وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
مرکز نشر دانشگاهی

آشنایی با
حساب تانسوری و نسبیت

درک لاؤدن

ترجمهٔ محمدرضا بهفروز

آشنایی با

حساب تانسوری و نسبیت

درک لاؤدن

ترجمهٔ محمدرضا بهفروز

مرکز نشر دانشگاهی

. فهرست مطالب

پیشگفتـــــــار

اکنون که بیش از نیم قرن از پیدایش نظریه های نسبیت خاص و عام می‌گذرد، می‌توان اهمیت واقعی آنها رادرپیشبردریاضیات فیزیک در کل، روشنتردرک کرد. هرچند این نظریه‌هادر زمانی که برای نخستین‌بار عنوان شدند، ظاهری کاملا" انقلابی داشتند، ولی‌اکنون روشن شده است که آنها نمایانگر سرانجام طبیعی نظریه های کلاسیک مکانیک و الکترومغناطیس بودند و نه ناقض این دستگاههای مفاهیم و نه آغازگر خط فکری جدید. نظریه های نسبیت را باید، از این نظردرمقابل دیگر دستاورد عظیم فیزیک نظری نوین قرارداد، یعنی درمقابل مکانیک کوانتومی، که مبتنی براصولی است‌که کاملا" با اصول‌اساسی مکانیک نیوتونی متفاوت اند. البته ممکن است با در نظر گرفتن همین تفاوت، این موضوع که نظریهٔ نسبیت درمقایسه‌با شکوفایی‌عظیم ایده‌های‌جدید ارائه‌شده در نظریهٔ کوانتومی، تا اندازه ای نازابوده است، تا حدی قابل توجیه باشد. اما مطلب دیگری که احتمالا" در این موضوع بی‌تاثیر نبوده است، این است که کاربرد نظریهٔ نسبیت عموما" در مسائل مربوط به نجوم‌وکیهانشناسی است‌که به‌علت‌مشکلات تجربه ای تا این اواخر زیاد مورد توجه فیزیکدانهاقرار نگرفته است، درحالی که مکانیک کوانتومی با پدیده های ابعاد اتمی وابسته است که‌آسانتردرآزمایشگاه قابل بررسی هستند. حال که می‌رود آزمایشهای بین سیاره ای و بین ستاره ای تحقق یابد، ممکن است که علاقه به مسائل کیهانشناختی برانگیخته شود و پیشرفت‌قابل‌توجهی نسبت به‌آنچه‌که نسبیت تاچنددههٔ قبل به‌آن رسیده بودحاصل‌شود.

به هر حال، وضع فعلی نظریهٔ نسبیت، همچون حداعلای نظریهٔ کلاسیک مکانیک والکترو مغناطیس است وچون‌دردورهٔ‌لیسانس‌معمولا" وقت‌زیادی‌صرف‌جزئیات‌این‌نظریه‌های کلاسیک می‌شود، این‌است که همیشه‌به نظرم رسیده است صحیح نیست که چنین درسهایی پایان بپذیرندبدون‌این‌که‌این‌نظریه‌هابااستفاده‌از ابزار اساسی نسبیت‌خاص، یعنی نگاشت رویدادهاروی‌یک‌بسلای‌چهاربعدی‌فضا ــ زمان، به‌صورت‌بسیارطبیعی‌وروشنگرانه‌توصیف شوند. چنین درس مقدماتی درمورد نظریهٔ نسبیت، به روشن شدن اصولی که نظریه های کلاسیک برآنها مبتنی هستند کمک می‌کند، واز نقطه نظر دانشجو بیشتر مورد توجه است

تا درسی درمورد حل مسائل بغرنج ایستائی شناسی ودینامیک. باکمی صرف وقت که معمولا" به روشهای مرسوم در مکانیک والکترومغناطیس کلاسیک اختصاص داده شده است، می توان یک درس مقدماتی از نظریهٔ نسبیت تهیه دید که برای دانشجویان سال سوم مناسب باشد، دانشجویانی که، برمبنای تجربهٔ ما در دانشگاه کانتر بوری، به حدکافی در ریاضیات تبحر دارند تا بتوانند قدرزیبایی فراوان این دستگاه مفاهیم را بدانند. این درس را چندین سال دردانشگاه کانتربوری تدریس کرده ام واین کتاب نتیجهٔ یادداشتهایی است که برای این درس آماده کرده بودم. با آنکه کمبودی در کتب عالی درمورد مطالب این کتاب وجود ندارد (بسیاری از آنها، درکتابنامهٔ آخر کتاب ذکر شده اند) اما اکثر آنها برای مطالعهٔ دانشجویان فوق لیسانس درنظرگرفته شده اندکه می خواهند دراین بخش یابخشهای مربوطه تخصص بگیرندوبه عنوان یک درس تکمیلی برای یک دوره دروس ابتدایی در سطح لیسانس مناسب نیستند. به این جهت امیدوارم که جای این کتاب خالی باشد وبرای آن عده از مدرسین دانشگاه که مسئولیت تدریس این نوع درسها را به عهده دارند وهمچنین برای دانشجویان آنان مفید باشد.

طرح کتاب بدین ترتیب است: ایدهٔ اساسی هموردایی قوانین فیزیکی نسبت به تبدیلات بین چارچوبهای مرجع، در فصل اول معرفی شده است وبانشان دادن این که قوانین مکانیک نیوتونی نسبت به تبدیلات بین چارچوبهای لخت هموردا هستند، شرح داده شده است. این مطلب، به اصل نسبیت خاص واثبات صحت آن برای الکترودینامیک به وسیلهٔ آزمایش مایکلسون ـ مورلی منجر می شود. جزئیات این آزمایش قاطع، توضیح داده نشده است وفقط به طور مختصربه نتیجهٔ آن اشاره رفته است، زیرابه نظر من گرچه این آزمایش اهمیت تاریخی فراوان دارد، ولی اکنون که بیش ازنیم قرن ازانجام آن می گذرد، اهمیت آن برای نسبیت خاص، که توسط نتایج تجربی زیادی تایید می شود، دیگر به اندازهٔ روزهای اول آن نیست. بقیهٔ فصل اول، به تبدیل لورنتس اختصاص داده شده است که از ابتدا به عنوان چرخش محورهای دکارتی قائم در فضا ـ زمان مینکوفسکی به کار رفته است. به نظر من بهتر است دانشجویان لیسانس را، که این کتاب قبل از هرکس برای آنها نوشته شده است، بلافاصله با محاسبات تانسوری به صورت عام وکاملا" دقیق روبرو نکنیم. واز این رو فضا ـ زمان مینکوفسکی نظریهٔ نسبیت خاص را به عنوان یک بسلای اقلیدسی که دانشجو با آن بیشتر آشنا است، موردبحث قرار داده ام. البته دراین صورت، مؤلفه های زمانی بردارها انگاری محض خواهند بود، ولی این از یک نظر مفید است، زیرا در تأکید برفرق اساسی فیزیکی موجودبین اندازه گیریهای فضا وزمان، و همچنین در بررسی این

تصورکه نظریهٔ نسبیت خاص‌حاکی از ماهیت اساسا "یکسان فضا و زمان است ، به کارمی‌آید . نظریهٔ تانسورهابرحسب چارچوبهای دکارتی‌قائم دریک فضای اقلیدسی N بعدی ، درفصل دوم توضیح داده شده است وازآن برای تعریف بردارها وتانسورهای اصلی فیزیک نسبیت خاص در پیوستارفضا ــ زمان مینکوفسکی در دو فصل بعدی استفاده شده است . همهٔ این نوع بردارها وتانسورها ، باحروف چاپی درشت ومؤلفه های آنها با حروف چاپی خوابیده و باشاخص پایین مربوطه ،نشان داده شده اند (مثلا" حرف $\mathbf{F}$ ،برای‌نشان‌دادن‌چهار ــ نیرو و حرف F_i برای نشان دادن مؤلفه های آن‌به‌کار رفته است) .سه-بردارهای مربوطه که نسبت به محورهای قائم به کاررفته توسط یک ناظر لخت تعریف شده اند ، با حروف دستی درشت نشان داده شده‌اندومؤلفه های آنهانیز با حروف دستی خوابیده وبا شاخص پایین نمایانده شده‌اند . (مثلا" $\mathbf{f}$ برای سه ــ نیرو و f_i برای مؤلفه های آن) . تمامی مجموعهٔ معادلات تبدیل ،که مؤلفه های یک سه ــ بردار را برحسب چارچوبهای لخت متفاوت به یکدیگر مربوط می‌سازند ، از معادلات تبدیل چهار ــ بردار متناظر برحسب تغییر محورها در فضا ــ زمان ، به دست می‌آیند .بنابراین ، خواننده با این روش فنی مهم آشنایی پیدامی‌کند . در فصل سوم ، تمامی قوانین مکانیک به صورت هموردای چهاربعدی بیان شده اند وشرح قوانین الکترودینامیک هم در فصل چهارم بدین صورت نمایش داده شده است . مطالعهٔ مطالب بعد از فصل چهارم ، برای یک دانشجوی فیزیک‌که نظریهٔ نسبیت عام چندان مورد توجه وی نیست ، لزومی ندارد ، مگر احتمالا" بخشهای ۶ ــ ۱ و ۶ ــ ۲ که درآنها رهیافتی به نسبیت عام ترسیم شده است .

در فصل‌پنجم ،روشهای محاسبات تانسوری عام که به هنگام توضیح نظریهٔ‌نسبیت عام به کار می‌رود ، بیان شده اند . ابتدا ، جبروآنالیز تانسورها وتانسورهای نسبی دریک فضای با ارتباط‌آفین ابداع‌شده است‌که حالت خاصی‌است‌از فضای ریمانی که درآن ارتباط آفین به‌طور مناسب با سنجه مرتبط شده است . دراینجا مختصات یک نقطه با x^i (که غیراز x_i است) نشان داده‌شده اند ودلیل‌آن روشن است زیرا dx^i مؤلفه های یک بردار پادوردا هستند ،وهرگزعذرقابل قبولی‌برای به‌کار بردن شاخصهای پایین نیافته ام . مطمئنم که این عمل به طور غیر ضروری مبتدی را دچار مشکلات بیشتری می‌کند .

دلیل‌اینکه چرا یک نظریه‌که اصل نسبیت عام‌رابه‌عنوان اساس می‌پذیردضرورتا " باید یک نظریهٔ گرانش باشد ، در فصل ششم توضیح داده شده است . این مطلب به قانون گرانش اینشتین ،به‌سنجهٔ شوارتس‌شیلد باتقارن کروی‌برای‌فضای خالی‌با یک تکینهٔ‌نقطه‌ای ، ونیزبه سه آزمون فیزیکی معیار این نظریه‌منجر می‌شود . البته، برای رفع ابهام بهتراست

دراینجاتذکر داده شود که ds ، بازهٔ بین‌دو نقطهٔ مجاور ازفضا ــ زمان، به روشی تعریف می‌شود که‌هرگاه (z و y و x) مختصات‌دکارتی‌قائم‌نسبت‌به‌یک چارچوب لخت باشند که آزادانه درمیدان گرانشی سقوط می‌کند و t زمان در ایـن دستگـاه باشد، آنـــگاه

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2.$$

به‌خاطر سبکی‌که‌دراین‌کتاب‌برای بسط مطالب برگزیده شده است این‌تعریف برای ds ازهمه مناسبتر است.

برای تعیین چگونگی ارائهٔ مطالب به‌خواننده، از مقالات اصلی این‌موضوع وکتبی که سیاههٔ آنها درکتابنامه‌آمده است، استفاده شایانی کرده ام. کلیهٔ‌این آثار تاحدی در سبک ارائهٔ من تأثیر داشته اند ولی نظرات اینشتین ومولر[1] وشرودینگر انگیزش خاصـــی داشته اند. خوشحالم خاطرنشان سازم که خودرا مدیون مؤلفین اغلب کتابهایی که دراین زمینه مورد استفاده قرار گرفته اند، می‌دانم. همچنین مکنونات قلبی خود را به‌همکارم پرفسور آندرس[2] که نسخهٔ خطی مرا مطالعه وپیشنهاد های گرانبهایی ارائه کرده اســت، تقدیم می‌دارم که در اثر مذاکره و مباحثهٔ ما، تعدادی از اشتباهات وابهامات بـرطـرف شده اند.

تعداد خاصی از تمرینات، از سری اوراق امتحانی دانشگاههای کمبریج ولندن و لیورپول اقتباس شده‌اند. ایـن تمرینـات به این ترتیـب مشخـص شده اند: د. ک. (Mathematics Tripos)*، د. ل. و د. لیو. از مؤسسات مربوط به خاطر دادن اجازهٔ استفاده از منابع مورد نظر، بسیار سپاسگزارم.

د. ف. لاوْدن
بخش ریاضی دانشگاه کانتر بـــوری
سپتامبر ۱۹۶۰ (شهریور ۱۳۳۹)

---

1) Moller

2) W.R. Andress

*(Mathematics Tripos) به‌امتحانات نهایی لیسانس ریاضی دردانشگاه‌کمبریج اطلاق می‌شود. ر.ک. فرهنگنامهٔ بریتانیکا. ــو.

پیشگفتار ویرایش دوم

تعدادکمی ازاشتباهات چاپی تصحیح شده اند ولی اصلاح مهم ، اضافه کردن تعداد زیادی تمرین جدید است که بیشتراین تمرینات ازاوراق امتحانی دانشگاه‌کانتربوری اقتباس شده اند .اکنون ۱۱۴ تمرین وجوددارد وامید است که این تمرینات مجموعهٔ مناسبی باشد تا دانشجو بتواند میزان یادگیری خود ازاین کتاب درسی را بیازماید .

تذکری در بارهٔ چاپ ۱۹۷۵

از زمان انتشار آخرین ویرایش،در جریان تدریس خود ، تعدادی مسئله گرد آورده‌ام‌که برای کار در کلاسهای دورهٔ لیسانس مناسب اند . مجموعه‌یی ازاین مسایل ، که تمامی مطالب این کتاب رادربرمی‌گیرد ، درانتهای این‌ویرایش آورده‌شده است وامیدمی‌رود که برارزش کتاب از نظر مدرسین ودانشجویان به‌طور یکسان افزوده باشد .

د . ف . لاؤدن

بخش ریاضی ، دانشگاه آستون‌بیرمنگام

فوریهٔ ۱۹۷۵ (بهمن ۱۳۵۳)

فصــل اول

اصل نسبیت خاص؛ تبدیلات لورنتس

۱ ــ ۱ قوانین حرکت نیوتون

هر نوع مطالعه پیرامون نظریهٔ نسبیت خـاص، مستلـزم درک واقعـی مضمـون فیزیکـی قوانین سه گانهٔ نیوتون درمورد حرکت است. خواهیم دید که این قوانین با اصل اساسی‌ای که نظریه برآن پایه گذاری‌شده‌است مطابقت دارند واز این روبه‌عنوان مقدمهٔ مناسب براین اصل نیز به کار می‌روند.

بیان قانون اول این است که *ذره‌یی‌که هیچ نیرویی برآن اثرنمی‌کند روی یک خط راست با سرعت ثابت حرکت می‌کند*. ازآنجایی‌که حرکت یک‌ذرهٔ مادی‌می‌تواند فقط نسبت به‌یک چارچوب‌مختصات مرجع مشخص باشد، پس‌این بیان‌تنها‌موقعی‌معنی دارد که چارچوب مرجعی که حرکت ذره درآن مشاهده می‌شود، معین باشد. ازاین گذشته، چون دراینجـــا تعریفی از مفهوم‌نیروبه میان نیاورده‌ایم، پس لازم است توضیح داده شود که چگونه داوری می‌کنیم که یک ذره" تحت تاثیر هیچ نیرویی قرار نگرفته است". این یک واقعیت تجربـی است که اگرمبدأمحورهای قائم در مرکز خورشید باشد واین محورها نسبت به اجسام بسیار دور که درنجوم به‌نام‌ابریهای برون ــ کهکشانی [1] خوانده می‌شوند، چرخش نکنند، آنگـاه حرکات ستارگان مجاورنسبت به‌این‌چارچوب تقریبا" یکنواخت‌خواهند بود. به هم خوردن یکنواختی رامی‌توان به‌طورمعقول ناشی‌از تأثیرستارگان بریکدیگر دانست، و شواهد موجود، قویا" دلالت برآن دارندکه اگرحرکت جسمی درناحیه یی به‌فاصلهٔ بینهایت‌دوراز همهٔ اجسام دیگر قابل مشاهده باشد، آنگاه این حرکت نسبت به چارچوب مرجع مورد نظر، صرف نظر از چگونگی شروع آن، همواره یکنواخت خواهد بود.

با توجه به‌مفادقانون اول، درمنطقه ای از فضای خالی ودور از هرجسم به جزیک تک ذرهٔ آزمون، چارچوب مرجعی می‌توان تعریف کرد که حرکت ذرهٔ مزبور نسبت به‌آن همیشه یکنواخت باشد. چنین چارچوبی، **چارچوب‌لخت** [2] نامیده می‌شود. دستگاه مختصاتی که قبلا" توضیح داده شد، نمونه ای از چارچوب لخت است که جهت سهولت مطالعه در

---

1) extra-galactic nebulae
2) inertial frame

حرکت اجسام در منظومهٔ شمسی به‌کار می‌رود. ولی اگر $\bar{S}$ یک‌چارچوب لخت و S چارچوب دیگری باشد که محورهای آن همیشه موازی با محورهای S باشند و مبداء آن با سرعت ثابت $\mathbf{u}$ نسبت به S حرکت کندآنگاه $\bar{S}$ نیز لخت است. اگر $\mathbf{v}$ و $\bar{\mathbf{v}}$ بترتیب سرعتهای ذرهٔ آزمون در S و $\bar{S}$ باشند دراین صورت خواهیم داشت:

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \mathbf{u} \qquad (۱-۱)$$

چون $\mathbf{v}$ همیشه ثابت است پس $\bar{\mathbf{v}}$ نیز ثابت است. باتوجه به مطالب فوق، در اغلب موارد تجربی، می‌توان چارچوبی را که مبدا آن منطبق برمرکز زمین است و محورهای آن نسبت به ستارگان نمی‌چرخد، یک چارچوب لخت فرض کرد، زیرا حرکت زمین نسبت به خورشید دردوره هایی اززمان‌که معمولا" موضوع‌محاسبات دینامیکی هستند، تقریبا" یکنواخت‌است. درواقع چون چرخش زمین نسبت‌به معیارهای معمولی کند است، بنابراین، چارچوب‌متصل به‌آن می‌تواند تقریبا" لخت باشد. با این فرض، خطای قابل ملاحظه فقط درحرکت هایی که دردرازمدت‌بررسی می‌شوند مشهود خواهد بود، مثل محاسبات درمورد توپخانهٔ دورزن ویا آونگ فوکو.

پس از برپایی‌یک چارچوب لخت، چنانچه‌مشاهده شودکه‌حرکت‌یک ذره‌نسبت به‌این چارچوب یکنواخت‌نیست، در این صورت عدم یکنواختی، مربوط به اثر نیروی وارد از یک عاملی براین ذره است. مثلا"، علت خمیدگی مدارسیارات، تأثیر نیروی جاذبهٔ گرانشی خورشیدبراین اجسام‌است ویا پدیدهٔ انحراف‌باریکه‌یی از ذرات با باردر نزدیکی یک‌میلهٔ آهنربا، به‌علت وجود نیروی مغناطیسی است که براین ذرات وارد می‌شود. اگر حرکت‌ذره یکنواخت نباشددراین‌صورت سرعت آن $\mathbf{v}$ در هر لحظهٔ t نسبت به چارچوب تغییرمی‌کند و شتاب آن $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ صفر نیست. ازاین رو شتاب کمیتی است مناسب برای‌سنجش نیروی وارد شدهٔ $\mathbf{f}$، پس می‌توان نوشت:

$$\mathbf{f} \propto \mathbf{a}.$$

یا:

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a}, \qquad (۲-۱)$$

که درآن m ثابت تناسب است‌که بستگی به ذره دارد و جرم آن خوانده می‌شود. جرم یک ذره طبیعتا" پس‌از بیان قانون سوم حرکت، تعریف می‌شود. معادلهٔ (۱ـ۲) اساس تعریف نیرو دریک چارچوب لخت است و به قانون دوم حرکت معروف است. برای سهولت

محاسبات دینامیکی ، بعضی مواقع بهتر است که چارچوب غیرلخت به کار برده شود ، زیرا گرچه حرکت یکنواخت جسمی نسبت به یک چارچوب لخت دلیل برعدم تأثیر نیرو برآن است ، معهذا دریک چارچوب غیر لخت دارای شتاب خواهد بود . طبق رابطهٔ (۱ ــ ۲) نیرویی با این شتاب متناظر است ، ولی هیچ عامل آشکاری به آن نیرو قابل انتساب نیست و از این رو معمولا " نیروی "مجازی" [1] خوانده می‌شود . نمونه های معروف این نوع نیرو ، عبارت اند از نیروی کوریولیس ونیروی مرکز گریز که مربوط به چارچوبهایی هستند که نسبت به یک چارچوب لخت‌حرکت چرخشی یکنواخت دارند ، مثل چارچوبی که همراه زمین می‌چرخد . بادخالت دادن چنین‌نیروهای " مجازی " ،قانون‌دوم حرکت قابل استفاده در تمام چارچوبهای مرجع می‌شود .

بنابه قانون سوم‌حرکت ،وقتی دو ذرهٔ P و Q به علت برهم‌کنش برحرکت یکدیگر اثر بگذارند *،نیروی‌وارد از P بر Q با نیروی وارد از Q بر P برابر ولی‌در خلاف جهت آن است* . ازتعریف *اندازه* حرکت یک ذره نسبت‌به‌یک چارچوب مرجع به‌صورت حاصل ضرب جرم درسرعت آن ،درکتابهای درسی‌مقدماتی با استفاده از قوانین دوم وسوم ثابت می‌شود که مجموع اندازه حرکتهای‌دوذره‌دربرخورد با یکدیگر پایسته [2] است . بنابراین اگر m_1 و m_2 جرم این دو ذره ، $\mathbf{u}_1$ و $\mathbf{u}_2$ بترتیب سرعت آنها در لحظهٔ قبل از برخورد و $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ بترتیب سرعت آنها در لحظهٔ پس از برخورد باشند ، دراین صورت داریم :

$$m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2 = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 \qquad (۱ ــ ۳)$$

یعنی :

$$\frac{m_2}{m_1}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1. \qquad (۱ ــ ۴)$$

معادلهٔ اخیرنشان می‌دهدکه دو بردار $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1)$ و $(\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_2)$ با هم موازی هستند و این نتیجه ای است که صحت آن بتجربه ثابت شده است وبیانگر مفهوم فیزیکی قانون‌سوم است . بهرحال‌رابطهٔ (۱ــ ۴) نشان می‌دهد که قانون‌سوم‌تا حدودی روش اندازه‌گیری‌جرم یک ذره را مشخص می‌کند واز این رو تعریفی برای این کمیت در دسترس قرار می‌دهد . زیرا داریم:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1|}{|\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_2|} \qquad (۱ ــ ۵)$$

1) fictitious force

2) conserved

بدین‌گونه، ازنتایج آزمایش برخورد دو ذره، می‌توان نسبت جرم آن دو را به دست آورد. بنابراین اگر جرم یک ذرهٔ مخصوص را واحد انتخاب کنیم (مثلاً "گرم، کیلو گرم وغیره)، دراین‌صورت با ایجاد برخورد بین هر ذرهٔ دیگری با این ذرهٔ معیار و به کار بردن رابطهٔ (۱ — ۵) علی‌الاصل می‌توان جرم ذرهٔ مورد آزمایش را تعیین کرد.

۱ — ۲ هموردایی[1] قوانین حرکت

در بخش پیشین نشان داده شد که قوانین دوم وسوم در اصل، تعریف دو کمیت نیرو و جرم در یک چارچوب مرجع معین هستند. دراین قسمت می‌خواهیم بدانیم که این تعریفها درچارچوبهای لخت متفاوت، به نتایج متفاوت می‌رسند یا نه.

اول تعریف جرم‌را در نظر بگیرید. اگربرخورد دو ذرهٔ m_1 و m_2 درچارچوب‌لخت مشاهده شــود طوری که $\bar{\mathbf{u}}_1$ و $\bar{\mathbf{u}}_2$ بترتیب سرعت آن دو قبل ازبرخورد و $\bar{\mathbf{v}}_1$ و $\bar{\mathbf{v}}_2$ بترتیب سرعت آنها بعداز برخورد باشند، آنگاه طبق رابطهٔ (۱ — ۱) خواهیم داشت:

$$\bar{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u} \qquad \text{و غیره} \tag{۱ — ۶}$$

از این رو داریم:

$$\bar{\mathbf{v}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1, \quad \bar{\mathbf{u}}_2 - \bar{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_2 \tag{۱ — ۷}$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که اگر دو بردار $\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1$ و $\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_2$ با هم موازی‌باشند، دراین صورت‌دوبردار $\bar{\mathbf{v}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_1$ و $\bar{\mathbf{u}}_2 - \bar{\mathbf{v}}_2$ نیزبا هم موازی هستند. به همین ترتیب بتجــر به ثابت‌می‌شود که اگر قانون سوم دریک‌چارچوب لخت صدق کند، در تمام چارچوبهای لخت نیزصدق‌می‌کند. حال فرض کنید که $\bar{m}_1$ و $\bar{m}_2$ جرمهای اندازه گیری شدهٔ دو ذره در $\bar{S}$ باشند. پس طبق رابطهٔ (۱ — ۵) می‌توان نوشت:

$$\frac{\bar{m}_2}{\bar{m}_1} = \frac{|\bar{\mathbf{v}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_1|}{|\bar{\mathbf{u}}_2 - \bar{\mathbf{v}}_2|} = \frac{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1|}{|\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_2|} = \frac{m_2}{m_1} \tag{۱ — ۸}$$

ولی، اگر جرم ذرهٔ اول معیار واحد باشد، دراین صورت $m_1 = \bar{m}_1 = 1$ می‌شود و بنابراین داریم:

---

1) covariance

$$\bar{m}_2 = m_2 \qquad (۱-۹)$$

یعنی ، جرم یک ذره در تمام چارچوبهای لخت مقداری یکسان دارد . می‌توان آن را به‌این صورت نیز بیان کرد که در تبدیلات بین چارچوبهای لخت ، جرم کمیتی است ناوردا[1] .

چون u ثابت است ، پس با مشتق گیری از رابطهٔ (۱ ــ ۱) نسبت به زمان t ، به دست می‌آید

$$\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a} \qquad (۱-۱۰)$$

که‌در آن $\mathbf{a}$ و $\bar{\mathbf{a}}$ بترتیب شتاب ذره در S و $\bar{S}$ هستند . چون داریم $\bar{m} = m$ ، پس بنابه قانون دوم (۱ ــ ۲) می‌توان نوشت :

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{f} \qquad (۱-۱۱)$$

یعنی ، نیروی وارد بریک ذره ، بستگی به چارچوب لختی که نسبت به آن اندازه گیری‌شده است ، ندارد . پس نشان داده‌شدکه‌صورت معادله های (۱ ــ ۲) و (۱ ــ۴) در دو چارچوب S و $\bar{S}$ کاملا" یکسان است ، یعنی‌جرم‌وشتاب ونیرومستقل ازچارچوب اند وتبدیل سرعت طبق معادلهٔ (۱ ــ ۱) انجام می‌گیرد . وقتی صورت معادلات در تبدیل‌ازیک چارچوب مرجع به دیگری ثابت بماند ، گفته می‌شود که روابط مذکور نسبت به این نوع تبدیلات **هموردا** هستند . قوانین نیوتون درتبدیل بین چارچوبهای لخت ، هموردا هستند .

۱ ــ۳ اصل نسبیت خاص

اصـــل نسبیـت خـاص حاکـی ازاین‌است‌که ***تمام‌قوانین‌فیزیکی درتبدیل بین‌چارچوبهای لخت هموردا هستند*** . این می‌رساندکه‌تمام‌ناظرانی که نسبت به هم حرکت یکنواخت دارند و از چارچوبهای لخت استفاده می‌کنند ، در بیان قوانین فیزیکی باهم متفق القول‌خواهند بود . بنابراین چنین ناظری‌نمی‌تواند بدون‌سهیم بودن با هرناظر دیگری که یک چارچوب لخت به کارمی‌برد ، داشتن رابطه‌یی خاص با جهان رابرای خویش در نظر بگیرد ، به‌عبارت دیگرهیچ ناظری برناظر دیگر ، امتیازی ندارد . در زمانی‌که انسان براین باور بود که‌خودش ازنظرروحی وجسمی درمرکز کاینات قرار دارد ، اصلی از آن گونه که هم اکنون بیان کردیم ، به عنوان یک مطلب بی‌معنی رد می‌شد . با این حال ، تحولی که از لحاظ طرز تفکر نسبت به محیط فیزیکی ، توسط کپرنیک شروع شد ، تا آنجا پیش رفته است که امروزه این اصل را

1) invariant

به عنوان اصلی مدلل و روشن که اساس فیزیک نظری بر آن است مورد قبول قرار می دهند و نقض آن به ارائه شواهد و دلایل کافی نیاز دارد.

قبلا" نشان داده شد که قوانین حرکت نیوتون از اصل نسبیت خاص تبعیت می کنند. حال می خواهیم توجه خود را به قوانین اساسی دیگری حاکم بر پدیده های غیر مکانیکی، یعنی قوانین الکترومغناطیس ماکسول، معطوف بداریم. این قوانین پیچیده تر از قوانین نیوتون هستند و بیان آنها به وسیلهٔ معادلات زیر مناسبتر از همه است.

$$\mathrm{curl}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \qquad (۱-۱۲)$$

$$\mathrm{curl}\,\mathbf{H} = \frac{1}{c}\left(4\pi\mathbf{j}+\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right), \qquad (۱-۱۳)$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 4\pi\rho, \qquad (۱-۱۴)$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0, \qquad (۱-۱۵)$$

که در آنها $\mathbf{E}$ و $\mathbf{H}$ بترتیب شدت میدان الکتریکی وشدت میدان مغناطیسی، $\mathbf{j}$ چگالی جریان و ρ چگالی بارالکتریکی است وفضای موردنظر، خالی ازهرجسم دیگری بجز بارالکتریکی است، وواحدهای به کاررفته، گاوسی هستند. بنابراین c عبارت است از نسبت واحدالکترومغناطیسی باربه واحدالکترواستاتیک بار (که برابراست بـا 3×10^{10} cm/sec). ستجربه ثابت می شود که این معادلات، در هرچارچوب لختی صادق اند. مشهورترین آزمایشی که دراین مورد انجام گرفت، آزمایش مایکلسن ومورلی بود. آنها ثابت کردند که سرعت نور اندازه گیری شده دردستگاهی متصل به زمین، در تمام جهات همیشه c است. چنانکه معروف است، نورخصلت الکترومغناطیسی دارد واین نتیجه به وسیلهٔ معادلات (۱-۱۲) تـا (۱-۱۵) پیش بینی شده است. چون سرعت زمین در مدارخود در هر زمان با سرعت آن در شش ماه بعدبه اندازهٔ دو برابر سرعت مـداری یعنـی، ۶۰ km/sec اختلاف دارد، حال اگر اندازه گیری سرعت نور در دو روز به فاصلهٔ شش ماه از هم نسبت به زمین انجام بگیرد و نتیجهٔ آزمایش یکی باشد، این می تواند دلیل برسازگاری معادلات ماکسول با اصل نسبیت خاص باشد. این عملا" چیزی بود که مایکلسن ومورلی آن را انجام دادند. ولی این تعبیرنتایج آزمایش آنان فورا" پذیرفته نشد، چه تصور می رفت که پدیده های الکترومغناطیس احتیاج به محیطی به نام اتر دارند و دیگر اینکه اعتبار معادلات ماکسول تنها در چارچوب لخت ساکن دراین محیط، اثبات می شود، یعنی اصل نسبیت خاص در مورد پدیده های

الکترومغناطیس صادق نیست . مباحثه‌ای‌که بعدا" روی داد به لحاظ تاریخی بسیار قابل‌توجه است ،ولی دراین کتاب‌از بازگویی آن خـودداری می‌شود . اکنون اصل نسبیت خاص به طور قطع تثبیت شده است و به سبب اینکه نتایج حاصل از آن درهمهٔ موارد با تجربه مطابقت دارندونیزبدین‌علت‌که‌احساس‌می‌شودبدون‌نیازبه‌تجربه‌پذیرفتنی‌است ، مورد قبول واقع شده است . توضیح‌مراحلی‌که سرانجام‌منجربه تأیید موارد کاربرد کلی این اصل شد ، در یک کتاب درسی مقدماتی زایداست .اما ، موضوع اساسی‌برای توسعهٔ آتی نظریه ، این است که بدانیم دربدوامر ،چه اشکال عمده‌یی مانع ازپذیرش عقیدهٔ‌مبنی برسازگاری‌قوانین الکترومغناطیس با اصل نسبیت خاص ، می‌شد .

دوچارچوب‌لخت S و $\bar{S}$ رادرنظر بگیرید .فرض‌کنید ناظرچارچوب S ، سرعت یک تپهٔ‌نور رااندازه می‌گیرد ومقدارآن را برابر $\mathbf{c}$ به دست می‌آورد . اگرمقدار سرعت اندازه‌گیری شده برای همان تپهٔ نور توسط ناظر چارچوب $\bar{S}$ برابر $\bar{\mathbf{c}}$ باشد ، در این‌صورت طبق معادلهٔ (۱ ــ ۱) داریم :

$$\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{c}-\mathbf{u} \tag{۱ ــ ۱۶}$$

واضح است که اندازهٔ بردارهای $\mathbf{c}$ و $\bar{\mathbf{c}}$ درحالت کلی ، متفاوت خواهند بود . نتیجه این امر این است که بایدمعادلات ماکسول (۱ ــ ۱۲)تا (۱ ــ ۱۵)اصلاح شوند ویا اصل نسبیت خاص درمورد پدیده‌های الکترومغناطیس‌به کار برده نشود . اقداماتی جهت اصلاح معادلات ماکسول انجام‌گرفت (مثلا" به وسیلهٔ ریتز[1]) ،اما نتایج مشخص حاصل از معادلات اصلاح شده باموارد تجربی‌مطابقت نکرد .ولی چون صادق بودن اصل نسبیت خاص در تمام‌موارد محرز شد ، بنابراین تنها راه حل مسئله این بود که معادلهٔ (۱ ــ ۱) رارد کنند و رابطهٔ دیگری را جانشین آن سازند که با این نتیجهٔ حاصل از تجربه ، که سرعت نـور در تمام چارچوبهای لخت یکسان است ، مطابقت‌داشته باشد . همچنانکه در قسمت بعد نشان داده خواهد شد ،انجام این عمل تنها درصورت اقدام به تجدید نظر اساسی در اندیشه هـای شهودی ما در بارهٔ ماهیت فضا وزمان ، امکان‌پذیر است واین موضوعی بود که با آگاهی و سرسختی زیاد مورد مخالفت قرار گرفت .

۱ ــ ۴ تبدیلات لورنتس؛ فضا ــ زمان‌مینکوفسکی[2]

فرض‌کنید که چارچوب مرجع S شامل محورهای دکارتـی قائـم $Oxyz$ باشد .

1) Ritz 2) Minkowski space-time

فرض براین است که مختصات یک نقطه دراین چارچوب به روش معمول وبا به کاربردن خط کشی که نسبت به S ساکن است ، اندازه گیری می‌شود (تذکراین نکته ضروری است ، چه بعدا" نشان داده خواهدشد که طول یک میله ، همواره تابع حرکت آن است) . همچنین فرض براین است که ساعتهای ساکن در S ، درتمام فضا توزیع شده اندوهمهٔ آنهابا یک ساعت اصلی در O ، همزمان‌شده‌اند. روشی مناسب جهت همزمان کردن ساعتها به‌گونهٔ زیر است: لحظهٔ شروع تابش نور از یک منبع نور واقع در نقطهٔ O ، از نظر تمام ناظران در محل ساعتها برابر $t=t_0$ است. وقتی نور این منبع به ناظری که واقع بریک نقطهٔ P است می‌رسد ، باید اوساعت خود را طوری تنظیم کند که زمان t_0+OP/c را نشان دهد ، یعنی همچنانکه آزمایش نشان می‌دهد فرض شده است که‌نور با سرعت c نسبت بـه S حرکت می‌کند. مکان وزمان یک رویداد اکنون می‌تواند به وسیلـهٔ چهـار مختصـهٔ (x ، y ، z ، t)نسبت‌به S مشخص‌شود ،که‌درآن t زمانی‌است‌که‌ساعت‌متصل به رویدادنشان می‌دهد. ما اغلب‌از چهار عدد (x ، y ، z ، t)به عنوان یک **رویداد** نام خواهیم برد.

فرض کنید که $\bar{O}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ محورهای دکارتی قائمی باشند که چارچوب $\bar{S}$ را مشخص می‌کند (برای اینکه دقیق گفته باشیم ، این محورها از نظر ناظر ساکن[1] در $\bar{S}$ ، قائم هستند) و فرض‌کنیدساعتهای ساکن نسبت به‌این چارچوب ، باساعت اصلی واقع در نقطهٔ $\bar{O}$ همزمان شده باشند. حال هر رویدادی می‌تواند به وسیلهٔ چهار مختصهٔ ($\bar{x}$ ، $\bar{y}$ ، $\bar{z}$ ، $\bar{t}$) ، نسبت به $\bar{S}$ معین شود ، که در آن مختصات فضا با وسیله ای اندازه گیری می‌شوندکه نسبت به $\bar{S}$ ساکن باشد ومختصهٔ زمان‌به وسیلهٔ ساعت متصل به رویداد و ساکن در $\bar{S}$ ، سنجیده می‌شود. دراین‌بخش‌می‌خواهیم‌بدانیم که اگر (x ، y ، z ، t) و ($\bar{x}$ ، $\bar{y}$ ، $\bar{z}$ ، $\bar{t}$) به یک رویداد مربوط باشند ، معادلهٔ رابط این مختصات متناظر چیست.

این موضوع که ممکن است دراثر حرکت یکنواخت نسبت به یک چارچوب مرجع ، طول وسیلهٔ اندازه گیری وآهنگ ساعت تغییر کند ، درنظریه های قدیم فیزیک منظورنشده بود. تصور می‌شد که اندازه گیریهای طول وزمان مطلق هستند ولی پذیرفته شده بودکـه اندازه گیری سرعت وابستگی به‌چارچوب مرجع دارد. ما همچون فرضی را در نظر نخواهیم گرفت ، بلکه معادلات رابط مختصات یک رویداد دردوچارچوب را به‌صورتی انتخاب خواهیم کرد که: اولا" ، اگرحرکت یک ذره در یک چارچوب یکنواخت باشد در چارچوب دیگر نیـز

---

1) stationary

یکنواخت باشد، ثانیاً، سرعت انتشار نور در هر دو چارچوب یکسان و برابر ثابت c باشد. اگر شرط اول صحیح نباشد، باید از قانون اول نیوتون وبا آن از خود مفهوم یک چارچوب لخت، چشم‌پوشی کرد. نتایج تجربی، مارااواداربه‌پذیرش شرط دوم می‌کنند.

برای انجام شرط اول، فرض می‌کنیم که هر یک‌از مختصات (x,y,z,t)تابعی‌خطی ازمختصات ($\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{t}$) باشد. دراین‌صورت رابطهٔ‌وارون نیز،ازهمان‌نوع خواهد بود. ذره‌ای که با سرعت ثابت (v_x,v_y,v_z) حرکت کند، مختصات فضای آن عبارت خواهد بود از (x,y,z)، به طوری که:

$$x = x_0+v_x t, \quad y = y_0+v_y t, \quad z = z_0+v_z t \tag{۱۷ - ۱}$$

اگر به جای (x,y,z,t)، روابط خطی مختصات ($\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{t}$) را قراردهیم و ازحل معادلات، مقادیر کمیتهای($\bar{x},\bar{y},\bar{z}$) را به دست آوریم، خواهیم دید که این کمیتهاتابع خطی از $\bar{t}$ هستند، از این رو حرکت‌ذره‌در $\bar{S}$ نیز یکنواخت است. درواقع، می‌توان ثابت کرد که فقط تبدیل خطی شرط اول را برآورده می‌کند.

حال فرض کنید یک منبع نورواقع درنقطهٔ ($P_0(x_0,y_0,z_0)$ از S، درلحظهٔ $t=t_0$ تپه‌یی در مدت کوتاه بتابد. در هر لحظهٔ بعد مثل t، جبههٔ موج[1] در فضابه صورت‌سطح کروی به مرکز P_0 و شعاع ($c\ (t-t_0)$) خواهد بود. معادلهٔ ایـن سطح کروی عبارت است از:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = c^2(t-t_0)^2 \tag{۱۸ - ۱}$$

فرض‌کنید که مختصات منبع نور از نظر ناظر $\bar{S}$ برابر ($\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0$) ولحظهٔ تابش تپهٔ نور برابر $\bar{t}=\bar{t}_0$ باشد. مطابق شرط دوم، بایددرهرلحظهٔ بعدمثل $\bar{t}$، از نظر ناظر $\bar{S}$ نیز، جبههٔ موج، کره‌ای به شعاع ($c\ (\bar{t}-\bar{t}_0)$) و مرکز($\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0$) باشد. معادلهٔ این جبههٔ موج چنین خواهد بود.

$$(\bar{x}-\bar{x}_0)^2+(\bar{y}-\bar{y}_0)^2+(\bar{z}-\bar{z}_0)^2 = c^2(\bar{t}-\bar{t}_0)^2 \tag{۱۹ - ۱}$$

معادلات (۱ - ۱۸) و (۱ - ۱۹) بترتیب یک رویداد را در دو چارچوب S و $\bar{S}$ توصیف می‌کنند. از اینجا نتیجه می‌شود، معادلاتی که بستگی مختصات (x,y,z,t) و ($\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{t}$) رانشان می‌دهند بایدطوری‌انتخاب شوندکه اگربه جای کمیتهایی که در رابطهٔ (۱ - ۱۹) با علامت "تیره" مشخص شده اند مقدار روابط خطی آنهـا را برحسب کمیتهای بدون

---

1) wavefront

علامت "تیره" بگذاریم ، معادلهٔ (۱ ــ ۱۸) حاصل شود .

حال یک روش ریاضی منسوب به‌مینکوفسکی به کاربرده می‌شود. به جای t ، یعنی مختصهٔ زمان‌هررویدادمشاهده‌شده در S ، از مختصهٔ انگاری محض $x_4 = ict$ (که $i = \sqrt{-1}$) استفاده می‌شود و مختصات فضای (x,y,z)متعلق به رویداد ، با (x_1,x_2,x_3)نشان داده می‌شوند . یعنی :

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3, \quad ict = x_4 \tag{۱ ــ ۲۰}$$

ودراین صورت هر رویداد به وسیلهٔ چهار مختصهٔ x_i ($i = ۱$ و ۲ و ۳ و ۴) معین می‌شود . در $\bar{S}$ تبدیل مشابهی برای مختصات $\bar{x}_i$ انجام خواهدگرفت . دراین صورت معادلات (۱ ــ ۱۸) و (۱ ــ ۱۹) را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$\sum_{i=1}^{4} (x_i - x_{i0})^2 = 0, \tag{۱ ــ ۲۱}$$

$$\sum_{i=1}^{4} (\bar{x}_i - \bar{x}_{i0})^2 = 0 \tag{۱ ــ ۲۲}$$

$\bar{x}_i$ باید توابع خطی از x_i باشند وطوری که معادلهٔ (۱ ــ ۲۲) را به معادلهٔ (۱ ــ ۲۱) تبدیل کنند و از این رو باید داشته باشیم :

$$\sum_{i=1}^{4} (\bar{x}_i - \bar{x}_{i0})^2 \to k \sum_{i=1}^{4} (x_i - x_{i0})^2 \tag{۱ ــ ۲۳}$$

k می‌تواند فقط وابستگی به سرعت نسبی S و $\bar{S}$ داشته باشد . منطقی است که فرض کنیم رابطهٔ بین‌دو دستگاه ، یک‌رابطهٔ معکوس‌است ، طوری‌که وقتی تبدیل وارون‌از $\bar{S}$ به S صورت می‌گیرد ، خواهیم داشت :

$$\sum_{i=1}^{4} (\bar{x}_i - \bar{x}_{i0})^2 \to k \sum_{i=1}^{4} (x_i - x_{i0})^2 \tag{۱ ــ ۲۴}$$

ولی این تبدیل و متعاقب آن تبدیل وارون ، نباید هیچ تابعی از مختصات $\bar{x}_i$ را تغییر دهد ، بنابراین $k^2 = ۱$. واضح است که درحد ، وقتی حرکت نسبی S و $\bar{S}$ به صفر می‌رسد ، داریم $k \to +۱$ ، بنابراین $k \neq -۱$ ونتیجه‌می‌گیریم‌که k برابر واحد است .

اکنون در فضای اقلیدسی چهاربعدی که آن را با $\mathscr{E}_4$ نمایش خواهیم داد، x_i به صورت مختصات دکارتی قائم تعبیر می‌شود. این فضا به نام **فضا ــ زمان مینکوفسکی** خوانده می‌شود. در این حالت طرف چپ معادلهٔ (۱ ــ ۲۱) برابر مجذور فاصله بین نقاطی است‌که دارای‌مختصات x_i و x_{i0} هستند. بدیهی‌است که اکنون می‌توان $\bar{x}_i$ را به‌عنوان مختصات نقطهٔ x_i نسبت به محورهای دکارتی قائم دیگری در $\mathscr{E}_4$ تعبیر کرد. زیرا چنین تعبیری، صادق‌بودن شرط (۱ ــ ۲۳) را (با ۱ = k) ممکن می‌سازد. دراین‌صورت رابطهٔ x_i و $\bar{x}_i$ نیز معادلاتی به صورت

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{4} a_{ij} x_j + b_i \qquad (۱ ــ ۲۵)$$

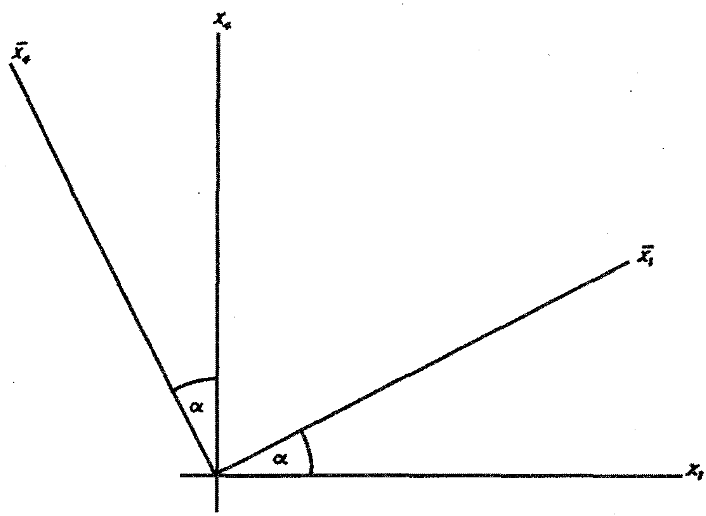
خواهد بود، که درآن ۱ = i ، ۲، ۳، ۴ و a_{ij} و b_i ثابت هستندو این رابطه خطی است. b_i عبارت اند از مختصات مبدأ اولین دستگاه محورهای قائم نسبت به دومین دستگاه. در فصل دوم نشان داده خواهد شد که a_{ij} در اتحادهای بخصوصی صدق می‌کند (معادلات (۲ ــ ۱۴) و (۲ ــ ۱۵)). در کتابهای درسی جبر، ثابت می‌شود که در صورتی رابطهٔ x_i با $\bar{x}_i$ با این صورت مفروض مطابقت داردکه: اولا"، خطی باشد وثانیا"، در شرط (۱ ــ ۲۳) صدق کند.

اگر با استفاده از معادلهٔ (۱ ــ ۲۰)، x_i و $\bar{x}_i$ را به مختصات اصلی یک رویداد برگردانیم، دراین‌صورت رابطهٔ بین‌اندازه‌گیریهای زمان وفضا در S واندازه‌گیریهای‌متناظر در $\bar{S}$، از معادلهٔ (۱ ــ ۲۵) به دست می‌آید. در شرایط معین (مثلا" اگرمختصات یک رویداددر S حقیقی باشند باید در $\bar{S}$ نیز حقیقی باشند) این تبدیل را **تبدیل‌عام‌لورنتس** می‌نامیم.

۱ ــ ۵ تبدیل خاص لورنتس

اکنون، می‌خواهیم با فرض اینکه از چرخش محورهای $\bar{x}_i$ به اندازهٔ زاویهٔ α در صفحه‌یی موازی‌صفحهٔ x_1x_4 ، محورهای x_i در $\mathscr{E}_4$ حاصل می‌شود، تبدیل خاص لورنتس را بررسی‌کنیم. دراین چرخش، محورهای x_2 و x_3 و همچنین مبدأمحورها، ثابت خواهند بود بنابراین، با در نظرگرفتن شکل ۱ ــ ۱، واضح است که خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_1\cos\alpha + x_4\sin\alpha, & \bar{x}_2 &= x_2,\\ \bar{x}_4 &= -x_1\sin\alpha + x_4\cos\alpha, & \bar{x}_3 &= x_3. \end{aligned}\right\} \qquad (۱ ــ ۲۶)$$



شکل ۱ ــ ۱

با به کار بردن معادلات (۱ ــ ۲۰)، ایـن معـادلات تبدیـل را می‌تـوان بـه صورت زیر نوشت:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= x\cos\alpha + ict\sin\alpha, & \bar{y} &= y, \\ ic\bar{t} &= -x\sin\alpha + ict\cos\alpha, & \bar{z} &= z. \end{aligned}\right\} \qquad (۲۷ - ۱)$$

جهت‌تعبیرمعادلات (۱ ــ ۲۷)، صفحه‌یی را درنظرمی‌گیریم که نسبت‌به‌چارچوب $\bar{S}$ ساکن وبه ازای تمام مقادیر $\bar{t}$ دارای معادلهٔ زیر باشد:

$$\bar{a}\bar{x} + \bar{b}\bar{y} + \bar{c}\bar{z} + \bar{d} = 0 \qquad (۲۸ - ۱)$$

معادلهٔ این صفحه نسبت به چارچوب S در هر لحظهٔ ثابت t چنین می‌شود:

$$(\bar{a}\cos\alpha)x + \bar{b}y + \bar{c}z + \bar{d} + ict\bar{a}\sin\alpha = 0 \qquad (۲۹ - ۱)$$

بویژه، اگر داشته باشیم: $\bar{a} = \bar{b} = \bar{d} = 0$ ،دراین صورت این سطح صفحهٔ مختصات $\bar{O}\bar{x}\bar{y}$ خواهدبود که معادلهٔ آن نسبت به S برابر است با $z = 0$ ، به عبارت دیگر این سطح صفحهٔ Oxy است. همچنین اگر $\bar{b} = \bar{c} = \bar{d} = 0$ ، سطح، صفحهٔ

$\bar{O}\bar{y}\bar{z}$ است ومعادلهٔ آن در S برابر است با

$$x = -ict\tan\alpha \qquad (۱-۳۰)$$

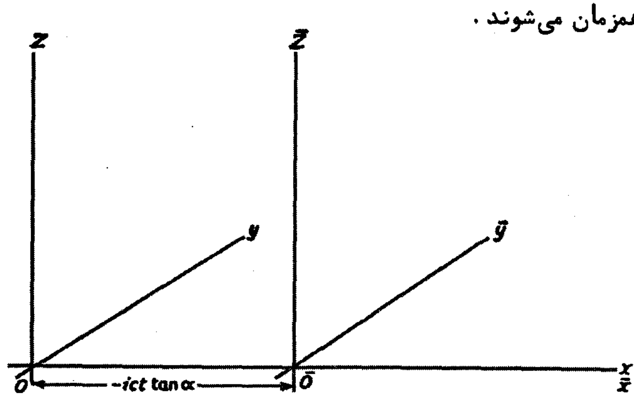
یعنی این صفحه‌یی است موازی با Oyz ، که به اندازهٔ $-ict\tan\alpha$ در امتداد Ox تغییر مکان پیدا کرده است. وبالاخره اگر $\bar{a}=\bar{c}=\bar{d}=0$ ، صفحه عبارت خواهد بود از $\bar{O}\bar{z}\bar{x}$ ،که معادلهٔ آن نسبت به S برابر است با $y=0$ ، یعنی این صفحهٔ Ozx است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که معادلات تبدیل لورنتس (۱ ــ ۲۷) مربوط به حالـــت خاصی است که صفحات مختصات متضمن $\bar{S}$ ، ازانتقال صفحات مختصات متضمن S درطول محور Ox به اندازهٔ مسافتی برابر $-ict\tan\alpha$ درهر لحظهٔ t ، به دست می‌آیند (شکل ۱ ــ ۲) . پس اگر سرعت انتقال $\bar{S}$ نسبت به S برابر u باشد، خواهیم داشت :

$$u = -ic\tan\alpha \qquad (۱-۳۱)$$

همچنین باید توجه کرد که رویدادهای

$$x=y=z=t=0 \quad \text{و} \quad \bar{x}=\bar{y}=\bar{z}=\bar{t}=0$$

با هم متناظراند و از این رو در لحظهٔ انطباق O وبر $\bar{O}$ ، ساعتهای S و $\bar{S}$ واقع در این دو نقطه باید طوری میزان شوند که زمان صفر را نشان دهند، سپس تمام ساعتهای دیگر با آنها همزمان می‌شوند.



شکل ۱ ــ ۲

معادلهٔ (۱ ــ ۳۱) نشان می‌دهد که α انگاری است ومستقیما" به سرعت انتقال بستگی دارد. داریم $\tan\alpha = iu/c$ ، پس می‌توان نوشت :

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}, \quad \sin\alpha = \frac{(iu/c)}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}. \qquad (۱-۳۲)$$

باقرار دادن اینهادر روابط (۱ ــ ۲۷) ،صورت نهایی‌تبدیل خاص لورنتس‌به‌دست می‌آید، یعنی

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x-ut}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}, \quad \bar{y} = y, \\ \bar{t} &= \frac{t-(ux/c^2)}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}, \quad \bar{z} = z. \end{aligned}\right\} \qquad (۱-۳۳)$$

اگرمقدار u درمقایسه‌بامقدار c کوچک باشد ،همچنانکه درحالتهای معمولی‌چنین است ، بدیهی است که این معادلات‌بتقریب برابر خواهند بود با :

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= x-ut, \quad \bar{y} = y, \\ \bar{t} &= t, \qquad\quad \bar{z} = z. \end{aligned}\right\} \qquad (۱-۳۴)$$

این مجموعهٔ معادلات ، به نام معادلات *تبدیل خاص گالیله* ، البته همان مجموعه‌یی است که درنظریهٔفیزیک کلاسیک فرض شده بود که اندازه گیریهای زمان وفضا را در دوچارچوب ، به هم مربوط می‌سازند . لکن رابطهٔ $\bar{t}=t$ بندرت به‌طور صریح بیان می‌شد ، زیرا بدیهی فرض می‌شد که اندازه گیریهای زمان مطلق هستند ، یعنی کاملا" مستقل ازناظر . ولی از معادلات (۱ ــ ۳۳) پیداست‌که چنین‌نظری‌درمورد ماهیت زمان نمی‌تواند مداوم باشد ونیز اینکه درواقع اندازه گیریهای زمان وفضا به هم بستگی دارند ، چنانکه از وابستگی $\bar{t}$ به x و t هر دو مشهوداست .همچنین‌این‌عقیدهٔانقلابی‌ازطریقه‌یی‌که‌درآن‌تبدیلات خاص لورنتس استخراج شده اند ، استنباط می‌شود ، یعنی‌با چرخش محورها ، در یک بسلا[1] کــه دارای مشخصه های[2] فضاگونه[3] و زمان‌گونه[4] هر دواست .اما نتیجهٔ این گفته ، این نیست که زمان

1) manifold

2) characteristics

3) space-like

4) time-like

و فضا باید اکنون اساساً" کمیتهای فیزیکی مشابهی در نظرگرفته شوند ، زیرا تنها چیزی که میسر بوده است ، این است که مختصهٔ زمان رابا ضرب کردن در i ، در مقام مختصات فضا در $\mathscr{E}_4$ ، قرارداده ایم . چون x_4 همیشه باید انگاری باشد درحالیکه x_1 و x_2 و x_3 حقیقی هستند ، ماهیت اساساً" مختلف اندازه گیریهای زمان وفضا درنظریهٔ جدید هنوز به جای خود باقی است .

اگر $u > c$ ، دراین صورت $\bar{x}$ و $\bar{t}$ به‌گونه ای که درمعادلات (۱ ــ ۳۳) آمده اند ، هر دو انگاری هستند . نتیجه می‌گیریم که سرعت هیچ ناظری نسبت به ناظر دیگر نمی‌تواند بیشتراز سرعت نور باشد .

اگردرمعادلات (۱ــ۳۳) ، مقادیر (x,y,z,t) رابرحسب ($\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{t}$) پیدا کنیم ، خواهیم دید که تبدیل وارون ، با تبدیل اصلی یکسان است به جزاینکه علامت u عوض می‌شود . چنین نتیجه ای همچنین ازاین‌واقعیت به دست می‌آید که تبدیل وارون متناظر است با چرخش محورها به اندازهٔ زاویهٔ αــ در فضا ــ زمان . بدین گونه ، سرعت چارچوب S نسبت به ناظر $\bar{S}$ ، برابرuــ است .

۱ ــ۶ انقباض فیتزجرالد ؛ اتساع زمان[1]

بعضی از نتایج فیزیکی‌ابتدایی حاصل ازمعادلات تبدیل (۱ ــ ۳۳) را در این دو بخش بررسی خواهیم کرد .

ابتدا میلهٔ‌سختی را درنظر بگیرید که در روی محور $\bar{x}$ و به‌طورساکن نسبت به $\bar{S}$ قرار دارد . فرض کنید که در دوانتهای میله $\bar{x}=\bar{x}_1$ و $\bar{x}=\bar{x}_2$ ، دراین صورت طول اندازه گیری شدهٔ میله در $\bar{S}$ برابر خواهد بود با

$$l = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 \qquad (۱ - ۳۵)$$

فرض کنید که در لحظهٔ t در S ، دو انتهای میله مکانهای $x=x_1$ و $x=x_2$ را اشغال کرده باشند . دراین‌صورت طبق رابطهٔ (۱ ــ ۳۳) خواهیم داشت :

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1 - ut}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}}, \quad \bar{x}_2 = \frac{x_2 - ut}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \qquad (۱ - ۳۶)$$

---

1) time dilation

ولی $l = x_2 - x_1$ عبارت است ازطول‌اندازه‌گیری شدهٔ میله‌در S ، و از تفریق‌معادلات (۱ ــ ۳۶) نتیجه می‌گیریم که:

$$l = \bar{l}\sqrt{(1-u^2/c^2)} \qquad (۱ - ۳۷)$$

یعنی ، وقتی یک میله‌درامتداد طول خود نسبت به یک چارچوب لخت حرکت کند ، طولش کوتاهتر می‌شود واین پدیده به نام *انقباض فیتزجرالد* معروف است .

نباید تصور شود که این انقباض دراثر واکنش فیزیکی میله نسبت به حرکت آن ویا از مقولهٔ اثرهای فیزیکی مانند انقباض میلهٔ فلزی دراثر سردکردن است ، بلکه ناشی از تغییرات رابطه بین میله و ابزاراندازه گیری‌طول‌آن است . $\bar{l}$ عبارت‌است‌ازطول‌اندازه‌گیری شدهٔ میله به وسیلهٔ خط کشی که نسبت به میله ساکن است ، درحالی‌که l عبارت‌است از طول اندازه‌گیری شدهٔ‌میله به وسیلهٔ‌خط کشی که نسبت‌به‌میله دارای حرکت است .همچنین اندازه گیری‌اول مستلزم‌استفاده ازساعت نیست ، ولی در اندازه‌گیری دوم ، برای مشاهدهٔ همزمان دو انتهای‌میله ، به کار بردن‌ساعت ضروری است . در فیزیک کلاسیک ، فرض براین بود که نتیجهٔ این دوروند اندازه‌گیری یکسان خواهدبود ، زیرا تصور می‌رفت‌که طول صفت ذاتی یک میلهٔ سخت است وروند اندازه گیری ، به هیچ‌وجه تاثیری در مقدار آن ندارد . اکنون این مطالب روشن شده است که طول ، مانند سایر کمیتهای فیزیکی ، به وسیلهٔ روند به کار رفته برای اندازه گیری آن **تعریف** می‌شود وجدا ازنتیجهٔ این روند مفهومی نخواهد داشت . از این دیدگاه ، تعجب آور نیست که نتیجهٔ اندازه گیری نیز به هنگام تغییر روند اندازه گیری برای‌تطبیق باشرایط تغییر کند . یادآوری این مطلب که به مجرد تغییر تصمیم‌ما و استفاده‌ازچارچوب S به جای چارچوب $\bar{S}$ طول میلهٔ بالا تغییر می‌کند ، می‌تواند در پذیرش نظر جدیددرموردانقباض فیتزجرالد به‌خواننده کمک کند . واضح است که یک چنین تغییری در توصیف ریاضی ، هیچ پیامد فیزیکی نمی‌تواند داشته باشد .

دو رویداد همزمان در دونقطهٔ متفاوت به مختصات $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1, \bar{t})$ و $(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2, \bar{t})$ در$\bar{S}$ رادرنظربگیرید .همزمان بودن این دورویداددر S الزامی نیست . زیرا ، اگر $\bar{t} = t_1$ به ازای رویداد اول و $t = t_2$ به‌ازای رویداد دوم در S باشد خواهیم داشت :

$$t_2 - t_1 = \frac{u}{c^2}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)/\sqrt{(1-u^2/c^2)} \qquad (۱ - ۳۸)$$

واین نشان می‌دهد که $t_2 \neq t_1$ ، مگر وقتی که $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$.بنابراین ،همچنانکه قبلا" تصور

می شد ، همزمانی نیز امری است نسبی وبه طور مطلق مفهومی ندارد .

ثبت زمانهای $\bar{t}_1$ و $\bar{t}_2$ به وسیلهٔ ساعتی‌که همراه $\bar{O}$ حرکت می‌کند ، دو رویداد را در $\bar{S}$ معین می‌کند که مختصات آنها بترتیب عبارت اند از ($\bar{t}_1$ و 0 و 0 و 0) و ($\bar{t}_2$ و 0 و 0 و 0) . با به کار بردن تبدیلات وارون روابط (۱ ــ ۳۳) ، t_1 و t_2 زمان اندازه گیری‌شدهٔ این دو رویداد در S چنین خواهند بود.

$$t_1 = \bar{t}_1/\sqrt{(1-u^2/c^2)}, \quad t_2 = \bar{t}_2/\sqrt{(1-u^2/c^2)} \qquad (۱ - ۳۹)$$

از این رو خواهیم داشت.

$$\bar{t}_1 - \bar{t}_2 = (t_1 - t_2)\sqrt{(1-u^2/c^2)} \qquad (۱ - ۴۰)$$

این معادله نشان می دهد که از آهنگ ساعتی که همراه $\bar{O}$ حرکت می‌کند از نظر ناظر S ، به اندازهٔ ضریب $\sqrt{(1-u^2/c^2)}$ ، کاسته می‌شود .این را *اثر اتساع زمان* گویند .چون هرفرآیند فیزیکی چرخه ای (یعنی هر فرآیندی که پس از گذشت دوره‌یی اززمان به حالت اول خسود برمی‌گردد) می‌تواند به‌منزلهٔ ساعت باشد ،بنابراین از نتایج‌حاصل ، چنین استنباط می‌شود که تمام فرآیندهای فیزیکی هنگامی که از چار چوبی مشاهده شوند که نسبت به آن حرکت می‌کنند ، آهسته‌تر روی‌می‌دهند . مثلا" مشاهده شده است که آهنگ واپاشی [1] ذرات‌پرتوزای موجود در پرتوهای کیهانی [2] که با سرعت فوق‌العاده زیاد نسبت به زمین حرکت می‌کنند ، درست با همان ضریبی که معادلهٔ (۱ ــ ۴۰) پیش بینی می‌کند ، کاهش می‌یابد .

همچنین ممکن است استنباط شود که اگرمسافری‌به وسیلهٔ موشکی با سرعتی نزدیک به سرعت‌نور ،زمین راترک‌کند وپس از طی مسافت خیلی زیاد ، دوباره با همان سرعت زیاد به زمین برگردد ، تمام فرآیندهای فیزیکی حادث درموشک ازجمله اعمال فیزیولوژیکی و متابولیکی بدن مسافر ،به نظر ناظرزمینی کندتر جلوه می‌کنند . چون تغییر تمام فرآیندهای فیزیکی یکسان است ، بنابراین مسافر خود از اثرچنین تغییراتی آگاه نخواهد شد . اما ، در موقع برگشت به زمین ، مسافر متوجه خواهد شد که برآورد وی در مورد مدت این مسافرت ، از برآورد ناظر زمینی کمتر است . ممکن است این مطلب چنین تعبیر شود که مسافر خود را ساکن و زمین را متحرک می‌بیند و بدین جهت برآورد ناظر زمینی از برآورد خود وی کمتر

---

1) decay

2) cosmic rays

خواهد بود. این کیفیت را *باطلنمای (پارادکس[1]) ساعت* گویند. این باطلنما به این‌صورت قابل حل است که در نظر بگیریم، چارچوبی‌که همراه موشک حرکت می‌کند، نسبت به یک چارچوب لخت، دارای شتاب است ودرنتیجه‌نمی‌تواندمثل‌یک چارچوب‌لخت مورد استفاده قرار گیرد. کاربرد نتایج نسبیت خاص، تنها درمورد چارچوبهای لخت است، بنابراین مسافر موشک حق ندارد در دستگاه مختصات خود از آنها استفاده کند. همچنانکه بعداً نشان داده خواهد شد، روشهای نسبیت عام درهر چارچوبی قابل استفاده است. می‌توان ثابت کردکه اگر مسافر این روشها را به‌کار ببرد، نتیجهٔ محاسبات وی با نتیجهٔ محاسبات ناظر زمینی توافق دارد.

۱ ــ ۷ بازه‌های[2] فضا گونه وزمان‌گونه؛ مخروط نور[3]

در بخش ۱ ــ۴، ثابت شد که اگر x_i و x_{i0} مختصات فضا ــزمان مینکوفسکی دو رویداد باشند در این‌صورت عبارت

$$\sum_{i=1}^{4} (x_i - x_{i0})^2 \qquad (۱ - ۴۱)$$

ناوردا است، یعنی مقدارش ازنظر تمام ناظرانی که چارچوب لخت وبنابراین محورهای‌قائم در فضا ــزمان به‌کار می‌برند، یکسان‌است. اگر با استفاده از رابطهٔ (۱ــ ۲۰) به‌مختصات معمولی زمان و فضا در یک چارچوب لخت برگردیم، نتیجه خواهیم گرفت که

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-c^2(t-t_0)^2 \qquad (۱ - ۴۲)$$

از نظر تمام ناظران لخت ناوردا است.

مثلاً "اگر (t و z و y و x) و (t_0 و z_0 و y_0 و x_0) مختصات دو رویداد دریک چارچوب لخت مانند S باشند، و τ یعنی *بازهٔ زمان ویژه*[4] بین دو رویداد، طبق معادلهٔ

$$\tau^2 = (t-t_0)^2 - \frac{1}{c^2}\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\} \qquad (۱ - ۴۳)$$

تعریف شود، در این صورت τ برای این دو رویداد یک ناوردا است. دو ناظری که ازدو

1) clock paradox
2) interval
3) light cone
4) proper time interval

چارچوب لخت متفاوت استفاده می‌کنند، ممکن است مختصات متفاوتی به‌رویدادها اختصاص دهند، ولی مقدار τ برای هردو آنها برابر می‌شود.

