتماع رده‌ای شمارا از B_iهاست. بدین طریق، یک خانوادهٔ شمارا از رده‌های شمارای B_iها به دست می‌آوریم. بدیهی است که اجتماع این خانوادهٔ رده‌ها، یک پایهٔ بازاست که یک زیرردهٔ شمارا از پایهٔ باز $\{B_i\}$ است.

اگر فضای توپولوژیک X دارای پایهٔ باز شمارای $\{B_n\}$ باشد، آنگاه دارای یک زیرمجموعهٔ چگال شمارا نیزهست. در واقع اگر یک عضو ازهر B_n ناتهی، انتخاب کنیم مجموعهٔ تمام این نقاط، شمارا و در X چگال است. بنابراین هر فضای شمارای دوم، تفکیک‌پذیر است. درحالت خاص زیر، عکس این نتیجهٔ ساده درست است.

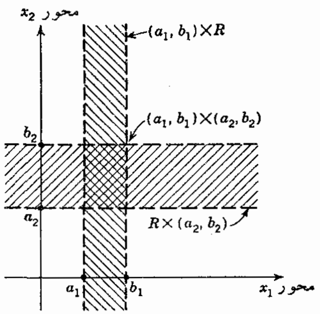
قضیهٔ ج. هر فضای متری تفکیک‌پذیر، شمارای دوم است.

برهان: فرض کنید X فضای متری شمارا باشد و A زیرمجموعهٔ چگال شمارای آن. اگر گویهای بازی که شعاع آنها گویا و مرکز آنها تمام نقاط A هستند در نظر بگیریم، آنگاه ردهٔ تمام این گویهای باز یک ردهٔ شمارا از مجموعه‌های باز است. نشان می‌دهیم که این رده یک پایهٔ باز است. فرض کنید G یک مجموعهٔ باز ناتهی دلخواه و x یک نقطهٔ G باشد. باید یک گوی باز در این رده پیدا کنیم که x را در بر داشته باشد و مشمول G باشد. فرض کنید $S_r(x)$ یک گوی باز به مرکز x و مشمول G باشد، گوی باز $S_{r/3}(x)$ را که با گوی قبلی متحدالمرکز و شعاعش ۱/۳ شعاع آن است درنظر می‌گیریم. چون A چگال است، یک نقطهٔ a در A وجود داردکه در $S_{r/3}(x)$ است. فرض‌کنید r_1 عددگویایی باشد به طوری که $r/3 < r_1 < 2r/3$. برهان را با رابطهٔ زیر تمام می‌کنیم

$$x \in S_{r_1}(a) \subseteq S_r(x) \subseteq G$$

برای اینکه ساده‌ترین تصویر شهودی ممکن از مفهوم بعدی خودمان ارائه دهیم، بحث مختصری می‌کنیم دربارهٔ مستطیل‌ها و نوارها در صفحهٔ اقلیدسی R^2. شکل ۲۲ برای تشریح تذکرات ما درنظرگرفته شده است. اگر (a_1, b_1) و (a_2, b_2) بازه‌های بازکرانداری باشند ــ یکی روی محور x_1 و دیگری روی محور x_2 ــ آنگاه حاصلضرب آنهارا:

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = \{(x_1, x_2): a_i < x_i < b_i,\ i = 1, 2 \text{ به ازای}\}$$



شکل ۲۲. نوارهای باز و مستطیل باز

مستطیل باز در R^2 می‌نامند. به همین ترتیب مستطیل بسته به صورت حاصلضرب دو بازهٔ بسته تعریف‌می‌شود. به‌سادگی ثابت می‌شود (به‌مسئلهٔ ۸ رجوع شود) که ردهٔ تمام مستطیل‌های باز، یک پایهٔ باز برای صفحهٔ اقلیدسی است. حال مشاهده می‌کنیم‌که هر مستطیل باز اشتراک دو نوار باز به‌مفهوم زیر است. مجموعه‌های به شکل

$$(a_1, b_1) \times R = \{(x_1, x_2): a_1 < x_1 < b_1 \text{ ،دلخواه } x_2\}$$

و

$$R \times (a_2, b_2) = \{(x_1, x_2): a_2 < x_2 < b_2 \text{ ،دلخواه } x_1\}$$

را نوارهای باز R^2 می‌نامیم. اگر در اینجا بازه‌های بسته به‌کار بریم، چیزی بنام نوارهای بسته به‌دست می‌آوریم. آشکار است که

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = [(a_1, b_1) \times R] \cap [R \times (a_2, b_2)]$$

چون هر نوار بازدر R^2 به‌وضوح مجموعهٔ باز است، ردهٔ تمام نوارهای باز، یک رده از مجموعه‌های بازاست که اشتراکهای متناهی آن تشکیل پایهٔ بازمی‌دهند، یعنی پایهٔ بازمرکب از نوارهای باز، مستطیلهای باز، مجموعهٔ تهی، و کل فضای R^2.

اکنون X را فضای توپولوژیک فرض کنید. زیرپایهٔ باز، یک رده از زیرمجموعه های باز X است که اشتراکهای متناهی آنها تشکیل یک پایهٔ باز می‌دهد. این پایهٔ باز را پایهٔ باز تولید شده توسط این زیرپایهٔ باز می‌نامند. مجموعه‌هایی که در زیرپایهٔ باز هستند، مجموعه‌های باز زیرپایه‌ای خوانده می‌شوند. به‌سادگی دیده می‌شود که هر رده از مجموعه‌های باز که شامل زیرپایهٔ باز باشد خود نیز زیرپایهٔ باز است. چون بازه‌های باز کراندار روی خط حقیقی یک پایهٔ باز این فضارا تشکیل می‌دهند، واضح است که تمام بازه‌های باز از نوع $(a, +\infty)$ و $(-\infty, b)$، که در آن a و b اعداد حقیقی‌اند، یک زیرپایهٔ باز تشکیل می‌دهند. پایهٔ باز تولید شده توسط این زیرپایهٔ باز، ازتمام‌بازه‌های باز از این نوع، تمام بازه‌های کراندار، مجموعهٔ تهی، و کل فضای R تشکیل شده است. از آنچه درپاراگراف قبل گفتیم فوراً نتیجه می‌شود که تمام نوارهای باز صفحهٔ اقلیدسی، یک زیرپایهٔ باز این فضارا تشکیل می‌دهند.

ارزش عملی زیرپایه‌های باز عمدتاً ناشی از قضیهٔ زیر است.

قضیهٔ د. X را مجموعه‌ای ناتهی، و S رایک ردهٔ دلخواه از زیرمجموعه‌های X فرض‌کنید. آنگاه S را می‌توان به‌عنوان یک زیرپایهٔ بازبرای یک توپولوژی روی X به‌کار برد، به‌این

معنی که ردهٔ تمام اجتماعهای اشتراکهای متناهی از مجموعه‌های متعلق به S، یک توپولوژی است.

برهان: اگر S تهی باشد، آنگاه ردهٔ تمام اشتراکهای متناهی مجموعه‌های S ردهٔ تک عضوی $\{X\}$ است، و ردهٔ تمام اجتماعهای مجموعه‌های متعلق به ردهٔ $\{X\}$ ردهٔ دو عضوی $\{X, \emptyset\}$ است. این ردهٔ اخیر همان توپولوژیی است که در مثال ۱۶-۳ بیان شد. بنابراین می‌توان فرض‌کرد که S ناتهی است. **B** را ردهٔ تمام اشتراکهای متناهی مجموعه‌های S، و T را ردهٔ تمام اجتماعهای مجموعه‌های B فرض کنید. باید نشان دهیم که T یک توپولوژی است. واضح است‌که T شامل $\emptyset$ و X است، و تحت تشکیل اجتماعهای دلخواه بسته است. آنچه باقی می‌ماند این است که نشان دهیم اگر $\{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$ یک ردهٔ متناهی ناتهی از مجموعه‌های T باشد، آنگاه $G = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$ نیز در T است. چون مجموعهٔ تهی در T است، می‌توان فرض کرد که G ناتهی است. فرض کنید x یک نقطه در G باشد. آنگاه x در همهٔ G_iها قرار دارد، و بنابر تعریف T، به ازای هر i یک مجموعهٔ B_i در B وجود دارد به‌طوری که $x \in B_i \subseteq G_i$. چون هر B_i یک اشتراک متناهی از مجموعه‌های S است، اشتراک تمام مجموعه‌های S که از این طریق به دست می‌آیند، مجموعه‌ای در B است که x را در بردارد و مشمول G است. این مطلب نشان می‌دهد که G یک اجتماع ازمجموعه‌های B است و بنابراین خودمجموعه‌ای در T است و برهان‌تمام است.

توپولوژی‌ای را که در این قضیه ذکرشد، توپولوژی تولید شده توسط ردهٔ S می‌نامیم. همان‌طور که در فصول بعدی خواهیم دید، این قضیه، اگر چه خود ارزش خاصی ندارد، وسیله‌ای است مفید. معمولاً* این قضیه به صورت زیر به‌کار برده می‌شود: اگر X مجموعه‌ای ناتهی باشد، و اگر یک رده از زیرمجموعه‌های X داشته باشیم که مایل باشیم آن را به عنوان مجموعه‌های باز در نظر بگیریم، آنچه باید انجام دهیم این است که توپولوژی تولید شده توسط این رده را به مفهومی که در قضیهٔ د آمده است، تشکیل دهیم.

قضیهٔ بعدی ما اغلب اثبات پیوسته یا باز بودن یک نگاشت معین داده شده را بسیار آسانتر می‌کند.

قضیهٔ هـ. $f: X \to Y$ را نگاشت ازیک فضای توپولوژیک بتوی فضای توپولوژیک دیگر فرض کنید، و فرض کنید یک پایهٔ باز در X و یک زیرپایهٔ باز و پایهٔ باز تولید شده توسط آن در Y، داده شده است. آنگاه (۱) f پیوسته است $\Longleftrightarrow$ نگارهٔ وارون هر مجموعهٔ باز پایه‌ای، بازاست $\Longleftrightarrow$ نگارهٔ وارون هر مجموعهٔ باز زیرپایه‌ای بازاست؛ و (۲) f باز است $\Longleftrightarrow$ نگارهٔ هر مجموعهٔ باز پایه‌ای، باز است.

برهان: این قضیه نتیجهٔ فوری تعاریف، و بترتیب، معادلات ۳-(۲) و ۳-(۳) و معادلهٔ ۳-(۱) است.

در بخش بعد در قسمتی از نظریهٔ شبکه‌ها، که در کاربرد توپولوژی در آنالیز نوین بسیار مفید است، بحث می‌کنیم و این دو قضیه را درآنجا به کار می‌بریم.

مسائل

۱. فرض کنید X فضای توپولوژیک و $\mathbf{B}$ یک پایهٔ باز با این خاصیت باشد که هر نقطهٔ فضا دریک مجموعهٔ باز پایه‌ای متمایز از X قرارگرفته باشد. نشان دهیدکه اگر $\varnothing$ و X در $\mathbf{B}$ باشند، آنگاه رده‌ای که از حذف این دو مجموعه حاصل می‌شود نیز یک پایهٔ باز است.

۲. تحت چه شرایطی فضای متری تعریف شده در مثال ۹ـ۱ تفکیک‌پذیر است؟

۳. نشان دهید کـه خط حقیقی و صفحهٔ مختلط تفکیک‌پذیر هستند. همچنین نشان دهید کـه R^n و C^n نیز تفکیک‌پذیر هستند. و بالاخره، نشان دهید که R^∞ و C^∞ تفکیک‌پذیر هستند.

۴. فرض کنید X یک فضای متری باشد کـه نقاطش اعداد صحیح مثبت‌اند و متریک آن همان متریکی است که در مثال ۹ـ۱ تعریف شده است. نشان دهید کـه $\mathcal{C}(X, R)$ تفکیک‌پذیـر نیست. (راهنمایی: اگر $\{f_n\}$ یک دنباله در $\mathcal{C}(X, R)$ باشد، و اگـر f تابعی در $\mathcal{C}(X,R)$ باشدکه به‌صورت $f(n) = 0$ اگر $|f_n(n)| \geqslant 1$، و $f(n)=|f_n(n)|+1$ اگر $|f_n(n)| < 1$ تعریف شده است، آنگاه به ازای هر n، $\|f - f_n\| \geqslant 1$.)

۵. X را مجموعه‌ای ناتهی با متریک تعریف شده در مثال ۹ـ۱ فـرض کنید و نشان دهید که $\mathcal{C}(X,R)$ تفکیک‌پذیر است $\Longleftrightarrow$ X متناهی است.

۶. مثال زیر ثابت می‌کند کـه فضای توپولوژیک با یک زیرمجموعهٔ چگال شمارا، لازم نیست که‌شمارای‌دوم باشد. X رامجموعهٔ تمام اعدادحقیقی با توپولوژی‌مثال ۱۶ـ۴ فرض‌کنید.

(الف) نشان دهید که هر زیرمجموعهٔ نامتناهی X چگال است.

(ب) نشان دهیدکه X شمارای دوم نیست. (راهنمایی: فرض کنیدکه یک پایهٔ باز شمارا موجود است و x_0 یک نقطهٔ ثابت در X است. نشان دهید کـه اشتراک تمام مجموعه‌های باز پایه‌ای که x_0 را در بر دارند ،مجموعهٔ تک عضوی $\{x_0\}$ است، و ازاین نتیجه بگیرید که مکمل $\{x_0\}$ شمارااست.)

۷. نشان دهید که مجموعهٔ تمام نقاط منزوی یک فضای شمارای دوم، تهی یـا شـماراست. با استفاده ازاین موضوع نشان دهید که هر زیرمجموعهٔ ناشمارای A ازفضای شمارای دوم باید لااقل یک نقطه داشته باشد که نقطهٔ حدی A باشد.

۸. به تفصیل ثابت‌کنید که مستطیل‌های باز درصفحهٔ اقلیدسی یک پایهٔ باز تشکیل می‌دهند.

۹. $f: X \to Y$ رایک نگاشت ازیک‌فضای‌توپولوژیک بتوی فضای توپولوژیک‌دیگر فرض‌کنید. f را درنقطهٔ x_0 در X پیوسته گویند اگر به‌ازای هرهمسایگی $f(x_0)$، مانند H، یک همسایگی x_0، مانند G، وجود داشته باشد به‌طوری که $f(G) \subseteq H$.

(الف) نشان دهید که، f پیوسته است $\Longleftrightarrow$ f در هر نقطه در X پیوسته است.

(ج) اگـر یک پایهٔ بـاز در Y داده شده باشد، نشان دهیدکه، f در x_0 پیوسته است $\Longleftrightarrow$ به‌ازای هر مجموعهٔ باز پایه‌ای B که $f(x_0)$ را دربر دارد یک همسایگی x_0 مانند G وجود دارد به طوری که $f(G) \subseteq B$.

(پ) اگـر Y یک فضای متری بـاشد، نشان دهید کـه f در x_0 پیوسته است $\Longleftrightarrow$ بـه‌ازای هرگوی باز $S_r(f(x_0))$ به مرکز $f(x_0)$ یک همسایگی x_0 مانند G وجود دارد به‌طوری که $f(G) \subseteq S_r(f(x_0))$.

۱۹. توپولوژی ضعیف

X را مجموعه‌ای نامتناهی فرض کنید. اگر T_1 و T_2 دو توپولوژی روی X باشند به‌طوری که $T_1 \subseteq T_2$، گوییم T_1 ضعیفتراز T_2 است (یا T_2 قویتراز T_1 است). اجمالاً، یک توپولوژی ضعیفتراز توپولوژی دیگراست اگردارای مجموعه‌های بازکمتری باشد، وقویتر ازتوپولوژی دیگراست اگردارای مجموعه‌های بازبیشتری باشد. توپولوژی $\{\varnothing, X\}$ ضعیفترین توپولوژی روی X است، زیرا این توپولوژی ضعیفتر ازهر توپولوژی دیگراست، وتوپولوژی گسسته قویترین توپولوژی روی X است، چون قویتر از هر توپولوژی دیگر است. واضح است که خانوادهٔ تمام توپولوژیهای روی X نسبت به‌رابطهٔ «ضعیفتر است از» یک مجموعهٔ جزئاً مرتب است.

حال نشان می‌دهیم که این مجموعهٔ جزئاً مرتب، یک شبکهٔ کامل است. درمسئلهٔ ۱۶-۱ از خواننده خواستیم ثابت کند که اشتراک هردو توپولوژی T_1 و T_2 روی X، یک توپولوژی روی X است. چون این توپولوژی به‌وضوح ازدو توپولوژی T_1 و T_2 ضعیفتروازهر توپولوژی ضعیفتر از توپولوژیهای T_1 و T_2، قویتر است، این توپولوژی بزرگترین کران پایین T_1 و T_2 است. به همین سادگی ثابت می‌شود که اشتراک هر خانوادهٔ ناتهی از توپولوژیهای روی X یک توپولوژی روی X است، وچون این توپولوژی ضعیفتر ازتمام این توپولوژیها وقویتر از هر توپولوژی دیگری‌است‌که ازتمام این توپولوژیها‌ضعیفتراست، این توپولوژی بزرگترین کران پایین این خانواده است. در مورد کوچکترین کرانهای بالا چه می‌توان گفت؟ این حالت کمی متفاوت است، زیرا اجتماع دو توپولوژی روی X لازم نیست توپولوژی باشد. البته اگر خانواده‌ای ناتهی از توپولوژیهای T_i داشته باشیم، آنگاه توپولوژی گسسته، توپولوژیی است که ازهر توپولوژی T_i قویتراست. بنابراین می‌توانیم به تذکرات فوق متوسل شده نتیجه بگیریم که اشتراک تمام توپولوژیهایی که از هر T_i قویترند یک توپولوژی است. این توپولوژی کوچکترین کران بالای خانوادهٔ مفروض‌است. زیرا این توپولوژی از هر T_i قویتر، و ازهر توپولوژی که ازهر T_i قویترباشد ضعیفتر است.

نتایج این بحث را درقضیهٔ زیر خلاصه می‌کنیم.

قضیهٔ الف. X رامجموعه‌ای ناتهی فرض‌کنید. آنگاه‌خانوادهٔ تمام توپولوژیهای‌روی X نسبت به رابطهٔ «ضعیفتر است از» شبکهٔ کامل است. به علاوه، این شبکه دارای کوچکترین عضو (ضعیفترین توپولوژی روی X) و بزرگترین عضو (توپولوژی گسسته روی X) است.

خواننده مشاهده خواهد کرد که اگر $\{T_i\}$ خانواده‌ای ناتهی از توپولوژیهای روی مجموعهٔ X باشد، آنگاه کوچکترین کران بالای این خانواده دقیقاً توپولوژی تولید شده توسط ردهٔ $\bigcup_i T_i$ به‌معنی قضیهٔ ۱۸-د است، یعنی، ردهٔ $\bigcup_i T_i$ یک زیرپایهٔ باز برای کوچکترین کران بالای خانوادهٔ $\{T_i\}$ است. بنابراین در بحث حاضر، قضیهٔ ۱۸-د را می‌توان به عنوان عرضه کنندهٔ روشی برای ساختن مستقیم کوچکترین کرانهای بالا دراین شبکهٔ توپولوژیها، در نظرگرفت.

X را مجموعه‌ای ناتهی و $\{X_i\}$ را رده‌ای ناتهی از فضاهای توپولوژیک فرض

کنید و به ازای هر i فرض کنید f_i نگاشتی از X بتوی X_i است. واضح است که اگر X را با توپولوژی گسسته‌اش درنظر بگیریم، آنگاه تمام f_iها پیوسته خواهند بود. اگر کمی بیشتر دقت کنیم، توپولوژیهای دیگر و ضعیفتری روی X می‌توانیم پیدا کنیم که آنها نیز دارای این خاصیت هستند. در واقع، ضعیفترین توپولوژی منحصر به فردی از این نوع وجوددارد. توپولوژی ضعیف‌تولیدشده‌توسط f_iهارا به‌صورت اشتراک تمام‌آن‌توپولوژیهای روی X که نسبت به‌آنها تمام f_iها پیوسته هستند، تعریف می‌کنیم. واضح است‌که این یک توپولوژی روی X است که تمام f_iهارا پیوسته می‌سازد، و این توپولوژی ازهر توپولوژی دیگری که دارای این خاصیت باشد ضعیفتر است. درفصول بعد آشکارخواهد شدکه بسیاری از توپولوژیهایی که درعمل به‌کار می‌روند به‌صورت توپولوژی ضعیف تولید شده توسط مجموعه‌ای از نگاشتهایی که در فلان مورد خاص حائز اهمیت هستند، تعریف می‌شوند.

مسائل

۱. X را مجموعه‌ای ناتهی و $\{X_i\}$ را رده‌ای ناتهی از فضاهای توپولوژیک فرض کنید. اگر به‌ازای هر i، نگاشت f_i از X بتوی X_i داده شده باشد، توپولوژی ضعیف روی X تولید شده توسط f_i ها را، به $\mathbf{T}$ نمایش می‌دهیم.

(الف) نشان دهید که $\mathbf{T}$ برابر است با توپولوژیی که از ردهٔ تمام نگاره‌های وارون (در X) مجموعه‌های باز X_iها تولیدشده است.[1]

(ب) اگر یک زیرپایهٔ باز در هر X_i داده شده باشد، نشان دهید که $\mathbf{T}$ برابر است با توپولوژی تولید شده توسط ردهٔ تمام نگاره‌های وارون مجموعه های باز زیرپایه‌ای X_iها، در X.

(ج) اگر Y زیرفضای یک فضای توپولوژیک $(X,\mathbf{T})$ باشد، نشان دهیدکه توپولوژی نسبی روی Y، توپولوژی ضعیف تولیدشده توسط تحدیدهای f_iها به Y است.

۲. در هریک از حالات زیر، مجموعه‌ای مانند $\{f_i\}$، از توابع حقیقی تعریف شده‌روی خط حقیقی R به دست می‌دهیم. در هر حالت توپولوژی ضعیف روی R تولید شده توسط f_i ها را به‌طور کامل بیان کنید.

(الف) $\{f_i\}$ از تمام توابع ثابت تشکیل شده است.

(ب) $\{f_i\}$ از یک تابع f تشکیل شده که به صورت $f(x)=0$ اگر $x \leqslant 0$، و $f(x)=1$ اگر $x>0$، تعریف شده است.

(ج) $\{f_i\}$ از یک تابع f تشکیل شده که به صورت $f(x)=-1$ اگر $x<0$، و $f(0)=0$، و $f(x)=1$ اگر $x>0$، تعریف شده است.

(د) $\{f_i\}$ از یک تابع f تشکیل شده که به صورت $f(x)=x$ به ازای هر x، تعریف شده است.

(ه) $\{f_i\}$ از تمام توابع کرانداری که نسبت به توپولوژی معمولی روی R پیوسته هستند، تشکیل شده است.

---

۱. یعنی توپولوژی تولید شده توسط $\{f_i^{-1}(U) : 1 \leqslant i \leqslant n$ و U در X_i باز است$\}$.-م.

(و) $\{f_i\}$ از تمام توابعی که نسبت به‌توپولوژی معمولی روی R پیوسته هستند، تشکیل شده است.

۲۰. جبرهای تابعی $\mathcal{C}(X,R)$ و $\mathcal{C}(X,C)$

X را فضای توپولوژیک دلخواه فرض کنید. ما مفهومهایی را که در بخش ۱۴ به دست آوردیم، با تعریف $\mathcal{C}(X, R)$ و $\mathcal{C}(X, C)$ به‌صورت مجموعه‌های تمام توابع پیوستهٔ کراندار تعریف شده روی X که، به ترتیب، حقیقی و مختلط هستند، تعمیم می‌دهیم.

بسیار مطلوب است که با معرفی مفاهیم زیر، بحث خودمان را در ساختار جبری این مجموعه‌ها بیش از آنچه در بخش ۱۴ عرضه شده گسترش دهیم. جبر، یک فضای خطی است که بردارهای آن را می‌توان به طریقی ضرب کرد که

$$x(yz) = (xy)z \quad (۱)$$
$$x(y+z) = xy + xz \text{ و } (x+y)z = xz + yz \quad (۲)$$
$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y) \text{ به ازای هر اسکالر } \alpha، \quad (۳)$$

جبر را جبر حقیقی یا جبر مختلط می‌گوییم برحسب اینکه اسکالرها اعداد حقیقی یا مختلط باشند. جبر جابجایی، جبری است که ضرب آن درشرط زیر صدق می‌کند:

$$xy = yx \quad (۴)$$

در حالت جبر جابجایی واضح است که قسمت دوم (۲) زائد است. جبر باهمانی، جبری است که خاصیت زیر را داراست:

(۵) یک عضو مخالف صفر در جبر وجود دارد (که به ۱ نمایش داده می‌شود و آن را عضو همانی (یا همانی) می‌نامند) به طوری که به ازای هر x، $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$. همانی در یک جبر (اگراین جبر همانی داشته باشد) منحصر به‌فرد است، زیرا اگر $1'$ نیز عضوی باشد که به‌ازای هر x، $1' \cdot x = x \cdot 1' = x$ آنگاه $1 = 1' \cdot 1 = 1'$. زیرجبر یک جبر عبارت است از یک زیرفضای خطی که حاصلضرب هر زوج از اعضایش را در بردارد. واضح است که زیرجبر یک جبر، در اصل خود یک جبر است.

در حالتی که فضای تابعی، جبر نیز هست فرض براین است که ضرب، نقطه‌ای تعریف شده، یعنی، حاصلضرب fg دو تابع در فضا به صورت $(fg)(x) = f(x)g(x)$ تعریف شده است. این ضرب نقطه‌ای توابع باید از ضرب (یا ترکیب) نگاشتهاکه درانتهای بخش ۳ مورد بحث قرارگرفت، به‌خوبی تمیز داده شود. اگر چنین جبری دارای عضو همانی ۱ باشد، آنگاه مسئلهٔ ۱ نشان می‌دهد که در تمام حالات مورد علاقهٔ ما، این همانی، تابع ثابتی است که به صورت $1(x) = 1$ به ازای تمام xها تعریف شده است.

قبل از آنکه به قضایای اصلی بپردازیم، دو لم را ثابت می‌کنیم.

لم. اگر f و g دوتابع‌حقیقی یامختلط‌پیوسته باشندکه روی یک فضای توپولوژیک تعریف شده‌اند، آنگاه $f+g$، αf و fg نیز پیوسته‌اند. به علاوه، اگر f و g حقیقی باشند،

آنگاه $f \wedge g$ و $f \vee g$ پیوسته‌اند.

برهان: برای نمایاندن روش اثبات، نشان می‌دهیم که fg و $f \vee g$ پیوسته هستند.

برای اثبات اینکه fg پیوسته است، نشان می‌دهیم که fg در نقطهٔ دلخواه $x_\circ$ پیوسته است (به‌مسئلهٔ ۱۸-۹ رجوع کنید). فرض کنید $\circ < \varepsilon$ داده شده باشد، و $\circ < \varepsilon_1$ راچنان پیداکنید که $\varepsilon_1 (|f(x_\circ)| + |g(x_\circ)|) + \varepsilon_1^2 < \varepsilon$. چون f پیوسته است، و درنتیجه در نقطهٔ $x_\circ$ پیوسته می‌باشد، یک همسایگی $x_\circ$، مانند G_1 وجود دارد به طوری که

$$x \in G_1 \Longrightarrow |f(x) - f(x_\circ)| < \varepsilon_1$$

به همین ترتیب، یک همسایگی $x_\circ$ مانند G_2 وجود دارد به طوری که

$$x \in G_2 \Longrightarrow |g(x) - g(x_\circ)| < \varepsilon_1$$

اکنون پیوستگی fg در نقطهٔ $x_\circ$ از ایــن حقیقت نتیجه می‌شود که $G = G_1 \cap G_2$ یک همسایگی $x_\circ$ است و

$$\begin{aligned}
x \in G \Longrightarrow |(fg)(x) - (fg)(x_\circ)| &= |f(x)g(x) - f(x_\circ)g(x_\circ)| \\
&= |[f(x)g(x) - f(x)g(x_\circ)] + [f(x)g(x_\circ) - f(x_\circ)g(x_\circ)]| \\
&\leqslant |f(x)|\,|g(x) - g(x_\circ)| + |g(x_\circ)|\,|f(x) - f(x_\circ)| \\
&< \varepsilon_1 |f(x)| + \varepsilon_1 |g(x_\circ)| \\
&= \varepsilon_1 |[f(x) - f(x_\circ)] + f(x_\circ)| + \varepsilon_1 |g(x_\circ)| \\
&\leqslant \varepsilon_1 |f(x) - f(x_\circ)| + \varepsilon_1 |f(x_\circ)| + \varepsilon_1 |g(x_\circ)| \\
&< \varepsilon_1 (|f(x_\circ)| + |g(x_\circ)|) + \varepsilon_1^2 < \varepsilon
\end{aligned}$$

برای اثبات اینکه $f \vee g$ پیوسته است یادآور می‌شویم که تمام مجموعه‌های به‌شکل $A = (a, +\infty)$ و $B = (-\infty, b)$ یک زیرپایهٔ بازبرای خط‌حقیقی تشکیل می‌دهند و نشان می‌دهیم که نگارهٔ وارون هرچنین مجموعه‌ای باز است (به‌قضیهٔ ۱۸ـ هـ رجوع کنید). آنچه لازم است توجه به این نکته است که مجموعهٔ

$$(f \vee g)^{-1}(A) = \{x: \max\{f(x), g(x)\} > a\} = \{x: f(x) > a\} \cup \{x: g(x) > a\}$$

باز است، زیرا اجتماع دو مجموعهٔ باز است، و مجموعهٔ

$$(f \vee g)^{-1}(B) = \{x: \max\{f(x), g(x)\} < b\} = \{x: f(x) < b\} \cap \{x: g(x) < b\}$$

باز است، زیرا اشتراک دو مجموعهٔ باز است.

لم. X را فضای توپولوژیک فرض کنید، و فرض کنید $\{f_n\}$ یک دنباله از توابع حقیقی یا مختلط تعریف شده روی X باشد که به طور یکنواخت به‌یک تابع f تعریف شده روی X همگراست. اگر تمام f_nها پیوسته باشند، آنگاه f نیز پیوسته است.

برهان: برای نشان دادن اینکه f در X پیوسته است، نشان می‌دهیم که f در نقطهٔ دلخواه x_0 پیوسته‌است. فرض‌کنید $\varepsilon > 0$ داده‌شده‌باشد. چون f حدیکنواخت f_n هاست، عدد صحیح مثبت n_0 وجوددارد به‌طوری که به‌ازای تمام نقاط x در X، $|f(x) - f_{n_0}(x)| < \varepsilon/3$. چون f_{n_0} پیوسته‌است، ودرنتیجه در x_0 پیوسته‌است، همسایگی G از x_0 وجوددارد به‌طوری‌که

$$x \in G \Longrightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon/3$$

حال پیوستگی f در نقطهٔ x_0 از روابط زیر نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} x \in G \Longrightarrow & |f(x) - f(x_0)| \\ &= |[f(x) - f_{n_0}(x)] + [f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)] + [f_{n_0}(x_0) - f(x_0)]| \\ &\leqslant |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \end{aligned}$$

غالباً این لم بدون ذکر جزئیات به‌صورت زیر بیان می‌شود: هر حد یکنواخت توابع پیوسته، تابعی پیوسته است.

اکنون ما به‌جایی رسیده‌ایم که می‌توانیم به‌قضیهٔ ۱۴ـ **الف** شکل کلیتر و غنیتر زیر را بدهیم.

قضیهٔ الف. $\mathcal{C}(X, R)$ رامجموعهٔ تمام توابع حقیقی پیوستهٔ کراندارتعریف شده روی فضای توپولوژیک X فرض کنید. آنگاه (۱) $\mathcal{C}(X,R)$ نسبت بـه جمع نقطه‌ای و ضرب اسکالر و نرم تعریف شده با $\|f\| = \sup |f(x)|$ فضای باناخ حقیقی است؛ (۲) اگر ضرب نقطه‌ای، تعریف شده باشد، $\mathcal{C}(X, R)$ جبر حقیقی جابه‌جایی باهمانی است کـه در آن $\|fg\| \leqslant \|f\|\|g\|$ و $\|1\| = 1$؛ و (۳) اگر $f \leqslant g$ به‌این معنی تعریف شودکه به‌ازای هر x، $f(x) \leqslant g(x)$، $\mathcal{C}(X, R)$ شبکه‌ای می‌شودکه درآن بزرگترین کران پائین و کوچکترین کران بالای دو تابع f و g برابرند با

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \text{ و } (f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

برهان: باتوجه به لمهای فوق، آنچه درقضیه بیان شده است واضح است، به‌جز نامساوی $\|fg\| \leqslant \|f\|\|g\|$ که این نامساوی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} \|fg\| &= \sup|(fg)(x)| = \sup|f(x)g(x)| = \sup|f(x)||g(x)| \\ &\leqslant (\sup|f(x)|)(\sup|g(x)|) = \|f\|\|g\| \end{aligned}$$

قضیهٔ ۱۴ـب را نیز گسترش می‌دهیم اما در جهتی کمی متفاوت.

قضیهٔ ب. $\mathcal{C}(X, C)$ رامجموعهٔ تمام توابع مختلط پیوستهٔکراندار تعریف شده روی فضای توپولوژیک X فرض کنید. آنگاه (۱) $\mathcal{C}(X, C)$ نسبت بـه جمع نقطه‌ای و ضرب اسکالر

و نرم تعریف شده با $\|f\| = \sup|f(x)|$ فضای باناخ مختلط است؛ (۲) اگر ضرب نقطه‌ای تعریف شده باشد، $\mathcal{C}(X, C)$ جبر مختلط جابه‌جایی باهمانی است که در آن $\|fg\| \leqslant \|f\|\,\|g\|$ و $\|1\| = 1$؛ و (۳) اگر $\bar{f}$ با $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$ تعریف شود، آنگاه $f \to \bar{f}$ نگاشتی است از جبر $\mathcal{C}(X, C)$ بتوی خودش که دارای خواص زیراست
$$\overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g}\text{،}\ \overline{\alpha\cdot f} = \bar{\alpha}\cdot\bar{f}\text{،}\ \overline{fg} = \bar{f}\cdot\bar{g}\text{،}\ \bar{\bar{f}} = f \text{، و } \|\bar{f}\| = \|f\| .$$

برهان: این قضیه نتیجهٔ مستقیم معلومات به‌دست آمدهٔ قبلی است. مع‌هذا تذکر می‌دهیم که اثبات اینکه اگر f پیوسته باشد، $\bar{f}$ نیز پیوسته است، از تساوی
$$|\bar{f}(x) - \bar{f}(x_0)| = |f(x) - f(x_0)|$$
نتیجه می‌شود.

