



# آشنایی با فیزیک اتمی

انگ، وهر، ریچاردز

ترجمه علی پذیرنده، محمدرضا حمیدیان



آشنایی با  
فیزیک اتمی

انگ، وهر، ریچاردز

ترجمه علی پذیرنده، محمدرضا حمیدیان

# بسم الله الرحمن الرحيم

## فهرست

صفحه	عنوان
۱	پیشگفتار
۳	۱ نظریه اتمی ماده
۳	۱.۱ مقدمه
۵	۲.۱ شواهد شیمیایی اتمی بودن ماده
۸	۳.۱ جرمهای مولکولی
۱۱	۴.۱ جرمهای اتمی
۱۱	۵.۱ جدول تناوبی
۱۲	۶.۱ شواهد فیزیکی در تأیید اتمی بودن ماده
۱۲	۷.۱ نظریه جنبشی گازها؛ ظرفیت حرارتی مولی
۱۷	۸.۱ تقسیم مساوی انرژی
۱۹	۹.۱ قانون توزیع سرعت ماکسول
۲۴	۱۰.۱ احتمال برخورد؛ مسیر آزاد میانگین
۲۸	۱۱.۱ قانون الکترولیز فاراده-تردید دانشمندان
۲۹	۱۲.۱ روش پرن در اثبات نظریه اتمی ماده
۳۲	۱۳.۱ قانون توزیع بولتزمن
۳۳	مسائل
۳۹	۲ نظریه اتمی الکتریسته
۳۹	۱.۲ تخلیه الکتریکی
۴۱	۲.۲ حرکت نانسیتی ذره باردار

۴۲	۳.۲ اندازه گیری مقدار $q/m$ توسط تامسون
۴۸	۴.۲ بار الکترون
۵۲	۵.۲ جرم الکترون؛ ثابت آووگادرو
۵۲	۶.۲ پرتوهای مثبت
۵۵	۷.۲ ایزوتوپها
۵۶	۸.۲ طیف نمایی جرمی
۵۹	مسائل

## ۳ نظریه اتمی تابش

۶۴	۱.۳ مقدمه
۶۴	۲.۳ ذرات یا امواج
۶۴	۳.۳ الکتريسيته و نور
۶۵	۴.۳ الکترو دینامیک
۶۶	۵.۳ یکسانی تابشها
۶۷	۶.۳ تابش حرارتی
۶۸	۷.۳ گسیل و جذب تابش
۶۹	۸.۳ تابش جسم سیاه
۷۱	۹.۳ قوانین وین و ریلی-جینز
۷۵	۱۰.۳ قانون پلانک؛ گسیل کوانتیده
۸۰	۱۱.۳ اثر فوتوالکتريک
۸۴	۱۲.۳ خلاصه ای از نظریه اتمی تابش
۸۹	۱۳.۳ الکترون ولت؛ انرژی فوتون
۹۰	۱۴.۳ گسیل گرمایونی
۹۲	۱۵.۳ گرمای ویژه جامدات
۹۲	مسائل
۹۵	

## ۴ مدل های اتمی رادرفورد و بور

۹۹	۱.۴ مقدمه
۹۹	۲.۴ بررسی دقیق اتم به وسیله ذرات آلفا
۱۰۲	۳.۴ اتم هسته ای رادرفورد
۱۰۷	۴.۴ اندازه هسته
۱۰۸	۵.۴ طیفها
۱۱۰	۶.۴ طیف هیدروژن
۱۱۲	۷.۴ مدل و نظریه بور درباره اتم

صفحه	عنوان
۱۱۷	۸.۴ ترازهای انرژی هیدروژن
۱۲۰	۹.۴ پتانسیل یونش
۱۲۲	۱۰.۴ پتانسیلهای شدید
۱۲۵	۱۱.۴ جذب فوتون
۱۲۷	۱۲.۴ نقدی بر نظریه بور
۱۲۸	مسائل

## ۵ امواج و ذرات

۱۳۳	۱.۵ دوگانگی موج-ذره ای نور، پراکندگی کامپتون
۱۳۳	۲.۵ فرضیه دوپروی
۱۳۸	۳.۵ اصل موضوع اول بور
۱۳۹	۴.۵ شکست (امواج) ماده
۱۴۰	۵.۵ آزمایش دیویسون و گرمر
۱۴۳	۶.۵ گروههای موج
۱۴۶	۷.۵ آنالیز فوریه: تعامل
۱۵۳	۸.۵ دوگانگی موج-ذره
۱۵۷	۹.۵ اصل عدم قطعیت هایزنبرگ
۱۵۹	۱۰.۵ آزمایش دوشکاف
۱۶۱	۱۱.۵ خلاصه
۱۶۲	مسائل
۱۶۵	

## ۶ مکانیک موجی

۱۶۹	۱.۶ مقدمه
۱۶۹	۲.۶ معنای $\Psi$
۱۷۰	۳.۶ نتایج حاصل از اصل موضوع اول
۱۷۲	۴.۶ رابطه بین $\Psi$ و $\Phi$ : عملگرها
۱۷۲	۵.۶ استفاده از عملگرها
۱۷۶	۶.۶ معادله شرودینگر
۱۷۸	۷.۶ چاه مربعی يك بعدی با عمق بینهایت
۱۸۰	۸.۶ چاه مربعی يك بعدی با عمق محدود
۱۸۶	۹.۶ ویژه تابعها و ویژه مقدارها
۱۹۱	۱۰.۶ ویژه تابعهای یگانه؛ شار
۱۹۳	۱۱.۶ نفوذ از سد
۱۹۶	۱۲.۶ نوسان کننده هماهنگ
۲۰۱	

۷ مکانیک موجی اتم هیدروژن

۲۱۳

۱.۷ مسئله دو جسم در مکانیک موجی

۲۱۳

۲.۷ معادله شرودینگر در مختصات کروی

۲۱۴

۳.۷ تکانه زاویه‌ای مداری

۲۲۰

۴.۷ مسئله هیدروژن

۲۲۳

۵.۷ گشتاور مغناطیسی اتمها

۲۲۶

۶.۷ آزمون تجربی کوانتس فضایی

۲۲۹

۷.۷ اسپین ذاتی الکترون

۲۳۰

۸.۷ تکانه زاویه‌ای کل  $J$

۲۳۵

۹.۷ ساختار ریز هیدروژن اتمی

۲۳۶

۱۰.۷ نظریه پرداخته تر هیدروژن

۲۴۰

۱۱.۷ ساختار فوق ریز در هیدروژن

۲۴۴

مسائل

۲۴۷

۸ روشهایی از مکانیک موجی

۲۵۱

۱.۸ بسطها؛ تعامد توابع موج

۲۵۱

۲.۸ نظریه اختلال مستقل از زمان

۲۵۴

۳.۸ مثالهایی از محاسبه اختلال

۲۵۷

۴.۸ قطری کردن ماتریس

۲۵۹

۵.۸ نظریه اختلال وابسته به زمان

۲۶۲

۶.۸ جذب تابش

۲۶۷

۷.۸ گسیل خود به خودی

۲۷۱

مسائل

۲۷۲

۹ اتمهای چندالکترونی

۲۷۴

۱.۹ مسئله هلیوم

۲۷۴

۲.۹ اصل طرد پاولی و تقارن

۲۷۷

۳.۹ بازنگری به اتم هلیوم

۲۸۰

۴.۹ اتمهای چندالکترونی

۲۸۴

۵.۹ جدول تناوبی

۲۸۶

صفحه	عنوان
۲۸۹	۶.۹ جفت شدگی L-S
۲۹۳	۷.۹ طیف نمایی اتمی
۲۹۵	۸.۹ اثر زیمان
۲۹۸	۹.۹ ساختار فوق ریز
۳۰۳	۱۰.۹ جذب غیر تشدیدي
۳۰۴	مسائل
۳۰۷	<b>۱۰ پرتو ایکس و بلورنگاری</b>
۳۰۷	۱.۱۰ کشف پرتو ایکس
۳۰۸	۲.۱۰ تولید پرتو ایکس
۳۰۹	۳.۱۰ ماهیت پرتو ایکس و پراش پرتو ایکس در بلورها
۳۱۴	۴.۱۰ سازوکار تولید پرتو ایکس
۳۱۶	۵.۱۰ تابش ایکس مشخصه
۳۱۹	۶.۱۰ طیفهای پرتو ایکس عناصر و عدد اتمی
۳۲۰	۷.۱۰ جذب پرتو ایکس
۳۲۵	۸.۱۰ تولید زوج
۳۲۷	۹.۱۰ پراش با توریهای خط کشی شده
۳۲۹	۱۰.۱۰ واحدهای تابش
۳۳۲	۱۱.۱۰ بلورنگاری پرتو ایکس
۳۳۸	۱۲.۱۰ شاخصهای میلر
۳۴۱	مسائل
۳۴۵	<b>۱۱ مولکولها، مایعات و جامدات</b>
۳۴۵	۱.۱۱ مولکولها، پیوندهای قطبی و هم قطبی
۳۴۷	۲.۱۱ مسئله $H_2$
۳۵۳	۳.۱۱ طیف نمایی مولکولی
۳۵۷	۴.۱۱ جامدات و مایعات
۳۶۰	۵.۱۱ نظریه کلاسیک گاز الکترونی در جامدات
۳۶۲	۶.۱۱ نظریه مکانیک موجی گاز الکترونی در جامدات
۳۶۶	۷.۱۱ نوارهای انرژی در جامدات
۳۷۰	۸.۱۱ نیم رساناهای ناخالصی
۳۷۲	۹.۱۱ دیودهای نیم رسانا
۳۷۵	۱۰.۱۱ آشکارسازهای نیم رسانا
۳۷۷	۱۱.۱۱ ترانزیستورها

۳۸۰	۱۲۰۱۱	خواص دیگر جامدات
۳۸۱	۱۳۰۱۱	میزرها و لیزرها
۳۸۶		مسائل
۳۸۸		۱۲ هسته اتم
۳۸۸	۱۰۱۲	خواص عمومی هسته‌ها
۳۹۵	۲۰۱۲	دوترون
۴۰۰	۳۰۱۲	پراکنندگی نوکلئون-نوکلئون
۴۰۳	۴۰۱۲	نیروهای هسته‌ای
۴۰۷	۵۰۱۲	مدل پوسته‌ای هسته
۴۱۳	۶۰۱۲	رادیواکتیویته
۴۱۸	۷۰۱۲	قانون واپاشی رادیواکتیو
۴۲۱	۸۰۱۲	گذارهای گاما
۴۲۳	۹۰۱۲	واپاشی آلفا
۴۲۷	۱۰۰۱۲	واپاشی بتا
۴۳۲	۱۱۰۱۲	نقض قانون پارته در واپاشی بتا
۴۳۶	۱۲۰۱۲	واکنش هسته‌ای
۴۴۰	۱۳۰۱۲	شکافت
۴۴۵	۱۴۰۱۲	گدازخت هسته‌ای و انرژی گرما هسته‌ای
۴۴۸	۱۵۰۱۲	ذرات بنیادی
۴۵۸		مسائل
۴۶۳		پیوست ۱ دستگاه یکاهای mksA
۴۶۶		پیوست ۲ جدول تناوبی عناصر
۴۷۲		پیوست ۳ نسبیته
۴۷۲	پ ۱۰۳	جستجو برای دستگاه مختصات مرجع اتر
۴۷۴	پ ۲۰۳	تداخل سنج مایکلسون
۴۷۷	پ ۳۰۳	آزمایش مایکلسون-مورلی
۴۷۸	پ ۴۰۳	سرعت ثابت نور
۴۸۰	پ ۵۰۳	نسبیته کلاسیک
۴۸۳	پ ۶۰۳	معادلات تبدیل اینشتین-لورنتس
۴۸۸	پ ۷۰۳	انقباض طول
۴۸۹	پ ۸۰۳	اتساع زمان و ترتیب علی
۴۹۲	پ ۹۰۳	تبدیل سرعت در نظریه نسبیته



صفحه	عنوان
۴۹۴	پ ۱۰.۳ معادله تبدیل جرم در نظریه نسبیت
۴۹۷	پ ۱۱.۳ هم‌ارزی جرم و انرژی در نظریه نسبیت
۵۰۱	پ ۱۲.۳ حد بالای سرعت
۵۰۲	پ ۱۳.۳ حرکت ذرات باردار در میدانهای مغناطیسی
۵۰۵	پیوست ۴ جبر ماتریسی
۵۰۸	پیوست ۵ جمع تکانه‌های زاویه‌ای
۵۱۱	پیوست ۶ اثر نسبیتی اسپین-مدار
۵۱۶	جواب مسائل انتخابی با شماره‌های فرد
۵۲۳	فهرست راهنما
۵۳۱	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

## پیشگفتار

این کتاب قسمتی از یک مجموعه از چهار کتاب درسی جداگانه است که بر روی هم مهمترین زمینه‌های فیزیک جدید را در برمی‌گیرند. سه جلد دیگر عبارت‌اند از: ۱. مقدمه‌ای بر فیزیک هسته‌ای نوشته‌ انگ، ۲. مقدمه‌ای بر فیزیک انرژی بالا نوشته‌ پسر کینز (زیر چاپ) ۱، ۳. مقدمه‌ای بر فیزیک حالت جامد که بعداً منتشر می‌شود.

این کتاب به‌طور عمده شامل مباحث فیزیک اتمی و مکانیک موجی است؛ اما ضمناً فصولی از فیزیک حالت جامد و فیزیک هسته‌ای در آن آمده است. این کتاب برای یک دوره نیم‌سال یا دو دورهٔ ثلثی فیزیک جدید مناسب است. مجموع کامل چهار کتاب یا هر ترکیب دیگر با آغاز از این جلد می‌تواند برای یک دوره از درسهای فیزیک جدید مورد استفاده قرار گیرد.

مطالب این کتاب تقریباً با ترتیب تاریخی منظم شده‌اند؛ نه به‌دلیل اینکه ترتیب تاریخی اهمیت بسیار دارد، بلکه از این جهت که از لحاظ آموزشی رجحان آن به اثبات رسیده است. به‌ر حال، موضوعاتی نظیر پرتو ایکس و فیزیک هسته‌ای که به موازات درک اساسی اتم توسعه یافته و جزئی از آن بوده‌اند، در فصول آخر مورد بحث قرار گرفته‌اند.

فصول اول تا پنجم و فصل دهم این کتاب از کتاب فیزیک اتم نوشته وهر و ریچاردز گرفته شده‌اند که ضمن تجدیدنظر سطح آنها بالا برده شده است. بیشتر مطالب باقیمانده توسط انگ نوشته شده‌اند. قسمت تجدیدنظر شده و فصول جدید هر دو بر اساس درسی قرار دارند که چندین سال در انستیتوی تکنولوژی ماساچوست (MIT) تدریس شده است. این دورهٔ نیم‌سال شامل فیزیک اتمی با مکانیک کوانتومی بود که به‌دنبال آن در نیم‌سال دوم درس فیزیک هسته‌ای تدریس می‌شد.

در هر کتاب فیزیک جدید، درجایی که مکانیک موجی عرضه می‌شود، خواهی‌نخواهی با مشکلات بیشتری روبرو می‌شویم. نظریهٔ مکانیک موجی به‌مقدار قابل ملاحظه‌ای انتزاعی‌تر از هر چیزی است که یک دانشجوی متوسط تا این مرحله از تحصیل علوم خود با آن مواجه شده است؛ و چاره‌ای هم نیست، هر چند کتابخانه‌های علوم مملو از کتابهای گوناگون هستند.

بر اساس تجربیات من کوشش برای توجیه مکانیک موجی به کمک محاسبات نیمه‌جدی گمراه‌کننده است و دانشجویان را خسته می‌کند زیرا بدیهی است که این گونه محاسبات کمبودهایی دارند. بنا بر این، من مکانیک موجی را به صورت اصل موضوعی ارائه کرده‌ام و درستی نظریه را از سازگاری میان پیش‌بینی رفتار دستگاه‌های اتمی و اندازه‌گیری آنها نشان داده‌ام.

پیش‌نیازها برای درک مطالب این کتاب عبارت‌اند از: مکانیک، الکتریسیته و مغناطیس و معادلات دیفرانسیل. مقدار کمی ضرب ماتریسی به کار رفته است که پیوست کوتاهی درباره مکانیک ماتریسی برای آن دسته از دانشجویانی که این موضوع را نخوانده‌اند، اضافه شده است.

جای خوشوقتی است که از همکاری، کمک و راهنمایی هر و ریچاردز، بویژه در ارتباط با ارتقای سطح مطالبی که از کتاب آنها اخذ شده، قدردانی کنم. با توجه به این حقیقت که درس فیزیک اتمی پیشگفته، در ابتدا توسط بوختر در MIT پایه‌گذاری شد و من پس از وی عهده‌دار این کار شدم، قدردانی از او را در اینجا لازم می‌دانم. نظم مطالب در این کتاب اساساً همان است که توسط بوختر ارائه شده بود. جزئیات زیادی در عرضه مطالب و بسیاری از مسائل نیز از وی گرفته شده است. از خانم وایت برای ماشین‌نویسی یادداشتها، تصحیح متن انگلیسی و کمک‌های مختلف صمیمانه تشکر می‌کنم.

ا.ج. انگک

دسامبر ۱۹۷۱

# نظریه اتمی ماده

## ۱.۱ مقدمه

فیزیک اتمی علم نسبتاً جوانی است که بیشتر در این قرن توسعه یافته است. اما فکر اینکه ماده از اتمها (ذرات) ساخته شده است، يك فكر بسیار قدیمی است. به عنوان مثال ذیمقرات فیلسوف یونانی (۴۶۰-۳۷۰ قبل از میلاد) نظر داد که نه تنها ماده بلکه روح انسان نیز از ذرات تشکیل شده است. ذیمقرات دارای يك مشخصه اساسی بود که هر دانشجوی علوم به آن نیاز دارد، و آن ذهن کنجکاوش بود. او روش علمی (گالیله، ۱۵۶۴-۱۶۶۲) و همچنین تکنولوژی لازم برای پیشرفت بیشتر را در اختیار نداشت.

از آنجا که فیزیک اتمی با اشیا (اتمها) و پدیده‌هایی سروکار دارد که مستقیماً با حواس بشری قابل درک نیستند، اغلب مسیر توسعه آن مغایر با عقل سلیم است. هر چه مرتبه بزرگی اشیا و پدیده‌هایی که در نظرمی‌گیریم از تجربه روزانه‌مان دورتر باشد، درک ماهیت آنها دشوارتر می‌شود. عقل سلیم ما را قادر می‌سازد که رابطه بین يك آجر و يك خانه را دریابیم. ممکن است برای درک گرد بودن زمین نیاز بدان باشد که اندکی از عقل سلیم فراتر رویم، اما برای اغلب مردم تصور گرد بودن زمین خیلی مشکل نیست؛ به‌رحال درک رابطه بین آب و يك مولکول آب مشکلتر است. در حالی که کره زمین را، چه مسطح و چه گرد، می‌توانیم ببینیم ولی قادر نیستیم حتی با بهترین وسایل يك مولکول آب را ببینیم. تمام اطلاعات ما دربارهٔ تك مولکولهای آب غیر مستقیم است، با وجود این فقط برای يك شیمیدان غیر خیره‌مکن است مفهوم مولکول آب خارج از عقل سلیم وی باشد. با گسترش

دانش يك فرد، حقایق بیشتر و بیشتری جزء «عقل سلیم» وی قرار می گیرند. برخی از روابط بین سرعتها جزء عقل سلیم است. به نظر شخصی که در داخل اتومبیل متحرک نشسته سرعت اتومبیل دیگر با آنچه يك ناظر ساکن در کنار جاده می بیند، متفاوت است. درحقیقت، بجهای کوچک وقتی مشاهده می کند که اتومبیل دیگری از کنار اتومبیلی که او با آن مسافرت می کند، می گذرد می گوید «ما نسبت به اتومبیل جلویی به سمت عقب می رویم». اما، اظهار نظر آلبرت اینشتین در مورد اینکه سرعت نور برای تمام ناظرها، بدون توجه به اینکه چه سرعتی دارند، یکسان است، در بادی امر کاملاً خارج از عقل سلیم است. در پیوست ۳ نشان خواهیم داد که بیان اینشتین منطقی است و می توان آن را به طور مناسبی در زمرة عقل سلیم در آورد. تناقض بین گرد بردن واقعی زمین و ظاهر مسطح آن را می توان با تفکر حل کرد؛ یعنی، با تصور خلاق و با توجه به این حقیقت که زمین يك کره بسیار بزرگ است. با روش تقریباً مشابهی می توان تناقض ظاهری بین نظر اتمان درباره سرعت نسبی را بدارک این حقیقت که سرعت نور يك سرعت بسیار زیاد است، حل کرد. ذیمرقات که توانست يك نظریه اتمی را ۴۰۰ سال قبل از میلاد ارائه دهد، لابد شهامت و قدرت ذهنی جوا بگویی به این گونه مسائل را داشته است.

بحث درباره ماهیت واقعیت، کار فلاسفه است. بحث درباره واقعیات فیزیکی به عهده فیزیکدانان است (که زمانی آنها را فلاسفه طبیعی می نامیدند). بنا بر این فلسفه شامل تمام دانش فیزیک و بسیاری از علوم دیگر است. لذا طبیعی است که دانش فیزیک به طور مداوم فلسفه را تحت تأثیر قرار دهد. اکتشافات فیزیکی، همان طور که سرعت در طرحهای مهندسی وارد می شوند و در شرایط فیزیکی محیط بشر اثر می گذارند، به همان ترتیب هم در شکل دادن به نظریه های فلسفی تأثیر می گذارند و مستقیماً در جهان بینی و تفسیر بشر از زندگی دخالت می کنند.

فیزیک قدیمی یا فیزیک کلاسیک نیوتون به طور فوق العاده ای در برخورد با رویدادهای مورد مشاهده روزگار نیوتون موفق بود. با به کار بردن روشهایی که نیوتون به دست آورد به آسانی می توان نیروی جاذبه زمین بر ماه را برابر با نیروی مرکز گرا قرارداد و روابطی قابل تأیید در مورد حرکت ماه به دست آورد. همین روشها را می توان در مورد مدارهای غیر دایره ای تعمیم داد. درحقیقت با سه مشاهده مختلف از يك ستاره دنباله دار جدید، ستاره شناسان قادر خواهند بود که با دقتی بسیار زیاد رفتار آینده آن را به طور کامل پیش بینی کنند. با در دست داشتن داده های معینی، به عنوان شرایط اولیه یا مرزی، در موقعیتهای بسیار زیادی مکانیک کلاسیک نیوتونی ما را قادر می سازد که وقایع آینده را تعیین کنیم. به آسانی می توان يك قدم جلوتر گذاشت و چنین استدلال کرد که آنچه را که نیوتون نشان داده است که اغلب درست اند، همیشه درست اند و با داشتن اطلاعات و شرایط اولیه کافی، قوانینی را ممکن است پیدا کرد که راهنمای تعیین هر واقعه ای در آینده باشند. حرکت سقوطی يك برگ یا نوسان قیمت هلو ممکن است پدیده های بسیار پیچیده ای باشند. پیشگویی درباره این موارد ممکن است نیاز به اطلاعات بسیار زیادی داشته باشد و استفاده از قوانین پیچیده ای را ایجاب کند که ما هنوز آنها را نمی شناسیم. نتیجه فلسفی مهم مکانیک

کلاسیک این نبود که بتواند تمام مسائل را پاسخ دهد، بلکه بنیاد نهادن يك نقطه نظر بود. این طور احساس می شد که هر کشف تازه ای در چارچوب مکانیستی نیوتونی قرار خواهد گرفت. سؤالات فلسفی نظیر پرسشهای زیر، مبرمتر می شد. آیا ما انسانها با تصمیم گیری خود می توانیم مسیر زندگی خود را تغییر دهیم یا اینکه، مانند اجرام منظومه شمسی، بر طبق مجموعه ای از قوانین غیر قابل تغییر و بر حسب مجموعه ای از شرایط اولیه عمل می کنیم؟ آیا ما آزاد هستیم یا قدرت ظاهری ما برای اخذ تصمیم يك خیال واهی است؟ آیا هر چه را که انجام می دهیم، در ابتدای خلقت تعیین شده و خارج از مسؤولیت ماست؟ هر چند هنگامی که فلسفه مکانیستی در مورد خودمان به کار برده می شود چندان خوشایند نیست، با وجود این در تفسیر وقایعی که در اطراف ما رخ می دهد بشدت به آن متکی هستیم. در حقیقت، تمام بحث درباره اینکه آیا رفتار بشر بیشتر تحت تأثیر وراثت قرار دارد یا عوامل محیطی، بر این فرض بنا نهاده شده است که اعمال انسان نتیجه ترکیبی از این دو عامل است.

آن مقدار از این فلسفه مکانیستی که بر اساس فیزیک کلاسیک پایه گذاری شده است نیاز به تجدید نظر دارد. با بررسی وقایع، چه بزرگ و چه کوچک، درمی یابیم که نارسایی قوانین فیزیک کلاسیک شروع می شود. در موقعی که يك نظریه تازه و یا يك نظریه اصلاح شده برای تشریح مشاهدات تجربی باید به کار برده شود، غالباً چنین نتیجه گرفته شده است که نظریه تازه با فیزیک کلاسیک کاملاً تفاوت دارد. روش برخورد با مسئله، شیوه های ریاضی، و شکل جوابها غالباً مختلف هستند. در مرحله ای نشان خواهیم داد که مشاهدات پدیده های طبیعی ذاتاً غیر قطعی هستند. بنا بر این روشن می شود که در شرایط پیدایش فیزیک اتمی در مقابل فیزیک کلاسیک، تأثیر فیزیک اتمی بر فلسفه در جهت مخالف نظریه مکانیستی بوده است نه موافق آن.

فیزیک اتمی الکترونیک و تمام آنچه را این کلمه در برمی گیرد از جمله رادیو، رادار، تلویزیون، کامپیوتر و غیره به ما ارزانی داشته است. فیزیک اتمی انرژی هسته ای را در اختیار ما گذاشته است. به همان اندازه که فیزیک کلاسیک در توجیه وقایع بزرگ موفق بوده است، فیزیک جدید هم در تفسیر وقایع زیر میکروسکوپی موفق است. ولی ممکن است مهمترین بهره هایی که از مطالعه فیزیک اتمی نصیب ما می شود، بیشتر فلسفی باشد تا فنی.

## ۲.۱ شواهد شیمیایی اتمی بودن ماده

عقاید ذمقرات و مکتب اپیکور، که فلسفه آنها بر اساس اتم گرایی قرار داشت، در خلال قرون وسطی و رنسانس نظرات مورد قبول درباره ماده نبودند. عقاید مسلط آن زمان مربوط به ارسطو و فلاسفه رواقی بود. آنها معتقد بودند فضا، ماده، و مانند اینها به صورت پیوسته وجود دارد و اینکه کل ماده از یک جوهر اولیه که منشاء چهار عناصر اصلی داغی، سردی، خشکی و رطوبت است، تشکیل می شود. مواد مختلف محتوی مقادیر متفاوت از این عناصر اصلی بودند. هدف کیمیاگری تغییر مقدار هر یک از عناصر چهارگانه در مواد مختلف بود. تا نیمه دوم قرن هیجدهم که علم شیمی کمی (کمیتی) توسعه یافت، هیچگونه شاهد تجربی

برای ارزیابی عقاید مختلف دربارهٔ ساختمان ماده در دست نبود.

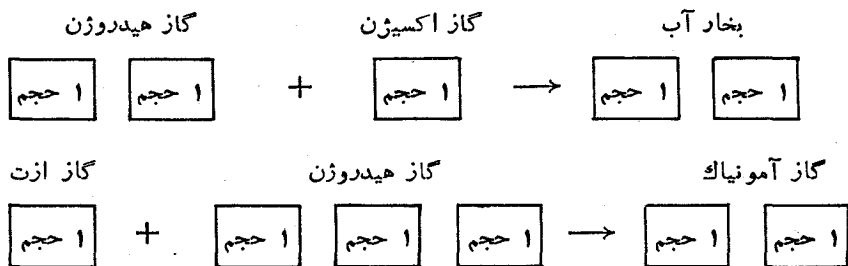
آنتوان لاووازیه فرانسوی یکی از برجسته‌ترین شیمیدانهای اولیه بود. او مفهوم امروزی عنصر شیمیایی را به‌عنوان «آخرین مرحله‌ای که تجزیه شیمیایی قادر است به آن برسد» ارائه کرد، و از مشاهدات خود دربارهٔ احتراق نتیجه گرفت که درواکنشهای شیمیایی مقدار ماده ثابت (پایسته) می‌ماند.

در سال ۱۷۹۹ شیمیدان فرانسوی پروست قانون نسبتهای معین یا ثابت را بیان کرد و این قانون چکیدهٔ نتایج حاصل از مطالعات او دربارهٔ مواد متشکل از دو عنصر بود. این قانون به‌صورت زیر است: دهر نمونه از هر ماده مرکب، تشکیل شونده یا تجزیه شونده، نسبت ذراتی عناصر تشکیل دهنده همیشه ثابت می‌ماند. این بیان درحقیقت ترکیبات شیمیایی را تعریف می‌کند زیرا ترکیبات شیمیایی را از محلولها، آلیاژها، و مواد دیگری که ترکیب معینی ندارند تمیز می‌دهد.

اختراع اصلی پایه‌گذاری نظریهٔ جدید اتمی بودن ماده به جان دالتون، معلم شهر منچستر انگلستان، می‌رسد. به نظر می‌آید که علت توجه دالتون به آنها ناشی از تفکرات او در مورد حلالیت گازها در آب و علاقه‌اش به هواشناسی بوده است، که این موضوع منجر به کوشش او در تشریح این واقعیت شد که جو آمیزهٔ همگنی از گازهاست. در نهایت او عقیده پیدا کرد که هر عنصر از اتمهایی که دارای خواص شیمیایی و فیزیکی مشابه هستند تشکیل شده است و اتمهای عناصر مختلف، متفاوت اند. دالتون در سال ۱۸۰۳ در کنفرانس انجمن ادبی و فلسفی منچستر نظریهٔ اتمی خود را بیان داشت. او گفت «تحقیق در اوزان نسبی ذرات نهایی اجسام، تا آنجا که من می‌دانم، موضوع تازه‌ای است. اخیراً من این موضوع را تعقیب کرده‌ام و به موفقیت چشمگیری نائل آمدم» پس از این بررسی، دالتون تحقیقاتی در مورد ترکیب گازهای نظیر متان ( $\text{CH}_4$ )، اتیلن ( $\text{C}_2\text{H}_4$ )، مونواکسید کربن ( $\text{CO}$ )، گاز کربنیک ( $\text{CO}_2$ ) و گازهای دیگر انجام داد که منجر به پیشنهاد قانون نسبتهای چندگانه در سال ۱۸۰۴ توسط او شد. این قانون می‌گوید: اگر ماده  $A$  با ماده  $B$  به دو یا چند طریق مختلف ترکیب شود تشکیل مواد  $C$  و  $D$  را بدهد، در این صورت چنانچه جرم  $A$  ثابت نگه داشته شود، جرم ماده  $B$  در ترکیبات مختلف با هم تناسب خواهد داشت و نسبت بین آنها اعداد درست کوچکی است. تنها تفسیر قابل قبولهٔ این قانون این است که وقتی مواد اولیه با هم ترکیب می‌شوند به‌صورت موجودهای مجزا یا اتم عمل می‌کنند. دالتون بر اهمیت جرم نسبی اتمها انگشت گذاشت که به‌عنوان یک راهنما برای تشخیص ترکیبات مواد دیگر به‌کار می‌رود، و تأکید کرد که علامت شیمیایی نه تنها معرف یک عنصر است بلکه جرم ثابت آن عنصر را نیز نشان می‌دهد. ارائهٔ مفهوم جرم اتمی بزرگترین

۱. در بین دانشمندان، بویژه شیمیدانها، معمول بر این بوده است که از اوزان اتمی سخن بگویند. این ممکن است بدان جهت باشد که شیمیدانها جرمهای نسبی اتمی را با توزین نمونه‌های ماکروسکوپیکی ماده می‌توانند تعیین کنند. برای یک فیزیکدان جرم اتم دارای معنی بیشتری است تا وزن آن. در این روزگار مسافرتهای فضایی، بی‌وزنی یک امر عادی است، و لسی ماده هیچگاه جرم خود را از دست نمی‌دهد.

کفک دالتون به نظریه شیمی بود، زیرا عقاید مبهم اتمی قدیم را بريك پایه کمی دقیق قرار داد. این عقیده توجه شیمی کمی را برای تعیین جرم نسبی آنها به خود جلب کرد. قانون مهمی در مورد حجم گازها توسط گئی-لوساک در سال ۱۸۰۸ اعلام شد. او گفت که اگر گاز  $A$  با گاز  $B$  در دما و فشار ثابت ترکیب شده و گاز  $C$  را به وجود آورد، نسبت حجمی گاز  $A$ ،  $B$  و  $C$  اعداد درست ساده خواهد بود. دو مثال از این قانون عبارتند از: (الف) از ترکیب دو حجم هیدروژن و یک حجم اکسیژن، دو حجم بخار آب به وجود می آید، و (ب) از ترکیب یک حجم ازت و سه حجم هیدروژن، دو حجم آمونیاک به وجود می آید. شکل زیر ترکیب نمادی این واکنشها را نشان می دهد.



واضح است که در قانون گئی-لوساک هم مانند قانون نسبتهای چندگانه، موادی که در واکنشها شرکت می کنند به طور مجزا و یا به صورت ذره ای وارد عمل می شوند. نسبت بین تعداد کشفهایی که توسط عده ای از افراد پوشیده می شود به تعداد این افراد يك عدد درست، یعنی دو، است و این نشان می دهد کفش و افراد هر دو موجودهای گسسته هستند. در مورد سوپ گوجه فرنگی وضع کاملاً متفاوت است، نسبت تعداد گوجه فرنگیها به تعداد ظروف سوپ همیشه عدد درستی نیست و اگر يك عدد درست باشد کاملاً امری اتفاقی است. قانون گئی-لوساک کار دالتون را تأیید کرد، ولی سؤالات مشکلی را در مورد ترکیب عناصر در حالت گازی مطرح ساخت: در مورد واکنش اول در مثال بالا، آیا هر اتم اکسیژن تقسیم شده و بین دو حجم بخار آب پخش می شود؟ اگر چنین است نظریه غیر قابل تقسیم بودن اتم را باید کنار گذاشت. آیا هر ذره از گاز اکسیژن متشکل از چند اتم است؟ اگر چنین است هر ذره از چند اتم تشکیل شده است؟ سوالهای مشابهی را میتوان در مورد هریک از گازهای واکنش بالا مطرح کرد. واضح است که مقادیر عددی جرم نسبی آنها که از واکنشهای فوق به دست می آید، بستگی به جواب این سوالات دارد.

در سال ۱۸۱۱ آوگادرو، فیزیکدان ایتالیایی، به منظور مرتبط ساختن کارهای دالتون و گئی-لوساک وجود ذرات ریز در مرتبه های مختلف را پیشنهاد کرد. آوگادرو به طور اصل موضوعی وجود ذراتی به نام مولکولهای بنیادی (اتما)، که به عنوان کوچکترین ذرات می توانند با هم ترکیب شده اجسام مرکب را تشکیل دهند، و نیز وجود



«مولکولهای عنصری» (مولکولهای يك عنصر)، و وجود «مولکولهای ترکیبی» (مولکولهای يك ترکیب) را به عنوان کوچکترین ذره يك جسم که می تواند در حالت آزاد وجود داشته باشد، پذیرفت. او همچنین تمییم بسیار مهم زیر را (بدون استدلال) بیان داشت که به نام قانون آووگادرو مشهور است، حجمهای متساوی از گازها در دما و فشار یکسان دارای تعداد مولکولهای متساوی هستند. آووگادرو با توجه به این قانون و مفهوم خودش از اتم و مولکول نشان داد که برای تولید گاز آمونیاک در واکنش مربوط به آن، مولکول ازت بایستی دواتمی باشد و همچنین در مورد واکنش بخار آب، اکسیژن نیز باید به صورت مولکول دواتمی باشد. بعلاوه او نتیجه گرفت که مولکول آب می باید از دواتم هیدروژن و يك اتم اکسیژن تشکیل شود.

متأسفانه عقاید آووگادرو حتی وقتی که آمپر در سال ۱۸۱۴ آنها را احیا می کرد، زیاد مورد توجه قرار نگرفت. اندیشه دواتمی بودن مولکول هیدروژن و گازهای دیگر مورد استهزای دالتون و دیگران قرار گرفت، زیرا آنها تصویری از ترکیب اتمهایی از يك نوع نداشتند. آنها این سؤال را مطرح ساختند که «اگر دواتم هیدروژن در يك ظرف محتوی این گاز بتوانند بهم بچسبند، چرا همه آنها بهم متصل نشده و تبدیل به (هیدروژن) مایع نمی شوند؟» این واقعاً سؤال بسیار خوبی است. در آن زمان وحتى تا يك قرن بعد علم قادر به پاسخگویی قانع کننده به این سؤال نبود (بحث درباره پیوندهای کووالانسی را در بخش ۲.۱۱ ملاحظه کنید).

در دو بخش آینده از این فصل بعضی از روشهایی که برای تعیین جرم نسبی اتمها به کار رفته و هنوز هم به کار می رود، تشریح خواهد شد. نتایج حاصل از این روشهای تحلیلی توسط شیمیدانها در نیمه اول قرن ۱۹ اغلب متضاد بودند. آنها اغلب جرم اتمی يك عنصر معین را مختلف به دست می آوردند. تاده ۱۸۵۰ ناهماهنگی نتایج به اندازه ای زیاد بود که بعضیها احساس کردند باید نظریه اتمی بودن ماده کنار گذاشته شود. اما، این تناقضات در سال ۱۸۵۸ توسط يك شیمیدان ایتالیایی به نام کانیزارو برطرف شد. این شخص احاطه گسترده ای بر کل علم شیمی و دانش دقیقی درباره روشهای تعیین جرم اتمی، که در آن زمان می شناختند، داشت. او نشان داد که آووگادرو واقعاً يك اساس منطقی برای تعیین جرمهای اتمی ارائه کرده بود، و اینکه نتایج حاصل از آزمایشهای مختلف ناهماهنگ اند، ناشی از عدم آشنایی آزمایشگران به تمایز بین جرمهای اتمی، جرمهای معادل، و جرمهای مولکولی است. نظریات کانیزارو هنگامی به تأیید جهان علمی رسید که مورد پذیرش مجمع جهانی جرم اتمی، که در سال ۱۸۶۹ در کلسرویه آلمان برگزار شد، قرار گرفت. بدینگونه، در این سال است که نظریات اساسی شیمی جدید به طور وسیعی مورد قبول واقع شد.

### ۳.۱ جرمهای مولکولی

بعد از اینکه کانیزارو تعاریف اساسی را در شیمی روشن و برقرار کرد، قانون آووگادرو راه را به روی یکی از روشهای تعیین جرم مولکولی باز کرد. تا آن زمان کسی نمی دانست

يك مولکول به تنهایی چقدر جرم دارد، اما پس از اینکه راهی برای مجزا کردن تعداد مساوی از مولکولهای مختلف پیدا شد جرمهای نسبی را توانستند تعیین کنند. معلوم شد که مولکول هیدروژن سبکترین مولکولها است و ثابت شد که سبکترین آنها هیدروژن است. در سال ۱۸۱۵ پروست پیشنهاد کرده بود که جرم اتمی نسبی هیدروژن برابر واحد اختیار شود. بر این اساس جرم اتمی و مولکولی نسبی اغلب عناصر سبک تقریباً عدد درست به دست می آمد. اما، به دلایلی که بعداً بحث می شود، معلوم شد که جرم اتمی بسیاری از عناصر سنگین خیلی نزدیک به عدد درست نبودند. به نظر رسید که هیدروژن مناسبی در دستگاه عناصر نیست و با انتخاب يك عنصر سنگینتر به عنوان مبنا می توان برای تمام آنها جرم اتمی خیلی نزدیکتر به عدد درست به دست آورد.

سالیان دراز فیزیکدانها و شیمییدانها از دو دستگاه مختلف جرمی که هر دو بر مبنای جرم اکسیژن بود استفاده می کردند. در فیزیک، مینا را جرم ایزوتوپ (بخش ۷.۲) اکسیژنی که هسته آن دارای هشت پروتون و هشت نوترون است گرفتند و آن را برابر با شانزده قراردادند. در شیمی مخلوط طبیعی ایزوتوپهای اکسیژن را مبنا قرار داده و مقدار جرم متوسط را شانزده در نظر گرفتند. در سال ۱۹۶۱ به جای این دو مبنا يك مبناي مشترك برای جرم اتمی انتخاب شد که در آن جرم ایزوتوپ کربن ۱۲ (شش پروتون و شش نوترون) برابر ۱۲ در نظر گرفته شد. بر اساس این مبنا جرم اتمی هیدروژن دقیقاً برابر واحد نیست، اگر چه بسیار نزدیک به آن است.

این جرمهای اتمی و مولکولی کلاً نسبتهای بدون بعد هستند. اگر حدود چهار واحد وزنی هیدروژن با ۳۲ واحد وزنی اکسیژن ترکیب شود حدود ۳۶ واحد وزنی بخار آب، بر طبق رابطه  $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$ ، به وجود می آید.

شیمییدانها مانند فیزیکدانها مقدار ماده را بر حسب گرم یا بر حسب مول اندازه گیری می کنند. بنا به تعریف، يك مول مقداری از ماده معین است که تعداد مولکولهای آن برابر تعداد اتمهای ۱۲ گرم کربن ۱۲ است. يك مول کربن ۱۲، ۱۲ گرم است، يك مول کربن طبیعی ۱۲.۰۱۱۱۵ گرم، يك مول آب ۱۸.۰۱۵۳ گرم است و غیره. تعداد اتمهای ۱۲ گرم کربن ۱۲ (تعداد مولکولها در يك مول) عدد آووگادرو و یا ثابت آووگادرو  $N_A$  نامیده می شود، و در فیزیک و شیمی فیزیک اهمیت اساسی دارد. (یادآور می شود که مول و ثابت آووگادرو بر حسب ۱۲ گرم کربن ۱۲ بیان شده است. این يك روش عملی تازه است که تعاریف آن همیشه با واحدهای دستگاه  $mkSA$  مطابقت ندارد. بنا بر این ما گاهی يك کیلو مول،  $kmol$ ، یا هزارمول را به کار می بریم. واضح است که يك کیلو مول کربن ۱۲ دارای ۱۲ کیلوگرم جرم است.)<sup>(۱)</sup>

مقدار ثابت آووگادرو در شیمی در اوایل قرن نوزدهم اهمیت چندانی نداشت و حتی بزرگی آن تخمین زده نشده بود تا اینکه لوشمیت در سال ۱۸۶۵ آن را تعیین کرد.

۱. برای دانشجویانی که با دستگاه  $mkSA$  آشنایی ندارند، مرور کوتاهی در پیوست ۱ داده شده است.

ما روش پرن را برای تعیین آن در بخشهای دیگر این فصل بحث خواهیم کرد. در اینجا به موضوع جالبی برخورد می‌کنیم و آن اینکه دانستن وجود یک عدد مهمتر از داشتن مقدار آن است، همان‌طور که در مثال تعیین جرم نسبی اتمهای هیدروژن و ازت در واکنش تولید آمونیاک تشریح شد، مقدار عددی ثابت آووگادرو با روشهای جدید اندازه‌گیری

$$N_A = (6.02217 \pm 0.00004) \times 10^{23}$$

ذره در هر مول به دست آمده است. تنها پس از اینکه مقدار ثابت آووگادرو معلوم شد، جرم مطلق یک ذره اتمی قابل محاسبه شد. از آنجا که جرم  $N_A$  اتم کربن ۱۲، هر کدام با جرم  $12u$  (u: واحد جرم اتمی)، ۱۲ گرم است، جرم (بر حسب گرم) یک واحد (u) به روشنی چنین است

$$1u = \frac{1}{N_A} = (1.66054 \pm 0.000001) \times 10^{-24} \text{g}$$

از قانون آووگادرو نتیجه می‌شود که حجم یک مول گاز برای تمام گازها یکسان است. حجم متعارف گاز کامل یا حجم مولی استاندارد گاز ایده آل،  $V_0$ ، برابر حجم یک مول گاز در فشار متعارف یک اتمسفر در دمای صفر درجه سلسیوس است. مقدار  $V_0$  عبارت است از

$$(22.4136 \pm 0.000030) \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{mol}$$

۱. اگر این عدد و بعضی از مقادیر ثابت دیگر، که با عدم قطعیت دارای بیش از یک رقم با معنی داده می‌شوند، عجیب به نظر می‌آید به مقاله «مقادیر محتمل ثابتهای عمومی فیزیک» مراجعه کنید. این مقاله توسط R.T. Birge در مجله *Phys. Rev. Suppl.* 1929, 1, 6 نوشته شده است. ما در اینجا فقط یادآوری می‌کنیم که مفاهیم خطاهای محتمل و ارقام با معنی کاملاً با هم مطابقت ندارند. اگر خطای محتمل را بتوان تا کمتر از ده درصد تعیین کرد، در این صورت برای بیان آن بیش از یک رقم با معنی مورد نیاز است.

مقالات اساسی که مقادیر اعداد ثابت مختلف را شامل می‌شوند، عبارت‌اند از: «مقادیر ثابتهای فیزیک پیشنهادهی NAS-NRC» در مجله *Nat. Bur. Std. (U.S.) Tech. News Bull.* 1963, 47, 175؛ «قرارداد جهانی تعریف اتمی زمان» در مجله *Nat. Bur. Std. (U.S.) Tech. News Bull.* 1964, 48, 209؛ مقاله‌ای توسط E.A. Mechtly در نشریه NASA-SP-70-12 تحت عنوان «دستگاه آحاد بین‌المللی» از انتشارات چاپخانه دولت آمریکا در واشنگتن؛ مقاله اطلاعات ما درباره مقادیر ثابتهای اساسی فیزیکی و شیمیایی در سال ۱۹۶۵ توسط Cohen E. R., J. W. M. Du Mond در مجله *Rev. Mod. Phys.*

## ۴.۱ جرهمای اتمی

قانون آووگادرو يك روش سازمان یافته برای تعیین جرهمای مولکولی به وجود آورد، ولی قبل از اینکه بتوانند جرهمای اتمی عناصر شناخته شده را تعیین کنند، اطلاعات کمی زیادی در مورد تشکیل ترکیبات مختلف مورد نیاز بود. وضعیت را تا اندازه ای می توان به طریق زیر تشبیه کرد: فرض می کنیم شخص  $A$  به شخص  $B$  مبلغ ۵۰ ریال به صورت سکه می دهد، به شرط اینکه از سکه های کمتر از ۱۰ ریالی استفاده نکند، میل داریم بدانیم که این کار چگونه انجام شده است. این عمل ممکن است به یکی از چهار طریق زیر انجام شود

- (الف) با يك سکه ۵۰ ریالی  
 (ب) با دو سکه ۲۰ ریالی و يك سکه ۱۰ ریالی  
 (ج) با يك سکه ۲۰ ریالی و سه سکه ۱۰ ریالی  
 (د) با پنج سکه ۱۰ ریالی.

اکنون اگر شخص  $B$  به شخص  $C$  سکه ۲۰ ریالی بدهد، امکانهای (الف) و (د) حذف می شوند، اما هنوز معلوم نیست که معامله اولیه چگونه انجام شده است. با توجه بیشتر به نحوه معاملات بعدی با ۵۰ ریال اولیه می توان تعیین کرد که شخص  $A$  در ابتدا چه سکه هایی داشته است.

کشف تجربی دولون وپتی در سال ۱۸۱۹ در مورد اینکه برای اغلب عناصر در حالت جامد گرمای ویژه هر مول در حجم ثابت برابر  $6 \text{ cal/mol} \cdot \text{K}$  است. کمکی در حل این معما بود. به کمک قانون دولون وپتی با يك روش مستقل تقریبی می توان جرم اتمی هر عنصر را از تقسیم این عدد بر گرمای ویژه آن، بر حسب کالری بر گرم، به دست آورد. در بخش ۱۵.۳ در بساطه مبنای نظری این قانون بحث خواهیم کرد. امروزه جرم اتمها، بر مقیاس کربن ۱۲، به وسیله طیف سنج جرمی با دقت فوق العاده زیاد تعیین می شود. (خطاهای حدود يك در میلیون نامتداول نیست). به بخش ۸.۲ مراجعه شود.

## ۵.۱ جدول تناوبی

احتمالاً بارزترین کشف علم شیمی، بعد از کشف ماهیت اتمی ماده، خواص تناوبی عناصر بود که اکنون آن را به صورت جدول معروف تناوبی عناصر نشان می دهند (پیوست ۲). خواص شیمیایی این جدول احتمالاً برای تمام خوانندگان آشنا است، از خواص فیزیکی آن هم بعداً بحث خواهد شد. این جدول به طور جداگانه توسط مایر و مندلیف در سال ۱۸۶۹ پیشنهاد شد. فایده این جدول در نظم و بی نظمی آن است. نکته جالب در جدول اولیه این بود که برای قرار گرفتن عناصر در محلهایی که از لحاظ شیمیایی خواص مشابهی داشتند، لازم بود تعداد زیادی از محلهای را خالی بگذارند. مندلیف بر آن بود که این محلهای خالی با عنصری که هنوز کشف نشده اند پر خواهد شد. مندلیف با استفاده از این جدول توانست خواص مورد انتظار این عناصر را، که کشف خواهند شد، به تفصیل شرح دهد. تقریباً یکصد سال بعد تمام پیشگوییهای مندلیف به وقوع پیوست.

در اینجا، به طور گذرا، بر سهولت فراگیری که این اکتشافات شیمیایی به وجود آورده اند، نظر می افکنیم. با توجه به اطراف خود تعداد بیشماری از انواع مواد را می بینیم. نظریه اتمی ماده نشان می دهد که این مواد از اجزای گوناگونی تشکیل می شوند که تعداد آنها، هر قدر هم زیاد باشد، غیر قابل شمارش نیست. کشف عناصر سادگی بیشتری را موجب شد، بدین معنی که بیشتر موادی که با آنها برخورد می کنیم فقط از ترکیب حدود صد عنصر، که از نظر شیمیایی قابل تشخیص اند، به وجود می آیند و بسیاری از این عناصر هم کمیابند. معلوم شده است که حتی این عناصر هم مجموعه ای ناهمگون نیستند، بلکه می توان آنها را در گروههای مختلف يك جدول تناوبی طبقه بندی کرد. مسائل علم شیمی بسیارند، اما، به آسانی می توان دریافت که، در بسیاری از موارد موضوع ساده تر از آن است که در ابتدا به نظر می رسد.

### ۶.۱ شواهد فیزیکی در تأیید اتمی بودن ماده

در این بحث تا اینجا، تمام خواص اتمی از مطالعه ماده به طور انبوه حاصل شده است. در سال ۱۸۲۷ يك گیاه شناس انگلیسی به نام رابرت براون مشاهده کرد که ذرات میکروسکوپی گرده معلق در آب ظاهراً دارای حرکات کاتوره ای هستند. در ابتدا این پدیده را به حرکت ماده زنده نسبت دادند. بعدها دریافتند که تمام ذرات ریز معلق در مایعات دارای چنین حرکت دائمی هستند. بالاخره معلوم شد که مولکولهای مایع دارای حرکت دائمی بوده و ذرات معلق در اثر برخورد با مولکولهای مایع رانده می شوند (حرکت براونی). به هر حال، خیلی قبل از اینکه معادلات حرکت براونی در اوائل قرن بیستم به دست آید، ذرات مواد را دارای حرکت کاتوره ای می دانستند که مرتباً بهم برخورد می کنند. مسلماً چنین فرایندهایی در حوزه علم فیزیک قرار می گیرد. چگونه اصول مکانیک در برخوردهای مولکولی به کار می روند؟ ساده ترین حالت ماده برای بررسی، گاز بود. قانون گازهای کامل برای  $n$  مول گاز  $pV = nRT$  است، که در آن  $R$  ثابت عمومی گاز برای هر مول  $V, p$  و  $T$  به ترتیب فشار، حجم و دما است. این قانون يك رابطه تجربی کاملاً شناخته شده بود و به دست آوردن آن یکی از هدفهای فیزیک بود. کاربرد فیزیک کلاسیک در مکانیک گازها را نظریه جنبشی گازها می نامند. اگرچه برنولی در سال ۱۷۳۸ موفقیتهایی در توسعه این نظریه به دست آورد، لکن سهم اساسی که منجر به استقرار نظریه در سالهای ۱۸۵۰ تا ۱۹۰۰ شد، از آن کلاؤسیوس، ماکسول، بولتزمن و گییس است.

### ۷.۱ نظریه جنبشی گازها؛ ظرفیت حرارتی مولی

در مطالعات اولیه فیزیک، مکانیک اجسامی را بررسی کردیم که می توانستیم آنها را به عنوان ذره در نظر بگیریم. مطالعه يك جسم با ابعاد بزرگ از طریق وارد کردن مقادیر متوسط معینی انجام شد، و مسئله حرکت انتقالی این اجسام با ارائه مفهوم مرکز جرم، که مانند يك ذره

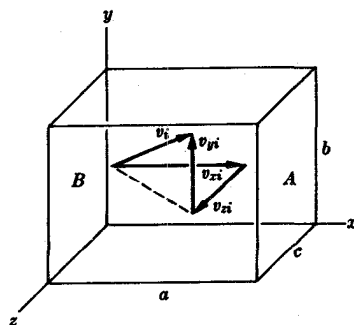
حرکت می‌کند، حل‌شد. به‌همین ترتیب، مطالعه حرکت چرخشی اجسام بزرگ با ارائه خاصیت میانگین دیگری از جسم، یعنی گشتاور لمختی، آسان‌شد. در نظریه جنبشی گازها، فرض می‌کنیم فشار، حجم، دما، و بعضی کمیت‌های دیگر میانگین‌هایی از خواص تمام مولکول‌های گاز هستند. نظریه جنبشی گازها يك موضوع دقیق و گسترده است. ما می‌توانیم جوهر این مطلب را با به‌دست آوردن قانون گازهای کامل و چند رابطه دیگر نشان دهیم.

يك ظرف مکعب مستطیل مانند شکل ۱۰۱ در نظر می‌گیریم که ابعاد آن  $a$ ،  $b$ ، و  $c$  به ترتیب در راستای محورهای  $x$ ،  $y$ ، و  $z$  باشند.  $N$  ذره مشابه هر کدام به جرم  $m$  در ظرف در نظر می‌گیریم که با گستره وسیعی از سرعت‌ها در راستای کاتوره‌ای در حرکت‌اند. این ذرات مشابه ممکن است اتم یا مولکول باشند، ولی این امر الزامی ندارد.

فرض می‌کنیم این ذرات بسیار کوچک‌اند، به طوری که برخورد بین آنها در مقایسه با برخورد ذرات با دیواره‌های تخت خیلی کم باشد. با صرف نظر کردن از نیروهای کوچک، نظیر نیروهای بین مولکولی و جاذبه زمین، فقط نیروی حاصل از برخورد ذرات با دیواره‌ها را در نظر می‌گیریم که بر ذرات اثر می‌کنند، در نظر می‌گیریم. ما ذرات را با اعداد  $1, 2, \dots, i, \dots, N$  شماره‌گذاری می‌کنیم. شکل ۱۰۱  $i$  امین ذره را که سرعتش  $v_i$  است نشان می‌دهد. مطابق شکل، سرعت  $v_i$  را می‌توان به مؤلفه‌های  $v_{xi}$ ،  $v_{yi}$  و  $v_{zi}$  تجزیه کرد. برخوردها را کاملاً الاستیک فرض می‌کنیم به طوری که وقتی يك ذره به دیواره برخورد می‌کند مؤلفه سرعت عمود بر دیواره بدون تغییر مقدار، تغییر جهت می‌دهد و دو مؤلفه دیگر سرعت بدون تغییر باقی می‌مانند. بنابراین اگر ذره به دیواره  $A$  برخورد کند، مؤلفه  $x$  تکانه آن از  $+mv_{xi}$  به  $-mv_{xi}$  تغییر می‌کند. تغییر خالص در مؤلفه  $x$  تکانه چنین است

$$-mv_{xi} - (+mv_{xi}) = -2mv_{xi}$$

از آنجا که برخورد ذره با دیواره موجب تغییر تکانه ذره می‌شود، به دیواره يك نیروی ضربه‌ای وارد می‌شود. این نیروی ضربه‌ای نامعلوم است زیرا نمی‌توان زمان تماس را با يك روش معقول تخمین زد. خوشبختانه، نیرویی که در پی آن هستیم نیروی ضربه‌ای



شکل ۱۰۱ ظرف گاز حاوی  $N$  ذره.

نیست بلکه نیروی متوسط حاصل از ضربه‌های مکرر است. از آنجا که برخورد به سطح بالا و پایین، دور و نزدیک اثری در مقدار  $v_{xi}$  ندارد، و چون برخورد به دو سطح  $A$  و  $B$  فقط جهت  $v_{xi}$  را معکوس می‌کند، زمان بین دو برخورد متوالی به سطح  $A$  برابر کل مسیر طی شده در راستای  $x$  یعنی  $2a$  تقسیم بر مؤلفه  $x$  سرعت یعنی  $2a/v_{xi}$  است. با به کار بردن قانون دوم نیوتون نیروی متوسط  $F_i$  که دیواره بر ذره  $i$ ام وارد می‌کند عبارت است از

$$F_i = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = \frac{-2mv_{xi}}{2a/v_{xi}} = -\frac{mv_{xi}^2}{a} \quad (1.1)$$

این نیرو و از لحاظ مقدار برابر و از لحاظ جهت مخالف با نیرویی است که ذره به دیواره وارد می‌کند و بنابراین ذره فشار متوسطی به سطح  $A$  وارد می‌سازد که بنا را رابطه زیر داده می‌شود

$$P_i = \frac{-F_i}{\text{سطح}} = \frac{-F_i}{bc} = \frac{mv_{xi}^2}{abc} = \frac{mv_{xi}^2}{V} \quad (2.1)$$

که در آن  $V$  حجم ظرف است.

فشار محاسبه شده فقط مربوط به یکی از ذرات یعنی  $i$ امین ذره است. فشار متوسط به هر ذره به همین طریق حساب می‌شود. مجموع فشارهای مربوط به  $N$  ذره مشابه چنین است

$$P = \sum_{i=1}^N P_{ii} = \frac{m}{V} \sum_{i=1}^N v_{xi}^2 \quad (3.1)$$

برای تعیین مقدار سمت راست این معادله، با توجه به شکل ۱.۱ داریم

$$v_i^2 = v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2 \quad (4.1)$$

چون این معادله در مورد هر ذره صادق است، می‌توان معادله را برای تمام ذرات نوشت و آنها را با هم جمع کرد

$$\sum_{i=1}^N v_i^2 = \sum_{i=1}^N v_{xi}^2 + \sum_{i=1}^N v_{yi}^2 + \sum_{i=1}^N v_{zi}^2 \quad (5.1)$$

حال، سرعت میانگین مربعی،  $\bar{v}^2$  را برابر میانگین مجموع مربعات سرعتها تعریف می‌کنیم؛ بنابراین

$$\bar{v}^2 = \left( \sum_{i=1}^N v_i^2 \right) / N \quad (6.1)$$

با به کار بردن این تعریف در تمام عبارات معادله (۵.۱)، خواهیم داشت

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \quad (7.1)$$

و با قراردادن عبارات رابطه (۶.۱) در رابطه (۳.۱) خواهیم داشت

$$p = \frac{m}{V} N \overline{v^2} \quad (8.1)$$

از آنجا که سرعتها را از لحاظ جهت و مقدار کاملاً کاتوره‌ای فرض می‌کنیم، سه مؤلفه سرعت میانگین مربعی باید برابر باشند، یعنی  $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$  با این فرض می‌توان از معادله (۷.۱) نتیجه گرفت که

$$\overline{v^2} = 3\overline{v_x^2} = 3\overline{v_y^2} = 3\overline{v_z^2} \quad (9.1)$$

چون مقدار  $\overline{v^2}$  را دیشه میانگین مربعی سرعت،  $v_{rms}$  می‌نامند. با نشان دادن  $\overline{v_x^2}$  از معادله (۹.۱) در معادله (۸.۱) خواهیم داشت

$$p = \frac{Nm \overline{v^2}}{V} \cdot \frac{1}{3}$$

یا

$$pV = \frac{1}{3} N m \overline{v^2} \quad (10.1)$$

وقتی که ذرات موجود در ظرف مولکولهای يك گاز باشند، در این صورت تعداد مولکولهای گاز،  $n$ ، در ظرف برابر تعداد کل مولکولها،  $N$ ، تقسیم بر تعداد مولکولها در يك مول،  $N_A$ ، یعنی ثابت آووگادرو، است. بنا بر این داریم  $n = N / N_A$  یا  $N = n N_A$ . از آنجا که حاصلضرب جرم يك مولکول در عدد آووگادرو برابر جرم مولکولی،  $M$ ، است، بنا بر این جرم کل گاز داخل ظرف برابر  $Nm = n N_A m = nM$  است. با قراردادن این نتیجه در رابطه (۱۰.۱)، معادله به صورت زیر درمی‌آید

$$pV = \frac{1}{3} n M \overline{v^2} \quad (11.1)$$

ما به دنبال  $pV = nRT$  هستیم که نتیجه بالا با آن متفاوت است. پس برای فرضهای زیادی که کرده‌ایم هنوز توجیهی در دست نداریم. به‌رحال، این نتیجه جالب است زیرا شامل عبارت  $pV$  بوده، و عبارت  $(1/3)nM\overline{v^2}$  دارای ظاهری آشنا است. اگر عبارت اخیر را به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{1}{3} n M \overline{v^2} = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{2} n M \overline{v^2} \right) \quad (12.1)$$



واضح است که جمله داخل پرانتز برابر کل انرژی جنبشی انتقالی مولکولها است. این انرژی، کل انرژی داخلی گاز،  $U$ ، است به شرطی که مولکولها دارای انرژی چرخشی نباشند، و به شرطی که بتوان فرض کرد که هیچ نیروی جاذبه یا دافه‌ای وجود ندارد که باعث ایجاد پتانسیل مولکولی شود (گاز کامل). از ترکیب معادلات (۱۱.۱) و (۱۲.۱) خواهیم داشت

$$pV = \frac{2}{3}U \quad (13.1)$$

این نتیجه را با قانون گازهای کامل،  $pV = nRT$ ، مقایسه می‌کنیم و درمی‌یابیم که محاسبه رابطه زیر را برای گاز کامل به دست می‌دهد، یعنی دما میزانی از انرژی داخلی گاز است

$$U = \frac{3}{2}nRT \quad (14.1)$$

جدول ۱۰.۱ گرمای ویژه در حجم ثابت گازها  $C_v$ .

$C_v$ , cal/mol · K	گاز	
۳۰۰۰	He	هلیوم
۳۰۰۰	Ar	آرگون
۳۰۰۰	Hg	جیوه
۴٫۸۲	H <sub>۲</sub>	هیدروژن
۴٫۹۷	O <sub>۲</sub>	اکسیژن
۶٫۰۱	Cl <sub>۲</sub>	کلر
۳۰٫۸	(C <sub>۲</sub> H <sub>۵</sub> ) <sub>۲</sub> O	اتر

۱. دما را می‌توان به کمک دماسنج گازی حجم ثابت، متناسب با فشار (یعنی با رابطه  $pV = nRT$ ) تعریف کرد. در این روش فرض می‌شود محیط یک گاز کامل است، که در واقع وجود ندارد، گرچه بعضی گازها به آن نزدیک هستند. یک تعریف قانع کننده‌تر از دما در سال ۱۸۴۸ توسط کلوین بیان شده است. این تعریف مبتنی است بر انتقالات حرارتی در اجزای تک‌دما چرخه یک ماشین کارنو، و از ماده به کار رفته مستقل است. برای مثال به‌ماخذ زیر مراجعه شود

U. Ingard and W. L. Kraushaar, *Mechanics, Matter, and Waves*. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1960, p. 534.

حال ببینیم این نتیجه با اندازه گیریهای گازهای واقعی چگونه قابل مقایسه است. وقتی گاز در حجم ثابت گرم می شود، انرژی حرارتی به کار رفته باعث بالارفتن دما شده و باید باعث افزایش انرژی گاز شود، زیرا کاری انجام نگرفته است. تغییر انرژی داخلی نسبت به دما از رابطه زیر به دست می آید

$$dU/dT = \frac{3}{2}nR \quad (15.1)$$

تغییر انرژی داخلی نسبت به تغییر دمای یک مول گاز کامل در حجم ثابت را گرمای ویژه مولی،  $C_v$ ، می نامند، بنابراین داریم

$$C_v = \frac{3}{2}R \quad (16.1)$$

که مقدار آن چنین است

$$C_v = \frac{3}{2}R = \frac{3}{2} \times \frac{8.31 \text{ J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \times \frac{1 \text{ cal}}{4.18 \text{ J}} = 2.97 \text{ cal/mol} \cdot \text{K}$$

مقدار تجربی  $C_v$  برای چند گاز در دمای معمولی در جدول ۱۰۱ داده شده است. یادآور می شود که مقدار  $C_v$  تجربی با مقدار محاسبه شده در مورد سه گاز با هم مطابقت دارند ولی برای گازهای دیگر کاملاً متفاوت اند. این دو نتیجه، مطابقت داشتن و مطابقت نداشتن، جالب است. در مورد گازهای تک اتمی این دو مقدار با هم مطابقت دارند و این گازها بسیار نزدیک به گازهای کامل هستند. درباره عدم تطابق ظاهری بحث بیشتری خواهیم داشت. در اینجا باید به خاطر داشته باشیم که در بحث نظریه جنبشی فرض کردیم که مولکولها کره های مجزا و الاستیک هستند. ظاهراً نتیجه به دست آمده برای مولکولهای دواتمی و پیچیده تر کاربرد ندارد.

## ۸.۱ تقسیم مساوی انرژی

مطابقت بین نتایج تجربی و محاسبه در مورد مولکولهای تک اتمی بدون وجود عدد ۳ در رابطه  $C_v = 3R/2$  امکان پذیر نبود. با مراجعه به نحوه به دست آوردن رابطه فوق درمی یابیم که عدد ۳ از طریق رابطه  $\overline{v^2} = 3\overline{v_x^2}$  وارد محاسبه شده که به علت آزادی حرکت ذره در سه بعد فضا بوده است. رابطه انرژی جنبشی متوسط انتقال مولکولهای گاز، ترکیبی از سه قسمت مساوی است که هر کدام برابر  $R/2$  به ازای دمای مطلق مربوط به هر راستا است. اصل تقسیم مساوی انرژی بدین ترتیب بیان می شود که اگر بتوان انرژی وابسته به یک مولکول را روی چند محور در نظر گرفت انرژی متوسط مربوط به تمام محورها یکسان است، با توجه به این اصل، تعداد محورهای لازم برای مشخص کردن موقعیت و آرایش یک

جسم را تعداد درجات آزادی آن جسم می نامند.

برای مشخص کردن موقعیت يك مولکول تک اتمی دانستن سه مختصه آن لازم است. در مورد يك مولکول دو اتمی سخت، برای تشخیص موقعیت آن سه مختصه و برای مشخص کردن آرایش آن دو مختصه دیگر لازم است. اگر فرض کنیم که اتم دوم در فاصله ثابتی از اتم اول قرار دارد، موقعیت آن در روی کره ای است که مرکز آن در مرکز اتم اول است. برای مشخص شدن موقعیت اتم دوم در روی کره به دو مختصه اضافی احتیاج است. بنابراین با افزودن اتم دوم دو درجه آزادی به مولکول اضافه می شود. اگر گرمای ویژه مولکول را بر اساس مولکول دو اتمی به جای مولکول تک اتمی محاسبه کرده بودیم به جای  $3R/2$  مقدار  $5R/2$  به دست می آمد. با محاسبه درمی یابیم  $5R/2 = 4995 \text{ cal/mol} \cdot \text{K}$  است که با مقدار گرمای ویژه تجربی مولکولهای دو اتمی مانند هیدروژن و اکسیژن، به طوری که در جدول ۱۰۱ داده شده است تطبیق می کند. برای مشخص کردن وضعیت هر مولکول سخت، هر چند در هم پیچیده، شش مختصه کافی است. اما اگر مولکولها از اتمهای نوسان کننده تشکیل شده باشند تعداد درجات آزادی بسیار زیاد می شود. گرمای ویژه مولکول اثر به همین علت زیاد است. بحث کاملتر گرمای ویژه احتیاج به دانستن نظریه کوانتومی دارد، ولی نظریه جنبشی کلاسیک می تواند به طور کمی و کیفی مسائل زیادی را روشن نماید.

با اطلاعات مستقلی که از گرمای ویژه مولکولی در دست است، دریافته ایم که نظریه جنبشی ماده يك مدل مکانیکی کمی برای گازهای کامل و گرمای ویژه مولکولی به دست می دهد. نتیجه کیفی یعنی معادله (۱۴.۱)، همان طور که در بحث گرمای ویژه آمده فقط برای گاز کامل به کار می رود. اما، معادله (۱۱.۱) دارای اعتبار کلیتری است. با به کار بردن معادله  $pV = nRT$  و استفاده از معادله (۱۱.۱) خواهیم داشت

$$\frac{1}{2}M\bar{v}^2 = \frac{3}{2}RT \quad (17.1)$$

با قراردادن جرم مولکولی  $M = N_A m$  که در آن  $m$  جرم مولکول است، به دست می آوریم

$$\frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{3}{2}(R/N_A)T = \frac{3}{2}kT \quad (18.1)$$

ثابت جدید  $k = R/N_A$ ، ثابت بولتزمن یا ثابت گاز برای يك مولکول نامیده می شود. مقدار آن  $k = 1.38062 \times 10^{-23} \text{ J/K}$  است. معادله (۱۸.۱) نشان می دهد که انرژی جنبشی متوسط انتقالی مولکولهای گاز فقط بستگی به دمای مطلق آن دارد. بدیهی است که انرژی متوسط هر درجه آزادی  $kT/2$  است.

در دمای معین مولکولهای سبکتر سرعتهای بیشتری دارند. به طوری که از معادله (۱۸.۱) محاسبه شد، سرعت ریشه میانگین مربعی مولکولهای هیدروژن در دمای معمولی حدود  $1800 \text{ m/s}$  یا بیش از يك میل در ثانیه است.

## ۹.۱ قانون توزیع سرعت ماکسول

دریافته‌ایم که  $\bar{v}$  را می‌توان از دمای گاز حساب کرد. سرعتی که بدین ترتیب به دست آمده یکی از مهمترین خواص میانگینی گاز به‌شمار می‌رود. اما مقدار متوسط، تمامی مطلب را بیان نمی‌کند. برای بسیاری از مسائل فیزیکی و شیمی دانستن توزیع سرعت مولکولها اهمیت دارد. به‌عنوان مثال ممکن است این پرسش را مطرح کرد که چه تعداد از مولکولها دارای سرعتی بیش از دو برابر سرعت ریشه میانگین مربعی،  $v_{rms} = (\bar{v^2})^{1/2}$ ، یا چه تعدادی از مولکولها سرعتشان بین  $0.79v_{rms}$  و  $0.8v_{rms}$  است. این موضوع را می‌توان از قانون توزیع ماکسول دریافت که هم‌اکنون آن را به دست خواهیم آورد. شکل ۲۰۱ منحنی این تابع توزیع است که برای گاز  $N_2$  در دمای  $T = 273K (0^\circ C)$  رسم شده است. قانون توزیع ماکسول بر اساس فرضهای زیر به دست می‌آید:

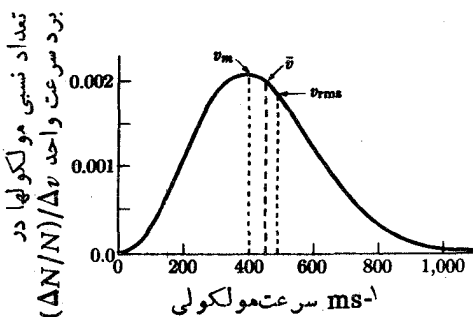
فرض اول. فضا همسانگرد است. بنابراین مؤلفه‌های  $x$  سرعت دارای همان توزیع است که مؤلفه‌های دیگر سرعت روی محورهای دیگر (از جمله جهت منفی محور  $X$ ).  
فرض دوم. توزیع مؤلفه‌های  $x$  سرعت مستقل از مؤلفه‌های سرعت  $v_y$  و  $v_z$  است.  
فرض سوم. انرژی متوسط مولکولها با رابطه (۱۸.۱) داده می‌شود.

با نوشتن تابع توزیع مؤلفه‌های  $x$  سرعت به صورت زیر بحث را آغاز می‌کنیم

$$\Delta N(v_x) = N f(v_x^2) \Delta v_x \quad (19.1)$$

در این رابطه  $\Delta N(v_x)/N$  کسری از کل تعداد مولکولهای  $N$  با سرعتهایی در فاصله کوچک  $v_x$  تا  $v_x + \Delta v_x$  است. از تقسیم این کسر بر  $\Delta v_x$  تابع توزیع  $f$  به دست می‌آید که به جای  $v_x$  بر حسب  $v_x^2$  نوشته شده است. این کار باعث سادگی محاسبات بعدی شده و محدودیتهای جدیدی برای تابع، بیش از آنچه در فرض اول نهفته است، به وجود نمی‌آورد. به‌علاوه به موجب فرض اول می‌توانیم بنویسیم

$$\Delta N(v_y) = N f(v_y^2) \Delta v_y \quad (20.1)$$



شکل ۲۰۱ توزیع سرعت مولکولهای ازت در  $0^\circ C$ .

$$\Delta N(v_z) = N f(v_z^2) \Delta v_z \quad (21.1)$$

که تابع  $f$  همان تابع معادلهٔ (۱۹.۱)، لکن بامتغیرهای متفاوت، است. بنویشتن تابع توزیع مؤلفهٔ  $x$  سرعت فقط بر حسب  $v_x$ ، ونه بر حسب  $v_x^2$  یا  $v_x^2$ ، از فرض دوم استفاده کرده‌ایم. (البته که پارامترهای دیگری نیز نظیر دما ممکن است به صورت متغیرهای این توابع درآیند.)

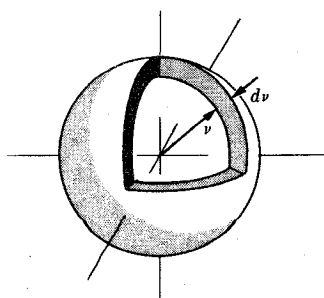
شکل (۳.۱) توزیع سرعت یک گاز نمونه را نشان می‌دهد. یادآور می‌شود که این شکل با مختصات  $v_x, v_y, v_z$  فضای سرعت را ارائه می‌دهد و نیز موقعیتهای  $(z, y, x)$  ذره‌ها مشخص نشده‌اند. گاز را می‌توان مثلاً در یک محفظهٔ مکعبی شکل محفوظ نگاه داشت که بادیواره‌ها در تعادل حرارتی باشد. هر بار که یک مولکول پس از برخورد بادیواره برمی‌گردد، مؤلفهٔ سرعت مربوطه تغییر علامت داده و نقطهٔ مربوط در شکل ۳.۱ تغییر مکان می‌دهد. بده حال تصویر کلی به همان وضعیت باقی می‌ماند.

برطبق معادلهٔ (۱۹.۱)، حاصلضرب  $\Delta v_x f(v_x^2) \Delta v_y f(v_y^2) \Delta v_z f(v_z^2)$  را می‌توان احتمال یافتن یک مولکول معین با سرعتی در فاصلهٔ  $v_x$  تا  $v_x + \Delta v_x$  تعبیر کرد. احتمال اینکه همان مولکول در همان لحظهٔ زمانی دارای مؤلفهٔ  $y$  سرعت در فاصلهٔ  $v_y$  تا  $v_y + \Delta v_y$  و مؤلفهٔ  $z$  سرعت در فاصلهٔ  $v_z$  تا  $v_z + \Delta v_z$  باشد به روشنی عبارت است از

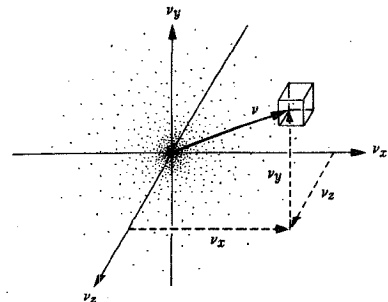
$$\frac{\Delta N(v_x, v_y, v_z)}{N} = f(v_x^2) f(v_y^2) f(v_z^2) \Delta V \quad (22.1)$$

که در آن  $\Delta V = \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$  است.

جزء حجمی  $\Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$  فضای سرعت در نوک بردار سرعت  $v$  در شکل ۳.۱ نشان داده شده است. حال یک دستگاه مختصات جدید که محور  $x$  آن در راستای  $v$  قرار گرفته و محورهای جدید  $y$  و  $z$  عمود بر آن باشند، اختیار می‌کنیم. در این دستگاه مختصات جدید، کسری از مولکولهای موجود در جزء حجمی  $\Delta V$ ، با همان اندازهٔ  $\Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$  ولی در



(ب)



(الف)

شکل ۳.۱ (الف) توزیع سرعت مولکولها در گاز نمونه. (ب) جزء حجمی در فضای سرعت برای سرعتهای بین  $V$  و  $V + dV$ .

راستایی دیگر، چنین خواهد بود

$$\frac{\Delta N(v, 0, 0)}{N} = f(v_x) f(0) f(0) \Delta V \quad (23.1)$$

در دستگاه دوران یافته (دستگاه مختصات جدید)  $v_x = 0$  و  $v_y = 0$  است، و به جای توابع  $f(0)$  می توان ثابت  $A$  را قرارداد. از آنجا که معادلات (۲۲.۱) و (۲۳.۱) یک کسرها در دو دستگاه مختصات مختلف نشان می دهند، می توان نوشت

$$A^3 f(v^2) = f(v_x^2) f(v_y^2) f(v_z^2) \quad (24.1)$$

که در آن  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$  در نظر گرفته شده است.

حال ثابت خواهیم کرد تنها نوع تابعی که در معادله (۲۴.۱) صدق می کند، تابع نمایی است. مشتق  $f$  نسبت به متغیر آن را با  $f'$  نشان می دهیم و از معادله (۲۴.۱) نسبت به  $v_x^2$  مشتق جزئی می گیریم. رابطه زیر به دست می آید

$$A^3 f'(v^2) = f'(v_x^2) f(v_y^2) f(v_z^2)$$

از تقسیم رابطه فوق بر معادله (۲۴.۱) تناسب زیر را به دست می آوریم

$$\frac{f'(v^2)}{f(v^2)} = \frac{f'(v_x^2)}{f(v_x^2)}$$

باروش مشابه، از جمله مشتق گیری جزئی نسبت به  $v_y^2$  و  $v_z^2$ ، تناسب زیر به دست می آید

$$\frac{f'(v^2)}{f(v^2)} = \frac{f'(v_x^2)}{f(v_x^2)} = \frac{f'(v_y^2)}{f(v_y^2)} = \frac{f'(v_z^2)}{f(v_z^2)} \quad (25.1)$$

حال استدلالی وارد می شود که اغلب در حل معادلات دیفرانسیل تفکیک پذیر به کار می رود. تابع  $F(v_x^2) = f'(v_x^2)/f(v_x^2)$  فقط بستگی به  $v_x^2$  دارد یعنی اگر  $v_x^2$  ثابت بماند و  $v_y^2$  و  $v_z^2$  تغییر نکنند، تابع تغییر نمی کند. یگانه راهی که در آن معادله (۲۵.۱) می تواند برای تمام مقادیر ممکن  $v_x^2$ ،  $v_y^2$  و  $v_z^2$  صدق کند، این است که هر یک از کسرها برابر با یک مقدار ثابت (مثلاً  $-\beta$ ) باشد. بنابراین داریم

$$\frac{f'(v_x^2)}{f(v_x^2)} = \frac{1}{f} \frac{df}{d(v_x^2)} = -\beta$$

جواب این معادله عبارت است از

$$\ln f = -\beta v_x^2 + \text{const}$$

که در نتیجه به دست می آید

$$f = f(0) e^{-\beta v_x^2} = A e^{-\beta v_x^2} \quad (26.1)$$

حال دلیل اینکه چرا يك عدد حقیقی منفی،  $-\beta$ ، برای ثابت تفکیک انتخاب کردیم واضح می شود. انتخاب يك عدد مثبت سبب  $\infty \rightarrow f$  می شود که واقعی نیست، و يك ثابت موهومی جواب موهومی به دست می دهد که آن هم جواب غیر فیزیکی است. حال می توانیم شکل تابع توزیع را برای مؤلفه  $x$  سرعت بنویسیم

$$\frac{\Delta N(v_x)}{N} = Ae^{-\beta v_x^2} \Delta v_x \quad (27.1)$$

که در آن  $A$  و  $\beta$  باید تعیین شوند. ما تعیین  $\beta$  را به بعد موکول می کنیم و مقسودار  $A$  را با اعمال این شرط بدیهی به دست می آوریم که احتمال اینکه يك مولکول دارای سرعتی بین  $-\infty$  و  $\infty$  باشد واحد است. بنابراین می نویسیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\beta v_x^2} dv_x = 1$$

با این روش که بهنجارش نامیده می شود،  $A = (\beta/\pi)^{1/2}$  به دست می آید. [انتگرال تابع گاوسی  $(-\beta x^2)$  را می توان از جدول انتگرالهای معین به دست آورد].  
از ترکیب تابع توزیع سرعت معادله (27.1) با معادله (24.1) داریم

$$\frac{\Delta N(v_x v_y v_z)}{N} = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta v^2} \Delta V \quad (28.1)$$

که در آن به جای  $A$  مقدار  $(\beta/\pi)^{1/2}$  قرار داده ایم. این تابع نمایشی نشان می دهد که محتملترین (یا کاملترین) جزء حجمی  $\Delta V = \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$  با «اندازه» سرعت مشخص در مبدأ، یعنی در  $v = 0$ ، حاصل می شود. اگر همین جزء حجمی سرعت را از مبدأ دور سازیم، تعداد کمتری از بردارهای سرعت به داخل آن ختم می شود. يك دلیل این موضوع آن است که با دور کردن جزء حجمی از مبدأ، راستای حرکت مولکولها مشخصتر می شود.

اگر از توزیع سرعتها (برداری) به توزیع قندیها (اسکالر) برویم، محدودیت راستای حرکت را می توانیم حذف کنیم. مولکولها با تبدیهای بین  $V$  و  $V + \Delta V$  در پوسته ای کروی از فضای سرعت قرار می گیرند. برای به دست آوردن تابع توزیع قندی، به جای  $\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta v_z$  مقدار  $\Delta V = \psi \pi v^2 \Delta v$  را قرار می دهیم که در اینجا  $v$  به معنی قندی (مقدار سرعت) است و  $\psi$  سرعت. بنابراین توزیع ماکسولی قندی را به صورت زیر به دست می آوریم

$$\Delta N(v)/N = \psi \pi (\beta/\pi)^{3/2} v^2 e^{-\beta v^2} dv \quad (29.1)$$

حال پیشینه توزیع قندیها دیگر در مبدأ نیست. دلیل آن است که برای  $\Delta V$  معین، جزء حجمی قندی در مبدأ کوچک است و با زیاد شدن قندی  $V$ ، فضای سرعت بیشتری را شامل می شود.

حال باید ثابت  $\beta$  را تعیین کنیم. برای این منظور از فرض سوم استفاده می کنیم و

می نویسیم

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2}mv^2\right) 4\pi(\beta/\pi)^{3/2} v^2 e^{-\beta v^2} dv = \frac{3}{2}kT$$

مجدداً با استفاده از جدول انتگرالها درمی یابیم که

$$\beta = \frac{m}{2kT} \quad (30.1)$$

با جایگذاری در معادله (۲۹.۱)، رابطه زیر به دست می آید

$$\frac{\Delta N(v)}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT} \Delta v \quad (31.1)$$

این قانون ماکسول است که بایک مثال در شکل ۲۰.۱ نشان داده شده است. محتملترین تندى  $v_m$  و تندى متوسط  $\bar{v}$  را می توان به آسانی به کمک معادله (۳۱.۱) به دست آورد که عبارت انداز

$$v_m = \sqrt{2/3} v_{rms} = 0.817 v_{rms} \quad (32.1)$$

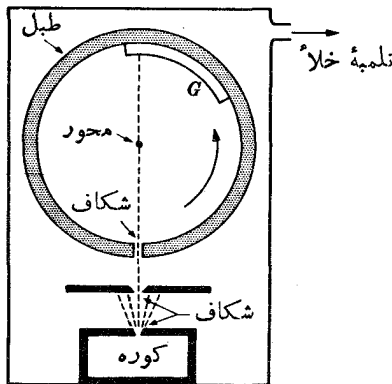
$$\bar{v} = \sqrt{8/3\pi} v_{rms} = 0.921 v_{rms} \quad (33.1)$$

و با استفاده از معادله (۱۸.۱)، داریم  $v_{rms} = \sqrt{3kT/m}$

توزیع ماکسولی تندیهها برای محاسبه خواص دیگر گازها به کار گرفته شد که به طور غیرمستقیم از روی این خواص ثانوی به تأیید رسید. این موضوع در سال ۱۹۳۵، توسط زارتمن و کو به طور تجربی و مستقیم به اثبات رسید. آنها مطابق شکل ۴۰.۱ از کوره ای که دارای بخار بیسموت در دمای بالای معین ( $827^\circ\text{C}$ ) بود، استفاده کردند. مولکولهای بخار بیسموت از طریق يك شكاف وارد ناحیه تخلیه شده فوقانی می شوند. دسته مولکولهای خروجی به وسیله يك شكاف دیگر به صورت باریکه درمی آیند و فقط مولکولهای تك راستا مورد استفاده قرار می گیرند. در بالای شكاف يك طبل استوانه ای که درخلاً قرار دارد می تواند حول محور افقی خود، که بر صفحه کاغذ عمود است، بچرخد. شکافی که در يك طرف طبل استوانه ای قرار دارد می باید در وضعیت خاصی قرار گیرد تا مولکولهای باریکه وارد آن شوند. وقتی طبل استوانه ای ساکن باشد باریکه مولکولها می تواند بدان وارد شده و پس از طی قطر آن بر روی صفحه شیشه ای  $G$ ، که در سطح داخلی استوانه مقابل شكاف

۱. مولکولهای سریع بیشتر از مولکولهای کند از کوره فرار می کنند. محاسبه نشان می دهد که اگر کوره در دمای  $T$  باشد، سرعت ریشه میانگین مربعی مولکولهای خروجی برابر سرعت ریشه میانگین مربعی داخل کوره در دمای بالاتر  $4T/3$  است.



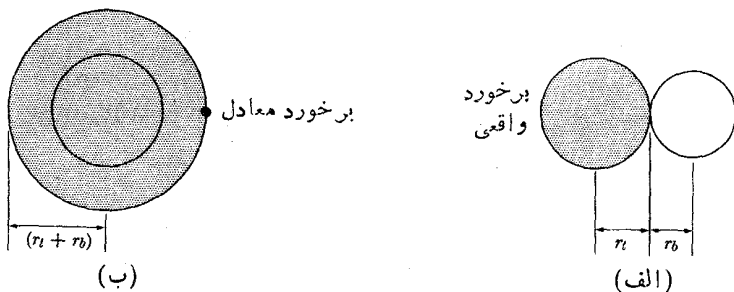


شکل ۴۰۱ نمایش دستگاه مورد استفاده زارتمن و کو.

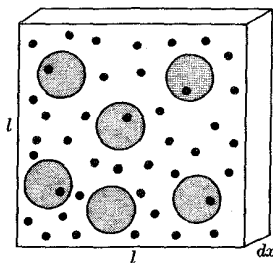
قراردارد، فرونشینند. در طول آزمایش طبل با سرعت زاویه‌ای تابشی می‌چرخد به طوری که در هر چرخش تعدادی از مولکولها وارد استوانه می‌شوند. چون سرعت مولکولها متفاوت است، بعضی از آنها با سرعت قطر استوانه را طی می‌کنند و مولکولهای دیگر در زمان طولانیتر مسیر را طی می‌کنند و از آنجا که استوانه می‌چرخد محل‌های برخورد مولکولها به‌شیشه متفاوت خواهند بود. بنا بر این، توزیع سرعتها در داخل استوانه تبدیل به توزیع میزان تاریکی شیشه در نتیجه رسوب مولکولهای بیسموت می‌شود. ضخامت رسوب بیسموت به‌طریقه نوری اندازه‌گیری می‌شود، و مقایسه توزیع تجربی سرعتها با توزیع نظری ماکسول مطابق خوبی را نشان می‌دهد.

### ۱۰۱ احتمال برخورد؛ مسیر آزاد میانگین

اگر مولکولها حقیقتاً نقاط هندسی بودند هیچ برخوردی بین آنها رخ نمی‌داد. اما، مولکولهای واقعی اندازه‌ای معین دارند و در این بحث فرض می‌کنیم که مولکول کوره‌ای کاملاً الاستیک و سخت است. برخورد بین دو مولکول وقتی رخ می‌دهد که یک مولکول با مولکول دیگری تماس حاصل کند. یکی از مولکولها را با شعاع  $r_1$  مولکول هدف و دیگری را با شعاع  $r_2$  مولکول پرتابی در نظر می‌گیریم. بنا بر این مطابق شکل ۵۰۱ الف، برخورد بین دو مولکول وقتی رخ می‌دهد که فاصله بین آنها برابر مجموع شعاعها یعنی  $(r_1 + r_2)$  باشد. موقعی که برخورد بین مولکولهای گاز با یکدیگر مورد نظر باشد، شعاعهای  $r_1$  و  $r_2$  با هم برابرند و اختلافی بین مولکولهای هدف و مولکولهای پرتابی نیست. اما، در اغلب موارد میل داریم برخورد بین ذرات از نوع مختلف را در نظر بگیریم. بنا بر این از مولکولهای هدف که با مولکولهای پرتابی فرق دارند صحبت می‌کنیم. از آنجا که فقط فاصله مرکز تا مرکز است که در برخورد تعیین‌کننده است، مهم نیست



**شکل ۵.۱** برای سهولت در محاسبات، برخورد واقعی بین دو مولکول را که در قسمت (الف) نموده شده می‌توان به صورت معادل آن در قسمت (ب) نشان داد.



**شکل ۶.۱** مولکولهای هدف همراه با مولکولهای معادل هدف (سایه‌دار) و مولکولهای پرتابی (نقاط سیاه).

که هدف بزرگ و مولکول پرتابی کوچک باشد یا بالعکس. بنا بر این می‌توانیم یک برخورد واقعی را با یک برخورد معادل، مطابق شکل ۵.۱ ب، جایگزین کنیم که در آن مولکول پرتابی به صورت یک نقطه هندسی و مولکول هدف به شکل کره‌ای به شعاع  $r_1 + r_2$  در نظر گرفته شده است.

حال لایه نازکی از ماده به ابعاد  $l, l$  و  $dx$  در نظر می‌گیریم. این لایه فقط دارای مولکولهای هدف (معادل) است و ابتدا فرض می‌کنیم که این مولکولها در حال سکون هستند. سپس فرض می‌کنیم که تعداد زیادی از مولکولهای پرتابی،  $N$ ، شبیه فوجی از ساچمه‌های یک تفنگ که به طور عمودی بر سطح لایه فرود می‌آیند، به نحوی که در تمام سطح پخش می‌شوند. اگر ضخامت لایه به اندازه‌ای کوچک باشد که هیچیک از مولکولهای هدف نتواند پشت مولکول دیگر پنهان شود، در این صورت رویارویی لایه در مقابل مولکولهای پرتابی مطابق شکل (۶.۱) خواهد بود که در آن دایره‌های سایه‌دار معرف مولکولهای هدف و نقطه‌های سیاه معرف مولکولهای پرتابی است.

اغلب مولکولهای پرتابی (بدون برخورد) از لایه عبور می کنند، اما بعضی از آنها به مولکولهای هدف برخورد می کنند. نسبت تعداد برخوردها،  $dN$ ، به تعداد کل مولکولهای پرتابی،  $N$ ، برابر نسبت مساحت کل مولکولهای هدف به مساحت کل لایه است

$$\frac{dN}{N} = \frac{\text{مساحت هدف}}{\text{مساحت کل}}$$

$\sigma$  مساحت هدف یک مولکول منفرد (معادل) عبارت است از

$$\sigma = \pi(r_i + r_b)^2 \quad (34.1)$$

این مساحت را سطح مقطع برخورد یک مولکول (معادل) می نامند. مساحت کل هدف برابر حاصلضرب  $\sigma$  در تعداد کل مولکولهای لایه است. اگر تعداد مولکولهای هدف در واحد حجم  $n$  باشد، تعداد کل مولکولهای هدف در لایه برابر  $nl^2 dx$  می شود، بنا بر این مساحت هدف برابر است با

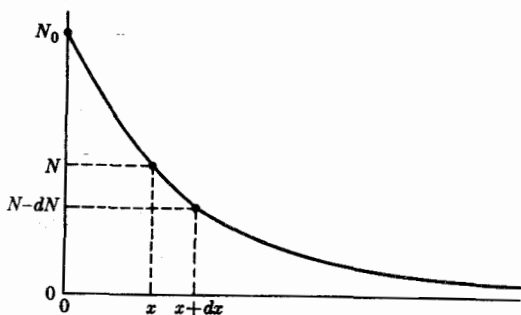
$$nl^2 dx$$

مساحت کل لایه  $l^2$  است، لذا

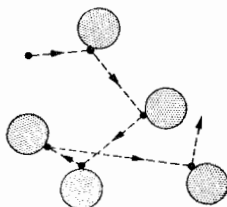
$$\frac{dN}{N} = \frac{nl^2 dx}{l^2} = n\sigma dx \quad (35.1)$$

در معادله اخیر  $dN/N$  کسری از مولکولهایی است که برخورد انجام داده اند، و بنا بر این، این نسبت احتمال برخورد است. (با بیان دقیقتر این نسبت باید علامت منفی داشته باشد زیرا  $dN$  برابر تعداد مولکولهایی است که از تعداد مولکولهای پرتابی حذف می شوند.) در ابتدای این بحث، سطح مقطع مساحت واقعی یک مولکول هدف تصور شد، اما بزودی این مساحت با مساحت معادل جایگزین شد. به طوری که بعداً در دستگاههای مکانیک کوانتومی، مانند مورد آنها و مولکولها خواهیم دید مفهوم مرز مشخص، به نحوی که در شکل ۵.۱ نشان داده شد، قابل قبول نیست. به هر حال، معادله (۳۵.۱) را برای تعریف سطح مقطع  $\sigma$  که بعداً معیاری از احتمال برخورد خواهد شد، می توان به کار برد. اگر تعداد مولکولهای پرتابی که به واحد مساحت لایه به طور عمودی فرود می آیند  $N_0$  و لایه دارای مولکولهای ساکن با سطح مقطع ماکروسکوپی  $n\sigma$  باشد، آنگاه  $N$  تعداد مولکولهای پرتاب شده ای که از واحد مساحت لایه به ضخامت معین  $dx$  بدون انحراف عبور می کنند را می توان از انتگرال گیری معادله (۳۵.۱) به دست آورد

$$\int_{N_0}^N -\frac{dN}{N} = \int_0^x n\sigma dx \quad (36.1)$$



شکل ۷.۱ تعداد مولکولهای بدون انحراف گذرنده از لایه هدف بر حسب ضخامت لایه.



شکل ۸.۱ مسیر آزاد مولکولی.

$$\ln \frac{N}{N_0} = -n\sigma x$$

$$N = N_0 e^{-n\sigma x} \quad (۳۷.۱)$$

این معادله نمایی به صورت خط پر در شکل ۷.۱ رسم شده است. حال در ذهن خود حرکت یک مولکول پرتابی را در داخل هدفی ضخیم که دارای مسیری زیگزاکی، مطابق شکل ۸.۱ خواهد بود، بررسی می کنیم. اکنون رابطه ای مورد نظر ما است که بتواند فاصله متوسط طی شده بین دو برخورد (متوالی) را به دست دهد. این فاصله را مسیر آزاد میانگین،  $L$ ، می نامند. این رابطه را می توان از نتایج بالا، به کمک نوعی استدلال که در مسائلی از این قبیل معمول و مفید است، به دست آورد.

وقتی مولکولها از لایه نازک ماده مطابق شکل ۶.۱ عبور می کنند، تعدادی از آنها که در نتیجه برخورد از دسته مولکولها حذف می شوند در مقایسه با تعداد اولیه کم است و می توان گفت که هر یک از  $N$  مولکول ضخامت  $dx$  را طی می کند، و در ضمن عبور  $dN$  برخورد انجام گرفته است. بنا بر این کل مسافتی که  $N$  مولکول طی کرده اند برابر  $N dx$

است. حال فرض می‌کنیم که تعداد برخوردهای یک مولکول منفرد در ضمن عبور از مسافت  $N dx$  برابر باشد با تعداد برخوردهای  $N$  مولکول در طی مسافت  $dx$ . بنا بر این طبق معادله (۳۵.۱) تعداد کل برخوردهایی که یک مولکول منفرد در طول کلی  $N dx$  انجام می‌دهد چنین است

$$dN = N n \sigma dx \quad (38.1)$$

مسیر آزاد میانگین مولکول برابر است با کل طول مسیر بر تعداد برخوردها، یعنی

$$L = \frac{\text{کل طول مسیر}}{\text{کل تعداد برخوردها}}$$

با استفاده از روابط فوق در مورد کل طول مسیر و کل تعداد برخوردها، داریم

$$L = \frac{N dx}{N n \sigma dx} = \frac{1}{n \sigma} \quad (39.1)$$

مفهوم مسیر آزاد میانگین را می‌توان با تصویر اینکه یک شخص بدون هدف به داخل یک جنگل تیراندازی می‌کند تجسم کرد. بیشتر گلوله‌ها به درختها برخورد خواهند کرد لکن بعضی از آنها مسافت دورتری را طی می‌کنند. به آسانی می‌توان دریافت فاصله متوسط که گلوله‌ها طی می‌کنند متناسب با عکس تراکم و عکس قطر درختها است.

در تحلیل بالامولکولهای هدف ساکن فرض شده‌اند. این فرض در مورد مولکولهایی که از خلل یک جسم جامد می‌گذرند، درست است. اما، اگر گازی را در نظر بگیریم که در آن هم مولکولهای هدف هم مولکولهای پرتابی به‌طور کاتوره‌ای در حرکت باشند، در این صورت مسیر آزاد میانگین کاهش خواهد یافت زیرا در این حالت نه تنها برخوردهای رودررو مانند قبل وجود دارند، بلکه با مولکولهای هدفی که در مسیر حرکت مولکولهای پرتابی در حرکت باشند، برخوردهای «پهلوی به پهلوی» نیز رخ خواهد داد. برای گاز کامل که دارای توزیع سرعت ماکسولی باشد، مسیر آزاد میانگین مولکول از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$L = \frac{0.707}{n \sigma} \quad (40.1)$$

### ۱۱.۱ قانون الکترولیز فاراده-تروید دانشمندان

بحث دیگری که نظریه اتمی بودن ماده را تأیید می‌کند، ناشی از کارهای فاراده است. در سال ۱۸۳۳ فاراده مشاهده کرد که اگر بار الکتریکی یکسانی را در الکترولیت‌های مختلف به حرکت در آوریم، جرم مواد رسوبی در روی الکترودها متناسب با جرم معادل شیمیایی مواد است. مقدار الکتریسیته لازم برای رسوب دادن یک مول از یونهای تک ظرفیتی در

عمل الکترولیز را ثابت فاراده،  $F$ ، می نامند که برابر  $10^4 \times 96485$  کولن است. مانند قانون ترکیبهای چندگانه که توسط دالتون پیشنهاد شد، ایسن قانون نیز بر اتمی بودن ماده دلالت می کند. قانون فاراده الکتروسیسته را وارد صحنه می کند و نشان می دهد که الکتروسیسته و ماده هر دو اتمی هستند.

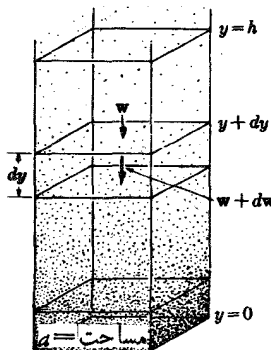
تا به حال چند مورد برجسته از توسعه نظریه اتمی بودن ماده را، که بیشتر آنها به قرن نوزدهم مربوط می شوند، دنبال کرده ایم. اما چون کسی مولکول را ندیده بود، تمامی نظریه با تردید تلقی می شد. ماکسول که نظریه او درباره توزیع سرعتها بحث شد، بیشترین کار خود را بر روی نظریه الکتریکی انجام داد. ماکسول بود که رابطه بین الکتروسیسته و نور را پیدا کرد، و به همین علت است که اغلب نور را «تابش الکترومغناطیس» می نامیم. ماکسول در کتاب جامع خود درباره الکتروسیسته و مغناطیس (۱۸۷۳)، پس از تشریح قانون الکترولیز فاراده بر اساس نظریه اتمی ماده و الکتروسیسته، چنین می گوید «پس از درک طبیعت واقعی الکترولیز، حفظ نظریه بارهای مولکولی به هر شکلی بسیار نامحتمل می نماید، در این صورت می بایست اساس مطمئنی به دست آوریم که بر پایه آن یک نظریه حقیقی در مورد جریانهای الکتریکی به وجود آید تا از این نظریه های مقدماتی استقلال حاصل شود.» حتی تا سال ۱۹۰۸ هم، ویلهلم اوسوالد شیمی-فیزیکدان و ارنست ماخ فیزیکدان با نظریه اتمی ماده مخالف بودند. تردید آنها از نقطه نظر شناخت شناسی یک سؤال جالب است. این دانشمندان تمایلی به قبول شواهد صرفاً غیرمستقیم نداشتند. ماخ نقطه نظر خود را با تشبیه زیر روشن می سازد: یک میله بلند الاستیک را در گیره قرار می دهیم به طوری که ارتعاشات آرام و محسوسی داشته باشد. اگر میله را کوتاه کنیم، ارتعاشات به نحوی تار می شوند که حرکتهای میله از هم قابل تمایز نیست. اگر میله را کوتاهتر کنیم، ارتعاشات محو دیگر دیده نمی شوند ولی صدایی شنیده می شود. اگر میله را به آن اندازه کوتاه کنیم که حرکت آن را مطلقاً حس نکنیم، باز هم می توان فکر کرد که وقتی ضربه ای به میله زده می شود به ارتعاش درمی آید. بر طبق نظر ماخ این یک برون یابی مطمئن از ایده هاست زیرا از مشاهدات مستقیم به مشاهدات غیرمستقیم می رسیم. آنهاهی که در مورد نظریه اتمی ماده تردید داشتند، ایرادشان این بود که شواهد تماماً غیرمستقیم است. آزمایشهایی که در بخش بعد شرح داده می شوند، وقایع قابل رؤیتی را به دست می دهند که شواهد غیرمستقیم پیشگفته را برای هر کسی قابل قبول می کند.

## ۱۲۰۱ روش پرن در اثبات نظریه اتمی ماده

افتخار از میان بردن تردید در مورد نظریه اتمی نصیب شیمی-فیزیکدانی فرانسوی به نام پرن می شود. پرن پس از آزمون حرکت براونی ذرات معلق در یک مایع ساکن، دریافت که حرکت ذرات شبیه حرکت مولکولهای بزرگ گاز است. پرن برای انجام آزمایش ذراتی معلق در آب فراهم کرد و برای تهیه آن شرایط سختی را در نظر گرفت. ذرات می بایست به اندازه کافی بزرگ باشند تا تک دیده شوند، اما به اندازه ای کوچک باشند

که جنبش حرارتی آنها محسوس و قابل اندازه‌گیری شود، و ضمناً می‌بایست دارای جرم و اندازهٔ یکنواخت و معلوم باشند. به‌علاوه، غلظت ذرات در محیط تعلیق به آن اندازه کم باشد که از نیروی بین آنها بتوان صرف‌نظر کرد. به‌طور خلاصه ذرات می‌بایست مستقیماً قابل مشاهده بوده و با فرضهای نظریهٔ جنبشی گازها مطابقت داشته باشند. پرن موفق شد به کمک دستگاه گریز از مرکز، در مخلوطی از آب و پودر صمغ که غلیظتر از آب معمولی است، ذرات معلق با شرایط فوق به‌دست آورد. دستگاه گریز از مرکز، ذرات را برحسب اندازهٔ آنها از هم جدا می‌کند. پس از خارج کردن قسمتی از مخلوط که در آن اندازهٔ ذرات مناسب آزمایشهایش بود، وی با تکرار عمل گریز از مرکز برای چندین بار دیگر ذراتی به‌دست می‌آورد که تقریباً یکنواخت بودند. با وجود اینکه صمغ سنگینتر از آب است، پرن مشاهده کرد که ذرات در آب ساکن ته‌نشین نمی‌شوند. این ذرات برحسب ارتفاع توزیعی را نشان می‌دادند به‌نحوی که تعداد ذرات در واحد حجم در ته ظرف بیش از بالای ظرف بود. پرن این توزیع را برحسب ارتفاع اندازه‌گیری کرد.

برای به‌دست آوردن معادلهٔ توزیع، به‌جای آب حاوی ذرات معلق یک ستون قائم از گاز (شکل ۹.۱) که مساحت مقطع آن  $a$  و دمای آن یکنواخت است در نظر می‌گیریم. در این ستون یک تراشهٔ افقی به‌ضخامت  $dy$  را مورد بررسی قرار می‌دهیم. اگر رزن گاز در بالای سطح فوقانی تراشه  $w$  باشد در این صورت وزن گاز در بالای سطح زیرین تراشه  $w + dw = w + mgndy$  خواهد بود که در آن  $mg$  وزن یک مولکول و  $n$  تعداد متوسط مولکولها در واحد حجم و  $ady$  حجم تراشه است (یادآور می‌شود که در اینجا داریم از نظریهٔ اتمی گاز استفاده می‌کنیم). اختلاف این دو وزن در واحد مساحت،  $mgndy$ ، برابر اختلاف فشار مربوط به گاز موجود در تراشه است، یعنی  $dp = -mgndy$ . علامت منفی نشان می‌دهد که هر چه ارتفاع زیاد می‌شود فشار کم می‌شود. از آنجا که مولکولهای گاز داخل ستون دارای وزن هستند، تعداد مولکولها در واحد حجم در قسمت پایین بیشتر از قسمت بالا است. به‌علت این اختلاف تراکم، تفاوتی در تعداد برخورد مولکولها در واحد



شکل ۹.۱ توزیع چگالی در یک ستون بلند گاز در میدان گرانشی.

زمان در دو سطح وجود دارد که بالاخره منتهی به برقراری تعادل دینامیکی در ستون گاز می‌شود. در این حالت، وزن مولکولها در هر لایه درست با نیروی برآیند روبه بالای حاصل از اختلاف تعداد برخورد مولکولها در واحد زمان بر سطوح افقی بالاپایین لایه یکی می‌شود. در مرحله بعد رابطه‌ای به دست می‌آوریم که اختلاف فشار بین دو سطح را، که در نتیجه اختلاف تراکم مولکولی به وجود آمده، نشان می‌دهد.

معادله  $pV = RT$  در مورد يك مول از هر گازی که کامل باشد، درست است. بر طبق نظریه اتمی تعداد مولکولهای موجود در يك مول برابر عدد آووگادرو  $N_A$  است. با تقسیم کردن معادله گاز کامل بر عدد آووگادرو می‌توان يك رابطه بر حسب تراکم مولکولی گاز به دست آورد. بنا بر این داریم

$$pV/N_A = RT/N_A \quad \text{یا} \quad p = nkT$$

که در آن  $n = N_A/V$  تراکم مولکولی است. این تراکم تابع فشار است و چون  $K$  و  $T$  مقادیر ثابتی هستند، بنا بر این  $dp = kTdn$ . وقتی این اختلاف فشار مربوط به اختلاف تراکم مولکولها در لایه‌ای به ارتفاع  $dy$  را برابر با اختلاف فشار مربوط به وزن لایه قرار دهیم، داریم

$$kT dn = -mgn dy$$

یا

$$\frac{dn}{n} = -\frac{mg}{kT} dy \quad (۴۱.۱)$$

که در آن  $m$  جرم يك مولکول منفرد است.

از انتگرال گیری معادله (۴۱.۱)، رابطه‌ای بین تراکم مولکولی  $n_0$  در  $y=0$  و  $n$  در  $y=h$  به دست می‌آید

$$\int_{n_0}^n \frac{dn}{n} = \int_0^h \frac{mg}{kT} dy \quad (۴۲.۱)$$

$$n = n_0 e^{-mgh/kT}$$

چون فشار گاز مستقیماً متناسب با تعداد مولکولهای گاز در واحد حجم است، لذا می‌توان معادله (۴۲.۱) را بر حسب فشار نوشت. معادله حاصل را قانون اتمسفر می‌نامند زیرا این معادله توزیع فشار را بر حسب ارتفاع در يك ستون گاز در دمای ثابت و تحت تأثیر نیروی گرانی به دست می‌دهد.

در معادله (۴۲.۱) باید اصلاح جزئی انجام داد تا برای مطالعه ذرات معلق در آب به کار رود، وزن مؤثر بر يك ذره معلق در شاره، برآیند نیروی وزن و نیروی ارشمیدس است. حجم يك ذره به جرم  $m$  و چگالی  $\rho$  برابر  $m/\rho$  و جرم مایع هم حجم آن با چگالی  $\rho'$  برابر  $\rho' m/\rho$  است. بنا بر این نیروی ارشمیدس وارد به این ذره وقتی در مایع غوطه‌ور



است برابر  $mg\rho'/\rho$  می شود و وزن مؤثر آن عبارت است از

$$mg - mg \frac{\rho'}{\rho} = mg \left( \frac{\rho - \rho'}{\rho} \right)$$

با گذاردن وزن مؤثر به جای وزن واقعی در معادله (۴۲.۱) و قراردادن ثابت بولتزمن  $R/N_A = k$  رابطه زیر به دست می آید

$$n = n_0 \exp \left[ \frac{N_A mg (\rho - \rho') h}{\rho RT} \right] \quad (42.1)$$

این معادله، تعادل رسوبی ذرات معلق در یک مایع را در نتیجه حرکت براونی نشان می دهد. پرن در تعدادی اندازه گیری،  $n$  های مختلف را بر حسب ارتفاعهای مختلف در یک مایع خیلی رقیق به دست آورد. نتایج اندازه گیری معادله رسوبی بالا را تأیید کرد. نکته مهم دیگر اینکه مقدار  $N_A$  از این اندازه گیریها به دست آمد زیرا مقادیر دیگر معادله معلوم بودند. موجودیت غیر قابل انکار عدد آووگادرو، درستی نظریه اتمی ماده را نشان می دهد. جالب اینکه اینشتین که بزرگترین سهم را در توسعه فیزیک جدید داشت، در برقراری نهایی نظریه اتمی نیز شرکت داشته است. اینشتین در سال ۱۹۰۵ معادله ای به دست آورد که نشان می دهد چگونه یک ذره معلق در داخل مایع به طور کاتوره ای باید حرکت کند. رابطه اینشتین شامل ثابت آووگادرو بود، و روش پرن در اثبات فرمول اینشتین مقدار این ثابت را تأیید می کند. نتایج این بررسیها نشان داد که ذرات ریز معلق در یک مایع ساکن، به نحوی که نظریه جنبشی مولکولی گازها پیش بینی می کند، در حرکت اند.

روی هم رفته، پرن چهار نوع اندازه گیری مستقل از هم انجام داد که هر یک از آنها به طور شهودی نظریه اتمی را اثبات کرد و هر کدام نیز بر آوردی عددی از ثابت آووگادرو به دست داد. از تاریخ انتشار نتایج کار پرن در سال ۱۹۰۸ تا به امروز هیچکس به طور جدی در مورد نظریه اتمی ماده تردید نکرده است.

### ۱۳.۱ قانون توزیع بولتزمن

قانون توزیع سرعت ماکسول [معادله (۲۱.۱)] و قانون اتمسفر [معادله (۴۲.۱)] در مواردی مشترک هستند. در هر دو معادله عامل  $\exp(-E/kT)$  ظاهر می شود که در یکی  $E$  انرژی جنبشی،  $mv^2/2$ ، یک مولکول و در دیگری انرژی پتانسیل،  $mgh$ ، یک مولکول در میدان گرانشی است. این تشابه به هیچوجه اتفاقی نیست. هر دو معادله را می توان از یک قانون کلی مکانیک آماری، که قانون توزیع بولتزمن نامیده می شود، به دست آورد

$$n = n_0 e^{-(E-E_0)/kT} \quad (43.1)$$

این قانون در مورد توزیع مولکولها یا ذرات دیگر در حالت های مختلف انرژی، که در آنها

$E - E_0$  اختلاف انرژی بین حالتها است، به کار می رود. توزیع پیشینی حالتها، یعنی توزیعی که بدون هیچگونه اختلاف انرژی وجود دارد، باید یکنواخت باشد.

حال مثال قانون اتمسفر را در نظر می گیریم. فرض می کنیم که مولکولها در شکل ۹۰۱ در يك جعبه بسته که دمای دیواره های آن  $T$  است، قرار دارند. در صورت نبودن میدان گرانشی، توزیع مولکولها (به طور متوسط) باید یکنواخت باشد. این بدان معنی است که تعداد مولکولها در حالتی که با لایه ای واقع بین  $dy$  و  $y=0$  مشخص می شود برابر خواهد بود با تعداد مولکولها در حالتی که با لایه هم حجم واقع بین  $h$  و  $h+dy$  مشخص می شود. حال اگر میدان گرانشی را «برقرار کنیم» و دمای دیواره ها همان  $T$  باقی بماند، اختلاف انرژی پتانسیل بین دو لایه فوق برابر  $E - E_0 = mgh$  خواهد بود. با قراردادن این مقدار در معادله (۴۴.۱)، معادله (۴۲.۱) به دست می آید. با بیان دقیقتر، انرژی جنبشی نیز می باید در توصیف حالتها ی انرژی گنجانده شود. در مثال ویژه مورد بحث، توزیع انرژی جنبشی برای دو جزء حجمی یکی است. (یعنی، دما یکسان است.) بنابراین نیاز نداریم انرژی جنبشی را در نظر بگیریم.

قانون توزیع سرعت ماکسول را می توان از معادله (۴۴.۱)، با فرض اینکه توزیع پیشینی مولکولها در فضای سرعت یکنواخت است، به دست آورد. این بدان معنی است که چگالی نقاط سیاه در شکل ۳۰۱ الف، بدون دخالت اختلاف انرژی جنبشی در عامل نمایی معادله (۴۴.۱)، باید یکنواخت باشد.

قانون توزیع بولتزمن را می توان با بیشینه کردن آنتروپی مجموعه ای از ذرات با انرژی کل ثابت به دست آورد. به دست آوردن این قانون خارج از حد این کتاب است.

## مسائل

۱۰۱ یکی از شیمیدانهای اولیه میل داشت وزن اتمی ازت را تعیین کند. او فرض می کرد که وزن اتمی اکسیژن دقیقاً ۱۶ است، و چهار اکسید کاملاً متفاوت ازت را تهیه کرد (به جدول زیر رجوع شود).

(الف) نشان دهید که این اطلاعات قانون نسبتهای چندگانه را نمایش می دهد. (داهنمایی: ابتدا جرمهای یکی از عناصر را که با واحد جرم دیگری ترکیب می شود، پیدا کنید.)  
 (ب) به کمک اطلاعات بالانمی توان فرمول شیمیایی محصولات را بدرستی تعیین کرد، اما با فرض اینکه طبیعت ساده است، می توان چند دسته از فرمولهای شیمیایی ممکن را پیشنهاد کرد. چند دسته از فرمولهای ممکن اکسیدها را بنویسید. (ج) وزن اتمی ازت را برای هر دسته حساب کنید.

۱. به عنوان نمونه به منبع زیر مراجعه کنید

وزن اکتید	وزن اکسیژن در اکسید	نوع اکسید
۸۶٫۳	۱۹٫۷	A
۵۰۰	۲۸٫۵	B
۳۰۰	۳۴٫۳	C
۱۰۸٫۲	۱۸٫۶	D

۲۰۱ ظرفیت گرمایی مولی یک گاز در حجم ثابت را که مولکولهای آن ساختار سه بعدی صلبی دارند، حساب کنید.

۳۰۱ نشان دهید که اگر  $\rho$  چگالی گاز باشد، داریم

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}}$$

۴۰۱ (الف) سرعت میانگین حسابی و سرعت ریشه میانگین مربعی را برای توزیع سرعتهای هشت ذره در هر حالت زیر محاسبه کنید:

۱. هشت ذره دارای سرعت ۱۰ متر در ثانیه باشند.
۲. دو ذره دارای سرعت ۳ متر در ثانیه، چهار ذره دارای سرعت ۶ متر در ثانیه، و دو ذره دارای سرعت ۱۰ متر در ثانیه باشند.
۳. یک ذره دارای سرعت ۳ متر در ثانیه، سه ذره دارای سرعت ۶ متر در ثانیه و چهار ذره دارای سرعت ۱۰ متر در ثانیه باشند.
۴. چهار ذره ساکن و چهار ذره دارای سرعت ۱۰ متر در ثانیه باشند.

(ب) با فرض اینکه جرم ذرهها یکسان باشد، در هر حالت معلوم کنید که شکل منحنی توزیع سرعت شبیه منحنی توزیع انرژی جنبشی انتقالی است.

۵۰۱ تابع توزیع سرعت یک گروه از  $N$  ذره با رابطه  $dN_v = av dv$  داده شده است، که  $dN_v$  تعداد ذراتی است که سرعت آنها بین  $v$  و  $v+dv$  است، و  $a$  مقدار ثابتی است. سرعت هیچیک از ذرات بیش از  $V$  نبوده و گستره تغییرات سرعت بین صفر و  $V$  است. (الف) منحنی تابع توزیع یعنی  $(dN_v/dv)$  را بر حسب  $v$  رسم کنید. (ب) مقدار ثابت  $a$  را بر حسب  $V$  و  $N$  به دست آورید (ج) سرعت متوسط، سرعت ریشه میانگین مربعی، و محتملترین سرعت را بر حسب  $V$  حساب کنید. (د) سرعت چند درصد از ذرات بین سرعت متوسط و  $V$ ، و همچنین بین سرعت ریشه میانگین مربعی و  $V$  است؟

۶۰۱ الف) با استفاده از معادله (۳۱.۱) نشان دهید که محتملترین سرعت در توزیع ماکسول با رابطه  $v_m = \sqrt{2kT/m} = \sqrt{2RT/M}$  داده می‌شود. (ب) و آنگاه با استفاده از رابطه (۱۸.۱) نشان دهید که  $v_m = \sqrt{2/3} v_{rms}$  است. (دانه‌نمایی: شرطی را تعیین کنید که با آن مقدار  $\gamma$  در شکل ۲۰۱ بیشینه باشد).

۷۰۱ با استفاده از معادله (۳۱.۱) نشان دهید که سرعت متوسط در توزیع ماکسول چنین است

$$\bar{v} = \frac{\int_0^{\infty} (\Delta N_v) v dv}{\int_0^{\infty} (\Delta N_v) dv} = \sqrt{\frac{8kT}{m}}$$

چند انتگرال معین مورد نیاز در زیر داده شده است

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}\right) a^{-3/2}$$

$$\int_0^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^2}$$

$$\int_0^{\infty} x^6 e^{-ax^2} dx = \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{8}\right) a^{-5/2}$$

۸۰۱ با استفاده از معادله (۳۱.۱) نشان دهید که سرعت ریشه میانگین مربعی در توزیع ماکسول از رابطه زیر به دست می‌آید

$$v_{rms} = \left[ \frac{\int_0^{\infty} (\Delta N_v) v^2 dv}{\int_0^{\infty} (\Delta N_v) dv} \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

۹۰۱ سرعت انتشار امواج صوتی در هوای  $27^\circ\text{C}$  حدود  $348$  متر در ثانیه است. نسبت این سرعت را به سرعت ریشه میانگین مربعی مولکولهای ازت در این دما به دست آورید.

۱۰۰۱ استوانه دستگانه زارتمن-کو (شکل ۴.۱) دارای شعاع  $8$  سانتیمتر است و با سرعت  $6000$  دور در دقیقه می‌چرخد. کوره دارای اتمهای جیوه در دمای  $600\text{K}$  است. دو اتم جیوه، یکی با محتملترین سرعت در دمای کوره و دیگری با سرعت ریشه میانگین مربعی در همین دما، از کوره خارج و وارد استوانه دوار می‌شوند. این دو اتم در روی صفحه شیشه‌ای که در طرف دیگر استوانه قرار دارد می‌نشینند. فاصله این دو اتم را در روی صفحه شیشه‌ای حساب کنید. (وزن اتم جیوه  $= 200.6$ ).

۱۱۰۱ يك جسم وقتی می‌تواند از سطح زمین فرار کند که سرعتش بیش از  $\sqrt{2gR}$  باشد،

که در آن  $c$  شتاب گرانی و  $R$  شعاع زمین است. (الف) با کاربرد شعاع  $10^6 \times 64$  متر، این سرعت فرار را حساب کنید. (ب) توضیح دهید چرا اکسیژن و ازت در جو زمین باقی می ماند در حالی که هیدروژن باقی نمی ماند.

۱۲.۱ (الف) درجه دمایی سرعت ریشه میانگین مربعی مولکولهای اکسیژن دو برابر سرعت ریشه میانگین مربعی آنها در  $27^\circ\text{C}$  می شود؟ (ب) در چه دمایی سرعت ریشه میانگین مربعی مولکولهای ازت برابر سرعت ریشه میانگین مربعی مولکولهای اکسیژن در  $27^\circ\text{C}$  می شود؟

۱۳.۱ (الف) گاز کاملی که «ذرات» آن از توپ بیس بال تشکیل می شود، تا چه دمایی باید گرم شود که سرعت ریشه میانگین مربعی ذرات آن در توزیع ماکسول برابر با سرعت توپی که با سرعت  $30.5$  متر در ثانیه حرکت می کند، بشود؟ (جرم توپ بیس بال  $144$  گرم است.)

۱۴.۱ سرعت ریشه میانگین مربعی، سرعت متوسط و محتملترین سرعت مولکولهای گاز هیدروژن را در دماهای (الف)  $20^\circ\text{C}$  و (ب)  $120^\circ\text{C}$  به دست آورید.

۱۵.۱ فرض کنید که انرژی یک مولکول فقط انرژی جنبشی انتقالی است، (الف) با استفاده از معادله (۳۱.۱) نشان دهید که کسری از مولکولها که انرژی آنها در گستره  $\Delta E$  باشد عبارت است از

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{kT} \right)^{3/2} E^{1/2} e^{-E/kT} \Delta E$$

(ب) به کمک توزیع انرژی قسمت الف نشان دهید که محتملترین انرژی برابر  $kT$  است. (ج) نسبت انرژی جنبشی انتقالی متوسط به محتملترین انرژی جنبشی انتقالی را به دست آورید.

۱۶.۱ نشان دهید که انرژی جنبشی انتقالی یک مولکول با محتملترین سرعت در توزیع ماکسول، برابر  $kT$  است.

۱۷.۱ نوترون یک ذره بنیادی است. نوترون مانند مولکولهای گاز معمولی دارای توزیع سرعت است، و این توزیع در نظریه رآکتورهای هسته ای از اهمیت ویژه ای برخوردار است. به طور کمی، یک نوترون حرارتی معمولاً نوترونی تعریف می شود که دارای محتملترین سرعت توزیع ماکسول در  $20^\circ\text{C}$  است. مطلوب است (الف) انرژی جنبشی انتقالی و (ب) سرعت نوترون حرارتی. (ج) نوترون حرارتی گاهی یک «نوترون  $kT$ » نامیده می شود، چرا؟ (جرم نوترون برابر با  $1.675 \times 10^{-27}$  کیلوگرم است.)

۱۸۰۱- فرض کنید که اتمهای هیدروژن در جو خورشید تابع توزیع سرعت ماکسولی هستند. (الف) با دانستن اینکه دما  $6000\text{K}$  است، انرژی جنبشی یکی از این اتمها را که با محتملترین سرعت در توزیع حرکت می‌کند، حساب کنید. (ب) سرعت این اتم را حساب کنید.

۱۹۰۱ وقتی اتمها در گاز دوتریوم دارای انرژی جنبشی متوسط انتقالی  $[10^{-14} \times 12]$  باشند، می‌توانند به یکدیگر آنقدر نزدیک شوند که گداخت هسته‌ای رخ دهد (الف) سرعت اتم دوتریوم با این انرژی جنبشی چقدر است؟ (ب) تاپچه دمای گاز دوتریوم باید گرم شود تا سرعت ریشه میانگین مربعی اتمها برابر با سرعت در قسمت قبل باشد؟ (دوتریوم هیدروژنی با وزن اتمی  $2014$  است.)

۲۰۰۱ (الف) انرژی جنبشی انتقالی کل اتمهای موجود در چهارمول هلیوم در دمای  $27^\circ\text{C}$  چقدر است؟ (ب) این جواب در مورد یک گاز کامل دیگر چقدر است؟

۲۱۰۱ سطح مقطع میکروسکوپی یکی یک گلوله و یک ذره معین وقتی که از لحاظ الکتریکی خنثی هستند برابر  $\sigma$  است. اگر گلوله و ذره دارای بار شوند، سطح مقطع مؤثر در حالت‌های زیر افزایش می‌یافت یا کاهش؟ (الف) بار الکتریکی آنها همان باشد، (ب) بار الکتریکی آنها ناهمنام باشد.

۲۲۰۱ (الف) نشان دهید که  $n$ ، تعداد مولکولها در واحد حجم یک گاز کامل، از رابطه  $n = pN_A / RT$  به دست می‌آید که در آن  $N_A$  ثابت آووگادرو است. (ب) تعداد مولکولهای  $1$  مترمکعب گاز کامل را در شرایط متعارف به دست آورید. (ج) تعداد مولکولهای  $1$  مترمکعب گاز کامل در فشار دو اتمسفر و دمای  $47^\circ\text{C}$  چقدر است؟

۲۳۰۱ (الف) اگر فشار گاز کاملی را ثابت نگه دارند، درجه دمایی مسیر آزاد میانگین مولکولهای جرم معینی از گاز دو برابر مقدار آن در  $27^\circ\text{C}$  می‌شود؟ (ب) اگر دما را ثابت نگه دارند، درجه فشاری بر حسب میلیمتر جیوه، مسیر آزاد میانگین مولکولهای جرم معینی از گاز کامل  $1000$  برابر مقدار آن در فشار  $1$  اتمسفر می‌شود؟

۲۴۰۱ قطر مولکولی تمام گازهای دواتمی تقریباً  $10^{-10} \times 2$  متر است. (الف) مطلوب است تعیین مسیر آزاد میانگین مولکولهای گاز هیدروژن با توزیع ماکسولسی سرعت در فشار  $1$  اتمسفر و دمای  $20^\circ\text{C}$  (اطلاعات مورد نیاز برای محاسبه سطح مقطع ماکروسکوپی در مسئله  $2201$  داده شده است). (ب) مولکولی که همیشه دارای سرعت متوسط در توزیع ماکسولی است، در حالت قبل چند برخورد در ثانیه انجام می‌دهد؟ (زمان تماس در برخورد ناچیز است.) (ج) نسبت مسیر آزاد میانگین در قسمت الف به طول موج نور سبز،  $\lambda = 5500 \times 10^{-10} \text{ m}$  چقدر است؟

۲۵۰۱ باریکه‌ای از ذرات به‌طور عمود بر لایه‌ای، که شامل ذرات هدف در حال سکون است، فرودی تا بد. (الف) کسری از باریکه فرودی که بدون برخورد با ذرات از هدفی به ضخامت مسیر آزاد میانگین عبور می‌کنند، و کسری که در این لایه برخورد انجام می‌دهند را به دست آورید. (ب) ضخامت لایه بر حسب مسیر آزاد میانگین برای اینکه شدت باریکه فرودی به نصف کاهش یابد، چقدر است؟

۲۶۰۱ پرن دریکی از آزمایشهای خود که با ذرات معلق صمغ در آب  $20^{\circ}\text{C}$  انجام می‌داد، مشاهده کرد که در یک سطح از لایه‌ای کم عمق، ۴۹ ذره در واحد مساحت وجود دارد و در سطح ۶۰ میکرون بالاتر از آن، ۱۴ ذره در واحد مساحت. چگالی صمغ برابر با  $1.194\text{g/cc}$  و هر ذره به شکل کره و دارای شعاع  $212\mu\text{m}$  (که  $10^{-6}\text{m} = 1\mu$ ) بود. تعیین کنید (الف) جرم هر ذره، (ب) ثابت آووگادرو، و (ج) وزن مولکولی ذره را، به شرطی که هر دانه به عنوان یک مولکول منفرد غول پیکر گرفته شود. از نتایج الف و ب برای محاسبه ج استفاده کنید.

## نظریه اتمی الکتروسیسته

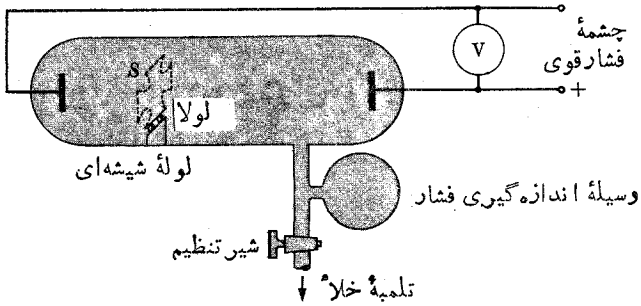
### ۱.۲ تخلیه الکتریکی

دیده ایم که چگونه قانون الکترولیز فاراده برای اتمی بودن ماده و الکتروسیسته دلالت می کند. با وجود تردید ما کسول، بسیار مشکل است که بتوان تنشین شدن یا آزاد شدن يك وزن معادل عنصری را در نتیجه عبور يك فاراده الکتروسیسته از الکترولیت توضیح داد، مگر اینکه فرض کنیم که ماده و الکتروسیسته هر دو به صورت واحدهایی وجود دارند که در کل فرایند الکترولیز ماهیت خود را حفظ می کنند.

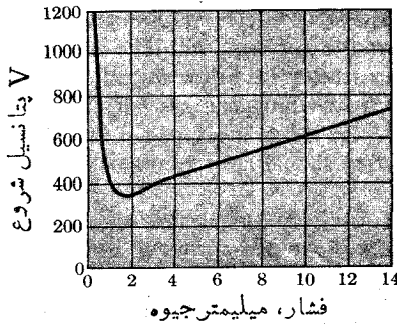
برای یادگیری بیشتر درباره «ذرات الکتروسیسته» شاخه دیگری از پژوهش را در نظر می گیریم و آن عبور الکتروسیسته از گازها است. اگرچه آزمایش خطرناک بنیامین فرانکلین، که با بادبادک و کلید انجام شد، قانع کننده نبود لکن منجر به نتیجه درستی شد که برق بین ابرها حاصل از تخلیه الکتریکی در گاز (هوا) است. هر جرقه الکتریکی مثالی از این فرایند است. از آنجا که جرقه های الکتریکی یکی از هیجان انگیزترین اثرات الکتروسیسته است، طبیعی است که می بایست مورد مطالعات اولیه بوده باشد.

عبور الکتروسیسته از گازها فرایندی خیلی پیچیده است و از آن اطلاعات زیادی در دست است. روشهای مختلفی وجود دارد که به کمک آنها می توان خصوصیات تخلیه الکتریکی را تغییر داد، اما در اینجا توجه خود را به اثر فشار گاز معطوف می داریم. نمونه ای از لوله تخلیه الکتریکی در شکل ۱.۲ نشان داده شده است. این دستگاه دارای وسیله ای برای اندازه گیری فشار گاز و یک پمپ برای تغییر فشار گاز است. به دو انتهای لوله الکترودهایی محکم شده اند





شکل ۱۰۲ دستگاه تخلیه الکتریکی گاز.



شکل ۲۰۲ منحنی تغییرات پتانسیل شروع تخلیه الکتریکی گازها.

که بین آنها می‌توان میدان الکتریکی برقرار کرد. وقتی که فشار داخل لوله، فشار جو باشد، یک میدان الکتریکی بسیار قوی برای ایجاد تخلیه الکتریکی لازم است (در حدود  $3 \times 10^6$  ولت بر متر در مورد هوا). وقتی که گاز داخل لوله ناگهان از یک عایق عالی به یک رسانای خوب تبدیل می‌شود، تخلیه الکتریکی به صورت جرقه‌ای سرکش درمی‌آید. با کاهش فشار گاز عمل تخلیه آسانتر برقرار می‌شود (شکل ۲۰۲)، تا اینکه در فشارهای بسیار کم مجدداً برقراری عمل تخلیه مشکل می‌شود. تخلیه الکتریکی در فشار  $2 \text{ mmHg}$  آسانترین است (این فشار به نوع گاز و شکل هندسی الکترودها بستگی دارد) و با کاهش فشار گاز مشخصات تخلیه الکتریکی تغییر می‌کند. اگر گاز داخل لوله هوا باشد، جرقه‌های روشن به نور ارغوانی که تمام لوله را پرمی‌کند تبدیل می‌شود، و با گاز نئون نور قرمزی شبیه نور چراغهای اعلانات به دست می‌آید. با پایینتر آوردن فشار، نور ساختار پیچیده و جالبی پیدا می‌کند که دارای نواحی تاریک و روشن است. در فشارهای بسیار کم، نور ضعیف می‌شود و پدیدۀ تازه‌ای ظاهر می‌شود که در آن شیشه خود شروع به پخش نور می‌کند. اگر در داخل لوله وسیله‌ای (S در شکل ۱۰۲) را لولاکنیم، به طوری که

با حرکت دادن لوله بتوانیم وسیله را در میدان الکتریکی بین دو الکترود و یا خارج از آن قرار دهیم، در این صورت پدیده دیگری را می توان دید. نورسبز رنگ شیشه، وقتی که جسم  $S$  بین دو الکترود نیست در همه جای بین دو الکترود دیده می شود و وقتی جسم  $S$  بین دو الکترود قرار می گیرد قسمتی از این نور محو می شود. اگر جسم  $S$  دارای شکل مشخصی باشد، سایه آن را به طور واضح می توان دید. سایه در قسمتی تشکیل می شود که دور از کاتود یا الکترود منفی است. اگر کاتود کوچک باشد سایه نسبتاً واضح است. به آسانی می توان دریافت که نور متماثل به سبز در اثر تابش یک نوع پرتو از کاتود به وجود می آید که نمی تواند از مانع  $S$  نفوذ کند. این پرتو را پرتو کاتودی می نامند. از سالها پیش مشاهده شده بود که این پرتو در میدان الکتریکی و مغناطیسی منحرف می شود، و جهت انحراف نشان داد که پرتو دارای بار منفی است.

در سال ۱۸۹۷ تامسون مطالعاتی کمی درباره پرتو کاتودی انجام داد. وی توانست نشان دهد که تمام ذرات یا پرتوهای کاتودی خواص مشترک دارند. تامسون نشان داد که نسبت بار به جرم،  $q/m$ ؛ این ذرات مقدار ثابتی است. اندازه گیریهای تامسون یکسانی بار و یا یکسانی جرم تمام این ذرات را ثابت نکرد، اگر چه این ساده ترین تعبیر نتایج آزمایشهای او بود. به هر حال، او خاصیت منحصر به فرد این پرتوهارا کشف کرد و به عنوان کاشف ذره بنیادی الکتریسته، یعنی الکترون، شناخته می شود.

## ۲.۲ حرکت نانبیتی ذره باردار

قبل از بحث یکی از روشهای اندازه گیری  $q/m$ ، چند موضوع پایه ای را درباره حرکت ذرات باردار در میدانهای الکترومغناطیسی یادآوری می کنیم. وقتی ذره ای با بار الکتریکی  $+q$  در یک میدان الکتریکی با شدت  $\mathbf{E}$  قرار می گیرد، نیرویی در راستای میدان به ذره وارد می شود که عبارت است از

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (۱۰۲)$$

اگر سایر نیروهای وارد به ذره، در مقایسه با این نیرو ناچیز باشند، ذره حرکت شتابدار پیدا خواهد کرد و طبق قانون دوم نیوتون داریم

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} \quad (۲۰۲)$$

۱. این معادله و معادلات بعدی در هر دستگاه واحدهای سازگار معتبرند، در هیچیک از دستگاهها نیازی به ضرایب تبدیل نیست به شرطی که کلیه واحدها در دستگاه الکتروستاتیک یا دستگاه الکترومغناطیس و یا دستگاه متر، کیلوگرم، ثانیه و آمپر باشند. این موضوع در مورد تمام معادلات این کتاب صحیح است مگر در مواردی که واحدهای ویژه ای در فیزیک اتمی، نظیر آنگستروم یا الکترون ولت، مشخص شده باشد.

که  $p$  اندازه حرکت ذره است. جز در حالتی که سرعت ذره بسیار زیاد باشد، عملاً می‌توانیم از مکانیک ناسیستی استفاده کنیم و بنویسیم  $dp/dt = ma$ ، که بنا بر آن می‌شود نوشت

$$ma = qE \quad (۳.۲)$$

وقتی ذره‌ای با بار الکتریکی  $q$  در میدان مغناطیسی با القای  $B$  با سرعت  $v$  حرکت کند، نیرویی بر آن وارد می‌شود که عمود بر صفحه  $B$  و  $v$  است و مقدار آن از معادله زیر به دست می‌آید

$$F = qv \times B \quad (۴.۲)$$

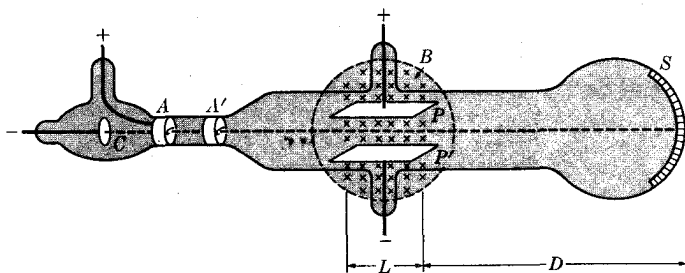
اگر بردار سرعت موازی میدان مغناطیسی باشد، بدیهی است که نیرویی حاصل نمی‌شود و بنا بر این تغییری در حرکت به وجود نمی‌آید. وقتی بردار سرعت در راستای دیگری واقع می‌شود، می‌توان آن را به دو مؤلفه تجزیه کرد، یکی موازی میدان،  $v_{||}$ ، و دیگری عمود بر آن  $v_{\perp}$ . مؤلفه  $v_{\perp}$  نیروی  $F = qv_{\perp}B$ ، عمود بر  $v_{\perp}$  را به وجود می‌آورد و بنا بر این حرکت دایره‌ای را موجب می‌شود. اگر مؤلفه  $v_{||}$  غیر صفر باشد، به جای مدار دایره‌ای مسیر حرکت مارپیچی خواهد بود. هر دو مؤلفه و سرعت کل عدداً مقادیر ثابتی هستند، اما  $v_{\perp}$  دائماً تغییر راستا می‌دهد. با استفاده از قانون دوم نیوتون روابط زیر به دست می‌آید

$$qv_{\perp}B = mv_{\perp}^2/R, \quad qBR = mv_{\perp} \quad (۵.۲)$$

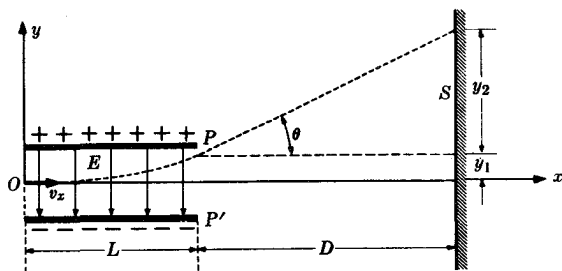
در اینجا از فرمول شتاب مرکز گرا  $a_c = v^2/R$  استفاده کرده‌ایم. معادله (۵.۲) در مکانیک نسیستی نیز صادق است (پیوست ۳)، به شرطی که  $m$  جرم نسبیستی گرفته شود. این موضوع بدان سبب درست است که بزرگی سرعت تغییر نمی‌کند و بنا بر این جرم ثابت است.

### ۳.۲ اندازه‌گیری مقدار $q/m$ توسط تامسون

حال روشی را که تامسون برای اندازه‌گیری نسبت بار به جرم،  $q/m$ ، ذراتی که او آنها را «ذرات کاتودی» می‌نامید، مورد بررسی قرار می‌دهیم. دستگاه اندازه‌گیری او (شکل ۳.۲) شامل یک لوله شیشه‌ای است که فشار آن از طریق تخلیه بسیار کم شده است و چند الکتروود فلزی در آن قرار دارد. الکتروود  $C$  کاتود است که از آن پرتو خارج می‌شود. الکتروود  $A$  دارای پتانسیل مثبت زیاد و آنود است که تخلیه پرتوهای کاتودی به طرف آن جاری می‌شود. اغلب پرتوها به الکتروود  $A$  برخورد می‌کنند، اما بعضی از آنها از سوراخ کوچکی که در الکتروود  $A$  وجود دارد عبور می‌کنند. این پرتوها به وسیله الکتروود دیگری،  $A'$ ، که در آن نیز سوراخی وجود دارد محدودتر می‌شوند. بنا بر این باریکه نازکی از پرتو به ناحیه بین دو صفحه  $P$  و  $P'$  وارد می‌شود. پرتو پس از عبور از بین دو صفحه  $P$  و  $P'$ ، به ماده فلزورسان در انتهای لوله برخورد و نور ایجاد می‌کند.



شکل ۳۰۲ دستگاه تامسون برای اندازه‌گیری  $q/m$  پرتو کاتودی.



شکل ۴۰۲ انحراف الکتروستاتیکی پرتو کاتودی.

صفحات منحرف کننده  $P$  و  $P'$  به مقدار معینی از هم فاصله دارند، به طوری که وقتی اختلاف پتانسیل معینی به آنها اعمال شود، میدان الکتریکی بین آنها را می‌توان حساب کرد. فرض می‌کنیم میدان در فاصله  $L$  بین دو صفحه یکنواخت و در خارج آنها صفر است. وقتی صفحه بالایی،  $P$ ، را به پتانسیل مثبت وصل کنیم، میدان الکتریکی پرتو کاتودی منفی را به طرف بالا منحرف می‌کند.

در شکل ۴۰۲ فرض می‌شود که پرتو کاتودی با سرعت  $v_x$  در مبدأ  $O$  وارد فضای بین دو صفحه می‌شود. چون نیروی مؤثر مؤلفه‌ای در راستای  $x$  ندارد،  $v_x$  ثابت می‌ماند. ۱. معادله کلی انتقال در حرکت با شتاب ثابت چنین است

۱. با بیان دقیقتر این موضوع درست نیست. وقتی که ذرات ناحیه بین دو صفحه را با جا به جایی  $y$  ترک می‌کنند، با نیروی کند کننده‌ای در راستای  $x$  مواجه می‌شوند. (خطوط میدان در لبه‌ها به جای قائم بودن، که در شکل نموده شده، بزآمدگی پیدا می‌کنند.) بزرگی این پدیده درست به مقداری است که برای بقای انرژی ذرات لازم است، یعنی سرعت قبل از انحراف دهنده برابر سرعت بعد از انحراف دهنده است. در صورتی که  $v_x \ll v_y$  باشد، می‌توان از این اثر در این بحث صرف نظر کرد.

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (6.2)$$

با استفاده از معادله (۶.۲) در راستای افقی، رابطه زیر به دست می آید

$$x = v_x t \quad (7.2)$$

پرتو بین دو صفحه شتاب به طرف بالا خواهد داشت، و مقدار آن عبارت است از

$$a_y = \frac{qE}{m} \quad (8.2)$$

که از معادله (۳.۲) به دست می آید. میدان الکتریکی  $E$  ثابت است، زیرا از غیر یکنواختی میدان در لبه ها صرف نظر می کنیم، و مقدار آن برابر حاصل تقسیم اختلاف پتانسیل دو صفحه به فاصله بین آنها است. از اینجا معادله کلی انتقال در راستای قائم به صورت زیر در می آید

$$y = \frac{qEt^2}{2m} \quad (9.2)$$

با حذف  $t$  بین دو معادله (۷.۲) و (۹.۲)، معادله سهمی مسیر حرکت به دست می آید

$$y = \frac{qEx^2}{2mv_x^2} \quad (10.2)$$

کمیت  $y_1$  در شکل (۴.۲) همان مقدار  $y$  به هنگامی است که  $x = L$  باشد. مسیر حرکت ذره در خارج از صفحات، خط مستقیم است زیرا که ذره باردار در فضای بدون میدان حرکت می کند. در این صورت  $y_2 = D \tan \theta$  است که  $D$  و  $\theta$  در شکل ۴.۲ نشان داده شده اند. شیب این خط مستقیم چنین است

$$\tan \theta = \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=L} = \left( \frac{qEx}{mv_x^2} \right)_{x=L} = \frac{qEL}{mv_x^2} \quad (11.2)$$

کل انحراف باریکه  $y_E$ ، برابر  $y_1 + y_2$  است. پس داریم

$$y_E = y_1 + y_2 = \frac{qEL^2}{2mv_x^2} + \frac{qELD}{mv_x^2} = \frac{qEL}{mv_x^2} \left( \frac{L}{2} + D \right) \quad (12.2)$$

اگر  $q/m$  را به عنوان یک مجهول منفرد بگیریم، در این معادله دو مجهول داریم. قبل از محاسبه  $q/m$  باید سرعت اولیه پرتو،  $v_x$ ، را تعیین کنیم. معادله دیگری لازم داریم که حاوی سرعت اولیه  $v_x$  باشد، به طوری که بتوانیم این سرعت مجهول را بیسن معادله جدید و معادله (۱۲.۲) حذف کنیم.

تامسون با به کار بردن یک میدان مغناطیسی عمود بر باریکه ذرات کاتودی و عمود

بر میدان الکتریکی، معادله دیگری به دست آورد. این میدان در شکل ۳.۲ به طرف داخل صفحه است و در ناحیه‌ای که با علامت  $\times$  مشخص شده به طور یکنواخت وجود دارد. بنابراین نیروهای الکتریکی و مغناطیسی در فضای هندسی یگانه‌ای بر پرتو کاتودی اثر می‌کنند. شکل ۵.۲ وضعیتی را نشان می‌دهد که تنها میدان مغناطیسی وجود دارد. در ابتدا، به پرتو با بار منفی نیرویی به طرف پایین وارد می‌شود. راستای این نیرو ثابت نیست، ولی همیشه عمود بر راستای میدان و راستای حرکت پرتو است. بنابراین، ذرات کاتودی در مسیری دایره‌ای مطابق معادله (۵.۲) حرکت می‌کنند. مرکز انحنای مسیر حرکت در  $C$  قرار دارد و شعاع انحنای مسیر چنین است

$$R = \frac{mv_x}{qB} \quad (13.2)$$

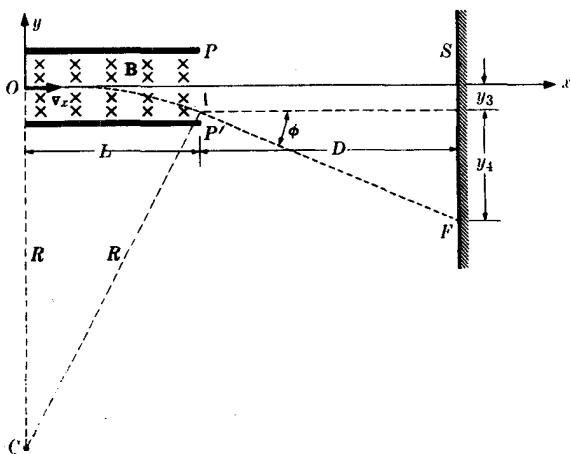
که  $v_x$  سرعت اولیه پرتو در راستای  $x$  است. معادله این مسیر دایره‌ای نسبت به مبدأ  $O$  عبارت است از

$$x^2 + (R + y)^2 = R^2 \quad (14.2)$$

با حل این معادله بر حسب  $R$  داریم

$$R = -\frac{x^2 + y^2}{2y} \approx -\frac{x^2}{2y} \quad (15.2)$$

این تقریب وقتی خوب است که انحراف پرتو در مقایسه با مسافتی که در میدان مغناطیسی طی می‌کند کوچک باشد، یعنی وقتی که  $y^2 \ll x^2$  باشد.



شکل ۵.۲ انحراف ذرات کاتودی در میدان مغناطیسی.

از آنجا که اندازه گیری شعاع انحنا،  $R$ ، مشکل است آن را بین دو معادله (۱۳.۲) و (۱۵.۲) حذف می کنیم و معادله زیر را به دست می آوریم

$$y = -\frac{qBx^2}{2mv_x} \quad (16.2)$$

بنابراین برای انحرافهای کوچک، مسیر دایره ای تقریباً به صورت سهمی با معادله (۱۶.۲) درمی آید. علامت منفی نشان می دهد که تفرع منحنی به طرف پایین است. درست شبیه حالت میدان الکتریکی وقتی  $x = L$  است،  $y$  برابر  $y_3$  می شود. در این حالت نیز پرتو در ناحیه بدون میدان در خط مستقیم حرکت می کند، به طوری که داریم

$$y_4 = D \tan \phi = D \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=L} = -\frac{DqBL}{mv_x} \quad (17.2)$$

کل انحراف در میدان مغناطیسی عبارت است از

$$y_B = y_3 + y_4$$

یا

$$y = -\frac{q}{m} \left( \frac{BL^2}{2v_x} + \frac{BLD}{v_x} \right) = -\frac{qBL}{mv_x} \left( \frac{L}{2} + D \right) \quad (18.2)$$

معادله (۱۸.۲) بسیار شبیه معادله (۱۲.۲) است. معادله (۱۸.۲) شامل  $q/m$  و  $v_x$  و مقادیر قابل اندازه گیری است. بنابراین  $v_x$  را می توان حذف کرد و  $q/m$  را به دست آورد. بهر حال، جالب است که روش تامسون را در استفاده همزمان از میدانهای الکتریکی و مغناطیسی، برای تعیین  $v_x$ ، مورد بررسی قرار دهیم. اگر این میدانها طوری تنظیم شوند که پرتو کاتودی در روی صفحه انحرافی نداشته باشد، در این صورت نیروی وارده به ذره باردار از طرف میدان الکتریکی، با نیروی وارده از طرف میدان مغناطیسی تعادل خواهد داشت. در این حالت تعادل، از معادلات (۱.۲) و (۳.۲) داریم

$$F = qE - qv_x B = 0 \quad (19.2)$$

و یا بر حسب  $v_x$  می توان نوشت

$$v_x = \frac{E}{B} \quad (20.2)$$

برای این نسبت خاص میدانها، ذره به خط مستقیم از میدانها عبور می کند. در این حالت بدون انحراف، اندازه گیری  $v_x$  تابع شکل هندسی لوله نیست. چون همیشه  $y = 0$  است، بنابراین در معادله (۱۵.۲) تقریبی وجود ندارد. لذا، سرعتی را که بدین ترتیب به دست می آید می توان در معادله (۱۲.۲) که بدون تقریب به دست آمده بود، قرارداد.

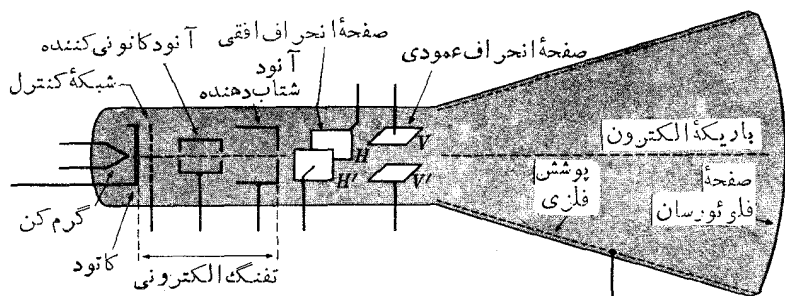
تامسون  $q/m$  را برای پرتوکاتودی اندازه گرفت و برای این کمیت، صرف نظر از جنس کاتود و گاز باقیمانده در لوله، مقدار یگانه‌ای به دست آورد. بستگی نداشتن مقدار  $q/m$  ذرات کاتودی به جنس کاتود نشان می‌دهد که این ذرات جزء ساختمانی مشترک تمام مواد هستند. مقدار امروزی مورد قبول  $q/m$  برابر  $10^{11} \times (1/758803 \pm 00000005)$  کولن بر کیلوگرم است. بدین ترتیب، افتخار کشف اولین ذره زیراتمی، یعنی الکترون، به تامسون داده می‌شود. چون بعدها نشان داده شد که الکترونها دارای بار یگانه  $e$  هستند، مقداری که تامسون اندازه‌گیری کرد را امروزه با  $e/m_e$  نشان می‌دهند. تامسون سرعت الکترونهای باریکه را حدود  $1/10$  سرعت نور به دست آورد که خیلی بیش از سرعت ذرات مادی بود که تا آن موقع اندازه‌گیری شده بود.

الکترونهایی را که تامسون مطالعه می‌کرد تقریباً دارای یک سرعت بودند. اگر این حالت وجود نداشت، لکه حاصل در انتهای لوله آزمایش کاملاً پخش می‌شد. دلیل اینکه چرا سرعت الکترونها تقریباً یکی بود، البته، این است که آنها به وسیله یک اختلاف پتانسیل و عملاً از سرعت صفراستاپ پیدا کرده بودند. در اینجا، اختلاف پتانسیل بین کاتود و آنود را  $V$  می‌گیریم، و پتانسیل متوسط  $P$  و  $P'$  و پتانسیل  $A'$  و  $S$  را برابر با پتانسیل  $A$  (شکل ۳۰۲) در نظر می‌گیریم. در این صورت، به کمک اصل بقای انرژی به دست می‌آوریم

$$qV = \frac{m}{2} v_x^2$$

یا

$$\frac{q}{m} = \frac{e}{m_e} = \frac{v_x^2}{2V} \quad (2102)$$



شکل ۳۰۲ اجزای اصلی لوله پرتوکاتودی.

۱. به طوری که در پیوست ۳ نشان داده شده است، وقتی که  $v^2/c^2$  بسیار کوچک نباشد اثرات نسبیتی دارای اهمیت اند ( $c$  سرعت نور است)، خطاهای ناشی از استفاده از مکانیک کلاسیک در معادله (۱۲۰۲) از مرتبه  $v^2/c^2$ ، یعنی حدود ۱٪، است.



این معادله دیگری است که  $e/m_e$  را به  $v_x$  مربوط می‌سازد. با استفاده از معادله (۱۸.۲) و رابطه اخیر می‌توان  $e/m_e$  را به دست آورد. تاسون می‌توانست اختلاف پتانسیل بیسن آنود و کاتود را اندازه بگیرد، و از انحراف باریکه در میدان الکتروستاتیکی یا مغناطیسی در مجاورت صفحات  $P$  و  $P'$  آسوده‌خاطر باشد. درحقیقت در روشهای دیگر اندازه‌گیری  $e/m_e$ ، از این اصل استفاده می‌شود.

لوله‌های (لامپهای) پرتو کاتودی مورد استفاده تاسون، امروزه تکامل یافته‌اند و وسایل الکترونیکی مهمی را تشکیل می‌دهند. در نوسان‌نماهای جدید از انحراف الکتروستاتیکی باریکه الکترون در لامپهای پرتو کاتودی استفاده می‌شود. این نوع لامپها معمولاً دارای دو دسته صفحات منحرف کننده هستند (شکل ۶.۲)، به طوری که باریکه الکترون می‌تواند به چپ و راست و همچنین به بالا و پایین منحرف شود. در این لامپها از این خاصیت که میزان انحراف متناسب با میدان الکتروستاتیکی بین صفحات است [به حکم معادله (۱۲.۲)] استفاده می‌شود. از طرف دیگر، در لامپهای تلویزیونی معمولاً از انحراف مغناطیسی استفاده می‌شود که در نتیجه آن باریکه تمام صفحه تصویر را جاروب کند.

هر کس می‌تواند انحراف باریکه‌های الکترون را به وسیله میدانهای الکتروستاتیکی و مغناطیسی برای خود نمایش دهد. با نگاه داشتن یک مغناطیس قوی در نزدیکی صفحه تلویزیون می‌توان در تصویر اعوجاج غیرعادی ایجاد کرد. مالش دادن صفحه تصویر تلویزیون و یا صفحه پلاستیکی محافظ آن با پشم، ابریشم و یا نایلون در وقتی رطوبت کم باشد، میدان قوی الکتروستاتیکی به وجود می‌آورد. هیچیک از دو میدان الکتروستاتیکی یا مغناطیسی، که بدین طریق به وجود می‌آیند، یکنواخت یا عمود بر راستای باریکه نیستند و انحرافهای ایجاد شده کاملاً غیرقابل پیش‌بینی است.

## ۴.۲ بار الکترون

اگرچه  $e/m_e$  الکترون شناسایی شد، اما برای تعیین  $e$  و  $m_e$  به طور جداگانه اندازه‌گیری دیگری لازم بود. اولین بار در سال ۱۹۰۹، میلیکان با تکمیل روشی که به وسیله تاسون و ویلسون پیشنهاد شده بود اندازه‌گیری دقیقی انجام داد.

دو کمیت  $e$ ، بار الکترون، و  $m_e$ ، جرم الکترون، به طور باور نکردنی کمیت‌های کوچکی هستند. جرم هر جسمی را می‌توان از روی اندازه‌گیری نیروی وارده و شتاب حاصل از آن تعیین کرد. حتی اگر بتوان یک الکترون منفرد را برای مطالعه جدا کرد، هیچ دستگاهی نمی‌تواند جرم آن را مستقیماً اندازه بگیرد. به طور مشابه بار الکتروستاتیکی یک جسم را می‌توان از روی نیرویی که در یک میدان الکتروستاتیکی به آن وارد می‌شود تعیین کرد. در این روش، احتیاج به جدا کردن الکترون منفرد نیست، و چون می‌توان یک میدان الکتروستاتیکی قوی به وجود آورد بنابراین یک نیروی قابل اندازه‌گیری به وجود می‌آید.

برای اندازه‌گیری  $e$  باید آزمایش در مورد جسمی که تعداد بارهای آن اندک باشد انجام پذیرد، به طوری که تغییر یک واحد بار اختلاف قابل ملاحظه‌ای را به وجود آورد. از

آنجا که آزمایش باید با بار بسیار کم اجرا شود، نیروی وارد بر جسم حامل بار، حتی اگر میدان خیلی قوی باشد، کوچک خواهد بود. اگر نیروی وارد بر جسم باردار کوچک است، در این صورت جسم باید خیلی سبک باشد. نیروی گرانی همیشه وجود دارد و اگر نخواهیم نیروی کوچک الکتریکی در مقایسه با نیروی بزرگ گرانشی ناچیز باشد، جرم جسم باید کوچک و معلوم باشد. اگر جسم به اندازه کافی کوچک باشد، به طوری که نیروی الکتریکی وارد بر بار آن هم مرتبه با نیروی گرانشی باشد، در این صورت نیروی گرانشی یک نیروی مزاحم نبوده بلکه به عنوان یک نیروی معیار مفید برای مقایسه مورد استفاده قرار می گیرد. میلیکان از یک قطره روغن به عنوان جسم مورد آزمون استفاده کرد. او قطره های را از میان قطراتی که به وسیله عطرباش به وجود آمده بود، انتخاب کرد. قطره به اندازه ای کوچک بود که با چشم دیده نمی شد بلکه به وسیله یک میکروسکوپ مثل یک نقطه نورانی قابل رؤیت بود، و در نور خورشید مانند یک ذره ریز گرد و غبار نور را پخش می کرد.

وقتی چنین قطره های تحت تأثیر نیروی گرانی در هوا سقوط می کند، هوا مانع سقوط آزاد آن می شود. نیرویی که هوا در مقابل سقوط جسم کروی کوچک به آن وارد می کند به وسیله استوکس بیان شد، و او دریافت که در سرعتهای کم نیروی مقاومت وارد بر جسم،  $R$ ، متناسب با سرعت جسم است، یعنی

$$R = kv \quad (22.2)$$

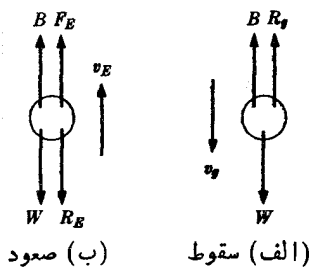
استوکس ضریب تناسب  $k$  را به صورت زیر به دست آورد

$$k = 6\pi\eta r \quad (23.2)$$

در این رابطه  $\eta$  ضریب چسبندگی محیط مقاوم و  $r$  شعاع جسم است. (در این قانون فرض می شود که محیط مقاوم همگن است. در حالتی که اندازه جسم در حدود مسیر آزاد میانگین مولکولهای محیط باشد از قانون پیچیده تری باید استفاده کرد.) این معادله مالش (اصطلاح) با معادله مالش بین دو جسم لغزنده در مکانیک، کاملاً متفاوت است. در مورد مالش دو سطح لغزنده فرض کردیم که نیروی مالش بستگی به نوع دو سطح لغزنده و نیروی قائمی که دو سطح را به هم می فشارد، دارد. بدین ترتیب در مکانیک از نیرویی سخن گفتیم که بستگی به سرعت ندارد. در مسئله لغزش یک جعبه در روی یک سطح شیبدار که به سمت پایین حرکت می کند، مالش نیروی ثابتی در مقابل حرکت ایجاد می کند و لسی جعبه دارای شتاب ثابت بوده و سرعت آن مرتباً زیاد می شود. جسمی که تحت تأثیر نیروی مالش طبق قانون استوکس قرار می گیرد، به طور کاملاً متفاوتی عمل می کند.

یک قطره روغن در حال سقوط را در نظر می گیریم که بر آن نیروی وزن  $w$ ، نیروی ارشمیدس مربوط به هوا  $B$ ، و نیروی مقاوم  $R = kv$  (شکل ۷.۲) وارد می شود. نیروی بر ایند به طرف پایین چنین است

$$F = w - B - kv \quad (24.2)$$



شکل ۷۰۲ نیروهای وارد بر قطره روغن (شرایط تعادل).

در ابتدا که سرعت قطره صفر است، نیروی مقاوم صفر بوده و نیروی برآیند به طرف پایین مساوی  $w - B$  است. بنابراین قطره دارای شتاب اولیه‌ای به طرف پایین است. با افزایش سرعت سقوط نیروی مقاوم افزایش می‌یابد تا آنجا که بالاخره نیروی برآیند برابر صفر می‌شود. از آن به بعد قطره با یک سرعت ثابت که سرعت حدی  $v_g$  نامیده می‌شود سقوط می‌کند. وقتی  $v = v_g$  است،  $F = 0$  بوده و از معادله (۲۴.۲) داریم

$$w - B = kv_g \quad (25.2)$$

فرض می‌کنیم  $\rho$  چگالی روغن  $\rho_a$  چگالی هوا است. در این صورت

$$w = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g, \quad B = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_a g \quad (26.2)$$

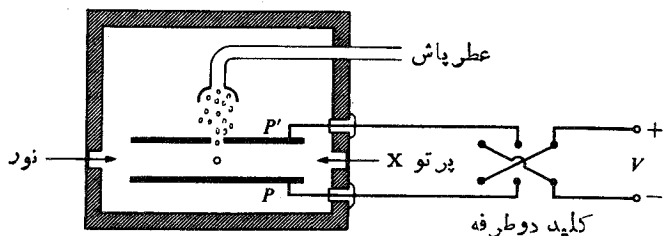
و با قراردادن این مقادیر و مقدار  $k$  از رابطه (۲۳.۲) در معادله (۲۵.۲)، خواهیم داشت

$$\frac{4}{3}\pi r^3 (\rho - \rho_a) g = 6\pi \eta r v_g \quad (27.2)$$

تمام مقادیر این معادله به استثنای  $r$  معلوم یا قابل اندازه‌گیری اند. بنابراین می‌توانیم شعاع قطره را حساب کنیم و ثابت تناسب  $k$  را بر حسب مقادیر معلوم یا قابل اندازه‌گیری بیان کنیم. نتیجه به صورت زیر است

$$k = 18\pi \left[ \frac{\eta^2 v_g}{2g(\rho - \rho_a)} \right]^{1/2} \quad (28.2)$$

با در دست داشتن این ثابت می‌توانیم از طریق اندازه‌گیری سرعت، نیروها را تعیین کنیم. در این آزمایش قطره روغن بین دو صفحه افقی قرار می‌گیرد، و یک میدان الکتریکی قوی معلوم که جهت آن به طرف بالا یا پایین قابل تغییر است و یا می‌توان آن را حذف کرد، وجود دارد (شکل ۸۰۲). قطره دارای بار الکتریکی کوچک  $q$  است و، بر حسب اینکه



شکل ۸۰۲ آزمایش قطره روغن میلیکان.

الکترون اضافی یا کمبود الکترون داشته باشد، ممکن است بار آن منفی یا مثبت باشد. قطره این بار الکتریکی را در اثر مالش قطرات در موقع خروج از منفذ عطرباش، از تماس قطرات با بارهای پراکنده در محیط در نتیجه تابش اشعه کیهانی، در اثر تابش پرتو ایکس و یا در اثر نزدیک کردن یک ماده رادیواکتیو به دست می آورد. از طرف میدان الکتریکی به قطره نیروی  $qE$  وارد می شود که جهت آن با انتخاب مناسب  $E$  می تواند همیشه به طرف بالا باشد. آزمایش کننده باید  $E$  را آن چنان تغییر دهد که قطره بین دو صفحه پایین و بالا رود ولی هرگز با هیچیک از دو صفحه تماس پیدا نکند.

میکروسکوپی که حرکت قطره را تعقیب می کند دارای دو خط افقی موازی است و فاصله آنها در راستای قائم که قطره در آن حرکت می کند معلوم است. با اندازه گیری زمان حرکت قطره در طول این مسافت، سرعت حدی قطره به دست می آید. سرعتهای حدی قطره،  $v_g$  (مثبت به طرف پایین) همه یکسان اند، زیرا قطره به طور قابل ملاحظه ای تبخیر نمی شود و بنابراین وزن آن ثابت می ماند. سرعت صعود قطره  $v_E$  (مثبت به طرف بالا) بستگی به بار  $q$  و میدان  $E$  دارد. بر ایند نیروهای وارد به قطره در حال صعود چنین است (شکل ۷۰۲ ب)

$$F = qE + B - w - kv \quad (29.2)$$

وقتی سرعت قطره به سرعت حدی می رسد، بر ایند نیروها برابر صفر است. بنابراین

$$qE = w - B + kv_E \quad (30.2)$$

اما طبق رابطه (۲۵.۲)  $w - B = kv_g$  است، در نتیجه داریم

$$q = \frac{k}{E} (v_g + v_E) \quad (31.2)$$

از آنجا که سرعتهای حدی ثابت هستند، اندازه گیری آنها نسبتاً آسان است. بار الکتریکی قطره،  $q$ ، را می توان از معادله (۳۱.۲) به دست آورد. در آزمایش قطره روغن مقدار  $v_g$  برای یک قطره معین، وقتی میدان الکتریکی وجود ندارد تعیین می شود، و مقدار  $v_E$  در تعدادی اندازه گیری برای همان قطره، در حالی که میدان وجود دارد به دست

می آید. اگر می دانستیم که بار الکترون مقدار ثابتی است و در قطره فقط يك بار الکترون وجود دارد، در این صورت معادله (۳۱.۲) مقدار آن را فوراً به دست می داد. از آنجا که ماهیت بار الکترون معلوم نبود، میلیکان آزمایش خود را با قطره های مختلف با بار الکتريکی مختلف تکرار کرد. این آزمایشها مقادير مختلفی از  $q$  به دست داد که همه مضرب صحیحی از يك بار بودند که میلیکان آن را واحد نهایی بار،  $e$ ، دانست. لذا او قانون نسبتهای چندگانه را در مورد بار الکتريکی وضع کرد، و نتیجه گرفت که الکتريسته می باید خصوصیت اتمی داشته باشد.

میلیکان مشاهدات خود را در مورد قطره های مختلف با ابعاد مختلف و از جمله در مورد قطره های جیوه انجام داد. در يك مورد او قطره ای را به طور مداوم به مدت هیجده ساعت زیر نظر گرفت. دسته های مختلف مشاهدات همیشه بار الکتريکی الکترون یا «اتم» الکتريسته را مقصداری یکسان به دست داد. با بهترین روش اندازه گیری جدید مقدار  $e$  برابر  $1.602192 \pm 0.0000007 \times 10^{-19} \text{C}$  به دست آمده است.

## ۵.۲ جرم الکترون؛ ثابت آووگادرو

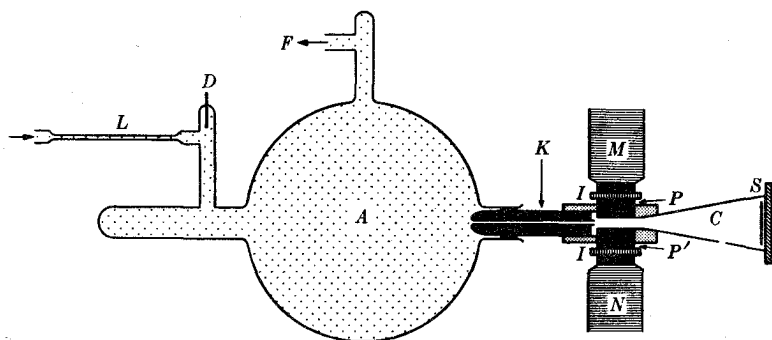
حال چون  $e/m_e$  و  $e$  معلوم اند، با حساب ساده جرم الکترون چنین می شود

$$m_e = (9.10956 \pm 0.000005) \times 10^{-31} \text{ kg}$$

با استفاده از بار الکترون می توان يك ثابت اساسی دیگر اتمی را به دقت حساب کرد. ثابت فاراده، مقدار الکتريسته لازم برای انتقال يك جرم اتمی (جرم مولکولی) یون تک ظرفیتی از يك ماده در الکترولیت است. از تقسیم ثابت فاراده به  $e$  تعداد الکترونهايي که در این انتقال شرکت کرده اند، یا ثابت آووگادرو، به دست می آید. این نتیجه با مقداری که برن به دست آورد مطابقت دارد که سرانجام موجب تثبیت نظریه اتمی ماده شد.

## ۶.۲ پرتوهای مثبت

پس از شناسایی ذره الکتريسته منفی، یعنی الکترون، منطقی بود که درباره الکتريسته مثبت پرسش شود. پژوهش با لامپ تخلیه ای شبیه به آنچه در کشف پرتو کاتودی مورد استفاده بود، انجام گرفت. در سال ۱۸۸۶، گلدشتین مشاهده کرد که اگر کاتود لامپ تخلیه شکافهایی داشته باشد، در طرف مقابل آنود خطهایی ظاهر می شوند. به آسانی نشان داده شد که این کانالهای نور که در ابتدا «پرتوکانالی» نامیده شدند، مربوط به ذرات باردارند. آنها در جهت میدان الکتريکی که تخلیه را ایجاد می کرد حرکت می کردند، و در میدانهای الکتريکی و مغناطیسی در جهتهایی منحرف می شدند که معلوم بود دارای بار مثبت هستند. کوششهایی برای اندازه گیری  $q/m$ ، نسبت بار به جرم، این پرتوهای مثبت انجام گرفت. بلافاصله معلوم شد که  $q/m$  برای پرتو مثبت خیلی کوچکتر از نسبت  $q/m$  برای الکترونها است

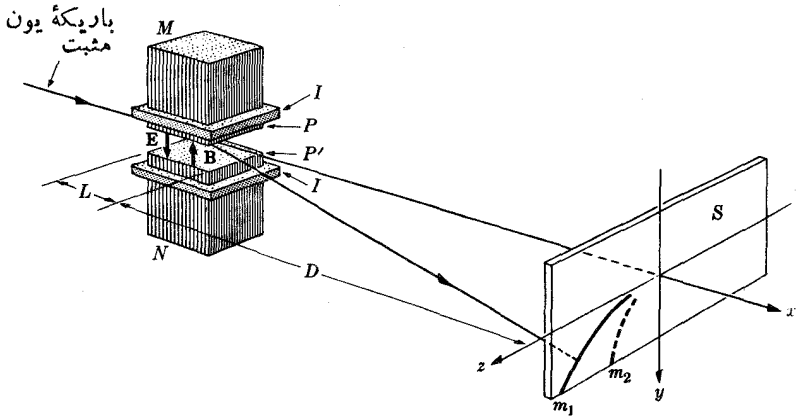


شکل ۹.۲ نمودار دستگاه تامسون برای تحلیل پرتو مثبت.

و همچنین بستگی به نوع گاز موجود در لامپ دارد. سرعت این پرتوهای مثبت غیر یکنواخت و بسیار کوچکتر از سرعت الکترونها به دست آمده بود.

تامسون برای اندازه گیری  $q/m$  این پرتوهای مثبت که دارای سرعتهای غیر یکنواختی هستند روش دیگری ابداع کرد. شکل ۹.۲ دستگاه اندازه گیری تامسون را نشان می دهد. تخلیه الکتریکی اصلی در حباب بزرگ  $A$  درست چپ انجام می گیرد که در آن کاتود  $D$  و آنود لامپ است. گاز مورد مطالعه به آهستگی از طریق لوله  $L$  وارد شده و در همان زمان از خروجی  $F$  به خارج تلمبه می شود. بدین ترتیب فشار گاز در سطح خیلی پایین ثابت نگه داشته می شود. بیشتر پرتوهای مثبت تولید شده به کاتود برخورد کرده و آن را گرم می کنند. کاتود دارای مجرایی است که بعضی از پرتوهای مثبت از آن عبور کرده و به قسمت راست دستگاه راه پیدا می کنند. درست در سمت راست کاتود قطبهای  $M$  و  $N$  یک مغناطیس الکتریکی قرار دارند. قطعات دو قطب مغناطیس به وسیله ورقه های  $I$ ، از لحاظ الکتریکی عایق بندی شده اند، به طوری که از این قطعات می توان به عنوان جوشنهای یک خازن برای برقرار کردن میدان الکتریکی استفاده کرد. وقتی که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی وجود ندارند، پرتو مثبت به طور مستقیم از اتاقک  $C$  عبور کرده به لایه حساس  $S$  می رسند. این لایه یا پوشش امولسیون روی یک صفحه عکاسی است و یسا پرده فلوروسان است. به علت اینکه پرتو باید از مجرای باریک عبور کند، باریکه کاملاً مشخصی به وجود می آید. به جای عمود بودن میدانهایی که در دستگاه اندازه گیری الکترون داشتیم، در اینجا میدانها با هم موازی و لسی بر باریکه عمودند. جهت میدان الکتریکی به طرف پایین و جهت القای مغناطیسی به طرف بالا است، بدینگونه، به طوری که در شکل ۱۰.۲ دیده می شود، نیروی الکتریکی به طرف پایین صفحه در راستای محور  $z$  و نیروی مغناطیسی به خارج از صفحه و به طرف خواننده در راستای محور  $z$  اثر می کند.

یک ذره باردار با  $q/m$  نامعلوم در نظر می گیریم که وارد ناحیه  $P$  و  $P'$  شکل ۱۰.۲ می شود، و سرعت آن در راستای محور  $z$  برابر مقدار نامعین  $v_x$  است. در این صورت، میزان



شکل ۱۰۲ تشکیل مسیرهای سهمی برای پرتو مثبت.

انحراف ذره روی پرده S، در اثر میدان الکتریکی، بر طبق معادله (۱۲.۲) چنین است

$$y = \frac{qEL}{mv_x^2} \left( \frac{L}{2} + D \right) \quad (۳۲.۲)$$

و میزان انحراف در اثر میدان مغناطیسی، طبق معادله (۱۸.۲) عبارت است از

$$z = \frac{qBL}{mv_x} \left( \frac{L}{2} + D \right) \quad (۳۳.۲)$$

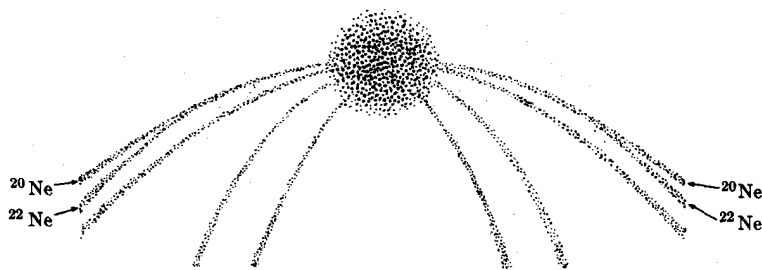
این دو معادله، معادلات پارامتری یک سهمی هستند که  $v_x$  پارامتر آنها است. از آنجا که مقادیر  $v_x$  برای ذرات از یک نوع با هم تفاوت دارند، لذا تصویر ذرات روی پرده یک نقطه نبوده بلکه مکان هندسی نقاط است. از حذف  $v_x$  بین این دو معادله، رابطه زیر به دست می آید

$$z^2 = \frac{q}{m} \frac{B^2 L}{E} \left( \frac{L}{2} + D \right) y \quad (۳۴.۲)$$

که معادله یک سهمی است.

تعدادی از سهمیهای واقعی که با روش تامسون به دست آمده اند، در شکل ۱۰۲ نشان داده شده است. بررسی این شکل نکاتی را آشکار می سازد: پرتوهای مثبت دارای مقادیر معین  $q/m$  هستند، زیرا ردهای نموده شده بوضوح سهمی هستند. اینکه در یک آزمایش چند مسیر سهمی به دست می آید، ناشی از این حقیقت است که چند مقدار  $q/m$  وجود دارد. واضح است که این روش خیلی دقیق نیست زیرا خطوط سهمیها خیلی باریک نیستند.

تامسون فرض کرد که هر ذره پرتو مثبت دارای باری مساوی و متضاد با بار الکترون است، علت واگرایی سهمیها، مربوط به اختلاف جرم ذرات است. او فرض کرد که ذرات پرتو مثبت به علت این که هر کدام یک الکترون از دست داده اند، مثبت اند. تامسون توانست



شکل ۱۱.۲ سهمیهای نئون.

سهمیهای خاصی را با یونهای مخصوص شناسایی کند (اتم یا مولکول یونیده را یون نامند). لذا در مورد اتم هیدروژن او ثابت کرد که  $q/m$  اندازه گیری شده برابر با مقداری است که از تقسیم بار الکترون بر جرم يك اتم (جرم اتمی هیدروژن تقسیم بر عدد آووگادرو) به دست می آید. حال واضح است که چرا پرتو مثبت آهسته تر از الکترون حرکت می کند و مقادیر  $q/m$  مربوط به آنها کمتر است: پرتوهای مثبت خیلی سنگینترند. بزرگترین مقدار  $q/m$  پرتو مثبت مربوط به سبکترین عنصر، یعنی هیدروژن است. از مقدار  $q/m$  هیدروژن معلوم شد که جرم یون هیدروژن یا پروتون،  $1836r2$  برابر جرم الکترون است. الکترونها سهم بسیار کوچکی در مقدار جرم مواد دارند.

## ۲.۲ ایزوتوپها

یکی از نکات جالبی را که سهمیهای تامسون نشان داد این بود که بعضی از گازهای معینی که از لحاظ شیمیایی کاملاً خالص بودند بیش از يك  $q/m$  داشتند. بارزترین آنها نئون با جرم اتمی  $20r2$  بود. سهمی نئون در جایی قرار داشت که مربوط به ذره ای با جرم اتمی  $20$  بود. اما سهمی دیگری نیز وجود داشت که مربوط به ذره ای با جرم اتمی  $22$  می شود. چون عنصر بعدی سدیم با جرم اتمی  $23$  بود، در ابتدا کوشش برای توضیح این مقدار  $q/m$  غیرمنتظره با شکست مواجه شد. بالاخره دریافتند که باید دو نوع اتم نئون وجود داشته باشد که جرم آنها از هم متفاوت، ولی از لحاظ شیمیایی یکسان باشند. دلیل این تفسیر توسط یکی از دانشجویان تامسون، به نام آستون، بیان شد.

آستون از اصلی که در فصل اول بحث کردیم استفاده کرد. در آنجا نشان دادیم که انرژی جنبشی متوسط يك مولکول در گاز برابر  $3kT/2$  است. مخلوط مولکولهای چند گاز مختلف می باید دمای یکسان داشته باشد، و در نتیجه انرژی جنبشی متوسط انواع مولکولها یکی خواهد بود. اگر دو گاز دارای جرمهای مولکولی مختلف باشند، مولکولهای سبکتر باید دارای سرعت متوسط بیشتر باشند، در نتیجه این مولکولها نسبت به مولکولهای



سنگینتر تعداد برخوردهای بیشتری در واحد زمان با دیواره‌های محفظه خواهند داشت. بنا بر این، اگر این مولکولها از توبی متخلخلی نفوذ کنند و وارد ظرف دیگر شوند، مولکولهای سبکتر برای عبور احتمال بیشتری نسبت به مولکولهای سنگینتر و کندتر دارند. آستون گاز نئون را که از لحاظ شیمیایی خالص بود اختیار کرد و مقداری از آن را از دریچه خلل و فرج دار عبور داد. از آنجا که جداسازی حاصل از یک بار عبور دادن گاز جزئی است، این عمل باید چندین بار تکرار شود. در پایان کار او دو مقدار خیلی کم گاز به دست آورد. یک قسمت چندین بار از دریچه عبور داده شد و قسمت دیگر پس از چندین بار عبور دادن، در «پشت دریچه» باقیمانده بود. او جرم اتمی هر قسمت را اندازه گرفت و مقدار ۲۵٫۱۵ را برای اولی و مقدار ۲۸٫۲۸ را برای دومی به دست آورد. اختلاف بزرگ نبود، اما به اندازه‌ای بود که نشان دهد واقعاً (حد اقل) دو نوع نئون وجود دارد. از آن زمان به بعد نشان داده شد که عناصر زیادی به اشکال مختلف وجود دارند که از نظر شیمیایی مشابه، لکن از لحاظ جرم مختلف هستند. این اشکال مختلف یک عنصر را ایزوتوپهای عنصری نامند. بدین ترتیب، اعتقاد دالتون به اینکه تمام اتمهای یک عنصر از لحاظ فیزیکی از هر جهت مشابه هستند، درست نبود.

کشف ایزوتوپها مسائل زیادی را حل کرد. این کشف، وجود دوسهمی را که توسط تامسون به دست آمده بود توضیح داد، و همچنین توضیحی منطقی در باره جرم اتمی اندازه گیری شده قبلی نئون ۲۰٫۲، که از عدد درست فاصله زیادی دارد، بیان داشت. اگر نئون شیمیایی مخلوطی از نئون با جرم اتمی ۲۰ ( $Ne^{20}$ ) و نئون با جرم اتمی ۲۲ ( $Ne^{22}$ ) است، لذا باید نسبتی بین دو نئون در مخلوط وجود داشته باشد که جرم اتمی متوسط برابر ۲۰٫۲ شود.

## ۸.۲ طیف‌نمایی جرمی

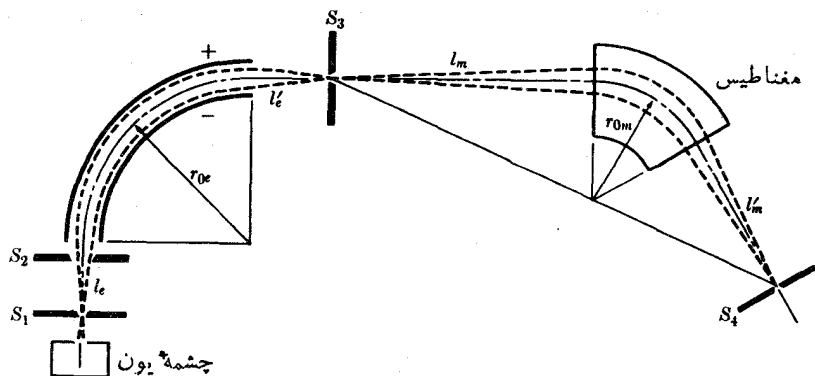
تحقیق مفصل درباره ایزوتوپهای تمام عناصر احتیاج به روش دقیقتری دارد. در سال ۱۹۱۹ آستون اولین دستگاه از چند دستگاهی که طیف‌سنج یا طیف‌نمای جرمی نامیده شد را ساخت. آستون فکر کانونی کردن سرعت را ارائه کرد که در زیر تشریح می‌شود. او با اولین دستگاهش توانست یونهای را که اختلاف  $q/m$  آنها حدود یک درصد بود جدا کند، و توانست مقدار جرم را تا حدود ۱۰ درصد تعیین کند. آستون در کارهای بعدی به‌طور قابل ملاحظه‌ای این دقتها را ترقی داد.

طیف‌سنج جرمی جدید هم کانونی‌کننده راسا و هم کانونی‌کننده سرعت دارد. این عبارات را با رجوع به دستگاهی خاص، به عنوان مثال شکل ۱۲.۲ دستگاهی که توسط نی‌ر و همکارانش ساخته شده می‌توان توضیح داد.

یونهای مثبت در یک چشمه معین با برخورد الکترونها تابش شده از یک رشته داغ به وجود می‌آیند. یونها در اختلاف پتانسیل حدود  $40\text{ kV}$  شتاب یافته و به وسیله یک عدسی

1. F. W. Aston, *Phil. Mag.*, 38 (1919), p. 707.

2. A. O. Nier and T. R. Roberts, *Phys. Rev.*, 81 (1951), p. 507.



شکل ۱۲.۲ اساس کار طیف‌نگار نی‌بر.

الکتروستاتیکی (شبه آهنیایی که در لامپ تلویزیونی مصرف می‌کنند) روی شکاف  $S_1$  که معمولاً پهنای آن ۵۰۰۰۵۰۰۵ در اینج انتخاب می‌شود، کانونی می‌شود. دسته پرتوهای واگرا (مدارهای ذره‌ای) پس از عبور از دستگاه انحراف‌دهنده الکتروستاتیکی وارد شکاف  $S_2$  شده و مجدداً پس از عبور از دستگاه انحراف‌دهنده مغناطیسی وارد شکاف  $S_3$  می‌شود که در پشت آن یک آشکارساز حساس جریان (تکثیرکننده الکترون) قرار دارد.

با یک ترسیم ساده می‌توان نشان داد که چرا در انحراف‌دهنده مغناطیسی کانونی کردن راستایی انجام می‌گیرد. با شروع از شکاف  $S_2$  و تعقیب پرتوی که در طرف چپ پرتو مرکزی حرکت می‌کند، می‌بینیم که این پرتو نسبت به پرتو مرکزی مسیر طولانی‌تری را در میدان مغناطیسی می‌پیماید. بنا بر این این پرتو تحت زاویه بزرگتری منحرف شده و در نتیجه به پرتو مرکزی نزدیک می‌شود. انحراف‌دهنده الکتروستاتیکی به‌طور مشابه عمل می‌کند اما اثر آن قوی‌تر است، زیرا پرتوی که در نزدیکترین فاصله از صفحه مثبت حرکت می‌کند دارای انرژی پتانسیل بیشتر است و بنا بر این دارای انرژی جنبشی کمتر (در انحراف‌دهنده) بوده و بیشتر منحرف می‌شود.

وجود کانونی‌کننده راستایی، به‌طوری که در بالا تشریح شد، در طیف‌نگار جرمی حیاتی است. قدرت جداکنندگی خوب (توانایی در جدا کردن جرمهای مختلف) تنها وقتی به دست می‌آید که تمام ذرات هم-جرم به صورت یک خط باریک در شکاف  $S_3$  متمرکز شوند، و تمام ذرات هم-جرم دیگر به صورت یک خط باریک جدا از اولی متمرکز شوند.

در بحث کانونی کردن راستایی فرض کرده‌ایم که تمام ذرات هم-انرژی هستند. این موضوع تقریباً درست است، زیرا تمام ذرات در یک پتانسیل (حدود  $40\text{ kV}$ ) شتاب پیدا کردند. برای سهولت فرض می‌کنیم که تمام ذرات دارای بار واحد هستند. در چشمه یون آستون، که یک لامپ تخلیه گازی بود، یونها دارای انرژی کاملاً متفاوتی بودند. در طیف-سنجی جدید نهایت دقت به عمل می‌آید که تا آنجا که ممکن است یونهای تقریباً هم-انرژی

تولید شوند. اما، در دستگاه جدید که قدرت جداکنندگی فوق العاده زیادی دارد، اگر از کانونی کننده سرعت استفاده نشود، خطوط تصویر به طور قابل ملاحظه ای پهن خواهند شد. درباره جزئیات کانونی کننده سرعت بحث نخواهیم کرد، اما درباره اساس آن توضیح خواهیم داد. انحراف دهنده الکتروستاتیکی ذرات با انرژی جنبشی (یا  $mv^2$ ) مختلف را از هم جدا می کند [به معادله (۱۲۰۲) توجه شود]. انحراف دهنده مغناطیسی ذرات با اندازه حرکت های ( $mv$ ) مختلف را از هم جدایی سازد [به معادله (۱۸۰۲) توجه شود]. برای دستگاه شکل ۱۲۰۲، موقعیت انتهایی یا نقطه برخورد ذره روی صفحه آشکارساز شکاف  $S_4$  به صورت رابطه زیر بیان می شود

$$\Delta y = -a \frac{\Delta(mv^2)}{m_0 v_0^2} + b \frac{\Delta(mv)}{m_0 v_0} \quad (35.2)$$

در اینجا  $v = v_0 + \Delta v$  و  $m = m_0 + \Delta m$  و  $a$  و  $b$  ثابت های مشخصه دستگاه هستند. فرض می کنیم که میدان های الکتریکی و مغناطیسی به نحوی تنظیم شده اند که ذره ای با جرم  $m_0$  و سرعت  $v_0$  از مرکز شکاف  $S_4$  عبور کند ( $\Delta y = 0$ ). اولین عبارت معادله (۳۵.۲) مربوط به انحراف دهنده الکتروستاتیکی و عبارت دوم مربوط به میدان مغناطیسی است. با مشتق گیری جزئی از معادله (۳۵.۲) داریم

$$\frac{\Delta y}{\Delta v} = -\frac{2a}{v_0} + \frac{b}{v_0} \quad (36.2)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta m} = -\frac{a}{m_0} + \frac{b}{m_0} \quad (37.2)$$

قدرتهای انحراف دهنده گی ( $a$  و  $b$ ) برای دو انحراف دهنده به نحوی انتخاب شده است که  $\Delta y / \Delta v = 0$  یعنی  $b = 2a$  است. این شرط مورد نیاز کانونی کننده سرعت است. بدیهی است که قدرت انحراف دهنده گی کسل برای تغییرات جرم (پخش جرم) غیر صفر است، به طوری که جرم های مختلف از هم جدا می شوند.

در شکل ۱۲۰۲ شکاف  $S_4$  برای محدود کردن زاویه واگرایی دسته پرتو ورودی به طیف نگار، و  $S_5$  برای محدود کردن گستره سرعت ذرات ورودی برای یک جرم داده شده، به کار می روند. هر دو شکاف بالا خیلی بازتر از شکاف های  $S_4$  و  $S_5$  هستند.

به وسیله طیف سنج بحث شده در بالا می توان یون های با اختلاف جرم کمتر از یک صدم درصد ( $\Delta m / m = 10^{-4}$ ) را جدا ساخت، و اختلاف جرمها را می توان با دقت حدود یک در میلیون اندازه گیری کرد. از آن به بعد، طیف نگارهای جدیدتر و بزرگتری ساخته شده است که قدرت جداکنندگی و دقت آن تقریباً به صد برابر افزایش یافته است.<sup>۱</sup>

۱. به عنوان مثال به منبع زیر مراجعه شود

تعیین جرم اتمی به وسیله طیف نگار جرمی، همیشه نسبت به یونهای دیگر با جرم تقریباً مساوی انجام می شود. از آنجا که  $^{12}\text{C}$  مبتا است، سعی می شود که اختلاف جرم بین جرم نامعلوم و یک ترکیب هیدروکربور با همان عدد جرمی اندازه گیری شود. این روش را دوش مضاعف طیف نمایی جرمی می نامند. یک مثال در این مورد به صورت زیر است<sup>۲</sup>

$$(\text{یک میلیونیم واحد جرم اتمی}) \quad ^{12}\text{CH}_4 - ^{16}\text{O} = 36381.05 \pm 0.09 \mu\text{u}$$

در این معادله دومجهول، جرم  $\text{H}^1$  و جرم  $\text{O}^{16}$ ، وجود دارد. (طبق تعریف جرم  $^{12}\text{C}$  برابر ۱۲۰۰۰۰ است.) به کمک اندازه گیری ترکیبهای مضاعف دیگر، با ترکیبهای مختلف از ایزوتوپهای مشابه و احتمالاً همراه با ایزوتوپهای دیگر، می توان جرم این ایزوتوپها را بر مبنای  $^{12}\text{C}$ ، اغلب تا چند میلیونیم واحد جرم اتمی و با دقتی بهتر از یک در میلیون تعیین کرد.

### مسائل

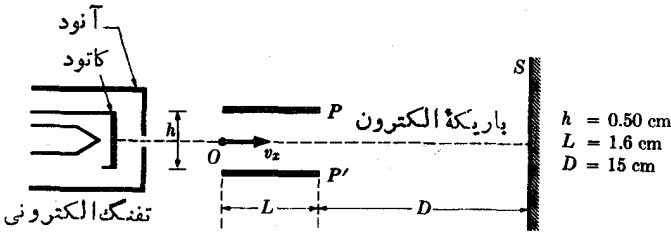
۱۰۲ مطلوب است تعیین نسبت نیروی الکتریکی وارد بر ذره باردار در میدان الکتریکی ۲۵ ولت بر سانتیمتر به نیروی گرانی ذره، اگر ذره (الف) یک الکترون، (ب) یک پروتون، باشد. (ج) آیا وزن در مقابل نیروی الکتریکی ناچیز است؟

۲۰۲ الکترونی که با سرعت  $10^7 \times 5$  متر بر ثانیه در سطح قائم حرکت می کند وارد یک میدان الکتریکی که شدت آن ۲۵ ولت بر سانتیمتر به طرف بالا است، می شود. مختصات الکترون را نسبت به نقطه ورود و راستای حرکت آن را پس از  $4 \times 10^7$  ثانیه به دست آورید، به شرطی که، (الف) الکترون به طور افقی، (ب) با زاویه  $37^\circ$  بالای خط افقی و (ج) با زاویه  $37^\circ$  زیر خط افقی وارد میدان الکتریکی شده باشد.

۳۰۲ اگر ذره باردار مسئله ۲۰۲ به جای الکترون پروتون باشد، مقدار و راستای میدان الکتریکی چقدر بایستی باشد تا اینکه جوابهای مسئله در مورد پروتون برابر جوابهای مربوط به الکترون شود؟

۴۰۲ ابعاد بعضی از اجزای یک لامپ پروتوکاتودی تجارتنی در شکل ۱۳۰۲ داده شده است. اگر الکترونها از حالت سکون از کاتود حرکت کنند و در صورتی که ولتاژ شتاب دهنده بین آنود و کاتود ۱۱۳۶ ولت باشد، سرعت  $v$  آنها در مبدأ  $O$  چقدر می شود؟

۱. شاخص ۱۲ روی ایزوتوپ  $^{12}\text{C}$  عدد جرمی است که برابر تعداد نوکلئونها (پروتونها و نوترونها) در هسته است. عدد جرمی یک مولکول مجموع اعداد جرمی اتمهای تشکیل دهنده است.  
 2. K. S. Quisenberry, T. T. Scolman, and A. O. Nier, *Phys. Rev.*, 102 (1956), p. 1071.



شکل ۱۳.۲

۵.۲ با فرض اینکه اختلاف پتانسیل بین صفحات انحراف دهنده  $P$  و  $P'$  در لامپ پرتو کاتودی مسئله ۴.۲، ۵۰ باشد، مطلوب است (الف) مقدار  $\alpha$  و جهت حرکت الکترون وقتی  $x = L$  باشد، (ب) مقدار کل انحراف در صفحه  $S$ .

۶.۲ یک صفحه بزرگ فلزی به طور افقی در فاصله ۸ سانتیمتر در بالای یک صفحه مشابیه افقی قرار دارد. اختلاف پتانسیل دو صفحه ۴۰ ولت و صفحه بالایی مثبت است. یک الکترون به طور افقی با سرعت  $10^6$  متر بر ثانیه از نقطه  $O$  واقع در وسط بین دو صفحه به داخل آن پرتاب می شود. (الف) محل برخورد الکترون با صفحه را به دست آورید. (ب) تانژانت زاویه ای را که تحت آن زاویه الکترون به صفحه برخورد می کند، محاسبه کنید. (ج) تغییر انرژی جنبشی الکترون را در ضمن حرکت از  $O$  به محل برخورد با صفحه حساب کنید. (د) اگر سرعت اولیه الکترون در  $O$  صفر فرض شود، جواب قسمت ج چه مقدار به دست می آید؟

۷.۲ (الف) یک یون دوتریوم درجه اختلاف پتانسیلی در خلا باید شتاب یا بد که سرعتی برابر  $10^6 \times 47$  متر بر ثانیه به دست آورد. (ب) بسزرگی و جهت کوچکترین القای مغناطیسی چقدر باید باشد تا یون دوتریوم در یک مسیر دایره ای در چمبره ای تخلیه شده و به قطر یک متر قرار گیرد.

۸.۲ میدان الکتریکی یکسواخت به شدت  $10^4 \times 40$  ولت بر متر بر میدان مغناطیسی بسا چگالی شار  $10^{-2} \times 2$  تسلا عمود است. (۱) تسلا برابر با ۱ و بر متر مربع است. الکترونی که عمود بر دو میدان حرکت می کند، تحت تأثیر هیچ نیروی نیست. (الف) جهت های نسبی بردار میدان الکتریکی، بردار القای مغناطیسی و سرعت الکترون را در یک شکل نشان دهید. (ب) سرعت الکترون را حساب کنید. (ج) شعاع مدار الکترون، وقتی که میدان الکتریکی برداشته شود، چقدر است؟

۹.۲ یک ذره باردار وارد ناحیه بین دو صفحه فلزی بزرگ متوازی می شود. سرعت ذره در بدو ورود موازی صفحات است. جدایی دو صفحه ۲ سانتیمتر و اختلاف پتانسیل بین آنها

۲۰۰۰ ولت است. وقتی که ذره ۵ سانتیمتر به فضای بین دو صفحه نفوذ می کند، میسران انحراف آن ۰٫۰۶ سانتیمتر می شود. اگر يك میدان مغناطیسی با چگالی شار ۱۰۰ تسلا به طور همزمان وعمود بر میدان الکتریکی اعمال کنیم، ذره مطلقاً منحرف نمی شود. مطلوب است محاسبه نسبت بار به جرم این ذره.

۱۰۰۲ يك لامپ پرتو کاتودی در میدان مغناطیسی با القای یکنواخت  $B$  واقع است، به طوری که محور لامپ موازی خطوط نیروی میدان است. اگر الکترونهايي که از تفنگ الکترونی با سرعت  $V$  بیرون می آیند در مبدأ  $O$  با محور لامپ زاویه  $\theta$  بسازند، نشان دهید (الف) مسیر آنها مارپیچی است؛ (ب) الکترونها مجدداً پس از زمان  $t = 2m_e/Be, c$  از محور می گذرند؛ (ج) مقدار  $x$  در محل عبور الکترونها از محور عبارت است از

$$x = 2m_e v \cos \theta / Be$$

(د) برای زوایای کوچک  $\theta$ ، مختصه نقطه ای که الکترونها محور را قطع می کنند مستقل از  $\theta$  است؛ (ه) ترتیب آزمایشی این مسئله عدسی مغناطیسی نام دارد، علت این نامگذاری را توضیح دهید؛ (و) تفاوت مسیر الکترونهايي که در مبدأ با محور زاویه  $\theta$  می سازند، در حالتی که راستای حرکت آنها بالاتریا پایینتر از محور باشد چیست؟

۱۱۰۲ الکترونهايي يك تفنگ الکترونی در اختلاف پتانسیل ۱۰۰۰ ولتی شتاب پیدا کرده و به صورت يك باریکه واگرا از سوراخ آنود خارج می شوند. مقدار القای محوری مغناطیسی لازم برای آنکه باریکه را در صفحه ای به فاصله ۵ سانتیمتر از سوراخ کانونی کند، چقدر است؟ (دانهایی: به مسئله ۱۰۰۲ مراجعه کنید.)

۱۲۰۲ الکترونی که دارای سرعت اولیه  $10^7$  متر بر ثانیه باشد و در پتانسیل ۱۱۳۶ ولتی شتاب گیرد، سرعت انتهایی آن چقدر خواهد شد؟

۱۳۰۲ دویون مثبت با بار الکتریکی متساوی  $q$  به جرمهای متفاوت  $m_1$  و  $m_2$  در پتانسیل  $V$  به طور افقی از حالت سکون شتاب پیدا می کنند. سپس وارد يك میدان الکتریکی یکنواخت که جهت آن به طرف بالا است، می شوند. (الف) نشان دهید که اگر باریکه یون در راستای محور  $x$  وارد میدان شود مقدار  $y$  برای هر یون در زمان  $t$  عبارت است از  $y = Ex^2/4V$ ، (ب) آیا می توان از این روش برای جدا کردن ایزوتوپها استفاده کرد؟

۱۴۰۲ دویون مثبت با بار الکتریکی متساوی  $q$  به جرمهای متفاوت  $m_1$ ،  $m_2$  در يك پتانسیل  $V$  به طور افقی از حالت سکون شتاب پیدا می کنند. سپس وارد میدان مغناطیسی یکنواخت با القای  $B$  که عمود بر صفحه حرکت است، می شوند. (الف) نشان دهید که اگر باریکه در راستای محور  $x$  وارد میدان مغناطیسی شود، مقدار  $y$  در هر زمان از رابطه زیر به دست می آید

$$y = Bx^2 \left( \frac{a}{\lambda m V} \right)^{1/2}$$

(ب) آیا می‌توان از این روش برای جدا کردن ایزوتوپها استفاده کرد؟

۱۵.۲ ذراتی با بار الکتریکی  $q$  و جرم  $m$  به میدان مغناطیسی همگن با القای  $B$  پرتاب می‌شوند. وقتی که سرعت ذرات در ابتدا عمود بر میدان است، ذرات مسیر دایره‌ای طی می‌کنند. رابطه‌ای برای بسامد حرکت دورانی ذرات به دست آورید و نشان دهید که بسامد مستقل از سرعت ذرات است.

۱۶.۲ يك قطرهٔ روغن باردار در هوا و در حالتی که میدان الکتریکی وجود ندارد، با سرعت ثابت سقوط کرده و فاصلهٔ ۴ میلی‌متر را در ۱۶ ثانیه طی می‌کند. چگالی نسبی روغن ۰.۸۵، چگالی نسبی هوا  $1.3 \times 10^{-3}$  و ضریب چسبندگی هوا  $1.81 \times 10^{-5} \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$  است. مطلوب است تعیین (الف) شعاع قطره، (ب) جرم قطره، (ج) اگر قطره دارای يك واحد بار الکتریکی باشد و در يك میدان الکتریکی  $2000 \text{ V}/\text{cm}$  قرار گیرد، نسبت نیروی وارده از میدان الکتریکی به قطره را به وزن قطره به دست آورید.

۱۷.۲ وقتی قطرهٔ روغن مسئلهٔ ۱۷.۲ در میدان الکتریکی ثابت  $2000 \text{ V}/\text{cm}$  حرکت می‌کرد، زمان لازم برای صعود در طول ۴ میلی‌متر برای چند دفعه مختلف اندازه‌گیری شد. اگر زمانهای اندازه‌گیری شده ۳۶۱، ۱۱۵، ۱۷۴، ۷۵۵ و ۲۳۹ ثانیه باشند، مطلوب است محاسبهٔ (الف) سرعت سقوط در اثر گرانی، (ب) سرعت صعود در هر حالت، (ج) مجموع سرعت قسمت الف و هر يك از سرعتهای ب. (د) نشان دهید که مجموعهای قسمت ج مضرب صحیحی از يك عدد است، و نتیجه را تفسیر کنید. (ه) مقدار بار الکترون را از روی این اطلاعات حساب کنید.