اگر بازهٔ زمان بین‌دو رویداد را با Δt وفاصلهٔ آنها را با Δd مشخص‌کنیم به شرطی که هر دو در یک چارچوب S ومثبت باشند، طبق رابطهٔ (۱ ـ ۴۳) خواهیم داشت:

$$\tau^2 = \Delta t^2 - \frac{1}{c^2}\Delta d^2 \qquad (۱-۴۴)$$

حال فرض‌کنیم که چارچوب لخت دیگری مانند S، با سرعت $\Delta d/\Delta t$ در امتداد خط و اصل دو رویدادحرکت‌کند. تنها وقتی این عمل امکان پذیر است که داشته باشیم $\Delta d/\Delta t < c$ نسبت به این چارچوب، هر دو رویداد در یک نقطه رخ خواهند داد، پس $\overline{\Delta d} = 0$، و بنابراین طبق رابطهٔ (۱ ـ ۴۴) خواهیم داشت:

$$\tau^2 = \overline{\Delta t}^2 \qquad (۱-۴۵)$$

یعنی بازهٔ زمان ویژهٔ بین دو رویداد، برابر است با بازهٔ زمان معمولی اندازه گیری‌شده درچارچوبی که (درصورت‌وجود چنین چارچوبی) در آن هر دو رویداد دریک نقطهٔ فضا رخ می‌دهند. واضح است که دراین حالت $\tau^2 > 0$ است. دراین صورت بازهٔ زمان ویژهٔ بین دو رویداد را **زمان گونه** می‌نامند.

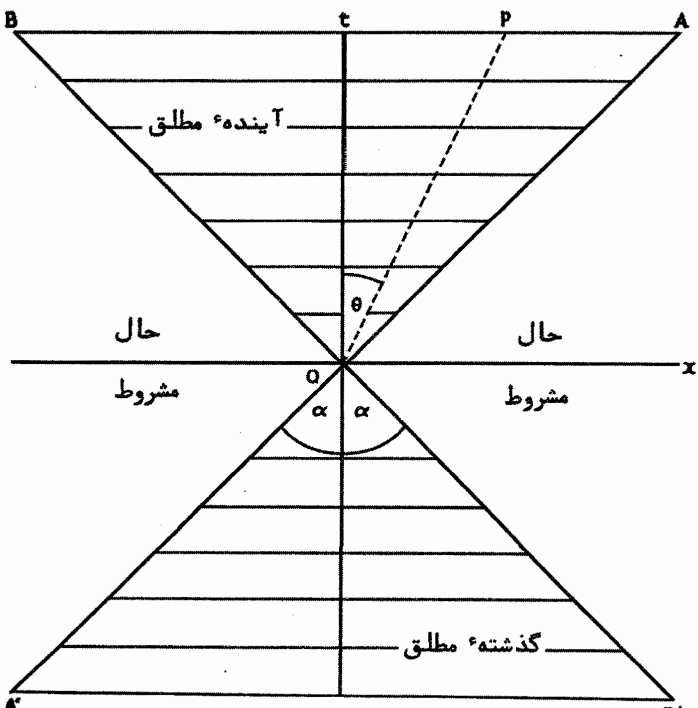
فرض کنید چارچوب S، درصورت امکان، طوری انتخاب شود که درآن هر دو رویداد همزمان رخ دهند. دراین دستگاه $\overline{\Delta t} = 0$ و

$$\tau^2 = -\frac{1}{c^2}\overline{\Delta d}^2. \qquad (۱-۴۶)$$

بنابراین $\tau^2 < 0$ و در هر چارچوب داریم: $\Delta d/\Delta t > c$. دراین صورت τ انگاری محض است وبازهٔ بین دو رویداد را **فضا گونه** می‌نامند.

اگر بازه زمان گونه باشد، $\Delta d/\Delta t < c$ و حضور یک جسم مادی در هر دو رویداد، امکان‌پذیر است. از طرف دیگر اگر بازه فضا گونه باشد، $\Delta d/\Delta t > c$ و حضور چنین جسمی درهردو رویداد، امکان پذیرنیست. حالت حدوسط این است که داشته باشیم: $\Delta d/\Delta t = c$، دراین صورت $\tau = 0$ می‌شود وفقط یک تپه می‌تواند در هر دو رویداد وجود داشته‌باشد. همچنین نتیجه می‌گیریم که دراین حالت، بازهٔ زمان ویژهٔ بین گسیل ودریافت علامت نور صفر است.

حال می‌خواهیم رویداد (t و z و y و x) را به وسیلهٔ نقطه‌یی که دارای این مختصات درفضای چهاربعدی است، نمایش دهیم. این فضا نیزاغلب به عنوان فضا ــ زمان مینکوفسکی نامیده می‌شود، ولی برخلاف پیوستار[1] فضا ــ زمان ذکر شده در بخش ۱ ــ ۴، اقلیدسی نیست. به هر حال امتیاز این نمایش دراین است که همهٔ مختصات دارای مقدار حقیقی هستند و از این جهت درموقع رسم نمودارها مقبولتر است. فرض کنید که ذره ای در لحظهٔ $t = 0$ از نقطهٔ O، مبدا S، و در امتداد محور Ox با سرعت ثابت u شروع به حرکت کند. مختصات y و z آن همیشه صفر است ونمایش حرکت در فضا ــ زمان مقیدبه صفحهٔ xt خواهد بود. حرکت آن دراین صفحه، به صورت خط مستقیم QP می‌شود که درآن Q نقطه ای به مختصات $x = y = z = t = 0$ است (مطابق شکل ۱ ــ ۳). QP را **جهانخط**[2] ذره می‌نامند. اگر $\angle PQt = \theta$، آنگاه $\tan\theta = u$. ولی $|u| \leqslant c$ وبنابراین جهانخط



شکل ۱-۳

1) continuum

2) world-line

ذره باید در قطاع AQB [1] قرار بگیرد که در آن $\angle AQB = 2\alpha$ و $\tan\alpha = c$. همچنین اگر ذره‌ای بعد از حرکت در امتداد محور Ox، در لحظهٔ $t = 0$ به نقطهٔ O برسد، در این صورت جهانخط آن در قطاع $A'QB'$ واقع خواهد شد. نتیجه می‌شود که هر رویداد واقع در هریک از این دو قطاع باید به وسیلهٔ یک بازهٔ زمان گونه از رویداد واقع در نقطهٔ Q جدا شده باشد، زیرا وجود یک ذره در هر دو رویداد امکان‌پذیر است. رویدادهای واقع در دو قطاع AQB' و $A'QB$ به وسیلهٔ بازه‌های فضاگونه از Q جدا می‌شوند. دو خط $A'A$ و $B'B$ جهانخط علامتهای نور هستند که در لحظهٔ $t = 0$ از نقطهٔ O می‌گذرند و بترتیب در دو امتداد مثبت و منفی محور x منتشر می‌شوند.

برای هر رویداد واقع در AQB، $t > 0$ است و این بدان معنی است که در چارچوب S، آن رویداد نسبت به رویداد Q درآینده قرار داد. به هر حال هر چارچوبی را هم که برگزینیم رویداد مورد نظر نمی‌تواند با رویداد Q همزمان شود، زیرا این مستلزم یک بازهٔ فضاگونه است. به *طریق اولی*، در هیچ چارچوبی رویداد مورد نظر نمی‌تواند مقدم بر Q باشد. بنابراین قطاع قطاع AQB شامل رویدادهایی است که نسبت به رویداد Q **درآیندهٔ مطلق** [2] هستند. و به همین ترتیب قطاع $A'QB'$ شامل رویدادهایی است که نسبت به رویداد Q **درگذشتهٔ مطلق** [3] هستند. ازطرف دیگر، رویدادهای واقع در دو قطاع AQB' و $A'QB$ به وسیلهٔ بازهٔ فضا گونه از Q جدا شده اند و با انتخاب چارچوب لخت مناسب، می‌توان هریک از آنها را با Q همزمان کرد. این رویدادها می‌توانند قبل یا بعد از Q رخ دهند، و این امر بستگی به دستگاه مختصات مورد استفاده خواهد داشت. این دو قطاع از ناحیهٔ فضا ـ مکان، *حال مشروط* [4] نامیده می‌شوند.

چون سرعت هیچ علامت فیزیکی نمی‌تواند بیشتر از c باشد، جهانخط هر علامتی که از نقطهٔ Q منتشر می‌شود باید درقطاع AQB واقع باشد. پس نتیجه می‌شود که رویداد Q می‌تواند علت فیزیکی تنها آن رویدادهایی باشد که نسبت به Q درآیندهٔ مطلق هستند. به همین ترتیب Q می‌تواند معلول آن رویدادهایی باشد که در گذشتهٔ مطلق آن قرار دارند. Q نمی‌تواند به طور علّی به رویداهایی مربوط شود که درحال مشروط آن واقع هستند.

این مطالب راباید باحالت اساسا" سادهٔ فیزیک کلاسیک مقایسه کرد که در آن حد

1) sector
2) absolute future
3) absolute past
4) conditional present

بالایی برای سرعت علامت وجودندارد و AA' و BB' برمحور x منطبق هستند. دراین صورت گذشته وآینده، به‌وسیلهٔ حال کاملا" مشخص، که‌درآن تمام‌رویداد ها دارای مختصهٔ زمان $t=0$ هستند، ازهمدیگر جدا شده اند.

در فضای‌چهاربعدی $Qxyzt$ ، سه ناحیهٔ‌گذشتهٔ مطلق، آیندهٔ مطلق و حال مشروط به وسیلهٔ مخروط

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2 = 0 \qquad (۴۷-۱)$$

از یکدیگر جداشده اند. جهانخط یک تپهٔ نورکه از نقطهٔ Q فرستاده شود، در روی ایـن سطح واقع می‌شود و از این‌جهت، این سطح‌را مخروط نور در Q می‌نامند. چون Q می‌تواند هر رویداد دلخواهی‌باشد، پس‌هررویدادی رأس یک مخروط نوراست‌که‌آن مخروط نور، پیوستار فضا ــ زمان را به طور مطلق به سه ناحیهٔ متمایز نسبت به آن رویداد تقسیم می‌کند.

تمرینات فصل اول

۱ ــ ذره‌ای به‌جرم m تحت‌تأثیرنیروی $\mathbf{f}$ درصفحهٔ‌محورهای Oxy حرکت می‌کند. Oxy یک چارچوب‌لخت است. $Ox'y'$ نسبت به این‌چارچوب‌لخت چرخش می‌کند طوری که $\psi=\omega.$ و $\angle x'Ox=\psi$ (r,θ) مختصات قطبی ذره نسبت به چارچوب چرخان هستند. اگـر (f_r, f_θ) مؤلفه های قطبی $\mathbf{f}$ و (a_r و a_θ) مؤلفه های قطبی شتاب ذره نسبت به $Ox'y'$ باشند، v سرعت ذره نسبت به این دستگاه محورها باشد و ϕ زاویهٔ بین امتداد حرکت ذره با بردار شعاعی ذره در این چارچوب باشد، ثابت کنید که معادلات حرکت به صورت زیراند:

$$ma_r = f_r+2m\omega v\sin\phi+mr\omega^2,$$

$$ma_\theta = f_\theta-2m\omega v\cos\phi-mr\dot{\omega}.$$

ازآنجا نتیجه بگیرید که اگر علاوه برنیروی $\mathbf{f}$ نیروهای $m\omega^2r$ در امتداد شعاع به طرف خارج (نیروی مرکز گریز) و $2m\omega v$ در امتداد عمودبرراستای‌حرکت(نیروی‌کوریولیس) و $mr\dot{\omega}$ به‌طور عرضی، نیز برذره وارد شوند، قانون دوم درمورد حرکت ذره نسبت به چارچوب چرخان صدق می‌کند. (اگر چرخش یکنواخت باشد، نیروی آخری صفر می‌شود).

۲ ــ میله ای در $\bar{S}$ ساکن است ودرامتداد $\bar{O}\bar{x}$ قراردارد. اگرمشاهدهٔ دوانتهای

میله از S درلحظاتی صورت گیرد که در $\bar{S}$ همزمان هستند، ثابت کنید که طول میله که برمبنای این مشاهدات به‌دست می‌آید به‌اندازهٔ ضریب $(1-u^2/c^2)^{-1/2}$ از طول آن در $\bar{S}$، بیشتر است.

۳ ــ فرض کنید که میلهٔ ذکر شده در تمرین ۲، به اندازهٔ T ثانیه طول می‌کشدتا از یک نقطهٔ ثابت واقع برمحور x عبور کند. T به وسیلهٔ ساعتی که درنقطهٔ ثابت قرار دارد، اندازه گیری می‌شود. اگر طول میله‌در چارچوب S برابر uT باشد، انقبـــاض فیتزجرالد را به دست آورید.

۴ ــ میلهٔ اندازه گیری مورد استفادهٔ ناظر S به نظر ناظر $\bar{S}$، به اندازهٔ ضریب $(1-u^2/c^2)^{1/2}$ کوتاهتر است. از این رو وقتی ناظر S طول میلهٔ‌ثابت در $\bar{S}$ رااندازه گیری می‌کند، پیش بینی می‌شود نتیجهٔ او چنین باشد:

$$\bar{l} = l/(1-u^2/c^2)^{1/2}$$

واین نتیجه با رابطهٔ (۱ ــ ۳۷) تناقض دارد. علت تناقض رابه دست آورید. (راهنمایی: به نظر ناظر $\bar{S}$ چنین می‌رسد که‌ناظر S انتهای عقبی‌میله‌را به اندازهٔ مدتی برابر ul/c^2 دیرتراز انتهای جلویی آن می‌بیند).

۵ ــ میله ای به‌طور ساکن درامتداد محور x چارچوب S قرار دارد. نشان دهید که جهانخطهای ذرات این میله، "نوار" معینی را در صفحهٔ x_1x_4 اشغال می‌کنند. با اندازه گیری‌پهنای این "نوار" موازی محور $\bar{x}_1$، انقباض فیتزجرالد را به دست آورید.

۶ ــ ثابت کنید که معادله های تبدیل (۱ ــ ۳۳) به گونه یی هستند که

$$\bar{x}^2+\bar{y}^2+\bar{z}^2-c^2\bar{t}^2 = x^2+y^2+z^2-c^2t^2$$

۷ ــ دو تپهٔ نور به فاصلهٔ d از یکدیگر، در امتداد محور x و در جهت مثبت آن در چارچوب S حرکت می‌کنند. ثابت کنید که فاصلهٔ اندازه گیری شده بین این دو تپه در $\bar{S}$ برابر است با:

$$d\sqrt{\left(\frac{c+u}{c-u}\right)}$$

۸ ــ d عبارت است از فاصلهٔ بین‌دو نقطهٔ A و B واقع در چارچوب لخت S. رویدادی‌در B رخ می‌دهدکه زمان اتفاق‌آن (نسبت به ساعتهای S) T ثانیه بعداز رویدادی است که در A اتفاق می‌افتد. در چارچوب لخت دیگری مانند $\bar{S}$ این دو رویداد همزمان هستند. اگربردار تغییر مکان AP واقع در $\bar{S}$ نمایشگر سرعت $\bar{S}$ نسبت به S باشد، ثابت کنید که‌نقطهٔ P در روی صفحه ای عمود بر AB واقع است و به فاصلهٔ c^2T/d از نقطهٔ

A قرار دارد.

۹ — S و S دو چارچوب لخت مورد نظر در بخش ۱ — ۵ هستند. طول میله‌ای متحرک که‌به‌طور موازی با محورهای x و $\bar{x}$ است در چارچوب S برابر a ودر چارچوب S برابر $\bar{a}$ اندازه گیری می‌شود. با در نظر گرفتن نمودار مینکوفسکی برای میله ویا به روش دیگر، نشان دهید که طول ویژهٔ میله برابر است با:

$$\frac{a\bar{a}\beta u/c}{\sqrt{(2\beta a\bar{a}-a^2-\bar{a}^2)}}$$

که درآن $\beta=(1-u^2/c^2)^{-1/2}$.

۱۰ — اگر بردار مکان رویدادی، به نظر ناظران چارچوبهای لخت موازی هم S و S بترتیب برابر $\mathbf{r}\ (x,y,z)$ و $\bar{\mathbf{r}}\ (\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ باشد ودریک‌فضای سه بعدی‌مستقل $\mathscr{E}_3$ نگاشته[1] شده باشند، ثابت کنید که:

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r}+\mathbf{u}\left\{\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}}{u^2}(\beta-1)+\beta t\right\}$$

$$\bar{t} = \beta(t+\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}/c^2),$$

که درآن $\beta=(1-u^2/c^2)^{-1/2}$ و $\mathbf{u}$ سرعت S است که در S اندازه گیری می‌شود.

۱۱ — مرکز ثقل و محور یک استوانه دوار قائم، نسبت به چارچوب لخت S ثابت است واستوانه با سرعت یکنواخت ω حول محور خود نسبت به S می‌چرخد. ثابت کنید که‌وقتی این استوانه از S مشاهده شود، به نظر خواهد رسید که به اندازهٔ زاویه ای برابر $u\omega/c^2$ در واحد طول سکون استوانه، حول محور خود پیچیده است.

1) mapped

فصـــــل دوم

تبدیلات متعامد؛ تانسورهای دکارتی

۲ ـ ۱ تبدیلات متعامد[1]

در بخش ۱ ـ ۴، رویدادها به وسیلهٔ نقاطی واقع در فضای چهار بعدی $\mathscr{E}_4$ نمایش داده شدند، و توزیع نقاط به‌وسیلهٔ مختصات آنها نسبت به مجموعه‌یی از محورهای دکارتی قائم توصیف شدند. نشان داده شد که هر مجموعه از این محورها، متناظر با ناظری است که از یک چارچوب دکارتی قائم لخت در فضای معمولی سه بعدی $\mathscr{E}_3$ و ساعتهایی که دراین چارچوب ساکن هستند، استفاده می‌کند. دراین نمایش، پدیده های فیزیکی که توسط دوناظر لخت از این‌گونه، توصیف می‌شوند، به وسیلهٔ یک تبدیل چهار بعدی در $\mathscr{E}_4$، از یک مجموعهٔ محورهای قائم به مجموعهٔ محورهای قائم دیگر مربوط اند. چنین تبدیلی که تبدیل متعامد نامیده‌می‌شود در معادلهٔ (۱ ـ ۲۵) داده شده است. به طورکلی هرگاه x_i و $\bar{x}_i$ (که داریم N و . . . و ۳ و ۲ و ۱ $=i$) دو مجموعه از N عنصر باشند طوری که رابطهٔ آنها با هم به صورت تبدیل خطی

$$\bar{x}_i=\sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j+b_i \qquad (۱-۲)$$

باشد واگر ضرایب این تبدیل یعنی a_{ij} طوری باشند که، برای‌تمام مجموعه های متناظر x_i و $\bar{x}_i$ و y_i و $\bar{y}_i$،

$$\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}_i-\bar{y}_i)^2=\sum_{i=1}^{N}(x_i-y_i)^2 \qquad (۲-۲)$$

یک اتحاد باشد، آنگاه گفته می‌شود که تبدیل متعامد است. روشن است که اگر تصور شود x_i و $\bar{x}_i$ مختصات یک نقطه در $\mathscr{E}_N$، مربوط به‌دومجموعهٔ محورهای قائم دکارتی متفاوت باشند، دراین صورت‌بنابه معادلهٔ (۲ ـ ۲) مجذور فاصلهٔ دو نقطه یک ناوردا است وبستگی به چارچوب دکارتی ندارد.

اگر بنویسیم: $z_i=x_i-y_i$ و $\bar{z}_i=\bar{x}_i-\bar{y}_i$، بادرنظرگرفتن‌معادلهٔ (۲ ـ ۱) خواهیم داشت:

---

1) orthogonal transformations

$$\bar{z}_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} z_j \qquad (۲-۳)$$

فرض کنیم که z یک ماتریس‌ستونی[1] باعنصرهای z_i و $\bar{z}$ یک‌ماتریس‌ستونی دیگربا عنصرهای $\bar{z}_i$ و A یک ماتریس $N\times N$ باعنصرهای a_{ij} را نشان دهد. دراین صورت مجموعهٔ معادلات (۲ — ۳) ، هم‌ارز معادلهٔ ماتریسی زیر خواهد بود :

$$\bar{z} = Az \qquad (۲-۴)$$

همچنین اگر z' ترانهاد[2] z باشد، خواهیم داشت :

$$z'z = \sum_{i=1}^{N} z_i^2 \qquad (۲-۵)$$

بدین جهت ممکن است اتحاد (۲ — ۲) به صورت زیر نوشته شود :

$$\bar{z}'\bar{z} = z'z \qquad (۲-۶)$$

ولی از معادلهٔ (۲ — ۴) داریم :

$$\bar{z}' = z'A' \qquad (۲-۷)$$

اگر به‌جای $\bar{z}'$ و $\bar{z}$ در طرف چپ رابطهٔ (۲ — ۶) ، مقادیر آنها را از روابط (۲ — ۴) و (۲ — ۷) قرار دهیم ، خواهیم داشت :

$$z'A'Az = z'z \qquad (۲-۸)$$

واین رابطه برای تمام مقادیر z ، فقط به شرطی صادق خواهد بود که داشته باشیم :

$$A'A = I \qquad (۲-۹)$$

که درآن I ماتریس یکهٔ $N\times N$ است .

با نوشتن دترمینان هر دو طرف معادلهٔ ماتریسی (۲ — ۹) ، به دست می‌آیدکه :

---

1) column matrix

2) transpose

$|A|^2 = 1$ ، و از این رو داریم :

$$|A| = \pm 1 \qquad (۲-۱۰)$$

بنابراین A منظم[1] است .فرض کنیم که A^{-1} وارون A باشد . باضرب‌کردن دو طرف‌رابطهٔ (۲-۹) در A^{-1} از سمت راست ، خواهیم داشت :

$$A' = A^{-1} \qquad (۲-۱۱)$$

حال نتیجه می‌شود که :

$$AA' = AA^{-1} = I \qquad (۲-۱۲)$$

فرض کنیم که عنصر ij ام ماتریس I ، برابر δ_{ij} باشد ، دراین صورت خواهیم داشت :

$$\left.\begin{aligned} \delta_{ij} &= 1, \quad i = j, \\ &= 0, \quad i \neq j. \end{aligned}\right\} \qquad (۲-۱۳)$$

نماد δ_{ij} ، معروف به *دلتای کرونکر*[2] است . با این ترتیب ، روابط (۲-۹) و (۲-۱۲) بترتیب هم‌ارز روابط زیر خواهند بود :

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}, \qquad (۲-۱۴)$$

$$\sum_{l=1}^{N} a_{jl} a_{kl} = \delta_{jk} \qquad (۲-۱۵)$$

اگر تبدیل مذکور متعامد باشد ،این شرایط درمورد a_{ij} ، یعنی ضرایب تبدیل (۲-۱) ، الزاما" صادق‌اند ؛ و برعکس ، اگر هر یک ازاین شرایط صدق‌کند ، می‌توان بآسانی اثبات کرد که رابطهٔ (۲-۶) صادق و در نتیجه تبدیل متعامد است .

1) regular

2) Kronecker delta

۲ ــ ۲ قرارداد جمع شاخص تکراری

در اینجا مناسب است یک نمادنگاری معرفی شود که کار محاسباتی آینده را به مقدار زیاد مختصر می‌کند. باید دانست که مفهوم تکرار دو بارهٔ یک شاخص[1] حرفی درجمله ای از یک عبارت ،این است که این جمله باید روی تمام مقادیر ممکن آن شاخص جمع زده شود. به‌طور مثال، جهت مختصر کردن، چنین می‌نویسیم:

$$\sum_{r=1}^{N} a_r b_r = a_r b_r. \qquad (۱۶ - ۲)$$

شاخص بایدیک شاخص حرفی باشدو بعلاوه قرار براین خواهد بودکه حتما "باید حرف‌کوچک باشد. بنابراین جملاتی مثل a_2b_2 و a_Nb_N جملات مفردی از عبارت a_rb_r هستند و جمع دراین حالات مفهومی ندارد.

با به کاربردن‌این‌قرار داد، معادلات (۲ ــ ۱۴) و (۲ ــ ۱۵) را می‌توان بترتیب زیر نوشت:

$$a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}, \quad a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk} \qquad (۱۷ - ۲)$$

باز هم با قرار دادن $z_i = x_i - y_i$، می‌توانیم معادلهٔ (۲ ــ ۲) رابه صورت زیر بنویسیم:

$$\bar{z}_i \bar{z}_i = z_i z_i \qquad (۱۸ - ۲)$$

اگر درجمله‌ای شاخص تکراری بیش از یک حرف باشد، دراین صورت عمل جمع نیز بیش از یکبار انجام خواهد گرفت. مثلا":

$$a_{ij} b_{jk} c_k = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} a_{ij} b_{jk} c_k \qquad (۱۹ - ۲)$$

قرار دادن هر حرف کوچک به‌جای شاخص تکراری دریک جمله مجاز است به شرط اینکه این شاخص جانشین،در جای دیگری از همان جمله نوشته نشود. مثلا":

$$a_i b_i = a_j b_j = a_k b_k, \qquad (۲۰ - ۲)$$

ولی:

---

1) index

$$a_{ij}a_{ik} \neq a_{jj}a_{jk}, \qquad (۲-۲۱)$$

زیرامعلوم نیست که جملهٔ طرف راست نسبت به j جمع می‌شود یا نه. دریک انتگرال‌معین، متغیر انتگرال گیری دارای خاصیت شاخص تکراری است. مثلاً :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy \qquad (۲-۲۲)$$

بدین سان شاخص تکراری را *شاخص ظاهری*[1] وهر شاخص دیگر را *شاخص آزاد*[2] می‌نامیم.

از این به بعد فرض مابراین خواهد بود که هرگاه شاخصهای آزاد یک معادله تمام مقادیر ممکن را بگیرند، آن معادله صادق می‌ماند. مثلاً" معادلات (۲ ــ ۱۷) به‌ازای‌تمام مقادیر N و . . . و ۲ و ۱ = j و Nو . . . و ۲ و ۱ = kصادق‌اند. واضح است که شاخصهای آزاد طرفین یک معادله، یکسان هستند.

خواننده باید متوجه باشد که به این‌جهت است که اتحاد

$$\delta_{ij}a_j = a_i, \qquad (۲-۲۳)$$

دارای کاربرد زیاداست. δ_{ij} را معمولاً" **عملگرجانشینی**[3] می‌خوانند، زیرا وقتی در نمادی مثل a_j ضرب می‌شود، باعث نشستن شاخص i به جای j می‌شود.

۲ ــ ۳ تانسور های دکارتی‌قائم

فرض‌کنیم که x_i و y_i بترتیب مختصات دکارتی قائم دو نقطهٔ Q و P درفضای $\mathscr{E}_N$ باشند. با نوشتن $z_i = x_i - y_i$، z_iرا **مؤلفه های بردار تغییر مکان PQ** نسبت به محورهای به‌کاربرده‌شده‌می‌نامند. اگر $\bar{x}_i$ و $\bar{y}_i$ مختصات دونقطهٔ Q و P نسبت‌به‌مجموعهٔ‌دیگری ازمحورهای‌قائم باشند، دراین صورت رابطهٔ مختصات جدید با مختصات قدیم، طبق معادلات‌تبدیل (۲ ــ ۱) خواهدبود. پس‌اگر $\bar{z}_i$ مؤلفه های PQ درچارچوب‌جدیدباشند، نتیجه می‌شود (طبق رابطهٔ (۲ ــ ۳)) که

$$\bar{z}_i = a_{ij}z_j \qquad (۲-۲۴)$$

---

1) dummy index

2) free index

3) substitution operator

هر مجموعهٔ N عنصری راکه در چارچوب مختصات اولیه مقادیر A_i را اختیار کند و در مراجعه به چارچوب مختصات جدید از روش تبدیل z_i پیروی کند، یعنی ؛

$$\bar{A}_i = a_{ij} A_j, \qquad (۲-۲۵)$$

باشد، مؤلفهٔ های یک بردار در $\mathscr{E}_N$ نسبت به چارچوبهای مرجع دکارتی قائم می‌نامند. عبارت "برداری که‌مؤلفه‌های آن A_i باشد" را معمولاً" جهت اختصار" بردار A_i" می‌گوییم. همچنین بردار را با **A** نمایش می‌دهیم.

اگر A_i و B_i دو بردار باشند، N^2 کمیت A_iB_j رادرنظربگیرید. تحت‌تبدیل‌محورها، تبدیل این کمیتها چنین است:

$$\bar{A}_i \bar{B}_j = a_{ik} a_{jl} A_k B_l. \qquad (۲-۲۶)$$

هر مجموعه از N^2 کمیت C_{ij} را، که به این طریق تبدیل شوند، یعنی به گونه‌یی که

$$\bar{C}_{ij} = a_{ik} a_{jl} C_{kl}, \qquad (۲-۲۷)$$

مؤلفه های یک **تانسور رتبهٔ**[1] **دوم** می‌نامند. ما آن را "تانسور C_{ij}" خواهیم خواند. یک چنین تانسوری الزاماً" به صورت حاصل ضرب دو بردار، نمایش پذیر نیست.

یک مجموعه از N^3 کمیت D_{ijk} که روش تبدیل آنها مثل تبدیل حاصل ضرب سه بردار $A_iB_jC_k$ است، یک‌تانسوررتبهٔ سوم را تشکیل می‌دهند. قانون تبدیل‌عبارت است از

$$\bar{D}_{ijk} = a_{il} a_{jm} a_{kn} D_{lmn}. \qquad (۲-۲۸)$$

اکنون تعمیم به یک تانسور از هر رتبه‌یی باید واضح باشد. البته باید دانست که بردارها، تانسور رتبهٔ اول هستند.

اگر A_{ij} و B_{ij} تانسور باشند، دراین صورت مجموع آنها $A_{ij}+B_{ij}$ کمیتهایی به تعداد N^2 هستند که تبدیل آنها طبق قانون تبدیل A_{ij} و B_{ij} انجام می‌گیرد. بنابراین مجموع دوتانسور رتبهٔ دوم، برابر است با یک‌تانسور رتبهٔ دوم. فوراً" می‌توان این‌نتیجه

---

1) rank

را درمورد مجموع دوتانسور با رتبهٔ مساوی تعمیم داد. به همان ترتیب می‌توان گفت که تفاضل دو تانسور با رتبهٔ یکسان نیز یک تانسور است.

روش ما در معرفی یک تانسور، دلالت براین دارد که حاصل ضرب هر تعدادی از بردارها، یک تانسور است. به طورکلی اگر $A_{ij}...$ و $B_{ij}...$ تانسورهایی از هر رتبه باشند (ممکن است دارای رتبهٔ متفاوت‌باشند)، دراین‌صورت حاصل ضرب $A_{ij}...B_{kl}...$ یک تانسور است که رتبهٔ آن برابر است با مجموع رتبه های آن دو عامل ضرب.به عهدهٔ خواننده است که با نوشتن معادلات تبدیل، این مطلب را درمورد حاصل ضربی مثل $A_{ij}B_{klm}$، به طور صریح ثابت کند. (دقت کنید که شاخص این دو عامل ضرب باید متمایز از هم باشند، زیرا در غیراین صورت دلالت برجمع کردن دارد و این، مطلب را بغرنج می‌کند. به بخش ۲ ــ ۵ توجه کنید).

مؤلفه های یک‌تانسوررا نسبت به هر مجموعه از محورها، می‌توان به طور دلخواه انتخاب کرد. دراین صورت مؤلفه های آن تانسور نسبت به مجموعهٔ دیگری از محورها، از معادلات تبدیل به دست می‌آیند. تانسوری از رتبهٔ دوم را در نظر بگیرید که مؤلفه های آن نسبت به محورهای x_i، برابر δ_{ij} (دلتای کرونکر) اند. طبق معادلات (۲ ــ ۱۷) مؤلفه های آن در چارچوب $\bar{x}_i$ برابر می‌شوند با:

$$\bar{\delta}_{ij} = a_{ik}a_{jl}\delta_{kl} = a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}, \qquad (۲ - ۲۹)$$

بدین ترتیب، مؤلفه های این‌تانسورنسبت به‌تمام مجموعه های محورها یکسان است و *تانسور اساسی*[1] از رتبهٔ دوم نامیده می‌شود.

در حالت خاص، اگر تانسور رتبهٔ سومی مثل A_{ijk} باشد طوری که به ازای‌تمام مقادیر i, j, k داشته باشیم:

$$A_{ijk} = A_{jik} \qquad (۲ - ۳۰)$$

دراین صورت گوییم که تانسور A_{ijk} نسبت به دوشاخص i و j متقارن[2] است.نسبت به هر یک جفت ازشاخصها، ممکن است تقارن وجودداشته باشد. اگر A_{ijk} یک تانسور باشد، در این صورت در موقع تبدیل، خاصیت تقارن آن نسبت به دوشاخص محفوظ می‌ماند زیرا:

---

1) fundamental tensor

2) symmetric

$$\bar{A}_{jik} = a_{jl}a_{im}a_{kn}A_{lmn},$$
$$= a_{im}a_{jl}a_{kn}A_{mln},$$
$$= \bar{A}_{ijk}, \quad (۲-۳۱)$$

درسطردوم ترتیب جملات راتغییرداده‌ایم وبه جای A_{lmn} مقدار مساوی آن A_{mln} را قرار داده ایم . یک خاصیت وقتی از اهمیتی برخوردار است که در تبدیل محفوظ بماند ، زیرابعدا "تانسورها را برای بیان روابطی که برای همهٔ ناظر ها معتبر هستند به کار خواهیم برد ، و رابطه ای که در یک چارچوب منحصرا " و برحسب تصادف ، صادق باشد دارای هیچ مدلول اساسی نیست .

همچنین ،اگرتانسور A_{ijk} طوری باشد که به ازای جمیع مقادیر i, j, k بتوان نوشت :

$$A_{ijk} = -A_{jik} \quad (۲-۳۲)$$

دراین صورت می‌گوییم تانسور مذکور نسبت به دو شاخص اول خود **پادمتقارن** است . این خاصیت نیزدرموقع تبدیل محفوظ می‌ماند . وقتی $A_{11k} = -A_{11k}$ می‌شود که $A_{11k} = 0$ باشد ،بنابراین مقدارتمام مؤلفه های A_{ijk} که درآنها دو شاخص اول مساوی هستند ، برابر صفر خواهد بود .

اگر تمام مؤلفه های یک‌تانسور در یک‌چارچوب صفر باشد ، در هر چارچوب دیگری نیزمؤلفه‌هایش صفرخواهدبود . یک‌فرع‌این‌نتیجه‌این است‌که‌اگر $A_{ij}\ldots$ و $B_{ij}\ldots$ دو تانسورهم‌رتبه و مؤلفه های متناظرآنها در یک چارچوب برابر باشند ، در این صورت آن مولفه هادر هر چارچوب دیگری‌نیز مساوی خواهند بود ، زیرا $(A_{ij}\ldots - B_{ij}\ldots)$ تانسوری است که تمام مؤلفه های آن درچارچوب‌اول صفراست واز این رو در هر چارچوب دیگری نیز صفر خواهد بود . بنابراین یک *معادلهٔ تانسوری*

$$A_{ij}\ldots = B_{ij}\ldots \quad (۲-۳۳)$$

در هر دستگاه مختصاتی صادق است . این مطلب اهمیت تانسورها را برای مقصود ما توضیح می‌دهد . با بیان هر قانون فیزیکی به صورت معادلهٔ تانسوری ، می‌توان هموردایی آن را

نسبت به تعویض چارچوب لخت تضمین کرد .

۲ ـ ۴ ناورداها ؛ گرادیان ها[1] ؛ مشتق تانسورها

فرض کنید V کمیتی است که هر نوع تعویض محورها در آن بی اثر است . در این‌صورت V یک *ناوردای نرده ای* ویا به‌طور ساده یک *ناوردا* نامیده می‌شود . معادلهٔ تبدیل‌آن‌به صورت سادهٔ

$$\bar{V} = V \qquad (۳۴ - ۲)$$

است . بعدا" (دربخش ۴ ـ ۱) ثابت می‌شود که باریک الکترون به چارچوب‌لختی که درآن اندازه گیری می‌شود و ابستگی ندارد ، از این رو از نوع کمیتی است‌که مورد نظر است .

اگر به هر نقطه از یک ناحیهٔ $\mathscr{E}_N$ یک مقدار از V وابسته باشد ، دراین صورت یک *میدان ناوردا* در این ناحیه تعریف شده است . دراین حالت V تابعی از مختصات x_i خواهد بود . درموقع تبدیل به محورهای جدید ، V را برحسب مختصات جدید $\bar{x}_i$ بیان می‌کنیم‌که دراین صورت آن رابا علامت $\bar{V}$ نمایش می‌دهیم .بنابراین رابطهٔ زیر یک اتحاد است:

$$\bar{V}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N) = V(x_1, x_2, \ldots, x_N) \qquad (۳۵ - ۲)$$

باید متذکر شد که لزومی ندارد $\bar{V}$ همان تابعی از $\bar{x}_i$ باشد که V از x_i است .

اگر A_{ij} یک تانسورباشد ، مسلما" VA_{ij} نیزیک تانسوررتبهٔ دوم می‌شود .بنابراین مناسب است که یک ناوردا را یک‌تانسور رتبهٔ صفرم در نظر بگیریم .

N مشتق جزئی $\partial V/\partial x_i$ را درنظر بگیرید . عمل تبدیل این مشتقها مثل عمل تبدیل یک برداراست .برای اثبات‌این مطلب ، لازم است وارون تبدیل (۲ ـ ۱) راامتحان کنیم .این وارون رامی‌توان برحسب نمادنگاری ماتریسی بخش ۲ ـ ۱ وبا استفاده از معادلهٔ (۲ ـ ۱۱) ، چنین نوشت :

$$x = A^{-1}(\bar{x}-b) = A'(\bar{x}-b), \qquad (۳۶ - ۲)$$

---

1) gradients

معادلهٔ (۲ ــ ۳۶) با معادلهٔ

$$x_i = a'_{ij}(\bar{x}_j - b_j), \qquad (۲ - ۳۷)$$

هم ارز است، که‌در آن a'_{ij} عنصر ماتریس A' است. ولی $a'_{ij} = a_{ji}$ ، پس داریم:

$$x_i = a_{ji}(\bar{x}_j - b_j). \qquad (۲ - ۳۸)$$

و از آنجا نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j} = a_{ji} \qquad (۲ - ۳۹)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}_i} = \frac{\partial V}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_i} = a_{ij}\frac{\partial V}{\partial x_j}, \qquad (۲ - ۴۰)$$

واین رابطه ثابت می‌کند که $\partial V/\partial_{x_i}$ یک بردار است. $\partial V/\partial_{x_i}$ را **گرادیان V** می‌نامندو با علامت $\text{grad}\, V$ ویا ∇V نشان می‌دهند.

اگر یک‌تانسور $A_{ij}\ldots$ در هر نقطه‌از ناحیه ای از $\mathscr{E}_N$ تعریف شده باشد، گوییم یک **میدان تانسوری** داریم. اکنون مشتقات جزئی $\partial A_{ij}\ldots/\partial x_r$ را می‌توان نوشت و آنها تانسوری راتشکیل می‌دهند که رتبهٔ آن یک واحد بیشتر از رتبهٔ $A_{ij}\ldots$ است. این‌مطلب را می‌خواهیم برای یک میدان تانسوری رتبهٔ دوم A_{ij} ثابت کنیم، داریم:

$$\frac{\partial \bar{A}_{ij}}{\partial \bar{x}_k} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_k}(a_{ir}a_{js}A_{rs}) = \frac{\partial}{\partial x_t}(a_{ir}a_{js}A_{rs})\frac{\partial x_t}{\partial \bar{x}_k}$$

که با استفاده از معادلهٔ (۲ ــ ۳۱) می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \bar{A}_{ij}}{\partial \bar{x}_k} = a_{ir}a_{js}a_{kt}\frac{\partial A_{rs}}{\partial x_t} \qquad (۲ - ۴۱)$$

این برهان را می‌توان بسهولت تعمیم داد.

۲ ــ ۵ تنجش[1]؛ ضرب نرده ای؛ واگرایی[2]

برابر شدن دوشاخص، دلالت برانجام عمل جمع دارد. مثلا" اگر در A_{ijk} دو شاخص آخری با هم مساوی‌باشند دراین صورت باید نوشت:

$$A_{ijj} = A_{i11}+A_{i22}+\ldots+A_{iNN} \qquad (۴۲-۲)$$

تعداد کل کمیتهای A_{ijk} برابر N^3 است. اما، از شاخصهای A_{ijj} فقط i آزاد است تا اعداد درست ۱ و ۲ و . . . و N را قبول کند، پس تعداد کمیتهای A_{ijj} برابر N می‌شود و می‌توانیم قراردهیم $B_i = A_{ijj}$. رتبه دو واحد کمتر شده است، از ایـن جهت این فرآیند را تنجش می‌نامند.

تنجش یک تانسور، تانسور دیگری به دست می‌دهد. برای مثال اگر $B_i = A_{ijj}$، آنگاه با در نظر گرفتن معادلات (۲ ــ ۱۷) می‌توان نوشت:

$$B_i = \bar{A}_{ijj} = a_{iq}a_{jr}a_{js}A_{qrs} = a_{iq}\delta_{rs}A_{qrs} = a_{iq}A_{qrr} = a_{iq}B_q \qquad (۴۳-۲)$$

بنابراین، B_i یک بردار است. این برهان را می‌توان بسهولت تعمیم داد.

در حالت خاصی که یک تانسور دارای رتبهٔ‌دوباشد، مثل A_{ij}، نتیجه می‌گیریـم که $\bar{A}_{ii} = A_{ii}$، یعنی A_{ii} ناوردا است. اکنون، اگر A_i و B_i هرکدام یک بردارباشند، A_iB_j یک تانسور است. از این رو A_iB_i یک ناوردا است. این حاصل‌ضرب تنجیده را ضرب داخلی یا ضرب نرده ای دو بردار می‌نامند. می‌توان نوشت:

$$A_iB_i = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}. \qquad (۴۴-۲)$$

بخصوص، حاصل ضرب نرده ای یک‌بردار در خودش، یک ناوردا است. جذر مثبت ایـن ناوردا بزرگی بردار نامیده می‌شود. مثلا" اگر $\mathbf{A}$ بزرگی A_i باشد، آنگاه داریم:

$$A^2 = A_iA_i = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}^2 \qquad (۴۵-۲)$$

در $\mathscr{E}_3$، اگر θ زاویهٔ بین دوبردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ باشد، خواهیم داشت:

---

1) contraction

2) divergence

$$AB\cos\theta = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}. \qquad (۴۶-۲)$$

در $\mathscr{E}_N$ ، از این معادله برای تعریف θ استفاده می‌شود. مثلاً" اگر داشته باشیم:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0 \qquad (۴۷-۲)$$

آنگاه $\theta = \frac{1}{2}\pi$ و دو بردار را **متعامد** می‌نامند.

اگر A_i یک میدان برداری‌باشد، $\partial A_i/\partial x_j$ یک تانسور است. با در نظر گرفتن تنجش، $\partial A_i/\partial x_i$ یک ناوردا است. این ناوردارا **واگرایی** $\mathbf{A}$ می‌نامندوباعلامت $div\ \mathbf{A}$ نمایش می‌دهند. بنابراین:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \qquad (۴۸-۲)$$

به طورکلی‌تر، اگر $A_{ij}\ldots$ یک میدان تانسوری باشد، در این صورت $\partial A_{ij}\ldots/\partial x_r$ یک تانسور می‌شود. این مشتق تانسوری را می‌توان نسبت به شاخص r و هرشاخص دیگری تنجانیدتاتانسوردیگری ایجاد شود، مثلاً" $\partial A_{ij}\ldots/\partial x_j$ این نیزواگرایی $A_{ij}\ldots$ نسبت به شاخص j خوانده می‌شود، و می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial A_{ij\ldots}}{\partial x_j} = \mathrm{div}_j A_{ij\ldots} \qquad (۴۹-۲)$$

۲ ــ ۶ چگالیهای تانسوری[1]

وقتی مختصات تابع تبدیل (۲ ــ ۱) باشند، $\mathfrak{A}_{ij}$ راچگالی تانسوری نامند اگر مؤلفه های‌آن، طبق قانون

$$\mathfrak{A}_{ij} = |A|\, a_{ik}\, a_{jl}\, \mathfrak{A}_{kl} \qquad (۵۰-۲)$$

تبدیل‌شوند. دررابطهٔ بالا، $|A|$ عبارت‌است‌ازدترمینان‌ماتریس تبدیل A . چون برای‌تبدیلات‌متعامد، $|A| = \pm 1$ است (معادلهٔ (۲ ــ ۱۰))، بنابراین تانسورها وچگالیهای تانسوری نسبت به دستگاه های مختصات دکارتی قائم یکسانند، با این استثناء که به ازای برخی تعویض محورها علامت تمام مؤلفه های یک چگالی عوض می‌شود. مثلاً "اگر در $\mathscr{E}_3$ دستگاه راستگردمحورهابادستگاه‌چپگرد تعویض شود، دراین صورت‌دترمینان

---

1) tensor densities

تبدیل برابر ۱ ــ می‌شود و مؤلفه های چگالی ، تابع این تغییر علامت اضافی می‌شوند .

فرض کنید که $e_{ij\ldots n}$ یک چگالی از رتبهٔ N ام باشد که نسبت به هر جفت از شاخصها ، پادمتقارن‌است . دراین حالت تمام مؤلفه های آن صفر می‌شود مگر مؤلفه هایی‌که در آنها ، تمام شاخصهای $i,j,\ldots,n$ متفاوت ازهم هستند و جایگشت [1] اعداد N ، . . . . ، ۲ ، ۱ را تشکیل می‌دهند . هر ترانهش [2] دو شاخص در $e_{ij\ldots n}$ باعث تغییر علامت آن می‌شود . بنابراین نتیجه می‌شود که اگر ترتیب [3] $i, j, \ldots, n$ بتواند با ترانهش به‌تعداد زوج از N و . . . . ، ۲ ، ۱ حاصل شود ، دراین‌صورت $e_{ij\ldots n} = +e_{12\ldots N}$ خواهد بود ولی اگر این ترتیب از تعداد فرد حاصل شود دراین حالت $e_{ij\ldots n} = -e_{12\ldots N}$ می‌شود . فرض کنیم‌که نسبت به‌محورهای x_i داشته باشیم : $e_{12\ldots N} = 1$.حال‌دراین چارچوب ، اگر $i,j,\ldots,n$ جایگشتی از N ، . . . . ، ۲ ، ۱ نباشد ، $e_{ij\ldots n}$ صفر است واگر یک جایگشت‌زوج باشد ۱ + و اگر یک جایگشت فرد باشد ۱ ــ است . با تبدیل نسبت به محورهای $\bar{x}_i$ داریم :

$$\bar{e}_{12\ldots N} = |A|\, a_{1i}a_{2j}\ldots a_{Nn}\, e_{ij\ldots n} = |A|^2 = 1 \qquad (۵۱-۲)$$

ولی $\bar{e}_{ij\ldots n}$ نیز نسبت به تمام شاخصهایش پادمتقارن است ، زیرا در تبدیل ، این خاصیت محفوظ می‌ماند . بدین جهت مقدار مؤلفه های آن نیز برابر است با صفر یا ۱ $\pm$ ، پس $e_{ij\ldots n}$ یک چگالی است که مؤلفه های آن در تمام چارچوبها یکسان هستند و آن را *چگالی تانسوری لوی ــ چی ویتا* [4] می‌نامند .

بسهولت می‌توان ثابت کرد که:

الف) مجموع یا تفاضل دوچگالی هم رتبه ، یک‌چگالی است .

ب) حاصل ضرب یک تانسوردریک چگالی برابر است با یک چگالی .

ج) حاصل ضرب دوچگالی برابر یک تانسور است .

د) مشتق جزئی یک چگالی نسبت‌به x_i ، یک چگالی است .

ه) یک چگالی تنجیده ، عبارت است از یک چگالی .

---

1) permutation

2) transposition

3) arrangement

4) Levi-Civita

مثلا" برای‌اثبات مورد (ج) ،فرض کنیم که $\mathfrak{A}_i$ و $\mathfrak{B}_i$ دو چگالی برداری باشند. دراین صورت می‌توان نوشت:

$$\mathfrak{A}_i \mathfrak{B}_j = |A|^2 a_{ik} a_{jl} \mathfrak{A}_k \mathfrak{B}_l = a_{ik} a_{jl} \mathfrak{A}_k \mathfrak{B}_l. \qquad (۵۲-۲)$$

این روش بروشنی ،یک روش‌کاملا "کلی است. اثبات قسمتهای‌دیگربه عنوان تمرین به‌عهدهٔ خواننده‌گذاشته می‌شود.

۲ ـ ۷ ضرب برداری. تاو[1]

در سراسر این بخش فرض بر این‌است که $N = ۳$ ، یعنی‌فضای‌موردنظر ،فضای‌عادی اقلیدسی است.

با فرض‌اینکه A_{ij} یک تانسورپادمتقارن‌باشد، چگالی برداری $\mathfrak{A}_i$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\mathfrak{A}_i = \tfrac{1}{2} \mathrm{e}_{ijk} A_{jk}, \qquad (۵۳-۲)$$

مؤلفه های آن عبارت انداز

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 &= \tfrac{1}{2}(A_{23}-A_{32}) = A_{23}, \\ \mathfrak{A}_2 &= \tfrac{1}{2}(A_{31}-A_{13}) = A_{31}, \\ \mathfrak{A}_3 &= \tfrac{1}{2}(A_{12}-A_{21}) = A_{12}, \end{aligned}\right\} \qquad (۵۴-۲)$$

یعنی سه مؤلفهٔ مجزاو غیر صفر A_{ij} هستند. بنابراین ثابت شد که می‌توان این سه مؤلفه از هر تانسور پادمتقارن و رتبهٔ دوم را، مؤلفه های یک چگالی برداری در نظر گرفت.

بآسانی می‌توان ثابت کرد که وارون رابطهٔ (۲ ـ ۵۳) عبارت است از:

$$A_{ij} = \mathrm{e}_{ijk} \mathfrak{A}_k. \qquad (۵۵-۲)$$

فرض کنیم که A_i و B_i دو بردار هستند. از این دو بردار، می‌توان یک تانسور رتبهٔ دوم پادمتقارن مثل C_{ij} تشکیل داد طوری که:

---

1) curl

$$C_{ij} = A_i B_j - A_j B_i. \qquad (۵۶-۲)$$

سپس از C_{ij} می‌توان یک چگالی برداری تشکیل داد، یعنی:

$$\mathfrak{C}_i = \tfrac{1}{2} e_{ijk} C_{jk} = \tfrac{1}{2} e_{ijk}(A_j B_k - A_k B_j) = e_{ijk} A_j B_k, \qquad (۵۷-۲)$$

مؤلفه های این چگالی برداری عبارت انداز:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{C}_1 &= A_2 B_3 - A_3 B_2, \\ \mathfrak{C}_2 &= A_3 B_1 - A_1 B_3, \\ \mathfrak{C}_3 &= A_1 B_2 - A_2 B_1. \end{aligned}\right\} \qquad (۵۸-۲)$$

اگر فقط دستگاههای راستگرد محورها ویافقط دستگاههای چپگردادر $\mathscr{E}_3$ به کار بریم، $\mathfrak{C}_i$ با یک بردارفرقی ندارد. اما گر تغییری از دستگاه راستگرد به دستگاه چپگردویا برعکس صورت گیرد، مؤلفه های $\mathfrak{C}_i$ علاوه برتبدیل برداری متداول در ۱ ــ ضرب می‌شوند. معمولا" چون فقط از چارچوبهای راستگردداستفاده می‌شود، از این جهت $\mathfrak{C}_i$ بیشتر به عنوان یک بردار یا یک *بردار محوری*[1] خوانده‌می‌شودو همچون یک بردار درمورد آن عمل می‌شود، که دراین صورت آن را *حاصل ضرب برداری* دو بردار **A** و **B** می‌نامیم ومی‌نویسیم:

$$\mathfrak{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}. \qquad (۵۹-۲)$$

ضرب برداری جابجا پذیر[2] نیست زیرا:

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = e_{ijk} B_j A_k = -e_{ikj} A_k B_j = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}, \qquad (۶۰-۲)$$

که در آن از $e_{ikj} = -e_{ijk}$. استفاده شده است. ولی ضرب برداری از قانون توزیع پذیری[3] پیروی می‌کند زیرا:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= e_{ijk} A_j (B_k + C_k) = e_{ijk} A_j B_k + e_{ijk} A_j C_k \\ &= \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}. \end{aligned} \qquad (۶۱-۲)$$

اگر A_i یک میدان برداری باشد، بازهم می‌توان یک تانسور رتبهٔ دوم پادمتقارن

---

1) axial vector

2) commutative

3) distributive law

تشکیل داد :

$$R_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = A_{j,i} - A_{i,j}. \qquad (۶۲ - ۲)$$

در اینجا علامت اختصاری $A_{i,j} = \partial A_i / \partial x_j$ برای مشتق جزئی نسبت به مختصات ، ارائه شده است وبعدا" جهت اثبات موارد زیادی ، از آن استفاده خواهد شد . $\mathfrak{R}_i$ ، چگالی برداری متناظر با R_{ij} است طوری که :

$$\mathfrak{R}_i = \tfrac{1}{2} e_{ijk} R_{jk} = \tfrac{1}{2} e_{ijk}(A_{k,j} - A_{j,k}) = e_{ijk} A_{k,j}. \qquad (۶۳ - ۲)$$

مؤلفه های آن عبارت اند از :

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{R}_1 &= \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \\ \mathfrak{R}_2 &= \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}, \\ \mathfrak{R}_3 &= \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}, \end{aligned}\right\} \qquad (۶۴ - ۲)$$

و با علامت curlA نشان داده می‌شود . این نیز یک بردار محوری است .

وقتی به‌جای یکی‌از دوبردار **A** و **B** ویا هر دوتای آنها ، چگالی برداری قراردهیم بازاز رابطهٔ (۲ ــ ۵۷) می‌توان جهت تعریف ضرب برداری استفاده کرد . اگر فقط به جای یکی ازدوبردارمذکور یک چگالی برداری‌قراردهیم دراین‌صورت طرف‌راست معادلهٔ (۲ ــ ۵۷) شامل ضرب دوچگالی و یک بردار می‌شود . دراین صورت حاصل ضرب ، یک بردار خواهد بود . به همین ترتیب باقرار دادن یک چگالی برداری به جای **A** درمعادلهٔ (۲ ــ ۶۳)، تاو یک چگالی برداری مانند تاو یک بردار معمولی تعریف می‌شود .

تمرینات فصل دوم

۱ ــ نشان دهید که در حالت دو بعدی ، تبدیل متعامد عمومی دارای ماتریس A است که برابر است با :

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

ثابت کنید که $|A| = 1$ و $A^{-1} = A'$ اگر T_{ij} تانسوری دراین فضا باشد، معادلات تبدیل را به طورکامل برای تمام مؤلفه های آن بنویسید و نتیجه بگیرید که T_{ii} یک ناوردا است.

۲ــ $\bar{x} = Ax$ و $\bar{\bar{x}} = B\bar{x}$ دو تبدیل متعامد پی‌درپی هستند که نسبت به هر یک ازآنها T_{ij} مانند یک‌تانسور تبدیل می‌شود. نشان دهید که تبدیل حاصل $\bar{\bar{x}} = BAx$ متعامد است و T_{ij} مانند یک تانسور نسبت به آن تبدیل می‌شود.

۳ــ نشان دهید که نتیجهٔ تنجش چگالی لوی ــ چی ویتاعبارت است ازچگالی تانسوری صفر.

۴ــ ثابت کنید که در $\mathscr{E}_3$ داریم:

$$\operatorname{curl}\operatorname{grad} V = 0, \quad \operatorname{div}\operatorname{curl}\mathbf{A} = 0$$

۵ــ ثابت کنید که در $\mathscr{E}_3$ داریم:

الف) $$e_{ikl}\, e_{imn} = \delta_{km}\delta_{ln} - \delta_{kn}\delta_{lm},$$

ب) $$e_{ikl}\, e_{ikm} = 2\delta_{lm}.$$

۶ــ در $\mathscr{E}_3$ رابطهٔ زیر را ثابت کنید.

$$\nabla^2 V = \operatorname{div}\operatorname{grad} V = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_l\, \partial x_l}$$

۷ــ در $\mathscr{E}_3$ رابطهٔ $\operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}$ را اثبات کنید. (راهنمایی: از تمرین (۵ الف) استفاده کنید).

۸ــ در $\mathscr{E}_3$ ثابت کنید که:

الف) $$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\mathbf{B} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\mathbf{C},$$

ب) $$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

۹ــ در $\mathscr{E}_N$ ثابت کنید که:

$$\operatorname{div} V\mathbf{A} = V\operatorname{div}\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\operatorname{grad} V$$

۱۰ــ در $\mathscr{E}_3$ ثابت کنید که:

الف) $$\operatorname{curl} V\mathbf{A} = V\operatorname{curl}\mathbf{A} - \mathbf{A}\times\operatorname{grad} V,$$

ب) $\operatorname{div}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{B},$

ج) $\operatorname{curl}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot\nabla\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\nabla\mathbf{B}+\mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B}-\mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{A},$

د) $\operatorname{grad}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot\nabla\mathbf{A}+\mathbf{A}\cdot\nabla\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\operatorname{curl}\mathbf{B}+\mathbf{B}\times\operatorname{curl}\mathbf{A},$

که در آن $\mathbf{A}\cdot\nabla\mathbf{B} = A_j B_{i,j}$

۱۱ــ اگر A_{ij} یک تانسور و $B_{ij}=A_{ji}$ باشد، ثابت کنید که B_{ij} یک تانسور است. نتیجه‌بگیریدکه اگر A_{ij} در یک چارچوب i دارای‌تقارن‌باشد، در تمام دستگاههای مختصات نیز دارای تقارن خواهد بود.

۱۲ــ ثابت کنید که $\delta_{ij}\delta_{ik}=\delta_{jk}$. همچنین ثابت کنید که اگر i و j و k همه متفاوت از یکدیگر باشند و (lmn) یک جایگشت زوج (ijk) باشد، مقدار $e_{ijk}e_{lmn}$ برابر ۱ + است و اگر i و j و k همه متفاوت از هم باشند و (lmn) یک جایگشت فرد (ijk) باشد، مقدار $e_{ijk}e_{lmn}$ برابر ۱ ــ است ودر غیر این دو صورت، مقدار آن برابر صفر می‌شود. نتیجه بگیرید که:

$$e_{ijk}e_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn}+\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl}+\delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km}$$
$$-\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}-\delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km}-\delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn}.$$

واز آنجا ثابت کنید که:

$$e_{ijk}e_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km}. \qquad \text{(د.ک.)}$$

۱۳ــ در $\mathscr{E}_3$ ثابت کنید که:

الف) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c},$

ب)
$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = [\mathbf{acd}]\mathbf{b}-[\mathbf{bcd}]\mathbf{a}$$
$$= [\mathbf{abd}]\mathbf{c}-[\mathbf{abc}]\mathbf{d},$$

که در آن $[\mathbf{abc}] = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}$

فصل سوم

مکانیک نسبیت خاص

۳ ــ ۱ بردار سرعت

فرض کنید نقطهٔ P نسبت به یک چارچوب لخت S ، حرکت می‌کند. ds فاصلهٔ بین دومکانی است‌که P درلحظات t و $t+dt$ اشغال می‌کند. اگر $d\tau$ بازهٔ زمانی ویژهٔ بین این دونقطه باشد، در این صورت طبق رابطهٔ (۱ ــ ۴۴) می‌توان نوشت:

$$d\tau = \left(dt^2 - \frac{1}{c^2} ds^2\right)^{1/2} = (1 - v^2/c^2)^{1/2} dt, \qquad (۱ - ۳)$$

که درآن $v = ds/dt$ سرعت P نسبت به S است. همچنانکه دربخش ۱ ــ ۷ نشان داده‌شد، $d\tau$ عبارت است‌ازبازهٔ‌زمانی اندازه گیری شدهٔ دو رویداد درچارچوبی که آن دو رویداد نسبت به‌آن‌در یک‌نقطه رخ می‌دهند. بنابراین $d\tau$ بازهٔ زمانی اندازه گیری شده‌به‌وسیلهٔ ساعتی است که‌همراه‌نقطهٔ P حرکت می‌کند. dt بازهٔ زمانی‌اندازه گیری شده به وسیلهٔ ساعتهایی است‌که‌نسبت به S ساکن هستند. معادلهٔ (۳ــ ۱) نشان می‌دهد که آهنگ‌ساعتی که همراه P حرکت می‌کند، به‌نظر ناظر S ، به‌اندازهٔ ضریب $(1-v^2/c^2)^{1/2}$ کندتر می‌شود. این همان پدیدهٔ‌اتساع زمان است که‌قبلا" در بخش۱ ــ ۶ متذکر شدیم. اگر P در لحظهٔ $t = t_1$ در نقطهٔ A ، و در لحظهٔ $t = t_2$ در نقطهٔ B باشد، دراین صورت زمان ثبت شده توسط ساعتی که‌همراه P حرکت می‌کند برابر خواهد بود با:

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} (1 - v^2/c^2)^{1/2} dt \qquad (۲ - ۳)$$

مکانهای پیاپی P همراه بازمانهایی که این مکانها را اشغال می‌کنند، یک رشته رویدادهایی‌راتشکیل‌می‌دهندکه در روی جهانخط نقطه درفضا ــ زمان مینکوفسکی‌قراردارند. با رسم محورهای‌عمود برهم در فضا ــ زمان متناظر با چارچوب دکارتی قائم S ، فرض کنیم که x_i و $x_i + dx_i$ مختصات دو نقطهٔ مجاور در روی‌جهانخط باشد. این نقاط نمایشگر دو

رویداد (t و z و y و x) و ($t+dt$ و $z+dz$ و $y+dy$ و $x+dx$) در S هستند. اگر (v_z و v_y و v_x) مؤلفه های بردار سرعت $\mathbf{v}$ ی نقطهٔ P نسبت به S باشد آنگاه داریم :

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \qquad (۳-۳)$$

$\mathbf{v}$ خواص تبدیل یک بردارنسبت به تبدیلات متعامد (یعنی ، تبدیلات لورنتس) در فضا ــ زمان را ندارد بلکه فقط برداری است نسبت به محورهای قائم ساکن در S . اما ، می‌توان یک چهار ــ بردار سرعت[1] تعریف کرد که دارای چنین خواصی باشد ، بدین ترتیب که : dx_i بردارتغییرمکان نسبت به محورهای قائم در فضا ــ زمان و $d\tau$ یک ناوردا در نظر گرفته شود. در نتیجه $dx_i/d\tau$ یک بردارنسبت به تبدیلات لورنتس است که به‌صورت تبدیلات متعامد در فضا ــ زمان بیان می‌شود . آن را با $\mathbf{V}$ نمایش می‌دهند وچهار ــ بردار سرعت نقطهٔ P می‌نامند .

با استفاده ازمعادلهٔ (۳ــ۱) ، $\mathbf{V}$ برحسب $\mathbf{v}$ چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \frac{dx_i}{dt}\frac{dt}{d\tau} = (1-v^2/c^2)^{-1/2}\dot{x}_i \qquad (۴-۳)$$

همچنین با در نظر گرفتن معادلات (۱ ــ ۲۰) داریم :

$$\dot{x}_1 = v_x, \quad \dot{x}_2 = v_y, \quad \dot{x}_3 = v_z, \quad \dot{x}_4 = ic \qquad (۵-۳)$$

نتیجهٔ حاصل از این معادلات چنین است :

$$\mathbf{V} = (1-v^2/c^2)^{-1/2}(v_x, v_y, v_z, ic) = (1-v^2/c^2)^{-1/2}(\mathbf{v}, ic) \qquad (۶-۳)$$

که نمادنگاری بدون توضیح بیشتر واضح است .

با دانستن روش‌تبدیل مؤلفه های $\mathbf{V}$ هنگام انتخاب محورهای جدید فضا ــ زمان، می‌توان به وسیلهٔ معادلهٔ (۳ ــ ۶) چگونگی تبدیل مؤلفه های $\mathbf{v}$ را درموقع به کار بردن چارچوب لخت جدید $\bar{S}$ به‌جای S ، معلوم کرد . مثلا" تبدیل متعامد (۱ ــ ۲۶) را در نظر بگیرید که به عنوان تغییری از چارچوب لخت S به $\bar{S}$ تعبیر شده است که این دو مطابق شکل

1) velocity vector

۱ ــ ۲ به هم مربوط هستند . معادلات تبدیل متناظر برای V چنین هستند :

$$\left.\begin{aligned}\bar{V}_1 &= V_1\cos\alpha + V_4\sin\alpha, & \bar{V}_2 &= V_2,\\ \bar{V}_4 &= -V_1\sin\alpha + V_4\cos\alpha, & \bar{V}_3 &= V_3.\end{aligned}\right\} \qquad (۷ - ۳)$$

طبق معادلهٔ (۳ ــ ۶) این معادلات هم ارز هستند با :

$$\left.\begin{aligned}(1-\bar{v}^2/c^2)^{-1/2}\bar{v}_x &= (1-v^2/c^2)^{-1/2}(v_x\cos\alpha + ic\sin\alpha),\\ (1-\bar{v}^2/c^2)^{-1/2}\bar{v}_y &= (1-v^2/c^2)^{-1/2}v_y,\\ (1-\bar{v}^2/c^2)^{-1/2}\bar{v}_z &= (1-v^2/c^2)^{-1/2}v_z,\\ (1-\bar{v}^2/c^2)^{-1/2}ic &= (1-v^2/c^2)^{-1/2}(-v_x\sin\alpha + ic\cos\alpha),\end{aligned}\right\} \qquad (۸ - ۳)$$

که در آن $\bar{v}$ سرعت نقطهٔ مورد نظر است که درچارچوب S اندازه گیری می‌شود . اگر به‌جای $\cos\alpha$ و $\sin\alpha$ مقادیرشان رااز معادلات (۱ ــ ۳۲) قرار دهیم ، معادلات (۳ ــ ۸) چنین می‌شوند :

$$\left.\begin{aligned}\bar{v}_x &= Q(v_x - u),\\ \bar{v}_y &= Q(1-u^2/c^2)^{1/2}v_y,\\ \bar{v}_z &= Q(1-u^2/c^2)^{1/2}v_z,\\ 1 &= Q(1-uv_x/c^2),\end{aligned}\right\} \qquad (۹ - ۳)$$

که درآن :

$$Q = \left[\frac{1-\bar{v}^2/c^2}{(1-v^2/c^2)(1-u^2/c^2)}\right]^{1/2} \qquad (۱۰ - ۳)$$

با تقسیم کردن سه رابطهٔ اول معادلات (۳ ــ ۹) بررابطهٔ چهارم ، صورت نهایی معادلات تبدیل ویژهٔ لورنتس را برای v به دست می‌آوریم :

$$\left.\begin{aligned}\bar{v}_x &= \frac{v_x - u}{1-uv_x/c^2},\\ \bar{v}_y &= \frac{(1-u^2/c^2)^{1/2}v_y}{1-uv_x/c^2},\\ \bar{v}_z &= \frac{(1-u^2/c^2)^{1/2}v_z}{1-uv_x/c^2}.\end{aligned}\right\} \qquad (۱۱ - ۳)$$

اگر u و v درمقایسه‌با c کوچک‌باشند، دراین‌صورت‌معادلات (۳ ــ ۱۱) به‌تقریب برابر خواهند بود با

$$\bar{v}_x = v_x - u, \quad \bar{v}_y = v_y, \quad \bar{v}_z = v_z \qquad (۳-۱۲)$$

این روابط با معادلهٔ برداری (۱ ــ ۱) که اندازه‌گیریهای سرعت دو چارچوب لخت را طبق مکانیک نیوتون‌به هم مربوط می‌سازد، هم ارز است.