تابع $\bar{f}$ که دراین قضیه‌تعریف شد مزدوج تابع f نامیده می‌شود، وعمل تشکیل $\bar{f}$ از f را مزدوج‌گیری می‌نامند. درفصول بعدی این‌کتاب روشن خواهد شدکه عمل‌مزدوج‌گیری در فضای $\mathcal{C}(X, C)$ از ارکان بسیار مهم نظریه‌ای است که درآن فصول بحث خواهیم‌کرد.

اطمینان داریم‌که خواننده برتأکید ما روی این فرض که فضای توپولوژیک همواره لااقل یک عضو دارد، توجه داشته است. دلیل بر این تأکید این است که هیچ تابعی روی مجموعهٔ تهی تعریف نشده است. اگرمجاز می‌دانستیم که فضای توپولوژیک X تهی باشد، آنگاه ناچار با این حقیقت روبرو می‌شدیم که $\mathcal{C}(X, R)$ و $\mathcal{C}(X, C)$ متناظر آن نیز تهی هستند، و بنابراین نمی‌توانند فضاهای خطی باشند، زیرا فضای خطی لااقل باید یک بردار (بردار صفر) را در بر داشته باشد. چون توابع ثابت همواره پیوسته‌اند، برای اجتناب از این مشکل، زحمت این فرض را که فضاهای توپولوژیک ناتهی‌اند، می‌پذیریم.

مسائل

۱. A را جبری از توابع حقیقی یا مختلط تعریف شده روی مجموعهٔ ناتهی X فرض‌کنید، و فرض کنید که به ازای هر x در X، تابع f در A وجود دارد به‌طوری که $f(x) \neq 0$. نشان دهید که اگر A عضو همانی ۱ داشته باشد، آنگاه به‌ازای هر x، $1(x) = 1$.

۲. f را تابع پیوستهٔ حقیقی یا مختلطی که روی فضای توپولوژیک X تعریف شده است فرض‌کنید، و فرض کنید که f متحد با صفر نیست، یعنی، مجموعهٔ $Y = \{x : f(x) \neq 0\}$ ناتهی است. به تفصیل ثابت کنید که تابع $1/f$ که به صورت $(1/f)(x) = 1/f(x)$ تعریف می‌شود در هر نقطهٔ زیرفضای Y پیوسته است.

۳. X را فضای توپولوژیک و A را زیرجبری از $\mathcal{C}(X, R)$ یا $\mathcal{C}(X, C)$ فرض کنید. نشان دهید که $\bar{A}$ (بستار A) نیز یک زیرجبر است. اگر A یک زیرجبر $\mathcal{C}(X, C)$ باشد که مزدوج هر تابعش را دربر داشته باشد، نشان دهید که $\bar{A}$ نیز مزدوج هر تابعش را در بر دارد.

فصل چهارم

فشردگی

همانند بسیاری از مفاهیم دیگر توپولوژی، مفهوم فشردگی در فضای توپولوژیک، تجریدی است از یک خاصیت مهم بعضی مجموعه‌های اعداد حقیقی. این خاصیت در قضیهٔ هاینه-بورل[1] بیان شده است. این قضیه حاکی است که: اگر X زیرمجموعهٔ بسته و کراندار خط حقیقی R باشد، آنگاه هر رده از زیرمجموعه های باز R که اجتماع آنها شامل X باشد، دارای زیررده‌ای متناهی است که اجتماع آنها نیز شامل X است. اگر X را که یک زیرفضای R است، با توپولوژی القایی درنظر بگیریم، آنگاه این قضیه را می‌توان چنین تعبیر کرد که هر رده از زیرمجموعه‌های باز X که اجتماع آن X باشد، دارای زیررده‌ای متناهی است که اجتماع آن نیز X است.

قضیهٔ هاینه-بورل کاربردهایی عمیق و دوررس در آنالیز دارد. بسیاری از این کاربردها، تضمین می‌کنند که توابع پیوستهٔ تعریف شده روی مجموعه‌های بسته و کراندار از اعداد حقیقی، خوش‌رفتارند. مثلاً، هر تابعی از این نوع، خود به خود کراندار و پیوستهٔ یکنواخت است. در مقابل این رفتار رضایتبخش، متذکرمی‌شویم که تابع f که روی بازهٔ واحد باز $(۰, ۱)$ به صورت $f(x) = ۱/x$ تعریف شده، نه کراندار است و نه پیوستهٔ یکنواخت.

همچنان که برای غالب قضایای مهم آنالیز پیش می‌آید، حکم قضیهٔ هاینه-بورل در توپولوژی به یک تعریف تبدیل شده است. برای جلب توجه مخصوص به موضوعی که فضاهای توپولوژیک فشرده نامیده می‌شود، این تعریف انتخاب می‌شود. کارهای اصلی ما در این فصل عبارت است از بحث درخواص اساسی این فضاها و توابع پیوستهٔ روی آنها، و (در حالت فضاهای متری) برقراری چندین صورت معادل فشردگی که در کاربردها مفید هستند.

---

1. Heine-Borel

۲۱. فضاهای فشرده

X را فضای توپولوژیک فرض کنید. ردهٔ $\{G_i\}$ از زیرمجموعه‌های باز X را یک پوشش باز X می‌گویند اگرهر نقطهٔ X لااقل به یک G_i متعلق باشد، یعنی اگر $X = \bigcup_i G_i$. یک زیرردهٔ پوشش باز را که خود پوشش باز باشد زیرپوشش می‌نامند. فضای فشرده، فضای توپولوژیکی است‌که هرپوشش بازآن زیرپوشش متناهی دارد. زیرفضای فشردهٔفضای توپولوژیک زیرفضایی است که به‌عنوان فضای توپولوژیک، فشرده است. با اثبات دو قضیهٔ ساده ولی بسیار مفید، بحث را شروع می‌کنیم.

قضیهٔ الف. هرزیرفضای بستهٔ فضای فشرده، فشرده است.

برهان: Y را زیرفضای بستهٔ فضای فشردهٔ X فرض کنید، و فرض کنید $\{G_i\}$ یک پوشش باز Y باشد. هر G_i، چون در توپولوژی نسبی روی Y باز است، برابر اشتراک Y ویک زیرمجموعهٔ باز X مانند H_i است. چون Y بسته است، ردهٔ متشکل ازY' و تمام H_iها یک پوشش باز X خواهد بود، و چون X فشرده است، این پوشش باز دارای یک زیرپوشش متناهی است. اگر Y' در این زیرپوشش ظاهر شود، آن را کنار می‌گذاریم. آنچه باقی می‌ماند یک ردهٔ متناهی از H_iهاست که اجتماع آنها شامل Y است. اکنون استنتاج فشردگی Y ازاین حقیقت حاصل می‌شودکه G_iهای متناظر یک زیرپوشش متناهی‌از پوشش باز اولیهٔ Y را تشکیل می‌دهند.

قضیهٔ ب. هرنگارهٔ پیوستهٔ فضای فشرده، فشرده است.

برهان: $f: X \to Y$ رایک نگاشت پیوسته ازفضای فشردهٔ X بتوی فضای توپولوژیک دلخواه Y فرض کنید. باید نشان دهیم که $f(X)$ یک زیرفضای فشرده Y است. فرض کنید $\{G_i\}$ یک پوشش باز $f(x)$ باشد. به‌همان صورتی که در برهان قضیهٔ فوق آمد، هر G_i اشتراک یک زیرمجموعهٔ باز Y، مانند H_i، و $f(X)$ است. واضح است که $\{f^{-1}(H_i)\}$ یک پوشش باز X است، و بنابر فشردگی X، این پوشش باز، یک زیرپوشش متناهی دارد. واضح است که اجتماع ردهٔ متناهی H_iهایی که نگاره‌های عکس آنها این زیرپوشش را تشکیل می‌دهند، شامل $f(X)$ است، بنابراین ردهٔ G_iهای متناظر، یک زیرپوشش متناهی از پوشش باز اولیهٔ $f(X)$ است، و در نتیجه $f(X)$ فشرده است.

بعضی‌اوقات اثبات فشرده‌بودن فضای توپولوژیک مفروض، مستقیماً از روی تعریف، بسیار مشکل است. قضایای زیر چندین صورت معادل تعریف فشردگی را عرضه می‌کنند که غالباً آسانتر به‌کار گرفته می‌شوند.

قضیهٔ ج. فضای توپولوژیک، فشرده است $\Longleftrightarrow$ هر رده از مجموعه‌های بسته با اشتراک تهی، دارای زیر رده‌ای متناهی با اشتراک تهی است.

برهان: این قضیه نتیجهٔ مستقیم این حقیقت است که یک رده از مجموعه‌های باز، پوشش باز است $\Longleftrightarrow$ اشتراک ردهٔ تمام مکملهایشان تهی است.

با توجه به مسئلهٔ ۸-۶ یادآور می‌شویم که رده‌ای از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای

نامتهی را دارای خاصیت اشتراک متناهی گوییم اگر هر زیر ردهٔ متناهی آن دارای اشتراک ناتهی باشد. به کمک این مفهوم می‌توانیم قضیهٔ ج را به صورت زیر بیان کنیم.

قضیهٔ د. فضای توپولوژیک فشرده است $\Longleftrightarrow$ هر رده از مجموعه‌های بستهٔ با خاصیت اشتراک متناهی، دارای اشتراک ناتهی است.

فرض‌کنید X فضای‌توپولوژیک باشد. یک پوشش‌باز X را که تمام مجموعه‌هایش در یک پایهٔ باز مفروض باشند، پوشش باز پایه‌ای می‌نامند، و اگر تمام مجموعه‌هایش در یک زیرپایهٔ باز داده شده‌ای باشند، آن پوشش باز را پوشش باز زیرپایه‌ای می‌گویند. البته واضح است که اگر X فشرده باشد، آنگاه هر پوشش باز پایه‌ای دارای یک زیرپوشش متناهی است، قضیهٔ بعدی می‌گوید که فشردگی نه تنها این خاصیت را نتیجه می‌دهد بلکه از آن نیز نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ه. فضای توپولوژیک، فشرده است اگر هر پوشش باز پایه‌ای دارای یک زیرپوشش متناهی باشد.

برهان: فرض کنید $\{G_i\}$ یک پوشش باز و $\{B_j\}$ یک پایهٔ بازباشد. هر G_i اجتماع تعداد معینی B_j است، و واضح است که مجموع تمام چنین B_jها یک پوشش بازپایه‌ای است. بنا بر فرض، ردهٔ این B_jها دارای یک زیرپوشش متناهی است. به ازای هر مجموعه در این زیرپوشش متناهی می‌توان یک G_i انتخاب کرد که شامل آن مجموعه باشد. ردهٔ G_i هایی که از این طریق به دست می‌آیند آشکارا یک زیرپوشش متناهی از پوشش باز اولیه است.

حال یک قدم دیگر در این جهت پیش رفته و قضیه‌ای مشابه (و بسیار عمیقتر) در مورد پوششهای باز زیرپایه‌ای، ثابت می‌کنیم. اثبات این قضیه نسبتاً دشوار است، و برای اینکه برهان آن را تا آنجا که ممکن است آسان کنیم، مفاهیم زیر را عرضه می‌کنیم. این مفاهیم بعضی از کاربردهای قضیه را نیز به طور قابل ملاحظه‌ای، ساده می‌کنند. X را فضای توپولوژیک فرض‌کنید. یک رده از زیرمجموعه‌های بستهٔ X را پایهٔ بسته می‌نامند اگرردهٔ تمام مکملهای مجموعه های آن، پایهٔ باز باشد؛ و رده را زیرپایهٔ بسته می‌نامند اگر ردهٔ تمام مکملها، زیرپایهٔ باز باشد. چون ردهٔ تمام اشتراکهای متناهی مجموعه‌های یک زیرپایهٔ باز، پایهٔ باز است، نتیجه می‌شود که ردهٔ تمام اجتماعهای متناهی مجموعه‌های یک زیرپایهٔ بسته، پایهٔ بسته است. این پایهٔ بسته را، پایهٔ بستهٔ تولید شده توسط آن زیرپایهٔ بسته می‌نامند.

قضیهٔ و. فضای توپولوژیک، فشرده است اگر هر پوشش باز زیرپایه‌ای دارای زیرپوشش متناهی باشد، یا معادل آن، اگر هر رده ازمجموعه‌های بستهٔ زیرپایه‌ای با خاصیت اشتراک متناهی، اشتراک ناتهی داشته باشد.

برهان: معادل بودن شرایط بیان شده، یک نتیجهٔ ساده از قضایای ج و د است. یک زیرپایهٔ بسته برای فضای توپولوژیک درنظر بگیرید، و فرض کنید $\{B_i\}$ پایهٔ بستهٔ تولید شده توسط آن باشد، یعنی، ردهٔ تمام اجتماعهای متناهی مجموعه‌های آن. فرض‌می‌کنیم

که هر رده از مجموعه‌های بستهٔ زیرپایه‌ای با خاصیت اشتراک متناهی دارای اشتراک ناتهی است، و با توجه به این فرض ثابت می‌کنیم که هر رده از B_iها با خاصیت اشتراک متناهی نیزدارای اشتراک ناتهی است. بنا بر قضیهٔ ه اثبات این مطلب برای اثبات قضیهٔ ما کافی خواهد بود.

$\{B_j\}$ را یک رده از B_iها با خاصیت اشتراک متناهی فرض کنید، باید نشان دهیم که $\bigcap_j B_j$ ناتهی است. با استفاده از لم تسورن نشان می‌دهیم که $\{B_j\}$ در یک ردهٔ $\{B_k\}$ از B_iها قرار دارد که نسبت به دارا بودن خاصیت اشتراک متناهی ماکزیمال است، بدین معنی که $\{B_k\}$ دارای خاصیت اشتراک متناهی است و هر رده از B_iها که $\{B_k\}$ زیرردهٔ سرهٔ آن باشد، این خاصیت را ندارد. به‌صورت زیراستدلال می‌کنیم: خانوادهٔ تمام رده‌های B_iها را که شامل $\{B_j\}$ و دارای خاصیت اشتراک متناهی هستند، در نظر بگیرید. این خانواده نسبت بـه‌شمول رده‌ها، مجموعه‌ای جزئاً مرتب است. اگر یک زنجیر در این مجموعهٔ جزئاً مرتب درنظر بگیریم، اجتماع تمام رده‌ها در این زنجیر رده‌ای از B_iها است که هر عضو زنجیر را در بر دارد و دارای خاصیت اشتراک متناهی است، زیرا هر ردهٔ متناهی از مجموعه‌های این اجتماع مشمول یک عضو آن زنجیر است و آن عضو دارای خاصیت اشتراک متناهی است. نتیجه می‌گیریم که هر زنجیر در این مجموعه جزئاً مرتب، دارای کران بالاست، بنابراین، لم تسورن تضمین می‌کند که این مجموعهٔ جزئاً مرتب عضو ماکزیمال دارد. این استدلال، وجود یک ردهٔ $\{B_k\}$ با خواص فوق‌الذکر را نتیجه می‌دهد. چون $\bigcap_j B_j \subseteq \bigcap_k B_k$ اکنون کافی است نشان دهیم که $\bigcap_k B_k$ ناتهی است.

هر B_k اجتماعی متناهی از مجموعه‌های زیرپایهٔ بستهٔ مفروض است، مثلاً $B_1 = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$. حال کافی است نشان دهیم که لااقل یکی از مجموعه‌های S_1، S_2، ...، S_n متعلق بـه ردهٔ $\{B_k\}$ است. چون اگر بـه‌ازای هر B_k چنین مجموعه‌ای به دست آوریم، ردهٔ مجموعه‌های بستهٔ زیرپایه‌ای حاصل دارای خاصیت اشتراک متناهی است(چون‌مشمول $\{B_k\}$ است) ودرنتیجه، بنا برفرض مادربارهٔ مجموعه‌های‌بستهٔ زیرپایه‌ای، دارای اشتراک ناتهی خواهد بود، و چون این اشتراک ناتهی زیرمجموعهٔ $\bigcap_k B_k$ است، نتیجه خواهیم گرفت که $\bigcap_k B_k$ ناتهی است.

با نشان دادن اینکه لااقل یکی ازمجموعه‌های S_1، S_2، ...، S_n متعلق به‌رده $\{B_k\}$ است، اثبات را به پایان می‌رسانیم. فرض می‌کنیم کـه هیچیک از این مجموعه‌ها متعلق به ردهٔ $\{B_k\}$ نباشد.وازاین فرض یک تناقض به‌دست‌می‌آوریم. چون S_1 یک‌مجموعهٔ بستهٔ زیرپایه‌ای‌است، این‌مجموعه یک‌مجموعهٔ بستهٔ پایه‌ای نیز می‌باشد، وچون متعلق به‌ردهٔ $\{B_k\}$ نیست،ردهٔ $\{B_k, S_1\}$ یک رده از B_iها است کـه $\{B_k\}$ زیرردهٔ سره آن است. بنا بر خاصیت ماکزیمالی $\{B_k\}$، ردهٔ $\{B_k, S_1\}$ فاقد خاصیت اشتراک متناهی است، بنابراین S_1 ازاشتراک یک ردهٔ متناهی B_kها مجزاست. اگر چنین عملی را برای هر یک از مجموعه‌های S_1، S_2، ...، S_n انجام دهیم، ملاحظه‌می‌کنیم‌که B_1 ــ اجتماع این مجموعه‌هاــ ازاشتراک ردهٔ متناهی تمام B_kهایی که ازاین طریق به دست می آیند مجزاست. واین با خاصیت اشتراک متناهی $\{B_k\}$ متناقض است و برهان تمام است.

توانایی زیاد این قضیه را می‌توان از پیچیدگی برهان آن حدس زد. این قضیه وسیلهٔ بسیار مفیدی است. برای آنکه نمونه‌ای از نحوهٔ اعمال این قضیه به دست داده باشیم، در اینجا از قضیهٔ هاینه ـ بورل، که در مقدمهٔ این فصل ذکرش رفت، برهانی ساده می‌آوریم.

قضیهٔ ز (قضیهٔ هاینه ـ بورل). هر زیرفضای بسته وکراندار خط حقیقی، فشرده است.

برهان: زیرفضای بسته و کراندار خط حقیقی، زیرفضای بستهٔ یک بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ است، و بنابر قضیهٔ الف کافی است نشان دهیم که بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ فشرده است. اگر $a = b$ این خاصیت به وضوح برقرار است. پس فرض می‌کنیم $a < b$. بنابر بخش ۱۸ می‌دانیم که ردهٔ تمام بازه‌های به صورت $[a, d)$ و $(c, b]$ که در آن d, c اعدادی حقیقی‌اند به‌طوری‌که $a < c < b$ و $a < d < b$ یک‌زیرپایهٔ باز $[a, b]$ است. بنابراین ردهٔ تمام بازه‌های $[a ،c]$ و تمام بازه‌های $[d, b]$ یک زیرپایهٔ بسته است. فرض کنید $S = \{[a, c_i], [d_j, b]\}$ یک رده از چنین مجموعه‌های بستهٔ زیرپایه‌ای با خاصیت اشتراک متناهی باشد. بنابر قضیهٔ و، کافی است نشان دهیم که اشتراک همهٔ مجموعه های در S ناتهی است. می‌توان فرض کرد که S ناتهی است. اگر S صرفاً شامل بازه‌هایی از نوع $[a, c_i]$ یا صرفاً از نوع $[d_j, b]$ باشد، آنگاه واضح است که اشتراک مذکور a یا b را در بر دارد. در نتیجه می‌توان فرض کرد که S شامل بازه‌هایی از هر دو نوع است. حال می‌نویسیم $d = \sup \{d_j\}$ و با نشان دادن اینکه به ازای هر i، $d \leqslant c_i$ برهان را کامل می‌کنیم. فرض کنید برای $i_\circ$ داشته باشیم $c_{i_\circ} < d$. در این صورت بنابر تعریف d، $d_{j_\circ}$ موجود است به طوری‌که $c_{i_\circ} < d_{j_\circ}$. این متناقض با خاصیت اشتراک متناهی S است، زیرا $[a, c_{i_\circ}] \cap [d_{j_\circ}, b] = \varnothing$. به این ترتیب برهان تمام است.

خواننده باید بداند که براهینی مقدماتی برای قضیهٔ هاینه ـ بورل وجود دارند که درآنها از قضیهٔ و یا چیزی مشابه آن استفاده نشده است. خدمت اصلی قضیهٔ و در برهان قضیهٔ حیاتی تیخونوف[1] در بخش ۲۳، ظاهر خواهد شد.

مسائل

۱. فضای به‌طور شمارا فشرده فضای توپولوژیکی است که در آن هر پوشش باز شمارا یک زیرپوشش متناهی دارد. ثابت کنید که فضای شمارای دوم، به طور شمارا فشرده است $\Longleftrightarrow$ فضا فشرده است.

۲. Y را زیرفضای فضای توپولوژیک X فرض کنید. اگر Z یک زیرمجموعهٔ ناتهی Y باشد، نشان دهید که Z به عنوان زیرفضای Y فشرده است $\Longleftrightarrow$ Z به عنوان زیرفضای X فشرده است.

۳. X را فضای توپولوژیک فرض‌کنید. اگر $\{X_i\}$ یک ردهٔ متناهی ناتهی از زیرفضاهای فشردهٔ X باشد، نشان دهید که $\bigcup_i X_i$ نیز زیرفضای فشردهٔ X است. اگر $\{X_j\}$ یک ردهٔ

1. Tychonoff

ناتهی از زیرفضاهای بسته و فشردهٔ X باشد و اگر $\bigcap_j X_j$ ناتهی باشد، نشان دهید که $\bigcap_j X_j$ نیز زیرفضای فشردهٔ X است.

۴. X را فضای فشرده فرض کنید. بنابر قضیهٔ **الف** می‌دانیم که زیرفضای بستهٔ X فشرده است. با در نظر گرفتن مثال ۱۶-۳ نشان دهید که لازم نیست که زیرفضای فشردهٔ X بسته باشد.

۵. عکس قضیهٔ هاینه ـ بورل را ثابت کنید: هر زیرفضای فشردهٔ خط حقیقی، بسته و کراندار است.

۶. با اثبات اینکه یک زیرفضای فشردهٔ فضای متری دلخواه، بسته و کراندار است، مسئلهٔ قبل را تعمیم دهید. (توجه کنید همان طور که بخشهای ۲۴ و ۲۵ نشان می‌دهند، زیرفضای بسته و کراندار فضای متری دلخواه لازم نیست که فشرده باشد.)

۷. نشان دهید که تابع پیوستهٔ حقیقی یا مختلط در فضای فشرده، کراندار است. به‌طور کلی، نشان دهید که یک نگاشت پیوسته ازفضای فشرده بتوی هرفضای متری‌کرانداراست.

۸. نشان دهید که تابع حقیقی پیوستهٔ f تعریف شده بر فضای فشردهٔ X، به مفهوم زیر، مساوی اینفیموم و سوپریموم خود می‌شود: اگر

$$b = \sup\{f(x) : x \in X\} \quad \text{و} \quad a = \inf\{f(x) : x \in X\}$$

آنگاه نقاط x_1 و x_2 در X وجود دارند به‌طوری که $f(x_1) = a$ و $f(x_2) = b$.

۹. اگر X فضایی فشرده، و اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای یکنوا از توابع حقیقی پیوستهٔ تعریف شده روی X باشد که به‌یک تابع حقیقی تعریف شده بر X همگرای نقطه‌ای باشد، نشان دهید که f_n به‌طور یکنواخت به f همگراست. (این‌فرض که $\{f_n\}$ دنباله‌ای یکنواست به این معنی است که یا $\ldots \leqslant f_3 \leqslant f_2 \leqslant f_1$ و یا $f_1 \geqslant f_2 \geqslant f_3 \geqslant \ldots$.)

۲۲. حاصلضرب فضاها

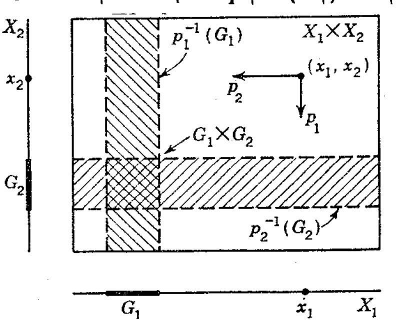
برای ساختن فضاهای توپولوژیک جدید از فضاهای توپولوژیک مفروض، دو روش عمده وجود دارد. اولین روش، و ساده‌ترین آنها، تشکیل زیرفضاهایی از یک فضای مفروض است. دومین روش، تشکیل حاصلضرب تعدادی فضای مفروض است. منظور ما در این بخش بیان طریق اعمال روش دوم است.

در بخش ۴ حاصلضرب $P_i X_i$ ردهٔ ناتهی دلخواهی از مجموعه‌ها را تعریف کردیم. همچنین افکنش p_i این حاصلضرب بروی iامین مجموعهٔ مختص X_i را تعریف نمودیم. خواننده باید مطمئن شود که این مفاهیم را به خوبی به یاد دارد. اگر هر مجموعهٔ مختص، فضای توپولوژیک باشد، آنگاه یک روش استاندارد برای تعریف توپولوژی روی این حاصلضرب، وجود دارد. غلو در اهمیت این تعریف دشوار است، و ما ذیلاً آن را با دقت زیاد بررسی می‌کنیم.

اجازه دهید که ابتدا بخش ۱۸ راجع به مستطیلهای باز ونوارهای باز در صفحهٔ اقلیدسی R^2 را به‌یادآوریم. درآنجا دیدیم‌که مستطیلهای باز، یک پایهٔ بازبرای توپولوژی

R^2 تشکیل می‌دهند و به علاوه نوارهای باز، زیرپایه‌ای باز برای این توپولوژی تشکیل می‌دهند که پایهٔ باز تولید شده توسط آن، متشکل است ازتمام مستطیلهای باز، تمام نوارهای باز، مجموعهٔ تهی، و تمام فضا. البته توپولوژی صفحهٔ اقلیدسی همان توپولوژی ناشی از متریک معمولی آن است. ولی اگر بخواهیم می‌توانیم از این موضوع چشم‌پوشی کرده توپولوژی R^2 را به‌مفهوم قضیهٔ ۱۸ـ۵ به صورت توپولوژی تولید شده توسط ردهٔ تمام نوارها درنظر بگیریم. همهٔ اینها، انگیزه‌ای است برای مفاهیم کلیتری‌که اکنون بیان می‌کنیم.

X_1 و X_2 را دو فضای توپولوژیک فرض کنید، و حاصلضرب $X = X_1 \times X_2$ دو مجموعهٔ X_1 و X_2 را تشکیل دهید. S ، ردهٔ تمام زیرمجموعه‌های X به‌صورت $G_1 \times X_2$ و $X_1 \times G_2$ راکه درآن G_1 و G_2 ، به‌ترتیب، زیرمجموعه‌های باز X_1 و X_2 هستند درنظر بگیرید. توپولوژی روی X را که توسط این رده و به‌مفهوم قضیهٔ ۱۸ـ۵ تولید می‌شود توپولوژی حاصلضرب روی X می‌نامند. بنابراین S یک زیرپایهٔ باز توپولوژی حاصلضرب است. در واقع این توپولوژی با این شرط که S زیرپایهٔ باز باشد، تعریف شده است. واضح است‌که پایهٔ باز تولید شده توسط S ، یعنی ردهٔ تمام اشتراکهای متناهی مجموعه‌های آن، ردهٔ تمام مجموعه‌هایی به صورت $G_1 \times G_2$ است ومجموعه‌های باز X تمام اجتماعهای این گونه مجموعه‌ها هستند. دو افکنش p_1 و p_2 از X بروی فضاهای مختص X_1 و X_2 وجوددارند، وبنا برتعریف، این دوافکنش عنصر (x_1, x_2) را به‌ترتیب به x_1 و x_2 می‌برند. متذکر می‌شویم که S دقیقاً ردهٔ نگاره‌های وارون تمام زیرمجموعه های باز X_1 و X_2 تحت این افکنشها در X است: $G_1 \times X_2 = p_1^{-1}(G_1)$ و $X_1 \times G_2 = p_2^{-1}(G_2)$. بنابراین، توپولوژی حاصلضرب، توپولوژیی است روی مجموعهٔ حاصلضرب که نسبت به‌آن هردوافکنش پیوسته‌اند، و به‌وضوح ضعیفترین توپولوژی از این نوع است. بر طبق مفاهیمی که دربخش ۱۹ مورد بحث قرارگرفت، توپولوژی‌حاصلضرب را می‌توان به عنوان توپولوژی ضعیف تولیدشده توسط افکنشها درنظر گرفت. شکل ۲۳ می‌تواند خواننده را در تجسم بعضی از این مفاهیم یاری دهد.

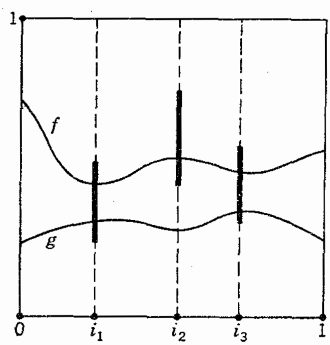


ش ۲۳. توپولوژی حاصلضرب روی $X_1 \times X_2$

اگر از راهی که مفاهیم فوق نشان می‌دهند برویم با یک قدم دیگر به توپولوژی حاصلضرب، درحالت کاملاً کلی می‌رسیم. $\{X_i\}$ را یک ردهٔ ناتهی ازفضاهای توپولوژیک فرض کنید، و حاصلضرب $X = P_i X_i$ از مجموعه‌های X_i را درنظر بگیرید. هر عنصر x در X آرایه‌ای است مانند $x = \{x_i\}$، از نقاط فضاهای مختص که درآن هر x_i متعلق به فضای متناظر X_i است، و به ازای هر اندیس i افکنش p_i به صورت $p_i(x) = x_i$ تعریف شده است. حال توپولوژی حاصلضرب روی X را توپولوژی ضعیف تولید شده توسط مجموعهٔ تمام این افکنشها تعریف می‌کنیم. یعنی توپولوژی حاصلضرب، توپولوژیی است

که توسط ردهٔ S متشکل از تمام نگاره‌های وارون مجموعه‌های باز X_iها در X، تولید شده است، یعنی توسط ردهٔ S متشکل از تمام زیرمجموعه‌های X به‌صورت $S = p_i^{-1}(G_i)$ که در آن i اندیسی دلخواه و G_i زیرمجموعهٔ بازدلخواهی از X_i است. به‌سادگی مشاهده می‌شود که S را همچنین می‌توان به‌عنوان ردهٔ تمام حاصلضربهای به‌صورت $S = P_iG_i$ انتخاب کرد، که‌درآن G_i یک زیرمجموعهٔ باز X_i است که به‌ازای هر i، به‌جزیکی، مساوی X_i می‌باشد. ردهٔ S زیرپایهٔ بازمعرف توپولوژی حاصلضرب نامیده می‌شود، و ردهٔ تمام مکملهای مجموعه‌های S را (یعنی، ردهٔ تمام حاصلضربهای به‌صورت P_iF_i، که درآن F_i یک زیرمجموعهٔ بستهٔ X_i است که به ازای هر i، به جز یکی، مساوی X_i می‌باشد) زیرپایهٔ بستهٔ معرف می‌نامند. پایهٔ باز تولید شده توسط S، یعنی ردهٔ تمام اشتراکهای متناهی مجموعه‌های آن، پایهٔ باز معرف توپولوژی حاصلضرب نامیده می‌شود، و واضح است که این پایهٔ باز، ردهٔ تمام حاصلضربهای به صورت P_iG_i است که در آن G_i زیرمجموعهٔ بازی در X_i است که به ازای همهٔ iها، به‌جز تعدادی متناهی، مساوی X_i می‌باشد. به این نکته باید خوب توجه شود که حاصلضرب بی‌قیدوشرط مجموعه‌های بازدرفضاهای مختص، لزومی ندارد که درتوپولوژی حاصلضرب، باز باشد. طریق راحتی برای به خاطر سپردن پایهٔ باز معرف این است که مجموعهٔ نوعی آن را به‌صورت نقاط $x = \{x_i\}$ در حاصلضرب در نظر بگیریم به قسمی که برای تعدادی متناهی از iها، مختص x_i در یک زیرمجموعهٔ باز G_i از X_i قرار بگیرد و قید و شرطی برای مختصات دیگر نباشد.

هرگاه حاصلضرب یک ردهٔ ناتهی ازفضاهای توپولوژیک با توپولوژی حاصلضرب تعریف‌شده در پاراگراف فوق مجهز شده باشد، آن را فضای حاصلضرب، یا به طورساده‌تر، حاصلضرب فضاهای مفروض می‌نامند.[1] ازاین تعاریف وقضیهٔ ۱۸-ه باید واضح باشد که تمام افکنشها ازفضای حاصلضرب بر روی فضاهای مختص، خود به خود هم پیوسته و هم باز هستند.