۱۸.۲ در تجربه‌ای برای شمردن و وزن کردن اتمها، يك جریان ۸۰۰ آمپری به مدت ۱۸۰۰ ثانیه از محلول سولفات مس عبور کرده و ۴۳۷ گرم مس رسوب داده است. وزن اتمی مس ۶۳.۵۴، ظرفیت آن ۲، و بار الکترون  $1.6 \times 10^{-19}$  کولن است. با استفاده از اطلاعات این مسئله مطلوب است تعیین (الف) تعداد بارهای الکترونی حمل شده توسط یونهای که به صورت اتمهای مس رسوب می‌شوند. (ب) تعداد اتمهای مس رسوب کرده، (ج) جرم مس رسوب کرده، (د) تعداد اتمها در يك اتم گرم مس، (ه) مقدار بار لازم برای رسوب جرم معادل گرمی عنصر مس، (و) جرم يك اتم هیدروژن، با فرض اینکه وزن اتمی آن ۱.۰۰۸ باشد.

۱۹.۲ راستای میدان الکتریکی  $E$  و القای مغناطیسی  $B$  در شکل ۱۰.۲ چسه باید باشد تا اینکه قسمتی از سهمی یونهای مثبت در آن شکل، وقتی که از سمت راست دیده شوند (الف) در ربع راست پایین، (ب) در ربع راست بالا، و (ج) در ربع چپ بالا قرار گیرند.

۲۰۰۲ الف) اگر باریکه یون شکل ۱۰۰۲ دارای دونوع یون با بارهای متساوی و جرمهای متفاوت باشند، کدام يك از دو قسمت سهمی مربوط به جرم بیشتر است؟ (ب) اگر جرمها متساوی لکن بارها متفاوت باشند، کدام قسمت مربوط به بار بیشتر است؟

۲۱۰۲ برای يك سهمی ویژه در طیف سنج جرمی تامسون، چه کمیت فیزیکی برای یونهایی که نزدیک به مبدأ می نشینند و یونهایی که دورتر قرار می گیرند، متفاوت است؟ به رغم این حقیقت که يك ولتاژ ثابت برای تخلیه گاز به کار رفته است، چرا چنین تفاوتی وجود دارد؟

۲۲۰۲ در يك طیف سنج جرمی، یونهای با بار متساوی  $q$  و جرمهای متفاوت  $m_1$  و  $m_2$  در اختلاف پتانسیل  $V$  از حالت سکون شتاب می گیرند. باریکه ای از این یونها وارد میدان مغناطیسی با القای  $B$  که عمود بر مسیر حرکت ذرات است، می شود. رابطه ساده ای، بر حسب کمیت های داده شده، پیدا کنید که نسبت شعاعهای مسیر این دونوع یون را در میدان به دست دهد.

۲۳۰۲ مس دارای دوایزوتوپ به جرمهای ۶۴۹ و ۶۲۹ است. نسبت درصد فراوانی هر يك از دوایزوتوپ در مس معمولی به جرم اتمی ۶۳۵ چقدر است؟

۲۴۰۲ اورانیوم هگزافلوئورید،  $UF_6$ ، در  $100^\circ C$  ترکیبی گازی است. فرض می کنیم مخلوطی از دونوع هگزافلوئورید در اختیار باشد که یکی از  $^{235}U$  و دیگری از  $^{238}U$  تشکیل شده است، ریشه میانگین مربعی سرعت هر مولکول را به دست آورید. درباره امکان جداسازی آنها از طریق فرایند پخش بحث کنید.



## نظریه اتمی تابش

### ۱.۳ مقدمه

تمام چشمه‌های نور شامل موادی هستند که به‌طریقی برانگیخته شده‌اند. کرم شب‌تاب ماده بدن خود را با واکنش شیمیایی نامعلومی برانگیخته می‌کند، و ماده خورشید در اثر حرارت برانگیخته می‌شود. اما از زمانی که هرگز صحت نظریه تابش الکترومغناطیسی ماکسول را به اثبات رسانید، می‌دانیم که سرچشمه نهایی تابش حرکت شتاب‌دار بارالکتریکی است. اگر بخواهیم یکی از جالبترین صحنه‌های روش علمی را درک کرده و از آن درس بگیریم، نمی‌توانیم تاریخچه تابش را با ماکسول شروع کنیم.

### ۲.۳ ذرات یا امواج

بعضی از قدمای یونان اعتقاد داشتند همان طور که یک فرد نابینا راه خودش را حس می‌کند یک فرد بینا راه خود را با چشمانش می‌یابد. آنها اعتقاد داشتند که نور نوعی شاخساک است که از چشم خارج می‌شود، و لسی تماس خود را با چشم حفظ می‌کند به‌طوری که پس از برخورد با اشیا اطلاعات مربوط را به مغز می‌رساند. بدیهی است که چنین نظریه‌ای محکوم به شکست بود، زیرا قادر به این توضیح نبود که چرا شخص در تاریکی نمی‌تواند ببیند مگر اینکه چشمه نور خارجی وجود داشته باشد.

از قرن‌ها قبل فهمیده بودند که نور چیزی است که از «چشمه‌های» معینی خارج می‌شود

و پس از برخورد با اجسام برمی گردد و بالاخره وارد چشم می شود. در قرن هفدهم دو نظریه در مورد ماهیت «چیزی که» برخورد می کند و برمی گردد وجود داشت. نیوتون فرض می کرد که نور از جریان ذرات الاستیک سریع حرکت باجرم بسیار کوچک تشکیل می شود. نظریه او قانون بازتاب نور را بیان می کند که بنا بر آن زاویه تابش برابر با زاویه بازتاب است. (مثل برگشت يك توپ كاملاً الاستيك پس از برخورد با مانع.) در مورد قانون شکست نور، نیوتون چنین می گوید: وقتی ذرات نور به محیط نوری چگال شبیه شیشه می رسند به طرف آن کشیده می شوند و این کشش باعث ازدیاد مؤلفه سرعت عمود بر سطح محیط می شود. بنا بر این، طبق نظریه نیوتون نور در داخل محیط مادی سریعتر از خلأ حرکت می کند و راستای حرکت آن به سمت خط عمود نزدیکتر می شود. از طرف دیگر، هویگنس از نظریه موجی بودن نور حمایت می کرد. نافذترین دلیل او در تأیید این نظریه در آن زمان این بود که اگر دو باریکه نور از روی هم عبور کنند با هم برخورد نمی کنند. او هم بازتاب و شکست نور را توضیح داد. توضیح او درباره شکست نور این بود که وقتی يك سطح موج تحت زاویه ای به محیط نوری چگال نفوذ می کند سرعتش کم می شود. این کند شدن حرکت سطح موج باعث می شود که راستای حرکت موج به سمت خط عمود نزدیک شود.

### ۳.۳ الکتریسته و نور

پس از يك قرن بی توجهی، نظریه موجی نور توسط دانشمند انگلیسی، توماس یانگ که در رشته های مختلف علوم تبحر داشت، احیا شد. در سال ۱۸۰۱ او نشان داد که تنها با استفاده از اصل تداخل امواج می توان رنگ فیلمهای نازک و سطوح شیاردار را توضیح داد. در طول نیم قرن بعد، کارهای تجربی بیشتری بخصوص توسط فیزیکدانهای فرانسوی فرنل، آراگو، مالوس، کورنو، فیزو و فوکو انجام گرفت و نشان داده شد که نظریه ذره ای بودن نور قابل دفاع نیست. در سال ۱۸۶۴ این فعالیتها به اوج خود رسید و در آن موقع جیمز کلارک ماکسول نتایج کوششهای خود را، به منظور بیان قوانین الکتریسته به صورت ریاضی مطلوب، اعلام داشت. او در فرمولبندی ریاضی موفق شده بود و در ضمن نتیجه مهم دیگری نیز به دست آورد: اینکه قوانین الکتریسته را می شد به شکل ریاضی معادله امواج الکترومغناطیس در آورد. بدعلاوه، او نشان داد که سرعت این امواج با سرعت نور برابر است! بنا بر این او در یک جهش مهم، نظریه الکتریسته را به نظم در آورد و تمام قوانین نور را در آن ادغام کرد.

نظریه نیوتون وقتی توسط نظریه هویگنس کنار زده شد که اولاً- فوکو سرعت نور را در محیط نوری چگال کمتر از سرعت نور در خلأ پیدا کرد، و ثانیاً- هرگز در سال ۱۸۸۸ به کمک آزمایش جریانهای نوسان کننده در مدار الکتریکی نشان داد که انرژی الکترو-مغناطیس در فضا منتشر می شود و به مداری مشابه انتقال می یابد، و بدین ترتیب نظریه ماکسول را به اثبات رسانید. هرگز از مداری شامل سلف و خازن استفاده کرد که قادر به نوسان بود. هر موقع در محل گاف موجود در مدار فعال (فرستنده) يك جرقه زده می شد، امواج الکترو-

مغناطیس ازمحلی که تخلیه الکتریکی در آنجا انجام می گرفت تابش می شد. (اشکال مختلف این نوع فرستنده اولیه تا قبل از اختراع لامپهای تخلیه در ارتباط رادیویی مورد استفاده قرار می گرفت.) مدار دریافت کننده يك حلقه سیمی بود که کافی در آن بود. هر وقت انرژی از يك مدار به مدار دیگر منتقل می شد، جرقه ای بین دوسر گاف مدار گیرنده زده می شد. نتایج آزمایشهای هرتز نشان دادند که تابش حاصل از مدار الکتریکی تابع قوانین شناخته شده نوری است. بنا بر این به نظر می رسید که نظریه نور حالت رضایتبخش و جالبی دارد. هنوز آخرین حرف در این مورد گفته نشده بود. هرتز توجه کرد که هنگامی که دوسر گاف گیرنده توسط نور حاصل از جرقه فرستنده روشن شود، جرقه القایی آسانتر ایجاد می شود. این اثر توسط یکی از محصلین هرتز به نام هالواش به طور کاملتری بررسی شد، او نشان داد که يك صفحه تمیز روی که دارای بار الکتریکی منفی است وقتی تحت تابش فرابنفش قرار می گیرد، بار خود را از دست می دهد. بدین ترتیب، اثبات نظریه موجی ماکسول درباره نور توسط هرتز تقریباً به طور همزمان منتهی به کشف اثر فوتوالکتریک شد و همان گونه که بعداً خواهیم دید، این پدیده به نوبه خود منجر به تفسیر عمیق و مجددی از نظریه موجی تابش شد.

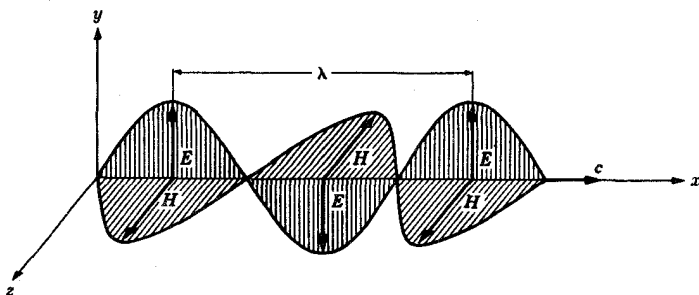
### ۴.۳ الکترو دینامیک

معادلات ماکسول و نظریه انتشار امواج الکترومغناطیس در تمام کتابهای الکتریسته و مغناطیس داده می شود و در اینجا به تفصیل از آنها بحث نخواهد شد. اما، مروری کوتاه لازم به نظر می رسد.

ذره بار داری با حرکت سینوسی به فرکانس زاویه ای  $\omega$  را در نظر می گیریم، که تحت تأثیر نیروی مثلاً در يك آنتن قائم بالا و پایین می رود. این بار يك میدان الکتریکی  $E = q / 4\pi\epsilon_0 r^2$  ایجاد می کند که در مجاورت آنتن قابل اندازه گیری است، اما به دلیل بستگی میدان به  $r^{-2}$  مقدار آن با افزایش فاصله به سرعت کاهش می یابد. ذره نوسانگر، علاوه بر میدان الکتروستاتیکی يك میدان الکترومغناطیسی نیز به وجود می آورد که مقدار آن تنها بر حسب  $r^{-1}$  کاهش می یابد. این میدان به صورت موجی که سرعت آن در خلاء  $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$  است، حرکت می کند. در اینجا  $F/m = 8.985 \times 10^{12}$  ضریب گذردهی خلاء  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m و  $\epsilon_0 = 8.985 \times 10^{-12}$  F/m هستند. این موج از آنتن در تمام جهات پخش می شود ولی شدن آن در راستای آنتن صفر، و در راستای عمود بر آنتن حداکثر است.

شدت میدان الکتریکی و شدت میدان مغناطیسی در موج الکترومغناطیسی بر هم عمودند و هر دو بر راستای انتشار موج نیز عمودند. این موضوع در شکل ۱.۳ نموده شده است. در این شکل، چشمه یا آنتن در سمت چپ در فاصله ای دور و در صفحه  $xy$  قرار دارد و مرکز آن منطبق بر محور  $x$  است.

در تابشهای اتمی، الکترونهاي چرخان در مدارها را جایگزین جریانهای آنتن



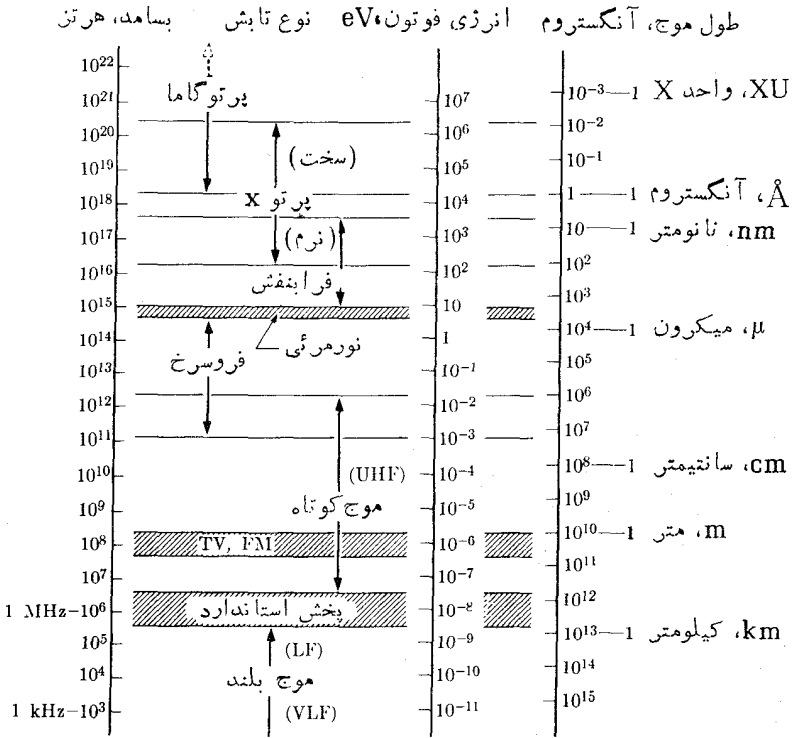
شکل ۱.۳ موج الکترومغناطیسی با قطبیدگی صفحه‌ای و با طول موج  $\lambda$  که رابطه بردارهای  $\mathbf{E}$ ،  $\mathbf{H}$  و  $\mathbf{c}$  را نشان می‌دهد.

می‌کنیم. اما، به طوری که بعداً خواهیم دید در مورد تابش اتمی، نظریه کلاسیکی تابش باید اصلاح شود.

انرژی انتقال یافته به وسیله امواج الکترومغناطیسی در میدان تابش را می‌توان یا بر حسب شدت یا چگالی انرژی حرکت موج مشخص کرد. شدت تابش به صورت انرژی انتقال یافته در واحد زمان از واحد سطح عمود بر راستای انتشار امواج تعریف می‌شود، که آن را بردار پوینتینگ می‌نامند. واحد شدت در دستگاه آحاد  $\text{mksA}$  وات بر متر مربع است. چگالی انرژی یا چگالی حجمی تابش برابر مقدار انرژی تابشی در واحد حجم فضا تعریف می‌شود. واحد چگالی انرژی در دستگاه  $\text{mksA}$  ژول بر متر مکعب است. بدیهی است که چگالی انرژی برابر نسبت شدت بر سرعت انتشار موج است. عبارت چگالی انرژی بویژه در بحث تابش در یک محفظه گرم مفید است.

### ۵.۳ یکسانی تابشها

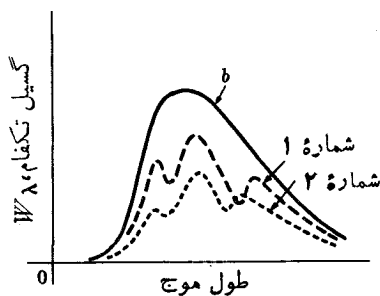
از مطالعات قبل خوانندگان این کتاب آگاه‌اند که انواع تابشها، حرارت، نور، رادار، رادیو و غیره از لحاظ بسامد (فرکانس) با هم فرق دارند ولی از نظر ماهیت یکسان هستند. منظور از اصطلاح «انواع» تابشها این است که آنها از چه طریق تولید و با چه روشی تشخیص داده می‌شوند. در حقیقت تمام آنها با یک سرعت در خلأ حرکت کرده و باید با یک نظریه درک شوند. گستره پهناور طیف الکترومغناطیس در شکل ۲.۳ نشان داده شده است (در باره انرژی فوتون که در شکل ذکر شده است بعداً در همین فصل بحث خواهد شد). نظریه کلاسیک ماکسول در مورد تمام این تابشها و تمام تابشهایی که نهایتاً مر بوط به حرکت شتابدار بار الکتریکی می‌شوند، به کار می‌رود. هر مشاهده مر بوط به یک «نوع» تابش باید در مورد انواع دیگر تابش نیز صادق باشد، بجز اینکه بسامد انواع تابشها از یکدیگر متفاوت خواهد بود.



شکل ۲.۳ طیف تابش الکترومغناطیسی.

### ۶.۳ تابش حرارتی

اطلاعات مربوط به ماهیت تمام تابش‌ها را می‌توان از مطالعهٔ هر یک از «انواع» آنها به دست آورد. حال تابش اجسام گرم را در نظر می‌گیریم، زیرا بررسی آن بخصوص نتایج سودبخشی داشته است. می‌دانیم که اگر جسمی را به اندازهٔ کافی داغ کنیم نور مرئی تابش می‌کند. رابطهٔ نزدیک بین دما و تابش بیشتر با این حقیقت آشکار می‌شود که جسم داغ (بانور) سفید از جسم داغ (بانور) قرمز داغتر است. به علاوه می‌توانیم این موضوع را با عبور دادن تابش جسم داغ از یک دستگاه پاشنده، مانند منشور یا توری طیف سنج بیشتر بررسی کنیم. اگر انرژی تابشی از یک جسم داغ (شمارهٔ ۱) را برای تمام بسامدها اندازه بگیریم، ممکن است منحنی شبیه منحنی خط چین شکل ۳.۳ به دست آوریم. محور قائم این منحنی گسیلندگی تکفام،  $W_\lambda$ ، نامیده می‌شود که انرژی تابشی در واحد زمان از واحد سطح تابش کننده در فاصلهٔ طول موج  $d\lambda$  است، محور افقی بر حسب طول موج است و نسه بسامد. با تکرار آزمایش برای جسم دیگری (شمارهٔ ۲) با ماده‌ای متفاوت ولی در همان دما، ممکن



شکل ۳.۳ طیف تابشی چند جسم داغ.

است منحنی نقطه چین شکل ۳.۳ را به دست آوریم. از شکل پیدا است که در اغلب طول موجها دردمای معین، گسیلندگی جسم اول از جسم دوم مؤثرتر است، اگرچه دو منحنی متفاوت اند لکن مشخصه کلی آنها یکی است. بیشینه دو منحنی تقریباً در یک طول موج رخ می دهد. با مطالعه تعداد زیادی از مواد دردمای یکسان منحنیهای تابشی مختلفی به دست می آید، اما هیچکدام از آنها دارای گسیلندگی تکفام بزرگتر از  $W_{\lambda_b}$ ، که به منحنی پوش خط پر در شکل ۳.۳ مربوط می شود، نخواهد بود.

به نظر می آید این منحنی (منحنی پوش) که بستگی به ماهیت جسم تابش کننده ندارد، دارای اهمیت است. حال سعی می کنیم تابش کننده ای بیابیم یا بسازیم که منحنی تابشی آن شبیه منحنی خط پر شکل ۳.۳ باشد.

### ۷.۳ گسیل و جذب تابش

حال که سطح تمام اجسام به طور مداوم انرژی تابشی گسیل می دارد، پس جای تعجب است که چرا اجسام تمام انرژی داخلی خود را تابش نمی کنند و تادمای صفر مطلق سرد نمی شوند. جواب این است که اگر از خارج به طریقی انرژی به اجسام داده نمی شد چنین می شد. در مورد رشته یک لامپ الکتریکی انرژی تابش شده از طریق انرژی الکتریکی تأمین می شود. به محض قطع جریان الکتریکی، این رشتهها بسرعت تادمای محیط سرد می شوند. دلیل اینکه آنها سردتر نمی شوند این است که اجسام اطراف آنها (دیوارهها و دیگر اشیای محیط) نیز تابش می کنند که مقداری از این انرژی تابشی به رشتهها برخورد می کند و در آنها جذب و تبدیل به انرژی داخلی می شوند. این پدیده در مورد تمام اجسام واقع در محیط صادق است به طوری که هر یک از آنها همزمان در حال جذب و گسیل انرژی تابشی هستند. اگر جسمی داغتر از اجسام اطراف خود باشد، آهنگ گسیل انرژی آن بیش از آهنگ جذب است. بنابراین جسم مقدار خالصی انرژی از دست می دهد و سرد می شود مگر اینکه به طریقی گرم شود. اگر جسمی سردتر از اجسام اطراف خود باشد، آهنگ جذب انرژی آن بیش از

آهننگ گسیل است و دمای آن بالا خواهد رفت. وقتی جسم با اجسام اطرافش همدم باشد، هر دو آهننگ برابر می‌شوند و هیچگونه جذب یا دفع انرژی وجود ندارد و تغییری در دمای جسم ایجاد نمی‌شود.

شکل ۳.۳ نشان می‌دهد که گسیلندگی سطح،  $W$ ، برای طول موجهای مختلف متفاوت است، و از بند بالا چنین برمی‌آید که  $W$  در دمای بالاتر بزرگتر است. برای سادگی در بحث چند جسم کدر در حال تعادل حرارتی با اجسام اطراف خود و نوار بسیار باریکی از طول موجها را در نظر می‌گیریم. چون اجسام کدرند، تابش از آنها عبور نمی‌کند. بنا بر این، در حالت کلی، قسمتی از تابش ورودی بازتاب می‌یابد و بقیه جذب خواهد شد. کسر جذب شده از انرژی تابشی را ضریب جذب  $a$ ، و کسری که بازتاب می‌یابد را ضریب بازتاب  $r$  می‌نامند که مجموعاً باید برابر واحد باشند و چون سطحها متفاوت اند، داریم

$$a_1 + r_1 = 1, \quad a_2 + r_2 = 1, \quad \dots \quad (1.3)$$

از آنجا که اجسام با اطراف خود در حال تعادل حرارتی هستند، در این صورت تمام آنها درون «حمامی» از تابش باشند و یکنواخت  $I$  خواهند بود. اگر این مطلب واضح به نظر نمی‌آید، برای کمک به درک مطلب می‌توان اجسام را به صورت تعدادی ذرات ریز که در مجاورت هم قرار دارند و روی هم سایه نمی‌اندازند، در نظر گرفت. حال می‌توانیم از لحاظ کمی جملهٔ آخری را چنین بیان کنیم: کل تابش جسم شمارهٔ ۱ با سطح  $\Delta A_1$  و گسیلندگی  $W_1$  در زمان  $\Delta t$  برابر است با  $W_1 \Delta A_1 \Delta t$ . جذب انرژی همین جسم در زمان  $\Delta t$  مساوی خواهد بود با  $a_1 I \Delta A_1 \Delta t$ . با توجه به شرایط تعادل حرارتی موجود، این دو مقدار باید مساوی باشند. بنا بر این داریم

$$W_1 \Delta A_1 \Delta t = a_1 I \Delta A_1 \Delta t \quad (2.3)$$

و به طور مشابه برای جسم دیگر می‌توان نوشت

$$W_2 \Delta A_2 \Delta t = a_2 I \Delta A_2 \Delta t, \quad \dots \quad (3.3)$$

از تقسیم دو معادلهٔ (۲.۳) و (۳.۳) به دست می‌آوریم

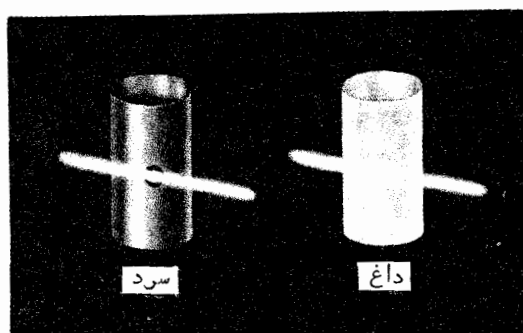
$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{a_1}{a_2} \quad \text{یا} \quad \frac{W_1}{a_1} = \frac{W_2}{a_2}, \quad \dots \quad (4.3)$$

از آنجا که محدودیتی برای تعداد ذرات یا انواع سطوح وجود ندارد، واضح است که  $W/a$  برای هر ماده مقداری ثابت است (که البته به دما و طول موج بستگی دارد). بدین ترتیب ثابت کردیم که اگر جسم یا سطحی گسیل‌کنندهٔ خوبی باشد (مقدار  $W$  زیاد) جذب‌کنندهٔ خوبی نیز است (مقدار  $a$  زیاد) و بالعکس. اگر بتوانیم جذب‌کنندای کامل پیدا کنیم، الزاماً بهترین گسیل‌کننده ممکن را پیدا کرده‌ایم، منحنی  $b$  در شکل ۳.۳ این موضوع را نشان می‌دهد.

## ۸.۳ تابش جسم سیاه

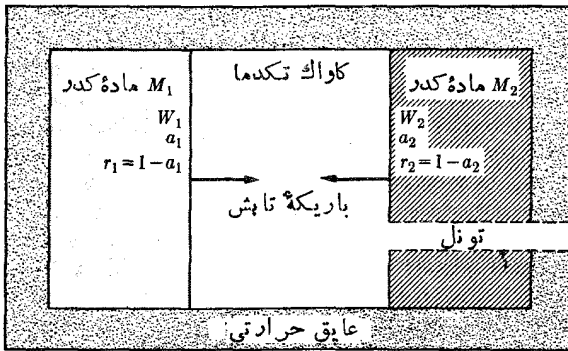
در آکوستیک پنجره‌ای باز به‌عنوان یک جاذب کامل صدا محسوب می‌شود، زیرا پنجره باز عملاً هیچ صدایی را به‌داخل اتاق منعکس نمی‌کند. در اپتیک تعداد کمی از موارد را می‌توان پیدا کرد که تاریک‌تر از سوراخ کلید یک اتاقک بدون پنجره باشد. زیرا چنانچه نور کمی از طریق سوراخ کلید داخل اتاقک شود قبل از اینکه در اثر انعکاس دوباره از سوراخ کلید خارج شود به‌دفعات بادبوره‌های جاذب برخورد می‌کند و برمی‌گردد. رنگ سیاه زدن به‌داخل اتاقک می‌تواند تاریکی سوراخ کلید را افزایش دهد، اما تاریکی اصلی سوراخ مربوط به‌شکل هندسی محفظه می‌شود نه خاصیت جذب سطوح دیواره‌ها. یک سوراخ کوچک در محفظه‌ای از ماده کدر، کاملترین جاذب انرژی تابشی است که بشری پیدا کرده است، و بالعکس یک سوراخ کوچک در محفظه همچنین کاملترین گسیل‌کننده‌ای است که بشر ساخته است. این موضوع را می‌توانیم از استدلال بالا نتیجه بگیریم و یا به‌طریق زیر آن را دقیقتر بفهمیم. اگر به سوراخ محفظه‌ای داغ نگاه کنیم، تابش آن را از دیوار داخلی درست مقابل سوراخ می‌توان دید. بعلاوه تابشهایی را می‌بینیم که از قسمتهای دیگر محفظه به‌طرف لکه روشن می‌آیند و پس از انعکاس در محل لکه به‌چشم ما می‌رسند. جذب و گسیل تابش به‌وسیله یک سوراخ استوانه تنگستنی توخالی در شکل ۴.۳ نشان داده شده است. نوار نورانی وسط شکل از یک رشته ملتهب در دمای ثابت حاصل می‌شود و رنگی است که برای مقایسه در اینجا وجود دارد. وقتی استوانه سرد است سوراخ تاریک‌تر از قسمتهای دیگر بوده و در حقیقت سیاه به‌نظر می‌رسد. اما وقتی استوانه به‌اندازه کافی داغ می‌شود سوراخ نورانی‌تر از استوانه است که با نور رشته مطابقت دارد. چنین محفظه توخالی جاذب و گسیل‌کننده را جسم سیاه می‌نامند. از آنجا که  $a$  در مورد جسم سیاه برابر واحد است، از معادله (۴.۳) رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{W_1}{a_1} = \frac{W_2}{a_2} = \frac{W_b}{1} = W_b \quad (5.3)$$



شکل ۴.۳ تابش استوانه‌ای توخالی از تنگستن.





شکل ۵.۳ حرکت رفت و آمدی تابش بین دو مادهٔ مختلف.

این رابطه را قانون تابش کیرشهوف می‌نامند: نسبت گسیلندگی تابشی یک سطح به ضریب جذب آن در دمای معین، برای تمام سطوح یکسان است و برابر با گسیلندگی تابشی جسم سیاه در همان دما است.

حال وضعیت بازتاب چند باره را به‌طور کمی در داخل یک کاواک تابش‌کننده بحث می‌کنیم. مطابق شکل ۵.۳ تابشی را که در کاواک تک دمای متشکل از دو صفحهٔ متوازی مختلف الجنس پس و پیش می‌رود، در نظر می‌گیریم. سرگذشت تابش گسیل شده از واحد سطح هر وجه را در فاصلهٔ زمانی  $\Delta t$  پی‌گیری می‌کنیم. این فاصلهٔ زمانی درست به اندازه‌ای است که تابش فاصلهٔ میان دو صفحه را طی می‌کند.

تابش ضمن از دست دادن مقداری انرژی از این وجه بازتاب می‌یابد و به‌وجه اول برمی‌گردد. بازتاب بعدی مجدداً با از دست دادن انرژی بیشتر همراه است و این عمل ادامه می‌یابد. جدول ۱.۳ مقادیر مؤلفه‌های جریان تابشی از واحد سطح و جهت حرکت آنها را بین دیواره‌ها پس از گذشت چند  $\Delta t$  به‌دست می‌دهد.

همان‌طور که برخوردهای متوالی تابش اولیه با صفحات انجام می‌شود، هر دو وجه به‌عمل گسیل ادامه می‌دهند. بنابراین وقتی حالت پایدار برقرار می‌شود، ستونهای همزمان تابش حرارتی بین دو وجه در رفت و آمد خواهند بود. کل جریان تابش در یک جهت، مثلاً به‌طرف راست، بسادگی با مجموع مؤلفه‌ها در این جهت برابر است. بنابراین، کل گسیلندگی مؤثر به‌طرف راست با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned}
 W_r \Delta t = & W_1 \Delta t + (1 - a_1)(1 - a_2)W_1 \Delta t + (1 - a_1)^2(1 - a_2)^2W_1 \Delta t \\
 & + \dots + (1 - a_1)W_2 \Delta t + (1 - a_1)^2(1 - a_2)W_2 \Delta t \\
 & + (1 - a_1)^2(1 - a_2)^2 \Delta t + \dots
 \end{aligned} \quad (6.3)$$

در رابطهٔ بالا با گذاردن  $x = (1 - a_1)(1 - a_2)$  رابطهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم

$$W_r = W_1[1 + x + x^2 + \dots] + W_2(1 - a_1)[1 + x + x^2 + \dots] \quad (7.3)$$

## جدول ۱۰۳

گسیل اولیه به وسیله $M_2$	گسیل اولیه به وسیله $M_1$
$\leftarrow W_2 \Delta t$	$\rightarrow W_1 \Delta t$
$\rightarrow (1 - a_1) W_2 \Delta t$	$\leftarrow (1 - a_2) W_1 \Delta t$
$\leftarrow (1 - a_1)(1 - a_2) W_2 \Delta t$	$\rightarrow (1 - a_1)(1 - a_2) W_1 \Delta t$
$\rightarrow (1 - a_1)^2 (1 - a_2) W_2 \Delta t$	$\leftarrow (1 - a_1)(1 - a_2)^2 W_1 \Delta t$
$\leftarrow (1 - a_1)^2 (1 - a_2)^2 W_2 \Delta t$	$\rightarrow (1 - a_1)^2 (1 - a_2)^2 W_1 \Delta t$
$\rightarrow (1 - a_1)^3 (1 - a_2)^2 W_2 \Delta t$	$\leftarrow (1 - a_1)^2 (1 - a_2)^3 W_1 \Delta t$
$+\dots$	$+\dots$

سری داخل دو کره يك تصاعد هندسی ساده است که حد آن وقتی  $0 < x < 1$  باشد، برابر  $1/(1-x)$  است. این مقدار حدی بر حسب ضریب جذب به صورت زیر درمی آید

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1 - (1 - a_1)(1 - a_2)} = \frac{1}{1 - (1 - a_1 - a_2 + a_1 a_2)} \quad (۸.۳)$$

$$= \frac{1}{a_1 + a_2 - a_1 a_2}$$

چون دستگاه تکدام است، می توانیم روابط زیر را از قانون تابش کیرشهوف [معادله (۵.۳)] به دست آوریم.

$$W_1 = a_1 W_b \quad W_2 = a_2 W_b \quad (۹.۳)$$

با جایگزین کردن مقادیر معادلات (۸.۳) و (۹.۳) در معادله (۷.۳) خواهیم داشت

$$W_r = \frac{a_1 W_b + a_2 W_b (1 - a_1)}{a_1 + a_2 - a_1 a_2} = \frac{W_b (a_1 + a_2 - a_1 a_2)}{a_1 + a_2 - a_1 a_2} = W_b \quad (۱۰.۳)$$

این معادله نشان می دهد که تابش به طرف راست (یا از هر جهت دیگری) به طور مؤثر از سطح سمت چپ می آید، درست مثل اینکه از يك جسم سیاه تابش می شود. اگر مجرای کوچکی در دیواره سمت راست كاواك به وجود آوریم، به طوری که کاهش قابل ملاحظه ای در تابش ایجاد نشود، در آن صورت تابش نشت شده از این مجرا را تابش جسم سیاه می نامند. لازم به یاد آوری است که این بحث متضمن هیچگونه فرضیاتی در مورد ماهیت تابش حرارتی یا جنس سطوح داخل محفظه نیست.

حال می دانیم که چگونه يك جسم سیاه بسازیم و به هدف خود که در پایان بخش (۶.۳) بحث کردیم، رسیده ایم.

خواننده می تواند برای خود نشان دهد که اجسام سیاه را می توان حتی از اجسام نورانی ساخت. چنانچه يك دسته سوزن خیاطی را به نحوی نگهداریم که نوک آنها بطرف چشم ما باشد، کاملاً سیاه به نظر می رسند. يك دسته تیغ صورت تراشی با حداقل ضخامت  $1/16$  میلیمتر را اگر از لبه های تیز نگاه کنیم، به نظر سیاه می آید. در این حالتها تابش ورودی در فاصله باریک و عمیق بین سوزنها یا تیغها بازتاب پیاپی پیدا می کند و در هر بازتاب مقداری از تابش جذب می شود، طوری که سرانجام تابش فرودی در طی بازتابهای زیاد کاملاً جذب می شود.

اکنون به سؤال طیف تابش گسیل شده از جسم داغ برمی گردیم. اگر يك جسم سیاه را به عنوان نمونه اختیار کنیم می توانیم گسیل تابش از سوراخ آن را، همان طور که قبلاً در مورد نمونه های شکل ۳.۳ انجام دادیم، اندازه گیری کنیم. این آزمایش نشان می دهد که گسیل جسم سیاه فوراً منحنی خط پرشکل ۳.۳ را به دست می دهد که، برخلاف منحنیهای دیگر شکل، مستقل از ماده به کار رفته به عنوان گسیل کننده است. این موضوع انتظار قبلی را تأیید می کند، بدین معنی که منحنی خط پر مشخصات کلی تابش حرارتی جسم را در دمای معین نمایش می دهد. مطالعه این منحنی باید اطلاعاتی در مورد خود تابش به دست دهد. با حذف اثر ماده محفظه، متغیر مهم باقیمانده دمای چشمه تابشی است. به طور ریاضی، کسل انرژی تابش شده در واحد زمان از واحد سطح گسیل کننده متناسب با سطح زیر منحنی است، و استفان به طور تجربی پیدا کرد که سطح زیر منحنی مستقیماً متناسب با توان چهارم دمای مطلق جسم است، یعنی

$$W_b = \sigma T^4 \quad (11.3)$$

که در آن  $\sigma$  استفان-بولتزمن است. مقدار عددی این ثابت چنین می شود

$$\sigma = (5.67037 \pm 0.00005) \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$$

معادله (۱۱.۳) را ابتدا بولتزمن به طریق نظری به دست آورد و بنا بر این، قانون استفان-بولتزمن نامیده می شود. در دو بخش بعدی، معادله توزیع طیف تابش جسم سیاه را به دست می آوریم (قانون پلانک) و سپس به کمک انتگرال گیری می توان معادله (۱۱.۳) را به دست آورد (مسئله ۵.۳). بولتزمن این قانون را قبل از پلانک، به کمک اصول ترمودینامیک، به دست آورد.

جسمی که سیاه نیست کمتر از جسم سیاه تابش می کند. از ترکیب معادلات (۵.۳) (۱۱.۳) در حالت کلی رابطه زیر به دست می آید

$$W = a\sigma T^4 \quad (12.3)$$

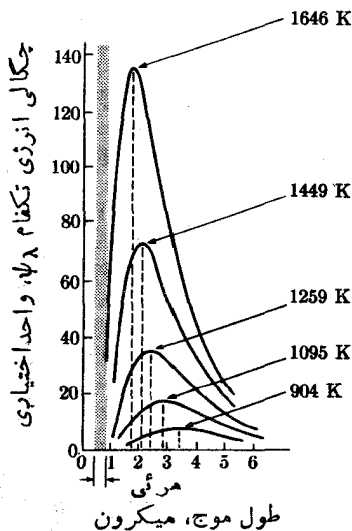
ضریب  $a$  که گسیلندگی کل یا ضریب جذب کل نامیده می شود، در جداول تمام کتابهای مربوط به مقادیر مرجع فیزیک درج شده است.

روش ترمودینامیکی مورد استفاده بولتزمن را، به منظور پیش بینی خواص توزیع

طیفی تابش جسم سیاه، می‌توان کمی بیشتر گسترش داد. وین دریافت که با تغییر دمای جسم سیاه، منحنی شکل کلی خود را حفظ می‌کند اما بیشینه آن با تغییر دما جابه‌جا می‌شود، به طوری که طول موج شدیدترین تابش متناسب با عکس دمای مطلق است، یعنی  $\lambda_{\max} = c/T$  (c مقدار ثابتی است). این رابطه حالت خاص قانون جابه‌جایی وین است که بیان می‌کند: در طول موج مربوطه چگالی انرژی تکفام حاصل از کاواک یک جسم سیاه مستقیماً با توان پنجم دمای مطلق جسم تغییر می‌کند. رابطه طول موجهای مربوط به دو دمای  $T_1$  و  $T_2$  به صورت  $\lambda_1 T_1 = \lambda_2 T_2$  است. به کمک قانون جابه‌جایی و با در دست داشتن کل منحنی در دمای خاص، می‌توان کل منحنی در هر دمای دیگر را پیش‌بینی کرد. هیچیک از این قوانین تابش نمی‌تواند به این مسئله اساسی که چرا انرژی تابش شده از جسم سیاه دارای چنین توزیع طول موج است، پاسخ دهد.

### ۹.۳ قوانین وین و ریلی-جینز

مقایسه منحنیهای تجربی تابش سیاه شکل ۶.۳ و توزیع سرعت ماکسول در گاز (شکل ۲.۱)، شباهت فوق‌العاده‌ای نشان را می‌دهد. وین با توجه به این تشابه سعی کرد تابعی شبیه تابع ماکسول در توزیع سرعتها برای توزیع طول موجهای تابش جسم سیاه به دست آورد. در توجیه این روش غیر از شباهت ظاهری منحنیها، موضوع مهمتری وجود دارد. اگر مولکولهای جسم سیاه در اثر حرارت تحریک شوند، در این صورت توزیع سرعت آنها تا اندازه‌ای شبیه تابع ماکسول خواهد بود. شتاب حرکت این مولکولها باید رابطه‌ای با سرعت آنها داشته باشد. این مولکولها که در اثر حرارت دارای شتاب شده‌اند، حاوی بار الکتریکی



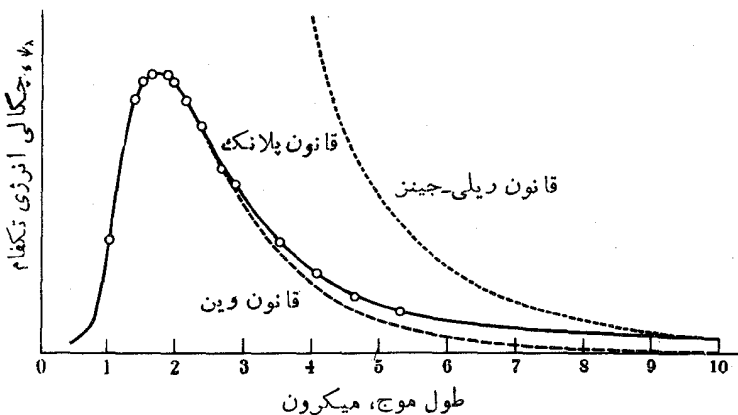
شکل ۶.۳ توزیع انرژی در طیف تابش جسم سیاه در دماهای مختلف.

هستند و قبلاً در الکترو دینامیک کلاسیک اشاره کردیم که در نتیجه حرکت شتابدار ذرات باردار تابش به وجود می آید. این بحث خیلی دقیق نیست اما توضیحی قابل قبول در تشابه این منحنیها به شمار می رود. رابطه ای که وین برای چگالی انرژی تابش تکفام،  $\psi_\lambda$ ، از محفظه جسم سیاه تکدما برای طول موجهای بین  $\lambda$  و  $\lambda + d\lambda$  به دست آورد، به صورت زیر است

$$\psi_\lambda d\lambda = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{c_2/\lambda T}} d\lambda \quad (۱۳.۳)$$

که در آن  $\lambda$  طول موج،  $T$  دمای مطلق و  $e$  پایه لگاریتم طبیعی است. این رابطه اساساً یک رابطه تجربی است و شامل دو ثابت تنظیم  $c_1$  و  $c_2$  است که به ترتیب ثابتهای اول و دوم تابش نامیده می شود. وین این ثابتها را طوری انتخاب کرد که تابع حاصل بر منحنی منطبق بود مگر در طول موجهای بلند. منحنی قانسون وین در شکل ۷.۳ به صورت خط چین رسم شده است. نقاط (روی منحنی) نتایج تجربی لومر و پرینگک شایم را نشان می دهد. ولی یک رابطه نسبتاً خوب به قدر کافی خوب نیست، و فرمولی که در اساس تجربی است متضمن هیچگونه توضیحی درباره ماهیت تابش نخواهد بود.

لرد ریلی سعی کرد قانون توزیع تابش را با روش دقیقی به دست آورد. او این طور استدلال کرد که قانون تقسیم مساوی انرژی (بخش ۸.۱) باید در مورد میدان الکترو-مغناطیسی یک محفظه به کار رود. یک موج ساکن با بسامد معین، با اتمهای در حال نوسان دیواره برهم کنش دارد. انرژی می تواند در هر دو راستا، از دیواره به میدان و بالعکس، جریان پیدا کند. بنا بر این «دمای» میدان همان دمای دیوارهها است. نوسانگر هماهنگ



شکل ۷.۳ منحنیهای قوانین تابش. نقاط معرف نتایج تجربی است.

يك بعدی دارای يك درجه آزادی است که معرف انرژی جنبشی آن است و، چون انرژی پتانسیل متوسط آن مساوی انرژی جنبشی متوسط  $(kT/2)$  است، انرژی متوسط کل آن برابر  $kT$  می شود. يك موج ساکن از نوع تابش الکترومغناطیسی با قطبیدگی معین، معرف نوسانگر يك بعدی است و بنا براین باید دارای انرژی متوسط  $kT$  باشد. این موضوع پایه استنباط قانون تابش ریلی-جینز است. این قانون انرژی موجود در محفظه تکدما را، درفاصله طول موج  $\lambda$  تا  $\lambda + d\lambda$ ، به دست می دهد. برای به دست آوردن آن، باید بدانیم که چه تعداد موج ساکن هتماجز، به نام مدهای تابش، در این فاصله طول موج وجود دارد. در اینجا فرض می شود که هر يك از مدها دارای انرژی متوسط  $kT$  باشد.

ابتدا مسئله ساده تر محاسبه تعداد مدهای نوسانی تار مرتعش را در فاصله بسامدی معین در نظری می گیریم. محور  $x$  در راستای تار قرار دارد، و ابتدای و انتهای تار در  $x = 0$  و  $x = L$  در گیر است. بنا بر مکانیک می دانیم که امواج عرضی ساکن را می توان به وسیله رابطه زیر بیان کرد

$$y = A \sin kx \sin \omega t \quad (14.3)$$

با

$$kL = n\pi \quad (15.3)$$

که در آن  $n$  عدد درست مثبت است. عدد موج  $k$ ، طول موج  $\lambda$ ، بسامد زاویه ای  $\omega$ ، بسامد  $D$  و سرعت موج  $C$  در تار با روابط زیر بهم مربوط می شوند

$$k = 2\pi/\lambda, \quad \omega = 2\pi\nu, \quad c = \omega/k = \lambda\nu \quad (16.3)$$

طبق تعریف هر مسد نوسان، موجی ساکن با مقدار معین  $n$  است. حال اگر مقصود تعیین تعداد مقادیر ممکن  $n$  درفاصله بسامدی مشخص باشد، با دیفرانسیل گیری از معادله (15.3) رابطه زیر به دست می آید

$$dn = \frac{L}{\pi} dk = \frac{L}{\pi c} d\omega \quad (17.3)$$

با جانشین کردن  $dk = -(2\pi/\lambda^2)d\lambda$  و صر فنظر کردن از علامت منفی، همچنین می توان نوشت

$$dn = \frac{2L}{\lambda^2} d\lambda \quad (18.3)$$

به عنوان مثال، اگر طول تار  $L = 100 \text{ cm}$  باشد، معادله (18.3) نشان می دهد که در فاصله  $\lambda = 1 \text{ cm}$  تا  $\lambda + d\lambda = 1.1 \text{ cm}$  ممکن است بیست موج ساکن با طول موجهای مختلف وجود داشته باشد.

حال به مسئله سه بعدی، که در اصل خیلی شبیه مسئله ای است که بحث کرده ایم،

می پردازیم. فرض خواهیم کرد که دیواره‌ها باز تابنده کامل هستند. اگر این موضوع دقیقاً درست بود، هیچگونه تبادل انرژی بین دیواره و میدان الکترومغناطیسی وجود نمی داشت. به هر حال، می توان تصور کرد که دیواره‌ها تقریباً باز تابنده کامل هستند و این تعدیل در محاسبه تعداد مدها تغییری نخواهد داد. فرض می کنیم کاواکی مکعبی شکل با ضلع  $L$  در نظر باشد، در این صورت می توان جوابهای معادله ماکسول را چنین نوشت

$$E_x = E_0 \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \sin \omega t \quad (19.3)$$

با

$$\omega = c(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2} \quad (20.3)$$

روابط مربوط به  $E_x, E_y, H_x, H_y, H_z$  نیز شبیه به معادله (۱۹.۳) هستند. این حالت سه بعدی معادله (۱۴.۳) است. تابع  $x$  معادله (۱۹.۳) تابعی کسینوسی است در صورتی که برای  $E_x$  و  $E_y$  با همان عدد موجی  $k_x$  تابع سینوسی خواهیم داشت. شرایط مرزی آن چنان است که مؤلفه‌های بردار  $E$  موازی با سطحی معین می باید در این سطح مساوی صفر باشد. این موضوع چنین نتیجه می دهد

$$k_x L = n_x \pi$$

$$k_y L = n_y \pi \quad (21.3)$$

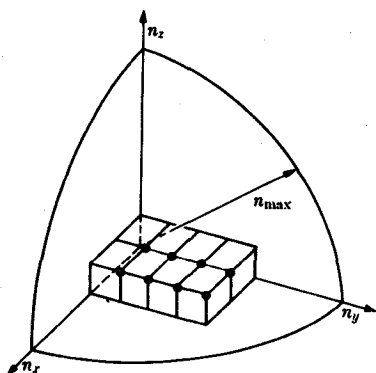
$$k_z L = n_z \pi$$

که در آنها  $n_x, n_y$  و  $n_z$  اعداد درست مثبت هستند. از ترکیب اینها با معادله (۲۰.۳) نتیجه می شود

$$\omega = \frac{\pi c}{L} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2} \quad (22.3)$$

دسته‌ای از مقادیر درست  $n_x, n_y, n_z$  معرف يك مد نوسان الکترومغناطیسی است که مجموعه صفحات گرهی معینی دارد. دسته دیگری از مقادیر درست  $n_x, n_y, n_z$  به يك دسته دیگر از صفحات گرهی مربوط می شود. برای هر دسته دو جهت مستقل قطبیدگی می تواند وجود داشته باشد. بنابراین برای هر دسته  $n_x, n_y, n_z$  دو مد مستقل وجود دارد.

حال سؤال می کنیم چند دسته مختلف از  $n_x, n_y, n_z$  به يك بسامد زاویه‌ای کمتر از مقدار معین  $\omega$  [معادله (۲۲.۳)] منجر می شود. جواب را می توان با رسم مقادیر  $n_x, n_y, n_z$  در راستای سه محور دستگاه مختصات دکارتی (شکل ۸.۳) به آسانی به دست آورد. هر عنصر حجمی در اولین ربع این دستگاه مختصات شامل نقطه‌ای است که به دو مد تابش الکترومغناطیسی مربوط می شود. اعداد مثبت  $n_x, n_y, n_z$  و مؤلفه‌های بردار  $n$  هستند که حداکثر طول آن محدود به حد بسامد زاویه‌ای  $\omega$  می شود. رابطه بین این دو مقدار به کمک معادله (۲۲.۳) به صورت زیر به دست می آید



شکل ۸.۳ هر نقطه در این شکل معرف یک دسته ممکن از اعداد درست  $n_x$ ،  $n_y$  و  $n_z$  است.

$$n_{\max} = \omega L / \pi c \quad (23.3)$$

تعداد کل نقاط را، که هر یک معرف دوما تبشی است، می توان با شمارش تعداد واحدهای حجمی در ربع اول و در فاصله  $n_{\max}$  از مبدأ به دست آورد. این تعداد برابر با  $1/8$  حجم کره ای به شعاع  $n_{\max}$  است. بنا بر این تعداد حالت های مربوط به بسامد زاویه ای کمتر از  $\omega$  عبارت است از

$$N = \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi \left( \frac{\omega L}{\pi c} \right)^3 = \frac{\omega^3 V}{3 \pi^2 c^3} = \frac{\lambda \pi V}{3 \lambda^3} \quad (24.3)$$

که در آن  $V = L^3$  حجم جعبه است. تعداد مدها در فاصله بین طول موج  $\lambda$  و  $\lambda + d\lambda$  با دیفرانسیل گیری به دست می آید. با صرف نظر کردن از علامت منفی داریم

$$dN = \frac{\lambda \pi V}{\lambda^4} d\lambda \quad (25.3)$$

چگالی انرژی بسادگی برابر با حاصل ضرب تعداد مدهای واحد حجم در  $kT$  است

$$\psi_{\lambda} d\lambda = \frac{\lambda \pi k T}{\lambda^4} d\lambda \quad (26.3)$$

این قانون ریلی-جینز است که، جهت مقایسه با داده های تجربی، در شکل ۷.۳ رسم شده است. در نگاه اول این قانون نسبت به قانون وین خیلی نازلتر به نظر می رسد. اگر چه این قانون برای طول موج های بلند بخوبی با داده های تجربی تطبیق می کند، اما در طول موج های کوتاه یا بسامدهای زیاد به سمت بینهایت میل می کند که آن را «فاجعه فرابنفش» نامیده اند. اما، از دیدگاه نظری قانون ریلی را باید خیلی جدیدتر از قانون وین به حساب



آورد. محاسبه این قانون بر اساس فیزیک کلاسیک استوار است. این قانون دارای ثابتهای اختیاری نبوده و در آنجایی که با منحنی تجربی تطابق دارد، این مطابقت کاملاً دقیق است. در حالی که شکست قانون وین «خیلی بد» بود، شکست قانون ریلی وضعیت بی بحرانی به وجود آورد. این موضوع نشان داد که نظریه کلاسیک در توجیه یک پدیده تجربی مهم ناتوان است. این وضع موجب شد که ماکس پلانک توجه خود را به آن معطوف دارد.

### ۱۰.۳ قانون پلانک؛ گسیل کوانتیده

قدمهای اولیه پلانک اساساً تجربی بود. او دریافت که با تغییر مختصری در رابطه وین به این صورت

$$\psi_{\lambda} d\lambda = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{c_2/kT} - 1} d\lambda \quad (27.3)$$

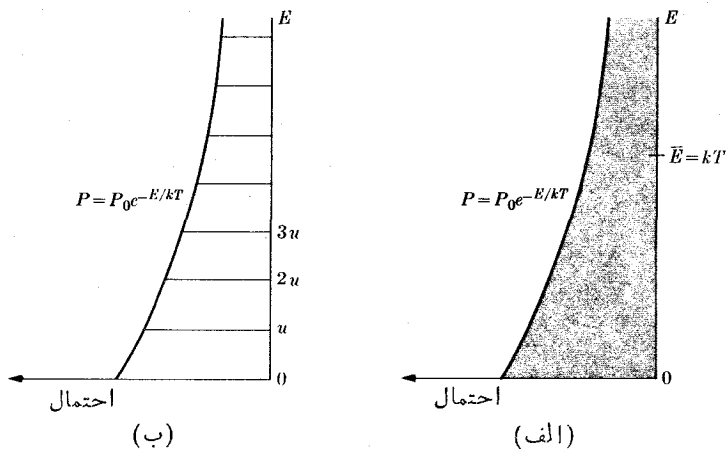
و تنظیم ثابتهای آن، رابطه‌ای به دست می‌آید که در طول موجهای بلند تبدیل به رابطه ریلی می‌شود و در همه نقاط با منحنی تجربی مطابقت دارد. پلانک می‌دانست که رابطه صحیحی پیدا کرده است که باید بتوان آن را محاسبه کرد. موقعیت پلانک تقریباً شبیه دانشجویی بود که جواب مسئله‌ای را در آخر کتاب دیده و حالا مواجه با این وظیفه است که چگونه مسئله را به طور منطقی می‌تواند محاسبه کند. پلانک تمام سعی خود را به کار برد که این رابطه درست را باروشی مبتنی بر فیزیک کلاسیک به دست آورد. بالاخره پلانک مجبور به این نتیجه گیری شد که محاسبات ریلی عیبی ندارد و نقص از خود نظریه کلاسیک است.

پلانک مجبور بود «فاجعه فرابنفش» را که در نتیجه فرض بینهایت شدن تعداد مدهای ارتعاش امواج تابشی ساکن [معادله (۲۴.۳) هنگامی که  $\lambda \rightarrow 0$ ] پیش آمده بود، از میان بردارد. فرض می‌شد که هر یک از این مدها به طور متوسط دارای انرژی  $kT$  باشد و بدینگونه کل انرژی موجود در میدان تابشی بینهایت می‌شد. این موضوع به وضوح غیر منطقی است. شاید مدهای مربوط به بسامد بالا برانگیخته نمی‌شوند و یا سخت تر برانگیخته می‌شوند. اینک نگاه دیگری به فرض تقسیم مساوی می‌اندازیم.

در اصل، ریلی فرض می‌کرد که انرژی موجود در یک مد نوسانی می‌تواند هر مقداری، از صفر به بالا، داشته باشد و اینکه احتمال پیدا کردن نوسان کننده‌ای با انرژی  $E$  به وسیله رابطه بولتزمن [معادله (۲۴.۱)] داده می‌شود. بدین ترتیب، انرژی متوسط چنین است

$$\bar{E} = \frac{\int E e^{-E/kT} dE}{\int e^{-E/kT} dE} = kT \quad (28.3)$$

راه دیگر بیان این موضوع این است که بگوییم مدها می‌توانند در حالت‌های انرژی مختلف باشند. ریلی پیوستاری از حالتها فرض می‌کرد که جمعیت آن متناسب با احتمال حاصل از قانون بولتزمن (شکل ۹.۳ الف) است.



**شکل ۹.۳** (الف) احتمال پیدا کردن انرژی  $E$  درمد نوسانی معین برطبق نظریه کلاسیک (ریلی). (ب) شبیه الف اما انرژی موجود را فقط می توان به صورت مقادیر گسته  $E = mu$  گرفت (پلانک). در این ترسیم، نمودار تراز انرژی را می بینید که محور افقی جمعیت نسبی درهر تراز را نشان می دهد.

پلانک فرض کرد که انرژی دریافتی از دیواره ها درهريك ازمدها فقط می تواند از مرتبه های گسته  $u$  باشد. بدین ترتیب انرژی موجود در هرمد باید به صورت صفر،  $u$ ،  $2u$ ،  $3u$ ، ... یا به طور کلی  $mu$  باشد که  $m$  عددی درست است. اینک ببینیم این استدلال منتهی به چه نتیجه ای می شود. (در اینجا همان روشی تعقیب می شود که بولتزمن درسال ۱۸۷۷ برای تعیین توزیع انرژی جنبشی مولکولهای گاز به کار برد.) تعداد نوسان کننده هایی که انرژی  $mu$  دارند، به صورت زیر است

$$n_m = n_0 e^{-mu/kt} \quad (29.3)$$

بدیهی است که انرژی مربوط به  $n_m$  نوسان کننده از رابطه زیر به دست می آید

$$mun_m = mun_0 e^{-mu/kt} \quad (30.3)$$

بنابراین انرژی متوسط هر نوسان کننده،  $\bar{E}$ ، عبارت است از

$$\bar{E} = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} mun_0 e^{-mu/kt}}{\sum_{m=0}^{\infty} n_0 e^{-mu/kt}} \quad (31.3)$$

چون  $m$  عددی درست است، رابطه (۳۱.۳) به صورت زیر درمی آید

$$\bar{E} = \frac{0 + ue^{-u/kt} + 2ue^{-2u/kt} + 3ue^{-3u/kt} + \dots}{1 + e^{-u/kt} + e^{-2u/kt} + e^{-3u/kt} + \dots} \quad (32.3)$$

اگر قرار دهیم  $x = e^{-u/kT}$ ، معادله (۳۲.۳) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\bar{E} = ux \frac{1 + 2x + 3x^2 + \dots}{1 + x + x^2 + \dots} \quad (33.3)$$

حد این سری همگرا را می توان با روشهای متداول به دست آورد (یادآور می شود که  $x < 1$  است). حد همگرایی سری صورت کسر برابر با  $1/(1-x)^2$  است. این نتیجه را می توان با بسط  $(1-x)^{-2}$  بر طبق قضیه دو جمله ای امتحان کرد. مخرج کسر تصاعد هندسی ساده ای است که حد آن  $1/(1-x)$  است. با قرار دادن این حدها در معادله (۳۳.۳)، خواهیم داشت

$$\bar{E} = ux \frac{1/(1-x)^2}{1/(1-x)} = \frac{ux}{1-x} = \frac{u}{(1/x) - 1} \quad (34.3)$$

با قرار دادن معادل  $x$  به جای آن، نتیجه به صورت زیر درمی آید

$$\bar{E} = \frac{u}{e^{u/kT} - 1} \quad (35.3)$$

حال اگر معادله (۳۵.۳) را در تعداد مدهای ارتعاش موجود در واحد حجم کاواک، معادله (۲۵.۳)، ضرب کنیم چگالی انرژی در گستره طول موج  $d\lambda$  به دست می آید

$$\Psi_\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} \frac{u}{e^{u/kT} - 1} d\lambda \quad (36.3)$$

یادآور می شویم که در این محاسبات انرژی یک نوسان کننده برابر با حاصل ضرب عددی درست،  $m$ ، در انرژی کوچک  $u$  فرض شده است. بر طبق نظریه فیزیک کلاسیک، انرژی می تواند هر مقداری را دارا شود. این موضوع معادل با این گفته است که  $u$  می تواند فوق العاده کوچک باشد که در حد به صفر نزدیک می شود. اگر  $u$  را برابر صفر قرار دهیم، معادله (۳۵.۳) به صورت مبهم  $0/0$  درمی آید. اگر قاعده لوپیتال را به کار بندیم، و قبل از قرار دادن  $u = 0$  از صورت و مخرج به طور جداگانه نسبت به  $u$  دیفرانسیل بگیریم، رابطه زیر به دست می آید

$$\bar{E} = kT \quad (37.3)$$

این رابطه با فرض کلاسیکی دیسی مبنی بر پیوستگی انرژی مطابقت کامل دارد. اما، به طوری که دیده ایم، این فرض منتهی به قانون صحیح تابش نمی شود.

رابطه (۳۶.۳) وقتی که  $u$  برابر با صفر نیست شبیه قانون تجربی پلانک [رابطه (۲۷.۳)] به نظر می آید. در حقیقت مخرجهای این دو رابطه، اگر مقدار  $u$  طوری انتخاب شود که توانهای عبارات نمایی یکی باشند، مشابه هم می شوند (با استثنای منهای یک). برای به دست آوردن این مقدار  $u$ ، فرض می کنیم

$$\frac{c\gamma}{\lambda T} = \frac{u}{kT} \quad (38.3)$$

یا

$$u = \frac{c\gamma k}{\lambda} = \frac{c\gamma k}{c} \nu \quad (39.3)$$

در رابطه اخیر،  $c$  سرعت نور در خلا<sup>۵</sup> و  $\nu$  بسامد نوسان کننده و بنا بر این بسامد تابش گسیل شده است. اگر به جای مقدار ثابت  $(c\gamma k/c)$  ثابت دیگری مانند  $h$  قرار دهیم، داریم

$$u = \frac{hc}{\lambda} = h\nu \quad (40.3)$$

وقتی مقدار  $u$  را از معادله (۴۰.۳) در معادله (۳۶.۳) قرار دهیم، قانون پلانك برای چگالی انرژی جسم سیاه یا تابش کاواک به دست می آید. این قانون به صورت زیر است

$$\psi_{\lambda} d\lambda = \frac{\lambda \pi c h \lambda^{-5}}{e^{ch/\lambda kT} - 1} d\lambda \quad (41.3)$$

این معادله با نتایج تجربی مطابقت دارد، و در شکل ۷.۳ (به صورت منحنی پر) برای دمای ۱۶۴۶K رسم شده است.

وقتی اندیشه انرژی گسسته در مرتبه های  $u$  را معرفی کردیم، مشخص نکردیم که  $u$  برای مدهای مختلف متفاوت است. در هر حال، این همان چیزی است که تجزیه و تحلیل ما بر آن دلالت دارد: اکنون با توجه به شکل ۹.۳ به طور کیفی قابل تشریح است که چگونه پلانك از فاجعه فرابنفش اجتناب کرد. در طول موجهای کوچک و یا بسامدهای بالا، فاصله بین  $E=0$  تا اولین تراز انرژی گسسته  $u$  به اندازه ای بزرگ است که احتمال وجود يك مد در آن حالت برانگیختگی فوق العاده کوچک می شود. بنا بر این تمام مدهای با بسامد بسیار بالا دارای  $E=0$  هستند. این موضوع نیز فوراً از معادله (۳۵.۳) آشکار می شود. ثابت جدید،  $h$ ، را ثابت پلانك می نامند. دیده ایم که مقدار آن را می توان از روی ثابت وین،  $c\gamma$  تعیین کرد، اما از پدیده فوتوالکتریک، که در قسمت بعد این فصل بحث می شود، نیز می توان آن را به دست آورد. مقدار آن چنین است

$$h = (6.6262 \times 10^{-34} \pm 0.000005) \text{ J} \cdot \text{s}$$

(یادآور می شود که واحدها همان واحدهای تکانه زاویه ای هستند.)

بدین ترتیب پلانك به طرف فرض تکان دهنده غیر کلاسیک خود هدایت شد که بنا بر آن حالت های انرژی يك نوسان کننده باید مضرب دستنی از حاصل ضرب  $h$  در بسامد  $\nu$  تابش الکترومغناطیس گسیل شده باشد. اگر  $E$  کوچکترین تغییر انرژی مجاز باشد، معادله کوانتومی<sup>۱</sup>

۱. کوانتوم يك کلمه لاتین به معنی چه مقدار یا به چه بزرگی است.

مشهور پلانک چنین است

$$E = hv$$

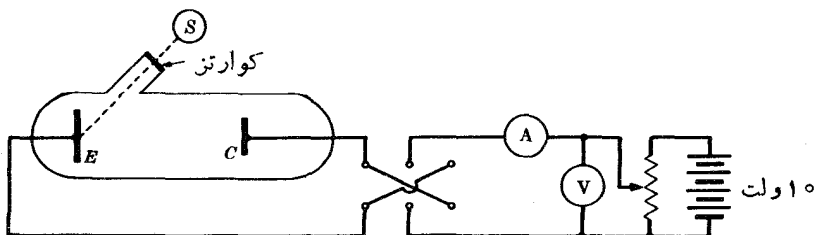
(۴۲.۳)

پلانک مفهوم کوانتوم را در سال ۱۹۰۰ عرضه کرد که بالاخره منتهی به این نتیجه شد که گسیل تابش در مقادیر پیوسته نیست بلکه به صورت بسته‌های مجزای انرژی با مقدار  $hv$  است. اکنون این بسته‌های انرژی تابشی را کوانتوم یا فوتون می‌نامند. این سرآغاز نظریه اتمی تابش بود که به نظریه کوانتومی منتهی شد. به هر حال، واضح است کوانتوم تابش با بسامد مختلف دارای «اندازه‌های» (انرژی‌های) متفاوت است، و اتمی بودن آنها فقط از لحاظ گسستگی است. پلانک در ابتدا پنداشت که فرضیه ویژه او فقط دومیورد نوسان‌کننده‌ها و تابش بلافاصله مجاور به آنها به کار می‌رود، و حداکثر آنکه این فرضیه تعدیلی جزئی در نظریه تابش ماکسول پدید می‌آورد. اما، خواهیم دید که پلانک مطالعه رشته پدیده‌هایی را آغاز کرده بود که کل اندیشه ما را در مورد برهم‌کنش تابش الکترومغناطیس با ماده تغییر داده است.

### ۱۱.۳ اثر فوتوالکتریک

حال توجه خود را از تابش حرارتی به قسمت دیگری از طیف الکترومغناطیس معطوف می‌داریم و پدیده‌ای را که مربوط به بسامد بالاتر است، در نظر می‌گیریم. به طوری که قبلاً اشاره کردیم حتی قبل از کشف الکترون، هالوایش مشاهده کرد وقتی فلز روی تحت تابش نور فرابنفش قرار می‌گیرد بار منفی از دست می‌دهد. او پیشنهاد کرد که تابش باعث می‌شود که فلز روی بار منفی از خود پرتاب کند. در سال ۱۸۹۹ لنارد نشان داد که تابش موجب می‌شود که فلزات از خود الکترون تابش کنند.

این پدیده را که اثر فوتوالکتریک نامیده می‌شود، می‌توان به کمک دستگاه شکل ۱۰.۳ بد تفصیل مطالعه کرد. در این شکل  $S$  چشمه تابش با بسامد متغیر و معین  $\nu$  و با شدت  $E$ ،  $I$  الکتروود گسیل‌دهنده از ماده مورد مطالعه و  $C$  الکتروود جمع‌کننده است. هر دو الکتروود در یک محفظه شیشه‌ای خلأ که دارای دریچه‌ای از کوارتز برای عبور نور فرابنفش و مرئی است، قرار دارند. مدار الکتریکی مربوطه اختلاف پتانسیل معینی را بین دو الکتروود برقرار



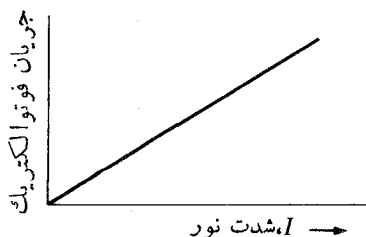
شکل ۱۰.۳ دستگاه بررسی پدیده فوتوالکتریک.

می کند که از طریق آن می توان هر گونه جریان الکتریکی را بین دو الکترود اندازه گیری کرد. ابتدا الکترود جمع کننده را نسبت به الکترود گسیل دهنده الکترود، مثبت می گیریم تا اینکه الکترونهايي که پرتاب می شوند فوراً از گسیل دهنده دور شوند. اختلاف پتانسیلی در حدود ۱۰ ولت کافی است که این عمل را انجام دهد ولی به اندازه کافی زیاد نیست که بتواند، همانند مورد لامپهای پرتو کاتودی اولیه در اثر بمباران الکترود منفی توسط یونهای مثبت، از آنها الکترون آزاد کند. اگر بر لامپ نوری تابیده نشود، هیچ الکترونی گسیل نمی شود و میکرو آمپر متر جریانی را نشان نمی دهد. اگر نور فرا بنفش به الکترود گسیل دهنده وارد شود، الکترونهايي آزاد می شوند و جریان به وسیله میکرو آمپر متر اندازه گیری می شود. معلوم می شود که شدت گسیل الکترون متناسب با شدت نور است، با ثابت نگه داشتن بسامد نور  $\nu$  و پتانسیل شتاب دهنده  $V$  می توان اطلاعاتی شبیه به آنچه در شکل ۱۱.۳ نشان داده شده است، به دست آورد.

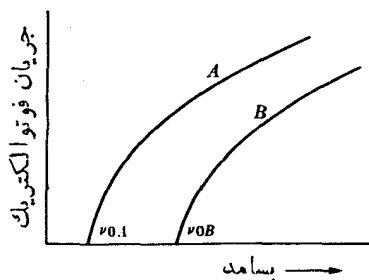
جای تعجب نیست که اگر نور کم تعداد کمی الکترون آزاد کند، نور زیاد تعداد زیادی الکترون آزاد خواهد کرد. اگر بسامد نور و یا ماده مورد تابش را تغییر دهیم، فقط شیب خط تغییر می کند.

حال می توانیم با ثابت نگه داشتن شدت نور و تغییر دادن بسامد، تجربه ای انجام دهیم. منحنیهای این تجربه در شکل ۱۲.۳ نشان داده شده است که در آن  $A$  و  $B$  به دو ماده مختلف مربوط می شوند. اهمیت این منحنیها در این است که برای هر ماده مورد تابش يك بسامد حدی وجود دارد که پایینتر از آن هیچ فوتوالکترونی تولید نمی شود. این بسامد را بسامد آستانه،  $\nu_0$ ، می نامند که مشخصه ای از ماده مورد تابش است. طول موج نور مربوط به این بسامد را طول موج آستانه،  $\lambda_0$ ، می نامند و طول موجهای بلندتر از آن نمی توانند از ماده فوتوالکترون آزاد کنند.

تشریح وجود بسامد آستانه بر اساس نظریه موجی نور بسیار مشکل است. اگر نور را متشکل از میدان الکترومغناطیسی تپنده ببیندازیم، می توان تصور کرد که این میدان گاهی در جهتی قرار می گیرد که ممکن است فوتوالکترونهايي از سطح فلز جدا کند. حتی ممکن است منطقی بدانیم که بعضی از بسامدهای معین نور با الکترونهايي فلز در حال تشدید قرار می گیرند



شکل ۱۱.۳ تغییرات جریان فوتوالکتريک بر حسب شدت نور. بسامد نور و پتانسیل شتاب دهنده ثابت نگه داشته شده اند.

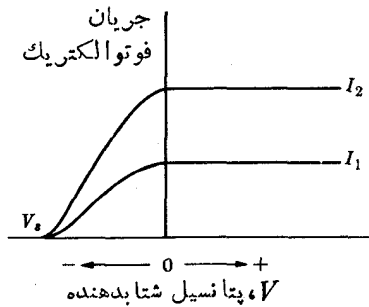


۱۲.۳ تغییرات جریان فوتوالکتریک برای دو ماده مختلف برحسب بسامد نور. شدت نور و پتانسیل شتابدهنده ثابت نگه داشته شده اند.

به طوری که، برای فلزی خاص، بسامدهای ترجیحی وجود دارند که موجب تابش بیشتر الکترونها می شوند. نکته جالب درباره این اطلاعات آن است که برای هر ماده بسامدی وجود دارد که ماده با بسامدی کمتر از آن نمی تواند فوتوالکترون به وجود آورد، و بسامد بیشتر از آن قادر به ایجاد فوتوالکترون است. این پدیده مستقل از شدت نور است.

در سال ۱۹۰۵ اینشتین توجیهی جسورانه و درعین حال ساده پیشنهاد کرد. او توجه خود را به جنبه انرژی پدیده معطوف داشت. درحالی که پلانک پیشنهاد کرده بود تابش فقط در مجاورت گسیل دهنده از بسته های انرژی تشکیل شده است، اینشتین پیشنهاد کرد که این بسته های انرژی ماهیت خود را در طول عمر خود حفظ می کنند. تصور اینشتین چنین بود که بسته انرژی گسیلی، به جای اینکه مثل امواج آب پخش شود، همیشه یکپارچه باقی می ماند و حامل مقداری انرژی برابر  $h\nu$  است. برای اینشتین اهمیت بسامد نور چیزی بیش از بسامد میدان الکتریکی نبوده بود و معیاری از انرژی بسته نور، که فوتون خوانده می شد، به حساب می آمد. تعبیر اینشتین از داده های شکل ۱۲.۳ این بود که یک کوانتوم نور که بسامد آن زیر بسامد آستانه باشد انرژی کافی برای جدا کردن الکترون از فلز ندارد اما نور با بسامد بالاتر می تواند الکترون را جدا کند.

بسامد آستانه تابع ماهیت ماده مورد تابش است، زیرا برای هر ماده انرژی حداقل معلومی جهت آزاد کردن الکترون وجود دارد. تابع کار فوتوالکتریک یا انرژی آستانه،  $W_0$ ، یک ماده حداقل انرژی مورد نیاز برای آزادسازی یک فوتوالکترون از آن ماده است. در سومین آزمایش فوتوالکتریک بسامد و شدت نور را ثابت نگه می داریم، کمیت متغیر اختلاف پتانسیل دوسر لامپ فوتوالکتریک است. آزمایش را با پتانسیل ۱۰ ولت مثبت برای جمع کننده آغاز می کنیم، سپس آن را به صفر رسانده و تا مقدار منفی تغییر می دهیم تا اینکه جریان فوتوالکتریک کاملاً قطع شود. منحنی  $I_1$  شکل ۱۳.۳ نموداری است که برای ماده ای معین به دست می آید. این منحنی تعبیر دقیقی لازم دارد.



**شکل ۱۳.۳** تغییرات جریان فوتوالکتریک بر حسب اختلاف پتانسیل شتابدهنده برای نور با شدتهای متفاوت. به طوری که شدتها به نسبت ۲ به ۱ باشد. بسامد نور ثابت نگه داشته می شود.

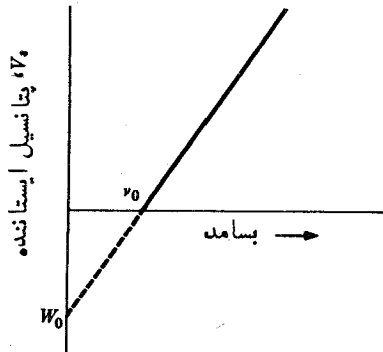
وقتی اختلاف پتانسیل دو سر لامپ حدود ۱۵ ولت یا بیشتر است تمام الکترونهاى گسیل شده طول لامپ را طی می کنند. این جریان بارها جریان اشباعی نام دارد و واضح است که افزایش پتانسیل جمع کننده نمی تواند باعث افزایش جریان شود. با کاهش پتانسیل شتابدهنده از مثبت به صفر و سپس به مقادیر منفی، بدعت وجود پتانسیل کند کننده، جریان لامپ کاهش می یابد. بالاخره این پتانسیل (منفی) بدان اندازه کافی بزرگ می شود که جریان را کاملاً متوقف می کند.

پتانسیل ایستاننده،  $V_s$ ، اختلاف پتانسیل کند کننده ای است که درست می تواند پدیده انرژیترین فوتوالکترونهاى گسیل شده را متوقف کند. بنا بر این حاصل ضرب پتانسیل ایستاننده در بار الکترون،  $eV_s$ ، برابر با حداکثر انرژی جنبشی است که الکترون گسیل شده می تواند دارا باشد. از آنجا که این پتانسیل ایستاننده مقدار معینی دارد، ایسن بدان معنی است که الکترونهاى گسیل شده دارای حد بالای معینی از انرژی جنبشی هستند. با دو برابر کردن شدت نور، جریان در هر پتانسیل مانند  $I_p$  در شکل ۱۳.۳ دو برابر می شود، اما پتانسیل ایستاننده مستقل از شدت است.

اگر آزمایش را با بسامدهای مختلف نور تکرار کنیم، پتانسیل ایستاننده به طور خطی نسبت به بسامد زیاد می شود. این موضوع را می توان با رسم تغییرات پتانسیل ایستاننده بر حسب بسامد مطابق شکل ۱۴.۳ بهتر نشان داد. با بسامد کمتر از بسامد آستانه هیچ الکترونی گسیل نمی شود و پتانسیل ایستاننده صفر است، با ازدیاد بسامد، بالاتر از بسامد آستانه، پتانسیل ایستاننده بر حسب بسامد به طور خطی زیاد می شود.

برای درك كامل اینکه چگونه داده های شکل ۱۴.۳ تعبیر فوتونی اینشتین در مورد اثر فوتوالکتریک را تأیید می کند، اکنون نمودار شکل ۱۴.۳ را تفسیر می کنیم. برای نوری





شکل ۱۴.۳ تغییرات پتانسیل ایستاننده  
بر حسب بسامد نور. نتیجه مستقل از شدت  
نور است.

که بسامد آن بین صفر و بسامد آستانه قرارداد هیچ فوتوالکترونی ایجاد نمی‌شود، زیرا انرژی فوتونهای ورودی کمتر از تابع کار ماده است. برای نور با بسامد بالاتر از بسامد آستانه فوتوالکترون گسیل می‌شود. انرژی جنبشی این الکترونها ممکن است خیلی با هم متفاوت باشند. بر طبق نظریه ایشتمین باید يك حداکثر انرژی برای فوتوالکترونها وجود داشته باشد. انرژی هیچ فوتوالکترونی نمی‌تواند بیش از انرژی فوتون ورودی منهای حداقل انرژی لازم برای آزاد کردن الکترون، تابع کار، باشد. از آنجا که انرژی فوتون متناسب با بسامد آن است و چون پتانسیل ایستاننده معیاری از حداکثر انرژی جنبشی فوتوالکترون گسیلی است، منحنی تغییرات پتانسیل ایستاننده بر حسب بسامد باید خطی مستقیم باشد. شکل ۱۴.۳ دقیقاً همین موضوع را نشان می‌دهد. تحقیق کمی تغییر ایشتمین بدین ترتیب است که برای تعیین نحوه بستگی انرژی فوتون به بسامد آن می‌توان از شیب خط مستقیم استفاده کرد و این شیب همان ثابت پلانک است.

يك تجربه نهایی و تعیین کننده با تابش نور فوق العاده ضعیف انجام می‌گیرد. در این حالت تعداد فوتوالکترونها بسیار کم و روشهای خاصی برای آشکارسازی آنها لازم است. نتیجه جالب توجه این تجربه این است که نور ضعیف باعث گسیل تعدادی فوتوالکترون می‌شود که اگر چه تعدادشان بسیار کم است، ولی این عمل همزمان با تابش نور انجام می‌گیرد و حداکثر انرژی جنبشی الکترونها با حداکثر انرژی الکترونهايي که از تابش نور شدید با همان بسامد حاصل می‌شوند، یکسان است.

بر طبق نظریه موجی نور، میدانهای الکترومغناطیسی پهندهای از چشمه انتشار می‌یابند. نور ضعیف دارای امواج بادامنه کوچک و انرژی کم است. اگر نور ضعیف به سطح فلز برسد، بر طبق اصل بقای انرژی یا هیسچ فوتوالکترونی گسیل نمی‌شود و یا اینکه الکترونها باید

انرژی را در مدتی طولانی ذخیره کنند تا پس از کسب انرژی کافی از سطح فلز خارج شوند. این حقیقت که فوتوالکترونهاي پرا انرژی فوراً از سطح فلز خارج می‌شوند را می‌توان چنین تشریح کرد که انرژی نوری به‌صورت بسته‌های متر اکم بر سطح فلز تابیده می‌شود. طبق نظر اینشتین نور ضعیف دارای تعداد کمی فوتون است که انرژی هر کدام از آنها فقط به‌سامد نور بستگی دارد. این انرژی آن گونه که نظریه موجی می‌گوید به‌طور یکنواخت در سطح فلز پخش نمی‌شود. فوتونی که جذب می‌شود تمام انرژی خود را به یک الکترون می‌دهد و آن الکترون به‌سرعت گسیل می‌شود، هر چند که تعداد چنین اتفاقاتی بسیار کم است.

اگر شخصی به‌داخل یک استخر شیرجه رود، قسمتی از انرژی او به‌صورت امواج درمی‌آید که باعث تکان دادن دیگر شناگرها می‌شود. اگر مشاهده می‌شد که با شیرجه رفتن یک نفر به‌داخل استخر، فرد دیگری ناگهان آب بدوی تخته شیرجه پرتاب می‌شد، در آن صورت مجبور بودیم نتیجه بگیریم که انرژی داده شده به‌وسیله شناگر اول درجهت موجی در حال انبساط پخش نمی‌شود، بلکه به‌طریقی به‌صورت انرژی متمرکز به شناگر پرتاب شده انتقال می‌یابد. بر گزارای چنین شنای دسته‌جمعی در استخر ابرکوانتومی، در مقایسه با شنا در استخر معمولی، عجیب به‌نظر خواهد آمد.

برای خلاصه کردن تعبیر اینشتین در مورد اثر فوتوالکتريك، انرژی فوتون ورودی با سامد  $v$  را برابر مجموع تابش کار گسیل‌کننده،  $(W_0 = hv_0)$ ، و حداکثر انرژی جنبشی فوتوالکترون پرتابی قرار می‌دهیم. بنا بر این داریم

$$hv = hv_0 + \frac{1}{2} m_e v_{\max}^2 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2} m_e v_{\max}^2 = hv - hv_0$$

یا

$$V_s e = hv - W_0 \quad (۴۳.۳)$$

این يك رابطه خطی است و معادله نمودار شکل ۱۴.۳ است. واضح است شیب منحنی تغییرات  $V_s$  بر حسب  $v$  برابر با  $h/e$  است، و  $v_0$  مقدار  $v$  در محل تلاقی منحنی با محور  $v$ ، و  $W_0/e$  مقدار  $v$  در محل تلاقی ادامه منحنی با محور  $V_s$  است. معادله فوتوالکتريك اینشتین برای اولین بار یازده سال پس از پیشنهاد آن، یعنی در سال ۱۹۱۶ توسط میلیکان با اندازه‌گیریهای دقیق از گسیل مواد گوناگون به‌اثبات رسید.

### ۱۲.۳ خلاصه‌ای از نظریه اتمی تابش

در این فصل عدم موافقت بین نظریه‌های نیوتون و هویگنس را در مورد ماهیت نور شرح دادیم. گفتیم که چگونه ما کسول نظریه موجی هویگنس را با نشان دادن اینکه امواج الکترومغناطیس نتیجه قوانین الکتروسیبیه و مغناطیس‌اند، استحکام بخشید. گزارش کردیم که هر تزن نشان داد که به کمک مدارهای الکتريکی می‌توان امواج الکترومغناطیسی را که ما کسول پیش‌بینی کرده بود، به‌وجود آورد. همچنین یاد آور شدیم که هر تزن مشاهده کرد که وقتی

به گاف، نور تابیده می‌شود، جرقه آسانتر به وجود می‌آید. بنابراین کاره‌تر از آنکه نظریهٔ ماکسول را تأیید می‌کرد، شامل اولین مشاهدهٔ اثر فوتوالکتریک نیز بود. اگرچه نظریهٔ مسوچی نور به خوبی جوابگویی بسیاری از پدیده‌های مختلف نوری است لکن در مورد تابش جسم سیاه یا اثر فوتوالکتریک، یعنی در جایی که نور دارای جنبه‌های چشمگیر ذره‌ای است، نارسایی نشان می‌دهد. قبول اینکه نور گاهی دارای حرکت موجی است و گاهی خاصیت ذره‌ای دارد، بسیار مشکل است. ما دوباره در فصل پنجم در حل و فصل این تناقض به بحث خواهیم پرداخت. در اینجا روشن است که پاسخ به این معما این نظر را هرگز نافی نمی‌کند که نور به صورت بسته‌های انرژی به نام فوتون گسیل و جذب می‌شود، و همچنین این موضوع که ویژگی اتمی ماده و الکتریسیته با تابش هم‌گره می‌خورد. این حقیقت که انرژی تابش کوانتیده است انحراف فاحشی در فیزیک کلاسیک است که مستلزم بازنگری کلی در مفهوم انرژی از نقطه نظر کوانتومی خواهد بود. تشریح این حقیقت وظیفهٔ اصلی این فصل بوده است. قبل از خاتمه دادن به این فصل چند مطلب مربوط را نیز در نظر خواهیم گرفت.

### ۱۳.۳ الکترون ولت؛ انرژی فوتون

در معادلهٔ اینشتین حداکثر انرژی جنبشی الکترونها گسیل شده با توجه به اختلاف انرژی پتانسیل ( $eV_s$ ) که معادل انرژی جنبشی الکترون است، اندازه‌گیری می‌شود. این روش تعیین و بیان انرژیهای الکترون که بخصوص روش آسانی است، واحد جدیدی برای انرژی پیشنهاد می‌کند. این واحد جدید انرژی را الکترون‌ولت  $eV$  می‌نامند که برابر تغییر مقدار انرژی جنبشی باری معادل بار یک الکترون است وقتی در اختلاف پتانسیل یک ولتی جا به جا شود. از آنجا که الکترون ولت یک واحد انرژی است در ردیف واحدهای دیگر انرژی مانند ژول، فوت-پوند، واحد حرارتی انگلیسی، و کیلووات ساعت قرار دارد.

انرژی بر حسب ژول رامی توان با تقسیم بر  $10^{-19} \times 1060 = e_e$  به الکترون‌ولت تبدیل کرد. در این حالت  $e_e$  بار الکتریکی نیست بلکه یک ضریب تبدیل ژول به الکترون-ولت است. معادلهٔ اینشتین (۴۳.۳)، در هر دستگاه واحدهای سازگاری صادق است. اگر دستگاه آحاد  $mksA$  را در نظر بگیریم و معادلهٔ (۴۳.۳) را بر  $e_e$  تقسیم کنیم، همان رابطه بر حسب الکترون‌ولت به دست می‌آید

$$E_{k(max)} (V_s \text{ برابر با } e_e) = \frac{h\nu}{e_e} - \frac{W_0}{e_e} \quad (44.3)$$

به عبارت دیگر، بنابراین معادله حداکثر انرژی جنبشی یک فوتوالکتریک بر حسب الکترون‌ولت برابر است با انرژی یک فوتون بر حسب الکترون‌ولت منهای تابع کار بر حسب الکترون‌ولت.

در جایی که الکترون ولت واحد کوچکی باشد، آسانتر است که از کیلو الکترون-ولت ( $1keV = 10^3eV$ ) و میلیون الکترون ولت ( $1MeV = 10^6eV$ ) استفاده شود.

بهبتر است انرژی فوتونها را نیز بر حسب الکترون ولت بیان کنیم. انرژی بر حسب  
 بسامد فوتون به صورت زیر است

$$E = \frac{h\nu}{e_c} = \frac{6.626 \times 10^{-34}}{1.602 \times 10^{-19}} \nu \text{ eV} = 4.136 \times 10^{-15} \nu \text{ eV} \quad (45.3)$$

و از آنجا که  $\nu = c/\lambda$  است، داریم

$$E = \frac{4.136 \times 10^{-15} \times 3 \times 10^8}{\lambda} \text{ eV}$$

$$= \frac{1.241 \times 10^{-6}}{\lambda} \text{ eV} \quad (46.3)$$

که در آن  $\lambda$  بر حسب متر است. اگر واحد طول موج را به جای متر بر حسب آنگستروم قرار  
 دهیم رابطه به صورت زیر درمی آید

$$E = \frac{1.241 \times 10^4}{\lambda} \text{ eV} \quad (47.3)$$

از معادله (۴۷.۳) مگر در آنجا استفاده خواهیم کرد.

مثال. نوری با طول موج  $5000 \text{ \AA}$  بر روی ماده‌ای که تابع کار آن  $1.90 \text{ eV}$  الکترون ولت  
 است، وارد می‌شود. مطلوب است (الف) تعیین انرژی فوتون بر حسب الکترون ولت، (ب)  
 تعیین انرژی جنبشی پراورثترین فوتوالکترون بر حسب الکترون ولت و (ج) تعیین  
 پتانسیل ایستاننده.

حل: (الف) از معادله (۴۷.۳) داریم

$$E = \frac{12400}{5000} = 24.8 \text{ eV}$$

(ب) از قانون اصل بقای انرژی داریم

$$\text{تابع کار} - \text{انرژی فوتون} = \text{حداکثر انرژی جنبشی}$$

یا

$$E_k = 24.8 \text{ eV} - 1.90 \text{ eV} = 22.9 \text{ eV}$$

همچنین

$$E_k = 22.9 \times 1.602 \times 10^{-19} = 3.67 \times 10^{-18} \text{ J}$$

$$V_s = \frac{0.57 \text{ eV}}{1 \text{ (بار الکترون)}} = 0.57 \text{ V} \quad (\text{ج})$$

### ۱۴.۳ گسیل گرما یونی

موضوعاتی که در این بخش و بخش بعد بحث می‌شود، اگر دقیقاً بگوییم، بخشهایی از «نظریه اتمی تابش» نیست اما رابطه آنها با عناوینی که قبلاً در این فصل مورد بحث قرار گرفت به نحوی است که از نقطه نظر آموزشی و همچنین تاریخی متعلق به این بحث می‌شود.

تا به حال دو روش آزادسازی الکترون از فلزها را در نظر گرفته‌ایم. در فصل دوم تخلیه الکتریکی در گازها را بحث کردیم. الکترونها حاصل از کاتود سرد در نتیجه بمباران کاتود به وسیله یونهای مثبت گاز باقیمانده در داخل لامپ به وجود می‌آیند. در این فصل گسیل دیگری را که گسیل فوتوالکتریک نامیده می‌شود، در نظر گرفته‌ایم. هنوز نوع دیگری از گسیل الکترون وجود دارد که اکنون به اختصار از آن بحث خواهیم کرد.

اگر فلزی را گرم کنیم، تحریک حرارتی ماده ممکن است به الکترون انرژی کافی بدهد که از تابع کار ماده تجاوز کند. بدین ترتیب فضای اطراف فلز گرم شده حاوی تعدادی الکترون خواهد بود. مطالعه این پدیده نشان می‌دهد که تابع کلا گرما یونی خیلی نزدیک به تابع کار فوتوالکتریک است، و این نتیجه بسیار جالبی است.

از آنجا که با عبور دادن جریان برق از یک سیم نازک، سیم به آسانی گرم می‌شود، گسیل گرما یونی یکی از آسانترین روشهای تأمین الکترون از چشمه‌ها است. در اغلب لامپهای خلا رادیویی از کاتود گرم به عنوان چشمه الکترون استفاده می‌شود. گسیل گرما یونی بارهای منفی از یک سیم داغ در خلا، برای اولین بار توسط ادیسون در سال ۱۸۸۳ وقتی که او لامپهای روشنایی می‌ساخت مشاهده شد و این گسیل گرمایی را اثر ادیسون می‌نامند. در سال ۱۸۹۹ تامسون نشان داد که یونهای گرمایی این پدیده الکترونها هستند.

### ۱۵.۳ گرمای ویژه جامدات

در بخش ۴.۱ یک قانون تجربی را که توسط دولون و پتی در سال ۱۸۱۹ کشف شد، یادآور شدیم که می‌گوید حاصلضرب جرم اتمی در گرمای ویژه برای تمام مواد (جامد) یکسان است. این قانون را می‌توان به صورت دیگری بیان کرد: «گرمای ویژه به ازای هر مول برای تمام مواد جامد یکسان است.» این قانون مبتنی بر اندازه گیریهای گرمای ویژه تعدادی از مواد بود. تمام این اندازه گیریها در دمای معمولی انجام گرفته است. مقدار به دست آمده برای گرمای ویژه به ازای هر مول تقریباً  $6 \text{ cal/mol } ^\circ\text{C}$  بود.

به طوری که در بخش ۷.۱ بحث شد، دمای یک گاز معیار مستقیمی از انرژی جنبشی انتقالی آن است. به طور مشابه، دمای یک جسم جامد معیاری از انرژی جنبشی اتمهای آن در ارتعاش حول وضعیت تعادل آنها در ساختار شبکه‌ای است. در حد فاصل بین (حالت)

جامد و گاز، اگر دمای جامد و گاز یکسان باشد، جریان خالص انرژی صفر شده و تعادل وجود خواهد داشت. از آنجا که مولکولهای گاز و اتمهای جسم جامد دائماً در برخورد با یکدیگرند، در حالت تعادل، انرژی جنبشی متوسط آنها یکسان خواهد ماند. این بدان معنی است که انرژی جنبشی متوسط هر اتم در جسم جامد  $(\frac{3}{2}kT)$  است. از آنجا که این اتمها به صورت نوسان کننده هماهنگ ارتعاش می کنند، به طور متوسط دارای انرژی پتانسیل نیز خواهند بود. با توجه به مکانیک به خوبی معلوم است که در یک نوسان کننده هماهنگ، انرژی پتانسیل متوسط برابر با انرژی جنبشی متوسط است. بنابراین، کل انرژی هر اتم  $3kT$  می شود، و کل انرژی در هر مول چنین است

$$E = 3kN_A T = 3RT \quad (48.3)$$

که در آن  $R = kN_A$  ثابت گازها است. بنابراین گرمای ویژه هر مول عبارت است از

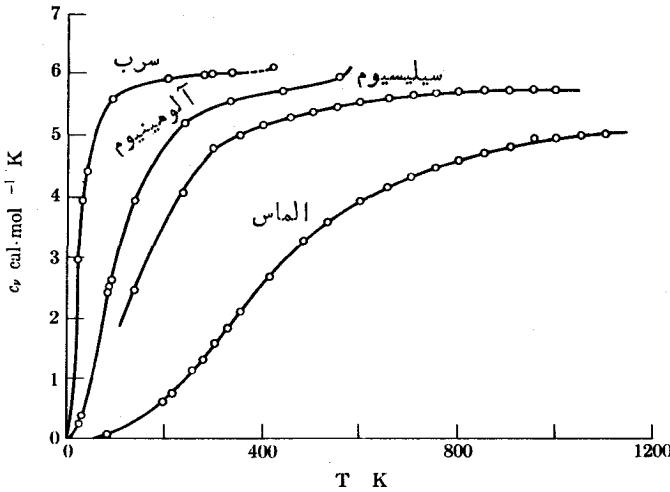
$$c_v = \frac{dE}{dT} = 3R = 5.95 \text{ cal/mol K} \quad (49.3)$$

که با قانون دولون و پتی مطابقت دارد.

در این محاسبه ساده فرض کرده ایم که مواد تغییر حالت نمی دهند، یعنی در مدت گرم کردن ماده ساختار بلوری جامد تغییر نمی کند. همچنین از هر گونه اثر ناشی از تغییر انرژی الکترونیهای باصطلاح «آزاد» در فلزات صرف نظر کرده ایم. همانطور که در فصل ۱۱ بیشتر بحث خواهد شد، فقط کسر خیلی کوچکی از این الکترونیهای آزاد در نتیجه گرم کردن ماده جامد انرژی شان افزایش می یابد. بنابراین، این افزایش انرژی اثر ناچیزی بر گرمای ویژه دارد.

بزودی نشان داده شد که قانون دولون و پتی برای بعضی مواد در دمای معمولی به سختی شکست می خورد، و اینکه گرمای ویژه تمام مواد با افزایش دمای مطلق کاهش می یابد. شکل ۱۵.۳ به عنوان نمونه، گرمای ویژه الماس، سیلیسیوم، آلومینیوم و سرب را بر حسب دمای مطلق نشان می دهد. با افزایش دما، گرمای ویژه تمام این عناصر تقریباً به سمت مقدار  $3R$  همان طور که در بالا پیش بینی شده بود، میل می کند. به هر حال، رابطه ساده به دست آمده نمی تواند جوابگوی کاهش (گرمای ویژه) در نزدیکی صفر مطلق باشد. اینشتین در سال ۱۹۰۷ موفق شد وجوه اساسی منحنیهای شکل ۱۵.۳ را شرح دهد. اینشتین فرض کرد که انرژی نوسانی اتمهای مرتعش درست مثل مورد نوسان الکترومغناطیس در یک محفظه تک-دما (بخش ۱۰.۳) کوانتیده است. بنابراین انرژی متوسط هر نوسانگر عبارت است از

$$\bar{E}_0 = \frac{3h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (50.3)$$



شکل ۱۵.۳ تغییرات گرمای ویژه در حجم ثابت برحسب دما.

[با معادله (۳۵.۳) مقایسه شود]. بسامد  $\nu$  در اینجا بسامد ارتعاشی اتم در شبکه بلوری است. کل انرژی  $E$  هر مول از ضرب  $E_0$  در عدد آووگادرو  $N_A$  به دست می آید. لذا گرمای ویژه هر مول چنین است

$$c_v = \frac{dE}{dT} = 3R \frac{e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT} - 1)^2} \left( \frac{h\nu}{kT} \right)^2 \quad (51.3)$$

بسامد ارتعاش یک اتم در جسم جامد را می توان به طرق مختلف تخمین زد. به عنوان مثال، با اندازه گیری تراکم پذیری جامد می توان «ثابت فزنی» نیروهای بازگرداننده را تخمین زد و البته جرم اتم را هم معلوم در نظر می گیریم. با کمک چنین روشهایی، شخص قادر است نشان دهد که (پیش بینی) نظریه اینشتین از لحاظ کمی با گرماهای ویژه حاصل از آزمایش مطابقت دارد.

فرض یک بسامد منفرد ارتعاشی ساده کردن بیش از حد مسئله است. دبی<sup>۱</sup> رابطه اینشتین را با فرض اینکه بسامدهای ارتعاشی دارای طیف گسترده ای است که تا یک مقدار حداکثر ادامه دارد و فرض وجود دو نوع ارتعاش، یکی عرضی و دیگری طولی، بهبود بخشید. به هر حال نکته مهم در رابطه دبی نیز انرژی متوسط برای هر درجه آزادی است که فرمول پلانک به دست می دهد. بنابراین اینشتین و دبی نشان دادند که مفهوم کوانتس انرژی منحصر به تابش الکترومغناطیسی در یک کاواک تکدما نمی شود، بلکه نوسان کننده های هماهنگ مکانیکی را نیز در برمی گیرد. در فصل بعد خواهیم دید که چگونه نیلسن بور

1. P. Debye, *Ann. Physik*, 39 (1912), p. 789.

دریافت که انرژی الکترونها در اتم و همچنین تکانه (اندازه حرکت) زاویه‌ای آنها کوانتیده است. اروین شرودینگر (فصل ۶) به کمک چند نفر دیگر این نتایج پراکنده را به هم پیوند داد و یک نظریه کامل که مکانیک موجی نامیده می‌شود، ارائه داد.

### مسائل

۱.۳ جا به جایی  $x$  جسمی به جرم  $m$  در زمان  $t$  که دارای حرکت هماهنگ ساده با دامنه  $A$  و بسامد  $\nu$  است با رابطه  $x = A \sin 2\pi\nu t$  داده می‌شود. (الف) نشان دهید انرژی جنبشی آن  $T$ ، برابر با  $\frac{1}{2} m A^2 \sin^2 2\pi\nu t$  است. (ب) نشان دهید که مقدار متوسط زمانی  $T$  در یک دور کامل و مقدار متوسط زمانی  $V$  در یک دور کامل هر کدام برابر نصف انرژی نوسان کننده یعنی  $\frac{1}{2} m A^2 \nu^2$  است.

۲.۳ نشان دهید که قانون تابش پلانک، معادله (۲۱.۳)، برای طول موجهای کوچک تبدیل به قانون وین و برای طول موجهای بلند تبدیل به قانون ریلی می‌شود. (داهنمایی: عبارت نمایی را به صورت یک سری بنویسید و قانون دوم را به دست آورید.)

۳.۳ کاواک تابش کننده یک جسم سیاه به شکل مکعب به ابعاد ۲ سانتیمتر و دارای دمای  $1500\text{K}$  است. (الف) تعداد مدهای ارتعاش در واحد حجم کاواک را بین طول موجهای  $4995\text{Å}$  و  $5005\text{Å}$  حساب کنید. (ب) کل انرژی تابشی کاواک را در این فاصله  $10\text{Å}$  طول موج حساب کنید، (۱) با فرض اینکه به هر مد نوسان انرژی  $kT$  تعلق گیرد، (۲) از قانون پلانک پیروی کند.

۴.۳ نشان دهید که، چگالی انرژی، تابش جسم سیاه بر حسب بسامد به صورت زیر است

$$\psi_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3(e^{h\nu/kT} - 1)} d\nu$$

۵.۳ نشان دهید که شکل چگالی انرژی کل در تابش جسم سیاه در سراسر گستره بسامد از صفر تا بینهایت مشابیه قانون استفان-بولتزمن برای کل تابش است. انتگرال زیر قابل استفاده است

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

۶.۳ (الف) نشان دهید که حداکثر چگالی انرژی در طیف تابش جسم سیاه در طول موج  $\lambda_m$  رخ می‌دهد که از رابطه  $e^x = 1 + (x/5)$  به دست می‌آید و در آن  $x \equiv ch/\lambda_m kT$  است. (ب) ریشه‌های این معادله را یافته و سپس نشان دهید که  $\lambda_m T = 2.898 \times 10^{-3} \text{mK}$  است.



۷.۳ هر سانتیمتر مربع از سطح زمین در وضعی که برپرتوهای خورشید عمود باشد، در هر ثانیه  $1.3 \times 10^8$  ژول انرژی تابشی دریافت می‌کند. فرض می‌کنیم خورشید یک تابش‌کننده جسم سیاه باشد، دمای سطح خورشید چقدر است؟ (شعاع خورشید حدود  $10^8 \times 7$  متر و فاصله زمین از خورشید  $10^8 \times 1.49$  کیلومتر است.)

۸.۳ کره‌ای به شعاع  $0.5$  سانتیمتر از تنگستن در یک محفظه بزرگ خلا که دمای دیواره آن  $300 \text{ K}$  است آویزان می‌شود. تنگستن یک جسم سیاه نیست اما گسیلندگی متوسط آن  $35$  درصد گسیلندگی جسم سیاه است. قدرت ورودی لازم برای اینکه دمای کره در  $3000 \text{ K}$  ثابت نگه‌داشته شود، چقدر است؟ از انتقال حرارت از طریق پایه صرف نظر می‌شود.

۹.۳ مطلوب است تعیین درصد تغییر کل انرژی تابش شده در واحد زمان از یک جسم سیاه اگر دمای مطلق جسم سیاه (الف)  $100\%$ ، (ب)  $10\%$ ، (ج)  $1\%$ ، (د)  $0.1\%$  بالا رود.

۱۰.۳ در چه طول موجی حداکثر شدت تابش جسم سیاه در دماهای  $300 \text{ K}$ ،  $1000 \text{ K}$  و  $6000 \text{ K}$  رخ می‌دهند؟

۱۱.۳ اگر  $5\%$  انرژی داده شده به یک لامپ نورانی به صورت نور مرئی تابش شود، از یک لامپ  $100 \text{ W}$  در هر ثانیه چند کوانتوم نور مرئی گسیل می‌شود؟ فرض می‌کنیم طول موج تمام نورهای مرئی  $5600 \text{ \AA}$  باشد.

۱۲.۳ برای اینکه جسمی با چشم غیر مسلح دیده شود، شدت نوری که از جسم وارد چشم می‌شود باید حداقل برابر  $10^{-11} \text{ J/m}^2 \cdot \text{s}$  باشد. حداقل میزان فوتونهایی که باید وارد چشم شوند تا اینکه جسم دیده شود چقدر است؟ قطر مردمک چشم  $7$  سانتیمتر داده می‌شود و فرض می‌کنیم طول موج  $5600 \text{ \AA}$  باشد.

۱۳.۳ انرژی یک فوتون با طول موج  $912 \text{ \AA}$  بر حسب الکترون ولت چقدر است؟

۱۴.۳ نشان دهید که ثابت پلانک  $h$  دارای همان واحد فیزیکی تکانه زاویه‌ای است.

۱۵.۳ جسمی به جرم  $1$  گرم از یک فنر با ثابت نیروی  $25 \text{ N/m}$  آویزان است. فرض می‌کنیم این نوسان کننده درست مانند نوسان کننده‌های تابش کوانتیده است. (الف) حداقل انرژی که می‌توان به این جرم داد چقدر است؟ (ب) اگر این جسم در حال سکون حداقل انرژی قسمت الف را جذب کند، دامنه نوسان حاصل چقدر است؟ (ج) جسم چند کوانتوم انرژی باید جذب کند تا دامنه نوسان آن  $10$  سانتیمتر شود؟

۱۶.۳ ذرات یک دستگاه معین می‌توانند انرژیهای  $E$ ،  $2E$  یا  $3E$  داشته باشند که  $E = 0.25$  الکترون ولت است. (الف) اگر دستگاه در دمای  $290 \text{ K}$  در حال تعادل باشد، نسبت تعداد ذرات در هر یک از حالت‌های بالاتر به تعداد ذرات در پایینترین حالت چقدر است؟ (ب)

انرژی متوسط يك ذره در توزیع تعادلی این حالتها چقدر است؟

۱۷۰۳ در مسئله ۱۷۰۱ سرعت يك نوترون حرارتی را برابر ۲۲۰۰ متر در ثانیه به دست آوردیم. (الف) انرژی جنبشی نوترون حرارتی بر حسب الکترون ولت چقدر است؟ (ب) ازدیاد انرژی جنبشی هر مولکول آب بر حسب الکترون ولت در جریان آبی که از آبشار ۱۳۷ متری به پایین می ریزد چقدر است؟

۱۸۰۳ از شکافت يك اتم  $^{235}\text{U}$  مقدار ۲۰۰ MeV انرژی آزاد می شود. چند اتم از این نوع باید شکافته شود تا انرژی حاصل برای بالابردن يك پشه به اندازه ۲۸۵ سانتیمتر کافی باشد. جرم متوسط يك پشه ۰۹ میلی گرم است.

۱۹۰۳ نور مرئی يك لامپ نورانی ۴۰ واتی به طور عمودی بر يك سطح پتاسیوم که به فاصله ۵۰ سانتیمتر از لامپ قرار دارد، وارد می شود (الف) چقدر طول خواهد کشید تا يك اتم پتاسیوم ۲۰ الکترون ولت انرژی که برابر با تابع کار فوتوالکتریک است، جذب کند؟ لامپ را يك چشمه نقطه ای در نظر می گیریم که ۷۵٪ انرژی ورودی آن به صورت نور مرئی گسیل می شود. فرض می کنیم که سطح جذب کننده اتم پتاسیوم معادل قرصی به قطر ۵۰ Å است. (ب) اگر اتم پتاسیوم مورد تابش قرص کامل ماه قرار گیرد، چقدر طول خواهد کشید تا ۲۰ الکترون ولت انرژی جذب آن شود؟ شدت نور يك لامپ ۴۰ واتی در ۵۰ سانتیمتری ۷۴۰ برابر بزرگتر از نور قرص کامل ماه است.

۲۰۰۳ ماده حساس نسبت به نور در اغلب فیلمهای عکاسی برومور نقره AgBr است. وقتی که انرژی نور جذب شده باعث تجزیه مولکول (برومور نقره) به اتمهایش می شود، فیلم را نور گرفته فرض می کنیم. (فرایند واقعی پیچیده تر است، اما نتیجه کمی خیلی فرق نمی کند.) انرژی یا حرارت تجزیه برومور نقره برابر ۲۳۰۹ کیلوکالری به ازای هر مول است. مطلوب است محاسبه (الف) انرژی بر حسب الکترون ولت، (ب) طول موج، (ج) بسامد فوق بنی که قادر است يك مولکول برومور نقره را تجزیه کند. (د) انرژی کوانتوم تابشی که بسامد آن ۱۰۰ مگاهرتز باشد، چقدر است؟ (ه) شرح دهید که چگونه نور يك گرم شب تاب می تواند بر يك فیلم عکاسی اثر گذارد، در حالی که تابش يك فرستنده تلویزیون ۵۰۰۰۰ واتی با بسامد ۱۰۰ مگاهرتز نمی تواند. (و) آیا فیلمهای عکاسی که در جعبه کاملاً محفوظ از نور نگهداری می شوند در اثر تابش مداوم امواج رادیویی که از جعبه عبور می کنند، خراب (متأثر) می شوند؟ شرح دهید.

۲۱۰۳ وقتی يك سطح فوتوالکتریک معین با طول موجهای مختلف روشن می شود، پتانسیلهای ایستانده زیر مشاهده می شوند

$\lambda, \text{\AA}$	۳۶۶۰	۴۰۵۰	۴۳۶۰	۴۹۲۰	۵۴۶۰	۵۷۹۰
$V_s, V$	۱۲۴۸	۱۲۱۵	۰۹۹۳	۰۸۶۲	۰۷۳۶	۰۶۲۴

منحنی تغییرات پتانسیل ایستانده را (روی محور  $y$ ) نسبت به بسامد (روی محور  $x$ ) رسم

کنید. مطلوب است تعیین (الف) بسامد آستانه، (ب) طول موج آستانه، (ج) تابع کار فوتوالکتریک ماده، (د) مقدار ثابت پلانک  $h$  (مقدار  $e$  معلوم است).

۲۲.۳ تابع کار فوتوالکتریکی پتاسیوم برابر  $2.0 \text{ eV}$  است. اگر نوری با طول موج  $3000 \text{ \AA}$  بر پتاسیوم بتابد، مطلوب است تعیین (الف) پتانسیل ایستاننده، (ب) انرژی جنبشی پر انرژیترین الکترون پرتابی بر حسب الکترون ولت، و (ج) سرعت این الکترونها.

۲۳.۳ تغییر در پتانسیل ایستانندهٔ فوتوالکترونها ی گسیل شده از یک سطح چقدر خواهد بود اگر طول موج نور ورودی از  $4000 \text{ \AA}$  به  $3980 \text{ \AA}$  کاهش یابد؟ (فرض می‌کنیم تغییر طول موج به اندازه‌ای کوچک است که بتوان آن را دیفرانسیل طول موج در نظر گرفت.)

۲۴.۳ طول موج گسیل فوتوالکتریکی از یک مادهٔ معین  $6525 \text{ \AA}$  است. مطلوب است تعیین پتانسیل ایستانندهٔ ماده اگر (الف) طول موج نور تابشی  $4000 \text{ \AA}$  باشد و (ب) نور تابشی دارای بسامد دو برابر و شدت سه برابر حالت الف باشد. (ج) اگر مادهٔ مورد استفاده دارای تابع کار دو برابر باشد، جواب قسمتهای الف و ب چقدر خواهد بود؟

۲۵.۳ نور با طول موج  $4000 \text{ \AA}$  از یک فلز معین فوتوالکترتون آزاد می‌کند. فوتوالکترونها وارد یک میدان مغناطیسی یکنواخت با القای  $4-10$  تسلا می‌شوند. الکترونها به‌طور عمود بر خطوط میدان حرکت کرده و در نتیجه مسیر دایره‌ای طی می‌کنند. بزرگترین مسیر دایره‌ای دارای شعاع  $5.14$  سانتیمتر است. تابع کار فلز را به دست آورید.

۲۶.۳ سطحی تحت تابش نور تکفامی با طول موج متغیر قرار می‌گیرد. در طول موج بیش از  $5000 \text{ \AA}$  هیچ فوتوالکترونی از سطح گسیل نمی‌شود. برای حذف جریان فوتوالکتریکی ناشی از طول موجی نامعلوم، پتانسیل ایستانندهٔ  $3$  ولت لازم است. طول موج نامعلوم چقدر است؟

## مدلهای اتمی رادرفورد و بور

### ۱.۴ مقدمه

تا حال دریافته‌ایم که چگونه برای ماده، الکتروسیسته و تابش می‌باید سرشت اتمی در نظر گرفت. وجود بعضی از ذرات بنیادی را که اساسیتراز عناصر شیمیایی هستند نشان داده‌ایم. مثلاً الکترون در تمام عناصر مشترک است و یکی از اجزای ساختمانی ماده به‌شمار می‌رود. بحث دربارهٔ پرتو مثبت و طیف سنجی جرم نشان داد که ماده همچنین از اجزای با بار الکتریکی مثبت تشکیل می‌شود که جرم آنها خیلی بیشتر از جرم الکترون است. تامسون که اولین اندازه‌گیرهای کمی را روی الکترون و پرتو مثبت انجام داد، فرض کرد که یک اتم شیمیایی معمولی مخلوطی از اجزای تشکیل دهنده است. این مخلوط اصطلاحاً مدل اتمی «باسلقی» نامیده شد. در این مدل، اتم به‌صورت کرهٔ سنگین با بار مثبت در نظر گرفته می‌شود که در آن تعداد کافی الکترون قرار دارد، به‌طوری که اتم از لحاظ الکتریکی خنثی است.

### ۲.۴ بررسی دقیق اتم به‌وسیلهٔ ذرات آلفا

بر اساس آزمایشی که رادرفورد و همکارانش در سال ۱۹۱۱ انجام دادند، مدل اتمی کاملاً متفاوتی ارائه شد.

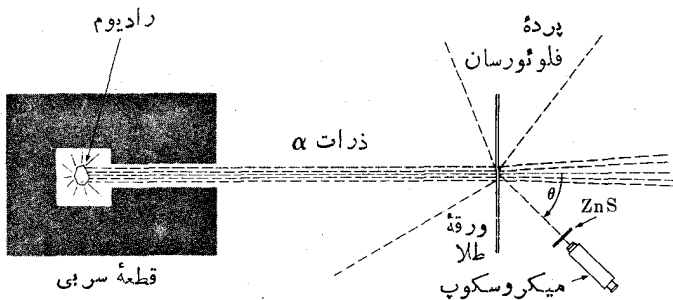
در فصل دوازدهم دربارهٔ رادیواکتیویته به تفصیل بحث خواهد شد، اما برای اینکه آزمایشهای رادرفورد را مورد بحث قرار دهیم، نیازمند به‌چند مشاهده هستیم. بعضی اتمها

ناپایدار بوده و خود به خود متلاشی می‌شوند. ماهیت این فروپاشیها بستگی به عنصر فروپاشنده دارد، اما در هر حالت پاره‌هایی که از عنصر خارج می‌شوند، یا الکترونها هستند که در اینجا پرتو بتا نام دارند و یا اتم هلیوم دوبار یونیده‌اند که ذرات آلفا نامیده می‌شوند. این پاره‌های حاصل از فروپاشی مادهٔ رادیواکتیو دارای انرژی زیاد بوده و معمولاً همراه آنها فوتون‌هایی با طول موج بسیار کوتاه به نام پرتو گاما تابش می‌شود. مثلاً رادیوم یک چشمهٔ بسیار خوب ذرات آلفای پرانرژی است. این ذرات آلفا پس از طی چند سانتیمتر-در هوا متوقف می‌شوند و در خلا بدون ازدست دادن انرژی مسافت زیادی را طی می‌کنند. موقع برخورد این ذرات با بعضی مواد نور فلئورسان مرئی تابش می‌شود.<sup>۱</sup>

رادرفورد دربارهٔ چگونگی جذب ذرات آلفای رادیوم به وسیلهٔ مادهٔ مطالعاتی انجام داد. او دریافت که ذرات آلفا در برگهٔ فلزی به ضخامت چند صدم میلی‌متر جذب می‌شوند. اما می‌توانند به آسانی از یک برگهٔ طلا به ضخامت چندین دهه زارم میلی‌متر عبور کنند. طرح دستگاه رادرفورد در شکل ۱۰۴ نشان داده شده است. رادیوم در حفره‌ای در انتهای یک مجرای باریک در داخل یک قطعه سرب قرار داده شد. ذرات آلفا در تمام جهات به‌طور کاتوره‌ای گسیل و تماماً جذب سرب می‌شوند مگر آنهایی که در راستای محور مجرا انتشار می‌یابند. بدین ترتیب، رادرفورد باریکه‌ای از ذرات آلفا که به طرف برگهٔ نازک طلا جریان داشت تهیه کرد. ذرات آلفا ضمن عبور از برگهٔ نازک، تحت زاویهٔ  $\theta$  منحرف می‌شوند و بر روی صفحهٔ فلئورسان سولفور روی جرقه‌هایی ایجاد می‌کنند که این جرقه‌ها با یک میکروسکوپ با قدرت کم قابل مشاهده‌اند.

تعداد زیادی از ذرات آلفا مستقیماً از برگهٔ نازک طلا عبور کرده یا به مقدار خیلی کم منحرف می‌شوند. با کمال تعجب بعضی از ذرات آلفا تحت زوایای خیلی بزرگ منحرف می‌شوند و حتی تعداد کمی از ذرات فرودی به همان سمتی برمی‌گردند که از آن تایییده شده‌اند. حیوت رادرفورد در این مورد از بیانش پیدا است «این اتفاق باورنکردنی‌ترین حادثه‌ای بود که در عمرم برای من رخ داد. این موضوع به همان اندازه باورنکردنی بود که یک گلوله به قطر چهل سانتیمتر را به طرف یک ورقهٔ کاغذ پرتاب کنید و ببینید که پس از برخورد برمی‌گردد و به شما برخورد می‌کند». این پراکندگی که تحت زوایای بزرگ مشاهده می‌شد متضاد پیش‌بینی‌ای بود که بر اساس مدل اتمی تامسون قرارداد داشت. حال این

۱. عقر به ساعت‌های شب‌نما با یک خمیر حاوی مادهٔ فلئورسان و کمی رادیوم آغشته می‌شود. در زیر میکروسکوپ، روشنائی عقر به‌ها به صورت تعداد زیادی جرقه به نام سنتیلیسیون دیده می‌شود که انسان را به یاد چشمک زدن ستارگان در شبهای تابستان می‌اندازد. این اثر را می‌توان با ذره‌بینی که چهار برابر بزرگ می‌کند مشاهده کرد، لکن بهتر است که بزرگنمایی ذره‌بین دو یاسه برابر بیشتر باشد. اگر مادهٔ رادیواکتیو روی عقر به‌ها کم باشد، نور کمتر پیوسته به نظر می‌آید. مشاهدات باید در اتاق کاملاً تاریک انجام بگیرد و ممکن است لازم باشد حدود پنج دقیقه صبر کنیم تا چشم به تاریکی عادت کند. این تأخیر زمانی همچنین باعث می‌شود که هر گونه فسفرسانی ضعیف و بالاخره محو شود.



شکل ۱۰۴ نمودار دستگاه رادرفورد برای مطالعه پراکندگی ذرات آلفا.

پیش بینیهارا با تفصیل بیشتری بررسی کنیم.

فرض می کنیم که یک ذره آلفا با بار  $ze$  (با  $z=2$ ) به یک اتم تامسون به شعاع  $R$  برخورد کند. اگر نیروهای مؤثر فقط نیروهای الکتروستاتیکی باشند، آیا ذره آلفا می تواند در مسیر خود برگشت داده شود؟ ذره قبل از شروع به برگشت باید لحظه ای در حالت سکون باشد، و این بدان معنی است که انرژی جنبشی آن تبدیل به انرژی پتانسیل شده است. (از آنجا که ذره آلفا خیلی سبکتر از اتمی است که با آن برخورد می کند، از انرژی جنبشی ناشی از حرکت مرکز جرم صرف نظر می کنیم.) انرژی پتانسیل برای ذره ای با بار  $ze$  در سطح ابری با بار یکسواخت به شعاع  $R$  که بار آن  $Ze$  باشد، برابر است با  $V_c = zZe^2 / 4\pi\epsilon_0 R$ . انرژی پتانسیل در مرکز ابر باردار عبارت است از

$$V_c = \frac{2zZe^2}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (104)$$

با قرار دادن  $z=2$  و (مثلاً)  $Z=80$ ،  $R \approx 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$  و مقادیر معلوم  $e$  و  $\epsilon_0$ ، پس از تبدیل به الکترون ولت  $V_c = 3456 \text{ eV}$  به دست می آید. در اینجا اثر الکترونها که البته بار مثبت را خنثی کرده و بنابراین اثر آن را به مقدار زیادی کاهش می دهد، کاملاً صرف نظر کرده ایم. در حقیقت، تنها افت و خیزهای موضعی بار در داخل اتم می توانند نیروهایی به وجود آورند که ما در پی آنها هستیم. از آنجا که انرژی جنبشی ذرات آلفای به کار برده شده در آزمایشهای رادرفورد و همکارانش حدود  $5 \text{ MeV}$  بود، بدیهی است که یک تک برخورد (ذره) با اتم تامسون نتیجه ای نمی توانست داشته باشد جز یک انحراف خیلی کوچک (در مسیر ذره). با توجه به این حقیقت که الکترون  $7000$  مرتبه سبکتر از ذره آلفا است، برخورد این ذره با الکترون نیز نمی تواند انحراف زیادی به وجود آورد، درباره برخورد های چندباره وضع چگونه است؟

یک نظریه ساده و درعین حال کافی درباره برخورد های چندباره پیش بینی می کند که تعداد ذرات منحرف شده در زاویه فضایی کوچک حول زاویه انحراف  $\theta$ ، برابر است با

$$N(\theta) = N(0) \cdot e^{-\theta^2/2\sigma^2} \quad (2.4)$$

این رابطه يك توزیع گاؤس یا توزیع معیار است که در آن  $\sigma$  انحراف معیار تعیین کننده عرض منحنی است. دونفر از همکاران رادرفورد به نامهای گایگر و مارسدن توزیع زاویه‌ای ذرات آلفای پراکنده از يك برهه نازک طلا به ضخامت ۰.۴ میکرون را اندازه گیری کردند. آنها دریافتند که از هر ۲۵۰۰۰۰ ذره حدود يك ذره در زاویه‌ای بیش از  $90^\circ$  پراکنده می‌شود. بعداً گایگر زاویه انحراف محتمل را  $\theta_p = 0.87$  درجه تعیین کرد. زاویه انحراف محتمل  $\theta_p$  بدین صورت تعریف می‌شود که به احتمال ۵۰ درصد، مقدار انحراف از میزان آن زاویه تجاوز می‌کند و رابطه آن با انحراف معیار  $\sigma = 0.6745 \theta_p$  است. برای آزمایش تشریح شده در بالا  $\sigma = 1.29^\circ$  به دست می‌آید. با قرارداد  $\theta = 90^\circ$  و  $\sigma = 1.29^\circ$  در معادله (۲.۴)، داریم

$$N(90) = N(0) \times 10^{-1060}$$

چنین عدد کوچک باور نکردنی ارزش آن را ندارد که برای تعیین کسری از باریکه ذرات که در زاویه‌ای بیش از  $90^\circ$  منحرف می‌شوند، از آن انتگرال گیری به عمل آید.

### ۳.۴ اتم هسته‌ای رادرفورد

رادرفورد نتیجه گرفت که انحرافهای بزرگ باید در اثر تک برخورد بین ذرات آلفا و اتمها رخ دهند، و بنا بر این اتم باید جایگاه میدان الکتریکی خیلی شدیدتر از میدان پیش-بینی شده توسط مدل تامسون باشد. او فرض کرد که قسمت پر جرم و با بار مثبت اتم در حجم بسیار کوچکی در مرکز آن قرار دارد. اکنون این مرکز را هسته می‌نامند که آن را ابری از الکترون‌ها احاطه کرده است و اتم را در مجموع از لحاظ الکتریکی خنثی می‌سازد. به علت اینکه بیشتر فضای اتم خالی است، بسیاری از ذرات آلفا عملاً بدون انحراف از برهه نازک طلا عبور می‌کنند. اما ذره آلفایی که از مجاورت هسته می‌گذرد، از طرف هسته سنگین و مثبت نیروی بسیار بزرگی بدان وارد می‌شود و در يك برخورد تحت زاویه بزرگی منحرف می‌شود. از معادله (۱.۴) و مثال متعاقب آن واضح است که شعاع هسته باید بیش از هزار برابر کوچکتر از شعاع اتم باشد تا اینکه هستم قادر شود ذره آلفا را متوقف کرده و آن را در مسیر خود به عقب براند. برخورد با الکترون‌ها به انحرافات خیلی کوچکی منجر می‌شود و بنا بر این می‌توان از آن صرف نظر کرد.

۱. یادآوری می‌شود که رادرفورد در مقاله خیلی مشهور خود درباره پراکنده‌گی ذرات آلفا به وسیله ماده، زاویه محتمل را چنین معرفی می‌کند «محتملترین زاویه انحراف». ولی محتملترین زاویه یعنی بیشینه توزیع معیار که به وضوح برابر است با  $\theta = 0$ . بنا بر این حتی دانشمندان بزرگ هم اشتباه می‌کنند، و گاهی هم از این بدترا رک

حال يك تك برخورد بين ذره آلفا وهسته را (از نظر قوانین مکانیک) مطالعه خواهیم کرد که هدف آن یافتن رابطه‌ای دیگر به جای رابطه (۲.۴) برای توزیع زاویه‌ای ذرات آلفای پراکنده شده به وسیله برکه‌ای نازک است.

شکل ۲.۴ مسیریک ذره آلفا را که به هسته‌ای با پارامتر برخورد  $b$  نزدیک می‌شود نشان می‌دهد. این پارامتر فاصله بین هسته و مسیر مستقیم می‌است که ذره آلفا بدون وجود برهم-کنش طی می‌کرد. مطابق شکل ۲.۴، با استفاده از یک دستگاه مختصات قطبی  $(r, \phi)$  قانون بقای انرژی را می‌نویسیم

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (3.4)$$

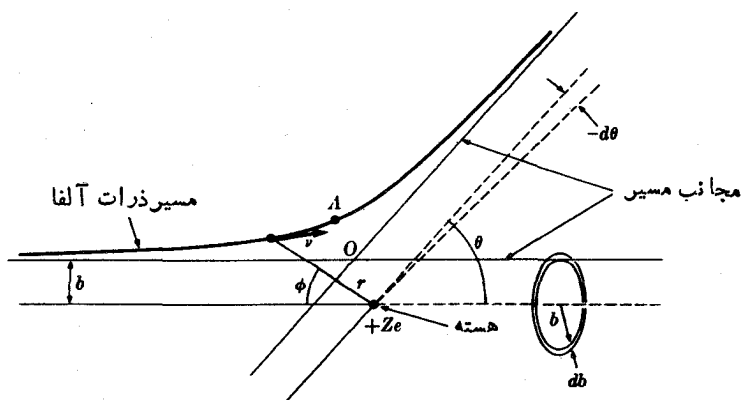
که در آن  $v_0$  سرعت اولیه مجانبی ذره آلفا است. فرض کرده‌ایم که هسته به اندازه‌ای سنگینتر از ذره آلفا است که می‌توان از پس‌زنی هسته صرف‌نظر کرد. بنابراین قانون بقای تکانه زاویه‌ای می‌توان نوشت

$$mr^2\frac{d\phi}{dt} = mv_0 b$$

یا

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{v_0 b}{r^2} \quad (4.4)$$

حال برای سهولت پارامتر  $q$  را که برابر با نزدیکترین فاصله در یک برخورد  $bb \gg$  است، وارد می‌کنیم



شکل ۲.۴ پراکنندگی ذره آلفا به وسیله هسته اتم رادرفورد.



$$\gamma q = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 m v_0^2} \quad (5.4)$$

از ترکیب معادلات (۳.۴)، (۴.۴) و (۵.۴) رابطه زیر به دست می‌آید

$$\frac{dr}{dt} = \mp v_0 \left( 1 - \frac{\gamma q}{r} - \frac{b^2}{r^2} \right)^{1/2} \quad (6.4)$$

دو علامت مثبت و منفی ناشی از ریشه دوم است. واضح است که سرعت شعاعی  $dr/dt$  در ابتدا منفی است و سپس در حداقل فاصله با هسته علامت آن به مثبت تغییر می‌کند (شکل ۲.۴) مجدداً از ترکیب معادله‌های (۶.۴) و (۴.۴) معادله زیر به دست می‌آید

$$\frac{d\phi}{dt} = \mp \frac{b}{r^2} \left( 1 - \frac{\gamma q}{r} - \frac{b^2}{r^2} \right)^{-1/2} \quad (7.4)$$

این معادله دیفرانسیلی است که مسیر حرکت را در دستگاه مختصات  $(r, \phi)$  مشخص می‌کند. با استفاده از جدول انتگرالها، برای اولین قسمت مسیر از  $r = \infty$  تا نقطه  $A$  در شکل ۲.۴، معادله زیر را آوریم

$$\begin{aligned} \phi = & \text{Arc cos} \left[ \frac{b}{(b^2 + q^2)^{1/2}} \left( 1 - \frac{\gamma q}{r} - \frac{b^2}{r^2} \right)^{1/2} \right] \\ & - \text{Arc cos} \frac{b}{(b^2 + q^2)^{1/2}} \end{aligned} \quad (8.4)$$

در اینجا از بینهایت تا  $r$  انتگرال گرفته‌ایم و علامت منفی را در معادله (۷.۴) به کار برده‌ایم. در نقطه  $r$  داریم  $dr/dt = 0$  که با قرار دادن آن در رابطه (۶.۴) در نقطه  $A$  رابطه زیر به دست می‌آید

$$1 - \frac{\gamma q}{r} - \frac{b^2}{r^2} = 0$$

زاویه  $\phi$  مربوط به این نقطه بنا بر معادله (۸.۴) برابر است با

$$\phi_A = \frac{\pi}{2} - \text{Arc cos} \frac{b}{(b^2 + q^2)^{1/2}} \quad (9.4)$$

مسیر نسبت به نقطه  $A$  قرینه است، زیرا که  $d\phi/dr$  عدداً فقط تابع  $r$  است، و نه تابع  $\phi$  [معادله (۷.۴)]. بنابراین بردار شعاع  $r$  زاویه کل  $2\phi_A$  را جاروب می‌کند. از شکل (۲.۴) می‌بینیم که زاویه کل انحراف برابر است با

$$\theta = \pi - 2\phi_A = 2 \text{Arc cos} \frac{b}{(b^2 + q^2)^{1/2}} \quad (10.4)$$

که از آن به دست می آید

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{b}{(b^2 + q^2)^{1/2}} \quad (11.4)$$

و به آسانی رابطه زیر حاصل می شود

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{q}{(b^2 + q^2)^{1/2}} \quad (12.4)$$

از ترکیب معادلات (۱۱.۴) و (۱۲.۴) به دست می آوریم

$$b = q \cot \frac{\theta}{2} \quad (13.4)$$

بدین ترتیب این يك رابطه ساده بین پارامتر برخورد  $b$  و زاویه انحراف کل  $\theta$  است. هدف به دست آوردن رابطه‌ای برای توزیع زاویه‌ای ذراتی بود که به وسیله يك برگه نازک حاوی تعداد زیادی از مراکز پراکنندگی (هسته‌ها) پراکنده می شوند. بهترین کاری که می توانیم انجام دهیم محاسبه مقطع برخورد (بخش ۱۰.۱) فرایند است. ابتدا این مفهوم را کمی تعدیل خواهیم کرد. در بخش ۱۰.۱ مقطع برای يك فرایند برخورد، مساحت هدف معرفی شد. هر برخوردی با این مساحت به انحراف ذره «گلوله‌ای» منجر می شد. در آنجا، هیچ چیز درباره جهت ذره پراکنده شده بعد از برخورد گفته نشد. شکل ۲.۴ حلقه‌ای را که نمایشگر مساحت هدف برای تمام ذرات آلفا با پارامترهای برخورد بین  $b$  و  $b+db$  است نشان می دهد، که برای روشنی به طرف راست جابجاء شده است. این مساحت برابر است با

$$d\sigma = 2\pi b db \quad (14.4)$$

تمام ذراتی که به این مساحت هدف گیری شده اند دارای زاویه پراکنندگی بین  $\theta$  و  $\theta+d\theta$  خواهند بود، که  $\theta$  به وسیله معادله (۱۳.۴) داده می شود و  $d\theta$  با دیفرانسیل گیری از همین معادله به دست می آید

$$db = -\frac{q}{2} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta/2} \quad (15.4)$$

زاویه‌های  $\theta$  و  $\theta+d\theta$  معرف دومخروط است و خط افقی که از هسته عبور می کند محور آنها است (شکل ۲.۴). زاویه فضایی بین دومخروط برابر  $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$  است، و همین زاویه فضایی است که ذرات جهت گیری شده به مساحت  $d\sigma$  هدف، در آن پراکنده خواهند شد. حال با جا گذاری در معادله (۱۴.۴) و صرف نظر کردن از علامت منفی آن رابطه زیر به دست می آید

$$d\sigma = \frac{\pi q^2 \cos \phi / 2 d\theta}{\sin^3 \theta / 2} = \frac{q^2 \pi \sin \theta d\theta}{2 \sin^4 \theta / 2} = \frac{q^2 d\Omega}{2 \sin^4 \theta / 2} \quad (16.4)$$

بالاخره با قراردادن مقدار  $q$  از معادله (۵.۴) در این معادله رابطه مقطع رادرفورد را به دست می آوریم

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{z^2 Z^2 e^4}{64 \pi^2 \epsilon_0^2 m^2 v_0^4 \sin^4 \theta / 2} \quad (17.4)$$

تعبیر این معادله بدین نحو است که هر هسته معرف يك مساحت هدف  $d\sigma$  برای انحراف ذره به مقدار  $\theta$  به داخل زاویه فضای  $d\Omega$  است. بر گه نازك هدف دارای  $n$  اتم در واحد حجم و ضخامت  $\Delta x$  است، و آشکارساز تحت زاویه  $\theta$  قرار دارد و هدف را با زاویه فضای  $d\Omega$  در بر می گیرد. با استفاده از معادله (۳۵.۱) کسر ذرات آلفای پراکنده شده از باریکه به طرف آشکارساز را به دست می آوریم

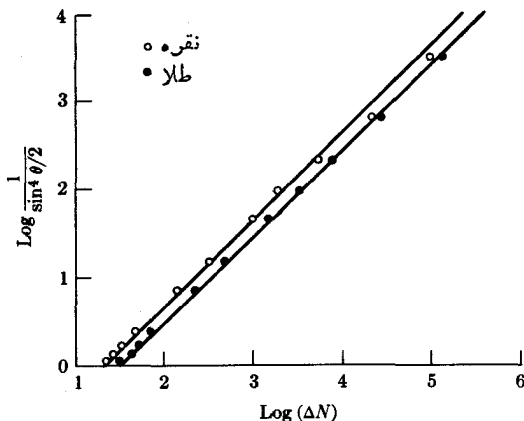
$$\frac{\Delta N}{N} = n \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) \Delta \omega \Delta x \quad (18.4)$$

که مقطع دیفرانسیل  $d\sigma/d\Omega$  با رابطه (۱۷.۴) داده شده است.

رابطه رادرفورد برای  $\theta = 0$  مقطع را بینهایت به دست می دهد. این مقدار مربوط به  $b \rightarrow \infty$  می شود، و البته که در عمل پارامترهای برخورد بینهایت نداریم. در حقیقت می توانسیم به طور تقریب حد بالای  $b$  را شعاع اتم قرار دهیم، زیرا در خارج از اتم میدان الکتریکی هسته به وسیله الکترونهاى اتم خنثی می شود.

به جز ناحیه نزدیک به  $\theta = 0$ ، می بینیم که توزیع زاویه ای ذرات آلفا با عامل  $(\sin \theta / 2)^{-4}$  بیان می شود. این عبارت تقریباً به همان سرعتی که معادله (۲.۴) با  $\theta$  تغییر می کند، تغییر نمی کند. رادرفورد دریافت که تمام داده های در دسترس یا پیش بینیهاش مطابق داشت و بدین ترتیب مدل هسته ای اتم پا به عرصه وجود نهاد و آن در سال ۱۹۱۱ بود. در سال ۱۹۱۳ گایگر و مارسدن نتایج آزمون بسیار جامعی از نظریه رادرفورد را انتشار دادند. آنها از برگه های نازك نقره و طلا به عنوان هدفهایی برای ذرات آلفا استفاده کردند و آهنگک سوسوزنیها را بر حسب زاویه در گستره زاویه ای وسیعی ثبت کردند. شکل ۳.۴ این نتایج را نشان می دهد. در این نمودار طبق رابطه رادرفورد، تمام نقاط يك آزمایش معین باید روی خطی مستقیم با شیب  $45^\circ$  قرار گیرند. مطابقت بسیار خوب است، به ویژه با توجه به این حقیقت که آهنگک شمارش به کمک چشم اندازه گیری می شد و این اندازه گیریها تقریباً تا چهار مرتبه دهگانی تغییر می کرد.

گایگر و مارسدن و بعداً چادویک نیز سعی کردند تا مقادیر مطلق آهنگک پراکنده گی (یعنی مقطع) را اندازه بگیرند به نحوی که از این طریق بتوانند بارهسته ای  $Z$  را تعیین



شکل ۳.۴ نمایش تغییرات لگاریتمی ( $\Delta N$ ) تعداد ذرات آلفای پراکنده شده بر حسب زاویه پراکندگی  $\theta$ .

کنند. آنها نتیجه گرفتند که  $Z$  تقریباً نصف عدد جرم اتمی است. اندازه گیریهای خیلی دقیقتر  $Z$  برای تعداد زیادی از عناصر تقریباً در همان زمان توسط موزلی انجام شد. آزمایشهای او با استفاده از پرتو ایکس گسیل شده به وسیله عناصر مختلف نشان داد که  $Z$  با عدد اتمی یکی است؛ و این عددی است که جای عنصر را در جدول تناوبی به دست می دهد. از این موضوع در فصل دهم با تفصیل بیشتری بحث خواهد شد.

#### ۴.۴ اندازه هسته

مطالعات مفصلی که از پراکندگی آلفا در آزمایشگاه رادرفورد روی تعداد زیادی عناصر انجام پذیرفت فوراً آشکار ساخت که قانون ساده  $(\sin \theta / 2)^{-4}$  همیشه برقرار نیست. این ناهماهنگی برای عناصر سبک و به ویژه در زوایای بزرگ انحراف اتفاق می افتد. این موضوع فوراً به عنوان شکست قانون نیروی  $r^{-2}$  در فواصل کوچک تعبیر شد. به عبارت دیگر، این امر آشکار کرد که هسته یک بار نقطه ای نیست و در فواصل کوچک نیروهای دیگری غیر از نیروی کولنی عمل می کنند. تخمین شعاعی که در آن، این نیروها حرکت ذرات آلفا را تحت تأثیر قرار می دادند امکان پذیر بود که برای اتمهای میان-جرم در حدود  $5 \times 10^{-15} \text{m}$  برآورد شد. حال می دانیم که هسته از پروتونها و نوترونهایی تشکیل می شود که به وسیله نیروهای کوتاه-برد ولی بسیار قوی با هم نگاه داشته شده اند. یک ذره آلفا ضمن نزدیک شدن به سطح هسته ای، تحت تأثیر این نیروها قرار می گیرد و ممکن است پراکنده شده یا به اجزای خود، یعنی دو پروتون و دو نوترون، شکسته شود. مطالعه ایسن فرایندها قسمتی از فیزیک

هسته‌ای است که به اختصار در فصل دوازدهم بحث شده است.

### ۵.۴ طیفها

بیشتر خوانندگان این کتاب درباره نور مطالعه کرده‌اند و می‌دانند که طیف نگارها وسایلی هستند که نور را بر حسب توزیع بسامد یا رنگ تجزیه می‌کنند. این دستگاهها همیشه از يك شكاف ورودی، يك وسیله پاشنده که ممکن است منشور یا توری باشد، و يك آشکارساز که معمولاً يك صفحه عکاسی است، تشکیل می‌شوند. این دستگاه تصویری از شكاف را روی آشکارساز می‌اندازد، عمل کانونی کردن نور به وسیله مجموعه‌ای از عدسیها، یا در حالت طیف‌سنج با توری بازتابنده به کمک انحنای توری، انجام می‌پذیرد. برای هر بسامد نور موجود تصویر مجزایی ایجاد می‌شود، بدین ترتیب نوری که دارای توزیع پیوسته بسامد باشد، تصویر پهنی تشکیل می‌دهد که توالی پیوسته تصاویر شكاف است. نوری که توزیع بسامد آن ناپیوسته باشد يك دسته تصاویر مجزا از شكاف تشکیل می‌دهد که خطوط طیف نامیده می‌شود.

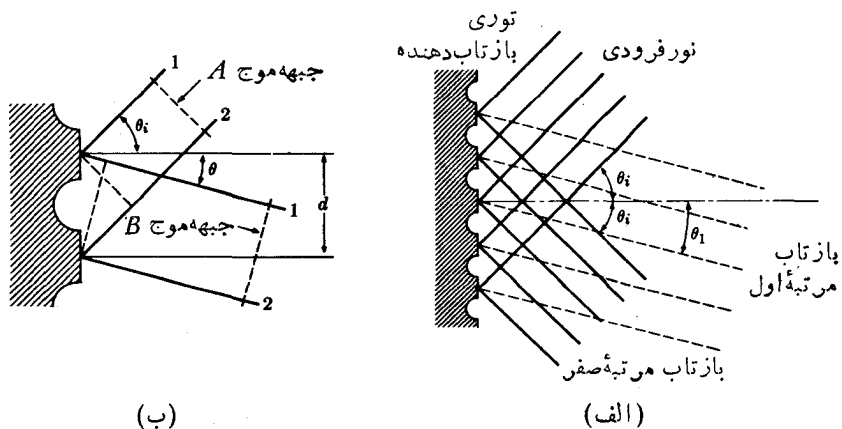
شکل ۴.۴ الف يك توری بازتابنده را نشان می‌دهد که با ایجاد شیارهای نازک در روی سطح يك فلز بسیار بازتابنده ساخته شده است. يك باریکه موازی نور که تحت زاویه  $\theta_i$  باخط عمود بر سطح آینه وارد می‌شود، همان‌طور که در شکل نشان داده شده، در مرتبه صفر به نحوی بازتاب خواهد یافت که با زاویه  $\theta_r$  از سطح خارج می‌شود. بیشینه مرتبه اول در زمینه پراش در زاویه  $\theta_1$  رخ خواهد داد و اگر توری دارای تعداد زیادی خط باشد، این بیشینه تیز (واضح) خواهد بود.

شکل ۴.۴ ب دو پرتو تأیید بر روی يك توری را با تفصیل بیشتر نشان می‌دهد. نقاطی که این دو پرتو با توری برخورد می‌کنند، چشمه‌هایی از نور هستند که در تمام جهات تابش می‌کنند. برای به دست آوردن تداخل سازنده وقتی که بعداً دو پرتو در يك نقطه روی آشکارساز کانونی می‌شوند، جبهه‌های موج باید عمود بر راستای حرکت باشند. این وضع وقتی به وجود خواهد آمد که اختلاف طول مسیر از جبهه موج  $A$  تا جبهه موج  $B$  مضرب درستی از طول موج باشد، یعنی

$$d(\sin \theta_i - \sin \theta) = n\lambda \quad (19.4)$$

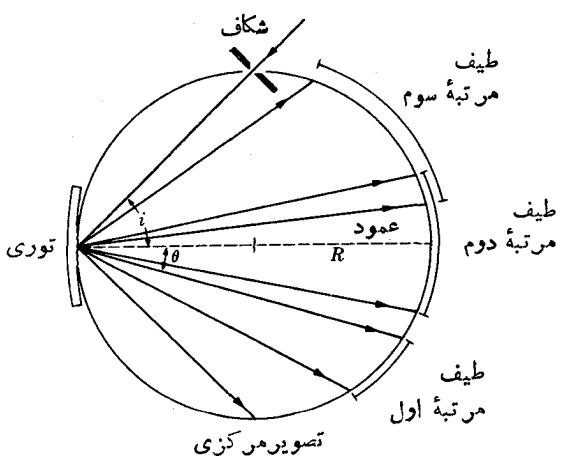
که در آن  $n$  عددی درست است. برای  $n = 0$  داریم  $\theta = \theta_i$  که مستقل از  $\lambda$  است. برای  $n = 1$  یا بیشتر، می‌بینیم که  $\sin \theta$  تابع  $\lambda$  است. بنابراین توری نور را مطابق با طول-موجهای اجزای آن می‌پاشاند.

شکل ۵.۴ طرح يك طیف‌سنج توری کاو را نشان می‌دهد. توری بازتابنده دارای شعاع انحنای  $2R$  است. شكاف ورودی نور و صفحات آشکارساز روی دایره‌ای به شعاع  $R$  قرار دارند. بنابراین می‌توان نشان داد که با عمل کانونی کردن توری آینه‌ای تصاویر تیز (واضح) شكاف روی آشکارساز به وجود خواهد آمد.



شکل ۴.۴ (الف) بازتاب نور موازی از يك توری، (ب) تفصیل بازتاب مرتبه اول. مسیر (۲) به اندازه يك طول موج طولانیتر از مسیر (۱) است.

طیف نمایی با استفاده از طیف سنجهای منشوری و همچنین طیف سنجهای توری، در اواخر قرن گذشته علم کاملاً پیشرفته‌ای بود. معلوم شد که نور هر عنصر گازی شکل، يك طیف خطی ناپیوسته به وجود می آورد. هر عنصری توزیع بسامد مشخصه خود و یا طیف خود را دارد، به طوری که هر عنصر را می توان به وسیله نوری که گسیل می دارد شناسایی کرد. مهمیترین لحظه چنین شناسایی وقتی اتفاق افتاد که عنصر هلیوم، قبل از اینکه روی زمین به طور شیمیایی مجزا شود، در طیف خورشید «کشف» شد.



شکل ۵.۴ طیف سنج توری کاو. تصاویر شکاف به کمک انحنای توری (۲R) که چون يك آینه کاو عمل می کند، بر روی صفحات عکاسی تشکیل می شود.

گسیل خطوط طیف به وسیله اتم‌های گاز می‌تواند احتمالاً تا حدودی به طریق زیر بر اساس مدل اتم تامسون تشریح شود: يك الكترون به وسیله نیروی الکتريکی و احتمالاً نیروهای دیگر در قید اتم است و معمولاً در يك وضعیت تعادلی به حال سکون قرار دارد. در نتیجه برخورد دو اتم به یکدیگر، الکترون از این وضعیت خارج شده نوسانهای انجام خواهد داد. از آنجا که الکترون باردار است از آن انرژی تابش خواهد شد که بسامد آن با بسامد نوسانها برابر است. اگر نوسانها دقیقاً هماهنگ نباشند (یعنی اگر متناسب با  $\sin \omega t$  نباشند)، الکترون هماهنگهای بالاتر را نیز تابش خواهد کرد. مسئله این است که هیچ اتمی خطوط طیفی با بسامدهایی که هماهنگ ساده يك بسامد اساسی باشد، تابش نمی‌کند. تمام عناصر گروههای متعددی از خطوط که در طیف بسیار وسیعی از بسامد گستردگی دارند را نشان می‌دهند. نظمهای معینی در این خطوط دیده می‌شود (که در بخش بعدی خواهیم دید) اما شواهدی که تصویر بالا را تأیید کند، به دست نیامده است.

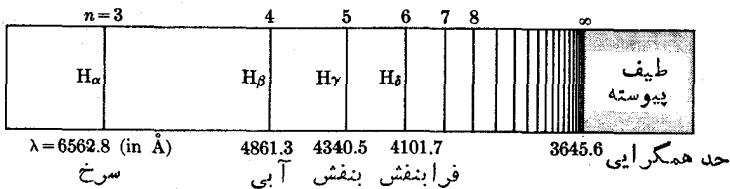
پس از کشف هسته به وسیله رادرفورد، فوراً پیشنهاد شد که الکترون‌ها در مدارهایی در اطراف هسته حرکت می‌کنند و جاذبه الکتروستاتیکی، نیروی مرکز گرا را به وجود می‌آورد. مشکل این مدل این است که الکترون در شتاب دائمی است (شتاب مرکز گرا) و بر طبق نظریه الکترومغناطیس کلاسیک، يك بار  $e$  شتابدار توانی به میزان (وات)  $P = e^2 a^2 / 6\pi\epsilon_0 c^3$ ، که در آن  $a$  شتاب است، تابش می‌کند. يك محاسبه ساده نشان می‌دهد که الکترون‌ها در گردش به دور هسته باید انرژی از دست داده و در مسیری مارپیچی به سمت هسته حرکت کنند، این حرکت آن‌چنان سریع است که کل ماده باید در حدود  $10^{-8}$  ثانیه در هم فرو یزد.

این وضعیت در مقابل یکی از باهوشترین فلاسفه طبیعی عصر جدید، نیلس بور، قرار گرفت (بخش ۷.۴). قبل از معرفی نظریه ساده و در عین حال انقلابی او، داده‌های تجربی را که مبنای نظریه اوهستند با کمی تفصیل بحث خواهیم کرد.

## ۶.۴ طیف هیدروژن

بدیهی است برای آغاز مطالعه طیف‌ها، طیف هیدروژن مناسبتر است. جای تعجب نیست که این سبکترین عنصر دارای ساده‌ترین طیف و احتمالاً ساده‌ترین ساختار است. قسمتی از طیف هیدروژن در شکل ۶.۴ نشان داده شده است. نظم این خطوط طیف فوراً روشن می‌سازد که باید رابطه‌ای بین آنها وجود داشته باشد. در سال ۱۸۸۴ يك معلم ریاضی دبیرستان در سوئیس به نام بالمر طول موجهای مربوط به این خطوط را به عنوان يك مسئله اعداد در نظر گرفت. او سعی کرد تا فرمولی به دست آورد که بستگی بین اعداد را نشان دهد. او به فرمولی رسید که می‌توانست این طول موجها را دقیقاً به دست دهد. فرمول بالمر به صورت زیر است

$$\lambda(\text{آنگستروم}) = \frac{364506n^2}{n^2 - 4}$$



شکل ۶.۴ نموداری از سری بالمر اتم هیدروژن. (مقادیر طول موجها مربوط به تابش در هوا است.)

با قراردادن اعداد درست مختلف به جای  $n$  در معادله یعنی  $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots$  طول موجهای مختلف به دست می آیند.

موفقیت رابطه بالمر، ریدبرگ را در به دست آوردن فرمولی برای عناصر سنگینتر راهبرشد. او معادله زیر را پیشنهاد کرد

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = A - \frac{R}{(n + \alpha)^2} \quad (21.4)$$

که در آن  $\bar{\nu}$  عدد موج<sup>۱</sup>،  $R$  ثابت ریدبرگ برابر با  $10^7 \times 1097373 \text{ m}^{-1}$  و  $n$  یک عدد درست متغیر است.  $A$  و  $\alpha$  اعداد ثابت تطبیقی هستند که بستگی به عنصر و قسمتی از طیف یا سری طیف دارند که فرمول در آن قسمت به کار می رود. ریدبرگ دریافت این فرمول، که آن را می توان تعمیم فرمول بالمر در نظر گرفت، می تواند بر بسیاری از سریهای طیف منطبق شود و به علاوه وقتی که فرمول برای عناصر مختلف به کار می رود، مقسدار  $R$  تقریباً ثابت است.

۱. عدد موج،  $\bar{\nu}$  به طوری که در طیف نمایی به کار می رود برابر تعداد موجها در واحد طول است و با عدد موج متداولتر  $k$  که در فصل سوم به کار رفته به اندازه عامل  $2\pi$  فرق دارد. ممکن است به نظر منطقی آید که به جای عکس طول موج، بسامد  $c/\lambda$ ، به کار برده شود. در طیف نمایی عدد موج به کار می رود، زیرا برای این که بسامد، بدون از دست رفتن دقت قابل ملاحظه ای که در اندازه گیری طول موج وجود داشته، حساب شود لازم است سرعت نور را به همان دقت درست داشت. اعداد موج را می توان بدون دانستن سرعت نور حساب کرد. بنابراین این اعداد دارای تمام دقتهای مربوط به اندازه گیریهای طیف نمایی طول موج هستند. به هر حال عدد موج یک ثابت مطلق برای یک خط طیف معین نیست، زیرا طول موج مربوط به آن بستگی به ضریب شکست محیطی دارد که اندازه گیری در آن انجام می گیرد. طول موجهایی که در هوا اندازه گیری می شوند نسبت به خلا<sup>۲</sup> به وسیله رابطه  $\lambda_{vac} = \mu \lambda_{air}$  تصحیح می شوند که در آن  $\mu$  ضریب شکست نور در هوا برای طول موج معین است. در ناحیه نور مرئی  $\lambda_v$  (برای خلا<sup>۲</sup>) تقریباً  $10^{-2} \times 2.5$  درصد بیشتر از  $\lambda_a$  (برای هوا) است.



در سال ۱۹۰۸ ریتمس متوجه شد که اعداد موج مربوط به بسیاری از خطوط طیف برابر اختلاف بین اعداد موج خطوط طیف دیگر است و در فرمول ری‌دبرگ عبارت  $A$ ، مانند عبارت دوم، واقعاً مقدار ویژه‌ای دارد. با استفاده از «اصل ترکیب»، ریتمس فرمول ری‌دبرگ را چنین بازنویسی کرد

$$\bar{\nu} = \frac{R}{(m+\beta)^2} - \frac{R}{(n+\alpha)^2} \quad (22.4)$$

که در آن  $\alpha$  و  $\beta$  اعداد ثابت تطبیقی هستند که بستگی به عنصر دارند. برای سری‌های مختلف طیف یک عنصر معین،  $m$  مقادیر درست مختلفی را می‌گیرد. خطوط مختلف یک سری با تغییر عدد درست  $n$  به دست می‌آید. به آسانی نشان داده می‌شود که با قرار دادن  $\alpha = \beta = 0$  و  $m = 2$ ، معادله (۲۲.۴) به فرمول بالمر برای هیدروژن تبدیل می‌شود.

در همان سال، ۱۹۰۸، پاشن سری دیگری از خطوط طیف هیدروژن را در ناحیه فرورسوخ پیدا کرد که معادله (۲۲.۴) با قرار دادن  $\alpha = \beta = 0$  و  $m = 3$  و  $n = 4, 5, 6, \dots$  با آن تطبیق دارد. بنابراین هر دوسری معلوم هیدروژن (در آن زمان) را می‌توانستند با رابطه زیر نشان دهند

$$\bar{\nu} = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (23.4)$$

این رابطه سری بالمر را با قرار دادن  $m = 2$  و  $n = 3, 4, 5, \dots$  به دست می‌دهد و سری پاشن را با قرار دادن  $m = 3$  و  $n = 4, 5, 6, \dots$  بدرستی پیش‌بینی می‌کند.

## ۷.۴ مدل و نظریه بور درباره اتم

معادله (۲۳.۴) تمام طیف شناخته شده اتم هیدروژن را با دقت زیاد نشان می‌داد، اما یک فرمول تجربی بود. با وجود کوشش‌های زیاد، استخراج آن بر اساس قوانین شناخته شده فیزیکی ممکن نبود. در سال ۱۹۱۳ بور موفق شد این رابطه مهم را فقط با نقض مفاهیم فیزیک کلاسیک که باور بر استقرار کامل آنها بود، به دست آورد.

بور مدل اتم رادرفورد را گسترش داد. او با حفظ قلب کوچک یا هسته اتم پیشنهاد کرد الکترونها، که بخشی از اتم محسوب می‌شدند، در مدارهایی حول هسته در حرکت‌اند. در مورد هیدروژن، وی گفت که هسته حاوی یک پروتون است و یک الکترون حول آن در گردش است. این مدل سیاره‌ای اتم است که در آن هسته سنگین مثبت شبیه خورشید و الکترون سبک منفی شبیه زمین است. در این مدل، اتم هیدروژن یک دستگاه منظومه شمسی تک ستاره‌ای بسیار کوچک است که نیروی جاذبه الکتروستاتیکی بین دو بار مخالف جایگزین نیروی گرانشی منظومه شمسی شده است. معادله‌های عمومی نیروی گرانشی و نیروی الکتروستاتیکی به ترتیب عبارت‌اند از

$$F = G \frac{MM'}{r^2} \quad \text{و} \quad F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \quad (24.4)$$

هر دو نیرو متناسب با عکس مجذور فاصلهٔ بین دو ذره است. مدار حرکت سیاره‌های منظومهٔ شمسی بیضی نزدیک به دایره است. بور فرض کرد که الکترون سیاره‌ای هیدروژن در مدار دایره‌ای حرکت می‌کند تا بدین ترتیب بررسی جنبه‌های کلاسیک مسئله آسان باشد. فرض می‌کنیم  $v$  سرعت مماسی جسمی به جرم  $M'$  باشد که در اطراف جسم دیگری با جرم بسیار زیاد  $M$  در مدار دایره‌ای به شعاع  $r$  حرکت می‌کند. دوران در اطراف مرکز جرم دستگاه که عملاً در مرکز جرم با جرم زیاد قرار دارد، انجام می‌گیرد. نیروی مرکز گراکه بر  $M'$  وارد می‌شود همان نیروی جاذبهٔ گرانشی مربوط به جرم  $M$  است. بنابراین داریم

$$F = G \frac{MM'}{r^2} = M'a = \frac{M'v^2}{r} \quad (25.4)$$

که از آن می‌توان رابطهٔ زیر را به دست آورد

$$v^2 = \frac{GM}{r} \quad (26.4)$$

در مدل اتمی بور، یک الکترون با بار الکتریکی  $e$ ، جرم  $m_e$  و با سرعت مماسی  $v$  در روی مدار دایره‌ای به شعاع  $r$  حول هسته با جرم زیاد و بار الکتریکی مثبت  $Ze$  در حرکت است. در این حالت نیز مرکز مدار در مرکز هستهٔ سنگین قرار دارد. نیروی مرکز گرایی که بر الکترون مداری وارد می‌شود نیروی جاذبهٔ الکتروستاتیکی بارهسته است، و بنا بر این معادلهٔ نیرو چنین است

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze \cdot e}{r^2} = m_e a = \frac{m_e v^2}{r} \quad (27.4)$$

از این رابطه می‌توان رابطهٔ زیر را به دست آورد

$$v^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r} \quad (28.4)$$

(در مورد هیدروژن، عدد اتمی  $Z$  برابر یک است.  $Z$  را برای حالت کلی به کار می‌بریم.) هر یک از معادله‌های (۲۶.۴) و (۲۸.۴) رابطه‌ای بین متغیرهای  $v$  و  $r$  به دست می‌دهد. اگر یکی از آنها معلوم باشد دیگری را می‌توان به دست آورد. در حالت گرانشی، هر جفت از دو مقدار  $r$  و  $v$  که در معادلهٔ (۲۶.۴) صدق کند، ممکن است عملاً وجود داشته باشد. در مورد بارهای الکتریکی، فیزیک کلاسیک از لحاظ تعداد جوابها برای معادلهٔ (۲۸.۴) محدودیتی ایجاد نمی‌کند. در مورد اتم هیدروژن، بور شرط محدودکننده‌ای ارائه کرد که اصل موضوع اول بور خوانده می‌شود. او فرض کرد تمام مدارهای ممکن که به وسیله

معادله (۲۸.۴) محاسبه می‌شود در اتم هیدروژن وجود ندارد. بنا بر اصل موضوع اول بور فقط آن مدارهایی وجود دارند که اندازه حرکت زاویه‌ای الکترون در آنها مضرب درستی از  $h/2\pi$  یعنی  $nh/2\pi$  باشد. در اینجا  $n$  عدد درست و  $h$  ثابت پلانک است. اصل موضوع اول بور شامل اعداد درستی است که در فرمول ریتس آمده و نیز شامل عدد ثابت پلانک است که نقش مهمی در نظریه اتمی تابش دارد. اصل موضوع اول بور را به‌طور ریاضی می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$m_e v r = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar \quad (29.4)$$

که در آن  $n = 1, 2, 3, \dots$  و  $\hbar$  که «هاش بار» خوانده می‌شود، برابر ثابت پلانک تقسیم بر  $2\pi$  است.

الکترون مداری اتم هیدروژن باید شرایط معادله‌های (۲۸.۴) و (۲۹.۴) را به‌طور همزمان دارا باشد. پس از حذف  $v$  بین این دو معادله درمی‌یابیم که فقط مدارهایی در اتم هیدروژن وجود دارند یا «مجازند» که شعاع آنها از رابطه زیر به‌دست آید

$$r = \frac{\epsilon_0 h^2 n^2}{\pi m_e Z e^2} \quad (30.4)$$

با جا‌گذاری مقادیر عددی در رابطه نتیجه می‌شود

$$r = 0.0529 n^2 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.0529 n^2 \text{ \AA} \quad (\text{الف } 30.4)$$

بنابراین شعاع «اولین مدار بور»  $0.0529 \text{ \AA}$  است، و شعاع دومین مدار  $0.2116 \text{ \AA}$  والی آخر. در بحث انرژی الکترون سیاره‌ای از قرارداد متداول استفاده می‌کنیم که بنا بر آن انرژی پتانسیل الکترونی که در فاصله بینهایت از هسته باشد، صفر است. بنا بر این انرژی پتانسیل یک بار الکترونی منفی در فاصله  $r$  از هسته با بار مثبت  $Ze$  برابر است با

$$E_p = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (31.4)$$

یادآور می‌شود که انرژی پتانسیل الکترون در این حالت در بینهایت صفر و در جای دیگر منفی است. با استفاده از معادله (۲۸.۴) می‌توانیم انرژی جنبشی الکترون را پیدا کنیم

$$E_k = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (32.4)$$

انرژی کل الکترون سیاره‌ای برابر مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل است

$$E = E_k + E_p = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (33.4)$$

در اینجا، انرژی کل را بر حسب  $r$  محاسبه کرده ایم. اما دیده ایم که  $r$  فقط مقادیری را که معادله (۳۰.۴) به دست می دهد می تواند دارا باشد. با حذف  $r$  به کمک معادله (۳۰.۴) رابطه زیر به دست می آید

$$E_n = - \frac{m_e e^4 Z^2}{8 \epsilon_0^2 h^2 n^2} \quad (۳۴.۴)$$

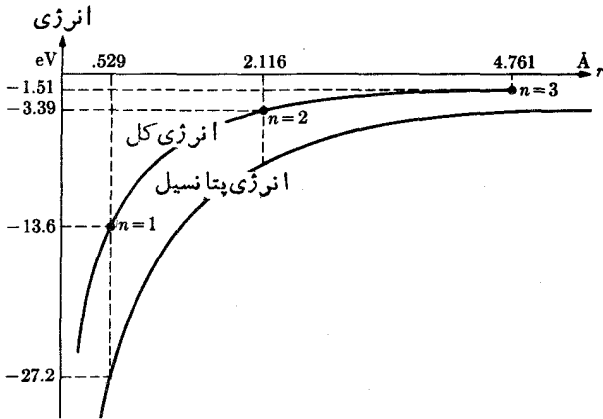
که برای حالت های ممکن انرژی الکترون<sup>۱</sup> داریم  $n = 1, 2, 3 \dots$ . عدد درست  $n$  را عدد کوانتومی اصلی یا کلی می نامند که می تواند هر یک از مقادیر ۱، ۲، ۳، ... را دارا باشد. مقادیر  $n$  انرژی حالت های مختلف را به دست می دهد. وقتی  $n$  بزرگ است انرژی نیز بزرگ است، یعنی این انرژی نسبت به انرژی اعداد درست کوچک، کمتر منفی است. انرژی لازم برای انتقال یک الکترون از یک حالت معین به بینهایت انرژی بستگی آن حالت نامیده می شود که عدداً برابر  $E_n$  است.

شکل ۷.۴ انرژی پتانسیل و انرژی کل را بر حسب  $r$  نشان می دهد [معادله (۳۳.۴)]. شعاع مدار های مجاز [معادله (۳۰.۴)] مشخص شده، و مقادیر انرژی کل مربوطه نشان داده شده اند. انرژیها بر حسب الکترون ولت، با قراردادن مقادیر عددی ثابتها در معادله (۳۴.۴) و تبدیل از ژول به الکترون ولت، به دست می آیند. به طور کلی داریم

$$E_n = - \frac{13.6}{n^2} \text{ eV} \quad (۳۴.۴ \text{ الف})$$

حال می بینیم که چگونه بور با استفاده از این دسته انرژی، طیف اتم هیدروژن را تشریح کرد. در فصل سوم شرح دادیم که چگونه الکترو دینامیک کلاسیک تابش انرژی توسط ذرات باردار شتابدار را پیش بینی می کند. در آنجا به دقت به این نکته اشاره کردیم که شتاب ممکن است مربوط به تغییر جهت حرکت و همچنین مربوط به تغییر سرعت باشد. بر طبق نظریه کلاسیک الکترون مداری باید انرژی تابش کند زیرا دارای شتاب مرکز گرا است. بور برای اینکه بتواند مدل الکترون سیاره ای خود را محفوظ نگه دارد، مجبور بود نظریه ای ابداع کند که این پیش بینی کلاسیک را دگرگون سازد، زیرا بر طبق آن هر الکترونی که از

۱. در نامیدن  $E$  به عنوان انرژی الکترون دقیق نیستیم. فرض کرده ایم الکترون حرکت می کند در حالی که هسته ساکن است. از آنجا که جرم پروتون  $M$ ، برابر جرم الکترون است، الکترون بیشترین مقدار انرژی جنبشی را در مجموعه اتم داراست. حل مفصل مستلزم در نظر گرفتن حرکت تمام ذرات به دور مرکز جرم مشترک آنها است. در مکانیک قضیه ای وجود دارد که بنا بر آن در مسئله دو جسم از حرکت یک جسم می توان صرف نظر کرد در صورتی که جرم جسم متحرک «جرم کاهش یافته» در نظر گرفته شود که برابر است با حاصل ضرب دو جرم تقسیم بر مجموع آنها یعنی  $meM/(me+M) = me/(1+me/M)$ . اگر در معادله (۳۴.۴) و جاهای دیگر به جای جرم الکترون جرم کاهش یافته را قرار دهیم در این صورت، معادلات حاصل به درستی مجموعه دستگاه اتمی را توصیف می کنند (مسئله ۷.۴).



شکل ۷.۴ روابط انرژی در اتم هیدروژن.

هسته جدا شود بزودی انرژی خود را تابش کرده و به داخل هسته سقوط می‌کند. دومین تناقض نظریه بور با فیزیک کلاسیک در اصل موضوع دوم او قرار دارد که می‌گوید: هیچ الکترونی تا زمانی که در یکی از حالت‌های انرژی مداری قرار دارد، انرژی تابش نمی‌کند و تابش فقط وقتی رخ می‌دهد که الکترونی از یک حالت با انرژی بالاتر به حالتی با انرژی پایینتر برود، انرژی کوانتوم تابش،  $h\nu$ ، مساوی اختلاف انرژی دو حالت است. چنانچه عدد کوانتومی  $n = n_2$  را معرف حالت انرژی بالاتر و  $n = n_1$  را معرف حالت انرژی پایینتر در نظر گیریم ( $n_1 < n_2$ )، اصل موضوع دوم بور را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$h\nu = E_{n_2} - E_{n_1} \quad (۳۵.۴)$$

با قراردادن انرژی‌های مربوط از معادله (۳۴.۴) بسامد تابش گسیل شده چنین به دست می‌آید

$$\nu = \frac{m_e e^4 Z^2}{8 \epsilon_0^2 h^3} \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (۳۶.۴)$$

و یا بر حسب عدد موج داریم

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = \frac{m_e e^4 Z^2}{8 \epsilon_0^2 h^3 c} \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (۳۷.۴)$$

که در این رابطه  $c$  سرعت نور در خلا<sup>۱</sup> است. مقایسه معادله (۳۷.۴) با معادله (۲۳.۴) نشان می‌دهد که هر دو معادله یک شکل دارند.

نکته جالب دیگر این است که ضریب ثابت فرمول بور همان ثابت ریذبرگ  $R$ ، است. مجدداً از مقایسه معادله‌های (۲۳.۴) و (۳۷.۴)، برای حالت  $Z = 1$  در مورد

جدول ۱۰۴ سریهای طیف هیدروژن

$n_2$	اسم سری	$n_1$
۰۰۰، ۴، ۳، ۲	لیمان	۱
۰۰۰، ۵، ۴، ۳	بالمر	۲
۰۰۰، ۶، ۵، ۴	پاشن	۳
۰۰۰، ۷، ۶، ۵	براکت	۴
۰۰۰، ۸، ۷، ۶	پفوند	۵

هیدروژن، رابطه زیر به دست می آید

$$R = \frac{m_e e^4}{8 \epsilon_0^2 h^3 c} = 1.0973731 \times 10^7 \text{m}^{-1} \quad (38.4)$$

$R$  در اینجا برابر  $R_\infty$  است و این در صورتی صحیح است که جرم هسته در مقایسه با جرم الکترون بینهایت باشد. اگر حرکت هسته نیز در نظر گرفته شود باید به جای  $m_e$  جرم کاهش یافته را به کار برد. بنابراین در حالت کلی  $R = R_\infty (1 + m_e/M)$  است. این رابطه تغییرات جزئی  $R$  را از یک عنصر دیگر به حساب می آورد که ریدبرگ نیز به آن اشاره کرده بود. این موضوع موفقیت مدل و نظریه بور را نشان می دهد که تغییرات جزئی بین طیف هیدروژن معمولی و ایزوتوپ آن، هیدروژن سنگین (دوتریوم)، را می توان به تأثیر جرم هسته آنها مربوط دانست. در حقیقت در سال ۱۹۳۲ بود که اوری هیدروژن سنگین را با استفاده از طیف نمایی کشف کرد.

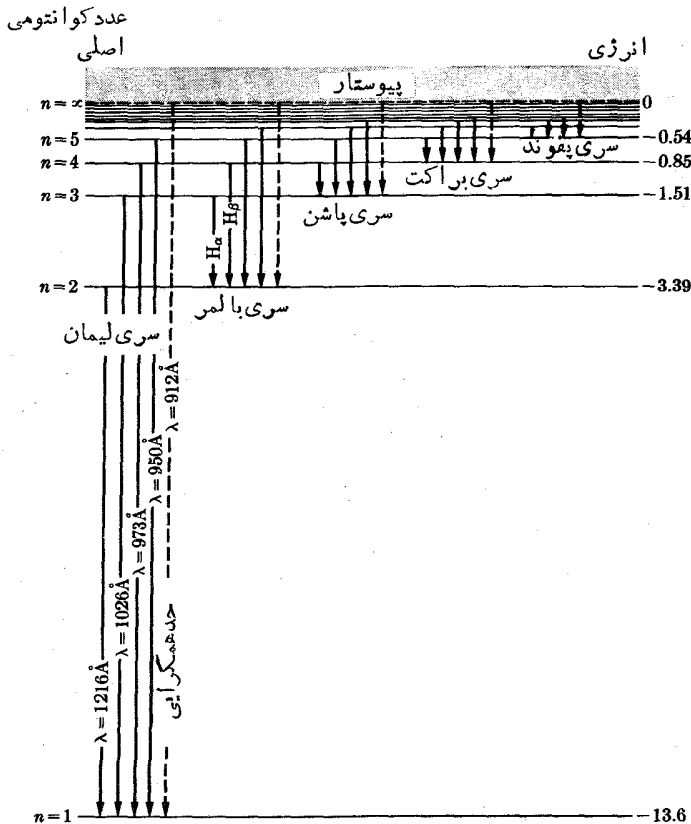
فرمول بور سریهای بالمر و پاشن را، که قبلاً دیده ایم، به ترتیب با قرار دادن  $n_1 = 2$  و  $n_1 = 3$  به دست می دهد. اما نظریه بور محدودیتی برای مقدار  $n_1$  قائل نمی شود و نتایج محاسباتش نشان داد که احتمالاً سریهای دیگری برای هیدروژن وجود دارد که هنوز به طور تجربی به دست نیامده است. در سال ۱۹۱۶ لیمان یک سری در ناحیه فرابنفش دور، در سال ۱۹۲۲ براکت سری جدیدی در ناحیه فروسرخ و در سال ۱۹۲۴ پفوند سری دیگری در همان ناحیه پیدا کردند. جدول ۱۰۴ پنج سری هیدروژن را به طور خلاصه نشان می دهد.

## ۸۰۴ ترازهای انرژی هیدروژن

کشف حالت های مشخص انرژی اتم هیدروژن مطلبی بود که نتایج خیلی گسترده ای در فیزیک

داشت. تمام مجموعه‌های اتمی، مولکول و هسته‌ای دارای ترازهای انرژی مجزا هستند. در حقیقت مجموعه‌های ماکروسکوپی فقط در حالت‌های انرژی مجزا می‌توانند وجود داشته باشند، اما این ترازهای انرژی آن‌چنان بهم نزدیک هستند که نمی‌توان آن‌ها را به‌طور تجربی از هم جدا کرد. به‌علت اهمیت موضوع، در اینجا به تفصیل به ترازهای انرژی هیدروژن می‌پردازیم.

ایس ترازهای انرژی را می‌توان به‌صورت نمودار شکل ۸.۴ نشان داد. اعداد کوانتومی در سمت چپ و انرژی مربوط بدانها بر حسب الکترون‌ولت برای اتم هیدروژن در سمت راست داده شده‌اند. در ردیف انرژی‌ها، انرژی‌های زیادتر (کمتر منفی) در بالا و انرژی‌های کمتر (بیشتر منفی) در پایین قرار می‌گیرند. در حالت معمولی، یعنی حالت نابرابر انگیخته اتم هیدروژن، الکترون در پایین‌ترین تراز انرژی خود، با  $n=1$  در پایین شکل قرار دارد. الکترون در این حالت پایه پایدار است و بدون اینکه انرژی گسیل یا جذب



شکل ۸.۴ نمودار تراز انرژی اتم هیدروژن.

کند، همواره در این حالت باقی می ماند. «برانگیختگی» وقتی به وجود می آید که الکترون به طریقی انرژی جذب کند. این حالت برانگیختگی به طرق مختلف به وقوع می پیوندد. اگر هیدروژن در تخلیه الکتریکی قرار گیرد يك الکترون آزاد که به وسیله میدان الکتریکی شتاب یافته، ممکن است با آن برخورد کند. چنانچه هیدروژن گرم شود، الکترون ممکن است در نتیجه برخورد در جنبش حرارتی به حالت برانگیخته در آید. اگر به هیدروژن نور تابانیم ممکن است از فوتون انرژی جذب کند. فرض کنیم با یکی از راههای نامبرده يك الکترون اتم هیدروژن حدود ۲۰ الکترون ولت انرژی جذب کند. این انرژی کافی است که الکترون را به  $n = \infty$  ببرد ( $13.6\text{eV}$ ) و ۴۶ الکترون ولت باقی بماند. در این حالت الکترون کاملاً از هسته خود آزاد شده و به علاوه ۴۶ الکترون ولت انرژی جنبشی به دست می آورد. اگر الکترون درست ۱۳.۶ الکترون ولت انرژی جذب کند از هسته خود آزاد می شود و با انرژی جنبشی حرارتی محیط حرکت می کند. در هر دو حالت هسته باقیمانده يك یون است. اگر انرژی الکترون برخوردکننده کمتر از انرژی لازم برای یونش بوده ولی مساوی یا بزرگتر از انرژی لازم برای انتقال الکترون به یکی از ترازهای مجاز انرژی آن باشد. در این صورت الکترون اتمی به آن اندازه انرژی جذب می کند که به يك تراز انرژی بالاتر برود. پس از اینکه الکترون برخوردکننده انرژی کافی برای برانگیختگی به اتم داد، همراه با انرژی اضافی که به صورت انرژی جنبشی آن است، صحنه برخورد را ترك خواهد کرد. انرژی برانگیختگی هر تراز بر حسب الکترون ولت عدداً برابر پتانسیل برانگیزش آن تراز بر حسب ولت است.

پس از برانگیختگی، الکترون اتمی به حالت عادی خود برمی گردد. اگر الکترون برانگیخته در تراز  $n = 4$  قرار گرفته باشد، ممکن است در يك جهش به  $n = 1$  برود. الکترون همچنین ممکن است از طریق ترازهای زیر به تراز عادی برگردد: ۴، ۲، ۱ یا ۴، ۳، ۱ یا ۴، ۳، ۲، ۱. الکترون در هر مرحله در راه برگشت باید انرژی برابر با اختلاف انرژی ترازها ازدست بدهد. تنها راه ازدست دادن انرژی از طریق گسیل تابش الکترومغناطیس است. بنابراین فرض دوم بور را که با معادله (۳۵.۴) داده شده به صورت نمودار در شکل ۷.۳ نشان داده ایم. موقعی که نور حاصل از تخلیه الکتریکی در هیدروژن را می بینیم در حقیقت مشاهده می کنیم که الکترونها از حالتیهای برانگیخته به حالتیهای پایینتر می روند.

گذارهای الکترون به مدار  $n = 1$  تشکیل سری لیمان، به مدار  $n = 2$  تشکیل سری بالمر، به مدار  $n = 3$  تشکیل سری پاشن و... می دهد. از نمودار تراز انرژی می توان مشاهده کرد که گذارهای لیمان با بزرگترین انرژی بوده و ایجاد بزرگترین بسامدها و تولید آبی ترین نور (فرا بنفش) می کند.

ناحیه سایه دار در بالای شکل ۷.۴ معرف آن است که الکترونها در بینهایت ممکن

۱. لغت «برخورد» را در اینجا با احتیاط به کار می بریم. در بحث پراکندگی ذرات آلفا دیدیم که برخورد بین اجسام باردار شامل يك تماس فیزیکی به طور معمول نیست.

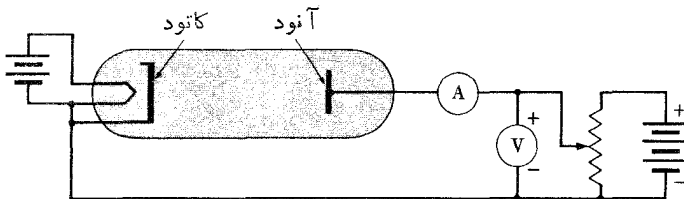


است دارای انرژی جنبشی باشند به طوری که انرژی آنها صفر نبوده بلکه مثبت باشد. اگر الکترون اتم هیدروژن را از هسته آن کاملاً جدا کنیم. یکی از الکترونها موجود در بینهایت با هر مقدار انرژی ممکن است در یکی از ترازهای انرژی اتم قرار گیرد. انرژی چنین الکترونی به مقدار انرژی آن در بینهایت منهای انرژی منفی تراز که در آن قرار گرفته، تغییر می‌کند. وجود دو علامت منفی در جمله اخیر نشان می‌دهد که انرژی تابش شده در چنین گذاری برابر مجموع انرژی جنبشی الکترون در بینهایت و انرژی مربوط به گذار از  $n = \infty$  به تراز نهایی است. انرژی تابش شده دارای مقداری بزرگتر از مقدار انرژی مربوط به گذار از  $n = \infty$  به تراز نهایی خواهد بود.

از آنجا که انرژی (جنبشی) الکترونها در بینهایت دارای توزیع گسترده است. لذا یک طیف پیوسته در پایین حد همگرایی طول موجهای هرسی وجود دارد.

#### ۹.۴ پتانسیل یونش

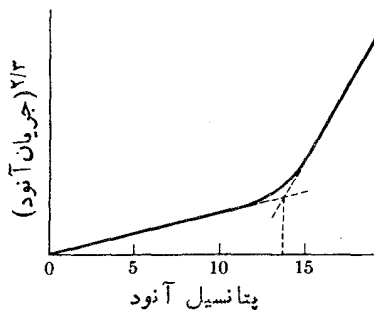
تأیید وجود تراز انرژی به طور قانع کننده‌ای با در نظر گرفتن پتانسیل یونش انجام می‌شود. ابتدا یک لامپ شبیه لامپ رادیو، شکل ۹.۴، را در نظر می‌گیریم که دارای یک رشته داغ به عنوان کاتود و یک صفحه به عنوان آنود است. وقتی صفحه نسبت به کاتود مثبت باشد الکترونها طول لامپ را طی کرده به آنود می‌رسند. این جریان به وسیله دو عامل محدود می‌شود. اول، تعداد الکترونها که از واحد سطح کاتود گسیل می‌شوند که خود به جنس و دمای کاتود بستگی دارد. در ادامه این بحث فرض می‌کنیم کاتود به اندازه کافی داغ است به طوری که تابش کاتود محدودیت قابل ملاحظه‌ای در جریان لامپ به وجود نمی‌آورد. عامل دوم اثر الکترونهاست موجود بین الکترونها بر الکترونهاست که از کاتود خارج می‌شوند. تمرکز بار منفی در ناحیه بین الکترونها را با افزایش می‌نامند و این بار باعث تقلیل پتانسیل در مجاورت سطح گسیلنده الکترون می‌شود. در حقیقت پتانسیل در این ناحیه کمتر از پتانسیل گسیلنده می‌شود. لذا اگرچه پتانسیل صفحه یا شتاب‌دهنده هنوز مثبت است، این کاهش پتانسیل مربوط به بار فضایی جریان الکترون را کم می‌کند زیرا سد پتانسیل موجود، الکترونها



شکل ۹.۴ دستگاه اندازه‌گیری پتانسیل یونش.

گسیل شده کم انرژی را به عقب برمی گردانند. (الکترونها گسیل گرمایونی دارای توزیع سرعته شبیه توزیع سرعت مولکولهای گاز هستند.) در هر صورت آن دسته از الکترونها پراثری که از سد پتانسیل بار فضایی عبور می کنند با همان انرژی به صفحه آنودی می رسند که بدون وجود بار فضایی رخ می داد، زیرا اختلاف پتانسیل کل بین الکترودها،  $V$ ، مستقل از بار فضایی است. جریان وابسته به بار فضایی، مانند حالت قانون اهم در یک مقاومت، تابع خطی از اختلاف پتانسیل نیست، بلکه با اختلاف پتانسیل به توان  $3/2$  متناسب است. این موضوع به قانون چايلد-لانگمویر موسوم است. شکل ریاضی رابطه به صورت  $I = kV^{3/2}$  است. مقدار  $k$  بستگی به شکل هندسی لامپ و چگالی حجمی بارهای موجود بین الکترودها دارد.

پتانسیل یونش گاز را با اندازه گیری جریان آنود بر حسب ولتاژ آن در لامپی که دارای گاز مورد نظر است، مطابق شکل ۱۰.۴، تعیین می کنند. همانطور که در شکل ۱۰.۴ نشان داده شده، با افزایش اختلاف پتانسیل جریان آنود افزایش می یابد لکن از یک مقدار ویژه اختلاف پتانسیل به بالا افزایش جریان سریعتر انجام می گیرد. وقتی پتانسیل آنود به این مقدار بحرانی می رسد. الکترونها که به آنود می رسند به اندازه کافی انرژی به دست می آورند که بتوانند الکترونها را از اتمهای گاز که در مجاورت آنود قرار دارند، جدا کنند. یونهای مثبت ایجاد شده در حالتی که ولتاژ برابر یا بیشتر از ولتاژ بحرانی باشد مقداری از بار منفی فضایی را خنثی می کند. لذا عمل یونش باعث افزایش قابل ملاحظه ای در جریان لامپ می شود. اگر گاز مورد مطالعه هیدروژن باشد، پتانسیل یونش برابر ۱۳.۶ ولت به دست می آید. لزوم مطابقت کامل پتانسیلهای یونش، که از روشهای کاملاً متفاوت طیف نمایی و الکترونیکی به دست می آیند، تأیید مؤکدی بر مفهوم تراز انرژی است. از آنجا که الکترونها گسیل شده از کاتود یک توزیع سرعت اولیه دارند، بعضی از آنها در پتانسیلهای کمتری انرژی لازم را برای یونش به دست می آورند. این دلیل به وجود آمدن انحناء در شکل ۱۰.۴ است که دوخط مستقیم را به هم مرتبط می سازد. به جز این قسمت کوچک خمیده، تغییر شیب خط کاملاً ناگهانی است. این تغییر ناگهانی در شیب خط رخ نمی داد اگر چند الکترون کم انرژی می توانستند در عمل یونش اتم هیدروژن شرکت جویند.



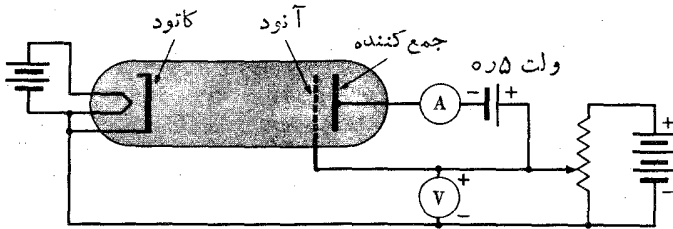
شکل ۱۰.۴ جریان آنود در لامپ پر از هیدروژن.

## ۱۰۴ پتانسیلهای تشدید

آزمایشی که اکنون تشریح شد برای اندازه‌گیری پتانسیل لازم برای شتاب دادن الکترونها بود که بتوانند الکترونهاى مدارى را از پایتترین حالت انرژى (حالت پایه) به بینهایت ببرند. این یونش را مى‌توان با مشاهده افزایش جریان لامپ تشخیص داد. اما الکترونها قبل از اینکه انرژى كافی پیدا کنند تا بتوانند الکترونهاى مدارى را از اتم جدا کنند مى‌توانند الکترون را به يك حالت برانگیخته ببرند. الکترونهاى مدارى اتمهاى گاز را مى‌توان از پایتترین حالت انرژى به هر حالت انرژى بالاترى برد. به طوری که از مطالب قبل درمى‌یابیم شرایط کوانتومی لازمی که باعث گسیل تابش با بسامدهاى معین از الکترونهاى مدارى مى‌شود، در مورد عمل جذب نیز به کار مى‌رود. این الکترونها فقط مى‌توانند انرژیهایی را جذب کنند که برابر انرژى گذار بین ترازها باشد. اگر يك الکترون مدارى مورد اصابت الکترونى قرار گیرد که انرژى آن کمتر از انرژى گذار (به اولین تراز بالاتر) باشد، در این صورت الکترون مدارى انرژى جذب نکرده و برخورد کاملاً الاستیک است. اگر الکترون مدارى مورد اصابت الکترونى پر انرژى قرار گیرد، در این صورت الکترون مدارى مى‌تواند با جذب انرژى، گذارى به تراز بالاتر انجام دهد. بدین ترتیب انرژى الکترون برخورد کننده به اندازه انرژى این گذار کاهش مى‌یابد. چنین برخوردی را ناالاستیک مى‌نامند، زیرا الکترون برخورد کننده پس از برخورد انرژى کمتری دارد. چنین برخوردی، الکترون مدارى را به یکى از حالتهاى برانگیخته مى‌برد، و الکترون مدارى در موقع برگشت به حالت پایتتر انرژى تابش مى‌کند.

مجدداً آزمایش یونش را در نظر مى‌گیریم. بسا ازدیاد تدریجی اختلاف پتانسیل لامپ، الکترونهاى خارج شده از کاتود داغ شتاب پیدا مى‌کنند و سرعت آنها بیشتر و بیشتر مى‌شود. در سرعتهاى کم این الکترونها با الکترونهاى اتمهاى گاز برخورد کاملاً الاستیک انجام داده منحرف مى‌شوند لکن در اثر برخورد حرکشان کند نمى‌شود. با ازدیاد اختلاف پتانسیل لامپ، پتانسیل به سطحى مى‌رسد که انرژى الکترون شتاب یافته مى‌تواند به الکترون مدارى انتقال یابد. به منظور بحث در این باره، گاز هیدروژن را در نظر مى‌گیریم که پتانسیل یونش آن ۱۳۶ ولت است. با نگاهی به شکل ۸.۴ معلوم مى‌شود که حداقل انرژى که يك الکترون مدارى در حالت پایه مى‌توان جذب کند برابر  $10.2 = 136 - 34$  الکترون ولت است. الکترون برخورد کننده با انرژى ۱۰۲ الکترون ولت مى‌تواند با اتم هیدروژن حالت تشدید ایجاد کرده و انرژى خود را به هیدروژن بدهد. این جذب انرژى باعث یونش نمى‌شود، بنابراین جریان داخل لامپ تغییر نمى‌کند، اما پس از چنین برخوردی، الکترون برخورد کننده به آهستگی پیش مى‌رود و اتم هیدروژن بسا تابش «برانگیختگی» خود را نشان مى‌دهد. هیدروژن نور مرئی تابش نمى‌کند زیرا این تابش حاصل از تشدید یکى از خطوط سرى لیمان است که در ناحیه فرابنفش قرار دارد، و طیف نمایی پرتوهای فرابنفش وجود این تابش را تأیید مى‌کند.

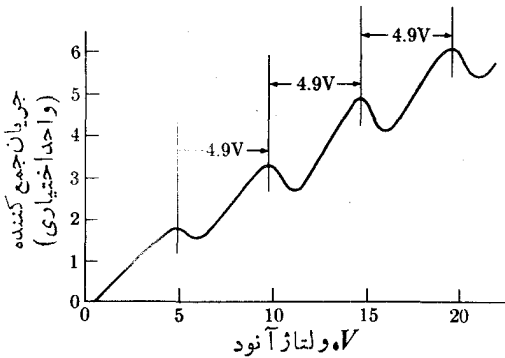
برای اینکه بتوان پدیده تشدید را به طور الکترونیکی نشان داد، لامپ کاملتری نظیر



شکل ۱۱۰۴ دستگاه اندازه گیری پتانسیل تشدید گاز.

آنچه فرانک و هرتز<sup>۱</sup> به کار بردند، مورد نیاز است. آنها اولین آزمایش را در سال ۱۹۱۳ با بخار جیوه به عنوان گاز انجام دادند. اتم جیوه دارای ۸۵ الکترون در اطراف هسته است، بنابراین نمودار تراز انرژی آن از اتم هیدروژن بسیار پیچیده تر است. به هر حال، موضوع مهم این است که اتم جیوه نظیر اتم هیدروژن دارای ترازهای انرژی مجزاست که اتم در نتیجه بمباران الکترون می تواند برانگیخته شود و به این ترازها برود. بخار جیوه به این دلیل انتخاب شده که تک اتمی است در حالی که هیدروژن معمولاً یک مولکول دو اتمی است که انرژی جداسازی آن ۴٫۵ eV است. اگر گاز هیدروژن می بود، بیشتر الکترونها بمباران کننده می بایست انرژی خود را در برانگیزش حالت های انرژی مولکولی از دست بدهند و همچنین پس از رسیدن پتانسیل شتاب دهنده به ۴٫۵ V موجب تجزیه مولکولها شوند. این وضع پیچیده اثرات هیدروژن اتمی را در این نوع آزمایشها پنهان می داشت. قسمتهای اساسی چنین لامپی در شکل ۱۱۰۴ نشان داده شده است. از نقطه نظر الکترونیکی اثر تشدید این است که الکترونها بر خورد کننده کند می شوند، بنا بر این به وسیله ای نیاز داریم که بتواند انرژی این الکترونها را پس از برخورد اندازه بگیرد. فرض می کنیم که آنود لامپ یونش از یک صفحه مشبک یا شبکه سیمی تشکیل شده است. در این حالت بعضی از الکترونها بر خورد کننده به جای برخورد با این الکتروند از خلال آن عبور می کنند. حال لازم است بدانیم که انرژی الکترونها بمباران کننده در موقع ورود به آنود چقدر است.

در بحث از اثر فوتوالکتریک، انرژی فوتوالکترونها را با حرکت دادن آنها در خلاف جهت نیروی یک میدان الکتریکی اندازه گیری کردیم و انرژی فوتوالکترون به وسیله پتانسیل ایستاننده آنها به دست آمد. در اینجا از همان روش استفاده می کنیم و یک الکتروند دیگر در پشت آنود قرار می دهیم. پتانسیل این الکتروند نسبت به آنود کمتر مثبت است، مثلاً به اندازه ۵ ولت، و بدینگونه الکترونها می که از آنود عبور می کنند در میدان بین دو الکتروند خواهند شد. الکترونها می که به این الکتروند آخری می رسند بایستی حداقل دارای ۵ ولت الکترون ولت انرژی باشند.



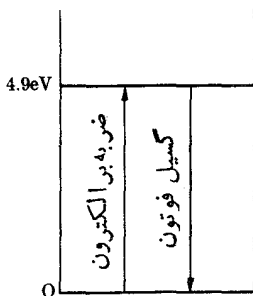
شکل ۱۲.۴ منحنی پتانسیل تشدید در جیوه.

روش تجربی مبتنی بر اساس اندازه‌گیری جریان جمع‌کننده بر حسب پتانسیل آنود نسبت به کاتود است، و نتایج نمونه‌ای در شکل ۱۲.۴ نشان داده شده است. از  $V = 0$  تا  $V = 5$  ولت، به علت اینکه الکترونی با انرژی کمتر از  $5$  eV الکترون ولت نمی‌تواند به آنود برسد جریان جمع‌کننده صفر است. از  $V = 5$  ولت به بالا جریان جمع‌کننده زیاد می‌شود زیرا تعداد الکترونهايي که حداقل این انرژی را دارا هستند زیاد می‌شود. وقتی  $V$  به پتانسیل تشدید گاز یعنی  $4.9$  eV ولت می‌رسد، جریانی جمع‌کننده شروع به کاهش می‌کند زیرا بعضی از الکترونهايي بمباران‌کننده در اثر برخورد ناالاستیک با الکترونهايي مداري گاز کند می‌شوند. جریان دوباره با ازدیاد بیشتر  $V$  افزایش می‌یابد. زیرا در میدان قویتر، الکترونهايي بمباران‌کننده ابتدا می‌توانند برخورد ناالاستیک انجام داده و باز هم به اندازه کافی شتاب به دست آورند که از سد پتانسیل  $5$  eV ولتی عبور کنند.

دومین افت در منحنی مربوط به یک گذار انرژی تازه نیست، زیرا تعداد بسیار کمی الکترون انرژی کافی خواهند داشت که اتم را به گذار بعدی برانگیزانند. افت دوم در دو برابر پتانسیل تشدید رخ می‌دهد و در اثر الکترونهايي بمباران‌کننده‌ای که دو برخورد ناالاستیک از یک نوع انجام داده‌اند به وجود می‌آید. بنابراین هرقله منحنی معرف تعداد بیشتری برخورد (ناالاستیک) است و هرقله مضرب درستی از پتانسیل تشدید است. فاصله قلله‌های متوالی تشدید در مورد جیوه  $10$  برابر  $4.9$  eV ولت است.

فرانک و هرترز تابش حاصل از بخار جیوه بمباران شده به وسیله الکترون را مطالعه کردند و خط طیف مشهور جیوه را در  $\lambda = 2537 \text{ \AA}$  به دست آوردند. انرژی فوتون

۱. از آنجا که جیوه در  $10^4$  ولت یونیده می‌شود، در صورتی که از لامپ شکل ۱۱.۴ استفاده شود سومین قلله تشدید به وسیله اثرات دیگر پوشیده خواهد شد. در عمل، لامپ پیچیده‌تری که اثرات تشدید و یونش را از هم جدا کند به کار می‌رود. این جزئیات مهم تجربی بهیچوجه اصل بحث شده در این قسمت را تغییر نمی‌دهد.



شکل ۱۳.۴ نمودار تراز انرژی،  
نشاندهنده جذب و گسیل انرژی  
به وسیله جیوه.

مربوط به این خط به کمک معادله (۴۷.۳) به صورت زیر داده می شود

$$E = \frac{1.224 \times 10^4}{2537} = 479 \text{ eV}$$

تابش بخار جیوه فقط وقتی که پتانسیل آنود از ۴۷۹ ولت تجاوز می کند آشکار می شود. بدیهی است که تراز انرژی جیوه در ۴۷۹eV نمی تواند در نتیجه برخورد های متوالی الکترون ها با اتم جیوه به وجود آید، بلکه باید در یک برخورد به این سطح برسد. این دلیل روشنی است که جیوه نمی تواند محتوی یک انرژی بینابینی باشد و این موضوع، تا به امروز هم، قویترین دلیل بر اندیشه ترازهای انرژی مجزای بور است.

شکل ۱۳.۴ حالت پایه و اولین حالت برانگیخته جیوه را در نمودار تراز انرژی نشان می دهد که در آن انرژی حالت پایه به عنوان مبدأ انتخاب شده است، فرایندهای جذب و گسیل در آزمایش فرانک-هرتز به وسیله پیکانها مشخص شده اند.

## ۱۱.۴ جذب فوتون

در دو بخش قبل بحث کردیم که چگونه اتم مقادیر گسسته ای از انرژی الکترون بمباران-کننده را جذب می کند. اتم همچنین ممکن است انرژی فوتونها را جذب کند، ولی در این مورد تفاوت مهمی وجود دارد. فوتونهای جذب شده کاملاً محو می شوند، و فوتونی که انرژی آن بیش از انرژی یونش اتم است همیشه می تواند جذب شود، زیرا انرژی اضافی به صورت انرژی جنبشی فوتوالکترون در می آید. یک فوتون با انرژی کمتر از انرژی یونش نمی تواند جذب شود مگر اینکه انرژی آن برابر یکی از انرژیهای برانگیزش اتم جذب کننده

باشد. هیدروژن را مجدداً در نظر بگیریم. احتمال اینکه اتم هیدروژن به‌طور عادی در حالت برانگیخته باشد خیلی کم است؛ بنا بر این فرض می‌کنیم که همیشه اتم در حالت پایه است. لذا اتم هیدروژن فقط می‌تواند فوتونهایی را جذب کند که طول موج آنها در ناحیه فرابنفش دور یعنی سری لیمان باشد. بنا بر این اتمهای هیدروژن نسبت به نور مرئی و فرورسوخ شفاف هستند. اگر تابشی مرکب از تمام طول موجها را از هیدروژن عبور دهیم و نور عبور کرده را به وسیله طیف نگار تجزیه کنیم می‌بینیم که شدت نور عبور کرده در قسمت طول موجهای لیمان کاهش یافته است. چنین طیفی را که دارای زمینه روشن و خطوط تاریک است طیف جذبی می‌نامند. زیرا اتمهایی که در نتیجه جذب انرژی به حالت برانگیخته درآمده‌اند در ضمن برگشت به حالت پایه همان فوتونها را در جهات افغاقی گسیل می‌دهند، لذا شدت در راستای تابش عبوری کاهش می‌یابد. خطوط جذبی در واقع خطوط روشن کم رنگی هستند که نسبت به زمینه نور تاریک به نظر می‌آیند.

مطالعه طیفهای جذبی مزایای معینی در بر دارد. برای بسیاری از اتمها، مانند اتم هیدروژن، طیف جذبی ساده‌تر از طیف گسیلی است. در مورد هیدروژن، به‌طوری که در بالا اشاره شد، فقط سری لیمان در طیف جذبی مشاهده می‌شود. به کمک این خطوط می‌توان مستقیماً نمودار تراز انرژی اتم را بنا کرد. بر طبق نظریه ساده موجود، این نمودار تراز انرژی کامل به نظر می‌آید. این موضوع درست نیست، زیرا قواعد گزینش گذار جذبی را به تمام ترازها، به‌ویژه برای اتمهای چند الکترونی، اجازه نمی‌دهد. در هر صورت، طیفهای جذبی مستقیمترین اطلاعات را در مورد ترازهایی که با جذب یا گسیل فوتون به حالت پایه مرتبط می‌شوند به دست می‌دهد.

تعیین عناصر موجود در سطح خورشید مثال جالبی از کاربرد طیف‌نمایی جذبی است. خورشید یک جسم داغ است که طیف پیوسته‌ای از فوتونها گسیل می‌دارد. این فوتونها در ضمن عبور از جو خارجی خورشید، بر حسب نوع گازهای موجود در آن جذب می‌شوند. بنا بر این طیف پیوسته نور خورشید با خطوط (نسبتاً تاریکی) قطع می‌شود که اولین بار توسط فراونهوفر در سال ۱۸۱۵ مشاهده شد. اغلب خطوط فراونهوفر مربوط به طول موجهای عناصری بود که در زمین یافت می‌شد. جذب خطوط بالمر مربوط به هیدروژن در طیف خورشید به‌ویژه محسوس است. خطوط بالمر اتم هیدروژن و خطوط ناحیه مرئی سایر عناصر که نسبتاً طول موجهای بلند دارند فقط می‌توانند توسط اتمهای همین عناصر که در حالت برانگیخته باشند، جذب شوند. این حالت‌های انرژی بالاتر به طریق زیر وجود می‌آیند. اگر چه جو گازی خورشید سردتر از سطح آن است، با وجود این دمای گازها

۱. این مطلب به‌طور تقریبی درست است. اولاً هر حالت برانگیخته دارای پهنای معینی است، به‌طوری که انرژی فوتون فرودی می‌تواند در محدوده باریکی تغییر کند، و با عمل جذب رخ دهد (به فصل هشتم رجوع شود). ثانیاً در فرایندی به نام اثر رامان فوتونی با انرژی بیش از انرژی یک تراز معین می‌تواند، با احتمال کم و معین، اتم را به آن حالت برانگیزانده و اضافه انرژی به وسیله یک فوتون کم‌انرژی‌تر برده شود.

به اندازه‌ای زیاد است که بسیاری از اتمها دارای انرژی جنبشی کافی هستند که بتوانند در اثر برخورد، اتمهای دیگر را برانگیزانند. بنا براین، این اتمها از پایبندترین تراز انرژی به حالتی می‌توانند طول موجهای بلند تراز فرابنفش را جذب کنند، برده می‌شوند. در طول سالهای زیادی، یک دسته از خطوط فرآونفوس در ناحیه نور مرئی را نمی‌توانستند به هیچیک از عناصر شناخته شده مربوط سازند. فرض شد این خطوط مربوط به یک عنصر جدید خورشیدی است که نام مناسب هلیوم را به آن دادند. این فرضیه موقعی که هلیوم را توانستند در زمین به دست آورند تأیید شد، زیرا طیف گسیلی آن با خطوط ناشناخته فرآونفوس مطابقت داشت.

بسیاری از سریهای طیفی که از خصوصیات ساختار مولکولی هستند در ناحیه فرورسرخ قرار دارند. طیف‌نمایی جذبی یگانه راه عملی مطالعه ساختار آن دسته از مولکولهایی که برانگیختن آنها در قوس الکتريکی، که به منظور ایجاد خطوط گسیلی انجام می‌گیرد، باعث تجزیه آنها می‌شود. درباره طیفهای مولکولی در فصل یازدهم بیشتر بحث خواهد شد.