چون طبق چهارمین معادله از معادلات (۳ ــ ۹)، Q بایدحقیقی‌باشد، بنابراین اگر $\bar{v} < c$، دراین صورت بنابرمعادلهٔ (۳ ــ ۱۰)، باید $v < c$ باشد. مثلا" اگر نقطه یی با سرعتی نزدیک به‌سرعت‌نور، در $\bar{S}$ حرکت کند و $\bar{S}$ نیز باسرعتی ازهمان مرتبهٔ بزرگی‌نسبت به S در حرکت باشد، سرعت آن نقطه نسبت به S بازهم کمتراز c خواهد بود. البته چنین نتیجه ای با ایدهٔ مکانیک کلاسیک کاملا" تباین دارد. بویژه، وقتی که تپهٔ نور درامتداد محور Ox طوری منتشر می‌شود که $v_x = c$ و $v_y = v_z = 0$ باشد، آنگاه خواهیم داشت: $\bar{v}_x = c$ و $\bar{v}_y = \bar{v}_z = 0$. این مؤید این‌مطلب است که‌نور درتمام چارچوبهای لخت‌با سرعت c منتشر می‌شود.

در رابطهٔ (۳ ــ ۱۱)، با برداشتن علامت "تیره" از روی مؤلفه های سرعت و قرار دادن‌آن برروی‌مؤلفه‌های سرعتی‌که‌فاقد این‌علامت‌هستندو همچنین با تعویض u به $-u$ می‌توان تبدیل وارون را به دست آورد.

۳ ــ ۲ جرم واندازه حرکت

در بخش ۱ ــ ۲ نشان داده شد که قوانین حرکت نیوتون با اصل نسبیت خاص، مطابقت دارند. ولی، این برهان ایده های کلاسیک مربوط به روابط فضا ــ زمان بین دو چارچوب لخت را در برمی‌گرفت، که دراین میان روابطی براساس تبدیل لورنتس جانشین آنها شده اند. بنابراین لازم است تمامی پرسش مورد نظر را مجددا" مورد بررسی قرارداد و این امر در این بخش و بخش بعدی انجام می‌گیرد.

اول پایستگی اندازه حرکت قید شده در معادلهٔ (۱ ــ ۳) را در مورد برخورد دو ذره در نظر می‌گیریم که به وسیلهٔ آن جرم درمکانیک کلاسیک، تعریف می‌شود. نظر براینکه بردارهای سرعت u_1 وغیره نسبت به تبدیلات متعامد در فضا ــ زمان، بردارنیستند و در

واقع تبدیل آنها بین چارچوبهای لخت به طریق پیچیده ای صورت می‌گیرد، پس بدیهی است‌که‌معادلهٔ (۱ ــ ۳) نسبت به تبدیلات‌بین چارچوبهای لخت هموردا نیست. بنابراین به طور امتحانی معادلهٔ دیگری را جانشین‌آن می‌کنیم، یعنی:

$$M_1 \mathbf{U}_1 + M_2 \mathbf{U}_2 = M_1 \mathbf{V}_1 + M_2 \mathbf{V}_2, \qquad (۱۳ - ۳)$$

که در آن $\mathbf{U}_1$ وغیره بردارهای چهار ــ سرعت ذره ها و M_1 و M_2 ناورداهایی هستند وابسته‌به ذرات که متناظر اند با جرم کلاسیک آنها. این یک معادلهٔ برداری است واز این رو نسبت به تبدیلات متعامددر فضا ــ زمان، چنانکه لازم داریم، هموردا است. معادلهٔ (۳ ــ ۱۳) به صورت گزارهٔ زیر خلاصه می‌شود:

$$\sum M\mathbf{V} \text{ پایسته است} \qquad (۱۴ - ۳)$$

که این، بنابر معادلهٔ (۳ ــ ۶)، متضمن گزارهٔ زیر است:

$$\sum m(\mathbf{v}, ic) \text{ پایسته است} \qquad (۱۵ - ۳)$$

که در آن:

$$m = \frac{M}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \qquad (۱۶ - ۳)$$

با در نظرگرفتن سه مؤلفهٔ اول (یا فضایی) (۳ ــ ۱۵)، روشن است که:

$$\sum m\mathbf{v} \text{ پایسته است} \qquad (۱۷ - ۳)$$

و با در نظر گرفتن مؤلفهٔ چهارم (یا زمانی) خواهیم داشت:

$$\sum m \text{ پایسته است} \qquad (۱۸ - ۳)$$

بنابراین، اگر m راکمیتی بشناسیم که نقش جرم نیوتونی در مکانیک نسبیت خاص را دارد، در این صورت دیده می‌شود که قانون پایستگی مورد امتحان (۳ ــ ۱۳) هم اصل پایستگی اندازه حرکت وهم اصل پایستگی جرم مکانیک نیوتونی را در برمی‌گیرد. پس اصل (۳ ــ ۱۳) بسیارمعقول است. اما، البته توجیه غایی ما برای پذیرفتن آن به علت محقق بودن تجربی

پیامدهای آن است . بعداً " به این تجربیات در موقع مناسب اشاره خواهد شد .

ازمعادلهٔ (۳ ــ ۱۶) پیدا است که جرم ذره اکنون باید وابسته به سرعت آن v در نظر گرفته شود. اگر $v=0$ باشد آنگاه $m=M$ می‌شود. بنابراین، M عبارت‌است از جرم ذره که در چارچوب لختی اندازه گیری می‌شود که ذره نسبت به آن ساکن است. M را جرم سکون[1] یا جرم ویژه[2] می‌نامیم وآنرا با m_0 نشان می‌دهیم. پس:

$$m = \frac{m_0}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}. \qquad (۳-۱۹)$$

واضح است که هرگاه $v\to c$، آنگاه $m\to\infty$ واین متضمن این است‌که درحالت نزد یک شدن به‌سرعت نور ،اثرات‌لختی بــه‌طور فزاینده‌یی جدی می‌شوند ومانع از این هستند که یک ذرهٔ مادی به این سرعت برسد . این مطلب با مشاهدات قبلی مطابقت دارد . رابطهٔ (۳ ــ ۱۹) بامشاهدهٔ‌برخورد هستهٔ اتم بادرات پرتوکیهانی ،ثابت شده است(مثلاً " ر.ک. تمرین ۱۴ از همین‌فصل) .

ذره ای‌که‌جرم‌ویژهٔ‌آن m_0 و چهار ــ سرعت آن $\mathbf{V}$ باشد، $\mathbf{P}$ بردارچهار ــ اندازه‌حرکت آن چنین تعریف می‌شود :

$$\mathbf{P} = m_0\mathbf{V} \qquad (۳-۲۰)$$

چون m_0 یک‌ناوردا و $\mathbf{V}$ یک بردار در فضا ــ زمان‌است ،پس $\mathbf{P}$ نیز یک‌برداراست . بااستفاده از معادلهٔ (۳ ــ ۶) می‌توان نوشت .

$$\mathbf{P} = m_0(1-v^2/c^2)^{-1/2}(\mathbf{v}, ic) = (m\mathbf{v}, imc) = (\mathbf{p}, imc) \qquad (۳-۲۱)$$

که در آن $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$ اندازه حرکت کلاسیک است .

بنا به‌تبدیل متعامدخاص (۱ ــ۲۶) ،معادلات‌تبدیل مؤلفه‌های $\mathbf{P}$، عبارت‌خواهند بود از:

$$\left.\begin{aligned} \bar{P}_1 &= P_1\cos\alpha + P_4\sin\alpha, & \bar{P}_2 &= P_2, \\ \bar{P}_4 &= -P_1\sin\alpha + P_4\cos\alpha, & \bar{P}_3 &= P_3. \end{aligned}\right\} \qquad (۳-۲۲)$$

1) rest mass

2) proper mass

اگر مؤلفه های $\mathbf{P}$ را از معادلهٔ (۳ ــ ۲۱) و به گونه ای مشابه، مؤلفه های $\bar{\mathbf{P}}$ را در این جا بنشانیم، با در نظر گرفتن معادلات (۱ ــ ۳۲) خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned} \bar{p}_x &= \frac{p_x - mu}{(1-u^2/c^2)^{1/2}}, \\ \bar{p}_y &= p_y, \\ \bar{p}_z &= p_z, \end{aligned}\right\} \qquad (۲۳ - ۳)$$

$$\bar{m} = \frac{m - p_x u/c^2}{(1-u^2/c^2)^{1/2}}. \qquad (۲۴ - ۳)$$

معادلات (۳ ــ ۲۳) عبارت‌اندازمعادلات‌تبدیل‌خاص لورنتس برای مؤلفه های اندازه حرکت $\mathbf{P}$، و معادلهٔ (۳ ــ ۲۴) معادلهٔ‌تبدیل متناظر برای جرم است. چون $p_x = mv_x$، پس‌این رابطه را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\bar{m} = \frac{1 - uv_x/c^2}{(1-u^2/c^2)^{1/2}} m. \qquad (۲۵ - ۳)$$

اگر u و v_x در مقایسه با c قابل صرف نظر کردن باشند، در این حالت رابطهٔ اخیر به صورت کلاسیک.معادلهٔ (۱ ــ ۹) در می‌آید.

۳ ــ ۳ بردار نیرو: انرژی

دیدیم که در مکانیک کلاسیک، وقتی جرم‌ذره ای معین باشد، نیروی وارد برآن در هرلحظه، ازقانون‌دوم نیوتون به دست می‌آید. نیرو درمکانیک نسبت خاص تعریف‌مشابهی دارد. جرم ذره‌یی‌با سرعت معین از ایجاد برخورد بین آن و یک ذرهٔ‌معیار وبا استفاده از اصل پایستگی اندازه حرکت، تعیین می‌شود. آنگاه معادلهٔ (۳ ــ ۱۹) جرم ذره را در هر سرعتی تعیین می‌کند. دراین صورت $\mathbf{f}$، نیروی وارد برذره ای به‌جرم m وسرعت $\mathbf{v}$ نسبت به یک چارچوب لخت، طبق رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{f} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad (۲۶ - ۳)$$

که درآن $\mathbf{p}$ اندازه حرکت ذره است. باید دانست که نیروی $\mathbf{f}$ وابستگی به چارچوب لخت مورد استفاده دارد که این انحرافی است از مکانیک کلاسیک.

نتیجهٔ تعریف (۳ ــ ۲۶) این است که اگر در برخورد دو ذره، نیروهای مساوی و مختلف الجهت برآنها اثر کنند، دراین صورت اندازه حرکت پایسته است. اما، هرچند

آزمایش تأیید می‌کند که اندازه حرکت در واقع پایسته است ، ولی قانون سوم نیوتون را نمی‌توان درمکانیک جدید به کار برد ، زیرا بعدا" خواهیم دید که اگر برای یک ناظرلخت ، نیروهای وارد مساوی ومختلف الجهت باشندبه طورکلی برای همه این گونه ناظرها چنین نخواهد بود . بنابراین معادلهٔ (۳ ــ ۱۳) جانشین این قانون در مکانیک جدید می‌شود .

f نسبت به تبدیلات لورنتس در فضا ــ زمان ، بردار نیست . لکن یک *چهار ــ بردار* **F** می‌توان تعریف کرد که دارای چنین خاصیتی باشد . تعریف طبیعی بوضوح عبارت است از :

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{d\tau} = m_0\frac{d\mathbf{V}}{d\tau} \qquad (۲۷ - ۳)$$

که درآن **P** چهار ــ اندازه‌حرکت و τ زمان ویژهٔ ذره‌است . با استفاده ازمعادلهٔ (۳ ــ ۲۱) می‌توان **F** را برحسب **f** بیان کرد :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{d}{d\tau}(\mathbf{p}, imc), \\ &= \frac{d}{dt}(\mathbf{p}, imc)\frac{dt}{d\tau}, \qquad (۲۸ - ۳) \\ &= (1-v^2/c^2)^{-1/2}(\dot{\mathbf{p}}, i\dot{m}c), \\ &= (1-v^2/c^2)^{-1/2}(\mathbf{f}, i\dot{m}c). \end{aligned}$$

دو بردار **F** و **V** برهم عمودند . این مطلب به طریق زیر ثابت می‌شود : بنا به معادلهٔ (۳ ــ ۶) داریم

$$\mathbf{V}^2 = -c^2. \qquad (۲۹ - ۳)$$

نسبت به τ مشتق می‌گیریم :

$$\mathbf{V}\cdot\frac{d\mathbf{V}}{d\tau} = 0,$$

یعنی :

$$\mathbf{V}\cdot\mathbf{F} = 0, \qquad (۳۰ - ۳)$$

که گفته شد . این نتیجه پیامدهای بسیار مهمی دارد . اگر مقادیر **V** و **F** رابترتیب‌از معادلات (۳ ــ ۶) و (۳ ــ ۲۸) در رابطهٔ اخیر قرار دهیم خواهیم داشت :

$$(1-v^2/c^2)^{-1}(\mathbf{v}, ic)\cdot(\mathbf{f}, i\dot{m}c) = 0. \qquad (۳-۳۱)$$

و این هم ارز است با:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}-c^2\dot{m} = 0. \qquad (۳-۳۲)$$

ولی بنابر تعریف ، $\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}$ آهنگ انجام‌کار توسط $\mathbf{f}$ است . پس نتیجه می‌گیریم که کار انجام یافته توسط نیروی وارد بر ذره در بازهٔ زمانی (t_1 و t_2) برابر است با:

$$\int_{t_1}^{t_2} c^2\dot{m}\,dt = m_2c^2-m_1c^2. \qquad (۳-۳۳)$$

معادلهٔ کلاسیک عبارت است از:

(۳-۳۴) ازدیادانرژی جنبشی = کار انجام گرفته

که درآن T انرژی جنبشی برابر $\frac{1}{2}mv^2$ است . معادلهٔ (۳-۳۳) نشان می‌دهد که در مکانیک نسبیت خاص، باید برای T تعریفی ازنوع رابطهٔ زیر بیان شود:

$$T = mc^2+\text{constant}. \qquad (۳-۳۵)$$

وقتی $v=0$ باشد ، $T=0$ می‌شود ،و این ثابت می‌کند که مقدار ثابت رابطهٔ اخیر بایدبرابر با m_0c^2 ــ باشد . بنابراین خواهیم داشت:

$$T = \frac{m_0c^2}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}-m_0c^2. \qquad (۳-۳۶)$$

اگرمقدار v/c کوچک باشد دراین صورت به تقریب داریم: $(1-v^2/c^2)^{-1/2} = 1+v^2/2c^2$
و معادلهٔ بالا به صورت $T=\frac{1}{2}m_0v^2$ درمی‌آید که با نظریهٔ‌کلاسیک مطابقت دارد .

طبق معادلهٔ (۳-۳۵) ، ازدیاد مقدارجرم‌هر ذره متناسب‌با ازدیاد مقدارانرژی جنبشی آن است . مثلا "اگرجسمی‌را حــرارت دهیم ، اغتشاش گرمایی [1] مولکولهای آن بیشتر می‌شود ، از این رو جرم این مولکولها و درنتیجه جرم تمام جسم ، متناسب با انرژی‌حرارتی منتقل شده افزایش می‌یابد .

فرض کنیم‌که دو ذرهٔ کشسان درامتداد یک خط مستقیم وبا سرعت یکسان v ، به

1) thermal agitation

هم نزدیک می‌شوند. اگرجرم ویژهٔ هر دو آنها برابر m_0 باشد، در این صورت جرم کل دستگاه قبل از برخورد، برابر است با:

$$2m_0/(1-v^2/c^2)^{1/2}$$

این مطلب که این جرم درمدت برخورد ثابت می‌ماند، به صورت یک اصل اساسی پذیرفته شده است. لکن ازنقطه نظر تقارن، درموقع برخورد در یک لحظهٔ کوتاه، دو ذره متوقف می‌شوند و جرم هر یک‌از آنها دراین لحظه، جرم ویژهٔ آنها m_0' می‌شود. طبق اصل ما

$$2m_0' = \frac{2m_0}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}. \qquad (۳-۳۷)$$

و این نشان می‌دهد که جرم ویژهٔ هر ذره دراین لحظه به اندازهٔ

$$\frac{m_0}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} - m_0 = T/c^2, \qquad (۳-۳۸)$$

افزایش یافته‌است، که‌در آن T برابر انرژی‌جنبشی‌اولیهٔ‌هرذره است واز معادلهٔ (۳-۳۶) نیزاستفاده شده است. درموقع از دست دادن این مقدار انرژی جنبشی، ذره همین اندازه کار،توسط نیروی برهم کنش‌دریافت می‌کند، واین باعث تغییر شکل مادهٔ کشسانی می‌شود که ذره از آن درست شده است. در لحظهٔ توقف دو ذره، این تغییر شکل حداکثراست و مقدار انرژی پتانسیل کشسانی که‌اندازه گیری آن‌ازروی‌مقدار کار انجام‌گرفته صورت‌می‌گیرد، دقیقا" برابراست با T. اگر فرض کنیم که ازدیاد انرژی داخلی ذره باعث ازدیاد متناسب جرم می‌شود، افزایش جرم سکون (۳-۳۸) توضیح داده می‌شود. اگر در مثال ذکر شده ذرات کاملا" کشسان نباشند، دراین صورت کار لازم‌جهت متوقف کردن ذرات نه تنها باعث ازدیاد انرژی کشسانی درونی می‌شود بلکه باعث تولید گرما هم می‌شود. پس هر دو صورت انرژی در افزایش جرم ویژه سهیم هستند.

این گونه ملاحظات قویاً گویای هم ارزی جرم وانرژی اند، یعنی دو معیار گوناگون برای یک کمیت فیزیکی هستند. پس فرق بین جرم وانرژی که در نظریه های فیزیکی کلاسیک مطرح بود، دیگرکنار گذاشته‌شده است. اکنون گوییم که تمام صورتهای انرژی E، مکانیکی و حرارتی والکترومغناطیسی، دارای لختیی به جرم m هستند که برطبق معادلهٔ اینشتین داده می‌شود، یعنی

$$E = mc^2. \qquad (۳-۳۹)$$

برعکس به هر ذره به جرم m انرژی E وابسته است که مقدار آن از رابطهٔ (۳ ــ ۳۶) چنین است:

$$E = T + m_0c^2. \qquad (۳-۴۰)$$

m_0c^2 به عنوان انرژی درونی ذرهٔ درحال سکون تعبیر می‌شود. اگر ذره به طور کامل به حالت تابش الکترو مغناطیس درآید، m_0c^2 به صورت انرژی از آن آزاد می‌شود. این همان منبع انرژی آزاد شده در یک انفجار اتمی است. جرم مواد حاصل از یک انفجار اتمی کمی کمتر از جرم کل موجود قبل از انفجار است و اختلاف به حساب جرم انرژی آزاد شده گذاشته می‌شود. حتی کاهش جرم به میزان کم متضمن تولید انرژی به مقدار خیلی زیاد است. مثلاً" اگر $m = 1$ gm و $c = ۳\times۱۰^{۱۰}$ cm/sec باشد، خواهیم داشت:

$E = ۹\times۱۰^{۲۰}$ ergs $= ۲/۵\times۱۰^{۷}$ kwh .

می‌بینیم که اصل پایستگی جرم، که در مکانیک جدید معتبر شناخته شده است، با اصل پایستگی انرژی یکسان است. اما، فرق بین این دو اصل که یک خصوصیت مکانیک قدیم بود، از بین رفته است.

۳ ــ ۴ معادلات تبدیل لورنتس برای نیرو

از معادلهٔ (۳ ــ ۳۲) داریم:

$$i\dot{m}c = \frac{i}{c}\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}. \qquad (۳-۴۱)$$

حال با در نظر گرفتن معادلهٔ (۳ ــ ۲۸)، می‌توان $\mathbf{F}$ را به طور کامل برحسب $\mathbf{f}$ بیان کرد:

$$\mathbf{F} = (1-v^2/c^2)^{-1/2}\left(\mathbf{f}, \frac{i}{c}\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\right). \qquad (۳-۴۲)$$

نسبت به تبدیل خاص لورنتس، معادلات تبدیل برای مؤلفه های $\mathbf{F}$ چنین می‌شود:

$$\left.\begin{aligned} F_1' &= F_1\cos\alpha + F_4\sin\alpha, & F_2' &= F_2, \\ F_4' &= -F_1\sin\alpha + F_4\cos\alpha, & F_3' &= F_3. \end{aligned}\right\} \qquad (۳-۴۳)$$

با جایگذاری از معادلهٔ (۳ ــ ۴۲) در سه معادلهٔ اول (۳ ــ ۴۳) و با استفاده از معادلهٔ (۱ ــ ۳۲)، به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= Q\left(f_x-\frac{u}{c^2}\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\right),\\ f'_y &= Q(1-u^2/c^2)^{1/2} f_y,\\ f'_z &= Q(1-u^2/c^2)^{1/2} f_z,\end{aligned}\right\} \tag{۴۴ـ۳}$$

که در آن Q بامعادلهٔ (۳ ـ ۱۰) داده شده است . با قرار دادن مقدار Q از معادلهٔ چهارم روابط (۳ ـ ۹) ، به دست می‌آوریم :

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= f_x-\frac{u}{c^2}\cdot\frac{(f_y v_y+f_z v_z)}{1-uv_x/c^2},\\ f'_y &= \frac{(1-u^2/c^2)^{1/2}}{1-uv_x/c^2} f_y,\\ f'_z &= \frac{(1-u^2/c^2)^{1/2}}{1-uv_x/c^2} f_z.\end{aligned}\right\} \tag{۴۵ـ۳}$$

این روابط عبارت‌انداز معادلات تبدیل خاص لورنتس برای $\mathbf{f}$. اگر بتوان از u و v درمقایسه با c صرف نظرکرد ، آنگاه این معادلات به صورت کلاسیک معادلهٔ (۱ ـ ۱۱) در می‌آیند .

از معادلات (۳ ـ ۴۵) پیدا است که اگر به نظر ناظری از S ، نیروهایی مساوی ودر خلاف جهت هم بردو ذره وارد شوند ، رابطهٔ بین نیروها از نظر ناظری از S' چنین نخواهد بود مگر اینکه سرعت دو ذره برابر باشد .

۳ ـ ۵ حرکت با جرم ویژهٔ متغیر

در بخش ۳ ـ ۳ ، فرض براین بود که m_0 ، جرم ویژهٔ ذره ای که تحت تأثیرنیروی $\mathbf{f}$ حرکت می‌کند ، ضمن حرکت ثابت است . ولی اگردره در حین حرکت گرم یا سرد شود ویا توسط یک منبع خارجی ، هر نوع انرژی غیر مکانیکی به آن داده شود ، دراین صورت جرم ویژهٔ آن تغییرخواهدکرد . بنابراین لازم‌است‌که‌معادلات مربوط طوری اصلاح شوند که این تغییر در آنها ملحوظ شود .

بدین ترتیب ، معادلهٔ (۳ ـ ۲۷) را درنظر بگیرید: چهار ـ اندازه حرکت $\mathbf{P}$ بازهم طبق رابطهٔ (۳ ـ ۲۰) تعریف می‌شود ولی چون m_0 متغیر است پس چهار ـ نیـرو از

$$\mathbf{F} = \frac{d}{d\tau}(m_0\mathbf{V}) = m_0\frac{d\mathbf{V}}{d\tau}+\mathbf{V}\frac{dm_0}{d\tau}. \tag{۴۶ـ۳}$$

به دست می‌آید . معادلهٔ (۳ ـ ۲۹) معتبر است و ازاین رو با مشتق گرفتن از آن داریم :

$$\mathbf{V}\cdot\frac{d\mathbf{V}}{d\tau} = 0. \qquad (۴۷-۳)$$

با قرار دادن $dV/d\tau$ از معادلهٔ (۳ــ ۴۶) حاصل چنین می‌شود :

$$\mathbf{V}\cdot\mathbf{F} = -c^2\frac{dm_0}{d\tau} \qquad (۴۸-۳)$$

نتیجه می‌گیریم که **V** و **F** دیگر برهم عمود نیستند . با گذاردن **V** از معادلهٔ (۳ ــ ۶) و **F** از معادلهٔ (۳ ــ ۲۸) در معادلهٔ (۳ ــ ۴۸) ، چنین خواهیم داشت :

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}+(c^2-v^2)\frac{dm_0}{d\tau}\cdot \qquad (۴۹-۳)$$

این معادلهٔ اصلاح شده برای کار است وتعبیر فیزیکی آن چنین است :

(۳ ــ ۵۰) آهنگ ازدیاد انرژی یک ذره = آهنگ انجام کار توسط نیروی وارد + آهنگ انرژی داده شده توسط منبع خارجی

نتیجه می‌گیریم که آهنگ دریافت انرژی ازمنبع خارجی‌که در چارچوب لخت به کار رفته اندازه گیری می‌شود ، برابر است با :

$$R = (c^2-v^2)\frac{dm_0}{d\tau} \qquad (۵۱-۳)$$

بنابر این ، معادلهٔ (۳ ــ ۴۹) چنین نوشته می‌شود :

$$\dot{E} = c^2\dot{m} = \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}+R \qquad (۵۲-۳)$$

پس با استفاده از معادلهٔ (۳ ــ ۲۸) می‌توان نوشت :

$$\mathbf{F} = (1-v^2/c^2)^{-1/2}\left[\mathbf{f}, \frac{i}{c}(\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}+R)\right]\cdot \qquad (۵۳-۳)$$

این معادله ، صورت اصلاح شدهٔ معادلهٔ (۳ ــ ۴۲) است .

۳ ــ ۶ معادلات لاگرانژ و هامیلتون

فرض کنید که ذره ای به جرم ویژهٔ ثابت m_0 ، تحت تأثیر نیروی مشتق از پتانسیل V دریک چارچوب لخت درحرکت است . دراین صورت معادلات حرکت آن عبارت خواهند بود از :

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m_0 \dot{x}}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}\right\} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \text{و غیره} \qquad (۵۴-۳)$$

اگر آنها را به صورت لاگرانژ بیان کنیم ، باید چنین شوند :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}, \quad \text{و غیره} \qquad (۵۵-۳)$$

بنابراین ، L باید تابعی از $\dot{z}$ و $\dot{y}$ و $\dot{x}$ و z و y و x باشد طوری که داشته باشیم :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m_0 \dot{x}}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \text{و غیره} \qquad (۵۶-۳)$$

از طرفی داریم $v^2 = \dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2$ ، پس این روابط در صورتی صحت دارند که داشته‌باشیم :

$$L = -m_0 c^2(1-v^2/c^2)^{1/2} - V, \qquad (۵۷-۳)$$

که بنابراین همان لاگرانژی[1] ذره است .

حال می‌توان نوشت :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = p_x, \quad \text{و غیره} \qquad (۵۸-۳)$$

و اگر هامیلتونی[2] H را با رابطهٔ

$$H = p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z - L, \qquad (۵۹-۳)$$

تعریف کنیم وسپس آن را تنها برحسب p_x و p_y و p_z و x و y و z بنویسیم ، دراین صورت ، درست مانند نظریهٔ کلاسیک ، معادلات لاگرانژ (۳-۵۵) با معادلات هامیلتون

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad \text{و غیره} \qquad (۶۰-۳)$$

هم ارزخواهند بود و چون داریم :

$$p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z = \frac{m_0 v^2}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \qquad (۶۱-۳)$$

1) Lagrangian

2) Hamiltonian

از این رو می‌توان نوشت :

$$H = \frac{m_0 v^2}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} + m_0 c^2(1-v^2/c^2)^{1/2} + V,$$
$$= \frac{m_0 c^2}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} + V,$$
$$= E + V \qquad (۳-۶۲)$$

که دقیقا " مانند نظریهٔ کلاسیک ، برابر است با انرژی کل .

اما :

$$p_x^2+p_y^2+p_z^2 = \frac{m_0^2 v^2}{1-v^2/c^2},$$
$$= -m_0^2 c^2 + \frac{m_0^2 c^2}{1-v^2/c^2},$$
$$= -m_0^2 c^2 + E^2/c^2, \qquad (۳-۶۳)$$

و از اینجا نتیجه می‌شود که :

$$E^2 = c^2(p_x^2+p_y^2+p_z^2+m_0^2 c^2). \qquad (۳-۶۴)$$

با گذاردن این در معادلهٔ (۳ ــ ۶۲) ، داریم :

$$H = c(p_x^2+p_y^2+p_z^2+m_0^2 c^2)^{1/2} + V, \qquad (۳-۶۵)$$

که در آن H برحسب x و y و z و p_x و p_y و p_z بیان شده است . اثبات اینکه معادلات هامیلتون با معادلات حرکت (۳ ــ ۵۴) هم ارزند ، به عهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود .

تمرینات فصـــل ســـوم

۱ ــ با مشتق گیری از تبدیل لورنتس، معادلات تبدیل **v** را به دست آورید .

۲ ــ با مشتق گیری از معادلات تبدیل **v** معادلات تبدیل شتاب **a** را به دست آورید و آنها را به صورت

$$\bar{a}_x = \frac{(1-u^2/c^2)^{3/2}}{(1-v_x u/c^2)^3} a_x,$$

$$\bar{a}_y = \frac{1-u^2/c^2}{(1-v_x u/c^2)^2}\left(a_y + \frac{v_y u/c^2}{1-v_x u/c^2} a_x\right),$$
$$\bar{a}_z = \frac{1-u^2/c^2}{(1-v_x u/c^2)^2}\left(a_z + \frac{v_z u/c^2}{1-v_x u/c^2} a_x\right).$$

بیان کنید ونتیجه بگیرید که اگر شتاب نقطه ای در یک چارچوب لخت ثابت باشد ، عموما" در چارچوب لخت دیگر شتابش یکنواخت نخواهد بود .

۳ ــ اگر $\bar{S}$ با سرعت c نسبت به S حرکت کند ، ثابت کنیدتمام نقاطی که باسرعت کمتر از c نسبت به S حرکت می‌کنند ، به نظر ناظر $\bar{S}$ سرعت آنها برابر c خواهد بود .

۴ ــ دو نقطه ، هر یک با سرعت c ودرخلاف جهت یکدیگر نسبت به یک چارچوب لخت حرکت می‌کنند . ثابت کنید که سرعت نسبی آنها برابر c است .

۵ ــ ثابت کنید که بردار چهار ــ سرعت $\mathbf{V}$ دارای بزرگی ثابت ic است .

۶ ــ یک باریکهٔ نور ، تحت زاویهٔ α با محور x ودر صفحهٔ xy در S منتشرمی‌شود . در $\bar{S}$ به نظر می‌رسدکه زاویهٔ آن با محور $\bar{O}\bar{x}$ برابر $\bar{\alpha}$ است . فرمول ابیراهی [1] نور یعنی

$$\cot\bar{\alpha} = \frac{\cot\alpha-(u/c)\operatorname{cosec}\alpha}{(1-u^2/c^2)^{1/2}}.$$

را ثابت کنید ، و نتیجه بگیرید که اگر $u \ll c$ ، آنگاه بتقریب خواهیم داشت :

$$\Delta\alpha = \bar{\alpha}-\alpha = \frac{u}{c}\sin\alpha,$$

۷ ــ ذره ای به جرم ویژهٔ m_0 ، تحت تأثیر نیروی $\mathbf{f}$ با سرعت $\mathbf{v}$ حرکت می‌کند . نشان دهید که :

$$\mathbf{f} = \frac{m_0}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\frac{m_0 v\dot{v}/c^2}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\mathbf{v}.$$

واگر شتاب $d\mathbf{v}/dt$ با سرعت $\mathbf{v}$ موازی باشد ، ثابت کنید که :

$$\mathbf{f} = \frac{m_0}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

و اگر شتاب برامتداد $\mathbf{v}$ عمود باشد ، آنگاه داریم :

$$\mathbf{f} = \frac{m_0}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

۸ ــ ثابت کنید که $\mathbf{P} = (\mathbf{p}, iE/c)$ ودر نتیجه‌مقدار p^2-E^2/c^2 برابر با $-m_0^2c^2$ و نسبت به تبدیلات لورنتس یک ناوردا است .

۹ ــ ثابت کنید که تحت تبدیل خاص لورنتس ، تبدیل E برابر است با :

$$\bar{E} = \frac{E-p_x u}{(1-u^2/c^2)^{1/2}}.$$

۱۰ ــ موشکی درامتداد محور x در S حرکت می‌کند طوری که سرعت اولیهٔ آن v_0

---

1) aberration

و سرعت نهایی آن v_1 است. اگر سرعت‌خروج گاز که توسط سرنشینان آن‌اندازه گیری می‌شودبرابر w باشد (فرض کنیدثابت‌است)، ثابت کنید که دراین مانور نسبت جرم (یعنی جرم اولیه تقسیم برجرم نهایی)، که توسط سرنشینان موشک اندازه گیری می‌شود، برابر است با:

$$\left[\frac{(c+v_1)(c-v_0)}{(c-v_1)(c+v_0)}\right]^{c/2w}$$

اگر $c\to\infty$ این نسبت به چه تبدیل‌می‌شود؟ اگرموشک‌در S از سکون شروع به حرکت کند و گاز خروجی ازفوتونهاتشکیل شده باشد، ثابت‌کنید که این نسبت جرم برای سرعت v برابر است با:

$$\sqrt{\left(\frac{c+v}{c-v}\right)}.$$

نشان دهید که اگر نسبت جرم مساوی ۶ باشد، سرعت موشک در S به $\frac{۳۵}{۳۷}$ سرعت نور می‌رسد.

۱۱ــ S و $\bar{S}$ و $\bar{\bar{S}}$ چارچوبهای لخت هستند و محورهای آنها با هم موازی اند. سرعت $\bar{\bar{S}}$ نسبت به $\bar{S}$ برابر u وسرعت $\bar{S}$ نسبت به S برابر v است وهر دو سرعت‌موازی محور x هستند. اگر در فضا ــ زمان، تبدیل از $\bar{S}$ به $\bar{\bar{S}}$ دراثر چرخش محورها به اندازهٔ زاویهٔ α وتبدیل از S به $\bar{S}$ دراثر چرخش محورها به‌اندازهٔ زاویهٔ β باشد، تبدیل S به $\bar{\bar{S}}$ با چرخش محورها به اندازهٔ زاویهٔ γ انجام می‌گیرد، طوری که $\gamma=\alpha+\beta$. از این معادله قانون نسبیت برای ترکیب سرعتها را به دست آورید، یعنی:

$$w = \frac{u+v}{1+uv/c^2}$$

۱۲ــ نیروی $\mathbf{f}$ بر ذره ای به‌جرم m اثر می‌کند. اگر سرعت ذره $\mathbf{v}$ باشد ثابت کنید که:

$$\mathbf{f} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\frac{\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\mathbf{v}.$$

۱۳ــ یک ذرهٔ الکتریسیته‌دار که‌بار الکتریکی آن e و جرم سکون آن m_0 است، در یک میدان یکنواخت الکتریکی به‌شدت E وموازی محور x، حرکت می‌کند. اگر در ابتدااین ذره به‌حال سکون درمبدا o قرار گرفته باشد، ثابت کنیدکه معادلهٔ حرکت آن در روی‌محور x در لحظهٔ t برابر است با:

$$x = \frac{c^2}{k}\left\{\sqrt{\left(1+\frac{k^2}{c^2}t^2\right)}-1\right\}$$

که در آن $k = eE/m_0$. ثابت‌کنید وقتی $c \to \infty$ ، حرکت به نوع پیش‌بینی شدهٔ آن در مکانیک کلاسیک نزدیک‌می‌شود (می‌توان فرض کرد که‌همیشه نیروی وارد بر ذره درامتداد میدان وبرابر eE است) .

۱۴ ــ ذره‌ای‌که با سرعت u حرکت می‌کند باذرهٔ ساکن دیگری با همان جرم‌سکون ، برخورد می‌کند . بعداز برخورد ، زاویهٔ امتدادحرکت ذرات با امتداد حرکت ذرهٔ اول‌قبل از برخورد ، برابر θ و ϕ می‌شود . نشان دهید که :

$$\tan\theta\tan\phi = \frac{2}{\gamma+1}$$

که در آن $\gamma = (1-u^2/c^2)^{-1/2}$.(اگر $c \to \infty$ ، آنگاه $\gamma \to 1$ و $\theta+\phi = \frac{1}{2}\pi$ ،واین نتیجه‌ای‌است که در مکانیک کلاسیک پیش بینی می‌شود . اما ، اگر ذرات مورد نظر الکترون باشند و مقدار u به c خیلی نزدیک‌باشد دراین‌صورت $\theta+\phi < \frac{1}{2}\pi$ می‌شود .این‌اثر در اتاق ابرویلسون[1] مشاهده شده است . (راهنمایی : چارچوب لختی را در نظر بگیرید که در آن دو ذره بـــا سرعت یکسان ودر خلاف جهت هم حرکت کنند .)

۱۵ ــ جسمی به‌جرم M ، در حالت سکون به دو قسمت با جرمهای سکون M_1 و M_2 تجزیه می‌شود . نشان دهید که انرژی هر قسمت برابر است با :

$$E_1 = c^2\frac{M^2+M_1^2-M_2^2}{2M}, \quad E_2 = c^2\frac{M^2-M_1^2+M_2^2}{2M}$$

۱۶ ــ ذره‌ای‌به جرم ویژهٔ m_0 تحت تأثیر یک‌نیروی مرکزی حرکت می‌کند . مختصات قطبی آن نسبت به‌مرکز نیرو به‌عنوان قطب ودر صفحهٔ حرکت آن‌عبارت‌انداز(r,θ) . انرژی پتانسیل آن در نقطه ای به‌فاصلهٔ r از مرکز ، برابر است با $V(r)$.معادلات لاگرانژ در مورد حرکت آن را به صورت زیر به دست آورید :

$$\frac{d}{dt}(\gamma\dot{r})-\gamma r\dot{\theta}^2+\frac{1}{m_0}V' = 0, \quad \frac{d}{dt}(\gamma r^2\dot{\theta}) = 0,$$

که درآن $\gamma = [1-(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)/c^2]^{-1/2}$. معادلهٔانرژی‌برای‌حرکت‌رابنویسیدومعادلهٔ دیفرانسیل مدارآن را به صورت

$$h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right) = \frac{C-V}{m_0^2c^2}V'$$

به دست‌آورید که درآن $u = 1/r$ و h, C مقادیر ثابتی هستند . درحالت قانون عکس مجذور وقتی $V = -\mu/r$ ، نتیجه بگیرید که معادلهٔ قطبی مدار را می‌توان به صورت

1) Wilson cloud chamber

$$lu = 1 + e\cos\eta\theta$$

نوشت که‌در آن $\eta^2 = 1-\mu^2/m_0^2h^2c^2$. اگر μ/m_0hc کوچک‌باشدثابت‌کنید که مدار حرکت ، تقریبا " یک بیضی است که قطراطول آن در هر دور به اندازهٔ‌زاویهٔ $\pi\mu^2/m_0^2h^2c^2$ می‌چرخد .

۱۷ ــ فوتونی با انرژی E با یک الکترون ساکن به‌جرم سکون m_0 برخورد می‌کند . دراثر برخورد ، فوتون به اندازهٔ زاویهٔ θ از مسیر اول منحرف وانرژی آن برابر E' می‌شود . ثابت کنید که :

$$m_0c^2\left(\frac{1}{E'}-\frac{1}{E}\right) = 1-\cos\theta$$

(می‌توان فرض کرد که‌انــدازه حرکت یک فوتون با انرژی E ، برابر است با E/c .)

نتیجه بگیرید که ازدیاد λ طول موج فوتون برابر است با

$$\Delta\lambda = \frac{2h}{m_0c}\sin^2\tfrac{1}{2}\theta$$

که درآن h ثابت پلانک است . (این **اثر کامپتون**[1] است . فرض کنید که برای یک فــوتــون $\lambda = hc/E$)

۱۸ ــ ذره ای‌به‌جرم سکون m_1 و سرعت v با ذرهٔ‌ساکنی‌به‌جرم سکون m_2 برخورد می‌کند .بعدازبرخورد ، دوذره به‌هم متصل می‌شوند . اگر انرژی تابشی وجود نداشته باشد ، ثابت کنید که M جرم ذرهٔ حاصل ازاتصال دو ذره ، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید :

$$M^2 = m_1^2+m_2^2+\frac{2m_1m_2}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}$$

سرعت آن را نیز به دست آورید .

۱۹ ــ مرکز یک قرص درخشان به شعاع a درنقطه ای به مختصات $(\bar{x},0,0)$ از چارچوب S تعیین شده است وصفحهٔ آن برمحور $\bar{x}$ عمود است . این قرص از مرکزچارچوب S درلحظه ای‌که مبدا دو چارچوب S و $\bar{S}$ برهم منطبق می‌شوند ، مشاهــده می‌شــودو زاویه ای برابر 2α می‌سازد . اگر $a \ll \bar{x}$ باشد ثابت کنید که :

$$\tan\alpha = \frac{a}{\bar{x}}\sqrt{\left(\frac{c+u}{c-u}\right)}$$

(راهنمایی : از فرمول ابیراهی نور در تمرین ۶ استفاده کنید) .

۲۰ ــ دو ذره‌به جرم‌ویژهٔ m_1 وm_2 بترتیب با سرعتu_1 و u_2 حرکت می‌کنندوهنگام برخورد به یکدیگر متصل می‌شوند . اگر زاویهٔ بین امتداد حرکت آنها قبل از برخورد برابر

1) Compton effect

α باشد ثابت‌کنید که m جرم ویژهٔ ذرهٔ حاصل از اتصال آنها در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1 m_2(c^2 - u_1 u_2 \cos\alpha)}{\sqrt{\{(c^2 - u_1^2)(c^2 - u_2^2)\}}}$$

نشان دهید که به‌ازای جمیع مقادیر α ، $m \geqslant m_1 + m_2$ واین ازدیاد جرم ویژه را توضیح دهید.

۲۱ ــ سرعت یک نقطه نسبت به دو چارچوب لخت S و $\bar{S}$ بترتیب برابر است با $\mathbf{v}$ و $\bar{\mathbf{v}}$. اگر این بردارها را همچون بردارمکان دریک $\mathscr{E}_3$ ی مستقل نمایش دهیم، ثابت کنید که داریم:

$$\beta\bar{\mathbf{v}} = Q\left[\mathbf{v} + \mathbf{u}\left\{\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{u^2}(\beta - 1) + \beta\right\}\right]$$

که درآن: $\quad Q = 1/(1 + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}/c^2) \qquad \beta = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$

همچنین نشان دهید که:

$$u^2\beta\bar{\mathbf{v}} = Q[(1-\beta)\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{u}) + \beta u^2(\mathbf{u}+\mathbf{v})],$$

و از آنجا ثابت کنید که:

$$\bar{v}^2 = Q^2[(\mathbf{u}+\mathbf{v})^2 - (\mathbf{v}\times\mathbf{u})^2/c^2]$$

۲۲ ــ درچارچوب S ، ذره ای با سرعت v وشتاب a درامتداد محور x حرکت می‌کند. نشان دهید که شتاب ذره در دستگاه $\bar{S}$ برابر است با:

$$\bar{a} = \frac{(1 - u^2/c^2)^{3/2}}{(1 - uv/c^2)^3}a$$

اگر شتاب ذره نسبت به‌یک چارچوب لخت‌که دریک لحظه درآن ساکن است، ثابت و برابر α باشد، ثابت کنید:

$$\frac{d}{dt}(\beta v) = \alpha,$$

که در آن $\beta = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ و t زمان در S است.

فرض کنیدکه در لحظهٔ $t = 0$، ذره در مبدا S ساکن باشد. ثابت کنید که مختصهٔ x آن در لحظهٔ t ، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\alpha x = c^2[(1 + \alpha^2 t^2/c^2)^{1/2} - 1]$$

۲۳ ــ مبدا سه چارچوب لخت دکارتی قائم S و $\bar{S}$ و $\bar{\bar{S}}$ ابتدا برهم منطبق اند. از S مشاهده می‌شود که $\bar{S}$ با سرعت u وموازی Ox حرکت می‌کند ونیز از $\bar{S}$ دیده می‌شود که $\bar{\bar{S}}$ با سرعت v وموازی $\bar{O}\bar{y}$ حرکت می‌کند. اگرجهت‌حرکت $\bar{\bar{S}}$ آن طور که از S مشاهده

می‌شود با محور Ox زاویهٔ θ تشکیل دهد وجهت حرکت S مشاهده شده از $\bar{S}$ ، با محور $\bar{O}\bar{x}$ زاویهٔ ϕ بسازد ثابت کنید که:

$$\tan\theta = \frac{v}{u}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}, \qquad \tan\phi = \frac{v}{u}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

اگر u و v خیلی کوچکتر از c باشند، نشان دهید که بتقریب:

$$\phi-\theta = uv/2c^2$$

۲۴ ـ ذره ای متحرک باسرعت v به دوفوتون تجزیه می‌شود که‌انرژی آنهابترتیب E_1 و E_2 است وراستای حرکت‌آنها با راستای اولیهٔ حرکت بترتیب زوایای α و β درست می‌کنندودر دو طرف این راستا قرار دارند. ثابت کنید که:

$$\tan\tfrac{1}{2}\alpha\tan\tfrac{1}{2}\beta = \frac{c-v}{c+v}.$$

نتیجه بگیرید که اگر فوتونی به دو فوتون تجزیه شود، این دو فوتون باید درهمان راستای فوتون اولیه حرکت کنند. (اگر انرژی فوتون E باشد اندازه حرکت آنE/cاست.)

فصـــل چهـــارم

الکترودینامیک نسبیت خـــاص

۴ ــ ۱ چگالی چهار ــ جریان[1]

بحث این‌فصل درمورد میدان‌الکترو مغناطیس‌حاصل از یک جریـان بار معین اسـت ، فـرض کنید که ρ چگالی بار و $\mathbf{v}$ سرعت حرکت‌آن نسبت به یک چارچوب لخت S باشد . در این حالت اگر $\mathbf{j}$ چگالی جریان باشد داریم :

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v} \qquad (۱ ــ ۴)$$

با فرض اینکه بار الکتریکی نه تولید می‌شود و نه از بین می‌رود ، معادلهٔ پیوستگی[2] زیر در مورد جریان الکتریکی در S صادق خواهد بود :

$$\mathrm{div}\,\mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (۲ ــ ۴)$$

این معادله باید درمورد هر چارچوب لخت صدق کند وبنابراین باید به صورتی قابل بیان باشد که نسبت به تبدیلات متعامد در فضا ــ زمان هموردا باشد . با به کار بردن مختصات x_i از معادلات(۱ــ ۲۰)و بااستفاده‌ازرابطهٔ (۴ ــ ۱) ، مشاهده‌می‌شودکه معادلهٔ (۴ ــ ۲) با رابطهٔ زیر هم‌ارز است :

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\rho v_z) + \frac{\partial}{\partial x_4}(ic\rho) = 0 \qquad (۳ ــ ۴)$$

این معادله به‌شرطی هموردا است که مقادیر $(\rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, ic\rho)$ چهارمؤلفهٔ یک بردار درفضا ــ زمان باشند .زیرا ،اگر $\mathbf{J}$ این بردار باشد ، معادلهٔ (۴ ــ ۳) را به‌صورت زیر می‌توان نوشت :

$$J_{i,i} = 0 \qquad (۴ ــ ۴)$$

---

1) 4-current density

2) equation of continuity

که نسبت‌به‌تبدیلات متعامد هموردا است. حال با در نظر گرفتن معادلهٔ (۳ ــ ۶) داریم:

$$\mathbf{J} = (\rho\mathbf{v}, ic\rho) = \rho(1-v^2/c^2)^{1/2}\,\mathbf{V}, \qquad (۵-۴)$$

که درآن $\mathbf{V}$ چهار ــ بردار سرعت‌جریان است و بنابراین، $\mathbf{J}$ به شرطی می‌تواند بردارباشد که مقدار $\rho(1-v^2/c^2)^{1/2}$ ناوردا باشد. با نشان دادن این ناوردا با ρ_0، داریم:

$$\rho = \frac{\rho_0}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \qquad (۶-۴)$$

نتیجه می‌شود که اگر $v = 0$ باشد دراین صورت $\rho = \rho_0$ می‌شود، پس ρ_0 عبارت است از چگالی بارالکتریکی‌اندازه‌گیری‌شده‌در چارچوب لختی که‌بارالکتریکی مورد نظر برای یک‌لحظه در آن ساکن است. ρ_0 **چگالی ویژهٔ بار**[1] نامیده می‌شود.

$\mathbf{J}$ را **چگالی چهار ــ جریان** می‌نامند. واضح‌است‌که از معادلهٔ (۴ ــ ۶) داریم:

$$\mathbf{J} = \rho_0\mathbf{V} = (\mathbf{j}, ic\rho) \qquad (۷-۴)$$

اکنون بدیهی‌است‌که اگر $\mathbf{J}$ در سراسر فضا ــ زمان‌مشخص‌شود، جریان الکتریسیته نیزکاملا" معین می‌شود، زیرا مؤلفه های فضایی $\mathbf{J}$، چگالی جریان را و مولفهٔ زمانی آن، چگالی بار را معین می‌کنند. ازاین جهت با معلوم بودن $\mathbf{J}$، میدان الکترومغناطیس قابل محاسبه است. به دست آوردن معادلاتی که اساس این محاسبه هستند، در دو بخش بعدی انجام خواهد گرفت.

فرض کنید که $d\omega_0$ حجم عنصر کوچکی از بار الکتریکی اندازه گیری شده در چارچوب لخت S_0 که برای یک آن بارالکتریکی در آن ساکن است، باشد. پس تمام‌بار الکتریکی‌موجود در عنصر مورد نظر برابر $\rho_0 d\omega_0$ است. مطابق انقباض فیتزجرالد، حجم اندازه گیری شدهٔ این عنصر در S برابر $d\omega$ می‌شود، طوری که:

$$d\omega = (1-v^2/c^2)^{1/2}\,d\omega_0 \qquad (۸-۴)$$

بنابراین، همهٔ بار الکتریکی موجود در عنصر مذکور که در S اندازه گیری می‌شود، طبق معادلهٔ (۴ ــ ۶) برابر است با:

1) proper charge density

$$\rho\, d\omega = \rho(1-v^2/c^2)^{1/2} d\omega_0 = \rho_0\, d\omega_0. \qquad (۹-۴)$$

از اینجامی‌توان نتیجه‌گرفت که بار الکتریکی یک‌جسم برای‌تمام ناظرهای‌لخت ناورداست .

۴ ـ ۲ چهار ـ بردار پتانسیل [1]

معادلات تعیین کننده‌ٔ میدان الکترو مغناطیس حاصل از یک جریان بار الکتریکی مفروض، در نظریهٔ کلاسیک عبارت‌اند ازمعادلات ماکسول (۱ ـ ۱۲) تا (۱ ـ ۱۵). جهت حصول اطمینان ازهموردابودن قوانین مکانیک نسبت به تبدیلات لورنتس، ثابت شد که لازم‌است نظریهٔ کلاسیک نیوتون کمی اصلاح شود. معهذاثابت خواهد شدکه معادلات ماکسول، بدون احتیاج به‌هرتغییر وتعدیلی، هموردا هستند. در واقع، اول بار این موضوع مورد توجه‌قرار گرفت که معادلات تبدیل لورنتس،معادلات تبدیلی هستند که باعث تغییر صورت معادلات ماکسول نمی‌شوند.

جهت اثبات‌این مطلب، بهتراین است که ϕ را به عنوان‌پتانسیل نرده ای میدان و $\mathbf{A}$ را به عنوان پتانسیل‌برداری میدان‌در نظر بگیریم. درکتابهای درسی مربوط به‌نظریهٔ کلاسیک[2]، ثابت شده است که $\mathbf{A}$ در معادلات

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0, \qquad (۱۰-۴)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \qquad (۱۱-۴)$$

و ϕ در معادلهٔ

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \qquad (۱۲-۴)$$

صدق می‌کنند. اکنون، در هر چارچوب لخت S، یک چهار ـ پتانسیل برداری $\mathbf{\Omega}$ را طبق رابطهٔ

$$\mathbf{\Omega} = (\mathbf{A}, i\phi). \qquad (۱۳-۴)$$

1) 4-vector potential

۲) مثلا" ر. ک صفحهٔ ۵۲۷ از کتاب
A Course in Applied Mathematics, by D.F. Lawden, English Universities Press.

تعریف می‌کنیم.بآسانی می‌توان ثابت کرد که معادلات (۴ ــ ۱۱) و (۴ ــ ۱۲) روی هم با معادلهٔ

$$\square^2 \mathbf{\Omega} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}, \qquad (۱۴-۴)$$

هم ارزند که در آن $\square^2$، بنابه تعریف عبارت است از:

$$\square^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_4^2} \qquad (۱۵-۴)$$

از مؤلفه‌های فضایی معادلهٔ (۴ ــ ۱۴)، معادلهٔ (۴ ــ ۱۱) حاصل می‌شود و از مؤلفهٔ زمانی آن، معادلهٔ (۴ ــ ۱۲) به دست می‌آید. اگر Ω_i و J_i بترتیب مؤلفه های $\mathbf{\Omega}$ و $\mathbf{J}$ باشند، دراین حالت معادلهٔ (۴ ــ ۱۴) را می‌توان به صورت

$$\Omega_{i,jj} = -\frac{4\pi}{c}J_i \qquad (۱۶-۴)$$

نوشت. رابطهٔ مذکور با این صورت، اگر $\mathbf{\Omega}$ یک بردار باشد، نسبت به تبدیلات لورنتس هموردااست. این مطلب مؤید این است که در واقع معادلهٔ (۴ـ ۱۳)، کمیتی را با خواص تبدیل بردار در فضا ــ زمان،تعریف می‌کند.

همچنین لازم است ثابت شود که معادلهٔ (۴ ــ ۱۰) نسبت به تبدیلات متعامد در فضا ــ زمان هموردا است. واضح است که رابطهٔ مذکور با معادلهٔ

$$\operatorname{div}\mathbf{\Omega} = \Omega_{i,i} = 0 \qquad (۱۷-۴)$$

هم ارز است که به صورت مطلوب است.

با معلوم بودن $\mathbf{J}$ واستفاده از معادلات (۴ ــ ۱۶)، و (۴ ــ ۱۷)، $\mathbf{\Omega}$ را می‌توان تعیین کرد.

۴ ــ ۳ تانسور میدان

وقتی در یک‌چارچوب لخت، $\mathbf{A}$ و ϕ معلوم باشند، شدت میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ وشدت میدان مغناطیسی $\mathbf{H}$، در هر نقطه از میدان الکترو مغناطیس، از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad (۱۸-۴)$$

$$\mathbf{H} = \operatorname{curl} \mathbf{A}. \tag{۴ — ۱۹}$$

بااستفاده از معادلات (۱ — ۲۰) و (۴ — ۱۳) بسهولت می‌توان ثابت کرد که روابط فوق با معادلات زیر هم ارزاند:

$$\left.\begin{aligned} -iE_x &= \frac{\partial \Omega_4}{\partial x_1} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_4}, \\ -iE_y &= \frac{\partial \Omega_4}{\partial x_2} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_4}, \\ -iE_z &= \frac{\partial \Omega_4}{\partial x_3} - \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_4}, \end{aligned}\right\} \tag{۴ — ۲۰}$$

$$\left.\begin{aligned} H_x &= \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_3}, \\ H_y &= \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1}, \\ H_z &= \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}. \end{aligned}\right\} \tag{۴ — ۲۱}$$

معادلات (۴ — ۲۰) و (۴ — ۲۱) نشان می‌دهند که شش مؤلفهٔ بردارهای $i\mathbf{E}-$ و $\mathbf{H}$، نسبت به چارچوب لخت دکارتی قائم S، عبارت اند از شش مؤلفهٔ متمایز وغیر صفر در فضا — زمان ازتانسور پادمتقارن ($\Omega_{j,i} - \Omega_{i,j}$) . بنابراین ، با این فرض که رابطهٔ زیر نسبت به تبدیلات متعامد درفضا — زمان مثل یک تانسور تبدیل می‌شود ، ثابت شد که معادلات (۴ — ۱۸) و(۴ — ۱۹) ، در تمام چارچوبهای لخت معتبر اند:

$$(F_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix} \tag{۴ — ۲۲}$$

دراین صورت معادلات (۴ — ۲۰) و (۴ — ۲۱) در معادلهٔ تانسوری زیر خلاصه می‌شوند:

$$F_{ij} = \Omega_{j,i} - \Omega_{i,j}. \tag{۴ — ۲۳}$$

F_{ij} را *تانسور میدان الکترومغناطیس* می‌نامند . اکنون معلوم می‌شود که رابطهٔ نزدیک بین جنبه های الکتریکی ومغناطیسی یک میدان الکترومغناطیس ناشی از سهمی است که ایـن‌دو

به عنوان مؤلفه های یک میدان تانسوری دارند که باعث وحدت آن دو میشود.

اکنون معادلات (۱ — ۱۳) و(۱— ۱۴) را در نظر بگیرید. با به کار بردن تانسور میدان تعریف‌شده‌از معادلهٔ (۴ — ۲۲) وچگالی جریان داده شده توسط معادلهٔ (۴ — ۷)، مشاهده می‌شود که این معادلات با معادلات زیر هم‌ارزند:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial F_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{13}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{14}}{\partial x_4} &= \frac{4\pi}{c}J_1,\\
\frac{\partial F_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{24}}{\partial x_4} &= \frac{4\pi}{c}J_2,\\
\frac{\partial F_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{34}}{\partial x_4} &= \frac{4\pi}{c}J_3,\\
\frac{\partial F_{41}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{42}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{43}}{\partial x_3} &= \frac{4\pi}{c}J_4,
\end{aligned}\right\} \qquad (۲۴ — ۴)$$

که آنها را می‌توان‌به شکل زیر خلاصه کرد:

$$F_{ij,j} = \frac{4\pi}{c}J_i \qquad (۲۵ — ۴)$$

و این معادله‌یی است که نسبت به تبدیلات لورنتس هموردا است.

بالاخره معادلات (۱ — ۱۲) و (۱ — ۱۵) را در نظر بگیرید، که می‌توان آنها را به صورت زیر نوشت

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial F_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{13}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{14}}{\partial x_4} &= \frac{4\pi}{c}J_1,\\
\frac{\partial F_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{24}}{\partial x_4} &= \frac{4\pi}{c}J_2,\\
\frac{\partial F_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{34}}{\partial x_4} &= \frac{4\pi}{c}J_3,\\
\frac{\partial F_{41}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{42}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{43}}{\partial x_3} &= \frac{4\pi}{c}J_4,
\end{aligned}\right\} \qquad (۲۶ — ۴)$$

شکل خلاصه شدهٔ روابط اخیر چنین است:

$$F_{ij,k}+F_{jk,i}+F_{ki,j} = 0. \qquad (۲۷ — ۴)$$

چون F_{ij} پادمتقارن است، بنابراین اگر دو شاخص از سه شاخص i و j و k با هم مساوی

باشند، عبارات طرف چپ معادلهٔ فوق‌الذکر همه برابر صفر می‌شوند و معادله بدیهی می‌شود هنگامی که i و j و k متمایز از یکدیگر باشند، چهار حالت ممکن عبارت اند از معادلات (۴ ــ ۲۶). معادلهٔ (۴ ــ ۲۷) یک معادلهٔ تانسوری است و بنابراین نسبت به تبدیلات لورنتس هموردا است.

به طور خلاصه، معادلات ماکسول به صورت هموردای چهاربعدی، عبارت اند از

$$\left.\begin{aligned} F_{ij,j} &= \frac{4\pi}{c}J_i, \\ F_{ij,k}+F_{jk,i}+F_{ki,j} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (۴-۲۸)$$

با دانستن J_i درتمام نقاط فضا ــ زمان وبا استفاده از این معادلات، تانسور میدان F_{ij} تعیین می‌شود. جواب را می‌توان برحسب پتانسیل برداری Ω_i که در روابط زیر صدق می‌کند، به دست آورد:

$$\left.\begin{aligned} \Omega_{i,i} &= 0, \\ \Omega_{i,jj} &= -\frac{4\pi}{c}J_i. \end{aligned}\right\} \qquad (۴-۲۹)$$

با تعیین Ω_i، F_{ij} از معادلهٔ

$$F_{ij} = \Omega_{j,i}-\Omega_{i,j} \qquad (۴-۳۰)$$

به دست می‌آید.

۴ ــ ۴ تبدیلات لورنتس شدت میدان الکتریکی و مغناطیسی

چون F_{ij} یک تانسور است بنابراین مؤلفه های غیر صفر آن نسبت به تبدیل خاص لورنتس چنین تبدیل می‌شوند:

$$\left.\begin{aligned} F_{23} &= F_{23}, \\ F_{31} &= F_{31}\cos\alpha+F_{34}\sin\alpha, \\ F_{12} &= F_{12}\cos\alpha+F_{42}\sin\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (۴-۳۱)$$

$$\left.\begin{aligned} F_{14} &= F_{14}, \\ F_{24} &= -F_{21}\sin\alpha+F_{24}\cos\alpha, \\ F_{34} &= -F_{31}\sin\alpha+F_{34}\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (۴-۳۲)$$

اگر به جای مؤلفه های F_{ij} مقادیر آنها را از معادلهٔ (۴ ــ ۲۲) و به جای $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ مقادیرشان رااز معادلات (۱ ــ ۳۲) قرار دهیم ، از معادلات (۴ ــ ۳۱) ، معادلات تبدیل خاص لورنتس برای H به دست می‌آیند :

$$\bar{H}_x = H_x, \quad \bar{H}_y = \frac{H_y + (u/c)E_z}{(1-u^2/c^2)^{1/2}}, \quad \bar{H}_z = \frac{H_z - (u/c)E_y}{(1-u^2/c^2)^{1/2}}. \qquad (۴ ــ ۳۳)$$

و به همین ترتیب از معادلات (۴ ــ ۳۲) ، معادلات تبدیل برای E حاصل می‌شوند :

$$\bar{E}_x = E_x, \quad \bar{E}_y = \frac{E_y - (u/c)H_z}{(1-u^2/c^2)^{1/2}}, \quad \bar{E}_z = \frac{E_z + (u/c)H_y}{(1-u^2/c^2)^{1/2}} \qquad (۴ ــ ۳۴)$$

برای ذکر یک مثال از موارد استعمال این فرمولهای تبدیل ، می‌توان میدان الکترومغناطیسی حاصل از یک بار الکتریکی نقطه ای e که با سرعت ثابت u نسبت به یک ناظر حرکت می‌کند رادر نظر گرفت . فرض کنید که چارچوب لخت مورد استفادهٔ ناظر ، S باشد و e در امتداد محور x آن حرکت کند . $\bar{S}$ چارچوب لخت دیگری است که با S موازی است وبارالکتریکی e درمبدا آن به‌طور ساکن قرار دارد. $t=0$ لحظه ای‌است در S ، که درآن‌لحظه‌مبداهای S و $\bar{S}$ برهم منطبق هستند وبارالکتریکی نقطه ای در مبدا S واقع است . از نظر ناظر $\bar{S}$ ، میدان الکترومغناطیس حاصل مربوط به یک بارالکتریکی نقطه ای ساکن است واز این جهت به ازای جمیع مقادیر $\bar{t}$ به وسیلهٔ معادلات

$$\bar{\mathbf{E}} = \frac{e}{\bar{r}^3}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \quad \bar{\mathbf{H}} = 0 \qquad (۴ ــ ۳۵)$$

در نقطهٔ ($\bar{z}$ و $\bar{y}$ و $\bar{x}$) مشخص می‌شود ،که درآن $\bar{r}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2$. حال با استفاده از وارون معادلات تبدیل (۴ ــ ۳۳) و (۴ ــ ۳۴) (به جای u ، u ــ را بنشانید) ، می‌توان میدان را در S محاسبه کرد که عبارت خواهد بود از :

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{e}{\bar{r}^3}\left[\bar{x}, \frac{\bar{y}}{(1-u^2/c^2)^{1/2}}, \frac{\bar{z}}{(1-u^2/c^2)^{1/2}}\right], \\ \mathbf{H} &= \frac{e}{\bar{r}^3}\left[0, -\frac{u\bar{z}/c}{(1-u^2/c^2)^{1/2}}, \frac{u\bar{y}/c}{(1-u^2/c^2)^{1/2}}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (۴ ــ ۳۶)$$

ولی با قرار دادن $t=0$ در معادلات (۱ ــ ۳۳) ، خواهیم داشت :

$$\bar{x} = \frac{x}{(1-u^2/c^2)^{1/2}}, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z \qquad (۴ ــ ۳۷)$$

که از آنجا معادلات (۴ ــ ۳۶) هم ارز خواهند بودبا

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{e}{r'^3(1-u^2/c^2)^{1/2}}(x, y, z),\\ \mathbf{H} &= \frac{eu/c}{r'^3(1-u^2/c^2)^{1/2}}(0, -z, y),\end{aligned}\right\} \qquad (۳۸-۴)$$

که در آن

$$r'^2 = \frac{x^2}{(1-u^2/c^2)} + y^2 + z^2.$$

اگر r بردارمکان نقطهٔ (z و y و x) نسبت به مبدا S باشد، می‌توان‌معادلات (۴ — ۳۸) را به صورت

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{e}{r'^3(1-u^2/c^2)^{1/2}}\mathbf{r},\\ \mathbf{H} &= \frac{1}{c}\frac{e}{r'^3(1-u^2/c^2)^{1/2}}\mathbf{u}\times\mathbf{r}.\end{aligned}\right\} \qquad (۳۹-۴)$$

نوشت. این روابط نشان می‌دهندکه در S دراین لحظه، خطوط E به صورت خطوط مستقیمی هستند که از O منتشر می‌شوند و خطوط H به شکل دوایری هستندکه مراکز آنها بر محور Ox واقع اند و صفحهٔ آنها با Oyz موازی است.

اگر مقدار $(u/c)^2$ قابل صرف نظرکردن‌باشد، در این حالت معادلات (۴ — ۳۹) به

$$\mathbf{E} = \frac{e}{r^3}\mathbf{r}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{e}{r^3}\mathbf{u}\times\mathbf{r} \qquad (۴۰-۴)$$

تبدیل می‌شوند. معادلهٔ اول نشان می‌دهد که میدان الکتریکی، تا این مرتبهٔ تقریب، با میدان یک بار ساکن، یکسان است ومعادلهٔ دوم عبارت است ازقانون بیو — ساوار.

۴ — ۵ نیروی لورنتس

حال می‌خواهیم نیروی وارد بریک بار نقطه ای e ، متحرک در یک میدان الکترومغناطیس، را محاسبه کنیم.

در هر لحظه می‌توان یک چارچوب لخت را طوری انتخاب کرد که بار نقطه‌ای در آن لحظه نسبت به آن ساکن باشد. فرض کنید که شدت میدان‌الکتریکی موجود در محل بار نقطه ای نسبت به این چارچوب، برابر $\mathbf{E}_0$ باشد. در این صورت با در نظر گرفتن تعریف فیزیکی شدت‌میدان الکتریکی ،که‌عبارت است از نیروی وارد برواحد بار ساکن، نیروی وارد

بر e برابر خواهد بود با $e\mathbf{E}_0$. از معادلهٔ (۳ـ ۴۲) نتیجه می‌شود که چهار ـ نیروی وارد بربار الکتریکی دراین چارچوب ، برابر است با

$$\mathbf{F} = (e\mathbf{E}_0, 0) \tag{۴ ـ ۴۱}$$

همچنین چهار ـ بردار سرعت بار در چارچوب مذکور چنین است :

$$\mathbf{V} = (0, ic) \tag{۴ ـ ۴۲}$$

پس با استفاده از معادلهٔ (۴ ـ ۲۲) می‌توان نوشت :

$$\frac{e}{c} F_{ij} V_j = e(E_{x0}, E_{y0}, E_{z0}, 0) = (e\mathbf{E}_0, 0) \tag{۴ ـ ۴۳}$$

بنابراین ثابت شدکه دریک چارچوب لخت ، که بار نسبت به آن به‌طور لحظه ای ساکن است ، داریم

$$F_i = \frac{e}{c} F_{ij} V_j \tag{۴ ـ ۴۴}$$

ولی این معادله ، رابطه‌ای است بین تانسورهاواز این جهت درموردتمام چارچوبهای لخت ، صادق است .