ش ۲۴. یک مجموعه در پایهٔ باز معرف برای فضای حاصلضرب

این بخش را با تجزیه و تحلیل یک مثال به پایان می‌رسانیم. امیدواریم این مثال قدرت خواننده را در درک ساختار فضاهای حاصلضرب افزایش دهد. فرض کنید مجموعهٔ اندیسگذار I از تمام اعداد حقیقی i در بازهٔ واحد بستهٔ $[0, 1]$ تشکیل شده است. I به عنوان مجموعه‌ای بدون ساختار در نظر گرفته می‌شود. حال فرض کنید به هر اندیس i، فضای توپولوژیک X_i مربوط شده است، و فرض کنید هر X_i یک نسخه از بازهٔ واحد

۱. چون فضای توپولوژیک در مرحلهٔ اول باید مجموعه‌ای ناتهی باشد، در اینجا شایسته است تذکر دهیم که اصل انتخاب، ناتهی بودن حاصلضرب رده‌ای ناتهی از مجموعه‌های ناتهی را تضمین می‌کند.

بستهٔ [۱ ,۰] با توپولوژی معمولی آن است. این فضای حاصلضرب $X = P_i X_i$ در شکل ۲۴ نمایش داده شده است. قاعدهٔ این شکل، مجموعهٔ اندیسگذار I است، و هر برش عمودی، نمایشگر فضای مختص X_i می‌باشد که به اندیس متناظرش در قاعده مربوط شده است. یک عنصر فضای حاصلضرب X آرایه‌ای از نقاطی است که هر یک ازآنها در یک X_i قراردارند. چنین عنصری اساساً یک تابع است ــ اگر تابع را با نمودارش یکی بدانیم ــ تعریف شده روی مجموعهٔ I با مقادیر در بازهٔ بستهٔ واحد. اکنون یک مجموعهٔ نوعی در پایهٔ باز معرف برای توپولوژی حاصلضرب را می‌توان به صورت زیر تصور کرد. یک مجموعهٔ متناهی از اندیسها را انتخاب می‌کنیم، مثلاً $\{i_1, i_2, i_3\}$، و به ازای هر یک از این اندیسها مجموعهٔ بازی روی خط عمودی بالای آن، انتخاب می‌کنیم. در این صورت مجموعهٔ بازپایه‌ای ما تشکیل می‌شود از تمام توابع در X که نمودار آنها هر یک از این سه خط عمودی را در داخل مجموعهٔ باز داده شده روی آن خط قطع می‌کند. در شکل، f متعلق به مجموعهٔ بازپایه‌ای ماست، ولی g متعلق به آن نیست. توپولوژی حاصلضرب روی هر فضای حاصلضرب را می‌توان به طریق مشابه متصور ساخت. تنها کاری که باید کرد این است که فضاهای مختص را الیافهایی که هر یک از آنها به یک عنصر معین از مجموعهٔ شاخص مربوط شده‌اند تصور کنیم. در این صورت تصور ذهنی فضای حاصلضرب منتج، چیزی شبیه به یک دسته الیاف یا یک نیستان روییده در یک برکه می‌باشد.

مسائل

۱. تمام افکنشها، چون نگاشتهایی بازند، مجموعه‌های باز را به‌مجموعه‌های باز می‌برند. با استفاده از صفحهٔ اقلیدسی نشان دهید که لازم نیست یک افکنش مجموعه‌های بسته را به مجموعه‌های بسته ببرد.

۲. نشان دهید که توپولوژی نسبی روی زیرفضای یک فضای حاصلضرب برابر است با توپولوژی ضعیف تولید شده توسط تحدیدهای افکنشها به آن زیرفضا.

۳. f رانگاشتی ازیک‌فضای توپولوژیک X بتوی یک فضای حاصلضرب $P_i X_i$ فرض کنید، ونشان دهید که f پیوسته است $\Longleftrightarrow$ به ازای هرافکنش p_i نگاشت $p_i f$ پیوسته‌است.

۴. فضای حاصلضربی را که درپاراگراف آخر متن تعریف شد و مورد بررسی قرار گرفت درنظر بگیرید. نشان دهید که این فضا، شمارای دوم نیست. (راهنمایی : قضیهٔ ۱۸.ب را به خاطر بیاورید و درنظر داشته باشید که مجموعهٔ اندیسگذار نامتناهی ناشماراست.)

۵. X، Y و Z را سه فضای توپولوژیک فرض کنید، ونگاشت $z = f(x, y)$ ازمجموعهٔ حاصلضرب $X \times Y$ بتوی مجموعهٔ Z را درنظر بگیرید. f را نسبت به x پیوسته گوییم اگر به‌ازای هر y_0 ثابت، نگاشت $z = f(x, y_0)$ از X بتوی Z پیوسته باشد. پیوستگی f نسبت به y به طور مشابه تعریف می‌شود. f را نسبت به x و y تواماً پیوسته گوییم اگر به‌عنوان نگاشتی از فضای حاصلضرب $X \times Y$ بتوی فضای Z، پیوسته باشد.

(الف) اگر سه فضای فوق، فضاهای متری باشند، نشان دهید که f تواماً پیوسته است $\Longleftrightarrow$ از $x_n \to x$ و $y_n \to y$ نتیجه‌می‌شودکه $f(x_n, y_n) \to f(x, y)$.

(ب) نشان دهید که هرگاه f تواماً پیوسته باشد، آنگاه به‌طور جداگانه نسبت به‌هر یک از متغیرها پیوسته است. با درنظر گرفتن تابع حقیقی f که روی صفحهٔ اقلیدسی به صورت $f(x, y) = xy/(x^۲ + y^۲)$ و $f(۰, ۰) = ۰$ تعریف شده است، نشان دهید که عکس این حکم غلط است.

۲۳. قضیهٔ تیخونوف و فضاهای فشردهٔ موضعی

قضیهٔ اصلی این بخش، دایر براینکه حاصلضرب فضاهای فشرده، فشرده است، شاید مهمترین تک قضیهٔ توپولوژی عمومی باشد. ما این قضیه را دربقیهٔ کتاب مکرر به‌کار خواهیم برد، و خواننده مشاهده خواهد کرد که نقش تعیین کنندهٔ این قضیه به مقدار زیادی مدیون این واقعیت است که درسطوح عالیتر بحث ما، بسیاری از فضاهایی که برای اهداف خاص بنا شده‌اند، زیرفضاهای بسته حاصلضربهای فضاهای فشرده هستند. چنین زیرفضاهایی الزاماً فشرده‌اند، و چون کارکردن با فضاهای فشرده بسیار مطبوع است، نظریهٔ حاصل خیلی مرتب‌تر و سلیس‌تر می‌شود.

قضیهٔ الف (قضیهٔ تیخونوف). حاصلضرب هر ردهٔ ناتهی از فضاهای فشرده، فشرده است.

برهان: $\{X_i\}$ را رده‌ای ناتهی از فضاهای فشرده فرض کنید و حاصلضرب $X = P_iX_i$ را تشکیل دهید. فرض کنید $\{F_j\}$ زیررده‌ای ناتهی از زیرپایهٔ معرف توپولوژی حاصلضرب روی X است. این بدین معنی است که هر F_j حاصلضربی است به صورت $F_j = P_iF_{ij}$ که درآن F_{ij} یک زیرمجموعهٔ بستهٔ X_i است که به‌ازای هر i، به‌جز یکی، مساوی با X_i است. فرض می‌کنیم که ردهٔ $\{F_j\}$ دارای خاصیت اشتراک متناهی است و با توجه به قضیهٔ ۲۱ــ و با نشان دادن اینکه $\bigcap_j F_j$ ناتهی است، برهان را به پایان می‌رسانیم. به‌ازای i داده شده، $\{F_{ij}\}$ رده‌ای از زیرمجموعه‌های بستهٔ X_i با خاصیت اشتراک متناهی است، و بنابر فرض فشردگی X_i (و قضیهٔ ۲۱ــ د) نقطه‌ای مانند x_i در X_i وجود دارد که متعلق به $\bigcap_j F_{ij}$ می‌باشد. اگر این عمل را برای هر i انجام دهیم، یک نقطهٔ $x = \{x_i\}$ در X به دست می‌آوریم که متعلق به $\bigcap_j F_j$ است.

به عنوان اولین کاربرد قضیهٔ تیخونوف، تعمیمی از قضیهٔ کلاسیک هاینه‌ـبورل را ثابت می‌کنیم. با تعریف کردن مفهوم مستطیلهای باز و بسته در فضای اقلیدسی n بعدی R^n، راه‌را برای اثبات این قضیه‌هموار می‌کنیم. اگر (a_i, b_i)، به‌ازای هر i، $i = ۱, ۲, \ldots, n$، بازهٔ باز کرانداری روی خط حقیقی باشد، آنگاه زیرمجموعه‌ای از R^n را که به صورت

$$P_{i=۱}^{n}(a_i, b_i) = \{(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) : a_i < x_i < b_i \text{ ، به ازای هر } i\}$$

تعریف می‌شود مستطیل باز در R^n می‌نامند. به طریقی مشابه مستطیل بسته به صورت حاصلضرب n بازهٔ بسته تعریف می‌شود.

قضیهٔ ب (قضیهٔ هاینه‌ـبورل تعمیم یافته). هر زیرفضای بسته و کراندار R^n فشرده است.

برهان: یک زیرفضای بسته و کراندار R^n، زیرفضای بستهٔ مستطیلی بسته است، در نتیجه بنابر قضیهٔ ۲۱.الف کافی است نشان دهیم که هرمستطیل بسته به‌عنوان زیرفضای R^n، فشرده است. $X = P_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ را مستطیلی بسته در R^n فـرض کنید. بنابر قضیهٔ هاینه-بورل کلاسیک، هر یک از فضاهای مختص $[a_i, b_i]$ فشرده است. درنتیجه بنابرقضیهٔ تیخونوف کافی است نشان دهیم‌که توپولوژی حاصلضرب روی X همان توپولوژی نسبی X به‌عنوان زیرفضای R^n است. به‌سادگی مشاهده می‌شود که مستطیلهای بازدر R^n یک پایهٔ باز برای توپولوژی معمولی آن، یعنی توپولوژی متری آن، تشکیل می‌دهند، و از این‌جا نتیجه می‌شود که توپولوژی حاصلضرب روی R^n همان توپولـوژی معمولی آن است. بنابـر قضیهٔ ۲۲-۲، توپولوژی نسبی روی X، توپولوژی ضعیف تولید شده تـوسط n افکنش آن روی فضاهای مختص $[a_i, b_i]$ است، امااین توپولوژی، توپولوژی حاصلضرب روی X است، بنابراین اثبات قضیه تمام است.[1]

فضای اقلیدسـی nبعدی R^n مهمترین مثال از این نوع فضاهـای توپولوژیک است که درآنالیز نوین مخصوصاً درنظریهٔ انتگرالگیری حائز اهمیت است. فضای توپولوژیک را فشردهٔ موضعی گویند اگرهر نقطه‌اش یک همسایگی با بستار فشرده داشته باشد. بنابرقضیهٔ فوق، به سادگی مشاهده می‌شود کـه R^n درواقع فشردهٔ موضعی است زیـرا هرگوی باز به مرکز هرنقطه، همسایگی آن نقطه است وبستار آن (که زیرفضای بسته و کراندار R^n است) فشرده است. بدیهی است که هرفضای فشرده، فشردهٔ موضعی است، زیرا کل فضا، همسایگی هرنقطهٔ فضا می‌باشد و بستار آن فشرده است. در بخش ۳۷، مجدداً فضاهای فشردهٔ موضعی را مطالعه می‌کنیم، و درآنجا تجزیه و تحلیل مفصلتری از ساختار وخواص‌آن ارائه می‌دهیم.

مسائل

۱. با ذکر جزئیات ثابت کنید که مستطیل‌های باز در R^n یک پایهٔ باز تشکیل می‌دهند.

۲. نشان دهید که هـر زیرفضای بسته و کراندار فضای یکانی nبعدی C^n، فشرده است.

۳. نشان دهید که، فضای توپولوژیک فشردهٔ موضعی است $\Longleftrightarrow$ در هرنقطه، پایهٔ بـازی وجود دارد که تمام مجموعه‌های آن پایه دارای بستار فشرده‌اند.

۴. ملاحظه کنیـد کـه هـر فضـای گسسته فشردهٔ مـوضعـی است. بـا فـرض اینکـه فضاهای توپولوژیکی وجود دارند کـه فشردهٔ موضعی نیستند (مـا بـه‌خـواننده اطمینان می‌دهیم که چنین فضاهایی وجود دارند)، نشان دهید کـه نگارهٔ پیـوستهٔ یک فضای فشردهٔ موضعی لازم نیست که فشردهٔ موضعی باشد.

---

۱. قابل تذکر است‌که تکنیک بسیار قویی‌کـه در این برهان به‌کار رفت حقیقتاً بـرای اثبات قضیه لازم نیست. برهانهای دیگری وجود دارندکه ماهیت مقدماتی‌تری دارند، ولی‌ما برهانی را که در اینجا ارائه شد ترجیح می‌دهیم، زیرا این برهان بعضی از مفاهیم و ابزارهـای رایج ما را توضیح می‌دهد.

۲۴. فشردگی در فضاهای متری

با صداقت تمام باید بپذیریم که معنای حسی فشردگی توپولوژیک، قدری گمراه‌کننده است. البته اهمیت حیاتی این مفهوم در توپولوژی آنقدر زیاد است که به نظر ما ارزش دارد که این بخش و بخش بعدی را به چندین صورت معادل فشردگی برای حالت خاص فضاهای متری اختصاص دهیم. بعضی از این صورتهای معادل در کاربردها خیلی مفید واقع می‌شوند و شاید بیشتر از تعریف پوشش باز مستقیماً قابل درک باشند. امیدواریم که این صورتهای معادل، خواننده را یاری کند که به درک جامعتری از مفهوم هندسی فشردگی نایل آید.[1]

ابتدا صورت کلاسیک قضیهٔ بولتسانو-وایرشتراس را یادآوری می‌کنیم: هر گاه X زیرمجموعهٔ بسته و کراندار خط حقیقی باشد، آنگاه هر زیرمجموعهٔ نامتناهی X دارای نقطه‌ای حدی در X است. این قضیه این فکر را به وجود می‌آورد که خاصیت بیان شده را به‌عنوان خاصیتی‌که در بعضی ازفضاهای‌متری صادق ودر بعضی دیگر برقرار نیست، موردبررسی قرار دهیم. فضای متری را دارای خاصیت بولتسانو-وایرشتراس گویند اگر هرزیرمجموعهٔ نامتناهی آن دارای نقطه‌ای حدی باشد. خاصیت دیگری که خیلی به این خاصیت نزدیک است، خاصیت فشردگی دنباله‌ای است: فضای متری را فشردهٔ دنباله‌ای گویند اگر هردنباله در آن، یک زیردنبالهٔ همگرا داشته باشد. هدف اصلی ما در این بخش این است که ثابت کنیم هر یک از این دو خاصیت در حالت فضای متری با فشردگی معادل‌اند. روش ما اجمالاً به شرح ذیل است: ابتدا ثابت می‌کنیم که این دو خاصیت با یکدیگر معادل‌اند، سپس ثابت می‌کنیم که فشردگی، خاصیت بولتسانو-وایرشتراس را نتیجه می‌دهد، وبالاخره ثابت می‌کنیم که فشردگی دنباله‌ای، فشردگی را نتیجه می‌دهد. دومرحلهٔ اول نسبتاً ساده‌اند، ولی آخرین مرحله خود به چند مرحله تقسیم می‌شود.

قضیهٔ الف. فضای متری، فشردهٔ دنباله‌ای است $\Longleftrightarrow$ فضای‌متری دارای‌خاصیت بولتسانو-وایرشتراس است.

برهان: فرض‌کنید X فضای متری باشد. درابتدا فرض‌کنید X فشردهٔ دنباله‌ای است. نشان می‌دهیم که هر زیرمجموعهٔ نامتناهی X، مانند A، نقطهٔ حدی دارد. چون A نامتناهی است، یک دنبالهٔ $\{x_n\}$ از نقاط مختلف A می‌توان استخراج کرد. بنا برفرض فشردگی دنباله‌ای، این دنباله، زیردنباله‌ای دارد که به یک نقطهٔ x همگراست. قضیهٔ ۱۲-الف نشان می‌دهد که x نقطهٔ حدی مجموعهٔ نقاط آن زیردنباله است، و چون این مجموعه، زیرمجموعهٔ A است، x نقطهٔ حدی A نیز خواهد بود.

اکنون فرض می‌کنیم که هر زیرمجموعهٔ نامتناهی X نقطهٔ حدی دارد، و با این فرض

---

۱. می‌توان به جرأت ادعا کرد که فضاهای فشرده تعمیم طبیعی فضاهای با تعدادی متناهی نقطه هستند. برای بحث دربارهٔ این موضوع و اهمیت فشردگی درآنالیز به هیویت [۱۹] رجوع کنید.

ثابت می‌کنیم که X فشردهٔ دنباله‌ای است. فرض کنید $\{x_n\}$ دنبالهٔ دلخواهی در X باشد. اگر در $\{x_n\}$ نقطه‌ای باشد که به‌طور نامتناهی تکرارشده است، آنگاه این دنباله یک زیر-دنبالهٔ ثابت دارد، و واضح است که این زیردنباله همگراست. اگر هیچ نقطه‌ای از $\{x_n\}$ به‌طور نامتناهی تکرار نشده باشد، آنگاه مجموعهٔ A، متشکل از نقاط این دنباله، نامتناهی است. بنا بر فرض ما، مجموعهٔ A یک نقطهٔ حدی x خواهد داشت، و به سادگی می‌توان از $\{x_n\}$ یک زیردنبالهٔ همگرا به x استخراج کرد.

قضیهٔ ب. هرفضای متری فشرده دارای خاصیت بولتسانو-وایرشتراس است.

برهان: X را فضای‌متری فشرده و A را زیرمجموعهٔ نامتناهی X می‌گیریم. همچنین فرض می‌کنیم که A نقطهٔ حدی ندارد و از این فرض به تناقض می‌رسیم. بنا بر فرض ما، هیچ نقطهٔ X نقطهٔ حدی A نیست، بنابراین هر نقطهٔ X مرکز گوی بازی است که هیچ نقطهٔ متمایز از مرکز آن در A نیست. ردهٔ تمام چنین گویهای باز، یک پوشش باز است، و بنابر فشردگی، یک زیرپوشش متناهی دارد. چون مجموعهٔ تمام مراکز گویهای این زیرپوشش شامل A است، به‌وضوح A متناهی است. این با نامتناهی بودن A متناقض است، و برهان تمام است.

کار بعدی ما اثبات این موضوع است که فشردگی ازفشردگی دنباله‌ای نتیجه می‌شود. ما این کار را در چند مرحله انجام می‌دهیم، که برای ذکر اولین مرحله به ملاحظات ذیل احتیاج داریم. فرض‌کنید $\{G_i\}$ پوشش بازی برای فضای متری X باشد. آنگاه هر نقطهٔ X، مانند x، حداقل به یک G_i متعلق است و چون G_iها بازند، هر نقطهٔ x مرکز گوی بازی است که حداقل دریک G_i قراردارد. حال اگر به نقطهٔ دیگری از X برویم، برای جا دادن گوی باز در یک G_i، ممکن است مجبور شویم شعاع آن را کم کنیم. تحت شرایط خاصی ممکن است که در انتقال از یک نقطه به نقطهٔ دیگر در کل فضا لازم نباشد که شعاعها را از حد معینی کمتر اختیار کنیم. برای بحث در این نوع حالت، مفهوم زیر مفید است. عدد $a > 0$ را عدد لبگ پوشش باز مفروض $\{G_i\}$ می‌نامند اگر هر زیرمجموعهٔ X که قطرش کمتر از a است حداقل در یک G_i باشد.

قضیهٔ ج (لم پوششی لبگ). درفضای متری فشردهٔ دنباله‌ای، هرپوشش باز، عددلبگ دارد.

برهان: X را فضای متری فشردهٔ دنباله‌ای و $\{G_i\}$ را یک پوشش باز آن فرض کنید. زیرمجموعهٔ X را «بزرگ» گوییم اگرمشمول هیچیک از G_iها نباشد. اگرهیچ‌مجموعهٔ بزرگ وجودنداشته‌باشد، دراین صورت هرعددحقیقی مثبت را می‌توان عددلبگ a گرفت بنابراین می‌توان‌فرض‌کردکه مجموعه‌های بزرگ وجود دارند، و a' را بزرگترین‌کران پایین قطرهای این مجموعه‌ها تعریف می‌کنیم. آشکارا، $0 \leqslant a' \leqslant +\infty$. کافی است نشان دهیم که $a' > 0$. زیرا اگر $a' = +\infty$، آنگاه هرعدد حقیقی مثبت رامی‌توان a گرفت، واگر a' حقیقی‌باشد، می‌توانیم a را برابر a' اختیارکنیم. بنابراین فرض می‌کنیم‌که $a' = 0$ و ازاین

فرض یک تناقض به‌دست می‌آوریم. چون هر مجموعهٔ بزرگ باید حداقل دو نقطه داشته باشد، از $a' = ۰$ نتیجه می‌گیریم که به ازای هر عدد صحیح مثبت n، مجموعهٔ بزرگ B_n وجود دارد به‌طوری که $۰ < d(B_n) < ۱/n$. حالا در هر کدام از این B_nها یک نقطهٔ x_n انتخاب می‌کنیم. چون X فشردهٔ دنباله‌ای است، دنبالهٔ $\{x_n\}$ زیردنباله‌ای دارد که به یک نقطهٔ x در X همگراست. نقطهٔ x حداقل به یک مجموعهٔ $G_{i_۰}$ در پوشش باز ما، تعلق دارد، و چون $G_{i_۰}$ باز است، $G_{i_۰}$ شامل گوی بازی به مرکز x، مانند $S_r(x)$، است $S_{r/۲}(x)$ را گوی باز هم مرکز و به شعاع $r/۲$ بگیرید. چون زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ همگرا به x است، تعدادی نامتناهی عدد صحیح مثبت n وجود دارد که به‌ازای آنها x_nها در $S_{r/۲}(x)$ قرار می‌گیرند. $n_۰$ را یکی از این اعداد صحیح مثبت و به قدری بزرگ بگیرید که $۱/n_۰ < r/۲$. چون $d(B_{n_۰}) < ۱/n_۰ < r/۲$ از مسئلهٔ ۱۰-۳ نتیجه می‌شود که $B_{n_۰} \subseteq S_r(x) \subseteq G_{i_۰}$. این با بزرگ بودن $B_{n_۰}$ متناقض است و بنابراین برهان تمام است.

برای مرحلهٔ بعدی به ذکر مفاهیم زیر احتیاج داریم. X را فضای متری فرض کنید. اگر $\epsilon > ۰$ داده شده باشد، زیرمجموعهٔ A از X را ϵ-تور نامند، اگر A متناهی باشد و $X = \bigcup_{a \in A} S_\epsilon(a)$ یعنی، اگر A متناهی باشد و نقاطش در X چنان پراکنده باشند که فاصلهٔ هر نقطهٔ X از حداقل یک نقطهٔ A کمتر از ϵ باشد. فضای متری X را کراندار کلی گویند اگر به‌ازای هر $\epsilon > ۰$ یک ϵ-تور داشته باشد. واضح است که اگر X کراندار کلی باشد آنگاه X کراندار نیز هست؛ زیرا اگر A، ϵ-تور باشد، آنگاه قطر A متناهی است (چون A یک مجموعهٔ متناهی ناتهی است) و $d(X) \leqslant d(A) + ۲\epsilon$. در زیر خواهیم دید که کراندار کلی بودن در واقع یک خاصیت قویتر از کراندار بودن است.

قضیهٔ د. هر فضای متری فشردهٔ دنباله‌ای، کراندار کلی است.

برهان: X را فضای متری فشردهٔ دنباله‌ای فرض کنید و فرض کنید $\epsilon > ۰$ داده شده است. یک نقطهٔ $a_۱$ در X انتخاب کرده گوی باز $S_\epsilon(a_۱)$ را تشکیل دهید، اگر این گوی باز شامل هر نقطهٔ X باشد، آنگاه مجموعهٔ تک‌عنصری $\{a_۱\}$ یک ϵ-تور است. اگر نقاطی خارج از $S_\epsilon(a_۱)$ وجود داشته باشند، $a_۲$ را چنین نقطه‌ای فرض کنید و مجموعهٔ $S_\epsilon(a_۱) \cup S_\epsilon(a_۲)$ را تشکیل دهید اگر این اجتماع شامل هر نقطهٔ X باشد، آنگاه مجموعهٔ دوعنصری $\{a_۱, a_۲\}$ یک ϵ-تور است. اگر بدین طریق ادامه دهیم، اجتماعی به‌صورت $S_\epsilon(a_۱) \cup S_\epsilon(a_۲) \cup \dots \cup S_\epsilon(a_n)$ الزاماً شامل هر نقطهٔ X است، زیرا اگر این روند بتواند بینهایت بار ادامه یابد، آنگاه دنبالهٔ $\{a_۱, a_۲, \dots, a_n, \dots\}$ زیردنبالهٔ همگرا نخواهد داشت و این متناقض با فرض فشردگی دنباله‌ای X است. از این‌جا نتیجه می‌گیریم که مجموعه‌ای متناهی به‌صورت $\{a_۱, a_۲, \dots, a_n\}$ یک ϵ-تور است. بنابراین X کراندار کلی است.

حال با اثبات اینکه فشردگی از فشردگی دنباله‌ای نتیجه می‌شود، این بحث را کامل می‌کنیم.

قضیهٔ ه. هر فضای متری فشردهٔ دنباله‌ای، فشرده است.

برهان: X را فضای‌متری فشردهٔ دنباله‌ای، و$\{G_i\}$ را یک پوشش بازفرض‌کنید. بنا برقضیهٔ ج، این پوشش باز دارای عدد لبگ a است. $\varepsilon = a/۳$ می‌گیریم و با استفاده از قضیهٔ د یک ε-تور $A = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$ پیدا می‌کنیم. به‌ازای هر k، n، $\ldots$، $k = ۱, ۲$ داریم $d(S_\varepsilon(a_k)) \leqslant ۲\varepsilon = ۲a/۳ < a$. بنا بر تعریف عددلبگ، به ازای هر k می‌توانیم یک G_{i_k} پیدا کنیم به‌طوری که $S_\varepsilon(a_k) \subseteq G_{i_k}$. چون هر نقطهٔ X متعلق به یکی از $S_\varepsilon(a_k)$ها‌است، ردهٔ $\{G_{i_۱}, G_{i_۲}, \ldots, G_{i_n}\}$ یک زیر پوشش متناهی از $\{G_i\}$ است. بنا براین X فشرده است.

نتایج به دست آمـده را می‌توان به این صورت خلاصه کرد. اگـر X فضای متری باشد، آنگاه سه شرط زیر با یکدیگر معادل‌اند:

(۱) X فشرده است،

(۲) X فشردهٔ دنباله‌ای است،

(۳) X دارای خاصیت بولتسانو ـ وایرشتراس است.

البته، ما همچنین به‌عنوان نتایج جنبی، این اطلاعات اضافی را داریم: فضای متری فشرده، فشردهٔ کلی است و هر پوشش باز فضای متری فشرده دارای عدد لبگ است. قضیهٔ مفید زیر از حکم اخیر نتیجه می‌شود.

قضیهٔ و. هرنگاشت پیوسته ازفضای متری فشرده بتوی فضای متری، پیوستهٔ یکنواخت است.

برهان: f را نگاشتی پیوسته از فضای متری فشردهٔ X بتوی فضای متری Y فرض کنید، و $d_۱$ و $d_۲$ را متریکهای روی X و Y بگیرید. فرض کنید ε داده شده است. به‌ازای هر نقطهٔ x در X، نگارهٔ آن $f(x)$، و گوی باز $S_{\varepsilon/۲}(f(x))$ به مرکز این نگاره و به شعاع $\varepsilon/۲$ را در نظر بگیرید. چون f پیوسته است، نگارهٔ وارون هر یک از این گویها، یک زیرمجموعهٔ باز X، و ردهٔ تمام چنین نگاره‌های وارون یک پوشش باز X است. چون X فشرده است، قضیهٔ ج تضمین می‌کند که این پوشش باز دارای عدد لبگ δ است. اگر x و x' دو نقطهٔ دلخواه در X باشند به قسمی کـه $d_۱(x, x') < \delta$، آنگاه مجموعهٔ $\{x, x'\}$ مجموعه‌ای با قطر کمتر از δ خواهد بود. این دو نقطه متعلق به نگارهٔ وارون یکی از گویهای باز فوق‌الذکرند. در نتیجه $f(x)$ و $f(x')$ هر دو متعلق به یکی از این گویهای باز هستند، و بنابراین $d_۲(f(x), f(x')) < \varepsilon$ و این نشان می‌دهد که f پیوستهٔ یکنواخت است.

بررسی فضاهای متری فشرده را در بخش بعدی ادامه می‌دهیم.

مسائل

۱. A را یک زیرفضای فضای متری X فرض کنید، و نشان دهید که: A کـرانـدار کلی است $\Longleftrightarrow$ $\bar{A}$ کراندار کلی است.

۲. نشان دهید که: یک زیرفضای R^n کراندار است $\Longleftrightarrow$ آن زیرفضا کراندار کلی است.

۳. قضیه بولتسانو ـ وایرشتراس را بـرای R^n ثابت کنید: اگـر X زیرمجموعهٔ بسته و کراندار R^n باشد، آنگاه هر زیرمجموعهٔ نامتناهی X دارای یک نقطهٔ حدی در X است.

۴. نشان دهید که هر فضای متری فشرده، تفکیک‌پذیر است.

۲۵. قضیهٔ اسکولی[1]

آنچه در بخش قبل در تشخیص فشردگی در فضاهای متری آوردیم، قویاً این فکر را به وجود می‌آورد که این خاصیت با کامل بودن و کرانداری کلی به‌طریقی که هنوز بیان نشده و باید بیان شود، مربوط است. مطلب را با اثبات قضیه‌ای که وضع را روشن می‌کند، شروع می‌کنیم.

قضیهٔ الف. فضای متری، فشرده است $\Longleftrightarrow$ فضا کامل و کراندار کلی است.

برهان: X را فضای متری فرض کنید. نیمهٔ اول برهان ساده است، زیرا اگر X فشرده باشد، آنگاه بنابر قضیهٔ ۲۴-۵، کراندار کلی است، و بنابر مسئلهٔ ۱۲-۲ و اینکه هر دنباله (و بنابراین هر دنبالهٔ کوشی) دارای یک زیردنبالهٔ همگراست، X کامل است.

حال فرض می‌کنیم که X کامل و کراندار کلی باشد، و با نشان دادن اینکه هر دنباله یک زیردنبالهٔ همگرا دارد ثابت می‌کنیم که X فشرده است. چون X کامل است، کافی است نشان دهیم که هر دنباله، یک زیردنبالهٔ کوشی دارد. دنبالهٔ دلخواهی به‌صورت زیر درنظر بگیرید

$$S_۱ = \{x_{۱۱}, x_{۱۲}, x_{۱۳}, \cdots\}.$$

علت انتخاب این نماد به‌زودی روشن خواهد شد. چون X کراندار کلی است، رده‌ای متناهی از گویهای باز به‌شعاع ۱/۲ وجود دارد که اجتماع آنها برابر X است، و از اینجا نتیجه می‌شود که $S_۱$ یک زیردنبالهٔ

$$S_۲ = \{x_{۲۱}, x_{۲۲}, x_{۲۳}, \cdots\}$$

دارد که تمام نقاطش در یک گوی باز به‌شعاع ۱/۲ واقع‌اند. دوباره خاصیت کرانداری کلی X را به‌کار می‌بریم و مانند بالا نشان می‌دهیم که $S_۲$ یک زیردنبالهٔ

$$S_۳ = \{x_{۳۱}, x_{۳۲}, x_{۳۳}, \cdots\}$$

دارد که تمام نقاطش در یک گوی باز به‌شعاع ۱/۳ واقع‌اند. با این روش به‌ساختن زیردنباله‌های متوالی ادامه می‌دهیم، و فرض می‌کنیم

$$S = \{x_{۱۱}, x_{۲۲}, x_{۳۳}, \cdots\}$$

زیردنبالهٔ «قطری» $S_۱$ باشد. با توجه به‌ماهیت ساختمان این مجموعه، واضح است که S زیردنبالهٔ کوشی $S_۱$ است، و برهان‌ما تمام است.

این قضیه نقش برجسته‌ای برای کرانداری کلی، در تعیین اینکه آیا فضای متری فشرده است یا نه، ایجاد می‌کند. همان طوری که می‌دانیم، فضاهای متری زیادی به‌صورت

---

1. Ascoli

زیرفضاهای بستهٔ فضاهای متری کامل دیده می‌شوند، و برای این فضاهای متری می‌توان نقش کراندار کلی را از این هم برجسته‌تر کرد.

قضیهٔ ب. زیرفضای بستهٔ فضای متری کامل، فشرده است $\Longleftrightarrow$ آن زیرفضا کراندار کلی است.

برهان: چون زیرفضای بستهٔ فضای متری کامل خود به خود کامل است، این قضیه نتیجهٔ فوری قضیهٔ **الف** است.

کرانداری کلی چه نوع خاصیتی است؟ دیدیم که کرانداری کلی همیشه کرانداری را نتیجه می‌دهد، و بنا برمسئلهٔ ۲۴-۲ می‌دانیم که عکس آن نیز در زیرفضاهای فضای اقلیدسی با بعد متناهی R^n درست است. البته برای زیرفضاهای فضای اقلیدسی با بعد نامتناهی R^∞ استنتاج کراندار کلی از کرانداری درست نیست. درواقع گوی واحد بسته در R^∞، که به صورت $X = \{x : \| x \| \leqslant 1\}$ تعریف شده، کراندار کلی نیست. گرچه به وضوح کراندار است. برای مشاهدهٔ این مطلب کافی است ملاحظه کنیم که دنبالهٔ $\{x_n\}$ در X که به صورت

$$\begin{aligned} x_1 &= \{1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\} \\ x_2 &= \{0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots\} \\ x_3 &= \{0, 0, 1, \ldots, 0, \ldots\} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

تعریف می‌شود زیردنبالهٔ همگرا ندارد، زیرا فاصلهٔ هرنقطهٔ دنباله از نقطهٔ دیگر آن برابر $2^{1/2}$ است. این نشان می‌دهد که X فشرده نیست، در نتیجه کراندار کلی نیست. حقیقت زیر، که ما آن را در اینجا نمی‌توانیم اثبات کنیم (رجوع شود به بخش ۴۷)، ممکن است معلومات خواننده را دربارهٔ ارتباط بین کرانداری و کرانداری کلی افزایش دهد: فضای باناخ، با بعد متناهی است $\Longleftrightarrow$ هر زیرفضای کراندار آن کراندار کلی است.