#### ۱۲.۴ نقدی بر نظریه بور

بنا بر کشف ماکس پلانک تبادل انرژی بین جسم داغ و میدان الکترومغناطیسی اطراف در طی مراحل کوانتیده صورت می‌گیرد. نیلس بور کوانتش تکانه زاویه‌ای و کوانتش انرژی موجود در اتم را کشف کرد. او بسامدهای گسسته تابش گسیلی را ناشی از «جهشهای کوانتومی» بین ترازهای گسسته انرژی اتمی تفسیر کرد که بسامد  $\nu$  با رابطه  $h\nu = \Delta E$  داده می‌شود. هکاتیک موجی جانشین نظریه بور یا بخشهایی از آن شد که در آن کوانتش تکانه زاویه‌ای و انرژی ناشی از طبیعت موجی ساده نشان داده شده است. نارساییهای اصلی نظریه بور به قرار زیرند:

۱. طیف گسیلی اتم هیدروژن وقتی به وسیله طیف‌نگاری با توان تفکیک زیاد ثبت می‌شود جزئیات بیشتری را نشان می‌دهد، یعنی هر خط طیف ممکن است به صورت چند خط دیده شود. زومر فلدا با فرض وجود مدارهای بیضوی، علاوه بر مدارهای دایره‌ای، و با کوانتیده گرفتن جداگانه حرکت زاویه‌ای و حرکت شعاعی سهم قابل توجهی در حل این مسئله داشت. اولتیک و گوداشمیت<sup>۲</sup> فرض کردند که الکترون دارای یک تکانه زاویه‌ای ذاتی است که اسپین الکترون خوانده می‌شود. نظریه بور با این اصطلاحات، موقعیت دقیق ترازهای انرژی اتم هیدروژن را بهتر پیش بینی می‌کند. در هر صورت اندازه گیریهای دقیق جدید انحرافات را نشان می‌دهد که فقط به وسیله نظریه دقیق مکانیک موجی قابل توضیح است. (فصل هفتم و منابعی که در آن داده شده است را ببینید.)

۲. کوانتش گشتاور زاویه‌ای،  $mvr = nh$ ، الکترونی منفرد فقط وقتی صورت می‌گیرد

1. A. Sommerfeld, *Ann. Physik*, 51 (1916), p. 1.

2. G. E. Uhlenbeck and S. A. Goudsmit, *Naturwiss*, 13 (1925), p. 593



که الکترون در میدان نیروی مرکزی خالص حرکت کند. این موضوع در حالتی که بیش از يك الکترون در اتم وجود دارد درست نیست، زیرا بین آنها دافعه متقابل وجود دارد. بنا بر این نظریه بور منحصرأ يك نظریه تك الکترونی است، هر چند که بیشتر مفاهیم آن برای اتمهای چند الکترونی نیز صادق است. مکانیک موجی به خوبی برای اتم و مولکولوسی به کار می‌رود. در هر صورت، پیچیدگیهای ریاضی محاسبه دقیق هر چیزی پیچیده تر از ساختار و ترازهای انرژی اتم هلیوم را عملاً مشکل می‌سازد (فصل نهم را ببینید).

۳. جهشهای کوانتومی به وسیله بور به عنوان يك اصل موضوع ارائه شد. با استفاده از نظریه‌های دقیق زومرفلد و دیگران، همچنین معلوم شد که جهشهای کوانتومی از يك تراز معین فقط به ترازهای انتخابی معین دیگر رخ می‌دهد. قاعده‌های گزینش در این حالت خاص بیان شدند اما به هیچ وجه درك نشدند. هیچ روش محاسبه‌ای یا حتی تخمینی برای تعیین مدت زمانی که الکترون در مدار معین توقف می‌کند، وجود ندارد. تمام این موضوع به طور خیلی طبیعی به کمک مکانیک موجی جواب داده شد (فصل هشتم را ببینید).

پس از مطالعه اتم هیدروژن به کمک مکانیک موجی دانشجو درك خواهد کرد که تصویر بور از اتم هیدروژن خیلی ساده بوده و بعضی از عقاید او باید کنار گذاشته شود (به ویژه مدارهای مشخص). برخی از ناب گرایان با توجه به پیامدهای مکانیک موجی، نظریه بور را يك «اتفاق تاریخی» می‌نامند. به هر حال، اغلب فیزیکدانها بور را بنیانگذار نظریه اتمی می‌دانند.

## مسائل

۱۰۴ با فرض اینکه هسته دارای يك مرکز کروی مشخص باشد، شدت میدان الکتریکی در رویه (الف) هسته هیدروژنی که دارای شعاع  $10^{-15} \times 8 \text{ cm}$  متر است، و (ب) هسته طلائی که دارای شعاع  $10^{-15} \times 7 \text{ cm}$  متر است، حساب کنید.

۲۰۴ يك ذره آلفا با انرژی جنبشی  $7.68 \text{ MeV}$  مستقیماً به طرف هسته يك اتم ثابت مس پرتاب می‌شود. کمترین فاصله‌ای که این دو به هم نزدیک می‌شوند، چقدر است؟

۳۰۴ (الف) چگالی اتمی،  $n$ ، را برای آلومینیوم و طلا به دست آورید (چگالی نسبی آلومینیوم و طلا به ترتیب  $2700$  و  $19300$  است). (ب) وقتی باریکه‌ای از ذرات آلفا با انرژی  $4.80 \text{ MeV}$  به طور عمودی بريك ورقه نازك طلا به ضخامت  $10^{-5} \times 4.0 \text{ cm}$  وارد می‌شود، تعداد  $10^4 \times 2.0$  ذره در ثانیه به وسیله آشکارسازی که در زاویه  $20^\circ$  قرار گرفته شمرده می‌شود. چند ذره در زاویه  $60^\circ$  شمرده می‌شود؟ (ج) اگر انرژی ذرات به  $2.40 \text{ MeV}$  کاهش داده شود، چند ذره در زاویه  $20^\circ$  شمرده می‌شود؟ (د) اگر به جای طلا ورقه آلومینیوم به ضخامت  $10^{-5} \times 5.0 \text{ cm}$  قرار می‌داشت، از باریکه اولیه ذرات آلفا با انرژی  $4.80 \text{ MeV}$ ، در زاویه  $20^\circ$  چند ذره شمرده می‌شد؟

۴.۴ احتمال اینکه جریانی از ذرات در زاویه  $\theta$  یا بیشتر پراکنده شوند برابر با نسبت  $N_\theta$ ، تعداد چنین ذرات پراکنده، به  $N$  کل ذرات فرودی است. (الف) ثابت کنید هنگامی که باریکه‌ای از ذرات با انرژی جنبشی  $E_k$  به وسیله برکه‌ای به ضخامت  $\Delta x$  و به چگالی اتمی  $n$  هسته در واحد حجم پراکنده می‌شود، رادرفورد پیدا می‌کنند، داریم

$$N_\theta N = \sigma n \Delta x = \pi b^2 n \Delta x = \pi \left( \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{2E_k} \cot \frac{\theta}{2} \right)^2 n \Delta x$$

(ب) پارامتر برخورد ذره  $\alpha$  ۴۸۰ MeV در پراکنده‌گی با هسته طلا در زوایای  $20^\circ$  و  $60^\circ$  چقدر است؟ (ج) اگر برکه طلائی به ضخامت  $4 \times 10^{-5}$  cm به کار بریم، چه کسری از باریکه ذرات  $\alpha$  ۴۸۰ MeV انتظار می‌رود که در زوایای بیش از  $20^\circ$  و بیش از  $60^\circ$  پراکنده شوند؟

۵.۴ باریکه‌ای از ذرات  $\alpha$  ۴۸۰ MeV با شدت  $10^6$  ذره در ثانیه بزرگ برکه نازک مس (چگالی ۸.۹) به ضخامت  $10^{-4}$  cm فرود می‌آید. چند سوسوزنی در دقیقه در زاویه  $60^\circ$  نسبت به راستای باریکه بر روی یک صفحه فلورسان  $2\text{mm} \times 2\text{mm}$  که در فاصله ۵ سانتیمتری از محل فرود باریکه قرار دارد، به وجود خواهد آمد؟

۶.۴ (الف) شعاع مدارهای «مجاز» اول، دوم و سوم الکترون را در اتم هیدروژن بر حسب آنگستروم حساب کنید. (ب) قطر اتم هیدروژن در حالت پایه چقدر است؟ (ج) شدت میدان الکتریکی بارهسته‌ای را در اولین مدار حساب کنید و با جواب مسئله ۱.۴ مقایسه کنید.

۷.۴ محاسبات معادلات (۲۷.۴) تا (۳۴.۴) را با در نظر گرفتن جرم محدود پروتون، یعنی با در نظر گرفتن مرکز جرم به عنوان مرکز دوران الکترون، تکرار کنید. در باز نویسی معادله (۲۹.۴)، مجموع اندازه حرکتی‌های زاویه‌ای دو ذره را  $n\hbar$  در نظر بگیرید.

۸.۴ بر اساس مدل بور، الکترون مداری در اتم هیدروژن می‌تواند در فواصل معین و ثابتی از پروتون قرار گیرد، و شعاعهای بزرگتر مربوط به اعداد کوانتومی بالاتر می‌شوند. فرض کنید که الکترون در اتم هیدروژن به سمت شعاعهای بزرگتر حرکت کند، کدام یک از کمیت‌های زیر افزایش و کدام یک کاهش می‌یابند: تکانه زاویه‌ای، انرژی کل، انرژی پتانسیل، انرژی جنبشی، بسامد دوران؟

۹.۴ یک ذره به جرم  $m$  بر روی مداری به شعاع  $r$  تحت تأثیر نیروی مرکزی «فنی»  $kr$  ( $k$  ثابت است) حرکت می‌کند. با فرض اینکه اصول موضوعه بور در مورد این دستگاه به کار رود، معادله‌ای برای (الف) شعاع مدارهای مجاز، (ب) انرژی این مدارها بر حسب عدد کوانتومی  $n$  به دست آورید. (ج) نشان دهید که بسامد اشعه تابش شده ضمن گذار ذره از یک مدار به مدار مجاور برابر بسامد حرکت دورانی است.

۱۰۴ انرژی بستگی الکترون در اتم هیدروژن را بر حسب ژول و الکترون ولت برای  $n = 1, 2, 3$  حساب کنید.

۱۱۴ رابطه‌ی بالمر را چنان تغییر داده و باز نویسی کنید که سمت چپ آن عدد موج بر حسب عکس متر باشد. نشان دهید که نتیجه با معادله (۳۷.۴)، وقتی عدد ثابت ریذبرگ در این معادله جاگذاری می‌شود و  $n_1 = 2$  و  $n_2 = n$  است، مطابقت دارد.

۱۲۴ بسامد، طول موج و عدد موج خط  $H_\beta$  سری بالمر اتم هیدروژن را حساب کنید. این خط در گذار الکترون از  $n_2 = 4$  به  $n_1 = 2$  گسیل می‌شود. فرض می‌کنیم که جرم هسته بینهایت است.

۱۳۴ تمام الکترونهاى اتم تنگستن بجز یکی را از آن جدا می‌کنند. (الف) انرژی حالت پایه را برای این الکترون باقیمانده حساب کنید. (ب) انرژی و طول موج تابش گسیل شده را ضمن گذار این الکترون از  $n = 2$  به  $n = 1$  حساب کنید. (ج) این فوتون در چه ناحیه‌ای از طیف الکترومغناطیس قرار دارد؟

۱۴۴ (الف) انرژیهای سه تراز اولیه الکترون را در  $Li^{++}$  حساب کنید. (ب) پتانسیل یونش  $Li^{++}$  چقدر است؟ (ج) اولین پتانسیل تشدید  $Li^{++}$  چقدر است؟

۱۵۴ حد طول موج کوتاه هر یک از سریهای جدول ۱۰۴ را حساب کنید. انرژی کوانتوم هر یک از آنها را بر حسب الکترون ولت به دست آورید.

۱۶۴ چند تراز انرژی يك اتم تك الکترونی فرضی (نه هیدروژن) در جدول زیر آمده است

$n$	۱	۲	۳	۴	۵	$\infty$
$E_n, eV$	-۱۵۶۰	-۵۳۰	-۳۰۸	-۱۴۵	-۰۸۰	۰

نمودار تراز انرژی را رسم کنید و (الف) پتانسیل یونش، (ب) حد طول موج کوتاه سری منتهی به  $n = 2$ ، (ج) پتانسیل برانگیزش برای حالت  $n = 3$  و (د) عدد موج فوتون گسیل شده وقتی دستگاه اتمی از حالت  $n = 3$  به حالت پایه می‌رود را حساب کنید. (ه) حداقل انرژی يك الکترون پس از برهم کنش با این اتم در حالت پایه چقدر است، در صورتی که انرژی جنبشی اولیه الکترون (۱)  $6eV$ ، (۲)  $11eV$  باشد؟

۱۷۴ (الف) حداقل انرژی لازم، بر حسب الکترون ولت، برای اینکه به اتم هیدروژن داده شود تا خط  $H_\beta$  سری بالمر را گسیل کند، چقدر است؟ (ب) در این اتم وقتی الکترون از  $n = 4$  به حالت پایه می‌رود، امکان گسیل چند خط طیف وجود دارد؟

۱۸۴ ترازهای انرژی يك اتم تك الکترونی فرضی (نه هیدروژن) با رابطه زیر داده

$$E_n = -18.0/n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(الف) چهار تراز انرژی پایین را به دست آورید و نمودار تراز انرژی را رسم کنید.  
 (ب) پتانسیل برانگیزش حالت  $n = 2$  چقدر است؟ (ج) طول موجهای گسیل شده، بر حسب آنگستروم، از این اتمها در حالت پایه که مورد بمباران الکترونیهای شتاب یافته از اختلاف پتانسیل  $V = 16.2$  بوده اند، چقدر است؟ (د) اگر این اتمها در حالت پایه باشند، آیا می توانند تابش با طول موج  $2000 \text{ \AA}$  را جذب کنند؟ (ه) طول موج آستانه فوتوالکتریک این اتم چقدر است؟

۱۹.۴ با مدهای خطوط طیف گسیل شده از یک اتم تک الکترون فرضی (نه هیدروژن) با رابطه زیر داده می شوند

$$\nu = 864 \times 10^{12} \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \text{ Hz}$$

که در آن  $n$ ها اعداد کوانتومی اصلی هستند. (الف) سه طول موج اولیه سری منتهی به حالت پایه را بر حسب آنگستروم به دست آورید. (ب) طول موج آستانه فوتوالکتریک این اتم چقدر است؟ (ج) نمودار تراز انرژی این اتم را رسم کنید. مقادیر انرژی را بر حسب الکترون ولت برای چهار تراز انرژی اولیه تعیین کنید. و گذارهایی که موجب گسیل طول موجهای الف و ب می شود را با پیکان نشان دهید. (د) انرژی بستگی الکترون در حالت  $n = 3$  چقدر است؟ (ه) وقتی تعداد زیادی از این اتمهای فرضی در حالت پایه مورد بمباران، (۱) یک باریکه الکترون  $290 \text{ eV}$ ، (۲) یک باریکه فوتونهای  $290 \text{ eV}$  قرار گیرند، برهم کنشهای ممکن را به تفصیل شرح دهید.

۲۰.۴ یک اتم تک الکترونی فرضی (نه هیدروژن) دارای حالتیهای برانگیخته در ۵، ۷، ۸ و ۸۵ الکترون ولت بالاتر از حالت پایه است. باریکه ای از تابش حاوی کوانتومهایی با انرژی ۸، ۶، ۵، ۳، ۵، ۳، ۵ الکترون ولت از یک جو متشکل از این اتمهای فرضی عبور می کند. کدام یک از کوانتومها می توانند جذب شوند. (الف) اگر تمام اتمها در حالت پایه باشند. (ب) اگر بعضی از اتمها در حالت پایه و دیگر اتمها حالتیهای مختلف برانگیختگی باشند.

۲۱.۴ اگر اتمهای هیدروژن در حالت پایه (الف) به وسیله الکترونهای  $9.0 \text{ eV}$ ، (ب) به وسیله الکترونهای  $12.32 \text{ eV}$ ، (ج) با نور با طول موج  $1026 \text{ \AA}$  (دومین خط لیمان)، (د) با نور با طول موج  $6563 \text{ \AA}$  (اولین خط بالمر) و (ه) با نور با طول موج  $1127 \text{ \AA}$  مورد اصابت قرار گیرند، چه طول موجهایی گسیل خواهند شد؟

۲۲.۴ اولین پتانسیل یونش هلیوم  $24.6 \text{ eV}$  است. (الف) انرژی لایم بر حسب ژول و

الکترون ولت برای یونیدن اتم چقدر است؟ (ب) دمای يك جو هلیوم را تا چه اندازه بالا بریم تا اینکه انرژی جنبشی اتمی که با محتملترین سرعت در توزیع ماکسول حرکت می‌کند درست به اندازه‌ای باشد که بتواند اتم دیگری را در نتیجه برخورد یونیده کند؟

۲۳.۴ (الف) ثابت کنید که بسامد گردش يك الکترون در حرکت دایره‌ای مدل اتمی بور برابر با بسامد تابش حاصل از معادله (۳۶.۴) برای گذار از  $n_1 = n + 1$  به  $n_2 = n$  می‌شود. (این مسئله اهل همخوانی بور را که غالباً به‌عنوان آزمون محاسبات کوانتومی به کار می‌رود، شرح می‌دهد. وقتی  $n$  کوچک است فیزیک کوانتومی نتایج کاملاً متفاوت از فیزیک کلاسیک به دست می‌دهد. وقتی  $n$  بزرگ است اختلافات دو روش محاسباتی زیاد نیستند و لذا دو روش «همخوان می‌شوند».)

۲۴.۴ يك ماهواره ده کیلو گرمی بر روی مداری دایره‌ای به شعاع  $8000 \text{ km}$  هر دو ساعت یکبار دور زمین می‌چرخد. (الف) با فرض اینکه اصل موضوع تکانه زاویه‌ای بور، همان طور که در مورد اتم هیدروژن به کار می‌رود در این مورد نیز صدق کند، عدد کوانتومی مدار ماهواره را به دست آورید. (ب) با استفاده از اصل موضوع اول بور وقانون جاذبه نیوتون ثابت کنید که شعاع مدار ماهواره مستقیماً متناسب با مربع عدد کوانتومی،  $r = kn^2$  است که در آن  $k$  يك ثابت تناسب است. (ج) با استفاده از نتیجه قسمت ب فاصله بین مدار ماهواره در این مسئله و مدار «مجاز» بعدی آن را به دست آورید. (د) در مورد امکان مشاهده جدایی بین این دو مدار مجاور اظهار نظر کنید. (ه) آیا مدارهای کوانتیده و کلاسیک این ماهواره با هم مطابقت (همخوانی) دارند؟ کدام روش محاسباتی مدارها «صحیح» است؟

۲۵.۴ (الف) دمای جو خورشید چقدر باید باشد تا اینکه جنبش حرارتی به‌تنهایی بتواند يك میلیونیم اتمهای هیدروژن موجود در آن جورا در حالتی از انرژی قرار دهد که آنها طول موجهای سری بالمر را جذب کنند، یعنی در حالت  $n = 2$  قرار گیرند؟ (ب) چه امکانات دیگری در جو خورشید وجود دارند برای اینکه هیدروژن را به این حالت انرژی برسانند؟ (ج) دمای واقعی خورشید یعنی  $6000 \text{ K}$  را با جواب قسمت الف مقایسه کنید.

۲۶.۴ (الف) نشان دهید که گشتاور مغناطیسی مدار دایره‌ای بور در اتم هیدروژن با رابطه  $(e/m_e)(h/2\pi)n$  داده می‌شود. (گشتاور مغناطیسی يك حلقه سیم حامل جریان برابر حاصل ضرب جریان در مساحت محصور در حلقه است.) (ب) گشتاور مغناطیسی مدار اتم هیدروژن را برای  $n = 1$  حساب کنید. (این مقدار ویژه گشتاور مغناطیسی را مگنتون بود  $\mu_B$  می‌نامند.)

## امواج و ذرات

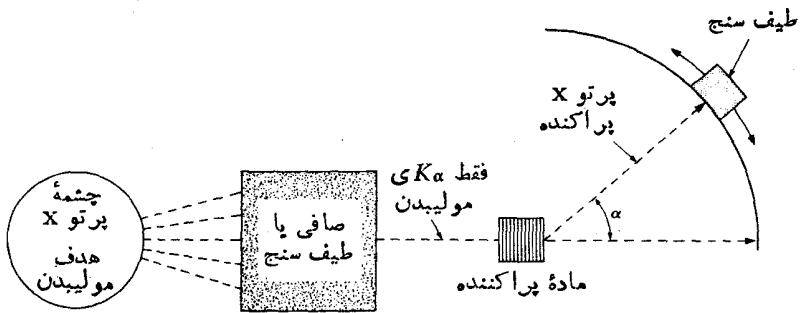
### ۱.۵ دوگانگی موج-ذره‌ای نور، پراکندگی کامپتون

به کمک آزمایشهای تداخل نشان داده شده است که تابش الکترومغناطیس که شامل نور مرئی، تابش فرسرخ و فرابنفش، پرتو ایکس و پرتو گامای گسیل یافته از هسته‌ها می‌شود، حرکتی موجی است. این نوع آزمایشها که همراه با تداخل سازنده و ویرانگر هستند، به عنوان آزمونی برای وجود امواج تلقی می‌شوند زیرا که نقشهای تداخلی ایجاد شده نمایش دهندهٔ ماکزیوموم و مینیمومهایی هستند که دقیقاً از جمع دو دامنهٔ سینوسی با تغییر فازهای متفاوت پیش بینی شده است. تصور سازوکاری که به وسیلهٔ آن ذرات، بدون یک طبیعت موجی وابسته، بتوانند چنین نتایجی را به وجود آورند مشکل است.

از طرف دیگر، یک دسته از آزمایشها نشان می‌دهند که تابش الکترومغناطیس مانند ذرات رفتار می‌کند. یک مثال کلاسیک که قبلاً مطالعه کردیم (بخش ۱۱.۳) پدیدهٔ فوتو-الکتریک است. اکنون آزمایشی را مورد بحث قرار می‌دهیم که در آن تابشهای الکترومغناطیسی، و در این مورد پرتو ایکس، مانند امواج و ذرات رفتار می‌کنند. منشأ و روش ایجاد پرتو-ایکس در فصل دهم این کتاب بحث شده است. بنابراین به طور مشروح به جزئیات کار تجربی در اینجا نخواهیم پرداخت.

آزمایشی که مورد بحث قرار می‌گیرد در سال ۱۹۲۳ به وسیلهٔ کامپتون<sup>۱</sup> انجام شد. طرحی از اساس کار در شکل ۱.۵ نشان داده شده است. پرتو ایکس یعنی تابش الکترومغناطیس

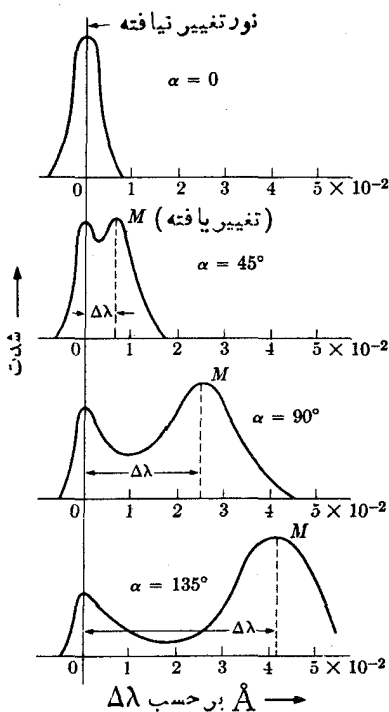
1. A. H. Compton, *Phys. Rev.*, 21 (1923), p. 715; 22 (1923), p. 409.



شکل ۱۰۵ نمودار ساده دستگاه اندازه گیری پراکنندگی کامپتون.

با طول موج  $\lambda = 0.71 \text{ \AA}$ ، از طرف چپ بزرگ هدف کربن تابیده می شود. تابش پراکنده شده از هدف در یک زاویه پراکنندگی  $\alpha$  به وسیله طیف سنج مورد بررسی قرار می گیرد. این طیف سنج هم طراز یک توری که در طیف نمایی نور مرئی یا فرابنفش به کار رفته است (به بخش ۵.۴ مراجعه کنید) کار می کند، اما به دلیل خیلی کوتاه بودن طول موج پرتو ایکس، تهیه شبکه ای به قدر کافی ظریف برای حصول انحرافی قابل توجه از ماکزیموم مرتبه اول، غیر ممکن است. بنا بر این، در اینجا توری یک بلور است و خطوط منظم اتمها در شبکه بلوری جانشین خطوط شیار توری می شود. این موضوع در فصل دهم بیشتر مورد بحث قرار خواهد گرفت.

شکل ۲۰۵ نتیجه آزمایش کامپتون را نشان می دهد. قله بالایی در  $\alpha = 0$  اساساً طیف باریکه ای از نور فرودی بر هدف کربن را نشان می دهد. این (نور) عملاً با عبور از هدف بدون تغییر باقی می ماند. در زاویه های پراکنندگی دیگر ظهور دو قله را در طیف می بینیم. یکی خط تغییر نیافته نام دارد که طول موجی برابر تابش فرودی دارد، قله دیگر که بهتر است خط تغییر یافته نامیده می شود. این خط طول موجی بزرگتر از طول موج خط تغییر نیافته دارد، و این ازدیاد طول موج با افزایش زاویه پراکنندگی  $\alpha$  افزایش می یابد. در کله تغییر یافته به زبان الکترو دینامیک کلاسیک آسان است. این نقطه نظر کلاسیک از این قرار است: میدان الکترو مغناطیسی نیروهای بر ذرات باردار اتم اعمال می کند و بنابراین اختلالی در مدارهای الکترون به وجود می آورد. این اختلالها با بسامد نیروی مؤثر، یعنی بسامد تابش فرودی، نوسان می کند. نوسان الکترونها به نوبه خود تابش الکترو مغناطیسی جدیدی را به وجود می آورد که اساساً به تمام جهات انتشار می یابد ولی با توزیع شدتی که مشابه توزیع از یک آنتن است. به هر حال بجز وقتی که تابش فرودی قطبی است، این توزیع شدت مشاهده نخواهد شد. بسامد تابش ایکس مربوط به طول موجی که کامپتون در آزمایش خود به کار برد، خیلی بزرگتر از بسامد مسدوداری الکترون در



**شکل ۲۰۵** جا به جایی طول موج خط تغییر یافته،  $M$ ، تابش  $K\alpha$  مولیبدن که از کربن پراکنده شده است، به صورت تابعی از زاویه پراکندگی.

هدف کربن است. بنابراین، محاسبهٔ دینامیک مسئله و انرژی تابش شده به وسیلهٔ الکترونها، با در نظر گرفتن آنها به عنوان ذرات آزاد، امکان پذیر است. از آنجا که هر الکترون مقدار معینی انرژی از پرتو ایکس فرودی را جذب می کند، می توان آنرا با یک سطح مقطع معرفی کرد. پراکندگی پرتو ایکس بدون تغییر طول موج پراکندگی تامسون نام دارد، و سطح مقطع منسوب بدان سطح مقطع تامسون نامیده می شود. محاسبهٔ این سطح مقطع برای یک الکترون «آزاد» نسبتاً آسان است و به یکی از مسائل واگذار شده است (مسئلهٔ ۱۰۵). نتیجه عبارت است از

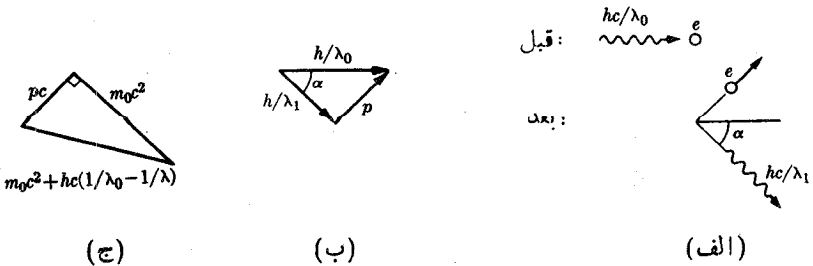
$$\sigma_T = \frac{e^4}{4\pi\epsilon_0 m_e^2 c^4} = 6.66 \times 10^{-25} \text{ cm}^2 \quad (1.5)$$

این رابطه معرف سطحی از هدف برای جدا کردن انرژی ازموج الکترومغناطیسی به وسیلهٔ



يك الكترونيك است. سطح مقطع برای يك اتم به سادگی  $Z$  برابر سطح مقطع يك الكترونيك است. قله‌های تغییر نیافته که در شکل ۲.۵ نشان داده شده است را می‌توان بدون توسل به فوتونها به عنوان حاملین تابش الكترومغناطیس، با استفاده از بحث بالا تشریح کرد. در تصویر کلاسیک فرایندی که در بالا آمده است، واضح است الكترونی که به وسیله يك نیروی خارجی سینوسی به نوسان واداشته می‌شود فقط می‌تواند همان بسامد تابش فرودی را مجدداً تابش کند. پس، قله‌های شکل ۲.۵ از کجا ناشی می‌شوند؟ کاه پتون نشان داد که نظریه داده‌ای بر توایکس می‌تواند این قله‌ها را تشریح کند، و پراکندگی با طول موج تغییر یافته پراکندگی کامپتون نام دارد. برای محاسبه طول موج قله تغییر یافته با فرض اینکه فوتون با يك الكترونيك آزاد در حال سکون به طور الاستیک برخورد می‌کند، عمل خواهیم کرد.

شکل ۳.۵ الف به طور ساده يك فوتون با انرژی  $h\nu = hc/\lambda_0$  که به يك الكترونيك در حال سکون نزدیک می‌شود را نشان می‌دهد. فوتون با الكترونيك برخورد کرده و بعد از برخورد فوتون تحت زاویه  $\alpha$  انحراف پیدا کرده است. فوتون مقداری از انرژی خود را به صورت انرژی الكترونيك پرتاب شده از دست داده و بنا بر این بسامد به  $h\nu_1 = hc/\lambda_1$  کاهش می‌یابد. شکل ۳.۵ ب يك مثلث را نشان می‌دهد که نمایشگر بقای تکانه است. در اینجا فوتون به عنوان يك ذره نسبتی با جرم سکون صفر در نظر گرفته شده است. در این صورت، رابطه (پ ۴۸.۳) تکانه را برابر  $p = E/c$  به دست می‌دهد. با استفاده از الكترودینامیک کلاسیک بین انرژی و تکانه يك موج الكترومغناطیسی می‌توان رابطه‌ای مشابه به دست آورد. با  $E = h\nu$  رابطه  $p = h\nu/c = h/\lambda$  را به دست می‌آوریم. بنا بر این تکانه فوتون فرودی  $h/\lambda_0$ ، و تکانه فوتون پراکنده شده  $h/\lambda_1$  است. بالاخره،  $p$  تکانه الكترونيك است. شکل ۳.۵ ج يك مثلث یادآور را برای الكترونيك، مشابه شکل پ ۵.۳، نشان می‌دهد. کل انرژی الكترونيك، همانطور که در شکل مربوطه در طول و ترنموده شده، برابر انرژی سکون به اضافه انرژی از دست داده شده فوتون است. در نوشتن این رابطه برای انرژی کل الكترونيك، قانون بقای انرژی را به کار برده ایم. البته مثلث تکانه در شکل ۳.۵ ب معرف بقای تکانه است. حال می‌توانیم قاعده کسینوس را در مورد دو مثلث برای به دست آوردن  $p$  بنویسیم و آنگاه با مساوی قرار دادن آنها  $p^2$  را حذف کنیم. قبل از انجام این کار، تمام جمله‌ها را در شکل ۳.۵ ج به  $c$  تقسیم می‌کنیم. نتیجه عبارت است از



شکل ۳.۵ الف) طرح پراکندگی کامپتون، ب) بقای تکانه، ج) مثلث یادآور برای الكترونيك.

$$\frac{h^2}{\lambda_0^2} + \frac{h^2}{\lambda_1^2} - 2 \frac{h}{\lambda_0} \frac{h}{\lambda_1} \cos \alpha = \left( m_e c + \frac{h}{\lambda_0} - \frac{h}{\lambda_1} \right)^2 - m_e^2 c^2 \quad (2.5)$$

پس از حذف جمله‌های مجذور و تنظیم مجدد، داریم

$$2 \frac{h^2}{\lambda_0 \lambda_1} (1 - \cos \alpha) = 2 m_e c \left( \frac{h}{\lambda_0} - \frac{h}{\lambda_1} \right)$$

بعد از ضرب کردن در  $\lambda_0 \lambda_1 / 2 h m_e c$ ، خواهیم داشت

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \alpha) \quad (3.5)$$

کمیت  $h/m_e c$  بعد طول دارد. اگر مقادیر عددی را در این رابطه قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} = 0.02426 \text{ \AA} \quad (4.5)$$

که طول موج کامپتون الکترون نام دارد.

معادله (۳.۵) نشان می‌دهد که تغییر طول موج باید به صورت  $(1 - \cos \alpha)$  بر حسب زاویه پراکندگی  $\alpha$  تغییر کند. این موضوع با داده‌های شکل ۲.۵ مطابقت دارد. بزرگی این تغییر هم به همان اندازه پیش بینی شده است که به ساده‌ترین وجه برای  $\alpha = 90^\circ$  دیده می‌شود. پهن‌شدگی قله تغییر یافته یا قله کامپتون، که در شکل ۲.۵ دیده می‌شود، نتیجه حرکت الکترون در اتم است. نظریه فوق بر اساس الکترونی که در ابتدا در حالت سکون است، قرار دارد. اگر حرکت الکترون به حساب آورده شود، پهن‌شدگی قله تغییر یافته را می‌توان کاملاً تشریح کرد.

بنا بر این، ظهور قله تغییر یافته شاهد دیگری است بر این نظر که تابش الکترومغناطیسی از فوتونها، یعنی بسته‌های انرژی الکترومغناطیسی، تشکیل می‌شود. اینک به اختصار به خط تغییر یافته بر می‌گردیم. درک این موضوع نیز بر حسب مفهوم فوتون امکان پذیر است. می‌توان تصور کرد که خط تغییر یافته ناشی از پراکندگی به وسیله الکترونی است که از اتم جدا نمی‌شوند، این الکترونها در حالت اولیه خود باقی می‌مانند و تمام انرژی پس‌زنی را اتم می‌گیرد. پراکندگی کامپتون یا خط تغییر یافته از اتفاقی است که در آنها الکترونها از اتم کنده می‌شوند ناشی می‌شود، بنا بر این الکترونها تکانه و انرژی جذب می‌کنند. این انرژی فقط از کاهش انرژی فوتون فرودی حاصل می‌شود، یعنی در نتیجه افزایش طول موج فوتونی که در فرایند شرکت می‌کند. بنا بر این در نظریه ذره‌ای، یک خط معرف پراکندگی الاستیک با اتم است، و دیگری معرف پراکندگی نالاستیک که در آن اتم تجزیه می‌شود. به‌رحال، تمام فوتونهای پراکنده شده ساختار موجی خود را در طیف سنجی که در آن این فوتونها مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند، آشکار می‌سازند. به نظر می‌رسد که تابش الکترومغناطیس باید در بعضی فرایندها به صورت موج و در

برخی دیگر به صورت ذره باشد. اما، این موضوع به طور اتفاقی رخ نمی دهد، بلکه فرایندها را می توان به دو نوع زیر تقسیم بندی کرد: فرایندهایی که طبیعت موجی در آنها مورد نیاز است را می توان فرایندهای انتشاری نامید. بخش مهمی از تشریح آنها ملاحظات مربوط به مسیر یا مسیرهای طی شده به وسیله نور است، مثلاً در آزمایشهای تداخل که در آنها اختلاف مسیر تعیین می شود. فرایندهایی که در آنها طبیعت ذره ای مورد نیاز است را می توان فرایندهای برهم کنش نامید. تابش با ماده برهم کنش دارد که نتیجه آن جذب یا پراکنندگی است.

این ماهیت دوگانه نور به آسانی پذیرفته نشد. دلیل اصلی برای مخالفت، جنبه های ظاهراً متضاد این دو ماهیت است. یک موج با بسامد  $\nu$ ، طول موج  $\lambda$ ، سرعت فاز  $u$ ، دامنه  $A$  و شدت  $I$  مشخص می شود. این کمیتها همه مستقل از هم نیستند؛ بلکه سرعت، بسامد و طول موج با رابطه  $u = \nu \lambda$  به هم مربوط می شوند. موج الزاماً در فضا پخش می شود و ناحیه نسبتاً بزرگی از فضا را اشغال می کند. در حقیقت موج سینوسی می باید دارای طول بینهایت باشد تا بسامد یا طول موج مشخص داشته باشد. می توان به طور نظری و تجربی با آنالیز هماهنگها نشان داد که (موج) از یک طیف نواری تشکیل می شود. از طرف دیگر، یک ذره با جرم  $m$ ، سرعت  $\nu$ ، تکانه  $p$  و انرژی  $E$  مشخص می شود. یکی از خصوصیات ذره که به نظر می رسد متضاد موج باشد این است که یک ذره، مثلاً یک الکترون، خیلی کوچک بوده و احتمالاً محل معینی از فضا را اشغال می کند. قبول ایده های متضاد که نور موجی است که در فضا پخش می شود و همچنین ذره ای است که در «نقطه» ای از فضا قرار می گیرد، مشکل است. به هر حال، قبول این دو برای تشریح تمام نتایج آزمایشهایی که می توان با نور انجام داد، لازم است. (کلمه «نور» را برای تمام طیف الکترومغناطیس به کار می بریم.)

بین خصوصیات ذره ای و موجی نور بستگیهایی نیز در دست داریم. به طوری که در فصل سوم گفته شد، پلانک انرژی فوتون،  $E$ ، و بسامد موج،  $\nu$ ، را با رابطه زیر به هم مربوط کرد

$$E = h\nu \quad (5.5)$$

در بررسی پراکنندگی کامپتون در بالا رابطه

$$p = h/\lambda \quad (6.5)$$

را بین تکانه فوتون،  $p$ ، و طول موج،  $\lambda$ ، به کار بردیم. به علاوه شدت موج به میزان عبور فوتونها از واحد سطح بستگی دارد. در نتیجه، حتی اگر هم مفهوم موجی و ذره ای نور متضاد یکدیگر به نظر آیند، می توان مشخصه های ذره ای نور را از مشخصه های موجی آن به دست آورد. سعی خواهیم کرد که در بخش ۶.۵ این تناقض را برطرف کنیم.

## ۲.۵ فرضیه دو بروی

ماهیت دوگانه نور، که ضرورت آن از نتایج تجربی معلوم شد، در سال ۱۹۲۴ به وسیله

دوبروی توسعه یافت. او احساس کرد که طبیعت متقارن است و دوگانگی ماهیت نور بایستی با ماهیت دوگانه ماده مطابقت داشته باشد. دلیل این بود که اگر نور گاهی شبیه موج و گاهی شبیه ذره عمل می کند، پس چیزهایی مانند الکترونها، که به صورت ذرات در نظر گرفته می شدند نیز باید گاهی شبیه به امواج عمل کنند.

دوبروی برای مشخص کردن خواص موجی پیشنهاد کرد رابطه بین تکانه و طول موج فوتون [معادله (۶.۵)]، يك رابطه کلی است که به طور یکسان در مورد فوتون و ذرات مادی به کار می رود. بنابراین دوبروی فرض کرد که به هر شیء متحرك يك طول موج وابسته است.

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad (7.5)$$

این طول موج، طول موج دوبروی نام دارد. این امواج پیشنهادی از نوع امواج الکترومغناطیس نبودند بلکه يك نوع تازه از موج بودند، که امواج ماده یا امواج دهنما نامیده شدند. کلمه دهنما به معنی این است که این امواج ذره را راهنمایی یا هدایت می کنند. موقعی که دوبروی فرضیه اش را منتشر کرد به وسیله هیچ نوع شاهد تجربی تأیید نشده بود. تنها دلیل او احساس و درک ذاتی اش بود که طبیعت بایستی متقارن باشد. به هر حال، او از فرض خود استنباطهای مهمی کرد که نتایج آن اگر کاملاً متقاعدکننده نبودند، اندیشه های جالبی را به همراه آوردند (رک بخشهای ۳.۵ و ۶.۵).

در این مرحله ممکن است به این حقیقت توجه کنیم که طول موج برای مشخص کردن کامل يك موج کافی نباشد. بسامد و سرعت نیز باید معلوم باشند. برای تعریف بسامد موج ماده از مشابهت فوتونی،  $v = E/h$ ، و رابطه نسبیتی انرژی  $E = mc^2$ ، استفاده می کنیم. از آنجا که سرعت فاز هر حرکت موجی  $u = v\lambda$  است، درمی یابیم که سرعت امواج وابسته به يك ذره برابر  $u = v\lambda = (E/h)(h/mv)$  خواهد شد. بنابراین داریم

$$u = \frac{mc^2}{h} \frac{h}{mv} = \frac{c^2}{v} \quad (8.5)$$

در این معادله  $v$  سرعت ذره مادی است که باید از سرعت نور،  $c$ ، کمتر باشد و لذا  $u$  از سرعت نور بیشتر می شود. سرعت جرم - انرژی ذره از سرعت نور درخلاً تجاوز نمی کند، اما سرعت فاز امواج وابسته می تواند بیشتر باشد. این نتیجه ناقص مفاهیم نظریه نسبیت نیست، زیرا سرعت نور فقط برای جرم - انرژی يك سرعت حدی است (به پیوست ۳ رجوع کنید). به طوری که معلوم می شود، طول موج دوبروی يك ذره را می توان اندازه گرفت ولی بسامد و سرعت فاز را نمی توان اندازه گیری کرد.

### ۳.۵ اصل موضوع اول بور

مضمونهای نظری طول موج دوبروی برای ماده جالب توجه اند. با در نظر گرفتن يك فرض

کاملاً "موجه می‌توانیم این طول موج را به‌مدل اتم بور مربوط سازیم. یک سیم گیتار به‌صدا درآمده با جا به‌جاییها عرضی طوری نوسان خواهد کرد که در دو انتهای آن گره خواهد بود. به‌طور مشابه یک مشدد آکوستیکی، مانند یک لوله اورگ، در صورتی که انتهای آن بسته باشد و به وسیله تغییر ناگهانی فشار از طریق یک ورودی نزدیک به یک انتها تحریک شود می‌تواند با گره‌هایی در دو انتها به ارتعاش درآید. برای ایجاد تشدید، یعنی جا به‌جاییهای بزرگ فقط با اعمال فشار کوچک، بسامد فشار اعمال شده طوری باید انتخاب شود که طول مشدد برابر با مضرب درستی از طول موجها باشد. اگر مشدد آکوستیکی را به‌صورت یک دایره خم کنیم، بدون اینکه در داخل آن دیواره‌های مانعی وجود داشته باشند، می‌توان تشدید را برای طول موجهایی که در رابطه زیر صدق کنند به‌دست آورد

$$2\pi r = n\lambda$$

که در آن  $r$  شعاع دایره حاصل از خط مرکزی لوله و  $n$  یک عدد درست است. حال فرض می‌کنیم که مدارهای بور، همانند مشددهای دایره‌ای، با امواج ایستاده الکترونی مربوط باشند. اگر شرط بالا را با طول موج دو بروی به‌کار بندیم، داریم

$$2\pi r = \frac{nh}{m_e v} \quad (9.5)$$

با یادآوری این موضوع که تکانه زاویه‌ای یک ذره متحرک در مداری دایره‌ای،  $m_e v r$  است، درمی‌یابیم که تکانه زاویه‌ای الکترون بور برابر است با

$$m_e v r = n \frac{h}{2\pi} \quad (10.5)$$

که دقیقاً اصل موضوع اول بور است. نباید این بحث را راهی برای به‌دست آوردن اصل موضوع اول بور دانست، اساساً کاری را که انجام دادیم جانشین کردن اصل موضوع بور با فرضیه دو بروی است، با این فرض اضافی که الکترونها در حالتها پایدار با امواج ایستاده معرفی شدند.

## ۴.۵ شکست (امواج) ماده

اینشتین خاطر نشان کرده که اگر فرضیه دو بروی درست باشد، بایستی پراشیدن الکترونها امکان پذیر شود. شرودینگر احساس کرد که اگر فرض دو بروی درست باشد، در این صورت امواج وابسته به ماده باید شکست پیدا کنند.

نور معمولاً به خط مستقیم حرکت می‌کند، لکن وقتی از یک محیط به محیط دیگر می‌رود شکسته می‌شود. شکست نور مربوط به تغییر سرعت انتشار نور می‌شود که در محیط

با ضریب شکست زیاد، کم است، از شکستهای ناگهانی نور شبیه آنچه در عدسیها رخ می دهد آگاه هستیم. به هر حال، شکست نور در لایه های مختلف هوای با دماهای متفاوت کاملاً تدریجی است. در تابستان در اثر تابش نور خورشید به سطح سیاه جاده ها، طبقات هوای مجاور جاده منبسط می شوند. اگر چه ضریب شکست هوا به یک نزدیک است، ضریب شکست هوای داغ روی جاده ها به یک حتی نزدیکتر می شود. نوری که به طرف جاده می آید وارد ناحیه ضریب شکست که تر شده شکست پیدا می کند و به علت گرادیان ضریب شکست از خط عمود دور می شود. اگر نور به طور تقریباً مماس وارد این ناحیه گرادیان ضریب شکست شود، انعکاسی کلی باعث ایجاد پدیده معروف سراب می شود. در این حالت خمیدگی مسیر نور در نتیجه شکست تند نیست، بلکه پرتو نور یک منحنی پیوسته تشکیل می دهد.

شرویدنگر احساس کرده که مسیرهای خمیده و پیوسته اشیا مادی ممکن است بدینسان با شکست پیوسته امواج وابسته به ماده مربوط باشد. برای درک چگونگی این عمل مثال زیر را در نظر می گیریم. مسیر سهمی حرکت یک توپ بیسبال حالت ساده ای از حرکت یک جسم مادی در مسیر خمیده است. در بالاترین نقطه پرواز مسیر به طرف پایین مقرر است. سرعت لحظه ای  $v$  افقی است و مسیر لحظه ای را می توان قوسی از دایره به شعاع انحنای  $R$  در نظر گرفت. شتاب توپ، شتاب مرکز گرای  $v^2/R$  است که در اثر شتاب گرانی،  $g$ ، به وجود می آید. با مساوی قرار دادن این دو عبارت شتاب، می توان شعاع انحنای مسیر را بدست آورد

$$R = \frac{v^2}{g} \quad (11.5)$$

برای بیان این نتیجه بر حسب انرژی، یاد آور می شود که کل انرژی  $E$  توپ بیسبال ثابت است و انرژی پتانسیل گرانشی برابر  $E_p = m_0 g y$  است که در آن  $y$  ارتفاع توپ از سطح زمین است. سرعت توپ به اندازه ای کم است که می توان از فیزیک کلاسیک استفاده کرد. از آنجا که انرژی جنبشی باید برابر  $(E - E_p)$  باشد، داریم

$$E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2 = E - E_p$$

یا

$$v^2 = \frac{2(E - E_p)}{m_0} \quad (12.5)$$

بدین ترتیب  $R$ ، بر حسب انرژی، برابر می شود با

$$R = \frac{2(E - E_p)}{m_0 g} \quad (13.5)$$

با به دست آوردن  $R$  به طریق کلاسیک، یعنی به طور ناسبیتی، سعی می‌کنیم همین مسئله را با در نظر گرفتن شکست امواج ماده، حل کنیم.

با به کار بردن معادله (۱۲.۵) و  $u = c^2/v$ ، سرعت فاز امواج وابستهٔ توپ را

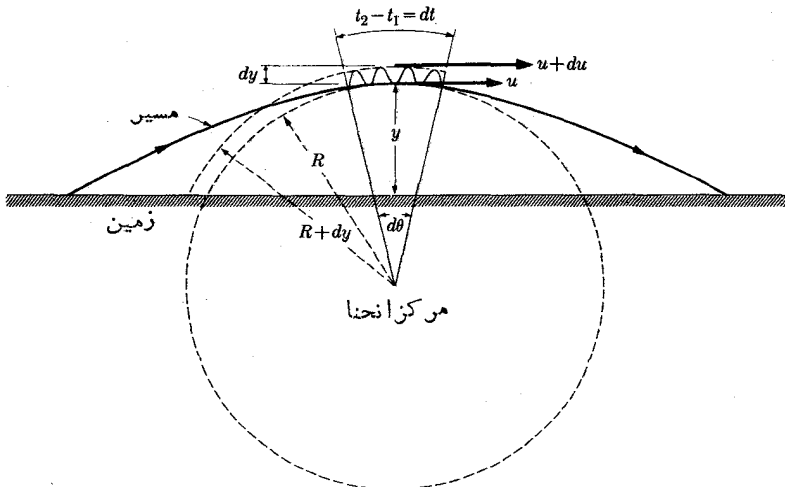
تعیین می‌کنیم

$$u = c^2 \sqrt{m_0 / 2(E - E_p)} = c^2 \sqrt{m_0 / 2(E - m_0 g y)} \quad (14.5)$$

که در آن  $E_p = m_0 g y$  است. بدیهی است که  $u$  تابع ارتفاع  $y$  است و با از زیاد  $y$ ،  $u$  نیز افزایش می‌یابد. این بدان معنی است که هرچه توپ بالاتر می‌رود، «ضریب شکست» فضایی که امواج وابسته در آن حرکت می‌کند کمتر می‌شود. اینک مجدداً شعاع انحنایی را که این «شکست» به مسیر پرتابه‌ای توپ می‌دهد حساب می‌کنیم.

مثل حالت قبل فرض می‌کنیم که توپ در زمان  $dt$  در روی قوسی از دایره به شعاع  $R$  حرکت کند. شبیه مطالعهٔ شکست نور در مورد یک جبههٔ موج به پهنای  $dy$  عمود بر «پرتو» بحث می‌کنیم. در شکل ۴.۵ امواج فزاز در ارتفاع  $y$  از سطح زمین حرکت می‌کنند و یک مسیر منحنی، قعر به طرف پایین را طی می‌کنند، زیرا بالای جبههٔ موج سریعتر از پایین آن حرکت می‌کند. از شکل درمی‌یابیم که

$$d\theta = \frac{u dt}{R} = \frac{(u + du) dt}{R + dy}$$



شکل ۴.۵ نمایش حرکت پرتابه‌ای از نقطه نظر مکانیک موجی.

که نتیجه می شود

$$R = \frac{u}{du/dy} \quad (15.5)$$

برای پیدا کردن  $du$  ابتدا معادله (۱۴.۵) را به صورت زیر می نویسیم

$$u(E - m_0 g y)^{1/2} = c^2 \left( \frac{m_0}{\gamma} \right)^{1/2}$$

سپس دیفرانسیل  $u$  را نسبت به  $y$  می گیریم. نتیجه به صورت زیر درمی آید

$$du = \frac{1}{\gamma} \frac{m_0 g}{E - m_0 g y} u dy \quad (16.5)$$

با قراردادن این رابطه به جای  $du$  در معادله (۱۵.۵)، رابطه ساده زیر را به دست می آوریم

$$R = \frac{\gamma(E - E_p)}{m_0 g} \quad (17.5)$$

مطابقت بین معادله های (۱۳.۵) و (۱۷.۵) اندیشه شرویدینگر را درباره اینکه می توان يك سیستم از مکانیک ابداع کرد که در آن مسیر پرتوهای امواج ماده جانشین مسیر پرتابه ای مکانیک نیوتونی شود، تأیید می کند. موفقیت بزرگ او در این زمینه در فصل بعد تشریح می شود.

تا اینجا هیچگونه شاهد تجربی، مانند پدیده های تداخل که توانست دلیل متقاعد کننده ای بر ماهیت موجی نور در اختیار گذارد، ارائه نکرده ایم. به هر حال، در سال ۱۹۲۵ اساس از نظریه دو بروی استنباط کرد که يك باریکه الکترونهاى پراشیده به وسیله يك بلور بایستی پدیده تداخل را نشان دهد. این پیش بینی بالاخره منجر به اثبات تجربی ماهیت موجی ماده شد.

## ۵.۵ آزمایش دیویسون و گرمر

در سال ۱۹۲۷ دیویسون و گرمر<sup>۱</sup> پراکندگی الکترونها را در نیکل مورد مطالعه قرار دادند. روش آنها یادآور پراکندگی ذره آلفای رادرفورد و پراکندگی پرتو ایکس کامپتون بود. آنها باریکه ای از الکترونها را بر يك قطعه نیکل تابانده و شدت الکترونهاى پراکنده شده را درجات مختلف اندازه گیری کردند. در ضمن آزمایش دستگاه تخلیه آنها به طور اتفاقی شکست و لازم بود تعمیر شود.

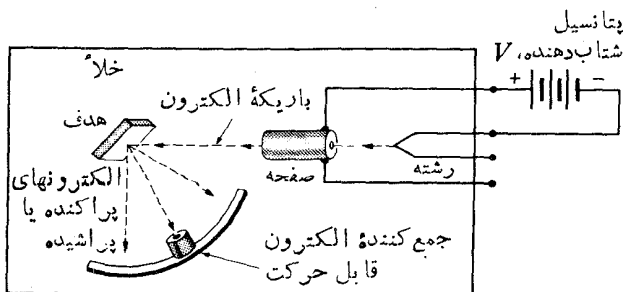


وقتی دستگاه تخلیه شکست، هدف نیکل که در دمای بالایی قرار داشت در تماس با هوا پوشش ضخیمی از اکسید نیکل پیدا کرد. برای برداشتن اکسید از قطعه نیکل، دیوسون و گرم در يك كوره با دمای بالا اکسید را به تدریج کاهش دادند. پس از دوباره سوار کردن دستگاه، آنها نتایج کاملاً متفاوتی به دست آوردند. در حالی که قبلاً با ازدیاد زاویه پراکندگی تعداد الکترونهاى پراکنده به تدریج کم می شد، در این حالت مشاهده کردند که تعداد الکترونهاى پراکنده دارای مینیموم و ماکزیمومهایى است: الکترونها پراشیده می شدند. دیوسون و گرم با استفاده از روش متداول پراش پرتویکس به وسیله بلور، طول موجی که الکترونها بایستی داشته باشند را حساب کردند و دریافتند که این طول موج با رابطه دو بروی مطابقت دارد.

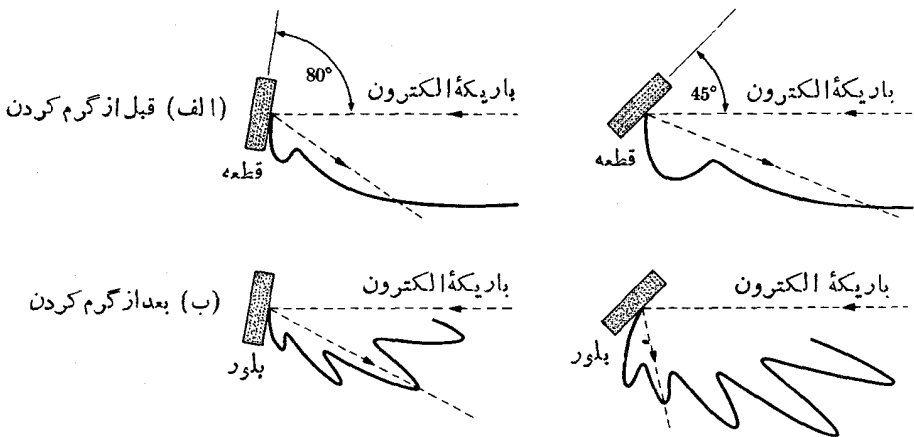
حرارت دادن طولانی برای پاك کردن قطعه نیکل باعث شد که نیکل تبدیل به يك تك بلور شود و نقش پراش الکترون کاملاً شبیه به پراش پرتویکس با روش براگ بود (به فصل دهم مراجعه کنید). این آزمایش فرضیه دو بروی را تأیید کرد و نشان داد که ذرات مادی دارای خواص موجی هستند.

برای اینکه آزمایش دیوسون و گرم را با تفصیل بیشتری بررسی کنیم، دستگاه آنها را مطابق شکل ۵.۵ در نظر می گیریم. در قسمت راست يك تفنگ الکترونی قرار دارد که باریکه ای از الکترون تهیه می کند. انرژی این الکترونها با دانستن پتانسیل شتاب دهنده معلوم می شود. این الکترونها به وسیله هدف نیکل پراکنده می شوند و هدف حول محوری عمود بر صفحه کاغذ دوران می کند. جمع کننده متحرك الکترون می تواند حول همان محوری که هدف می چرخد، دوران کند به طوری که تمام الکترونهاى پراکنده از هدف در تمام جهات در صفحه شکل قابل دریافت خواهند بود. شکل ۶.۵ نتایج به دست آمده را از دو وضعیت هدف، قبل و بعد از حرارت دادن، نشان می دهد. از آنجا که دیوسون و گرم الکترونهاى ۷۵ الکترون ولتی به کار بردند، توانستند سرعت الکترون را از رابطه کلاسیک زیر به دست آورند

$$E_k = Ve = \frac{m_0 v^2}{2} \quad (1.8.5)$$



شکل ۵.۵ نمودار دستگاه پراش الکترون در آزمایش دیوسون و گرم.



شکل ۶.۵ (الف) پراکندگی الکترون به وسیله قطعه‌ای از نیکل. (ب) پراش الکترون به وسیله تک بلور نیکل.

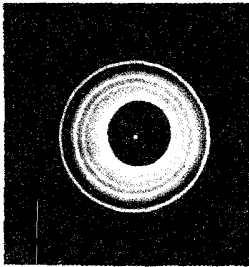
پس از قرارداد این مقدار در معادله دو بروی، رابطه زیر به دست می آید

$$\lambda = \frac{h}{m_e v} = \frac{h}{\sqrt{2Vem_e}} \quad (19.5)$$

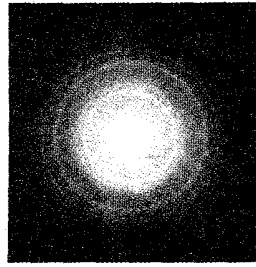
با قرارداد  $V = 75 \text{ V}$  و مقادیر ثابت دیگر،  $\lambda = 1.97 \text{ \AA}$  به دست می آید. فاصله بین ردیفهای اتمهای به وجود آورنده پراش در بلور نیکل فقط کمی بزرگتر از این مقدار است که بلورنیکل را به صورت یک توری ایده آل برای این نوع آزمایش درآورد. بررسی کمی نقش پراش نشان داد که فرضیه دو بروی درست است.

فرضیه دو بروی به وسیله استرمن و اشترن در آلمان با پراش اتمهای هلیوم از بلور لیتیوم فلورید، و در ایالات متحده توسط جانسون با پراش هیدروژن از همان نوع بلور مورد تأیید بیشتری قرار گرفت. جی پی تامسون، پسر ج ج تامسون، با تاباندن باریکه الکترونیهای برورقه‌های خیلی نازک از فلزات مختلف توانست نقشهای بسیار خوبی از پراش پودری به دست آورد (به فصل دهم مراجعه کنید). شکل ۷.۵ الف نقش پراش الکترون را به وسیله آلومینیوم نشان می دهد. برای مقایسه، نقش پراش پرتو ایکس از آلومینیوم در قسمت ب شکل نشان داده شده است. طول موجهای مؤثر در دو پراش متفاوت هستند اما تشابه آنها آشکار است. دیویسون و گرمر آزمایشی از کامپتون را که برای مطالعه پراش پرتو ایکس نرم از نوری مصنوعی در فرود خراشان بود، تکرار کردند و به جای پرتو ایکس از باریکه الکترون استفاده کردند.

با تأیید کامل فرضیه دو بروی پی می بریم که دنیای اتمی دارای جنبه‌های عجیبی است. پراکندگی کامپتون نشان داد که امواج دارای خاصیت ذره‌ای هستند و فرضیه دو بروی نشان می دهد که ذرات دارای خصوصیات موجی هستند.



(ب)



(الف)

**شکل ۷.۵ (الف)** نقش پراش الکترون در آلومینیوم با استفاده از الکترونهایی که در پتانسیل ۸۰۰۰ ولت شتاب گرفتند. **(ب)** نقش پراش پرتو ایکس در آلومینیوم با استفاده از تابش  $\lambda$  از مس. طول موجها و وضع هندسی دو عکس متفاوت اند. در قسمت مرکزی فیلم پرتو ایکس، برای جلوگیری از پرتوگیری شدید، قرص سربی قرار داده شد.

در دو بخش زیر نظریه ریاضی گروههای موج، و در باقیمانده فصل بعضی از مفاهیم فیزیکی مربوطه را مورد بحث قرار خواهیم داد. اکنون از شرح تاریخی توسعه فیزیک جدید منحرف شده و به طرف توسعه صورتیتر مکانیک موجی می رویم. در بخش ۶.۵ سعی می کنیم این دوگانگی را جدیدتر از ادینگتون، که به شوخی هستی ازلی را «موجذره» نام نهاده بود، حل کنیم.

## ۶.۵ گروههای موج

اگرچه پدیده تداخل ما را وادار به قبول این حقیقت می کند که ذرات مادی نظیر نور دارای دوگانگی موجی و ذره ای هستند، ولی هنوز مشکل است که در یابیم چگونه موجی که در ناحیه ای از فضا گسترش پیدا می کند با ذره کوچک واقع در یک نقطه معین ناسازگار نیست. این ناسازگاری ظاهری را می توان با استفاده از مفهوم گروه موج یا بسته موج حل کرد. در اصل این موجی است که در یک ناحیه محدود از فضا گسترش می یابد. این گروه موج با به کار بردن اصل برهم نهش عدده زیادی موج تشکیل می شود. وقتی چند موج در یک محیط حرکت می کنند، موج برابند مجموع (و در این حالت جمع جبری) تمام امواج است. در صورت جمع، دو موجی که بسامد آنها کمی با هم اختلاف دارند تولید زنشهایی می کند که از تغییرات دامنه موج برابند ناشی می شود. خواهیم دید که با جمع کردن بسامدهای بیشتر، نواحی که دامنه در آنها زیاد است می تواند کوچکتر شود.

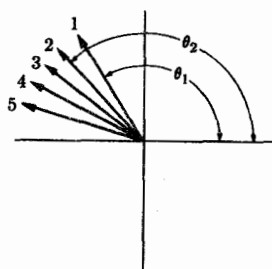
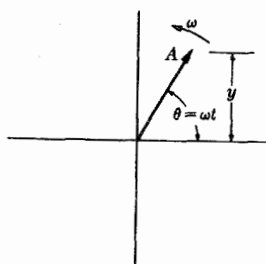
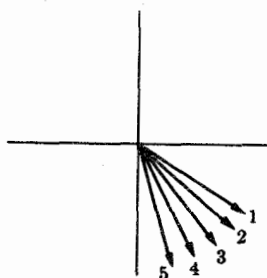
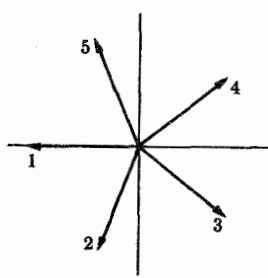
برای ساده کردن بحث برهم نهش، یک موج تک بعدی به کار می بریم؛ یعنی موجی

که جا به جایی  $Y$  آن بستگی به محل آن در طول يك خط  $x$  و زمان  $t$  دارد. موج سینوسی با دامنه  $A$  را می توان به صورت زیر نوشت

$$y = A \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - vt \right) = A \sin (kx - \omega t) \quad (20.5)$$

در این معادله  $k$  عدد انتشار و برابر  $2\pi/\lambda$  و  $\omega = 2\pi v$  بسامد زاویه ای است. حتی در شرایط يك بعدی مشکل است که موج را رسم کنیم زیرا دو متغیر مستقل وجود دارد. کاری که معمولاً انجام می دهیم این است که یکی ثابت نگه داشته، دیگری را تغییر دهیم. بنا بر این یا جا به جایی را بر حسب موقعیت در يك زمان ثابت (مثلاً زمان عکسبرداری) و یا جا به جایی را بر حسب زمان در يك موقعیت ثابت رسم می کنیم. در حل زیر، زمان را به عنوان متغیر به کار خواهیم برد. اگر موقعیت را به عنوان متغیر به کار ببریم، یعنی  $x$  را به جای  $t$  و  $k$  را به جای  $\omega$  قرار دهیم، نتایج یکی خواهند بود.

تابعیت زمانی يك موج سینوسی با دامنه  $A$  را می توان، مطابق شکل ۸.۵ الف

(ب) زمان  $t$ (الف)  $y = A \sin \omega t$ (د) کمی قبل از زمان  $t_1$ (ج) زمان  $t_1$ ، برابند صفر

شکل ۸.۵ الف) فازور منفرد. (ب) پنج فازور در زمان کوتاهی پس از  $t=0$ . (ج) پنج فازور با برابند صفر. (د) پنج فازور، کمی قبل از اینکه به طور موازی قرار گیرند.

مؤلفه يك بردار به طول  $A$  در نظر گرفت كه با سرعت زاویه‌ای ثابت  $\omega$  می‌چرخد. چنین بردار دواری را فاژود می‌نامند. از آنجا كه جمع مؤلفه‌های چند بردار مؤلفه بردار مجموع است، می‌توان تابعیت زمانی مجموع چند موج را با جمع فازور آنها به دست آورد. اینك  $n$  موج با سرعت‌های زاویه‌ای از  $\omega_1$  تا  $\omega_n$  را جمع می‌کنیم. برای سهولت در جمع کردن، امواجی كه دارای يك دامنه بوده و سرعت زاویه‌ای آنها به‌طور یكنواخت تغییر می‌كند را انتخاب می‌کنیم، یعنی

$$\omega_2 - \omega_1 = \omega_3 - \omega_2 = \dots = \omega_n - \omega_{n-1} = \delta\omega$$

از آنجا كه بین  $\omega_1$  و  $\omega_2$  تعداد  $n-1$  فاصله وجود دارد، این فاصله برابر است با

$$\delta\omega = \frac{\omega_n - \omega_1}{n-1}$$

اگر تمام فازورها در  $t=0$  موازی باشند، در زمان  $t$  آنها مطابق شكل ۸.۵ ب به‌طور یكنواخت پخش می‌شوند. زاویه بین دو فازور مجاور از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\delta\theta = (\delta\omega)t = \left( \frac{\omega_n - \omega_1}{n-1} \right) t \quad (21.5)$$

بزرگی بردار مجموع برابر دامنه موج برابند است، در حالی كه تصویر برابند روی محور قائم برابر جابه‌جایی لحظه‌ای است. فرض می‌کنیم كه  $\delta\omega$  به اندازه‌ای كوچك است كه دامنه دريك دوران زیاد تغییر نمی‌كند. دامنه نمایشگر منحنی پوش نوسانها است كه شكل کلی این پوش را تعیین خواهیم كرد. با حرکت فازورها از زمان  $t=0$  بزرگی برابند به سمت صفر كاهش می‌یابد. اولین صفروقتی رخ می‌دهد كه دسته فازورها تمام زاویه  $2\pi$  را پیوشانند، یعنی همان‌طور كه شكل ۸.۵ ج برای پنسج فازور نشان می‌دهد زاویه بین فازورهای مجاور  $2\pi/n$  باشد. اگر زمان اولین صفرا  $t_1$  بنامیم، معادله (۲۱.۵) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{2\pi}{n} = \left( \frac{\omega_n - \omega_1}{n-1} \right) t_1$$

كه بر حسب  $t_1$  به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$t_1 = \left( \frac{2\pi}{\omega_n - \omega_1} \right) \frac{(n-1)}{n} \quad (22.5)$$

اندك زمانی پس از  $t_1$  بزرگی برابند كوچك خواهد بود، زیرا فازورها هنوز پخش شده خواهند بود. اما، بالاخره دومین فازور به اولین فازور خواهد رسید و در این زمان فازورهای دیگر نیز در همان راستای فازور اول قرار خواهند گرفت. در این حال بزرگی برابند مانند بزرگی آن در  $t=0$  خواهد بود. شكل ۸.۵ د لحظه قبل از وقوع این حالت را نشان می‌دهد. اگر این زمان را كه فازورها در راستای هم هستند  $t_2$  بنامیم، زاویه بین دو فازور

مجاور  $2\pi$  است و معادله (۲۱.۵) به صورت زیر درمی آید

$$2\pi = \left( \frac{\omega_n - \omega_1}{n-1} \right) t_2$$

که در آن  $t_2$  برابر می شود با

$$t_2 = \left( \frac{2\pi}{\omega_n - \omega_1} \right) (n-1) \quad (23.5)$$

پس از گذشت زمان  $t_2$ ، منحنی پوش شکلی را که در حالت یسن  $t = 0$  و  $t = t_2$  داشت تکرار خواهد کرد و بنا بر این بزرگی مجموع فازورها را به صورت تابعی از زمان به دست خواهیم آورد.

تغییرات کمی منحنی پوش حاصل به تعداد امواجی که با هم جمع می شوند بستگی دارد. به هر حال، این بحث کیفی درباره چگونگی پیدایش مسوج بر ایند ایده های به دست می دهد. این موضوع در شکل ۹.۵ الف نشان داده شده است. موج بر ایند فقط در نواحی محدودی دارای دامنه بلند است که در بین آنها قسمتهایی با دامنه نسبتاً کوتاه نیز قرار دارد. نواحی با دامنه بلند را گروه موج می نامند و هر یک از امواجی که با هم جمع می شوند را فاز موج می گویند. یاد آور می شویم که زمان را به عنوان متغیر انتخاب کردیم. اگر  $x$  را در زمان ثابتی متغیر بگیریم، تحلیل موضوع مانند این است که به جای  $\omega$  ضریب  $k$  را به کار ببریم. موج بر ایند به صورت تابعی از مکان در شکل ۹.۵ ب نشان داده شده است.

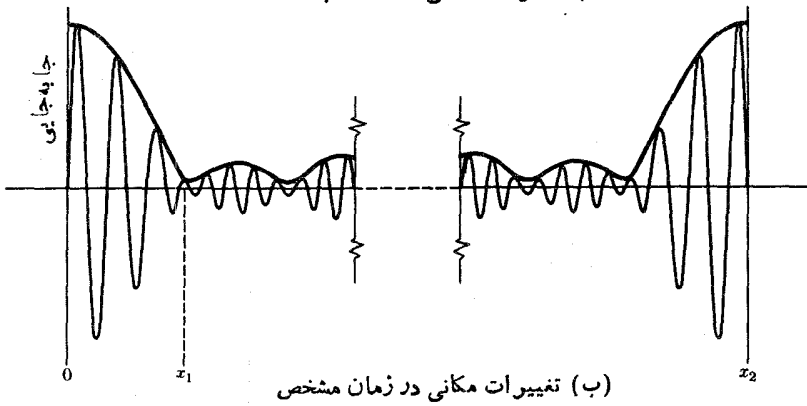
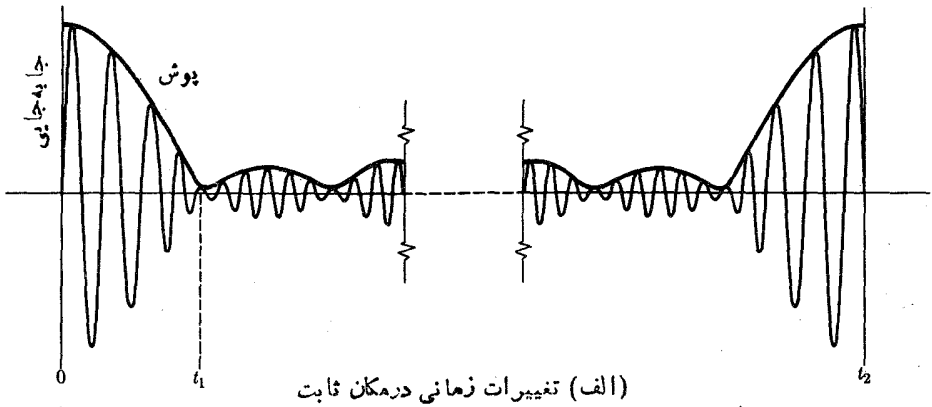
گرچه توانستیم گروه موج را به وجود آوریم ولی تعداد گروههایی که منطقی می توانند نمایشگر ذره باشند، خیلی زیاد است. برای اینکه موج بتواند شبیه یک ذره باشد بایستی فقط یک گروه موج وجود داشته باشد. این کار را می توان انجام داد به شرطی که زمان بین ماکزیمومهای گروه،  $t_2$ ، بینهایت شود. با توجه به معادله (۲۳.۵) این کار وقتی عملی است که  $n$  بینهایت شود. یک گروه موج منفرد می تواند از جمع بینهایت مسوج تشکیل شود. یاد آور می شویم که این بدان معنی نیست که اختلاف بسامد در مخرج معادله (۲۳.۵) باید بینهایت شود. تعداد بینهایت بسامد ممکن است در فاصله معینی از بسامد قرار داشته باشد. «اندازه» گروه بر حسب زمان  $2t_1$  است که آن را زمان دوام گروه می نامیم. زمان  $t_1$  برای بینهایت موج بنا بر معادله (۲۲.۵) به صورت زیر درمی آید

$$t_1(n \rightarrow \infty) = \frac{2\pi}{\omega_n - \omega_1}$$

اگر  $\omega_n - \omega_1$  را گستره بسامد  $\Delta\omega$  بنامیم، داریم

$$2t_1 = \Delta t = 2\pi / \Delta\omega \quad (24.5)$$

زمان دوام گروه موج از روی گستره بسامد معین می شود. با همین روش اندازه فضایی گروه،



شکل ۹.۵ موج بر اینند حاصل از جمع چند موج با بسامدهای متفاوت. (الف) بر حسب زمان، (ب) بر حسب مکان.

$\Delta x$ ، از رابطه زیر به دست می آید

$$\Delta x = 4\pi / \Delta k \quad (25.5)$$

یعنی گستردگی اعداد انشار تعیین کننده اندازه گروه است.

اگرچه قادر به ساختن یک گروه موج شده ایم که خصوصیت ذره مانند گستردگی در ناحیه فضایی بسیار محدود را دارد، ولی هنوز این سؤال باقی است که سرعت انتشار گروه چقدر است. سرعت فاز هر فاز موج  $u = v\lambda = \omega/k$  است. در محیط ناپاشنده، تمام فاز موجها دارای یک سرعت بوده و در نتیجه گروه موج با همین سرعت حرکت می کند. ولی در محیط پاشنده، سرعتهای فاز متفاوت بوده و موضوع سرعت گروه پیچیده تر است. حال دو فاز موج را در نظر می گیریم که می توان آنها را به صورت زیر نوشت

$$y_1 = A \cos(k_1 x - \omega_1 t)$$

و

$$y_2 = A \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

که در آنها سرعتهای فاز عبارت اند از  $u_1 = \omega_1/k_1$  و  $u_2 = \omega_2/k_2$ . توابع آن چنان انتخاب شده اند که دو موج در  $x=0$  و  $t=0$  هم فاز و در ماکزیموم هستند. جمع این دو را می توان به کمک قاعده مثلثاتی زیر انجام داد

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{1}{2}(a+b)$$

موج بر ایند عبارت است از

$$y = y_1 + y_2$$

$$= 2A \cos \frac{1}{2}[(k_2 - k_1)x - (\omega_2 - \omega_1)t] \cos \frac{1}{2}[(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t]$$

اگر اعداد انتشار و بسامد به طور جزئی از هم تفاوت داشته باشند، داریم

$$k_2 - k_1 = dk, \quad \omega_2 - \omega_1 = d\omega$$

$$\frac{1}{2}(k_1 + k_2) \approx k_1, \quad \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \approx \omega_1$$

بنابراین موج بر ایند به صورت زیر است

$$y = 2A \cos \frac{1}{2}[dkx - d\omega t] \cos(k_1 x - \omega_1 t) \quad (26.5)$$

حاصل ضرب  $A$  و دومین تابع کسینوسی معادله یکی از امواج اصلی است. تابع کسینوس جلوی رابطه، این موج را با تابع کسینوسی به طول موج  $\pi/dk$  و بسامد  $d\omega/\pi$  مدوله می کند. با ضرب اینها می توانیم سرعت انتشار مدولاسیون را، که همان سرعت گروه  $v_g$  است، به دست آوریم

$$v_g = \left(\frac{\pi}{dk}\right) \left(\frac{d\omega}{\pi}\right) = \frac{d\omega}{dk} \quad (27.5)$$

سرعت گروه موج به تغییرات بسامد بر حسب عدد موج بستگی دارد. از آنجا که فقط دوفاز موج را در نظر گرفته ایم، ممکن است که  $v_g$  برای زوجهای مختلف فاز موج فرق کند، یعنی سرعت گروه ممکن است تابع بسامد باشد. وقتی امواج زیادی با هم جمع می شوند، مشتق



معادله (۲۷.۵) برای بسامد مرکزی بسامدهای موجود در مجموع تعیین می‌شود. اگر گروه موج باید معرف یک ذره باشد، بنا بر این لازم است که سرعت گروه و سرعت ذره یکی باشد. اگر این سرعتها با هم تفاوت داشته باشند، ذره چه بسا در ناخیه‌ای قرار بگیرد که در آنجا دامنه موج ناچیز است و موج نشانه مفیدی از موقعیت ذره به دست نخواهد داد. با استفاده از رابطه جرم-انرژی نظریه نسبیت، می‌توانیم سرعت ذره را بر حسب تکانه و انرژی به دست آوریم

$$v = p/m = pc^2/mc^2 = pc^2/E \quad (27.5)$$

برای به دست آوردن سرعت گروه بر حسب همین عوامل از  $E = hv$  و  $p = h/\lambda$  که به صورت‌های زیر درآمده‌اند، استفاده می‌کنیم

$$k = \frac{2\pi p}{h}, \quad \omega = \frac{2\pi E}{h} \quad (29.5)$$

در این صورت، سرعت گروه چنین نوشته می‌شود

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} \quad (30.5)$$

برای محاسبه سرعت گروه به رابطه انرژی-تکانه از نظریه نسبیت یعنی معادله (۴۸.۳) (پ نیازمندیم

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

پس از دیفرانسیل‌گیری خواهیم داشت

$$2E dE = 2pc^2 dp$$

سرعت گروه موج برابر می‌شود با

$$v_g = \frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{E} \quad (31.5)$$

بنا بر این سرعت ذره [معادله (۲۸.۵)] مساوی سرعت گروه [معادله (۳۱.۵)] است. بدین ترتیب می‌بینیم که انتخاب بسامد و طول موج مربوط به ذره آن‌چنان است که منجر به نتیجه رضایت‌بخشی شد و سرعت‌های گروه موج و ذره یکسان به دست آمد. لذا ممکن است یک حرکت موجی داشته باشیم که از لحاظ واقع بودن در یک ناحیه کوچک فضایی دارای خصوصیت ذره باشد و با سرعت ذره حرکت کند.

۱. این موضوع جالب است که اگر از رابطه کلاسیک  $E = E_k = mv^2/2 = p^2/2m$  استفاده می‌کردیم، باز هم توافق بین سرعت‌های گروه و ذره را به دست می‌آوردیم.

### ۷.۵ آنالیز فوریه: تعامد

اغلب خوانندگان با ریاضیات سری فوریه که برای تشریح توابع تناوبی به کار می‌روند، آشنایی دارند. مثلاً، یک تابع  $x$  با تناوب  $L$  را می‌توان با سری فوریه به طریق زیر بسط داد

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{2\pi n x}{L} + B_n \sin \frac{2\pi n x}{L} \right) \quad (۳۲.۵)$$

به‌عنوان مثال جا به‌جایی عرضی یک سیم در حال نوسان گیتار، مذکور در بخش ۳.۵، را می‌توان به‌وسیله این تابع تشریح کرد. در اینجا سیم گیتار را پیوسته و نامحدود تصور می‌کنیم، و ساده‌ترین تشریح با قرار دادن  $L$  مساوی دو برابر طول سیم به دست می‌آید. بنا بر این طول سیم نصف طول موج اصلی (پایینترین بسامد) است که در آن  $n=1$  است. به‌علاوه برای تمام مقادیر  $n$  داریم  $A_n = 0$ ، زیرا توابع کسینوس شرایط مرزی صفر بودن جا به‌جایی در  $x=0$  و  $x=L$  را در بر ندارند. بنا بر این  $B_1$  دامنه اصلی،  $B_2$  دامنه هماهنگ دوم،  $B_3$  دامنه هماهنگ سوم و غیره است.

رابطه (۳۲.۵) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{i 2\pi n x / L} \quad (۳۳.۵)$$

اثبات این موضوع به یکی از مسائل واگذار شده است. توجه کنید که عدد درست  $n$  حالا از  $-\infty$  تا  $+\infty$  تغییر می‌کند. بدین ترتیب، همان طوری که برای ایجاد توابع کسینوس و سینوس لازم است، علامت توابع نمایی مثبت و منفی به دست می‌آید.

با فرض اینکه ضرایب  $A_n$  و  $B_n$  در رابطه (۳۲.۵) حقیقی هستند، همان‌طور که مثلاً در مورد یک سیم در حال نوسان ضروری است، ضریب  $C_n$  مختلط خواهد بود.

برای به دست آوردن ضرایب  $C_n$ ، فرض می‌کنیم که تابع  $f(x)$ ، مثلاً، به صورت جدول یا به صورت‌های تحلیلی تفکیک شده در چندین جزء از دوره تناوب، داده شده باشد. مثالهایی از حالت اخیر، توابع دندانه اره‌ای و امواج مربعی مشهور در الکترونیک هستند. اگر  $f(x)$  به صورتی معلوم باشد که بتوان انتگرال گرفت، ضرایب  $C_n$  را به طریق زیر به دست می‌آوریم. هر طرف معادله (۳۳.۵) را در  $e^{-i 2\pi m x / L}$  ضرب کرده و از  $-L/2$  تا  $+L/2$  روی  $x$  انتگرال می‌گیریم

$$\int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-i 2\pi m x / L} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \int_{-L/2}^{L/2} e^{i 2\pi (n-m)x / L} dx \quad (۳۴.۵)$$

تابع زیر انتگرال طرف راست معادله (۳۴.۵) جمع یک تابع سینوسی و یک تابع کسینوسی است که تناوب هر دو برابر است با  $L/(n-m)$ ، مگر وقتی که  $n=m$  باشد که در این حالت تابع برابر واحد است. برای  $n \neq m$  انتگرالها از  $-L/2$  تا  $+L/2$ ، انتگرال

روی تمام طول موجها بوده و بنابراین از بین می‌روند. بدین ترتیب می‌توان نوشت

$$C_m = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-i\gamma \pi m x / L} dx \quad (35.5)$$

در اینجا دو طرف معادله (۳۴.۵) را ترانهش دادیم و  $C_m$  را به جای  $C_n$  نوشتیم، زیرا که در طرف راست معادله (۳۴.۵) فقط جمله‌ای که در آن  $n = m$  باشد، باقی می‌ماند.

معادله (۳۳.۵) را برای تشریح هر تابع تناوبی با تناوب  $L$  و ضریب  $C$  که به کمک معادله (۳۵.۵) تعیین می‌شود، می‌توان به کار برد. مثلاً، این تحلیل را برای تشریح جا به جایی عرضی یک سیم در حال نوسان گینار، به طوری که در بالا شرح داده شد، می‌توان به کار برد. زیرا تابع در برد محدودی از  $x$  تعریف شده است و بنابراین به طور دلخواه می‌توانیم این برد را نصف تناوب بنامیم. تابع (۳۳.۵) را همچنین می‌توان، مثلاً، برای تشریح نوسان فشار هوای نزدیک یک پیانو که در آن  $C$  میانی نواخته شده است به کار برد. بدین ترتیب، متغیر مستقل  $x$  زمان و  $L$  تناوب است. ضرایب  $C$  توابع نزولی کند تغییر بر حسب زمان خواهند بود که آهنگ نزول برای هماهنگهای مختلف متفاوت است.<sup>۱</sup>

توابع  $e^{i\gamma \pi n x / L}$  که در آنها  $n$  عدد درست بوده و از  $n = -\infty$  تا  $n = +\infty$  تغییر می‌کند، را در فاصله  $x = -L/2$  تا  $x = +L/2$  توابع متعامد گویند. دو تابع  $\phi_m(x)$  و  $\phi_n(x)$  در فاصله  $x = a$  تا  $x = b$  وقتی متعامد هستند که داشته باشیم

$$\int_a^b \phi_m^* \phi_n dx = 0, \quad n \neq m \quad (36.5)$$

در اینجا  $\phi_m^*$  مزدوج مختلط  $\phi_m$  است یعنی از تغییر علامت تمام جمله‌هایی که شامل  $i = \sqrt{-1}$  هستند، به وجود می‌آید.

البته تعامد توابع، که در آنالیز فوری به کار رفته است، برای تبدیل رابطه (۳۴.۵) به رابطه (۳۵.۵) لازم است. تنها توابع سینوس و کسینوس و نمایی مختلط نیستند که تشکیل دسته توابع متعامد را می‌دهند. در فصلهای بعد بحث بیشتری درباره این حقیقت خواهیم کرد که جوابهای معادله موج شروودینگر به طور کلی دسته‌های متعامد تشکیل می‌دهند و اینکه توابع دلخواه را نیز با روش مشابهی بر حسب این توابع، نظیر آنچه با رابطه (۳۲.۵) یا (۳۳.۵) بیان شد، می‌توان بسط داد.

خاصیت دیگر توابع مثلثاتی یا نمایی مختلط این است که آنها تشکیل یک دسته کامل را می‌دهند. این بدان معنی است که یک سری نامتناهی، نظیر رابطه (۳۳.۵)، را همیشه

۱. در اینجا تا حدودی بیش از اندازه ساده سازی می‌شود. کلید  $C$  میانی نه یک، بلکه سه سیم پیانو را می‌نوازد. سه سیم عمداً برای تشدید سه بسامد (اصلی) تنظیم شده‌اند، و در غیر این صورت صدای پیانو خفه می‌شود. همچنین به دلیل سختی سیمها، هماهنگها دقیقاً مقدار بسامد دو یا سه برابر بسامد اصلی را ندارند.

می توان برای تشریح دقیق  $f(x)$  به دست آورد، مشروط بر اینکه  $f(x)$  معین بوده و دارای تعداد محدودی ناپیوستگی در فاصله  $x = -L/2$  تا  $x = +L/2$  باشد. برای اثبات این بیان باید به کتاب ریاضی مراجعه کرد.

در بحث فوق تابع  $f(x)$  را در فاصله  $-L/2$  تا  $+L/2$  تعریف کردیم. و از رابطه واضح است که این تابع در فواصل متوالی  $L$  تکرار می شود. حال می بینیم که می توانیم فاصله  $L$  را افزایش دهیم تا شامل هر ناحیه مورد علاقه بشود، و مهم نیست اگر  $f(x)$  در خارج از این حدود تکرار شود. در حقیقت دلیلی وجود ندارد که چرا نباید اجازه داد تا  $L$  به بینهایت برود. برای انجام این کار، رابطه (۳۳.۵) را به صورت زیر می نویسیم

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{LC_n}{2\pi} e^{ikx} \Delta k \quad (37.5)$$

که در آن متغیر جدیدی را ارائه کردیم

$$k = 2\pi n/L \quad (38.5)$$

و  $k = 2\pi/\lambda$  را به عنوان عدد انتشار می شناسیم. به علاوه داریم  $\Delta k = 2\pi\Delta n/L$ ، با توجه به اینکه  $\Delta n = 1$  می شود.

برای اینکه رابطه ای نظیر (۳۳.۵) معنی داشته باشد، سری بایستی همگرا باشد. این بدان معنی است که ضرایب  $C_n$  به طور کلی با افزایش  $n$  کاهش می یابد. به هر حال، می توان با مختصر کردن سری، یعنی سری با تعداد محدودی از جملات، تشریح خوب و دلخواهی از  $f(x)$  به دست آورد. هر چه فاصله  $L$  بلندتر باشد، جملات بیشتری مورد نیاز است و در این صورت هر یک از  $C_n$  ها کوچکتر خواهد بود. با مراجعه به رابطه (۳۸.۵)، ملاحظه می کنیم که برای محدود باقی ماندن  $f(x)$ ، حاصلضرب  $L$  و  $C_n$  باید محدود بماند. بدین ترتیب، وقتی  $L$  به بینهایت میل می کند  $C_n$  به صفر نزدیک می شود. بنا بر این تابع جدیدی برای جانشینی حاصلضرب  $LC_n$  معرفی می کنیم

$$g(k) = (2\pi)^{-1/2} LC_n \quad (39.5)$$

به طوری که کاملاً آشکار است، ضریب  $(2\pi)^{-1/2}$  به دلیل تقارن اضافه شده است. با جا گذاری این رابطه در معادله (۳۷.۵) و تبدیل جمع به انتگرال، خواهیم داشت

$$f(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk \quad (40.5)$$

این یک سری فوریه است که در آن طول موج مانند مورد معادله های (۳۲.۵) و (۳۳.۵) با جهشهای مجزا تغییر نمی کند، بلکه تغییرات آن پیوسته است (به عبارت دیگر طول موج در مراحل بینهایت کوچک تغییر می کند). تابع دامنه  $g(k)$  به طور خیلی ساده با جا گذاری رابطه (۳۹.۵) در معادله (۳۵.۵) به دست می آید، و شاخص پایین از  $m$  به  $n$  تغییر می کند.

نتیجه عبارت است از

$$g(k) = (\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (41.5)$$

تابع  $g(k)$  تبدیل فوریه  $f(x)$  نام دارد، و دو تابع  $f(x)$  و  $g(k)$  توابع معکوس فوریه نام دارند.

بدعنوان مثال تابع توزیع گاوس را در نظر بگیرید

$$f(x) = \pi^{-1/4} \sigma^{-1/2} e^{-x^2/2\sigma^2} \quad (42.5)$$

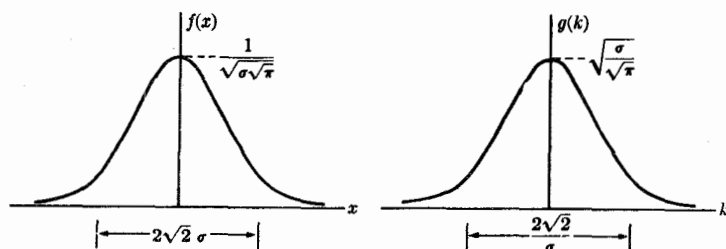
که در آن  $\sigma$  انحراف معیار یا انحراف جذر میانگین مربعی از مقدار میانگین  $\bar{x} = 0$  است. این تابع در شکل ۱۰.۵ رسم شده است. تبدیل فوریه را از رابطه (۴۱.۵) به صورت زیر به دست می آوریم

$$\begin{aligned} g(k) &= \pi^{-1/4} \pi^{-2/4} \sigma^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma^2} e^{-ikx} dx \\ &= \pi^{-1/4} \pi^{-2/4} \sigma^{-1/2} \int_0^{\infty} e^{-x^2/2\sigma^2} \cos kx dx \end{aligned} \quad (43.5)$$

در اینجا  $e^{-ikx} = \cos kx + i \sin kx$  را نوشته و از این حقیقت که انتگرال تابع پاد متقارن (یعنی تابعی که شامل  $\sin kx$  باشد) صفر است، استفاده کرده ایم. انتگرال آخری را می توان از جدول انتگرالهای معین به دست آورد. با قراردادن در رابطه (۴۳.۵) داریم

$$g(k) = \pi^{-1/4} \sigma^{1/2} e^{-k^2 \sigma^2/2} \quad (44.5)$$

این تبدیل نیز در شکل ۱۰.۵ رسم شده است.



شکل ۱۰.۵ تابع گاوسی  $f(x)$  و تبدیل فوریه آن  $g(k)$  که خود نیز گاوسی است.

تابع نمایی در رابطه (۴۴.۵) را می توان به صورت  $e^{-kx/2\sigma}$  بنویسیم. انحراف معیار  $\sigma$  برای تبدیل را می توان با مقایسه روابط (۴۲.۵) و (۴۴.۵) به صورت زیر به دست آورد.

$$\sigma_k = 1/\sigma \quad (45.5)$$

تابع گاوسی [رابطه (۴۲.۵)] را به عنوان يك مثال از موج راهنمای دو بروی در نظر بگیرید. در این صورت، تبدیل آن [رابطه (۴۴.۵)] طیف اعداد انتشار لازم  $k$  را برای تشریح این موج یا طیف طول موج با  $\lambda = 2\pi/k$  را نشان می دهد. اگر انحراف معیار را به عنوان اندازه ای از پهنای قطار موج و تبدیل آن به کاربریم، از رابطه (۴۵.۵) درمی یابیم که

$$\Delta x \Delta k \approx 1 \quad (46.5)$$

با به کار بردن پهنای  $2\sqrt{2}/\sigma$  و  $2\sqrt{2}\sigma$  که در منحنیهای شکل ۱۰.۵ نشان داده شد، داریم

$$\Delta x \Delta k = 8 \quad (47.5)$$

که می تواند با رابطه (۲۵.۵) مقایسه شود.

## ۸.۵ دوگانگی موج-ذره

ایده گروه موج کوششی است برای حل تضاد موجود در توجیه بعضی از آزمایشها که مستلزم استفاده از موج درمواردی و استفاده از ذره در موارد دیگر است. این تعبیر بدان معنی است که الکترون يك گروه از امواج ماده و فوتون يك گروه از امواج الکترومغناطیس است، یعنی در طبیعت فقط امواج وجود دارند اما آنها از بسته های موج که آنها را ذره می نامیم تشکیل می شوند. به طوری که در بخش ۴.۵ اشاره کردیم، مسیر حرکت ذرات مربوط به شکست امواج است. اشیاء بزرگ تعداد زیادی از این امواج دارند، و برهم کنش بین اشیاء به طور ساده برهم کنش امواج است.

اگرچه این «واقعیت» برای امواج منطقی به نظر می آید، لکن مشکلاتی نیز به همراه دارد. وقتی که موجی با مرز بین دو محیط برخورد می کند، معمولاً قسمتی از آن بازتابیده و قسمت دیگر شکسته می شود. گروه موج تابشی تبدیل به دو گروه می شود. اگر گروه موج الکترون باشد و مرز با تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی به وجود آمده باشد، می دانیم که الکترون به دو قسمت تقسیم نمی شود. درک این موضوع که چگونه دو گروه موج، یکی بازتابیده و دیگری شکسته شده، هر دو با هم می توانند يك الکترون منفرد باشند مشکل است. به علاوه، نیروی کولنی که در مورد بارهای نقطه ای بیان می شود و بین الکترونها وجود دارد به آسانی با این تعبیر وفق نمی دهد.

تعبیر ممکن دیگر به وسیله دو بروی ارائه شد. در این تعبیر، ذرات «واقعی» هستند و

امواج وابسته، امواج راهنما هستند که ذره را هدایت می کنند و به صورت امواج احتمال در نظر گرفته می شوند. دامنه این امواج احتمال در یک نقطه معین معیاری از احتمال وجود ذره در آن نقطه است. امواج راهنما مفاهیمی انتزاعی هستند و کلمه «موج» در این مورد در همان معنی عبارتهای «موج شادمانی» یا «موج جنایت» به کار می رود. از آنجا که این امواج مستقیماً قابل مشاهده نیستند، الزاماً احتیاج به محیط انتقال ندارند. این تفسیر، مشکل مفهوم گروه موج را وقتی که قسمتی از موج بازتابیده و قسمتی شکسته می شود، از میان برمی دارد. برای امواج احتمال، دامنه موج بازتابیده احتمال بازتاب ذره را در فصل مشترك دومحیط و دامنه موج شکسته احتمال نفوذ ذره را به داخل فصل مشترك به دست می دهد. يك ذره منفرد، تنها یکی از این دو عمل را انجام می دهد، اما تعداد زیادی ذره بر حسب احتمالات تقسیم می شوند.

این تعبیر موج راهنما، در این معنی که باریکه نور جریانی از فوتونها است، نیز دچار اشکال می شود. فرض می کنیم باریکه نوری را از دوشکاف نزدیک بهم، شبیه آزمایش یانگ، عبور دهیم. نقش تداخل حاصل در روی پرده شامل نوارهای تاریک و روشن است. محل این نوارها به وسیله اختلاف راه نوری امواج عبور کرده از شکافها تسا پرده تعیین می شود. نوارهای روشن و تاریک متوالی به ترتیب قرار گرفتن روی پرده، معرف احتمال زیاد و احتمال کم رسیدن فوتون به این نقاط از پرده است. اگر یکی از شکافها پوشیده شود، نقش تداخل تغییر می کند. این بدان معنی است که احتمال رسیدن فوتون به پرده تغییر می کند. حال برای نمونه، ممکن است که فوتون با احتمال زیاد به نقطه ای برسد که قبلاً احتمال رسیدن به آن خیلی کم بود. اگر فوتونها واقعی باشند بایستی از یکی از شکافها عبور کنند. در نتیجه، هنگامی که فوتون از یکی از شکافها می گذرد، حرکت آن تحت تأثیر شکاف دیگر قرار دارد و فوتون قادر است بداند شکافی که از آن عبور نکرده باز است یا بسته، بدین ترتیب، بدذرات «هوش» نسبت داده می شود که به نظر منطقی نمی آید. ما دوباره در بخش ۱۰۰۵ به این موضوع برمی گردیم.

حل تضاد بین امواج و ذرات در ارزیابی اینکه منظور ما از موج و ذره چیست، نهفته است. این اصطلاحات و مفاهیم ذهنی بشر که در موارد بنیادی به کار برده می شوند، در واقع، از تعمیم دنیای ماکروسکوپیکی دانه های شن و امواج تار حاصل شده اند. اکنون شگردی مفید و زیرکانه از مغز بشری ارائه می دهیم. مرکز گرانی يك توپ لاستیکی توخالی در وسط آن است. در غالب موارد، ولی نه همیشه، بحث حرکت این توپ با فرض اینکه توپ را يك جرم نقطه ای و تمام جرم را در مرکز بگیریم، آسان می شود. مرکز گرانی هیچگونه واقعیت عینی ندارد و اگر کسی توپ را بشکافد و به مرکز آن نگاه کند، می گوید «ها! در مرکز جرمی وجود ندارد». در جواب می گوئیم مرکز گرانی از آنچه در مرکز توپ است خبر نمی دهد، ولی نقطه ای است که در تشریح حرکت توپ مفید است. هیچیک از توصیفهای توپ نمی تواند به طور کامل واقعیت توپ را نشان دهد. به همین ترتیب، برای بیان واقعیت فیزیکی هم توصیف ذره ای وهم توصیف موجی هر کدام به تنهایی نارسا است. اشتباه آنهایی که می گویند تداخل نشان می دهد که نور يك پدیده موجی است، اشتباهی

لفظی است که هر روز تکرار می شود. به نقطه‌ای در نقشه اشاره می کنیم و می گوییم این ایران است. منظور این است که این شکل روی یک تکه کاغذ نمایشگر جنبه‌های مختلف سیاسی و فیزیکی ایران است. می دانیم که ایران واقعی قابل تا کردن، لوله کردن یا سوزاندن نیست. می دانیم که استانها کاملاً مسطح نیستند، فقط چند سانتیمتر مربع مساحت ندارند، و اختلاف آنها در رنگهایشان نیست. نقشه یک مدل زیر کانه مفید و ظریف مصنوع مغز بشر است. با یک ساعت مطالعه نقشه، مطالبی درباره بعضی از جنبه‌های ایران یاد می گیریم که از فراگیری یک عمر نگاه کردن به خود ایران بیشتر است. نقشه را به علت اینکه مطالب آن غیر واقعی هستند به مسخره نمی گیریم، بلکه توضیحات مفید آن را تحسین می کنیم.

موج و ذره هر دو مدل‌هایی هستند که ساخته‌ایم تا بتوانیم ماده را تشریح کنیم. کاملاً طبیعی است که انتظار نداریم هیچکدام از مدلها بتواند شرح کاملی از ماده بدهد. بعضی از خواص مانند تداخل در یکی از مدلها یعنی مدل موجی وجود دارد، در حالی که خواص دیگر مانند جرم در مدل دیگر یعنی مدل ذره‌ای قرار دارد. این دو مدل برای تشریح ماده یکدیگر را کامل می کنند. بنا بر این باید بگوییم که الکترونها از موج و ذره تشکیل شده‌اند، و نه موج یا ذره. همین بیان می تواند در مورد تابش الکترومغناطیس به کار رود. در یک آزمایش، مدلی را که به کار می بریم به وسیله دستگاه به کار رفته تعیین می شود.

اگر بپذیریم که امواج و ذرات «واقعی» نیستند، خیلی بی معنی است که درباره روشها و نتایج تجربی که منجر به نشان دادن اینها می شود صحبت کنیم. بدین جهت مطالبی را اظهار می داریم که ظاهراً به معنی موجودیت ذره‌ها است، مثلاً می گوییم شدت موج معیاری از احتمال موجودیت ذرات را به دست می دهد. این مطلب فقط برای سهولت است. موج و ذره هر دو مدل‌های غیر کاملی هستند و هر دو با هم برای تشریح تمام خواص ماده، که بطور تجربی تعیین می شوند، ضرورت دارند. با این تعبیر تناقضی در ماهیت دو گانه ماده و تابش الکترومغناطیس باقی نمی ماند.

## ۹.۵ اصل عدم قطعیت هایز نبرگ

با تحلیل گروه موج در بخشهای ۶.۵ و ۷.۵ می توان نتیجه‌ای مهم از دوگانگی موج-ذره به دست آورد. در کوشش برای به دست آوردن موجی با گسترش محدود، چند موج را با هم جمع کردیم تا تشکیل یک گروه موج را بدهند. اگر مدل موج و مدل ذره را، با فرض این که دامنه گروه معیاری از احتمال وجود ذره در یک محل است، به هم ارتباط دهیم می بینیم هنوز هم قطعیتی در دانستن محل ذره وجود ندارد. محل ذره می تواند در هر جای گروه موج باشد.

برای این که بتوان عدم قطعیت در محل ذره را کم کرد بایستی اندازه گروه موج،  $\Delta x$ ، را کاهش دهیم. اگر رابطه (۲۵.۵) را به صورت زیر مرتب کنیم

$$\Delta x \Delta k = \frac{1}{2\pi} \quad (48.5)$$



اندازه گروه موج را می توان بسا از دیاد گستردگی اعداد انتشار،  $\Delta k$ ، کاهش داد. بد نظر می رسد که عدم قطعیت در محل ذره را می توان با استفاده از گستردگی بینهایت اعداد انتشار  $\Delta k$ ، از بین برسد. از رابطه  $k = 2\pi p/h$  می بینیم که تکانه ذره به عدد انتشار موج بستگی دارد. اگر گستردگی اعداد انتشار را بینهایت بگیریم، در تکانه ذره گستردگی بینهایت خواهیم داشت. وقتی عدم قطعیت در موضع ذره را کم می کنیم عدم قطعیت در تکانه ذره زیاد می شود. اگر رابطه (۴۸.۵) را بر حسب تکانه بنویسیم، داریم

$$\Delta x \Delta p = \hbar$$

ضریب  $\hbar$  در این رابطه با فرض يك حالت ساده که دامنه های امواج یکسان و گستردگی بسامدها یکنواخت باشد، به دست آمد. با انتخاب متفاوت از اینها، برای این ضریب مقدار متفاوتی به دست می آید. اگر برای مشخص کردن عدم قطعیت های  $\Delta x$  و  $\Delta p$  به جای پهنای ماکزیموم مرکزی، مانند شکل ۹.۵، از جذر میانگین مربعی انحرافات استفاده کنیم خواهیم داشت

$$\Delta x \Delta p_x \simeq \hbar \quad (49.5)$$

رابطه (۴۶.۵) را با رابطه (۴۹.۵) مقایسه کنید.

شاخص پایین  $x$  که به تکانه داده شده، نشان می دهد که تکانه مربوط به انتقال در راستای محور  $x$  است. معادله (۴۹.۵) این طور تفسیر می شود که عدم قطعیت در مکان ذره ضرب در عدم قطعیت در تکانه وابسته تقریباً برابر  $\hbar$  است. عبارت تکانه وابسته به این علت به کار رفته است که در حالت سه بعدی علاوه بر مؤلفه تکانه محور  $x$ ، مؤلفه های تکانه در راستاهای محور  $y$  و  $z$  نیز وجود دارند، و همراه با مکان  $x$  مؤلفه  $x$  تکانه مورد نظر است. معادلات مشابه در راستاهای دیگر عبارت اند از

$$\Delta y \Delta p_y \simeq \hbar \quad (50.5)$$

$$\Delta z \Delta p_z \simeq \hbar \quad (51.5)$$

این عدم قطعیتها مربوط به طبیعت ماده است و با عدم قطعیت های مربوط به دقت محدود بعضی از وسایل اندازه گیری فرق دارد. عدم قطعیت های موجود در آزمایش های عملی که از طریق دستگاه به وجود می آید، معمولاً خیلی بزرگتر از عدم قطعیت های مربوط به دوگانگی موج-ذره است.

همین تحلیل را می توان بسا رابطه (۲۴.۵)  $\Delta t = \hbar / \Delta \omega$ ، انجام داد که در آن گسترش بسامد، طول زمان عبور گروه موج از محلی معین را تعیین می کند. با استفاده از رابطه  $E = \hbar \omega = \hbar \nu = h\nu$  داریم  $\Delta t \Delta E \simeq \hbar$  یا وقتی جذر میانگین مربعی انحرافات به کار می رود، خواهیم داشت

$$\Delta t \Delta E \simeq \hbar \quad (52.5)$$

این رابطه را می‌توان بدین ترتیب تفسیر کرد که عدم قطعیت در انرژی ذره بستگی به فاصله زمانی به کار رفته برای اندازه‌گیری انرژی دارد.

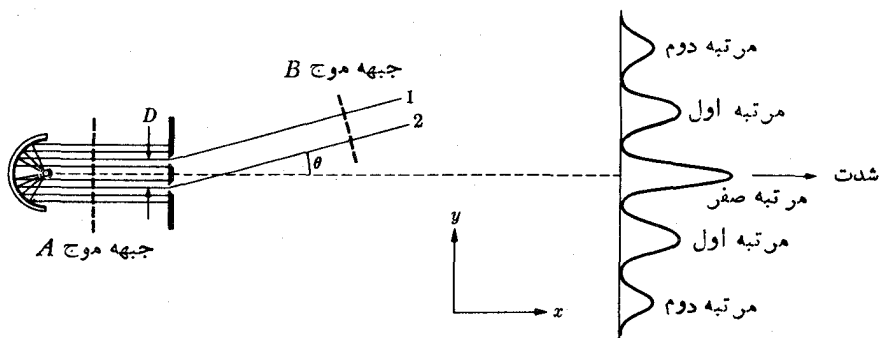
این نتیجه مسئله‌ای را که در ترازهای انرژی اتم بور مطرح شده بود، روشن می‌سازد. حالت‌های برانگیخته طول عمر  $\Delta t$  معینی دارند و بنابراین دارای یک عدم قطعیت انرژی وابسته،  $\Delta E \approx h/\Delta t$ ، هستند. خطوط طیف گسیل شده از حالت با طول عمر کوتاه بهتر از خطوط گسیل شده از حالت‌های با طول عمر بلند است، و پهنای خطوط را عملاً می‌توان به کمک وسایل دقیق مشاهده کرد.

معادلات مربوط به عدم قطعیت، یعنی معادله‌های (۴۹.۵)، (۵۱.۵)، (۳۱.۵) و (۳۲.۵) بیان‌های مختلف اصل عدم قطعیت هایزنبرگ است. این بیانها را نشانگر ماهیت ذاتی دنیای فیزیک تلقی می‌کنیم. بنابراین غیرممکن است که موضع دقیق و تکانه دقیق فوتون یا یک الکترون را بدانیم. دقت در یکی از این مقادیر مستلزم از دست دادن دقت در دیگری است. اغلب اصل عدم قطعیت به‌عنوان معلول عمل اندازه‌گیری معرفی می‌شود. به‌عنوان مثال، وقتی موضع یک الکترون تعیین می‌شود، عمل اندازه‌گیری عدم قطعیتی در موضع و تکانه به‌وجود می‌آورد که به‌علت برهم‌کنش بیسن الکترون و دستگاه است. این بدان معنی است که الکترون قبل از اندازه‌گیری، موضع و تکانه دقیقی داشت. ما تعبیری را ترجیح می‌دهیم که بنا بر آن عدم قطعیتها را در ماهیت خود چیزهایی که تجربه می‌کنیم می‌دانیم. می‌پذیریم که این انتخاب نمی‌تواند بر اساس هیچیک از نتایج فیزیکی قرار داشته باشد. فیزیک با نتایج اندازه‌گیری سروکار دارد و هر دو تفسیر منجر به عدم قطعیت یکسان در مقادیر اندازه‌گیری می‌شود.

به‌طوری‌که در فصل اول پیش‌بینی شد، ایده فلسفی دیگری که تحت تأثیر اصل عدم قطعیت قرار گرفت، علیت بود. بر طبق نظریه کلاسیک، مسیر یک ذره از موضع اولیه، تکانه و نیرویی که بر آن وارد می‌شود، تعیین می‌شود. اگر نیروی موجود بین ذرات عالم معلوم بود و اگر می‌توانستیم در زمانی معین موضع و تکانه دقیق هر ذره را اندازه بگیریم، در این صورت مکان و تکانه هر ذره در گذشته و آینده قابل محاسبه بود. گذشته و آینده با اطلاعاتی که در لحظه خاصی از زمان در دست داریم، کاملاً مشخص می‌شوند. اصل عدم قطعیت نشان می‌دهد که نمی‌توانیم مکان و تکانه دقیق ذره را بدانیم، فقط می‌توانیم بدانیم که ذرات احتمالاً چگونه عمل خواهند کرد. در مورد اجسام بزرگ، عدم قطعیتها به اندازه‌ای کوچک هستند که حرکت محتمل آنها با حرکت کلاسیک تفاوت زیادی ندارد. اما پیش‌بینی کلاسیک در مورد فوتونها و الکترونها، آگاهی ناچیزی از نتایج تجربی به دست می‌دهد.

## ۱۰۵ آزمایش دو شکاف

برای شکل دادن به ایده‌هایی که تا به حال در دوگانگی موج-ذره مورد بحث قرار داده‌ایم، و برای مشخص کردن حدود توانایی خود در تشریح عوامل اساسی دنیای فیزیکی، به‌عنوان مثال، آزمایش پراش دو شکاف را که در بخش ۸.۵ اشاره شد، در نظر می‌گیریم. نمودار



**شکل ۱۱.۵** آزمایش پراش دو شکاف. فاصله تا پرده، در مقایسه با فاصله جدایی دو شکاف  $D$ ، خیلی بزرگ است.

آزمایش در شکل ۱۱.۵ نشان داده شده است. چشمه به دو شکاف که به فاصله  $D$  از یکدیگر قرار دارند باریکه‌ای فرو می‌تابد. باریکه می‌تواند باریکه الکترومغناطیس یعنی جریان فوتونها، یا باریکه پرتو کاتودی یعنی جریان الکترونها باشد. تحلیل زیر برای هر دو نوع باریکه صادق است، اما برای سهولت یک جریان فوتونی را در نظر می‌گیریم. در فاصله‌ای نسبتاً بزرگ، در مقایسه با  $D$ ، از دو شکاف آشکارسازی که می‌تواند فیلم عکاسی یا تعدادی سلول فوتوالکترونیک باشد قرار می‌دهیم.

اگر آشکارساز فیلم عکاسی باشد، پس از پرتوگیری نقش تداخلی مشخصه‌ای را که به وسیله منحنی شدت در شکل نموده شده است نشان خواهد داد. ماکزیمومها و مینیمومها از برهم‌نهی موج ناشی از یک شکاف و موج شکاف دیگر به وجود می‌آیند، یعنی نقش تداخلی با پیش‌بینی مدل موجی حاصل می‌شود.

پرتوهای ۱ و ۲ که به یک نقطه روی پرده می‌گریند و بنا بر این می‌توانند با هم تداخل کنند را در طرف چپ شکل ۱۱.۵ می‌توان به دلیل مسافت عملاً موازی در نظر گرفت. از جبهه موج  $A$  تا جبهه موج  $B$  اختلاف فاصله‌ای بین دو پرتو برابر  $D \sin \theta$  وجود دارد. بنابراین، جدایی زاویه‌ای بین ماکزیموم مرکزی و مینیموم مجاور از رابطه زیر به دست می‌آید

$$D \sin \theta = \frac{\lambda}{2} = \frac{h}{2p_x}$$

که در آن  $\lambda$  طول موج نور و  $p_x$  تکانه مربوط به فوتون است. وقتی زاویه  $\theta$  کوچک باشد رابطه فوق به صورت زیر درمی‌آید

$$\theta = \frac{h}{2p_x D} \quad (۵۳.۵)$$

که در آن  $\theta$  زاویه بین ماکزیموم و می نیموم مجاور است.

اگر آشکارساز تعدادی سلول فوتوالکتریک باشد، در اثر تابش نور فوتوالکترون آزاد می شود و ماکزیمومها در محلهایی هستند که سلولهای فوتوالکتریک الکترونها را زیادی آزاد می کنند. هر فوتوالکترون معرف ورود يك فوتون به آشکارساز است، بنا بر این در حوالی ماکزیمومها تعداد بیشتری فوتون به آشکارساز برخورد می کنند تا در حوالی می نیمومها. این نقش، اطلاعات اندکی درباره يك فوتون منفرد به دست می دهد و اطلاعات آن فقط به اثر حاصل از تعداد زیادی فوتون مربوط می شود. همبستگی بین دو مدل موجی و ذره ای آماری است. ماکزیمومهای نقش موجی معرف نواحی دارای بیشترین احتمال فرود فوتونها است.

اگر در ضمن آزمایش یکی از شکافها را پوشانیم، نقش حاصل از يك شکاف با نقش قبلی فرق خواهد داشت. اگر شکاف بالایی را در نصف مدت آزمایش پوشانیم و شکاف پایینی را در نیمه دیگر آزمایش پوشانیم، کل پرتو دهی به آشکارساز با حالتی که دو شکاف باز باشند فرق دارد. در این حالت محلهایی که فوتونها با بیشترین احتمال به پرده برخورد می کنند تغییر می کند. اگر باریکه نوریک جریان فوتون باشد، يك فوتون منفرد بایستی از یکی از دو شکاف بگذرد. این حقیقت که نقش حاصل از دو شکاف با نقش حاصل از يك شکاف فرق دارد، بدین معنی است که حرکت فوتون تحت تأثیر شکاف دیگر قرار می گیرد. این طور به نظر می رسد که فوتون ضمن عبور از يك شکاف «می داند» که آیا شکاف دیگر باز است یا نه. بدینگونه به نظر می رسد که مدل ذره ای به نتیجه ای نامعقول منتهی می شود.

تحلیل آزمایش نشان می دهد که به طور تجربی نمی توان اطلاعاتی درباره عبور يك فوتون از هر يك از دو شکاف به دست آورد. در نتیجه، بحث درباره چنین عبوری بی معنی است. این موضوع تأکید می کند که کار فیزیک پیش بینی نتایج تجربی است. تعریف هر کمیت فیزیکی بایستی، به طور واضح یا مستتر، حاوی عمل لازم برای اندازه گیری آن کمیت فیزیکی باشد. بحث درباره نتایجی که قابل مشاهده نباشند، بی معنی است. اگر بخواهیم بدانیم که فوتون از کدام شکاف عبور می کند، باید آزمایش را طوری ترتیب دهیم که بتوانیم این موضوع را تعیین کنیم. برای آشکارسازی عبور يك فوتون چند ذره کوچک درست در سمت راست شکافها قرار می دهیم. فوتون پس از عبور از يك شکاف به یکی از این ذرات برخورد خواهد کرد. مشاهده پس زنی ذره کوچک امکان خواهد داد که شکاف مورد استفاده فوتون را تعیین کنیم. در این آزمایش ایده آل، تنها عدم قطعیتهای موجود آنهایی خواهند بود که اصل عدم قطعیت پیش بینی می کند. فرض می کنیم که دقت ساخت دستگاه به اندازه ای زیاد است که هیچگونه عدم قطعیتی در ابعاد آن وجود ندارد.

برای اینکه مطمئن شویم از کدام شکاف فوتون عبوری ذره کوچک را پس زده است، عدم قطعیت در مؤلفه  $l$  از مکان ذره بایستی خیلی کمتر از فاصله دو شکاف باشد، بنا بر این باید داشته باشیم

$$\Delta y \ll D$$

در ضمن برخورد تبادل تکانه (اندازه حرکت) روی می‌دهد، اما از آنجا که جزئیات برخورد را نمی‌دانیم، در مقدار تکانه تبادل شده عدم قطعیتی وجود دارد. عدم قطعیت در مؤلفه  $y$  از تکانه فوتون،  $\Delta p_y$ ، نباید به اندازه‌ای زیاد باشد که باعث انحراف از نقش تداخلی شود. این بدان معنی است که باید داشته باشیم

$$\frac{\Delta p_y}{p_x} \ll \theta = \frac{h}{2p_x D}$$

یا

$$\Delta p_y \ll \frac{h}{2D}$$

از آنجا که تکانه پایسته می‌ماند،  $\Delta p_y$  مقدار عدم قطعیت مؤلفه  $y$  از تکانه ذره کوچک نیز خواهد شد. اگر عدم قطعیت مکانی  $y$  ذره کوچک را در عدم قطعیت تکانه (مؤلفه  $y$ ) آن ضرب کنیم، رابطه زیر به دست می‌آید

$$\Delta y \Delta p_y \ll \frac{Dh}{2D} = \frac{h}{2} \quad (54.5)$$

از مقایسه این پیش‌بینی با اصل عدم قطعیت،  $\Delta y \Delta p_y \simeq h$ ، می‌بینیم که کوچکی لازم در عدم قطعیت‌های معادله (54.5) امکان‌پذیر نیست. اگر  $\Delta y$  به اندازه کافی کوچک باشد که بتوانیم شکافی را که فوتون از آن عبور کرده تعیین کنیم،  $\Delta p_y$  به اندازه‌ای بزرگ می‌شود که نقش تداخلی در محل آشکارساز به وجود نمی‌آید. ما نمی‌توانیم هم ماهیت ذره‌ای  $\Delta y$ ، به طوری که برخورد با ذره کوچک نشان می‌دهد، و هم ماهیت موجی  $\Delta y$ ، به طوری که از نقش تداخلی معلوم می‌شود، در کنار یکدیگر نشان دهیم. این مثال همچنین نشان می‌دهد چگونه اصل عدم قطعیت برای حل تناقض ظاهری بین مدل موجی و مدل ذره‌ای به کار می‌رود.

## ۱۱.۵ خلاصه

دوگانگی موج-ذره‌ای بر پایه‌های آزمایشی استوار است. نه مدل موجی و نه مدل ذره‌ای هیچکدام به تنهایی تمام خواص دنیای فیزیکی را در بر نمی‌گیرد. این دو مدل در هم ادغام می‌شوند تا یکدیگر را در تشریح تمام نتایج آزمایشی تکمیل کنند. این در آمیختگی در ارتباط بین خواص موجی طول موج و بسامد از یکسو، و خواص ذره‌ای تکانه و انرژی از سوی دیگر دیده می‌شود. به نظر می‌رسد که پیش‌بینی‌های دو مدل به طور آماري همبسته باشند، دامنه بزرگ موج معرف احتمال زیاد وجود ذره در آن محل است. در مورد ذرات مادی مثل الکترون‌ها،

مدل ذره‌ای به طوری توسعه یافته است که مثلاً بتوانیم مسیر حرکت الکترونها را در میدانهای مغناطیسی حساب کنیم. مدل موجی مربوط به ذرات مادی به پختگی بیشتری احتیاج دارد اگر چه می‌توانیم بسامد و طول موج وابسته (به ذرات) را به دست آوریم، لکن روشی برای محاسبه دامنه «موج الکترون» در اختیار نداریم. تجربیات قبلی در مورد حرکات موجی، مانند مورد امواج صوتی، نشان می‌دهد که احتیاج به معادله موج داریم. حل این معادله بایستی دامنه موج را به دست دهد که می‌توانیم آن را با مدل ذره‌ای مرتبط سازیم. پذیرش کامل ماهیت دوگانه ماده نیاز به توسعه بیشتر مدل موجی دارد.

### مسائل

۱۰۵ نشان دهید که سطح مقطع پراکندگی تامسون برابر است با

$$\sigma_T = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0 m_e^2 c^4} = 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$$

۲۰۵ فوتونهای پرتو ایکس با طول موج  $712 \text{ \AA}$  و  $712 \text{ eV}$  با کربن برخورد کامپتون دارند. تغییر طول موج در راستای پراکندگی  $90^\circ$  چقدر است، اگر ذره پراکننده (الف) يك الکترون، (ب) کل اتم کربن باشد؟

۳۰۵ سه کوانتوم تابش در برخورد با يك قطعه گرافیت و در اثر کامپتون تحت زاویه  $90^\circ$  پراکنده می‌شوند. با فرض این که الکترون جدا شده انرژی بستگی در کربن ندارد، تغییر نسبی طول موج  $(\Delta\lambda/\lambda)$  را برای تابش پراکنده شده حساب کنید، وقتی که کوانتوم فرودی (الف) يك پرتو گاما از کوبالت  $106 \times 10^{-2} \text{ \AA}$ ؛  $\lambda = 106 \times 10^{-2} \text{ \AA}$ ؛ (ب) پرتو ایکس از مولیبدن  $712 \text{ \AA}$ ؛  $\lambda = 712 \text{ \AA}$ ؛ و (ج) نور مرئی  $5000 \text{ \AA}$ ؛  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$  باشد. (د) در حقیقت انرژی بستگی يك الکترون در کربن  $4 \text{ eV}$  است. اگر این انرژی بستگی را به حساب آوریم، جوابهای قسمتهای قبل چقدر خواهند شد؟ (ه) درباره امکان تفکیک دو موج در باریکه‌ای متشکل از تابش فرودی و پراکنده در هر يك از حالات قبل بحث کنید.

۴۰۵ يك کوانتوم پرتو ایکس با طول موج  $15 \text{ \AA}$  و  $15 \text{ eV}$  متحمل برخورد کامپتون شده و در زاویه  $37^\circ$  پراکنده می‌شود. (الف) انرژی فوتون فرودی و فوتون پراکنده و الکترون پرتاب شده چقدر است؟ (ب) بزرگی تکانه هر يك از فوتونها چقدر است؟ (ج) با استفاده از مقادیر قسمتهای قبل، تکانه الکترون را از راه ترسیم و تحلیل به دست آورید.

۵۰۵ با استفاده از اطلاعات و نتایج مسئله ۲-۵، برای پراکندگی کامپتونی فوتونهای با طول موج  $712 \text{ \AA}$ ؛  $\lambda = 712 \text{ \AA}$  از مصرف کربن، انرژی ذره پس زده را در هر يك از دو حالت زیر به دست آورید: (الف) ذره پس زده الکترون فرض شود، (ب) ذره پس زده اتم کربن فرض شود، (ج) راستای حرکت ذره پس زده را نسبت به راستای فوتون فرودی تعیین کنید.

۶۰۵ فوتونی با انرژی  $E$  با ذره آزادی به جرم در حال سکون  $m_0$  برخورد کامپتون دارد. (الف) نشان دهید که حداکثر انرژی جنبشی پس زنی ذره برابر است با

$$E_{k\max} = \frac{E^2}{E + m_0 c^2 / 2}$$

(ب) حداکثر انرژی ای که می تواند از برخورد کامپتونی یک فوتون نور بنفش ( $\lambda = 4000 \text{ \AA}$ ) به یک الکترون آزاد انتقال یابد، چقدر است؟ (ج) آیا نور بنفش می تواند با برخورد کامپتون الکترونی را از یک فلز جدا سازد؟

۷۰۵ وقتی یک اتم هیدروژن از حالت  $n=2$  به حالت  $n=1$  می رود، انرژی اتم به مقدار  $10.2 \text{ eV}$  کاهش می یابد. در فصل ۴ گفته شده است که تمام این انرژی به صورت یک فوتون منفرد تابش می شود. در حقیقت انرژی فوتون باید به مقدار کمی کوچکتر از  $10.2 \text{ eV}$  باشد، زیرا جزء کوچکی از انرژی برای تهیه انرژی جنبشی اتم پس زده مورد نیاز است. (الف) تکانه پس زنی اتم هیدروژن چقدر است؟ (ب) چه کسری از  $10.2 \text{ eV}$  به وسیله اتم پس زده گرفته شده است.

۸۰۵ دستگاه آزمایش پراکندگی کامپتون طوری مرتب شده است که فوتون پراکنده و الکترون پس زده، وقتی که مسیرهای عمود بر هم داشته باشند، آشکار می شوند. نشان دهید که در این شرایط (الف) طول موج فوتون پراکنده با رابطه  $\lambda' = \lambda / \cos \alpha$  داده می شود و (ب) انرژی فوتون پراکنده مساوی  $m_0 c^2$  است.

۹۰۵ نشان دهید که طول موج دو بروی، بر حسب آنگستروم، برای الکترونی که از حالت سکون و اختلاف پتانسیل  $V$  ولت شتاب می گیرد، (الف) از نظر کلاسیکی  $\lambda = 12.27 / V^{1/2}$  است و (ب) از نقطه نظر نسبیتی چنین است

$$\lambda = \frac{12.27}{V^{1/2}} \left( \frac{Ve}{2m_0 c^2} + 1 \right)^{-1/2}$$

۱۰۰۵ طول موج دو بروی موج وابسته به الکترونی که از حالت سکون با اختلاف پتانسیل (الف)  $100 \text{ V}$ ، و (ب)  $8000 \text{ V}$  شتاب یافته است، چقدر است؟

۱۱۰۵ نشان دهید که طول موج دو بروی برای ذره ای به جرم  $m$  که با سرعت جذرمیانگین مربعی توزیع ماکسول در دمای  $T$  حرکت می کند، عبارت است از  $\lambda = h / (3mkT)^{1/2}$  که در آن  $k$  ثابت بولتزمن است.

۱۲۰۵ یک ذره آلفا (هلیوم دوبار یونیده) از یک هسته اتم رادیوم، با انرژی جنبشی  $5.78 \text{ MeV}$  پرتاب می شود. (الف) طول موج دو بروی این ذره چقدر است؟ (ب) چگونه این طول موج با قطر هسته ای ذره آلفا که حدود  $10^{-15} \times 2$  متر است، مقایسه می شود؟

۱۳۰۵ (الف) تکانه فوتونی باطول موج  $0.02 \text{ \AA}$  چقدر است؟ (ب) تکانه الکترونی که انرژی کل آن معادل انرژی فوتون  $0.02 \text{ \AA}$  باشد، چه مقدار است؟ (ج) طول موج دوبروی الکترون در قسمت ب چقدر است؟

۱۴۰۵ با استفاده از ایده بردارهای دوار، بخش ۶۰۵، چهار موج را که دارای دامنه‌های مساوی و بسامدهای متفاوت هستند با هم جمع کرده و دامنه برآیند را به صورت تابعی از زمان به دست آورید. فرض می‌کنیم که  $\omega_1 = 2\pi$  رادیان در ثانیه و  $\delta\omega = \pi$  رادیان در ثانیه باشد. منحنی تغییرات دامنه را نسبت به زمان برای هر  $1/8$  ثانیه رسم کنید و نشان دهید که زمان بین گروه‌ها ۲ ثانیه و دوام زمانی گروه ۱ ثانیه است.

۱۵۰۵ یک گروه موج از جمع تعداد بینهایت موج تشکیل شده است. سرعت فاز با نسبت بسامد زاویه‌ای به عدد انتشار برابر است. (الف) به شرطی که سرعت فاز ثابت باشد، نشان دهید که سرعت گروه برابر سرعت فاز است. (ب) به شرطی که سرعت فاز متناسب با عدد انتشار باشد، ثابت کنید که سرعت گروه دوبرابر سرعت فاز است.

۱۶۰۵ نشان دهید که سرعت گروه  $v_g$  را می‌توان با داشتن سرعت فاز  $u$  از رابطه زیر به دست آورد

$$v_g = u - \lambda \frac{du}{d\lambda}$$

۱۷۰۵ با صرف نظر کردن کشش سطحی، سرعت امواج باطول موج  $\lambda$  در آبهای عمیق به وسیله رابطه  $u = (g\lambda/2\pi)^{1/2}$  داده می‌شود، که در آن  $g$  شتاب گرانشی است. نشان دهید که سرعت گروه برای چنین امواجی نصف سرعت فاز است.

۱۸۰۵ (الف) به کمک معادلات (۷۰۵) و (۸۰۵) ثابت کنید که سرعت فاز امواج دوبروی وابسته به ذره‌ای با جرم سکون  $m_0$  در خلا\* از رابطه زیر به دست می‌آید

$$u = c \sqrt{1 + \left(\frac{m_0 c \lambda}{h}\right)^2}$$

(ب) بر طبق این معادله کدام طول موجها دارای سرعت فاز بیشتر هستند، طول موجهای بلند یا کوتاه؟ آیا سرعت هر یک از آنها از  $c$  تجاوز خواهد کرد؟ (ج) آیا این معادله وقوع پاشیدگی امواج دوبروی را در خلا\* نشان می‌دهد؟

۱۹۰۵ ثابت کنید که رابطه (۳۳۰۵) معادل رابطه (۳۲۰۵) است.

۲۰۰۵ حداقل عدم قطعیت در مکان جرمی برابر ۲ گرم را که با سرعت  $10^8$  متر بر ثانیه حرکت می‌کند، و همچنین حداقل عدم قطعیت در مکان یک الکترون را که با سرعت  $10^8 \times 0.5$  متر



برثانیه حرکت می‌کند محاسبه کنید، با فرض این‌که عدم قطعیت تکانه برای هر دو  $\Delta p = 10^{-3} p$  باشد.

۲۱.۵ با فرض این‌که عدم قطعیت مکانی يك ذره برابر با طول موج دو بروی وابسته به آن باشد، نشان دهید که در این حالت عدم قطعیت در سرعت ذره تقریباً برابر با سرعت آن است.

۲۲.۵ الکترونی در يك اتم هیدروژن به حالت برانگیخته  $n = 2$  می‌رود و برای  $10^{-8}$  ثانیه، قبل از گذار به پایین و حالت پایه، در آن حالت باقی می‌ماند. عدم قطعیت در انرژی حالت  $n = 2$  را حساب کنید. آیا مقدار حاصل قسمت قابل توجهی از پیش‌بینی نظریه بور، یعنی  $3.39 \text{ eV}$ ، را تشکیل می‌دهد؟

۲۳.۵ می‌خواهیم طول موج و مکان يك فوتون را به‌طور هم‌زمان اندازه بگیریم. فرض کنیم که در اندازه‌گیری طول موج  $\lambda = 6000 \text{ \AA}$  به دست آمد و دقت وسایل اندازه‌گیری  $\lambda$ ، يك در میلیون باشد. حداقل عدم قطعیت در مکان فوتون چقدر است؟

## مکانیک موجی

### ۱.۶ مقدمه

در فصل گذشته دربارهٔ اندیشهٔ دو بروی راجع به خواص موجی ذرات بحث کردیم. همچنین آزمایش دیویسون و گرم را به طور خلاصه تشریح کردیم که در طی آن پدیدهٔ تداخلی باریکهٔ الکترونی نشان داده شد، و همزمان با آن رابطهٔ دو بروی در مورد طول موج به اثبات رسید. شرح جدیدتر مکانیک موجی که در این فصل ارائه می‌شود، عمدتاً در نتیجهٔ کار اروین شرودینگر است. ولی فیزیکدانهای بزرگ بخصوص آلبرت اینشتین، ماکس بورن و ورنه‌ایزبرگ نیز سهم مهمی در آن دارند.

در اینجا مکانیک موجی شرودینگر را به صورت اصل موضوعی بیان می‌کنیم. از این نقطه نظر، آموزش مکانیک موجی با آموزش مکانیک کلاسیک تفاوت دارد. مکانیک کلاسیک را می‌توان در طی مراحل استقرار ساده که بر اساس قوانین تجربی بنیادی، نظیر قوانین نیوتونی، قرار دارند، درک کرد. این استقراها با استفاده از مقداری ریاضیات معمولاً نوع ساده به دست می‌آیند. توسعهٔ مکانیک موجی با استفاده از این روشهای متداول امکان پذیر نیست، زیرا مکانیک موجی را نمی‌توان مستقیماً از نتایج تجربیات ساده استنباط کرد. درک مکانیک موجی مستلزم جهشهای قیاسی معین است و ارائهٔ آنها به صورت اصل موضوعی، بدون هیچگونه زمینه و بدون هیچگونه استدلال توجیهی، پیچیدگیها را به حداقل می‌رساند. سپس با استفاده از این اصل موضوعها، نظریهٔ مادهٔ اتمی را عرضه می‌کنیم، نظریه‌ای که نتایج بعضی از تجربیات را پیش بینی می‌کند. اگر این تجربیات انجام شوند

و با نظریه مطابقت داشته باشند، در این صورت قانع می‌شویم و برای پیش‌بینی نتایج تجربیات دیگر پیش می‌رویم. اگر بازهم موفق شویم، به درستی نظریه مطمئنتر می‌شویم. از خوانندهٔ مرددخواسته می‌شود که بعد از خواندن بقیه این کتاب و با جمع‌آوری اطلاعات و بررسی آنها تصمیم بگیرد که از معتقدان به مکانیک موجی باشد یا نه.

البته در گذشته در این کتاب چندین بار روش مشابهی را اتخاذ کرده‌ایم. به عنوان مثال وقتی دربارهٔ تابش جسم سیاه پلانک بحث می‌کردیم، این اصل موضوع را پذیرفتیم که افزایش یا کاهش انرژی در کاواک فقط با واحدهای کوانتومی انرژی  $h\nu$  امکان پذیر است. بر اساس این فرض و اصول فیزیکی شناخته شده، نظریه‌ای را که با حقایق تجربی تطبیق می‌کرد به دست آوردیم. همین وضع برای اثر فوتوالکتریک و اتم بور نیز وجود داشت. همزمان با پیشرفت نظریهٔ مکانیک موجی شرودینگر، ورنه‌ایز نبرگ موفق به نوشتن نظریهٔ مکانیک ماتریسی خود شد، نظریه‌ای که معادل نظریهٔ شرودینگر ولی اغلب خیلی دشوارتر است. در اینجا فقط به تشریح نظریهٔ شرودینگر خواهیم پرداخت.

در سه فصل آینده دربارهٔ مکانیک موجی تک ذره بحث خواهیم کرد. این تک ذره، در میدانهای نیرویی که با انرژی پتانسیل ذره برحسب مکان بیان می‌شود، حرکت خواهد داشت. البته، عملاً این میدانهای نیرو به وسیلهٔ ذرات دیگر ایجاد می‌شوند. در هر صورت، در حال حاضر توجهی به اینکه چگونه این میدانها ایجاد می‌شوند، نداریم بلکه فقط می‌دانیم که آنها وجود دارند و ما نا هستند. در اینجا چهار اصل موضوع را معرفی می‌کنیم. اصل موضوع اول مربوط به وجود دو تابع موج  $\Psi$  و  $\Phi$  و معنی آنهاست. اصل موضوع دوم دستورالعمل یافتن  $\Phi$  وقتی  $\Psi$  معلوم است، و بالعکس، را به دست می‌دهد. اصل موضوع سوم مربوط به وجود عملگرهای دیفرانسیلی معرف کمیتهای فیزیکی قابل اندازه‌گیری است. و اصل موضوع چهارم معادلهٔ شرودینگر است که نشان می‌دهد چگونه تابع موج  $\Psi$  یا  $\Phi$  را با معلوم بودن انرژی برهم کنش ذره با محیط اطراف آن (یعنی انرژی پتانسیل) به دست آوریم. در فصل بعدی، این اصل موضوعها به سیستمهای بیش از یک ذره تعمیم داده خواهند شد.<sup>۲</sup>

## ۲.۶ معنای $\Psi$

اصل موضوع ۱ الف. حرکت یک ذره به وسیلهٔ یک تابع موج در فضای حقیقی  $\Psi(x, y, z, t)$ ، که شامل تمام اطلاعات قابل حصول از طریق اندازه‌گیریهای مربوط

1. W. Heisenberg, *Z. Physik*, 33 (1925), p. 879.

۲. در معرفی اصول مکانیک موجی برای یک ذره که در اینجا آمده است اساساً از طرز عمل کلی کتاب زیر پیروی شده است.

Robert B. Leighton, *Principles of Modern Physics*, New York: McGraw-Hill (1959).

به حرکت است، بیان می‌شود. مجزود عددی تابع موج، چگالی احتمال یافتن ذره را در مکان معین در فضا بیان می‌کند.  
 بنا بر این می‌توان نوشت

$$P(x, y, z, t) dx dy dz = |\Psi|^2 dx dy dz \quad (۱.۶)$$

این رابطه احتمال یافتن ذره را در زمان  $t$  در جزء حجم  $d\tau = dx dy dz$  و در نقطه  $x, y$  و  $z$  بیان می‌کند. مثلاً تابع موج می‌تواند تابعی سینوسی نظیر رابطه (۲۰.۵) باشد. به کار بردن مقدار مطلق بر این دلالت می‌کند که  $\Psi$  می‌تواند موهومی یا مختلط باشد، و واقعاً هم چنین است. بنا بر این باید این تصور که تابع موج خود مشابه امواج آبی، امواج صوتی، و یا امواج شناخته شده دیگر به صورت جابه‌جایی موجی یک محیط قابل اندازه‌گیری باشد را فوراً کنار بگذاریم. بدین ترتیب، نظریه مکانیک موجی یک نظریه بسیار انتزاعی است و اگر تطبیق دقیق بین نتایج تجربی و پیش‌بینیهای نظری بر اساس این نظریه نمی‌بود، مطمئناً کنار گذاشته می‌شد.

آنچه در اینجا در اصل موضوع اول به دست داده‌ایم، تفسیری رسمی از امواج راهنمای دوبروی است. ما هنوز نمی‌توانیم بگوییم که تابع موج چیست، اما به مربع مقدار عددی آن معنی مشخصی داده‌ایم. همچنین اشاره کرده‌ایم که تابع موج شامل اطلاعاتی درباره کمیات فیزیکی غیر از مکان نظیر تکانه، تکانه زاویه‌ای و انرژی است. اگر بدانیم که یک ذره در حجم معینی از فضا، مثلاً در جعبه بسته، قرار دارد، در این صورت احتمال یافتن ذره در داخل جعبه ۱ است. بنا بر این می‌نویسیم

$$\int |\Psi|^2 d\tau = \int \Psi^* \Psi d\tau = 1 \quad (۲.۶)$$

که انتگرال‌گیری در حجم جعبه انجام شده است. این «جعبه» می‌تواند میکروسکوپیکی و یا گاهی تمام فضا باشد. ما مربع مقدار مطلق را به صورت حاصلضرب تابع موج در مزدوج مختلط آن نوشته‌ایم.

به طوری که بعداً خواهیم دید، تابع موج مسئله‌ای معین از حل یک معادله دیفرانسیل خطی به دست می‌آید. جواب چنین معادله‌ای بدواسطه یک ضریب ثابت همیشه نامعین است. بنا بر این برای به دست آوردن این ضریب بهنجارکننده از انتگرال بهنجارش [معادله (۲.۶)] استفاده می‌شود.

در فصل ۵ درباره پهنای نوار یا به طور دقیقتر، طیف طول موج قطارهای موج بحث کردیم. این طیف طول موج معادل با طیف تکانه است، زیرا بر طبق (نظریه) دوبروی  $\lambda = h/p$  است. در تشریح رسمیتر موضوع، معادل طیف طول موج را به صورت یک تابع موج  $\Phi(p_x, p_y, p_z, t)$  در فضای تکانه معرفی می‌کنیم.

اصل موضوع ۱ ب. حرکت یک ذره به وسیله یک تابع موج در فضای تکانه،

۱. مزدوج مختلط  $a+ib$  مساوی  $a-ib$  است. حاصلضرب اینها  $a^2+b^2$  یا  $|a+ib|^2$  است.

حرکت است، بیان می‌شود. مربع عددی تابع موج، چگالی احتمال را در فضای تکانه برای مشاهدهٔ تکانه‌ای معین بیان می‌کند.  
 بنا بر این می‌توان نوشت

$$P(p_x, p_y, p_z, t) dp_x dp_y dp_z = |\Phi|^2 dp_x dp_y dp_z \quad (۳.۶)$$

تابع موج  $\Phi$  باید در انتگرال بهنجارش صدق کند

$$\int |\Phi|^2 d\tau_p = \int \Phi^* \Phi d\tau_p = 1 \quad (۴.۶)$$

که در آن  $d\tau_p = dp_x dp_y dp_z$  جزء حجم در فضای تکانه است.

### ۳.۶ نتایج حاصل از اصل موضوع اول

نتیجهٔ تعبیری که از تابع موج در بخش قبل داده‌ایم این است که حاصل یک تجربه را، به‌طور کلی، نمی‌توان دقیقاً پیش‌بینی کرد. به‌عنوان مثال، در اندازه‌گیری مکان ذره عدم قطعیتی وجود دارد، و اگر اندازه‌گیری مختصات مکانی یک ذره را در لحظه‌ای معین از زمان بارها انجام دهیم، نتایج متفاوت خواهند بود. در این حالت، مکانیک موجی برای تعیین نتیجهٔ میانگین تعداد زیادی از این اندازه‌گیریها، رابطهٔ ساده‌ای را به‌دست می‌دهد. مقدار متوسط یا مقدار چشمداشتی مختصات مکانی  $x$  از ضرب مقدار معین  $x$  در احتمال یافتن ذره در آن نقطه در جزء حجم  $d\tau$  و سپس انتگرال‌گیری از آن در تمام فضایی که در آن تابع موج غیر صفر است به‌دست می‌آید.

$$\langle x \rangle = \int |\Psi|^2 x d\tau = \int \Psi^* x \Psi d\tau \quad (۵.۶)$$

پراکنش شکسته در طرفین  $x$  معمولاً در مکانیک موجی به‌عنوان یک علامت برای مقدار چشمداشتی به‌کار می‌رود، گرچه بعضی از کتابها از علامت  $\bar{x}$  برای این منظور استفاده می‌کنند. در رابطهٔ (۵.۶) حاصلضرب مزدوج مختلط  $\Psi^*$  در  $\Psi$  را از هم جدا کرده‌ایم و  $x$  را بین آنها قرار داده‌ایم. تا اینجا، این کار نتایج مهمی به‌دست نداده است. تابع زیر انتگرال به‌سادگی حاصلضرب این توابع است و ترتیب عوامل اهمیت ندارد. اما، بعداً عملگرهای دیفرانسیلی نمایشگر متغیرهای فیزیکی را معرفی می‌کنیم که ترتیب ضرایب در آنها کاملاً مهم خواهد بود.

بدیهی است که می‌توانیم این تشریح را برای محاسبهٔ مقدار چشمداشتی هر کمیتی فیزیکی که تابعی از مختصات فضا و زمان باشد، بسط دهیم. به‌عنوان مثال، انرژی پتانسیل  $V$  را در نظر بگیرید که فقط تابع مختصات فضایی است، یعنی  $V = V(x, y, z)$ .

مجدداً، مقدار متوسط یا مقدار چشمداشتی انرژی پتانسیل را با محاسبه  $V$  برای نقطه‌ای معین، و ضرب آن در احتمال یافتن ذره در آن نقطه در جزء حجم  $d\tau$  و سپس انتگرال‌گیری از آن در فضا به دست می‌آوریم

$$\langle V \rangle = \int \Psi^* V \Psi d\tau \quad (6.6)$$

به‌طور کلی، مقدار چشمداشتی تابع  $f(x, y, z, t)$  را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\langle f(t) \rangle = \int \Psi^* f(x, y, z, t) \Psi d\tau \quad (7.6)$$

یادآور می‌شود در حالی که مختصات فضایی  $x$ ،  $y$  و  $z$  در انتگرال‌گیری شرکت دارند، مقدار چشمداشتی ممکن است تابعی از  $t$  باشد. به عنوان مثال، مسیر یک ذره در مکانیک کلاسیک معرف مکان هندسیهای ذره‌ای نقطه‌ای در یک فاصله زمانی معین است. در مکانیک موجی نیز یک مسیر دقیقاً کاملاً مشخص می‌توان تعریف کرد، اما نباید آن را مسیر واقعی ذره در نظر گرفت بلکه باید به صورت مکان هندسی مقدار چشمداشتی  $x$ ،  $y$  و  $z$  در یک فاصله زمانی معین در نظر گرفته شود.

حال می‌توانیم رابطه مشابهی برای مقدار چشمداشتی تکانه یا هر تابعی از تکانه و زمان بنویسیم. به عنوان مثال، برای مؤلفه  $x$  تکانه رابطه‌ای مشابه معادله (۵.۶) به‌صورت زیر داریم

$$\langle p_x \rangle = \int \Phi^* p_x \Phi d\tau_p \quad (8.6)$$

انرژی جنبشی را می‌توان بر حسب مؤلفه‌های تکانه و جرم  $m$  به‌صورت زیر نوشت

$$E_k = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \quad (9.6)$$

بنابراین مقدار چشمداشتی انرژی جنبشی برابر

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{2m} \int \Phi^* (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \Phi d\tau_p \quad (10.6)$$

است. به‌طور کلی هر تابعی از  $p_x$ ،  $p_y$ ،  $p_z$  و  $t$  مقدار چشمداشتی به‌صورت زیر دارد

$$\langle f_p(t) \rangle = \int \Phi^* f_p(p_x, p_y, p_z, t) \Phi d\tau_p \quad (11.6)$$

انتگرال در تمام فضای تکانه یا قسمتی از فضای تکانه، که وجود ذره در آن محرز است، گرفته می‌شود.

به طوری که در بالا گفته شد تابع موج  $\Psi$  موج راهنمای دو بروی و تابع موج  $\Phi$  طیف عدد موج یا طیف تکانه موج راهنما است (به شکل ۱۰.۵ مراجعه کنید). در بحث فصل ۵، دیدیم که طیف عدد موج یا طیف تکانه موج راهنما همان تبدیل فوریه موج راهنما است. این مطلب ما را به اصل موضوع بعدی رهبری می کند.

### ۴.۶ رابطه بین $\Psi$ و $\Phi$ : عملگرها

اصل موضوع ۲. توابع موج  $\Psi$  و  $\Phi$  توابع معکوس فوریه هستند.

برای سهولت، در اینجا با دسته‌ای یک بعدی از توابع موج،  $\Psi(x, t)$  و  $\Phi(p_x, t)$  کار می کنیم. بر طبق اصل موضوع ۳ می نویسیم

$$\Phi(p_x, t) = h^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, t) e^{-ik_x x} dx \quad (12.6)$$

$$\Psi(x, t) = h^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(p_x, t) e^{ik_x x} dp_x \quad (13.6)$$

که در آنها  $k_x = p_x / \hbar$  است. دلیل اینکه در جلوی انتگرالهای بالا به جای  $(2\pi)^{-1/2}$  معادلات (۴۰.۵) و (۴۱.۵) مقدار  $h^{-1/2}$  ظاهر شده، این است که تابع  $\Phi$  بر حسب  $p_x$  نوشته و انتگرال گیری شده است نه بر حسب  $k_x$ . این روش به ما اجازه می دهد که با دانستن تابع  $\Psi$  در فضای معمولی تابع موج  $\Phi$  را در فضای تکانه به دست آوریم. سپس می توانیم مقادیر چشمداشتی کمینهای فیزیکی را که تابع تکانه هستند با استفاده از تابع موج  $\Phi$  به دست آوریم. اینک نشان خواهیم داد که لازم نیست تبدیلات را انجام دهیم، زیرا می توانیم روش کاملاً ساده‌ای پیدا کنیم که مقادیر چشمداشتی تکانه یا هر توانی از آن مستقیماً از  $\Psi$  به دست آیند.

مقدار چشمداشتی مؤلفه  $x$  تکانه را از معادله (۸.۶) می نویسیم که با جا گذاری معادله (۱۲.۶) در آن رابطه زیر حاصل می شود

$$\langle p_x \rangle = h^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \Phi^* p_x \int_{-\infty}^{\infty} \Psi e^{-ip_x x / \hbar} dx \right] dp_x \quad (14.6)$$

حال با انتگرال گیری جزئی داخل کروشه خواهیم داشت

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi e^{-ip_x x / \hbar} dx = -\frac{\hbar}{ip_x} \Psi \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\hbar}{ip_x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Psi}{\partial x} e^{-ip_x x / \hbar} dx \quad (15.6)$$

در تمام حالات عملی، تابع موج کراندار است، یعنی  $\Psi$  برای  $x = \pm \infty$  صفر است. بنابراین جمله اول در طرف راست معادله (۱۵.۶) حذف می شود. بدین ترتیب با جا گذاری در معادله (۱۴.۶) داریم

$$\langle p_x \rangle = i\hbar h^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \Phi^* \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Psi}{\partial x} e^{-ip_x x/\hbar} dx \right] dp_x \quad (۱۶.۶ \text{ الف})$$

از آنجا که نتیجه نهایی مستقل از ترتیب انتگرال گیری است، می توان رابطه فوق را به صورت زیر نوشت

$$\langle p_x \rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \left[ h^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^* e^{-ip_x x/\hbar} dp_x \right] \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx \quad (۱۶.۶ \text{ ب})$$

از مقایسه معادله فوق با معادله (۱۳.۶) دیده می شود که جمله داخل کروشه برابر  $\Psi^*$  است. با قراردادن آن، معادله به صورت زیر در می آید

$$\langle p_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \left[ \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right] \Psi dx \quad (۱۷.۶)$$

به طوری که در اینجا دیدیم می توان مقدار چشمداشتی تکانه را به جای استفاده از تابع موج تکانه  $\Phi$  به کمک تابع موج فضایی  $\Psi$  به دست آورد. معادله (۱۷.۶) خیلی شبیه به معادله (۷.۶) است. در حقیقت، دریافته ایم که می توان مقدار چشمداشتی تکانه را درست با همان رابطه ای که نظیر تابع مختصات است به دست آورد، جز اینکه به جای خود تکانه عملگر دیفرانسیلی  $\partial/\partial x$  ( $\hbar/i$ ) را جایگزین می کنیم. به آسانی می توان ثابت کرد که با روش مشابهی که در بالا به کار بردیم، مقدار چشمداشتی توان  $n$  ام  $p_x$  از رابطه زیر به دست می آید

$$\langle p_x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \left( \frac{\hbar}{i} \right)^n \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \Psi dx \quad (۱۸.۶)$$

باید توجه داشت که دستورالعمل این است که  $n$  امین مشتق تابع موج  $\Psi$  نسبت به  $x$  گرفته شود و نه توان  $n$  ام مشتق مرتبه اول.

این روابط را برای مقادیر چشمداشتی تکانه با استفاده از توابع موج یک بعدی به دست آورده ایم. تعمیم مسئله به توابع موج سه بعدی عملاً چیز مهمی نیست و بدون اثبات می گوئیم که نتایج همانند روابط (۱۷.۶) و (۱۸.۶) است، و فقط به جای  $dx$  باید  $d\tau$  جزء حجمی را قرار دهیم. البته روابط مشابهی برای مؤلفه های  $y$  و  $z$  تکانه به کار می روند، و فقط عملگرهای دیفرانسیلی به ترتیب مشتق جزئی نسبت به  $y$  یا  $z$  خواهند بود. به طور خلاصه، در این روش محاسبه دریافته ایم که می توان مقدار چشمداشتی را برای هر مؤلفه تکانه یک ذره یا هر توانی از آن با به کار بردن روابط (۷.۶) با جانشانیهای زیر به دست آورد



$$p_x \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$p_y \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y} \quad (19.6)$$

$$p_z \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$$

سؤال بعدی که طبیعتاً مطرح می‌شود این است که: چگونه مقدار چشمداشتی يك كمیت فیزیکی که رابطه کلاسیک آن مخلوطی از مختصات فضا و تکانه است، به دست می‌آید؟ مثلاً انرژی کل که برابر است با  $V + (p^2/2m)$ ، یا مؤلفه  $z$  تکانه زاویه‌ای که عبارت است از  $L_z = xp_y - yp_x$ . در اصل موضوع سوم به این سؤال می‌پردازیم.

## ۵.۶ استفاده از عملگرها

اصل موضوع ۳. مقدار چشمداشتی يك كمیت فیزیکی  $F(r, p)$  با رابطه زیر داده می‌شود

$$\langle \underline{E} \rangle = \int \Psi^* F_{op} \Psi d\tau \quad (20.6)$$

که در آن  $F_{op}$  يك عملگر هرمیتی خطی است که از جانشین کردن مؤلفه‌های تکانه با روابط (۱۹.۶) به دست می‌آید.

در بخش گذشته ثابت کردیم که این روش وقتی که  $F$  فقط تابعی از مؤلفه‌های تکانه باشد، درست است. در اصل موضوع سوم این روش را به وضعیتی که در آن  $F$  تابعی از مختصات فضایی و تکانه هردو باشد، تعمیم داده‌ایم.

عملگر خطی عملگری است که برای آن قانون توزیع

$$F_{op}(\Psi_1 + \Psi_2) = F_{op}\Psi_1 + F_{op}\Psi_2 \quad (21.6)$$

صادق است و همزمان در رابطه زیر نیز صدق می‌کند

$$F_{op}(C\Psi) = CF_{op}\Psi \quad (22.6)$$

که  $C$  يك مقدار ثابت است. عملگر هرمیتی عملگری است که در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\int \Psi_1^* F_{op} \Psi_2 d\tau = \int \Psi_2 (F_{op} \Psi_1)^* d\tau \quad (23.6)$$

انتگرال مطابق معمول در تمام فضا گرفته می‌شود، و دو تابع  $\Psi_1$  و  $\Psi_2$  توابع اختیاری قابل انتگرال گیری هستند.

قید هرمیتی برای عملگرها ضروری است، زیرا در بعضی مواقع امکان دارد که از يك رابطه کلاسیک شامل مختصات فضایی و تکانه بیش از يك عملگر دیفرانسیلی تشکیل داد. به عنوان مثال، حاصلضرب  $x p_x$  را در نظر بگیرید. وقتی اولین رابطه از معادلات (۱۹.۶) را جانشین کنیم، واضح است که اگر  $p_x$  قبل یا بعد از  $x$  (در ضرب با  $x$ ) قرار گیرد، نتیجه متفاوت خواهد بود. در حالاتی شبیه به این، يك ترکیب خطی از حاصلضربهای که در آن ضرایب قابل تعویض باشند، می تواند به عملگر هرمیتی تبدیل شود. در تمام مثالهایی که در این کتاب در نظر می گیریم این مسئله رخ نمی دهد، و عملگرها مستقل از ترتیب قرار گرفتن ضرایب در روابط کلاسیک بوده، و در رابطه (۲۳.۶) صدق می کنند.

خاصیت هرمیتی عملگرهای دیفرانسیلی يك شرط کافی برای حقیقی ساختن مقدار چشمداشتی کمیت های فیزیکی است. مزدوج مختلط معادله (۲۰.۶) را در نظر می گیریم و در- می یابیم که

$$\langle F \rangle^* = \int \Psi^* (F_{op} \Psi) dt = \int \Psi^* F_{op} \Psi dt = \langle F \rangle \quad (23.6)$$

دیده می شود که مزدوج مختلط مقدار چشمداشتی برابر با خود مقدار چشمداشتی است. این موضوع فقط وقتی درست است که مقدار چشمداشتی يك عدد حقیقی باشد.

حال می توانیم مهمترین عملگرهایی را که در کارهای بعدی خود در فیزیک اتمی بدانها نیاز داریم، بنویسیم. ابتدا عملگر انرژی کل، که مجموع انرژیهای جنبشی و پتانسیل است، را می توان از رابطه کلاسیک نوشت

$$E = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z) \quad (25.6)$$

عملگر مربوطه به صورت زیر نوشته می شود

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(x, y, z) \quad (26.6)$$

این عبارت عملگر هامیلتونی،  $H$ ، نامیده می شود، زیرا در فیزیک کلاسیک، انرژی کل که با معادله (۲۵.۶) بیان می شود و تابعی از تکانه و مختصات مکانی است، تابع هامیلتونی نام دارد. می توان معادله (۲۶.۶) را با معرفی عملگر لاپلاسی خلاصه کرد

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (27.6)$$

بنا بر این هامیلتونی چنین می شود

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \quad (28.6)$$

رابطه کلاسیک تکانه زاویه ای عبارت است از

$$L = r \times p \quad (۲۹.۶)$$

مؤلفه‌های این رابطه را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$L_x = yp_z - zp_y$$

$$L_y = zp_x - xp_z \quad (۳۰.۶)$$

$$L_z = xp_y - yp_x$$

بنابراین عملگرهای مکانیک کوانتومی مربوطه عبارت‌اند از

$$L_{xop} = \frac{\hbar}{i} \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$L_{yop} = \frac{\hbar}{i} \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (۳۱.۶)$$

$$L_{zop} = \frac{\hbar}{i} \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

همچنین ممکن است عملگر مربع تکانه زاویه‌ای کل را با جمع مجذورات روابط (۳۱.۶) به دست آورد.

## ۶.۶ معادله شرودینگر

اصل موضوع ۰۴ تابع موج  $\Psi$  باید در رابطه زیر صدق کند

$$H\Psi = \hbar i \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (۳۲.۶)$$

این معادله تابع وابسته به زمان شرودینگر نامیده می‌شود.<sup>۱</sup> تمام انواع حرکت‌های موجی در فیزیک از معادله دیفرانسیلی شامل مشتق مرتبه دوم مختصات مکانی و مشتق دوم نسبت به زمان پیروی می‌کنند. این قانون در مورد حرکت امواج عرضی درسیم، امواج صوتی، امواج الکترومغناطیس و غیره به کار می‌رود. سمت چپ معادله شرودینگر علاوه بر پتانسیل، دارای عملگر لاپلاسی یا مشتق مرتبه دوم مختصات

۱. تابع موج  $\Phi$  در معادله‌ای مشابه معادله (۳۲.۶) صدق می‌کند، جز اینکه عملگر هامیلتونی و عبارت کلاسیک مؤلفه‌های تکانه بدون تغییر نوشته می‌شود و مختصات  $x$ ،  $y$  و  $z$  با عبارتهایی به صورت  $(-\hbar/i)(\partial/\partial p_x)$  جانشین می‌شوند. به هر حال، ما بیش از این از تابع موج تکانه در این کتاب سخن نخواهیم گفت.

مکانی است، و درست است يك ثابت موهومی ضربدر مشتق مرتبه اول نسبت به زمان است. عملگر  $H$  درست چپ معادله، عملگر انرژی کل است و بر حسب مختصات مکانی و تکانه نوشته شده است. می بینیم که اصل موضوع معادله (۳۲.۶) معادل فرضی است که بنا بر آن عملگر دیگری برای انرژی کل به صورت زیر وجود دارد

$$E_{op} = \hbar i \frac{\partial}{\partial t} \quad (33.6)$$

معادله (۳۳.۶) به معادله (۱۹.۶) برای عملگر تکانه بسیار شبیه است، خیلی موجه است که چنین شباهتی هم باید وجود داشته باشد. این موضوع را می توانیم از بحث زیر دریاییم. يك موج پیشرو به وسیله تابع سینوسی یا جمع توابع سینوسی و یا توابع مشابه، و همیشه همراه با متغیری به صورت  $(kx - \omega t)$ ، نشان داده می شود. به عنوان مثال، معادله (۲۰.۵) را ملاحظه کنید. با به کار بردن عملگر  $p_x$  معادله (۱۹.۶) در هر تابعی که در آن  $x$  و  $t$  همراه با هم و با این ترکیب ظاهر می شوند، در عمل مشتق گیری يك ضریب  $k\hbar$  به دست می آید که بر طبق (نظریه) دوبروی تکانه ذره است. با تکرار همین عمل با عملگر معادله (۳۳.۶) ضریب  $\hbar\omega$  به دست می آید که معرف انرژی ذره است. به عبارت دیگر عملگرهای (۱۹.۶) مؤلفه های تکانه تابع موج و عملگر معادله (۳۳.۶) انرژی کل را به دست می دهند. این موضوع شرودینگر را بر آن داشت تا معادله مخصوصی به دست آورد که نام او را به خود گرفت. در فصلهای آینده این کتاب خواهیم دانست که تا چه اندازه شرودینگر موفق بوده است.

برای حل معادله ای به صورت (۳۲.۶) باید سعی کرد که متغیرها را از هم جدا کرد. بنابراین تابع موج  $\Psi$  را به صورت زیر می نویسیم

$$\Psi = \psi(x, y, z)\eta(t) \quad (34.6)$$

با جا گذاری این رابطه در معادله (۳۲.۶) داریم

$$\eta H \psi = \psi \hbar i \frac{d\eta}{dt} \quad (35.6)$$

پس از تقسیم بر  $\psi$  خواهیم داشت

$$\frac{1}{\psi} H \psi = \frac{1}{\eta} \hbar i \frac{d\eta}{dt} \quad (36.6)$$

سمت چپ این معادله تابعی از مختصات مکان و سمت راست آن فقط تابعی از زمان است. یگانه راهی که بتوان، برای تمام مقادیر  $x$ ،  $y$  و  $z$  و هر مقدار  $t$ ، دو طرف معادله را مساوی قرارداد این است که هر دو طرف برابر با يك مقدار ثابت باشند. به دلایلی که بزودی روشن خواهند شد، ثابت جدایی را  $E$  می نامیم که معادله های زیر به دست می آیند

$$H\psi = E\psi \quad (۳۷.۶)$$

و

$$\frac{d\eta}{\eta} = -\frac{E}{\hbar} dt \quad (۳۸.۶)$$

جواب معادله آخری فوراً به صورت زیر به دست می آید

$$\eta = e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t \quad (۳۹.۶)$$

که در آن  $\omega = E/\hbar$  است. این به روشنی بسامد زاویه ای موج است، و بنا بر این ثابت جدایی  $E$  را به عنوان انرژی ذره تشخیص می دهیم. در حال حاضر، با چنین بیانی به نظریه دویروی برمی گردیم. اما، مکانیک موجی باید مستقل از کارهای گذشته توسعه یابد و فقط بر اساس اصول موضوعه چهارگانه استوار باشد. بنا بر این در بخش ۸.۶ به معادله (۳۷.۶) بر خواهیم گشت و نشان خواهیم داد که  $E$  واقعاً انرژی ذره است. عمل جداسازی ریاضی تابع موج دلالت بر این دارد که  $E$  یک عدد ثابت است. بدیهی است که این روش فقط وقتی درست است که بقای انرژی وجود داشته باشد.

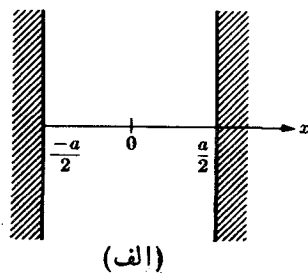
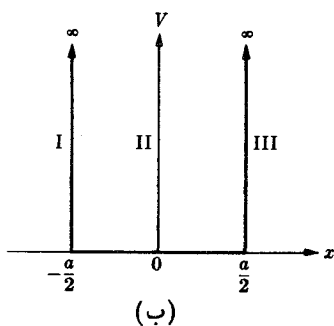
عامل زمانی  $e^{-i\omega t}$  دارای ارزش عددی واحد است. بنا بر این اگر  $\psi$  بهنجار باشد، تابع موج کل  $\Psi$  بهنجار خواهد بود. پس می توانیم انتگرال بهنجارش [معادله (۲۰.۶)] را به صورت زیر بنویسیم

$$\int \psi^* \psi d\tau = 1 \quad (۴۰.۶)$$

معادله (۳۷.۶) به معادله مستقل از زمان شرودینگر موسوم است. با دانستن شکل انرژی پتانسیل در عملگر هامیلتونی [معادله (۲۸.۶)] می توانیم این معادله را حل کنیم. با بررسی و بحث بیشتر در بخش ۸.۶ خواهیم دید که معادله مستقل از زمان نوعی معادله دیفرانسیل است که معادله ویژه مقدار نامیده می شود. برای ذره ای مقید در یک چاه پتانسیل، مانند الکترون در اتم هیدروژن، جوابهای قابل قبول از نظر فیزیکی فقط برای مقادیر ویژه انرژی ثابت،  $E$ ، وجود دارند. این معادله بدرستی ترازهای اتم هیدروژن را، بدون هیچگونه نیازی به فرضهای اختیاری دیگر، به دست می دهد. فعلاً به بعضی مسائل که از لحاظ ریاضی ساده ترند، خواهیم پرداخت.

## ۲.۶ چاه مربعی یک بعدی با عمق بینهایت

فرض کنیم که یک ذره بین دو دیواره نفوذناپذیر، مطابق شکل ۱۰.۶ جلو و عقب می رود. حرکت این ذره را فقط در راستای  $x$  در نظر می گیریم. این حرکت به وسیله تابع موجی که از معادله شرودینگر یک بعدی با پتانسیلی مطابق شکل ۱۰.۶ الف به دست می آید، توصیف



شکل ۱۰۶ چاه مربعی بینهایت يك بعدی.

می شود. معادله مستقل از زمان شرودینگر در يك بعد به صورت زیر است

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi \quad (41.6)$$

نمایش تابع  $V(x)$  شکل ۱۰۶ ب درگستره کامل  $x$  از  $-\infty$  تا  $+\infty$ ، به صورت يك تابع تحلیلی بر حسب  $x$ ، بسیار مشکل است. بنابراین حل معادله شرودینگر را به طور گام به گام انتخاب می کنیم. در نواحی I و III شکل ۱۰۶ ب، انرژی پتانسیل بینهایت است. از معادله (۴۱.۶) می بینیم که در این صورت مشتق مرتبه دوم  $\psi$  بر حسب  $x$  نیز باید بینهایت شود، مگر آنکه انرژی ذره برابر با بینهایت شود و یا  $\psi = 0$  باشد. این امر منجر به يك جواب قابل قبول فیزیکی نمی شود، بنابراین تنها جواب ممکن در نواحی I، III و  $\psi = 0$  در ناحیه II انرژی پتانسیل صفر است، و داریم

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0 \quad (42.6)$$

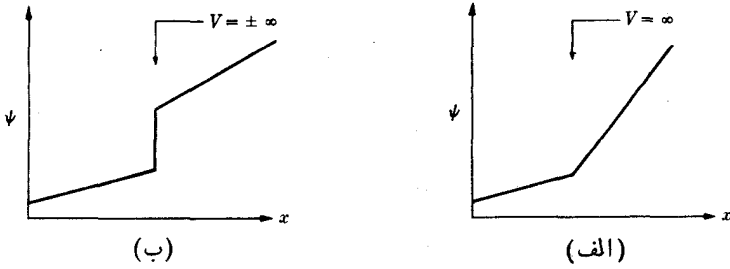
یا

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE} \quad (43.6)$$

جواب کلی معادله (۴۲.۶) می تواند به صورت زیر نوشته شود

$$\psi = A \sin kx + B \cos kx \quad (44.6)$$

این جواب باید با جوابهای نواحی I و III جور درآید، زیرا معادله شرودینگر باید در مرزها نیز صدق کند. پس شرایط مرزی کدامند؟ به این مسئله در حالت کلی می نگریم. در شکل ۲.۶ الف قسمتی از يك تابع موج تصوری با شکستی در منحنی رسم شده است.



**شکل ۲۰۶** (الف) تابع موج با مشتق ناپیوسته مستلزم این است که در نقطه شکست  $V = \infty$  باشد. (ب) ناپیوستگی تابع موج در نقطه شکست مستلزم این است که  $V = \pm \infty$  باشد.

درمحل شکست، مشتق اول تابع موج ناپیوستگی دارد، و بنا براین مشتق مرتبه دوم بینهایت است. با بررسی معادله (۴۱.۶)، درمی یابیم که این امر به شرطی مجاز است که پتانسیل در این نقطه بینهایت باشد. در قسمت ب شکل، تابع موج تصویری دیگری رسم شده است. این بار ناپیوستگی در خود تابع است. این دلالت بر آن دارد که مشتق مرتبه دوم در همین نقطه، یا در دو نقطه به فاصله بسیار کوچک از هم  $+\infty$  و  $-\infty$  است. یک پتانسیل فیزیکی واقعی می تواند کاملاً بزرگ باشد، به طوری که در حالت ایده آل می توان، مانند حالت مورد بحث، آن را برابر بینهایت قرار داد. بنا براین شکست تیز در تابع موج در بعضی حالات مجاز است. اما، هیچ وضعیت فیزیکی عملی نمی تواند منجر به ناپیوستگی در تابع موج به صورتی که در شکل ۲۰۶ ب رسم شده است، شود.

حال به چاه یک بعدی برمی گردیم. ملاحظه می کنیم که تابع موج توصیف شده با معادله (۴۴.۶) باید در  $x = -a/2$  و  $x = +a/2$  صفر باشد. بنا براین دو شکست در تابع موج داریم ولی ناپیوستگی وجود ندارد. فاصله  $a$  بین دو دیوار باید برابر ضرب درستی از نصف طول موج باشد، بنا براین می توان نوشت

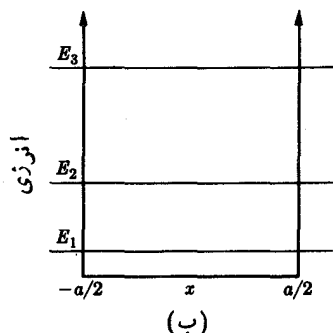
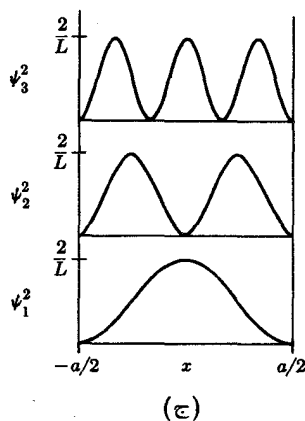
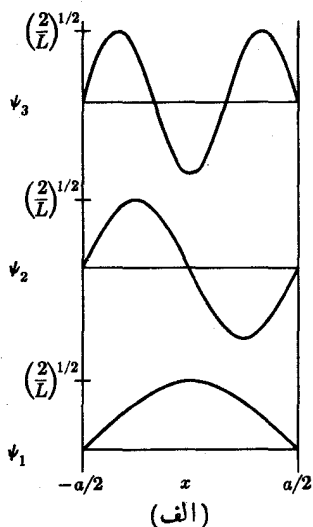
$$ka = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (45.6)$$

تابع موج این شکلها را پیدا می کند

$$\psi = A \sin kx \quad n = 2, 4, 6, \dots \quad (B = 0) \quad (46.6)$$

$$\psi = B \cos kx \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (A = 0)$$

دسته اول از توابع تماماً حول مبدأ پاد متقارن هستند، و دسته دوم حول مبدأ قرینه اند. ولی با وجود این، در هر دو حالت چگالی احتمال  $\psi^2$  متقارن است. شکل ۳۰۶ الف منحنیهای سه تابع موج مربوط به  $n = 1, 2, 3$  را نشان می دهد و در شکل ۳۰۶ ب



شکل ۳.۶ (الف) سه تابع موج با پایینترین انرژی برای چاه مربعی بینهایت. (ب) چگالی احتمال برای همان سه حالت انرژی. (ج) ترازهای انرژی در چاه مربعی.

چگالیهای احتمال  $\psi^2$  مربوطه نموده شده است.

معادله (۴۵.۶) نشان می‌دهد که عدد موج  $k$  کوانتیده است؛ یعنی فقط می‌تواند مقادیر گسسته معینی داشته باشد. این موضوع نتیجه شرایط مرزی برای تابع موج است. از آنجا که  $k$  به انرژی مربوط است، ذره فقط می‌تواند بین دو دیواره در حالت‌های انرژی گسسته معینی وجود داشته باشد که از ترکیب معادلات (۴۳.۶) و (۴۵.۶) به دست می‌آیند. از ترکیب این معادلات نتیجه می‌شود

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2 \quad (47.6)$$



شکل ۳.۶ ج نمودار تراز انرژی این مسئله را برای  $n = 1, 2, 3$  نشان می‌دهد. توابع موج کامل با عامل زمانی عبارت‌اند از

$$\Psi = Ae^{-i\omega t} \sin kx, \quad n = 2, 4, 6, \dots \quad (48.6)$$

$$\Psi = Be^{-i\omega t} \cos kx, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

از این به بعد قسمت زمانی تابع موج را کنار گذاشته و، به استثنای مواردی که به اختلاهای وابسته به زمان می‌پردازیم (بخش ۵.۸)، فقط بسا  $\Psi$  کار می‌کنیم. برای حالت‌های مانا می‌توانیم تمام کمیت‌های مورد نظر را بدون دخالت  $e^{-i\omega t}$ ، که به طور عددی برابر واحد است، محاسبه کنیم.

اینک انرژی را برای مثالی که در آن  $a$  ابعاد اتمی و ذره یک الکترون است، محاسبه می‌کنیم. با قراردادن مقادیر عددی،  $E = 37.7n^2/a^2$  eV به دست می‌آید که در آن  $a$  بر حسب آنگستروم است. به عنوان مثال اگر  $a$  برابر ۲ واحد آنگستروم باشد، انرژی پایینترین حالت ( $n=1$ )  $E = 9.4$  eV به دست می‌آید. در محاسبات انرژی پتانسیل را در ناحیه مجاز صفر فرض کرده‌ایم. در نتیجه  $E = E_k$ ، و بنابراین انرژی جنبشی برای الکترون بین دو دیواره نفوذناپذیر به فاصله ۲ آنگستروم در این حالت ۹.۴ eV به دست می‌آید. باید توجه داشت که انرژی ذره را بدون بهنجار کردن تسایع موج تعیین کرده‌ایم. این نکته مهمی است که انرژی فقط بستگی به طول موج و یا عدد موج  $k$  دارد و تابع دامنه نیست. اما، برای استفاده از تابع موج در محاسبه مقادیر چشم‌داشتی باید آن را بهنجار کنیم. بنابراین [از معادله (۲.۶)] می‌توان نوشت

$$\int_{-a/2}^{a/2} A^2 \sin^2 kx \, dx = 1, \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

$$\int_{-a/2}^{a/2} B^2 \cos^2 kx \, dx = 1, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

متوسط تابع  $\sin^2$  یا تابع  $\cos^2$  برای تعداد درستی از نصف طول موجها برابر  $1/2$  است، بنابراین از انتگرال اول  $A^2 a/2 = 1$  و از انتگرال دوم  $B^2 a/2 = 1$  به دست می‌آید. بدین ترتیب، در هر دو حالت ضریب بهنجارش برابر است با

$$A = B = \sqrt{2/a} \quad (49.6)$$

اینک برای لحظه‌ای در اینجا مکث می‌کنیم و مفهوم نتایجی را که دریافته‌ایم، بررسی می‌کنیم. دریافته‌ایم که یک ذره بین دو دیواره نفوذناپذیر بسا حالت‌های کوانتومی معینی می‌تواند وجود داشته باشد که توابع موج آنها با معادلات (۴۶.۶)، و انرژیها با معادلات (۴۷.۶) داده می‌شوند. مهمترین نکته‌ای که نشان داده‌ایم این است که چرا انرژی کوانتیده است. معادله شرودینگر در صورتی می‌تواند جواب معین در هر نقطه داشته و قابل بهنجار کردن باشد که انرژی بسا معادله (۴۷.۶) داده شود. به طوری که بعداً در بحث اتم هیدروژن

خواهيم ديد، اين دقيقاً دليل بر آن است كه چرا اتمهای هيدروژن انرژي كوانتيده دارند. همين استدلال در مورد هستهها هم درست است.

ممکن است به نظر بعضی از خوانندگان آمده باشد كه شرایط مرزی را می توان به وسیله تابع موجی به صورت جمع جمله های معادله (۴۶.۶)، یعنی بسط فوریه، تأمین كرد. این درست است، اما این تابع جمع دیگر يك جواب معادله اصلی موج مستقل از زمان [معادله (۴۱.۶)] با  $E$  ثابت نیست (مسئله ۷.۶). به طوری كه در بخش ۹.۶ بیشتر بحث خواهیم كرد، این بدان معنی است كه چنین تابعی معرف يك حالت مانا برای ذره ای با پتانسیل ثابت بین دیواره های نفوذناپذیر نخواهد بود. در فصل ۸ در بحث اختلالها، از این نمونه از بسطها مكرراً استفاده خواهیم كرد.

حال آماده ایم كه تعدادی از مقادیر چشمداشتی را محاسبه كنیم؛ ابتدا مقدار چشمداشتی مكان  $x$  را حساب می كنیم. معادله اول از معادلات (۴۶.۶) را به كار می بریم و می نویسیم

$$\langle x \rangle = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{2}{a} x \sin^2 kx dx = 0$$

فورا می بینیم كه انتگرال برابر صفر است، زیرا تابع زیر انتگرال شامل يك تابع زوج و يك تابع فرد است كه حاصل آن تابعی فرد با مقادیر متضاد در دو ناحیه  $a/2 -$  تا صفر و صفر تا  $a/2$  است. اگر معادله دوم از معادلات (۴۶.۶) را به كار می بریم، همين نتیجه را به دست می آورديم. واضح است كه به دليل تقارن مسئله، مقدار متوسط  $x$  بايستی صفر باشد. سپس مقدار چشمداشتی تكانه را محاسبه می كنیم

$$\langle p_x \rangle = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{2}{a} \sin kx \frac{\hbar}{i} k \cos kx dx = 0$$

مجدداً نتیجه برابر صفر است، زیرا تابع زیر انتگرال حاصلضرب يك تابع زوج و يك تابع فرد است. مربع مقدار چشمداشتی تكانه برابر است با

$$\langle p_x^2 \rangle = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{2}{a} \sin kx (-\hbar^2) k^2 (-\sin kx) dx = (\hbar k)^2 = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{a^2}$$

در اینجا دیده می شود كه مقدار چشمداشتی خود تكانه برابر صفر است ولی مربع تكانه مقدار غیر صفر دارد. این موضوع منطقی است، زیرا ذره از قرار معلوم بین دو دیواره با تكانه متوسط صفر جلو و عقب می رود، اما دارای مقدار معینی برای مربع تكانه است زیرا انرژي جنبشی غیر صفر است [معادله (۴۷.۶)]. بالاخره مقدار چشمداشتی مربع مكان را حساب می كنیم

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{2}{a} x^2 \sin^2 kx dx = \frac{4}{ak^2} \int_0^{n\pi/2} y^2 \sin^2 y dy$$

در اینجا، متغیر جدیدی،  $y = kx$ ، وارد كردیم و به دليل تقارن می توانیم انتگرال گیری را

در نصف ناحیه انجام دهیم و آنگاه در ۲ ضرب کنیم. جواب انتگرال را می‌توان با انتگرال گیری جزء به جزء به دست آورد. نتیجه نهایی برابر است با

$$\langle x^2 \rangle = a^2 \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2 n^2} \right)$$

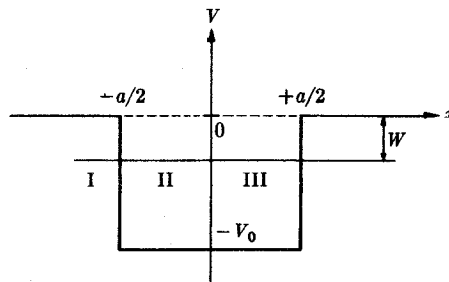
حل این مسئله به کمک معادله دوم از (۴۶.۶) برای  $n$ های فرد، همین نتیجه را به دست می‌دهد.

### ۸.۶ چاه مربعی يك بعدی با عمق محدود

اینک مثالی را مطالعه می‌کنیم که مشابه مثال فوق است، جز اینکه پتانسیل در مرزهای چاه مربعی به سمت بینهایت میل نمی‌کند. انرژی پتانسیل برای يك چاه مربعی محدود در شکل ۴.۶ نشان داده شده است. انرژی پتانسیل را در خارج چاه برابر صفر و در داخل چاه مساوی  $-V_0$  انتخاب کرده ایم. فرض می‌کنیم که ذره طوری در چاه پتانسیل مقید است که انرژی کل آن برابر  $E = -W$  باشد،  $W$  يك عدد مثبت است که انرژی بستگی نامیده می‌شود، و آن مقدار انرژی لازم برای جدا کردن ذره از چاه است. انرژی جنبشی ذره در داخل چاه مساوی  $V_0 - W$  است. از دید کلاسیک در خارج مرزهای  $x = \pm a/2$  ذره نمی‌تواند حرکت کند، زیرا انرژی جنبشی آن منفی،  $E_k = -W$ ، یعنی سرعت آن موهومی خواهد شد. از نقطه نظر مکانیک کوانتومی خواهیم دید که وضعیت متفاوت است.

در اینجا نیز نمایش انرژی پتانسیل در ناحیه کامل  $x$  از  $-\infty$  تا  $+\infty$  به صورت يك تابع تحلیلی خیلی سخت است. به جای آن، مافضارا مطابق شکل ۴.۶ به سه ناحیه تقسیم می‌کنیم. معادله شرودینگر را در این سه ناحیه مستقلاً حل می‌کنیم و سپس جوابها را در مرزها با هم تطبیق می‌دهیم. برخلاف حالت بالا، انرژی پتانسیل در هر نقطه محدود است و بنابراین خود تابع موج و همین‌طور مشتق اول تابع موج بر طبق بحث فوق باید با توجه به شکل ۴.۶، در مرزها مطابقت داشته باشند.

معادله موج يك بعدی را در ناحیه II می‌توان به صورت (۴۲.۶) نوشت، ولی عدد موج  $k$  اینک به صورت زیر داده می‌شود



شکل ۴.۶ چاه مربعی با عمق محدود.

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - W)} \quad (50.6)$$

یادآور می‌شود که انرژی جنبشی همراه با  $2m$  در زیر رادیکال آمده است و شکل دیگر نوشتن معادله (50.6) به صورت زیر است

$$E_k = (k\hbar)^2 / 2m$$

که در آن  $(k\hbar)^2$  همان  $p^2$ ، مربع تکانه است. جواب معادله شروع در ناحیه II می‌تواند به صورت زیر نوشته شود [معادله (44.6)]

$$\psi_{II} = A \sin kx + B \cos kx$$

معادله شروع در نواحی I و III به شکل زیر است

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \gamma^2\psi = 0 \quad (51.6)$$

یا

$$\gamma = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mW} \quad (52.6)$$

حل عمومی معادله (51.6) عبارت است از

$$\psi_{I, III} = Ce^{\gamma x} + De^{-\gamma x} \quad (53.6)$$

حال باید شرایط مرزی را در نظر گرفت. ابتدا لازم است که خود تابع موج در هر نقطه محدود باشد. بنابراین برای ناحیه I بلافاصله مشاهده می‌کنیم که باید  $D = 0$  باشد، در غیر این صورت تابع موج وقتی  $x$  به سمت  $-\infty$  می‌رود بینهایت شود. به طور مشابه، در ناحیه III نیز باید  $C = 0$  قرار داده شود زیرا در غیر این صورت وقتی  $x$  به سمت  $+\infty$  میل می‌کند تابع موج بینهایت می‌شود. بنابراین می‌نویسیم

$$\psi_I = Ce^{\gamma x}$$

$$\psi_{III} = De^{-\gamma x} \quad (54.6)$$

حال برای تطبیق دادن توابع موج در مرزهای  $x = -a/2$  و  $x = +a/2$  عمل می‌کنیم. ابتدا جوابهایی را می‌یابیم که در آنها یکی از ضرایب  $A$  یا  $B$  صفر شود. این يك شرط لازم برای مثال قبلی بود و در زیر ثابت خواهیم کرد که برای این مثال نیز چنین است.

در مثال قبل دریافتیم که شرایط مرزی ایجاب می‌کنند که عدد موج  $k$  فقط مقادیری گسسته، همانند معادله (45.6)، داشته باشد. دامنه‌های  $A$  یا  $B$  توابع موج وارد بحث شرایط مرزی نمی‌شدند و بعداً ممکن بود آنها را با استفاده از بهنجار کردن انتگرال تعیین

کرد. در حالت مورد بحث درمی یابیم که دامنه‌های  $A$  یا  $B$  و  $C$  یا  $D$  در معادلات تطبیقی وارد می‌شوند، زیرا ظاهراً اکنون تابع موج در  $a/2 \pm$  به سمت صفر میل نمی‌کند بلکه بر طبق معادلات (۵۴.۶) به نواحی ممنوع کلاسیک نفوذ می‌کند. در حال حاضر، برای ما آن اندازه که به دست آوردن مقادیر مجاز عدد موج جالب است، دامنه‌ها جالب نیست. این کار نمودار تراز انرژی را برای چاه محدود به دست می‌دهد. سریع‌ترین راه برای رسیدن به هدف، تطبیق دادن  $\psi$  و  $d\psi/dx$  در مرزها نیست بلکه تطبیق دادن نسبت آن دو،  $(1/\psi) d\psi/dx$ ، است که مشتق لگاریتمی نامیده می‌شود. از آنجا که ضرایب دامنه هم در خود تابع موج و هم در مشتق آن ظاهر می‌شوند، در عمل تقسیم حذف می‌شوند و در رابطه تطبیق مشتق‌های لگاریتمی وجود نخواهند داشت. بنا بر این در مرز  $x = -a/2$  داریم

$$\frac{1}{\psi_I} \frac{d\psi_I}{dx} = \frac{1}{\psi_{II}} \frac{d\psi_{II}}{dx} \quad (55.6)$$

با جا گذاری معادله (۵۴.۶) و معادله (۴۴.۶) خواهیم داشت

$$\gamma = k \cot\left(-\frac{ka}{\gamma}\right) \quad \text{برای } B=0 \quad (56.6)$$

$$\gamma = -k \tan\left(-\frac{ka}{\gamma}\right) \quad \text{برای } A=0$$

با انجام همین عمل در مرز  $x = +a/2$  خواهیم داشت

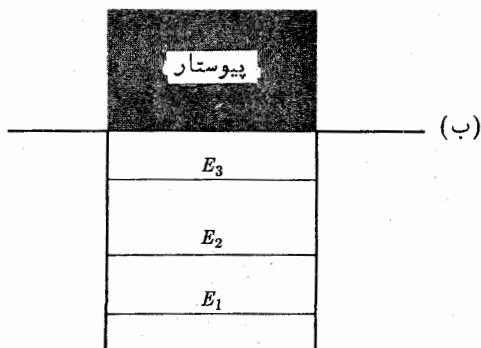
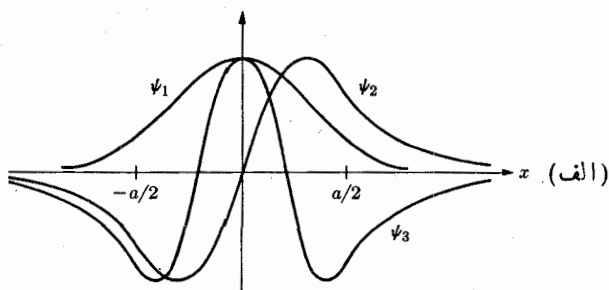
$$-\gamma = k \cot\left(\frac{ka}{\gamma}\right) \quad \text{برای } B=0 \quad (57.6)$$

$$-\gamma = -k \tan\left(\frac{ka}{\gamma}\right) \quad \text{برای } A=0$$

این معادلات همانند معادلات (۵۶.۶) هستند.

با فرض معلوم بودن عمق و پهنای چاه پتانسیل می‌خواهیم یک یا چند مقدار برای  $W$  به دست آوریم، به طوری که در معادله شرودینگر نه تنها در سه ناحیه بلکه در مرز بین نواحی نیز صدق کنند. بردسیه‌های ما منجر به معادلات (۵۶.۶) شده‌اند. از آنجا که  $\gamma$  و  $k$  هر دو بستگی به  $W$  دارند، باید این معادلات غیر جبری را با روش آزمون و خطا حل کنیم. یعنی با انتخاب مقداری برای  $W$  مقادیر  $\gamma$  و  $k$  را محاسبه کنیم و نتایج را در معادله (۵۶.۶) قرار دهیم. اگر چاه به اندازه کافی عمیق باشد، جوابهای معادله مطابق شکل ۵.۶، یک سری از

۱. مثال قبلی می‌تواند حالت خاصی از این مثال در نظر گرفته شود که در آن  $\gamma$  به بی‌نهایت میل می‌کند.



شکل ۵.۶ (الف) سه تابع موج با پایینترین انرژی برای چاه مربعی محدود. (ب) ترازهای انرژی در چاه مربعی محدود.

توابع به وجود می آورند. این توابع موج مشابه توابع شکل ۳.۶ هستند، جز اینکه در ناحیه‌ای که از دیدگاه کلاسیک ممنوع است، نفوذ می کنند. این نفوذ به تابع موجی با گره‌های معین فضای بیشتری می دهد، یعنی طول موج نسبت به تابع موج مثال قبل بلندتر می شود. بنا بر این انرژی کمتر است.

نکته‌ای که باید ثابت شود این است که معادله وقتی جواب دارد که  $A$  یا  $B$  صفر باشند. اگر هر دو غیر صفر باشند، می توانیم معادله (۴۴.۶) را به صورت زیر بنویسیم

$$\psi_{II} = A_1 \sin(kx - \alpha) \quad (58.6)$$

که در آن  $\alpha$  يك زاویه فاز است. حال دوشرط مرزی را می توان به صورت زیر نوشت

$$\gamma = k \cot\left(-\frac{ka}{\gamma} - \alpha\right)$$

$$-\gamma = k \cot\left(\frac{ka}{\gamma} + \alpha\right) \quad (59.6)$$

از آنجا که در این مسئله فقط يك متغیر آزاد،  $W$ ، وجود دارد، دو معادله باید به طور همزمان برقرار باشند. این شرط ایجاب می کند که

$$\cot\left(-\frac{ka}{\gamma} - \alpha\right) = -\cot\left(\frac{ka}{\gamma} - \alpha\right) \quad (۶۰.۶)$$

این رابطه فقط وقتی برقرار است که  $\alpha = j(\pi/2)$  و  $j = ۱, ۲, ۳, \dots$  باشد. انتخاب يك مقدار زوج برای عدد درست  $j$  معادل قرار دادن  $B = ۰$  در معادله (۴۴.۶) و انتخاب يك مقدار فرد معادل قرار دادن  $A = ۰$  است.

در بخش قبل دیدیم که چاه مربعی بینهایت، دارای تعداد بینهایت تابع موج قابل قبول است که با اعداد درست  $n = ۱, ۲, ۳, \dots, \infty$  مشخص می شوند. انرژی جنبشی بر حسب  $n$  افزایش می یابد، ولسی چون چاه دارای عمق بینهایت است افزایش انرژی هرگز ذره را قادر نمی سازد تا از چاه فرار کند.

در این مثال، بدیهی است که انرژی جنبشی ذره مقید در چاه محدود است. از نظر کلاسیک و همچنین از لحاظ مکانیک موجی، حد این انرژی  $E_k = V_0$  است. بنابراین فقط تعداد معدودی حالت های مقید در چنین چاهی وجود دارد. بدین ترتیب وقتی  $E_k$  از  $V_0$  بیشتر می شود، چه اتفاقی رخ می دهد؟ از نظر کلاسیک، ذره به بینهایت فرار خواهد کرد. در مکانیک موجی، انرژی ذره  $E$  مثبت است و بنابراین  $E_k$  در همه جا مثبت می شود. در این صورت به جای جواب های (۵۴.۶) در نواحی I و III، توابع سینوسی یا جواب هایی به صورت  $e^{\pm ikx}$  به دست می آوریم که از لبه مرز تا بینهایت دامنه های ثابت دارند. درباره این توابع که معرف ذره آزاد هستند در بخش ۱۰.۶ بیشتر بحث خواهیم کرد. در اینجا کافی است که بگوییم از آنجا که مرزی وجود ندارد لذا محدودیتی نیز برای عدد موج  $k$  وجود ندارد. بنابراین انرژی می تواند هر مقدار مثبتی را داشته باشد. پس در این مثال نمودار ترازی انرژی برای  $E > ۰$  پیوسته است (شکل ۵.۶ ب).

حال به يك مثال عددی می پردازیم. به منظور ساده کردن محاسبات، مسئله فوق را کمی برمی گردانیم و می پرسیم: با معلوم بودن پهنای چاه پتانسیل و انرژی بستگی  $W$ ، عمق چاه چقدر است؟ فرض کنید  $a = ۲ \text{ \AA}$  و  $W = ۲۵ \text{ eV}$  باشد، با قرار دادن مقادیر عددی در معادلات (۵۲.۶) داریم

$$\gamma = ۰.۵۱۲ \sqrt{W} \text{ \AA}^{-۱} = ۰.۵۸۱۰ \text{ \AA}^{-۱}$$

قسمت اول معادله بالا وقتی که  $W$  بر حسب الکترون ولت قرار داده شود برای يك الکترون عموماً صدق می کند. وقتی انرژی جنبشی برابر  $-W$  باشد، این معادله نمای  $\gamma$  را در ناحیه ممنوع به دست می دهد. همین رابطه، برای عدد موج  $k$  در ناحیه مجاز کلاسیک به کار می رود و در این ناحیه در زیر رادیکال انرژی جنبشی را می گذاریم. معادله دوم از معادلات (۵۶.۶) را مجدداً به صورت زیر می نویسیم

$$\frac{ka}{2} \tan\left(\frac{ka}{2}\right) = \frac{\gamma a}{2} = 0.810$$

جواب این معادله غیر جبری  $k = 0.795 \text{ \AA}^{-1}$  یا  $ka/2 = 0.795$  است. این عدد مربوط به انرژی جنبشی

$$E_k = \left(\frac{k}{0.512}\right)^2 = 2.41 \text{ eV}$$

می شود. بنابراین عمق چاه پتانسیل برابر است با

$$V_0 = W + E_k = 4.91 \text{ eV}$$

در مثال قبل انرژی جنبشی در حالت پایه (پایینترین تراز) را  $9.42 \text{ eV}$  به دست آوردیم، که این مقدار را با  $2.41 \text{ eV}$  در این مثال مقایسه می کنیم. این کاهش شدید، نتیجه طول موج بلندتر تابع موجی است که به ناحیه هایی که از نظر کلاسیکی ممنوع اند، نفوذ می کند. در این مثال ویژه، با عمق  $4.91 \text{ eV}$  و پهنای  $a = 2 \text{ \AA}$  فقط یک حالت مقید برای الکترون وجود دارد (مسئله ۸.۶).

## ۹.۶ ویژه تابعها و ویژه مقادارها

در مسائل مکانیک کلاسیک، در موارد معین، کمیت هایی مانند انرژی، تکانه، و تکانه زاویه ای پایسته می مانند. در این بخش بدقوانین بقای معادل در مکانیک موجی می پردازیم. معادله مستقل از زمان شرودینگر [معادله (۳۷.۶)] نمونه ای از یک نوع معادله دیفرانسیل به نام معادله ویژه مقدار است. به طور کلی، می توانیم یک معادله ویژه مقدار را به صورت زیر بنویسیم

$$F_{op}\psi = f\psi \quad (۶۱.۶)$$

عملگر دیفرانسیلی  $F_{op}$  روی یک تابع  $\psi$  عمل می کند و در نتیجه یک ثابت  $f$  ضربدر تابع  $\psi$  حاصل می شود. بنابراین تابع  $\psi$  ویژه تابع عملگر  $F_{op}$  نامیده می شود، و مقدار مربوط به  $f$  را ویژه مقدار نامند. در حالت کلی چنین معادله ای جسابهای زیادی دارد، یعنی یک دسته ویژه توابع و ویژه مقادیر داریم. حال می خواهیم ثابت کنیم که کمیت های فیزیکی مربوط به عملگر  $F_{op}$  وقتی که ذره در حالت  $\psi$  قرار دارد، دارای مقدار چشمداشتی  $f$  است، مضافاً اینکه  $f$  نه تنها مقدار چشمداشتی یا مقدار متوسط است بلکه اندازه گیری های مکرر سیستم در حالت  $\psi$  نتایج یکسان  $f$  را به دست می دهد. همچنین می گوئیم این کمیت فیزیکی یک مقدار تیز  $f$  دارد، و یا به بیان کلاسیک دارای ثابت حرکت است. ابتدا قسمت اول را ثابت می کنیم، یعنی اینکه  $f$  مقدار چشمداشتی عملگر  $F_{op}$  است. می نویسیم



$$\langle F \rangle = \int \psi^* F_{op} \psi d\tau = \int \psi^* f \psi d\tau = f \int \psi^* \psi d\tau = f \quad (۶۲.۶)$$

در اینجا انتگرال بهنجارش [معادله (۴۰.۶)] را به کار برده ایم. برای اثبات قسمت دوم از بیان فوق، ابتدا کمیتی به نام ددایی تعریف می کنیم. این کمیت معیاری از میزان (بزرگی) انحرافات نسبت به مقدار متوسط است. آن را به طریق زیر تعریف می کنیم

$$(\Delta F)^2 = \int \psi^* (F_{op} - \langle F \rangle)^2 \psi d\tau \quad (۶۳.۶)$$

به طوری که ملاحظه می کنیم وردایی همان مقدار چشمداشتی مربع انحرافات از مقدار متوسط  $\langle F \rangle$  است. با ضرب و خارج کردن پرانتز خواهیم داشت

$$(\Delta F)^2 = \langle F^2 \rangle - 2\langle F \rangle \int \psi^* F_{op} \psi d\tau + \langle F \rangle^2 = \langle F^2 \rangle - \langle F \rangle^2 \quad (۶۴.۶)$$

در اینجا نیز انتگرال بهنجارش  $\psi$  را به کار برده ایم. حال باید ثابت کنیم که اگر عملگر  $F$  در معادله ویژه مقدار (۶۱.۶) صدق کند، وردایی برابر صفر است. از ترکیب معادلات (۶۱.۶)، (۶۲.۶) و (۶۴.۶) برای این حالت نتیجه زیر را به دست می آوریم

$$(\Delta F)^2 = \int \psi^* F_{op}^2 \psi d\tau - \langle F \rangle^2 = \int \psi^* f^2 \psi d\tau - f^2 = 0$$

این رابطه ثابت می کند که کمیت فیزیکی مربوط به  $F_{op}$  دارای یک مقدار تیز است. در بحث متعاقب معادله (۳۹.۶) در بخش ۶.۶ به منظور نشان دادن اینکه ثابت جدایی  $E$  همان انرژی ذره است، از کار دو بروی استفاده کردیم. حال این نتیجه را می توان بر اساس اصول موضوعه مکانیک موجی، بدون یاری جستن از کارهای قبلی، به دست آورد. معادله مستقل از زمان شرودینگر [معادله (۳۷.۶)] یک معادله ویژه مقدار است، و بنا بر این  $E$  یک ویژه مقدار برای عملگر انرژی کل  $H$  می شود. این موضوع ثابت می کند که  $E$  انرژی بوده و تأییدی بر توضیح متعاقب معادله (۳۹.۶) است که معادله مستقل از زمان شرودینگر فقط وقتی به کار می رود که انرژی کل از اصل بقا پیروی کند.

در اغلب مسائل مکانیک کوانتومی، ابتدا یک هامیلتونی تشکیل می دهیم و سپس یک دسته ویژه مقدار و ویژه تابع برای این هامیلتونی به دست می آوریم. به طوری که در بالا گفته شد، و در دو مثال بخش ۷.۶ بحث شد، معادله شرودینگر برای یک ذره مقید می تواند جوابهای زیادی داشته باشد. این موضوع را با نوشتن معادله شرودینگر به طریق زیر می توان نشان داد

$$H\psi_n = E_n\psi_n \quad (۶۵.۶)$$

شاخص  $n$  جواب معادله و ویژه مقدار  $E_n$  انرژی را مشخص می‌کند. گاهی دوجواب کاملاً متفاوت  $\psi_n$  و  $\psi_m$  ممکن است به‌طور اتفاقی دارای انرژی مساوی  $E_n = E_m$  باشند. در این حالت می‌گوییم که جوابها داگنی انرژی پیدا کرده‌اند.

توابع موجی که ویژه توابع یک هامیلتونی هستند، ممکن است همچنین به‌طور همزمان ویژه توابع عملگر دیگر، نظیر عملگر مؤلفهٔ تکانهٔ زاویه‌ای باشند. در بحث مسئلهٔ هیدروژن در فصل هفتم، دقیقاً چنین وضعی را خواهیم دید. به‌عنوان مثال، معادلهٔ ویژه مقدار

$$F_{op}\psi_n = f_n\psi_n \quad (۶۶.۶)$$

را همراه با معادلهٔ (۶۵.۶) در نظر بگیرید. واضح است که

$$HF_{op}\psi_n = F_{op}H\psi_n$$

است، زیرا هر دو طرف برابر با  $E_n f_n \psi_n$  هستند. در این حالت ترتیب قرار گرفتن عملگرها مهم نیست؛ یعنی عملگرها جا به‌جایی پذیرند. به‌طور کلی می‌توان نشان داد که شرط لازم و کافی برای اینکه ویژه توابع همزمان وجود داشته باشند این است که عملگرهای مربوط جا به‌جایی پذیر باشند.

## ۱۰.۶ ویژه‌تابعهای تکانه؛ شار

در بخش ۸.۶، دربارهٔ ذرهٔ آزادی که در آن  $E > V$  است، به‌طور خلاصه بحث کردیم. در اینجا ابتدا حالت ساده‌ای که در آن پتانسیل ثابت و برای سهولت  $V = 0$  است را مطالعه می‌کنیم.

معادلهٔ یک بعدی شرودینگر برای  $V = 0$  عبارت است از

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi \quad (۶۷.۶)$$

که برای  $E > 0$  به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0 \quad (۶۸.۶)$$

با

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE} \quad (۶۹.۶)$$

۱. به‌عنوان مثال به‌منبع زیر مراجعه شود،

حل معادله (۶۸.۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\psi = A \sin kx + B \cos kx \quad (۷۰.۶)$$

یا

$$\psi = Ce^{ikx} + De^{-ikx} \quad (۷۱.۶)$$

برای معرفی يك ذره با تكانه ثابت،  $\psi$  باید يك ویژه تابع عملگر تكانه (معادله ۱۹.۶) باشد. به آسانی می‌توان نشان داد که تابع  $A \sin kx$  یا  $A \cos kx$  يك ویژه تابع تكانه نیست. اما، رابطه زیر را می‌یابیم

$$\frac{\hbar \partial}{i \partial x} (Ce^{ikx}) = \hbar k Ce^{ikx} \quad (۷۲.۶)$$

و

$$\frac{\hbar \partial}{i \partial x} (De^{-ikx}) = -\hbar k De^{-ikx} \quad (۷۳.۶)$$

در يك مورد در معادله (۷۱.۶)،  $D = 0$  قرار داده ایم، و در مورد دیگر  $C = 0$  قرار داده ایم. این تنها راهی است که می‌توان شرایط معادله ویژه مقدار (۶۱.۶) را تأمین کرد. بنابراین، بدیهی است که تابع موج به صورت  $e^{ikx}$  معرف ذره یا ذرات با تكانه  $p_x = \hbar k$ ، و تابع موج به صورت  $e^{-ikx}$  معرف ذره یا ذرات با تكانه  $p_x = -\hbar k$  است.

حال اگر بخواهیم يك تابع موج تكانه  $De^{-ikx}$  یا  $Ce^{ikx}$  را بهنجار کنیم، بامشكلاتی مواجه می‌شویم. از آنجا که این توابع در فاصله  $x = -\infty$  تا  $x = \infty$  دارای دامنه‌های ثابتی هستند، شرط بهنجارش  $C = 0$  یا  $D = 0$  به دست می‌دهد. معمولاً می‌توان این مشکل را با قطع تابع موج در  $x = \pm L$  بر طرف کرد، که  $L$  می‌تواند يك عدد اختیاری بزرگ باشد. در هر حال، در غالب موارد می‌توان با توابع موج بهنجار نشده کار کرد.

این مسئله را به نحو دیگری می‌توان دید، بدین معنی که تابع موج را معرف بیش از يك ذره بدانیم. به عنوان مثال، در بخش ۱۱.۶ احتمال نفوذ يك ذره از سد پتانسیل را محاسبه خواهیم کرد. اگر احتمال مثلاً يك درصد باشد، در این صورت به طور متوسط يك ذره از هر صد ذره نفوذ خواهد کرد. بنا بر این مهم نیست که احتمال نفوذ يك ذره را با استفاده از تابع موج ذره حساب کنیم، یا تابع موج را معرف چند ذره دانسته و کسری از ذرات را که از سد عبور می‌کنند محاسبه کنیم. اگر روش دوم را به کار بریم، باید معنی دامنه تابع موج را دوباره تعبیر کنیم. در این صورت قدر مطلق مربع تابع موج معرف تعداد متوسط ذرات در واحد حجم می‌شود تا اینکه احتمال یافتن يك ذره معین در واحد حجم. از آنجا که مقدار عددی تابع نمایشی برابر واحد است، بهنجار کردن توابع موج تكانه خیلی ساده است، و درمی‌یابیم که برای تابع موج به کار رفته در معادله (۷۲.۶) تعداد ذرات در واحد حجم  $C^2$ ، و برای تابع موج به کار رفته در معادله (۷۳.۶) تعداد ذرات

در واحد حجم  $D^3$  است. این ذرات با سرعتی برابر  $v = p_x/m = \hbar k/m$  در حال حرکت هستند. با استدلال کلاسیک به آسانی درمی‌یابیم که تعداد ذرات عبورکننده از واحد سطح عمود بر راستای باریکه در واحد زمان به ترتیب برابر  $C^2 v$  و  $D^2 v$  است. این کمیتها شار ذرات موجود در باریکه نام دارند. حال برای محاسبه این شار به جای استفاده از استدلال کلاسیک از مکانیک موجی استفاده می‌کنیم.