باقراردادن مؤلفه های F_i و F_{ij} و V_j بترتیب ازمعادلات (۳ ـ ۴۲) و (۴ ـ ۲۲) و (۳ ـ ۶) در معادلهٔ (۴ ـ ۴۴) ، معادلات زیر حاصل می‌شوند :

$$\left.\begin{aligned} f_x &= \frac{e}{c}(H_z v_y - H_y v_z + cE_x), \\ f_y &= \frac{e}{c}(H_x v_z - H_z v_x + cE_y), \\ f_z &= \frac{e}{c}(H_y v_x - H_x v_y + cE_z). \end{aligned}\right\} \tag{۴ ـ ۴۵}$$

این معادلات با معادلهٔ سه ـ برداری

$$\mathbf{f} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H} \tag{۴ ـ ۴۶}$$

هم ارزند . $\mathbf{f}$ نیروی لورنتس وارد برذرهٔ باردار خوانده می‌شود .

۴ ـ ۶ چگالی نیرو

توزیع پیوسته‌یی ازماده را در نظر می‌گیریم که تحت تاثیر یک میدان نیرو حرکت می‌کند .

فرض کنیم که dw_0 حجم ویژهٔ یک عنصر کوچک از جسم باشد و **F** چهار ــ نیروی وارد از میدان براین عنصر باشد . با نوشتن

$$\mathbf{F} = \mathbf{D}\,d\omega_0 \qquad (۴ - ۴۷)$$

نتیجه می‌گیریم که چون **F** یک بردار و $d\omega_0$ یک ناوردا است ، پس **D** نیز یک بردار درفضا ــ زمان خواهد بود که بردار *چگالی چهار ــ نیرو*[1] برای میدان نامیده می‌شود .

درموقع اندازه گیری در یک چارچوب لخت S ، فرض کنیم $d\omega$ حجم یک عنصر و **f** سه ــ نیروی‌وارد برعنصر مذکور از طرف میدان باشد . **d** یعنی بردار*چگالی سه ــ نیرو*[1] در S طبق رابطهٔ زیر تعریف می‌شود :

$$\mathbf{f} = \mathbf{d}\,d\omega \qquad (۴ - ۴۸)$$

$d\omega$ نسبت به‌تبدیلات‌بین چارچوبهای‌دکارتی ساکن در S ناوردا است و بنابراین **d** نسبت به چنین دستگاههایی یک بردار است .

باقراردادن‌مقادیر **F** و **f** بترتیب‌از معادلات (۴ ــ ۴۷) و (۴ ــ ۴۸) درمعادلهٔ (۳ــ ۴۲) ، حاصل می‌شود :

$$\mathbf{D}\,d\omega_0 = \left(\mathbf{d}, \frac{i}{c}\mathbf{d}\cdot\mathbf{v}\right) d\omega(1-v^2/c^2)^{-1/2} \qquad (۴ - ۴۹)$$

با در نظر گرفتن رابطهٔ (۴ ــ ۸) ، معادلهٔ بالا به‌صورت

$$\mathbf{D} = \left(\mathbf{d}, \frac{i}{c}\mathbf{d}\cdot\mathbf{v}\right), \qquad (۴ - ۵۰)$$

درمی‌آید که عبارت است از رابطهٔ بین بردارهای چگالی چهار ــ نیرو و سه ــ نیرو .

۴ ــ ۷ تانسور انرژی ــ اندازه حرکت برای یک‌میدان الکترومغناطیس

فرض کنید که یک توزیع بار بوسیلهٔ یک‌بردار چگالی چهار ــ جریان **J** مشخص شود . اگر حجم ویژهٔ یک‌عنصرکوچک‌از این توزیع برابر $d\omega_0$ و ρ_0 چگالی ویژهٔ بار باشد ، در این صورت مقدار بار موجود در عنصر مورد نظر برابر $\rho_0 d\omega_0$ می‌شود . از معادلهٔ (۴ ــ ۴۴) نتیجه می‌شود که چهار ــ نیروی‌وارداز میدان الکترو مغناطیس براین عنصر ، برابر است با :

---

1) Force density

$$F_i = \frac{\rho_0}{c} F_{ij} V_j d\omega_0, \qquad (۴-۵۱)$$

که در آن V عبارت‌است از چهار ــ سرعت جریان برای آن عنصر. با به کار بردن معادلهٔ (۴ ــ ۱)، معادلهٔ اخیر را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$F_i = \frac{1}{c} F_{ij} J_j d\omega_0 \qquad (۴-۵۲)$$

و با در نظر گرفتن تعریفی که در بخش ۴ ــ ۶ داده شد، چگالی چهار ــ نیرو برای میدان الکترو مغناطیس چنین می‌شود:

$$D_i = \frac{1}{c} F_{ij} J_j. \qquad (۴-۵۳)$$

باقراردادن مقدار J_j ازمعادلهٔ‌اول (۴ ــ ۱۸)، D_i را برحسب‌تانسور میدان‌چنین می‌توان نوشت:

$$D_i = \frac{1}{4\pi} F_{ij} F_{jk,k}. \qquad (۴-۵۴)$$

اکنون ثابت می‌کنیم که طرف راست این رابطه، صرف نظر ازعلامت آن، عبارت است از واگرایی یک تانسور متقارن بخصوص S_{ij} که برابر است با:

$$S_{ij} = \frac{1}{4\pi} F_{ik} F_{jk} - \frac{1}{16\pi} \delta_{ij} F_{kl} F_{kl} \qquad (۴-۵۵)$$

و*تانسور انرژی ــ اندازه حرکت*[1] میدان الکترومغناطیس خوانده می‌شود.

با گرفتن واگرایی S_{ij} خواهیم داشت:

$$S_{ij,j} = \frac{1}{4\pi} F_{ik,j} F_{jk} + \frac{1}{4\pi} F_{ik} F_{jk,j} - \frac{1}{8\pi} \delta_{ij} F_{kl} F_{kl,j}. \qquad (۴-۵۶)$$

چون F_{ij} پادمتقارن است پس داریم:

$$F_{ik,j} F_{jk} = F_{ij,k} F_{kj} = F_{jl,k} F_{jk}, \qquad (۴-۵۷)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$F_{ik,j} F_{jk} = \tfrac{1}{2}(F_{ik,j} + F_{jl,k}) F_{jk}. \qquad (۴-۵۸)$$

وهمچنین داریم:

1) energy-momentum tensor

$$\delta_{ij} F_{kl} F_{kl,j} = F_{kl} F_{kl,i} = -F_{jk} F_{kj,i} \qquad (۵۹-۴)$$

از این روابط نتیجه می‌شود که‌ترکیب‌جملهٔ اول وآخر طرف راست معادلهٔ (۴ ــ ۵۶)چنین می‌شود:

$$\frac{1}{8\pi}(F_{ik,j}+F_{ji,k}+F_{kj,i})F_{jk} \qquad (۶۰-۴)$$

و این مقدار طبق معادلهٔ دوم (۴ ــ ۲۸)، برابر صفر است.

ازاین رو داریم:

$$S_{ij,j} = \frac{1}{4\pi} F_{ik} F_{jk,j} = -\frac{1}{4\pi} F_{ik} F_{kj,j} = -D_i \qquad (۶۱-۴)$$

با قرار دادن مقادیر مؤلفه های تانسور میدان از معادلهٔ (۴ ــ ۲۲) در معادلـهٔ (۴ ــ ۵۵)، مؤلفه های S_{ij} محاسبه می‌شوند،بدین ترتیب که اگر i و j هریک مقادیر ۱ و ۲ و ۳ را قبول کنند آنگاه از نوشتن E_1 به جای E_x و E_2 به جای E_y و غیره، داریم:

$$S_{ij} = -\frac{1}{4\pi}(E_i E_j + H_i H_j), \quad i \neq j. \qquad (۶۲-۴)$$

اگر $i=j=1$، داریم:

$$S_{11} = \frac{1}{4\pi}(H_2^2+H_3^2-E_1^2)-\frac{1}{8\pi}(H^2-E^2),$$
$$= -\frac{1}{4\pi}(E_1^2+H_1^2)+\frac{1}{8\pi}(E^2+H^2). \qquad (۶۳-۴)$$

به همین ترتیب می‌توان S_{22} و S_{33} را نیز نوشت. به‌طورکلی اگـر ۳ و ۲ و ۱ = i,j خواهیم داشت:

$$S_{ij} = -\frac{1}{4\pi}(E_i E_j + H_i H_j)+\frac{1}{8\pi}\delta_{ij}(E^2+H^2). \qquad (۶۴-۴)$$

بدون در نظر گرفتن علامت، این رابطه عبارت است از **تانسور کشش ماکسول**[1] که‌آن‌را با t_{ij} نمایش می‌دهند. بایددانست که t_{ij}، فقط نسبت به چارچوبهای قائم ساکن در چارچوب لخت به کار رفته، تانسور است.

همچنین اگر ۳ و ۲ و ۱ = i ، می‌توان نوشت

1) Maxwell's stress tensor

$$S_{l4} = S_{4l} = \frac{l}{4\pi}(E_2H_3-E_3H_2, E_3H_1-E_1H_3, E_1H_2-E_2H_1) = \frac{i}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H} = \frac{i}{c}\mathbf{S} \qquad (۶۵-۴)$$

S عبارت است از بردار پوئین‌تینگ[۱].

بالاخره داریم:

$$S_{44} = -\frac{1}{8\pi}(E^2+H^2) = -U, \qquad (۶۶-۴)$$

که U چگالی انرژی در میدان الکترومغناطیس است.

جهت سهولت امر، ممکن‌است با نمایش مولفه های S_{ij} در یک ماتریس به صورت

$$(S_{ij}) = -\left(\begin{array}{c|c} t_{ij} & \mathbf{S}/ic \\ \hline \mathbf{S}/ic & U \end{array}\right) \qquad (۶۷-۴)$$

نتایج فوق را خلاصه کرد.

حال می‌توان هریک‌از چهارمعادلهٔ (۴ — ۶۱) را به صورت سه بعدی کلاسیک‌بیان کرد. بدین ترتیب که اگر ۳ و ۲ و ۱ = i ، با در نظر گرفتن معادلات (۴ — ۵۰) و (۴ — ۶۷)، ملاحظه می‌شود که معادلهٔ متناظر هم ارز است با:

$$t_{ij,j} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial S_i}{\partial t} = d_i \qquad (۶۸-۴)$$

واگر ۴ = i ، معادلهٔ متناظر هم ارز است با:

$$\operatorname{div}\mathbf{S} + \frac{\partial U}{\partial t} = -\mathbf{d}\cdot\mathbf{v}. \qquad (۶۹-۴)$$

در مواردی که مطالعهٔ حرکت ابری از ذرات باردار کـه به‌طور مکانیکی برهم کنش ندارند مورد نظر باشد، می‌توان معادلات (۴ — ۶۸) و (۴ — ۶۹) را از نظر فیزیکی به‌طور ساده تعبیر وتفسیر کرد. دراین صورت هر ذره فقط تحت تاثیر نیروی الکترومغناطیس قرار می‌گیرد و فرض می‌شود که جرم سکون آن درحین حرکت ثابت است، یعنی گرمایی تولید نمی‌شود. فرض کنیم که Σ یک سطح بستهٔ ساکن درچارچوب S و Γ ناحیه‌یی از فضا باشد که سطح دربرگرفته است. باانتگرال گیری‌از معادلهٔ (۴ — ۶۹) در حجم Γ و استفاده ازقضیهٔ گرین می‌توان نوشت:

$$\int_{\Sigma} S_n\,d\sigma = \int_{\Gamma} \mathbf{d}\cdot\mathbf{v}\,d\omega + \frac{d}{dt}\int_{\Gamma} U\,d\omega \qquad (۷۰-۴)$$

1) Poynting

که در آن $d\sigma$ عنصر سطح Σ و $d\omega$ عنصر حجم Γ و S_n مؤلفهٔ $\mathbf{S}$ است که عمود برسطح Σ و به *طرف داخل* آن است. $\mathbf{d}\cdot\mathbf{v}d\omega$ آهنگی است که نیروی وارد بربار در $d\omega$ با آن کارانجام می‌دهد واز این‌جهت بنابر معادلهٔ (۳ــ۳۲)، برابر است با آهنگ‌ازدیاد انرژی مکانیکی این‌بار. بنابراین، آهنگ کل ازدیاد انرژی مکانیکی بارداخل سطح Σ در لحظهٔ موردنظر، از جملهٔ اول‌طرف‌راست‌معادلهٔ (۴ــ۷۰) حاصل می‌شود. چون Σ یک سطح ثابت است و بارحرکت می‌کند، لذا قسمتی از این انرژی مکانیکی هنگام عبور بار از Σ ، از بین می‌رود. بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_\Gamma \mathbf{d}\cdot\mathbf{v}\,d\omega =$$ آهنگ ازدیاد انرژی مکانیکی داخل Σ + آهنگ کاهش انرژی مکانیکی در عبور از Σ (۴ــ۷۱)

آهنگ ازدیاد انرژی میدان الکترومغناطیس داخل Σ ، توسط جملهٔ دوم طرف راست معادلهٔ (۴ــ۷۵) محاسبه می‌شود. بنابراین، معادلهٔ (۴ــ۷۰) بیانگراین است که:

$$\int_\Sigma S_n\,d\sigma +$$ آهنگ دریافت انرژی مکانیکی در عبور از Σ = آهنگ کل ازدیاد انرژی در داخل Σ (۴ــ۷۲)

برای اینکه قانون پایستگی انرژی‌دراین مورد معتبر باشد، لازم است که شاردرونسوی[1] $\mathbf{S}$ را که از Σ عبور می‌کندبه‌عنوان آهنگ جریان انرژی الکترومغناطیس درعبور از سطح تعبیرکرد. بنابراین $\mathbf{S}$ عبارت است از بردار*چگالی جریان انرژی*.

بافرض این‌که Σ سطحی است که تمام عنصرهای آن در فاصلهٔ بسیار دوراز جریان بارمورد بررسی، واقع شده اند به طوری که در روی Σ ، $\mathbf{E}=0$ و $\mathbf{H}=0$ وباانتگرال گیری ازمعادلهٔ i ام (۴ــ۶۸) روی Γ ، سهم جملهٔ $t_{ij,j}$ صفر می‌شود، و این بدان جهت است که $t_{ij,j}$ واگرایی معمولی برداری است که مؤلفه های آن عبارت اند از (t_{i1} و t_{i2} و t_{i3}) و با درنظر گرفتن قضیهٔ گرین، انتگرال حجمی آن را می‌توان به صورت انتگرال سطحی آن درروی سطح Σ بیان کردودرهمه‌جای‌این‌سطح، بردار مذکور برابر صفر است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که:

$$\int_\Gamma d_i\,d\omega + \frac{d}{dt}\int_\Gamma \frac{1}{c^2} S_i\,d\omega = 0. \qquad (۴ــ۷۳)$$

ولی $d_i d\omega$ عبارت است‌از مؤلفهٔ i ام نیروی وارد بربار در $d\omega$ ،وبنابراین مشخص

---

1) inward flux

کننده‌ٔ آهنگ ازدیاد اندازه حرکت آن است . از معادله‌ٔ (۴ ــ ۷۳) نتیجه گرفته می‌شود که مؤلفه ویژه‌ٔ i ام اندازه حرکت یک دستگاه منزوی بارها ، فقط درحالتی‌پایسته است که فرض شود میدان الکترومغناطیس اندازه‌حرکتی‌راموجب‌می‌شود که چگالی آن‌برابر S/c^2 باشد . این بردار چگالی *اندازه حرکت الکترومغناطیسی* [1] ، با علامت $\mathbf{g}$ نشان داده می‌شود و از این رو

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2}\mathbf{S}. \tag{۴ ــ ۷۴}$$

اگر سرعت انتشار انرژی الکترومغناطیسی $\mathbf{w}$ باشد ، آنگاه داریم :

$$\mathbf{S} = U\mathbf{w} \tag{۴ ــ ۷۵}$$

واز این رو با استفاده از معادله‌ٔ (۴ ــ ۷۴) می‌توان نوشت :

$$\mathbf{g} = \frac{U}{c^2}\mathbf{w}. \tag{۴ ــ ۷۶}$$

ولی طبق معادله‌ٔ (۳ ــ ۳۹) مقدار U/c^2 عبارت است از چگالی جرم وابسته به یک چگالی انرژی U . پس این امر که جریان یک چنین چگالی جرم با سرعت $\mathbf{w}$ باعث ایجادچگالی اندازه حرکت $\mathbf{g}$ می‌شود ، با نظریه‌ٔ قبلی مطابقت دارد .

۴ ــ ۸ معادلات حرکت یک جریان بار

دراین بخش ، بازهم توجه خود را منحصرا" به دستگاهی معطوف خواهیم داشت که شامل ابری است از ذرات بار دار که برهم کنش مکانیکی ندارند وجرم ویژه‌ٔ آنها درمدت حرکت ثابت می‌ماند .

چون جرم ویژه‌ٔ ذرات درمدت حرکت پایسته است ، پس می‌توان یک معادله‌ٔ پیوستگی برای جرم ویژه پیدا کرد . فرض کنید که Σ سطح مسدودی باشد که ناحیه‌ٔ Γ را محدود می‌کند . آنگاه آهنگ کاهش جرم ویژه‌ٔ خالص در Γ ، باید با آن آهنگ اتلاف جرم ویژه که‌در اثر عبور به خارج سطح Σ حاصل می‌شود ، برابر باشد . فرض کنید که $d\omega$ عبارت است ازحجم یک عنصر از توزیع بار که درچارچوب لخت به کار رفته‌ٔ S اندازه گرفته شده است وفرض کنید که جرم ویژه‌ٔ این عنصر برابر است با $\mu_0 d\omega$ که μ_0 چگالی جرم ویژه [2] در

1)electromagnetic momentum density

2) density of proper mass

S است. $\mu_0 d\omega$ یک ناورداست، ولی $d\omega$ ناوردانیست‌واز این‌رو μ_0 نیز ناوردا نیست. آنگاه عبارت ریاضی گزارهٔ نقل شده چنین است:

$$-\frac{d}{dt}\int_{\Gamma} \mu_0 d\omega = \int_{\Sigma} \mu_0 v_n d\sigma, \qquad (۷۷-۴)$$

که در آن v_n عبارت است‌ازمؤلفهٔ‌سرعت جریان $\mathbf{v}$ برروی خط عمود برسطح Σ ودرجهت بیرون از آن. با به کار بردن قضیهٔ گرین، معادلهٔ (۴ ــ ۷۷) به صورت

$$\int_{\Gamma}\left\{\frac{\partial\mu_0}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu_0 \mathbf{v})\right\} d\omega = 0, \qquad (۷۸-۴)$$

نوشته می‌شود وچون Γ اختیاری است، پس معادلهٔ پیوستگی از آن حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial\mu_0}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu_0 \mathbf{v}) = 0. \qquad (۷۹-۴)$$

فرض کنید که $d\omega_0$ حجم ویژهٔ یک عنصر بار و $\mu_{00} d\omega_0$ جرم ویژهٔ آن باشد. آنگاه μ_{00} **چگالی ویژهٔ جرم ویژه**[1] خوانده‌می‌شود. چون $\mu_{00} d\omega_0$ و $d\omega_0$ ناوردا هستند، پس μ_{00} نیز ناوردا است. واضح است که داریم:

$$\mu_{00} d\omega_0 = \mu_0 d\omega \qquad (۸۰-۴)$$

از این رو با در نظر گرفتن معادلهٔ (۴ ــ ۸) داریم:

$$\mu_{00} = (1 - v^2/c^2)^{1/2} \mu_0. \qquad (۸۱-۴)$$

حاصل اینکه اکنون معادلهٔ (۴ ــ ۷۹)را می‌توان‌به صورت‌هموردای زیر نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\mu_{00} V_i) = 0, \qquad (۸۲-۴)$$

که در آن V_i چهار ــ سرعت جریان است.

چهار ــ نیرویی که‌ازطرف‌میدان برعنصر بار به حجم ویژهٔ$d\omega_0$ وارد می‌شود، طبق معادلهٔ (۴ ــ ۴۷)برابراست با $D_i d\omega_0$. چون $\mu_{00} d\omega_0$ جرم ویژهٔ این عنصر است، پس معادلهٔ حرکت آن عبارت است از (ر.ک رابطهٔ (۳ ــ ۲۷)):

---

1) proper density of proper mass

$$D_i = \mu_{00}\frac{dV_i}{d\tau}. \qquad (۴-۸۳)$$

ولی V_i را می‌توان به‌عنوان تابعی از x_i بیان کرد و همچنانکه عنصر بار حرکت می‌کند مختصات آن x_i به صورت توابعی از زمان ویژهٔ آن τ ، تغییر می‌کنند. نتیجه می‌شود که:

$$\frac{dV_i}{d\tau} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\frac{dx_j}{d\tau} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}V_j. \qquad (۴-۸۴)$$

از این رو:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_j}(\mu_{00}V_iV_j) &= \mu_{00}V_j\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+V_i\frac{\partial}{\partial x_j}(\mu_{00}V_j),\\ &= \mu_{00}V_j\frac{\partial V_i}{\partial x_j},\\ &= \mu_{00}\frac{dV_i}{d\tau},\\ &= D_i, \qquad (۴-۸۵)\end{aligned}$$

برای محاسبهٔ فوق از معادلات (۴ـ۸۲) و (۴ـ۸۴) و (۴ـ۸۳) استفاده شده است.

اکنون تانسور متقارنی مثل Θ_{ij} را با معادلهٔ

$$\Theta_{ij} = \mu_{00}V_iV_j, \qquad (۴-۸۶)$$

تعریف می‌کنیم به‌طوری که D_i را بتوان به صورت واگرایی این تانسور نوشت، پس:

$$D_i = \Theta_{ij,j}. \qquad (۴-۸۷)$$

مؤلفه های Θ_{ij} را در نظر بگیرید. داریم:

$$\Theta_{44} = -\frac{c^2\mu_{00}}{1-v^2/c^2} = -\frac{c^2\mu_0}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} = -c^2\mu, \qquad (۴-۸۸)$$

که در آن μ عبارت است ازچگالی جرم در S . بنابراین، صرف نظر از علامت، Θ_{44} عبارت است از چگالی انرژی مکانیکی W

اگر ۳ و ۲ و ۱ = i ، آنگاه داریم:

$$\Theta_{i4} = \frac{ic\mu_{00}v_i}{1-v^2/c^2} = ic\mu v_i = icg_i \qquad (۴-۸۹)$$

که در آن $g=\mu v$ چگالی اندازه حرکت است.

بالاخره اگر ۳ و ۲ و ۱ = i,j ، داریم :

$$\Theta_{ij} = \frac{\mu_{00} v_i v_j}{1-v^2/c^2} = \mu v_i v_j = g_i v_j \qquad (۹۰ - ۴)$$

اکنون $g_i v_j$ عبارت است ازچگالی جریان مولفهٔ i ام اندازه حرکت وبنابراین سطر iام ماتریس ۳×۳ی(Θ_{ij}) را می‌توان چنین تعبیر کرد.

خلاصهٔ کلام اینکه، نشان دادیم :

$$(\Theta_{ij}) = \left(\begin{array}{c|c} g_i v_j & icg \\ \hline icg & -W \end{array}\right) \qquad (۹۱ - ۴)$$

این نمایش رامی‌توان بانمایش(۴ ــ ۶۷) ازتانسوراندازه‌حرکت ــ انرژی الکترومغناطیسی S_{ij} مقایسه‌کرد. چون‌طبق‌معادلهٔ (۴ ــ ۷۴) ، $\mathbf{S} = c^2\mathbf{g}$ ، پس واضح است که Θ_{ij} همتای توزیع جرم S_{ij} درمیدان الکترومغناطیس است. Θ_{ij} **تانسور *اندازه* حرکت ــ *انرژی* جنبشی** [1] خوانده می‌شود.

با قرار دادن مقدار D_i از معادلهٔ (۴ ــ ۶۱) در معادلهٔ حرکت (۴ ــ ۸۷) ، به دست می‌آوریم :

$$-S_{ij,j} = \Theta_{ij,j}. \qquad (۹۲ - ۴)$$

بانوشتن

$$T_{ij} = S_{ij} + \Theta_{ij}, \qquad (۹۳ - ۴)$$

بالاخره‌داریم

$$T_{ij,j} = 0. \qquad (۹۴ - ۴)$$

T_{ij} عبارت است ازتانسورهمگانی‌اندازه‌حرکت ــ انرژی که توزیع انرژی به‌صورت الکترومغناطیسی وتوزیع انرژی به‌صورت مادی هریک درآن‌سهمی دارند. معادلهٔ (۴ ــ ۹۴) نشان می‌دهدکه جریان به‌وسیلهٔ این گزاره تعیین می‌شود که واگرایی تانسور اندازه‌حرکت ــ انرژی خالص، صفر می‌شود. می‌توان ثابت کرد که این نتیجه، به‌طورکلی صادق است، یعنی متناظر با هرتوزیع انرژی (ماده) ، یک تانسور اندازه حرکت ــ انرژی مثل T_{ij} وجود دارد

1) Kinetic energy-momentum tensor

که واگرایی آن صفراست . بعدا" دربخش ۶ ــ ۴ نشان خواهیم دادکه‌این تانسور میدان‌گرانش توزیع را نیز تعیین می‌کند .

همچنانکه در بخش پیش نشان دادیم ، معادلهٔ (۴ ــ ۹۴) دلالت براین داردکه با ۳ و ۲ و ۱ $= i$ اندازه حرکت‌خالص‌یک‌دستگاه وبا ۴ $= i$ انرژی کل دستگاه پایسته است .

تمرینـات فصــــل چهـــارم

۱ ــ معادلات تبدیلات خاص لورنتس را برای $\mathbf{J}$ بنویسید و معادلات تبدیل $\mathbf{j}$ و ρ را استخراج کنید ، یعنی :

$$\bar{j}_x = (1-u^2/c^2)^{-1/2}(j_x-\rho u), \qquad \bar{j}_y = j_y,$$
$$\bar{\rho} = (1-u^2/c^2)^{-1/2}(\rho-j_x u/c^2), \quad \bar{j}_z = j_z.$$

۲ ــ از معادلهٔ ماکسول

$$F_{ij,j} = \frac{4\pi}{c}J_i$$

به دست آورید که $\mathrm{div}\mathbf{J} = 0$

۳ ــ ثابت کنید که تانسور تعریف شده برحسب چهار ــ پتانسیل Ω_i در معادلهٔ (۴ ــ ۳۰) ، در معادلات ماکسول (۴ ــ ۲۸) صادق است به شرطی که Ω_i در معادلات (۴ ــ ۲۹) صادق باشد .

۴ ــ الف) ثابت کنید که :

$$F_{ij}F_{ij} = 2(H^2-E^2)$$

و نتیجه بگیرید که H^2-E^2 نسبت به تبدیلات لورنتس ناوردا است .

ب) ثابت کنید که :

$$e_{ijkl}F_{ij}F_{kl} = -8i\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}$$

و نتیجه بگیرید که $\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}$ نسبت به تبدیلات لورنتس یک چگالی ناوردا است .

۵ ــ یک خط بار یکنواخت وبه طول بی‌نهایت درامتداد محور x از چارچوب لخت S ، قرار گرفته ودارای سرعت طولی $\mathbf{u}$ است . مقدار بار واحد طول اندازه گرفته شده در S ، برابر e است . نقطهٔ P به فاصلهٔ r از محور x قراردارد‌وبردارواحدبرروی خطی‌که برمحور x عمود است واز P می‌گذرد برابر $\mathbf{a}$ است . نشان دهید که شدت‌میدان الکتریکی وشدت میدان مغناطیسی در نقطهٔ P برابر است با :

$$\mathbf{E} = \frac{2e}{r}\mathbf{a}, \quad \text{و} \quad \mathbf{H} = \frac{2e}{cr}\mathbf{u}\times\mathbf{a}.$$

۶ ــ ناظر O به‌طور ساکن درچارچوب لخت $Oxyzt$ ، خودش را در یک میدان

الکتریکی $\mathbf{E}=(0,E,0)$ و بدون میدان مغناطیسی، می‌بینند. نشان دهید که ناظر O' که نسبت به O با سرعت‌ثابت $\mathbf{V}$ وعمود بر $\mathbf{E}$ حرکت می‌کند، میدانهای الکتریکی ومغناطیسی $\mathbf{E}'$ و $\mathbf{H}'$ را به دست می‌آورد که رابطهٔ آنها با هم عبارت است از:

$$c\,\mathbf{H}'+\mathbf{V}\times\mathbf{E}'=0.$$ (د. ل.)

۷ ــ $Oxyz$ عبارت‌اند ازمحورهای‌قائم. الکترونی تحت تاثیریک میدان‌مغناطیسی یکنواخت و موازی Oz، در صفحهٔ xy حرکت می‌کند. ثابت کنید که مسیر آن یک دایره است.

۸ ــ درچارچوب لخت S، یک موج الکترومغناطیسی تکفام تخت، در راستای‌موازی محور x منتشر می‌شود. مؤلفه های میدان الکتریکی ومیدان مغناطیسی آن عبارت انداز:

$$\mathbf{E}=[0,a\sin\omega(t-x/c),0],$$
$$\mathbf{H}=[0,0,a\sin\omega(t-x/c)].$$

نشان دهید وقتی که این‌موج‌از چارچوب لخت $\bar{S}$ مشاهده می‌شود، به صورت یک موج‌تکفام تخت، با مؤلفه های

$$\bar{\mathbf{E}}=[0,\lambda a\sin\lambda\omega(\bar{t}-\bar{x}/c),0],$$
$$\bar{\mathbf{H}}=[0,0,\lambda a\sin\lambda\omega(\bar{t}-\bar{x}/c)],$$

ظاهرمی‌شود. u سرعت $\bar{S}$ نسبت‌به S است. (یعنی هم دامنه و هم بسامد، هر دو به اندازهٔ مضرب λ کاهش یافته اند. کاهش بسامد عبارت است از اثر دوپلر.[1])، که درآن $\lambda=\sqrt{\left(\frac{1-u/c}{1+u/c}\right)}$

۹ ــ نشان دهید که هامیلتونی، برای حرکت یک ذره به جرم m وبارالکتریکی e، در یک میدان الکترومغناطیسی (ϕ و $\mathbf{A}$) برابر است با

$$H=c\left[\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2+m^2c^2\right]^{1/2}+e\phi$$

و این رابطه را به صورت هموردای

$$\left(\mathbf{P}-\frac{e}{c}\boldsymbol{\Omega}\right)^2=-m^2c^2.$$

بیان کنید.

۱۰ ــ ثابت کنید که در یک ناحیهٔ تهی از بار، معادلات (۴ ــ ۲۹) با

$$\Omega_i=A_ie^{ik_px_p},$$

صادق هستند، به شرط اینکه A_i و k_p ثابت هایی باشند به گونه ای که:

---

1) Doppler effect

$$A_l k_l = 0 \quad \text{و} \quad k_p k_p = 0$$

با در نظر گرفتن‌خاصیت چهار ــ برداری برای Ω_l ، نتیجه بگیرید که تحت تبدیلات لورنتس باید A_l مثل یک چهار ــ بردار تبدیل شود . همچنین نتیجه گیری کنید که تحت چنین تبدیلاتی ، $k_p x_p$ یک‌نرده ای است واز این رو k_p یک چهار ــ بردار است .

یک موج الکترومغناطیسی تخت که‌راستای انتشارآن با صفحهٔ Oxy موازی‌است و با Ox زاویهٔ α می‌سازد ، عبارت است از :

$$\Omega_l = A_l e^{2\pi i\nu(x\cos\alpha+y\sin\alpha-ct)/c}$$

که در آن ν بسامد است . بسامدهمان موج ، هنگامی که‌از یک چارچوب موازی $\bar{O}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ که با سرعت u درامتداد محور Ox حرکت می‌کند مشاهده شود ، برابر $\bar{\nu}$ است و راستای انتشار با $\bar{O}\bar{x}$ زاویهٔ $\bar{\alpha}$ می‌سازد . با نوشتن معادلات تبدیل برای بردار k_p ثابت کنیدکه

$$\bar{\nu} = \frac{1-\frac{u}{c}\cos\alpha}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}\nu, \quad \cos\bar{\alpha} = \frac{\cos\alpha-\frac{u}{c}}{1-\frac{u}{c}\cos\alpha}.$$

۱۱ ــ ذره‌ای‌به‌جرم m وبار e ، دریک‌میدان‌مغناطیسی‌با‌مؤلفه‌های $(0,0,H/z)$ که درآنجامیدان‌الکتریکی وجودندارد‌آزادانه‌حرکت می‌کند. نشان دهید که در مدت‌حرکت ، m ثابت است . با انتخاب شرایط اولیهٔ مناسب ، ثابت کنید که حرکت ذره با معادلات

$$x = at\sin(\lambda\log t),$$
$$y = at\cos(\lambda\log t),$$
$$z = kt,$$

که در آنها $\lambda = eH/mck$ ، تعیین می‌شود وازاین رو ذره در روی سطح مخروطی به‌معادلهٔ

$$k^2(x^2+y^2) = a^2z^2.$$

حرکت می‌کند .

فصـــــل پنجـــــم

محاسبات تانسوری عام : فضای ریمـــان

۵ ــ ۱ فضای N بعدی تعمیم یافته[1]

در فصل دوم با علم به اینکه چارچوب مختصات مورد استفاده همواره دکارتی قائم است ، نظریهٔ تانسورها را درفضای اقلیدسی N بعدی بررسی کردیم .اگر x_i و x_i+dx_i مختصات دونقطهٔ نزدیک به هم در یک چنین چارچوبی باشد ، ds "فاصلهٔ" آنها از معادلهٔ زیر بـه دست می‌آید

$$ds^2 = dx_i dx_i. \qquad (۱ - ۵)$$

اگر $\bar{x}_i$ و $\bar{x}_i+d\bar{x}_i$ مختصات همان نقاط درچارچوب دکارتی قائم دیگری باشد ، در این صورت می‌توان نوشت

$$ds^2 = d\bar{x}_i d\bar{x}_i \qquad (۲ - ۵)$$

از اینجا نتیجه می‌شود که عبارت $dx_i dx_i$ در تبدیل از یک چارچوب مختصات دکارتی به چارچوب مختصات دکارتی دیگرناوردا است .چنین تبدیلی را تبدیل متعامد نام نهادیم .

اما اغلب ، حتی در $\mathscr{E}_3$ بهتر است از چارچوبی استفاده شود که دکارتی نیست . مثلاً " مختصات قطبی کروی (ϕ و θ و r) فراوان به کار برده می‌شوند که طبق روابط زیر به مختصات دکارتی قائم بستگی دارند

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta. \qquad (۳ - ۵)$$

برحسب این مختصات عبارت ds^2 چنین می‌شود

$$ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2 = dr^2+r^2\,d\theta^2+r^2\sin^2\theta\,d\phi^2 \qquad (۴ - ۵)$$

---

1) generalized

و این رابطه، دیگر صورت سادهٔ معادلهٔ (۵ ــ ۱) را ندارد. بنابراین تبدیل مختصات (۵ ــ ۳) متعامد نیست. درواقع این تبدیل حتی خطی نیز نیست، در صورتی که عامترین تبدیل مختصات (۲ ــ ۱) که در فصل دوم در نظر گرفته شد خطی بود.

دستگاه مختصات قطبی کروی مثالی است از **چارچوب مختصات خمیده خط** در $\mathscr{E}_3$.

فرض‌کنیم‌که (w و v و u) طبق‌معادلات‌زیربامختصات دکارتی قائم (z و y و x) بستگی داشته باشند

$$u = u(x,y,z), \quad v = v(x,y,z), \quad w = w(x,y,z), \tag{۵ ــ ۵}$$

طوری که هر نقطه متناظر است با سه مقدار یگانهٔ (w و v و u) و هرسه مقدار از این نوع متناظر است با یک نقطه.در این صورت یک مجموعه ازمقادیر (w و v و u) را می‌توان برای تعیین نقطه ای‌در $\mathscr{E}_3$ به‌کاربرد واز (w و v و u) به منزلهٔ مختصات استفاده کرد. چنین مختصات تعمیم یافته ای را *مختصات خمیده خط*[1] می‌نامند.

معادلهٔ

$$u(x,y,z) = u_0, \tag{۶ ــ ۵}$$

که درآن u_0 یک‌عدد ثابت است، سطحی را در $\mathscr{E}_3$ تعریف می‌کند که برروی آن، u برابر یک مقدار ثابتu_0می‌شود. به همین ترتیب معادله‌های

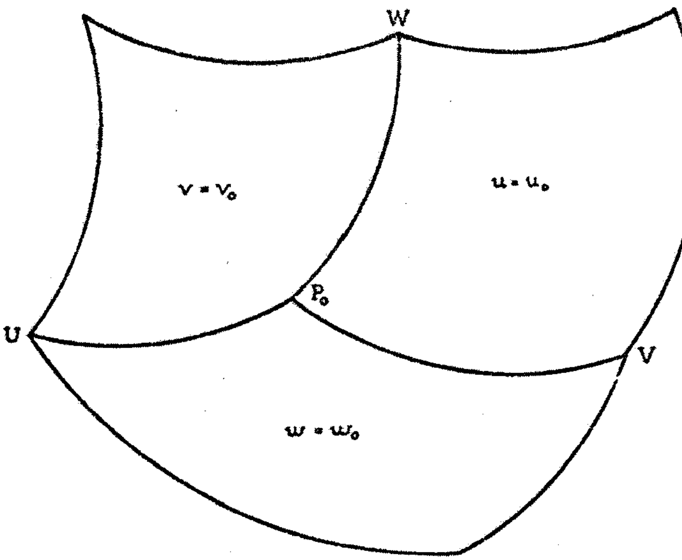
$$v = v_0, \quad w = w_0 \tag{۷ ــ ۵}$$

یک جفت‌سطح‌تعریف می‌کنندکه‌درروی آنهامقادیر v و w بترتیب‌برابراند با v_0 و w_0. همان گونه که‌در شکل ۵ ــ ۱ نشان داده شده‌است،این‌سه‌سطح همگی‌از نقطهٔ P_0 به‌مختصات (w_0 و v_0 و u_0) می‌گذرند. آنها را *سطوح مختصات* در نقطهٔ P_0 می‌نامند. فصل مشترک دوسطح$v = v_0$و $w = w_0$ عبارت است از منحنی P_0U، که در روی آن مقادیر v و w ثابت اندوفقط مقدار u تغییر می‌کند. پس‌می‌توان گفتP_0Uیک **خط مختصات** است که از نقطهٔ P_0 می‌گذرد. روی‌هم رفته سه خط مختصات از نقطهٔ P_0 می‌گذرند. معادلات $u = \text{constant}$ و $v = \text{constant}$ و $w = \text{constant}$، سه خانواده از سطوح مختصات را تعریف می‌کنندکه متناظراندباسه خانواده‌ازصفحات‌موازی‌باصفحات $x = 0$ و $y = 0$

---

1) curvilinear coordinates

و $z = 0$ ازچارچوب دکارتی قائم. فصل‌مشترک هرجفت ازاین سطوح، خطوط مختصاتی را تشکیل می‌دهند که متناظراند باخطوط موازی بامحورهای مختصات چارچوب دکارتی.



شکل ۵ ــ ۱

از حل‌معادلات (۵ ــ ۵)، مقادیر (x و y و z) رابرحسب (u و v و ،) پیدا می‌کنیم و روابط تبدیل وارون را به دست می‌آوریم:

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w). \qquad (۸ ــ ۵)$$

فرض‌کنیم (x و y و z)و($x+dx$ و $y+dy$ و $z+dz$) مختصات دکارتی قائم دو نقطهٔ مجاور هم باشند و (u و v و w) و ($u+du$ و $v+dv$ $w+dw$) بترتیب مختصات‌خمیده خط‌همان دو نقطه باشند. با مشتق گیری از معادله های (۵ ــ ۸)، خواهیم داشت

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial w} dw \qquad (۹ ــ ۵)$$ و غیره

بنابراین اگر ds فاصلهٔ بین این دونقطه باشد مقدار ds^2 برحسب مختصات خمیده خط چنین می‌شود:

$$ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2$$
$$= A\,du^2+B\,dv^2+C\,dw^2+2F\,dv\,dw+2G\,dw\,du+2H\,du\,dv, \qquad (۵-۱۰)$$

باید متذکر شد که ضرایب A و B وغیره به‌طورکلی توابعی از (w و v و u) هستند.
بنابراین اگر به کار بردن دستگاه مختصات خمیده خط مجاز باشد، آنگاه نظریهٔ تانسورها که درفصل‌دوم توضیح داده شدباید طوری اصلاح شود که آن را مستقل ازتبدیلات متعامد خاصی بکند که برای آن می‌توان ds^2 را همیشه به صورت سادهٔ معادلهٔ (۵-۱) بیان کرد. اصلاحات لازم، در بخشهای بعدی همین فصل توصیف می‌شوند. به هرحال می‌توان دید که ماهیت این اصلاحات به‌گونه ای است که در نظریهٔ اصلاح شده‌احتیاجی به متوسل شدن به‌خواص ویژهٔ‌سنجه‌ای[1] فضای اقلیدسی نیست، به عبارت‌دیگر می‌توان این نظریه را در فضاهای عامتری به کار برد که فضای اقلیدسی مورد خاصی از آنها است. این مطلب را کمی بیشتر توضیح می‌دهیم:

فرض‌کنید که (x^N و $\cdots$ و x^2 و x^1) مختصات خمیده خط در فضای N بعدی $\mathscr{E}_N$ باشند[2]. آنگاه اگر ds فاصلهٔ بین‌دونقطه مجاورباشد، بنابرمانستگی با معادلهٔ (۵-۱۰)، می‌توان نوشت:

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j \qquad (۵-۱۱)$$

که درآن g_{ij} ضرایب صورت درجه دوم x^i، به طورکلی تابعی‌ازاین‌مختصات خواهندبود. چون‌فضا اقلیدسی است، پس تبدیل‌مختصات‌خمیده‌خط x^i به مختصات‌دکارتی y^i امکان‌پذیر است، به گونه ای که:

$$ds^2 = dy^i\,dy^i \qquad (۵-۱۲)$$

بدیهی است که‌تبدیل ds^2 به این صورت‌ساده تنها بدین علت امکان‌پذیر است که تابعهای

1) Metrical

۲) به دلیلی که بعداً" به‌آن اشاره خواهد شد، دراین قسمت، مختصات به جای شاخص پایین با شاخص بالا مشخص شده اند.

g_{ij} شرایط خاصی را برآورده می‌کنند. برعکس، برآورده‌شدن این شرایط به وسیلهٔ g_{ij} وجود مختصات y^i را که برای آنها ds^2 به صورت سادهٔ (۵ — ۱۲) در می‌آید، و در نتیجه اقلیدسی بودن فضارا، تضمین می‌کند. به هرحال در بسط نظریهٔ تانسورها به منظور قابل استفاده بودن درچارچوبهای مختصات خمیده خط، این واقعیت رادریک مرحلهٔ مشخص به کار خواهیم برد که ds^2 به صورت (۵ — ۱۱) قابل بیان است، ولی شرایطی را که ضرایب g_{ij} درآنها صدق می‌کنندونتیجهٔ اقلیدسی‌بودن فضاهستند به کار نخواهیم برد. درنتیجه نظریهٔ بسط یافته رامی‌توان دریک فضای N بعدی فرضی به کاربرد که در آن "فاصلهٔ" بین دو نقطهٔ مجاور به مختصات x^i و $x^i + dx^i$ یعنی ds به وسیلهٔ معادلهٔ (۵ — ۱۱) مشخص می‌شود که در آن g_{ij} **توابع دلخواهی** از x^i هستند[1]. چنین فضایی را **فضای ریمان** می‌نامند و با علامت $\mathscr{R}_N$ نشان می‌دهند. $\mathscr{E}_N$ موردخاصی از $\mathscr{R}_N$ است که درآن g_{ij} درشرایط معینی صدق می‌کنند. طرف دوم معادلهٔ (۵ — ۱۱) سنجهٔ[2] فضای ریمان نامیده می‌شود.

سطح کرهٔ زمین مثالی از یک $\mathscr{R}_2$ است. اگر θ متمم عرض جغرافیائی و ϕ طول جغرافیائی نقطه ای از سطح کرهٔ زمین باشد، ds فاصلهٔ بین دونقطه به مختصات (θ و ϕ) و ($\phi + d\phi$ و $\theta + d\theta$) از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$ds^2 = K^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \qquad (۱۳ — ۵)$$

که درآن R شعاع زمین است. دراین فضا وبا این چارچوب مختصات، g_{ij} به صورت زیر در می‌آید:

$$g_{11} = R^2, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = R^2 \sin^2\theta \qquad (۱۴ — ۵)$$

تعریف کردن مختصات دیگر (y و x) که برحسب آنها

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \qquad (۱۵ — ۵)$$

باشد، امکان‌پذیر نیست، یعنی $\mathscr{R}_2$ اقلیدسی نیست. اما، سطح یک استوانه دوار قائم وسطح یک مخروط، اقلیدسی هستند که اثبات این مطلب به عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌شود.

---

۱) بجز این فرض که مشتقهای جزئی g_{ij} تا هر مرتبه که نظریه ایجاب کند وجود دارندو پیوسته‌اند.

2) metric

درفصل ششم ثابت خواهیم کرد که درحضور یک میدان گرانشی ، فضا ــ زمان دیگر اقلیدسی به‌معنای مینکوفسکی نیست ، بلکه‌به‌صورت $\mathscr{R}_4$ درمی‌آید . این مطلب ، مهمترین‌دلیل برای بررسی این‌گونه فضاها است . به‌هرحال ، مفهوم فضا را می‌توان طوری تعمیم داد که تعریف تانسورهای مورد نظراز این نیز فراتر رود . ما تا بخش ۵ ــ ۱۱ دیگر به سنجه رجوع نخواهیم‌کرد . این مطلب دلالت براین دارد که نظریهٔ تانسورها را ، به گونه‌یی که تاکنون بسط داده شده است ، می‌توان در یک فضای N بعدی بسیار عام به‌کاربرد ، که درآن امکان تشکیل یک چارچوب مختصات فرض‌شده‌است‌ولی وجودسنجه فرض نشده است . در یک‌چنین فضای فرضی ، فاصلهٔ بین دو نقطه حتی تعریف هم نشده است . این فضا را با علامت $\mathscr{S}_N$ نشان خواهیم داد . $\mathscr{R}_N$ مورد خاصی از $\mathscr{S}_N$ است که برای آن یک سنجه مشخص شده است .

۵ ــ ۲ تانسورهای هموردا و پادوردا

فرض کنید که x^i مختصات نقطهٔ P نسبت به یک چارچوب مختصات در $\mathscr{S}_N$ باشد ، که آن چارچوب به‌نحوی‌که فعلاً" مورد نظر نیست مشخص‌شده‌است . فرض کنید $\bar{x}^i$ مختصات‌همان نقطه نسبت به‌یک چارچوب مرجع دیگری است ، و این دو دستگاه مختصات طبق معادلات

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, \ldots, x^N). \qquad (۵ ــ ۱۶)$$

به‌هم مربوط‌اند . در مجاورت نقطهٔ P ، نقطهٔ دیگری مثل P' را در نظر بگیرید که مختصات آن نسبت به‌چارچوب‌اولی‌برابر $x^i + dx^i$ باشد . مختصات نقطهٔ اخیر درچارچوب دوم ، برابر $\bar{x}^i + d\bar{x}^i$ می‌شود ، طوری که داریم

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} dx^j \qquad (۵ ــ ۱۷)$$

که باید نسبت به شاخص j جمع شود . مؤلفه‌های **بردارجابجایی**[1] PP' نسبت‌به چارچوب اول عبارت‌اند از N کمیت dx^i ومتناظراً" مؤلفه‌های این بردار در چارچوب دوم عبارت‌اند از $d\bar{x}^i$ ، واین‌دونوع مؤلفه به وسیلهٔ معادلهٔ تبدیل (۵ ــ ۱۷) به هم بستگی دارند . یک چنین بردار جا بجایی ، نمونهٔ اصلی برای تمام **بردارهای پادوردا**[2] قرار داده می‌شود .

---

1) displacement vector

2) contravariant vectors

بدین ترتیب ، وقتی می‌توان‌گفت که A^i مؤلفه های یک بردارپادوردا واقع درنقطهٔ x^i است که مؤلفه های بردار در چارچوب "تیره دار" از معادلهٔ

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} A^j \qquad (۱۸-۵)$$

به دست آیند . توجه‌به‌این‌موضوع مهم است که در فصل دوم ضرایب a_{ij} که درمعادلهٔ تبدیل (۲-۲۵) پیش می‌آیند ، تابع مختصات دکارتی x_i نیستند به طوری که قرار گرفتن بردار A دریک نقطهٔ معین از $\mathscr{S}_N$ الزامی نیست ، اما ضرایب $\partial\bar{x}^i/\partial x^j$ درمعادلهٔ متناظر معادلهٔ فوق یعنی (۵-۱۸) ، توابعی از x_i هستند و محل دقیق بردار A^i باید قبل از تعیین معادلات تبدیل آن معین باشد . این مطلب را می‌توان چنین نیز بیان کرد که *بردار آزاد* در فضای $\mathscr{S}_N$ وجود ندارد .

صورت معادلهٔ تبدیل (۵-۱۸) را باید به‌دقت مطالعه‌کرد . دراین تبدیل می‌بینیم که *شاخص ظاهری* j یک‌بار در بالا ویک بار در پایین (یعنی درمخرج مشتق جزئی) پدیدار می‌شود . شاخصهای ظاهری ، در تمام عبارتهایی‌که ازاین پس در نظر گرفته خواهند شد ، همواره در چنین جایی قرار خواهند گرفت . ازطرف دیگر ، شاخص آزاد i در هر دو طرف معادله ، در بالا قرار می‌گیرد . این قاعده ، در تمام بررسیهای بعدی رعایت خواهد شد ، یعنی در هرجملهٔ یک معادله ، یک شاخص آزاد همیشه دریک‌جا (بالا یا پایین) قرار می‌گیرد . بالاخره ، دقت دراین مطلب که شاخص آزاد در طرفین رابطه ، همراه با نماد "تیره" است ، به خواننده کمک می‌کند که این تبدیل را از برکند .

یک بردارپادوردای A^i را می‌توان تنها در یک نقطه ازفضای $\mathscr{S}_N$ تعریف کرد . اما اگر آن رادرهر نقطه ازیک ناحیهٔ بخصوص تعریف کنیم ، به‌طوری که A^i توابعی از x^i باشند ، گوییم که یک *میدان برداری پادوردا* ، دراین ناحیه وجود دارد .

اگر V کمیتی باشد که مقدار آن‌با تعویض‌چارچوب‌مرجع ثابت‌بماند ، دراین صورت این کمیت را نرده ای ویا ناوردا در فضای $\mathscr{S}_N$ می‌نامند ومعادلهٔ تبدیل آن به صورت سادهٔ

$$\bar{V} = V \qquad (۱۹-۵)$$

است . چون این معادله ضریبی نداردکه تابع x^i باشد ، بنابراین امکان این هست‌که V یک ناوردای آزاد باشد . اما V اغلب به یک نقطهٔ خاص در فضای $\mathscr{S}_N$ وابسته است و می‌توان آن رادرتمام نقاط یک‌ناحیه‌از $\mathscr{S}_N$ تعریف کرد که در این مورد یک *میدان ناوردا* تعریف می‌شود . درمورد اخیر می‌توان نوشت :

$$V = V(x^1, x^2, \ldots, x^N) \tag{۵ — ۲۰}$$

دراین صورت ، درحالت عام $\bar{V}$ تابع کاملا" متفاوتی از $\bar{x}^i$ می‌شود . اما اگر دراین تابع به جای $\bar{x}^i$ مقدارش را از معادلهٔ (۵ — ۱۶) برحسب x^i قراردهیم ، با در نظرگرفتن معادلهٔ (۵ — ۱۹) ، باید طرف راست معادلهٔ (۵ — ۲۰) به دست آید . بدین ترتیب :

$$\bar{V}(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^N) = V(x^1, x^2, \ldots, x^N) \tag{۵ — ۲۱}$$

با فرض اینکه V یک‌میدان‌ناورداست ، N مشتق $\partial V/\partial x^i$ رادر نظر بگیرید .کمیتهای متناظر درچارچوب $\bar{x}^i$ ، عبارت اند از $\partial V/\partial x^i$ و می‌توان نوشت :

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial V}{\partial x^j} \tag{۵ — ۲۲}$$

زیرا بنابرمعادلهٔ (۵ — ۲۱) ، اگر $\bar{V}$ به صورت تابعی‌از x نوشته شود ،به V تبدیل می‌شود . مانند فصل دوم ،مقادیر $\partial V/\partial x^i$ را برابرباموْلفه‌های برداری قرار می‌دهیم که **گرادیان** (شیب) V نام دارد وبا $\text{grad}\, V$ نشان داده می‌شود .اماقانون تبدیل‌آن یعنی رابطهٔ (۵ — ۲۲) ، با قانون تبدیل یک بردارپادوردا یعنی‌رابطهٔ (۵ — ۱۸) یکی نیست و آن را نمونهٔ اصلی یک نوع دیگر از بردارها بنام **بردارهای هموردا**[1] ، قرار می‌دهند .

بدین ترتیب ، B_i هنگامی یک بردار هموردا است که داشته باشیم :

$$B_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} B_j \tag{۵ — ۲۳}$$

بردارهای هموردا را از پادوردابا نوشتن شاخص آنها در پایین به جای بالا ، تمیز می‌دهیم . این نمادنگاری مناسب است ،زیرا $\partial V/\partial x^i$ یک بردارهموردا است و شاخص i در مخرج این مشتق‌جزئی‌قراردارد . از طرف دیگر نشان دادیم که dx^i برحسب خواص تبدیلی خود یک بردار پادوردا است ونوشتن شاخص‌آن در بالا ، به درستی بیانگر آن است . به این دلیل است که مختصات را به جای x_i با x^i نمایش می‌دهند ، گرچه باید متوجه بود که x^i به تنهایی ، به هیچ وجه مؤلفه های یک بردار نیستند .

خواننده می‌تواندصحت این‌موضوع‌راکه سه‌قاعدهٔ فورمولبندی شدهٔ بالا در رابطه بامعادلهٔ تبدیل (۵ — ۱۸) ، به‌طور یکسان درمعادلهٔ (۵ — ۲۳) به کار می‌آیند ، امتحان

---

1) convariant

کند.

اینک تعمیم بردار به تانسور، با همان روشی که در بخش ۲ ـ ۳ توضیح داده شد پیش می‌رود. مثلاً" اگر A^i و B^j دو بردار پادوردا باشند، تعداد N^2 کمیت A^iB^j، به عنوان مؤلفه‌های یک تانسور پادوردای رتبهٔ دوم در نظر گرفته می‌شوند. معادلهٔ تبدیل آن چنین است:

$$\bar{A}^i \bar{B}^j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} A^k B^l \qquad (۲۴-۵)$$

هر مجموعه با N^2 کمیت C^{ij} را که به این طریق تبدیل شود، **تانسور پادوردا** می‌خوانند.

همچنین اگر A^i یک بردار پادوردا و B_j یک بردار هموردا باشد، N^2 کمیت A^iB_j چنین تبدیل می‌شوند:

$$\bar{A}^i \bar{B}_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} A^k B_l. \qquad (۲۵-۵)$$

هر مجموعه با N^2 کمیت C^i_j که به این طریق تبدیل شود یک **تانسور آمیخته**[1] است، یعنی، همان گونه که مکان شاخصهایش نشان می‌دهد، دارای هردوخاصیت پادوردا وهموردا است.

به همین ترتیب، قانون تبدیل برای یک تانسور هموردای رتبهٔ دوم، از قانون مربوط به بردارهای هموردا نتیجه می‌شود.

اینک تعمیم بعدی به تانسور های رتبهٔ بالاتر باید گامی ساده باشد. کافی است یک مثال بزنیم. تانسور A^i_{jk} به‌شرطی آمیختهٔ رتبهٔ سوم است و خواص پادوردا و هموردای آن توسط شاخصهای آن مشخص می‌شوند که تبدیل آن طبق معادلهٔ زیر انجام پذیرد:

$$\bar{A}^i_{jk} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k} A^r_{st}. \qquad (۲۶-۵)$$

به مؤلفه های تانسور در یک چارچوب، می‌توان مقادیر دلخواهی داد وسپس با استفاده از قانون تبدیل، مقادیر آنها را درهر چارچوب دیگری به طور یگانه تعیین کرد. تانسور آمیختهٔ رتبهٔ دومی را درنظر بگیرید که مؤلفه های آن درچارچوب x^i برابر δ^i_j، یعنی برابر دلتای کرونکر باشند($\delta^i_j = 0$ وقتی $i \neq j$ و $\delta^i_j = 1$ وقتی $i = j$).مؤلفه های تانسور مذکور در چارچوب $\bar{x}^i$ عبارت اند از $\bar{\delta}^i_j$ طوری که:

1) mixed tensor

$$\begin{aligned}\bar{\delta}^i_j &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\delta^k_l,\\ &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j},\\ &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^j},\\ &= \delta^i_j.\end{aligned} \tag{۵ — ۲۷}$$

بنابراین مؤلفه های این تانسور در تمام چارچوبها یکسان هستند واز این رو آن را **تانسور آمیخته اساسی** [1] می‌نامند. اما، تانسور هموردای رتبه دومی که مؤلفه های آن درچارچوب x^i برابردلتای‌کرونکراند (دراین‌حالت‌با علامت δ_{ij} نشان داده‌می‌شود)، در چارچوبهای دیگر دارای مؤلفه های متفاوت است واز این جهت قابل توجه نیست.

در این‌مرحله ازبحث بجا است سئوال شود چرا وقتی تبدیلات مختصات منحصرا" متعامدبودند بین تانسور های هموردا وپادوردا تمایزی پیدا نشد؟ بدین معنی که فرض‌کنید A^i یک بردارپادوردا و B_i یک بردارهموردانسبت به‌تبدیل متعامد (۱ — ۲) باشند. دیدیم که تبدیل وارون‌آن، عبارت است‌ازمعادله (۲ — ۳۸) واز این دو معادله نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} = a_{ij}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j} = a_{ji}. \tag{۵ — ۲۸}$$

بنابراین درحالت خاص‌تبدیلات متعامد، معادلات (۵ — ۱۸) و (۵ — ۲۳) به صورت زیر در می‌آیند:

$$\bar{A}^i = a_{ij}A^j, \quad \bar{B}_i = a_{ij}B_j. \tag{۵ — ۲۹}$$

واضح است که‌این دونوع‌بردار به طریق یکسانی تبدیل می‌شوند، بنابراین تمایزی بین‌آنها نمی‌تواند وجود داشته باشد.

چنانکه درموردتانسورهای‌دکارتی درفصل دوم دیدیم، می‌توان با جمع (یاتفریق) و ضرب کردن تانسور های معلوم، تانسورهای جدیدی به دست‌آورد. فقط با جمع کردن تانسورهایی از نوع ورتبه یکسان است‌که می‌توان تانسور جدیدی به دست آورد. مثلا" اگر A^i_{jk} و B^i_{jk} مؤلفه های دو تانسور باشند وکمیتهای C^i_{jk} راچنین تعریف کنیم:

$$C^i_{jk} = A^i_{jk} + B^i_{jk}, \tag{۵ — ۳۰}$$

---

1) fundamental mixed tensor

آنگاه C^i_{jk} عبارت اندازمؤلفه های یک تانسور که خواص هموردا وپادوردای آن توسط مکان شاخصها مشخص می‌شود. لکن دو تانسور A^i_j و B_{ij} را نمی‌توان بدین روش با یکدیگر جمع کرد وتانسور دیگری به دست آورد. دو تانسور اختیاری را می‌توان در هم ضرب کرد تا یک تانسور جدید به دست آید. بنابراین اگر A^l_j و B^k_{lm} هر دو تانسور باشند، حاصل ضرب این دورا با C^{lk}_{jlm} نمایش می دهیم که‌عبارت اند از N^5 مؤلفهٔ یک تانسور رتبهٔ پنجم که‌خواص هموردا و پادوردای آن به وسیلهٔ موقعیت شاخصهای آن مشخص می شود:

$$C^{lk}_{jlm} = A^l_j B^k_{lm} \qquad (۵-۳۱)$$

اثبات این گزاره ها به خواننده واگذار می‌شود.

اگر تانسوری نسبت به دو شاخص بالا یا پایین خوددر یک چارچوب دارای تقارن باشد (یـا پادمتقـارن‌باشد)، آنگاه‌تانسورمزبوراین‌خاصیت رادر هرچارچوب دیگری نیزدارا خواهد بود. روش اثبات این مطلب، همان روشی‌است که در بخش ۲ ــ ۳ برای گزارهٔ متناظر آن درمورد تانسورهای دکارتی گفته شد. اما، اگر در یک چارچوب مرجع رابطهٔ $A^i_j = A^j_i$ به ازای جمیع مقادیر i و j صادق باشد، به طورکلی نمی‌توان گفت که این رابطه در هـر چارچوب دیگری نیزصدق می‌کند. مثلا" تقارن (یا پادتقارن) یک تانسور نسبت به یـک شاخص بالا و یک‌شاخص پایین، نمی‌تواند درحالت کلی یک خاصیت هموردا باشد. فقـط تانسور δ^i_j دراین‌مورد استثناست.

نتیجهٔ‌مهم دیگری که می‌توان از برهانی که برای موردخاص تانسورهای دکارتـی به کار برده شد به‌دست آورد، این است که اگر یک‌معادله بین تانسورهایی از نوع ورتبهٔ یکسان دریک چارچوب صادق باشد، در تمام چارچوبهای دیگر نیز صدق خواهد کرد. در نتیجه چنین معادلات تانسوری نسبت به تبدیلات بین چارچوبهای مرجع هموردا هستند (یعنی صورت ناوردان[1] دارند). خواهیم دید که مفید بودن تانسورها درکارهای بعدی ما بیشتر به همین خاصیت وابسته است.

نمادی مثل A^i_{jk} را می‌توان با نوشتن یک شاخص بالا ویک‌شاخص پایین با یک‌حرف تنجانید. مثلا" A^i_{ji} و A^i_{ik} دو تنجش ممکن از A^i_{jk} هستندکه‌هریک، طبق‌قرار ــ داد جمع روی شاخصهای تکراری، معرف یک حاصل جمع است. چون در نماد A^i_{ji} تنها j یک شاخص آزاد است پس این عبارت فقط دارای N مؤلفه است. به همان ترتیب A^i_{ik} نیز دارای N مؤلفه است. اکنون ثابت می‌کنیم‌که اگر A^i_{jk} یک تانسورباشد، تنجشهای آن نیز

1) invariable

تانسوراند. بخصوص ثابت می‌کنیم که $B_j = A^l_{jl}$ یک بردار هموردا است. زیرا داریم:

$$\begin{aligned}
B_j = \bar{A}^l_{jl} &= \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^l}A^r_{st} \\
&= \left(\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^r}\right)\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}A^r_{st} \\
&= \frac{\partial x^t}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}A^r_{st} \\
&= \delta^t_r \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}A^r_{st} \\
&= \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}A^t_{st} \\
&= \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}B_s \qquad (۳۲-۵)
\end{aligned}$$

واین همان نتیجهٔ مورد نظر است. این برهان را می‌توان به طور واضح تعمیم داد با این نتیجه که هرتانسورتنجانیده، خود تانسوری است کمرتبهٔ آن دو واحد کمتر از رتبهٔ تانسور اصلی است ونوع آن بامکان شاخصهای آزادباقیمانده اش تعیین می‌شود. دراین رابطه‌باید متذکر شد که اگر A^l_{jk} یک‌تانسور باشد، درحالت کلی A^l_{jl} یک تانسور نیست، یعنی لازم است که تنجش یک تانسوربرحسب‌یک شاخص بالا و یک‌شاخص پایین صورت گیرد نه برحسب دوشاخص از یک‌نوع.

اگر A^l_{jk} و B^r_s دوتانسور باشند، دراین‌صورت‌تانسور $A^l_{jk}B^r_s$ راحاصل‌ضرب‌خارجی[1] این دو تانسورگویند. حال اگر این حاصل ضرب برحسب یک شاخص بالا از یک عامل ضرب ویک شاخص پایین‌ازعامل دیگر تنجانیده شود، مثل $A^l_{jk}B^r_l$، نتیجه یک تانسوراست که آن را *حاصل ضرب داخلی*[2] می‌نامند.

۵ـ۳ قضیهٔ خارج قسمت[3]؛ تانسورهای‌همیوغ[4]

در بخش پیشین، خاطرنشان شد که حاصل‌ضرب خارجی وداخلی دوتانسور، خود تانسور

1) outer product
2) inner product
3) quotient theorem
4) conjugate tensors

هستند. با وجود این، فرض کنیم که حاصل ضرب دو عامل یک تانسور است و یکی از این دوعامل هم تانسوراست، آیا می‌توان نتیجه‌گرفت که عامل دیگرنیز تانسوراست؟ قضیهٔ خارج قسمت زیرراثابت می‌کنیم: ***اگر حاصل ضرب (خارجی یا داخلی) مجموعهٔ معینی از عناصر دریک تانسور، که نوع آن مشخص است ومؤلفه هایش دلخواه هستند، برابر با یک تانسور باشد، آنگاه عناصر مزبور مؤلفه های یک تانسور هستند.***

کافی است که قضیه دریک حالت خاص اثبات شود، زیرا بسادگی می‌توان دید که این برهان‌کاربردی کلی دارد. پس فرض می‌کنیم A^l_{jk}، N^3 کمیت هستند ومی‌خواهیم ثابت کنیم این کمیتهامؤلفه های‌تانسوری هستند که نوع‌آن از روی مکان شاخصها تعیین می‌شود. فرض کنید B^r_s یک تانسور آمیختهٔ رتبهٔ دوم است که می‌توان مؤلفه های آن را به طور دلخواه تعیین کرد (البته فقط دریک‌چارچوب)، وفرض‌کنیدکه‌برای‌این‌گونه B^r_s ها، حاصل‌ضرب داخلی

$$A^l_{jk}\,B^k_s = C^l_{js} \qquad (۳۳-۵)$$

یک تانسورباشد. فرض می‌شود که تمام مؤلفه ها نسبت به چارچوب x محاسبه می‌شوند. با تبدیل‌آن به چارچوب $\bar{x}$، حاصل ضرب‌داخلی‌مانند یک‌تانسورتبدیل‌می‌شود، پس می‌توان نوشت:

$$A^{l*}_{jk}\,\bar{B}^k_s = \bar{C}^l_{js}, \qquad (۳۴-۵)$$

که در آن A^{l*}_{jk} مؤلفه‌هایی هستند که عملاً پس‌از تغییر چارچوب مرجع، جانشین A^l_{jk} می‌شوند. فرض کنیدکه $\bar{A}^l_{jk}$ مجموعه‌یی ازعناصر تعریف شده مطابق معادلهٔ (۵-۲۶) درچارچوب $\bar{x}$ باشد. چون این یک معادلهٔ تبدیل تانسوری است، می‌دانیم که عناصری با این تعریف در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$\bar{A}^l_{jk}\,\bar{B}^k_s = \bar{C}^l_{js} \qquad (۳۵-۵)$$

معادلهٔ (۵-۳۵) را از معادلهٔ (۵-۳۴) کم می‌کنیم، داریم:

$$(A^{l*}_{jk} - \bar{A}^l_{jk})\,\bar{B}^k_s = 0 \qquad (۳۶-۵)$$

چون مؤلفه های B^r_s درچارچوب x دلخواه هستند ،بنابراین مؤلفـه های آن درچارچوب $\bar{x}$ نیز اختیاری‌اندو مؤلفه های $\bar{B}^k_s$ می‌توانند هرمقدار مناسبی‌را بگیرند . مثلا " بافرض $\bar{B}^k_s=۱$ هنگامی که $k=K$ ودرغیر این صورت $\bar{B}^k_s=0$ ، ازمعادلهٔ (۵ — ۳۶) می‌توان نوشت :

$$A^{l*}_{jK}-\bar{A}^l_{jK}=0,$$

ویا

$$A^{l*}_{jK}=\bar{A}^l_{jK}. \qquad (۵-۳۷)$$

و با درست بودن این رابطه برای$K=۱$ و ۲ و . . . وN ، به‌طورکلی داریم :

$$A^{l*}_{jk}=\bar{A}^l_{jk}. \qquad (۵-۳۸)$$

و مفهوم آن این است که تبدیل A^l_{jk} مانند تبدیل یک‌تانسور است .