حال به مسئلهٔ تشخیص زیر فضاهای فشردهٔ $\mathcal{C}(X, R)$ یا $\mathcal{C}(X, C)$ برمی‌گردیم. بنا برقضیهٔ **ب**، مستقیماً می‌بینیم که زیرفضای بستهٔ $\mathcal{C}(X, R)$ یا $\mathcal{C}(X, C)$ فشرده است $\Longleftrightarrow$ آن زیرفضا کراندار کلی است. اما متأسفانه این اطلاعات در بیشتر کاربردها در آنالیز کم ارزش است. آنچه مورد نیاز است عبارت است از محکی که برحسب توابع موجود دراین زیرفضاها بیان شده باشد. به علاوه در بیشترکاربردها کافی است صرفاً حالاتی را درنظر بگیریم که در آن X فضای متری فشرده است. حال مفهوم مورد نیازمان را به صورت زیر بیان می‌کنیم. X را فضای متری فشرده با متریک d، و A را مجموعه‌ای ناتهی از توابع پیوستهٔ حقیقی یا مختلط تعریف شده روی X فرض کنید. اگر f یک تابع در A باشد، آنگاه بنابرقضیهٔ ۲۴-۹ این تابع پیوستهٔ یکنواخت است، یعنی، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $d(x, x') < \delta \Longrightarrow | f(x) - f(x') | < \varepsilon$. درحالت کلی، δ نه تنها به ε بلکه به تابع f نیز بستگی دارد. A را همپیوسته گویند اگر

به‌ازای هر ε، δای بتوان یافت‌که برای تمام fهای در A، کارساز باشد، یعنی، اگر به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری که به ازای هر f در A داشته باشیم:

$$d(x, x') < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

قضیهٔ ج (قضیهٔ اسکولی). اگر X فضای متری فشرده باشد، آنگاه زیرفضای بستهٔ $\mathcal{C}(X, R)$ یا $\mathcal{C}(X, C)$ فشرده است $\Longleftrightarrow$ زیرفضا کراندار و همپیوسته است.

برهان: d را متریک روی X، و F را زیرفضای بستهٔ $\mathcal{C}(X, R)$ یا $\mathcal{C}(X, C)$ فرض کنید.

ابتدا فرض می‌کنیم که F فشرده است، و ثابت می‌کنیم کـه F کراندار و همپیوسته است. مسئلهٔ ۶.۲۱ نشان می‌دهد که F کراندار است. به‌صورت زیر ثابت می‌کنیم کـه F همپیوسته است. فـرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. چـون F فشرده است، و بنابـرایـن کـرانـدار کلی است، می‌توانیم یک $\varepsilon/3$-تور $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ در F پیدا کنیم. هر f_k پیوستهٔ یکنواخت است، بنابراین به ازای هر k، $k = 1, 2, \ldots, n$ یکـ $\delta_k > 0$ وجود دارد، به‌طوری که $d(x, x') < \delta_k \Longrightarrow |f_k(x) - f_k(x')| < \varepsilon/3$. حال δ را کوچکترین δ_1، δ_2، ...، δ_n تعریف کنید. اگر f تابع دلخـواهی در F باشد و f_k را چنان اختیار کنیم که $\|f - f_k\| < \varepsilon/3$، آنگاه

$$d(x,x') < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(x')| \leqslant |f(x)-f_k(x)| + |f_k(x)-f_k(x')| + |f_k(x') - f(x')| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

این نشان می‌دهد که F همپیوسته است.

حال فرض می‌کنیم F کراندار و همپیوسته است، و بـا نشان دادن اینکه هردنباله در آن زیردنبالهٔ همگرا دارد، ثابت می‌کنیم که F فشرده است. چون F بسته است، و بنابراین کامل است، کافی است نشان دهیم کـه هردنباله درآن زیردنبالهٔ کوشی دارد. در ضمن عمل خواننده مشاهده خواهد کرد که برهان ما ازنظر ساختار شبیه قسمت آخر برهان قضیهٔ الف است. بنابرمسئلهٔ ۴.۲۴، X دارای یک زیرمجموعهٔ چگال شماراست. فرض کنید نقاط این زیرمجموعه به صورت دنبالهٔ $\{x_i\} = \{x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots\}$ مرتب شده باشند، که در آن به دلیلی که در زیر روشن خواهد شد از اندیس تحتانی ۲ شروع می‌کنیم. حـال فرض کنید $S_1 = \{f_{11}, f_{12}, f_{13}, \ldots\}$ دنبالهٔ دلخواهی در F باشد. فرض کراندار بـودن F بدین معنی است که عدد حقیقی K وجود دارد به‌طوری کـه به ازای هر f در F داریم $\|f\| \leqslant K$ یا به بیان معادل آن، به‌طوری کـه به ازای هر f در F و هر x در X داریم $|f(x)| \leqslant K$. دنبالـهٔ اعـداد $\{f_{1j}(x_2)\}$، $j = 1, 2, 3, \ldots$ را در نظر بگیرید، و ملاحظه کنید کـه چون این دنباله کـرانـدار است دارای زیردنبالهٔ همگراست. فرض کنید $S_2 = \{f_{21}, f_{22}, f_{23}, \ldots\}$ زیـردنبالـه‌ای از S_1 است بـه‌طـوری کـه $\{f_{2j}(x_2)\}$ همگراست. سپس دنبالهٔ اعـداد $\{f_{2j}(x_3)\}$ را در نظر می‌گیریم، و بـه‌طریق مشابه فـرض می‌کنیم $S_3 = \{f_{31}, f_{32}, f_{33}, \ldots\}$ زیردنباله‌ای از S_2 است به‌طوری که $\{f_{3j}(x_3)\}$ همگراست. اگر این روند را ادامه دهیم، آرایه‌ای از دنباله‌ها به‌صورت

$$S_1 = \{f_{11}, f_{12}, f_{13}, \ldots\},$$
$$S_2 = \{f_{21}, f_{22}, f_{23}, \ldots\},$$
$$S_3 = \{f_{31}, f_{32}, f_{33}, \ldots\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

به دست می‌آوریم که درآن هردنباله زیردنباله‌ای از دنبالهٔ فوقانی آن است، و به ازای هر i دنبالهٔ $S_i = \{f_{i1}, f_{i2}, f_{i3}, \ldots\}$ دارای این خاصیت است که $\{f_{ij}(x_i)\}$ دنباله‌ای همگرا از اعداد است. اگر f_1، f_2، f_3، ... را به‌صورت

$$f_1 = f_{11}، f_2 = f_{22}، f_3 = f_{33}، \ldots$$

تعریف‌کنیم، آنگاه دنبالهٔ $S = \{f_1, f_2, f_3, \ldots\}$ زیردنبالهٔ «قطری» S_1 خواهد بود. با توجه بـه‌طرز این بنا واضح است که به ازای هر نقطهٔ x_i در زیرمجموعهٔ چگال ما از X، دنبالهٔ $\{f_n(x_i)\}$ یک دنبالهٔ همگرا از اعداد است. تنها چیزی که باقـی‌می‌ماند ایـن است که نشان دهیم S، بـه‌عنوان دنباله‌ای از توابع در $\mathcal{C}(X, R)$ یا $\mathcal{C}(X, C)$ دنبالهٔ کـوشی است. فـرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. چون F همپیوسته است، $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که برای تمام توابع f_n در S داریم

$$d(x, x') < \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon/3$$

حال گویهای باز $S_\delta(x_i)$ به شعاع δ و به مراکز x_i را تشکیل می‌دهیم. چون مجموعهٔ x_iها چگال است، این گویهای باز یک پوشش بـاز X را تشکیل می‌دهند، و چـون X فشرده است، به ازای یک i_0 داریم $X = \bigcup_{i=1}^{i_0} S_\delta(x_i)$. به‌سادگی مشاهده می‌شودکه‌یک عدد صحیح مثبت n_0 وجود دارد به‌طوری که برای تمام نقاط x_1، x_2، ...، x_{i_0} داریم

$$m, n \geqslant n_0 \Longrightarrow |f_m(x_i) - f_n(x_i)| < \varepsilon/3$$

با این تذکر برهان مـا تمام می‌شود: اگـر x نقطهٔ دلخواهی از X باشد، آنگاه یک i در مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, i_0\}$ می‌توان یافت به‌طوری که $d(x, x_i) < \delta$ و بنابراین

$$\begin{aligned} m, n \geqslant n_0 \Longrightarrow |f_m(x) - f_n(x)| &\leqslant |f_m(x) - f_m(x_i)| \\ &+ |f_m(x_i) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f_n(x)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \end{aligned}$$

ملاحظه می‌کنیم کـه درقضیهٔ اسکولی بـه‌جای شرط کـرانـداری کلی قضیهٔ ب شرط ضعیفتر کراندارآمده است، و کمبود حاصل با شرط اضافی همپیوستگی، جبران شده است.[1] برای کاربردهـای متعدد قضیهٔ اسکولی (کـه گاهی اوقات قضیهٔ آرزلا[2] نامیده می‌شود) در مسائل آنالیز بـه گوفمن[3] [۱۳، صفحات ۱۵۱–۱۵۶] یـا کولموگوروف و فومین[4] [۲۶، جلد اول، بخشهای ۱۷–۲۰] رجوع شود.

---

۱. اصطلاح زیـر اغلب در مـورد قضیهٔ اسکولی به کار می‌رود. فرض‌کنید F مجموعهٔ ناتهی دلخواهی از توابع حقیقی یـا مختلط تعریف شده روی مجموعهٔ ناتهی X باشد. گزارهٔ تابع f ←

مسائل

۱. فرض کنید A یک زیرفضای فضای متری کامل باشد، نشان دهید $\bar{A}$ فشرده است $\Longleftrightarrow$ A کراندار کلی است.

۲. فرض کنید X فضای متری فشرده و F یک زیرفضای بستهٔ $\mathcal{C}(X, R)$ یا $\mathcal{C}(X, C)$ باشد. نشان دهید که اگر F همپیوسته باشد و به ازای هر نقطهٔ x در X مجموعهٔ $F_x = \{f(x) : f \in F\}$ مجموعهٔ کرانداری از اعداد باشد، آنگاه F فشرده است.

۳. نشان دهید که R^∞ فشردهٔ موضعی نیست.

۴. با در نظر گرفتن دنباله‌ای از توابع در $\mathcal{C}[۰, ۱]$ که به صورت $f_n(x) = nx$ برای $۰ \leqslant x \leqslant ۱/n$ و $f_n(x) = ۱$ برای $۱/n \leqslant x \leqslant ۱$ تعریف شده‌اند، نشان دهید که $\mathcal{C}[۰, ۱]$ فشردهٔ موضعی نیست.

$\longrightarrow$

در F کراندار است البته، این معنی را می‌دهد که عدد حقیقی K وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر x در X، داریم $|f(x)| \leqslant K$. غالباً توابع F را کراندار یکنواخت گویند (یا F را مجموعهٔ کراندار یکنواخت از توابع نامند) اگر تنها یک K بتواند بدین طریق برای تمام fهای در F کارساز باشد، یعنی اگر یک K وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر x در X و هر f در F داشته باشیم $|f(x)| \leqslant K$. اگر مایل باشیم که این اصطلاح را به‌کار بریم، قضیهٔ اسکولی به صورت زیر درخواهد آمد: اگر X فضای متری فشرده باشد، آنگاه یک زیرفضای بستهٔ $\mathcal{C}(X, R)$ یا $\mathcal{C}(X, C)$ فشرده است $\Longleftrightarrow$ آن زیرفضا کراندار یکنواخت و همپیوسته است. در اینجا کرانداری یکنواخت صرفاً به معنی کرانداری زیرمجموعه‌ای از فضای متری $\mathcal{C}(X, R)$ یا $\mathcal{C}(X, C)$ است.

2. Arzela　　3. Goffman　　4. Kolmogorov and Fomin

فصل پنجم

جداسازی

تعداد مجموعه‌های باز فضای توپولوژیک ممکن است بسیار کم باشند چنانکه می‌دانیم، بعضی از فضاها تنها دو مجموعهٔ باز دارند، مجموعهٔ تهی و کل فضا. از طرف دیگر در فضای گسسته هرمجموعه باز است. بیشتر فضاهای معروف هندسه و آنالیز درجایی بین این دو توپولوژی ساختگی قرار دارند. آنچه که اصطلاحاً خواص جداسازی نامیده می‌شود ما را قادر می‌کند تا به دقت بیان کنیم که فضای توپولوژیک داده شده، برای برآورده کردن منظوری مفروض، به قدر کافی از مجموعه‌های باز غنی است.

خواص جداسازی از این جهت مورد توجه ماست که غنای مجموعه‌های باز فضای توپولوژیک ارتباط نزدیکی با غنای توابع پیوسته برآن دارد، و چون توابع پیوسته در توپولوژی از اهمیت اساسی برخوردارند، طبیعتاً ما مایلیم که، برای مثمرثمر واقع شدن بحثمان، حضور مقدار کافی از این توابع تضمین شود. مثلاً اگر تنها مجموعه‌های باز فضای توپولوژیک، مجموعهٔ تهی و کل فضا باشند، آنگاه تنها توابع پیوسته موجود، توابع ثابت‌اند و دربارهٔ این توابع مطلب جالب، خیلی کم است. به طور کلی هرچه مجموعه‌های باز فضا بیشتر باشد، توابع پیوسته برآن هم بیشتر خواهد بود. در فضاهای گسسته توابع پیوسته تا آنجا که ممکن است فراوان هستند، زیرا هرتابعی پیوسته است. اما تعداد کمی از فضاهای حقیقتاً مهم، گسسته‌اند، درنتیجه این حالت اندکی بیش از احتیاج درجهت وفور توابع پیش می‌رود. به کمک خواص جداسازی، می‌توانیم بدون توسل به فضاهای گسسته مطمئن شویم که فضاهای ما به قدر کافی دارای توابع پیوسته هستند.

۲۶. فضاهای T_1 و فضاهای هاوسدرف

یکی از طبیعی‌ترین چیزها که از فضای توپولوژیک انتظار می‌رود این است که هر-

یک از نقاطش یک مجموعهٔ بسته باشد.[۱] خاصیت جدا سازی مربوط به این مطلب در زیر آمده است. فضای T_1 فضای توپولوژیکی است که هر یک از دو نقطهٔ متمایز مفروض آن یک همسایگی دارد که شامل نقطهٔ دیگر نیست.[۲] واضح است کـه هر زیرفضای فضای T_1 خود نیز فضای T_1 است. اولین قضیهٔ ما نشان می‌دهـد کـه فضاهـای T_1 دقیقاً فضاهـای توپولوژیکی هستند که در آنها نقاط، مجموعه‌های بسته‌اند.

قضیهٔ الف. فضای توپولوژیک، فضای T_1 است $\Longleftrightarrow$ هر نقطه، مجموعهٔ بسته است.

برهان: اگر X فضای توپولوژیک باشد، آنگاه نقطهٔ دلخواه x در X بسته است $\Longleftrightarrow$ مکمل آن باز است $\Longleftrightarrow$ هر نقطهٔ y متمایز از x یک همسایگی دارد که x را در بر ندارد $\Longleftrightarrow X$ ، فضای T_1 است.

دومین خاصیت جدا سازی ما اندکی قویتر است. فضای هاوسدرف، فضای توپولوژیکی است که در آن بتوان هر دو نقطهٔ متمایز را توسط مجموعه‌های باز ازهم جدا کرد به‌این مفهوم‌که آنها دارای همسایگیهای مجزا باشند. واضح است‌که هر فضای‌هاوسدرف، فضای T_1 است، و هر زیرفضای یک فضای هاوسدرف خود نیز فضای هاوسدرف است.

قضیهٔ ب. حاصلضرب هر ردهٔ ناتهی از فضاهای هاوسدرف، فضای هاوسدرف است.

برهان: فرض کنید $X = P_i X_i$ حاصلضرب یک ردهٔ ناتهی از فضاهـای هاوسدرف X_i باشد. اگر $x = \{x_i\}$ و $y = \{y_i\}$ دو نقطهٔ متمایز در X باشند، آنگاه حداقل برای یک اندیس $i_\circ$ باید $x_{i_\circ} \neq y_{i_\circ}$ چون $X_{i_\circ}$ فضای‌هاوسدرف است، $x_{i_\circ}$ و $y_{i_\circ}$ راتوسط‌مجموعه‌های باز در $X_{i_\circ}$ می‌توان جدا کرد. این دو زیرمجموعهٔ باز مجزای $X_{i_\circ}$ دو مجموعهٔ مجزا در زیرپایهٔ باز معرف X به‌وجود می‌آورند کـه هر یک از آنها یکی از نقاط x و y را در بر دارند.

بیشتر حقایق مهم در مورد فضاهای هاوسدرف، بستگی به قضیهٔ زیر دارد.

قضیهٔ ج. در فضای هاوسدرف، هر نقطه و هر زیرفضای فشردهٔ مجزای آن را می‌توان توسط مجموعه‌های باز از هم جدا کرد، به این معنی که آنها دارای همسایگیهای مجزا هستند.

برهان: X را فضای هاوسدرف، x را یک نقطه در X، و C را یک زیرفضای فشردهٔ X

---

۱. مرسوم است‌کـه در اینجا تمایز بین نقطهٔ x در فضا و مجموعهٔ $\{x\}$ کـه تنها آن نقطه را در بر دارد نادیده‌گرفته شود. این قرارداد، اغلب این امکان را به‌وجود می‌آورد که ازعبارات ثقیل اجتناب شود، و ما این قرارداد را هرجا لازم باشد به‌کار خواهیم برد.

۲. اصطلاح فضای T_i، $i = ۰, ۱, \ldots, ۵$، را آلکساندرف و هوف (Alexandroff and Hopf) در کتاب معروفشان [۲] برای اولین بار به‌کار برده‌اند. حـرف T ازکلمـهٔ آلمـانی *Trennungsaxiom* که به‌معنی «اصل جداسازی» است، گـرفته شده است. از بین آنها، تنها اصطلاح فضای T_1 هنوز متداول است.

که x را در بر ندارد فرض کنید. دو مجموعهٔ باز و مجزای G و H را طوری می‌سازیم که $x \in G$ و $C \subseteq H$. فرض کنید y نقطه‌ای در C باشد. چون X فضای هاوسدرف است، x و y دارای همسایگیهای مجزای G_x و H_y هستند. اگر y را در C تغییر دهیم، یک رده از H_yها به‌دست می‌آوریم که اجتماع آنها شامل C است، وچون C فشرده است، یک زیر-ردهٔ متناهی، که آن را به $\{H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n\}$ نشان می‌دهیم، وجود دارد به‌طوری که $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} H_i$. اگر G_1، G_2، …، G_n همسایگیهای x متناظر با H_iها باشند، می‌نویسیم $G = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$ و $H = \bigcup_{i=1}^{n} H_i$ وملاحظه می‌کنیم که این دومجموعه دارای خواص مورد نظر هستند.

در قضیهٔ ۲۱-الف ثابت کردیم که هر زیرفضای بستهٔ فضای فشرده، خود فشرده است، و در مسئلهٔ ۲۱-۴ دیدیم که زیرفضای فشردهٔ فضای فشرده لازم نیست بسته باشد. اکنون برای نشان دادن اینکه زیرفضاهای فشردهٔ فضاهای هاوسدرف، بسته‌اند، قضیه قبل را به کار می‌گیریم.

قضیهٔ د. هر زیرفضای فشردهٔ فضای هاوسدرف، بسته است.

برهان: فرض‌کنیدC یک‌زیرفضای‌فشردهٔ‌فضای‌هاوسدرف X باشد. با نشان‌دادن‌اینکه‌مکمل C بازاست‌ثابت می‌کنیم‌که C بسته‌است. اگر C' (مکمل C) تهی‌باشد بازاست، بنابراین‌می‌توان‌فرض‌کردکه C' ناتهی است. فرض‌کنید x نقطه‌ای در C' باشد. بنابرقضیهٔ ج، x دارای یک همسایگی G است به طوری که $x \in G \subseteq C'$. این نشان می‌دهد که C' اجتماعی از مجموعه‌های باز است و بنابراین خود باز می‌باشد.

یکی از مفیدترین نتایج این قضیه این است:

قضیهٔ ه. نگاشت پیوستهٔ یک‌به‌یک ازفضای فشرده بروی فضای هاوسدرف، هومئومورفیسم است.

برهان: فرض کنید $f: X \to Y$ یک نگاشت پیوستهٔ یک به‌یک ازفضای فشردهٔ X بروی فضای هاوسدرف Y باشد. باید نشان دهیم که وقتی G در X باز است $f(G)$ در Y باز است و برای این منظور کافی است نشان دهیم که وقتی F در X بسته است $f(F)$ در Y بسته‌است. اگر F تهی باشد، $f(F)$ نیز تهی است و بنابراین بسته است، درنتیجه می‌توان فرض کرد که F ناتهی است. بنابر قضیهٔ ۲۱-الف، F زیرفضای فشردهٔ X است و بنابر قضیهٔ ۲۱-ب، $f(F)$ زیرفضای فشردهٔ Y است. حال از قضیهٔ قبل استفاده می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که $f(F)$ زیرفضای بستهٔ Y است و برهان را تمام می‌کنیم.

فضاهای هاوسدرف فشرده در زمرهٔ فضاهای توپولوژیک بسیارمهم می‌باشند، و ما با خواص مهم آنها، در بخشها و فصول بعد به‌طور کامل آشنا خواهیم شد.

مسائل

۱. نشان دهید که فضای توپولوژیک تعریف شده در مثال ۱۶-۵ فضای T_1 نیست.

۲. نشان دهید که فضای توپولوژیک تعریف شده در مثال ۱۶-۴ فضای T_1 است، ولی فضای هاوسدرف نیست.

۳. نشان دهید که هر فضای T_1 متناهی، گسسته است.

۴. نشان دهید که اگر X، یک فضای T_1 باشد وحداقل دونقطه داشته باشد، پایهٔ بازی که شامل X است، با حذف X پایهٔ باز باقی خواهد ماند.

۵. X را فضای توپولوژیک، Y را فضای هاوسدرف، و A را زیرفضای X فرض کنید. نشان دهید که نگاشتی پیوسته از A بتوی Y حداکثر یک گسترش پیوسته به‌نگاشتی از $\bar{A}$ به Y دارد. مسئلهٔ ۲.۱۷ حالت خاصی از این حکم است.

۶. ثابت کنیدکه اگر f نگاشتی پیوسته از فضای توپولوژیک X بتوی فضای هاوسدرف Y باشد، آنگاه نمودار f زیرمجموعهٔ بسته‌ای از حاصلضرب $X \times Y$ است.

۷. فرض کنید X مجموعهٔ ناتهی دلخواهی باشد. ثابت کنید که درشبکهٔ تمام توپولوژیهای روی X، هر زنجیر حداکثر یک توپولوژی هاوسدرف فشرده به عنوان عضو دارد. (تفکر دربارهٔ اینکه آیا روی مجموعهٔ ناتهی دلخواه می‌توان یک توپولوژی هاوسدرف فشرده تعریف کرد، جالب است.)

۸. فرض کنید X فضای توپولوژیک دلخواه و $\{x_n\}$ دنباله‌ای از نقاط X باشد. این دنباله را همگرا[1] گویند اگر نقطه‌ای مانند x در X وجود داشته باشد به‌طوری که به ازای هر همسایگی x، مانند G، عدد صحیح مثبتی مانند n_0 با این خاصیت بتوان یافت که به ازای هر $n \geqslant n_0$ داشته باشیم $x_n \in G$. نقطهٔ x را یک حد این دنباله نامند، و گویند x_n به x همگراست (و این امر را به صورت $x_n \to x$ نمایش می‌دهند).

(الف) نشان دهید که در مثال ۱۶.۳، هردنباله، به هر نقطهٔ فضا همگراست. با این مثال روشن می‌شود که چرا به‌جای اینکه نقطهٔ x فوق‌الذکر حد گفته شود، یک حد نامیده شده است.

(ب) اگر X فضای هاوسدرف باشد، نشان دهید که حد هر دنبالهٔ همگرا در X منحصر به فرد است.

(پ) نشان دهید که اگر $f: X \to Y$ نگاشتی پیوسته از یک فضای توپولوژیک بتوی یک فضای توپولوژیک دیگرباشد، آنگاه از $x_n \to x$ در X نتیجه می‌شود که $f(x_n) \to f(x)$ در Y. ثابت کنید، در صورتی که هر نقطهٔ X دارای پایهٔ باز شمارا باشد، عکس این موضوع نیز درست است.[1]

۲۷. فضاهای به طور کامل منظم و فضاهای نرمال

فرض کنید X یک فضای توپولوژیک دلخواه باشد، و $\mathcal{C}(X, R)$ مجموعهٔ تمام

---

1. آنچه که در این مسئله بیان شد، نشان می‌دهد که چرا مفهوم دنبالهٔ همگرا در نظریهٔ عمومی فضاهای توپولوژیک خیلی مهم نیست.

توابع حقیقی پیوستهٔ کراندار تعریف شده روی X را در نظر بگیرید. اگر به ازای هر زوج نقاط متمایز x و y در X تابع f در $\mathcal{C}(X, R)$ وجود داشته باشد به طوری که $f(x) \neq f(y)$، گوییم که $\mathcal{C}(X, R)$ نقاط را جدا می‌کند. به سادگی مشاهده می‌شود که اگر $\mathcal{C}(X, R)$ نقاط را جدا کند، آنگاه X الزاماً فضای توپولوژیک هاوسدرف است، زیرا با فرض اینکه $f(x) < f(y)$ و r عددی حقیقی باشد به‌طوری‌که $f(x) < r < f(y)$، آنگاه مجموعه‌های $\{z: f(z) < r\}$ و $\{z: f(z) > r\}$ همسایگیهای مجزای x و y خواهند بود.

مناسب است که به‌جای یکی از نقاط، یک مجموعه بستهٔ X بگذاریم و این خاصیت جدا سازی را کمی قویتر کنیم. فضای منظم کامل یک فضای T_1 است با این خاصیت که اگر x یک نقطه در X و F یک زیرفضای بستهٔ X باشد که شامل x نیست، آنگاه یک تابع f در $\mathcal{C}(X, R)$ وجود دارد که مقادیر آن در بازهٔ بستهٔ $[0, 1]$ هستند به‌طوری که $f(x) = 0$ و $f(F) = 1$. تذکر این مطلب مفید است که چون هر تابع ثابتی پیوسته است، می‌توانستیم بخواهیم که f در x برابر ۱ و روی F برابر ۰ باشد، زیرا در این صورت تابع $g = 1 - f$ دارای این خواص است. ما می‌توانیم فضاهای منظم کامل را به مثابهٔ فضاهای T_1 در نظر بگیریم که در آنها توابع پیوسته، نقاط و زیرمجموعه‌های بستهٔ مجزا را از هم جدا می‌کنند. چون در فضای منظم کامل نقاط بسته هستند، مجاز است که زیرفضای بستهٔ F را نقطه بگیریم، از اینجا نتیجه می‌شود که هر فضای منظم کامل، فضای هاوسدرف است. همچنین به سادگی مشاهده می‌شودکه هرزیرفضای فضای‌منظم کامل، خود منظم‌کامل است. دربخش ۳۰ یک مشخصهٔ صریح تمام فضاهای منظم کامل را برحسب فضاهای حاصلضرب عرضه می‌کنیم.

خاصیت جدا سازی بعدی ما (وآخرین آن) شبیه خاصیتی است که فضای هاوسدرف را تعریف می‌کند، بجز اینکه به‌جای دو نقطهٔ متمایز، دو مجموعهٔ بستهٔ مجزا به کار برده می‌شود. فضای نرمال فضای T_1 است که در آن هر دو مجموعهٔ بستهٔ مجزا را بتوان توسط مجموعه‌های بازجدا کرد، به این معنی که آن دومجموعه همسایگیهای مجزا دارند. دربخش بعدی (به‌عنوان نتیجه‌ای ازلم اوریسون[1]) خواهیم دید که هرفضای نرمال، منظم‌کامل است.

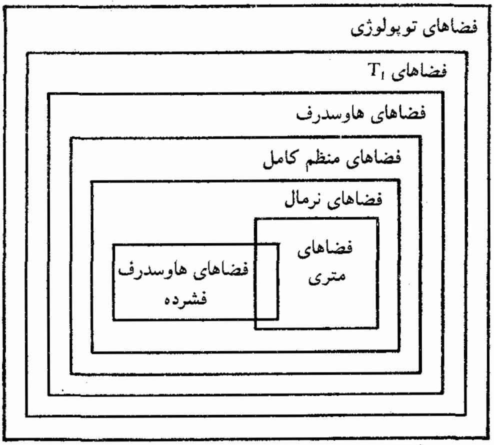
شکل ۲۵ برای نشان دادن و روشن کردن روابط بین خواص گوناگون جدا سازی درنظر گرفته شده است: فضای توپولوژیکی که یکی از این خواص را داشته باشد، تمام خواص پیش ازآن، برحسب ترتیب تعریفشان، را نیز دارا خواهد بود. به‌عبارت دیگر این خواص به‌ترتیب صعودی قوت عرضه شده‌اند. شکل مذکورهمچنین نشان می‌دهد که فضاهای متری و فضاهای هاوسدرف فشرده، نرمال هستند. حکم اولی را در مسئلهٔ ۱۱-۱ (ب) ثابت کردیم و اینک دومی را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ الف. هر فضای هاوسدرف فشرده، نرمال است.

برهان: X را فضای هاوسدرف فشرده و A و B را زیرمجموعه‌های بستهٔ‌مجزای X فرض کنید. باید دو مجموعهٔ مجزا وباز G و H را چنان به‌دست آوریم که $A \subseteq G$ و $B \subseteq H$.

1. Urysohn

اگر یکی ازاین دومجموعهٔ بسته‌تهی باشد، می‌توانیم مجموعهٔ تهی را به‌عنوان همسایگی آن و کل فضا را به عنوان همسایگی مجموعهٔ دیگر، اختیار کنیم. بنابراین می‌توان فرض کرد که A و B هر دوناتهی هستند. چون X فشرده است، A و B زیرفضاهای فشردهٔ مجزای X هستند. فرض کنید x یک نقطهٔ A باشد. بنابر قضیهٔ ۲۶ـج و فرض اینکه X هاوسدرف است، x و B دارای همسایگیهای مجزایی مانند G_x و H_B هستند. اگر x را در A تغییر دهیم رده‌ای از G_xها به دست می‌آوریم که اجتماع آنها شامل A است، و چون A فشرده است یک زیرردهٔ متناهی، که به $\{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$ نشان می‌دهیم، وجود دارد به‌طوری که $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_i$. اگر H_1، H_2، ...، H_n همسایگیهای B متناظر با G_iها باشند، واضح است که $G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$ و $H = \bigcap_{i=1}^{n} H_i$ همسایگیهای مجزای A و B هستند.



شکل ۲۵. خواص جداسازی

در بخش ۲۹ به نحوهٔ ارتباط فضاهای نرمال، فضاهای هاوسدرف فشرده، و فضاهای متری می‌پردازیم.

مسائل

۱. نشان دهید که هر زیرفضای بستهٔ فضای نرمال، خود فضای نرمال است.

۲. فرض کنید X، فضای T_1 باشد. نشان دهید که X نرمال است $\Longleftrightarrow$ هر همسایگی مجموعهٔ بستهٔ F، شامل بستار یک همسایگی F است.

۳. فرض‌کنید، همان‌طورکه شکل ۲۵ حاکی است، هرفضای هاوسدرف فشردهٔ X منظم‌کامل است‌وبنابراین فرض‌کنیدکه $\mathcal{C}(X, R)$ نقاط را جدامی‌کند. این فرض را برای اثبات این‌که توپولوژی ضعیف تولید شده توسط $\mathcal{C}(X, R)$ برابرتوپولوژی داده شده است به‌کاربرید. به‌علاوه، نشان دهید که اگر S نیز زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{C}(X, R)$ باشد که نقاط را جدا می‌کند، آنگاه توپولوژی ضعیف تولید شده توسط S نیز برابر توپولوژی داده شده است.

۴. X را فضای منظم کامل فرض کنید، و ازطریق تعریف نشان دهید که توپولوژی ضعیف تولید شده توسط $\mathcal{C}(X, R)$ برابر توپولوژی مفروض است.

۲۸. لم اوریسون و قضیهٔ گسترش تیتزه[1]

همان طور که در مقدمهٔ این فصل گفتیم، یکی از اهداف اصلی این فرض که فضای توپولوژیک از لحاظ مجموعه‌های باز غنی باشد آن است که غنای توابع پیوستهٔ آن نیز تضمین گردد. قضیهٔ زیر، قضیهٔ اساسی مربوط به این موضوع است.

قضیهٔ الف. (لم اوریسون). X را فضای نرمال، و A و B را زیرفضاهای بسته و مجزای X فرض کنید. آنگاه تابع‌حقیقی پیوستهٔ f تعریف شده روی X وجوددارد که تمام مقادیرآن در بازهٔ واحد بستهٔ $[0, 1]$ واقع‌اند به طوری که: $f(A) = 0$ و $f(B) = 1$.