مجدداً فقط یک ذره را که به وسیله معادله موج وابسته به زمان نموده شده است، در نظر بگیریم

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (74.6)$$

مزدوج مختلط این معادله عبارت است از

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} + V\Psi^* = -i\hbar \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \quad (75.6)$$

از ضرب معادله اول در  $\Psi^*$  و معادله دوم در  $\Psi$  و تفریق آنها خواهیم داشت

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} \right] = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^* \Psi) \quad (76.6)$$

این معادله را از  $x_1$  تا  $x_2$  انتگرال می‌گیریم. از دو جمله داخل کروشه درست چپ با روش جزء به جزء انتگرال می‌گیریم. از چهار جمله حاصل دو جمله یکدیگر را حذف می‌کنند. رابطه باقیمانده عبارت است از

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \Psi^* \Psi dx \quad (77.6)$$

بجز عامل  $i\hbar$ ، طرف راست عبارتی است که به وضوح آهنگ افزایش چگالی احتمال در واحد زمان را در جزء حجم بین  $x_1$  و  $x_2$  بیان می‌کند. بر طبق اصل بقای احتمال کل، طرف چپ باید معرف جریان چگالی احتمال به داخل ناحیه منهای جریان چگالی احتمال به خارج ناحیه باشد. این موضوع منجر به رابطه زیر برای شار چگالی احتمال می‌شود

$$S = -\frac{i\hbar}{2m} \left( \psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right) \quad (78.6)$$

با قرار دادن این رابطه، معادله (77.6) به صورت زیر درمی‌آید

$$S(x_2) - S(x_1) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \Psi^* \Psi dx \quad (79.6)$$

در اینجا توابع موج یک بعدی را به کار برده‌ایم و فقط روی  $x$  انتگرال گرفته شده است. در

سه بعد، شار یک بردار است و مشتقات نسبت به  $x$  در معادله (۷۸.۶) به ترتیب با گرادیان  $\Psi^*$  و  $\Psi$  جانشین می‌شوند.

حال با بازگشت به تابع موج معرف باریکه‌ای از ذرات، دوباره شار [معادله (۷۸.۶)] را به صورت تعدادی از ذرات که از واحد سطح در واحد زمان می‌گذرند، تعبیر می‌کنیم. برای تابع موج تکانه،  $Ce^{ikx}$ ، درمی‌یابیم که شار عبارت است از

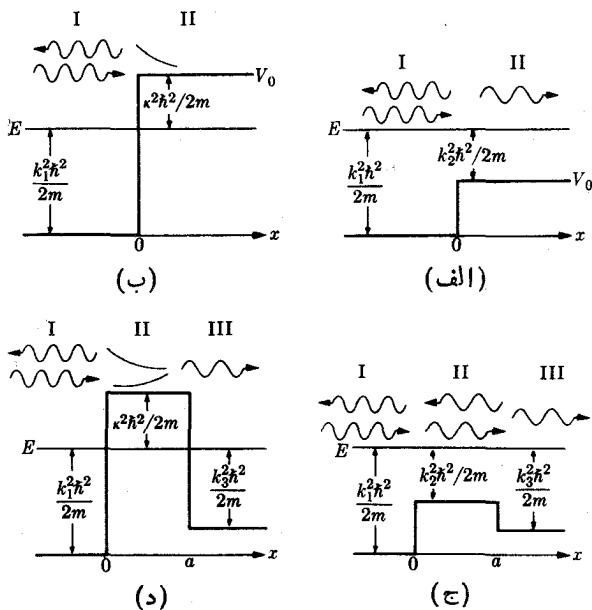
$$S = -\frac{i\hbar}{2m} C^2 (e^{-ikx} i k e^{ikx} - e^{ikx} (-ik) e^{-ikx}) = \frac{\hbar k}{m} C^2 = C^2 v$$

این همان نتیجه‌ای است که با استدلال کلاسیک در بالا به دست آوردیم.

## ۱۱.۶ نفوذ از سد

در بررسی ذره در چاه پتانسیل محدود دیدیم که احتمال یافتن ذره در نواحی که از نقطه نظر کلاسیک ممنوع‌اند، غیر صفر بود. تابع موج در این نواحی به صورت یک تابع نمایی منفی بر حسب فاصله کاهش می‌یافت. بنابراین، اگر چنین ناحیه‌ای دارای پهنای محدود باشد، در حقیقت تابع موج از آن نشت کرده و در طرف دیگر این سد پتانسیل مقداری غیر صفر خواهد داشت. هدف ما در این بخش محاسبه احتمال نفوذ یک ذره از سد پتانسیل است. اما، به جای توابع موج ذرات مقید، توابع موج تکانه باریکه ذرات را به کار خواهیم برد. ابتدا پله پتانسیل که در شکل ۶.۶ الف نشان داده شده است را در نظر بگیریم.

باریکه‌ای از ذرات که به وسیله تابع موج  $e^{ik_1 x}$  نشان داده شده است، از سمت چپ روی این پتانسیل پله‌ای می‌افتد. تکانه هر ذره  $p_x = \hbar k_1$  است. از آنجا که مقدار عددی تابع موج برابر واحد است، در هر واحد حجم باریکه یک ذره وجود دارد، و شار برابر با  $S_1 = \hbar k_1 / m$  ذره بر واحد سطح در واحد زمان می‌شود. وقتی باریکه با پتانسیل پله‌ای برخورد می‌کند، بعضی از ذرات بازتاب یافته و بعضی دیگر با کاهش تکانه‌هایشان به ناحیه  $x > 0$  عبور می‌کنند. از نظر کلاسیک، تمام ذرات عبور خواهند کرد، و همه آنها کاهشی در انرژی جنبشی برابر  $\Delta E_k = -V_0$  در پتانسیل پله‌ای خواهند داشت. اما، در مکانیک موجی هم اکنون نشان خواهیم داد که تنها راه اینکه معادله شرودینگر در پتانسیل پله‌ای صدق کند از طریق بازتاب جزئی تابع موج است. بنابراین هر ذره منفردی دارای احتمال معینی برای عبور و احتمال معینی برای بازتاب است. به طوری که در بخش قبل دیده‌ایم، جواب عمومی معادله شرودینگر برای  $E_k > 0$  از مجموع جمله‌ای به صورت  $e^{ikx}$  و جمله دیگری به صورت  $e^{-ikx}$  تشکیل می‌شود. به دلایل فیزیکی، فقط جمله با نمای مثبت در ناحیه II شکل ۶.۶ الف ظاهر خواهد شد. این بدان جهت است که از قرار معلوم چشمه‌ای از ذرات در طرف راست شکل وجود ندارد، و یا پتانسیل پله‌ای دیگری نیست که بتواند ذرات متحرک به طرف راست را بازتاب دهد. بنابراین می‌توانیم توابع موج را برای دوناچیه بنویسیم



شکل ۶.۶ سدها و پله‌های پتانسیل.

$$\begin{aligned} \psi_1 &= e^{ik_1 x} + R e^{-ik_1 x} && \text{I ناحیه} \\ \psi_2 &= T e^{ik_2 x} && \text{II ناحیه} \end{aligned} \quad (۸۰.۶)$$

که در آنها داریم

$$k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE} \quad k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - V_0)}$$

ضرایب  $T$  و  $R$  باید با به‌کار بردن شرایط مرزی در  $x = 0$  معین شوند. این شرایط برای  $x = 0$  عبارت‌اند از  $\psi_1 = \psi_2$  و  $d\psi_1/dx = d\psi_2/dx$ . با به‌کار بردن این شرایط مرزی در معادلات (۸۰.۶) خواهیم داشت

$$1 + R = T, \quad k_1 - k_1 R = k_2 T$$

و جوابها عبارت‌اند از

$$T = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \quad (۸۱.۶)$$

$$R = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \quad (۸۲.۶)$$

معادله (۸۲.۶) نشان می‌دهد که جز در وقتی که  $k_1 = k_2$  یعنی  $V_0 = 0$  باشد، درمرز بازتاب وجود خواهد داشت. کسر ذرات بازتابیده به سادگی برابر  $R^2$  می‌شود. به عنوان مثال دوم، شکل ۶.۶ ب را در نظر بگیرید. این مثال مشابه مثالی است که هم‌اکنون بحث کرده‌ایم جز اینکه  $k^2$  در آن موهومی است ( $V > E$ ). بنا بر این معادله دوم از معادلات (۸۰.۶) به شکل  $Ce^{-kx}$  خواهد بود. معادله موج به صورت  $e^{kx}$  نیز یک جواب معادله شرودینگر در این ناحیه است، ولی این جواب به دلایل فیزیکی باید کنار گذاشته شود، زیرا وقتی  $x$  بینهایت می‌شود جواب به بینهایت میل می‌کند. از آنجا که، در این حالت، آخرین معادله از معادلات (۸۰.۶) می‌تواند با جانشینی  $k_1$  با  $ik$  به شکل دلخواه تغییر کند، حل درست ثابتهای  $T$  و  $R$  را نیز می‌توان از طریق قرار دادن  $ik$  به جای  $k_1$  در معادلات (۸۱.۶) و (۸۲.۶) به دست آورد. نتیجه عبارت است از

$$T = \frac{2k_1}{k_1 + ik} \quad (۸۳.۶)$$

$$R = \frac{k_1 - ik}{k_1 + ik} \quad (۸۴.۶)$$

مقدار عددی  $R$  که با معادله (۸۲.۶) داده شده به وضوح کوچکتر از واحد است و نشان دهنده این است که فقط کسری از ذرات فرودی ازمرز بازتابیده می‌شوند، اما، مقدار عددی  $R$ ، به صورتی که در معادله (۸۴.۶) داده شده است، برابر واحد است و نشان دهنده این است که تمام ذرات بازتابیده می‌شوند. تابع موج در ناحیه II،  $\psi_2 = Te^{-kx}$ ، چنین نشان می‌دهد که به طور متوسط تعداد ثابتی از ذرات در ناحیه ممنوع کلاسیک وجود دارند. حال تابع پتانسیل شکل ۶.۶ ج را در نظر بگیرید. اگر یک موج تخت از سمت چپ به این پله (پتانسیل) برخورد کند، جزئی از آن عبور کرده و جزئی بازتابیده می‌شود. توابع موج را در سه ناحیه به صورت زیر می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \psi_1 &= e^{ik_1x} + Re^{-ik_1x} && \text{ناحیه I} \\ \psi_2 &= Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x} && \text{ناحیه II} \\ \psi_3 &= Te^{ik_3x} && \text{ناحیه III} \end{aligned} \quad (۸۵.۶)$$

با اعمال شرایط مرزی که پیوستگی  $\psi$  و همچنین  $d\psi/dx$  را در  $x=0$  و  $x=a$  ایجاب می‌کنند، درمی‌یابیم

$$\begin{aligned} 1 + R &= C + D \\ k_1 - k_1 R &= k_2 C - k_2 D \\ Ce^{ik_2a} + De^{ik_2a} &= Te^{ik_2a} \\ k_2 Ce^{ik_2a} - k_2 De^{-ik_2a} &= k_2 Te^{ik_2a} \end{aligned} \quad (۸۶.۶)$$

چهار معادله (۸۶.۶) چهار مجهول  $C, D, T$  و  $R$  دارند که با حل آنها دامنه موج عبوری را به دست می آوریم

$$T = \frac{\psi k_1 k_2 e^{ik_2 a}}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - (k_2 - k_3)(k_1 - k_2) e^{i2k_2 a}} \quad (۸۷.۶)$$

تعداد ذرات در واحد حجم ناحیه III برابر با  $|T|^2$  می شود. از آنجا که چگالی ذرات را برابر یک ذره در واحد حجم در باریکه فرودی ( $e^{ik_1 x}$ ) فرض کرده ایم، نسبت چگالیها به سادگی مساوی  $|T|^2$  می شود. اما، احتمال عبور  $B$  از پتانسیل پله ای بسا نسبت شارا داده می شود.

$$B = \frac{k_2}{k_1} |T|^2 \quad (۸۸.۶)$$

این احتمال ضریب عبور نامیده می شود.

تذکر این موضوع جالب است که برای  $e^{i2k_2 a} = 1$  و  $k_1 = k_3$ ، ضریب عبور برابر واحد است. این وضع برای  $2k_2 a = 2n\pi$ ، وقتی که  $n$  یک عدد درست است، اتفاق می افتد. بایان دیگر، پهنای سد باید عدد درستی از نصف طول موج،  $\lambda = 2\pi/k_2$  باشد. این شرط در نظریه خطوط انتقال الکتریکی کاملاً شناخته شده است.

در مثال پله ای در یافتیم که محاسبات انجام شده برای حالت هایی که شرط  $E > V$  در هر دو ناحیه آن صادق باشد را می توان با جانشینی  $k$  با  $ik$  برای حالت هایی که در یک ناحیه از آنها  $E < V$  باشد، به کار برد. این جانشینی را در ناحیه II انجام می دهیم و از معادله (۸۷.۶) عامل عبور دامنه ای،  $T$ ، را برای حالت مربوطه به شکل ۶.۶ به دست می آوریم

$$T = \frac{\psi ik_1 e^{-\kappa a}}{(k_1 + ik)(k_2 + ik) - (k_1 - ik)(k_2 - ik) e^{-2\kappa a}} \quad (۸۹.۶)$$

ضریب انتقال، که در این حالت ضریب نفوذ از سد نیز نامیده می شود، باز هم با معادله (۸۸.۶) داده می شود.

وقتی سد پتانسیل دارای چنان ابعادی است که در آن  $2\kappa a \gg 1$  باشد، عبارت دوم مخرج کسر در مقایسه با عبارت اول ناچیز می شود. بنابراین برای ضریب نفوذ از سد داریم

$$B = \frac{k_2}{k_1} |T|^2 \approx \frac{16 k_1 \kappa^2 k_2}{(k_1^2 + \kappa^2)(k_2^2 + \kappa^2)} e^{-2\kappa a} \quad (۹۰.۶)$$

$$= \frac{16}{(k_1/\kappa + \kappa/k_1)(k_2/\kappa + \kappa/k_2)} e^{-2\kappa a}$$

۱. در مهندسی برق، این موضوع یک تشابه نزدیک و منطقی از دو خط انتقال است که با تضعیف کننده ای به هم متصل می شوند.



وقتی  $1 \gg 2ka$  باشد، مهمترین عامل در معادله (۹۰.۶) جمله نمایی است که در این صورت فوق‌العاده کوچک خواهد بود. بنابراین عامل مقابل جمله نمایی، که معمولاً بزرگی آن در حدود واحد است (ماکزیم مقدار آن ۴ است)، در مقام مقایسه اهمیتی ندارد. بدین ترتیب برای محاسبات مرتبه بزرگی می‌توانیم بنویسیم

$$B \approx e^{-2ka} \quad (91.6)$$

به‌عنوان مثال، باریکه‌ای از الکترون با انرژی  $e = 5 \text{ eV}$  را که به‌سوی سدی با ارتفاع  $V_0 = 10 \text{ eV}$  و پهنای  $a = 10 \text{ \AA}$  گسیل می‌شود، در نظر بگیرید. درمی‌یابیم

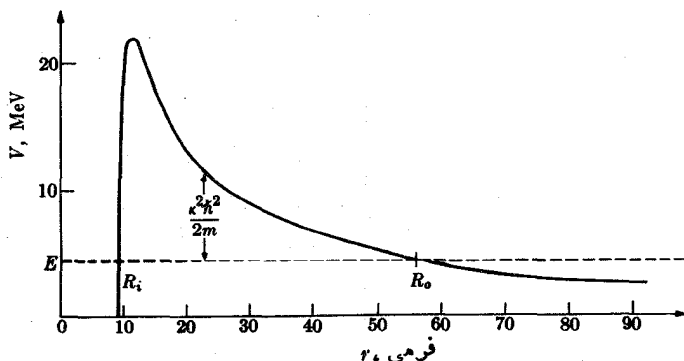
$$k = \kappa = 0.512\sqrt{5} = 1.145 \text{ \AA}^{-1}$$

با قراردادن این مقدار در معادله (۹۰.۶) کسر عبوری را به‌دست می‌آوریم

$$B = \frac{16}{(1+1)(1+1)} e^{-22.9} = 4.05 \times 10^{-10}$$

اگر انرژی الکترون را به  $9 \text{ eV}$  افزایش دهیم، ضریب نفوذ از سدی برابر با  $5.15 \times 10^{-5}$  به‌دست می‌آوریم.

یکی از موفقیت‌های مهم و اولیه مکانیک موجی شروودینگر تشریح و پاشی هسته‌ای آلفا به‌عنوان یک پدیده نفوذ از سد بود. تمام هسته‌های سنگین آلفا-ناپایدارند، یعنی با گسیل دوتریون و دونوترون مقید به هم به‌صورت هسته هلیوم یا ذره آلفا، انرژی به‌دست می‌آورند. اضافه انرژی بین صفر تا  $9 \text{ MeV}$  تغییر می‌کند. می‌توان حدس زد که دو پروتون و دونوترون در سطح هسته به اندازه کافی به هم نزدیک می‌شوند تا تشکیل یک ذره آلفا را بدهند و امکان آنجه را که می‌توان سعی در فرار نامید، به میزان حدود چهاربار در هر  $10^{-19}$  ثانیه یا  $4 \times 10^{19}$  بار در هر ثانیه، به‌وجود آید. شکل ۷.۶ سد پتانسیلی را که



شکل ۷.۶ سد پتانسیل بین هسته  ${}_{90}^{230}\text{Th}$  و ذره آلفا. انرژی کل فروپاشی  $E = 4.76 \text{ MeV}$  است.

ذره آلفا باید از آن عبور کند نشان می‌دهد. این مثال واپاشی  $^{234}\text{U}$  به  $^{230}\text{Th}$  و ذره آلفا را که انرژی کل فروپاشی در آن  $E = 4.76 \text{ MeV}$  است. نشان می‌دهد. شکل این سد از جمع پتانسیل دافعه کولنی و پتانسیل جاذبه خیلی قوی هسته‌ای به دست می‌آید. برای مثال نشان داده شده پتانسیل هسته‌ای در خارج از حدود ۱۲ فرمی بسیار کوچک است،  $(10^{-13} \text{ cm} = 1 \text{ فرمی})$ . ضریب نفوذ از سد پتانسیل برابر  $2.3 \times 10^{-23}$  محاسبه شده است. بنابراین احتمال فرار در ثانیه  $9.2 \times 10^{-14} = 2.3 \times 10^{-23} \times 4 \times 10^9$  است که با عمر متوسطی حدود  $1.1 \times 10^{12}$  ثانیه یا حدود  $3 \times 10^5$  سال معادل می‌شود.

## ۱۲.۶ نوسان‌کننده هماهنگ

نوسان‌کننده هماهنگ ساده‌ای که اغلب در فیزیک کلاسیک مورد مطالعه قرار می‌گیرد، از فزری بدون جرم تشکیل می‌شود که یک انتهای آن به دیوار و انتهای دیگر آن به جرم  $m$  که روی یک میز بدون مالش می‌لغزد، متصل شده است. اگر ثابت فنر  $\beta$  باشد، نیروی بازگرداننده  $F = -\beta x$  است و به کمک محاسبات کلاسیک درمی‌یابیم که جرم  $m$  نوسانات ساده‌ای به صورت زیر انجام می‌دهد.

$$x = A \sin \omega t \quad (\text{کلاسیک}) \quad (92.6)$$

که بسامد آن از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\omega = \sqrt{\beta/m} \quad (93.6)$$

انرژی پتانسیل ذخیره شده در فنر برابر است با

$$V = \frac{1}{2} \beta x^2 \quad (94.6)$$

و انرژی کل سیستم عبارت است از

$$E = \frac{1}{2} \beta A^2 \quad (\text{کلاسیک}) \quad (95.6)$$

به طور کلاسیک، هر مقداری برای دامنه  $A$  مجاز است و بنابراین هر مقدار انرژی کل نیز مجاز خواهد بود.

پلانک فرض کرد که مبادله انرژی بین نوسان‌کننده هماهنگ در دیواره یک کاواک تکدما و مدهای نوسانات الکترومغناطیسی داخل کاواک فقط می‌تواند در مراحل پله‌ای  $\Delta E = \hbar \omega$  انجام پذیرد. هدف اصلی در اینجا نشان دادن این موضوع است که ترازهای انرژی نوسان‌کننده هماهنگ، بنا بر محاسبات مکانیک موجی به اندازه  $\Delta E = \hbar \omega$  از هم جدا هستند. بنابراین با فرض اینکه جذب و دفع انرژی نتیجه جهش کوانتومی بین دو تراز مجاور باشد، رابطه مورد استفاده پلانک را به دست خواهیم آورد.

معادله شرویدینگر برای نوسان کننده هماهنگ یک بعدی عبارت است از

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}\beta x^2\psi = E\psi \quad (96.6)$$

این رابطه را مجدداً به صورت زیر می نویسیم

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{1}{2}\beta x^2 \right) \psi = 0 \quad (96.6 \text{ الف})$$

ملاحظه خواهد شد که بدون بعد کردن این معادله باعث آسانی کار می شود. برای این کار جانشین سازیهای زیر را انجام می دهیم

$$\alpha^2 \equiv \omega m / \hbar$$

$$\gamma \equiv 2mE / \hbar^2 \quad (97.6)$$

$$\xi \equiv \alpha x$$

با به کارگیری ثابتهای جدید و متغیر مستقل  $\xi$  داریم

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \left( \frac{\gamma}{\alpha^2} - \xi^2 \right) \psi = 0 \quad (98.6)$$

مشتق دوم تابع موج  $\Psi$  برای  $\gamma/x^2 < \xi^2$  منفی است. برای مقادیر بزرگتر  $\xi^2$ ، مشتق لگاریتمی مثبت است و بنا بر این یک تابع نمایی خواهیم داشت. برای مقادیر بسیار بزرگ  $\xi^2$  می توانیم از جمله  $\gamma/\alpha^2$ ، برای به دست آوردن رفتار مجانبی  $\Psi$ ، صرف نظر کنیم. می نویسیم

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} - \xi^2\psi = 0, \quad \xi^2 \rightarrow \infty \quad (99.6)$$

جواب این معادله عبارت است از

$$\psi = Be^{-\xi^2/2} \quad (100.6)$$

شگرد متداول حل معادلات دیفرانسیل این است که سعی می شود جوابی که حاصل ضرب جواب مجانبی در تابع اختیاری دیگری است، به دست آید. بنا بر این می نویسیم

$$\psi = e^{-\xi^2/2} H(\xi) \quad (101.6)$$

با قرار دادن در معادله (94.6) نتیجه می شود

$$H'' - 2\xi H' + \left( \frac{\gamma}{\alpha^2} - 1 \right) H = 0 \quad (102.6)$$

که در آن  $H''$  مشتق مرتبه دوم نسبت به  $\xi$  و  $H'$  مشتق مرتبه اول نسبت به  $\xi$  است. حال يك سری توانی  $\xi$  را به عنوان جوابی برای  $H$  مورد آزمایش قرار می‌دهیم

$$H = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + \dots \quad (103.6)$$

با وارد کردن این عبارات در جملات معادله (۱۰۲.۶) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} H'' = 2a_2 & & + 2 \cdot 2 a_3 \xi & & + 3 \cdot 2 a_4 \xi^2 & & + 4 \cdot 3 a_5 \xi^3 & & + \dots \\ -2\xi H' = & & -2 \cdot 1 a_1 \xi & & -2 \cdot 2 a_2 \xi^2 & & -2 \cdot 3 a_3 \xi^3 & & - \dots \end{aligned}$$

$$(\gamma/\alpha^2 - 1)H = (\gamma/\alpha^2 - 1)a_0 + (\gamma/\alpha^2 - 1)a_1 \xi + (\gamma/\alpha^2 - 1)a_2 \xi^2 + (\gamma/\alpha^2 - 1)a_3 \xi^3 + \dots$$

در اینجا سه جمله معادله (۱۰۲.۶) را به طریقی زیر هم قرار داده‌ایم که هر ستون فقط جمله‌هایی با توان مشابه از  $\xi$  را شامل می‌شود.

البته معادله (۱۰۲.۶) باید برای هر مقدار  $\xi$  صادق باشد. این بدان معنی است که ضریب مقابل هر توان به تنهایی باید مساوی صفر باشد. این امر منجر به معادلات زیر می‌شود

$$2a_2 + (\gamma/\alpha^2 - 1 - 2 \times 0)a_0 = 0$$

$$3a_3 + (\gamma/\alpha^2 - 1 - 2 \times 1)a_1 = 0$$

$$4a_4 + (\gamma/\alpha^2 - 1 - 2 \times 2)a_2 = 0$$

$$5a_5 + (\gamma/\alpha^2 - 1 - 2 \times 3)a_3 = 0$$

از معادلات بالا به روشنی معلوم می‌شود که می‌توانیم  $a_2$  را با شناسایی  $a_0$  و  $a_4$  را با شناسایی  $a_2$  تعیین کنیم و غیره. به طور مشابه می‌توانیم  $a_3$  را با شناسایی  $a_1$  و  $a_5$  را با دانستن  $a_3$  تعیین کنیم و غیره. به طور کلی رابطه بازگشت زیر به دست می‌آید

$$a_{l+2} = \frac{-(\gamma/\alpha^2 - 1 - 2l)}{(l+1)(l+2)} a_l \quad (104.6)$$

که در آن  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$  است.

بدیهی است که برای معادله (۱۰۲.۶) جوابی به دست آوردیم. این جواب شامل دو ثابت قابل تنظیم انتگرال گیری  $a_0$  و  $a_1$  است که می‌خواهیم برای معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به دست آوریم. سؤال این است که: آیا سری توانی همگراست؟ جواب «نه» است. به آسانی می‌توان ثابت کرد که برای مقادیر بزرگ  $\xi$ ، سری توانی بر حسب  $e^{4\xi}$  افزایش می‌یابد. بنابراین، با ضرب کردن آن در  $e^{-4\xi/2}$ ، به طوری که در معادله (۱۰۱.۶) عمل شده است، تمام تابع موج  $\psi$  واگرا می‌شود. به هر حال، سری را می‌توان به طریق زیر

کوتاه کرد. ضریب  $\gamma/\alpha^2$  را عدد درست مثبت و فرد می گیریم

$$\gamma/\alpha^2 = 2n + 1 \quad (105.6)$$

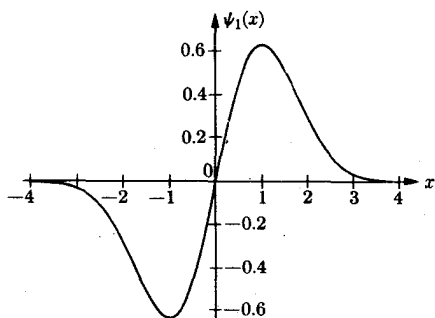
که در آن  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  است. سپس از معادله (104.6) می بینیم که یکی از دو سری با ضرایب  $a_1$  در  $l = n$  متوقف خواهد شد. اگر  $n$  یک عدد زوج باشد، این کار سری با ضرایب زوج را کوتاه خواهد کرد، سپس تمام جمله های با ضرایب فرد سری را با قرار دادن  $a_1 = 0$  مساوی صفر می سازیم. به عکس اگر  $n$  فرد باشد، با قراردادن  $a_0 = 0$  سری با ضرایب فرد در  $l = n$  کوتاه خواهد شد. وقتی مقادیر  $\gamma$  و  $\alpha$  از معادله (97.6) در معادله (105.6) قرار داده شود، داریم

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega \quad (106.6)$$

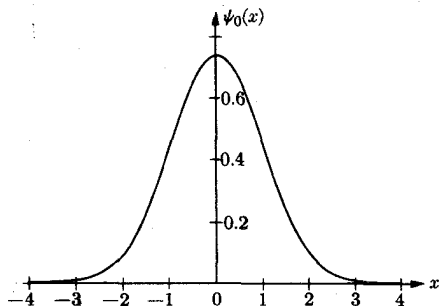
جوابهایی که برای معادله (104.6) به دست آوردیم، چند جمله ایهای هرمیت نامیده می شوند. بدکمک معادله (104.6) ضرایب معادله (103.6) را به آسانی می توان حساب کرد. این کار برای چهار مقدار اول  $n$  انجام شده و نتایج در جدول 106 عرضه شده است. در اینجا چند جمله ایهای هرمیت با جمله نمایی [معادله (101.6)] ترکیب شده و توابع موج حاصل بهنجار شده اند. شکل 8.6 منحنیهای این چهار تابع اول را نشان می دهد. شکل 9.6 چگالی احتمال، یعنی مربع تابع موج نوسان کننده هماهنگ را برای  $n = 0, 1, 2, 5$  نشان می دهد. در روی همین شکل چگالی احتمال بر اساس محاسبه حرکت کلاسیک، یعنی حرکت سینوسی محض با دامنه حاصل از معادله (95.6) پس از ترکیب با معادله (106.6) نشان داده شده است.

جدول 106 توابع موج نوسان کننده هماهنگ

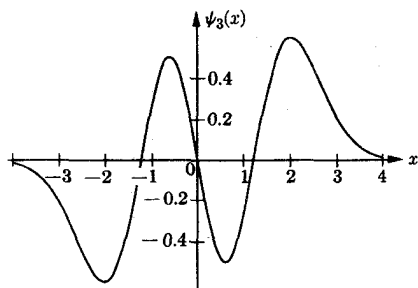
پارامتر	$\psi$	$E_n$	$n$
+1	$\alpha^{1/2} \pi^{-1/4} \exp(-\alpha^2 x^2 / 2)$	$\frac{1}{2} \hbar \omega$	0
-1	$(2\alpha)^{1/2} \pi^{-1/4} (\alpha x) \exp(-\alpha^2 x^2 / 2)$	$\frac{3}{2} \hbar \omega$	1
+1	$(2\alpha)^{1/2} \pi^{-1/4} \left(\alpha^2 x^2 - \frac{1}{2}\right) \exp(-\alpha^2 x^2 / 2)$	$\frac{5}{2} \hbar \omega$	2
-1	$(4\alpha/3)^{1/2} \pi^{-1/4} \left(\alpha^2 x^2 - \frac{3}{2} \alpha x\right) \exp(-\alpha^2 x^2 / 2)$	$\frac{7}{2} \hbar \omega$	3



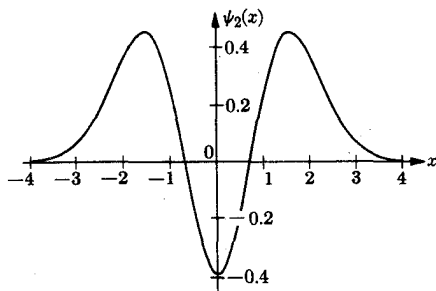
(ب)



(الف)



(د)



(ج)

شکل ۸.۶ توابع موج بهنجار شده نوسان کننده هماهنگ برای اعداد کوانتومی ۰، ۱، ۲، ۳.

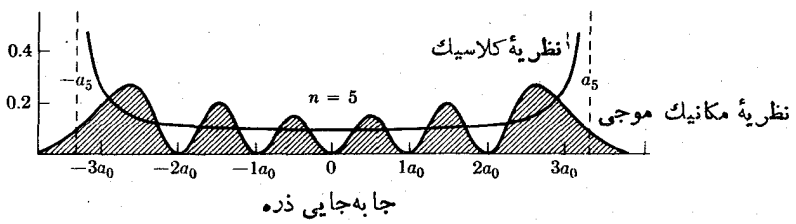
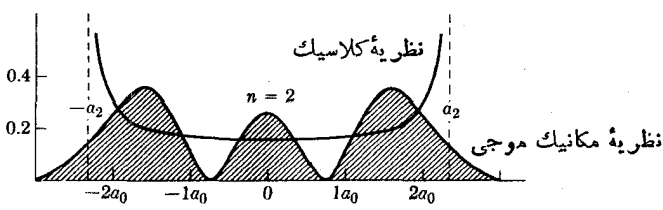
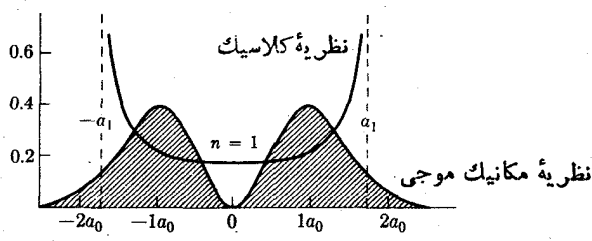
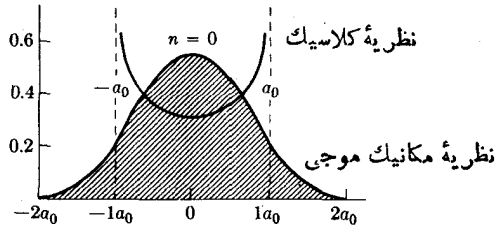
### ۱۳.۶ پارینه

در مثالهایی که تا اینجا مطالعه کردیم، دیده ایم که توابع موج حالت مقید یا توابع فرد و یا توابع زوج هستند؛ یعنی نسبت به مبدأ یا متقارن و یا پاد متقارن هستند. این خاصیت تقارن یا پاد تقارن پادینه نام دارد. اگر:  $\psi(x) = \psi(-x)$  باشد پارینه مثبت، و اگر  $\psi(x) = -\psi(-x)$  باشد پارینه منفی تعریف می شود. پارینه ترابع موج نوسان کننده هماهنگ در جدول ۱۰.۶ داده شده است. به طور کلی می توان ثابت کرد که اگر پتانسیل حول مبدأ مختصات تقارن داشته باشد، ویژه تابعهای حاصل از هامیلتونی دارای پارینه معین خواهند بود، یعنی تابعها فرد و زوج هستند. برای اثبات این موضوع معادله شرودینگر را می نویسیم

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi \quad (107.6)$$

با جانشین کردن  $x' = -x$  و  $V(x') = V(x)$  داریم

احتمال وجود نسبی یک ذره متحرک در واحد مسافت



شکل ۹.۶ نمودار احتمال وجود نسبی نوسان کننده هماهنگ در مواضع گوناگون (از دید کلاسیک و از دید مکانیک موجی). چهار انرژی مختلف مربوط به اعداد کوانتومی  $n = 0, 1, 2, 5$  هستند. دامنه کلاسیک برای  $n = 2$  برابر  $a_2$  است و غیره. بنابراین  $2a_0$  دو برابر دامنه کلاسیک برای  $n = 0$  است.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx'^2} + V(x') = E\psi \quad (108.6)$$

پس از جانشینی، جمله اول معادله تغییر علامت نمی‌دهد زیرا این جمله مشتق دوم است.

معادلات (۱۰۷.۶) و (۱۰۸.۶) يك شكل هستند، بنا بر این باید جوابهایی مثل هم داشته باشند. فرض خواهیم کرد که جوابها دارای واگنی انرژی نیستند. بدین ترتیب برای يك ویژه مقدار معین  $E$  يك ویژه تابع  $\psi$  وجود دارد. بنا بر این جوابهای دو معادله، جدا از ضریب ثابت، باید یکی باشند، پس می توان نوشت

$$\psi(x) = C\psi(x) \quad (109.6)$$

یا

$$\psi(-x) = C\psi(x) \quad (الف 109.6)$$

این معادله فقط در صورتی می تواند برای تمام مقادیر  $x$  صادق باشد که داشته باشیم  $C = \pm 1$ . اگر  $C = +1$  باشد تابع زوج یا نسبت به  $x$  متقارن است، یعنی دارای پاریتته مثبت (یا زوج) است. اگر  $C = -1$  باشد، تابع فرد و یا پاد متقارن نسبت به  $x$  است، و می گوئیم که دارای پاریتته منفی (یا فرد) است.

در اغلب موارد مربوط به حالت های مقید که با آنها در فیزیک اتمی و هسته ای سروکار داریم، تابع پتانسیل متقارن است، و بنا بر این ویژه تابع های انرژی پاریتته معینی دارند. پاریتته در فیزیک هسته ای نقش بسیار مهمی دارد. در غالب فرایندهای واپاشی یا تبدیلهای هسته ای بقای پاریتته وجود دارد. در واقع، تا قبل از پژوهشهای لی و یانگ<sup>۱</sup> در ۱۹۶۵، اعتقاد بر این بود که همیشه بقای پاریتته وجود دارد. طریقه متداول برای بیان بقای پاریتته این است که بگوئیم: اگر انجام آزمایش معینی امکان پذیر باشد، باید انجام تصویر آینه ای آن آزمایش نیز امکان پذیر باشد. ناپایستگی (عدم بقای) پاریتته در واپاشی بتا (به بخش ۱۱.۱۲ مراجعه کنید) توسط وو و همکاران<sup>۲</sup> در تعقیب پیشنهاد لی و یانگ، نشان داده شده است. این آزمایش نشان داد که برای هسته های سمتگرفته يك فرایند معین واپاشی بتا بسا تصویر آینه ای آن برابر نیست.

## مسائل

۱.۶ تابع موج يك بعدی به صورت زیر داده شده است

$$\psi = Ae^{-ax}, \quad x > 0$$

$$\psi = Ae^{ax}, \quad x < 0$$

(الف) این تابع را بهنجار کنید. (ب) احتمال یافتن ذره بین  $x = 1/a + dx$  و  $x = 1/a$

1. T. D. Lee and C. N. Yang, *Phys. Rev.* 104 (1956), p. 254.
2. C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes, and R. P. Hudson, *Phys. Rev.* 105 (1957), p. 1413.



چقدر است؟ (ج) احتمال یافتن ذره بین  $x = 1/a$  و  $x = 2/a$  چقدر است؟

۲۰۶ تابع موج مسئله ۱۰۶ داده شده است. (الف) مقادیر چشمداشتی را برای  $x$ ،  $p_x$ ،  $x^2$  و  $px^2$  به دست آورید. (ب) تابع موج دارای رأسی در  $x = 0$  است. آیا این موضوع درباره پتانسیل چیزی به شما می گوید؟

۳۰۶ تابع موج يك بعدی به صورت زیر داده شده است

$$\begin{aligned} \psi &= 0, & x < -a \\ \psi &= k(x+a), & -a < x < 0 \\ \psi &= k(a-x), & 0 < x < a \\ \psi &= 0, & x > a \end{aligned}$$

(الف) این تابع را بهنجار کنید. (ب) مقادیر چشمداشتی را برای  $x^2$  و  $px^2$  به دست آورید.

۴۰۶ تابع موج مسئله ۳۰۶ داده شده است. (الف) با به کار بردن معادله شرودینگر، انرژی پتانسیل را در تمام نواحی به دست آورید و منحنی تغییرات آن را رسم کنید. فرض کنید  $E = 0$  است. (ب) انرژی جنبشی در ناحیه  $0 < x < a$  چقدر است؟ (نقاط انتهایی مورد نظر نیستند.)

۵۰۶ نشان دهید که مجموع دو تابع موج، از نوع داده شده در معادله (۴۶.۶)، جواب معادله مستقل از زمان شرودینگر نیست.

۶۰۶ توابع  $\psi_n$  و  $\psi_m$  ویژه تابعهای هامیلتونی معین  $H$  بوده و انرژیهای مربوطه  $E_n$  و  $E_m$  هستند. تحت چه شرایطی يك ترکیب خطی  $a\psi_n + b\psi_m$  نیز ویژه تابع  $H$  می شود؟

۷۰۶ توابع  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  و غیره ویژه تابعهای  $H$  با انرژیهای  $E_1, E_2, E_3$ ، و غیره هستند. ترکیب خطی  $\psi = a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + a_3\psi_3 + \dots$  يك ویژه تابع  $H$  نیست. مقدار چشمداشتی  $\langle H \rangle$  برای انرژی کل چقدر است؟

۸۰۶ ثابت کنید که چاه مورد بحث در مثال آخر بخش ۸۰۶ فقط يك حالت مقید دارد. [دانهمایی: در حد  $E = 0$  شرط مرزی در  $x = \pm a/2$  چنین می شود  $d\psi/dx = 0$ . حالت دوم  $\psi$  باید دارای يك صفر باشد که در  $x = 0$  اتفاق می افتد.]

۹۰۶ ذره ای به جرم  $m$  در داخل يك جعبه مکعبی با دیواره های غیر قابل نفوذ محبوس است. ابتدا در يك رأس قرار داشته و مختصات رأس دیگری که به فاصله قطر مکعب در مقابل مبدأ

قرار دارد، عبارت است از  $x=a$ ،  $y=a$  و  $z=a$ . نشان دهید که تابعی به صورت  $\psi = A \sin k_x x \sin k_y y \sin k_z z$  يك جواب معادله شرودينگر برای این مسئله است. در داخل جعبه  $V=0$  فرض می شود. با استفاده از اعداد کوانتومی  $n_x$ ،  $n_y$  و  $n_z$  و به کار بردن روشی مشابه روش بخش ۷.۶، شرایط کوانتومش  $k_x$ ،  $k_y$  و  $k_z$  را به دست آورید. انرژی کل را بر حسب  $n_x$ ،  $n_y$  و  $n_z$  به دست آورید.

۱۰.۶ (الف) تابع موج مسئله ۹.۶ را بهنجار کنید. (ب) مقدار چشمداشتی  $p_x$  را تعیین کنید. (ج) آیا  $p_x$  تیز است؟

۱۱.۶ تابع موجی يك بعدی و تک ذره ای به صورت زیر داده شده است

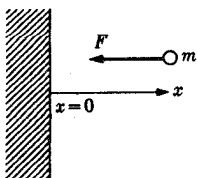
$$\psi = A(1+ax)e^{-ax} \quad , \quad x > 0$$

$$\psi = A(1-ax)e^{ax} \quad , \quad x < 0$$

که در آن  $a$  مقدار ثابتی است. (الف) تابع را بهنجار کنید. (ب) انرژی کل  $E$  و انرژی پتانسیل  $V(x)$  را با فرض اینکه در  $x=\infty$ ،  $V=0$  است، به دست آورید. [دانهمایی:  $\psi$  را در معادله شرودينگر قرار دهید.]

۱۲.۶ تابع موج حالت پایه  $\psi = A \sin kx$  را برای ذره ای واقع در بین دو دیواره غیر قابل نفوذ در  $x=0$  و  $x=a$  در نظر بگیرید ( $ka=\pi$ ). (الف) این تابع موج را بهنجار کنید. (ب) مقادیر چشمداشتی را برای تکانه  $p_x$  و برای مختصات  $x$  ذره محاسبه کنید.

۱۳.۶ يك ذره به جرم  $m$  به وسیله نیروی ثابت  $F$  به طرف دیواری کاملاً بازتاب دهنده (غیر قابل نفوذ) در  $x=0$  کشیده می شود. به شکل ۱۰.۶ مراجعه کنید. (الف) انرژی پتانسیل ذره  $V(x)$  را، با قراردادن  $V=0$  برای ابتدای سمت راست دیوار، رسم کنید. (ب) معادله شرودينگر يك بعدی و مستقل از زمان را برای این مسئله بنویسید. سعی نکنید مسئله را به طور تحلیلی حل کنید. (ج) توابع موج يك بعدی حالت پایه و نخستین حالت برانگیخته را، به طور کیفی اما با دقت، رسم کنید. برای هر دو حالت، خطوط معرف انرژیهای کل  $E_1$  و  $E_2$  را روی نمودار  $V(x)$  رسم کنید. به جزئیات مسئله، مثلاً به جاهایی که توابع



شکل ۱۰.۶

موج نفاذ عطف ( $d^2\psi/dx^2 = 0$ ) دارند، توجه کنید.

۱۴.۶ تعیین کنید کدامیک از توابع زیر ویژه تابعهای تکانه  $p_x$  هستند

(الف)  $A \sin kx + A \cos kx$  (ب)  $A \sin kx$

(ج)  $A \cos kx + iA \sin kx$  (د)  $Ae^{ik(x-\sigma)}$

(ه)  $Ae^{ikx} + Ae^{-ikx}$  (و)  $Ae^{ikx} + iAe^{-ikx}$

۱۵.۶ تابع موج  $\psi = \exp(iax - iby)$  داده شده است. نشان دهید که این تابع یک ویژه تابع تکانه است، و سرعت ذره را به دست آورید.

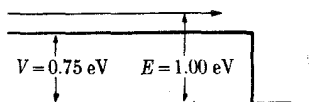
۱۶.۶ باریکه‌ای از الکترونها که انرژی کل هر یک از آنها  $E = 100 \text{ eV}$  است، در حرکت از چپ به راست، به پله‌ای از انرژی پتانسیل مطابق شکل ۱۱.۶ نزدیک می‌شود. انرژی پتانسیل الکترونها در سمت چپ پله  $V = 0.75 \text{ eV}$  و در سمت راست آن برابر صفر است. نسبت شار ذرات در طرف راست پله به شار ذرات فرودی از سمت چپ چقدر است؟ (یعنی، ضریب عبور چقدر است؟)

۱۷.۶ ضریب نفوذ از سد را برای الکترونها با انرژی جنبشی  $10 \text{ eV}$  که از سدی به ضخامت  $2 \text{ \AA}$  و  $V = 20 \text{ eV}$  عبور می‌کنند، به دست آورید. فرض کنید در دو طرف سد  $V = 0$  باشد.

۱۸.۶ در مثال مربوط به آخر بخش ۱۱.۶، ضریب نفوذ از سد برای ذرات آلفا  $10^{-22} \times 23$  به دست آمد. اگر ذرات پروتونهای با همین انرژی بودند، ضریب نفوذ خیلی بزرگتر می‌شد. در این باره بحث کنید.

۱۹.۶ شیء کوچک به جرم  $1$  میلی‌گرم روی یک سطح بدون اصطکاک با سرعت  $1 \text{ cm/s}$  می‌لغزد. این شیء با یک پله پتانسیل (سد) به پهنای  $1 \text{ cm}$  مواجه می‌شود. بزرگی پتانسیل چنان است که، به‌طور کلاسیک، انرژی جنبشی شیء در داخل سد برابر با همان انرژی جنبشی خارج از سد با علامت منفی می‌شود. ضریب نفوذ از سد را به دست آورید.

۲۰.۶ با بدکار بودن تابع موج نوسان‌کننده هماهنگ برای پایتترین حالت  $n=0$ ،



شکل ۱۱.۶

ورداییهای  $(\Delta_x)^2$  و  $(\Delta p_x)^2$  را حساب کنید و نشان دهید که این مقادیر با اصل عدم قطعیت سازگاری دارند. (به جدول انتگرالهای معین نیاز دارید.)

۲۱۰۶ جسمی به جرم ۱ میلی گرم به فزونی که ثابت فزونی آن  $1 \text{ dyn/cm}$  ( $10^{-2} \text{ N/m}$ ) است، متصل می شود. انرژی و دامنه کلاسیک ارتعاش «نقطه صفر» ( $n=0$ ) را محاسبه کنید.

۲۲۰۶ یک نوسان کننده هماهنگ یک بعدی ( $m = \text{جرم}$  و  $V = \frac{1}{2} \alpha x^2$ ) در حالتی است که با تابع موج  $\psi = Bx \cdot e^{-bx^2}$  توصیف می شود. (الف) نشان دهید که  $\psi$  در معادله شرودینگر صدق می کند، مقدار  $b$  و همچنین انرژی  $E$  فرایند را به دست آورید. (ب) این نوسان کننده در چه حالتی است؟ حالت پایه؟ حالت برانگیخته اول؟ و یا ...؟ (ج) رابطه ای بنویسید که احتمال  $x > A$  را به دست دهد،  $A$  دامنه کلاسیک نوسان کننده با انرژی  $E$  است. روابط را بر حسب  $A$  و  $B$  بنویسید.



## مکانیک موجی اتم هیدروژن

### ۱.۷ مسئله دو جسم در مکانیک موجی

فرمولبندی مکانیک موجی را می‌توان برای دستگاهی با هر تعداد ذره  $N$  بسط داد. بنا بر این تابع موج مستقل از زمان تابعی از  $3N$  مختصه فضایی است که معرف موقعیت  $N$  ذره خواهند بود. در معرفی رسمیت مکانیک موجی، معمول این است که بلافاصله اصول موضوعه (فصل ۶) به گونه‌ای نوشته شوند که هر تعدادی از ذرات را شامل شوند. به دلایل آموزشی، با دستگاه‌های تک ذره‌ای شروع کردیم، و حال اصل موضوعها را برای دستگاه‌های چند ذره‌ای توسعه خواهیم داد و مفهوم تابع موج را دوباره تعبیر خواهیم کرد. یادآوری این موضوع اهمیت دارد که این روش نیز، همانند فرمولبندی مورد بحث در فصل ۶، به شکل اصل موضوعی ارائه داده می‌شود. کل این فرمولبندی را نمی‌توان مستقیماً از هیچ نوع قوانین تجربی یا قواعد فلسفی استنتاج کرد. اما پیش‌بینیهای آن امکان‌پذیرند و می‌توانند به وسیله آزمایش مورد آزمون قرار گیرند. این کار تنها آزمون نهایی و قابل قبول هر نظریه فیزیکی است.

هامیلتونی چند جسمی، منطقی با اضافه کردن عملگر انرژی جنبشی تمام ذرات به تابع انرژی پتانسیل که معرف برهم‌کنش بین تمام ذرات است، به دست می‌آید. بدیهی است که با این تعمیم، معادله شرودینگر مشابه معادله کلاسیک بقای انرژی در مکانیک موجی خواهد شد. معنی تابع موج، به عنوان مثال برای دستگاهی دو ذره‌ای، این است که مربع قدر مطلق آن، یا  $\psi^*\psi$ ، چگالی احتمال یافتن ذره ۱ را در مکان  $(x_1, y_1, z_1)$  در جزء حجم

$d\tau_1 = dx_1, dy_1, dz_1$  و به طور همزمان چگالی احتمال یافتن ذره ۲ را در محل  $(x_2, y_2, z_2)$  در جزء حجم  $dx_2 dy_2 dz_2$  به دست می‌دهد.

برای حالت خاصی که برهم کنش دو ذره از طریق انرژی پتانسیلی که فقط تابع فاصله بین دو ذره است تعیین می‌شود، معادله مستقل از زمان شرودینگر شکل زیر را پیدا می‌کند

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 \right) \psi + V(r_{12}) \psi = E \psi \quad (1.7)$$

در این رابطه  $\nabla_1^2$ ، تابع مختصات  $x_1, y_1, z_1$  و  $\nabla_2^2$  تابع مختصات  $x_2, y_2, z_2$  است. اگر مختصات دستگاه مرکز جرم و مختصات نسبی با رابطه‌های زیر را به کار ببریم، می‌توان نشان داد که معادله (۱.۷) به دو معادله جدا از هم تبدیل می‌شود

$$R = \frac{r_1 + r_2}{2} \quad (2.7)$$

$$r_{12} = r_1 - r_2 \quad (3.7)$$

تابع موج کل به صورت حاصلضرب زیر نوشته می‌شود

$$\psi = \psi_{CM} \psi_{rel} \quad (4.7)$$

با جاگذاری آن در معادله (۱.۷) و بعد از تنظیم و جداسازی داریم

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{CM}^2 \psi_{CM} = E_{CM} \psi_{CM} \quad (5.7)$$

و

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_{rel}^2 \psi_{rel} + V(r_{12}) \psi_{rel} = E_{rel} \psi_{rel} \quad (6.7)$$

در اینجا  $M$  جمع دو جرم  $m_1 + m_2$ ، و  $\mu$  جرم کاهش یافته است که چنین می‌شود

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (7.7)$$

انرژی کل، دقیقاً مانند مورد مکانیک کلاسیک جمع انرژی حرکت مرکز جرم و انرژی حرکت نسبی است

$$E = E_{CM} + E_{rel} \quad (8.7)$$

یکی از جوابهای معادله (۵.۷) به صورت حرکت موج تخت است

$$\psi_{CM} = C \cdot e^{i(k_x X + k_y Y + k_z Z)} = C \cdot e^{i k \cdot R} \quad (9.7)$$

که در آن  $C$  مقدار ثابت است و مربع عدد موج  $k$  با رابطه زیر داده می‌شود

$$k^2 \hbar^2 = 2ME_{CM} \quad (10.7)$$

در معادله شرودینگر برای حرکت نسبی [معادله (۶.۷)] تنها متغیرهای مستقل مؤلفه‌های بردار نسبی  $r_{12}$  هستند. در تعداد زیادی از موارد عملی مورد نظر، مرکز جرم تقریباً در حالت سکون قرار دارد و یا حداقل حرکت آن قابل توجه نیست. بنا بر این فقط جوابهای معادله (۶.۷) برای ما جالب است که مشابیه معادله یک تک ذره می‌شود. به کمک روش بالا، تعداد متغیرهای مستقل را از شش [معادله (۱.۷)] به سه [معادله (۶.۷)] کاهش داده‌ایم.

### ۲.۷ معادله شرودینگر در مختصات کروی

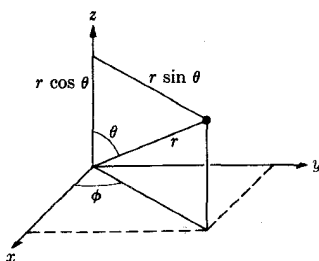
برهم کنش بین پروتون و الکترون در اتم هیدروژن موافق با شرایط گفته شده در بخش قبل است که پتانسیل فقط تابع فاصله بین دو ذره است. با بیان دقیقتر این امر فقط در مورد قسمت اصلی برهم کنش، یعنی میدان کولنی، صحت دارد. برهم کنش بین گشتاور مغناطیسی الکترون و میدان مغناطیسی حاصل از حرکت مداری الکترون، همانطور که در بخش ۹.۷ بحث می‌شود، بستگی به سمتگیری محور اسپین الکترون دارد. به هر حال، این اختلال کوچکی است که آن را فعلاً در نظر نخواهیم گرفت. واضح است که حرکت نسبی دو ذره در اتم هیدروژن را می‌توان با معادله (۶.۷) تشریح کرد. با حذف شاخهای ۱، ۲ و  $rel$  داریم

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \psi = E\psi \quad (11.7)$$

البته انرژی پتانسیل، پتانسیل کولنی معروف است. در این رابطه  $Z$ ، عدد بار هسته را به کار برده‌ایم که برای هیدروژن برابر است. بدین ترتیب، اگر  $Z$  در این محاسبات وارد شود، نتایج برای سایر اتمهای تک الکترونی نظیر یون  $He^+$  و یون  $Li^{++}$  و غیره نیز کاربرد دارد. فاصله  $r$  در مخرج عبارت پتانسیل برابر  $(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$  است. جاگذاری این مقدار منجر به یک معادله دیفرانسیل بدترکیب می‌شود. در این صورت، حل کردن این مسئله در مختصات دکارتی آسان نیست، و از آنجا که  $r$  یکی از مختصه‌ها در دستگاه کروی است، نوشتن معادله شرودینگر در چنین دستگاهی طبیعی به نظر می‌رسد. رابطه بین مختصات کروی  $r$ ،  $\theta$  و  $\phi$  و مختصات دکارتی  $x$ ،  $y$  و  $z$  را می‌توان مستقیماً از شکل ۱.۷ به دست آورد. این روابط عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (12.7)$$

از این معادلات تبدیل برای به دست آوردن عملگر هامیلتونی (۲۶.۶) در مختصات



شکل ۱۰۷ رابطه بین مختصات دکارتی و مختصات کروی.

کروی استفاده می‌کنیم. بنابراین معادله مستقل از زمان شرودینگر شکل زیر را پیدا می‌کند

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] + V\psi = E\psi \quad (13.7)$$

وقتی انرژی پتانسیل دارای تقارن مرکزی است، می‌توانیم بنویسیم

$$V = V(r) \quad (14.7)$$

و خواهیم دید که معادله (۱۳.۷) جداسازی است. یعنی، بخش زاویه‌ای تابع موج را می‌توان با حل معادله دیگر پیدا کرد. تابع موج کل را به صورت حاصلضرب می‌نویسیم

$$\psi = R(r)Y(\theta, \phi) \quad (15.7)$$

و این رابطه را در معادله (۱۳.۷) جاگذاری می‌کنیم. پس از منظم کردن جملات به طوری که تمام کمیت‌های تابع  $r$  درست چپ و تمام کمیت‌های تابع  $\theta$  و  $\phi$  درست راست واقع شوند، خواهیم داشت

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2\mu r^2}{\hbar^2} (E - V) = -\frac{1}{Y} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right] \quad (16.7)$$

تنها طریقی که در آن این معادله بتواند برای تمام مقادیر  $r$ ،  $\theta$  و  $\phi$  برقرار باشد، این است که هر دو طرف معادله مساوی عددی ثابت به نام ثابت جداسازی باشد. ابتدا با توجه به سمت راست معادله داریم



$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} = -CY \quad (17.7)$$

که در آن  $C$  ثابت جداسازی است. یادآور می‌شویم که معادله (۱۷.۷) انرژی کل یا انرژی پتانسیل را شامل نمی‌شود. بنابراین معادله‌ای کاملاً کلی است. با بیان دیگر، اگر معادله را یکبار حل کنیم، آن را برای تمام حالت‌هایی که  $V$  تابع  $\theta$  یا  $\phi$  نیست، حل کرده‌ایم. مجدداً راه حل این است که سعی کنیم معادله را به صورت حاصلضرب دو متغیر  $\theta$  و  $\phi$  در آوریم. بنابراین می‌نویسیم

$$Y = \Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (18.7)$$

و سپس در معادله (۱۷.۷) جاگذاری می‌کنیم. پس از منظم کردن مجدد، نتیجه به صورت زیر درمی‌آید

$$-\frac{1}{\Theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - C \sin^2 \theta = \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} \quad (19.7)$$

معادله یکبار بر رابطه (۱۸.۷) تقسیم شده است و مشتق جزئی را به مشتق ساده تغییر داده‌ایم، زیرا هر تابع فقط به یک متغیر مستقل بستگی دارد.

معادله (۱۹.۷) نیز فقط وقتی برای تمام مقادیر  $\theta$  و  $\phi$  صدق می‌کند که هر طرف آن مساوی یک مقدار ثابت باشد. به دلایلی که فعلاً پوشیده‌اند ولی بعداً روشن خواهند شد، این ثابت را  $-m^2$  گرفته‌ایم. بنابراین معادله  $\phi$  به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad (20.7)$$

و جوابهای آن چنین‌اند

$$\Phi = e^{im\phi} \quad (21.7)$$

تابع  $\phi$  باید دوره‌ای باشد و پس از  $\Delta\phi = 2\pi$  تکرار شود. در صورتی که  $m$  عدد درست باشد، معادله (۲۱.۷) این شرط را دارد. حال روشن است که اگر به جای  $m^2$  - عدد مثبتی برای ثابت جداسازی انتخاب می‌کردیم، تابع  $\phi$  شکل تابع نمایی مثبت یا منفی را به خود می‌گرفت که نمی‌توانست با شرط پیوستگی و تک مقداری، که باید حاکم بر تابع موج باشد، تطبیق کند.

عمل بعدی حل معادله  $\theta$  است

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + (C \sin^2 \theta - m^2) \Theta = 0 \quad (22.7)$$

بهرتر است متغیر جدیدی به کار ببریم

$$\xi = \cos \theta \quad (23.7)$$

با جا گذاری آن داریم

$$\frac{d}{d\xi} \left[ (1 - \xi^2) \frac{d\Theta}{d\xi} \right] + \left[ C - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right] \Theta = 0 \quad (24.7)$$

اگر  $m = 0$  قراردادده و ثابت  $C$  را با ثابت دیگری به شکل  $l(l+1)$  جانشین کنیم، معادله (24.7) به صورت معادله دیفرانسیل لژاندر درمی آید

$$(1 - \xi^2) \frac{d^2 P_l}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dP_l}{d\xi} = -l(l+1)P_l \quad (25.7)$$

در اینجا يك عمل دیفرانسیل گیری در جمله اول انجام داده  $P_l$  را به جای  $\Theta$  قراردادده ایم. جوابهای  $P_l(\cos \theta)$  برای این معادله را چند جمله ایهای لژاندر می نامند. این جوابها دقیقاً با همان روشی که در مورد چند جمله ایهای هرمیت در مسئله نوسان کننده هماهنگ به کار رفته، به دست آمده اند. معادله (25.7) يك معادله ویژه مقید است، و مجدداً محدودیتی برای ویژه مقدار  $l(l+1)$  وجود دارد. بجز وقتی که  $l$  يك عدد درست مثبت باشد، جواب چند جمله ای يك سری بینهایت می شود که در حالت  $\cos \theta = \pm 1$ ، یعنی، برای  $\theta = 0$  و  $\pi$  واگرا می شود. برای چهار مقدار اول  $l$ ، جوابها عبارت اند از

$$\begin{aligned} \Theta_0(m=0) &= P_0(\cos \theta) = 1, & l &= 0 \\ \Theta_1(m=0) &= P_1(\cos \theta) = \cos \theta, & l &= 1 \\ \Theta_2(m=0) &= P_2(\cos \theta) = 3 \cos^2 \theta - 1, & l &= 2 \\ \Theta_3(m=0) &= P_3(\cos \theta) = 5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta, & l &= 3 \end{aligned} \quad (26.7)$$

این جوابها برای  $m = 0$  هستند. قبلاً این شرط را برای  $m$  که می باید عدد درست، مثبت یا منفی باشد به کار برده ایم. از آنجا که در معادله (24.7) فقط  $m^2$  ظاهر می شود، جوابها برای مقادیر مثبت یا منفی  $m$  یکی خواهند بود. به آسانی می توان نشان داد که جوابها برای  $m$  مخالف صفر را می توان از چند جمله ایهای لژاندر که در بالا داده شد، با استفاده از رابطه زیر به دست آورد

$$P_{l,m}(\xi) = (1 - \xi^2)^{m/2} \frac{d^m P_l(\xi)}{d\xi^m} \quad (27.7)$$

اثبات این موضوع به یکی از مسائل واگذار می شود (مسئله 3.7). توابعی که با معادله (27.7) داده شده اند، توابع لژاندر وابسته نامیده می شوند. اینها جوابهای معادله (24.7) هستند، بنا بر این می نویسیم

$$\Theta_{l,m}(\theta) = P_{l,m}(\zeta) = P_{l,m}(\cos \theta) \quad (28.7)$$

چند جمله‌ایهای لژاندر برحسب  $\cos \theta$  از مرتبه  $l$  ام هستند، و بنا براین از معادله (۲۷.۷) روشن است که توابع لژاندر وابسته برای  $|m| > l$  صفر خواهند بود.

توابع لژاندر وابسته را می‌توان مطابق دستور فوق‌الذکر محاسبه کرد و با ترکیب با تابع  $\Phi$  به صورت تابع  $Y$  [معادله (۱۸.۷)] درآورد. ترکیبهای  $Y_{l,m}(\theta, \phi)$  توابع هماهنگ‌کروی نامیده می‌شوند. اعداد  $l$  و  $m$  که این توابع را مشخص می‌کنند، معرف ویژه‌مقدارهای  $l(l+1) - m^2$  هستند که در معادلات ویژه‌مقدار (۲۵.۷) و (۲۰.۷) ظاهر می‌شوند. به طوری که در بخشهای بعد خواهیم دید، این ویژه‌مقدارها به تکانه زاویه‌ای مربوط می‌شوند.

تعدادی از توابع هماهنگ‌کروی در زیر آمده‌اند. نمودارهای قطبی مربع عددی بعضی از توابع با  $m = 0$  در شکل ۲.۷ نشان داده شده‌اند.

$$Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_{1,0} = \sqrt{3/4\pi} \cos \theta$$

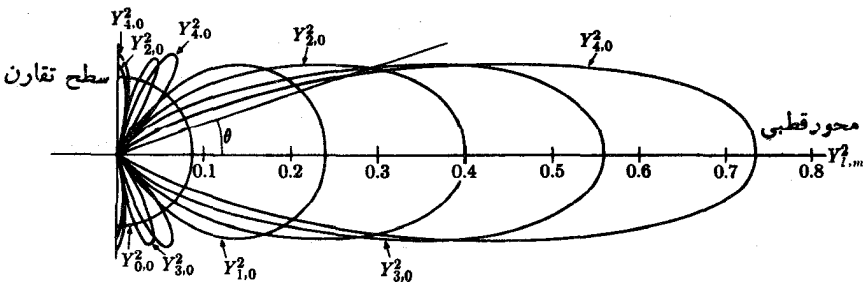
$$Y_{1,\pm 1} = \sqrt{3/8\pi} \sin \theta e^{\pm i\phi} \quad (29.7)$$

$$Y_{2,0} = \sqrt{5/16\pi} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$Y_{2,\pm 1} = \sqrt{15/8\pi} \cos \theta \sin \theta e^{\pm i\phi}$$

$$Y_{2,\pm 2} = \sqrt{15/32\pi} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}$$

یادآور می‌شود که به دلیل شرط  $|m| \leq l$ ، به ازای هر مقدار  $l$  تعداد  $2l+1$  تابع هماهنگ‌کروی وجود دارد. توابع مذکور در معادله (۲۹.۷) به شرحی که در زیر می‌آید، بهنجار شده‌اند.



شکل ۲.۷ نمودار قطبی توابع  $Y_{l,0}^2(\theta)$ .

حال به بخش شعاعی تابع موج برمی گردیم، پس از مساوی قرار دادن طرف چپ معادله (۱۶.۷) با ثابت جداسازی  $C = l(l+1)$  و تنظیم مجدد خواهیم داشت

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left( E - V - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right) R = 0 \quad (30.7)$$

وقتی که پتانسیل فقط تابع  $r$  باشد این معادله را، حداقل دراصل، می توان حل کرد. با انتقال جمله حاوی  $E$  به طرف راست، می بینیم که این نیز يك معادله ویژه مقدار است. این ویژه تابعها بستگی به پارامتر  $l$  دارند، و به هر ویژه تابع يك ویژه مقدار  $E$  وابسته است. در مورد مسئله هیدروژن، پتانسیل  $V$ ، پتانسیل کولنی است که در معادله (۱۱.۷) داده شده است. با پتانسیلی به این شکل، معادله (۳۰.۷) به صورتی که وجود دارد، به آسانترین راه حل می شود (به بخش ۴.۷ مراجعه کنید). به هر حال، برای بسیاری از مسائل دیگر، جاگذاری زیر مفید به نظر می رسد

$$R(r) = u(r)/r \quad (31.7)$$

با قرار دادن آن در معادله (۳۰.۷) خواهیم داشت

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ E - V - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right] u = 0 \quad (32.7)$$

هر دو معادله (۳۰.۷) و (۳۲.۷) معادله موج شعاعی نامیده می شوند. شکل معادله آخری دارای ظاهرا آشنایی است. صرف نظر از جمله آخر درون پرانتز، این معادله يك معادله موج يك بعدی است. در بخش بعد نشان داده خواهد شد که  $l(l+1)\hbar^2$  مربع تکانه زاویه ای است. با این اطلاعات به آسانی می توان نشان داد (مسئله ۴.۷) که جمله مورد بحث يك عبارت انرژی پتانسیل مربوط به نیروی مرکز گریز است. بنابراین معادله (۳۲.۷) واقعاً يك معادله موج يك بعدی حرکت شعاعی در دستگاه مختصاتی است که با ذره می چرخد. برای هر مقدار  $l$  احتمالاً يك دسته ویژه مقدار و ویژه تابع که آنها را با  $n$  مشخص می کنیم وجود دارد. بنابراین می توانیم جوابهای معادلات زاویه ای و شعاعی موج را مطابق معادله (۱۶.۷) ترکیب کنیم

$$\psi_{n,l,m} = R_{n,l}(r) Y_{l,m}(\theta, \phi) = \frac{u_{n,l}(r)}{r} Y_{l,m}(\theta/\phi) \quad (33.7)$$

این توابع موج باید در انتگرال بهنجارش صدق کنند

$$\int_0^\infty dr \int_0^\pi r d\theta \int_0^{2\pi} r \sin \theta d\phi \psi^* \psi = 1 \quad (34.7)$$

به طوری که از نوشتن انتگرال (۳۴.۷) برمی آید، اندازه جزء حجم در دستگاه مختصات

کروی عبارت است از  $d\tau = (dr)(r d\theta)(r \sin \theta d\phi)$  از آنجا که تابع موج  $\psi$  می تواند به صورت حاصلضرب سه تابع یک بعدی نوشته شود، انتگرال گیری اصولاً خیلی ساده است. ابتدا بر حسب زوایا انتگرال می گیریم و این قسمت انتگرال را برابر واحد قرار می دهیم

$$\int_0^{\infty} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin \theta Y_{l,m}^* Y_{l,m} = 1 \quad (35.7)$$

توابع هماهنگ کروی معادله (۲۹.۷) در این معادله صدق می کنند، و می گوئیم که آنها بر حسب زوایا بهنجار شده اند. بنا بر این بخش شعاعی انتگرال بهنجارش به صورت زیر در می آید

$$\int_0^{\infty} R_{n,l}^* R_{n,l} r^2 dr = 1 \quad (36.7)$$

یا با استفاده از معادله (۳۱.۷)، داریم

$$\int_0^{\infty} u_{n,l}^* u_{n,l} dr = 1 \quad (37.7)$$

اینها انتگرالهای بهنجارش برای توابع موج شعاعی هستند. به ضریب  $r^2$  در معادله (۳۶.۷) توجه کنید. این موضوع از عامل  $r^2$  در جزء حجمی یک دستگاه مختصات کروی ناشی می شود.

### ۳.۷ تکانه زاویه ای مداری

در بخش قبل نشان داده شد که اگر انرژی پتانسیل فقط تابع  $r$  باشد، معادله موج قابل جدا شدن است و بخش زاویه ای می تواند یک بار و برای همیشه حل شود. تعدادی از جوابها در معادلات (۲۹.۷) داده شده اند. در مکانیک کلاسیک می دانیم که وقتی پتانسیل فقط تابع  $r$  باشد، بقای تکانه زاویه ای ذره برقرار است، زیرا که گشتاوری بر ذره وارد نمی شود (نیروی مرکزی). بور در نظریه اتم هیدروژن خود فرض کرد که قانون کلاسیک بقای تکانه زاویه ای می تواند حفظ شود، و فرض کرد که تکانه زاویه ای الکترون در اتم هیدروژن مضرب درستی از  $\hbar$  است. در نظریه مکانیک کوانتومی جدید، وقتی که درمی یابیم تکانه زاویه ای مداری ذره در پتانسیل مرکزی دارای یک مقدار مشخص یا یک ویژه مقدار است، متعجب نمی شویم. ساختمان عملگرهای تکانه زاویه ای در دستگاه مختصات دکارتی در بخش ۵.۶ تشریح شد. بد عنوان مثال، عملگر مؤلفه  $z$  تکانه زاویه ای عبارت است از

$$L_{zop} = \frac{\hbar}{i} \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (38.7)$$

برای برگرداندن این عبارت به دستگاه مختصات کروی، از جا گذاریهای داده شده در معادله (۱۲.۷) استفاده می کنیم و درمی یابیم که عملگر مؤلفه  $z$  می تواند به صورت زیر نوشته شود

$$L_{zop} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (39.7)$$

عبارت مؤلفه‌های  $x$  و  $y$  در دستگاه مختصات کروی به این سادگی نیست، ولی از ترکیب سه مؤلفه به یک عملگر مربع تکانه زاویه‌ای (مسئله ۶.۷) داریم

$$L_{op}^2 = L_{xop}^2 + L_{yop}^2 + L_{zop}^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (40.7)$$

از آنجا که این عبارت تابع  $r$  نیست، مقدار تکانه زاویه‌ای مداری به روشنی باید از بخش زاویه‌ای تابع موج گرفته شود. برای تحقیق اینکه مربع تکانه زاویه‌ای مقدار مشخصی دارد یا نه، می‌نویسیم

$$L_{op}^2 \psi_{n,l,m} = -\hbar^2 R_{n,l} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y_{l,m}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{l,m}}{\partial \phi^2} \right] = ?$$

جواب از معادله (۱۷.۷) به دست می‌آید. جوابهای این معادله توابع هماهنگ کروی هستند، و مقدار  $C$  برابر است با  $C = l(l+1)$ . با جاگذاری این مقدار داریم

$$L_{op}^2 \psi_{n,l,m} = \hbar^2 l(l+1) R_{n,l} Y_{l,m} \quad (41.7)$$

که نشان می‌دهد تابع موج  $\psi_{n,l,m}$  یک ویژه تابع عملگر مربع تکانه زاویه‌ای بوده و ویژه مقدار آن برابر  $\hbar^2 l(l+1)$  است. بنا بر این مکانیک موجی جدید مقدار عددی بردار تکانه زاویه‌ای را به صورت زیر به دست می‌دهد

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)} \quad (42.7)$$

که از معادله بور  $L = n\hbar$  متمایز است.

اعداد درست  $m$  و  $l$  مشخص کننده توابع هماهنگ کسروی، اعداد کوانتومی نامیده می‌شوند. نشان داده‌ایم که متناظر با عدد کوانتومی  $l$  یک کمیت فیزیکی وجود دارد. آیا کمیت فیزیکی دیگری متناظر با عدد کوانتومی  $m$  هم وجود دارد؟ بله واقعاً وجود دارد و به مؤلفه  $z$  تکانه زاویه‌ای مربوط می‌شود. برای نشان دادن این موضوع، عملگر (۳۹.۷) را در مورد تابع موج  $\psi_{n,l,m}$  به کار می‌بریم

$$L_{zop} \psi_{n,l,m} = R_{n,l} \Theta_{l,m} \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Phi_m}{\partial \phi} \right) = \hbar m R_{n,l} \Theta_{l,m} \Phi_m \quad (43.7)$$

در اینجا از معادله (۲۱.۷) استفاده کرده‌ایم. نتیجه این است که مؤلفه  $z$  تکانه زاویه‌ای دارای یک مقدار مشخص است

$$L_z = m\hbar \quad (۴۴.۷)$$

آزمون مشابهی برای مؤلفه‌های  $x$  و  $y$  تکانه زاویه‌ای نشان می‌دهد که نوع توابع موجی که مورد بحث قرار داده‌ایم، ویژه تابعهای این عملگرها نیستند مقادیر چشمداشتی را می‌توان محاسبه کرد که نتیجه در هر دو حالت صفر است. این وضعیت در شکل ۳.۷ برای مثال  $l=2$  و در گستره مقادیر ممکن  $m$  از  $-2$  تا  $+2$  نشان داده شده است. مقدار عددی تکانه زاویه‌ای کل مشخص و برابر  $\sqrt{6}\hbar$  است. با دانستن عدد کوانتومی  $m$ ، مؤلفه راستای  $z$  تکانه زاویه‌ای مشخص می‌شود، اما مؤلفه‌های  $x$  و  $y$  نامعین‌اند. این بدان معنی است که وقتی ذره در حالتی معلوم که از نوع تابع موج معین می‌شود قرار گیرد، نقطه انتهایی بردار تکانه زاویه‌ای می‌تواند در هر جای دایره خط چین در شکل ۳.۷ واقع شود.

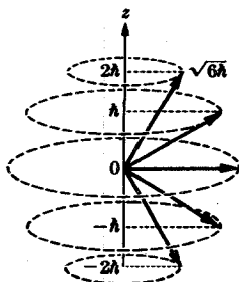
این سؤال می‌تواند طرح شود: چه ویژگی در راستای  $z$  وجود دارد؟ جواب این است که: هیچ چیز اساسی وجود ندارد. اما، راستای  $z$  محوری است که مختصات زاویه‌ای  $\theta$  و  $\phi$  نسبت به آن بیان می‌شوند، بدین ترتیب وقتی تابع موج در مختصات کروی بیان شود، طبیعی است که راستای  $z$  باید متفاوت از راستاهای  $x$  و  $y$  باشد. عملاً برای حل يك مسئله معین، راستای  $z$  به عنوان راستایی که در آن مؤلفه تکانه زاویه‌ای می‌تواند اندازه‌گیری شود، انتخاب می‌شود. در اغلب موارد این راستا، راستای يك میدان مغناطیسی خواهد بود. مزیت این کار در این است که يك حالت کوانتومی قابل اندازه‌گیری را می‌توان با يك تابع موج منفرد بیان داشت. اگر هر راستای دیگری جز راستای  $z$  انتخاب شود، لازم است که توابع موج را از ترکیب خطی توابع بحث شده به دست آورد.

در بخش ۱۲.۶ پاریته را با توجه به تابع موج يك بعدی تعریف کردیم. برای این

توابع موج سه بعدی می‌نویسیم

$$\psi(-\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) \quad \text{پاریته مثبت:}$$

$$\psi(-\mathbf{r}) = -\psi(\mathbf{r}) \quad \text{پاریته منفی:}$$



شکل ۳.۷ سمت‌گیریهایی

ممکن برای تکانه زاویه‌ای

مداری  $l$  با عدد کوانتومی

$$l=2$$

وقتی  $\theta$  یا بر حسب  $\phi$  نوشته شود، به ترتیب با جانشین کردن  $\theta$  و  $\phi$  با  $(\pi - \theta)$  و  $(\pi + \phi)$  می توان دریافت که تابع دارای پاریمتۀ مثبت است یا منفی. مختصۀ  $r$  که در دستگاه مختصات کروی فقط فاصله تامیداً را معین می کند، تغییر نمی کند. به عبارت دیگر در مختصات کروی، پاریمتۀ تابع موج فقط به وسیلۀ بخش زاویه ای تابع معین می شود. وقتی تابع هماهنگ کروی باشد، معلوم می شود که  $l$  به تنهایی پاریمتۀ را به صورت زیر معین می کند (به مسئله ۱۳.۷ رجوع کنید)

$$(-1)^l = \text{پاریمتۀ} \quad (۴۵.۷)$$

### ۴.۷ مسئله هیدروژن

از آنجا که پتانسیل کولنی یک پتانسیل مرکزی (دارای تقارن کروی) است،  $V = V(r)$ ، می توان مسئله هیدروژن را با استفاده از نتیجۀ بخش قبلی حل کرد. فوراً می توان توابع موج حالتی از اتم هیدروژن را به صورت معادله (۱۵.۷) نوشت. بخش زاویه ای تابع موج یک تابع هماهنگ کروی از نوع مندرج در معادله (۲۹.۷) است، که در آن شاخصهای  $l$  و  $m$  تکانه زاویه ای مداری و مؤلفۀ  $z$  آن را مشخص می کنند. آنچه باقی می ماند، حل معادله شعاعی موج (۳۰.۷) با  $V = -Ze^2 / 4\pi\epsilon_0 r$  است

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left( E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right) R = 0 \quad (۴۶.۷)$$

روش حل این معادله دقیقاً مشابه حل معادله نوسان کننده هماهنگ است (بخش ۱۱.۶)، و بنابراین فقط نکات عمده آن را در اینجا طرح می کنیم. از حل این معادله یک جواب مجانبی به صورت  $\exp(-r/a_0)$  و یک جواب کامل به صورت

$$R(r) = G(r) \exp(-r/a_0) \quad (۴۷.۷)$$

به دست می آوریم که در آن  $a_0$  شعاع اول بور (بخش ۷.۴) است

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{Z\mu e^2} \quad (۴۸.۷)$$

جواب (۴۷.۷) واگرا می شود، مگر اینکه سری توانی  $G(r)$  به صورت یک چند جمله ای درآید. این وضع ایجاب می کند که انرژی  $E$  چنین باشد

$$E_n = - \frac{\mu Z^2 e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2} \quad (۴۹.۷)$$

که در آن  $n$  یک عدد درست بزرگتر از  $l$  است

$$n > l \quad (۵۰.۷)$$



معادله (۴۹.۷) همانند رابطه بور یعنی معادله (۳۴.۴) است، جز اینکه به جای جرم الکترون جرم کاهش یافته مجموعه،  $\mu$ ، را قرار داده‌ایم. در محاسبه دقیقتر نظریه بور جرم کاهش یافته نیز ظاهر می‌شود. با قراردادن مقادیر عددی، معادله (۴۹.۷) به صورت زیر درمی‌آید

$$E_n = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV} \quad (\text{الف } 49.7)$$

توابع موج مربوط به ویژه مقادیر انرژی (۴۹.۷) برای  $n=1, 2, 3$  در جدول ۱.۷ داده شده‌اند. همین توابع در شکل ۴.۷ رسم شده‌اند. این توابع موج باید با بخش زاویه‌ای که یکی از معادلات (۴۹.۷) آن را به دست می‌دهد، ترکیب شود. بنا بر این تابع موج کل با اعداد کوانتومی  $l$  و  $m$  مشخص می‌شود، با این ارتباط فیزیکی که  $n$  در فرمول انرژی وارد می‌شود،  $l$  تکانه زاویه‌ای و  $m$  مؤلفه  $z$  تکانه زاویه‌ای را تعیین می‌کند. توجه کنید که در شکل ۴.۷ تمام توابع موج در مبدأ دارای قله تیز هستند. این بدان معنی است که مشتق مرتبه دوم تابع موج در اینجا بینهایت است. از آنجا که پتانسیل نیز در  $r=0$  بینهایت می‌شود، معادله شرودینگر همچنان برقرار خواهد بود. شکل ۵.۷ نمودار تراز انرژی اتم هیدروژن است. ترازاها طوری رسم شده‌اند که

جدول ۱.۷ چند تابع موج شعاعی برای اتمهای هیدروژنی.

$$R_{10}(r) = \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \cdot 2 \exp\left(-\frac{Zr}{a_0}\right)$$

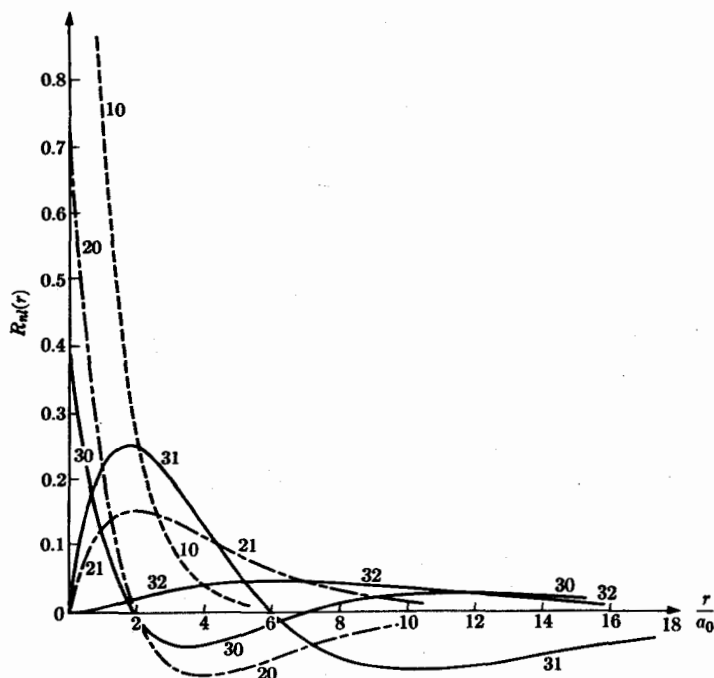
$$R_{20}(r) = \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2} \cdot 2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{Zr}{a_0}\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{Zr}{a_0}\right)$$

$$R_{21}(r) = \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{Zr}{a_0} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{Zr}{a_0}\right)$$

$$R_{30}(r) = \left(\frac{Z}{3a_0}\right)^{3/2} \cdot 2 \left[1 - \frac{2}{3} \frac{Zr}{a_0} + \frac{2}{27} \left(\frac{Zr}{a_0}\right)^2\right] \exp\left(-\frac{1}{3} \frac{Zr}{a_0}\right)$$

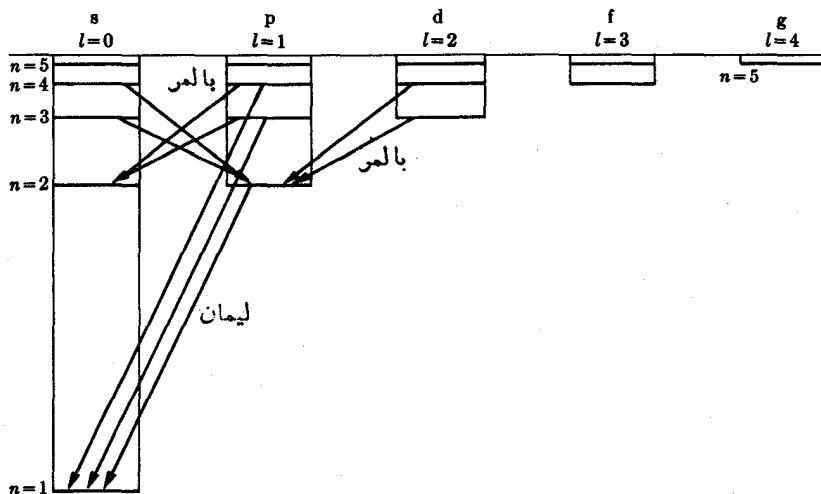
$$R_{31}(r) = \left(\frac{Z}{3a_0}\right)^{3/2} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3} \frac{Zr}{a_0} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{Zr}{a_0}\right) \exp\left(-\frac{1}{3} \frac{Zr}{a_0}\right)$$

$$R_{32}(r) = \left(\frac{Z}{3a_0}\right)^{3/2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{27\sqrt{5}} \left(\frac{Zr}{a_0}\right)^2 \exp\left(-\frac{1}{3} \frac{Zr}{a_0}\right)$$



شکل ۴۰۷ توابع موج شعاعی  $R_{nl}(r)$  برای اتمهای هیدروژنی و برای  $n = 1, 2, 3$ . هر منحنی با دو عدد درست مشخص شده است که معرف مقادیر  $n$  و  $l$  مربوطه اند. توجه کنید که نیروی مرکز گریز تابع موج را از مرکز اتم «به خارج میل می‌دهد». همچنین توجه کنید که هر تابع  $n-l-1$  گره دارد.

تمام ترازهای یک ستون دارای یک مقدار  $l$  هستند، و حرف بالای آن ستون علامت طیف نمودی است که در فصل ۴ از آن سخن گفته شد. بعد از  $l = 4$  (حالت‌های  $g$ )، ترتیب حروف همان ترتیب الفبایی است. برطبق معادله (۵۰.۷) برای  $n = 1$  فقط یک مقدار  $l$  ( $l = 0$ )، و برای  $n = 2$  دو مقدار  $l$  مجاز است و الخ. چون برای هر مقدار معین  $n$  چند مقدار مجاز  $l$  وجود دارد، حالت‌های  $s^-$ ،  $p^-$ ، و غیره انرژی-واگن هستند که با توجه به عدم دخالت در معادله (۴۹.۷) به روشنی قابل درک است. این واگنی انرژی یا مستقل بودن انرژی از  $l$  کاملاً تصادفی است. این وضع فقط برای نوعی از پتانسیل که با  $r$  به صورت  $r^{-1}$  تغییر می‌کند، اتفاق می‌افتد. واگنی دوم به علت مستقل بودن انرژی نسبت به سمتگیری بردار تکانه زاویه‌ای، که با عدد کوانتومی  $m$  مشخص می‌شود، رخ می‌دهد. واگنی اخیر برای ذره در هر پتانسیلی با تقارن کروی (نیروی مرکزی) اتفاق می‌افتد. در شکل ۵۰۷ هر خط معرف  $1 + 2l$  حالت با توابع موج مختلف است ( $m$ های مختلف).



شکل ۵.۷ نمودار تراز انرژی اتم هیدروژن که در آن ترتیب ترازها با مقدار  $l$  مطابقت دارد.

گذارهای از یک حالت به حالت دیگر همراه با گسیل یا جذب فوتونها در فصل ۸ بحث خواهند شد. در خواهیم یافت که برای این گذارها محدودیتهای مهمی به نام قواعد انتخاب وجود دارند. برای محتملترین نوع گذار، یعنی گذار دوقطبی الکتریکی که می تواند با تابش از یک آنتن مقایسه شود، مهمترین قاعده انتخاب  $\Delta l = \pm 1$  است. مثالهایی از جهشهای کوانتومی تابع این قاعده، که خطوط لیمان و بالمر از آنها نتیجه می شوند، در شکل ۵.۷ نشان داده شده اند.

## ۵.۷ گشتاور مغناطیسی اتمها

قویترین برهم کنش در اتم هیدروژن جاذبه کولنی بین هسته و الکترون است. در اتمهای چند الکترونی نیز، با وجود پیچیدگی بیشتر نسبت به مورد هیدروژن، برهم کنش کولنی قویترین نیرو است. اثرات مغناطیسی هم در اتمها وجود دارند، و این نیروهای مغناطیسی داخلی علاوه بر نیروهایی است که در اثر میدانهای خارجی به وجود می آیند. اثرات فیزیکی حاصل، مهم و قابل اندازه گیری هستند، ولی به دلیل کوچک بودن انرژیهای مربوطه نیازی به حل مجدد معادله شرودینگر با دخالت دادن این برهم کنشها نیست. بلکه این اثرات را، به طوری که در فصل هشتم بحث خواهد شد، اختلاهایی کوچک در نظر می گیریم. این بدان معنی است که می توانیم انرژی حاصل از محاسبات ساده برای اثرات مغناطیسی را با انرژی به دست آمده از حل معادله شرودینگر بدون دخالت برهم کنشهای مغناطیسی با هم جمع کنیم.

گشتاور مغناطیسی یک جریان حلقوی مسطح به صورت زیر تعریف می شود

$$\mu = ia \quad (51.7)$$

که در آن  $a$  بردار مساحت است که عدداً برابر مساحت حلقه و در امتدادی است که بر صفحه جریان عمود می شود. برای ذره ای با بار  $q$  که در مدار دایره ای با سرعت  $v$  حرکت می کند، جریان برابر است با حاصل ضرب بار  $q$  در بسامد دوران  $r/2\pi r$ ، بنابراین گشتاور مغناطیسی عدداً چنین است

$$\mu = \frac{qv}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{qvr}{2}$$

به صورت برداری داریم

$$\mu = \frac{q}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{q}{2M} \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \frac{q}{2M} \mathbf{L} \quad (52.7)$$

که در آن  $M$  جرم ذره است. برای ذره ای که با تکانه زاویه ای ثابت در مدار غیر دایره ای حرکت می کند، نتیجه همین است، لکن وقتی صرف اثبات آن نمی کنیم.

معادله (52.7) برای چند ذره یکسان با بار  $q$ ، جرم  $M$  و تکانه زاویه ای (مشخص)  $L$ ، حتی اگر هر ذره به تنهایی تکانه زاویه ای مشخصی نداشته باشد، هم صادق است.<sup>۱</sup> کسر  $\mu/L = q/2M$  نسبت ژیرومغناطیسی نامیده می شود. برای الکترون این نسبت برابر  $-e/2m_e$  است.

گشتاورهای مغناطیسی آنها را می توان از چند طریق تشخیص داد. به طور کلی چیزی که اندازه گیری می شود، مؤلفه گشتاور مغناطیسی در راستای یک میدان مغناطیسی  $B$  است. برطبق معادله (52.7) نسبت بین هر مؤلفه  $\mu$  به همان مؤلفه مربوط به  $L$  نیز برابر نسبت ژیرومغناطیسی  $-e/2m_e$  است. خصوصاً، برای مؤلفه  $z$  داریم  $L_z = m\hbar$  (بخش 3.7) و بنا بر این

$$\mu_z = -\frac{e\hbar}{2m_e} m = -\mu_B m \quad (53.7)$$

به منظور اختصار در اینجا مگنتون بود را برای الکترون به صورت زیر ارائه می کنیم

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \quad (54.7)$$

آشکار است که اندازه گیری مؤلفه  $z$  گشتاور مغناطیسی، همان اندازه گیری  $m$  یا عدد

۱. این بدان معنی است که این ذرات گشتاور مغناطیسی وابسته به اسپین ذاتی ندارند (به بخش بعد مراجعه کنید).

کوانتومی مغناطیسی است.

رابطه (۵۲.۷) بین گشتاور مغناطیسی و تکانه زاویه‌ای برای حرکات پیچیده تر ماده باردار حول مرکز جرم نیز صادق است، به شرط اینکه چگالی بار در هر جا متناسب با چگالی جرم باشد. این شرط لزوماً همیشه برآورده نمی‌شود، و برای به حساب آوردن آن یک ضریب تصحیح به نام ضریب  $g$  در معادله (۵۳.۷) وارد می‌کنیم که آن را به صورت زیر درمی‌آورد

$$\mu_z = -g\mu_B m \quad (55.7)$$

ضریب  $g$  برای حرکت مداری الکترونها به وضوح  $g=1$  است. در الکترونیسته و مغناطیس روابط زیر را در مورد گشتاور مغناطیسی داریم

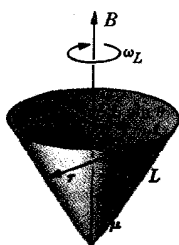
$$E = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \quad \text{انرژی در میدان مغناطیسی} \quad (56.7)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \quad \text{گشتاور نیرو در میدان مغناطیسی} \quad (57.7)$$

$$F = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z} \quad \text{نیرو در میدان ناهمگن} \quad (58.7)$$

معادله (۵۶.۷) نشان می‌دهد که انرژی یک اتم در میدان مغناطیسی خارجی بستگی به جهت  $\boldsymbol{\mu}$  (یعنی  $\mathbf{L}$ ) نسبت به میدان دارد. به طور کلی انرژی مورد بحث در مقایسه با انرژی متوسط متناظر به فاصله بین حالت‌های اتمی کوچک است و بنا بر این، این برهم کنش می‌تواند یک اختلال کوچک در نظر گرفته شود. این اثر قابل مشاهده است و در فصل ۹ بیشتر بحث خواهد شد (اثر زیمنان).

در اینجا برهم کنشهای اتمی مشمول معادلات (۵۷.۷) و (۵۸.۷) را با بحث درباره گشتاور نیرو آغاز می‌کنیم. شکل ۶.۷ نمودار برداری بردار تکانه زاویه‌ای  $\mathbf{L}$  و گشتاور مغناطیسی  $\boldsymbol{\mu}$  که با بردار  $\mathbf{B}$  (میدان مغناطیسی خارجی به کار رفته) زاویه  $\theta$  می‌سازد، را نشان می‌دهد. گشتاور نیروی  $\boldsymbol{\tau}$  که با معادله (۵۷.۷) داده شده است، تکانه زاویه‌ای را



شکل ۶.۷ نمایش حرکت

تقدیمی لارمور.

بر طبق قانون نیوتون تغییر می‌دهد

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau} = -\frac{eg}{2m_e} \mathbf{L} \times \mathbf{B} \quad (59.7)$$

از آنجا که  $d\mathbf{L}/dt$  عمود بر  $\mathbf{L}$  است، مقدار تکانه زاویه‌ای تغییر نکرده، و فقط جهت آن تغییر می‌کند. حرکت منتهجه، حرکت تقدیمی  $\mathbf{L}$  به دور  $\mathbf{B}$  است. مقدار عددی بسامد زاویه‌ای حرکت تقدیمی با رابطه زیر داده می‌شود

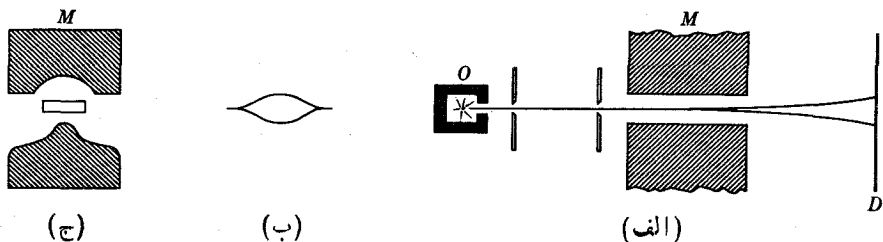
$$\Omega_L = \frac{dL/dt}{L \sin \theta} = \frac{egBL \sin \theta}{2m_e L \sin \theta} = \frac{egB}{2m_e} \quad (60.7)$$

این فرایند، حرکت تقدیمی لادور نامیده می‌شود و  $\Omega_L$  بسامد لارمور است. گذارهای بین حالت‌های  $m$  را می‌توان با به کار بردن یک میدان بسامد رادیویی، وقتی که این میدان با حرکت تقدیمی لارمور در تشدید باشد، ایجاد کرد.

### ۶.۷ آزمون تجربی کوانتش فضایی

یک نتیجه بسیار شگفت‌انگیز تحلیل بخش ۳.۷ این است که نه تنها خود تکانه زاویه‌ای کوانتیده است، بلکه مؤلفه آن نیز کوانتیده است. این نتیجه چندین سال قبل از ظهور مکانیک موجی به‌طور تجربی به وسیله اشترن و گریلاخ به دست آمد. اشترن و گریلاخ کوانتش مؤلفه گشتاور مغناطیسی اتم‌ها را نشان دادند. به طوری که در بخش قبل دیده‌ایم، این امر با کوانتش تکانه زاویه‌ای معادل است.

شکل ۷.۷ رسم طرحواره‌ای آزمایش اشترن-گریلاخ است. باریکه بسیار نازکی از اتم‌های خنثی نقره که از طریق تبخیر نقره در یک کوره و عبور مقداری از بخار آن از شکاف‌های باریک به وجود می‌آید، وارد یک اتاقک خلأ می‌شود. باریکه از بین قطعات



شکل ۷.۷ آزمایش اشترن-گریلاخ. (الف) نمایش افقی. مغناطیس  $M$ . (ب) شکل خط روی آشکارساز  $D$ . (ج) نمایش نیمرخ قطعات مغناطیس و باریکه.

قطبهای يك مغناطیس عبور می کند، و شکل قطعات مغناطیس به گونه ای است که میدان ناهمگن به وجود می آورد. اتمها پس از خروج از میدان مغناطیسی به يك آشکارساز (صفحه عکاسی) برخورد می کنند.

اگر اتمهایی که از این میدان ناهمگن عبور می کنند دارای گشتاور مغناطیسی باشند، طبق نظریه ای که در بخش قبل گفته شد حرکت تقدیمی خواهند داشت. آنها همچنین تحت تأثیر نیروی برابندی مناسب با مؤلفه  $z$  گشتاور مغناطیسی در راستای قائم قرار می گیرند. این نیرو به قدر کافی قوی است که باعث انحراف قابل اندازه گیری در اتمهای نقره ای که با سرعتهای مشخص در گاز داغ حرکت می کنند، بشود، مشروط بر اینکه گشتاور مغناطیسی در حدود يك مگنتون بور باشد (مسئله ۱۵۰۷).

طبق مفاهیم کلاسیک، اتمهای نقره باید با راستاهای کاتوره ای بردارهای  $\mu$  از کوره خارج شوند، یعنی باید توزیع کاتوره ای مؤلفه های  $z$  بین دو مقدار حدی  $\pm \mu$  قرار گیرند. حرکت تقدیمی در میدان مغناطیسی مؤلفه  $z$  را تغییر نمی دهد، زیرا حرکت حول محور  $z$  انجام می پذیرد. اثر نهایی باریکه بر آشکارساز می باید به صورت لکه ای پیوسته باشد. این لکه نباید مرزهای قائم تیز و مشخصی داشته باشد، زیرا که همه اتمها دارای يك سرعت نیستند. به هر حال، با دانستن دما،  $dB/dz$ ، و وضع هندسی دستگاه می توانیم توزیع اتمها را در راستای  $z$  روی آشکارساز محاسبه کنیم.

اشترن و گرلاخ دریافتند که توزیع اندازه گیری شده بسا مفاهیم کلاسیک مطابقت ندارد. آنها دو ماکزیموم در این توزیع به دست آوردند، که تقریباً به صورت دو خط تیز قابل توصیف بودند. این امر نشان می دهد که اتمهای نقره در حالت طبیعی (پایه) خود دارای گشتاور مغناطیسی با دو مقدار ممکن برای مؤلفه  $z$  هستند.

یکی از آزمایشهای اشترن-گرلاخ در سال ۱۹۲۷ توسط فیس و تیلور<sup>۱</sup> در مورد اتمهای هیدروژن انجام شد. بازم نتیجه این بود که باریکه دو قسمت می شود و این امر نشان دهنده آن است که برای  $\mu$  در راستای  $z$  دو مقدار ممکن وجود دارد.

هر دو نتیجه حاصل از آزمایشهای نقره و هیدروژن معما هستند. طبق نظریه اتم هیدروژن، تکانه زاویه ای حالت پایه باید برابر صفر و  $m = 0$  تنها مقدار ممکن باشد. برای اتمهای چند الکترونی طبق نظریه جمع بردارهای تکانه زاویه ای، که به تفصیل آنرا بحث نخواهیم کرد، مقادیر درست  $l$  برای هر الکترون باید با هم جمع شوند تا عدد درست کل  $L$  که دارای  $(2L + 1)$  سمتگیری ممکن (مقادیر  $m$ ) است، به وجود آید. ولی، نتیجه تجربی اشترن و گرلاخ دو مقدار  $m$  را در برداشت. بدین ترتیب، در تصویر کلی چیزی از قلم افتاده است.

## ۷.۷ اسپین ذاتی الکترون

نمودار تراز انرژی اتم هیدروژن که در شکل ۴.۷ نشان داده شده است، توسط ویلسون و

1. T. E. Phipps and J. B. Taylor, *Phys. Rev.*, 29 (1927), p. 399.

زومر فلد بر اساس نظریه کوانتومی قدیم و توسعه کار بور بنا شده بود. معلوم شده بود که جز برای حالت پایه، ترازها از لحاظ انرژی واگن هستند و کمیت فیزیکی متغیر بین ترازهای واگن، همان طور که شکل ۴.۷ دقیقاً نشان می‌دهد، تکانه زاویه‌ای بود با این استثناء که تکانه زاویه‌ای صفر در نظریه قدیمی مجاز نبود. همچنین قبل از ظهور مکانیک موجی معلوم شده بود که این نمودار بیش از اندازه ساده است. ترازهای اتم هیدروژن و همچنین اتمهای دیگر، ساختار ریزی بی‌روز می‌دهند که در شکل ۴.۷ نشان داده نشده‌اند. بویژه هر یک از ترازهای اتم هیدروژن در تمام ستونها، به جز اولی، دو تابه خیلی نزدیک به هم هستند، این امر به کمک طیف‌نگارهای نوری با قدرت تفکیک خیلی زیاد به صورت جداشدگی خطوط گسیلی قابل آشکارسازی بود.

اولنک و گوداشمیت<sup>۱</sup> در سال ۱۹۲۵ به منظور تشریح ساختار ریز در گذارهای اتمی، یعنی نتیجه بی‌هنجار تجربه اشترن-گرلاخ و اثر بی‌هنجار زیمان که در بخش ۸.۹ بیشتر از آن بحث می‌شود، پیشنهاد کردند که الکترون دارای اسپین ذاتی یعنی تکانه زاویه‌ای به بزرگی  $\frac{h}{2}$  نسبت به مرکز جرم است. دیراک<sup>۲</sup> در سال ۱۹۲۸ یک نظریه مکانیک موجی عرضه کرد که، به عکس نظریه شرودینگر، به طور نسبیته هموردا است. یعنی، این نظریه با اصل اینشتین که بنا بر آن هر قانون فیزیکی بدون توجه به اینکه در چه دستگاه مختصات لختی نوشته شود همیشه یکسان می‌ماند، تطبیق دارد. این اصل در مکانیک موجی شرودینگر صادق نیست زیرا که مکانیک موجی شرودینگر بر اساس رابطه ناسبیتی انرژی جنبشی بنا نهاده شده است.

مکانیک موجی نسبیته دیراک الکترونی را ارائه می‌دهد که دارای تکانه زاویه‌ای ذاتی به صورت زیر است

$$L_z = \sqrt{s(s+1)}\hbar, \text{ با } s = \frac{1}{2} \quad (۶۱۰۷)$$

و مؤلفه  $z$  آن عبارت است از

$$L_{sz} = m_s \hbar, \text{ با } m_s = \pm \frac{1}{2} \quad (۶۲۰۷)$$

بنابر پیش‌بینی دیراک، گشتاور مغناطیسی مربوط به این اسپین ذاتی با ضریب  $g$  و مقدار  $g = 2$  داده می‌شود که دو برابر ضریب مربوط به حرکت مداری است.<sup>۳</sup> حال به آسانی می‌توان نتیجه آزمایش اشترن-گرلاخ را در هر دو مورد نقره و

1. G. E. Uhlenbeck and S. Goudsmit. *Naturwiss*, 13 (1925) p. 593; *Nature*, 117 (1926), p. 264.

2. P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.*, 117. 610; 118, 351 (1928).

۳. نظریه‌های جدید که اختلالهای کوچک ناشی از برهم‌کنش الکترون و محیط اطراف آن را به حساب می‌آورند، ضریب  $g$  را برای الکترون  $g_s = 2 \times 1.001159644$  پیش‌بینی می‌کنند، که آزمایشهای دقیق نیز این مقدار را تأیید می‌کنند (به بخش ۱۰.۷ رجوع کنید).



هیدروژن درك كرد. گشتاور مغناطیسی هیدروژن درحالت پایه از اسپین ذاتی الکترون منفرد (بدون در نظر گرفتن سهم ناچیز پروتون) به وجود می آید. تعداد حالت‌های ممکن  $m_s$  همان طور که مشاهده می شود، دوتا است. در مورد نقره، ۴۶ الکترون آن به طور دو به دو تزیوج می شوند و گشتاور مغناطیسی آنها یکدیگر را خنثی می کنند و بدین ترتیب، تکانه زاویه‌ای کل از الکترون چهل وهفتم درحالت s حاصل می شود.

ما درباره مکانیک موجی نسیستی دیراک در این کتاب بحث نخواهیم کرد. پس لازم است به مکانیک موجی شرودینگر، توصیفی از اسپین الکترون را اضافه کنیم. ابتدا اقدام به تعریف يك جا به جاگر می کنیم.<sup>۱۰</sup>

در بخش ۹.۶ اشاره کردیم که وقتی دو عملگر جا به جا می شوند، ویژه تابه‌های یکی از عملگرها در عین حال ویژه تابه‌های دیگری است. بنابراین هر دو کمیت فیزیکی مربوطه تابه‌های حرکت هستند. در اینجا به عملگرهایی نظیر می افکنیم که جا به جایی پذیر نیستند. دو عملگر  $Q_1$  و  $Q_2$  را در نظر بگیرید. عملگر جدیدی به نام جا به جاگر به صورت زیر تعریف می کنیم

$$[Q_1, Q_2] \equiv Q_1 Q_2 - Q_2 Q_1 \quad (۶۳.۷)$$

پرانتر مربعی به عنوان نماد جا به جاگر به کار می رود. از بحث بخش ۹.۶ واضح است که وقتی  $Q_1$  و  $Q_2$  ویژه تابه‌های همزمان داشته باشند، در این صورت داریم

$$[Q_1, Q_2] = 0 \quad (۶۴.۷)$$

به عنوان مثالی از عملگرهای جا به جاگر،  $Q_1$  را عملگر مربع تکانه زاویه‌ای [معادله (۴۰.۷)] و  $Q_2$  را عملگر مؤلفه z تکانه زاویه‌ای [معادله (۳۹.۷)] در نظر می گیریم. به آسانی می توان نشان داد که معادله (۶۴.۷) برای این حالت نیز صادق است (مسئله ۱۷.۷). اینک نگاهی به عملگرهای مؤلفه‌های  $x$  و  $y$  تکانه زاویه‌ای می افکنیم

$$L_x = \frac{\hbar}{i} \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$L_y = \frac{\hbar}{i} \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (۶۵.۷)$$

با تشکیل پارانتر جا به جاگر داریم

$$[L_x, L_y] \equiv (L_x L_y - L_y L_x) = \hbar^2 \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = \hbar i L_z \quad (۶۶.۷)$$

و به طور مشابه خواهیم داشت

۱. این بحث را می توان از آخرین بند این بخش، بدون از دست دادن پیوستگی مطالب، ادامه داد.

$$[L_y, L_x] = \hbar i L_z \quad (۶۷.۷)$$

$$[L_z, L_x] = \hbar i L_y \quad (۶۸.۷)$$

این نتایج نشان می‌دهند که هیچ دو مؤلفه‌ای از تکانه زاویه‌ای جابه‌جایی‌پذیر نیستند. بنابراین توابع هماهنگ‌ک‌کروی که ویژه‌تابعهای  $L_z$  هستند، ویژه‌تابعهای  $L_x$  یا  $L_y$  نیستند مگر برای حالت  $s$  که هرسه مؤلفه صفرند.

قواعد جابه‌جایی (۶۶.۷) تا (۶۸.۷) اساس عملیات جبری تکانه زاویه‌ای است که بعضی از آنها در پیوست ۵ آمده‌اند. برای ما ضرورت خواهد داشت که توصیف اسپین الکترون با این قواعد سازگار باشد.

ساده‌ترین شکل نمایش ریاضی منطبق با ضرورت‌های جابه‌جایی (۶۶.۷) تا (۶۸.۷)، یک‌دسته ماتریس به‌نام ماتریسهای اسپین پاؤلی هستند که در  $\hbar/2$  ضرب می‌شوند.<sup>۱</sup> ماتریس اسپین پاؤلی عبارت‌اند از

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (۶۹.۷)$$

و عملگرهای اسپین مربوطه عبارت‌اند از

$$S_x = \frac{1}{2} \hbar \sigma_x, \quad S_y = \frac{1}{2} \hbar \sigma_y, \quad S_z = \frac{1}{2} \hbar \sigma_z \quad (۷۰.۷)$$

یکی از معادلات جابه‌جایی (۶۶.۷) را مورد آزمون قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{4} (\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_x) &= \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \\ &= \hbar i \frac{\hbar}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \hbar i \frac{\hbar}{2} \sigma_z \end{aligned}$$

آزمون دو رابطه دیگر به‌یک‌ی از مسائل واگذار شده است (مسئله ۱۹.۷). عملگر مربع تکانه زاویه‌ای اسپین برابر است با

۱. برای خوانندگانی که با ضرب ساده ماتریس آشنایی ندارند، مقدمه خلاصه‌ای در پیوست ۴ داده شده است.

$$S^2 = \frac{\hbar^2}{4} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) = \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (۷۱.۷)$$

تابع موج اسپین یک ماتریس  $2 \times 1$  ستونی است

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (۷۲.۷)$$

مربع عامل بالایی  $a^2$ ، احتمال یافتن الکترون را با «اسپین بالا»، یعنی با  $m_s = +1/2$  به دست می دهد. به طور مشابه، مربع عامل پایینی احتمال یافتن الکترون را با «اسپین پایین»، یعنی با  $m_s = -1/2$  به دست می دهد. دو تابع زیر ویژه تابعهای  $S^2$  و  $S_z$  هستند و  $S_x$  و  $S_y$ .

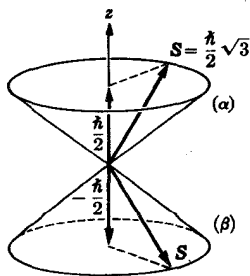
$$\alpha \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (۷۳.۷)$$

اولی معرف یک الکترون با «اسپین بالا» و دومی معرف یک الکترون با «اسپین پایین» است. معادله ویژه مقدار  $S^2$  و  $\alpha$  را به صورت زیر می نویسیم

$$S_z \alpha = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \alpha$$

این رابطه نشان می دهد که مطابق ضرورت معادله (۶۲.۷)، مؤلفه  $z$  در حالت «اسپین بالا» برابر  $\hbar/2$  است.

شکل ۸.۷ نمودار اسپین در دو حالت ممکن  $\alpha$  و  $\beta$  را نشان می دهد. در بقیه ایسن کتاب، عملیات جبری اسپین را که در این بخش بسط داده شد، به کار نخواهیم برد، اما ویژه تابعهای اسپین  $\alpha$  و  $\beta$  را به کار خواهیم برد. در صورتی که خواننده مایل باشد می تواند آنها را به ترتیب فقط به عنوان علامت نشانگر «اسپین بالا» و «اسپین پایین» در نظر بگیرد.



شکل ۸.۷ حالت دو اسپینی

الکترون، اسپین بالا  $\alpha$ ،

اسپین پایین  $\beta$ .

### ۸.۷ تکانه زاویه‌ای کل $J$

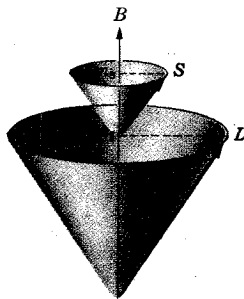
جفت‌شدگی تکانه زاویه‌ای در اتم هیدروژن کاملاً ساده است، زیرا در اینجا فقط دو تکانه زاویه‌ای، یعنی تکانه زاویه‌ای مداری و اسپین در دست است. از ترکیب این دو، تکانه زاویه‌ای کل  $J$  با عدد کوانتومی  $J = l + 1/2$  به دست می‌آید. تعداد ممکن برای مؤلفه‌های  $z$  یعنی  $m_j \hbar$  برابر  $2J + 1$  با عدد کوانتومی  $m_j$  است که از  $m_j = J$  تا  $m_j = -J$  تغییر می‌کند.

در بخش ۴.۷ آموختیم که نمادگذاری طیف نمودی قدیمی  $s, p, d, f, g$  و غیره مربوط به تکانه زاویه‌ای مداری  $l = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$  است. هر حالت با اعداد کوانتومی  $n, l$  و  $m$  که آن را  $m_l$  می‌نامیم، مشخص می‌شد. نمادی که برای شناسایی یک حالت خاص ارائه شد، با عدد کوانتومی اصلی و حرف مشخص کننده مقدار  $l$ ، مثلاً  $1s, 2p$  و غیره معین می‌شد. حال به این نمادکمیت  $z$  را به صورت شاخص پایین اضافه می‌کنیم. بنا بر این

$$3d_{5/2} \quad \text{حالتی است با } n=3, \quad l=2, \quad \text{و } z=5/2$$

$$2p_{1/2} \quad \text{حالتی است با } n=2, \quad l=1, \quad \text{و } z=1/2$$

این طرح جفت‌شدگی و عدد کوانتومی  $z$  فقط وقتی مناسب است که برهم‌کنش مغناطیسی داخلی بین  $l$  و  $s$  (به بخش بعد مراجعه کنید) قویتر از گشتاور نیروی حاصل از میدان مغناطیسی خارجی باشد. شکل ۹.۷ نمودار برداری مناسبی برای وجود یک میدان خارجی خیلی قوی است. بردار اسپین و بردار تکانه زاویه‌ای مداری به‌طور مستقل و با بسامدهای مختلف لارمور دارای حرکت تقدیمی هستند. بدیهی است که بزرگی تکانه زاویه‌ای کل ثابت نیست.



شکل ۹.۷ حرکت تقدیمی مستقل بردارهای  $S$  و  $L$  در یک میدان مغناطیسی خیلی قوی.

۱. در حال حاضر تکانه زاویه‌ای هسته را در نظر نمی‌گیریم، به بخش ۱۱.۷ مراجعه کنید.

شکل ۱۰.۷ نمودار برداری مناسب برای حالت میدان خیلی ضعیف (یا بدون میدان) خارجی است. الکترونی در حالت  $l=3$  با مقدار کل  $z$  برابر  $z=l-s=5/2$  و مؤلفه  $z$  با عدد کوانتومی  $m_j=3/2$ ، نمونه‌ای از این مورد است. نظریه جفت شدگی تکانه زاویه‌ای نشان می‌دهد که اعداد کوانتومی مغناطیسی  $m_l$  و  $m_s$  مشخص نیستند، بلکه تابع موج از جمع دو عبارت یکی با  $m_l=3$  و  $m_s=-1/2$  و دیگری با  $m_l=2$  و  $m_s=1/2$  تشکیل می‌شود. طبق جدول پ ۱۰.۵ دامنه‌های احتمال برای دو حالت  $(2/7)^{1/2}$  و  $(5/7)^{1/2}$  هستند. تابع موج کل را برای این حالت به صورت زیر می‌نویسیم

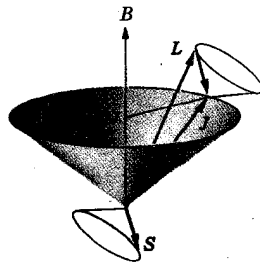
$$\psi = -\left(\frac{2}{7}\right)^{1/2} \left| 3, \frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2} \right\rangle + \left(\frac{5}{7}\right)^{1/2} \left| 3, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \right\rangle \quad (74.7)$$

که علامت  $| \rangle$  مشخص کننده تابع موجی است که اعداد کوانتومی تکانه زاویه‌ای آن به ترتیب  $l, m_l, m_s$  باشند.

در بخش بعد، محاسبه خیلی ساده‌ای از انرژی مربوط به برهم کنش بین گشتاور مغناطیسی ذاتی الکترون و میدان حاصل از حرکت مداری، انجام خواهیم داد. ولی، به جزئیات پیچیده جفت شدگی تکانه زاویه‌ای و علامت گذاری معادله (۷۴.۷) بر نخواهیم گشت.

## ۹.۷ ساختار ریز هیدروژن اتمی

خیلی قبل از آغاز این قرن، طیف نمایی نوری آشکار کرده بود که اغلب «خطوط» گسیلی و



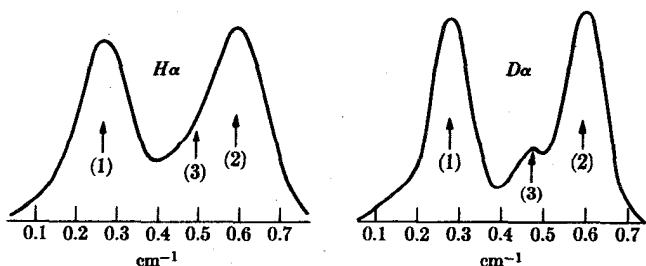
شکل ۱۰.۷ جفت شدگی  $L$  و  $S$  و تولید تکانه زاویه‌ای کل  $J$  در میدان مغناطیسی ضعیف. بردارهای  $S$  و  $L$  به طور همزمان حول بردار  $J$  حرکت تقدیمی دارند.

جذبی خطوط منفرد نبوده بلکه دارای ساختار ریز هستند. برای نشان دادن ساختار خطوط هیدروژن وسایل با قدرت تفکیک خیلی زیاد ضروری است، ولی چنین دستگاههایی از خیلی پیش وجود داشته‌اند. یکی از خطوطی که به طور کامل مورد مطالعه قرار گرفت خط  $H_\alpha$  از سری بالمر است. این خطی با طول موج  $\lambda = 6562.8 \text{ \AA}$  در گذارهای از  $3s$  به  $2p$ ، از  $3p$  به  $2s$ ، و از  $3d$  به  $2p$  است (شکل ۵.۷) به طوری که در بخش ۴.۷ و بیشتر در فصل ۸ بحث شد، گذارهای اتمی تابع قواعد انتخاب هستند. قاعده  $\Delta l = \pm 1$  در گذارهای شکل ۵.۷ مشاهده می‌شود. قاعده انتخاب مهم دیگر لازم می‌دارد که صفر یا  $\pm 1$   $j$  حد باشد. این بدان معنی است که خط  $H_\alpha$  شامل هفت جزء به ترتیب زیر است

۱.  $2p_{1/2}$  به  $3s_{1/2}$
۲.  $2p_{3/2}$  به  $3s_{1/2}$
۳.  $2s_{1/2}$  به  $3p_{1/2}$
۴.  $2s_{1/2}$  به  $3p_{3/2}$
۵.  $2p_{1/2}$  به  $3d_{3/2}$
۶.  $2p_{3/2}$  به  $3d_{3/2}$
۷.  $2p_{3/2}$  به  $3d_{5/2}$

هیچکدام از این مؤلفه‌ها دقیقاً برهم منطبق نمی‌شوند. این عدم انطباق، قسمتی به دلیل تصحیح نسبیتی رابطه اساسی انرژی، معادله (۴۹.۷)، است. اما، بزرگترین اثر در نتیجه برهم کنش مغناطیسی است که در زیر از آن بحث می‌شود.

شکل ۱۱.۷ الف ردیابی میکروفوتومتری خط  $H_\alpha$  را روی یک صفحه عکاسی نشان می‌دهد که توسط ویلیامز با استفاده از طیف نگار با قدرت تفکیک زیاد به دست آمده است. خط ساختار معینی را نشان می‌دهد، اما هفت گذار مجزای طیف از هم تفکیک نشده‌اند.



شکل ۱۱.۷ ساختار ریز خط  $H_\alpha$  و خط  $D_\alpha$ .

محور  $x$  در شکل، طبق قراردادهای طیف‌نمایی نوری، عکس طول موج برحسب  $\text{cm}^{-1}$  را نشان می‌دهد. مقدار متوسط برای خط  $H_\alpha$ ،  $15240 \text{ cm}^{-1}$  است.

پهنای قله در نصف ارتفاع حداکثر در شکل ۱۱.۷ الف، حدود  $17 \text{ cm}^{-1}$  است. بنابراین قدرت تفکیک عبارت است از

$$\frac{\lambda^{-1}}{\Delta\lambda^{-1}} = 90,000 : \text{ قدرت تفکیک}$$

بالتر بردن این عدد در مورد هیدروژن معمولی فوق‌العاده مشکل است، زیرا یکی از علل اصلی پهنای قله در شکل ۱۱.۷ الف، پهن شدگی دوپلر در نتیجه جنبش حرارتی اتمهای تابش‌کننده هیدروژن است. تابش در یک لوله سرد تخلیه گاز که برای به حداقل رسانیدن پهن‌شدگی طراحی شده، تولید می‌شود. شکل ۱۱.۷ ب خط  $D_\alpha$  را که با استفاده از گاز دوتریوم به جای هیدروژن سبک، تولید شده نشان می‌دهد، در دمای معین، ریشه میانگین مربعی سرعت اتمهای دوتریوم  $\sqrt{2}/1$  برابر سرعت اتمهای هیدروژن معمولی است. بدین ترتیب پهن‌شدگی قله در اثر دوپلر فقط ۷۱ درصد پهن‌شدگی شکل ۱۱.۷ الف می‌شود. حال سعی خواهیم کرد که رابطه‌ای بیابیم تا جداسازی ساختار ریز را در اثر برهم‌کنش مغناطیسی اسپین-مدار به دست دهد. در محاسبه انرژی برهم‌کنش، از مدل بور استفاده خواهیم کرد. برای این کار واقعاً هیچ دلیل خوبی وجود ندارد، مگر اینکه اولاً فقط علاقه‌مند به محاسبه حدود بزرگی هستیم، و ثانیاً این مدل ساده نیز منجر به همان نتایج حاصل از محاسبات مکانیکی موجی و یا نتایج خیلی نزدیک به آن می‌شود.

الکترونی را که در مدار  $n$ ام بور حرکت می‌کند، در نظر بگیرید. محور دوران را محور  $z$  در نظر می‌گیریم. مؤلفه  $z$  اسپین نسبت به این محور می‌تواند  $\pm \hbar/2$  باشد، و مؤلفه گشتاور مغناطیسی مربوطه  $\pm \mu_B = \pm e\hbar/2m$  است ( $m_s = 1/2$ ,  $g = 2$ ). حرکت مداری، در محل الکترون میدان مغناطیسی  $\mathbf{B}$  را ایجاد می‌کند، و برهم‌کنش بین این میدان و گشتاور مغناطیسی منجر به انتقال انرژی به میزان اندک  $\Delta E = \mu \cdot \mathbf{B}$  خواهد شد [معادله (۵۶.۷)].

اگر  $v$  سرعت الکترون باشد، سرعت هسته نسبت به الکترون در دستگاه مختصات ساکن نسبت به الکترون، برعکس  $v$  — می‌شود. میدان مغناطیسی  $\mathbf{B}$  در محل الکترون با استفاده از قانون بیوساوار به صورت زیر به دست می‌آید

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{idl \times \mathbf{r}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{Zev \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{ZeL}{4\pi\epsilon_0 c^2 m_e r^3} \quad (75.7)$$

جریان جزئی  $idl$  با  $Zev$  — و  $\mu_0$  با  $1/\epsilon_0 c^2$  جانشین شده است، و بردار تکانه زاویه‌ای مداری را به صورت  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m_e \mathbf{v}$  در نظر گرفته‌ایم. انتقال انرژی برابر است با

$$\Delta E = -\mu \cdot \mathbf{B} = -\left(\frac{e}{2m_e} g_s \mathbf{S}\right) \cdot \frac{ZeL}{4\pi\epsilon_0 c^2 m_e r^3} = \frac{Ze^2 g_s \hbar^2}{8\pi\epsilon_0 c^2 m_e^2 r^3} \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} \quad (76.7)$$

که در آن  $\mathbf{l}$  و  $\mathbf{s}$  به ترتیب  $L/\hbar$  و  $S/\hbar$  هستند.

البته در مدل بور شعاع بور و برابر  $n^2 a_0$  است. به هر حال، در اینجا به جای  $r^{-3}$ ، مقدار چشمداشتی  $\langle r^{-3} \rangle$  را قرار می‌دهیم. بنابراین به رابطه‌ای می‌رسیم که محاسبات مکانیک موجی می‌توانست به دست دهد. تغییر اصلاحی دیگری که می‌دهیم وارد کردن ضریب  $1/2$  است که از اثر نسبیته به نام حرکت تقدیمی توهاش ناشی می‌شود (به پیوست ۶ مراجعه کنید). بنابراین انتقال انرژی چنین است (با  $g_s = 2$ )

$$\Delta E = \frac{Ze^2 \hbar^2}{8\pi\epsilon_0 c^2 m_e^2} \langle r^{-3} \rangle \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} \quad (77.7)$$

برای حالت پایه هیدروژن، تکانه زاویه‌ای مدار صفر است، بنابراین  $\Delta E = 0$ . برای حالت  $2p$  به آسانی می‌توان نشان داد که  $\langle r^{-3} \rangle = Z^3 / 4\pi a_0^3$  که در آن  $a_0 = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / m_e e^2$  است. بعد از قراردادن این مقدار و تقسیم معادله (77.7) به انرژی  $E = Z^2 e^2 / 8\pi\epsilon_0 a_0$ ، داریم

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{1}{6} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}\right)^2 Z^2 \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} \quad (78.7)$$

در این محاسبات ضریب  $Z$  را جهت نشان دادن اثر آن در مدارهای هیدروژن گونه‌ای اتمهای دیگر حفظ کرده‌ایم.

ضریب داخل پرانتز در معادله (78.7) بدون دیمانسیون بوده و برابر است با

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137} \quad (79.7)$$

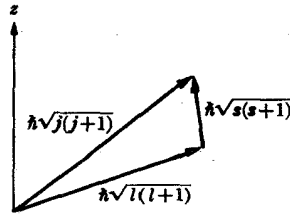
این ضریب ثابت ساختار ریز نام دارد. به طوری که معادله (78.7) در مورد مدارهای هیدروژنی مشخص می‌کند، جدایی نسبی حالت‌های اتمی در ساختار ریز از مرتبه  $\alpha^2 Z^2$  است. جدایی نسبی بین  $2p_{1/2}$  و  $2p_{3/2}$  در مورد خاص حالت  $2p$  هیدروژن عبارت است از

$$\frac{\Delta E_{LS}}{E} = \frac{1}{6} \alpha^2 [(l \cdot s)_{3/2} - (l \cdot s)_{1/2}]$$

در مدل برداری جفت‌شدگی تکانه زاویه‌ای، حاصلضرب اسکالر را می‌توان با استفاده از قاعده کسینوس در مثلث حاصل از  $\mathbf{j}$ ،  $\mathbf{l}$  و  $\mathbf{s}$  (شکل ۱۲.۷) به دست آورد. از آنجا که مربع طول این بردارها  $(j+1)z$  و غیره است، درمی‌یابیم

$$j(j+1) = l(l+1) + s(s+1) - 2\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$$





شکل ۱۲۰۷ نمودار برداری تعیین  $l \cdot s$

و از اینجا به دست می آوریم

$$(l \cdot s)_{2,1/2} - (l \cdot s)_{1,1/2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right] = \frac{3}{2}$$

بنابراین جدایی ساختار ریز برای حالت  $2p$  هیدروژن با رابطه زیر داده می شود

$$\frac{E \Delta_{LS}}{E} = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{137} \right)^2 \frac{23}{2} = 1.33 \times 10^{-5}$$

با قرار دادن  $E = 3.2 \text{ eV}$  از رابطه فوق نتیجه می شود  $\Delta E_{LS} = 4.3 \times 10^{-5} \text{ eV}$ ، که با  $\Delta(\lambda^{-1}) = 0.35 \text{ cm}^{-1}$  مطابقت دارد. به طوری که در بالا گفته شد، این بزرگترین سهم مربوط به جدایی خطوط است که در شکل ۱۱۰۷ مشاهده می شود. به رغم سهم بزرگتر ضریب  $l \cdot s$  در حالت  $3d$  جدایی ساختار ریز کوچکتر است، زیرا ضریب  $\langle r^{-3} \rangle$  خیلی کوچکتر می شود.

### ۱۰۰۷ نظریه پرداخته تر هیدروژن

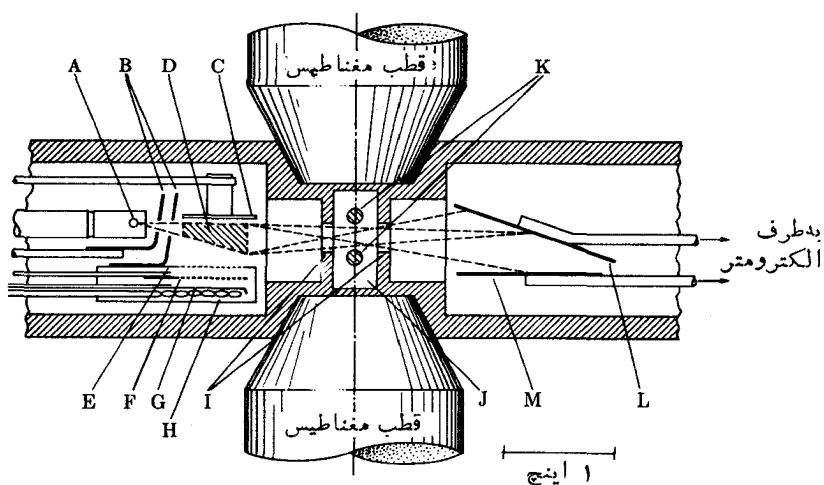
به طوری که قبلاً گفتیم مکانیک موجی شرودینگر نظریه ای ناسپیتی است. سرعت الکترون در اتم هیدروژن، در مقایسه با سرعت نور، خیلی کم است. با وجود این دقت آزمایشها آن چنان زیاد است که اثرات نسبی قیاس تشخیص است. ثانیاً، اسپین ذاتی الکترون، به طور نسبی، آنقدر بزرگ است که محققاً در گستره نسبی قرار می گیرد. قبل از شرودینگر یک نظریه نسبی هیدروژن توسط زومرفلد (بخش ۸.۴) مورد بررسی قرار گرفته بود. دیراک<sup>۱</sup> در سال ۱۹۲۸، یک نظریه کوانتومی نسبی برای الکترون به دست آورد که در آن تابع موج یک ماتریس ستونی چهار مؤلفه ای است. در نظریه دیراک اسپین الکترون وجود

1. P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc, A117 (1928). p. 610.

دارد و گشتاور مغناطیسی الکترون برابر ۱ مگنتون بور پیش‌بینی می‌شود. معادلات دیراک را می‌توان دقیقاً برای هیدروژن حل کرد. در ابتدا به نظر می‌رسید که جدایی ساختار ریز خط  $H_\alpha$  بر اساس این نتایج با مشاهدات شکل ۱۱.۷ مطابقت داشته باشد. اما، بعضی از پژوهشگران پس از تحلیل بسیار مفصل طیف نگاشتها، متوجه ناسازگاریهایی شدند که صحت ادعای آنها به اثبات رسیده است.

لمب و رادرفورد<sup>۱</sup> در آزمایشی بسیار مشهور، مکانهای نسبی ترازهای  $n=2$  هیدروژن ( $2S_{1/2}$ ,  $2P_{3/2}$ ,  $2P_{1/2}$ ) را مورد مطالعه قرار دادند. گذارهای خودبه‌خودی بین این حالت‌های نزدیک به هم معمولاً قابل رؤیت نیستند، زیرا احتمال گذار متناسب با مکعب بسامد و بنابراین بسیار کم است. اما، لمب و رادرفورد با استفاده از روشهای میکروموج بین این حالتها گذارهای تحریکی به‌وجود آوردند. در زیر تشریح مختصر آزمایش آمده است.

گاز هیدروژن در کوره تنگستنی (شکل ۱۳.۷) تا  $2500\text{K}$  گرم شده بود، به‌طوری



شکل ۱۳.۷ مقطع اسباب‌مورد استفاده لمب و رادرفورد. A کوره تنگستنی تجزیه‌هیدروژن. B حفاظها. C آنود الکترونهاي بمباران کننده. D ناحیه بمباران. E شبکه شتاب‌دهنده الکترونهاي بمباران کننده. F شبکه کنترل. G کانود الکترونهاي بمباران کننده. H گرم کننده کاتود. I شکافها. J موجبر. K سیمهای فرونشانی و خطوط انتقال. L هدف آشکارساز شبه پایدار. M جمع کننده الکترون.

1. W. E. Lamb and R. C. Retherford, *Phys. Rev.*, 72 (1947), p. 241; 79, (1950), p. 549.

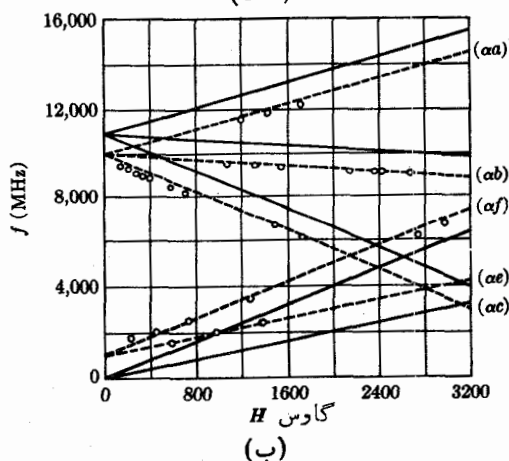
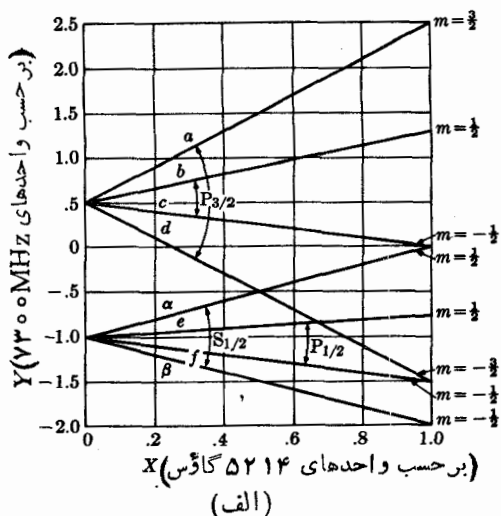
که در این دما مولکولها تجزیه می شوند. اتمهای هیدروژن می توانستند به صورت باریکه‌ای وارد يك اتاقك خلا شوند و آنگاه به طور متقاطع مورد بمباران الکترونیهای با انرژی  $108 \text{ eV}$  قرار گیرند. این امر موجب برانگیزش بعضی از اتمها به حالت  $n=2$  می شد. حالتهاي  $2p_{3/2}$  و  $2p_{1/2}$  سرعت به حالت پایه برمی گشتند، اما حالت  $2s_{1/2}$  بدین طریق برگشت نمی کند ( $\Delta t = 0$ ). این باریکه سپس از ناحیه‌ای می گذرد که در آن اتمها می توانند با يك میدان میکروموج برهم کنش داشته باشند. سپس باریکه روی يك آشکارساز تنگستن فرود می آید. اتمهای  $2s_{1/2}$  پس از برخورد با آشکارساز به حالت پایه برمی گردند و انرژی خود را به الکترونهاي فلز می دهند که در نتیجه بعضی از این الکترونها به خارج پرتاب می شوند. بنابراین وجود اتمهای (خنثی)  $2s_{1/2}$  در باریکه به صورت جریانی الکتريکی در صفحه تنگستن آشکار می شود. در ناحیه برهم کنش میکروموج، با استفاده از مغناطیس خارجی می توان میدان مغناطیسی ثابتی نیز ایجاد کرد.

وقتی که بسامد میدان میکروموج منطبق با اختلاف انرژی بین یکی از زیرحالتهاي  $2s_{1/2}$  و زیرحالت  $2p$  باشد، در ناحیه برهم کنش میکروموج بعضی از اتمها از حالت  $2s_{1/2}$  به حالت دیگر انتقال یافته و سپس سرعت به حالت پایه برمی گردند. تشدید حاصل به صورت کاهش جریان در صفحه تنگستن مشاهده می شود.

شکل ۱۴.۷ الف مکانهای نسبی سه حالت مورد نظر و همچنین جدایی زیمان در آنها را، همان گونه که با نظریه دیراک پیش بینی شده بود، نشان می دهد. باید توجه داشت که ترازهای  $2s_{1/2}$  و  $2p_{1/2}$  در میدان صفر برهم منطبق می شوند. شکل ۱۴.۷ ب بسامد انتقالهای مورد انتظار نظریه دیراک را از زیرحالت  $2s_{1/2}$  با  $m_j = 1/2$  که در شکل ۱۴.۷ الف با  $\alpha$  مشخص شده، نشان می دهد. نقاط تجربی به صورت دایره‌هایی که با خط چین به هم اتصال دارند، نشان داده شده‌اند. برای ایجاد سازگاری بین این داده‌ها و نظریه، لازم است که تراز  $2s_{1/2}$  در حدود  $1000 \text{ MHz}$  به بالا انتقال داده شود، این انتقال، انتقال لمب نامیده می شود.

انتشار نتایج تجربیات لمب-رادرفورد انگیزه‌ای برای فیزیکدانان نظری شد تا نگاه تازه‌ای به مکانیک کوانتومی الکترون بیندازند. نظریه دیراک بروشنی تمام موضوع را در بر نمی گرفت. به نظر می رسد که مشکل در برهم کنش الکترون و میدان مغناطیسی قرار دارد. نتیجه این مطالعات نظری منجر به نظریه پیشرفته‌ای به نام الکترودینامیک کوانتومی شده است. نظریه دیراک هنوز پایه است، اما اختلاهای مهمی باید به آن اضافه شوند.

در نظریه جدید، میدان الکتريکی در نتیجه گسیل چشمه فوتونهای مجازی، یعنی فوتونهایی که فاصله زمانی تقریبی  $\Delta t$  بین گسیل و جذب مجدد آنها از اصل عدم قطعیت  $h\nu(\Delta t) \approx \hbar$  به دست می آید، به وجود می آید (با بخش ۴.۱۲ مقایسه کنید). بعلاوه، زوجهای الکترون-پوزیترون با طول عمرهایی در حدود  $\hbar/2m_e c^2$  به طور مداوم تولید و نابود می شوند. بنابراین میدان کوانتومی، میدانی است که نسبت به مکان و زمان افت و خیزهای شدیدی دارد، و هر چه حجم فضا-زمان نمونه کوچکتر باشد، افت و خیزها شدیدتر است.



شکل ۱۴.۷ (الف) مکانهای نسبی ترازهای  $n=2$  در هیدروژن از نقطه نظر نظریه دیراک. (ب) گذارهای پیش بینی شده و مشاهده شده بین حالتها.

یکی از مشکلات جدی این است که الکترون به عنوان یک ذره نقطه‌ای در این میدان کوانتومی انرژی بینهایت دارد. این مشکل با کم کردن انتگرال انرژی الکترون «آزاد» از انتگرال انرژی الکترون در حالت مثلاً  $2S_{1/2}$  هیدروژن برطرف می‌شود. این روش را بازبهباش جرم می‌نامند. برای مختصر کردن بحث گوئیم: نظریه‌های جدید، انتقال نظری لمب از حالت

$2S_{1/2}$  هیدروژن به حالت  $2p_{1/2}$  را برابر  $(105719 \pm 016)$  مگاهرتز به دست می‌دهد، در حالی که بهترین مقدار تجربی  $(105777 \pm 010)$  MHz است.  
 نظریه جدید برای گشتاور مغناطیسی الکترون  $1001159644$  مگنتون بور پیش بینی می‌کند. بهترین مقدار تجربی برابر با  $(1001159644 \pm 00000000007)$  مگنتون بور است که مطابقت کامل با مقدار نظری دارد.

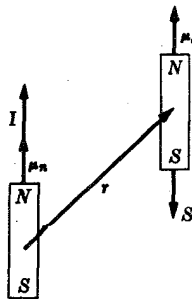
## ۱۱.۷ ساختار فوق‌ریز در هیدروژن

به کمک وسایل نوری با قدرت تفکیک بسیار بالا می‌توان خطوط گذار بعضی از عناصر را به مؤلفه‌های فوق‌ریز که فواصل نزدیکی از هم دارند، جدا کرد. ساختار فوق ریز واقعی در نتیجه برهم کنش بین گشتاور دو قطبی مغناطیسی هسته و الکترونهای غیرزوج به وجود می‌آید (بخش ۹.۹). در مورد هیدروژن در حالت پایه، اسپین  $S$  الکترون و اسپین  $I$  پروتون، با هم ترکیب شده و تکانه زاویه‌ای کل با عدد کوانتومی  $F$  برابر با ۰ یا ۱ تشکیل می‌شود.

شکل ۱۵.۷ مورد مشابه کلاسیک را با دو میله مغناطیسی که به دور هم حرکت می‌کنند، نشان می‌دهد. این حالت متناظر با حالت  $F = 0$  است (زیرا  $\mu$  و  $S$  در الکترون مخالف هم هستند). انرژی برهم کنش کلاسیک دو میله مغناطیسی عبارت است از

$$\Delta E = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{\mu_n \cdot \mu_e}{r^3} - 3 \frac{(\mu_e \cdot \mathbf{r})(\mu_n \cdot \mathbf{r})}{r^5} \right] \quad (15.7)$$

که در آن  $\mu_0 = 4 \times 10^{-7}$  تراوایی مغناطیسی خلا<sup>۱</sup> است. این رابطه، بسته به زاویه بین  $\mathbf{r}$  و دو بردار  $\mu$  علامت مثبت یا منفی دارد. محاسبه اختلال (بخش ۲.۸)، برای حالت  $F = 0$  نتیجه منفی و برای حالت  $F = 1$  نتیجه مثبت به دست می‌دهد. تفاوت بین دو حالت،



شکل ۱۵.۷

یعنی جدایی فوق ریز حالت پایه هیدروژن، عبارت است از

$$\Delta E_H = \frac{8\mu_e \mu_p \mu_n}{3\pi a_0^3} \quad (۸۱.۷)$$

که در آن  $\mu_e$  و  $\mu_p$  بر حسب واحدهای mksA شعاع بور  $a_0$  است. با قراردادن مقادیر عددی (برای  $\mu_n$  به بخش ۱۰۱۲ مراجعه کنید) داریم  $\Delta E_H = 5.888 \times 10^{-6} \text{ eV}$  یا با دقت بیشتر و بر حسب بسامدگذار داریم

$$\nu = \left( \frac{\Delta E_H}{h} \right) = (1420053 \pm 0.03) \text{ MHz}$$

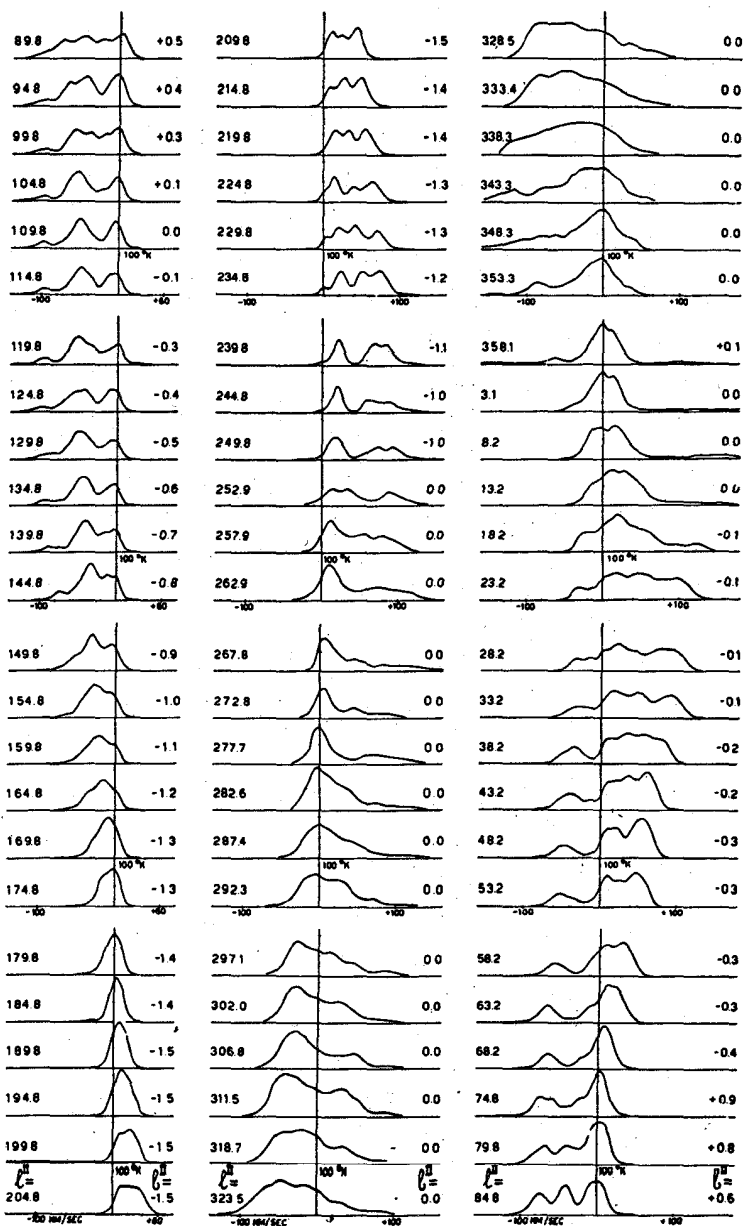
گسیل خود به خود از حالت  $F=1$  به  $F=0$  در آزمایشگاه مشاهده نشده است. اما، گذارهای القایی با استفاده از روش باریکه اتمی، مشا به آنچه در بخش قبل تشریح شد، مشاهده شده است. بهترین نتایج تجربی مقدار زیر را به دست می دهند

$$\nu = \left( \frac{\Delta E_H}{h} \right) = (1420040.5752) \text{ MHz}$$

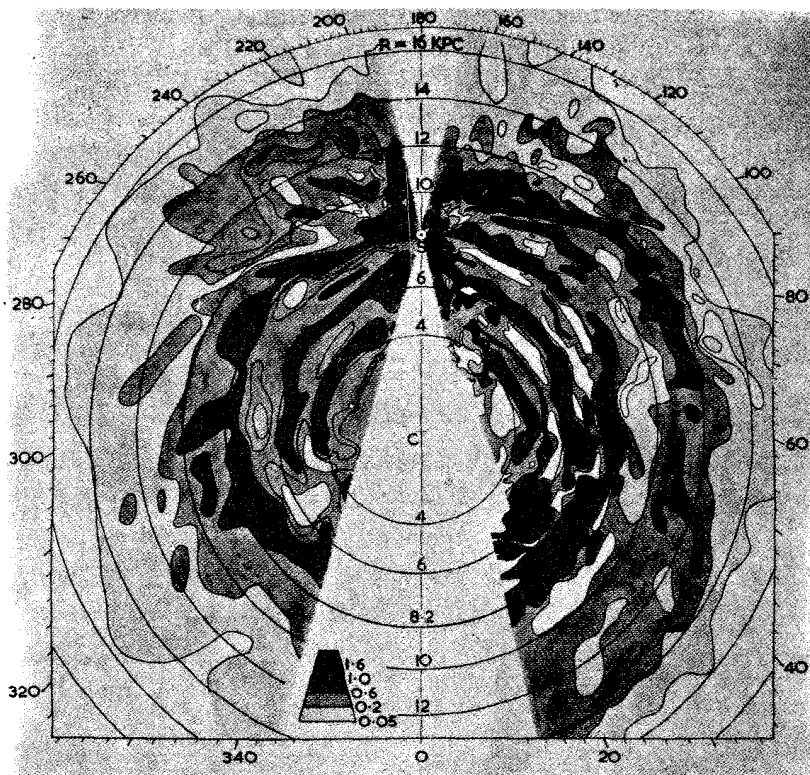
اختلاف بین مقدار نظری در اینجا و مقدار تجربی قابل ملاحظه است، ولی با انجام تصحیحاتی بر روی فرمول نظری، این اختلاف حذف شده است.

همان طور که در بالا گفته شد، گذار خود به خود از حالت  $F=1$  به  $F=0$  در آزمایشگاه مشاهده نشده است. به هر حال، این گذار منشأ تابش  $1420 \text{ MHz}$  ( $\lambda = 21 \text{ cm}$ ) است که از فضای خارج دریافت می شود. پیدایی دانش جدید نجوم پرتوی، عمدتاً با توجه به مطالعه این خط از کهکشان خودمان و کهکشانهای دیگر بوده است.

شدت کل (تعداد فوتونهای خط  $21$  سانتیمتر) دریافت شده در یک فاصله زمانی معین در جهتی معین از فضا، میزانی از کل متناثر اتمهای خنثای هیدروژن در داخل مخروط مشاهده شده است که به وسیله آنتن جهت دار مشخص می شود. پهنای نوار گیرنده های به کار رفته خیلی باریک است و همیشه نمایه بسامدی خط اندازه گیری می شوند. شکل  $16.7$  چنین نمایه هایی را نشان می دهد. شدتها بر حسب بسامد در فواصل  $5$  درجه در صفحه کهکشان (راه شیری) اندازه گیری می شوند. البته که این تغییرات بسامد به دلیل انتقال دوپلر است. با فرض توزیعی معین سرعت در قسمتهای مختلف کهکشان (بر اساس اطلاعات دیگر)، در حال حاضر این امکان وجود دارد که نقشه ای از توزیع چگالی هیدروژن خنثی (بین ستاره ای) در صفحه کهکشان تهیه کرد. چنین نقشه ای در شکل  $17.7$  نشان داده شده است. تابش (با طول موج)  $21$  سانتیمتر از چندین کهکشان دیگر نیز مشاهده شده است. به هر حال، این تابش خیلی ضعیف است و به دلیل قدرت تفکیک جهتی کم (حدود  $5$  درجه) آنتنهای میکروموج (در مقایسه با تلسکوپهای نوری) تاکنون اطلاعات فضایی اندکی از طریق اندازه گیری این چشمه های دور، به دست آمده است.



شکل ۱۶۰۷ شدت تابش (۲ سانتیمتری از کهکشان ما که در فواصل ۵ درجه ای (طولی) در صفحه کهکشان اندازه گیری شده است. تغییرات بسامد (محور افقی) تغییرات سرعت را نسبت به زمین، از طریق انتقال دوپلر، منعکس می سازد.



توزیع هیدروژنهای خنثی در کهکشان (واحد اتم بر  $\text{cm}^3$ ) بر اساس مدلی که چرخش و انبساط را شامل می‌شود.

**شکل ۱۷.۷** توزیع هیدروژن خنثی در کهکشان بر اساس اطلاعات شکل ۱۶.۷، ومدلی از کهکشان که توزیع سرعت را بر حسب مکان به دست می‌دهد. فواصل بر حسب کیلوپارسک هستند ( $1 \text{ kpc} = 3 \times 10^{19} \text{ m}$ ).

### مسائل

۱۰.۷ همان‌طور که در متن بیان شد، نشان دهید که معادلات (۵.۷) و (۶.۷) از معادله (۱۰.۷) به دست می‌آیند.

۲.۷ با جاگذاریهای تشریح شده در متن، معادله (۱۳.۷) را ثابت کنید.

۳.۷ معادله (۲۷.۷) را اثبات کنید.

۴.۷ به شرط اینکه ثابت  $\hbar^2(l+1)l$  مربع تکانه زاویه‌ای باشد، نشان دهید که مشتق منفی



جمله آخر در پرانتز معادله (۳۲.۷) نیروی مرکز گریز را به دست می دهد.

۵.۷ نشان دهید که تابع هماهنگگی کروی  $Y_{\ell, m}(\theta, \phi)$  بهنجار شده است [معادله (۲۹.۷)].

۶.۷ معادله (۴۰.۷) را ثابت کنید.

۷.۷ نشان دهید وقتی که در جستجوی توابع موج کروی متقارن هستیم، می توانیم عملگر لاپلاسی در معادله (۱۳.۷) را به صورت زیر خلاصه کنیم

$$\nabla^2 = \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}$$

۸.۷ ذره ای به جرم  $m$  تحت تأثیر یک نیروی جاذبه کروی متقارن  $F = -\beta r$  حرکت می کند، که در آن  $\beta$  یک مقدار ثابت و  $r$  فاصله شعاعی ذره تا مبدأ است. معادله شرودینگر را برای این حرکت بنویسید، و انرژی حالت پایه را بر حسب  $\beta$ ،  $m$  و ثابتهای اساسی تعیین کنید. (دانهایی: ویژه تابع حالت پایه به شکل  $Ae^{-ar}$  است.)

۹.۷ ذره ای به جرم  $M$  در داخل پوسته ای کروی به شعاع  $a_0$  حرکت می کند. انرژی پتانسیل ( $V$ ) برای  $r < a_0$  عبارت است از  $V = 0$  و برای  $r > a_0$  داریم  $V \rightarrow \infty$ . (الف) معادله شعاعی موج  $R(r)$  را در ناحیه  $r < a_0$  بنویسید. نشان دهید که توابع

$$R_0(r) = \frac{A \sin kr}{kr}, \quad l = 0$$

$$R_1(r) = B \left[ \frac{\sin kr}{(kr)^2} - \frac{\cos kr}{kr} \right], \quad l = 1$$

جوابهای این معادله هستند. (ب) نشان دهید که این توابع، حتی برای  $r = 0$  معین هستند. (ج) انرژیهای حالت پایه ( $l = 0$ ) و اولین حالت برانگیخته ( $l = 1$ ) را به دست آورید.

۱۰.۷ فرض کنید که یک الکترون در داخل هسته ای به شعاع  $R = 5 \times 10^{-12}$  محبوس است. با استفاده از نتایج مسئله قبل، می نیموم انرژی جنبشی این الکترون را حساب کنید. با به کار بردن اصل عدم قطعیت و با  $R \approx \Delta x = \Delta y = \Delta z$  همین موضوع را تخمین بزنید.

۱۱.۷ یکی از حالت های برانگیخته اتم هیدروژن دارای تابع موج زیر است

$$\psi = Ar^2 e^{-r/3a_0} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$$

(الف) با استفاده از عملگرهای  $L^2$  و  $L_z$ ، اعداد کوانتومی  $l$  و  $m$  را به دست آورید. (ب)

انرژی  $E$  این حالت چقدر است (برای تعیین آن از معادله شعاعی موج استفاده کنید)؟  
(ج)  $\psi$  را بهنجار کنید ( $A$  را به دست آورید).

۱۲.۷ یک سرمیله ای به طول  $R$  و جرم ناچیز، در مبدأ قرار گرفته و سردیگر به جرم  $M$  متصل است. میله می تواند هم با تغییر  $\theta$  و هم با تغییر  $\phi$ ، به طور آزاد حول مبدأ بچرخد. معادله زیر را برای این مسئله به کار برید.

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \psi + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \psi + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi^2} \psi + V\psi = E\psi$$

با استفاده از این حقیقت که برای یک تابع موج قابل قبول داریم

$$-\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \psi + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \psi = l(l+1)\psi, \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots$$

نشان دهید که ویژه مقدارهای انرژی این میله دوار عبارت اند از

$$E = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2I}$$

که در آن  $I = MR^2$  است.

۱۳.۷ نشان دهید که معادله (۴۵.۷) در تابع هماهنگ کروی مندرج در معادلات (۲۹.۷) صدق می کند.

۱۴.۷ نشان دهید که برای جسم صلبی که حول یک محور دوران می کند، نسبت ژیرومغناطیسی  $\mu/L$  برابر با  $q/2M$  می شود، به شرط اینکه بار  $q$  و جرم  $M$  به طور یکنواخت توزیع شده باشند.

۱۵.۷ اتمی با گشتاور مغناطیسی (مؤلفه  $z$ ) ۱ مگنتون بور با سرعت  $f_x = 100 \text{ m/s}$  در میدانی مغناطیسی با گرادیان  $10^4 \text{ W/bm}^3 = 10^4 \text{ Gs/cm}^{-1}$  حرکت می کند. سرعت قائم  $v_y$  و از آنجا زاویه انحراف آن را هنگام خروج از میدان حساب کنید.

۱۶.۷ آیا می توان آزمایش اشترن-گرلاخ را، به جای اتمهای خنثی، با یونها انجام داد؟ نیروی مغناطیسی عرضی  $F = \mu dB/dr$  برای یون یکبار یونیده را با گشتاور مغناطیسی برابر با ۱ مگنتون بور مقایسه کنید. فرض کنید

$$v = 100 \text{ m/s}, \quad B = 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}, \quad \frac{dB}{dr} = 100 \frac{\text{W}}{\text{m}^3}$$

۱۷.۷ نشان دهید که عملگرهای  $L_x$  و  $L_y$  جا به جایی پذیرند.

۱۸۰۷ در چه شرایطی عملگر تکانه خطی با هامیلتونی جا به جایی پذیر می شود؟

۱۹۰۷ نشان دهید که عملگرهای داده شده با معادلات (۷۰.۷) در روابط (۶۶.۷) تا (۶۸.۷) صدق می کنند.

۲۰۰۷ معادله (۷۱.۷) را ثابت کنید.

۲۱۰۷ نشان دهید که تابع اسپین  $\beta$  یک ویژه تابع  $S^2$  و  $S_z$  است.

۲۲۰۷ در طیف گسیلی هیدروژن، یک خط قوی در  $3.8613 \text{ \AA}$  (شکل ۶.۴) وجود دارد. (الف) این گذار بین چه حالت‌هایی  $(n, l)$  اتفاق می افتد؟ (ب) با رسم نمودار تراز انرژی، حالت‌های مربوط به این گذار را نشان دهید. ساختار ریز را در نظر بگیرید و هر تراز را با اصطلاح رده بندی طیف نمودی مشخص کنید (مثال:  $3d_{5/2}$  و غیره).

۲۳۰۷ ثابت کنید که مقدار چشمداشتی  $\langle r^{-3} \rangle$  برای حالت  $2p$  هیدروژن دارای همان مقداری است که در بخش ۹.۷ داده شده است.



## روشهایی از مکانیک موجی<sup>۱</sup>

### ۱.۸ بسطها؛ تعامد توابع موج

ویژه‌تابعهای یک عملگر مخصوص مثلاً یک هامیلتونی را، برای توصیف توابع دیگری از همان متغیرهای مستقل، می‌توان به‌صورت یک‌سری نشان داد. برای آسانی توجیه، به‌توابع موج تک‌ذره‌ای رجوع می‌کنیم که متغیرهای آن مؤلفه‌های مکان  $x$ ،  $y$  و  $z$  هستند. بیان بالا را به‌صورت ریاضی زیر می‌نویسیم

$$\psi(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x, y, z) \quad (1.8)$$

توابع  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  یک مجموعه ویژه‌تابع از هامیلتونی مخصوص است، لذا

$$H u_n = E_n u_n \quad (2.8)$$

تابع  $\psi(x, y, z)$  می‌تواند هر تابع خوش‌فتماری از  $x$ ،  $y$  و  $z$  باشد. اگر بسط بسه‌صورت

۱. درخواندن اولین بار این کتاب می‌توان این فصل را حذف کرد بدون اینکه به‌تداوم مطلب به‌طور جدی لطمه‌ای وارد شود. برای بحث جدیدتر موضوعهای این فصل می‌توان به‌کتابهای مکانیک موجی رجوع کرد. مثلاً کتاب

R. H. Dicke and J. P. Wittke, *Introduction to Quantum Mechanics*,  
Addison-Wesley (1960).

(۱.۸) امکان پذیر باشد، مجموعه  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  را مجموعه کامل می نامند. بسط (۱.۸) خیلی شبیه بسط فوریه است (بخش ۷.۵). در حقیقت، برای یک ذره در چاه مربعی بینهایت بسط (۱.۸) یک بسط فوریه است، زیرا توابع موج، توابع سینوسی و کسینوسی هستند. تابعی که باید بسط داده شود می بایست خوش رفتار باشد، یعنی مقسدار آن محدود و دارای تعداد محدودی ناپیوستگیهای غیر تکراری باشد. در این معنی، هر تابع-موجی که یک موقعیت فیزیکی ممکن را تشریح کند، خوش رفتار تلقی می شود.

بعضی از هامیلتونیها یک مجموعه بینهایت از توابع موج با ویژه مقدار (انرژی)های گسسته تولید می کنند. هامیلتونیهایی که معرف پتانسیل نوسانگر هماهنگ و چاه مربعی بینهایت باشند، نمونه هایی از این دسته اند. هامیلتونیهای دیگر یک مجموعه محدود از توابع موج با ویژه مقدارهای گسسته به وجود می آورند که متعاقب آن یک مجموعه نامحدود که ویژه مقدارهای آن به طور پیوسته متغیر است، قرار دارد. چاه مربعی با عمق محدود، مثالی از این دسته است (بخش ۸.۶). برای  $E > 0$  ذره در قید چاه نیست و مسئله مشابه مسئله نفوذ از سد (پتانسیل) است (بخش ۱۱.۶). برای هر مقدار  $E > 0$ ، جوابهای قابل قبولی وجود دارد. این جوابها باید در مجموعه کامل حاصل از این هامیلتونی خاص گنجانده شود، بسط معادله (۱.۸) باید شامل یک انتگرال در ناحیه پیوسته این مجموعه باشد. در بحث زیر، از علامتهای جمع ( $\Sigma$ ) فقط در روابط استفاده می شود، اما اگر هامیلتونی پیوستاری از ویژه-مقدارها به وجود آورد از انتگرال استفاده خواهد شد.

برای اینکه ضرایب  $a_n$  معادله (۱.۸) به طور یگانه ای قابل تعیین باشند، مجموعه  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  باید توابع متعامد باشند. منظور از این موضوع این است که هر دو تابع این مجموعه باید در رابطه زیر صدق کنند

$$\int u_k^* u_n d\tau = 0, \quad k \neq n \quad (3.8)$$

انتگرال گیری در تمام فضا انجام می گیرد، و عملاً بدین معنی است که انتگرال گیری در قسمتی از فضا که در آن حداقل یکی از توابع غیر صفر است انجام می گیرد. به آسانی می توان ثابت کرد که ویژه تابعهای با ویژه مقدارهای مختلف، متعامد هستند. مزدوج مختلط معادله (۲.۸) را در مورد جوابی دیگر  $u_k$  با مقدار ویژه  $E_k$ ، می نویسیم

$$Hu_k^* = E_k u_k^* \quad (4.8)$$

هامیلتونی ذره متحرک در پتانسیل  $V(r)$  حقیقی است و مقدار ویژه  $E_k$  نیز حقیقی است. بنابراین هر دوی آنها با مزدوجهای مختلطشان برابرند. معادله (۲.۸) را در  $u_k^*$  و معادله (۴.۸) را در  $u_n$  ضرب کرده و از هم کم می کنیم. رابطه زیر به دست می آید

$$u_k^* H u_n - u_n H u_k^* = (E_n - E_k) u_k^* u_n \quad (5.8)$$

دو عبارت سمت چپ رابطه بالا در هر بخشی از هامیلتونی که بدون تغییر بماند، مثلاً برای

بخش مربوط به انرژی پتانسیل، اثر یکدیگر را خنثی می کنند. باقیمانده به صورت زیر است

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(u_k^* \nabla^2 u_n - u_n \nabla^2 u_k^*) = (E_n - E_k) u_k^* u_n \quad (6.8)$$

برای بقیه محاسبه، فقط فضای یک بعدی را در نظر می گیریم و وضعیت پر زحمت تر سه بعدی به یک مسئله محول می شود (مسئله ۱.۸). در انتگرال گیری معادله (۵.۸)،  $x$  را بین  $-\infty$  تا  $+\infty$  تغییر می دهیم

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \left( u_k^* \frac{d^2 u_n}{dx^2} - u_n \frac{d^2 u_k^*}{dx^2} \right) dx = (E_n - E_k) \int_{-\infty}^{\infty} u_k^* u_n dx \quad (7.8)$$

به کمک انتگرال گیری جزئی رابطه زیر به دست می آید

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ u_k^* \frac{du_n}{dx} - u_n \frac{du_k^*}{dx} \right]_{-\infty}^{\infty} = (E_n - E_k) \int_{-\infty}^{\infty} u_k^* u_n dx \quad (8.8)$$

دو عبارت باقیمانده از انتگرال گیری جزئی مشابه هستند و حذف می شوند.

حال فرض می کنیم که توابع ویژه را می توان بهنجار کرد و بنابراین در  $x = \pm\infty$  صفر می شوند. لذا معادله (۸.۸) به صورت زیر درمی آید

$$(E_n - E_k) \int_{-\infty}^{\infty} u_k^* u_n dx = 0 \quad (9.8)$$

بنابراین ثابت کردیم که، بجز در حالت  $E_n = E_k$ ، باید داشته باشیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_k^* u_n dx = 0 \quad (10.8)$$

و یا برای حالت سه بعدی

$$\int u_k^* u_n d\tau = 0 \quad (11.8)$$

وقتی دو تابع  $u_n$  و  $u_k$  از نظر انرژی-واگن باشند،  $E_n = E_k$ ، آنها ممکن است متعامد باشند یا نباشند. در هر صورت می توان نشان داد که ترکیب خطی دو (یا چند) تابع انرژی-واگن، ممکن است به صورت متعامد تشکیل شود. بدین ترتیب، فرض خواهیم کرد که تمام ویژه تابعهای واگنی که در اینجا با آنها سروکار داریم به صورت متعامد درآمده و بهنجار شده اند، یعنی

$$\int u_n^* u_n d\tau = 1 \quad (12.8)$$

ترکیب معادلات (۳.۸) و (۱۲.۸) به صورت يك معادله مناسب درمی آید

$$\int u_k^* u_n d\tau = \delta_{kn} \quad (13.8)$$

که در آن علامت کروکرونر است و چنین تعریف می شود

$$\begin{aligned} \delta_{kn} &= 1, & k &= n \\ \delta_{kn} &= 0, & k &\neq n \end{aligned} \quad (14.8)$$

يك مجموعه از توابعی که در معادله (۱۳.۸) صدق کند را مجموعه دست هنجار نامند.

## ۲.۸ نظریه اختلال مستقل از زمان

در فیزیک اتمی تعداد مسائلی که می توان آنها را به کمک معادله شرودینگر به طور تحلیلی و با دقت حل کرد، بسیار اندک است. روشهایی که در این بخش و بخش ۴.۸ بحث می شوند، با وضعیتهایی سروکار دارند که در آنها جواب دقیق، تحلیلی یا عددی، مشکل به دست می آید. در این بخش، مشخصاً می خواهیم اثرات تغییرات جزئی بر هامیلتونی، مثلاً تغییرات پتانسیل، را مورد مطالعه قرار دهیم. به عبارت دیگر، می خواهیم بدانیم چگونه توابع ویژه و مقادیر ویژه در اثر نیروهای جزئی مختل کننده تغییر می کنند. روشهای مشابهی در مکانیک کلاسیک از زمان نیوتون تا به حال به کار گرفته شده است.

به طوری که می دانیم، سیارات حول خورشید در مدارهای تقریباً بیضی شکل حرکت می کنند، کلمه تقریباً، بدان دلیل آمده است که در اثر نیروهای وارده از طرف سیارات دیگر در مدارها اختلال ایجاد می شود. روش مطالعه اختلال در مدارهای سیاره ای به طور اساسی به شرح زیر است: ابتدا، نیروهای اختلال کننده را «حذف می کنیم» و تمام سیارات را در مدارهای بیضی شکل قرار داده و در یک زمان معین موقعیت سیارات را مورد مشاهده قرار می دهیم. سپس نیروی برآیند تابع زمان وارد بريك سیاره را از طرف تمام سیارات دیگر محاسبه می کنیم. با این فرض که تمام سیارات در مدارهای بیضی شکل به حرکت ادامه می دهند. از اینجا می توانیم سرعت جا به جایی يك سیاره را از مدار بیضی شکلش حساب کنیم. این نظریه اختلال مرتبه اول است. اگر بخواهیم محاسبات را با دقت در مرتبه بالاتر انجام دهیم، باید اختلالهای مرتبه اول مدار تمام سیارات را محاسبه کنیم، سپس نیروهای وارده را در مدارهای جدید مجدداً محاسبه کنیم، و از اینجا تغییر در اختلالها، یعنی اثرات مرتبه دوم، را به دست آوریم. اگر نیروها در مقایسه با برهم کش اصلی، که در این مورد نیروی جاذبه خورشید است، کوچک باشند، جمله های مابین اختلال در جا به جایی به صورت يك سری تندی همگرا در خواهد آمد.

در مکانیک کوانتومی، اساساً از همان روش اختلال سیاره ای استفاده می شود. در اینجا چیزی بیش از نظریه اختلال مرتبه اول در نظر نخواهیم گرفت. فرض می کنیم يك مجموعه

راست هنجار  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$  به دست آورده ایم که ویژه تابعهای هامیلتونی  $H_0$  هستند. ویژه مقدرهای مربوط به این توابع عبارت اند از  $E_{01}, E_{02}, \dots, E_{0n}, \dots$  بنا بر این داریم

$$H_0 u_n = E_{0n} u_n \quad (15.8)$$

به عنوان مثال هامیلتونی  $H_0$  می تواند هامیلتونی اتم هیدروژن (بدون اسپین) یا یک اتم پیچیده تر باشد. فرض می کنیم که جوارها را به نحوی، یا به طریق تحلیلی یا به وسیلهٔ انتگرال گیری عددی معادلهٔ شرودینگر، به دست آورده ایم.

حال فرض می کنیم که هامیلتونی در نتیجهٔ افزودن یک عبارت کوچک اختلال  $H'$ ، مثلاً تغییر جزئی در تابع پتانسیل، تغییر می کند

$$H = H_0 + H' \quad (16.8)$$

اکنون مسئلهٔ ما به دست آوردن ویژه تابعهای جدید و ویژه مقدرهای جدید برای هامیلتونی است، با این فرض که افزودن  $H'$  را اختلالی کوچک به حساب می آوریم. معادلهٔ شرودینگر را با این هامیلتونی تازه به صورت زیر می نویسیم

$$H \psi_k = E_k \psi_k \quad (17.8)$$

که در آن  $\psi_k$  تابع موج مربوط به  $u_k$  اصلی است. به عبارت دیگر، فرض می کنیم که بین مجموعهٔ توابع موج قدیم و مجموعهٔ جدید تناظر یک به یک برقرار است، و ویژه تابعهای مشابهٔ یکدیگر و ویژه مقدرهای آنها به هم نزدیک باشد. از آنجا که توابع  $u_n$  یک مجموعهٔ کامل است هنجار تشکیل می دهند، می توانیم توابع جدید را به صورت زیر بسط دهیم

$$\psi_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} u_n \quad (18.8)$$

با قرار دادن آن در معادلهٔ (۱۷.۴) داریم

$$(H_0 + H') \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} u_n = E_k \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} u_n \quad (19.8)$$

با استفاده از معادلهٔ (۱۵.۸) می توان آن را به این صورت نوشت

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} H' u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (E_k - E_{0n}) a_{kn} u_n \quad (20.8)$$

حال طرفین معادله را از سمت چپ در مزدوج مختلط تابع دیگری از مجموعهٔ اصلی  $u_m^*$  ضرب کرده و انتگرال می گیریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \int u_m^* H' u_n d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} (E_k - E_{0n}) a_{kn} \int u_m^* u_n d\tau \quad (21.8)$$



علامت  $H'_{mn}$  که عنصر ماتریس هامیلتونی مختل کننده  $H'$  بین حالت‌های  $m$  و  $k$  نام دارد، بدین شکل تعریف می‌شود

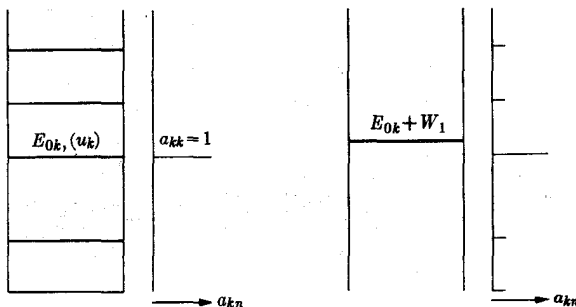
$$H'_{mn} \equiv \int u_m^* H' u_n d\tau \quad (۲۲.۸)$$

با قراردادن آن در معادله (۲۱.۸) و با استفاده از خاصیت راست هنجاری توابع موج، معادله زیر به دست می‌آید

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} H'_{mn} = (E_k - E_{om}) a_{km} \quad (۲۳.۸)$$

تمام جمله‌های سمت راست معادله، جز یکی که در آن  $n = m$  است، حذف می‌شوند. حال اقدام به تعیین ویژه مقادیرهای جدید، مثلاً  $E_k$ ، و ویژه تابعهای جدید، مثلاً ضرایب بسط  $a_{kn}$ ، می‌کنیم. این اطلاعات را از معادله (۲۳.۸) با قبول تقریبهایی به دست خواهیم آورد. برای درک مضمون تقریبات، شکل ۱۰۸ را در نظر بگیرید. در سمت چپ نمودار تراز انرژی بدون اختلال نشان داده شده و در جنب آن مقادیر ضرایب بسط حالت خاص  $\psi_k$  برای مورد بدون اختلال دیده می‌شود. بدیهی است  $\psi_k = u_k$  بوده و تمام ضرایب  $a_{kn}$  بجز  $a_{kk}$ ، صفر هستند. در سمت راست نمودار آنچه با حضور اختلال برای حالت  $\psi_k$  اتفاق می‌افتد نشان داده شده است. انرژی به طور جزئی تغییر کرده است و ضرایب دیگر بسط معمولاً صفر نیستند. در هر صورت اگر، چنانکه فرض خواهیم کرد، اختلال کوچک باشد مقدار  $a_{kk}$  تقریباً برابر ۱ بوده و تمام ضرایب دیگر کوچک هستند.

سمت راست معادله (۲۳.۸) حاوی اختلاف انرژی ضربدر یکی از ضرایب بسط  $a_{kn}$  است. سمت چپ معادله عبارت است از مجموع تعدادی از جمله‌ها که یکی از آنها، که با  $n = k$  مشخص می‌شود، جمله غالب است. در نظریه اختلال مرتبه اول از تمام جمله‌ها جز



شکل ۱۰۸ (الف) ویژه حالت بدون اختلال با انرژی  $E_{0k}$  و تابع ویژه  $u_k$ ، یعنی دامنه  $a_{kk} = 1$ . (ب) ویژه حالت مختل شده با انرژی منتقل شده  $E_k$  و دامنه جفت شدگی غیر صفر  $a_{kn}$ .

جمله غالب صرف نظر می کنیم، بنا بر این می توان نوشت

$$(E_k - E_{o,m}) a_{km} = H'_{mk} \quad (24.8)$$

این معادله برای حالت  $m = k$  تغییر انرژی را به دست می دهد. یعنی انرژی اختلال مرتبه اول برای  $k$  امین حالت به صورت زیر است

$$\Delta E_k = E_k - E_{o,k} = H'_{kk} \quad (25.8)$$

که مجدداً  $1 \approx a_{kk}$  را به کار برده ایم.

تغییر انرژی حالت معین  $k$ ، یعنی عنصر ماتریس  $H'_{kk}$ ، به طور ساده عبارت است از مقدار چشمداشتی  $\langle H' \rangle$  در حالت  $k$  که با ویژه تابع بدون اختلال  $u_k$  حساب شده است. این نتیجه ساده قبلاً در استخراج فرمول انرژی ساختار ریز (اسپین مدار) به کار رفته است [معادله (۷۷.۷)].

ضرایب بسط  $a_{km}$  را برای حالت  $k$ ، با استفاده از معادله (۲۴.۸) نیز می توان به دست آورد، اما به شرطی که  $m \neq k$  باشد. برای سهولت، تقریب  $E_k \approx E_{o,k}$  را نیز به کار می بریم که رابطه زیر به دست می آید

$$a_{km} = \frac{H'_{mk}}{E_{o,k} - E_{o,m}}, \quad m \neq k \quad (26.8)$$

در این محاسبات کاربرد سه شاخص  $m, k, n$  لازم بوده است. بدیهی است، اگر بخواهیم می توانیم در معادله (۲۶.۸) را به  $n$  تبدیل کنیم تا با بسط معادله (۱۸.۸) منطبق شود.

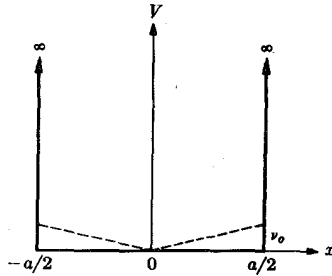
### ۳.۸ مثالهایی از محاسبه اختلال

در فیزیک اتمی و هسته ای اغلب علاقه مند به دانستن تغییر انرژی یک حالت معین در نتیجه یک برهم کش مختل کننده هستیم، و کمتر به تغییرات تابع موج علاقه مندیم. یک مورد مناسب، انرژی ساختار ریز است که در بالا اشاره شد. در این قسمت روی مثالی کار خواهیم کرد که در آن انتقال انرژی و تغییر حاصل در تابع موج را محاسبه می کنیم. شکل ۲.۸ پتانسیل چاه مربعی تغییر یافته با اختلال زیر را نشان می دهد

$$H' = \frac{2v_0}{a} |x| \quad (27.8)$$

توابع موج اختلال نیافته و انرژیهای مربوطه در بخش ۷.۶ بحث شده است. با استفاده از معادله (۲۵.۸) انتقال انرژی  $n$  امین حالت به صورت زیر به دست می آید

$$\Delta E_n \left( \begin{matrix} \text{فرد } n \\ \text{زوج } n \end{matrix} \right) = 2 \int_0^{a/2} \frac{2}{a} \frac{2v_0}{a} x \left( \frac{\cos}{\sin} \right)^2 k_n x dx \quad (28.8)$$



شکل ۲۰۸ چاه مربعی بینهایت و پتانسیل مختل کننده (خط چین).

که تابع کسینوس در مورد  $n$  فرد و تابع سینوس برای  $n$  زوج به کار می رود. عدد موج  $k_n$  از رابطه  $k_n = n\pi/a$  به دست می آید. با قراردادن  $\alpha = k_n x = n\pi x/a$  رابطه زیر نتیجه می شود

$$\Delta E_n \left( \begin{matrix} n \text{ فرد} \\ n \text{ زوج} \end{matrix} \right) = \frac{\lambda v_0}{a^2} \left( \frac{a}{n\pi} \right)^2 \int_0^{n\pi/2} \alpha \left( \frac{\cos}{\sin} \right)^2 \alpha d\alpha \quad (29.8)$$

معادله بالا با وارد کردن  $\cos 2\alpha$  و استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء حل می شود، و نتیجه به صورت زیر به دست می آید

$$\Delta E_n \left( \begin{matrix} n \text{ فرد} \\ n \text{ زوج} \end{matrix} \right) = \frac{v_0}{2} \left( 1 \mp \frac{4}{n^2 \pi^2} \right) \quad (30.8)$$

توابع موج جدید شامل مخلوطی از دیگر توابع موج با همان پارامتر هستند. حال ضرایب اختلاط  $a_{nm}$  را محاسبه می کنیم.

$$a_{nm} = \frac{2}{E_{0n} - E_{0m}} \int_0^{a/2} \frac{2}{a} \frac{2v_0}{a} x \left( \frac{\cos}{\sin} \right) k_n x \left( \frac{\cos}{\sin} \right) k_m x dx \quad (31.8)$$

با جاگذاری  $n\alpha = k_n x = n\pi x/a$  و  $m\alpha = k_m x = m\pi x/a$  داریم

$$a_{nm} = \frac{\lambda v_0}{(E_{0n} - E_{0m}) a^2} \left( \frac{a}{\pi} \right)^2 \int_0^{n\pi/2} \alpha \left( \frac{\cos}{\sin} \right) n\alpha \left( \frac{\cos}{\sin} \right) m\alpha d\alpha \quad (32.8)$$

۱. از آنجا که  $H'$  نسبت به مبدأ تقارن دارد، از معادله (۲۲.۸) معلوم می شود که وقتی حاصل ضرب  $(u_m u_n)$  حول مبدأ پادمتقارن باشد، یعنی وقتی که حالتها دارای پارامتر متقابل باشند، مقدار انتگرال صفر خواهد شد. یادآور می شود که یک حالت با پارامتر زوج دارای  $n$  فرد است و بالعکس.

این انتگرال را می توان خیلی ساده از طریق تعویض توابع سینوس و کسینوس با توابع-  
نمایی مختلط حل کرد. نتیجه به صورت زیر است

$$a_{nm} \begin{pmatrix} \text{فرد-فرد} \\ \text{زوج-زوج} \end{pmatrix} = \frac{4}{\pi^2} \frac{v_0}{E_{01}} \frac{1}{n^2 - m^2} \left[ \frac{(-1)^{(m-n)/2} - 1}{(m-n)^2} \pm \frac{(-1)^{(m+n)/2} - 1}{(m+n)^2} \right] \quad (۳۳.۸)$$

که در آن  $E_{01} = \pi^2 \hbar^2 / 2Ma^2$  پایینترین حالت انرژی است، و از رابطه  $E_{0n} = E_{01} n^2$  نیز استفاده شده است.

جدول ۱۰.۸ مقادیر  $a_{nm} E_{01} / v_0$  را بر اساس محاسبه معادله (۳۳.۸) تا  $n = m = ۱۰۵$  را به دست می دهد. ضرایب قطری در جدول داده نشده اند که عبارت اند از

$$a_{11} = a_{22} = \dots \approx ۱$$

از آنجا که نظریه اختلال مرتبه اول به کار رفته است، محاسبات فقط وقتی  $v_0 \ll E_{01}$  باشد صحیح است.

### ۴.۸ قطری کردن ماتریس

کاربرد نظریه اختلال مرتبه اول که در بخش ۲.۸ به دست آمده، بسیار ساده است. فرمولهای مربوط روشن هستند و اساساً محاسبه هر عنصر ماتریس آسان است و بنا بر این تعیین سهم هر ویژه حالت  $u_n$  در تشکیل حالت  $\psi$  نیز آسان است. نارسایی این روش در آنجاست که نتایج محاسبه اختلال مرتبه اول خیلی دقیق نیست، مگر برهم کنش اختلال کننده کوچک باشد. روش قطری کردن ماتریس که در این بخش مورد استفاده قرار می گیرد دقیقتر است، و در حقیقت وقتی یک مجموعه بینهایت از ویژه تابعها به کار گرفته شود نتایج دقیق و کامل هستند. در هر صورت، این روش خیلی پرحمتر است و در تمام حالات، مگر در حالات بسیار ساده، حل مسائل باید با استفاده از کامپیوترهای الکترونیکی انجام گیرد.

فرض می کنیم که هامیلتونی معلوم اما حل مستقیم معادله شرودینگر مربوطه بسیار مشکل باشد. بنابراین در جستجوی جوابهای  $\psi$  هستیم که می تواند به صورت یک بسط و همچنین توابع ویژه مربوط  $E_k$  بیان شود. فعلاً شاخص  $k$  را حذف می کنیم و می نویسیم

$$\psi = \sum_{n=1}^N a_n u_n \quad (۳۴.۸)$$

می خواهیم ضرایب  $a_n$  در این بسط را پیدا کنیم. توابع  $u_n$  می تواند هر مجموعه داست هنجار کامل باشد. اما البته یک انتخاب مناسب توابع، همگرایی سری را سریعتر می کند. جمع جملات معادله (۳۴.۸) به جای اینکه تا بینهایت ادامه یابد، در  $n = N$  قطع می شود. به طور کلی، شرح کامل  $\psi$  فقط وقتی می تواند به دست آید که  $N \rightarrow \infty$ ، اما برای مقاصد

جدول ۱۰۸ ضرایب  $\alpha_m$  بر حسب  $V/E_0$

$m/n$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	—	۰	۰۰۲۵۴	۰	۰۰۵۰۹	۰۰۵۰۵	۰	۰	۰۰۵۰۰۱	۰
۲	۰	—	۰	۰۰۱۵۰	۰	۰۰۱۵۰	۰	۰۰۲۰۰۲	۰	۰
۳	۰۰۲۵۴	۰	—	۰	۰۰۱۲۷	۰	۰۰۲۰۲	۰	۰۰۲۰۰۳	۰
۴	۰	۰۰۱۵۰	۰	—	۰	۰۰۲۰۹۷	۰	۰	۰	۰۰۵۰۰۰
۵	۰۰۵۰۹	۰	۰۰۱۲۷	۰	—	۰	۰۰۵۰۸۴	۰	۰۰۵۰۰۱	۰
۶	۰	۰	۰	۰۰۲۰۹۷	۰	—	۰	۰۰۲۰۰۲	۰	۰
۷	۰۰۵۰۵	۰	۰۰۲۰۲	۰	۰۰۵۰۸۴	۰	—	۰	۰۰۲۰۰۳	۰
۸	۰	۰۰۲۰۰۲	۰	۰	۰	۰۰۲۰۰۲	۰	—	۰	۰۰۵۰۰۱
۹	۰۰۲۰۰۳	۰	۰۰۲۰۰۳	۰	۰	۰	۰۰۲۰۰۳	۰	—	۰
۱۰	—	۰	۰	۰۰۵۰۰۰	۰	۰	۰	۰۰۵۰۰۰	۰	—

عملی باید دنبال چیزی که کمتر کامل است باشیم.

برای یافتن ضرایب  $a_n$ ، معادله (۳۴.۸) را در معادله شرودینگر قرار می‌دهیم، لذا

$$\sum_n a_n H u_n = E \sum_n a_n u_n \quad (۳۵.۸)$$

حال از يك روش متداول که همان ضرب کردن در مزدوج مختلط یکی از توابع مجموعه راست هنجار،  $u_k^*$ ، است استفاده می‌کنیم و سپس در تمام مختصات انتگرال می‌گیریم که رابطه زیر به دست می‌آید

$$\sum_{n=1}^N a_n H_{kn} = E a_k \quad (۳۶.۸)$$

که در آن عنصر ماتریس  $H_{kn}$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$H_{kn} \equiv \int u_k^* H u_n d\tau \quad (۳۷.۸)$$

البته، این عناصر ماتریس را وقتی مجموعه  $u_n$  داده شده و  $H$  معلوم باشد، می‌توان محاسبه کرد. با انتساب تمام مقادیر ممکن به  $k$  از ۱ تا  $N$ ، می‌توان يك دستگاه  $N$  معادله‌ای از معادله (۳۶.۸) به دست آورد. این دستگاه معادلات را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} a_1(H_{11} - E) + a_2 H_{12} + a_3 H_{13} + \dots + a_N H_{1N} &= 0 \\ a_1 H_{12} + a_2(H_{22} - E) + a_3 H_{23} + \dots + a_N H_{2N} &= 0 \\ a_1 H_{21} + a_2 H_{22} + a_3(H_{23} - E) + \dots + a_N H_{2N} &= 0 \\ &\vdots \\ a_1 H_{N1} + a_2 H_{N2} + a_3 H_{N3} + \dots + a_N(H_{NN} - E) &= 0 \end{aligned} \quad (۳۸.۸)$$

معادله‌های (۳۸.۸) يك دستگاه معادلات همگن مرتبه اول برای ضرایب  $a_n$  تشکیل می‌دهد. محاسبه بر اساس این فرض که مجموعه کامل یعنی  $N = \infty$  باشد، استوار است. برای مقاصد عملی، وقتی مجبور به محدود کردن تعداد عبارات  $N$  هستیم، روشن نیست که ضرایب  $a_n$  حاصل از حل معادلات (۳۸.۸) با  $N$  محدود، بهترین تقریب ممکن را برای تابع موج  $\psi$  [معادله (۳۴.۸)] که می‌تواند یا مجموعه  $u_k$  به دست آید، به وجود آورد. در هر حال این موضوع صحیح است. اگر چه در اینجا نمی‌خواهیم وقتی را صرف اثبات آن کنیم. به خوبی معلوم است که يك چنین دستگاه معادلات همگن فقط وقتی حاوی جوابهای غیر صفر برای مجهولها است که دترمینان ضرایب صفر شود. بنا بر این داریم

۱. برای اثبات رك

$$\begin{vmatrix} (H_{11} - E) & H_{12} & H_{13} & \dots & H_{1N} \\ H_{21} & (H_{22} - E) & H_{23} & \dots & H_{2N} \\ \vdots & & & & \\ H_{N1} & H_{N2} & H_{N3} & \dots & (H_{NN} - E) \end{vmatrix} = 0 \quad (39.8)$$

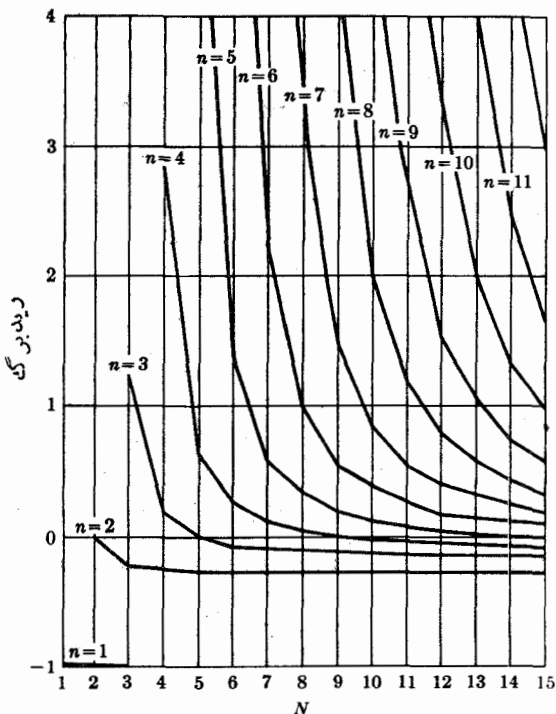
از آنجا که تمام عناصر ماتریس  $H_{kn}$  معلوم فرض می‌شوند، این معادله مرتبه  $N$ ام بر حسب  $E$  می‌تواند حل شود. این معادله را معادله مشخصه می‌نامند که از آن  $N$  ویژه مقدار  $E$  برای  $N$  جواب تقریبی معادله شرودینگر به دست می‌آید. برای یک ویژه مقدار معین  $E$ ، مجموعه  $N$  معادله  $(38.8) N$  ضریب  $a_n$  به دست می‌دهد که از آنجا ویژه تابع  $\psi$  مربوط به آن مقدار معلوم  $E$  حاصل می‌شود.

اگر توابع  $u_n$  اتفاقاً ویژه تابعهای هامیلتونی  $H$  باشند، تمام عناصر  $H_{kn}$  صفر خواهند شد مگر آنهایی که در آنها  $n = k$  است. در این صورت ماتریسی که با این عناصر تشکیل می‌شود، تنها در قطر آن جملات غیر صفر وجود دارد. بنا بر این یافتن ویژه تابعهای  $\psi_k$  هامیلتونی معین معادل قطری کردن ماتریسی است که عناصر آن به صورت  $(37.8)$  و با قرار گرفتن  $\psi$  به جای  $u$  به دست می‌آید.

به عنوان مثالی از محاسبه قطری کردن، ویژه مقدارهای تقریبی  $E$  حالتهای  $s$  هیدروژن را که از حل معادله مشخصه در ۱۵ مورد جداگانه،  $N = 1$  تا  $N = 15$ ، به دست آمده، در شکل ۳۰.۸ نشان داده ایم. توابع  $u_n$  به کار رفته به صورت  $c_1 \exp(-ar) + c_2 r \exp(-ar)$ ، آنها،  $u_n$ ، که دارای  $N$  جمله است. ضرایب  $c_1$  و غیره به نحوی انتخاب می‌شوند که توابع راست هنجار باشند. مقدار  $a$  به طور دلخواه  $27/32$  عکس شعاع بور گرفته شد. شکل ۳۰.۸ نشان می‌دهد که با این مجموعه توابع، برای انرژی حالت پایه با  $N \geq 3$  مقدار مناسبی به دست می‌آید. برای انرژی حالت  $2s$  با  $N \geq 5$  مقدار نسبتاً درستی به دست می‌آید و برای حالت  $3s$  لازم است که  $N = 10$  باشد. همگرایی کند نشان می‌دهد که مجموعه راست هنجار انتخابی برای تشریح حالتهای بالاتر  $s$  در اتم هیدروژن خیلی مناسب نیست.

## ۵.۸ نظریه اختلال وابسته به زمان

تغییر حالتهای فیزیکی اتمها، مولکولها و دسته‌ها به وسیله نظریه اختلال وابسته به زمان مطالعه می‌شود. گسیل فوتون از یک اتم، همراه با گذار از یک حالت کوانتومی اتم به یک حالت پایینتر، نمونه‌ای از این تغییر است. مثالهای دیگر واپاشیهای بتا، آلفا و گاما از هسته‌ها و برخورد اتمی با هسته‌های همراه با تغییر حالت اتمها با هسته‌های برخوردکننده هستند. در حالت خاص، اتمی را در یک حالت برانگیخته  $\psi_m$  با انرژی  $E_m$  در نظر می‌گیریم. این دستگاه کوانتوم مکانیکی می‌تواند به یک حالت جدید  $\psi_k$  تغییر حالت دهد،



شکل ۳۰۸ موقعیت حالت‌های s اتم هیدروژن که به کمک ماتریسهای قطری با ابعاد  $N \times N$  به دست آمده است.

بدین ترتیب که اتم در یک حالت با انرژی پایینتر قرار می‌گیرد و یک فوتون از اتم جدا شده و در جهتی حرکت می‌کند.

یک مثال دیگر آزمایش فرانک-هرتز است (بخش ۱۱.۴). قبل از برخورد، حالت  $\psi_k$  یک اتم را در حالت پایه نشان می‌دهد که یک الکترون با تکانه معین (موج تخت) به سمت آن حرکت می‌کند. پس از برخورد، حالت  $\psi_k$  اتم را در حالت برانگیخته نشان می‌دهد که الکترون با انرژی جنبشی کاهش یافته در جهتی از اتم دور می‌شود.

در هر دو مثال حالت‌های  $\psi_m$  و  $\psi_k$  ویژه حالت‌های هامیلتونی  $H_0$  هستند که بوضوح پیچیده‌تر از هامیلتونی اتمی است، زیرا یک فوتون یا یک الکترون نیز جزئی از دستگاه است. برهم کنش مختل‌کننده  $H'$  موجب تغییر  $\psi_m$  به  $\psi_k$  می‌شود که در زیر مورد بحث قرار می‌گیرد.

در ایسن مثالها و همچنین در هر مثال دیگری از واپاشی اتمی یا هسته‌ای، تعداد حالت‌های  $\psi_k$  که می‌توان در واپاشی به آن دست یافت خیلی زیاد است، زیرا تعداد



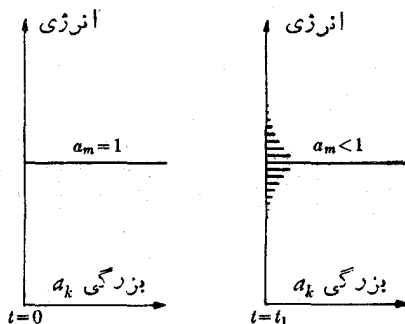
راستاهایی که فوتون یا الکترون می‌تواند حرکت کند خیلی زیاد است (در مقایسه با بخش ۹.۳). در هر صورت، اگر توابع موج این ذرات را در جعبه‌ای با حجم معین بهنجار کنیم، تعداد حالت‌های ذره در یک فاصله انرژی داده شده محدود است. حال سؤال مهم این است که: آیا انرژی هر ذره (الکترون یا فوتون) دقیقاً برابر با اختلاف بین حالت اولیه  $\psi_m$  و حالت نهایی اتم است؟ جواب بیه این سؤال این است که به علت اصل عدم قطعیت لازم نیست این انرژی با دقت نامحدود برابر با اختلاف حالتها باشد. حداقل یکی از دو تراز اتمی در حالت برانگیخته بوده و بنابراین ناپایدار و دارای طول عمر محدود است. طبق اصل عدم قطعیت [معادله (۵۲.۵)] این حالت دارای عدم قطعیت غیر صفر در انرژی است. بنابراین انرژی حالت  $\psi_m$  انرژی تعداد زیادی از حالت‌های  $\psi_k$  را می‌پوشاند. نظریه اختلال، که یک نظریه موجی است، خود به خود این موضوع را به حساب می‌آورد. هدف نظریه اختلال، با توجه به دو مثال فوق، تعیین آهنگ گذارها است که به صورت تشکیل دامنه‌های احتمال در حالت‌های  $\psi_k$  در مقابل کاهش احتمال در حالت  $\psi_m$  محاسبه می‌شود. این مسئله را به طریق زیر حل خواهیم کرد. فرض می‌کنیم که دستگاه در زمان  $t \gg 0$  در حالت

$$\Psi = \psi_m e^{-E_m t/\hbar} \quad (40.8)$$

قرار دارد. این موضوع در شکل ۴.۸ الف نشان داده شده است. در زمان  $t = 0$  برهم کنشی که ممکن است موجب تغییر شود، «آغاز» می‌شود. وقتی این برهم کنش، یعنی اختلال  $H'$  برای مدتی عمل کند، چگالی احتمال در حالت‌های دیگر به وجود می‌آید و تابع موج را می‌توان در مجموعه  $\psi_n$  به صورت زیر بسط داد

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \psi_n e^{-iE_n t/\hbar} \quad (41.8)$$

توابع منفرد  $\psi_n$  ویژه تابع‌های راست هنجار هامیلتونی  $H_0$  هستند. بنا بر این داریم



شکل ۴.۸ تشکیل دامنه در حالت‌های دستگاهی که در ابتدا در حالت  $\psi_m$  بوده است.

$$H_0 \psi_n = E_n \psi_n \quad (۴۲.۸)$$

مقدار ضرایب  $a_n$  به‌طور کیفی در شکل ۴.۸ ب ترسیم شده است. محور قائم این شکل معرف انرژی متوسط یک حالت، تیز یا غیر تیز، است. این شکل به روشنی نشان می‌دهد که چگونه از طریق واپاشی یا تبدیل  $\psi_m$  می‌توان به یک توار (عملاً "بسیار باریک") از حالتها دست یافت.

تابع موج کل  $\Psi$  باید در معادلهٔ تابع زمان شرودینگر صدق کند

$$H\Psi = \hbar i \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (۴۳.۸)$$

که در آن داریم

$$H = H_0 + H' \quad (۴۴.۸)$$

هامیلتونی کل شامل برهم کنش اختلالی  $H'$  است که اختلاط حالتها یا، به‌طوری که در بالا بیان شد، جریان احتمال از یک حالت به حالت دیگر را به‌وجود می‌آورد. با قراردادن معادلات (۴۴.۸) و (۴۱.۸) در معادلهٔ (۴۳.۸) و استفادهٔ مجدد از معادلهٔ (۴۲.۸) رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\hbar i \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a}_n \psi_n e^{-iE_n t/\hbar} = \sum_{n=1}^{\infty} H' a_n \psi_n e^{-iE_n t/\hbar} \quad (۴۵.۸)$$

که نقطهٔ روی  $a_n$  به‌معنی انجام دیفرانسیل‌گیری نسبت به‌زمان است. حال معادلهٔ (۴۵.۸) را از سمت چپ در یکی دیگر از ویژه تابعهای  $H_0$  ضرب کرده و نسبت به‌فضای  $\psi$  انتگرال می‌گیریم. بدین ترتیب معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید (خاطر نشان می‌شود که توابع  $\psi_n$  همه راست‌هنجار هستند).

$$\dot{a}_k = \frac{1}{\hbar i} \sum_{n=1}^{\infty} a_n H'_{kn} e^{i\omega_{kn} t} \quad (۴۶.۸)$$

که در آن  $H'_{kn}$  عنصر ماتریس است که بسا معادلهٔ (۴۲.۸) داده می‌شود، و  $\omega_{kn}$  بسامد زاویه‌ای است که چنین تعریف می‌شود

$$\omega_{kn} \equiv \frac{E_k - E_n}{\hbar} \quad (۴۷.۸)$$

حال فرض می‌کنیم که اختلال به‌اندازهٔ کافی ضعیف باشد به‌طوری که تشکیل احتمال، جز در حالت اولیهٔ  $\psi_m$ ، در مدت زمان موردنظر بسیار کوچک است. بنابراین می‌توان در نظریهٔ اختلال مرتبهٔ اول در سمت راست معادلهٔ (۴۶.۸) نوشت  $a_m = 1$  و دیگر  $a_m$ ها را برابر صفر قرارداد. بدین ترتیب داریم

$$a_k = \frac{1}{\hbar i} \int_0^{t_1} H'_{km} e^{i\omega_{km}t'} dt \quad (۴۸.۸)$$

بنابراین، احتمال یافتن دستگاه (اتم) در حالت  $\psi_k$  در هر زمان معین برابر  $|a_k|^2$  است. به طور کلی پس از فرایند گذار، حالت دقیق نهایی را نمی توان از طریق تجربی مشخص کرد. در هر حال، می توان کل آهنگ گذار را بدوسیله جمع (کردن) تمام حالت های نهایی ممکن محاسبه کرد. فرض می کنیم که اختلال ثابت  $H'$  در زمان  $t = 0$  آغاز به عمل کند و پس از زمان کوتاهی در  $t = t_1$  قطع شود. کل احتمال گذار را به صورت جمع تمام عبارات  $|a_k|^2$  در زمان  $t_1$  حساب کرده و با تقسیم آن بر  $t_1$  آهنگ گذار را می یابیم.

برای سهولت فرض می کنیم که در یک فاصله کوچک انرژی حول  $E_m$ ، عنصر ماتریس  $H'_{km}$  برای تمام حالت های مورد ملاحظه، یعنی برای تمام حالت های که در یک نوع معین گذار به طور مشروط (مثلاً مشروط به بقای تکانه زاویه ای) می توان بدانها رسید، مقدار ثابتی است. با انتگرال گیری معادله (۴۸.۸) رابطه زیر به دست می آید

$$a_k = \frac{H'_{km} e^{i\omega_{km}t_1} - 1}{\hbar \omega_{km}} = \frac{H'_{km}}{\hbar} e^{i\omega_{km}t_1/2} \frac{2 \sin \omega_{km}t_1/2}{\omega_{km}} \quad (۴۹.۸)$$

آهنگ کل گذار از حالت  $\psi_m$  به تمام حالت های دیگر از رابطه زیر به دست می آید

$$\lambda = \frac{1}{t_1} \sum_k |a_k|^2 = \frac{1}{t_1} \int_{-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \frac{dN}{dE} dE_k \quad (۵۰.۸)$$

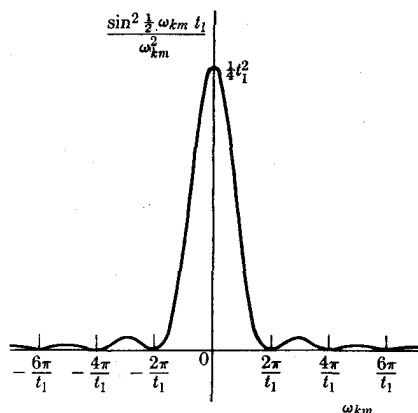
که در آن  $dN/dE$  تعداد حالت های نهایی قابل دسترسی بر واحد انرژی است. با نوشتن  $dE_k = \hbar d\omega_{km}$  [از معادله (۴۷.۸)] رابطه زیر به دست می آید

$$\lambda = \frac{4}{\hbar t_1} |H'_{km}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega_{km}t_1/2}{\omega_{km}^2} \frac{dN}{dE} d\omega_{km} \quad (۵۱.۸)$$

شکل ۵.۸ نشان می دهد که مهم ترین سهم انتگرال از ناحیه  $-\pi < \omega_{km}t_1 < \pi$  حاصل می شود. برای هر مقدار معقولی از زمان مشاهده، این فاصله انرژی  $(\Delta E_k = \hbar \Delta \omega_{km})$  مقدار بسیار کوچکی است. می توان فرض کرد که در این فاصله برای مقاصد عملی  $dN/dE$  مقدار ثابتی است. بنابراین با جاگذاری  $x = \omega_{km}t_1/2$  می توان نوشت

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{4}{\hbar} |H'_{km}|^2 \frac{dN}{dE} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \\ &= \frac{4\pi}{\hbar} |H'_{km}|^2 \frac{dN}{dE} \end{aligned} \quad (۵۲.۸)$$

در مکانیک کوانتومی معادله (۵۲.۸) نقطه شروع محاسبات آهنگ گذار است. گاهی



شکل ۵.۸ ترسیم تابع زیر انتگرال (۵۲.۸) با فرض  $dN/dE$  ثابت.