ابتدا مثال بسیار ساده ای از کاربرد این قضیه را ذکر می‌کنیم . اگر A^i یک بردار پادوردای دلخواه فرض شود ، می‌توان نوشت :

$$\delta^i_j A^j=A^i \qquad (۵-۳۹)$$

چون طرف راست این رابطه یک برداراست پس بنابه‌قضیهٔ خارج قسمت ، δ^i_j یک‌تانسور است (که قبلا" ثابت شده است) .

به عنوان مثال دوم ، فرض‌کنیم‌که g_{ij} یک تانسور هموردای متقارن و $g=|g_{ij}|$ دترمینانی باشد که عنصرهای آن‌عبارت اند ازمؤلفه‌های‌تانسور مورد نظر. دراین دترمینان با عنصرهای g_{ij} ،همسازه[1] را با G^{ij} نشان می‌دهیم . دراین حالت هرچند G^{ij} یک تانسور نیست ولی اگر $g\neq 0$ ،آنگاه $G^{ij}/g=g^{ij}$ یک تانسور پادوردای متقارن خواهد بود . برای اثبات این مطلب ، گوییم که داریم :

$$g_{ij}G^{kj}=g\delta^k_i, \quad g_{ij}G^{ik}=g\delta^k_j, \qquad (۵-۴۰)$$

با تقسیم هر دو رابطه به g خواهیم داشت :

$$g_{ij}g^{kj}=\delta^k_i, \quad g_{ij}g^{ik}=\delta^k_j. \qquad (۵-۴۱)$$

1) co-factor

حال فرض کنیم که A^i یک بردار پادوردای دلخواه و B_i یک بردار هموردا با تعریف زیر باشد:

$$B_i = g_{ik} A^k. \qquad (۴۲-۵)$$

چون $g \neq 0$ ، بنابراین وقتی مؤلفه‌های B_i به طور دلخواه انتخاب شوند، مؤلفه‌های متناظر A^i را همواره‌می‌توان از رابطهٔ اخیر محاسبه کرد، به عبارت دیگر با دلخواه‌بودن A^i ، B_i نیز دلخواه است. ولی داریم:

$$g^{ij} B_i = g^{ij} g_{ik} A^k = \delta^j_k A^k = A^j. \qquad (۴۳-۵)$$

که دراینجا از اتحاد دوم (۵ ــ ۴۱)، استفاده شده است. اینک برمبنای قضیهٔ خارج‌قسمت نتیجه می‌شود که g^{ij} یک تانسور پادوردا است. علت متقارن بودن آن این است که G^{ij} دارای چنین خاصیتی است.

g_{ij}, g^{ij} را همیوغ یکدیگر می‌نامند.

۵ ــ ۴ تانسورهای نسبی وچگالیهای‌تانسوری

در معادلات (۵ ــ ۱۶)، مختصات $\bar{x}^i$ برحسب مختصات x^i نوشته شده‌اند. اکنون دترمینان‌این تبدیل را به‌گونه‌ای‌تعریف می‌کنیم که عنصر ij ام آن $\partial x^i/\partial \bar{x}^j$ باشد. بنابراین:

$$D = \left|\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\right|. \qquad (۴۴-۵)$$

دراین‌صورت $\mathfrak{A}^i_j$ که خواص‌همورداییوپادوردایی‌آن‌را شاخصهایش‌نشان‌می‌دهند، به‌شرطی یک تانسورنسبی‌باوزن W است (W یک عدددرست‌مثبت‌یا منفی است) که تبدیل‌مؤلفه‌های آن طبق رابطهٔ

$$\bar{\mathfrak{A}}^i_j = D^W \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\mathfrak{A}^r_s. \qquad (۴۵-۵)$$

انجام پذیرد. این‌گزاره‌را می‌توان بوضوح به تانسورهای نسبی با رتبهٔ دلخواه تعمیم داد.

اگر $W=0$ ، دراین حالت یک‌تانسور نسبی به یک تانسور معمولی تبدیل می‌شود. درحالت‌خاص $W = ۱$، تانسور نسبی‌یک **چگالی تانسوری** نامیده می‌شود. (بابخش

۲ ــ ۶ مقایسه شود) .

ازتعریف تانسورنسبی ، می‌توان‌گزاره های زیر را نتیجه گرفت که اثبات فورمولهای مربوط به خواننده واگذار می‌شود :

الف ــ تانسور های‌نسبی‌همنوع وهم وزن رامی‌توان با هم جمع ویا از هم کم کرد و حاصل تانسور جدیدی می‌شود از همان نوع و همان وزن .

ب ــ دو تانسور نسبی رامی‌توان به‌صورت حاصل ضرب خارجی با هم ترکیب کرد و حاصل ، یک تانسور نسبی می‌شودکه‌وزن آن‌برابر مجموع وزنهای‌آن دوتانسور است .

ج ــ اگریک تانسورنسبی نسبت‌به یک‌شاخص پادوردا ویک شاخص هموردا تنجانیده شود ، وزن آن ثابت می‌ماند ولی رتبهٔ آن دو واحد کمتر می‌شود .

$e^{ij\cdots n}$ یک چگالی تانسوری‌پادوردابا رتبهٔ N ام‌را نشان می‌دهد که نسبت به‌هرجفت‌ازشاخصهایش‌پادمتقارن‌است . دراین‌صورت‌با در نظر گرفتن مطالب بخش ۲ ــ ۶ ، نتیجه می‌گیریم که مؤلفه های آن چنین تعیین می‌شوند :

اگر دو شاخص آن یکسان باشند $\qquad e^{ij\cdots n} = 0$

اگر $i,j,\ldots,n$ یک‌جایگشت زوج از $1,2,\ldots,N,$ باشد $\qquad = +e^{12\cdots N},$

اگر $i,j,\ldots,n$ یک جایگشت فرداز $1,2,\ldots,N$ باشد $\qquad = -e^{12\cdots N}.$

بویژه درچارچوب x فرض می‌کنیم : $e^{12\cdots N}=1$. دراین‌صورت‌درچارچوب $\bar{x}$ خواهیم داشت :

$$\bar{e}^{12\cdots N} = D\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^i}\frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x^j}\cdots\frac{\partial\bar{x}^N}{\partial x^n}e^{ij\cdots n},$$
$$= DE, \qquad (۴۶ - ۵)$$

که درآن E عبارت است ازدترمینانی‌که‌عنصر ij ام آن برابراست‌با $\partial\bar{x}^i/\partial x^j$ ، یعنی :

$$E = \left|\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^j}\right|. \qquad (۴۷ - ۵)$$

با به کاربردن‌قاعدهٔ متداول‌ضرب دترمینانها ، از معادلات (۵ ــ ۴۴) و (۵ ــ ۴۷) نتیجه می‌شود

$$DE = \left|\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial\bar{x}^r}{\partial x^j}\right| = \left|\frac{\partial x^i}{\partial x^j}\right| = |\delta^i_j| = 1. \qquad (۴۸ - ۵)$$

از این رو داریم :

$$\bar{\varepsilon}^{12\ldots n} = 1 \qquad (۴۹ - ۵)$$

پس ثابت می‌شودکه مؤلفه ها درچارچوب $\bar{x}$ با مؤلفه ها درچارچوب x یکسان اند . بنابراین چگالی $\varepsilon^{ij\ldots n}$ در تمام چارچوبها دارای مؤلفه های ۱ + و ۱ — و صفر است .

اگر A_{ij} یک تانسورهموردا باشد ، دراین‌صورت دترمینان $|A_{ij}|$ مثالی ازیک ناوردای نسبی است ، زیرا قانون تبدیل آن عبارت است از:

$$\begin{aligned} |\bar{A}_{ij}| &= \left|\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} A_{rs} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\right|, \\ &= \left|\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}\right| |A_{rs}| \left|\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\right| \\ &= D^2 |A_{rs}|. \end{aligned} \qquad (۵۰ - ۵)$$

مشاهده می‌شود که وزن آن برابر ۲ است .

به همین‌ترتیب‌اگر A_{ij} یک تانسورپادوردا باشد ، می‌بینیم که دترمینان $|A^{ij}|$ طبق قانون زیر تبدیل می‌شود :

$$|\bar{A}^{ij}| = E^2 |A^{ij}| = D^{-2} |A^{ij}| \qquad (۵۱ - ۵)$$

بنابراین یک ناوردای نسبی باوزن ۲ — است .

بالاخره‌اگر A^i_j یک تانسورآمیخته‌باشد ، دترمینان $|A^i_j|$ یک ناوردا است‌و قانون تبدیل آن چنین است :

$$|\bar{A}^i_j| = DE |A^i_j| = |A^i_j| \qquad (۵۲ - ۵)$$

۵ — ۵ مشتقهای هموردا ؛ جابجایی موازی ؛ ارتباط‌آفین [1]

در بخش های اولیهٔ این فصل جبرتانسوری بنانهاده‌شد واکنون‌وقت آن است‌که توضیح‌داده شود که چگونه مفاهیم‌آنالیزدر این‌نظریه وارد می‌شوند . فضای ما $\mathscr{S}_N$ ،دارای N بعد است ولی از طرف دیگر تقریبا" عاری از مشخصه های ویژه است . با وجود این تا به حال نشان داده‌است‌که‌می‌تواندتمام‌امکانات لازم‌را برای یک صحنه که تانسورها نقش خودرادرآن بازی

1) affine connection

می‌کنند، فراهم‌آورد. اما، اکنون نشان خواهیم داد که قبل از آنکه این فضا بتواند به‌منزلهٔ یک محیط مناسب برای اعمال آنالیز تانسوری به‌کار برده شود، باید خصوصیات دیگری در ساختار $\mathscr{S}_N$ منظور شود.

دیدیم که اگر ϕ یک میدان ناوردا باشد، $\partial\phi/\partial x^i$ یک بردار هموردا است. ولی اگراز یک بردار هموردا مشتق گرفته شود، حاصل یک‌تانسور نیست. زیرا، فرض کنیم که A_i یک چنین برداری باشد، طوری که داشته باشیم:

$$\bar{A}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} A_k \qquad (۵-۵۳)$$

با مشتق گیری از طرفین این معادله نسبت به $\bar{x}^j$ به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial A_k}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} A_k \qquad (۵-۵۴)$$

وجود جملهٔ دوم در طرف راست این معادله، نشان می‌دهد که $\partial A_i/\partial x^j$ مثل یک‌تانسور تبدیل نمی‌شود. اما این مطلب را می‌توان به‌طریق زیر روشنتر بیان کرد.

فرض‌کنید P و P' دونقطهٔ مجاور x^i و x^i+dx^i باشندوفرض‌کنید A_i و A_i+dA_i بردارهای یک میدان برداری‌هموردا باشندکه بترتیب به این نقاط وابسته اند. قوانین تبدیل برای این بردارها متفاوت خواهند بود، زیرا در $\mathscr{S}_N$ ضرایب یک قانون تبدیل تانسوری از نقطه ای‌به نقطهٔ دیگرتغییر می‌کنند. نتیجه می‌شود که تفاضل این دو بردار یعنی dA_i، یک بردار نیست. اما

$$dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} dx^j \qquad (۵-۵۵)$$

چون dx^j برداراست، پس‌اگر $A_{i,j}$ تانسور باشد، dA_i بردار می‌شود. بنابراین $A_{i,j}$ نمی‌تواند تانسورباشد. اکنون منشا اشکال مشخص است. برای تعریف $A_{i,j}$ باید مقادیری را که میدان برداری A_i در دو نقطهٔ مجاور ولی متمایز اختیار می‌کند، با هم مقایسه کرد، و چنین مقایسه ای‌نمی‌تواند به یک‌تانسور منجر شود. به‌هرحال، اگر روش دیگری را بتوان جانشین این روش کردکه شامل مقایسهٔ دوبردارتعریف‌شده دریک نقطه‌باشد، می‌توان‌انتظار داشت که تصحیح معادلهٔ (۵-۵۵)، یک معادلهٔ تانسوری بشود وبیانگر-شکل جدیدی از مشتق که‌تانسور است، باشد. این موضوع، ما را به‌طورطبیعی به مفهوم **جابجایی موازی**[1] رهنمون می‌شود.

فرض کنید که بردار A_i، از نقطهٔ P که‌درآن‌تعریف شده است به نقطهٔ مجاورش P'

1) parallel displacement

جابجا شود، بدون اینکه بزرگی یا جهت آن تغییر کند به طوری که بتوان آن را همان بردار انگاشت که‌اکنون درنقطهٔ مجاور تعریف شده است. عبارتی که با حروف ایرانیک نوشته شده است هنوز معنی دقیقی در $\mathscr{S}_N$ ندارد، زیرا ما هنوز بزرگی یا جهت یک بردار را در این فضا تعریف نکرده ایم. ولی البته‌درحالت خاصی‌که $\mathscr{S}_N$ اقلیدسی باشد ومحورهای قائم به کار برده شوند، تعبیر عبارت مذکور این است که بردارجابجا شده باید دارای همان مؤلفه های برداراصلی‌باشد. ولی حتی در $\mathscr{E}_N$، اگرازمختصات خمیدهٔ خط استفاده‌شود، به‌طورکلی‌راستای محورهای‌خمیده‌خط در نقطهٔ P'، متفاوت ازراستای‌آنهادر نقطهٔ P خواهد بود ودرنتیجه، مؤلفه های‌یک‌بردارجابجا شده‌بامؤلفه‌های آن قبل‌ازجابجایی برابر نخواهند بود. بنابراین مؤلفه‌های‌یک‌بردارجابجا شده در $\mathscr{S}_N$ را با $A_i+\delta A_i$ نشان خواهیم داد. اکنون می‌توان این بردار را با میدان برداری A_i+dA_i در نقطهٔ P' مقایسه کرد. از آنجا که هر دو بردار در یک نقطه تعریف‌شده‌اند، تفاضل آنها درآن‌نقطه یک‌بردار است، یعنی ($dA_i-\delta A_i$) یک بردار است. پس انتظار می‌رود که تصحیح معادلهٔ (۵ — ۵۵) به صورت

$$dA_i-\delta A_i = A_{i;j}dx \qquad (۵ — ۵۶)$$

باشد، که درآن $A_{i;j}$ جانشین مناسبی برای $A_{i,j}$ است. چون dx^j یک برداراختیاری‌است‌و طرف چپ‌رابطهٔ (۵ — ۵۶) نیز یک بردار است، پس‌بنا به قضیهٔ خارج قسمت، $A_{i;j}$ یک‌تانسور هموردا است که آن را اصطلاحا " **مشتق هموردای** A_i [1] می‌نامند. بدین ترتیب، مسئلهٔ تعریف مشتق یک تانسور به‌صورت مسئلهٔ تعریف جابجایی موازی (بینهایت‌کوچک) یک‌بردار، بیان شده است.

در تعریف جابجایی موازی A_i ازنقطهٔ P به نقطهٔ P' به هرروشی که برایمان‌راحت باشد، آزادهستیم. با این حال، برای اجتناب ازاغتشاش لازم‌است تعریفی که‌اختیارمی‌کنیم با آنچه در $\mathscr{E}_N$، که حالت خاصی‌از $\mathscr{S}_N$ است، پذیرفته شده است، مطابقت داشته باشد. بنابراین فرض کنیدکه فضای‌ما $\mathscr{S}_N$، اقلیدسی باشد و نیز y مختصات دکارتی قائم دراین فضاباشند. فرض‌کنید B_i مؤلفه های میدان برداری A^i نسبت به همین محورهای قائم باشند. دراین صورت داریم:

$$A_i = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}B_j, \quad B_i = \frac{\partial x^j}{\partial y^i}A_j \qquad (۵ — ۵۷)$$

1) covariant derivative

حال اگر جابجایی موازی بردار A_l به نقطهٔ P' انجام گیرد، مؤلفه‌های دکارتی آن B_l، تغییر نخواهند کرد، یعنی $\delta B = 0$. بنابراین از اولین معادلهٔ (۵ــ۵۷) داریم:

$$\delta A_l = \delta\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^l}B_j\right) = \delta\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^l}\right)B_j$$

$$= \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^l \partial x^k}dx^k B_j. \qquad (۵ــ۵۸)$$

با قرار دادن مقدار B_j از دومین معادلهٔ (۵ــ۵۷) دراین معادله، به دست می‌آوریم:

$$\delta A_l = \Gamma^l_{ik} A_l dx^k, \qquad (۵ــ۵۹)$$

که درآن:

$$\Gamma^l_{ik} = \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^l \partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial y^j} \qquad (۵ــ۶۰)$$

این نشان می‌دهد که در $\mathscr{E}_N$، δA_l صورتهای دوخطی[1] برحسب A_l و dx^k هستند. بنابراین δA_l را در $\mathscr{S}_N$ با معادلهٔ (۵ــ۵۹) تعریف خواهیم کرد، که تعداد N^3 کمیت Γ^l_{ik} رادر هر نقطه از $\mathscr{S}_N$ به طور دلخواه تعیین می‌کند[2]. این مجموعهٔ کمیتهای Γ^l_{ik} را *ارتباط*[3] می‌نامند که دراین مورد یک *ارتباط* آفین بین نقطه های $\mathscr{S}_N$ رامشخص می‌کند. فضایی که ارتباط آن آفین است، ساختار کافی برای انجام اعمال آنالیز تانسوری درآن دارد.

زیرا، اکنون می‌توانیم بنویسیم:

$$dA_l - \delta A_l = \frac{\partial A_l}{\partial x^j}dx^j - \Gamma^k_{lj}A_k dx^j,$$

$$= \left(\frac{\partial A_l}{\partial x^j} - \Gamma^k_{lj}A_k\right)dx^j. \qquad (۵ــ۶۱)$$

ولی همچنانکه قبلاً توضیح دادیم، سمت چپ این معادله برای dx^j یاختیاری یک بردار است، پس نتیجه می‌شود که

$$A_{l;j} = \frac{\partial A_l}{\partial x^j} - \Gamma^k_{lj}A_k \qquad (۵ــ۶۲)$$

---

1) bilinear forms

۲) با این شرط که Γ^l_{ik} توابع پیوسته ای از x^l باشند و مشتقهای جزئی آنها تا مرتبه‌ای که برای براهین بعدی مالازم است، پیوسته باشند.

3) affinity=connection

یک‌تانسور هموردا است که مشتق هموردای A_l است .

از معادلهٔ (۵ ـ ۶۲) مشاهده می‌شود که اگر همهٔ مؤلفه های ارتباط دریک ناحیه از $\mathscr{G}_N$صفر شوند ، مشتقهای جزئی وهموردا دراین ناحیه با هم برابراند . اما این نتیجه تنها در چارچوب‌مرجع بخصوصی که به کار رفته است معتبراست . به‌طورکلی درهر چارچوب دیگری مؤلفه های ارتباط صفر نیستند وتمایز بین دو مشتق باقی خواهد ماند . بنابراین‌در معادلات تانسوری که باید درهر چارچوبی صادق باشند ، فقط مشتقهای هموردا می‌توانند ظاهرشوند ، هرچند که پیدا کردن چارچوبی که درآن ارتباط صفر شود ،امکان پذیر است .

قبلا" بیان‌کردیم که وقتی یک ارتباط‌آفین را تعریف می‌کنیم ، می‌توانیم مؤلفه‌های یک ارتباط‌را به‌طوردلخواه‌انتخاب کنیم .دقیقتر بگوییم ، اول بایدیک چارچوب مختصات در$\mathscr{G}_N$ انتخاب شود ،بعدا "انتخاب مؤلفه‌های ارتباط دراین دستگاه مختصات ، بدلخواه انجام می‌شود . به هرحال وقتی اینها تعیین شدند ، مؤلفه های ارتباط نسبت به‌هرچارچوب دیگر ، مانندمورد تانسورها ، با یک قانون تبدیل کاملا" به دست می‌آیند .حال می‌خواهیم این قانون‌تبدیل‌رابرای ارتباطها به دست آوریم .

۵ ـ ۶ تبدیل ارتباط

روش تبدیل‌هریک‌ازکمیتهای معادلهٔ (۵ ـ ۶۲) بجز ارتباط Γ^k_{ij} ،معلوم است . بنابراین ، قانون تبدیل این ارتباط را می‌توان ازتبدیل‌این معادله به دست آورد . این معادله نسبت به‌چارچوب $\bar{x}$ ، چنین نوشته می‌شود :

$$\bar{A}_{i;j} = \frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{x}^j} - \bar{\Gamma}^k_{ij}\bar{A}_k \qquad (۵-۶۳)$$

چون A_l و $A_{l;j}$ تانسور اند ، پس :

$$\bar{A}_i = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}A_r, \qquad (۵-۶۴)$$

$$\bar{A}_{i;j} = \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^j}A_{s;t} \qquad (۵-۶۵)$$

با قرار دادن درمعادلهٔ (۵ ـ ۶۳) ، حاصل می‌شود که :

$$\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^j}A_{s;t} = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial A_r}{\partial x^u} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^i\partial \bar{x}^j}A_r - \bar{\Gamma}^k_{ij}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}A_r \qquad (۵-۶۶)$$

به جای $A_{s;t}$ ، مقدار آن‌را از معادلهٔ (۵ ــ ۶۲) قرار می‌دهیم و با حذف دو جملهٔ مساوی از طرفین معادلهٔ (۵ ــ ۶۶) ، این معادله به صورت

$$-\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^j}\Gamma^r_{st}A_r = \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j}A_r - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}A_r \qquad (۶۷ ــ ۵)$$

ساده می‌شود. چون A_r یک بردار دلخواه است ، پس با مساوی قرار دادن ضرایب A_r در طرفین این معادله می‌توان به دست آورد که:

$$\Gamma^k_{ij}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^j}\Gamma^r_{st} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} \qquad (۶۸ ــ ۵)$$

سرانجام ، با ضرب طرفین این معادله در $\partial \bar{x}^l/\partial x^r$ و استفاده از نتیجهٔ

$$\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^r}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial \bar{x}^k} = \delta^l_k, \qquad (۶۹ ــ ۵)$$

حاصل می‌شود:

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^j}\Gamma^r_{st} + \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^r}\frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} \qquad (۷۰ ــ ۵)$$

که عبارت است از قانون تبدیل یک ارتباط.

باید متذکر شد که اگر جملهٔ دوم طرف راست معادلهٔ (۵ ــ ۷۰) وجود نداشت Γ^k_{ij} مانند یک تانسور رتبهٔ سوم تبدیل می‌شد و خصوصیات هموردایی یا پادوردایی آن منوط به مکان شاخصهای آن می‌شد. بنابراین ، قانون تبدیل نسبت به مؤلفه های یک ارتباط خطی است ولی مانند قانون تبدیل یک تانسور همگن نیست. از اینجا نتیجه می‌شود که اگر تمام مؤلفه های یک ارتباط نسبت به یک چارچوب صفر باشند ، صفر بودن آنها نسبت بــه چارچوب دیگری الزامی نیست. اگرچه ثابت خواهیم کرد که اگر ارتباطی دارای تقارن باشد ، همیشه امکان پیداکردن چارچوبی که تمام مؤلفه ها را در یک نقطهٔ بخصوص صفر کند وجود دارد (ر.ک. بخش ۵ ــ ۱۰)، ولی به طورکلی چارچوبی که درآن مؤلفه های یک ارتباط در ناحیه ای از $\mathscr{S}_N$ صفر شوند وجود ندارد.

فرض کنید Γ^k_{ij} و Γ^{k*}_{ij} دو ارتباط باشند که در یک ناحیه از $\mathscr{S}_N$ تعریف شده‌اند. با نوشتن قوانین تبدیل آنها و کم کردن یکی از دیگری خواهیم داشت:

$$\Gamma^k_{ij}-\Gamma^{k*}_{ij} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^j}(\Gamma^r_{st}-\Gamma^{r*}_{st}), \qquad (۵ - ۷۱)$$

یعنی، تفاضل دو ارتباط، یک تانسور است. ولی مجموع دو ارتباط، نه یک تانسور است ونه یک ارتباط. به همین ترتیب مجموع یک ارتباط Γ^k_{ij} و یک تانسور A^k_{ij} عبارت است از یک ارتباط که اثبات این مطلب به عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود.

اگر در یک چارچوب Γ^k_{ij} نسبت به شاخصهای پایین خود متقارن باشد، در هر چارچوب دیگری نیز متقارن خواهد بود، زیرا از معادلهٔ (۵ ـ ۷۰) داریم:

$$\begin{aligned}\Gamma^k_{ji} &= \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^i}\Gamma^r_{st}+\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r}\frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^j\,\partial \bar{x}^i},\\ &= \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\Gamma^r_{ts}+\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r}\frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^i\,\partial \bar{x}^j},\\ &= \Gamma^k_{ij},\end{aligned} \qquad (۵ - ۷۲)$$

که درآن دراولین مرحله قرار داده ایم $\Gamma^r_{ts}=\Gamma^r_{st}$.

۵ ـ ۷ مشتق هموردای تانسورها

دراین‌بخش طرزعمل مشتق‌گیری هموردای تانسورهارااز هر نوع وهر رتبه بسط خواهیم داد.

نخست یک میدان ناوردای V را در نظر بگیرید. وقتی V از نقطهٔ P به P' به طور موازی جابجاشود، فرض می‌شود که مقدار آن تغییر نخواهد کرد، یعنی در تمام چارچوبها $\delta V=0$. از این رو رابطهٔ

$$dV-\delta V = \frac{\partial V}{\partial x^i}dx^i \qquad (۵ - ۷۳)$$

همتای معادلهٔ (۵ ـ ۵۶) است به ازای یک ناوردا. نتیجه اینکه:

$$V_{;i} = V_{,i}, \qquad (۵ - ۷۴)$$

یعنی مشتق هموردای یک ناوردا با مشتق جزئی یا گرادیان (شیب) آن برابر است.

اینک فرض کنید که B^i یک میدان‌برداری پادوردا و A_i یک بردار هموردای دلخواه باشد. دراین صورت A_iB^i یک ناوردا است ومقدارآن درموقع جابجایی موازی از P به P' ثابت می‌ماند. بنابراین:

$$\delta(A_iB^i) = 0,$$

یا:

$$\delta A_i B^i + A_i\delta B^i = 0,$$

از این رو با استفاده از معادلهٔ (۵ ــ ۵۹) داریم :

$$A_k \delta B^k = -\Gamma^k_{ij} A_k dx^j B^i \qquad (۵-۷۵)$$

ولی چون A_k اختیاری هستند، با مساوی قرار دادن ضرایب آنها در طرفین این معادله، رابطهٔ زیر حاصل می‌شود :

$$\delta B^k = -\Gamma^k_{ij} B^i dx^j \qquad (۵-۷۶)$$

این معادله، جابجایی موازی یک بردار پادوردا را تعریف می‌کند. اکنون، مشتق هموردای یک بردار مانند سابق به دست می‌آید : بدین ترتیب

$$dB^k - \delta B^k = \left(\frac{\partial B^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{ij} B^i\right) dx^j \qquad (۵-۷۷)$$

وچون dx^j یک برداراختیاری است و می‌دانیم که $dB^k - \delta B^k$ یک بردار است، پس

$$B^k{}_{;j} = \frac{\partial B^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{ij} B^i \qquad (۵-۷۸)$$

یک تانسور است که مشتق هموردای B^k خوانده می‌شود.

به همین ترتیب، اگر A^l_j یک میدان تانسوری باشد، جابجایی موازی ناوردای $A^l_j B_l C^j$ را در نظر می‌گیریم که درآن B_l و C^j بردارهای اختیاری هستند. در این صورت از رابطهٔ

$$\delta(A^l_j B_l C^j) = 0 \qquad (۵-۷۹)$$

ومعادلات (۵ ــ ۵۹) و (۵ ــ ۷۶)، نتیجه می‌گیریم که :

$$\delta A^l_j = \Gamma^i_{jk} A^l_i dx^k - \Gamma^l_{ik} A^i_j dx^k \qquad (۵-۸۰)$$

اکنون نتیجه می‌شود که

$$A^l_{j;k} = \frac{\partial A^l_j}{\partial x^k} - \Gamma^i_{jk} A^l_i + \Gamma^l_{ik} A^i_j \qquad (۵-۸۱)$$

مشتق هموردای مورد نظر است.

اکنون، قاعدهٔ پیداکردن مشتق هموردای یک تانسور، بابررسی معادلهٔ (۵ ــ ۸۱)،

سرراست خواهد بود، بدین معنی که، اول مشتق جزئی مربوط نوشته می شود وسپس "جمله های ارتباط" به دنبال می آیند. جمله های ارتباط از نوشتن ضرب داخلی ارتباط و تانسور به نوبت برحسب هر یک از شاخصهای آن حاصل می شوند به طوری که وقتی شاخص پادوردا است، علامت جمله مثبت و وقتی شاخص هموردا است علامت جمله منفی قرار داده خواهد شد.

با به کار بردن این قاعده درمورد میدان تانسوری که مؤلفه های آن در هر نقطه برابر با مؤلفه های تانسور اساسی δ^i_j هستند، به دست می آید که:

$$\delta^i_{j;k} = \Gamma^i_{rk}\delta^r_j - \Gamma^r_{jk}\delta^i_r = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{jk} = 0 \qquad (۸۲-۵)$$

بنابراین درمشتق گیری هموردا، این تانسور اساسی مثل یک ثابت عمل می کند.

بالاخره، دراین بخش توضیح خواهیم داد که قواعد متداول مشتق گیری از مجموعها و حاصل ضربها درفرآیند مشتق گیری هموردا قابل اجرا هستند.

عبارت سمت راست معادلهٔ (۵ ـ ۸۱) نسبت به تانسور A^i_j خطی است، پس نتیجه گرفته می شود که اگر داشته باشیم:

$$C^i_j = A^i_j + B^i_j, \qquad (۸۳-۵)$$

آنگاه خواهیم داشت

$$C^i_{j;k} = A^i_{j;k} + B^i_{j;k} \qquad (۸۴-۵)$$

حال فرض کنید داریم

$$C^i = A^i_j B^j \qquad (۸۵-۵)$$

در این صورت می توان نوشت

$$\begin{aligned} C^i{}_{;k} &= \frac{\partial C^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{rk} C^r, \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k}(A^i_j B^j) + \Gamma^i_{rk} A^r_j B^j, \\ &= \left(\frac{\partial A^i_j}{\partial x^k} + \Gamma^i_{rk} A^r_j - \Gamma^r_{jk} A^i_r\right) B^j \end{aligned}$$

$$+\left(\frac{\partial B^j}{\partial x^k}+\Gamma^j_{rk}B^r\right)A^i_j,$$

$$= A^i_{j;k}B^j + B^j_{;k}A^i_j, \qquad (۸۶-۵)$$

که عبارت است از قاعدهٔ متداول برای مشتق گیری از یک حاصل ضرب .

۵ ــ ۸ مشتق گیری هموردا از تانسور های نسبی

نخست‌جا بجابی‌موازی‌یک چگالی ناوردای $\mathfrak{A}$ را از نقطهٔ P به نقطهٔ مجاورش P' که‌مقدارش را درآنجا برابر $\mathfrak{A}+\delta\mathfrak{A}$ اختیار می‌کنیم ، در نظر می‌گیریم . نمی‌توان فرض کرد که $\delta\mathfrak{A}=0$ ، زیرا حتی اگر دو چگالی ناوردا در یک‌چارچوب یکسان باشند ، چون قانون تبدیل درنقاط P و P' متفاوت است پس یکسان بودن آنها در یک چارچوب دیگر منتفی خواهد شد . اما اگر $\mathscr{S}_N$ اقلیدسی باشد و انتخاب فقط محدود به چارچوبهای دکارتی قائم باشد ، آنگاه قانون تبدیل برای چگالی عبارت خواهد بود از:

$$\bar{\mathfrak{A}} = D\mathfrak{A} \qquad (۸۷-۵)$$

که درآن D توسط معادلهٔ (۵ــ۴۴) داده‌شده‌است ودرمورد تبدیلات متعامد ، فقط می‌تواند مقادیر ۱ + و ۱ ــ را قبول کند . بنابراین در این مورد خاص، D بستگی به نقطه ای که در آن $\mathfrak{A}$ تعریف شده است‌ندارد‌وبرای‌تمام‌چارچوبهای دکارتی قائم ، $\delta\mathfrak{A}=0$ می‌تواند معتبرباشد . پس ماجابجایی موازی‌یک چگالی ناوردا را در $\mathscr{E}_N$ ، نسبت به‌چارچوبهای دکارتی قائم ، طوری تعریف خواهیم کرد که چگالی تغییری پیدا نکند .

فرض‌کنید که در $\mathscr{E}_N$ ، مختصات دو نقطهٔ P و P' نسبت به محورهای دکارتی قائم ، برابر y^i و y^i+dy^i باشند و نیز فرض کنید که $\mathfrak{B}$ یک چگالی ناوردای مربوط به نقطهٔ P ومحاسبه شده دراین چارچوب‌باشد . اگر این چگالی به‌طورموازی به‌نقطهٔ P' جابجا شود ، مقدارآن $\mathfrak{B}$ ، ثابت می‌ماند ، یعنی $\delta\mathfrak{B}=0$. فرض‌کنید که x^i و x^i+dx^i بترتیب مختصات دو نقطهٔ P و P' نسبت به یک چارچوب مختصات دیگر (دکارتی بودن آن‌الزامی‌نیست)باشند و $\mathfrak{A}$ همان چگالی ناوردای نقطهٔ P که دراین چارچوب‌جدیدمحاسبه شده‌است ،باشد . درچارچوب جدید این چگالی را بعداز جابجایی موازی به‌نقطهٔ P'، برابر $\mathfrak{A}+\delta\mathfrak{A}$ بگیرید . آنگاه

$$\mathfrak{A} = D\mathfrak{B} \qquad (۸۸-۵)$$

که درآن $D = |\partial y^j / \partial x^j|$ از این رو داریم:

$$\delta\mathfrak{A} = \delta(D\mathfrak{B}) = \delta D.\mathfrak{B} = \frac{1}{D}\delta D\mathfrak{A} \tag{۵-۸۹}$$

اما

$$\delta D = \frac{\partial D}{\partial x^l}dx^l \tag{۵-۹۰}$$

بنابراین

$$\delta\mathfrak{A} = K_l\mathfrak{A}dx^l \tag{۵-۹۱}$$

که درآن

$$K_l = \frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial x^l} \tag{۵-۹۲}$$

معادلهٔ (۵ ــ ۹۱) برای جابجایی موازی‌یک‌چگالی‌ناوردادر فضای $\mathscr{S}_N$ که اقلیدسی است، معتبراست. اگر $\mathscr{S}_N$ اقلیدسی نباشد، دراین‌صورت‌جابجایی‌موازی‌یک چگالی ناوردا به‌وسیلهٔ معادلهٔ (۵ ــ ۹۱) تعریف خواهدشد. چون مختصات دکارتی در چنین فضایی در دسترس نیستند، بنابراین ضرایب K_l را نمی‌توان‌از معادلهٔ (۵ ــ ۹۲) به‌دست آورد ودر عوض باید آنها را در هرنقطه از فضا مشخص‌کرد وبدین ترتیب برفضا تحمیل کرد (مقایسه کنید با یک ارتباط). فعلا" فرض می‌کنیم‌که این‌ضرایب در هر چارچوب به روش دلخواهی مشخص می‌شوند و، پس از انجام آن، K_l درتمام چارچوبها تعیین خواهد شد.

حال فرض‌کنید که $\mathfrak{A}$ یک میدان چگالی ناوردا باشد و $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{A}+d\mathfrak{A}$ مقادیری را که‌چگالی عملا" درنقاط x^l و x^l+dx^l اختیار می‌کند،نشان دهند. فرض کنیدکه $\mathfrak{A}$ به نقطهٔ x^l+dx^l جابجامی‌شودکه‌مقدارآن درآنجابرابر $\mathfrak{A}+\delta\mathfrak{A}$ است. آنگاه‌تفاضل دو چگالی که در نقطهٔ x^l+dx^l تعریف شده اند، خود یک‌چگالی است و برابر است با

$$d\mathfrak{A}-\delta\mathfrak{A} = \left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x^l}-K_l\mathfrak{A}\right)dx^l \tag{۵-۹۳}$$

ولی dx^l یک بردار اختیاری است بنابراین نتیجه می‌شود که

$$\mathfrak{A}_{;l} = \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x^l}-K_l\mathfrak{A} \tag{۵-۹۴}$$

یک چگالی برداری هموردا است که آنرا اصطلاحا" مشتق همورداى $\mathfrak{A}$ می‌نامیم.

اکنون در نظر بگیرید که $\mathfrak{B}^i_j$ یک چگالی تانسوری از رتبهٔ دوم است. فرض کنید که $\mathfrak{A}$ یک چگالی ناوردا باشد. آنگاه $\mathfrak{A}^{-1}$ یک‌ناوردای نسبی است که وزن آن ۱ ــ است و از این رو

$$\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}^i_j = B^i_j \qquad (۵-۹۵)$$

یک تانسور است. با نوشتن این معادله به‌صورت

$$\mathfrak{B}^i_j = \mathfrak{A}B^i_j \qquad (۵-۹۶)$$

وبا جابجا کردن موازی آن، به دست می‌آوریم که:

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{B}^i_j &= \delta(\mathfrak{A}B^i_j),\\ &= \mathfrak{A}\,\delta B^i_j + B^i_j\,\delta\mathfrak{A},\\ &= \mathfrak{A}(\Gamma^r_{jk}B^i_r - \Gamma^i_{rk}B^r_j)\,dx^k + B^i_j K_k\mathfrak{A}dx^k,\\ &= (\Gamma^r_{jk}\mathfrak{B}^i_r - \Gamma^i_{rk}\mathfrak{B}^r_j + K_k\mathfrak{B}^i_j)\,dx^k,\end{aligned} \qquad (۵-۹۷)$$

در سطر سوم‌این محاسبات،از معادلات (۵ ــ ۸۰) و (۵ ــ ۹۱) استفاده شده است. معادلهٔ (۵ ــ ۹۷) نشان می‌دهدکه‌قانون جابجایی موازی برای یک چگالی تانسوری بجز یک جملهٔ اضافی شامل ضریب K_k، با قانون جابجایی موازی برای یک‌تانسور یکسان است.

اکنون اگر $\mathfrak{B}^i_j$ یک میدان چگالی تانسوری باشد، می‌توان مشتق هموردای آن را به طریق معمولی پیدا کرد وبسهولت نشان دادکه این مشتق عبارت است از

$$\mathfrak{B}^i_{j;k} = \frac{\partial\mathfrak{B}^i_j}{\partial x^k} + \Gamma^i_{rk}\mathfrak{B}^r_j - \Gamma^r_{jk}\mathfrak{B}^i_r - K_k\mathfrak{B}^i_j \qquad (۵-۹۸)$$

و یک‌چگالی تانسوری است. اکنون، بعدازبررسی معادلهٔ اخیر، قاعدهٔ مشتق گیری یک‌چگالی تانسوری واضح خواهد شد.

بویژه میدان‌چگالی‌تانسوری‌رادر نظر بگیرید که‌مؤلفه‌های‌آن در هر نقطه‌عبارت اند از $e^{ij\ldots n}$. چون تمام این‌مؤلفه‌هاثابت‌اند، پس‌مشتق جزئی آنها صفر است و طبق قاعده، مشتق هموردا عبارت است از:

$$e^{ij\cdots n}{}_{;s} = \Gamma^i_{rs} e^{rj\cdots n} + \Gamma^j_{rs} e^{ir\cdots n} + \ldots + \Gamma^n_{rs} e^{ij\cdots r} - K_s e^{ij\cdots n} \quad (۵-۹۹)$$

اگر $i, j, \ldots, n$ یک جایگشت زوج از N و ... و ۲ و ۱ باشد، خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^i_{rs} e^{rj\cdots n} &= \Gamma^i_{is} \quad (\text{نسبت به } i \text{ جمع نشده است}) \\ \Gamma^j_{rs} e^{ir\cdots n} &= \Gamma^j_{js} \quad (\text{نسبت به } j \text{ جمع نشده است}) \end{aligned}\right\} \quad (۵-۱۰۰)$$

و غیره، بنابراین:

$$e^{ij\cdots n}{}_{;s} = \Gamma^r_{rs} - K_s \quad (۵-۱۰۱)$$

که در آن، جمع کردن نسبت به r در نظرگرفته شده است. اگر n و ... و j و i یک جایگشت فرد باشد، آنگاه داریم:

$$e^{ij\cdots n}{}_{;s} = -(\Gamma^r_{rs} - K_s) \quad (۵-۱۰۲)$$

اگر یک‌جفت از $i, j, \ldots n$ هایکسان باشند، مثلا" $i=j=P$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{rs} e^{rj\cdots n} + \Gamma^j_{rs} e^{ir\cdots n} &= \Gamma^P_{rs} e^{rP\cdots n} + \Gamma^P_{rs} e^{Pr\cdots n}, \\ &= \Gamma^P_{rs} e^{rP\cdots n} - \Gamma^P_{rs} e^{rP\cdots n}, \\ &= 0, \end{aligned} \quad (۵-۱۰۳)$$

که در آن جمع کردن نسبت به P در نظر گرفته شده است. همچنین، دراین صورت بقیهٔ جملات سمت راست معادلهٔ (۵-۹۹) صفر هستند. حاصل اینکه دراین‌مورد داریم:

$$e^{ij\cdots n}{}_{;s} = 0 \quad (۵-۱۰۴)$$

معادلات (۵-۱۰۱) و (۵-۱۰۲) و (۵-۱۰۴) به صورت زیر خلاصه می‌شوند:

$$e^{ij\cdots n}{}_{;s} = (\Gamma^r_{rs} - K_s)\, e^{ij\cdots n} \quad (۵-۱۰۵)$$

چون $e^{ij\ldots n}$ درهر چارچوب‌ودرهرنقطه دارای‌مؤلفه‌های یکسان است، پس طبیعتا" باید انتظار صفر شدن مشتق همورداى‌آن را داشته‌باشیم. این نتیجه مسلما" محاسباتی را که درآنهااین چگالی وارد می‌شود ساده می‌کند، زیرا دراین صورت می‌توان با آن مثل یک مقدارثابت‌نسبت به‌مشتق هموردا، عمل‌کرد (مقایسه‌کنید با δ^i_j). معادلهٔ (۵-۱۰۵)

نشان می‌دهد که باقرار دادن

$$K_s = \Gamma^r_{rs} \qquad (۱۰۶-۵)$$

در قانونی که جابجایی موازی چگالیهارا تعریف می‌کند، می‌توان به این حالت مطلوب رسید. بنابراین درآینده، در تمام بررسیها چنین خواهیم کرد. دراین صورت، مشتق همورداى یک چگالی تانسوری که به وسیلهٔ معادلهٔ (۵ــ۹۸) تعیین شد، چنین می‌شود:

$$\mathfrak{B}^l_{j;k} = \frac{\partial \mathfrak{B}^l_j}{\partial x^k} + \Gamma^l_{rk}\mathfrak{B}^r_j - \Gamma^r_{jk}\mathfrak{B}^l_r - \Gamma^r_{rk}\mathfrak{B}^l_j \qquad (۱۰۷-۵)$$

اکنون می‌توان جابجایی هر تانسور نسبی باوزن W را به دست آورد. فرض کنید که $\mathfrak{C}$ یک‌ناوردای نسبی باوزن W و $\mathfrak{A}$ یک چگالی ناوردا باشد که دراین صورت $\mathfrak{C}/\mathfrak{A}^W$ یک ناوردا است. اگر این را با V نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}^W V \qquad (۱۰۸-۵)$$

با انجام یک جابجایی موازی به‌یک‌نقطهٔ مجاور، به‌دست می‌آوریم که:

$$\delta\mathfrak{C} = \delta(\mathfrak{A}^W V) = W\mathfrak{A}^{W-1}\delta\mathfrak{A}V \qquad (۱۰۹-۵)$$

زیرا $\delta V = 0$. با قراردادن‌مقدار $\delta\mathfrak{A}$ از معادلهٔ (۵ــ۹۱) (بابه کار بردن صورت K_i در بالا) حاصل می‌شود که:

$$\delta\mathfrak{C} = W\Gamma^l_{lk}\mathfrak{A}^W V dx^k = W\Gamma^l_{lk}\mathfrak{C}dx^k \qquad (۱۱۰-۵)$$

این قانون‌جابجایی یک ناوردای‌نسبی‌با وزن W است‌وملاحظه می‌کنیم که‌با قانون (۵ــ۹۱) برای جابجایی‌موازی یک چگالی یکسان است بجز اینکه دارای ضریب عددی W است.

اکنون مشتقهای همورداى تانسورهای نسبی به همان روشی که برای چگالیها انجام شد، به دست می‌آیند. می‌توان ثابت کرد که مشتق همورداى یک ناوردای $\mathfrak{C}$ با وزن W برابر است با:

$$\mathfrak{C}_{;k} = \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial x^k} - W\Gamma^l_{lk}\mathfrak{C} \qquad (۱۱۱-۵)$$

(مقایسه کنید با معادلهٔ (۵ــ۹۴)) و

$$\mathfrak{C}^{i}_{j;k} = \frac{\partial \mathfrak{C}^{i}_{j}}{\partial x^{k}} + \Gamma^{i}_{rk}\mathfrak{C}^{r}_{j} - \Gamma^{r}_{jk}\mathfrak{C}^{i}_{r} - W\Gamma^{r}_{rk}\mathfrak{C}^{i}_{j} \qquad (۵-۱۱۲)$$

عبارت است از مشتق هموردای یک تانسور نسبی $\mathfrak{C}^{i}_{j}$ با وزن W (مقایسه کنید با معادلهٔ (۵ــ۱۰۷)).

تانسورنسبی هموردا باوزن ۱ ــ را که قبلاً" با $e_{ij\ldots n}$ نشان داده شد، می‌توان به عنوان یک میدان درنظرگرفت و مشتق آن را اکنون به دست آورد. اثبات اینکه این مشتق برابر صفراست، به عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود. بهتر است از روشی که برای به دست آوردن معادلهٔ (۵ــ۱۰۵) به کار رفت، استفاده شود.

۵ــ۹ تانسورخمش ریمان ــ کریستوفل[1]

اگر در یک فضای اقلیدسی $\mathscr{E}_N$، یک چارچوب مختصات دکارتی قائم انتخاب شود و اگر مؤلفه های برداری که درنقطهٔ Q تعریف شده است نسبت به این چارچوب A^i باشند، آنگاه برای یک جابجایی موازی کوچک و اختیاری بردارمزبور از نقطهٔ Q داریم $\delta A^i = 0$. با صادق بودن این مطلب برای هر A^i یاختیاری، ازمعادلهٔ (۵ــ۷۶) نتیجه می‌شود که، نسبت به این چارچوب، درهرنقطه از $\mathscr{E}_N$، $\Gamma^{i}_{jk} = 0$. فرض کنید که C یک منحنی بسته باشد که از نقطهٔ Q عبور می‌کند، و A^i یک دور کامل C را طوری طی‌کند که در طول هر عنصر مسیر، به طور موازی جابجا شود. دراین صورت مؤلفه های آن درحین حرکت، ثابت می‌مانندواز این رو اگر $A^i + \Delta A^i$ نمایشگربردارهنگام برگشت آن به Q باشد، داریم:

$$\Delta A^i = 0 \qquad (۵-۱۱۳)$$

چون ΔA^i تفاضل دوبردارتعریف شده‌در Q است، پس خود نیز یک بردار است و معادلهٔ (۵ــ۱۱۳) یکرابطهٔ برداری است که درتمام چارچوبها معتبر است. پس بدین ترتیب جابجایی موازی یک بردار دور یک منحنی بسته در $\mathscr{E}_N$، باعث تغییر بردار نمی‌شود.

اما اگر A^i در نقطهٔ Q از فضای $\mathscr{S}_N$ که اقلیدسی بودن آن الزامی نیست ودارای ارتباط پیوسته است، تعریف شده باشد، به طور کلی انتخاب چارچوب مختصاتی‌که در آن مؤلفه های ارتباط درهر نقطه صفر باشند، امکان پذیر نیست. درنتیجه اگر A^i پیرامون C به طورموازی جابجاشود، مؤلفه های آن‌تغییر خواهند کرد ونمی‌توان تصورکرد که در برگشت

---

1) the rieman-christoffel curvature

به نقطهٔ Q ، مقدار آن ثابت خواهد ماند، به عبارت دیگر $\Delta A^i \neq 0$. اکنون می‌خواهیم ΔA^i را حساب کنیم به هنگامی که A^i پیرامون یک مدار کوچک C به دور نقطهٔ P به مختصات x^i (شکل ۵ ــ ۲) ، که ابتدا در آن نقطه تعریف شده است ، به طور موازی جابجا شود .

فرض کنید U نقطه ای در روی این منحنی و $x^i+\xi^i$ مختصات آن باشند که ξ^i کمیتهای کوچکی هستند . V نقطه‌ای روی C و نزدیک U و دارای مختصات $x^i+\xi^i+d\xi^i$ است . وقتی A^i از نقطهٔ U به V جابجا می‌شود ، مؤلفه های آن به اندازهٔ

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{jk} A^j d\xi^k \qquad (114-5)$$

تغییر می‌کنند ، که در آن Γ^i_{jk} و A^j باید درنقطهٔ U محاسبه شوند . یک جابجایی کوچک از P به U را در نظر بگیرید . با به کار بردن قضیهٔ تیلور دیده‌می‌شود که مقدار Γ^i_{jk} در نقطهٔ U با تقریب مرتبهٔ اول نسبت به ξ^l برابر است با

$$\Gamma^i_{jk}+\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l}\xi^l \qquad (115-5)$$

در این عبارت باید ارتباط ومشتق آن در نقطهٔ P محاسبه شوند . در رابطهٔ (۵ ــ ۱۱۴) A^j نمایشگر این بردار بعداز جابجایی موازی از P به U است ، یعنی عبارت است از:

$$A^j-\Gamma^j_{rl}A^r\xi^l \qquad (116-5)$$

که در آن A^j و A^r و Γ^j_{rl} ، همه باید در نقطهٔ P محاسبه شوند . بنابراین بـــا تقریب مرتبهٔ اول نسبت به ξ^l ، می‌توان معادلهٔ (۵ ــ ۱۱۴) را به صورت

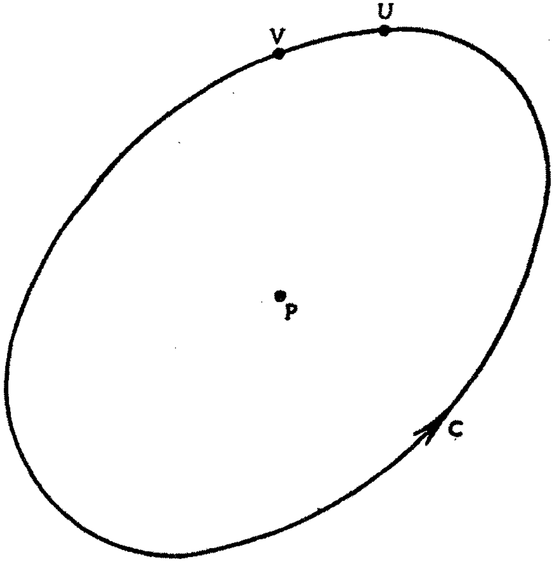
$$\delta A^i = -\left[\Gamma^i_{jk}A^j+\left(A^j\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l}-\Gamma^i_{jk}\Gamma^j_{rl}A^r\right)\xi^l\right]d\xi^k \qquad (117-5)$$

نوشت . با انتگرال گیری در پیرامون C، رابطهٔ زیر حاصل می‌شود :

$$\Delta A^i = -\Gamma^i_{jk}A^j\oint_C d\xi^k+\left(\Gamma^i_{rk}\Gamma^r_{jl}-\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l}\right)A^j\oint_C \xi^l d\xi^k, \qquad (118-5)$$

که در آن شاخصهای ظاهری j و r ، در آخرین جملهٔ سمت راست معادلهٔ (۵ ــ ۱۷۷) با یکدیگر عوض شده اند .

اکنون :



شکل ۵ — ۲

$$\oint_C d\xi^k = \Delta\xi^k = 0 \qquad (۵-۱۱۹)$$

همچنین

$$\oint_C d(\xi^l\xi^k) = \Delta(\xi^l\xi^k) = 0 \qquad (۵-۱۲۰)$$

بنابراین داریم

$$\oint_C \xi^l d\xi^k = -\oint_C \xi^k d\xi^l \qquad (۵-۱۲۱)$$

و این می‌رساند که سمت چپ این رابطه، نسبت به l و k پادمتقارن است وچون ξ^l و $d\xi^k$ بردارند، تانسور است. با نمایش دادن آن‌با α^{kl} داریم :

$$\alpha^{kl} = \tfrac{1}{2}\oint_C (\xi^l d\xi^k - \xi^k d\xi^l) \qquad (۵-۱۲۲)$$

و آنگاه معادلهٔ (۵ — ۱۱۸) به صورت

$$\Delta A^l = \left(\Gamma^l_{rk}\Gamma^r_{jl} - \frac{\partial\Gamma^l_{jk}}{\partial x^l}\right) A^j \alpha^k \qquad (۵-۱۲۳)$$

در می‌آید.

α^{kl} جدا ازخاصیت‌پادمتقارن بودن‌آن ،اختیاری است . با این‌حال چون‌این تانسور کاملا" اختیاری نیست ، نمی‌توان قضیهٔ خارج قسمت (بخش ۵ ــ ۳) را مستقیما" جهت نتیجه‌گیری اینکه جمله های داخل پرانتزدرمعادلهٔ (۵ ــ ۱۲۳) تشکیل یک‌تانسور می دهند به کار برد . درواقع ، این عبارت یک تانسور نیست . اما ، بسهولت می‌توان ثابت کرد که اگر X^{ij}_{kl} نسبت به k و l پادمتقارن باشد واگر Y^{ij} که طبق رابطهٔ

$$Y^{ij} = X^{ij}_{kl}\alpha^{kl} \qquad (۱۲۴-۵)$$

تعریف می‌شد به ازای تانسورهای پادمتقارن اختیاری α^{kl} یک تانسور باشد ،آنگاه X^{ij}_{kl} نیز یک‌تانسور است .

جهت اثبات این مطلب ، فرض کنید که β^{kl} یک تانسور متقارن اختیاری است . در این صورت مؤلفه های تانسور

$$\gamma^{kl} = \alpha^{kl}+\beta^{kl} \qquad (۱۲۵-۵)$$

کاملا" اختیاری هستند زیرا با فرض $k<l$ داریم :

$$\gamma^{kl} = \alpha^{kl}+\beta^{kl}, \quad \gamma^{lk} = -\alpha^{kl}+\beta^{kl} \qquad (۱۲۶-۵)$$

و درنتیجه مقادیر γ^{kl} و γ^{lk} را می‌توان به‌طور اختیاری انتخاب کرد ، در این صورت :

$$\alpha^{kl} = \tfrac{1}{2}(\gamma^{kl}-\gamma^{lk}), \quad \beta^{kl} = \tfrac{1}{2}(\gamma^{kl}+\gamma^{lk}) \qquad (۱۲۷-۵)$$

یعنی ، برای اینکه α^{kl} به‌ازای‌تمام شاخصهای بالای خود ، بجز مواردی که دو شاخص برابراند ، هرمقداربخصوصی را اختیارکند ، لازم است تنها مقادیر α^{kl} و β^{kl} درحالتهای $k<l$ تعیین شوند. اگر شاخصهای بالابا هم مساوی باشند ، $\alpha^{kl}=0$ و $\gamma^{kl}=\beta^{kl}$ می‌شود . ولی این β^{kl} ها نیز اختیاری هستند ، و بنابراین γ^{kl} ها با شاخصهای مساوی نیز اختیاری هستند .

چون β^{kl} متقارن است و X^{ij}_{kl} پادمتقارن ، پس :

$$X^{ij}_{kl}\beta^{kl} = 0 \qquad (۱۲۸-۵)$$

با جمع کردن معادلات (۵ ــ ۱۲۴) و (۵ ــ ۱۲۸) خواهیم داشت :

$$X_{kl}^{ij}\gamma^{kl} = Y^{ij} \qquad (۱۲۹-۵)$$

ولی γ^{kl} یک تانسور اختیاری است ، پس طبق قضیهٔ خارج قسمت ، X_{kl}^{ij} یک تانسوراست .

ضریب α^{kl} ، در معادلهٔ (۵ــ۱۲۳) ، برحسب k و l پادمتقارن نیست . اما ، به روش زیرمی‌توان آن را پادمتقارن ساخت : با تعویض شاخصهای ظاهری k و l بایکدیگر در این معادله ، نتیجه می‌شود که :

$$\Delta A^i = \left(\Gamma^i_{rl}\Gamma^r_{jk} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k}\right) A^j \alpha^{lk} \qquad (۱۳۰-۵)$$

با جمع کردن معادلات (۵ــ۱۲۳) و (۵ــ۱۳۰) با توجه به اینکه $\alpha^{kl} = -\alpha^{lk}$ ، چنین می‌یابیم که

$$\Delta A^i = \tfrac{1}{2}\left(\Gamma^i_{rk}\Gamma^r_{jl} - \Gamma^i_{rl}\Gamma^r_{jk} + \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l}\right) A^j \alpha^{kl} \qquad (۱۳۱-۵)$$

اکنون ، عبارت داخل پارانتز ، نسبت به k و l پادمتقارن است واز این رو

$$\left(\Gamma^i_{rk}\Gamma^r_{jl} - \Gamma^i_{rl}\Gamma^r_{jk} + \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l}\right) A^j \qquad (۱۳۲-۵)$$

یک تانسور است . با اختیاری بودن A^j ، نتیجه می‌شود که

$$B^i_{jkl} = \Gamma^i_{rk}\Gamma^r_{jl} - \Gamma^i_{rl}\Gamma^r_{jk} + \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} \qquad (۱۳۳-۵)$$

یک تانسور است که آن را تانسور خمش ریمان ــ کریستوفل می‌نامند .

اکنون ، معادلهٔ (۵ــ۱۳۱) را می‌توان به صورت

$$\Delta A^i = \tfrac{1}{2} B^i_{jkl} A^j \alpha^{kl} \qquad (۱۳۴-۵)$$

نوشت .

اگر B^i_{jkl} نسبت به‌شاخصهای i و l تنجانیده‌شود ، تانسورحاصل‌راتانسورریچی[1] می‌خوانند و با علامت R_{jk} نشان می‌دهند . پس:

1) Ricci tensor

$$R_{jk} = B^{l}_{jkl} \qquad (۱۳۵-۵)$$

این تانسورنقش‌مهمی درنظریهٔگرانش اینشتین دارد. چون B^{l}_{jkl} نسبت‌به شاخصهای k و l، پادمتقارن‌است، پس‌تنجانیدن آن نسبت به شاخصهای i و k دوباره همان تانسورریچی‌را به صورت R_{jl} – به دست می‌دهد. اما تنجانیدن نسبت‌به‌شاخصهای i و j، تانسور رتبهٔ دوم دیگری را ایجاد می‌کند، یعنی

$$S_{kl} = B^{i}_{ikl} = \frac{\partial \Gamma^{i}_{il}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial \Gamma^{i}_{ik}}{\partial x^{l}} \qquad (۱۳۶-۵)$$

۵ـ ۱۰ مختصات زمین پیمایی[۱]؛ اتحاد های بیانچی[۲]

اگر ارتباط Γ^{i}_{jk} نسبت به شاخصهای پایین خود متقارن باشد، در این صورت پیدا کردن چارچوب مختصاتی که د رآن تمام مؤلفه های ارتباط در هر نقطهٔ مفروض صفر شوند همیشه ممکن است.

اول، چارچوب مختصاتی انتخاب می‌کنیم‌که نقطهٔمفروض P مبدا آن باشد وبدین جهت مختصات آن عبارت اند از $x^{i}=0$. سپس‌آن را توسط معادلات

$$x^{i} = \bar{x}^{i} + \tfrac{1}{2} a^{i}_{jk} \bar{x}^{j} \bar{x}^{k} \qquad (۱۳۷-۵)$$

به مختصات جدید $\bar{x}^{i}$ تبدیل می‌کنیم که درآن a^{i}_{jk} مقادیر ثابتی‌هستندکه اندازهٔ آنها بعدا" انتخاب خواهد شد وبدون نقض کلیت، فرض خواهیم کرد که a^{i}_{jk} نسبت به j و k متقارن است. با مشتق گیری از معادلات (۵ـ ۱۳۷) حاصل می‌شود که:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x^{i}}{\partial \bar{x}^{j}} &= \delta^{i}_{j} + a^{i}_{jk} \bar{x}^{k}, \\ \frac{\partial^{2} x^{i}}{\partial \bar{x}^{j} \partial \bar{x}^{k}} &= a^{i}_{jk}. \end{aligned}\right\} \qquad (۱۳۸-۵)$$

در نقطهٔ P ، $x^{i}=0$ ،و این رابطه ها به

$$\frac{\partial x^{i}}{\partial \bar{x}^{j}} = \delta^{i}_{j}, \quad \frac{\partial^{2} x^{i}}{\partial \bar{x}^{j} \partial \bar{x}^{k}} = a^{i}_{jk} \qquad (۱۳۹-۵)$$

---

1) geodesic coorainate

2) Bianchi identity

تبدیل می‌شوند. اکنون داریم:

$$\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} = \delta^l_k \tag{۵ — ۱۴۰}$$

و از این رو در نقطهٔ مفروض داریم:

$$\delta^l_j \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} = \delta^l_k, \tag{۵ — ۱۴۱}$$

یا:

$$\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^k} = \delta^l_k. \tag{۵ — ۱۴۲}$$

با قرار دادن این معادله به طور مقتضی در معادلهٔ (۵ — ۷۰)، مؤلفه های ارتباط را در نقطهٔ P واقع در چارچوب $\bar{x}^l$ محاسبه می‌کنیم، داریم:

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}^l_{ij} &= \delta^l_r \delta^s_i \delta^t_j \Gamma^r_{st} + \delta^l_r a^r_{ij}, \\ &= \Gamma^l_{ij} + a^l_{ij}.\end{aligned} \tag{۵ — ۱۴۳}$$

چون ارتباط، متقارن است پس اکنون انتخاب a^l_{ij} طوری که در رابطهٔ

$$a^l_{ij} = -\Gamma^l_{ij} \tag{۵ — ۱۴۴}$$

صدق کند، امکان پذیر است. اکنون تبدیل (۵ — ۱۳۷) به‌طور کامل تعیین شده است و بنابر معادلهٔ (۵ — ۱۴۳)، همان‌گونه که‌می‌خواستیم، داریم:

$$\bar{\Gamma}^l_{ij} = 0 \tag{۵ — ۱۴۵}$$

مختصات $\bar{x}^l$ در نقطهٔ P را **زمین پیمایی** می‌نامند. واضح است که اگر چنین مختصاتی به کار برده شوند، مشتقهای جزئی وهموردا در نقطهٔ P یکسان خواهند بود. این موضوع به ما امکان می‌دهدتا بسیاری ازبرهانهایی راکه‌به‌معادلات‌تانسوری منجر می‌شوندبه‌صورت ساده تردرآوریم. به هرحال، اگر از این طریق ثابت شود که چنین معادلاتی در چارچوب زمین پیمایی معتبر هستند، الزاما" درتمام چارچوبها معتبر خواهندبود. به‌عنوان مثال *اتحاد بیانچی* را به دست می‌آوریم:

بدین ترتیب، بافرض متقارن بودن ارتباط و با به کار بردن مختصات زمین پیمایی درنقطهٔ مورد نظر، مشتق هموردای معادلهٔ (۵ — ۱۳۳) را بسادگی به دست می‌آوریم:

$$B^i_{jkl;m} = \frac{\partial}{\partial x^m}\left(\Gamma^i_{rk}\Gamma^r_{jl} - \Gamma^i_{rl}\Gamma^r_{jk} + \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 \Gamma^i_{jl}}{\partial x^m \partial x^k} - \frac{\partial^2 \Gamma^i_{jk}}{\partial x^m \partial x^l}, \qquad (۵-۱۴۶)$$

زیرا همهٔ Γ^i_{jk} ها در این‌نقطه صفر می‌شوند (ولی صفر بودن مشتق آنها ضروری‌نیست). از جابگشت چرخه ای شاخصهای k و l و m درمعادلهٔ (۵-۱۴۶) به‌دست‌می‌آوریم:

$$B^i_{jlm;k} = \frac{\partial^2 \Gamma^i_{jm}}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k \partial x^m} \qquad (۵-۱۴۷)$$

$$B^i_{jmk;l} = \frac{\partial^2 \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l \partial x^m} - \frac{\partial^2 \Gamma^i_{jm}}{\partial x^l \partial x^k} \qquad (۵-۱۴۸)$$

حاصل جمع معادلات (۵-۱۴۶) و (۵-۱۴۷) و (۵-۱۴۸)، عبارت‌است ازاتحاد زیر:

$$B^i_{jkl;m} + B^i_{jlm;k} + B^i_{jmk;l} = 0 \qquad (۵-۱۴۹)$$

ولی این یک معادلهٔ تانسوری است که ثابت کردیم در چارچوب زمین پیمایی درست است، پس باید در تمام چارچوبها درست باشد. همچنین، چون نقطهٔ مفروض می‌تواند هر نقطه از $\mathscr{S}_N$ باشد، پس در تمام نقاط فضا معتبر است. این اتحاد را اتحاد بیانچی می‌نامند.

۵-۱۱ ارتباط سنجه ای؛ بالا بردن و پایین آوردن شاخصها

در این بخش بافرض‌اینکه‌فضای $\mathscr{S}_N$ یک فضای ریمان‌است، بیشتربه ذکر جزئیات آن‌خواهیم پرداخت. بدین ترتیب‌که‌فرض خواهیم‌کرد یک "فاصله" ویا بازهٔ ds بین دو نقطهٔ مجاور x^i و x^i+dx^i با معادلهٔ

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \qquad (۵-۱۵۰)$$

تعریف شده است، که در آن N^2 ضریب g_{ij} دریک چارچوب مختصات در هر نقطهٔ $\mathscr{S}_N$ مشخص شده اند. فرض می‌کنیم که، بدون نقض کلیت، g_{ij}ها متقارن باشند. یک چنین رابطه ای را بین هر جفت از نقاط مجاور *ارتباط سنجه‌ای* و عبارت (۵-۱۵۰) برای ds^2 را سنجه می‌نامند.

