



# آشنایی با فیزیک پلاسما و همجوشی کنترل شده

جلد اول : فیزیک پلاسما

فرانسیس اف. چن

ترجمهٔ دکتر مسن مهدیان ، اسماعیل نامور



# آشنایی با فیزیک پلاسما و همجوشی کنترل شده

جلد اول: فیزیک پلاسما

فرانسیس اف. چن

ترجمهٔ دکتر حسن مهدیان، اسماعیل نامور

مرکز نشر دانشگاهی

بسم الله الرحمن الرحيم

## فهرست

۱	پیشگفتار ویراست دوم
۵	پیشگفتار ویراست اول
۷	مقدمه ۱
۷	۱.۱ وجود پلاسما در طبیعت
۹	۲.۱ تعریف پلاسما
۱۰	۳.۱ مفهوم دما
۱۴	۴.۱ حفاظ دبی
۱۸	۵.۱ پارامتر پلاسما
۱۸	۶.۱ معیارهای پلاسما
۲۰	۷.۱ کاربردهای فیزیک پلاسما
۲۵	۲ حرکت‌های تک‌ذره
۲۵	۱.۲ مقدمه
۲۵	۲.۲ میدان‌های یکتواخت E و B
۳۳	۳.۲ میدان نایکتواخت B
۴۳	۴.۲ میدان نایکتواخت E
۴۶	۵.۲ میدان متغیر زمانی E

۴۸	میدان متغیر زمانی B	۶.۲
۵۰	خلاصه‌ای از سوقهای مرکز راهنما	۷.۲
۵۱	ناورداهای بی‌دررو	۸.۲
۶۰	پلازما به عنوان سیال	۳
۶۰	مقدمه	۱.۳
۶۱	رابطه فیزیک پلازما با الکترومغناطیس معمولی	۲.۳
۶۶	معادله حرکت سیال	۳.۳
۷۶	سوقهای سیال عمود بر B	۴.۳
۸۳	سوقهای سیال موازی با B	۵.۳
۸۴	تقریب پلاسمایی	۶.۳
۸۶	امواج در پلازما	۴
۸۶	نمایش امواج	۱.۴
۸۸	سرعت گروه	۲.۴
۸۹	نوسانهای پلازما	۳.۴
۹۵	امواج الکترونی پلازما	۴.۴
۱۰۱	امواج صوتی	۵.۴
۱۰۲	امواج یونی	۶.۴
۱۰۵	اعتبار تقریب پلاسمایی	۷.۴
۱۰۶	مقایسه امواج یونی و الکترونی	۸.۴
۱۰۹	نوسانهای الکتروستاتیک الکترونی عمود بر B	۹.۴
۱۱۶	امواج الکتروستاتیک یونی عمود بر B	۱۰.۴
۱۱۹	بسامد آمیخته پایین	۱۱.۴
۱۲۰	امواج الکترومغناطیسی با $B_0 = 0$	۱۲.۴
۱۲۴	کاربردهای تجربی	۱۳.۴
۱۲۹	امواج الکترومغناطیسی عمود بر $B_0$	۱۴.۴
۱۳۳	قطعه‌ها و تشدیدها	۱۵.۴
۱۳۵	امواج الکترومغناطیسی موازی با $B_0$	۱۶.۴
۱۳۹	نتایج تجربی	۱۷.۴
۱۴۳	امواج هیدرومغناطیسی	۱۸.۴
۱۴۹	امواج مغناطیسی صوتی	۱۹.۴
۱۵۲	خلاصه‌ای از امواج بنیادی پلازما	۲۰.۴
۱۵۳	نمودار CMA	۲۱.۴

۱۶۳	پخش و مقاومت	۵
۱۶۳	پخش و تحرک در گازهای یونیدهٔ ضعیف	۱.۵
۱۶۷	واباشی پلاسما توسط پخش	۲.۵
۱۷۳	جوابهای حالت پایا	۳.۵
۱۷۵	باز ترکیب	۴.۵
۱۷۶	پخش در عرض میدان مغناطیسی	۵.۵
۱۸۵	برخوردها در پلاسمای کاملاً یونیده	۶.۵
۱۹۲	معادلات مغناطوهیدرودینامیک تک سیال	۷.۵
۱۹۶	پخش در پلاسمای کاملاً یونیده	۸.۵
۱۹۷	جوابهای معادلهٔ پخش	۹.۵
۲۰۰	پخش بوهم و پخش نوکلاسیک	۱۰.۵
۲۰۹	تبادل و پایداری	۶
۲۰۹	مقدمه	۱.۶
۲۱۱	تبادل هیدرومغناطیسی	۲.۶
۲۱۳	مفهوم $\beta$	۳.۶
۲۱۵	پخش میدان مغناطیسی به درون پلاسما	۴.۶
۲۱۹	رده بندی ناپایداریها	۵.۶
۲۲۱	ناپایداری دو جریانی	۶.۶
۲۲۶	ناپایداری «گرانشی»	۷.۶
۲۳۰	امواج سوقی مقاومتی	۸.۶
۲۳۵	ناپایداری ویبل	۹.۶
۲۳۷	نظریهٔ جنبشی	۷
۲۳۷	معنای $f(v)$	۱.۷
۲۴۴	معادلات نظریهٔ جنبشی	۲.۷
۲۴۸	به دست آوردن معادلات سیال	۳.۷
۲۵۲	نوسانهای پلاسما و میرایی لاندائو	۴.۷
۲۵۸	معنای میرایی لاندائو	۵.۷
۲۶۸	محاسبهٔ فیزیکی میرایی لاندائو	۶.۷
۲۷۵	مدهای BGK و وان کمپن	۷.۷
۲۷۶	تأیید تجربی	۸.۷
۲۸۰	میرایی یونی لاندائو	۹.۷

۲۸۸	آثار جنبشی در میدان مغناطیسی	۱۰.۷
۳۰۱	اثرهای غیرخطی	۸
۳۰۱	مقدمه	۱.۸
۳۰۴	غلافها	۲.۸
۳۱۲	امواج شوک اکوستیکی یونی	۳.۸
۳۲۱	نیروی محرکه وزنی	۴.۸
۳۲۵	ناپایداریهای پارامتری	۵.۸
۳۴۱	پژواکهای پلاسما	۶.۸
۳۴۵	میرایی غیرخطی لاتدانو	۷.۸
۳۴۷	معادلات فیزیک پلاسما غیرخطی	۸.۸
۳۶۸	پیوست الف	
۳۷۴	پیوست ب	
۳۸۱	پیوست ج	
۳۸۸	پیوست د	
۴۴۹	نمایه	

## پیشگفتار ویراست دوم

در طی نه سالی که از نشر اول این کتاب می‌گذرد، شاهد پیشرفتهای سریع علمی در همجوشی هسته‌ای، فیزیک فضا و نظریه پلاسمای غیرخطی بوده‌ایم. در همین مدت، کمبود انرژی از یک سو و کاهش مشتری و زحل از سوی دیگر موجب آگاهی عمومی از کاربردهای مهم فیزیک پلازما در تولید انرژی و درک فضای اطراف ما شده است.

در این دوره، می‌بینیم که برای گداخت با محصورسازی مغناطیسی در توکاماهای الکتور در MIT برای عدد لایسون  $nT_E$  مقدار  $2 \times 10^{23} \text{cm}^{-3} \text{sec}$  به دست آمده است؛ گرمایش باریکه خنثی توکاماک PLT در پریستون به  $KT_i = 6.5 \text{keV}$  رسیده است؛ مقدار میانگین  $\beta$  در توکاماهای اوک ریج و جنرال اتمیک به ۳٪ تا ۵٪ افزایش یافته است؛ و پایداری پلاسماهای محصور آینه‌ای در لیورمور همراه با تزریق جریان یونی در شرایط وارونگی میدان نزدیک در ابزار 2XIIB حاصل شده است. ابداع آینه دویشته موجب شده تا محصورسازی مغناطیسی ابعاد جدید و جالب توجهی پیدا کند. نظرات جدیدی از قبیل جنبش فشرده، ابزارهای میدان سطحی، و دوره جنبش-آینه EBT ظهور یافته‌اند، و همچنین بعضی نظرات قدیمی همچون استلاراتور و تنگش میدان وارون مجدداً رایج شده‌اند. گرمایش در بسامد رادیویی، با توجه به قابلیت آن در ایجاد جریان dc، نقشی چشمگیر پیدا کرده است. شاید مهمتر از همه پیشرفت عظیمی باشد که در درک رفتار MHDی پلاسماهای جنبه‌ای، یعنی مدهای پارگی، جزایر مغناطیسی و آشوب، حاصل شده است. در همین زمان، مسائل طراحی راکتور، فناوری گداخت، و دوره‌های گداخت-شکاف برای اولین بار مورد توجه جدی قرار گرفته‌اند.

همجوشی با محصورسازی لختی از مرحله ابتدایی به فعالیتی تحقیقی به اندازه یک چهارم

همجوشی مغناطیسی رشد یافته است. با استفاده از لیزر  $25\text{TW}$  شیوا در لیورمور، تعداد  $10^9 \times 3$  نوترون گرماهسته‌ای در یک انفجار درونی گوی منفرد تولید شده‌اند، و تراکهای سوختی تا یکصد برابر چگالی هیدروژن مایع به دست آمده‌اند. فرایندهای پلاسمای غیرخطی دخیل در جفت‌شدگی تابش لیزری به ماده به صورت موشکافانه‌ای مورد توجه قرار گرفته‌اند، و پدیده‌های مهم جذب تشدید، بریلوئن القایی و پراکندگی رامان و تولید خودبه‌خودی میدان مغناطیسی به نحو مطلوب در مسیر درک درست قرار گرفته‌اند. وادارنده‌های ذره — یعنی باریک‌های الکترون، باریک‌های یون-نور و باریک‌های یون سنگین — به‌عنوان جانشینانی بالقوه برای لیزرها مطرح شده‌اند، و اینها مسائل پلاسمای وابسته خود را دارند.

در فیزیک پلاسمای فضا، مفهوم مغناطیس‌سپهر، با توجه به پیش‌بینی و مشاهده امواج سوت‌زن در مغناطیس‌سپهر مشتری، به‌خوبی توسعه یافته است. ساختار تاج خورشیدی و رابطه آن با میدانهای مغناطیسی لکه خورشیدی و تولید باد خورشیدی به‌خوبی درک شده است، و به‌نظر می‌رسد که توصیف نظری چگونگی پدید آمدن شفق شمالی به‌حد مطلوبی رسیده است.

به‌علت توجه روزافزون به همجوشی (گداخت)، فصل ۹ از ویرایش اول به‌صورت متنی جامع در فیزیک گداخت بسط یافته است و به‌عنوان جلد ۲ به‌چاپ خواهد رسید. محتوای این متن از یادداشتهای من در درس گداخت مغناطیسی مربوط به دوره تحصیلات تکمیلی حاصل شده است، اما در اینجا با تعویض محاسبات طولانی ریاضی به محاسبات کوتاه مبتنی بر تصویر فیزیکی آنچه که پلاسمای انجام می‌دهد به ساده‌سازی آن پرداخته‌ام. انجام چنین هدفی بود که تکمیل ویرایش دوم را حدود سه سال به تأخیر انداخت.

جلد ۱، شامل هشت فصل اول ویرایش اول با حفظ سادگی اولیه‌اش تصحیح شده و بسط یافته است. چند اشتباه جزئی با تذکر دانشجویان و استادان رفع شده‌اند. در پاسخ به درخواست آنها، دستگاه واحدها، با بی‌میلی، به (SI)  $\text{mks}$  تغییر یافته است. ضمن عذرخواهی از فیزیکدانان هم‌دوره خویش، می‌توان به این دل‌خوش کرد که ویرایش اول در قفسه کتاب گذاشته شود.

تانسور دی‌الکتریک برای پلاسمای سرد را در این ویرایش بیان کرده‌ام، اما آن را در پیوست ب قرار داده‌ام تا برای افراد مبتدی از پیچیده شدن فصلی که فعلاً هم طولانی و مشکل است اجتناب شود و در عین حال برای مراجعه فوری در دسترس باشد. فصل مربوط به نظریه جنبشی بسط داده شده است تا میرایی لاندائوی امواج اکوستیک یونها، تابع پاشیدگی پلاسمای امواج برنشتاین را شامل شود. اکنون به‌فصل مربوط به آثار غیرخطی بیانی از سولیتونها از طریق معادلات کورت‌وگ-دوری افزوده شده است. این بخش جزئیات بیشتری نسبت به بقیه جلد ۱ دارد، و این کار عمده‌اً صورت



گرفته است تا شوق دانشجوی پیشرفته را برانگیزد. بدین وسیله از راهنمایی‌های جی. مورالس و ک. نیشیکاوا قدردانی می‌کنم.

برای استفادهٔ معلمان، مسائل جدیدی حاصل از یک دهه برگزاری امتحانات افزوده شده‌اند و پاسخ مسائل قدیم نیز داده شده است. نمونه‌ای از یک امتحان نهایی سه‌ساعته برای دانشجویان دورهٔ کارشناسی را می‌توان در پیوست ج یافت. پاسخها توسط دیوید براور واریسی شده‌اند و هر اشتباهی در این مورد مربوط به وی است نه من.

سرانجام، از احساسات درونی خود خبرهای خوب و بدی دارم. خبر بد آن است که شاعر (پدرم) به سرزمین ترانهٔ ابدی ره سپرده است. خبر خوب آن است که دانش‌پژوه ابدی (مادرم) سرانجام به هدف خویش، دریافت Ph.D.، در ۷۲ سالگی نایل گردیده است. فرایند آموختن پایان ندارد.

فرانسیس اف. چن

لوس آنجلس ۱۹۸۳

## پیشگفتار ویراست اول

کتاب حاضر حاصل یادداشتهای درسی فیزیک پلاسما در دوره کارشناسی است که طی چندین سال در UCLA (دانشگاه کالیفرنیا در لوس آنجلس) ارائه شده است. امروزه توجه فزاینده به همجوشی مهارشده و استفاده گسترده فیزیک پلاسما در پژوهش فضایی و اخترفیزیک نسبیتی موجب شده است تا مطالعه پلاسماها، همانند موضوعاتی همچون ترمودینامیک و مکانیک کوانتومی، به عنوان بخشی از برنامه اصلی دانشجویان دوره کارشناسی قابل توجه باشد. با آن که هدف اولیه این کتاب برآورده کردن نیاز به متنی است که دانشجویان سال سوم و بالاتر حقیقتاً آن را درک کنند اما امید آن را دارم که متن حاضر بتواند به عنوان راهی بی دردسر برای آشنایی دانشمندان سایر شاخه‌ها - مثلاً فیزیک حالت جامد یا لیزر - مورد استفاده قرار گیرد.

در نگارش کتاب از دو اصل راهنما پیروی شده است: مراحل جبری را به عنوان تمرین به عهده خواننده واگذار نکنیم، و اجازه ندهیم تا محاسبات جبری موجب تیرگی تصویر فیزیکی شود. نیل به این دو هدف متضاد تا حد زیادی به دلیل تبیین پلاسما به عنوان دو سیال درهم نافذ امکانپذیر شده است. تصویر دو سیاله‌ای، حداقل برای پدیده‌های پلاسمای کم چگالی، هم آسانتر درک می‌شود و هم ارزیافت تک سیاله‌ای دقیقتر است.

در چند فصل اول، دانشجویان به مقدمات بسیار اندکی نیاز دارند اما برای فصلهای بعدی باید به طور همگام با مطالب پیشرفت داشته باشند. در یک دوره نه تا ده هفته‌ای (ثلثی) می‌توان شش فصل و نیم کتاب را تدریس کرد. محتوای این فصلها به دقت انتخاب شده است تا تنها آنچه را که اساسی است شامل شود. دو فصل و نیم دیگر را می‌توان در یک درس نیمسال (۱۴-۱۲ هفته‌ای) یا به صورت مطالعات اضافی مورد استفاده قرار داد. تلاش قابل توجهی صورت گرفته است تا بیان

روشنی از میرایی لاندائو — بدون نیاز به دانستن انتگرال‌گیری پربندی — ارائه شود. در ساده‌سازی تصویر فیزیکی، که ابتدا توسط جان داونسون ارائه گردید، خود را مرهون کمکهای تام آنیل و جورج اشمیت می‌دانم.

بعضی خوانندگان در استفاده از یکاهای الکتروستاتیک cgs دچار پریشانی خاطر خواهند شد. قطعاً بحث دربارهٔ یکاها بی‌معنی است؛ هر فیزیکدان با تجربه‌ای می‌تواند از دستگاه مورد علاقه‌اش به‌گونه‌ای بلیغ و با منطقی بدون خطا دفاع کند. دستگاه مورد استفاده در اینجا، که برای اجتناب از نوشتن غیرضروری  $c$ ،  $\mu_0$ ،  $\epsilon_0$  انتخاب شده است و با اغلب مقالات تحقیقاتی فیزیک پلاسما نیز سازگاری دارد، در پیوست توضیح داده شده است.

فرانسیس اف. چن

لوس آنجلس ۱۹۷۴

## مقدمه

### ۱.۱ وجود پلاسما در طبیعت

اغلب گفته می‌شود که ۹۹٪ ماده جهان در حالت پلاسما است؛ یعنی به صورت گاز الکتروسیسته‌داری است با اتمهایی که به یونهای مثبت و الکترونها منفی تجزیه شده‌اند. این برآورد ممکن است خیلی دقیق نباشد ولی نظر به اینکه درون ستارگان و جو آنها، ابریهای گازی و بیشتر هیدروژن میان ستاره‌ای پلاسما هستند، مسلماً دور از واقعیت نیست. در مجاورت خودمان، همین که جو زمین را ترک می‌کنیم، بی‌درنگ با پلاسمایی مواجه می‌شویم که از کمربندهای تابشی وان آلن و باد خورشیدی تشکیل شده است. از طرف دیگر، پلاسما در زندگی روزمره به چند نمونه محدود می‌شود: آذرخش، فروغ ملایم شفق شمالی، گاز داخل لامپ فلوروسان یا چراغ نئون و یونیدگی مختصری در خروجی موشک. به نظر می‌رسد محیط زندگی ما آن ۱ درصد جهان است که در آن پلاسما به طور طبیعی یافت نمی‌شود. دلیل این امر را می‌توان از معادله ساها دریافت که مقدار یونیدگی در یک گاز در حال تعادل گرمایی را پیش‌بینی می‌کند:

$$\frac{n_i}{n_n} \approx 2.4 \times 10^{21} \frac{T^{3/2}}{n_i} e^{-U_i/KT} \quad (1.1)$$

در اینجا  $n_i$  و  $n_n$  به ترتیب چگالی (تعداد بر  $\text{m}^3$ ) اتمهای یونیده و اتمهای خنثی،  $T$  دمای گاز برحسب  $^\circ\text{K}$ ،  $K$  ثابت بولتزمن، و  $U_i$  انرژی یونش گاز، یعنی انرژی لازم برحسب ارگ برای جدا کردن بیرونی‌ترین الکترون از اتم، است. (در این کتاب از واحدهای mks یا دستگاه بین‌المللی استفاده می‌کنیم.) برای هوا در دمای اتاق می‌توانیم  $n_n \approx 3 \times 10^{25} \text{m}^{-3}$  (مسئله ۱.۱)،  $T \approx 300^\circ\text{K}$  و  $U_i = 14.5 \text{eV}$  (برای نیتروژن) که در آن  $1 \text{eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{J}$ . یونش نسبی  $n_i/(n_n + n_i) \approx n_i/n_n$  که از معادله ۱.۱ پیش‌بینی می‌شود فوق‌العاده کوچک است:

$$\frac{n_i}{n_n} \approx 10^{-122}$$

با افزایش دما، درجه یونش تا زمانی که  $U_i$  تنها چند برابر  $KT$  است همچنان ناچیز باقی می‌ماند. سپس  $n_i/n_n$  به سرعت افزایش می‌یابد و گاز به حالت پلاسما در می‌آید. افزایش بیشتر دما سبب می‌شود که  $n_n$  کمتر از  $n_i$  شود، و سرانجام پلاسما کاملاً یونیده می‌شود. به همین دلیل است که پلاسما در اجسام نجومی با دمای میلیونها درجه، و نه در زمین، یافت می‌شود. حیات نمی‌تواند با پلاسما، لااقل آن نوع پلاسمایی که ما درباره‌اش صحبت می‌کنیم، وجود داشته باشد. وجود طبیعی پلاسما در جاهای زیاد باعث شده است که آن را "حالت چهارم ماده" بنامیم.

اگرچه قصد تأکید بر معادله ساها را نداریم، ولی بهتر است معنای فیزیکی آن را بیان کنیم. اتمهای یک گاز دارای انرژیهای گرمایی گسترده‌ای هستند، و یک اتم هنگامی یونیده می‌شود که به‌طور تصادفی متحمل برخوردی شود که در آن انرژی به اندازه کافی زیاد است تا یک الکترون از آن جدا شود. در یک گاز سرد، این برخوردهای پراثری به ندرت اتفاق می‌افتند، زیرا اتم باید با یک رشته برخوردهای "مناسب" تا انرژیهای خیلی بیشتر از انرژی متوسط شتابدار شود. عامل نمایی معادله ۱.۱ بیانگر این حقیقت است که تعداد اتمهای تند به‌طور نمایی با  $U_i/KT$  کاهش می‌یابد. وقتی اتمی یونیده می‌شود، تا زمانی که به الکترونی می‌رسد باردار باقی می‌ماند. و سپس به احتمال زیاد با الکترون بازترکیب می‌شود و دوباره به صورت خنثی در می‌آید. واضح است که آهنگ بازترکیب به چگالی الکترونها که می‌توانیم برابر با  $n_i$  بگیریم بستگی دارد. بنابراین، چگالی یونی حالت تعادل باید با  $n_i$  کاهش یابد؛ و این دلیلی است برای عامل  $n_i^{-1}$  در سمت راست معادله ۱.۱، موجودیت پلاسما در محیط میان ستاره‌ای به علت مقدار کم  $n_i$  (حدود ۱ در هر  $\text{cm}^3$ ) و در نتیجه آهنگ کم بازترکیب است.

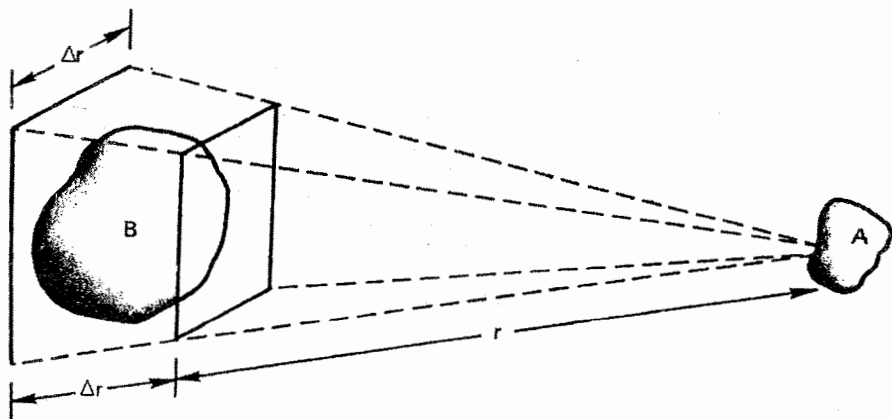
## ۲.۱ تعریف پلاسما

هر گاز یونیده را نمی‌توان پلاسما نامید؛ البته همواره یونیدگی اندکی در هر گازی وجود دارد. یک تعریف مفید به صورت زیر است:

پلاسما گاز شبه خنثایی از ذرات باردار و خنثی است که رفتار جمعی از خود نشان می‌دهد. اکنون باید "شبه خنثی" و "رفتار جمعی" را تعریف کنیم. معنی شبه خنثی بودن در بخش ۴.۱ روشن خواهد شد. ولی منظور از "رفتار جمعی" را در زیر بیان می‌کنیم.

نیروهای وارد بر یک مولکول، مثلاً مولکول هوای معمولی، در نظر بگیرید. چون مولکول خنثی است، نیروی الکترومغناطیسی برابندی روی آن وجود ندارد، و نیروی ثقل قابل اغماض است. مولکول آزادانه حرکت می‌کند تا اینکه با مولکول دیگری برخورد کند، و این برخوردها حرکت ذره را تعیین می‌کنند. نیروی ماکروسکوپی اعمال شده به یک گاز خنثی، مثلاً از یک بلندگوی تولیدکننده امواج صوتی، توسط برخورد به اتمهای انفرادی منتقل می‌شود. در پلاسما که دارای ذرات باردار است وضعیت کاملاً فرق می‌کند. چون این بارها به اطراف حرکت می‌کنند، می‌توانند تمرکزهای موضعی با بارهای منفی یا مثبت تولید کنند که موجب میدانهای الکتریکی می‌شوند. همچنین، حرکت بارها جریانه‌ها و در نتیجه میدانهای مغناطیسی به وجود می‌آورند. این میدانها بر حرکت ذرات باردار دیگر که دورتر قرار گرفته‌اند اثر می‌گذارند.

اکنون تأثیر متقابل دو ناحیه باردار جزئی از یک پلاسما را که در فاصله  $r$  از یکدیگر قرار گرفته‌اند بررسی می‌کنیم (شکل ۱.۱). نیروی کولنی بین  $A$  و  $B$  به صورت  $1/r^2$  کاهش می‌یابد. اما، برای



شکل ۱.۱ نمایش برد بلند نیروهای الکتروستاتیک در یک پلاسما.

یک زاویه فضایی معین (یعنی، ثابت  $\Delta r/r$ )، حجم پلاسما در  $B$  که می‌تواند بر  $A$  اثر کند با  $r^2$  افزایش می‌یابد. بنابراین، اجزاء پلاسما حتی در فاصله‌های دور نیرویی بر یکدیگر وارد می‌کنند. همین نیروی کولنی بلندبرد است که برای پلاسما مجموعه بزرگی از حرکت‌های ممکن را فراهم می‌کند و حوزه مطالعه‌ای را که فیزیک پلاسما نامیده شده است غنی می‌سازد. در حقیقت، جالبترین نتایج به پلاسمای به اصطلاح "بی‌برخورد" مربوط می‌شوند، که در آن نیروهای الکترومغناطیسی بلندبرد به قدری از نیروهای مربوط به برخوردهای موضعی معمولی بزرگترند که می‌توان از همه این نیروهای برخوردی صرف‌نظر کرد. منظور ما از "رفتار جمعی" حرکت‌هایی است که نه تنها به شرایط موضعی بلکه به حالت پلاسما در ناحیه‌های دور نیز بستگی دارند.

واژه پلاسما نام نامناسبی به نظر می‌رسد. این کلمه از لغت یونانی  $\piλάσμα, -ατος, τή$  گرفته شده است که به معنی هر چیز قالب‌ریزی شده یا ساخته شده است. پلاسما، به علت رفتار جمعی، گرایش بی‌پیری از تأثیرات خارجی ندارد، و اغلب طوری رفتار می‌کند که گویی اختیارش با خودش است.

### ۳.۱ مفهوم دما

قبل از آنکه بحث را ادامه دهیم، بهتر است تصورات فیزیکی خود از دما را مرور کنیم و گسترش دهیم. گازی که در تعادل گرمایی است دارای ذراتی با تمام سرعت‌هاست، و محتملترین توزیع این سرعت‌ها توزیع ماکسولی نامیده می‌شود. برای سادگی، گازی را در نظر بگیرید که ذرات آنها تنها می‌توانند در یک بعد حرکت کنند. (این فرض کاملاً هم بی‌پایه نیست، برای مثال، یک میدان مغناطیسی قوی می‌تواند الکترون‌ها را مقید کند تا تنها در امتداد خطوط نیرو حرکت کنند.) توزیع ماکسولی یک بعدی عبارت است از

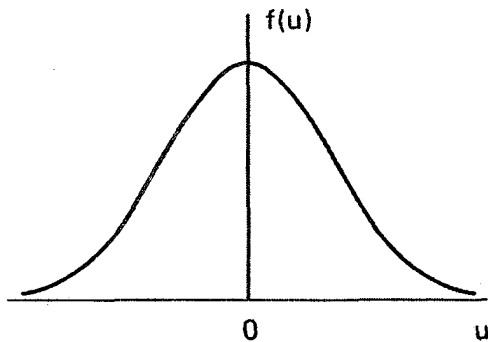
$$f(u) = A \exp\left(-\frac{1}{2}mu^2/KT\right) \quad (2.1)$$

که در آن  $f du$  تعداد ذرات بر  $m^3$  است که سرعت‌هایی بین  $u$  و  $u + du$  دارند،  $\frac{1}{2}mu^2$  انرژی جنبشی است، و  $K$  ثابت بولتزمن است

$$K = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/}^\circ\text{K}$$

چگالی  $n$ ، یا تعداد ذرات بر  $m^3$ ، با رابطه زیر داده می‌شود (شکل ۲.۱)

$$n = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du \quad (3.1)$$



شکل ۲.۱ توزیع ماکسولی سرعت.

ثابت  $A$  با رابطه زیر به چگالی مربوط می شود (مسئله ۲.۱)

$$A = n \left( \frac{m}{2\pi KT} \right)^{3/2} \quad (4.1)$$

پهنای توزیع با ثابت  $T$  مشخص می شود، که آن را دما می نامیم. برای فهمیدن معنی دقیق  $T$  می توانیم انرژی جنبشی متوسط ذرات در این توزیع را محاسبه کنیم:

$$E_{av} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m u^2 f(u) du}{\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du} \quad (5.1)$$

با تعریف

$$y = u/v_{th} \quad \text{و} \quad v_{th} = (2KT/m)^{1/2} \quad (6.1)$$

می توانیم معادله ۲.۱ را به صورت زیر بنویسیم

$$f(u) = A \exp(-u^2/v_{th}^2)$$

و معادله ۵.۱ به صورت زیر درمی آید

$$E_{av} = \frac{\frac{1}{2} m A v_{th}^2 \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(-y^2)] y^2 dy}{A v_{th} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy}$$



که در آن، با انتگرالگیری جزء به جزء، داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot [\exp(-y^2)]y dy = \left[ -\frac{1}{2}[\exp(-y^2)]y \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{2} \exp(-y^2) dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy$$

با حذف انتگرالها، به دست می‌آوریم

$$E_{av} = \frac{\frac{1}{2} m A v_{th}^2 \frac{1}{2}}{A v_{th}} = \frac{1}{2} m v_{th}^2 = \frac{1}{2} K T \quad (7.1)$$

بنابراین، انرژی جنبشی متوسط  $\frac{1}{2} K T$  است.

به آسانی می‌توان این نتیجه را به سه بعد تعمیم داد. در این مورد توزیع ماکسولی عبارت است از

$$f(u, v, w) = A_T \exp\left[-\frac{1}{2} m(u^2 + v^2 + w^2)/KT\right] \quad (8.1)$$

که در آن

$$A_T = n \left( \frac{m}{2\pi KT} \right)^{3/2} \quad (9.1)$$

انرژی جنبشی متوسط عبارت است از

$$E_{av} = \frac{\iiint_{-\infty}^{\infty} A_T \frac{1}{2} m(u^2 + v^2 + w^2) \exp\left[-\frac{1}{2} m(u^2 + v^2 + w^2)/KT\right] du dv dw}{\iiint_{-\infty}^{\infty} A_T \exp\left[-\frac{1}{2} m(u^2 + v^2 + w^2)/KT\right] du dv dw}$$

می‌بینیم که این رابطه نسبت به  $u, v, w$  متقارن است، زیرا توزیع ماکسولی همسانگرد است. در نتیجه سه جمله صورت با یکدیگر یکسان‌اند. کافی است اولین جمله را محاسبه کنیم و آن را در سه ضرب کنیم:

$$E_{av} = \frac{3 A_T \int \frac{1}{2} m u^2 \exp(-\frac{1}{2} m u^2 / KT) du \iint \exp[-\frac{1}{2} m(v^2 + w^2) / KT] dv dw}{A_T \int \exp(-\frac{1}{2} m u^2 / KT) du \iint \exp[-\frac{1}{2} m(v^2 + w^2) / KT] dv dw}$$

با استفاده از نتیجه قبلی، داریم

$$E_{av} = \frac{3}{2} K T \quad (10.1)$$

نتیجه کلی این است که  $E_{av}$  برای هر درجه آزادی برابر با  $\frac{1}{2} K T$  است.

چون  $T$  و  $E_{av}$  رابطه بسیار نزدیکی با هم دارند، در فیزیک پلاسما معمولاً دما را برحسب واحدهای انرژی بیان می‌کنند، برای اجتناب از اشتباه در تعداد ابعاد موجود، برای نشان دادن دما به جای  $E_{av}$  از انرژی متناظر با  $KT$  استفاده می‌کنند. برای  $KT = 1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$ ، داریم

$$T = \frac{1.6 \times 10^{-19}}{1.38 \times 10^{-23}} = 11600$$

بنابراین عامل واگردانی عبارت است از

$$1 \text{ eV} = 11600^\circ \text{K} \quad (11.1)$$

منظور از پلاسمای ۲ الکترون ولتی این است که  $KT = 2 \text{ eV}$ ، یا در سه بعد  $E_{av} = 3 \text{ eV}$ . جالب است که پلاسما می‌تواند در یک زمان چندین دما داشته باشد. بارها اتفاق می‌افتد که یونها و الکترونها دارای توزیعیهای ماکسولی جداگانه‌ای با دماهای مختلف  $T_e$  و  $T_i$  هستند. این وضعیت به آن دلیل پیش می‌آید که آهنک برخورد بین خود یونها یا خود الکترونها بیشتر از آهنک برخورد بین یک الکترون و یک یون است. بنابراین، هر یک از گونه‌ها می‌تواند در تعادل گرمایی مخصوص به خودش باشد، ولی پلاسما ممکن است آن قدر دوام نیابد تا این دو دما با هم مساوی شوند. هنگامی که میدان مغناطیسی  $B$  وجود دارد، حتی یک گونه، مثلاً یونها، می‌تواند دارای دو دما باشد. دلیل این است که نیروهای وارد بر یک یون در امتداد  $B$  و عمود بر  $B$  با هم متفاوتند (به علت نیروی لورنتس) بنابراین، مؤلفه‌های سرعت عمود بر  $B$  و موازی با  $B$  ممکن است متعلق به توزیعیهای ماکسولی متفاوتی با دماهای  $T_{\parallel}$  و  $T_{\perp}$  باشند.

در پایان این بازنگری مفهوم دما، باید این بدفهمی رایج که دمای زیاد لزوماً به معنی گرمای زیاد است رفع کنیم. مردم معمولاً با دانستن اینکه دمای الکترون داخل لامپ فلوروسان حدود  $20000^\circ \text{K}$  است متحیر می‌شوند. «عجب، آن قدر هم داغ به نظر نمی‌رسد!» البته، ظرفیت گرمایی را هم باید در نظر گرفت. چگالی الکترونها در داخل لامپ فلوروسان خیلی کمتر از چگالی یک گاز در فشار جو است، و مقدار کل گرمای انتقال یافته به دیواره توسط الکترونهايي که با سرعت گرمایی خود با آن برخورد می‌کنند خیلی زیاد نیست. شاید اتفاقاً مشاهده کرده باشید که افتادن خاکستر سیگار روی دست بی‌خطر است. اگرچه دما آن قدر زیاد است که باعث سوختگی شود، مقدار کل گرمای مربوط تا این حد نیست. بیشتر پلاسماهای آزمایشگاهی دماهایی از مرتبه  $10000000^\circ \text{K}$  ( $100 \text{ eV}$ ) دارند، ولی با چگالیهای  $10^{18}$  تا  $10^{19}$  بر  $\text{m}^3$  گرمایش دیواره‌ها مسئله جدی نیست.

## مسائل

۱.۱ چگالی یک گاز کامل را در شرایط زیر (برحسب  $m^{-3}$ ) حساب کنید:

(الف) در  $0^\circ C$  و فشار  $760 \text{ Torr}$  ( $1 \text{ mm Hg} = 1 \text{ Torr}$ ). نتیجه را عدد لوشمیت می‌نامند.

(ب) در خلأ  $10^{-2}$  توری و دمای اتاق ( $20^\circ C$ ) از حفظ دانستن این عدد برای تجربه‌گران مفید است ( $1 \text{ micron} = 10^{-2}$  تور).

۲.۱ ثابت  $A$  را برای یک توزیع ماکسولی یک بعدی بهنجار شده پیدا کنید

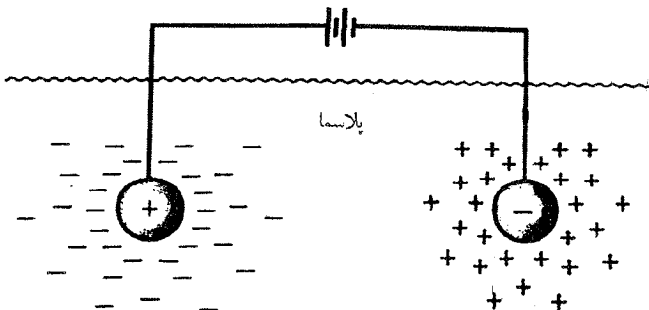
$$\hat{f}(u) = A \exp(-mu^2 / 2KT)$$

به طوری که

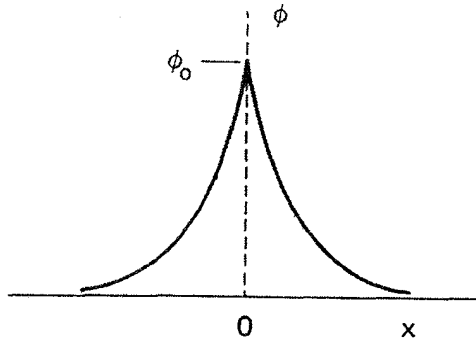
$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(u) du = 1$$

## ۴.۱ حفاظ دبای

یکی از مشخصات اساسی رفتار پلازما توانایی آن برای دفع پتانسیل‌های الکتریکی است که به آن اعمال می‌شوند. فرض کنید می‌خواهیم در داخل یک پلازما با وارد کردن دو گلوله باردار متصل به یک باتری، میدانی الکتریکی به وجود آوریم (شکل ۳.۱). این گلوله‌ها ذره‌های با بارهای مخالف را جذب می‌کنند، و تقریباً بلافاصله ابری از یونها اطراف گلوله منفی و ابری از الکترون‌ها دور گلوله مثبت را می‌گیرند. (فرض می‌کنیم یک لایه دی‌الکتریک پلازما را عملاً از بازترکیب روی سطح نگهدارد، یا اینکه باتری به قدری بزرگ است که علیرغم بازترکیب می‌تواند پتانسیل را نگهدارد.) اگر پلازما سرد بود و حرکت‌های گرمایی وجود نداشت، مقدار بار موجود در ابر درست برابر با بار گلوله می‌شد. در این وضعیت حفاظ کامل بود. و میدان الکتریکی در حجم پلازما بیرون از ناحیه



شکل ۳.۱ حفاظ دبای.



شکل ۴.۱ توزیع پتانسیل نزدیک شبکه در پلاسما.

ایرها وجود نداشت. از سوی دیگر، اگر دما متناهی باشد، ذراتی که در لبه ابر هستند، جایی که میدان ضعیف است، به اندازه کافی انرژی گرمایی دارند تا از چاه پتانسیل الکتروستاتیک فرار کنند. بنابراین، "لبه" ابر در شعاعی قرار می‌گیرد که انرژی پتانسیل تقریباً برابر با انرژی گرمایی  $KT$  ذرات است، و حفاظ کامل نیست. پتانسیلهایی از مرتبه  $KT/e$  می‌توانند به درون پلاسما نشت کنند و باعث ایجاد میدانهای الکتریکی متناهی در آن شوند.

اکنون ضخامت تقریبی یک چنین ابر باری را محاسبه می‌کنیم. فرض کنید پتانسیل  $\phi$  روی صفحه  $x = 0$  با یک شبکه کاملاً شفاف در مقدار  $\phi_0$  نگهداشته شود (شکل ۴.۱) می‌خواهیم  $\phi(x)$  را حساب کنیم. برای سادگی، نسبت جرم یون به الکترون را بینهایت می‌گیریم؛ بنابراین، یونها حرکت نمی‌کنند بلکه زمینه یکنواختی از بار مثبت تشکیل می‌دهند. به عبارت دقیقتر، می‌توانیم بگوییم که  $M/m$  آن قدر بزرگ است که لختی یونها باعث می‌شود که آنها در مدت آزمایش حرکت قابل ملاحظه‌ای نداشته باشند. معادله پواسون در یک بُعد عبارت است از

$$\epsilon_0 \nabla^2 \phi = \epsilon_0 \frac{d^2 \phi}{dx^2} = -e(n_i - n_e) \quad (Z = 1) \quad (12.1)$$

اگر چگالی در فاصله دور  $n_\infty$  باشد، داریم

$$n_i = n_\infty$$

در حضور انرژی پتانسیل  $q\phi$ ، تابع توزیع الکترون به صورت زیر است

$$f(u) = A \exp \left[ - \left( \frac{1}{v} m u^2 + q\phi \right) / KT_e \right]$$

اثبات این رابطه در اینجا ارزشی ندارد. آنچه این معادله می‌گوید به‌طور مستقیم آشکار است، در جایی که انرژی پتانسیل بزرگ است ذرات کمتری وجود دارند، زیرا همه ذرات انرژی کافی برای رسیدن به آنجا را ندارند. با انتگرال‌گیری از  $f(u)$  روی  $u$ ، با قرار دادن  $q = -e$ ، و با توجه به اینکه  $n_e(\phi \rightarrow 0) = n_\infty$  به دست می‌آوریم

$$n_e = n_\infty \exp(e\phi/KT_e)$$

این معادله را با بیش فیزیکی بیشتری در بخش ۵.۳ محاسبه می‌کنیم. با قرار دادن  $n_e$  و  $n_i$  در معادله ۱۲.۱، داریم

$$\epsilon_0 \frac{d^2\phi}{dx^2} = en_\infty \left\{ \left[ \exp\left(\frac{e\phi}{KT_e}\right) \right] - 1 \right\}$$

در ناحیه‌ای که  $|e\phi/KT_e| \ll 1$  می‌توانیم تابع نمایی را به‌رشته تیلور بسط دهیم:

$$\epsilon_0 \frac{d^2\phi}{dx^2} = en_\infty \left[ \frac{e\phi}{KT_e} + \frac{1}{2} \left(\frac{e\phi}{KT_e}\right)^2 + \dots \right] \quad (13.1)$$

برای ناحیه نزدیک شبکه، که در آن  $|e\phi/KT_e|$  ممکن است بزرگ باشد ساده‌سازی امکان ندارد. خوشبختانه، این ناحیه سهم زیادی در ضخامت ابر (که غلاف نامیده می‌شود) ندارد، زیرا پتانسیل در آنجا خیلی سریع کاهش می‌یابد. با نگهداشتن تنها جمله‌های خطی در معادله ۱۳.۱، داریم

$$\epsilon_0 \frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{n_\infty e^2}{KT_e} \phi \quad (14.1)$$

با تعریف

$$\lambda_D \equiv \left( \frac{\epsilon_0 KT_e}{ne^2} \right)^{1/2} \quad (15.1)$$

که در آن  $n$  به جای  $n_\infty$  قرار گرفته است، می‌توانیم جواب معادله ۱۴.۱ را به صورت زیر بنویسیم

$$\phi = \phi_0 \exp(-|x|/\lambda_D) \quad (16.1)$$

کمیت  $\lambda_D$ ، که طول دمای نامیده می‌شود، اندازه‌ای از فاصله حفاظ یا ضخامت غلاف است.

توجه کنید که با افزایش چگالی،  $\lambda_D$  کاهش می‌یابد، زیرا هر لایه پلاسما حاوی الکترونهاى بیشتری است. به علاوه،  $\lambda_D$  با افزایش  $KT_e$  افزایش می‌یابد. بدون اغتشاش گرمایی، ایر بار به یک لایه پهنای نازک فرو می‌ریزد. سرانجام، دمای الکترون است که در تعریف  $\lambda_D$  به کار می‌رود زیرا الکترونها، که تحرک پذیرتر از یونها هستند، معمولاً با حرکت خود بار منفی اضافی یا نقصانی تولید می‌کنند و کار حفاظ را انجام می‌دهند. فقط در موقعیتهای خاصی این امر صادق نیست (مسئله ۵.۱).

صورت‌های مفید معادله ۱۵.۱ عبارت‌اند از:

$$\lambda_D = 69(T/n)^{1/2} \text{ m}, \quad (T \text{ بر حسب } ^\circ\text{K})$$

$$\lambda_D = 7430(KT/n)^{1/2} \text{ m}, \quad (KT \text{ بر حسب eV}) \quad (17.1)$$

اکنون در موقعیتی هستیم تا "شبه‌خشی" بودن را تعریف کنیم. اگر ابعاد  $L$  یک دستگاه خیلی بزرگتر از  $\lambda_D$  باشند، آن‌گاه هر زمانی که تمرکزهای موضعی بار به وجود آیند با پتانسیلهای خارجی به دستگاه اعمال شوند، در مقابلشان حفاظی در فاصله‌ای کوتاه در مقایسه با  $L$  ایجاد می‌شود، و قسمت عمده پلاسما از پتانسیلها یا میدانهای الکتریکی آزاد نگه داشته می‌شود. بیرون از غلاف روی دیواره یا روی یک مانع،  $\nabla^2 \phi$  خیلی کوچک است، و نوعاً  $m_i$  با تقریبی بهتر از  $1$  در  $10^6$  برابر با  $n_e$  است. عدم موازنه بار کوچکی موجب پتانسیلهایی از مرتبه  $KT/e$  می‌شود. پلاسما "شبه‌خشی" است، یعنی به اندازه کافی خشی است که می‌توان فرض کرد  $n_i \simeq n_e \simeq n$  که در آن چگالی مشترک است و چگالی پلاسما نامیده می‌شود، ولی آنقدر خشی نیست که همه نیروهای الکترومغناطیسی مورد توجه صفر باشند.

ملاک پلاسما بودن یک گاز یونیده این است که به قدر کافی چگال باشد که  $\lambda_D$  خیلی کوچکتر از  $L$  شود.

پدیده حفاظ دمای همچنین در دستگاههای تک‌گونه‌ای، نظیر جریانهای الکترون در کلیسترون‌ها و مگنترون‌ها یا باریکه پروتونی در سیکلوترون، به شکل تغییر یافته‌ای رخ می‌دهد. در چنین موردهایی، هر تجمع موضعی از ذرات باعث یک میدان الکتریکی حفاظت نشده بزرگ می‌شود مگر آنکه چگالی بسیار کوچک باشد (که اغلب چنین است). پتانسیل اعمال شده خارجی، مثلاً توسط یک کاوه سیمی، با تنظیم چگالی نزدیک الکتروود دفع می‌شود. دستگاههای تک‌گونه‌ای، یا پلاسماهای خشی نشده، به طور دقیق پلاسما نیستند؛ ولی از ابزار ریاضی فیزیک پلاسما می‌توان برای چنین دستگاههایی استفاده کرد.

## ۵.۱ پارامتر پلاسما

توصیف حفاظ دبابی که در بالا بیان کرده‌ایم فقط وقتی معتبر است که ذرات در ابر بار به تعداد کافی وجود داشته باشند. واضح است که اگر در ناحیهٔ غلاف فقط یک یا دو ذره موجود باشد، حفاظ دبابی به‌طور آماری مفهوم معتبری نخواهد بود. با استفاده از معادلهٔ ۱۷.۱، می‌توانیم تعداد  $N_D$ ی ذرات در ”کرهٔ دبابی“ را محاسبه کنیم:

$$N_D = n \frac{4}{3} \pi \lambda_D^3 = 1.38 \times 10^6 T^{3/2} / n^{1/2} \quad (T \text{ برحسب } ^\circ\text{K}) \quad (18.1)$$

علاوه بر  $L \ll \lambda_D$ ، ”رفتار جمعی“ ایجاب می‌کند که

$$N_D \gg 1 \quad (19.1)$$

## ۶.۱ معیارهای پلاسما

تاکنون دو شرط برای اینکه یک گاز یونیده را بتوان پلاسما نامید مطرح کرده‌ایم. شرط سوم به برخوردها مربوط است. برای مثال، گاز یونیدهٔ ضعیف در خروجی یک جت مشخصات پلاسما را ندارد زیرا ذرات باردار آنقدر با اتمهای خنثی برخورد می‌کنند که حرکت آنها توسط نیروهای هیدرودینامیک معمولی تعیین می‌شود نه توسط نیروهای الکترومغناطیسی. اگر  $\omega$  بسامد نوعی نوسانهای پلاسما و  $\tau$  زمان متوسط بین برخوردها با اتمهای خنثی باشد، برای آنکه گاز مانند پلاسما، و نه یک گاز خنثی، رفتار کند لازم است که  $\omega\tau > 1$ . بنابراین، سه شرط مشخص‌کنندهٔ پلاسما عبارت‌اند از:

$$\lambda_D \ll L \quad 1.1$$

$$N_D \gg 1 \quad 1.2$$

$$\omega\tau > 1 \quad 1.3$$

## مسائل

۳.۱ روی نمودار لگاریتمی  $n_e$  برحسب  $KT_e$ ، با  $n_e$  از  $10^6 \text{ m}^{-3}$  تا  $10^{25} \text{ m}^{-3}$ ، و  $KT_e$  از  $1 \text{ eV}$  تا  $10^5 \text{ eV}$ ، خطوط ثابت  $\lambda_D$  و  $N_D$  را ترسیم کنید. روی این نمودار نقاط زیر را مشخص کنید ( $n$  برحسب  $\text{m}^{-3}$ ،  $KT$  برحسب  $\text{eV}$ ):

۱. راکتور همجوشی عادی:  $KT = 10000$  و  $n = 10^{21}$ .

۲. آزمایشهای همجوشی معمولی:  $n = 10^{11}$ ،  $KT = 100$  (چنبر).  $n = 10^{23}$ .

$$KT = 1000 \text{ (تنگش).}$$

$$3. \text{ یون سیپر نوعی: } n = 10^{11}, KT = 0.5 \text{ eV.}$$

$$4. \text{ تخلیه تابان نوعی: } n = 10^{15}, KT = 2 \text{ eV.}$$

$$5. \text{ شعله نوعی: } n = 10^{14}, KT = 0.1 \text{ eV.}$$

$$6. \text{ پلاسمای سزیمی نوعی: } n = 10^{17}, KT = 0.2 \text{ eV.}$$

$$7. \text{ فضای میان سیاره‌ای: } n = 10^6, KT = 0.1 \text{ eV.}$$

نشان دهید که اینها پلاسما هستند.

۴.۱ فشاری را که یک پلاسمای گرما هسته‌ای بر ظرفش وارد می‌کند برحسب اتمسفر و تن بر فوت مربع پیدا کنید. فرض کنید  $KT_e = KT_i = 2 \text{ keV}$ ,  $n = 10^{21} \text{ m}^{-3}$ , و  $p = nKT$  که در آن  $T = T_e + T_i$ .

۵.۱ در یک حالت کاملاً پایا، هم الکترونها و هم یونها از رابطه بولتزمن پیروی می‌کنند

$$n_j = n_0 \exp(-q_j \phi / KT_j)$$

نشان دهید که برای یک شبکه شفاف و نامتناهی که با پتانسیل  $\phi$  باردار شده است فاصله حفاظ از رابطه تقریبی زیر به دست می‌آید

$$\lambda_D^{-2} = \frac{ne^2}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{KT_e} + \frac{1}{KT_i} \right)$$

نشان دهید که  $\lambda_D$  توسط دمای گونه سردتر تعیین می‌شود.

۶.۱ یک روش دیگر به دست آوردن  $\lambda_D$  بیش عمیقتری به معنی آن خواهد داد. دو تخته موازی نامتناهی در  $x = \pm d$  را که در پتانسیل  $\phi = 0$  قرار گرفته‌اند در نظر بگیرید. فضای بین آنها توسط گازی با چگالی  $n$  از ذرات باردار  $q$  به طور یکنواخت پر شده است.

(الف) با استفاده از معادله پواسون نشان دهید که توزیع پتانسیل بین تخته‌ها عبارت است از

$$\phi = \frac{nq}{2\epsilon_0} (d^2 - x^2)$$

(ب) نشان دهید که برای  $d > \lambda_D$ ، انرژی لازم برای انتقال یک ذره از یک تخته تا صفحه وسط بزرگتر از انرژی جنبشی متوسط ذرات است.

۷.۱ برای موردهای زیر  $\lambda_D$  و  $N_D$  را محاسبه کنید:



(الف) یک تخلیه تابان با  $n = 10^{16} \text{ m}^{-3}$ ،  $KT_e = 2 \text{ eV}$ .

(ب) یون سیپهر زمین، با  $n = 10^{12} \text{ m}^{-3}$ ،  $KT_e = 0.1 \text{ eV}$ .

(ج) یک  $\theta$ -تنگش، با  $n = 10^{23} \text{ m}^{-3}$ ،  $KT_e = 800 \text{ eV}$ .

## ۷.۱ کاربردهای فیزیک پلاسما

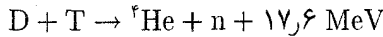
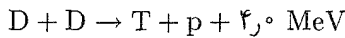
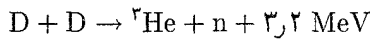
پلاسماها را می‌توان با دو پارامتر  $n$  و  $KT_e$  مشخص کرد. کاربردهای پلاسما گستره بسیار وسیعی از  $n$  و  $KT_e$  را در بر می‌گیرند:  $n$  از  $10^6$  تا  $10^{24} \text{ m}^{-3}$  یعنی بیش از  $10^{28}$  برابر تغییر می‌کند، و  $KT_e$  می‌تواند بیش از  $10^7$  برابر از  $0.1$  تا  $10^6 \text{ eV}$  تغییر کند. بعضی از این کاربردها را به اختصار در زیر بیان می‌کنیم. گستره بسیار بزرگ چگالی فوق را می‌توان از اینجا درک کرد که هوا و آب از لحاظ چگالی با ضریب  $10^3$  با هم فرق دارند، در حالی که آب و ستاره‌های کوتوله سفید تنها از لحاظ چگالی با ضریب  $10^5$  از هم متمایز می‌شوند. حتی ستارگان نوترونی فقط  $10^{15}$  برابر چگالتز از آب هستند. با این حال، پلاسماهای گازی در کل گستره چگالی  $10^{28}$  را می‌توان با مجموعه معادلات یکسانی توصیف کرد، زیرا فقط قوانین کلاسیک (غیرمکانیک کوانتومی) فیزیک را لازم داریم.

### ۱.۷.۱ تخلیه‌های گازی (الکترونیک گازی)

قدیمیترین کار با پلاسما را لانگمویر، تانکس و همکاران آنها در دهه ۱۹۲۰ انجام دادند. منشأ این تحقیق نیاز به توسعه لوله‌های خلأ بود طوری که بتوانند جریانهای زیاد را عبور دهند، و از این رو می‌بایست با گازهای یونیده پر شوند. این تحقیق با تخلیه‌های تابان کم یونس و ستون مثبت نوعاً با  $KT_e \simeq 2 \text{ eV}$  و  $10^{18} \text{ m}^{-3} < n < 10^{12}$  انجام شد. اینجا بود که پدیده حفاظ کشف شد؛ غلاف اطراف الکتروود با چشم به صورت یک لایه تاریک قابل رؤیت بود. امروزه تخلیه‌های گازی در یکسوکننده‌های جیوه‌ای، تیراترونها، هیدروژن، ایگنیترون‌ها، جرقه‌های الکتریکی، قوسهای جوشکاری، لامپهای فلوروسان و نئون، و تخلیه‌های آذرخشی دیده می‌شوند.

### ۲.۷.۱ همجوشی گرما هسته‌ای کنترل شده

فیزیک پلاسمای جدید حدوداً از سال ۱۹۵۲ هنگامی که کنترل شدن واکنش همجوشی بمبهای هیدروژنی برای ساختن رآکتور پیشنهاد شد آغاز می‌گردد. واکنشهای اصلی شامل اتمهای دوتریوم (D) و تریتیوم (T)، عبارتند از:



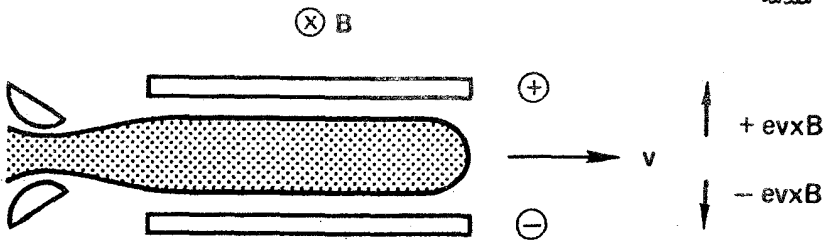
سطح مقطعهای مربوط به این واکنشهای همجوشی فقط برای انرژیهای فرودی بیشتر از ۵ keV قابل ملاحظه هستند. باریکه‌های شتابدار دوترونها که هدفی را بمباران می‌کنند مؤثر نخواهند بود، زیرا اغلب آنها قبل از آنکه واکنش همجوشی انجام دهند انرژی خود را به علت پراکندگی از دست می‌دهند. بنابراین لازم است پلاسمایی را به وجود آوریم که انرژیهای گرمایی در آن حدود ۱۰ keV باشند. مسئله گرم کردن و نگهداری چنین پلاسمایی باعث رشد سریع علم فیزیک پلاسما از سال ۱۹۵۲ بوده است. هنوز مسئله حل نشده است، و اکثر تحقیقات جدی در فیزیک پلاسما به منظور حل این مسئله انجام می‌شوند.

### ۳.۷.۱ فیزیک فضا

کاربرد مهم دیگر فیزیک پلاسما در مطالعه فضای اطراف زمین است. جریانی دائمی از ذرات باردار، که باد خورشید نامیده می‌شود، به مغناطیس سپهر فرود می‌آید، و مغناطیس سپهر، که در این فرایند تغییر شکل می‌دهد، ما را از این تابش حفظ می‌کند. پارامترهای نوعی در باد خورشیدی عبارت‌اند از  $n = 5 \times 10^6 \text{ m}^{-3}$ ,  $KT_e = 5 \text{ eV}$ ,  $KT_i = 1 \text{ eV}$ ,  $B = 5 \times 10^{-9} \text{ T}$  و سرعت  $300 \text{ km/sec}$ . یون سپهر که گستره آن از ارتفاع ۵۰ تا ۱۰ km برابر شعاع زمین است توسط پلاسمای یونیده ضعیفی که چگالی آن با ارتفاع تا  $n = 10^{12} \text{ m}^{-3}$  تغییر می‌کند اشغال شده است. دما فقط  $1 \text{ eV}$  است. کمر بندهای وان آلن از ذرات باردار که توسط میدان مغناطیسی زمین به دام افتاده‌اند تشکیل شده‌اند. در اینجا داریم  $n \leq 10^9 \text{ m}^{-3}$ ,  $KT_e \leq 1 \text{ keV}$ ,  $KT_i \approx 1 \text{ eV}$ ، و  $B \approx 500 \times 10^{-9} \text{ T}$ . علاوه بر این، مؤلفه داغی با  $n = 10^{23} \text{ m}^{-3}$  و  $KT_e = 40 \text{ keV}$  وجود دارد.

### ۴.۷.۱ اختر فیزیک جدید

درون و جو ستارگان به اندازه کافی داغ هستند که در حالت پلاسما باشند. مثلاً، دمای درون خورشید ۲ keV تخمین زده می‌شود؛ واکنشهای گرما هسته‌ای که در این دما رخ می‌دهند باعث تابش خورشید هستند. هاله خورشید پلاسمای رقیقی است با دماهایی تا ۲۰۰ eV. محیط میان ستاره‌ای شامل هیدروژن یونیده‌ای با  $n \approx 10^6 \text{ m}^{-3}$  است. نظریه‌های گوناگون پلاسما برای توضیح شتاب پرتوهای کیهانی به کار برده شده‌اند. اگرچه ستارگان در یک کهکشان باردار نیستند، مانند ذرات پلاسما رفتار می‌کنند؛ و از نظریه جنبشی پلاسما برای پیش‌بینی توسعه کهکشانها استفاده شده است.



شکل ۵.۱ اساس مولد MHD.

نجوم رادیویی منابع متعددی برای تابش که به احتمال قوی از پلاسماها ناشی می‌شوند را کشف کرده است. سحابی خرچنگ یک منبع غنی برای پدیده‌های پلاسماست زیرا معلوم شده است که دارای میدان مغناطیسی است. این سحابی همچنین دارای یک تپ اختر قابل رؤیت است. نظریه‌های جاری تپ اخترها آنها را ستاره‌هایی نوترونی توصیف می‌کنند که به تندی می‌چرخند و پلاسماهایی دارند که تابش سنکروترون از سطح گسیل می‌دارند.

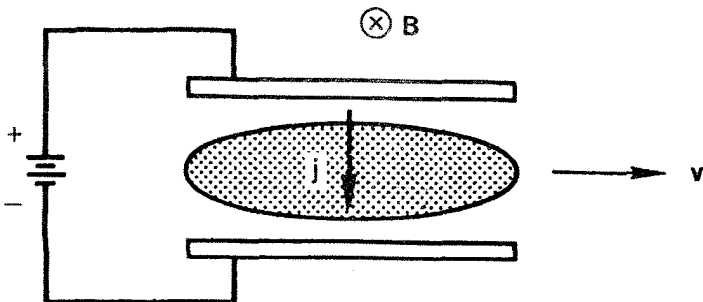
### ۵.۷.۱ تبدیل انرژی مغناطوهیدرودینامیکی و پیشرانش یونی

به زمین برمی‌گردیم، و دو کاربرد عملی فیزیک پلاسما را در نظر می‌گیریم. در تبدیل انرژی مغناطوهیدرودینامیکی (MHD)، از یک جت پلاسمای چگال که در عرض یک میدان مغناطیسی به پیش رانده می‌شود برای تولید الکتریسیته استفاده می‌شود (شکل ۵.۱). نیروی لورنتس  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  که در آن  $\mathbf{v}$  سرعت جت است، موجب می‌شود که یونها به طرف بالا و الکترونها به سمت پایین سوق داده شوند و دو الکتروود را در پتانسیلهای مختلف باردار کنند. آنگاه جریان الکتریکی می‌تواند از الکتروودها بدون کم بازدهی چرخه گرمایی کشیده شود.

از همین اصل به طور معکوس برای توسعه موتورهایی برای مأموریت‌های میان سیاره‌ای استفاده شده است. در شکل ۶.۱، با اعمال ولتاژی به دو الکتروود جریانی به داخل پلاسما فرستاده شده است. نیروی  $\mathbf{B} \times \mathbf{j}$  پلاسما را به بیرون موشک پرتاب می‌کند، و نیروی واکنش حاصل به موشک شتاب می‌دهد. پلاسمای به بیرون رانده شده همواره باید خنثی باشد؛ در غیر این وضعیت، کشتی فضایی تا یک پتانسیل زیاد باردار خواهد شد.

### ۶.۷.۱ پلاسماهای حالت جامد

الکترونهای آزاد و حفره‌ها در نیمرساناها تشکیل پلاسمایی می‌دهند که دارای همان نوع نوسانها و ناپایداریهای پلاسمای گازی هستند. پلاسمای تزریق شده به داخل InSb خصوصاً در مطالعه این



شکل ۶.۱ اساس موتور جت پلاسما برای پیشرانش سفینه فضایی.

پدیده‌ها سودمند بوده‌اند. به علت اثرات شبکه‌ای، بسامد برخورد مؤثر خیلی کمتر از بسامدی است که در یک جامد با  $n \approx 10^{29} \text{ m}^{-3}$  انتظار می‌رود. به علاوه، حفره‌ها در یک نیم‌رسانا می‌توانند دارای جرم مؤثر خیلی کمی باشند — به کوچکی  $1 m_e$  — و بنابراین حتی در میدانهای مغناطیسی متوسط دارای بسامد سیکلوترون خیلی زیادی هستند. اگر  $N_D$  را برای پلاسمای حالت جامد محاسبه کنیم، مقدارش به علت دمای کم و چگالی زیاد کمتر از واحد خواهد بود. اما، اثرات مکانیک کوانتومی (اصل عدم قطعیت) چنان دمای مؤثر زیادی به پلاسما می‌دهند که  $N_D$  را به مقدار قابل ملاحظه‌ای بزرگ می‌کند. هم چنین معلوم شده است که بعضی مایعها مانند محلولهای سدیم در آمونیاک دارای رفتاری شبیه پلاسما هستند.

### ۷.۷.۱ لیزرهای گازی

متداولترین روش برای "دَمَش" یک لیزر گازی — یعنی، وارون کردن جمعیت در حالتی که موجب تقویت نور می‌شوند — استفاده از تخلیه گازی است. این عمل می‌تواند تخلیه تابان کم فشار برای یک لیزر dc یا تخلیه بهمینی پرفشار برای یک لیزر تپی باشد. لیزرهای He - Ne که معمولاً برای همخط کردن و نقشه برداری و لیزرهای Ar و Kr که در نمایشهای نوری به کار برده می‌شوند مثالهایی از لیزرهای گازی dc هستند. لیزر قدرتمند  $\text{CO}_2$  به عنوان یک وسیله برش کاربرد تجاری پیدا کرده است. لیزرهای مولکولی مطالعه در ناحیه فروسخ دور طیف الکترومغناطیس که تاکنون غیرقابل دسترس بوده است را امکان پذیر ساخته‌اند. این لیزرها می‌توانند مستقیماً با تخلیه الکتریکی تحریک شوند، مثل لیزر هیدروژن سیانید (HCN)، یا با یک لیزر  $\text{CO}_2$  می‌توانند دَمَش ایتیکی شوند، مثل لیزرهای متیل فلئوراید ( $\text{CH}_3\text{F}$ ) یا متیل الکل ( $\text{CH}_3\text{OH}$ ). حتی لیزرهای حالت جامد، مانند لیزر نئودیمیم شیشه، برای عمل کردن بستگی به پلاسما دارند، زیرا لامپهای درخش زن که برای دمیدن به کار برده می‌شوند حاوی تخلیه گازی هستند.