این را قاعده طلایی شماره دو می نامند.

### ۶.۸ جذب تابش

در فصل ۷ در یافتیم که چگونه می توان با استفاده از مکانیک موجی شرودینگر ترازهای انرژی اتم هیدروژن را بدون در نظر گرفتن فرضهای ویژه محاسبه کرد. حال نشان خواهیم داد که چگونه مکانیک موجی می تواند آهنگ گذار و قواعد انتخاب را پیش بینی کند، یعنی همان نکته ای که نظریه بور کاملاً فاقد آن است. ابتدا، احتمال جذب یک فوتون با انرژی  $\hbar\omega$  را در اتم هیدروژنی که در تابش با بسامد  $\omega$  غوطه ور باشد حساب می کنیم. این احتمال را می توان با استفاده از نظریه اختلال تابع زمان به دست آورد.

به عنوان مثال، طول موج اولین خط سری لیمان حدود ۱۰۰۰ برابر قطر اتم است. برای تمام مقاصد عملی می توان فرض کرد که میدان الکتریکی تابشی با این بسامد در تمام حجم اتم فاز یکسان دارد. این میدان الکتریکی به صورت زیر بیان می شود

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \tag{۵۳.۸}$$

و فرض می کنیم این میدان در راستای محور  $z$  است. بنابراین پتانسیل مختل کننده برای

۱. قاعده طلایی شماره یک در مورد اختلالهای مرتبه دوم به کار می رود که در آن عناصر ماتریس مستقیم  $H'_{km}$  بین حالتی که می توانند بدون نقض قانون بقا مبادله شوند، صفر می شود.
۲. در حال حاضر خیلی در بند ریزه کاریها نیستیم، بیشتر این فرضها دارای ماهیت نسبیستی هستند که در بخش ۱۰.۷ درباره آنها بحث شده است.

الکترون چنین است

$$H' = V = ez\mathcal{E}_\nu \cos \omega t \quad (54.8)$$

که در  $z = 0$ ،  $V = 0$  برگزیده شده است. به علت این پتانسیل اختلالی، اتمی که در ابتدا در حالت  $\psi_j$  بوده در حالت‌های دیگر دارای افزایش دامنه می‌شود، یعنی مشخصاً دامنه حالت  $\psi_k$  بر طبق معادله (۴۶.۸) افزایش خواهد یافت

$$\dot{a}_k = \frac{1}{\hbar i} H'_{kj} e^{i\omega_{kj}t} \quad (55.8)$$

در اینجا

$$\omega_{kj} = \frac{E_k - E_j}{\hbar} \quad (56.8)$$

و عنصر ماتریس  $H'_{kj}$  از رابطه زیر به دست می‌آید

$$H'_{kj} = \int \psi_k^* ez\mathcal{E}_\nu \cos \omega t \psi_j d\tau \quad (57.8)$$

حال یک عنصر جدید ماتریس  $z_{kj}$  را با تعریف زیر در نظر می‌گیریم

$$z_{kn} \equiv \int \psi_k^* z \psi_j d\tau \quad (58.8)$$

و تابع کسینوس را به صورت

$$\cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad (59.8)$$

می‌نویسیم. با قراردادن این مقادیر در معادله (۵۵.۸) داریم

$$\dot{a}_k = \frac{e\mathcal{E}_\nu z_{kj}}{2\hbar i} [e^{i(\omega_{kj} + \omega)t}] \quad (60.8)$$

با انتگرال‌گیری بین زمان صفر تا  $t$  نتیجه زیر به دست می‌آید

$$a_k = -\frac{e\mathcal{E}_\nu z_{kj}}{2\hbar} \left[ \frac{e^{i(\omega_{kj} + \omega)t} - 1}{\omega_{kj} + \omega} + \frac{e^{i(\omega_{kj} - \omega)t} - 1}{\omega_{kj} - \omega} \right] \quad (61.8)$$

ابتدا آخرین جمله را در نظر می‌گیریم. وقتی  $\omega \approx \omega_{kj}$  است، مخرج کوچک می‌شود و این جمله آهنگ افزایش سریعی در  $a_k$  به وجود می‌آورد یعنی احتمال‌گذار زیاد می‌شود. البته، بنا بر معادله (۵۶.۸)، شرط آن به صورت زیر است

$$\hbar\omega \approx E_k - E_j \quad (۶۲.۸)$$

در این مورد، حالت نهایی  $\psi_k$  بالاتر از حالت اولیه  $\psi_j$  است و بنابراین فرایند به صورت جذب یک فوتون  $\hbar\omega$  در می آید.

حال جمله اول معادله (۶۱.۸) را در نظر می گیریم که طبق آن میزان افزایش دامنه وقتی

$$\hbar\omega = E_j - E_k \quad (۶۳.۸)$$

باشد، زیاد است. در این مورد، حالت نهایی  $\psi_k$  پایینتر از حالت ابتدایی  $\psi_j$  است. در نتیجه در اینجا آزاد شدن انرژی وجود دارد و این بدان معنی است که این جمله گسیل القایی را نشان می دهد. بنا بر این نشان داده ایم که، در شرایط مشابه، احتمالات جذب و گسیل تابش برابرند.

اکنون حالت جذب تابش را در میدان تابشی که چگالی انرژی آن در فاصله  $\omega$  تا  $\omega + d\omega$  برابر  $U(\omega)d\omega$  ژول در هر متر مکعب باشد، مورد بررسی قرار می دهیم. مربع مقدار عددی  $a_k$  را از معادله (۶۱.۸) حساب می کنیم و فقط جمله جذب را نگه می داریم [با معادله (۴۹.۸) مقایسه شود].

$$|a_k|^2 = \frac{e^2 \mathcal{E}^2 |z_{kj}|^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2 \frac{1}{2} (\omega_{kj} - \omega)t}{(\omega_{kj} - \omega)^2} \quad (۶۴.۸)$$

چگالی انرژی در میدان تابشی  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$  چنین است<sup>۱</sup>

$$U = \frac{\epsilon_0 \mathcal{E}_0^2}{2} \quad (۶۵.۸)$$

در فاصله  $\omega$  تا  $\omega + d\omega$ ، این مقدار را با  $U(\omega)d\omega$  جایگزین می کنیم که رابطه ای به صورت زیر به دست می آید

$$d|a_k|^2 = \frac{2e^2 U(\omega) |z_{kj}|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} \frac{\sin^2 \frac{1}{2} (\omega_{kj} - \omega)t}{(\omega_{kj} - \omega)^2} d\omega \quad (۶۶.۸)$$

فرض می کنیم که چگالی انرژی  $U(\omega)$  در فاصله بسامدی مورد نظر یکنواخت باشد. پس از انتگرال گیری [با معادله (۵۲.۸) مقایسه شود] داریم

$$|a_k|^2 = \frac{\pi e^2 U(\omega) |z_{kj}|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} t \quad (۶۷.۸)$$

۱. به کتابهای الکترواستیته و مغناطیس مراجعه شود.

بنابراین احتمال گذار در واحد زمان عبارت است از

$$\lambda_{j \rightarrow k} = \frac{\pi e^2 U(\omega) |z_{kj}|^2}{\epsilon_0 \hbar^2} \quad (68.8)$$

از بحث بالا معلوم می شود که این رابطه را می توان برای گسیل القایی نیز، وقتی  $E_j > E_k$  باشد، به کار برد.

معادله (68.8) احتمال گذار در ثانیه را برای جذب تابش توسط اتمی که در تابش قطبیده خطی در جهت  $z$  غوطه ور باشد، نشان می دهد. بدیهی است که قطبیده گسی خطی در راستاهای  $x$  و  $y$  یا قطبیده گسی دایره ای نیز می تواند موجب جذب بشود. بنا بر این کمیت های  $x_{kj}$  و  $y_{kj}$  شبیه به  $z_{kj}$  تعریف می شود و از ترکیب سه کمیت رابطه زیر به دست می آید

$$r_{kj}^2 = x_{kj}^2 + y_{kj}^2 + z_{kj}^2 \quad (69.8)$$

لذا آهنگ گذار برای جذب در میدان غیر قطبی چنین است

$$\lambda_{j \rightarrow k} = \frac{e^2 U(\omega) |r_{kj}|^2}{3 \epsilon_0 \hbar^2} \quad (70.8)$$

حال می توان قواعد انتخابی که قبلاً بحث شد را به دست آورد. ابتدا به عنوان مثال گذار ممنوع  $1S_{1/2}$  به  $2S_{1/2}$  در هیدروژن را در نظر می گیریم. چرا این گذار ممنوع است؟ با نگاهی به معادله (58.8) جواب آشکار می شود. توابع موج  $\psi_k$  و  $\psi_j$  دارای پاریته زوج هستند در حالیکه تابع  $z$  دارای پاریته فرد است. بنا بر این تابع حاصل ضرب دارای پاریته فرد بوده و نتیجه انتگرال گیری برابر صفر است. به طور کلی، توابع  $\psi_k$  و  $\psi_j$  باید دارای پاریته مخالف باشند تا  $r_{kj}$  غیر صفر باشد.

برای مطالعه دیگر محدودیتهایی که در رابطه بین  $\psi_k$  و  $\psi_j$  وجود دارد، رابطه کامل  $z_{kj}$  را می نویسیم و توابع موج هیدروژن را در آن قرار می دهیم.

$$z_{km} = \int R_k^* R_j r^2 dr \int \int Y_{l_k m_k}^* Y_{l_j m_j} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \quad (71.8)$$

انتگرال بر حسب  $\phi$  به صورت ساده زیر درمی آید

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{im_k \phi} e^{im_j \phi} d\phi = \begin{cases} 1 & m_k = m_j \\ 0 & m_k \neq m_j \end{cases} \quad (72.8)$$

این رابطه، قاعده گذار  $\Delta m = 0$  را برای تابش خطی قطبیده در راستای  $z$  به دست می دهد. انتگرال بر حسب  $\theta$  کمی پیچیده تر است، اما برابر صفر می شود مگر وقتی که  $\Delta l = \pm 1$  باشد.

برای عناصر  $x_{kj}$  و  $y_{kj}$  نیز نتایج همان است مگر وقتی که  $\Delta m = \pm 1$  باشد. بنا بر این قواعد انتخاب نهایی برای جذب تابش دو قطبی الکتریکی در یک میدان غیر قطبی

عبارت است از

$$\Delta l = \pm 1, \quad \Delta m = \pm 1 \text{ یا } 0 \quad (۷۳.۸)$$

همین قواعد انتخاب برای گسیل القایی نیز به کار می رود. بر راستای اسپین هیچگونه نیروی اختلالی وارد نمی شود و در نتیجه راستای اسپین تغییر نمی کند. در حالتی که گذار دو قطبی الکتریکی ممنوع است، گذارهای مرتبه بالاتر می تواند انجام گیرد. برهم کنش چهار قطبی الکتریکی متکی بر این حقیقت است که اندازه اتم در مقایسه با طول موج مفروض در بالا کاملاً قایل صرف نظر کردن نیست. برهم کنش دو قطبی مغناطیسی به میدانهای مغناطیسی اتم مربوط است. این هر دو نوع گذار در آنها مشاهده می شوند، اما نه در رقابت با گذارهای دو قطبی الکتریکی.

## ۷.۸ گسیل خود به خودی

برای بررسی مناسب گسیل خود به خودی تابش باید از نظریه کوانتومی میدان تابش استفاده کرد. ما در اینجا وارد بحث این موضوع نمی شویم، بلکه فرمول آهنگ گذار را برای یک حالت خاص به دست می آوریم.

در این مورد خاص، تعداد زیادی از اتمها دارای جمعیتهایی با حالت های  $z$  و  $k$  در تعادل حرارتی با یک میدان تابش فرض می شوند. جمعیت این دو حالت به ترتیب  $N_k$  و  $N_z$  است. لذا می توان نوشت (بخش ۱۳.۱)

$$\frac{N_k}{N_j} = e^{-\hbar \omega_{kj}/kT} \quad (۷۴.۸)$$

از آنجا که تعادل وجود دارد، تعداد گذارهای  $k \rightarrow z$  باید برابر با تعداد گذارهای  $z \rightarrow k$  باشد. پس می توان نوشت

$$N_j \lambda_{jk} = N_k (\lambda_{kj} + \lambda'_{kj}) \quad (۷۵.۸)$$

که در آن  $\lambda_{jk}$  آهنگ جذب یا آهنگ گسیل القایی (برابر  $\lambda_{jk}$ )، و  $\lambda'_{kj}$  آهنگ گسیل خود به خودی است. کمیت اخیر مستقل از شدت  $U$  میدان تابش است. از ترکیب معادلات (۷۴.۸) و (۷۵.۸) و با دانستن اینکه  $\lambda_{jk} = \lambda'_{kj}$  داریم

$$\lambda_{jk} (e^{\hbar \omega/kT} - 1) = \lambda'_{kj} \quad (۷۶.۸)$$

توزیع بسامد میدان تابش به صورت قانون پلانک است. معادله (۷۶.۸) را به صورت زیر می نویسیم

$$U(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3 (e^{\hbar \omega/kT} - 1)} \quad (۷۷.۸)$$



با قراردادن این در معادله (۷۰.۸) و مرتب کردن آن داریم

$$\lambda_{jk}(e^{*\omega/kT} - 1) = \frac{e^2 \omega^3}{3\pi \epsilon_0 c^3 \hbar} |r_{jk}|^2 \quad (70.8)$$

با مقایسه این معادله با معادله (۷۶.۸) می بینیم که آهنگ گذار برای گسیل خودبه خودی تابش دوقطبی الکتریکی عبارت است از

$$\lambda'_{jk} = \frac{e^2 \omega^3}{3\pi \epsilon_0 c^3 \hbar} |r_{jk}|^2 \quad (79.8)$$

واضح است که قواعد انتخاب برای جذب و گسیل القایی در مورد گسیل خودبه خودی نیز به کار می رود، زیرا همه آنها به جمله  $|r_{jk}|$  بستگی دارند.

معادله (۷۹.۸) را برای یک حالت تعادل حرارتی به دست آورده ایم. در اینجا دمای  $T$  وارد رابطه نمی شود، و در محاسبه ای دقیقتر آشکار می شود که شرط تعادل حرارتی ضرورتی ندارد.

## مسائل

۱۰.۸ تعامد توابع موج [معادلات (۴.۸) تا (۱۰.۸)] را در سه بعد ثابت کنید.

۲۰.۸ ثابت کنید که توابع موج دو حالت پایینی نوسان کننده هماهنگ تک بعدی تعامد هستند.

۳۰.۸ ثابت کنید که هر زوج از توابع هماهنگ گروه  $Y_{\ell, m}$  که در آن  $\ell = 2$  تا  $\ell = -2$  است، تعامد هستند.

۴۰.۸ مسئله چاه مربعی بینهایت مورد بحث بخش ۷.۶ را در نظر بگیرید. یک پتانسیل مختل کننده مستطیلی با ارتفاع  $v_0$  و عرض  $a/2$  را در مرکز قرار دهید (یعنی تقاطعها در  $x = \pm a/4$ ). انتقال انرژی مرتبه اول سه حالت پایینی را حساب کنید.

۵۰.۸ در چاه مربعی بینهایت یک اختلال مستطیلی به ارتفاع  $v_0$  و عرض از  $x = 0$  تا  $x = a/2$  وارد کنید. انتقال انرژی مرتبه اول سه حالت پایینی را حساب کنید. نشان دهید که در حالت کلسی برای ترکیبات فرد-زوج (فرد  $n+m$ )، ضرایب بسط  $a_{nm}$  در این حالت نامتقارن صفر نیست.

۶۰.۸ در چاه مربعی بینهایت یک قله پتانسیل خیلی بلند و خیلی باریک در مرکز قرار دهید (تابع دلتا). مساحت زیر قله منحنی  $C = \Delta x v_0$  است که در آن برای عرض و ارتفاع داریم  $\Delta x \rightarrow 0$  و  $v_0 \rightarrow \infty$ . (الف) نشان دهید که این پتانسیل اختلال اثری بر حالتها

با پاریمتة فرد ندارد. (ب) برای حالت‌های با پاریمتة زوج فرمول‌های انتقال انرژی و ضرایب اختلاط  $a_{mn}$  را به دست آورید.

۷۰۸ چاه مربعی با پتانسیل اختلال مسئله (۵۰۸) داده شده است. (الف) هامیلتونی را با توجه به پتانسیل اختلال در دو بخش یعنی برای  $0 < x < a/2$  و  $0 < x < a/2$  بنویسید. (ب) عناصر ماتریس  $H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22}$  را با استفاده از دو تابع موج پایینی چاه مربعی بدون اختلال به دست آورید. (ج) ماتریس  $2 \times 2$  حاصل را قطری کنید، یعنی دو انرژی تازه و ضرایب  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  را به دست آورید.

۸۰۸ با طی همان مراحل مسئله ۷۰۸ ولی با استفاده از دو تابع موج پایینی با پاریمتة زوج و پتانسیل اختلال مسئله ۶۰۸، مسئله را حل کنید.

۹۰۸ چاه مربعی بینهایت را همراه با پتانسیل اختلال مسئله ۶۰۸ که در زمان  $t = 0$  به کار می‌افتد، در نظر بگیرید. (الف) عناصر ماتریس  $H'_{13}, H'_{15}$  و غیره را حساب کنید. (ب) با فرض اینکه ذره در زمان  $t = 0$  ( $a_1 = 1$ ) در حالت پایه (پایینترین حالت) باشد، آهنگ افزایش احتمال وجود آن در حالت‌های دیگر را حساب کنید [معادله (۴۶.۸)].

۱۰۰۸ دو نوسانگر هماهنگ تک بعدی کلاسیک (جرمهای  $M_1$  و  $M_2$  و فنرها) با بسامدهای طبیعی  $\omega_1$  و  $\omega_2$  (رادیان بر ثانیه) را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که دو جرم با یک فنر ضعیف به هم اتصال دارند به نحوی که پتانسیل اختلال عبارت است از  $H' = 1/2 \beta (x_2 - x_1)^2$ . با استفاده از جدول ۱۰۶ دو تابع موج بدون اختلال برای این دستگاه به صورت  $\psi_n = \psi_0(x_1) \psi_n(x_2)$  و  $\psi_k = \psi_2(x_1) \psi_0(x_2)$  بنویسید که در آن شاخصها مقادیر  $n$  گانه نوسانگرهای بدون اختلال را نشان می‌دهند. (الف) عناصر ماتریس  $H'_{kn}$  و  $H_{nk}$  را حساب کنید. (ب) با استفاده از معادله (۴۶.۸) آهنگ اولیه افزایش دامنه حالت  $\psi_k$  را، به شرطی که دستگاه در زمان  $t = 0$  در حالت  $\psi_n$  باشد، به دست آورید.

## اتمهای چند الکترونی

### ۱.۹ مسئله هلیوم

در فصل ۷ آموختیم که چگونه می‌توان مسئله دو جسم را در مکانیک موجی به مسئله یک جسم تبدیل کرد، و برای حالتی که پتانسیل از نوع کولنی است مسئله را به‌طور تحلیلی حل کرد. هلیوم خنثی دارای دو الکترون و یک هسته است، لذا با مسئله‌ای سه جسمی مواجه هستیم. اگر دو الکترون برهم‌کنش نداشته باشند، هسته را بتوان در مقایسه با الکترونها بینهایت سنگین در نظر گرفت، مسئله را می‌توان به صورت دو مسئله مستقل هیدروژن گونه بررسی کرد. برهم‌کنش متقابل بین دو الکترون است که مشکلاتی ایجاد می‌کند.

در نظریه بور و همچنین در شکل اصلاح شده آن توسط ویلسون و زومرفلد، روشی برای محاسبه برهم‌کنش متقابل بین الکترونها وجود ندارد. این نظریه‌ها صرفاً نظریه‌های تک الکترونی هستند. از طرف دیگر، در مکانیک موجی مشکلی در نوشتن معادله شرودینگر برای ۲ و ۳ یا اصولاً حتی برای ۱۰۰ الکترون وجود ندارد. دشواری کار در حل معادله است.

حال لحظه‌ای تأمل می‌کنیم و نظری بر آنچه از نظریه بور داریم می‌افکنیم و اینکه چرا آن نظریه را به نفع مکانیک موجی کنار گذاشته‌ایم. یک نظریه که در تشریح بعضی از پدیده‌های فیزیکی تا اندازه‌ای موفق بوده است بندرت کاملاً کنار گذاشته می‌شود و فقط اصلاح می‌شود. بور اندیشه ترازهای انرژی، تکانه زاویه‌ای کوانتیده و گذارهای (الکترونی) با  $\Delta E = h\nu$  را ارائه داد. تمام اینها به وسیله شرودینگر حفظ شده است. اما

در موارد دیگر، باید اذعان کرد که، اصلاحات اساسی بودند. تا کنون علاوه بر آزمون طیف هیدروژن، آزمونهای قاطع دیگری نیز در مورد مکانیک موجی عرضه شده اند. یکی از آنها آزمایش دیویسون-گرم (بخش ۵.۵) و دیگری تشریح واپاشی آلفا به صورت فرایند نفوذ از سد پتانسیل است (بخش ۱۰.۶). سومین و مهمترین آزمونی که در اینجا می خواهیم از آن بحث کنیم، توانایی کاربرد نظریه برای اتمهای چند الکترونی است. قانع کننده ترین کارهای اولیه توسط هیلراس<sup>۱</sup> در حل تقریبی معادله شرودینگر برای هلیوم بود. در اینجا، قصد نداریم درباره روش هیلراس در حل مسئله بحث کنیم، بلکه فقط اشاره می کنیم که او و دیگران توانسته اند ترازهای انرژی هلیوم را محاسبه کنند و فاصله جدایی ترازهای محاسبه شده از یکدیگر در حد خطاهای اندازه گیری بسا نتایج تجربی طیف نمایی مطابقت دارند. در اینجا سعی خواهیم کرد جوابهای کیفی قابل قبول، اما با دقت کمتر، معادله شرودینگر برای اتم هلیوم را به دست آوریم.

اگر هسته را در مقایسه با الکترون بینهایت سنگین در نظر بگیریم، می توان آن را فقط به صورت یک منبع ساکن پتانسیل جاذب در نظر گرفت. معادله مستقل از زمان برای هلیوم عبارت است از

$$[H_1 + H_2 + V_{12}] \psi = E\psi \quad (1.9)$$

که  $H_1$  و  $H_2$  هامیلتونیهای مناسب برای حرکت مستقل الکترون ۱ و الکترون ۲ در میدان هسته، یعنی بدون برهم کنش متقابل بین الکترونها، هستند

$$H_1 = \frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla_1^2 + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} \quad (2.9)$$

$$H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla_2^2 + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_2} \quad (3.9)$$

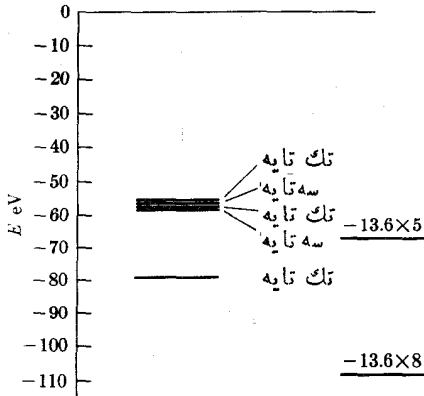
برهم کنش متقابل بین دو الکترون به صورت زیر است

$$V_{12} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \quad (4.9)$$

که در آن داریم

$$r_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \quad (5.9)$$

داده های تجربی موجود درباره هلیوم برای بررسی نتیجه محاسبات، با استفاده از اطلاعات طیف سنگینی، به صورت نمودار تراز انرژی شکل ۱.۹ نشان داده شده اند. اصطلاحات تک تاییه و سه تاییه در شکل ۱.۹ مربوط به سمتگیری نسبی اسپینهای دو الکترون



شکل ۱۰۹ ستون چپ: داده‌های تجربی حالت‌های He. ستون راست: ترازهای انرژی محاسبه‌ای با صرف‌نظر کردن از اثر متقابل بین دو الکترون.

و مربوط به جداسازی ساختار ریز می‌شود. اسپینها طبق قواعد ترکیب تکانه‌های زاویه‌ای به‌طور برداری با هم جمع شده و بردار کل اسپین  $S$  با اعداد کوانتومی  $S=0$  یا  $S=1$  حاصل می‌شود. در حضور مغناطیسی مربوط به تکانه زاویه‌ای مداری، اگر عدد کوانتومی کل اسپین  $S=1$  باشد سه حالت (حالت سه تاییه) به وجود می‌آید، و اگر  $S=0$  باشد فقط یک حالت (حالت تک تاییه) به وجود می‌آید. چنانچه تکانه زاویه‌ای مداری دو الکترون صفر باشد، سه تراز حالت سه تاییه‌ای که اختلاف آنها در مقدار  $m_s$  است از لحاظ انرژی واکن هستند، که این واکنی را می‌توان به کمک یک میدان مغناطیسی خارجی از بین برد (اثر زیمان، بخش ۸.۹).

از آنجا که مناسبترین داده‌ها به صورت نمودار تراز انرژی داده می‌شود، لذا ما توجه خود را بر تعیین ویژه مقادیرهای  $E$  معادله (۱۰۹) متمرکز می‌کنیم. در اینجا روشی را که پی می‌گیریم یک محاسبه اختلال است که در آن  $H'$  را برهم کنش اختلال فرض می‌کنیم. بنا بر این، ابتدا باید معادله زیر را حل کرد

$$(H_1 + H_2)\psi = E\psi \quad (6.9)$$

سعی می‌کنیم تابع موج را به صورت حاصلضرب بنویسیم

$$\psi = \psi_k(\mathbf{r}_1)\psi_n(\mathbf{r}_2) \quad (7.9)$$

از آنجا که عامل لاپلاسی، که قسمتی از  $H_1$  است، فقط بر یک تابع  $\mathbf{r}_1$  عمل می‌کند و لاپلاسی  $H_2$  فقط بر یک تابع  $\mathbf{r}_2$ ، لذا می‌توان نوشت

$$\psi_n(H_1\psi_k) + \psi_k(H_2\psi_n) = E\psi_k\psi_n \quad (۸.۹)$$

این معادله به طریق معمول از هم جدا می شود و به صورت زیر درمی آید

$$H_1\psi_k = E_1\psi_k \quad (۹.۹)$$

$$H_2\psi_n = E_2\psi_n$$

که در آن داریم

$$E_1 + E_2 = E \quad (۱۰.۹)$$

دو معادله (۹.۹) شبیه معادله شرودینگر برای اتم هیدروژن گونه است. جوابها در بخش ۴.۷ به دست آمده اند. بنابراین ترازهای انرژی اختلال نیافته برای اتم هلیوم به صورت زیر داده می شوند

$$E = -۵۴۴ \left( \frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} \right) eV \quad (۱۱.۹)$$

که در آن  $n_1$  و  $n_2$  به ترتیب اعداد کوانتومی اصلی برای الکترون ۱ و ۲ هستند. ستون ۲ در شکل ۱.۹ ترازهای  $n_1 = 1$  و  $n_2 = 2$  یا  $n_1 = 2$  و  $n_2 = 1$  را نشان می دهد. این ترازها به ترازهای تجربی نشان داده شده مربوط می شوند و انحراف در انرژی احتمالاً ناشی از این حقیقت است که از جمله  $V_{12}$  تا به حال صرف نظر شده است.

حال به جزئیات ترازها بیشتر دقیق می شویم و درمی یابیم که در مورد  $n_1 = 1$  و  $n_2 = 1$  (تراز در  $10818 eV$ ) چهار حالت می باید وجود داشته باشد، یکی تک تابه و یکی سه تابه. ولی، به طور تجربی فقط یکی وجود دارد. اسپینهای «متوازی» ( $S = 1$ ) در این مورد به دلایلی مجاز نیستند، اما نه وقتی که  $n_1 = 1$  و  $n_2 = 2$  باشد. این يك حقیقت فوق العاده مهم است که بر طبق مکانیک موجی شرودینگر پیش بینی نشده و غیر قابل پیش بینی است. از این انحراف در بخش بعد بحث خواهد شد.

## ۲.۹ اصل طرد پاؤلی و تقارن

فقدان حالت پایه سه تابه در اتم هلیوم با يك قانون فیزیک که انحصاراً مبتنی بر مشاهدات تجربی است مطابقت دارد. این قانون در سال ۱۹۲۵ قبل از انتشار مکانیک موجی شرودینگر به وسیله پاؤلی کشف شد. بنابراین قانون، که اصل طرد پاؤلی خوانده می شود، هیچ دو الکترونی (در يك اتم) نمی توانند دارای دسته اعداد کوانتومی یکسان  $m_l, n, l, m_s$  باشند. در مورد فرضی حالت پایه سه تابه، اعداد کوانتومی اصلی هر دو الکترون  $n = 1$ ، هر دو تکانه زاویه ای مداری  $l = 0$  و بنابراین  $m_l$  مربوط به هر دو الکترون نیز صفر می شود، و بالاخره دو الکترون دارای اسپینهای متوازی است یعنی مقادیر  $m_s$  در حالت سه تابه یکی است. بدین ترتیب، حالت سه تابه به وسیله اصل پاؤلی رد می شود. به طوری که قبلاً برای

هیدروژن تشریح شد و دربخش قبل نیز مورد بحث بیشتری قرار گرفت، هر حالت يك الکترونی فقط می تواند حاوی يك الکترون باشد. ساختمان اتمهای پیچیده تر نیز از همین طرح پیروی می کند، ابتدا پایینترین حالت های تک ذره پرمی شود و سپس اعداد کوانتومی اصلی بالا و بالاتر  $n$  برای تشکیل اتمهای سنگینتر مورد نیاز است. درباره این موضوع در بخشهای ۴.۹، ۵.۹ بیشتر بحث خواهد شد.

در حقیقت، با تعلق دادن اعداد کوانتومی  $n, l, m_l$  و  $m_s$  به هر الکترون منفرد، فرض بر این است که الکترونها مستقل از یکدیگر حرکت می کنند، یا به عبارت دیگر، در حالت های تک ذره ای هستند. به عنوان مثال، در مورد اتم هلیوم فقط با صرف نظر کردن از جمله  $V_{12}$  است که می توان معادله شرودینگر را جدا کرد و جواب هایی برای اتمهای هیدروژن گونه به دست آورد. لذا میدان، يك میدان مرکزی است و، به عنوان مثال، تکانه زاویه ای مداری مقداری مشخص دارد یعنی  $l$  عدد کوانتومی بی ددرسی به شمار می رود. با وارد کردن برهم کنش متقابل  $V_{12}$  در معادله، تبادل تکانه زاویه ای مداری بین دو الکترون به وجود می آید و در حقیقت فقط تکانه زاویه ای کل است که پایسته باقی می ماند. بنا بر این علامتگذاری حالتها با  $l_1$  و  $l_2$  معین، به طوری که در شکل ۱.۹ انجام شده، يك عمل تقریبی است. البته، نظریه اختلال نشان می دهد که حالت های تک ذره ای بالاتر با حالت های علامتگذاری شده مخلوط می شوند، و همان تکانه زاویه ای کل نتیجه خواهد شد. به هر حال، تا آنجا که موضوع علامتگذاری را فقط مربوط به مؤلفه های اصلی تابع موج يك حالت معین بدانیم ابهامی به وجود نمی آید. لذا اصل طرد پاولی می تواند در مورد مؤلفه اصلی به کار برده شود.

اصل طرد پاولی را می توان با استفاده از مفهوم تقارن تبدالی یا به اختصار تقارن ساده به طریقی قابل قبولتر بیان کرد که هم اکنون با تفصیل بیشتری بدان خواهیم پرداخت. تابع موج  $\psi$  در معادله (۷.۹) دارای الکترون شماره ۱ در حالت  $1s$  و الکترون شماره ۲ در حالت  $2s$  است. به عنوان مثال می توان با استفاده از این موضوع، انرژیهای الکترون شماره ۱ و الکترون شماره ۲ را احتمالاً پیش بینی کرد. ما می توانیم به طور تجربی این پیش بینی را بررسی کنیم، جز آنکه از طریق تجربی راهی برای دانستن اینکه کدام الکترون شماره ۱ و کدام شماره ۲ است، نداریم. ذرات غیر قابل تمایز هستند. با دوباره نویسی معادله (۷.۹) بدیگی از دو طریق زیر، می توان موضوع را بررسی کرد

$$\psi_S = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_k(r_1)\psi_n(r_2) + \psi_k(r_2)\psi_n(r_1)] \quad (12.9)$$

$$\psi_A = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_k(r_1)\psi_n(r_2) - \psi_k(r_2)\psi_n(r_1)] \quad (13.9)$$

توابع  $\psi_k$  و  $\psi_n$  توابع متعامد فرض می شوند و ضریب  $1/\sqrt{2}$  برای بهنجار کردن توابع جدید  $\psi_S$  و  $\psi_A$  لازم است. تابع  $\psi_S$  دارای تقارن تبدالی مثبت است، یعنی وقتی دو الکترون محل های خود را عوض می کنند (تعویض شاخص ۱ به ۲) علامت تغییر نمی کند. از سوی دیگر، علامت تابع دوم  $\psi_A$  با تعویض شاخص ۱ و ۲ تغییر می کند و بنا بر این دارای تقارن

تبادللی هئفی است. هر دو معادله (۱۲.۹) و (۱۳.۹) دارای این خاصیت اند که احتمال یافتن ذره ۱ در حالت  $k$  و ذره ۲ در حالت  $m$  برابر با احتمال وجود در حالت معکوس است. از آنجا که معادله شرودینگر يك معادله خطی است، ترکیب خطی جوابها (با همان انرژی  $E$ )، نظیر آنچه در معادله (۱۲.۹) یا (۱۳.۹) داده شده، نیز باید يك جواب باشد. اما آیا لازم است موضوع را با جانشین کردن معادله (۷.۹) با (۱۲.۹) یا (۱۳.۹) پیچیده کنیم؟ به طوری که خواهیم دید، شواهد تجربی، برای ذرات غیر قابل تمایز جواب بله می دهد.

ابتدا ثابت خواهیم کرد که تقارن تبادللی يك تابع موج پایسته می ماند. معادله شرودینگر را برای هر تعدادی از ذرات غیر قابل تمایز به صورت زیر می نویسیم

$$H\Psi = \hbar i(\partial\Psi/\partial t) \quad (14.9)$$

که در آن  $H$  شامل عملگرهای انرژی جنبشی برای تمام ذرات، و احتمالاً جملات انرژی پتانسیل ناشی از منابع دیگر (هسته) و برهم کنش متقابل نظیر  $V_{12}$  است. از آنجا که ذرات یکسان هستند، مختصات آنها به طرق مشابه وارد رابطه  $H$  می شوند. بنابراین، هامیلتونی در تعویض هر دو ذره ای تقارن دارد. اگر تابع موج  $\Psi$  در يك زمان معین در تعویض ذرات با علامتهای معین، مثلاً در تعویض شماره ۵ به ۹، دارای تقارن باشد، سمت چپ معادله (۱۴.۹) متقارن است و بنابراین مشتق زمانی تابع  $\Psi$  نسبت به زوج ۵ و ۹ دارای تقارن تبادللی مثبت است. بدین ترتیب این تقارن نمی تواند تغییر کند. به طور مشابه، اگر تابع  $\Psi$  در زمانی معین در تعویض شماره های ۵ و ۹ پاد متقارن باشد، مشتق زمانی معادله (۱۴.۹) نیز در تعویض ذرات پاد متقارن خواهد بود. باز هم تقارن اولیه تغییر نمی کند. بدیهی است که در هر مخلوطی از تقارنها، در مورد دو ذره ای یعنی برای ترکیب خطی معینی از توابع  $\psi_1$  و  $\psi_2$ ، یکبار که تقارن حاصل شود همچنان پایسته خواهد ماند.

ما هنوز ثابت نکرده ایم که لازم است تابع موج برای ذرات غیر قابل تمایز دارای تقارن تبادللی معین باشد. استدلال بالا دایسر براینکه تقارنی معین یا مخلوطی از تقارنها پایسته می ماند، مانع مخلوط ثابت دلخواهی از  $\psi_1$  و  $\psi_2$  مانند  $(\psi_1 + \psi_2)/\sqrt{2}$ ، نمی شود و این موضوع ما را به معادله (۷.۹) برمی گرداند. به حال اصل طسرد پاؤلی، به طوری که در بالا بیان شد، با معادله (۱۳.۹) سازگار است، زیرا اگر  $\psi_1$  و  $\psi_2$  با در نظر گرفتن اسپین، توابع مشابه باشند، تابع موج پاد متقارن (۱۳.۹) صفر می شود. حال اصل موضوع تازه ای از مکانیک کوانتومی را ارائه می کنیم که بخش اول آن در برگیرنده اصل طرد پاؤلی است:

۱. ذرات مشابه با اسپین ذاتی نیمه دست (فرمیونها) از تابع موجی پیروی می کنند که در تعویض هر دو ذره ای پاد متقارن می ماند.
۲. ذرات مشابه با اسپین ذاتی دست (بوزونها) از تابع موجی پیروی می کنند که در تعویض هر دو ذره ای متقارن می ماند.



این اصل موضوع مستلزم آن نیست که تابع موج کل به صورت ترکیب خطی حاصلضرب توابع موج ذره منفرد نوشته شود. به هر حال، اگر این امر امکانپذیر باشد، معادله (۱۲.۹) تابع موج مناسبی برای دو بوزون (مثلاً فوتونها) و معادله (۱۳.۹) تابع موج مناسبی برای دو فرمیون (مثلاً الکترونها) خواهد بود. برای بیش از دو فرمیون، تابع حاصلضرب با روشی ساده، با استفاده از دترمینان اسلیتزا، پاد متقارن می شود.

### ۳.۹ بازنگرشی به اتم هلیوم

حال آماده ایم تا به کمک نظریه اختلال ترازهای انرژی هلیوم را مطالعه کنیم. در حقیقت، محاسبات مفصل را انجام نخواهیم داد، اما خواهیم توانست با نگاهی بر روابط انتگرال نکات مهمی را آشکار سازیم. تابع موج کل را برای دو ذره به صورت حاصلضرب یک تابع مختصات مکانی و تابع مختصات اسپین می نویسیم. اگر تابع مکانی موج متقارن و تابع اسپینی موج پاد متقارن باشد و یا بالعکس، تابع موج کل به طور مناسبی پاد متقارن است. حالات ممکن عبارت اند از

$$k \neq n; S = 0: \quad \psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{kn} + \psi_{nk})(\alpha\beta - \beta\alpha), \quad m_S = 0 \quad \text{تک تایی (الف ۱۵.۹)}$$

$$k = n, S = 0: \quad \psi = \psi_{kk}(\alpha\beta - \beta\alpha) \quad m_S = 0 \quad \text{تک تایی (ب ۱۵.۹)}$$

$$S = 1: \quad \psi = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{kn} - \psi_{nk})\alpha\alpha & m_S = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{kn} - \psi_{nk})(\alpha\beta + \beta\alpha) & m_S = 0 \quad \text{سه تایی (۱۶.۹)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{kn} - \psi_{nk})\beta\beta & m_S = -1 \end{cases}$$

در روابط بالا از اختصارات زیر استفاده شده است

$$\psi_{kn} \equiv \psi_k(\mathbf{r}_1)\psi_n(\mathbf{r}_2) \quad (۱۷.۹)$$

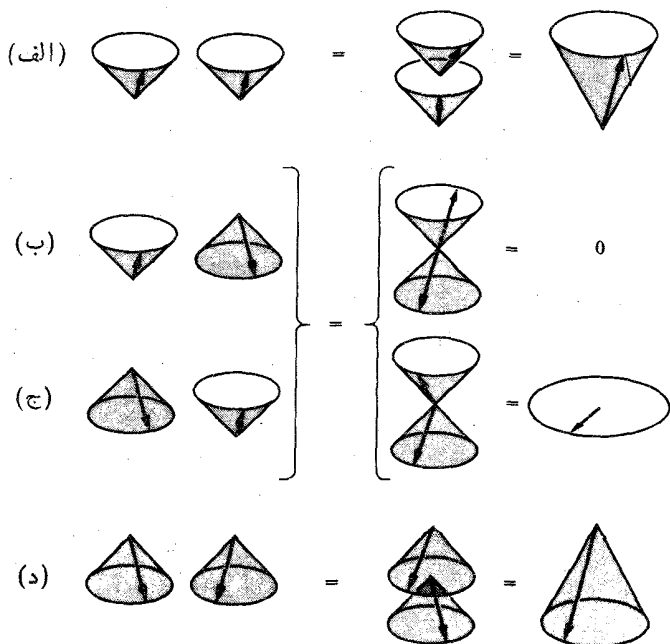
$$\alpha\beta \equiv \alpha(1)\beta(2) \quad (۱۸.۹)$$

توابع موج اسپینی  $\alpha$  و  $\beta$  در بخش ۷.۷ بحث شده اند، و به ترتیب اسپین به طرف بالا  $m_s = 1/2$  و اسپین به طرف پایین  $m_s = -1/2$  را نمایش می دهند. ترکیب دو

تابع موج اسپینی به صورت یک تابع موج اسپینی کل با اعداد کوانتومی  $S$  و  $m_S$  البته به کمک قواعد ترکیب تکانه‌های زاویه‌ای، بحث شده در پیوست ۵، انجام می‌گیرد. در شکل ۲.۹ کوشش شده است که به طور ترسیمی چگونگی ترکیب دو بردار اسپین در سه حالت فرعی یک مورد سه تاییه، و در حالت فرعی منفرد مورد تک تاییه نشان داده شود. این نمایش ترسیمی ممکن است از نظر آموزشی مفید باشد، اما نباید خیلی جدی گرفته شود. حال می‌توانیم اصولاً انرژی اختلال مرتبه اول را به صورت معادله (۲۵.۸) بدهیم. هامیلتونی اختلال  $H' = V_{\lambda\lambda}$  است. بنابراین رابطه زیر به دست می‌آید

$$\Delta E = \int \psi^* V_{\lambda\lambda} \psi d\tau \quad (19.9)$$

که در آن تابع  $\psi$  یکی از پنج رابطه معادله (۱۵.۹ الف)، (۱۵.۹ ب) و (۱۶.۹) است و انتگرال گیری نسبت به مختصات مکانی و مختصات اسپین ذرات ۱ و ۲ انجام می‌گیرد. برهم کنش اختلال بستگی به مختصات اسپینی ندارد و به خاطر تعامد، انتگرال گیری نسبت به آنها تبدیل به واحد می‌شود. بنابراین لازم است فقط مختصات مکانی را در نظر بگیریم. ابتدا مورد حالت پایه هلیوم را در نظر می‌گیریم، که به کمک معادله (۱۵.۹ ب) نشان داده می‌شود. با قرار دادن آن در معادله (۱۹.۹) رابطه زیر به دست می‌آید



شکل ۲.۹ دو اسپین  $s = 1/2$  به چهار صورت با هم ترکیب می‌شوند. سه تا از آنها حالت اسپین سه تاییه، و یکی حالت اسپین تک تاییه به دست می‌دهد.

$$\Delta E_0 = \int |\psi_{kk}|^2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} d\tau_1 d\tau_2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \langle r_{12}^{-1} \rangle = \langle V_{12} \rangle \quad (20.9)$$

با تخمینی غیر دقیق، می‌توان کمیت چشمداشتی  $r_{12}^{-1}$  را به صورت عکس شعاع بور در نظر گرفت. در این صورت، معادله (۲۰.۹) انتقال انرژی را  $27\text{eV}$  به دست می‌دهد. شکل ۱۰.۹ نشان می‌دهد که اختلاف بین تراز انرژی مشاهده شده و تراز بدون اختلال حدود  $30\text{eV}$  است.

برای به دست آوردن انتقال انرژی  $\Delta E_1$  در مورد ترازهای  $n_1 = 1$  و  $n_2 = 2$ ،

می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \Delta E(\text{تک تا یه} \\ \text{سه تا یه}) &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int (\psi_{kn}^* \pm \psi_{nk}^*)(\psi_{kn} \pm \psi_{nk}) r_{12}^{-1} d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int (|\psi_{kn}|^2 + |\psi_{nk}|^2) r_{12}^{-1} d\tau_1 d\tau_2 \\ &\quad \pm \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int (\psi_{kn}^* \psi_{nk} + \psi_{nk}^* \psi_{kn}) r_{12}^{-1} d\tau_1 d\tau_2 \quad (21.9) \end{aligned}$$

توابع موج  $\psi_{kn}$  و  $\psi_{nk}$  فقط در علامتگذاری الکترونیهای ۱ و ۲ متفاوتند. بنابراین، دو جمله در هر دو انتگرال سهمی یکسان دارند و می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \Delta E(\text{تک تا یه} \\ \text{سه تا یه}) &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int |\psi_{kn}|^2 r_{12}^{-1} d\tau_1 d\tau_2 \pm \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int \psi_{kn}^* \psi_{nk} r_{12}^{-1} d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \langle V_{12} \rangle \pm \Delta E_{\text{exch}} \quad (22.9) \end{aligned}$$

جمله اول معادله (۲۲.۹) باز همان کمیت چشمداشتی پتانسیل اختلال است، اما حالا برای حالت دیگر یعنی  $\psi_{kn}$  (پاد متقارن نشده)، و جمله دوم انرژی تبادل خوانده می‌شود که با رابطه زیر داده می‌شود

$$\Delta E_{\text{exch}} = \pm \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int \psi_k^*(\mathbf{r}_1) \psi_n^*(\mathbf{r}_2) \psi_k(\mathbf{r}_2) \psi_n(\mathbf{r}_1) r_{12}^{-1} d\tau_1 d\tau_2 \quad (23.9)$$

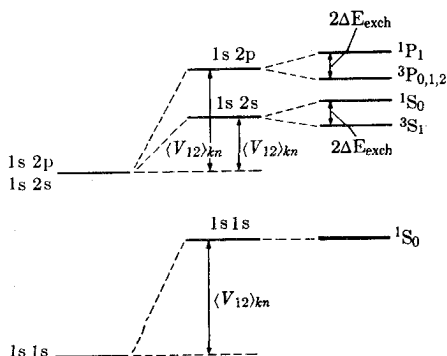
از بحث زیر به خوبی دیده می‌شود که انتگرال این رابطه مثبت است. وقتی  $\mathbf{r}_1 \approx \mathbf{r}_2$  باشد، عامل  $r_{12}^{-1}$  بزرگ است. اگر این موضوع درست باشد باید مجاز باشیم که  $\mathbf{r}_1$  و  $\mathbf{r}_2$  را در دو معادله (۲۳.۹) با هم عوض کنیم، و بدین ترتیب رابطه شبیه به جمله اول معادله (۲۲.۹) می‌شود که مثبت است. اما برای مقادیر بزرگتر  $r_{12}$ ، در انتگرال معادله (۲۳.۹) قسمتهای منفی پیدا می‌شود. نتیجه نهایی مثبت بودن انتگرال است اما خیلی کمتر از مقدار آن در جمله اول معادله (۲۲.۹) می‌شود.

اگر کاملاً بر طبق خطوط کلاسیک استدلال کرده بودیم، بروشنی درمی یافتیم که با برقراری اثر متقابل بین دو الکترون، يك انتقال انرژی در جهت مثبت، نظیر آنچه در شکل ۱.۹ برای حالت پایه نشان داده شده است. نتیجه می شد. در هر صورت، انرژی تبادل کاملاً محصول مکانیک موجی است. این امر نتیجه مستقیم اصرار ما در نوشتن تابع موج به صورت مجموع دو جمله است که از هر لحاظ شبیه به یکدیگرند. جز در تعویض موقعیت ذرات ۱ و ۲، به طوری که در بخش ۲.۱۱ خواهیم دید، این نوع انرژی تبادل نقش مهمی در بستگی آنها به مولکولها در پیوندهای همقطب بازی می کند. اگر این ویژگی در طبیعت نبود، شیمی کاملاً متفاوت می شد و زندگی به شکلی که می شناسیم مطمئناً وجود نمی داشت.

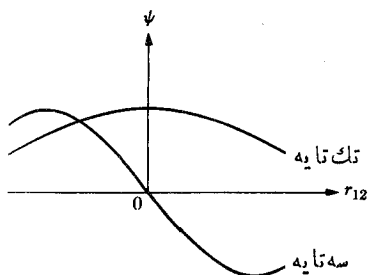
شکل ۳.۹ به طور نموداری نشان می دهد که چگونه دو جمله معادله (۲۲.۹) با هم جمع شده و به صورت انتقال کل انرژی هر حالت درآمده است. ستون اول ترازهای انرژی بدون اختلال را نشان می دهد، که با دو عدد کوانتومی اصلی  $n_1$  و  $n_2$  مشخص شده اند. ستون دوم اثر جمله  $\langle V_{12} \rangle_{kn}$  را برای سه امکان موجود نشان می دهد: حالت  $(1s)(2s)$  و حالت  $(2p)(1s)$ . بالاخره ستون سوم اثر انرژی تبادل را نشان می دهد. به طوری که با معادله (۲۲.۹) نشان داده شده است حالت تک تاییه به اندازه  $2\Delta E_{\text{exch}}$  از حالت سه تاییه بالاتر است.

ترازهای نشان داده شده در ستون سوم ترازهای مشاهده شده تجربی است. در اینجا فقط نظریه اختلال مرتبه اول را به کار برده ایم. اگر حقیقتاً محاسبات مفصل انجام داده بودیم، انتقال انرژی که به دست می آوریم، البته دقیقاً برابر انتقال نشان داده شده در شکل ۱.۹ نمی بود. در هر حال، ما فقط نظریه اختلال را به عنوان بحثی کیفی به کار برده ایم که مطمئناً روشی مستدل است.

از میان دو حالت سه تاییه در شکل ۳.۹، حالت بالایی يك سه تاییه واقعی است،



**شکل ۳.۹** اثر برهم کنش الکتروستاتیکی دو الکترون در موضع ترازهای هلیوم. جدایی بیشتر در ساختار ریز حالت  $^3P$  به سه تراز کاملاً به هم فشرده با  $J=0, 1, 2$  است.



شکل ۴.۹ تشریح تقارن تابع موج هلیوم در تمویض دو الکترون (فقط به صورت نمودار).

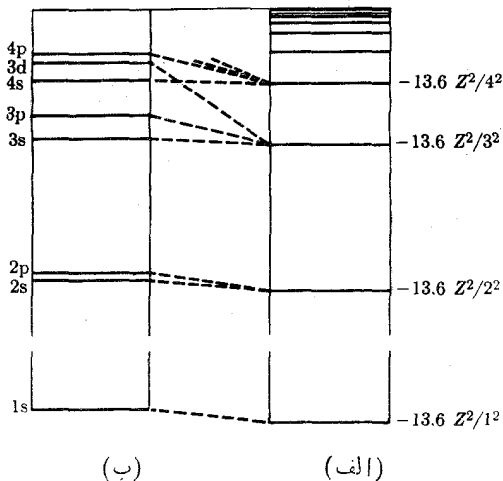
بدین معنی که جدایی آنها در ساختار ریز به مقدار کم دیده می شود. جدایی آنقدر کم است که نمی تواند در نمودار نشان داده شود. در حالت سه تاییه پایینی ساختار ریز مشاهده نمی شود، زیرا هر دو الکترون در حالت های  $S$  هستند، بنابراین میدان مغناطیسی داخلی در نتیجه حرکت مدار به وجود نمی آید. در هر صورت، در طیف نمایی قاعده بر استفاده از جملات تک تاییه و سه تاییه برای موارد  $S = 0$  و  $S = 1$  است، اعم از اینکه ساختار ریز واقعی وجود داشته باشد یا نداشته باشد.

کمی تعمق در انرژی تبادل در یک بحث کلی درباره حرکت نسبی دو الکترون مفید است. شکل ۴.۹ به طور نموداری تابع مکانی موج را بر حسب فاصله نسبی بین دو الکترون نشان می دهد.

تابع موج سه تاییه با تغییر علامت  $3/4$  تغییر علامت می دهد و تابع موج تک تاییه تغییر نمی کند، کسه این موضوع با معادلات (۱۵.۹ الف و ب) و (۱۶.۹) انطباق دارد. این بدان معنی است که احتمال قرار گرفتن دو الکترون در نزدیکی یکدیگر، در حالت سه تاییه کم و در حالت تک تاییه زیاد است. نیروی بین آنها در هر دو مورد یکی است. بنابراین، اختلاف از دینامیک دستگاه به وجود می آید، یعنی اختلاف نتیجه ای از مکانیک موجی و از جمله شرایط تقارن است. چون الکترونها در حالت سه تاییه، به عکس حالت تک تاییه، دور از یکدیگر قرار می گیرند، افزایش خالص در انرژی پتانسیل حاصل از  $7/4$  در مورد سه تاییه کمتر از مورد تک تاییه است.

## ۴.۹ اتمهای چند الکترونی

در اتم چند الکترونی، برهم کنش بین یک الکترون ویژه و الکترونها دیگر را دیگر نمی توان به صورت اختلال در نظر گرفت، بخصوص اگر الکترون در یکی از خارجترین مدارها باشد. روشی که معمولاً در محاسبه تراز انرژی اتمهای پیچیده به کار می رود، روش هادتری برای میدان خود سازگاد است. یک الکترون معین در میدان هسته، که عملاً



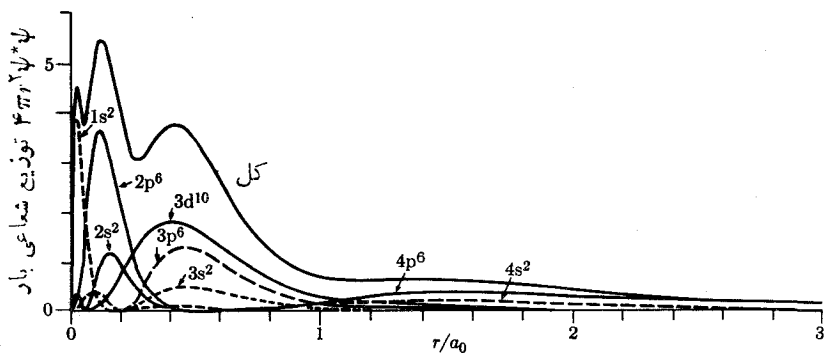
شکل ۵.۹ ترازهای اتمی در (الف) اتم هیدروژن گونه و (ب) اتم چند الکترونی.

ساکن است، و همچنین در میدان سریعاً متغیر الکترونیهای دیگر، حرکت می کند. میدان اخیر را با تقریب می توان یک میدان متوسط و متقارن کروی در نظر گرفت.

می توانیم روش به کار رفته در محاسبات را با استفاده از عنصر شماره ۳۷، یعنی روییدیم، به عنوان نمونه، شرح دهیم. برای یافتن تابع ویژه و انرژی یکی از الکترونها، توزیع چگالی ۳۶ الکترون دیگر را حدس می زنیم. به کمک این روش می توانیم میدان الکتریکی شعاعی (به کمک قانون گاوس) و از آنجا پتانسیل را محاسبه کنیم. پتانسیل هسته با  $Z = ۳۷$  به این پتانسیل اضافه می شود و معادله شرودینگر برای این الکترون (به طور عددی) حل می شود. روش محاسبه برای تمام ۳۷ الکترون تکرار می شود. توزیع بار برای ۳۶ الکترون دیگر، بسته به اینکه محاسبات را برای کدام الکترون انجام می دهیم، کمی تفاوت دارد.

وقتی تمام توابع موج محاسبه شده اند، مجموعه جدیدی از توزیع چگالی به دست آمده است، و دومین دور محاسبات را می توان شروع کرد. عمل ادامه می یابد تا اینکه توابع موج محاسبه شده با توزیع بارهای فرض شده سازگار شوند. به این دلیل است که این روش، روش میدان خودسازگار نامیده می شود. این روش بسیار دقیق نیست، و از جمله دلایل آن این است که توزیع چگالی بار، به طوری فرض می شود، تقارن کروی ندارد. در هر صورت، قسمت ناکروی توزیع و اثرات دیگر (مثلاً تقارن تبدیلی) را برهم کنشهای پسمانده می نامند که می توانند به صورت اختلال در نظر گرفته شوند (بخش ۶.۹).

شکل ۵.۹ نمودار ترازانرژی حاصل را در مقایسه با ترازانرژی اتم هیدروژن گونه نشان می دهد. حالت هایی که از طریق تجزیه و تحلیل مسئله هیدروژن با آنها آشنا هستیم



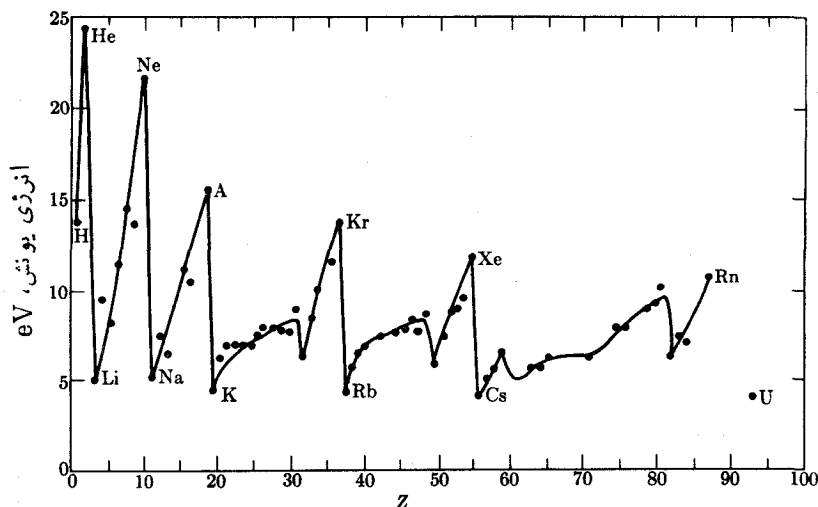
شکل ۶.۹ توزیع شعاعی بار الکترونیهای دیگر از دیدگاه آخرین الکترون Rb. واحد  $r$  برابر  $۵۲۹\text{Å}$   $a_0 = ۰.۵۲۹$  است.

مجدداً رخ می‌دهند، اما به‌عنوان مثال حالت‌های  $۲s$  و  $۲p$  حالا از هم جدا هستند، درحالی که در اتم هیدروژن از لحاظ انرژی واگنی داشتند. درحقیقت، حالت‌های با  $n = ۳$  چنان از هم جدا هستند که حالت  $۳d$  بین حالت‌های  $۴s$  و  $۴p$  قرار می‌گیرد. محل دقیق این حالتها بستگی به تعداد کل الکترونیهای اتم دارد. با حرکت در جهت اتمهای سنگینتر، درمی‌یابیم که نمودار متناسب با ضریب تقریبی  $Z^2$ ، گسترش می‌یابد (همان‌طور که در سمت چپ شکل نشان داده شده است). در همان حال ترازهای بیشتری از الکترون پرمی‌شوند، و در حالت پایه انرژی و بالاترین تراز پر شده همیشه منهای چند الکترون ولت است.

شکل ۶.۹ توزیع چگالی کلی  $۳۶$  الکترون را در  $Rd^+$ ، و همچنین سهم هر یک از الکترونها را در حالت‌های مختلف نشان می‌دهد. به‌طوری‌که از شکل می‌توان دید داخلترین الکترونها، الکترونیهای  $۱s$ ، بیشتر اوقات را در داخل الکترونیهای دیگر می‌گذرانند. بنابراین، برطبق قانون گاوس عملاً هیچگونه نیرویی جز نیروی میدان هسته بر آنها وارد نمی‌شود. از سوی دیگر، الکترونیهای  $۴s$  و  $۴p$  تقریباً تمام وقت خود را در خارج از تعداد زیادی از الکترونها می‌گذرانند، و بنابراین تحت تأثیر میدان خیلی ضعیفتری قرار می‌گیرند. کاهش شدت میدان هسته توسط الکترونیهای داخلین را استتاد می‌نامند.

## ۵.۹ جدول تناوبی

اتم هیدروژن در حالت پایه دارای یک الکترون در حالت  $۱s$ ، و هلیوم دارای دو الکترون در حالت  $۱s$  است. پیکربندی الکترونی هلیوم  $(۱s)^2$  است که شاخص  $۲$  تعداد الکترونیهای حالت معین را مشخص می‌کند. برطبق اصل پاولی این پیکربندی هلیوم مجاز است زیرا الکترونها دارای مقادیر مختلف  $m_s$  هستند. پیکربندی حالت پایه عنصر سوم در جدول تناوبی لیتیم،  $(۱s)^2(۲s)$ ، و پیکربندی مربوط به بریلیم  $(۱s)^2(۲s)^2$  است. تعداد الکترونیهای مجاز در یک حالت با  $n$  و  $l$  معین برطبق اصل پاولی برابر  $(2l+1)۲$  است. در پیکربندی



شکل ۷.۰۹ انرژیهای یونش.

الکترونی مثلاً  $2p$ ، اعداد کوانتومی قابل تغییر عبارت‌اند از  $m_l$  با  $(2l+1) = 3$  مقدار و  $m_s$  با دو مقدار مختلف، یعنی اسپین به سمت بالا یا پایین، که بدین ترتیب شش حالت فرعی به دست می‌آید. جدول ۱.۰۹ پیکربندی الکترونی حالت پایه ۱۹ عنصر اول را نشان می‌دهد. جدول کاملتر، برای تمام عناصر در پیوست ۲ کتاب یافت می‌شود. به طوری که از جدول ۱.۰۹ دیده می‌شود، طبق شکل ۵.۰۹، الکترونها ابتدا حالت‌های تک‌ذره‌ای موجود را پر می‌کنند، و حالت  $p$  در یک عنصر گاز نادر کامل می‌شود.

ستون دیگر جدول ۱.۰۹ پتانسیل اولین یونش  $V$  برای هر عنصر است. این پتانسیل را انرژی بستگی می‌نامند، و مقدار انرژی لازم برای جدا کردن سست‌ترین الکترون از اتم است. پتانسیل یونش به طور یکنواخت از لیتیوم تا نئون افزایش می‌یابد، و این در حالی است که حالت‌های  $2s$  و  $2p$  به تدریج پر می‌شوند. دلیل این امر آن است که نمودار نراز انرژی متناسب با ضریب  $Z^2$ ، با افزایش تعداد الکترونها، گسترش می‌یابد (شکل ۵.۰۹). یازدهمین الکترون، تشکیل‌دهنده سدیم، ناچار وارد تراز نسبتاً بالاتری می‌شود و بنابراین انرژی بستگی آن خیلی کمتر است. پتانسیل یونش مجدداً با عبور از پوسته  $3p-3s$  افزایش می‌یابد و سپس از آرگون به پتاسیوم افت می‌کند.

شکل ۷.۰۹ پتانسیل اولین یونش را به عنوان تابعی از  $Z$  نشان می‌دهد. در هر مرحله پس از گاز نادر، افت شدیدی وجود دارد که پرشدن پوسته  $p$  را مشخص می‌کند. خنثی بودن اتم‌های گاز نادر را می‌توان با دو نکته زیر شرح داد: (۱) انرژی بستگی آخرین الکترون زیاد است، بنابراین اتم به آسانی الکترون از دست نمی‌دهد. (۲) در حالی که اتم‌های دیگر به آسانی الکترون دیگری را می‌پذیرند و تشکیل یون منفی نسبتاً محکم



جدول ۱.۹

اتم در حالت پایه					اولین پتانسیل یونش $V$	Z	عنصر
آخرین پوسته اشغال شده	پیکر بندی الکترونی		عدد کوانتومی آخرین الکترون افزوده شده				
			n	l			
K	1s	1s	0	1	13.6	1	H
K	1s <sup>2</sup>	1s <sup>2</sup>	0	1	24.6	2	He
L	قلب هلیوم، ۲ الکترون	2s	0	2	53.9	3	Li
L		2s <sup>2</sup>	0	2	93.2	4	Be
L		2p	1	2	83.0	5	B
L		2p <sup>2</sup>	1	2	11.3	6	C
L		2p <sup>3</sup>	1	2	14.5	7	N
L		2p <sup>4</sup>	1	2	13.6	8	O
L		2p <sup>5</sup>	1	2	17.4	9	F
L		2p <sup>6</sup>	1	2	21.6	10	Ne
M	قلب نئون، ۱۰ الکترون	3s	0	3	51.4	11	Na
M		3s <sup>2</sup>	0	3	76.4	12	Mg
M		3p	1	3	59.8	13	Al
M		3p <sup>2</sup>	1	3	81.5	14	Si
M		3p <sup>3</sup>	1	3	100.6	15	P
M		3p <sup>4</sup>	1	3	100.4	16	S
M		3p <sup>5</sup>	1	3	133.0	17	Cl
M		3p <sup>6</sup>	1	3	158.8	18	Ar
N	قلب آرگون	4s	0	4	43.4	19	K

می دهند، به علت فاصله بین ترازی زیاد پوسته ها، گاز نادر به هیچوجه یون منفی نمی سازد. این دونکته بدان معنی است که اتمهای گاز نادر تمایلی ندارند که با اتمهای دیگر الکترون مشترک داشته باشند و تشکیل مولکولهای خنثی دهند. فلزات قلیایی در ستون انتهایی دیگر جدول قرار دارند و به آسانی الکترون از دست می دهند، زیرا انرژی بستگی آخرین الکترون در آنها خیلی کم است.

خواص شیمیایی عناصر را خارجترین الکترونها، الکترونهاي ظرفیت، تعیین می کند. عناصر مربوط به يك ستون در جدول تناوبی دارای پیکر بندى الکترونی مشابه هستند، مانند فلورئور<sup>۵</sup>(۲p)، کلر<sup>۵</sup>(۳p)، برم<sup>۵</sup>(۴p)، ید<sup>۵</sup>(۵p) و استاتین<sup>۵</sup>(۶p). برخی عناصر مجاور از لحاظ عملکرد شیمیایی خیلی شبیه هم هستند زیرا درحالی که تعداد الکترونهاي خارجترین پوسته ثابت است، پوسته داخلی معینی دارد کامل می شود. اولین مثال این نوع، فلزهای بین  $Z = 20$  و  $Z = 30$  هستند. در اینجا پس از جایگزینی يك یا دو الکترون در پوسته فرعی خارجی ۴s، پوسته فرعی ۳d در حال پر شدن است (در مقایسه با شکل ۴.۹). مثال دیگر فلزات خاکی نادر از  $Z = 57$  تا  $Z = 71$  است (پیوست ۲).

## ۶.۹ جفت شدگی L-S

اتم در حالت پایه، همیشه تمام الکترونهايش در پایینترین پوسته ممکن قرار خواهد داشت. در هر پوسته فرعی پر شده (مثلاً  $2p^6$ )، تکانه زاویه ای مدارى و اسپین تمام الکترونها یکدیگر را خنثی می کنند. بنابراین تکانه زاویه ای کل يك اتم در حالت پایه، وقتی که پوسته فرعی کاملاً پر است، برابر صفر می شود. اگر قسمتی از آخرین پوسته فرعی پر شده باشد، در این صورت قواعد معینی وجود دارد که چگونگی ترکیب اسپینها و تکانه های زاویه ای مدارى را در پایین حالت، حالت پایه، شرح می دهد. این قواعد در زیر باختصار شرح داده می شوند.

در فصل ۷ دیدیم که اسپین و تکانه زاویه ای مدارى الکترون در اتم هیدروژن با هم ترکیب می شود به صورت تکانه زاویه ای کل  $J$  درمی آید. برای الکترونهاي پوسته فرعی نیمه پر، به طرق مختلفی می توان تکانه های زاویه ای را جمع کرد. مثلاً می توان از ترکیب  $l$  و  $s$  هر الکترون يك  $z$  به دست آورد، و سپس تمام  $z$ ها را با هم ترکیب کرد. یا می توان از ترکیب تمام تکانه های زاویه ای اسپین يك تکانه زاویه ای کل  $S$ ، و از ترکیب تمام تکانه های زاویه ای مدارى يك تکانه زاویه ای مدارى کل  $L$  به دست آورد. آنگاه از ترکیب  $L$  و  $S$  تکانه زاویه ای کل  $J$  برای اتم حاصل می شود. در اتم نیروهای، مستقیم و غیر مستقیم، وجود دارند که بستگی به سمته گیری نسبی بردارهای تکانه زاویه ای دارند. مثلاً در اتمهای سنگین، جفت شدگی بین اسپین  $S$  و تکانه زاویه ای مدارى  $L$  یعنی  $J$  برای هر يك از الکترونها

۱. تشکیل یونهای منفی هلیوم، درحالتی ناپایدار، امکانپذیر است، و طول عمر آن به اندازه کافی است که در بعضی از شتاب دهنده های هسته ای از آن استفاده می شود.

قوی است و این زوای منفرد پایسته می‌مانند (بخش ۹.۷). يك روش منطقی برای ترکیب تکانه‌های زاویه‌ای همان است که در ابتدا شرح داده شد. این روش را جفت‌شدگی  $z-z$  می‌نامند و  $z$ ها اعداد کوانتومی خوب خواننده می‌شوند.

در اتمهای سبک، بهتر است ترازهای انرژی را برحسب جفت‌شدگی  $L-S$  شرح دهیم، که جفت‌شدگی (اسل-ساندرز) نیز نامیده می‌شود. دلیل موفقیت این روش، برهم-کنشهای نسبتاً قوی غیرمستقیم بین  $z$  تکانه اسپینهاست. در بحث ترازهای انرژی اتم هلیوم دیدیم که حالت سه‌تایه همیشه پایینتر از حالت تک‌تایه است، زیرا انرژی تبادل در يك حالت منفی و در حالت دیگر مثبت است. این قاعده در مورد بیش از دو الکترون نیز به کار می‌رود. حداکثر عدم تقارن در تابع موج فضایی وقتی رخ می‌دهد که تابع موج اسپین دارای تقارن حداکثر باشد، یعنی وقتی که تمام اسپینها همراستا یا تا حد امکان همراستا باشند، مشروط بر آنکه محدودیت‌های اصل طرد پاولی رعایت شوند. با توجه به این حدود، قواعد زیر برای تکانه زاویه‌ای کل حالت پایه اتمی که آخرین پوسته فرعی آن نیمه پر است، به دست می‌آید:

۱. قاعده هوند که بنا بر آن، پایینترین تراز دارای حداکثر مقدار ممکن اسپین کل  $S$  خواهد بود که از ترکیب اسپین تمام الکترونهای موجود در پوسته فرعی نیمه پر می‌تواند به دست آید.
۲. اگر چند مقدار ممکن  $L$  وجود داشته باشد که بدون نقض اصل طرد بتواند با همان مقدار حداکثر  $S$  ترکیب شود، در این صورت حالت پایه دارای بالاترین مقدار  $L$  خواهد بود. دلیل این امر آن است که برهم‌کنش الکتروستاتیکی پسمانده در این مورد حداقل خواهد بود (حداقل اشتراك در توابع موج).
۳. با  $L$  و  $S$  غیر صفر معین می‌توان ترکیبهای متعددی برای تکانه زاویه‌ای نهایی  $J$  به دست آورد. جفت‌شدگی مغناطیسی بین  $L$  و  $S$  (ساختار ریز) منجر به تکانه زاویه‌ای کل  $J$  برای حالت پایه می‌شود. تکانه کل، در صورتی که پوسته فرعی کمتر از نصف پر شده باشد، برابر با  $J = L - S$  و چنانچه پوسته فرعی بیش از نصف پر شده باشد، برابر با  $J = L + S$  خواهد شد.

به طوری که در بالا اشاره شد، وضع برای عنصرهای سنگینتر تا اندازه‌ای بالعکس است. برهم‌کنش مغناطیسی بین اسپین و تکانه زاویه‌ای مداري  $z$  تکانه الکترونها به اندازه کافی قوی است، به طوری که این دو عدد کوانتومی باهم ترکیب می‌شوند و تکانه زاویه‌ای کل  $J$  برای هر الکترون به وجود می‌آید. مجموع  $z$ های الکترونهای موجود در پوسته فرعی سرانجام به صورت تکانه زاویه‌ای کل  $J$  برای اتم درمی‌آید.

تشریح  $L-S$  برای اتمهای سبک کافی نیست و همین‌طور تشریح  $z-z$  برای اتمهای سنگین کافی نیست. به عبارت دقیقتر، هر حالتی از اتم می‌تواند به صورت يك ترکیب خطی از حالت‌های حاصل از این توصیفهای ساده تصور شود، و تعداد جملات مورد نیاز برای

به‌دست آوردن توصیفی دقیق‌کمترین است، اگر از جفت‌شدگی L-S برای عناصر سبک و از جفت‌شدگی  $j-j$  برای عناصر سنگین استفاده شود.

در جفت‌شدگی L-S علامتی که برای توصیف يك حالت کوانتومی به‌کار می‌رود، و جمله طیف‌نمودی نیز نامیده می‌شود، چنین است  $L_r^{(2S+1)}$ ، مثلاً  ${}^2D_3$ ،  ${}^1S_0$ ،  ${}^4P_{3/2}$  و غیره. شاخص بالا سمت‌چپ مقدار  $S$  را نشان می‌دهد که درحقیقت  $(2S+1)$  است. خود حرف، مقدار  $L$  را می‌دهد و از ترکیب  $L$  و  $S$  مقادیر  $J$  (شاخص پایین) به‌دست می‌آید که تعداد آن با شاخص بالا داده می‌شود، مگر وقتی که  $S > L$  باشد که در آن موردتعداد حالتها  $(2L+1)$  است. به‌عنوان مثال، حالت چهارتایی  $D$  دارای چهار عضو  ${}^4D_{3/2}$ ،  ${}^4D_{5/2}$ ،  ${}^4D_{7/2}$ ،  ${}^4D_{9/2}$  است. اما حالت «چهارتایی»  $P$  فقط دارای سه‌عضو  ${}^4P_{1/2}$ ،  ${}^4P_{3/2}$  و  ${}^4P_{5/2}$  است. یادآور می‌شود که اتمهای با تعداد الکترونهاي زوج، مقادیردرستی از  $S$  دارند و بنابراین فقط حالتهاي تک‌تایه، سه‌تایه و غیره تشکیل می‌دهند. درحالی‌که اتمهای با تعداد الکترونهاي فرد، دارای مقادیرنیمه درستی از  $S$  هستند و بنابراین تشکیل حالتهاي دوتایه، چهارتایه و غیره می‌دهند.

خوب است که عملکرد اصل طرد پاولی را، درحذف ترازهای معین و در مجاز دانستن بعضی دیگر، درمورد پوسته‌های نیمه‌پر مورد توجه قرار دهیم. به‌عنوان مثال، ازت را درنظر می‌گیریم که دارای پیکربندی الکترونی  $(2p)^3$  است. سه اسپین می‌توانند باهم ترکیب شوند و اسپین کل  $1/2$  یا  $3/2$  به‌وجود آورند. سه تکانه زاویه‌ای مداری  $l_1 = l_2 = l_3 = 1$  می‌توانند با هم ترکیب شوند و  $L = 0$ ، یا  $L = 1$ ،  $L = 2$ ، و یا  $L = 3$  به‌دست آید. بدین ترتیب، بدون توجه به‌اصل طرد پاولی، حالتهاي دوتایه و چهارتایی  ${}^2S$ ،  ${}^2P$ ،  ${}^4S$ ،  ${}^4P$ ،  ${}^4D$ ،  ${}^4F$ ،  ${}^2D$ ،  ${}^2F$ ،  ${}^4F$  به‌دست خواهند آمد. در حقیقت اصل طرد پاولی فقط سه تراز  ${}^2D$ ،  ${}^2P$  و  ${}^4S$  را مجاز می‌داند. برای اثبات این مطلب باید سعی کنیم تابع موج را بسازیم و مقارن کنیم، و در آن صورت درمی‌یابیم که برای حالتهايی که حذف کرده‌ایم چنین‌کاری غیرممکن است. روش ساده‌تری را در پیش خواهیم گرفت، و مجدداً از مدل برداری تکانه زاویه‌ای استفاده می‌کنیم.

جدول ۲.۹

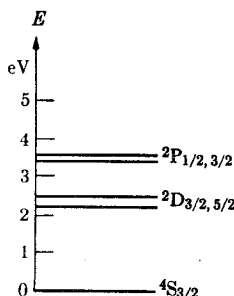
$m_l$	توزیع حالتهاي فرعی $m_s$
۱	++ + + + +
۰	+ + ± + ± - + +
-۱	+ + + ± ± + - +

جدول ۳.۹

$3/2$	$1/2$	$-1/2$	$-3/2$	$m_S$ $m_L$
	۱	۱		۲
	۲	۲		۱
۱	۳	۳	۱	۰
	۲	۲		-۱
	۱	۱		-۲

در جدول ۲.۹ سه الکترون پسته  $2p$  ازت را بر حسب مقادیر  $m_S$  و  $m_L$  به نظم در آورده ایم بدون اینکه اصل طرد پاولی را نقض کرده باشیم. الکترونی با  $m_S = 1/2$  در جدول با علامت (+) و  $m_S = -1/2$  با علامت (-) مشخص شده است. دو الکترون در صورتی می توانند دارای  $m_L$  یکسان باشند که  $m_S$  آنها متضاد باشد، بنابراین یک مثبت و یک منفی می توانند در یک محل وارد شوند. هرستون در جدول ۲.۹ معرّف یک حالت فرعی ممکن است. از اینجا چنین برمی آید که بیست نوع ترکیب مختلف وجود دارند که فقط ده تا از آنها نشان داده شده اند. ترکیبات نشان داده شده همه دارای  $m_S$  مثبت هستند. ترکیبات دیگر با تغییر دادن تمام علامتهای مثبت به منفی و منفی به مثبت به دست می آیند. تمام  $m_S$  ها و  $m_L$  های هر حالت از جدول ۲.۹ پس از ترکیب به صورت  $m_S$  و  $m_L$  در آمده اند. تعداد حالت های ناشی از یک دسته  $m_S$  و  $m_L$  در جدول ۳.۹ آمده است. تمام بیست حالت فرعی گنجانده شده است. البته، این طریق ترکیب اعداد کوانتومی به مفهوم جفت شدگی  $L-S$  است.

فقط یک ترکیب از حالت های (جملات) نهایی وجود دارد که می تواند دارای دسته حالت های فرعی جدول ۳.۹ باشد، که این دسته حالت ها عبارت اند از  $^4D$ ،  $^2P$  و  $^4S$ . بنابراین، اینها تنها جملات ممکن ناشی از پیکر بندی حالت پایه  $(2p)^3$  در ازت به شمار می روند. شکل ۸.۹ نمودار تراز انرژی ترازهای فشرده حاصل از این پیکر بندی را نشان می دهد.



شکل ۸.۹ انرژی حالت‌های  $^{14}\text{N}$  حاصل از پیکربندی  $(2p)^2$  نسبت به حالت پایه  $4S_{3/2}$ . جدایی‌های ساختار ریز اغراق‌آمیز است.

## ۷.۹ طیف‌نمایی اتمی

در چندین فرصت در فصول قبل، دربارهٔ گسیل و جذب فوتونها در گذار بین حالت‌های اتمی، بویژه در مورد هیدروژن، بحث شده است. در بخش‌های ۶.۸ و ۷.۸ که نظریهٔ کوانتومی گذارهای اتمی را بحث کردیم، یک دسته قواعد گزینش به دست آوردیم که در مورد تابش دوقطبی اتمی اتم‌های تک‌الکترونی به کار می‌روند. قواعد گزینش ناشی از این حقیقت است که وقتی در تابش دوقطبی فوتون گسیل می‌شود، فوتون همراه خود تکانهٔ زاویه‌ای به میزان یک واحد نسبت به مرکز اتم دارد و تغییر پارتهای به وجود می‌آورد. اساساً، همین قواعد در مورد اتم‌های چندالکترونی نیز به کار می‌روند، زیرا به طور نظری و تجربی دریافته‌اند که معمولاً فقط یک الکترون تغییر حالت می‌دهد.

گذار بین دو حالتی که در آن یکی از قواعد گزینش نقض خواهد شد، می‌تواند با گذارهای مرتبه بالاتر، مانند گذار یک چهارقطبی الکتریکی یا چنانچه اتم‌های گسیلنده به صورت گاز باشند، در برخورد با اتم‌های دیگر و یا در برخورد با دیوارهٔ ظرف انجام گیرد. از آنجا که برخوردها بسیار زیاد هستند، خطوط طیفی ناشی از گذارهای نوری مرتبه بالاتر معمولاً در اتم‌ها خیلی ضعیف هستند. در هر صورت، چنین گذارهایی نقش مهمی در واکنجینش حالت‌های برانگیختهٔ هسته‌ای بازی می‌کنند.

از آنجا که نیروها یا گشتاورهای اختلالی مربوط به اسپین الکترون در میدان تابش خیلی ضعیف هستند، جهت اسپین معمولاً در یک گذار دوقطبی الکتریکی تغییر نمی‌کند. بنابراین، می‌توانیم قواعد برهم‌کش زیر را برای اتم چندالکترونی در جفت‌شدگی  $L-S$  پی‌ریزی کنیم

- گذارهای دوقطبی بین حالت‌هایی انجام می‌گیرد که در آنها یک الکترون حالت خود را تغییر می‌دهد به طوری که برای آن الکترون  $\Delta l = \pm 1$  است.
- اعداد کوانتومی اتم منوط به قواعد گزینش زیر است:

تغییر پارینه

$$\Delta S = 0 \quad (\text{غیر دقیق})$$

$$\Delta L = \pm 1 \text{ یا } 0$$

$$\Delta J = \pm 1 \text{ یا } 0 \quad (\text{اما بدون گذار } 0 \rightarrow 0)$$

$$\Delta m_j = \pm 1 \text{ یا } 0 \quad (\text{اما اگر } \Delta J = 0 \text{ باشد، } \Delta m_j = 0 \text{ قدغن است})$$

قواعد گزینش اتم در جفت شدگی  $z-z$  عبارت اند از

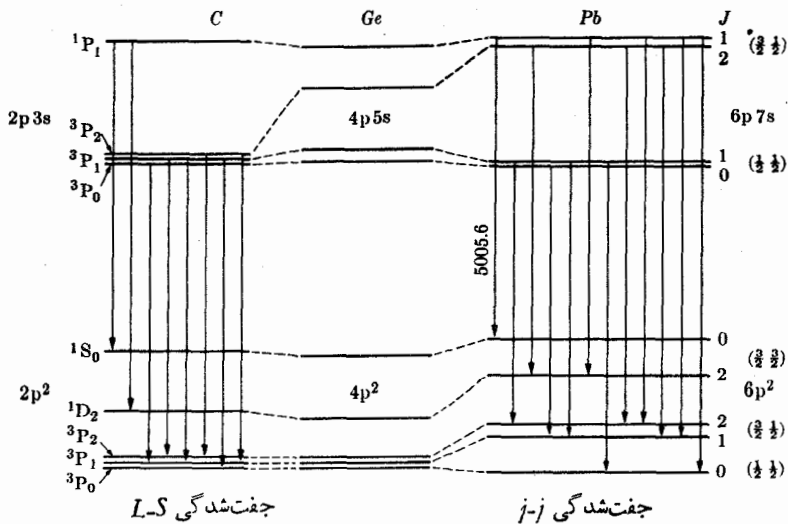
۱. گذارهای دو قطبی بین حالتی انجام می گیرند که در آن يك الکترون چنان تغییر حالت دهد که برای آن داشته باشیم  $\Delta l = \pm 1$ . برای همین الکترون  $\Delta z = \pm 1$  یا صفر، و برای تمام الکترونهاي دیگر  $\Delta z = 0$  است.
۲. اعداد کوانتومی اتم منوط به قواعد گزینش زیر است:

$$\Delta J = \pm 1 \text{ یا } 0 \quad (\text{اما بدون گذار } 0 \text{ به } 0)$$

$$\Delta m_j = \pm 1 \text{ یا } 0 \quad (\text{اما اگر } \Delta J = 0 \text{ باشد، } \Delta m_j = 0 \text{ قدغن است})$$

قواعد گزینش  $m_j$  فقط وقتی با معنی است که حالتی فرعی با اعمال يك میدان مغناطیسی خارجی از هم جدا شوند (اثر زیمان، به بخش بعد مراجعه کنید).

شکل ۹.۹ به عنوان يك مثال، گذارهایی که در کربن بین پیکربندیهای (۳s) (۲p)



شکل ۹.۹ گذارهای جفت شدگی  $L-S$  در کربن و جفت شدگی  $z-z$  در سرب.

و  $(\mu p)$ ، و گذارهایی که در سرب بیسن پیکربندیهای  $(vs)(p)$  و  $(p)$  به وقوع می پیوندد را نشان می دهد. جفت شدگی  $L-S$  مناسبترین طرح برای کرین است، در حالی که جفت شدگی  $J-z$  مناسبترین طرح برای سرب است. به طوری که نمودار تراز انرژی نشان می دهد، ژرمانیوم در وضعیتی است که بین این دو قرار می گیرد. خواننده می تواند به آسانی ثابت کند که گذارهای نشان داده شده از قواعد گزینش مذکور در بالا برای هر دو مورد پیروی می کنند.

به طور کلی، وقتی يك حالت پایینتر وجود داشته باشد که بدون نقض قواعد گزینش، بتوان به آن رسید، حالت برانگیخته اتم گذاری دوقطبی خواهد داشت. طول عمر حالت برانگیخته حدود  $10^{-8}$  تا  $10^{-10}$  ثانیه یا کمتر است. اگر حالتی پایینتری وجود داشته باشد که بتوان با گذار دوقطبی به آن رسید، و انگیزش به کمک گذار مرتبه بالاتر یا به کمک برخورد انجام خواهد گرفت. حالت  $2S_{1/2}$  در هیدروژن (بخش ۱۰.۷) يك نمونه است. در اصل، يك گذار دوقطبی می تواند به حالت مختصر پایینتر  $2p_{1/2}$  انجام گیرد، اما اختلاف انرژی به اندازه ای کم است که طول عمر (متناسب با  $v^{-3}$ ) فوق العاده زیاد است. چنین حالتی را حالت شبه پاییداد خوانند. مثال دیگر، اولین حالت برانگیخته هلیوم است (بخش ۳.۹).

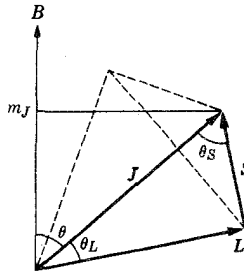
## ۸.۹ اثر زیمان

در سال ۱۸۹۶ زیمان<sup>۱</sup> شعله ای از سدیم را بین قطبهای يك مغناطیس قوی قرار داد و خطوط  $D$  زرد آن را با طیف نما مطالعه کرد. او دریافت که خطوط به مؤلفه های به هم فشرده تقسیم می شوند، و همچنین بعداً کشف کرد که نور گسیل شده قطبی است. ما به آسانی می توانیم اثر زیمان را به کمک بحث ساده نیمه کلاسیکی گشتاور مغناطیسی آنها (بخش ۵.۷) دریابیم. انرژی درمیدانی مغناطیسی که به عنوان اختلالی کوچک در نظر گرفته شود، با معادله (۵۶.۷) داده می شود، که در آن گشتاور مغناطیسی همان بردار گشتاور مغناطیسی اتم است. از ترکیب معادله (۵۵.۷) با (۵۶.۷) معادله زیر به دست می آید

$$\Delta E = g\mu_B m_B \quad (24.9)$$

که در آن مقدار مگنتون بور با معادله (۵۴.۷) داده می شود. در اتمی که در آن تکانه زاویه ای کل  $J$  فقط ناشی از حرکت مداری است، یعنی  $J = L$  است، ضریب  $g$  معادله (۱۴.۹) برابر  $L$  می شود. از طرف دیگر، اگر  $L = 0$  و  $J = S$  باشد، ضریب  $g$  برابر ۲ است. اگر  $L$  و  $J$  هیچکدام برابر صفر نباشند، ضریب  $g$  مقداری بین ۱ و ۲ بوده و به آسانی می توانیم آن را به صورت زیر حساب کنیم. شکل ۱۰.۹ يك نمودار بزداری است که در مورد جفت شدگی  $L-S$  در میدان مغناطیسی ضعیف به کار می رود. در این نمودار، در حالی که بردار  $L$  و بردار  $S$  با هم حول





شکل ۱۰.۹ نمودار برداری برای محاسبه ضریب  $g$  ی لاندیه.

بردار  $\mathbf{J}$  می‌چرخند،  $\mathbf{J}$  و  $m_J$  ثابت می‌مانند. محاسبات دقیق مکانیک کوانتومی برای تعیین انرژی  $\Delta E$  نشان می‌دهد که  $\Delta E$  برابر انرژی متوسط است که می‌توان آن را از مدل برداری حساب کرد. این انرژی عبارت است از

$$\Delta E = (\langle \mu_{Lz} \rangle + \langle \mu_{Sz} \rangle) B \quad (25.9)$$

مقادیر متوسط دو مؤلفه  $z$  گشتاور مغناطیسی عبارت‌اند از

$$\mu_{Lz} = \frac{e}{2m_e} \sqrt{L(L+1)} \hbar \cos \theta_L \cos \theta \quad (26.9)$$

$$\mu_{Sz} = \frac{e}{m_e} \sqrt{S(S+1)} \hbar \cos \theta_S \cos \theta \quad (27.9)$$

کسینوسها با رابطه زیر داده می‌شوند

$$\cos \theta = \frac{m_J}{\sqrt{J(J+1)}} \quad (28.9)$$

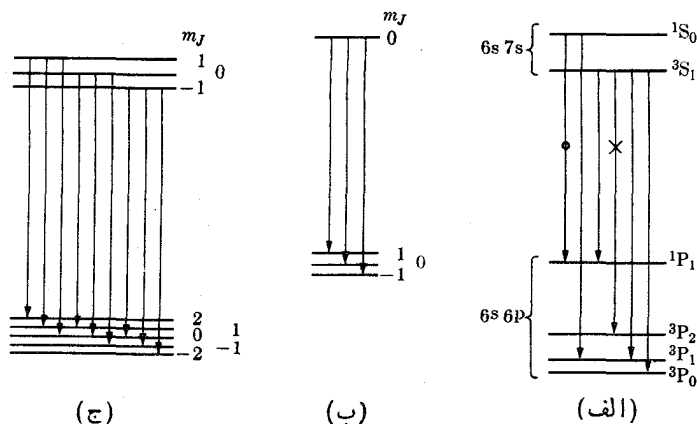
و قواعد کسینوس عبارت‌اند از

$$S(S+1) = J(J+1) + L(L+1) - 2\sqrt{J(J+1)L(L+1)} \cos \theta_S \quad (29.9)$$

$$L(L+1) = J(J+1) + L(L+1) - 2\sqrt{J(J+1)S(S+1)} \cos \theta_L \quad (30.9)$$

با حل معادلات (۲۹.۹) و (۳۰.۹) برای دو کسینوس و قرار دادن آنها در معادلات (۲۶.۹) و (۲۷.۹) و مجدداً در معادله (۲۵.۹) رابطه زیر به دست می‌آید

$$\Delta E = \frac{eh}{2m_e} m_J B \left[ 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \right] \quad (31.9)$$



شکل ۱۱.۹ گذارهای بین بعضی حالت‌های برانگیخته جیوه با پیکربندی الکترونی  $(6s)^1(6p)^1$ ،  $(7s)^1$ ،  $(6s)^1(6p)^1$  و  $(6s)^1(6p)^1$  بدون میدان خارجی (یادآوردی؛ گذار از  $^1S_0$  به  $^3P_1$  قاعدهٔ ضعیف  $\Delta S=0$  را نقض می‌کند). (ب) گذار از  $^1S_0$  به  $^1P_1$  در میدان مغناطیسی. (ج) گذار از  $^3S_1$  به  $^3P_2$  در میدان مغناطیسی.

پس از مقایسه با معادلهٔ (۲۴.۹)، ضریب جدید  $g$  به صورت زیر به دست می‌آید

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \quad (۲۲.۹)$$

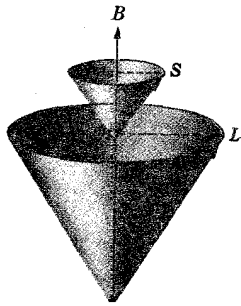
این را ضریب  $g$  می‌نامند.

اگر  $S=0$  باشد،  $g$  برابر یک می‌شود. بدین ترتیب، جدایی بین انرژی حالت‌های فرعی با مقادیر متفاوت  $m_J$  چیزی است که می‌توانستیم به کمک رابطهٔ نیمه کلاسیکی قبل از کشف اسپین ذاتی حساب کنیم. در گذار بین دو حالت تک‌تایه (برای هر دو  $S=0$ ) در یک میدان مغناطیسی، خطوط طیف به سه مؤلفه تقسیم می‌شوند که مربوط به

$$\Delta m_J = -1, 0, +1$$

هستند. چنین گذاری را اثر بهنجار زیمان گویند، بهنجار از این جهت که وقتی برای اولین بار مشاهده شد، قابل درک بود.

وقتی  $S$  غیر صفر باشد و  $L$  بر طبق قواعد گزینش مندرج در بخش قبل تغییر کند، ضریب  $g$  نیز تغییر می‌کند و تصویر پیچیده تری ظاهر می‌شود. چنین گذاری را اثر ناهنجار زیمان می‌گویند. به عنوان یک مثال، نگاهی به حالت‌های مربوط به پیکربندی  $(6s)^1(7s)^1$  و  $(6s)^1(6p)^1$  و گذارهای بین این حالت‌ها می‌اندازیم. شکل ۱۱.۹ الف ترازهای انرژی در وضعیت بدون میدان مغناطیسی و گذارهای دو قطبی الکتریکی بین آنها را نشان می‌دهد. گذاری که با یک دایره مشخص شده، مطابق شکل ۱۱.۹ ب، اثر بهنجار زیمان را نشان



شکل ۱۲.۹ اثر پاشن-بک.

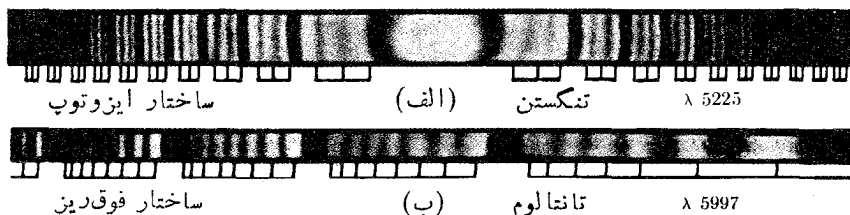
می‌دهد. در این مورد خاص تراز بالایی دارای  $J = 0$  است و بنا بر این هرگز از هم جدا نمی‌شود. اگر به جای یک حالت  $^1S_0$  یک حالت  $^1D_2$  می‌داشتیم، جدایی بین حالت‌های فرعی نظیر حالت پایینتر ( $^1P_1$ ) می‌شد و بنا بر این، به علت قاعده گزینش ( $\Delta m_j = \pm 1$  یا  $0$ )، فقط خطوط مربوط به سه بسامد مختلف دیده می‌شدند.

گذار مشخص شده با ضربدر در شکل ۱۱.۹ الف اثر نابهنجار زیمان را، مطابق آنچه به تفصیل در شکل ۱۱.۹ ج آمده است، نشان می‌دهد. ضریب  $g$  برای تراز بالایی برابر ۲ و برای تراز پایینی برابر ۱.۵ است. به علت این موضوع، هیچکدام از ۹ خط نشان داده شده در شکل دقیقاً به جهش انرژی یکسان مربوط نمی‌شود. بنا بر این این گذار در میدان مغناطیسی به ۹ خط طیفی مجزا تبدیل می‌شود.

در جدایی زیمان نشان داده شده در شکل ۱۱.۹ به مقدار زیادی مبالغه شده است. برای تشخیص این اثرات، یعنی طیف‌نمایی یا تفکیک زیاد، به طیف‌نمای قوی نیازمندیم. در یک میدان بسیار قوی، جفت‌شدگی بین بردار  $L$  و بردار  $S$  گسسته می‌شود و دو بردار به طور مستقل حول محور  $B$  می‌چرخند (شکل ۱۲.۹). این پدیده را اثر پاشن-بک می‌نامند. گذار در این مورد فقط شامل تغییرات  $L$  و  $m_L$  می‌شود، یعنی می‌توانیم کاملاً از اسپین صرف‌نظر کنیم. بنا بر این در یک میدان بسیار قوی، جدایی خطوط طیف طرح بهنجار زیمان را نشان می‌دهد که اختلاف انرژیها در آن از معادله (۳۱.۹) با  $g = 1$  محاسبه می‌شود.

## ۹.۹ ساختار فوق‌ریز

طیف‌نمایی نوری به صورت یک علم فوق‌العاده دقیق در اواخر قرن پیش توسعه یافت. تداخل‌سنجها، توانهای تفکیک بسیار بالایی به دست داده بودند، و به کمک چنین دستگاهی مایکلسون در سال ۱۸۹۱، پدیده جدید ساختار ریز را کشف کرد که فقط می‌توانست با تفکیک فوق‌العاده زیاد دیده شود. بعدها وقتی این موضوع کشف شد که هسته‌های عناصر ممکن است دارای جرمهای متفاوت باشند، جدایی فوق‌ریز خطوط را مربوط به این موضوع

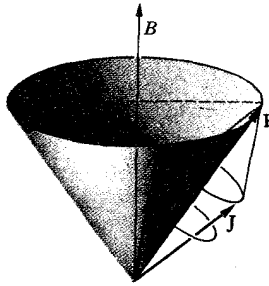


**شکل ۱۳.۹** طئفهای نوری با تفکئک بالا که با سنجۀ فابری-پرو گرفته شده: (الف) اثر ائزوتوپ در تنگستن، (ب) ساختار فوق‌رئز خط تانتال

می‌پنداشتند، که در بعضی موارد تفسیری صحیح به نظر می‌رسد. اما، بزودی آشکار شد که بعضی از عناصری که دارای ساختار فوق‌رئزند، تک ائزوتوپ هستند و باید در جستجوی توجیه دیگری بود. در سال ۱۹۲۴ باؤلی بدرستی چنین توجیه کرد که هسته ممکن است دارای تکانه زاویه‌ای و گشتاور دو قطبی مغناطیسی وابسته به آن باشد که از طریق جفت شدن با میدان مغناطیسی الکترونها موجب جدایی فوق‌العاده در ترازاها شود. بعدها معلوم شد که قسمتی از این اثر گاهی در نتیجه برهم‌کنش گشتاور چهار قطبی الکتريکی هسته با گرادیان میدان الکتريکی به وجود می‌آید.

جدایی ترازاهاى اتمى ناشى از این حقیقت که ائزوتوپهای مختلف دارای جرهای متفاوت هستند را اکنون اثر ائزوتوپ خوانند، و جدایی حاصل از گشتاور مغناطیسی و گشتاور چهار قطبی الکتريکی هسته را ساختار فوق‌رئز می‌نامند. شکل ۱۳.۹ دو تصور حاصل از تداخل سنجی به نام سنجۀ فابری-پرو را نشان می‌دهد. شکل ۱۳.۹ الف جدایی خط عنصر تنگستن را که دارای پنج ائزوتوپ پایدار است، نشان می‌دهد، سه تا از ائزوتوپها با اعداد جرمی ۱۸۲، ۱۸۴ و ۱۸۶ از دوتای دیگر فراوانتر هستند. اعتقاد بر این است که سه خط شکل ۱۳.۹ الف به علت وجود این سه ائزوتوپ هسته‌ای است. انتقالهای انرژی نه تنها به علت اختلاف در جرم هسته‌هاست، بلکه به علت اختلاف در ابعاد هسته‌ای و توزیع بار است که در توابع موج الکترون در محل هسته تغییرات جزئی به وجود می‌آورد. تکرار طرح سه خط در شکل ۱۳.۹ الف حاصل از بازتابهای مرتبه بالاتر در تداخل سنج است. تصویر شکل ۱۳.۹ ب جدایی فوق‌رئز يك خط معینی را در طیف تانتال که به هشت مؤلفه تقسیم شده، نشان می‌دهد. تانتالوم عملاً تک ائزوتوپ است و جدایی خط طیف به علت جفت شدگی گشتاور مغناطیسی هسته تانتال و میدان مغناطیسی ناشی از الکترونها در محل هسته، به وجود می‌آید.

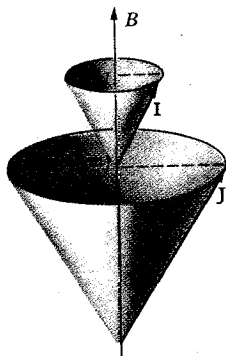
تکانه زاویه‌ای الکترونها در اتم و تکانه زاویه‌ای هسته‌ها دارای يك مرتبه از بزرگی هستند (مضربى از  $\frac{h}{2\pi}$ ). تکانه زاویه‌ای کل اتم ناشی از جمع برداری تکانه زاویه‌ای هسته  $I$  با کمیت عددی  $\sqrt{I(I+1)} \frac{h}{2\pi}$  و تکانه زاویه‌ای الکترونها  $J$  با کمیت عددی  $\sqrt{J(J+1)} \frac{h}{2\pi}$  است. برای این جفت شدگی همان قواعد جفت شدگی  $L$  و  $S$  با حاصل جمع  $J$  به کار برده می‌شود. در حقیقت از این قواعد در مکانیک کوانتومی برای جفت شدن دو تکانه زاویه‌ای از هر نوع استفاده می‌شود. شکل ۱۴.۹ این جفت شدگی برداری  $I$  و  $J$  را



شکل ۱۴.۹ نمایش برداری  
جفت شدگی تکانه زاویه‌ای  
هسته‌ای  $I$  و تکانه زاویه‌ای  
الکترونی  $J$  که مجموع آنها  
تکانه زاویه‌ای کل  $F$  است بسا  
مؤلفه کوانتیده  $m_p$  در راستای  
 $Z$ .

با تکانه زاویه‌ای کل  $F$ ، با عدد کوانتومی  $F$  و کمیت عددی  $\sqrt{F(F+1)}\hbar$  نشان می‌دهد. اگر  $I$  و  $J$  هر دو کمیت درست یا هر دو کمیت نیمه درست باشند،  $F$  می‌تواند هر کمیت درستی از  $|J-I|$  تا  $J+I$  را دارا باشد. اگر یکی از دو عدد نیمه درست باشد در آن صورت  $F$  فقط کمیت‌های نیمه درست را می‌گیرد، لکن همان قواعد برای مقادیر حداکثر و حداقل به کار برده می‌شوند. وقتی  $J$  و  $I$  معلوم باشند، تعداد مقادیر مختلف  $F$  یا تعداد ترازهای فوق‌ریز برابر است با  $(2I+1)$  یا  $(2J+1)$ ، هر کدام که کوچکتر باشد به کار برده می‌شود. از این حقیقت می‌توان استفاده کرد و وقتی  $J < I$  باشد، مقدار  $I$  را تعیین کرد.

گشتاور نیروی متقابل بین گشتاور مغناطیسی هسته‌ای  $\mu_I$  و گشتاور مغناطیسی اتمی  $\mu_J$  موجب حرکت تقدیمی آرام  $I$  و  $J$  حول بردار  $F$  می‌شود، که در شکل ۱۴.۹ نشان داده شده است. اگر علاوه بر این، گشتاور نیروی خارجی نیز اعمال شود، مثلاً بسا اعمال یک میدان مغناطیسی در راستای  $Z$ ، بردار  $F$  حول محور  $Z$  به گردش درمی‌آید. آن قسمت از ساختار فوق‌ریز که در حال حاضر مورد توجه است از جفت شدگی دو قطبیه‌های مغناطیسی  $\mu_I$  و  $\mu_J$  ناشی می‌شود. انرژی جفت شدگی به‌طور کلاسیک با معادله (۸۰.۷) داده می‌شود. محاسبات مکانیک کوانتومی ساختار فوق‌ریز کاملاً پیچیده است و برای اطلاعات بیشتر باید به منابع دیگر مراجعه شود. برای اتم هیدروژن گونه (تک الکترون) با بار هسته‌ای  $Z$ ، انرژی جفت شدگی عبارت است از



شکل ۱۵.۹ قطع جفت  
شدگی بین دو بردار  $I$  و  $J$   
( $\mu_I$  و  $\mu_J$ ) به وسیله یک  
میدان خارجی قویتر (در  
مقایسه با شکل ۱۲.۹).

$$E_H = \frac{\mu_0}{4\pi} \mu_I \mu_B \frac{Z^3 F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)}{n^2 a_0^3 IJ(J+1) \left(L + \frac{1}{4}\right)} \quad (۲۳.۹)$$

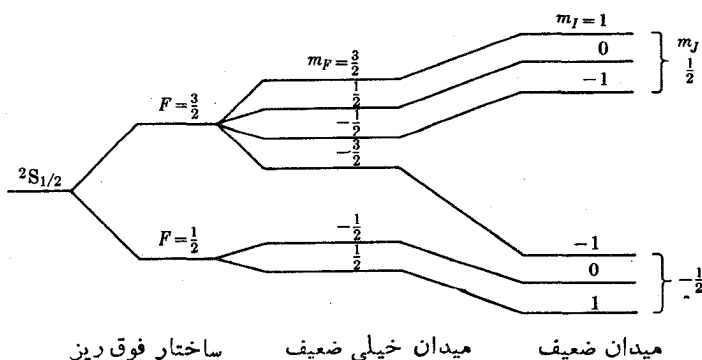
که در آن  $\mu_I$  گشتاور مغناطیسی هسته در دستگاه واحدهای  $\mu_B$  mksA مگنتون بور،  $n$  عدد کوانتومی اصلی اتم،  $a_0$  اولین شعاع بور، و  $L$  تکانه زاویه‌ای مداری الکترون است. جفت شدگی گشتاور چهار قطبی الکتریکی (بخش ۱۰.۱۲) هسته و گرادیان میدان الکتریکی الکترونها عامل دیگری است که در مقدار جدایی ساختار فوق ریز تأثیر دارد. در آنها معمولاً اثر گشتاور چهار قطبی الکتریکی بر ساختار فوق ریز کمتر از اثر گشتاور دوقطبی مغناطیسی است. در مولکولها، که اغلب میدان مغناطیسی الکترونها وجود ندارد و میدان حاصل از گردش مولکول ممکن است خیلی ضعیف باشد، وضع معکوس است. یک تراز فوق ریز معین که در مکانیک کوانتومی با پارامترهای تکانه زاویه‌ای  $I$ ،  $J$  و  $F$  بیان می‌شود، دارای  $2F+1$  واگنی است که تعداد سمتگیریهایی ممکن بردار  $F$  را نسبت به راستایی معین در فضا نشان می‌دهد. وقتی که این راستا به وسیله یک میدان مغناطیسی نموده می‌شود، برهم کنش بین این میدان و گشتاور دوقطبی مغناطیسی وابسته به بردار  $F$  واگنی را حذف خواهد کرد و هر تراز فوق ریز به  $(2F+1)$  تراز تبدیل می‌شود. وقتی میدان خیلی ضعیف است، بردار  $F$  حول محوری در راستای میدان دوران می‌کند و بردارهای  $I$  و  $J$ ، به علت برهم کنش متقابلشان، حول  $F$  می‌چرخند (شکل ۱۴.۹). وقتی میدان خارجی به بیش از ۱۵۰ گاوس افزایش می‌یابد، با انفعال دو بردار  $I$  و  $J$  بردار  $F$  هویت خود را از دست می‌دهد، و دو بردار  $I$  و  $J$  هر کدام مستقلاً حول محور میدان می‌چرخند (شکل ۱۵.۹).

به‌عنوان مثال، یکی از اتمهای قلیایی  $\text{Li, Na, K, Rb}$  یا  $\text{Cs}$  را در حالت پایه، حالت  $^2S_{1/2}$ ، در نظر می‌گیریم. میدان مغناطیسی حاصل از گشتاور مغناطیسی الکترون در محل هسته از نظر مقدار و جهت تغییرات زیادی خواهد داشت که بستگی به محل الکترون و سمتگیری بردار اسپین آن دارد. مقدار متوسط این میدان را می‌توان محاسبه کرد که نتیجه به‌صورت زیر است

$$B \approx \frac{\mu_0 \mu_B}{2 a_0^3} \approx 15 \text{ Wb m}^{-2} = 150000 \text{ G}$$

از طرف دیگر، میدان هسته در محل الکترون حدود  $1000$  بار کوچکتر از این مقدار است، زیرا گشتاور مغناطیسی این هسته‌ها فقط از مرتبه  $10^2 \mu_B$  است (بخش ۱۰۱۲). وقتی میدان خارجی در محل الکترون بزرگتر از میدان متوسط حاصل از هسته باشد، الکترون شروع به گردش حول محور موازی با میدان خارجی خواهد کرد. این به‌نوبه خود میدان متوسط حاصل از الکترون در محل هسته را در همان راستا قرار خواهد داد، و بنابراین هسته نیز حول محور میدان خارجی دوران خواهد کرد. عمل میدان خارجی بر هسته بیشتر یک عمل غیرمستقیم است که در آن میدان خارجی میدان معمولاً خیلی قویتر الکترون را با خود همراهی می‌کند.

شکل ۱۶.۹ ساختار فوق‌ریز تراز  $^2S_{1/2}$  ( $L=0, S=1/2, J=1/2$ ) با تکانه زاویه‌ای هسته‌ای  $I=1$ ، و جدایی بیشتر حالت‌های فرعی مغناطیسی را در میدان خارجی نشان می‌دهد. در میدان‌های خیلی ضعیف، یعنی کمتر از  $100$  گاوس، نام مناسب حالتها و حالت‌های فرعی برحسب اعداد کوانتومی  $F$  و  $m_F$  داده می‌شود. در میدان‌های ضعیف، یعنی حدود چند صد گاوس، نام مناسب حالتها برحسب تکانه زاویه‌ای الکترون  $J$  و مؤلفه  $z$  آن  $m_J$  و تکانه هسته‌ای  $I$  و مؤلفه  $z$  آن  $m_I$  داده می‌شود. این نامگذاری برای حالت اتمی  $S$ ،



شکل ۱۶.۹ نمودار ترمیمی جدایی حالت  $^2S_{1/2}$  ( $L=0, S=1/2, J=1/2$ ) با تکانه زاویه‌ای هسته‌ای  $I=1$  در ائس میدان‌های داخلی (ساختار فوق‌ریز) و میدان خارجی ضعیف.

حالتی که هم اکنون درباره آن بحث می کنیم، در میدانهای قوی نیز يك نامگذاری مناسب است. اما، برای حالتی اتمی دیگر در میدان بسیار قوی عدد کوانتومی  $J$  نیز به مؤلفه های  $S$  و  $L$  تقسیم می شود (اثر پاشن-بک).

در ناحیه میدان ضعیف، مرتبه حالتی فرعی  $m_f$  در دو شاخه متقابل است و جدایی حالتی فرعی در هر شاخه عملاً مستقل از  $B$  است. این موضوع مجدداً این حقیقت را نشان می دهد که میدان حاصل از الکترون در محل هسته خیلی قویتر از میدان خارجی است، مقدار آن مستقل از  $B$  است و راستای آن با  $m_f$  تعیین می شود. مشاهده جالب دیگر اینکه تعداد ترازهای فوق ریز در هر شاخه برابر است با  $2I + 1$ . از این موضوع، که در مورد ترازهای اتمی با مقادیر بالاتر  $J$  نیز به کار می رود، می توان برای تعیین  $I$  استفاده کرد.

### ۱۰.۹ جذب غیر تشدیدي

در بخش ۶.۸ از جذب انرژی به وسیله اتمی که در تابش الکترومغناطیسی باطیف انرژی پیوسته غوطه ور است (نور سفید) بحث کردیم. نشان دادیم که عمل جذب موقعی صورت می گرفت که انرژی فوتون نزدیک به اختلاف انرژی ترازهای انرژی بود. محاسباتی که انجام دادیم مبتنی بر نظریه اختلال مرتبه اول بود. اثر بسیار ضعیف مرتبه دوم، به نام اثر داهان، وقتی رخ می دهد که انرژی فوتون بیش از انرژی لازم برای جهش کوانتومی باشد و موجب گذار جذبی شود. انرژی اضافی به صورت يك فوتون با انرژی کمتر آزاد می شود، که این عمل بسیار شبیه اثر کامپتون است. توازن انرژی به صورت ساده زیر است

$$h\nu_1 = \Delta E_{\text{atom}} + h\nu_2 \quad (34.9)$$

که در آن  $h\nu_1$  انرژی فوتون اولیه و  $h\nu_2$  انرژی فوتون باقیمانده است. عمل جذب متفاوتی که از نظر عملی دارای اهمیت بزرگتری است، فرایند فلورودسانی نام دارد. تا به حال فقط درباره آنها و طیفهای اتمی بحث کرده ایم. وقتی آنها در مولکولها و جامدات مقید باشند، طیفها دیگر به صورت طیف خطی ساده نیستند (فصل ۱۱). بویژه، جذب و گسیل تابش در جسم جامد دارای طیف پیوسته است. از این عمل در چسراغهای فلورودسان و در روشنائی رسانی جدید استفاده می کنند. این چراغها به صورت زیر عمل می کنند. تخلیه الکتریکی در لامپ فلورودسان در بخار جیوه انجام می گیرد. طیف جیوه دارای خطوطی در ناحیه نور مرئی است، اما بیشتر تابش گسیل شده حول يك خط در ناحیه فرابنفش متمرکز است. اگر دیواره لامپ از کوارتز ساخته شود که بتواند نور فرابنفش را از خود عبور دهد، این تابش قادر خواهد بود از لامپ خارج شود و برای سترون کردن هوا یا «برنزه کردن» مورد استفاده قرار گیرد. اما لوله ای که شفاف باشد، يك منبع ضعیف نور مرئی است. بنابراین، سطح داخلی لامپ فلورودسان را با يك ماده جاذب نور مرئی فرابنفش می پوشانند. لذا اتمهای این ماده فلورودسان برانگیخته می شوند. اگر الکترونها برانگیخته در يك مرحله به حالت عادی برگردند، آنها مجدداً نور فرابنفش گسیل می دهند که نامرئی



است. اما الکترونهاى برانگیخته درطی بیش از يك مرحله به حالت عادى برمی گردند. در هر مرحله پرتوی با انرژی کمتر از انرژی برانگیختگی اولیه تابش می شود، به طوری که انرژی نورفرا بنفش به نور مرئی تبدیل می شود. رنگهای گوناگون نور لامپهای مختلف به وسیله ماهیت ماده فلوروسان کنترل می شود.

در بعضی مواد، آنها ممکن است پس از دریافت انرژی تابشی، به حالت شبه پایدار باقی بمانند. چنین موادی دارای نور با دوام هستند که فسفرسانی نامیده می شود، و ممکن است پس از قطع تمام برانگیزشهای خارجی برای چندین ساعت ادامه یابد. این مواد گاهی بر روی صفحه لامپهای پرتو کاتودی به کار می روند و گاهی در کلیدهای برق برای پیدا بودن در تاریکی مورد استفاده قرار می گیرند. اغلب لامپهای فلوروسان کمی هم خاصیت فسفرسانی دارند. آنها را می توان تا چند دقیقه پس از قطع برق در اتاق تاریک مشاهده کرد.

## مسائل

۱۰۹ اولین پتانسیل یونش هلیوم ۲۴۶ ولت است. (الف) چقدر انرژی بر حسب الکترون-ولت و ژول باید به کار برد تا یونش انجام گیرد؟ (ب) تا چه دمایی باید گاز هلیوم را گرم کرد تا اینکه يك اتم (اگر با محتملترین سرعت در توزیع ماکسول حرکت کند) درست به اندازه کافی انرژی جنبشی انتقالی به دست آورده که در برخورد با اتم دیگر آن را یونیده کند؟

۲۰۹ نمودارهای تراز انرژی هلیوم را، همانند شکل ۳۰۹ به صورت بدون اختلال و اختلال یافته (به طور کیفی)، با  $n_1 = 1$  و  $n_2 = 3$  رسم کنید.

۳۰۹ با استفاده از جدول ۱۰۷ و معادلات (۲۹.۷)، یکی از توابع موج بدون اختلال و پاد متقارن اتم هلیوم را با يك الکترون در حالت  $1s$  و دیگری در حالت  $2p$  بنویسید. حالت حاصل باید دارای  $S = 1$  و  $m_s = 1$  باشد.

۴۰۹ مورد اتم هلیوم با پیکر بندی الکترونی  $(1s)(2p)$  را در نظر بگیرید. ترازهای انرژی را به صورت نمودار خطوط متوازی در شرایط زیر رسم کنید. (الف) از تمام برهم کنشها به جز جاذبه هسته ای بر الکترونها صرف نظر می شود. (ب) برهم کنش متقابل الکتروستا تیکی بین الکترونها به حساب آورده می شود. (ج) هر دو برهم کنش متقابل داخلی الکتروستا تیکی و مغناطیسی در نظر گرفته می شوند. (د) نظیر ج به اضافه اعمال يك میدان مغناطیسی خارجی. حالتها را با طبقه بندی اصطلاحی آنها مشخص کنید.

۵۰۹ انرژی اختلال  $V_{12}$  را برای اتم هلیوم در حالت پایه با استفاده از تصویر بسیار ساده زیر محاسبه کنید. از آنجا که الکترون به طور متوسط در موقعیت  $r = 0$  است، فرض می کنیم يك الکترون همیشه در آنجا است. برای الکترون دوم، از تابع موج حالت پایه

داده شده در جدول ۱۰۷ و معادلات (۲۹.۷) استفاده کنید. توضیح دهید چرا نتیجه برای  $(V_{۱۲})$  مقدار خیلی بزرگی است.

۶۰۹ دو الکترون در پوسته‌ای کروی به شعاع  $a_0$  محبوس شده‌اند. با تقریب می‌توان از نیروی دافعه الکتروستاتیکی الکترونها صرف‌نظر کرد. حالت پایه هر الکترون بایک تابع موج به صورت زیر بیان می‌شود

$$\psi(i) = A \frac{1}{r_i} \sin(\pi r_i / a_0)$$

که در آن  $i$  شماره الکترون مورد بررسی را نشان می‌دهد. با استفاده از این توابع موج و توابع اسپین  $\beta(i)$  و  $\alpha(i)$ ، تابع (یا توابع) کامل موجی را بنویسید که در آن اسپین الکترونها پاد موازی است. این موضوع را در نظر بگیرید که الکترونها ذرات غیر قابل تمایزند.

۷۰۹ الف) نشان دهید که حداکثر تعداد الکترونها می‌تواند در پوسته‌ای با عدد کوانتومی  $n$  قرار گیرند  $2n^2$  است. ب) اگر پوسته‌های الکترونی تا  $n=7$  کاملاً پر شوند، چند عنصر در دسترس خواهند بود؟

۸۰۹ دو تکانه زاویه‌ای با اعداد کوانتومی  $J_1 = 2$  و  $J_2 = 3$  با هم ترکیب می‌شوند. الف) تعداد مقادیر ممکن تکانه زاویه‌ای کل (عدد کوانتومی) چقدر خواهد بود؟ ب) برای یکی از این امکانات، یعنی  $J = 2$ ، تمام مقادیر  $m$  را نام ببرید و ترکیبات ممکن  $m_1$  و  $m_2$  را، که هر کدام از این کمیتها را به دست می‌دهند، مشخص کنید.

۹۰۹ از ترکیب دو تکانه زاویه‌ای با اعداد کوانتومی  $j_1 = 3/2$  و  $j_2 = 2$ ، حالت‌هایی با اعداد کوانتومی  $j$  و  $m$  حاصل می‌شوند. الف) چندتا از این حالتها (چند دسته از  $j$  و  $m$  مختلف) وجود دارند؟ ب) نمودارهای برداری نشان دهنده چهار طریق مختلف ترکیب حالت‌های  $j = 3/2$  و  $m = 1/2$  را، با استفاده از ترکیبهای گوناگون  $m_1$  و  $m_2$ ، رسم کنید. حالت واقعی مکانیک کوانتومی دستگاه ترکیبی خطی از این چهار مورد است.

۱۰۰۹ با استفاده از مدل برداری، همانند بخش ۶۰۹، نشان دهید که پیکربندی الکترونی  $(2p)^2$  در کربن می‌تواند حالت‌های زیر را به وجود آورد:  $^1S_0$ ،  $^3P_0$ ،  $^3P_1$  و  $^3P_2$ . با استفاده از قواعد بخش ۶۰۹، نمودار تراز انرژی این حالتها را رسم کنید.

۱۱۰۹ عدد اتمی بریلیم ۴ است. الف) پیکربندی الکترونی Be در حالت پایه چگونه است؟ ب) جمله‌های طیفی ناشی شونده از این پیکربندی چیست (مثلاً  $^2P_{1/2}$ ، غیره)؟ ج) پیکربندی الکترونی Be در اولین حالت برانگیخته چگونه است؟ د) چه جملاتی از این پیکربندی حاصل می‌شوند؟ ه) چند خط طیفی در گذار بین حالت‌های تشکیل شده از این پیکربندیها، در صورت فقدان میدان مغناطیسی خارجی، می‌تواند گسیل شود؟ و) چند

خط طیفی در گذار بین حالت‌های تشکیل شده از این دو پیکر بندی، در صورت وجود میدان مغناطیسی خارجی، می‌تواند گسیل شود؟ [در (ه) و (و) گذارها را با نمودار تراز انرژی نشان دهید].

۱۲.۹ عدد اتمی آلومینیوم ۱۳ است. (الف) چه نوع سری طیفی (یعنی تک تابه، دو تابه... ) برای آلومینیوم خنثی می‌توان انتظار داشت؟ (ب) چه نوع سری طیفی از آلومینیوم یکبار یونیده باید انتظار داشت؟ (ج) پیکر بندی الکترونی  $(2s)^2 (1s)^2 \dots$  اتم آلومینیوم در حالت پایه چگونه است؟ (د) عبارت طبقه بندی (مانند  $4S_{3/2}$ ) برای این حالت چیست؟

۱۳.۹ (الف) طبقه بندی (به انضمام مقادیر  $J$ ) حالت‌های ناشی از جفت شدگی  $L-S$  را برای سه الکترون  $p$  غیر معادل (یعنی الکترون‌های با اعداد کوانتومی متفاوت  $n_1 \neq n_2 \neq n_3$ ) به دست آورید. در حضور میدان مغناطیسی، چند تراز انرژی مشخص وجود دارد؟ (ب) قسمت الف را برای سه الکترون  $p$  معادل تکرار کنید ( $n_1 = n_2 = n_3$ ). (ج) جمله حالت پایه را در قسمت الف و ب مشخص کنید.

۱۴.۹ عدد اتمی سدیم ۱۱ است. (الف) پیکر بندی الکترونی حالت پایه  $Na$  را بنویسید. (ب) یک باریکه از سدیم (همه در حالت پایه) موقع عبور از میدان مغناطیسی ناهمگن به چند مؤلفه تقسیم می‌شود؟

۱۵.۹ سدیم یک اتم «هیدروژن گونه» بایک الکترون در خارج از پوسته‌های بسته است، ترازهای انرژی و گذارهای مجاز را موقعی که الکترون خارجی از پوسته  $3d$  به پوسته  $3p$  جهش می‌کند، با استفاده از نمودار نشان دهید. در مجاورت هر تراز در نمودار، طبقه بندی مربوط و از جمله، عدد کوانتومی تکانه زاویه‌ای کل  $J$  را بنویسید.

۱۶.۹ آلومینیوم ۲۷ دارای تکانه زاویه‌ای هسته‌ای  $5/2^+$  است. چند ترکیب فوق ریز در حالت پایه اتم‌های آلومینیوم وجود دارد؟ این ترکیبها، در حضور میدان مغناطیسی خارجی، به چند تراز تبدیل می‌شوند؟

## پرتو ایکس و بلورنگاری

### ۱۰۱۰ کشف پرتو ایکس

در فصل دوم شرح دادیم که چگونه مطالعه تخلیه الکتریکی در گازها در فشار کم تاسون را به کشف الکترون و ایزوتوپها هدایت کرد. حال کشف دیگری که در سال ۱۸۹۵ قبل از کشف الکترون در ارتباط با تخلیه الکتریکی گازها انجام شد را در نظر می گیریم: کشف پرتو ایکس توسط رونتگن. در اینجا ترجمه گفتار رونتگن را می آوریم:<sup>۱</sup>

«اگر تخلیه حاصل از يك پيچۀ القایی نسبتاً بزرگ را از داخل يك لامپ خلا هیتورف یا يك لامپ لنارد، يك لامپ کروکس، یا دستگاه مشابه دیگر که به اندازه کافی از هوا تخلیه شده باشد بگذرانیم، و ضمناً اگر لامپ با مقوای سیاه و نازک کاملاً پوشیده شده باشد و تمام دستگاه در اتاق کاملاً تاریک قرار گرفته باشد، در هر عمل تخلیه نوری درخشان بر روی صفحه آغشته به باریوم پلاتوسیانید که در مجاورت پيچۀ القایی قرار دارد مشاهده می شود. فلوئورسانی ایجاد شده کاملاً مستقل از این است که سطح اندوده رودرروی لامپ تخلیه قرار داشته باشد و یا ساده . . .»

«جالبترین جنبه این پدیده این است که يك عامل فعال ایجاد می شود که می تواند از پوشش مقوایی سیاه عبور کند در حالی که این پوشش نسبت به نور مرئی و فرابنفش خورشید

1. *Source Book in Physics*, by William Francis Magie, Harvard University Press, 1935.

یا قوس الکتریکی کدر است، این عامل همچنین قادر است فلوئورسانی فعال ایجاد کند...»  
 «بزودی درمی یابیم که تمام اجسام نسبت به این عامل به میزان متفاوت شفاف هستند. در زیر چند مثال ذکر می کنیم: کاغذ نسبت به این عامل بسیار شفاف است، در پشت یسک کتاب هزارصفحه ای پرده فلوئورسان کاملاً درخشان می نمود، مرکب چاپ مانعی ضعیف در مقابل عبور این عامل است. به همین طریق فلوئورسانی در پشت یک بسته دوگانه کارت (بازی) ظاهر می شود. اگر یک کارت تک بین دستگاه (پرتو ایکس) و پرده (فلوئورسان) قرار گیرد، تقریباً برای چشم (بیننده) قابل تشخیص نیست. یک ورقه نازک قلع نیز بسختی قابل مشاهده است، فقط پس از قراردادن چندین لایه پشت سرهم است که سایه آن بر روی پرده فلوئورسان بوضوح دیده می شود. قطعات ضخیم چوب نیز نسبت به این عامل شفاف اند و تخته های چوب کاج به ضخامت دو یا سه سانتیمتر به مقدار کمی این عامل را جذب می کنند. یک ورقه آلومینیوم به ضخامت حدود ۱۵ میلیمتر اگر چه این عامل را بشدت ضعیف می کند، لکن باعث محو کامل فلوئورسانی نمی شود.»

تاریخ علوم شاهد کشفیات «اتفاقی» بسیار است و از آن جمله کشف پرتو ایکس مثالی بارز است. کشف امریکا توسط کریستف کلمب مثال دیگری است که فردی در پی چیزی است و چیز دیگری را می یابد. اگر چه اتفاق برای هر کس می تواند رخ دهد، لکن به نظر می رسد کشف «اتفاقی» یک حقیقت از آن دسته ای از محققین است که استحقاق آن خوشبختی را داشته باشند. چنین خوشبختی شایسته افسراد شجاع، بردبار، بصیر و منتقدی است که با بهره برداری از این امتیازها بتوانند «قواعد بازی را برهم بزنند». کلمه دیگری برای این فرایند وجود دارد که بهتر از کلمه «اتفاق» است. این کلمه «فراست» - عمل یا هنر بهره گیری از (نتایج) غیرمنتظره - است.

از بین تمام کشفیاتی که بشر کرده است، احتمالاً هیچکدام مانند کشف پرتو ایکس سرعت توجه همگان را به خود جلب نکرده است. این حقیقت که پرتو ایکس شخص را قادر می سازد داخل اجسام کدر را «بیند» موضوع اخبار هیجان انگیز و موجب وحشت زیاد شده که با استفاده از آن ممکن بود افراد کاملاً پوشیده بدون لباس به نظر آیند. پس از رفع این توهمات به ارزش گسترده آن در تشخیص استخوانهای شکسته پی بردند و پرتو ایکس سرعت مورد استفاده قرار گرفت.

## ۲.۱۰ تولید پرتو ایکس

همان طور که روننگن در گزارش خود اشاره کرد، پرتو ایکس در لامپ تخلیه الکتریکی گاز کم فشار، مانند موردی که در پرتو کاتودی بحث شد، ایجاد می شود. مجدداً از گزارش اصلی روننگن که در سال ۱۸۹۵ به چاپ رسید، نقل قول می کنیم: «طبق نتایج آزمایشهای ویژه ای که برای آزمون این سؤال طرح شدند، معلوم می شود لکه ای که روی دیواره لامپ تخلیه قویترین خاصیت فلوئورسانی را به وجود می آورد، مرکز اصلی تابش پرتو ایکس به تمام جهات است. طبق اطلاعات حاصل از محققین مختلف، پرتو ایکس از محل بسر خورد پرتو

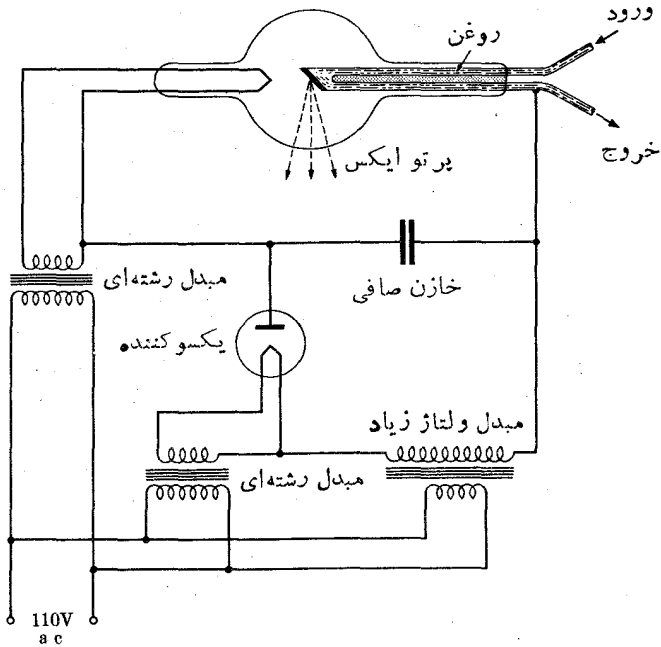
کاتودی با دیواره شیشه‌ای لامپ به وجود می‌آید. اگر دسته پرتو کاتودی داخل لامپ تخلیه را به وسیله یک مغناطیس منحرف کنیم، دیده می‌شود که پرتو ایکس از محل دیگری انتشار می‌یابد - یعنی از محل جدید برخورد پرتو کاتودی با دیواره.»

در لامپهای جدید پرتو ایکس نیز از برخورد پرتو کاتودی با هدف جامد استفاده می‌کنند، اما روش کار به مقدار زیادی بهتر شده است. در لامپ جدید کولیج، چشمه الکترونها پرتو کاتودی یک رشته داغ است. در این لامپها نیازی به یونش گاز پسمانده نیست، و بنابراین لامپهای جدید را تا فشارهای خیلی کم تخلیه می‌کنند. هدف در لامپهای جدید پرتو ایکس از فلزی با نقطه ذوب بالا و عدد اتمی زیاد تشکیل می‌شود. در تولید پرتو ایکس مقدار زیادی حرارت در هدف ایجاد می‌شود. بنابراین به منظور خنک کردن، آن را تو خالی می‌سازند که آب یا روغن از داخل آن جریان پیدا کند. غیر از لامپ، قسمت مهم دیگر دستگاه پرتو ایکس، چشمه قوی پتانسیل الکتریکی برای شتاب دادن به الکترونها پرتو کاتودی است. در ابتدا این پتانسیل قوی به وسیله پیچۀ القایی (پیچۀ جرقه‌ای) ایجاد می‌شد، لکن روش متداول امروزه استفاده از مبدلهای چند مرحله‌ای است که با بسامد برق متناوب معمولی کار می‌کند. اگر برای تغذیه لامپ از پتانسیل متناوب استفاده شود، پرتو کاتودی و در نتیجه پرتو ایکس فقط در یک نیم چرخه تولید می‌شود و پتانسیل لامپ مرتباً تغییر می‌کند. اغلب دستگاههای مولد پرتو ایکس پتانسیل متناوب را یکسو و صاف می‌کنند، به طوری که یک ولتاژ ثابت زیاد در لامپ برقرار می‌شود. پتانسیل دوسر لامپ بستگی به کاربرد پرتو ایکس دارد، اما معمولاً بین ده هزار تا یک میلیون ولت تغییر می‌کند. شکل ۱۰۱۰ نموداری از قسمتهای اساسی دستگاه پرتو ایکس را نشان می‌دهد.

### ۳.۱۰ ماهیت پرتو ایکس و پراش پرتو x در بلورها

رونتگن توانست ماهیت پرتو ایکس را تعیین کند. او بعضی از امکانهای مربوط به ماهیت پرتو ایکس را رد کرد و پیشنهادهایی هم عرضه داشت، اما عدم اطمینان او در این مورد را می‌توان از انتخاب نام پرتو ایکس استنباط کرد.

پس از اینکه رونتگن دریافت پرتو ایکس در میدان الکتریکی یا مغناطیسی منحرف نمی‌شود، و اینکه به طور محسوسی شکسته یا پراکنده نمی‌شود، نتیجه گرفت که این پرتو نه از ذرات بسار داز تشکیل شده است و نه از جنس نور معمولی است. رونتگن به طور سطحی پیشنهاد کرد که پرتو ایکس ممکن است «مؤلفه طولی نور» باشد. این پیشنهاد در مشابهاً با ارتعاش صوتی که در اجسام جامد دارای دو مؤلفه طولی و عرضی است، ابراز شد. منظور این پیشنهاد این است که نور ممکن است دارای یک مؤلفه طولی «ظریفتر» از مؤلفه عرضی باشد و بنابراین راحت تر از مؤلفه عرضی می‌تواند در جامدات نفوذ کند. اما نظریه موجی ماکسول در باره نور که در اوج شهرت بود، نور را حرکات موج عرضی می‌دانست و کوشش می‌شد که ماهیت پرتو ایکس با استفاده از این پدیده آشنا شناسایی شود. در سال ۱۹۱۲ ماکس فون لآوه به کمک آزمونی دریافت که پرتو ایکس ممکن است



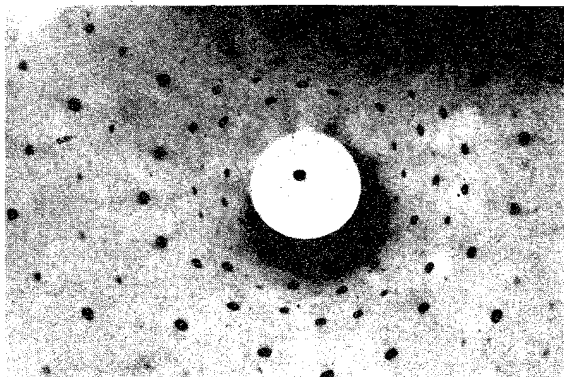
شکل ۱۰۱۰ دستگاه پرتو ایکس - لامپ کولیج.

ازجنس نور با طول موج خیلی کوتاه باشد. با یادآوری رابطه پراش درتوری داریم

$$n\lambda = d \sin \theta \quad (1010)$$

که در آن  $n$  شماره ردیف طیف (۱، ۲، ۳، ...)،  $\lambda$  طول موج،  $d$  فاصله دو شیار متوالی توری و  $\theta$  زاویه پراش است. اگر  $\lambda$  درمقایسه با  $d$  خیلی کوچک باشد، زاویه پراکندگی نیز باید خیلی کوچک باشد مگر اینکه عدد  $n$  بزرگ شود. از آنجا که شدت برای  $n$ های بزرگ خیلی ضعیف است، با فرض خیلی کوچک بودن  $\lambda$  می توان دید که توری نمی تواند پرتو ایکس را به مقدار قابل ملاحظه ای پراکنده کند.

راه چاره این است که فاصله شیارها درتوری خیلی کم انتخاب شود، اگرچه دربخش ۹۰۱۰ خواهیم دید که راه چاره دیگری نیز وجود دارد. اما هنر ساخت توری در آن زمان از سطح بالایی از کمال مکانیکی برخوردار بود. برای تنلیل فاصله شیارهای توری به میزان چند برابر، احتیاج به ماشین دقیقتر و ماده بهتر برای توری بوده است. ولی، دانه ای بودن ماده محدودیتی در این کار به وجود می آورد. این دشواری باعث شد که لاوه آزماده ای بسا دانه های خیلی ریز که می شناخت استفاده کند. به نظرمی آمد که شکل منظم بلورها با سطوح مستوی و با فواصل معین باید بدین ترتیب باشد که آنها به طور منظمی در ساختار خود قرار



**شکل ۲۰۱۰** پراش لاؤه برای NaCl در اثر تابش لامپ پرتو ایکسی که با ۶۰ kV کار می‌کند بر همدف تنگستن. بخش تاریک زیر قرص وسط صفحه در اثر پراکندگی پرتو ایکس به وجود آمده است.

می‌گیرند. لاؤه فکر کرد که اتمهای بلور می‌توانند توری لازم برای پراکندگی پرتو ایکس را به وجود آورند.

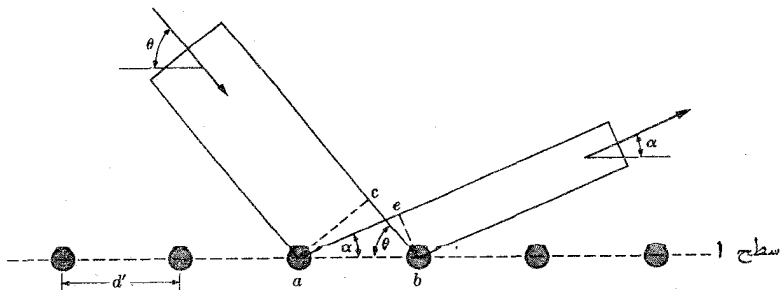
با پیشنهاد لاؤه، فردریک و نی پینگن باریکه‌ای از پرتو ایکس را به بلوری تابانده و یک صفحه عکاسی در طرف مقابل آن قرار دادند. در نتیجه، تصویری مانند شکل ۲۰۱۰ به دست آمد. اغلب پرتوهای ایکس مستقیماً از بلور عبور کرده و به مرکز صفحه عکاسی برخورد می‌کردند. برای جلوگیری از تابش بیش از اندازه به این نقطه یک قرص کوچک سربی در مرکز صفحه قرار می‌دهند. موقعی که عکس شکل ۲۰۱۰ گرفته شد، قطعه سربی جلوی تابش به مرکز صفحه را در مدت ۴۰ دقیقه تابش دهی پوشانده بود مگر در چند ثانیه آخر آن. لاؤه پس از مشاهده تصویر پیچیده ولی متقارن روی صفحه، فهمید که موفق شده است. این لکه‌ها فقط می‌توانست مربوط به پراش توسط اتمهای بلور باشد. به طور دقیقتر، واحدهای ساختاری بلورهای NaCl و KCl به صورت یون هستند نه اتمهای خنثی. این بلورها را بلورهای یونی می‌نامند، زیرا در نتیجه نیروهای قوی الکتروستاتیکی که بین ذرات باردار  $(Na^+)(Cl^-)$  و  $(K^+)(Cl^-)$  وجود دارند، به یکدیگر محکم شده‌اند. این نوع پراش مشابه پراشهایی نیست که به وسیله تورهای متداول به دست می‌آید. در طیف‌نمایی نوری، توری شامل خطوط موازی در یک سطح است. اگر پراش را به وسیله یک توری که از دو دسته خطوط موازی وعمود برهم تشکیل شده است تهیه کنید، تصدیق خواهید کرد که وضع خیلی پیچیده‌تر می‌شود. اگر چند توری شیشه‌ای از این نوع را پشت سرهم قرار دهیم شکل پراش بیشتر پیچیده می‌شود. از آنجا که بلور از ردیفهای منظم اتم در سه بعد تشکیل شده است، شکل بغرنجی به وجود می‌آید.



بعداً به طور کیفی بحث خواهیم کرد که چرا طرح پراش لاؤه به صورتی است که نشان داده شده است. نکته‌ای که فعلاً مورد نظر ماست، این است که لاؤه با پراش پرتو ایکس نشان داد که پرتوهای ایکس می‌توانند به طور ویرانگر با هم ترکیب شوند. این همان یگانه شرط و آزمایش منحصر به فرد برای نشان دادن حرکت موجی است. ضمناً پراش لاؤه نشان داد که پرتو ایکس دارای طول موج خیلی کوتاه است، و اینکه در بلورها آنها به‌طور منظم قرار گرفته‌اند.

در اواخر سال ۱۹۱۲، کمی پس از آزمایش لاؤه، براگ روش دیگری برای ایجاد پراش پرتو ایکس ابداع کرد. به‌جای مشاهده پدیده حاصل از عبور پرتوها از بلور، براگ پراکنندگی پرتو ایکس را توسط اتمهای شبکه بلور در نظر گرفت. یک جبهه موج پرتو ایکس را که به‌سطحی از اتمهای بلور وارد می‌شود، مطابق شکل ۳۰۱۰، در نظر می‌گیریم. هر اتم به‌صورت یک چشمه پرتو ایکس پراکنده درمی‌آید. به‌طور کلی پرتوهای ایکس پراکنده از اتمهای سطح بلوری، به‌طور کاتوره‌ای به هم رسیده و یکدیگر را از بین می‌برند. اگر شرایط معینی برقرار شود، تداخل سازنده در چند نقطه به‌وجود می‌آید. یکی از روابطی که برای تداخل سازنده لازم است را می‌توان به کمک شکل ۳۰۱۰ به دست آورد. در این شکل  $d'$  فاصله دو اتم مجاور،  $\theta$  زاویه بین پرتو ورودی و سطحی که در آن اتمها قرار دارند، و  $\alpha$  زاویه بین پرتو پراکنده و صفحه اتمها است. برای به دست آوردن اختلاف راه نوری حاصل از دو اتم مجاور، خطهای  $\overline{ac}$  و  $\overline{be}$  را به ترتیب بر پرتو تابشی و پرتو بازتاب عمود می‌کنیم. اختلاف راه برابر  $(\overline{ac} - \overline{be})$  است، و برای اینکه تداخل سازنده به‌وجود آید باید این اختلاف راه برابر مضرب صحیحی از طول موج پرتو ایکس یا  $m\lambda$  باشد. بنابراین داریم  $\overline{ae} - \overline{cb} = m\lambda$  که می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت

$$d' \cos \alpha - d' \cos \theta = m\lambda \quad (۳۰۱۰)$$



شکل ۳۰۱۰ نمایش اختلاف راه نوری امواج پراکنده توسط اتمهای سطحی بلور.

۱. یادآوری می‌شود که برخلاف معمول اینتیک که زاویه تابش را زاویه بین پرتو تابش یا بازتاب با عمود بر سطح می‌گیرند، زاویه براگ زاویه بین پرتو و سطح باور اختیار می‌شود.

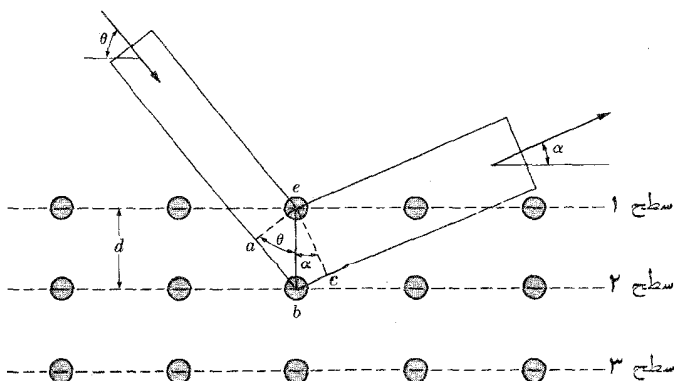
رابطه دیگری که باید برقرار باشد تا حداکثر تقویت انجام گیرد این است که پرتوهای پراکنده از صفحات اتمی متوالی همفاز باشند. با مراجعه به شکل ۴.۱۰ که در آن  $d$  فاصله صفحات متوالی است، دیده می شود که پرتوهای پراکنده از سطح دوم مسافت بیشتری را طی می کند تا پرتوهای پراکنده از سطح اول. برای اینکه پرتوهای پراکنده از دو سطح متوالی یکدیگر را تقویت کنند لازم است که این مسافتهای اضافی مضرب صحیحی از طول موج،  $n\lambda$ ، باشند. اگر خط  $ea$  را عمود بر پرتو ورودی و خط  $ec$  را عمود بر پرتو پراکنده رسم کنیم، می بینیم که طول راه پرتو سطح دوم به اندازه مجموع  $ab$  و  $bc$  از طول راه پرتو سطح اول بیشتر است. بنابراین پرتوهای حاصل از دو سطح وقتی با هم تداخل سازنده می کنند که  $\overline{ab} + \overline{bc} = n\lambda$  باشد که معادل رابطه زیر است

$$d \sin \theta + d \sin \alpha = n\lambda \quad (3.10)$$

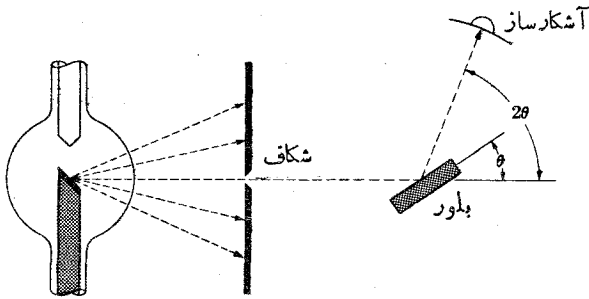
به طور کلی شرایط داده شده با معادلات (۲.۱۰) و (۳.۱۰)، بدون در نظر گرفتن امواج پراکنده از اتمهایی که در لایه های گوناگون هستند، نمی توانند همزمان برقرار باشند. به هر حال، این دو شرط در یک حالت خاص  $\theta = \alpha$  برقرار خواهند بود. بنابراین معادله (۲.۱۰) برابر صفر می شود و معادله (۳.۱۰) به صورت زیر نوشته می شود

$$n\lambda = 2d \sin \theta \quad (4.10)$$

که در آن  $n$  مرتبه طیف است. وقتی  $\theta = \alpha$  باشد، دقیقاً شرط معمولی بازتاب را داریم. به همین دلیل، پراکندگی برآگ را معمولاً «بازتاب» برآگ می نامند. در حقیقت این نامگذاری درستی نیست، ولی اصطلاح متداولی است که به کار می بریم. سطوح اتمهای بلور که عامل بازتاب برآگ هستند صفحات برآگ نامیده می شوند. حال شرایط تداخل



شکل ۴.۱۰ اختلاف راه نوری امواج پراکنده توسط صفحات متوالی اتمی در بلور.



شکل ۵.۱۰ طیف‌سنج بلور.

سازنده را برای پرتوهای ایکس پسرانکنده از صفحات براگگ خلاصه می‌کنیم. شرط اول این است که زاویه فرود باریکه با صفحات باید با زاویه بازتاب باریکه با همین صفحات برابر باشد؛ و شرط دوم این است که پرتوهای بازتابشی از صفحات مختلف براگگ باید همگام باشند تا اینکه در رابطه  $n\lambda = 2d \sin \theta$  صدق کنند.

روش براگگ در استفاده از بلور بدعنوان توری، برای طیف‌سنج پرتو ایکس در شکل ۵.۱۰ نشان داده شده است. پرتو ایکسی که از لامپ سمت چپ شکل منتشر می‌شود به وسیله ورقه سربی شکافداری به صورت باریکه درمی‌آید. ورقه سربی تمام پرتوها، جز آنهایی که از شکاف عبور می‌کنند را جذب می‌کند. این پرتوها به بلوری که حول محوری موازی با شکاف عمود بر صفحه شکل می‌چرخد، وارد می‌شوند.  $\theta$  زاویه بین صفحات بلور و راستای اولیه پرتو ایکس، قابل اندازه‌گیری است. بازتاب براگگ فقط در راستایی که نسبت به راستای اولیه تابش زاویه  $2\theta$  تشکیل می‌دهد، انجام می‌گیرد. انجام تداخل سازنده در این راستا بستگی به این دارد که آیا شرط دوم براگگ مراعات شده است یا خیر. از آنجا که  $d$  خاصیت ثابت بلور است، اندازه‌گیری زوایایی که تحت آن بازتاب صورت می‌گیرد، معیاری برای تعیین طول موجهای پرتو ایکس تابشی فراهم می‌کند. برای اینکه بتوانیم از لحاظ کمی طیفها را اندازه‌گیری کنیم، باید مقدار  $d$  معلوم باشد. از چگونگی تعیین این کمیت در بخشهای ۹.۱۰ و ۱۱.۱۰ بحث می‌شود.

### ۴.۱۰ سازوکار تولید پرتو ایکس

رونتگن در گزارش اصلی خود نوشت که دلائل برخورد پرتو کاتودی به بعضی از مواد پرتو ایکس ایجاد می‌شود. از آنجا که اکنون می‌دانیم پرتو کاتودی متشکل از الکترونهاست پرا انرژی است، بیان رونتگن را می‌توان بدین طریق بازگو کرد: الکترونها پرا انرژی در برخورد با اجسام تولید پرتو ایکس می‌کنند. برای روشن شدن سازوکار تولید پرتو ایکس از خود سؤال می‌کنیم که وقتی الکترونها به یک جسم جامد برخورد می‌کنند چه اتفاقی رخ می‌دهد.

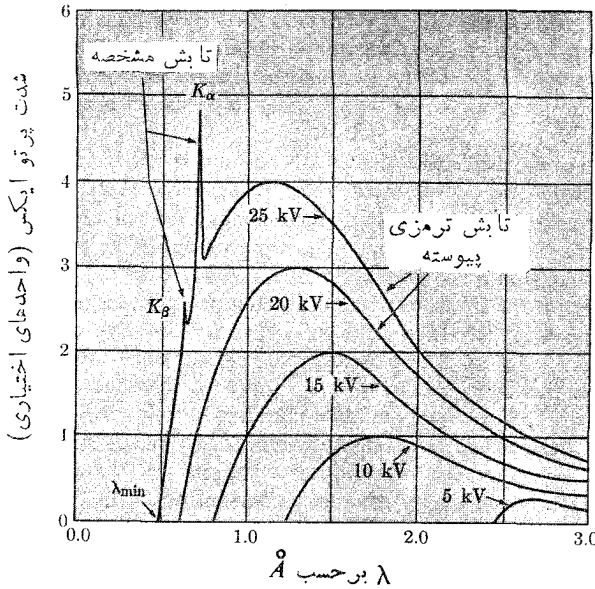
بسیاری از الکترونها پرتو ایکس که با ماده برخورد می‌کنند عمل قابل توجهی انجام نمی‌دهند.

اکثر الکترونها با ذرات ماده برخورد ملایمی انجام می‌دهند و در ضمن این برخوردها الکترونها هر بار جزء کوچکی از انرژی خود را از دست می‌دهند، و بنا بر این فقط باعث ازدیاد انرژی جنبشی متوسط ذرات می‌شوند. در نتیجه دمای ماده هدف بالا می‌رود، و معلوم شده است که بیشتر انرژی باریکه الکترون صرف گرم کردن هدف می‌شود.

بعضی از الکترونهاى بمباران کننده برخورد محکم انجام می‌دهند و بیشتر یا تمام انرژی خود را در یک برخورد از دست می‌دهند. این الکترونها سرعت شتاب منفی پیدا می‌کنند. قبلاً اشاره کردیم که حرکت شتابدار ذرات باردار همراه با گسیل تابش است. وقتی که الکترون در نتیجه حرکت با شتاب منفی مقدار زیادی از انرژی خود را از دست می‌دهد، تپی پرانرژی از تابش الکترومغناطیس به وجود می‌آید. این فرایند، عکس اثر فوتوالکترونیک است که در آن الکترون یک فوتون ایجاد می‌کند. در فصل ۳ دیدیم که فوتونهاى با انرژی معین فوتوالکترونهاى ایجاد می‌کنند که انرژی بیشینه معینی دارند. هر دو پدیده نظریه کوانتومی تابش را تأیید می‌کنند. طبق نظریه الکترومغناطیسی کلاسیک وقتی که الکترون متحرک ناگهان متوقف می‌شود، حد پایینی برای طول موج تابش گسیل شده وجود ندارد، اما از نظر کوانتومی حدی وجود دارد. اگر الکترونی در اختلاف پتانسیل  $V$  ولت شتاب پیدا کند، با استفاده از معادله (۴۷.۳)، که دوان و هانت برقراری آن را در مورد پرتو ایکس نشان دادند، می‌توان طول موج تابش حاصل را بر حسب آنگستروم حساب کرد، به شرطی که الکترون در یک برخورد تمام انرژی خود را از دست بدهد. در این حالت انرژی از دست رفته الکترون بر حسب الکترون ولت عدداً برابر با اختلاف پتانسیل شتاب دهنده بر حسب ولت است. بنا بر این داریم

$$\lambda_{\min}(\text{\AA}) = \frac{12400}{V} \quad (5-10)$$

این رابطه حداقل طول موج را به دست می‌دهد. چون هیچ الکترونی نمی‌تواند بیش از آنچه انرژی دارد از دست بدهد، بنا بر این توزیع پیوسته‌ای به سمت طول موجهای بلندتر وجود خواهد داشت، زیرا انواع برخوردهای مختلف از برخورد شاخ به شاخ تا برخورد ملایم وجود دارد. لذا برخورد ملایم باعث ایجاد پیوستگی در طیف پرتو ایکس حاصل از هر نوع ماده هدف می‌شود، و همچنین نارسایی انرژی الکترون را در تبدیل به پرتو ایکس توضیح می‌دهد. آلمانیها این تابش پیوسته را *bremsstrahlung* به معنی لغوی «تابش ترمزی» نامیدند. این تعبیری کاملاً موجه است، زیرا اشاره به تابشی دارد که در نتیجه ترمز یا توقف ذرات باردار بدو وجود می‌آید. چند طیف پیوسته در شکل ۶.۱۰ نشان داده شده‌اند. با توجه دقیقتر به فرایند برخورد درمی‌یابیم که تبادل انرژی خیلی مهم دیگری نیز وجود دارد. الکترون بمباران کننده ممکن است به الکترون مقید در اتم هدف انرژی بدهد. اگر این الکترونها از قید اتمها آزاد شوند، یون به وجود می‌آید. انرژی الکترونهاى مولد پرتو ایکس ممکن است به هزاران الکترون ولت برسد. در این صورت کندن الکترونهاى خارجی و تولید یون به آسانی انجام می‌شود. الکترونهاى ایجاد کننده پرتو ایکس ممکن است



**شکل ۶.۱۰** طیف پرتو ایکس مولیبدن بر حسب ولتاژ به کار رفته، بهنای خطوط بر حسب مقیاس نیست. پتانسیل برانگیزش سری K این عنصر ۲۰۱ kV است. کوتاه‌ترین طول موج سری L برابر  $49.9 \text{ \AA}$  است.

دارای انرژی کافی برای جدا کردن الکترونهاى داخلیتىن لایه یعنی لایه K نیز باشند که در نتیجه آن یون به وجود می‌آید. چنین یونى يك حفرهٔ انرژی پایین در ساختار الکترونى خود دارد و این جای خالى فوراً با سقوط يك الکترون از حالت انرژی بالاتر پر می‌شود. اگرچه انرژی لازم برای یونش اتم، از طریق جداسازى الکترون خارجى، کمتر از ۱۰۰ eV است، ولی انرژی لازم برای یونش اتم با جدا کردن الکترون داخلى ممکن است تا ۱۲۰,۰۰۰ الکترون ولت هم برسد. وقتى الکترونى خارجى به چنین جای خالیى سقوط کند، فوتونى با این انرژی تابش می‌شود. چنین فوتونهاى در ناحیهٔ پرتو ایکس هستند و طول موج آنها کسرى از آنگستروم است. این سازوکار که بخش قابل توجهى از طیف پرتو ایکس تولیدى را شامل می‌شود، پرتو ایکس با طول موجهاى ویژه تولید می‌کند که مشخصهٔ ماده هدف است.

### ۵.۱۰ تابش ایکس مشخصه

وقتى که الکترون پوستهٔ K، همان طور که در بالا شرح داده شد، از اتم کنده می‌شود، اتم برانگیخته می‌شود. این پدیده را می‌توان با استفاده از نمودار تراز انرژی، مطابق آنچه

در شکل ۷.۱۰ برای تنگستن داده شد، تشریح کرد. طبق تعریف، حالت پایه اتمی خنثی است که تمام الکترونهاى آن در پایینترین حالت ممکن قرار گرفته باشند. تراز  $K$  در جایی است که مقدار انرژی لازم برای دور کردن الکترون  $K$  به بینهایت را نشان می‌دهد. از آنجا که الکترون  $K$  خیلی کم استوار ناشی از الکترونهاى دیگر را تجربه می‌کند (بخش ۴.۹)، انرژی تقریبی آن را می‌توان با استفاده از رابطه بور با  $n=1$  حساب کرد

$$E_K \approx -13.6Z^2 \text{eV} \quad (۶.۱۰)$$

معمولاً برای به حساب آوردن استوار، معادله (۶.۱۰) را به صورت زیر می‌نویسند

$$E_K = -13.6(Z - \sigma)^2 \text{eV} \quad (۷.۱۰)$$

که برای پوسته  $K$  مقدار  $\sigma \approx 1$  است.

تراز  $K$  در شکل ۷.۱۰ کمبود يك الکترون در پوسته  $K$  را نشان می‌دهد. در نتیجه، ترازهای  $L$  کمبود يك الکترون در یکی از حالتهاى پوسته  $L$  را نشان می‌دهند. پیکربندیهای الکترونی مربوطه عبارت‌اند از

$$K: (1s)^1 (2s)^2 (2p)^6 (3s)^2, \quad j = \frac{1}{2}$$

$$L_I: (1s)^2 (2s)^1 (2p)^6 (3s)^2, \quad j = \frac{1}{2}$$

$$L_{II}: (1s)^2 (2s)^2 (2p)^5 (3s)^2, \quad j = \frac{1}{2}$$

$$L_{III}: (1s)^2 (2s)^2 (2p)^5 (3s)^2, \quad j = \frac{3}{2}$$

یادآور می‌شود که در اینجا توجهی به الکترون خارجی و تکانه زاویه‌ای کل اتم نداریم. در مقایسه با انرژی بستگی الکترون  $K$ ، انرژی برهم‌کنش مربوط به اسپین الکترون باقیمانده  $K$  و تکانه‌های زاویه‌ای الکترونهاى خارجی فوق‌العاده کوچک است. در نتیجه از این اثر صرف‌نظر می‌کنیم.

نمودار تراز انرژی شکل ۷.۱۰ را می‌توان به بهترین وجهی به صورت نمودار حفرة اتم تصور کرد، به عنوان مثال، تراز  $K$  نمایشگر يك الکترون نایاب در حالت  $1s$  است. تراز  $L_{III}$  نشان‌دهنده يك الکترون نایاب یا حفرة در حالت  $2p$  است، و در این مورد منظور یکی از چهار الکترون در جفت‌شدگی  $j = \frac{3}{2}$  با تکانه زاویه‌ای  $J = \frac{3}{2}$  است.

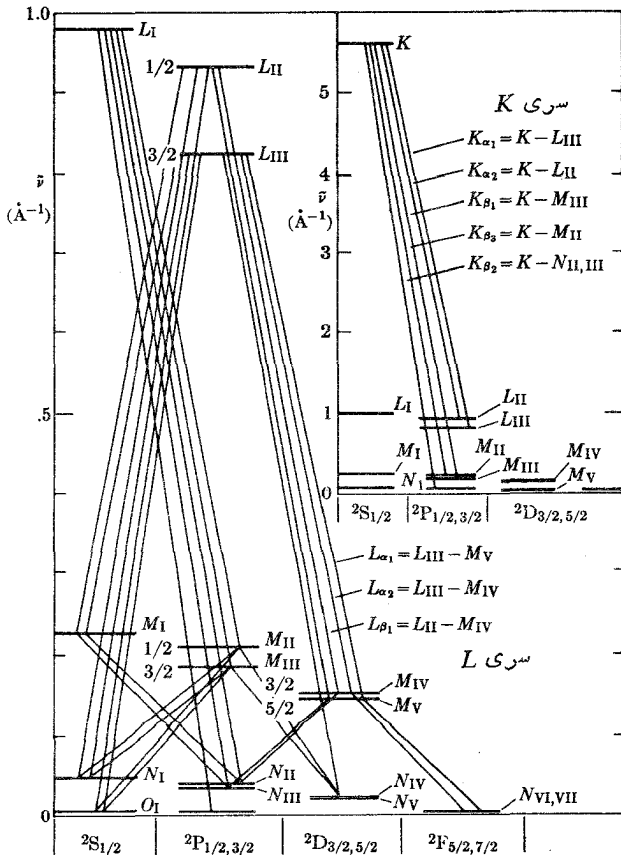
برای نمونه، وقتی يك حفرة در حالت  $1s$  تولید می‌شود، يك الکترون از حالتی دیگر به آن حالت می‌افتد و حفرة را پر می‌کند. گذارها تابع قواعد معمول برای جهش الکترون در جفت‌شدگی  $j = \frac{3}{2}$  است

$$\Delta l = \pm 1$$

$$\Delta j = \pm 1 \text{ یا } 0$$

شکل ۷.۱۰ گذارهای مربوط به حالت  $K$  را نشان می‌دهد. نامگذاری  $K_\alpha$  معروف گذار به ترازهای  $L, K_\beta$  برای گذار به ترازهای  $m$  و  $K_\gamma$  برای گذار به ترازهای  $N$  است. به طوری که در شکل نشان داده شده، تمام خطوط  $K$  دوتایه هستند که علت آن جدایی اسپین-مدار مربوط به حالت‌های  $p$  است.

بدیهی است که انرژی لازم برای برانگیختن یکی از خطوط، مثلاً  $K_\alpha$  برابر انرژی تراز  $K$  است و نه فقط انرژی آزاد شده در گذار  $K_\alpha$ . برای نمونه، در تنگستن برای برانگیزش  $K$  که حد جذب  $K$  نیز نامیده می‌شود، برابر  $69.5 \text{ keV}$ ، و انرژی یک فوتون



شکل ۷.۱۰ نمودار گذارهای پرتوایکس برای تنگستن.

$K_{\alpha 1}$  برابر  $59.34 \text{ keV}$  است. برای مولیبدن، انرژی برانگیزش  $K$  برابر  $20.1 \text{ keV}$  است. بنابراین يك الكترون  $20 \text{ keV}$  که در لامپ پرتوایکس با آنود مولیبدن تولید شده باشد، دارای انرژی کافی برای برانگیزش خطوط  $K$  نیست. این امر بوضوح در شکل ۶.۱۰ نشان داده شده است.

وقتی در پوسته  $L$  در اثر تابش  $K_{\alpha}$  حفره‌ای ایجاد می‌شود، الکترونی از پوسته‌های  $N$ ،  $M$  یا  $O$  و غیره برای پر کردن حفره به‌ایسن پوسته انتقال می‌یابد. تابش مشخصه  $L$  حاصل دارای انرژی خیلی کمتری از انرژی تابش  $K$  است. همچنین خطوط بیشتری در  $L$  وجود دارند، زیرا گذار از حفره‌های حالت  $p$  به هر دو حفره حالت  $s$  و  $d$  می‌تواند انجام گیرد. البته که تابش مشخصه  $L$  را می‌توان مستقیماً با کندن يك الكترون  $L$  به کمک باریکه الكترون لامپ پرتوایکس نیز به‌وجود آورد. در مورد تنگستن، ایسن برانگیزش نیساز به حداقل انرژی  $10.21 \text{ keV}$  دارد.

تصویری که اکنون از تابش مشخصه ایکس رسم کرده‌ایم این است که يك حفره الكترونی، که به‌عنوان مثال ابتدا در پوسته  $K$  است، ممکن است آبخاری از پرتو ایکس با انرژیهای کوانتومی سریعاً کاهش‌یافته به‌وجود آورد. در مقابله با این سلسله اتفاقات، فرایند جالب دیگری به‌نام اثر ادژه وجود دارد. در این فرایند انرژی آزاد شده در گذار الكترون از  $K$  به  $L$ ، صرف گسیل يك فوتون نمی‌شود بلکه صرف راندن الكترون دیگری از  $L$  می‌شود. در نتیجه دو حفره در پوسته  $L$  ایجاد می‌شود. در پی آن، الکترونهاي اوژه بیشتر، و یا تابش  $L$  زیادتر، به‌وجود می‌آیند.

### ۶.۱۰ طیفهای پرتو ایکس عناصر و عدد اتمی

در سال ۱۹۱۳ موزلی<sup>۱</sup> تعداد زیادی از عناصر را به‌عنوان هدف در لامپ پرتو ایکس به‌کار برد و دریافت که هر يك از عناصر دارای تابش  $K_{\alpha}$  مشخص است. این نتیجه نه‌تنها راه منحصر به‌فردی برای شناسایی عناصر به‌دست می‌دهد، بلکه از جنبه نظری نیز بسیار بااهمیت است. بخصوص براساس قانون موزلی، بسامد مربوط به خطوط طیف پرتوایکس عناصر مختلف، مانند خطوط  $K_{\alpha}$ ، را می‌توان به‌صورت معادله زیر نشان داد

$$\sqrt{f} = a(Z - b) \quad (۸.۱۰)$$

که در آن  $a$  و  $b$  بستگی به‌خط طیفی ویژه دارند و  $Z$  عدد اتمی عنصر است. موزلی و نیلس بور همزمان بودند. هر دو در آزمایشگاه رادرفورد در منچستر انگلستان کار می‌کردند. با گسترش نظریه بور درباره اتم هیدروژن برای عناصر سنگینتر، موزلی توانست نتایج مشاهدات ناشی از گذار  $n=2$  به  $n=1$  را، همانند مورد تابش  $K_{\alpha}$ ، تشریح کند. [معادلات (۷.۱۰) و (۸.۱۰) مقایسه شوند].



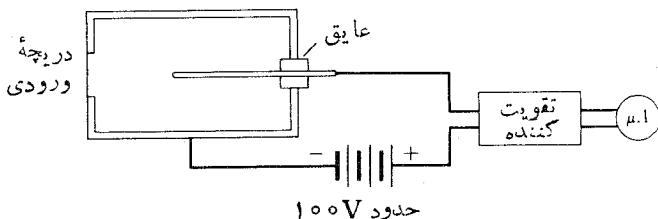
ترتیب اولیه عناصر در جدول تناوبی براساس وزن اتمی بود. در ابتدا، اعداد اتمی فقط اعدادی ترتیبی و مشخص کننده موضع عناصر در جدولی براساس وزن اتمی بودند. این اعداد اتمی اهمیت فیزیکی بیشتری از شماره خانه‌های یک خیابان معین نداشتند. موزلی دریافت که اگر طول موجهای  $K_{\alpha}$  را به ترتیب وزن اتمی بنویسد، این طول موجها تصاعدی منظم و جالب تشکیل می‌دهند. اما این ترتیب کامل نبود، زیرا او در بین طول موجها و فاصله‌های خالی بی‌نظمی‌هایی مشاهده کرد. او این جاهای خالی را مربوط به عناصر کشف نشده دانست و پیشنهاد کرد که باید همبستگی منحصر به فردی بین طول موجها و اعداد اتمی وجود داشته باشد. بیان موزلی چنین بود: «در اینجا دلیلی داریم که در اتم یک کمیت بنیادی وجود دارد که به‌طور منظم از یک عنصر به‌عنوان دیگر افزایش می‌یابد. این کمیت فقط می‌تواند بار الکتریکی مثبت هسته مرکزی باشد». در زمان موزلی، نیکل با وزن اتمی ۵۸٫۶۹ جلودر از کوبالت با وزن اتمی ۵۸٫۹۴ در جدول قرار داشت. شواهدی شیمیایی نشان می‌داد که ترتیب قرار گرفتن این دو عنصر در جدول باید معکوس شود، و موزلی این موضوع را با نشان دادن اینکه عدد اتمی کوبالت ۲۷ و عدد اتمی نیکل ۲۸ است به اثبات رسانید.

عناصر ناشناخته براساس پیش‌بینی موزلی دارای اعداد اتمی ۴۳، ۶۱، ۷۲ و ۷۵ بودند. عنصر ۷۲، هافنیوم، در سال ۱۹۲۳ و عنصر ۷۵، رنیوم، در سال ۱۹۲۵ کشف شد. دو عنصر نهایی، با اعداد ۴۳ و ۶۱ دارای ایزوتوپهای پایدار نیستند، بلکه به‌طور مصنوعی به ترتیب تکنسیوم (۴۳) در سال ۱۹۳۷ و پرومتیوم (۶۱) در سال ۱۹۴۷ تولید شدند. عنصر قبلی دارای ایزوتوپ ( $A=97$ ) با نیمه عمر  $10^6 \times 266$  سال و عنصر آخر دارای ایزوتوپ ( $A=145$ ) با نیمه عمر ۱۸ سال است.

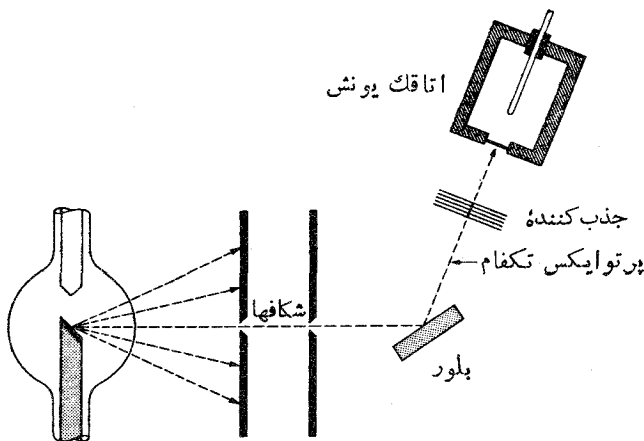
## ۷.۱۰ جذب پرتو ایکس

بارزترین خاصیت پرتو ایکس قدرت نفوذ آن در موادی است که نسبت به تابشهای کم-انرژیتر کدرند. سازوکار اساسی جذب تابش فرابنفش، مرئی و فروسرخ، انتقال انرژی فوتون به حالت‌های انرژی الکترون و یا به‌صورت انرژیهای نوسانی و دورانی ذرات ماده جذب کننده است. برای فوتون پرتو ایکس که انرژی آن چند مرتبه بیشتر از انرژی تابش مرئی است، این سازوکار کم اهمیت است زیرا احتمال برهم‌کنش فوتون پرتو ایکس در پدیده مربوط به انرژیهای پایین ضعیف است. فوتونهای نسبتاً پرتو ایکس بیشتر با الکترونهای پوسته‌های  $K$  و  $L$  برهم‌کنش می‌کنند. از آنجا که احتمال برهم‌کنش فوتون پرتو ایکس با الکترونهایی که بستگی آنها به اتم ماده جذب کننده سست باشد ضعیف است، و چون تعداد الکترونهایی که محکم به اتم اتصال دارند نیز کم است، پرتو ایکس پرتو ایکس پرتو ایکس (با طول موج کم یا پرتو ایکس سخت) دارای قدرت نفوذ زیادی است.

رونتگن در ابتدا پرتو ایکس را به وسیله فلوروسانی ایجاد شده در موادی معین تشخیص داد. از این روش می‌توان برای اندازه‌گیری کمی شدت پرتو ایکس استفاده کرد،



شکل ۸۰۱۰ اتاقک یونش برای تعیین شدت پرتو ایکس.



شکل ۹۰۱۰ نمودار دستگاه اندازه گیری جذب پرتو ایکس.

به شرطی که بتوان میزان نور حاصل از فلوروسانسی را اندازه گیری کرد. روننگن همچنین مشاهده کرد که پرتو ایکس صفحه عکاسی را سیاه می کند، پس با استفاده از دستگاهی که میزان سیاه شدن فیلم را اندازه می گیرد نیز می توان شدت پرتو ایکس را تعیین کرد. سومین روش پیشنهادی روننگن با استفاده از میزان رسانندگی الکتریکی هوا در اثر تابش پرتو ایکس بود. پرتو ایکس هوا را یونیده می کند و این اثر را می توان به طور کمی با اتاقک یونش اندازه گیری کرد. انواع مختلفی از اتاقکهای یونش وجود دارند که نمودار یکی از آنها در شکل ۸۰۱۰ نشان داده شده است. اتاقک از يك جعبه فلزی تشکیل شده که الکترودی از طریق يك عایق در داخل آن قرار دارد. این الکتروود معمولاً دارای پتانسیل مثبت است به طوری که الکترونهاي آزاد داخل اتاقک جذب آن می شوند. اختلاف پتانسیل در اتاقک به اندازه ای انتخاب می شود که قدرت دی الکتریکی هوا مانع تخلیه شود ولی پتانسیل به اندازه ای زیاد است که بارها، قبل از ترکیب مجدد الکترونها و یونهای مثبت، جذب الکترونها می شوند. یونهای جذب شده در الکترونها جریان ضعیفی، متناسب با

شدت پرتو ایکس، به وجود می آورند. این جریان با دستگاههای جدید از طریق الکترونیک تقویت شده و به وسیله یک میکروآمپر متر نشان داده می شود.

اتاقک یونش را می توان برای اندازه گیری قدرت نفوذ پرتو ایکس، به طوری که در شکل ۹.۱۰ نشان داده شده، به کار برد. پرتو ایکس به وسیله شکافهایی به صورت باریکه در آمده و از طریق بازتاب براگ تکفاز می شود، و پس از عبور از ماده مورد مطالعه شدت آن با یک اتاقک یونش اندازه گیری می شود. اگر شدت عبوری را بر حسب ضخامت ماده جاذب رسم کنیم، منحنی شبیه شکل ۱۰.۱۰ به دست می آید. این یک منحنی فروافت نمایی است که می توان آن را با فرض اینکه ضخامت کوچک از جاذب،  $dx$ ، شدت باریکه را به مقدار  $dI$  — متناسب با شدت  $I$  و ضخامت  $dx$  کاهش دهد، به دست می آید. این فرض منجر به معادله دیفرانسیل زیر می شود

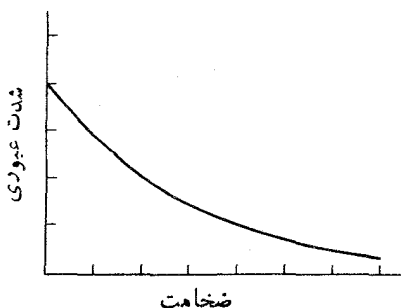
$$dI = -\mu I dx \quad (9.10)$$

در این معادله  $\mu$  ضریب تناسب است. اگر شدت باریکه فرودی به لایه ای از ماده به ضخامت  $x$  را  $I$  بگیریم، شدت باریکه پس از عبور از انتگرال گیری معادله (۹.۱۰) به دست می آید. نتیجه به صورت زیر در می آید

$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad (10.10)$$

که همان معادله منحنی شکل ۱۰.۱۰ است.

کمیت  $\mu$  را معمولاً ضریب جذب خطی می نامند، و گاهی هم آن را ضریب جذب ماکروسکوپی و ضریب تضعیف خطی می خوانند. اگر  $\mu$  را از معادله (۹.۱۰) به دست آوریم، می بینیم که ضریب جذب خطی مساوی میزان کاهش نسبی شدت تابش در واحد ضخامت جاذب است. بنابراین بعد از آن عکس طول است، ضریب جذب خطی  $\mu$  معیاری از کاهش کل انرژی پرتو ایکس در باریکه قلمی است. از آنجا که بعضی از فوتونها در نتیجه پدیده کامپتون از راستای خود خارج می شوند اما هنوز هم به طرف جلو در حرکت اند، بدرستی  $\mu$  معرف شدت تابش ضمن عبور از حفاظ پهنای که تحت تابش قرار گرفته، نخواهد بود. در اینجا ضریب تصحیحی به نام عامل زادافزدگی باید به کار رود.



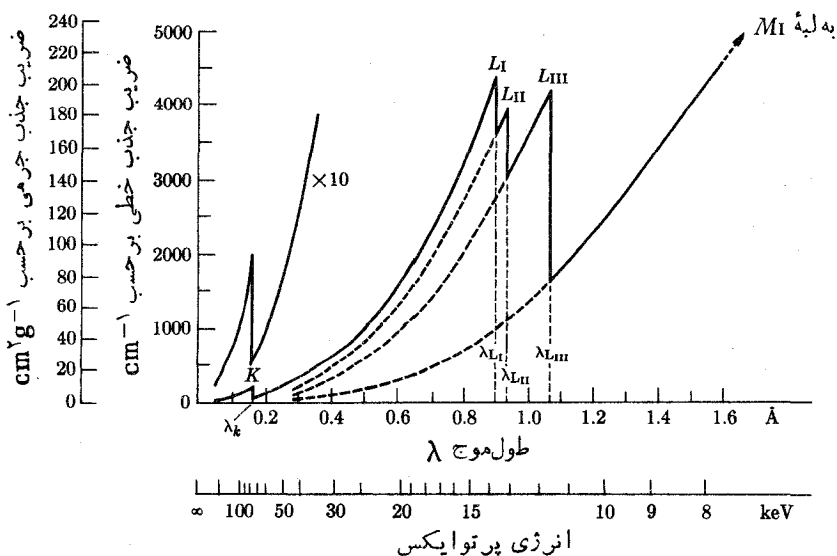
شکل ۱۰.۱۰ منحنی تغییرات شدت پرتو ایکس عبوری از ماده.

سه پدیده فوتوالکتریک، کامپتون و تولید زوج، در انرژی بالاتر از  $1.02 \text{ MeV}$ ، در جذب پرتو ایکس شرکت دارند.

فرایند فوتوالکتریک و توضیح اینشتین درباره آن را در فصل ۳ بحث کردیم. آزمایشهای بحث شده مربوط به کندن الکترون از یک جسم به وسیله فوتونهای چند-الکترون ولتی است. بحث حاضر بیشتر مربوط به فوتونهای با انرژی  $10 \text{ keV}$  و بیشتر از آن می شود. فرایند در اساس همان است، اما برای انرژیهای بالاتر احتمال پرتاب الکترون از مدار پایین خیلی بیشتر از احتمال مربوط به الکترون مقید با پیوند سست است.

شکل ۱۱.۱۰ چگونگی تغییرات ضریب جذب را بر حسب طول موج پرتو ایکس نشان می دهد. در انرژیهای بالاتر از لبه جذب  $K$  یا در طول موج کمتر مربوط به آن، درصد بسیار زیادی از وقایع، علی رغم در اقلیت بودن الکترونهای  $K$ ، پرتاب این گونه الکترونها است. برای سرب لبه جذب  $K$  در  $h\nu = 88.10 \text{ keV}$  یا  $\lambda = 0.141 \text{ \AA}$  است. کمی کمتر از این طول موج در منحنی شکل ۱۱.۱۰ ناپیوستگی مشاهده می شود. تا این انرژی، حداقل برای عناصر سنگین، پدیده فوتوالکتریک کاملاً ارجحیت دارد. در انرژیهای بالاتر، پراکندگی کامپتون و تولید زوج به طرز نسبی مهمتر می شوند. پراکندگی کامپتون در بخش ۱.۵ بحث شد. تولید زوج در زیر بحث می شود.

جا به جایی طیفهای پرتو ایکس با تغییر عدد اتمی، روش مهمی برای تهیه پرتو ایکس تکفام به وجود می آورد. فرض کنیم یک لامپ پرتو ایکس با هدف مسی در اختیار داریم. سری  $K$  در مس شامل خط  $K_{\alpha}$  با شدت زیاد  $K_{\beta}$  و  $K_{\gamma}$  با شدت کم است که بر حسب کاهش طول موج یا افزایش انرژی مرتب شده اند. عدد اتمی نیکل یکی کمتر از عدد اتمی مس است. ترازهای انرژی نیکل نسبت به مس کمتر منفی است و خطوط گسیلی و لبه های جذب آن در طول موجهای کمی بلندتر نسبت به مس قرار دارند. طول موج  $K_{\gamma}$  نیکل تقریباً



شکل ۱۱.۱۰ طیف جذبی پرتو ایکس برای پلاتین.

با  $\lambda_K$  لبه جذب آن یکسان است و در بین خطوط گسیلشی  $K_\alpha$  قوی و  $K_\beta$  و  $K_\gamma$  ضعیفتر مس قرار می گیرد. شکل ۱۲.۱۰ طیف گسیلشی سری  $K$  مس و ضریب جذب خطی نیکل را بر حسب طول موج نشان می دهد. از آنجا که کمینه منحنی جذب، در طول موجی کمی کوتاهتر از یکی از طول موجهای خطوط  $K$  و بلندتر از طول موجهای دیگر قرار دارد، نیکل می تواند تمام تابشهای مس جز خط قوی  $K_\alpha$  را جذب کند. چندین گروه از عناصر وجود دارند به طوری که یکی می تواند به عنوان صافی تابش عناصر دیگر به کار رود، و در این صورت پرتوایکس تقریباً تکفام به دست می آید.

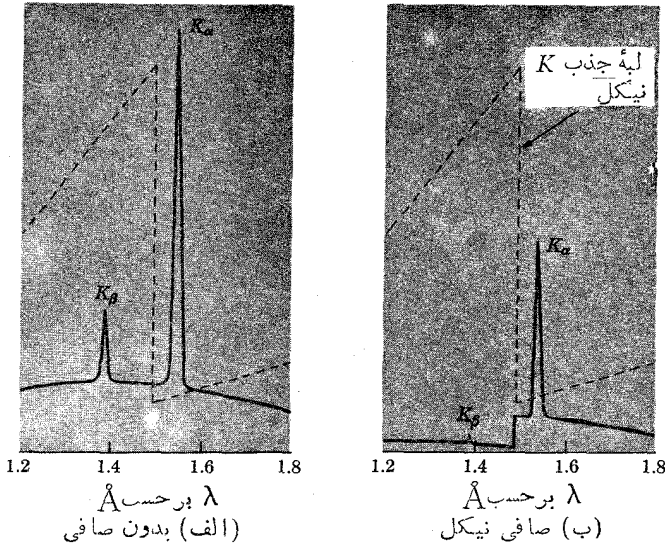
ضریب جذب شدت بستگی به چگالی ماده جذب کننده دارد، که البته مقدار آن وقتی ماده از حالت گازی به حالت جامد می رود تغییر زیادی می کند.

می توان نوشت

$$\mu x = \frac{\mu}{\rho} x \rho \quad (11.10)$$

که در آن  $\rho$  چگالی جرمی ماده است. مقدار  $\mu/\rho$  ضریب جذب جرمی،  $\mu_m$ ، نامیده می شود. واحد  $\mu_m$  بر حسب مساحت تقسیم بر جرم است. بررسی ابعادی نشان می دهد که  $x\rho$  جرم در واحد سطح،  $m_a$ ، است.  $m_a$  جرم واحد مساحت در ورقه یا تیغه جذب کننده ای به ضخامت  $x$  است که عمود بر راستای باریکه پرتو ایکس قرار می گیرد. بنابراین نمای معادله

شدت پرتوایکس از مس —  
ضریب جذب خطی نیکل ----



شکل ۱۲.۱۰ مقایسه طیف تابش ایکس ناشی از مس (الف) قبل و (ب) بعد از عبور دادن از صافی نیکل.

(۱۰۰۱۰) برابر  $\mu m$  می شود، و خواهیم داشت

$$I = I_0 e^{-\mu_m m} \quad (12.10)$$

اگرچه ضریب جذب جرمی از یک ماده به ماده دیگر خیلی کمتر از ضریب جذب خطی تغییر می کند، ولی هنوز آن را نمی توان مقدار ثابتی در نظر گرفت. مواد با عدد اتمی بزرگ پرتوایکس را خیلی آسانتر از عناصر سبک جذب می کنند، به طوری که جرم معینی از سرب در واحد سطح خیلی مؤثرتر از مثلاً همان جرم از کربن در واحد سطح است. این موضوع بویژه برای پرتوایکس کم انرژی درست است، لکن برای ناحیه انرژی بین ۲ تا ۱۰ MeV خیلی مشخص نیست.

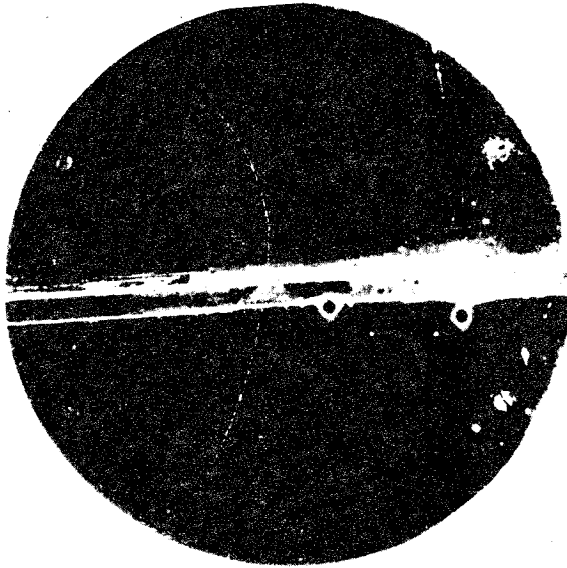
## ۸.۱۰ تولید زوج

مطمئناً یکی از برجسته ترین مثالهای تبدیل نسبیتی انرژی از یک نوع به نوع دیگر پدیده مشهور تولید زوج است. تولید زوج فرایندی است که در آن یک فوتون به یک الکترون و یک ذره مثبت جدید تبدیل می شود. دیراک در سال ۱۹۲۸ به کمک نظریه مکانیک موجی نسبیتی خود درباره انرژی الکترون، وجود این ذره جدید را پیش بینی کرد، و در سال ۱۹۳۲ این ذره توسط آندرسون به طور تجربی مشاهده شد.

کشف این ذره در جریان پژوهشهای پرتوکیهانی به وسیله اتافک ابر انجام گرفت. این دستگاهی است که در آن، ضمن عبور ذره باردار متحرک از گاز، یونهایی به وجود می آیند که به عنوان هسته های تشکیل قطرات ریز مثلاً الکل، که با گاز مخلوط و بشدت سرد شده اند، عمل می کنند. بدین ترتیب، این قطرات ریز مسیری مرئی از ذرات به وجود می آورند. شکل ۱۳.۱۰ عکس مشهوری است که از اتافک ابر آندرسون گرفته شده است. شکل ۱۳.۱۰ مسیر حرکت ذره های باردار را که به وسیله میدانی مغناطیسی انحنا پیدا کرده است، نشان می دهد. دیده می شود که ذره از صفحه ای سربی به ضخامت ۶ میلیمتر، واقع در وسط اتافک، عبور می کند. از ماهیت دانه ای شکل مسیر می توان دریافت که ذره الکترون گونه است. از آنجا که ورقه سربی فقط می توانسته است ذره را کند کند، جهت حرکت آن باید از ناحیه کم انحنا به طرف انحنا زیاد باشد. با مشاهده جهت انحنا و دانستن جهت حرکت ذره و جهت میدان مغناطیسی نتیجه شد که بار ذره مثبت است. آندرسون بر اساس این عکس و عکسهای مشابه آن، کشف یک ذره جدید را اعلام داشت، و این ذره را پوزیترون یا الکترون مثبت خواند. پوزیترون درست شبیه الکترون است بجز در علامت بار الکتریکی آن.

شکل ۱۴.۱۰ عکس مسیر حرکت ذرات باردار را نشان می دهد که در نتیجه بمباران صفحه ای سربی با فوتونهای پرنرژی از آن سرچشمه می گیرند. انحنای مسیرها

۱. در همین موقع پیشنهاد شد که الکترون، نگاترون یا الکترون منفی خوانده شود، ولی این نامها هرگز به طور عمومی به کار گرفته نشده است.

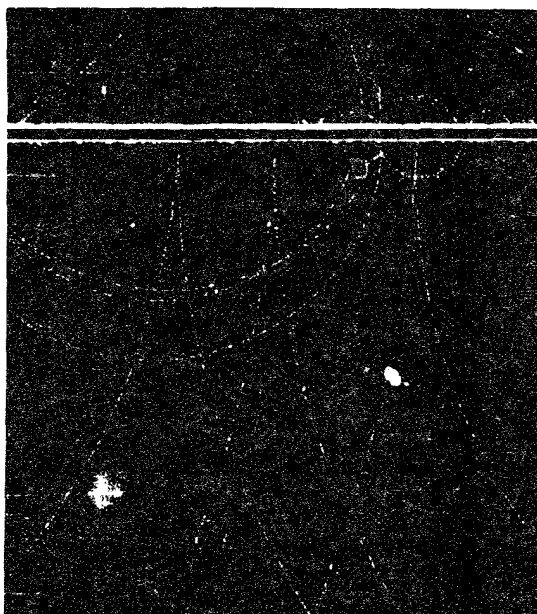


شکل ۱۳۰۱۰ مسیر الکترون مثبت (پوزیترون) در میدان مغناطیسی اتاقک ابر.

مربوط به میدان مغناطیسی عمود بر صفحه کاغذ است. از آنجا که مسیر هر زوجی از ذرات در جهات متضاد انحنا دارد، ذرات باید دارای بارهای متضاد باشند. در هر حالت، یک ذره پوزیترون و دیگری الکترون معمولی است. یک کوانتوم انرژی تابشی که از بالای صفحه سربی وارد می شود به ماده تبدیل می شود، و تشکیل زوجی شامل یک پوزیترون و یک الکترون می دهد. در فرایند تولید زوج، استحاله انرژی به ماده را می بینیم.

از آنجا که انرژی سکون الکترون  $MeV 0.51$  است، فوتون باید حداقل دارای انرژی  $MeV 1.02$  باشد تا یک زوج به وجود آید. فوتون هرگز نمی تواند به یک الکترون یا پوزیترون تبدیل شود، زیرا این امر قانون بقای بار الکتریکی و قوانین دیگر را نقض می کند. هر یک از فوتونهای تولیدکننده زوج در شکل ۱۴۰۱۰ باید دارای انرژی خیلی بیشتر از  $MeV 1.02$  باشد، زیرا این زوجها نه تنها تولید شده اند بلکه انرژی جنبشی قابل ملاحظه ای نیز به آنها داده شده است.

فوتون نمی تواند درجه ایی یک زوج تولید کند. این عمل باید در مجاورت میدان الکتریکی قوی، نظیر آنچه در نزدیکی هسته اتم برقرار است، انجام گیرد. هسته تکانه اضافی فوتون را نیز جذب می کند. می توان نشان داد (مسئله ۱۴۰۱۰) که تکانه فوتونی با انرژی معین (جرم سکون صفر) همیشه بیش از تکانه مجموعه ای از ذرات مادی با همان انرژی کل است.



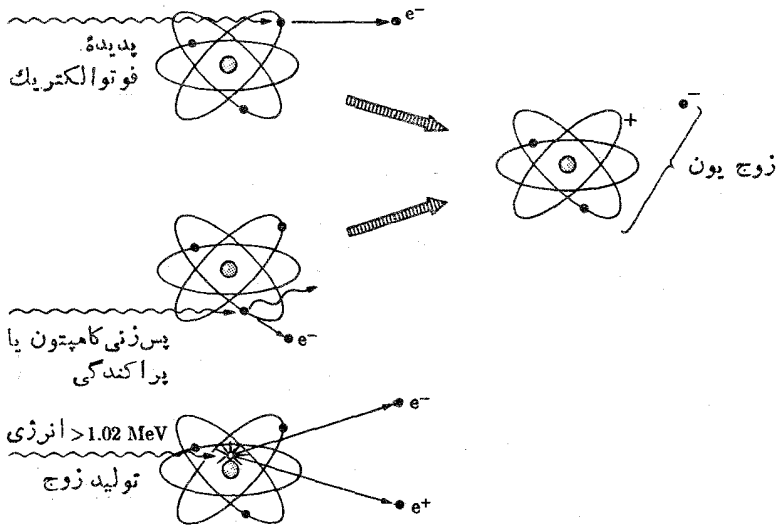
**شکل ۱۴۰۱۰** مسیرهای سه زوج الکترون-پوزیترون در میدان مغناطیسی يك اتاقك ايسر. سه فوتون گاما که از بالا وارد می‌شوند در داخل سرب تبدیل به زوج شده‌اند. مسیرهای مارپیچی مربوط به فوتوالکتردهای کم انرژی است که از سرب خارج شده‌اند.

سه سازوکار جذب پرتو ایکس در شکل ۱۵۰۱۰ خلاصه شده‌اند. سهم هر يك از اینها (سه پدیده) در ضریب جذب جرمی سرب برای فوتونهای با انرژیهای مختلف در شکل ۱۶۰۱۰ نشان داده شده است. شیب تغییرات فوتوالکتریک در شکل ۱۱۰۱۰ مثبت است، زیرا روی محور  $x$ ها طول موج نموده شده است. در شکل ۱۶۰۱۰ محور  $x$ ها محور انرژی است و بنا بر این شیب منفی است. ناپیوستگیهای شکل ۱۱۰۱۰، در شکل ۱۶۰۱۰ دیده نمی‌شوند زیرا مقیاسها کاملاً متفاوت هستند.

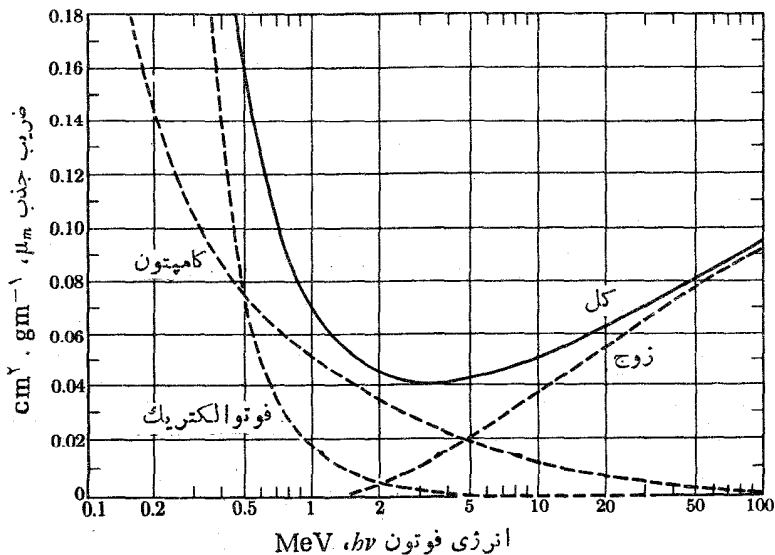
### ۹.۱۰ پراش با توریه‌های خط‌کشی شده

در ابتدا پرتو ایکس را به وسیله بلورها پراشیده می‌کردند، ولی بالاخره روشی برای پراش آنها به کمک توریه‌های ساخت بشر ابداع شد. این روش مثال جالب و مهمی است که نشان می‌دهد چگونه پژوهش فیزیکی اغلب سرپلهایی فراهم می‌آورد که موجب استحکام ایده‌ها می‌شود.





شکل ۱۵.۱۰ خلاصه برهم کنشهای پرتو ایکس و پرتو گاما با ماده.



شکل ۱۶.۱۰ ضریب جذب جرمی کل پرتوگاما در سرب، و سهم هر یک از پدیده‌های فوتوالکتریک، کامپتون و تولید زوج.

قبلاً شرح دادیم که پرتو ایکس را نمی‌توان به وسیله توریهای ساخت بشر پراشیده کرد زیرا طول موج پرتو ایکس خیلی کوتاهتر از فاصله نزدیکترین خطوطی است که می‌توان روی مواد دانه‌ای موجود در دسترس بشر ایجاد کرد. کامپتون روش زیرکانه‌ای پیدا کرد تا بر این مشکل فائق آید. او توری را به‌طور غیرمتداول به‌کار برد. ضریب شکست پرتو ایکس در شیشه اندکی کمتر از ۱ است. لذا وقتی پرتو ایکس از هوا یا خلا وارد شیشه می‌شود از یک محیط خوری غلیظ وارد محیط رقیق می‌شود، و پرتو ایکس شکسته از خط عمود (بر سطح دوم محیط) دور می‌شود. یادآور می‌شویم وقتی که نور از یک محیط غلیظتر وارد محیط با غلظت کمتر می‌شود، زاویه حدی وجود دارد که اگر پرتو فرودی بر سطح مشترک دوم محیط زاویه‌ای بزرگتر از زاویه حد بسازد، بازتاب کامل رخ می‌دهد. اگر پرتو ایکس را مماس بر سطح شیشه بتابانیم مطلقاً وارد شیشه نشده بلکه کلاً بازتاب می‌یابد. حال اگر سطح شیشه توری خط‌کشی شده باشد، این خطوط با دید مماس نسبت به هم نزدیکتر به نظر می‌رسند تا وقتی که از خط عمود به صفحه دیده شوند. لذا موقعیت هندسی باعث می‌شود که نه تنها سطح خط‌کشی نشده بازتاب دهنده باشد بلکه فواصل بین خطوط نیز خیلی نزدیکتر به هم به نظر آیند. کامپتون دریافت که می‌تواند با این روش زیرکانه پراش پرتو ایکس را قابل اندازه‌گیری کند.

نتیجه مهم کار کامپتون این بود که توانست طول موج پرتو ایکس را به‌طور مطلق اندازه‌گیری کند. وی فاصله خطوط توری را به کمک پیچ توانست تعیین کند، و فاصله بین دندان‌های پیچ را به وسیله یک خط‌کش معمولی و با شمارش تعداد دندان‌ها در طولی معین اندازه بگیرد. بنابراین، فاصله بین خطوط توری با اندازه‌گیری ابتدایی مستقیم معلوم شد. تمام اندازه‌گیریهای قبلی طول موج پرتو ایکس بر حسب فواصل محاسبه شده شبکه بلوری، که بستگی به عدد آووگادرو داشت، به‌دست آمده بود، و عدد آووگادرو به‌نوبه خود بستگی به بار الکتریکی الکترون داشت. پس از انجام اندازه‌گیریهای بسیار دقیق معلوم شد که طول موجهای اندازه‌گیری شده به‌کمک توری حدود ۳ درصد با نتایج اندازه‌گیریهای طول موج با روش پراش در بلور تفاوت دارند. از آنجا که این روش یک اندازه‌گیری مطلق بود، به این نتیجه رسیدند که فواصل شبکه‌های بلورین که قبلاً به‌کار می‌رفت اشتباه بود. یک فیزیکدان ژاپنی به‌نام شیبایا با پیگیری این موضوع، از طریق عدد آووگادرو، تفاوت را به بار الکترون کشاند و نتیجه گرفت که عدد میلیکان اشتباه بوده است. شیبایا یادآور شد که اشتباه در استفاده از ضریب چسبندگی هوا در محاسبات روش قطره روغن بوده است. با قبول مقدار جدید بار الکتریکی، تمام ثابتهای فیزیکی مبتنی بر بار الکتریکی الکترون مورد تجدید نظر قرار گرفتند. به‌نظر جالب می‌آید که یک آزمایش طیف‌نمایی پرتو ایکس روشی برای اندازه‌گیری واحد اساسی بار الکتریکی به‌دست دهد.

## ۱۰.۱۰ واحدهای تابش

مقداری از انرژی جذب شده تابش یوننده در ضمن عبور از ماده، با ایجاد تغییرات مولکولی

یا تغییر شکل بلورها، باعث آسیب رسانی به محیط می‌شوند. میزان آسیب وارده بستگی به نوع ماده جذب‌کننده انرژی، فوتون و شدت تابش دارد. اثرات تابش بر مولکول‌های پیچیده آلی زیاد است، و بنابراین پرتوایکس به بافت زنده آسیب می‌رساند. برای مطالعه کمی آسیب، لازم است واحدی برای مقدار تابش جذب شده تعریف کرد.

یکی از واحدهای مقدار تابش ایکس «رنتگن»،  $R$ ، است. رونتگن مقداری تابش ایکس یا گاما است که در یک سانتیمتر مکعب هوا در شرایط متعارفی به اندازه  $(3 \times 10^9) / 1$  کوان بار الکتریکی مثبت یا منفی به وجود آورد. هوا بدون سبب به عنوان محیط یونیده انتخاب شده است که ضریب جذب جرمی آن در گستره نسبتاً بزرگی از طول موجها تقریباً برابر آب و بافت بدن است. میلی رونتگن،  $mR$ ، یک‌هزارم «رنتگن» است. در پرتو شناسی این واحدها را معمولاً واحدهای پرتو دهی تابشی، که به سطح یا حجم معین از بدن می‌رسد، می‌نامند. یادآور می‌شود که واحدهای مقدار تابش بستگی به زمان ندارد و معیاری از شارژ انرژی باریکه تابشی نیست.

آهنک پرتو دهی را با مقدار تابش داده شده در واحد زمان اندازه گیری می‌کنند. بعضی از این واحدها «رنتگن بر ساعت  $R/h$ ، میلی رونتگن بر ساعت  $mR/h$  و غیره است.

تابش جذب شده موجب آزادسازی فوتوالکترونها و رانندن الکترونها کامپتون می‌شود. این ذرات یا دانه‌های ثانوی نیز ضمن عبور از هوا به طرف الکترونها دریافت‌کننده اتاقک یونش، هوا را یونیده می‌کنند. بارهای الکتریکی زوج یونهای حاصل از یونش ثانویه باید به عنوان قسمتی از بار الکتریکی به حساب آید. [وقتی اتمی یونیده می‌شود، زوج یونی متشکل از یون مثبت و یون منفی (در اصل الکترون) به وجود می‌آید. مقدار بار الکتریکی هر یک از یونها باید الزاماً مساوی باشد. هر یک از یونهای زوج یون ایجاد شده در هوا بار الکتریکی منفرد دارد.] اگرچه تمام ذرات ثانوی در یک سانتیمتر مکعب هوا در جایی که جذب رخ می‌دهد به وجود می‌آیند، لکن بار الکتریکی اندازه گیری شده از تمام حجمی که ذرات ثانوی در آن حرکت می‌کنند ناشی می‌شود.

وقتی تعداد زیادی یون در هوا تولید می‌شود، انرژی متوسط لازم برای تولید هر زوج یون برابر  $33.7 eV$  است. این مقدار انرژی خیلی بیش از حداقل انرژی لازم برای یونیدن اکسیژن و ازت است؛ زیرا بعضی از فوتونها الکترونها داخلی اتم را که انرژی بستگی آنها خیلی بیش از حداقل انرژی یونش است آزاد می‌کنند. اگر تعداد زوج یونهای ایجاد شده در هوا در اثر تابش یک رونتگن را در مقدار انرژی متوسط برای تولید

۱. تعریفی که توسط کمیسیون جهانی آحاد و اندازه گیریهای پرتو شناختی بیان شده، به صورت زیر است: «رنتگن آن مقدار تابش ایکس یا گاما است که گسیل ذره‌ای وابسته به آن در هر  $0.01293$  گرم هوای خشک یک واحد بار الکتروستاتیکی مثبت یا منفی ایجاد کند». حجم این مقدار از هوا در صفر درجه سلسیوس و فشار  $760$  میلیمتر جیوه برابر  $1$  سانتیمتر مکعب، و یک واحد بار الکتروستاتیکی برابر  $(3 \times 10^9) / 1$  کولن است.

چنین زوج یونسی ضرب کنیم، در می‌یابیم که يك رونتگن معادل ۱۱۲ره ارگ انرژي جذب شده در يك سانتیمتر مکعب هوا در شرایط متعارفی یا برابر ۸۶۹۹ ارگ در هر گرم هوا است. وقتی پرتو ایکس وارد محیط دیگری با عدد اتمی متفاوت می‌شود، جذب انرژي تغییر می‌کند. لذا معلوم شده است که پرتو دهی دزی به مقدار يك رونتگن از پرتو ایکس موجب جذب حدود ۹۷ ارگ در هر گرم از بافت نرم می‌شود. دپ (معادل فیزیکي رونتگن) آن مقدار از تابش یوننده است که موجب جذب ۹۷ ارگ انرژي در هر گرم از بافت بدن می‌شود. این واحد، به علت یکسان نبودن ترکیب بافت، خیلی معین نیست. اما، داد (دز جذبی تابش) يك واحد معین است که برابر ۱۰۰ ارگ انرژي جذب شده در هر گرم از ماده جذب کننده است. میلی‌داد، یکپهزاد داد است.