برهان: B' یک همسایگی مجموعهٔ بستهٔ A است، در نتیجه چون X نرمال است و بنابر مسئلهٔ ۲.۲۷، A دارای یک همسایگی $U_{1/2}$ است به طوری که

$$A \subseteq U_{1/2} \subseteq \overline{U_{1/2}} \subseteq B'$$

$U_{1/2}$ و B' به‌ترتیب همسایگیهای مجموعه‌های A و $\overline{U_{1/2}}$ هستند، درنتیجه، به‌طریق مشابه، مجموعه‌های باز $U_{1/4}$ و $U_{3/4}$ وجود دارند به طوری که

$$A \subseteq U_{1/4} \subseteq \overline{U_{1/4}} \subseteq U_{1/2} \subseteq \overline{U_{1/2}} \subseteq U_{3/4} \subseteq \overline{U_{3/4}} \subseteq B'$$

اگر این روش را ادامه دهیم، به ازای هرعدد گویای دوتایی به صورت $t = m/2^n$ (که درآن $n = 1, 2, 3, \ldots$ و $m = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$) یک مجموعهٔ باز به صورت U_t داریم به طوری که

$$t_1 < t_2 \Longrightarrow A \subseteq U_{t_1} \subseteq \overline{U_{t_1}} \subseteq U_{t_2} \subseteq \overline{U_{t_2}} \subseteq B'$$

اکنون تابع f را چنین تعریف می‌کنیم: $f(x) = 0$ اگر x در همهٔ U_tها باشد و در غیر این صورت

$$f(x) = \sup\{t : x \notin U_t\}$$

واضح است که مقادیر f در $[0, 1]$ واقع‌اند، و $f(A) = 0$ و $f(B) = 1$. آنچه باقی می‌ماند این است که ثابت کنیم f پیوسته است. تمام بازه‌های به صورت $[0, a)$ و $(a, 1]$، که درآن $0 < a < 1$، یک زیرپایهٔ بازبرای $[0, 1]$ تشکیل می‌دهند. بنابراین کافی است نشان دهیم که $f^{-1}([0, a))$ و $f^{-1}((a, 1])$ باز هستند. به سادگی دیده می‌شود که $f(x) < a \Longleftrightarrow$ به ازای یک $t < a$، x در U_t است، و از اینجا نتیجه می‌شود $f^{-1}([0, a)) = \{x : f(x) < a\} = \bigcup_{t<a} U_t$ که مجموعه‌ای باز است. به طور مشابه، $f(x) > a \Longleftrightarrow$ به‌ازای یک $t > a$، x خارج $\overline{U}_t$ است، و بنابراین، $f^{-1}((a, 1]) = \{x : f(x) > a\} = \bigcup_{t<a} \overline{U}_t$ که مجموعه‌ای باز است.

از این قضیه فوراً نتیجه می‌شود که هرفضای نرمال، منظم کامل است: برای اثبات

1. Tietze

این امر کافی است که زیرفضای بستهٔ A را تک نقطه اختیار کرده ملاحظه کنیم که تابع f دقیقاً آن تابعی است که در تعریف فضای منظم کامل وجود آن لازم شمرده شده است.

صورت کمی انعطاف پذیرتر زیراز لم اوریسون، درکاربردها مفید واقع خواهد شد.

قضیهٔ ب. X را فضای نرمال، و A و B را زیرفضاهای بسته و مجزای X فرض کنید. اگر $[a, b]$ بازهٔ بستهٔ دلخواهی روی خط حقیقی باشد آنگاه یک تابع حقیقی پیوستهٔ f، تعریف شده روی X، که تمام مقادیرش در $[a, b]$ واقع‌اند، وجود دارد به طوری که $f(A) = a$ و $f(B) = b$.

برهان: اگر $a = b$ کافی است به ازای هر x تابع f را به‌صورت $f(x) = a$ تعریف کنیم، در نتیجه می‌توان فرض کرد که $a < b$. اگر g تابعی با خواص بیان شده در لم اوریسون باشد، آنگاه $f = (b - a)g + a$ دارای خواص مورد نظر قضیهٔ ماست.

اگر تابع پیوسته‌ای روی یک زیرفضای فضای توپولوژیکی تعریف شده باشد در جواب این سؤال جالب که آیا این تابع را می‌توان به کل فضا گسترش پیوسته داد، لم اوریسون نقش مهمی ایفا می‌کند. قضیهٔ زیر، قضیهٔ کلاسیک در این مورد است.

قضیهٔ ج (قضیهٔ گسترش تیتزه). X را فضای نرمال، F را زیرفضای بسته و f را تابعی حقیقی و پیوسته که روی F تعریف شده است و مقادیرش در بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ واقع‌اند، فرض کنید. آنگاه f گسترشی پیوسته مانند f' دارد که روی تمام X تعریف شده است و مقادیر آن نیز در $[a, b]$ واقع‌اند.

برهان: اگر $a = b$، حکم قضیه واضح است، بنابراین فرض می‌کنیم که $a < b$. واضح است که $[a, b]$ را می‌توان کوچکترین بازهٔ بسته‌ای فرض کرد که حوزهٔ مقادیر f را شامل است. به‌علاوه تدبیری که در اثبات قضیهٔ ب به کار رفت، به‌ما امکان می‌دهد فرض کنیم $a = -۱$ و $b = ۱$. ابتدا $f_۰$ را برابر f تعریف می‌کنیم. حوزهٔ تعریف $f_۰$ زیرفضای بستهٔ F است. دو زیرمجموعهٔ F را به صورت

$$A_۰ = \{x : f_۰(x) \leqslant -۱/۳\}$$
$$B_۰ = \{x : f_۰(x) \geqslant ۱/۳\}$$

تعریف می‌کنیم. $A_۰$ و $B_۰$ مجزا، ناتهی، و در F بسته‌اند، و چون F بسته است، در X بسته‌اند. بنابراین $A_۰$ و $B_۰$ دو زیرفضای مجزای بستهٔ X هستند، و بنابرقضیهٔ ب یک تابع پیوستهٔ $g_۰ : X \to [-۱/۳ , ۱/۳]$ وجود دارد به‌طوری که $g_۰(A_۰) = -۱/۳$ و $g_۰(B_۰) = ۱/۳$. سپس $f_۱$ را روی F به‌صورت $f_۱ = f_۰ - g_۰$ تعریف می‌کنیم، و ملاحظه می‌کنیم که $|f_۱(x)| \leqslant ۲/۳$. اگر

$$A_۱ = \{x : f_۱(x) \leqslant (-۱/۳)(۲/۳)\}$$

و

$$B_۱ = \{x : f_۱(x) \geqslant (۱/۳)(۲/۳)\}$$

آنگاه طبق راه فوق، تابع پیوستهٔ $g_۱ : X \to [(-۱/۳)(۲/۳), (۱/۳)(۲/۳)]$

وجود دارد به‌طوری که

$$g_1(A_1) = (-1/3)(2/3)$$
$$g_1(B_1) = (1/3)(2/3)$$

سپس f_2 را روی F به صورت $f_2 = f_1 - g_1 = f_0 - (g_0 + g_1)$ تعریف می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که $|f_2(x)| \leqslant (2/3)^2$. با ادامهٔ این روش، یک دنبالهٔ $\{f_0, f_1, f_2, \ldots\}$ تعریف شده روی F به‌طوری که $|f_n(x)| \leqslant (2/3)^n$، و یک دنبالهٔ $\{g_0, g_1, g_2, \ldots\}$ تعریف شده روی X به‌طوری که $|g_n(x)| \leqslant (1/3)(2/3)^n$ با این خاصیت که روی F، $f_n = f_0 - (g_0 + g_1 + \cdots + g_{n-1})$، به‌دست می‌آوریم. اکنون s_n را به‌صورت

$$s_n = g_0 + g_1 + \cdots + g_{n-1}$$

تعریف می‌کنیم، و s_nها را به عنوان مجموعهای جزئی یک سری نامتناهی از توابع در $\mathcal{C}(X, R)$ در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که $\mathcal{C}(X, R)$ کامل است، بنابراین از $|g_n(x)| \leqslant (1/3)(2/3)^n$ و این حقیقت که $\sum_{n=0}^{\infty}(1/3)(2/3)^n = 1$ نتیجه می‌گیریم که s_n روی X به یک تابع حقیقی پیوستهٔ کراندار f'، همگرای یکنواخت است به‌طوری که $|f'(x)| \leqslant 1$. اثبات قضیه با توجه به مطالب زیر تمام می‌شود: چون $|f_n(x)| \leqslant (2/3)^n$، s_n روی F به $f = f_0$ همگرای یکنواخت است، و بنابراین f' روی F برابر f و گسترش پیوستهٔ f به کل فضای X است و دارای خاصیت مورد نظر می‌باشد.

جالب است به این نکته توجه کنیم که هرگاه فرض بسته بودن F را حذف کنیم، این قضیه نادرست می‌شود، این مطلب به سادگی از مثال زیر مشاهده می‌شود. X را بازهٔ واحد بستهٔ $[0, 1]$، F را زیرفضای $(0, 1]$، و f را تابعی روی F که به صورت $f(x) = \sin(1/x)$ تعریف شده است، بگیرید. آشکارا X نرمال است، F به عنوان زیرفضای X بسته نیست، و به هیچ طریق f را نمی‌توان به X گسترش پیوسته داد.

مسائل

۱. در متن، لم اوریسون را برای اثبات قضیهٔ تیتزه به‌کار بردیم. این روش را وارونه کنید و از قضیهٔ تیتزه، لم اوریسون را نتیجه بگیرید.

۲. تعمیمی از قضیهٔ تیتزه درارابطه با توابعی که مقادیرشان در R^n قرار دارند، بیان و اثبات کنید.

۳. درستی این حکم را که تابع تعریف شده در بند آخر متن را نمی‌توان به X گسترش پیوسته داد، ثابت کنید.

۲۹. قضیهٔ نشاندن اوریسون

در فصل ۳، فضاهای متری را به فضاهای توپولوژیک تعمیم دادیم. اکنون این روند

را وارونه کرده به دنبال پیدا کردن شرایط ساده‌ای می‌رویم که تحت آن شرایط فضای توپولوژیک اساساً فضای متری، یعنی، متریک پذیر است. مسئلهٔ ۱۶-۱۲ نشان می‌دهد که برای این منظور باید در جستجوی خواصی از فضای توپولوژیک X باشیم که ساختن یک هومئومورفیسم f از X بتوی یک زیرفضای فضایی متری راممکن سازد، زیرا دراین صورت می‌توان متریک روی این زیرفضا را توسط f به X داد، و نتیجه گرفت که X متریک‌پذیر است. ساده‌ترین این نوع خاصیت، گسستگی است، زیرا اگر X فضای گسسته باشد، آنگاه X، مجموعهٔ زیربنای نقاط، مجهز با متریک تعریف شده در مثال ۹-۱، یک نگارهٔ هومئومورف X تحت نگاشت همانی است. ما می‌توانیم بحثمان را به‌سطح پرمعنی‌تری ارتقا دهیم اگر توجه کنیم که چون هرفضای متری نرمال است، یا باید فرض شود که X نرمال است، یا از خواص X نتیجه شود که X نرمال است.

توجه به این امر که چون فضای متری R^∞ شمارای دوم است، آنگاه هر زیرفضای آن نیز شمارای دوم است، انگیزه‌ای برای قضیهٔ اصلی ماست. زیرا خواهیم دید که برای اینکه فضایی با یک زیرفضای R^∞ هومئومورف باشد، کافی است که شمارای دوم و نرمال باشد. در حقیقت این چنین فضا را به‌طور هومئومورف در R^∞ می‌نشانیم.

قضیهٔ الف (قضیهٔ نشاندن اوریسون). اگر X فضای نرمال شمارای دوم باشد آنگاه یک هومئومورفیسم f از X بروی یک زیرفضای R^∞ وجود دارد و بنابراین متریک‌پذیر است.

برهان: می‌توانیم فرض کنیم که تعداد نقاط X نامتناهی است، زیرا درغیر این صورت X متناهی و گسسته است و به‌وضوح با هر زیرفضای R با همان تعداد نقطه هومئومورف است. چون X شمارای دوم است، یک پایهٔ باز نامتناهی شمارای $\{G_1, G_2, G_3, \ldots\}$ دارد که در آن هیچیک از مجموعه‌های آن تهی یا کل فضا نیست. اگر G_j و $x \in G_j$ داده شده باشند، آنگاه بنا برخاصیت نرمال بودن، G_i وجود دارد به‌طوری که $x \in G_i \subseteq \bar{G}_i \subseteq G_j$. مجموعهٔ تمام زوجهای مرتب (G_i, G_j) به طوری که $\bar{G}_i \subseteq G_j$، نامتناهی شماراست، و می‌توانیم آنها را به‌صورت دنبالهٔ $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ مرتب کنیم. بنابر لم اوریسون، به ازای هر زوج مرتب $P_n = (G_i, G_j)$ یک تابع حقیقی پیوستهٔ $f_n : X \to [0, 1]$ وجود دارد به‌طوری که $f_n(\bar{G}_i) = 0$ و $f_n(G'_j) = 1$. به‌ازای هر x در Xها، $f(x)$ را به صورت دنبالهٔ

$$f(x) = \{f_1(x), f_2(x)/2, \ldots, f_n(x)/n, \ldots\}$$

تعریف می‌کنیم. با یادآوری اینکه سری نامتناهی $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ همگراست، به سادگی مشاهده می‌شود که f یک نگاشت یک به یک از X بتوی R^∞ است. اکنون باید ثابت کنیم که f و f^{-1} پیوسته هستند.

برای اثبات اینکه f پیوسته است، کافی است نشان دهیم که به ازای x_0 داده شده در X و $\varepsilon > 0$، یک همسایگی x_0، مانند H، وجود دارد به‌طوری که

$$y \in H \Longrightarrow \| f(y) - f(x_0) \| < \varepsilon$$

با توجه به اینکه اگر جملات سری نامتناهی توابع با جملات یک سری نامتناهی همگرای اعداد ثابت، محدود شده باشند، آنگاه آن سری توابع، همگرای یکنواخت است، به سهولت دیده می‌شود که عدد صحیح مثبت n_0 وجود دارد به‌طوری که به ازای هر y در X داریم

$$\| f(y) - f(x_0) \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |[f_n(y) - f_n(x_0)]/n|^2$$
$$< \sum_{n=1}^{n_0} |[f_n(y) - f_n(x_0)]/n|^2 + \varepsilon^2/2$$

بنا بر پیوستگی f_nها، به ازای هر $n = 1, 2, \ldots, n_0$ یک همسایگی x_0، مانند H_n، وجود دارد به‌طوری که

$$y \in H_n \Longrightarrow |[f_n(y) - f_n(x_0)]/n|^2 < \varepsilon^2/2n_0$$

اگر H را به صورت $H = \bigcap_{n=1}^{n_0} H_n$ تعریف کنیم، واضح است که H یک همسایگی x_0 است به‌طوری که

$$y \in H \Longrightarrow \| f(y) - f(x_0) \|^2 < \varepsilon^2 \Longrightarrow \| f(y) - f(x_0) \| < \varepsilon$$

با نشان دادن اینکه f^{-1} پیوسته است، اثبات قضیه را تمام می‌کنیم. می‌دانیم که f^{-1} نگاشتی از $f(x)$ بر روی X است. کافی است نشان دهیم که به‌ازای x_0 در X و یک همسایگی پایه‌ای x_0، مانند G_j، $\varepsilon > 0$ وجود دارد به‌طوری که

$$\| f(y) - f(x_0) \| < \varepsilon \Longrightarrow y \in G_j$$

G_j عضو دوم یک زوج مرتب $P_{n_0} = (G_i, G_j)$ است به‌طوری که

$$x_0 \in G_i \subseteq \bar{G}_i \subseteq G_j$$

اگر $\varepsilon < 1/2n_0$ انتخاب شود، آنگاه مشاهده می‌شود که

$$\| f(y) - f(x_0) \| < \varepsilon \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |[f_n(y) - f_n(x_0)]/n|^2 < (1/2n_0)^2$$
$$\Longrightarrow | f_{n_0}(y) - f_{n_0}(x_0) | < 1/2$$

چون x_0 در G_i است $f_{n_0}(x_0) = 0$، و بنابراین $|f_{n_0}(y)| < 1/2$. چون $f_{n_0}(G_j') = 1$، می‌بینیم که y در G_j است.

این قضیه ما را قادر می‌سازد که به سؤالات طبیعی متعددی در مورد اجزای درونی شکل ۲۵، جواب دهیم. در مسائل زیر از خواننده می‌خواهیم که این مطالب را مورد بحث قرار دهد.

مسائل

۱. می‌دانیم که هر فضای متری نرمال است، و هر فضای نرمال شمارای دوم، متریک‌پذیر

است. مثالی از فضای نرمال عرضه کنید که متریک‌پذیر نباشد (راهنمایی: رجوع شود به مسئلهٔ ۲۲-۴). این موضوع نشان می‌دهد که فضاهای متریک‌پذیر را نمی‌توان در بین فضاهای توپولوژیک توسط خاصیت نرمال بودن مشخص کرد.

۲. در بین فضاهای نرمال، شمارایی دوم، متریک‌پذیری را نتیجه می‌دهد. مثالی از فضایی متری عرضه کنید که شمارای دوم نباشد. این نشان می‌دهد که فضاهای متریک‌پذیر را نمی‌توان در بین فضاهای نرمال توسط خاصیت شمارایی دوم مشخص کرد.

۳. نشان دهید که فضای هاوسدرف فشرده، متریک‌پذیر است $\Longleftrightarrow$ فضا شمارای دوم است.[1]

۳۰. فشرده سازی استون ـ چخ[2]

در بخش قبل نشان دادیم که اگر فضای نرمال، شمارای دوم باشد، آنگاه آن را می‌توان به‌عنوان یک زیرفضا در فضای متری R^∞ نشاند. اکنون به بحث در قضیهٔ مشابهی در مورد نشاندن فضاهای منظم کامل می‌پردازیم.

برای فراهم آوردن زمینهٔ مناسبی برای این قضیه، متذکر می‌شویم که اگر فضای توپولوژیک X به صورت زیرفضایی از یک فضای هاوسدرف فشردهٔ Y مورد نظر قرار گیرد، آنگاه از آنجا که Y منظم کامل است، X نیز منظم کامل و یک زیرفضای چگال فضای هاوسدرف فشردهٔ $\bar{X}$ است. بدین طریق مشاهده می‌کنیم که بسیاری از فضاهای منظم کامل، زیرفضاهای چگال فضاهای هاوسدرف فشرده هستند. مقصود ما دراین بخش این است که نشان دهیم هر فضای منظم کامل X را می‌توان دریک فضای هاوسدرف فشردهٔ خاص که به $\beta(X)$ نمایش می‌دهیم نشاند به طوری که X یک زیرفضای چگال آن باشد. $\beta(X)$ دارای این خاصیت قابل توجه است که هر تابع حقیقی پیوستهٔ کراندار تعریف شده روی X یک گسترش یکتا به تابع حقیقی پیوستهٔ کرانداری روی $\beta(X)$ دارد.

میزان اهمیت واقعی این خاصیت گسترش را می‌توان با در نظر گرفتن مثال عرضه شده در آخر بخش ۲۸ مشاهده کرد. در اینجا فضای منظم کامل X، بازهٔ $(0, 1]$ است. واضح است که این فضا زیرفضای چگال فضای هاوسدرف فشردهٔ $[0, 1]$ است. تابع f که روی $(0, 1]$ به صورت $f(x) = \sin(1/x)$ تعریف شده، تابع حقیقی پیوستهٔ کراندار است، ولی گسترش پیوستهٔ آن به $[0, 1]$ امکان ندارد. فضای $[0, 1]$ با اینکه فضای هاوسدرف فشرده‌ای است که $(0, 1]$ را به عنوان زیر فضای چگال در بر دارد، به‌وضوح فضای $\beta(X)$ نیست. $\beta(X)$ خیلی پیچیده‌تر از آن است که برای آن توصیفی ساده ممکن باشد.

---

۱. نتایج این بخش فضاهای متریک‌پذیر را در بین فضاهای شمارای دوم (توسط خاصیت نرمال بودن) و در بین فضاهای هاوسدرف فشرده (توسط شمارایی دوم) مشخص می‌کند، ولی فضاهای متریک‌پذیر را دربین فضاهای توپولوژیک درحالت کلی مشخص نمی‌کند. این مسئلهٔ مشکل‌تر توسط اسمیرنوف (Smirnov) [۳۸] حل شده است. برای مشاهدهٔ راه حل وی به کلی (Kelley) [۲۵]، صفحه‌های ۱۲۶ـ۱۳۰ رجوع کنید.

2. Stone _ Cech

قبل از شروع بحثمان، دو مطلب از بخشهای قبل را یادآور می‌شویم.

(۱) اگر X فضای منظم کامل باشد، آنگاه توپولوژی ضعیف تولیدشده توسط $\mathcal{C}(X, R)$ برابر توپولوژی داده شده است.

(۲) توپولوژی نسبی روی یک زیرفضای یک فضای حاصلضرب، برابر توپولوژی ضعیف تولید شده توسط تحدیدهای افکنشها به آن زیرفضاست.

این حقایق (که مسائل ۲۷-۴ و ۲۲-۲ می‌باشند)، اصول اساسی‌ای هستند که تحلیل زیر بر پایهٔ این اصول گذاشته شده است.

بحث را با فضای توپولوژیک دلخواه X و $\mathcal{C}(X, R)$، مجموعهٔ تمام توابع حقیقی پیوستهٔ کراندار تعریف شده روی X. آغاز می‌کنیم. فرض کنید توابع در $\mathcal{C}(X, R)$ با مجموعه‌ای از اندیسهای i، اندیسگذاری شده‌اند، یعنی، $\mathcal{C}(X, R) = \{f_i\}$. به ازای هر اندیس i، I_i را کوچکترین بازهٔ بسته‌ای که نگارهٔ تابع f_i را در بر دارد بگیرید. هر I_i فضای هاوسدرف فشرده است، در نتیجه حاصلضرب آنها $P = P_i I_i$ نیز فضای هاوسدرف فشرده است، و هر زیرفضای P منظم کامل است. سپس نگاشت f از X بتوی این فضای حاصلضرب را با $f(x) = \{f_i(x)\}$ تعریف می‌کنیم، یعنی، به صورتی که $f(x)$ نقطه‌ای است در فضای حاصلضرب P که iامین مختص آن عدد حقیقی $f_i(x)$ است. بنابر مسئلهٔ ۳.۲۲ و این امر که به ازای هر افکنش p_i داریم $p_i f = f_i$، واضح است که f نگاشتی پیوسته از X بتوی P است.

اکنون فرض می‌کنیم که $\mathcal{C}(X, R)$ نقاط X را جدا می‌کند این فرض ضعیفتری از فرض منظم کامل بودن است و دقیقاً همان فرض یک به یک بودن نگاشت f است. در این مرحله f را برای گذاشتن $f(X)$ به جای مجموعهٔ X به کار می‌بریم، یعنی X را به عنوان یک مجموعه در P می‌نشانیم. بدین ترتیب، X یک زیرمجموعهٔ P می‌شود که دو توپولوژی دارد: توپولوژی خودش، و توپولوژی نسبی به عنوان یک زیرفضای P. ما دو ویژگی این وضع را مورد بررسی قرار می‌دهیم. اولاً، چون f پیوسته است، توپولوژی داده شده روی X از توپولوژی نسبی آن قویتر است. ثانیاً، $\mathcal{C}(X, R)$ دقیقاً مجموعهٔ تمام تحدیدهای p_iها به X است که در آن p_i افکنش فضای P برروی فضای مختص I_i است. حال واضح است که اگر X منظم کامل باشد به قسمی که بنابر گزارهٔ (۱)، توپولوژی داده شدهٔ آن برابر توپولوژی ضعیف تولید شده توسط $\mathcal{C}(X, R)$ باشد، آنگاه بنابرگزارهٔ (۲)، توپولوژی داده شده برابر توپولوژی نسبی‌آن است، و X را می‌توان به عنوان یک زیرفضای P درنظر گرفت.

بر طبق این ایده‌ها، اکنون فرض می‌کنیم که X منظم کامل است، و آن را، هم به عنوان مجموعه و هم به‌عنوان فضای توپولوژیک، با زیرفضای $f(X)$ از P کاملاً یکی می‌گیریم. به سهولت مشاهده می‌شود که $\bar{X}$، بستار X در P، فضای هاوسدرف فشرده‌ای است که در آن X به عنوان زیرفضای چگال نشانده شده است. علاوه بر این، هر f_i در $\mathcal{C}(X, R)$ — یعنی، هر افکنش p_i تحدید شده به X — گسترشی به یک تابع حقیقی پیوستهٔ کراندار تعریف شده روی $\bar{X}$ دارد. این گسترش همان p_i است که به $\bar{X}$ تحدید شده

است، و بنا بر مسئلهٔ ۲۶-۵ یکتاست. فضای X را معمولاً به $\beta(X)$ نشان می‌دهند.

نتایج فوق را به صورت قضیهٔ زیر خلاصه می‌کنیم.

قضیهٔ الف. X را فضای منظم‌کامل فرض‌کنید. آنگاه یک فضای هاوسدرف فشردهٔ $\beta(X)$ با خواص زیر وجود دارد: (۱) X یک زیرفضای چگال $\beta(X)$ است، (۲) هر تابع حقیقی پیوستهٔ کراندار تعریف شده روی X گسترشی یکتا به یك تابع حقیقی پیوستهٔ کراندارتعریف شده روی $\beta(X)$ دارد.

در فصل ۱۴ ثابت خواهیم کرد که فضای $\beta(x)$ اساساً یکتاست، بدین معنی که هر فضای هاوسدرف فشردهٔ دیگر با خواص (۱) و (۲) با $\beta(X)$ هومئومورف است. $\beta(X)$ فشرده سازی استون - چخ فضای منظم کامل X نامیده می‌شود.[۱]

حتی قبل از کارما در این بخش، واضح بود که هر زیرفضای حاصلضرب بازه های بسته، منظم کامل است. ارزش دارد تأکید خاص شودکه بررسی فوق نشان می‌دهدکه بالعکس، هر فضای منظم کامل، با زیرفضایی از چنین حاصلضربی هومئومورف است.

مسائل

۱. نشان دهید که اگر X منظم کامل باشد، هر تابع مختلط پیوستهٔ کراندار تعریف شده روی X گسترشی یکتا به یک تابع مختلط پیوستهٔ کراندار تعریف شده روی $\beta(X)$ دارد.

۲. هرزیرفضای بستهٔ حاصلضرب بازه های بسته، فضای هاوسدرف فشرده است. نشان دهید که برعکس هرفضای‌هاوسدرف فشرده با یک‌زیرفضایی بسته ازچنین‌حاصلضربی‌هومئومورف است.

۳. تعمیم زیر از قضیهٔ گسترش تیتزه را ثابت کنید. اگر x فضایی نرمال، F زیرفضای بسته‌ای از X، و f نگاشتی پیوسته از F بتوی یک‌فضای منظم کامل Y باشد، آنگاه f را می‌توان به‌یک نگاشت f' از X بتوی یک فضای هاوسدرف فشردهٔ Z که Y را به‌عنوان یک زیرفضا در بر دارد، گسترش پیوسته داد.

---

۱. برای شرح این موضوع از زبان خود استون به مقاله‌اش [۳۹] رجوع کنید.

فصل ششم

همبندی

از نظر شهودی فضای همبند، فضای توپولوژیکی است که از یک تکه تشکیل شده است. این خاصیت شاید ساده‌ترین خاصیتی است که فضای توپولوژیک می‌تواند داشته باشد، با این حال یکی از مهمترین خاصیتها برای کاربردهای توپولوژی در آنالیز و هندسه است.

مثلاً، روی خط حقیقی، بازه‌ها، زیرفضاهای همبند می‌باشند و خواهیم دید که تنها زیرفضاهای همبند هستند. توابع حقیقی پیوسته، اغلب روی بازه‌ها تعریف می‌شوند، و این نوع توابع دارای خواص جالب زیادی هستند. مثلاً در چنین تابعی هر عدد بین دو مقدار تابع، مقداری از تابع است (قضیهٔ مقدار میانی وایرشتراس) به علاوه، نمودار آن، یک زیرفضای همبند صفحهٔ اقلیدسی است. همبندی، مفهومی اساسی در آنالیز مختلط نیز هست، زیرا ناحیه‌هایی که روی آنها توابع تحلیلی مطالعه می‌شوند عموماً زیرفضاهای باز و همبند صفحهٔ مختلط هستند.

درآن‌قسمت از توپولوژی‌که منحنیهای پیوسته وخواص آنها مورد بحث قرار می‌گیرد، همبندی حائز اهمیت زیادی است، زیرا منحنی پیوسته، علاوه برخواص دیگری که ممکن است داشته باشد، یک فضای توپولوژیک همبند است. بعضی از ایده‌های اصلی این مبحث را در پیوست ۲ شرح می‌دهیم.

فضاهایی که همبند نیستند نیز جالب‌اند. یکی از مشخصات ویژهٔ مجموعهٔ کانتور این است که درمرتبهٔ نهایی ناهمبندی است. در مورد زیر فضای خط حقیقی متشکل از اعداد گویا هم این موضوع صادق است. ناهمبندی این فضاها به قدری زیاد است که تقریباً بافت دانه‌ای دارند.

هدف ما در این فصل این است که این مفاهیم نسبتاً مبهم را به ایده‌های ریاضی دقیق تبدیل کنیم، و همچنین حقایق اساسی نظریهٔ همبندی را که بر این مفاهیم متکی هستند ثابت کنیم.

۳۱. فضاهای همبند

فضای همبند یک فضای توپولوژیک است مانند X که نتوان آن را به صورت اجتماع دو مجموعهٔ باز ناتهی مجزا نمایش داد. اگر $X = A \cup B$ که A و B مجزا و باز باشند، آنگاه A و B بسته نیز هستند، بنابر این X اجتماع دو مجموعهٔ بسته است، و بالعکس. بنابراین می‌بینیم که X همبند است $\Longleftrightarrow$ X را نمی‌توان به‌صورت اجتماع دومجموعهٔ بستهٔ ناتهی مجزا نمایش داد. همچنین واضح است که همبندی X به این شرط بر می‌گردد که $\varnothing$ و X تنها زیرمجموعه‌های هم‌باز و هم بستهٔ فضا هستند. زیرفضای همبند X، زیرفضایی است مانند Y که به عنوان فضای توپولوژیک، خود همبند باشد. بنابرتعریف توپولوژی نسبی روی Y، همبندی Y معادل با این شرط است که Y مشمول اجتماع دو زیرمجموعهٔ باز X، که اشتراکهای آنها با Y مجزا و ناتهی هستند، نباشد.

فضای X را ناهمبند گویند اگر همبند نباشد، یعنی، اگر بتوان آن را به صورت $X = A \cup B$ نمایش داد که A و B مجزا، ناتهی، و باز باشند؛ و اگر X ناهمبند باشد، نمایش X به این صورت را (ممکن است X نمایشهای متعددی به این‌صورت داشته باشد) یک ناهمبندی X می‌نامند.

ابتدا به اثبات قضیه‌ای می‌پردازیم که قسمت قابل ملاحظه‌ای از نظریهٔ همبندی برآن استوار است.

قضیهٔ الف. یک زیرفضای حقیقی R، همبنداست $\Longleftrightarrow$ آن زیرفضا یک بازه‌است. بالاخص، R همبند است.

برهان: فرض‌کنید X زیرفضای R باشد. ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر X همبند باشد، آنگاه X بازه است. برای‌اثبات، فرض‌می‌کنیم X بازه نباشد و با استفاده ازاین فرض نشان‌می‌دهیم که X همبند نیست. بیان اینکه X بازه نیست این است که بگوییم اعداد حقیقی x، y، z، وجوددارندبه‌طوری‌که $x < y < z$، x و z در X هستندو y در X نیست. ازاین‌به‌سادگی نتیجه می‌شود که

$$X = [X \cap (-\infty, y)] \cup [X \cap (y, +\infty)]$$

یک ناهمبندی X است، درنتیجه X ناهمبند است.

برهان را با نشان دادن اینکه اگر X بازه باشد آنگاه لزوماً همبند است، تمام می‌کنیم. روش ما در اینجا این است که فرض می‌کنیم X ناهمبند است و ازاین فرض به تناقض می‌رسیم. فرض کنید $X = A \cup B$ یک ناهمبندی X باشد. چون A و B ناتهی هستند، می‌توانیم یک نقطهٔ x در A و یک نقطهٔ z در B انتخاب کنیم. A و B مجزا هستند، در نتیجه $x \neq z$ و می‌توان، در صورت لزوم با تعویض نمادهای A و B، فرض کرد که $x < z$. چون X بازه است، $[x, z] \subseteq X$ و هر نقطه در $[x, z]$، یا در A است یا در B. حال y را به صورت $y = \sup ([x, z] \cap A)$ تعریف می‌کنیم. واضح است که $x \leqslant y \leqslant z$، در نتیجه y در X است. چون A در X بسته است، تعریف y نشان می‌دهد که y در A است و از این موضوع نتیجه می‌گیریم که $y < z$. مجدداً بنا برتعریف y،

به ازای هر $\varepsilon > 0$ به‌طوری که $z \leqslant y + \varepsilon$، $y + \varepsilon$ در B است، و چون B در X بسته است، y در B است. ثابت کردیم که y هم در A و هم در B است. و این متناقض با فرض مجزا بودن A و B است.

قضیهٔ بعدی ما بیانگر این مطلب است که نگاشتهای پیوسته خاصیت همبندی را حفظ می‌کنند.

قضیهٔ ب. هر نگارهٔ پیوستهٔ فضای همبند، همبند است.

برهان: $f: X \rightarrow Y$ را نگاشتی پیوسته از یک فضای همبند X بتوی یک فضای توپولوژیک دلخواه Y فرض کنید. باید نشان دهیم‌که $f(X)$ به عنوان زیرفضای Y، همبند است. فرض کنید $f(X)$ ناهمبند باشد. همان گونه که دیدیم ناهمبند بودن $f(X)$ بدین معنی است که دو زیرمجموعهٔ باز Y، مانند G و H وجود دارند که اجتماع آنها $f(x)$ را در بردارد و اشتراکهای آنها با Y دو مجموعهٔ ناتهی مجزا هستند. اما از این نتیجه می‌شود که $X = f^{-1}(G) \bigcup f^{-1}(H)$ یک ناهمبندی X است، که با فرض همبند بودن X متناقض است.