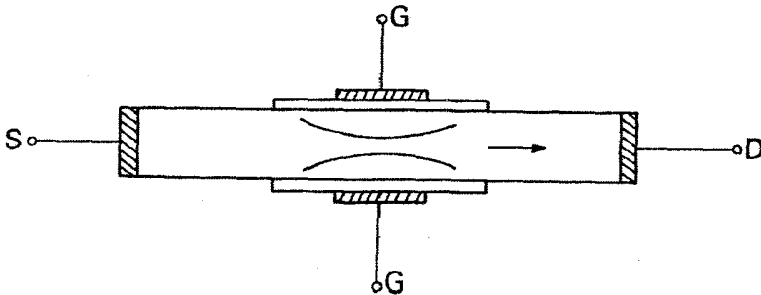
## مسائل

۸.۱ در یک همجوشی لیزری، هستهٔ یک ساچمهٔ کوچک تا چگالی  $10^{22} \text{m}^{-3}$  در دمای  $50000000 \text{K}$  فشرده شده است. تعداد ذرات در کرهٔ دمای این پلاسما را برآورد کنید.

۹.۱ یک کهکشان دور شامل ابری از پروتون و پادپروتون است که چگالی هر یک  $n = 10^6 \text{m}^{-3}$  و دمای آن  $10^4 \text{K}$  است. طول دمای چقدر است؟

۱۰.۱ یک رسانای کروی به شعاع  $a$  در یک پلاسما غوطه‌ور می‌شود و تا پتانسیل  $\phi$  باردار می‌شود. الکترونها ماکسولی باقی می‌مانند و حرکت می‌کنند تا حفاظ دمای را تشکیل دهند، ولی یونها در مدت آزمایش ساکن‌اند. با فرض اینکه  $\phi \ll KT_e/e$  عبارتی برای پتانسیل به‌عنوان تابعی از  $r$  و برحسب  $a$ ،  $\phi$  و  $\lambda_D$  را به‌دست آورید. (راهنمایی: جوابی به‌صورت  $e^{-kr}/r$  در نظر بگیرید.)

۱۱.۱ یک ترانزیستور اثر میدان (FET) اساساً یک شیر الکترونی است که روی اثر طول دمای متناهی کار می‌کند. الکترونهای رسانش از چشمهٔ S به زهکش D هنگامی که بین آنها پتانسیلی اعمال شود از طریق مادهٔ نیمرسانا جریان پیدا می‌کنند. زمانی که یک پتانسیل منفی به درجهٔ عایق شدهٔ G اعمال می‌شود هیچ جریانی نمی‌تواند از G عبور کند، ولی پتانسیل اعمال شده به داخل نیمرسانا نشت می‌کند و الکترونها را دفع می‌کند. پهنای مجرا کاهش می‌یابد و جریان الکترون متناسب با پتانسیل درجه کم می‌شود. اگر ضخامت دستگاه خیلی زیاد باشد، حفاظ دمای از نفوذ ولتاژ درجه به فواصل نسبتاً دور جلوگیری می‌کند. بیشینهٔ ضخامت لایهٔ رسانش یک ترانزیستور اثر میدان  $n$  مجرایی را با این فرضها تخمین بزنید که دارای تراز آلاینده (چگالی پلاسما)  $10^{22} \text{m}^{-3}$  و در دمای اتاق است، و قرار است ضخامت آن بیش از ده برابر طول دمای نباشد. (شکل م ۱۱.۱).



شکل م ۱۱.۱

## حرکتهای تک ذره

### ۱.۲ مقدمه

آنچه تحلیل پلازما را به خصوص مشکل می سازد این است که چگالیها در یک گستره متوسط قرار دارند. سیالاتی مانند آب به قدری چگال هستند که لازم نیست حرکتهای مولکولهای انفرادی را در نظر بگیریم. برخوردها حاکم اند، و معادلات ساده دینامیک سیالات عادی کفایت می کنند. در حد دیگری دستگاههای بسیار کم چگالی مانند سنکروترون با شیب متناوب تنها مسیرهای تک ذره باید در نظر گرفته شوند؛ و اثرات جمعی غالباً مهم نیستند. پلازما بعضی مواقع شبیه سیالات و گاهی شبیه مجموعه ای از ذرات منفرد رفتار می کند. اولین گام برای یادگیری نحوه عمل کردن با این شخصیت متغیرالاحوال این است که چگونگی رفتار ذرات منفرد در میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را درک کنیم. این فصل از این لحاظ با فصلهای بعدی تفاوت دارد که فرض می کنیم میدانهای  $E$ ،  $B$  داده شده اند، و تحت تأثیر ذرات باردار قرار نمی گیرند.

### ۲.۲ میدانهای یکنواخت $E$ و $B$

$$E = 0 \quad 1.2.2$$

در این مورد، ذره باردار دارای چرخش سیکلوترونی ساده است. معادله حرکت عبارت است از

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (۱.۲)$$

اگر  $\hat{z}$  را در امتداد  $\mathbf{B}$  بگیریم ( $\mathbf{B} = B\hat{z}$ )، داریم

$$m\dot{v}_x = qBv_y \quad m\dot{v}_y = -qBv_x \quad m\dot{v}_z = 0$$

$$\ddot{v}_x = \frac{qB}{m}\dot{v}_y = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x \quad (۲.۲)$$

$$\ddot{v}_y = -\frac{qB}{m}\dot{v}_x = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y$$

این معادله‌ها توصیف‌کنندهٔ یک نوسانگر هماهنگ ساده با بسامد سیکلوترون هستند که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\omega_c \equiv \frac{|q|B}{m} \quad (۳.۲)$$

$\omega_c$  را بنابه قرارداد همواره نامنفی می‌گیریم.  $B$  برحسب تسلا، یا ویر بر متر مربع، که برابر با  $۱۰^۴$  گوس است اندازه‌گیری می‌شود. بنابراین، جواب معادلات ۲.۲ عبارت است از

$$v_{x,y} = v_{\perp} \exp(\pm i\omega_c t + i\delta_{x,y})$$

$\pm$  علامت  $q$  را نشان می‌دهد. می‌توان فاز  $\delta$  را طوری انتخاب کرد که

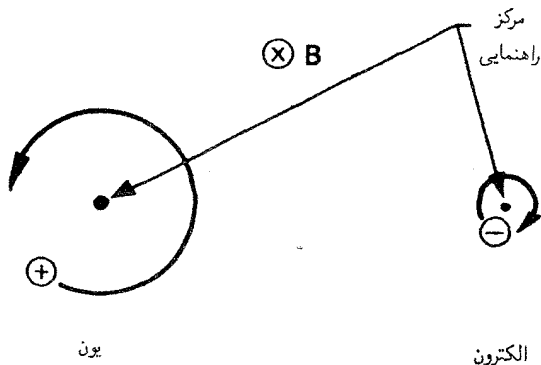
$$v_x = v_{\perp} e^{i\omega_c t} = \dot{x} \quad (۴.۲ الف)$$

که در آن  $v_{\perp}$  ثابت مثبتی است که سرعت در صفحهٔ عمود بر  $\mathbf{B}$  را نشان می‌دهد. آن‌گاه

$$v_y = \frac{m}{qB}\dot{v}_x = \pm \frac{1}{\omega_c}\dot{v}_x = \pm i v_{\perp} e^{i\omega_c t} = \dot{y} \quad (۴.۲ ب)$$

با انتگرال‌گیری مجدد، داریم

$$x - x_0 = -i \frac{v_{\perp}}{\omega_c} e^{i\omega_c t} \quad y - y_0 = \pm \frac{v_{\perp}}{\omega_c} e^{i\omega_c t} \quad (۵.۲)$$



شکل ۱.۲ مدارهای لارمور در یک میدان مغناطیسی.

شعاع لارمور را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$r_L \equiv \frac{v_{\perp}}{\omega_c} = \frac{mv_{\perp}}{|q|B} \quad (۶.۲)$$

با گرفتن قسمت حقیقی معادله ۵.۲، داریم

$$x - x_0 = r_L \sin \omega_c t \quad y - y_0 = \pm r_L \cos \omega_c t \quad (۷.۲)$$

که یک مدار دایره‌ای را حول مرکز راهنمایی  $(x_0, y_0)$  که ثابت است توصیف می‌کند (شکل ۱.۲). جهت چرخش همواره طوری است که میدان مغناطیسی تولیدشده توسط ذره باردار در خلاف جهت میدان خارجی است. بنابراین، ذرات پلاسما گرایش به کاهش میدان مغناطیسی دارند، و پلاسماها دیامغناطیسی هستند. علاوه بر این حرکت، یک سرعت اختیاری  $v_z$  در امتداد B وجود دارد. که متأثر از B نیست. به طور کلی، مسیر یک ذره باردار در فضا مارپیچی است.

### ۲.۲.۲ Eی متناهی

اکنون اگر یک میدان الکتریکی حضور داشته باشد، حرکت به صورت مجموع دو حرکت خواهد بود: چرخش لارمور دایره‌ای عادی به اضافه سوق مرکز راهنما. می‌توان E را در صفحه  $xz$  انتخاب کرد که در نتیجه  $E_y = 0$ . مانند قبل، مؤلفه  $z$  سرعت ارتباطی به مؤلفه‌های عرضی ندارد و جداگانه قابل بررسی است. اکنون معادله حرکت عبارت است از

$$m \frac{dv}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (۸.۲)$$



که مؤلفه  $z$  آن عبارت است از

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{q}{m} E_z$$

یا

$$v_z = \frac{qE_z}{m} t + v_{z0} \quad (9.2)$$

این یک حرکت شتابدار سراسرت در امتداد  $\mathbf{B}$  است. مؤلفه‌های عرضی معادله ۸.۲ عبارت‌اند از

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m} E_x \pm \omega_c v_y \quad (10.2)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = 0 \mp \omega_c v_x$$

با مشتق‌گیری، داریم ( $\mathbf{E}$  ثابت است)

$$\begin{aligned} \ddot{v}_x &= -\omega_c^2 v_x \\ \ddot{v}_y &= \mp \omega_c \left( \frac{q}{m} E_x \pm \omega_c v_y \right) = -\omega_c^2 \left( \frac{E_x}{B} + v_y \right) \end{aligned} \quad (11.2)$$

می‌توانیم این معادله را به‌صورت زیر بنویسیم

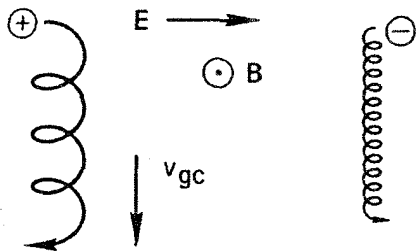
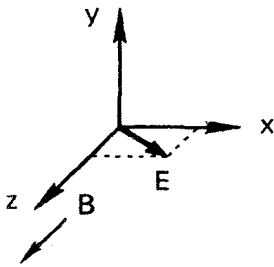
$$\frac{d^2}{dt^2} \left( v_y + \frac{E_x}{B} \right) = -\omega_c^2 \left( v_y + \frac{E_x}{B} \right)$$

و در نتیجه معادله ۱۱.۲ به مورد قبلی تبدیل می‌یابد اگر  $(E_x/B)$  را با  $v_y$  عوض کنیم. بنابراین، به‌جای معادله ۴.۲ داریم

$$\begin{aligned} v_x &= v_{\perp} e^{i\omega_c t} \\ v_y &= \pm i v_{\perp} e^{i\omega_c t} - \frac{E_x}{B} \end{aligned} \quad (12.2)$$

حرکت لارمور همانند قبل است، ولی یک سرعت سوق  $\mathbf{v}_{gc}$  مربوط به مرکز راهنما در جهت  $-y$  (برای  $E_x > 0$ ) بر آن نهاده شده است (شکل ۲.۲).

برای به‌دست آوردن فرمولی کلی برای  $\mathbf{v}_{gc}$ ، می‌توانیم معادله ۸.۲ را به‌صورت برداری حل کنیم. جمله  $m dv/dt$  در معادله ۸.۲ را می‌توان حذف کرد، زیرا چنانکه قبلاً دیدیم این جمله



یون

الکترون

شکل ۲.۲ سوق‌گیری ذره در میدانهای الکتریکی و مغناطیسی متعامد.

فقط حرکت دایره‌ای با بسامد  $\omega_c$  را می‌دهد. بنابراین، معادله ۸.۲ به صورت زیر در می‌آید

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad (۱۳.۲)$$

با ضرب برداری این رابطه در  $\mathbf{B}$ ، داریم

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = vB^2 - \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \quad (۱۴.۲)$$

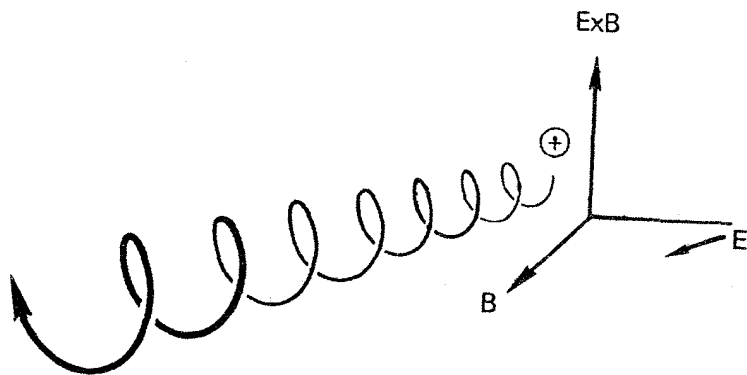
مؤلفه‌های عرضی این معادله عبارت‌اند از

$$v_{\perp gc} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} / B^2 \equiv \mathbf{v}_E \quad (۱۵.۲)$$

این سرعت را  $v_E$ ، سرعت سوق میدان الکتریکی مرکز راهنما، تعریف می‌کنیم. اندازه این سرعت سوق عبارت است از

$$v_E = \frac{E(V/m)}{B(\text{tesla})} \frac{m}{\text{sec}} \quad (۱۶.۲)$$

باید توجه کرد که  $v_E$  مستقل از  $q$ ،  $m$  و  $v_{\perp}$  است. از تصویر فیزیکی زیر علت این امر روشن می‌شود. یون در نیم‌دور اول مدار خود در شکل ۲.۲ از میدان الکتریکی انرژی می‌گیرد و  $v_{\perp}$  و در نتیجه  $r_L$  افزایش می‌یابند. در نیم‌دور دوم، یون انرژی از دست می‌دهد و  $r_L$  کاهش پیدا می‌کند. این اختلاف  $r_L$  در طرف چپ و راست مدار موجب سوق  $v_E$  می‌شود. الکترون منفی در جهت مخالف دوران می‌کند ولی همچنین در جهت مخالف انرژی می‌گیرد؛ نهایتاً الکترون در همان جهت مربوط به یون سوق پیدا می‌کند. برای ذرات با سرعت‌های یکسان ولی جرم‌های مختلف، ذره سبکتر  $r_L$  کوچکتری دارد و در نتیجه در هر دور سوق کمتری پیدا می‌کند. اما بسامد



شکل ۳.۲ مدار واقعی یک ذره دوران‌کننده در فضا.

چرخش آن بزرگتر است، و این دو اثر همدیگر را خنثی می‌کنند. دو ذره با جرم‌های یکسان ولی انرژی‌های مختلف  $\omega$  ی یکسانی دارند. ذره کندتر  $r_L$  کمتری دارد و در نتیجه در هر نیم‌دور انرژی کمتری از  $E$  می‌گیرد. ولی، برای ذرات کم‌انرژی تغییر نسبی  $r_L$  برای یک تغییر معین انرژی بزرگتر است، و این دو اثر همدیگر را خنثی می‌کنند (مسئله ۴.۲).

بنابراین، مدار سه‌بعدی در فضا یک مارپیچ مورب با گام متغیر است (شکل ۳.۲).

### ۳.۲.۲ میدان گرانش

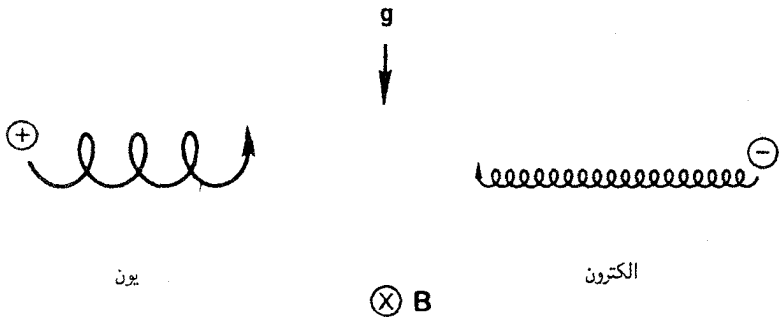
در معادله حرکت ۸.۲ با قرار دادن نیروی کلی  $\mathbf{F}$  به جای  $q\mathbf{E}$  نتیجه فوق را می‌توان برای نیروهای دیگر نیز به‌کار برد. بنابراین، سوق مرکز راهنما ناشی از  $\mathbf{F}$  به صورت زیر است

$$\mathbf{v}_f = \frac{1}{q} \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (17.2)$$

به‌ویژه، اگر  $\mathbf{F}$  نیروی گرانی  $m\mathbf{g}$  باشد، سوق عبارت است از

$$\mathbf{v}_g = \frac{m}{q} \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (18.2)$$

این سرعت از این لحاظ که هم بر نیرو و هم بر  $\mathbf{B}$  عمود است شبیه  $\mathbf{v}_E$  است، ولی از یک جنبه مهم با هم فرق دارند. سوق  $\mathbf{v}_g$  با بار ذره تغییر علامت می‌دهد. تحت نیروی گرانشی، یونها و الکترونها در دو جهت مخالف سوق پیدا می‌کنند، بنابراین چگالی جریان خالصی در پلاسما وجود



شکل ۴.۲ سوق ذره دوران‌کننده در میدان گرانش.

خواهد داشت که با رابطه زیر بیان می‌شود

$$\mathbf{j} = n(M + m) \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (۱۹.۲)$$

دلیل فیزیکی این سوق (شکل ۴.۲) باز هم تغییر در شعاع لارمور است، زیرا ذره در میدان گرانش انرژی می‌گیرد و از دست می‌دهد. در این حالت، الکترونها در خلاف جهت یونها دوران می‌کنند، ولی نیروی وارد بر آنها در همان جهت است و در نتیجه در جهت مخالف سوق می‌یابند. معمولاً اندازه  $v_g$  قابل اغماض است (مسئله ۶.۲)، ولی وقتی که خطوط نیرو خمیده هستند، یک نیروی گرانشی مؤثر مربوط به نیروی گریز از مرکز وجود دارد. این نیرو که قابل صرف نظر کردن نیست، مستقل از جرم است؛ به همین دلیل است که بر وابستگی جرمی معادله ۱۸.۲ تأکید نکردیم. نیروی گریز از مرکز منشأ یک ناپایداری پلازما موسوم به ناپایداری "گرانشی" است که ربطی به گرانش حقیقی ندارد.

## مسائل

۱.۲ اگر  $v$  قابل چشمپوشی باشد  $\pi_L$  را برای موردهای زیر محاسبه کنید:

(الف) یک الکترون  $۱۰ \text{ keV}$  در میدان مغناطیسی  $۵ \times ۱۰^{-۵} \text{ T}$  زمین.

(ب) یک پروتون باد خورشیدی با سرعت جریان  $۳۰۰ \text{ km/sec}$  و  $B = ۵ \times ۱۰^{-۹} \text{ T}$ .

(ج) یک یون  $\text{He}^+$  با انرژی  $۱ \text{ keV}$  در جو خورشید نزدیک به یک لکه خورشیدی که در آن

$$B = ۵ \times ۱۰^{-۲} \text{ T}$$

(د) یک ذره خاکستر  $\text{He}^{++}$  با انرژی  $۳۵ \text{ MeV}$  در یک راکتور همجوشی DT با میدان  $۸ \text{ T}$ .

۲.۲ در TFTR راکتور آزمون همجوشی توکاماک پریستون با تزریق اتمهای دوتریوم خنثای

۲۰۰ keV، که بعد از وارد شدن به میدان مغناطیسی با تبادل بار به یونهای D ( $A = 2$ ) با انرژی ۲۰۰ keV تبدیل می‌شود، پلاسما گرم خواهد شد. این یونها فقط اگر  $r_L \ll a$  محبوس می‌شوند که در آن  $a = 0.6 \text{ m}$  شعاع کوچک پلاسمای چنبره‌ای است. شعاع بیشینه لارمور برای میدان  $5 \text{ T}$  را محاسبه کنید تا ببینید که شرط فوق صادق است.

۳.۲ یک موتور یونی (شکل ۶.۱) دارای میدان مغناطیسی  $1 \text{ T}$  است، و می‌خواهیم پلاسمای هیدروژنی را با سرعت  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$   $1000 \text{ km/sec}$  بیرون براند. چه مقدار میدان الکتریکی داخلی در این پلاسما باید وجود داشته باشد؟

۴.۲ با استفاده از تصویر فیزیکی زیر (شکل ۲.۲)، نشان دهید که  $v_E$  برای دو یون با جرمهای برابر و انرژیهای مختلف یکی است. فرض کنید نیمه راست مدار مربوط به انرژی یون پس از شتاب‌گیری توسط میدان  $\mathbf{E}$  و همچنین نیمه چپ مربوط به انرژی یون بعد از کند شدنش تقریباً نیم‌دایره هستند. می‌توانید  $\mathbf{E}$  را به اندازه‌ای ضعیف بگیرید که تغییر نسبی  $v_{\perp}$  کوچک باشد.

۵.۲ فرض کنید الکترونهاى داخل یک ستون پلاسمای متقارن استوانه‌ای، در آن  $n(r)$  با یک طول مقیاس  $\lambda$  تغییر می‌کند یعنی  $\partial n / \partial r \simeq -n / \lambda$ ، از رابطه بولتزمن مسئله ۵.۱ تبعیت می‌کنند. (الف) با استفاده از  $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ ، میدان الکتریکی شعاعی را برای  $\lambda$  مفروض پیدا کنید.

(ب) برای الکترونها، نشان دهید اگر  $v_E$  به بزرگی  $v_{th}$  باشد اثرات شعاع لارمور متناهی بزرگ هستند. مخصوصاً، نشان دهید اگر  $v_E = v_{th}$  آن‌گاه  $r_L = 2\lambda$ .

(ج) آیا (ب) برای یونها صادق است؟

راهنمایی: از معادله پواسون استفاده نکنید.

۶.۲ فرض کنید یک ماشین دارای میدان یکنواخت  $2 \text{ T}$  و یک پلاسمای استوانه‌ای با  $KT_e = KT_i = 2 \text{ eV}$  است. نیمرخ چگالی آن به‌طور تجربی به‌صورت زیر است

$$n = n_0 \exp[\exp(-r^2/a^2) - 1]$$

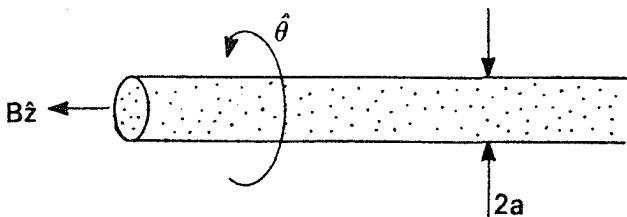
فرض کنید چگالی از رابطه بولتزمن الکترون  $n = n_0 \exp(e\phi/KT_e)$  پیروی می‌کند.

(الف) اگر  $a = 1 \text{ cm}$ ، بیشینه  $v_E$  را حساب کنید.

(ب) این  $v_E$  را با  $v_g$  مربوط به میدان گرانش زمین مقایسه کنید.

(ج) قبل از آنکه یونهای پتاسیم ( $z = 1$ ،  $A = 39$ ) دارای شعاع لارموری برابر با  $a$  شوند  $B$  را تا چه مقدار می‌توان کاهش داد؟

۷.۲ یک باریکه الکترون خنثی نشده با چگالی  $n_e = 10^{14} \text{ m}^{-3}$  و شعاع  $a = 1 \text{ cm}$  در امتداد



شکل ۷.۲

میدان مغناطیسی  $2 T$  جریان دارد. اگر  $B$  در جهت  $+z$  باشد و میدان الکتروستاتیک مربوط به بار باریکه را با  $E$  نشان دهیم، اندازه و جهت سوق  $E \times B$  را در  $r = a$  محاسبه کنید. (شکل ۷.۲).

### ۳.۲ میدان نایکنواخت B

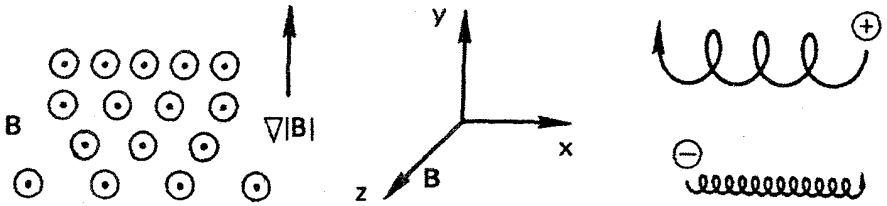
اکنون که مفهوم سوق مرکز راهنما کاملاً مشخص شده است، می‌توانیم حرکت ذرات را در میدانهای ناهمگن  $E$  و  $B$  که با فضا و یا زمان تغییر می‌کنند بررسی کنیم. برای میدانهای یکنواخت توانستیم عبارات دقیقی برای سوقهای مرکز راهنما به دست آوریم. به محض وارد کردن یک ناهمگنی، مسئله چنان پیچیده می‌شود که حل دقیق ندارد. برای به دست آوردن جواب تقریبی، معمولاً از بسط برحسب نسبت کوچک  $r_L/L$ ، که در آن  $L$  طول مقیاس ناهمگنی است، استفاده می‌شود. این گونه نظریه که به نظریه مدار معروف است می‌تواند فوق‌العاده بفرنج باشد. فقط ساده‌ترین موردها که تنها یک ناهمگنی در یک زمان وجود دارد را بررسی خواهیم کرد.

#### ۱.۳.۲ $\nabla B \perp B$ : سوق گرادیان B

در اینجا خطوط نیرو مستقیم‌اند،\* ولی چگالی آنها مثلاً در جهت  $y$  افزایش می‌یابد (شکل ۵.۲). با استفاده از تصویر فیزیکی ساده می‌توانیم نتیجه را پیش‌بینی کنیم. وجود گرادیان  $|B|$  موجب می‌شود تا شعاع لارمور در پایین مدار بزرگتر از مقدار آن در بالای مدار باشد، و این امر منجر به یک سوق می‌شود که برای الکترونها و یونها جهت‌های مخالف دارد و بر  $B$  و  $\nabla B$  عمود است. بدیهی است که سرعت سوق باید متناسب با  $r_L/L$  و  $v_{\perp}$  باشد.

میانگین نیروی لورنتس  $F = qv \times B$  را در یک چرخش در نظر بگیرید. واضح است که

\* خطوط میدان مغناطیسی را اغلب "خطوط نیرو" می‌نامند، ولی واقعاً خطوط نیرو نیستند. در اینجا این نامگذاری غلط را تکرار می‌کنیم تا دانشجو را برای ترفندهای تخصصش آماده کنیم.



شکل ۵.۲ سوق ذرهٔ دوران‌کننده در یک میدان مغناطیسی ناهمگن.

$\bar{F}_x = 0$ ، زیرا مدت زمان حرکت ذره به طرف بالا و پایین یکی است. می‌خواهیم به یک روش تقریبی، با استفاده از مدار ناآشفتهٔ ذره برای یافتن میانگین،  $\bar{F}_y$  را محاسبه کنیم. برای یک میدان یکنواخت  $\mathbf{B}$  مدار ناآشفته توسط معادله‌های ۴.۲ و ۷.۲ داده می‌شود. با گرفتن قسمت حقیقی معادلهٔ ۴.۲، داریم

$$F_y = -qv_x B_z(y) = -qv_{\perp}(\cos \omega_c t) \left[ B_0 \pm r_L(\cos \omega_c t) \frac{\partial B}{\partial y} \right] \quad (20.2)$$

که در آن میدان  $\mathbf{B}$  را حول نقطهٔ  $x_0 = 0$ ،  $y_0 = 0$  بسط تیلور داده‌ایم و از معادلهٔ ۷.۲ استفاده کرده‌ایم:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \dots \\ B_z &= B_0 + y(\partial B_z / \partial y) + \dots \end{aligned} \quad (21.2)$$

البته این بسط مستلزم آن است که  $r_L/L \ll 1$  که در آن  $L$  طول مقیاس  $\partial B_z / \partial y$  است. میانگین جملهٔ اول معادلهٔ ۲۰.۲ در هر چرخش صفر است، و میانگین  $\cos^2 \omega_c t$  برابر با  $\frac{1}{2}$  است؛ بنابراین

$$\bar{F}_y = \mp qv_{\perp} r_L \frac{1}{2} (\partial B / \partial y) \quad (22.2)$$

در نتیجه سرعت سوق مرکز راهنما عبارت است از

$$\mathbf{v}_{gc} = \frac{1}{q} \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{1}{q} \frac{\bar{F}_y}{|B|} \hat{\mathbf{x}} = \mp \frac{v_{\perp} r_L}{B} \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial y} \hat{\mathbf{x}} \quad (23.2)$$

که در آن از معادلهٔ ۱۷.۲ استفاده کرده‌ایم. چون انتخاب محور  $y$  اختیاری بوده است، این معادله را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد

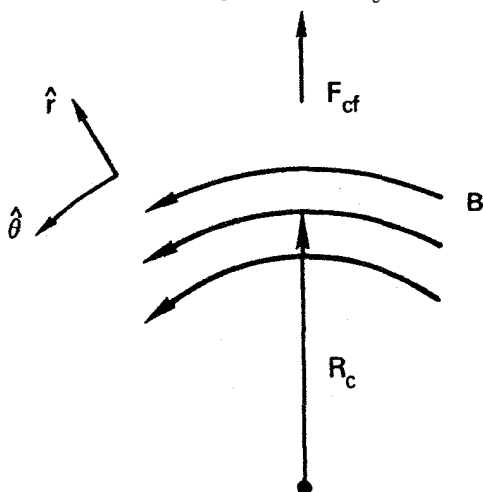
$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \pm \frac{1}{2} v_{\perp} r_L \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} \quad (24.2)$$

این رابطه دارای همه وابستگی‌هایی است که از تصویر فیزیکی انتظار داشتیم؛ تنها عامل  $\frac{1}{2}$  (ناشی از میانگین‌گیری) پیش‌بینی نشده بود. توجه داشته باشید که  $\pm$  برای علامت بار است، و  $B$  نشان‌دهنده  $|\mathbf{B}|$  است. کمیت  $\mathbf{v}_{\nabla B}$  سوق‌گردان  $B$  نامیده می‌شود؛ این سوق برای الکترون‌ها و یونها دارای جهت‌های مخالف است و موجب یک جریان عمود بر  $\mathbf{B}$  می‌شود. محاسبه دقیق  $\mathbf{v}_{\nabla B}$  مستلزم آن است که از مدار دقیق، که سوق را شامل شود، در متوسط‌گیری استفاده کنیم.

### ۲.۳.۲ بی خمیده: سوق خمیدگی

در اینجا خطوط نیرو را خمیده با شعاع خمیدگی ثابت  $R_c$  در نظر می‌گیریم، و  $|\mathbf{B}|$  را ثابت فرض می‌کنیم (شکل ۶.۲). چنین میدانی از معادلات ماکسول در خلأ پیروی نمی‌کند، بنابراین در عمل سوق‌گردان  $B$  به اثر به‌دست آمده در اینجا اضافه می‌شود. ذرات هنگامی که در حرکت گرمایی خود در امتداد خطوط میدان حرکت می‌کنند تحت نیروی گریز از مرکزی قرار می‌گیرند که موجب سوق مرکز راهنما می‌شود. اگر  $v_{\parallel}^2$  میانگین مجذور مؤلفه سرعت کاتوره‌ای در راستای  $\mathbf{B}$  باشد، میانگین نیروی گریز از مرکز عبارت است از

$$\mathbf{F}_{cf} = \frac{mv_{\parallel}^2}{R_c} \hat{\mathbf{r}} = mv_{\parallel}^2 \frac{\mathbf{R}_c}{R_c^2} \quad (25.2)$$



شکل ۶.۲ میدان مغناطیسی خمیده.



مطابق با معادلهٔ ۱۷.۲، این نیرو موجب سوق زیر می‌شود

$$\mathbf{v}_R = \frac{1}{q} \frac{\mathbf{F}_{cf} \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{mv_{\parallel}^2}{qB^2} \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2} \quad (26.2)$$

سوق  $\mathbf{v}_R$  را سوق خمیدگی می‌نامند.

اکنون باید سوق گرادیان  $B$  را محاسبه کنیم که وقتی کاهش  $|\mathbf{B}|$  با شعاع را به حساب می‌آوریم با سوق خمیدگی توأم می‌شود. در خلأ، داریم  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ . در مختصات استوانه‌ای شکل ۶.۲،  $\nabla \times \mathbf{B}$  فقط دارای مؤلفهٔ  $z$  است، زیرا  $\mathbf{B}$  تنها دارای مؤلفهٔ  $\theta$  است و  $\nabla B$  تنها دارای مؤلفهٔ  $r$  است. بنابراین

$$(\nabla \times \mathbf{B})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rB_{\theta}) = 0 \quad B_{\theta} \propto \frac{1}{r} \quad (27.2)$$

در نتیجه

$$|\mathbf{B}| \propto \frac{1}{R_c} \quad \frac{\nabla |\mathbf{B}|}{|\mathbf{B}|} = -\frac{\mathbf{R}_c}{R_c^2} \quad (28.2)$$

با استفاده از معادلهٔ ۲۴.۲، داریم

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \mp \frac{1}{2} \frac{v_{\perp} r_L}{B^2} \mathbf{B} \times |\mathbf{B}| \frac{\mathbf{R}_c}{R_c^2} = \pm \frac{1}{2} \frac{v_{\perp}^2}{\omega_c} \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2 B^2} = \frac{1}{2} \frac{m}{q} v_{\perp}^2 \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2 B^2} \quad (29.2)$$

با افزودن این سرعت سوق به  $\mathbf{v}_R$ ، سوق کل در میدان خلأ خمیده به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{v}_R + \mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{m}{q} \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2 B^2} \left( v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \right) \quad (30.2)$$

جمع‌شدن این سوفاها نامطلوب است. بدین معنی که اگر بخواهیم برای محبوس کردن پلاسما گرما هسته‌ای میدان مغناطیسی را به‌صورت یک چنبر خم کنیم، به هر نحو که دماها و میدانهای مغناطیسی را تنظیم کنیم باز هم ذرات به بیرون سوق پیدا می‌کنند.

برای توزیع ماکسولی، معادله‌های ۷.۱ و ۱۰.۱ نشان می‌دهند که  $\overline{v_{\parallel}^2}$  و  $\overline{v_{\perp}^2}$  هر یک برابر با  $KT/m$  است زیرا  $v_{\perp}$  به دو درجهٔ آزادی مربوط است. بنابراین، با توجه به معادله‌های ۳.۲ و

۶.۱ می‌توانیم میانگین سوق میدان خمیده را به صورت زیر بنویسیم

$$\bar{\nabla}_{R+\nabla B} = \pm \frac{v_{th}^2}{R_c \omega_c} \hat{y} = \pm \frac{\bar{r}_L}{R_c} v_{th} \hat{y} \quad (۳۰.۲ \text{ الف})$$

که در اینجا  $\hat{y}$  جهت  $\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}$  است. این معادله نشان می‌دهد که  $\bar{\nabla}_{R+\nabla B}$  به بار ذره بستگی دارد نه به جرم آن.

### ۳.۳.۲ $\nabla B \parallel \mathbf{B}$ : آینه‌های مغناطیسی

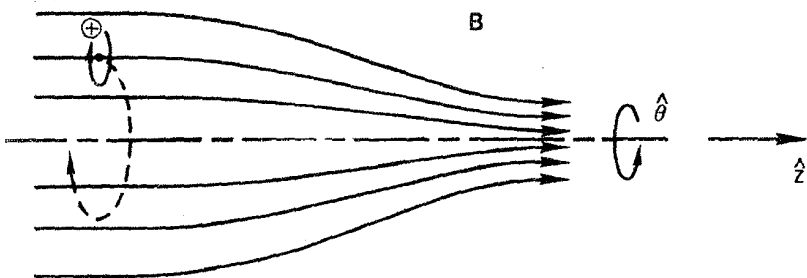
اکنون یک میدان مغناطیسی را در نظر می‌گیریم که نخست در امتداد  $z$  است و اندازه‌اش در این راستا تغییر می‌کند. میدان را متقارن محوری، با  $B_\theta = 0$  و  $\partial/\partial\theta = 0$ ، فرض کنید. چون خطوط نیرو همگرا و واگرا می‌شوند، به‌ناچار یک مؤلفه  $B_r$  (شکل ۷.۲) وجود دارد. می‌خواهیم نشان دهیم که این مؤلفه موجب نیرویی می‌شود که می‌تواند ذره را در میدان مغناطیسی محبوس کند. می‌توانیم  $B_r$  را از  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  به دست آوریم:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (۳۱.۲)$$

اگر  $\partial B_z / \partial z$  در  $r = 0$  معلوم باشد و با  $r$  زیاد تغییر نکند، داریم

$$r B_r = - \int_0^r r \frac{\partial B_z}{\partial z} dr \simeq - \frac{1}{2} r^2 \left[ \frac{\partial B_z}{\partial z} \right]_{r=0} \quad (۳۲.۲)$$

$$B_r = - \frac{1}{2} r \left[ \frac{\partial B_z}{\partial z} \right]_{r=0}$$



شکل ۷.۲ سوق ذره در یک میدان آینه مغناطیسی.

تغییر  $|B|$  با  $r$  موجب سوق گرادیان  $B$ ی مرکزهای راهنما حول محور تقارن می‌شود، ولی سوق گرادیان  $B$ ی شعاعی وجود ندارد، زیرا  $\partial B/\partial\theta = 0$ . مؤلفه‌های نیروی لورنتس عبارت‌اند از

$$F_r = q(v_\theta B_z - v_z B_\theta) \quad (1)$$

$$F_\theta = q(-v_r B_z + v_z B_r) \quad (2) \quad (33.2)$$

$$F_z = q(v_r B_\theta - v_\theta B_r) \quad (3)$$

اگر  $B_\theta = 0$  دو جمله صفر هستند، جمله‌های (۱) و (۲) موجب چرخش لارمور معمولی می‌شوند. جمله (۳) روی محور صفر است؛ وقتی این نیروی سمتی صفر نیست در راستای شعاعی سوق به‌وجود می‌آورد. این سوق فقط باعث می‌شود که مراکز راهنما روی خطوط نیرو حرکت کنند. جمله (۴) جمله‌ای است که برای ما اهمیت دارد. با استفاده از معادله ۳۲.۲، به‌دست می‌آوریم

$$F_z = \frac{1}{\gamma} q v_\theta r (\partial B_z / \partial z) \quad (34.2)$$

اکنون باید میانگین این نیرو را در یک چرخش به‌دست آوریم. برای سادگی، ذره‌ای را در نظر بگیرید که مرکز راهنمای آن روی محور باشد. بنابراین،  $v_\theta$  در طی یک چرخش ثابت است؛  $v_\theta$  بسته به علامت  $q$ ، برابر است با  $\mp v_\perp$ . چون  $r = r_L$ ، نیروی متوسط عبارت است از

$$\bar{F}_z = \mp \frac{1}{\gamma} q v_\perp r_L \frac{\partial B_z}{\partial z} = \mp \frac{1}{\gamma} q \frac{v_\perp^2}{\omega_c} \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{1}{\gamma} \frac{m v_\perp^2}{B} \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (35.2)$$

گشتاور مغناطیسی ذره دوران‌کننده را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mu \equiv \frac{1}{\gamma} m v_\perp^2 / B \quad (36.2)$$

بنابراین

$$\bar{F}_z = -\mu (\partial B_z / \partial z) \quad (37.2)$$

این یک مثال خاص از نیروی وارد بر یک ذره دیامغناطیسی است، که به‌طور کلی می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{F}_\parallel = -\mu \partial B / \partial s = -\mu \nabla_\parallel B \quad (38.2)$$

که در آن  $ds$  جزء طول در امتداد  $B$  است. توجه داشته باشید که تعریف ۳۶.۲ در واقع تعریف معمولی گشتاور مغناطیسی یک حلقهٔ جریان با سطح  $A$  و جریان  $I$  است:  $\mu = IA$ . در مورد یونی که دارای تنها یک بار است، جریان  $I$  از دوران بار  $e$  که در هر ثانیه  $\omega_c/2\pi$  دور می‌زند به وجود می‌آید:  $I = e\omega_c/2\pi$ . سطح  $A$  برابر است با  $\pi r_L^2 = \pi v_{\perp}^2/\omega_c^2$ . بنابراین

$$\mu = \frac{\pi v_{\perp}^2}{\omega_c^2} \frac{e\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2} \frac{v_{\perp}^2 e}{\omega_c} = \frac{1}{2} \frac{mv_{\perp}^2}{B}$$

هنگامی که ذره به داخل ناحیه‌های  $B$  ی قویتر یا ضعیفتر حرکت می‌کند، شعاع لارمور آن تغییر می‌کند، اما  $\mu$  ناوردا باقی می‌ماند. برای اثبات این موضوع، مؤلفهٔ معادلهٔ حرکت در امتداد  $B$  را در نظر بگیرید:

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\mu \frac{\partial B}{\partial s} \quad (39.2)$$

با ضرب طرف چپ در  $v_{\parallel}$  و طرف راست در معادل آن  $ds/dt$  داریم

$$mv_{\parallel} \frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv_{\parallel}^2 \right) = -\mu \frac{\partial B}{\partial s} \frac{ds}{dt} = -\mu \frac{dB}{dt} \quad (40.2)$$

در اینجا  $dB/dt$  تغییر  $B$  است که توسط ذره دیده می‌شود؛ خود  $B$  ثابت است. انرژی ذره باید پایسته باشد، و در نتیجه

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} mv_{\perp}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv_{\parallel}^2 + \mu B \right) = 0 \quad (41.2)$$

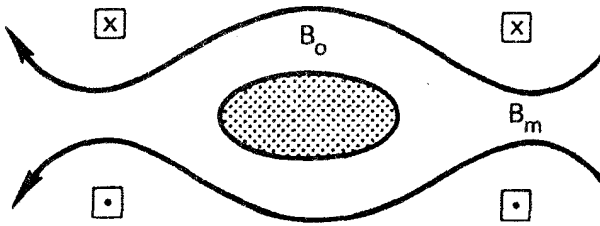
که با استفاده از معادلهٔ ۴۰.۲ به صورت زیر درمی‌آید

$$-\mu \frac{dB}{dt} + \frac{d}{dt}(\mu B) = 0$$

بنابراین

$$d\mu/dt = 0 \quad (42.2)$$

ناوردایی  $\mu$  اساس یکی از نخستین طرحها برای محبوس کردن پلازما یعنی آینهٔ مغناطیسی است. هنگامی که یک ذره در جریان حرکت گرمایی خود از یک ناحیهٔ میدان ضعیف به ناحیهٔ



شکل ۸.۲ پلاسمای محبوس بین آینه‌های مغناطیسی.

میدان قوی حرکت می‌کند، یک افزایش در  $B$  را می‌بینید، بنابراین برای آنکه  $\mu$  ثابت بماند مؤلفه عمودی سرعت ذره  $v_{\perp}$  باید افزایش یابد. چون انرژی کل آن باید ثابت باقی بماند، به ناچار  $v_{\parallel}$  باید کاهش یابد. اگر  $B$  "در گلوگاه" آینه به اندازه کافی بزرگ باشد،  $v_{\parallel}$  سرانجام صفر می‌شود؛ و ذره به ناحیه میدان ضعیف "بازتابیده" می‌شود. البته نیروی  $F_{\parallel}$  موجب این بازتاب می‌شود. میدان نایکنواخت یک جفت سیم‌پیچ ساده تشکیل دو آینه مغناطیسی می‌دهد که بین آنها می‌توان پلاسما را محبوس ساخت (شکل ۸.۲). این اثر هم برای الکترون‌ها و هم برای یونها روی می‌دهد. اما این گیراندازی کامل نیست. برای مثال، ذره‌ای با  $v_{\perp} = 0$  گشتاور مغناطیسی ندارد و نیرویی در امتداد  $B$  بر آن وارد نمی‌شود. اگر میدان بیشینه  $B_m$  به اندازه کافی بزرگ نباشد ذره‌ای با  $v_{\perp}/v_{\parallel}$  کوچک در صفحه میانی ( $B = B_0$ ) نیز فرار خواهد کرد. برای  $B_0$  و  $B_m$  معلوم، کدام ذرات فرار خواهند کرد؟ ذره‌ای با  $v_{\perp} = v_{\perp 0}$  و  $v_{\parallel} = v_{\parallel 0}$  در صفحه میانی دارای  $v_{\perp} = v'_{\perp}$  و  $v_{\parallel} = 0$  در نقطه برگشتش خواهد بود. فرض کنید میدان در آنجا  $B'$  باشد. آن‌گاه از ناوردایی  $\mu$  داریم

$$\frac{1}{2} m v_{\perp 0}^2 / B_0 = \frac{1}{2} m v_{\perp}'^2 / B' \quad (۴۳.۲)$$

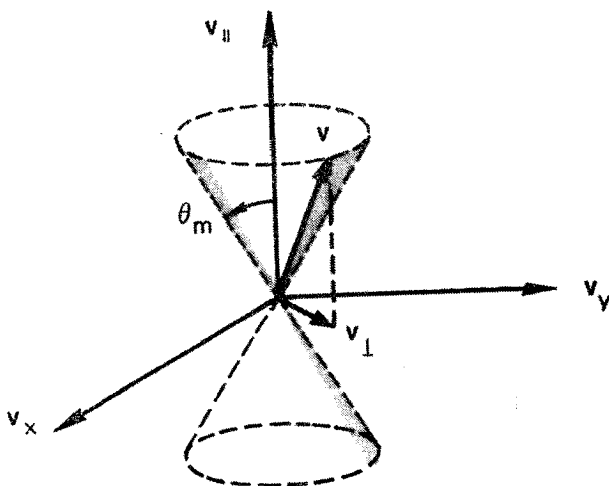
بایستگی انرژی ایجاب می‌کند که

$$v_{\perp}'^2 = v_{\perp 0}^2 + v_{\parallel 0}^2 \equiv v_0^2 \quad (۴۴.۲)$$

از ترکیب معادله‌های ۴۳.۲ و ۴۴.۲ به دست می‌آوریم

$$\frac{B_0}{B'} = \frac{v_{\perp 0}^2}{v_{\perp}'^2} = \frac{v_{\perp 0}^2}{v_0^2} \equiv \sin^2 \theta \quad (۴۵.۲)$$

که در آن  $\theta$  زاویه شیب مدار در ناحیه میدان ضعیف است. ذرات دارای  $\theta$  کوچکتر به ناحیه‌های  $B$  بزرگتر بازتابیده خواهند شد. اگر  $\theta$  خیلی کوچک باشد،  $B'$  از  $B_m$  بزرگتر می‌شود، و ذره



شکل ۹.۲ مخروط اتلاف.

اصلاً بازتاب نمی‌یابد. در معادله ۴۵.۲ با قرار دادن  $B_m$  به جای  $B'$ ، می‌بینیم که کوچکترین  $\theta$  ذرهٔ محبوس عبارت است از

$$\sin^2 \theta_m = B_o / B_m \equiv 1 / R_m \quad (۴۶.۲)$$

که در آن  $R_m$  نسبت آینه است. معادله ۴۶.۲ مرز ناحیه‌ای به شکل مخروط را در فضای سرعت تعریف می‌کند که مخروط اتلاف نامیده می‌شود (شکل ۹.۲). ذراتی که داخل مخروط اتلاف قرار می‌گیرند محبوس نشده‌اند. در نتیجه پلاسمای محبوس آینه‌ای هرگز همسانگرد نیست. توجه کنید که مخروط اتلاف مستقل از  $q$  یا  $m$  است. بدون برخورد، یونها و الکترونها هر دو به خوبی محبوس هستند. وقتی برخوردها رخ می‌دهند، ذراتی که زاویهٔ شیب آنها در برخورد تغییر می‌کند و به درون مخروط اتلاف پراکنده می‌شوند از دست می‌روند. به‌طور کلی، الکترونها آسانتر به‌هدر می‌روند زیرا بسامد برخورد آنها بیشتر است.

آینهٔ مغناطیسی اولین بار توسط انریکو فرمی به‌عنوان سازوکاری برای شتابدهی به پرتوهای کیهانی پیشنهاد شد. پروتوهایی که بین آینه‌های مغناطیسی در رفت و آمد هستند با نزدیک شدن به یکدیگر در سرعت زیاد می‌توانند در هر رفت و آمدی انرژی کسب کنند. چگونگی پیدایش چنین آینه‌هایی شرح جداگانه‌ای دارد. مثال دیگری از اثر آینه محبوسیت ذرات در کمر بندهای وان آلن است. ویژگی قوی بودن میدان مغناطیسی زمین در قطبها و ضعیف بودن آن در استوا آینه‌ای طبیعی به‌وجود می‌آورد که برای آن  $R_m$  نسبتاً بزرگ است.

## مسائل

۸.۲ فرض کنید میدان مغناطیسی زمین در استوا  $T = 10^{-5} \times 3$  است و مانند یک دوقطبی کامل به صورت  $1/r^3$  کاهش می‌یابد. یک جمعیت همسانگرد از پروتونهای  $1 \text{ eV}$  و الکترونهای  $30 \text{ keV}$ ، هر یک با چگالی  $n = 10^6 \text{ m}^{-3}$  در  $r = 5$  برابر شعاع زمین در صفحه استوا در نظر بگیرید. (الف) سرعتهای سوق‌گردان  $B$ ی الکترونها و یونها را حساب کنید.

(ب) آیا سوق یک الکترون به سوی شرق است یا غرب؟

(ج) چه مدت طول می‌کشد تا یک الکترون به دور زمین بچرخد؟

(د) چگالی جریان حلقه را برحسب  $\text{A/m}^2$  حساب کنید.

تذکر: سوق خمیدگی قابل چشمپوشی نیست و روی جواب عددی تأثیر خواهد گذاشت، ولی با این حال از آن صرف‌نظر کنید.

۹.۲ الکترونی در میدان مغناطیس یک سیم مستقیم نامتناهی که جریان  $I$  را از خود عبور می‌دهد در حالت سکون قرار دارد. در  $t = 0$ ، بدون آنکه  $I$  تغییر کند سیم را ناگهان تا پتانسیل مثبت  $\phi$  باردار می‌کنیم. الکترون از میدان الکتریکی انرژی می‌گیرد و شروع به سوق می‌کند.

(الف) نموداری ترسیم کنید که مدار الکترون و جهتهای نسبی  $\mathbf{I}$ ،  $\mathbf{B}$ ،  $\mathbf{v}_E$ ،  $\mathbf{v}_{\nabla B}$  و  $\mathbf{v}_R$  را نشان دهد.

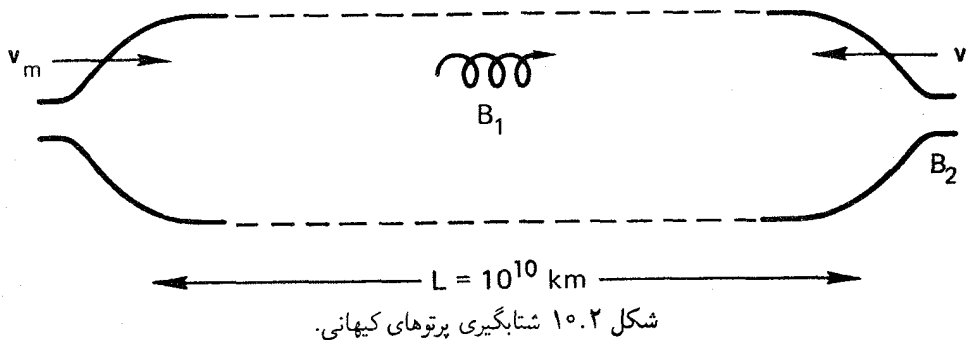
(ب) اگر  $I = 500 \text{ A}$ ،  $\phi = 460 \text{ V}$  و شعاع سیم  $1 \text{ mm}$  باشد، اندازه این سوقها را در شعاع  $1 \text{ cm}$  پیدا کنید. فرض کنید  $\phi$  روی دیواره‌های اتاقک خلأ در فاصله  $10 \text{ cm}$  در پتانسیل صفر نگه داشته شده است.

راهنمایی: علاوه بر فرمولهای داده شده در متن، تصویر روشن مناسبی از حرکت نیز لازم است. ۱۰.۲ یک دوترون  $20 \text{ keV}$  در یک دستگاه همجوشی آینه‌ای بزرگ دارای زاویه پیچ  $45^\circ$  در صفحه میانی است. که در آن  $B = 7 \text{ T}$ ، شعاع لارمور آن را حساب کنید.

۱۱.۲ یک پلازما با توزیع سرعت همسانگرد در یک دام آینه مغناطیسی با نسبت آینه  $R_m = 4$  قرار گرفته است. برخوردی وجود ندارد، و در نتیجه ذرات در مخروط اتلاف به سادگی فرار می‌کنند، و بقیه در دام باقی می‌مانند. تعداد نسبی ذرات موجود در دام را به دست آورید.

۱۲.۲ یک پروتون پرتو کیهانی بین دو آینه مغناطیسی متحرک با  $R_m = 5$  که ابتدا دارای  $W = 1 \text{ keV}$  و  $v_{\parallel} = v_{\perp}$  در صفحه میانی است، محبوس شده است. هر آینه به طرف صفحه میانی با سرعت  $v_m = 10 \text{ km/sec}$  حرکت می‌کند (شکل ۱۰.۲).

(الف) با استفاده از فرمول مخروط اتلاف و ناوردایی  $\mu$ ، انرژی را که پروتون قبل از فرار کردن



ضمن شتابگیری به دست می‌آورد پیدا کنید.

(ب) چه مدت طول خواهد کشید تا به آن انرژی برسد؟

۱. آینه‌ها را پیستونهای تخت در نظر بگیرید و نشان دهید که سرعت به دست آمده در هر رفت و برگشت  $2v_m$  است.

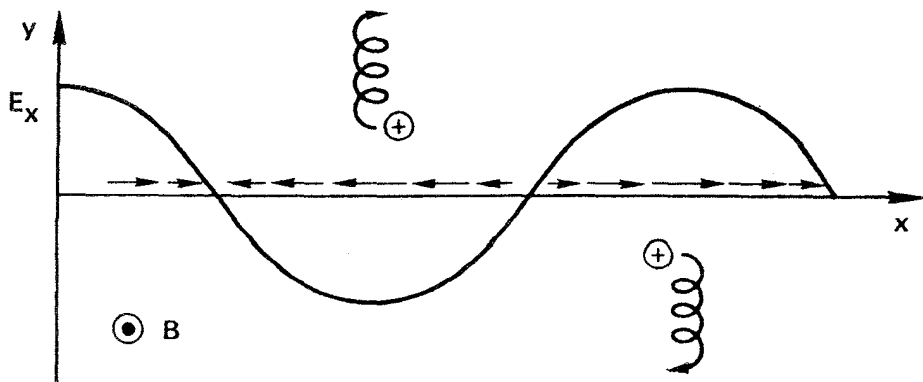
۲. تعداد رفت و برگشتهای لازم را حساب کنید.

۳. زمان  $T$  برای پیمودن  $L$  با این تعداد را محاسبه کنید. دقت مرتبه دوم کافی خواهد بود.

## ۴.۲ میدان نایکناوخت E

اکنون میدان مغناطیسی را یکنواخت و میدان الکتریکی را نایکناوخت می‌گیریم. برای سادگی، فرض می‌کنیم  $E$  در راستای  $x$  باشد و به‌طور سینوسی در این راستا تغییر کند (شکل ۱۱.۲):

$$\mathbf{E} \equiv E_0 (\cos kx) \hat{x} \quad (۴۷.۲)$$



شکل ۱۱.۲ سوق ذره دوران‌کننده در میدان الکتریکی نایکناوخت.



این توزیع میدان دارای طول موج  $\lambda = 2\pi/k$  است و از توزیع سینوسی بارها ناشی می‌شود که نیازی به مشخص کردن آن نداریم. در عمل، چنین توزیع باری می‌تواند در خلال حرکت موج در پلاسما به‌وجود آید. معادله حرکت عبارت است از

$$m(d\mathbf{v}/dt) = q[\mathbf{E}(x) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad (48.2)$$

که مؤلفه‌های عرضی آن عبارت‌اند از

$$\dot{v}_x = \frac{qB}{m}v_y + \frac{q}{m}E_x(x) \quad \dot{v}_y = -\frac{qB}{m}v_x \quad (49.2)$$

$$\ddot{v}_x = -\omega_c^2 v_x \pm \omega_c \frac{\dot{E}_x}{B} \quad (50.2)$$

$$\ddot{v}_y = -\omega_c^2 v_y - \omega_c \frac{\dot{E}_x(x)}{B} \quad (51.2)$$

که در اینجا  $E_x(x)$  میدان الکتریکی در مکان ذره است. برای محاسبه این میدان، باید مدار ذره را بدانیم و نخست به حل آن می‌پردازیم. اگر میدان الکتریکی ضعیف باشد، می‌توانیم به‌عنوان یک تقریب با استفاده از مدار ناآشفته  $E_x(x)$  را محاسبه کنیم. مدار در غیاب میدان  $E$  در معادله ۷.۲ داده شده است:

$$x = x_0 + r_L \sin \omega_c t \quad (52.2)$$

اکنون از معادله‌های ۵۱.۲ و ۴۷.۲، داریم

$$\ddot{v}_y = -\omega_c^2 v_y - \omega_c \frac{E_0}{B} \cos k(x_0 + r_L \sin \omega_c t) \quad (53.2)$$

با پیش‌بینی نتیجه، به‌دنبال جوابی هستیم که مجموع دوران با بسامد  $\omega_c$  و سوق پایای  $v_E$  است. چون آنچه برای ما اهمیت دارد پیدا کردن رابطه‌ای برای  $v_E$  است، با متوسط‌گیری از حرکت دورانی در یک دور آن را حذف می‌کنیم. بدین ترتیب، از معادله ۵۰.۲ نتیجه می‌گیریم که  $\bar{v}_x = 0$  در معادله ۵۳.۲، متوسط جمله نوسانی  $\ddot{v}_y$  به‌طور واضح صفر می‌شود، و داریم

$$\bar{\ddot{v}}_y = 0 = -\omega_c^2 \bar{v}_y - \omega_c \frac{E_0}{B} \overline{\cos k(x_0 + r_L \sin \omega_c t)} \quad (54.2)$$

کسینوس را بسط می‌دهیم

$$\begin{aligned} \cos k(x_0 + r_L \sin \omega_c t) &= \cos(kx_0) \cos(kr_L \sin \omega_c t) \\ &\quad - \sin(kx_0) \sin(kr_L \sin \omega_c t) \end{aligned} \quad (55.2)$$

کافی است موردی را بررسی کنیم که شعاع لارمور کوچک است،  $kr_L \ll 1$ . با استفاده از بسط‌های تیلور

$$\cos \epsilon = 1 - \frac{1}{2} \epsilon^2 + \dots \quad (56.2)$$

$$\sin \epsilon = \epsilon + \dots$$

می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} \cos k(x_0 + r_L \sin \omega_c t) &\approx (\cos kx_0) \left(1 - \frac{1}{2} k^2 r_L^2 \sin^2 \omega_c t\right) \\ &\quad - (\sin kx_0) kr_L \sin \omega_c t \end{aligned}$$

جمله آخر با متوسط‌گیری روی زمان صفر می‌شود، و از معادله ۵۴.۲ به دست می‌آوریم

$$\bar{v}_y = -\frac{E_0}{B} (\cos kx_0) \left(1 - \frac{1}{4} k^2 r_L^2\right) = -\frac{E_x(x_0)}{B} \left(1 - \frac{1}{4} k^2 r_L^2\right) \quad (57.2)$$

بنابراین سوق  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  معمولی به علت ناهمگنی به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \left(1 - \frac{1}{4} k^2 r_L^2\right) \quad (58.2)$$

دلیل فیزیکی این مطلب را به سادگی می‌توان دید. یونی که مرکز راهنمای آن در یک بیشینه  $\mathbf{E}$  قرار دارد عملاً مدت نسبتاً زیادی از وقت خود را در نواحی  $\mathbf{E}$  ضعیفتر سپری می‌کند. بنابراین، سوق متوسط آن از  $E/B$  که در مرکز راهنما به دست می‌آید کمتر است. در یک میدان  $\mathbf{E}$  که به طور خطی تغییر می‌کند، یون در یک طرف مدار در یک میدان قویتر قرار دارد و در طرف دیگر مدار در میدانی که به همان اندازه ضعیفتر است قرار می‌گیرد؛ بنابراین، تصحیح مربوط به  $\mathbf{v}_E$  حذف می‌شود. از این موضوع معلوم می‌شود که جمله صحیح بستگی به مشتق دوم  $\mathbf{E}$  دارد. برای توزیع سینوسی، که فرض کرده‌ایم، مشتق دوم همیشه نسبت به  $\mathbf{E}$  منفی است. برای تغییر اختیاری  $\mathbf{E}$ ، تنها لازم است  $k$  را به  $\nabla$  تبدیل کنیم و در نتیجه معادله ۵۸.۲ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\mathbf{v}_E = \left(1 + \frac{1}{4} r_L^2 \nabla^2\right) \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (59.2)$$

جمله دوم را اثر شعاع متناهی لارمور می‌نامند. معنای این تصحیح چیست؟ چون  $r_L$  برای یونها خیلی بیشتر است تا برای الکترونها، بنابراین  $v_E$  دیگر مستقل از گونه نیست. اگر در پلاسما یک توده چگالی به وجود آید، یک میدان الکتریکی می‌تواند موجب جدا شدن الکترونها و یونها شود که میدان الکتریکی دیگری را تولید می‌کند. اگر سازوکار پسخور وجود داشته باشد که باعث شود میدان الکتریکی دوم میدان اولیه را تقویت کند،  $E$  بی‌نهایت افزایش می‌یابد، و پلاسما ناپایدار می‌شود. این ناپایداری را ناپایداری سوق می‌نامند، که در فصل بعد از آن بحث می‌کنیم. البته سوق‌گردان  $B$  نیز یک اثر شعاع متناهی لارمور است و موجب جدایی بارها می‌شود. اما، مطابق معادله ۲۴.۲،  $v_{\nabla B}$  متناسب با  $kr_L$  است. در حالی که جمله تصحیحی معادله ۵۸.۲ متناسب با  $k^2 r_L^2$  است. بنابراین، اثر میدان نایک‌نواخت  $E$  در  $k$  نسبتاً بزرگ، یا طول مقیاسهای ناهمگنی کوچک، مهم است. بدین دلیل، ناپایداریهای سوق به یک رده کلیتر با نام ریز ناپایداریهای متعلق‌اند.

## ۵.۲ میدان متغیر زمانی $E$

اکنون  $E$  و  $B$  را نسبت به فضا یکنواخت ولی نسبت به زمان متغیر می‌گیریم. ابتدا موردی را در نظر بگیرید که تنها  $E$  به‌طور سینوسی برحسب زمان تغییر می‌کند، و آن را در راستای محور  $x$  بگیرید:

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i\omega t} \hat{x} \quad (۶۰.۲)$$

چون  $\vec{E}_x = i\omega E_x$ ، معادله ۵۰.۲ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\ddot{v}_x = -\omega_c^2 \left( v_x \mp \frac{i\omega}{\omega_c} \frac{\vec{E}_x}{B} \right) \quad (۶۱.۲)$$

تعاریف زیر را در نظر می‌گیریم

$$\tilde{v}_p \equiv \pm \frac{i\omega}{\omega_c} \frac{\vec{E}_x}{B} \quad (۶۲.۲)$$

$$\tilde{v}_E \equiv -\frac{\vec{E}_x}{B}$$

که در آن علامت  $\sim$  را تنها برای تأکید بر اینکه سوق نوسانی است اضافه کرده‌ایم. علامت بالا (پایین)، مطابق معمول، نشاندنده مثبت (منفی) بودن  $q$  است. اکنون معادله‌های ۵۰.۲ و ۵۱.۲ به صورت زیر درمی‌آیند

$$\ddot{v}_x = -\omega_c^2(v_x - \tilde{v}_p) \quad (۶۳.۲)$$

$$\ddot{v}_y = -\omega_c^2(v_y - \tilde{v}_E)$$

با توجه به شباهت با معادله ۱۲.۲ جواب را به صورت مجموع حرکت سوقی حرکت دورانی در نظر می‌گیریم:

$$v_x = v_{\perp} e^{i\omega_c t} + \tilde{v}_p \quad (۶۴.۲)$$

$$v_y = \pm i v_{\perp} e^{i\omega_c t} + \tilde{v}_E$$

اکنون اگر دوبار نسبت به زمان مشتق بگیریم، داریم

$$\ddot{v}_x = -\omega_c^2 v_x + (\omega_c^2 - \omega^2) \tilde{v}_p \quad (۶۵.۲)$$

$$\ddot{v}_y = -\omega_c^2 v_y + (\omega_c^2 - \omega^2) \tilde{v}_E$$

این معادله مانند معادله ۶۳.۲ نیست مگر آنکه  $\omega^2 \ll \omega_c^2$ . اگر فرض کنیم E به کندی تغییر می‌کند، که در نتیجه  $\omega^2 \ll \omega_c^2$ ، آنگاه معادله ۶۴.۲ جواب تقریبی معادله ۶۳.۲ خواهد بود.