برای هردو نقطهٔ مجاور، ds یک ناوردای وابسته به‌آن دو در نظر گرفته خواهد شد. بنابراین g_{ij} باید طوری تبدیل شود که این شرط برقرار بماند. چون $dx^i dx^j$

یک تانسورمتقارن‌اختیاری و g_{ij} متقارن و ds^2 یک ناوردا است ، پس برمبنای قضیهٔ‌خارج قسمت اصلاح‌شده ای مشابه آنچه‌که در بخش ۵ ــ ۹ ثابت شد ، نتیجه می‌گیریم که g_{ij} یک تانسور است . این تانسور را **تانسور هموردای اساسی** می‌نامند . تانسور پادوردایی راکه همیوغ g_{ij} است (به‌بخش ۵ ــ ۳مراجعه‌شود) ،یعنی g^{ij} را ، اصطلاحا "**تانسورپادوردای اساسی** می‌نامند .این تانسورتنهاوقتی وجود داردکه $g = |g_{ij}| \neq 0$ ، که مافرض‌می‌کنیم همواره برقرار باشد .

فرض کنید A^i بردار پادوردایی‌باشد که دریک نقطه از $\mathscr{R}_N$ تعریف شده است . آنگاه $g_{ij}A^j$ یک بردار هموردادر همان نقطه‌است و آن را با A_i نشان خواهیم داد .

بدین ترتیب

$$A_i = g_{ij}A^j \qquad (۱۵۱ - ۵)$$

A^i و A_i را بترتیب مؤلفه های پادوردا وهموردای یک بردار ،نسبت به چارچوب مختصات به‌کاررفته‌درنظرخواهیم‌گرفت .فرا یندتبدیل‌عبارت‌پادوردای یک بردار به عبارت هموردای آن‌راکه‌توسط معادلهٔ (۵ ــ ۱۵۱) تعریف‌شده‌است‌اصطلاحا "**پایین‌آوردن‌شاخص** می‌نامند .

اگر B_i یک بردار هموردداباشد ، عبارت پادوردای آن به وسیلهٔ **بالا بردن شاخص** به کمک بردار پادوردای اساسی ، تعیین می‌شود . پس

$$B^i = g^{ij}B_j \qquad (۱۵۲ - ۵)$$

لازمهٔ سازگاربودن‌این‌نمادنگاری‌این‌است‌کهاگرابتداشاخص پایین آورده شود وسپس بالا برده‌شود ، بازبردار اصلی به دست آید ، و همین طور هم هست زیرا اگر A_i از A^i به دست آمده باشد (معادلهٔ (۵ ــ ۱۵۱)) ،نتیجهٔ بالا بردن شاخص پایین آن (معادلهٔ (۵ ــ ۱۵۲)) ،عبارت است از

$$g^{ij}A_j = g^{ij}g_{jk}A^k = \delta^i_k A^k = A^i \qquad (۱۵۳ - ۵)$$

که دراین‌محاسبه ازمعادلات (۵ ــ ۴۱) استفاده شده است .به‌همین ترتیب ،اگر یک شاخص، اول بالا برده شود و سپس پایین آورده شود ، در این صورت بردار هموردای اصلی دوباره حاصل می‌شود .

اکنون روشن است که به چه طریق می‌توان شاخصهای یک تانسور را بالا یا پایین

برد. مثلا" اگر $A^{ij}{}_k$ یک تانسور باشد، تعریف می‌کنیم:

$$A^{i}{}_{j}{}^{\cdot}{}_{k} = g_{jr} A^{ir}{}_{k} \qquad (۵-۱۵۴)$$

از آنجا که ممکن است در طول یک محاسبه، شاخصها بالا یا پایین برده شوند، بهتر است که شاخصهای پایین‌به سمت راست شاخصهای‌بالا برده شوند. همچنین در بسیاری از موارد بهتر است با گذاشتن یک‌نقطه در جای‌خالی‌حاصل از بالا بردن یا پایین آوردن یک‌شاخص، این عملیات رایادداشت کنیم. این قراردادهادر معادلهٔ (۵ ــ ۱۵۴) نشان داده شده اند.

فرض کنید که یک شاخص ازتانسور اساسی g_{ij}، بالابرده شده است. نتیجه عبارت است از:

$$g^{k}{}_{\cdot j} = g^{ki} g_{ij} = \delta^{k}{}_{j} \qquad (۵-۱۵۵)$$

یعنی تانسوراساسی آمیخته. وقتی یک شاخص از g^{ij} پایین آورده‌شود، همان تانسور حاصل می‌شود. اگر هر دو شاخص پایین g_{ij} بالا برده شوند، حاصل عبارت خواهد بود از:

$$g^{ri} g^{sj} g_{ij} = g^{ri} \delta^{s}{}_{i} = g^{rs} \qquad (۵-۱۵۶)$$

بنابراین، این نمادنگاری‌کاملا" سازگار است و g_{ij} و g^{ij} و $\delta^{i}{}_{j}$ بترتیب مؤلفه‌های هموردا، پادوردا و آمیختهٔ یک تانسور اساسی در نظر گرفته می‌شوند.

ضرب داخلی دو بردار A^i و B_i را در نظر بگیرید. داریم

$$\begin{aligned} A^i B_i &= g^{ij} A_j g_{ik} B^k, \\ &= g^{ij} g_{ik} A_j B^k, \\ &= \delta^{j}{}_{k} A_j B^k, \\ &= A_k B^k, \\ &= A_i B^i. \end{aligned} \qquad (۵-۱۵۷)$$

واضح است که شاخص ظاهری موجود در یک عبارت مربوط به‌حاصل ضرب داخلی، می‌تواند در یک عامل بالا ودر عامل دیگر پایین برده شود بدون اینکه نتیجه تغییر کند. مسلما" این مطلب در مورد ضرب داخلی هرجفت از تانسورها، صدق می‌کند.

اگر در $\mathscr{E}_N$ فقط چارچوبهای دکارتی قائم را در نظر بگیریم ، خواهیم داشت :

$$ds^2 = dx^i dx^i \tag{۱۵۸ — ۵}$$

و از این رو داریم :

$$\left.\begin{aligned} g_{ij} &= 1, \quad i = j, \\ &= 0, \quad i \neq j. \end{aligned}\right\} \tag{۱۵۹ — ۵}$$

حال به دست می‌آید که: $g = |g_{ij}| = 1$ و

$$\left.\begin{aligned} g^{ij} &= 1, \quad i = j. \\ &= 0, \quad i \neq j. \end{aligned}\right\} \tag{۱۶۰ — ۵}$$

بنابراین اگر A_i یک بردار دراین فضا باشد ،طبق تعریف ماۆلفه های پادوردای آن عبارت خواهند بود از:

$$A^i = g^{ij} A_j = A_i \tag{۱۶۱ — ۵}$$

که تاییدی است‌براین که دراین مورد خاص از $\mathscr{E}_N$، بین بردارهای هموردا و پادوردا تمایزی وجود ندارد .

۵ — ۱۲ ضرب نرده ای؛ بزرگی بردارها

معمولا" در $\mathscr{E}_N$ بزرگی‌بردارتغییرمکان dx^i را برابر ds اختیارمی‌کنندکه توسط معادلهٔ (۵ — ۱۵۸)داده‌می‌شود . بزرگی همین‌بردار در $\mathscr{R}_N$معمولا برابر ds اختیار می‌شود که توسط معادلهٔ (۵ — ۱۵۰) تعیین می‌شود . اگر A^i بردار پادوردای دیگری باشد ، می‌توان‌آن را مثل یک بردار تغییر مکان نمایش داد ، در این صورت بزرگی آن عبارت است از ناوردای A طوری که :

$$A^2 = g_{ij} A^i A^j \tag{۱۶۲ — ۵}$$

از این رو این معادله را برای تعریف بزرگی A^i اختیار می‌کنند .

با بالا وپایین بردن شاخصهای ظاهری در معادلهٔ (۵ — ۱۶۲) ، نتیجهٔ هم ارز زیر را به دست می‌آوریم :

$$A^2 = g^{ij} A_i A_j \qquad (۵-۱۶۳)$$

فرض اینکه دو بردار وابستهٔ A_i و A^i بزرگی یکسانی دارند، امری است طبیعی، از این رو A بزرگی A_i نیز فرض می‌شود. معادلهٔ (۵ــ۱۶۳) نشان می‌دهد که چگونه می‌توان این بزرگی را مستقیما" از A_i محاسبه کرد.

چون $g_{ij}A^j = A_i$ و $g^{ij}A_j = A^i$ ، پس دیده‌می‌شودکه‌معادلات (۵ــ۱۶۲) و (۵ــ۱۶۳) نیز با معادلهٔ

$$A^2 = A_i A^i \qquad (۵-۱۶۴)$$

هم ارزند.

ضرب نرده ای دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ معمولا با ناوردای زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_i B^i = A^i B_i = g_{ij} A^i B^j = g^{ij} A_i B_j \qquad (۵-۱۶۵)$$

توجه کنید که

$$A^2 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} \qquad (۵-۱۶۶)$$

اکنون از مانستگی با $\mathscr{E}_3$ ، می‌توان θ ، زاویهٔ بین دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ ، را تعریف کرد، طوری که:

$$AB\cos\theta = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \qquad (۵-۱۶۷)$$

یعنی

$$\cos\theta = \frac{A^i B_i}{\sqrt{[(A^j A_j)(B^k B_k)]}} \qquad (۵-۱۶۸)$$

اگر $\theta = \frac{1}{2}\pi$ باشد، گفته می‌شود که دو بردار **متعامد** هستند و

$$A^i B_i = 0 \qquad (۵-۱۶۹)$$

۵ ــ ۱۳ نمادهای کریستوفل؛ ارتباط سنجه‌ای

همچنانکه در کتابهای‌درسی‌جبر ثابت شده است، در هر نقطهٔ مفروض P از $\mathscr{R}_N$ ، می‌توان باتبدیل‌خطی منظم مختصات از x^i به y^j صورت درجه دوم‌همگنی‌را که سنجه با آن تعریف

می‌شود به صورت قطری در آورد ، بدین گونه

$$g_{ij}dx^i dx^j = (dy^1)^2+(dy^2)^2+\ldots+(dy^N)^2 \qquad (۱۷۰-۵)$$

این تبدیل ممکن است شامل ضرایب مختلط باشد . می‌توان فرض کرد که سنجه این صورت ساده شده را در یک همسایگی کوچک P که در آن y^j مثل مختصات دکارتی قائم در $\mathscr{E}_N$ رفتار می‌کند ، پذیرا باشد . بنابراین در یک چنین همسایگی ، مؤلفه های ارتباط Γ^j_{ik} را می‌توان به صورتی که در معادلهٔ (۵ — ۶۰) آمده است نمایش داد ، پس این ارتباط باید در نقطهٔ P برحسب شاخصهای پایین خود متقارن باشد . این موضوع در هر نقطهٔ $\mathscr{R}_N$ صادق خواهد بود . بنابراین ثابت کردیم که اگر قرار باشد جابجایی موازی در هر ناحیهٔ کوچک اقلیدسی باتعریف متداول برای چنین ناحیه ای مطابقت داشته باشد ، ارتباط منسوب به فضای ریمان باید متقارن باشد .

ارتباط ، غیراز این واقعیت که متقارن است ، از جهات دیگر اختیاری است . بااین حال مشتق هموردای $A_{i;k}$ را در نظر بگیرید . از لحاظ صوری می‌توان آن را به دو روش از A^i به دست آورد :

الف) اول شاخص را پایین آورد وسپس مشتق گرفت .

ب) اول مشتق گرفت وسپس شاخص را پایین آورد .

این دوعمل مسلماً "تولید اشکال خواهند کرد ، مگر اینکه آنها جابجا پذیر باشند که دراین صورت هر دو فرایند ، منجر به یک نتیجه خواهند شد . پس بی‌مناسبت نیست که در صورت امکان ، ارتباط را طوری تعریف کنیم که این عملیات جابجا پذیر باشند . بدین معنی که لازم است داشته باشیم :

$$g_{ij}A^j{}_{;k} = (g_{ij}A^j)_{;k} \qquad (۱۷۱-۵)$$

این شرط با بسط طرف راست به وسیلهٔ مشتق گیری از عوامل ضرب چنین می‌شود :

$$g_{ij}A^j{}_{;k} = g_{ij}A^j{}_{;k}+g_{ij;k}A^j$$

یا

$$g_{ij;k}A^j = 0 \qquad (۱۷۲-۵)$$

این رابطه باید برای A^j ی اختیاری صادق باشد ، از این رو داریم :

$$g_{ij;k} = 0 \qquad (۱۷۳-۵)$$

یعنی ارتباط باید طوری انتخاب شود که مشتق هموردای تانسور سنجهٔ g_{ij} برابر صفر شود. این منظور، بدین صورت می‌تواند انجام بگیرد:

جایگشت چرخه ای شاخصهای i و j و k در معادلهٔ (۵ـ۱۷۳)، معادله های زیر را به دست می‌دهد:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^r_{ik} g_{rj} - \Gamma^r_{jk} g_{ir} &= 0, \\ \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \Gamma^r_{ji} g_{rk} - \Gamma^r_{ki} g_{jr} &= 0, \\ \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \Gamma^r_{kj} g_{ri} - \Gamma^r_{ij} g_{kr} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (۱۷۴-۵)$$

با کم کردن معادلهٔ اول از مجموع دو معادلهٔ دیگر در این مجموعه معادلات وبا در نظر گرفتن اینکه g_{ij} و Γ^i_{jk} متقارن هستند، حاصل می‌شود:

$$g_{kr}\Gamma^r_{ij} = [ij,k] \qquad (۱۷۵-۵)$$

که درآن:

$$[ij,k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) \qquad (۱۷۶-۵)$$

$[ij,k]$ را اصطلاحا "*نمادکریستوفل از نوع اول*" می‌نامند. این نمادیک تانسور نیست ولی در هرفورمولی که موجود باشد شاخصهای آن همواره مثل شاخصهای پایین عمل می‌کنند و نسبت به شاخصهای i و j متقارن است.

اگر طرفین معادلهٔ (۵ـ۱۷۵) را در g^{sk} ضرب کنیم ونسبت به k جمع کنیم، نتیجه چنین می‌شود:

$$\Gamma^s_{ij} = \{{}_i{}^s{}_j\} \qquad (۱۷۷-۵)$$

که درآن

$$\{{}_i{}^s{}_j\} = g^{sk}[ij,k] = \tfrac{1}{2}g^{sk}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) \qquad (۱۷۸-۵)$$

$\{{}_i{}^s{}_j\}$ را *نمادکریستوفل از نوع دوم* می‌نامندواین نیز تانسور نیست. و نسبت به‌شاخصهای

i و j متقارن است.

اکنون بآسانی می‌توانیم ثابت کنیم که اگر ارتباط بامعادلهٔ (۵ ـ ۱۷۷) تعیین شود، شرط (۵ ـ ۱۷۳) صدق خواهد کرد. بعلاوه چون

$$g^{ij}g_{kj} = \delta^i{}_k \tag{۵ ـ ۱۷۹}$$

با گرفتن مشتق هموردا از طرفین این رابطه، به دست می‌آوریم:

$$g^{ij}{}_{;l}g_{kj} = 0 \tag{۵ ـ ۱۸۰}$$

با ضرب کردن در g^{kr} و جمع کردن نسبت به k حاصل می‌شود:

$$g^{ir}{}_{;l} = 0 \tag{۵ ـ ۱۸۱}$$

بنابراین مشتق همورداى تانسور پادوردای اساسی نیز برابر صفر است. حال نتیجه می‌شود که:

$$(g^{ij}A_j)_{;k} = g^{ij}A_{j;k} \tag{۵ ـ ۱۸۲}$$

یعنی، ممکن است یک شاخص پایین راقبل یا بعداز مشتق گیری هموردا بدون اینکه درنتیجه تاثیر داشته باشد بالا برد. واضح است که این مطلب در مورد تمام تانسورها از هر رتبه که باشند صدق می‌کند.

ارتباطی را که‌با معادلهٔ (۵ ـ ۱۷۷) تعیین می‌شود، *ارتباط سنجه ای* می‌نامند. با انتخاب این ارتباط، می‌توان باتمام‌صورتهای تانسور اساسی در مشتق گیری همورداmانند مقادیر ثابت رفتار کرد.

اگریک چارچوب مختصات‌دکارتی‌قائم در$\mathscr{E}_N$به کار برده‌شود، g_{ij} ها ثابت خواهند بود (رک معادلهٔ (۵ ـ ۱۵۹))ونماد های کریستوفل برابر صفر می‌شوند. بنابراین نتیجه می‌شود که در این صورت مشتقهای هموردا به مشتقهای جزئی معمولی تبدیل می‌شوند. در بخش ۲ ـ ۴ ثابت شد که این گونه مشتقها نسبت به این چارچوبها، تانسور هستند.

۵ ـ ۱۴ تانسور همورداى خمش[1]

همهٔ مؤلفه‌های B^i_{jkl} مستقل نیستند، زیرااین‌تانسورنسبت‌به‌شاخصهای k و l پادمتقارن

1) covariant curvature tensor

است. اما اگر *ارتباط متقارن باشد*، با استفاده از معادلهٔ (۵ — ۱۳۳) بسهولت می‌توان ثابت کرد که:

$$B^{l}_{jkl}+B^{l}_{klj}+B^{l}_{ljk} = 0 \qquad (۱۸۳ — ۵)$$

اگر ارتباط، سنجه‌ای باشد، با پایین آوردن شاخص پادوردای تانسور ریمان — کریستوفل، یک تانسورخمش کاملاً" هموردای B_{ijkl} به دست می‌آید. این تانسور دارای چندین خاصیت تقارن است، که یکی از این خواص بلافاصله با پایین آوردن شاخص i در تمامی رابطهٔ بالا به دست می‌آید، به طوری که

$$B_{ijkl}+B_{iklj}+B_{iljk} = 0 \qquad (۱۸۴ — ۵)$$

اگر ابتدا عبارت بخصوصی برای این بردار هموردا حساب کنیم، می‌توانیم خواص دیگری از این نوع را به دست آوریم.

از معادلهٔ (۵ — ۱۳۳) نتیجه می‌شود که:

$$B_{ijkl} = g_{is}\left[\{{}_{r}{}^{s}{}_{k}\}\{{}_{j}{}^{r}{}_{l}\}-\{{}_{r}{}^{s}{}_{l}\}\{{}_{j}{}^{r}{}_{k}\}+\frac{\partial}{\partial x^{k}}\{{}_{j}{}^{s}{}_{l}\}-\frac{\partial}{\partial x^{l}}\{{}_{j}{}^{s}{}_{k}\}\right] \qquad (۱۸۵ — ۵)$$

با ضرب معادلهٔ (۵ — ۱۷۸) در g_{rs} و جمع کردن نسبت به s، به دست می‌آوریم:

$$g_{rs}\{{}_{i}{}^{s}{}_{j}\} = \delta^{k}_{r}[ij,k] = [ij,r] \qquad (۱۸۶ — ۵)$$

یعنی پایین آوردن شاخص نماد نوع‌دوم، باعث ایجاد نماد نوع اول می‌شود. بنابراین معادلهٔ (۵ — ۱۸۵) هم ارز است با:

$$B_{ijkl} = [rk,i]\{{}_{j}{}^{r}{}_{l}\}-[rl,i]\{{}_{j}{}^{r}{}_{k}\}+\frac{\partial}{\partial x^{k}}[g_{is}\{{}_{j}{}^{s}{}_{l}\}]-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x^{l}}[g_{is}\{{}_{j}{}^{s}{}_{k}\}]-\frac{\partial g_{is}}{\partial x^{k}}\{{}_{j}{}^{s}{}_{l}\}+\frac{\partial g_{is}}{\partial x^{l}}\{{}_{j}{}^{s}{}_{k}\}. \qquad (۱۸۷ — ۵)$$

اکنون از معادلهٔ (۵ — ۱۷۶) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{\partial g_{is}}{\partial x^{k}} = [ik,s]+[sk,i] \qquad (۱۸۸ — ۵)$$

و از این رو

$$
\begin{aligned}
B_{ijkl} = {} & [rk,i]\{^{r}_{jl}\}-[rl,i]\{^{r}_{jk}\}+\frac{\partial}{\partial x^{k}}[jl,i]-\frac{\partial}{\partial x^{l}}[jk,i]- \\
& -\{^{s}_{jl}\}([ik,s]+[sk,i])+\{^{s}_{jk}\}([il,s]+[sl,i]), \\
= {} & \frac{\partial}{\partial x^{k}}[jl,i]-\frac{\partial}{\partial x^{l}}[jk,i]-\{^{s}_{jl}\}[ik,s]+\{^{s}_{jk}\}[il,s], \\
= {} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{li}}{\partial x^{j}\partial x^{k}}+\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^{l}\partial x^{i}}-\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^{i}\partial x^{k}}-\frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x^{j}\partial x^{l}}\right)+ \\
& +g_{sr}\{^{r}_{il}\}\{^{s}_{jk}\}-g_{sr}\{^{r}_{ik}\}\{^{s}_{jl}\}. \qquad (۵-۱۸۹)
\end{aligned}
$$

اینک واضح است که داریم :

$$B_{ijkl} = -B_{jikl}, \qquad (۵-۱۹۰)$$

$$B_{ijkl} = -B_{ijlk}, \qquad (۵-۱۹۱)$$

$$B_{ijkl} = B_{klij}. \qquad (۵-۱۹۲)$$

معادلات (۵ ــ ۱۹۰) و (۵ ــ ۱۹۱) نشان می‌دهند که B_{ijkl} نسبت به دو شاخص اول و آخر، پادمتقارن است.

همچنین باپایین‌آوردن‌شاخص بالا در سرتاسر اتحاد بیانچی (۵ ــ ۱۴۹)، نتیجه می‌گیریم که

$$B_{ijkl;m}+B_{ijlm;k}+B_{ijmk;l} = 0 \qquad (۵-۱۹۳)$$

۵ ــ ۱۵ واگرایی ؛ لاپلاسی ؛ تانسور اینشتین

اگر مشتق هموردای یک میدان تانسوری تعیین شود و سپس نسبت به شاخص مشتق و یکی از شاخصهای بالا تنجانیده شود، حاصل را **واگرایی** آن تانسور می‌نامند. در $\mathscr{E}_N$ مشتقهای جزئی‌و هموردانسبت به تبدیلات مختصات قائم با هم برابراند، در این صورت این‌تعریف واگرایی با تعریف بخش ۲ ــ ۵ موافقت دارد.

از تانسور $A^{ij}{}_{k}$، دو واگرایی می‌توان تشکیل داد. به این صورت

$$\mathrm{div}_i A^{ij}{}_{k} = A^{ij}{}_{k;i} \quad \text{و} \quad \mathrm{div}_j A^{ij}{}_{k} = A^{ij}{}_{k;j} \qquad (۵-۱۹۴)$$

یک بردارپادوردا، فقط دارای یک واگرایی است که ناوردا است. اگر ارتباط، یک ارتباط سنجه ای باشدمی‌توان چنین‌واگرایی را بسهولت برحسب مشتقهای جزئی معمولی بیان‌کرد، بدین ترتیب: چون مشتق یک دترمینان را می‌توان از جمع نتایج حاصل از مشتق گیری جداگانهٔ هر سطر به دست آورد، پس نتیجه می‌گیریم که:

$$\frac{\partial g}{\partial x^j} = G^{ik}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = gg^{ik}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \qquad (۱۹۵-۵)$$

با قرار دادن مقدار $\partial g_{ik}/\partial x^j$ از معادلهٔ (۵ــ۱۸۸)، معادلهٔ بالا چنین می‌شود:

$$\frac{\partial g}{\partial x^j} = gg^{ik}([ij,k]+[kj,i]) = 2g\{{}^i_{ij}\} \qquad (۱۹۶-۵)$$

بنابراین

$$\{{}^i_{ij}\} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{g}) \qquad (۱۹۷-۵)$$

اکنون فرض‌کنید که A^i یک میدان برداری باشد. واگرایی آن عبارت است از:

$$A^i{}_{;i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i}+\{{}^i_{ji}\}A^j = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\sqrt{g}\frac{\partial A^i}{\partial x^i}+A^j\frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{g})\right],$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}A^i), \qquad (۱۹۸-۵)$$

که عبارت مورد نظر است.

بویژه، اگرمیدان‌برداری از گرادیان (شیب) یک ناوردای V حاصل شود، خواهیم داشت:

$$A_i = \frac{\partial V}{\partial x^i} \qquad (۱۹۹-۵)$$

و از این رو

$$A^i = g^{ij}\frac{\partial V}{\partial x^j} \qquad (۲۰۰-۵)$$

اکنون از معادلهٔ (۵ــ۱۹۸) نتیجه می‌شود که واگرایی این بردار عبارت است از:

$$\mathrm{div\,grad}\, V = \nabla^2 V = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial V}{\partial x^j}\right) \qquad (۲۰۱-۵)$$

طرف راست این معادله صورت لاپلاسی V را در یک فضای عام ریمان نمایش می‌دهد. با به کاربردن محورهای قائم، معادلات (۵ــ۱۶۰) در $\mathscr{E}_N$ معتبر هستند و داریم

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^i} \qquad (۵-۲۰۲)$$

که همان صورت آشنای لاپلاسی است.

اکنون می‌خواهیم واگرایی تانسور ریچی R_{jk} (معادلهٔ (۵ــ۱۳۵)) را حساب کنیم.

اگر ارتباط سنجه ای به‌کاربرده‌شود، این تانسور متقارن خواهد بود. زیرا بااستفاده‌از معادلات (۵ــ۱۹۰) ــ (۵ــ۱۹۲) داریم:

$$\begin{aligned} R_{kj} &= B^l{}_{kjl} = g^{lr} B_{rkjl} = g^{lr} B_{jlrk} = g^{lr} B_{ljkr} \\ &= B^r{}_{jkr} = R_{jk}, \end{aligned} \qquad (۵-۲۰۳)$$

بنابراین بالا بردن یکی از دو شاخص، همان تانسور آمیختهٔ R^j_k را تولید می‌کند که اگر تنجانیده شود یک ناوردا به دست می‌آید.

$$R = R^j_j \qquad (۵-۲۰۴)$$

R را خمش نرده ای $\mathscr{R}_N$ می‌نامند.

واگرایی تانسور ریچی عبارت است از:

$$\begin{aligned} R^m_{l;m} &= g^{ml} R_{ll;m}, \\ &= g^{ml} B^j{}_{lj;m}, \\ &= g^{ml} g^{jk} B_{klj;m}. \end{aligned} \qquad (۵-۲۰۵)$$

با در نظر گرفتن معادلهٔ (۵ــ۱۹۲)، اتحاد بیانچی (۵ــ۱۹۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$B_{klij;m} + B_{lmij;k} + B_{mkij;l} = 0 \qquad (۵-۲۰۶)$$

و از آنجا نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} R^m_{l;m} &= -g^{ml} g^{jk} (B_{lmij;k} + B_{mkij;l}), \\ &= -g^{ml} g^{jk} (B_{mlji;k} - B_{mkjl;l}), \\ &= -g^{jk} (B^l{}_{lji;k} - B^l{}_{kjl;l}), \\ &= -g^{jk} (R_{lj;k} - R_{kj;l}), \\ &= -R^k_{l;k} + R^j_{j;l}. \end{aligned} \qquad (۵-۲۰۷)$$

بنابراین:

$$R^{m}_{l;m} = \tfrac{1}{2}R^{l}_{j;l} = \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^{l}} \qquad (۲۰۸-۵)$$

واگرایی تانسور ریچی است.
حال تانسور آمیخته

$$R^{l}_{j} - \tfrac{1}{2}\delta^{l}_{j}R \qquad (۲۰۹-۵)$$

را در نظر بگیرید. واگرایی آن برابر است با

$$R^{l}_{j;l} - \tfrac{1}{2}\delta^{l}_{j}\frac{\partial R}{\partial x^{l}} = R^{l}_{j;l} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^{j}} = 0. \qquad (۲۱۰-۵)$$

این تانسور اینشتین است، و مؤلفه های هموردا و پادوردای آن بترتیب عبارت اند از:

$$R_{ij} - \tfrac{1}{2}g_{ij}R, \text{ و } R^{ij} - \tfrac{1}{2}g^{ij}R \qquad (۲۱۱-۵)$$

که اگر تنجانیده شود، ناوردای زیر به دست می‌آید:

$$R - \tfrac{1}{2}NR = -\tfrac{1}{2}(N-2)R \qquad (۲۱۲-۵)$$

۵-۱۶ زمین پیماها

فرض کنید C یک منحنی باشد که در فضای $\mathcal{R}_N$ رسم شده است و دارای سنجه (۵-۱۵۰) است و فرض کنید s پارامتر (فراسنج) مشخصی است روی C، طوری که اگر s و $s+ds$ بترتیب مقادیر آن در دو نقطه مجاور P و P' (روی C) باشند آنگاه ds برابر است با بازه بین این دو نقطه. اگر x^{l} مختصات نقطه ای مثل P واقع در روی C باشد، آنگاه منحنی به وسیله معادلات پارامتری (فراسنجی)

$$x^{l} = x^{l}(s) \qquad (۲۱۳-۵)$$

تعریف خواهد شد.

چون dx^i مؤلفه های یک بردار هستند و ds یک ناوردا است ، پس dx^i/ds یک بردار پادوردا درنقطهٔ P است و بزرگی آن طبق معادلهٔ (۵ ــ ۱۶۲) برابر است با :

$$\left(g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right)^{1/2} \qquad (۵-۲۱۴)$$

واین بنابر معادلهٔ (۵ ــ ۱۵۰) برابر واحد است . dx^i/ds را **مماس واحد** برمنحنی در نقطهٔ P می‌نامند و راستای آن برابر است با راستای جابجایی dx^i در روی منحنی از نقطهٔ P

فرض کنید C دارای این‌خاصیت‌است‌که خطوط مماس برتمام نقاط‌آن باهم موازی هستند ، به عبارت دیگر راستای منحنی در تمام طول آن ثابت است . مسلما" این خاصیت کاملا" مستقل از چارچوبهای مختصات به کار برده شده است . در $\mathscr{E}_3$ چنین‌منحنیی البته یک خط‌راست است . در $\mathscr{R}_N$ این منحنی را **زمین پیما** می‌نامند . بنابراین زمین پیما همتای خط‌راست اقلیدسی درفضای‌ریمان‌است . فرض‌کنید P و P' دو نقطهٔ مجاور در روی یک زمین پیما باشندکه بترتیب دارای مختصات x^i و x^i+dx^i هستند . اگر مماس واحد در نقطهٔ P به طور موازی تا نقطهٔ P' جابجا شود با مماس واحد در این نقطه یکسان خواهد بود . اینک‌طبق معادلهٔ (۵ ــ ۷۶) ، بعداز جابجایی موازی‌از P به‌P' ، مماس واحد دارای مؤلفه های زیر است :

$$\frac{dx^i}{ds}+\delta\left(\frac{dx^i}{ds}\right)=\frac{dx^i}{ds}-\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}dx^k \qquad (۵-۲۱۵)$$

ولی مماس واحد برای نقطه P' ، دارای این مؤلفه ها است :

$$\left(\frac{dx^i}{ds}\right)_{s+ds}=\frac{dx^i}{ds}+\frac{d^2x^i}{ds^2}ds \qquad (۵-۲۱۶)$$

بردارهای (۵ ــ ۲۱۵) و (۵ ــ ۲۱۶) به شرطی یکسان هستند که

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0 \qquad (۵-۲۱۷)$$

اگر این معادلات در هرنقطه ازمنحنی (۵ ــ ۲۱۳) صدق کنند ، در این صورت آن منحنی یک زمین‌پیما است . درآینده فرض خواهیم کرد که ارتباط سنجه ای است .

N معادلهٔ (۵ ـ ۲۱۷)، معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم برای توابع $x^i(s)$ هستند و جواب آنها شامل ۲N ثابت اختیاری خواهد بود. اگر A و B بترتیب دو نقطهٔ مفروض با مختصات $x^i = a^i$ و $x^i = b^i$ باشند، این ۲N شرط که زمین پیما باید از این نقاط بگذرد، عموما" ثابتهای اختیاری را تعیین خواهند کرد. بنابراین عموما" برای اتصال هر جفت از نقاط به یکدیگر، زمین پیمای یگانه ای وجود دارد. ولی در بعضی موارد چنین نخواهد بود. مثلا "زمین‌پیماهای واقع برسطح یک کره ($\mathscr{R}_2$) دوایر عظیمه هستند و به طورکلی دو کمان دایرهٔ عظیمه وجود دارند که دو نقطهٔ مفروض را به هم متصل می‌کنند، یکی کمان بزرگ‌ودیگری‌کمان کوچک. همچنین اگراین دو نقطه بردو انتهای یک قطرواقع باشند، تعداد بینهایت‌از کمانهای دایرهٔ عظیمه آنها را به هم متصل می‌کنند.

چون dx^i/ds درهرجایک بردار واحد است، پس روی یک زمین پیما داریم:

$$g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 1 \qquad (۵-۲۱۸)$$

پس، این رابطه باید یک انتگرال اول معادلات (۵ ـ ۲۱۷) باشد. برای اثبات این مطلب معادلات (۵ ـ ۲۱۷)را در $2\, g_{ir}dx^r/ds$ ضرب می‌کنیم و نسبت به i جمع می‌کنیم، حاصل می‌شود:

$$2g_{ir}\frac{dx^r}{ds}\frac{d^2x^i}{ds^2}+2g_{ir}\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^r}{ds} = 0 \qquad (۵-۲۱۹)$$

اکنون داریم

$$2g_{ir}\frac{dx^r}{ds}\frac{d^2x^i}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(g_{ir}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^r}{ds}\right)-\frac{dg_{ir}}{ds}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^r}{ds} \qquad (۵-۲۲۰)$$

همچنین

$$\begin{aligned}2g_{ir}\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^r}{ds} &= 2[jk,r]\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^r}{ds},\\ &= ([jk,r]+[rk,j])\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^r}{ds},\\ &= \frac{\partial g_{jr}}{\partial x^k}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^r}{ds},\\ &= \frac{dg_{jr}}{ds}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^r}{ds}.\end{aligned} \qquad (۵-۲۲۱)$$

با جمع معادلات (۵ــ ۲۲۰) و (۵ــ ۲۲۱) می‌توان دیدکه‌معادلهٔ (۵ــ ۲۱۹) به صورت زیر قابل بیان است

$$\frac{d}{ds}\left(g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right) = 0 \qquad (۲۲۲-۵)$$

باانتگرال گیری، انتگرال اول حاصل می‌شود:

$$g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = \text{constant} \qquad (۲۲۳-۵)$$

البته باید مقدار ثابت انتگرال گیری، برابر یک انتخاب شود.

تعریف یک زمین پیما که در ابتدای این بخش گفته شد، نمی‌تواند در مورد آن رده ازمنحنیها که برای آنها بازهٔ ds بین دو نقطهٔ مجاور صفر می‌شود، به کار برده شود. برای یک چنین منحنیی نمایش فراسنجی (۵ــ۲۱۳) مناسب‌نیست ومماس واحد رانمی‌توان تعریف کرد. به جای آن، فرض کنید که یک تناظر یک به یک بین نقاط منحنی ومقادیر یک ناوردای λ در یک بازهٔ $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1$ برقرارباشد طوری که بتوان معادلات فراسنجی را به صورت زیر نوشت:

$$x^i = x^i(\lambda) \qquad (۲۲۴-۵)$$

فرض می‌کنیم که $dx^i/d\lambda$ همگی در تمام نقاط منحنی وجود دارند. این مشتقها، یک بردار پادوردا تشکیل می‌دهند که بزرگی آن صفر است زیرا، چون در طول منحنی $ds = 0$ است،

$$g_{ij}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda} = 0 \qquad (۲۲۵-۵)$$

این بردار در راستای بردار جابجایی درروی منحنی dx^i خواهدبود و **مماس صفر**[1] برمنحنی خوانده می‌شود. اگر مماسهای‌صفر در تمام نقاط منحنی موازی باشند،منحنی‌یک**زمین‌پیمای صفر**[2] نامیده می‌شود. این متضمن این است که وقتی مماس صفر در نقطهٔ P، تا نقطهٔ مجاور P' به طور موازی‌جابجاشودبایدبامماس صفر در نقطهٔ اخیر موازی باشد و چون بزرگی این دوبردار در نقطهٔ P' یکسان است، پس بازهم برابر خواهند بود. مانند سابق، شرط

1) zero tangent

2) null geodesic

به دست آوردن چنین نتیجه ای عبارت است از:

$$\frac{d^2 x^i}{d\lambda^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda}=0. \qquad (۵-۲۲۶)$$

بنابراین، اینها معادلات زمین پیمای صفر هستند. اکنون با استدلال مشابهی‌که منجر بـه معادلهٔ (۵ــ ۲۲۳) شد، می‌توان نشان داد که‌انتگرال اول این معادلات عبارت است از:

$$g_{ij}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda}=\text{constant} \qquad (۵-۲۲۷)$$

در این مورد ، مقدار ثابت باید برابر صفر شود.

معادلهٔ (۵ــ ۲۱۷) رامی‌توان به‌صورت‌دیگری‌نوشت که‌برای کاربردهای‌بخصوصی مناسبتر است، بدین ترتیب که: اول‌آن‌را در $2g_{ri}$ ضرب می‌کنیم و سپس نسبت به i جمع می‌کنیم، معادله حاصل، هم ارز است با

$$\frac{d}{ds}\left(2g_{ri}\frac{dx^i}{ds}\right)-2\frac{dg_{ri}}{ds}\frac{dx^i}{ds}+2g_{ri}\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0. \qquad (۵-۲۲۸)$$

اکنون داریم

$$\begin{aligned}2\frac{dg_{ri}}{ds}\frac{dx^i}{ds}&=2\frac{\partial g_{ri}}{\partial x^k}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^i}{ds}\\&=\left(\frac{\partial g_{rj}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{rk}}{\partial x^j}\right)\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\end{aligned} \qquad (۵-۲۲۹)$$

و

$$2g_{ri}\Gamma^i_{jk}=[jk,r]=\frac{\partial g_{rj}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{rk}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^r} \qquad (۵-۲۳۰)$$

بنابراین معادلهٔ (۵ــ ۲۲۸) به معادلهٔ

$$\frac{d}{ds}\left(2g_{ri}\frac{dx^i}{ds}\right)-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^r}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0 \qquad (۵-۲۳۱)$$

تبدیل می‌شود.

تمرینات فصل پنجم

۱ ــ A_{ij} یک تانسور هموردا است . اگر $B_{ij}=A_{ji}$ ، ثابت کنید که B_{ij} نیز یک تانسورهموردا است . اگر A_{ij} ، در یک چارچوب ، متقارن (یا پادمتقارن) باشد ، نتیجه‌گیری کنید که در تمام چارچوبها ، متقارن (یا پادمتقارن) است . [راهنمایی : معادلات $A_{ij}=A_{ji}, A_{ij}=-A_{ji}$ معادلات تانسوری هستند .]

۲ ــ (z و y و x) عبارت اند از مختصات دکارتی قائم یک نقطهٔ P در $\mathscr{E}_3$ و (ϕ و θ و r) مختصات قطبی کروی متناظرهستند که‌طبق معادلات (۵ ــ ۳) به مختصات دکارتی بستگی دارند . $\mathbf{A}$ یک‌بردار پادورداست‌که‌درنقطهٔ P بامؤلفه‌های (A^z و A^y و A^x) درچارچوب دکارتی وبامؤلفه های (A^ϕ و A^θ و A^r) در چارچوب قطبی کروی ، تعریف شده است . مؤلفه‌های قطبی رابرحسب مؤلفه‌های دکارتی بنویسید . $O1$ و $O2$ و $O3$ عبارت اند از محورهای دکارتی قائم ، طوری که P در روی $O1$ واقع است و $O3$ در روی صفحهٔ Oxy . اگر (A^3 و A^2 و A^1) مؤلفه های $\mathbf{A}$ دراین چارچوب دکارتی باشند ، نشان دهید که

$$A^1 = A^r, \quad A^2 = rA^\theta, \quad A^3 = r\sin\theta A^\phi$$

(تذکر : فرض کنید که محورهای دکارتی ، راستگرد [1] هستند) .

۳ ــ اگر A_i یک بردار هموردا باشد ثابت کنید که $B_{ij}=A_{i,j}-A_{j,i}$ مثل یک تانسور هموردا تبدیل می‌شود . (این $\operatorname{curl}\mathbf{A}$ است) .اگر $\mathbf{A}$ گرادیان (شیب) یک نرده ای باشد ، ثابت‌کنید که تاو آن برابر صفر می‌شود .

۴ ــ اگر A_{ij} یک تانسور هموردای پادمتقارن باشد ، ثابت کنید که :

$$B_{ijk} = A_{ij,k}+A_{jk,i}+A_{ki,j}$$

مثل یک تانسور تبدیل می‌شود .

۵ ــ g_{ij} تانسور سنجهٔ یک $\mathscr{R}_3$ است . اگر $g=|g_{ij}|$ ، نشان دهید که e^{ijk} و e_{ijk} در $\mathscr{R}_3$ تانسور هستند ، که در آن

$$e^{ijk} = \epsilon^{ijk}/\sqrt{g} \quad \text{و} \quad e_{ijk} = \sqrt{(g)}\epsilon_{ijk}$$

در این فضا A_{ij} یک تانسور پادمتقارن است . نتیجه بگیرید که $\frac{1}{2}e^{ijk}A_{jk}$ یک

---

1) right-handed

بردار پادوردا است که مؤلفه های آن عبارت‌اند از:

$$A_{23}/\sqrt{g},\ A_{31}/\sqrt{g},\ A_{12}/\sqrt{g}$$

بویژه با فرض $A_{ij}=B_iC_j-B_jC_i$ ، اگر فضا اقلیدسی باشد، نشان‌دهیدکه‌بردار پادوردا عبارت است ازحاصل ضرب برداری بردارها ی همورداى B_i و C_i . (اگر فضا اقلیدسی نباشد این رابطه به عنوان تعریف حاصل ضرب برداری بردارهای هموردا محسوب می‌شود).

۶ ــ A^{ij} یک تانسور پادمتقارن در $\mathscr{R}_3$ است. نشان دهید که $\frac{1}{2}\ e_{ijk}A^{jk}$ یک بردار هموردا است که مؤلفه های آن $A^{23}\sqrt{g}$, $A^{31}\sqrt{g}$ و $A^{12}\sqrt{g}$ هستند. از آنجا حاصل ضرب برداری دو بردار پادوردا را تعریف کنید.

۷ ــ نشان دهید که

$$A_{i;j}-A_{j;i}=A_{i,j}-A_{j,i}$$

با این شرط که ارتباط متقارن باشد.

۸ ــ نشان دهید که:

$$A_{i;jk}-A_{i;kj}=B^r_{ijk}A_r+(\Gamma^r_{kj}-\Gamma^r_{jk})A_{i;r}$$

و نتیجه بگیرید که B^r_{ijk} یک تانسور است و مشتقهای هموردا در فضایی که در آن $B^r_{ijk}=0$ جابجا پذیر هستند و ارتباط متقارن است. نتیجهٔ متناظر را جهت یک بردار پادوردای A به دست آورید.

۹ ــ A درنقطهٔ x^i تعریف شده است ودر اطراف پربنـد[1] کوچکی که نقطه را در برگرفته است به طور موازی جابجا می‌شود. ثابت کنیدکه نمو A^i در یک دور، برابراست‌با

$$\Delta A_i=-\tfrac{1}{2}B^l_{ijk}A_l\alpha^{jk}$$

که در آن α^{jk} در معادلهٔ (۵ ــ ۱۲۲) تعریف شده است.

۱۰ ــ معادله های فراسنجی یک‌منحنی در $\mathscr{S}_N$عبارت اند از:

$$x^i=x^i(t)$$

که در آن t یک فراسنج‌ناورداست. درناحیه ای که این منحنی را دربرمی‌گیرد، یک‌تانسور A^i_j تعریف شده است. P و P' دو نقطهٔ مجاور t و $t+\Delta t$در روی‌منحنی هستند. تعریف ΔA^i_j عبارت است ازتفاوت بین مقدار تانسوردر نقطهٔ P' و مقدار تانسور در نقطهٔ P پس از اینکه به‌طورموازی به نقطهٔ P' جابجا شده است. ثابت کنید که:

1) contour

$$\frac{DA_j}{Dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A_j}{\Delta t} = A^l_{j;k}\frac{dx^k}{dt}.$$

(DA^j_l/Dt را مشتق ذاتی [1] تانسور در روی منحنی می‌نامند .)

۱۱ ــ ثابت‌کنید $\{^{\,i}_{j\,k}\}$ ، که توسط معادلهٔ (۵ ــ ۱۷۸) تعریف شده‌است ، مثل یک ارتباط تبدیل می‌شود .

۱۲ ــ اگر A_{ij} متقارن باشد ثابت‌کنید که $A_{ij;k}$ نسبت به i و j متقارن است .

۱۳ ــ نشان دهید که تعداد مؤلفه های B^i_{jkl} که بتوان آنها را بدلخواه تعیین کرد ، در حالت‌کلی برابراست‌با $\frac{1}{2} N^3 (N - 1)$. اگر ارتباط متقارن‌باشد ، این تعداد برابر است با $\frac{1}{3} N^2 (N^2 - 1)$. [راهنمایی : از معادلهٔ (۵ ــ۱۸۳) استفاده کنید .]

۱۴ ــ نشان دهید که تعداد مؤلفه های B_{ijkl} که بتوان آنها را بدلخواه تعیین کرد برابر است با $N^2 (N^2 - 1)/12$. [راهنمائی : از معادلـه هـــای (۵ ــ ۱۸۴) ، (۵ ــ ۱۹۰) ، (۵ ــ ۱۹۱) و (۵ ــ ۱۹۲) استفاده کنید .]

۱۵ ــ با مشتق گرفتن از رابطهٔ

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$$

نسبت به x^l ، نشان دهید که :

$$\frac{\partial g^{im}}{\partial x^l} = -g^{mk} g^{ij} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}$$

و از این رو داریم :

$$\frac{\partial g^{im}}{\partial x^l} + g^{ij}\{^{\,m}_{j\,l}\} + g^{mj}\{^{\,i}_{j\,l}\} = 0$$

نتیجه بگیرید که :

$$g^{ij}{}_{;k} = 0$$

۱۶ ــ اگر ارتباط یک ارتباط سنجه ای باشد ، ثابت کنید که :

$$R_{jk} = B^i_{jki} = -\frac{\partial}{\partial x^i}\{^{\,i}_{j\,k}\} + \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k}\log\sqrt{g} +$$

$$+\{^{\,i}_{r\,k}\}\{^{\,r}_{j\,i}\} - \{^{\,r}_{j\,k}\}\frac{\partial}{\partial x^r}\log\sqrt{g},$$

و

$$S_{kl} = B^i_{ikl} = 0.$$

[راهنمائی : از معادلهٔ (۵ ــ ۱۹۷) استفاده کنید .] نتیجه بگیرید که R_{jk} متقارن است .

---

1) intrinsic derivative

۱۷ ــ اگر ϕ و θ بترتیب طول جغرافیائی ومتمم عرض جغرافیائی در روی کره ای به شعاع واحد باشند، سنجهٔ

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$$

را برای این سطح به دست آورید. نشان دهید که تنها نمادهای سه شاخصی که برای این $\mathscr{R}_2$ مخالف صفراند، عبارت اند از

$$\{{}_2{}^1{}_2\} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \{{}_1{}^2{}_2\} = \{{}_2{}^2{}_1\} = \cot\theta$$

همچنین نشان دهید که تنها مؤلفه های غیر صفر B_{ijkl} عبارت اند از:

$$B_{1212} = -B_{1221} = B_{2121} = -B_{2112} = \sin^2\theta$$

و مؤلفه های تانسور ریچی برابراند با

$$R_{12} = R_{21} = 0, \quad R_{11} = -1, \quad R_{22} = -\sin^2\theta$$

ثابت کنید که تابع نرده ای خمش برابر است با $R = -2$

۱۸ ــ با به کار بردن معادلهٔ (۵ ــ ۲۰۱) ، برای $\nabla^2 V$ رابطه ای در مختصات قطبی کروی وقطبی استوانه ای به دست آورید.

۱۹ ــ در یک دستگاه مختصات بخصوص داریم:

$$\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \frac{\partial\phi}{\partial x^k} + \delta^i_k \frac{\partial\psi}{\partial x^j}$$

که در آن ϕ و ψ توابعی از مکان اند. ثابت کنید که B^i_{jkl} تنها تابعی از ψ است. اگر $\psi = -\log(a_i x^i)$ ، ثابت کنید که:

$$R_{jk} = B^i_{jki} = 0$$

۲۰ ــ در $\mathscr{R}_2$ که سنجهٔ آن عبارت است از:

$$ds^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{r^2 - a^2} - \frac{r^2 dr^2}{(r^2 - a^2)^2}, \quad (r > a)$$

ثابت کنید که معادلهٔ دیفرانسیل زمین‌پیماها را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$a^2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + a^2 r^2 = k^2 r^4$$

که در آن k^2 ثابت است طوری که $k^2 = 1$ اگر و تنها اگر زمین پیما صفر باشد. با قرار دادن $r\,d\theta/dr = \tan\phi$ ، نشان دهید که اگر این فضا روی یک صفحهٔ اقلیدسی نگاشته شود که در آن r و θ مختصات قطبی فرض شده اند، زمین پیماها به صورت خطوط مستقیم نگاشته می‌شوند و زمین‌پیماهای صفر خطوط مماس بردایرهٔ به شعاع $r = a$ هستند. (د.ل.)

۲۱ ــ یک فضای‌دوبعدی‌دارای سنجهٔ

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2+g_{22}(dx^2)^2$$

است. ثابت کنید که:

$$\frac{1}{g}B_{1212} = -\frac{1}{2\sqrt{g}}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)\right\} \qquad \text{(د.ل.)}$$

۲۲ ــ ثابت کنید که:

الف)
$$A^{ij}{}_{;i} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}A^{ij})+A^{ik}\{{}^j_{ik}\}$$

ب)
$$X^{ij}{}_{;ij} = 0,$$

به شرط اینکه X^{ij} پادمتقارن باشد. از این رو ثابت کنید که برای هر تانسور A^{ij} داریم

$$A^{ij}{}_{;ij} = A^{ij}{}_{;ji} \qquad \text{(د.ل.)}$$

۲۳ ــ یک منحنی C دارای معادلات فراسنجی

$$x^i = x^i(t)$$

است و دو نقطه A و B را به هم متصل می‌کند. طول منحنی طبق تعریف برابر است با:

$$L = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{\left(g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\right)}\,dt$$

شرایط اویلر را بنویسید طوری‌که L نسبت به تمام وردشهای [1] کوچک C، مانا [2] باشد و با عوض کردن متغیر مستقل‌دراین شرایط‌از t به s نشان دهید که‌آنهابامعادلات (۵ ــ ۲۱۷) برابراند. (این مطلب تعریف دیگری را برای زمین‌پیما به دست می‌دهد).

۲۴ ــ اگر Γ^i_{jk} یک ارتباط متقارن باشد، ثابت کنید که:

$$\Gamma^{i*}_{jk} = \Gamma^i_{jk}+\delta^i_j A_k+\delta^i_k A_j$$

نیز یک ارتباط متقارن است.

اگر B^i_{jkl} و B^{i*}_{jkl} بترتیب تانسور خمش ریمان ــ کریستوفل برحسب ارتباطهای Γ^i_{jk} و Γ^{i*}_{jk} باشند، ثابت کنید که:

$$B^{i*}_{jkl} = B^i_{jkl}+\delta^i_k A_{jl}-\delta^i_l A_{jk}+\delta^i_j(A_{kl}-A_{lk})$$

که در آن $A_{ij} = A_i A_j - A_{i;j}$

از این‌رو، نشان دهید که اگر A_i گرادیان (شیب) یک تابع نرده‌ای باشد، آنگاه:

1) variation

2) stationary

$$B^{l*}_{i|j}-B^{l*}_{i|j} = B^{l}_{j|i}-B^{l}_{i|j}.$$ (د.ک.)

۲۵ ــ ثابت کنید که تبدیلات ارتباط یک گروه تشکیل می‌دهند.

۲۶ ــ اگر $D=|\partial x^i/\partial \bar{x}^j|$ ، نشان دهید که:

$$\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial \bar{x}^l} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}\frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^j}$$

۲۷ ــ نشان دهید که قانون‌تبدیل برای کمیتهای K_l (معادلهٔ (۵ ــ ۹۱))، عبارت است از:

$$\overline{K}_l = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l}K_j+\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}\frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^j}$$

و نتیجه بگیرید که $\Gamma^r_{rl}-K_l$ یک تانسور است.

۲۸ ــ محورهای دکارتی مایل در یک صفحه، مفروض‌اند. نشان دهید که مؤلفه های پادوردای یک بردار را می‌توان‌با تصویر کردن یک بردار تعییرمکان بخصوص برروی محورها، با رسم خطوط موازی با محورها، ومؤلفه های هموردارا ازتصویر کردن با رسم خطوط عمود برمحورها، به دست آورد.

۲۹ ــ مختصات (ϕ و r) را در روی مخروط دوارقائم که نیم زاویهٔ راس‌آن α است، طوری تعریف کنید که سنجه برای سطح برابر

$$ds^2 = dr^2+r^2\sin^2\alpha\, d\phi^2$$

باشد. نشان دهید که خانوادهٔ زمین پیماها توسط رابطهٔ

$$r = a\sec(\phi\sin\alpha-\beta)$$

تعیین می‌شود که‌در آن a و β ثابتهای اختیاری هستند. این نتیجه را با باز کردن مخروط روی یک صفحه توضیح دهید.

۳۰ ــ یک $\mathscr{R}_N$ دارای سنجهٔ

$$ds^2 = e^{\lambda}dx^i dx^i$$

است که در آن λ تابعی از x^i است. نشان دهید که تنها نمادهای کریستوفل نوع دوم که مخالف صفراند عبارت اند از:

$$\begin{Bmatrix} P \\ QQ \end{Bmatrix} = (\delta^P_Q-\tfrac{1}{2})\,\lambda_P, \quad \begin{Bmatrix} P \\ PQ \end{Bmatrix} = \tfrac{1}{2}\lambda_Q$$

که در آن $\lambda_r = \partial\lambda/\partial x^r$ ، نتیجه بگیرید که:

$$\begin{Bmatrix} i \\ rP \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} r \\ Pi \end{Bmatrix} = \tfrac{1}{4}(N+2)\lambda_P^2 - \tfrac{1}{2}\lambda_r\lambda_r$$

و اینکه خمش نرده ای این فضا برابر است با :

$$R = (N-1)e^{-\lambda}[\lambda_{rr} + \tfrac{1}{4}(N-2)\lambda_r\lambda_r]$$

که در آن $\lambda_{rr} = \partial^2\lambda/\partial x^r \partial x^r$

۳۱ ــ در روی کره ای به شعاع واحد ، ϕ طول و θ متمم عرض است طوری‌که سنجهٔ سطح عبارت است از :

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$$

بردارهموردای A_i با مؤلفه های اولیهٔ (Y و X) مفروض است ودر روی کمانی بــه طــول $\phi\sin\alpha$ از دایرهٔ $\theta = \alpha$ تغییر مکان موازی‌پیدامی‌کند . نشان دهید که مؤلفه های A_i به مقادیر نهایی زیر می‌رسند :

$$A_1 = X\cos(\phi\cos\alpha) + Y\operatorname{cosec}\alpha\sin(\phi\cos\alpha),$$
$$A_2 = -X\sin\alpha\sin(\phi\cos\alpha) + Y\cos(\phi\cos\alpha).$$

ثابت کنید که بزرگی بردار A_i در اثر جابجایی ، تغییر نمی‌کند .

۳۲ ــ یک $\mathscr{R}_3$ دارای سنجهٔ

$$ds^2 = \lambda dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$

است ، که درآن λ تابعی است‌تنها از r . نشان دهید در روی زمین‌پیمایی که برای آن $s=0$ و $\theta = \frac{1}{2}\pi$ و $d\theta/ds = 0$ ، داریم :

$$\phi = \int \lambda^{1/2} d\psi$$

که در آن $r = b\sec\psi$. وقتی $\lambda = 1$ ، این نتیجه را به‌طور هندسی تعبیر کنید .

۳۳ ــ (۴ و ۳ و ۲ و ۱ = i) y^i مختصات دکارتی قائم در $\mathscr{E}_4$ هستند. نشان‌دهید که

$$y^1 = R\cos\theta,$$
$$y^2 = R\sin\theta\cos\phi,$$
$$y^3 = R\sin\theta\sin\phi\cos\psi,$$
$$y^4 = R\sin\theta\sin\phi\sin\psi,$$

معادلات فراسنجی یک فوق‌کره[1] به‌شعاع R هستند . اگر (ψ و ϕ و θ) مختصات روی این فوق کره فرض شوند ، نشان دهید که سنجه برای این $\mathscr{R}_3$ عبارت است از :

---

1) hyperspher

$$ds^2 = R^2[d\theta^2+\sin^2\theta(d\phi^2+\sin^2\phi\, d\psi^2)]$$

نتیجه بگیرید که دراین $\mathscr{R}_3$ خواهیم داشت:

$$B_{1212} = R^2\sin^2\theta, \quad B_{2323} = R^2\sin^4\theta\sin^2\phi,$$
$$B_{3131} = R^2\sin^2\theta\sin^2\phi,$$

و تمام مؤلفه های متمایز دیگر آن، صفر هستند. از این رو نشان دهید که:

$$B_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk})$$

که در آن $K=1/R^2$. (این شرط ثابت بودن خمش ریمانی K برای فضا است).

۳۴ ــ یک $\mathscr{R}_2$ دارای سنجهٔ

$$ds^2 = \operatorname{sech}^2 y(dx^2+dy^2)$$

است. معادلهٔ خانوادهٔ زمین‌پیماها را پیدا کنید.

ϕ و θ بترتیب عبارت‌اندازطول ومتمم عرض در روی سطح کره ای به شعاع واحد. باقرار دادن

$$x = \phi, \quad y = \log\cot\tfrac{1}{2}\theta$$

و با رسم x و y در روی یک‌صفحه‌به‌صورت‌مختصات دکارتی قائم، تصویر مرکاتور[1] به‌دست می‌آید. سنجه رابرای سطح کروی، برحسب x و y حساب کنید و نتیجه بگیرید که درتصویر مرکاتور دوایر عظیمه به وسیلهٔ منحنیهای

$$\sinh y = \alpha\sin(x+\beta)$$

نمایش داده می‌شوند که در آن α و β فراسنج هستند.

1) mercator's projection

فصل ششم

نظریهٔ نسبیت عام

۶ ـ ۱ اصل هم ارزی

نظریهٔ نسبیت خاص، مفهوم نیوتونی ناظر ممتاز را، که در فضای مطلق ساکن‌است و به نظروی قوانین فیزیکی ساده‌ترین صورت‌ممکن را به‌خود می‌گیرند ،رد می‌کند و در عوض فرض می‌کند که این قوانین برای‌تمام اعضای یک رده از ناظران لخت ، که نسبت به یکدیگر حرکت انتقالی یکنواخت دارند ، یکسان هستند . بنابراین هر چند که وجود یک ناظر ممتاز به‌تنهایی انکار می‌شود ، ولی وجود یک رده از این ناظران مورد قبول است . به نظرمی‌رسد که این امر متضمن این است که اگر تمام اجسام موجود در عالم بجز یک‌آزمایشگروآزمایشگاه وی از بین‌بروند ، معهذا این ناظر قادر خواهد بود با استفاده از این مطلب که پدیده های فیزیکی درچارچوبهای لخت باسادگی خاص توصیف می‌شوند ، چارچوبهای لخت را از نا ـ لخت تمیزدهد . بنابراین ،استنباط دیگر این است که فضای فیزیکی صرفا" یک‌انتزاع‌ریاضی نیست که وقتی رابطهٔ فواصل بین اجسام مادی‌مورد نظر است ، به کار بردن‌آن آسان باشد ، بلکه به‌خودی خودبه‌عنوان موجود جداگانه‌یی‌است که واجدساخت درونی کافی برای‌تعریف چارچوبهای لخت است . اما شواهد موجود همگی دلالت براین دارند که فضای فیزیکی را جز برحسب اندازه گیری فواصل اجسام فیزیکی نمی‌توان تعریف کرد . مثلا" چنین فضایی را می‌توان بابرقراری‌یک چارچوب مختصات دکارتی قائم که‌شامل سه میلهٔ سخت عمودبرهم است ، بنا نهاد . آنوقت می‌توان مختصات نقطه ای را که محل استقرار یک ذرهٔ مادی است با اندازه‌گیری فواصل آن از این میله ها به روش معمولی تعریف کرد . پس فضای فیزیکی چیزی جزانبوهه ای از تمام چارچوبهای مختصات ممکن نیست . ادعای وجود فضای فیزیکی مستقل از اندازه گیری فواصل بین اجسام مادی تنها وقتی مبنا دارد که بیان دقیق روشنی ارائه شود که باآن‌بتوان ، بدون انجام چنین اندازه گیریهایی ، وجود این فضاراکشف‌کرد . ولی چنین اقدامی تاکنون‌انجام نگرفته است . بنابراین فرض خواهیم کرد که خواص ویژه‌ای که چارچوبهای لخت دارا هستند به نحوی باتوزیع ماده درجهان بستگی داشته باشند و نیز اینکه این خواص نشاندهندهٔ یک ساخت ذاتی نیستند که فضای فیزیکی ، وقتی جدا از

مادهٔ موجود در آن درنظر گرفته شود، دارا است.

برمبنای براهین فوق می‌توان انتظار داشت که سرانجام تمام قوانین فیزیکی به صورتهایی قابل بیان‌خواهند بود که کاملا" مستقل از هر چارچوب مختصاتی باشند که‌فضای فیزیکی توسط آن تعریف می‌شود. به‌عبارت‌دیگر، قوانین فیزیکی به نظر تمام ناظران یکسان هستند. این *اصل نسبیت عام* است. این بدان معنی نیست که وقتی توزیع واقعی ماده در جهان مطرح می‌شود چارچوبهای خاصی، مناسبتر از چارچوبهای دیگرنباشند. هنگام محاسبهٔ میدان حاصل از یک‌توزیع بارالکتریکی با به‌کار بردن یک چارچوب مرجع که بار نسبت به آن‌کاملا" ساکن‌است، محاسبات بسیارساده می‌شوند. امامعنی این مطلب این نیست‌که‌قوانین الکترومغناطیس دراین چارچوب، ساده تر قابل بیان هستند، بلکه فقط بدین معنی است که دراین صورت این توزیع باربه‌طورساده‌تر توصیف می‌شود. به همین ترتیب صورتهای ساده تری را که بعضی محاسبات در چارچوبهای لخت اختیار می‌کنند، به رابطهٔ خاصی که این‌چارچوبهابامادهٔ‌موجوددرجهان‌دارند منسوب‌خواهیم‌کرد. بنابراین، اساسا" تمام‌ناظران رابه‌طور هم‌ارز درنظر خواهیم‌گرفت وبا به کار بردن قوانین فیزیکی یکسان به نتایج مساوی دربارهٔ گسترش هر دستگاه فیزیکی خواهیم رسید.

به‌هنگام‌کوشش برای بیان قوانین‌فیزیک به‌گونه ای‌که برای‌تمام‌ناظران معتبر باشند، مشکل عمده ای که‌پیش‌می‌آید این است که‌اگر ذرات آزمون‌رهاشوندو حرکت آنهاازچارچوبی که نسبت به یک چارچوب لخت دارای شتاب است مورد مطالعه قرار گیرد، این حرکت ها یکنواخت‌نخواهندبود واین واقعیت باعث متفاوت بودن این‌گونه چارچوبها از چارچوبهای لخت می‌شود طوری که برای این ردهٔ خاص از چارچوبها قوانین معمولی حرکت را نمی‌توان به کار برد. امابا یک شیوهٔ بسیار معروف مکانیک نیوتونی، یعنی وارد کردن مفهوم ***نیروهای لخت*** می‌توان با چارچوبهای‌شتاب‌دار بدان‌سان رفتارکردکه گویی لخت هستند و این‌نشان‌دهندهٔ راهی برای رهایی از مشکل فوق است. مثلا" فرض کنید که یک موشک فضائی که در خلاء حرکت‌می‌کند، در اثر نیروی موتورهایش دارای حرکت یکنواخت تندشونده است. ناظر داخل موشک، ملاحظه می‌کند که ذراتی که نگاه داشته نمی‌شوند دارای شتابی موازی با محور موشک هستند. باعلم به اینکه‌موتورها کار می‌کنند، ناظر این شتاب را به این واقعیت نسبت خواهدداد که‌چارچوب مرجع طبیعی وی، نسبت به یک چارچوب لخت دارای شتاب است. امااگر ناظرداخل موشک ترجیح دهد، می‌تواند چارچوب مرجع خود را لخت در نظر بگیرد و فرض کندکه تمام اجسام موجود در داخل موشک، تحت اثر نیروهای لختی قرار گرفته اند که موازی با محور موشک وارد می‌شوند.. اگر f شتاب موشک باشد دراین صورت‌نیروی‌لخت

مناسب‌که‌بایدبردره‌ای‌به جرم m وارد شود برابر $mf-$ است . به‌همین ترتیب اگرموتورهای موشک خاموش شوند ولی موشک حول محورخود بچرخد در این صورت ناظر داخل موشک باز ملاحظه خواهد کرد که ذرات آزاد نسبت به محیط وی به طور یکنواخت حرکت نمی‌کنند و می‌تواند بازهم با این‌فرض که نیروهای لخت مشخصی (یعنی نیروهای مرکز گریز وکوریولیس) وجود دارند ، از نسبت دادن این پدیده به این امر که چارچوب وی لخت نیست ، اجتناب ورزد .اما خاصیت بدیهی این نوع نیروهای لختی این است که اگر برجسمی اثر کنند باعث شتابی می‌شوندکه مستقل ازجرم جسم‌است ، زیرا نیرو همیشه از ضرب کردن جسم در شتابی مستقل ازجرم به دست می‌آید . همچنین این نیرو ، این خاصیت را با نیروی گرانش مشترک دارد ، زیرااین‌نیرونیز باجرم جسمی که جذب می‌شود متناسب است و از این‌رو شتابی‌ایجاد می‌کندکه مستقل ازاین جرم‌است . مستقل‌بودن‌شتاب گرانشی یک ذره از جرم آن را اوتووش[1] بادقت بسیارزیادی‌با آزمایش‌نشان داده‌است . بنابراین‌اگرهم‌ارزی‌نیروهای لختی‌وگرانشی‌را اثبات شده درنظربگیریم ،دراین صورت می‌توان تصورکرد که نیروهای لختی ناشی از حضور میدانهای گرانشی هستند . این *اصل هم ارزی*[2] است . بنا به این اصل ، وقتی موشکی با شتاب یکنواخت حرکت می‌کند ، ناظرداخل آن می‌تواند از شتاب خود نسبت به‌یک‌چارچوب لخت چشم بپوشد ودرعوض وجود یک میدان‌گرانشی‌یکنواخت به شدت $f-$ و موازی بامحور موشک راپذیرد .به همین ترتیب ،ناظرداخل موشکی که دارای حرکت چرخشی است‌می‌تواند حرکت خود را نادیده بگیرد و در عوض‌وجود میدان گرانشی را بپذیرد که دارای طبیعتی است که علت نیروهای مرکز گریز و کوریولیس‌محسوب می‌شود .