آسیب‌رسانی تابش به بدن انسان بستگی به دز جذب شده، آهنگ پرتو دهی و قسمتی از بدن دارد که مورد تابش قرار گرفته است. حد ایمن برای آنهایی که تمام بدنشان در طول روز تحت تابش قرار می‌گیرند، برابر ۱۰۰ میلی‌راد در هفته تعیین شده است. آهنگ پرتو دهی این حد برابر  $2.5 \text{ mR/h}$  بر اساس ۴۰ ساعت کار در هفته است. تا چند سال پیش حد ایمن را دو برابر این مقدار می‌گرفتند. محتمل است که این مقدار مجدداً کاهش داده شود. اگرچه دز جذب شده در پرتوگیری با شدت کم در درازمدت زیاد است، لکن آسیبی که مستقیماً وارد می‌شود ناچیز است، زیرا بدن فرصت کافی دارد که آسیب رسیده را مرمت کند. اثرات آسیب‌رسانی پرتو دهی تابشی حاد به تمام بدن تقریباً به صورت زیر است

۲۰-۵۰ رونتگن، تغییراتی در خون؛

۱۰۰-۲۵۰ رونتگن، بیماری شدید لکن قابل بهبود در شش ماه؛

۴۰۰ رونتگن، مرگ تا ۵۰٪ برای کسانی که تحت تابش قرار گرفتند (این دز را

دز نیمی کش، MLD یا LD-۵۰، می‌نامند)؛

۶۰۰ رونتگن، برای همگان کشنده است.

سازوکار تخریب بافت بدرستی فهمیده نشده است. وقتی تابش در مولکولهای پیچیده آلی مختلف بدن جذب می‌شود، يك الکترون به تراز انرژي بالاتر می‌رود و یا کاملاً جدا می‌شود. ممکن است انتظار داشته باشیم که پس از بازگشت الکترون به تراز عادی، دوباره همه چیز به حالت خود برگردد، درست مثل مورد هیدروژن و دیگر عناصر تک اتمی. در این حالت، در مدتی که مولکول در حالت برانگیخته‌گی است اتمهای تشکیل دهنده گاهی آرایش جدید به خود می‌دهند. اگرچه پس از برگشت الکترون، دستگاه خنثی است، لکن دیگر همان مولکول قبلی نیست. واکنشی که در بعضی از حالات رخ می‌دهد این است که دو عامل OH با هم ترکیب می‌شوند و پروکسید هیدروژن  $\text{H}_2\text{O}_2$  به وجود می‌آید. ساختمان مولکولسی

1. Rep (roentgen equivalent physical)

2. Rad (radiation absorbed dose)

تا اندازه‌ای شبیه برج بلندی است که بجهای باقطعات چوبی می‌سازد. اگر برج را باخارج کردن يك قطعه چوب از پایهٔ برج «یونیده کنیم»، بدیهی است که با برگرداندن این قطعه «الکترون» به مجموعهٔ قطعات، برج حالت قبلی خود را به دست نخواهد آورد. بعید به نظر می‌رسد که با برداشتن بالاترین قطعهٔ چوب برج و برگرداندن آن به جایش تغییر قابل ملاحظه‌ای رخ دهد. تخریب یاخته بدن بستگی به این دارد که کدامیک از الکترونهاي ساختمان مولکولی انرژی تابش را جذب می‌کند.

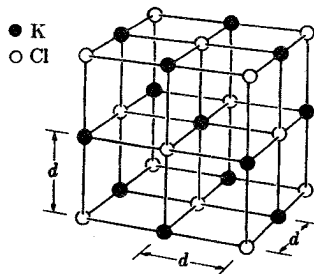
دست و پای انسان می‌توانند دزهای خیلی بیشتری از دیگر قسمت‌های بدن، بدون اینکه صدمهٔ دائمی ببینند، دریافت کنند. اما، ژنهای یاخته‌های بدن به آسانی آسیب‌پذیر هستند. آسیب به یاخته‌های تولید مثل بسیار جدی است زیرا باعث ایجاد جهش‌هایی در نسل‌های بعدی می‌شود. این جهشها تقریباً همیشه زیان‌آورند و فرایند قابل برگشت نیست. با در نظر گرفتن آسیب دیدگی ژنی در وراثت، حد ایمن پایینی برای تابش وجود ندارد. گفته شده است که «مقدار کم تابش کم ضرر دارد و مقدار زیاد آن زیاد ضرر دارد» این بدان معنی است که احتمال جذب در يك ژن یا گروهی از ژنها در دز کم، کم و در دز زیاد، زیاد است. در هر صورت، آسیب دیدگی در مقابل جذب هر کوانتوم انرژی در هر دو مورد یکی است. تخمین زده می‌شود که اگر پرتوگیری در طول زمان تولید مثل، دوره‌ای حدود ۳۰ سال، بیش از  $10 R$  باشد، میزان جهش به مقدار زیادی افزایش می‌یابد. در طول این مدت، شخص حدود  $4 R$  از پرتو کیهانی و مواد رادیواکتیو ضعیف موجود در محیط دریافت می‌کند. هر تابش‌گیری از پرتو ایکس نیز به این دز انباشته اضافه می‌شود. یاد آور می‌شود که آسیب‌رسانی بحث شده در اینجا به نسل‌های بعد منتقل می‌شود. تابش دهی به میزان  $10 R$  به تمام بدن در طی مدت سه دهه، آسیبی به شخص نمی‌رساند.

موضوعاتی که در این قسمت بدانها پرداختیم در حوزهٔ فیزیک پرتو شناختی قرار می‌گیرد. به همان اندازه که عمر فالیتهای هسته‌ای زیاد می‌شود، حل مسائل روز افزون مربوط به بهداشت همگانی به عهدهٔ افرادی خواهد شد که در زمینهٔ این علم تربیت می‌شوند.

## ۱۱۰۱۰ بلورنگاری پرتوایکس

پراش پرتوایکس در بلورها روشی پر قدرت، و واقعاً قویترین روش، برای مطالعهٔ ساختار بلوری است. بعضی از این روشها را به اختصار در اینجا بحث خواهیم کرد.

آرایش منظم فضایی اتمها در بلور را آدایهٔ شبکه‌ای می‌نامند. فاصلهٔ بین سطوح یا فاصلهٔ اصلی خطوط توری،  $d$ ، برای بلور مکعبی KCl در شکل ۱۷۰۱۰ نشان داده شده است. یاد آور می‌شود که  $d$  فاصلهٔ بین اتمهای مجاور است. یاختهٔ واحد يك شبکه، کوچکترین قطعه یا تشکل هندسی بلور است که با تعداد زیاد در ساختار شبکه شرکت می‌کند. طول ضلع یاختهٔ واحد برابر با فاصلهٔ بین اتمهای یکسان است. این فاصله برای بلوری مکعبی در شکل ۱۷۰۱۰ برابر با  $2d$  است. طول ضلع یاختهٔ واحد برای يك بلور سادهٔ مکعبی که تمام اتمهای آن از يك نوع باشند، برابر فاصلهٔ اساسی  $d$  است. بعضی از فلزات خالص بلورهای



شکل ۱۷.۱۰ شبکه مکعبی سیلویت،  
KCl.

از این نوع به وجود می آورند. این فواصل اساسی بین اتمی را می توان با دانستن وزن مولکولی بلور، عدد آووگادرو، چگالی ماده و شکل هندسی بلور حساب کرد. بویژه برای بلورهای نوع مکعبی روش ساده است و با مثال زیر تشریح می شود.

مثال. سیلویت (KCl) بلوری مکعبی با چگالی  $1.98 \text{ g/cm}^3$  است. (الف) فاصله بین اتمهای مجاور را در این بلور پیدا کنید، (ب) فاصله بین دو اتم یکسان را به دست آورید.

حل: (الف) وزن مولکولی بلور سیلویت عبارت است از

$$KClM = 39.10 + 35.45 = 74.55 \text{ amu}$$

بنا بر این به دست می آید

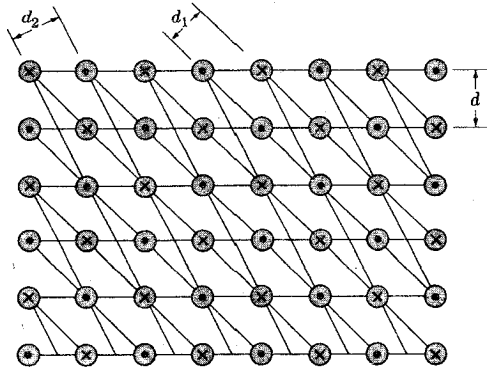
$$\frac{N_A \rho}{M} d^3 = \frac{1}{2}$$

که در آن  $N_A = 6.02 \times 10^{23}$  مولکول در هر مول است. از اینجا نتیجه می شود

$$\begin{aligned} d &= \left( \frac{74.55}{2 \times 6.02 \times 10^{23} \times 1.98} \right) \\ &= 3.14 \times 10^{-8} \text{ cm} \\ &= 3.14 \text{ \AA} = 3.14 \times 10^{-10} \text{ m} \end{aligned}$$

که همان فاصله اصلی توری یا فاصله اساسی بین سطوح بلور KCl است.  
 (ب) فاصله بین دو اتم از یک نوع، دو برابر مقدار بالا یا  $2 \times 2.8 \text{ \AA}$  است. این فاصله با طول ضلع یاخته واحد بلور KCl برابر است.

محاسبه فاصله خطوط توری فقط برای بلور مکعبی ساده است، و فاصله ای که بدین ترتیب حساب می شود فقط فاصله اصلی یا اساسی بین سطوح بلوری است. در بلور سطوح بلورین متعددی وجود دارند که بازتاب براگ را باعث می شوند. امکانات مختلفی که در موقعیت دو بعدی رژه در یک زمین فوتبال، مطابق شکل ۱۸-۱۰، مطرح می شوند را در نظر بگیرید. فاصله اساسی بین هر دو عضو مجاور گروه ممکن است برابر ۱٫۵ متر باشد. اما با رژه رفتن گروه خطوط زیادی در آن دیده می شوند که مشابه آرایسه ای سه بعدی از سطوح موازی است. این مجموعه های خطوط یا صفحات متوازی به مقادیر مختلف از هم جدا هستند که می توان آنها را از روی فاصله اساسی بین اتمها محاسبه کرد. بازتاب از بعضی صفحات شدیدتر از صفحات دیگر است. تغییرات در شدت مربوط به اختلاف طبیعت سطوحی است که در ساختمان آنها بیش از یک نوع اتم به کار رفته است. عناصری که عدد اتمی آنها زیاد است تابش را بهتر از عناصر با عدد اتمی کم پراکنده می کنند. اگر اعضاء گروهی که با علامت X در شکل ۱۸-۱۰ مشخص شده اند از یک نوع، و اعضایی که با علامت نقطه مشخص شده اند از نوع دیگر باشند، می بینیم که بعضی از سطوح دارای اتمهای از نوع X و برخی فقط

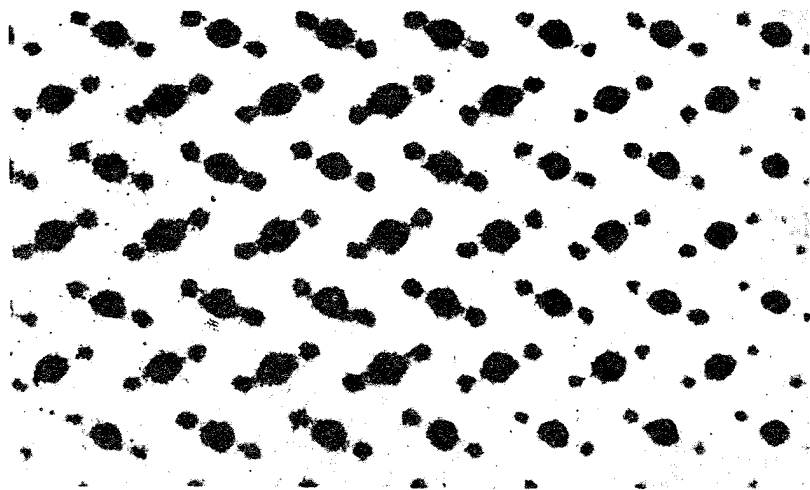


شکل ۱۸-۱۰ شباهت رژه افراد باشبکه بلورین.

اغلب بر حسب واحد X که مخفف آن XU است بیان می شود. یک XU برابر با  $13-10$  متر است. تعریف حقیقی آن بر اساس تعریف متر نیست، بلکه بر اساس فاصله بین اتمها یا ثابت شبکه ای بلور سنگ نمک NaCl بیان شده است. وقتی XU برای اولین بار به کار رفت ثابت سنگ نمک برابر  $2.814 \text{ \AA}$  یا  $2.814 \text{ XU}$  در نظر گرفته شد. با اندازه گیریهای بسیار دقیق مجدد، ثابت شبکه سنگ نمک برابر با  $2.814 \text{ \AA} = 1000 \text{ XU}$  به دست آمده است.

دارای اتمهای از نوع نقطه‌ای هستند، و دسته دیگر از هر دو نوع به‌طور مخلوط تشکیل می‌شوند. (باید به‌خاطر داشت که خطوط شکل ۱۸.۱۰ در حقیقت فقط شبیه رد پای سطوح بلوری بر صفحه کاغذند. این سطوح بلوری نباید الزاماً عمود بر صفحه کاغذ باشند. مثلاً از مطالعه در شکل ۱۷.۱۰ دیده می‌شود سطحی که فقط دارای اتمهای پتاسیم است عمود بر هیچ یک از سطوح جانبی بلور نیست.)

حال در موقعیتی هستیم که می‌توان دریافت چرا روش طیف‌نمایی براگ ساده و شکل‌های لاژه پیچیده است. در روش براگ، بلور طوری قرار می‌گیرد که باریکه پرتو ایکس فقط توسط دسته‌ای از سطوح بازتاب می‌یابد، و از یک بلور سه بعدی به‌شکل دو بعدی استفاده می‌شود. در روش لاژه دسته پرتو ایکس عمود بر یک مجموعه سطوح بلور وارد آن می‌شود. بیشتر لکه‌ها مربوط به پراش از صفحات کم تراکم است که به نحوی قرار گرفته‌اند که هر دو شرط براگ برای بازتاب صادق باشند. برای مطالعه طول موجهای پرتو ایکس روش براگ بهتر است، اما برای مطالعه ساختار بلورها روش لاژه مفیدتر است. کار کردن با طرح لاژه بسیار خسته‌کننده، اما نتیجه‌بخش است و با استفاده از آن می‌توان به‌وضع هندسی آرایه اتمهایی که این طرح را بوجود آورده‌اند پی برد. برای مطالعه بلورها، میکروسکوپ مبتکرانه‌ای که در آن از پرتو ایکس و نور مرئی استفاده می‌شود ساخته شده است. به کمک آن می‌توان درشتنمایی فوق‌العاده زیاد و مفیدی به‌دست آورد به طوری که می‌توان به‌داخل ساختار شبکه، نظیر آنچه در شکل ۱۹.۱۰ نشان داده شده است، «نگاه» کرد.

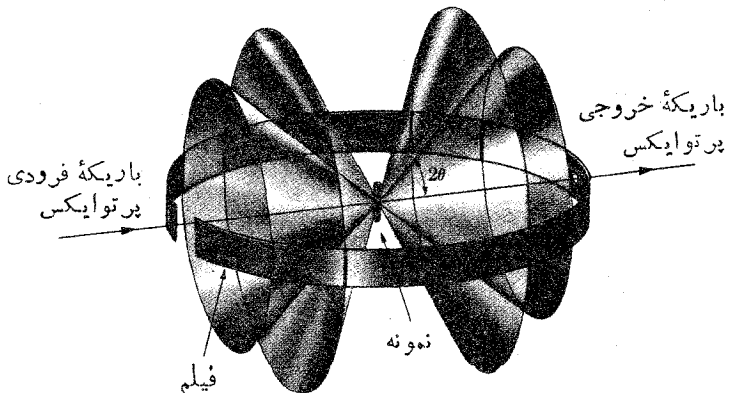


شکل ۱۹.۱۰ آرایش اتمها در بلور  $FeS_2$  که در راستای محور  $c$  با بزرگنمایی ۴۵ میلیون مشاهده شده است. لکه‌های بزرگتر اتمهای آهن، هر کدام با ۲۶ الکترون، و لکه‌های کوچکتر اتمهای گوگرد، هر کدام با ۱۶ الکترون، هستند. ردیفهای منظم اتمها در بلور کاملاً آشکار است. این عکس قابل توجه به کمک میکروسکوپ دو طول موجی گرفته شده است.



روش دیگری برای بلورنگاری پرتو ایکس وجود دارد که به طور گذرا باید به آن اشاره کرد. در روشهای براگک و لاوه به تک بلورهای نسبتاً بزرگ نیازمندیم. بسیاری از موادی که اساساً بلوری هستند را نمی توان به صورت تک بلورهای بزرگ تهیه کرد، اما این مواد را ممکن است به صورت پودر مورد مطالعه قرارداد. در یکی از روشها، روش دبی-شرر، ماده مورد مطالعه را ساییده و آن را به صورت پودر درمی آورند، بدین ترتیب می توان فرض کرد که تمام بلورهای کوچک در راستاهای اتفاقی قرار می گیرند. وقتی باریکه پرتو ایکس از این پودر عبور می کند، حلقه هایی روی صفحه فیلم به وجود می آید. هر حلقه محل برخورد مخروطی از پرتوها با صفحه فیلم است. هر مخروط مکان هندسی پرتوهایی است که برای آنها بعضی از سطوح بلور طوری قرار گرفته اند که هر دو شرط بازتاب براگک در آنها صدق می کند. تشکیل طرح پراش به صورت نمایشی در شکل ۲۰.۱۰ نشان داده شده است، و شکل ۲۱.۱۰ طرح مربوط به بلور NaCl را به کمک پرتو ایکس حاصل از مس نشان می دهد. نوع دیگر استفاده از روش پودر، مطالعه در نحوه قرار گرفتن سطوح بلور طوری در موادی است که مانند سیم روی آن فشارکاری شده است. اگر بلورکهای سیم به طور اتفاقی قرار گرفته باشند، یک طرح پودری واقعی از دایره ها به وجود می آید. اما اگر بلورکها تا اندازه ای در جهت معین قرار گرفته باشند، هر دایره در روی فیلم دارای شدت نایکخواخت است و تقریباً طرح لاوه به دست می آید. درجه سمتگیری را می توان از روی چنین شکلهایی تعیین کرد.

طرحهای لاوه مربوط به فلزات یا مواد دیگری که در برابر پرتو ایکس نسبتاً کدر هستند را می توان گاهی با مطالعه پرتوهای ایکس پس پراکنده از دیواره های نزدیکتر به چشمه پرتو ایکس به دست آورد. این روش، به عنوان مثال، در مطالعه ساختار بلوری فولاد



**شکل ۲۰.۱۰** وضع قرار گرفتن فیلم نسبت به نمونه و باریکه پرتو فرودی در روش پراش پودر دبی-شرر. پرتوهای ایکس سازنده مخروط با نیم زاویه  $2\theta$  از یک نوع سطوح بازتابیده اند و این صفحات نسبت به راستای پرتو فرودی زاویه  $\theta$  می سازند. مخروطهای دیگر به طور مشابهی به وجود آمده اند.



شکل ۲۱.۱۰ طرح پراش حاصل از پودر NaCl با طول موجهای  $K_{\alpha}$  و  $K_{\beta}$  حاصل از مس. در مدت پرتودهی، سمت چپ فیلم با ورقه‌ای از نیکل پوشیده شده بود. این پوشش خط  $K_{\beta}$  را حذف می‌کند.

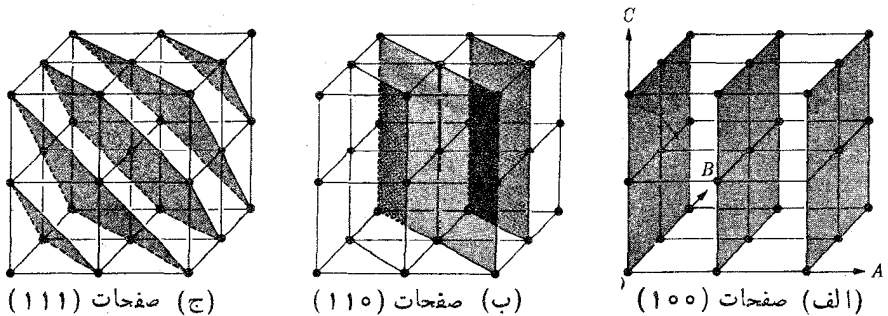
به کار می‌رود.

پرتوهای ایکس تک طول موجی اغلب مفید هستند. یک روش تهیه پرتوهای تکفام، استفاده از پرتوهای بازتابشی براگ از تک بلور، قبل از استفاده از آنها در مطالعات پودر، است. روش دیگر استفاده از صافیها است، که در بخش ۲۰۱۰ از آن بحث شد.

از آنجا که برای ایجاد طرحهای لایه از تک بلور استفاده می‌شود، لذا تعداد سطوحی که شرایط براگ در آنها برای ایجاد تداخل سازنده طول موجی معین صادق باشد، کم است. بنابراین، برای ایجاد تعداد زیادی از لکه‌های لایه نیاز به باریکه فرودی با چند طول موج است. از طرف دیگری بلورهای کوچک موجود در پودر سمته‌گیرهای مختلف دارند، و بدین ترتیب سطوح زیادی برای تولید ماکزیموم تداخل وجود دارد که در این صورت پرتوهای تکفام ایکس می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند.

### ۱۲۰۱۰ شاخصهای میلر

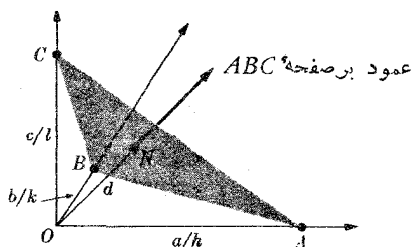
سمتگیری صفحات مختلف شبکه بلور معمولاً به ترتیبی که ابتدا توسط میلر در سال ۱۸۳۹ برای تشریح وجوه بلور به کار رفت، مشخص می‌شود. در حالت کلی، هر وجه یا صفحه داخلی نسبت به تمام محورهای بلورنگاشتی مایل است. این محورها دستگاه مختصات مناسبی است که می‌تواند برای تعیین سمتگیری یک صفحه، با دادن فاصله‌های مبدأ از محل تلاقی صفحه با محورها، به کار رود. تمام صفحاتی که موازی این صفحه هستند، فواصلی دارند که نسبت آنها به طولهای محوری یاخته واحد،  $a$ ،  $b$  و  $c$ ، از طولهای محوری ویژه شبکه داده شده مستقل است. از آنجا که فقط علاقه‌مند به دانستن سمتگیری صفحه هستیم و نه موقعیت مطلق آن، این نسبتها برای مشخص کردن صفحه به کار می‌روند. اما این نسبتها، وقتی صفحه موازی بایک محور بلور شناختی باشد، مطابق آنچه در شکل ۲۲۰۱۰ الف آمده، موجب مشکلاتی می‌شوند. در این حالت، این صفحات دو محور را هرگز قطع نمی‌کنند، یعنی تلاقی آنها با دو محور در بینهایت است. برای پرهیز از دادن عدد بینهایت به عنوان مشخصه سمتگیری یک صفحه، از عکس فاصله تلاقی نسبی استفاده می‌شود. بنابراین وقتی صفحه و



شکل ۲۲۰۱۰ بعضی از دسته صفحات در بلور مکعبی.

محورها موازی هستند، عکس عدد صفر است. این موضوع منجر به روش تعیین سمتگیری صفحه در شبکه بلوری به کمک شاخصهای میلر می شود، که این شاخصها به صورت یک دسته اعداد درست که نسبت عکس فواصل تلافی صفحات با محورها ی بلور شناختنی اند، تعریف می شوند. معمولاً شاخصهای میلر صفحه به صورت  $(hkl)$  داده می شود و این بدان معنی است که فاصله های تلافی نسبی صفحه با محورها  $1/h$ ،  $1/k$  و  $1/l$ ، و فاصله های تلافی حقیقی  $a/h$ ،  $b/k$  و  $c/l$  خواهد شد. بدیهی است که فاصله های تلافی در شکل ۲۲.۱۰ الف ۱،  $\infty$  و  $\infty$  می شوند که عکس آنها (۱، ۰ و ۰) بوده، و بنا بر این شاخصهای میلر (۱۰۰) هستند. (این نمایش، «یک-صفر-صفر» یا «یک-هیچ-هیچ» خوانده می شود و نه یک-صفر). این صفحات (۱۰۰) موازی با صفحه  $BC$  هستند. دسته صفحات دیگری می توان موازی با صفحه  $AC$  رسم کرد که به صورت صفحات (۰۱۰) مشخص می شود، و دسته صفحات موازی با صفحه  $AB$  که صفحات (۰۰۱) خوانده می شود. روشن است که این سه دسته صفحه در یک بلور مکعبی معادل هستند. نامیدن دسته صفحات به صورت (۱۰۰)، (۰۱۰) یا (۰۰۱) کاملاً بستگی به انتخاب محورها ی بلور دارد و بنا بر این تمام این سه دسته، صفحات (۱۰۰) نامیده می شوند. شاخصهای داده شده در شکلهای ۲۲.۱۰ ب و ج خود بدیهی هستند. این مطالب همیشه بدین صورت نیست. به عنوان مثال، فواصل تلافی صفحه ای با سه محور به ترتیب ۱، ۲ و ۳ واحد می گیریم. بنا بر این شاخصهای این صفحه عبارت اند از نسبتهای  $1/1$ ،  $1/2$  و  $1/3$ . وقتی این نسبتها در کوچکترین مخرج مشترک ضرب شوند، شاخصهای میلر به صورت (۶۳۲) به دست می آیند.

$d$  فاصله بین صفحات متوازی متوالی به طولهای محوری یاخته واحد  $a$ ،  $b$  و  $c$  و شاخصهای میلر صفحات  $hkl$  مربوط می شود. برای تعیین فاصله بین صفحه ای حالت نسبتاً ساده یک بلور راست گوشه رابطه ای به دست خواهیم آورد. سه محور چنین بلوری متقابلاً برهم عمودند. در شکل ۲۳.۱۰، یکی از صفحات دسته صفحات متوازی است که دارای فواصل تلافی  $OA = a/h$  و  $OB = b/h$ ،  $OC = c/l$  است. مبدأ مختصات در صفحه دیگری از دسته صفحات موازی با صفحه  $ABC$  قرار دارد. بنا بر این طول خط عمود بر صفحه از مبدأ برابر با  $d$  است.  $\theta_a$ ،  $\theta_b$  و  $\theta_c$  به ترتیب زوایایی هستند که  $ON$  با محورها ی بلور شناختنی



شکل ۲۳.۱۰ یک صفحه شبکه در بلوری راست گوشه.

می سازند. کسینوسهای هادی  $ON$  عبارت اند از  $\cos \theta_o = ON/OA$  و  $\cos \theta_b = ON/OB$  و  $\cos \theta_c = ON/OC$  از آنجا که مجموع مربعات کسینوسهای هادی يك خط برابر واحد است، بامربع کردن روابط کسینوسی و قراردادن مقادیر مربوطه برای  $OA$ ،  $OB$ ،  $OC$  رابطه زیر به دست می آید

$$\left(\frac{d}{a/h}\right)^2 + \left(\frac{d}{b/k}\right)^2 + \left(\frac{d}{c/l}\right)^2 = 1$$

که بامرتب کردن به صورت زیر درمی آید

$$d = \frac{1}{(h^2/a^2 + k^2/b^2 + l^2/c^2)^{1/2}}$$

اگر بلور راستگوشه مکعبی باشد، فواصل اساسی بین صفحات برابر هستند. در يك مكعب ساده، این فواصل برابر طول اضلاع یاخته واحد است. در این صورت  $a=b=c$  و معادله قبل تبدیل به

$$d = \frac{a}{(h^2 + k^2 + l^2)^{1/2}} \quad (۱۳.۱۰)$$

می شود. وقتی این رابطه در معادله (۴.۱۰) قرار داده می شود، ماکزیمومهای پراش مرتبه اول در بازتاب براگ از رابطه زیر به دست می آید

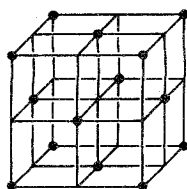
$$\lambda = \frac{2a}{(h^2 + k^2 + l^2)^{1/2}} \sin \theta \quad (۱۴.۱۰)$$

این معادله را می توان برای محاسبه طول محوری یکی از اضلاع بلور مکعبی، و شاخصهای میلر دسته صفحات مربوط به يك ماکزیموم ویژه به کار برد، به شرط اینکه طول موج تابش و زاویه براگ، معلوم باشند. مقدار  $\lambda$  را می توان از جداول تابش مشخصه مواد مختلفی که در لامپهای پرتوایکس به کار می روند، پیدا کرد. با رجوع به شکل ۲۰.۱۰، اطلاعات لازم برای تعیین  $\theta$  را می توان با اندازه گیری فاصله بین یاریکه خروجی و يك خط پراش در طول فیلم، و همچنین با اندازه گیری نیم فاصله بین نقاط خروجی یاریکه و ورودی آن در فیلم حلقه ای به دست آورد.

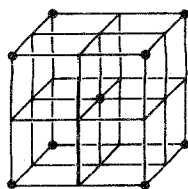
برای پیدا کردن  $(hkl)$ ، ابتدا معادله (۱۴.۱۰) را به صورت زیر مرتب می کنیم

$$\frac{\lambda^2}{4a^2} = \frac{\sin^2 \theta}{h^2 + k^2 + l^2}$$

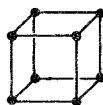
مجموع مربعات شاخصهای میلر همیشه عدد درست است، و سمت چپ آخرین معادله برای هر طرح پراش معین ثابت است. بنابراین، پس از تعیین  $\theta$  برای هر يك از خطوط طرح، می توان شاخصهای میلر صفحات مربوط به هر خط را با انتخاب اعداد درست  $k$ ،



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۲۴-۱۰ سه نوع شبکه بلوری با تقارن مکعبی (الف) ساده، (ب) مرکز حجمی، (ج) مرکز سطحی.

$h$  و  $l$  هر خط به دست آورد، به طوری که نسبت  $[\sin^2 \theta / (h^2 + k^2 + l^2)]$  برای تمام خطوط یکی باشد.

سه نوع شبکه بلوری با تقارن مکعبی در شکل ۲۴-۱۰ نشان داده شده اند. در (الف) مراکز پراش در گوشه های یک مکعب ساده اند، در (ب) مکعبی مرکز حجمی دارای نقطه شبکه ای اضافی در مرکز مکعب است، و در (ج) مکعبی مرکز سطحی دارای نقطه شبکه ای اضافی در مرکز هر وجه مکعب است. هر دو بلور NaCl و KCl، دارای آرایش مکعبی مرکز سطحی است. خواننده برای شرح آرایش بلورهایی که مکعبی نیستند، باید به کتاب بلورنگاری مراجعه کند.

### مسائل

۱۰۱۰ یدورپتاسیوم، KI، بلوری مکعبی است که دارای چگالی  $3.13 \text{ g/cm}^3$  است. مطلوب است (الف) فاصله اساسی بین صفحه ای، (ب) طول ضلع یاخته واحد.

۲۰۱۰ جدایی بین صفحات اصلی در بلور NaCl برابر با  $2820 \text{ \AA}$  است. بازتاب براگ مرتبه اول باریکه ای تکفام از پرتو ایکس در زاویه  $15^\circ$  رخ می دهد. (الف) طول موج پرتو ایکس را بر حسب  $\text{Å}$  و XU به دست آورید. (ب) بازتاب مرتبه دوم در چه زاویه ای رخ می دهد؟

۳۰۱۰ کوتاه ترین طول موج قابل تابش از الکترون را در پی توقف بر اثر برخورد ناگهانی با (الف) صفحه یک لامپ تلویزیونی که با ولتاژ  $10000$  ولت کار می کند، (ب) صفحه یک لامپ فرستنده بر قدرت رادیویی که با ولتاژ  $30000$  ولت کار می کند، به دست آورید.

۴۰۱۰ (الف) در چه اختلاف پتانسیلی یک لامپ پرتو ایکس باید کار کند تا پرتو ایکس با طول موج حداقل  $1 \text{ \AA}$  یا  $0.1 \text{ \AA}$  تولید کند. (ب) حداکثر بسامد پرتو ایکس تولید شده در لامپی که با ولتاژ  $20 \text{ kV}$  یا  $60 \text{ kV}$  کار می کند، چقدر است؟

۵۰۱۰ پیکربندی الکترونی اتم روی در حالت پایه به صورت زیر است

$$(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^6(4s)^2(3d)^{10}$$

(الف) خط پرتوایکس با بلندترین طول موج در سری  $K$ ،  $K\alpha_1$  نامیده می شود. پیکربندی الکترونی اتم روی بلافاصله قبل و بلافاصله بعد از گسیل خط  $K\alpha_1$  چگونه است؟ (ب) طبقه بندی هریک از دو حالت مذکور چیست؟ (مثلاً  $^4P^{3/2}$  و غیره)، (ج) انرژی لازم برای الکترون بمباران کننده در برانگیختن خط  $K\alpha_1$  در اتم روی چقدر است؟

۶۰۱۰ پرتوایکس حاصل از یک هدف معین کوبالت شامل سری قوی  $K$  از کوبالت و خطوط ضعیف  $K$  ناشی از ناخالصی است. طول موج خطوط  $K\alpha$  برای کوبالت  $1785 \text{ \AA}$  و برای ناخالصیها  $2285 \text{ \AA}$  و  $1837 \text{ \AA}$  است. با استفاده از قانون موزلی، (الف) عدد اتمی هریک از این دو خالصی را حساب کنید. (ب) این عناصر چیستند؟ (برای سری  $K$  مقدار  $b$  در قانون موزلی برابر ۱ است.)

۷۰۱۰ لایه جذب تنگستن  $178 \text{ \AA}$  و طول موج خطوط سری  $K$  عبارت اند از  $K_\gamma = 0.179 \text{ \AA}$ ،  $K_\beta = 0.184 \text{ \AA}$ ،  $K_\alpha = 0.222 \text{ \AA}$  پرتوایکس تنگستن را رسم کنید. (ب) حداقل انرژی لازم برای برانگیختن سری  $L$  چقدر است؟ (ج) طول موج خط  $L_\alpha$  چقدر است؟ (د) اگر الکترون  $100 \text{ keV}$  به هدف تنگستن لامپ پرتوایکس برخورد کند، کوتاهترین طول موج پرتوایکسی که ممکن است تولید شود چقدر است؟ (ه) کوتاهترین طول موج مشخصه تنگستن که ممکن است تابش شود چقدر است؟

۸۰۱۰ ورقه ای نازک از نیکل را به طور پیاپی در باریکه پرتوایکس حاصل از هدف کوبالت، سپس در پرتو حاصل از هدف مس، و بالاخره در پرتو حاصل از روی قرار می دهیم. درباره اثر هریک از این باریکه ها بر اتمهای نیکل بحث کنید و نشان دهید که تابش صاف شده حاصل از مس اساساً تکفام است. اطلاعات پرتوایکس برای این عناصر در جدول پیوست داده شده است. فقط جذب پوسته  $K$  را در نظر بگیرید.

طول موجهای گسیلی $\text{ \AA}$			عنصر
جذب $K$	$K_\beta$	$K_\alpha$	
۱۷۶۱	۱۷۶۲	۱۷۷۹	Co
۱۷۴۸	۱۷۴۹	۱۷۶۶	Ni
۱۷۳۸	۱۷۳۹	۱۷۵۴	Cu
۱۷۲۸	۱۷۲۹	۱۷۴۳	Zn

۹۰۱۰ ضرایب جذب جرمی چند فلز در مقابل پرتو ایکس ۲۰۰ آنگسترومی بر حسب  $\text{cm}^2/\text{g}$  عبارت اند از: آلومینیوم ۵۰۲۷۰، مس ۱۷۵۵ و سرب ۴۰۹۰. (الف) ضخامت نیمه مقدار هریک از این عناصر برای باریکه نازکی از پرتو ایکس چقدر است؟ (ب) ضخامت لازم برای هریک از این فلزها چقدر باید باشد تا شدت باریکه عبور کرده از فلزها به  $1/32$  مقدار ورودی برسد؟ (ج) اگر «زادافزودگی» حاصل از پراکندگی و فرایندهای دیگر برای باریکه پهن تابشی موجب ۱۷۵ برابر شدن شدت واقعی شود، در این صورت، ضخامت هریک از مواد برای اینکه شدت به  $1/32$  کاهش یابد، چقدر باید باشد؟

۱۰۰۱۰ اندازه گیریهای انجام شده در بالونهای بلند پرواز موشکهای که به بالای جو می روند، نشان می دهد که خورشید و برخی از ستارگان پرتو ایکس (پرتو ایکس نجومی) گسیل می کنند، چرا نور مرئی از این منابع به سطح زمین می رسد در حالی که پرتو ایکس نمی رسد؟

۱۱۰۱۰ سه کوانتوم هریک با انرژی  $2\text{MeV}$  جذب ماده ای می شوند. یکی از کوانتومها در پدیده فوتوالکتريك جذب می شود، دیگری در پدیده کامپتون و سومی در پدیده تولید زوج شرکت می کند. (الف) درباره پدیده های ممکنه که از طریق آنها فوتون پراکنده و هریک از ذرات باردار تولید شده نیز می تواند در تبادل انرژی باشد تا اینکه تمام انرژی فوتون اولیه به انرژی حرارتی تبدیل شود، بحث کنید. (ب) آیا آزادسازی این انرژی حرارتی نهایی در محل جذب اولیه رخ خواهد داد؟

۱۲۰۱۰ يك فوتون با طول موج  $\lambda$  مطابق شکل ۳۰۵ پراکندگی کامپتون انجام می دهد. ثابت کنید که اگر زاویه  $\alpha$  بزرگتر از  $60^\circ$  باشد، بدون توجه به انرژی فوتون فرودی، فوتون پراکنده نمی تواند تولید زوج کند.

۱۳۰۱۰ فوتونی با انرژی  $1.92\text{MeV}$  در نزدیکی هسته سرب تولید زوج می کند. ذرات ایجاد شده دارای سرعت یکسان هستند، و هر دو در جهت فوتون اولیه حرکت می کنند. تکانه پسی زنی هسته سرب را حساب کنید.

۱۴۰۱۰ با کاربرد قوانین بقا نشان دهید که غیر ممکن است تولید زوج در خلأ رخ دهد. فرض کنید که سرعت  $v$  هریک از ذرات زوج در راستای موازی با مسیر حرکت فوتون فرودی است.

۱۵۰۱۰ شکل معمولی دستگاه سنجش پرتو دهی یا دزیتر به صورت خازن استوانه ای پر از گاز است. يك نوع از این دستگاه که توسط کارکنان در مجاورت دستگاه پرتو ایکس استفاده می شود، دارای قدرت جذب معادل ۶ سانتیمتر مکعب هوای متعارفی است. (الف) اگر الکترودها تا اختلاف پتانسیل  $400\text{V}$  باردار شوند، مقاومت عایق بین الکترودها چقدر باید باشد تا اینکه، نشت بار الکتریکی در ۸ ساعت از ۱۰ درصد تغییرات حد مجاز



$20 \text{ mR}$  در ۸ ساعت کار روزانه تجاوز نکند. (فرض می‌کنیم ولتاژ ثابت می‌ماند.) (ب) اگر (۱) روی عایق اثر انگشت باشد، (۲) رطوبت نسبی بالا باشد، دقت دزیمتر چقدر فرق می‌کند؟

۱۶۰۱۰ خطوط اصلی  $K$  در طیف پرتو ایکس کوبالت دارای طول موجهای زیر است:  
 $1.6656 \text{ \AA}$ ،  $1.7497 \text{ \AA}$  و  $1.7485 \text{ \AA}$ . زوایای براگگی که تحت آنها این خطوط در مرتبه سوم از صفحات (۱۱۱) بلور مکعبی ساده بازتاب می‌یابد را تعیین کنید. در این بلور طول محوری واحد  $6 \text{ \AA}$  است.

۱۷۰۱۰ با نگاه به شکل ۲۰.۱۰ در آزمایشی خاص معلوم می‌شود که نیم فاصله ورود و خروج در فیلم حلقه‌ای  $22.83$  سانتیمتر، فاصله بین باریکه خروجی و یکی از خطوط در طول فیلم  $6.34$  سانتیمتر، و این فاصله برای خطی دیگر  $11.03$  سانتیمتر است. زاویه براگ برای هر یک از خطوط چقدر است؟

۱۸۰۱۰ وقتی تابش  $K_{\alpha}$  حاصل از مس ( $\lambda = 1.754 \text{ \AA}$ ) برای به دست آوردن طرح پراش پودری  $\text{KCl}$  به کار می‌رود، در بلور مکعبی مرکز سطحی ماکزیمومهای مرتبه اول در  $\theta = 25.3^\circ$ ،  $\theta = 29.6^\circ$ ،  $\theta = 44.1^\circ$ ،  $\theta = 54.5^\circ$  و  $\theta = 58.4^\circ$  رخ می‌دهند. (الف) فاصله بین صفحه‌ای ( $d$ ) مربوط به هر یک از این زوایای براگ را حساب کنید. (ب) شاخصهای میلر را برای دسته صفحات متناظر به هر یک از مقادیر  $d$  پیدا کنید. (ج) فاصله اصلی بین صفحه‌ای را بر اساس اطلاعات هر حالت حساب کنید. (د) طول هر ضلع مکعب واحد این بلور مکعبی مرکز سطحی چقدر است؟ (ه) سه بلور مکعبی مرکز سطحی رسم کنید و در یکی صفحه‌های (۱۰۰)، در دیگری صفحه‌های (۱۱۰) و در سومی صفحات (۱۱۱) را نشان دهید. [دانهایی: در قسمت ب جمع مربعات شاخصهای میلر را می‌توان با استفاده از مقیاسهای  $C$  و  $D$  خط کش محاسبه به دست آورد. این امر تقسیم همزمان یک به آسانی دسته اعداد را بر دسته دیگر ممکن می‌سازد، به شرطی که خارج قسمت ثابت باشد. مقادیر  $\theta$  روی زمینه بندی  $D$  با مداد علامت گذاری می‌شوند، و سپس زمینه بندی  $C$  را حرکت می‌دهند تا اینکه تمام اعداد درست مستقیماً مقابل و یا نزدیک علائم مدادی قرار گیرند. این اعداد درست برابر با مجموع مربعات مورد نظر است.]

## مولکولها، مایعات و جامدات

### ۱۰۱۱ مولکولها، پیوندهای قطبی و هم قطبی

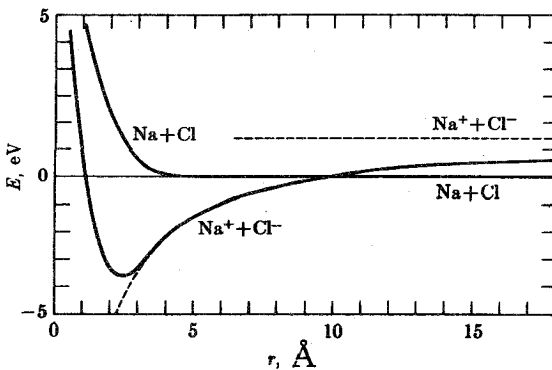
در فصلهای قبل دیدیم که نیروهایی که آنها را بهم متصل می کنند اساساً نیروهای الکتروستاتیکی و تابع قانون ساده نیروی کولنی هستند، اما دینامیک حرکت الکترونها به دور هسته بسیار پیچیده است. اتصال دو یا چند اتم به یکدیگر در تشکیل یک مولکول نیز به همین اندازه پیچیده است، اما بازهم نیروهای اصلی بین آنها نیروهای الکتروستاتیکی است. وقتی آنها و مولکولها درهم فشرده شده و به صورت مایع یا جامد درمی آیند، همین وضعیت به جای خود باقی است. قانون کولن و مکانیک موجی به طور اصولی می توانند تمام فرایندهای اتمی و مولکولی مشاهده شده را شرح دهند مگر اختلالهای جزئی که ریشهٔ مقناطیسی دارند. در سه بخش اولیهٔ این فصل، دربارهٔ بستگی مولکولهای ساده و طیف نمایی آنها بحث می کنیم. در بقیهٔ فصل از فیزیک جامدات و با گسترش کمتری دربارهٔ فیزیک مایعات صحبت خواهد شد. بحث دربارهٔ این موضوعات در این کتاب الزاماً کوتاه است، و برای جزئیات مطلب خواننده به کتب تخصصیتر رجوع داده می شود.

بستگی آنها به هم در مولکول به صورت پیوندهای یونی یا کووالانسی طبقه بندی می شود. پیوند یونی اصولاً خیلی ساده است، و آن را در اینجا شرح خواهیم داد. از پیوندهای کووالانسی که عامل بستگی مولکولهایی نظیر  $H_2$ ،  $N_2$ ،  $O_2$  و غیره است، در بخش بعد بحث می شود. معمولاً بیشتر مولکولهایی که به صورت یونی طبقه بندی می شوند،

بخشی از قیدشان پیوند کووالانسی است. در هر حال، برای سهولت در اینجا از آن صرف نظر می‌کنیم و یادآور می‌شویم که در مثال مورد بحث (NaCl) بستگی یونی فوق‌العاده قوی است.

در بخش ۵.۹ شرح دادیم که چگونه انرژی بستگی آخرین الکترون (پتانسیل یونش) یک پوسته با پرشدن آن افزایش می‌یابد، مثلاً، در پوسته  $L$  این انرژی بستگی از هلیوم به نئون افزایش قابل ملاحظه‌ای دارد. نخستین عنصر پوسته بعدی سدیم است که انرژی بستگی آخرین الکترون آن  $5138 \text{ eV}$  است. در عنصر ۱۷، کلر، انرژی بستگی آخرین الکترون نسبتاً زیاد، یعنی  $13051 \text{ eV}$  است. کلر نسبت به عنصری با پوسته کامل ۱۸ الکترونی (آرگون) یک الکترون کم دارد. بنابراین، می‌تواند به آسانی یون منفی به وجود آورد و در حقیقت انرژی بستگی الکترون اضافی در آن برابر  $3799 \text{ eV}$  است. وقتی یک اتم کلر و یک اتم سدیم در مجاور هم قرار می‌گیرند، یک الکترون می‌تواند از سدیم به کلر انتقال یابد. این عمل مستلزم صرف  $1348 \text{ eV} = 5138 - 3799$  انرژی است. در این فرایند، سدیم یونی مثبت و کلر یونی منفی می‌شود. بنابراین، دو یون یکدیگر را جذب می‌کنند و به طوری که شکل ۱.۱۱ نشان می‌دهد، دارای یک منحنی انرژی پتانسیل خواهند بود. این پتانسیل به اندازه کافی عمیق است و بنابراین انرژی  $1348$  الکترون ولتی لازم برای انتقال الکترون از سدیم به کلر از انرژی حاصل از کاهش انرژی پتانسیل الکتروستاتیکی دو اتم در فاصله تعادلی بیشتر است. بدین ترتیب، نتیجه نهایی این است که انرژی پیوند NaCl برابر با  $358 \text{ eV}$  است.

البته که مولکول NaCl حاصل یک دوقطبی الکتریکی است و از چنین گشتاور دوقطبی بزرگی اثرات شیمیایی و فیزیکی چندی ناشی می‌شوند. یکی از این اثرات، احتمال گذار نوری قوی در گذارهای دورانی است که در بخش ۳.۱۱ از آن بحث می‌شود.



شکل ۱.۱۱ منحنیهای انرژی پتانسیل برای مولکول یونی NaCl.

۲.۱۱ مسئله H<sub>γ</sub>

در قسمتهای قبل، بعضی از موفقیت‌های مکانیک موجی را در تشریح پدیده‌های مشاهده شده در فیزیک اتمی و هسته‌ای بحث کردیم. اولین موفقیت، تشریح فرایند واپاشی آلفا با استفاده از محاسبات نفوذ از سد پتانسیل بود. دومین موفقیت، تشریح تراز انرژی و گذارهای نوری در اتم هیدروژن به انضمام قواعد انتخاب، و سومین موفقیت تشریح دقیق طیف هلیوم بود. حال می‌پردازیم به بحث درباره یکی دیگر از موضوعات مهم فیزیک اتمی: توضیح پیوند مولکول H<sub>γ</sub> که در سال ۱۹۲۷ توسط هیتلر و لندن ارائه شد.<sup>۱</sup>

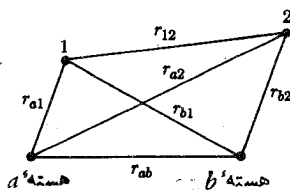
یکی از مسائل لاینحل فیزیک اتمی قبل از ظهور مکانیک موجی، پیوند هم‌قطبی شیمیایی بود که پیوند دو اتم مشابه در تشکیل یک مولکول گازی نظیر H<sub>γ</sub>، N<sub>γ</sub>، O<sub>γ</sub> و غیره نمونه‌هایی از آن است. بررسی این مسئله در اینجا با استفاده از روش هیتلر-لندن و مشابه بحثی است که در بخش ۲.۹ در مورد اتم هلیوم بیان شد، از نظریه اختلال استفاده خواهیم کرد، و درست مانند حالت اتم هلیوم لازم خواهد بود که از تابع موجهای پاد متقارن استفاده کنیم. شکل ۲.۱۱ مختصات به کار گرفته شده را نشان می‌دهد. دو هسته *a* و *b* در مبدأهای دو دستگاه مختصات هستند. بردارهای شعاعی *r*<sub>a۱</sub> و غیره از دو مبدأ به الکترونهای ۱ و ۲، در شکل نشان داده شده‌اند. جدایی هسته‌ها از هم *r*<sub>ab</sub> به‌عنوان عددی ثابت در نظر گرفته می‌شود، اگر چه بعداً بحث خواهیم کرد که چگونه کل انرژی دستگاه بستگی به این پارامتر دارد.

وقتی دو اتم خیلی از یکدیگر دورند، تابع موجهای موقعیت آنها همانهایی هستند که برای حالت پایه هیدروژن مناسب بودند، یعنی

$$\psi_a(1) = (\pi a_0^3)^{-1/2} e^{-r_{a1}/a_0} \quad (۱۰۱۱)$$

$$\psi_b(2) = (\pi a_0^3)^{-1/2} e^{-r_{b2}/a_0} \quad (۲۰۱۱)$$

در این روابط *a*<sub>۰</sub> شعاع بور است. یادآور می‌شود که اولین تابع در دستگاه مختصات *a*



شکل ۲.۱۱ تعریف پارامترهای مسافت مورد استفاده در نظریه مولکول هیدروژن.

1. W. Heitler and F. London, *Z. Physik*, 44 (1927), p. 455.

و دومی در دستگاه مختصات  $b$  بیان شده است. در اینجا قصد داریم بسا استفاده از نظریه اختلال، جا به جایی در انرژی را وقتی دو تابع موج دارای همپوشی غیر قابل صرف نظر، نظیر مورد مولکول  $H_2$ ، هستند محاسبه کنیم. هیتلر و لندن بخش مکانی تسایع موجهای پادمقارن بدون اختلال را برای حالت‌های تک تابه و سه تابه به صورت زیر بیان داشتند

$$\psi \begin{pmatrix} \text{تک تابه} \\ \text{سه تابه} \end{pmatrix} = B[\psi_a(1)\psi_b(2) \pm \psi_b(1)\psi_a(2)] \quad (3.11)$$

که  $\psi_a(2)$  به آسانی با قراردادن عدد ۲ به جای ۱ در معادله (۱.۱۱) به دست می آید. ابتدا این تابع موجها را بهنجار می کنیم. به نظر می رسد که ثابت بهنجار کردن  $B$  باید ضریب معروف  $1/\sqrt{2}$  باشد. در این مورد این موضوع درست نیست، زیرا دو تابع موج  $\psi_a$  و  $\psi_b$  متعامد نیستند. این توابع در شکل مشابه هستند، اما در دو دستگاه مختصات مختلف بیان شده اند. اگر دو هسته بینهایت از هم دور باشند، بین آنها همپوشی وجود نخواهد داشت و متعامد خواهند بود. وقتی قسمتی از دو تابع همپوش باشند، روش بهنجار کردن برای حالت تک تابه/سه تابه چنین می شود

$$\begin{aligned} \int \psi^* \psi d\tau &= B^2 \int \psi_a^*(1) d\tau_1 \int \psi_b^*(2) d\tau_2 + B^2 \int \psi_b^*(1) d\tau_1 \int \psi_a^*(2) d\tau_2 \\ &\quad \pm 2B^2 \int \psi_a(2)\psi_b(1)\psi_a(2)\psi_b(2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= (\gamma \pm 2S)B^2 = 1 \end{aligned} \quad (4.11)$$

که در آن  $S$  از رابطه زیر به دست می آید

$$S = \int \psi_a(1)\psi_b(1)\psi_a(2)\psi_b(2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (5.11)$$

معادله (۴.۱۱) مقدار  $B$  را به دست می دهد

$$B \begin{pmatrix} \text{تک تابه} \\ \text{سه تابه} \end{pmatrix} = (\gamma \pm 2S)^{-1/2} \quad (6.11)$$

عبارت  $S$  را می توان به عنوان تصحیحی کوچک تلقی کرد. مقدار آن برای جدایی بینهایت هسته ها، صفر و برای جداییهایی که در اینجا در نظر گرفته می شوند، کوچک ( $S \ll 1$ ) است. ما مجدداً به این نکته بر خواهیم گشت.

هامیلتونی کل مولکول  $H_2$  بر اساس این فرض که دو هسته در حالت سکون هستند،

به صورت زیر است

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2) + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_{ab}} + \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_{a1}} - \frac{1}{r_{b1}} - \frac{1}{r_{a2}} - \frac{1}{r_{b2}} \right) \quad (7.11)$$

عبارتهای انرژی جنبشی و دو عبارت انرژی پتانسیل برای تشکیل تابع موجهای بدون اختلال (۳.۱۱) به کار گرفته شده اند. بنابراین هامیلتونی اختلال برای اولین قسمت تابع موج [معادله (۳.۱۱)] به صورت زیر است

$$H' = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_{ab}} + \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_{1b}} - \frac{1}{r_{2a}} \right) \quad (۸.۱۱)$$

و برای قسمت دوم به صورت زیر است

$$H' = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_{ab}} + \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_{1a}} - \frac{1}{r_{2b}} \right) \quad (۹.۱۱)$$

به عبارت دیگر، هامیلتونی اختلال وقتی الکترون ۱ درحالت  $\psi_a$  و الکترون ۲ درحالت  $\psi_b$  باشد با معادله (۸.۱۱) داده می شود، و وقتی جای دو الکترون عوض می شود با معادله (۹.۱۱) داده می شود.

حال می توانیم انرژی اختلال را به صورت زیر بنویسیم

$$\Delta E = \int \psi^* H' \psi \, d\tau \quad (۱۰.۱۱)$$

که انتگرال گیری روی شش بعد فضا که به وسیله بردارهای مکانی دو الکترون مشخص می شوند، انجام می گیرد. بنابراین معادله زیر را به دست می آوریم

$$\int \psi^* H' \psi \, d\tau = B^2 \int H' \psi_a^*(1) \psi_b^*(2) \, d\tau_1 \, d\tau_2 + B^2 \int H' \psi_a^*(2) \psi_b^*(1) \, d\tau_1 \, d\tau_2 \\ \pm 2B^2 \int H' \psi_a(1) \psi_b(2) \psi_a(2) \psi_b(1) \, d\tau_1 \, d\tau_2 \quad (۱۱.۱۱)$$

دوجمله اول معادله بالا، بجز در برجسبهای ۱ و ۲، شبیه هم هستند. در جمله آخر ممکن است این سؤال مطرح باشد که آیا برای  $H'$  باید از معادله (۸.۱۱) استفاده کرد یا از معادله (۹.۱۱). به طوری که به آسانی می توان دید، فرقی نمی کند. با جا گذاری  $B^2$  از معادله (۶.۱۱)، می توان نوشت

$$\Delta E = \frac{C \pm A}{1 \pm S} \quad (۱۲.۱۱)$$

در اینجا  $C$  و  $A$  با روابط زیر داده می شوند

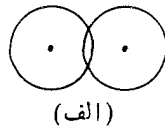
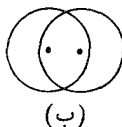
$$C = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int \left( \frac{1}{r_{ab}} + \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_{1b}} - \frac{1}{r_{2a}} \right) \psi_a^*(1) \psi_b^*(2) \, d\tau_1 \, d\tau_2 \quad (۱۳.۱۱)$$

$$A = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int \left( \frac{1}{r_{ab}} + \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_{1b}} - \frac{1}{r_{2a}} \right) \psi_a(1) \psi_b(1) \psi_a(2) \psi_b(2) \, d\tau_1 \, d\tau_2 \quad (۱۴.۱۱)$$

اگر تابع موج  $\psi$  به صورت تابع حاصلضرب ساده  $\psi_1(1)\psi_2(2)$  نوشته می شود، در آخرین رابطه انرژی اختلال [معادله (۱۲.۱۱)] دو جمله  $A$  و  $S$  ظاهر نمی شدند. در این صورت، انرژی اختلال به شکل ساده  $\Delta E = C$  درمی آمد که با عبارت ساده کلاسیک برای برهم کنش الکتروستاتیکی بین دو اتم، وقتی که چگالیهای احتمال مکانیک موجی دو الکترون به شکل ابری از بار با توزیع پیوسته در نظر گرفته شوند، برابر است. به طوری که خواهیم دید، این قسمت کلاسیک بستگی ضعیفی به وجود می آورد، زیرا برای جدایی متوسط  $0 < C$  است. در هر حال، جمله غالب در رابطه برهم کنش تبادل  $A$  است.

برای اینکه احساسی کیفی از چگونگی تغییر انتگرال  $C$  بر حسب جدایی هسته‌ای  $r_{ab}$  به دست آوریم، به شکل ۳.۱۱ مراجعه می کنیم. شکل ۳.۱۱ نمودار دو اتم را با هسته‌هایشان نشان می دهد که ابر الکترونی اطراف هسته‌ها را گرفته است. برای سهولت، ابر الکترونی را با شعاعهایی مشخص در نظر می گیریم که فراتر از آن چگالی بار برابر صفر است. از قوانین الکتروستاتیکی یاد آور می شویم که نیروی بین بار نقطه‌ای  $q_1$  و باری با توزیع کروی متقارن  $q_2$ ، یا بین دو بار با توزیع کروی متقارن  $q_1$  و  $q_2$  برابر است با نیروی بین دو بار نقطه‌ای  $q_1$  و  $q_2$ ، به شرط اینکه بارهای  $q_1$  و  $q_2$  همپوشی نداشته باشند. در فواصلی که دو اتم همپوشی ندارند، بین دو اتم خنثی هیچ نیرویی اعمال نمی شود (شکل ۳.۱۱ الف). در شکل ۳.۱۱ ب دو ابر الکترونی تا اندازه‌ای همدیگر را می پوشانند. نیروی دافعه بین دو هسته شبیه حالت قبل است، به طوری که جمله اول معادله (۱۳.۱۱) بدون تغییر باقی می ماند. جمله دوم به علت روی هم قرار گرفتن ابرهای الکترونی کاهش می یابد، زیرا میدان الکتریکی داخل بار کروی متقارن کوچکتر از حالتی است که تمام بار در مرکز انباشته شده بود. دو جمله آخر معادله (۸.۱۱) افزایش می یابند، زیرا مقداری از بار اتم  $A$  به ماوردای حفاظ الکترونی اطراف هسته  $B$  نفوذ کرده است و بالعکس. در فواصل متوسط، نتیجه خالص این است که  $C$  منفی است. در فواصل کمتر، وقتی هسته  $1$  اتم به داخل ابر حفاظی اتم دیگر نفوذ می کند، دافعه هسته‌ای غلبه می کند و انتگرال  $C$  مثبت می شود. شکل ۳.۱۱ نشان می دهد که چگونه جمله  $C$  نسبت به جدایی هسته‌ای  $r_{ab}$  تغییر می کند. برای مطالعه اهمیت انتگرال  $A$  [معادله (۱۴.۱۱)]، مفهومی تازه به نام باد تبادل را معرفی می کنیم که با روابط زیر بیان می شود

$$\begin{aligned} \rho_1 &\equiv \psi_a(1)\psi_b(1) \\ \rho_2 &\equiv \psi_a(2)\psi_b(2) \end{aligned} \quad (15.11)$$



شکل ۳.۱۱ نمودار نمایش همپوشی دو اتم. نقاط هسته‌ها را نشان می دهند، و دایره‌ها نواحی با توزیع بار الکترونی بسیار فشرده را نشان می دهند.

انتگرال بار تبادلی در تمام فضا به صورت زیر به دست می آید

$$\alpha \equiv \int \psi_a(1)\psi_b(1)d\tau_1 = \int \psi_a(2)\psi_b(2)d\tau_2 \quad (۱۶.۱۱)$$

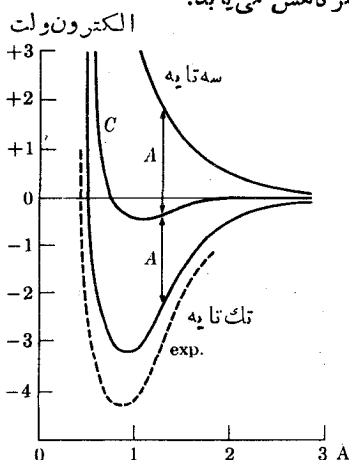
از آنجا که دو تابع  $\psi_a$  و  $\psi_b$  مشابه هستند، بجز اینکه در دو دستگاه مختصات مختلف نوشته شده اند، مقدار انتگرال  $\alpha$  وقتی دو دستگاه مختصات منطبق می شوند ( $r_{ab} = 0$ ) برابر ۱ است. با افزایش  $r_{ab}$ ، انتگرال  $\alpha$  سرعت کاهش می یابد. جمله  $S$  که با معادله (۵.۱۱) بیان می شود، ممکن است به صورت حاصلضرب دو انتگرال به شکل معادله (۱۶.۱۱) نوشته شود. با این روش  $S = \alpha^2$  است، و داریم

$$\Delta E \left( \begin{matrix} \text{تك تايه} \\ \text{سه تايه} \end{matrix} \right) = \frac{C \pm A}{1 \pm \alpha^2} \quad (۱۷.۱۱)$$

بار تبادلی يك مفهوم ریاضی بدون معنی فیزیکی واقعی است. بدكمك این مفهوم تازه، معادله (۱۴.۱۱) را به صورت زیر بازنویسی می کنیم

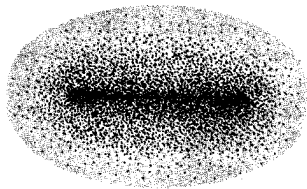
$$A = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\alpha^2}{r_{ab}} + \int \frac{\rho_1 \rho_2}{r_{12}} d\tau_1 d\tau_2 - \alpha \int \frac{\rho_1}{r_{1b}} d\tau_1 - \alpha \int \frac{\rho_2}{r_{2a}} d\tau_2 \right] \quad (۱۸.۱۱)$$

شکل ۵.۱۱ الف چگالی بار تبادلی برای مولکول H<sub>2</sub> را به طور کیفی نشان می دهد، و شکل ۵.۱۱ ب ترسیم مقدار بار تبادلی در طول خط واصل دو هسته است. چون  $\psi_a$  يك تابع نمایی نزولی و  $\psi_b$  يك تابع نمایی صعودی بین دو هسته است، حاصلضرب این دو مقدار ثابتی است. اما، در سمت چپ هسته A و در سمت راست هسته B، هر دو تابع نمایی نزولی هستند و حاصلضرب آنها سریعتر کاهش می یابد.

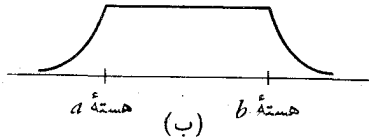


شکل ۴.۱۱ منحنیهای انرژی پتانسیل مولکول H<sub>2</sub> در حالت های تک تايه و سه تايه.





(الف)



**شکل ۵.۱۱** (الف) بار تبادلی  $\rho = \psi_a(1) \psi_b(1)$  در  $H_2$ ، به عنوان مفهومی انتزاعی. (ب) رسم بزرگی بار تبادلی در  $H_2$  در طول خط واصل بین دو هسته.

حال به معادله (۱۸.۱۱) برمی گردیم، می بینیم که جمله اول برابر انرژی پتانسیل حاصل از بار الکتریکی  $\alpha e$  در هر هسته است. این جمله در جداییهای متوسط کوچکتر از بقیه است. جمله دوم مربوط به برهم کنش بار تبادلی ۱ با بار تبادلی ۲ است، و از آنجا که آنها به طور مساوی در فضا توزیع شده اند، این جمله دو برابر خود- انرژی، یعنی انرژی لازم برای گردآوری ابری از بار مشابه با بار تبادلی، خواهد بود. جمله سوم مربوط به انرژی پتانسیل حاصل از برهم کنش بین بار نقطه ای  $\alpha e$  در هسته  $b$  با بار تبادلی  $\rho_1$  است. جمله چهارم، به طور مشابه، مربوط به انرژی پتانسیل حاصل از برهم کنش بین بار نقطه ای  $\alpha e$  در هسته  $a$  با بار تبادلی  $\rho_2$  است. وقتی  $r_{ab}$  در مقایسه با شعاع بور بزرگ است، مانند شکل ۵.۱۱، میانگین فواصل مربوط به سه انتگرال آخر دارای مرتبه بزرگی  $r_{ab}/2$  خواهد بود. بنابراین سه انتگرال آخر عددی در یک مرتبه از بزرگی هستند، در حالی که انتگرال اول کوچکتر است. نتیجه خالص این است که جمله  $A$  برای فواصل تا حدود شعاع بور منفی است و عددی بزرگتر از مقدار  $C$  است. در این گستره از  $r_{ab}$ ،  $\alpha^2 \ll 1$  است. بنابراین انرژی  $\Delta E$ ، یعنی انرژی پتانسیل دستگاهی دو اتمی از هیدروژن خنثی که از بینهایت دور بهم نزدیک می شوند، در حالت تک تابه منفی و در حالت سه تابه مثبت است.

شکل ۴.۱۱ بزرگی جملات  $C$  و  $A$  و انرژی کل محاسبه شده  $\Delta E$  در حالت های تک تابه و سه تابه را نشان می دهد. منحنی تجربی انرژی پتانسیل برای حالت تک تابه نیز در شکل نشان داده شده است. پارامترهای تجربی بدکار گرفته شده در تعیین شکل این منحنی عبارت اند از انرژی تفکیک (پیوند)، اندازه مولکول، و طیف انرژیهای ارتعاشی (به بخش بعدی مراجعه شود). طیف ارتعاشی پهنای چاه پتانسیل را بر حسب فاصله قائم از ته چاه (بر حسب افزایش انرژی) تعیین می کند. انحراف بین منحنیهای نظری و تجربی ناشی از این حقیقت

است که بازهم از نظریه اختلال مرتبه اول درحالتی که برهم کنش اختلالی کوچک نیست، استفاده کرده‌ایم.

اهمیت فوق‌العاده تقارن تبدیلی را بدعنوان مفهومی فیزیکی دیده‌ایم، و لزوم استفاده از آن را برای توضیح طیف هلیوم دریافتیم. از آن مهمتر، قدرت مشاهده شده در پیوند کووالانسی و بستگی اسپین آن را فقط می‌توان با استفاده از این مفهوم تشریح کرد.

### ۳.۱۱ طیف‌نمایی مولکولی

وقتی در فصول گذشته درباره طیف‌نمایی گسیل اتمی بحث کردیم، فرض کردیم که چشمه لامپ تخلیه‌گازی است که در آن مولکولها به اتمهای باردار یا خنثی تجزیه می‌شوند. در تخلیه‌ای با شدت کمتر مولکولها تفکیک نمی‌شوند اما برانگیخته می‌شوند، به نحوی که طیف گسیل مولکولی به وجود می‌آید که معمولاً سوار بر طیفهای اتمی است. یک روش ساده‌تر برای مطالعه ویژگیهای مهم مولکولها این است که از داخل گاز مولکولی سرد نور سفید عبور دهیم و خطوط جذبی آن را اندازه بگیریم. در این صورت، حالت‌های اولیه در یک گذار فقط می‌تواند پایستترین حالت (حالت پایه) یا حالت برانگیخته‌ای به فاصله چند  $kT$  ( $0.025 \text{ eV}$ ) از حالت پایه باشد.

سه نوع برانگیزش مولکولی عمده در چنین مطالعاتی مشاهده می‌شوند. اول، حالت مداری الکترونها در تک‌تک اتمها می‌تواند تغییر کند، که این نوع برانگیزش در طیف‌نمایی مولکولی برانگیزش الکترونی خوانده می‌شود. دوم، هر اتم منفردی نسبت به مرکز جرم ارتعاش می‌کند و دارای برانگیزش ارتعاشی است. سوم، مولکول حول مرکز جرم دوران می‌کند و دارای برانگیزش دورانی است. حداقل انرژی برانگیزش نوع سوم آنقدر کم است که یک مولکول در دمای معمولی ممکن است، به‌طور نسبی، «بشدت برانگیخته» باشد. البته برانگیزش نوع الکترونی تحت تأثیر حضور اتمهای دیگر قرار می‌گیرد، و بنا بر این خطوط طیفی دیده شده دارای همان طول موجهای حالت اتم آزاد نیست. در هر حال، فرایند اساساً همان است و با شرح مطلب در بخشهای ۷.۸ و ۷.۹ موضوع به‌خوبی درک شده است. بنا بر این، در اینجا به بحث درباره نظریه برانگیزشهای ارتعاشی و دورانی می‌پردازیم.

فرض می‌کنیم که مولکول دو اتمی و دارای تکانه زاویه‌ای صفر در حالت پایه است. هامیلتونی حرکت دوهسته را در مولکول به صورت زیر می‌نویسیم

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M_1} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2M_2} \nabla_2^2 + V(r_{12}) \quad (19.11)$$

در این رابطه  $\nabla_1^2$  و  $\nabla_2^2$  به ترتیب مشتق نسبت به مختصات مکانی هسته ۱ و هسته ۲ هستند. بویژه در اتمهای سنگین، الکترونها داخلیتر هسته‌ای را که به آن پیوند دارند در حرکت نسبت به هسته دیگر تعقیب می‌کنند، و این درحالی است که الکترونها ظرفیت کمتر حرکت می‌کنند. بنا بر این دو جرم  $M_1$  و  $M_2$  مقادیر بینابینی از جرمهای اتمی و هسته‌ای خواهند بود.

در بحث بخش ۱۰۷، مسئله مکانیک موجی دو جسم بسا وارد کردن جرم کاهیسده زیر به مسئله يك جسم تبدیل شد

$$\mu = -\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \quad (20.11)$$

و همچنین برای  $\Gamma$  بردار فاصله جدایی بین دو ذره می نویسیم  $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_{12}$ . با این اصلاحات معادله شرودینگر با هامیلتونی (۱۹.۱۱) تبدیل به معادله يك جسم با پتانسیل کروی متقارن می شود. بنا بر این جوابها عبارت اند از حاصل ضرب توابع کروی هماهنگ دريك جواب معادله شعاعی موج (۳۰.۷)، که پس از باز نویسی به صورت زیر درمی آید

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left( E - V - \frac{J(J+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right) R = 0 \quad (21.11)$$

تابع موج کل عبارت است از

$$\psi = R(r) Y_{J, m}(\theta, \phi) \quad (22.11)$$

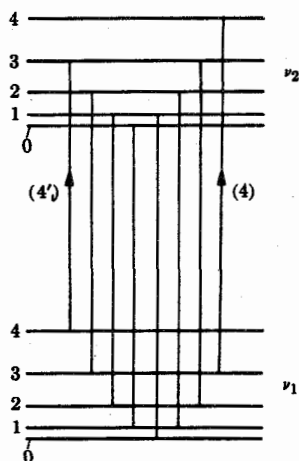
قسمت زاویه ای،  $Y_{J, m}(\theta, \phi)$ ، حرکت دورانی حول مرکز جرم را با اعداد کوانتومی تکانه زاویه ای  $J$  و  $m$  به دست می دهد. قسمت شعاعی، که اطلاعات مربوط به هر گونه تغییری را در فاصله بین دو هسته شامل می شود، البته بستگی به شکل تابع پتانسیل  $V(r)$  دارد. این شکل به طور کیفی برای تمام مولکولهای دو اتمی مانند شکل ۴.۱۱ است. در حوالی کمینه این منحنی، آن را می توان به طور تقریب يك سهمی دانست. بجز در تکانه های زاویه ای خیلی بزرگ، پتانسیل مرکز گریز  $J(J+1)\hbar^2 / 2\mu r^2$  فقط اختلالی جزئی در این پتانسیل ایجاد می کند. بنا بر این، جوابهای معادله (۲۱.۱۱) با تقریبی خوب تابع موجهای نوسان کننده هماهنگ هستند که حرکت ارتعاشی دو هسته را نسبت به یکدیگر شرح می دهد. ویژه مقدارهای انرژی حرکت ترکیبی دورانی و ارتعاشی به طور تقریب به صورت زیر است

$$E = \left( v + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega + \frac{J(J+1)\hbar^2}{2\mu r_0^2} \quad (23.11)$$

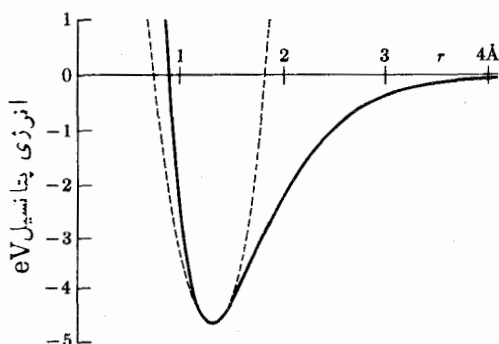
که در آن  $r_0$  فاصله جدایی هسته ای متوسط یا فاصله حالت تعادل است [با معادله (۱۰۶.۶) مقایسه شود]. در معادله (۲۳.۱۱) عدد کوانتومی ارتعاشی  $v = 0, 1, 2, 3, \dots$  و  $J = 0, 1, 2, 3, \dots$  عدد کوانتومی دورانی است.

نمودار تراز انرژی ارتعاشی-دورانی در شکل ۶.۱۱ نشان داده شده است. به طور کلی، فاصله بین ترازهای دورانی خیلی کوچکتر از فاصله بین ترازهای ارتعاشی است. بدین ترتیب، به ازای هر عدد کوانتومی  $v$  يك دسته تراز انرژی دورانی وجود دارد. در شکل ۶.۱۱ بعضی از خطوط جذبی بین دو حالت ارتعاشی مجاور نیز نشان داده شده است. قاعده انتخاب برای این نوع گذار  $\Delta J = \pm 1$  است.

به عنوان مثالی از طیف ارتعاشی-دورانی، خطوط جذب را در  $\lambda = 3.5 \mu$



شکل ۶.۱۱ ترازهای انرژی ارتعاشی-دورانی برای دو مقدار اختیاری  $J = 0, 1, 2, 3, 4$  و  $v$ . گذارهای جذبی نیز نشان داده شده‌اند. یادآور می‌شود که  $\Delta J = \pm 1$ .



شکل ۷.۱۱ منحنی انرژی پتانسیل برای HCl. منحنی خط‌چین سهمی است که در می‌نیموم تقریباً همان منحنی واقعی را به‌دست می‌دهد.

در گاز HCl در نظر بگیرید. شکل ۷.۱۱ نمودار انرژی پتانسیل را برای مولکول HCl نشان می‌دهد. انرژی تفکیک در مولکول HCl برابر  $4.48 \times 10^4$  eV و فاصله جدایی تعادلی برابر  $1.275 \text{ \AA}$  است. سهمی تریسیمی به‌صورت خط‌چین، منحنی معادله  $\Delta E = 15(r - r_0)^2$

است. بنا بر این «ثابت فنر»  $\beta$  برابر با  $30 \text{ eV}/\text{\AA}^2$  یا  $480 \text{ J/m}^2$  است. بر اساس معادله (۲۰.۱۱) جرم کاهیده برای مولکول  $\text{HCl}^{27}$  چنین است

$$\mu = \frac{1.67 \times 10^{-27}}{1 + 1/37} = 1.63 \times 10^{-27} \text{ kgm}$$

با این جرم کاهیده، بسامد ارتعاشی به صورت زیر به دست می آید

$$\omega = \sqrt{\frac{\beta}{\mu}} = 5.742 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

طول موج مربوط به این بسامد عبارت است از

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = 3.48 \times 10^{-6} \text{ m} = 3.48 \mu$$

انرژی کوانتوم مربوط به گذار ارتعاشی برابر است با

$$\Delta E = \hbar\omega = 5.772 \times 10^{-20} \text{ J} = 0.357 \text{ eV}$$

انرژی نقطه صفر، یعنی انرژی جنبشی حالت پایه نوسان کننده هماغه‌نگ،  $\hbar\omega/2 = 0.178 \text{ eV}$  است [در معادله (۲۳.۱۱)]  $J = 0$  و  $v = 0$ . انرژی تفکیک برابر اختلاف بین این حالت و حالت جدایی بینهایت است.

انرژی دورانی با قسمت دوم معادله (۲۳.۱۱) داده می شود و عبارت است از

$$E_{\text{rot}} = CJ(J+1)$$

که در آن مقدار  $C$  به صورت زیر است

$$C = \frac{\hbar^2}{2\mu r_0^2} = 2.10 \times 10^{-22} \text{ J} = 1.31 \times 10^{-3} \text{ eV}$$

تغییر انرژی دورانی در گذار از  $J_1$  به  $J_2$ ، چنین است

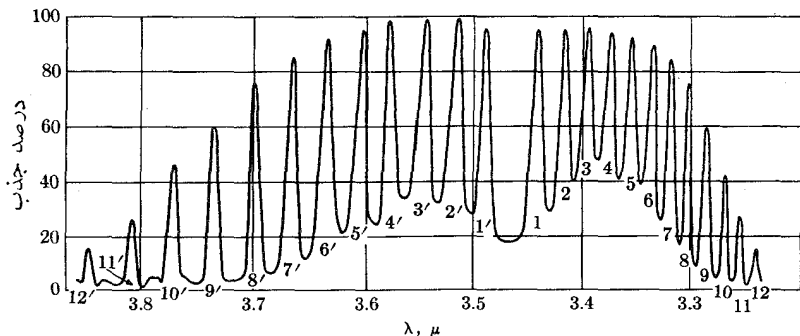
$$\Delta E_{\text{rot}} = C[J_2(J_2+1) - J_1(J_1+1)]$$

با قراردادن  $J_2 = J_1 \pm 1$ ، به دست می آوریم

$$\Delta E_{\text{rot}} = \pm 2CJ_1 \quad (24.11)$$

که در آن  $J_1$  از هر دو مقدار  $J_2$  و  $J_1$ ، یعنی  $J_2$  و  $J_1$ ، بزرگتر است.

انرژی دورانی برای مقادیر متوسط  $J$  به اندازه ای کوچک است که مولکول به آسانی می تواند طی برخورد های دمای معمولی برانگیخته شود. بنا بر این، گذار از  $v = 0$  به



شکل ۸.۱۱ طیف جذبی بخار HCl در ناحیه فرورسوخ نزدیک.

$J = 1$  می تواند مربوط به تغییری دورانی باشد که در آن  $J$  کاهش یا افزایش می یابد. پس، تغییر انرژی در چنین گذاری عبارت است از

$$\Delta E = \hbar\omega \pm 2CJ_{>} = (0.357 \pm 0.000262J_{>}) \text{ eV}$$

که در آن  $J_{>} = 1, 2, 3, \dots$  است اما نه صفر.

بیناب جذبی مشاهده شده از مولکول HCl در ناحیه حدود  $3.85 \mu$  در شکل ۸.۱۱ نشان داده شده است. اعداد داده شده در زیر هر قله اعداد اتمومی دورانی بالایی  $J_{>}$  هستند. اعداد بدون پریم برای مشخص کردن گذارهای دورانی بالا یعنی  $J_1 > J_2$ ، و اعداد پریم دار برای گذارهای دورانی پایین هستند.

بحث درباره طیف HCl را با معرفی انرژی پتانسیل، شکل ۷.۱۱، آغاز کردیم که به معنی معلوم بودن آن است. در حقیقت، بهترین اطلاعات تجربی موجود برای ساختن چنین نموداری، از این گونه طیف نمایی که مورد بحث بوده است، حاصل می شود.

### ۴.۱۱ جامدات و مایعات

هر فردی که کمی شیمی خوانده باشد می داند که نیروهای بین اتمی پیوند دهنده آنها در تشکیل مولکول، قابل اشباع هستند. این مطلب بدان معنی است که وقتی اتصالی بین دو اتم، مثلاً، هیدروژن برقرار شد، اتم سومی یا چهارمی و یا پنجمی به آنها اضافه نمی شود تا تشکیل مولکول بزرگتری از هیدروژن بدهند. به طوری که قبلاً شرح داده ایم، نیروهای اساسی در اینجا نیروهای الکتروستاتیکی و تابع قانون کولن هستند. به هر حال، مکانیک موجی و اصل طرد پاولی موقعیت ذرات را چنان ترتیب می دهند که، به طور متوسط، هیچ میدان الکتریکی قوی در خارج از مولکول اشباع شده ظاهر نشود و اتمهای بیشتری جذب نشوند. اما، میدان صفر نیست. به عنوان مثال مولکول NaCl را در نظر می گیریم که یک دوقطبی قوی است. این مولکول میدانی الکتریکی در خارج از خود دارد، و این میدان موجب نیروهای ضعیفتری به نام نیروی بین مولکولی می شود. به طوری که خواهیم دید، بین مولکولهای  $H_2$

و بین اتمهای هلیوم یا نئون هم نیروهای بین مولکولی وجود دارند. این نیروهای ضعیف عامل تشکیل جامدات و مایعات هستند.

وقتی ماده مورد بحث گازی شکل است، نیروهای بین مولکولی به اندازه کافی قوی نیستند که مولکولها را محکم کنار هم نگه دارند. در هر حال این نیروها عامل انحرافات شناخته شده گاز حقیقی از گاز کامل تابع قانون  $pV = RT$  هستند. این نیروها را نیروهای واندروالس می نامند، و منبع یکی از جملات تصحیحی معادله واندروالس برای گاز حقیقی به شمار می روند.

مولکولها در جامد یا مایع آن چنان تنگ هم قرار دارند که انرژی پتانسیل حاصل از نیروهای بین مولکولی کمینه است. بزرگی این انرژی پتانسیل برای هر مولکول به آسانی به صورت زیر ممکن است تخمین زده شود. گرمای تبخیر هر مول از ماده تقسیم بر عدد آوگادرو برابر است با انرژی لازم برای آزاد سازی یک مولکول از مایع و آوردن آن به حالت گازی. این درست همان کمیتی نیست که ما در پی آن هستیم، زیرا گرمای تبخیر همچنین شامل کار انجام شده برای انبساط ماده از حالت مایع به حالت گاز می شود. مقدار این کار برای هر مول در فشار ثابت  $RT$   $\approx p(V_{\text{گاز}} - V_{\text{مایع}}) = W$  است.

یک قانون آروینی<sup>۱</sup> گرمای تبخیر را تقریباً  $H = 10.5 RT_B$  برای هر مول به دست می دهد، که در آن  $T_B$  دمای مطلق نقطه جوش است. بنابراین، کمینه انرژی پتانسیل برای هر مولکول تقریباً عبارت است از

$$V_{\min} \approx \frac{(10.5 - 1)RT}{N_1} = 9.5 kT_B \quad (25.11)$$

که در آن  $k$  ثابت بولتزمن است و بر حسب واحدهای مناسب  $k = 8.64 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$  است. این رابطه حداقل انرژی پتانسیل برای ماده ای با نقطه جوش  $T_B = 400 \text{ K}$  چنین به دست می دهد

$$\Delta E = 9.5 kT_B = 0.328 \text{ eV}$$

بزرگی این مقدار یک مرتبه کوچکتر از انرژی پتانسیل پیوند اتمها به یکدیگر در مولکول است. برای مولکولهای با پیوند یونی، ریشه نیروهای واندروالس اساساً گشتاور دو قطبی مولکول است. دو مولکول ضمن نزدیک شدن، بسته به اینکه جهت گشتاور دو قطبی آنها نسبت به خط واصل مراکز آنها چگونه باشد، یکدیگر را جذب یا دفع می کنند. در هر صورت، میدان یک مولکول نیروهای بردیگری اعمال و آن را قطبی خواهد کرد، یعنی آن را در جهتی قرار خواهد داد که نیروی خالص بین دو مولکول جاذبه باشد. محاسبه ای ساده نشان می دهد که در فاصله های زیاد، نیروی خالصی متناسب با  $r^{-6}$  به دست می آید. بدیهی است که این قانون در فواصل کم، موقعی که دو ابر الکترونی به طور قابل ملاحظه ای روی هم قرار می گیرند، نقض می شود. از آنجا که فرضاً با مولکولهای اشباع شده سروکار داریم، نیروهای

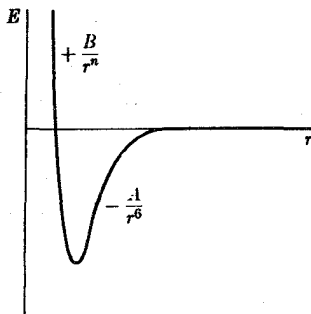
۱. قاعده پروتون؛ رک

دیگر دافعه هستند و بر حسب  $r$  سریعتر از نیروی واندروالس تغییر می کنند. شکل ۹.۱۱ تابع پتانسیل

$$V = -c_1 r^{-6} + c_2 r^{-12}$$

را نشان می دهد که نمودار مناسبی از نیروی واندروالس است. مولکولهایی که بایوند کووالانسی به هم اتصال دارند، گشتاور دوقطبی ایستا ندارند. البته، این موضوع برای اتمهای تک مثل اتم هلیوم نیز صادق است. در هر حال، اتمها و مولکولهای کووالانسی به علت حرکت الکترونها حول هسته یا هستهها، دارای گشتاورهای دوقطبی سریع التغییر هستند. مثلاً دو اتم هلیوم به طور ضعیفی یکدیگر را جذب می کنند، زیرا از نظر دینامیکی یکدیگر را قطبی می کنند. بهترین راه تشریح این موضوع شاید این است که بگوییم الکترونها دو اتم هلیوم تا حدی به طور همزمان نوسان می کنند. نتیجه پتانسیلی است که در فواصل زیاد تابع  $r^{-6}$  است. در مورد هلیوم این نیروها فوق العاده ضعیف هستند و توجه به این حقیقت که هلیوم در  $4.2\text{K}$  مایع می شود، مطلب را روشن می کند. اما، بسیاری از مولکولهایی که بایوند کووالانسی اتصال پیدا می کنند دارای نیروی بین مولکولی جاذبه هستند (گرمای تبخیر) که قابل مقایسه با مولکولهای یونی است. با بیان کلی، هر چه مولکول سنگینتر می شود، گرمای تبخیر ماده بیشتر می شود. این موضوع به این علت است که هر چه تعداد الکترونها بیشتر و هر چه فاصله جابه جایی الکترونی معین در مولکول بیشتر باشد، قابلیت قطبی شدن بیشتر خواهد شد.

در دماهای بداندازه کافی پایین، بیشتر مواد به صورت بلور هستند. آرایه ای منظم و تنگ هم چیده از مولکولها کمترین انرژی پتانسیل را دارد. وقتی دما به نقطه معین ذوب می رسد، به علت جنبش حرارتی مولکولها یا اتمها، این نظم ساختمانی از هم پاشیده می شود. با وجود این مولکولها هنوز در مقیاس میکروسکوپی دارای ساختمان تنگ هم چیده هستند، اما حفره هایی در آنها پیدا می شود که لغزش آسان لایه های مولکولی را بر روی یکسایه دیگر



شکل ۹.۱۱ پتانسیل واندروالس . تابع

$Ar^{-6}$  به وسیله تابع پتانسیل دافعه  $B r^{-n}$

با  $n = 12$  اصلاح شده است.



ممکن می‌سازد. بنا بر این مایع جریان پیدا می‌کند، اگرچه مقاومت معینی در مقابل جریان (چسبناکی) وجود دارد. وجود حفره‌ها و بی‌نظمیها دلیلی است بر اینکه حجم اشغالی مایع معمولاً بیشتر از حجم جامد آن است.

مادهٔ اریخت از نظر فنی مایعی است که چسبناکی آن خیلی زیاد است، مثلاً شیشه وقتی سرد می‌شود به صورت بلور در نمی‌آید. با کاهش دما، چسبناکی افزایش می‌یابد تا جایی که ماده دیگر جریان پیدا نمی‌کند، اما با اعمال نیروهای قوی می‌شکند. ترتیب قرار گرفتن مولکولها در چنین جامدی نظیر بی‌نظمی در مایع است.

فیزیک گاز اساساً فیزیک تک تک مولکولهاست. آموخته‌ایم که این موضوع را، با وجود اشکال زیاد، به کمک مکانیک موجی درک کنیم یا شرح دهیم. فیزیک جامد پیچیده‌تر است، اما جنبه‌های عمومی معینی را می‌توان با نظم ساختار بلوری دریافت. از سه حالت ماده یعنی گاز، مایع، جامد، شرح یافته‌ام حالت مایع از همه مشکلتر است، زیرا مایع سادگی ذره تک یا نظم بلور را ندارد. حالت مایع را در این کتاب بیشتر از این شرح نمی‌دهیم.

### ۵.۱۱ نظریهٔ کلاسیک گاز الکترونی در جامدات

نظریهٔ کلاسیک عایقها این است که در این مواد الکترونها با مولکولهاشان پیوند دارند، که به نوبهٔ خود مولکولها در مواضع خود در جسم جامد تثبیت شده‌اند. از طرف دیگر، در اجسام رسانا الکترونهای خارجی آنها آزاد فرض می‌شوند که در سرتاسر ساختار بلوری جامد از اتمی به اتم دیگر مهاجرت می‌کنند. به عنوان مثال، هر اتم مس دارای یک الکترون آزاد از این نوع است. فرض می‌شود که عملکرد این الکترونها در داخل جسم رسانا شبیه گاز کامل باشد. بر اساس این فرض تعداد درجات آزادی در جسم رسانا باید ۹ باشد: سه تا برای انرژی جنبشی آنها، سه تا برای انرژی پتانسیل الاستیک آنها و سه تا برای انرژی جنبشی الکترونها. در اینجا ناسازگاری بین ۹ درجهٔ آزادی کلاسیک هر جسم رسانا و شش درجهٔ آزادی تجربی مبتنی بر قانون دولون و پوتی را پس از بررسی نظریهٔ «گاز الکترون» و کاربرد آن در رسانش، شرح خواهیم داد.

برای محاسبهٔ مقاومت فلز، فرض می‌کنیم که گاز الکترون به طور حرارتی در جنبش است و ریشهٔ میانگین مربعی سرعت از حل معادلهٔ (۱۸.۱) بدست می‌آید

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}} \quad (26.11)$$

اگر الکترونها دارای مسیر آزاد میانگین  $L$  باشند، در آن صورت زمان  $\bar{t}$  متوسط بین برخوردها عبارت است از

$$\bar{t} = \frac{L}{v_{\text{rms}}} = L \sqrt{\frac{m_e}{3kT}} \quad (27.11)$$

فرض می کنیم که الکترونها در میله ای بدسطح مقطع  $A$  و طول  $l$  قرار دارند که اختلاف پتانسیل دوسر آن  $V$  است. این اختلاف پتانسیل يك میدان الکتریکی متوسط  $V/l$  به وجود می آورد که نیرویی بر هر الکترون وارد می کند. نیروی وارد بر هر الکترون چنین است

$$F = eE = \frac{eV}{l} \quad (28.11)$$

این نیرو به الکترونها شتابی برابر مقدار زیر می دهد

$$a = \frac{e}{m_e} \frac{V}{l} \quad (29.11)$$

الکترونها در زمان متوسط  $\bar{t}$  شتاب می گیرند و سرعت سوق متوسط  $\bar{v}_d$  به دست می آورند که از رابطه زیر تعیین می شود

$$\bar{v}_d = \frac{eV}{2m_e l} L \sqrt{\frac{m_e}{3kT}} \quad (30.11)$$

این سرعت سوق در طول میله است و در مقایسه با  $v_{rms}$  بسیار کوچک است. در حقیقت  $\bar{v}_d$  بسیار کوچک است، زیرا در هر فاصله بین برخورد های حرارتی شتاب جدید «از حالت سکون» شروع می شود و انتقال الکترونها با سرعت متوسط  $\bar{v}_d$  انجام می گیرد.

اگر غلظت الکترونهای آزاد ظرفیت در واحد حجم  $n$  باشد، در این صورت تعداد الکترونهایی که از سطح عمود بر محور میله در واحد زمان عبور می کنند  $nA\bar{v}_d$  است، و الکترونها جریانی به وجود می آورند که با رابطه زیر داده می شود

$$I = enA\bar{v}_d = \frac{e^2 nLA}{2m_e l} \sqrt{\frac{m_e}{3kT}} V \quad (31.11)$$

مقایسه این رابطه با قانون اهم نشان می دهد که مقاومت میله به صورت زیر به دست می آید

$$R = \frac{2l}{e^2 nLA} \sqrt{3kTm_e} \quad (32.11)$$

چون مقاومت بر حسب مقاومت ویژه بدصورت  $R = \rho(l/A)$  نوشته می شود، دیده می شود که

$$\rho = \frac{2\sqrt{3kTm_e}}{e^2 nL} \quad (33.11)$$

و رسانندگی الکتریکی چنین است

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{e^2 nL}{2\sqrt{3kTm_e}} \quad (34.11)$$

با فرض اینکه  $n$  تعداد الکترونهاى ظرفیت در واحد حجم و اینکه  $L$  فاصله بین اتمى باشد، پیش بینی این رابطه برای بعضى از فلزات خالص در دمای معمولی بسیار خوب می شود که موضوعی جالب توجه است. متأسفانه مقاومت ویژه بیشتر فلزات در گستره وسیعی، بیشتر متناسب با دمای مطلق است تا متناسب با جذر آن. پس، این مطابقت بیشتر اتفاقی است. موضوع بدتر، به طوری که اشاره کرده ایم، این است که این نظریه ظرفیت گرمایی مولی را برابر  $3R/2$  به دست می دهد در حالی که ظرفیت گرمایی مولی فلزات خیلی به آسانی بر اساس انرژی انتقالی و ارتعاشی مولکولها به تنهایی قابل توجیه است.

رساناهای خوب حرارتی رساناهای خوب الکتریکی نیز هستند. تناسب این دو نوع رسانش، رابطه وایدمن-فرانتس خوانده می شود، و قویاً بدین معنی است که سازوکار دو نوع رسانش یکسان است. اگر جنبش گاز الکترون عامل رسانش الکتریکی و همچنین رسانش حرارتی باشد، اینکه جنبش حرارتی الکترونها سهمی در گرمای ویژه ماده ندارد سؤال برانگیز به نظر می رسد.

### ۶.۱۱ نظریه مکانیک موجی گاز الکترونی در جامدات

در بخشهای ۱.۱۱ و ۲.۱۱ شرح دادیم که چگونه خارجترین الکترونها در اتمهای مولکول جای یکدیگر را می گیرند و اتمها در الکترونها یشان شریک می شوند. در جسم جامد، اتمها چنان تنگ هم قرار می گیرند که پتانسیل جاذبه مؤثر بر خارجترین الکترونها در تمام نمونه نفوذ می کند. این موضوع، علاوه بر رسانا، در مورد عایق هم صادق است، و اختلاف بین این دو ظرفیت از اشاره ای است که در سرآغاز بخش قبل داشتیم (رک بخش بعدی).

شکل ۱۰.۱۱ پتانسیل را به طور کیفی در آرایه منظمی از بلور نشان می دهد. در محله هسته، چاه پتانسیل خیلی عمیقتر از مقداری است که نشان داده شده است. در هر صورت، بر اساس اصل پاؤلی این ناحیه ای ممنوعه برای الکترونهاى خارجی است.

برای سهولت، از نوسانات پتانسیل صرف نظر می کنیم و فرض می کنیم که الکترونها با پتانسیلی ثابت در جعبه ای با دیواره غیر قابل نفوذ قرار دارند. می خواهیم توزیع انرژی این الکترونها را محاسبه کنیم، با توجه به این موضوع که توزیع آنها در حالت های کوانتومی به کمک اصل طرد پاؤلی تعیین می شود. مسئله خیلی شبیه به حالتی است که در به دست آوردن قانون پلانک برای تابش جسم سیاه به حل آن اقدام کردیم (بخشهای ۹.۳ و ۱۰.۳).

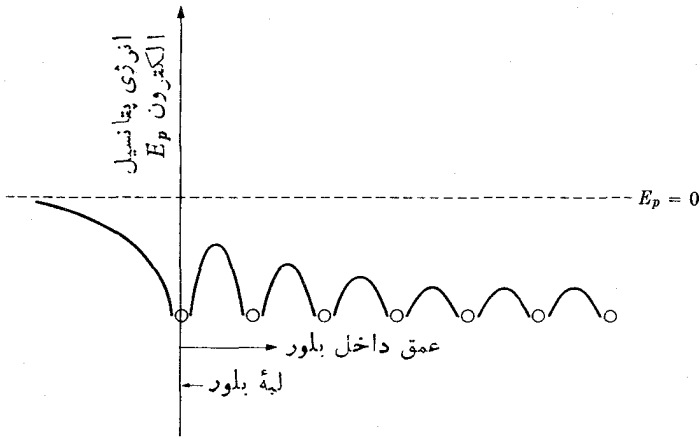
معادله شرو دینگر برای يك الکترون در پتانسیل ثابت ( $V=0$ ) به صورت زیر است

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 \psi = E\psi \quad (35.11)$$

و جوابها، با توجه به شرایط مرزی در دیواره های غیر قابل نفوذ جعبه، به صورت زیر است

$$\psi = A \sin k_x x \sin k_y y \sin k_z z \quad (36.11)$$

مبدأ در یکی از گوشه های جعبه قرار دارد، و شرط مرزی در  $x=L$  و  $y=L$  و  $z=L$



شکل ۱۰.۱۱ نمودار تغییرات انرژی پتانسیل الکترون در ردیف اتمی داخل بلور و سد پتانسیل در لبه آن.

به صورت زیر است

$$k_x L = n_x \pi$$

$$k_y L = n_y \pi \quad (37.11)$$

$$k_z L = n_z \pi$$

با قراردادن این جواب در معادله (۳۵.۱۱) رابطه زیر به دست می آید

$$E = \frac{\hbar^2}{2m_e} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_e L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (38.11)$$

برای هر حالت مجاز یک دسته اعداد درست  $n_x, n_y, n_z$  وجود دارد. درست مانند بخش ۹.۳، انرژی هر حالت متناسب با مربع مقدار بردار  $n$  با مؤلفه‌های  $n_x, n_y, n_z$  است که در شکل ۸.۳ ترسیم شده بود. حداکثر مقدار  $n$  با معادله (۳۸.۱۱) به صورت زیر داده می شود

$$n_{\max} = \frac{L}{\pi \hbar} (\gamma m_e E)^{1/2} \quad (39.11)$$

بنابراین تعداد حالت‌های الکترون با انرژی کمتر از  $E$  عبارت است از (با بخش ۹.۳ مقایسه شود)

$$N = \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi n_{\max}^3 = \frac{L^3}{3\pi^2 \hbar^3} (\gamma m_e E)^{3/2} \quad (40.11)$$

وجود ضریب ۲ در رابطه معرف این است که بهر حال مشخص شده با تابع موج مکانی معین می توانیم دو الکترون تخصیص دهیم، یکی با اسپین بالا و دیگری با اسپین پایین. با قرار دادن حجم  $V = L^3$  در معادله (۴۰.۱۱) و حل آن، مقدار  $E$  که آن را انرژی فرمی  $E_f$  می نامیم، به صورت زیر به دست می آید

$$E_f = \frac{3^{2/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{2m_e} \left( \frac{N}{V} \right)^{2/3} \quad (41.11)$$

در دمای صفر کلوین، الکترونها تمام حالتهاى موجود تا انرژی فرمی  $E_f$  را پر می کنند. در هر دمای دیگر، بعضی از حالتها با انرژی بیش از تراز فرمی اشغال خواهند شد، و بعضی با انرژی کمتر خالی خواهند ماند. این موضوع را در زیر بیشتر بحث خواهیم کرد، اما در ابتدا برای روشن شدن انرژی فرمی را برای مس حساب می کنیم. با فرض اینکه هر اتم مس یک الکترون آزاد دارد، درمی یابیم که

$$\frac{N}{V} = \frac{6.02 \times 10^{23} \times 89 \times 10^6}{638} = 8.43 \times 10^{28} \quad \text{الکترون در مترمکعب}$$

با قرار دادن این مقدار در معادله (۴۱.۱۱)، انرژی فرمی به صورت زیر به دست می آید

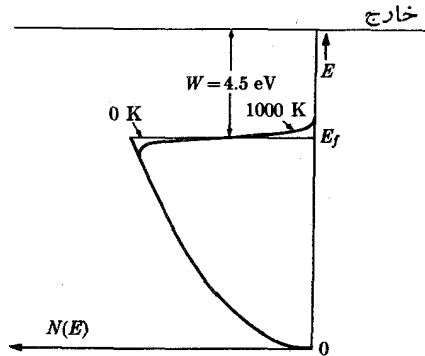
$$E_f = \frac{3^{2/3} \pi^{4/3} \times 1.054 \times 10^{-68} \times 8.43^{2/3} \times 10^{18}}{2 \times 9.11 \times 10^{-31} \times 1.6 \times 10^{-19}} = 7.05 \text{ eV}$$

شکل ۱۱.۱۱ نمودار تقریبی انرژی پتانسیل را برای مس نشان می دهد که در آن موقعیت تراز فرمی در فاصله حدود ۷ eV از ته پتانسیل متوسط ترسیم شده است. تراز فرمی تقریباً ۴۵ eV پایین تر از پتانسیل خارج از فلز است. البته این سقوط انرژی، همان تابع کار است که محاسبه دقیق آن مشکل است (مسئله ۱۰.۱۱). تابع کار به طور تجربی، به کمک اندازه گیریهای اثر فوتوالکتریک و گسیل گرمایونی، تعیین می شود (به بخشهای ۱۱.۳ و ۱۴.۳ رجوع شود).

شکل ۱۱.۱۱ همچنین توزیع الکترونها را بر حسب انرژی نشان می دهد. این توزیع را می توان در دمای صفر کلوین از معادله (۴۰.۱۱) به دست آورد، که تعداد کل حالتهاى الکترونی را با انرژیهای جنبشی از صفر تا  $E$  مشخص می سازد. اگر  $E$  را متغیر بگیریم، تعداد حالتهاى  $dN$  در فاصله بین  $E$  و  $E + dE$  را با دیفرانسیل گیری می یابیم

$$N(E, 0) dE \equiv dN = \frac{m_e^{3/2} V}{4\sqrt{2} \pi^2 \hbar^3} E^{1/2} dE \quad (42.11)$$

در هر دمای بالاتر از صفر کلوین، این توزیع به طوری که در بالا اشاره شد، اصلاح می شود. بیشتر تغییرات در انرژی  $\pm kT$  از تراز فرمی رخ می دهد. در دمای معمولی  $kT = 0.025 \text{ eV}$  است و می شود گفت که تغییرات اهمیت چندانی ندارند. در هر حال، به طوری که در بخش بعدی خواهیم دید، برای بسیاری از وسایل الکترونیکی اثر دما دارای اهمیت زیادی است.



شکل ۱۱.۱۱ توزیع فرمی الکترونهاي آزاد، در مس. تابع کار  $W$  انرژی مورد نیاز برای حرکت الکترون از رأس توزیع به خارج از فلز است.

تصحیح معادله (۳۷.۱۱) برای دماهای بالاتر توزیع احتمال فرمی خوانده می شود، و به شکل زیر است

$$F(E, T) = \frac{1}{1 + e^{(E - E_0)/kT}} \quad (۴۳.۱۱)$$

استخراج این رابطه تا اندازه ای مشکل و شبیه به معادله توزیع بولتزمن است (بخش ۱۳.۱). حال، توزیع کل به صورت زیر می شود

$$N(E, T)dE = \frac{m_e^{3/2} \sqrt{E}^{1/2}}{\sqrt{2\pi} \pi^2 \hbar^3} F(E, T)dE \quad (۴۴.۱۱)$$

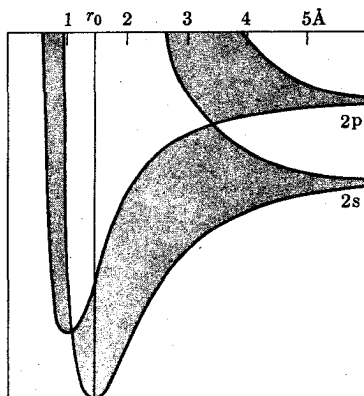
ثابت  $E_0$  در معادله (۴۳.۱۱) با انتگرال گیری معادله (۴۴.۱۱) و برابر قراردادن نتیجه با تعداد کل الکترونها،  $N$ ، تعیین می شود. اگرچه  $E_0$  بر حسب دما به طور جزئی تغییر می کند، ولی برای مقاصد عملی می توان آن را ثابت در نظر گرفت و برابر با انرژی فرمی  $E_f$  قرارداد. توزیع کل [معادله (۴۴.۱۱)] در شکل ۱۱.۱۱ برای  $T = 1000 \text{ K}$  ترسیم شده است.

حال، از فرایند گسیل گرما یونی که به اختصار در بخش ۱۴.۳ تشریح شده بود، می توان درک بهتری داشت. در دماهای بالا، دنباله بالایی تابع توزیع حاوی تعداد قابل توجهی الکترون با انرژی بیش از  $(E_f + W)$  خواهد بود. این الکترونها دارای انرژی کافی هستند تا فرار کنند، و یک جریان دائمی الکترونها به طرف سطح فلز هدایت می شود. البته احتمال

فراز برابر واحد نیست، اما به آسانی و به شرطی که در بخش ۱۰.۶ اشاره شد، قابل محاسبه است. بدین ترتیب، رابطه‌ای برای جریان گسیل از واحد سطح به صورت تابعی از دما می‌توان به دست آورد (رابطه ریچاردسون).

## ۲.۱۱ نوارهای انرژی در جامدات

در بخش ۲.۱۱ دربارهٔ دو حالت مولکول هیدروژن بحث کردیم، یکی مقید و دیگری نامقید. در حالت مقید تابع کل موج-اسپین پادمقارن (تک تابه) و تابع موج موقعیت متقارن است. در حالت نامقید (سه تابه) وضع به عکس است. در بحث حاضر نکتهٔ مهم این است که بین حالتها جدایی وجود دارد و این جدایی با نزدیک شدن آنها به هم افزایش می‌یابد. همین‌طور، اگر بیش از دو اتم مشابه از هر نوع را به هم نزدیک کنیم، حالت‌های الکترونیهای خارجی همپوشی خواهند شد و جدایی انرژی حاصل می‌شود. شکل ۱۲.۱۱ نشان می‌دهد که وقتی  $N$  اتم کربن به هم نزدیک می‌شوند، چه اتفاقی برای ترازهای انرژی رخ می‌دهد. در کربن، دو الکترون در پوستهٔ  $2p$  قرار دارند. برای کاستن جدایی  $3$  بین اتمهای مجاور، حالت‌های  $2p$  شروع به همپوشی می‌کنند، و نتیجه یک نواد انرژی با تعداد کل  $6N$  حالت است که از آنها  $2N$  حالت اشغال شده است. تابع موجهای  $6N$  حالت، کل نمونه را فرا می‌گیرند. برخی از اینها سرعت از یک اتم به اتم دیگر تغییر علامت می‌دهند. تابعهای دیگر برای تعداد زیادی از اتمهای مجاور، تقریباً همفازند. انرژی تابع موجهای

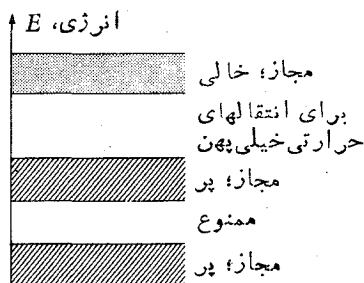


شکل ۱۲.۱۱ نوارهای انرژی در الماس. در فواصل کمتر از  $3 \text{ \AA}$ ، دو حالت از  $p$  با حالت‌های  $s$  پیوند می‌خورند و یک نوار یابینتر کاملاً اشغال شده را تشکیل می‌دهند. در فاصلهٔ تعادلی  $r_0$ ، شکاف تا نوار مجاور (اشغال نشده) بسیار بزرگ است.

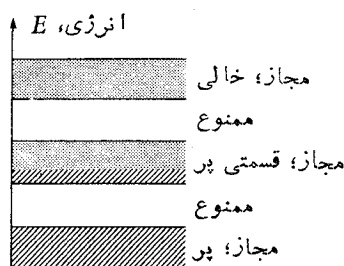
دسته اول، از انرژی مربوط به اتمهای آزاد بیشتر خواهد بود. برای دسته دوم، انرژی کمتر است. در صفر کلوین تعداد  $2N$  الکترون، یک سوم از پایینترین قسمت نوار را اشغال می کنند. در دماهای بالاتر، اشغال به وسیله توزیع احتمال فرمی تعیین می شود.

حالت های اتمی پایینتر نیز به نوارهایی تقسیم می شوند. جدایی حالت  $2S$  در مورد کربن در شکل ۱۲.۱۱ نشان داده شده است. تعداد کل ترازها در نمونه ای از  $N$  اتم برابر  $2N$  است، که  $2N$  الکترون  $2S$  را در خود جای می دهند. برای یک نوار کاملاً پر شده، تعداد الکترونهايي که داخل جسمى جامد در يك جهت حرکت می کنند درست برابر تعدادی است که در جهت مخالف حرکت می کنند. در يك نوار جزئی اشغال شده، تا آنجا که نیروهای اختلالی (میدان الکتريکی) نوازن را بهم نزنند، این موضوع درست است. خواص جامدات، به طوری که در زیر به تفصیل بحث می شود، بیشتر به وسیله بالاترین نوار اشغال شده تعیین می شود.

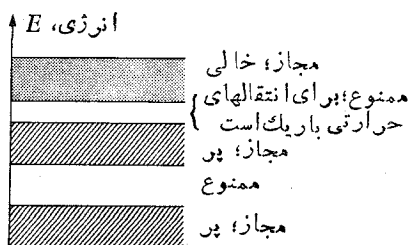
اگر بالاترین نوار اشغال شده فقط به طور جزئی اشغال شده باشد، مانند شکل ۱۳.۱۱ الف، ممکن است الکترونهاي این نوار برانگیخته شوند و از تراز پایتتر به تراز بالاتر بروند. جدایی ترازها در داخل نوار به اندازه ای جزئی است که الکترونها به آسانی



عایق (ب)



رسانا (الف)



نیمرسانا (ج)

شکل ۱۳.۱۱ نمودار نوارهای انرژی مربوط به (الف) رسانا، (ب) عایق و (ج) نیمرسانای ذاتی در صفر مطلق.



می‌توانند به کمک میدانهای الکتریکی ضعیف به انرژی بالاتر انتقال یابند. ماده‌ای با چنین ساختار نوار الکترونی، یک جسم رسانا است. تمام فلزات در این طبقه قرار می‌گیرند. بیشتر غیرفلزها عایق هستند. در عایقها، بالاترین نوار انرژی همیشه کاملاً اشغال شده است. اگرچه ممکن است تصور شود که چنین حالتی نادر است، اما در واقع معمولیترین حالت است. نه تنها نوار بالاتر، به طوری که در شکل ۱۳.۱۱ ب نشان داده شده، پراست بلکه شکاف انرژی تا نوار خالی بعدی نیز در مقیاس انرژی پهن است. از آنجا که جنبشهای حرارتی در دماهای معمولی قادر نخواهند بود که الکترونها را از نواری پر به نوار مجاز بالاتر انتقال دهند، الکترونها نمی‌توانند مقادیر کم انرژی مربوط به میدانهای الکتریکی یا جنبشهای حرارتی را جذب کنند. بنابراین، این الکترونها «ثابت» هستند، و ماده هم باید عایق حرارتی باشد و هم عایق الکتریکی. البته در میدان قوی الکتریکی، بعضی الکترونها ممکن است به نوار مجاز بالاتر کشیده شوند و در آنجا به عنوان رسانا عمل کنند. این همان شکست دی‌الکتريك است.

نیمرساناها، دسته سوم از مواد را تشکیل می‌دهند. تفاوت بین نیمرسانا و نارسانا در این است که شکاف بین نوار پر شده در صفر مطلق، که نواد ظرفیت خوانده می‌شود، و نوار مجاز بالاتر در نیمرسانا باریک است، مانند آنچه در شکل ۱۳.۱۱ ج نشان داده شده است. در این حالت انرژی حرارتی در دمای معمولی به اندازه‌ای است که می‌تواند بعضی از الکترونها را از نوار ظرفیت به نوار مجاز بالاتر، که نواد رسانش خوانده می‌شود، انتقال دهد. الکترونها در نوار رسانش آزاد هستند تا بار الکتریکی را انتقال دهند. در معادلات (۳۱.۱۱) تا (۳۴.۱۱)،  $n$  تعداد این الکترونها در واحد حجم است. برای نیمرسانا،  $n$  نسبت به دما به صورت نمایی افزایش می‌یابد. به آسانی می‌توان دید که اگر افزایش  $n$  نسبت به دما سریعتر از کاهش  $L$  باشد، در این صورت رسانندگی الکتریکی نیمرسانا بر حسب دما، به جای اینکه مانند رساناها کاهش یابد، افزایش خواهد یافت. زیرا تراکم الکترونها در نوار رسانش به وسیلهٔ دنبالهٔ توزیع فرمی تعیین می‌شود.

وقتی الکترونها از نوار ظرفیت به نوار رسانش انتقال می‌یابند، نوار ظرفیت دیگر پرنیست و بدین ترتیب، در داخل نوار ظرفیت حالتی خالی در اختیار الکترونهای ظرفیت قرار خواهند گرفت. در این صورت، الکترونهای ظرفیت می‌توانند مانند اتومبیلهای جادهٔ پر ازدحام پشت سرهم حرکت کنند. وقتی یک جا باز می‌شود، یک اتومبیل آن را پر می‌کند و پشت آن جای خالی به وجود می‌آید. این عمل بارها و بارها تکرار می‌شود، و نتیجهٔ آن به صورت حرکت اتومبیلها به سمت جلو خواهد بود، در حالی که فضای باز به سمت عقب حرکت می‌کند. در مورد الکتریسیته، با کندن شدن یک الکترون یک محل خالی ایجاد می‌شود که ناحیهٔ باردار مثبت است و حفره نامیده می‌شود. وقتی که الکترون مجاور به داخل حفرهٔ مثبت می‌رود، حفرهٔ مثبت دیگری بر جای آن باقی می‌ماند و این عمل ادامه می‌یابد. بنابراین انتقال خالصی از بار مثبت ایجاد می‌شود که مهاجرت حفره خوانده می‌شود. حفره‌ها کم تحرکتر از الکترونها هستند، و بنابراین جریان حفره معمولاً کمتر از جریان الکترون است. حفره‌ها و الکترونها را بر روی هم حاملها می‌نامند. بیسن حذف متقابل و

تولید حرارتی حفره‌ها و الکترونهای رسانش تعادلی دینامیکی وجود دارد.

درحالی که مواد اریخت جای خاصی در بحث مسا ندارد، با وجود این به کمک میله‌ای شیشه‌ای نمایشی جالب می‌توان انجام داد که در آن امکان تبدیل نارسانا به رسانی در دمای بالا تشریح می‌شود. اگر دو سیم رابط را با مقاومت مناسب به‌طور متوالی به دو انتهای ضخیم میله‌ای شیشه‌ای وصل کنیم، با اتصال آنها به پتانسیل ۱۱۰ ولتی معمولی، فقط جریانی فوق‌العاده ضعیف از میله شیشه‌ای می‌گذرد. اما با نزدیک کردن شعله چراغ بونسن به میله، گرمای آن به نقطه‌ای می‌رسد که میله رسانی می‌شود. اگر مشعل را دور کنیم، تنها حرارت حاصل از  $IR^2$  کفایت می‌کند که دمای شیشه حفظ شود و بدین ترتیب بالاخره شیشه به‌طور شدید درخشان می‌شود و شروع به ذوب شدن می‌کند.

در مسود نارسانای واقعی، معمولاً نواقص و ناخالصیهای شیمیایی به اندازه کافی در شبکه وجود دارند، و بدین ترتیب ترازهای رسانش بینایی اضافی در دسترس خواهند بود. مطمئناً می‌شود انتظار داشت که جامداتی مانند شیشه با آرایشهای نامنظم خود، نواحی رسانی جایگزیده زیادی در اختیار داشته باشند. و در نتیجه رفتاری به شرح بالا از خود نشان دهند.

با بررسی مفصل ساختار شناخته شده بلوری جامدات مختلف، به اضافه مطالعه ساختار الکترونی تک تک اتمهای جسم جامد، تقریباً بخوبی می‌توانیم ساختار نواری مواد مختلف را پیش بینی کنیم و از آنجا آرایش ویژه اجسام نارسانا، رسانی یا نیم رسانی را دریابیم. حال به آسانی می‌توان فهمید که چرا الکترونها در جامد سهم اندکی در جذب انرژی حرارتی (گرمای ویژه) دارند. در جسم عایق، الکترونها هرگز مجاز نیستند که مقادیر کم انرژی را جذب کنند. در جسم رسانی، فقط تعداد نسبتاً کمی از الکترونها در رأس توزیع نزدیک به تراز فرمی می‌توانند انرژی جذب کنند و این کار را می‌کنند. این الکترونها واقعاً در گرمای ویژه جسم جامد سهم دارند، اما از آنجا که تعدادشان خیلی کم است، تأثیرشان هم جزئی است.

حال می‌توانیم نسبتاً صحیحتری از مقاومت ویژه الکتریکی، معادله (۳۳.۱۱)، که از طریق محاسبات کلاسیک به دست آمده است ارائه دهیم. این رابطه اساساً صحیح است، جز اینکه باید معانی پارامترهای  $n$ ،  $T$  و  $L$  را تغییر دهیم. الکترونهایی که می‌توانند تغییر حالت دهند، و در نتیجه توازن جریانهایی عبوری در دو جهت مخالف را برهم زنند، فقط آنهایی هستند که در رأس توزیع نزدیک به تراز فرمی قرار دارند. بنا بر این،  $n$  خیلی کوچکتر از مقداری است که قبلاً فرض می‌شد. این الکترونها با سرعتهایی عملاً مستقل از دما (انرژی جنبشی حدود ۷ الکترون ولت) حرکت می‌کنند. بنا بر این  $T$  در معادله (۳۳.۱۱) یک «دمای» مصنوعی ثابت و بالا است. بالاخره مرکز پراکنندگی برای این الکترونها یک اتمها نیست، بلکه بی نظمیهای ساختار اتمی و اغلب نوسانات حرارتی است. تعداد بی نظمیها بر حسب دما افزایش می‌یابد، به نحوی که در فلزات  $L$  به‌طور تقریبی متناسب با عکس دمای مطلق واقعی  $T$  است. با این اصلاحات، معادله (۳۳.۱۱) با نتایج مشاهدات سازگاری دارد.

این بخش را با بحث خلاصه‌ای دربارهٔ اختلاف بین اجسام رسانا، نارسانا، و نیمرسانا خاتمه می‌دهیم. رسانا جسمی است که دارای تعداد بسیار زیادی حاملهای جریان است، تعدادی که مستقل از دماست. جسم نارسانا در دمای معمولی دارای تعداد کمی حاملهای جریان است. جسم نیمرسانا در دمای پایین دارای تعداد نسبتاً کمی از حاملهای جریان، ولی در دمای بالاتر دارای حاملهای نسبتاً زیاد است. برای نیمرسانا بستگی واقعی مقاومت با دما در نتیجهٔ دو اثر متضاد است. اول افزایش در پراکندگی موج الکترون بر حسب دما که سعی در از بین بردن رسانندگی دارد. این امر سعی دارد اثر دوم را، که مربوط به افزایش تعداد حاملها می‌شود، خنثی کند. در دمای معمولی، تابع مقاومت بر حسب دمای نیمرسانا ممکن است دارای شیب منفی یا مثبت باشد.

### ۸.۱۱ نیمرساناهای ناخالصی

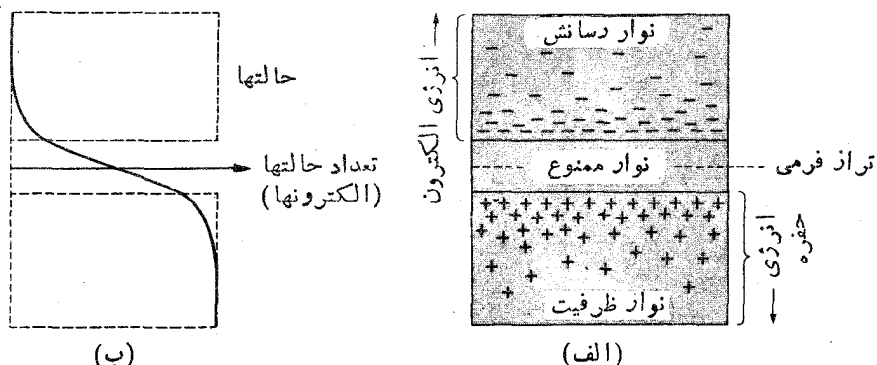
مشخصات نیمرسانای خالص، که نیمرسانای ذاتی خوانده می‌شود، را می‌توان با اضافه کردن مقادیری بسیار جزئی ناخالصی به طرق بسیار مهم تغییر داد. نیمرساناهای ذاتی که به آنها ناخالصی افزوده می‌شود را آلاینده می‌نامند. نیمرسانای ذاتی ژرمانیوم که با آنتیموان آلاینده شده است را در نظر می‌گیریم. هر اتم ژرمانیوم دارای چهار الکترون ظرفیت است، و بنابراین هر اتم ژرمانیوم با چهار اتم مجاور دارای اتصال است. اتمهای آنتیموان که هر یک پنج الکترون ظرفیت دارند، با سهیم کردن چهار الکترون در اتمهای مجاور با این ساختار هماهنگ می‌شوند. الکترون پنجم در این ساختار اضافی است و بنابراین با اتم آنتیموان اتصال سستی دارد. از آنجا که انرژی حرارتی کافی است تا باعث شود بعضی از الکترونهای ژرمانیوم پیوندهای ظرفیت را ترک کرده و به نوار رسانش جهش کنند، به آسانی دیده می‌شود که پنجمین الکترون آنتیموان حتی آسانتر برانگیخته می‌شود و به نوار رسانش می‌رود. بنا بر این عملاً هر اتم آنتیموان که وارد شبکهٔ ژرمانیوم می‌شود، بدون ایجاد حفرهٔ مثبت الکترون رسانش به وجود می‌آورد، البته، هر اتم آنتیموان به صورت یک یون مثبت درمی‌آید، اما این یون به ساختار شبکه محکم شده است به نحوی که نمی‌تواند به رسانش کمکی کند. لذا اضافه بر الکترونها و حفره‌هایی که به طور ذاتی در ژرمانیوم وجود دارند، افزودن به آنتیموان نیز به طور گسترده‌ای تعداد الکترونهای رسانش را افزایش می‌دهد. در این حالت آنتیموان را ناخالصی دهنده نامند و این امر، ژرمانیوم را به نیمرسانای نوع  $n$  (منظور از  $n$ ، منفی است) تبدیل می‌کند.

از طرف دیگر، گالیوم دارای سه الکترون ظرفیت است. اگر گالیوم به ژرمانیوم افزوده شود، فقط سه تا از چهار الکترون لازم برای گنجیدن در شبکهٔ ژرمانیوم تأمین می‌شود. از آنجا که انرژی حرارتی کافی است تا بعضی از الکترونهای پیوندی ژرمانیوم را به نوار رسانش انتقال دهد، به آسانی می‌توان دید که برانگیزش حرارتی کافی است تا باعث شود که الکترونهای ظرفیت ژرمانیوم، بدون ترک کردن نوار ظرفیت، خود را به گالیوم بچسبانند و ساختار شبکه را کامل کنند. این باعث می‌شود که گالیوم به صورت یون منفی ثابت درآید،

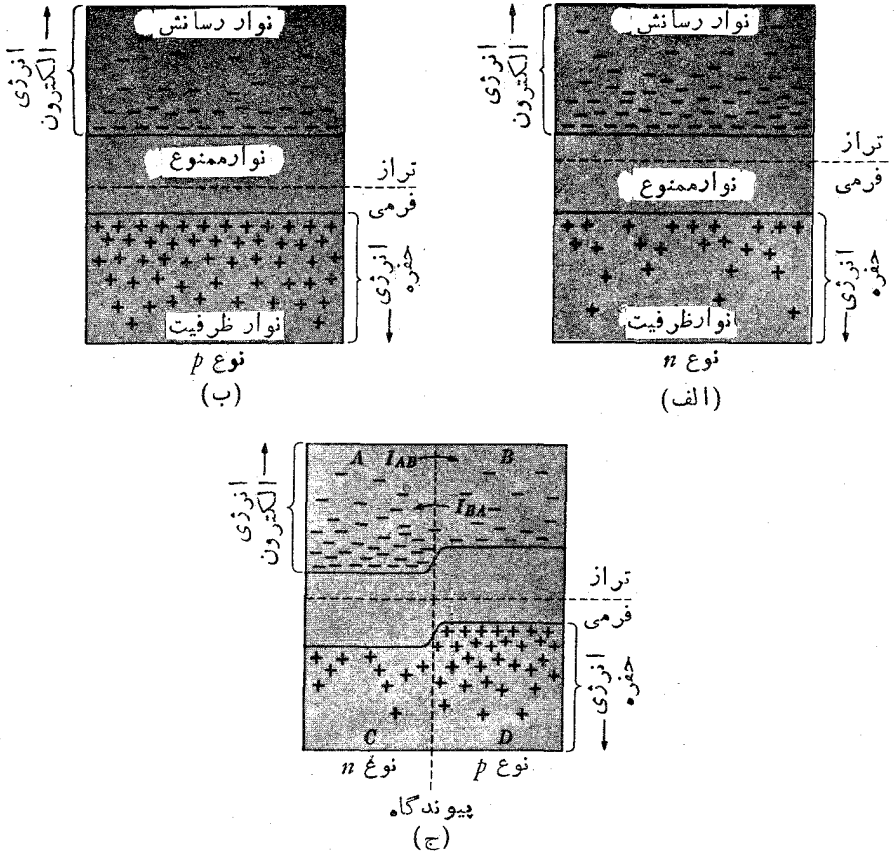
و حفرهٔ الکترونی در نوار ظرفیت ایجاد شود. لذا گالیوم یک پذیرنده است که در دمای معمولی باعث می‌شود به تعداد اتمهای ناخالصی گالیوم، حفرهٔ مثبت به وجود آید. پذیرندهٔ گالیوم، ژرمانیوم را به نیمرسانای نوع  $p$  تبدیل می‌کند (منظور از  $p$ ، مثبت است). تراز فرمی برای نیمرسانای ذاتی تقریباً در وسط فاصلهٔ انرژی بین نوارهای ظرفیت و رسانش قرار دارد. شکل ۱۴.۱۱ الف به‌طور نمایی توزیع الکترونها را در نوار رسانش، و حفره‌ها را در نوار ظرفیت نشان می‌دهد. شکل ۱۴.۱۱ ب تابع فرمی و توزیع الکترونها را ناشی از آن را در دو نوار، با فرض اینکه توزیع حالت‌های الکترون در هر دو یکنواخت است، نشان می‌دهد.

شکل ۱۵.۱۱ الف تجمع الکترونها و حفره‌ها را در نیمرسانایی از نوع  $n$  نشان می‌دهد. از آنجا که تعداد الکترونها بیش از تعداد حفره‌هاست، تراز فرمی بالاتر از وسط شکاف انرژی قرار می‌گیرد. یادآور می‌شود که در این ترسیم فقط حاملهای متحرک بار الکتریکی نشان داده شده‌اند. حقیقت اینکه تعداد حاملهای بار منفی بیش از حاملهای بار مثبت است، بدان معنی نیست که نیمرسانا دارای بار خالص منفی است. اتمهای دهنده مثبت، ولی غیر متحرک هستند. کل بار مثبت اتمهای دهنده معمولاً بار خالص منفی حاملها را خنثی می‌کند.

شکل ۱۵.۱۱ ب وضعیت را در نیمرسانای نوع  $p$  نشان می‌دهد، و شکل ۱۵.۱۱ ج پیوندگاه بین نیمرساناهای نوع  $n$  و نوع  $p$  را نشان می‌دهد. چنین پیوندگاهی را می‌توان با انتخاب نیمرسانای نوع  $p$  و وارد کردن اتمهای دهنده از سمت چپ به داخل بلور ساخت. وقتی دو انتهای بلور به چشمهٔ خارجی الکتریسته اتصال ندارند، ترازهای فرمی دو قسمت روی هم قرار خواهند گرفت. اگر دمای بلور صفر مطلق باشد، این مطلب به آسانی درک می‌شود. الکترونها در تراز فرمی متحرک‌اند، و اگر این تراز در یک قسمت بالاتر از قسمت دیگر باشد، بعضی الکترونها به حالت‌های پایینتر نیمهٔ دیگر حرکت خواهند کرد. جا به‌جایی جزئی باعث به تعادل رسیدن ترازهای فرمی می‌شود. در دمای بالاتر، دو منحنی توزیع فرمی مثل هم می‌شوند و در اینجا بار دیگر بیان بالا امصادق پیدا می‌کند. اگر



شکل ۱۴.۱۱ نمودار تراز انرژی نیمرسانای ذاتی در دمای معمولی.



شکل ۱۵-۱۱ نمودار تراز انرژی نیمرساناهای ناخالص، (الف) نوع  $n$  همزوی، (ب) نوع  $p$  همزوی، و (ج) بیوندگاه  $p-n$ .

بلور درمداری بگذارند، یعنی اگر یکی از دو نوع  $p$  و  $n$  را در پتانسیلی متفاوت از دیگری نگاه دارند، در آن صورت ناپیوستگی در ترازهای فرمی برابر با این اختلاف پتانسیل می‌شود. این حقایق مسا را در تشریح کار یکسوسازها و ترانزیستورهای نیمرسانا کمک می‌کند.

## ۹-۱۱ دیودهای نیمرسانا

دیودها وسایلی الکتریکی هستند که جریان الکتریکی را از یک جهت خیلی آسانتر از جهت دیگر عبور می‌دهند. این دیودها در تبدیل جریانهای متناوب به مستقیم و مقاصد دیگر

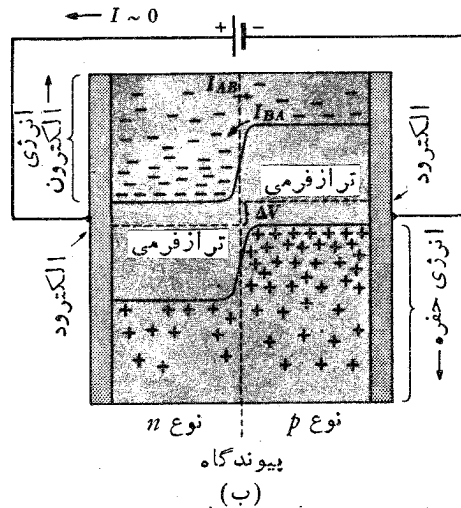
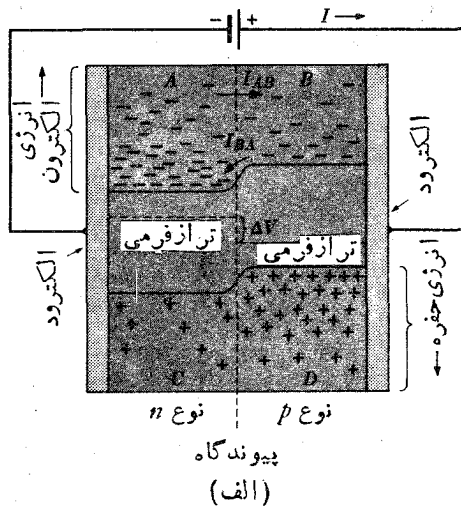
الکترونیکی به کار می‌روند. می‌خواهیم نشان دهیم که چرا پیوندگاه بین نیمرساناهای نوع  $p$  و نوع  $n$  دارای خاصیت یکسوسازی است.

ساز و کار اصلی رسانش در نیمرساناها، پخش است. جریان پخش متناسب با تغییر تراکم در واحد طول، یا گرادیان تراکم، است. جریان پخش در هر لایه برابر است با حاصلضرب یک کمیت ثابت در گرادیان تراکم، و این ثابت تناسب ضریب پخش نامیده می‌شود.

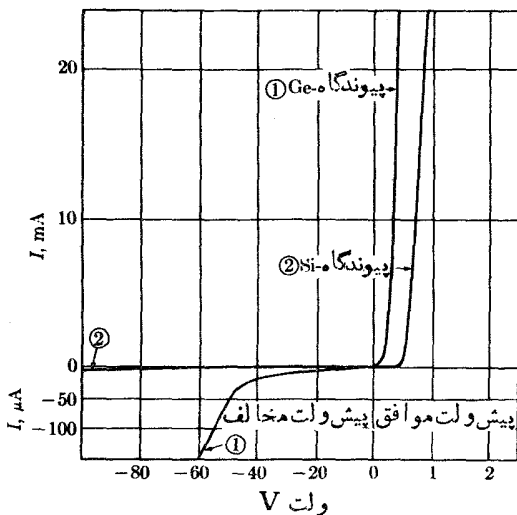
الکترونها و حفره‌ها هر دو در اثر پخش حرارتی در نیمرسانا به اطراف حرکت می‌کنند، لکن ما توجه خود را بر الکترونها معطوف می‌کنیم که بیش از حفره‌ها متحرک‌اند. اگر به شکل ۱۵.۱۱ ج رجوع کنیم، می‌بینیم بین نواحی  $A$  و  $B$  دو جریان الکترون وجود دارد. جریان به سمت راست  $I_{AB}$ ، ناشی از این واقعیت که ناحیه  $A$  از نوع  $n$  است در حالی که ناحیه  $B$  از نوع  $p$  است. تراکم الکترونها در رسانش در  $A$  خیلی بیشتر است و آنها، با وجود اینکه تراز زیرین نوار رسانش در  $B$  از  $A$  بالاتر است، به انرژیهای بالاتر هم گسترش می‌یابند. بزرگی مقدار این جریان نسبت به تراکم الکترونها در بالای نوارهای رسانش حساسیت دارد. جریان به طرف چپ  $I_{BA}$  مربوط به الکترونها در ناحیه پیوندگاه و تراز زیرین نوار رسانش  $B$  است که از «تپه» پتانسیل به داخل ناحیه  $A$  «فرو می‌ریزند» این جریان، جریان اشباع خوانده می‌شود، زیرا مقدار آن بستگی به تراکم الکترونها در رسانش در ناحیه  $B$  و بستگی به آهنگ کندی دارد که الکترونها با آن می‌توانند به سمت پیوندگاه پخش شوند. جریان اشباع خیلی کم است زیرا تراکم الکترونها در  $B$ ، یعنی ناحیه نوع  $p$ ، کوچک است. جریان اشباع بستگی به بلندی «تپه» پتانسیل ندارد. در وضعیت تصویر شده، به دلیل ضرورت کم بودن جریان اشباع و تعادل جریانها، این دو جریان متضاد الکترون هر دو کوچک و برابرند. تبادل حفره‌های مثبت توضیح مشابهی دارد.

اگر به سمت راست و چپ بسور الکترونها وصل شوند و به این الکترونها پتانسیلهای متفاوت وصل شود، وضعیت تعادل تشریح شده برهم می‌خورد. شکل ۱۶.۱۱ الف وضعیتی که در آن انتهای نوع  $n$  منفی و انتهای نوع  $p$  مثبت شود را نشان می‌دهد. این عمل پیش‌ولت دادن در راستای موافق نامیده می‌شود. این پیش‌ولت، ارتفاع نوار را افزایش می‌دهد و در نتیجه انرژی الکترونها در  $A$  نسبت به  $B$  افزایش می‌یابد. جریان اشباع الکترون  $I_{BA}$  همان مقدار قبلی را دارد. اما حال الکترونها پر انرژیتر در  $A$  به آسانی می‌توانند برسد پیوندگاه غلبه کنند، و جریان خالص الکترونی به طور قابل توجهی به سمت راست متمایل است. البته، انتقال الکترونها به طرف راست و حفره‌ها به طرف چپ، ایجاد جریانی متداول به طرف چپ می‌کند.

اگر وضعیت پیش‌ولت موافق درک شده باشد، دیگر نیازی به تشریح پیش‌ولت مخالف نشان داده شده در شکل ۱۶.۱۱ ب نیست. این حقیقت روشن است که جریان معکوس کوچک و مستقل از پتانسیل معکوس است، زیرا فقط از جریان اشباع تشکیل می‌شود. مشخصه‌های دو نوع پیوندگاه یکسوساز  $n-p$  در شکل ۱۷.۱۱ نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۶.۱۱ نمودار تراز انرژی پیوندگاههای نیمرسانا،  
(الف) با پیش ولت موافق  $\Delta V$ ، (ب) با پیش ولت مخالف  $\Delta V$ .



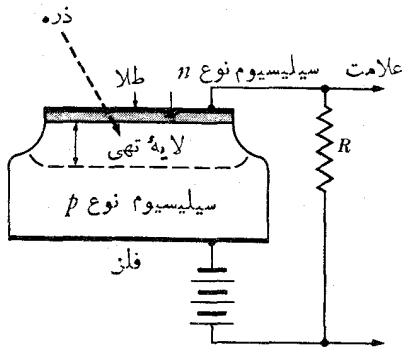
شکل ۱۷.۱۱ مشخصه‌های I بر حسب V در دیودهای نمونه.

### ۱۰.۱۱ آشکارسازهای نیمرسانا

همان‌طوری که اشاره کرده‌ایم، انرژی لازم برای تولید حفره‌ها و الکترونهای رسانش می‌تواند از انرژی حرارتی تأمین شود. روش دیگر تأمین این انرژی ممکن است از تابش یوننده نظیر پرتو ایکس یا ذرات باردار باشد. الکترون آزاد شده در جسم جامد به صورت الکترون رسانش درمی‌آید، و متقابلاً در اتم منبع حفره رسانش به جا می‌ماند. اگر نیمرسانا در میدانی الکتریکی قرار گیرد، الکترونها و حفره‌ها می‌توانند مهاجرت کنند و یک جریان قابل اندازه‌گیری به وجود آورند. این عملکرد مواد نیمرسانا شباهت نزدیکی به عملکرد گساز در اتاقک یونش دارد. اما، از آنجا که تراکم آنها در آشکارساز نوع نیمرسانای تابش خیلی بیش از تراکم آنها در گاز است، لذا آشکارساز نیمرسانا می‌تواند بسیار کوچکتر از اتاقک یونش باشد.

برای اینکه جریان در آشکارساز وقتی که تابشی به آن نمی‌رسد، حداقل باشد، معمولاً دیودی با پیش‌ولت مخالف به کار می‌رود. شکل ۱۸.۱۱ تصویری نمایشی از پیوندگاه pn را، که به عنوان آشکارساز ذره به کار می‌رود، نشان می‌دهد. ماده اساسی رسانای سیلیسیوم نوع p، یعنی سیلیسیومی با ناخالصی از نوع پذیرنده است که حاملهای بار مثبت تولید می‌کند. از سطح سیلیسیوم نوع p یک ناخالصی از نوع n (نوع دهنده) به داخل ماده وارد می‌شود، و بدین ترتیب لایه‌ای نازک از سیلیسیوم نوع n در سطح ایجاد می‌شود. پوشش بسیار نازکی از طلا، به کمک روش تبخیر، روی این لایه به وجود می‌آورند تا تماس با آن میسر شود و ذرات قابل سنجش نیز بتوانند از آن عبور کنند. اعمال یک پیش-ولت مثبت (مخالف) به این پوشش نازک، تماس حاملهای بار مثبت را از پیوندگاه بدور





شکل ۱۸.۱۱ يك آشكارساز پیوند  $p-n$ . عمل شبیه يك اتاقك یونش گازی است.

می راند و يك لایه تهی به وجود می آورد که در شکل نشان داده شده است. بار فضایی منفی لایه تهی میدانی الکتریکی به وجود می آورد و افت پتانسیلی متناظر با این پیش ولت نیز ایجاد می شود. هر چه مقدار پیش ولت بیشتر باشد، لایه تهی عمیقتر خواهد بود، و حد این ولتاژ از شکست الکتریکی نیم رسانا تعیین می شود. ذره ای یوننده ضمن عبور از پوشش نازک طلا و در داخل لایه تهی حاملهای بار مثبت و منفی ایجاد می کند که با اعمال میدان به سمتی رانده می شوند، و به صورت تپ و ولتاژ در مقاومت  $R$  ظاهر می شوند.

تعداد زوجهای حامل بار به وجود آمده در ماده نیم رسانا تقریباً ۱۵ برابر تعداد جفت یونهایی است که در اتاقك یونش گازی به وجود می آید، یعنی مقدار انرژی مصرف شده برای هر زوج به جای  $3\text{ eV}$  حدود ۳ الکترون است. بنا بر این، با فرض اینکه مدارها تقریباً دارای ظرفیتهای یکسان باشند، تپ و ولتاژ ده برابر خواهد شد. بزرگترین اهمیت این ضریب ده در تعداد  $N$  زوج در این حقیقت نهفته است که افت و خیز آماری نسبی در تپهای ولتاژ برابر  $\sqrt{N}/N$  است، و بنا بر این افت و خیز نسبی در شمارگر حالت جامد حدود  $\sqrt{10}$  مرتبه کمتر است. از اینجا نتیجه می شود که قدرت تفکیک ذاتی شمارگری حالت جامد که به صورت طیف سنج برای تعیین انرژی ذره به کار می رود، تقریباً سه برابر بهتر از قدرت تفکیک اتاقك یونی است.

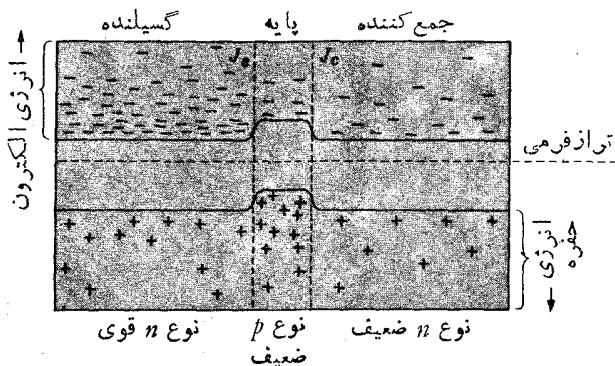
وقتی آشکارساز حالت جامد به صورت طیف سنج به کار می رود، باید دارای لایه تهی به اندازه کافی عمیق و یا به اندازه کافی یهن باشد تا اینکه ذره بتواند در داخل این لایه به توقف کامل برسد. این موضوع در ابتدا استفاده از طیف سنج حالت جامد را برای ذرات آلفا یا پروتونها کم انرژی یا دوترون محدود می کند. اما، روشهای ایجاد حجمهای تهی بزرگتر و بزرگتر سرعت در پیشرفت است. هم اکنون طیف سنج حالت جامد به طور گسترده ای برای ذرات با بلند برد تمثلاً الکترونها با گستره انرژی حدود میلیون الکترون-ولت و، به طوری که در زیر شرح داده خواهد شد، برای پروتوگاما و پروتو ایکس به کار برده می شود.

در آشکارسازهای حالت جامد برای ذرات باردار، بیشتر از همه از سیلیسیم استفاده شده است، زیرا رسانندگی ذاتی آن کم است. این بدان معنی است که آشکارساز می تواند بدون جریان نشتی اضافی در دمای معمولی به کار رود. آشکارساز سیلیسیم به عنوان آشکارساز پرتوگاما خیلی مناسب نیست، زیرا حجم نسبتاً کوچک و پایین بودن  $Z$  در آن موجب می شود که بازده شمارش خیلی کم باشد. ژرمانیوم در این مورد بسیار بهتر است، زیرا عدد اتمی آن بالاتر است و از طرف دیگر، فاصله بین نوار ظرفیت و نوار رسانش آن کم است و بنابراین رسانندگی ذاتی آن بالاتر است. اگر آشکارساز در دمای معمولی نگاه داشته شود، این امر مانع برقراری لایه تهی ضخیم می شود. ولی، با خنک کردن ژرمانیوم به کمک ازت مایع، این مانع می تواند از میان برداشته شود. برای کاهش رسانندگی ناشی از ناخالصیها، روشهایی ابداع شده است که تهیه لایه های تهی با ضخامت یک سانتیمتر عملی ساخته است.

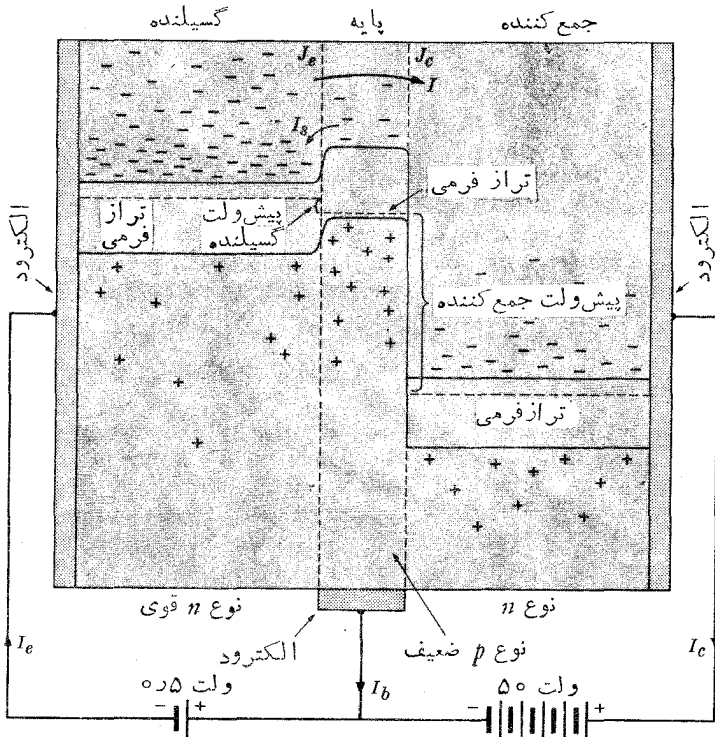
### ۱۱.۱۱ ترانزیستورها

در بخش ۹.۱۱ درباره یکسوسازهای دیودی از آن رو نسبتاً به تفصیل بحث کردیم که تمام مفاهیم آن در تشریح وسیله دیگری به نام ترانزیستور دارای اهمیت اند. ترانزیستور می تواند جریان الکتریکی کم را به جریان الکتریکی زیاد تبدیل، یعنی آن را تقویت کند. در اینجا، ترانزیستوری پیوندی را در نظر می گیریم، و آن در مواردی به کار می رود که بخواهند با قدرت کم مقدار قدرت نسبتاً بزرگی را کنترل کنند.

نموداری از تراز انرژی ترانزیستور پیوندی  $n-p-n$  منزوی در شکل ۱۹.۱۱ نشان داده شده است. مقایسه شکل ۱۹.۱۱ با اشکال قبلی نشان می دهد که  $n-p-n$  می تواند به صورت دو یکسوساز پشت به پشت در نظر گرفته شود. ترانزیستور  $n-p-n$  وقتی که مطابق شکل ۲۰.۱۱ دارای پیش ولت باشد، و وقتی که ناحیه نوع  $n$  سمت چپ که گسیلنده نامیده می شود آن چنان شدیداً آلوده شود که دارای تعداد زیادی الکترونهای رسانشی شود،



شکل ۱۹.۱۱ نمودار تراز انرژی ترانزیستور  $(n-p-n)$  منزوی.



شکل ۲۰.۱۱ نمودار تراز انرژی تراز یستور n-p-n دارای پیش ولت. (پیکانها جهت جریان الکترونها را نشان می دهند.)

ممکن است به عنوان تقویت کننده عمل کند. ناحیه مرکزی نوع  $p$  پایه خواننده می شود و پیوندگاه بین این دو ناحیه،  $J_e$ ، دارای پیش ولت موافق کوچکی در حدود چند دهم ولت است. با در نظر گرفتن این پیوندگاه به صورت یکسوساز نتیجه می شود که مقاومت گسیلنده به پایه کوچک و جریان الکترون زیاد خواهد بود.

ناحیه سمت راست، جمع کننده نامیده می شود. این ناحیه از نوع  $n$  ساخته شده و پیوندگاه بین پایه و جمع کننده،  $J_c$ ، دارای پیش ولت مخالف قوی، در حدود ۵۰ ولت، است. با در نظر گرفتن آن به صورت یکسوساز نتیجه می گیریم که مقاومت بین پایه تا جمع کننده زیاد است و جریان الکترون کوچک خواهد بود.

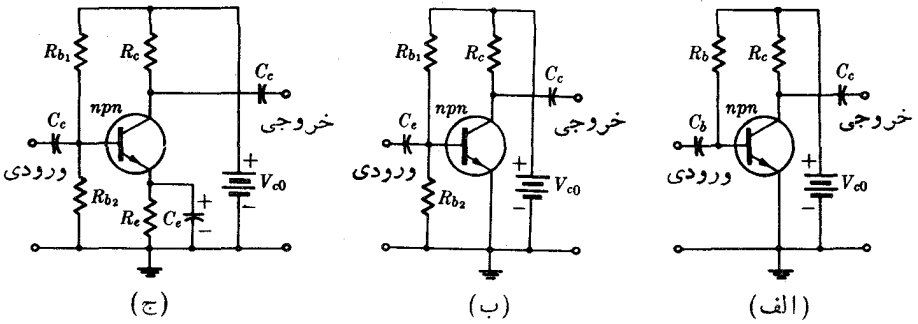
ملاحظات بعدی ما را در جهت تغییر آنچه می توان از عملکرد یکسوساز پیش بینی کرد، راهنمایی می کنند. موضوع تازه اساسی این است که ناحیه پایه خیلی نازک، یعنی حدود یک چهلم میلی متر است. این فاصله در مقایسه با فاصله متوسط حرکت الکترونها، قبل از ترکیب مجدد با حفره ها، کوچک است. تقریباً تمام الکترونها می که از گسیلنده خارج و وارد پایه می شوند، مستقیماً از پایه عبور می کنند و وارد جمع کننده می شوند. نازکی

پایه منجر به «جریان اشباع» مصنوعاً افزایش یافته  $I$  در جمع کننده می شود. الکترونها پس از نفوذ به پیوندگاه جمع کننده، «روی دیوار» هستند و نمی توانند برگشت کنند و درون پایه پخش شوند. از آنجا که تعداد الکترونها یی که در حرکت از گسیلنده به جمع کننده به داخل پایه نفوذ می کنند، تقریباً تمام الکترونها ی جریان قابل توجه گسیلنده را شامل می شود، جریان در جمع کننده  $I_e$  نیز بزرگ است. در حقیقت، جریان جمع کننده به مقدار بسیار اندک جریان پایه از جریان گسیلنده کمتر است. چون این نتیجه با آنچه با در نظر گرفتن ترازیستور به عنوان دویکسوساز پشت به پشت استنباط می شد خیلی متفاوت است، حال آنچه رخ می دهد را با تفصیل بیشتری بررسی می کنیم.

پیش و ات به کاررفته بیشتر در محل پیوندگاه ظاهر می شود، زیرا هر ناحیه از ترازیستور رسانای نسبتاً خوب است. دور از پیوندگاه، نیروهای مهمتر وارد بر الکترونها و حفره ها مربوط به جنبش حرارتی است. وقتی که الکترونها ی ناشی از الکتروده گسیلنده وارد می شوند، در سمت چپ این ناحیه الکترونها ی اضافی تولید می شوند. تراکم این الکترونها دو اثر دارد. اول، تعادل بین الکترونها و حفره ها، که مرتباً به علت جاذبه الکتروستاتیکی با هم ترکیب و به علت جنبش حرارتی مجدداً تشکیل می شوند، برهم می خورد. الکترونها ی اضافی عمل ترکیب مجدداً را افزایش می دهند، که موجب کاهش تعداد حاملهای مفید در ناحیه گسیلنده می شود. اما، این اثر کوچک است، زیرا این ناحیه ماده ای از نوع  $n$  است که به مقداری زیاد ناخالصی دارد و در هر حال حفره های مثبت زیادی هرگز در آن وجود ندارد. اثر دوم الکترونها ی افزوده شده، برقراری گرادیان تراکم الکترون است. این گرادیان باعث می شود که الکترونها به سمت پایه پخش شوند.

وقتی این الکترونها به پیوندگاه گسیلنده می رسند، به داخل پایه «گسیل» می شوند. قبلاً دیده ایم که توزیع انرژی الکترونها در ماده نوع  $n$  به اندازه کافی بالاست که الکترونها می توانند از سد پیوندگاه  $n-p$ ، که تا حدودی (یعنی به مقدار پیش و ات گسیلنده) کاهش یافته است، صعود کنند. اگر پایه ضعیف باشد، بیشتر این الکترونها یا به الکتروده پایه مهاجرت می کنند یا با حفره های پایه نوع  $p$  ترکیب می شوند. چنین عمل نامطلوبی را می توان به دو طریق به حداقل رساند. اول، پایه را یک ماده نوع  $p$  ضعیف می گیرند، که در این صورت تعداد حفره های مثبت زیاد نخواهد بود. دوم، پایه را خیلی نازک می سازند، به طوری که احتمال برخورد الکترون گسیلنده با حفره موجود در پایه خیلی کوچک می شود. به محض اینکه این الکترونها در جمع کننده «انبار» شدند، بر خوردهایی انجام می دهند که انرژی جنبشی اغلب آنها را به کمتر از سد پتانسیل نسبتاً بالای پیش و ات جمع کننده می رساند، و بدین ترتیب تعداد کمی از آنها به داخل گسیلنده باز می گردند و در آن پخش می شوند. بنابراین جریان در الکتروده پایه ای از نوع  $p$  که نازک و ضعیف باشد، پایین نگه داشته می شود. این بحث دوم درباره عملکرد ترازیستور منجر به همان نتیجه می شود: تقریباً تمام جریان ورودی به ترازیستور در ناحیه کم مقاومت گسیلنده، پس از کمی اتلاف در الکتروده پایه، بالاخره از ناحیه پر مقاومت جمع کننده ظاهر می شود.

ترازیستور اساساً یک تقویت کننده جریان است. تغییری کوچک در جریان پایه، تغییر



شکل ۲۱.۱۱ تقویت کننده‌های ترانزیستوری. روشهای مختلف تولید پیش‌ولت گسیلنده-پایه نشان داده شده‌اند. (الف) مقاومت سری. (ب) تقسیم کننده ولتاژ. (ج) مدار پیش‌ولت پایدار شده.

بسیار بزرگی را در جریان گسیلنده باعث می‌شود. شکل ۲۱.۱۱ مدار تقویت کننده جریان متناوب را نشان می‌دهد که گسیلنده آن به زمین وصل است و از ترانزیستور *nnp* استفاده شده است. ترانزیستور *pnp* باید دارای منبع تغذیه معکوس باشد. یک منبع تغذیه کوچک جریان متناوب در ورودی تغییراتی در جریان پایه به وجود می‌آورد. این امر، تغییرات بسیار بزرگتری در جریان جمع کننده  $I_c$  به وجود می‌آورد. قسمتی از این جریان متناوب از طریق  $C_c$  به بار خروجی می‌رود. کسر دیگری از آن از طریق  $R_c$  جریان پیدا می‌کند. تولید ولتاژ با نوسانات بزرگ هم در خروجی امکان پذیر است که به پایگیری کل حاصل از  $R_c$  و بار خروجی بستگی دارد. در نتیجه، ترانزیستور به دو صورت تقویت کننده جریان و ولتاژ عمل می‌کند. مانند مورد لامپهای خلا، تقویت ولتاژ از آن رو امکان دارد که جریان جمع کننده بستگی قوی به ولتاژ جمع کننده ندارد.

ترانزیستورها را می‌توان مانند نوسان کننده‌ها، کلیدها، واحدهای حافظه و غیره در مدارها به کار برد و اغلب همان اعمالی را انجام می‌دهند که لامپهای خلا قبلاً انجام می‌دادند. مزایای اصلی مدارهای ترانزیستوری در مقایسه با مدارهای لامپ خلا عبارتند از یکپارچگی، اطمینان، استحکام و طول عمر «بینهایت» و مصرف کم قدرت که موجب انقلابی اساسی در کامپیوترها و مدارهای کنترل الکترونیکی شده‌اند.

## ۱۲.۱۱ خواص دیگر جامدات

خواص نوری. جالب است یاد آور شویم که همان تشریح مکانیک کوانتومی خواص الکتریکی جامدات را می‌توان برای درک خواص نوری آنها نیز به کار برد. بویژه، وقتی باریکه‌ای از نور حاوی فوتونهای کم انرژی به فلزی که در آن الکترونهای زیادی در نوار رسانش وجود دارند و ترازهای انرژی بسالای آنها خالی است برخورد می‌کند، نور جذب خواهد شد. بنابراین چنین انتظار می‌رود که رسانای خوب در مقابل نور مرئی کدر

باشد که به‌طور تجربی نیز ثابت شده است. از طرف دیگر، از آنجا که این فوتونهای کم انرژی نمی‌توانند الکترونها را از نوار پر شده جسم عایق برانگیزند و به‌نوار بعدی پر نشده انتقال دهند، لذا نور باید بدون جذب از آن عبور کند. پس، به‌طور کلی، عایقهای خوب نسبت به‌نور مرئی شفاف نیز هستند. به‌طور تجربی دریافته‌ایم که با کوتاه شدن طول-موج پرتوالکترومغناطیس به‌سمت نور فرابنفش، این اجسام شفاف بشدت جاذب می‌شوند. این آن چیزی است که می‌توان در مورد آن دسته عایقها که در آنها شکاف انرژی در ناحیهٔ ممنوعه، درست متناظر با انرژی فوتونهای فرابنفش است، انتظار داشت. چون نواحی ممنوعهٔ لیمرساناها در دمای معمولی خیلی باریک است، نیمرساناها، نسبت به‌نور مرئی کدر و لکن نسبت به‌فروسرخ شفاف هستند.

**دورفتگیها.** درحالی که ممکن است به‌کمک روشهای بالا به‌درک خوبی از خواص حرارتی، الکتریکی، و نوری جامدات برسیم، درعین حال باید از این حقیقت آگاه بود که جامدات واقعی در آرایش اتمی خود به‌طور کامل منظم نیستند. حتی بلوری که خیلی بدقت رشد داده شده است نیز نواقصی در ساختار خود دارد. در طی چند سال گذشته به‌طور فزاینده‌ای آشکار شده است که نواقص، نقش حیاتی در عملکرد جامدات دارند. بویژه، مدت‌ها بود که می‌دانستند که قدرت شکست نظری جسم جامد حدود ۱۰۰۰ برابر حداکثر قدرت شکستی است که در عمل به‌دست می‌آید. به‌طور مشابه، مهندسين طراحی آگاه بودند که مادهٔ تحت تنش مدام، به‌طور پلاستیکی تغییر شکل می‌دهد. یعنی حتی وقتی که تنش کل خیلی کمتر از حد الاستیک فلز حفظ می‌شود، ماده جریان پیدا می‌کند. حال این پدیده، که خزش خوانده می‌شود، را تنها بر اساس نظریهٔ جدید جامدات می‌توان درک کرد. خواص مکانیکی جامدات به‌طور کامل هنوز درک نشده است و مسائلی مانند خستگی در فلزاتی که تحت تنش دوره‌ای پیوسته قرار دارند، به‌طور فزاینده‌ای مورد توجه طراحی صنایع هواپیمایی جدید است.

## ۱۳-۱۱ میزرها و لیزرها

حال در شرایطی هستیم که می‌توانیم طرزکار گروهی از وسایل تازه به‌نام میزرها (تقویت مولکولی از طریق گسیل تحریکی تابش) را درک کنیم. ابتدا در مورد مبانی این وسایل بحث خواهیم کرد و سپس اختلافهای کارکردی و عملی آنها را در نظر می‌گیریم.

به‌طور کلی در دمای معمولی، تمام اتمها یا عملاً تمام اتمهای هر گازی در پایینترین حالت یعنی حالت پایه قرار دارند. به‌عنوان مثال، اگر فرض کنیم که گاز نیک اتمی هیدروژن با دمای معمولی (چیزی به‌لحاظ شیمیایی غیرممکن) در اختیار داشته باشیم، در این صورت به‌آسانی می‌توان تعداد نسبی اتمها را در حالت‌های انرژی بالاتر محاسبه کرد. بر خوردهای حرارتی بعضی اتمها را به‌حالت‌های انرژی بالاتر انتقال خواهد داد. در فصل ۱ قانون جو را با معادلهٔ (۴۲-۱) به‌دست آوردیم، و آن را به‌صورت قانون توزیع بولتزمن با معادلهٔ (۴۴-۱) عمومیت دادیم. برای مقایسهٔ تعداد اتمهای در تعادل در دو انرژی متفاوت، این

توزیع را به صورت زیر می نویسیم

$$\frac{n_2}{n_1} = \exp \left[ \frac{-(E_2 - E_1)}{kT} \right] \quad (45.11)$$

برای هیدروژن در دمای معمولی  $T = 293 \text{ K}$ ، نتیجه این معادله به صورت زیر است (با توجه به اینکه  $E_2 - E_1 = 10.2 \text{ eV}$ )

$$\frac{n_2}{n_1} = \exp \left[ - \left( \frac{10.2 \times 1.6 \times 10^{-19}}{1.38 \times 10^{-23} \times 293} \right) \right] = e^{-404} = 11^{-176}$$

که کوچکی آن باور نکردنی است. یادآور می شود که اگر دما خیلی بیش از این بود (مانند دمای جو خورشید،  $6000 \text{ K}$ )، کسر آنها در حالت برانگیخته  $10^{-8.6}$  باید قابل ملاحظه باشد. همچنین یادآور می شود که اگر فاصله ترازهای انرژی هم خیلی کمتر می بود، کسر آنها برانگیخته حتی در دمای معمولی هم زیاد می شد. بویژه یادآور می شود که  $e^\circ$  برابر با ۱ است، بنابراین بدون توجه به اینکه چقدر اختلاف تراز انرژی کوچک و یا چقدر دما بالا باشد، تعداد آنها در حالت بالاتر نمی تواند به طور متوسط از تعداد آنها در حالت پایینتر تجاوز کند (در تمام این بحث فرض می شود هیدروژن در تعادل حرارتی است).

به طوری که در بخش ۶.۸ بحث شد، احتمال فرایندهای گسیل تحریکی و جذب تابش در شرایط مشابه، یکسان است. اما، شرایط معمولاً مشابه نیستند. در دمای معمولی در هیدروژن تعداد حالتی که ممکن است فوتونهای  $10.2 \text{ eV}$  را گسیل یا جذب کنند، از یکدیگر تفاوت زیادی دارند. بنابراین عمل جذب در مقایسه با عمل گسیل تحریکی بسیار بیشتر است. اگر بتوانیم شرایطی را برقرار کنیم که در آن آنها بیشتر در حالت بالاتر قرار گیرند، در این صورت گسیل تحریکی از جذب بیشتر خواهد بود. بدین ترتیب، بیش از آنچه «خرج می کنیم» به دست می آوریم که نتیجه آن عمل تقویت است.

چند روش زیرکانه برای انجام این کار پیدا شده است. در سال ۱۹۵۵ گوردون، زایگر و تاووز اولین میزر را به کار انداختند. آنها به جای هیدروژن که مورد بحث بود، از مولکولهای آمونیاک استفاده کردند. مولکول آمونیاک دارای حالتی برانگیخته در  $10^{-4} \text{ eV}$  است، بنابراین در دمای  $20^\circ \text{ C}$  داریم

$$\frac{n_2}{n_1} = \exp \left( - \frac{10^{-4} \times 1.6 \times 10^{-19}}{1.38 \times 10^{-23} \times 293} \right) = \exp \left( - \frac{1}{2752} \right) \approx 1$$

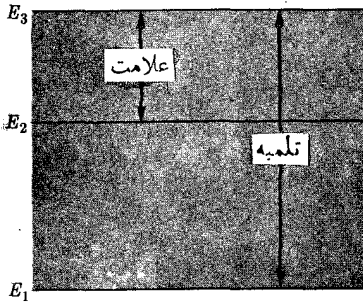
در تعادل حرارتی، کسر نسبی آنها برانگیخته تقریباً برابر واحد است. بنابراین «به طور طبیعی» تقریباً به تعداد مولکولهای برانگیخته مولکولهای نابرانگیخته وجود دارد. موفقیت برجسته تاووز و همکارانش اختراع وسیله جداسازی مولکولها بود. آنها گاز آمونیاک را از مجرای نازک به داخل خلا بردند. جریان مولکولها ضمن عبور از الکترود، به علت

اختلاف خواص الکتربیکی مولکولها تقسیم می‌شود، مولکولهای برانگیخته به یک سمت و مولکولهای نابرانگیخته به سمت دیگر منحرف می‌شوند. مولکولهای برانگیخته را به داخل یک اتاقک می‌فرستند. انرژی حالت برانگیخته  $10^{-4} \text{ eV}$  است که طول موج مربوط به آن  $1.24 \text{ cm}$  و بسامد آن  $23870 \text{ MHz}$  است. این بسامد در ناحیه میکروموج است. با ساختن اتاقک به اندازه مناسب می‌شود آن را به صورت کاواک تشدید کننده تابش تولید شده در آورد. اگر مولکول از حالت برانگیخته به حالت پایه می‌رفت، محتمل بود که مولکول دیگر را تحریک کند، و از آنجا که تمام مولکولها در ابتدا برانگیخته بودند، این فرایند سرعت به نسبت قابل توجهی گسترش می‌یافت. با تبدیل مولکولهای برانگیخته به مولکولهای جاذب، مولکولهای برانگیخته تازه‌ای برای حفظ تولید فوتونها وارد می‌شوند. بنابراین کاواک، مانند لوله صوتی در حال کار، دارای تابش میکروموج می‌شود و چنین دستگاهی یک نوسان کننده است.

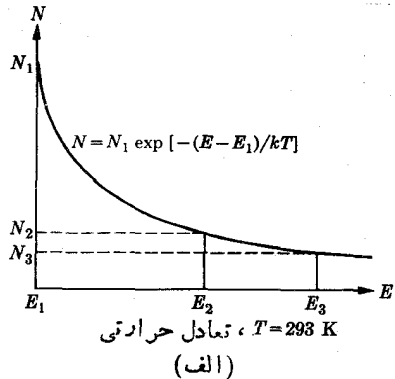
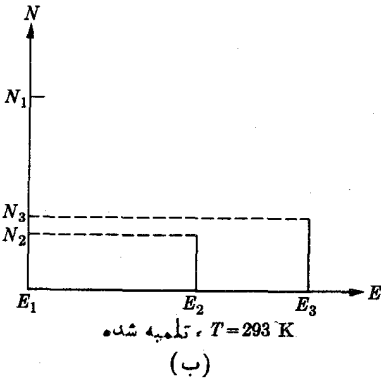
میزری که اکنون تشریح شد، دارای خواص برجسته‌ای است که یکی از آنها پایداری آن است. بسامد نوسانات به کمک ماهیت مولکول آمونیاک تعیین می‌شود. مولکول برانگیخته آمونیاک قابل تشخیص از مولکول دیگر نیست. تمام آنها تابشی با یک بسامد تولید می‌کنند. این نوسانگر را به کمک روشهای الکترونیکی می‌توان حاکم بر نوسان کننده‌های کندتر کرد. کاهشهای پیاپی بسامد، نوسان کننده‌ای کم بسامد به وجود می‌آورد که ضربانی شبیه ساعت دارد و اما پایداری آن همان پایداری مولکولهای آمونیاک است. چنین ساعتی را ساعت اتمی می‌نامند و دقت آن به اندازه‌ای است که در عرض هزار سال بیش از یک ثانیه جلوی عقب نمی‌رود. در حالی که این میز رگازی به عنوان نوسان کننده‌ای پایدار فوق العاده خوب است، نوع دیگری از آن یعنی هیذ حالت جامد، تقویت کنندهٔ بهتری خواهد بود.

متداولترین میزر حالت جامد از یاقوت ساخته می‌شود. یاقوت اساساً اکسید آلومینیوم ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) است که با افزودن کمی کروم به آن به رنگ قرمز درآمده است. این «ناخالصی» کروم است که اتم فعال میزر به شمار می‌رود. وقتی یاقوت در میدان مغناطیسی دائمی قرار می‌گیرد، اتم کروم به حالتی از انرژی (برانگیخته) می‌رود که سه‌تای آنها به صورت نمودار در شکل ۲۲.۱۱ نشان داده شده‌اند. در تعادل حرارتی، تعداد اتمهای این سه حالت تابع قانون بولتزمن است که در شکل ۲۳.۱۱ الف نشان داده شده است. مادهٔ یاقوت با فوتونهایی با بسامد (انرژی) متناظر با اختلاف انرژی  $(E_3 - E_1)$  و به وسیلهٔ چشمه‌ای خارجی تحت تابش قرار داده می‌شود. این باعث گذارهای جذبی از  $E_1$  به حالت فرآپایداد  $E_3$  و گذارهای تحریکی از  $E_3$  به  $E_1$  می‌شود. اگرچه گذارهای اخیر تحریکی هستند، ولی آنها خود مسئول عمل میزر به شمار نمی‌روند. به طوری که دیده‌ایم، اثر این گذارها این است که تعداد اتمهای کروم را در حالتی  $E_1$  و  $E_3$  به هم نزدیک کند. همان طوری که در شکل ۲۳.۱۱ ب نشان داده شده است، تعداد اتمها در  $E_3$  اساساً بدون تغییر باقی می‌ماند. این تلمبه کردن نودی اتمها از  $E_1$  به  $E_3$  موجب وارونی جمعیت بین حالتی  $E_3$  و  $E_1$  می‌شود که به علت فرآپایدار بودن  $E_3$ ، در حال افزایش است. اگر مادهٔ یاقوت





شکل ۲۲-۱۱ نمودار تراز انرژی برای



شکل ۲۳-۱۱ (الف) جمعیت عادی ترازهای انرژی. (ب) وارونی جمعیت بین  $E_2$  و  $E_3$  ناشی از تلمبه کردن از  $E_1$  به  $E_3$ .

در این حال، تحت تابش فوتونهای با انرژی  $E_3 - E_2$  قرار گیرد، بین این دو تراز گذارهایی به طرف بالا و پایین رخ خواهد داد. در اینجا، حقیقت مهم این است که در این جمعیت وارون شده حالتها، گسیلهای تحریکی از گذارهای جذبی بیشتر خواهد بود. نتیجه این عمل، تقویت است.

این درست است که فوتونهای بسامد سیگنال (با قدرت حدود میکرووات) سعی دارند جمعیت حالتهای ۲ و ۳ را برابر سازند، لکن تلمبه کردن قوی بین حالتهای ۱ و ۳ (میلی وات) جمعیت حالت ۳ را بیش از جمعیت حالت ۲ نگه می‌دارد.

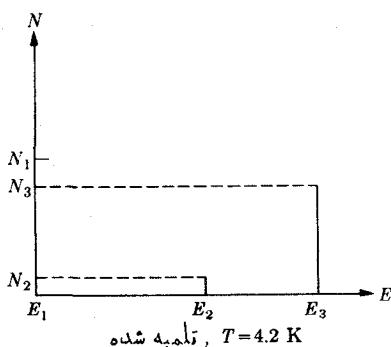
گذارهای خود به خودی از تراز ۳ به تراز ۲ نیز رخ می‌دهند. بنابراین، فوتونهای ایجاد شده از نظر منشأ کاتوره‌ای هستند و نقص نهایی تمام تقویت کننده‌ها، یعنی نوفه را تشکیل می‌دهند. اما گذارهای کاتوره‌ای آن چنان نادر هستند که این گونه تقویت کننده‌ها به نسبت

انواع دیگر نوفه کمتری دارند، و می‌توانند سیگنالهای ضعیفتری را تقویت کنند. یکی از کاربردهای تقویت‌کننده‌های میزر، تشخیص و اندازه‌گیری سیگنالهای میکروموج فوق‌العاده ضعیف کیهانی است.

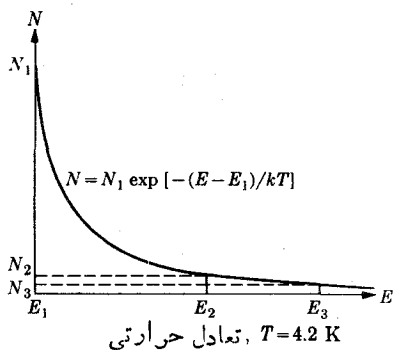
بسامد میکروموجهایی که این میزرمی تواند تقویت کند، از اختلاف انرژی  $(E_3 - E_1)$  تعیین می‌شود. این اختلاف را می‌توان با تغییر دادن میدان مغناطیسی که یا قوت در آن قرار دارد، تغییر داد. بنا براین، برخلاف پایداری بسامد میزر آمونیاکی، میزرحالت جامد به‌عنوان تقویت‌کننده دارای کاربردهای زیادی است.

میزرهای یا قوتی همیشه در دمای پایین کار می‌کنند (اغلب در دمای هلیوم مایع، ۴۲ K). مقایسه شکلهای ۲۴.۱۱ الف و ب با شکلهای قبلی نشان می‌دهد که چگونه عمل سرد کردن، و ارونی جمعیت بین حالت‌های ۲ و ۳ را افزایش می‌دهد.

لیزرها (تقویت نوری از طریق گسیل تحریکی تابش)، اصولاً فرقی با میزرها که در بالا بحث شد، ندارند. نمودار انرژی ماده به‌کار رفته شبیه شکل ۲۲.۱۱ است، جز اینکه اختلاف انرژیها خیلی بیشتر است و بنا براین طول موجها به‌جای اینکه در ناحیه میکرو-موج باشند در ناحیه نور مرئی قرار دارند. عمل تلمبه کردن با نور انجام می‌گیرد و لیزر نور تولید می‌کند. البته، نور پمپ‌کننده باید از نور لیزر «آیتر» باشد. لیزرها معمولاً شبیه میزر آمونیاکی به‌عنوان نوسان‌کننده به‌کار می‌روند، یعنی منابع نوری هستند. لامپ لیزر استوانه‌ای با دو انتهای نوری متوازی است که یکی کاملاً نقره‌اندود و دیگری به‌طور جزئی نقره‌اندود شده است. نور تلمبه‌کننده از سطح جانبی وارد لامپ می‌شود و نور لیزر از انتهای نیمه شفاف خارج می‌شود. نور لیزری که از محور منحرف باشد سرعت به‌وسیله دیواره‌ها جذب می‌شود، اما باریکه موازی با محور تا شدتی زیاد افزایش می‌یابد. زیرا بخشی از باریکه، برای آنکه تا حد ممکن با اتمهای برانگیخته بیشتری رویارو شود،



(ب)



(الف)

شکل ۲۴.۱۱ اثر دما بر و ارونی جمعیت، با شکل ۲۳.۱۱ مقایسه شود. (الف) نمودار تراز انرژی نیم‌رسانای ذاتی. (ب) همان با منحنی فرمی که جمعیت الکترونها را در دو نوار نشان می‌دهد.

بین سطوح بازتابنده حرکت رفت و برگشت دارد. در آغاز این بحث متذکر شدیم که تابش تحریک شده با فوتونهای تحریک کننده همفاز است. با تحریک هر چه بیشتر فوتونها توسط فوتونها، آبخاری از فوتونها حاصل می شود که تمام آنها هم فاز (همدوس) هستند و تقریباً تمام آنها موازی با محور لامپ حرکت می کنند. در نتیجه، نور لیزر باریکه ای تقریباً بدون «پراکندگی» به وجود می آورد. اگر باریکه ای از نور لیزر، لکه نوری بد قطر ۱ سانتیمتر روی دیواری نزدیک به وجود آورد، لکه روی یک ساختمان دور به مقدار خیلی جزئی بزرگتر خواهد بود. اخیراً، دانشمندان فضایی موفق به تشخیص نور لیزر هادف گیری شده از زمین بر روی ماه، پس از برگشت آن به وسیله دستگاه آینه ای که توسط فضا نوردان آپولو ۱۱ در ماه نصب شده بود، شده اند.

## مسائل

۱۰۱۱ (الف) مقادیر دو تابع موج (۱۰۱۱) و (۲۰۱۱) را در طول محور بین دوهسته رسم کنید. فرض کنید که فاصله بین هسته ها به اندازه یک شعاع بور  $a_0$  است. (ب) مقدار بسا تبادل  $p_1$  [معادله (۱۵-۱۱)] را در طول محور رسم کنید. (ج) مقدار  $\alpha$  را با انتگرال گیری  $p_1$  در طول محور [معادله (۱۶-۱۱)] حساب کنید. فرض کنید که مقدار آن در طول خط عمود بر محور تا شعاع  $r = a_0$  ثابت، و برای  $r > a_0$  صفر باشد.

۲۰۱۱ با استفاده از شکل ۱۰۱۱، «ثابت فزنی» NaCl را برآورد کنید. بسامد ارتعاش را برای این مولکول، و انرژی  $hw$  را بر حسب الکترون ولت حساب کنید.

۳۰۱۱ گشتاور لختی مولکول NaCl را حساب کنید، و بسا استفاده از آن طیف انرژی دورانی را بر حسب الکترون ولت محاسبه کنید.

۴۰۱۱ انرژی «نقطه صفر»  $1/2 \hbar \omega$  (بر حسب الکترون ولت) را برای مولکول هیدروژن، با استفاده از این داده تجربی که در گذار از تراز ارتعاش  $n=1$  به  $n=2$  نور فرسرخ با طول موج  $22750 \text{ \AA}$  جذب می شود، محاسبه کنید.

۵۰۱۱ تحقیق کنید که در دمای معمولی، مرتبه بزرگی رسانندگی الکتریکی مس از معادله (۳۴-۱۱) به دست می آید. فاصله بین اتمی برای مس برابر  $3.6 \text{ \AA}$  است.

۶۰۱۱ طول موج آستانه پدیده فوتوالکتریک برای تنگستن  $2900 \text{ \AA}$  است. (الف) تابع کار  $W_0$  (بخش ۱۱.۳) را محاسبه کنید، و با استفاده از آن ضریب فرمی [معادله (۴۳-۱۱)] را برای آن دسته از الکترونها تعیین کنید که در دمای  $1000 \text{ K}$ ،  $2000 \text{ K}$  و  $3000 \text{ K}$  بندرت می توانند فرار کنند. (ب) انرژی فرمی را برای تنگستن (جرم اتمی ۱۸۳.۹ و چگالی  $19.3 \text{ g/cm}^3$ ) با فرض اینکه در مقابل هراتم یک الکترون آزاد وجود دارد، به دست آورید.

۷۰۱۱ (الف) چگونه می‌توان به‌طور تجربی معلوم کرد که رسانش الکتریکی به‌وسیلهٔ حفره‌ها انجام می‌گیرد یا الکترونها؟ (دانه‌جایی: اثر میدان مغناطیسی عرضی را بر جریان الکتریکی در نظر بگیرید.) (ب) نسبت میدان الکتریکی برواحد چگالی جریان به‌ازای واحد القای مغناطیسی. در حالی که هر سه برهم عمودند، به‌عنوان ضریب هال معروف است. نشان دهید که ضریب هال باید معیار حساسی از تعداد حفره‌ها یا الکترونها رسانی در واحد حجم باشد. (ج) نشان دهید که علامت این ضریب در رسانش به‌وسیلهٔ حفره‌ها یا الکترونها از هم متفاوت است.

۸۰۱۱ «ضریب تحرك» بار الکتریکی به‌صورت افزایش سرعت به‌ازای واحد میدان الکتریکی شتاب‌دهنده تعریف می‌شود. اگر  $n$  تعداد الکترونها یا حفره‌های رسانی در واحد حجم جسم جامد باشد، نشان دهید که رسانندگی الکتریکی با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\sigma = ne\mu$$

۹۰۱۱ انرژی فرمی  $E_f$  را بر حسب MeV برای پروتونهای هسته برآورد کنید. شعاع متوسط هسته‌ای  $R = 1.2 A^{1/3} \times 10^{-15} \text{m}$  است که در آن  $A$  تعداد نوکلئونها تقریباً دوبرابر تعداد پروتونهای  $Z$  است.

۱۰۰۱۱ فرض کنید که الکترونی به‌فاصلهٔ  $1 \text{ \AA}$  از سطح رسانای کاملاً مسطحی قرار دارد. (بدیهی است که چنین چیزی در عمل وجود ندارد.) با استفاده از تصویر بسار آینه‌ای، انرژی لازم را برای انتقال این الکترون به‌بینهایت حساب کنید. در اینجا خواهید دید که مرتبهٔ بزرگی این انرژی در حدود تابع کار فلزات است.

۱۱۰۱۱ (الف) با توجه به‌معادلهٔ (۱۴۰۱۱) و با استفاده از معادلات (۴۱۰۱۱)، (۴۳۰۱۱) و (۴۴۰۱۱)، کسری از الکترونها را که در دمای  $T = 300 \text{ K}$  برانگیخته شده‌اند و به‌نوار رسانش نیم‌رسانا رفته‌اند حساب کنید. پهنای شکاف  $E_g = 1.16 \text{ eV}$  است. فرض کنید  $\exp(E_g/kT) \gg 1$  است و در معادلهٔ (۴۴۰۱۱) از  $E \approx E_f$  استفاده کنید. (ب)  $E_g$  را دوبرابر کرده و نتایج را مقایسه کنید.

۱۲۰۱۱ تراز انرژی ناخالصی بخشنده‌ای  $0.02 \text{ eV}$  پایینتر از نوار رسانش آن است. (الف) چه کسری از اتمهای بخشنده در دمای  $300 \text{ K}$  یونیده می‌شوند؟ (ب) این کسر در  $100 \text{ K}$  چقدر است؟

۱۳۰۱۱ ظرفیت کل يك آشکارساز نیم‌رسانای تابش و سیمهای ورودی دستگاه الکترونیکی مربوط بدان برای  $20 \text{ pF}$  است. ذرهٔ آلفایی در لایهٔ تهی آشکارساز  $10 \text{ MeV}$  انرژی بر جای می‌گذارد. بزرگی تپ ولتاژ ایجاد شده چقدر است؟

## ۱۰۱۲ خواص عمومی هسته‌ها

مقدمه

قبلاً در بخش ۳.۴ از نظریه رادرفورد درباره اتم هسته‌ای بحث کردیم، و در بخش ۴.۴ یادآور شدیم که اطلاعات به دست آمده نشان می‌دهد که در فواصل کمتر از  $10^{-13} \times 5$  سانتیمتر برقراری میدان الکتروستاتیکی خالص دچار اختلال می‌شود. رادرفورد این موضوع را نشانی از اندازه هسته تعبیر کرد. بنا بر این همزمان با کشف هسته، تخمین نسبتاً خوبی از اندازه آن به دست آمد. این کشف در سال ۱۹۱۲ رخ داد.

از مطالعات واپاشی آلفای هسته‌های سنگین معلوم شد که هسته‌های سنگین می‌توانند تا حدودی به اجزای تشکیل دهنده کوچکتر و مشابهی شکسته شوند. بنا بر این با بیان روشنتر تمام هسته‌ها از ذرات بنیادینتر ساخته می‌شوند. به هر حال، تا قبل از سال ۱۹۳۲ این ذرات دقیقاً شناخته نشده بودند. در این سال چادویک نوترون را کشف کرد، و از این تاریخ به بعد پذیرفتند که ساختمان هسته‌ها به‌طور کلی از پروتون و نوترون تشکیل شده است. در واپاشی بتای هسته و واکنشهای هسته‌ای (مصنوعی) در انرژیهای بسا، ذرات دیگری ممکن است از هسته خارج شوند. اما، اکنون اعتقاد بر این است که این ذرات در لحظه گسیل از هسته به وجود می‌آیند و بنا بر این ذرات تشکیل دهنده هسته‌ها محسوب نمی‌شوند.

### علامات اختصاری

دوهسته با تعداد پروتونهای برابر،  $Z$ ، و تعداد نوترونهای مساوی،  $N$ ، متعلق به يك نوع هسته‌اند که نوعی معین از هسته را نوکلید می‌نامند. هر نوکلید با يك علامت شیمیایی و يك عدد  $A = Z + N$  که نشان دهنده کل ذرات هسته‌ای است، مشخص می‌شود. گاهی اوقات تعداد پروتونهای هسته (که از علامت شیمیایی آن قابل تشخیص است) به صورت عددی در جلوی علامت داده می‌شود. مثالهایی در جدول ۱۰۱۲ داده شده‌اند. نوکلیدهای  $Z$  برابر را ایزوتوپ نامند، اصطلاحی که اغلب به غلط به جای نوکلید به کار برده می‌شود. به‌عنوان مثال  ${}^{192}\text{Hg}$  اغلب «ایزوتوپ رادیواکتیو» نامیده می‌شود، در صورتی که نوکلید رادیواکتیو است. نوکلیدهای با  $A$  مساوی را ایزوباد و نوکلیدهای با  $N$  مساوی را ایزوتون می‌نامند. بالاخره، حالتی برانگیخته از نوکلیدی معین ممکن است نسبتاً عمر طولانی داشته باشد که در این صورت زمان واپاشی آن مستقیماً قابل اندازه‌گیری است. چنین حالت برانگیخته‌ای را حالت ایزومری (یا شبه پایدار) گویند. بنا براین دوهسته از يك نوع ولی با حالت‌های انرژی متفاوت که حداقل یکی از آنها شبه پایدار باشد را هسته‌های ایزومر نامند.

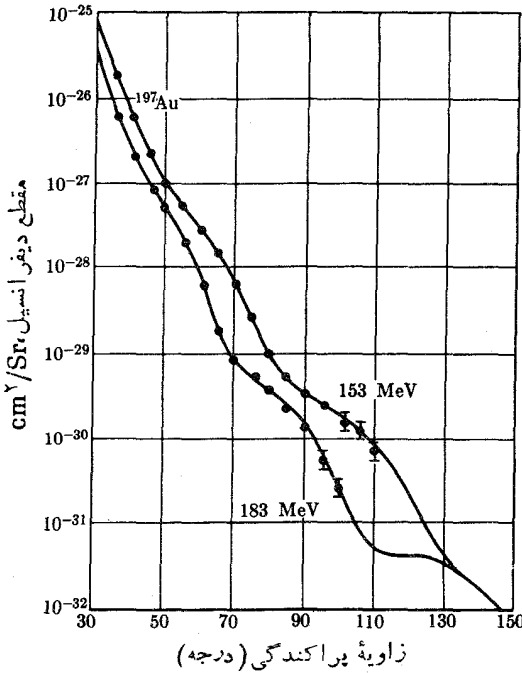
جدول ۱۰۱۲

علامت اختصاری	عنصر	$Z$	$N$	$A$
${}^{12}\text{C}$ یا ${}^{13}\text{C}$	کربن	۶	۶	۱۲
${}^{13}\text{C}$ یا ${}^{14}\text{C}$	کربن	۶	۷	۱۳
${}^{86}\text{Kr}$ یا ${}^{84}\text{Kr}$	کریپتون	۳۶	۵۰	۸۶
${}^{192}\text{Hg}$ یا ${}^{180}\text{Hg}$	جیوه	۸۰	۱۱۲	۱۹۲

### اندازه هسته

در سالهای اخیر، اندازه دقیقتر هسته‌ها را از طریق پراکندگی الکترونهای پرانرژی از هسته‌ها برای تمام عناصر جدول تناوبی تعیین کرده‌اند. بیشتر این اندازه‌گیریها در دانشگاه استانفورد به وسیله هوفستاتر و همکاران انجام یافته است.<sup>۱</sup> در این آزمایشها توزیع زاویه‌ای پراکندگی الکترونها (شبه تجربه رادرفورد) اندازه‌گیری شده است. شکل ۱۰۱۲ نمونه‌ای از چنین توزیع زاویه‌ای را نشان می‌دهد، و شکل ۲۰۱۲ الف تجزیه و تحلیل اطلاعات را با استفاده از مکانیک موجی نمایش می‌دهد. برهم کنش موجود در اینجا، جذب کولنی بین

۱. به عنوان مثال سری گزارشهای *Revs. Mod. Phys.*, 30 (1958), p. 142-584 در مطالعه کنید.



شکل ۱۰۱۲ نتایج آزمایشهای پراکندگی الکترون در مورد طلا.

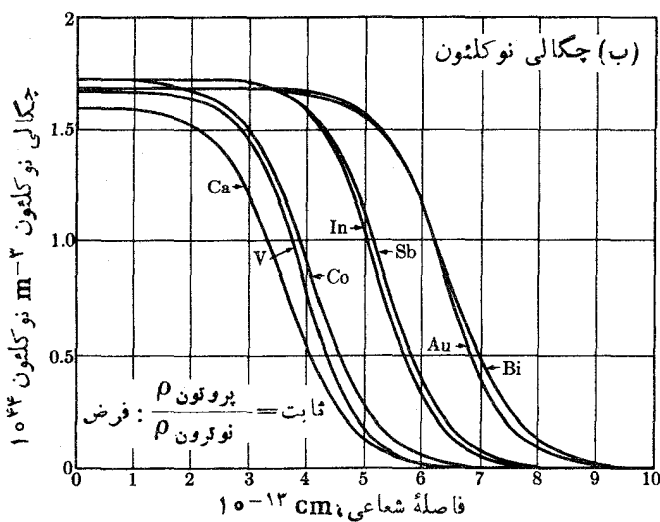
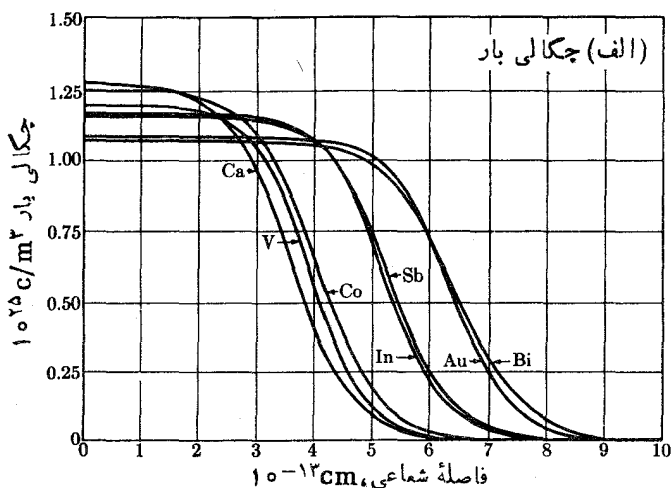
الکترون و پروتون هسته است و به همین دلیل نتیجه به صورت چگالی بار داده شده است. با فرض تساوی توزیع پروتونها و نوکلئونها می توانیم توزیع جرم یا توزیع نوکلئونها را حساب کنیم (شکل ۲۰۱۲ ب) یکی از نتیجه های تجزیه و تحلیل چنین اطلاعاتی این است که شعاع متوسط الکترومغناطیسی هسته به صورت «فاصله از مرکز تا نقطه ای که توزیع چگالی به پنجاه درصد می رسد» تعریف می شود (شکل ۲۰۱۲) از رابطه زیر به دست می آید

$$R_e = (1.07 \pm 0.04) A^{1/3} \times 10^{-15} \text{ m} = 1.07 A^{1/3} F \quad (1.12)$$

که در آن ۱ فرمی (F) برابر  $10^{-15}$  متر است. نتیجه دیگر این که ضخامت پوسته هسته که به صورت فاصله بین نقطه ۱۰ درصد و نقطه ۹۰ درصد توزیع چگالی تعریف می شود، برای تمام هسته ها برابر است، و از رابطه زیر به دست می آید

$$t = (2.24 \pm 0.23) \times 10^{-15} \text{ m}$$

در روشهای دیگر اندازه گیری شعاع هسته، R، مقدار ثابت جلوی  $A^{1/3}$  کمی متفاوت



شکل ۲۰۱۲ چگالی بار و چگالی نوکلئونها که از طریق پراکندگی الکترونیهای پراورزی به دست آمده‌اند.

به دست می‌آید. در هر صورت، بستگی  $R$  به ریشه سوم  $A$  نشان می‌دهد که چگالی نوکلئونها در مرکز تمام هسته‌ها تقریباً یکی است (شکل ۲۰۱۲).



## جرم و انرژی بستگی

هسته اتم در حدود ۹۹۹۹۷۵ درصد جرم اتم را دربردارد. جدول جرم هسته‌های عناصر را می‌توان با کسر کردن جرم الکترونهای اتم هر عنصر از جرم اتمی آن تهیه کرد (در مواقعی که دقت زیاد مورد نظر است نقصان جرم مربوط به انرژی بستگی الکترونها را باید در نظر گرفت). اما، به استثنای ذرات هسته‌ای نظیر هیدروژن، هلیوم و اتمهای سنگینتر یونیده، به جای جرم هسته‌ای همیشه جرم اتمی را در فیزیک هسته‌ای به کار می‌برند. اغلب از اینکه کدام یک را به کار بریم تفاوتی به وجود نمی‌آید، زیرا الکترونها از دو طرف بیشتر معادلات جرمی (به عنوان مثال رابطه انرژی در واکنشهای هسته‌ای) حذف می‌شوند. در بسیاری از حالات، حضور الکترونهای اتم را نباید نادیده گرفت، زیرا آنها مستقیماً در فرایندهای هسته‌ای دخالت می‌کنند (مثلاً پدیده گیراندازی الکترون و تبدیل داخلی) درباره اندازه گیری جرمهای اتمی در بخش ۷.۲ بحث شده است.

جرم سکون و انرژی معادل ذراتی (یا یونهای) که در فیزیک هسته‌ای انرژیهای پایین به کار می‌روند، در جدول ۲.۱۲ داده شده است. جرم سکون بعضی از نمونه‌های اتمی در جدول ۳.۱۲ آمده است. در این جدول انرژی بستگی هسته‌ها، یعنی انرژی که در ضمن ترکیب پروتونها و نوترونها برای تشکیل هسته آزاد می‌شود، نیز داده شده است. انرژی بستگی (BE) را می‌توان از ضرب نقصان جرم در مجذور سرعت نور به دست آورد.

$$BE = [Zm_p + (A - Z)m_n - Zm^1]c^2 \quad (2.12)$$

که در آن  $Z$  تعداد پروتونها،  $A - Z$  تعداد نوترونها و  $m_p$  و  $m_n$  و  $m^1$  به ترتیب

جدول ۲.۱۲ جرم و انرژی معادل ذرات هسته‌ای.

$m_0 c^2 (\text{MeV})$	$u$	
۰٫۵۱۱۰۰۷	$۵٫۴۸۵۹۷ \times ۱۰^{-۴}$	الکترون
۹۳۹٫۵۵۱	۱٫۰۰۰۸۶۶۵	نوترون
۹۳۸٫۲۵۸	۱٫۰۰۰۷۲۷۷	پروتون
۱۸۷۵٫۵۸۵	۲٫۰۰۱۳۵۵۴	دوترون
۲۸۰۸٫۸۷۹	۳٫۰۰۱۵۵۰۱	تریتون
۲۸۰۸٫۳۵۰	۳٫۰۰۱۴۹۳۳	$(\text{He}^3)^{++}$
۳۷۲۷٫۳۲۳	۴٫۰۰۰۱۵۰۶	ذره آلفا

جدول ۳.۱۲ نمونه‌هایی از جرم اتمی، انرژی بستگی، تکانه زاویه‌ای هسته‌ای و پارامتر، گشتاور دو قطبی مغناطیسی و گشتاور چهار قطبی الکتریکی.

$\frac{\Delta R}{R}$	گشتاور چهار قطبی	گشتاور مغناطیسی هسته‌ای	تکانه زاویه‌ای هسته‌ای و پارامتر	انرژی بستگی اتمی MeV	انرژی بستگی هسته‌ای MeV	جرم اتمی u	نویسه
	$10^{-24} \text{ cm}^2$	nm					
-	-	+۲۲۷۹۲۷۵	$1/2^+$	۰۰۰۰۰۰۱۴	-	۱۰۰۰۷۸۲۵	$^1_1\text{H}$
۰.۰۴*	+۰.۰۰۰۲۸۲	+۰.۰۸۵۷۳۵	$1^+$	۰.۰۰۰۰۰۱۴	۲۲۲۲۵	۲.۰۰۱۴۱۰۲	$^2_1\text{H}$
۰	۰	۰	$0^+$	۰.۰۰۰۰۰۷۹	۲۸۲۹۵	۴.۰۰۰۲۶۰۳	$^4_2\text{He}$
?	-۰.۰۰۴	+۳۲۵۶۴	$3/2^-$	۰.۰۰۰۰۱۹	۳۹۲۲۲	۷.۰۰۱۶۰۰۴	$^7_3\text{Li}$
۰	۰	۰	$0^+$	۰.۰۰۰۲۰	۱۲۷۲۶۱۷	۱۵.۹۹۴۹۱۶	$^{16}_8\text{O}$
-۰.۰۳۲	-۰.۰۰۷۹۰	+۰.۰۸۲۱۸	$3/2^+$	۰.۰۰۱۲	۲۹۸۲۰	۳۴.۹۶۸۸۵۱	$^{35}_{17}\text{Cl}$
۰	۰	۰.۰۰۵	$1/2^-$	۰.۰۰۳۴	۴۹۹۹۰	۵۶.۹۳۵۲۹۸	$^{56}_{26}\text{Fe}$
۰.۲۶	+۰.۸۰	+۳.۱۸۰	$7^-$	۰.۰۳۷	۱۴۱۷.۲۹۷	۱۷۵.۹۴۲۶۶۰	$^{176}_{71}\text{Lu}$
$\pm ۰.۰۰۸۳$	$\pm ۲.۱$	-۰.۳۵	$7/2^-$	۰.۰۶۹	۱۷۸۳.۱۷	۲۳۵.۰۴۳۹۱۵	$^{235}_{92}\text{U}$

\* شعاع دوترون  $R = 2.4 \text{ F}$  گرفته شده است. از معادله (۱.۱۲) شعاع دوترون  $R = 3.5 \text{ F}$  به دست می‌آید. اما این رابطه برای دستگاه دوتون کلونی به کار نمی‌رود.

جرمهای سکون پروتون، نوترون و هسه نهایی است. یادآور می شود که انرژی بستگی کمی مثبت است.

جدول ۳.۱۲ انرژی بستگی اتمی کل را نیز به دست می دهد، یعنی انرژی که هسته ضمن ترکیب با  $Z$  الکترون و تشکیل اتم خنثی، آزاد می کند. بدیهی است که انرژی بستگی اتمی در مقایسه با انرژی بستگی هسته ای خیلی کوچک است. بنابراین می توان بدون اشتباه زیاد انرژی بستگی هسته ای را از رابطه زیر حساب کرد

$$BE = [ZM_H + (A - Z)M_n - {}_ZM^A]c^2 \quad (3.12)$$

که در آن  $M$ ها معرف جرمهای اتمی اند. البته برای جرم نوترون تفاوتی پیدا نمی شود. در حقیقت رابطه (۳.۱۲) بیان می کند که وقتی  $Z$  اتم هیدروژن و  $A - Z$  نوترون با هم اتم خنثی  ${}_ZM^A$  را در حالت اتمی و هسته ای بسایه تشکیل می دهند، این مقدار انرژی باید آزاد شود. از آنجا که جرم سکون الکترونها در معادله (۳.۱۲) حذف شده است و چون انرژی بستگی اتمی خیلی کوچک است، معادله (۳.۱۲) را می توان به جای معادله (۲.۱۲) برای محاسبه انرژی بستگی هسته ای به کار برد.

### گشتاور مغناطیسی اسپین

به طوری که در فصلهای قبل بحث شد، نوکلئونها دارای اسپین ذاتی با عدد کوانتومی  $s = 1/2$  هستند. تکانه زاویه ای کل هسته، نظیر اتم، کوانتیده بوده و عدد کوانتومی آن  $I$  است، که مقدار آن برای  $A$  فرد نیمه درست، و برای  $A$  زوج عدد درست است. مطابق قرارداد پارینه هسته را به صورت شاخص روی مقدار  $I$  قرار می دهند. جدول ۳.۱۲ چند مثال را نشان می دهد.

پروتون و نوترون هر دو دارای گشتاور مغناطیسی اسپین ذاتی هستند. مقادیر آنها عبارت اند از

$$\text{پروتون} = \text{مگنتون هسته ای } 2.79275$$

$$\text{نوترون} = \text{مگنتون هسته ای } 1.9135$$

که در آن

$$1 \text{ (mگنتون هسته ای)} = \frac{eh}{2m_p} = 5.0505 \times 10^{-27} \text{ J-m}^2/\text{Wb}$$

حرکت مداری پروتون در هسته در ایجاد گشتاور مغناطیسی دو قطبی کل هسته مؤثر است. چند مثال در جدول ۳.۱۲ داده شده اند.

## گشاور چهارقطبی الکتریکی

هسته، همانند اتم، گشاور دوقطبی الکتریکی ایستا ندارد. ولی به طور کلی، هسته دارای گشاور چهارقطبی الکتریکی است که در حقیقت معیاری از برون مرکزی سطح بیضوی هسته به شمار می رود. گشاور چهارقطبی به صورت زیر تعریف می شود

$$Q = \left(\frac{1}{e}\right) \int (3z^2 - r^2) \rho \, d\tau \quad (4.12)$$

که در آن  $\rho$  چگالی بار در هسته است. گشاور چهارقطبی را در حالتی اندازه گیری و محاسبه می کنند که بردار  $I$  حتی المقدور موازی با محور  $z$ ، یعنی  $m_I = I$ ، باشد. گشاور چهارقطبی اندازه گیری شده چند هسته همراه با میزان انحراف شعاع،  $\Delta R$ ، از مقدار متوسط شعاع هسته،  $R$ ، در جدول ۳.۱۲ داده شده است.

## ۲.۱۲ دوترون

در فصل هفتم در باره ساده ترین دستگاه اتمی، یعنی اتم هیدروژن، به کمک مکانیک موجی بحث کردیم. در این حالت نیروی اساسی بین دوزره نیروی کولنی است، که از طریق اندازه گیریهای ماکروسکوپی کاملاً شناخته شده است. در فیزیک هسته ای وضع کمی، از نقطه نظر نیروی هسته ای و به علت عدم دسترسی به اندازه گیری مستقیم آن، متفاوت است. به هر حال، مکانیک موجی حداقل در بعضی از موارد فیزیک هسته ای با موفقیت به کار رفته است. بنابراین با استفاده از اصول مکانیک موجی در تشریح مسائل هسته ای و سپس مقایسه آن با نتایج تجربی، می توان انتظار داشت که توصیفی سازگار برای نیروهای هسته ای بین دو یا چند ذره بر حسب فواصل نسبی آنها، جهت های اسپین و پارامترهای دیگر به دست آوریم. بدیهی است که ساده ترین دستگاه برای بررسی دستگاه متشکل از دونوکلئون است. دونوع مختلف از نتایج تجربی برای دستگاههای دونوکلئونی وجود دارند. یک دسته از اطلاعات مربوط به مطالعه تنها دستگاه دوزره ای متصل به هم موجود، یعنی دوترون، است. در فیزیک اتمی، میزان موفقیت مکانیک موجی یا هر نظریه دیگر بر حسب توانایی نظریه در تعیین دقیق انرژی حالت های برانگیخته مورد مشاهده مشخص می شود. متأسفانه دوترون فقط دارای یک تراز مقید منفرد، یعنی همان حالت پایه است. خواص ایستای قابل تعیین تجربی دوترون که ممکن است برای آزمون نظریه ها به کار روند، اساساً عبارت اند از انرژی حالت پایه، تکانه زاویه ای، پارامتر، گشاور چهارقطبی الکتریکی، و گشاور دوقطبی مغناطیسی و هم چنین بعضی اندازه گیریهای مربوط به ابعاد دوترون به کمک پراکندگی الکترونیهای پرانرژی.