به عنوان نتیجه‌ای مستقیم از دو قضیه‌ای که هم اکنون ثابت کردیم، تعمیم قضیهٔ مقدار میانی وایرشتراس، که درزیرآمده است، به دست می‌آید.

قضیهٔ ج. حوزهٔ مقادیر تابع حقیقی پیوستهٔ تعریف شده روی فضای همبند، یک بازه است.

این تذکر بدیهی است که هر دو فضای گسسته با تعداد نقاط مساوی، اساساً از یکدیگر متمایز نیستند، زیرا هر نگاشت یک به یک از یکی بروی دیگری (حداقل یک نگاشت یک به یک وجود دارد)، هومئومورفیسم است، و ما می‌توانیم آنها را به عنوان دو فضایی در نظر بگیریم که اختلافشان صرفاً در نمادهایی است که برای مشخص کردن نقاط آنها به کار رفته‌اند. به استناد این مفهوم، به ازای هر تعداد نقاط داده شده تنها یک فضای گسسته وجود دارد. فضای دو نقطه‌ای گسسته، که به وضوح ناهمبند است، ابزاری مفید در نظریهٔ همبندی است. نقاط این فضا را به ۰ و ۱ نشان می‌دهیم، و آنها را به مثابهٔ اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم.

قضیهٔ د. فضای توپولوژیک X ناهمبند است $\Longleftrightarrow$ نگاشت پیوسته‌ای از X بروی فضای دونقطه‌ای گسستهٔ $\{0, 1\}$ وجود دارد.

برهان: اگر X ناهمبند و $X = A \bigcup B$ یک ناهمبندی باشد، آنگاه نگاشت پیوستهٔ f از X بروی $\{0, 1\}$ را به این صورت تعریف می‌کنیم که $f(x) = 0$ اگر x در A باشد، و $f(x) = 1$ اگر x در B باشد. این تعریف درست است، زیرا A و B مجزا و اجتماعشان X است. چون A و B ناتهی و باز هستند، f آشکارا بروی و پیوسته است.

از طرف دیگر، اگر چنین نگاشتی وجود داشته باشد، آنگاه X ناهمبند است، زیرا اگر X همبند بود ازقضیهٔ ب نتیجه می‌شد که $\{0, 1\}$ همبند است، و تناقض به‌وجود می‌آمد.

این نتیجه، ابزاری مفید برای اثبات قضیهٔ بعدی ماست.

قضیهٔ ه. حاصلضرب هردهٔ ناتهی از فضاهای همبند، همبند است.

برهان: $\{X_i\}$ را یک ردهٔ ناتهی ازفضاهای همبندفرض‌کنید، وحاصلضرب آنها $X = P_i X_i$ را تشکیل دهید. فرض می‌کنیم X ناهمبند است، و از این فرض یک تناقض به دست می‌آوریم. بنا بر قضیهٔ د نگاشت پیوستهٔ f از X بروی فضای دو نقطه‌ای گسستهٔ $\{۰, ۱\}$ وجود دارد. $a = \{a_i\}$ را نقطه‌ای ثابت در X فرض کنید، و یک اندیس بخصوص $i_۱$ را درنظر بگیرید. نگاشت $f_{i_۱}$ از $X_{i_۱}$ بتوی X را به‌این صورت تعریف می‌کنیم که $f_{i_۱}(x_{i_۱}) = \{y_i\}$ که درآن به‌ازای $i \neq i_۱$، $y_i = a_i$ و $y_{i_۱} = x_{i_۱}$. این‌نگاشت آشکارا پیوسته است، درنتیجه $ff_{i_۱}$ نگاشتی پیوسته از $X_{i_۱}$ بتوی $\{۰, ۱\}$ است. چون $X_{i_۱}$ همبنداست، ازقضیهٔ د نتیجه می‌شود که $ff_{i_۱}$ ثابت است و به ازای هر نقطهٔ $x_{i_۱}$ در $X_{i_۱}$

$$(ff_{i_۱})(x_{i_۱}) = f(a)$$

این نشان می‌دهد که به ازای هر x در X که همهٔ مؤلفه‌هایش، بجز مؤلفهٔ $i_۱$ برابر مؤلفه‌های نظیر a است، داریم $f(x) = f(a)$. با تکرار این روش برای اندیس دیگری مانند $i_۲$ و . . .، مشاهده می‌کنیم که به ازای هر x در X که همهٔ مؤلفه‌هایش، به‌جز تعدادی متناهی، برابر مؤلفه‌های نظیر a است، داریم $f(x) = f(a)$[۱]. مجموعهٔ تمام چنین xها، یک زیرمجموعهٔ چگال X است، در نتیجه بنا برمسئلهٔ ۲۶-۵، f یک نگاشت ثابت است. این با فرض اینکه نگاشت f فضای X را بروی مجموعهٔ $\{۰, ۱\}$ می‌نگارد متناقض است، و اثبات را تمام می‌کند.

به عنوان کاربردی از این نتیجه، نشان می‌دهیم که تمام فضاهای اقلیدسی با بعد متناهی و فضاهای یکانی، همبند هستند.

قضیهٔ و. فضاهای R^n و C^n همبند هستند.

برهان: دراثبات قضیهٔ ۲۳.ب نشان دادیم که R^n را به‌عنوان فضای توپولوژیک می‌توان به صورت حاصلضرب n نسخه از خط حقیقی R درنظر گرفت. در قضیهٔ الف دیدیم که R همبند است، در نتیجه بنا بر قضیهٔ ه، R^n همبند است.

اکنون با یک هومئومورفیسم f از C^n بروی $R^{۲n}$ روشن می‌کنیم که C^n و $R^{۲n}$ به عنوان فضاهای توپولوژیک اساساً یکی هستند. فرض‌کنید $z = (z_۱, z_۲, \ldots, z_n)$ عنصری دلخواه درC^n باشد، و هر مختص z_k را بـه‌صورت $z_k = a_k + ib_k$ که در آن a_k و b_k قسمتهای حقیقی و موهومی z_k هستند، بنویسید. f را به صورت

$$f(z) = (a_۱, b_۱, a_۲, b_۲, \ldots, a_n, b_n)$$

تعریف می‌کنیم. به وضوح، f یک نگاشت یک به یک از C^n بروی $R^{۲n}$ است، و اگر

---

۱. به ازای هر $x_{i_۱}$ در $X_{i_۱}$ نقطهٔ $b = \{b_i\}$ که درآن اگر $i \neq i_۱$، $b_i = a_i$ و $b_{i_۱} = x_{i_۱}$، درنظربگیرید. به‌همان ترتیبی که نگاشت $f_{i_۱}$ را تعریف‌کردیم می‌توان نگاشت $f_{i_۲}$را از $X_{i_۲}$ بروی X تعریف‌کرد ونتیجه گرفت که به‌ازای‌هرx در X که همهٔ مؤلفه‌هایش، به‌جز مؤلفهٔ $i_۲$، برابرمؤلفه‌های نظیر b است، داریم$f(x) = f(b)$، وبنابر این $f(x) = f(b) = f(a)$، به‌همین ترتیب ادامه می‌دهیم.م.

توجه کنیم که $\| f(z) \| = \| z \|$، بـه سادگی مشاهده می‌شود کـه f یک هومئومورفیسم است. اکنون از همبند بودن R^{2n} نتیجه می‌شود که C^n نیز همبند است.

مطالب و روشهایی کـه در بخش بعد بحث می‌شوند این امکان را به وجود خواهند آورد که اثبات ساده‌ای از قضیهٔ بسیار عمومیتری، که همبند بودن هر فضای بـاناخ است، عرضه شود.

مسائل

۱. نشان دهید که فضای توپولوژیک همبند است $\Longleftrightarrow$ هـر زیر مجموعهٔ سرهٔ ناتهی، مرز ناتهی دارد.

۲. نشان دهیدکه فضای توپولوژیک X همبند است $\Longleftrightarrow$ برای هر دو نقطه در X یک زیر-فضای همبند X وجود دارد که هر دو نقطه را در بر دارد.

۳. ثابت کنید کـه زیرفضای توپولوژیک X ناهمبند است $\Longleftrightarrow$ زیـرفضا را به صورت اجتماع دو مجموعهٔ ناتهی‌که هریک از آنها از بست دیگری (در X) مجزا باشد، می‌توان نمایش داد.

۴. نشان دهید کـه نمودار تابع حقیقی پیوستهٔ تعریف شده روی یک بازه، یک زیـرفضای همبند صفحهٔ اقلیدسی است.

۵. نشان دهیدکه اگر روی فضای همبند، تابع حقیقی غیرثابت پیوسته‌ای تعریف شده باشد آنگاه مجموعهٔ نقاط آن فضا نامتناهی ناشمارااست.

۶. اگر X فضای کامـل منظم باشد، بـا استفاده از قضیهٔ د ثابت کنید کـه X همبند است $\Longleftrightarrow$ $\beta(X)$ همبند است.

۳۲. مؤلفه‌های فضا

اگر خود فضا همبند نباشد، آنچه می‌تواند مورد توجه باشد این است‌که تجزیهٔ آن به‌یک ردهٔ مجزای زیـرفضاهای همبند مـاکـزیمال مقدور باشد. در بحث حاضر نشان می‌دهیم کـه همواره چنین تجزیه‌ای امکان‌پذیر است.

زیرفضای همبند ماکزیمال فضای توپولوژیک را، یعنی زیرفضای همبندی که به‌طور سره مشمول زیرفضای همبند بزرگتری نباشد، مـؤلفهٔ فضا می‌نامند. فضای همبند بـه وضوح تنها یک مؤلفه دارد وآن خود فضاست. در فضای گسسته، به‌سادگی مشاهده می‌شود که هر نقطه یک مؤلفه است.

دوقضیهٔزیر برای به‌دست‌آوردن تجزیهٔ مطلوب درفضای‌عمومی، مفیدواقع‌خواهد شد.

قضیهٔ الف. X را فضای توپولوژیک فرض‌کنید. اگر $\{A_i\}$ رده‌ای ناتهی از زیرفضاهای‌همبند X باشد به طوری که $\bigcap_i A_i$ ناتهی باشد، آنگاه $A = \bigcup_i A_i$ نیززیرفضای همبند است.

برهان: فرض‌کنید A ناهمبند است. یعنی دو زیرمجموعهٔ باز X، مانند G و H وجود دارند به طوری که اجتماع آنها A را دربـر دارد و اشتراکهای آنها بـا A ناتهی و مجزا هستند.

تمام A_iها همبند هستند و هر یک در $H \cup G$ واقع‌اند، در نتیجه هر A_i کلاً در G یا کلاً در H واقع است و از دیگری مجزاست. چون $\bigcap_i A_i$ ناتهی است، یا تمام A_iها در G قرار گرفته از H مجزا هستند و یا تمام آنها در H قرار گرفته از G مجزا هستند. بنا بر این مشاهده می‌کنیم که خود A یا از G و یا از H مجزاست، و این تناقض نشان می‌دهد که فرض ناهمبند بودن A قابل قبول نیست.

قضیهٔ ب. X را فضای توپولوژیک و A را زیرفضای همبند X فرض کنید. اگر B یک زیرفضای X باشد به طوری که $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$، آنگاه B همبند است؛ بالاخص $\bar{A}$ همبند است.

برهان : فرض می‌کنیم B ناهمبند است، یعنی دو زیرمجموعهٔ باز X، مانند G و H وجود دارند که اجتماع آنها B را دربر دارد و اشتراکهای آنها با B ناتهی ومجزا هستند. چون A همبند است و در $H \cup G$ واقع است، A یا در G و یا در H واقع است و از دیگری مجزاست. مثلا فرض کنیم A از H مجزاست. از این، نتیجه می‌شود که $\bar{A}$ نیز از H مجزا است، و چون $B \subseteq \bar{A}$، B از H مجزاست. این تناقض نشان می‌دهد که B نمی‌تواند ناهمبند باشد، و قضیه را ثابت می‌کند.

اکنون می‌توانیم قضیهٔ اصلی دربارهٔ همبندی را بیان و ثابت کنیم.

قضیهٔ ج. اگر X فضای توپولوژیک دلخواهی باشد، آنگاه (۱) هر نقطه در X فقط در یک مؤلفهٔ X قرار دارد، (۲) هر زیرفضای همبند X در یک مؤلفهٔ X واقع است، (۳) زیرفضای همبند X که هم باز و هم بسته باشد یک مؤلفهٔ X است، و (۴) هر مؤلفهٔ X بسته است.

برهان : برای اثبات (۱)، فرض کنید x نقطه‌ای در X باشد. $\{C_i\}$، ردهٔ تمام زیرفضاهای X را که شامل x هستند، درنظر بگیرید. این رده ناتهی است زیرا x خودش همبند است. بنا بر قضیهٔ الف، $C = \bigcup_i C_i$ زیرفضای همبند X است و x را دربر دارد. واضح است که C ماکزیمال است، و بنابراین یک مؤلفهٔ X است، زیرا هر زیرفضای همبند X که C را دربر داشته باشد یکی از C_i هاست و درنتیجه در C است. بالاخره C تنها مؤلفهٔ X است که x را دربر دارد. زیرا اگر C^* مؤلفهٔ دیگری باشد، به‌وضوح یکی از C_i هاست و بنابراین در C است و چون C^* به‌عنوان زیرفضای همبند X ماکزیمال است، باید داشته باشیم $C = C^*$.

قسمت (۲) نتیجهٔ مستقیم استدلال بند فوق است، زیرا بنابرآنچه گفته شد، زیرفضای همبند X، در مؤلفه‌ای که هر یک از نقاط آن را دربر دارد، واقع است.

(۳) را به صورت زیر ثابت می‌کنیم. A را زیرفضای همبند X که هم باز و هم بسته است فرض کنید. بنابر (۲)، A در یک مؤلفهٔ C واقع است. اگر A زیرمجموعهٔ سرهٔ C باشد، آنگاه به سادگی مشاهده می‌شود که

$$C = (C \cap A) \cup (C \cap A')$$

یک ناهمبندی C است. این یک تناقض است، زیرا C مؤلفه و درنتیجه همبند است، پس نتیجه می‌گیریم که $A = C$.

قسمت (۴) فوراً از قضیهٔ ب نتیجه می‌شود، زیرا اگر مؤلفهٔ C بسته نباشد، آنگاه بست آن $\bar{C}$ زیرفضای همبند X است و C زیرفضای سرهٔ $\bar{C}$ است، و این بافرض ماکزیمال بودن C، به‌عنوان زیرفضای همبند X، متناقض است.

با توجه به قسمتهای (۳) و (۴) این قضیه، طبیعی است سؤال شود که آیا یک‌مؤلفهٔ فضا الزاماً باز است. مثال زیر نشان می‌دهد که پاسخ منفی است.

فرض کنید X زیرفضای خط حقیقی متشکل از تمام اعداد گویا باشد. به دوخاصیت زیر در مورد X توجه می‌کنیم. خاصیت اول این است که اگر x و z هر دو اعداد گویای متمایز باشند، و اگر $x < z$، آنگاه عدد اصم y وجود دارد به‌طوری که $x < y < z$، و بنابراین

$$X = [X \cap (-\infty, y)] \cup [X \cap (y, +\infty)]$$

یک ناهمبندی X است که x و z را جدا می‌سازد. ازاین موضوع به‌سادگی مشاهده‌می‌شود که هر زیرفضای X که بیش از یک نقطه داشته باشد، ناهمبند است، درنتیجه مؤلفه‌های X نقاطش هستند. خاصیت دوم این است که نقاط X باز نیستند، زیرا هر زیرمجموعهٔ باز R که عدد گویای مفروضی را دربر داشته باشد، اعداد گویای دیگری متمایز ازآن را نیزدربر دارد. بنابراین فضایی داریم‌که مؤلفه‌هایش نقاط فضا هستند و این نقاط باز نیستند. این‌مثال همچنین نشان می‌دهد که برای این‌که هر نقطهٔ فضا مؤلفهٔ آن باشد لازم نیست که فضا گسسته باشد.

مسائل

۱. اگر A_1، A_2، ...، A_n، ... دنباله‌ای از زیرفضاهای همبند یک فضای توپولوژیک باشد و هر یک از آنها تالی خود را قطع کند، نشان دهید که $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ همبند است.

۲. نشان دهید که اجتماع هر ردهٔ ناتهی از زیرفضاهای همبند یک فضای توپولوژیک که دو به دو یکدیگر را قطع می‌کنند، همبند است.

۳. در قضیهٔ ۳۱ـه ثابت کردیم که هرگاه فضاهای مختص یک فضای حاصلضرب همبند باشند، آنگاه فضای حاصلضرب همبند است. برهان دیگری بر مبنای قضیهٔ الف، در حالتی که فضا تنها دو فضای مختص دارد عرضه کنید.

۴. با استفاده از قضیهٔ الف ثابت کنید که فضای باناخ دلخواه B همبند است (راهنمایی: اگر x بردار باشد، نشان دهید که مجموعهٔ تمام مضربهای اسکالر x زیرفضای همبند B است).

۵. B را فضای باناخ دلخواهی فرض‌کنید. مجموعهٔ محدب در B، زیرمجموعهٔ ناتهی

است با این خاصیت که اگر x و y در S باشند، آنگاه به‌ازای هر عدد حقیقی t باشرط $\circ \leqslant t \leqslant ۱$

$$z = x + t(y - x) = (۱ - t)x + ty$$

نیز در S است. به‌طور شهودی، مجموعهٔ محدب مجموعه‌ای ناتهی است که پاره خطی که هرزوج از نقاط مجموعه را به‌هم وصل می‌کند دربر دارد. ثابت‌کنید که هرزیرفضای‌محدب B، همبند است. همچنین ثابت کنید که هرگوی (باز یا بسته) در B، محدب است، و بنابر- این همبند است.

۶. نشان دهید که زیرفضای باز صفحهٔ مختلط همبند است $\Longleftrightarrow$ هر دو نقطهٔ آن رامی‌توان با خط منکسری به‌هم وصل کرد.

۷. اجتماع دو قرص باز در صفحهٔ مختلط را که مماس متخارج هستند درنظربگیرید. تحقیق کنید که آیا این زیرفضای صفحه، همبند است یا ناهمبند، و درستی ادعای خود را توجیه کنید. همین مطلب را در حالتی که یکی از دو قرص باز و دیگری بسته است و درحالتی‌که هر دو قرص بسته هستند، بحث کنید.

۸. زیرفضای ذیل از صفحهٔ اقلیدسی را درنظر بگیرید

$$\left\{(x, y) : x \neq \circ, \quad y = \sin(\tfrac{۱}{x})\right\}$$

این زیرفضا همبند است یا ناهمبند؟ چرا؟ به‌همین سؤال درمورد زیرفضای زیر جواب دهید

$$\left\{(x, y) : x \neq \circ, \quad y = \sin(\tfrac{۱}{x})\right\} \cup \left\{(x, y) : x = \circ, \quad -۱ \leqslant y \leqslant ۱\right\}.$$

۳۳. فضاهای ناهمبند کلی

دیدیم که فضای همبند فضایی است که هیچ ناهمبندی ندارد. اکنون فضاهایی را در نظر می‌گیریم که دارای تعداد بسیاری ناهمبندی هستند و بنابراین، به‌بیانی، درانتهای دیگرطیف همبندی واقع‌اند.

فضای ناهمبند کلی فضای توپولوژیکی مانند X است که درآن هر دونقطهٔ متمایز با یک ناهمبندی X از هم جدا می‌شوند. بدین معنی که به‌ازای هر دو نقطهٔ x و y در X به‌قسمی‌که $x \neq y$، ناهمبندی $X = A \cup B$ بادوشرط $x \in A$ و $y \in B$ وجود دارد. واضح است‌که چنین فضایی، فضای هاوسدرف است، و اگر بیش از یک نقطه داشته باشد، فضای ناهمبنداست. تعجب‌آور است که فضای تک نقطه‌ای هم همبند است و هم ناهمبند کلی.

فضاهای گسسته ساده‌ترین فضاهای ناهمبند کلی هستند. مثال جالبتر، فضایی است که درآخر بخش قبل موردبحث قرار گرفت، یعنی، مجموعهٔ تمام اعداد گویا به‌عنوان‌زیرفضای خط حقیقی. مجموعهٔ تمام اعداد اصم نیز یک زیرفضای ناهمبند کلی خط حقیقی است، و اثبات این موضوع مشابه به اثبات ناهمبند بودن اعداد گویاست، و بر این امر استوار است که بین هر دو عدد اصم عددگویا وجود دارد. مجموعهٔ کانتور زیرفضای ناهمبند کلی دیگری

از خط حقیقی است، و این زیرفضا فشرده هم هست.

گمان نمی‌رود اولین قضیهٔ ما برای کسی غیرمنتظره باشد.

قضیهٔ الف. مؤلفه‌های فضای ناهمبند کلی، نقاط آن فضا هستند.

برهان : اگر X فضای ناهمبندکلی باشد، کافی است نشان دهیم که هر زیرفضای X مانند Y که بیش ازیک نقطه دارد ناهمبند است. فرض کنید x و y دو نقطهٔ متمایز در Y باشند، وفرض کنید $X = A \bigcup B$ یک ناهمبندی X باشد به‌طوری که $x \in A$ و $y \in B$. واضح است که

$$Y = (Y \bigcap A) \bigcup (Y \bigcap B)$$

یک ناهمبندی Y است.

ناهمبندی کلی، رابطهٔ نزدیکی با خاصیت جالب دیگری دارد.

قضیهٔ ب. X را یک فضای هاوسدرف فرض‌کنید. اگر X پایهٔ‌بازی داشته باشدکه مجموعه‌های آن بسته نیز باشند، آنگاه X ناهمبند کلی است.

برهان : x و y را نقاط متمایزی در X بگیرید. چون X هاوسدرف است، x یک همسایگی G دارد که y را در برندارد. بنابر فرض مجموعهٔ باز پایه‌ای B وجود دارد که بسته هم هست و $x \in B \subseteq G$. $X = B \bigcup B'$ به وضوح یک ناهمبندی X است که x و y را جدا می‌سازد.

اگر فضای X در این قضیه، فشرده نیز باشد، آنگاه عکس قضیه درست است، و دو شرط معادل‌اند.

قضیهٔ ج. X را فضای هاوسدرف فشرده فرض کنید. آنگاه X ناهمبند کلی است $\Longleftrightarrow$ X پایهٔ بازی دارد که مجموعه‌هایش بسته نیز هستند.

برهان : با توجه به قضیهٔ ب، کافی است فرض کنیم X ناهمبند کلی است و ثابت کنیم که ردهٔ تمام زیرمجموعه‌های X که هم باز و هم بسته‌اند پایه‌ای باز تشکیل می‌دهد. x را نقطه و G را مجموعهٔ بازی فرض کنید که x را در بر دارد. باید مجموعه‌ای مانند B بسازیم که هم باز و هم بسته باشد و $x \in B \subseteq G$. می‌توانیم فرض کنیم G کل فضا نیست، زیرا اگر $G = X$، آنگاه با انتخاب $B = X$ خواست ما برآورده می‌شود. در نتیجه G' زیرفضای بستهٔ X است، و چون X فشرده است، G' نیز فشرده است. چون X بنابر فرض ناهمبند کلی است، به‌ازای هر نقطهٔ y در G' یک مجموعهٔ H_y وجود دارد که هم باز و هم بسته است و y را در بر دارد ولی x را در بر ندارد. G' فشرده است، بنابراین رده‌ای متناهی از H_yها، که آن را به $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ نمایش می‌دهیم، با این خاصیت که اجتماع آن G' را در بر دارد ولی x را در بر ندارد، وجود دارد. H را به‌صورت $H = \bigcup_{i=1}^{n} H_i$ تعریف می‌کنیم، وملاحظه می‌کنیم که چون این یک اجتماع متناهی است و تمام H_iها هم باز و هم بسته هستند، H هم باز و هم بسته است و G' را در بر دارد ولی x را در برندارد.

حال اگر B را مجموعه H' بگیریم، آنگاه B به‌وضوح دارای خواص مطلوب است.

فضاهـای ناهمبند کلـی در چندین مبحث تـوپولوژی، بـه‌خصوص در نظریهٔ ابعاد (رجوع شود به هیورویکز و والمن [۲۱][1]) و در نظریهٔ نمایش کلاسیک بـرای جبرهای بولی که در پیوست ۳ عرضه شده است، از اهمیت قابل ملاحظه‌ای برخوردارند.[2]

مسائل

۱. ثـابت کنید که حاصلضرب هر ردهٔ ناتهی از فضاهای ناهمبند کلی، ناهمبند کلی است.

۲. ثابت کنید که فضای هاوسدرف فشردهٔ ناهمبند کلی، با یک زیرفضای بستهٔ حاصلضرب فضاهای دونقطه‌ای گسسته هومئومورف است.

۳۴. فضاهای همبند موضعی

در بخش ۲۳ با مفهوم فضای فشردهٔ موضعی مواجه شدیم، یعنی، مفهوم‌فضایی که دراطراف هر نقطه فشرده است ولی لازم نیست که خود فشرده باشد. حال خاصیت «موضعی» دیگری را در فضای توپولوژیک مطالعه می‌کنیم، و آن همبند بودن در مجاورت هر نقطه است.

فضای همبند موضعی فضایی توپولوژیک است با این خاصیت کـه اگر x هـر نقطهٔ فضا و G هر همسایگی x باشد، آنگاه G یک همسایگی همبند x را شامل است. بدیهـی است که این تعریف معادل با ایـن شرط است که هر نقطهٔ فضا پایهٔ بـازی دارد کـه تمام مجموعه‌هایش زیرفضاهای همبند هستند.

فضاهای همبند موضعی نسبتاً فراوان هستند، زیرا، همچنان‌که در مسئلهٔ ۳۲- ۵ دیدیم، هر فضای باناخ، همبند موضعی است.

می‌دانیم‌که فشردگی موضعی ازفشردگی نتیجه می‌شود. اما همبندی موضعی نه‌همبندی را نتیجه می‌دهد و نه از همبندی نتیجه می‌شود. اجتماع دو بازهٔ باز مجـزا روی خط حقیقی مثال ساده‌ای از فضایـی است کـه همبند مـوضعی است ولـی همبند نیست. همچنین، فضا می‌تواند همبند باشد بدون این که همبند موضعی باشد. X را زیـرفضای صفحهٔ اقلیدسی که به‌صورت $X = A \cup B$ تعریف شده و در آن

$$A = \{(x, y) : x = ۰, \quad -۱ \leqslant y \leqslant ۱\}$$

و

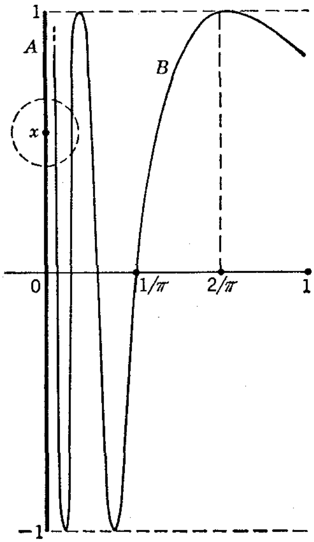
$$B = \{(x, y) : ۰ < x \leqslant ۱, \quad y = \sin(\frac{۱}{x})\}$$

بگیرید (به‌شکل ۲۶ رجوع کنید). B نگارهٔ بازهٔ $(۰, ۱]$ تحت نگاشت پیوستهٔ f است‌که

---

1. Hurewicz and Wallman

۲. خواننده باید به‌این حقیقت واقف باشدکه معمولا چندین تعریف مختلف از ناهمبندی کلی در نوشتارهای توپولوژی یافت می‌شود. از نظر نویسندهٔ ایـن کتاب، تعریف ارائه شدهٔ فوق از پشتیبانی منطق برخـوردار است، و قضیهٔ ج نشان می‌دهد که این تعریف (در حـالت فضای هاوسدرف فشرده) با مهمترین این تعریفهای مختلف، معادل است.



ش ۲۶. $B \cup A$ همبند است ولی همبند موضعی نیست.

به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = \left(x, \sin(\tfrac{1}{x})\right)$$

در نتیجه بنا بر قضیهٔ ۳۱-ب مجموعهٔ B همبند است؛ و چون $\bar{B} = X$، بنا بر قضیهٔ ۳۲-ب فضای X همبند است. اما X همبند موضعی نیست، زیرا مشاهدهٔ این که هر نقطهٔ x در A دارای یک همسایگی است که هیچ همسایگی همبند x را در بر ندارد، نسبتاً ساده است.

بنا بر قضیهٔ ۳۲-ج می‌دانیم که مؤلفه‌های فضای توپولوژیک دلخواه X همواره مجموعه‌های بسته هستند، و از این فوراً نتیجه می‌شود که مؤلفه‌های هر زیرفضای بستهٔ X نیز در X بسته هستند. خواننده ممکن است با توجیهاتی احساس کند که مؤلفه‌های یک فضای خوش‌رفتار بایستی مجموعه‌های باز باشند. این مطلب در مورد فضاهای همبند موضعی درست است.

قضیهٔ الف. X را فضای همبند موضعی فرض کنید. اگر Y زیرفضای باز X باشد، آنگاه هر مؤلفهٔ Y در X باز است. بالاخص هر مؤلفهٔ X باز است.

برهان : C را یک مؤلفهٔ Y فرض کنید. می‌خواهیم نشان دهیم که C در X باز است. فرض کنید x یک نقطه در C باشد. چون X همبند موضعی و Y در X باز است، Y یک همسایگی همبند x، مانند G را دربردارد. کافی است نشان‌دهیم‌که $G \subseteq C$. اگر بتوانیم نشان دهیم که G به‌عنوان زیرفضای Y همبند است، آنگاه از اینکه C مؤلفهٔ Y است فوراً نتیجه می‌شود که $G \subseteq C$. اما بنا بر مسئلهٔ ۱۶-۶ این مطلب بدیهی است، زیرا برطبق این مسئله،

توپولوژی G به عنوان زیرفضای Y همان توپولـوژی G به‌عنوان زیرفضای X است و G نسبت به توپولوژی اخیر همبند است.

کاربردهای عمدهٔ همبندی موضعی، در نظریـهٔ منحنیهای پیـوسته است (به پیوست ۲ رجوع کنید).

مسائل

۱. ثابت کنید که فضای توپولوژیک X همبند موضعی است اگر مؤلفه‌های هر زیرفضای باز X، در X باز باشند.

۲. زیرفضای همبند فضای همبند موضعی X، فضای همبند موضعی است اگر X خط حقیقی باشد. چرا؟ آیا اگر X فضای همبند موضعی دلخواهی باشد این موضوع صحت دارد؟

۳. نشان دهید که تعداد مؤلفه‌های فضای همبند موضعی متناهی است.

۴. نشان دهید که نگارهٔ فضای همبند موضعی، تحت نگاشتی که هم‌پیوسته و هم باز است، همبند موضعی است.

۵. ثابت کنید که حاصلضرب هر ردهٔ متناهی ناتهی فضاهای همبند موضعی، فضـای همبند موضعی است.

۶. نشان دهید که حاصلضرب ردهٔ ناتهی دلخواهی از فضاهای همبند موضعی، ممکن است همبند موضعی نباشد.

(راهنمایی: حاصلضربی از فضاهای دو نقطه‌ای گسسته را در نظر بگیرید.)

۷. ثابت کنید کـه حاصلضرب هـر ردهٔ ناتهی از فضاهـای همبند، همبند مـوضعی، فضای همبند موضعی است.

فصل هفتم

تقریب

کار ما در فصل حاضر حول قضیهٔ معروف وایرشتراس، دربارهٔ تقریب توابع حقیقی پیوستهٔ تعریف شده روی بازه‌های بسته توسط چندجمله‌ایها، متمرکز است. این قضیه، که درآنالیز کلاسیک مهم است، در سالهای اخیر تحت‌الشعاع صورت تعمیم یافتهٔ آن (که توسط استون کشف شد) قرار گرفته است. صورت تعمیم یافتهٔ این قضیه در ارتباط با توابع پیوستهٔ تعریف شدهٔ روی فضاهای هاوسدرف فشرده می باشد، و ابزاری ضروری در توپولوژی و آنالیز نوین است.

قضیه وایرشتراس را ثابت می‌کنیم و سپس به‌اثبات دو صورت قضیهٔ استون ـ وایر-شتراس، که به طور مجزا با توابع حقیقی و توابع مختلط سروکار دارند، مـی‌پردازیم. سرانجام بعد از سیری در نظریهٔ فضاهای هاوسدرف فشردهٔ موضعی، قضیهٔ استون-وایرشتراس را در این زمینه گسترش می‌دهیم.

۳۵. قضیهٔ تقریب وایرشتراس

بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ روی خط حقیقی و چند جمله‌ای

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

با ضرایب حقیقی، تعریف شده روی $[a, b]$ را درنظر می‌گیریم.[1] واضح است کـه چنین چند جمله‌ای تابعی حقیقی و پیوسته است، و از لم دوم بخش ۲۰ نتیجه می‌گیریم که حدهر دنبالهٔ همگرای یکنواخت چنین چند جمله‌ایی نیز تابعی حقیقی و پیوسته است.

---

۱. البته این چند جمله‌ای را می‌توان به عنوان تابعی که روی تمام خط حقیقی تعریف شده است، در نظر گرفت. ما به این امر توجه نمی‌کنیم و صرفاً x هایی را که در $[a, b]$ واقع‌اند در نظر می‌گیریم.

قضیهٔ وایرشتراس بیان می‌کند که عکس این موضوع نیز درست است، یعنی هر تابع حقیقی پیوستهٔ تعریف شده روی $[a, b]$ حد دنبالهٔ همگرای یکنواختی از چندجمله‌ایها است. واضح است که این موضوع با این گزاره که چنین تابعی را می‌توان توسط چندجمله‌ایها با هر میزان دقت، به‌طور یکنواخت تقریب زد، معادل است. روشهای بسیاری برای اثبات این قضیهٔ کلاسیک وجود دارد، روشی که ما برای اثبات آن عرضه می‌کنیم شاید مختصرتر و مقدماتی‌تر از بیشتر آنها باشد.