معادله ۶۴.۲ نشان می‌دهد که حرکت مرکز رهنما دارای دو مؤلفه است. مؤلفه  $v_y$  عمود بر B و E، سوق  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  معمولی است، اکنون  $v_E$  به کندی با بسامد  $\omega$  نوسان می‌کند. مؤلفه  $v_x$  یک سوق جدید در راستای E، سوق قطبش نامیده می‌شود. با قرار دادن  $\partial/\partial t$  به جای  $i\omega$ ، می‌توانیم معادله ۶۲.۲ را تعمیم دهیم و سوق قطبش را به صورت زیر تعریف کنیم

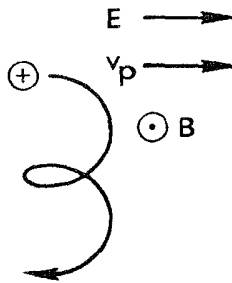
$$\boxed{v_p = \pm \frac{1}{\omega_c B} \frac{dE}{dt}} \quad (۶۶.۲)$$

چون  $v_p$  برای یونها و الکترونها در جهت‌های مخالف است، یک جریان قطبش وجود دارد؛ برای  $Z = 1$ ، این جریان عبارت است از

$$\mathbf{j}_p = ne(v_{ip} - v_{ep}) = \frac{ne}{eB^2} (M + m) \frac{dE}{dt} = \frac{\rho}{B^2} \frac{dE}{dt} \quad (۶۷.۲)$$

که در آن  $\rho$  چگالی جرم است.

جریان قطبش دلیل فیزیکی ساده‌ای دارد. در یک میدان مغناطیسی یون ساکنی را در نظر بگیرید. اگر به‌طور ناگهانی میدان E اعمال شود، اولین کاری که یون انجام می‌دهد این است



شکل ۱۲.۲ سوق قطبش.

که در جهت  $\mathbf{E}$  حرکت می‌کند. یون تنها بعد از رسیدن به سرعت  $v$  تحت تأثیر نیروی لورنتس  $e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  قرار می‌گیرد و شروع به حرکت به طرف پایین می‌کند (شکل ۱۲.۲). اکنون اگر  $\mathbf{E}$  را ثابت نگه داریم، سوق  $v_p$  دیگر وجود نخواهد داشت و تنها یک سوق  $v_B$  وجود دارد. اما اگر  $\mathbf{E}$  را معکوس کنیم، باز یک سوق  $v_p$ ، این دفعه به طرف چپ، به وجود می‌آید. بنابراین،  $v_p$  یک سوق آغازگر مربوط به لختی است و تنها در نیم‌دور اول هر چرخش که در آن  $\mathbf{E}$  عوض می‌شود رخ می‌دهد. در نتیجه،  $v_p$  با  $\omega/\omega_c$  به سمت صفر می‌رود.

اثر قطبش در یک پلاسما شبیه به قطبش در یک دی‌الکتریک جامد است، که در آن  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ . دو قطبها در پلاسما یونها و الکترونها با جدایی  $r_L$  هستند. ولی چون یونها و الکترونها برای نگهداری شبه خنثایی می‌توانند به اطراف حرکت کنند، اعمال میدان پایایی  $\mathbf{E}$  میدان قطبیدگی  $\mathbf{p}$  را به وجود نمی‌آورد. اما اگر  $\mathbf{E}$  نوسان کند، از تأخیر مربوط به لختی یون یک جریان نوسانی  $\mathbf{j}_p$  به وجود می‌آید.

## ۶.۲ میدان متغیر زمانی $\mathbf{B}$

به عنوان آخرین مورد، فرض می‌کنیم میدان مغناطیسی با زمان تغییر می‌کند. چون نیروی لورنتس همواره عمود بر  $\mathbf{v}$  است، خود میدان مغناطیسی نمی‌تواند به ذره باردار انرژی بدهد. اما، همراه با  $\mathbf{B}$  یک میدان الکتریکی به صورت زیر وجود دارد

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (۶۸.۲)$$

و این میدان می‌تواند به ذرات شتاب بدهد. دیگر نمی‌توان میدانها را کاملاً یکنواخت در نظر گرفت. فرض کنید  $v_{\perp} = dl/dt$  سرعت عرضی است که در آن  $l$  جزء طول در راستای مسیر ذره است (از  $v_{\parallel}$  صرف نظر شده است). از ضرب نرده‌ای معادله حرکت ۸.۲ در  $v_{\perp}$  به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \right) = q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_{\perp} = q \mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{l}}{dt} \quad (۶۹.۲)$$

با انتگرالگیری روی یک دوره، تغییر در یک چرخش به دست می‌آید:

$$\delta \left( \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \right) = \int_0^{2\pi/\omega_c} q \mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{l}}{dt} dt$$

اگر میدان به‌کندی تغییر کند، می‌توانیم انتگرال خطی روی مدار نامختل را به‌جای انتگرال زمانی قرار دهیم:

$$\begin{aligned} \delta \left( \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \right) &= \oint q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} \\ &= -q \int_S \dot{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (۷۰.۲)$$

در اینجا  $\mathbf{S}$  سطح محدود به مدار لایمور است و دارای جهتی است که از قاعده دست راست هنگامی که انگشتان در جهت  $\mathbf{v}$  هستند تعیین می‌شود. چون پلازما دیامغناطیسی است، برای یونها داریم  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} < 0$  و برای الکترونها  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} > 0$ . بنابراین، معادله ۷۰.۲ به صورت زیر درمی‌آید

$$\delta \left( \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \right) = \pm q \dot{B} \pi r_L^2 = \pm q \pi \dot{B} \frac{v_{\perp}^2}{\omega_c} \frac{m}{\pm q B} = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \cdot \frac{2\pi \dot{B}}{\omega_c} \quad (۷۱.۲)$$

کمیت  $2\pi \dot{B} / \omega_c = \dot{B} / f_c$  همان تغییر  $\delta B$  در خلال یک دوره چرخش است. بنابراین

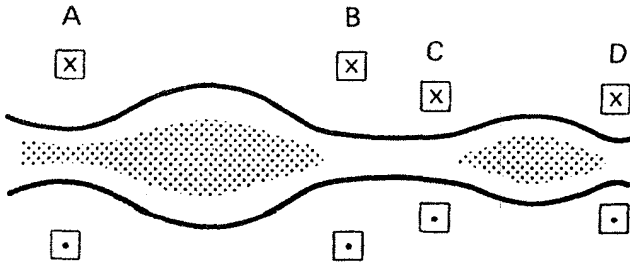
$$\delta \left( \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \right) = \pi \delta B \quad (۷۲.۲)$$

چون طرف چپ  $\delta(\mu B)$  است، نتیجه مطلوب را به دست می‌آوریم

$$\delta \mu = 0 \quad (۷۳.۲)$$

گشتاور مغناطیسی در میدانهای مغناطیسی کند تغییر ناورداست.

هرگاه شدت میدان  $B$  تغییر کند، مدارهای لایمور منبسط و منقبض می‌شوند، و ذره‌ها انرژی عرضی می‌گیرند و از دست می‌دهند. این تبادل انرژی بین ذرات و میدان به‌طور خیلی ساده با معادله ۷۳.۲ توصیف می‌شود. از ناوردایی  $\mu$  می‌توان قضیه معروف زیر را به‌آسانی ثابت کرد:



شکل ۱۳.۲ تراکم بی‌دررو دو مرحله‌ای پلاسما.

شار مغناطیسی از مدار لارمور ثابت است.

شار  $\Phi$  عبارت است از  $BS$ ، که در آن  $S = \pi r_L^2$ . در نتیجه

$$\Phi = B\pi \frac{v_{\perp}^2}{\omega_c^2} = B\pi \frac{v_{\perp}^2 m^2}{q^2 B^2} = \frac{2\pi m}{q^2} \frac{\frac{1}{2} m v_{\perp}^2}{B} = \frac{2\pi m}{q^2} \pi \quad (۷۴.۲)$$

بنابراین، اگر  $\mu$  ثابت باشد  $\Phi$  نیز ثابت است.

از این خاصیت در یک روش گرم کردن پلاسما موسوم به تراکم بی‌دررو استفاده می‌شود. شکل ۱۳.۲ طرحی از چگونگی این گرمایش را نشان می‌دهد. پلاسمایی به درون ناحیه بین آینه‌های  $A$  و  $B$  تزریق می‌شود. آن‌گاه به پیچه‌های  $A$  و  $B$  تب داده می‌شود تا  $B$  در نتیجه  $v_{\perp}$  افزایش یابد. پس از آن می‌توان پلاسمای گرم شده را با یک تب دیگر در  $A$  به ناحیه  $C-D$  منتقل کرد، که این موجب افزایش نسبت آینه در آنجا می‌شود. سپس پیچه‌های  $C$  و  $D$  تبدهی می‌شوند تا تراکم بیشتر و پلاسمای گرم‌تر شود. در نخستین دستگاه‌های همجوشی میدان مغناطیسی این نوع گرمایش به‌کار رفته بود. همچنین از تراکم بی‌دررو در پلاسمای چنبره‌ای با موفقیت استفاده شده است و یک عنصر اصلی طرح‌های همجوشی با محرک لیزری که در آنها از محصورسازی مغناطیسی یا لختی استفاده می‌شود به حساب می‌آید.

## ۷.۲ خلاصه‌ای از سوکهای مرکز راهنما

$$\mathbf{v}_f = \frac{1}{q} \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad \text{نیروی عمومی } \mathbf{F}: \quad (۱۷.۲)$$

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad \text{میدان الکتریکی}: \quad (۱۵.۲)$$

$$\mathbf{v}_g = \frac{m}{q} \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad \text{میدان گرانش}: \quad (۱۸.۲)$$

$$v_E = \left( 1 + \frac{1}{\gamma} r_L^2 \nabla^2 \right) \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad \text{E ی نایکناخت:} \quad (59.2)$$

میدان نایکناخت  $\mathbf{B}$

$$v_{\nabla B} = \pm \frac{1}{\gamma} v_{\perp} r_L \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} \quad \text{سوق گرادیان } B: \quad (24.2)$$

$$v_R = \frac{m v_{\parallel}^2}{q} \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2 B^2} \quad \text{سوق خمیدگی:} \quad (26.2)$$

$$v_R + v_{\nabla B} = \frac{m}{q} \left( v_{\parallel}^2 + \frac{1}{\gamma} v_{\perp}^2 \right) \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2 B^2} \quad \text{میدان خلا خمیده:} \quad (30.2)$$

$$v_p = \pm \frac{1}{\omega_c B} \frac{d\mathbf{E}}{dt} \quad \text{سوق قطبش:} \quad (66.2)$$

## ۸.۲ نوردهای بی درو

از مکانیک کلاسیک می دانیم که هر وقت دستگاهی دارای حرکت دوره‌ای باشد، انتگرال کنش  $\oint p dq$  روی یک دوره یک ثابت حرکت است. در اینجا  $p$  و  $q$  تکانه و مختصهٔ تعمیم یافته هستند که در ضمن حرکت تکرار می شوند. اگر تغییرکنندی در دستگاه به وجود آید به قسمی که حرکت کاملاً دوره‌ای نباشد، ثابت حرکت تغییر نمی کند و از این رو نوردای بی درو نامیده می شود. در اینجا منظور از کنندی تغییر کوچک بودن آن در یک دورهٔ حرکت است به طوری که انتگرال  $\oint p dq$  کاملاً معین است اگرچه دیگر دقیقاً انتگرال روی یک مسیر بسته نیست. نوردهای بی درو اهمیت خاصی در فیزیک پلاسما دارند؛ با آنها می توانیم در مثالهای فراوانی که متضمن حرکتهای پیچیده‌ای هستند جوابهای ساده‌ای به دست آوریم. سه نوردای بی درو، هر یک مربوط به نوع متفاوتی از حرکت دوره‌ای، وجود دارند.

### ۱.۸.۲ اولین نوردای بی درو، $\mu$

قبلاً با کمیت زیر آشنا شدیم

$$\mu = m v_{\perp}^2 / 2B$$

و نوردایی آن را در میدانهای متغیر زمانی و فضایی  $\mathbf{B}$  اثبات کردیم. البته، حرکت دوره‌ای در اینجا چرخش لامبور است. اگر  $p$  را تکانهٔ زاویه‌ای  $m v_{\perp} r$  و  $dq$  را مختصهٔ  $d\theta$  بگیریم، انتگرال کنش به صورت زیر درمی آید



$$\oint p \, dq = \oint m v_{\perp} r_L d\theta = 2\pi r_L m v_{\perp} = 2\pi \frac{m v_{\perp}^2}{\omega_c} = 4\pi \frac{m}{|q|} \mu \quad (75.2)$$

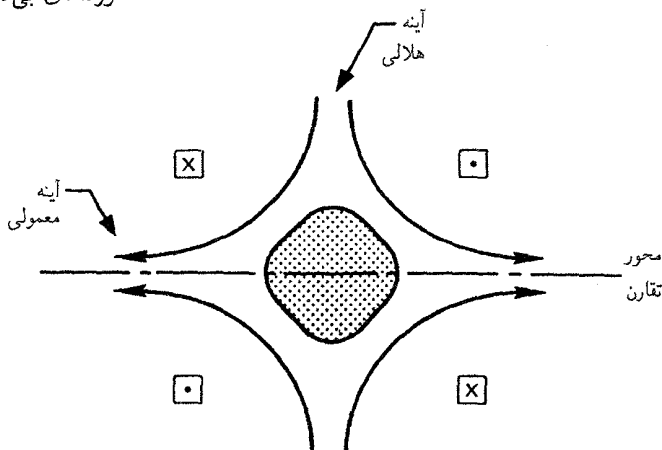
بنابراین تا زمانی که  $q/m$  تغییر نکرده است  $\mu$  یک ثابت حرکت است. ناوردایی  $\mu$  را فقط با فرض ضمنی  $1 \ll \omega/\omega_c$  اثبات کرده‌ایم، که در آن  $\omega$  بسامدی است که آهنگ تغییر  $\mathbf{B}$  را از دیدگاه ذره مشخص می‌کند. اما یک برهان برای ناوردایی  $\mu$ ، حتی اگر  $\omega_c \lesssim \omega$ ، وجود دارد. به زبان نظریه‌دانها،  $\mu$  "برای همهٔ مرتبه‌ها در بسطی برحسب  $\omega/\omega_c$ " ناورداست. در عمل این مطلب بدین معنی است که  $\mu$  خیلی بیشتر از  $\mathbf{B}$  در خلال یک دورهٔ چرخش تقریباً ثابت باقی می‌ماند.

اینکه بدانیم چه وقت یک ناوردای بی‌دررو وجود ندارد همانقدر مهم است که بدانیم چه وقت وجود دارد. ناوردای بی‌دررو  $\mu$  زمانی که  $\omega$  در مقایسه با  $\omega_c$  کوچک نیست شکسته می‌شود. سه مثال از این مورد را بیان می‌کنیم.

(الف) دَمَش مغناطیسی. اگر شدت  $\mathbf{B}$  در یک دستگاه محصورسازی آینه‌ای به‌طور سینوسی تغییر کند،  $v_{\perp}$  ذرات نوسان می‌کند؛ اما در طی زمان انرژی کسب نخواهد شد. اما اگر ذرات برخورد انجام دهند، ناوردایی  $\mu$  شکسته می‌شود، و پلاسما می‌تواند گرم شود. بخصوص، ذره‌ای که در مرحلهٔ تراکم برخوردی انجام می‌دهد می‌تواند قسمتی از انرژی چرخشی خود را به انرژی  $v_{\parallel}$  منتقل سازد، و این انرژی در مرحلهٔ انبساط بازگردانده نمی‌شود.

(ب) گرمایش سیکلوترونی. اکنون فرض کنید میدان  $B$  با بسامد  $\omega_c$  در نوسان است. آن‌گاه میدان الکتریکی القایی همفاصل با بعضی از ذرات می‌چرخد و به‌طور پیوسته به حرکت لارموری آنها شتاب می‌دهد. شرط  $\omega_c \ll \omega$  شکسته می‌شود،  $\mu$  پایسته نیست، و پلاسما می‌تواند گرم شود.

(ج) جناغ مغناطیسی. اگر جریان در یکی از پیچه‌های دستگاه آینهٔ مغناطیسی ساده برعکس شود، جناغ مغناطیسی شکل می‌گیرد (شکل ۱۴.۲). این پیکربندی، علاوه بر آینه‌های معمولی، دارای یک آینهٔ جناغی دوکی است که در  $360^\circ$  درجهٔ سمتی گسترده شده است. پلاسمایی که در دستگاه جناغی محصور شده است ظاهراً خواص پایداری بهتری نسبت به پلاسما در یک آینهٔ معمولی دارد. متأسفانه، به‌علت وجود ناحیهٔ اتلافی اضافی، اتلافهای مخروط اتلاف بیشتر هستند؛ و حرکت ذره نابی دررو است. چون میدان  $B$  در مرکز تقارن صفر است،  $\omega_c$  هم در آنجا صفر می‌شود؛ و  $\mu$  ثابت نمی‌ماند. شعاع لارمور موضعی نزدیک مرکز بزرگتر از اندازهٔ دستگاه است. به‌همین علت، ناوردای بی‌دررو  $\mu$  تضمین نمی‌کند که ذرات بیرون مخروط اتلاف بعد از عبور از ناحیهٔ نابی دررو باز هم در بیرون خواهند ماند. خوشبختانه، در این مورد ناوردای دیگری وجود دارد:



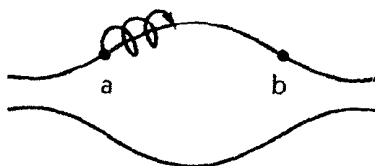
شکل ۱۴.۲ پلاسمای محصور در یک میدان مغناطیسی جناغی.

گشتاور زاویه‌ای بنیادی  $p_\theta = mrv_\theta - erA_\theta$ . این ناوردا ایجاب می‌کند که جمعیتی از ذرات تا زمانی که برخوردی انجام دهند به‌طور نامحدود محصور باقی می‌مانند.

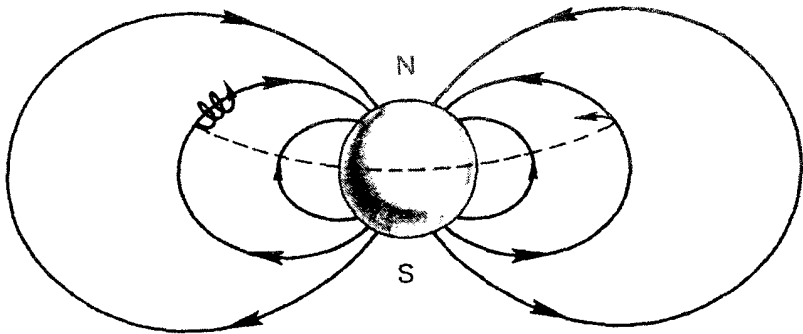
### ۲.۸.۲ دومین ناوردای بی‌دررو، $J$

ذره‌ای را در نظر بگیرید که بین دو آینه مغناطیسی به‌دام افتاده است: این ذره بین دو آینه در رفت و برگشت است و در نتیجه دارای حرکتی دوره‌ای با "بسامد واجهش" است. یک ثابت این حرکت  $\oint mv_{\parallel} ds$  است، که در آن جزء طول مسیر (از مرکز راهنما) در امتداد یک خط میدان است. اما چون مرکز راهنما در عرض خطوط میدان سوق پیدا می‌کند، حرکت دقیقاً دوره‌ای نیست، و ثابت حرکت یک ناوردای بی‌دررو می‌شود. این ثابت را ناوردای طولی  $J$  می‌نامند و برای یک نیم دور بین دو نقطه برگشت به‌صورت زیر تعریف می‌شود (شکل ۱۵.۲):

$$J = \int_a^b v_{\parallel} ds \quad (۷۶.۲)$$



شکل ۱۵.۲ ذره واجهنده بین نقاط  $a$  و  $b$  در یک میدان مغناطیسی.



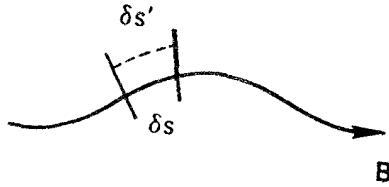
شکل ۱۶.۲ حرکت ذره باردار در میدان مغناطیسی زمین.

ثابت خواهیم کرد که  $J$  در یک میدان مغناطیسی نایک‌نواخت ایستا ناورداست؛ همچنین این نتیجه برای میدان  $B$  که به‌کندی با زمان تغییر می‌کند صادق است.

قبل از آنکه به اثبات نسبتاً طولانی این گزاره بپردازیم، مثالی را از نوع مسئله‌ای که در آن قضیه ناوردایی  $J$  مفید است بررسی می‌کنیم. همان‌طور که قبلاً دیده‌ایم، آینه میدان مغناطیسی زمین ذرات بارداری را به‌دام می‌اندازد که به‌کندی در طول جغرافیایی حول زمین سوق می‌یابند (مسئله ۸.۲؛ شکل ۱۶.۲ را ببینید). اگر میدان مغناطیسی کاملاً متقارن بود، سرانجام ذره به همان خط نیرو باز سوق داده می‌شد. اما میدان واقعی توسط آثاری مانند باد خورشیدی واپیچیده است. در این مورد، آیا ذره به‌همان خط نیرو برخورد گشت؟ چون انرژی ذره پایسته است و در نقطه برگشت برابر با  $\frac{1}{2}mv^2$  است، ناوردایی  $\mu$  نشان می‌دهد که  $|B|$  در نقطه برگشت یکسان باقی می‌ماند. اما، ذره در حین باز سوق به‌همان طول جغرافیایی، ممکن است روی خط نیرو دیگری با ارتفاع متفاوتی قرار گیرد. اگر  $J$  پایسته باشد این تغییر نمی‌تواند روی بدهد.  $J$  طول خط نیرو بین نقاط برگشت را تعیین می‌کند، و بین نقاط برگشت با  $|B|$  یکسان هیچ درختی با طول یکسان وجود ندارد. در نتیجه، ذره حتی در یک میدان نامتقارن جزئی به‌همان خط نیرو برمی‌گردد.

برای اثبات ناوردایی  $J$ ، ابتدا ناوردایی  $v_{\parallel} \delta s$  را در نظر می‌گیریم، که در آن  $\delta s$  قطعه‌ای از مسیر در امتداد  $B$  است (شکل ۱۷.۲). به‌علت سوتهای مرکز راهنما، ذره‌ای روی  $s$  بعد از زمان  $\Delta t$  روی خط نیروی دیگر  $\delta s'$  یافت می‌شود. طول  $\delta s'$  با گذراندن صفحه‌هایی عمود بر  $B$  از نقاط انتهایی  $\delta s$  تعریف می‌شود. طول  $\delta s$  به‌وضوح متناسب با شعاع خمیدگی است:

$$\frac{\delta s}{R_c} = \frac{\delta s'}{R_c}$$



شکل ۱۷.۲ اثبات نوردابی  $J$ .

و در نتیجه

$$\frac{\delta s' - \delta s}{\Delta t \delta s} = \frac{R'_c - R_c}{\Delta t R_c} \quad (۷۷.۲)$$

مؤلفهٔ “شعاعی”  $v_{gc}$  عبارت است از

$$v_{gc} \cdot \frac{R_c}{R'_c} = \frac{R'_c - R_c}{\Delta t} \quad (۷۸.۲)$$

از معادله‌های ۲۴.۲ و ۲۶.۲، داریم

$$v_{gc} = v_{\nabla B} + v_R = \pm \frac{1}{\gamma} v_{\perp} r_L \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} + \frac{mv_{\parallel}^2}{q} \frac{R_c \times \mathbf{B}}{R_c^2 B^2} \quad (۷۹.۲)$$

آخرین جمله هیچ مؤلفه‌ای در امتداد  $R_c$  ندارد. با استفاده از معادله‌های ۷۸.۲ و ۷۹.۲، می‌توان معادلهٔ ۷۷.۲ را به صورت زیر نوشت

$$\frac{1}{\delta s} \frac{d}{dt} \delta s = v_{gc} \cdot \frac{R_c}{R'_c} = \frac{1}{\gamma} \frac{m}{q} \frac{v_{\perp}^2}{B^2} (\mathbf{B} \times \nabla B) \cdot \frac{R_c}{R'_c} \quad (۸۰.۲)$$

این آهنگ تغییر  $\delta s$  از دید ذره است. اکنون باید آهنگ تغییر  $v_{\parallel}$  را آن‌طور که ذره می‌بیند به دست آوریم. انرژی‌های عمودی و موازی به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$W \equiv \frac{1}{\gamma} mv_{\parallel}^2 + \frac{1}{\gamma} mv_{\perp}^2 = \frac{1}{\gamma} mv_{\parallel}^2 + \mu B \equiv W_{\parallel} + W_{\perp} \quad (۸۱.۲)$$

بدین ترتیب، برای  $v_{\parallel}$  می‌توان نوشت

$$v_{\parallel} = [(\gamma/m)(W - \mu B)]^{1/2} \quad (۸۲.۲)$$

در اینجا  $W$  و  $\mu$  ثابت‌اند، و تنها  $B$  تغییر می‌کند. بنابراین،

$$\frac{\dot{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} = -\frac{1}{2} \frac{\mu \dot{B}}{W - \mu B} = -\frac{1}{2} \frac{\mu \dot{B}}{W_{\parallel}} = -\frac{\mu \dot{B}}{m v_{\parallel}^2} \quad (۸۳.۲)$$

چون  $\mathbf{B}$  را ایستا فرض کرده‌ایم،  $\dot{B}$  تنها به علت حرکت مرکز راهنما صفر نیست:

$$\dot{B} = \frac{dB}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = \mathbf{v}_{gc} \cdot \nabla B = \frac{m v_{\parallel}^2}{q} \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2 B^2} \cdot \nabla B \quad (۸۴.۲)$$

اکنون داریم

$$\frac{\dot{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} = -\frac{\mu}{q} \frac{(\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}) \cdot \nabla B}{R_c^2 B^2} = -\frac{1}{2} \frac{m}{q} \frac{v_{\perp}^2}{B} \frac{(\mathbf{B} \times \nabla B) \cdot \mathbf{R}_c}{R_c^2 B^2} \quad (۸۵.۲)$$

تغییر نسبی در  $v_{\parallel} \delta s$  عبارت است از

$$\frac{1}{v_{\parallel} \delta s} \frac{d}{dt}(v_{\parallel} \delta s) = \frac{1}{\delta s} \frac{d\delta s}{dt} + \frac{1}{v_{\parallel}} \frac{dv_{\parallel}}{dt} \quad (۸۶.۲)$$

از معادله‌های ۸۰.۲ و ۸۵.۲، می‌بینیم که جمله‌های سمت راست این معادله با هم حذف می‌شوند، و در نتیجه

$$v_{\parallel} \delta s = \text{const.} \quad (۸۷.۲)$$

اما این رابطه دقیقاً به معنای ثابت بودن  $J$  نیست. در انتگرال گرفتن از  $v_{\parallel} \delta s$  بین نقاط برگشت، ممکن است که نقاط برگشت روی  $\delta s'$  منطبق بر فصل مشترک صفحات عمودی نباشد (شکل ۱۷.۲). با این حال، هر خطایی در  $J$  که از چنین اختلافی ناشی می‌شود قابل چشمپوشی است زیرا  $v_{\parallel}$  نزدیک نقاط برگشت تقریباً صفر است. در نتیجه، ثابت کرده‌ایم که

$$J = \int_a^b v_{\parallel} ds = \text{const.} \quad (۸۸.۲)$$

یک طرح گرمایش پلازما که دَمَش مغناطیسی زمان‌گذرا نامیده می‌شود مثالی از نقض ناوردایی  $J$  است. فرض کنید یک جریان نوسانی به پیچ‌های یک دستگاه آینه اعمال شود به قسمی که آینه‌ها به‌طور متناوب با بسامدی نزدیک به بسامد واجهش نسبت به یکدیگر دور و نزدیک شوند. ذراتی که درست دارای بسامد واجهش هستند همواره یک آینه نزدیک‌شونده را مشاهده خواهند

کرد و بنابراین  $v_{\parallel}$  آنها افزایش خواهد یافت. در این مورد  $J$  پایسته نیست زیرا در یک مدت زمان نه چندان طولانی نسبت به زمان رفت و برگشت تغییری در  $\mathbf{B}$  رخ می‌دهد.

### ۳.۸.۲ سومین ناوردایی بی دررو، $\Phi$

با مراجعه مجدد به شکل ۱۶.۲، می‌بینیم که سوق کند یک مرکز راهنما حول زمین نوع سومی از حرکت دوره‌ای است. ناوردای بی دررو مربوط به این حرکت شار مغناطیسی کل  $\Phi$  محصورشده توسط سطح سوق است. تقریباً واضح است که وقتی  $\mathbf{B}$  تغییر می‌کند ذره در سطحی باقی خواهد ماند که تعداد کل خطوط نیروی عبورکننده از آن ثابت می‌ماند. این ناوردا  $\Phi$ ، دارای کاربردهای کمی است زیرا بیشتر افت و خیزهای  $\mathbf{B}$  در مدت زمانی رخ می‌دهند که نسبت به دوره سوق کوچک است. به عنوان مثالی از نقض ناوردایی  $\Phi$ ، می‌توانیم به چند کار تازه روی تحریک امواج هیدرومغناطیسی در یون سپهر اشاره کنیم. این امواج دوره طولانی قابل مقایسه‌ای نسبت به زمان سوق ذره حول زمین دارند. بنابراین، ذرات می‌توانند در هر دور با همان فاز با موج مواجه شوند. اگر فاز درست باشد. موج می‌تواند با تبدیل انرژی سوق ذره به انرژی موج برانگیخته شود.

### مسائل

۱۳.۲ با استفاده از ناوردایی  $J$  نتیجه مسئله ۱۲.۲ ب را به‌طور مستقیم به‌دست آورید.

(الف) فرض کنید  $\int v_{\parallel} ds \simeq v_{\parallel} L$  و نسبت به زمان مشتق بگیرید.

(ب) از اینجا عبارتی برای  $T$  برحسب  $dL/dt$  به‌دست آورید. برای تعیین جواب قرار دهید  $dL/dt = -2v_m$ .

۱۴.۲ در گرمایش پلاسما با تراکم بی دررو، ناوردایی  $\mu$  ایجاب می‌کند که  $K T_{\perp}$  با افزایش  $B$  افزایش پیدا کند. اما میدان مغناطیسی نمی‌تواند به‌ذرات شتاب دهد زیرا نیروی لورنتس  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  همواره بر سرعت عمود است. ذرات چگونه انرژی می‌گیرند؟

۱۵.۲ سوق قطبش  $v_m$  را می‌توان از پایستگی انرژی نیز به‌دست آورد. اگر  $\mathbf{E}$  نوسان کند، سوق  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  نیز نوسان خواهد کرد؛ و یک انرژی  $\frac{1}{2}mv_E^2$  مربوط به حرکت مرکز راهنما وجود خواهد داشت. چون انرژی از میدان  $\mathbf{E}$  تنها می‌تواند با حرکت در امتداد  $\mathbf{E}$  به‌دست آید، باید یک سوق  $v_m$  در راستای  $\mathbf{E}$  وجود داشته باشد. با مساوی قرار دادن آهنگ تغییر  $\frac{1}{2}mv_E^2$  با آهنگ انرژی کسب‌شده از  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_m$ ، مقدار لازم  $v_m$  را پیدا کنید.

۱۶.۲ یک پلاسمای هیدروژنی را با یک موج رادیویی، با  $\mathbf{E}$  عمود بر  $\mathbf{B}$  و با بسامد زاویه‌ای

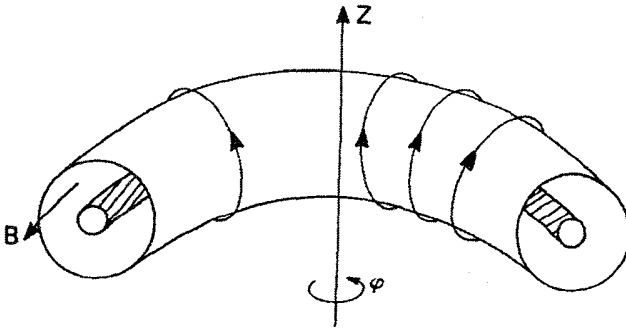
$\omega = 10^4 \text{ rad/sec}$  گرم می‌کنیم. میدان مغناطیسی محصورکننده  $1 \text{ T}$  است. آیا در پاسخ به این بی‌دررو موجی (الف) الکترونها و (ب) یونها حرکت می‌کنند؟

۱۷.۲ یک پروتون  $1 \text{ keV}$  با  $v_{\parallel} = 0$  در میدان مغناطیسی یکنواخت  $1 \text{ T}$  به هنگامی که  $B$  به کندی تا  $1 \text{ T}$  افزایش می‌یابد شتابدار می‌شود. سپس با ذره‌ای سنگین برخورد کنشان می‌کند و تغییر جهت می‌دهد به قسمی که  $v_{\perp} = v_{\parallel}$ . آن‌گاه میدان  $B$  به کندی کاهش می‌یابد تا دوباره به  $1 \text{ T}$  برگرردد. اکنون انرژی پروتون چقدر است؟

۱۸.۲ یک پلاسمای هیدروژنی بی‌برخورد در چنبری محبوس است که حلقه‌های بیرونی آن یک میدان مغناطیسی  $B$  که تقریباً به‌طور کامل در راستای  $\phi$  است ایجاد می‌کند. پلاسما در آغاز با  $KT = 1 \text{ keV}$  ماکسولی است. در  $t = 0$ ، میدان  $B$  به تدریج در مدت  $10^6 \mu\text{sec}$  از  $1 \text{ T}$  به  $3 \text{ T}$  افزایش داده می‌شود، و پلاسما متراکم می‌شود.

(الف) نشان دهید گشتاور مغناطیسی  $\mu$  برای یونها و الکترونها ناوردا باقی می‌ماند.

(ب) دماهای  $T_{\perp}$  و  $T_{\parallel}$  را بعد از تراکم محاسبه کنید.

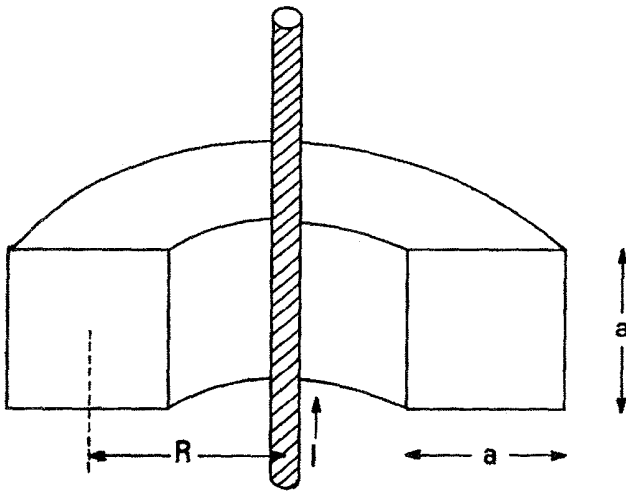


شکل م ۱۸.۲

۱۹.۲ پلاسمای یکنواختی در یک اتاقک چنبره‌ای با سطح مقطع مربع مطابق شکل به وجود می‌آید. میدان مغناطیسی توسط جریان  $I$  در امتداد محور تقارن ایجاد می‌شود. اندازه‌های مربوط به اتاقک عبارت‌اند از  $a = 1 \text{ cm}$ ،  $R = 10 \text{ cm}$ . پلاسما با  $KT = 10^6 \text{ eV}$  ماکسولی است و دارای چگالی  $n = 10^{19} \text{ m}^{-3}$  است. میدان الکتریکی وجود ندارد.

(الف) شکل کلی مدارهای یونها و الکترونها را با  $v_{\parallel} = 0$  که در میدان نایکنواخت  $B$  سوق پیدا می‌کنند ترسیم کنید.

(ب) آهنگ تجمع بار (برحسب کولن بر ثانیه) ناشی از ترکیب شدن سوپهای  $\nabla_{\perp} B$  و  $\nabla_{\parallel} B$  را روی



شکل ۱۹.۲

تمام تخته فوقانی اتاقک محاسبه کنید. میدان مغناطیسی در مرکز اتاقک  $T$  است، و هر جا لازم باشد می‌توانید از تقریب نسبت بزرگ اندازه‌ها ( $R \gg a$ ) استفاده کنید.

۲۰.۲ فرض کنید میدان مغناطیسی در امتداد محور یک آینه مغناطیسی به صورت زیر داده شده است  
 $B_z = B_0(1 + \alpha^2 z^2)$

(الف) اگر الکترونی در  $z = 0$  دارای سرعتی باشد که به صورت  $v_{\perp} = 1.5v_{\parallel} = 3v_{\parallel}^2$  داده شده است، در چه مقدار  $z$  الکترون بازتابیده می‌شود؟

(ب) معادله حرکت مرکز راهنما را برای راستای موازی با میدان بنویسید.

(ج) نشان دهید که حرکت سینوسی است، و بسامد آن را محاسبه کنید.

(د) ناوردای طولی  $I$  مربوط به این حرکت را حساب کنید.

۲۱.۲ یک سیم مستقیم نامتناهی جریان ثابت  $I$  را در جهت  $+z$  حمل می‌کند. در  $t = 0$  الکترونی با شعاع چرخش کوچک در  $z = 0$  و  $r = r_0$  با  $v_{\perp 0} = v_{\parallel 0}$  قرار دارد. ( $\perp$  و  $\parallel$ ) به ترتیب راستاهای عمود بر و موازی با میدان مغناطیسی را نشان می‌دهند.)

(الف) اندازه و جهت سرعت سوق مرکز راهنمای حاصل را محاسبه کنید.

(ب) فرض کنید جریان به کندی نسبت به زمان به قسمی افزایش می‌یابد که یک میدان الکتریکی ثابت در راستای  $\pm z$  القا می‌شود. راستاهای نسبی  $\mathbf{E}$ ،  $\mathbf{B}$ ،  $\mathbf{I}$  و  $\mathbf{v}_E$  را روی یک نمودار نشان دهید.

(ج) آیا هنگامی که جریان افزایش می‌یابد  $v_{\perp}$  و  $v_{\parallel}$  افزایش می‌یابند، کاهش می‌یابند یا ثابت باقی می‌مانند؟ چرا؟



## پلازما به عنوان سیال

### ۱.۳ مقدمه

در پلازما وضعیت پیچیده‌تر از آن است که در فصل گذشته دیدیم؛ میدانهای  $E$  و  $B$  از قبل معین نشده‌اند بلکه با حرکتها و مکانهای خود بارها تعیین می‌شوند. باید یک مسئله خود-سازگار را حل کرد؛ یعنی، پیدا کردن مجموعه‌ای از مسیرهای ذره و نقشهای میدان به طوری که ذرات ضمن حرکت در مدارهای خود میدانها را به وجود می‌آورند و میدانها باعث حرکت ذرات در آن مدارهای دقیق می‌شوند. و این باید در یک وضعیت متغیر زمانی انجام شود.

دیده‌ایم که چگالی پلاسمای نوعی ممکن است  $10^{12}$  زوج الکترون-یون بر  $cm^3$  باشد. اگر هر یک از این ذرات مسیر پیچیده‌ای را طی کند و لازم باشد تا هر یک از این ذرات را تعقیب کنیم، پیش‌بینی رفتار پلازما کار بی‌فایده‌ای خواهد بود. خوشبختانه، این پیگیری معمولاً لازم نیست زیرا، با کمال شگفتی، اکثر پدیده‌های پلازما — شاید تا  $80\%$  درصد آنها — که در آزمایشهای واقعی مشاهده می‌شوند با یک الگوی نسبتاً ساده قابل توضیح‌اند. این همان الگویی است که در مکانیک سیالات به کار می‌بریم، که در آن هویت ذره منفرد نادیده گرفته می‌شود، و تنها حرکت جزءهای سیال به حساب آورده می‌شود. البته، در مورد پلازما سیال حاوی بارهای الکتریکی است. در

سیال معمولی، برخورد های فراوان بین ذرات آنها را در یک جزء سیال ننگه می‌دارند که با هم حرکت کنند. جای تعجب است که چنین الگویی برای پلاسماها که کلاً دارای برخوردهای کمی هستند نتیجه می‌دهد. اما خواهیم دید که دلیلی برای این کارایی وجود دارد.

در قسمت عمده‌ای از این کتاب، به بررسی آنچه از نظریه سیالی پلاسما می‌توان یاد گرفت خواهیم پرداخت. یک بررسی دقیقتر - نظریه جنبشی پلاسما - مستلزم محاسبه ریاضی بیشتری است که برای یک درس مقدماتی مناسب است. در فصل ۷ مقدمه‌ای بر نظریه جنبشی بیان می‌شود. در بعضی مسائل پلاسما، هیچ یک از نظریه‌های سیالی و جنبشی برای توضیح رفتار پلاسما کافی نیست. آنگاه مجبوریم به فرایند پرزحمت پیگیری مسیرهای انفرادی ذرات برگردیم. رایانه‌های جدید می‌توانند این کار را انجام دهند، اگرچه حافظه آنها فقط برای ذخیره کردن مؤلفه‌های سرعت و مکان حدود  $10^4$  ذره گنجایش دارد و، به استثنای چند مورد اندک، می‌توانند مسائل را تنها در یک یا دو بعد حل کنند. با وجود این، اخیراً با شبیه‌سازی رایانه‌ای کار مهمی در پرکردن شکاف بین نظریه و آزمایش در موردهایی شروع شده است که حتی نظریه جنبشی نمی‌تواند به توضیح آنچه مشاهده شده است نزدیک شود.

## ۲.۳ رابطه فیزیک پلاسما با الکترومغناطیس معمولی

### ۱.۲.۳ معادلات ماکسول

در خلا:

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \sigma \quad (۱.۳)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (۲.۳)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (۳.۳)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j} + \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}) \quad (۴.۳)$$

در یک محیط:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \sigma \quad (۵.۳)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (۶.۳)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (۷.۳)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \dot{\mathbf{D}} \quad (۸.۳)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (۹.۳)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (۱۰.۳)$$

در معادلات (۵.۳) و (۸.۳)،  $\sigma$  و  $\mathbf{j}$  چگالیهای بار و جریان آزاد هستند. چگالیهای بار و جریان ناشی از قطبش و مغناطیس محیط در تعریف کمیت‌های  $\mathbf{D}$  و  $\mathbf{H}$  برحسب  $\epsilon$  و  $\mu$  گنجانده شده‌اند. در یک پلاسما، یونها و الکترونهای تشکیل‌دهنده پلاسما معادل بارها و جریانهای "مقید" هستند. چون این ذرات به طریق پیچیده‌ای حرکت می‌کنند، یکپارچه کردن اثرات آنها به صورت دو ثابت  $\epsilon$  و  $\mu$  ناممکن است. در نتیجه، در فیزیک پلاسما، عموماً با معادلات خلا<sup>۱</sup> ۱.۳ تا ۴.۳ کار می‌کنند، که در آنها  $\sigma$  و  $\mathbf{j}$  شامل همه بارها و جریانهای خارجی و داخلی هستند.

توجه کنید که در معادلات خلا<sup>۱</sup> از  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{B}$  که با ثابتهای  $\epsilon_0$  و  $\mu_0$  به هم مربوط می‌شوند استفاده کرده‌ایم نه از همتاهای آنها،  $\mathbf{D}$  و  $\mathbf{H}$ . علت آن است که نیروهای  $q\mathbf{E}$  و  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  به  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{B}$  بستگی دارند نه به  $\mathbf{D}$  و  $\mathbf{H}$ ، و تا زمانی که با معادلات خلا<sup>۱</sup> سروکار داریم لازم نیست کمیت‌های  $\mathbf{H}$  و  $\mathbf{D}$  را وارد کنیم.

### ۲.۲.۳ بررسی کلاسیک مواد مغناطیسی

چون هر ذره<sup>۱</sup> دوران‌کننده دارای گشتاور مغناطیسی است، منطقی به نظر می‌رسد که پلاسما را به عنوان یک ماده<sup>۱</sup> مغناطیسی با تراوایی  $\mu_m$  در نظر بگیریم. (شاخص  $m$  را در پایین تراوایی گذاشته‌ایم تا آن را از ناوردای بی‌دررو  $\mu$  تمیز دهیم.) برای اینکه ببینیم چرا این کار عملاً انجام نمی‌شود، روشی که با آن معمولاً مواد مغناطیسی بررسی می‌شوند را مرور می‌کنیم.

حوزه‌های فرّومغناطیسی مثلاً قطعه‌ای آهن دارای گشتاورهای مغناطیسی  $\mu_i$  هستند، که موجب مغناطیدگی حجمی  $\mathbf{M}$  در واحد حجم می‌شوند:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{V} \sum_i \mu_i \quad (۱۱.۳)$$

این  $\mathbf{M}$  دارای همان اثری است که چگالی جریان مقید زیر دارد

$$\mathbf{j}_b = \nabla \times \mathbf{M} \quad (۱۲.۳)$$

در معادله<sup>۱</sup> خلا<sup>۱</sup> ۴.۳، باید این جریان و جریان "آزاد" یا خارجی  $\mathbf{j}_z$  را در  $\mathbf{j}$  به حساب آوریم:

$$\mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}_f + \mathbf{j}_b + \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}} \quad (۱۳.۳)$$

با وارد کردن  $\mathbf{j}_b$  در تعریف  $\mathbf{H}$ ، می‌توانیم معادله ۱۳.۳ را به صورت ساده زیر بنویسیم

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_j + \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}} \quad (۱۴.۳)$$

که در آن قرار داده‌ایم

$$\mathbf{H} = \mu_0^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (۱۵.۳)$$

برای به دست آوردن یک رابطه ساده بین  $\mathbf{H}$  و  $\mathbf{B}$ ، فرض می‌کنیم  $\mathbf{M}$  متناسب با  $\mathbf{B}$  یا  $\mathbf{H}$  باشد:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (۱۶.۳)$$

ثابت  $\chi_m$  پذیرفتاری مغناطیسی است. اکنون داریم

$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} \equiv \mu_m \mathbf{H} \quad (۱۷.۳)$$

امکان این رابطه ساده بین  $\mathbf{H}$  و  $\mathbf{B}$  به دلیل صورت خطی معادله ۱۶.۳ است.

در پلاسما با میدان مغناطیسی، هر ذره یک گشتاور مغناطیسی  $\mu_\alpha$  دارد، و کمیت  $\mathbf{M}$  مجموع همه این  $\mu_\alpha$ ها در  $\text{m}^3$  است. اما اکنون داریم

$$\mu_\alpha = \frac{mv_\perp^2 \alpha}{2B} \propto \frac{1}{B} \quad M \propto \frac{1}{B}$$

رابطه بین  $\mathbf{M}$  و  $\mathbf{H}$  (یا  $\mathbf{B}$ ) دیگر خطی نیست، و نمی‌توانیم بنویسیم  $\mathbf{B} = \mu_m \mathbf{H}$  با  $\mu_m$  ثابت. بنابراین در نظر گرفتن پلاسما به عنوان یک محیط مغناطیسی مفید نیست.

### ۳.۲.۳ بررسی کلاسیک دی‌الکتریکها

قطبیدگی  $\mathbf{P}$  در واحد حجم عبارت است از مجموع همه گشتاورهای انفرادی  $\mathbf{p}_i$  دو قطبیهایی الکتریکی. این قطبیدگی موجب چگالی بار مقید می‌شود:

$$\sigma_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (۱۸.۳)$$

در معادله ۱۸.۳، باید هم بار مقید و هم بار آزاد را قرار دهیم:

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = (\sigma_f + \sigma_b) \quad (19.3)$$

با وارد کردن  $\sigma_b$  در تعریف  $\mathbf{D}$ ، می‌توان این معادله را به صورت ساده‌ی زیر نوشت

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \sigma_f \quad (20.3)$$

که در آن

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \equiv \epsilon \mathbf{E} \quad (21.3)$$

اگر  $\mathbf{P}$  متناسب خطی با  $\mathbf{E}$  باشد، یعنی

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (22.3)$$

آن‌گاه  $\epsilon$  ثابتی است که با رابطه‌ی زیر داده می‌شود

$$\epsilon = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \quad (23.3)$$

هیچ دلیل پیشینی وجود ندارد که چرا رابطه‌ای مانند ۲۲.۳ نمی‌تواند در پلاسما معتبر باشد، و از این رو اقدام به پیدا کردن عبارتی برای  $\epsilon$  در پلاسما می‌کنیم.

### ۴.۲.۳ ثابت دی‌الکتریک پلاسما

در بخش ۵.۲ دیدیم که افت و خیز میدان  $\mathbf{E}$  موجب جریان قطبش  $\mathbf{j}_p$  می‌شود. این جریان به نوبه‌ی خود منجر به بار قطبش می‌شود که در معادله‌ی پیوستگی صدق می‌کند

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_p = 0 \quad (24.3)$$

این معادله هم‌ارز معادله‌ی ۱۸.۳ است، با این تفاوت که، همان‌گونه که قبلاً متذکر شدیم، اثر قطبش روی نمی‌دهد مگر آنکه میدان الکتریکی با زمان تغییر کند. چون برای  $\mathbf{j}_p$  عبارت صریح داریم اما برای  $\sigma_p$  نداریم، آسانتر است که با چهارمین معادله‌ی ماکسول، معادله‌ی ۴.۳، کار کنیم:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j}_f + \mathbf{j}_p + \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}) \quad (25.3)$$

اگر بخواهیم این رابطه را به صورت زیر بنویسیم

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j}_r + \epsilon \dot{\mathbf{E}}) \quad (26.3)$$

باید قرار دهیم

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{j_p}{\dot{E}} \quad (27.3)$$

با جاگذاری  $j_p$  از معادله ۶۷.۲، داریم

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{\rho}{B^2} \quad \text{یا} \quad \epsilon_R \equiv \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \frac{\mu_0 \rho c^2}{B^2} \quad (28.3)$$

این کمیت ثابت دی الکتریک پلاسما کم بسامد برای حرکت‌های عرضی است. مشخصات فوق لازم‌اند زیرا عبارت ما برای  $j_p$  فقط برای  $\omega^2 \ll \omega_c^2$  و برای  $\mathbf{E}$  عمود بر  $\mathbf{B}$  معتبر است. البته، عبارت کلی برای  $\epsilon$  خیلی پیچیده است و به‌سختی در یک صفحه می‌گنجد.

توجه کنید که وقتی  $\rho \rightarrow 0$ ، کمیت  $\epsilon_R$  چنانکه باید به مقدار  $\epsilon_0$  خلاً خود، واحد، نزدیک می‌شود. همچنین هنگامی که  $B \rightarrow \infty$ ، کمیت  $\epsilon_R$  به واحد میل می‌کند. علت آن است که سوق قطبش  $v_p$  در این وضعیت صفر می‌شود، و ذرات در پاسخ به میدان الکتریکی عرضی حرکت نمی‌کنند. در یک پلاسما آزمایشگاهی معمولی، جمله دوم معادله ۲۸.۳ در مقایسه با واحد بزرگ است. برای مثال، اگر  $n = 10^{16} \text{ m}^{-3}$  و  $B = 1 \text{ T}$  داریم (برای هیدروژن)

$$\frac{\mu_0 \rho c^2}{B^2} = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(10^{16})(1.67 \times 10^{-27})(9 \times 10^{16})}{(1)^2} = 189$$

این نشان می‌دهد که میدانهای الکتریکی ناشی از ذرات در پلاسما میدانهای اعمال‌شده خارجی را به‌شدت تغییر می‌دهند. یک پلاسما با  $\epsilon$  بزرگ حفاظی در مقابل میدانهای متناوب تشکیل می‌دهد، عیناً همان‌طور که پلاسما با  $\lambda_D$ ی کوچک در مقابل میدانهای dc حفاظ به‌وجود می‌آورد.

## مسائل

۱.۳ با تطبیق مشتق زمانی معادله  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = 0$  با معادله پواسون خلاً ۱.۳ و با استفاده از معادله‌های ۲۴.۳ و ۶۷.۲ ثابت دی الکتریک کم بسامد پلاسما یکنواخت، معادله ۲۸.۳، را به‌دست آورید.

۲.۳ اگر بسامد سیکلوترونی یون را با  $\omega_c$  نشان دهیم و بسامد پلاسما یون را به‌صورت زیر تعریف

کنیم

$$\Omega_p = (ne^2 / \epsilon_0 M)^{1/2}$$

که در آن  $M$  جرم یون است، تحت چه شرایطی ثابت دی الکتریک  $\epsilon$  تقریباً برابر با  $\Omega_p^2 / \Omega_c^2$  است؟

### ۳.۳ معادله حرکت سیال

معادلات ماکسول میدانهای  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{B}$  را برای یک حالت معین پلاسما تعیین می کنند. برای حل کردن مسئله خودسازگار، باید معادله ای داشته باشیم که پاسخ پلاسما به  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{B}$  ی معین را به دست دهد. در تقریب سیالی، پلاسما را متشکل از دو یا چند سیال در هم آمیخته که هر یک مربوط به یک گونه است در نظر می گیریم. در ساده ترین مورد، وقتی تنها یک گونه یون وجود دارد، دو معادله حرکت لازم خواهیم داشت، یکی برای سیال یون باردار مثبت و دیگری برای سیال الکترون باردار منفی. در یک گاز یونیده جزئی، یک معادله هم برای سیال اتمهای خنثی لازم خواهیم داشت. این سیال خنثی تنها از طریق برخورد با یونها و الکترونها برهمکنش خواهد داشت. سیالهای الکترون و یون حتی بدون برخورد هم، به دلیل میدانهای  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{B}$  که خود تولید می کنند، برهمکنش خواهند داشت.

#### ۱.۳.۳ مشتق همرفتی

معادله حرکت برای یک ذره عبارت است از

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (29.3)$$

ابتدا فرض کنید که هیچ برخورد و حرکت گرمایی وجود ندارد. بنابراین همه ذرات موجود در یک جزء سیال با هم حرکت می کنند، و سرعت متوسط  $\mathbf{u}$  ذرات این جزء همان سرعت ذره منفرد  $\mathbf{v}$  است. معادله سیال به سادگی با ضرب کردن چگالی  $n$  در معادله ۲۹.۳ به دست می آید:

$$mn \frac{d\mathbf{u}}{dt} = qn(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (30.3)$$

اما این صورت مناسبی برای استفاده نیست. در معادله ۲۹.۳، مشتق زمانی باید در مکان ذره گرفته شود. از سوی دیگر، می خواهیم معادله ای برای اجزاء سیال که در فضا ثابت شده اند داشته باشیم، زیرا در غیر این وضعیت نمی توان کاری انجام داد. قطره ای شیر در یک فنجان قهوه را به عنوان یک جزء سیال در نظر بگیرید. هنگامی که قهوه به هم زده می شود، قطره به صورت یک رشته تغییر شکل می یابد و سرانجام در سراسر فنجان پخش می شود و هویت خود را از دست می دهد.

اما یک جزء سیال در یک محل ثابت در فنجان هویت خود را حفظ می‌کند اگرچه ذراتی دائماً به آن وارد و از آن خارج می‌شوند.

برای انجام تبدیل به متغیرهایی در چارچوب ثابت، فرض کنید  $G(x, t)$  خاصیتی از سیال در فضای یک بعدی  $x$  باشد. تغییر  $G$  برحسب زمان در چارچوبی که با سیال حرکت می‌کند مجموع دو جمله است:

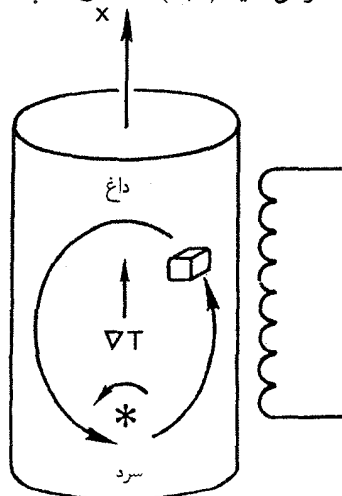
$$\frac{dG(x, t)}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + u_x \frac{\partial G}{\partial x} \quad (31.3)$$

جمله اول سمت راست بیانگر تغییر  $G$  در یک نقطه ثابت در فضاست، و جمله دوم عبارت است از تغییر  $G$  هنگامی که ناظر همراه با سیال به درون ناحیه‌ای که در آن  $G$  متفاوت است می‌کند. در سه بعد، معادله ۳۱.۳ به صورت زیر تعمیم می‌یابد

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)G \quad (32.3)$$

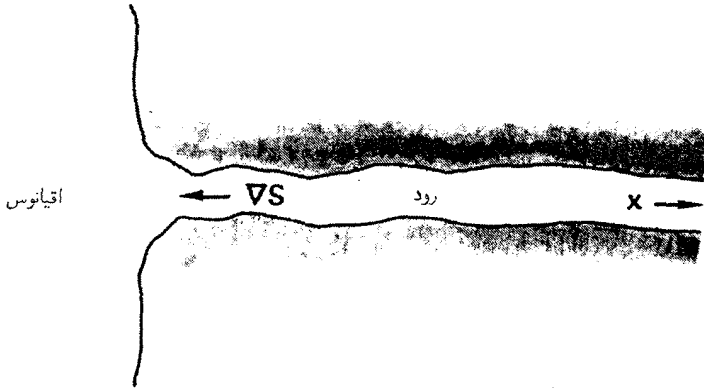
این معادله مشتق همرفتی نامیده می‌شود و گاهی آن را به صورت  $DG/Dt$  می‌نویسند. توجه کنید که  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)$  یک عملگر دیفرانسیلی زنده‌ای است. چون علامت این جمله بعضی مواقع باعث اشتباه می‌شود، دو مثال ساده بیان می‌کنیم.

شکل ۱.۳ آبگرمکن الکتریکی را نشان می‌دهد که در آن آب داغ به بالا صعود کرده است و آب سرد به پایین رفته است. فرض کنید  $G(x, t)$  دمای  $T$  باشد؛ بنابراین  $\nabla G$  بالا سواست.



شکل ۱.۳ حرکت اجزاء سیال در یک آبگرمکن داغ.





شکل ۲.۳ جهت گرادیان شوری در دهانه رودخانه.

یک جزء سیال نزدیک لبه مخزن در نظر بگیرید. اگر آبگرمکن را روشن کنیم، جزء سیال ضمن حرکت گرم می‌شود؛ و داریم  $dT/dt > 0$ . به علاوه، اگر یک چرخ پره‌دار آن‌طور که نشان داده شده است یک نقش شارش به‌راه اندازد، دما در یک جزء سیال ثابت به علت همرفت آب سرد از پایین کاهش می‌یابد. در این مورد، داریم  $\partial T/\partial x > 0$  و  $u_x > 0$ ، به طوری که  $\mathbf{u} \cdot \nabla T > 0$ . تغییر دما در جزء ثابت،  $\partial T/\partial t$ ، با تفاضل این دو اثر داده می‌شود

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{dt} - \mathbf{u} \cdot \nabla T \quad (۳۳.۳)$$

کاملاً واضح است که می‌توان  $\partial T/\partial t$  را، دست‌کم برای مدت کوتاهی، صفر کرد. به عنوان دومین مثال می‌توانیم  $G$  را درجه شوری  $S$  برای آب نزدیک دهانه یک رودخانه بگیریم (شکل ۲.۳). اگر  $x$  در جهت بالای رودخانه باشد، معمولاً گرادینتی از  $S$  وجود دارد به قسمی که  $\partial S/\partial x < 0$ . هنگامی که جزر و مد پیش می‌آید، کل سطح مشترک بین آب شور و شیرین به طرف بالای رودخانه حرکت می‌کند، و  $u_x > 0$ . بنابراین

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -u_x \frac{\partial S}{\partial x} > 0 \quad (۳۴.۳)$$

که بدین معنی است که درجه شوری در هر نقطه مفروضی افزایش می‌یابد. البته، اگر باران ببارد شوری در همه جا کاهش می‌یابد، و یک جمله منفی  $dS/dt$  باید به قسمت میانی معادله ۳۴.۳ اضافه کنیم. به عنوان آخرین مثال،  $G$  را چگالی خودروهایی نزدیک ورودی آزاد راهی در اوقات پررفت و آمد بگیریم. راننده‌ای که به آزاد راه نزدیک می‌شود چگالی اطراف خود را در حال افزایش خواهد

دید. این همان جمله همرفتی  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)G$  است. در همین حال، خیابانهای فرعی ممکن است پر از خودروهایی شوند که از خروجی خانه‌ها و گاراژها وارد می‌شوند، و در نتیجه حتی اگر ناظر حرکت نکند چگالی افزایش می‌یابد. این جمله  $\partial G / \partial t$  است. افزایش کل از دید ناظر مجموع این اثرات است. در مورد پلاسما،  $G$  را سرعت سیال  $\mathbf{u}$  می‌گیریم و معادله ۳۰.۳ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$mn \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = qn(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (35.3)$$

که در آن  $\partial \mathbf{u} / \partial t$  مشتق زمانی در یک چارچوب ثابت است.

### ۲.۳.۳ تانسور تنش

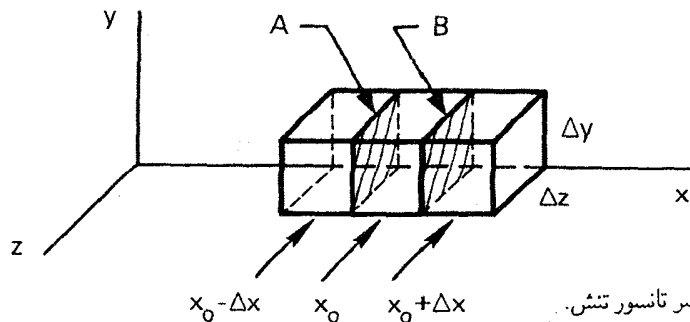
اگر حرکت‌های گرمایی به حساب آورده شوند، باید یک نیروی فشار را به سمت راست معادله ۳۵.۳ اضافه کنیم. این نیرو از حرکت کاتوره‌ای ذرات درون و برون جزء سیال ناشی می‌شود و در معادله تک ذره ظاهر نمی‌شود. فرض کنید جزء سیال  $\Delta x \Delta y \Delta z$  به مرکز  $(x_0, \frac{1}{2} \Delta y, \frac{1}{2} \Delta z)$  باشد (شکل ۳.۳). برای سادگی، تنها مؤلفه  $x$  حرکت در عبور از وجوه  $A$  و  $B$  را در نظر می‌گیریم. تعداد ذراتی را که در هر ثانیه از سطح  $A$  با سرعت  $v_x$  عبور می‌کنند عبارت است از

$$\Delta n_v v_x \Delta y \Delta z$$

که در آن  $\Delta n_v$  تعداد ذرات در هر  $m^3$  با سرعت  $v_x$  است:

$$\Delta n_v = \Delta v_x \iint f(v_x, v_y, v_z) dv_y dv_z$$

هر ذره دارای تکانه  $mv_x$  است. فرض کنید چگالی  $n$  و دمای  $KT$  در هر مکعب همان مقدار مربوط به مرکز مکعب را دارند. بنابراین، تکانه  $P_{A+}$  در  $x_0$  که از وجه  $A$  به درون جزء وارد شده



شکل ۳.۳ منشأ عناصر تانسور تنش.