دسته دیگری از اطلاعات تجربی در مورد دستگاه دونوکلئونی از مطالعات پراکندگی نوکلئون به وسیله نوکلئون دیگر ناشی می شود. در عمل، باریکه ای از نوکلئونها

به هدفی از نوکلئونهای دیگر برخورد می کند و احتمال برخورد، توزیع زاویه‌ای و غیره، اندازه گیری می شود. از آنجا که ساختن هدف نوترونی عملی نیست، آزمایشها محدود به پراکندگی نوترون-پروتون و پراکندگی پروتون-پروتون است. از پراکندگی دونوکلئونی در بخش ۳۰۱۲ بحث می شود.

حال سعی خواهیم کرد که روشهای مکانیک کوانتومی را در تشریح نظری دوترون به کار بریم. هدف یادگیری مطالبی درباره نیروهای هسته‌ای است که مستلزم تطبیق کمیتهای پیش بینی شده نظری با مقادیر به دست آمده تجربی است. در دستگاه مرکز جرم، معادله شرودینگر برای سیستم دوزره‌ای به صورت زیر است

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi \quad (5.12)$$

که در آن  $m$  جرم کاهش یافته است

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (6.12)$$

پتانسیل  $V$  بیانگر نیروی مؤثر بین دوزره و  $E$  انرژی کل سیستم است. انرژی حالت پایه دوترون عبارت است از

$$E = -E_B = -2.225 \Delta \text{MeV}$$

پتانسیل  $V$  تابعی نامعلوم از فاصله بین دوزره و نیز محتملاً متغیرهای دیگر است. هدف از این محاسبات، روشن ساختن وضع این تابع است. برای سهولت فرض می کنیم که تابع پتانسیل فقط بستگی به فاصله دوزره دارد، یعنی  $V = V(r)$ . موقمی که تابع پتانسیل تقارن کروی دارد، معادله موج را می توان بر حسب متغیرها جدا کرد و به صورت زیر نوشت

$$\psi = (u_l/r) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (7.12)$$

$Y_{lm}(\theta, \phi)$  تابع کروی هماهنگ و  $u_l$  جواب معادله شعاعی موج است

$$\frac{d^2 u_l}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[ E - V - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] u_l = 0 \quad (8.12)$$

آخرین جمله داخل کروه تابع پتانسیل شناخته شده مرکز گریز است. برای ایجاد بستگی بین نوکلئونها نیاز به پتانسیل جاذبه‌ای یا منفی  $V$  داریم که، حداقل در برد معینی از فاصله بین ذرات  $r$ ، مقدارش بیش از پتانسیل مرکز گریز باشد. بدیهی است که این موضوع در حالت  $l = 0$  به آسانی به دست می آید. بنابراین برای هر سیستم دوزره‌ای که دارای پتانسیلی با تقارن کروی باشد، پایستترین حالت کوانتوم مکانیکی همیشه حالت  $l = 0$  است (حالت S).

تابع پتانسیلی که ساده ترین جوابهای معادله شرودینگر را به دست می دهد، چاه مربعی است (شکل ۳۰۱۲). پتانسیل «مغز سخت» (بینهایت زیاد) در  $r < c$  به طور مؤثر مانع از آن می شود که ذرات از فاصله  $c$  به یکدیگر نزدیکتر شوند. از مطالعات مربوط به پراکندگی و ساختار هسته ای دلایلی به دست می آید که می توان قبول کرد پتانسیل نوترون-پروتون واقعاً دارای یک چنین قسمت سخت است. دلیلی برای اینکه بپذیریم عبارت جاذبه ای پتانسیل از نوع چاه مربعی باشد نداریم، تنها دلیل انتخاب چاه مربعی پتانسیل در اینجا، ساده بودن آن است. در زیر شعاع مغز سخت  $c$ ، پهنای  $b$ ، و عمق چاه  $V_0$  به عنوان پارامترهای قابل تنظیم تلقی خواهند شد.

از آنجا که تابع موج در ناحیه I (شکل ۳۰۱۲) باید صفر باشد، کافی است معادله موج را برای ناحیه های II و III حل کنیم. می توانیم معادله موج را برای ناحیه II ( $I = 0$ ) با حذف شاخص  $u$  به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [V_0 - E_B] u = 0 \quad (۹۰۱۲)$$

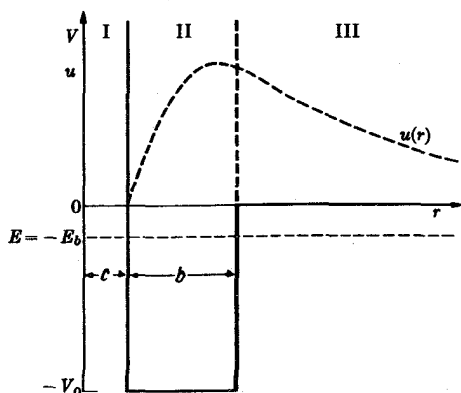
که در آن  $V_0$  و  $E_B$  اعداد مثبت اند. جواب معادله با در نظر گرفتن شرایط مرزی که در  $r = c$ ،  $u = 0$  است، چنین می شود

$$u_{II} = A \sin K(r - c) \quad (۱۰۰۱۲)$$

که در آن  $A$  ثابت بهنجارش است و

$$K = (\hbar^{-1}) \sqrt{2m(V_0 - E_B)} \quad (۱۱۰۱۲)$$

در ناحیه III معادله شعاعی به صورت زیر در می آید



شکل ۳۰۱۲ نمایش ساده پتانسیل نوترون-پروتون و تابع شعاعی موج دوترون.

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{2m}{\hbar^2} E_B u = 0 \quad (12.12)$$

جواب این معادله در شرایط مرزی  $r = \infty$  و  $u = 0$  به صورت زیر است

$$u_{III} = B e^{-\kappa r} \quad (13.12)$$

که در آن  $B$  ثابت بهنجارش است و

$$\kappa = (1/\hbar) \sqrt{2mE_B} \quad (14.12)$$

توابع کامل موج در نواحی II و III با معادله (۷.۱۲) داده شده‌اند که هماهنگیهای کروی آن برای  $l = 0$  برابر  $Y_{00} = (\pi)^{-1/2}$  و  $u_0$  برابر با  $u_{III}$  و  $u_{II}$  است. در ادامه بحث فقط با توابع شعاعی موج کار می‌کنیم. با انطباق  $u_{III}$  و  $u_{II}$  در مرز مشترک دوناحیه، درحقیقت دو تابع کلی موج  $\psi_{III}$  و  $\psi_{II}$  را منطبق می‌کنیم.

حال دو معادله (۱۰.۱۲) و (۱۳.۱۲) را باید در مرز  $r = c + b$  بدینحوی تنظیم کرد که هم تابع  $u$  و هم اولین مشتق آن در مرز پیوسته باشد. این تنها روشی است که با کاربرد آن معادله شرودینگر (۹.۱۲) نیز می‌تواند در آن نقطه چنان خاصیتی داشته باشد. این ضرورت مرزی (با  $r = b + c$ ) نتیجه می‌دهد

$$AK \cos Kb = -\kappa B e^{-\kappa(c+b)} \quad (15.12)$$

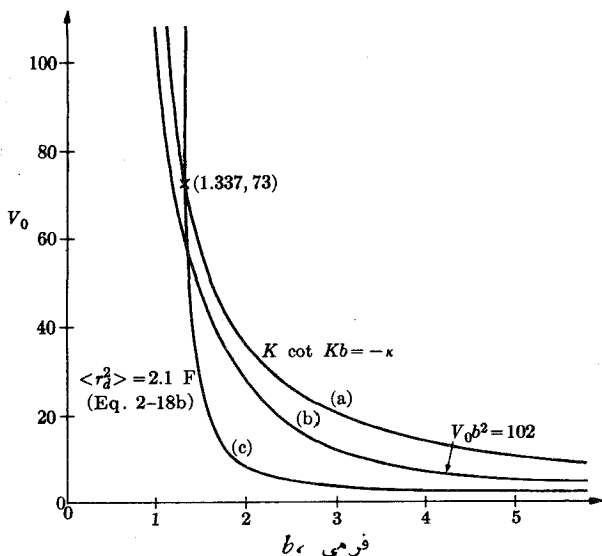
$$A \sin Kb = B e^{-\kappa(c+b)}$$

از آنجا که در حال حاضر نیازی به ثابتهای بهنجارش  $A$  و  $B$  نداریم، دو معادله را به هم تقسیم می‌کنیم که نتیجه می‌شود

$$K \cot Kb = -\kappa \quad (16.12)$$

معادله (۱۶.۱۲) به طور ضمنی انرژی بستگی  $E_B$  دستگاه دونوکلئونی را با عرض  $b$  و عمق  $V$  چاه مربعی پتانسیل فرضی مربوط می‌سازد. شعاع مغز سخت  $c$  در معادله وارد نمی‌شود. از آنجا که  $E_B$  اندازه گیری شده است، معادله (۱۶.۱۲) رابطه‌ای بین دو پارامتر مجهول  $V$  و  $b$  به دست می‌دهد. بنابراین برای تعیین این پارامترها، باید معادله دیگری که این دو را به هم مرتبط می‌سازد، به دست آوریم. یعنی باید از نتیجه تجربی دیگری در این مورد استفاده کنیم.

بدیهی است که می‌توان با انتخاب هر عدد موج مثبت  $K$  و یا چاه پتانسیل  $V$  با هر عمقی، معادله (۱۶.۱۲) را حل کرد و  $b$  را به دست آورد. در شکل ۴.۱۲، منحنی  $a$  رابطه بین  $V$  و  $b$  را نشان می‌دهد. به طوری که این منحنی نشان می‌دهد، عمق چاه مربعی پتانسیل را هماهنگ با پهنای، طوری می‌توان تنظیم کرد که مقدار صحیح انرژی بستگی دوترون را به دست دهد.



شکل ۴.۱۲ عمق چاه پتانسیل برحسب عرض چاه، منحنی a مقدار صحیح انرژی بستگی دوترون را به دست می دهد. منحنی b فقط بستگی ضعیف نوترون به پروتون را نشان می دهد، و منحنی c اندازه صحیح دوترون را به دست می دهد.

مقدار تجربی تکانه زاویه ای دوترون  $I = 1$  است که موازی بودن اسپینها را نشان می دهد ( $S = 1$  سه تاییه). بنا بر این منحنی a در شکل ۴.۱۲ برای نیروی سه تاییه مورد استفاده قرار می گیرد. همچنین عمق چاه  $V_0$  برحسب پهنای  $b$  برای حالت  $E_B \approx 0$  نشان داده شده است (منحنی b)، که از معادله (۱۶.۱۲) محاسبه می شود. حالت تک تاییه  $S = 1$  (اسپینهای متقابل) سیستم قیدی ندارد و از اینجا نتیجه می شود که درحالت تک تاییه، پارامترهای چاه توسط نقطه ای در زیر منحنی b نشان داده می شوند.

معادله (۱۶.۱۲) با دانستن انرژی بستگی دوترون، رابطه ای بین پارامترهای  $V_0$  و  $b$  در حالت سه تاییه به دست می دهد. از مطالعه پراکندگی در انرژی بالا اطلاعاتی به دست می آید که نشان می دهد برای شعاع قسمت سخت دافعه، حدود  $c = 4F$  مقدار منطقی است. بنا بر این برای تعیین پارامترهای  $V_0$ ،  $b$  و  $c$  نیاز به رابطه ای دیگر داریم. این رابطه از ریشه میانگین مربعی شعاع  $F = 2.1 \langle r_d^2 \rangle^{1/2}$  که به کمک آزمایشهای پراکندگی الکترون اندازه گیری می شود، به دست می آید (بخش ۱۰.۱۲). با استفاده از تابع موج شعاعی  $u$  [معادلات (۱۵.۱۲) و (۱۳.۱۲) که با هم بهنجار شده اند]، می توان نوشت

$$\langle r_d^2 \rangle = \frac{1}{4} \int_0^\infty r^2 u^2 dr + \langle r_p^2 \rangle \quad (17.12)$$



ضریب  $1/4$  ناشی از این حقیقت است که  $r/2$  فاصله بین مرکز جرم دوترون تا مرکز پروتون است. اگر پروتون را ذره‌ای نقطه‌ای در نظر می‌گیریم، عبارت اول معادله (۱۷.۱۲) می‌توانست مقدار چشمداشتی مربع شعاع الکترومغناطیسی دوترون باشد. به آسانی می‌توان نشان داد که چون پروتون ذره‌ای نقطه‌ای نیست، مربع شعاع پروتون باید اضافه شود. با محاسبه مقدار انتگرال و قرار دادن  $\langle r_p^2 \rangle^{1/2} = 0.8 \text{ F}$  و  $\langle r_d^2 \rangle^{1/2} = 2.1 \text{ F}$  قرار دادن  $c = 0.04 \text{ F}$  می‌توان رابطه دیگری بین  $V$  و  $b$  به دست آورد که در شکل ۴.۱۲ به صورت منحنی  $c$  رسم شده است. منحنیهای  $a$  و  $c$  یکدیگر را در  $F = 1.3327 \text{ F}$  و  $b = 7.3 \text{ MeV}$  قطع می‌کنند که نشان می‌دهد این مقادیر با نتایج تجربی مطابقت دارند.

در اینجا باید مجدداً تأکید شود که چاه پتانسیل مربعی يك فرض غیر واقعی است و برای سهولت در پی‌گیری تجزیه و تحلیل موضوع انتخاب شده است. در هر حال، با تحلیلی مشابه برای هر شکل مناسب دیگر پتانسیل می‌توانیم رابطه‌ای مشابه رابطه (۱۶.۱۲) بین پارامتر مشخصه عرض و پارامتر مشخصه عمق برای این نوع چاه به دست آوریم.

نتایج به دست آمده از دو آزمایش در مقایسه با نظریه بالا کمی مغایرت دارند. یکی از تجربیات اندازه‌گیری گشتاور دوقطبی مغناطیسی و دیگری از گشتاور چهار قطبی الکتریکی است. بر طبق نظریه، گشتاور دوقطبی مغناطیسی باید برابر جمع جبری گشتاورهای دوقطبی دونوکلئون باشد. مقدار اندازه‌گیری شده، انحرافی برابر ۲۵ درصد نشان می‌دهد. البته حالت  $S$  دارای تقارن کروی است و بنابراین گشتاور چهار قطبی آن باید صفر باشد، که این طور نیست. هر دو موضوع را با فرض اینکه نیروی پروتون-نوترون بستگی به سمتگیری نسبی بردار اسپین  $S$  و بردار جدایی  $\mathbf{r}$  دارد (نیروی تانسوری)، می‌توان تشریح کرد.

### ۳.۱۲ پراکندگی نوکلئون - نوکلئون

در مطالعه پراکندگی نوکلئون - نوکلئون و همچنین در سایر موارد فیزیک هسته‌ای، به طور مداوم نتایج نظری و تجربی را مقایسه می‌کنیم. سطح مقطع پراکندگی زمینه مشترک مناسبی برای مطالعه نظری و تجربی پراکندگی نوکلئون - نوکلئون است. مفهوم سطح مقطع پراکندگی در بخش ۱۰.۱ تشریح شد، و از سطح مقطعهای دیفرانسیل در بخش ۳.۴ بحث شد. در اینجا، بعضی از سطح مقطعهای تجربی و نظری برخورد نوکلئون - نوکلئون در انرژیهای پایین را، که در آن هدفی از نوکلئونها به وسیله نوکلئونهای دیگر بمباران می‌شود، نام می‌بریم. در انرژی بمباران  $E \leq 10 \text{ MeV}$  معلوم می‌شود که در نظر گرفتن فقط يك حالت نسبی  $S$  ( $l=0$ ) برای دو ذره، مورد نیاز است. در اینجا نمی‌توانیم به تشریح ریزه کاریهای این موضوع بپردازیم، جز اینکه یادآور شویم چون نیروهای هسته‌ای دارای برد کوتاه هستند، برای مشاهده هر نوع اثری عملاً بایستی برخورد شاخ به شاخ را در نظر بگیریم. از نقطه نظر کوانتومی این بدان معنی است که تکانه زاویه‌ای نسبی صفر است.

بر اساس ایده‌های کلاسیکی، اسپین دونوکلئون برخوردکننده باید در نیمی از

رویدادها ناموازی و درنیم دیگر موازی باشند. پیش بینی مکانیک کوانتومی سیستم نوترون-پروتون به صورت زیر است. بردار اسپین کل سیستم S به همان ترتیب حالت ایستا (ی دوترون) کوانتیده است. عدد کوانتومی اسپین کل در حالت تک تابه  $S=0$  و در حالت سه تابه  $S=1$  است. بنابراین حالت سه تابه دارای سه حالت فرعی با امتدادهای فضایی متفاوت بردار اسپین است، در حالی که حالت تک تابه فقط دارای یک حالت فرعی است. احتمال وجود هر یک از این حالت‌های فرعی یکی است، به طوری که سطح مقطع متوسط کل در  $l=0$  برابر است با

$$\sigma_0 = \frac{3}{4}\sigma_{1,0} + \frac{1}{4}\sigma_{0,0} \quad (18.12)$$

شاخص  $l$  برای حالت سه تابه و شاخص  $s$  برای حالت تک تابه است. (با شکل ۲.۹ مقایسه کنید.)

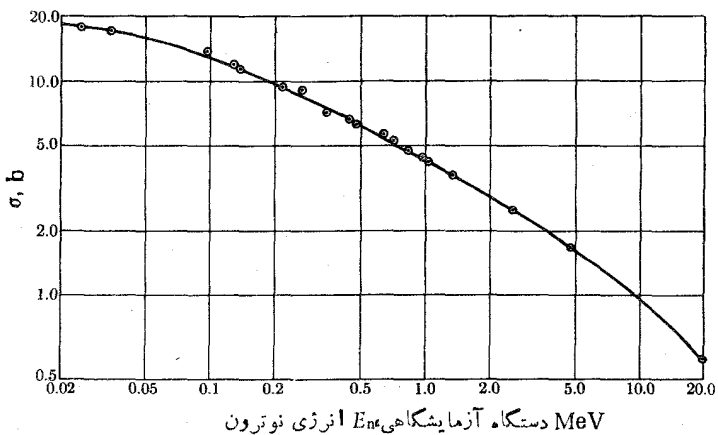
در پراکنندگی پروتون - پروتون در انرژیهای پایین، بر اساس اصل طرد پاؤلی حالت سه تابه ممنوع است. بنابراین پتانسیل مؤثر برابر پتانسیل تک تابه به اضافه پتانسیل کولنی است.

پراکنندگی نوکلئون - نوکلئون در انرژیهای پایین (کمتر از حدود ۲۰ MeV) از نقطه نظر مکانیک موجی کاملاً روشن است، اما به علت طولانی شدن مطلب از بحث آن صرف نظر می کنیم. البته سطح مقطع پراکنندگی شدیداً تابع پتانسیل نوکلئون - نوکلئون است. اما، این طور برمی آید که در انرژیهای پایین، سطح مقطعهها نسبت به شکل پتانسیل حساس نیستند. به طوری که خواهیم دید، فرض چاه پتانسیل مربعی در این مورد کافی است. زیرا در هر آزمایش موجی، تشخیص جزئیاتی که خیلی کوچکتر از طول موج هستند، مشکل است.

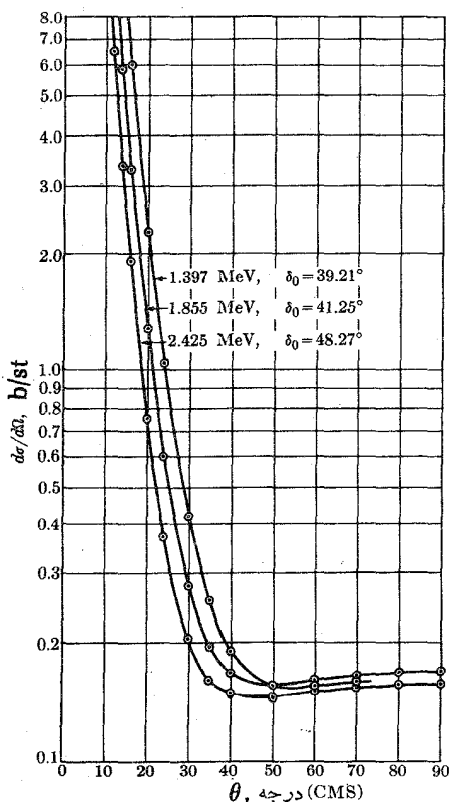
سطح مقطع پراکنندگی نوترون - پروتون را می توان به آسانی از روی کاهش شدت باریکه نوترون، ضمن عبور از یک نمونه هیدروژن، اندازه گرفت. شکل ۵.۱۲ نتایج چنین اندازه گیریهایی را در چند آزمایشگاه، برای انرژیهای از ۲۰۰ eV تا ۲۰ MeV نشان می دهد. در تجربیاتی دیگر برای انرژیهای پایتتر و از طریق برون بایی، سطح مقطع در انرژی  $0 \approx E$  برابر با ۲۰۳۶ بارن به دست آمده است. ( $10^{-24} \text{cm}^2 = 1$  بارن.)

منحنی شکل ۵.۱۲ سطح مقطعهها را بر اساس محاسبات نظری و با فرض چاه پتانسیل مربعی، برای نیروی تک تابه و سه تابه نشان می دهد. برای نیروی سه تابه، از چاه پتانسیلی که منطبق با داده های دوترون است، استفاده کردیم. برای نیروی تک تابه پارامترهای چاه عبارت اند از

$$\text{پتانسیل تک تابه} \begin{cases} c = 0.4 \text{ F} \\ b = 1.45 \text{ F} \\ V = 39 \text{ MeV} \end{cases}$$



شکل ۵.۱۲ سطح مقطع کل برای پراکتدگی نوترون-پروتون. منحنی نظری با فرض  $r_{0s} = 2.40 \text{ F}$  و  $r_{0t} = 1.70 \text{ F}$ ,  $a_s = 2.37 \text{ F}$ ,  $a_t = 5.38 \text{ F}$  رسم شده است.



شکل ۶.۱۲ سطح مقطع نظری و تجربی پروتون-پروتون در سه انرژی.

این پارامترها، با انطباق سطح مقطع کسل در  $E \approx 0$  و در  $E_n = 1.315 \text{ MeV}$ ، تعیین شده‌اند. به طوری که از شکل ۵.۱۲ می‌توان دید، تطبیق منحنی بانقاط تجربی در تمام گستره انرژی بسیار خوب است. خطاهای تجربی در حدود شعاع دوا بر رسم شده در شکل است. جالبتر از تطبیق در شکل ۵.۱۲، توافق بین نتایج تجربی و نظری پراکندگی پروتون-پروتون در انرژیهای پایین است. شکل ۶.۱۲ سطح مقطعیهای دیفرانسیل اندازه‌گیری شده و منحنیهای نظری متناظر را نشان می‌دهد. سطح مقطعیهای نظری با استفاده از نیروی کولنی و پتانسیل تک‌تایه به مقدار داده شده در بالا برای حالت پروتون-نوترون، محاسبه شده است. جدا از نتایج مربوط به اصل طرد پاولی، معنی این کار آن است که نیروی بین نوکلئون - نوکلئون مستقل از بار الکتریکی است، یعنی نیروی بین زوج نوترون - پروتون مشابه نیروی بین زوج پروتون - پروتون است و در نتیجه مشابه نیروی بین زوج نوترون-نوترون است.

بعلاوه انطباق بسیار زیبای منحنی بانقاط تجربی، جالبترین ویژگی شکل ۶.۱۲ گودی جزئی منحنی سطح مقطع در حدود ۵۰ درجه است. این موضوع نتیجه تداخل ویرانگری بین يك قسمت از موج پراکنده به وسیله پتانسیل هسته‌ای و قسمت دیگر موج پراکنده به وسیله پتانسیل کولنی است. به دست آوردن چنین نتیجه‌ای، بدون استفاده از نظریه موجی، خیلی مشکل است.

## ۲.۱۲ نیروهای هسته‌ای

مطالب دو بخش اخیر به ما آموخته است که مکانیک موجی يك وسیله نظری قوی در مباحث جدید فیزیک هسته‌ای است. تا اینجا مطالبی درباره بزرگی نیروهای هسته‌ای آموخته‌ایم، ولی درباره جزئیات شکل پتانسیل بحث زیادی نشده است. جزئیات بیشتر را می‌توان به کمک مطالعات انرژیهای بالا آموخت. به هر حال، به جای تشریح چنین آزمایشهایی به پیشرفتهایی که حاصل از مطالعات نظری پتانسیل نوکلئون - نوکلئون است، می‌پردازیم. در حال حاضر نیروهای هسته‌ای را به طور کلی ناشی از میدانی مزونی می‌دانند که در اصل شبیه میدانهای الکترومغناطیسی ولی دارای برد کوتاهتر است. یوکاوا<sup>۱</sup> متذکر شد که میدان برد کوتاه، به عکس میدان الکترومغناطیسی که از فوتونهای با جرم سکون صفر تشکیل می‌شود، از يك میدان با کوانتومهایی که جرم سکون آنها مخالف صفر است تشکیل می‌شود. بحث یوکاوا، به طور خیلی ساده، تقریباً به صورت زیر است

میدان الکترومغناطیسی از معادله موجی تبعیت می‌کند که می‌توان آن را از معادلات ماکسول به دست آورد. به عنوان مثال، پتانسیل الکتریکی نرده‌ای  $U$  در فضای آزاد (خلأ) از معادله معروف موج پیروی می‌کند

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)U = 0 \quad (19.12)$$

برای میدان ایستا در فضای آزاد داریم  $\nabla^2 U = 0$  (معادله لاپلاس)، و یا در فضای حاوی بارهای الکتریکی داریم  $\nabla^2 u = -\rho/\epsilon_0$  (معادله بواسون). با انتگرال گیری این معادلات، جواب ایستا و آشنای  $U = q/4\pi\epsilon_0 r$  برای پتانسیل نردهای در فاصله  $r$  از بار نقطه‌ای  $q$  به دست می آید.

بر اساس نظریه‌های جدید، میدان الکترومغناطیسی به وسیله فوتونهای مجازی، که به طور پیوسته توسط ذرات باردار گسیل و جذب می شوند، انتقال می یابد. بر طبق این نظر، می توانیم معادله (۱۹.۱۲) در مورد پتانسیل نردهای و معادله هم ارز آن در مورد پتانسیل برداری الکترومغناطیس را به عنوان معادلات موج مکانیک کوانتومی میدانهای فوتونی در نظر بگیریم. در تشبیه کامل با معادله شرودینگر، معادلات موج الکترومغناطیسی به شکل ۱۹.۱۲ را می توان با گذاردن عملگر  $-\hbar^2 \nabla^2 - \hbar^2 \partial/\partial t$  به جای مربع تکانه و عملگر  $-\hbar^2 \partial/\partial t$  به جای انرژی در معادله زیر به دست آورد

$$-p^2 + \frac{1}{c^2} E^2 = 0 \quad (20.12)$$

البته این معادله رابطه‌ای صحیح بین تکانه و انرژی يك ذره با جرم سکون صفر است. معادله مربوط به ذره با جرم سکون مخالف صفر  $m$  (پیوست ۳) عبارت است از

$$-p^2 - m^2 c^2 + \frac{1}{c^2} E^2 = 0 \quad (21.12)$$

اگر جا گذاریهای بالا را انجام دهیم، معادله زیر به دست می آید

$$\left(\nabla^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi = 0 \quad (22.12)$$

معادله (۲۲.۱۲) که معادله کامل موج برای يك ذره نسبییتی بدون اسپین است، به عنوان معادله میدان مزونی نردهای  $\Phi$  در نظر گرفته می شود. عامل زمان را از این معادله، کاملاً مشابه آنچه در معادله شرودینگر انجام دادیم، جدا می کنیم و يك معادله موج مستقل از زمان برای میدان مزونی با انرژی کل  $E = 0$  (انرژی بستگی برابر با انرژی سکون) به دست می آوریم

$$(\nabla^2 - \mu^2)\phi = 0 \quad (23.12)$$

که در آن داریم

$$\mu = \frac{mc}{h} \quad (24.12)$$

جواب متقارن کروی قابل قبول معادله (۲۳.۱۲) بدصورت زیر است

$$\phi = g \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (25.12)$$

که در آن  $g$  ثابتی نامعین است که نقش آن مشابه بار  $q$  در حالت میدان الکتروستاتیکی است، یعنی  $g$  بستگی به «چشمه» موجود در مبدأ دارد. در حالت الکتروستاتیک، پتانسیل مکانیکی حاصل از برهم کنش بین دو بار  $q$  عبارت است از  $qU = q^2 / 4\pi\epsilon_0 r$ . این برهم کنش در نتیجه تبادل مداوم فوتونهای مجازی بین دو بار حاصل می‌شود. در مورد نیروهای هسته‌ای هم، پتانسیل مکانیکی حاصل از برهم کنش بین دو نوکلئون به بزرگی  $g$  برابر است با

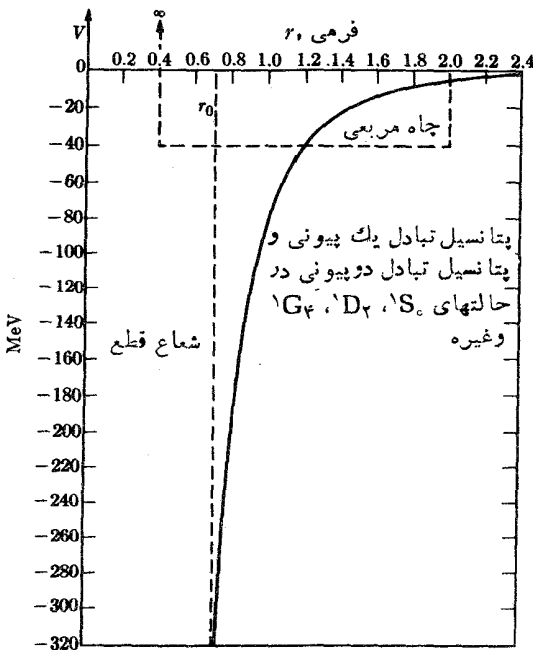
$$V = -g^2 \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (26.12)$$

که ناشی از تبادل مداوم مزونهای مجازی با جرم سکون  $m$  بین دو نوکلئون است. کلمه «مجازی» بدین معنی است که مزونها از نوکلئونها جدا نمی‌شوند، مگر آنکه حداقل به مقدار  $mc^2$  به آنها انرژی داده شود. مدت زمان گذار مزون،  $\Delta t$ ، از رابطه عدم قطعیت  $\Delta t \Delta E \approx \hbar$  به دست می‌آید که در آن  $\Delta E = mc^2$  است. از اینجا برد نیروی هسته‌ای به دست می‌آید  $\Delta r \approx \Delta t c \approx \hbar / mc$  که با روابط (۲۴.۱۲) و (۲۵.۱۲) مطابقت دارد. با استفاده از برد تجربی نیروهای هسته‌ای و به کار بردن معادلات (۲۵.۱۲) و (۲۴.۱۲) می‌توان تخمین زد که جرم مزونهای حامل میدان حدود ۳۰۰ برابر جرم سکون الکترون است. گروهی از مزونها که جرمشان بیشترین نزدیکی را با این مقدار دارد، مزونهای پی یا پيونها هستند که از سه نوع اند: مثبت، منفی و خنثی که اسپین ذاتی همه آنها صفر است. با قراردادن جرم سکون حدود ۲۷۰ برابر جرم سکون الکترون در رابطه (۲۴.۱۲)، مقدار  $\mu = 0.70 \text{ F}^{-1}$  به دست می‌آید. میدان نیروی بین دو پروتون یا بین دو نوترون فقط می‌تواند به وسیله مزون پی خنثی حمل شود، ولی میدان نیروی بین نوترون و پروتون به وسیله مزون پی باردار حمل می‌شود. در حالت اخیر، بار الکتریکی از یک نوکلئون به نوکلئون دیگر انتقال پیدا می‌کند به طوری که نوترون به پروتون و بالعکس تبدیل می‌شود.

نوع دیگری از ذره، به نام هیون، قبل از ذره پیون کشف شد که ابتدا تصور می‌شد ذره یوکاوا باشد. میونها (ی مثبت یا منفی) برهم کنش ضعیفی با هستهها دارند، و در این گروه میون خنثی وجود ندارد. بعلاوه، اسپین این ذرات  $1/2$  است و در ضمن خارج شدن از دستگاه، تکانه زاویه‌ای آن را تغییر می‌دهند.

در این شرح مختصر نظریهٔ مزونی نیروهای هسته‌ای، چند نکتهٔ مهم را مورد بحث قرار نداده‌ایم. مشاهده شده است که پیوندها دارای پارامتر ذاتی منفی هستند، بنابراین در حالت  $I=0$  پیوندها از نوترون به پروتون منتقل نمی‌شوند. زیرا که در این صورت بقای پارامتر وجود ندارد. برای برقراری بقای تکانهٔ زاویه‌ای و پارامتر، تنها حالت ممکن برای پیون حالت  $I=1$  است. موقعی که ذره به وجود می‌آید و انتقال می‌یابد، اسپین نوکلئون مادر طوری تغییر می‌کند که اسپین حاصل  $1/2$  باشد. اگر این موضوع رعایت شود، معلوم می‌شود که میدان نیروی بین دو نوکلئون در حالت سه تاییه، طبق پیش‌بینی معادلهٔ (۲۶.۱۲)، تقارن کروی ندارد، اما دارای عبارتی اضافی است که همان نیروی تانسوری است که در بخش ۲.۱۲ تذکر داده شد.

پتانسیل تبادل یک پیونی که در بالا بحث شد، بر اساس انتقال یسک مزون منفرد از نوکلئونی به نوکلئون دیگر است. در بسط مهم این نظریه، انتقال همزمان دو پیون در نظر



شکل ۷.۱۲ پتانسیل تبادل پیون برای حالت‌های تک تاییهٔ  $I$  زوج. برای مقایسه، چاه پتانسیل مربعی که منطبق با اطلاعات پراکندگی در انرژی‌های پایین است، نشان داده شده است.

گرفته می‌شود. عبارت ریاضی پیچیده‌ای که پتانسیل تبادل دوپیونی را تشریح می‌کند، دارای شکل مشخصه‌نمایی  $e^{-kr}$  است. ضریب ۲ در پتانسیل تبادل دوپیونی سبب کاهش سریعتر نسبت به پتانسیل تبادل یک پیونی می‌شود، آن‌چنان‌که این عبارت در فواصل بیش از ۲F اهمیتی ندارد.

شکل ۷۰۱۲، به‌عنوان مثال، پتانسیل تک‌تابی نوکلئون-نوکلئون را نشان می‌دهد که در آن تکانه‌های مداری نسبی زوج ( $l = 0, 2, 4, \dots$ ) در فواصل بیش از  $r = 0.97F$  رسم شده‌اند. در فواصل کمتر، برهم‌کنش‌ها (ی‌دفاعه یا جاذبه) بسیار شدیدترند و تاکنون، چه به‌طور تجربی و چه به‌طور نظری، شناخته نشده‌اند. در چنین فواصل کوچک‌تری، تصور می‌شود که تبادل‌های چند پیونی و همچنین تبادل‌های چندمزونی سنگین‌تر نیز امکان‌پذیرند. در نتیجه‌گیری پایانی می‌توان گفت قوانین حاکم بر نیروهای هسته‌ای که برهم‌کنش قوی نیز نامیده می‌شوند، واقعاً پیچیده هستند. ممکن است هرگز نتوانیم این قوانین را به‌صورت دقیق ریاضی، به‌طوری‌که در مورد برهم‌کنش الکترومغناطیس داشتیم، بیان کنیم.

## ۵.۱۲ مدل پوسته‌ای هسته

به‌طوری‌که در بخش ۴.۹ تشریح شد، مدل پوسته‌ای اتم اساساً الکترونها را در مدارهای مستقل نشان می‌دهد و هر الکترون در میدان متوسط حاصل از هسته و الکترونها دیگر حرکت می‌کند. طرح تراز انرژی محاسبه شده براساس این نمایش، در اثر اختلال ناشی از اسپین الکترون و گشتاور مغناطیسی مربوطه تغییر می‌کند. از آغاز فعالیت‌های فیزیکی هسته‌ای، عده‌ای از محققین سعی کرده‌اند تا برای هسته نیز مدل مشابهی به دست آورند. اما، این کوششها تا سال ۱۹۴۹ خیلی موفقیت‌آمیز نبود تا اینکه در این سال مایر<sup>۱</sup> و همچنین گروه هاکسل، یسن و سوئس<sup>۲</sup> به‌طور مستقل فرض کردند که بین اسپین و تکانه زاویه‌ای مداری هر نوکلئون یک جفت‌شدگی قوی وجود دارد. این فرض توافقی کیفی بین نظریه و نتایج تجربی معینی به‌وجود آورد که در زیر بحث می‌شود.

در هسته پتانسیل مرکزی جاذبه‌ای، نظیر آنچه در اتم روی الکترونها اثر می‌کند، وجود ندارد. بلکه هر یک از نوکلئونها نوکلئون دیگر را در نتیجه برهم‌کنش قوی، که در بخش قبل بحث شد، جذب می‌کند. فرض می‌کنیم که نوکلئونها در مدارهای جداگانه‌ای حرکت می‌کنند و مجموع نیروهایی که بر نوکلئون معین اثر می‌کند را می‌توان به‌وسیله پتانسیل کروی متقارن، یا برای سهولت چاه پتانسیل مرئی، نشان داد.

در اینجا ابتدا مسئله قابل حلی را در نظر می‌گیریم که در آن موقعیت ترازهای مختلف انرژی در چاه مرئی بینهایت عمیق به‌شعاع  $r_0$  محاسبه می‌شود. البته می‌دانیم که چاه واقعی دارای عمق معینی است. برای سهولت فرض می‌کنیم پتانسیل در داخل چاه

1. M. G. Mayer, *Phys. Rev.*, 75 (1949), p. 1969.

2. O. Haxel, J. H. Jensen, and H. E. Suess, *Phys. Rev.*, 75 (1949), p. 1766.



صفر و در خارج آن بینهایت باشد. جواب معادله شرودینگر برای یسك زره در پتانسیل متقارن کروی در حالت کلی به صورت زیر است

$$\psi = P_l(r)Y_{l,m}(\theta, \psi) \quad (27.12)$$

که در آن تابع موج شعاعی  $R_l(r)$  جواب معادله زیر است

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR_l}{dr} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ E - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] R_l = 0 \quad (28.12)$$

در اینجا  $E$  قسمتی از کل انرژی مربوط به حرکت نوکلئون مورد مطالعه و  $m$  جرم کاهش یافته آن است که در هسته‌های سنگین عملاً برابر جرم نوکلئون می‌شود. لازم است که تابع موج برای تمام مقادیر  $r$  معین باشد. جوابهای معادله (28.12) که نیاز فوق را برآورده می‌کنند، توابع کروی بسل هستند

$$R_l(r) = j_l(kr) = \left( -\frac{r}{k} \right)^l \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^l \left( \frac{\sin kr}{kr} \right) \quad (29.12)$$

که در آن داریم

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE} \quad (30.12)$$

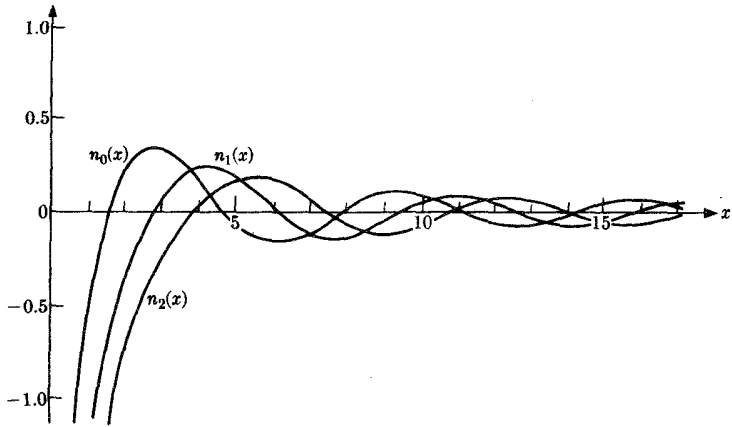
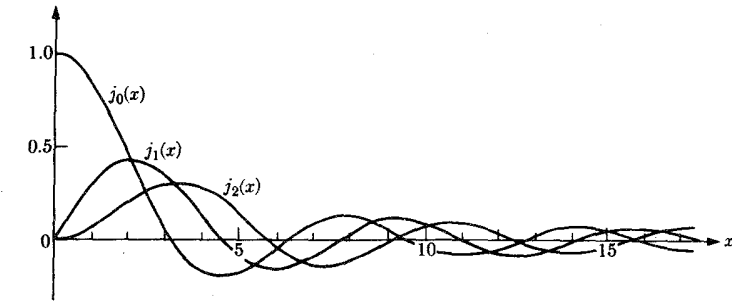
توابع کروی بسل در سه مرتبه پایین ( $l = 0, 1, 2$ ) در شکل ۸.۱۲ رسم شده‌اند. توابع کروی نومن  $n_l(kr)$  که دارای همان شکل ریاضی  $j_l(kr)$  هستند، جز اینکه به جای  $\sin kr$  در معادله (29.12) مقدار  $-\cos kr$  قرار داده شده است، نیز در شکل نشان داده شده‌اند. توابع نومن در معادله (28.12) صدق می‌کنند، لکن در  $r = 0$  مقدار آنها نامعین است.

برای مسئله خاص اینجا شرط مرزی دیگری نیز وجود دارد، یعنی تابع موج (27.12) برای تمام مقادیر  $\theta$  و  $\phi$  در  $r = r_0$  باید مساوی صفر باشد. هر مقدار  $kr$  که تابع کروی بسل را صفر کند، «صفر» تابع نامیده می‌شود و آن را با  $\eta$  نمایش می‌دهیم. برای هر مقدار  $l$  تابع در چند نقطه صفر می‌شود و هر یک از آنها، در این حالت خاص، مربوط به مقداری از  $k$  است که با  $kr_0 = \mu$  داده می‌شود. بنابراین از معادله (30.12)، برای تراز انرژی معین رابطه زیر به دست می‌آید که این تراز انرژی از طریق تابع موجی شعاعی که در  $\eta$  صفر خاتمه می‌یابد، حاصل می‌شود

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \eta^2}{2mr_0^2} \quad (31.12)$$

مقادیری از  $\eta$  که تابع را صفر می‌کنند، می‌توانند از شکل ۸.۱۲ و یا از جدول توابع

به دست آیند. جدول ۴۰۱۲ مربع این مقادیر صفر کننده یا، طبق معادله (۳۱۰۱۲)، ترازهای انرژی چاه مربعی بینهایت را بر حسب واحدهای  $\hbar^2/2mr^2$  به دست می‌دهند. علامتهای اختصاری ترازهای انرژی هسته‌ای، جز در مورد عدد کوانتومی اصلی،



شکل ۸۰۱۲ توابع کروی بسل و نومن برای  $l=0, 1, 2$ .

جدول ۴۰۱۲ ترازهای انرژی در چاه مربعی بینهایت.

$\nu_d$	$\nu_g$	$\nu_p$	$\nu_f$	$\nu_s$	$\nu_d$	$\nu_p$	$\nu_s$	حالت
۸۲۷۷۲	۶۶۷۹۶	۵۹۷۶۸	۴۸۷۸۳	۳۹۷۴۸	۳۳۷۲۱	۲۵۷۱۴	۹۷۸۷	$\eta^2$
$\nu_g$	$\nu_j$	$\nu_p$	$\nu_i$	$\nu_f$	$\nu_s$	$\nu_h$		حالت
۱۳۷۷۰۱	۱۳۵۷۸۶	۱۱۸۷۹۰	۱۱۰۷۵۲	۱۰۸۷۵۱	۸۸۷۸۳	۸۷۷۵۳		$\eta^2$

مانند علامتهای ترازهای اتمی است. به‌عنوان مثال، برای تمیز دادن بین حالت‌های  $d$  آنها را با  $1d, 2d, 3d$  و... علامت‌گذاری می‌کنیم، و  $1d$  اولین تراز  $d$  را نشان می‌دهد. حروف  $s, p, d, f, g$  و غیره به‌ترتیب ترازهای با عدد کوانتومی تکانه زاویه‌ای مداری  $l$  برابر صفر، ۱، ۲، ۳، ۴ و غیره را، نظیر فیزیک اتمی، نشان می‌دهند. هر تراز مدل پوسته‌ای، مثلاً تراز  $2d$ ، در حقیقت شامل  $1 + 2l$  زیرحالت است که هر یک از آنها تابع موج زاویه‌ای متفاوتی  $Y_{l,m}(\theta, \phi)$  دارد. از آنجا که اسپین نوکلئون می‌تواند دارای دو جهت متفاوت باشد، هر تراز می‌تواند شامل  $2(2l+1)$  پروتون باشد. بعلاوه این تراز می‌تواند شامل  $2(2l+1)$  نوترون نیز باشد، زیرا این دو ذره متفاوت از یکدیگرند و هیچکدام جای دیگری را نمی‌گیرند (وجود یکی باعث حذف دیگری نمی‌شود).

ستون دوم شکل ۹.۱۲ موقعیتهای نسبی ترازهای انرژی چاه مربعی بینهایت را نشان می‌دهد. ستون اول ترازهای انرژی نوسان‌کننده هماهنگ را نشان می‌دهد که به‌منظور مقایسه، ترازهای  $1s$  و  $4s$  با نظیر آنها در چاه مربعی بخوبی تنظیم شده است. این ترسیم فقط طرحی از ترازا را نشان می‌دهد.

برای هسته، چاه پتانسیل مربعی بینهایت البته واقعی نیست، و پتانسیل واقعیت‌چاهی با عمق محدود  $V_0$  است. عمق و شعاع  $r_0$  هسته‌ای داده شده را می‌توان، با اعمال این ضرورت که چاه هسته‌ای نظری به‌وجود می‌آورد که دارای شعاع و انرژی بستگی کل مورد مشاهده است، تعیین کرد. محاسبه با همان روش بالا انجام می‌شود، جز اینکه تابع موج در  $r_0$  صفر نمی‌شود بلکه وارد ناحیه‌ای با انرژی جنبشی منفی می‌شود. در این ناحیه یعنی برای  $r > r_0$  تابع شعاعی موج، جواب معادله (۲۸.۱۲) با انرژی منفی  $E$  است. جوابهایی که در شرایط مرزی  $\infty \rightarrow r$  صدق می‌کنند، توابع کروی هانکل هستند

$$h_l(kr) = j_l(kr) + i n_l(kr) \quad (۳۲.۱۲)$$

با متغیر مختلط

$$k = ik = \frac{(2mE)^{1/2}}{\hbar}$$

یعنی

$$k = \frac{(-2mE)^{1/2}}{\hbar} \quad (۳۳.۱۲)$$

چند مورد اولیه از این توابع عبارت‌اند از

$$h_0(ikr) = -\frac{1}{kr} e^{-kr}, \quad l=0$$

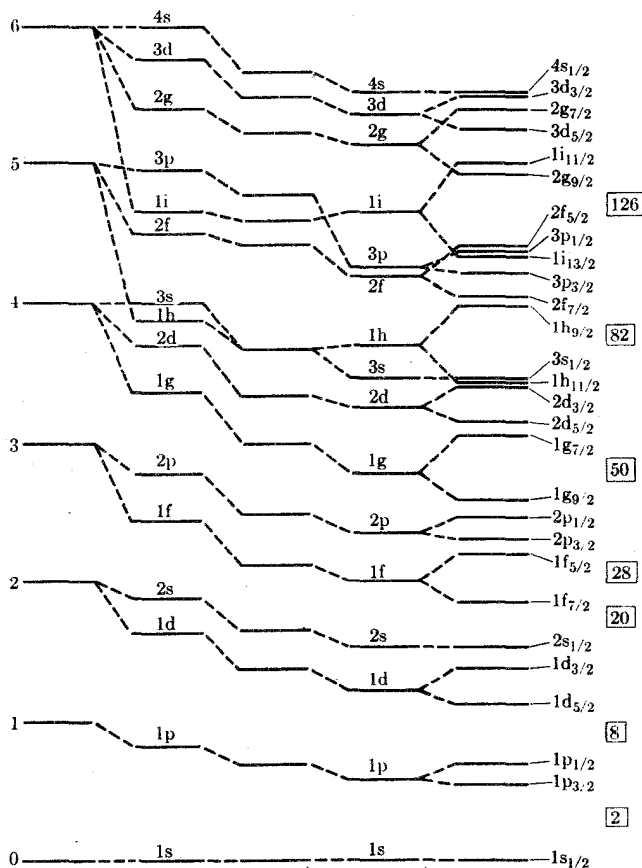
$$h_1(ikr) = i \left( \frac{1}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} \right) e^{-kr}, \quad l=1$$

$$h_{\gamma}(ikr) = \left( \frac{1}{kr} + \frac{3}{(kr)^3} + \frac{3}{(kr)^5} \right) e^{-kr}, \quad l=2$$

$$h_{\gamma}(ikr) = -i \left( \frac{1}{kr} + \frac{1}{(kr)^3} + \frac{15}{(kr)^5} + \frac{15}{(kr)^7} \right) e^{-kr}, \quad l=3$$

$$h_{\gamma}(ikr) = - \left( \frac{1}{kr} + \frac{10}{(kr)^3} + \frac{45}{(kr)^5} + \frac{105}{(kr)^7} + \frac{105}{(kr)^9} \right) e^{-kr}, \quad l=4$$

(۳۴.۱۲)



۱s ۱s ۱s<sub>1/2</sub>  
 با جفت شدن چاه مربعی چاه مربعی چاه مربعی نوسان کننده  
 اسپین مدار باله‌های گرد محدود بینهایت هماهنگ

شکل ۹.۱۲ ترتیب قرار گرفتن ترازهای انرژی بر طبق مدل ذره‌ای مستقل با فرض اشکال مختلف برای پتانسیل هسته‌ای.

جوابهای معادله در داخل و خارج چاه پتانسیل باید در مرز  $r = r_0$  با هم مطابقت داشته باشند. اگر  $V_0$  و  $r_0$  را داشته باشیم، از معادله حاصل از انطباق می توان انرژی  $E$  را تعیین کرد. نتایج این محاسبات به نحوی است که ترازهای انرژی در مقایسه با ترازهای انرژی چاه پتانسیل مربعی بینهایت، کمی به هم نزدیکتر می شوند. این موضوع نیز به صورت طرحی از ترازها در شکل ۹.۱۲ نشان داده شده است (چاه مربعی محدود).

بالاخره، چاه مربعی تصویر خودسازگاری از هسته به دست نمی دهد. چگالی ذرات در هسته، آن چنان که از توابع موج بحث شده در بالا محاسبه شد، در ناحیه مرکزی تقریباً ثابت است ولی هر چه به سمت مرز هسته برویم چگالی کاهش می یابد. این موضوع به طور تجربی نیز مشاهده شده است (شکل ۲۰۱۲). بدیهی است که چون پتانسیل در نتیجه برهم کنش بین ذرات به وجود می آید، پتانسیل نیز باید به طور مشابهی کاهش یابد. ستون چهارم شکل ۹.۱۲ نتایج حاصل از اصلاح چاه مربعی را با گرد کردن گوشه ها و کاهش دادن آنها نشان می دهد. این عمل باعث ایجاد توزیع چگالی خودسازگاری از نوکلئونها می شود. آخرین اصلاح در این محاسبات، وارد کردن جفت شدگی اسپین-مدار برای هر یک از نوکلئونها است. این عمل شبیه جفت شدگی مغناطیسی در تولید ساختار ریز اتمها است، با این تفاوت که در مورد هسته علامت مخالف و اثر نسبتاً شدیدتر است. پتانسیل اسپین-مدار را می توان به طور ریاضی به صورت زیر بیان کرد

$$V_{SL} = a_{S_0} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \cdot s \quad (35.12)$$

که در آن  $V$  پتانسیل مرکزی عمده است. معادله (۳۵.۱۲) آروینی است و پارامتر  $a_{S_0}$  تنظیم کننده مقادیر است، و طوری معین می شود که فاصله ترازهای انرژی (آخرین ستون شکل ۹.۲۲) تقریباً برابر مقدار مشاهده شده باشد.

هر تراز انرژی در مدل پوسته ای، به طوری که در شکل ۹.۱۲ نشان داده شده است، می تواند دارای  $1 + 2j$  نوکلئون از هر نوع باشد. به عنوان مثال، تراز  $1f_{5/2}$  دارای شش پروتون با مقادیر مختلف  $m_j$  و شش نوترون است. مثلاً،  $2p_{1/2}$  در حالت پایه دارای آرایش زیر است

$$\text{پروتون: } (1s_{1/2})^2 (1p_{3/2})^4 (1p_{1/2})^2 (1d_{5/2})^6$$

$$\text{نوترون: } (1s_{1/2})^2 (1p_{3/2})^4 (1p_{1/2})^2 (1d_{5/2})^6$$

حالتهایی از نوکلئون که فقط در مقدار  $m_j$  متفاوت باشند (مثلاً چهار حالت  $1p_{3/2}$ ) را اغلب به طور جمعی زیر پوسته می نامند.

بین بعضی از ترازهای انرژی شکل ۹.۱۲ شکافهای نسبتاً بزرگی وجود دارند. این شکافها برای هسته های با اعداد نوکلئونی ۲، ۸، ۲۰، ۲۸، ۵۰، ۸۲ و ۱۲۶ رخ می دهند. این اعداد در فیزیک هسته ای همان نقشی را دارند که اعداد اتمی در مورد گازهای نادر

در فیزیک اتمی دارا هستند. قبل از پیشرفت مدل اسپین-مدار، این اعداد را اعداد جادویی می نامیدند. اکنون می گوئیم که به عنوان مثال، هسته  $Z = 50$  معرف پوسته کاملی از پروتون است.

برهم کنش باقیمانده بین پروتونها یا بین نوترونها در زیر پوسته ای پرنشده، تقریباً همیشه به نحوی است که نوکلئونهای مشابه به صورت زوج درمی آیند، مگر در مورد آخرین نوکلئون در هسته هایی که عدد نوکلئونی شان فرد باشد. بر ایند تکانه زاویه ای این زوجها صفر است. بنا بر این، تکانه زاویه ای هسته ای با تعداد نوکلئونهای فرد در حالت پایه، برابر است با تکانه زاویه ای آخرین نوکلئون منفرد. مثلاً در مورد  $^{238}\text{U}$  داریم  $J = 5/2$ . برای هسته زوج-زوج در حالت پایه، مقدار  $J$  همیشه مساوی صفر است.

مدل پوسته ای در تشریح پدیده های هسته ای، و بویژه در مورد هسته هایی با پوسته تقریباً پر، فوق العاده موفق بوده است. هسته ها در فاصله بین پوسته ها، از حالت تقارن کروی خارج می شوند (گشتاور چهار قطبی مخالف صفر است، یعنی  $Q \neq 0$ ). مدل پیشرفته تر، از این مدلی است که از جمع تابع موجهای مدل پوسته ای به دست می آید که به طور قابل-ملاحظه ای در مورد هسته های با پوسته های پرنشده موفق بوده است.

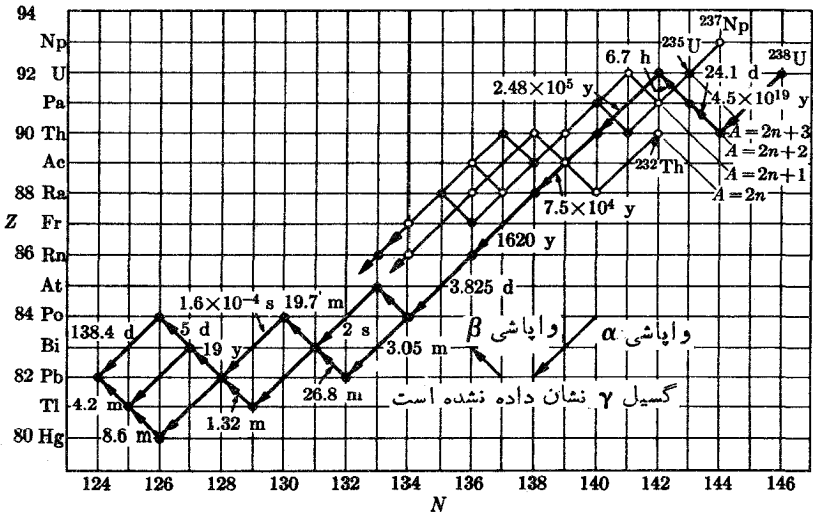
## ۶.۱۲ راديو اکتیویته

راديو اکتیویته طبیعی کاملاً به طور اتفاقی توسط هانری بکرل در سال ۱۸۹۶ کشف شد. بکرل ماده ای حاوی اورانیوم را روی صفحه عکاسی که در کاغذ سیاه پیچیده شده بود، قرار داد. پس از ظهور صفحه، تصاویر ترکیبات بلوری اورانیوم روی صفحه مشاهده شد. پژوهشهای فشرده توسط بکرل، خانم کوری، رادرفورد و دیگران منجر به کشف چندین نوکلید راديو اکتیو (عنصر راديو اکتیو) شد. سه نوع تابش مختلف آلفا، بتا و گاما به دست آمد و متعاقباً نشان داده شد که ذره آلفا شبیه هسته هلیوم، تابش بتا متشکل از الکترونها، و تابش گاما امواج الکترومغناطیس نظیر پرتو ایکس است. بعدها (به بخش ۱۰.۱۲ مراجعه کنید) ذره فراری به نام پادونورینو که همیشه همزمان با واپاشی بتا گسیل می شود، کشف شد. این سه نوع تابش در بخشهای ۸.۱۲، ۹.۱۲ و ۱۰.۱۲ بحث می شوند. در بخش ۹.۱۲، بویژه بحث خواهد شد که چرا همیشه یک ذره آلفا، متشکل از دو پروتون و دو نوترون، گسیل می شود و نهدیک پروتون یا یک نوترون. در بخش ۱۰.۱۲ نشان داده می شود که در دو ایزوبار مجاور، آنکه جرم اتمی اش بیشتر است همیشه ناپایدار است و از طریق فرایند بتا واپاشیده خواهد شد. در هسته های راديو اکتیو طبیعی فرایندهای آلفا و بتا اغلب با هم رقابت می کنند، یعنی از نقطه نظر انرژی گسیل هر دو امکان پذیر است. اینکه هسته ای معین بتواند به طور همزمان گسیل کننده آلفا و بتا باشد، بستگی به نزدیک بودن احتمال وقوع این دو فرایند دارد.

در گسیل آلفا، تعداد نوکلئونها  $A$  چهار واحد تغییر می کند، در گسیل بتا تعداد نوکلئونها  $A$  تغییر نمی کند لکن  $Z$  و  $N$  به اندازه یک واحد در جهت های متقابل تغییر می کنند.

در گسیل گاما، هیچیک از اعداد  $Z$  و  $N$  تغییر نمی کند. بنا براین، بین اعضای زنجیره ای از نوکلیدها با عدد نوکلئونی یکسان  $A$  می توان ارتباط واپاشی بتا، و بین این زنجیره و زنجیره ای با عدد نوکلئونی  $A-4$  می توان ارتباط واپاشی آلفا قائل شد. بدین گونه، چهار خانواده نوکلیدهای رادیواکتیو طبیعی وجود دارند، یکی با  $A=4n$ ، که در آن  $n$  عددی درست است، و بقیه با  $A=4n+1$ ،  $A=4n+2$  و  $A=4n+3$ . به عنوان مثال، شکل ۱۰.۱۲، سری  $4n+2$  اورانیوم-رادیوم را نشان می دهد که از روی نمودار نوکلیدها مشخص شده است، و در آن پیکانها جهت واپاشیها را نشان می دهند. شکل ۱۰.۱۲ فقط شاخه های از زنجیره را نشان می دهد که در رادیواکتیویته طبیعی مشاهده شده اند. ایزوتوپهای رادیواکتیو زیادی با  $A=4n+2$  به طور مصنوعی تولید شده اند که در دو سمت منحنی به صورت شاخه های فرعی با آن ارتباط دارند.

جدول ۵.۱۲ فهرستی از اعضای سری اورانیوم-رادیوم، با نوع فروپاشی و نیمه-عمر آنها را نشان می دهد. هسٹہ مادر (اصلی)، اورانیوم ۲۳۸ با نیمه عمر  $4.5 \times 10^9$  سال است. از آنجا که فرض می شود عناصر منظومه شمسی در حدود  $4 \times 10^9$  سال قبل تشکیل شده باشند، نیمه عمر اورانیوم ۲۳۸ به اندازه کافی طولانی است که کسر بزرگی از آنچه در ابتدا به وجود آمده تا حال باقی مانده باشد. عنصر انتهایی سری اورانیوم-رادیوم، سرب ۲۰۶ پایدار است. نوکلید  $^{234}\text{Pa}$  در جدول ۵.۱۲ دوبار آورده شده است، قسمت  $UX_2$  آن  $^{234}\text{Pa}$  با حالت برانگیخته است که حالتی ایزومری با نیمه عمر ۱۷۱۸ دقیقه است. (و دیگری  $^{234}\text{Pa}$  با نیمه عمر ۶.۷ ساعت.) هر دو گروه از واپاشی بتای



شکل ۱۰.۱۲ سری رادیواکتیو  $A=4n+2$  و چند شاخه اولیه مربوط به سه سری دیگر. در نقاطی که انشعاب رخ می دهد، نیمه عمر نوشته شده است.





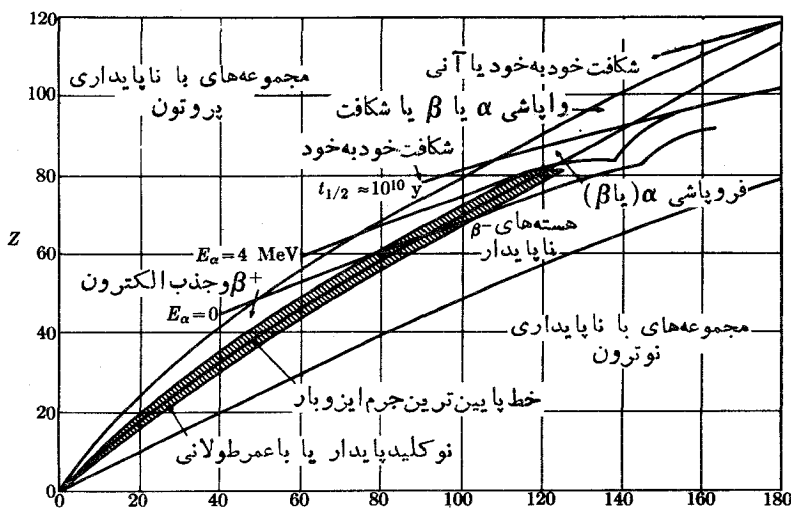
جدول ۵۰۱۲ سری اورانیوم-رادایوم ( $4n+2$ ) همراه با نوع فروپاشی و نیمه عمر.

کسرانشعاب	واپاشی اصلی	واپاشی فرعی	نیمه عمر	نماد جدید	عدد اتمی	نماد قدیمی	نام قدیمی
	$\alpha$		$4.5 \times 10^9 y$	$^{238}U$	۹۲	UI	اورانیوم I
	$\beta^-$		۲۴۱d	$^{234}Th$	۹۰	UX <sub>۱</sub>	اورانیوم X <sub>۱</sub>
۵۰۰۰۵	$\beta^-$	$\gamma$	۱۶۱۸m	$^{234m}Pa$	۹۱	UX <sub>۲</sub>	اورانیوم X <sub>۲</sub>
	$\beta^-$		۶۷h	$^{234}Pa$	۹۱	UZ	اورانیوم Z
	$\alpha$		$2.48 \times 10^5 y$	$^{234}U$	۹۲	UII	اورانیوم II
	$\alpha$		$7.5 \times 10^4 y$	$^{230}Th$	۹۰	Io	یونیوم
	$\alpha$		۱۶۲۰y	$^{226}Ra$	۸۸	Ra	رادایوم
	$\alpha$		۳۸۲۵d	$^{222}Rn$	۸۶	Rn	رادون
$2 \times 10^{-3}$	$\beta^-$	$\alpha$	۳۰۵m	$^{218}Po$	۸۴	RaA	رادایوم A
		$\alpha$	۲s(۱۷۳)	$^{218}At$	۸۵		
	$\beta^-$		۲۶۸m	$^{214}Pb$	۸۲	RaB	رادایوم B
$4 \times 10^{-4}$	$\alpha$	$\beta^-$	۱۹۷m	$^{214}Bi$	۸۳	RaC	رادایوم C
		$\alpha$	$1.6 \times 10^{-4} s$	$^{214}Po$	۸۴	RaC'	رادایوم C'
	$\beta^-$		۱۷۳m	$^{210}Tl$	۸۱	RaC''	رادایوم C''
$1.8 \times 10^{-8}$	$\alpha$	$\beta^-$	۱۹y	$^{210}Pb$	۸۲	RaD	رادایوم D
$5 \times 10^{-7}$	$\alpha$	$\beta^-$	۵۰d	$^{210m}Bi$	۸۳	RaE	رادایوم E
		$\alpha$	۱۳۸۷d	$^{210}Po$	۸۴	Po	پولونیوم
	$\beta^-$		۸۷m	$^{206}Hg$	۸۰		
	$\beta^-$		۴۷m	$^{206}Tl$	۸۱	RaE''	
		پایدار		$^{206}Pb$	۸۲	RaG	رادایوم G

$^{234}\text{Th}$  تشکیل می‌شوند. به‌طور کلی، هسته در حالت برانگیخته با گسیل گاما خیلی سریعتر به حالت پایه می‌رود تا با گسیل آلفا یا بتا. اما، در مورد  $\text{UX}_2$  اختلاف تکانه زاویه‌ای بین حالت برانگیخته و حالت پایه به اندازه‌ای زیاد است که طول عمر گاما به‌طور نسبی خیلی بزرگ می‌شود. بنابراین، کسر بزرگی از هسته‌های  $^{234}\text{Pa}$  که در حالت ایزومری تشکیل شده‌اند با گسیل بتا به اورانیوم  $^{234}$  تبدیل می‌شوند.

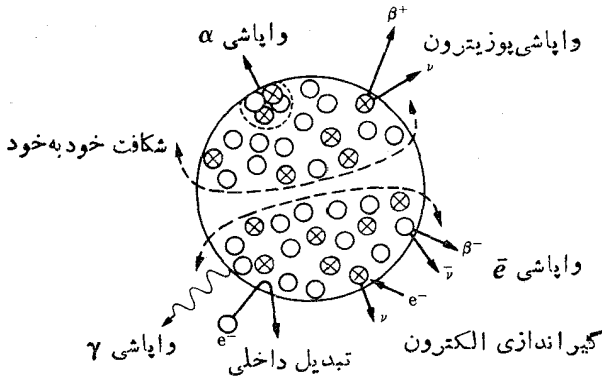
هسته‌های راديو اکتیوی که در طبیعت یافت می‌شوند، اعم از اینکه دارای نیمه‌عمرهای طولانی باشند یا نباشند، اعضای زنجیره راديو اکتیوی هستند که عضو اولیه یا نیا هسته آن دارای طول عمر حدود  $10^9$  سال یا بیشتر است. در این صورت، نیا هسته توانسته است از زمان تشکیل منظومه شمسی تا به حال باقی بماند.

بشر توانسته است بیش از یک هزار هسته راديو اکتیو دیگر را با نیمه‌عمرهای تا کسری از یک ثانیه، در آزمایشگاه تولید کند. خواص تمام هسته‌های راديو اکتیو شناخته شده در نموداری به نام نمودار نوکلیدها نشان داده می‌شود، و آخرین اطلاعات این نمودار در آزمایشگاه نیروی اتمی نولز جمع‌آوری می‌شود. شکل ۱۱.۱۲ قسمتی از نمودار نوکلیدها، و شکل ۱۲.۱۲ طرح کلی نمودار کامل را بدون ذکر جزئیات نشان می‌دهد. دو



شکل ۱۲.۱۲ ترتیب کلی نمودار نوکلیدها با خطوط پایداری در مقابل انواع مختلف واپاشیها.

۱. حالت استثنائی قابل ذکر، کربن ۱۴ با نیمه‌عمر  $5730$  سال است که به‌طور مداوم در نتیجه واکنش نوترونهای پرتو کیهانی با جو، طبق رابطه  $^{14}\text{N} + n \rightarrow ^{14}\text{C} + p$ ، به وجود می‌آید.
۲. Knolls Atomic Power Laboratory که توسط شرکت جنرال الکتریک برای کمیسیون انرژی اتمی امریکا اداره می‌شود.



شکل ۱۳.۱۲ مدهای مختلف واپاشی هسته‌ای.

خط پردر شکل، مرزهای آنچه را که به درستی می‌توان نوکلید نامید، مشخص می‌کنند. در بالا و پایین این ناحیه (بین دو مرز)، مجموعه‌ای از نوکلئونها یافت می‌شوند که یا دارای ناپایداری پروتونی و یا ناپایداری نوترونی هستند. در هر دو مورد، مجموعه در مدت زمان حدود  $10^{-20}$  ثانیه از طریق گسیل پروتون یا نوترون واپاشیده می‌شود.

شکل ۱۳.۱۲ انواع مختلف فرایندهای فروپاشی هسته‌های رادیواکتیو (ناپایدار) را که ممکن است رخ دهند، نشان می‌دهد. هسته به صورت مجموعه‌ای از پروتونها و نوترونها نشان داده شده است، پروتون با علامت ضربدر و نوترون با دایره سفید مشخص شده است. این شکل، علاوه بر فرایندهای ذکر شده در بالا، واپاشی چویندون که در آن پروتون با گسیل پوزیترون و نوترینو به نوترون تبدیل می‌شود، و شکافت خود به خودی که در آن هسته به دو و گاهی به سه پاره بزرگ شکسته می‌شود را نشان می‌دهد. واکنشی که با عمل واپاشی پوزیترون رقابت می‌کند، گیراندازی الکترون (به بخش ۱۵.۱۲ رجوع شود)، و واکنشی که با گسیل گاما رقابت می‌کند، تبدیل داخلی (بخش ۸.۱۲) است.

## ۷.۱۲ قانون واپاشی رادیواکتیو

نمونه‌ای را در نظر می‌گیریم که حاوی تعداد بسیار زیادی از یک نوع هسته رادیواکتیو باشد و فرض می‌کنیم تمام این نوکلیدها بایک نوع فرایند، از طریق گسیل ذره آلفا یا ذره بتا و یا کوانتوم گاما، واپاشیده شوند. این فرایند عملی آماری و یک باره است، یعنی وقتی هسته‌ای مشخص واپاشیده می‌شود، هسته این عمل را نمی‌تواند بار دیگر تکرار کند. تازمانی که این هسته واپاشیده نشده است، احتمال انجام چنین کاری در طول ثانیه بعد ثابت باقی می‌ماند. به عبارت دیگر عمر این هسته مثل یک سیستم زیست‌شناختی نیست. اگر احتمال واپاشی

این هسته بین حالا تا ۱ ثانیه بعد، به عنوان مثال، یک درصد باشد و اگر اتفاقاً تا ۱ ساعت واپاشیده نشود، احتمال واپاشی در طول ۱ ثانیه پس از این مدت نیز هنوز یک درصد است. فرض می‌کنیم که در یک نمونه در زمان  $t$  تعداد  $N$  هسته رادیواکتیو ناواپاشیده وجود داشته باشد، تعداد هسته‌هایی که در طول زمان بین  $t$  و  $t+dt$  واپاشیده می‌شوند، باید متناسب با  $N$  و همچنین متناسب با  $dt$  باشد. این موضوع را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$-dN = \lambda N dt \quad (۳۶.۱۲)$$

که در آن ضریب تناسب  $\lambda$  را ثابت واپاشی می‌نامند. رابطه (۳۶.۱۲) را دوباره می‌نویسیم

$$\lambda = -\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$$

می‌بینیم که ثابت واپاشی برابر با کسر هسته‌های واپاشیده از نمونه در واحد زمان، و یا برابر با احتمال واپاشی یک هسته در واحد زمان است. از انتگرال‌گیری معادله (۳۶.۱۲) نسبت به زمان رابطه زیر به دست می‌آید

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (۳۷.۱۲)$$

که در آن  $N_0$  تعداد کل هسته‌های رادیواکتیو در زمان  $t=0$  است. واپاشی نمایی  $N$  هسته رادیواکتیو باقیمانده، به طوری که رابطه (۳۷.۱۲) بیان می‌کند، معمولاً با اندازه‌گیری آهنگ شمارش  $-dN/dt$  نسبت به زمان به دست می‌آید، با مشتق‌گیری از معادله (۳۷.۱۲) خواهیم داشت

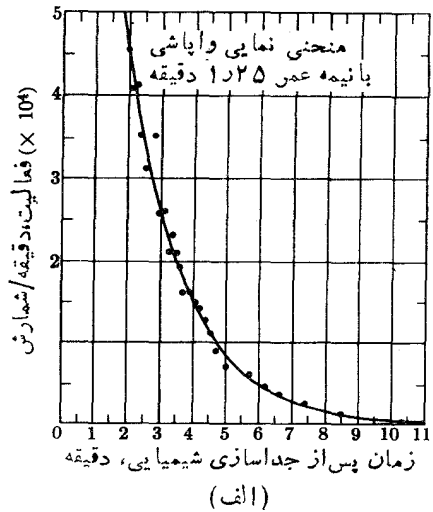
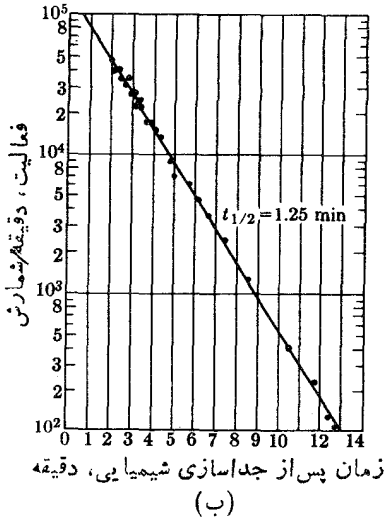
$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \left(-\frac{dN}{dt}\right)_0 e^{-\lambda t} \quad (۳۸.۱۲)$$

به طوری که رابطه (۳۸.۱۲) نشان می‌دهد، آهنگ شمارش از همان قانون تعداد هسته‌های ناواپاشیده پیروی می‌کند. با لگاریتم‌گیری پایه ده از معادله (۳۸.۱۲) خواهیم داشت

$$\log_{10} \left(-\frac{dN}{dt}\right) = \log_{10} \left(-\frac{dN}{dt}\right)_0 - \lambda t \log_{10} e$$

این رابطه نشان می‌دهد که وقتی تغییرات آهنگ شمارش را بر حسب زمان روی کاغذ نیمه لگاریتمی رسم می‌کنیم، نتیجه باید خطی مستقیم با شیب  $-\lambda \log e$  باشد. شکل ۱۴.۱۲ الف منحنی تغییرات آهنگ شمارش را روی مقیاس خطی، و شکل ۱۴.۱۲ ب همان تغییرات را روی مقیاسی نیمه لگاریتمی نشان می‌دهد.

نیمه عمر هسته رادیواکتیو،  $t_{1/2}$ ، برابر مدت زمانی که تعداد هسته‌های رادیواکتیو



شکل ۱۴-۱۲ آهنک شمارش ناشی از واپاشی یوزیترن از  $^{87}\text{Rb}$  شبه پایدار (حالت ایزومری)، (الف) در مقیاس خطی و (ب) در مقیاس نیمه لگاریتمی.

به نصف مقدار اولیه کاهش می یابد، تعریف می شود. با استفاده از معادله (۳۷-۱۲) داریم

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda t_{1/2}}$$

و یا

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda} \quad (39-12)$$

عمر متوسط یا عمر میانگین هسته های رادیواکتیو از رابطه زیر به دست می آید

$$\tau = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t(-dN) = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \quad (40-12)$$

که از معادله (۳۸-۱۲) برای این محاسبه استفاده شده است. از معادلات (۳۹-۱۲) و (۴۰-۱۲) مشاهده می شود که عمر متوسط و نیمه عمر با ضریب  $\ln 2 = 0.693$  از هم اختلاف دارند.

ثابت واپاشی  $\lambda$  همراه با نوع واپاشی و انرژی واپاشی جزء مشخصات هسته رادیو-اکتیو است و می تواند از علامتهای مشخصه هسته باشد.

## ۸.۱۲ گذارهای گاما

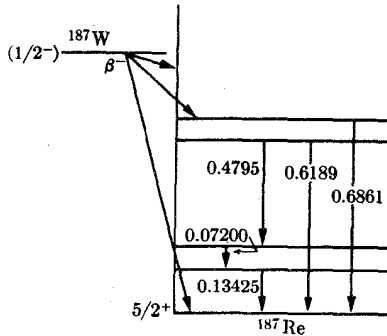
هسته‌هایی که در حالت‌های برانگیخته شدید قرار دارند، اغلب با گسیل ذره‌ای سنگین و انگیخته می‌شوند. البته این و انگیختگی در صورتی است که این واکنش از لحاظ انرژی ممکن باشد. در انرژی پایتیز انرژي تفکیک، یعنی پایتیز انرژي بستگی آخرین نوترون، پروتون، یا ذره آلفا (هر کدام که کوچکتر باشد)، و انگیختگی تنها از طریق برهم کنش الکترومغناطیس (و گاهی هم از طریق واپاشی بتا که فرایند کندتری است) انجام می‌گیرد. در فرایند و انگیختگی الکترومغناطیس، هسته به حالت برانگیخته پایتیز و یا حالت پایدار می‌رود که این عمل درست شبیه گسیل نور از اتم‌های برانگیخته است. در هر حال، انرژی کوانتوم‌های الکترومغناطیس گسیل شده از هسته‌ها، اغلب ۱۰۴ تا ۱۰۶ برابر انرژی فوتون در طیف نور مرئی است. بنا بر این طول موج در اینجا با همین ضریب کوچکتر از طول موج نوری است. رابطه بین انرژی و طول موج کوانتوم الکترومغناطیس به‌طور کلی به‌صورت زیر است

$$E_{\gamma} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{12398}{\lambda \text{ MeV}} \quad (41.12)$$

که در آن  $\lambda$  بر حسب فرمی است. این فرمول نشان می‌دهد که پرتو گامای با انرژی ۱ میلیون الکترون ولت دارای طول موجی از مرتبه صد برابر قطر هسته‌ای است. در فیزیک اتمی (نور و پرتو ایکس)، انرژی فوتونها را اغلب با اندازه‌گیری طول موج تعیین می‌کنند. از آنجا که قسمتی از گستره انرژی پرتو گاما و پرتو ایکس روی هم قرار می‌گیرند، تا حدودی می‌توان روشهای مشابهی را برای اندازه‌گیریهای طول موج در این دو ناحیه از فیزیک به‌کار برد. البته فرایند فیزیکی به‌کار رفته همان پراکندگی هم‌دوس تابش الکترومغناطیسی به وسیله شبکه بلوری است. با تبدیل انرژی گاما به انرژی الکترون (از طریق اثر فوتوالکتریک در ورقه نازک نیکل) می‌توان از طیف نگار مغناطیسی نیز برای مطالعات پرتو گاما استفاده کرد. اخیراً آشکارسازهای نیم‌رسانا (بخش ۱۰.۱۱) تقریباً در تمام حوزه طیف نمایی پرتو گاما مورد استفاده قرار می‌گیرند.

نوکلیدهای رادیواکتیو طبیعی یا مصنوعی مناسبتی برای مطالعات پرتو گاما هستند. پرتو گاما، اغلب به دنبال واپاشی بتا یا آلفا گسیل می‌شود. شکل ۱۵.۱۲ مثال ساده‌ای است که در آن واپاشی بتای  $^{87}\text{W}$ ، عنصر  $^{87}\text{Re}$  را در حالت برانگیخته به وجود می‌آورد و سپس این هسته با گسیل گاما به حالت پایه می‌رود. یادآور می‌شود که انرژی پرتوهای گامای حاصل به‌تنهایی اطلاعات کافی را برای رسم نمودار ترازهای انرژی به‌دست نمی‌دهد. برای گفتن اینکه این سه پرتو گامای متوالی به‌چه ترتیب گسیل شده‌اند، راهی وجود ندارد. موقعی که ترازهای انرژی به کمک واپاشی آلفا (بخش ۹.۱۲) یا به کمک واکنش هسته‌ای (بخش ۱۲.۱۲) اندازه‌گیری می‌شوند، چنین ابهامی وجود ندارد.

نظریه گسیل فوتون (گاما) در فیزیک هسته‌ای با یک تفاوت، اساساً مشابه گسیل فوتون در فیزیک اتمی است. در فیزیک اتمی عملاً جز گسیل مربوط به دو قطبی الکتریکی گسیل



شکل ۱۵۰۱۲ نمودار واپاشی  $^{187}\text{W}$  به  $^{187}\text{Re}$  از طریق گذارهای گاما. اندازه گیری به کمک طیف سنج بلورخمیده انجام شده است.

دیگری مشاهده نمی شود، زیرا احتمال گذار برای دوقطبی مغناطیسی یا گسیل مربوط به چند قطبی الکتریکی به اندازه ای کم است که در درجه اول اسم در نتیجه برخورد و انگیزه می شود. هسته های ماده رادیواکتیو در حالت های عادی با هم برخورد نمی کنند. بنابراین، گذارهای گاما اغلب تنها راه و انگیزه است، و طول عمر ممکن است به میلیون ها سال برسد. در اینجا نظریه گسیل گاما را مورد بحث قرار نمی دهیم، اما به تشریح اصطلاحات مربوط می پردازیم. مشابه کلاسیک تابش دوقطبی الکتریکی ( $E1$ )، تابش حاصل از آنتن دوقطبی است. مشابه کلاسیک تابش چهارقطبی الکتریکی ( $E2$ )، تابش حاصل از یک جسم با چهار قطب الکتریکی با علامت های مثبت و منفی متناوب است که در آن بارها بین قطبها در نوسان هستند. در این مورد، دوقطبی مغناطیسی ( $M1$ ) به طور کلاسیک مشابه جسمی با دو قطب مغناطیسی است که قطبهای آن به شمال و جنوب در نوسان اند. قاعده های انتخاب برای انواع مختلف تابش (چند قطبها) در جدول ۶۰۱۲ داده شده اند.

مثال. اولین حالت برانگیخته  $^{29}\text{Si}$ ، حالت  $3/2^+$  با انرژی  $1.273 \text{ MeV}$  است. این هسته از طریق گذار  $M1$  یا ترکیبی از  $M1$  و  $E2$  به حالت پایه ( $1/2^+$ ) می رود. گذار چهارقطبی الکتریکی ( $E2$ ) امکان پذیر است، زیرا اختلاف برداری تکانه های زاویه ای اولی و نهایی می تواند به اندازه  $[I(I+1)]^{1/2} \hbar$ ، با  $I=2$ ، باشد. به طور کلی  $I_{\min} = |J_1 - J_2|$  و  $I_{\max} = J_1 + J_2$  است.

اولین حالت برانگیخته  $^{45}\text{Sc}$ ، حالت  $3/2^+$  با انرژی  $124 \text{ keV}$  است. این هسته از طریق گذار  $M2$  با نیمه عمر ۳۳ ثانیه به حالت پایه ( $7/2^-$ ) می رود. گذارهای  $E3$  و  $M4$  نیز به طور نظری امکان پذیرند. اما اغلب، گذار با کمترین مقدار  $I$  چندین مرتبه سریعتر از گذارهای دیگر است. به طوری که در مثال اول گفته شد، ترکیب  $M1 - E2$  یک

جدول ۶.۱۲ قاعده‌های انتخاب در گذارهای پرتو گاما

نوع	علامت	تغییر تکانه زاویه‌ای	تغییر پاریته
دوقطبی الکتریکی	$E_1$	۱	بله
دوقطبی مغناطیسی	$M_1$	۱	نه
چهار قطبی الکتریکی	$E_2$	۲	نه
چهار قطبی مغناطیسی	$M_2$	۲	بله
هشت قطبی الکتریکی	$E_3$	۳	بله
هشت قطبی مغناطیسی	$M_3$	۳	نه
شانزده قطبی الکتریکی	$E_4$	۴	نه
شانزده قطبی مغناطیسی	$M_4$	۴	بله

استثنا در این قاعده است.

تبدیل داخلی با گسیل گاما رقابت می‌کند، و نسبت احتمال این دو فرایند بشدت بستگی به چند قطبی بودن ( $E_1$ ،  $M_3$ ، و غیره) دارد. شکل ۶.۱۲ نمونه‌ای از نمودار تراز انرژی را، که با اندازه‌گیری انرژیهای آلفا (بخش ۹.۱۲) مورد مطالعه قرار گرفته است، نشان می‌دهد. چند قطبی بودن مشخص شده برای خطوط گاما، با اندازه‌گیری ضریب تبدیل داخلی هر خط تعیین شده است

$$\alpha = \frac{N_c}{N_\gamma} \quad (۴۲.۱۲)$$

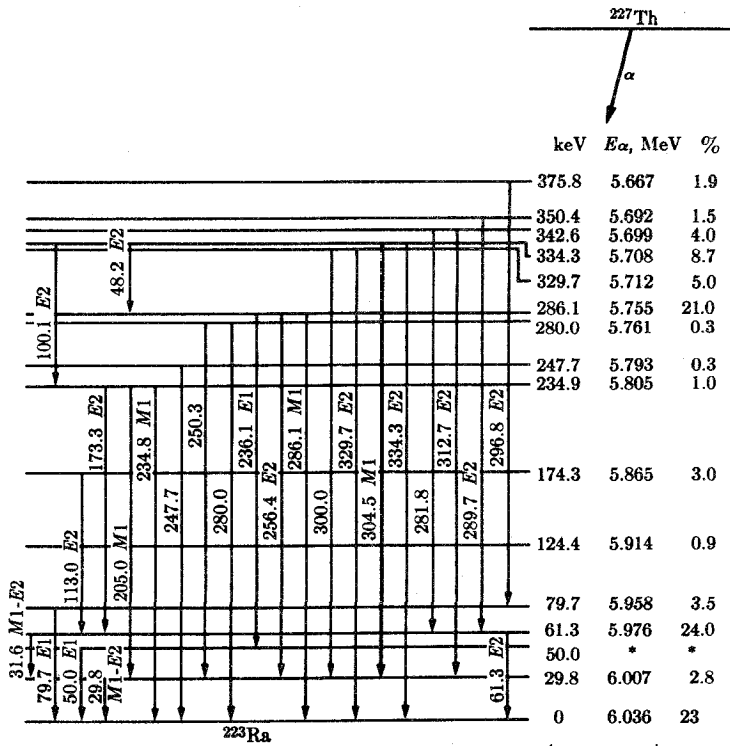
در اینجا  $N_c$  و  $N_\gamma$  به ترتیب تعداد الکترونهاي تبدیل داخلی و پرتوگامای گسیل شده در واکنیختگی معین برای هسته‌های نمونه‌ای بزرگ در زمانی معین است.

### ۹.۱۲ واپاشی آلفا

در بخش ۱۰.۶ به‌طور خلاصه سازوکار واپاشی آلفا را از طریق نفوذ از سد پتانسیل مورد بحث قرار دادیم. اینک این سؤال را مطرح می‌کنیم: چرا چهار نوکلئون با هم به‌صورت یک ذره آلفا گسیل می‌شوند و نه یک پروتون یا یک نوترون به‌طور جداگانه؟ در این بخش به این سؤال پاسخ خواهیم داد.

در بخش ۱۰.۱۲ انرژی بستگی نوکلئونها را در هسته مورد بحث قرار دادیم. به‌علت



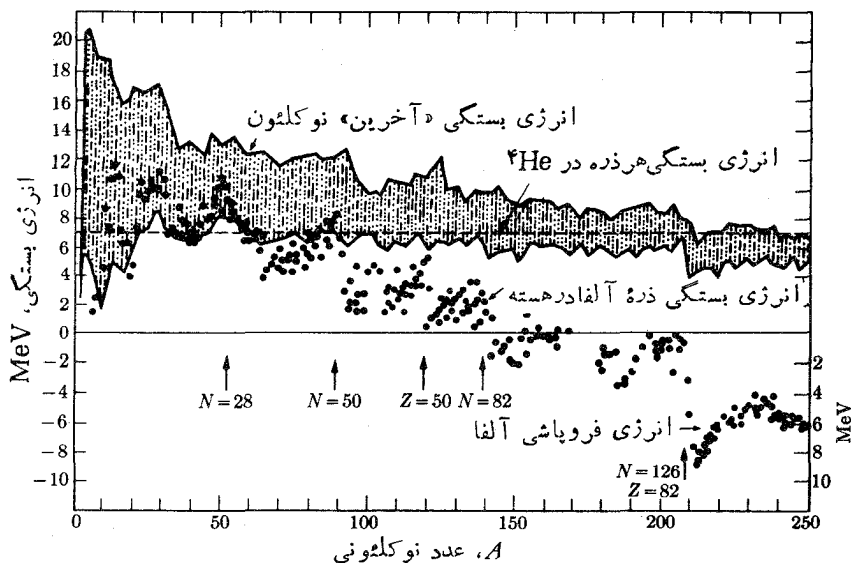


\* مشاهده نشده است

**شکل ۱۶-۱۲** نمودار تراز انرژی  $^{223}\text{Ra}$  که از طیف انرژی ذره آلفای حاصل از  $^{227}\text{Th}$  در شکل ۱۹-۱۲ اخذ شده است. گذارهای الکترومغناطیسی نیز نشان داده شده اند.

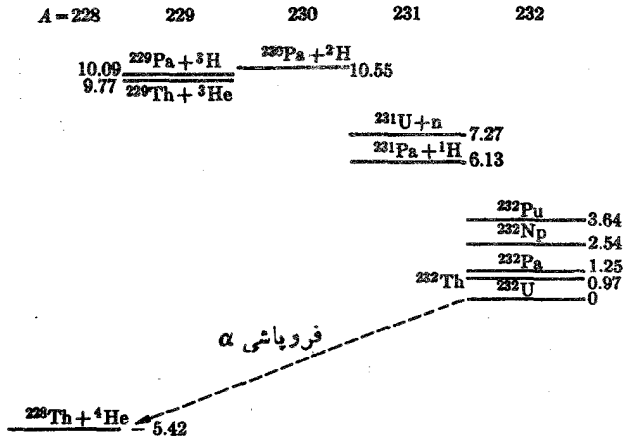
وجود نیروی کولنی، انرژی بستگی برای هر ذره جدید اضافه شده در هسته، با افزایش  $A$  در هسته‌های سنگین، تدریجاً کاهش می‌یابد. این موضوع در شکل ۱۷-۱۲ نشان داده شده است، که در آن گستره انرژی بستگی آخرین نوکلئون اضافه شده برای هسته‌های بتا-پایدار دیده می‌شود. انرژی بستگی آخرین نوکلئون بر حسب تغییر  $A$  دارای افت و خیزهایی است که فقط حدود این افت و خیز در شکل نشان داده شده است. برای هیچیک از هسته‌های پیدا شده در طبیعت، انرژی بستگی آخرین نوکلئون نزدیک به صفر نیست. بنابراین تمام این نوکلیدها در مقابل واپاشی نوکلئونی پایدارند.

دلیل اینکه بسیاری از هسته‌های سنگین ناپایدارند و ذره آلفا گسیل می‌کنند، به شرح زیر است. انرژی بستگی کل ذره آلفا  $^4\text{He}$   $28.3\text{ MeV}$  است (جدول ۳-۱۲). اگر در هسته‌ای سنگین انرژی بستگی هر کدام از چهار نوکلئون آخری (دو پروتون و دو نوترون آخری)

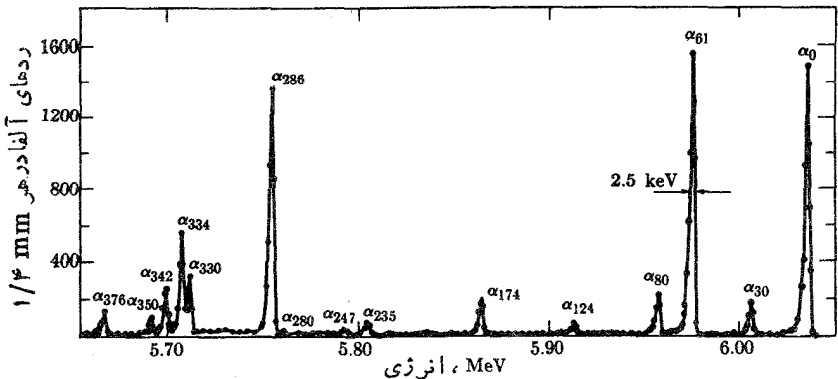


شکل ۱۷۰۱۲ انرژی بستگی کمینه و بیشینه برای «آخرین» نوکلئون، و انرژیهای بستگی «آخرین» ذره آلفا برای هسته‌های بتا-پایدار .

به‌طور متوسط  $7 \text{ MeV}$  باشد، انرژی لازم برای برداشتن آنها از هسته برابر  $28 \text{ MeV}$  می‌شود. اگر این چهار نوکلئون در خارج هسته با هم جمع شوند و تشکیل یک ذره آلفا بدهند، انرژی بستگی ذره آلفا ( $28.3 \text{ MeV}$ ) آزاد خواهد شد. بنابراین در فرایند کامل، کل انرژی مصرف شده کمتر از انرژی به‌دست آمده است. لذا واپاشی آلفا از لحاظ انرژی ممکن است. باید واپاشی ذره آلفا را به‌عنوان فرایندی تصور کرد که در آن چهار نوکلئون با هم در سطح هسته تشکیل یک ذره آلفا می‌دهند و این ذره سپس از هسته بیرون می‌جهد. به‌طور کلی، می‌توانیم بگوییم که انرژی بستگی ذره آلفا در هسته برابر است با  $28.3 \text{ MeV}$  منهای مجموع انرژی بستگی آخرین دو پروتون و آخرین دو نوترون هسته. در شکل ۱۷۰۱۲ گستره انرژی ذره آلفا بر حسب مقدار  $A$  برای نوکلیدهای بتا-پایدار نشان داده شده است. در حدود  $A = 140$ ، نقاط (انرژی بستگی) در زیر صفر واقع می‌شوند و این نشان می‌دهد که بیشتر هسته‌های سنگینتر آلفا-ناپایدارند. در این صورت، چرا تمام هسته‌های بالای  $A = 140$  عملاً رادیواکتیو نیستند، و به‌راستی چرا اصلاً این هسته‌ها در طبیعت یافت می‌شوند؟ جواب این است که برای رسیدن به حالت افزایش آنتروپی، یعنی بی‌نظمی بیشتری که طبیعت به‌سمت آن می‌رود، ذره آلفا باید از زمانی به‌نام سد کولنی بگذرد. به‌استثنای وقتی که انرژی موجود به‌اندازه کافی زیاد باشد، عمر حالت ناپایدار طولانی‌تر از سن جهان خواهد بود. در بسیاری از حالات این زمان به‌اندازه‌ای طولانی است که مشاهده رادیواکتیویته غیر ممکن یا غیر عملی می‌شود.



شکل ۱۸.۱۲ حالت‌های پایه درسیستم‌های هسته وزده برای هسته‌های با تعداد ۲۳۲ نوکلئون.



شکل ۱۹.۱۲ طیف انرژی ذرات آلفای  $^{227}\text{Th}$  توسط بیلگر و همکاران. اعداد داده شده در قله‌های منحنی انرژی برای انکیختگی ترازها را در هسته دختر  $^{223}\text{Ra}$  نشان می‌دهند.

شکل ۱۸.۱۲ نمودار تراز انرژی، حالت پایه  $^{232}\text{U}$  و حالت‌های دیگر مربوط به همان تعداد از نوکلئون‌ها را نشان می‌دهد. بدیهی است که هسته  $^{232}\text{U}$  در مقابل واپاشی پروتونی و واپاشی نوترونی پایدار است. اما، این هسته می‌تواند  $5\text{r}42\text{ MeV}$  انرژی به صورت انرژی جنبشی ذره آلفا آزاد کند. در شکل ۱۸.۱۲،  $A$  تعداد نوکلئون‌های هسته دختر یعنی هسته باقیمانده پس از جدا شدن ذره است. البته در واپاشی بتا،  $A$  تغییر نمی‌کند، در نتیجه

هنگامی که ترازهای انرژی مطابق این شکل باشند واپاشی بتا با خطی قائم نشان داده می‌شود. تمام هسته‌های موجود در نمودار دارای حالت‌های برانگیخته در سطوح پایین‌هستند، اما فقط حالت‌های پایه در شکل نشان داده شده‌اند.

مطالعه طیف انرژی ذرات آلفا اطلاعات مهمی درباره ترازهای انرژی هسته دختر به دست داده است. شکل ۱۹.۱۲ تعداد ذرات آلفای ناشی از  $^{227}\text{Th}$  را بر حسب انرژی نشان می‌دهد که به وسیله طیف نگار مغناطیسی اندازه گیری شده است. نمودار تراز انرژی برای هسته دختر  $^{223}\text{Ra}$  در شکل ۱۶.۱۲ نشان داده شده است.

## ۱۰.۱۲ واپاشی بتا

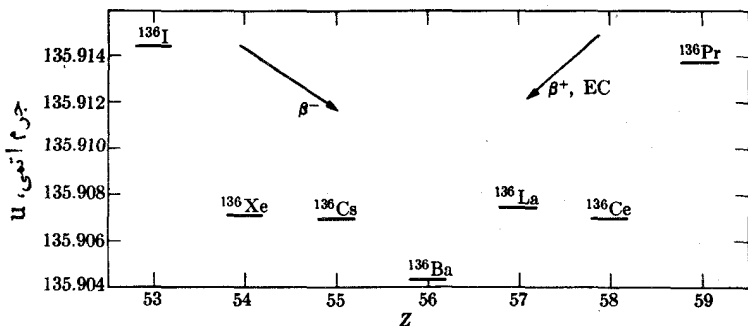
بررسی نمودار و یا جدول نوکلیدها آشکار می‌سازد که بین هسته‌های مختلفی که در طبیعت یافت می‌شوند، بسیاری از آنها دارای عدد نوکلئونی  $A$  یکسان هستند، یعنی برای مقدار معینی از  $A$  ممکن است چند ایزوبار پایدار وجود داشته باشد. اما تعداد بسیار کمی از ایزوبارهای طبیعی همسایه یا زوج‌هایی از نوع  $^{150}\text{Sn}$  و  $^{149}\text{In}$  در طبیعت وجود دارند که  $Z$  آنها فقط یک واحد اختلاف دارد. دلایل محکمی وجود دارند که قبول کنیم در هر یک از این زوج‌ها، یکی از آنها عملاً ناپایدار است، اما ممکن است طول عمر آن فوق‌العاده زیاد باشد. در مورد این مثال،  $^{149}\text{In}$  با نیمه عمر  $1.6 \times 10^{14}$  سال به  $^{150}\text{Sn}$  واپاشیده می‌شود.

به عکس حالت ایزوبارهای همسایه، موارد زیادی از ایزوبارهای به ظاهر پایدار وجود دارد که اختلاف  $Z$  (یا  $N$ ) آنها دو واحد است. مشاهدات نشان می‌دهند که بین دو ایزوبار همسایه، هسته بسا جرم اتمی بزرگتر از طریق فرایند بتا به هسته سبکتر واپاشیده می‌شود، اما ظاهر آفریندی با سرعت کافی وجود ندارد که پاره‌سته‌ای را به مقدار دو واحد تغییر دهد.

ممکن است نمودار نوکلیدها را ترسیم سه بعدی تصور کنیم که در آن جرم بعد سوم این ترسیم باشد. در این صورت، هسته‌های پایدار در پایین منحنی قرار می‌گیرند. تمام نوکلیدهای پرنوترون با گسیل  $\beta^-$  در طول خط ایزوبار خود به طرف پایین منحنی می‌روند، و تمام نوکلیدهای پرپروتون به طور مشابه با گسیل  $\beta^+$  یا گیراندازی الکترون واپاشیده می‌شوند. مقطع منحنی در راستای ایزوبار ممکن است دارای می‌نیمومهای موضعی باشد (شکل ۲۰.۱۲). ایزوبارهای طبیعی در می‌نیمومها قرار دارند.

در فرایند واپاشی بتا، یک الکترون مثبت یا منفی از هسته گسیل می‌شود، و یا یک الکترون مسداری توسط هسته گیراندازی می‌شود. در تمام این موارد یک نوترینو یا یک پادنوترینو به طور همزمان گسیل می‌شود.

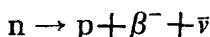
الکترون و پوزیترون نسبت به هم پاد زره هستند، یعنی وقتی در تماس نزدیک قرار می‌گیرند یکدیگر را نابود می‌کنند. بدین ترتیب، در واپاشی بتا دو نوع نوترینو به وجود می‌آید، نوترینو در گسیل  $\beta^+$  (پوزیترون) و پاد نوترینو در گسیل  $\beta^-$  (نگاترون). این



شکل ۲۰.۱۲ مقطع پایین منحنی نوکلیدها درخط ایزوبار  $A=136$ .

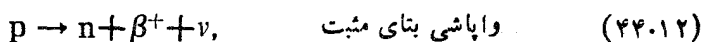
چهار ذره دریک گروه از ذرات به نام لبتونها قرار می گیرند که، براساس مشاهدات، همیشه به صورت زوج به وجود می آیند یا نابود می شوند. به عنوان مثال، ایجاد یک الکترون در واپاشی  $\beta^-$  همیشه همراه با تولید یک پاد نوترینو است، و در واپاشی  $\beta^+$  یک پوزیترون و یک نوترینو به وجود می آید. این مشاهدات را می توان به صورت قانونی فیزیکی که مبین بقای عدد لبتونی است، درآورد (در مقایسه با بقای بار). بدین ترتیب که به الکترون و نوترینو عدد لبتونی ۱ و به پوزیترون و پاد نوترینو عدد لبتونی ۱ - نسبت می دهیم. بنا براین، جمع این اعداد در هر واکنش (واپاشی بتا، تولید زوج و غیره) همیشه ثابت می ماند.

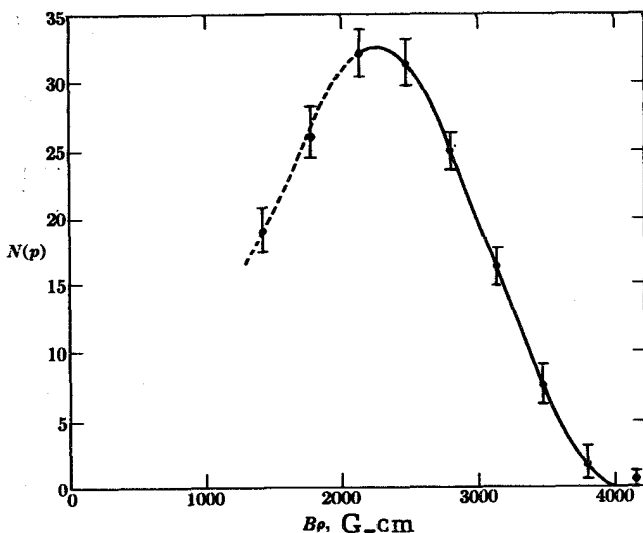
در سال ۱۹۳۱ پاؤلی برای توجیه کمبود انرژی و تکانه زاویه ای در فرایند واپاشی بتا، فرضیه وجود نوترینو و پاد نوترینو را پیشنهاد کرد. به عنوان مثالی ساده، واپاشی نوترون آزاد را در نظر می گیریم



عدد کوانتومی اسپین نوترون، و همچنین پروتون و الکترون همگی، نیمه درست است. بدون پاد نوترینو درست راست معادله، بقای تکانه زاویه ای نمی تواند وجود داشته باشد، زیرا تکانه زاویه ای مداری که ممکن است الکترون نسبت به پروتون داشته باشد باید دارای عدد کوانتومی درست باشد. بیان دیگر در جهت توجیه گسیل دو ذره، ناشی از این حقیقت است که انرژی الکترون گسیلیده طیف پیوسته گسترده ای دارد که حداکثر انرژی آن مربوط به اختلاف جرم نوترون و پروتون می شود (شکل ۲۰.۱۲). بدیهی است که این موضوع با فرض اینکه انرژی بین دو ذره به طور کاتوره ای تقسیم می شود، مطابقت دارد.

برای انجام فرایند بتا، باید انرژی لازم برای ایجاد لبتونها وجود داشته باشد. فرایندهای اساسی عبارت اند از





شکل ۲۱.۱۲ طیف انرژی بتای منفی در واپاشی نوترونهاي آزاد.

بدیهی است که در این فرایندها، بقای بنار و عدد لبتونی وجود دارد. علامت  $\nu$  معرف نوترینو و علامت  $\bar{\nu}$  معرف پادنوترینو است. علامت  $\beta^-$  برای نشان دادن الکترون حاصل از فرایند واپاشی بتا و علامت  $e^-$  برای نمایش دادن الکترون (مداری) اتم، به کار می رود. البته هر دو ذره ماهیتاً یکی هستند. فرایند (۴۳.۱۲) از نقطه نظر انرژی برای نوترون آزاد امکان پذیر است، در اینجا انرژی آزاد شده  $78 \text{ MeV}$  و نیمه عمر واپاشی ۱۲ دقیقه است. البته فرایندهای (۴۴.۱۲) و (۴۵.۱۲) بدون انرژی اضافی قابل انجام نیست. این انرژی اضافی ممکن است به وسیله سایر نوکلئونهاى داخل هسته تأمین شود. بیشینه انرژی جنبشی محصولات واپاشی را در فرایند بتا می توان از جدول زیر به دست آورد که توازن بین انرژیهای سکون دو عضو يك زوج ایزوبار را نشان می دهد.

	فرایند	قبل	بعد
$\beta^-$	${}^A_Z M c^2$	${}^A_{Z+1} M^+ c^2$ (یون مثبت)	$m_0 c^2 + Q_{\beta^-}$
$\beta^+$	${}^A_Z M c^2$	${}^A_{Z+1} M^- c^2$ (یون منفی)	$m_0 c^2 + Q_{\beta^+}$
EC	${}^A_{Z+1} M c^2$	${}^A_Z M^* c^2$ (خنثی اما برانگیخته)	$Q_{EC}$

انرژی آزاد شده،  $Q$ ، در فرایند باید به صورت انرژی جنبشی محصولات واپاشی و برابر با کاهش انرژی سکون باشد. اساساً این همان چیزی است که در جدول دیده می شود. فرایند بتای منفی بار هسته‌ای را به میزان یک واحد افزایش می دهد، اما تعداد الکترونهاى اتمی بدون تغییر باقی می ماند. از آنجا که دختر اتم خنثی عبارت است از

$$z_{+1}{}^4Mc^2 = z_{+1}{}^4Mc^2 + m_0c^2 - I$$

که در آن  $I$  انرژی بستگی آخرین الکترون اتمی است، داریم

$$Q_{\beta-} = \frac{1}{2}{}^4Mc^2 - z_{+1}{}^4Mc^2 - I \quad (46.12)$$

انرژی بستگی  $I$  (انرژی یونش) به اندازه‌ای کوچک است که معمولاً از آن صرف نظر می شود. فرایند بتای مثبت بار هسته‌ای را به اندازه یک واحد کاهش می دهد، و بنابراین یک یون منفی به جا می گذارد. انرژی سکون این یون منفی را می توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{1}{2}M^-c^2 = \frac{1}{2}{}^4Mc^2 + m_0c^2 - I$$

با استفاده از جدول خواهیم داشت

$$Q_{\beta+} = z_{+1}{}^4Mc^2 - \frac{1}{2}{}^4Mc^2 - 2m_0c^2 + I \quad (47.12)$$

در فرایند گیراندازی الکترون تعداد بارهای بنیادی به مقدار یک واحد کاهش می یابد، و همزمان با آن یک الکترون از یکی از پوسته‌های اتمی برداشته می شود. در بیشتر موارد، این پوسته یکی از داخلترین پوسته‌ها، مثلاً پوسته  $K$ ، است. بنابراین، چنین فرایندی اتم را به حالت برانگیخته بر جای می گذارد، و معمولاً آبخاری از فوتونها متعاقب گیراندازی به وجود می آید. انرژی آرایش مجدد برابر است با انرژی بستگی الکترون گیراندازی شده  $E_B$ ، منهای انرژی بستگی الکترون در پایتترین مدار اشغال نشده اتم دختر در حالت پایه  $I$ .

با استفاده از تعادل انرژیها به دست می آید

$$Q_{EC} = z_{+1}{}^4Mc^2 - \frac{1}{2}{}^4Mc^2 - E_B + I \quad (48.12)$$

انرژی بستگی الکترون  $K$  در عناصر سنگین بیش از  $100 \text{ keV}$  است، ولی انرژی الکترون پوسته‌های  $L$  و  $M$  به ترتیب حدود  $20 \text{ keV}$  و  $5 \text{ keV}$  است. اگر  $z_{+1}{}^4M$  بزرگتر از  $\frac{1}{2}{}^4M$  باشد، در این صورت عملاً گیراندازی الکترون امکان پذیر است. معادلات (46.12) و (48.12) نشان می دهند که بین دو ایزوبار همسایه، عملاً یکی برای واپاشی و تبدیل به دیگری انرژی کافی دارد. این موضوع، مشاهدات مذکور در اولین بند این بخش درباره ایزوبارهای همسایه را تشریح می کند. برای واپاشی  $\beta^+$ ، معادله (43.12) نشان می دهد که انجام فرایند مستلزم  $2m_0c^2 = 1.022 \text{ MeV}$  انرژی اضافی است. جرمهایی که در معادلات (46.12) و (48.12) وارد می شوند، جرمهای اتمی

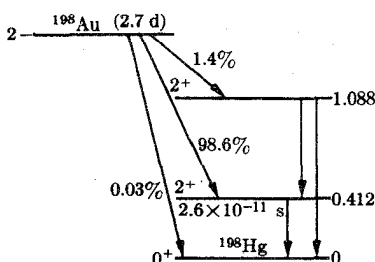
نمونه‌هایی است که هسته‌ها و اتم‌های آنها در حالت پایسه قرار دارند. در اغلب موارد واپاشی بتا، هسته دختر در حالت برانگیخته به وجود می‌آید (با انرژی  $E_x$ ). بنابراین، انرژی جنبشی محصولات واپاشی عبارت است از

$$E_x = Q - E_\beta \quad (۴۹.۱۲)$$

شکل ۲۲.۱۲ به عنوان مثال، طرح واپاشی  $^{198}\text{Au}$  را نشان می‌دهد. در این واپاشی، کسر بزرگی (۹۸.۶٪) از هسته‌های دختر  $^{198}\text{Hg}$  در اولین حالت برانگیخته قرار می‌گیرد. سپس این هسته ضمن گسیل پرتو گاما یا الکترون تبدیل داخلی و انگیخته می‌شود و به حالت پایه برمی‌گردد.

در واپاشی بتا، مشابه فرایندهای واپاشی دیگر، مهمترین پارامترهایی که ممکن است به طور تجربی تعیین شوند، نیمه عمر یا ثابت واپاشی و انرژیهای تابش گسیل شده هستند. در واپاشی  $\beta^-$  و  $\beta^+$ ، نقطه پایانی طیف پیوسته انرژی معرف انرژی آزاد شده در فرایند است، که این البته پارامتری مهم به شمار می‌رود. به علت اینکه طیف بتا، به جای داشتن خطوط تیز منفصل پیوسته است، تفسیر آن مشکلتر از طیف آلفا و گاما است. به عنوان مثال، «سه خط» بتا در شکل ۲۲.۱۲، سه طیف پیوسته ایجاد می‌کنند که بر یکدیگر همپوشی دارند. نظریه واپاشی بتا که نیمه عمر هسته و شکل طیف انرژی بتا را به دست می‌دهد، خیلی پیچیده نیست، اما نمی‌توانیم آن را در اینجا مورد بحث قرار دهیم. در مورد گسیل فوتون دیدیم برهم کنشی که باعث گذار می‌شود، نیروی الکترومغناطیسی است که روی الکترون یا پرتون عمل می‌کند (بخش ۶.۸). واپاشی بتا در نتیجه برهم کنش دیگری ایجاد می‌شود، که آن را برهم کنش ضعیف می‌نامند. این برهم کنش خود را به صورت نیروهای قابل اندازه‌گیری در دنیای ماکروسکوپی نشان نمی‌دهد، و برای اولین بار توسط فرمی برای توجیه واپاشی بتا در نظر گرفته شد. این موضوع همچنین نقش مهمی در فیزیک ذرات بنیادی ایفا می‌کند.

گذارهای بتایی که از قاعده انتخاب زیر تبعیت می‌کنند، گذارهای مجاز نامیده می‌شوند.



شکل ۲۲.۱۲ طرح واپاشی  $^{198}\text{Au}$  که انشعاب به حالت پایه و اولین دو حالت برانگیخته را نشان می‌دهد.



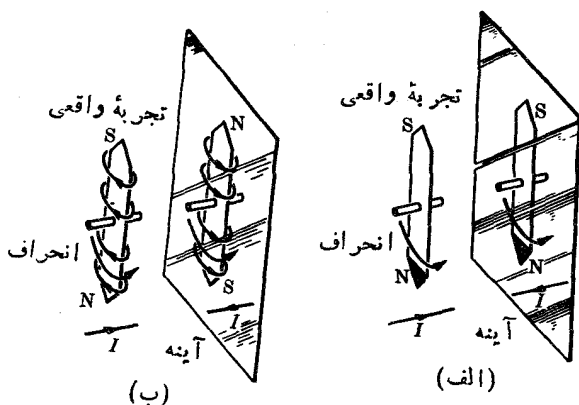
بدون تغییر پاریته  $\Delta J = \pm 1$  صفر یا ۱

در این گذارها، لبتونها می توانند در حالت‌های  $l = 0$  گسیل شوند. در هر موردی دیگر، گسیل يك لبتون یا لبتونهای دیگر وقتی صورت می گیرد که تکانه زاویه‌ای مداری،  $l = 1$  یا بیشتر باشد. بدعلت اینکه تکانه خطی لبتونها بسیار کوچک است، احتمال گسیل در حالتی که  $l > 0$  باشد، کوچک می شود. بنابراین، چنین گذارهایی نیمه عمر خیلی طولانیتری دارند و گذارهای ممنوع نامیده می شوند.

## ۱۱.۱۲ نقض قانون پاریته در واپاشی بتا

نظریه فیزیک ماکروسکوپی شامل تعدادی قوانین بقا است که از جمله آنها می توان قوانین بقای انرژی، تکانه خطی و تکانه زاویه‌ای را نام برد. در فیزیک اتمی و هسته‌ای هم این قوانین به کار می روند، و علاوه بر اینها قانونی وجود دارد که بقای پاریته را نیز نشان می دهد. اینکه دستگاهی دارای پاریته معینی است، اساساً بدین معنی است که دستگاه با تصویر آینه‌ای خودش برابر می شود. اگر بقای پاریته (برای يك دستگاه) وجود داشته باشد، تصویر آینه‌ای يك آزمایش واقعی می باید آزمایشی باشد که عملاً می تواند انجام گیرد. قانون بقای پاریته متکی به این فرض است که پتانسیلهای موجود در يك آزمایش هسته‌ای یا اتمی دارای تقارن آینه‌ای هستند. در دنیای ماکروسکوپی، البته دستگاهها به طور کلی دارای تقارن آینه‌ای نیستند، مثلاً انسان با تصویر آینه‌ای خودش برابر نیست. يك مارپیچ با تصویر آینه‌ای خودش برابر نیست، و به این دلیل دستگاههایی که دارای تقارن آینه‌ای نیستند را دستگاههای دارای هلیسیتته (ساختار مارپیچی) گویند. حتی دستگاههایی به کوچکی مولکولهای آلی نیز دارای هلیسیتته هستند. تمامی حیات موجود در این سیاره حاوی مواد آلی با يك نوع هلیسیتته‌اند. مولکولهایی که دارای هلیسیتته نوع مخالف باشند، می توانند موجودات زنده با خواص مشابه تشکیل دهند و ممکن است چنین حیاتی در سایر سیارات وجود داشته باشد.

به عنوان مثال يك تجربه ماکروسکوپی را، که ظاهراً قانون پاریته در آن نقض می شود، در نظر می گیریم. این آزمایش به مطالعه انحراف عقربه قطب نما در میدان مغناطیسی حاصل از جریان در يك رسانا مربوط می شود (شکل ۲۳.۱۲ الف). قطب شمال عقربه قطب نما در آزمایش واقعی، که در سمت چپ شکل نشان داده شده است، به طرف خواننده منحرف خواهد شد. در اینجا، قطب شمال عقربه را در آزمایش واقعی در آینه به صورت نوك سیاه رنگ تشخیص می دهیم. در آینه همچنین می بینیم که این نوك به سمت خواننده منحرف می شود. اما اگر آزمایشی که در آینه مشاهده می کنیم يك آزمایش واقعی بود، می بایست قطب شمال عقربه در جهت عکس منحرف شود. بنابراین به نظر می رسد که پاریته در این آزمایش نقض شده است. اما، اگر همین آزمایش را در مقیاس اتمی بنگریم، همان طور که شکل ۲۳.۱۲ ب نشان می دهد، وضع متفاوت خواهد بود. در اینجا، در آزمایش واقعی، جریانهای مواد میدان مغناطیسی (اسپین یا چرخش الکترونها) در عقربه



شکل ۲۳.۱۲ مطالعه بقای پارینه در آزمایش انحراف مغناطیسی.

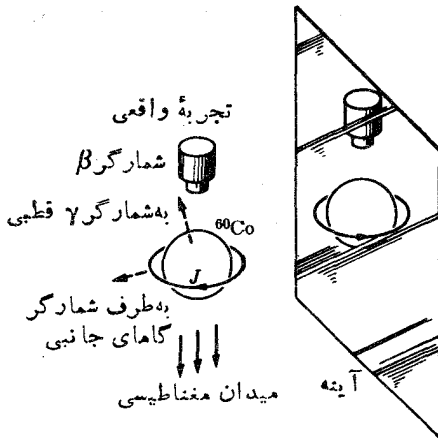
قطب نما مشخص شده اند و تصویر این جریانها را نیز در آینه می بینیم. قطب شمال عقربه قطب نما در این تصویر آینه ای حقیقی در مقیاس اتمی به سمت بالا است. بنابراین آزمایش مشاهده شده در آینه می تواند عملاً اجرا شود، یعنی همان طور که در آینه نشان داده شده است، انحراف به سمت خارج صفحه کاغذ خواهد بود. بدین ترتیب، قانون بقای پارینه در مقیاس اتمی نقض نشده است.

نتیجه ای که از این بحث و تعداد زیادی از تجربیات دیگر در مقیاس اتمی باید گرفت این است که در مقیاس اتمی، طبیعت کاملاً متقارن به نظر می رسد، یا با بیان دیگر به نظر می آید که دستگاهها دارای پارینه معینی باشند. بهر حال، کاملاً امکان پذیر است که ترکیب اتمها در مولکولها و اجسام پیچیده تر را چنان در نظر بگیریم که شبیه تصاویر آینه ای خود نباشند، یعنی دارای ساختار مارپیچی هلیسسته (دستوارگی راست یا دستوارگی چپ) باشند که به معنی دارا نبودن پارینه ای معین است.

در فیزیک ذرات بنیادی، نشانه های قوی از نقض پارینه در فرایندی که بر آن به اصطلاح برهم کنش ضعیف حاکم باشد، و از آن جمله در واپاشی بتا، مشاهده شده است. در مشاهدات تجربی دریافته اند که دو ذره به نام مزونهای  $\pi^+$  و  $\pi^0$  دارای جرم و طول عمر مشابه، در حدود خطای تجربی، هستند. یگانه وسیله تشخیص آنها این بود که یکی به سه مزون  $\pi$  که معرف حالت پارینه منفی است و دیگری به دو مزون  $\pi$  که معرف حالت پارینه مثبت است، واپاشیده می شود. بنابراین اگر بقای پارینه لزوماً وجود داشته باشد، ذرات نمی توانند مشابه باشند. اکنون می دانیم که آنها مشابه یکدیگرند و علامت یکسان  $K^+$  را به این مزونها داده ایم (به بخش ۱۵.۱۲ رجوع شود).

لی و یانگ<sup>۱</sup> در سال ۱۹۵۶ اظهار داشتند که هیچ دلیل تجربی بر بقای پارینه در

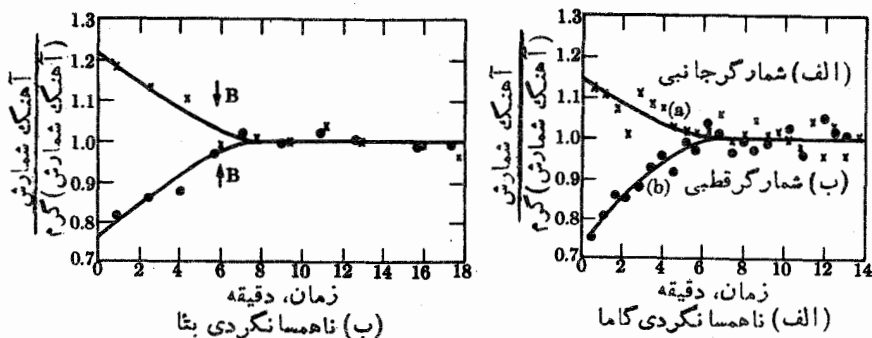
1. T. D. Lee and C. N. Yang, *Phys. Rev.*, 104 (1956), p. 254.



شکل ۲۴.۱۲ آزمایش نقض پاریته.

برهم کنش ضعیف وجود ندارد. آنها همچنین پیشنهاد انجام چند آزمایش دادند تا وجود یا عدم بقای پاریته آزموده شود. اولین آزمایش که باید اجرا می‌شد مربوط به توزیع زاویه‌ای ذرات بتای گسیل شده از هسته‌های همخط کوبالت ۶۰ بود. در عمل، نمونه نیراتی است که در آن همخط شدن بردارهای تکانه زاویه‌ای اتمی، به کمک یک میدان خارجی در دمای خیلی پایین، به حد اعلی تأمین شده باشد. این عمل یک میدان مغناطیسی داخلی به اندازه کافی قوی به وجود می‌آورد که درصد بزرگی از بردارهای تکانه زاویه‌ای هسته‌ای را همخط می‌کند.

آزمایش وو در شکل ۲۴.۱۲ در سمت چپ آینه تصویری نشان داده شده است. فرض می‌کنیم که در شدت بتای گسیلیده ناهمسانگردی وجود داشته باشد که بنا بر آن الکترونها ی تأییده به سمت بالا، یعنی در راستای مخالف بردار تکانه زاویه‌ای، بیشتر از راستاهای دیگر باشند. اگر به داخل آینه نگاه کنید، مانند آزمایش واقعی راستای غالب تابش بتا به سمت بالا دیده می‌شود، اما بردار تکانه زاویه‌ای تغییر راستا داده است. بنا بر این می‌بینیم که در آینه بیشتر الکترونها در راستای بردار تکانه زاویه‌ای گسیل می‌شوند. بدین ترتیب، بدیهی است که آزمایشی که در آینه می‌بینیم در عمل نمی‌تواند انجام گیرد، زیرا نتایج پیش‌بینی شده با نتایجی که برای آزمایش اصلی فرض کرده‌ایم مغایرت دارد. بنا بر این مشاهده عدم تقارن فرض شده برای آزمایش واقعی، می‌تواند دلیلی بر نقض پاریته باشد. اگر به جای فرض یک راستای غالب منفرد، دو راستای موازی و پاد موازی با بردار تکانه زاویه‌ای فرض کرده بودیم، در این صورت آزمایش مربوطه مشابه آزمایش تصویر



شکل ۲۵.۱۲ نتایج آزمایش نقض پاریتته.

آینه‌های خودش می‌شد. در این صورت، قانون پاریتته احتمالاً بدون تغییر باقی می‌ماند. این موضوع برای او و همکارانش معلوم بود که این نوع ناهمسانگردی را می‌توان در تابش گاما از هسته‌های همخط کوبالت  $^{60}\text{Co}$  آشکار ساخت. بنابراین آنها برای مطمئن شدن از همخطی دو شمارگر به‌کار بردند. نمونه را به کمک هلیوم مایع تا  $4.2\text{ K}$  سرد کردند و مجدداً به کمک و امغناطش بی‌دررو دما را به کمتر از  $1\text{ K}$  رساندند. سپس هسته‌های کوبالت  $^{60}\text{Co}$ ، به طوری که نشان داده شد، با اعمال میدان خارجی همخط شدند و با گرم کردن نمونه، آهنک شمارش نسبت به زمان اندازه‌گیری شد. این آزمایش با تغییر میدان مغناطیسی در جهت مخالف نیز تکرار شد.

شکل ۲۵.۱۲ نتایج را نشان می‌دهد. در سمت چپ آهنک شمارش دو شمارگر رسم شده است. همان‌طور که در تابش  $E\gamma$  انتظار می‌رود، در هر دو مورد میدان، شمارگر قطبی کمتر از شمارگر استوایی شمارش می‌کند. اما، شمارگر بتا نشان داد که در راستای پاد موازی با بردار تکانه زاویه‌ای الکترونیهای بیشتری گسیل می‌شوند تا در راستای موازی با آن. این موضوع نقض پاریتته را در فرایند بتا تأیید می‌کند.

نتایج این آزمایش و آزمایشهای دیگری که بر وجود هلیسیتته در برهم‌کنش ضعیف دلالت دارند، نوترینو (و پاد نوترینو) را به عنوان عامل نقض پاریتته نشان می‌دهند. فرض می‌شود که بردار تکانه زاویه‌ای پاد نوترینوی مربوط به واباشی بتای منفی با بردار تکانه آن همراستاست و مانند پیچ راستگرد حرکت می‌کند، در حالی که نوترینو مانند پیچ چپگرد

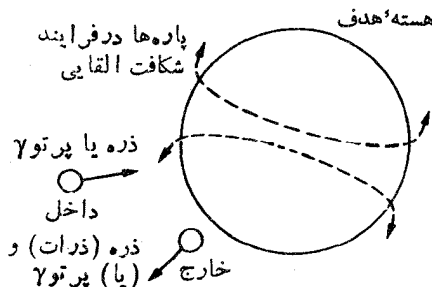
۱. نمونه پلوروی ناهمسانگرد است. در حالی که پلور با هلیوم مایع تماس گرمایی دارد، به کمک یک میدان مغناطیسی خارجی اسپین الکترونها در جهت حداکثر پذیرفتاری قرار می‌گیرد. حرارت ناشی از تغییر جهت به وسیله هلیوم جذب می‌شود. سپس نمونه از هلیوم جدا شده و میدان مغناطیسی برداشته می‌شود. آنگاه الکترونها به‌طور کانونه‌ای تغییر جهت می‌دهند. الکترونها در این فرایند از شبکه‌های بلور انرژی جذب می‌کنند و در نتیجه پلور سرد می‌شود. در اینجا، میدان مغناطیسی لازم برای آزمایش پاریتته در جهت حداقل پذیرفتاری به‌کار می‌رود. این عمل مانع حرارت‌گیری مجدد پلور می‌شود.

حرکت می‌کند. در واپاشی کوبالت  $^{60}\text{Co}$ ، گذاری از حالت  $^{+5}$  به حالت  $^{+4}$  صورت می‌گیرد. برای بقای تکانه زاویه‌ای، باید بردارهای اسپین الکترون و پاد نوترینو با بردار تکانه زاویه‌ای هسته همراستا باشند. به دلیل اینکه پاد نوترینو مانند پیچ راستگرد عمل می‌کند، غالباً در راستای بردارهای تکانه زاویه‌ای پرتاب می‌شود. به دلیل اینکه در این نوع واپاشی بین راستای حرکت الکترون و پاد نوترینو همبستگی (یا پاد همبستگی) وجود دارد، این آزمایش نتایج فوق را به دست می‌دهد. یادآور می‌شود که در پارینه حالت هسته‌ای در این گذار مجاز تغییری وجود ندارد. نوترینو قانون پارینه را نقض می‌کند و الکترون آن را جبران می‌کند.

## ۱۲.۱۲ واکنش هسته‌ای

بیشتر اطلاعاتی که درباره ساختار هسته‌ها به دست آمده، از مطالعه فروپاشیهای مواد رادیو-اکتیو که در بخشهای قبل بحث شد، حاصل شده است. روش دیگر برای دستیابی به چنین اطلاعاتی مطالعه اثر بیماران باریکه‌ای از ذرات یا پرتوگاما بر هسته‌ها است. در شکل ۲۶.۱۲ يك ذره یا پرتوگاما وارد هسته هدف می‌شود و متعاقب آن همان ذره یا ذره دیگر یا يك پرتوگاما از هسته خارج می‌شود. شرایط اولیه واکنش هسته‌ای معمولاً از طریق تجربی بخوبی مشخص است، یعنی نوع هسته هدف و انرژی و نوع ذرات بیماران کننده داده می‌شوند. به طور کلی، برای واکنش نتایج پایانی متعددی متصور است. واکنشهای هسته‌ای را به طرق مختلف طبقه‌بندی می‌کنند. طبقه‌بندی زیر یکی از طرق طبیعی برای آزمایش کننده است.

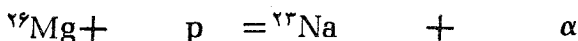
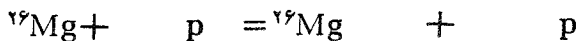
الف) واکنشهای ذره هسته‌ای و پراکندگی ذره در اینجا به معنی نوکلئون (نوترون یا پروتون) یا هسته‌ای از اتمهای سبک (مثلاً دوتریون، ذره آلفا و غیره) است. باریکه‌ای از ذرات باردار با انرژی کافی که بتواند بر نیروی دافعه الکتروستاتیکی هسته غلبه کند را می‌توان در يك شتابدهنده یون مثبت (به عنوان مثال شتابدهنده وان دو گراف یا سیکلوترون) تولید کرد. نوترونها در رآکتور هسته‌ای یا به صورت ذرات ثانوی در يك واکنش هسته‌ای تولید می‌شوند.



شکل ۲۶.۱۲ واکنشهای هسته‌ای.

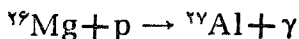
در واکنشهای با ذره هسته‌ای، يك ذره از باریکه فرودی ممکن است به اندازه کافی به یکی از هسته‌های هدف نزدیک شود، به طوری که با نوکلئونهای آن برهم کنش انجام دهد و یا ممکن است حتی به داخل هسته هدف نفوذ کند. در نتیجه این واکنش، ممکن است همان ذره یا ذره مشابهی از هسته به بیرون پرتاب شود. در این مورد، فرایند را پراکندگی می‌نامند. اگر ذره متفاوتی یا بیش از يك ذره از هسته گسیل شود، فرایند را واکنش تبدیلی نامند، زیرا هسته باقیمانده به نوعی هسته دیگر تبدیل شده است. در هر دو فرایند پراکندگی و واکنش تبدیل، هسته باقیمانده ممکن است در حالت برانگیخته قرار گیرد. این هسته معمولاً با گسیل يك یا چند پروتوگاما به حالت پایه برمی‌گردد. نمونه‌هایی از واکنشهای ذره هسته‌ای و فرایند پراکندگی در زیر آمده‌اند

ذره خروجی + هسته باقیمانده = ذره ورودی + هدف

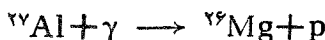


واکنش اول این دو فرایند، یا به اختصار  ${}^{26}\text{Mg}(p, p){}^{26}\text{Mg}$ ، اگر  ${}^{26}\text{Mg}$  در حالت پایه برجای بماند، يك پراکندگی الاستیک است، و اگر  ${}^{26}\text{Mg}$  در حالت برانگیخته برجای بماند يك پراکندگی نالاستیک است. واکنش دوم  ${}^{26}\text{Mg}(p, \alpha){}^{23}\text{Na}$  يك واکنش تبدیل است. یادآور می‌شود که در معادلات بالا همیشه تعداد کسل پروتونها، نظیر تعداد کل نوترونها، بین دو طرف توازن دارد.

ب) گیراندازی تابشی. گیراندازی يك پروتون یا نوترون کم انرژی در هسته آن را به حالتی شدیداً برانگیخته می‌رساند. هسته برانگیخته به جای پرتاب مجدد ذره ورودی (پراکندگی)، ممکن است واپاشیده شود و با گسیل يك یا چند پروتوگاما خود را از انرژی بستگی ذره خلاص کند و به حالت پایه برگردد. این واکنش را گیراندازی تابشی می‌نامند. يك مثال نمونه در زیر آورده می‌شود

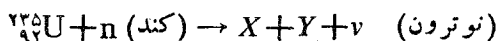


ج) فوتوفروپاشی. در فرایند فوتوفروپاشی، هسته هدف با تابش الکترومغناطیس بمباران می‌شود. اگر انرژی کوانتومی زیاد باشد، يك یا چند ذره آزاد می‌شود. يك مثال در زیر آمده است



دو واکنش گیراندازی تابشی و فوتوفروپاشی فرایندهای عکس هم هستند. اما، روشهای تجربی جهت مطالعه این فرایندها بسیار متفاوت‌اند.

د) شکافت القاایی. در گیراندازی ذره‌ای در هسته سنگین، ممکن است عمل تبدیل بسیار شدیدتر باشد و شکافت القاایی، که عملاً انفجاری هسته‌ای است، رخ دهد. فرایندی که اساس اغلب تبدیلات جرم-به-انرژی در رآکتورهای اورانیومی است، عبارت است از



هسته هدف يك نوترون كند جذب می كند و به دو پاره بزرگ (مثلاً  $^{84}_{38}\text{Sr}$  و  $^{140}_{54}\text{Xe}$ ) و چند نوترون شكسته می شود. نوترونهای آزاد شده می توانند كند شوند، و به نوبه خود شكافتهای تازه ای را باعث شوند (واكنش زنجیره ای).

حال به عنوان مثال، محصولات احتمالی ناشی از واكنشی كه با دوتریوم  $6 \text{ MeV}$  در هدف  $^{39}_{19}\text{K}$  رخ می دهد را مورد مطالعه قرار می دهیم. در يك واكنش هسته ای تبدیلی یا فرایند پراكنده گی تعداد نوترونها و تعداد پروتونها ثابت می ماند. بنابراین، نمودار تراز انرژی شامل هسته و ذرات هسته ای را با تعداد كل ۲۰ پروتون و تعداد كل ۲۱ نوترون رسم می كنیم. چنین نموداری در شكل ۲۷.۱۲ نشان داده شده است. پایینترین تراز در هرستون معرف مجموع انرژیهای سكون هسته ای در گیر در واكنش (مثلاً  $^{39}_{19}\text{K}$  و دوترون) است. در يك واكنش، اگر تراز هسته حاصل پایینتر از تراز  $(^{39}_{19}\text{K} + d)$  باشد، جرم به انرژی جنبشی تبدیل می شود و اگر تراز حاصل بالاتر باشد، انرژی به جرم تبدیل خواهد شد. بهره خالص در انرژی جنبشی (اتلاف انرژی سكون) را مقدار  $Q$  واكنش می نامند (با بخش ۱۰.۱۲ مقایسه شود)

$$Q = \sum E_{k, \text{پیش}} - \sum E_{k, \text{پس}} = \sum (Mc^2)_{\text{پیش}} - \sum (Mc^2)_{\text{پس}} \quad (50.12)$$

كل انرژی در دستگاه مركز جرم برابر است با مجموع انرژیهای سكون  $^{39}_{19}\text{K}$  و  $^2\text{H}$  بدافاضه  $6 \text{ MeV}$  کاهش انرژی جنبشی تبدیلی از دستگاه آزمایشگاهی به دستگاه مركز جرم كه (به طور ناسبیتی) به صورت زیر نوشته می شود

$$V = \frac{mv}{m+M} \quad \text{سرعت دستگاه در مركز جرم}$$

$$E_{k, \text{CM}} = \frac{1}{2}m(v-V)^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{E_{k, \text{آزمایشگاه}}}{1+m/M}$$

كه در آن  $m$  جرم ذره ورودی دوترون، و  $M$  جرم هسته هدف  $^{39}\text{K}$  است. با قراردادن  $m = 2$  و  $M = 39$  و  $E_{k, \text{آزمایشگاه}} = 6 \text{ MeV}$ ، مقدار زیر به دست می آید

$$E_{k, \text{CM}} = 5.71 \text{ MeV}$$

در شكل ۲۷.۱۲ خط بریده افقی در بالای شكل و در  $5.71 \text{ MeV}$  بالاتر از حالت پایه  $^{40}\text{Ca}$  نشان دهنده كل انرژی دستگاه است. با توجه به انرژی، تمام واكنشهای زیر می توانند رخ دهند. (به استثنای يك واكنش)

$^{39}\text{K}(d, d)^{39}\text{K}$  پراكنده گی الاستيك یا نالاستيك كه در آن  $^{39}\text{K}$  در هر حالتی

پایینتر از برانگیخته گی  $5.71 \text{ MeV}$  قرار می گیرد.

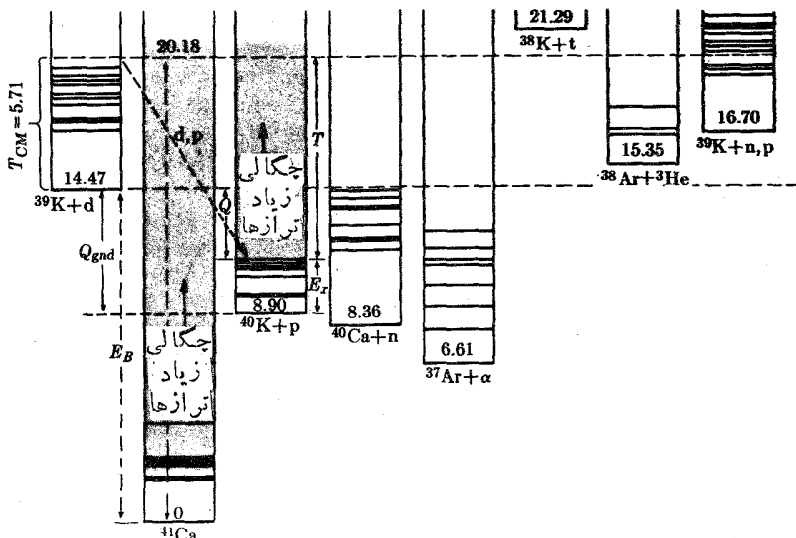
$^{39}\text{K}(d, \gamma)^{40}\text{Ca}$  گیراندازی دوترون در  $^{39}\text{K}$  كه منجر به تولید  $^{40}\text{Ca}$  در حالت

برانگیخته  $E_x = 5.71 \text{ MeV}$  می شود و با گسیل پرتوهای گامای

متوالی به حالت پایه می رسد.

- در این واکنش  ${}^4_0\text{K}$  در حالت برانگیخته‌ای پایین‌تر از  $11128 \text{ MeV}$  قرار می‌گیرد.  ${}^{39}\text{K}(d, p){}^4_0\text{K}$
- در این واکنش  ${}^4_0\text{Ca}$  در حالت برانگیخته‌ای پایین‌تر از  $1182 \text{ MeV}$  قرار می‌گیرد.  ${}^{39}\text{K}(d, n){}^4_0\text{Ca}$
- در این واکنش  ${}^{37}\text{Ar}$  در حالت برانگیخته‌ای پایین‌تر از  $1357 \text{ MeV}$  قرار می‌گیرد.  ${}^{39}\text{K}(d, \alpha){}^{37}\text{Ar}$
- در این واکنش  ${}^{37}\text{Ar}$  در حالت برانگیخته‌ای پایین‌تر از  $483 \text{ MeV}$  قرار می‌گیرد.  ${}^{39}\text{K}(d, {}^3\text{He}){}^{37}\text{Ar}$
- در این واکنش  ${}^{39}\text{K}$  در حالت برانگیخته‌ای پایین‌تر از  $328 \text{ MeV}$  قرار می‌گیرد.  ${}^{39}\text{K}(d, np){}^{39}\text{K}$
- این واکنش با توجه به انرژی دوترون  $6 \text{ MeV}$  قابل انجام نیست.  ${}^{39}\text{K}(d, t){}^{38}\text{K}$

وقتی هسته باقیمانده در حالت پایه تشکیل می‌شود، انرژی موجود ( $E_{\text{KCM}} + Q$ ) به صورت انرژی جنبشی محصولات واکنش (در دستگاه مرکز جرم) درمی‌آید. وقتی هسته باقیمانده در حالت برانگیخته تشکیل می‌شود، این انرژی بین برانگیختگی داخلی  $E_x$  و انرژی جنبشی محصولات واکنش تقسیم می‌شود [مثال مربوط به تبدیل  $(d, p)$  را در شکل ۲۷۰۱۲ ملاحظه کنید]. بدیهی است که تشخیص نوع و انرژی ذره گسیل شده منحصراً تراز



شکل ۲۷۰۱۲ نمودار انرژی سیستم‌های هسته و ذره‌ای که دارای ۲۰ پروتون و ۲۱ نوترون هستند.



انرژی هسته باقیمانده را تعیین می کند. تجزیه و تحلیل ذرات گسیل شده معمولاً به کمک طیف سنج مغناطیسی یا آشکارساز نیم رسانا انجام می گیرد.

مطالعه واکنش هسته ای از این نوع، اطلاعات سرشاری دربارهٔ ترازهای انرژی نوکلیدهای پایدار و ناپایدار به دست می دهد. در این اطلاعات، در بسیاری از موارد، علاوه بر انرژیهای برانگیختگی، اطلاعاتی دربارهٔ تکانه های زاویه ای و پاریته، و همچنین اطلاعات مفصلتری دربارهٔ توابع موج نوکلئونهای خارجی (نوکلئونهای «ظرفیت») وجود دارد. در این کتاب نمی توانیم بحث مفصلتری دربارهٔ واکنشهای هسته ای انجام دهیم.

## ۱۳.۱۲ شکافت

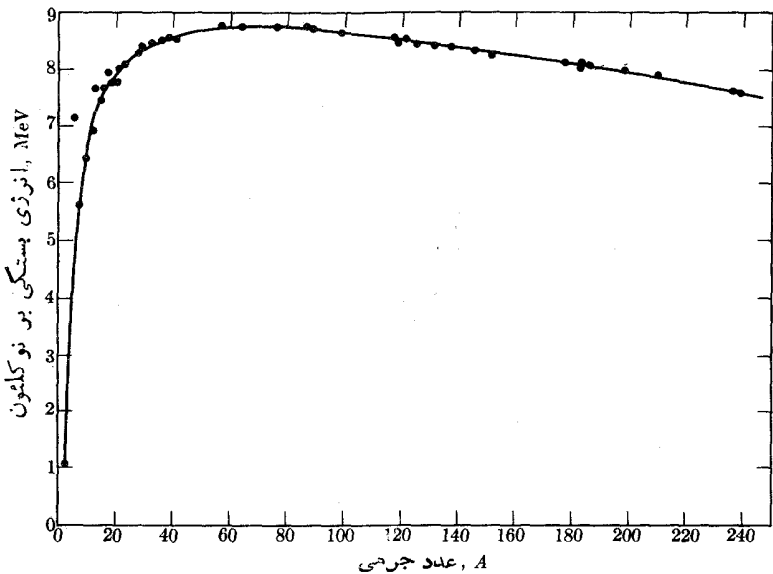
در سال ۱۹۳۹ هان و استراسمن<sup>۱</sup> کشف کردند که از طریق تحت تابش قرار دادن اورانیوم با نوترون، فلزات قلیایی خاکی تولید می شوند. لیزمایتنر و فریش<sup>۲</sup> نظردادند که با جذب نوترون در هستهٔ اورانیوم، هسته به اندازهٔ کافی برانگیخته شده و به دو پاره با جرم تقریباً مساوی تقسیم می شود. اینکه چنین فرایندی از نقطه نظر انرژی امکان پذیر است را می توان به آسانی با مطالعهٔ جرمهای اتمی یا انرژیهای بستگی دریافت. انرژی بستگی متوسط هر ذره در هسته های بتا-پایدار بر حسب عدد جرمی  $A$  در شکل ۲۸.۱۲ رسم شده است. انرژی بستگی هر ذره در ناحیهٔ جرمهای اتمی متوسط ( $A \approx ۱۲۰$ ) حدود  $۸.۵ \text{ MeV}$ ، و در ناحیهٔ اورانیوم فقط  $۷.۶ \text{ MeV}$  است. اگر هسته ای سنگین به دو پاره شکسته شود، انرژی بستگی افزایش می یابد و به صورت انرژی جنبشی ذرات و به صورت انواع مختلف تابش آزاد می شود. کل انرژی آزاد شده در فرایند شکافت بارعایت این ملاحظات تقریباً برابر است با

$$۲۴۰(۸.۵ - ۷.۶) = ۲۲۰ \text{ MeV}$$

از آنجا که هسته های سنگینتر از نظر تعداد نوترون، به طور نسبی از هسته های با جرم متوسط غنیتر هستند، لذا در هر شکافت دو تا سه نوترون آزاد می شود. پس از در نظر گرفتن انرژی صرف شده، انرژی آزاد شده حدود  $۲۰۰ \text{ MeV}$  می شود. جدول ۷.۱۲ چگونگی توزیع این انرژی را بین انواع مختلف تابشها نشان می دهد.

مدتی کوتاه پس از کشف شکافت توسط هان و استراسمن، بور و ویلر<sup>۳</sup> بر روی نظریهٔ فرایند شکافت هسته ای کار کردند. این دو، اساساً فرایند را به صورت مبارزه ای بین نیروی دافعه کولنی پروتونها و کشش سطحی هسته دانستند. برای هسته ای کروی جمع انرژی سطحی و انرژی کولنی برابر است با

1. O. Hahn and F. Strassmann, *Die Naturwissenschaften*, 27 (1939), p. 11.
2. Lise Meitner and O. R. Frisch, *Nature*, 143 (1939), p. 239.
3. N. Bohr and J. A. Wheeler, *Phys. Rev.*, 56 (1939), p. 426.



شکل ۲۸-۱۲ انرژی بستگی هر نوکلئون بر حسب عدد نوکلئونی در هسته‌های بتا-یا‌یدار.

$$E = 4\pi R^2 s + \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (51.12)$$

که در آن  $s$  کشش سطحی یعنی انرژی سطحی به ازای واحد سطح، و  $R$  شعاع هسته است. اگر هسته مطابق شکل ۲۹-۱۲ ب تغییر شکل دهد، انرژی سطحی آن افزایش می‌یابد، لکن انرژی کولنی آن به علت دور شدن بارها از هم کاهش می‌یابد. افزایش یا کاهش مجموع این دو عبارت بستگی به  $Z^2/A$  یا  $Z^2/R^3$  دارد.

کشش سطحی  $s$  را می‌توان با مطالعهٔ طبقه‌بندی جرم هسته‌ای به دست آورد. بور و ویلر دریافتند که مجموع انرژی سطحی و انرژی کولنی برای هسته‌هایی که در آنها  $Z^2/A > 47.8$  باشد با تغییر شکل هسته کاهش می‌یابد. بنا بر این هیچ نیرویی وجود ندارد که مانع تغییر شکل بیشتر هسته شود، و سرانجام هسته ضمن شکسته شدن به دو یا چند تکه حدود  $200 \text{ MeV}$  انرژی، همانطور که در بالا حساب شد، آزاد می‌کند. در مورد هسته‌هایی که در آنها  $Z^2/A < 47.8$  است، تغییر شکل هسته موجب تغییر انرژی سطحی به اندازه‌ای بیش از تغییر انرژی کولنی می‌شود. در این صورت هسته در مقابل تغییر شکل از خود مقاومت نشان می‌دهد. این مقاومت باید فقط دارای خصوصیت یک‌سند (پتانسیل) باشد، زیرا جدایی کامل این دو تکه منجر به حالتی با انرژی سکون کمتری می‌شود. شکل ۲۹-۱۲ انرژی پتانسیل کل را بر حسب فاصلهٔ مرکز تاملرکز دو تکه نشان می‌دهد. این منحنی، بدون

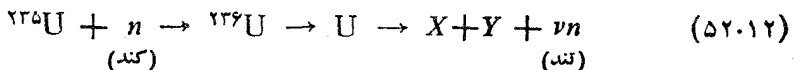
## جدول ۷۰۱۲ توزیع انرژی شکافت.

MeV	
$165 \pm 5$	انرژی جنبشی پاره‌های شکافت
$7 \pm 1$	انرژی پرتوگامای آبی
$5 \pm 0.5$	انرژی جنبشی نوترونهای شکافت
$7 \pm 1$	انرژی ذرات بتای حاصل از پاره‌های شکافت
$6 \pm 1$	انرژی پرتوگامای ناشی از پاره‌های شکافت
۱۵	انرژی نوتروینوهای حاصل از شکافت
$200 \pm 6$	کل انرژی در هر شکافت

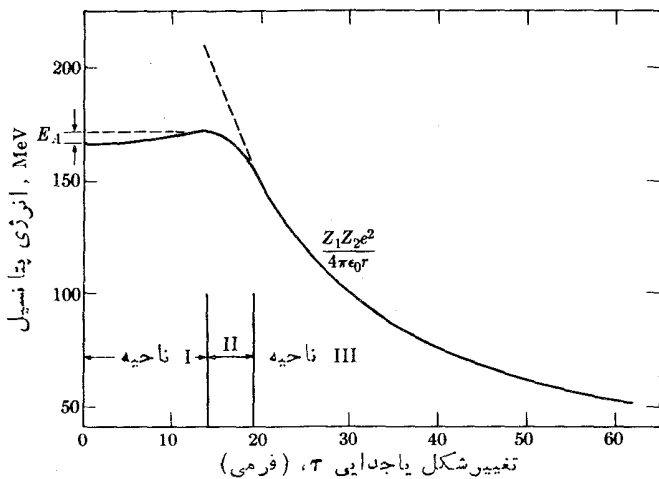
توجه به جزئیات آن، خیلی شبیه به منحنی انرژی پتانسیل ذره آلفا بر حسب فاصله آن از هستهٔ دختر در واپاشی آلفا است. در تشابه با واپاشی آلفا، فرایند شکافت در هسته‌های  $Z/A < 47.8$  می‌تواند با نفوذ از سد پتانسیل انجام گیرد. در هر حال، به علت بزرگی جرم پاره‌های شکافت، ارتفاع سد پتانسیل باید خیلی کوچکتر از ارتفاع سد در واپاشی آلفا باشد تا واپاشی با آهنگی قابل مشاهده به وجود آید. فرایند تشریح شده را شکافت خود به خودی می‌نامند و ارتفاع سد آن را انرژی فعالسازی گویند ( $E_f$  در شکل ۲۹-۱۲).

انرژی فعالسازی برای  $^{235}\text{U}$  برابر  $6.4 \text{ MeV}$  است. بر حسب اتفاق این مقدار انرژی تقریباً برابر انرژی بستگی آخرین نوترون در  $^{235}\text{U}$  است. وقتی که هسته اورانیوم  $^{235}\text{U}$  با جذب یک نوترون حرارتی به  $^{236}\text{U}$  تبدیل می‌شود، هسته اورانیوم  $^{236}\text{U}$  در حالت برانگیخته حدود  $6.5 \text{ MeV}$  قرار می‌گیرد. هسته  $^{236}\text{U}$  از این حالت برانگیخته می‌تواند با گسیل پرتوگاما به حالت پایه برگردد و یا فرایند شکافت انجام دهد. تجربه نشان داده است که از صد مورد، در هشتاد و پنج مورد عمل شکافت انجام می‌گیرد. مدت زمان شکافت در مقایسه با فرایندهای دیگر نظیر واپاشی آلفا و بتا از حالت برانگیخته آن چنان کوتاه است که این فرایندها با آن قابل رقابت نیستند.

واکنش شکافت که با نوترون حرارتی در  $^{235}\text{U}$  رخ می‌دهد به صورت زیر است

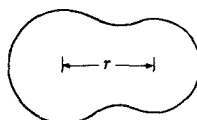


که در آن  $X$  و  $Y$  دوهسته باجرم متوسط و  $\nu$  تعداد متوسط نوترونهای آزاد شده در هر فرایند شکافت است. در واکنش معادله (۵۲-۱۲) عدد  $\nu$  برابر  $2.47$  است و در واکنش مشابه با

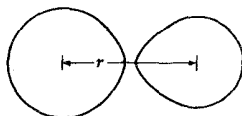


تغییر شکل یا جدایی  $r$ ، (فرمی)

(الف)



ناحیه I تغییر شکل



ناحیه II جدایی، اما نیروهای هسته‌ای هنوز باقی است



ناحیه III جدایی کامل، فقط نیروی کولنی

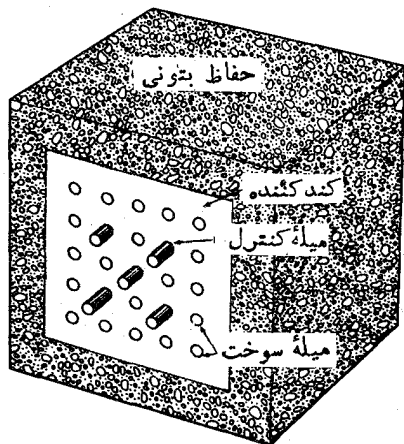
(ب)

**شکل ۲۹.۱۲** انرژی پتانسیل یک هسته تغییر شکل یافته و انرژی پتانسیل پاره‌های شکافت بر حسب فاصله جدایی یا تغییر شکل.

$^{239}\text{Pu}$  عدد  $\nu$  برابر ۲٫۹۱ می‌شود.

بدیهی است برای اینکه واکنش زنجیره‌ای بتواند ادامه یابد، باید  $\nu > 1$  باشد به طوری که نوترونهای حاصل از یک رخداد به طور متوسط بتوانند بیش از یک رخداد به وجود آورند. در حقیقت، همان گونه که در بالا اشاره شد، به علت گسیل پرتو گاما و نشت نوترونها، مقدار  $\nu$  حداقل باید ۱٫۲ باشد.

در یک رآکتور هسته‌ای، نوترونهای سریع در نتیجه برخورد الاستیک در کندکننده (کربن یا آب سنگین) به انرژی حرارتی می‌رسند و مجدداً توسط ماده قابل شکافت جذب می‌شوند. شکل ۳۰.۱۲ آرایش سوخت و کندکننده را در رآکتوری با سوخت اورانیوم



شکل ۳۰.۱۲ برشی از رآکتور اورانیوم طبیعی با میله‌های سوخت، میله‌های کنترل، کندکننده و حفاظ بتونی.

طبیعی نشان می‌دهد. اورانیوم طبیعی فقط دارای ۷۲٫۵ درصد اورانیوم ۲۳۵ و بقیه آن اورانیوم ۲۳۸ است. وقتی نوترونهای کند در  $238$  جذب می‌شوند،  $239$  و پرتوگاما تولید می‌شود، و بنابراین نوترونها از لحاظ ادامه واکنش زنجیره‌ای از بین رفته به‌شمار می‌آیند. در این مورد سطح مقطع کمتر از ۱ بارن ( $10^{-24}$  سانتیمتر مربع) است که در مقایسه با ۵۸۲ بارن سطح مقطع واکنش معادله (۵۲.۱۲) بسیار کوچکتر است.

آهنگ ادامه واکنش و میزان تولید حرارت به‌کمک مواد جاذب نوترون در قلب رآکتور کنترل می‌شود (شکل ۳۰.۱۲). درحقیقت، به‌علت اینکه در گسیل اندک درصدی از نوترونها تأخیر رخ می‌دهد، عمل کنترل آسان می‌شود. بدین ترتیب است که میزان تولید گرما به‌اندازه‌کافی کند می‌شود و می‌توان میله‌های کنترل را به‌طور مکانیکی جا به‌جا، و عمل را تنظیم، کرد.

به‌طوری‌که در بخش ۶.۱۲ اشاره شد، نوکلید ناپایدار نوترون‌زا در مسدودی حدود ۲۰-۱۵ ثانیه واپاشیده می‌شود. لذا گسیل نوترونهای تأخیری باید توجه دیگری داشته باشد. نوترون تأخیری از فرایندی ناشی می‌شود که در آن شکافت پاره بتا ناپایدار است و هسئۀ دختر نوترون‌زا است. در این صورت زمان تأخیر از کندی فرایند واپاشی بتا حاصل می‌شود.

در عمل تمام انرژی آزاد شده در شکافت (جدول ۷.۱۲) در قلب رآکتور تبدیل به‌حرارت می‌شود (غیر از انرژی نوترینو). برای استفاده از انرژی باید آن را از طریق خنک‌کننده به‌موتور حرارتی انتقال داد.

## ۱۴.۱۲ گداخت هسته‌ای و انرژی گرما هسته‌ای

بانگامی به شکل ۲۸.۱۲ آشکار می‌شود که می‌توان از ترکیب هسته‌های سیک و تشکیل هسته‌های باجرم متوسط، انرژی آزاد کرد. هسته‌های گروه آهن دارای پیوند بسیار محکمی هستند، اما حتی عناصر سنگینتر را نیز می‌توان در واکنشهای انرژی‌زا از طریق جذب پیاپی ذرات بسیار سبک، یعنی نوکلئونها، تولید کرد. در دو نظریه مهم کیهان شناختی که مورد بحث هستند، فرض بر آن است که تمام عناصر در نتیجه فرایند گداخت متوالی نوکلئونها و تبدیل آنها به هسته‌های سنگینتر و آزادسازی انرژی تشکیل شده یا می‌شوند.

بر طبق نظریه بنیادی انفجار بزرگ ارائه شده توسط جورج گاموف، جهان در ابتدا به صورت تسوده‌ای بسیار فشرده از نوترونها بود و فشرده‌گی به اندازه‌ای بود که نوترونها، برخلاف نوترونهای آزاد، پایدار بودند. بر اساس نظریه گاموف، جهان پس از یک انفجار عظیم به وجود آمد که در آن عناصر در نتیجه جذب متوالی نوترونها به وجود آمدند، و با واپاشی بتا به سمت منحنی پایداری عناصر (در نمودار نوکلیدها) متمایل شده‌اند. طبق نظر گاموف این انفجار احتمالاً متعاقب یک انقباض شدید رخ داده است.

یک نظریه مهم کیهان شناختی دیگری گوید جهان در حالتی مانا است و در آن مواد به طور پیوسته در فضای بین ستارگان تولید می‌شوند. ۱ برای بقای انرژی، فرض می‌شود که انرژی سکون و انرژی جنبشی ذرات به وجود آمده در جهان از لحاظ مقدار مساوی با انرژی گرانشی منفی آنهاست. طبق این نظریه، آهنگ تولید جرم دقیقاً مساوی و مخالف آهنگ رقیق شدن ماده در نتیجه انبساط جهان است. یک مشکل قبول این نظریه این است که، طبق نظرات علمی حاضر، ماده نمی‌تواند به وجود آید مگر همزمان با آن پاد ماده تولید شود. البته، کاملاً ممکن است که نیمی از عالم حاوی ماده و نیم دیگر حاوی پاد ماده باشد، اما مشکل در فهم چگونگی جدا شدن این دو ماده متضاد است. همچنین، مشاهدات انجام شده در سالیهای اخیر نشان می‌دهند که شدت پرتو گاما در فضای بین ستارگان بسیار پایین است، و این طور به نظرمی‌رسد که ترکیب لازم برای تولید ماده و پاد ماده وجود ندارد.

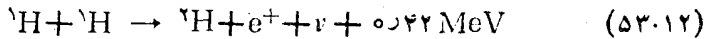
در ارتباط با آهنگ انبساط گیتی و شتاب این آهنگ، اخیراً مشاهدات دیگری داریم که بر نزدیک شدن نظریه حالت مانا به نظریه جهان تپنده دلالت دارند. ممکن است حقیقت امر در جایی بین این دو نظریه، انفجار بزرگ و حالت مانا، قرار داشته باشد.

در نظریه هویل و همکاران، ایجاد ستارگان و تولید عناصر از طریق ترکیب گاز هیدروژن بسیار رقیقی که بین ستارگان قرار دارد انجام می‌گیرد. بحث بر سر اینکه در آغاز هیدروژن واقعاً چگونه به وجود آمده است، به نظریه تشکیل که بر اساس محاسبات و اندازه گیریهای دقیقی استوار است، مربوط نمی‌شود. ۲ به علت افت و خیز آماری در چگالی گاز

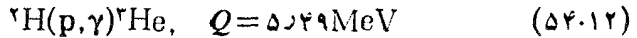
1. F. Hoyle, *Frontiers of Astronomy*, New York: Harper & Brothers, (1955), p. 320.

2. E. M. Burbidge, G. R. Burbidge, W. A. Fowler, and F. Hoyle, *Revs. Mod. Phys.* 29 (1957), p. 547.

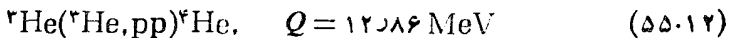
هیدروژن، این گاز در اثر نیروهای گرانشی فشرده شده و به صورت خوشه‌هایی درمی آید. به محض تشکیل يك خوشه، در نتیجه جذب هیدروژنهای بیشتر از اطراف، جرم این خوشه بتدریج افزایش می یابد. با بزرگتر شدن خوشه و متراکم تر شدن آن، دمای داخلی آن در نتیجه تبدیل انرژی پتانسیل گرانشی به انرژی جنبشی، بالا می رود. سرانجام، خوشه به اندازه کافی داغ می شود و فرایند سوختن هسته‌ای آغاز می شود. این عمل در دمای  $10^7$  درجه  $(1.3 \text{ keV} = 3/2 kT)$  رخ می دهد و این دمایی است که در آن نفوذ از سد پتانسیل کولنی کاملاً قابل صرف نظر نیست. از ترکیب دو پروتون، هسته‌ای با جرم ۲ به وجود می آید و از آنجا که  ${}^2\text{H}$  پایدار نیست، یگانه فرایندی که باید در نظر گرفت به صورت زیر است



از نابودی پوزیترون در مجاورت الکترون، انرژی مازاد  $1.02 \text{ MeV}$  آزاد می شود. سوختن هیدروژن سبک [معادله (53.12)] از طریق برهم کش ضعیف انجام می گیرد، و بنابراین فرایندی خیلی کند است. سطح مقطع واکنش به اندازه‌ای کوچک است که حتی در انرژیهای بالاتر بمباران آزمایشگاهی نیز مشاهده نشده است. اما آهنگ واکنش را می توان در گاز هیدروژنی با دما و چگالی معین، به وقت حساب کرد که نتیجه آن با مشاهدات نجومی مطابقت دارد. به محض تشکیل هیدروژن سنگین، عمل تشکیل هسته‌های سنگینتر از طریق برهم کش قوی که دارای سطح مقطعهای بزرگ است ادامه می یابد. به عنوان مثال،  ${}^3\text{He}$  از طریق واکنش زیر به وجود می آید



آنگاه دو اتم  ${}^3\text{He}$  با هم ترکیب می شوند و از طریق فرایند زیر،  ${}^4\text{He}$  و دو پروتون حاصل می شود



در اینجا زنجیره رویدادهای ممکن نشان داده شد که می تواند منجر به گداخت اتمهای هیدروژن و تولید هلیوم و آزاد شدن مقدار معنایی از انرژی شود.

در ادامه عمل تشکیل، بعد از عنصر  ${}^4\text{He}$  مشکلی وجود دارد که عناصر با جرم ۵ یا ۸ پایدار نیستند. اما، از ترکیب دو ذره آلفا  ${}^8\text{Be}$  به وجود می آید که حدود  $10^{-15}$  ثانیه عمر می کند. در گاز هلیوم با چگالی بالا، این عمل منجر به تراکم نسبتاً زیاد  ${}^8\text{Be}$  می شود، و از ترکیب آن با ذره آلفایی دیگر هسته  ${}^{12}\text{C}$  به وجود می آید. به طوری که کوه و همکاران<sup>۱</sup> نشان داده اند، این واکنش دارای شدیدی است که آهنگ تولید  ${}^{12}\text{C}$  را در گاز هلیوم در  $10^8 \text{ K}$  قویاً افزایش می دهد.

نوترونهاي آزاد می توانند از طریق وقایع زنجیره‌ای زیر تولید شوند

1. C. W. Cook, W. A. Fowler, C. C. Lauritsen, and T. Lauritsen, *Phys. Rev.*, 107 (1957), 508.

$$^{12}\text{C}(p, \gamma)^{13}\text{N}, \quad Q = 1.94 \text{ MeV}$$

$$^{13}\text{N}(\beta^+)^{13}\text{C}, \quad Q = 1.20 \text{ MeV} + 1.02 \text{ MeV} \quad (56.12)$$

$$^{13}\text{C}(\alpha, n)^{16}\text{O}, \quad Q = 2.21 \text{ MeV}$$

برای تشریح عمل تشکیل ایزوتوپهای پرنوترون که به عناصر سنگینتر نظریهٔ هوپیل مربوط می‌شوند، وجود نوترونهای آزاد ضرورت می‌یابد.

به محض تشکیل کربن، سوختن چهار پروتون برای تولید  $^4\text{He}$ ، از طریق زنجیرهٔ واکنشهای بی‌درپی که در آنها کربن و ازت به‌عنوان کاتالیزور عمل می‌کنند، ادامه می‌یابد. شاخهٔ اصلی این چرخه از دو واکنش اول معادله (۵۶.۱۲) شروع می‌شود و با واکنشهای زیر ادامه می‌یابد

$$^{13}\text{C}(p, \gamma)^{14}\text{N}, \quad Q = 7.55 \text{ MeV}$$

$$^{14}\text{N}(p, \gamma)^{15}\text{O}, \quad Q = 7.29 \text{ MeV}$$

$$^{15}\text{O}(\beta^+)^{15}\text{N}, \quad Q = 1.74 \text{ MeV} + 1.02 \text{ MeV}$$

$$^{15}\text{N}(p, \alpha)^{12}\text{C}, \quad Q = 4.96 \text{ MeV}$$

کل انرژی آزاد شده در این فرایند حدود  $26.73 \text{ MeV}$  است که حدود ۶ درصد آن به صورت نوترینو در دو واپاشی بتا در ستارگان به‌هدر می‌رود.

اگرچه سلسله وقایعی که در این بخش تشریح شده‌اند، به نظر می‌رسد منابع اصلی انرژی ستارگان باشند، ولی تصویر کامل تکامل ستارگان و تشکیل عناصر خیلی پیچیده‌تر از آن است که در اینجا آورده شود. در ستارگان، سوختن هیدروژن و هلیوم با آهنگی غیر فاجعه‌آمیز رخ می‌دهد که به چگالی و دمای گاز و سطح مقطع و یا طول عمر واکنشهای مربوطه بستگی دارد. به‌علت وجود نیروی گرانشی است که گاز به‌صورت متراکم باقی می‌ماند. در بمب هیدروژنی (بمب نوع گداخت)، دمای لازم برای شروع واکنش از طریق انفجار یک بمب نوع شکافت به‌وجود می‌آید. نیروهای محصورکنندهٔ گازهای واکنش‌کننده، علاوه بر محافظهٔ گاز، نیروهای لختی هستند. محصورسازی لختی بدان سبب میسر است که کل فرایند فقط در حدود یک میلیونیم ثانیه به‌طول می‌انجامد.

در مقیاس بسیار بزرگ ممکن است از فرایند فاجعه‌آمیز به‌طریقه‌ای نیمه‌کنترل‌شده استفاده کرد، که امکان آن به‌طور جدی مورد مطالعه قرار گرفته‌است. دره‌ای بسیار بزرگ و عمیق را، پس از مفروش کردن و مسافت‌سازی آن بابتون، می‌توان به‌عنوان دیگ بخاری عظیم به‌کار برد. در هر ساعت، یا حدود آن، می‌توان یک بمب هیدروژنی در داخل دیگ منفجر کرد تا برای مصرف یک ساعت بخار تولید کند. این روش ممکن است آخرین کاربرد صلحجویانه انرژی گداخت باشد. واضح است که اگر بتوانند گازی که در آن عمل گداخت صورت می‌گیرد را در آن دمای بالا در محفظه‌ای با شرایط کنترل شده نگاهداری کنند،



این طرح خیلی جذابتر خواهد شد. به نظر می رسد که این موضوع امکانی معقول است که می توان با متمرکز کردن یونها به وسیله میدانهای مغناطیسی به آن دست یافت.

جالبترین واکنشها در رآکتور گداخت گرما هسته ای به ترتیب عبارت اند از واکنش D.D



و واکنش D.T



در دماهای خیلی بالای مورد بحث، مولکولها و اتمهای گاز تجزیه و کاملاً از هم جدا می شوند، و به صورت مخلوطی از گازهای هسته ای و الکترونی درمی آیند که پلاسما نامیده می شود. پلاسما از نظر بار الکتریکی خنثی است به طوری که، در صورت عدم وجود میدانهای الکتریکی و مغناطیسی، جز نیروی گرانی که در مقیاس آزمایشگاهی بسیار ناچیز است، هیچ نیروی خارجی دیگری بر آن وارد نمی شود. به علت وجود فشار داخلی، گاز پلاسما در خلأ منبسط می شود و ظرف را پر می کند. وقتی ذرات در تماس با جدار ظرف قرار می گیرند، حرارت از دست می دهند و خنک می شوند و در نتیجه، جدار گرم می شود. بنابراین، مسائلی که باید حل شوند عبارت اند از: اول اینکه چطور پلاسما را به دما و چگالی کافی رساند، و دوم اینکه چطور پلاسما را برای مدت طولانی جهت استخراج انرژی در یک محل نگهداشت. مسئله اول را می توان به طرق مختلف حل کرد. مسئله دوم دشوارتر به نظر می رسد. در آزمایشگاههای سراسر دنیا، روشهای مختلفی برای نگهداری پلاسما در میدانهای مغناطیسی مورد آزمایش اند. پلاسما داغ با تراکم خیلی زیاد را می توان به وجود آورد. تا به امروز مشکل اصلی ناپایداریهایی بوده است که زمان محصورسازی پلاسما را کمتر از مقدار بحرانی نگه داشته است.

## ۱۵.۱۲ ذرات بنیادی

یکی از جالبترین زمینه های تحقیق در فیزیک و شیمی همیشه بررسی در این بوده است که چگونه ماده را می توان به ذرات کوچک و کوچکتر تقسیم کرد. وجود اتمها و مولکولها به طور قطعی در قرن نوزدهم ثابت شد. و اولین ذره که هنوز هم به عنوان یک ذره بنیادی طبقه بندی می شود، در سال ۱۸۹۷ توسط تامسون کشف شد. در اوایل قرن بیستم تجربیات و ایده های رادرفورد، بور و دیگران، مفهوم اتم هسته ای را بر پایه محکمی قرار داد. تجربیات اولیه رادیو اکتیو که به وسیله کوریها و رادرفورد انجام شده بودند، نشان دادند که هسته می تواند به اجزای کوچکتر تقسیم شود. اولین واکنش هسته ای که در سال ۱۹۱۹ توسط رادرفورد مورد مطالعه قرار گرفت، این نظر را تأیید کرد و کشف نوترون در

سال ۱۹۳۲ توسط چادویک به بحث درباره نوع ذرات تشکیل دهنده هستهها پایان بخشید. در سالهای دهه ۱۹۳۰ تصویر جهان برای فیزیکدانها بهطور رضایت بخشی نمایان شد. ماده می توانست از تعداد محدودی از اتمهای مختلف ساخته شود، و هر اتم از هسته ای تشکیل می شد که در اطراف آن ابری از الکترونها قرار داشت. هسته مرکب از تعدادی پروتون و نوترون بود که از طریق نیروی قوی به هم می پیوستند، اگر چه بررسی بیشتر در مورد این نیرو ضروری به نظر می رسید ولی الزاماً به نظر نمی آمد که طبیعت آن پیچیده باشد. یکی از ذرات ظاهراً زائده، یعنی نوترینو، بر این تصویر ساده سایه افکننده بود و هنوز ذرات دیگری باید کشف می شدند.

کشف تعدادی از ذرات، به نام ذرات «بنیادی» از طریق مطالعه پرتوهای کیهانی انجام شده است. تابشهای نافذ کیهانی غالباً از خارج از منظومه شمسی سرچشمه می گیرند، ولی مشخصه آنها در نتیجه بهم کنشهایی در جو زمین تغییر می کند. به هر حال در سالهای اخیر، اغلب کشفیات و جزئیات مطالعات درباره این ذرات با به کار بردن تابشهای حاصل از ماشینهای ساخت بشر انجام شده است.

در اینجا بعضی از مهمترین اطلاعاتی که تا به حال درباره ذرات بنیادی و حالتهای برانگیخته آنها به دست آمده را معرفی و به بعضی از مبانی این اطلاعات اشاره می کنیم. اگر چه تا به امروز هیچ تفسیر نظری اساسی از این دانستهها وجود ندارد، ولی قوانین ریاضی نسبتاً ساده ای به دست آمده اند که گهگاه بدرستی خواص دقیق ذرات جدید را پیش بینی کرده اند.

در دسته بندی ذرات مختلف، چندین عدد کوانتومی گسسته به کار می روند. از جمله این اعداد، اسپین ذاتی و پارینته  $J$  و همچنین ایزواسپین  $T$  را می توان نام برد که به طور وسیع در فیزیک ساختار هسته ای نیز به کار می روند و در زیر به طور خلاصه مورد بحث قرار گرفته اند. دسته دوم بعضی از اعداد کوانتومی کاملاً جدید اند که در تحقیقات مربوط به ذرات بنیادی ظهور یافته اند. معروفترین آنها عدد کوانتومی شکستگی  $S$  است که برای حل مشکل طول عمر زیاد و غیر عادی بعضی از حالتهای برانگیخته نوکلئونی معرفی شده است. تولید و واپاشی این حالتهای با عمر طولانی یا شبه پایدار که به نام هیبرونها خوانده می شوند، به طور خلاصه در زیر بحث شده است.

پوزیترون و الکترون پادزده یکدیگرند. آنها دارای جرم و اسپین برابر ولی بار الکتریکی مخالف هستند، و وقتی در تماس با هم قرار گیرند با گسیل فوتونهایی یکدیگر را نابود می کنند. وجود پادزده برای الکترون عملاً به وسیله دیراک و به دلیل تقارن معادلات الکترون در نظریه کوانتومی نسبیتی پیش بینی شده بود. معلوم شده است که این تقارن برای تمام ذرات وجود دارد. به عنوان مثال، پروتون پاد ذره ای دارد که پروتون منفی است و در سال ۱۹۵۵ به وسیله چمبرلن و همکاران کشف شد.<sup>۱</sup>

1. O. Chamberlain, E. Segre, C. Weigand, and T. Ypsilantis, *Phys. Rev.*, 100 (1955), p. 947.

جدول ۸.۱۲، که از گزارش باربارو-گالیتیری و همکاران<sup>۱</sup> اخذ شده، مهمترین خواص فیزیکی ذرات بنیادی یا ذرات باطول عمر زیاد را که تا به امروز شناخته شده‌اند، به دست می‌دهد. این جدول کمی خلاصه شده است و تمام مقادیر مربوط به خطا برای اختصار حذف شده‌اند. درستون یک، ذرات به صورت فوتونها، لپتونها، مزونها و باریونها دسته بندی شدند. اصطلاح پادپون برای نوکلئونها و حالت‌های برانگیخته بالاتری که به نوکلئونها و مزونها و پادپون می‌شوند، به کار رفته است. در جدول ۸.۱۲ فقط باریونهای باطول عمر زیاد یا حالت‌های شبه پایدار آورده شده‌اند.

ستون دوم علامت ذره را نشان می‌دهد و بر مبنای قراردادهای مورد قبول فعلی، که بسرعت در حال تغییرند، استوار است. توجه کنید که در فهرست دو جفت نوترینو آمده‌اند: نوترینوهای الکترون و نوترینوهای میون. یک نوع همراه با واپاشی بتا، و نوع دیگر (که نوترینو نیز نامیده می‌شود) همراه با واپاشی میون است. ستون سوم ایزواسپین  $T$  را نشان می‌دهد. ایزواسپین میزانی از تقارن تابع موج هسته‌ای یا ذره است، و «تصویر»  $T_3$  آن بر آوردی از بار الکتریکی به دست می‌دهد. در فیزیک ساختار هسته‌ای، تعریف  $T_3$  عبارت است از

$$T_3 \equiv \frac{1}{2}(Z - N) = Z - \frac{A}{2} \quad (57.12)$$

برای ذرات بنیادی شگفت، این تعریف کمی تغییر یافته است (به شرح زیر مراجعه شود). ایزواسپین به طور قراردادی مشابه تکانه زاویدای مورد بحث قرار گرفته است، ولی در اینجا نمی‌توانیم به جزئیات این نظریه بپردازیم. عجلتاً ذکر این موضوع کافی است که وقتی ذره‌ای ایزواسپین  $T$  داشته باشد، برای آن جمعاً  $1 + 2T$  زیر حالت مختلف با  $T_3$  متفاوت و بار مختلف وجود خواهد داشت. اما خواص دیگر این زیر حالتها تقریباً یکسان‌اند. کلمه «تقریباً» به واسطه این حقیقت آمده است که انرژی هر ذره یا حالت، تا اندازه‌ای تابع بار است. نوترون و پروتون دو زیر حالت مختلف نوکلئونی هستند، یکی با  $T_3 = 1/2$  [معادله (57.12)] و دیگری با  $T_3 = -1/2$ . از آنجا که ذره‌ای با  $T_3 = 3/2$  یا  $T_3 = 3/2$  و جرمی برابر جرم یک نوکلئون مشاهده نشده است، نتیجه می‌شود که ایزواسپین نوکلئون  $T = 1/2$  است. برای لپتونها نه ایزواسپین  $T$  و نه پاریتته قابل تعریف است. ستون چهارم جدول ۸.۱۲ اسپین معمولی و پاریتته<sup>۲</sup>  $J^P$  را، هنگامی که اینها مشاهده شدنی یا مشاهده شده باشند، به دست می‌دهد. برای مزونها نوع جدیدی پاریتته، پاریتته<sup>۳</sup>  $G$ ، می‌توان تعریف کرد، که در اینجا وارد بحث مفهوم پیچیده آن نمی‌شویم. ستون پنجم عدد کوانتومی شگفتی را نشان می‌دهد، که در زیر به طور خلاصه بحث شده است. این عدد کوانتومی

1. A. Barbaro - Galtieri, S. E. Derenzo, L. R. Price, A. Rittenberg, A. H. Rosenfeld, N. Barash - Schmidt, C. Bricman, M. Roos, P. Söding, and C. G. Wohl, *Revs. Modern Phys.*, **42** (1970), p. 87.

نیز نمی تواند برای لپتونها مورد بحث قرار گیرد.

جرم، یا انرژی در حال سکون، ذرهها در جدول ۸.۱۲ بر حسب MeV و عمرهای متوسط بر حسب ثانیه داده شده اند. ذرات در این جدول، ذرات با طول عمر زیاد نسامیده شده اند، زیرا عمر آنها در مقایسه با واحد مناسب برای واپاشی از طریق برهم کنش قوی (هسته ای)، فوق العاده طولانی است.

$$\tau_0 = \frac{\hbar}{m\pi c^2} = 4.7153 \times 10^{-24} \text{ s}$$

این مقدار تقریباً برابر طول عمر یک پيون مجازی است که در نیروی هسته ای تولید می شود (به بخش ۴.۱۲ مراجعه کنید).

اغلب حالت های تشدید بار یونی که در زیر بحث می شوند، طول عمری در حدود بزرگی واحد در این مقیاس دارند. ذرات یا حالت های نامبرده در جدول ۸.۱۲ تماماً، به علت عملکرد قواعد انتخاب، در مقابل واپاشی از طریق برهم کنش قوی پایدار هستند. آخرین ستون جدول، مدهای واپاشی معمولی ذرات ناپایدار، آهنگ نسبی وقوع آنها، و انرژی آزاد شده را در مدهای مختلف به دست می دهد.

شکل ۳۱.۱۲ نمودار تراز انرژی باریونها است که در آن پایستترین حالت های تشدید و همچنین تمام حالت های شبه پایدار نشان داده شده اند. برای پاد ذره ها نیز می توان نموداری مشابه رسم کرد. اطلاعات این شکل از گزارش باربارو-گالیتري و همکاران گرفته شده است و روش علامت گذاری مطابق با پیشنهاد چو و همکاران است. حالت ها به صورت سه بعدی در دستگاه مختصاتی با شگفتی از  $S=0$  تا  $S=3$ ، با ایزواسپین از  $T=0$  تا  $T=3/2$  و با انرژی  $mc^2$  از  $939 \text{ MeV}$  و بالاتر مرتب شده اند. هر دسته از حالت ها با  $S$  و  $T$  یکسان بایک علامت یونانی در بالای ستون داده شده است مگر برای نوکلئونها ( $N$ ) و حالت های دیگر با  $S=0$  و  $T=1/2$ . جدایی حالت های مختلف انرژی به  $1+2T$  زیر حالت با تصاویر متفاوت ایزواسپین (بار) کمی اغراق آمیز رسم شده است. برای ذراتی که شگفتی آنها صفر نیست، رابطه (۵۷.۱۲) باید اصلاح شود (و بسط یابد) تا اینکه با مشاهدات تطبیق کند. حال با گذاردن  $Q$  به جای  $Z$  می نویسیم

$$Q = T_3 + \frac{A}{2} + \frac{S}{2} = T_3 + \frac{Y}{2} \quad (58.12)$$

که در آن عدد کوانتومی دیگری را معرفی کردیم، یعنی فوق بلاد  $Y$  که جانشین  $S$  شده است. از آنجا که برای هر چند تایی بار، متوسط  $T_3$  صفر است، ملاحظه می کنیم که متوسط بار برای چند تاییه برابر است با

جدول ۸۰۱۲ ذرات بنیادی با طول عمر زیاد.

Q, MeV	دسته اصلی	واپاشیهای اصلی	مدحرفتی	عمر میانگین، s	جرم	S	$J^{\pi}$	T	نماد و بار	رده
		پایداری	پایداری	$0 (< 2 \times 10^{-11})$		۱	۱		$\gamma$	فوتون
		پایداری	پایداری	$0 (< 6 \times 10^{-12})$			۱/۲		$\nu^0$	
		پایداری	پایداری	$0 (< 10^6)$					$\eta_{\mu}$	
		پایداری	پایداری	۰۰۵۱۱۰۰۵۶			۱/۲		$e^{\pm}$	لپتونها
۱۰۵۵۱۵	%۱۰۰		$0\nu\bar{\nu}$	$2.19 \times 10^{-2}$	۱۰۵۵۶۵۹		۱/۲		$\mu^{\pm}$	
۳۳۳۹۲	$\approx 100\%$		$\mu\nu$	$2.65 \times 10^{-8}$	۱۳۹۵۷۸	۰	۰	۱	$\pi^{\pm}$	
۱۳۹۳۰۷	$1.24 \times 10^{-4}$		$0\nu$							
۳۳۳۹۲	$1.24 \times 10^{-4}$		$\mu\nu\gamma$							
۳۰۹	$1.02 \times 10^{-8}$		$\pi^0 0\nu$							
۱۳۳۹۷	%۹۸.۸۳		$\gamma\gamma$	$0.28 \times 10^{-12}$	۱۳۳۹۷۵	۰			$\pi^0$	
۱۳۳۹۵	%۱.۱۷		$\gamma 0^+ 0^-$							
۳۸۸۱	%۴۳.۷۷		$\mu\nu$	$1.225 \times 10^{-8}$	۴۹۳۵۲	$\pm$	۰	۱/۲	$K^{\pm}$	
۲۱۹۳۲	%۲۰.۹۳		$\pi^{\pm}\pi^0$							
۷۵۳۰	%۵.۵۷		$\pi^{\pm}\pi^-\pi^+$							
			و دیگر							
				%۵۰K <sub>۱</sub> , %۵۰K <sub>۲</sub>	۴۹۷۳۷۶	۱			$K^0$	مزونها
۲۱۸۳۶	%۵۸.۷		$\pi^+\pi^-$	$0.862 \times 10^{-10}$		$\pm$			$K_1$	
۲۲۷۵۸	%۳۱.۳		$\pi^0\pi^0$							
۹۳۵۸	%۲۱.۵۵		$\pi^0\pi^+\pi^0$	$5.28 \times 10^{-8}$		$\pm$			$K_2$	
۸۳۳۶	%۱۲.۳۶		$\pi^+\pi^-\pi^0$							
۲۵۳۳۵	%۲۶.۵۸		$\pi\mu$							

۲۵۷۲۷ %۲۸۸۲۸

$\pi\sigma\pi$  و  $\sigma\sigma\sigma$

۵۴۸۲۸ %۳۸۸۲۲  $\gamma\gamma$   $\gamma\pi^0\gamma$   $\pi^+\pi^-\pi^0\gamma$   $\pi^+\pi^-\pi^0$   $\pi^+\pi^-\gamma$   $> 10^{-12}$  ۵۴۸۲۸ ۰ ۰ ۰ ۰  $\eta$

۱۴۳۲۷ %۳۳۲۲۴

۱۳۴۲۵ %۲۳۳۲۰

۲۴۹۲۵ %۵۲۴

و  $\sigma\sigma\sigma$

۹۳۸۲۲۵۶ ۰  $1/\sqrt{2}$   $1/\sqrt{2}$   $p$

۰۵۷۸ %۱۰۰۰  $p\sigma^-p$  ۰۹۳۲۲  $\times 10^3$  ۹۳۹۲۵۵۰ ۰ ۰  $n$

۳۷۲۸ %۴۵۲۳  $p\pi^-$  ۲۲۵۱  $\times 10^{-10}$  ۱۱۱۵۲۶۰ -۱  $1/\sqrt{2}$  ۰  $\Lambda$

۴۱۲۱ %۳۴۲۷  $\pi\pi^0$  و  $\sigma\sigma$

۱۱۴۲۷ %۵۱۲۷  $p\pi^0$  ۰۸۰۴  $\times 10^{-10}$  ۱۱۸۹۲۴۰ -۱  $1/\sqrt{2}$  ۱  $\Sigma^+$

۱۱۰۲۲ %۲۸۲۳  $\pi\pi^+$  و  $\sigma\sigma$

۷۴۲۹ %۱۰۰۰  $\Lambda\gamma$   $< 1.0 \times 10^{-14}$  ۱۱۹۲۲۴۶ -۱  $\Sigma^0$   $\gamma$   $\gamma$   $\Sigma^0$   $\gamma$

۱۱۷۲۹ %۱۰۰۰  $\pi\pi^-$  ۱۲۴۹  $\times 10^{-10}$  ۱۱۹۷۲۳۲ -۱  $\Sigma^-$   $\gamma$   $\gamma$   $\Sigma^-$   $\gamma$

۴۳۲۹ %۱۰۰۰  $\Delta\pi^0$  و  $\sigma\sigma$

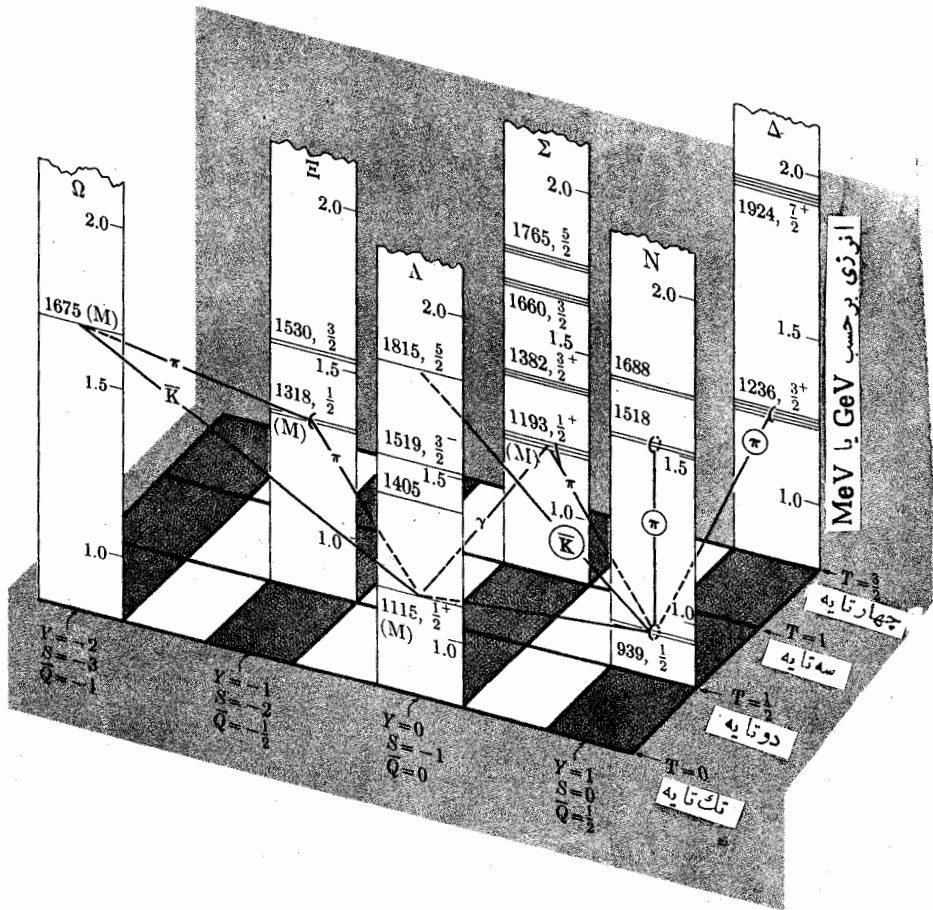
۴۴۲۱ %۱۰۰۰  $\Delta\pi^-$  ۳۲۰۳  $\times 10^{-10}$  ۱۳۱۴۲۷ -۲  $1/\sqrt{2}$   $1/\sqrt{2}$   $\Xi^0$

۲۰۵۲۱ %۱۰۰۰  $\Delta\sigma^-p$  و  $\sigma\sigma$

۲۰۵۲۱ %۱۰۰۰  $\Delta\sigma^-p$  ۱۲۶۶  $\times 10^{-10}$  ۱۳۲۱۲۲۵ -۲  $\Xi^-$

۲۲۸ ؟  $\Sigma\pi$  و  $\sigma\sigma$

۴۳ ؟  $\Delta K$  ۱۲۳  $\times 10^{-10}$  ۱۴۷۲۲۵ -۲  $3/\sqrt{2}$  ۰  $\Omega^-$



شکل ۳۱۰۲. ترسیم حالت‌های باریون ( $A=1$ ) در مقابل ایزواسپین و فوق بار. فقط واپاشی‌های انتخابی نشان داده شده‌اند و واپاشی‌های قوی در دایره قرار دارند. علامت (M) دلالت بر حالت شبه پایدار دارد.

$$\bar{Q} = \frac{Y}{2} \quad (۵۹۰۱۲)$$

هر حالت از سیستم بار یون دارای یک حالت پاد بار یون متناظر با عدد بار یونی  $A$ ، فوق بار  $Y$ ، تصویر ایزواسپین  $T_3$  و بار  $Q$  مخالف است. در بعضی موارد این پاد حالتها مشاهده شده‌اند، بهر حال انرژی لازم برای تولید آنها بیشتر از انرژی لازم برای

ایجاد حالت‌های بار یونی است.







تمام حالت‌های بار یونی را می‌توان حالت‌های برانگیخته نوکلئون در نظر گرفت. در فیزیک اتمی و هسته‌ای حالت‌های برانگیخته ممکن است با گسیل کوانتوم میدان الکترو-مغناطیسی، یعنی فوتون، واپاشیده شوند. در مورد حالت برانگیخته بار یون،  $\pi$ ،  $\pi^+$ ،  $\pi^-$ ،  $K$ ، و یا در بعضی موارد یک فوتون گسیل می‌شود. از آنجا که پيون و کائون هر دو انرژی در حال سکون غیر صفر دارند، در چنین واپاشیهایی تفاوت انرژی حداقلی لازم خواهد بود.

ذرات یا حالت‌هایی که در دو ستون طرف راست شکل ۳۱.۱۲ واقع نیستند، در برخورد نوکلئون-نوکلئون تولید می‌شوند، اما هرگز تنها به وجود نمی‌آیند (تولید همراه). این واقعیت و همچنین طول عمر زیاد منجر به ایده عدد کوانتومی جدید، یعنی شگفتی  $S$ ، شد. شگفتی و پارته در برهم کنش‌های (هسته‌ای) قوی پایسته می‌مانند، اما در مورد برهم-کنش‌های ضعیف چنین نیست. به عنوان مثال، ذره‌ای با  $S=2$  و ذره دیگری با  $S=-2$  می‌توانند به طور همزمان در برخورد نوکلئون-نوکلئون به وجود آیند. در این صورت شگفتی پایستگی دارد. بار یونها یا حالت‌های شبه پایدار که با علامت  $(M)$  در شکل ۳۱.۱۲ مشخص شدند. بدون نقض شگفتی نمی‌توانند به تراز پایینتر برسند. به عنوان مثال،  $\sum 1193$  نمی‌تواند با گسیل کائون به نوکلئون واپاشیده شود ( $\Delta S = \pm 1$ )، زیرا به مقدار کافی انرژی در اختیار ندارد. اما می‌تواند با گسیل پيون ( $\Delta S = \pm 0$ ) واپاشیده شود که در آن شگفتی نقض می‌شود. بدین ترتیب، از طریق برهم کنش نسبتاً آرام وضعیفی (مانند واپاشی بتا) به حالت پایینتر می‌رسد.

این بخش ذرات بنیادی را نمی‌توانیم بدون ذکر جدیدترین نظرات درباره ساختار داخلی این ذرات پایان دهیم. ابتدا باید متذکر شد که نیروی بین بار یونها (مثلاً نوکلئونها) با تمام پیچیدگیهای آن، از جنبه‌های زیادی شیمیه نیروی بستگی آنها در مولکولها است. در مورد نیروهای مولکولی دیده‌ایم که پیچیدگی در نتیجه دینامیک داخلی پیچیده ذرات برهم کنش کننده، یعنی اتمها، است. آیا ذرات «بنیادی» هم می‌توانند مشابه اتم باشند، یعنی از ذرات فوق بنیادی تشکیل شوند.

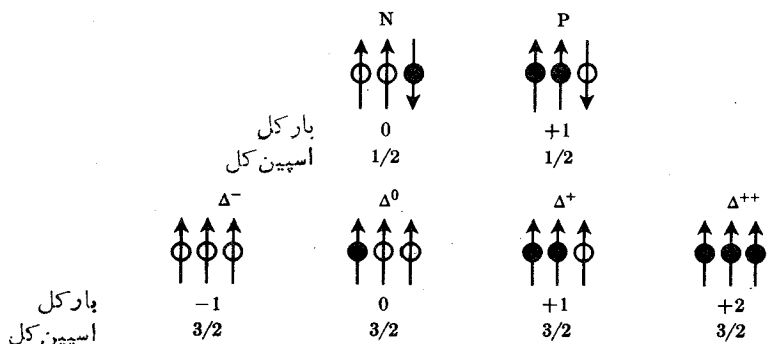
در سال ۱۹۶۴ گلמן<sup>۱</sup> متذکر شد که خواص شناخته شده بار یون و حالت‌های مزون را می‌توان با فرض مرکب بودن آنها از سه ذره به نام کواک و پاد ذره آنها بیان کرد. شکل ۳۲.۱۲ الف بعضی از خواص مهم این سه ذره فرضی و پاد ذره آنها را نشان می‌دهد،  $n$ ،  $p$ ،  $\lambda$  به ترتیب به معنی پروتون گونه، نوترون گونه و لاندگونه است. فرض می‌شود که کوارکها دارای اسپین  $1/2$  باشد که غیر معمول نیست، اما برای آنها به ترتیب بار الکتریکی  $+2e/3$ ،  $-e/3$  و  $-e/3$  فرض می‌شود که در صورت صحیح بودن غیر-معمول است.



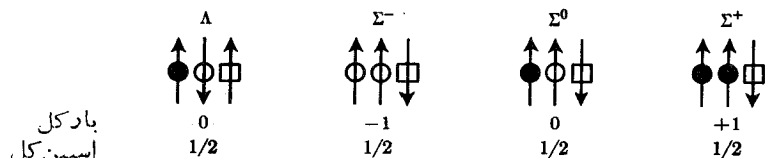
نام	p	n	$\lambda$	$\bar{\lambda}$	$\bar{n}$	$\bar{p}$
نماد						
بار	+2/3	-1/3	-1/3	+1/3	+1/3	-2/3
شکفتی	0	0	-1	+1	0	0

**شکل ۳۲.۱۲ الف.** سه کوارک و پادذره آنها (طرف راست) به عنوان اجزای اصلی بار یونها و مزونها پیشنهاد شدند. برخلاف تمام ذراتی که تا به حال کشف شدند، کوارکها باری کمتر از بار کامل یک الکترون خواهند داشت. کوارک لاندا ( $\lambda$ ) با شکفتی منفی واحد پیش بینی شده است. هر کوارک و پادکوارک دارای اسپین نصف واحد است، که راستای آنها با پیکان نشان داده شده است. مشابه ذرات شناخته شده، خواص پادکوارکهای فرضی تصویری از خواص کوارکها است.

شکفتی = 0

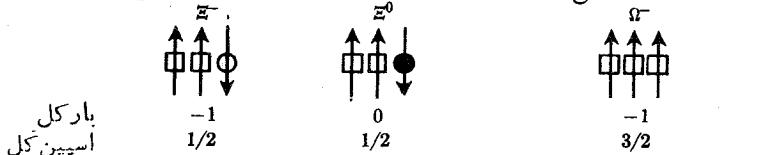


شکفتی = -1



شکفتی = -2

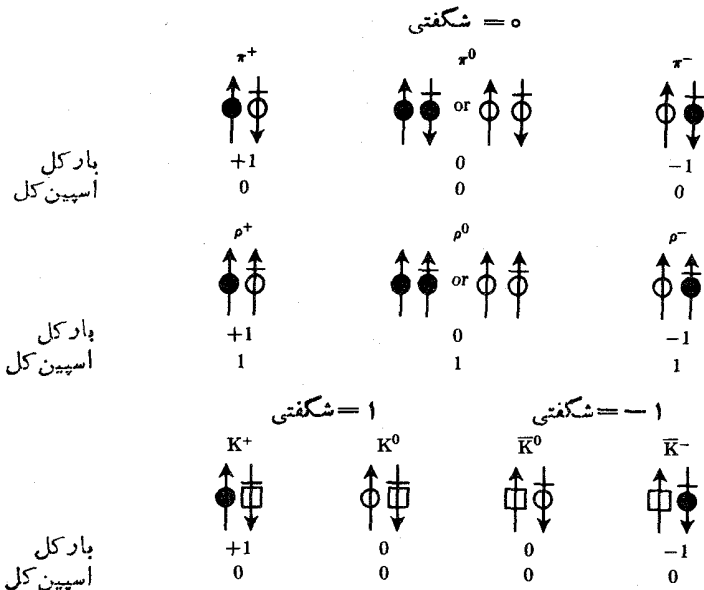
شکفتی = -3



**شکل ۳۲.۱۲ ب.** دسته‌هایی از سه کوارک با ترکیبهای مختلف که خواص بار یونها را پیش بینی می‌کنند، وقتی پیکانهای دو اسپین در جهت مخالف هم هستند یکدیگر را حذف می‌کنند. بنابراین اسپین خالص اغلب بار یونها برابر 1/2 است. وقتی پیکانهای تمام اسپینها در یک جهت باشند، اسپین مساوی 3/2 می‌شود.

شکل ۳۲.۱۲ ب نشان می‌دهد که چگونه سه کوارک می‌توانند با ترکیبهای مختلف خود پایبندترین حالتهای نشان داده شده درشش ستون ۳۱.۱۲ را به وجود آورند. حالتهای انرژی بالاتر را نیز می‌توان با نمودار کوارک ساخت، و حتی آهنگ واپاشی را می‌توان با دقت خوب پیش‌بینی کرد.<sup>۱</sup>

نتیجه واپاشی بار یونها از لحاظ انرژی سکون نمی‌تواند پایبندتر از پایبندترین حالت بار یونی، یعنی پروتون، باشد. این واقعیت تجربی با قانونی قیاسی، یعنی قانون پایستگی عدد بار یونی، مشخص می‌شود. با نمایش کوارکی باید فرض کنیم که این قانون انعکاسی از پایستگی تعداد کوارک است. از طرف دیگر، مزونها کوانتومهایی هستند که در گذارهای بار یونی ایجاد شده و جذب می‌شوند. این‌طور در نظر گرفته می‌شود که آنها (مزونها) از زوج کوارک-پادکوارک ساخته شده‌اند که بنا به فرض می‌توانند آفریده شده و یا نابود شوند. شکل ۳۳.۱۲ نشان می‌دهد که چگونه مهمترین مزونها با چنین زوجهایی به وجود می‌آیند.



**شکل ۳۳.۱۲** يك کوارک و يك پادکوارک خواص مشاهده شده مزونهای اصلی را نشان می‌دهند. مزون پی ( $\pi$ ) و رو ( $\rho$ ) شکفتی صفر دارند، و بنابراین شامل کوارک لاندا نمی‌شوند. در دسته کائونها، کوارکهای لاندا، شکفتی -1 - برای زوج  $K^0$  و  $\bar{K}^-$  تولید می‌کنند و کوارکهای پادلاندا، شکفتی +1 برای  $K^+$  و  $K^0$  تولید می‌کنند.

1. R. Van-Royen and V. F. Weisskopf, *Nuovo Cimento*, Ser. X. 50 (1967), p. 617.

مزونهای  $\rho$  که همان حالت‌های برانگیخته پیونها هستند، با تلنگری به اسپین یکی از کوادرنها در پیون بسادگی ساخته می‌شوند.

تا این لحظه، هیچ شاهد تجربی قاطعی برای وجود کوادرنها در دست نیست. نسل بعدی شتاب‌دهنده‌های انرژی بالا که در شرف راه‌اندازی هستند، ممکن است این وضع را به‌طور ناگهانی تغییر دهد.

### مسائل

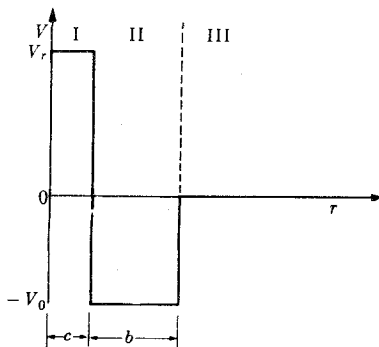
۱۰۱۲ با استفاده از معادله (۱۰۱۲) چگالی تقریبی ماده هسته‌ای را بر حسب کیلوگرم بر سانتیمتر مکعب و تن بر میلیمتر مکعب (یک تن هزار کیلوگرم است) حساب کنید.

۲۰۱۲ اختلاف انرژی بین دو حالت ممکن از پروتون را در میدان مغناطیسی  $B = 2 \text{ Wb/m}^2$  بر حسب ژول به دست آورید، بسامد فوتونی که دارای انرژی لازم برای گذار بین این دو حالت باشد، چقدر است (تلنگراسپین)؟

۳۰۱۲ مطلوب است محاسبه گشتاور چهار قطبی الکتریکی [معادله (۴۰۱۲)] بار  $Ze$  هنگامی که روی یک حلقه به شعاع  $R$  و محور همراستا با (الف) محور  $z$  و (ب) محور  $x$  قرار داشته باشد.