قضیهٔ الف (قضیهٔ تقریب وایرشتراس). f را تابع حقیقی پیوسته‌ای تعریف شده روی بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ فرض کنید، و فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده است. آنگاه یک چندجمله‌ای مانند p با ضرایب حقیقی وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر x در $[a, b]$

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

برهان : در مرحلهٔ اول، نشان می‌دهیم که کافی است قضیه را در حالت خاص $a = 0$ و $b = 1$ ثابت کنیم. اگر $a = b$، با انتخاب چندجمله‌ای ثابت p که به‌صورت

$$p(x) = f(a)$$

تعریف می‌شود، نتیجه فوراً حاصل است. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم $a < b$. سپس ملاحظه می‌کنیم که $x = [b - a]x' + a$ نگاشتی پیوسته از $[0, 1]$ به روی $[a, b]$ است، در نتیجه تابع g که به‌صورت $g(x') = f([b - a]x' + a)$ تعریف می‌شود تابعی حقیقی، پیوسته و روی $[0, 1]$ تعریف شده است. اگر قضیهٔ ما درحالت $a = 0$ و $b = 1$ ثابت شود، آنگاه یک‌چندجمله‌ای مانند p' تعریف شده روی $[0, 1]$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر x' در $[0, 1]$ داریم $|g(x') - p'(x')| < \varepsilon$. حال اگر در این نامساوی x' را برحسب x قرار دهیم نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر x در $[a, b]$ داریم $|f(x) - p'([x - a]/[b - a])| < \varepsilon$، و با تعریف کردن p به صورت

$$p(x) = p'\left(\frac{[x - a]}{[b - a]}\right)$$

قضیهٔ ما در حالت کلی ثابت می‌شود. درنتیجه، می‌توانیم فرض کنیم $a = 0$ و $b = 1$.

یادآور می‌شویم که اگر n عددی صحیح و مثبت و k عددی صحیح باشد به‌طوری که $0 \leqslant k \leqslant n$، آنگاه ضریب‌دوجمله‌ای $\binom{n}{k}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}$$

چندجمله‌ایهای B_n (به‌ازای هر n یک B_n داریم) راکه به‌صورت

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

تعریف می‌شوند، چندجمله‌ایهای برنشتاین[1] مربوط به f می‌نامند. با به‌دست آوردن یک چندجمله‌ای برنشتاین که خاصیت مورد نظر را دارا باشد قضیه را ثابت می‌کنیم.

چندین اتحاد برای این موضوع مورد احتیاج خواهد بود. اتحاد اول حالت خاصی از قضیهٔ دوجمله‌ای است

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=[x+(1-x)]^n=1 \qquad (1)$$

اگر از تساوی (۱) نسبت به x مشتق بگیریم، تساوی زیر به‌دست می‌آید

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[kx^{k-1}(1-x)^{n-k}-(n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}]$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}(k-nx)=0$$

و با ضرب کردن دوطرف تساوی در $x(1-x)$ نتیجه می‌شود که

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}(k-nx)=0 \qquad (2)$$

با مشتق‌گیری از (۲) نسبت به x و درنظرگرفتن $x^k(1-x)^{n-k}$ به‌عنوان یکی ازدو عامل در کاربرد قاعدهٔ مشتق حاصلضرب، تساوی زیر به‌دست می‌آید

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[-nx^k(1-x)^{n-k}+x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}(k-nx)^2]=0 \qquad (3)$$

با به‌کاربردن تساوی (۱) در (۳) نتیجه می‌شود که

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}(k-nx)^2=n$$

با ضرب کردن دو طرف تساوی فوق در $x(1-x)$ درمی‌یابیم که

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}(k-nx)^2=nx(1-x)$$

یا (از تقسیم دو طرف بر n^2)

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2=\frac{x(1-x)}{n} \qquad (4)$$

اتحادهای (۱) و (۴) ابزار اصلی ما هستند در نشان دادن این که به‌ازای تمام nهای به‌قدر کافی بزرگ، $B_n(x)$ به‌طور یکنواخت نزدیک به $f(x)$ است.

حال به‌اثبات مطلبی کــه هم اکنون بیان شد می‌پردازیــم. با استفاده از تساوی (۱) مشاهده می‌کنیم که

$$f(x)-B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left[f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]$$

---

1. Bernstein

بنا براین

$$|f(x)-B_n(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \quad (5)$$

چون f روی $[0, 1]$ پیوستهٔ یکنواخت‌است، یک $\delta > 0$ می‌توانیم پیداکنیم به‌طوری که

$$\left|x-\frac{k}{n}\right| < \delta \Longrightarrow \left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

حال مجموع سمت‌راست (۵) را به‌دوقسمت تجزیه می‌کنیم، که به‌صورت $\sum$ و $\sum'$ نمایش می‌دهیم. $\sum$ مجموع جملاتی است‌که برای آنها $|x-k/n| > \delta$ (x را نقطه‌ای ثابت ولی دلخواه در نظر می‌گیریم) و $\sum'$ مجموع بقیهٔ جملات است. به سادگی مشاهده‌می‌شود که $\sum < \varepsilon/2$. با نشان دادن اینکه اگر n به قدر کافی بزرگ انتخاب شود آنگاه $\sum'$ را می‌توان مستقل از x کمتر از $\varepsilon/2$ ساخت، اثبات را تمام می‌کنیم.چون f کراندار است، عدد حقیقی مثبت K وجود دارد به طوری که به ازای هر x در $[0,1]$، $|f(x)| \leqslant K$.
از این موضوع نتیجه می‌شود که

$$\sum' \leqslant 2K\sum\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

که در نامساوی فوق مجموع سمت راست (آن را به $\sum''$ نمایش می‌دهیم) مربوط به تمام Kهایی است که $|x-k/n| \leqslant \delta$. حال کافی است نشان دهیم که اگر n به قدر کافی بزرگ انتخاب شود، آنگاه $\sum''$ را می‌توان مستقل از x کمتر از $\varepsilon/4K$ ساخت. اتحاد (۴) نشان می‌دهد که

$$\delta^2\sum'' \leqslant \frac{x(1-x)}{n}$$

در نتیجه

$$\sum'' \leqslant \frac{x(1-x)}{\delta^2 n}$$

ماکزیمم مقدار $x(1-x)$ روی $[0, 1]$ برابر $1/4$ است، بنا براین

$$\sum'' \leqslant \frac{1}{4\delta^2 n}$$

اگر n راعددصحیحی بزرگتراز $k/\delta^2\varepsilon$ انتخاب کنیم، آنگاه $\sum'' < \varepsilon/4k$، $\sum' < \varepsilon/2$، $|f(x)-B_n(x)| < \varepsilon$ به‌ازای هر x در $[0, 1]$، و قضیهٔ ما به طور کامل ثابت شده است.

قضیهٔ وایرشتراس به وضوح بیان می‌کند که در هر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ روی خط حقیقی چندجمله‌ایها در فضای متری $\mathcal{C}[a, b]$ چگال هستند. ما در بخش بعد این صورت قضیه را به $\mathcal{C}(X, R)$، که در آن X فضای هاوسدرف فشردهٔ دلخواهی است، تعمیم خواهیم‌داد. صورت اندکی خاصتر قضیهٔ تقریب را، که چند جمله‌ایها در $\mathcal{C}[0, 1]$ چگال هستند،

می‌توان در جهت دیگری تعمیم داد. این نتیجه خود چنان جالب و قابل ملاحظه است که آن را بدون آوردن اثبات بیان می‌کنیم. قضیهٔ وایرشتراس برای $\mathcal{C}[0, 1]$ در حقیقت بیان می‌کند که تمام ترکیبات خطی حقیقی توابع

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$$

در $\mathcal{C}[0, 1]$ چگال هستند. منظور ما از ترکیب خطی حقیقی این توابع، عبارتی است که از انتخاب هر مجموعهٔ متناهی از آنها، ضرب هر یک در عددی حقیقی و جمع کردن آنها حاصل می‌شود. به جای به‌کار بردن همهٔ توانهای مثبت x، وجود فاصلهٔ بین آنها را جایز می‌شماریم، و مجموع نامتناهی توابع

$$1, x^{n_1}, x^{n_2}, \dots, x^{n_k}, \dots$$

را در نظر می‌گیریم که n_kها اعداد صحیح و مثبت هستند به قسمی که

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$$

ما به قضیه‌ای توجه داریم که قضیهٔ مونتس[1] نامیده می‌شود و چنین بیان می‌شود که تمام ترکیبات خطی حقیقی این توابع در $\mathcal{C}[0, 1]$ چگال هستند $\Longleftrightarrow$ سری $\sum_{k=1}^{\infty} 1/n_k$ متباعد است. خوانندهٔ علاقه‌مند به اثباتی از این قضیه را به لورنتس[2] [۲۹، صفحات ۴۶–۴۸] یا به اخیزر[3] [۱، صفحات ۴۳–۴۶] رجوع می‌دهیم.

مسائل

۱. ثابت کنید که $\mathcal{C}[a, b]$ تفکیک‌پذیر است.

۲. فرض‌کنید f یک تابع حقیقی پیوسته تعریف شده روی $[0, 1]$ باشد. گشتاورهای f، اعداد $\int_0^1 f(x)\, x^n\, dx$ هستند، که در آن $n = 0, 1, 2, \dots$. ثابت کنید که دو تابع حقیقی پیوستهٔ تعریف شده روی $[0, 1]$ برابرند اگر دنبالهٔ گشتاورهای آن دو تابع یکی باشند.

۳. با استفاده از قضیهٔ وایرشتراس ثابت کنید که برای هر زیرفضای کراندار و بستهٔ خط حقیقی، مانند X، چندجمله‌ایها در $\mathcal{C}(X, R)$ چگال هستند.

۳۶. قضایای استون ـ وایرشتراس

هدف ما در این بخش آشکار کردن ماهیت حقیقی قضیهٔ تقریب وایرشتراس است. با تعمیم قضیه به‌طریقی که خواص غیر اساسی آن کنار گذاشته شود، به‌این مقصود دست می‌یابیم.

از این حقیقت شروع می‌کنیم که برای هر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$، چندجمله‌ایها در $\mathcal{C}[a, b]$ چگال هستند. ما می‌خواهیم فضای هاوسدرف فشردهٔ دلخواه X را جایگزین

---

1. Müntz 2. Lorentz 3. Achieser

$[a,b]$ کنیم و حکم مشابهی در مورد $\mathcal{C}(X,R)$ بیان کنیم. آشکارترین مشکل این برنامه این است که چند جمله‌ای روی X بی‌معنی است و از آن نمی‌توان سخنی به میان آورد. اما این مانع با توجه بیشتری به معنی چند جمله‌ای برطرف می‌شود.

دو تابع ۱ و x تعریف شده روی $[a,b]$ را درنظر بگیرید. P، مجموعهٔ تمام چندجمله‌ایها روی $[a,b]$ برابر است با مجموعهٔ تمام توابعی که از دو تابع ۱ و x با سه عمل زیر به‌دست می‌آید: ضرب، ضرب در اعداد حقیقی، وجمع. مجموعهٔ P جبری است از توابع حقیقی روی $[a,b]$، زیرا نسبت به سه عمل مذکور بسته است. حتی، P زیرجبر $\mathcal{C}[a,b]$ است. P را زیرجبر $\mathcal{C}[a,b]$ تولید شده توسط $\{۱, x\}$ می‌نامیم، زیرا زیرجبری است که $\{۱, x\}$ را دربر دارد و در هر زیرجبری با این خاصیت واقع است. بنابر مسئلهٔ ۳.۲۰ می‌دانیم که بست یک زیرجبر $\mathcal{C}(X,R)$ (برای هر فضای توپولوژیک X) نیز یک زیرجبر $\mathcal{C}(X,R)$ است. بنابراین می‌توان از $\overline{P}$ (بست P) به‌عنوان زیرجبر بستهٔ $\mathcal{C}(X,R)$ تولید شده توسط $\{۱, x\}$ سخن گفت. به همان صورتی که در بالا ذکر شد این بدین معنی است که $\overline{P}$ زیرجبر بسته‌ای است که $\{۱, x\}$ را دربر دارد و درهر زیرجبر بستهٔ با این خاصیت واقع است. با این مفاهیم می‌توانیم قضیهٔ وایرشتراس را به صورت معادل زیر بیان کنیم:

(۱) زیرجبر بستهٔ $\mathcal{C}[a,b]$ که توسط $\{۱, x\}$ تولید می‌شود برابر $\mathcal{C}[a,b]$ است؛

(۲) هر زیرجبر بستهٔ $\mathcal{C}[a,b]$ که $\{۱, x\}$ را دربر داشته باشد برابر $\mathcal{C}[a,b]$ است.

این احکام پرتوان بیان می‌کنند که مجموعهٔ خیلی کوچک توابع $\{۱, x\}$ برای تولید مجموعهٔ خیلی وسیعتر $\mathcal{C}[a,b]$ کافی است. همان طوری که قضیهٔ زیر نشان خواهد داد، این احکام صرفاً بستگی به‌این حقیقت دارد که زیرجبر بسته‌ای از $\mathcal{C}[a,b]$ که $\{۱, x\}$ را دربر دارد نقاط را به مفهوم بخش ۲۷، از هم جدا می‌سازد (زیرا تابع x را در بر دارد) و تمام توابع ثابت را در بر دارد (زیرا تابع ثابت غیر صفر ۱ را در بر دارد).

قبل از ادامهٔ مطلب، ارزش دارد توجه کنیم که حکم (۱)، درصورتی که ۱ یا x را از مجموعهٔ مولد حذف کنیم، درحالت کلی صحت ندارد. اگر x حذف شود، آنگاه زیرجبر بستهٔ تولید شده توسط $\{۱\}$ از توابع ثابت تشکیل می‌شود، و این زیرجبر، جز در حالت $a = b$، برابر $\mathcal{C}[a,b]$ نیست. از طرف دیگر، اگر ۱ حذف شود، آنگاه زیرجبر بستهٔ تولید شده توسط $\{x\}$ صرفاً از توابعی تشکیل می‌شود که در ۰ مقدار صفر دارند، و اگر ۰ در $[a,b]$ باشد، در این صورت توابع ثابت غیر صفر از جمله توابعی هستند که دراین زیر جبر بسته نیستند.

تکیهٔ قضیهٔ ما بر دو لم است، هر دو لم به‌این مربوط می‌شوند که $\mathcal{C}(X,R)$، به‌ازای هر فضای توپولوژیک X، یک شبکه است. اگر f و g دو تابع در $\mathcal{C}(X,R)$ باشند یادآوری می‌کنیم که وصل و تلاقی آنها به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

اولین لم ما بیان شرایطی است که برابر بودن یک زیرشبکهٔ $\mathcal{C}(X, R)$ باخود $\mathcal{C}(X, R)$ را تضمین می‌کند.

لم. X را فضای هاوسدرف فشرده که بیش از یک نقطه دارد فرض کنید، فرض کنید L زیرشبکهٔ بستهٔ $\mathcal{C}(X, R)$ با خاصیت زیر است: اگر x و y نقاط متمایز X و a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند، آنگاه تابع f در L وجود دارد به‌طوری که $f(x)=a$ و $f(y)=b$. در این صورت L برابر $\mathcal{C}(X, R)$ است.[1]

برهان : f را تابعی دلخواه در $\mathcal{C}(X, R)$ فرض کنید. باید نشان دهیم که f در L است. فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. چون L بسته است، کافی است تابعی مانند g در L بسازیم به‌طوری که به‌ازای هر نقطهٔ z در X

$$f(z) - \varepsilon < g(z) < f(z) + \varepsilon$$

زیرا ازاین موضوع نتیجه خواهد شد که $\|f - g\| < \varepsilon$. حال چنین تابعی رامی‌سازیم.

x را نقطه‌ای در X فرض کنید که در این پاراگراف ثابت است، و فرض کنید y نقطه‌ای غیر از x است. بنابر فرضی که در مورد L شده است، تابع f_y در L وجود دارد به‌طوری که $f_y(x) = f(x)$ و $f_y(y) = f(y)$. حال مجموعهٔ باز

$$G_y = \{z : f_y(z) < f(z) + \varepsilon\}$$

را درنظر بگیرید. واضح است که x و y هر دو متعلق به G_y هستند، در نتیجه ردهٔ G_yها، به ازای yهای متمایز از x، یک پوشش باز X است. چون X فشرده است، این پوشش باز دارای یک زیرپوشش متناهی است که آن را به $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ نشان می‌دهیم. اگر توابع متناظر در L به f_1، f_2، ....، f_n نشان داده شوند، آنگاه

$$g_x = f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n$$

آشکارا تابعی در L است به‌طوری که $g_x(x) = f(x)$ و به‌ازای هر نقطهٔ z در X داریم

$$g_x(z) < f(z) + \varepsilon$$

سپس مجموعهٔ باز $H_x = \{z : g_x(z) > f(z) - \varepsilon\}$ را درنظر می‌گیریم. چون x متعلق به H_x است، ردهٔ H_x ها، به‌ازای تمام x های در X، یک پوشش باز X است. از فشردگی X نتیجه می‌شود که این پوشش باز دارای یک زیرپوشش متناهی است که آن را به $\{H_1, H_2, \dots, H_m\}$ نشان می‌دهیم. ما توابع متناظر در L را به g_1، g_2، ....، g_n

۱. اگر X فقط یک نقطه داشته باشد، آنگاه تنها یک تابع ثابت زیرشبکهٔ بستهٔ $\mathcal{C}(X, R)$ با خاصیت مذکور است و برابر $\mathcal{C}(X, R)$ نیست. بنابراین لازم است فرض شود که X بیش ازیک نقطه دارد. به‌علاوه، خواننده توجه خواهد کرد که در برهان این لم، ازفرض هاوسدرف بودن X استفاده نمی‌شود. البته، اگر یک زیرشبکهٔ بستهٔ $\mathcal{C}(X, R)$ باخاصیت مذکور وجود داشته باشد، آنگاه X لزوماً هاوسدرف است، در نتیجه از حذف فرض هاوسدرف بودن، چیزی به‌دست نمی‌آید.

نشان می‌دهیم، و g را به‌صورت $g = g_1 \vee g_2 \vee g_3 \vee \cdots \vee g_m$ تعریف می‌کنیم. واضح است که g تابعی است در L با این خاصیت که به ازای هر نقطهٔ z در X داریم

$$f(z) - \varepsilon < g(z) < f(z) + \varepsilon$$

بنابراین برهان کامل است.

در لم بعدی ما از مفهوم قدر مطلق تابع استفاده می‌کنیم. اگر f تابعی حقیقی یا مختلط تعریف شده روی فضای توپولوژیک X باشد، آنگاه تابع $|f|$، که قدرمطلق f نامیده می‌شود، به‌صورت $|f|(x) = |f(x)|$ تعریف می‌شود. اگر f پیوسته باشد، آنگاه $|f|$ نیز پیوسته است. ملاحظه می‌کنیم که اعمال شبکه‌ای در $\mathscr{C}(X, R)$ را برحسب جمع، ضرب اسکالر، و تشکیل قدر مطلق می‌توان بیان کرد:

$$f \vee g = \frac{f + g + |f - g|}{2}$$

$$f \wedge g = \frac{f + g - |f - g|}{2}$$

این تساویها نشان می‌دهند که هر زیرفضای خطی $\mathscr{C}(X, R)$ که قدر مطلق هر یک از توابعش را دربر داشته باشد، زیرشبکهٔ $\mathscr{C}(X, R)$ است.

لم. X را فضای توپولوژیک دلخواه فرض کنید. آنگاه هر زیرجبر بستهٔ $\mathscr{C}(X, R)$، یک زیرشبکهٔ بستهٔ $\mathscr{C}(X, R)$ نیز هست.

برهان: فرض کنید A زیرجبر بستهٔ $\mathscr{C}(X, R)$ باشد. بنابر تذکرات فوق، کافی است نشان دهیم که اگر f در A باشد، آنگاه $|f|$ نیز در A است. فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده‌شده است. چون $|t|$ تابعی پیوسته از متغیر حقیقی t است، بنابر قضیهٔ تقریب وایرشتراس چندجمله‌ای p' با خاصیت زیر وجود دارد: به ازای هر t در بازهٔ بستهٔ $[-\|f\|, \|f\|]$ داریم $||t| - p'(t)| < \varepsilon/2$. اگر p چندجمله‌ای باشد که از قرار دادن 0 به جای جملهٔ ثابت p' به دست می‌آید، آنگاه p چندجمله‌ای است که جملهٔ ثابت آن 0 است و دارای این خاصیت است که به ازای هر t در $[-\|f\|, \|f\|]$،

$$||t| - p(t)| < \varepsilon$$

چون A یک جبر است، تابع $p(f)$ که متعلق به $\mathscr{C}(X, R)$ است، در A است. بنابرخاصیتی که برای p بیان شد، به سادگی دیده می‌شود که به ازای هر نقطهٔ x در X داریم

$$||f(x)| - p(f(x))| < \varepsilon$$

و از اینجا نتیجه می‌شود که $\||f| - p(f)\| < \varepsilon$. ما برهان را با این تذکر تمام می‌کنیم: چون A بسته است، از اینکه $|f|$ را می‌توان توسط توابع $p(f)$ در A تقریب کرد، نتیجه می‌شود که $|f|$ در A است.

اکنون برای اثبات قضایای استون ـ وایرشتراس آماده هستیم.

قضیهٔ الف (قضیهٔ استون ـ وایرشتراس درتوابع حقیقی). X رافضای هاوسدرف فشرده

و A را زیرجبر بسته‌ای از $\mathcal{C}(X, R)$ فرض کنید که نقاط را جدا می‌کند و یک تابع ثابت غیر صفر را در بر دارد. آنگاه A برابر $\mathcal{C}(X, R)$ است.

برهان : اگر X فقط یک نقطه داشته باشد، آنگاه $\mathcal{C}(X, R)$ فقط توابع ثابت را در بر دارد، و چون A یک تابع ثابت غیر صفر را در بر دارد ویک جبر است، همهٔ توابع‌ثابت را دربر دارد و برابر $\mathcal{C}(X, R)$ است. بنابراین فرض می‌کنیم X بیش ازیک نقطه دارد. بنابر لم‌های فوق، کافی است نشان دهیم‌که اگر x و y نقاط متمایز X و a و b اعدادحقیقی باشند، آنگاه تابع f در A وجود دارد به‌طوری که $f(x) = a$ و $f(y) = b$. چون A نقاط را جدا می‌کند، تابع g در A وجود دارد به‌طوری که $g(x) \neq g(y)$. حال اگر f را به‌صورت

$$f(z) = a\,\frac{g(z) - g(y)}{g(x) - g(y)} + b\,\frac{g(z) - g(x)}{g(y) - g(x)}$$

تعریف کنیم، آنگاه f به‌وضوح دارای خواص مورد نظر است.

ما سپس توجه خودرا به‌حالت توابع مختلط معطوف می‌داریم، یعنی، به شرایطی که تضمین کنند یک زیرجبر بستهٔ $\mathcal{C}(X, C)$ برابر خود $\mathcal{C}(X, C)$ باشد. قبل از هر چیز لازم است درک کنیم که شرایط قضیهٔ **الف** در این حالت کافی نیستند. ساده ترین مثال در این مورد به‌اندک معلوماتی دربارهٔ نظریهٔ توابع تحلیلی نیاز دارد، و خواننده‌ای که چنین معلوماتی را ندارد می‌تواند بلافاصله به‌مطالعهٔ پاراگراف بعد بپردازد. فرض کنید X قرص واحد بستهٔ $\{z : |z| \leqslant ۱\}$ در صفحهٔ مختلط باشد. به‌وضوح X فضای هاوسدرف فشرده است. A، مجموعهٔ تمام توابع در $\mathcal{C}(X, C)$ را که در درون X تحلیلی هستند، درنظر بگیرید. آشکارا A زیرجبر $\mathcal{C}(X, C)$ است، و با استفاده از قضیهٔ مورر[1] مشاهده می‌شود که A یک مجموعهٔ بسته است. A نقاط را جدا می‌کند، زیرا A تابع f را که به صورت $f(z) = z$ تعریف می‌شود، در بر دارد. A همچنین تمام توابع ثابت را دربر دارد. باهمهٔ اینها، A برابر $\mathcal{C}(X, C)$ نیست؛ زیرا تابع g که به‌صورت $g(z) = \bar{z}$ تعریف می‌شود در $\mathcal{C}(X, C)$ است ولی در A نیست، زیرا این تابع در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست.

برای برطرف کردن نقص قضیهٔ **الف** درحالت مختلط چه می‌توان کرد؟ جواب این سؤال در ساختن تابع مزدوج که در آخر بخش ۲۰ شرح داده شده است، به‌دست می‌آید. خواننده را یادآور می‌شویم که اگر f تابع مختلط تعریف شده روی فضای توپولوژیک X باشد، $\bar{f}$، مزدوج آن، به‌صورت $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$ تعریف می‌شود. همچنین تعریف قسمت حقیقی و قسمت موهومی f در این‌جا مفید است:

$$I(f) = \frac{f - \bar{f}}{۲i} \quad و \quad R(f) = \frac{f + \bar{f}}{۲} \qquad (۱)$$

ملاحظه می‌کنیم که اگر تابع مختلط f در دو نقطهٔ متمایز X مقادیر متفاوتی داشته باشد، آنگاه لااقل یکی از توابع $R(f)$ و $I(f)$ نیز درآن نقاط مقادیر متفاوتی دارد.

---
1. Morera

قضیهٔ ب (قضیهٔ استون - وایرشتراس در توابع مختلط). X را فضای هاوسدرف فشرده فرض کنید، و A را زیرجبر بسته‌ای از $\mathcal{C}(X,C)$ بگیرید که نقاط را جدا کند، یک تابع ثابت غیرصفر، و مزدوج هر تابعش را دربر داشته باشد. آنگاه A برابر $\mathcal{C}(X,C)$ است.

برهان: توابع حقیقی در A به وضوح یک زیرجبر بستهٔ $\mathcal{C}(X,R)$، مانند B تشکیل می‌دهند. برای لحظه‌ای این فرض را قبول کنید که B برابر $\mathcal{C}(X,R)$ است. اگر f تابعی دلخواه در $\mathcal{C}(X,C)$ باشد، آنگاه $R(f)$ و $I(f)$ در $\mathcal{C}(X,R)$ هستند، و بنابراین در B هستند. ولی چون $f = R(f) + iI(f)$ و A یک جبر است، f در A است و بنابراین A برابر $\mathcal{C}(X,C)$ است. بنابراین کافی است نشان دهیم که B برابر $\mathcal{C}(X,R)$ است. این مطلب را با استفاده از قضیهٔ **الف** ثابت می‌کنیم.

ابتدا نشان می‌دهیم که B نقاط را جدا می‌کند. فرض کنید x و y نقاط متمایز در X باشند. چون A نقاط را جدا می‌کند، یک تابع f در A وجود دارد که در x و y مقادیر متفاوت دارد. همان طوری که در تذکار فوق دیدیم، $R(f)$ یا $I(f)$ نیز در x و y دارای مقادیر متفاوت است. چون A جبری است که مزدوج هر تابعش را دربر دارد، فرمول(۱) نشان می‌دهد که $R(f)$ و $I(f)$ هر دو در B هستند، در نتیجه B نقاط را جدا می‌کند. اینک نشان می‌دهیم که B یک تابع ثابت غیرصفر دربر دارد. بنابر مفروضات، A یک تابع ثابت غیرصفر g دربر دارد. A جبری است که مزدوج هر تابعش را دربر دارد، در نتیجه $g\bar{g} = |g|^2$ یک تابع ثابت غیرصفر در B است. اکنون مستقیماً ازقضیهٔ **الف** نتیجه می‌شود که B برابر $\mathcal{C}(X,R)$ است، و برهان ما تمام است.

دو قضیهٔ استون - وایرشتراس از جملهٔ مهمترین قضایا در آنالیز نوین هستند. بحث نظریه‌ای که در سه فصل آخر این کتاب آمده است بدون این دو قضیه به‌سختی امکان‌پذیر است، این دوقضیه دارای کاربردهای بسیار دیگری نیز هستند.[1]

مسائل

۱. قضیهٔ تقریب وایرشتراس دو متغیره را ثابت کنید: اگر $f(x,y)$ تابعی حقیقی تعریف شده وپیوسته روی‌مستطیل بستهٔ $X = [a,b] \times [c,d]$ درصفحهٔ اقلیدسی R^2 باشد، آنگاه می‌توان fرا ، با چند جمله‌ایهایی برحسب x و y با ضرایب حقیقی، روی X تقریب یکنواخت کرد.

۲. فرض کنید X قرص واحد بسته درصفحهٔ مختلط باشد، نشان دهید که می‌توان هر تابع f در $\mathcal{C}(X,C)$ را، با چندجمله‌ایهایی برحسب z و $\bar{z}$ با ضرایب مختلط، روی X تقریب یکنواخت کرد.

۳. فرض کنید X و Y فضاهای هاوسدرف فشرده باشند، و f تابعی در $\mathcal{C}(X \times Y, C)$ باشد. نشان دهیدکه f را می‌توان باتوابعی به صورت $\sum_{i=1}^{n} f_i g_i$، که f_iها در $\mathcal{C}(X,C)$ و g_iها در$\mathcal{C}(Y,C)$ هستند، تقریب یکنواخت کرد.

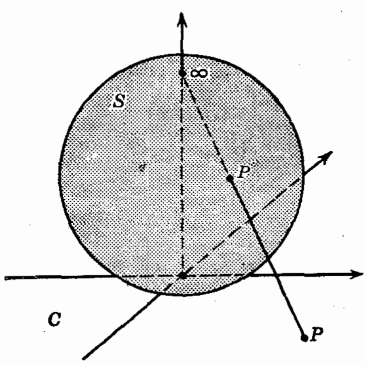
---

۱. به استون [۴۰] رجوع کنید.

۳۷. فضاهای هاوسدرف فشردهٔ موضعی

در بخش ۲۳ فضای فشردهٔ موضعی را به مثابهٔ فضایی توپولوژیک تعریف کردیم که هر نقطه‌اش یک همسایگی با بست فشرده دارد. فضاهای فشردهٔ موضعی اغلب در مواردِاستعمال توپولوژی در هندسه و آنالیز دیده می‌شوند، و چون این‌گونه فضاهای کاربردی، تقریباً همواره فضاهای هاوسدرف هستند، در این بخش توجه خودرا به فضاهای هاوسدرف‌فشردهٔ موضعی محدود می‌کنیم.

نکتهٔ اصلی در مورد این فضاها این است که تنها با الحاق یک نقطهٔ مناسب به فضا می‌توان آن را به‌فضای هاوسدرف فشرده تبدیل کرد. شاید خواننده با این روش در آنالیز آشنا باشد، درآنجا صفحهٔ مختلط C، با الحاق یک «نقطهٔ فرضی» که نقطهٔ بینهایت می‌نامند و به ∞ نشان می‌دهند، گسترش می‌یابد. این نقطهٔ فرضی را می‌توان هر شیئی که در C نیست در نظر گرفت. مجموعهٔ بزرگتر $C \cup \{\infty\}$ را به C_∞ نشان می‌دهیم. C_∞ را صفحهٔ مختلط گسترش یافته می‌نامند که در آن همسایگیهای ∞ (بجز خود C_∞)، مکملهای زیرمجموعه‌های بسته و کراندار (یعنی، زیرفضاهای فشردهٔ) C در C_∞ اختیار شده‌اند. این ایده‌ها چیزی به درک ما از صفحهٔ مختلط نمی‌افزایند، جز اینکه بسیاری از برهانها را روشن کرده، احکام بسیاری ازقضیه‌ها را ساده می‌کنند، و به‌همین دلیل با ارزش هستند. شکل ۲۷ یک طریق آسان برای تجسم صفحهٔ مختلط گسترش یافته عرضه می‌کند.



ش ۲۷. کرهٔ ریمان

دراین شکل، سطح S کره‌ای به شعاع ۱/۲ است که در مبدأ مختصات بر C مماس است. مرسوم است که نقطهٔ تماس را قطب جنوب و نقطهٔمقابل آن را قطب شمال نامند.

افکنش ترسیمی از قطب شمال، که درشکل نشان داده شده است، یک هومئومورفیسم بین S منهای قطب شمال، و C برقرار می‌کند، در نتیجه از دیدگاه توپولوژیکی S منهای قطب شمالش را می‌توان اساساً با صفحهٔ مختلط C، یکی در نظر گرفت. قطب شمال S را می‌توان به عنوان نقطهٔ بینهایت در نظر گرفت، و به دست آوردن C_∞ از C برمی‌گردد به استفاده از نقطهٔ ∞ برای پر کردن سوراخ C در قطب شمال. وقتی بدین طریق S با صفحهٔ مختلط گسترش یافته یکی انگاشته شد، معمولاً کرهٔ ریمان نامیده می‌شود. به‌طور خلاصه، فضای هاوسدرف فشردهٔ موضعی C، با اضافه کردن تک نقطهٔ ∞، به فضای هاوسدرف فشردهٔ S تبدیل شده است.

حال بنایی را که در فوق به آن اشاره کردیم در حالت فضای هاوسدرف فشردهٔ موضعی دلخواه X تعمیم می‌دهیم. فرض کنید ∞ شیئی است که در X نیست، و مجموعهٔ $X_\infty = X \cup \{\infty\}$ را تشکیل دهید. با درنظر گرفتن مجموعه‌های زیر به‌عنوان مجموعه‌های باز، یک توپولوژی روی X_∞ تعریف می‌کنیم: (الف) زیرمجموعه های باز X،

به عنوان زیرمجموعه‌های X_∞؛ (ب) مکمل زیرفضاهای فشردهٔ X در X_∞؛ و (ج) کل فضای X_∞. اگر توجه کنیم که زیرفضای فشردهٔ فضای هاوسدرف، بسته است، آنگاه به سادگی می‌توان نشان داد که این رده از مجموعه‌ها واقعاً یک توپولوژی روی X_∞ است، و همچنین می‌توان نشان داد که توپولوژی مفروض X برابر توپولوژی نسبی آن به عنوان زیرفضای X_∞ است. آنچه در زیر می‌آید، خواص اصلی فضای توپولوژیک X_∞ هستند.