است عبارت است از

$$P_{A+} = \sum \Delta n_v m v_x^2 \Delta y \Delta z = \Delta y \Delta z \left[ m \overline{v_x^2} \frac{1}{4} n \right]_{x_0 - \Delta x} \quad (36.3)$$

جمع روی  $\Delta n_v$  به میانگین  $\overline{v_x^2}$  در توزیع منجر می شود. عامل  $\frac{1}{4}$  ناشی از این است که تنها نیمی از ذرات داخل مکعب در  $x_0 - \Delta x$  به سوی وجه  $A$  می روند. به همین ترتیب، تکانه ای که از وجه  $B$  خارج می شود عبارت است از

$$P_{B+} = \Delta y \Delta z \left[ m \overline{v_x^2} \frac{1}{4} n \right]_{x_0}$$

بنابراین، بهره کل مؤلفه  $x$  تکانه از ذراتی که به طرف راست حرکت می کنند برابر است با

$$\begin{aligned} P_{A+} - P_{B+} &= \Delta y \Delta z \frac{1}{4} m ([n \overline{v_x^2}]_{x_0 - \Delta x} - [n \overline{v_x^2}]_{x_0}) \\ &= \Delta y \Delta z \frac{1}{4} m (-\Delta x) \frac{\partial}{\partial x} (n \overline{v_x^2}) \end{aligned} \quad (37.3)$$

این نتیجه به دلیل سهم ذراتی که از سمت چپ حرکت می کنند دو برابر می شود، زیرا آنها تکانه  $x$  منفی حمل می کنند و همچنین حرکت آنها در خلاف جهت گرادیان  $n \overline{v_x^2}$  است. بنابراین، تغییر کل تکانه جزء سیال در  $x_0$  عبارت است از

$$\frac{\partial}{\partial t} (n m u_x) \Delta x \Delta y \Delta z = -m \frac{\partial}{\partial x} (n \overline{v_x^2}) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (38.3)$$

فرض کنید سرعت هر ذره،  $v_x$ ، به دو قسمت تجزیه شود

$$v_x = u_x + v_{xr} \quad u_x = \overline{v_x}$$

که در آن  $u_x$  سرعت سیال و  $v_{xr}$  سرعت گرمایی کاتوره ای است. برای توزیع ماکسولوی یک بعدی، از معادله ۷.۱ داریم

$$\frac{1}{2} m \overline{v_{xr}^2} = \frac{1}{2} K T \quad (39.3)$$

اکنون معادله ۳۸.۳ به صورت زیر درمی آید

$$\frac{\partial}{\partial t} (n m u_x) = -m \frac{\partial}{\partial x} [n (\overline{u_x^2} + 2 \overline{u_x v_{xr}} + \overline{v_{xr}^2})] = -m \frac{\partial}{\partial x} \left[ n \left( u_x^2 + \frac{K T}{m} \right) \right]$$

با مشتق‌گیری جزئی می‌توانیم دو جمله را حذف کنیم:

$$mn \frac{\partial u_x}{\partial t} + m u_x \frac{\partial n}{\partial t} = -m u_x \frac{\partial (n u_x)}{\partial x} - m n u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (n K T) \quad (۴۰.۳)$$

با توجه به معادله پایستگی جرم\*

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n u_x) = 0 \quad (۴۱.۳)$$

می‌توانیم دو جمله مجاور علامت تساوی در معادله ۴۰.۳ را حذف کنیم. با تعریف فشار به صورت

$$p \equiv n K T \quad (۴۲.۳)$$

سرنجام داریم

$$mn \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (۴۳.۳)$$

این معادله نیروی گرادیان فشار معمولی است. با اضافه کردن نیروهای الکترومغناطیسی و تعمیم به سه بعد، معادله سیال به دست می‌آید

$$mn \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = qn(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla p \quad (۴۴.۳)$$

آنچه به دست آورده‌ایم تنها یک مورد خاص است: انتقال تکانه مؤلفه  $x$  با حرکت در راستای  $x$ ؛ فرض کرده‌ایم که سیال همسانگرد است، و از این رو همین نتیجه در راستاهای  $y$  و  $z$  هم برقرار است. ولی همچنین ممکن است انتقال تکانه  $y$  را با حرکت در مثلاً راستای  $x$  به دست آورد. با توجه به شکل ۳.۳، فرض کنید  $u_y$  در مکعب در  $x = x_0$  صفر باشد ولی در هر دو طرف مثبت باشد. بنابراین، ذرات در عبور از وجوه  $A$  و  $B$  تکانه  $y$  مثبتی که وارد می‌کنند بیشتر از آن است که خارج می‌کنند، و جزء سیال در راستای  $y$  تکانه کسب می‌کند. این تنش برشی را نمی‌توان با  $p$  نرده‌ای نشان داد و باید آن را با تانسور  $\mathbf{P}$ ، تانسور تنش، نشان دهیم که مؤلفه‌های آن  $P_{ij} = mn \bar{v}_i \bar{v}_j$  هم جهت حرکت و هم مؤلفه تکانه مربوط را مشخص می‌کنند. در مورد عام، جمله  $-\nabla p$  تبدیل به  $-\nabla \cdot \mathbf{P}$  می‌شود. در اینجا تانسور تنش را تنها در دو مورد بسیار ساده بیان می‌کنیم. برای تابع توزیع ماکسولی

همسانگرد،  $\mathbf{P}$  به صورت زیر است

\* این معادله را در زیربخش ۵.۳.۲ محاسبه می‌کنیم.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p & \circ & \circ \\ \circ & p & \circ \\ \circ & \circ & p \end{pmatrix} \quad (۴۵.۳)$$

$\nabla \cdot \mathbf{P}$  همان  $\nabla p$  است. در بخش ۳.۱ ملاحظه کردیم که پلاسما در میدان مغناطیسی می تواند دارای دو دمای  $T_{\parallel}$  و  $T_{\perp}$  باشد. در این مورد، دو فشار  $p_{\perp} = nKT_{\perp}$  و  $p_{\parallel} = nKT_{\parallel}$  وجود دارند. بنابراین، تانسور تنش عبارت است از

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{\perp} & \circ & \circ \\ \circ & p_{\perp} & \circ \\ \circ & \circ & p_{\parallel} \end{pmatrix} \quad (۴۶.۳)$$

که در آن مختصه سطر سوم یا ستون سوم راستای  $\mathbf{B}$  است. این تانسور نیز قطری است و همسانگردی در صفحه عمود بر  $\mathbf{B}$  را نشان می دهد.

در یک سیال معمولی، عناصر غیرقطری  $\mathbf{P}$  معمولاً به چسبندگی مربوط می شوند. زمانی که ذرات برخوردی انجام می دهند، در نقطه آخرین برخورد به سرعت متوسطی در جهت سرعت سیال  $\mathbf{u}$  می رسند. این تکانه در برخورد بعدی به یک جزء دیگر سیال منتقل می شود. این عمل منجر به یکی شدن  $\mathbf{u}$  در نقاط مختلف می شود، و مقاومت حاصل در برابر برش جریان همان چیزی است که آن را شهوداً چسبندگی می نامیم. مسافت آزاد میانگین هرچه بیشتر باشد تکانه بیشتری حمل می شود و چسبندگی زیادتر است. در یک پلاسما اثر مشابهی وجود دارد که حتی در غیاب برخوردها هم اتفاق می افتد. چرخش لارمور ذرات (خصوصاً یونها) آنها را به قسمتهای مختلف پلاسما می برد و تمایل سرعتهای سیال آنجا را یکی کند. به جای مسافت آزاد میانگین، شعاع لارمور میزان این نوع چسبندگی بی برخورد را مشخص می کند. این یک اثر شعاع متناهی لارمور است که علاوه بر چسبندگی برخوردی روی می دهد و رابطه نزدیکی با سوق  $v_E$  در میدان نایکناوخت  $\mathbf{E}$  دارد (معادله ۵۸.۲).

### ۳.۳.۳ برخوردها

اگر گاز خنثایی وجود داشته باشد، سیال باردار با آن از طریق برخورد تکانه مبادله خواهد کرد. تکانه از دست رفته در هر برخورد متناسب با سرعت نسبی  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_0$  است که در آن  $\mathbf{u}_0$  سرعت سیال خنثی است. اگر  $\tau$  زمان آزاد میانگین بین برخوردها، تقریباً ثابت باشد، جمله نیروی حاصل را می توان با تقریب به صورت  $-mn(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)/\tau$  نوشت. معادله حرکت ۴۴.۳ را می توان با در

نظر گرفتن فشار ناهمسانگرد و برخورد های خشی به صورت زیر تعمیم داد:

$$mn \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = qn(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot \mathbf{P} - \frac{mn(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)}{\tau} \quad (47.3)$$

برخورد های بین ذرات باردار را که در اینجا منظور نکرده ایم در فصل ۵ بررسی می کنیم.

### ۴.۳.۳ مقایسه با هیدرودینامیک معمولی

سیالات معمولی از معادله ناویر-استوکس پیروی می کنند

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \rho \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (48.3)$$

این همان معادله پلاسمای ۴۷.۳ بدون نیرو های الکترومغناطیسی و برخوردهای بین گونه هاست (تنها یک گونه وجود دارد). جمله چسبندگی  $\rho \nu \nabla^2 \mathbf{u}$  که در آن  $\nu$  ضریب چسبندگی جنبشی است، همان قسمت برخوردی  $\nabla \cdot \mathbf{P} - \nabla p$  در غیاب میدان های مغناطیسی است. معادله ۴۸.۳ سیالی را توصیف می کند که در آن برخوردهای فراوان بین ذرات وجود دارند. از سوی دیگر، معادله ۴۷.۳ را بدون بیان صریحی درباره آهنگ برخورد به دست آوردیم. چون دو معادله بجز در جمله های  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{B}$  یکسان هستند، آیا واقعاً معادله ۴۷.۳ می تواند گونه ذرات یک پلازما را توصیف کند؟ جواب با احتیاط آری است، و دلایل این امر را محدودیتهای نظری سیال به ما خواهند گفت.

در به دست آوردن معادله ۴۷.۳، در واقع تلویحاً فرض کردیم که برخوردها وجود دارند. این فرض هنگامی در معادله ۳۹.۳ وارد شد که توزیع سرعت را ماکسولی گرفتیم. چنین توزیعی به طور کلی نتیجه برخوردهای فراوان است. اما این فرض را تنها برای گرفتن میانگین  $v_{\text{rms}}^2$  به کار بردیم. هر توزیع دیگری با همین میانگین به جواب یکسانی منجر می شود. بنابراین، نظریه سیال به انحراف از توزیع ماکسولی چندان حساس نیست، اگرچه مثالهایی وجود دارند که در آنها این انحرافها مهم هستند. آن گاه از نظریه جنبشی باید استفاده شود.

همچنین مشاهدهای توسط ایریونگ لانگمیر صورت گرفته است که نظریه سیالی را تقویت می کند. لانگمیر هنگام کار با کاه های الکتروستاتیک، که به نام وی مشهورند، دریافت که تابع توزیع الکترون به توزیع ماکسولنی نزدیکتر از آن است که با آهنگ برخورد قابل توضیح باشد. این پدیده را، که پارادوکس لانگمیر نامیده می شود، گاهی به نوسانهای پربسامد نسبت داده اند. راه حل قانع کننده ای برای پارادوکس ارائه نشده است، ولی به نظر می رسد این یکی از چند نمونه اندک در فیزیک پلازماست که طبیعت به نفع ما کار می کند.

دلیل دیگر شریخش بودن الگوی سیالی برای پلاسما این است که میدان مغناطیسی، زمانی که وجود دارد، می تواند به یک معنی کار برخورد ها را انجام دهد. وقتی ذره ای مثلاً توسط میدان  $\mathbf{E}$  شتابدار می شود، اگر می توانست جریان آزاد پیدا کند دائماً سرعتش افزایش می یافت. اگر برخوردهای فراوانی وجود داشته باشند، ذره به یک سرعت حدی که متناسب با  $\mathbf{E}$  است می رسد. برای مثال، الکترونهاى موجود در یک سیم مسی با سرعت  $\mathbf{v} = \mu \mathbf{E}$  با هم سوق پیدا می کنند، که در آن  $\mu$  تحرک است. میدان مغناطیسی نیز با واداشتن ذرات به چرخش در مدارهای لامور جریان آزاد را محدود می کند. الکترونهاى پلاسما نیز با سرعتی متناسب با  $\mathbf{E}$ ، یعنی  $\mathbf{v}_E = \mathbf{E} \times \mathbf{B} / B^2$ ، با هم سوق می یابند. از این لحاظ، پلاسماى بی برخورد مانند یک سیال برخوردی رفتار می کند. البته، ذرات در امتداد میدان مغناطیسی جریان آزاد دارند، و تصویر سیالی خصوصاً برای حرکت در این راستا مناسب نیست. برای حرکت های عمود بر  $\mathbf{B}$ ، نظریه سیالی تقریب خوبی است.

### ۵.۳.۳ معادله پیوستگی

پایستگی ماده ایجاب می کند که تعداد کل ذرات  $N$  در یک حجم  $V$  تنها به شرطی می تواند تغییر کند که شار خالص ذرات از سطح  $s$  که محصورکننده حجم است عبور کند. چون چگالی شار ذرات  $n\mathbf{u}$  است، با استفاده از قضیه واگرایی داریم

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \int_V \frac{\partial n}{\partial t} dV = - \oint n\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \nabla \cdot (n\mathbf{u}) dV \quad (49.3)$$

چون این رابطه باید برای هر حجم  $V$  برقرار باشد، انتگرالدها باید با هم مساوی باشند، و در نتیجه:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0 \quad (50.3)$$

برای هر گونه ذرات یک چنین معادله پیوستگی وجود دارد. هر چشمه ای یا چاهکی از ذرات باید به سمت راست این معادله اضافه شود.

### ۶.۳.۳ معادله حالت

یک رابطه دیگر لازم است تا دستگاه معادلات کامل شود. برای این منظور، می توانیم از معادله حالت ترمودینامیک که  $p$  را به  $n$  مربوط می سازد استفاده کنیم:

$$p = C\rho^\gamma \quad (51.3)$$

که در آن  $C$  ثابت و  $\gamma$  نسبت گرماهای ویژه  $C_p/C_v$  است. بنابراین، جمله  $\nabla p$  در رابطه زیر صدق می‌شود

$$\frac{\nabla p}{p} = \gamma \frac{\nabla n}{n} \quad (۵۲.۲)$$

برای تراکم تکدما، داریم

$$\nabla p = \nabla(nKT) = KT\nabla n$$

و در نتیجه واضح است که  $\gamma = ۱$  برای تراکم بی دررو،  $KT$  نیز تغییر می‌کند، و این باعث می‌شود که  $\gamma$  مقداری بزرگتر از یک داشته باشد. اگر  $N$  تعداد درجه‌های آزادی باشد،  $\gamma$  عبارت خواهد بود از

$$\gamma = (۲ + N)/N \quad (۵۳.۳)$$

معتبر بودن معادله حالت ایجاب می‌کند که شارش گرما قابل چشم‌پوشی باشد؛ یعنی رسانندگی گرمایی کم باشد. باز هم، این امر به احتمال بیشتر در راستای عمود بر  $\mathbf{B}$  صادق است تا موازی با آن خوشبختانه، بیشترین پدیده‌های اساسی را می‌توان با فرض ساده معادله  $۵۱.۳$  در حد کفایت توصیف کرد.

### ۷.۳.۳ مجموع کامل معادلات سیال

برای سادگی، فرض می‌کنیم پلاسما تنها دارای دو گونه ذره باشد: الکترون‌ها و یونها؛ تعمیم به گونه‌های بیشتر بدیهی است. بنابراین، چگالیهای بار و جریان عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} \sigma &= n_i q_i + n_e q_e \\ \mathbf{j} &= n_i q_i \mathbf{v}_i + n_e q_e \mathbf{v}_e \end{aligned} \quad (۵۴.۳)$$

چون حرکت‌های تک ذره‌ای را دیگر در نظر نمی‌گیریم، اکنون می‌توانیم از  $\mathbf{v}$  به جای  $\mathbf{u}$  برای سرعت سیال استفاده کنیم. از برخوردها و چسبندگی صرف‌نظر خواهیم کرد. معادله‌های  $۱.۳$  تا  $۴.۳$ ،  $۴۴.۳$ ،  $۵۰.۳$ ، و  $۵۱.۳$  مجموعه زیر را تشکیل می‌دهند:

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = n_i q_i + n_e q_e \quad (۵۵.۳)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (۵۶.۳)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (۵۷.۳)$$

$$\mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{B} = n_i q_i \mathbf{v}_i + n_e q_e \mathbf{v}_e + \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}} \quad (۵۸.۳)$$



$$m_j n_j \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} + (\mathbf{v}_j \cdot \nabla) \mathbf{v}_j \right] = q_j n_j (\mathbf{E} + \mathbf{v}_j \times \mathbf{B}) - \nabla p_j \quad j = i, e \quad (۵۹.۳)$$

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \nabla \cdot (n_j \mathbf{v}_j) = 0 \quad j = i, e \quad (۶۰.۳)$$

$$p_i = C_j n_i^{3/2} \quad j = i, e \quad (۶۱.۳)$$

۱۶ مجهول نردهای داریم:  $n_i, n_e, p_i, p_e$  و مؤلفه‌های  $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_e$  و  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{B}$ . اگر هر یک از معادله‌های برداری را سه معادله نردهای در نظر بگیریم ظاهراً ۱۸ معادله نردهای وجود دارند. اما دو تا از معادلات ماکسول زاید هستند، زیرا معادلات ۵۵.۳ و ۵۷.۳ را می‌توان از واگرایی معادلات ۵۸.۳ و ۵۶.۳ دوباره به دست آورد (مسئله ۳.۳). حل همزمان این ۱۶ معادله با ۱۶ مجهول مجموع خود-سازگاری از میدانها و حرکتها را در تقریب سیالی به دست می‌دهد.

### ۴.۳ سوقهای سیال عمود بر $\mathbf{B}$

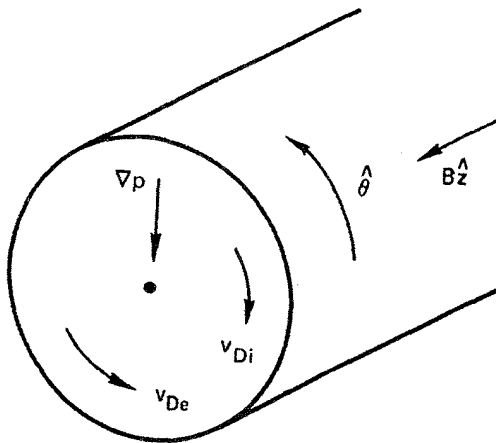
چون یک جزء سیال از تعداد زیادی ذره منفرد تشکیل شده است، اگر مراکز راهنمای انفرادی دارای سوقهای عمود بر  $\mathbf{B}$  باشند، باید سیال نیز چنین سوقهایی داشته باشد. اما، چون جمله  $\nabla p$  تنها در معادلات سیال ظاهر می‌شود، سوقی وابسته به آن وجود دارد به جزهای سیال مربوط می‌شود اما ذره‌ها فاقد آن هستند. برای هر یک از گونه‌ها، معادله حرکتی به صورت زیر داریم

$$mn \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = qn(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla p \quad (۶۲.۳)$$

نسبت جمله ① به جمله ② را در نظر بگیرید:

$$\frac{\textcircled{1}}{\textcircled{2}} \approx \left| \frac{mni\omega v_{\perp}}{qnv_{\perp}B} \right| \approx \frac{\omega}{\omega_c}$$

در اینجا قرار داده‌ایم  $\partial/\partial t = i\omega$  و فقط  $\mathbf{v}_{\perp}$  مورد نظر است. برای سوقهایی که در مقایسه با مقیاس زمانی  $\omega_c$  کند هستند، می‌توانیم از جمله ① صرف نظر کنیم. همچنین از جمله  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  صرف نظر خواهیم کرد و بعداً نشان خواهیم داد که این کار درست است. فرض کنید  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{B}$  یکنواخت ولی  $n$  و  $p$  دارای گرادیان هستند. این وضعیت معمول در یک ستون پلاسمای محبوس توسط میدان مغناطیسی است (شکل ۴.۳). با ضرب برداری معادله ۶۲.۳ در  $\mathbf{B}$ ، داریم (از سمت چپ صرف نظر کرده‌ایم)



شکل ۴.۳ سوقهای دیامغناطیسی در یک پلاسمای استوانه‌ای.

$$\begin{aligned} \circ &= qn[\mathbf{E} \times \mathbf{B} + (\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] - \nabla_p \times \mathbf{B} \\ &= qn[\mathbf{E} \times \mathbf{B} + (\mathbf{v}_\perp / \cdot \mathbf{B}) - v_\perp B^2] - \nabla_p \times \mathbf{B} \end{aligned}$$

بنابراین

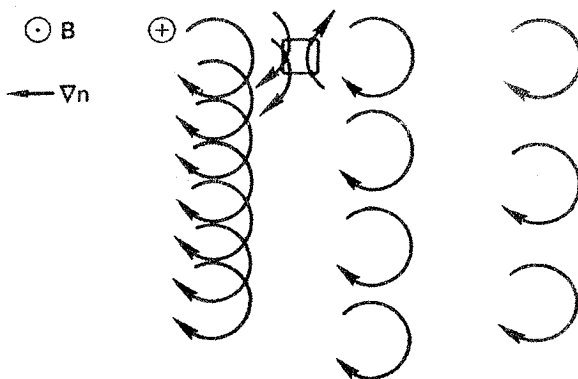
$$\mathbf{v}_\perp = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} - \frac{\nabla_p \times \mathbf{B}}{qnB^2} \equiv \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_D \quad (۶۳.۳)$$

که در آن

$$\boxed{\mathbf{v}_E \equiv \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}} \quad \mathbf{E} \times \mathbf{B} \text{ سوق} \quad (۶۴.۳)$$

$$\boxed{\mathbf{v}_D \equiv -\frac{\nabla_p \times \mathbf{B}}{qnB^2}} \quad \text{سوق دیامغناطیسی} \quad (۶۵.۳)$$

سوق  $\mathbf{v}_E$  با سوق مراکز راهنما یکسان است، اما اکنون یک سوق جدید  $\mathbf{v}_D$  وجود دارد که سوق دیامغناطیسی نامیده می‌شود. چون  $\mathbf{v}_D$  عمود بر راستای گرادیان است، چشمپوشی از  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  که قبلاً انجام دادیم به شرطی موجه است که  $\mathbf{E} = \circ$ . اگر  $\mathbf{E} = -\nabla\phi \neq \circ$ ، به شرطی که  $\nabla p$  و  $\nabla\phi$  در یک راستا باشند؛  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  باز هم صفر است. در غیر این وضعیت، ممکن است با وجود  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  حل پیچیده‌تری وجود داشته باشد. با استفاده از معادله (۵۲.۳)، سوق



شکل ۵.۳ منشأ سوق دیامغناطیسی.

دیامغناطیسی را می توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$v_D = \pm \frac{\gamma KT}{eB} \frac{\hat{z} \times \nabla n}{n} \quad (۶۶.۳)$$

مخصوصاً، برای پلاسمای تکدما با هندسه شکل ۴.۳، که در آن  $\nabla n = n' \hat{r}$ ، فرمولهای زیر را داریم که برای آزمایشگرانی که با ماشین Q کار کرده اند آشنا هستند\*:

$$v_{Di} = \frac{KT_i}{eB} \frac{n'}{n} \hat{\theta} \quad \left( n' \equiv \frac{\partial n}{\partial r} < 0 \right) \quad (۶۷.۳)$$

$$v_{De} = - \frac{KT_e}{eB} \frac{n'}{n} \hat{\theta}$$

اندازه  $v_D$  به سادگی از فرمول زیر محاسبه می شود

$$v_D = \frac{KT(eV) \setminus \frac{m}{\Lambda \text{ sec}}}{B(T)} \quad (۶۸.۳)$$

که در آن  $\Lambda$  طول مقیاس چگالی  $|n/n'|$  بر حسب متر است.

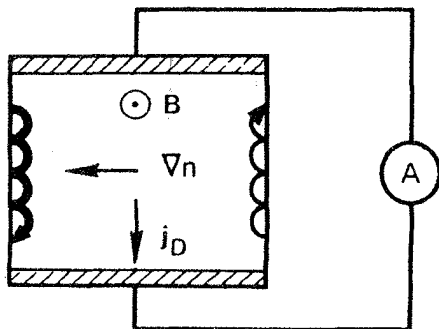
دلیل فیزیکی این سوق را می توان از شکل ۵.۳ دید. در اینجا مدارهای چرخش یونها را در یک میدان مغناطیسی کشیده ایم. یک گرادیان چگالی به طرف چپ وجود دارد که با چگالی مدارها نشان داده شده است. درون هر جزء حجم ثابت تعداد یونهایی که به سوی پایین حرکت می کنند بیشتر از آنهایی \* ماشین Q پلاسمای ساکن را با یونش گرمایی اتمهای Cs یا K که به تخته های تنگستن داغ برخورد می کنند تولید می کند. سوقهای دیامغناطیسی اولین بار در ماشینهای Q اندازه گیری شدند.

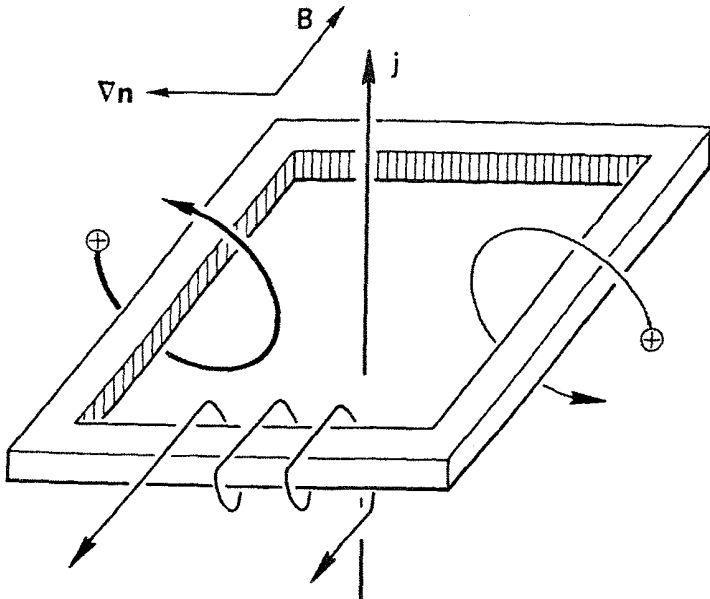
است که به سوی بالا حرکت می‌کنند، زیرا یونهایی که به سوی پایین حرکت می‌کنند از ناحیه‌ای با چگالی زیادتر می‌آیند. بنابراین، یک سوق سیالی عمود بر  $\nabla n$  و  $B$  وجود دارد، هرچند که مراکز راهنما ایستا هستند. علامت سوق دیامغناطیسی با  $q$  تغییر می‌کند زیرا جهت چرخش معکوس می‌شود. اندازه  $v_D$  به جرم بستگی ندارد زیرا بستگی سرعت به  $m^{-1/2}$  با بستگی شعاع لارمور به  $m^{1/2}$  خنثی می‌شود اگر جرم کوچک باشد گرادیان چگالی کمتری در یک دوره از این نمونه برداشته می‌شود. چون الکترونها و یونها در جهت‌های مخالف سوق می‌یابند، یک جریان دیامغناطیسی وجود دارد. برای  $\gamma = Z = 1$ ، این جریان عبارت است از

$$\mathbf{j}_D = ne(v_{Di} - v_{De}) = (KT_i + KT_e) \frac{B \times \nabla n}{B^2} \quad (۶۹.۳)$$

در تصویر ذره‌ای، اگر مراکز راهنما سوق پیدا نکنند نباید انتظار داشت که جریانی اندازه‌گیری شود. در تصویر سیالی، هر جا گرادیان فشار وجود داشته باشد جریان  $\mathbf{j}_D$  ایجاد می‌شود. اگر در نظر بگیریم که همه آزمایشها باید در یک پلاسمای با اندازه متناهی انجام شوند این دو دیدگاه می‌توانند با هم تطبیق داده شوند. فرض کنید پلاسمای در یک جعبه صلب باشد (شکل ۶.۳). بخواهیم جریان را از تصویر تک‌ذره‌ای محاسبه کنیم، باید ذرات در لبه‌ها را که دارای مسیره‌های چرخزادی (سیکلوئیدی) هستند به حساب آوریم. چون تعداد ذرات در سمت چپ نسبت به سمت راست بیشتر است، یک جریان کل پایین‌سو وجود دارد، که این موافق با تصویر سیالی است.

شاید خواننده با این توضیح قانع نشده باشد زیرا لازم بود دیواره‌های بازتابنده را مشخص می‌کردیم. اگر دیواره‌ها جاذب بودند یا برداشته می‌شدند، در می‌یافتیم که میدانهای الکتریکی گسترش می‌یافتند زیرا از یک گونه — گونه‌ای که شعاع لارمور بزرگتری دارد — تعداد بیشتری نسبت به گونه دیگر جمع‌آوری می‌شوند. بنابراین، مراکز راهنما سوق می‌یابند، و سادگی الگواز بین می‌رود. از سوی دیگر، تصور کنید بتوانیم جریان دیامغناطیسی را با کاوه جریان اندازه بگیریم (شکل ۷.۳).



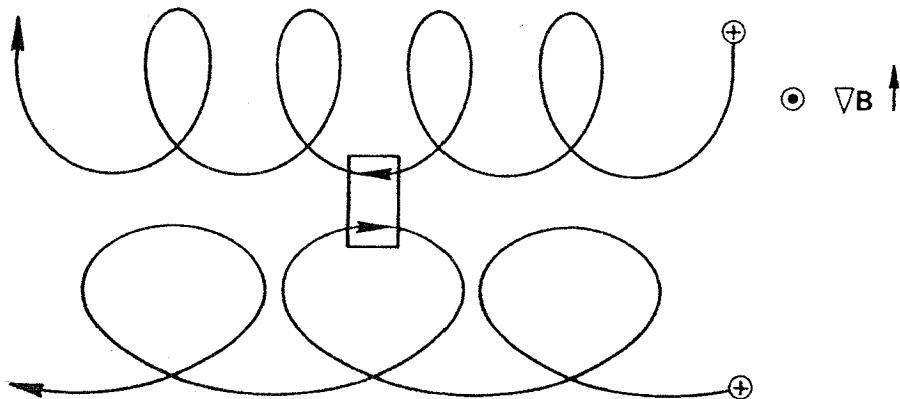


شکل ۷.۳ اندازه‌گیری جریان دیامغناطیسی در یک پلاسما ناهمگن.

این در واقع یک مبدل با هسته ماده مغناطیسی است. سیم‌پیچ اولیه جریان پلاسمایی است که به دور هسته پیچیده می‌شود، و ثانویه سیم‌پیچ چند دوری حول هسته هسته است. فرض کنید کل دستگاه بینهایت نازک است، به قسمی که هیچ ذره‌ای با آن برخورد نمی‌کند. از شکل ۷.۳ واضح است که چون چگالی در سمت چپ نسبت به سمت راست بیشتر است یک جریان خالص به سوی بالا را می‌توان دید که کارکردن با تصویر تک‌ذره‌ای ممکن است بسیار دشوار باشد. کاربرد از این مثال می‌توان دید که کارکردن با تصویر تک‌ذره‌ای ممکن است بسیار دشوار باشد. کاربرد سراسرست نظریه سیالی، با اینکه این نظریه متضمن سوهای "مجازی" مانند سوق دیامغناطیسی است، معمولاً نتایج درستی می‌دهد.

درباره سوهای خمیدگی و گرادیان  $B$  که در الگوی تک‌ذره‌ای ظاهر می‌شوند چه می‌توان گفت؟ سوق خمیدگی نیز در الگوی سیالی وجود دارد، زیرا بر همه ذرات موجود در یک جزء سیال هنگامی که در یک میدان مغناطیسی خمیده می‌چرخند نیروی گریز از مرکز وارد می‌شود. جمله  $\overline{F}_{cf} = \overline{nmv_{\parallel}^2}/R_c = nKT_{\parallel}/R_c$  را باید به سمت راست معادله حرکت سیال اضافه کنیم. این جمله معادل نیروی گرانشی  $nMg$  با  $g = KT_{\parallel}/MR_c$  است و منجر به سوق  $v_g = (m/q)(g \times B/B^2)$  می‌شود، که مانند مورد الگوی ذره‌ای است (معادله ۱۸.۲).

اما سوق گرادیان  $B$  برای سیالات وجود ندارد. با دلایل ترمودینامیکی می‌توان نشان داد که میدان



شکل ۸.۳ در یک میدان نایکخواخت مراکز راهنما سوق می‌یابند ولی عناصر سیال ثابت‌اند.

مغناطیسی تأثیری بر توزیع ماکسولی ندارد. در واقع نیروی لورنتس عمود بر  $v$  است و نمی‌تواند انرژی ذره را تغییر دهد. محتملترین توزیع  $f(v)$  در غیاب  $B$  محتملترین توزیع در حضور  $B$  نیز هست. اگر  $f(v)$  در یک میدان نایکخواخت  $B$  ماکسولی باقی بماند و گرادیان چگالی وجود نداشته باشد، آن‌گاه تکانه کل منتقل شده به هر جزء ثابت سیال صفر است. سوق سیالی وجود ندارد اگرچه مراکز راهنمای انفرادی سوق دارند؛ سوقهای ذره‌ای در هر جزء ثابت سیال همدیگر را خنثی می‌کنند. برای دیدن تصویری این موضوع، مدارهای دو ذره که به داخل یک جزء سیال در یک میدان نایکخواخت  $B$  حرکت می‌کنند را در نظر بگیرید (شکل ۸.۳). چون میدان  $E$  وجود ندارد، شعاع لارمور تنها به علت وجود گرادیان  $B$  تغییر می‌کند؛ ذره‌ها شتاب ندارند، و انرژی آنها در خلال حرکت ثابت باقی می‌ماند. اگر دو ذره دارای انرژی یکسانی باشند، هنگامی که داخل جزء سیال هستند سرعت و شعاع لارمور یکسانی دارند. بنابراین، هنگامی که سرعتهای ذرات را با هم جمع می‌کنیم تا سرعت سیال را به دست آوریم حذف کاملی بین هر جفت ذره خواهیم داشت.

هنگامی که میدان نایکخواخت  $E$  وجود دارد، تطبیق دادن تصویرهای ذره‌ای و سیالی آسان نیست. در این مورد، اثر شعاع متناهی لارمور (بخش ۴.۲) موجب سوق مرکز راهنما و سوق سیال می‌شود، اما اینها یکسان نیستند؛ در حقیقت، این سوقها دارای علامتهای مخالف هستند! سوق ذره را در فصل ۲ محاسبه کردیم، و سوق سیال را می‌توان از عنصرهای غیرقطری  $P$  محاسبه کرد. توضیح چگونگی تفاوت اثرات شعاع متناهی لارمور فوق‌العاده مشکل است. تصویر ساده‌ای مانند شکل ۶.۳ کارایی ندارد زیرا باید نکات ظریفی را به حساب آوریم، از جمله اینکه وقتی گرادیان چگالی وجود دارد چگالی مراکز راهنما با چگالی ذرات یکی نیست!

## مسائل

۳.۳ نشان دهید که معادله‌های ۵۵.۳ و ۵۷.۳ در مجموعه معادلات ماکسول زاید هستند.

۴.۳ نشان دهید که عبارت سمت راست معادله ۶۹.۳ برای  $j_D$  دارای ابعاد چگالی جریان است.

۵.۳ نشان دهید اگر جریان محاسبه شده از تصویر ذره‌ای (شکل ۶.۳) با جریانی که از سوق دیامغناطیسی به دست می‌آید برای یک پهنای جعبه موافق باشد، آنگاه برای همه پهنایها موافق خواهد بود.

۶.۳ یک پلاسمای تک‌دما در میدان مغناطیسی  $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$  بین صفحه‌های  $x = \pm a$  محبوس شده است. توزیع چگالی عبارت است از

$$n = n_0 (1 - x^2/a^2)$$

(الف) عبارتی برای سرعت سوق دیامغناطیسی الکترون  $v_{De}$  به صورت تابعی از  $x$  به دست آورید.

(ب) نموداری ترسیم کنید که وقتی  $\mathbf{B}$  به سمت بیرون صفحه کتاب است نمایه چگالی و جهت  $\mathbf{V}_{De}$  در دو طرف صفحه میانی را نشان دهد.

(ج)  $v_{De}$  را در  $x = a/2$  پیدا کنید اگر  $B = 0.2 \text{ T}$ ،  $KT_e = 2 \text{ eV}$ ، و  $a = 4 \text{ cm}$ .

۷.۳ یک ستون پلاسمای متقارن استوانه‌ای در یک میدان یکنواخت  $\mathbf{B}$  با توزیعی زیر در نظر بگیرید

$$n_i = n_e = n_0 \exp(e\phi/KT_e) \quad \text{و} \quad n(r) = n_0 \exp(-r^2/r_0^2)$$

(الف) نشان دهید  $v_E$  و  $v_{De}$  مساوی و مخالف یکدیگرند.

(ب) نشان دهید که پلازما مانند یک جسم جامد می‌چرخد.

(ج) در چارچوبی که با سرعت  $v_E$  می‌چرخد، بعضی از امواج پلازما (امواج سوق) با سرعت فاز  $\omega = 0.5 v_{De}$  منتشر می‌شوند.  $v_\phi$  را در چارچوب آزمایشگاه به دست آورید. در صفحه  $\theta - r$  پیکانهایی ترسیم کنید که اندازه‌های نسبی و جهت‌های  $v_E$ ،  $v_{De}$ ، و  $v_\phi$  را در چارچوب آزمایشگاه نشان دهند.

۸.۳ (الف) برای پلاسمای مسئله ۷.۳، چگالی جریان دیامغناطیسی  $j_D$  را به صورت تابعی از شعاع پیدا کنید.

(ب)  $j_D$  را بر حسب  $\text{A/m}^2$  برای  $B = 0.4 \text{ T}$ ،  $n_0 = 10^{16} \text{ m}^{-3}$ ،  $KT_e = KT_i = 0.25 \text{ eV}$ ، به دست آورید.

(ج) در چارچوب آزمایشگاه، آیا این جریان از یونها یا از الکترونها یا از هر دو ناشی می‌شود؟

۹.۳ در مسئله قبل، جریان دیامغناطیسی تا چه اندازه  $B$  ی روی محور را کاهش می دهد؟ راهنمایی: می توانید از قانون مداری آمپر روی یک مسیر مناسب استفاده کنید.

### ۵.۳ سوقهای سیال موازی با B

مؤلفه  $z$  معادله حرکت سیال عبارت است از

$$mn \left[ \frac{\partial v_z}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_z \right] = qnE_z - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (۷۰.۳)$$

از جمله همرفتی اغلب می توان صرف نظر کرد زیرا خیلی کوچکتر از جمله  $\partial v_z / \partial t$  است. در اینجا از بحثهای پیچیده اجتناب خواهیم کرد و صرفاً موردهایی را که در آنها  $v_z$  به طور فضایی یکنواخت است در نظر می گیریم. با استفاده از معادله ۵۲.۳، داریم

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{q}{m} E_z - \frac{\gamma KT}{mn} \frac{\partial n}{\partial z} \quad (۷۱.۳)$$

این معادله نشان می دهد که سیال تحت ترکیب نیروهای گرادیان فشار و الکتروستاتیک در امتداد  $B$  شتابدار می شود. با به کار بردن معادله ۷۱.۳ برای الکترونها بدون جرم نتیجه مهم خاصی به دست می آید. با گرفتن حد  $m \rightarrow 0$  و با  $q = -e$  و  $E = -\nabla\phi$ ، داریم\*

$$qE_z = e \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\gamma KT_e}{n} \frac{\partial n}{\partial z} \quad (۷۲.۳)$$

الکترونها به قدری تحرک پذیر هستند که رسانندگی گرمایی آنها تقریباً بینهایت است. بنابراین می توانیم الکترونها را تکدما فرض کنیم و قرار دهیم  $\gamma = 1$ . با انتگرالگیری به دست می آوریم

$$e\phi = KT_e \ln n + C$$

یا

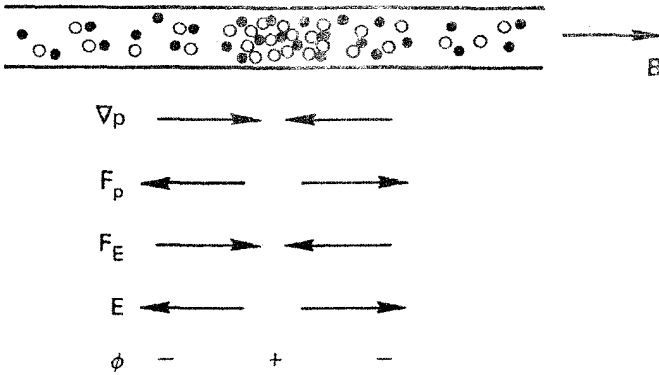
$$n = n_0 \exp(e\phi / KT_e) \quad (۷۳.۳)$$

این همان رابطه بولتزمن برای الکترونهاست.

معنای این رابطه به لحاظ فیزیکی این است که الکترونها به دلیل سبک بودنشان بسیار تحرک پذیر هستند و اگر نیرویی بر آنها وارد شود خیلی سریع تا انرژیهای زیاد شتابدار می شوند. چون الکترونها

\* چرا  $v_z$  با ثابت ماندن  $mv_z$ ، نمی تواند به بینهایت میل کند؟ انرژی را در نظر بگیرید!





شکل ۹.۳ دلیل فیزیکی برای رابطه بولتزن بین چگالی و پتانسیل.

نمی‌توانند بدون برجای گذاشتن یک بار یونی بزرگ یک منطقه را دسته‌جمعی ترک کنند، نیروهای گرادیان فشار و الکتروستاتیک روی الکترون‌ها باید تقریباً در تعادل کامل باشند. این شرط منجر به رابطه بولتزن می‌شود. توجه کنید که معادله ۷۳.۳ به هر خط نیرو جداگانه اعمال می‌شود. خطوط نیروی مختلف می‌توانند تا پتانسیلهای اختیاری متفاوتی برادر شوند مگر آنکه سازوکاری فراهم شود تا الکترون‌ها در عرض  $B$  حرکت کنند. رساناهایی که خطوط نیرو به آنها ختم می‌شوند می‌توانند چنین سازوکاری را فراهم کنند، و آزمایشگر باید این اثرات انتهایی را با دقت به حساب آورد.

شکل ۹.۳ نموداری است از آنچه که به هنگام به وجود آمدن یک تجمع چگالی موضعی در پلاسما رخ می‌دهد. فرض کنید گرادیان چگالی به طرف مرکز نمودار باشد، و  $KT$  را ثابت بگیرید. بنابراین، یک گرادیان فشار به طرف مرکز وجود دارد. چون پلاسما شبه‌خنثی است، گرادیان هم برای سیال الکترونی و هم برای سیال یونی وجود دارد. نیروی گرادیان فشار روی سیال الکترونی را در نظر بگیرید. این نیروی  $F_p$  الکترونیایی را که تحرک‌پذیرند از مرکز می‌راند، و یونها در جای خود باقی می‌مانند. بار مثبت حاصل یک میدان  $E$  به وجود می‌آورد که نیروی آن  $F_E$  روی الکترون‌ها با  $F_p$  مخالفت می‌کند. تنها هنگامی که  $F_E$  مساوی و مخالف  $F_p$  باشد یک وضعیت پایا ایجاد می‌شود. اگر  $B$  ثابت باشد،  $E$  یک میدان الکتروستاتیک است که برای آن داریم  $E = -\nabla\phi$ ، و در مرکز که  $n$  بزرگ است  $\phi$  باید بزرگ باشد. این همان مطلبی است که معادله ۷۳.۳ بیان می‌کند. انحراف از خنثایی کامل به قسمی خود را تنظیم می‌کند که بار کافی برای برقراری میدان  $E$  لازم برای برقراری موازنه نیروهای وارد بر الکترون‌ها وجود داشته باشد.

### ۶.۳ تقریب پلاسمایی

مثال قبلی مشخصه مهمی از پلاسما را نشان می‌دهد که کاربرد گسترده‌ای دارد. معمولاً وقتی

چگالی بار  $\sigma$  معلوم باشد  $\mathbf{E}$  را از معادله پواسون به دست می آوریم. در پلاسما، به طور کلی از روش دیگری استفاده می کنیم.  $\mathbf{E}$  را از معادله حرکت به دست می آوریم، و معادله پواسون را تنها برای پیدا کردن  $\sigma$  به کار می بریم. دلیل این است که پلاسما تمایل شدیدی به خنثی ماندن دارد. اگر یونها حرکت کنند، الکترونها نیز به حرکت درمی آیند.  $\mathbf{E}$  باید طوری خود را تنظیم کند که مدارهای الکترونها و یونها خنثایی را حفظ کنند. چگالی بار دارای اهمیت درجه دوم است؛ این چگالی خود را طوری تنظیم می کند که معادله پواسون برقرار باشد. البته، این موضوع تنها برای حرکت های کم بسامد که در آنها لختی الکترون عامل مهمی نیست درست است.

در یک پلاسما، معمولاً امکان دارد که همزمان فرض کنیم  $n_i = n_e$  و  $\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0$ . این را تقریب پلاسمایی می نامیم. این یک ویژگی اساسی پلاسماهاست، که درک آن برای شخص مبتدی مشکل است. از معادله پواسون برای به دست آوردن  $\mathbf{E}$  استفاده نکنید مگر آنکه راه دیگری وجود نداشته باشد! در مجموعه معادلات سیال ۶۱.۳ تا ۵۵.۳، اکنون می توانیم معادله پواسون و همچنین یکی از مجهولات را با قرار دادن  $n_i = n_e = n$  حذف کنیم.

تقریب پلاسمایی تقریباً همان شرط شبه خنثایی است که قبلاً از آن بحث شد ولی دارای معنی دقیقتری است. در حالی که شبه خنثایی به تمایل عمومی پلاسما برای خنثی بودن در حالت سکون خود مربوط می شود، تقریب پلاسمایی یک راه میانبر ریاضی است که حتی برای حرکت های موجی هم می توان از آن استفاده کرد. تا زمانی که این حرکتها به اندازه کافی کند هستند که هم یونها و هم الکترونها وقت دارند تا حرکت کنند، تقریب خوبی است که معادله  $n_i = n_e$  را به جای معادله پواسون بگذاریم. البته، اگر تنها یک گونه از ذرات بتواند حرکت کند و دیگری نتواند آن را دنبال کند، مانند امواج الکترونی پربسامد، آن گاه تقریب پلاسمایی معتبر نیست، و  $\mathbf{E}$  را باید از معادلات ماکسول پیدا کرد و نه از معادلات حرکت الکترون و یون. زمانی که به نظریه امواج یونی می رسیم مسئله اعتبار تقریب پلاسمایی را دوباره مطرح می کنیم. در آن زمان، روشن خواهد شد که چرا در محاسبه حفاظ دمای می بایست از معادله پواسون استفاده کنیم.

## امواج در پلاسما

### ۱.۴ نمایش امواج

هر حرکت دوره‌ای یک سیال را می‌توان توسط آنالیز فوریه به برهم‌نهدی از نوسانهای سینوسی با بسامدهای مختلف  $\omega$  و طول موجهای مختلف  $\lambda$  تجزیه کرد. هر یک از این مؤلفه‌ها یک موج ساده است. هنگامی که دامنه نوسان کوچک است، شکل موج به‌طور کلی سینوسی است؛ و تنها یک مؤلفه وجود دارد. این وضعیت را در نظر خواهیم گرفت.

هر کمیت نوسان‌کننده سینوسی — مثلاً چگالی  $n$  — را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$n = \bar{n} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \quad (۱.۴)$$

که در آن، در مختصات دکارتی، داریم

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z \quad (۲.۴)$$

در اینجا  $\bar{n}$  ثابتی است که دامنه موج را تعریف می‌کند، و  $\mathbf{k}$  ثابت انتشار نامیده می‌شود. اگر موج

در راستای  $x$  منتشر شود،  $k$  تنها دارای مؤلفه  $x$  است، و معادله ۱.۴ به صورت زیر

$$n = \bar{n} e^{i(kx - \omega t)}$$

بنابه قرارداد، نمادنگاری نمایی به این معنی است که قسمت حقیقی عبارت را باید به عنوان کمیت قابل اندازه‌گیری گرفت.  $\bar{n}$  را حقیقی فرض می‌کنیم؛ به‌زودی خواهیم دید که این فرض به انتخاب مبدأهای  $x$  و  $t$  مربوط می‌شود. بنابراین، قسمت حقیقی  $n$  عبارت است از

$$\text{Re}(n) = \bar{n} \cos(kx - \omega t) \quad (۳.۴)$$

نقطه‌ای با فاز ثابت روی موج طوری حرکت می‌کند که  $(d/dt)(kx - \omega t) = 0$ ، یا

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} \equiv v_\varphi} \quad (۴.۴)$$

این کمیت سرعت فاز نامیده می‌شود. اگر  $\omega/k$  مثبت باشد، موج به سمت راست حرکت می‌کند؛ یعنی، هنگامی که  $t$  افزایش می‌یابد  $x$  هم افزایش می‌یابد، به قسمی که  $kx - \omega t$  ثابت باقی بماند. اگر  $\omega/k$  منفی باشد، موج به سمت چپ حرکت می‌کند. همچنین می‌توانیم بنویسیم

$$n = \bar{n} e^{i(kx + \omega t)}$$

که در این مورد  $\omega/k$  مثبت به معنی سرعت فاز منفی است. این قراردادی است که گاهی از آن استفاده می‌شود، ولی ما آن را به کار نمی‌بریم. از معادله ۳.۴ واضح است که تغییر علامت کمیت‌های  $\omega$  و  $k$  با هم هیچگونه تغییری به وجود نمی‌آورد.

اکنون کمیت نوسان‌کننده دیگری در موج، مثلاً میدان الکتریکی  $\mathbf{E}$ ، را در نظر بگیرید چون قبلاً فاز  $n$  را صفر انتخاب کرده‌ایم، اکنون باید برای  $\mathbf{E}$  فاز متفاوت  $\delta$  را اختیار کنیم:

$$\mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}} e^{i(kx - \omega t + \delta)} \quad \text{یا} \quad \mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}} \cos(kx - \omega t + \delta) \quad (۵.۴)$$

که در آن  $\bar{\mathbf{E}}$  یک بردار ثابت حقیقی است.

رسم برای این است که با مختلط گرفتن  $\bar{\mathbf{E}}$  اطلاعات فاز را در  $\bar{\mathbf{E}}$  می‌گنجانند. می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}} e^{i\delta} e^{i(kx - \omega t)} \equiv \bar{\mathbf{E}}_c e^{i(kx - \omega t)}$$

که در آن  $\bar{\mathbf{E}}_c$  یک دامنه مختلط است. فاز  $\delta$  را می‌توان از  $\bar{\mathbf{E}}_c$  به دست آورد، زیرا  $\text{Re}(\bar{\mathbf{E}}_c) = \bar{\mathbf{E}} \cos \delta$

و  $\text{Im}(\bar{\mathbf{E}}_c) = \bar{\mathbf{E}} \sin \delta$  و در نتیجه

$$\tan \delta = \frac{\text{Im}(\bar{\mathbf{E}}_c)}{\text{Re}(\bar{\mathbf{E}}_c)} \quad (۶.۴)$$

از این پس، فرض می‌کنیم همه دامنه‌ها مختلط هستند و شاخص  $c$  را نمی‌نویسیم. هر کمیت نوسان‌کننده  $g_1$  به صورت زیر نوشته می‌شود

$$g_1 = g_1 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \quad (۷.۴)$$

به طوری که  $g_1$  می‌تواند یا دامنه مختلط یا کل عبارت ۷.۴ را نشان دهد. هیچ اشتباهی روی نمی‌دهد، زیرا در نظریه موج خطی عامل نمایی یکسانی در دو طرف هر معادله پیدا خواهد شد و می‌توان آن را حذف کرد.

### مسئله

۱.۴ چگالی نوسان‌کننده  $n_1$  و پتانسیل نوسان‌کننده  $\phi_1$  در یک «موج سوق» با رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند

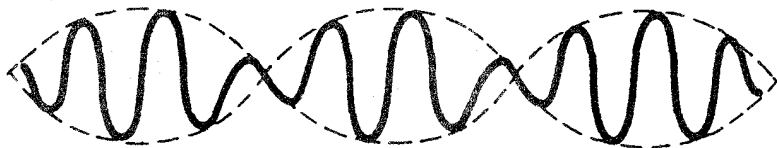
$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{e\phi_1}{KT_e} \frac{\omega_* + ia}{\omega + ia}$$

که در آن تمام نمادها (به‌استثنای  $i$ ) نمایشگر ثابت‌های مثبت هستند. (الف) عبارتی برای فاز  $\phi_1$  نسبت به  $n_1$  پیدا کنید. (برای سادگی، فرض کنید  $n_1$  حقیقی است.)

(ب) اگر  $\omega_* < \omega$ ، آیا  $\phi_1$  از  $n_1$  جلوتر است یا عقبتر؟

### ۲.۴ سرعت گروه

سرعت فاز موج در پلاسما اغلب از سرعت نور  $c$  بیشتر است. این ناقض نظریه نسبیت نیست، زیرا یک قطار موج نامتناهی با دامنه ثابت نمی‌تواند اطلاعات حمل کند. برای مثال، حامل یک موج رادیویی تا مدوله نشود هیچگونه اطلاعاتی را حمل نمی‌کند. اطلاعات مدوله با سرعت فاز حرکت نمی‌کند بلکه با سرعت گروه، که همواره کوچکتر از  $c$  است، منتقل می‌شود. برای نشان دادن این مطلب، می‌توانیم یک موج مدوله را در نظر بگیریم که از جمع («زنش») دو موج با بسامدهای تقریباً مساوی تشکیل شده است. فرض کنید این دو موج عبارت باشند از



شکل ۱.۴ تغییر فضایی میدان الکتریکی دو موج اختلاف بسامد.

$$\begin{aligned} E_{\lambda} &= E_0 \cos[(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t] \\ E_{\gamma} &= E_0 \cos[(k - \Delta k)x - (\omega - \Delta\omega)t] \end{aligned} \quad (۸.۴)$$

$E_{\lambda}$  و  $E_{\gamma}$  به اندازه  $\Delta\omega$  اختلاف بسامد دارند. چون هر موج باید مناسب با محیطی که در آن انتشار می‌یابد، دارای سرعت فاز  $\omega/k$  باشد، باید برای ثابت انتشار اختلاف  $\Delta k$  را در نظر گرفت. با استفاده از اختصارات

$$\begin{aligned} a &= kx - \omega t \\ b &= (\Delta k)x - (\Delta\omega)t \end{aligned}$$

داریم

$$\begin{aligned} E_{\lambda} + E_{\gamma} &= E_0 \cos(a + b) + E_0 \cos(a - b) \\ &= E_0 (\cos a \cos b - \sin a \sin b + \cos a \cos b + \sin a \sin b) \\ &= 2E_0 \cos a \cos b \\ E_{\lambda} + E_{\gamma} &= 2E_0 \cos[(\Delta k)x - (\Delta\omega)t] \cos(kx - \omega t) \end{aligned} \quad (۹.۴)$$

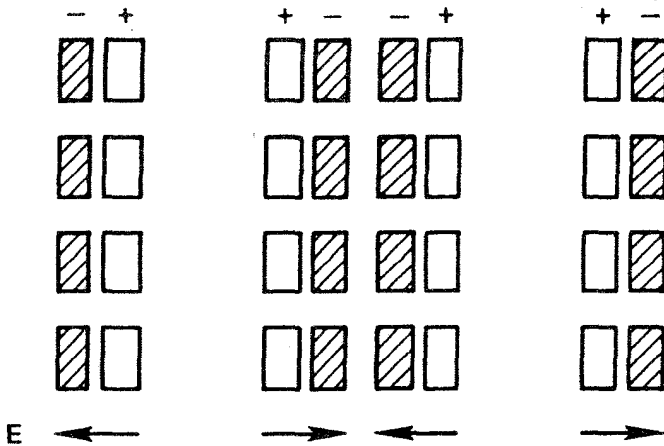
این یک موج مدوله سینوسی است (شکل ۱.۴). پوش موج، که با  $\cos[(\Delta k)x - (\Delta\omega)t]$  داده می‌شود، چیزی است که اطلاعات را حمل می‌کند؛ این پوش با سرعت  $\Delta\omega/\Delta k$  حرکت می‌کند. با حدگیری  $\Delta\omega \rightarrow 0$ ، سرعت گروه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$v_g = d\omega/dk \quad (۱۰.۴)$$

این کمیت است که نمی‌تواند از  $c$  تجاوز کند.

### ۳.۴ نوسانهای پلاسما

اگر الکترونها در یک پلاسما در یک توزیع یکنواخت یونی جابه‌جا شوند، میدانهای الکتریکی در



شکل ۲.۴ سازوکار نوسانهای پلاسما.

جهتی به وجود خواهند آمد که با کشاندن الکترونها به مکانهای نخستینشان خنثایی پلاسما را دوباره برگردانند. الکترونها به دلیل لختی جلوتر می‌روند و حول مکانهای تعادل خود با بسامد مشخصه‌ای که بسامد پلاسما نامیده می‌شود نوسان می‌کنند. این نوسان به قدری تند است که یونهای سنگین فرصتی برای پاسخگویی به میدان نوسان‌کننده ندارند و می‌توان آنها را ثابت در نظر گرفت. در شکل ۲.۴، مستطیلهای سفید جزءهای سیال یونی و مستطیلهای تیره جزءهای متناوباً جابه‌جاشدهٔ سیال الکترونی را نشان می‌دهند. جمع‌شدگی بار حاصل یک میدان دوره‌ای فضایی  $E$  به وجود می‌آورد که مایل است الکترونها را به مکانهای خنثایی آنها برگرداند.

با فرضهای زیر عبارتی برای بسامد پلاسمای  $\omega_p$  در ساده‌ترین مورد به دست خواهیم آورد:  
 (۱) میدان مغناطیسی وجود ندارد؛ (۲) حرکت‌های گرمایی وجود ندارند ( $KT = 0$ )؛ (۳) یونها با توزیع یکنواخت در فضا ساکن هستند؛ (۴) گستره پلاسما نامتناهی است؛ و (۵) حرکت‌های الکترونی تنها در راستای  $x$  رخ می‌دهند. از آخرین فرض داریم

$$\nabla = \hat{x} \partial / \partial x \quad \mathbf{E} = E \hat{x} \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (11.4)$$

بنابراین، هیچ افت و خیز میدان مغناطیسی وجود ندارد؛ این یک نوسان الکتروستاتیک است. معادله‌های حرکت و پیوستگی برای الکترون عبارت است از

$$m n_e \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{v}_e \right] = -e n_e \mathbf{E} \quad (12.4)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) = 0 \quad (13.4)$$

تنها معادلهٔ ماکسولنی که لازم خواهیم داشت معادله‌ای است که حاوی  $\mathbf{B}$  نباشد: معادلهٔ پواسون. یک استثنا بر این قاعدهٔ کلی بخش ۶.۳ است که معادلهٔ پواسون را نمی‌توانیم برای پیدا کردن  $\mathbf{E}$  به‌کار ببریم. این یک نوسان با بسامد زیاد است؛ لختی الکترون مهم است، و انحراف از حالت خنثی اثر اصلی در این مورد خاص است. در نتیجه، می‌نویسیم

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial x = e(n_i - n_e) \quad (14.4)$$

معادله‌های ۲.۴ تا ۱۲.۴ را با روش خطی کردن به‌سادگی می‌توان حل کرد. منظور از این اصطلاح این است که دامنهٔ نوسان کوچک است و جمله‌های حاوی توانهای بالاتر عامل‌های دامنه قابل اغماض هستند. ابتدا متغیرهای وابسته را به دو قسمت تفکیک می‌کنیم: قسمت «تعادلی» که با شاخص ۰ نشان می‌دهیم، و قسمت «اختلالی» که با شاخص ۱ مشخص می‌کنیم:

$$n_e = n_0 + n_1 \quad v_e = v_0 + v_1 \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 \quad (15.4)$$

کمیت‌های تعادلی حالت پلاسما را در غیاب نوسان بیان می‌کنند. چون پلاسما را قبل از آنکه الکترونها جابه‌جا شوند خنثی، یکنواخت و در حال سکون فرض کرده‌ایم، داریم

$$\nabla n_0 = v_0 = \mathbf{E}_0 = 0 \quad (16.4)$$

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = \frac{\partial v_0}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} = 0$$

اکنون معادلهٔ ۱۲.۴ به‌صورت زیر درمی‌آید

$$m \left[ \frac{\partial v_1}{\partial t} + (v_1 \cdot \nabla) v_1 \right] = -e \mathbf{E}_1 \quad (17.4)$$

دیده می‌شود که  $(v_1 \cdot \nabla) v_1$  برحسب کمیت دامنه یک جملهٔ درجهٔ دوم است: و به‌دلیل خطی‌سازی از آن صرف‌نظر می‌کنیم. نظریهٔ خطی تا موقعی معتبر است که  $|v_1|$  به‌اندازهٔ کافی کوچک است به قسمی که این نوع جمله‌های درجهٔ دوم واقعاً قابل چشمپوشی هستند. به‌همین ترتیب، معادلهٔ ۱۳.۴ به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \nabla \cdot (n_0 v_1 + n_1 v_1) = 0 \quad (18.4)$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot v_1 + v_1 \cdot \nabla n_0 = 0$$



در معادله پواسون ۱۴.۴ متذکر می‌شویم که در حالت تعادل  $n_{i0} = n_{e0}$  و از فرض ساکن بودن یونها  $n_{i1} = 0$  و در نتیجه داریم

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}_1 = -en_1 \quad (۱۹.۴)$$

فرض می‌کنیم کمیت‌های نوسان‌کننده رفتار سینوسی دارند:

$$\mathbf{v}_1 = v_1 e^{i(kx - \omega t)} \hat{x}$$

$$n_1 = n_1 e^{i(kx - \omega t)} \quad (۲۰.۴)$$

$$\mathbf{E} = E e^{i(kx - \omega t)} \hat{x}$$

بنابراین، می‌توان مشتق زمانی  $\partial/\partial t$  را با  $-i\omega$  و گرادینان  $\nabla$  را با  $ik\hat{x}$  تعویض کرد. اکنون معادله‌های ۱۷.۴ تا ۱۹.۴ به صورت زیر درمی‌آیند

$$-im\omega v_1 = -eE_1 \quad (۲۱.۴)$$

$$-i\omega n_1 = -n_0 ikv_1 \quad (۲۲.۴)$$

$$ik\epsilon_0 E_1 = -en_1 \quad (۲۳.۴)$$

با حذف  $n_1$  و  $E_1$  برای معادله ۲۱.۴ داریم

$$-im\omega v_1 = -e \frac{-e}{ik\epsilon_0} \frac{-n_0 ikv_1}{-i\omega} = -i \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 \omega} v_1 \quad (۲۴.۴)$$

اگر  $v_1$  صفر نشود، باید داشته باشیم

$$\omega^2 = n_0 e^2 / m\epsilon_0$$

بنابراین، بسامد پلاسما عبارت است از

$$\omega_p = \left( \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \right)^{1/2} \text{ rad/sec} \quad (۲۵.۴)$$

به‌طور عددی، می‌توان از فرمول تقریبی زیر استفاده کرد

$$\omega_p / 2\pi = f_p \approx 9\sqrt{n} \quad (26.4)$$

این بسامد که تنها به چگالی پلاسما بستگی دارد، یکی از پارامترهای اساسی پلاسماست. به دلیل کوچکی  $m$ ، بسامد پلاسما معمولاً خیلی بزرگ است. برای مثال، در یک پلاسما با چگالی  $n = 10^{18} \text{m}^{-3}$  داریم

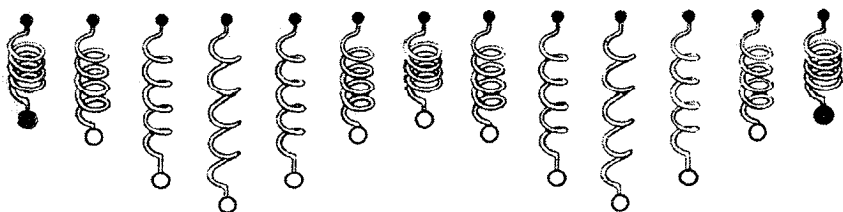
$$f_p \approx 9(10^{18})^{1/2} = 9 \times 10^9 \text{sec}^{-1} = 9 \text{GHz}$$

تابش مربوط به  $f_p$  معمولاً در ناحیه میکروموج قرار می‌گیرد. می‌توانیم این بسامد را با دیگر بسامد الکترون  $\omega_c$  مقایسه کنیم. یک فرمول عددی مفید عبارت است از

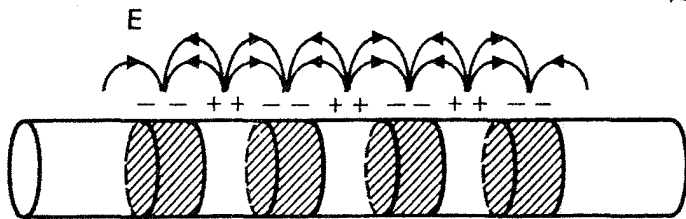
$$f_{ce} \approx 28 \text{GHz/Tesla} \quad (27.4)$$

بنابراین، اگر  $B \approx 0.32 \text{T}$  و  $n \approx 10^{18} \text{m}^{-3}$ ، بسامد سیکلوترون تقریباً مساوی با بسامد پلاسما برای الکترون است.

معادله ۲۵.۴ نشان می‌دهد که اگر قرار باشد اصلاً نوسانی در پلاسما رخ دهد باید دارای بسامدی باشد که تنها بستگی به  $n$  دارد. مخصوصاً،  $\omega$  بستگی به  $k$  ندارد، و در نتیجه سرعت گروه  $d\omega/dk$  صفر است. آشفتگی منتشر نمی‌شود. با یک مانسته مکانیکی می‌توان روشن ساخت چگونه این وضعیت می‌تواند روی دهد (شکل ۳.۴). تعدادی گلوله‌های سنگین را در نظر بگیرید که با فترهایی که در یک ردیف به فواصل مساوی قرار گرفته‌اند آویزان‌اند. اگر همه فنرها یکسان باشند، هر گلوله به‌طور قائم با بسامد یکسانی نوسان خواهد کرد. اگر گلوله‌ها در فازهای مناسبی نسبت به یکدیگر شروع به نوسان کنند، می‌توانند تشکیل موجی دهند که در یکی از دو جهت منتشر می‌شود. بسامد توسط فنرها تعیین می‌شود، اما طول موج را می‌توان به دلخواه انتخاب کرد.