۴۰۱۲ اگر در حل مسئله دوترون، نیروی مغز دافعه حذف شود ( $c = 0$ )، شرط مرزی در مبدأ  $r = 0$  به صورت  $u = 0$  درمی‌آید. چرا؟

۵۰۱۲ فرض می‌کنیم که یک پتانسیل مرکزی تابع  $V$ ، به‌طوری که در شکل ۳۴-۱۲ نشان داده شده، یک نوترون را به یک پروتون بستگی می‌دهد تا تشکیل دوترون دهند. معادله موج



شکل ۳۴-۱۲

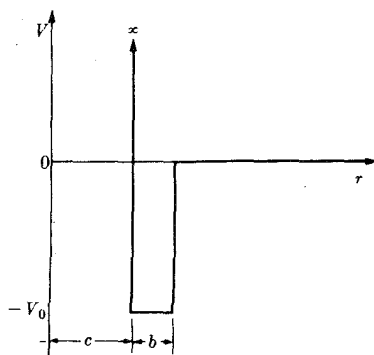
شعاعی  $l = 0$  را برای سه ناحیه حل کنید. (برای ناحیه I تابع سینوسی هذلولی وار، در ناحیه II تابع سینوسی با انتقال فاز، و در ناحیه III تابعی نمایی به کار برید.) با به کار گرفتن شرایط مرزی در  $r = 0$  و  $r = \infty$  و تطبیق توابع موج در دو سرز دیگر، روابط بین  $b$  و  $c$  و اعداد موج مربوطه و زاویه فاز تابع موج در ناحیه II را به دست آورید.

۶۰۱۲ ذره‌ای بدون اسپین به جرم  $m$  به یک کرهٔ بینهایت سنگین «چسبنده» مقید است. بتانسیل مطابق شکل ۳۵-۱۲ است. چاه بسیار عمیق و باریک ( $b = 0$ ) است. رابطه‌ای برای عمق چاه  $V_0$  به دست آورید که ذره را در حالتی با تکانهٔ زاویه‌ای مداری  $l$  نگاه دارد. فرض کنید  $E_B \approx 0$  است.

۷۰۱۲ در یک واکنش پراکندگی نوکلئون-نوکلئون در دستگاه مرکز جرم، دو ذره ابتدا روی دو مسیر موازی به فاصلهٔ  $d$  (پارامتر برخورد) از هم حرکت می‌کنند. کل انرژی جنبشی در دستگاه مرکز جرم  $10 \text{ MeV}$  است. مطلوب است محاسبهٔ  $d$  بر حسب فرمی برای اینکه به دستگاه به طور کلاسیک تکانهٔ زاویه‌ای  $l$  با  $l = 1, 2, 3$  وارد شود. این مقادیر  $d$  را با برد نیروهای هسته‌ای مقایسه کنید.

۸۰۱۲ ثابت کنید که معادلهٔ (۲۵-۲۲) یک جواب معادلهٔ (۲۳-۱۲) است.  $\nabla^2$  برای جوابهای متقارن کروی در مسئلهٔ ۷۰۷ داده شده است.

۹۰۱۲ نوترونی در پایبندترین حالت ممکن ( $l = 0$ ) به هسته‌ای سنگین مقید است. انرژی بستگی  $E_B = 16 \text{ MeV}$  ( $E = -16 \text{ MeV}$ ) است. انرژی پتانسیل مؤثر بر نوترون به صورت چاه مربعی به عمق  $V_0 = 32 \text{ MeV}$  و شعاع نامشخص  $r_0$  است. (الف) معادلهٔ موج شعاعی را برای  $l = 0$  در داخل و خارج چاه حل کنید و شکل تابع موج را رسم



کنید. (ب) با اعمال شرایط مرزی در  $r=0$  و  $r=r_0$ ، رابطه‌ای بین اعداد موج مربوطه  $r_0$  به دست آورید. (ج) مقادیر اعداد موج را به دست آورید و معادله قسمت ب را بر حسب  $r_0$  حل کنید. به جای جرم کاهیده، (واحد جرم اتمی)  $m=1$  را به کار برید.

۱۰.۱۲ (الف) توابع موج شعاعی را برای  $l=0$  و  $l=1$  به صورتی که در معادله (۳۴.۱۲) داده شده بنویسید. (ب) مقادیری از  $Kr$  را به دست آورید که اولین صفحهای دو تابع را به دست می‌دهند. (ج) با استفاده از نتایج الف و ب فاصله بین پایینترین حالت  $s$  و پایینترین حالت  $p$  را بر حسب  $McV$  در یک چاه بینهایت عمیق به شعاع  $5$  فرمی حساب کنید.

۱۱.۱۲ بر اساس مدل پوسته‌ای چه تکانه‌های زاویه‌ای و پارته‌هایی برای حالت‌های پایه  $^{11}B$ ،  $^{10}B$ ،  $^{27}Al$ ،  $^{20}Ne$ ،  $^{41}Ca$  و  $^{69}Ga$  پیش بینی می‌شود؟

۱۲.۱۲ ثابت کنید که اگر طول عمر ما در یک سری رادیواکتیو بسیار زیاد باشد، یعنی اگر  $\lambda_1 \ll \lambda_2$  باشد که در آن  $\lambda_n$  ثابت واپاشی هر نوکلیدی در سری است، تولید واپاشی تمام محصولات دختر به حالت تعادلی خواهند رسید که داریم

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 = \lambda_3 N_3 = \dots$$

۱۳.۱۲ نوکلیدی فرضی دارای حالت پایه  $J=1/2^+$  و حالت‌های برانگیخته بسا فواصل تقریباً متساوی و  $9/2^+$ ،  $3/2^-$ ،  $1/2^+$ ،  $5/2^+$ ،  $7/2^-$  به ترتیب افزایش انرژی است. نمودار تراز انرژی را برای این نوکلید رسم کنید، و در ایسن نمودار محتملترین گذار گاما (به طرف پایین) از هر تراز را مشخص کنید (کلاً پنج خط). در مجاورت خطوط چند قطبی بودن آنها را نیز بنویسید ( $M2$ ،  $E1$ ، غیره).

۱۴.۱۲ پلونیوم ۲۱۱ در حالت پایه ممکن است با گسیل آلفا به حالت پایه  $^{207}Pb$  واپاشیده شود. یک حالت شبه پایدار (ایزومری)  $^{211}Po$  نیز ممکن است با گسیل آلفا به حالت پایه  $^{207}Pb$  (ذرات آلفا «با برد بلند») واپاشیده شود. (الف) بسا رسم نمودار تراز انرژی این فرایند را نشان دهید. (ب) این دو دسته ذره آلفا به طور همزمان در یک طیف‌نگار مغناطیسی با میدان یکنواخت  $180$  مشاهده می‌شوند. شعاعهای انحنای این دو دسته  $2_1$  و  $2_2$  (بزرگتر) هستند. نسبت دو انرژی چقدر است؟ (ج) با اطلاعات بالا و با در دست داشتن انرژی برانگیختگی  $E$  حالت شبه پایدار، رابطه‌ای برای تعیین مقدار القای مغناطیسی  $B$  در طیف‌نگار به دست آورید. از مکانیک غیرنسبیتی استفاده کنید.

۱۵.۱۲ (الف) در جدول ایزوبارهای زیر، اختلاف جرم اتمی بین عنصر  $i+z$  و عنصر  $Z$  بر حسب  $MeV$  ( $i$  یک عدد درست بین  $3-$  تا  $2+$  است) داده شده است. در هر حالت

مدهای واپاشی بنای ممکن و انرژی کل ذرات گسیل شده را، با فرض اینکه گذارها فقط در حالت پایه روی می‌دهند، به دست آورید. (ب) با فرض اینکه عنصر  $(Z+1)$  دارای حالت برانگیخته‌ای پایین با  $J^\pi = 9/2^+$  باشد، آیا این موضوع هیچیک از مدهای واپاشی تعیین شده در الف را تغییر خواهد داد؟

شماره عنصر	$(m_{Z+i} - m_Z)c^2$	حالت پایه $J^\pi$
$Z-3$	۳۷۵۷	$\frac{1}{2}^+$
$Z-2$	۱۷۱۲	$\frac{3}{2}^+$
$Z-1$	۱۷۹۷	$\frac{5}{2}^+$
$Z$	۰	$\frac{5}{2}^+$
$Z+1$	۲۷۲۷	$\frac{1}{2}^+$
$Z+2$	۵۷۱۵	$\frac{7}{2}^+$

۱۶۰۱۲ جرمهای اتمی ایزوبارهای با عدد جرمی ۱۰ عبارتند از

$${}^4_0\text{Be}: 100016711 \quad {}^8_0\text{B}: 100016114 \quad {}^{12}_6\text{C}: 100020605$$

حداکثر انرژی هر الکترون و سایر پوزیترون ناشی از تبدیلات رادیواکتیو بین این ایزوبارها را تعیین کنید. (انرژی سکون الکترون برابر  $0.511 \text{ MeV}$  و  $1 \text{ amu} = 931 \text{ MeV}$ )

۱۷۰۱۲ نوترونهای با جرم  $m$  و انرژی جنبشی  $E_k$  بر هدف تک ایزوتوبی به جرم هسته‌ای  $M$  وارد می‌شوند. نوترونها به‌طور ناالاستیک از هسته‌های هدف به‌نحوی پراکنده می‌شوند که پس از برخورد (در دستگاه آزمایشگاهی) انرژی صفر دارند. انرژی برانگیختگی  $E$  مربوط به حالتی که هسته هدف به آن می‌رود را تعیین کنید. روابط غیرنسبیتی را به کار برید.

۱۸۰۱۲ واکنش هسته‌ای  ${}^7\text{Li}(p, n){}^6\text{Be}$  دارای انرژی واکنش  $Q = -10646 \text{ MeV}$

است. (الف) با استفاده از اصل بقای انرژی و اصل بقای تکانه را پیدا کنید که انرژی جنبشی پروتونها چقدر باید باشد تا انرژی نوترونهای حاصل در دستگاه آزمایشگاهی «صفر» شود. در محاسبۀ تکانه و انرژی جنبشی از روابط دینامیک کلاسیک استفاده کنید و مقادیر جرم را اعداد درست بگیرید. (ب) اختلاف جرم اتمی (اختلاف انرژی سکون)  $({}^7\text{Be} - {}^7\text{Li})$  را بر حسب MeV حساب کنید. تعیین کنید کدامیک از اعضای زوج پایدار است و چه نوع فروپاشی رخ خواهد داد. اختلاف جرم نوترون-هیدروژن برابر است با

$$m + {}^1\text{H} = 0.00782 \text{ MeV}$$

۱۹۰۱۲ وقتی يك اتم کربن با دو اتم اکسیژن با هم ترکیب می‌شوند، حدود ۶ الکترون ولت انرژی آزاد می‌شود. مطلوب است محاسبۀ انرژی آزاد شده بر حسب ژول برای (الف) سوختن يك گرم کربن، (ب) شکافت يك گرم  ${}^{235}\text{U}$ ، (ج) گداختن يك گرم دوتریوم، (د) نابودی يك گرم ماده و يك گرم پاد ماده.

۲۰۰۱۲ چرخۀ کربن-ازت به صورت زیر است

$${}^{12}\text{C}(p, \gamma){}^{13}\text{N}, \quad Q = 1.945 \text{ MeV}$$

$${}^{13}\text{N}(\beta^+){}^{13}\text{C}, \quad \beta^+ \text{ بیشینه انرژی} = 1.202$$

$${}^{13}\text{C}(p, \gamma){}^{14}\text{N}, \quad Q = 7.542 \text{ MeV}$$

$${}^{14}\text{N}(p, \gamma){}^{15}\text{O}, \quad Q = 7.347 \text{ MeV}$$

$${}^{15}\text{O}(\beta^+){}^{15}\text{N}, \quad \beta^+ \text{ بیشینه انرژی} = 1.683$$

$${}^{15}\text{N}(p, \alpha){}^{12}\text{C}, \quad Q = 4.961 \text{ MeV}$$

مطلوب است محاسبۀ کل انرژی آزاد شده در این چرخه و مقایسۀ آن با مقدار محاسبه شده در تبدیل مستقیم چهار پروتون به هلیوم (جرم پروتون برابر  $1.0008142$  و جرم ذرۀ آلفا برابر  $4.00150617912$  است).

۲۱۰۱۲ با استفاده از خواص پیوندها و کانونها که در جدول ۸.۱۲ داده شده‌اند، و نیز با استفاده از شکل ۳۱.۱۲ به عنوان مرجع، راههای مختلف و ممکن برای واپاشی قوی (سریع) حالت  $3/2^-$  و  $1/2^-$  را نشان دهید.

## پیوست ۱

### دستگاه یکاهای mksA

در دستگاه یکاهای گو یا شدهٔ mksA، واحدهای اولیه عبارت‌اند از متر (m) واحد طول، کیلوگرم (kg) واحد جرم، ثانیه (s) واحد زمان و آمپر (A) واحد جریان الکتریکی یا به‌طور مشابه، کولن ( $C = A \cdot s$ ) واحد بار الکتریکی. تمام واحدهای دیگر از این آحاد اولیه به‌دست می‌آیند. به‌عنوان مثال واحد نیرو نیوتون است. این واحد به‌کمک قانون دوم نیوتون تعریف می‌شود که  $1 \text{ kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$  است. بنابراین واحد انرژی  $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$  می‌شود، که یک ژول نامیده می‌شود. واحد قدرت (توان) یک وات برابر  $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$  است. واحد پتانسیل الکتریکی، ولت است و برابر  $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 \cdot C$  می‌شود. بنابراین، آمپر، ولت و وات آحاد الکتریکی هستند که عملاً به‌کار می‌روند. یگانه استثنای واحد القای مغناطیسی است. در دستگاه mksA این واحد  $W/\text{m}^2$  است که برابر با ۱۰,۰۰۰ گاوس است. بعضی از واحدهای مهم mksA در جدول ۱.۱ مندرج است.

مزیت بزرگ دستگاه mksA بر دستگاه cgs در این است که آحاد الکتریکی آن درست همانهایی هستند که در عمل به‌کار می‌روند. اما، این مزیت به‌قیمت ورود دو ثابت تازه به‌دست آمده است. یکی تراوایی فضای آزاد  $\mu_0$  است. این کمیت ثابت هنگامی حاصل می‌شود که قانون آمپر برای فضای آزاد به‌کار می‌رود

$$\oint B \cdot dl = \mu_0 i \quad (\text{پ } 1.1)$$

تراوایی فضای آزاد عبارت است از



جدول پ ۱۰۱ یکاهای mksA

اشتیاق	بعد	نماد	علامت اختصاری	واحد	کمیت
	L	<i>l</i>	m	متر	طول
	M	<i>m</i>	kg	کیلوگرم	جرم
	T	<i>t</i>	s	ثانیه	زمان
	Q	<i>q</i>	C	کولن	بار الکتریکی
$v = ds/dt$	LT <sup>-۱</sup>	<i>v</i>	m/s		سرعت
$p = mv$	MLT <sup>-۱</sup>	<i>p</i>	kgm/m		اندازه حرکت (تکانه)
$F = dp/dt$	MLT <sup>-۲</sup>	<i>F</i>	N	نیوتون	نیرو
$\Delta F = W \int F \cdot ds$	ML <sup>۲</sup> T <sup>-۲</sup>	<i>E, V, T, W</i>	J	ژول	انرژی، کار
$\omega = d\theta/dt$	T <sup>-۱</sup>	$\omega$	rad/s		سرعت زاویه‌ای
$L = r \times p$	ML <sup>۲</sup> T <sup>-۱</sup>	<i>L</i>	kgm <sup>۲</sup> /s		تکانه زاویه‌ای
$I = dq/dt$	QT <sup>-۱</sup>	<i>I</i>	A	آمپر	جریان
$U = \Delta E/q$	ML <sup>۲</sup> T <sup>-۲</sup> Q <sup>-۱</sup>	<i>U</i> یا <i>V</i>	V	ولت	ولتاژ، نیروی محرکه الکتریکی
$R = U/I$	ML <sup>۲</sup> T <sup>-۱</sup> Q <sup>-۲</sup>	<i>R</i>	$\Omega$	اهم	مقاومت
$Q = CU$	M <sup>-۱</sup> L <sup>-۲</sup> T <sup>۲</sup> Q <sup>۲</sup>	<i>C</i>	F	فاراد	ظرفیت
$U = -LdI/dt$	ML <sup>۲</sup> Q <sup>-۲</sup>	<i>L</i>	H	هنری	القا
$U = -\partial\phi/\partial t$	ML <sup>۲</sup> T <sup>-۱</sup> Q <sup>-۱</sup>	$\phi$	Wb	وبر	شار مغناطیسی
$\phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$	MT <sup>-۱</sup> Q <sup>-۱</sup>	<i>B</i>	Wb/m <sup>۲</sup>	تسلا	القای مغناطیسی

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{C}^{-2} \left( \frac{\text{H}}{\text{m}} \right)$$

ثابت تازه دیگر ثابت گذردهی است که در قانون نیروی کولنی پیدا می شود

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (\text{ب } 2.1)$$

مقدار گذردهی فضای آزاد برابر است با

$$\epsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0} = 8.85415 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1} \left( \frac{\text{F}}{\text{m}} \right)$$

که در آن  $c$  سرعت نور است.

در فیزیک هسته‌ای، استفاده از واحد طول دومی به نام فرمی ( $1 \text{ fermi} = 10^{-15} \text{ m}$ ) متداول شده است. بارن ( $1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$ ) به عنوان یک واحد ثانوی برای سطح مقطع به کار می رود. برای جرمها نیز واحد دیگری به نام واحد جرم اتمی،  $u$ ، به کار می رود و برای انرژی هم واحد دیگر به نام الکترون ولت است.

## پیوست ۲

### جدول تناوبی عناصر

مقادیر داخل پرانتز در ستون جرمهای اتمی، اعداد جرمی دراز عمرترین ایزوتوپهای عناصر رادیو اکتیو هستند.

چگالیهای داده شده برای حالت جامد عناصر و معمولاً در دمای  $25^{\circ}\text{C}$  است، مگر در مواردی که گاز (g) یا مایع (l) بودن عنصر مشخص شده باشد. برای گازها مقادیر چگالی در فشار یک جو و دمای صفر درجه سلسیوس در حالت مولکولی معمول آنها نظیر  $\text{H}_2$ ،  $\text{He}$ ،  $\text{O}_2$ ،  $\text{Ne}$  و غیره است.

جدول پ ۱۰۲

جمله طیفی	اتم در حالت پایه			چگالی $\rho$ g/cm <sup>3</sup>	جرم اتمی u( <sup>12</sup> C)	عنصر	Z
	خارجی ترین پوسته اشغالی	پیکر بندی الکترونی	پتانسیل یونش V				
<sup>2</sup> S <sub>1/2</sub>	K	1s	132595	8988 × 10 <sup>-5</sup> (g)	100797	H	1
<sup>1</sup> S <sub>0</sub>	K	1s <sup>2</sup>	247581	17847 × 10 <sup>-4</sup> (g)	40026	He	2
<sup>2</sup> S <sub>1/2</sub>	L	rs	5390	0534	6939	Li	3
<sup>1</sup> S <sub>0</sub>	L	rs <sup>2</sup>	9320	1848	90122	Be	4
<sup>2</sup> P <sub>1/2</sub>	L	rs <sup>2</sup> rp	8296	234 (بلور) 237 (اریخت)	10811	B	5
<sup>2</sup> P <sub>0</sub>	L	rs <sup>2</sup> rp <sup>2</sup>	11258	352 (الساس) 225 (کرافیت)	120115	C	6
<sup>4</sup> S <sub>3/2</sub>	L	rs <sup>2</sup> rp <sup>2</sup>	1453	1258 × 10 <sup>-2</sup> (g)	140067	N	7
<sup>2</sup> P <sub>2</sub>	L	rs <sup>2</sup> rp <sup>4</sup>	13614	14277 × 10 <sup>-2</sup> (g)	159994	O	8
<sup>2</sup> P <sub>3/2</sub>	L	rs <sup>2</sup> rp <sup>4</sup>	17418	16954 × 10 <sup>-2</sup> (g)	189984	F	9
<sup>1</sup> S <sub>0</sub>	L	rs <sup>2</sup> rp <sup>6</sup>	21559	89990 × 10 <sup>-4</sup> (g)	20183	Ne	10

جدول جی ۲-۱۰ (ادامہ)

$^{\text{S}}\text{S}_{1/2}$	M	فہرست نمبر ۱۰۱ - ۱۰۲	$\text{fS}$	$\Delta 138$	$09712$	$2298898$	Na	11	
$^{\text{S}}\text{S}_2$	M		$\text{fS}^{\text{I}}$	$75544$	$12741$	$242312$	Mg	12	
$^{\text{P}}\text{P}_{1/2}$	M		$\text{fS}^{\text{I}}$	$\Delta 9844$	$25899$	$2599815$	Al	13	
$^{\text{P}}\text{P}_0$	M		$\text{fS}^{\text{I}}$	$\Delta 150$	$2342$	$285059$	Si	14	
$^{\text{S}}\text{S}_{1/2}$	M		$\text{fS}^{\text{I}}$	$\text{fP}^{\text{I}}$	$10349$	$2320$ سٹیٹ، $1281$ زرد $2705$ سیاہ، $2342$ فلور	P	15	
$^{\text{P}}\text{P}_2$	M		$\text{fS}^{\text{I}}$	$\text{fP}^{\text{I}}$	$10347$	$2705$ لوزیٹ	S	16	
$^{\text{P}}\text{P}_{1/2}$	M		$\text{fS}^{\text{I}}$	$\text{fP}^{\text{D}}$	$13501$	$23164 \times 10^{-2} \text{ (g)}$	Cl	17	
$^{\text{S}}\text{S}_0$	M		$\text{fS}^{\text{I}}$	$\text{fP}^{\text{I}}$	$152755$	$17844 \times 10^{-2} \text{ (g)}$	A	18	
$^{\text{S}}\text{S}_{1/2}$	N		فہرست نمبر ۱۰۳ - ۱۰۴	$\text{fS}$	$\text{fS}^{\text{I}}$	$0847$	$29102$	K	19
$^{\text{S}}\text{S}_0$	N			$\text{fS}^{\text{I}}$	$\text{fS}^{\text{I}}$	$2111$	$20508$	Ca	20
$^{\text{D}}\text{D}_{1/2}$	N			$\text{fD}$	$\text{fS}^{\text{I}}$	$2050$	$243905$	Sc	21
$^{\text{F}}\text{F}_2$	N			$\text{fD}^{\text{I}}$	$\text{fS}^{\text{I}}$	$2027$	$27790$	Ti	22
$^{\text{F}}\text{F}_{1/2}$	N			$\text{fD}^{\text{I}}$	$\text{fS}^{\text{I}}$	$2027$	$20392$	V	23
$^{\text{S}}\text{S}_2$	N			$\text{fD}^{\text{D}}$	$\text{fS}^{\text{I}}$	$22792$	$212999$	Cr	24
$^{\text{S}}\text{S}_{0/2}$	N	$\text{fD}^{\text{D}}$		$\text{fS}^{\text{I}}$	$22792$	$24394780$	Mn	25	
$^{\text{D}}\text{D}_2$	N	$\text{fD}^{\text{I}}$		$\text{fS}^{\text{I}}$	$2279$	$252847$	Fe	26	
$^{\text{F}}\text{F}_{1/2}$	N	$\text{fD}^{\text{I}}$		$\text{fS}^{\text{I}}$	$2279$	$2839332$	Co	27	
$^{\text{F}}\text{F}_2$	N	$\text{fD}^{\text{D}}$		$\text{fS}^{\text{I}}$	$2279$	$2839332$	Ni	28	
$^{\text{S}}\text{S}_{1/2}$	N	$\text{fD}^{\text{D}}$		$\text{fS}^{\text{I}}$	$2279$	$2839332$	Cu	29	
$^{\text{S}}\text{S}_0$	N	$\text{fD}^{\text{D}}$		$\text{fS}^{\text{I}}$	$2279$	$2839332$	Zn	30	
$^{\text{P}}\text{P}_{1/2}$	N	$\text{fD}^{\text{D}}$		$\text{fS}^{\text{I}}$	$2279$	$2839332$	Ga	31	
$^{\text{P}}\text{P}_0$	N	$\text{fD}^{\text{D}}$		$\text{fS}^{\text{I}}$	$2279$	$2839332$	Ge	32	
$^{\text{S}}\text{S}_{1/2}$	N	$\text{fD}^{\text{D}}$	$\text{fS}^{\text{I}}$	$2279$	$2839332$	As	33		

${}^Y P_Y$	N	$Fd^{10} Fs^Y Fp^Y$	$q_{YVD}$	$F_{JAO}$	$VA_{999}$	Se	$F_{99}$
${}^Y P_{r/r}$	N	$Fd^{10} Fs^Y Fp^D$	$11J_{AV}$	$F_{J1Y}$ (I)	$W_{99909}$	Br	$F_{D0}$
${}^Y S_0$	N	$Fd^{10} Fs^Y Fp^D$	$13J_{999AV}$	$F_{JYVYAX} \times 10^{-r}(g)$	$A_{3JAO}$	Kr	$F_{99}$
${}^Y S_{\backslash r}$	O	$DS^Y$	$F_{J1Y9}$	$1J_{D31}$	$A_{D9YV}$	Rb	$F_{YV}$
${}^Y D_{r/r}$	O	$Fd^Y DS^Y$	$9J_{3TA}$	$F_{JDP}$	$AV_{99Y}$	Sr	$F_{YA}$
${}^Y F_Y$	O	$Fd^Y DS^Y$	$9J_{AV}$	$F_{JFD}$	$AA_{9900D}$	Y	$F_{99}$
${}^Y D_{\backslash r}$	O	$Fd^Y DS^*$	$9J_{AA}$	$9J_{999}$	$q_{1JY2}$	Zr	$F_{00}$
${}^Y S_r$	O	$Fd^D DS$	$V_{J11}$	$A_{JDP}$	$q_{YJ9909}$	Nb	$F_{11}$
${}^Y S_{\backslash r}$	O	$Fd^Y DS^Y$	$V_{J2V}$	$100J_1$	$q_{D999}$	Mo	$F_{Y2}$
$\Delta F_D$	O	$Fd^Y DS$	$V_{J399}$	$1J_{DD}$	$q_{A(?)}$	Tc	$F_{Y3}$
${}^Y F_{\backslash r}$	O	$Fd^A DS$	$V_{J49}$	$1J_{JF}$	$100J_{20Y}$	Ru	$F_{Y4}$
${}^Y S_0$	O	$Fd^{10} DS$	$A_{J33}$	$1Y_{JY2}$	$100J_{9900D}$	Rh	$F_{D0}$
${}^Y S_{\backslash r}$	O	$Fd^{10} DS$	$V_{JDP}$	$10000Y$	$1009J_2$	Pd	$F_{99}$
${}^Y S_0$	O	$Fd^{10} DS^Y$	$A_{J991}$	$100000$	$100Y_{JAV0}$	Ag	$F_{YV}$
${}^Y P_{\backslash r}$	O	$Fd^{10} DS^Y DP$	$D_{JYAD}$	$V_{J30}$	$11Y_{J30}$	Cd	$F_{YA}$
${}^Y P_0$	O	$Fd^{10} DS^Y DP^Y$	$V_{J34Y}$	$V_{J30}$	$11F_{JAV}$	In	$F_{99}$
${}^Y S_{r/r}$	O	$Fd^{10} DS^Y DP^Y$	$A_{J99}$	$9999$	$11A_{J99}$	Sn	$D_0$
${}^Y P_Y$	O	$Fd^{10} DS^Y DP^F$	$q_{901}$	$9J_{Y4}$	$1Y_{1JVD}$	Sb	$D_1$
${}^Y P_{r/r}$	O	$Fd^{10} DS^Y DP^D$	$100J_{4DP}$	$F_{J99}$	$1Y_{Y90}$	Te	$D_{Y2}$
${}^Y S_0$	O	$Fd^{10} DS^Y DP^Y$	$1Y_{J1YV}$	$D_{JAA} \times 10^{-r}(g)$	$1Y_{999094}$	I	$D_{Y3}$
${}^Y S_{\backslash r}$	P	$9S$	$F_{JAA9}$	$1J_{AV}$	$131J_{30}$	Xe	$D_{Y4}$
${}^Y S_0$	P	$9S^Y$	$D_{JY1}$	$F_{JVD}$	$13Y_{J900D}$	Cs	$D_{D0}$
${}^Y D_{r/r}$	P	$\Delta d9s^Y$	$D_{J91}$	$F_{J10}$	$13Y_{J34}$	Ba	$D_{99}$
${}^Y G_0$	P	$FfAd9s^Y \cdot (Ff^Y 9s^Y)$	$D_{J9}$	$V_{J0}$	$13AA_{991}$	La	$D_{YV}$
${}^Y I_{\backslash r}$	P	$Ff^Y 9s^Y$	$D_{J9D}$	$F_{JY1}$	$1400J_{Y2}$	Ce	$D_{YA}$
					$140090V$	Pr	$D_{99}$

۹۳ - ۹۲ - ۹۱ - ۹۰ - ۸۹ - ۸۸ - ۸۷ - ۸۶ - ۸۵ - ۸۴ - ۸۳ - ۸۲ - ۸۱ - ۸۰ - ۷۹ - ۷۸ - ۷۷ - ۷۶ - ۷۵ - ۷۴ - ۷۳ - ۷۲ - ۷۱ - ۷۰ - ۶۹ - ۶۸ - ۶۷ - ۶۶ - ۶۵ - ۶۴ - ۶۳ - ۶۲ - ۶۱ - ۶۰ - ۵۹ - ۵۸ - ۵۷ - ۵۶ - ۵۵ - ۵۴ - ۵۳ - ۵۲ - ۵۱ - ۵۰ - ۴۹ - ۴۸ - ۴۷ - ۴۶ - ۴۵ - ۴۴ - ۴۳ - ۴۲ - ۴۱ - ۴۰ - ۳۹ - ۳۸ - ۳۷ - ۳۶ - ۳۵ - ۳۴ - ۳۳ - ۳۲ - ۳۱ - ۳۰ - ۲۹ - ۲۸ - ۲۷ - ۲۶ - ۲۵ - ۲۴ - ۲۳ - ۲۲ - ۲۱ - ۲۰ - ۱۹ - ۱۸ - ۱۷ - ۱۶ - ۱۵ - ۱۴ - ۱۳ - ۱۲ - ۱۱ - ۱۰ - ۹ - ۸ - ۷ - ۶ - ۵ - ۴ - ۳ - ۲ - ۱ - ۰

جدول پ ۱۰۴ (ادامہ)

۵L۴	P	۴f۴ ۳s۳	۵۵۱	۳۹۷	۱۴۴۳۴	Nd	۶۰
۴H۵/۴	P	۴f۵ ۳s۳	...	...	(۱۴۵)	Pm	۶۱
۴F.	P	۴f۴ ۳s۳	۵۳۶	۷۵۵	۱۵۰۳۳۵	Sm	۶۲
۴S۷/۴	P	۴f۴ ۳s۳	۵۳۷	۵۳۶	۱۵۱۳۹۹	Eu	۶۳
۴D۲	P	۴f۴ ۵d۱ ۳s۳	۶۱۹	۷۸۵	۱۵۷۳۲۵	Gd	۶۴
۴H۱۵/۴	P	۴f۸ ۳s۳	۵۹۸	۸۳۷	۱۵۸۳۹۲۴	Tb	۶۵
۵L۱	P	۴f۱۰ ۳s۳	۶۸۸	۸۵۴	۱۶۲۳۵۰	Dy	۶۶
۴L۱۵/۴	P	۴f۱۱ ۳s۳	...	۸۷۹	۱۶۴۳۹۳۰	Ho	۶۷
۴H۲	P	۴f۱۲ ۳s۳	۶۵۸	۹۵۰	۱۶۷۳۲۶	Er	۶۸
۴F۷/۴	P	۴f۱۲ ۳s۳	۵۸۱	۹۳۳	۱۶۸۳۹۳۴	Tm	۶۹
۱S.	P	۴f۱۴ ۳s۳	۶۳۲	۶۹۹	۱۷۳۵۰۴	Yb	۷۰
۴D۳/۴	P	۴f۱۴ ۵d۱ ۳s۳	...	۹۵۸۷	۱۷۴۳۹۷	Lu	۷۱
۴F۲	P	۴f۱۴ ۵d۱ ۳s۳	۷	۱۳۲۲۷	۱۷۸۳۴۹	Hf	۷۲
۴F۳/۴	P	۴f۱۴ ۵d۳ ۳s۳	۷۵۸	۱۶۵۶	۱۸۰۳۹۴۸	Ta	۷۳
۵D.	P	۴f۱۴ ۵d۴ ۳s۳	۷۹۸	۱۹۳۳	۱۸۳۳۸۵	W	۷۴
۴S۵/۴	P	۴f۱۴ ۵d۵ ۳s۳	۷۸۷	۲۱۵۰	۱۸۶۳۲	Re	۷۵
۵D۴	P	۴f۱۴ ۵d۶ ۳s۳	۸۵۵	۲۲۳۵۶	۱۹۰۳۲	Os	۷۶
۴F۹/۴	P	۴f۱۴ ۵d۱۰	۹	۲۲۳۶۲	۱۹۲۳۲	Ir	۷۷
۴D۴	P	۴f۱۴ ۵d۱۰ ۳s	۹۳۰	۲۱۳۴۴	۱۹۵۳۰۹	Pt	۷۸
۱S.	P	۴f۱۴ ۵d۱۰ ۳s	۹۳۲	۱۹۳۲۲	۱۹۶۳۹۷	Au	۷۹
۴P۱/۴	P	۴f۱۴ ۵d۱۰ ۳s۳	۱۰۳۴۳	۱۳۵۹۹۶ (I)	۲۰۰۳۵۹	Hg	۸۰
۱S.	P	۴f۱۴ ۵d۱۰ ۳s۳	۶۱۱	۱۱۳۸۵	۲۰۴۳۳۷	Tl	۸۱
۴P.	P	۴f۱۴ ۵d۱۰ ۳s۳	۷۳۴	۱۱۳۴۴	۲۰۷۳۱۹	Pb	۸۲
۴S۳/۴	P	۴f۱۴ ۵d۱۰ ۳s۳	۷۳۷	۹۳۷۵	۲۰۸۳۹۸۰	Bi	۸۳
۴P۲	P	۴f۱۴ ۵d۱۰ ۳s۳	۸۳۳	۹۳۳۲	(۲۰۹)	Po	۸۴
...	P	۴f۱۴ ۵d۱۰ ۳s۳	۹۵۵	...	(۲۱۰)	At	۸۵

تعداد ایزوتوپ — ۵۴





## نیو است ۳

### نسبیت

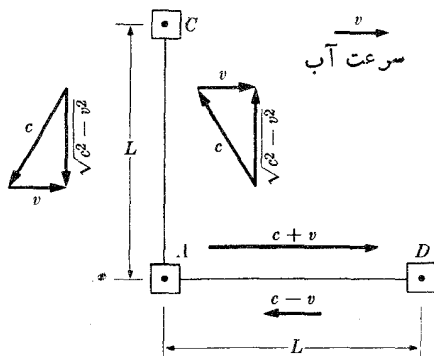
#### پ ۱.۳ جستجو برای دستگاه مختصات مرجع اتر

حدود يك صد سال قبل، ماکسول نشان داد که الکتريسيته و نور دو پدیدهٔ مربوط بهم هستند. ماکسول با اطلاع از خواص الکتريسيته و مغناطیس، بدطوری که در معادلات مشهور او بیان شده است، برای میدان الکتريکی و مغناطیسی معادله‌ای موجی در نظر گرفت. بعلاوه، او توانست نشان دهد سرعت امواجی که کشف کرده درست برابر سرعت نور است. ماکسول توانست بسیاری از خواص دیگر نور را بدست آورد، و بزودی معلوم شد که وی نظریهٔ موجی نور را بر پایهٔ محکمی قسرار داده است. در این نظریه، نور يك حرکت موجی الکترومغناطیسی است. در هر حرکت موجی چیزی وجود دارد که «موج می‌زند». چنین چیزی در امواج صوتی هوا، و در امواج آبی آب است. چنین استدلال می‌شد که مطمئناً امواج نوری هم حتی در فضای آزاد (خلأ) بایستی در چیزی موج بزنند. هیچ کس نمی‌دانست که آن چیز چیست ولی نام «اتر شفاف» را به آن داده بودند.

نور از داخل خیلی از مواد عبور می‌کند. نور از داخل مواد نسبتاً سنگین مانند شیشه عبور می‌کند و همچنین از خلأ تقریباً کامل بین ستارگان و زمین می‌گذرد. بنا بر این، اتر بایستی تمام فضا را پر کند. نور يك حرکت موجی عرضی است. این موضوع از نظریهٔ ماکسول و بسیاری مشاهدات تجربی، بخصوص مشاهدات نور قطبیده، نتیجه می‌شود. این بدان معنی است که اتر جامد است. امواج عرضی به نبروهای برشی مربوط می‌شوند که فقط در جامدات می‌توانند وجود داشته باشند. به همین دلیل، امواج صوتی در هوا بایستی امواج طولی باشند. بعلاوه اتر بایستی يك محیط جامد سخت باشد. سرعت انتشار امواج مکانیکی

در مواد مختلف بستگی به ضرایب کشسانی آنها دارد. این ضرایب برای فولاد خیلی بیش از هواست. بنابراین نتیجه می شود که، به علت سرعت خیلی زیاد نور، اثر بایستی دارای ضریب برشی خیلی بزرگ باشد. تصور وجود ماده جامد سختی که تمام فضا را پر کرده باشد، به طوری که اشیاء مادی بتوانند بدون مقاومت در آن حرکت کنند مشکل است، با این حال چنین چیزی فرض می شود که وجود دارد. در حالی که این موضوع به نظر ما خیال-انگیز می آید، فیزیکدانها احساس می کردند که اثر احتمالاً همان چیزی است که دستگاه نیوتونی به آن می چسبد (یک دستگاه ثابت). فرض می شد برای ناظری که نسبت به اثر دارای حرکت بدون شتاب است قوانین نیوتون کاملاً صادق اند.

اگر اتر ساکن فرض شود، سؤال جالب این است که: با چه سرعتی ما در اثر حرکت می کنیم؟ از آنجا که تمام تفکرات در مورد وجود اثر، از خواص آن به عنوان محیط حامل نور ناشی می شود، در این مورد آزمایشی نوری انجام گرفته است. محاسبه حساسیت دستگاهی که بتواند جا به جا شدن اتر را اندازه گیری کند، مشکل نیست. در بحث این موضوع فرض می کنیم که خورشید هیچ گونه رانش اتری نداشته باشد (نسبت به اتر ساکن باشد)، در این صورت سرعت زمین در اثر همان سرعت مداری آن است. اگر خورشید رانش اتری داشته باشد، سرعت حرکت زمین (رانش زمین) در بعضی از فصول حتی بیش از سرعت مداری آن خواهد بود. با دانستن شعاع مدار حرکت زمین که حدود ۱۴۹ میلیون کیلومتر است، می توانیم سرعت مداری آن را حدود ۲۹ کیلومتر در ثانیه به دست آوریم. با انجام آزمایش در بهترین فصل سال، بایستی حداقل رانش اتر ۲۹۶ کیلومتر در ثانیه به دست آید. سرعت نور ۲۹۷۶۰۵ کیلومتر در ثانیه است. با وجود بزرگی سرعت مداری، نسبت این سرعت به سرعت نور فقط  $10^{-4}$  است، و به طوری که محاسبه می شود (به بخش بعد مراجعه شود)، اثرات قابل اندازه گیری رانش اتر (اگر وجود داشته باشد) باید متناسب با مربع این عدد، یعنی  $10^{-8}$  باشد. بنابراین واضح است که دستگاه مورد نیاز باید خیلی حساس باشد.



شکل پ ۱۰۳ تشبیه شنا با آزمایش مایکلسون-مورلی.

## پ ۲.۳ تداخل سنج مایکلسون

در سال ۱۸۸۷ مایکلسون و مورلی در ایالات متحده دستگاهی با حساسیت کافی ساخته و مورد استفاده قرار دادند. اصول کار دستگاه آنها با تشبیه زیر روشن می شود. دو شناگر سریع هم-قدرت را در نظر می گیریم که بین نشانه های ثابت در یک رودخانه مسابقه می دهند. دو مسیر مساوی را هر کدام با طول کل  $2L$ ، به طوری که در شکل پ ۱.۳ نشان داده شده است، از نقطه شروع نشانه  $A$  در نظر می گیریم. یکی از مسیرها  $AD$  در راستای جریان آب نسبت به زمین و دیگری  $AC$  عمود بر آن است. اگر این دو شناگر هر کدام در مسیر خود یک رفت و برگشت انجام دهند، مقایسه زمانها چگونه خواهد بود؟ سرعت شناگرها را نسبت به آب  $C$  و رانش یا سرعت آب را نسبت به زمین  $V$  فرض می کنیم. سرعت شناگری که در جهت حرکت آب شنا می کند با سرعت آب جمع می شود و سرعت برآیند  $(v+c)$  نسبت به زمین خواهد شد. زمانی را که او برای شنا کردن مسافت  $L$  از  $A$  به  $D$  لازم دارد برابر  $L/(c+v)$  می شود. این شناگر در موقع برگشت بایستی رانش آب را جبران کند، سرعت برآیند او در موقع برگشت  $(c-v)$  و زمان  $L/(c-v)$  است. زمان کل رفت و برگشت برابر مجموع این دو زمان است. این زمان بستگی به سرعت آب دارد و از رابطه زیر به دست می آید

$$t_{\parallel} = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} \quad (\text{پ } 1.3)$$

برای شناگر دیگر که در راستای عمود بر جریان آب شنا می کند زمان رفت و برگشت برابر است، لکن برای اینکه در اثر جریان آب از مسیر منحرف نشود بایستی کمی در خلاف جهت حرکت آب شنا کند. مؤلفه سرعت حرکت این شناگر برای رسیدن به مقصد برابر  $\sqrt{c^2 - v^2}$ ، نسبت به زمین، است. زمان کل رفت و برگشت او نیز بستگی به سرعت آب دارد و از رابطه زیر به دست می آید

$$t_{\perp} = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} \quad (\text{پ } 2.3)$$

برای مقایسه این دو زمان، زمان مسیر موازی یعنی معادله (پ ۱.۳) را به زمان مسیر عمود، معادله (پ ۲.۳)، تقسیم می کنیم. معادله زیر به دست می آید

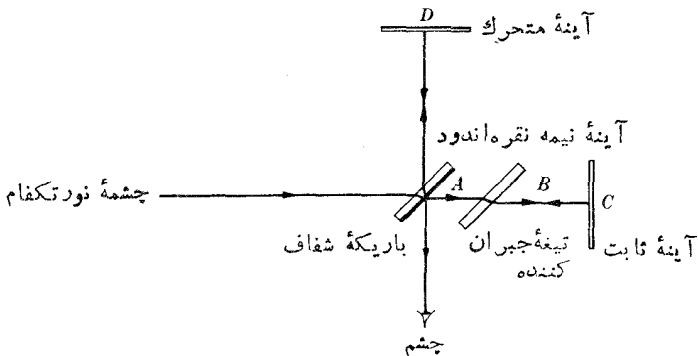
$$\frac{t_{\parallel}}{t_{\perp}} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} \cdot \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{2L} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad (\text{پ } 3.3)$$

در آب ساکن که  $v = 0$  است، این نسبت برابر یک می شود و نتیجه مسابقه همانطور که انتظار می رود، مساوی است. اگر آب به آرامی جریان داشته باشد، این نسبت بزرگتر از یک است و شناگری که عمود بر جریان آب شنا می کند مسابقه را می برد، به عبارت دیگر، اگر شناگرها در آغاز شنا از نقطه  $A$  به طور هم فاز حرکت کنند، در موقع برگشت به نقطه  $A$  ناهم فاز خواهند بود. اگر سرعت جریان افزایش یافته و تقریباً مساوی سرعت شناگرها

شود، این نسبت به سمت بینهایت میل می کند. اگر سرعت جریان آب از سرعت شناگرها بیشتر شود، این تجزیه و تحلیل کلاسیک اعتبار خواهد شد. زیرا این نسبت موهومی می شود و هر دو شناگر با جریان آب برده خواهند شد. نکته این است که با مشاهده مسابقه می توان سرعت جریان آب را نسبت به نشانه ها اندازه گرفت.

در آزمایش مشابه با نور، مسابقه بین دو پرتو نوری است که در دو مسیر مشابه، یکی موازی و دیگری عمود برانش اتر حرکت می کنند. دستگاه به کار رفته، تداخل سنج مایکلسون نام دارد که نمودار آن در شکل پ ۲.۳ نشان داده شده است.

حال پرتوی از نور را تعقیب کنیم که از یک چشمه نور از سمت چپ وارد دستگاه می شود. نور در نقطه  $A$  به یک آینه شیشه ای که در طرف راست دارای نیم پوششی از نقره است برخورد می کند. این سطح نیمی از نور را به طرف  $D$  بازتاب می دهد، در حالی که نیمی دیگر به طرف  $C$  می رود.  $D$  و  $C$  هر دو پوشش کامل نقره دارند و نور را بازتاب می دهند و به طرف  $A$  برمی گردانند. قسمتی از باریکه نور برگشتی از  $D$ ، در  $A$  بازتابیده می شود و قسمت دیگر از آن عبور می کند به چشم ناظر می رسد. قسمتی از نور که از  $C$  می آید در  $A$  بازتابیده می شود و به سمت ناظر می رود، و بقیه از شیشه عبور می کند و از بین می رود. ضخامت و راستای شیشه  $B$  مثل شیشه  $A$  است به طوری که دو مسیر نور از چشمه به ناظر، از ضخامتهای مساوی شیشه عبور می کنند. اگر باریکه نور در موقع خروج از چشمه واگرا نشود و در ضمن عبور از دستگاه خیلی باریک باقی بماند ناظر آن را یک خط باریک نور خواهد دید. شدت این خط بستگی به اختلاف راه نوری این دو مسیر نور دارد.



شکل پ ۲.۳ تداخل سنج مایکلسون.

۱. دو مسیر دارای یک راه نوری هستند به شرطی که زمان عبور برای آن دو یکی باشد. راههای نوری در مسیر تداخل سنج را می توان با تغییر دادن طول فیزیکی، با تغییر دادن ضریب شکست محیطی که نور از آن عبور می کند و، یا در تشبیه با مثال شناگر، با حرکت دادن دستگاه نسبت به محیط حامل نور تغییر داد.

اگر اختلاف دو مسیر مضرب صحیحی (شامل صفر) از طول موج نور باشد، خط روشن به دست می آید. اگر اختلاف دو مسیر مضرب فردی از نصف طول موج باشد، خط تاریک به دست می آید. بین این دو حد یک تغییر تدریجی در شدت نور مشاهده می شود. عملاً به علت واگرایی نور در دستگاه، مسیرهای متعددی، با راههای مختصر متفاوت که به طور همزمان از دستگاه عبور می کنند، وجود دارند. در نتیجه، ناظر به جای یک خط چندین خط مشاهده می کند. نقاطی که اختلاف مسیرشان مضرب صحیحی از طول موج باشد روشن، و نقاطی که مضرب فردی از نیم طول موج باشد تاریک هستند. بنابراین، وقتی طول مسیر نور تغییر می کند، ناظر به جای اینکه یک خط منفرد را روشنتر یا تاریکتر ببیند مشاهده می کند که فریزها، شبیه دندانهای یک شانه، حرکت می کنند. چشم جا به جایی نور را آسانتر از تغییر شدت نور تشخیص می دهد، و خوشبختانه دستگاه نوری بالا هم همین طور کار می کند.

دقت این دستگاه فوق العاده است. اگر نور زرد سدیم به کار رود، طول موج آن  $5893 \times 10^{-7}$  متر است. اگر آینه  $D$  را به اندازه نصف طول موج از  $A$  دور کنیم مسیر به مقدار یک طول موج زیاد خواهد شد و باعث جا به جایی مجموعه خطوط به اندازه فاصله دو خط سیاه متوالی می شود. اگر قادر باشیم یک صدم فاصله دو خط تاریک و روشن را تشخیص دهیم، کوچکترین حرکت قابل تشخیص برابر  $9 \times 10^{-9} \times 29$  خواهد بود. با حرکت دادن آینه به میزان یک هزارم اینچ ( $5 \times 10^{-5} \text{ m}$ )، هر خط به اندازه  $86$  فریز متوالی جا به جا می شود.

تشابه بین تداخل سنج مایکلسون و سابقه شنا روشن است. در این تشبیه نور به جای شناگرها است و سرعت آن در خلا نسبت به محیط اتر  $C$  است. رانش اتر مانند جریان آب است که سرعت آن نسبت به زمین  $v$  است. درست همان طور که از سابقه شناگرها در رودخانه می توانستیم به سرعت جریان آب پی ببریم، انتظار داریم بتوانیم سرعت رانش اتر را از اجرای یک «سابقه نور» در مسیرهای موازی وعمود بر راستای رانش اتر به دست آوریم.

حال به جای به دست آوردن نسبت زمانهای دو مسیر سابقه شنا در رودخانه، اختلاف آنها را به دست می آوریم که به صورت زیر است

$$\Delta t = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} - \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L}{c} \left[ \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \right] \quad (\text{پ } 4.3)$$

با استفاده از بسط دو جمله ای و اکتفا به دو جمله اول آن، به شرطی که  $v \ll c$  باشد، با تقریب خوب می توان رابطه زیر را نوشت

$$\Delta t = \frac{2L}{c} \left[ \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) - \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) \right] = \frac{Lv^2}{c^3} \quad (\text{پ } 5.3)$$

در دستگاه تداخل سنج، اختلاف زمانی فوق باید به صورت انتقال فریز نسبت به وضعیتی که در آن اتر هیچ گونه رانشی ندارد، ظاهر شود. مسافتی را که نور در زمان  $\Delta t$

می‌پیماید برابر  $d = c \Delta t$  است و اگر این فاصله  $n$  برابر طول موج،  $\lambda$ ، باشد داریم  $d = n\lambda$ . بنا بر این انتقال فریزچنین خواهد بود

$$n = \frac{Lv^2}{\lambda c^2} \quad (\text{پ } ۶.۳)$$

لذا اگر مسابقه نوری با سرعت نور  $c$  و طول موج  $\lambda$  در دستگاه تداخل سنجی که طول بازوی آن  $L$  است اجرا شود، به طوری که یکی از بازوها موازی با راستای رانش اتر که با سرعت  $v$  حرکت می‌کند باشد، در این صورت معادله (پ ۶.۳) تعداد فریزهای انتقالی را به دست می‌دهد. این انتقال در اثر حرکت زمین در داخل اتر، در مقایسه با وضع فریزها در حالتی که زمین نسبت به اتر ثابت فرض شود، به وجود می‌آید.

### پ ۳.۳ آزمایش مایکلسون-مورلی

دستگاه مورد استفاده بزرگ بود و در آن با به کار بردن آینه‌های اضافی طول بازوی مؤثر را به ده متر رسانیده بودند. تمام دستگاه را روی جیوه به طور شناور قرار دادند تا دستگاه بتواند با سرعت ثابت بچرخد بدون اینکه در اثر کرنشهای وارده تغییر شکلی در آن به وجود آید. برای انتقال دادن فریزها چرخش دستگاه لازم بود. با چرخاندن دستگاه از صفر تا ۹۰ درجه، ابتدا یک بازو و سپس بازوی دیگر موازی با راستای رانش اتر قرار می‌گرفت و در نتیجه طبق معادله (پ ۶.۳) جا به جایی فریزها دو برابر می‌شد. حال می‌توانیم حدس بزنیم که آیا دستگاه به اندازه کافی حساس است که بتواند جریان اتر را نشان دهد یا نه. یادآور می‌شویم که در بعضی از اوقات سال انتظار می‌رود سرعت رانش اتر،  $v$ ، حداقل برابر سرعت مداری زمین یعنی  $c \cdot 10^{-4}$  باشد. بنا بر این انتظار داریم که نسبت  $v/c$  حداقل  $10^{-4}$  باشد. بنا به کار بردن نوری با طول موج  $10^{-7} \times 5$  متر، میزان انتقال برابر (فریز)  $\Delta n = 0.2$  (یعنی ۰.۲ پهنای هر خط) به دست می‌آید. طبق برآورد مایکلسون و مورلی، آنها می‌توانستند انتقالهایی به میزان ۰.۰۱ پهنای فریز را نیز تشخیص دهند که البته این حساسیت بیش از حد کفایت بود.

اندازه گیرها در تمام فصول سال و در مدت طولانی انجام گرفتند، اما هیچ گونه انتقال فریز قابل توجه مشاهده نشد. آنها به این تصور که زمین ممکن است هنگام حرکت اتر را همراه خود ببرد، نظیر قایق که موقع حرکت لایه نازکی از آب را با خود می‌برد، تمام دستگاه خود را به یک آزمایشگاه در بالای کوهی منتقل کردند که بهتر در رانش اتر قرار گیرد. این کوشش مجدانه برای اندازه گیری رانش اتر بازم شکست خورد. آزمایش «شکست خورد».

کمتر شکستی مانند این «شکست» آزمایشی هیجان آور و سرنوشت ساز بود. نتیجه منفی آزمایش مایکلسون-مورلی رقابتی را برای توجیه شکست ایجاد کرد. فیزیک جرالند و لورنتس توضیح خاصی برای این حالت پیشنهاد کردند. آنها گفتند که ممکن است

برهم کنشی بین اتر و اجسامی که نسبت به آن حرکت می کنند، مانند کوتاه شدن ابعادی از جسم که به موازات حرکت نسبی قرار دارند، وجود داشته باشد. یادآور می شویم که در تشبیه رودخانه و شناگرها، نسبت زمانهای شنا در دو راستا بنا بر معادله (پ ۳.۳) عبارت بود از

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

اگر مسیر موازی با جریان آب به اندازه این ضریب کوتاهتر می بود، در این صورت نسبت زمانها برابر با ۱ و مسابقه مساوی می شد. اثر مشابهی (کوتاه شدن) در بازوی موازی دستگاه تداخل سنج می توانست، همان طور که مایکلسون و مورلی مشاهده کردند، باعث مساوی شدن مسابقه باشد. اندازه گیری کاهش طول ممکن نبود، زیرا هر وسیله اندازه گیری که به کار می رفت خود نیز نسبت به اتر در حرکت بود و کوتاه می شد. شما چه فرضیه فیتزجرالد-لورنتس را قبول داشته باشید یا نداشته باشید، آزمایش مایکلسون-مورلی نشان می دهد که همه آنهايي که سرعت نور را اندازه می گیرند بدون توجه به اینکه خود چه سرعتی در فضا دارند، نتیجه یکسان به دست می آورند.

### پ ۴.۳ سرعت ثابت نور

مسابقه های سرعت حرکت اتومبیل، قایق و هواپیما هرگز به طور رسمی مورد قبول واقع نمی شود مگر به طریق زیر عمل شده باشد. شخصی که در مسابقه شرکت دارد بایستی وسیله نقلیه خود را در يك رفت و برگشت روی مسیری معین براند و سرعت وسیله نقلیه از تقسیم دو برابر طول مسیر بر زمان کل به دست می آید. با استفاده از این روش اثر باد، جریان آب یا شرایط دیگری که ممکن است در يك جهت کمک کننده باشد با مانع بودن آن در مسیر عکس خنثی می شود. اندازه گیریهای سرعت نور به طور مشابهی با تعیین زمان رفت و برگشت يك علامت نوری انجام می شود. این روش نسبتاً خوب است و با تقریب اول اثر حرکت محیط را خنثی می کند. اما در اینجا حذف کامل نیست و با تقریب درجه دوم (دقت بیشتر) اثر حرکت محیط حذف نمی شود. این موضوع در حالتی که سرعت حرکت محیط بیش از سرعت متحرك باشد نمایان می شود. در چنین حالتی آزمایش عملی نیست زیرا شیء مورد آزمایش همراه جریان برده می شود. این حقیقت که نتایج اندازه گیریهای فیزو در فرانسه و دیگران برای تعیین سرعت نور که در زمانها، مکانها و جهات مختلف انجام شده یکسان بود، آشکار می سازد که سرعت حرکت زمین در اتر (اگر اتری وجود داشته باشد) در مقایسه با سرعت نور کوچک است. این مطلب بسیار قابل توجه است که بدانیم تداخل سنج مایکلسون-مورلی به اندازه ای حساس بود که می توانست جمله درجه دوم (تقریب درجه دوم) را تشخیص دهد. با توجه به معادله (پ ۵.۳) خواهید دید که جملات اول (یکها) حذف شده و نتیجه مهم به دست آمده، فقط به علت وجود جملات درجه دوم

باقیمانده است. دقت آزمایش مایکلسون-مورلی تا جملات درجه دوم به این علت بود که به جای اندازه گیری زمانهای عبور نور از داخل دستگاه، اختلاف زمانها اندازه گیری می شد. مایکلسون و مورلی دریافته اند که سرعت حرکت زمین در فضا باعث هیچ گونه تغییری در سرعت نور نسبت به آنها نمی شود. این استنباط روشن است که یا سرعت حرکت زمین در اثر خیلی کمتر از سرعت حرکت زمین به دور خورشید است یا اینکه تمام ناظرها باید دریابند که حرکتشان در فضا هیچ تأثیری در سرعت نور نسبت به آنها ندارد.

اینشتین ظاهراً بدون اطلاع از آزمایش مایکلسون-مورلی، با توجه به پدیده الکترومغناطیسی به این نتیجه رسید که سرعت نور به حرکت ناظر بستگی ندارد و هیچ گونه دستگاه مختصات خاصی برای قوانین فیزیک در این مورد دارای ارجحیت نیست. در اینجا، به اولین مقاله علمی او درباره نسبیت تحت عنوان «درباره الکترودینامیک اجسام متحرک» اشاره می کنیم و قسمتهایی از آن را نقل می کنیم.<sup>۱</sup>

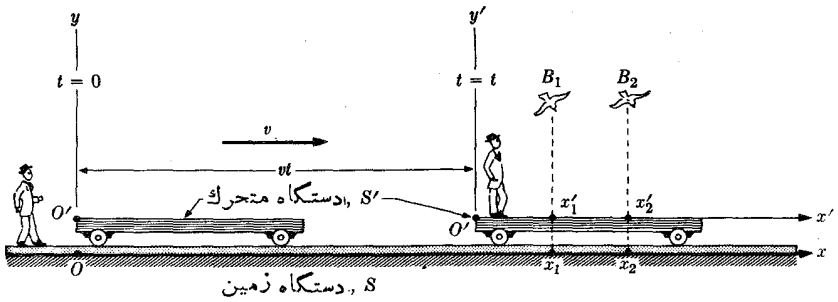
«قوانین الکترودینامیک ماکسول به طوری که امروزه فهمیده می شود - وقتی در مورد اجسام متحرک به کار می رود، منجر به عدم تقارنی می شود که ظاهراً مربوط به خود پدیده نیست. به عنوان مثال، اثر متقابل یک مغناطیس و یک رسانا را در نظر می گیریم. پدیده ای که اتفاق می افتد صرفاً بستگی به حرکت نسبی جسم رسانا و مغناطیس دارد، در حالی که برای ناظر معمولی بین حرکت یکی یا دیگری فرق مشخصی وجود دارد. مثلاً اگر مغناطیس متحرک و جسم رسانا ساکن باشد، در حوالی مغناطیس یک میدان الکتریکی با انرژی معین به وجود می آید که در نقاطی که جسم رسانا قرار می گیرد، جریان ایجاد می کند. اما اگر مغناطیس ثابت و جسم رسانا متحرک باشد در اطراف مغناطیس میدان الکتریکی ایجاد نمی شود. در این حالت در جسم رسانا نیروی محرکه الکتریکی به وجود می آید که هیچ گونه انرژی بدان متناظر نیست، اما با فرض اینکه حرکت نسبی مغناطیس و رسانا در دو حالت یکسان باشد - یک جریان الکتریکی با شدت و راستای مشابه با مورد قبلی در رسانا به وجود می آورد.

مثالهایی از این نوع همسراه با کوششهای ناموفق برای کشف حرکت زمین نسبت به «محیط نور» ثابت می کند که پدیده های الکترودینامیکی و همچنین پدیده های مکانیکی دارای خواصی نیستند که بتوان آنها را مربوط به حالت سکون مطلق دانست. این مثالها، همان طور که تا به حال در تقریب اول کمیتهای کوچک نشان داده اند، بیان می کنند که الکترودینامیک و اپتیک در تمام چارچوبهای مرجعی که قوانین مکانیک در آنها صدق می کنند، قوانین یکسانی خواهند داشت. حال، این فرض را (که مضمون آن از این به بعد «اصل

۱. اقتباس از مقاله علمی «درباره الکترودینامیک اجسام متحرک» از اینشتین که در مجله *Annalen der Physik*, 17 (1905), p. 891 به چاپ رسیده است. این مقاله توسط G. B. Jeffery, W. Perrett در کتاب «اصل نسبیت» اثر اینشتین، لورنتس، مینکوفسکی،

و ویل ترجمه شده است. این کتاب به وسیله سازمان زیر منتشر شده است





شکل پ ۳.۳ دستگاه مختصات  $S$  و  $S'$ .

نسبیت « نامیده می‌شود) به‌مثابهٔ یک اصل موضوع در نظر خواهیم گرفت و همچنین اصل موضوع دیگری معرفی می‌کنیم که با اولی تنها در ظاهر ناسازگاری دارد و آن عبارت است از اینکه نور در فضای خالی با یک سرعت معین  $c$  که مستقل از حرکت چشمهٔ آن است منتشر می‌شود. این دو اصل موضوع کافی خواهند بود که بتوان به کمک آنها نظریه‌ای ساده و سازگار برای الکترودینامیک اجسام متحرک، بر اساس نظریهٔ ماکسول برای اجسام ساکن، به دست آورد. تا آنجا که در این بحث مورد نظر است، فرض «اثر نورسان» زائد است و احتیاجی هم به یک «فضای ساکن مطلق» با خواصی معین نیست و نیز نیازی به در نظر گرفتن بردار سرعت در نقطه‌ای از فضا که در آنجا فرایندهای الکترومغناطیسی انجام می‌گیرد، نداریم.

«نظریه‌ای که در اینجا قرار است تکمیل و عرضه شود» مانند تمام نظریهٔ الکترو-دینامیک- بر اساس سینماتیک اجسام صلب قرار دارد، زیرا بیان چنین نظریه‌هایی با ارتباط بین اجسام صلب (دستگاه مختصات)، وسیلهٔ اندازه‌گیری زمان (ساعت) و فرایند الکترو-مغناطیسی سروکار دارد. توجه ناکافی به این جنبه‌ها، ریشهٔ تمام مشکلاتی است که در حال حاضر الکترو-دینامیک اجسام متحرک با آنها مواجه است.»

### پ ۵.۳ نسبیت کلاسیک

ابتدا نسبیت قبل از اینشتین را در رابطه با کمیتهای فیزیکی مورد استفادهٔ فیزیک کلاسیک یا فیزیک گالیله-نیوتونی در نظر می‌گیریم، و روند وقایع را در یک دستگاه  $S$  که با سرعت خطی ثابت حرکت می‌کند از دید دستگاه دیگر  $S'$  که آن هم با سرعت خطی ثابت حرکت می‌کند، بررسی می‌کنیم.

اگر بنا به فرض یکی از دستگاهها مثلاً  $S$  ساکن و دیگری  $S'$  با سرعت یکنواخت  $v$  در حرکت باشد، از کلیت مسئله چیزی کاسته نمی‌شود. بنابراین مسئله شبیه حالتی است که مشاهدات یک فرد روی زمین را با مشاهدات فردی دیگر در قطاری با حرکت یکنواخت، مقایسه کنیم.

در شکل پ ۳.۳ ناظری که در مبدأ مختصات  $O$  دستگاه  $S$  قرار دارد، محور  $x$ ‌ها را موازی با خط آهن در نظر می‌گیرد. ناظری که در قطار، دستگاه  $S'$ ، قرار دارد متشابهاً فواصل را از نقطه  $O'$  اندازه می‌گیرد، و محور  $x'$  آن موازی با خط آهن است. مبدأ زمان را لحظه‌ای در نظر می‌گیریم که دو ناظر درست مقابل هم قرار دارند. فرض می‌کنیم هر یک از دو ناظر بخواهند در زمان  $t$  فاصله دو پرنده  $B_1$  و  $B_2$ ، که از قضا بر فراز ریل در پروازند، را اندازه بگیرند. ناظری که در  $O'$  واقع است موقعیت  $B_1$  و  $B_2$  را در دو فاصله کوچک  $x'_1$  و  $x'_2$  می‌بیند. ناظری که در  $O$  است موقعیت  $B_1$  و  $B_2$  را در فاصله‌های بزرگتر  $x_1$  و  $x_2$  مشاهده می‌کند. ناظری که در  $O$  قرار دارد می‌تواند مشاهدات  $O'$  را با توجه به مسافت  $vt$  که  $O'$  طی کرده است دریا بد، در نتیجه

$$x'_1 = x_1 - vt \quad \text{و} \quad x'_2 = x_2 - vt \quad (\text{پ } 7.3)$$

ناظری که در قطار است (کسی که ممکن است قطار را ساکن و زمین را در زیر پای خود متحرک تصور کند) می‌تواند اختلاف مشاهدات را با در نظر گرفتن اینکه ناظر  $O$  به اندازه مسافت  $vt$  از او دور شده است، حساب کند. او رابطه زیر را به دست می‌آورد

$$x_1 = x'_1 + vt \quad \text{و} \quad x_2 = x'_2 + vt \quad (\text{پ } 8.3)$$

این معادلات تبدیل، مشاهدات یک دستگاه را به مشاهدات دستگاه دیگر تبدیل می‌کنند. با حل یکی از این دستگاه معادلات، فاصله دو پرنده به صورت زیر به دست می‌آید

$$x_2 - x_1 = x'_2 - x'_1 \quad \text{یا} \quad \Delta x = \Delta x' \quad (\text{پ } 9.3)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که هر دو ناظر فاصله دو پرنده را یکی می‌بینند. یادآوری می‌شود که لازم نیست سرعت نسبی دو ناظر  $v$  معلوم باشد. همچنین دانستن زمان  $t$  نسبت به لحظه‌ای که دو ناظر مقابل هم بودند لازم نیست، اما بایستی تمام مشاهدات - حتی اگر دو پرنده فاصله خود را نسبت به هم ثابت نگاه دارند - همزمان باشند.

آنچه را تا حال نشان داده‌ایم این است که ضمن انتقال از یک دستگاه مختصات نیوتونی به یک دستگاه مختصات نیوتونی دیگر فاصله یا طول، ناورد می‌ماند.

اکنون نتایج اندازه‌گیری سرعت را که به وسیله این دو ناظر انجام می‌شود، مقایسه می‌کنیم. فرض می‌کنیم یکی از پرنده‌ها از نقطه  $B_1$  در زمان  $t_1$  به نقطه  $B_2$  در زمان  $t_2$  پرواز می‌کند. معادلات تبدیل موقعیتهای پرنده، بجز در اختلاف زمانی، همان شکل قبلی را دارد. بنابراین

$$x'_1 = x_1 - vt_1, \quad x'_2 = x_2 - vt_2 \quad (\text{پ } 10.3)$$

برای به دست آوردن سرعت متوسط  $u'$ ، اختلاف بین دو معادله تبدیل را به اختلاف زمانی تقسیم می‌کنیم

$$\begin{aligned} x'_2 - x'_1 &= (x_2 - vt_2) - (x_1 - vt_1) \\ &= (x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1) \end{aligned} \quad (\text{پ } 11.3)$$

یا

$$\Delta x' = \Delta x - v \Delta t \quad (\text{پ } ۱۲.۳)$$

پس سرعت عبارت است از

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} - v = u - v \quad (\text{پ } ۱۳.۳)$$

بنابراین سرعتهای اندازه گیری شده به وسیله دو ناظر یکی نیست. در تبدیل یک دستگاه مختصات نیوتونی به دستگاه مشابه دیگر، سرعت یک کمیت فاقد ثابت است.

فرض کنیم پرنده مجدداً روی قطار پرواز کند و در موقعیتهای ۱ و ۲ سرعتهای مختلف داشته باشد. هر ناظری می تواند سرعت پرنده را در هر موقعیت اندازه بگیرد. با استفاده از نتایج به دست آمده، معادلات تبدیل سرعت عبارت اند از

$$u'_1 = u_1 - v \quad \text{و} \quad u'_2 = u_2 - v \quad (\text{پ } ۱۴.۳)$$

اگر دو ناظر زمانی را که پرنده از نقطه ای به نقطه دیگری می رود،  $\Delta t$  اندازه گرفته باشند، می توانند شتاب متوسط را نیز حساب کنند. اختلاف بین دو سرعت در این تبدیل برابر است با

$$u'_2 - u'_1 = u_2 - u_1 \quad (\text{پ } ۱۵.۳)$$

با تقسیم رابطه بالا بر  $\Delta t$  خواهیم داشت  $a' = a$  که نشان می دهد اختلاف سرعت و شتاب دو کمیت فاقد ثابت هستند، و در تبدیل بین دو دستگاه لخت نیوتونی ثابت باقی می مانند.

فرض کرده ایم که دو دستگاه مختصات در زمان  $t = 0$  مقابل هم قرار می گیرند و سرعت نسبی در راستای  $x$  است. در این حالت همیشه داریم  $y = y'$  و  $z = z'$ . در نسبت کلاسیک همچنین فرض می کنیم که  $t = t'$  است. به طوری که بعداً خواهیم دید، این فرض آخسر فرضی است که ناچاریم در نسبت اینشتین آن را کنار بگذاریم. به منظور خلاصه کردن، تبدیلات کلاسیک گالیله-نیوتون را چنین می نویسیم

$$\begin{aligned} x' &= x - vt, & x &= x' + vt' \\ y' &= y, & y &= y' \\ z' &= z, & z &= z' \\ t' &= t, & t &= t' \end{aligned} \quad (\text{پ } ۱۶.۳)$$

مجموعه اول این معادلات می تواند برای به دست آوردن مختصات مکان-زمان  $(x', y', z', t')$  یک واقعه از دید ناظر  $O'$  بر حسب مختصات ثبت شده از همین واقعه از دید ناظر  $O$ ، به کار رود. مجموعه دوم مختصات  $O'$  را به  $O$  تبدیل می کند. در اینجا منظور از یک واقعه هر اتفاقی است که بتواند به وسیله سه مختصه مکانی و یک مختصه زمان مشخص شود. روشن

شدن يك لامپ و پرواز يك پرنده، همان طور كه در بالا بحث شد، ممكن است به عنوان يك سرى وقايع در نظر گرفته شود.

معادلات تبدیلی كه به دست آورده ایم نسبتاً واضح اند. پیچیده ترین نتیجه، معادله تبدیل تغییر پذیری (وردایی) سرعت است كه بدون اثبات در مطالعه برخورد و پدیده دوپلر به كار می رود، و در بحث آزمایش مایكلسون-مورلی نیز مورد استفاده قرار می گیرد. در حقیقت، مسئله ای كه جواب منفی آزمایش به وجود آورد این بود كه، برخلاف انتظار تبدیل نیوتون، دو ناظر چه در حال حرکت باشند یا نباشند بایستی سرعت نور را يكسان به دست آورند.

معادلات تبدیل كلاسیك فقط در مورد دستگاههای مختصاتی كه نسبت به هم با سرعت ثابت خطی حرکت می كنند به كار می روند. نارسایی همین معادلات در حرکت یكنواخت بوده است كه ما را به نظریه نسبیّت خاص اینشتین رهبری کرده است. ما معادلات تبدیل كلاسیك را در دستگاههایی كه دارای شتاب یا حرکت دورانی اند، به دست نیاوردیم، زیرا این معادلات بسیار پیچیده اند.

برای به دست آوردن معادلات بالا، به طور ضمنی این فرض كلاسیك را در نظر گرفتیم كه فواصل زمانی برای ناظرهای مختلف يكسان است. در حقیقت هیچ دلیل پیشینی<sup>۱</sup> دال بر این فرض كه زمان یا هر كمیت فیزیکی دیگری ضمن تبدیل دستگاههای مختصات تغییر نمی كند، وجود ندارد. درستی یا نادرستی يك فرض مطلقاً از طریق بررسی تجربی نتایجی كه بر اساس آن فرض پیش بینی شده اند، روشن می شود. بعداً در همین فصل خواهیم دید كه ناوردایی فاصله زمانی، وقتی كه سرعت حرکت نور در خلا<sup>۲</sup> (فضای آزاد) ثابت فرض می شود، بایستی به كنار گذاشته شود.

### پ ۶.۳ معادلات تبدیل اینشتین-لورنتس

آزمایش مایكلسون-مورلی برای اندازه گیری سرعت حرکت زمین در اتر انجام گرفت به این امید كه اتر می تواند به عنوان يك دستگاه مختصات ثابت كه قوانین نیوتون در آن صدق می كنند، در نظر گرفته شود. اینشتین فرض كرد تمام آزمایشهایی كه برای پیدا كردن دستگاه مختصات ثابت طرح شده اند، با شكست روبرو خواهند شد. اینشتین، چون فرض كرد كه دستگاه مختصات ثابت هرگز وجود ندارد، مسئله را از جهت دیگر در نظر گرفت و بر آن شد كه قوانین فیزیك را بایستی آنچنان بیان كرد كه در هر دستگاه مختصاتی قابل كاربرد باشند.

اینك معادلات جدیدی برای تبدیل مختصات مكان و زمان يك واقعه از يك دستگاه به دستگاه دیگر به دست می آوریم. فرض می كنیم كه دستگاههای مرجع، چارچوبهای لغت یعنی بدون شتاب هستند. البته كه می توانیم حرکت شتابدار بعضی از اشیاء را نسبت

۱. منظور از دلیل پیشینی دلیلی است كه بر اساس مفروضات قبلی یا علل شناخته شده باشد.

به دستگاههای لخت مطالعه کنیم. نسبت دستگاههای لخت، نسبت خاص نام دارد. نسبت عام که بسیار پیچیده تر است و با دستگاههای شتابدار سروکار دارد، در سال ۱۹۱۵ به وسیله اینشتین پیشنهاد شد. در اینجا به بحث نسبت خاص بسنده کرده و دو اصل موضوع آن را به صورت زیر بیان می کنیم

۱. قوانین فیزیک از دید هر دو ناظری که نسبت به هم دارای سرعت ثابت خطی باشند یکسان اند، و یا به عبارت دیگر، مشاهدات در یک دستگاه مختصات نسبت به مشاهدات دستگاه مختصات دیگر ترجیحی ندارد.
۲. تمام ناظرها سرعت حرکت نور در خلأ را، بدون توجه به اینکه چه نوع حرکتی داشته باشند، می باید یکسان به دست آورند.

معادلاتی که می خواهیم به دست آوریم را اولین بار، لورنتس در کوشش خود برای تطبیق نظریه الکترومغناطیس با نتایج تجربی به دست آورد. به طوری که قبلاً توضیح دادیم، فیزیکرالد ولورنتس، با این فرض که تداخل سنج در راستای بردار سرعت در اترکوتاه می شود، توجیهی خاص در مورد نتیجه منفی آزمایش مایکلسون-مورلی ارائه کردند. اما ما در اینجا معادلات تبدیل نسبت را بر اساس دو اصل موضوع اینشتین به دست آوریم. حال به مثال قبل برمی گردیم و دو ناظر  $O$  و  $O'$  را در دو دستگاه  $S$  و  $S'$  در نظر می گیریم. از ناظر  $O'$  می خواهیم که به عقب برگردد و دوباره از مقابل ناظر  $O$  عبور کند. در لحظه ای که  $O$  در مقابل  $O'$  قرار دارد، یک فلاش عکاسی را به کار می اندازیم. بنابراین در زمان  $t = 0$ ، هر یک از دو ناظر روی یک چشمه موج کروی نوری قرار خواهد داشت. اگر به هر یک از دو ناظر قدرت مافوق طبیعی بدهیم که قادر باشند پخش نور را در فضا «بینند» لذا هر ناظر خودش را در مرکز کره ای از نور که در حال گسترش است می یابد. این موضوع صحیح است، زیرا فرض کرده ایم که سرعت حرکت نور برای دو ناظر یکی است، اگر چه سرعت یک جسم نسبت به آنها چنین نباشد.

معادله گسترش کره نور از دید ناظر  $O$  به صورت زیر است

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (\text{پ } ۱۷.۳)$$

که در آن  $c$  سرعت نور است. به همین ترتیب ناظر  $O'$ ، معادله کره نور خود را این طور می نویسد

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (\text{پ } ۱۸.۳)$$

اینک خواننده به آسانی می تواند بررسی کند که اگر  $x'$  و  $y'$  و غیره را از مجموعه اول معادلات تبدیل (پ ۱۶.۳) در معادله (پ ۱۸.۳) قرار دهیم، معادله (پ ۱۷.۳) را به دست نمی آوریم. بنا بر این باید در جستجوی یک دسته معادلات تبدیل جدید یا معادلات اصلاح شده ای باشیم که همزمان در معادلات (پ ۱۷.۳) و (پ ۱۸.۳) صدق کنند. بویژه

ناچار خواهیم بود که فرض يك مقياس عمومی زمان  $t' = t$  را کنار بگذاریم. به عبارت روشنتر، اگر دو ناظر بخواهند هر يك ظاهراً در مرکز همان کره باشند معادلات تبدیل نسبیت باید متفاوت از معادلات تبدیل کلاسیک باشد.

با در نظر گرفتن شرایط معادلات تبدیل جدید، در یافتن آنها تا اندازه ای محدودیت داریم. این معادلات جدید بایستی خطی باشند. هر معادله درجه دوم دارای دو جواب است، معادلات درجه بالاتر جوابهای بیشتری دارند. مطمئناً هر مشاهده ای در دستگاه  $S$  باید تعبیر منحصر به فردی در دستگاه  $S'$  داشته باشد. آنچه هر ناظر «می بیند» می باید از تناظر «يك به يك» برخوردار باشد. معادلات تبدیل بایستی نسبت به مختصات فضایی و زمان خطی باشند. از آنجا که معادلات تبدیل کلاسیک به صورت  $x' = x - vt$  و  $x = x' + vt'$  به دست آمدند، حال ساده ترین معادلات خطی بعدی را در نظر می گیریم

$$(پ ۱۹۰۳) \quad x' = \gamma(x - vt) \quad \text{و} \quad x = \gamma'(x' + vt')$$

مقادیر  $\gamma$  پارامترهای تبدیل هستند که بایستی تعیین شوند. از معادله اول درمی یابیم که برای  $x' = 0$  داریم  $x = vt$ . این موضوع بدرستی حرکت مبدأ  $S'$  را از نقطه نظر ناظر واقع در  $S$  تشریح می کند. بالعکس، از معادله دوم برای  $x = 0$  داریم  $x' = -vt'$ . این موضوع هم بدرستی حرکت مبدأ  $S$  را از نقطه نظر ناظر واقع در  $S'$  بیان می کند. توجه کنید که این دو معادله يك سرعت نسبی را، که با آن دو مبدأ از یکدیگر دور می شوند و بدان گونه که دو ناظر مختلف آن را اندازه گیری می کنند، به دست می دهد. این يك شرط ضروری است که از همسانگرد بودن فضا ناشی می شود (منتج از اصل موضوع اول).

عامل  $\gamma$  طول مورد مشاهده يك ناظر  $(x - vt)$  را به مشاهده متناظر آن  $x'$  تبدیل می کند. عامل دیگر  $\gamma'$  معیار مشابهی برای اجرای تبدیل در راستای دیگر است. از اصل موضوع اول اینشتین نتیجه می شود که  $\gamma$  و  $\gamma'$  با هم برابرند. خواننده ممکن است تعجب کند که چگونه ممکن است  $\gamma$  چیزی بجز واحد باشد. آزمایش زیر را در نظر بگیرید.

دو ناظر که هر کدام میله ای يك متری در دست دارند با سرعت نسبی که در راستای متر است، از مقابل هم می گذرند. این دو ناظر در حالی که از مقابل هم عبور می کنند، طول میله ها را مقایسه می کنند. اگر آنها دریابند که یکی به دلیل حرکت کوتاه تر از دیگری به نظر می رسد، این موضوع به روشنی اصل موضوع اول اینشتین را نقض می کند. بنابراین باید  $\gamma = 1$  باشد. اشکال این استدلال در کجاست؟

قبل از هر چیز درباره این موضوع باید دقت داشت که هنگام استفاده از معادله (پ ۱۹۰۳) برای محاسبه تغییرات طول يك شیء مادی، در تبدیل از يك دستگاه مختصات به دستگاه مختصات دیگر، چگونه با زمان مواجه شویم. در بخش بعد به این موضوع می پردازیم و واقعاً درمی یابیم که عاملی نظیر  $\gamma$  دخالت می کند. حال سؤال مهم این است که این دو ناظر چگونه طول میله های خود را با هم مقایسه می کنند. چگونه ناظر دستگاه  $S$  می داند، در حالی که ابتدای میله ها انطباق دارند، انتهای میله متر او نیز به طور همزمان منطبق بر انتهای میله دیگر است. این موضوع به روشنی اساس قضاوت درباره این مسئله

است که آیا میله‌ها طول یکسان دارند یا نه.

کلید حل این مسئله در این نکته است که دو ناظر درک متفاوتی از زمان دارند. دو واقعه که به وسیلهٔ یک ناظر همزمان قضاوت می‌شوند، برای ناظر دیگر همزمان نیستند. به همین دلیل، دو میله که به وسیلهٔ یک ناظر همطول قضاوت می‌شوند، از دید ناظر دیگر همطول نخواهند بود. معادلهٔ تبدیل زمان،  $t = t'$ ، را می‌توان با حل دو معادلهٔ (پ ۱۹.۳) برای  $t'$  و حذف  $x'$  به دست آورد. پس داریم

$$t' = \gamma \left[ \frac{x}{v} \left( \frac{1}{\gamma^2} - 1 \right) + t \right] \quad (\text{پ } 20.3)$$

اگر آزمایش بحث شده در بالا با دو میله که در راستای  $y$  قرار دارند تکرار شود، در صورتی که یکی از ناظرها آنها را با طول برابر تشخیص دهد، ناظر دیگر با او توافق خواهد داشت. یک ناظر را در وسط یکی از میله‌ها و ناظر دیگر را در وسط میلهٔ دیگر قرار دهید. دو دستیار در دو انتهای یکی از میله‌ها، وقتی که دو انتهای میلهٔ دیگر بر آنها منطبق می‌شوند، جرقه‌های نورانی می‌فرستند. اگر یک ناظر دو جرقه را به‌طور همزمان ببیند، ناظر دیگر نیز همزمان خواهد دید. بنا بر این هر دو ناظر تصدیق خواهند کرد که دو میله طول یکسان دارند، و برابری آنها بنا بر تقارن است. این بدان معنی است که معادلات تبدیل برای  $y$  و  $z$  به صورت زیر باقی می‌مانند

$$\begin{aligned} y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (\text{پ } 21.3)$$

با جاگذاری معادلات (پ ۲۰.۳) و (پ ۲۱.۳) و معادلهٔ اول از معادلات (پ ۱۹.۳) در معادلهٔ (پ ۱۸.۳) داریم

$$\gamma^2 (x - vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2 \gamma^2 \left[ \frac{x}{v} \left( \frac{1}{\gamma^2} - 1 \right) + t \right]^2$$

با بسط و مرتب کردن جمله‌ها خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \left[ \gamma^2 - \frac{c^2 \gamma^2}{v^2} \left( \frac{1}{\gamma^2} - 1 \right)^2 \right] x^2 - \left[ 2v\gamma^2 + \frac{2c^2 \gamma^2}{v} \left( \frac{1}{\gamma^2} - 1 \right) \right] xt + y^2 + z^2 \\ = [c^2 \gamma^2 - v^2 \gamma^2] t^2 \end{aligned} \quad (\text{پ } 22.3)$$

معادلهٔ (پ ۲۲.۳) باید همانند معادلهٔ (پ ۱۷.۳) باشد. برای برقراری چنین حالتی، مقادیر داخل پرانتزها در معادلهٔ (پ ۲۲.۳) باید به ترتیب مساوی ۱ و صفر و  $c^2$  باشند.

۱. در راستای  $x$  به همان معنی تقارن وجود ندارد. انتهای جلویی یک میله با انتهای عقبی میلهٔ دیگر منطبق می‌شود. جلو و عقب به وسیلهٔ راستای حرکت نسبی مشخص می‌شوند.

به آسانی دیده می‌شود که تمام این سه شرط با نوشتن رابطه زیر بر آورده می‌شود

$$\frac{1}{\gamma^2} - 1 = \frac{v^2}{c^2}$$

که نتیجه می‌شود

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{پ } ۲۳.۳)$$

هماهنگی در نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که به طور ریاضی ممکن است معادلات خطی تبدیل را چنان پیدا کرد که در آن تبدیل سرعت نور ناوردا بماند. در اینجا، با فرض «مشاهده» گسترش يك موج نوری توسط دو ناظر، ناوردایی سرعت نور را در خلاف در نظر گرفته‌ایم. بنابراین فقط کافی است معادلات تبدیل کلاسیک را با دخالت دادن  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  اصلاح کرد. همچنین برای زمان نیز، که از دید تمام ناظرهای دستگاه نیوتونی یکسان فرض می‌شد، بایستی يك معادله تبدیل در نظر گرفت. با دانستن  $\gamma$ ، معادله (پ ۲۵.۳) را می‌توان به صورت ساده زیر نوشت

$$t' = \gamma \left[ t - \frac{vx}{c^2} \right] \quad (\text{پ } ۲۴.۳)$$

حال می‌توانیم معادلات تبدیل نسبیتی و کلاسیک را در مورد دو ناظری که سرعت نسبی آنها در راستای محور  $x$ ها  $v$  است، به صورت زیر خلاصه کنیم

لورنتس-اینشتین (نسبیتی)

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right)$$

گالیله-نیوتون (کلاسیک)

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

(پ ۲۵.۳)

که در آن

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

توجه کنید که اگر  $v \ll c$  باشد،  $\gamma$  تقریباً برابر واحد می‌شود و معادلات تبدیل نسبیتی شکل معادلات نیوتونی را پیدا می‌کنند. بنابراین فیزیک نیوتونی را می‌توان حالت خاصی از فیزیک نسبیتی دانست. یادآوری می‌شود با وجود سرعت بسیار زیاد زمین به دور



خورشید، ۲۹ کیلومتر در ثانیه، این سرعت فقط  $1/10000$  سرعت نور است. بنابراین تصحیح مربوط به نسبیت برای مشاهداتی که از زمین انجام می‌گیرند، در مقایسه با مشاهدات خورشیدی، فقط حدود  $10^{-7} \times 5$  درصد است. نظریه نسبیت تأثیر مهمی در کارهای مهندسی «معمولی» ندارد.

در هر حال معادلات تبدیل نسبیت، راه را برای پیشرفتهای فلسفی مهم نشان می‌دهد. بحث ما در مورد نظریه نسبیت تا به حال مربوط به قسمتی از نظریه نسبیت خاص بوده است که در آن حرکت ناظرها نسبت بهم بدون شتاب است. در اینجا، هیچ‌یک از این ناظرها در مشاهده وقایع نسبت به ناظر دیگر ادجیسیته ندارد. اگر در حل معادلات تبدیل به جای به دست آوردن  $x', y', z'$  و  $t'$  بر حسب  $x, y, z$  و  $t$  برعکس عمل کنیم و  $x, y, z$  و  $t$  را بر حسب  $x', y', z'$  و  $t'$  حساب کنیم، معادلات تبدیل معکوس به دست می‌آیند. شکل معادلات تغییر نمی‌کند، بجز این‌که علامت سرعت نسبی،  $v$ ، تغییر می‌کند. [بنابراین  $x = \gamma(x' + vt')$ ] این اختلاف قابل پیش‌بینی است، زیرا اگر  $O'$  نسبت به  $O$  به طرف شمال حرکت کند، در این صورت  $O$  بایستی نسبت به  $O'$  به طرف جنوب حرکت کند. تا حال یک قدم به طرف هدف نسبیت عام برداشته شده است، کسه در آن قوانین فیزیک برای تمام ناظرها یکسان گرفته می‌شوند.

### پ ۷.۳ انقباض طول

حال میله‌ای را در  $O'$  یا در دستگاه مختصات  $x', y', z'$  و  $t'$  (شکل پ ۳.۳) موازی محور  $x$ ها در نظر می‌گیریم. مختصات انتهایی چپ میله را  $x'_1$  و مختصات انتهایی راست آن را  $x'_2$  می‌گیریم. طول میله کسه توسط ناظر ساکن نسبت به میله اندازه‌گیری می‌شود، طول ویژه میله نامیده می‌شود. در این حالت اندازه آن  $(x'_2 - x'_1)$  است. طول میله کسه توسط ناظر واقع در  $O$  یا در دستگاه مختصات  $x, y, z$  و  $t$  اندازه‌گیری می‌شود، وقتی کسه دستگاه مختصات  $O'$  در جهت مثبت محور  $x$ ها با سرعت  $v$  حرکت می‌کند، چه اندازه است؟ از معادله (پ ۲۵.۳) به دست می‌آید

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt_1) \quad \text{و} \quad x'_2 = \gamma(x_2 - vt_2)$$

با کم کردن رابطه اول از رابطه دوم خواهیم داشت

$$(x'_2 - x'_1) = \gamma[(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)] \quad (\text{پ } 26.3)$$

این معادله نشان می‌دهد که فاصله اندازه‌گیری شده بین دو انتهای میله، در دستگاه مختصات  $O$ ، می‌تواند مقادیر مختلفی داشته باشد که بستگی به انتخاب  $t_1$  و  $t_2$ ، یعنی زمان مشاهده دو انتها توسط ناظر، دارد. بدین سبب بر طبق تعریف، طول یک میله متحرک فاصله اندازه‌گیری شده بین دو انتهای آن است وقتی کسه ناظر دو انتها را هم‌زمان ببیند. بنابراین داریم  $t_1 = t_2$  و معادله (پ ۲۶.۳) به صورت زیر درمی‌آید

$$(x'_2 - x'_1) = \gamma(x_2 - x_1) \quad (\text{پ } ۲۷.۳)$$

$$L' = \gamma L = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} L$$

از آنجا که  $\gamma$  همیشه از واحد بزرگتر است،  $L$  همیشه از طول ویژه  $L'$  کو تا هتر خواهد شد و بنا بر این گفته می شود که طول انقباض می یابد. حال می بینیم که بحث در مورد انقباض فیتزجرالد لورنتس که در بخش پ ۳.۳ تشریح شد، از لحاظ ریاضی درست مشا به انقباض طول در نظریه نسبیت است که در معادله (پ ۲۷.۳) داده شده است. لکن این دو معادله بر اساس مفاهیم کاملاً متفاوت به دست آمده اند. در انقباض فیتزجرالد لورنتس،  $v$  سرعت میله نسبت به اتر است، در حالی که در معادله نسبیت،  $v$  سرعت میله نسبت به ناظر است. به فرض اینکه دقت طیفی ناظر کافی باشد، آیا ممکن است انقباض جسم متحرکی را در راستای حرکت آن تشخیص دهد؟ اگر زاویه دید ناظر کوچک باشد، به نظر می آید که ناظر نمی تواند انقباض را تشخیص دهد. وضعیت در اینجا درست مشا به حالتی که در آن معادله انقباض طول، معادله (پ ۲۷.۳)، را به دست آوردیم نیست. موقعی که یک شیء را می بینیم، تصویری از آن روی شبکیه چشم ایجاد می شود که این تصویر در نتیجه ورود همزمان فوتونهای نور از نقاط مختلف جسم بر روی شبکیه است. در این صورت، تمام فوتونهای نور در یک زمان از نقاط مختلف جسم گسیل نمی شوند، بلکه نقاط دورتر جسم بایستی زودتر از نقاط نزدیک به ناظر نور گسیل کرده باشند. در این صورت نمی توانیم برای به دست آوردن معادله (پ ۲۷.۳) از معادله (پ ۲۶.۳) قرار دهیم  $t_1 = t_2$  موقعی که تفاوت زمانی گسیل نور از نقاط مختلف جسم را به حساب بیاوریم، درمی یابیم وقتی زاویه رؤیت جسم متحرک توسط ناظر کوچک باشد، به نظر او می رسد که جسم می چرخد نه اینکه منقبض شود. اثبات این مطلب به طریق ریاضی مشکل نیست. لکن به علت طولانی بودن، در اینجا از بحث آن صرف نظر می کنیم. روش رسیدن به این نتیجه جالب توسط ترل<sup>۱</sup> در مقاله ای داده شده و توسط وایسکوف<sup>۲</sup> در مقاله ای بحث و خلاصه شده است. در حالی که زاویه رؤیت جسم متحرک برای ناظر بزرگ باشد، به طوری که در مقاله اسکات و وینر<sup>۳</sup> بحث شده، انقباض طول در شرایط مناسب قابل رؤیت است. به خواننده توصیه می شود که این سه مقاله را مطالعه کند.

### پ ۸.۳ اتساع زمان و ترتیب علی

مفهوم کلاسیک زمان از نقطه نظر نیوتون بدین ترتیب بیان شده است که «زمان کمیتهی است ریاضی، مطلق و حقیقی که بر طبق خواص طبیعی خود، به طور یکنواخت بدون هیچ گونه رابطه ای با عوامل خارجی، جریان دارد». این بیان تلویحاً ارسال اطلاعات را با سرعتهای

1. J. Terrell, *Phys. Rev.*, **116** (1959) p. 1041.
2. V. F. Weisskopf, *Phys. Today*, **13** (1960), p. 24.
3. G. D. Scott and M. R. Viner. *Am. J. Phys.*, **33** (1965), p. 354.

آنچنان زیاد، در مقایسه با سرعت نسبی ناظرها در دستگاههای مختصات، میسر می‌داند که در آن سخنی از همزمانی بهمیان نمی‌آید. بهر حال، با فرض اینکه علائم نوری سریعترین وسیله ممکن در ارتباطات هستند، می‌توان انتظار داشت که در بیان حرکت اجسامی که سرعت آنها به سرعت نور نزدیک می‌شود با مشکلاتی مواجه شویم.

رابطه میان فاصله زمانی بین دو واقعه در یک دستگاه مختصات با فاصله زمانی همین دو واقعه در دستگاه مختصات دیگری که نسبت به اولی حرکت دارد، چگونه است؟ مطابق شکل پ ۳.۳ فرض می‌کنیم محورهای  $x$  دو دستگاه موازی و سرعت نسبی دو مبدأ  $O$  و  $O'$  برابر  $v$  باشد. واقعه‌ای را در نظر می‌گیریم که در زمان  $t_1$  در نقطه  $x_1$  در دستگاه مختصات  $x, y, z$  و  $t$  و واقعه دیگری در همین دستگاه در زمان  $t_2$  در نقطه  $x_2$  رخ دهد. تبدیل زمان به  $t'$  در دستگاه  $x', y', z'$  و  $t'$  از معادله (پ ۲۵.۳) به دست می‌آید

$$t'_1 = \gamma \left( t_1 - \frac{vx_1}{c^2} \right) \quad \text{و} \quad t'_2 = \gamma \left( t_2 - \frac{vx_2}{c^2} \right)$$

با به دست آوردن تفاضل دورابطه، فاصله زمانی در دستگاه  $x', y', z'$  و  $t'$  معلوم می‌شود

$$(t'_2 - t'_1) = \gamma \left[ (t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2} (x_2 - x_1) \right] \quad (\text{پ } 28.3)$$

برای بحث در معادله فوق فرض می‌کنیم دو واقعه در دستگاه  $O$  در یک محل رخ دهد، یعنی  $x_2 = x_1$ . فاصله زمانی اندازه‌گیری شده دو واقعه در دستگاه مختصاتی که دو واقعه در آن در یک محل رخ داده است را زمان ویژه یا زمان محلی می‌نامند. در حالت مورد بحث  $(t_2 - t_1)$  زمان ویژه است و معادله (پ ۲۸.۳) به صورت زیر درمی‌آید

$$(t'_2 - t'_1) = \gamma (t_2 - t_1) \quad (\text{پ } 29.3)$$

از آنجا که  $\gamma$  بزرگتر از واحد است، فاصله زمانی بین دو واقعه که توسط ناظر دستگاه  $O'$  اندازه‌گیری شده طولانیتر از زمان ویژه‌ای است، که به عنوان فاصله زمانی بین همین دو واقعه توسط ناظر دستگاه  $O$  اندازه‌گیری می‌شود. این تغییر زمان را اتساع زمان نامند و می‌گوییم ساعت دستگاه  $O$ ، یا ساعت متحرک، آهسته‌تر از ساعت دستگاه  $O'$  کار می‌کند. باید یادآور شد که اگرچه  $x_2 = x_1$  است، لکن مختصات  $x'_1$  و  $x'_2$  با هم مساوی نیستند زیرا در فاصله  $t_2 - t_1$  دو دستگاه نسبت به هم جا به جایی دارند. اگر دو واقعه در دستگاه  $x', y', z'$  و  $t'$  در یک محل در زمانهای  $t'_1$  و  $t'_2$  رخ دهد، تبدیل معکوس نشان می‌دهد که زمان در دستگاه  $x, y, z$  و  $t$  طولانیتر شده و از رابطه زیر به دست می‌آید

$$t_2 - t_1 = \gamma (t'_2 - t'_1)$$

با مراجعه به معادله (پ ۲۹.۳) ملاحظه می‌کنیم که اگر دو واقعه در دستگاه  $x, y, z$  و  $t$  به‌طور همزمان رخ دهند، یعنی  $t_2 - t_1 = 0$  باشد، در این صورت خواهیم داشت  $t'_2 - t'_1 = 0$ . بنابراین هر دو ناظر به شرطی بر وقوع همزمان دو واقعه توافق دارند که این

دو واقعه در یکی از دو دستگاه در يك مكان، و به طور همزمان رخ دهند. بالاخره اگر سرعت حرکت نور بینهایت فرض شود، در این صورت  $\gamma = 1$  بوده و بایستی فواصل زمانی در هر دستگاهی یکسان و یا براساس فرضیهٔ نیوتون مقدار مطلق باشد.

اتساع زمان به طور آزمایشی با استفاده از مزونهای  $\mu$  مستقیماً به اثبات رسیده است. مزونها ذرات کوچکتز از اتم هستند که آنها را می توان به کمک شتابدهنده های قوی ذرات به وجود آورد. مزونهای  $\mu$  ناپایدار بوده و بر طبق قانون نمایی واپاشیده می شوند، و نیمه عمر آنها در دستگاه مختصاتی که این ذرات نسبت به آن ساکن هستند برابر  $3.1 \times 10^{-6}$  ثانیه است. این ذرات در نتیجه برخورد پرتو کیهانی با طبقات بالای جو زمین تولید می شوند و با سرعت زیاد به طرف سطح زمین حرکت می کنند. باریکه ای از این ذرات را در نظر می گیریم که با سرعت  $0.9c$  به طرف زمین جریان دارد. (برای این سرعت داریم  $\gamma = 2.3 = [0.9]^{-1/2} = [1 - (0.9c/c)^2]^{-1/2}$ ). این باریکه مسافت  $840$  متر را در زمان  $3.1 \times 10^{-6}$  ثانیه طی می کند. بنا بر این اگر يك آشکارساز مزون را  $840$  متر بالاتر از يك آشکارساز مزونی دیگر در جو زمین قرار دهیم، انتظار می رود که شمارش در آشکارساز پایینی نصف شمارش آشکارساز بالایی باشد. اما آزمایش نشان می دهد که شمارش در آشکارساز پایینی به مقدار قابل ملاحظه ای بیش از نصف شمارش آشکارساز بالایی است. این اختلاف ناشی از این است که ناظر روی زمین در محاسبات خود به جای نیمه عمر اتساع یافته، نیمه عمر ویژه را به کار برده است. با استفاده از معادله (پ ۲۹.۳) نیمه عمر اتساع یافتهٔ مزونها برابر با  $7.2 \times 10^{-6} = 3.1 \times 10^{-6} \times 2.3$  به دست می آید. بنا بر این ناظر روی زمین با آشکارساز پایینی، شمارش بیشتری را نسبت به آنچه انتظار داشت به دست می آورد، زیرا نیمه عمر اتساع یافته بیشتر از  $3.1 \times 10^{-6}$  ثانیه، یعنی زمان حرکت مزونها بین دو آشکارساز است. فرض می کنیم که ناظر فاصلهٔ بین دو آشکارساز را به  $1920$  متر، یعنی فاصله ای برابر حاصلضرب نیمه عمر اتساع یافته در سرعت نسبی دو دستگاه مختصات افزایش دهد. در این حالت ناظر شمارش آشکارساز پایینی را نصف آشکارساز بالایی به دست می آورد. اگر ناظر همراه مزونها حرکت کند، نسبت دو شمارش را چقدر گزارش می کند؟ از نقطه نظر این ناظر فاصلهٔ دو آشکارساز  $1920$  متر نیست بلکه، به علت انقباض طول،  $840$  متر است. از تقسیم این فاصلهٔ انقباض یافته بر سرعت حرکت مزونها،  $0.9c$ ، زمان پرواز بین دو آشکارساز  $3.1 \times 10^{-6}$  ثانیه به دست می آید که همان زمان نیمه عمر ویژه است. بنا بر این ناظری که در دستگاه مختصات همراه مزونها حرکت می کند، شمارش آشکارساز پایینی را نصف شمارش آشکارساز بالایی می بیند. بدین ترتیب هر دو ناظر روی تعداد نسبی مزونهای که در فاصله بین دو آشکارساز باقی مانده اند توافق دارند، اگر چه اطلاعاتی را که در محاسبات خود به کار برده اند متفاوت است. حال دربارهٔ فاصلهٔ زمانی تبدیل شده، وقتی که دو واقعه در دستگاه  $x, y, z$  در  $t$  در يك مكان اتفاق نمی افتند بحث می کنیم. در این حالت مقدار  $t'_1 - t'_2$  از رابطه (پ ۲۸.۳) داده می شود. اگر در این معادله مقدار داخل کروشه برابر صفر باشد، دو واقعه در دستگاه  $x', y', z'$  و  $t'$  همزمان رخ می دهند. در صورتی که مقدار داخل کروشه معادلهٔ فوق مثبت

باشد، دو واقعه به همان ترتیبی که در دستگاه  $x, y, z$  و  $t$  مشاهده می‌شوند در دستگاه  $x', y', z', t'$  نیز مشاهده خواهند شد. اگر مقدار داخل کروشه منفی شود، در این صورت ترتیب دیدن دو واقعه در دستگاه  $O$  عکس ترتیب دیدن در دستگاه  $O'$  خواهد بود. برای به‌دست آوردن شرط ریاضی این حالت، معادله (پ ۲۸.۳) را به ترتیب زیر می‌نویسیم

$$t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - t_1) \left[ 1 - \frac{v}{c} \frac{x_2 - x_1}{c(t_2 - t_1)} \right]$$

این رابطه نشان می‌دهد که مقدار داخل کروشه وقتی منفی می‌شود که داشته باشیم

$$\frac{x_2 - x_1}{c(t_2 - t_1)} > \frac{c}{v}$$

این نامساوی فقط وقتی صحیح است که فاصله بین  $x_1$  و  $x_2$  بزرگتر از مسافتی باشد که نور در فاصله زمانی  $t_2 - t_1$  طی می‌کند. اما اگر فاصله دو نقطه به این بزرگی باشد، وقتی علامت نوری از واقعه (۱) می‌گذرد نمی‌تواند به موقع به محل واقعه (۲) برسد تا باعث ایجاد آن شود. بنابراین اگر دو واقعه از نظر دو ناظر به یک ترتیب زمانی رخ ندهند، یک واقعه نمی‌تواند علت وقوع واقعه دیگر شود. بنابراین باید نتیجه گرفت که علت و معلول هیچ وقت نمی‌توانند با ترتیب مخالف یکدیگر به نظر دو ناظر برسند.

آیا واقعاً زمان اتساع می‌یابد و طول میله در جهت حرکت واقعاً منقبض می‌شود؟ جواب این سؤالها بستگی به این دارد که منظور ما از واقعاً چیست. در علوم فیزیکی آن چیزی واقعی است که اندازه‌گیری می‌شود. فقط از طریق اندازه‌گیری است که می‌توان اطلاعات مورد نیاز را برای نسبت دادن خواصی به یک ساعت، به یک میله، به یک اتم و غیره به‌دست آورد. اتساع زمان و انقباض طول در این مفهوم، واقعی هستند. زمان ویژه و طول ویژه دارای هیچ گونه ماهیت مطلق نیستند. زمان، طول، سطح، حجم و کمیت‌های دیگر، همگی رابطه‌هایی بین جسم مورد مشاهده و ناظر هستند.

### پ ۹.۳ تبدیل سرعت در نظریه نسبیت

برای تشریح بیشتر در مورد چگونگی کاربرد معادلات تبدیل مکان و زمان، محاسباتی را که به‌طور کلاسیک انجام گرفت تکرار می‌کنیم. معادله تبدیل سرعت را در نظریه کلاسیک برای دوناظری که با سرعت نسبی  $v$  حرکت می‌کنند به صورت  $u' = u - v$  به‌دست آوردیم. برای به‌دست آوردن معادله نسبیتی مربوطه، روابط تعریفی زیر را به کار می‌بریم

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} \quad \text{و} \quad u_x = \frac{dx}{dt}$$

حال  $u'$  را بر حسب کمیت‌های دستگاه  $x, y, z$  و  $t$  از معادلات تبدیل نسبیتی بیان می‌کنیم

نتیجه به صورت زیر است

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma(dt - vdx/c^2)}$$

$$= \frac{dx/dt - v}{1 - (v/c^2)(dx/dt)}$$

یا

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2} \quad (\text{پ } ۳۰.۳)$$

مؤلفه‌های دیگر سرعت را با روش مشابهی می‌توان به دست آورد

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v / c^2)} \quad \text{و} \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x v / c^2)} \quad (\text{پ } ۳۱.۳)$$

توجه شود مؤلفه سرعتهایی که بر راستای حرکت نسبی دستگاههای مختصات عمود هستند نیز به حرکت نسبی بستگی دارند، اما مسافتهای عمود بر راستای حرکت به حرکت نسبی بستگی ندارند.

معادله (پ ۳۰.۳) قاعده نسبی تبدیلی سرعتها به هنگامی است که سرعت مشاهده شده موازی با سرعت نسبی ناظرها باشد. مشاهده می‌کنیم که تبدیل سرعت، مانند مسورد کلاسیک، ناورد است. به هر حال، موردی را در نظر بگیریم که سرعت مشاهده شده برابر سرعت نور  $c$  باشد. اگر یکی از ناظرها سرعت نور را اندازه بگیرد و  $u_x = c$  به دست آید، ناظر دیگر که نسبت به اولی دارای حرکت نسبی است، چه مقدار به دست می‌آورد؟ معادله (پ ۳۰.۳) مقدار زیر را به دست می‌دهد

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - (u_x v / c^2)} = \frac{c - v}{1 - (cv / c^2)} = \frac{c - v}{(c - v) / c} = c$$

بنابراین، بدون توجه به سرعت نسبی دو ناظر، هر دو ناظر توافق دارند که سرعت نور  $c$  است. در نسبیت سرعت نور ناورد است. این نتیجه نباید موجب تعجب ما شود زیرا این همان فرض اساسی در به دست آوردن معادلات تبدیل بود. نتیجه حاصل از این مثال «مغایر عقل سلیم» است که در ابتدای این کتاب قول دادیم درباره آن بحث کنیم.

اگرچه نتیجه‌ای که هم‌اکنون به دست آمد منطقیاً از فرضهای نسبیت ناشی می‌شود و بنابراین نباید باعث تعجب ما شود، توضیح بیشتر می‌تواند در روشن شدن مطلب کمک کند. فرض می‌کنیم ناظر  $O$  فاصله‌ای را که نور در مدت زمان  $t$  طی می‌کند اندازه بگیرد، و از آنجا سرعت نور را حساب کند و مقدار  $c$  را به دست آورد. ناظر دیگر،  $O'$ ، که نسبت به  $O$  حرکت دارد همین آزمایش را انجام می‌دهد. در بادی امر به نظر می‌رسد که او نمی‌تواند

همان مقدار  $c$  را به دست آورد. اما اگر دو ناظر دارای خط کشهای «لاستیکی» و ساعت‌های «غیر دقیق» باشند، ممکن است هر نتیجه‌ای را، از جمله  $c$ ، به دست آورند. معادلات تبدیل نظریه نسبیت خاص چگونگی تغییرات خط کشهای «لاستیکی» و ساعت‌های «غیر دقیق» را به نحوی بیان می‌کند که سرعت نور یگانه به دست می‌آید، با سرعت‌هایی که در مقایسه با  $c$  کوچک هستند به طور کلاسیک عمل می‌شود، و در سرعت‌های متوسط تناقضی رخ نمی‌دهد.

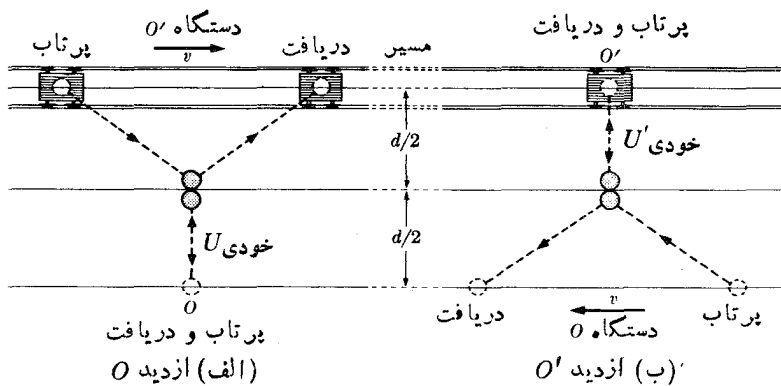
اینشتین در سال ۱۹۰۵ نظریه نسبیت خاص خود را بیان داشت. این نظریه فوراً به مناقشات درباره حرکت اتر که با سه آزمایش مختلف پدیدار شده بودند، پایان داد. یکی از اینها آزمایش مایکلسون-مورلی بود که می‌توانست با فرض کشیده شدن اتر همراه با زمین در حرکت مداری آن، تشریح شود. دوم آزمایش‌های مربوط به ابیراهی ستاره‌ای بود که درباره تغییر مکان ظاهری ستاره‌ها بر اثر تغییر جهت حرکت زمین در مدارش است، و در طی اندازه‌گیری سالیانه دیده می‌شود. مشاهدات ابیراهی ستاره‌ای با ثابت بودن اتر در سیستم خورشیدی سازگار بود. آزمایش سوم آزمایش فیزو دربارۀ سرعت نور در مایع متحرک بود. این آزمایش مستلزم وجود اتری بود که به طور جزئی توسط مایع کشیده شود. نظریه اینشتین اتر را کنار گذاشت و به طور صحیح نتایج هر سه نوع آزمایش را پیش‌بینی کرد. مطالعه هسته اتم و ذرات بنیادی آزمون سخت‌تری برای این نظریه بود. برای بحث درباره این موضوعات، نیاز به بررسی اثر معادله تبدیل بر قوانین فیزیکی دیگر داریم که نه تنها با مکان، زمان و سرعت بلکه همچنین با جرم، نیرو و انرژی سروکار دارند.

### پ ۱۰.۳ معادله تبدیل جرم در نظریه نسبیت

دو توپ کروی بسکتبال کاملاً الاستیک را در نظر می‌گیریم که از نقطه نظر ناظری که نسبت به آنها ساکن است جرم مساوی دارند. یکی از توپها را به ناظر  $O$  می‌دهیم که در یک قطار قرار دارد و سرعت انتقالی آن نسبت به زمین ثابت و برابر  $v$  است. توپ دیگر را به ناظر  $O$  که در روی زمین به فاصله  $d$  از خط آهن قرار دارد، می‌دهیم. قبل از اینکه دو ناظر از مقابل هم عبور کنند، بدانها می‌گوییم توپهای خود را عمود بر راستای خط آهن با سرعت معین به طرف یکدیگر به نحوی پرتاب کنند که توپها در لحظه‌ای که دو ناظر مقابل هم قرار می‌گیرند به هم برخورد کنند و سپس برگردند. (از انحراف توپها به علت نیروی جاذبه صرف نظر می‌کنیم.)

با فرض اینکه این کار با مهارت کافی بتواند انجام گیرد، این آزمایش بر اساس مکانیک کلاسیک قابل اجرا و کاملاً قابل درک است. هر یک از ناظرها می‌بینند که توپ او پس از برخورد به طرفش برمی‌گردد، درست مثل اینکه یک برخورد کاملاً الاستیک با دیوار انجام داده و انرژی جنبشی آن پایسته مانده است. هر یک از دو ناظر، لحظه عبور از مقابل یکدیگر حرکت توپها را باید مطابق شکل پ ۴.۳ پیش‌بینی کنند.

در بررسی موضوع که به ترتیب زیر انجام می‌گیرد، چهار سرعت در نظر می‌گیریم  $U'_s$  سرعتی است که ناظر  $O'$  از نقطه نظر خود به توپش می‌دهد،  $U_s$  سرعتی است که ناظر



**شکل پ ۴۰۳** برخورد کاملاً الاستیک دو توپ بسکتبال مشابه از دید دو دستگاه که نسبت به هم در حرکت اند.

$O$  از نقطه نظر خود به توپش می دهد. در شرایط آزمایش  $U'_0 = U_0$  است. سرعتی که ناظر  $O$  به حرکت توپ ناظر  $O'$  نسبت می دهد را  $U'_0$  و سرعتی که ناظر  $O'$  به حرکت توپ ناظر  $O$  نسبت می دهد را  $U_0$  می نامیم.

حال اگر این مسئله را از نقطه نظر نسبیست اینشتین بررسی کنیم، ایده تازه ای ظاهر می شود. مسافتهای عمود بر سرعت نسبی توپها از نقطه نظر نسبیست تغییر نمی کنند، زیرا داشتیم  $y' = y$  و  $z' = z$ . بنابراین دو ناظر توافق دارند مسافتی که توپهایشان در زفت تا نقطه برخورد و برگشت از آن طی کرده اند،  $d$  است. اما دو ناظر زمانهایی را که اندازه می گیرند متفاوت است. به ناظر  $O'$  گفته شد که با چه سرعتی باید توپش را پرتاب کند. او توپش را در زمان  $t'_1$  پرتاب می کند و در زمان  $t'_2$  آن را دریافت می دارد، پس به نظر او  $U'_0$  برابر است با

$$U'_{\text{خودی}} = \frac{d}{t'_2 - t'_1} \quad (\text{پ } ۳۲.۳)$$

ناظر  $O$  با ناظر  $O'$  در مورد لحظه و مکان پرتاب و دریافت توپش موافقت ندارد. ناظر  $O$  می گوید که ناظر  $O'$  توپش را در نقطه  $x_1$  و در زمان  $t_1 = \gamma[t'_1 + (vx'_1/c^2)]$  پرتاب و در نقطه  $x_2$  و زمان  $t_2 = \gamma[t'_2 + (vx'_2/c^2)]$  آن را دریافت کرده است. ناظر  $O$  سرعت پرتاب توپ ناظر  $O'$ ، یعنی  $U'_0$ ، را از رابطه زیر حساب می کند

$$U'_{\text{دیگری}} = \frac{d}{t_2 - t_1} = \frac{d}{\gamma[(t'_2 - t'_1) + (v/c^2)(x'_2 - x'_1)]} \quad (\text{پ } ۳۲.۳ \text{ الف})$$

در این رابطه کمیت  $(x'_2 - x'_1)$  مقداری است که ناظر  $O'$  باید خود را جا به جا کند تا بتواند توپ را بگیرد. از آنجا که گفتیم توپ (پس از برخورد) مستقیماً به طرف هر ناظر



برمی گردد، کمیت فوق برابر صفر است و معادله (پ ۳۲.۳ الف) به صورت زیر درمی آید

$$U' \text{ دیگری} = \frac{d}{\gamma(t'_2 - t'_1)} = \frac{U' \text{ خودی}}{\gamma} \quad (\text{پ } 32.3)$$

از آنجا که  $\gamma$  همیشه از ۱ بزرگتر است، به نظر  $O$  ناظر  $O'$  توپش را آهسته تر از سرعت مقرر پرتاب کرده است. محاسبه مشابه نشان می دهد که از نقطه نظر ناظر  $O'$  نیز ناظر  $O$  توپش را آهسته تر از سرعتی که به او گفته شده پرتاب کرده است. یعنی

$$U \text{ دیگری} = \frac{U \text{ خودی}}{\gamma} \quad (\text{پ } 32.3 \text{ الف})$$

اکنون معضلی در مقابل قرار داریم. اگر فرض کنیم جرمها مثل موردی که سرعت نسبی را در نظر نمی گیریم، ثابت می مانند در این صورت اصل بقای تکانه نقض می شود. اگر اصل بقای تکانه را رعایت کنیم حرکت نسبی که موجب اختلاف سرعتهای مشاهده شده توپها شد، باعث اختلاف جرمها نیز می شود. اینک حفظ قانون بقای تکانه را انتخاب می کنیم. ناظر  $O$  که تغییر تکانه توپ خود را به مقدار  $2m_s U_s$  می بیند، این تغییر را با تغییری که برای توپ دیگر مشاهده می کند برابر می پندارد و می نویسد

$$2m \text{ دیگری} U' = 2m \text{ خودی} U \quad (\text{پ } 34.3)$$

با قرار دادن مقدار  $U'_0$  از معادله (پ ۳۳.۳) در معادله (پ ۳۴.۳) خواهیم داشت

$$2m \text{ خودی} U = 2m \text{ دیگری} \frac{U \text{ خودی}}{\gamma} \quad (\text{پ } 35.3)$$

و چون سرعت پرتابها یکی است  $U_s = U'_s$ ، این معادله به صورت زیر درمی آید

$$m \text{ خودی} = \gamma m \text{ دیگری} \quad (\text{پ } 36.3)$$

لذا ناظر  $O$  نتیجه می گیرد که جرمها مساوی نیستند و علاوه بر معادلات تبدیل بحث شده، باید برای جرم نیز معادله تبدیل وجود داشته باشد.

معادله (پ ۳۶.۳) رابطه بین یک جرم با سرعت  $U_s$  نسبت به ناظر را با جرم دیگری که با سرعت  $v$  (دیگری  $U' + v^2$ ) نسبت به وی حرکت می کند به دست می دهد. اکنون میل داریم که رابطه بین جرم جسمی در حال سکون در دستگاه مختصات ناظر و جرم جسمی که با سرعت  $v$  حرکت می کند را داشته باشیم. این رابطه با استفاده از معادله (پ ۳۶.۳) با ابتکاری ساده و میل دادن سرعتهای عرضی  $U$  به سمت صفر، خیلی آسان به دست می آید. بدین ترتیب، در حد داریم

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad (\text{پ } 37.3)$$

که در این معادله  $m_0$  (جرم سکون) جرم جسمی است که نسبت به آزمایش کننده ساکن است و  $m$  (جرم در حال حرکت یا جرم نسبی) جرم جسمی است که نسبت به آزمایش کننده دارای سرعت  $v$  است. دستگاه مختصاتی که ناظر در آن قرارداد را معمولاً دستگاه مختصات آزمایشگاه می نامند.

این نتیجه که از معادلات تبدیل فضایی بایک الزام اضافی پایداری (بقای) تکانه سیستم به دست آمده است را می توان به طریق تجربی آزمود. آنچه برای این آزمون لازم است اندازه گیری جرم جسم متحرکی است که با سرعت زیاد نسبت به ناظر حرکت می کند. هنگامی که تامسون سرعت الکترونهاى داخل لوله کاتودیک را حساب می کرد، نتیجه حاصل موجب تعجب او شد. سرعت این الکترونها در مقایسه با سرعتهایی که تا آن زمان و با روشهای جدید اندازه گیری شده بودند، بزرگتر بود و در مقایسه با سرعت نور در خلا،  $c$ ، کاملاً قابل توجه بوده است. بعلاوه در آزمایش  $e/m_0$ ، به شرط اینکه بار ذره  $e$  ثابت باشد، اندازه این کمیت بر آوردی از  $m_0$  به دست می دهد. بدین ترتیب، تامسون در اصل روشی برای آزمودن معادله تبدیل جرم فراهم آورد. اولین آزمون و تأیید کافی در این مورد توسط بوچرر در سال ۱۹۰۸ با استفاده از یک چشمه رادیواکتیو بنا به دست داده شد و از آن پس معادله تبدیل جرم به دفعات بی شمار تأیید شده است. در حال حاضر این معادله برای فیزیک اتمی، هسته ای و ذرات معادله ای پایه ای به شمار می رود.

### پ ۱۱.۳ هم ارزی جرم و انرژی در نظریه نسبیت

معادله ای که برای تبدیل جرم به دست آوردیم و به طور تجربی به اثبات رسیده است، دارای نتایج مهمی است که یکی از آنها معادله جدید انرژی جنبشی است که جایگزین  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$  می شود. فرض کنیم انرژی جنبشی جسمی را به اندازه  $dE_k$  با اعمال نیرو در طول مسافتی زیاد کنیم. تغییر انرژی جنبشی برابر کار انجام شده است.

$$dE_k = F \cdot ds$$

این بیانی کلاسیک است که تغییر انرژی جنبشی را به کار که به صورت  $F \cdot ds$  تعریف می شود، ارتباط می دهد. در اینجا، با قبول این رابطه آن را در توسعه مکانیک نسبیتی به کار می بریم. به طور مشابه از قانون دوم نیوتون استفاده می کنیم که می تواند به عنوان تعریف نیرو در نظر گرفته شود

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}$$

که در آن مانند قبل نوشتیم  $p = mv$ ، اما حال  $m$  جرم نسبیتی (یا افزایش یافته) است. بنا بر این تغییر انرژی جنبشی برابر است با

$$dE_k = \frac{d(mv)}{dt} \cdot ds \quad (\text{پ } ۳۸.۳)$$

اما چون  $v = ds/dt$  است، معادله قبل را می توان به صورت زیر نوشت

$$dE_k = v \cdot d(mv) = v^2 dm + mv \cdot dv \quad (\text{پ } ۳۹.۳)$$

این رابطه را می توان با استفاده از معادله تبدیل جرم ساده کرد. معادله (پ ۳۷.۳)، پس از مجذور کردن به صورت زیر درمی آید

$$m^2 c^2 = m^2 v^2 + m_0^2 c^2 \quad (\text{پ } ۴۰.۳)$$

حال از این معادله، با توجه به اینکه  $v^2 = v \cdot v$  و  $m_0$  و  $c$  مقادیر ثابت هستند، دیفرانسیل می گیریم که رابطه زیر به دست می آید

$$2mc^2 dm = 2mv^2 dm + 2m^2 v dv \quad (\text{پ } ۴۱.۳)$$

پس از تقسیم طرفین رابطه بر  $2m$ ، سمت راست رابطه برابر مقدار  $dE_k$  در رابطه (پ ۳۹.۳) است، بنابراین داریم

$$dE_k = c^2 dm \quad (\text{پ } ۴۲.۳)$$

این رابطه مشهور نشان می دهد که در نظریه نسبیت می توان تغییرات انرژی جنبشی را بر حسب جرم، به عنوان یک متغیر، بیان کرد. این معادله در مورد تغییرات انرژی به هر شکل صادق است، اگرچه در اینجا برای تغییرات انرژی جنبشی به دست آمد.

از آنجا که انرژی جنبشی در حالت  $v = 0$  برابر صفر است، در حالت  $m = m_0$  نیز انرژی جنبشی برابر صفر می شود. بنابراین پس از انتگرال گیری رابطه زیر به دست می آید

$$E_k = \int_0^{E_k} dE_k = c^2 \int_{m_0}^m dm = c^2 (m - m_0)$$

یا

$$E_k = mc^2 - m_0 c^2 \quad (\text{پ } ۴۳.۳)$$

این رابطه انرژی جنبشی در نظریه نسبیت است. رابطه کلاسیک انرژی جنبشی،  $E_k = 1/2 mv^2$ ، مقدار صحیح انرژی جنبشی را حتی با بدکار بردن مقادیر جرم و سرعت نسبیتی به دست نمی دهد.

این رابطه  $E_k$ ، مانند دیگر معادلات تبدیل، باید در حالت  $v \ll c$  به صورت معادله کلاسیک در آید. با قرار دادن مقدار  $m$  در معادله (پ ۴۳.۳) رابطه زیر به دست می آید

$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} - m_0 c^2 \quad (\text{پ } ۴۴.۳)$$

حال چون  $v \ll c$  است، می توان نوشت

$$\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots\right) \quad (\text{پ } ۴۵.۳)$$

که در آن به سه جمله بسط دوجمله‌ای اکتفا کرده‌ایم. لذا از معادله (پ ۴۴.۳) داریم

$$\begin{aligned} E_k &= m_0 c^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots - 1\right) \\ &= \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \dots \end{aligned} \quad (\text{پ } ۴۶.۳)$$

که جمله اول رابطه کلاسیک انرژی جنبشی است که در سرعتهای کم فقط مقدار این جمله اهمیت دارد.

در اینجا، در محاسبات مکانیک نسبیتی خود این موارد را به کار برده‌ایم

۱. معادله نسبیتی تبدیل برای مسافت، زمان و سرعت؛
۲. قانون بقای تکانه، که همراه با قسمت ۱ منجر به افزایش جرم یک جسم بر حسب سرعت آن نسبت به ناظر شد؛
۳. تعریف نیرو و با استفاده از قانون دوم نیوتون؛
۴. تعریف کلاسیک کار و رابطه بین کار و تغییر انرژی جنبشی.

بدین ترتیب، با حفظ قوانین بقا و مفاهیم کلاسیک، یک مکانیک نسبیتی ساخته‌ایم که تا حد امکان ساده و همچنین تا حد امکان نزدیک به مکانیک کلاسیک است. تغییرات مهمی که در حل مسائل در مکانیک نسبیتی (یعنی وقتی که  $v/c$  کوچک نیست) باید به خاطر داشته باشیم عبارت‌اند از جرم متغیر و رابطه جدید انرژی جنبشی.

معادله (پ ۴۲.۳) یا (پ ۴۳.۳) نشان می‌دهد که ارتباط خیلی نزدیکی بین جرم و انرژی وجود دارد. ایشیتین اظهار داشت که برای جرم در حال سکون جسم نیز انرژی وابسته‌ای وجود دارد. برطبق این نظر، معادله (پ ۴۳.۳) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$E = mc^2 = m_0 c^2 + E_k \quad (\text{پ } ۴۷.۳)$$

که در آن  $E$  یا  $mc^2$  انرژی کل،  $m_0 c^2$  انرژی سکون و  $E_k$  انرژی جنبشی جسم است. تمام نتایج تجربی در این مورد، بردرستی نظراینشیتین دلالت دارند.

معادله (پ ۴۷.۳) می‌تواند انرژی پتانسیل را نیز شامل شود، ولی در این صورت می‌باید اجسام برهم‌کنش‌کننده دیگر را نیز در نظر گرفت. انرژی پتانسیل در نتیجه نیروهای پایستار مؤثر بین دو یا چند جسم به وجود می‌آید. برای یک چنین سیستمی، انرژی کل  $mc^2$

جمع تمام انرژیهای سکون، انرژیهای جنبشی و انرژیهای پتانسیل است. یک نتیجه جالب این بیان آن است که جرم سکون اتم هیدروژن کمتر از جمع جرم سکون اجزای تشکیل-دهنده آن، یعنی پروتون و الکترون، است. تفاوت جرم معادل  $eV$  ۱۳۶ و یا به صورت کسر  $\Delta m/m = 1.45 \times 10^{-8}$  بیان می شود.

حال می توانیم با استفاده از معادله (پ ۴۰.۳) رابطه ای بین انرژی-جرم کل جسم،  $E$ ، و تکانه  $p$  به دست آوریم. اگر این معادله را در  $c^2$  ضرب کرده و به جای مقادیر مربوطه  $E = mc^2$  و  $p = mv$  قرار دهیم، معادله زیر به دست می آید

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (\text{پ } 40.3)$$

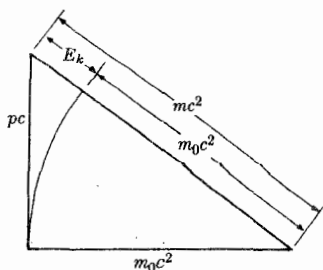
این معادله، رابطه ای بین انرژی کل، انرژی سکون و تکانه را به دست می دهد. با جاگذاری از معادله (پ ۴۷.۳) و حل آن برای تکانه، داریم

$$p = \sqrt{2 m_0 E_k + E_k^2 / c^2} \quad (\text{پ } 49.3)$$

بجز جمله دوم زیر رادیکال، این معادله مشابه رابطه کلاسیک برای تکانه است. بنابراین، جمله آخر جمله تصحیح نسبیتی نام دارد.

به منظور کمک به حافظه، معادله (پ ۴۸.۳) به طور تریسیمی در شکل پ ۵.۳ نمایانده شده است. این شکل واقعی ندارد، ولی فقط می تواند به عنوان وسیله ای برای یادآوری تلقی شود.

هم ارزی جرم و انرژی نتیجه مفیدی را به همراه می آورد. اکنون اصل کلی بقای انرژی، اصل بقای کلی دیگری را در برمی گیرد و آن بقای جرم است. همسانی جرم و انرژی که به یک مفهوم واحد جرم-انرژی منتهی شده، مطمئناً عملیترین نتیجه نظریه نسبیت است. در فصل دوازدهم نشان داده شده است که چگونه واکنشهای هسته ای و فروپاشی هسته ای این حقیقت را نشان می دهند که نه جرم و نه انرژی، آنچنانکه در نظریه کلاسیک درک می شوند، به طور جداگانه پایستگی ندارند. در نظریه نسبیت می بینیم که قانون بقا برای



شکل پ ۵.۳ مثلث یادآور برای رابطه  $(mc^2)^2 = (m_0 c^2)^2 + (pc)^2$ .

جرم-انرژی وجود دارد. دهر برهم کنشی، جرم کل  $m$  (که انرژی جنبشی را نیز برحسب واحد جرم در برمی گیرد)، قبل و بعد از برهم کنش یکسان می ماند. به طور مشابه در برهم کنشی، کل انرژی  $E$  (شامل تمام جرمهای سکون برحسب واحد انرژی) قبل و بعد از برهم کنش یکسان است. در حال حاضر، شاهد گسترش رشته ای از مهندسی هسته ای هستیم که بر اساس رابطه  $E = mc^2$  پایه گذاری شده است.

بیشترین استفاده از مازهم انرژی جرم و انرژی در مورد خورشید است که در آن جرم-انرژی در حال سکون تبدیل به انرژی حرارتی می شود. امروزه بشر در روی زمین قادر است جرم-انرژی در حال سکون را تبدیل به انرژی حرارتی کند. شکافت و گداخت هسته ای، روشهای این تبدیل به شمار می روند.

### پ ۱۲.۳ حد بالای سرعت

بررسی معادله تبدیل جرم (پ ۳۷.۳)، نشان می دهد که در حالت  $c = \infty$ ،  $m = \infty$  است. بنا بر این با افزایش سرعت جسم به سمت سرعت نور در خلا، جرم آن به سمت بینهایت میل می کند. از آنجا که جسمی با جرم سکون محدود  $m_0$  نمی تواند دارای انرژی بینهایت باشد، باید نتیجه بگیریم که چنین جسمی نمی تواند دارای سرعتی برابر سرعت نور در خلا باشد. بنا بر این در مکانیک نسبیتی سرعت نور در خلا بالاترین سرعتی است که ذره مادی می تواند داشته باشد. اگر به یک ذره کوچک، در مراحل متوالی، مقادیر مساوی انرژی بدهیم، اولین مقدار انرژی داده شده سرعت آن را به طور قابل ملاحظه ای زیاد می کند، در صورتی که تغییر جرم آن در این مرحله ناچیز است. اما ذره هر چه انرژی بیشتر دریافت می کند، تغییرات سرعت آن کوچکتر می شود تا اینکه سرعت ذره به سرعت نور نزدیک می شود. وقتی تغییرات سرعت ناچیز می شود تغییر جرم قابل ملاحظه خواهد شد.

این بحث را به طریق دیگری هم می توان مطرح کرد. دو معادله برای محاسبه انرژی جنبشی یک جسم داریم که هر دو از نظر نسبیتی صحیح هستند. معادله (پ ۴۴.۳)،  $E_k$  را برحسب  $m_0$  و  $v$  بیان می کند. در حالتی که  $v$  در مقایسه با  $c$  کوچک است، این رابطه برای محاسبه انرژی جنبشی ساده می شود، بخصوص اینکه در این حالت جمله اول معادله (پ ۴۶.۳) باقی می ماند که همان رابطه کلاسیک برای انرژی جنبشی است. معادله دیگر  $E_k = c^2(m - m_0)$  یعنی معادله (پ ۴۳.۳) است. این معادله  $E_k$  را برحسب  $m_0$  و جرم متحرک  $m$  که متغیر است بیان می کند. می توانیم  $E_k$  را برحسب  $m$  یا  $v$  نیز بیان کنیم، زیرا معادله تغییرات جرم، (پ ۳۷.۳)، را داریم که رابطه ای بین  $m$  و  $v$  است.

از آنجا که می دانیم سرعت نور در خلا بالاترین حد سرعت برای ذرات مادی است، بجاست سؤال کنیم که آیا سرعتهایی برابر با این سرعت یا بیشتر از این سرعت وجود دارند. در این بحث کاملاً متوجه بودیم و تأکید کردیم که سرعت حد، سرعت نور در خلا است. نور اغلب آهسته تر از سرعت خود در خلا حرکت می کند. ضریب شکست نور در یک محیط، نسبت سرعت نور در خلا به سرعت واقعی نور در این محیط است. مثلاً در آب

سرعت يك ذره ممکن است بیش از سرعت نور در این محیط باشد. بدیهی است که فوتونها در خلا<sup>۱</sup> با سرعت نور در خلا<sup>۲</sup> حرکت می کنند. دریافتیم که انرژی هر فوتون برابر  $h\nu$  است و چون نشان دادیم که جرم و انرژی هم ارز هستند، لذا می توان نتیجه گرفت که هر فوتون دارای جرمی برابر  $h\nu/c^2$  است. بدین ترتیب، يك ذره مادی با سرعت نور در خلا<sup>۳</sup> حرکت می کند. اما در اینجا تناقضی وجود ندارد، زیرا فوتون در حالت سکون فاقد جرم  $m_0$  است. اگر بخواهیم يك فوتون را متوقف کنیم و جرم آن را اندازه بگیریم، تمام جرم-انرژی آن به چیز دیگری منتقل می شود و دیگر فوتونی وجود ندارد. شاید فرق اصلی بین ذره «مادی» و ذره فوتون در همین باشد که ذره مادی در حالت سکون دارای جرم است در صورتی که فوتون فاقد آن است.

بارها دیده شده است که سرعتهایی بزرگتر از سرعت نور در خلا<sup>۴</sup> وجود دارند، اما در این موارد چیزی که حرکت می کند يك تابع ریاضی است و واقعیت فیزیکی ندارد. فرستادن يك «علامت نقطه‌ای» در تلگراف رادیویی ممکن است در نتیجه ارسال چندین فرکانس با سرعتهای مختلف باشد. این سرعتها که سرعتهای فاز نامیده می شوند ممکن است از سرعت نور در خلا<sup>۵</sup> تجاوز کنند. سرعت حرکت «علامت نقطه‌ای» بر ایند را سرعت گروه می نامند که هرگز از سرعت نور در خلا<sup>۶</sup> تجاوز نمی کند. می توان به طور کلی چنین بیان داشت که هیچ ناظری نمی تواند سرعت جرم-انرژی  $\nu$ ، به هر شکلی که باشد، بیش از سرعت نور در خلا<sup>۷</sup> به دست آورد.

### پ ۱۳.۳ حرکت ذرات باردار در میدانهای مغناطیسی

در بخش ۲.۲ درباره حرکت يك ذره باردار در میدان مغناطیسی بر حسب مکانیک کلاسیک بحث کردیم. گفتیم که رابطه تکانه  $mv$  ذره و شعاع مدار  $R$ ، یعنی

$$qBR = mv \quad (\text{پ } ۵۰.۳)$$

به طور نسیتی نیز صحیح است. این بدان جهت است که نیروی مغناطیسی همیشه عمود بر  $v$  است، بنابراین تغییر سرعت و تغییر جرم  $m$  وجود ندارد. در بحث زیر فرض می کنیم که ذرات در صفحه‌ای عمود بر  $B$  حرکت می کنند. لذا شاخص  $\perp$  را در معادله (۵۰۲) از مقابل  $v$  حذف کرده ایم.

حاصلضرب  $BR$  سختی مغناطیسی ذره نام دارد. معادله (پ ۵۰.۳) نشان می دهد که سختی مغناطیسی برابر تکانه تقسیم بر بار الکتریکی است

$$BR = \frac{P}{q} \quad (\text{پ } ۵۱.۳)$$

فایده این مفهوم توانایی تعیین فوری شعاع مدار ذره در میدان مغناطیسی معین  $B$  است. اگر انرژی جنبشی و جرم سکون ذره، به جای تکانه، معلوم باشند می توانیم با ترکیب

معادلات (پ ۵۱.۳) و (پ ۴۹.۳) سختی مغناطیسی را به دست آوریم. خواهیم داشت

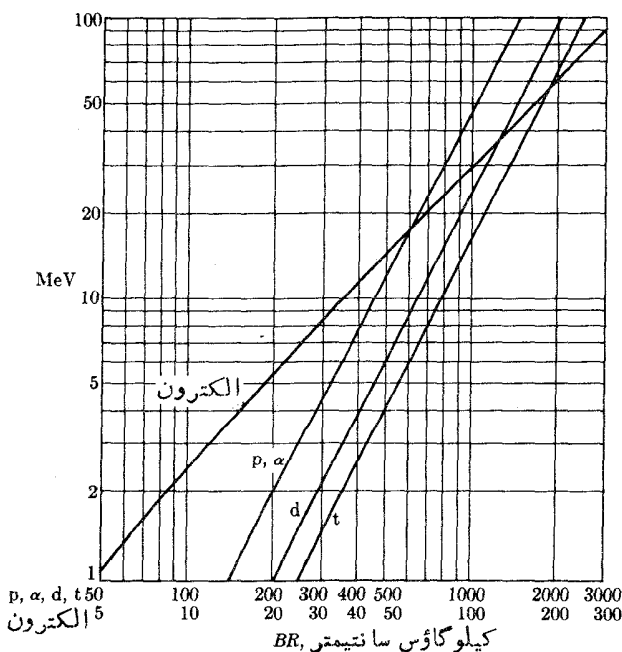
$$BR = \frac{1}{cz} \sqrt{\frac{2m_0c^2 E_k}{e} + \left(\frac{E_k}{e}\right)^2} \quad (\text{پ } 52.3)$$

در اینجا  $z$  تعداد بارهای بنیادی ذره و  $e$  بار بنیادی بر حسب کولن (mks) است که به طور عددی برابر ضریب تبدیل  $e$  بین کولن و الکترون ولت است. اگر انرژیها و از جمله  $m_0c^2$  را بر حسب الکترون ولت قرار دهیم، معادله (پ ۵۲.۳) به صورت زیر درمی آید

$$BR = \frac{1}{cz} \sqrt{2(m_0c^2)E_k + E_k^2} \quad (\text{پ } 52.3 \text{ الف})$$

سختی مغناطیسی در این رابطه بر حسب واحدهای mksA، یعنی و بر بر متر به دست می آید. عملاً  $BR$  بر حسب کیلو گاوس-بر سانتیمتر اندازه گیری می شود، و انرژی برای ذرات نسبیتهای بر حسب MeV (میلیون الکترون ولت) اندازه گیری می شود. با قرار دادن مقدار  $c$  و به کار بردن MeV به عنوان واحد برای  $m_0c^2$  و  $E_k$ ، داریم

$$BR = \frac{3334}{z} \sqrt{2(m_0c^2)E_k + E_k^2} \text{ kGs-cm} \quad (\text{پ } 52.3 \text{ ب})$$



شکل پ ۶۰۳ سختی مغناطیسی برای الکترونها، ذرات آلفا، پروتونها، دوترونها و تریتونها.



انرژی سکون برای الکترون  $m_e c^2 = 0.511054 \text{ MeV}$  و برای پروتون  $m_p c^2 = 938.2748 \text{ MeV}$  است. رابطه (ب ۵۲.۳) نشان می‌دهد که اگر  $E_k \ll E_0 c^2$  باشد، جمله تصحیح نسبیتی اهمیتی ندارد.

سختی مغناطیسی برحسب انرژی جنبشی در شکل پ ۶.۳ برای الکترون، پروتون، ذره آلفا، و برای دو ایزوتوپ سنگینتر هیدروژن، یعنی دوتریون (با عدد جرمی ۲) و تریتون (با عدد جرمی ۳)، رسم شده است.

## پیوست ۴

### جبر ماتریسی

ماتریس به طور ساده مجموعه‌ای از اعداد، حقیقی یا مختلط، است که به صورت آرایه‌های مربع مستطیلی به نظم درآمده‌اند. بنابراین، ماتریس  $R$  چنین است

$$\mathbf{R} \equiv \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & \dots \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (\text{پ } ۱۰۴)$$

عدد  $R_{ij}$  يك عنصر ماتریس خوانده می‌شود که محل آن در ماتریس در زامین ردیف و زامین ستون است.

اگر دو ماتریس  $\mathbf{R}$  و  $\mathbf{S}$  دارای تعداد ردیفها و ستونهای مساوی باشند، می‌توانند با هم جمع شوند

$$\mathbf{R} + \mathbf{S} = \mathbf{T} \quad (\text{پ } ۲۰۴)$$

و طبق تعریف این عمل بدان معنی است که عناصر ماتریس را به‌طور تک تک جمع کنیم، یعنی

$$R_{ij} + S_{ij} = T_{ij} \quad (\text{پ } ۳۰۴)$$

ماتریس دارای يك ستون، نظیر

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (\text{پ } ۴.۴)$$

بردار ستونی یا ماتریس ستونی نامیده می‌شود. عمل ضرب

$$\mathbf{b} = \mathbf{R}\mathbf{a} \quad (\text{پ } ۵.۴)$$

را وقتی می‌توان انجام داد که  $\mathbf{a}$  به تعداد ستونهای  $\mathbf{R}$  دارای عناصر (ردیف) باشد. طبق تعریف، این عمل بدان معنی است که عناصر ماتریس ستونی جدید  $\mathbf{b}$  با رابطه زیر داده می‌شوند

$$b_i = \sum_j R_{ij} a_j \quad (\text{پ } ۶.۴)$$

مثال

$$\begin{bmatrix} ۶ \\ -۲ \\ ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۳ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

اولین عنصر در ماتریس حاصلضرب برطبق معادله (پ ۶.۴) از ضرب یک به یک سطر اول ماتریس  $\mathbf{R}$  در عناصر ماتریس  $\mathbf{a}$  و جمع آنها به دست می‌آید. دومین و سومین عنصر نیز به‌طور مشابهی به دست می‌آیند.

به‌طور کلی دو ماتریس  $\mathbf{R}$  و  $\mathbf{S}$  را وقتی می‌توان درهم ضرب کرد

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}\mathbf{S} \quad (\text{پ } ۷.۴)$$

که تعداد ستونهای  $\mathbf{R}$  برابر تعداد ردیفهای  $\mathbf{S}$  باشد. لذا طبق تعریف قانون ضرب داریم

$$T_{ij} = \sum_k R_{ik} S_{kj} \quad (\text{پ } ۸.۴)$$

ماتریس نتیجه به تعداد ردیفهای  $\mathbf{R}$  ردیف و به تعداد ستونهای  $\mathbf{S}$  ستون دارد.

مثال

$$\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۶ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۲ \\ ۰ & -۱ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۳ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

عنصر اولین ردیف و اولین ستون ماتریس  $T$  برابر مجموع حاصلضربهای اولین ردیف ماتریس  $R$  در اولین ستون ماتریس  $S$  است و الی آخر. به طرد کلی، عمل ضرب جا به جایی ناپذیر است، یعنی

$$RS \neq SR \quad (\text{پ } ۹۰۴)$$

این موضوع را می توان با مثالهای ساده ای نشان داد. در حالات خاص که  $SR = RS$  باشد، گوئیم دو ماتریس جا به جایی پذیر هستند.

قانون توزیع پذیری در ضرب ماتریسها صادق است، لذا

$$R(S+T) = RS + RT \quad (\text{پ } ۱۰۰۴)$$

قانون شرکت پذیری نیز در ضرب ماتریسها صادق است

$$R(ST) = (RS)T \quad (\text{پ } ۱۱۰۴)$$

یک ماتریس مربع ممکن است دارای ماتریس معکوس باشد، به طوری که

$$RR^{-1} = I = R^{-1}R \quad (\text{پ } ۱۲۰۴)$$

که در آن  $I$  ماتریس یکه است و به صورت زیر تعریف می شود

$$I_{ij} = \delta_{ij} \quad (\text{پ } ۱۳۰۴)$$

در اینجا  $\delta_{ij}$  علامت کرونگر است. به عبارت دیگر  $I$  فقط در راستای قطر، یعنی  $i = j$ ، دارای عناصر غیر صفر است و تمام این عناصر برابر یک هستند.

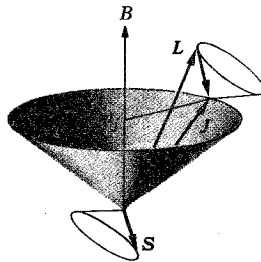
## پیوست ۵

### جمع تکانه‌های زاویه‌ای

دو تکانه زاویه‌ای  $J_1$  و  $J_2$  با اعداد کوانتومی  $J_1$  و  $J_2$  را می‌توان ترکیب کرد و برداری با عدد کوانتومی زیر به دست آورد

$$|J_1 - J_2| \leq J \leq J_1 + J_2 \quad (\text{پ ۱.۵})$$

ویژه حالت تکانه زاویه‌ای با مقدار ثابت  $M$  و همچنین با عدد کوانتومی  $J$ ، به‌طور کلی، دارای مقدارهای  $M_1$  و  $M_2$  نیست. این نکته در نمودار نیمه کلاسیک شکل پ ۱.۵ که شبیه شکل ۱۵.۷ است، نشان داده شده است.



شکل پ ۱.۵ جفت شدگی  
 $S$  و  $L$  به صورت تکانه زاویه‌ای  
 $J$  کل در میدان مغناطیسی  
 ضعیف. بردارهای  $S$  و  $L$   
 به‌طور هم‌زمان حول بردار  $J$   
 دوران می‌کنند.

در این حالت  $J_1 = L = 3$ ,  $J_2 = S = 1/2$ ,  $J = 5/2$  و  $M = 3/2$  است. دو بردار  $J_1$  و  $J_2$  طبق شکل ۱۰۰۷ حول برآیند خود در اثر گشتاور متقابل دوران می‌کنند. بنابراین مؤلفه‌های  $z$  آنها،  $M_1$  و  $M_2$  به‌طور پیوسته در تغییرند. در تشریح دقیق کوانتوم مکانیکی ویژه‌حالت با اعداد کوانتومی  $J$  و  $M$  که از جمع  $J_1$  و  $J_2$  حاصل می‌شود، یک ترکیب خطی از تمام حالت‌های ممکن است که در رابطه زیر صدق می‌کند

$$M_1 + M_2 = M \quad (\text{پ } ۲.۵)$$

در مثال مذکور در بالا، فقط دو ترکیب از این نوع وجود دارد

$$M_1 = 2, \quad M_2 = -\frac{1}{2}$$

$$M_1 = 1, \quad M_2 = \frac{1}{2}$$

به‌طور کلی می‌توان نوشت

$$|J_1 J_2 J M\rangle = \sum_{M_1 + M_2 = M} |J_1 J_2 M_1 M_2\rangle \langle J_1 J_2 M_1 M_2 | J_1 J_2 J M\rangle \quad (\text{پ } ۳.۵)$$

در این معادله، عبارت  $|J_1 J_2 J M\rangle$  به‌معنای ویژه‌حالت نهایی تکانه زاویه‌ای است که در آن اعداد کوانتومی  $J$  و  $M$  از ترکیب دو تکانه زاویه‌ای با اعداد کوانتومی  $J_1$  و  $J_2$  تشکیل شده‌اند. به‌علاوه، عبارت  $|J_1 J_2 M_1 M_2\rangle$  (نه یک ویژه‌حالت نهایی) با اعداد کوانتومی  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $M_1$  و  $M_2$  مشخص می‌کند. علامت  $\langle J_1 J_2 M_1 M_2 | J_1 J_2 J M\rangle$  معرف ضریبی عددی کوچکتر از واحد است، و مقدار دامنه تابع موج جزئی  $|J_1 J_2 J M\rangle$  را در  $|J_1 J_2 M_1 M_2\rangle$  به‌دست می‌دهد. عمل جمع در معادله (پ ۳.۵) روی تمام ترکیب‌های ممکن که در معادله (پ ۲.۵) صدق کنند، انجام می‌گیرد.

در محاسبه ضرایب  $\langle J_1 J_2 M_1 M_2 | J_1 J_2 J M\rangle$  لازم است که  $|J_1 J_2 J M\rangle$  ویژه تابع عملگر تکانه زاویه‌ای  $L_{op}$  و عملگر  $L_z$  برای مؤلفه  $z$  باشد. این ضرایب را ضرایب جمع برداری کلبش-گوردن می‌نامند. تعداد علامتهای به‌کاررفته برای نشان دادن این ضرایب برابر با تعداد کتا بهایی است که ذکر می‌شود از آن کرده‌اند. در اینجا، ما از علامت گذاری کتاب طیف‌نمایی بنیادی، تألیف کوندن و شورتلی<sup>۱</sup> استفاده می‌کنیم.

جدول پ ۱۰۵ روابط ضرایب کلبش-گوردن را برای حالت خاص  $J_2 = 1/2$  و جدول پ ۲۰۵ روابط به‌کار رفته برای  $J_2 = 1$  را به‌دست می‌دهند. برای مثال مذکور در بالا، از جدول پ ۱۰۵ مقادیر زیر به‌دست می‌آیند

1. E. U. Condon and G. H. Shortley, *The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge: The University Press (1964).

$$\left\langle 3\frac{1}{2} 2 - \frac{1}{2} \mid 3\frac{1}{2} \frac{5}{2} \frac{3}{2} \right\rangle = -\left(\frac{2}{5}\right)^{1/2}$$

$$\left\langle 3\frac{1}{2} 1 \quad \frac{1}{2} \mid 3\frac{1}{2} \frac{5}{2} \frac{3}{2} \right\rangle = \left(\frac{5}{7}\right)^{1/2}$$

یادآور می شود که جمع مربعات دو دامنه برابر واحد است.

جدول پ ۱۰۵ ضرایب کلبش-گوردن برای مورد  $J_2 = 1/2$ .

$M_2 = -1/2$	$M_2 = 1/2$	$J$
$\sqrt{\frac{J_1 - M + 1/2}{2J_1 + 1}}$	$\sqrt{\frac{J_1 + M + 1/2}{2J_1 + 1}}$	$J_1 + 1/2$
$\sqrt{\frac{J_1 + M + 1/2}{2J_1 + 1}}$	$-\sqrt{\frac{J_1 - M + 1/2}{2J_1 + 1}}$	$J_1 - 1/2$

جدول پ ۲۰۵ ضرایب کلبش-گوردن برای مورد  $J_2 = 1$ .

$M_2 = 0$	$M_2 = 1$	$J$
$\sqrt{\frac{(J_1 - M + 1)(J_1 + M + 1)}{(2J_1 + 1)(J_1 + 1)}}$	$\sqrt{\frac{(J_1 + M)(J_1 + M + 1)}{(2J_1 + 1)(2J_1 + 2)}}$	$J_1 + 1$
$\frac{M}{\sqrt{J_1(J_1 + 1)}}$	$\sqrt{\frac{(J_1 + M)(J_1 - M + 1)}{2J_1(J_1 + 1)}}$	$J_1$
$-\sqrt{\frac{(J_1 - M)(J_1 + M)}{J_1(2J_1 + 1)}}$	$\sqrt{\frac{(J_1 - M)(J_1 - M + 1)}{2J_1(2J_1 + 1)}}$	$J_1 - 1$
$M_2 = -1$		$J$
$\sqrt{\frac{(J_1 - M)(J_1 - M + 1)}{(2J_1 + 1)(2J_1 + 2)}}$		$J_1 + 1$
$\sqrt{\frac{(J_1 - M)(J_1 + M + 1)}{2J_1(J_1 + 1)}}$		$J_1$
$\sqrt{\frac{(J_1 + M + 1)(J_1 + M)}{2J_1(2J_1 + 1)}}$		$J_1 - 1$

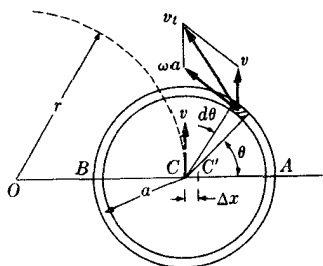
## اثر نسبیتی اسپین-مدار

این موضوع را فقط به کمک مکانیک کوانتومی نسبیتی، که خارج از بحث این کتاب است، می توان به طور رضایتبخش بحث کرد. در هر حال، به کمک یک مدل غیر دقیق دینامیکی می توان درکی کیفی از اثر به دست آورد، و با استفاده از تبدیل لورنتس بین الکترون و دستگاه مختصات آزمایشگاه می توان نتیجه کمی را توجیه کرد.

شکل پ ۱۰۶ چرخش یک حلقه را حول محور خودش نشان می دهد، که در همان حال محور حول نقطه ثابت  $O$  روی دایره ای در حرکت است. در هر نقطه از حلقه، سرعت مداری  $v$  بر سرعت  $\omega a$  ناشی از حرکت چرخشی افزوده می شود. در نقطه  $A$  جمع عددی دو سرعت حداکثر می شود و در نقطه  $B$  سرعت بر این حد اقل است. بنابراین، جرم نسبیتی واحد طول حلقه در  $A$  بزرگتر از مقدار آن در نقطه  $B$  است. نتیجه اینکه مرکز جرم حلقه در  $C$  نیست بلکه به سمت  $A$  به نقطه  $C'$  کشیده شده است. برای مورد نموده شده، این جا به جایی نشان دهنده افزایش شعاع مداری مرکز جرم است، و بنابراین تکانه زاویه ای مداری افزایش می یابد. اگر حلقه در جهت مخالف می چرخید، بالاترین سرعت در نقطه  $B$  بود و شعاع مداری مرکز جرم کاهش می یافت.

در مکانیک کوانتومی نسبیتی، همان قواعد کوانتش تکانه زاویه ای کل نظریه نا نسبیتی برقرار است. بنابراین برای دو مورد بحث شده در بالا، مقدار  $l$  به ترتیب به مقدار  $\Delta l -$  و  $\Delta l +$  باید تغییر یابد تا اینکه شعاع تا مرکز جرم برای هر دو مورد یکسان شود. حال با این مدل، یک قدم جلوتر می گذاریم و فرض می کنیم کسه حلقه دارای بار الکتریکی با توزیع یکنواخت است و در مدار هیبروزن گونه حرکت می کند، یعنی





شکل پ ۱۰۶ حلقه با اسپین و تکانه زاویه‌ای مداری.

تحت تأثیر پتانسیل جاذبه‌ای به شکل  $V(r) = -Ze^2 / 4\pi\epsilon_0 r$  قرار دارد. پس از تنظیم موقعیت حلقه، به طوری که در بالا بحث شد، انرژی به مقدار زیر تغییر می‌کند

$$\Delta E = - \frac{dV}{dr} \Delta r \quad (\text{پ } ۱۰۶)$$

فرض می‌کنیم که یگانه اثر مهم حرکت ترکیبی که قبلاً به حساب نیامده است، جا به جایی مرکز جرم باشد. به طور کلی، در اینجا داریم محاسبات را در پایینترین مرتبه اهمیت و با صرف نظر کردن از ظریف کاریهایی، نظیر انقباض نسبی حلقه در راستای بردار سرعت  $v$  و ترکیب نسبی سرعتها، انجام می‌دهیم.

حال مقدار  $\Delta r$  را برآورد می‌کنیم. جرم برشی از حلقه بیسن  $\theta$  و  $\theta + d\theta$  را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$dm = \frac{m_0}{2\pi} \gamma d\theta \quad (\text{پ } ۲۰۶)$$

که در آن

$$\gamma = \left(1 - \frac{v_t^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad (\text{پ } ۳۰۶)$$

و  $m_0$  جرم حلقه کاملاً در حال سکون است. سرعت  $v_t$  با رابطه زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} v_t^2 &= (v + \omega a \cos \theta)^2 + (\omega a \sin \theta)^2 \\ &= v^2 + \omega^2 a^2 + 2\omega a v \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{پ } ۴۰۶)$$

حال جا به جایی  $\Delta r$  مرکز جرم را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\Delta r = \frac{\int a \cos \theta dm}{\int dm} = \frac{a \int \gamma \cos \theta d\theta}{\int \gamma d\theta} \quad (\text{پ } ۵.۶)$$

با بسط معادله (پ ۳.۶) و حفظ فقط دو جمله بسط خواهیم داشت

$$\int_0^{2\pi} \gamma \cos \theta d\theta \approx \int_0^{2\pi} \left[ 1 + \frac{1}{2c^2} (v^2 + \omega^2 a^2 + 2\omega a v \cos \theta) \right] \cos \theta d\theta \quad (\text{پ } ۶.۶)$$

میانگین سه جمله اول زیر انتگرال با ضرب در  $\cos \theta$  برابر صفر می‌شود. لذا آخرین جمله بر حسب  $\cos^2 \theta$  تغییر می‌کند که مقدار متوسط آن در یک دوره برابر با  $1/2$  است. بنابراین

$$\int_0^{2\pi} \gamma \cos \theta d\theta \approx \frac{\pi \omega v a}{c^2} \quad (\text{پ } ۷.۶)$$

انتگرال مخرج معادله (پ ۵.۶) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\int_0^{2\pi} \gamma d\theta = 2\pi \gamma_{av} \quad (\text{پ } ۸.۶)$$

که در آن  $\gamma_{av}$  به معنی متوسط  $\gamma$  برای حلقه است. بسط (پ ۶.۶) فقط برای  $v_i^2/a^2 \ll 1$  صحیح است و برای سازگاری باید قرار دهیم  $\gamma_{av} \approx 1$ . با قرار دادن معادلات (پ ۷.۶) و (پ ۸.۶) در معادله (پ ۵.۶) داریم

$$\Delta r = \frac{\omega a^2 v}{2c^2} \quad (\text{پ } ۹.۶)$$

حال اسپین حلقه  $S = ma^2 \omega$  و تکانه زاویه‌ای مداری  $L = mrv$  را وارد می‌کنیم. با استفاده از معادله (پ ۱.۶) خواهیم داشت

$$\Delta E = -\frac{1}{2} \frac{dV}{dr} \frac{LS}{m^2 c^2 r} \quad (\text{پ } ۱۰.۶)$$

با قرار دادن تابع پتانسیل کولنی  $V = -Ze^2 / 4\pi\epsilon_0 r$ ، انرژی اسپین-مداری مربوط به نسبت را به دست می‌آوریم

$$\Delta E = -\frac{1}{2} \frac{Ze^2 LS}{4\pi\epsilon_0 m^2 c^2 r^2} \quad (\text{پ } ۱۱.۶)$$

یادآوری می‌شود که پارامترهای  $a$  و  $\omega$  فقط در رابطه نهایی و به صورت مستتر در ضریب  $S$  وارد می‌شوند. اگر جسم چرخان به صورت حلقه نباشد، اما بتوان آن را

به حلقه‌هایی با  $a$ ها و  $\omega$ های ثابت تقسیم کنیم، نتیجه محاسبات شبیه معادله (پ ۱۱.۶) خواهد بود.

اگر  $LS$  را به صورت حاصلضرب زردهای  $m$  را به صورت جرم سکون الکترون در نظر بگیریم و به جای  $r^{-3}$  مقدار  $\langle r^{-3} \rangle$  را قرار دهیم، معادله (پ ۱۱.۶) اتفاقاً رابطه صحیح انرژی اسپین-مدار نسبیتی را به دست می‌دهد. این موضوع، در نظر اول موجب تعجب است، زیرا در اینجا از يك مدل مکانیکی ساده برای الکترون استفاده کرده‌ایم که در موارد دیگر، به‌طور مصیبت باری شکست خورده است. بویژه که در مورد فرض  $v_e^2/c^2 \ll 1$  هیچ‌گونه توجیهی نداریم. در هر حال، به‌طور کیفی، با فرض کوانتشن تکانه زاویه‌ای کل، نشان داده‌ایم که باید انرژی اسپین-مدار نسبیتی وجود داشته باشد. همچنین نشان داده‌ایم که علامت انرژی بستگی به علامت حاصلضرب زردهای  $L \cdot S$  دارد.

بحث ما به این نتیجه رسیده است که تغییر اسپین الکترون نسبت به تکانه زاویه‌ای مداری آن متضمن تغییر انرژی نسبیتی است. این بدان معنی است که از دید دستگاه مختصات آزمایشگاه، به‌غیر از گشتاوری که مطابق بحث بخش ۹.۷ از جفت‌شدگی مغناطیسی حاصل می‌شود، يك گشتاور ظاهری مشابه آن نیز بر الکترون اثر می‌کند. اگر این گشتاور به‌تنهایی اعمال شود، درست شبیه به حرکت تقدیمی بحث شده در بخش ۵.۷ در بردار اسپین يك حرکت تقدیمی ایجاد می‌کند. در حقیقت، با استفاده از مدل شکل پ ۱۰.۶ در حالی که محور اسپین افقی باشد، بدون دشواری می‌توان ثابت کرد که افزایش جرم در يك طرف حلقه موجب حرکت تقدیمی محور اسپین خواهد شد. این اثر نسبیتی به یاد بود توماس<sup>۱</sup>، که برای اولین بار رابطه بسامد تقدیمی را به دست آورد و از آن نتیجه گرفت که مقدار جا به‌جایی انرژی چقدر باید باشد، حرکت تقدیمی توماس خوانده می‌شود.

توماس برای الکترون، نه از مدل مکانیکی مشکوک، بلکه از يك استدلال سینماتیکی نسبتاً ساده استفاده کرد. وی بدین موضوع توجه کرد که تبدیل لورنتس بین دستگاه مختصات آزمایشگاه و دستگاه مختصاتی که روی دایره‌ای به شعاع  $r$  با سرعت  $v$  و بنابراین با شتاب  $a = v^2/r$  حرکت می‌کند، منتهی به پیش‌بینی دوران آهسته دستگاه مختصات دوم می‌شود. به عبارت دیگر، الکترون دارای اسپین که روی دایره‌ای حول هسته حرکت می‌کند، حتی اگر هیچ‌گونه گشتاور خارجی بدان وارد نشود هم از دید دستگاه مختصات آزمایشگاه، حرکت تقدیمی آهسته‌ای خواهد داشت. بسامد زاویه‌ای حرکت تقدیمی عبارت است از<sup>۲</sup>

$$\Omega_T = -\frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{a})}{c^2} \quad (\text{پ } 12.6)$$

1. L. H. Thomas, *Nature*, 117 (1926), p. 514.

۲. برای نمونه نگاه کنید به

R. M. Eisberg, *Fundamentals of Modern Physics*, New York: Wiley (1961), p. 340.

با جا گذاری  $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m_e = -Ze^2\mathbf{r}/4\pi\epsilon_0 m_e r^3$  داریم

$$\Omega_T = \frac{Ze^2(\mathbf{v} \times \mathbf{r})}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2 r^3} = -\frac{Ze^2 L}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2 r^3} \quad (\text{پ } ۱۳.۶)$$

این درست نصف بسامد لارمور [معادله (۶۰.۷)] با جا گذاری معادله (۷۵.۷) با علامت مخالف است. بنا بر این، گشتاور ظاهری نسبیتی درست نیمی از گشتاور مغناطیسی اسپین-مدار را خشی می کند. در نتیجه، انرژی اسپین-مدار فقط نصف آن مقداری است که از برهم کنش مغناطیسی محاسبه می شود.

با باز گشت به مدل غیر دقیق مکانیکی می بینیم که این مدل، با وجود فرض مشکوک  $v_e^2/c^2 \ll 1$ ، نتیجه درست به دست می دهد. بحث توماس نشان می دهد که نتیجه مستقل از  $v_e^2/c^2$  است، یا بهتر بگوییم نتیجه مستقل از مدل الکترون است.

جواب مسائل انتخابی  
با شماره‌های فرد

فصل ۱

- ۵۰۱ (ب)  $2N/V^2$  (ج)  $V, V/\sqrt{2}, 2V/3$  (د) ۵۵٪، ۵۶٪
- ۹۰۱ ۹۰۶۷
- ۱۱۰۱ الف)  $112 \times 10^3 \text{ m/s}$
- ۱۳۰۱ الف)  $324 \times 10^{24} \text{ K}$
- ۱۵۰۱ (ج) ۳
- ۱۷۰۱ الف)  $400 \times 10^{-21} \text{ J}$  (ب)  $219 \times 10^2 \text{ m/s}$
- ۱۹۰۱ الف)  $847 \times 10^6 \text{ m/s}$  (ب)  $58 \times 10^6 \text{ K}$
- ۲۱۰۱ الف) کاهش (ب) افزایش
- ۲۳۰۱ الف)  $327^\circ \text{C}$  (ب)  $76 \text{ T}$
- ۲۵۰۱ الف)  $0.632, 0.368$  (ب)  $693 \text{ L}$

فصل ۲

- ۱۰۲ الف)  $358 \times 10^{13}$  (ب)  $194 \times 10^{10}$  (ج) بله
- ۳۰۲ الف) به طرف پایین  $367 \times 10^6 \text{ V/m}$
- ۵۰۲ الف)  $56 \text{ mm}$ ،  $403^\circ$   $\varphi$  (ب)  $11 \text{ cm}$
- ۷۰۲ الف)  $75 \times 10^5 \text{ V}$  (ب)  $352 \text{ T}$

۹۰۲  $478 \times 10^7 \text{ C/kg}$

۱۱۰۲  $134 \times 10^{-2} \text{ T}$

۱۳۰۲ (ب) نه

۱۵۰۲  $f = Bq / 2\pi m$

۱۷۰۲ (الف)  $2750 \times 10^{-4} \text{ m/s}$

(ب)  $111 \times 10^{-4} \text{ m/s}, 348 \times 10^{-4} \text{ m/s}, 230 \times 10^{-4} \text{ m/s}$

$530 \times 10^{-4} \text{ m/s}, 167 \times 10^{-4} \text{ m/s}$

(ج)  $361 \times 10^{-4} \text{ m/s}, 598 \times 10^{-4} \text{ m/s}, 480 \times 10^{-4} \text{ m/s}$

$780 \times 10^{-4} \text{ m/s}, 417 \times 10^{-4} \text{ m/s}$

(د) ۶, ۱۰, ۸, ۱۳, ۷ (ه)  $163 \times 10^{-19} \text{ C}$

۱۹۰۲ (الف) پایین  $E$  و  $B$  (ب) پایین  $B$ , بالا  $E$  (ج) بالا  $B$  و  $E$

۲۱۰۲ سرعت بالاتر، برخورد مولکولهای گاز

۲۳۰۲ ۳۰٪, ۷۰٪

### فصل ۳

۳۰۳ (الف)  $402 \times 10^{17} / \text{m}^2$  (ب)  $6965 \times 10^{-8} \text{ J}, 566 \times 10^{-15} \text{ J}$

۵۰۳  $(8\pi^5 k^4 / 15 c^2 h^3) T^4 \text{ J/m}^2$

۷۰۳ ۵۶۶۰ K

۹۰۳ (الف) ۱۵۰۰٪ (ب) ۴۶٪

(ج) ۴٪ (د) ۵۰۴٪

۱۱۰۳  $141 \times 10^{19} / \text{s}$

۱۳۰۳ ۱۳۶ eV

۱۵۰۳ (الف)  $526 \times 10^{-23} \text{ J}$  (ب)  $205 \times 10^{-17} \text{ m}$  (ج)  $238 \times 10^{21}$

۱۷۰۳ (الف) ۲۵۴ eV (ب) ۲۵۰۰۰۰ eV

۱۹۰۳ (الف) ۱۷۰ s (ب) ۲۱ min

۲۱۰۳ (الف)  $458 \times 10^{14} \text{ Hz}$  (ب)  $6450 \text{ \AA}$

(ج) ۱۹۰ eV (د)  $662 \times 10^{-24} \text{ J.s}$

۲۳۰۳ ۱۶۷ eV بزرگتر

۲۵۰۳ ۷۸ eV

فصل ۴

۱۰۴ الف)  $2.23 \times 10^{21} \text{ V/m}$  (ب)  $2.32 \times 10^{21} \text{ V/m}$

۳۰۴  $\text{Au}, n = 6.13 \times 10^{22} / \text{cm}^3$ ;  $\text{Al}, n = 6.02 \times 10^{22} / \text{cm}^3$

۲۹۹/s (ب)  $8.00 \times 10^4 / \text{s}$  (ج)  $8.02 / \text{s}$  (د)

۵۰۴ ۸۶/min

۱۳۰۴ الف)  $-745 \text{ keV}$  (ب)  $559 \text{ keV}$ ،  $222 \text{ \AA}$  (ج) پرتو ایکس

۱۵۰۴ لیمان:  $912 \text{ \AA}$ ،  $136 \text{ eV}$  بالمر:  $3640 \text{ \AA}$ ،  $340 \text{ eV}$

پاشن:  $8200 \text{ \AA}$ ،  $151 \text{ eV}$  براکت:  $14550 \text{ \AA}$ ،  $85 \text{ eV}$

پفوند:  $54 \text{ eV}$ ،  $22800 \text{ \AA}$

۱۷۰۴ الف)  $1275 \text{ eV}$  (ب) ۶

۱۹۰۴ الف)  $3700 \text{ \AA}$ ،  $3910 \text{ \AA}$ ،  $4630 \text{ \AA}$  (ب)  $3470 \text{ \AA}$

(ج)  $-0.23 \text{ eV}$ ،  $-0.38 \text{ eV}$ ،  $-0.89 \text{ eV}$ ،  $-357 \text{ eV}$

(د)  $0.38 \text{ eV}$  (ه) (۱) برانگیختگی  $n=2$ ، (۲) بدون اثر متقابل

۲۱۰۴ الف) هیچ (ب)  $6563 \text{ \AA}$ ،  $1216 \text{ \AA}$ ،  $1026 \text{ \AA}$

(ج)  $1026 \text{ \AA}$ ،  $1216 \text{ \AA}$ ،  $6563 \text{ \AA}$  (د) هیچ (ه) هیچ

۲۵۰۴ الف)  $8560 \text{ K}$  (ب) جذب فوتون

فصل ۵

۳۰۵ الف)  $2.28$  (ب)  $10^{-2} + 3.21$

(ج)  $4.85 \times 10^{-6}$

(د) بدون تغییرات قابل ملاحظه برای حالت (الف) و (ب)، غیرممکن برای (ج)

اما اگر تمام اتم در حال پس زدن باشد،  $2.0 \times 10^{-19}$

۵۰۵ الف)  $570 \text{ eV}$  (ب)  $26 \times 10^{-2}$  (ج)  $45^\circ$ ،  $44^\circ$

۷۰۵ الف)  $5.44 \times 10^{-28} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  (ب)  $5.52 \times 10^{-7} \%$

۱۳۰۵ الف)  $3.32 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$

(ب)  $1.87 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  (ج)  $0.354 \text{ \AA}$

۲۳۰۵ ۶۰ cm

فصل ۶

$$A = a^{1/2} \quad ۱.۶$$

$$P = ae^{-x} dx$$

$$P = (e^{-x} - e^{-x'})/2$$

$$k^2 = 2/2a^2 \quad ۳.۶$$

$$\langle x^2 \rangle = a^2/10$$

انتگرال جزء به جزء  $\langle P_x^2 \rangle = 2h^2/a^2$

$$\langle H \rangle = a^2 E_1 + a^2 E_2 + a^2 E_3 + \dots \quad ۷.۶$$

$$k_x a = n_x \pi, \dots \quad ۹.۶$$

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

$$A^2 = 2a/9 \quad ۱۱.۶$$

$$E = -\hbar^2 a^2 / 2m$$

$$V = -\hbar^2 a^2 / m(1 \pm ax)$$

$$v = \hbar(a^2 + b^2)^{1/2} / m \quad ۱۵.۶$$

$$B = 0.00062 \quad ۱۷.۶$$

$$B = 2 \exp(-1.9 \times 10^{24}) \quad ۱۹.۶$$

$$A = \hbar^{1/2} / (\text{km})^{1/4} = 1.83 \times 10^{-15} \text{m} \quad ۲۱.۶$$

فصل ۷

$$E_0 = 2.92 \hbar^2 / ma^2, E_1 = 10.07 \hbar^2 / ma^2 \quad ۹.۷$$

$$l = 2, m = 1, E = \mu e^4 / 2 \pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 = e^2 / 2 \pi^2 \epsilon_0 a_0, A^{-1} = 81 \pi^{1/2} a_0^{3/2} \quad ۱۱.۷$$

$A = 555 \text{ L/A (rad)}$   $\alpha = 555 \text{ L/A (rad)}$  که در آن L برابر طول مغناطیس بر حسب متر و A برابر جرم اتمی بر حسب u است.

فصل ۸

$$\Delta E = v_0 / 2 \quad ۵.۸$$

$$\psi_1 = a_{11} \psi_{10} + a_{21} \psi_{20} \quad ۷.۸$$

$$E_1 \approx E_{10} + v_0 / 2 - 16 v_0^2 / 9 \pi^2 (E_{20} - E_{10})$$



$$a_{21}/a_{11} \cong -v_0/2\pi(E_{20} - E_{10})$$

$$\psi_2 = a_{21}\psi_{10} + a_{22}\psi_{20} \text{ با انرژی}$$

$$E_2 \cong E_{20} + v_0/2 + 16v_0^2/9\pi^2(E_{20} - E_{10})$$

$$a_{12}/a_{22} \cong v_0/2\pi(E_{20} - E_{10})$$

$$H'_{12} = H'_{21} = \dots = 2C/a \quad 9.8$$

$$\text{در } t=0, |a_{ij}|^2 = 2C^2/\hbar^2 a^2, \text{ غیره}$$

### فصل ۹

الف)  $2476 \text{ eV} = 2.476 \times 10^{-13} \text{ J}$  (ب)  $1.748 \times 10^5 \text{ K}$  ۱۰.۹

$$\psi = \frac{2\sqrt{6}}{\pi a_0^2} \left[ \left(1 - \frac{r_2}{a_0}\right) \exp\left(-\frac{r_1 + r_2}{a_0}\right) \cos \theta_2 \right. \quad 3.9$$

$$\left. - \left(1 - \frac{r_1}{a_0}\right) \exp\left(-\frac{r_2 + r_1}{a_0}\right) \cos \theta_1 \right] \alpha \alpha$$

$$\langle V_{12} \rangle = e^2/2\pi\epsilon_0 a_0 = 5474 \text{ eV} \quad 5.9$$

۲۸۰ ۷.۹

۲۰ الف) ۹.۹

الف)  $(1s)^2(2s)^2(2p)^1$  (ب)  $^1S_0$  (ج)  $(1s)^2(2s)^2$  ۱۱.۹

(د)  $^3P_1, ^3P_0, ^3P_2, ^1P_1$  (ه)  $(\Delta S = 0)$  (و) ۳

$^2S_{1/2}, ^4S_{3/2}, ^2P_{1/2}, ^2P_{3/2}, ^4P_{1/2}, ^4P_{3/2}, ^2D_{3/2}, ^2D_{5/2},$  (الف) ۱۳.۹

$^4D_{1/2}, ^4D_{3/2}, ^4D_{5/2}, ^4D_{7/2}, ^4F_{3/2}, ^4F_{5/2}, ^4F_{7/2}, ^4F_{9/2}$

(ب)  $^4S_{3/2}, ^2P_{1/2}, ^2P_{3/2}, ^2D_{3/2}, ^2D_{5/2}$

(ج)  $^4F_{3/2}, ^4S_{3/2}$

### فصل ۱۰

الف)  $3753 \text{ \AA}$  (ب)  $706 \text{ \AA}$

الف)  $1724 \text{ \AA}$  (ب)  $413 \text{ \AA}$

الف)  $(1s)^2(2s)^2(2p)^5 \dots$  و  $(1s)^2(2s)^2(2p)^6 \dots$

(ب)  $^2P_{1/2}$  و  $^2S_{1/2}$  (ج)  $1174 \text{ keV}$

الف)  $1055 \text{ keV}$  (ب)  $1746 \text{ \AA}$  (ج)

(د)  $1724 \text{ \AA}$  (ه)  $178 \text{ \AA}$

۰٫۹۵۰ cm, ۰٫۵۵۰ cm, ۰٫۱۲۴ cm (الف ۹۰۱۰)

۴٫۷۵ cm, ۰٫۲۵ cm, ۰٫۰۶۲۰ cm (ب)

۵٫۳۰ cm, ۰٫۲۸۰ cm, ۰٫۰۶۹۷ cm (ج)

$1.756 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  ۱۳۰۱۰

$2.9 \times 10^{18} \Omega$  (الف ۱۵۰۱۰)

$14.2^\circ, 37.2^\circ$  ۱۷۰۱۰

### فصل ۱۱

$\alpha \approx v/e = 0.735$  (ج ۱۰۱۱) (بیش از بر آورد)

$\mu r_0^2 \approx 1.33 \times 10^{-45} \text{ kg} \cdot \text{m}^2; \hbar^2 / 2\mu r_0^2 \approx 2.6 \times 10^{-5} \text{ eV}$  ۳۰۱۱

$E_f \approx 34 \text{ MeV}$  ۹۰۱۱

$\approx (3kT/2E_f) \exp(-E_k/2kT) = 5.5 \times 10^{-17}$  (الف ۱۱۰۱۱) و کسر،

$E_f \approx 7.5 \text{ eV}$

$6 \times 10^{-21}$  (ب)

$\Delta V = 0.0267 \text{ V}$  ۱۳۰۱۱

### فصل ۱۲

$3.25 \times 10^{17} \text{ kg/m}^2 = 3.25 \times 10^5 \text{ t/mm}^2$  ۱۰۱۲

$ZR^2/2$  (ب)  $ZR^2$  (الف ۳۰۱۲)

$\kappa_1 \cot \kappa_1 c = \cot(Kc - \delta) K \cot[K(b+c) - \delta] = -\kappa_2$  ۵۰۱۲

$d = 2.9 \text{ F}, 5.0 \text{ F}, 7.1 \text{ F}$  ۷۰۱۲

$r_0 = 2.7 \text{ F}$  (ج)  $\cot Kr_0 = -1$  (ب ۹۰۱۲)

$0^+, \frac{3^-}{2}, \frac{5^+}{2}, 0^+, \frac{5^+}{2}, \frac{7^-}{2}, \frac{3^-}{2}$  ۱۱۰۱۲

$E = (1 - m/M)E_K$  ۱۷۰۱۲

$8.2 \times 10^8 \text{ J}$  (ب)

$4.8 \times 10^4 \text{ J}$  (الف ۱۹۰۱۲)

$1.8 \times 10^{14} \text{ J}$  (د)

$2.0 \times 10^{10} \text{ J}$  (ج)

## واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Auger effect	اثر اوژه
normal Zeeman effect	اثر بهنجار زیمان
anomalous Zeeman effect	اثر بی‌هنجار زیمان
degeneracy energy	انرژی واگنی
homopolar bond	پیوند هم‌قطبی
orthogonality	تعامد
equipartition of energy	تقسیم مساوی انرژی
associated production	تولید همراه
antisymmetric wave function	توابع موج پاد متقارن
spectroscopic term	جمله طیف نمودی
energy degenerate states	حالت‌های انرژی واگن
Thomas precession	حرکت تقدیمی توماس
dislocations in solids	دررفتگی در جامدات
depletion layer diode	دیود لایه تهی
identical particles	ذرات یکسان
Wiedemann-Franz relationship	رابطه وایدمن-فرانتز
Debye-Scherrer method	روش دی-شرر
Pfund series	سری پفوند

spectroscopic triplet	سه تایی طیف نمودی
strangeness of hyperons	شگفتی هیپرونها
Clebsch-Gordan coefficient	ضریب کلبش-گوردن
causality	علیت
ultraviolet catastrophe	فاجعه فرابنفش
Child-Langmuir law	قانون چایلد-لانگمویر
Dulong and Petit's law	قانون دولون و پتی
radiative capture	گیراندازی تابشی
orthonormal set	مجموعه راست هنجار
repulsive core in nuclear force	مغز رانشی در نیروی هسته‌ای
differential cross section	مقطع دیفرانسیلی
Hartree's self-consistent field	میدان خودسازگار هارتری
radioastronomy	نجوم پرتوی
big bang theory	نظریه انفجار بزرگ
eigenfunctions	ویژه تابعها
eigenvalues	ویژه مقدارها
helicity	هلیسیته

## فهرست راهنما

<p>– بستگی آخرین الکترون در اتم ۲۸۷</p> <p>– فوتوالکتریک ۸۴، ۳۲۳</p> <p>– احتمال گذار ۲۷۰ اسپین</p> <p>– الکترون ۱۲۷، ۲۳۰</p> <p>– پروتون ۲۴۴، ۳۹۴</p> <p>– ذرات بنیادی ۴۵۲، ۴۵۳</p> <p>– هسته ۳۹۴</p> <p>– استتار در هسته ۲۸۶</p> <p style="text-align: center;">اصل</p> <p>– ترکیب ریتس ۱۱۲</p> <p>– طرد پاؤلی ۲۷۷، ۲۸۶، ۲۹۰، ۳۶۲</p> <p>– عدم قطعیت هایزبرگ ۱۵۹</p> <p>– موضوعها ۱۱۳، ۱۱۶، ۱۴۰</p> <p>– اعداد جادویی هستهها ۴۱۳</p> <p>– اعداد کوانتومی اصلی ۱۱۵</p> <p>– الکترو دینامیک کوانتومی ۲۴۲</p> <p>– الکترونیهای ظرفیت ۲۸۹</p> <p>– امواج احتمال ۱۵۸</p> <p>– انتقال دوپلر ۲۴۵</p> <p>– انتقال لمب ۲۴۲، ۲۴۳</p> <p>– اندازه هسته ۱۰۷، ۳۸۹</p> <p>– انرژی</p> <p>– برانگیختگی ۱۱۹</p>	<p>آرایه شبکه ۳۳۲</p> <p>آزمایش</p> <p>– اشترن-گرلاخ ۲۳۰، ۲۳۱</p> <p>– یوشکاف ۱۶۱، ۱۶۳</p> <p>– دیویسون-گرمر ۱۴۳، ۲۷۵</p> <p>– فرانک-هرتز ۱۲۳، ۲۶۳</p> <p>– قطره روغن میلیکان ۵۱</p> <p>– مایکلسون-مورلی ۴۷۷، ۴۸۳، ۴۹۴</p> <p>– آشکارساز نیم رسانا برای تابش ۳۷۵</p> <p>– آنالیز فوریه ۱۵۳</p> <p>اتاقک ابر ۳۲۵-۳۲۷</p> <p>اثر ۴۷۲، ۴۷۸</p> <p>اتساع زمان ۴۸۹، ۴۹۰</p> <p>اتمها با جفت شدگی z-z ۲۹۰، ۲۹۲</p> <p>اثر</p> <p>– ادیسون ۹۲</p> <p>– اسپین در هسته ۴۱۲</p> <p>– اسپین-مدار در اتم ۲۳۹</p> <p>– اوژه ۳۱۹</p> <p>– بهنجار زیمان ۲۹۷</p> <p>– بی-هنجار زیمان ۲۹۷</p> <p>– پاشن بك ۲۹۸</p> <p>– رامان ۱۲۶، ۳۰۳</p>
---	---

- بستگی آخرین الکترون در اتم ۲۸۷  
 - بستگی الکترون در هیدروژن ۱۱۵  
 - بستگی ذره در چاه مربعی ۱۸۶  
 - بستگی هسته‌ای ۳۹۲  
 - تبادل در هلیوم ۲۸۲  
 - فرمی ۳۳۵  
 - فعال‌سازی، شکافت ۴۴۲  
 - گرما هسته‌ای ۴۴۵  
 - واپاشی بتا ۴۳۵  
 - واکنی ۱۹۳  
 انقباض لورنتس ۴۸۹  
 ایزوبار هسته‌ای ۳۸۹  
 ایزوتوپ ۵۵، ۳۸۹  
 ایزوتون هسته‌ای ۳۸۹  
 ایزوسپین هسته‌ای ۴۵۵  
 ایزومر هسته‌ای ۳۸۹  
 بار الکترون ۴۸  
 بار تبدیلی مولکول هیدروژن ۳۵۱، ۳۵۵  
 بارن ۴۵۲  
 باریون ۴۵۲، ۴۵۳، ۴۵۵  
 باز بهنجارش جرم ۲۴۳  
 بازتاب براگ ۳۳۶، ۳۳۵، ۳۲۲، ۳۱۳  
 برانگیزش الکترون ۳۵۳  
 بردار پوئین تینگگ ۶۷  
 برهم‌کنش تبدیلی در مولکول هیدروژن ۳۵۵  
 - ضعیف ۴۳۱  
 - قوی ۴۵۷  
 بسامد آستانه فوتوالکترونیک ۸۵  
 بسامد لارمور ۵۱۵، ۲۳۵  
 بسط ریاضی ۲۵۱  
 بسط فوریه ۱۸۵  
 بقا  
 - باریونها ۴۵۷  
 - پارینه ۲۳۲، ۲۵۷  
 - شگفتی ۴۵۵  
 - لپتونها ۴۲۸  
 بلورنگاری ۳۳۲  
 بلورهای یونی ۳۱۱  
 بوزون ۲۸۵  
 بهنجارش ۲۲، ۱۷۱، ۲۲۰  
 پاد ذره ۴۴۹  
 پاد نوترینو ۴۱۳، ۴۲۷، ۴۲۸  
 پارینه  
 - توابع موج ۲۵۵  
 -  $G$  ۴۵۰  
 - ذرات بنیادی ۴۵۵  
 - هسته ۳۹۴  
 پتانسیل  
 - ایستاننده ۸۷  
 - برانگیزش ۱۱۹  
 - پله‌ای ۱۹۶  
 - تشدید ۱۲۲  
 - مرکز گریز ۳۹۶  
 - یوکاوا ۴۵۵  
 - یونش ۱۲۵  
 پراش پرتو ایکس در بلورها ۳۵۹  
 پراکنندگی  
 - تامسون ۱۳۵، ۱۶۵  
 - رادرفورد ۱۵۳  
 - کامپتون ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۶، ۱۳۸  
 - ۱۶۵، ۱۴۳  
 - نوکلئون-نوکلئون ۴۵۵  
 - هسته‌ای ۴۳۷  
 پرتو  
 - ایکس ۳۵۷  
 - کاتودی ۴۱  
 - کیهانی ۲۴۹  
 - گاما ۱۵۵

- تعریف
- پلازما ۴۴۸
- پوزیترون ۴۴۹، ۴۱۸، ۳۲۵
- پهن‌شدگی دوبلر ۲۳۸
- پیکر بندی اتمی ۲۸۷، ۲۸۶
- پیکر بندی هسته‌ای ۴۱۳
- پیون (مزون پی) ۴۵۷، ۴۵۳، ۴۵۲، ۴۰۵
- پیوند هم‌قطبی ۳۴۷
- تابش
- تارن تبادل ۲۷۸، ۳۵۳
- تارن درمکانیک موجی ۲۷۷
- تقسیم مساوی انرژی ۱۷
- تکانه زاویه‌ای
- تومزی ۳۱۵
- جسم سیاه ۷۱، ۷۳، ۷۴
- حرارتی ۶۸
- تابع
- کار ۸۶: ۹۲، ۳۶۴
- کروی بسل ۴۰۸
- لژاندر وابسته ۲۱۷
- متعامد ۱۵۴، ۲۵۲
- معکوس فوریه ۱۵۶
- موج پاد متقارن ۲۷۸، ۲۷۹
- موج ذره نسبی ۴۰۴
- موج شرودینگر ۱۷۸
- هماهنگ‌کروی ۲۱۸
- تبدیل داخلی ۳۹۲-۴۲۳
- تبدیل فوریه ۱۵۶
- تبدیل لورنتس ۴۸۷
- تجربه لمب-رادرفورد ۲۴۲
- تداخل سنج مایکلسون ۲۷۴-۴۷۶
- تراز انرژی
- در چاه مربعی بینهایت ۱۸۳
- در چاه مربعی محدود ۱۸۹
- درمدل پوسته‌ای هسته ۴۱۱
- در نوسانگر هماهنگ ۲۰۴
- در هیدروژن ۱۱۸
- ترانزیستورها ۳۷۷-۳۸۰
- تعامد ۱۵۳، ۱۵۴، ۲۵۱
- تک تابه ۲۷۵، ۲۸۲، ۲۸۴
- توری اپتیکی ۱۰۸
- توری پراش ۱۰۸
- توزیع احتمال فرمی ۳۶۵، ۳۶۷، ۳۶۹
- توزیع گاوسی ۱۰۲
- تولید
- پرتو ایکس ۳۰۸، ۳۱۴
- زوج ۳۲۳، ۳۲۵، ۳۲۶
- همراه ۴۵۵
- ثابت
- آوگادرو ۹، ۱۵، ۳۱، ۳۲
- استفان-بولتزمن ۷۴، ۹۵
- بولتزمن ۱۸، ۳۵۸
- پلانک ۸۳
- تراوایی ۴۶۳
- جداسازی ۲۱۵
- ریدبرگ ۱۱۲
- ساختار ریز ۲۳۹
- فاراده ۲۹، ۵۲
- گازها ۱۲
- گذردهی ۴۶۵

- حالت تشدید باریون ۴۵۱  
 حالت شبه پایدار در آنها ۲۹۵  
 حالت شبه پایدار در هسته‌ها ۳۸۹  
 حالت مانا ۱۸۵  
 حاملین بار در نیمرساناها ۳۶۸  
 حرکت براونی ۱۲، ۲۹، ۳۲  
 حرکت تقدیمی توماس ۲۳۹  
 حرکت تقدیمی لارمور ۲۲۸، ۲۳۹، ۵۱۴  
 حفره و الکترون در نیمرساناها ۳۶۸  
 خطوط طیف اتمی ۱۰۸  
 خطوط طیف در هیدروژن ۱۱۰، ۱۱۹،  
 ۱۲۰، ۲۲۶  
 خطوط فراونهورفر ۱۲۶، ۱۲۷  
 خواص نوری جامدات ۳۸۰  
 دترمینان اسلیتر ۲۸۰  
 درجات آزادی ۱۸  
 در رفتگی در جامدات ۳۸۱  
 دستگاه A mks ۴۶۳  
 دستگاه‌های لخت ۴۸۳  
 دوتریون ۳۹۵  
 دوگانگی موج-ذره ۱۳۳، ۱۵۷، ۱۵۹  
 دیود لایه تهی ۳۷۶  
 ذرات بنیادی ۴۴۸  
 ذرات یکسان ۲۷۹  
 ذره آلفا  
 - نفوذ از سد ۲۰۰  
 - در واپاشی ۲۰۰، ۴۲۳  
 - ، طیف نمایی ۴۲۷  
 ذره بتا  
 - ، انرژی واپاشی ۴۳۰  
 - ، طیف واپاشی ۴۲۹  
 - ، واپاشی ۱۰۰  
 - ، واپاشی بتای مثبت ۴۲۸، ۴۲۹
- واپاشی ۴۱۹  
 جابه‌جاگر ۲۳۲  
 جابه‌جایی عملگرها ۱۹۳  
 جبر ماتریسی ۵۰۵  
 جدول تناوبی ۱۱، ۲۸۶، ۴۶۶  
 جذب  
 - پرتوهای ایکس ۳۲۰  
 - پرتوهای گاما ۴۳۷  
 - تابش گرمایی ۶۹  
 - تشدید ۲۶۷، ۱۲۵  
 - در جامدات ۳۸۰  
 جرم  
 - اتمی ۱۱، ۵۶  
 - سکون ۴۹۶  
 - کاهش یافته ۱۱۵، ۲۱۳  
 - مولکولی ۸  
 - نسبی ۴۹۷  
 - هسته ۳۹۲  
 جفت شدگی  
 - LS ۲۸۹  
 - تکانه زاویه‌ای ۲۳۵، ۲۸۹، ۵۰۸  
 - راسل-ساندرز ۲۹۰  
 جمع برداری تکانه‌های زاویه‌ای ۵۰۸  
 جمله طیف نمودی ۲۹۱  
 چاه مربعی  
 - با عمق محدود ۱۸۶  
 - با عمق نامحدود ۱۸۰  
 - بینهایت ۱۸۰  
 چگالی احتمال ۱۷۱  
 چگالی انرژی تابش ۶۷  
 چند جمله‌ایهای لژاندر ۲۱۷  
 چند جمله‌ایهای هرمیت ۲۰۴  
 حالت انرژی-واگن ۱۹۳



- سه تا یه طیف نمودی ۲۷۵، ۲۷۷، ۲۸۲، ۲۸۴  
 سنجه فابری- پرو ۲۹۹
- شاخصهای میلر ۳۳۸  
 شار درمکانیک موجی ۱۹۳، ۱۹۵  
 شتابدهنده ۴۳۶  
 شتابدهنده مولد وان دوگراف ۴۳۶  
 شعاع بور ۱۱۴، ۳۴۷  
 شکافت
- القایی ۴۳۷ -  
 خود به خودی ۴۱۸ -  
 هسته ای ۴۴۰ -  
 شکفتی هیبرونها ۴۵۰، ۴۵۵
- ضرب
- افزایش پرتو ایکس ۳۲۳ -  
 بازتاب ۷۰ -  
 جذب ۷۰، ۷۴ -  
 جرمی ۳۲۴ -  
 خطی ۳۲۲ -  
 g ۲۲۸، ۲۹۷ -  
 کلبش-گوردن ۵۰۹، ۵۱۰
- طول موج دو بروی ۱۳۹، ۱۴۴، ۱۶۶  
 طول موج کامپتون ۱۳۷  
 طول ویژه ۴۸۸  
 طیف نمایی
- اتمى ۱۰۸، ۲۹۳ -  
 جرمی ۵۶ -  
 مولکولی ۳۵۳ -  
 طیف هیدروژن ۱۱۰، ۲۲۶  
 ظرفیت حرارتی مولی ۱۲  
 عامل g ی لانده ۲۹۷
- آکتور گداخت ۴۴۸  
 آکتور هسته ای ۴۳۶، ۴۴۳  
 رابطه
- ریچاردسون ۳۶۶ -  
 مقطع رادرفورد ۱۰۶ -  
 وايدمن-فرانتس ۳۶۲ -  
 رادیواکتیویته ۹۹، ۴۱۳  
 رسانا ۳۷۰  
 روش
- دبی-شرر ۳۳۶ -  
 لافه ۳۳۵، ۳۳۶ -  
 مضاعف در طیف نمایی جرمی ۵۹ -  
 هارتری ۲۸۴ -  
 هیتلر-لندن ۳۴۷ -
- زمان ویژه ۴۹۰  
 ساختار ریز
- در آنها ۲۳۶ -  
 در هیدروژن ۲۴۴ -  
 هیدروژن ۲۳۶ -  
 ساختار فوق ریز ۲۹۹  
 سختی مغناطیسی ۵۰۲، ۵۰۳  
 سرعت گروه ۱۵۰  
 سری
- بالمر ۱۱۲، ۱۱۷، ۱۲۶، ۱۳۲ -  
 بر اکت ۱۱۷، ۱۱۸ -  
 پاشن ۱۱۷، ۱۱۸ -  
 بفونند ۱۱۷، ۱۱۸ -  
 رادیواکتیو ۴۱۴، ۴۱۶ -  
 با واپاشی آلفا ۴۱۴ -  
 فوریه ۱۵۵ -  
 لیمان ۱۲۶، ۲۶۷ -  
 سطح مقطع بر خورد ۲۶، ۱۰۵  
 سطح مقطع نوترون-پروتون ۴۰۱

- عدد
- آوگادرو ۷، ۸، ۹، ۱۰
- استفان-بولتزمن ۷۴، ۹۵
- استوکس ۴۹
- بقا ۱۹۱
- پلانک ۷۴، ۸۰، ۸۳، ۹۵، ۲۷۱، ۲۶۲
- تابش ریلی-جینز ۷۵، ۸۰، ۹۵
- تابش کیرشهوف ۷۲، ۷۳
- توزیع بولتزمن ۳۲، ۳۳، ۸۰، ۲۸۳
- ۳۸۱
- توزیع سرعت ماکسول ۱۹، ۲۳، ۲۸
- ۳۳، ۳۵-۳۷، ۷۵، ۱۶۶
- جابه‌جایی وین ۷۵، ۷۶، ۸۰، ۹۵
- چایلد-لانگمویر ۱۲۱
- دولون و پتی ۱۱، ۹۳
- فاراده ۲۹، ۳۹
- گازها ۳۰، ۳۱
- گی-لوساک ۷
- واپاشی رادیواکتیو ۲۱۸
- قطری کردن ماتریس ۲۵۹
- قواعد گزینش در گذارهای اتمی ۱۲۶، ۱۲۸، ۲۲۶، ۲۷۰
- کشف الکترون ۴۷
- کندکننده در رآکتور ۴۴۳
- کوآرکها ۴۵۵
- کوانتش
- انرژی ۱۸۳
- تکانه زاویه‌ای ۲۲۰
- فضایی ۲۲۹
- کوانتومها (فوتونها) ۸۴
- گازهای نادر ۲۸۷
- گداخت هسته‌ای ۴۴۵
- گذار
- دوقطبی الکتریکی ۲۲۶، ۲۷۰، ۲۲۲
- باریونی ۴۵۷
- کوانتومی اصلی ۱۱۵
- کوانتومی تکانه زاویه‌ای ۲۲۱
- لپتونی ۴۲۸
- موج ۱۱۱
- علامت کروئکر ۲۵۴، ۵۰۷
- علیت ۱۶۱
- عملگر ۱۷۴
- تکانه زاویه‌ای مداری ۲۲۰
- خطی ۱۷۶
- دیفرانسیلی ۱۷۵
- لاپلاسی ۱۷۷، ۲۷۶
- مؤلفه z تکانه زاویه‌ای ۲۲۰
- هامیلتونی ۱۷۷
- هرمیتی ۱۷۶
- فاجعه فرانفیش ۷۹
- فازور ۱۴۸
- فضیة
- دوبروی ۱۴۰
- لورنتس-فیتزجرالد ۴۷۷، ۴۸۹
- فرمول بالمر ۱۱۰-۱۱۲
- فرمیون ۲۸۰
- فسفرسانی ۱۰۰
- فلوئورسانی ۱۰۰، ۳۰۳
- فوتو فروپاشی هسته‌ای ۴۳۷
- فوق بار ۴۵۱
- قاعده
- انتخاب در گذارهای گاما ۴۲۳
- پروتون ۳۵۸
- طلایی شماره ۲ ۲۶۷
- هوند ۲۹۰
- قانون

- دو قطبی مغناطیسی ۲۷۱  
 - گاما ۴۲۱  
 - مجاز ۴۳۱  
 - ممنوع ۴۳۲  
 گرمای ویژه جامدات ۳۶۹، ۹۲  
 گرمای ویژه مولی ۱۷  
 گروه موج ۱۴۶، ۱۴۹  
 گسیل  
 - القایی ۲۶۹، ۲۷۰  
 - تابش ۶۹  
 - خودبه خودی ۲۷۱  
 - گرمایونی ۹۲  
 - نوترینو در واپاشی بتا ۴۱۳  
 گشتاور  
 - چهار قطبی الکتریکی ۳۹۵  
 - دو قطبی مغناطیسی در آنها ۲۲۶  
 - دو قطبی مغناطیسی در هسته ها ۳۹۳  
 گیراندازی الکترون ۳۹۲، ۴۱۸  
 گیراندازی تابشی ۴۳۷  
 لامپ کولیج ۳۰۹، ۳۱۰  
 لپتون ۴۲۸، ۴۵۲  
 لیزرها ۳۸۱  
 ماتریسهای اسپین پاولی ۲۳۳  
 ماهیت ذره آلفا ۱۰۰  
 مجموعه راست-هنجار ۲۵۴  
 مجموعه کابل ۱۵۴، ۲۵۲  
 مختصات کروی ۲۱۴  
 مدار بور ۱۱۴  
 مدل  
 - اتمی بور ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۲۰  
 - اتمی تامسون ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۲، ۱۱۰  
 - اتمی رادرفورد ۱۰۲  
 - برداری تکانه زاویه ای ۲۹۱  
 - پوسته ای اتم ۲۸۶  
 - پوسته ای هسته ۴۰۷  
 - هسته ای اتم ۱۰۲  
 مزدوج مختلط ۱۹۵  
 مزون ۴۵۲، ۴۹۱  
 - k ۴۵۲، ۴۵۳، ۴۵۷  
 مسیر آزاد میانگین ۲۴، ۲۷، ۲۸  
 مسئله هلیوم ۲۷۴، ۲۸۰  
 مسئله هیدروژن ۲۲۳  
 مسئله  $H_p$  ۳۴۷  
 معادله  
 - بواسون ۴۰۴  
 - تبدیل اینشتین-لورنتس ۴۸۳، ۴۸۷  
 - تبدیل جرم ۴۹۷  
 - تبدیل گالیله-نیوتون ۴۸۷  
 - شرودینگر ۱۷۸  
 - لاپلاس ۴۰۴  
 - ماکسول ۶۶، ۷۸  
 - موجی شعاعی ۲۱۹  
 - ویژه مقدار ۱۸۰، ۱۹۱  
 مغز رانشی در نیروی هسته ای ۳۹۷  
 مقدار چشمداشتی ۱۷۲  
 مقدار Q در واکنشهای هسته ای ۴۳۰  
 مقدار متوسط در مکانیک موجی ۱۷۲  
 مقطع دیفرانسیل ۱۰۶  
 مکانیک موجی ۱۶۹  
 مگنتون بور ۲۲۷، ۲۳۰  
 مگنتون هسته ای ۳۹۴  
 مولکول  
 - برانگیزش ارتعاشی ۳۵۳  
 - برانگیزش دورانی ۳۵۳  
 میدان خودسازگار هارتری ۲۸۴  
 میزرها ۳۸۱  
 نابودی الکترون-پوزیترون ۴۲۹

- تورینو ۴۱۸، ۴۲۷، ۴۲۹، ۴۴۹  
 نوسانگر هماهنگ ۲۰۱  
 - ساده ۲۰۱  
 نوکلید ۳۸۹  
 نیرو  
 - بین مولکولی ۳۵۷  
 - تانسوری ۴۰۰  
 - واندر والس ۳۵۸، ۳۵۹  
 - هسته‌ای ۴۰۳  
 نیم‌رسانا ۳۷۰  
 - با ناخالصی‌دهنده ۳۷۰  
 واحدهای تابش ۳۲۹  
 - راد ۳۳۱  
 - رپ ۳۳۱  
 واکنش تبدیلی ۴۳۷  
 واکنش هسته‌ای ۴۳۶  
 ویژه‌تابمها ۱۹۱  
 - تکانه ۱۹۳  
 ویژه‌مقدارها ۱۹۱  
 هسته باقیمانده ۴۳۷  
 هلیسسته ۴۳۲  
 همزمانی نسبی ۴۸۶  
 هیپرونها ۴۴۹  
 هیدروژن درحالت پایه ۱۱۸
- ناخالصی پذیرنده ۳۷۱  
 ناوردایی ۴۸۱  
 - سرعت نور ۴۸۹  
 نجوم پرتوی ۲۴۵  
 نسبت ژیرومقناطیسی ۲۲۷  
 نظریه  
 - اتمی ماده ۳  
 - اختلال ۲۵۴  
 - مستقل از زمان ۲۶۲  
 - وابسته به‌زمان ۲۶۲  
 انفجار بزرگ ۴۴۵  
 - جنبشی گازها ۱۲  
 - حالت مانا درباره‌ی عالم ۴۴۵  
 - دیرالک ۲۳۱  
 - کوانتومی جدید ۱۶۹  
 - کیهان شناختی ۴۴۵  
 - مزونی نیروهای هسته‌ای ۴۰۳  
 - نارسانا ۳۷۰  
 - نسبییت خاص ۴۸۴  
 - نسبییتی زومرفلد ۱۲۷  
 نقض پاریده ۴۳۲  
 نمادگذاری درطیف‌نمایی ۲۹۱  
 نمودار نوکلیدها ۴۱۵، ۴۱۷، ۴۲۷  
 نوار انرژی درجامدات ۳۶۶  
 نوار رسانش درجامدات ۳۶۸  
 نوار ظرفیت ۳۶۸