بنابراین با توسل به اصل هم‌ارزی ، ناظری که چارچوب مرجعی به کار می‌برد که نسبت به یک چارچوب لخت دارای حرکت اختیاری است ، می‌تواند این حرکت را ندیده بگیرد و به‌جای آن وجود یک میدان گرانشی را فرض‌کند . شدت این میدان در هرنقطه از چارچوب برابر خواهد بود با نیروی لختی وارد برواحد جرم در همان نقطه . با این روش هرناظری حق دارد که چارچوب مرجع خود را ساکن در نظر بگیرد و بنابراین تمام ناظران هم‌ارز می‌شوند .لکن خواننده احتمالا" هنوز قانع نشده است که فرق بین چارچوبهای‌لخت و چارچوبهایی که دارای شتاب هستند ،به طور موثر از بین رفته است و تصور می‌کند که این امر فقط با یک روش‌ریاضی که مدلول فیزیکی ندارد ، از نظر پوشیده شده است . بنابراین

1) Eötvös

2) principle of equivalence

ممکن است این خواننده خاطرنشان سازدکه میدانهای گرانشی که علت نیروهای لختی محسوب می‌شوند، میدانهای "پنداری"[1] هستندکه ممکن است با انتخاب یک چارچوب لخت به‌عنوان مرجع ،کاملاحذف‌شوند ، درصورتی‌که میدانهای "واقعی "مثل‌میدانهای‌ناشی‌اززمین وخورشیدنمی‌توانندبدین‌ترتیب‌حذف‌شوند . ممکن‌است‌خواننده‌علاوه‌براین‌معترض‌باشدکه‌هیچ عامل‌فیزیکی‌رانمی‌توان‌مسئول‌ایجادیک‌میدان‌پنداری‌دانست ، درصورتی‌که‌یک‌میدان "واقعی" راجسمی‌باجرم‌زیادتولیدمی‌کند . می‌توان بانسبت‌دادن چنین میدانهای"پنداری" به‌حرکت اجرام‌بسیار دور در عالم به‌این اعتراضات پاسخ داد . مثلا" اگر ناظری واقع در داخل موشکی که‌باشتاب ثابت حرکت می‌کند خود را ساکن فرض‌کند ، باید این را به‌عنوان یک واقعیت قابل مشاهده بپذیردکه تمام اجسام موجود در عالم به انضمام کهکشانها ، دارای شتابی اضافی برابر با f- نسبت به وی هستند و این ناظر می‌تواند این حرکت رابه وجود میدان گرانش یکنواختی‌که برذرات آزمون‌وی اثرمی‌کنند ، نسبت‌دهد . همچنین برای‌ناظری که نسبت به‌یک چارچوب لخت‌دوران می‌کند ،ولی‌خود وکشتی‌فضایی اش را ساکن می‌انگارد ، تمام عالم به دور.او درحال‌دوران است . این دوران اجرام عالم است که ماآن را باعث میدانهای‌گرانشی مرکز گریز و کوریولیس‌داخل موشک می‌دانیم .اما بعلاوه، این میدانهای گرانشی "لخت" ،علت حرکت‌کهکشانهابه گونه‌ای که از چارچوب‌غیر لخت مشاهده‌می‌شوند ، محسوب خواهندشد . مثلا" برای ناظری که در داخل موشکی قرار دارد که باشتاب یکنواخت حرکت می‌کند ،یک‌میدان‌گرانش یکنواخت باشدتf-درتمام فضا گسترش دارد وباعث ایجاد شتاب در کهکشانهامی‌شود ، برای ناظری که در داخل‌موشک قرار دارد ، برآیند میدانهای مرکز گریز وکوریولیس‌که برکهکشانها وارد می‌شود درست‌به اندازه ای است که برای ایجاد شتاب‌کهکشانها درمدار دایروی آنها به دورناظر به عنوان مرکز کافی است (خواننده بهتر است با استفاده از نتایج حاصل ازتمرین شماره‌ٔ یک فصل‌اول ، این مطلب را ثابت کند) . بنابراین ،با در نظر گرفتن این مطلب ، چارچوبهای لخت تنها به این جهت دارای خواص خصوصا" ساده هستندکه‌باتوزیع جرم درعالم‌رابطهٔ‌خاصی دارند . به همین ترتیب ، میدان الکترومغناطیس حاصل ازیک‌توزیع بارالکتریکی ،وقتی نسبت به‌یک چارچوب که تمام بارهای الکتریکی درآن‌ساکن هستند (با فرض‌وجود آن) توصیف شود ، به صورت سادهٔ مخصوصی درمی‌آید . اگر چارچوب دیگری‌مورد استفاده قرار گیرد ، در اثر وجود یک مولفهٔ مغناطیسی حاصل ازحرکت بارها ، میدان به‌شکل پیچیده ای در می‌آید .اماصرفا "چون چارچوبی می‌توان

---

1) fictitious

یافت که این میدان مغناطیسی در آن صفر می‌شود، در صورتی که برای برخی میدانهای مغناطیسی چنین چارچوبی یافت نمی‌شود، نبایدآنرا انگاری فرض کرد. قوانین الکترومغناطیس در تمام چارچوبها معتبراند هرچند مسلم است که برای حل مسائل خاصی ممکن است یک چارچوب بخصوص ازهرچارچوب دیگر بسیار مناسبتر باشد. بنابراین هیچکدام از دو میدان مرکز گریزو کوریولیس رانیزنباید تنها بدین جهت که می‌توان با انتخاب یک چارچوب مرجع مناسب آنها را از بین برد، به این عنوان که انگاری‌اند کنار گذاشت، گرچه ممکن است انتخاب چنین چارچوبی هنگام اجرای محاسبات بخصوصی، مناسب باشد. به‌طورخلاصه، اصل نسبیت عام را می‌توان معتبر شمرد ودر عین حال سادگی حرکت اجرام کهکشان نسبت به چارچوبهای لخت را می‌توان بیانگر وجود این چارچوبهای خاص دانست.

اگربپذیریم که‌وجودچارچوبهای لخت به توزیع مقیاس بزرگ[1] ماده‌در عالم وابسته است، آنگاه نتیجه می‌شود که لختیی که یک جسم دارای آن است وباعث حرکت یکنواخت آن در چنین چارچوبی می‌شود، نیز به علت‌همین توزیع ماده است. این *اصل ماخ*[2] است، بدین معنی که حضور مادهٔ دور دست در عالم باعث القای جرم در یک جسم می‌شود.

یکسانی جرم لختی[3] و جرم گرانشی که قبلاً توضیح داده نشده است بآسانی به عنوان پیامدی از اصل هم‌ارزی نتیجه می‌شود. زیرا ذره ای به جرم m را درنظر بگیرید که از چارچوب نالخت مشاهده می‌شود. می‌بینیم که یک نیروی گرانشی برابر با نیروی لختی، براین جسم‌اثر می‌کند. این نیرو مستقیماً با جرم لختی m متناسب است. ولی طبق اصل هم ارزی، تمام‌نیروهای گرانشی دارای همان ماهیت این نیروی بخصوص هستند و بنابراین مستقیماً متناسب باجرم لختی اجسامی خواهند بود که برآنهااثر می‌کنند. بدین ترتیب، "بار"گرانشی[4] یک ذره، که معرف حساسیت[5] آن‌نسبت به تأثیر میدانهای گرانشی است، با جرم لختی آن یکسان است و یکسانی جرمهای لختی وگرانشی به‌روشی سرراست ومتقاعد‌کننده توضیح داده شده است.

۶ـ۲ سنجه در یک میدان گرانشی

فرض کنید یک چارچوب لخت درناحیه‌ای‌ازفضا برقرار گردیده است‌که در آن‌تأثیرات‌گرانشی

---

1) large scale
2) Mach's principle
3) inertial mass
4) gravitational charge
5) susceptibility

موضعی‌وجودندارد . فرض کنید یک صفحهٔ‌مادی با سرعت زاویه ایωنسبت به این چارچوب دور محوری که برآن‌عمود است‌ودرچارچوب لخت ثابت است ، می‌چرخد . ناظر O که همراه صفحه حرکت می‌کند ، حق دارد خودش رادرحضور یک میدان گرانشی که‌آن‌را علت نیروهای مرکز گریزو کوریولیس محسوب می‌کند ، ساکن درنظر بگیرد . فرض کنیدناظر O تعداد زیادی نقطه در روی صفحه چنان تعیین می‌کند که فاصله همهٔ آنها از محور چرخش که با یک میلهٔ معیار اندازه‌می‌گیردبرابر r باشد و به این وسیله دایره‌ای رسم می‌کند . حال اگرناظرO میلهٔ اندازه گیری خود را در امتداد یک شعاع این دایره برای اندازه گیری طول آن r به طور مکرر پشت سرهم قرار دهد واین عمل به وسیلهٔ ناظر دیگر O' که به حال سکون در چارچوب لخت قراردارد ، نظاره‌شود ، ناظر O' درمقدار طول به‌دست آمده با ناظر O توافق خواهد داشت ، زیرا در مدت عمل اندازه گیری ، میله فقط حرکت عرضی انجام می‌دهد و بدین جهت‌انقباض فیتز جرالددر طول آن حاصل نمی‌شود . بنابراین دراین مطلب که تمام شعاعها باهم برابراند و شکل رسم شده دایره است ، ناظر O' با O توافق خواهد داشت . لکن‌اگر ناظر O میلهٔ خود را در روی محیط دایره قرار دهد (فرض می‌کنیم که ابعاد میله درمقایسه با محیط دایره کوچک است) . و طول آن‌را برابر l اندازه بگیرد ، ناظرO' با این اندازه‌گیری موافق نخواهد بود . زیرا ، برای او در حین عمل اندازه گیری ، میله در امتداد طول‌خود دارای‌سرعتی‌برابرωrاست وازاین روبه‌اندازهٔ‌ضریبی‌برابر $(1-\omega^2 r^2/c^2)^{1/2}$ منقبض‌می‌شود . با قبول این انقباض ناظرO' ادعا خواهدکردکه طول محیط دایره برابر است با

$$l(1-\omega^2 r^2/c^2)^{1/2} \qquad (۶-۱)$$

ولی ناظر O' ، چارچوب لختی را به کار می‌برد که می‌دانیم هندسه درآن اقلیدسی است ، بنابراین نتیجه می‌شود که

$$l(1-\omega^2 r^2/c^2)^{1/2} = 2\pi r \qquad (۶-۲)$$

واز این رو داریم :

$$l = \frac{2\pi r}{(1-\omega^2 r^2/c^2)^{1/2}} \qquad (۶-۳)$$

معادلهٔ اخیر نشان می‌دهد که برای ناظر O نسبت $l/۲r$ برابر π نیست بلکه عددی

است بزرگتر از π و هرچه شعاع دایره ای که رسم کرده است بزرگتر باشد ، این نسبت بزرگتر است . بنابراین ناظر O با اندازه گیری مستقیم ثابت می‌کند که هندسهٔ مربوط به اشکال رسم شده در روی صفحه ، هندسهٔ اقلیدسی نیست . پس ما نتیجه می‌گیریم که درحضور یک میدان گرانشی از نوع مرکز گریز ـ کوریولیس ، هندسهٔ فضا اقلیدسی نیست .

بنابر اصل هم ارزی ، نتیجه ای که هم اکنون بدان رسیدیم درمورد غیر اقلیدسی بودن ماهیت فضایی که درآن یک میدان گرانشی از نوع مرکز گریز ـ کوریولیس وجود دارد بایدبه تمام میدانهای گرانشی گسترش یابد . اما ، درمورد یک میدان مانند میدانی که برزمین محیط است ، پیدا کردن یک چارچوب لخت مرجع که میدان نسبت به آن صفر باشد و همچنین هندسهٔ فضائی درآن اقلیدسی شود ، (چنانکه برای میدان مرکز گریز ـ کوریولیس امکان دارد) امکان پذیر نیست . چنین میدانی را اصطلاحا" میدان **تحویل ناپذیر**[1] می‌نامند . اما ، حتی در یک میدان تحویل ناپذیر نیز همیشه می‌توان چارچوبی پیداکرد که برای مدتی که به‌اندازهٔ کافی کوتاه‌است ودر یک‌ناحیهٔ فضا که به اندازهٔ کافی کوچک است ، لخت‌باشد . مثلا" در داخل یک سفینهٔ فضایی که‌نسبت به ابریهای برون کهکشانی حرکت چرخشی ندارد وآزادانه‌درمیدان گرانشی زمین‌سقوط می‌کند ، ذرات آزاد درامتداد خطوط مستقیم با سرعت ثابت وبرای مدت زمانهای نسبتا" طولانی حرکت خواهندکرد وشرایط لخت خواهند بود . بنابراین یک چارچوب مختصات که در سفینه ثابت باشد در ناحیهٔ محدودی از فضا و زمان به مانند یک چارچوب لخت خواهد بود وهندسهٔ ناحیهٔ آن بتقریب‌اقلیدسی خواهد بود .

ازآنجا که چارچوب مختصات دکارتی قائم ، فقط در فضایی می‌تواند ایجاد شودکه دارای‌یک سنجهٔ اقلیدسی باشد ، پس در یک میدان گرانشی تحویل ناپذیر باید این روش تعیین مکانهای‌نسبی رویدادها ، متروک شود (مگردرناحیه‌های کوچکی که هم اکنون توضیح داده شد) . در عوض ، فرض خواهیم کرد که برمبنای روش‌مناسبی به هر رویداد فیزیکی سه مختصهٔ فضایی (ξ^3 و ξ^2 و ξ^1) تخصیص داده می‌شود . ضروری است که در هر موردخاص ، فقط‌روشی توصیف شود که به وسیلهٔ‌آن این مختصات برای هر رویدادی تعیین می‌شوند . مثلا" ممکن است آنها‌به وسیلهٔ روشهای فنی راداری مشخص شوند . بدین‌ترتیب که دراصل‌می‌توان فرستنده های‌رادار را در سه نقطهٔ دوراز هم قرار داد و تپه های‌الکترو-مغناطیس حاصل ازآنهاراتوسط رویداد مورد نظر ، به چشمهٔ خود بازتاباند . دراین صورت بازهٔ زمانی‌بین‌گسیل یک تپه ودریافت" پژواک "آن‌درسه ایستگاه ، مختصات مناسب از نوع موردنظر برای رویداد خواهد بود . تمامی‌آنچه که لازم است این است که بایدبین نقاط در

1) irreducible

فضاوسه عددحقیقی (ξ^3 و ξ^2 و ξ^1) یک تناظر وجود داشته‌باشد طوری که با هر نقطه سه‌مقدار به طور یگانه متناظر باشد وبا هر سه مقدار یک نقطهٔ یگانه متناظر باشد. و نیزفرض خواهیم کرد که ساعتها طوری در فضا توزیع شده اند که به هر رویداد، یک زمان ξ^4 می‌تواندتخصیص داده شود، یعنی زمانی که ساعتهای واقع در رویداد نشان می دهند. فرض می‌کنیم، به‌ازای‌هر دستگاهی که‌برای‌تثبیت‌مختصات ξ به‌کار برده شود، یک‌رشته رویدادهای مجاور، مانندمکانهای اشغال شده به وسیلهٔ یک ذره در لحظات متوالی، مختصاتی خواهند داشت که آن مختصات درامتدادرشته‌به طورپیوسته تغییر می‌کنند وبا یک منحنی پیوسته‌در فضای ξ ها متناظر خواهند بود. این مطلب متضمن این است که ساعتهای مجاور باید همزمان باشندوبایدبه یک آهنگ‌که‌ثابت بودن آن ضروری نیست، کار کنند ولی مقررداشتن روش خاصی جهت همزمان کردن ساعتهای دورازهم، الزامی نیست. نتیجه اینکه، مانند آنچه درنظریهٔ نسبیت خاص دیده می‌شود، ممکن است‌دو رویداد دورازهم برطبق‌یک‌دستگاه سنجش زمان همزمان باشند ولی برطبق دستگاه دیگر چنین نباشند.

اکنون، مختصات اختصاص داده‌شده به یک رویداد را بازهم‌تعمیم می‌دهیم. فرض کنید که ($i = $ ۱ و ۲ و ۳ و ۴) x^i توابع دلخواهی از ξ^i باشند طوری که با هر مجموعه از مقادیر ξ^i، یک مجموعه از مقادیر x متناظر باشد وبرعکس. می‌نویسیم:

$$x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) \qquad (۴-۶)$$

در این صورت، x^i نیزبه‌عنوان‌مختصات رویدادنسبت به یک چارچوب‌مرجع جدید، پذیرفته خواهند شددر صورتی که‌مختصات‌قبلی آن رویداد عبارت بودند از ξ. باید متذکر شویم که درحالت کلی، هر یک از مختصات جدید x^i به زمان و موقعیت رویداد بستگی خواهد داشت، به عبارت دیگر الزامی نیست که سه تاازمختصات از نظر ماهیت فضایی باشند و یکی‌زمانی. اکنون تمام رویدادهای‌ممکن در روی یک فضای $\mathscr{S}_4$ نگاشته می‌شوند طوری که هر رویداد به وسیلهٔ یک نقطه از فضا نمایش داده می‌شودو x^i مختصات این نقطه نسبت به چارچوب مختصات خواهند بود. $\mathscr{S}_4$ را **پیوستار فضا ــ زمان** می‌نامند.

همان گونه که متذکرشدیم درهر میدان گرانشی همیشه می‌توان چارچوبی تعریف کرد که میدان نسبت به‌آن دریک ناحیهٔ محدود برابر صفر شود وبرای رویدادهایی‌که دراین ناحیه اتفاق می‌افتند ودر بازهٔ زمانی کوتاهی گسترش دارند، مثل یک چارچوب لخت‌رفتار کند. دراین صورت فرض کنیدکه برای دورویداد مجاور، یک چنین چارچوب لخت S وجود داشته باشد. هرچارچوب دیگری‌که نسبت به S دارای حرکت یکنواخت باشد، برای این‌دو

رویداد نیز لخت خواهد بود. ناظرانی که به طور ساکن در چارچوبهایی از این نوع قرار دارند، قادر خواهند بودکه محورهای دکارتی قائم تشکیل دهند و به روشی که در فصل اول توضیح داده‌شد، ساعتهاراهمزمان کنند و بنابراین بازهٔ زمان ویژهٔ $d\tau$ بین دو رویداد را اندازه گیری کنند. اگر برای یک چنین ناظری، رویدادهایی در دو نقطه که دارای مختصات دکارتی‌قائم (z و y و x) و ($z+dz$ و $y+dy$ و $x+dx$) هستند بترتیب درزمانهای t و $t+dt$ اتفاق افتند، خواهیم داشت:

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2+dy^2+dz^2) \qquad (۶-۵)$$

ds، فاصلهٔ بین دو رویداد توسط رابطهٔ زیر تعریف خواهد شد:

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2 \qquad (۶-۶)$$

مختصات (t و z و y و x) یک رویداد دراین چارچوب لخت‌وار[1]، توسط معادلات

$$x = x(x^1, x^2, x^3, x^4) \quad \text{و غیره} \qquad (۶-۷)$$

به مختصات x^i که قبلاً" تعریف شدند، بستگی خواهند داشت واز این رو داریم

$$dx = \frac{\partial x}{\partial x^i} dx^i \quad \text{و غیره} \qquad (۶-۸)$$

با قرار دادن مقادیر dx و dy و dz و dt در معادلهٔ (۶-۶)، نتیجهٔ زیر به دست می‌آید

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \qquad (۶-۹)$$

که بازهٔ ds بین دو رویداد مجاور در فضا ــ زمان رانسبت به یک چارچوب مختصات عام که‌برای‌تمامی‌فضا ــ زمان معتبر است، تعیین می‌کند. بنابراین‌با پیوستارفضا ــ زمان، می‌توان مانند یک فضای ریمانی رفتار کرد که سنجهٔ آن توسط معادلهٔ (۶-۹) داده می‌شود.

۶ ــ ۳ حرکت یک‌ذرهٔ‌آزاد در یک میدان گرانشی

در یک ناحیه‌ازفضا که به فاصلهٔ‌بسیار زیاد از اجسام مادی قرارگرفته باشد، می‌توان محورهای‌دکارتی قائمی مانند $Oxyz$ پیدا کرد که یک چارچوب‌لخت را تشکیل بدهند.

1) quasi-inertial frame

اگر زمان به وسیلهٔ ساعتهایی اندازه گیری شود که در این چارچوب همزمان شده باشند و همراه آن حرکت کنند، در این صورت حرکت یک ذرهٔ آزمون که به طور آزاد حرکت کند، نسبت به چارچوب مزبور یکنواخت خواهد بود. بنابراین اگر (z و y و x) مکان چنین ذره ای در لحظهٔ t باشد، معادلات حرکت آن را می‌توان به صورت

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0 \qquad (۶-۱۰)$$

نوشت. فرض کنید که ds بازهٔ بین رویداد ورود ذره به نقطهٔ (z و y و x) در لحظهٔ t و رویداد مجاور ورود ذره به نقطهٔ ($z+dz$ و $y+dy$ و $x+dx$) در لحظهٔ ($t+dt$) باشد. دراین صورت ds از معادلهٔ (۶-۶) به دست می‌آید و اگر v سرعت ذره باشد، از این معادله خواهیم داشت:

$$ds = (v^2 - c^2)^{1/2}\, dt \qquad (۶-۱۱)$$

چون v ثابت است پس نتیجه می‌شود که معادلات (۶-۱۰) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{d^2z}{ds^2} = 0 \qquad (۶-۱۲)$$

همچنین از معادلهٔ (۶-۱۱) می‌توان نتیجه گرفت که

$$\frac{d^2t}{ds^2} = 0 \qquad (۶-۱۳)$$

معادلات (۶-۱۲) و (۶-۱۳)، خانوادهٔ جهانخطهای ذرات آزاد فضا ـ زمان را نسبت به یک چارچوب لخت تعیین می‌کنند.

اکنون فرض کنید که در این ناحیه از فضا چارچوب مرجع و روش دیگری برای اندازه‌گیری زمان، اختیار می‌کنیم، مثلاً" می‌توان از چارچوبی استفاده کرد که نسبت به یک چارچوب لخت، دارای حرکت چرخشی یکنواخت باشد. فرض کنید (x^4 و x^3 و x^2 و x^1) عبارت‌اند از مختصات یک رویداد در این چارچوب. در این صورت فاصلهٔ بین دو رویداد مجاور به وسیلهٔ معادلهٔ (۶-۹) تعیین خواهد شد. اگر ناظری که از این چارچوب استفاده می‌کند، یک ذرهٔ آزمون را رها سازد و حرکت آن را نسبت به این چارچوب مشاهده کند، او خواهد دریافت که این حرکت یکنواخت و حتی راستخط نیست و خواهد توانست با فرض وجود یک

میدان گرانشی این واقعیت را توجیه کند. ناظر مذکور معادلات حرکت ذره را بـــه شکـل

$$\frac{d^2x^l}{ds^2}+\{j^l{}_k\}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0 \qquad (۶-۱۴)$$

به دست خواهد آورد. این استنتاج طبیعی است، زیرا همچنانکه در بخش ۵ ــ ۱۶ نشان داده شد، این معادله یک معادلهٔ تانسوری است که یک زمین‌پیما را تعریف می‌کند و اگر در یک چارچوب معتبرباشد، درهر چارچوبی معتبرخواهد بود. ولی در چارچوب $xyzt$ ، g_{ij} همگی ثابت اند و نمادهای سه شاخصی صفر هستند. از این رو در این چارچوب، معادلات (۶ ــ ۱۴) به‌معادلات (۶ ــ ۱۲) و (۶ ــ ۱۳) تبدیل می‌شوند و می‌دانیم که این معادلات برای حرکت ذره صحیح هستند. بنابراین نشان دادیم که اثر یک میدان گرانشی از نـوع تحویل پذیررابرروی حرکت یک ذرهٔ آزمون هنگامی می‌توان به حساب آورد که صورت‌تانسور g_{ij} ی‌بسلای فضا ــ زمان نسبت به چارچوبی که به کار رفته است معلوم باشد. مفهوم این عبارت‌این‌است که g_{ij} ، هم میدان‌گرانشی‌را تعیین می‌کنند و هم به وسیلهٔ میدان گرانشی تعیین می‌شوند.

اکنون ایده‌های بند قبلی به ناحیه هایی از فضا گسترش داده خواهند شد که در آنها میدانهای گرانشی تحویل ناپذیر وجود دارند. همانطوری که قبلاً" توضیح داده شد برای هر ناحیه‌ازیک چنین فضایی وهر بازهٔ زمانی که به اندازهٔ‌کافی کوچک باشد، می‌توان یک چارچوب لخت پیدا کردو در نتیجه در چنین ناحیهٔ کوچکی معادلات (۶ ــ ۱۴) حاکم برمسیرحرکت‌ذراتی هستندکه به طورآزاد حرکت می‌کنند. حال فرض می‌شود که این‌معادلات عبارتنداز معادلات‌حرکت‌ذرات‌آزاد بدون هیچ‌قید و شرطی، یعنی‌برای بسلای فضا ــ زمان، جهانخط یک ذرهٔ آزاد یک زمین‌پیماست، یااین که جهانخط یک ذرهٔ آزاد دارای راستای ثابت است. به نظر می‌رسد که این موضوع عبارت است از تعمیم طبیعی قانون لخت گالیله، که به موجب آن حتی در یک میدان گرانشی تحویل ناپذیر مسیر یک ذره در فضا ــ زمـان، مستقیمترین مسیر ممکن با در نظر گرفتن خمش ذاتی پیوستار است. آنگاه نتیجه می‌شود که حرکت ذراتی را که در یک میدان گرانشی آزادانه سقوط می‌کنند، می‌توان نسبت به هـــر چارچوبی تعیین‌کرد، به شرطی که مؤلفه های g_{ij} ی تانسور سنجه برای این چارچوب‌معلوم باشند. بنابراین، g_{ij} همیشه میدان‌گرانشی‌را مشخص‌می‌کندکه‌از یک چارچوب مشاهده‌می‌شود و تنها فرق موجود بین میدان تحویل ناپذیر با میدان تحویل پذیر در این خواهد بود که برای میدان‌نوع‌دوم، می‌توان چارچوب مختصاتی در فضا ــ زمان پیدا کرد که برای آن‌تمام

مؤلفه های تانسور سنجه برابر صفر باشند بجز

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1 \quad g_{44} = -c^2 \qquad (۶-۱۵)$$

در صورتی که برای میدان اولی، چنین امری امکان پذیر نخواهد بود.

۶ ــ ۴ قانون گرانش اینشتین

برطبق اندیشه های نیوتون، میدان گرانشی موجود در هر ناحیه از فضا به وسیلهٔ توزیع ماده تعیین می‌شود. یعنی می‌توان تانسور سنجهٔ بسلای فضا ــ زمان را، که دیدیم رابطهٔ نزدیکی با میدان گرانشی مشاهده شده دارد، با معلوم بودن توزیع ماده در سراسر فضا ــ زمان، محاسبه کرد. بنابراین نخست یک کمیت تانسوری را جستجو می‌کنیم که این توزیع ماده را نسبت به هر چارچوبی در فضا ــ زمان توصیف کند وسپس سعی می‌کنیم این تانسور را با تانسور سنجه مربوط سازیم. تانسوری که بلافاصله مورد نظر قرار می‌گیرد، تانسورانرژی ــ اندازه‌حرکت T_{ij} است که در فصل چهارم نسبت به یک چارچوب لخت تعریف شد. انرژی الکترومغناطیس وماده هر دودر مؤلفه های این تانسور سهم دارند، ولی چون مطابق نظریهٔ نسبیت خاص، جرم و انرژی اساساً با هم برابر اند پس انتظار می‌رود که همهٔ صورتهای انرژی از جمله نوع الکترومغناطیس در میدان‌گرانشی سهم داشته باشند.

چون تانسور انرژی ــ اندازه حرکت فقط در چارچوبهای لخت تعریف شده است، پس اکنون بایداین تعریف را گسترش داد تا بتوان آن را در یک چارچوب مختصات عام در فضا ــ زمان، مورداستفاده قرار داد. این مطلب را می‌توان بدین صورت انجام داد: در مجاورت هرنقطه ازیک‌میدان‌گرانشی می‌توان برای مدت کوتاهی‌یک چارچوب لخت دکارتی قائم برقرار کرد. متناظر با این چارچوب وساعتهای همراه‌آن، می‌توان محورهای دکارتی قائم $Oy^1y^2y^3y^4$ را در ناحیه ای محیط برنقطهٔ متناظر P از فضا ـ زمان برقرارکرد. اکنون می‌توان معادلات تبدیلی رابه دست آوردکه مختصات y^i یک رویداد را به‌مختصات x^i آن نسبت به یک‌چارچوب مختصات‌دیگرمربوط می‌سازند. در این صورت اگر $T_{ij}^{(0)}$ مؤلفه های تانسور انرژی ــ اندازه حرکت در چارچوب y در نقطهٔ P باشند، از معادلات مناسب برای تبدیل تانسورها می‌توان مؤلفه های آن را در چارچوب x در این نقطه تعیین کرد. بدین‌ترتیب، تانسورهموردای‌انرژی ــ اندازه حرکت، دارای‌مؤلفه‌های T_{ij} درچارچوب x خواهد بود که برابراند با

$$T_{ij} = \frac{\partial y^r}{\partial x^i}\frac{\partial y^s}{\partial x^j}T^{(0)}_{rs} \qquad (۶-۱۶)$$

چون تانسورهای هموردا و پادوردا نسبت به محورهای دکارتی قائم غیر قابل تمیز ازیکدیگر هستند، پس می‌توان $T^{(0)}_{rs}$ را مؤلفه‌های یک تانسور پادوردا در چارچوب y نیز فرض‌کرد. دراین صورت مؤلفه های همین تانسور در چارچوب x، توسط معادلهٔ

$$T^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial y^r}\frac{\partial x^j}{\partial y^s}T^{(0)}_{rs} \qquad (۶-۱۷)$$

مشخص خواهدشد. به همین ترتیب، مؤلفه های تانسورآمیختهٔانرژی ـ اندازحرکت بارابطهٔ

$$T^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial y^r}\frac{\partial y^s}{\partial x^j}T^{(0)}_{rs} \qquad (۶-۱۸)$$

تعیین می‌شوند. این تبدیلات رامی‌توان درهرنقطه از فضا ـ زمان انجام داد و بدین ترتیب برای چارچوب x یک میدان تانسور انرژی ـ اندازه حرکت درسراسرپیوستار به وجود آورد.

معادله تانسوری زیر را در نظر بگیرید:

$$T^{ij}{}_{;j} = 0 \qquad (۶-۱۹)$$

پس از نوشتن برحسب مختصات y^i در هر نقطه از فضا ـ زمان، این رابطه به شکل

$$T^{(0)}_{ij,j} = 0 \qquad (۶-۲۰)$$

ساده می‌شود که همان معادلهٔ (۴-۹۴) است. چون معادلهٔ (۶-۱۹) در یک چارچوب صادق است، پس در تمام چارچوبها صادق خواهد بود. از این رو واگرایی تانسور انرژی ـ اندازه حرکت برابر صفرمی‌شود. به‌این جهت اگر قرار باشد این تانسور به تانسور سنجهٔ g_{ij} مربوط شود، باید رابطه به صورتی باشد که معادلهٔ (۶-۱۹) راایجاب‌کند. حال با استفاده از معادلهٔ (۵-۱۸۱) می‌توان نوشت:

$$g^{ij}{}_{;k} = 0 \qquad (۶-۲۱)$$

پس به‌طریق اولی خواهیم داشت:

$$g^{ij}{}_{;j} = 0 \qquad (۶-۲۲)$$

بنابراین ، قانون

$$T^{ij} = \lambda g^{ij} \qquad (۶-۲۳)$$

که در آن λ یک ثابت جهانی است ، ازاین نظر رضایتبخش است . اما اگر در ناحیه ای ماده و انرژی وجود نداشته باشند ، $T^{ij} = 0$ می‌شود واین متضمن آن است که

$$g^{ij} = 0 \qquad (۶-۲۴)$$

که مسلما" درست نیست . علاوه براین ، بنا به نظریهٔ نیوتون ، اگر μ چگالی ماده باشد ، میدان گرانشی رامی‌توان ازیک تابع پتانسیل V که در معادلهٔ

$$\nabla^2 V = 4\pi\gamma\mu \qquad (۶-۲۵)$$

صدق می‌کند ، به دست آورد . دراین رابطه ، γ ثابت گرانش است . قانون جدیدی که برای گرانش جستجو می‌شود باید معادلهٔ (۶-۲۵) را به عنوان یک تقریب در بربگیرد . ولی همچنانکه از معادلهٔ (۴-۸۸) پیداست ، T_{44} شامل μ است وبنابراین به نظر می‌رسد که این انتظارمعقول باشدکه‌اجزای دیگرمعادله‌ای که قانون جدید گرانش را بیان می‌کند ، دارای جمله‌هایی‌باشند که بتوان آنها را به تقریب به عنوان $\nabla^2 V$ تعبیرکرد . این متضمن آن است که مشتقهای مرتبه دوم مؤلفه های تانسور سنجه احتمالا" وجود خواهند داشت . بنابراین ما نیاز به یک تانسور پادوردای متقارن رتبهٔ دوم داریم که شامل‌مشتق های مرتبهٔ دوم g_{ij} و باواگرایی صفر باشد که می‌توان فرض کرد T^{ij} با آن متناسب است . تانسور اینشتین (۵-۲۱۱) ، دارای همهٔ این خصوصیات است ودر نتیجه می‌توان نوشت

$$R^{ij} - \tfrac{1}{2} g^{ij} R = -\kappa T^{ij} \qquad (۶-۲۶)$$

که در آن κ ضریب تناسبی است که باید با γ بستگی داشته باشد وبعدا" ثابت خواهیم کردکه مثبت است . معادلهٔ (۶-۲۶) ، *قانون گرانش اینشتین* را بیان می‌کند . باپایین آوردن شاخصها به طور متوالی می‌توان رابطهٔ مذکور را به دو صورت دیگرنوشت :

$$R^{i}_{j} - \tfrac{1}{2}\delta^{i}_{j} R = -\kappa T^{i}_{j}, \qquad (۶-۲۷)$$

$$R_{ij} - \tfrac{1}{2} g_{ij} R = -\kappa T_{ij}. \qquad (۶-۲۸)$$

اگر معادلهٔ (۶ــ۲۷) تنجانده شود حاصل عبارت‌خواهد بود از:

$$R = \kappa T. \qquad (۶-۲۹)$$

که درآن $T = T_i^i$. اکنون نتیجه می‌شود که قانون گرانش اینشتین را می‌توان به صورت

$$R_{ij} = \kappa(\tfrac{1}{2}g_{ij}T - T_{ij}), \qquad (۶-۳۰)$$

نوشت، همراه با دو صورت دیگری که از بالا بردن شاخصهای پایین بـه دست‌می‌آیند.

چون واگرایی g^{ij} صفر می‌شود پس شق ممکن دیگر برای قانون (۶ــ۲۶) عبارت است از

$$R^{ij} - \tfrac{1}{2}g^{ij}R + \lambda g^{ij} = -\kappa T^{ij}, \qquad (۶-۳۱)$$

که درآن λ ثابت است. قانون (۶ــ۲۶) نتایجی را به دست می‌دهد که در ناحیه هایی‌از فضا باابعاد کهکشانی بارصد مطابقت دارند، بنابراین مسلم است که اگر λ صفر هم نباشد بسیارکوچک خواهد بود. به هرحال این‌جملهٔ اضافی در بعضی تحقیقات کیهانشناختی‌وارد شده است. در قسمتهای بعدی این کتاب آن را در نظر نخواهیم گرفت.

۶ــ۵ شتاب یک ذره در یک میدان‌گرانشی ضعیف

در یک میدان گرانشی مثل میدان زمین، هندسهٔ فضا اقلیدسی نیست وچارچوبی که واقعاً لخت باشد، وجود ندارد. با وجود این، مشکلی در برقراری محورهای دکارتی قائم $Oxyz$ در سطح زمین که نسبت به آن برای تمام مقاصد عملی هندسهٔ به کاررفته اقلیدسی است و رفتار دستگاههای الکترومغناطیسی‌با رفتار آنها درچارچوبهای لخت غیر قابل تمیز است، وجود ندارد. بنابراین باید نتیجه گرفت که یک چنین میدان‌گرانشی، نسبتاً ضعیف است واز این رو سنجهٔ فضا ــ زمان نسبت به این محورها و ساعتهای همراه آنها، باآنچه که درمعادلهٔ (۶ــ۶) آمده است، فرق زیادی نخواهد داشت. با قراردادن

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ict, \qquad (۶-۳۲)$$

سنجه برحسب x^i، به طور تقریب برابر

$$ds^2 = dx^i dx^i \qquad (۶-۳۳)$$

می‌شود. بنابراین نسبت به چارچوب x^i ، فرض خواهیم کرد که

$$g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}, \qquad (۶-۳۴)$$

که درآن δ_{ij} ها ، دلتاهای کرونکر هستند و h_{ij} ها در مقایسه با آنها کوچک اند.

فرض کنیدکه‌ذره ای دریک میدان گرانشی ضعیف که تانسور سنجهٔ آن طبق‌معادلهٔ (۶ـ۳۴) است، حرکت می‌کند. تانسور سنجهٔ پادوردا ، از معادله یی به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$g^{ij} = \delta^{ij} + k^{ij} \qquad (۶-۳۵)$$

که درآن k^{ij} از همان مرتبهٔ کوچکی h_{ij} هستند. دراین صورت ، چون داریم

$$[ij,k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k}\right), \qquad (۶-۳۶)$$

پس در تقریب اول‌نتیجه می‌شود

$$\{{}_i{}^k{}_j\} = \delta^{kr}[ij,r] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k}\right) \qquad (۶-۳۷)$$

اکنون می‌توان معادلات حرکت ذره را مثل معادلات (۶ـ۱۴) نوشت.

طبق معادلهٔ (۶ـ۱۱) داریم:

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{dx^i}{dt}\frac{dt}{ds} = (v^2 - c^2)^{-1/2}(\mathbf{v}, ic) \qquad (۶-۳۸)$$

که درآن $\mathbf{v}$ عبارت است‌ازسرعت ذره‌درچارچوب لخت وار. پس اگر در لحظهٔ مورد نظر ذره نسبت به چارچوب ساکن باشد ، داریم:

$$\frac{dx^i}{ds} = (0,1) \qquad (۶-۳۹)$$

و معادلات حرکت (۶ـ۱۴) به‌صورت زیردر می‌آیند:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \{{}_4{}^i{}_4\} = 0 \qquad (۶-۴۰)$$

که تا مرتبهٔ اول از h_{ij} صحت دارند . با جایگذاری از معادلهٔ (۶ ــ ۳۷) ، مشاهده می‌شود که این هم ارز است با

$$\frac{d^2 x^l}{ds^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial h_{44}}{\partial x^l} - \frac{\partial h_{4l}}{\partial x^4} \qquad (۶ - ۴۱)$$

با مشتق گیری ازمعادلهٔ (۶ ــ۳۸) نسبت به s و استفاده از معادلهٔ (۶ ــ ۱۱) ، خواهیم داشت

$$\frac{d^2 x^l}{ds^2} = (v^2-c^2)^{-1}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt},0\right) - v\frac{dv}{dt}(v^2-c^2)^{-2}(\mathbf{v}, ic) \qquad (۶ - ۴۲)$$

و وقتی $\mathbf{v} = 0$ باشد این رابطه به شکل

$$\frac{d^2 x^l}{ds^2} = -\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt},0\right) \qquad (۶ - ۴۳)$$

در می‌آید . ازمعادلات (۶ ــ ۴۱)و (۶ ــ ۴۳) ، نتیجه گرفته می‌شود که مؤلفه های شتاب ذرهٔ ساکن درجهت محورهای قائم برای ۳ و ۲ و ۱ = i برابرند با

$$-c^2\left(\frac{1}{2}\frac{\partial h_{44}}{\partial x^i} - \frac{\partial h_{4i}}{\partial x^4}\right) \qquad (۶ - ۴۴)$$

با برگرداندن به مختصات اولیه (t و z و y و x) ، این مؤلفه ها چنین می‌شوند

$$-c^2\left(\frac{1}{2}\frac{\partial h_{44}}{\partial x} + \frac{i}{c}\frac{\partial h_{41}}{\partial t}\right) \qquad (۶ - ۴۵)$$

و غیره

بنابراین ، اگر میدان نسبت به زمان تغییر نکند ، بردار شتاب برابر است با

$$-\operatorname{grad}\left(\tfrac{1}{2}c^2 h_{44}\right) \qquad (۶ - ۴۶)$$

ولی‌اگر V تابع پتانسیل‌نیوتونی برای‌میدان‌باشد ،این‌شتاب‌برابر $-\operatorname{grad} V$ خواهدبود . نتیجه می‌شود که برای یک میدان ضعیف ، پتانسیل نرده ای‌نیوتونی V وجودداردوبه‌وسیلهٔ معادلهٔ

$$V = \tfrac{1}{2}c^2 h_{44} \qquad (۶ - ۴۷)$$

با سنجهٔ فضا ــ زمان بستگی دارد که می‌توانیم آن را بدین صورت نیز بنویسیم

$$g_{44} = 1 + \frac{2V}{c^2} \qquad (۶ - ۴۸)$$

۶ ـ ۶ قانون گرانش نیوتون

دراین بخش نشان داده خواهد شد که درحالت عادی وقتی شدت میدان گرانش ضعیف و توزیع ماده ایستا باشد، می‌توان قانون گرانش نیوتون را از قانون اینشتین به دست آورد.

نخست صورتی را در نظر بگیرید که تانسور ریمان ـ کریستوفل در فضا ـ زمان یک میدان ضعیف، دارا است. در چارچوب x^l ،تانسور سنجه به وسیلهٔ معادلهٔ (۶ ـ ۳۴)، و نمادهای سه‌شاخصی‌کریستوفل توسط معادلهٔ (۶ ـ ۳۷) ، تعیین می‌شوند. اگر ازحاصل ـ ضربهای h_{ij} صرف نظرشوددراین‌صورت معادلهٔ (۵ـ ۱۳۳) نشان می‌دهدکه بتقریب داریم

$$B^l_{jkl} = \frac{\partial}{\partial x^k}\{^{\,l}_{j\,l}\} - \frac{\partial}{\partial x^l}\{^{\,l}_{j\,k}\} \qquad (۴۹ ـ ۶)$$

و بنابراین تانسور ریچی برابر است با:

$$\begin{aligned} R_{jk} &= \frac{\partial}{\partial x^k}\{^{\,l}_{j\,l}\} - \frac{\partial}{\partial x^l}\{^{\,l}_{j\,k}\}, \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\frac{\partial h_{jl}}{\partial x^l} + \frac{\partial h_{ll}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{lj}}{\partial x^l}\right\} - \\ &\qquad -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^l}\left\{\frac{\partial h_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial h_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^l}\right\}, \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 h_{ll}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 h_{jk}}{\partial x^l \partial x^l} - \frac{\partial^2 h_{lj}}{\partial x^l \partial x^k} - \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^l \partial x^j}\right\} \end{aligned} \qquad (۵۰ ـ ۶)$$

به ویژه باقرار دادن $j = k = 4$ خواهیم داشت

$$R_{44} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 h_{ll}}{\partial x^4 \partial x^4} + \frac{\partial^2 h_{44}}{\partial x^l \partial x^l} - 2\frac{\partial^2 h_{l4}}{\partial x^l \partial x^4}\right\} \qquad (۵۱ ـ ۶)$$

اگر در چارچوب لخت‌وار به‌کار رفته، توزیع ماده ایستا باشد، دراین صورت h_{ij} مستقل‌از t خواهد بود و معادلهٔ (۶ ـ ۵۱) تبدیل می‌شود به

$$R_{44} = \tfrac{1}{2}\nabla^2 h_{44} \qquad (۵۲ ـ ۶)$$

که در آن $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$. اگر V پتانسیل نیوتونی‌برای میدان‌باشد در این صورت معادلهٔ (۶ ـ ۴۷) اکنون نشان می‌دهد که:

$$R_{44} = \frac{1}{c^2}\nabla^2 V \qquad (۶-۵۳)$$

با فرض این‌که میدان الکترومغناطیس وجود نداشته باشد، تانسورانرژی ـ اندازه حرکت کل برای توزیع جرم در چارچوب لخت‌وار، به وسیلهٔ معادلهٔ

$$T_{ij} = \Theta_{ij} \qquad (۶-۵۴)$$

داده می‌شود، که درآن Θ_{ij}به وسیلهٔ معادلهٔ (۴ــ۸۶) به تقریب تعیین شده است. چون توزیع ایستاست، بنابراین چهار ــ سرعت در هر نقطه برابراست با (ic و 0) و از این رو همهٔ مؤلفه های T_{ij} برابر صفرمی‌شوند بجزT_{44}. در این حالت داریم

$$T_{44} = -c^2\mu_{00} \qquad (۶-۵۵)$$

که درآن μ_{00} عبارت است‌ازچگالی‌معمولی جرم‌برای حالتی که سرعت ماده برابر صفراست. همچنین داریم

$$T = T_i^i = T_{ii} = T_{44} = -c^2\mu_{00}. \qquad (۶-۵۶)$$

اکنون می‌توان‌مؤلفهٔ (۴۴) قانون‌گرانش اینشتین راکه به صورت (۶ــ۳۰) است، بتقریب به صورت‌زیر بیان کرد

$$\frac{1}{c^2}\nabla^2 V = \tfrac{1}{2}\kappa c^2\mu_{00},$$

یا

$$\nabla^2 V = \tfrac{1}{2}\kappa c^4\mu_{00}. \qquad (۶-۵۷)$$

و این عبارت است از معادلهٔ پواسن[1] نظریهٔ کلاسیک نیوتونی (۶ــ۲۵)، مشروط براینکه داشته باشیم:

$$\kappa = \frac{8\pi\gamma}{c^4} \qquad (۶-۵۸)$$

این رابطه‌مقدار κ را برحسب ثابت گرانش تعیین می‌کند.

۶ــ۷ سنجه های باتقارن کروی

وقتی در چارچوب مختصات فضا ــزمان، تغییری از مختصات x^i به مختصات $\bar{x}$ ایجاد

1) Poisson

شود، تانسورسنجهٔ g_{ij} طبق قانون‌تبدیل تانسور هموردا به $\bar{g}_{ij}$ تغییر خواهد کرد. درحالت کلی، g_{ij} توابعی از x^i و $\bar{g}_{ij}$ توابعی از $\bar{x}^i$ هستند ولی معمولا" این طور نیست که $\bar{g}_{ij}$ همان توابعی از مختصات "تیره دار" باشند که g_{ij} ازمختصات " بی تیره"هستند. به عبارت دیگر، صورت توابع $g_{ij}\ (x^k)$ تحت تبدیلات عام مختصات، ناوردا نیست. لکن، دربعضی‌موارد خاص، ممکن است که صورت این توابع تحت یک گروه کامل تبدیلات، ناوردا باشد ودراین بخش چنین موردی بررسی خواهد شد.

در یک میدان گرانشی، هندسه می‌تواند تنها اقلیدسی وار[1] باشد و در نتیجه محورهای دکارتی قائم وجود نخواهند داشت. با این حال، برای تعریف تقریبی چنین محورهایی، درعمل مشکلی به وجود نیامده است وبنابراین، فرض خواهیم کرد که مختصات (t و z و y و x)ی یک رویداددرمیدان‌گرانشی مورد نظر، ازنظر فیزیکی مانندمختصات دکارتی قائم‌وزمان تعبیر می‌شوند. اکنون می‌خواهیم یک سنجه پیدا کنیم که وقتی برحسب مختصات مذکور بیان شود، صورت آن نسبت به گروه تبدیلات مختصاتی که ازنظر فیزیکی به عنوان چرخش‌محورهای قائم $Oxyz$ تعبیر می‌شود (t تغییر نمی‌کند) ناوردا باشد. می‌گوییم که چنین سنجه یی در پیرامون نقطهٔ O، **متقارن کروی** است.

ناورداهای این گروه از تبدیلات مختصات که‌برحسب دیفرانسیل مختصات dx، dy، dz ازدرجهٔ‌دوم‌بیشتر نباشند، عبارت اند از:

$$x^2+y^2+z^2,\quad x\,dx+y\,dy+z\,dz,\quad dx^2+dy^2+dz^2 \qquad (۵۹-۶)$$

باوارد کردن مختصات‌قطبی‌کروی (ϕ و θ و r) که طبق معادلهٔ (۵-۳) تعریف‌می‌شوند، می‌توان ناورداها را چنین نوشت:

$$r^2,\quad r\,dr,\quad dr^2+r^2\,d\theta^2+r^2\sin^2\theta\,d\phi^2 \qquad (۶۰-۶)$$

در نتیجه

$$r,\quad dr,\quad d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2 \qquad (۶۱-۶)$$

ناوردا هستند. حال می‌توان عامترین سنجه با تقارن کروی را به صورت زیر نوشت:

$$ds^2 = A(r,t)\,dr^2+B(r,t)(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2)+ \\ +C(r,t)\,dr\,dt+D(r,t)\,dt^2. \qquad (۶۲-۶)$$

1) quasi-Euclidean

اکنون برطبق معادلهٔ تبدیل زیر، به جای r مختصهٔ جدید r' را قرار می‌دهیم.

$$r'^2 = B(r,t) \qquad (۶-۶۳)$$

در این‌صورت داریم

$$ds^2 = E(r',t)\,dr'^2 + r'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) + F(r',t)\,dr'\,dt + G(r',t)\,dt^2. \qquad (۶-۶۴)$$

مختصات قطبی کروی را می‌توان در یک چارچوب لخت واقعی به‌طوردقیق تعریف کرد و با استفاده از معادلهٔ (۶-۶)، سنجه به صورت

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) - c^2\,dt^2 \qquad (۶-۶۵)$$

بیان خواهدشد. با مقایسهٔ معادله های (۶-۶۴) و (۶-۶۵)، واضح است درناحیه ای که سنجهٔ آن (۶-۶۴) باشد، از نظر فیزیکی r' مانند یک مختصهٔ قطبی کروی واقعی r رفتار خواهد کرد. بنابراین "پریم‌ها" راحذف می‌کنیم ومی‌نویسیم

$$ds^2 = E(r,t)\,dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) + F(r,t)\,dr\,dt + G(r,t)\,dt^2. \qquad (۶-۶۶)$$

اگرچارچوب لخت‌وار باشد، در این صورت معادلهٔ (۶-۶۵) باید تقریبی از معادلهٔ (۶-۶۶) باشد و بنابراین معادلات زیر باید تقریبا" صحیح باشند:

$$E(r,t) = 1, \quad F(r,t) = 0, \quad G(r,t) = -c^2 \qquad (۶-۶۷)$$

اکنون مورد خاصی را در نظر بگیرید که میدان گرانشی در چارچوب لخت واری که در آن (ϕ و θ و r) مختصات قطبی کروی تقریبی و t زمان است، ایستاست. دراین صورت‌توابع E و F و G مستقل از t خواهند بود. همچنین فضا ـ زمان برحسب سوهای گذشته و آیندهٔ متغیر زمان، متقارن خواهند بود واز این جا نتیجه می‌شود که وقتی $-dt$ به جای dt قرار داده شود، ds^2 تغییر نمی‌کند. بدین جهت $F=0$ و داریم

$$ds^2 = a\,dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) - bc^2\,dt^2 \qquad (۶-۶۸)$$

که در آن a و b توابعی از r هستند و هر دو تقریبا" برابرواحد اند.

با فرض

$$x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \phi, \quad x^4 = t. \qquad (۶-۶۹)$$

برای‌این سنجه داریم

$$g_{11} = a, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2\sin^2\theta, \quad g_{44} = -bc^2 \qquad (۶-۷۰)$$

و بقیهٔ g_{ij}ها صفر هستند. پس

$$g = -abc^2r^4\sin^2\theta \qquad (۶-۷۱)$$

و از این رو داریم

$$g^{11} = \frac{1}{a}, \quad g^{22} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{33} = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}, \quad g^{44} = -\frac{1}{bc^2} \qquad (۶-۷۲)$$

و بقیهٔ g^{ij} ها صفر هستند. اکنون می‌توان نمادهای سه شاخصی را از معادلهٔ (۵-۱۷۸) محاسبه کرد. آنهایی که صفر نیستند در زیر آورده شده اند:

$$\left.\begin{aligned}
\{{}_1{}^1{}_1\} &= \frac{a'}{2a},\\
\{{}_1{}^2{}_2\} &= \{{}_2{}^2{}_1\} = \frac{1}{r},\\
\{{}_1{}^3{}_3\} &= \{{}_3{}^3{}_1\} = \frac{1}{r},\\
\{{}_1{}^4{}_4\} &= \{{}_4{}^4{}_1\} = \frac{b'}{2b}\\
\{{}_2{}^1{}_2\} &= -\frac{r}{a},\\
\{{}_2{}^3{}_3\} &= \{{}_3{}^3{}_2\} = \cot\theta,\\
\{{}_3{}^1{}_3\} &= -\frac{r}{a}\sin^2\theta,\\
\{{}_3{}^2{}_3\} &= -\sin\theta\cos\theta,\\
\{{}_4{}^1{}_4\} &= \frac{c^2b'}{2a},
\end{aligned}\right\} \qquad (۶-۷۳)$$

پریم نشان دهندهٔ مشتق نسبت به r است.

با تنجاندن B^i_{jkl} که درمعادلهٔ (۵-۱۳۳) داده‌شده است، نسبت به‌شاخصهای i و l، نتیجه می‌شود که

$$R_{jk} = \{^{l}_{r\,k}\}\{^{r}_{l\,j}\}-\{^{l}_{r\,l}\}\{^{r}_{j\,k}\}+\frac{\partial}{\partial x^k}\{^{l}_{j\,l}\}-\frac{\partial}{\partial x^l}\{^{l}_{j\,k}\},$$

$$= \{^{l}_{r\,k}\}\{^{r}_{l\,j}\}-\{^{r}_{j\,k}\}\frac{\partial}{\partial x^r}\log\sqrt{(-g)}+$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x^j\partial x^k}\log\sqrt{(-g)}-\frac{\partial}{\partial x^l}\{^{l}_{j\,k}\}, \qquad (۶-۷۴)$$

دراین جاازمعادلهٔ (۵ــ۱۹۷) استفاده شده است (که درآن یقینا" می‌توان g ــ رابه جای g قرار داد، بدون اینکه در اعتبارآن تغییری ایجاد شود) . اکنون مؤلفه های غیر صفر تانسور ریچی محاسبه می‌شوند که عبارت انداز:

$$\left.\begin{aligned} R_{11} &= \frac{b''}{2b}-\frac{b'^2}{4b^2}-\frac{a'b'}{4ab}-\frac{a'}{ar},\\ R_{22} &= \frac{rb'}{2ab}-\frac{ra'}{2a^2}+\frac{1}{a}-1,\\ R_{33} &= R_{22}\sin^2\theta,\\ R_{44} &= c^2\left(-\frac{b''}{2a}+\frac{b'^2}{4ab}+\frac{a'b'}{4a^2}-\frac{b'}{ar}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (۶-۷۵)$$

چون داریم:

$$R^1_1 = g^{11}R_{11}, \qquad R^2_2 = g^{22}R_{22}, \qquad (۶-۷۶)$$ وغیره

پس به دست خواهد آمدکه:

$$R = R^l_l = \frac{b''}{ab}-\frac{b'^2}{2ab^2}-\frac{a'b'}{2a^2b}+\frac{2b'}{abr}-\frac{2a'}{a^2r}+\frac{2}{ar^2}-\frac{2}{r^2} \qquad (۶-۷۷)$$

۶ــ۸ حل شوارتس شیلد

سنجهٔ متقارن کروی ایستای (۶ ــ ۶۸) ، میدان گرانشی یک توزیع ایستای ماده را که آن نیز دارای تقارن کروی است ،تعیین می‌کند ، به شرط اینکه در معادلات اینشتین (۶ــ۳۰) صدق کند . مورد خاصی را در نظر می‌گیریم که درتمام فضا بجز یک جسم کروی که مرکز آن برمرکز تقارن O منطبق است ، مادهٔ دیگری‌وجود ندارد . دراین صورت در تمام نقاط خارج جسم ، $T_{ij}=0$ و $T=0$ ودر این ناحیه معادلات اینشتین تبدیل می‌شوند به

$$R_{ij} = 0 \qquad (۶-۷۸)$$

بنا به معادلات (۶ـ۷۵) ، سنجهٔ (۶ـ۶۸) در معادلات بالا صدق می‌کند به شرط اینکه a و b طوری باشند که داشته باشیم

$$\frac{b''}{2b}-\frac{b'^2}{4b^2}-\frac{a'b'}{4ab}-\frac{a'}{ar}=0, \tag{۶ـ۷۹}$$

$$\frac{rb'}{2ab}-\frac{ra'}{2a^2}+\frac{1}{a}-1=0, \tag{۶ـ۸۰}$$

$$-\frac{b''}{2a}+\frac{b'^2}{4ab}+\frac{a'b'}{4a^2}-\frac{b'}{ar}=0. \tag{۶ـ۸۱}$$

از معادلات (۶ـ۷۹) و (۶ـ۸۱) نتیجه می‌شود که

$$ab'+a'b=0 \tag{۶ـ۸۲}$$

و از این رو داریم

$$ab=\text{constant} \tag{۶ـ۸۳}$$

ولی فرض می‌کنیم که وقتی $r\to\infty$ ، سنجهٔ ما به‌آنچه که درمعادلهٔ (۶ـ۶۵) آمده است و درغیاب یک میدان گرانشی معتبراست ، نزدیک می‌شود . بدین‌جهت وقتی $r\to\infty$ ، آنگاه $a\to1$ و $b\to1$ ، و از این رو خواهیم داشت

$$ab=1 \tag{۶ـ۸۴}$$

با حذف b از معادلهٔ (۶ـ۸۰) ، معلوم خواهد شد که

$$ra'=a(1-a) \tag{۶ـ۸۵}$$

با گرفتن انتگرال این معادله ، بآسانی می‌توان نتیجه گرفت که

$$a=\frac{1}{1-(2m/r)} \tag{۶ـ۸۶}$$

که درآن m ثابت انتگرال است . در این صورت

$$b=1-\frac{2m}{r} \tag{۶ـ۸۷}$$

ومی‌توان ثابت کرد که این عبارتهابرای a و b درهریک ازمعالادت (۶ـ۷۹) تا (۶ـ۸۱) صدق می‌کنند .

بنابراین سنجه‌یی که به دست‌می‌آوریم ، عبارت است از :

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-(2m/r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) - c^2\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2 \qquad (۸۸-۶)$$

این سنجه متقارن کروی است ومی‌تواند نماینده‌ٔ میدان‌گرانشی خارج از یک جسم کروی که مرکز آن در قطب مختصات قطبی کروی (ϕ و θ و r) واقع است ، باشد . این سنجه‌اول بار توسط شوارتس شیلد به دست آمد . در بخش بعد ثابت خواهد شد که ثابت m ، با جرم جسم متناسب است . این را می‌توان از معادلهٔ (۶ــ۴۸) نیز نتیجه گرفت ، زیرا پتانسیل V در فاصلهٔ r از یک جسم کروی به جرم M ، برابر است با

$$V = -\frac{\gamma M}{r} \qquad (۸۹-۶)$$

و ازاین رو :

$$g_{44} = 1-\frac{2\gamma M}{c^2 r} \qquad (۹۰-۶)$$

اکنون g_{44} عبارت است از ضریب $(dx^4)^2 = -c^2 dt^2$ در سنجه ، پس داریم

$$b = 1-\frac{2\gamma M}{c^2 r} \qquad (۹۱-۶)$$

با مقایسهٔ معادلات (۶ــ۸۷) و (۶ــ۹۱) ، مشاهده خواهد شد که

$$m = \frac{\gamma M}{c^2} \qquad (۹۲-۶)$$

از معادلهٔ (۶ــ۸۸)پیداست که معیار سنجه درفاصلهٔ

$$r = 2m = \frac{2\gamma M}{c^2} \qquad (۹۳-۶)$$

از نقطهٔ O ، تکین[1] است . پس نتیجه می‌گیریم که شعاع جسم ، مسلما" باید از این مقدار کمینه ، بیشترباشد . چون دریکاهای c.g.s. ، $c=۳\times۱۰^{۱۰}$ وبرای‌زمین $\gamma M=۳/۹۹۱\times۱۰^{۲۰}$ پس کمینهٔ شعاع برای این جسم ، تقریبا" برابر ۹ میلی متر است .

۶ــ۹ مدارهای سیاره‌ای

نیروی جاذبهٔ واردازسیارات‌برخورشید باعث می‌شود که خورشید دارای یک شتاب کم‌نسبت به‌یک چارچوب لخت باشد . بنابراین اگر چارچوب مختصاتی برقرار شود که همراه خورشید حرکت‌کند ، علاوه‌برمیدان‌گرانشی خورشید وسیارات ، یک میدان‌گرانشی‌متناظر با این‌شتاب ،

1) Singular

در این چارچوب وجود خواهد داشت. لکن به خاطر تجزیه وتحلیل زیر از این میدان و میدان سیارات صرف نظر خواهد شد. بدین جهت فرض می‌شود که میدان گرانشی نسبت‌به مختصات‌قطبی‌کروی‌که قطب‌آنها‌درمرکزخورشیدقرارگرفته‌اند، به‌وسیلهٔ سنجهٔ شوارتس‌شیلد (۶ ــ ۸۸)، تعیین می‌شود. سیارات به عنوان ذراتی مورد بررسی قرار خواهند گرفت که دارای میدان گرانشی قابل اغماض‌اندو جهانخطهای آنهادر فضا ــزمان، زمین پیما هستند (بخش ۶ ــ ۳). اکنون این زمین‌پیماها را محاسبه می‌کنیم.

باقرار دادن مقادیر a و b از معادلات (۶ ــ ۸۶) و (۶ ــ ۸۷) در معادلات (۶ ــ ۷۳)، حاصل می‌شود:

$$\left.\begin{aligned}
\{_1{}^1{}_1\} &= -\frac{m}{r(r-2m)},\\
\{_1{}^2{}_2\} &= \frac{1}{r},\\
\{_1{}^3{}_3\} &= \frac{1}{r},\\
\{_1{}^4{}_4\} &= \frac{m}{r(r-2m)},\\
\{_2{}^1{}_2\} &= -(r-2m),\\
\{_2{}^3{}_3\} &= \cot\theta,\\
\{_3{}^1{}_3\} &= -(r-2m)\sin^2\theta,\\
\{_3{}^2{}_3\} &= -\sin\theta\cos\theta,\\
\{_4{}^1{}_4\} &= \frac{mc^2}{r^3}(r-2m).
\end{aligned}\right\} \qquad (۶ ــ ۹۴)$$

بنابراین برای این زمین‌پیماها معادلات (۵ ــ ۲۱۷) به صورت زیر در می‌آیند:

$$\frac{d^2r}{ds^2}-\frac{m}{r(r-2m)}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-(r-2m)\left\{\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2+\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2-\frac{mc^2}{r^3}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\right\}=0 \qquad (۶ ــ ۹۵)$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds}-\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2=0 \qquad (۶ ــ ۹۶)$$

$$\frac{d^2\phi}{ds^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\phi}{ds}+2\cot\theta\frac{d\theta}{ds}\frac{d\phi}{ds}=0, \qquad (۶ ــ ۹۷)$$

$$\frac{d^2 t}{ds^2}+\frac{2m}{r(r-2m)}\frac{dr}{ds}\frac{dt}{ds}=0. \qquad (۹۸-۶)$$

همچنین انتگرال اول (۵ — ۲۱۸) مربوط به این معادلات در دسترس است که بنا به معادلهٔ (۶ — ۸۸) برابر است با

$$\frac{r}{r-2m}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+r^2\left\{\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2+\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2\right\}-\frac{c^2}{r}(r-2m)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2=1 \qquad (۹۹-۶)$$

معادلهٔ (۶ — ۹۵) به نفع این انتگرال اول کنار گذاشته می‌شود.

اکنون مختصات قطبی کروی چنان انتخاب می‌شوند که درآغاز، سیاره درصفحهٔ $\theta=\frac{1}{2}\pi$ حرکت کند. دراین صورت درآغاز $d\theta/ds=0$ است و از این رو بنا به معادلهٔ (۶ — ۹۶)، دراین‌لحظه $d^2\theta/ds^2=0$ می‌باشد وذره به‌طورنامحدود به حرکت خود دراین سطح ادامه می‌دهد. بدین جهت باقرار دادن $\theta=\frac{1}{2}\pi$ و $d\theta/ds=0$ در بقیهٔ معادلات زمین‌پیمایی، این معادلات تبدیل می‌شوند به

$$\frac{d^2\phi}{ds^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\phi}{ds}=0, \qquad (۱۰۰-۶)$$

$$\frac{d^2 t}{ds^2}+\frac{2m}{r(r-2m)}\frac{dr}{ds}\frac{dt}{ds}=0, \qquad (۱۰۱-۶)$$

$$\frac{r}{r-2m}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+r^2\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2-\frac{c^2}{r}(r-2m)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2=1. \qquad (۱۰۲-۶)$$

با قرار دادن $w=d\phi/ds$ و $v=dt/ds$ ، می‌توان معادلات (۶ — ۱۰۰)و (۶ — ۱۰۱) را بترتیب به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{dw}{dr}+\frac{2}{r}w=0, \qquad (۱۰۳-۶)$$

$$\frac{dv}{dr}+\frac{2m}{r(r-2m)}v=0, \qquad (۱۰۴-۶)$$

اگر ازاین معادلات انتگرال گرفته شود، حاصل چنین خواهد بود

$$w=\frac{d\phi}{ds}=\frac{\alpha}{r^2}, \qquad (۱۰۵-۶)$$

$$v = \frac{dt}{ds} = \frac{\beta r}{r-2m}, \qquad (۶-۱۰۶)$$

که درآنها α و β ثابتهای انتگرال هستند.

باقرار دادن مقادیر $d\phi/ds$ و dt/ds ازدومعادلهٔ اخیر درمعادلهٔ (۶ ــ ۱۰۲)، نتیجه می‌شود

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+\frac{\alpha^2}{r^3}(r-2m) = 1+c^2\beta^2-\frac{2m}{r} \qquad (۶-۱۰۷)$$

سپس با حذف ds بین این معادله و معادلهٔ (۶ ــ ۱۰۵)، معادلهٔ مدار به دست می‌آید، بدین معنی که

$$\left(\frac{\alpha}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right)^2+\frac{\alpha^2}{r^2} = 1+c^2\beta^2-\frac{2m}{r}+\frac{2m\alpha^2}{r^3} \qquad (۶-۱۰۸)$$

با قرار دادن $u=1/r$ ، این معادله به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2+u^2 = \frac{1+c^2\beta^2}{\alpha^2}-\frac{2m}{\alpha^2}u+2mu^3 \qquad (۶-۱۰۹)$$

با گرفتن مشتق نسبت به ϕ ، این معادله صورتی پیدا می‌کند که‌آن را درنظریهٔ مدارها می‌شناسیم بدین معنی

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}+u = -\frac{m}{\alpha^2}+3mu^2 \qquad (۶-۱۱۰)$$

معادلهٔ متناظر حاکم برمدار، طبق مکانیک کلاسیک عبارت‌است از

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}+u = \frac{\gamma M}{h^2} \qquad (۶-۱۱۱)$$

که درآن M جرم جسم جذب کننده است و h عبارت است ازگشتاور سرعت ثابت سیاره حول مرکز جاذبه، یعنی

$$r^2\frac{d\phi}{dt} = h \qquad (۶-۱۱۲)$$

واضح است که‌همتای معادلهٔ اخیر در نسبیت عام، معادلهٔ (۶ــ۱۰۵) است. اگر τ زمان ویژهٔ ــسمی باشد که حرکت مداری دارد، دراین صورت بنا به معادلهٔ (۶ ــ ۶) داریم $ic\,d\tau = ds$ و معادلهٔ (۶ــ۱۰۵) با معادلهٔ زیر هم‌ارز می‌شود

$$r^2\frac{d\phi}{d\tau} = ic\alpha. \qquad (۶-۱۱۳)$$

متغیر زمانی t در مکانیک کلاسیک را با زمان ویژهٔ τ، برای جسمی که حرکت آن مورد مطالعه قرارگرفته‌است، یکسان درنظرمی‌گیریم، دراین‌صورت با مقایسهٔ معادلات (۶ــ۱۱۲) و (۶ــ۱۱۳) مشاهده می‌شودکه:

$$h = ic\alpha \qquad (۱۱۴-۶)$$

پس معادلهٔ (۶ــ۱۱۰) چنین می‌شود

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}+u = \frac{mc^2}{h^2}+3mu^2 \qquad (۱۱۵-۶)$$

که صرف نظراز جملهٔ ($3mu^2$)، با معادلهٔ کلاسیک (۶ــ۱۱۱) برابر است، به شرط اینکه داشته باشیم

$$m = \frac{\gamma M}{c^2} \qquad (۱۱۶-۶)$$

و این مؤید معادلهٔ (۶ــ۹۲) است.