شکل ۳.۴ ساختن موج با یک مجموعه نوسانگرهای مستقل.



شکل ۴.۴. نوسانهای پلاسما در یک محیط متناهی به دلیل میدانهای کناری منتشر می‌شوند.

دو گلوله ناآشفته انتهایی به نوسان در نمی‌آیند، و آشفتگی اولیه منتشر نخواهد شد. همچون در مورد ریسمان کشیده، هم امواج متحرک و هم امواج ایستا می‌توانند تولید شوند. البته، امواج ریسمان الزاماً منتشر می‌شوند زیرا هر قطعه‌ای به قطعه‌های مجاورش متصل است.

این مانستگی کاملاً دقیق نیست، زیرا نوسانهای پلاسما در راستای  $k$  روی می‌دهند نه در عرض  $k$ . اما تا زمانی که الکترونها یا یونها و یا با همدیگر برخورد نکنند می‌توان آنها را نوسانگرهای مستقلی در نظر گرفت که به‌طور افقی حرکت می‌کنند (در شکل ۳.۴). اکنون میدان الکتریکی را در نظر می‌گیریم. آیا این میدان از ناحیه آشفتگی نخستین تجاوز خواهد کرد و لایه‌های مجاور در پلاسما را به نوسان در نمی‌آورد؟ در مثال ساده بالا، وضعیت چنین نیست زیرا بینهایت ورقه تخت بارهای متناوباً منفی و مثبت میدان الکتریکی ایجاد نمی‌کنند در هر دستگاه متناهی، نوسانهای پلاسما منتشر خواهد شد. در شکل ۴.۴، ناحیه‌های منفی (تیره) و مثبت نوسان تحت پلاسما در یک لوله استوانه‌ای محبوس شده‌اند. میدان الکتریکی کناری موجب جفت‌شدگی آشفتگی به لایه‌های مجاور می‌شود، و نوسان جایگزیده باقی نمی‌ماند.

### مسائل

۲.۴ بسامد پلاسما را با اضافه کردن حرکت‌های یون حساب کنید، و به این ترتیب فرض ثابت بودن یونها را توجیه کنید. (راهنمایی: جمله  $n_1$  را در معادله پواسون اضافه کنید و از معادله‌های حرکت و پیوستگی یون استفاده کنید.)

۳.۴ برای یک نوسان ساده پلاسما با یونهای ثابت و رفتار فضا-زمانی  $\exp[i(kx - \omega t)]$ ، فاز  $\delta$  را برای  $E_1, \phi_1, v_1$  و اگر فاز  $n_1$  صفر باشد محاسبه کنید. فازهای نسبی را با ترسیم امواج سینوسی نمایشگر  $n_1, \phi_1, E_1, v_1$ : (الف) به‌عنوان تابعی از  $x$  در  $t = 0$ ، (ب) به‌عنوان تابعی از  $t$  در  $x = 0$  برای  $\omega/k > 0$ ، (ج) به‌عنوان تابعی از  $t$  در  $x = 0$  برای  $\omega/k < 0$  مشخص کنید. توجه داشته باشید که نقشهای زمانی را می‌توان با انتقال نقشهای  $x$  در جهت مناسبی، چنانکه انگار موج از جلو ناظر ثابتی عبور می‌کند، به‌دست آورد.

۴.۴ با نوشتن معادله پواسون خطی شده که در محاسبه نوسانهای ساده پلاسما به کار رفت به صورت

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = 0$$

عبارتی برای ثابت دی الکتریک  $\epsilon$  به دست آورید که مناسب حرکت‌های طولی پرسیامد باشد.

### ۴.۴ امواج الکترونی پلاسما

اثر دیگری وجود دارد که موجب می شود تا نوسانهای پلاسما منتشر شوند، و آن حرکت گرمایی است. الکترونیایی که با سرعت‌های گرمایی خود به لایه‌های مجاور پلاسما جریان می یابند اطلاعاتی درباره آنچه در ناحیه نوسان کننده اتفاق می افتد حمل می کنند. بنابراین، می توان نوسان پلاسما را به درستی موج پلاسما نامید. این اثر را می توانیم با اضافه کردن جمله  $-\nabla p_e$  به معادله حرکت ۱۲.۴ به آسانی بررسی کنیم. در مسأله یک بعدی،  $\gamma$  طبق معادله ۵۳.۳ برابر با ۳ است. در نتیجه

$$\nabla p_e = 3KT_e \nabla n_e = 3KT_e \nabla (n_o + n_1) = 3KT_e \frac{\partial n_1}{\partial x} \hat{x}$$

و معادله حرکت خطی شده عبارت است از

$$mn_o \frac{\partial v_1}{\partial t} = -en_o E_1 - 3KT_e \frac{\partial n_1}{\partial x} \quad (28.4)$$

توجه کنید که در فرایند خطی کردن از جمله‌های  $n_1 E_1$  و  $n_1 \partial v_1 / \partial t$  نیز مانند جمله  $(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1$  صرف نظر کرده ایم. با معادله ۲۰.۴، معادله ۲۸.۴ به صورت زیر درمی آید

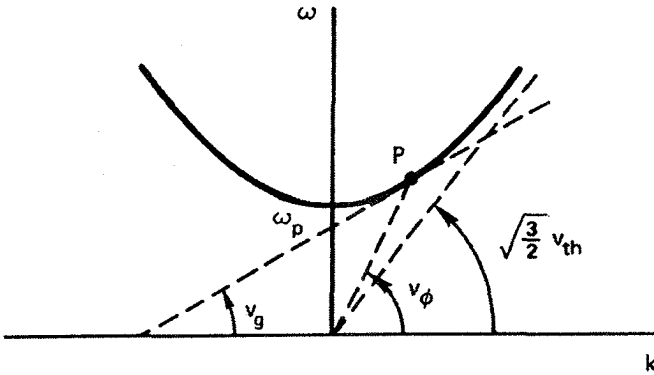
$$-im\omega n_o v_1 = -en_o E_1 - 3KT_e ik n_1 \quad (29.4)$$

$E_1$  و  $n_1$  همچنان توسط معادله‌های ۲۳.۴ و ۲۲.۴ به دست می آیند، و داریم

$$im\omega n_o v_1 = \left[ en_o \left( \frac{-e}{ik\epsilon_o} \right) + 3KT_e ik \right] \frac{n_o ik}{i\omega} v_1$$

$$\omega^2 v_1 = \left( \frac{n_o e^2}{\epsilon_o m} + \frac{3KT_e}{m} k^2 \right) v_1$$

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3}{2} k^2 v_{th}^2 \quad (30.4)$$



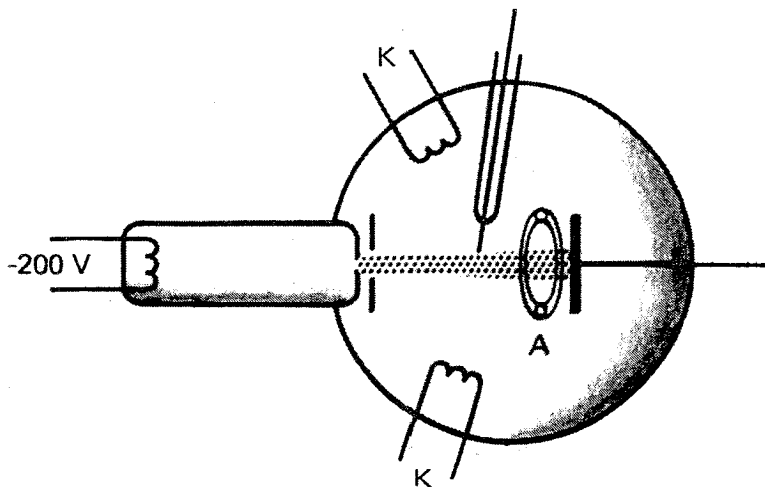
شکل ۵.۴ رابطه پاشیدگی برای امواج الکترونی پلاسما (امواج بوهم-گراس).

که در آن  $v_{th}^2 \equiv 2KT_e/m$  بسامد اکنون به  $k$  بستگی دارد، و سرعت گروه متناهی است:

$$2\omega \, d\omega = \frac{3}{2} v_{th}^2 2k \, dk$$

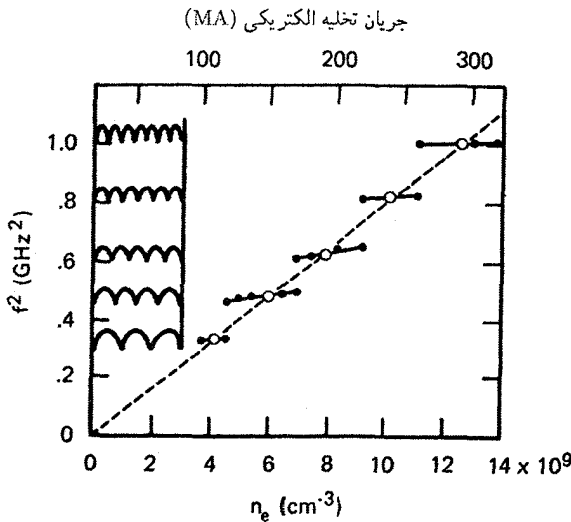
$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2} \frac{k}{\omega} v_{th}^2 = \frac{3}{2} \frac{v_{th}^2}{v_\phi} \quad (31.4)$$

اینکه  $v_g$  همواره کوچکتر از  $c$  است را به سادگی می توان از نمودار معادله ۳۰.۴ دید. در شکل ۵.۴ رابطه پاشیدگی  $\omega(k)$  از روی معادله ۳۰.۴ ترسیم شده است. در هر نقطه  $P$  روی این منحنی، شیب خطی که از مبدأ تا این نقطه کشیده می شود سرعت فاز  $\omega/k$  را می دهد. شیب منحنی در  $P$  سرعت گروه را می دهد. به وضوح دیده می شود که این سرعت همواره کوچکتر از  $(3/2)^{1/2} v_{th}$  است، که این، در نظریه غیرنسبیتی ما، خیلی کوچکتر از  $c$  است. توجه کنید که در  $k$ ی بزرگ ( $\lambda$ ی کوچک)، اطلاعات اساساً با سرعت گرمایی منتقل می شوند. برای  $k$ ی کوچک ( $\lambda$ ی بزرگ)، اطلاعات کندتر از  $v_{th}$  منتقل می شوند اگرچه  $v_\phi$  بزرگتر از  $v_{th}$  است. علت آن است که برای  $\lambda$ ی بزرگ گرادیان چگالی کوچک است، و حرکتهای گرمایی تکانه برآیند خیلی کمی را به لایه های مجاور حمل می کنند. وجود نوسانهای پلاسما از دوران لانگمیر در دهه ۱۹۲۰ معلوم شده بود. اما تنها در سال ۱۹۴۹ بود که بوهم و گراس نظریه ای تفصیلی ارائه کردند حاکی از اینکه امواج چگونه منتشر می شوند و چگونه می توانند برانگیخته شوند. یک روش ساده برای برانگیختن امواج پلاسما اعمال یک پتانسیل نوسان کننده به یک شبکه یا رشته ای از شبکه ها در یک پلاسماست؛ اما در آن زمان به طور کلی نوسانگرهایی در گستره GHz یافت نمی شدند. در عوض، الزاماً از باریکه الکترونی برای برانگیختن امواج پلاسما استفاده می شد. اگر الکترونهای باریکه طوری تجمع پیدا می کردند که از



شکل ۶.۴ طرح آزمایش لونی-براون روی نوسانهای پلاسما.

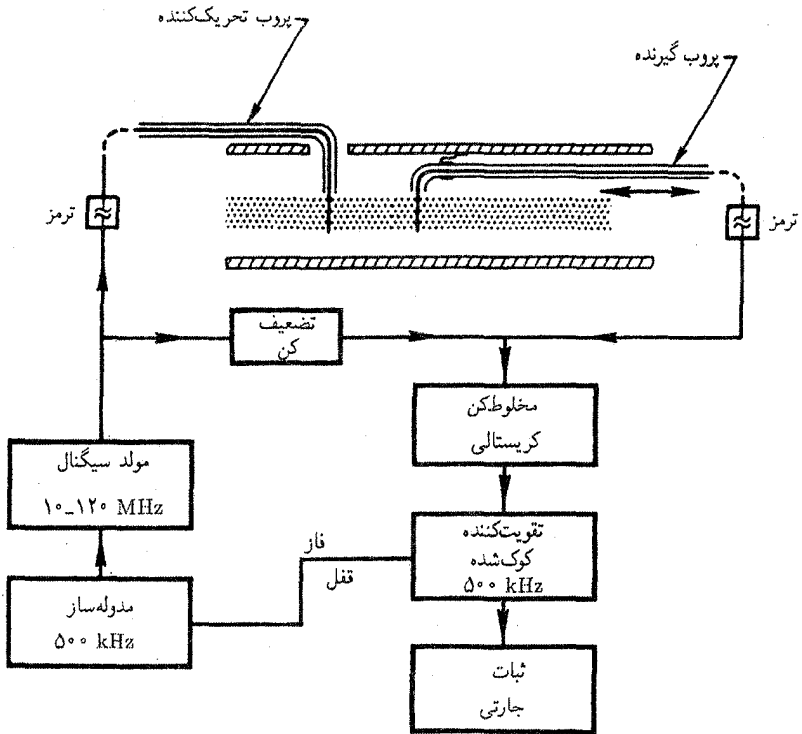
جلو هر نقطه معین با بسامد  $f_p$  عبور کنند، یک میدان الکتریکی با همان بسامد تولید می‌کردند و نوسانهای پلاسما را برمی‌انگیختند. لازم نیست دسته‌های الکترونی را از قبل تشکیل داد؛ نوسانهای پلاسما به مجردی که تولید شدند، الکترونها را در دسته خواهند کرد، و نوسانها با یک سازوکار پسخور مثبت رشد خواهند کرد. آزمایشی برای آزمون این نظریه اولین بار توسط لونی و براون در سال ۱۹۵۴ انجام شد. دستگاه آنها به‌طور کامل در یک حباب شیشه‌ای با قطری حدود ۱۰ cm قرار داشت (شکل ۶.۴). پلاسمای داخل حباب توسط تخلیه الکتریکی بین کاتودهای  $K$  و آنود حلقوی  $A$  تحت فشار کم ( $3 \times 10^{-2}$  Torr) از بخار جیوه تشکیل شده بود. باریکه الکترونی در بازوی جانبی توسط یک رشته با پیش ولت منفی تولید شده بود. الکترونها گسیل‌یافته تا  $200\text{ V}$  شتاب می‌گرفتند و از طریق حفره کوچک به داخل پلاسما پرتاب می‌شدند. یک سیم کاوه متحرک نازک که به گیرنده رادیویی وصل شده بود برای دریافت نوسانها به‌کار می‌رفت. شکل ۷.۴ نتایج تجربی آنها را برای  $f^2$  برحسب جریان تخلیه، که عموماً متناسب با چگالی است، نشان می‌دهد. نقاط روی شکل یک وابستگی خطی را نشان می‌دهد که تقریباً موافق با معادله ۲۶.۴ است. انحراف از خط مستقیم را می‌توان به جمله  $k^2 v_{th}^2$  در معادله ۳۰.۴ نسبت داد. اما همه بسامدها مشاهده نشدند؛  $k$  می‌بایست به اندازه‌ای بود که تعداد درستی نیم‌طول موج در امتداد ستون پلاسما جای می‌گرفتند. نقشهای موج ایستاده در سمت چپ شکل ۷.۴ نشان داده شده‌اند. امواج پیش‌بینی‌شده متحرک پلاسما در این آزمایش دیده نشدند. احتمالاً به این علت که باریکه به قدری نازک بود که حرکتهای گرمایی باعث خروج الکترونها از باریکه می‌شدند، و بدین ترتیب



شکل ۷.۴ مجذور بسامد مشاهده شده برحسب چگالی پلاسما، که به طور کلی متناسب با جریان تخلیه است. ضمیمه توزیع فضایی مشاهده شده شدت نوسان است که وجود نقش موج ایستاده متفاوتی را برای هر یک از گروههای نقاط تجربی نشان می دهد.

انرژی نوسان تلف می شود. تجمع الکترونها نه در پلاسما بلکه در غلانهای نوسان کننده در دو سر ستون پلاسما صورت گرفت. درسی که از این آزمایش نخستین گرفته شد این بود که بازتولید شرایط مفروض در نظریه پلاسمای یکنواخت مستلزم مهارت قابل ملاحظه ای است.

چند آزمایش جدید رابطه پاشیدگی بوهم-گراس ۳۰.۴ را با دقت ثابت کرده اند. به عنوان مثالی از فنون تجربی نوین، نتایج بارت، جونز، و فرانکلین را نشان می دهیم. شکل ۸.۴ طرح کلی دستگاه آنهاست. ستون استوانه ای از پلاسمای ساکن با یونش اتمهای Cs روی تخته های تنگستن داغ (در شکل نشان داده نشده اند) در یک ماشین تولید می شود. یک میدان مغناطیسی قوی الکترونها را مقید به حرکت در امتداد ستون می کند. امواج با یک کاوه سیمی که توسط یک نوسانگر به حرکت در می آید برانگیخته می شوند و با یک کاوه متحرک دیگر آشکارسازی می شوند. حفاظ فلزی که پلاسما را احاطه کرده است مانع ارتباط بین کاوه ها از طریق انتشار میکروموج معمولی (موج الکترومغناطیس) می شود، زیرا حفاظ تشکیل موجبری می دهد که بسامد قطع آن از بسامد به کاررفته بیشتر است. شکلهای موج به روش تداخل سنجی ردیابی می شوند؛ علامتهای تراکسیلیده و دریافت شده توسط بلوری آشکارسازی می شوند که وقتی علامتها همفاز هستند خروجی dc آن بزرگ است و هنگامی که اختلاف ما از آنها ۹۰° است خروجی آن صفر است. علامت حاصل در



شکل ۸.۴ طرح کلی یک آزمایش برای اندازه‌گیری امواج پلاسما.

شکل ۹.۴ به صورت تابعی از مکان در امتداد ستون نشان داده شده است. برای پایین آوردن تراز نوفه از آشکارسازی همگام استفاده می‌شود. علامت برانگیزش در  $500 \text{ kHz}$  قطع می‌شود، و علامت دریافت شده هم باید در  $500 \text{ kHz}$  مدوله شود. تنها با آشکارسازی مؤلفه  $500 \text{ kHz}$  کیلوهرتری علامت دریافت شده نوفه در سایر بسامدها حذف می‌شود. ردهای شکل ۹.۴ اندازه‌ای از  $k$  را می‌دهند. هنگامی که بسامد نوسانگر  $\omega$  تغییر می‌کند. نمودار منحنی پاشیدگی  $(\omega/\omega_p)^2$  برحسب  $ka$  به دست می‌آید، که در آن  $a$  شعاع ستون است (شکل ۱۰.۴). منحنیهای مختلف مطابق مقدار  $\omega_p a/v_{th}$  نشانگذاری شده‌اند. منحنی مورد  $v_{th} = 0$  را، که به رابطه پاشیدگی  $\omega = \omega_p$  مربوط است، با  $\infty$  نشانگذاری کرده‌ایم. منحنیهای مربوط به مقادیر متناهی  $v_{th}$  با منحنیهای شکل ۵.۴ مطابقت دارند. توافق خوبی بین نقاط تجربی و منحنیهای نظری وجود دارد. کاهش  $\omega$  در  $ka$  کوچک اثر هندسه متناهی نشان داده شده در شکل ۴.۴ است. در این آزمایش خاص، اثر مزبور را به روش دیگری می‌توان توضیح داد. برای برقراری شرط مرزی اعمال شده توسط حفاظ رسانا، بدین معنی که روی رسانا  $E = 0$ ، امواج پلاسما باید تحت زوایه‌ای نسبت به میدان مغناطیسی حرکت





$$\begin{aligned} n_0 &= 2 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3} \\ f &= 950 \text{ MHz} \\ \lambda &= 3.5 \text{ cm} \end{aligned}$$

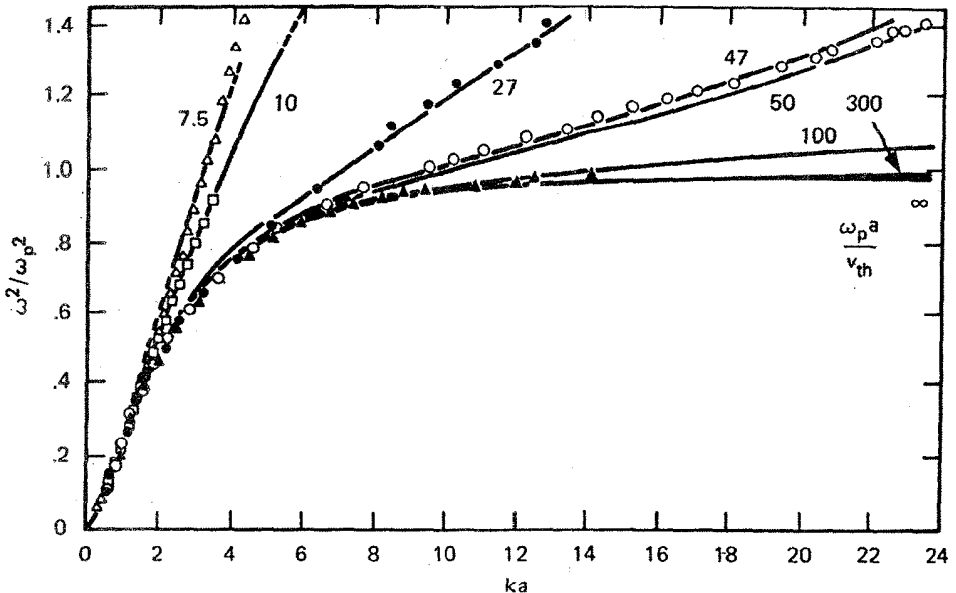


$$\begin{aligned} n_0 &= 4 \times 10^8 \text{ cm}^{-3} \\ f &= 170 \text{ MHz} \\ \lambda &= 1.3 \text{ cm} \end{aligned}$$

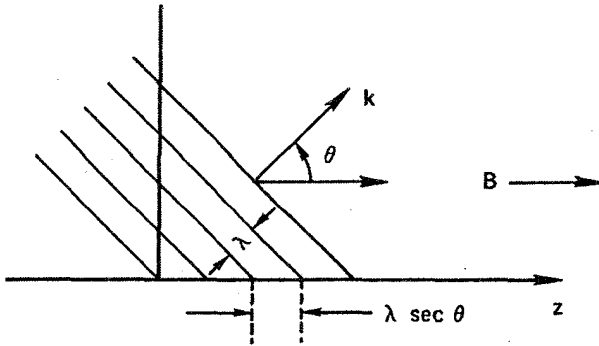


$$\begin{aligned} n_0 &= 1 \times 10^7 \text{ cm}^{-3} \\ f &= 20 \text{ MHz} \\ \lambda &= 5.1 \text{ cm} \end{aligned}$$

شکل ۹.۴ تغییر فضایی چگالی مختل در موج پلاسما به صورتی که تداخل سنج، علامتهای چگالی لحظه‌ای از دو کاوه را چند برابر می‌کند و میانگین زمانی را می‌گیرد، نشان می‌دهد. تداخل سنج برای بسامد موج که با چگالی تغییر می‌کند کوچک شده است. میرایی ظاهری در بسامدهای کم از نوفه در پلاسما ناشی می‌شود.



شکل ۱۰.۴ مقایسه منحنیهای پاشیدگی اندازه‌گیری شده و محاسبه شده برای امواج الکترونی پلاسما در استوانه‌ای به شعاع  $a$ .



شکل ۱۱.۴ جبهه‌های موج که با زاویه نسبت به میدان حرکت می‌کنند، در راستای میدان فاصله‌ای بزرگتر از طول موج  $\lambda$  دارند.

کنند. تداخل ویرانگر بین امواجی که با مؤلفه شعاعی برونسوی  $k$  در حرکت‌اند و امواجی که به‌درون حرکت می‌کنند برقراری شرط مرزی را امکان‌پذیر می‌سازد. اما امواجی که با زاویه نسبت به میدان مغناطیسی حرکت می‌کنند قله‌ها و دره‌هایی دارند که به فاصله‌ای بزرگتر از  $\lambda/2$  از همدیگر جدا شده‌اند (شکل ۱۱.۴). چون الکترونها تنها می‌توانند در امتداد  $B$  حرکت کنند (اگر  $B$  خیلی بزرگ باشد) شتاب کمتری می‌گیرند، و بسامد از  $\omega_p$  کوچکتر می‌شود.

## مسائل

۵.۴ امواج الکترونی پلاسما در یک پلاسمای یکنواخت با  $KT_e = 10^6 \text{ eV}$  و  $n = 10^{16} \text{ m}^{-3}$  و  $B = 0$  منتشر می‌شوند. اگر بسامد  $f$  برابر با  $1 \text{ GHz}$  باشد، طول موج برحسب سانتیمتر چقدر است؟

۶.۴ (الف) با اضافه کردن جمله  $-m\nu v$  به معادله حرکت الکترون و به‌دست آوردن مجدد رابطه پاشیدگی برای  $T_e = 0$ ، اثر میرایی برخوردی را روی انتشار امواج لانگمویر (نوسانهای پلاسما) محاسبه کنید.

(ب) رابطه صریحی برای  $\text{Im}(\omega)$  بنویسید و نشان دهید که علامت آن حاکی از میرا بودن موج نسبت به زمان است.

## ۵.۴ امواج صوتی

به‌عنوان درآمدی بر امواج یونی، نظریه امواج صوتی در هوای معمولی را به‌اختصار مرور می‌کنیم.

با چشمپوشی از چسبندگی، می‌توانیم معادلهٔ ناویر-استوکس ۴۸.۳ را، که توصیف‌کنندهٔ این امواج است، به صورت زیر بنویسیم

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p = -\frac{\gamma p}{\rho} \nabla \rho \quad (32.4)$$

معادلهٔ پیوستگی عبارت است از

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (33.4)$$

با خطی کردن حول یک تعادل پایا با کمیت‌های یکنواخت  $p_0$  و  $\rho_0$  داریم

$$-i\omega \rho_0 \mathbf{v}_1 = -\frac{\gamma p_0}{\rho_0} ik \rho_1 \quad (34.4)$$

$$-i\omega \rho_1 + \rho_0 ik \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \quad (35.4)$$

که در آن باز هم وابستگی موجی را به صورت  $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$  گرفته‌ایم. برای موج تخت با  $\mathbf{v} = v_1 \hat{x}$  و  $\mathbf{k} = k \hat{x}$  پس از حذف  $\rho_1$  به دست می‌آوریم

$$-i\omega \rho_0 v_1 = -\frac{\gamma p_0}{\rho_0} ik \frac{\rho_0 ik v_1}{i\omega}$$

$$\omega^2 v_1 = k^2 \frac{\gamma p_0}{\rho_0} v_1$$

یا

$$\boxed{\frac{\omega}{k} = \left( \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \right)^{1/2} = \left( \frac{\gamma K T}{M} \right)^{1/2} \equiv c_s} \quad (36.4)$$

این رابطهٔ سرعت امواج صوتی  $c_s$  در یک گاز خنثی است. این امواج صوتی امواج فشاری هستند که توسط برخوردهای بین مولکولهای هوا از لایه‌ای به لایهٔ مجاور منتشر می‌شوند. در یک پلاسما بدون ذرات خنثی و با برخوردهای کم، پدیدهٔ مشابهی روی می‌دهد. این را موج آکوستیکی یونی یا به‌طور ساده موج یونی می‌نامند.

## ۶.۴ امواج یونی

اگر برخوردی انجام نشود امواج صوتی معمولی رخ نمی‌دهند. با این حال یونها باز هم به‌دلیل بارشان

می‌توانند ارتعاشات را به یکدیگر منتقل کنند؛ و امواج آکوستیکی از طریق یک میدان الکتریکی واسطه می‌توانند حادث شوند. چون حرکت یونهای سنگین دخیل است، نوسانها کم بسامد خواهند بود، و می‌توانیم تقریب پلاسمایی بخش ۶.۳ را به‌کار ببریم. بنابراین، فرض می‌کنیم  $n_i = n_e = n$  و از معادلهٔ پواسون استفاده نمی‌کنیم. معادلهٔ سیالی یون در غیاب میدان مغناطیسی عبارت است از

$$Mn \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i \right] = en\mathbf{E} - \nabla p = -en\nabla\phi - \gamma_i KT_i \nabla n \quad (37.4)$$

در اینجا فرض کرده‌ایم  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  و از معادلهٔ حالت استفاده کرده‌ایم. با خطی کردن و با فرض امواج تخت، داریم

$$-i\omega Mn_0 v_{i1} = -en_0 ik\phi_1 - \gamma_i KT_i ikn_1 \quad (38.4)$$

همچنین برای الکترونها می‌توان فرض کرد  $m = 0$  و از استدلال بخش ۵.۳، مربوط به حرکت در امتداد  $\mathbf{B}$ ، برای مورد فعلی  $\mathbf{B} = 0$  استفاده کرد. بدین ترتیب، موازنهٔ نیروهای وارد بر الکترونها ایجاب می‌کند که

$$n_e = n = n_0 \exp\left(\frac{e\phi_1}{KT_e}\right) = n_0 \left(1 + \frac{e\phi_1}{KT_e} + \dots\right)$$

بنابراین، اختلال در چگالی الکترونها و در نتیجه در چگالی یونها عبارت است از

$$n_1 = n_0 \frac{e\phi_1}{KT_e} \quad (39.4)$$

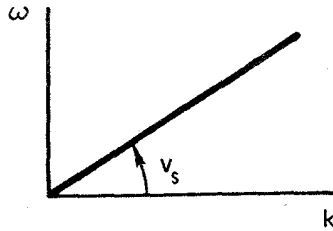
در اینجا  $n_0$  رابطهٔ بولتزمن برای چگالی در پلاسمای در حال تعادل هم هست، که در آن می‌توانیم قرار دهیم  $\phi_0 = 0$  زیرا فرض کرده‌ایم  $\mathbf{E}_0 = 0$ . در خطی کردن معادلهٔ ۳۹.۴، از جمله‌های مرتبهٔ بالاتر در بسط تیلور تابع نمایی صرف نظر کرده‌ایم.

تنها معادلهٔ لازم دیگر معادلهٔ پیوستگی خطی شدهٔ یون است. از معادلهٔ ۲۲.۴، داریم

$$i\omega n_1 = n_0 ikv_{i1} \quad (40.4)$$

از معادله‌های ۳۹.۴ و ۴۰.۴ کمیت‌های  $\phi_1$  و  $n_1$  را برحسب  $v_{i1}$  به دست می‌آوریم و در معادلهٔ ۳۸.۴ قرار می‌دهیم

$$i\omega Mn_0 v_{i1} = \left( en_0 ik \frac{KT_e}{en_0} + \gamma_i KT_i ik \right) \frac{n_0 ikv_{i1}}{i\omega}$$



شکل ۱۲.۴ رابطه پاشیدگی برای امواج یونی آکوستیکی در حد طول موج دمای کوچک.

$$\omega^2 = k^2 \left( \frac{KT_e}{M} + \frac{\gamma_i KT_i}{M} \right)$$

$$\boxed{\frac{\omega}{k} = \left( \frac{KT_e + \gamma_i KT_i}{M} \right)^{1/2} \equiv v_s} \quad (۴۱.۴)$$

این رابطه پاشیدگی برای امواج یونی آکوستیکی است؛  $v_s$  سرعت صوت در پلاسماست. چون در امواج تختی که در نظر گرفته‌ایم یونها تراکم یک‌بعدی می‌یابند، در اینجا می‌توانیم قرار دهیم  $\gamma_i = 3$ . الکترونها نسبت به این امواج به قدری سریع حرکت می‌کنند که برای یکسان کردن دمای خود در همه جا وقت کافی دارند؛ بنابراین، الکترونها تک‌دما هستند و  $\gamma_e = 1$ . در غیر این وضعیت، یک ضریب  $\gamma_e$  جلو  $KT_e$  در معادله ۴۱.۴ وارد می‌شود.

منحنی پاشیدگی امواج یونی (شکل ۱۲.۴) سرشت اساساً متفاوتی با منحنی پاشیدگی امواج الکترونی (شکل ۵.۴) دارد. نوسانهای پلاسما اساساً امواج تک‌بسامد، با تصحیحی مربوط به حرکت‌های گرمایی، هستند. امواج یونی اساساً امواجی با سرعت ثابت هستند و تنها هنگامی وجود دارند که حرکت‌های گرمایی وجود داشته باشند. برای امواج یونی، سرعت گروه با سرعت فاز مساوی است. دلایل این اختلاف را از توصیف سازوکارهای فیزیکی دخیل زیر می‌توان دید. در نوسانهای الکترونی پلاسما، گونه دیگر (یعنی یونها) اصولاً ثابت باقی می‌مانند. در امواج یونی آکوستیکی، گونه دیگر (یعنی الکترونها) اصلاً ثابت نیستند؛ در حقیقت، الکترونها همراه با یونها کشیده می‌شوند و تمایل دارند حفاظی در برابر میدانهای الکتریکی ناشی از تجمع یونها تشکیل دهند. اما این حفاظ کامل نیست زیرا، همان‌طور که در بخش ۴.۱ دیدیم، پتانسیلهای مرتبه  $KT_e/e$  به دلیل حرکت‌های گرمایی می‌توانند به بیرون نفوذ کنند. آنچه که اتفاق می‌افتد به‌قرار زیر است. یونها مانند امواج صوتی معمولی ناحیه‌های متراکم و رقیق تشکیل می‌دهند. ناحیه‌های تراکم به دو دلیل مایل‌اند به ناحیه‌های رقیق گسترش یابند. اولاً، یونها به‌علت حرکت‌های گرمایی پخش می‌شوند. با این اثر

موجب جمله دوم در ریشه دوم معادله ۴۱.۴ می‌شود. ثانیاً، دسته‌های یون دارای بار مثبت‌اند و به دلیل میدان الکتریکی حاصل مایل‌اند پاشیده شوند الکترون‌ها در برابر بیشتر این میدان حفاظ می‌سازند، و تنها کسری متناسب با  $KT_e$  وجود دارد تا روی دسته‌های یون عمل کند. این اثر سبب جمله اول در ریشه دوم معادله ۴۱.۴ می‌شود. یونها به دلیل لختی خود پیش می‌روند، و با تولید مجدد ناحیه‌های متراکم و رقیق موج تشکیل می‌دهند.

دومین اثر فوق منجر به پدیده جالبی می‌شود. زمانی که  $KT_i$  صفر می‌شود، امواج یونی باز هم وجود دارند. این پدیده در یک گاز خنثی روی نمی‌دهد (معادله ۳۶.۴). در این مورد، سرعت آکوستیکی با رابطه زیر داده می‌شود

$$v_s = (KT_e/M)^{1/2} \quad (42.4)$$

این پدیده اغلب در پلاسماهای آزمایشگاهی، که در آنها وضعیت  $T_i \ll T_e$  یک امر عادی است، مشاهده می‌شود. سرعت صوت بستگی دارد به دمای الکترون (زیرا میدان الکتریکی با آن متناسب است) و به جرم یون (زیرا لختی سیال با آن متناسب است).

## ۷.۴ اعتبار تقریب پلاسمایی

در به دست آوردن سرعت امواج یونی، از شرط خنثایی  $n_e = n_i = n$  استفاده کردیم و در همین حال  $E$  را متناهی گرفتیم. برای آنکه ببینیم در این فرایند چه خطایی به وجود می‌آید، اکنون  $n_i$  را متفاوت از  $n_e$  می‌گیریم و از معادله خطی شده پواسون استفاده می‌کنیم:

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}_1 = \epsilon_0 k^2 \phi_1 = e(n_{i1} - n_{e1}) \quad (43.4)$$

چگالی الکترون از رابطه خطی شده بولتزمن ۳۹.۴ به دست می‌آید:

$$n_{e1} = \frac{e\phi_1}{KT_e} n_0 \quad (44.4)$$

با جاگذاری در معادله ۴۳.۴، داریم

$$\epsilon_0 \phi_1 \left( k^2 + \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 KT_e} \right) = en_{i1}$$

$$\epsilon_0 \phi_1 (k^2 \lambda_D^2 + 1) = en_{i1} \lambda_D^2 \quad (45.4)$$

چگالی یون با معادله خطی شده پیوستگی یون ۴۰.۴ بیان می شود:

$$n_{i1} = \frac{k}{\omega} n_o v_{i1} \quad (۴۶.۴)$$

با قرار دادن معادلات ۴۵.۴ و ۴۶.۴ در معادله حرکت یون ۳۸.۴، به دست می آوریم

$$i\omega M n_o v_{i1} = \left( \frac{en_o ik}{\epsilon_o} \frac{e\lambda_D^2}{1 + k^2 \lambda_D^2} + \gamma_i K T_i ik \right) \frac{k}{\omega} n_o v_{i1} \quad (۴۷.۴)$$

$$\omega^2 = \frac{k^2}{M} \left( \frac{n_o e^2 \epsilon_o^{-1} \lambda_D^2}{1 + k^2 \lambda_D^2} + \gamma_i K T_i \right)$$

$$\frac{\omega}{k} = \left( \frac{K T_e}{M} \frac{1}{1 + k^2 \lambda_D^2} + \frac{\lambda_i K T_i}{M} \right)^{1/2} \quad (۴۸.۴)$$

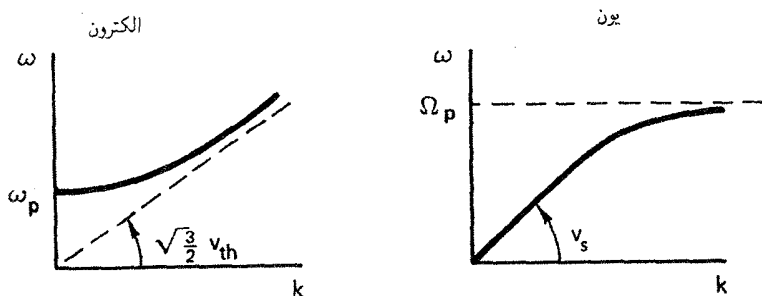
این رابطه، صرف نظر از عامل  $1 + k^2 \lambda_D^2$ ، مانند رابطه ای است که قبلاً به دست آوردیم. (معادله ۴۱.۴). فرض  $n_i = n_e$  موجب خطایی از مرتبه  $(2\pi \lambda_D / \lambda)^2 = k^2 \lambda_D^2$  می شود. چون  $\lambda_D$  در اکثر آزمایشها بسیار کوچک است، تقریب پلاسمایی برای همه امواج به استثنای امواج با طول موج بسیار کوچک معتبر است.

## ۸.۴ مقایسه امواج یونی و الکترونی

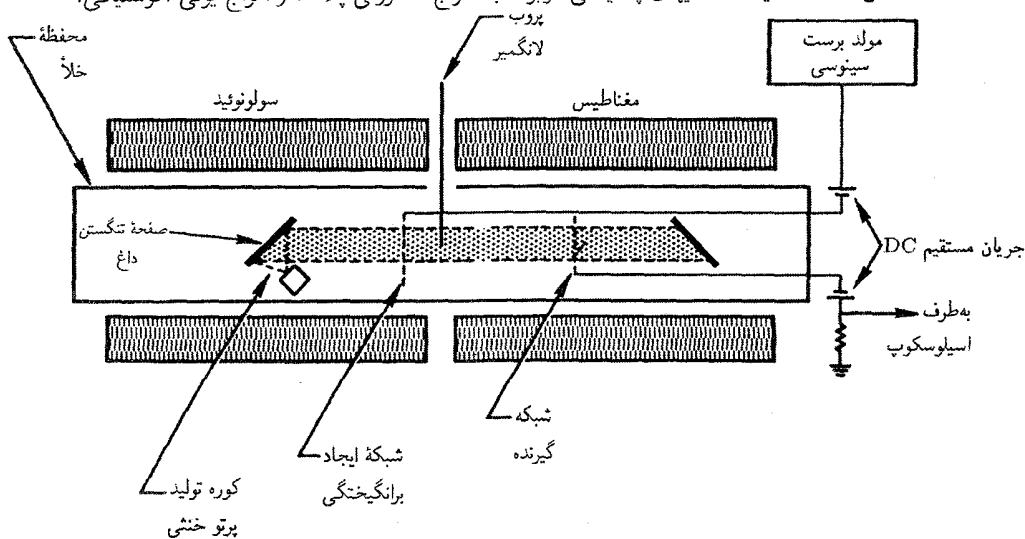
اگر این امواج با طول موج کوتاه را با  $1 \gg k^2 \lambda_D^2$  در نظر بگیریم، معادله ۴۷.۴ به صورت زیر درمی آید

$$\omega^2 = k^2 \frac{n_o e^2}{\epsilon_o M k^2} = \frac{n_o e^2}{\epsilon_o M} \equiv \Omega_p^2 \quad (۴۹.۴)$$

در این رابطه همچنین برای سادگی  $\lim T_i \rightarrow 0$  را منظور کرده ایم. در اینجا  $\Omega_p$  بسامد یونی پلاسماست. برای بسامدهای بزرگ (طول موجهای کوتاه) موج یونی آکوستیکی به موج با بسامد ثابت تبدیل می شود. بدین ترتیب، یک رفتار مکملی بین امواج الکترونی پلاسما و امواج یونی آکوستیکی وجود دارد: امواج الکترونی اساساً امواجی با بسامد ثابت هستند، ولی در  $k\lambda_D$  بزرگ به امواج تک سرعت تبدیل می شوند؛ امواج یونی آکوستیکی اساساً امواجی با سرعت ثابت هستند و در  $k\lambda_D$  بزرگ به امواج تک بسامد تبدیل می شوند. این مقایسه به صورت نمودار در شکل ۱۳.۴ نشان داده شده است.



شکل ۱۳.۴ مقایسه منحنیهای پاشیدگی مربوط به امواج الکترونی پلاسما و امواج یونی آکوستیکی.

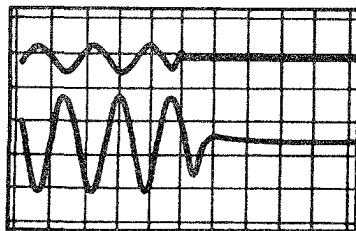


شکل ۱۴.۴ آزمایش ماشین Q برای آشکارسازی امواج یونی.

تأیید تجربی وجود امواج یونی اولین بار توسط وانگ، موتلی، و دانگلو انجام شد. شکل ۱۴.۴ دستگاه آنها را نشان می‌دهد، که باز هم یک ماشین Q بود. (تصادفی نیست که اغلب به ماشینهای Q اشاره می‌کنیم؛ واریتهای تجربی دقیق نظریه پلاسما بعد از کشف طرحهایی برای ساختن پلاسماهای ساکن امکان پذیر گردیدند.) با وارد کردن شبکه‌هایی به درون پلاسما، امواج ارسال شده آشکارسازی شدند. شکل ۱۵.۴ ردهای نوسان‌نمایی علامتهای تراگسیلیده و دریافت شده را نشان می‌دهد. از انتقال فاز می‌توان سرعت فاز را به دست آورد (که در این مورد مساوی سرعت گروه است). این انتقال فاز به صورت تابعی از فاصله برای چگالی پلاسمای  $3 \times 10^{17} \text{m}^{-3}$  در شکل ۱۶.۴ ترسیم شده است. شبیهی چنین خطوطی سرعتهای فاز را می‌دهند که در شکل ۱۷.۴ برای دو جرم مختلف و چگالی‌های مختلف پلاسمای  $n_0$  ترسیم شده‌اند. ثابت بودن  $v_s$  نسبت به



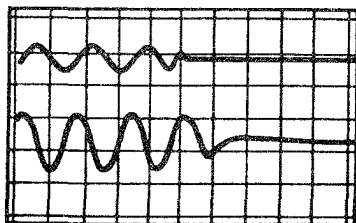
$d=3\text{ cm}$



عامل

گیرنده  
(X50)

$d=5.5\text{ cm}$



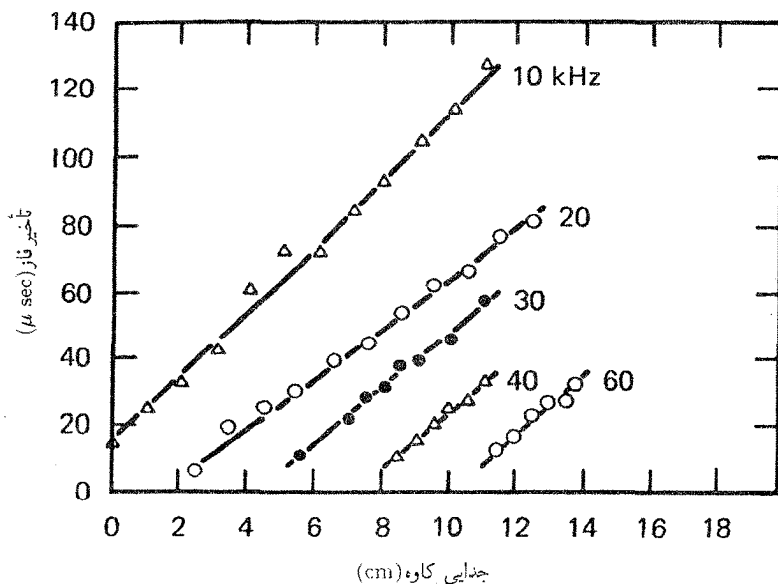
عامل

گیرنده  
(X50)

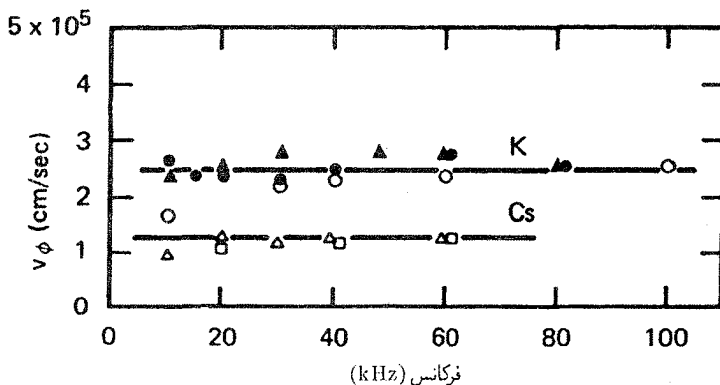
0 40 80 120 160 200

$t (\mu \text{ sec})$

شکل ۱۵.۴ نوسان نگاشت‌های علامت‌های مربوط به شبکه‌های فرستنده و گیرنده، که با فاصله  $d$  از یکدیگر قرار دارند، تأخیری را که دلالت بر یک موج متحرک دارد نشان می‌دهند.



شکل ۱۶.۴ اندازه‌گیری‌های تجربی تأخیر بر حسب فاصله کاهه در بسامدهای مختلف برانگیزنده موج، شیب خطها سرعت فاز را می‌دهد.



شکل ۱۷.۴ سرعت فاز اندازه‌گیری شدهٔ امواج یون در پلاسمای پتاسیم و سزیم برحسب بسامد. مجموعه نقطه‌های متفاوت نظیر چگالیهای پلاسمای مختلف‌اند.

$\omega$  و  $n_0$  به‌طور تجربی نشان داده شده است، و دو مجموعهٔ نقاط برای پلاسماهای K و Cs بستگی درست به  $M$  را نشان می‌دهند.

## ۹.۴ نوسانهای الکتروستاتیک الکترونی عمود بر B

تاکنون، فرض کرده‌ایم  $B = 0$ . زمانی که میدان مغناطیسی موجود باشد، انواع بیشتری از امواج امکان‌پذیر هستند. فقط موارد ساده‌تر را، با شروع از نوسانهای الکترونی الکتروستاتیک پرسیامد که در راستاهای عمود بر میدان مغناطیسی منتشر می‌شوند، بررسی خواهیم کرد. ابتدا باید اصطلاحات عمود، موازی، طولی، عرضی، الکترومغناطیسی را تعریف کنیم. موازی و عمود را برای نشان دادن راستای  $k$  نسبت به میدان مغناطیسی ناآشفته  $B_0$  به‌کار می‌بریم. طولی و عرضی به امتداد  $k$  نسبت به میدان الکتریکی نوسان‌کننده  $E_1$  مربوط می‌شوند. اگر میدان مغناطیسی نوسان‌کننده  $B_1$  صفر باشد، موج را الکتروستاتیک و اگر  $B_1$  صفر نباشد موج را الکترومغناطیسی می‌نامیم. دو مجموعهٔ اصطلاحات آخر با معادلهٔ ماکسول

$$\nabla \times E_1 = -\dot{B}_1 \quad (50.4)$$

یا

$$k \times E_1 = \omega B_1 \quad (51.4)$$

به هم مربوط می‌شوند. برای موج طولی،  $k \times E_1$  صفر است و موج، علاوه بر این، الکتروستاتیک هم هست. اگر موج عرضی باشد،  $B_1$  متناهی است و موج آنگاه الکترومغناطیسی است. البته

$k$  می‌تواند هر زاویه‌ای با  $B_0$  یا  $E_1$  داشته باشد؛ آنگاه آمیخته‌ای از مدهای اصلی معرفی شده در اینجا را خواهیم داشت.

با بازگشت به نوسانهای الکترونی عمود بر  $B_0$ ، فرض می‌کنیم یونها به قدری سنگین هستند که با بسامدهای مربوط حرکت نمی‌کنند و یک زمینهٔ یکنواخت ثابت از بار مثبت تشکیل می‌دهند. همچنین از حرکت‌های گرمایی صرف‌نظر می‌کنیم و قرار می‌دهیم  $KT_e = 0$ . طبق معمول، برای پلاسمای در حال تعادل  $n_0$  و  $B_0$  ثابت و یکنواخت‌اند و  $E_0$  و  $v_0$  صفر هستند. بنابراین، حرکت الکترونها از معادلات خطی شدهٔ زیر تبعیت می‌کند:

$$m \frac{\partial v_{e1}}{\partial t} = -e(E_1 + v_{e1} \times B_0) \quad (52.4)$$

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot v_{e1} = 0 \quad (53.4)$$

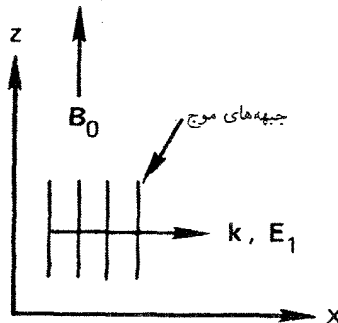
$$\epsilon_0 \nabla \cdot E_1 = -en_{e1} \quad (54.4)$$

فقط امواج طولی با  $k \parallel E_1$  را در نظر خواهیم گرفت. بدون آنکه عمومیت مسئله نقض شود، می‌توانیم محور  $x$  را در امتداد  $k$  و  $E_1$  اختیار کنیم، و محور  $z$  را در امتداد  $B_0$  بگیریم (شکل ۱۸.۴). بنابراین،  $E = E\hat{x}$  و  $k = k\hat{x}$ ،  $k_y = k_z = E_y = E_z = 0$ . با حذف شاخصهای ۱ و  $e$  تجزیهٔ معادلهٔ ۵۲.۴ به مؤلفه‌ها، داریم

$$-i\omega m v_x = -eE - ev_y B_0 \quad (55.4)$$

$$-i\omega m v_y = +ev_x B_0 \quad (56.4)$$

$$-i\omega m v_z = 0$$



شکل ۱۸.۴ نمایش هندسی موج تخت طولی در راستای عمود بر  $B_0$ .

با پیدا کردن  $v_y$  از معادله ۵۶.۴ و قرار دادن آن در معادله ۵۵.۴، به دست می آوریم

$$i\omega m v_x = eE + eB_0 \frac{ieB_0}{m\omega} v_x$$

$$v_x = \frac{eE/im\omega}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \quad (57.4)$$

توجه کنید که در تشدید سیکلوترونی،  $\omega = \omega_c$ ، مؤلفه  $v_x$  بینهایت می شود. این را می شد پیش بینی کرد، زیرا میدان الکتریکی با  $v_x$  تغییر علامت می دهد و به طور پیوسته الکترونها را شتابدار می کند. وقتی از دو جمله  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  و  $\nabla p$  صرف نظر می کنیم معادله های سیال و تک ذره یکسان می شوند؛ همه ذرات با هم حرکت می کنند. از صورت خطی شده معادله ۵۳.۴، داریم

$$n_1 = \frac{k}{\omega} n_0 v_x \quad (58.4)$$

با خطی کردن معادله ۵۴.۴ و با استفاده از دو نتیجه اخیر، به دست می آوریم

$$ik\epsilon_0 E = -e \frac{k}{\omega} n_0 \frac{eE}{im\omega} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1}$$

$$\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) E = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} E \quad (59.4)$$

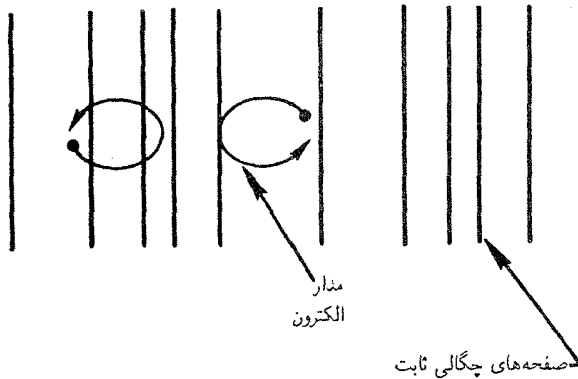
بنابراین، رابطه پاشیدگی عبارت است از

$$\boxed{\omega^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2 \equiv \omega_h^2} \quad (60.4)$$

$\omega_h$  بسامد آمیخته بالا نامیده می شود. امواج الکتروستاتیک الکترونی در عرض B این بسامد را دارند و در امتداد B نوسانهای معمولی پلاسما با  $\omega = \omega_p$  هستند. سرعت گروه بازم تا زمانی که حرکت های گرمایی نادیده گرفته می شوند صفر است.

تصویری فیزیکی از این نوسان در شکل ۱۹.۴ داده شده است. الکترونها در موج تخت، همچون در نوسان پلاسمایی، مناطق متراکم و رقیق تشکیل می دهند. اما اکنون یک میدان B عمود بر حرکت وجود دارد، و نیروی لورنتس مسیرها را به صورت بیضی درمی آورد. دو نیروی بازگرداننده بر الکترونها وارد می شوند: میدان الکتروستاتیک و نیروی لورنتس نیروی بازگرداننده افزایش یافته بسامد را از بسامد نوسان پلاسمایی بزرگتر می کند. هنگامی که میدان مغناطیسی به سمت صفر میل

⊙ B



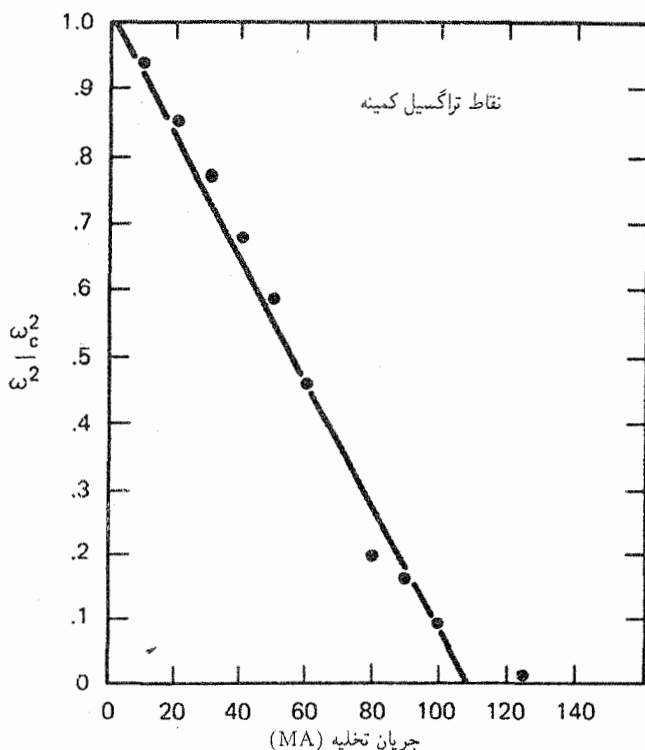
شکل ۱۹.۴ حرکت الکترونها در یک نوسان آمیخته بالا.

می‌کند،  $\omega_c$  در معادله  $60.4$  به سمت صفر میل خواهد کرد، و نوسان پلاسمایی دوباره به دست می‌آید. هنگامی که چگالی پلاسما به سمت صفر میل می‌کند،  $\omega_p$  به سمت صفر میل خواهد کرد، و یک چرخش ساده لارمور داریم، زیرا نیروهای الکتروستاتیک با چگالی صفر می‌شوند. وجود بسامد آمیخته بالا با عبور میکروموج در عرض یک میدان مغناطیسی به‌طور تجربی تأیید شده است. هنگامی که چگالی پلاسما تغییر می‌کند، عبور از پلاسما آفتی در چگالی به وجود می‌آورد که  $\omega_p$  را مساوی با بسامد اعمال شده می‌کند. دلیل این امر این است که نوسانهای آمیخته بالا برانگیخته می‌شوند و از باریکه انرژی جذب می‌شود. از معادله  $60.4$ ، یک رابطه خطی بین  $\omega_c^2/\omega^2$  و چگالی پیدا می‌کنیم:

$$\frac{\omega_c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 1 - \frac{ne^2}{\epsilon_0 m \omega^2}$$

این رابطه خطی موافق با نقطه‌های تجربی روی شکل  $20.4$  است، که در آن  $\omega_c^2/\omega^2$  برحسب جریان تخلیه، که متناسب با  $n$  است، ترسیم شده است.

اکنون اگر انتشار را تحت زاویه  $\theta$  نسبت به  $\mathbf{B}$  در نظر بگیریم، دو موج امکان‌پذیر خواهند بود. یکی مانند نوسان پلاسما و دیگری مانند نوسان آمیخته بالاست، اما هر دو با زاویه انتشار تغییر پیدا کرده‌اند. برای بررسی جزئیات این موضوع به مسئله  $8.4$  مراجعه کنید. شکل  $21.4$  نمودارهای  $k_x/k_z$  برحسب  $\omega$  را برای این دو موج در موردی که  $k_x$  ثابت است در حالی که  $k_x/k_z = \tan \theta$  نشان می‌دهد. به دلیل تقارن معادله  $60.4$ ، مورد  $\omega_p > \omega_c$  با مورد  $\omega_p < \omega_c$ ، که در آن جای شاخصها عوض شده است، یکی است. اگر  $k_z$  بزرگ باشد، موج در راستای  $\mathbf{B}$  حرکت می‌کند. یکی از موجها نوسان پلاسمایی در  $\omega = \omega_p$  است؛ موج دیگر، در  $\omega = \omega_c$ ، به ریشه غیرحقیقی در  $k_z \rightarrow \infty$

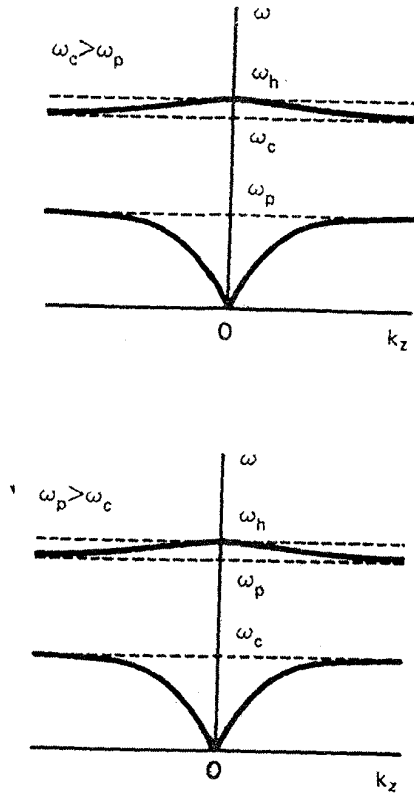


شکل ۲۰.۴ نتایج یک آزمایش برای آشکارسازی وجود بسامد آمیخته بالا از طریق نگاشت شرایط برای جذب ماکسیمم (تراگیسل مینیمم) انرژی میکروموجی که از میدان مغناطیسی عبور کرده است. میدانی که در آن این اثر روی می دهد (که با  $\omega_c^2/\omega^2$  بیان شده است) نسبت به جریان تخلیه (که متناسب با چگالی پلاسماست) ترسیم شده است.

مربوط می شود. برای مقادیر بزرگ  $k_z$ ، وضعیت  $k \perp B$  را داریم که در این بخش بحث شد. شاخه پایین صفر می شود، در حالی که شاخه بالایی به نوسان آمیخته در  $\omega = \omega_{UH}$  نزدیک می شود. این منحیها اولین بار توسط تریولپیس و گولد محاسبه شدند، که خودشان هم به طور تجربی آنها را تأیید کردند (شکل ۲۲.۴). آزمایش تریولپیس-گولد در یک ستون پلاسماستوانه ای انجام شد؛ می توان نشان داد که  $k_z$  متغیر در این مورد معادل امواج تخت منتشرشونده تحت زوایای مختلف نسبت به  $B$  است.

### مسائل

۷.۴ برای نوسان آمیخته بالا، نشان دهید که مدارهای بیضوی (شکل ۱۹.۴) همواره در راستای  $k$  کشیده تر هستند. (راهنمایی: از معادله حرکت، رابطه ای برای  $v_x/v_y$  برحسب  $\omega/\omega_c$  به دست آورید.)

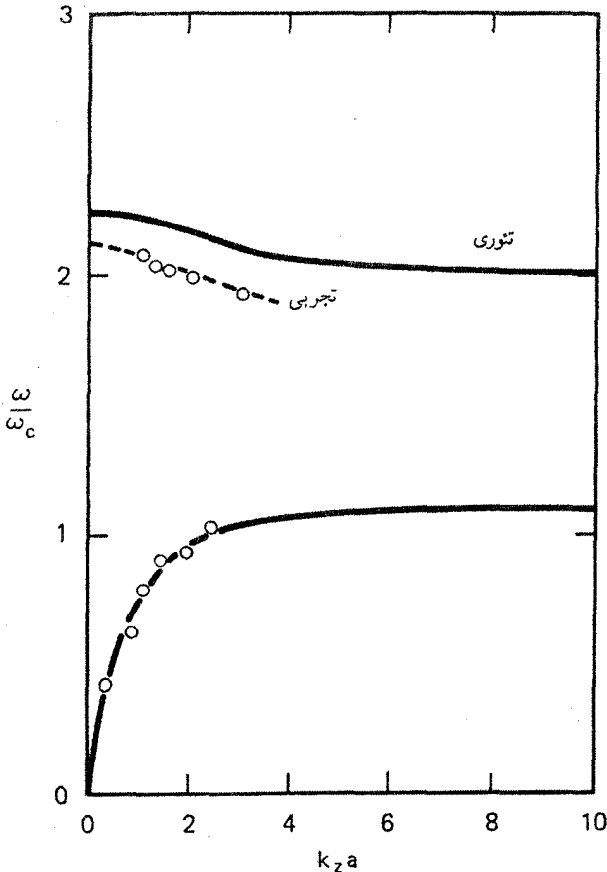


شکل ۲۱.۴ منحنیهای پاشیدگی تراپولیس-گولد برای امواج الکتروستاتیک الکترونی در یک استوانهٔ رسانای حاوی پلاسمای یکنواخت و میدان مغناطیسی هم‌محور.

۸.۴ رابطهٔ پاشیدگی را برای امواج الکتروستاتیک الکترونی که تحت زاویهٔ اختیاری  $\theta$  نسبت به  $B_0$  منتشر می‌شوند پیدا کنید. راهنمایی: محور  $x$  را طوری انتخاب کنید که  $k$  و  $E$  در صفحهٔ  $xz$  قرار گیرند (شکل م ۸.۴). بنابراین

$$E_x = E_1 \sin \theta \quad E_z = E_1 \cos \theta \quad E_y = 0$$

و روابط مشابهی برای  $k$  داریم. معادلات حرکت و پیوستگی و معادلهٔ پواسون را به‌روش معمول وقتی  $n_0$  یکنواخت است و  $v_0 = E_0 = 0$  حل کنید.  
(الف) نشان دهید جواب عبارت است از



شکل ۲۲.۴ تأیید تجربی منحنیهای تراپولیس-گولد نشاندهنده وجود امواج پسیو، یعنی امواجی که سرعت گروه آنها، همچنانکه شیب منحنی پاشیدگی نشان می‌دهد، در خلاف جهت سرعت فاز است.

$$\omega^2(\omega^2 - \omega_h^2) + \omega_c^2 \omega_p^2 \cos^2 \theta = 0$$

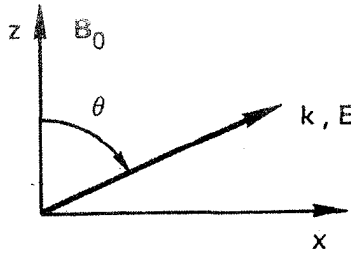
(ب) دو جواب این معادله درجه دوم برحسب  $\omega^2$  را پیدا کنید، و نشان دهید در حدهای  $\sin \theta \rightarrow 0$  و  $\sin \theta \rightarrow \pi/2$  نتایج قبلی دوباره به دست می‌آیند. نشان دهید که در این حدها، یکی از دو جواب ریشه غیرحقیقی است که معنی فیزیکی ندارد.