(۱) X_∞ فشرده‌است. برای اثبات این موضوع، $\{G_i\}$ را پوشش باز X_∞ فرض کنید. ما باید یک زیرپوشش متناهی به‌دست آوریم. اگر X_∞ در بین G_iها باشد، آنگاه $\{G_i\}$ به وضوح دارای یک زیرپوشش متناهی، یعنی $\{X_\infty\}$، است. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که هر G_i مجموعه‌ای از نوع (الف) یا از نوع (ب) است. حداقل یکی از G_iها، مثلاً G_{i_0} باید نقطهٔ ∞ را دربر داشته باشد، و این مجموعه لزوماً باید از نوع (ب) باشد. در این صورت مکمل آن G'_{i_0} یک زیرفضای فشردهٔ X است که در اجتماع یک رده از زیرمجموعه‌های باز X به صورت $G_i \cap X$ قرار دارد، در نتیجه G'_{i_0} در اجتماع یک زیررده متناهی از این مجموعه‌ها، مثلاً $\{G_1 \cap X, G_2 \cap X, \ldots, G_n \cap X\}$ قرار دارد. حال به سادگی دیده می‌شود که ردهٔ $\{G_{i_0}, G_1, G_2, \ldots, G_n\}$ یک زیرپوشش متناهی از پوشش باز اولیهٔ X_∞ است، در نتیجه X_∞ فشرده است.

(۲) X_∞ هاوسدرف است. X هاوسدرف است، در نتیجه هر زوج از نقاط متمایز در X_∞ که هر دو نقطهٔ آن در X قرار داشته باشد را می‌توان با زیرمجموعه‌های باز X از هم جدا کرد، و بنابراین این دو نقطه را می‌توان توسط زیرمجموعه‌های باز X_∞ از نوع (الف) از هم جدا کرد. بنابراین کافی است نشان دهیم که هر نقطهٔ x در X و نقطهٔ ∞ را می‌توان توسط زیرمجموعه‌های باز X_∞ ازهم جداکرد. X فشردهٔ موضعی است، درنتیجه x یک همسایگی G دارد که بست آن $\bar{G}$ در X فشرده است. اکنون واضح است که G و $\bar{G}'$ زیرمجموعه‌های باز مجزای X_∞ هستند به طوری که $x \in G$ و $\infty \in \bar{G}'$، در نتیجه X_∞ هاوسدرف است.

فضای هاوسدرف فشردهٔ X_∞ را که با فضای هاوسدرف فشردهٔ موضعی X، به‌طریقی که درفوق شرح داده شد مربوط‌شده است، فشرده شدهٔ تک نقطه‌ای X، و نقطهٔ ∞ را نقطهٔ بینهایت نامند. می‌دانیم که فضاهای فشرده، فشردهٔ موضعی‌اند، در نتیجه این ایده‌ها بدون هیچ تغییری برای فضای هاوسدرف فشردهٔ X به کار می‌رود. به سادگی دیده می‌شود که فضای هاوسدرف فشردهٔ موضعی X، فشرده است $\Longleftrightarrow$ ∞ نقطهٔ منزوی X_∞ است. ممکن است بررسی فشرده سازی تک نقطه‌ای فضای هاوسدرف فشرده بی‌فایده به‌نظر برسد، ولی در بخش بعد خواهیم دید که این موضوع ما را قادر می‌کند که فرضیات قضیهٔ استون - وایرشتراس را ضعیفتر کنیم.

فشرده سازی تک نقطه‌ای، اصولاً در آسان کردن برهانهای قضیه‌های مربوط به‌فضاهای هاوسدرف فشردهٔ موضعی، مفید واقع می‌شود. مثلاً، به‌سادگی دیده می‌شود که‌هرفضای X از این نوع منظم کامل است، زیرا X زیرفضای X_∞ است، که X_∞ هاوسدرف فشرده و بنابراین منظم کامل است، و هر زیرفضای منظم کامل، منظم کامل است. بالنتیجه، اگر x یک

نقطهٔ X، و G یک همسایگی x باشدکه برابرکل فضا نیست، آنگاه تابع حقیقی پیوستهٔ f تعریف شده روی X وجود دارد که مقادیرش در بازهٔ بستهٔ $[۰, ۱]$ واقع‌اند بـه‌طوری کـه $f(x) = ۱$ و $f(G') = ۰$. مجدداً با استناد به‌فشرده سازی‌تک‌نقطه‌ای، به‌سادگی می‌توان این‌مطلب را به‌حالتی‌که یک زیرفضای فشردهٔ دلخواه X جایگزین x شده است، تعمیم داد.

قضیهٔ الف. X را فضای هاوسدرف فشردهٔ موضعی، و C را زیرفضای فشردهٔ X فرض کنید، و G راهمسایگی C که برابرکل فضا نیست، بگیرید. آنگاه تابع حقیقی پیوستهٔ f تعریف‌شده روی X وجود دارد که مقادیرش در بازهٔ بستهٔ $[۰, ۱]$ واقع‌اند به طوری که

$$f(C) = ۱ \quad \text{و} \quad f(G') = ۰$$

برهان: فرض کنید X_∞، فشرده شدهٔ تک نقطه‌ای X باشد. آنگاه C و G' زیـرفضاهای بستهٔ مجزای X_∞ هستند، و بنا بر لم اوریسون تابع حقیقی پیوستهٔ g تعریف شده روی X_∞ وجـود دارد که مقادیرش در $[۰, ۱]$ واقع‌اند به طوری که $g(C) = ۱$ و $g(G') = ۰$. اگر f تحدید g به X باشد، آنگاه f دارای خواص مورد نظر است.

این نتیجه ابزاری مهم در نظریـهٔ اندازه و انتگرالگیری روی فضاهـای هاوسدرف فشردهٔ موضعی است.

مسائل

۱. X را فضای هاوسدرف فشردهٔ موضعی و C_1 و C_2 را زیرفضاهای فشردهٔ مجـزای X فرض کنید. نشان دهید که C_1 و C_2 همسایگیهای مجزایی دارند که بست آنها فشرده‌اند.

۲. نشان دهید که فضای هاوسدرف فشردهٔ موضعی است $\Longleftrightarrow$ هـر نقطهٔ آن نقطهٔ درونی زیرفضایی فشرده است.

۳. فرض‌کنید f نگاشتی ازفضای‌فشردهٔ موضعی X بروی فضای‌هاوسدرف Y باشد. نشان دهید که اگر f هم پیوسته و هم‌باز باشد، Y نیز فشردهٔ موضعی است.

۴. نشان دهید کـه اگر حاصلضرب رده‌ای ناتهی از فضاهای هـاوسدرف فشردهٔ مـوضعی باشد، آنگاه هر فضای مختص نیز فشردهٔ موضعی است.

۳۸. قضایای استون ـ وایرشتراس گسترش یافته

فرض‌کنید X فضای هاوسدرف فشردهٔ موضعی باشد. مقصود کنونی ما تعمیم قضیه‌های بخش ۳۶ به این حالت است.

گوییم تابع حقیقی یامختلط تعریف شده روی X در بینهایت صفرمی‌شود اگر به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ زیرفضای فشردهٔ X مانند C وجودداشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر x خارج C، $|f(x)| < \varepsilon$. مثلا، روی خط حقیقی، توابع f و g که با

$$f(x) = e^{-x^2} \quad \text{و} \quad g(x) = (x^2 + 1)^{-1}$$

تعریف می‌شوند دارای ایـن خاصیت هستند، ولـی توابع ثابت غیر صفر ایـن خاصیت را

ندارند. به‌سادگی دیده می‌شود که اگر X فشرده باشد، آنگاه هر تابع حقیقی یا مختلط تعریف شده روی X، در بینهایت صفر می‌شود، بنابراین در این حالت شرط صفرشدن تابع در بینهایت، هیچ قیدی نیست و خود به‌خود حاصل است.

مجموعهٔ تمام توابع حقیقی پیوستهٔ تعریف شده روی X که در بینهایت صفرمی‌شوند را به $\mathcal{C}_0(X, R)$ نشان می‌دهیم. $\mathcal{C}_0(X, C)$ به‌همین ترتیب تعریف می‌شود. اگر f تابعی در یکی از این مجموعه‌ها باشد، آنگاه چون در خارج یک زیرفضای فشردهٔ X مانند C، $|f(x)| < \varepsilon$ و f روی C کراندار است، الزاماً f روی تمام X کراندار است. از این موضوع نتیجه می‌شودکه $\mathcal{C}_0(X, R) \subseteq \mathcal{C}(X, R)$ و $\mathcal{C}_0(X, C) \subseteq \mathcal{C}(X, C)$. به‌علاوه، تذکربند قبل نشان می‌دهد که وقتی X فشرده است، این دو شمول به‌تساوی تبدیل می‌شوند.

لم. $\mathcal{C}_0(X, R)$ و $\mathcal{C}_0(X, C)$ زیرجبرهای بستهٔ $\mathcal{C}(X, R)$ و $\mathcal{C}(X, C)$ هستند.

برهان: ابتدا نشان می‌دهیم که $\mathcal{C}_0(X, R)$ زیرمجموعهٔ بستهٔ $\mathcal{C}(X, R)$ است. کافی است نشان دهیم که اگر f تابعی باشد در $\mathcal{C}(X, R)$ که دربست $\mathcal{C}_0(X, R)$ است، آنگاه f در بینهایت صفرمی‌شود. فرض‌کنید $\varepsilon > 0$ داده شده است. چون f دربست $\mathcal{C}_0(X, R)$ است، تابع g در $\mathcal{C}_0(X, R)$ وجود دارد به‌طوری که $\|f - g\| < \varepsilon/2$، و از این نتیجه می‌شود که به‌ازای هر x داریم $|f(x) - g(x)| < \varepsilon/2$. تابع g در بینهایت صفر می‌شود، در نتیجه یک زیرفضای فشردهٔ X مانند C وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر x خارج C داریم $|g(x)| < \varepsilon/2$. حال فوراً نتیجه می‌شود که به‌ازای هر x خارج C

$$|f(x)| = |[f(x) - g(x)] + g(x)| \leqslant |f(x) - g(x)| + |g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

بنابراین f در بینهایت صفر می‌شود. همین برهان نشان می‌دهد که $\mathcal{C}_0(X, C)$ زیرمجموعهٔ بستهٔ $\mathcal{C}(X, C)$ است.

سپس نشان می‌دهیم که اگر f و g در $\mathcal{C}_0(X, R)$ باشند، آنگاه $f + g$ نیز در $\mathcal{C}_0(X, R)$ است، یعنی نشان می‌دهیم که $f + g$ در بینهایت صفر می‌شود. فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. چون f در بینهایت صفرمی‌شود، یک زیرفضای فشردهٔ X، مانند C_1 وجود داردکه درخارج آن $|f(x)| < \varepsilon/2$. مشابهاً، یک زیرفضای فشردهٔ X، مانند C_2 وجود دارد که در خارج آن، $|g(x)| < \varepsilon/2$. بنابراین درخارج $C = C_1 \cup C_2$ که زیرفضای فشردهٔ X است

$$|(f + g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

درنتیجه $f + g$ در بینهایت صفرمی‌شود. می‌توان به‌طریقی مشابه به ثابت کردکه $\mathcal{C}_0(X, R)$ نسبت به ضرب اسکالر و ضرب نیز بسته است؛ و چون $\mathcal{C}_0(X, R)$ ناتهی است (زیرا تابع متحد با صفر را دربر دارد)، به‌وضوح $\mathcal{C}_0(X, R)$ زیرجبر $\mathcal{C}(X, R)$ است. مشابهاً، دیده می‌شود که $\mathcal{C}_0(X, C)$ زیرجبر $\mathcal{C}(X, C)$ است.

این لم به‌ما اجازه می‌دهد که خود $\mathcal{C}_0(X, R)$ و $\mathcal{C}_0(X, C)$ را به‌عنوان جبرهای توابع درنظر بگیریم. اکنون یک ارتباط طبیعی و مفید بین توابع پیوستهٔ تعریف شده روی X که در بینهایت صفر می‌شوند و توابع پیوستهٔ تعریف شده روی X_∞ که درنقطهٔ ∞ صفر می‌شوند برقرار می‌کنیم، البته X_∞ فشرده شدهٔ تک نقطه‌ای X است. وقوف کامل به‌تفاوت بین این دو مفهوم در اینجا مهم است. در بینهایت صفر شدن تابع روی X دقیقاً چیزی است که تعریف فوق بیان می‌کند. لازم نیست که ۰ یکی از مقادیر چنین تابعی باشد. از طرف دیگر، عبارت تابع روی X_∞ در نقطهٔ ∞ صفر می‌شود معادل این است که بگوییم مقدار این تابع در نقطهٔ بینهایت ۰ است.

لم. $\mathcal{C}_0(X, R)$ برابر است با مجموعهٔ تمام تحدیدهای به X توابع در $\mathcal{C}(X_\infty, R)$ که‌در نقطهٔ ∞ صفر می‌شوند. مشابهاً، $\mathcal{C}_0(X, C)$ برابر است با مجموعهٔ تمام تحدیدهای به X توابع در $\mathcal{C}(X_\infty, C)$ که در نقطهٔ ∞ صفر می‌شوند.

برهان : g را تابعی در $\mathcal{C}(X_\infty, R)$ فرض کنید که در نقطهٔ ∞ صفر است. چون g در ∞ پیوسته است، به‌ازای هر $\epsilon > 0$ یک همسایگی G از ∞ موجود است به‌طوری که به‌ازای هر x در G، $|g(x)| < \epsilon$. بنابر تعریف همسایگی ∞ که در بخش ۳۷ عرضه شد، G یا کل فضای X_∞ است یا مکمل یک زیرفضای فشردهٔ X در X_∞. در هر حالت، به وضوح یک زیرفضای فشردهٔ X مانند C وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر نقطهٔ x در X و خارج C، $|g(x)| < \epsilon$. به‌عبارت دیگر f، یعنی تحدید g به X، در بینهایت صفر می‌شود، در نتیجه f تابعی در $\mathcal{C}_0(X, R)$ است. همچنین باید نشان دهیم که بالعکس، هر تابع f در $\mathcal{C}_0(X, R)$ از تابعی مانند g در $\mathcal{C}(X_\infty, R)$ که درنقطهٔ ∞ صفراست بدین طریق به دست می‌آید. کافی است تابع g را به صورت $g(x) = f(x)$ به‌ازای هر x در X، و $g(\infty) = 0$، تعریف کنیم و ملاحظه کنیم که شرط در بینهایت صفر شدن f در حقیقت آن چیزی است که برای تضمین پیوستگی g در ∞ لازم است. حکم دوم لم کاملا به‌همین ترتیب ثابت می‌شود.

مطالب فوق به‌این منظور بیان شده است که اثبات دو قضیهٔ زیر را نسبتاً ساده کند. این دو قضیه را قضایای استون ـ وایرشتراس گسترش یافته می‌نامند.

قضیهٔ الف. X را فضای هاوسدرف فشردهٔ موضعی، و A را زیرجبر بسته‌ای از $\mathcal{C}_0(X, R)$ فرض کنید که نقاط را جدا می‌کند و به ازای هر نقطه در X تابعی دربر دارد که در آن نقطه صفر نیست. آنگاه A برابر $\mathcal{C}_0(X, R)$ است.

برهان : فرض کنید X_∞ فشرده شدهٔ تک نقطه‌ای X باشد. بنابر لم دوم، می‌توانیم هر تابع در A را به تابعی در $\mathcal{C}(X_\infty, R)$ که در ∞ صفر می‌شود گسترش دهیم. مجموعهٔ همهٔ این گسترشها را با A_0 نمایش می‌دهیم. مفروضات ما نتیجه می‌دهد که A_0 زیرجبر بسته‌ای از $\mathcal{C}(X_\infty, R)$ است که نقاط را جدا می‌کند و دارای این خاصیت است که تمام توابعش در ∞ صفر می‌شوند. فرض کنید A_1 مجموعهٔ تمام توابعی باشد که از جمع کردن

توابع ثابت با هر یک از توابع $A_{\circ}$ به‌دست مـی‌آیند. به سادگی دیـده می‌شود که A_1 زیرجبر بسته‌ای از $\mathcal{C}(X_\infty, R)$ است که نقاط را جدا می‌کند و یک تابع ثابت غیرصفر را دربردارد، درنتیجه‌بنا برقضیهٔ ۳۶ ـ الف، A_1 برابر $\mathcal{C}(X_\infty, R)$ است. ازاینجا نتیجه می‌شود که $A_{\circ}$ از تمام توابعی در $\mathcal{C}(X_\infty, R)$ تشکیل شده است که در ∞ صفر می‌شوند، دوباره لم دوم را به کار می‌بریم و می‌بینیم که A برابر $\mathcal{C}_{\circ}(X, R)$ است.

قضیهٔ ب. X را فضای هـاوسدرف فشردهٔ موضعی و A را زیـرجبر بستـه‌ای از $\mathcal{C}_{\circ}(X, C)$ فرض کنید که نقاط را جدا می‌کند، بـه ازای هر نقطه در X تابعی را دربر دارد کـه در آن نقطه صفر نیست، و مزدوج هر تابعش را دربردارد. در ایـن صورت A برابر $\mathcal{C}(X, C)$ است.

برهان : برهان قضیهٔ الف در اینجا کلمه به کلمه به کار خواهد رفت.

توجه می‌کنیم که وقتی در دو قضیهٔ فوق X فشرده فرض می‌شود، و در نتیجه

$$\mathcal{C}_{\circ}(X, C) = \mathcal{C}(X, C) \quad \text{و} \quad \mathcal{C}_{\circ}(X, R) = \mathcal{C}(X, R)$$

آنگاه دو قضیهٔ کمی قویتر از قضایای استون ـ وایرشتراس به دست مـی‌آیند، زیرا همان نتایج را تحت مفروضات کمی ضعیفتر، بیان می‌کنند.

مسائل

۱. اگر X فضای هـاوسدرف فشردهٔ موضعی باشد، ثابت کنید کـه $\mathcal{C}_{\circ}(X, R)$ زیرشبکهٔ $\mathcal{C}(X, R)$ است.

۲. فرض کنید X فضای هاوسدرف فشردهٔ موضعی باشد، نشان دهید کـه توپولوژی ضعیف تولید شده توسط $\mathcal{C}_{\circ}(X, R)$ برابر توپولوژی مفروض است.

۳. فرض‌کنید X فضای هاوسدرف فشردهٔ‌موضعی و S زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{C}_{\circ}(X, R)$ بـاشد که نقاط را جدا می‌کند و به‌ازای هرنقطه در X تابعی دربر دارد که درآن نقطه صفر نیست. نشان دهیدکه توپولوژی ضعیف تولید شده توسط S برابر توپولوژی مفروض است.

واژه‌نامهٔ انگلیسی ـ فارسی

abnormal set	مجموعهٔ غیرعادی
algebra with identity	جبر باهمانی
algebraic numbers	اعداد جبری
antisymmetric	پاد متقارن
antisymmetry	پاد تقارنی
approximation	تقریب
axiom of choice	اصل انتخاب
basic open cover	پوشش باز پایه‌ای
Bernstein polynomials	چند جمله‌ایهای برنشتاین
binary relation	رابطهٔ دوتایی
Boolean algebra of sets	جبر بولی مجموعه‌ها
boundary	مرز
–point	نقطهٔ مرزی
bounded mapping	نگاشت کراندار
Cantor's continuum hypothesis	فرض متصلهٔ کانتور
cardinal number	عدد اصلی
–of continuum	عدد اصلی متصله
Cartesian product	حاصلضرب دکارتی
Cauchy sequence	دنبالهٔ کوشی
circular	مستدیر
– relation	رابطهٔ مستدیر

characteristic functions	توابع مشخصه
class	رده
closed	بسته
— - open base	پایهٔ بسته ـ باز
— subalgebra	زیرجبر بسته
— subbase	زیرپایهٔ بسته
closure	بستار
— of set	بستار مجموعه
commutative algebra	جبر جابه‌جایی
compact subspace	زیرفضای فشرده
comparable element	عضو قابل مقایسه
complete lattice	شبکهٔ کامل
completely regular space	فضای منظم کامل
completion of metric space	تکمیل فضای متری
complex algebra	جبر مختلط
component	مؤلفه
composition	ترکیب
congruent	همنهشت
conjugate	مزدوج
conjugation	مزدوج گیری
connected	همبند
— subspace	زیرفضای همبند
continuous	پیوسته
— image	نگارهٔ پیوسته
— mapping	نگاشت پیوسته
continuum hypothesies	فرض متصله
convergent	همگرا
— sequence	دنبالهٔ همگرا
— sequence limit	حد دنبالهٔ همگرا
convex set	مجموعهٔ محدب
coordinatewise	مختص به مختص
countably compact space	فضای به‌طور شمارا فشرده
countably infinte	شمارای نامتناهی
decimal expansion	بسط اعشاری

defining	معرف
— closed subbase	زیرپایهٔ بستهٔ معرف
— open subbase	زیرپایهٔ بازمعرف
dense set	مجموعهٔ چگال
derived set	مجموعهٔ مشتق
diameter	قطر
difference	تفاضل
disconnected	ناهمبند
disconnection	ناهمبندی
discrete	گسسته
— space	فضای گسسته
— topology	توپولوژی گسسته
disjoint class	ردهٔ مجزا
distributive laws	قوانین توزیعی
ε — net	ε ـ تور
equicontinuous function	تابع همپیوسته
equivalence relation	رابطهٔ هم‌ارزی
Euclidean plane	صفحهٔ اقلیدسی
extended	گسترده، گسترش یافته
— complex plane	صفحهٔ مختلط گسترش یافته
— real line	خط حقیقی گسترده
— real numbers	اعداد حقیقی گسترده
extension	گسترش
frame of reference	دستگاه مرجع
finite	متناهی
— cardinal numbers	اعداد اصلی متناهی
— intersections	اشتراك متناهی
— intersections set	اشتراك متناهی مجموعه
— unions	اجتماع متناهی
— unions set	اجتماع متناهی مجموعه
function	تابع
— algebras	جبرهای تابعی

— spaces	فضاهای تابعی
generated	تولید شده
greatest lower bound	بزرگترین کران پایین
homeomorphic	هومئومورف
— image	نگارهٔ هومئومورف
homeomorphism	هومئومورفیسم
identity element	عضو همانی
inclusion	شمول
index set	مجموعهٔ اندیسگذار
infimum	اینفیموم
infinite cardinal numbers	اعداد اصلی نامتناهی
interior	درون، درونی
— of set	درون مجموعه
— point	نقطهٔ درونی
into mapping	نگاشت بتوی
inverse	وارون
— image	نگارهٔ وارون
— mapping	نگاشت وارون
isolated point	نقطهٔ منزوی
isometric	همانمتر
isometry	همانمتری
i th coordinate set	i امین مجموعهٔ مختص
join	مجتمع
joint continuity	پیوستگی توأم
jointly continuous	توأماً پیوسته
lattice	شبکه
least upper bound	کوچکترین کران بالا
Lebesgue number	عدد لبگ
limit point	نقطهٔ حدی

linear order relation	رابطهٔ ترتیبی خطی
linearly ordered set	مجموعهٔ مرتب خطی
locally	موضعی
– compact	فشردهٔ موضعی
– connected	همبند موضعی
lower bound	کران پایین
maximal element	عضو ماکسیمال
meet	مشترك
metrizable	متریك‌پذیر
minimum	مینیموم
monotone sequence	دنبالهٔ یکنوا
neighborhood	همسایگی
normal set	مجموعهٔ عادی
numerically equivalent	به‌طور عددی هم‌ارز
one-point compactification	فشرده شدهٔ تك نقطه‌ای
one-to-one corespondence	تناظر یك به یك
onto mapping	نگاشت بروی
open	باز
– base	پایهٔ باز
– - closed interval	بازهٔ باز ـ بسته
– cover	پوشش باز
– mappiny	نگاشت باز
– subbase	زیرپایهٔ باز
partial order relation	رابطهٔ ترتیبی جزئی
partially ordered set	مجموعهٔ جزئاً مرتب
partition of set	افراز مجموعه
perfect set	مجموعهٔ بی‌کاست
point at infinity	نقطهٔ بینهایت
pointwise	نقطه‌ای
– convergence	همگرایی نقطه‌ای

— limit	حد نقطه‌ای
— operation	عمل نقطه‌ای
product	حاصلضرب
— mappiny	حاصلضرب نگاشتها
— of sets	حاصلضرب مجموعه‌ها
- topology	توپولوژی حاصلضرب
projection	افکنش
pseudo-metric	شبه متریك
real algebra	جبر حقیقی
reflexive	منعکس
— relation	رابطهٔ منعکس
relative topology	توپولوژی نسبی
restriction	تحدید
ring of sets	حلقهٔ مجموعه‌ها
Russell's paradox	پارادکس راسل
second axiom of countability	اصل دوم شمارایی
separable space	فضای تفکیك‌پذیر
separation	جداسازی
Stone-Cech compactification	فشرده سازی استون - چخ
strip	نوار
strongest topology	قویترین توپولوژی
subalgebra	زیرجبر
— of algebra	زیرجبر یك جبر
subbasic open cover	پوشش باز زیرپایه‌ای
subcover	زیرپوشش
sublattice	زیرشبکه
— of lattice	زیرشبکهٔ شبکه
symmetric	متقارن
— difference	تفاضل متقارن
— relation	رابطهٔ متقارن
symmetry	تقارن
ternary expansion	بسط سه‌تایی

topology	توپولوژی
total order relation	رابطهٔ ترتیبی کلی
totally ordered set	مجموعهٔ کلاً مرتب
transcendental number	عدد متعالی
transformation	تبدیل
transitive	متعدی
— relation	رابطهٔ متعدی
transitivity	تعدی
triangle inequality	نامساوی مثلثی
triangular relation	رابطهٔ مثلثی
uncountable	ناشمارا
uncountably infinite	به‌طور ناشمارا نامتناهی
uniform continuity	پیوستگی یکنواخت
uniformly bounded function	تابع کراندار یکنواخت
unit	واحد
— circle	دایرهٔ واحد
— disc	قرص واحد
universal set	مجموعهٔ مرجع
upper bound	کران بالا
usual topology	توپولوژی معمولی
weakest topology	ضعیفترین توپولوژی
weak topology	توپولوژی ضعیف

واژه‌نامهٔ فارسی ـ انگلیسی

ε ـ تور	ε - net
اجتماع متناهی	finite unions
اشتراک متناهی	finite intersections
اصل انتخاب	axiom of choice
اصل دوم شمارایی	second axiom of countability
اصول موضوعهٔ بستار کوراتوفسکی	kuratowski closure axioms
اعداد جبری	algebraic numbers
اعداد حقیقی گسترده	extended real numbers
افراز مجموعه	partition of set
افکنش	projection
اعداد اصلی	cardinal numbers
ـ متناهی	finite cardinal numbers
ـ نامتناهی	infinite cardinal numbers
i امین مجموعهٔ مختص	i th coordinate set
انعکاسی	reflexivity
اینفیموم	infimum
بازه	interval
ـ باز ـ بسته	open - closed interval
ـ بسته ـ باز	closed - open interval
بزرگترین کران پایین	greatest lower bound
بستار	closure
ـ مجموعه	closure of set

expansion	بسط
decimal expansion	ـ اعشاری
ternary expansion	ـ سه‌تایی
numerically equivalent	به‌طور عددی هم‌ارز
uncountably infinite	به‌طور ناشمارا نامتناهی
uniformly continuous	به‌طور یکنواخت پیوسته (پیوستهٔ یکنواخت)
uniformly convergent	به‌طوریکنواخت همگرا (همگرایی یکنواخت)
antisymmetry	پاد تقارنی
Russell's paradox	پارادکس راسل
base	پایه
open base	ـ باز
closed base	ـ بسته
open cover	پوشش باز
basic open cover	ـ پایه‌ای
subbasic open cover	ـ زیرپایه‌ای
continuity	پیوستگی
joint continuity	ـ توأم
uniform continuity	ـ یکنواخت
uniformly continuous	پیوستهٔ یکنواخت
function	تابع
uniformly bounded function	ـ کراندار یکنواخت
equicontinuous function	ـ همپیوسته
transformation	تبدیل
restriction	تحدید
composition	ترکیب
transitivity	تعدی
difference	تفاضل
symmetric difference	ـ متقارن
symmetry	تقارن
approximation	تقریب
completion of metric space	تکمیل فضای متری
one - to - one correspondence	تناظر یك به یك

characteristic functions	توابع مشخصه
jointly continuous	توأماً پیوسته
topology	توپولوژی
product topology	ـ حاصلضرب
weak topology	ـ ضعیف
discreat topology	ـ گسسته
usual topology	ـ معمولی
relative topology	ـ نسبی
generated	تولید شده

algebra	جبر
algebra with indentity	ـ باهمانی
Boolean algebra of sets	ـ بولی مجموعه‌ها
commutative algebra	ـ جا به جایی
real algebra	ـ حقیقی
complex algebra	ـ مختلط
function algebras	ـ های تابعی
seperation	جداسازی

Bernstein polynomials	چند جمله‌ایهای برنشتاین

product	حاصلضرب
Cartesian product	ـ دکارتی
product of sets	ـ مجموعه‌ها
product mapping	ـ نگاشتها
limit	حد
convergent sequence limit	ـ دنبالهٔ همگرا
pointwise limit	ـ نقطه‌ای
ring of sets	حلقهٔ مجموعه‌ها

extended real line	خط حقیقی گسترده

unit circle	دایرهٔ واحد
interior	درون

interior of set	ـ مجموعه
frame of refrence	دستگاه مرجع
sequence	دنباله
Cauchy sequence	ـ کوشی
convergent sequence	ـ همگرا
monotone sequence	ـ یکنوا
relation	رابطه
antisymmetric relation	ـ پاد متقارن
partial order relation	ـ ترتیبی جزئی
linear order relation	ـ ترتیبی خطی
total order relation	ـ ترتیبی کلی
binary relation	ـ دوتایی
transitive relation	ـ متعدی
symmetric relation	ـ متقارن
triangular relation	ـ مثلثی
circular relation	ـ مستدیر
reflexive relation	ـ منعکس
equivalence relation	ـ هم‌ارزی
class	رده
disjoint class	ـ مجزا
subbase	زیرپایه
open subbase	ـ باز
defining open subbase	ـ معرف
closed subbase	ـ بسته
defining closed subbase	ـ معرف
subcover	زیرپوشش
subalgebra	زیرجبر
closed subalgebra	ـ بسته
subalgebra of algebra	ـ یك جبر
sublattice	زیرشبکه
sublatticc of lattice	ـ شبکه
subspace	زیرفضا

ـــ ی فشرده	compact subspace
ـــ ی همبند	connected subspace
شبکه	lattice
ـــ کامل	complete lattice
شبه متریك	pseudo - metric
شمارای نامتناهی	countably infinite
شمول	inclusion
صفحهٔ اقلیدسی	Euclidean plane
صفحهٔ مختلط گسترش یافته	extended complex plane
ضعیفترین توپولوژی	weakest topology
عدد اصلی	cardinal number
ـــ متصله	cordinal number of continuum
عدد	number
ـــ متعالی	transcendental number
ـــ لبگ	Lebesgue number
عضو	element
ـــ قابل مقایسه	comparable element
ـــ ماکسیمال	maximal element
ـــ همانی	identity element
عمل نقطه‌ای	pointwise operation
فرض متصله	continuum hypothesis
ـــ کانتور	Cantor's continuum hypothesis
فشرده	compact
فشرده سازی استون - چخ	Ston - Cech compactification
فشرده شدهٔ تك نقطه‌ای	one - point compactification
فشردهٔ موضعی	locally compact
فضا	space
ـــ ی به‌طور شمارا فشرده	countably compact space
ـــ ی تابعی	function space

ـ ی تفکیک‌پذیر	separable space
ـ ی توپولوژیك	topological space
ـ ی منظم کامل	completely regular space
قرص واحد	unit disc
قطر	diameter
قوانین توزیعی	distributive laws
قویترین توپولوژی	strongest topology
کران	bound
ـ بالا	upper bound
ـ پایین	lower bound
گسترش	extension
گسسته	discrete
مؤلفه	component
متریك‌پذیر	metrizable
محدب	convex
مجتمع	join
مجموعه	set
ـ اندیسگذار	index set
ـ های بازپایه‌ای	basic open sets
ـ بی‌کاست	perfect set
ـ جزئاً مرتب	partially ordered set
ـ چگال	dense set
ـ عادی	normal set
ـ غیرعادی	abnormal set
ـ کلاً مرتب	totally ordered set
ـ مرتب خطی	linearly ordered set
ـ مرجع	universal set
ـ مشتق	derived set
مختص به مختص	coordinatewise
مرز	boundary

conjugate	مزدوج
conjugation	ـ گیری
circular	مستدیر
meet	مشترك
minimum	مینیموم
uncountable	ناشمارا
triangle inequality	نامساوی مثلثی
disconnected	ناهمبند
disconnection	ناهمبندی
point	نقطه
point at infinity	ـ بینهایت
limit point	ـ حدی
interior point	ـ درونی
boundary point	ـ مرزی
isolated point	ـ منزوی
image	نگاره
continuous image	ـ پیوسته
inverse image	ـ وارون
homeomorphic image	ـ هومئومورف
mapping	نگاشت
open mapping	ـ باز
into mapping	ـ بتوی
onto mapping	ـ بروی
continuous mapping	ـ پیوسته
bounded mapping	ـ کراندار
inverse mapping	ـ وارون
strip	نوار
isometric	همانمتر
isometry	همانمتری
connected	همبند
locally connected	ـ موضعی
neighborhood	همسایگی

uniformly convergent	همگرای یکنواخت
pointwise convergence	همگرایی نقطه‌ای
congruent	همنهشت
homeomorphic	هومئومورف
homeomorphism	هومئومورفیسم

فهرست راهنما