نسبت جملهٔ اضافی $3mu^2$ به جملهٔ "قانون عکس مجدور mc^2/h^2"، بنا به‌معادلهٔ (۶ــ۱۱۲) برابر است با

$$\frac{3h^2u^2}{c^2} = \frac{3}{c^2}r^2\dot{\phi}^2 \qquad (۱۱۷-۶)$$

$r\dot{\phi}$ عبارت است از مؤلفهٔ عرضی سرعت سیاره و بیشترین مقدارآن برای سیارات منظومهٔ شمسی مربوط به‌عطارد است، یعنی ۴۸ کیلو متر برثانیه. چون داریم $c =$ ۳×۱۰^۵ km/sec، پس دراین حالت نسبت جمله های مذکور برابر ۷/۷×۱۰^{-۸} می‌شود که عددی است بسیار کوچک. اما، چنانکه هم اکنون اثبات خواهیم کرد، جملهٔ اضافی دارای اثر ترکیبی است و به این دلیل می‌توان آن را با رصد چک کرد.

جواب معادلهٔ کلاسیک (۶ــ۱۱۱)، یعنی

$$u = \frac{\mu}{h^2}\{1+e\cos(\phi-\varpi)\}, \qquad (۱۱۸-۶)$$

که در آن $\mu = \gamma M = mc^2$ و e برون ــ مرکزی[1] مدار و ϖ طول حضیض[2] است، با یک تقریب خیلی دقیق برابر است با جواب معادلهٔ (۶ــ۱۱۵). بنابراین خطای حاصل از فرض

1) eccentricity

2) longitude of Periheltion

$$3mu^2 = \frac{3m\mu^2}{h^4}\{1+e\cos(\phi-\varpi)\}^2 \qquad (۶-۱۱۹)$$

مطلقاً "ناچیز خواهد بود ، چون به هر صورت این‌جمله بسیار کوچک است . بنابراین به‌جای معادلهٔ (۶-۱۱۵) ، می‌توان معادلهٔ زیر را قرار داد

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}+u = \frac{\mu}{h^2}+\frac{3m\mu^2}{h^4}\{1+e\cos(\phi-\varpi)\}^2 \qquad (۶-۱۲۰)$$

این معادله دارای جوابی به صورت (۶-۱۱۸) با جمله های اضافی "انتگرال خاص" متناظر باجملهٔ جدید (۶-۱۱۹) ، خواهد بود . این جواب به صورت زیر است .

$$\frac{3m\mu^2}{h^4}\{1+\tfrac{1}{2}e^2-\tfrac{1}{6}e^2\cos 2(\phi-\varpi)+e\phi\sin(\phi-\varpi)\}. \qquad (۶-۱۲۱)$$

جملهٔ ثابت‌رانمی‌توان ازطریق‌رصد کردن از جمله ای که پیشتردر معادلهٔ (۶-۱۱۸)وجود داشت جدا کرد . دامنهٔ جملهٔ $\cos 2(\phi-\varpi)$ برای آشکار سازی بسیار کوچک‌است‌لکن ، جملهٔ‌باقی مانده دارای‌دامنه ای است که با ϕ افزایش‌پیدا می‌کند و بنابراین دارای اثر ترکیبی است . با اضافه کردن این‌جمله به‌جواب (۶-۱۱۸) ، خواهیم داشت :

$$u = \frac{\mu}{h^2}\left\{1+e\cos(\phi-\varpi)+\frac{3m\mu e}{h^2}\phi\sin(\phi-\varpi)\right\},$$

$$= \frac{\mu}{h^2}\{1+e\cos(\phi-\varpi-\delta\varpi)\}, \qquad (۶-۱۲۲)$$

که درآن $\delta\varpi = 3m\mu\phi/h^2$ و از جمله های $O(\delta\varpi^2)$ صرف نظر شده است .

معادلهٔ (۶-۱۲۲)نشان‌می‌دهدکه‌طول‌حضیض‌باید طبق معادلهٔ زیر به طورمداوم افزایش پیدا کند :

$$\delta\varpi = \frac{3m\mu}{h^2}\phi = \frac{3\mu^2}{c^2h^2}\phi = \frac{3\mu}{c^2l}\phi \qquad (۶-۱۲۳)$$

که درآن $l = h^2/\mu$ عبارت است از نصف طول‌قطراطول[1] مدار . با قرار دادن

$$\mu = ۱/۳۳\times ۱۰^{۲۶}$$

برحسب واحدهای .c.g.s برای خورشید و $c = ۳\times ۱۰^{۱۰}$ cm/sec وبرای‌عطارد $l = ۵/۷۹\times ۱۰^{۱۲}$ ، مقدارپیش بینی شدهٔ پیشروی زاویه ای حضیض در قرن برابر "۴۳

1) semi-latus rectum

خواهد بود. این مقدار با مقدار رصد شده مطابقت دارد. پیشروی پیش بینی شده برای سایر سیارات بسیار کوچکتر از آن است که بتوان در عصر حاضر آن را مشاهده کرد.

۶ ــ ۱۰ انحراف گرانشی پرتو نور

در بخش ۱ ــ ۷ نشان دادیم که بازهٔ زمان‌ویژه بین لحظهٔ انتشار یک علامت نوری و لحظهٔ رسیدن آن به یک نقطهٔ دور، برابر صفر است. در آنجا فرض براین بود که علامت در یک چارچوب لخت منتشر می‌شود و از این رو میدان گرانشی وجود نداشت. این نتیجه را می‌توان با گفتن اینکه برای دو نقطهٔ مجاور واقع برجهانخط یک علامت نوری

$$ds = 0 \qquad (۶-۱۲۴)$$

بیان کرد. اما در یک فضا ــ زمان با سنجهٔ (۶ــ ۶) زمین‌پیماهای صفر توسط معادلهٔ (۶ــ ۱۲۴) تعریف شده اند و معادلات

$$\frac{d^2x}{d\lambda^2} = \frac{d^2y}{d\lambda^2} = \frac{d^2z}{d\lambda^2} = \frac{d^2t}{d\lambda^2} \qquad (۶-۱۲۵)$$

برای نمادهای سه‌شاخصی برابر صفراند. معادلات (۶ ــ ۱۲۵) متضمن این هستند که در امتداد یک زمین پیمای صفر، x و y و z به طور خطی وابستگی به t دارند. ولی مسلماً" این مطلب در مورد مختصات یک علامت نوری که در یک چارچوب لخت منتشر شده است، صحت دارد. نتیجه می‌شود که جهانخطهای علامتهای نوری در فضا ــ زمان، زمین پیماهای صفر هستند.

چون همیشه می‌توان در یک ناحیهٔ بسیار کوچک فضا ــ زمان، حتی با وجود میدان گرانشی، یک چارچوب لخت پیدا کرد، پس نتیجه می‌شود که جهانخط یک علامت نوری در چنین ناحیه‌ای یک زمین پیمای صفر است. تعمیم بدیهی این نتیجه را خواهیم پذیرفت، بدین معنی که در یک ناحیهٔ نامحدود فضا ــ زمان، جهانخطهای علامتهای نوری، زمین پیماهای صفر هستند.

اکنون برای محاسبهٔ مسیر یک پرتو نور در میدان گرانشی یک جسم کروی، از این اصل استفاده خواهیم کرد. با فرض کردن سنجهٔ فضا ــ زمان به صورت شوارتس شیلد (معادلهٔ (۶ ــ ۱۸۸))، نمادهای سه شاخصی از معادلهٔ (۶ ــ ۹۴) به دست می‌آیند و معادلات حاکم برزمین پیمای صفر (معادلات (۵ ــ ۲۲۶)) با معادلات (۶ ــ ۹۵) تا (۶ ــ ۹۸) پس از قرار دادن λ به جای s، برابر می‌شوند. انتگرال اول (۵ ــ ۲۲۵)

به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{r}{r-2m}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+r^2\left\{\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2+\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2\right\}-\frac{c^2}{r}(r-2m)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2=0. \qquad (۱۲۶-۶)$$

بدون نقض کلیت، بازهم θ را برابر $\frac{1}{2}\pi$ قرار خواهیم داد. پس یک پرتو درصفحهٔ استوادرنظر گرفته شده است ودرست مشابه آنچه که در بخش گذشته انجام گرفت، معادلهٔ زیر را به دست می‌آوریم:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}+u=3mu^2, \qquad (۱۲۷-۶)$$

که درآن $u=1/r$.این معادله خانوادهٔ پرتوهای نوررا در صفحهٔ استوا تعیین می‌کند. به عنوان اولین تقریب جهت حل معادلهٔ (۶ــ ۱۲۷)، ازجملهٔ طرف‌راست صرف نظرخواهیم کرد. دراین صورت داریم

$$u=\frac{1}{R}\cos(\phi+\alpha), \qquad (۱۲۸-۶)$$

که درآن R و α ثابتهای انتگرال هستند. این معادله عبارت است از معادلهٔ قطبی یک‌خط مستقیم که فاصلهٔ عمودی آن از مرکز جاذبه برابر R است. بنابراین همان طورکه می‌توان انتظار داشت، اگر میدان گرانشی خیلی شدید نباشد، پرتوهای نورخطوط مستقیم خواهند بود. البته این استنتاج‌با رصد مورد تأیید است. از این رووقتی‌حرکت ماه باعث‌می‌شود که قرص‌آن به مکان ستاره‌ای برروی کرهٔ عالم نزدیک شود و سرانجام آن را از نظر پنهان سازد، نمی‌توان انحراف قابل ملاحظه‌ای از مکان ستاره برروی کرهٔ عالم پیدا کرد.

بازهم، بدون نقض کلیت، قرار می‌دهیم $\alpha=0$ ، به‌طوری که ، بنا به معادلهٔ (۶ ــ ۱۲۸)، پرتوموازی محور y $(\phi=\pm\frac{1}{2}\pi)$ است. دراین صورت‌با قرار دادن $u=\cos\phi/R$ درجملهٔ طرف راست معادلهٔ (۶ــ ۱۲۷)، خواهیم داشت

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}+u=\frac{3m}{R^2}\cos^2\phi \qquad (۱۲۹-۶)$$

اکنون جمله اضافی "انتگرال خاص" چنین می‌شود

$$\frac{m}{R^2}(2-\cos^2\phi) \qquad (۱۳۰-۶)$$

واز این رو معادلهٔ قطبی پرتو نور در تقریب دوم عبارت است از

$$u = \frac{1}{R}\cos\phi + \frac{m}{R^2}(2-\cos^2\phi). \qquad (۶-۱۳۱)$$

در هر انتهای پرتو داریم: $u=0$ و از این رو

$$\frac{m}{R}\cos^2\phi - \cos\phi - \frac{2m}{R} = 0 \qquad (۶-۱۳۲)$$

با فرض اینکه m/R کوچک است، این معادلهٔ درجهٔ دوم یک ریشهٔ کوچک و یک ریشهٔ بزرگ دارد. ریشهٔ کوچک، تقریبا" برابر است با

$$\cos\phi = -\frac{2m}{R} \qquad (۶-۱۳۳)$$

و از این رو در دو انتهای پرتو داریم

$$\phi = \pm\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2m}{R}\right) \qquad (۶-۱۳۴)$$

بنابراین، انحراف زاویه ای که در پرتو، در اثر عبور آن ازمیدان گرانشی ایجاد می شود، تقریبا" برابر است با:

$$\frac{4m}{R} \qquad (۶-۱۳۵)$$

برای پرتو نوری که سطح خورشید را می‌خراشد داریم

$R =$ شعاع خورشید $= ۶/۹۵\times ۱۰^{۱۰}$ cm و $m = ۱/۵\times ۱۰^{۵}$ cm.

ازاین‌روانحراف پیش بینی شده برابر است با رادیان $۸/۶۲\times ۱۰^{-۶}$ و یادرحدود $۱/۷۷''$.
این مقدارپیش بینی شده، بارصد یک ستاره نزدیک‌به قرص خورشید، درموقع یک کسوف‌کامل چک شده است. مقادیر تجربی با نتیجهٔ نظری مطابقت دارند.

۶ــ ۱۱ تغییر مکان گرانشی خطوط طیفی

ساعت معیار، می‌تواند هر ابزاری باشد که دارای حرکت دوره ای یکنواخت است وهردورهٔ آن غیر قابل تمیز از دورهٔ دیگر است. آنگاه گذشت زمان بین دو رویدادی که در همسایگی این ساعت واقع می‌شوند، از شمار دوره ها وکسر دوره ای که این‌ابزار بین این دولحظه می‌پیماید اندازه گرفته می‌شود. ساعتهایی که در بخش ۶ ــ ۲ برای تعیین مختصات زمانی ع^4 یک رویداد به کار برده شدند، الزاما" ساعتهای معیار نبودند. آهنگ این ساعتهای مختصاتی، می‌تواندبه طور دلخواه تغییر کند، تنها دربایست این است که اگر A و B دو رویداد درمجاورت یک ساعت مختصاتی باشندو B پس‌از A روی دهد آنگاه زمان مختصاتی

B از زمان مختصاتی A بزرگتر باشد.

حال ساعت معیاری را درنظر بگیرید که به نحوی در یک چارچوب مرجع، حرکت می‌کند. فرض کنید A و B دو رویداد نمایشگر آغاز و پایان یک دورهٔ ساعت باشندو همین طور فرض کنید C و D دو رویداد باشند که توسط یک دورهٔ دیگر از ساعت از یکدیگر جدا می‌شوند. چون بنا به فرض دوره های ساعت یکسان هستند، پس رابطهٔ هندسی بین A و B در فضا ـ زمان، با رابطهٔ بین C و D باید برابر باشد. نتیجه می‌گیریم که بازه های فضا ـ زمانی بین A و B و بین C و D برابراند. بنابراین هر دوره ازساعت معیار، پیشروی آن را درجهانخط خود، با فواصل یکسان ثبت می‌کند و اگر ds بازهٔ بین نقاط مجاور این جهانخط باشد، دراین صورت کمیتی که گذشت آن توسط ساعت ثبت می‌شود عبارت است از انتگرال زیر در امتداد جهانخط:

$$\int ds. \tag{۱۳۶ــ۶}$$

یعنی، یک ساعت معیار گذشت‌بازه در طول مسیر حرکت خود را ثبت می‌کند.

فرض کنید که x^i ($i =$ ۱ و ۲ و ۳ و ۴) مختصات یک رویداد دریک چارچوب مرجع فضا ـ زمان باشند، که x^1 و x^2 و x^3 از نظر فیزیکی به عنوان مختصات فضایی نسبت به‌یک چارچوب ایستا و x^4/ic به عنوان‌زمان‌تعبیر می‌شوند. اگر یک ساعت‌معیار نسبت به این چارچوب ساکن‌باشد، دراین‌صورت‌برای‌نقاط مجاورجهانخط‌آن $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$ و بنابراین داریم

$$ds^2 = g_{44}(dx^4)^2 = -c^2 g_{44}\, dt^2 \tag{۱۳۷ــ۶}$$

که درآن $x^4 = ict$. پس رابطهٔ بین بازهٔ s که توسط ساعت اندازه گیری می‌شود و t مختصهٔ زمانی درنقطهٔ (x^3 و x^2 و x^1)، برابر است با

$$s = ic \int \sqrt{(g_{44})}\, dt. \tag{۱۳۸ــ۶}$$

s تنها بدین علت انگاری‌است که بازهٔ ds بین دو رویداد را طوری تعریف کرده ایم کـه بازه های زمان گونه‌انگاری باشند. ساعت معیار را می‌توان طوری مدرج کرد که $T = s/ic$ را ثبت کند وآنگاه رابطهٔ بین زمان T ی ساعت معیار و مختصهٔ زمانی چنین خواهد بود

$$T = \int \sqrt{(g_{44})}\, dt \tag{۱۳۹ــ۶}$$

در بخش ۶ ــ ۵ ، ثابت شد که درمورد خاصی که چارچوب مختصات در یک میدان گرانشی ایستای نسبتا " ضعیف ، ساکن باشد ، g_{44} برحسب پتانسیل نرده ای نیوتونی V برای میدان از معادلهٔ تقریبی (۶ ــ ۴۸) به دست می‌آید . بنابراین ، رابطهٔ زیر بستگی بازه های زمانی راکه توسط یک ساعت معیار ساکن اندازه گیری می‌شود و ساعت مختصاتی در نقطه‌ای از میدان گرانشی که پتانسیل درآنجا V است ، نشان می دهد :

$$dT = \left(1+\frac{2V}{c^2}\right)^{1/2} dt \qquad (۶ - ۱۴۰)$$

پس یک اتم درحال‌گسیل طیف مشخصهٔ خود ، مثل یک ساعت معیار عمل می‌کند . بنابراین اگر دو اتم متشابه در یک میدان‌گرانشی ایستا ، در دو مکان متفاوت ساکن باشند و درحال گسیل تابش مشخصهٔ خود باشند ، دراین صورت بازه های متناظر با گسیل یک دورهٔ کامل ازیک خط طیفی خاص به‌وسیلهٔ هر یک از اتمها یکسان خواهندبود . اگر dT این بازهٔ زمانی معیار ، V_1 و V_2 پتانسیل‌گرانشی دراتمها و dt_1 و dt_2 دوره های‌کاملی‌باشند که برحسب زمان مختصاتی اندازه گیری می‌شوند ، آنگاه با توجه به معادلهٔ (۶ ــ ۱۴۰) خواهیم داشت

$$dT = \left(1+\frac{2V_1}{c^2}\right)^{1/2} dt_1 = \left(1+\frac{2V_2}{c^2}\right)^{1/2} dt_2 \qquad (۶ - ۱۴۱)$$

و ازآنجا داریم

$$dt_1 : dt_2 = \left(1+\frac{2V_2}{c^2}\right)^{1/2} : \left(1+\frac{2V_1}{c^2}\right)^{1/2} \qquad (۶ - ۱۴۲)$$

حال فرض کنید که تابش اتمها درنقطه‌ای از میدان مثل P مشاهده شود . t_a زمان مختصاتی یک اتم درلحظهٔ گسیل یک قله موج تابش و t_b زمان متناظر برای قلهٔ بعدی فرض می‌شود . همچنین t'_a و t'_b بترتیب زمان مختصاتی این دو قلهٔ موج در لحظهٔ رسیدن به نقطهٔ P فرض می‌شود .ازطرفی چون میدان وچارچوب مختصات هر دو ایستا هستند ، بنابراین مدت زمان بین خروج قلهٔ موج ازاتم ،تا رسیدن‌آن به نقطهٔ P ، مقدار ثابتی خواهد بود . پس

$$t'_a - t_a = t'_b - t_b, \qquad (۶ - ۱۴۳)$$

ویا

$$t'_a - t'_b = t_a - t_b \qquad (۶ - ۱۴۴)$$

معادلهٔ اخیر نشان می دهد که‌دورهٔ نوسان اتم که به وسیلهٔ ساعت مختصاتی در نقطهٔ P اندازه گیری می‌شود ، بستگی‌به مکان این نقطه ندارد وبا دورهٔ اندازه گیری شده به‌وسیلهٔ

ساعت مختصاتی درمکان خود اتم برابر است. بنابراین نسبت بسامدهای ν_1 به ν_2 مربوط به خطوط طیفی متناظر دو اتم که درنقطهٔ P اندازه گیری می‌شوند، طبق معادلهٔ (۶ — ۱۴۲) تقریباً" برابر است با

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\left(\frac{1+2V_1/c^2}{1+2V_2/c^2}\right)} = 1+\frac{V_1-V_2}{c^2} \qquad (۶-۱۴۵)$$

مثلا" برای اتمی واقع در سطح خورشید واتم مشابه آن در سطح زمین، در دستگاه یکاهای c.g.s. داریم

$$V_1 = -9{\cdot}512\times 10^{12} \quad (\text{زمین})$$
$$V_2 = -1{\cdot}914\times 10^{15} \quad (\text{خورشید})$$

و از آنجا

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = 1{\cdot}00000212. \qquad (۶-۱۴۶)$$

این اثری است بسیار ناچیز و به دشواری می‌توان آن را اندازه گرفت. اما، در مورد همراه شعرای یمانی اثر پیش بینی شده سی برابر بزرگتر است وتوسط رصدها تأیید شده است.

۶ — ۱۲ معادلات ماکسول درمیدان گرانشی

دراین بخش آخر، معادلات (۴ — ۲۸) که میدان الکترومغناطیس حاصل از حرکت توزیع بارالکتریکی درخلأ را تعیین می‌کنند، طوری تعمیم داده خواهند شد تا هر میدان گرانشی راکه ممکن است وجود داشته باشد، در برگیرند، ولی وارد جزئیات مضامین معادلات تصحیح شده نخواهیم شد.

تعریف یک چارچوب دکارتی قائم لخت، یعنی یک چارچوب درحال" سقوط آزاد" درمیدان گرانشی، در هر ناحیه از فضا که به اندازهٔ کافی کوچک باشد ودر هر بازهٔ زمانی محدود، امکان پذیراست. اگر مؤلفه های الکتریکی ومغناطیسی میدان الکترو مغناطیس دراین چارچوب اندازه گیری شوند، دراین صورت می‌توان تانسور میدان F_{ij} را که توسط معادلهٔ (۴ — ۲۲) تعریف شده‌است تعیین کرد. با به کار بردن معادلات تبدیلات مربوطه، مؤلفه‌های این تانسورنسبت به مختصات عام x^i در میدان گرانشی قابل محاسبه است. در چارچوب لخت اولیه هیچ فرقی بین خواص هموردا و پادوردا وجود ندارد، به طوری که F_{ij} رامی‌توان به‌هنگام تبدیل به صورت تانسور هموردا، پادوردا یا آمیخته در نظر گرفت. اگر این تانسور

به صورت تانسور هموردا در نظر گرفته شود، مؤلفه های هموردای F_{ij} درچارچوب عـام x^i به دست می‌آیند. اگر تانسور به شکل تانسور پادوردا ویا تانسور آمیخته در نظرگرفته شود دراین حالت مولفه های پادوردای F^{ij} و یامؤلفه‌های‌آمیختهٔ F^i_j به دست‌می‌آیند. پس به‌این ترتیب تانسور میدان در هر نقطه از فضا ــ زمان تعریف می‌شود. به همین‌ترتیب بردارچگالی جریان بامؤلفه های هموردای J_i و مؤلفه های پادوردای J^i نسبت به‌چارچوب x^i نیز تعریف می‌شود.

معادلات زیر را درنظر بگیرید:

$$F^{ij}{}_{;j} = \frac{4\pi}{c} J^i, \qquad (۱۴۷-۶)$$

$$F_{ij;k} + F_{jk;i} + F_{ki;j} = 0. \qquad (۱۴۸-۶)$$

اینها معادلات تانسوری هستند وبنابراین اگر در یک چارچوب فضا ــ زمان معتبر باشند در هر چارچوب‌فضا ــ زمان دیگر نیز معتبرخواهند بود. اما، نسبت‌به چارچوب مختصات‌لخت (ict و z و y و x) که‌وجود آن‌برای هرناحیهٔ فضا ــ زمان که به اندازهٔ کافی کوچک باشد، امکان‌پذیراست، این معادلات به‌معادلات (۴ ــ ۲۸) تبدیل‌می‌شوندوازاین‌رودرچنین ناحیه ای معتبر خواهند بود. با در نظر گرفتن کل فضا ــ زمان همچون انبوهه ای از چنین عناصر کوچک، می‌توان گفت که معادلات (۶ ــ ۱۴۷) و (۶ ــ ۱۴۸) کلاً صادق اند.

از آنجا که F^{ij} پادمتقارن است، پس با استفاده از معادلهٔ (۵ ــ ۱۹۷) می‌توان نوشت:

$$F^{ij}{}_{;j} = \frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} + \{{}_r{}^i{}_j\} F^{rj} + \{{}_r{}^j{}_j\} F^{ir},$$

$$= \frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} + \frac{1}{\sqrt{(-g)}} \frac{\partial}{\partial x^r} \{\sqrt{(-g)}\} F^{ir},$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(-g)}} \frac{\partial}{\partial x^j} \{\sqrt{(-g)} F^{ij}\}, \qquad (۱۴۹-۶)$$

(چون برای میدان گرانشی حقیقی، مقدار g همیشه منفی است، لذا $-g$ به‌جای g قرار داده شده است). بنابراین، معادلهٔ (۶ ــ ۱۴۷) هم ارزاست با

$$\frac{1}{\sqrt{(-g)}} \frac{\partial}{\partial x^j} \{\sqrt{(-g)} F^{ij}\} = \frac{4\pi}{c} J^i. \qquad (۱۵۰-۶)$$

علاوه‌براین چون g یک ناوردای‌نسبی‌باوزن ۲ است (مقایسه‌کنیدبامعادلهٔ (۵ ــ ۵۰)) و لذا $\sqrt{(-g)}$ یک چگالی‌ناورداست، درنتیجه $\mathfrak{F}^{ij}$ و $\mathfrak{J}^i$ که بامعادله های زیر تعریف‌می‌شوند

$$\mathfrak{F}^{ij} = \sqrt{(-g)}F^{ij}, \quad \mathfrak{J}^i = \sqrt{(-g)}J^i \qquad (۱۵۱-۶)$$

چگالی هستند و آنگاه معادلهٔ (۶ــ۱۵۰) به صورت ساده تر زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}^{ij}}{\partial x^j} = \frac{4\pi}{c}\mathfrak{J}^i \qquad (۱۵۲-۶)$$

همچنین به‌دلیل‌پادمتقارن‌بودن‌تانسورمیدان، می‌توان‌گفت‌که معادلهٔ (۶ــ۱۴۸) هم ارز است با

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} = 0. \qquad (۱۵۳-۶)$$

تمرینات فصل ششم

۱ ــ ثابت کنید وقتی یک شاخص T^{ij} که با معادلهٔ (۶ــ۱۷) تعریف شده‌است، پایین آورده شود، T_j^i که با معادلهٔ (۶ــ۱۸) تعریف شده است به دست می‌آید.

۲ ــ در فضا ــ زمانی که سنجهٔ آن برابر

$$ds^2 = e^{2\phi}(dx^4)^2 + e^{2\theta}(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

است که‌درآن ϕ و θ فقط توابعی از x^1 هستند، ثابت کنید که تانسور ریمان ــ کریستوفل‌برابر صفر می‌شود اگرو تنها اگر داشته باشیم

$$\phi'' - \theta'\phi' + \phi'^2 = 0$$

که درآن پریمها معرف مشتق نسبت‌به x^1 هستند. واگر $\phi = -\theta$، ثابت کنید که فضا تخت است به شرط این که داشته باشیم

$$\phi = \tfrac{1}{2}\log(a + bx^1),$$

که درآن a و b ثابت هستند. (د.ل.)

۳ ــ اگر سنجهٔ فضا ــ زمان برابر

$$ds^2 = -e^{\lambda}\{(dx^1)^2 + (dx^2)^2\} - (x^2)^2 e^{-\rho}(dx^3)^2 + e^{\rho}(dx^4)^2$$

باشد که درآن λ و ρ فقط توابعی از x^1و x^2 هستند، بامحاسبهٔ R_{44} نشان دهید که معادلات میدان $R_{ij} = 0$ (برای ناحیه ای خالی از ماده) مستلزم این است که ρ در رابطهٔ

$$\frac{\partial^2 \rho}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 \rho}{(\partial x^2)^2} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial \rho}{\partial x^2} = 0.$$

صدق کنند. (د . لیو.)

۴ ــ معادلات دیفرانسیل مسیرهای ذرات آزمون را در فضا ــ زمانی پیدا کنید که سنجهٔ آن برابر است با

$$ds^2 = e^{2kx}[-(dx^2+dy^2+dz^2)+dt^2],$$

که درآن k یک ثابت‌است . اگر داشته باشیم

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

و نیز اگر وقتی $x=0$ است $v=V$ باشد، نشان دهید که

$$1-v^2 = (1-V^2)e^{2kx} \qquad \text{(د. لیو.)}$$

۵ ــ با استفاده از معادلات

$$R^i_j-\tfrac{1}{2}\delta^i_j R = -\kappa T^i_j$$

تانسور انرژی ــ اندازه حرکت را برای توزیع ماده ای که متناظر با فضا ــ زمان زیر است، پیدا کنید:

$$ds^2 = -e^g(dx^2+dy^2+dz^2)+dt^2$$

که درآن g فقط تابعی از t است (د.لیو.) .

۶ ــ اگر داشته باشیم

$$ds^2 = \frac{dt^2}{1-kx}-\frac{1}{c^2}\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{(1-kx)^2}$$

که درآن k یک ثابت است و اگر

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

ثابت کنید در امتداد یک زمین‌پیما داریم

$$V^2-v^2 = kc^2x$$

که درآن V یک ثابت است. (د.ل.)

۷ ــ نشان‌دهیدکه‌چهارمعادلهٔ‌دیفرانسیل (۶ ــ ۹۵) تا (۶ ــ ۹۸) برای زمین‌ــ پیماها درفضا ــ زمان شوارتس شیلد ،یک‌جواب دارند که برای آن $\theta=\frac{1}{2}\pi$ و $r=a$ که درآن a ثابتی است بزرگتر از m ۳ و نیز بــازهٔ کل از $\phi=0$ تا $\phi=2\pi$ درطول این زمین پیما برابر است با

$$2\pi ia\left(\frac{a}{m}-3\right)^{1/2}$$

همچنین‌نشان‌دهیدکه‌یک‌زمین‌پیماوجوددارد‌که‌درطول‌آن $\theta=\text{const}$ و $\phi=\text{const}$

در معادله ای به صورت زیر صدق می‌کند:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2mc^2\left(1-\frac{2m}{R}\right)^{-1}\left(1-\frac{2m}{r}\right)^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)$$

که درآن R ثابت‌است. تعبیر فیزیکی این نتایج را باختصار بیان کنید.

۸ ـ یک فضا ـ زمان دارای سنجهٔ

$$ds^2 = e^{2\sigma}\{(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2+(dx^4)^2\}$$

است که‌درآن σ تابعی از (x^4 و x^3 و x^2 و x^1) است. اگر t^l مماس واحد بر زمین‌پیما باشد، ثابت کنید که

$$\frac{dt^k}{ds}+2(\sigma_l t^l)t^k = \sigma_k e^{-2\sigma}$$

که درآن $\sigma_k = \frac{\partial\sigma}{\partial x^k}$.

ثابت کنید که زمین‌پیماها برای حرکتهای‌کند درمیدانهایی که به‌آهستگی تغییر می‌کنند، عبارت‌اند ازمسیرذرات‌دریک میدان گرانشی با پتانسیل $-\sigma c^2$. (د.ل.)

۹ ـ تانسور ریمان ـ کریستوفل فضا ـ زمان‌تمرین اخیر را پیدا کنید و ثابت‌کنید که خمش نرده ای R صفر می‌شود اگر و تنها اگر داشته باشیم

$$\sigma_{pp}+\sigma_p\sigma_p = 0$$

که درآن $\sigma_{pq} = \frac{\partial^2\sigma}{\partial x^p\partial x^q}$

اگر σ فقط تابعی از $r = [(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2]^{1/2}$ باشد، ثابت کنید که این شرط عبارت است از

$$\sigma''+\frac{2}{r}\sigma'+\sigma'^2 = 0$$

که درآن پریم نشانهٔ مشتق نسبت به r است. (د.ل.)

۱۰ ـ ثابت کنید که‌در فضا ـ زمانی با سنجهٔ

$$ds^2 = e^{2\sigma}\{dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta\,d\phi^2-dt^2\}$$

که درآن $\sigma = \log(1+m/r)$ و m ثابت است، خمش نرده ای برابر صفر است (برای این شرط، تمرین ۹ را ملاحظه کنید.) ثابت کنید که زمین پیماها درمعادلات

$$r^2\sin^2\theta\frac{d\phi}{ds} = k_1 e^{-2\sigma}$$

$$\frac{dt}{ds} = k_2 e^{-2\sigma},$$

درحالی که k_1 و k_2 ثابت هستند، صدق می‌کنند. اگر در آغاز $\phi = 0$ و $d\phi/ds = 0$ انتخاب شوند، ثابت کنید که ϕ همیشه برابر صفر است وداریم

$$r^2\frac{d\theta}{ds} = he^{-2\sigma}$$

که درآن h ثابت است .

۱۱ــ نشان دهید که :

$$ds^2 = e^{-2q(\sigma)}\left\{dt^2-\frac{1}{c^2}(dx^2+dy^2+dz^2)\right\}$$

که درآن q یک تابع اختیاری است و

$$\sigma^2 = t^2-\frac{1}{c^2}(x^2+y^2+z^2)$$

تحت تبدیل لورنتس ناوردا است .

اگر

$$j^1 = \rho x, \quad j^2 = \rho y, \quad j^3 = \rho z, \quad j^4 = \rho t$$

که درآن ρ تابعی از σ است و j^r یک بردار پادوردا است که در رابطهٔ زیر صدق می‌کند :

$$\frac{\partial}{\partial x^r}(\sqrt{(-g)}j^r) = 0, \quad (x^1 = x,\ldots,x^4 = t)$$

نشان دهید که

$$\rho = \frac{Ae^{4q}}{\sigma^4}$$

که درآن A ثابت است . (د.ل.)

۱۲ ــ با گذاشتن مختصهٔ جدید r' طوری که

$$r = r'\left(1+\frac{m}{2r'}\right)^2$$

به جای مختصهٔ قطبی کروی r که درسنجهٔ شوارتس شیلد (۶ ــ ۸۸) ظاهر می‌شود ، این سنجه را به صورت " همسانگرد " آن ، یعنی

$$ds^2 = \left(1+\frac{m}{2r'}\right)^4(dr'^2+r'^2d\theta^2+r'^2\sin^2\theta\, d\phi^2)-\left(\frac{1-m/2r'}{1+m/2r'}\right)^2c^2dt^2$$

به دست آورید .

۱۳ ــ با به کار بردن یک چارچوب معین ، یک رویداد به‌وسیلهٔ مختصات فضائی (z و y و x) و زمان t مشخص شده است . بسلای فضا ــ زمان متناظر ، دارای سنجهٔ زیر است :

$$ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2+2at\,dx\,dt-(c^2-a^2t^2)dt^2$$

نشان دهیداگرذره‌ای که آزادانه درمیدان‌گرانش سقوط می‌کند از این‌چارچوب مشاهده‌شود ، معادلات حرکت آن عبارت اند از

$$x = A+Bt-\tfrac{1}{2}at^2, \quad y = C+Dt, \quad z = E+Ft$$

که درآن A و B و C و D و E و F ثابت‌هستند . باتبدیل‌به‌مختصات (t و z و y و x') که درآن $x' = x+\frac{1}{2}at^2$ و محاسبهٔ دوبارهٔ سنجه ، این نتیجه را توضیح دهید .

۱۴ ــ (x^3 و x^2 و x^1) عبارت اند از مختصات فضایی یک رویداد نسبت به یک چارچوب S و x^4 عبارت است از زمان این رویداد که به وسیلهٔ ساعتی در S اندازه گیری می‌شود. چارچوب دیگری مانند I درمجاورت نقطهٔ P آزادانه سقوط می‌کند که می‌توان آن را لخت درنظر گرفت. $Oy^1y^2y^3$ عبارت اند از محورهای دکارتی قائم در I و y^4/ic نمایندهٔ زمان در I است که باساعتهای همزمان ومتصل به‌چارچوب، اندازه گیری می‌شود. نشان دهید که تانسور سنجهٔ g_{ij} در S برابر است با

$$g_{ij} = \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial y^k}{\partial x^j}$$

P نقطه ای است ثابت در S ودارای مختصات (x^3 و x^2 و x^1). در لحظهٔ x^4، I طوری انتخاب‌شده است که نقطهٔ P در آن لحظه در I ساکن باشد. نتیجه بگیرید که

$$\frac{\partial y^4}{\partial x^i} = \frac{g_{i4}}{\sqrt{(g_{44})}}$$

dl برابر است‌با فاصلهٔ بین نقطهٔ P و یک نقطهٔ مجاور آن

$$P'(x^1+dx^1, x^2+dx^2, x^3+dx^3)$$

که با یک میلهٔ معیار در لحظهٔ x^4 در I اندازه گیری می‌شود. ثابت کنیدکه

$$dl^2 = dy^\alpha dy^\alpha = \gamma_{\lambda\mu}dx^\lambda dx^\mu$$

که درآن α و λ و μ مقادیر ۱و ۲ و ۳ را قبول می‌کنند و

$$\gamma_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu} - \frac{g_{\lambda 4}g_{\mu 4}}{g_{44}}$$

($\gamma_{\lambda\mu}$ عبارت است از تانسور سنجه برای $\mathscr{R}_3$ که همان S در لحظهٔ x_4 است.)

۱۵ ــ $Oxyz$ عبارت است از چارچوب لخت دکارتی قائم I. یک قرص سخت، درصفحهٔ xy حول مرکزخود O با سرعت زاویه ای ω می‌چرخد. دریک چارچوب دیگر R که همراه قرص می‌چرخد، مختصات قطبی (θ و r)، توسط معادلات زیر تعریف می‌شوند

$$x = r\cos(\theta+\omega t), \quad y = r\sin(\theta+\omega t)$$

t عبارت است از زمانی که با ساعتهای همزمان در چارچوب لخت اندازه گیری می‌شود. اگر فرض شودکه‌زمان یک رویداد در R برابر است با زمانی که یک ساعت مجاور در I نشان می‌دهد، ثابت کنید که سنجهٔ فضا ــ زمان وابسته به R برابر است با

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + 2\omega r^2 d\theta\, dt - (c^2 - r^2\omega^2)dt^2$$

نتیجه بگیرید که سنجه برای هندسه در R عبارت است از

$$dl^2 = dr^2 + \frac{r^2 d\theta^2}{1-\omega^2 r^2/c^2}$$

(راهنمائی: از نتیجهٔ تمرین قبلی استفاده کنید). از این‌رو نشان دهید که خانوادهٔ

زمین پیماهای روی قرص به وسیلهٔ معادلهٔ

$$\theta = \text{const.} - \sin^{-1}\left(\frac{a}{r}\right) - \frac{a}{r^2}\sqrt{(r^2-a^2)}$$

تعیین می‌شود که درآن $r_1 = c/\omega$ و $|a| < r_1$. این خانواده راترسیم کنید. معنی فیزیکی r_1 چیست؟

۱۶ – x^i (i = ۱و۲و۳و۴) عبارت اند از سه مختصهٔ فضایی و زمان نسبت به یک چارچوب‌مرجع S . یک ذرهٔ آزمون‌برای یک آن در زمان x^4 در نقطهٔ (x^3 و x^2 و x^1) از S ساکن است. اگر g_{ij} تانسور سنجه برای میدان‌گرانشی در S باشد، شرایطی رابنویسید که جهانخط ذره یک زمین پیما باشد ونتیجه بگیرید که

$$g_{i\alpha}\frac{d^2x^\alpha}{(dx^4)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{44}}{\partial x^i} + \frac{g_{i4}}{g_{44}}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^4}\right) - \frac{\partial g_{i4}}{\partial x^4}$$

که درآن‌شاخص یونانی‌مقادیر ۱ و ۲ و ۳ را قبول می‌کند. از این‌رو نشان دهید که مؤلفه های هموردای شتاب دره در S برابراند با

$$\gamma_{\alpha\beta}\frac{d^2x^\beta}{(dx^4)^2} = -\frac{\partial U}{\partial x^\alpha} - (c^2+2U)^{1/2}\frac{\partial\gamma_\alpha}{\partial x^4}$$

که درآن $\gamma_{\alpha\beta}$ درتمرین ۱۴ تعریف شده است و

$$g_{44} = -(c^2+2U), \quad \gamma_\alpha = g_{\alpha 4}/\sqrt{(-g_{44})}$$

(U و γ_α بترتیب عبارت اند ازپتانسیل نرده ای وپتانسیل برداری گرانش).

نشان دهید که در مورد سنجهٔ فضا ــ زمان متناسب با چارچوب چرخندهٔ تمرین ۱۵، پتانسیل برداری گرانشی برابر صفر وپتانسیل نرده ای برابر $U = \frac{1}{2}\omega^2 r^2$ است. ایــن نتیجه را برحسب نیروی مرکز گریز تعبیر کنید.

۱۷ ــ جهان دو سیته[1] دارای سنجهٔ

$$ds^2 = -A^{-1}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\, d\phi^2 + Ac^2dt^2$$

است که درآن $A = 1 - r^2/R^2$ و R ثابت است. معادلات دیفرانسیلی را به دست آورید که زمین پیماهای صفردرآنها صدق کنند ونشان دهید که در طول زمین‌پیما های صفر درصفحهٔ $\theta = \frac{1}{2}\pi$ داریم

$$a\frac{dr}{d\phi} = r(r^2-a^2)^{1/2}$$

که درآن a یک ثابت است. نتیجه بگیرید که اگر r و ϕ مختصات قطبی دراین صفحه فرض شوند، مسیر پرتوهای نور در این‌جهان، خطوط مستقیم اند.

1) de sitter

۱۸ ـ جهان اینشتین دارای سنجهٔ

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{1}{1-\lambda r^2} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

است، که‌درآن (ϕ و θ و r) مختصات قطبی کروی‌هستند. معادلات حاکم برزمین پیماهای صفر را به دست‌آورید ونشان دهید که در صفحهٔ $\theta = \frac{1}{2}\pi$ این منحنیهادرمعادلهٔ

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = r^2(1-\lambda r^2)(\mu r^2 - 1)$$

صدق می‌کنند، که درآن μ یک ثابت است. با قراردادن $r^2 = 1/v$ از این معادله‌انتگرال بگیرید وازآن جا نتیجه بگیرید که مسیر پرتوهای نور درصفحهٔ $\theta = \frac{1}{2}\pi$ ، بیضی هایی با معادلهٔ زیر هستند:

$$\lambda x^2 + \mu y^2 = 1$$

که درآن (y و x) عبارت اند از مختصات دکارتی قائم. همچنین نشان دهید مدتی که لازم است تا یک فوتون یک دور کامل‌روی یک بیضی حرکت کند برابر است با $2\pi/(c\lambda^{1/2})$

۱۹ ـ اگر سنجهٔ فضا ـ زمان برابر

$$ds^2 = k\alpha \, dt^2 - \alpha^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

و α فقط تابعی‌از x باشدو k یک‌ثابت‌فرض شود، معادلات دیفرانسیلی حاکم برجهانخطهای ذرات درحال‌سقوط‌آزادرابه دست آورید. اگر (z و y و x) به وسیلهٔ یک ناظر به منزلهٔ مختصات دکارتی قائم تعبیر شوند و t متغیر زمانی وی باشد، نشان دهید که برای ذرات، یک معادلهٔ انرژی به صورت زیر وجود دارد:

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{k}{2\alpha} = \text{constant}$$

۲۰ ـ توضیح دهیدکه‌چرا معادلهٔ (۴ـ ۲۳) در یک میدان گرانشی معتبر می‌ماند.

۲۱ ـ (t و ϕ و θ و r) به عنوان مختصات‌قطبی کروی وزمان تعبیر شده اند. یک‌میدان‌گرانشی به وسیلهٔ یک بار الکتریکی نقطه ای واقع در قطب، ایجاد شده است. با فرض این که سنجهٔ فضا ـ زمان به وسیلهٔ معادلهٔ (۶ ـ ۶۸) داده شده باشد وچهار ـ بردار پتانسیل برای میدان الکترومغناطیس بارالکتریکی، به وسیله(χ و 0 و 0 و 0)=Ω که درآن (r) $\chi = \chi$ ، مؤلفه‌های هموردای‌تانسور میدانF_{ij}را از معادلهٔ (۴ ـ ۲۳) محاسبه کنید ومؤلفه های پادوردای F^{ij} را به دست آورید. ثابت کنید کهبا فرض $J^i = 0$ ، تمام معادلات ماکسول صادق هستند به شرط اینکه

$$\frac{d\chi}{dr} = \frac{e}{r^2} . c^2 \sqrt{(ab)}$$

که‌درآن e یک ثابت است.

از معادلهٔ

$$T^l_j = \frac{1}{4\pi} F^{lk} F_{jk} - \frac{1}{16\pi} \delta^l_j F^{kl} F_{kl}$$

عناصر تانسور آمیختهٔ انرژی ـ اندازه حرکت را محاسبه کنید و معادلات اینشتین را برای میدان گرانشی بنویسید. نشان دهید که این معادلات به شرطی صادق هستند که

$$\frac{1}{a} = b = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\gamma e^2}{c^2 r^2}$$

که درآن m یک ثابت است.

مسائل گوناگــون

۱ ــ نشان دهید که معادلات تبدیل (۱ ــ ۳۳) را می‌توان به صورت زیر نوشـت

$$\bar{x} = x\cosh\alpha - ct\sinh\alpha, \quad \bar{y} = y,$$
$$c\bar{t} = ct\cosh\alpha - x\sinh\alpha, \quad \bar{z} = z,$$

که درآن $\alpha = u/c$. نتیجه بگیرید که

$$\bar{x} - c\bar{t} = (x-ct)e^{\alpha}, \quad \bar{x} + c\bar{t} = (x+ct)e^{-\alpha}$$

از اینجا نشان دهید که $x^2 - c^2t^2$ تحت این تبدیل ، ناوردا است .

ساعتهایی راکه باچارچوب $\bar{S}$ حرکت می‌کنند ،ازچارچوب $\bar{S}$ درزمان t مشاهده می‌کنیم .می بینیم برخی ازآنهازمان یکسان t رانشان می‌دهند . ثابت‌کنیدکه‌این‌ساعتهانسبت به S دریک صفحه قرار دارند واین صفحه با سرعت $c\tanh\frac{1}{2}\alpha$ در S حرکت می‌کند .

۲ ــ دومرددرچارچوب S برروی‌محور x درنقاطی‌به‌فاصلهٔ d ازیکدیگرساکن‌اند . آنهابه طور همزمان‌تپه‌های‌نوری به سمت‌یکدیگر شلیک می‌کنند . نشان دهید که درچارچوب $\bar{S}$ یکی از آنها " A " درزمانی برابر با $\beta ud/c^2$ قبل از دیگری " B "شلیک می‌کند ، و بعلاوه در لحظه ای که B شلیک می‌کند ، تپهٔ گسیل شده از " A " هنوز به " B " نرسیده است و فاصلهٔ تپهٔ مزبور از " B " برابر با $d\sqrt{[(c-u)/(c+u)]}$ است $(\beta = (1-u^2/c^2)^{-1/2})$

۳ــ می‌خواهیم ماشینی به طول ۵ متر را در گاراژی به طول فقط سه متر قرار دهیم . صاحب ماشین ، آن را با سرعت $\frac{4}{5}$ سرعت نور c ($\frac{\text{متر}}{\text{ثانیه}}$) به‌داخل‌گاراژمی‌راند . نشان دهید که همسرصاحب ماشین ، درست قبل از برخورد سپر جلوی ماشین بادیوار (که ضربهٔ برخورددراتحمل می‌کند) ، می‌تواند درهای گاراژ را سریعا " ببندد . طول گاراژ را آن طور که راننده می‌بیند ، حساب کنید وثابت کنید که بنابر تخمین وی ماشین $\frac{4}{c}$ ثانیه قبل از بسته شدن درها ، به دیوار برخورد می‌کند . بنابراین توضیح دهید که از دیدگاه راننده ، چگونه ماشین درگاراژ جامی‌گیرد .

۴ ــ S و $\bar{S}$ دو چارچوب لخت اندکه از طریق معادلات خاص لورنتس به‌یکدیگر مرتبط اند و سرعت $\bar{S}$ نسبت‌به S برابر با u است .در $t=0$ در چارچوب S ، ذرات A و B بترتیب درنقاط $(0,0,0)$ و $(d,0,0)$ قرار دارند . پس از این ،هر دوذره در طول محور x با سرعت v به‌فاصلهٔ ثابت d ازیکدیگرحرکت می‌کنند . معادلات‌حرکت‌ذرات رابنویسید ، و با تبدیل‌آنهابه‌چارچوب $\bar{S}$ نشان دهید در این چارچوب مشاهده می‌شود که ذرات بـــا

سرعت $(v-u)/(1-uv/c^2)$ به‌فاصلهٔ $d\sqrt{(1-u^2/c^2)}/(1-uv/c^2)$ از یکدیگر حرکت می‌کنند

۵ــ S و $\bar{S}$ دوچارچوب لخت هستند. دو رویداد، هنگام مشاهده‌از S، همزمان وبه فاصلهٔ D از یکدیگراند. بازه‌زمانی بین دو رویداد، هنگام مشاهده ازچارچوب $\bar{S}$، برابر با T است. فاصلهٔ بین دورویدادرادر $\bar{S}$ به دست آورید. اگر در هنگام مشاهدهٔ دورویداد از S، راستای حرکت $\bar{S}$ نسبت به S با خطی که دو رویدادرا به هم وصل می‌کند زاویهٔ θ بسازد، نشان دهیدکه سرعت نسبی چارچوبها برابر است با

$$c\left(1+\frac{D^2}{c^2T^2}\cos^2\theta\right)^{-1/2}$$

۶ــرویدادهای A و B که‌ازچارچوب S مشاهده می‌شوند، برروی‌محور x قرار دارند و B به فاصلهٔ‌زمانی T پس از A رخ می‌دهد؛ فاصلهٔ‌بین رویدادها D است. اگر مشاهده از $\bar{S}$ صورت گیرد، رویداد B به فاصلهٔ‌زمانی T قبل ازرویداد A رخ می‌دهد؛ سرعت u ی چارچوب $\bar{S}$ نسبت به S را حساب کنید. فاصلهٔ میان دو رویداد در $\bar{S}$ چقدر است؟ (فرض کنید $D>cT$.) (جواب: $2c^2Td/(d^2+c^2T^2);d$)

۷ــ A_{ijk} تانسوری است که غیراز مؤلفه های $A_{111}=A_{222}=1$ ، $A_{212}=-2$ بقیهٔ مؤلفه هایش همگی صفراند. مؤلفه های بردار A_{ijj} را حساب کنید. نشان دهید که‌تبدیل

$$\bar{x}_1=\frac{۱}{۷}\left(-۳x_۱-۶x_۲-۲x_۳\right)$$

$$\bar{x}_2=\frac{۱}{۷}\left(-۲x_۱+۳x_۲-۶x_۳\right)$$

$$\bar{x}_3=\frac{۱}{۷}\left(۶x_۱-۲x_۲-۳x_۳\right)$$

متعامد است‌و مؤلفهٔ $\bar{A}_{123}$ ی تانسور درچارچوب $\bar{x}$ را حساب کنید. معادلات‌تبدیل‌وارون را بنویسید. اگر B_{ij} تانسوری باشد که مولفه های آن‌در چارچوب $\bar{x}$ همگی صفراند بجز $\bar{B}_{13}=۱$ ، B_{12} را حساب کنید. (جواب: (۰و۱و۱ــ)؛ $\frac{۱۲۰}{۳۴۳}$ ؛ $\frac{۶}{۴۶}$ ۰)

۸ــاگر $A=(I-B)(I+B)^{-1}$ ، که‌در آن B یک ماتریس پادمتقارن‌است، نشان دهید که A متعامد است. با گرفتن

$$B = \begin{vmatrix} ۰ & ۲ & ۲ \\ -۲ & ۰ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۰ \end{vmatrix}$$

A را حساب کنید و معادلات تبدیل مختصات دکارتی قائم ، $\bar{x} = Ax$ ، رابنویسید . در چارچوب x ، تانسور C_{ij} پادمتقارن است و $C_{12} = C_{13} = ۱$ و $C_{23} = ۰$. مولفهٔ $\bar{C}_{12}$ را درچارچوب $\bar{x}$ محاسبه کنید . درچارچوب $\bar{x}$ ، تمام مؤلفه های تانسور $\bar{D}_{ijk}$ غیر از $\bar{D}_{121} = -۱$ و $\bar{D}_{122} = ۲$ و $\bar{D}_{123} = ۵$ صفر می‌شوند . مؤلفهٔ D_{111} را در چارچوب x به دست آورید . مؤلفه های بردارهای D_{ijj} و $C_{ij}D_{ijk}$ را در چارچوب x حساب‌کنید .

(جواب : $\bar{C}_{12} = ۱$ ؛ $D_{111} = \frac{-۹۸۰}{۷۲۹}$ ؛ $(\frac{-۸}{۹} ، \frac{-۸}{۹} ، \frac{-۱۴}{۹})$ ؛ $(\frac{-۷}{۹} ، \frac{-۳۲}{۹} ، \frac{۳۵}{۹})$)

۹ـ درچارچوب x در ϵ_3 ، یک‌میدان‌تانسوری‌به‌وسیلهٔ معادلهٔ $A_{ijk} = x_i^2 + 2x_j^2 + x_k^2$ تعریف شده است . گرادیان (شیب) میدان برداری A_{ijj} را محاسبه کنید . همچنین تا و میدان برداری A_{ijj} را حساب کنید .

(جواب : $۸x_i$ ؛ $۶(x_1 - x_2)$ ، $۶(x_3 - x_1)$ ، $۶(x_2 - x_3)$) .

۱۰ ـ در $\epsilon_۳$ ، داریم $A_{ij} = x_i^2 + x_j^2$. ثابت کنیدکه

الف) $A_{ij,j} = 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_i)$

ب) $A_{ij,j} = 12$

۱۱ ـ هسته‌ای‌در هنگام گسیل یک الکترون ، برروی خط مستقیمی‌حرکت می‌کند . از هسته که نگاه‌کنیم‌سرعت الکترون $\frac{۶c}{۷}$ است وبا راستای حرکتش زاویهٔ $۶۰°$ می‌سازد . یک ناظرساکن ، زاویهٔ بین‌راستای‌حرکت‌والکترون‌را $۳۰°$ اندازه‌می‌گیرد . سرعت‌هسته‌راحساب‌کنید . (جواب : $\frac{۳c}{۵}$) .

۱۲ ـ هسته‌ای که با سرعت $\frac{۳c}{۵}$ در حرکت است‌یک ذرهٔ بتا را با سرعت $\frac{۳c}{۴}$ در راستای عمود برراستای حرکت خود گسیل می‌کند . سرعت وراستای حرکت ذرهٔ بتا را از دیدگاه یک ناظر ساکن به دست آورید . اگر ذرهٔ بتا با سرعت $\frac{۳c}{۴}$ در جهتی گسیل شود که ناظر ساکن ، راستای حرکت آن را عمود برراستای حرکت هسته ببیند ، راستای‌گسیل

را ازدیدگاه آن هسته وسرعت ذرهٔ بتا را از دیدگاه ناظرساکن محاسبه کنید .
(جواب: $\pi/4$: $3\sqrt{2}c/5$ و $\pi\text{-}\tan^{-1}(3/4)$ با راستای حرکت هسته؛ $\frac{9C}{16}$

۱۳ ــ دو ذره که هرکدام دارای جرم سکون m_0 اند با سرعت یکسان $\frac{1}{2}c$ در راستاهای عمودبریکدیگر حرکت می‌کنند .این ذرات با یکدیگر برخورد می‌کنند و یک تک ذره را تشکیل می‌دهند . نشان دهید که جرم سکون این تک ذره برابراست با $m_0\sqrt{(14/3)}$ (فرض کنید که تابش انرژی اصلا" وجود ندارد) .

۱۴ ــ یک سفینهٔ فضایی که موتورهایش خاموش اند ، با سرعت زیاد v از میان گاز بین ستاره‌ای ساکن ، حرکت می‌کند . این گاز حرکت سفینه را از نظر سرنشینان آن به اندازهٔ αv^2 ، کند می‌کند. نشان دهید مسافتی را که سفینه می‌پیماید درمدتی‌که‌سرعتش‌از V به U کاهش می‌یابد ، برابر است با

$$\frac{1}{\alpha}\left|\frac{1}{X}-\frac{1}{2}\log\frac{1+X}{1-X}\right|_U^V$$

که درآن $X=(1-v^2/c^2)^{1/2}$

۱۵ ــ اگر $\mathbf{v}$ سه ــ سرعت یک ذره باشدو $\beta=(1-v^2/c^2)^{-1/2}$ ، ثابت کنید که $\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}=v\dot{v}$ و $\mathbf{v}\cdot\frac{d}{dt}(\beta\mathbf{v})=\beta^3 v\dot{v}$. اگر m_0 جرم سکون ذره باشد ، سه ــ نیروی $\mathbf{f}$ را که برذره واردمی‌شود ، تعریف کنید و از نتیجهٔ بالا به دست آورید که $\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}=\dot{m}c^2$ ، که درآن m جرم لختی است .

۱۶ ــ ذره‌ای با جرم سکون m_0 که برروی محور x تحت نیروی جاذبه‌به‌سوی‌مبدا $-m_0\omega^2x$ (یعنی قانون نیروی حرکت هماهنگ ساده) حرکت می‌کند ، ابتدا در نقطهٔ $x=a$ به حالت سکون قرار دارد . نشان دهید که سرعت‌عبور آن از مبدا برابر است با

$$\frac{\omega ac\sqrt{(4c^2+\omega^2a^2)}}{2c^2+\omega^2a^2}$$

۱۷ ــ نیروی f همواره‌درامتدادعمود برمسیر یک ذره‌عمل می‌کند . نشان دهید که سرعت v ی‌ذره ثابت است . معادلهٔ‌حرکت‌ذره را بنویسید و نتیجه بگیرید که خمش‌مسیر برابر است با $\kappa=f/mv^2$.اگر این ذره روی دایره ای به شعاع a ، تحت نیروی شعاعی ثابت f حرکت کند ، نشان دهید که سرعت آن یعنی v از رابطهٔ $v^2=2c^2\lambda[\sqrt{(\lambda^2+1)}-\lambda]$ به دست می‌آید ، که درآن $\lambda=fa/2m_0c^2$ و m_0 جرم ویژهٔ ذره است .

۱۸ ــ Oxy محورهای‌قائم یک‌چارچوب لخت هستند. ذره‌ای با جرم سکون m_0 ، از مبدأ مختصات به اندازه حرکت p_0 درامتداد Ox ، پرتاب می‌شود. نشان دهید که مسیر ذره یک منحنی زنجیری است به معادلهٔ

$$y = \frac{w_0}{f}\left(\cosh\frac{fx}{cp_0} - 1\right)$$

که در آن $w_0^2 = m_0^2c^4 + p_0^2c^2$.

۱۹ ــ هسته ای به جرم سکون M ودرحال سکون، فوتونی‌گسیل می‌کند. اگر در این فرایند، انرژی درونی هسته به اندازهٔ E_0 کاهش یابد، نشان دهیدکه انرژی فوتون‌برابر است با $E = E_0(1 - E_0/2Mc^2)$.

۲۰ ــ راستاهای حرکت یک ذره باجرم ویژهٔ m_0 ویک فوتون، بریکدیگر عموداند. انرژی کل ذره وفوتون بترتیب عبارت‌اند از E و $\bar{E}$. اگراین ذره فوتون را جذب کند، نشان دهید که‌جرم ویژهٔ آن به M_0 افزایش می‌یابد، که

$$M_0^2 = m_0^2 + 2E\bar{E}/c^4$$

۲۱ ــ فوتونی با انرژی E که درطول محور x درحرکت است به ذرهٔ ساکنی به‌جرم سکون m_0 برخورد می‌کند. این ذره فوتون را جذب می‌کند وسپس فوتون دیگری را با همان انرژی E ولی در راستای موازی با محور y گسیل می‌کند. جهت و بزرگی اندازه حرکت نهایی‌ذره راحساب‌کنید ونشان دهید که جرم سکون آن‌به $\sqrt{(m_0^2 - 2E^2/c^4)}$ کاهش می‌یابد.

۲۲ ــ جسمی به‌جرم $3\lambda m$ ($\lambda > 1$) در حال سکون به سه‌جزء فروپاشیده می‌شود (هرکدام باجرم سکون m) که‌در راستاهایی که بایکدیگر زوایای مساوی می‌سازند از یکدیگر دور می‌شوند. نشان دهید که درچارچوب مرجعی که درآن، یکی از اجزاء ساکن است، زاویهٔ بین جهتهای حرکت دو جزء دیگر، برابر با $2\cot^{-1}(\sqrt{3}\lambda)$ است.

۲۳ ــ پوزیترونی که‌با سرعت $\frac{3c}{5}$ حرکت می‌کند در برخورد با یک الکترون ساکن، نابودمی‌شود و دو فوتون می‌دهد که در جهتهای مخالف یکدیگر و در راستای حرکت پوزیترون، خارج می‌شوند. اگر m جرم سکون الکترون و پوزیترون‌باشد، نشان دهید که انرژی فوتونها برابر $3mc^2/4$ و $3mc^2/2$ است.

۲۴ ــ پوزیترونی به اندازه حرکت p با الکترون ساکنی برخورد می‌کند. هر دو ذره نابود می‌شوند و دو فوتون ایجاد می‌شوندکه راستای حرکت آنها، در دو طرف راستای حرکت پوزیترون، زوایای مساوی α می‌سازند. اثبات کنید که $p\sin\alpha\tan\alpha = 2mc$

که در آن m جرم سکون الکترون‌وپوزیترون‌هردو است . اگر $\alpha = 60^\circ$ باشد ، سرعت پوزیترون را حساب‌کنید .
(جواب ۰ $\frac{4c}{5}$)

۲۵ ــ $Oxyz$ یک چارچوب لخت است که آن رابا S نشان می‌دهیم . ذره‌ای باجرم‌سکون m وبارالکتریکی e درصفحهٔ xy ، تحت تأثیریک‌میدان‌مغناطیسی یکنواخت H که موازی محور z است ، حرکت می‌کند . با انتخاب مختصات مناسبی ، نشان دهید که مسیر این ذره دایرهٔ $x = R\cos\omega t$ و $y = -R\sin\omega t$ واست که درآن

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \quad ، \quad R = v/\omega \quad ، \quad \omega = eH/\gamma m$$

$\bar{S}$ چارچوب لخت $\bar{O}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ به موازات S است و $\bar{O}$ با سرعت u در راستای Ox حرکت می‌کند . u و H را طوری تعیین‌کنید که در $\bar{S}$ ، میدانهای‌یکنواخت $\bar{\mathbf{E}} = (0, E_0, 0)$ و $\bar{\mathbf{H}} = (0, 0, H_0)$ مشاهده شوند . در نتیجه حرکت ذرهٔ باباری را که دراین میدان‌رها می‌شود ، توصیف‌کنیدونشان دهید که‌سرعت متوسط آن برابر است‌با cE_0/H_0 درراستای محور $\bar{x}$
(جواب : $u = -cE_0/H_0$ ، $H = \sqrt{(H_0^2 - E_0^2)}$.) ۰

۲۶ ــ ناحیه‌ای از فضا ــ زمان دارای سنجهٔ زیر است :

$$ds^2 = e^{\alpha}(dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2)$$

که درآن α تنها تابعی‌اززمان است . A_i بردارهموردایی‌است‌که مؤلفه هایش در این‌چارچوب در سرتاسر این ناحیه (۱ ، ۰ ، ۰ ، ۰) اند . اثبات کنیدکه $A_{i;j} = -\frac{1}{2}\alpha'(t)\delta_{ij}$

۲۷ ــ سنجهٔ سطح‌یک کره را به صورت $ds^2 = d\theta^2 + \cos^2\theta d\phi^2$ بگیرید و نشان دهید که معادلات زمین پیماها عبارت اند از $\tan\theta = \tan\alpha\sin(\phi + \beta)$ که درآن α و β ثابت اند .

۲۸ ــ سنجهٔ فضا ــ زمان در یک ناحیهٔ خالی ازفضا ، عبارت است از

$$ds^2 = e^{\alpha}(dx^2 + dy^2 + dz^2) - e^{\beta}dt^2$$

که درآن α و β فقط توابعی از z اند . مولفه های R_{xx} ، R_{zz} ، R_{tt} ازتانسور ریچی را محاسبه کنید ونتیجه بگیرید که معادلهٔ گرانش ایجاب می‌کند که

$$\alpha'' + \tfrac{1}{2}\alpha'^2 + \tfrac{1}{2}\alpha'\beta' = 0$$
$$\alpha'' + \tfrac{1}{2}\beta'' + \tfrac{1}{4}\beta'^2 - \tfrac{1}{4}\alpha'\beta' = 0$$
$$\beta'' + \tfrac{1}{2}\beta'^2 + \tfrac{1}{2}\alpha'\beta' = 0$$

نتیجه بگیرید که $e^{\alpha} = A(k-z)^{4}$ و $e^{\beta} = B(k-z)^{-2}$ که در آن A, B, k ثابت اند.

۲۹ ــ ناحیهٔ بخصوصی از فضا ــ زمان دارای سنجهٔ $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - x^2 dt^2$ است. ذره‌ای در نقطهٔ $x = 1$، $y = z = 0$، در $t = 0$ ساکن است. اگر در این لحظه ذره رها شود و تحت تاثیر گرانش سقوط آزاد کند، نشان دهید که در امتداد محور x، با معادلهٔ حرکت $x = \operatorname{sech} t$ حرکت خواهد کرد. از نقطهٔ (۱،۰،۰) در $t = 0$، فوتونی درجهت مثبت محور y گسیل می‌شود، نشان دهیدکه مسیر آن دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ و $z = 0$ است.

فهرست راهنما

ث

کتابنامه

1. AHARONI, J., *The Special Theory of Relativity*, Oxford University Press.
2. BERGMANN, P. G., *Introduction to the Theory of Relativity*, Prentice-Hall.
3. EDDINGTON, A. S., *Mathematical Theory of Relativity*, Cambridge University Press.
4. EINSTEIN, A., *The Meaning of Relativity*, Princeton University Press.
5. FOCK, V., *Theory of Space, Time and Gravitation*, Pergamon.
6. LANDAU, L. D. and LIFSHITZ, E. M., *The Classical Theory of Fields*, Pergamon.
7. MCCONNELL, A. J., *Applications of the Absolute Differential Calculus*, Blackie.
8. MCCREA, W. H., *Relativity Physics*, Methuen.
9. MCVITTIE, G. C., *General Relativity and Cosmology*, Chapman and Hall.
10. MØLLER, C., *Theory of Relativity*, Oxford University Press.
11. PAULI, W., *Theory of Relativity*, Pergamon.
12. RAINICH, G. Y., *Mathematics of Relativity*, Wiley.
13. RINDLER, W., *Special Relativity*, Oliver and Boyd.
14. SCHRÖDINGER, E., *Space-Time Structure*, Cambridge University Press.
15. SOMMERFELD, A., *Electrodynamics*, Academic Press.
16. SPAIN, B., *Tensor-Calculus*, Oliver and Boyd.
17. SYNGE, J. L., *Relativity – The Special Theory*, and *Relativity – The General Theory*, North-Holland.
18. TOLMAN, R. C., *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, Oxford University Press.
19. WEBER, J., *General Relativity and Gravitational Waves*, Interscience.
20. WEATHERBURN, C. E., *Riemannian Geometry and Tensor Calculus*, Cambridge University Press.
21. WEYL, H., *Space, Time, Matter*, Dover.