(ج) با کامل کردن مجذور، نشان دهید که معادله فوق معادله یک بیضی به صورت زیر است:

$$\frac{(y-1)^2}{1^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$$

که در آن  $a \equiv \omega_h^2 / 2\omega_c \omega_p$  و  $y \equiv 2\omega^2 / \omega_h^2$ ،  $x \equiv \cos \theta$





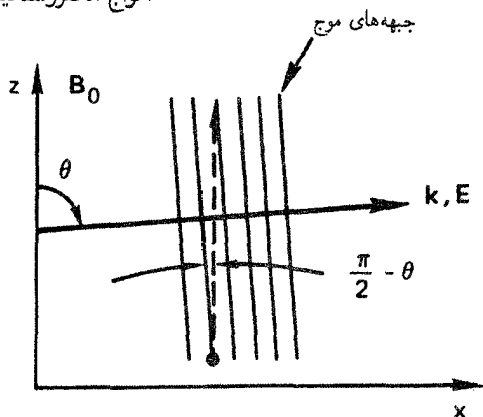
شکل م ۸.۴

(د) بیضی را برای  $\omega_p/\omega_c = 1, 2, \infty$  ترسیم کنید.

(ه) نشان دهید که اگر  $\omega_c > \omega_p$ ، ریشه کوچکتر  $\omega$  برای هر  $\theta > 0$  همیشه کوچکتر از  $\omega_p$  است و ریشه بزرگتر همواره بین  $\omega_c$  و  $\omega_h$  قرار می‌گیرد؛ و همچنین نشان دهید اگر  $\omega_p > \omega_c$ ، ریشه کوچکتر کمتر از  $\omega_c$  است در حالی که ریشه بزرگتر بین  $\omega_p$  و  $\omega_h$  قرار می‌گیرد.

#### ۱۰.۴ امواج الکتروستاتیک یونی عمود بر $B_0$

اینکه می‌خواهیم ببینیم وقتی  $k$  عمود بر  $B_0$  است این امر چه تأثیری بر موج یونی آکوستیکی دارد. ظاهراً باید  $k \cdot B_0$  را مساوی صفر قرار دهیم، ولی این به نتیجه‌ای (بخش ۱۱.۴) می‌رسد که، اگرچه از لحاظ ریاضی درست است، آنچه را که در پلاسماهای واقعی رخ می‌دهد توصیف نمی‌کند. در عوض،  $k$  را تقریباً عمود بر  $B_0$  در نظر خواهیم گرفت؛ منظور از «تقریباً» بعداً روشن خواهد شد. پلاسماهای نامتناهی معمولی در حالت تعادل در نظر می‌گیریم که برای آن  $n_0$  و  $B_0$  ثابت و یکنواخت هستند و  $v_0 = E_0 = 0$ . برای سادگی، فرض می‌کنیم  $T_i = 0$ ؛ با این فرض هیچگونه اثر مهمی را از دست نخواهیم داد زیرا می‌دانیم اگر  $T_i = 0$  باز هم امواج آکوستیکی وجود دارند. همچنین امواج را الکتروستاتیک با  $k \times E = 0$  در نظر می‌گیریم، و در نتیجه  $E = -\nabla\phi$ . وضعیت هندسی در شکل ۲۳.۴ نشان داده شده است. زاویه  $\theta - \frac{1}{2}\pi$  به قدری کوچک گرفته شده است که می‌توانیم تا جایی که حرکت یون مطرح است قرار دهیم  $E = E_1 \hat{x}$  و  $\nabla = ik\hat{x}$ . اما برای الکترونها اینکه  $\theta - \frac{1}{2}\pi$  صفر باشد یا کوچک ولی متناهی تفاوت زیادی به وجود می‌آید. الکترونها دارای چنان شعاعهای لارمور کوچکی هستند که نمی‌توانند در راستای  $x$  حرکت کنند تا خنثی بودن بار حفظ شود؛ تمام کاری که میدان  $E$  انجام می‌دهد این است که آنها را در راستای  $y$  به جلو و عقب سوق می‌دهد اما اگر  $\theta$  دقیقاً  $\pi/2$  نباشد، الکترونها می‌توانند در امتداد خط چین در شکل ۲۳.۴ (در امتداد  $B_0$ ) حرکت کنند و بار را در موج از ناحیه‌های منفی به مثبت حمل کنند و عمل حفاظ دبابی را انجام دهند. یونها نمی‌توانند این کار را به طور مؤثر انجام



شکل ۲۳.۴ هندسه موج سیکلوترونی یونی الکتروستاتیک که تقریباً عمود بر  $B_0$  منتشر می‌شود.

دهند زیرا لختی آنها مانع از آن می‌شود تا آنها چنین مسافتهای طولانی را در یک دوره موج طی کنند؛ به همین دلیل است که می‌توانیم از  $k_z$  برای یونها صرف‌نظر کنیم. زاویه بحرانی  $\chi = \frac{1}{2}\pi - \theta$  متناسب است با نسبت سرعت‌های موازی یون به الکترون: (برحسب رادیان)  $\chi \simeq (m/M)^{1/2}$ . برای زاویه‌های  $\chi$  بزرگتر از این مقدار، بررسی زیر معتبر است. برای زاویه‌های  $\chi$  کوچکتر از این مقدار بررسی بخش ۱۱.۴ معتبر است.

بعد از این مقدمه طولانی، به محاسبه مختصر نتیجه می‌پردازیم. برای معادله حرکت یون، داریم

$$M \frac{\partial v_{i1}}{\partial t} = -e \nabla \phi_1 + e v_{i1} \times B_0 \quad (61.4)$$

با فرض اینکه امواج تخت در جهت  $x$  منتشر می‌شوند و با تجزیه به مؤلفه‌ها، به معادله‌های زیر می‌رسیم

$$-i\omega M v_{ix} = -eik\phi_1 + e v_{iy} B_0 \quad (62.4)$$

$$-i\omega M v_{iy} = -e v_{ix} B_0$$

از حل این معادلات مانند سابق، به دست می‌آوریم

$$v_{ix} = \frac{ek}{M\omega} \phi_1 \left( 1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1} \quad (63.4)$$

که در آن  $\Omega_c = eB_0/M$  بسامد سیکلوترونی یون است. از معادله پیوستگی طبق معمول داریم

$$n_{i1} = n_0 \frac{k}{\omega} v_{ix} \quad (64.4)$$

با فرض اینکه الکترونها به دلیل متناهی بودن زاویه  $\chi$  می‌توانند در امتداد  $\mathbf{B}_0$  حرکت کنند، می‌توانیم از رابطه بولتزمن برای الکترونها استفاده کنیم. صورت خطی شده این رابطه عبارت است از

$$\frac{n_{e1}}{n_0} = \frac{e\phi_1}{KT_e} \quad (۶۵.۴)$$

اکنون تقریب پلاسمایی  $n_i = n_e$  دستگاه معادلات را تکمیل می‌کند. با توجه به معادله‌های ۶۴.۴ و ۶۵.۴، می‌توانیم معادله ۶۳.۴ را به صورت زیر بنویسیم

$$\left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right) v_{ix} = \frac{ek}{M\omega} \frac{KT_e}{en_0} \frac{n_0 k}{\omega} v_{ix}$$

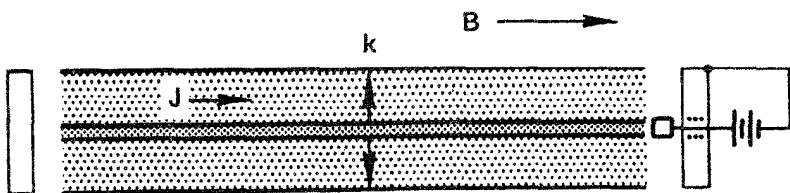
$$\omega^2 - \Omega_c^2 = k^2 \frac{KT_e}{M} \quad (۶۶.۴)$$

چون فرض کرده‌ایم  $KT_e = 0$ ، معادله فوق به صورت زیر درمی‌آید

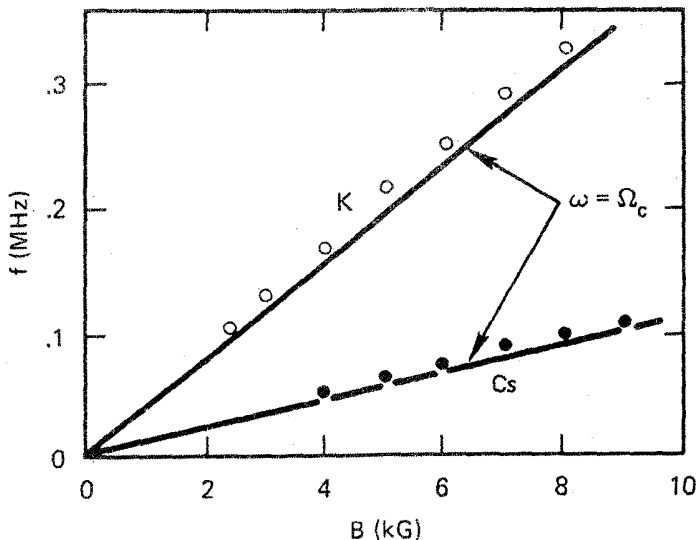
$$\boxed{\omega^2 = \Omega_c^2 + k^2 v_s^2} \quad (۶۷.۴)$$

این رابطه پاشیدگی برای امواج سیکلوترونی یونی الکتروستاتیک است. توضیح فیزیکی این امواج خیلی شبیه مورد شکل ۱۹.۴ برای امواج آمیخته بالاست. یونها نوسانی از نوع آکوستیکی انجام می‌دهند، ولی نیروی لورنتس نیروی بازگرداننده جدیدی به وجود می‌آورد که منجر به جمله  $\Omega_c^2$  در معادله ۶۷.۴ می‌شود. اگر الکترونها حفاظ دبابی را تأمین کنند رابطه پاشیدگی آکوستیکی  $\omega^2 = k^2 v_s^2$  معتبر است. در این مورد، الکترونها این گاز را با جریان یافتن در مسافت طولانی در امتداد  $\mathbf{B}_0$  انجام می‌دهند.

امواج سیکلوترونی یونی الکتروستاتیک اولین بار توسط موتلی و دانجلو، باز هم در یک ماشین Q، مشاهده شد (شکل ۲۴.۴). امواج در عرض میدان مغناطیسی به‌طور شعاعی به طرف بیرون منتشر



شکل ۲۴.۴ طرح آزمایش ماشین Q روی امواج سیکلوترونی یونی الکتروستاتیک.



شکل ۲۵.۴ تغییرات بسامد امواج سیکلوترونی یونی آکوستیک برحسب میدان مغناطیسی.

شدند و توسط یک جریان که در امتداد محور به یک الکتروود کمکی کوچک کشیده می‌شد برانگیخته شدند. دلیل برانگیختگی نسبتاً پیچیده است و در اینجا آن را بیان نمی‌کنیم. شکل ۲۵.۴ نتایج آنها را به صورت تغییر بسامد موج برحسب میدان مغناطیسی نشان می‌دهد. در این آزمایش، جمله  $k^2 v_s^2$  در مقایسه با جمله  $\Omega_c^2$  کوچک بود، بسامدهای اندازه‌گیری شده تنها کمی بیشتر از  $\Omega_c$  بودند.

### ۱۱.۴ بسامد آمیخته پایین

اکنون می‌خواهیم ببینیم هنگامی که  $\theta$  دقیقاً  $\pi/2$  است، و الکترونها نمی‌توانند با جریان یافتن در طول خطوط نیرو خنثی بودن بار را حفظ کنند، چه اتفاقی می‌افتد. الکترونها به عوض تبعیت از رابطه بولتزمن از معادله کامل حرکت، معادله ۶۲.۳، تبعیت خواهند کرد. اگر جرم الکترون را متناهی نگه داریم، حتی اگر فرض کنیم  $T_e = 0$  و از جمله  $\nabla p_e$  چشمپوشی کنیم این معادله نابدیعی است؛ در نتیجه، به خاطر سادگی این کار را خواهیم کرد. معادله حرکت یون فرقی با معادله ۶۳.۴ نمی‌کند:

$$v_{ix} = \frac{ek}{M\omega} \phi_1 \left( 1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1} \quad (68.4)$$

با تعویض  $e$  به  $-e$ ،  $M$  به  $m$ ، و  $\Omega_c$  به  $-\omega_c$  در معادله ۶۸.۴، می‌توانیم نتیجه حل معادله ۶۲.۳ را برای الکترونها، با  $T_e = 0$ ، بنویسیم:

$$v_{ex} = -\frac{ek}{m\omega} \phi_1 \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} \quad (۶۹.۴)$$

از معادلات پیوستگی به دست می آوریم

$$n_{i1} = n_o \frac{k}{\omega} v_{i1} \quad n_{e1} = n_o \frac{k}{\omega} v_{e1} \quad (۷۰.۴)$$

بنابراین، تقریب پلاسمایی  $n_i = n_e$  ایجاب می کند که  $v_{i1} = v_{e1}$ . با مساوی قرار دادن معادله های ۶۸.۴ و ۶۹.۴، داریم

$$M \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right) = -m \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)$$

$$\omega^2 (M + m) = m\omega_c^2 + M\Omega_c^2 = e^2 B^2 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)$$

$$\omega^2 = \frac{e^2 B^2}{Mm} = \Omega_c \omega_c$$

$$\boxed{\omega = (\Omega_c \omega_c)^{1/2} \equiv \omega_t} \quad (۷۱.۴)$$

این را بسامد آمیخته پایین می نامند. اگر به جای تقریب پلاسمایی از معادله یواسون استفاده کرده بودیم، رابطه ی زیر را به دست می آوردیم

$$\frac{1}{\omega_t^2} = \frac{1}{\omega_c \Omega_c} + \frac{1}{\Omega_p^2} \quad (الف ۷۱.۴)$$

در پلاسماهای با چگالی کم جمله آخر عملاً حاکم است. تقریب پلاسمایی در چنین بسامدهای بزرگی معتبر نیست. نوسانهای آمیخته پایین را تنها اگر  $\theta$  خیلی نزدیک به  $\pi/2$  باشد می توان مشاهده کرد.

## ۱۲.۴ امواج الکترومغناطیسی با $B_o = 0$

اکنون، به ترتیب پیچیدگی، نوبت به امواج با  $B_1 \neq 0$  می رسد. اینها امواج الکترومغناطیسی عرضی هستند، یعنی امواج نوری یا رادیویی که درون پلاسما حرکت می کنند. با مرور مختصری بر امواج نور در خلا شروع می کنیم. معادلات ماکسول مربوط عبارت اند از

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\dot{\mathbf{B}}_1 \quad (۷۲.۴)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B}_1 = \dot{\mathbf{E}}_1 \quad (۷۳.۴)$$

زیرا در خلا  $\mathbf{j} = 0$  و  $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$ . با تاو گرفتن از معادله ۷۳.۴ و قرار دادن آن در مشتق زمانی معادله ۷۲.۴، به دست می آوریم

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}_1) = \nabla \times \dot{\mathbf{E}}_1 = -\ddot{\mathbf{B}}_1 \quad (۷۴.۴)$$

باز هم با فرض اینکه امواج تخت به صورت  $\exp[i(kx - \omega t)]$  تغییر می کنند، داریم

$$\omega^2 \mathbf{B}_1 = -c^2 \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1) = -c^2 [k(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_1) - k^2 \mathbf{B}_1] \quad (۷۵.۴)$$

چون بنا به یکی دیگر از معادلات ماکسول  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_1 = -i \nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0$  نتیجه عبارت است از

$$\omega^2 = k^2 c^2 \quad (۷۶.۴)$$

و  $c$  سرعت فاز  $\omega/k$  برای امواج نور است.

در یک پلاسما با  $B_0 = 0$ ، معادله ۷۲.۴ تغییر نمی کند، ولی به منظور به حساب آوردن جریانهای ناشی از حرکتهای مرتبه اول ذره باردار باید جمله  $\mathbf{j}_1/\epsilon_0$  را به معادله ۷۳.۴ اضافه کنیم:

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B}_1 = \frac{\mathbf{j}_1}{\epsilon_0} + \dot{\mathbf{E}}_1 \quad (۷۷.۴)$$

مشتق زمانی این معادله عبارت است از

$$c^2 \nabla \times \dot{\mathbf{B}}_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \mathbf{j}_1}{\partial t} + \ddot{\mathbf{E}}_1 \quad (۷۸.۴)$$

در حالی که تاو معادله ۷۲.۴ به صورت زیر است

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_1) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_1) - \nabla^2 \mathbf{E}_1 = -\nabla \times \dot{\mathbf{B}}_1 \quad (۷۹.۴)$$

با حذف  $\nabla \times \dot{\mathbf{B}}_1$  و با فرض وابستگی  $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ ، داریم

$$-\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1) + k^2 \mathbf{E}_1 = \frac{i\omega}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{j}_1 + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_1 \quad (۸۰.۴)$$

منظور از امواج عرضی این است که  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1 = 0$ ، و در نتیجه از معادله بالا به دست می‌آوریم

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \mathbf{E}_1 = -i\omega \mathbf{j}_1 / \epsilon_0 \quad (81.4)$$

اگر امواج نور یا میکروموجها را در نظر بگیریم، این امواج چنان بسامد بزرگی دارند که می‌توان یونها را ثابت در نظر گرفت. بنابراین، جریان  $\mathbf{j}_1$  تماماً از حرکت الکترون ناشی می‌شود:

$$\mathbf{j}_1 = -n_0 e \mathbf{v}_{e1} \quad (82.4)$$

از معادله حرکت خطی شده الکترون، داریم (با  $KT_e = 0$ ):

$$m \frac{\partial \mathbf{v}_{e1}}{\partial t} = -e \mathbf{E} \quad (83.4)$$

$$\mathbf{v}_{e1} = \frac{e \mathbf{E}_1}{im\omega}$$

اکنون معادله 81.4 را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \mathbf{E}_1 = \frac{i\omega}{\epsilon_0} n_0 e \frac{e \mathbf{E}_1}{im\omega} = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \mathbf{E}_1 \quad (84.4)$$

عبارت  $\omega_p^2$  در سمت راست قابل تشخیص است، و نتیجه عبارت است از

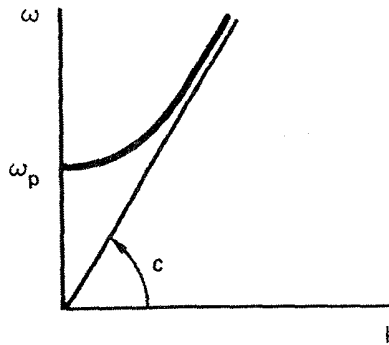
$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 \quad (85.4)$$

این رابطه پاشیدگی برای امواج الکترومغناطیسی است که در یک پلاسمای بدون میدان مغناطیسی dc منتشر می‌شوند. می‌بینیم که رابطه خلاصه ۷۶.۴ با جمله  $\omega_p^2$  که حاکی از نوسانهای پلاسماست تغییر یافته است. سرعت فاز موج در پلاسما بزرگتر از سرعت نور است:

$$v_\phi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2} > c^2 \quad (86.4)$$

اما سرعت گروه نمی‌تواند به سرعت نور برسد. از معادله 85.4، پیدا می‌کنیم

$$\frac{d\omega}{dk} = v_g = \frac{c^2}{v_\phi} \quad (87.4)$$



شکل ۲۶.۴ رابطه پاشیدگی برای امواج الکترومغناطیسی در پلاسما بدون میدان مغناطیسی  $\omega_c$ .

بنابراین هر زمانی که  $v_p$  بزرگتر از  $c$  است سرعت گروه کمتر از  $c$  خواهد بود. رابطه پاشیدگی ۸۵.۴ در شکل ۲۶.۴ نشان داده شده است. این نمودار شبیه نمودار شکل ۵.۴ مربوط به امواج پلاسماست، ولی رابطه پاشیدگی کاملاً متفاوت است زیرا سرعت مجانبی  $c$  در شکل ۲۶.۴ خیلی بزرگتر از سرعت گرمایی  $v_{th}$  در شکل ۵.۴ است. مهمتر آنکه اختلافی در میرایی امواج وجود دارد. امواج پلاسما با  $k v_{th}$  بزرگ شدیداً میرا هستند، نتیجه‌ای که در فصل ۷ از نظریه جنبشی به دست خواهیم آورد. از سوی دیگر، امواج الکترومغناطیسی در  $k c$  بزرگ امواج نور معمولی هستند و به علت حضور پلاسما در این حد میرا نمی‌شوند.

یک رابطه پاشیدگی مانند معادله ۸۵.۴ پدیده‌ای را نشان می‌دهد که قطع نامیده می‌شود. اگر یک باریکه میکروموج با بسامد معین به داخل پلاسما فرستاده شود، طول موج  $2\pi/k$  در پلاسما مقداری پیدا می‌کند که توسط معادله ۸۵.۴ تعیین می‌شود. هنگامی که چگالی پلاسما، و در نتیجه  $\omega_p^2$ ، زیاد شود  $k^2$  الزاماً کاهش خواهد یافت؛ و طول موج بزرگتر و بزرگتر می‌شود. سرانجام، چگالی به مقداری می‌رسد که برای آن  $k^2$  صفر است. برای چگالیهای بزرگتر از این مقدار، معادله ۸۵.۴ نمی‌تواند برای هر  $k$  حقیقی صادق باشد، و موج نمی‌تواند منتشر شود. این وضعیت قطع در یک چگالی بحرانی  $n_c$  رخ می‌دهد به قسمی که  $\omega = \omega_p$ ؛ یعنی (از معادله ۲۵.۴) داریم

$$n_c = m \epsilon_0 \omega^2 / e^2 \quad (88.4)$$

اگر  $n$  خیلی بزرگ یا  $\omega$  خیلی کوچک باشد، موج الکترومغناطیسی نمی‌تواند از داخل پلاسما عبور کند، معادله ۸۵.۴ نشان می‌دهد که در این وضعیت  $k$  موهومی است:

$$ck = (\omega^2 - \omega_p^2)^{1/2} = i|\omega_p^2 - \omega^2|^{1/2} \quad (89.4)$$



چون موج دارای وابستگی فضایی  $\exp(ikx)$  است، اگر  $k$  موهومی باشد موج به صورت نمایی تضعیف خواهد شد. عمق پوستی  $\delta$  به صورت زیر به دست می آید:

$$e^{ikx} = e^{-|k|x} = e^{-x/\delta} \quad \delta = |k|^{-1} = \frac{c}{(\omega_p^2 - \omega^2)^{1/2}} \quad (90.4)$$

در بیشتر پلاسماهای آزمایشگاهی بسامد قطع در ناحیه میکروموج قرار می گیرد.

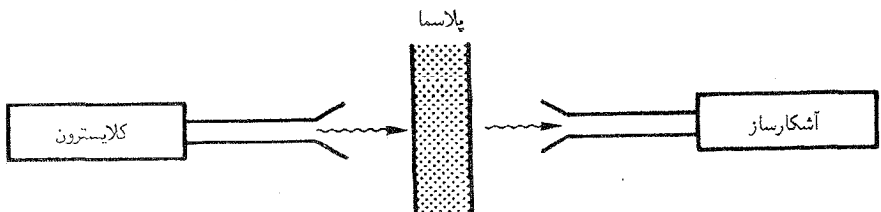
### ۱۳.۴ کاربردهای تجربی

از پدیده قطع یک راه ساده برای اندازه گیری چگالی پلاسما استنباط می شود. یک باریکه میکروموج را که توسط کلاسترون تولید شده است با یک آنتن شیپوری به طرف پلاسما می فرستیم (شکل ۲۷.۴). باریکه تراکسیلیده توسط شیپور دیگری دریافت می شود و به وسیله بلوری آشکارسازی می شود. هنگامی که بسامد یا چگالی پلاسما تغییر می کند، هر وقتی که شرط  $88.4$  در جایی از پلاسما برقرار شود علامت آشکارسازی شده ناپدید خواهد شد. این روش چگالی بیشینه را می دهد. به علت محدود بودن گستره بسامدهای تولید شده از یک مولد میکروموج، این یک طرح مناسب یا جامع نیست.

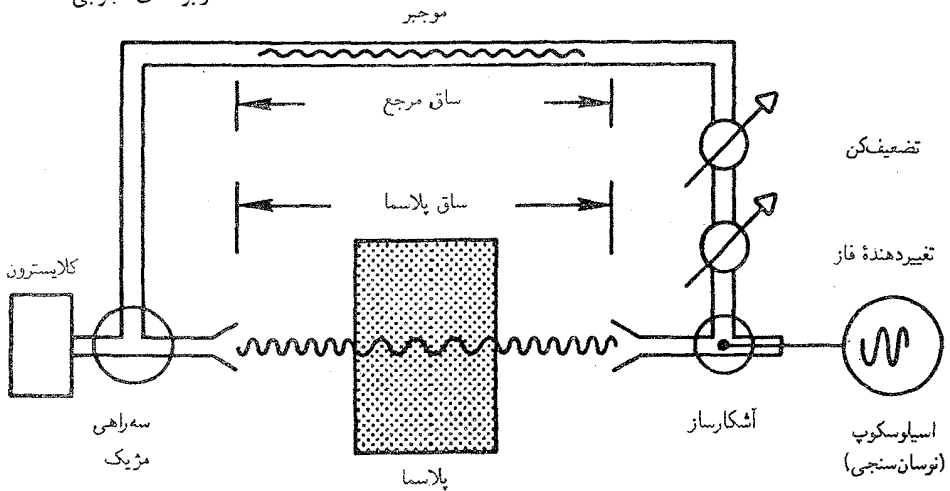
روشی که به طور وسیع برای اندازه گیری چگالی از آن استفاده می شود مبتنی بر پاشیدگی، یا تغییر ضریب شکست است، که معادله  $85.4$  پیش بینی می کند. ضریب شکست  $\tilde{n}$  به صورت زیر تعریف می شود

$$\tilde{n} \equiv c/v_\phi = ck/\omega \quad (91.4)$$

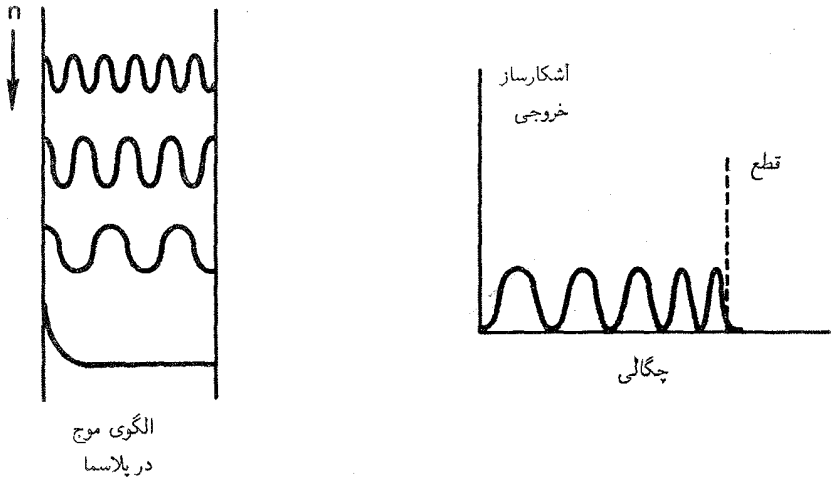
این ضریب به طور واضح با  $\omega$  تغییر می کند، و پلاسما یک محیط پاشنده است. برای اندازه گیری چگالی از تداخل سنج میکروموجی استفاده می شود که با همان اصول فیزیکی تداخل سنج مایکلسون کار می کند (شکل ۲۸.۴). علامتی که از کلاسترون می آید و به دو مسیر تقسیم می شود. قسمتی از طریق



شکل ۲۷.۴ اندازه گیری میکروموجی چگالی پلاسما توسط قطع علامت تراکسیلیده.

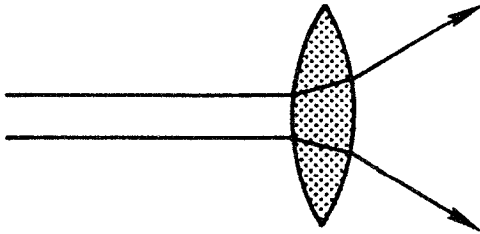


شکل ۲۸.۴ تداخل سنج میکروموجی برای اندازه گیری چگالی پلاسما.

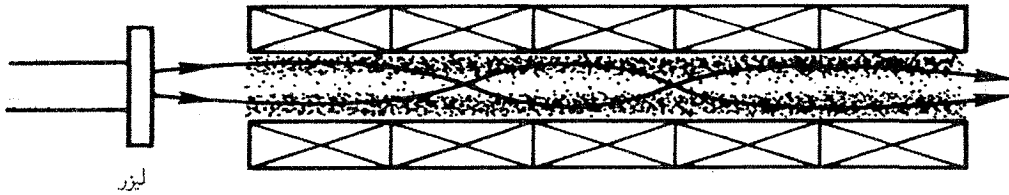


شکل ۲۹.۴ علامت مشاهده شده از تداخل سنج (راست) وقتی چگالی پلاسما افزایش می یابد، و نقش موج مربوط در پلاسما (چپ).

«بازوی مرجع» به آشکارساز می رود. قسمت دیگر با آنتنهای شیپوری به پلاسما فرستاده می شود. آشکارساز به میانگین مجذوری مجموع دامنه های دو علامت دریافتی پاسخ می دهد. این علامتها توسط تضعیف کننده و جایجا کننده فاز طوری تنظیم می شوند که دامنه های آنها مساوی و در غیاب پلاسما دارای اختلاف فاز  $180^\circ$  هستند، و در نتیجه خروجی آشکارساز صفر است. وقتی پلاسما روشن می شود، فاز علامت در ساقه پلاسما با افزایش طول موج تغییر می کند (شکل ۲۹.۴). بنابراین، آشکارساز یک علامت خروجی متناهی می دهد. وقتی چگالی افزایش می یابد، خروجی آشکارساز



شکل ۳۰.۴ عدسی پلاسمایی ویژگیهای نامعمول دارد زیرا ضریب شکست کمتر از واحد است.



شکل ۳۱.۴ پلاسمای محبوس در یک چنبره خطی دراز نور لیزر  $\text{CO}_2$  را که برای گرم کردن آن به کار رفته است تنها به شرطی به دام می‌اندازد که پلاسما روی محور دارای چگالی کمینه باشد. اتافک خلا برای وضوح شکل حذف شده است.

هر بار که جابه‌جایی فاز  $360^\circ$  تغییر می‌کند از یک بیشینه و کمینه می‌گذرد چگالی متوسط پلاسما از تعداد این جابه‌جاییهای فریز پیدا می‌شود. در عمل، به‌طور معمول از چنان بسامد زیادی استفاده می‌کنند که جابه‌جایی فریز کوچک نگه‌داشته می‌شود (مسئله ۱۳.۴). حساسیت این فن در چگالیهای کم به پایداری ساق مرجع در قبال ارتعاشها و انبساط گرمایی محدود است. همچنین باید تصحیحاتی برای تضعیف ناشی از برخوردها و نیز برای پراش و شکست به‌علت ابعاد محدود پلاسما صورت پذیرند.

این حقیقت که ضریب شکست پلاسما کمتر از واحد است نتایج جالبی دارد. یک عدسی محدب پلاسمایی (شکل ۳۰.۴) واگراست نه همگرا. این اثر در طرح لیزر سیملوله‌ای برای راکتور همجوشی خطی مهم است. پلاسمایی به‌طول صدها متر توسط یک میدان مغناطیسی محبوس شده است و با جذب تابش لیزر  $\text{CO}_2$  گرم می‌شود (شکل ۳۱.۴). اگر پلاسما نمایه چگالی عادی داشته باشد (بیشینه روی محور)، مانند عدسی منفی رفتار می‌کند و موجب واگراشدن باریکه لیزری به‌طرف دیواره‌ها می‌شود. اما اگر بتوان یک نمایه چگالی معکوس (کمینه روی محور) به‌وجود آورد، اثر عدسی همگرا حاصل می‌شود؛ تابش متمرکز می‌شود و توسط پلاسما به‌دام می‌افتد. نمایه چگالی معکوس را می‌توان با فشردن پلاسما توسط یک سیم‌پیچ تپی حول آن یا با خود باریکه

لیزری تولید کرد. هنگامی که باریکه پلاسما را گرم می‌کند، پلاسما منبسط می‌شود و چگالی در مرکز باریکه کاهش می‌یابد. لیزر CO<sub>2</sub> در  $\lambda = 10^6 \mu\text{m} = 10^0 \text{m}$  کار می‌کند، که مربوط است به بسامد

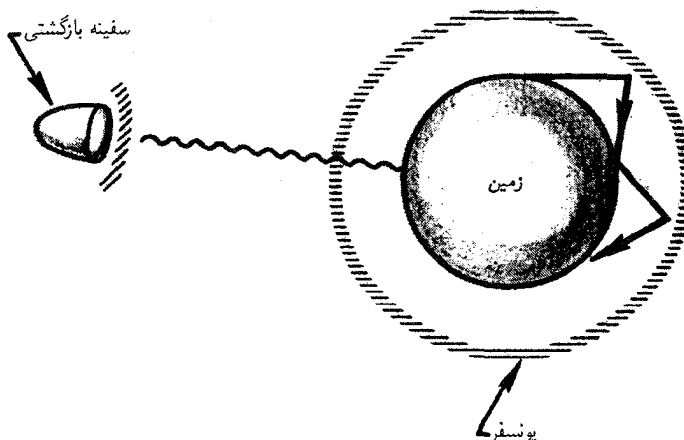
$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{10^6 \times 10^{-6}} = 2.8 \times 10^{12} \text{Hz}$$

از معادله ۸۸.۴ چگالی بحرانی برابر است با

$$n_c = m\epsilon_0 (2\pi f)^2 / e^2 = 10^{25} \text{m}^{-3}$$

اما به علت مسیرهای طولانی دخیل، اثرات شکست حتی در چگالیهای  $10^{22} \text{m}^{-3}$  مهم هستند. اثر کانونی پلاسمای میان تهی با تجربه نشان داده شده است.

شاید بهترین اثر شناخته‌شده قطع پلاسما کاربرد آن در ارتباطات رادیویی موج کوتاه باشد. وقتی که یک موج رادیویی به ارتفاعی در یونسپهر که چگالی پلاسما به اندازه کافی زیاد است می‌رسد، موج منعکس می‌شود (شکل ۳۲.۴)، و امکان ارسال علامت به دور زمین را فراهم می‌کند. اگر چگالی بیشینه را  $10^{12} \text{m}^{-3}$  بگیریم بسامد بحرانی از مرتبه ۱۰ MHz می‌شود [مراجعه کنید به معادله ۲۶.۴]. برای برقراری ارتباط با سفینه فضایی، لازم است به منظور نفوذ در یونسپهر از بسامدهای زیادتر از این استفاده کرد. اما در خلال بازگشت سفینه فضایی به جو زمین، گرمای شدید اصطکاک باعث تولید پلاسما می‌شود. در نتیجه قطع پلاسما روی می‌دهد، که پیامد آن ایست ارتباطاتی در بازگشت است (شکل ۳۲.۴).



شکل ۳۲.۴ نمای اغراق‌آمیز یونسپهر زمین، با نمایش اثر پلاسما روی مخابرات رادیویی.

## مسائل

۹.۴ یک کپسول فضایی در هنگام بازگشت به جو زمین به علت پلاسمای حاصل از موج شوکی در جلو کپسول متحمل قطع ارتباطات می‌شود. اگر رادیو در بسامد  $300 \text{ MHz}$  کار کند، کمیته چگالی پلاسما در مدت قطع ارتباطات چقدر است؟

۱۰.۴ هانس آلفون، اولین پلاسما-فیزیکدان که جایزه نوبل دریافت کرد، اظهار داشته است که شاید جهان نخستین بین ماده و پاد ماده دارای تقارن بوده است. فرض کنید جهان در زمانی مخلوطی یکنواخت از پروتونها، پادپروتونها، الکترونها، و پوزیترونها، با چگالی  $n_0$  برای هر یک از این گونه‌ها، بوده است.

(الف) رابطه پاشیدگی امواج الکترومغناطیسی پربسامد در این پلاسما را به دست آورید. می‌توانید از برخوردها، نابودیها، و اثرات گرمایی صرف نظر کنید.

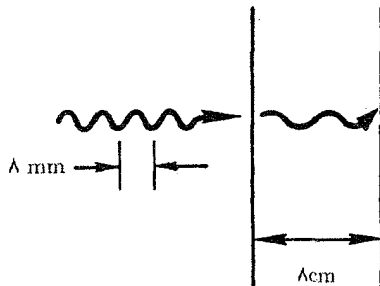
(ب) با استفاده از معادله پواسون، رابطه پاشیدگی امواج یونی را پیدا کنید. می‌توانید از  $T_e$  صرف نظر کنید (ولی نه از  $T_e$ ) و فرض کنید که همه لیبتونها از رابطه بولتزمن تبعیت می‌کنند.

۱۱.۴ نشان دهید برای امواج الکترومغناطیسی ضریب شکست برابر است با جذر ثابت دی‌الکتریک مناسب پلاسما (مراجعه کنید به مسئله ۴.۴).

۱۲.۴ در یک پلاسمای ماشین  $Q$  ی پتاسیم، به جای کسر  $k$  ای از الکترونها می‌توانیم یونهای منفی  $\text{Cl}$  را قرار دهیم. بنابراین، پلاسما دارای  $n_0$  یون  $\text{K}^+$ ،  $\kappa n_0$  یون  $\text{Cl}^-$ ، و  $(1 - \kappa)n_0$  الکترون در هر  $\text{m}^3$  است. اگر  $\kappa = 0.6$ ، مقدار بحرانی  $n_0$  را به دست آورید که باریکه میکروموج به طول موج  $3 \text{ cm}$  را قطع می‌کند.

۱۳.۴ یک تداخل‌سنج میکروموج  $8 \text{ mm}$  روی یک تخته پلاسما به ضخامت  $8 \text{ cm}$  و با صفحات موازی نامتناهی به‌کار گرفته شده است (شکل ۱۳.۴).

(الف) اگر چگالی پلاسما یکنواخت باشد، و جابه‌جایی فاز  $180^\circ$  فریز مشاهده شود، چگالی چقدر



است؟ (تذکر: یک فریز متناظر با جابه‌جایی فاز  $360^\circ$  است).  
 (ب) نشان دهید جابه‌جایی فاز اگر کوچک باشد متناسب با چگالی است.

### ۱۴.۴ امواج الکترومغناطیسی عمود بر $B_0$

اکنون انتشار امواج الکترومغناطیسی را در حضور میدان مغناطیسی در نظر می‌گیریم. ابتدا حالت انتشار عمودی،  $k \perp B_0$  را بررسی می‌کنیم. اگر امواج را عرضی بگیریم، یعنی  $E_1 \perp k$ ، باز دو امکان وجود دارند:  $E_1$  می‌تواند عمود بر  $B_0$  یا موازی با  $B_0$  باشد (شکل ۳۳.۴).

#### ۱.۱۴.۴ موج عادی، $E_1 \parallel B_0$

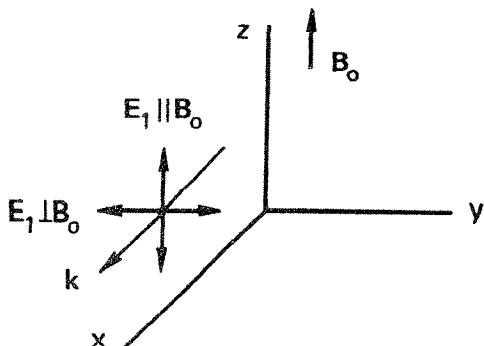
اگر  $E_1$  موازی با  $B_0$  باشد، می‌توانیم قرار دهیم  $B_0 = B_0 \hat{z}$ ،  $E_1 = E_1 \hat{z}$ ، و  $k = k \hat{x}$ . در یک آزمایش واقعی، این وضعیت هندسی با یک باریکهٔ میکروموج تقریب گرفته می‌شود که از طریق یک موجبر باریک هم‌خط با  $B_0$  به ستونی از پلاسما می‌تابد (شکل ۳۴.۴).  
 معادلهٔ موج این مورد باز هم با معادلهٔ ۸۱.۴ داده می‌شود:

$$(\omega^2 - c^2 k^2) E_1 = -i\omega j_1 / \epsilon_0 = in_0 e \omega v_{ez} / \epsilon_0. \quad (92.4)$$

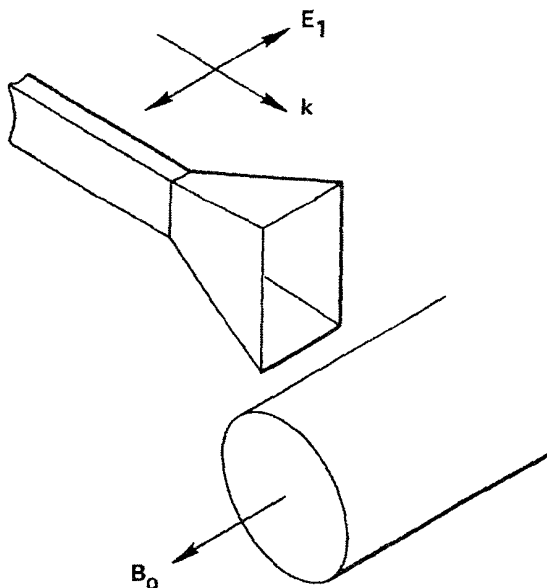
چون  $E_1 = E_1 \hat{z}$ ، تنها به مؤلفهٔ  $v_{ez}$  نیاز داریم. این مؤلفه از معادلهٔ حرکت زیر به دست می‌آید

$$m \partial v_{ez} / \partial t = -e E_z \quad (93.4)$$

چون این معادله با معادلهٔ مربوط به  $B_0 = 0$  یکی است، نتیجه درست همان است که قبلاً برای  $B_0 = 0$  داشتیم:



شکل ۳۳.۴ هندسهٔ انتشار امواج الکترومغناطیسی در جهت‌های عمود بر  $B_0$ .



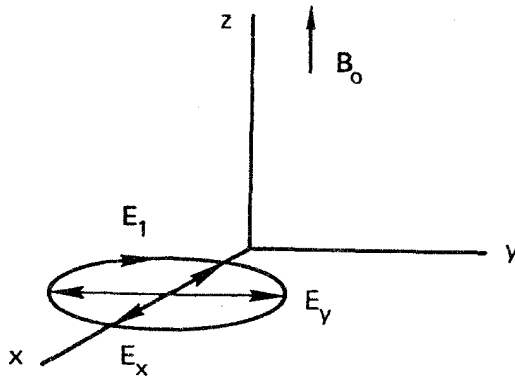
شکل ۳۴.۴ موجی معمولی که از آنتن موجبر به طرف ستونی از پلاسمای مغناطیده پرتاب شده است.

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 \quad (۹۴.۴)$$

این موج، با  $E_1 \parallel B_0$ ، موج عادی نامیده می‌شود. نامگذاری «عادی» و «غیرعادی» از اپتیک بلوری گرفته شده است؛ اما این اصطلاحات با هم جابه‌جا شده‌اند. در فیزیک پلازما، با معنی‌تر است موجی را «عادی» بنامیم که تحت تأثیر میدان مغناطیسی قرار نمی‌گیرد. برای شباهت دقیق با اپتیک بلوری می‌بایست این موج را «غیرعادی» می‌نامیدیم.

### ۲.۱۴.۴ موج غیرعادی، $E_1 \perp B_0$

اگر  $E_1$  عمود بر  $B_0$  باشد، حرکت الکترون تحت تأثیر  $B_0$  قرار می‌گیرد، و رابطه پاشیدگی تغییر خواهد کرد. برای بررسی این مورد، شاید قرار دهیم  $E_1 = E_1 \hat{y}$  و  $E_1 = k \hat{x}$  (شکل ۳۳.۴). اما معلوم می‌شود که امواج با  $E_1 \perp B_0$  به‌جای قطبی شدن خطی تمایل به قطبی شدن بیضوی دارند. یعنی، وقتی که چنین موجی در پلازما منتشر می‌شود. یک مؤلفه  $E_x$  ای در امتداد  $k$  ایجاد می‌کند، و از این رو قسمتی طولی و قسمتی عرضی می‌شود. برای بررسی کامل این مد، باید هر دو مؤلفه  $x$  و  $y$  را برای  $E_1$  در نظر بگیریم (شکل ۳۵.۴):



شکل ۳۵.۴ برای موج غیرعادی، بردار  $\mathbf{E}$  قطبیده بیضوی است. مؤلفه‌های  $E_x$  و  $E_y$  اختلاف فاز  $90^\circ$  دارند به قسمتی که نوک بردار میدان الکتریکی کل  $\mathbf{E}_1$  در هر دوره موج یک دور روی بیضی طی می‌کند.

$$\mathbf{E}_1 = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} \quad (95.4)$$

اکنون معادله خطی شده حرکت الکترون (با  $KT_e = 0$ ) عبارت است از

$$-im\omega \mathbf{v}_{e1} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_{e1} \times \mathbf{B}_0) \quad (96.4)$$

تنها مؤلفه‌های  $x$  و  $y$  مخالف صفر هستند، و عبارت‌اند از

$$v_x = \frac{-ie}{m\omega} (E_x + v_y B_0) \quad (97.4)$$

$$v_y = \frac{-ie}{m\omega} (E_y - v_x B_0)$$

شاخصهای پایین ۱ و  $e$  حذف شده‌اند. طبق معمول باحل معادله‌ها برای  $v_x$  و  $v_y$ ، به دست می‌آوریم

$$v_x = \frac{e}{m\omega} \left( -iE_x - \frac{\omega_c}{\omega} E_y \right) \left( 1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1} \quad (98.4)$$

$$v_y = \frac{e}{m\omega} \left( -iE_y + \frac{\omega_c}{\omega} E_x \right) \left( 1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1}$$

معادله موج با معادله ۸۰.۴ داده می‌شود، که در آن اکنون باید جمله طولی  $k \cdot \mathbf{E}_1 = kE_x$  را نگه داریم:

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \mathbf{E}_1 + c^2 k E_x \mathbf{k} = -i\omega \mathbf{j}_1 / \epsilon_0 = in_0 \omega e v_{e1} / \epsilon_0 \quad (99.4)$$



با جداسازی این معادله به دو مؤلفه  $x$  و  $y$  و با استفاده از معادله (۹۸.۴)، داریم

$$\omega^2 E_x = -\frac{i\omega n_0 e}{\epsilon_0} \frac{e}{m\omega} \left( iE_x + \frac{\omega_c}{\omega} E_y \right) \left( 1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1} \quad (100.4)$$

$$(\omega^2 - c^2 k^2) E_y = -\frac{i\omega n_0 e}{\epsilon_0} \frac{e}{m\omega} \left( iE_y - \frac{\omega_c}{\omega} E_x \right) \left( 1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1}$$

با وارد کردن تعریف  $\omega_p$ ، این مجموعه را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\left[ \omega^2 \left( 1 - \frac{\omega_c^2}{\textcircled{A}} \right) - \omega_p^2 \right] E_x + i \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega \textcircled{B}} E_y = 0 \quad (101.4)$$

$$\left[ (\omega^2 - c^2 k^2) \left( 1 - \frac{\omega_c^2}{\textcircled{D}} \right) - \omega_p^2 \right] E_y - i \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega \textcircled{C}} E_x = 0$$

دو معادله همزمان برای  $E_x$  و  $E_y$  داریم که فقط اگر درمیان ضرایب صفر شود با یکدیگر سازگار هستند:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = 0 \quad (102.4)$$

چون ضریب  $A$  عبارت است از  $\omega^2 - \omega_h^2$ ، که در آن  $\omega_h$  بسامد آمیخته بالاست که با معادله ۶۰.۴ تعریف می‌شود، شرط  $AD = BC$  به صورت زیر در می‌آید

$$(\omega^2 - \omega_h^2) \left[ \omega^2 - \omega_h^2 - c^2 k^2 \left( 1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) \right] = \left( \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega} \right)^2 \quad (103.4)$$

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = \frac{\omega^2 - \omega_h^2 - [(\omega_p^2 \omega_c / \omega)^2 / (\omega^2 - \omega_h^2)]}{\omega^2 - \omega_c^2}$$

این رابطه را با چند عمل جبری می‌توان ساده کرد. با قرار دادن  $\omega_c^2 + \omega_p^2$  به جای اولین  $\omega_h^2$  در طرف راست و ضرب دو طرف در  $\omega^2 - \omega_h^2$ ، داریم

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2 (\omega^2 - \omega_h^2) + (\omega_p^2 \omega_c^2 / \omega^2)}{(\omega^2 - \omega_c^2)(\omega^2 - \omega_h^2)}$$

$$= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 (\omega^2 - \omega_h^2) + \omega_p^2 \omega_c^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)(\omega^2 - \omega_h^2)}$$

$$= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 (\omega^2 - \omega_c^2) - \omega_p^2 (\omega^2 - \omega_c^2)}{(\omega^2 - \omega_c^2)(\omega^2 - \omega_h^2)}$$

$$\boxed{\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = \frac{c^2}{v_\phi^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_h^2}} \quad (104.4)$$

این رابطه پاشیدگی موج غیرعادی است. این یک موج الکترومغناطیسی، با قسمتی طولی و قسمتی عرضی است، که عمود بر  $B_0$  منتشر می‌شود در حالی که  $E_1$  عمود بر  $B_0$  است.

### ۱۵.۴ قطعه‌ها و تشدیدها

رابطه پاشیدگی موج غیرعادی به‌طور قابل ملاحظه‌ای از همه رابطه‌های پاشیدگی که تاکنون دیده‌ایم پیچیده‌تر است. برای تجزیه و تحلیل این عبارت، لازم است از تعریف قطع و تشدید استفاده کنیم. پدیده قطع در یک پلاسما زمانی رخ می‌دهد که ضریب شکست صفر شود، یعنی هنگامی که طول موج بینهایت شود، زیرا  $\tilde{n} = ck/\omega$ . تشدید وقتی اتفاق می‌افتد که ضریب شکست بینهایت شود، یعنی وقتی که طول موج صفر شود. هنگامی که یک موج درون ناحیه‌ای که در آن  $\omega_p$  و  $\omega_c$  تغییر می‌کنند منتشر می‌شود، ممکن است متحمل قطع و تشدید شود. موج معمولاً در قطع منعکس می‌شود و در تشدید جذب می‌شود.

تشدید موج غیرعادی با قرار دادن  $k$  مساوی با بینهایت در معادله ۱۰۴.۴ پیدا می‌شود. برای هر  $\omega$  متناهی،  $k \rightarrow \infty$  ایجاب می‌کند که  $\omega_h \rightarrow \omega$ ، و از این رو تشدید در نقطه‌ای از پلاسما اتفاق می‌افتد که در آن

$$\omega_h^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2 = \omega^2 \quad (105.4)$$

به‌سادگی می‌توان دید که معادله ۱۰۵.۴ عبارت است از رابطه پاشیدگی امواج الکترومغناطیسی که در عرض  $B_0$  منتشر می‌شوند (معادله ۶۰.۴). هنگامی که موجی با  $\omega$  معین به نقطه تشدید نزدیک می‌شود، سرعت‌های فاز و گروه آن به صفر نزدیک می‌شوند، و انرژی موج به نوسانهای آمیخته بالا تبدیل می‌شود. موج غیرعادی قسمتی الکترومغناطیسی و قسمتی الکتروستاتیک است؛ به آسانی می‌توان نشان داد (مسئله ۱۴.۴) که در حالت تشدید این موج خاصیت الکترومغناطیسی

خود را از دست می‌دهد و یک نوسان الکتروستاتیک می‌شود.

با قرار دادن  $k$  مساوی صفر در معادله ۱۰۴.۴ قطعها در موج غیرعادی پیدا می‌شوند. با تقسیم بر  $\omega_p^2 - \omega^2$ ، می‌توانیم معادله حاصل برای  $\omega$  را به صورت زیر بنویسیم:

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1}{1 - [\omega_c^2 / (\omega^2 - \omega_p^2)]} \quad (106.4)$$

با عملیات جبری اندکی رابطه ساده‌ای برای  $\omega$  به دست می‌آید:

$$1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2 - \omega_p^2} = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{\omega_c^2 / \omega^2}{1 - (\omega_p^2 / \omega^2)}$$

$$\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^2 = \frac{\omega_c^2}{\omega^2}$$

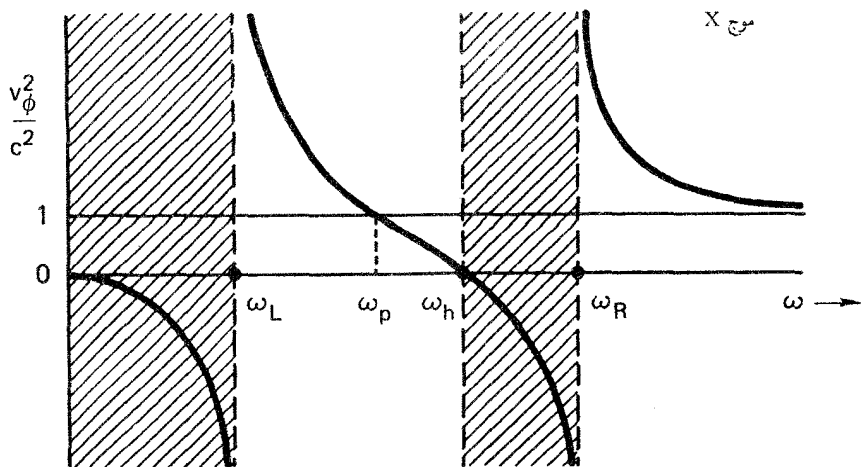
$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \pm \frac{\omega_c}{\omega} \quad \text{یا} \quad \omega^2 \mp \omega\omega_c - \omega_p^2 = 0 \quad (107.4)$$

از هر یک از این دو علامت بسامد قطع متفاوتی تعیین خواهد شد؛ این بسامدها را  $\omega_L$  و  $\omega_R$  می‌نامیم. ریشه‌های این دو معادله درجه دوم عبارت‌اند از

$$\omega_R = \frac{1}{2} [\omega_c + (\omega_c^2 + 4\omega_p^2)^{1/2}] \quad (108.4)$$

$$\omega_L = \frac{1}{2} [-\omega_c + (\omega_c^2 + 4\omega_p^2)^{1/2}]$$

بنابه قرارداد، چون  $\omega$  همواره مثبت است علامت مثبت جلوی ریشه دوم در هر مورد را گرفته‌ایم؛ امواجی که در جهت  $-x$  می‌روند با منفی  $k$  توصیف می‌شوند. بسامدهای قطع  $\omega_L$  و  $\omega_R$  را، بنابه دلایلی که در بخش بعد روشن خواهند شد، به ترتیب قطعهای سمت راستی و سمت چپی می‌نامیم. بسامدهای قطع و تشدید نمودار پاشیدگی را به دو ناحیه انتشار و غیرانتشار تقسیم می‌کنند. به جای نمودار معمولی  $k - \omega$ ، ترسیم سرعت فاز برحسب بسامد، یا به بیان دقیقتر، ترسیم  $\omega^2 / c^2 k^2 = 1 / \tilde{n}^2$  (شکل ۳۶.۴) روشنگرانه‌تر است. برای تعبیر این نمودار، فرض کنید  $\omega_c$  ثابت است، و موجی با بسامد ثابت  $\omega$  از بیرون به داخل پلازما فرستاده می‌شود. هنگامی



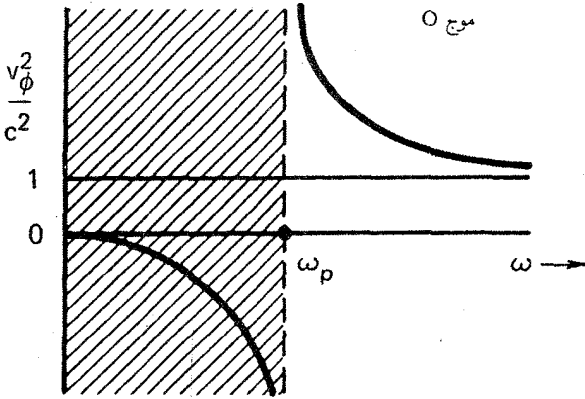
شکل ۳۶.۴ پاشیدگی موج غیرعادی، آن‌گونه که از رفتار سرعت فاز با بسامد دیده می‌شود. موج در ناحیه‌های هاشورزده منتشر نمی‌شود.

که موج با ناحیه‌هایی مواجه می‌شود که چگالی در حال افزایش است، بسامدهای  $\omega_L$ ،  $\omega_p$ ،  $\omega_h$  و  $\omega_R$  همگی افزایش می‌یابند (در نمودار به سمت راست منتقل می‌شوند). این مانند موردی است که چگالی ثابت باشد و بسامد  $\omega$  به تدریج کاهش یابد. با اتخاذ دیدگاه اخیر، می‌بینیم که در  $\omega$  بزرگ (یا چگالی کم)، سرعت فاز به سرعت نور نزدیک می‌شود. همچنانکه موج جلوتر می‌رود،  $v_\phi$  زیاد می‌شود تا به قطع سمت راستی  $\omega = \omega_R$  می‌رسد. در اینجا  $v_\phi$  بینهایت می‌شود. بین لایه‌های  $\omega = \omega_R$  و  $\omega = \omega_h$ ، کمیت  $\omega^2/k^2$  منفی است، و امکان انتشار وجود ندارد. در  $\omega = \omega_h$ ، تشدید روی می‌دهد و  $v_\phi$  صفر می‌شود. بین  $\omega = \omega_L$  و  $\omega = \omega_h$  باز هم انتشار امکان‌پذیر است. در این ناحیه، موج بسته به اینکه  $\omega$  کوچکتر یا بزرگتر از  $\omega_p$  باشد تندتر یا کندتر از  $c$  حرکت می‌کند. از معادله ۱۰۴.۴ واضح است که در  $\omega = \omega_p$  موج با سرعت  $c$  حرکت می‌کند. برای  $\omega < \omega_L$ ، ناحیه بی‌انتشار دیگری وجود دارد. بنابراین، موج غیرعادی دو ناحیه انتشار دارد که توسط یک نوار ایست جدا شده‌اند. به‌عنوان مقایسه، همان نوع نمودار را برای موج در شکل ۳۷.۴ نشان داده‌ایم. این رابطه پاشیدگی تنها یک قطع دارد و تشدید ندارد.

## ۱۶.۴ امواج الکترومغناطیسی موازی با B.

اکنون  $k$  را در امتداد محور  $z$  می‌گیریم و فرض می‌کنیم  $E_\parallel$  هر دو مؤلفه عرضی  $E_x$  و  $E_y$  را دارد:

$$k = k\hat{z} \quad E_\parallel = E_x\hat{x} + E_y\hat{y} \quad (109.4)$$



شکل ۳۷.۴ نمودار پاشیدگی مشابهی برای موج عادی.

از معادله موج ۹۹.۴ برای موج غیرعادی باز هم می‌توانیم استفاده کنیم اگر صرفاً  $k$  را از  $k\hat{x}$  به  $k\hat{z}$  تغییر دهیم. اکنون مؤلفه‌ها با توجه به معادله ۱۰۰.۴ عبارت‌اند از

$$(\omega^2 - c^2 k^2) E_x = \frac{\omega_p^2}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \left( E_x - \frac{i\omega_c}{\omega} E_y \right) \quad (۱۱۰.۴)$$

$$(\omega^2 - c^2 k^2) E_y = \frac{\omega_p^2}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \left( E_y + \frac{i\omega_c}{\omega} E_x \right)$$

با استفاده از اختصار

$$\alpha \equiv \frac{\omega_p^2}{1 - (\omega_c^2/\omega^2)} \quad (۱۱۱.۴)$$

می‌توانیم معادلات جفت‌شده  $E_x$  و  $E_y$  را به صورت زیر بنویسیم

$$(\omega^2 - c^2 k^2 - \alpha) E_x + i\alpha \frac{\omega_c}{\omega} E_y = 0 \quad (۱۱۲.۴)$$

$$(\omega^2 - c^2 k^2 - \alpha) E_y - i\alpha \frac{\omega_c}{\omega} E_x = 0$$

با قرار دادن دترمینان ضرایب مساوی صفر، داریم

$$(\omega^2 - c^2 k^2 - \alpha)^2 = (\alpha\omega_c/\omega)^2 \quad (۱۱۳.۴)$$

$$\omega^2 - c^2 k^2 - \alpha = \pm \alpha\omega_c/\omega \quad (۱۱۴.۴)$$

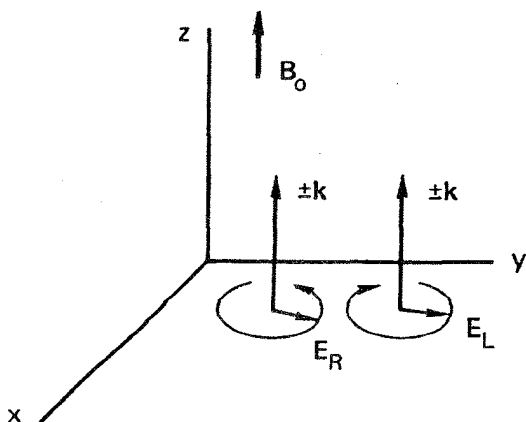
$$\begin{aligned} \omega^2 - c^2 k^2 &= \alpha \left( 1 \pm \frac{\omega_c}{\omega} \right) = \frac{\omega_p^2}{1 - (\omega_c^2/\omega^2)} \left( 1 \pm \frac{\omega_c}{\omega} \right) \\ &= \omega_p^2 \frac{1 \pm (\omega_c/\omega)}{[1 + (\omega_c/\omega)][1 - (\omega_c/\omega)]} = \frac{\omega_p^2}{1 \mp (\omega_c/\omega)} \end{aligned} \quad (115.4)$$

علامت  $\mp$  نشان می‌دهد که دو جواب ممکن برای معادله ۱۱۲.۴ وجود دارند که متعلق به دو موج مختلف‌اند که در امتداد  $B_0$  می‌توانند منتشر شوند. رابطه‌های پاشیدگی آنها عبارت‌اند از

$$\tilde{n}^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 - (\omega_c/\omega)} \quad (\text{موج } R) \quad (116.4)$$

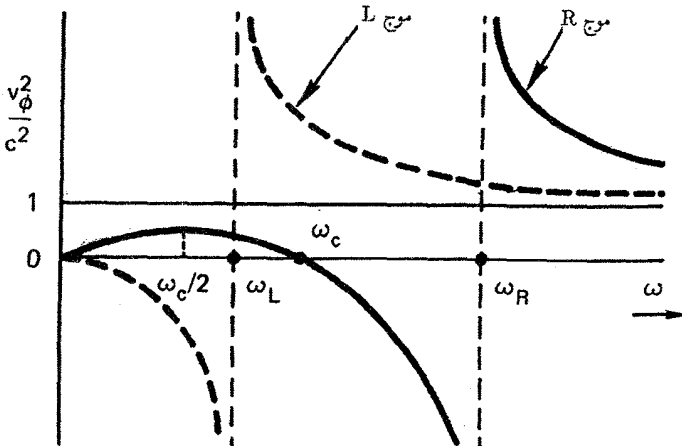
$$\tilde{n}^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 + (\omega_c/\omega)} \quad (\text{موج } L) \quad (117.4)$$

معلوم می‌شود که امواج  $R$  و  $L$  قطبیده دایره‌ای هستند. علامت  $R$  و  $L$  به ترتیب به معنی قطبش دایره‌ای راستگرد و چپگرد هستند (مسئله ۱۷.۴). نمایش هندسی در شکل ۳۸.۴ نشان داده شده است. بردار میدان الکتریکی موج  $R$ ، هنگامی که در امتداد  $B_0$  دیده می‌شود، در جهت ساعتگرد برحسب زمان می‌چرخد، و موج  $L$  عکس آن است. چون معادلات ۱۱۶.۴ و ۱۱۷.۴ تنها به  $k^2$  بستگی دارند، جهت چرخش بردار  $E$  مستقل از علامت  $k$  است؛ قطبش برای امواجی که در جهت مخالف منتشر می‌شوند



شکل ۳۸.۴ نمایش هندسی امواج قطبیده دایره‌ای راستگرد و چپگرد که در امتداد  $B_0$  منتشر می‌شوند.

یکی است. به طور خلاصه: امواج الکترومغناطیسی اصلی که در امتداد  $B_0$  منتشر می‌شوند عبارت‌اند از موج قطبیده دایره‌ای راستگرد ( $R$ ) و موج قطبیده دایره‌ای چپگرد ( $L$ )؛ امواج اصلی که در عرض  $B_0$  منتشر می‌شوند عبارت‌اند از موج قطبیده خطی (موج  $O$ ) و موج قطبیده بیضوی (موج  $X$ ). اکنون به بررسی قطعه‌ها و تشدیدهای امواج  $R$  و  $L$  می‌پردازیم. برای موج  $R$ ،  $k$  در  $\omega_c = \omega$  بینهایت می‌شود؛ بنابراین، موج با حرکت سیکلوترونی الکترونها در تشدید است. جهت چرخش صفحه قطبش با جهت چرخش الکترونها یکی است؛ موج انرژی خود را با شتاب دادن پیوسته به الکترونها از دست می‌دهد، و نمی‌تواند منتشر شود. از سوی دیگر، موج  $L$  دارای تشدید سیکلوترونی با الکترونها نیست زیرا در خلاف جهت می‌چرخد. همان‌گونه که به سادگی از معادله ۱۱۷.۴ دیده می‌شود، موج  $L$  برای  $\omega$  مثبت تشدید ندارد. اگر حرکت‌های یونی را در این بررسی منظور کرده بودیم، معلوم می‌شد که موج  $L$  در  $\omega = \Omega_c$  دارای تشدید است، زیرا این موج با چرخش یون می‌چرخد. قطعه‌ها با قرار دادن  $k = 0$  در معادلات ۱۱۶.۴ و ۱۱۷.۴ به دست می‌آیند. در نتیجه، به معادلاتی مانند معادلات مربوط به قطع موج  $X$  (معادله ۱۰۷.۴) می‌رسیم. بنابراین، بسامدهای قطع مانند سابق هستند. موج  $R$ ، با علامت تفریق در معادلات ۱۱۶.۴ و ۱۰۷.۴، بسامد قطع  $\omega_R$  بزرگتری دارد که با معادله ۱۰۸.۴ داده می‌شود؛ موج  $L$ ، با علامت جمع، بسامد قطع  $\omega_L$  کمتری دارد. این دلیلی است برای نمادهای  $\omega_L$  و  $\omega_R$  که قبلاً به کار بردیم. نمودار پاشیدگی امواج  $R$  و  $L$  در شکل ۳۹.۴ نشان داده شده‌اند. موج  $L$  یک نوار ایست در بسامدهای کم دارد؛ این موج مانند رفتار می‌کند با این تفاوت که قطع به جای  $\omega_p$  در  $\omega_L$  رخ می‌دهد. موج  $R$  یک نوار ایست بین



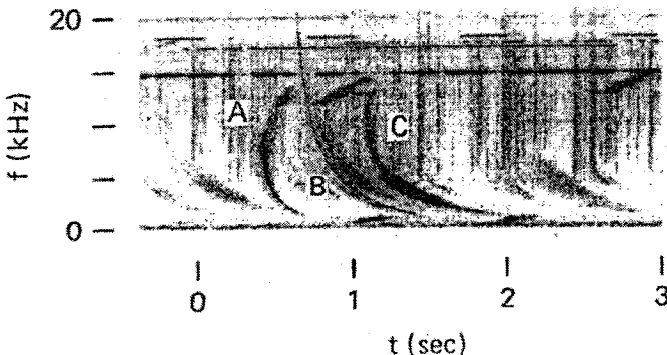
شکل ۳۹.۴ نمودارهای  $v_{\phi}^2/c^2$  بر حسب  $\omega$  برای امواج  $R$  و  $L$ . ناحیه‌های بی‌انتشار ( $v_{\phi}^2/c^2 < 0$ ) مشخص شده‌اند زیرا برای این دو موج با هم تفاوت دارند.

$\omega_R$  و  $\omega_c$  دارد، ولی دومین نوار انتشار، با  $v_\phi < c$ ، در کمتر از  $\omega_c$  وجود دارد. موج درون این ناحیه بسامد کم را مد سوت زن می نامند و در مطالعه پدیده های یونسپهری بسیار مهم است.

## ۱۷.۴ نتایج تجربی

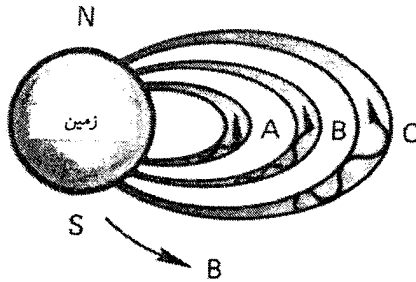
### ۱.۱۷.۴ مد سوت زن

محققین اولیه گسیل رادیویی صداهای سوت گوناگونی در گستره بسامد شنیداری دریافت می کردند. شکل ۴۰.۴ طیف نگاشتی از بسامد دریافت شده را به صورت تابعی از زمان نشان می دهد. نوعاً یک رشته از تنهای آرام نزولی وجود دارد، که با بلندگو می توان شنید. این پدیده را می توان به سادگی بر حسب مشخصات پاشیدگی موج  $R$  توضیح داد. وقتی رعد و برق در نیم کره جنوبی رخ می دهد، نوبه رادیویی با همه بسامدها تولید می شود. در میان امواج تولید شده در پلاسمای یونسپهر و مغناطیس سپهر امواج  $R$  وجود دارند که در امتداد میدان مغناطیسی زمین حرکت می کنند. این امواج توسط خطوط میدان هدایت می شوند و توسط ناظرانی در کانادا آشکارسازی می شوند. اما بسامدهای مختلف در زمانهای مختلف وارد می شوند. از شکل ۳۹.۴ می توان دید که برای  $\omega < \omega_c/2$  سرعت فاز با بسامد افزایش می یابد (مسئله ۱۹.۴). همچنین می توان نشان داد که سرعت گروه با بسامد افزایش می یابد (مسئله ۲۰.۴). بنابراین، بسامدهای کم دیرتر وارد می شوند، و در نتیجه تن نزولی ایجاد می شود. توسط یک جرقه برق به علت انتشار در امتداد لوله های نیروی مختلف  $A, B, C$  چند سوت می توانند تولید شوند (شکل ۴۱.۴). چون این امواج دارای  $\omega < \omega_c$



شکل ۴۰.۴ طیف نگاشت واقعی علامتهای سوت زن، نمایشگر خمیدگی ناشی از شاخه کم بسامد رابطه پاشیدگی موج  $R$  (شکل ۳۹.۴). در هر لحظه،  $t$ ، گیرنده گستره بسامد بین  $0^\circ$  و  $20^\circ$  کیلوهرتز را به سرعت روبش می کند، و خط قائمی ترسیم می شود. ثبات لکه ای ثبت می کند که تیرگی آن متناسب با شدت علامت در هر بسامد است. بنابراین، حرکت پایین سوی لکه تیره با زمان یک تن آرام نزولی را نشان می دهد.



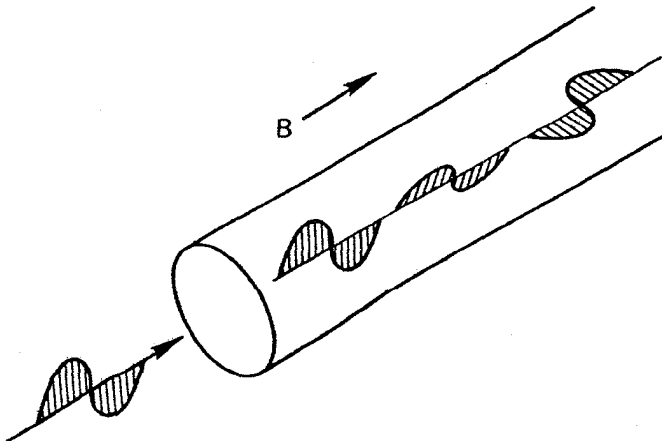


شکل ۴۱.۴ نموداری که چگونگی به وجود آمدن سوت‌زن‌ها را نشان می‌دهد. مجراهای  $A$ ،  $B$  و  $C$  به علامتهایی که در شکل ۴۰.۴ با همین نمادها نشانگذاری شده‌اند مربوط می‌شوند.

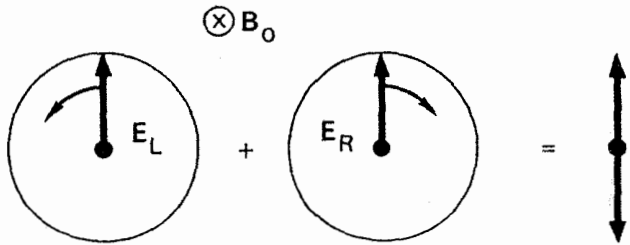
هستند، باید بسامدهایی کمتر از کمترین بسامد چرخشی در امتداد لوله نیرو، حدود  $100 \text{ kHz}$  داشته باشند. سوتها یا به‌طور مستقیم در گستره شنیداری قرار می‌گیرند یا به آسانی با هیترو داینینگ heterodyning می‌توانند به علامتهای شنیداری تبدیل شوند.

#### ۲.۱۷.۴ چرخش فاراده

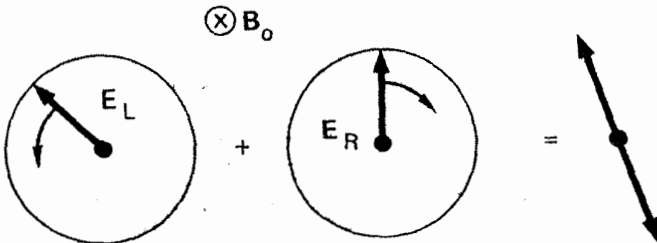
برای موجی با قطبش خطی که در امتداد میدان مغناطیسی به داخل پلازما فرستاده می‌شود صفحه قطبش متحمل چرخش می‌شود (شکل ۴۲.۴). این چرخش به علت اختلاف سرعتهای فاز امواج  $R$  و  $L$  است. از شکل ۳۹.۴ روشن است که برای  $\omega$  بزرگ، موج  $R$  تندتر از موج  $L$  حرکت می‌کند. فرض کنید این موج قطبیده خطی مجموع موجهای  $R$  و  $L$  باشد (شکل ۴۳.۴). البته، هر دو موج دارای یک بسامد هستند. بعد از  $N$  دور، بردارهای  $E_L$  و  $E_R$  به مکانهای اولیه



شکل ۴۲.۴ چرخش فاراده صفحه قطبش یک موج الکترومغناطیسی که در امتداد  $B$  حرکت می‌کند.



شکل ۴۳.۴ موج قطبیده خطی به عنوان مجموع دو موج قطبیده دایره‌ای راستگرد و چپگرد.



شکل ۴۴.۴ بعد از عبور از پلاسما، موج  $L$  تقدم فازی نسبت به موج  $R$  پیدا کرده است، و صفحه قطبش چرخیده است.

خود برمی‌گردند. اما امواج  $R$  و  $L$  بعد از طی مسافت معین  $d$  تعداد دورهای متفاوتی را متحمل شده‌اند، زیرا آنها به مدت زمان متفاوتی برای پیمودن این مسافت نیاز دارند. چون موج  $L$  کندتر حرکت می‌کند، در مکانی که تعداد دورهای مربوط به موج  $R$  برابر با  $N$  است تعداد دورهای موج  $L$  برابر با  $N + \epsilon$  خواهد بود. بنابراین بردارها مکانهایی دارند که در شکل ۴۴.۴ نشان داده شده‌اند. دیده می‌شود که صفحه قطبش چرخیده است. با اندازه‌گیری این چرخش به وسیله یک شیپور میکروموجی، می‌توان مقدار  $\mu_0$  و در نتیجه چگالی را پیدا کرد (مسئله ۲۲.۴). اثر چرخش فاراده به طور تجربی ثابت شده است، ولی به مفیدی روش اندازه‌گیری چگالی به صورت تداخل سنجی میکروموجی نیست، زیرا اولاً دسترسی به انتهای ستون پلاسما معمولاً مشکل است، و ثانیاً این اثر کوچک است مگر آنکه چگالی به قدری زیاد باشد که مسئله شکست مطرح بشود.

وقتی از لیزرهای تپی قوی برای تولید پلاسمای چگال با تبخیر یک هدف جامد استفاده می‌شود، بعضی مواقع میدانهای مغناطیسی با شدتهای مگاگاوسی خودبه‌خود تولید می‌شوند. این امواج از طریق چرخش فاراده با استفاده از نور لیزر با بسامدی بزرگتر از بسامد باریکه اصلی آشکارسازی شده‌اند. در فضای میان ستاره‌ای، مسیرها به قدری دراز هستند که چرخش فاراده حتی در چگالیهای کم مهم است. از این اثر برای توضیح قطبش تابش میکروموج توسط کنش میزری در ابرهایی از مولکولهای  $\text{OH}$  یا  $\text{H}_2\text{O}$  در حین تشکیل ستاره‌های جدید استفاده می‌شود.

## مسائل

۱۴.۴ ثابت کنید که موج غیرعادی در حالت تشدید کاملاً الکتروستاتیک است. راهنمایی: نسبت  $E_x/E_y$  را به صورت تابعی از  $\omega$  بیان کنید و  $\omega$  را مساوی با  $\omega_h$  قرار دهید.

۱۵.۴ ثابت کنید که ترتیب نقاط بحرانی در شکل ۳۶.۴ درست است، بدین معنی که  $\omega_L < \omega_p < \omega_h < \omega_R$ .

۱۶.۴ نشان دهید که سرعت گروه موج  $X$  در قطعها و تشدیدها صفر می شود. می توانید از حرکت یونها صرف نظر کنید.

۱۷.۴ به طریق زیر ثابت کنید امواج  $R$  و  $L$  قطبیده دایره ای راستگرد و چپگرد هستند.

(الف) نشان دهید که معادلات همزمان مربوط به  $E_x$  و  $E_y$  را می توان به صورت زیر نوشت

$$F(\omega)(E_x - iE_y) = 0 \quad G(\omega)(E_x + iE_y) = 0$$

که در آن برای موج  $R$  تابع  $F(\omega)$  صفر است و برای موج  $L$  تابع  $G(\omega)$  صفر است.  
(ب) برای موج  $R$  تابع  $G(\omega)$  مخالف صفر است؛ و بنابراین  $E_x = -iE_y$ . با در نظر گرفتن بستگی نمایی  $\mathbf{E}$  به زمان، نشان دهید که  $\mathbf{E}$  در این مورد در جهت چرخش الکترون می چرخد. ثابت کنید که  $\mathbf{E}$  برای موج  $L$  در جهت خلاف می چرخد.

(ج) برای موج  $R$ ، ماریجهایی را که نوک بردار  $\mathbf{E}$  در فضا در یک زمان معین طی می کند برای  $k_z > 0$  (۲) و  $k_z < 0$  ترسیم کنید. توجه کنید که اگر در مکان ثابتی ایستاده باشیم و عبور ماریج را نگاه کنیم چرخش  $\mathbf{E}$  را در هر دو مورد در یک جهت می بینیم.

۱۸.۴ امواج قطبیده دایره ای چپگرد در امتداد میدان مغناطیسی یکنواخت  $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$  به داخل پلاسمایی که چگالی آن با  $z$  افزایش می یابد منتشر می شوند. اگر  $f = ۲۸ \text{ GHz}$  و  $T = ۳ \text{ eV}$ ،  $B_0 =$  در چه چگالی قطع روی می دهد؟

۱۹.۴ نشان دهید که مد سوت زن دارای سرعت فاز بیشینه در  $\omega = \omega_c/2$  است و همچنین این بیشینه کمتر از سرعت نور است.

۲۰.۴ نشان دهید که اگر  $\omega \ll \omega_c$  و  $\epsilon \gg 1$  سرعت گروه مد سوت زن متناسب با  $\omega^{1/2}$  است.

۲۱.۴ نشان دهید که در یک پلاسمای پوزیترونیم (تعداد پوزیترونها و الکترونها با هم برابرند) چرخش فاراده وجود ندارد.

۲۲.۴ چرخش فاراده باریکه میکروموجی به طول موج ۸ میلیمتر در یک پلاسمای یکنواخت در میدان مغناطیس  $T = ۱ \text{ eV}$  اندازه گیری می شود. پس از طی ۱ میلیمتر از پلاسما، معلوم می شود که

صفحه قطبش  $90^\circ$  چرخیده است. چگالی چقدر است؟

۲۳.۴ نشان دهید که زاویه چرخش فاراده، برحسب درجه، روی یک موج عرضی قطبیده خطی که در امتداد  $B_0$  منتشر می‌شود با رابطه زیر داده می‌شود

$$\theta = 1.5 \times 10^{-11} \lambda^2 \int_0^L B(z) n_e(z) dz$$

که در آن  $\lambda_0$  طول موج در فضای آزاد و  $L$  طول مسیر در پلاسماست. فرض کنید  $\omega_p \gg \omega$ .  
 ۲۴.۴ در بعضی از آزمایشهای همجوشی لیزری که در آنها پلاسما از فرود آمدن تپ نور  $1.06 \mu\text{m}$  روی یک هدف جامد به وجود می‌آید، میدانهای مغناطیسی خیلی بزرگ توسط جریانهای گرماالکتریکی تولید می‌شوند. این میدانها را می‌توان از چرخش فاراده مربوط به نوری با بسامد دو برابر  $(\lambda_0 = 0.53 \mu\text{m})$  که از همان لیزر حاصل می‌شود اندازه‌گیری کرد. اگر  $B_0 = 10^6 \text{ T}$ ،  $n = 10^{27} \text{ m}^{-3}$  و طول مسیر در پلاسما  $30 \mu\text{m}$  باشد، زاویه چرخش فاراده برحسب درجه چقدر است؟ (فرض کنید  $k \parallel B_0$ ).

۲۵.۴ از یک تداخل سنج میکروموج که در آن موج عادی به کار برده می‌شود نمی‌توان برای چگالیهای زیادتر از چگالی قطع  $n_c$  استفاده کرد. برای اندازه‌گیری چگالیهای زیادتر باید از موج غیرعادی استفاده کنیم.

(الف) رابطه‌ای برای چگالی قطع  $n_{cx}$  مربوط به موج  $X$  بنویسید.

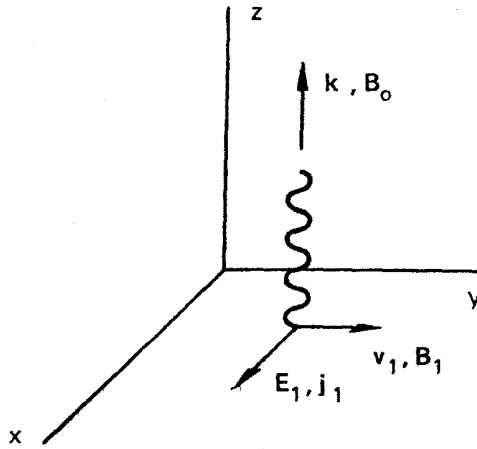
(ب) روی نمودار  $v_{ph}^2/c^2$  برحسب  $\omega$ ، شاخه‌ای از رابطه پاشیدگی موج  $X$  را نشان دهید که در آن چنین تداخل سنجی کار می‌کند.

## ۱۸.۴ امواج هیدرومغناطیسی

آخرین قسمت بررسی امواج بنیادی پلاسما به نوسانهای یونی با بسامد کم در حضور میدان مغناطیسی مربوط می‌شود. از میان مدهای ممکن متعدد، تنها به بررسی دو تا از آنها خواهیم پرداخت: موج هیدرومغناطیسی در امتداد  $B_0$ ، یا موج آلفون، و موج مغناطوسونی. موج آلفون در هندسه تخت دارای  $k$  در امتداد  $B_0$  است؛  $E_1$  و  $j_1$  بر  $B_0$  عمودند؛ و  $B_1$  و  $v_1$  هم بر  $B_0$  و هم بر  $E_1$  عمودند (شکل ۱۸.۴). از معادله ماکسول (معادله ۸.۴) مطابق معمول داریم

$$\nabla \times \nabla \times E_1 = -k(k \cdot E_1) + k^2 E_1 = \frac{\omega^2}{c^2} E_1 + \frac{i\omega}{\epsilon_0 c^2} j_1 \quad (118.4)$$

بنابه فرض چون  $k = k\hat{z}$  و  $E_1 = E_1\hat{x}$ ، تنها مؤلفه مخالف صفر است. اکنون  $j_1$  از



شکل ۴۵.۴ نمایش هندسی موج آلفون که در امتداد  $B_0$  منتشر می‌شود.

یونها و الکترونها تشکیل شده است، زیرا بسامدهای کم را در نظر می‌گیریم. مؤلفه  $x$  معادله ۱۱۸.۴ عبارت است از

$$\epsilon_0 (\omega^2 - c^2 k^2) E_1 = -i\omega n_0 e (v_{ix} - v_{ex}) \quad (119.4)$$

برای این موج حرکت‌های گرمایی مهم نیستند؛ بنابراین، می‌توانیم از جواب معادله حرکت یون با  $T_i = 0$  که قبلاً در معادله ۶۳.۴ به دست آوردیم استفاده کنیم. برای کامل شدن معادلات، در اینجا مؤلفه  $v_{iy}$  را که قبلاً به طور صریح نوشته نشده بود اضافه می‌کنیم:

$$v_{ix} = \frac{ie}{M\omega} \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} E_1 \quad (120.4)$$

$$v_{iy} = \frac{e}{M\omega} \frac{\Omega_c}{\omega} \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} E_1$$

جواب مربوط به معادله حرکت الکترون را می‌توان با قرار دادن  $\Omega_c \rightarrow -\omega_c$ ,  $e \rightarrow -e$ ,  $M \rightarrow m$  و سپس با گرفتن حد  $\omega_c^2 \gg \omega^2$  به دست آورد:

$$v_{ex} = \frac{ie}{m\omega} \frac{\omega^2}{\omega_c^2} E_1 \rightarrow 0 \quad (121.4)$$

$$v_{ey} = -\frac{e}{m} \frac{\omega_c}{\omega^2} \frac{\omega^2}{\omega_c^2} E_1 = -\frac{E_1}{B_0}$$

در این حدگیری، از چرخش لارمور الکترون صرف نظر شده است، و الکترونها صرفاً دارای سوق  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  در جهت  $y$  هستند. با جاگذاری این جوابها در معادله ۱۱۹.۴، به دست می آوریم

$$\epsilon_0 (\omega^2 - c^2 k^2) E_1 = -i\omega n_0 e \frac{ie}{M\omega} \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} E_1 \quad (122.4)$$

برای تصویر فیزیکی که بعداً ارائه می شود تنها از مؤلفه های  $y$  بردار  $v_1$  باید استفاده کنیم با توجه به تعریف بسامد یونی پلاسما  $\Omega_p$  (معادله ۴۹.۴)، داریم

$$\omega^2 - c^2 k^2 = \Omega_p^2 \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} \quad (123.4)$$

اکنون باید فرض کنیم  $\omega^2 \ll \Omega_c^2$ ؛ امواج هیدرومغناطیسی دارای بسامدهایی به مراتب کمتر از بسامد تشدید سیکلوترون یونی هستند. در این حد، معادله ۱۲۳.۴ به صورت زیر درمی آید

$$\begin{aligned} \omega^2 - c^2 k^2 &= -\omega^2 \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c^2} = -\omega^2 \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 M} \frac{M^2}{e^2 B_0^2} = -\omega^2 \frac{\rho}{\epsilon_0 B_0^2} \\ \frac{\omega^2}{k^2} &= \frac{c^2}{1 + (\rho/\epsilon_0 B_0^2)} = \frac{c^2}{1 + (\rho\mu_0/B_0^2)c^2} \end{aligned} \quad (124.4)$$

که در آن  $\rho$  چگالی جرم  $n_0 M$  است. این جواب شگفت آور نیست، زیرا مخرج کسر را می توان ثابت دی الکتریک نسبی برای حرکت های عمودی کم بسامد دانست (معادله ۲۸.۳). از معادله ۱۲۴.۴ به سادگی سرعت فاز موج الکترومغناطیسی در محیط دی الکتریک به دست می آید:

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{(\epsilon_R \mu_R)^{1/2}} = \frac{c}{\epsilon_R^{1/2}} \quad \mu_R = 1 \quad \text{برای}$$

همان گونه که قبلاً دیده ایم،  $\epsilon$  برای اغلب پلاسماهای آزمایشگاهی خیلی بزرگتر از واحد است، و معادله ۱۲۴.۴ را می توان به صورت تقریبی زیر نوشت

$$\frac{\omega}{k} = v_\phi = \frac{B_0}{(\mu_0 \rho)^{1/2}} \quad (125.4)$$

این امواج هیدرومغناطیسی با سرعت ثابت  $v_A$  در امتداد  $B_0$  حرکت می‌کنند، که آن را سرعت آلفون می‌نامند:

$$v_A \equiv B/(\mu_0 \rho)^{1/2} \quad (126.4)$$

این سرعت مشخصه‌ای است که اختلالهای خطوط نیرو با آن حرکت می‌کنند. اکنون ثابت دی‌الکتریک معادله ۲۸.۳ را می‌توان به صورت زیر نوشت

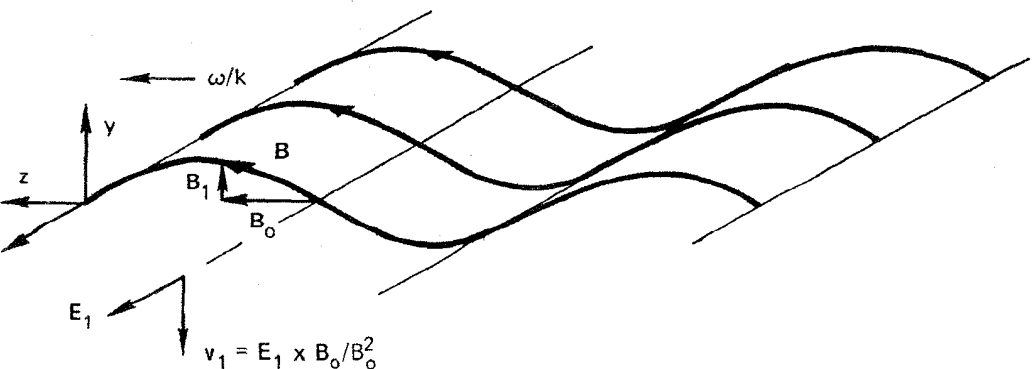
$$\epsilon_R = \epsilon/\epsilon_0 = 1 + (c^2/v_A^2) \quad (127.4)$$

توجه کنید که  $v_A$  برای پلاسماهای تکامل‌یافته که چگالی قابل ملاحظه‌ای دارند کوچک است، و بنابراین  $\epsilon_R$  بزرگ است.

برای پی بردن به اینکه در یک موج آلفون به طور فیزیکی چه اتفاقی می‌افتد، یادآوری می‌کنیم که این یک موج الکترومغناطیسی است با یک میدان مغناطیسی افت‌وخیزکننده  $B_1$  که به صورت زیر داده می‌شود

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\dot{\mathbf{B}}_1 \quad E_x = (\omega/k)B_y \quad (128.4)$$

هنگامیکه مؤلفه کوچک  $B_y$  با  $B_0$  جمع می‌شود به خطوط نیرو شکل موجک سینوسی می‌دهد که به طور اغراق‌آمیزی در شکل ۴۶.۴ نشان داده شده است. در نقطه‌ای که نشان داده شده است  $B_y$  در جهت مثبت  $y$  است. بنابراین مطابق معادله ۱۲۸.۴ اگر  $\omega/k$  در جهت  $z$  باشد  $E_x$  در جهت مثبت  $x$  است. این میدان الکتریکی  $E_x$  به پلاسما یک سوق  $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0$  در جهت منفی  $y$  می‌دهد.



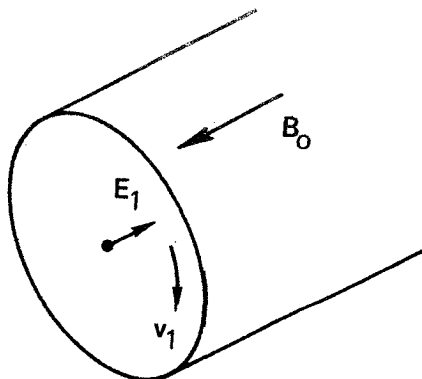
شکل ۴۶.۴ رابطه میان کمیت‌های نوسان‌کننده در موج آلفون و واپیش و اغراق‌آمیز خطوط نیرو.

چون حد  $\Omega_e^2 \ll \omega^2$  را در نظر گرفته‌ایم، هم‌یون‌ها و هم‌الکترون‌ها مطابق معادله  $120.4$  و  $121.4$  دارای سوق یکسان  $v_y$  هستند. بنابراین، سیال در راستای  $y$  به بالا و پایین حرکت می‌کند، همان‌گونه که قبلاً در شکل  $45.4$  نشان داده شد. بزرگی این سرعت  $|E_x/B_0|$  است. چون موجک حاصل با سرعت فاز  $\omega/k$  در میدان حرکت می‌کند، خط نیرو هم در نقطه‌ای که در شکل  $46.4$  نشان داده شده است به طرف پایین حرکت می‌کند. سرعت خط نیرو به طرف پایین عبارت است از  $(\omega/k)|B_y/B_0|$ ، که مطابق با معادله  $128.4$  عیناً مساوی با سرعت سیال  $|E_x/B_0|$  است. بنابراین، سیال و خطوط میدان با هم نوسان می‌کنند انگار که ذرات به خطوط چسبیده‌اند. خطوط نیرو طوری عمل می‌کنند که انگار آنها فنرهای حامل جرمی هستند که تحت کشش واقع شده‌اند، و موج آلفون را می‌توان همچون انتشار آشفستگی که هنگام کشیدن فنرها به وجود می‌آید در نظر گرفت. این مفهوم انجماد پلاسما بر روی خطوط نیرو و حرکت با آنها برای درک بسیاری از پدیده‌های کم‌سامد پلاسما مفید است. می‌توان نشان داد که این مفهوم تا زمانی که میدان الکتریکی در امتداد  $B$  وجود نداشته باشد دقیق است. سرانجام، باید ببینیم چه چیزی میدان الکتریکی  $E_x$  را، که وجودش قبلاً فرض شد، نگه می‌دارد. هنگامیکه  $E_1$  افت و خیز می‌کند. لختی یونها موجب می‌شود که آنها از الکترون‌ها عقب بمانند، و یک سوق قطبش  $v_p$  در جهت  $E_1$  به وجود می‌آید. این سوق  $v_{ix}$  با معادله  $120.4$  داده می‌شود و موجب جریان  $j_1$  در جهت  $x$  می‌شود. نیروی حاصل وارد بر سیال  $B \times j_1$  در جهت  $y$  است و  $90^\circ$  با سرعت  $v_1$  اختلاف فاز دارد. این نیرو به همان طریقی به نوسان تداوم می‌بخشد که در هر نوسانگری که در آن نیرو با سرعت اختلاف فاز دارد روی می‌دهد. البته این همواره لختی یون است که موجب پیش‌رفتگی و نوسان مداوم می‌شود، ولی در پلاسما تکانه به روش پیچیده‌ای از طریق نیروهای الکترومغناطیسی منتقل می‌شود.

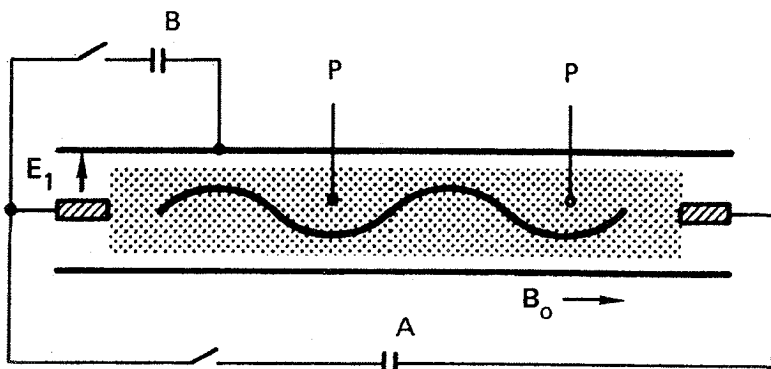
در یک هندسه واقع‌بینانه‌تر برای آزمایشها،  $E_1$  در راستای شعاعی و  $v_1$  در راستای سمتی است (شکل  $47.4$ ). بنابراین، حرکت پلاسما ناتراکم‌پذیر است. به این دلیل است که در معادله حرکت از جمله  $\nabla_p$  می‌توان صرف‌نظر کرد. این مد را موج آلفون پیچشی گویند. این مد اولین بار توسط ب. لهنرت در جیوه تولید شد.

امواج آلفون در پلاسما اولین بار توسط آلن، بیکر، پایل و ویلکاکس در برکلی کالیفرنیا، و جفکات در انگلستان در سال ۱۹۵۹ تولید و آشکارسازی شدند. کار در یک پلاسمای هیدروژنی تولیدشده در یک تخلیه «تنگش‌کن» بین دو الکتروود موازی با میدان مغناطیسی (شکل  $48.4$ ) انجام شد. تخلیه ذخیره خازن کند  $A$  پلاسما را به وجود می‌آورد. خازن تند  $B$ ، که به دیواره فلزی متصل است، وصل می‌شود تا میدان الکتریکی  $E_1$  عمود بر  $B$  را به وجود آورد. وصل شدن این





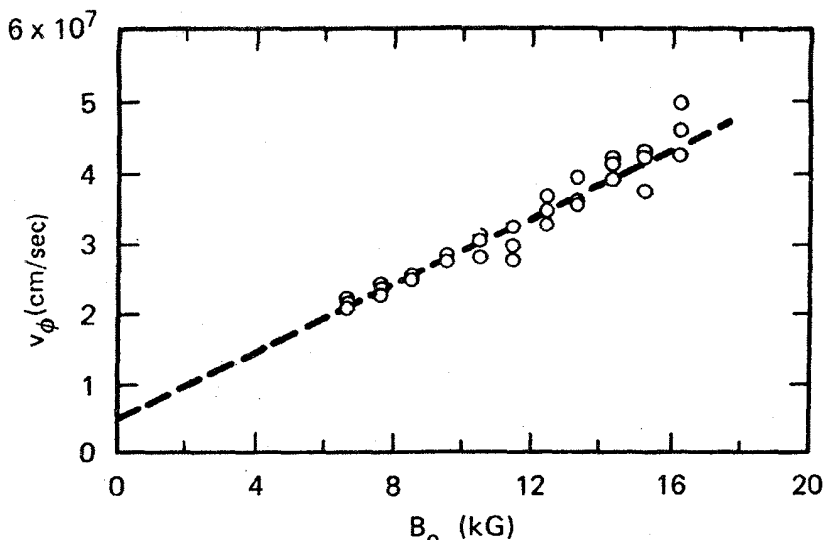
شکل ۴۷.۴ نمایش هندسی موج آلفون پیچشی (یا برشی) در یک ستون استوانه‌ای.



شکل ۴۸.۴ طرح نموداری آزمایش آشکارسازی امواج آلفون.

خازن موجی تولید می‌کند، که با تأخیر زمانی مناسبی، توسط کاهه‌های  $P$  آشکارسازی می‌شود. شکل ۴۹.۴ نتایج اندازه‌گیری سرعت فاز برحسب میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد، که در آن بستگی خطی که معادله ۱۲۶.۴ پیش‌بینی می‌کند دیده می‌شود.

این آزمایش در واقع مشکل بود زیرا، برای غلبه بر میرایی، میدان مغناطیسی باید شدید،  $1\text{ T}$  باشد. با بزرگ بودن  $B_0$ ،  $v_A$  بزرگ و در نتیجه طول موج به‌طور نامناسبی بزرگ می‌شود مگر اینکه چگالی زیاد باشد. در آزمایش ویلکاکس و دیگران برای رسیدن به یک سرعت آلفون کوچک  $2.8 \times 10^5\text{ m/sec}$  در چگالی  $6 \times 10^{21}\text{ m}^{-3}$  استفاده شد. توجه کنید که ممکن نیست با استفاده از اتمهای سنگینتر  $\rho$  را افزایش داد. بسامد  $\omega = kv_A$  متناسب با  $M^{-1/2}$  است، در حالی‌که بسامد سیکلوترون  $\Omega_e$  متناسب با  $M^{-1}$  است. بنابراین، نسبت  $\omega/\Omega_e$  متناسب با  $M^{1/2}$  است. با اتمهای سنگینتر نمی‌توان شرط  $\omega^2 \ll \Omega_e^2$  را برقرار کرد.

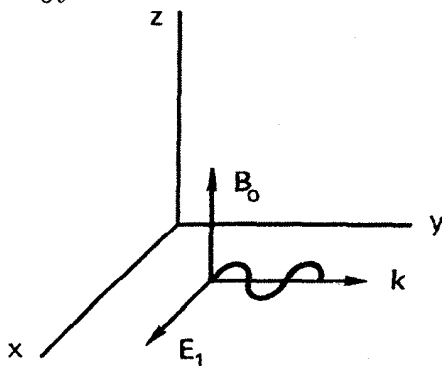


شکل ۴۹.۴ سرعت فاز اندازه‌گیری شده امواج آلفون برحسب میدان مغناطیسی.

### ۱۹.۴ امواج مغناطوسوتی

اکنون امواج الکترومغناطیسی کم‌بسامد را که در عرض  $B_0$  منتشر می‌شوند بررسی می‌کنیم. باز هم می‌توانیم قرار دهیم  $B_0 = B_0 \hat{z}$  و  $E_1 = E_1 \hat{x}$ ، ولی اکنون فرض می‌کنیم  $k = k \hat{y}$  (شکل ۵۰.۴). در این مورد می‌بینیم که سوپهای  $E_1 \times B_0$  در امتداد  $k$  قرار می‌گیرند، به طوری که پلازما در طی نوسانش متراکم و رها می‌شود. بنابراین، لازم است جمله  $\nabla p$  را در معادله حرکت نگه داریم. برای یونها، داریم

$$Mn_0 \frac{\partial v_{z1}}{\partial t} = en_0 (E_1 + v_{z1} \times B_0) - \gamma_i KT_i \nabla n_1 \quad (۱۲۹.۴)$$



شکل ۵۰.۴ نمایش هندسی موج مغناطوسوتی که با زاویه قائمه نسبت به  $B_0$  منتشر می‌شود.

با توجه به انتخاب  $E_1$  و  $k$ ، این معادله به صورت زیر در می آید

$$v_{ix} = \frac{ie}{M\omega} (E_x + v_{iy} B_0) \quad (۱۳۰.۴)$$

$$v_{iy} = \frac{ie}{M\omega} (-v_{ix} B_0) + \frac{k}{\omega} \frac{\gamma_i K T_i}{M} \frac{n_1}{n_0} \quad (۱۳۱.۴)$$

از معادله پیوستگی داریم

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{k}{\omega} v_{iy} \quad (۱۳۲.۴)$$

با جاگذاری در معادله ۱۳۱.۴ به دست می آوریم

$$v_{iy} = -\frac{ie}{M\omega} v_{ix} B_0 + \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\gamma_i K T_i}{M} v_{iy} \quad (۱۳۳.۴)$$

با استفاده از اختصار

$$A \equiv \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\gamma_i K T_i}{M}$$

این معادله به صورت زیر در می آید

$$v_{iy} (1 - A) = -\frac{i\Omega_c}{\omega} v_{ix} \quad (۱۳۴.۴)$$

با ترکیب این معادله و معادله ۱۳۰.۴، داریم

$$v_{ix} = \frac{ie}{M\omega} E_x + \frac{i\Omega_c}{\omega} \left( -\frac{i\Omega_c}{\omega} \right) (1 - A)^{-1} v_{ix} \quad (۱۳۵.۴)$$

$$v_{ix} \left( 1 - \frac{\Omega_c^2 / \omega^2}{1 - A} \right) = \frac{ie}{M\omega} E_x$$

این تنها مؤلفه  $v_{ix}$  است که آن را لازم داریم، زیرا تنها مؤلفه مخالف صفر معادله موج ۸۱.۴ عبارت است از

$$\epsilon_0 (\omega^2 - c^2 k^2) E_x = -i\omega n_0 e (v_{ix} - v_{ex}) \quad (۱۳۶.۴)$$

برای به دست آوردن  $v_{ex}$ ، تنها لازم است تغییرات مناسبی در معادله ۱۳۵.۴ بدهیم و حد جرم کوچک

الکترون را در نظر بگیریم، به طوری که  $\omega^r \ll \omega_c^r$  و  $\omega^r \ll k^r v_{the}^r$ :

$$v_{ex} = \frac{ie}{m\omega} \frac{\omega^r}{\omega_c^r} \left( 1 - \frac{k^r}{\omega^r} \frac{\gamma_e K T_e}{m} \right) E_x \rightarrow -\frac{ik^r}{\omega B_0^r} \frac{\gamma_e K T_e}{e} E_x \quad (137.4)$$

از ترکیب سه معادلهٔ اخیر به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \epsilon_0 (\omega^r - c^r k^r) E_x = -i\omega n_0 e \left[ \frac{ie}{M\omega} E_x \left( \frac{1-A}{1-A - (\Omega_c^r/\omega^r)} \right) \right. \\ \left. + \frac{ik^r M}{\omega B_0^r} \frac{\gamma_e K T_e}{eM} E_x \right] \quad (138.4) \end{aligned}$$

مجدداً فرض می‌کنیم  $\omega^r \ll \Omega_c^r$ ، و در نتیجه می‌توان از  $1-A$  نسبت به  $\Omega_c^r/\omega^r$  صرف‌نظر کرد. با استفاده از تعاریف  $v_A$  و  $\Omega_p$  داریم

$$(\omega^r - c^r k^r) = -\frac{\Omega_p^r}{\Omega_c^r} \omega^r (1-A) + \frac{k^r c^r}{v_A^r} \frac{\gamma_e K T_e}{M} \quad (139.4)$$

$$\omega^r - c^r k^r \left( 1 + \frac{\gamma_e K T_e}{M v_A^r} \right) + \frac{\Omega_p^r}{\Omega_c^r} \left( \omega^r - k^r \frac{\gamma_i K T_i}{M} \right) = 0$$

چون

$$\Omega_p^r/\Omega_c^r = c^r/v_A^r \quad (140.4)$$

معادلهٔ ۱۳۹.۴ به صورت زیر درمی‌آید

$$\omega^r \left( 1 + \frac{c^r}{v_A^r} \right) = c^r k^r \left( 1 + \frac{\gamma_e K T_e + \gamma_i K T_i}{M v_A^r} \right) = c^r k^r \left( 1 + \frac{v_s^r}{v_A^r} \right) \quad (141.4)$$

که در آن  $v_s$  سرعت صوت است. سرانجام، داریم

$$\boxed{\frac{\omega^r}{k^r} = c^r \frac{v_s^r + v_A^r}{c^r + v_A^r}} \quad (142.4)$$

این رابطهٔ پاشیدگی برای موج مغناطوسوتی است که عمود بر  $\mathbf{B}_0$  منتشر می‌شود. این یک موج صوتی است که در آن تراکم و انبساط نه توسط حرکتها در امتداد  $\mathbf{E}$  بلکه از سوقهای  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  در

عرض  $E$  به وجود می‌آیند. در حد  $\circ \rightarrow \circ$ ,  $B_o \rightarrow \circ$ ,  $v_A \rightarrow \circ$  موج مغناطوسوتی به موج یون صوتی معمولی تبدیل می‌شود. در حد  $\circ \rightarrow \circ$ ,  $KT \rightarrow \circ$ ,  $v_s \rightarrow \circ$  نیروی گرادیان فشار صفر می‌شود، و موج به یک موج آلفون تغییر شکل یافته تبدیل می‌شود. سرعت فاز مدمغناطوسوتی تقریباً همیشه بزرگتر از  $v_A$  است؛ به این دلیل، اغلب به طور ساده آن را موج هیدرومغناطیسی «تند» می‌نامند.

## ۲۰.۴ خلاصه‌ای از امواج بنیادی پلاسما

امواج الکترونی (الکتروستاتیک)

$$B_o = \circ \text{ یا } k \parallel B_o : \omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3}{2} k^2 v_{th}^2 \quad (\text{نوسانهای پلاسما}) \quad (143.4)$$

$$k \perp B_o : \omega^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2 = \omega_h^2 \quad (\text{نوسانهای آمیخته بالا}) \quad (144.4)$$

امواج یونی (الکتروستاتیک)

$$B_o = \circ \text{ یا } k \parallel B_o : \omega^2 = k^2 v_s^2 \\ = k^2 \frac{\gamma_e K T_e + \gamma_i K T_i}{M} \quad (\text{امواج آکوستیک}) \quad (145.4)$$

$$k \perp B_o : \omega^2 = \Omega_c^2 + k^2 v_s^2 \quad (\text{امواج سیکلوترونی یونی الکتروستاتیک}) \quad (146.4)$$

یا

$$\omega^2 = \omega_i^2 = \Omega_c \omega_c \quad (\text{نوسانهای آمیخته پایین}) \quad (147.4)$$

امواج الکترونی (الکترومغناطیسی)

$$B_o = \circ : \omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2 \quad (\text{امواج نور}) \quad (148.4)$$

$$k \perp B_o, E_{\parallel} \parallel B_o : \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (\text{موج } O) \quad (149.4)$$

$$k \perp B_0, E \perp B_0 : \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \omega_h^2}{\omega^2 - \omega_h^2} \quad (\text{موج } X) \quad (150.4)$$

$$k \parallel B_0 : \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2 / \omega^2}{1 - (\omega_c / \omega)} \quad (\text{موج } R) \quad (151.4)$$

(مد سوت زن)

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2 / \omega^2}{1 + (\omega_c / \omega)} \quad (\text{موج } L) \quad (152.4)$$

امواج یونی (الکترومغناطیسی)

$B_0 = 0$  : هیچ

$$k \parallel B_0 : \omega^2 = k^2 v_A^2 \quad (\text{موج آلفون}) \quad (153.4)$$

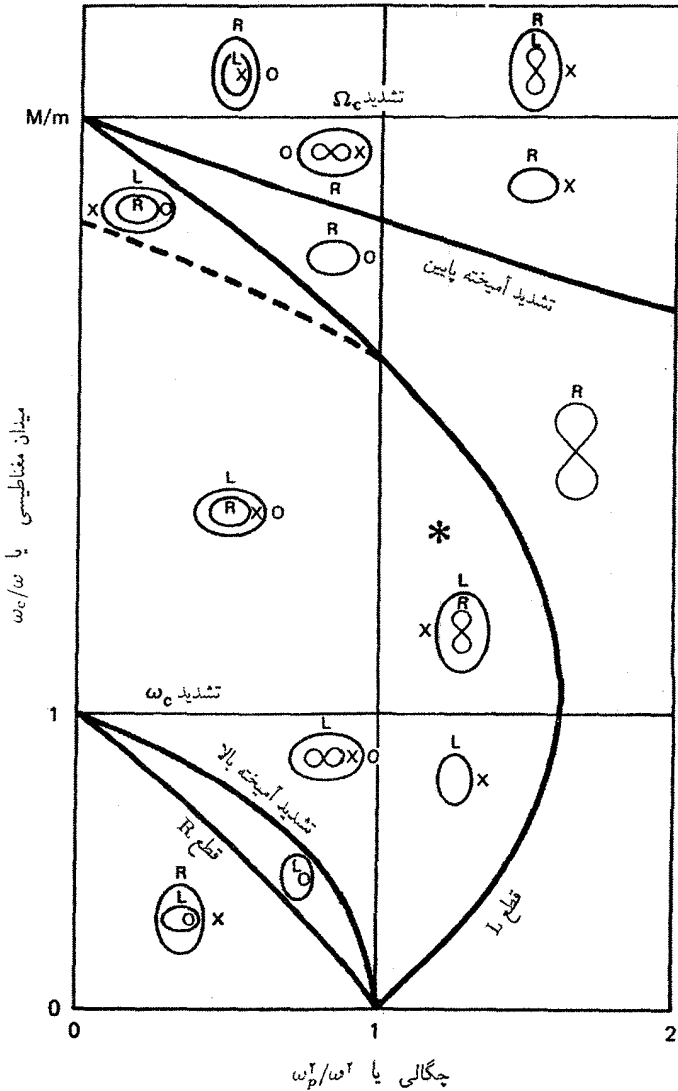
$$k \perp B_0 : \frac{\omega^2}{k^2} = c^2 \frac{v_s^2 + v_A^2}{c^2 + v_A^2} \quad (\text{موج مغناطوسوتی}) \quad (154.4)$$

این مجموعه روابط پاشیدگی مجموعه بسیار ساده شده‌ای است که تنها جهتهای اصلی انتشار را شامل می‌شود. با این همه، مجموعه معادلات بسیار سودمندی است که به عنوان چارچوب مرجعی برای بحث حرکت‌های موجی پیچیده تر باید به خاطر داشت. اغلب ممکن است یک وضعیت پیچیده را به صورت تغییر یا برهم نهش این مدهای اساسی نوسان بیان کرد.

## ۲۱.۴ نمودار CMA

هنگامی که انتشار تحت زاویه‌ای نسبت به میدان مغناطیسی صورت می‌گیرد، سرعت‌های فاز با زاویه تغییر می‌کنند. بعضی از مدهایی که با  $k \parallel B_0$  و  $k \perp B_0$  در بالا فهرست شده اند دائماً به یکدیگر تبدیل می‌شوند؛ مدهای دیگر به سادگی در زاویه بحرانی ناپدید می‌شوند. این اوضاع پیچیده با نمودار کلموف-مولالی-الیس (CMA)، که توسط تی. اچ. استیکس به افتخار مبتکرانش نامگذاری شده است، بسیار روشنتر می‌شود. این نمودار در شکل ۵۱.۴ نشان داده شده است. باید توجه کرد که نمودار CMA تنها برای پلاسماهای سرد، با  $T_i = T_e = 0$ ، معتبر است. گسترش به دماهای متناهی به قدری پیچیدگی وارد می‌کند که این نمودار دیگر مفید نیست.

شکل ۵۱.۴ ترسیم  $\omega_c / \omega$  بر حسب  $\omega_p^2 / \omega^2$  یا، معادل آن، میدان مغناطیسی بر حسب چگالی است. برای، هر سامند معین  $\omega$ ، هر وضعیت تجربی که با  $\omega_p$  و  $\omega_c$  مشخص شده باشد با نقطه‌ای



شکل ۵۱.۴ نمودار کلموند-مولالی-الیس (CMA) برای رده بندی امواج در پلاسما سرد.

روی نمودار نشان داده می شود. کل فضا با قطعه ها و تشدیدهایی که قبلاً دیدیم به بخشهایی تقسیم می شود. برای مثال، قطع موجی غیرعادی در  $\omega^2 = \omega_c^2 + \omega_p^2$  یک رابطه درجه دوم بین  $\omega_c/\omega$  و  $\omega_p^2/\omega^2$  است؛ سهمی حاصل به صورت منحنی «تشدید آمیخته بالا» در شکل ۵۱.۴ نشان داده شده است. این منحنیهای قطع و تشدید ناحیه های انتشار و غیرانتشار را برای امواج مختلف از

هم جدا می‌سازند. بنابراین، مجموعه‌های امواجی که در ناحیه‌های مختلف می‌توانند وجود داشته باشند متفاوت خواهند بود.

نمودار کوچک در هر ناحیه نه تنها نشان می‌دهد که کدام امواج در آن ناحیه وجود دارند بلکه چگونگی تغییرات سرعت فاز را با زاویه به‌طور کیفی نشان می‌دهد. میدان مغناطیسی را عمود بر نمودار فرض کرده‌ایم. فاصله از مرکز تا هر نقطه روی بیضی یا نماد 8 که با قائم زاویه  $\theta$  می‌سازد با سرعت فاز در آن زاویه نسبت به میدان مغناطیسی متناسب است. برای مثال، در ناحیهٔ مثلثی روی شکل ۵۱.۴ که با \* نشانگذاری شده است، می‌بینیم هنگامی که  $\theta$  از صفر تا  $\pi/2$  تغییر می‌کند موج  $L$  تبدیل به موج  $X$  می‌شود. موج  $R$  سرعتی کوچکتر از سرعت موج  $L$  دارد، و هنگامی که  $\theta$  از صفر تا  $\pi/2$  تغییر می‌کند از بین می‌رود. این موج به موج  $O$  تبدیل نمی‌شود، زیرا در آن ناحیه  $\omega_p^2 < \omega^2$  وجود ندارد.

ناحیه‌های بالایی نمودار CMA مربوط به  $\omega_e \ll \omega$  هستند. امواج یونی کم‌سامد در اینجا پیدا می‌شوند. چون در این نمودار از سرعت‌های گرمایی صرف‌نظر شده است، امواج یونی الکتروستاتیک ظاهر نمی‌شوند؛ این امواج تنها در پلاسمای گرم منتشر می‌شوند. می‌توان نمودار CMA را به‌عنوان یک «استخر پلاσμα» در نظر گرفت؛ سنگریزه‌ای که در هر ناحیه می‌افتد موجکهایی با شکلهای نشان داده شده به اطراف می‌فرستد.

## مسائل

۲۶.۴ تخلیهٔ الکتریکی هیدروژنی در یک میدان ۱ T چگالی  $10^{16} \text{m}^{-3}$  تولید می‌کند.

(الف) سرعت آلفون  $v_A$  چقدر است؟

(ب) فرض کنید  $v_A$  بزرگتر از  $c$  می‌شد. آیا این فرض بدین معنی است که امواج آلفون تندر از سرعت نور حرکت می‌کنند؟

۲۷.۴ سرعت آلفون را در ناحیه مغناطیس‌سپهر که در آن  $B = 10^{-8} \text{T}$ ،  $n = 10^8 \text{m}^{-3}$ ، و  $M = M_H = 1.67 \times 10^{-27} \text{kg}$  محاسبه کنید.

۲۸.۴ فرض کنید یک پلاسمای آزمایشگاهی با  $n = 10^{15} \text{m}^{-3}$  و  $B = 10^{-2} \text{T}$  تولید کرده‌اید. یک مولد علامت ۱۶۰ MHz را به کاوه‌ای که وارد پلاσμα کرده‌اید وصل می‌کنید.

(الف) نمودار CMA را ترسیم کنید و ناحیهٔ آزمایش را نشان دهید.

(ب) چه امواج الکترومغناطیسی در پلاσμα ممکن است برانگیخته و منتشر شوند؟

۲۹.۴ فرض کنید می‌خواهید آزمایشی طراحی کنید که در آن امواج آلفون پیشگی ساکن در یک



ستون پلاسمای استوانه‌ای تولید شود، به طوری که موج ساکن دارای دامنهٔ بیشینه‌ای در صفحهٔ میانی و گرهبایی در دو انتها باشد. برای برقراری شرط  $\omega \ll \Omega_e$ ، می‌توانید فرض کنید  $\omega = 0.1\Omega_e$ . (الف) اگر بتوانید یک پلاسمای هیدروژنی با  $n = 10^{14} \text{m}^{-3}$  و  $B = 1 \text{T}$  به‌وجود آورید، طول ستون چقدر باید باشد؟

(ب) اگر بخواهید همین کار را با یک ماشین  $Q$ ی  $3 \text{T}$  انجام دهید که در آن یونهای تکبار Cs دارای وزن اتمی ۱۳۳ و چگالی  $n = 10^{18} \text{m}^{-3}$  هستند، طول پلاسما چقدر باید باشد؟ راهنمایی: ضرایب مقیاس را مشخص کنید و از نتیجهٔ قسمت (الف) استفاده کنید.

۳۰.۴ یک تپ‌اختر طیف وسیعی از تابش الکترومغناطیسی گسیل می‌کند که توسط گیرنده‌ای که در حوالی  $f = 80 \text{MHz}$  کوک شده است آشکارسازی می‌شود. به‌خاطر پاشیدگی ناشی از پلاسمای بین ستاره‌ای در سرعت گروه، بسامد مشاهده‌شده در هر تپ با آهنگ  $df/dt = -5 \text{MHz/sec}$  تغییر می‌کند.

(الف) اگر میدان مغناطیسی بین ستاره‌ای قابل اغماض باشد و  $\omega_p^2 \gg \omega^2$ ، نشان دهید

$$\frac{df}{dt} \approx -\frac{c}{x} \frac{f^2}{f_p^2}$$

که در آن  $f_p$  بسامد پلاسما و  $x$  فاصله از تپ‌اختر است.

(ب) اگر میانگین چگالی الکترون در فضا  $2 \times 10^5 \text{m}^{-3}$  باشد، تپ‌اختر چقدر دور است؟ (متر  $1 = 3 \times 10^{16}$  پارسیک).

۳۱.۴ یک پلاسمای سه مؤلفه‌ای دارای چگالی الکترونی  $n_e$ ، چگالی  $n_i(1 - \epsilon)$  برای یونهای به جرم  $M_1$ ، و چگالی  $\epsilon n_e$  برای یونهای به جرم  $M_2$  است. فرض کنید  $T_{e1} = T_{e2} = 0$  و  $T_e \neq 0$ . (الف) رابطهٔ پاشیدگی برای امواج سیکلوترونی یونی الکتروستاتیک را به‌دست آورید.

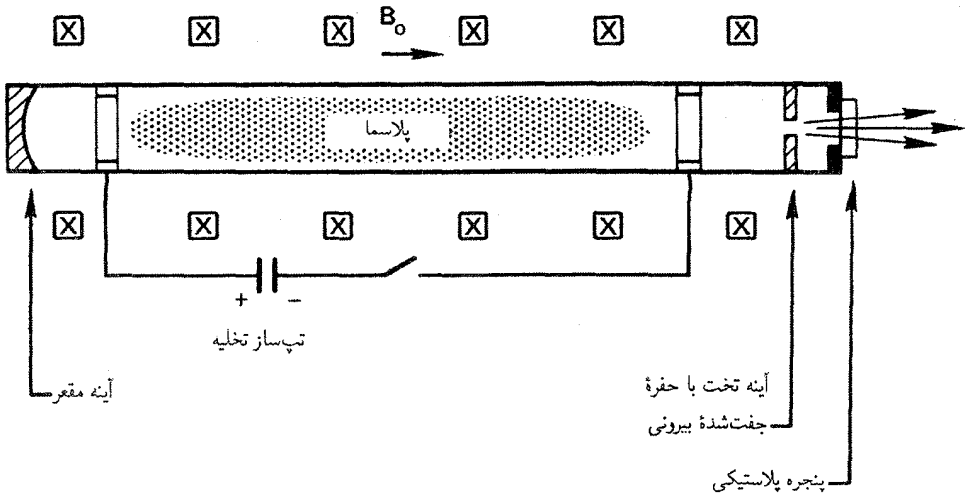
(ب) هنگامی که  $\epsilon$  کوچک است عبارت ساده‌ای برای  $\omega^2$  پیدا کنید.

(ج) بسامدهای موج را در موردی که  $\epsilon$  کوچک نیست محاسبه کنید: مخلوط  $50\% - 50\%$  از D-T در  $B_0 = 5 \text{T}$ ،  $KT_e = 10 \text{keV}$  و  $k = 1 \text{cm}^{-1}$ .

۳۲.۴ برای نوسان پلاسمای لانگمویر، نشان دهید که میانگین زمانی انرژی جنبشی الکترون در هر  $\text{m}^2$  برابر است با چگالی انرژی میدان الکتریکی  $\langle E^2 \rangle / 2\epsilon_0$ .

۳۳.۴ برای موج آلفون، نشان دهید که میانگین زمانی انرژی جنبشی یون در هر  $\text{m}^2$  برابر است با انرژی موج مغناطیسی  $\langle B^2 \rangle / 2\mu_0$ .

۳۴.۴ شکل ۳۴.۴ یک لیزر فروسرخ دور را نشان می‌دهد که در  $\lambda = 337 \mu\text{m}$  کار می‌کند.



شکل م ۳۴.۴ طرح نموداری یک لیزر پتی HCN

هنگامی که  $B_0 = 0$ ، این تابش هرگاه  $\omega_p$  کوچکتر از  $\omega$  باشد، یا  $n < n_e = 10^{22} \text{ m}^{-3}$ ، به آسانی به درون پلازما نفوذ می‌کند. اما، به علت طول مسیر بزرگ، اثر واتمرکز پلازما (مراجعه کنید به شکل ۳۰.۴) کاواک نوری را از بین می‌برد، و چگالی توسط شرایط  $\omega_p^2 < \epsilon \omega^2$ ، که در آن  $\epsilon \ll 1$ ، محدود می‌شود. به خاطر افزایش چگالی حد، و در نتیجه افزایش توان خروجی لیزر، یک میدان مغناطیسی  $B_0$  اضافه می‌شود.

(الف) هرگاه  $\epsilon$  تغییر نکند، نشان دهید که چگالی حد را می‌توان زیاد کرد اگر امواج قطبیده دایره‌ای چپگرد منتشر شوند.

(ب) اگر بخواهیم  $n$  دو برابر شود،  $B_0$  چه مقدار بزرگ باید باشد؟

(ج) نشان دهید که پلازما برای مد سوت‌زن یک عدسی همگراست.

(د) آیا می‌توان از مد سوت‌زن استفاده کرد و به چگالیهای خیلی زیادتر رسید؟

۳۵.۴ با استفاده از معادلات ماکسول و معادله حرکت الکترون، رابطهٔ پایداری را برای امواج نوری به دست آورید که درون پلاسمای تکدما، بی‌برخورد، غیرمغناطیسی و یکنواخت با چگالی  $n$  و دمای الکترونی متناهی  $T_e$  منتشر می‌شود (از حرکت یونها چشمپوشی کنید).

۳۶.۴ ثابت کنید هرگاه  $\mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 = 0$  امواج عرضی تحت تأثیر جمله  $\nabla p$  قرار نمی‌گیرند حتی اگر حرکت یونها هم در نظر گرفته شود.

۳۷.۴ میرایی یک موج عادی ناشی از بسامد برخورد ثابت  $\nu$  بین الکترونها و یونها را در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید رابطه پاشیدگی عبارت است از

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)}$$

(ب) برای امواج میرای زمانی ( $k$  حقیقی) هنگامی که  $\nu/\omega \ll 1$ ، نشان دهید که آهنگ میرایی  $\gamma = -\text{Im}(\omega)$  تقریباً برابر است با

$$\gamma = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\nu}{2}$$

(ج) برای امواج میرای فضایی ( $\omega$  حقیقی) هنگامی که  $\nu/\omega \ll 1$ ، نشان دهید که فاصله تضعیف  $\delta = (\text{Im}k)^{-1}$  تقریباً برابر است با

$$\delta = \frac{2c}{\nu} \frac{\omega^2}{\omega_p^2} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)^{1/2}$$

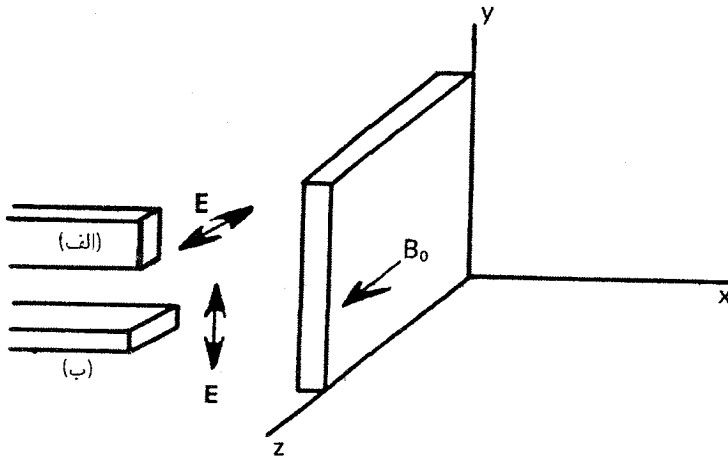
۳۸.۴ ساخت یک نیروگاه خورشیدی در فضا با مجموعه‌های عظیمی از سلولهای خورشیدی که نور خورشید را تمام ۲۴ ساعت در روز جمع‌آوری می‌کنند پیشنهاد شده است. توان تولیدشده در یک باریکه میکروموج به طول موج ۳۰ سانتیمتر به زمین منتقل می‌شود. می‌خواهیم تخمین بزنیم چه مقدار از توان در گرم کردن یون سپهر تلف می‌شود. با در نظر گرفتن یون سپهر به عنوان یک گاز یونیده ضعیف با بسامد برخورد الکترون-خشتی ثابت، چه کسری از توان باریکه در طی کردن ۱۰۰ km از پلاسما با  $n_e = 10^{11} \text{m}^{-3}$ ،  $n_n = 10^{16} \text{m}^{-3}$  و  $\bar{\sigma}v = 10^{-14} \text{m}^3/\text{sec}$  تلف می‌شود؟

۳۹.۴ رابطه پاشیدگی آلپتون-هارتتری برای امواج الکترومغناطیسی پربسامد که با زاویه  $\theta$  نسبت به میدان مغناطیسی منتشر می‌شوند عبارت است از

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{2\omega_p^2(1 - \omega_p^2/\omega^2)}{2\omega^2(1 - \omega_p^2/\omega^2) - \omega_c^2 \sin^2 \theta \pm \omega_c [\omega_c^2 \sin^2 \theta + 4\omega^2(1 - \omega_p^2/\omega^2)^2 \cos^2 \theta]^{1/2}}$$

در باره قطعها و تشدیدهای این معادله بحث کنید. کدام‌ها مستقل از  $\theta$  هستند؟

۴۰.۴ میکروموجهایی با طول موج  $\lambda$  مساوی با ۱ سانتیمتر در فضای آزاد به داخل تخته پلاسمایی به ضخامت ۱۰ cm که در آن چگالی و میدان مغناطیسی یکنواخت هستند و مقدار آنها به ترتیب برابر است با  $n_0 = 2.8 \times 10^{18} \text{m}^{-3}$  و  $B_0 = 1.7 \text{T}$  فرستاده می‌شود. تعداد طول موجهای



شکل م ۴۰.۴

داخل تخته پلازما را حساب کنید اگر (شکل م ۴۰.۴ را ببینید)

(الف) موجبر طوری قرار داده شود که  $E_1$  در جهت  $\hat{z}$  باشد.

(ب) موجبر طوری قرار داده شود که  $E_1$  در جهت  $\hat{y}$  باشد.

۴۱.۴ یک پلاسمای سرد از یونهای مثبت با بار  $Ze$  و جرم  $M_+$  و یونهای منفی با بار  $-e$  و جرم  $M_-$  تشکیل شده است. در حالت تعادل، هیچ میدان مغناطیسی یا الکتریکی و هیچ سرعتی وجود ندارد؛ و چگالی یونها به ترتیب  $n_{o+}$  و  $n_{o-} = Zn_{o+}$  هستند. رابطه پاشیدگی را برای امواج الکترومغناطیسی تخت به دست آورید.

۴۲.۴ امواج یونی در یک پلاسمای تخلیه گازی در مخلوطی از گازهای آرگون و هلیوم تولید می شوند.

پلازما دارای اجزای زیر است

(الف) الکترونها با چگالی  $n_o$  و دمای  $KT_e$ ؛

(ب) یونهای آرگون با چگالی  $n_A$ ، جرم  $M_A$ ، بار  $+Ze$  و دمای صفر؛ و

(ج) یونهای هلیوم با چگالی  $n_H$ ، جرم  $M_H$ ، بار  $+e$ ، و دمای صفر.

با استفاده از نظریه یک بعدی خطی شده با تقریب پلاسمایی و رابطه بولتزمن برای الکترونها عبارتی برای سرعت فاز امواج به دست آورید.

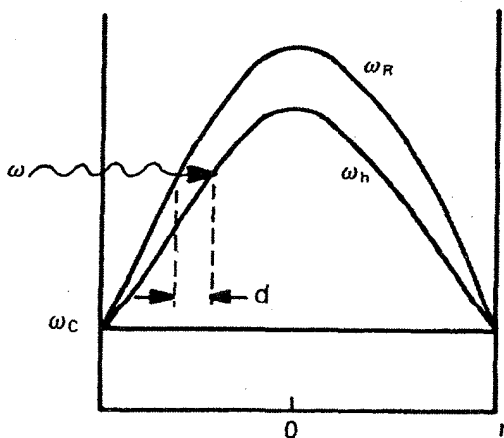
۴۳.۴ در یک ناحیه فضای دور، پلاسمایی وجود دارد که از یوزیترونها و هسته های پادفرمیم با بار  $-Ze$ ، که در آن  $Z = 100$ ، تشکیل شده است. از معادله های حرکت، پیوستگی و پواسون، یک رابطه پاشیدگی برای نوسانهای پلاسمایی در این پلازما که شامل حرکت های یونی است به دست

آورید. بسامدهای پلاسما را تعریف کنید. می‌توانید فرض کنید  $KT = 0$ ،  $B_0 = 0$ ، و سایر شرایط اولیه ساده‌کننده را در نظر بگیرید.

۴۴.۴ جانداران هوشمند روی سیاره‌ای در سحابی سرطان سعی می‌کنند با ما مخلوقات اولیه زمین ارتباط برقرار کنند. علامتهای رادیویی در گستره  $10^8$  تا  $10^9$  Hz دریافت می‌کنیم، اما طیف در ۱۲۰ MHz ناگهان متوقف می‌شود. با استفاده از اندازه‌گیرهای نوری، ممکن است یک حد بالا برابر با ۳۶ G برای میدان مغناطیسی اطراف ستاره مادر در نظر گرفت. اگر این ستاره در ناحیه HII (ناحیه‌ای که شامل هیدروژن یونیده است) قرار گرفته باشد، و اگر علامتهای رادیویی متحمل نوعی قطع در پلاسما آنجا شده باشد، حد پایین معقول برای چگالی پلاسما چیست؟ ( $G = 10^{-4} T$ )

۴۵.۴ یک سفینه فضایی در یون سپهر مشتری با سرعت  $10^6$  km/sec موازی با میدان مغناطیسی  $10^{-5} T$  حرکت می‌کند. اگر حرکت فوق صوتی باشد ( $v > v_s$ )، امواج شوک صوتی یونی تولید می‌شود. به علاوه، اگر حرکت فوق آلفونی باشد ( $v > v_A$ )، امواج شوک مغناطیسی نیز برانگیخته خواهند شد. ابزارهای سفینه تنها امواج نوع اول را نشان می‌دهند. حدودی برای چگالی پلاسما و دمای الکترون پیدا کنید و نشان دهید که آیا اینها حدهای بالا یا پایین هستند. فرض کنید یون سپهر مشتری شامل یونهای مولکولی تکبار سردی از  $H_2$ ، He،  $CH_4$ ،  $CO_2$  و  $NH_3$  با میانگین وزن اتمی ۱۰ باشد.

۴۶.۴ یک موج غیرعادی با بسامد  $\omega$  از بیرون به پلاسمایی می‌تابد. تغییر بسامد قطع سمت راستی  $\omega_R$  و فرکانس تشدید آمیخته بالای  $\omega_h$  نسبت به شعاع در شکل م ۴۶.۴ نشان داده شده‌اند. لایه گذرای وجود دارد که در آن موج نمی‌تواند منتشر شود. اگر گرادیان چگالی در نقطه‌ای که در آن



$\omega \approx \omega_h$  به صورت  $|\partial n / \partial r| \simeq n/r$  داده شده باشد، نشان دهید که  $d$  فاصله بین نقاط  $\omega = \omega_h$  و  $\omega = \omega_R$  تقریباً برابر است با  $d = (\omega_c / \omega) r_0$ .

۴۷.۴ با دادن یک گرادیان در  $B_0$ ، می‌توان تشدید آمیخته بالا را برای یک موج  $X$  که از بیرون پلاسما به درون آن فرستاده می‌شود تعیین کرد (مراجعه کنید به مسئله قبل).

(الف) روی نمودار  $\omega_c / \omega$  برحسب  $\omega_p^2 / \omega^2$  مسیر موج را که نشان می‌دهد چگونه از قطع  $\omega_R$  اجتناب می‌شود ترسیم کنید.

(ب) نشان دهید که تغییر لازم در  $B_0$  بین سطح پلاسما و لایه آمیخته بالا عبارت است از

$$\Delta B_0 = B_0 \omega_p^2 / 2\omega_c^2$$

۴۸.۴ یک موج پلاسمای معین دارای رابطه پاشیدگی زیر است

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\bar{\omega}_p^2}{\omega^2 - \omega_c \Omega_c + \frac{\omega^2 (\omega_c - \Omega_c)^2}{\bar{\omega}_p^2 - \omega^2 + \omega_c \Omega_c}}$$

که در آن  $\bar{\omega}_p^2 \equiv \omega_p^2 + \Omega_p^2$  عبارتهای صریحی برای بسامدهای قطع و تشدید (یا برای مجذور آنها) بنویسید، در حالی که  $\varepsilon \equiv m/M \ll 1$ .

۴۹.۴ موج غیرعادی با در نظر گرفتن حرکت یونها دارای رابطه پاشیدگی زیر است

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} - \frac{\Omega_p^2}{\omega^2 - \Omega_c^2} - \frac{\left( \frac{\omega_c}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} - \frac{\Omega_c}{\omega} \frac{\Omega_p^2}{\omega^2 - \Omega_c^2} \right)^2}{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} - \frac{\Omega_p^2}{\omega^2 - \Omega_c^2}}$$

(الف) نشان دهید که این رابطه با معادله مسئله قبل یکی است (اخطار: این مسئله ممکن است برای سلامت فکری شما خطرناک باشد).

(ب) اگر  $\omega_L$  و  $\omega_L$  بسامدهای قطع آمیخته پایین و سمت چپی این موج باشند، نشان دهید که ترتیب  $\omega_L \leq \omega_L \leq \Omega_c$  همواره برقرار است.

(ج) با استفاده از این نتایج و سرعت فاز معلوم در حد  $\omega \rightarrow 0$ ، نمودار کیفی  $v_{\phi}^2 / c^2$  برحسب  $\omega$  را ترسیم کنید که نواحی انتشار و گذرایی را نشان دهد.

۵۰.۴ می‌خواهیم گرمایش آمیختهٔ پایین را برای یک ستون پلاسمای هیدروژنی با  $\omega_p = 0$  در  $\omega = a$  و  $r = \frac{1}{4}\omega_c$  در مرکز، در یک میدان مغناطیسی یکنواخت، انجام دهیم. آنتن مربوط یک موج  $X$  با  $k_{||} = 0$  می‌فرستد.

(الف) نمودار کیفی  $\omega_c, \Omega_c, \omega_L$  و  $\omega_L$  را برحسب شعاع ترسیم کنید. لازم نیست این نمودار به مقیاس باشد ولی باید بزرگیهای نسبی این بسامدها را در کناره و مرکز پلاسما به‌طور صحیح نشان دهد.

(ب) ضخامت لایهٔ گذرای بین  $\omega_L$  و  $\omega_L$  را برآورد کنید. (مراجعه کنید به مسئلهٔ قبل) اگر بسامد رادیویی  $\omega$  را در مرکز پلاسما مساوی با  $\omega_L$  قرار دهیم.

(ج) قسمت‌های (الف) و (ب) را برای  $\omega_c = 2\omega_p$  (بیشینه) حل کنید، و نتیجه‌ای دربارهٔ این طرح آنتن بگیرید.

۵۱.۴ از موج سیکلوترونی یونی الکترومغناطیسی (موج استیکس) بعضی مواقع برای گرمایش رادیو بسامدی پلاسمای همجوشی استفاده می‌شود. رابطهٔ پاشیدگی را به شرح زیر به‌دست آورید.  
(الف) معادلهٔ موجی به‌صورت معادلهٔ ۱۱۸.۴ ولی با صرف‌نظر کردن از جریان جابه‌جایی به‌دست آورید.

(ب) با فرض  $k_x = 0$  و  $k^2 = k_y^2 + k_z^2$  و  $E_z \simeq 0$  مؤلفه‌های  $x$  و  $y$  این معادله را بنویسید.

(ج) برای محاسبهٔ  $n_i = n_0 e(v_i - v_e)$  هم‌ارز یونی معادلهٔ ۹۸.۴ را برای تعیین  $v_i$ ، برای تقریب‌گیری بسامد کم به قسمتی که  $v_e$  صرفاً سوق  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  باشد، به‌دست آورید.

(د) نتیجهٔ قسمت (ج) را در قسمت (ب) قرار دهید تا دو معادلهٔ همگن همزمان برای  $E_y$  و  $E_x$  با استفاده از تعریف  $\Omega_p$  در معادلهٔ ۴۹.۴، به‌دست آورید.

(ه) دترمینان را مساوی صفر قرار دهید و تا کمترین مرتبه برحسب  $\Omega_p$  حل کنید تا به‌دست آورید

$$\omega^2 = \Omega_c^2 \left[ 1 + \frac{\Omega_p^2}{c^2} \left( \frac{1}{k_z^2} + \frac{1}{k^2} \right) \right]^{-1}$$



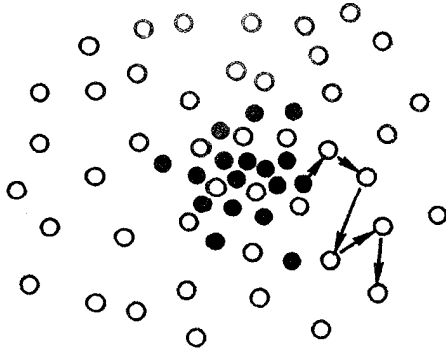
## پخش و مقاومت

### ۱.۵ پخش و تحرک در گازهای یونیده ضعیف

بدیهی است که پلاسمای نامتناهی همگن که در فصل قبل برای شرط تعادل در نظر گرفتیم تا حد زیادی آرمانی است. هر پلاسمای واقعی دارای گرادیان چگالی است، و پلازما تمایل دارد تا به طرف ناحیه‌های کم چگالی پخش شود. مسئله اصلی در واکنشهای گرمایسته‌ای کنترل شده کند کردن آهنگ پخش با استفاده از میدان مغناطیسی است. اما پیش از پرداختن به مسئله میدان مغناطیسی، مورد پخش در غیاب میدانهای مغناطیسی را بررسی می‌کنیم. اگر فرض کنیم که پلازما یونیده ضعیف است، به قسمی که ذرات باردار اصولاً با اتمهای خنثی برخورد می‌کنند نه با یکدیگر، نتایج به مراتب ساده‌تر می‌گردند. پلاسمای کاملاً یونیده را در یک بخش بعدی بررسی می‌کنیم، زیرا در این مورد به یک معادله غیرخطی می‌رسیم که برای آن جوابهای ساده و روشنگر اندکی وجود دارند. به هر حال، گازهای یونیده جزئی کم نیستند: قوسهای پرفشار و پلاسمای یون‌سپهری در این مقوله قرار می‌گیرند، و در اغلب کارهای اولیه روی تخلیه الکتریکی گاز، موردی که برخورد با اتمهای خنثی حاکم است، یونشهای نسبی بین  $10^{-3}$  و  $10^{-6}$  دخیل بودند.

بنابراین، تصویر عبارت است از توزیع نایکواختی از یونها و الکترونها در یک زمینه چگال از





شکل ۱.۵ پخش اتمهای گاز به علت برخوردهای کاتوره‌ای.

اتمهای خنثی (شکل ۱.۵). در حالی که پلازما در نتیجه گرادیان فشار و نیروهای میدان الکتریکی منبسط می‌شود، ذرات منفرد به علت برخوردهای مکرر با اتمهای خنثی گامبرداری کاتوره‌ای انجام می‌دهند. با مرور مختصری از تعاریف مربوط به نظریه اتمی شروع می‌کنیم.

### ۱.۱.۵ پارامترهای برخورد

هنگامی که مثلاً یک الکترون با یک اتم خنثی برخورد می‌کند ممکن است کسری از تکانه اولیه خود را از دست بدهد که بستگی به زاویه‌ای دارد که تحت آن منحرف می‌شود. در یک برخورد رودرو با یک اتم سنگین، الکترون می‌تواند دو برابر تکانه اولیه خود را از دست بدهد، زیرا علامت سرعتش بعد از برخورد معکوس می‌شود. احتمال اتلاف تکانه را می‌توان برحسب سطح مقطع معادل  $\sigma$ ، که اتمها خواهند داشت اگر جذب‌کننده کامل تکانه باشند، بیان کرد.

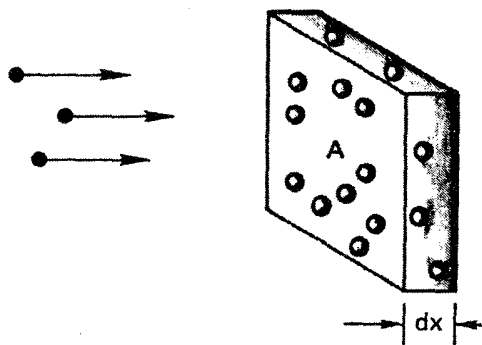
در شکل ۲.۵، الکترونها به ورقه نازکی به مساحت  $A$  و ضخامت  $dx$  که شامل  $n_n$  اتم خنثی در  $m^3$  است فرود می‌آیند. اتمها را کره‌های تاری با سطح مقطع  $\sigma$  در نظر می‌گیریم؛ یعنی، هرگاه الکترونی به درون سطحی که توسط اتم اشغال شده است برسد همه تکانه‌اش را از دست می‌دهد. تعداد اتمها در ورقه نازک عبارت است از

$$n_n A dx$$

کسری از ورقه نازک که توسط اتمها اشغال شده است برابر است با

$$n_n A \sigma dx / A = n_n \sigma dx$$

اگر شار الکترونیایی که به ورقه نازک فرود می‌آیند  $\Gamma$  باشد، شاری که از طرف دیگر خارج می‌شود



شکل ۲.۵ نمایش تعریف سطح مقطع.

عبارت است از

$$\Gamma' = \Gamma(1 - n_n \sigma dx)$$

بنابراین، تغییر  $\Gamma$  نسبت به فاصله برابر است با

$$d\Gamma/dx = -n_n \sigma \Gamma$$

یا

$$\Gamma = \Gamma_0 e^{-n_n \sigma x} \equiv \Gamma_0 e^{-x/\lambda_m} \quad (1.5)$$

در فاصله  $\lambda_m$  شار به  $1/e$  مقدار اولیه اش کاهش می‌یابد. کمیت  $\lambda_m$  عبارت است از مسافت آزاد میانگین برای برخوردها:

$$\lambda_m = 1/n_n \sigma \quad (2.5)$$

بعد از مسافت  $\lambda_m$ ، احتمال زیادی وجود دارد که ذره یک برخورد انجام دهد. زمان متوسط بین برخوردها، برای ذراتی با سرعت  $v$ ، با رابطه زیر داده می‌شود

$$\tau = \lambda_m/v$$

و بسامد متوسط برخوردها عبارت است از

$$\tau^{-1} = v/\lambda_m = n_n \sigma v \quad (3.5)$$

اکنون اگر روی ذراتی که دارای تمام سرعت‌های  $v$  در یک توزیع ماکسولی هستند میانگین بگیریم، کمیتی را که معمولاً بسامد برخورد  $\nu$  نامیده می‌شود به دست می‌آوریم

$$\nu = n_n \bar{\sigma v} \quad (۴.۵)$$

### ۲.۱.۵ پارامترهای پخش

معادله حرکت سیال با احتساب برخوردها، برای هرگونه‌ای، عبارت است از

$$mn \frac{d\mathbf{v}}{dt} = mn \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \pm en \mathbf{E} - \nabla p - mn \nu \mathbf{v} \quad (۵.۵)$$

که در آن  $\pm$  علامت بار را نشان می‌دهد. فرایند میانگین‌گیری برای محاسبه  $\nu$  به قسمی است که معادله ۵.۵ برقرار باشد؛ نیازی به پرداختن به جزئیات این محاسبه نداریم. با این حال، کمیت  $\nu$  باید ثابت در نظر گرفته شود تا معادله ۵.۵ مفید واقع شود. یک حالت پایا در نظر خواهیم گرفت که در آن  $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$ . اگر  $\mathbf{v}$  به اندازه کافی کوچک (یا  $\nu$  به اندازه کافی بزرگ) باشد، عنصر سیال در زمان برخورد به ناحیه‌های مربوط به  $\nabla p$  و  $\mathbf{E}$ ی مختلف نمی‌رود، و مشتق همرفتی  $d\mathbf{v}/dt$  نیز صفر خواهد شد. برای پلاسمای تک‌دما، با قرار دادن سمت چپ معادله ۵.۵ برابر صفر، داریم

$$\mathbf{v} = \frac{1}{mn\nu} (\pm en \mathbf{E} - KT \nabla n) \quad (۶.۵)$$

$$= \pm \frac{e}{m\nu} \mathbf{E} - \frac{KT}{m\nu} \frac{\nabla n}{n}$$

ضرایب بالا را ضریب پخش و تحرک می‌نامیم:

$$\boxed{\mu \equiv |q|/m\nu} \quad \text{تحرک} \quad (۷.۵)$$

$$\boxed{D \equiv KT/m\nu} \quad \text{ضریب پخش} \quad (۸.۵)$$

این کمیتها برای گونه‌ها متفاوت‌اند. توجه کنید که  $D$  برحسب  $\text{m}^2/\text{sec}$  اندازه‌گیری می‌شود. ضرایب ترابری  $\mu$  و  $D$  با رابطه اینشتین به هم مربوط می‌شوند:

$$\boxed{\mu = |q|D/KT} \quad (۹.۵)$$

با این تعاریف، شار و  $\Gamma_j$  مربوط به گونهٔ  $j$  ام را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\Gamma_j = n v_j = \pm \mu_j n \mathbf{E} - D_j \nabla n \quad (۱۰.۵)$$

قانون پخش فیک مورد خاصی از این رابطه است، که زمانی رخ می‌دهد که یا  $\mathbf{E} = 0$  یا ذرات باردار نباشند و در نتیجه  $\mu = 0$ :

$$\Gamma = -D \nabla n \quad \text{قانون فیک} \quad (۱۱.۵)$$

این معادله بیانگر آن است که پخش صرفاً یک فرایند گامزنی کاتوره‌ای است، که در آن شار خالص از نواحی چگال به نواحی کمتر چگال به این دلیل ساده روی می‌دهد که ذرات بیشتری در ناحیهٔ چگال به راه می‌افتند. این شار به طور واضح با گرادین چگالی متناسب است. در پلازماها الزاماً از قانون فیک تبعیت نمی‌شود. به علت امکان حرکت‌های سازمان یافته (امواج پلازما)، پلازما ممکن است به نحوی پخش شود که واقعاً کاتوره‌ای نباشد.

## ۲.۵ واپاشی پلازما توسط پخش

### ۱.۲.۵ پخش همدوقطبی

اکنون چگونگی واپاشی پلاسمای به وجود آمده در یک ظرف را به علت پخش به طرف دیواره‌ها بررسی می‌کنیم. همین که یونها و الکترون‌ها به دیواره می‌رسند باز ترکیب می‌شوند. بنابراین، چگالی نزدیک دیوار اساساً صفر است. معادله‌های حرکت و پیوستگی سیال بر رفتار پلازما حاکم‌اند؛ اما اگر واپاشی کند باشد، در معادلهٔ پیوستگی تنها کافی است مشتق زمانی را نگه داریم. در معادلهٔ حرکت، معادلهٔ ۵.۵، مشتق زمانی به شرطی قابل اغماض خواهد بود که بسامد برخورد  $\nu$  بزرگ باشد. بنابراین داریم

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \Gamma_j = 0 \quad (۱۲.۵)$$

که در آن  $\Gamma_j$  توسط معادلهٔ ۱۰.۵ داده می‌شود. واضح است که اگر  $\Gamma_e$  و  $\Gamma_i$  مساوی نباشد، به زودی یک نابرابری بزرگ بار به وجود می‌آید. اگر پلازما خیلی بزرگتر از طول دمای باشد باید شبه خنثی باشد؛ و انتظار می‌رود که آهنگهای پخش یونها و الکترون‌ها طوری خود را تنظیم کنند که دو گونه با یک آهنگ خارج شوند. به آسانی می‌توان دید که این امر چگونه اتفاق می‌افتد. الکترون‌ها که سبکتر هستند سرعت‌های گرمایی بیشتری دارند و سعی می‌کنند قبل از یونها پلازما را ترک کنند. بار مثبتی به جا می‌ماند، و میدان الکتریکی

ناشی از این قطبیت چنان است که اتلاف الکترونها را به تأخیر می‌اندازد و اتلاف یونها را تسریع می‌کند. میدان الکتریکی لازم  $\mathbf{E}$  با قرار دادن  $\Gamma_i = \Gamma_e = \Gamma$  پیدا می‌شود. از معادله ۱۰.۵، می‌توانیم بنویسیم

$$\Gamma = \mu_i n \mathbf{E} - D_i \nabla n = -\mu_e n \mathbf{E} - D_e \nabla n \quad (۱۳.۵)$$

$$\mathbf{E} = \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{\nabla n}{n} \quad (۱۴.۵)$$

بنابراین، شار مشترک  $\Gamma$  به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \Gamma &= \mu_i \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \nabla n - D_i \nabla n \\ &= \frac{\mu_i D_i - \mu_i D_e - \mu_i D_i - \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \nabla n \\ &= -\frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \nabla n \end{aligned} \quad (۱۵.۵)$$

این قانون فیک است با ضریب پخش جدید

$$D_a \equiv \frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \quad (۱۶.۵)$$

که آن را ضریب پخش همدوقطبی می‌نامیم. اگر این ضریب ثابت باشد، معادله ۱۲.۵ به صورت ساده‌تر زیر در می‌آید

$$\partial n / \partial t = D_a \nabla_n^2 \quad (۱۷.۵)$$

اگر  $\mu_e$  را خیلی بزرگتر از  $\mu_i$  بگیریم مقدار  $D_a$  را می‌توانیم تخمین بزنیم. درستی این کار را می‌توان از معادله ۷.۵ دید.  $\mu$  متناسب با  $m^{-1/2}$  است زیرا  $\nu$  متناسب است با سرعت گرمایی که متناسب با  $m^{-1/2}$  است. بنابراین، از معادله‌های ۱۶.۵ و ۹.۵ به دست می‌آوریم

$$D_a \approx D_i + \frac{\mu_i}{\mu_e} D_e = D_i + \frac{T_e}{T_i} D_i \quad (۱۸.۵)$$

برای  $T_e = T_i$  داریم

$$D_a \approx 2D_i \quad (۱۹.۵)$$

میدان الکتریکی همدوقطبی آهنگ پخش یونها را دو برابر می‌کند، ولی آهنگ پخش دوگونه با هم اساساً توسط گونه کندتر کنترل می‌شود.

### پخش در ورقه نازک

معادله پخش ۱۷.۵ را می‌توان به‌سادگی با روش جداسازی متغیرها حل کرد. فرض می‌کنیم

$$n(\mathbf{r}, t) = T(t)S(\mathbf{r}) \quad (20.5)$$

که در نتیجه آن از معادله ۱۷.۵، با حذف شاخص  $D_a$  داریم

$$S \frac{dT}{dt} = DT \nabla^2 S \quad (21.5)$$

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \frac{D}{S} \nabla^2 S \quad (22.5)$$

چون سمت چپ تابعی است از زمان به تنهایی و سمت راست هم تنها تابعی از مکان است، هر دو آنها باید مساوی یک مقدار ثابت باشند، که آن را  $1/\tau$  می‌نامیم. بنابراین، تابع  $T$  در معادله زیر صدق می‌کند

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{T}{\tau} \quad (23.5)$$

که جواب آن عبارت است از

$$T = T_0 e^{-t/\tau} \quad (24.5)$$

قسمت فضایی  $S$  از معادله زیر تبعیت می‌کند

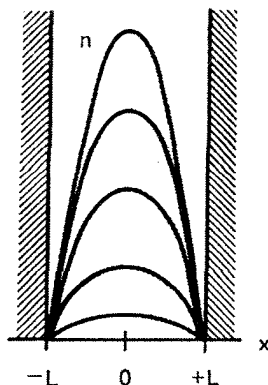
$$\nabla^2 S = -\frac{1}{D\tau} S \quad (25.5)$$

با توجه به هندسه ورقه نازک، این معادله به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{d^2 S}{dx^2} = -\frac{1}{D\tau} S \quad (26.5)$$

با جواب

$$S = A \cos \frac{x}{(D\tau)^{1/2}} + B \sin \frac{x}{(D\tau)^{1/2}} \quad (27.5)$$



شکل ۳.۵ چگالی پلازما در زمانهای مختلف هنگامی که توسط پخش به طرف دیواره‌ها واپاشیده می‌شود.

انتظار داریم چگالی در دیواره‌ها تقریباً صفر باشد (شکل ۳.۵) و دست‌کم یک قله در بین آنها داشته باشد. ساده‌ترین جواب این است که دارای یک بیشینه باشد. بنابه تقارن، می‌توانیم جمله فرد (سینوسی) را در معادله ۲۷.۵ رد کنیم. بنابراین، شرایط مرزی  $S = 0$  در  $x = \pm L$  ایجاب می‌کنند که

$$\frac{L}{(D\tau)^{1/2}} = \frac{\pi}{2}$$

یا

$$\tau = \left(\frac{2L}{\pi}\right)^2 \frac{1}{D} \quad (28.5)$$

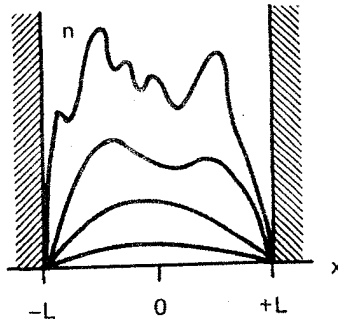
از ترکیب معادله‌های ۲۰.۵، ۲۴.۵، ۲۷.۵ و ۲۸.۵ داریم

$$n = n_0 e^{-t/\tau} \cos \frac{\pi x}{2L} \quad (29.5)$$

این را پایین‌ترین مد پخش می‌نامند. توزیع چگالی کسینوسی است، و قله چگالی به‌طور نمایی با زمان واپاشیده می‌شود. ثابت زمانی  $\tau$  با  $L$  افزایش می‌یابد، و چنانکه باید، به‌طور معکوس با  $D$  تغییر می‌کند.

البته، مدهای بالاتر پخش با بیش از یک قله وجود دارند. فرض کنید توزیع چگالی اولیه مانند منحنی بالایی در شکل ۴.۵ باشد. چنین توزیع دلخواهی را می‌توان به‌صورت رشته فوریه بسط داد:

$$n = n_0 \left( \sum_l a_l \cos \frac{(l + \frac{1}{2})\pi x}{L} + \sum_m b_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \quad (30.5)$$



شکل ۴.۵ واپاشی یک پلاسمای ابتدا نایکنواخت، که نشان می‌دهد مدهای پخش مرتبه‌های بالاتر سریعاً ناپدید می‌شوند.

شاخصها را طوری انتخاب کرده‌ایم که شرط مرزی در  $x = \pm L$  خودبه‌خود برقرار باشد. برای بررسی وابستگی زمانی، می‌توانیم جوابی را به‌صورت زیر امتحان کنیم

$$n = n_0 \left( \sum_l a_l e^{-t/\tau_l} \cos \frac{(l + \frac{1}{4})\pi x}{L} + \sum_m b_m e^{-t/\tau_m} \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \quad (31.5)$$

با جاگذاری این جواب در معادله پخش ۱۷.۵، می‌بینیم که هر جمله کسینوس رابطه‌ای به‌صورت زیر به‌دست می‌دهد

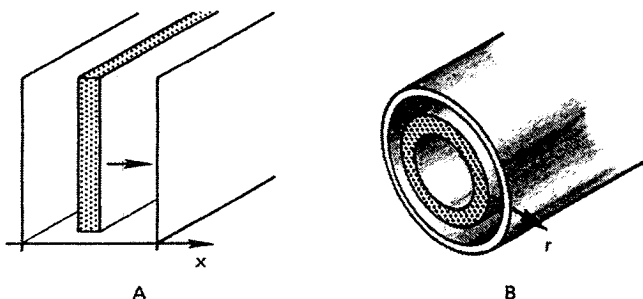
$$-\frac{1}{\tau_l} = -D \left[ \left( l + \frac{1}{4} \right) \frac{\pi}{L} \right]^2 \quad (32.5)$$

و روابط مشابهی برای جمله‌های سینوس داریم. بنابراین، ثابت زمانی واپاشی برای مد  $l$ ام با رابطه زیر داده می‌شود

$$\tau_l = \left[ \frac{L}{(l + \frac{1}{4})\pi} \right]^2 \frac{1}{D} \quad (33.5)$$

ساختار ریزدانه‌ای توزیع چگالی، متعلق به اعداد بزرگ  $l$ ، با ثابت زمانی کوچکتر  $\tau_l$ ، سریعتر واپاشیده می‌شود. روند واپاشی پلازما به‌صورتی است که در شکل ۴.۵ نشان داده شده است. ابتدا ساختار ریز توسط پخش از بین می‌رود. سپس به پایین‌ترین مد پخش، توزیع ساده کسینوسی شکل ۳.۵، می‌رسیم. نهایتاً، در حالی که نمایه چگالی پلازما شکل خود را حفظ می‌کند قله چگالی به واپاشی ادامه می‌دهد.





شکل ۵.۵ حرکت بره پلاسما در هندسه قائم و استوانه‌ای، که اختلاف بین تابع کسینوسی و بسلی را نشان می‌دهد.

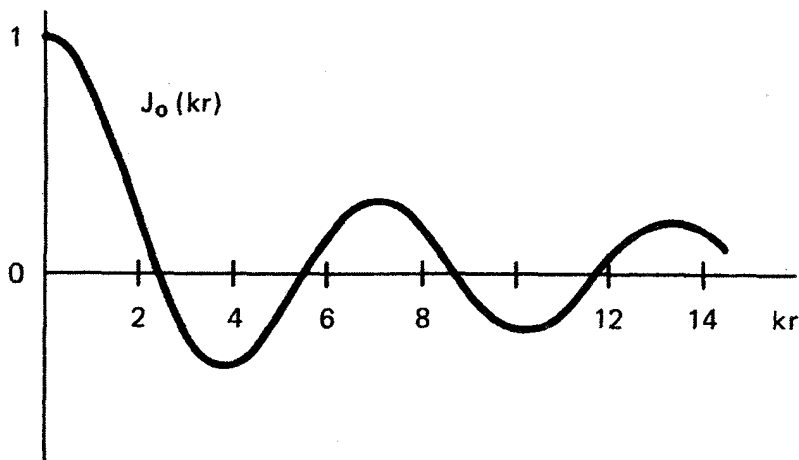
### ۳.۲.۵ پخش در یک استوانه

قسمت فضایی، معادله پخش، معادله ۲۵.۵، در هندسه استوانه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود

$$\frac{d^2 S}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dS}{dr} + \frac{1}{D\tau} S = 0 \quad (34.5)$$

تفاوت این معادله با معادله ۲۶.۵ به علت اضافه شدن جمله وسط است، که صرفاً تغییر در مختصات را بیان می‌کند. نیاز به جمله اضافی به طور ساده در شکل ۵.۵ نشان داده شده است. اگر یک بره از پلاسما در (A) بدون آنکه بتواند منبسط شود به طرف  $x$  های بزرگتر حرکت کند، چگالی ثابت باقی می‌ماند. از سوی دیگر، اگر پوسته‌ای از پلاسما در (B) به طرف  $r$  های بزرگتر با ثابت نگه داشتن ضخامت پوسته حرکت کند، چگالی الزاماً به صورت  $1/r$  کاهش می‌یابد. در نتیجه انتظار می‌رود جواب معادله ۳۴.۵ شبیه یک کسینوس میرا باشد (شکل ۶.۵). این تابع را تابع بسلی مرتبه صفر می‌نامند و معادله ۳۴.۵ معادله بسلی (مرتبه صفر) است. این تابع را با نماد  $J_0$ ، به جای نماد  $\cos$ ، نشان می‌دهند. تابع  $J_0(r/[D\tau]^{1/2})$  جواب معادله ۳۴.۵ است، عیناً همان‌گونه که  $\cos[x/(D\tau)^{1/2}]$  جواب معادله ۲۶.۵ است. هم  $\cos kx$  و هم  $J_0(kr)$  بر حسب رشته‌های نامتناهی قابل بیان هستند و می‌توان آنها را در جدولهای ریاضی پیدا کرد. متأسفانه، توابع بسلی هنوز در ماشین حسابهای دستی یافت نمی‌شوند.

برای برقرار کردن شرط مرزی  $n = 0$  در  $r = a$ ، باید  $a/(D\tau)^{1/2}$  را برابر با اولین صفر  $J_0$ ، یعنی ۲.۴، قرار دهیم. با این کار ثابت زمانی و پاشی  $\tau$  را به دست می‌آوریم. پلاسما در این مورد نیز به طور نمایی واپاشیده می‌شود زیرا قسمت زمانی معادله پخش، معادله ۲۳.۵، تغییر نمی‌کند. ما



شکل ۶.۵ تابع بسل مرتبه صفر.

پایین‌ترین مد پخش را در یک استوانه توصیف کرده‌ایم. مدهای بالاتر پخش، با بیش از یک بیشینه در استوانه، به صورت توابع بسل مرتبه‌های بالاتر داده می‌شوند، که تشابه مستقیم با مورد هندسه تخت دارد.

### ۳.۵ جوابهای حالت پایا

در بیشتر آزمایشها، پلاسما را از طریق یونش دائمی یا تزریق پلاسما، برای جبران اتلافها، در حالت پایا نگه می‌دارند. برای محاسبه نمایه چگالی در این مورد، باید یک جمله چشمه به معادله پیوستگی اضافه کنیم:

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D\nabla^2 n = Q(\mathbf{r}) \quad (۳۵.۵)$$

علامت طوری انتخاب می‌شود که هنگامی که  $Q$  مثبت است نمایشگر یک چشمه باشد و به  $\partial n / \partial t$  مثبت افزوده شود. در حالت پایا، قرار می‌دهیم  $\partial n / \partial t = 0$  و معادله‌ای از نوع پواسون برای  $n(\mathbf{r})$  خواهیم داشت.

### ۱.۳.۵ تابع یونش ثابت

در بیشتر گازهای کم‌یونش، یونش توسط الکترونهای پراثری در انتهای توزیع ماکسولی تولید می‌شود. در این مورد، جمله چشمه  $Q$  با چگالی الکترون  $n$  متناسب است. با قرار دادن  $Q = Zn$ ، که در

آن  $Z$  «تابع یونش» است، داریم

$$\nabla^2 n = -(Z/D)^n \quad (36.5)$$

این معادله همانند معادله ۲۵.۵ برای  $S$  است. در نتیجه، نمایه چگالی همانند مورد واپاشی پلاسما یک تابع بسط یا تابع کسینوسی است با این تفاوت که در این مورد چگالی ثابت باقی می ماند. توسط یک چشمه گرمایی که دمای الکترون را در مقدار ثابت خودش نگه می دارد و با وارد کردن تعداد کمی اتم خنثی برای پر کردن جای اتمهایی که یونیده شده اند، پلاسما در مقابل اتلافهای پخش برقرار می ماند.

### ۲.۳.۵ چشمه تخت

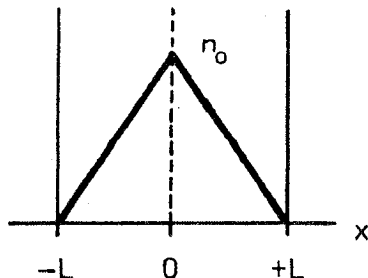
اکنون می خواهیم بررسی کنیم که در هندسه ورقه‌ای اگر یک چشمه جابگزیده روی صفحه  $x = 0$  قرار داشته باشد چه نمایه‌ای به دست می آید. برای مثال، این چشمه می تواند باریکه‌ای از نور فرابنفش که با عبور از شکاف همخط شده است، و با شدت کافی برای یونیده کردن گاز خنثی، باشد. بنابراین، معادله پخش حالت پایا عبارت است از

$$\frac{d^2 n}{dx^2} = -\frac{Q}{D}\delta(x) \quad (37.5)$$

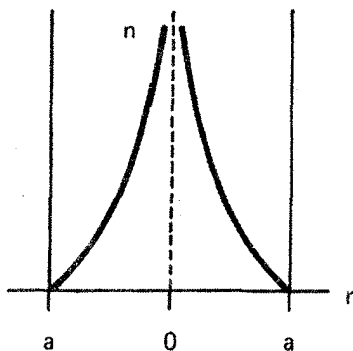
به استثنای نقطه  $x = 0$ ، چگالی باید در  $\partial^2 n / \partial x^2 = 0$  صدق کند. واضح است که این معادله دارای جواب زیر است (شکل ۷.۵)

$$n = n_0 \left( 1 - \frac{|x|}{L} \right) \quad (38.5)$$

پلاسما یک نمایه خطی دارد. ناپیوستگی شیب در مکان چشمه مشخصه چشمه‌های تابع  $\delta$  است.



شکل ۷.۵ نمایه چگالی مثلی که از چشمه تخت به علت پخش نتیجه می شود.



شکل ۸.۵ نمایه چگالی لگاریتمی حاصل از چشمه خطی تخت پخش.

### ۳.۳.۵ چشمه خطی

سرانجام، یک پلاسمای استوانه‌ای با چشمه‌ای واقع بر محور آن را در نظر می‌گیریم. چنین چشمه‌ای، برای مثال، ممکن است باریکه‌ای از الکترونهای پراکنده باشد که یونشی در امتداد محور تولید می‌کنند. به استثنای  $r = 0$ ، چگالی باید در معادله زیر صدق کند

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial n}{\partial r} \right) = 0 \quad (39.5)$$

جوابی که در  $r = a$  صفر می‌شود عبارت است از

$$n = n_0 \ln(a/r) \quad (40.5)$$

چگالی در  $r = 0$  بینهایت می‌شود (شکل ۸.۵)؛ تعیین دقیق چگالی نزدیک محور بدون در نظر گرفتن پهنای متناهی چشمه امکان‌پذیر نیست.

### ۴.۵ باز ترکیب

هنگامی که یک یون و یک الکترون با هم برخورد می‌کنند، خصوصاً در سرعت نسبی کم، احتمال دارد که از باز ترکیب آنها یک اتم خنثی به وجود آید. برای پایستگی تکانه، جسم سومی باید حضور داشته باشد. اگر این جسم سوم یک فوتون گسیل شده باشد، فرایند را باز ترکیب تابشی می‌نامند. اگر جسم سوم یک ذره باشد فرایند را باز ترکیب سه جسمی گویند. اتلاف پلازما به علت باز ترکیب را می‌توان با یک جمله چشمه منفی در معادله پیوستگی نمایش داد. واضح است که این جمله با  $n_e n_i = n^2$  متناسب خواهد بود. بنابراین، معادله پیوستگی در غیاب جملات پخش به صورت زیر درمی‌آید

$$\partial n / \partial t = -\alpha n^2 \quad (۴۱.۵)$$

ثابت تناسب  $\alpha$  را ضریب بازترکیب گویند و واحد آن  $m^3/sec$  است. معادله ۴۱.۵ یک معادله غیرخطی برای  $n$  است. این نشان می‌دهد که روش مستقیمی برای برقراری شرایط اولیه و شرایط مرزی از طریق برهم‌نهش جوابها وجود ندارد. خوشبختانه، معادله ۴۱.۵ چنان معادله غیرخطی ساده‌ای است که جواب آن را می‌توان با جستجو پیدا کرد. جواب عبارت است از

$$\frac{1}{n(r, t)} = \frac{1}{n_0(r)} + \alpha t \quad (۴۲.۵)$$

که در آن  $n_0(r)$  توزیع چگالی اولیه است. به آسانی دیده می‌شود که این جواب در معادله ۴۱.۵ صدق می‌کند. بعد از آنکه چگالی به خیلی کمتر از مقدار اولیه‌اش کاهش یافت، به‌طور معکوس نسبت به زمان واپاشیده می‌شود:

$$n \propto 1/\alpha t \quad (۴۳.۵)$$

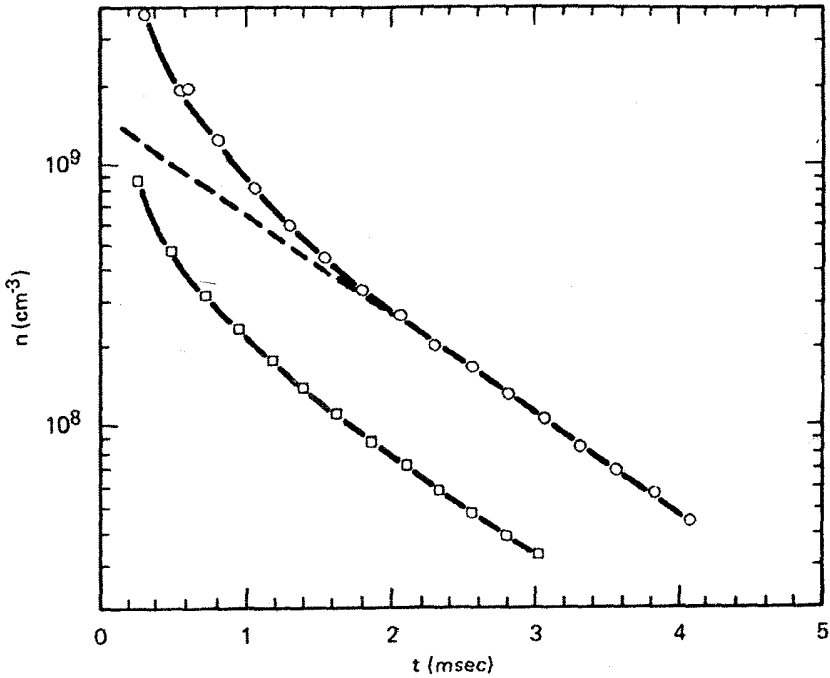
این رفتار با مورد پخش، که به‌صورت نمایی با زمان تغییر می‌کند، به‌طور اساسی متفاوت است. شکل ۹.۵ نتایج اندازه‌گیریهای واپاشی چگالی را در پستاب پلاسمای کم‌پوش  $H$  نشان می‌دهد. هنگامی که چگالی زیاد، بازترکیب، که متناسب با  $n^2$  است، غالب است، و چگالی به‌طور معکوس واپاشیده می‌شود. بعد از آنکه چگالی به مقدار اندکی رسید، پخش غالب می‌شود، و واپاشی از آن پس نمایی است.

## ۵.۵ پخش در عرض میدان مغناطیسی

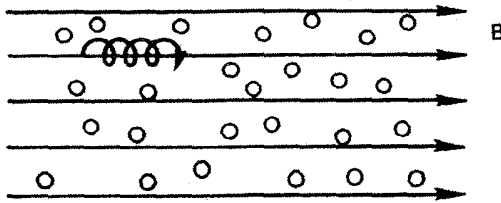
آهنگ اتلاف پلازما توسط پخش را می‌توان با میدان مغناطیسی کاهش داد؛ این در واقع مسئله محصورسازی است که در تحقیق همجوشی کنترل‌شده بررسی می‌شود. یک پلاسمای کم‌پوش در یک میدان مغناطیسی را در نظر بگیرید (شکل ۱۰.۵). ذرات باردار توسط پخش و تحرک مطابق معادله ۱۰.۵ در امتداد  $B$  حرکت خواهند کرد، زیرا  $B$  روی حرکت در راستای موازی میدان اثر نمی‌گذارد. بنابراین، برای هر یک از گونه‌ها داریم

$$\Gamma_z = \pm \mu n E_z - D \frac{\partial n}{\partial z} \quad (۴۴.۵)$$

اگر برخوردی وجود نمی‌داشت، ذرات در راستای عمودی اصلاً پخش نمی‌شدند هر ذره به چرخش



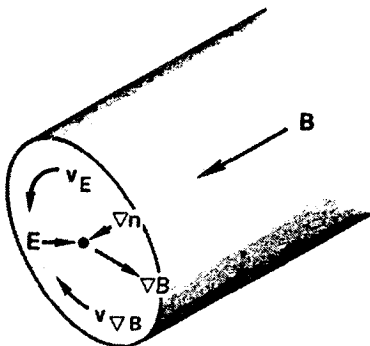
شکل ۹.۵ منحنیهای واپاشی چگالی پلاسمای کم یونش به علت بازترکیب و پخش.



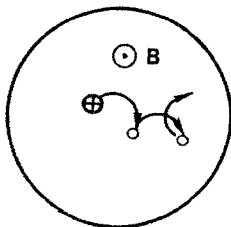
شکل ۱۰.۵ ذره باردار در میدان مغناطیسی حول یک خط نیرو می چرخد تا وقتی که برخوردی انجام شود.

حول خط نیروی یکسانی ادامه می داد. البته، به علت میدانهای الکتریکی یا گرادیانهای در  $B$  سوپهای ذره در عرض  $B$  وجود دارند، اما می توان ترتیبی داد که این سوپها موازی دیواره ها باشند. برای مثال، در یک استوانه کاملاً متقارن (شکل ۱۱.۵)، همه گرادیانها در راستای شعاعی هستند، به قسمی که سوپهای مرکز راهنما در راستای سمتی هستند. در نتیجه، این سوپها بی ضرر خواهند بود.

هنگامی که برخورد وجود دارد، ذرات در عرض  $B$  در امتداد گرادیانها به طرف دیواره ها حرکت



شکل ۱۱.۵ سوجهای ذره در یک ستون پلاسمای متقارن استوانه‌ای موجب اتلاف نمی‌شود.



شکل ۱۲.۵ پخش ذرات چرخش‌کننده توسط برخورد با اتمهای خنثی.

می‌کنند. این حرکت به صورت یک فرایند کاتوره‌ای انجام می‌شود (شکل ۱۲.۵). مثلاً وقتی یک یون با یک اتم خنثی برخورد می‌کند، بعد از برخورد یون در راستای دیگری حرکت می‌کند. یون به چرخش حول میدان مغناطیسی در همان جهت ادامه می‌دهد، ولی فاز چرخش آن به‌طور ناپیوسته‌ای تغییر کرده است. (شعاع لارمور هم ممکن است تغییر کند، ولی فرض می‌کنیم که یون به‌طور متوسط انرژی از دست نمی‌دهد یا به‌دست نمی‌آورد.)

بنابراین، مرکز راهنما در یک برخورد تغییر مکان می‌دهد و متحمل گامزنی کاتوره‌ای می‌شود. ذرات در خلاف جهت  $\nabla n$  پخش خواهند شد. طول گام در این گامزنی کاتوره‌ای برخلاف پخش آزاد از میدان مغناطیسی  $\lambda_m$  نیست، بلکه اندازه شعاع لارمور  $r_L$  را دارد. بنابراین، پخش در عرض  $B$  را می‌توان با کاهش دادن  $r_L$ ، یعنی با افزایش  $B$ ، کندتر ساخت.

برای آنکه ببینیم این عمل چگونه انجام می‌گیرد، مؤلفه عمودی معادله حرکت سیال را برای هر یک از گونه‌ها به صورت زیر می‌نویسیم:

$$mn \frac{dv_{\perp}}{dt} = \pm en(\mathbf{E} + \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}) - KT \nabla n - mn \mathbf{v} \mathbf{v} = 0 \quad (45.5)$$

باز هم فرض می‌کنیم که پلاسما تک دما باشد و  $\nu$  به قدری بزرگ است که می‌توان از جمله  $dv_{\perp}/dt$  صرف نظر کرد. مؤلفه‌های  $x$  و  $y$  عبارت‌اند از

$$mn\nu v_x = \pm enE_x - KT \frac{\partial n}{\partial x} \pm env_y B \quad (46.5)$$

$$mn\nu v_y = \pm enE_y - KT \frac{\partial n}{\partial y} \mp env_x B$$

با استفاده از تعریف  $\mu$  و  $D$ ، داریم

$$v_x = \pm \mu E_x - \frac{D}{n} \frac{\partial n}{\partial x} \pm \frac{\omega_c}{\nu} v_y \quad (47.5)$$

$$v_y = \pm \mu E_y - \frac{D}{n} \frac{\partial n}{\partial y} \mp \frac{\omega_c}{\nu} v_x$$

با جاگذاری  $v_x$  برای  $v_y$  به دست می‌آوریم:

$$v_y(1 + \omega_c^2 \tau^2) = \pm \mu E_y - \frac{D}{n} \frac{\partial n}{\partial y} - \omega_c^2 \tau^2 \frac{E_x}{B} \pm \omega_c^2 \tau^2 \frac{KT}{eB} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} \quad (48.5)$$

که در آن  $\tau = \nu^{-1}$ ، به طریق مشابه، برای  $v_x$  داریم

$$v_x(1 + \omega_c^2 \tau^2) = \pm \mu E_x - \frac{D}{n} \frac{\partial n}{\partial x} + \omega_c^2 \tau^2 \frac{E_y}{B} \mp \omega_c^2 \tau^2 \frac{KT}{eB} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} \quad (49.5)$$

دو جمله آخر این معادله‌ها شامل سوپهای  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  و دیامغناطیس هستند:

$$\begin{aligned} v_{Ex} &= \frac{E_y}{B} & v_{Ey} &= -\frac{E_x}{B} \\ v_{Dx} &= \mp \frac{KT}{eB} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} & v_{Dy} &= \pm \frac{KT}{eB} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} \end{aligned} \quad (50.5)$$

دو جمله اول را می‌توان با تعریف کردن ضرایب پخش و تحرک عمودی ساده کرد:

$$\mu_{\perp} = \frac{\mu}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \quad \boxed{D_{\perp} = \frac{D}{1 + \omega_c^2 \tau^2}} \quad (51.5)$$



با استفاده از معادله‌های  $50.5$  و  $51.5$ ، می‌توانیم معادله‌های  $48.5$  و  $49.5$  را به صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{v}_{\perp} = \pm \mu_{\perp} \mathbf{E} - D_{\perp} \frac{\nabla n}{n} + \frac{\mathbf{v}_E + \mathbf{v}_D}{1 + (\nu^2/\omega_c^2)} \quad (52.5)$$

از این رابطه واضح است که سرعت عمودی هر یک از گونه‌ها از دو قسمت تشکیل شده است. اولاً، سوقهای معمولی  $\mathbf{v}_E$  و  $\mathbf{v}_D$  وجود دارند که عمود بر گرادیانهای پتانسیل و چگالی هستند. این سوقها به علت برخورد با اتمهای خنثی کند می‌شوند؛ ضریب کشش  $(\nu^2/\omega_c^2) + 1$  هنگامی که  $\nu \rightarrow 0$  یک می‌شود. ثانیاً، سوقهای تحرک و پخش وجود دارند که موازی با گرادیانهای پتانسیل و چگالی هستند. این سوقها همان شکل مربوط به مورد  $B = 0$  را دارند، ولی ضرایب  $\mu$  و  $D$  با عامل  $1 + \omega_c^2 \tau^2$  کاهش می‌یابند.

حاصلضرب  $\omega_c \tau$  کمیت مهمی در محصورسازی مغناطیسی است. وقتی که  $1 \ll \omega_c^2 \tau^2$ ، میدان مغناطیسی تأثیر کمی روی پخش دارد. زمانی که  $1 \gg \omega_c^2 \tau^2$ ، میدان مغناطیسی به طور قابل ملاحظه‌ای آهنگ پخش در عرض  $\mathbf{B}$  را کاهش می‌دهد. به سادگی می‌توان صورتهای دیگر زیر را برای  $\omega_c \tau$  ثابت کرد:

$$\omega_c \tau = \omega_c / \nu = \mu B \cong \lambda_m / r_L \quad (53.5)$$

در حد  $1 \gg \omega_c^2 \tau^2$ ، داریم

$$D_{\perp} = \frac{KT}{m\nu} \frac{1}{\omega_c^2 \tau^2} = \frac{KT\nu}{m\omega_c^2} \quad (54.5)$$

در مقایسه با معادله  $8.5$  می‌بینیم که تأثیر بسامد برخورد  $\nu$  معکوس شده است. در پخش موازی با  $\mathbf{B}$ ،  $D$  متناسب با  $\nu^{-1}$  است، زیرا برخوردها حرکت را کند می‌کنند. در پخش عمود بر  $\mathbf{B}$ ،  $D_{\perp}$  متناسب با  $\nu$  است، زیرا برخوردها برای حرکت در عرض میدان لازم هستند. وابستگی به  $m$  نیز معکوس شده است. با یادآوری این که  $\nu$  متناسب با  $m^{-1/2}$  است، می‌بینیم که  $D \propto m^{-1/2}$ ، در حالی که  $D_{\perp} \propto m^{1/2}$ . در پخش موازی، الکترونها به علت سرعت گرمایی زیادتری که دارند تندتر از یونها حرکت می‌کنند؛ در پخش عمودی، الکترونها کندتر حرکت می‌کنند زیرا شعاع لارمور کوچکتری دارند. با حذف عاملهای عددی از مرتبه واحد، معادله  $8.5$  را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$D = KT/m\nu \sim v_{th}^2 \tau \sim \lambda_m^2 / \tau \quad (55.5)$$

این نتیجه، مجذور طول بر زمان، نشان می‌دهد که پخش یک فرایند گامزنی کاتوره‌ای با طول گام  $\lambda_m$  است. برای معادله ۵۴.۵ می‌توان نوشت

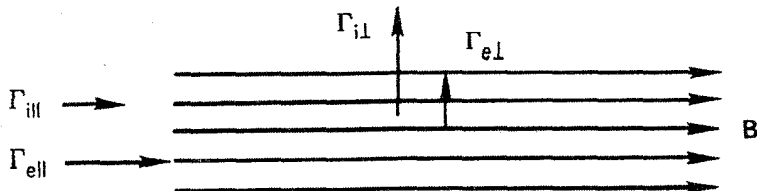
$$D_{\perp} = \frac{KT\nu}{m\omega_c^2} \sim v_{th}^2 \frac{r_L^2}{v_{th}^2} \nu \sim \frac{r_L^2}{\tau} \quad (56.5)$$

این رابطه نشان می‌دهد که پخش عمودی یک فرایند گامزنی کاتوره‌ای با طول گام  $r_L$ ، به جای  $\lambda_m$ ، است.

### ۱.۵.۵ پخش هم‌دوقطبی در عرض $B$

چون ضرایب تحرک و پخش در حضور میدان مغناطیسی ناهمسانگرد هستند، مسئله پخش هم‌دوقطبی مانند مورد  $B = 0$  سرراست نیست. شارهای ذرات عمود بر  $B$  را در نظر بگیرید (شکل ۱۳.۵). معمولاً، چون  $\Gamma_{e\perp}$  کوچکتر از  $\Gamma_{i\perp}$  است میدان الکتریکی عرضی باید طوری تشکیل شود که به پخش الکترون کمک کند و موجب کندی پخش یون شود. اما، این میدان الکتریکی به علت عدم توازن شارها در امتداد  $B$  می‌تواند اتصال کوتاه شود. یعنی، بار منفی حاصل از  $\Gamma_{e\perp} < \Gamma_{i\perp}$  می‌تواند توسط الکترونیایی که در امتداد خطوط نیرو خارج می‌شود تلف شود. اگرچه پخش کل باید هم‌دوقطبی باشد، قسمت عمودی اتلافها لازم نیست هم‌دوقطبی باشند. یونها اساساً می‌توانند در راستای شعاعی پخش شوند، در حالی که الکترونها اساساً در امتداد  $B$  پخش می‌شوند. اینکه این عمل واقعاً اتفاق می‌افتد یا نه بستگی به نوع آزمایش دارد. در ستونهای پلاسمای کوتاه با خطوط نیرویی که به صفحات رسانا ختم می‌شوند، انتظار می‌رود میدان الکتریکی هم‌دوقطبی با اتصال کوتاه به هم بخورد. بنابراین، هر یک از گونه‌ها به‌طور شعاعی با آهنگی مختلف پخش می‌شوند. در ستونهای پلاسمای باریک و دراز که به صفحات عایق ختم می‌شوند، انتظار می‌رود پخش شعاعی هم‌دوقطبی باشد زیرا فرار در امتداد  $B$  مشکل است.

از لحاظ ریاضی، مسئله عبارت است از حل همزمان معادلات پیوستگی ۱۲.۵ برای یونها و الکترونها. به جای شارهای  $\Gamma_z$  باید واگراییهای  $\nabla \cdot \Gamma_z$  را مساوی یکدیگر قرار دهیم. با جداسازی  $\nabla \cdot \Gamma_z$  به مؤلفه‌های موازی و عمودی، داریم



شکل ۱۳.۵ شارهای عمودی و موازی ذرات در میدان مغناطیسی.

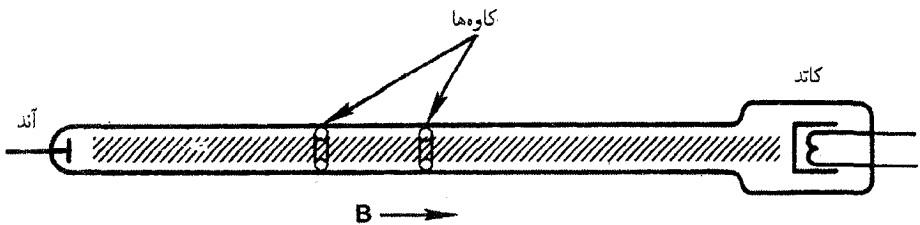
$$\nabla \cdot \Gamma_i = \nabla_{\perp} \cdot (\mu_{i\perp} n \mathbf{E}_{\perp} - D_{i\perp} \nabla n) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{iz} n E_z - D_{iz} \frac{\partial n}{\partial z} \right) \quad (57.5)$$

$$\nabla \cdot \Gamma_e = \nabla_{\perp} \cdot (-\mu_{e\perp} n \mathbf{E}_{\perp} - D_{e\perp} \nabla n) + \frac{\partial}{\partial z} \left( -\mu_{ez} n E_z - D_{ez} \frac{\partial n}{\partial z} \right)$$

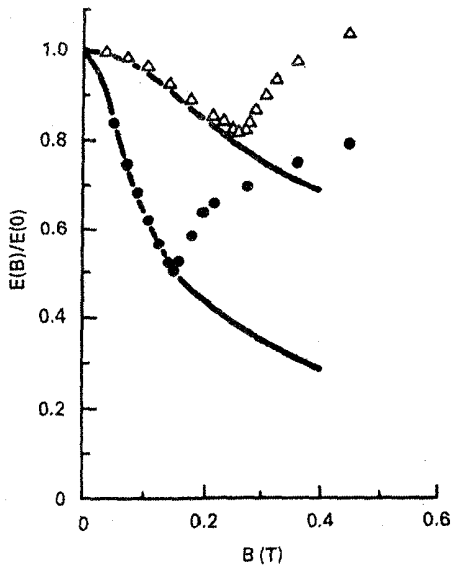
معادله حاصل از قرار دادن  $\nabla \cdot \Gamma_e = \nabla \cdot \Gamma_i$  به سادگی قابل جداسازی به معادلات یک بعدی نیست. به علاوه، جواب به طور حساسی به شرایط مرزی در نقاط انتهایی خطوط نیرو بستگی دارد. جواب ساده‌ای برای مسئله پخش همدوقطبی در عرض میدان مغناطیسی، وجود ندارد مگر آنکه پلاسما به قدری دراز باشد که بتوان از پخش موازی کاملاً صرف نظر کرد.

### ۲.۵.۵ بررسیهای تجربی

اینکه میدان مغناطیسی پخش عرضی را مطابق با معادله ۵۱.۵ کاهش می‌دهد یا نه موضوع تحقیقات متعددی شده است. اولین آزمایش در لوله‌ای به اندازه کافی دراز که در آن پخش به طرف ناحیه‌های انتهایی قابل اغماض بود توسط لرت و هو در سوئد انجام شد. آنها یک ستون هلیوم مثبت به قطر حدود ۱cm و طول ۳m را به کار بردند (شکل ۱۴.۵). در چنین پلاسمایی، الکترونها توسط پخش شعاعی به طرف دیواره‌ها دائماً تلف می‌شوند و با یونش گاز خنثی توسط الکترونها در انتهای توزیع سرعت دوباره تأمین می‌شوند. این الکترونها سریع، به نوبه خود، با شتاب‌گیری در میدان الکتریکی طولی تأمین می‌شوند. در نتیجه، انتظار می‌رود  $E_z$  تقریباً متناسب با آهنگ پخش عمودی باشد. دو کاوه تعبیه شده در دیواره لوله تخلیه الکتریکی برای اندازه‌گیری  $E_z$  وقتی  $B$  تغییر داده می‌شود به کار می‌روند. در شکل ۱۵.۵ نسبت  $E_z(B)$  به  $E_z(0)$  به صورت تابعی از  $B$  نشان داده شده است. در میدانهای ضعیف  $B$ ، نقاط تجربی به خوبی روی منحنی پیش‌بینی شده‌ای که براساس معادله ۵۲.۵ محاسبه شده است واقع می‌شوند. اما، در یک میدان بحرانی  $B_c$  به مقدار حدود ۲T<sup>۰</sup> نقاط تجربی از نظریه دور می‌شوند و در حقیقت یک افزایش پخش با افزایش  $B$  نشان می‌دهند. میدان بحرانی  $B_c$  با فشار افزایش می‌یابد، و این نشان می‌دهد که



شکل ۱۴.۵ آزمایش لرت-هو برای بررسی اثر میدان مغناطیسی روی پخش در یک گاز کم‌یونش.



شکل ۱۵.۵ میدان الکتریکی طولی بهنجار شده که به صورت تابعی از  $B$  در دو فشار مختلف اندازه گیری شده است منحنیهای نظری برای مقایسه نشان داده شده اند.

یک مقدار بحرانی  $\omega_c T$  دخیل است و هنگامی که  $\omega_c T$  خیلی بزرگ است اشتباهی در نظریه «کلاسیک» پخش وجود دارد.

اشکال به زودی توسط کادامنسف و نداسپاسف در اتحاد جماهیر شوروی پیدا شد. این دو نظریه دان کشف کردند که یک ناپایداری باید در میدانهای شدید مغناطیسی ایجاد شود؛ یعنی، یک موج پلاسما توسط میدان  $E_z$  برانگیخته می شود، و این موج موجب اتلاف افزوده شعاعی می شود. این نظریه به طور صحیح مقدار  $B_c$  را پیش بینی کرد. موج، به شکل واپیچش ماریچی ستون پلاسما، بعداً به طور مستقیم در آزمایشی در برکلی توسط آلن، پاتولیکاس و پایل مشاهده شد. این ناپایداری ماریچی ستون مثبت اولین نمونه ای بود که در آن «پخش غیرعادی» در عرض میدانهای مغناطیسی مشخصاً توضیح داده شد، اما این توضیح تنها برای گازهای کم پونش درست بود. در پلاسماهای کاملاً یونیده تحقیقات همجوشی، معلوم شد که پخش غیرعادی مسئله است که حل آن به مراتب مشکلتر است.

### مسائل

۱.۵ سطح مقطع برخورد الکترون-خنثی برای الکترونهای  $2 \text{ eV}$  در  $\text{He}$  حدود  $6\pi a_0^2$  است، که

در آن  $a_0 = 10^{-8} \times 0.53 \text{ cm}$  شعاع اولین مدار اتم بور است. یک ستون مثبت بدون میدان مغناطیسی دارای  $p = 1 \text{ Torr}$  از He در دمای اتاق است و  $KT_e = 2 \text{ eV}$ .

(الف) ضریب پخش الکترون را برحسب  $\text{m}^2/\text{sec}$  با این فرض حساب کنید که متوسط‌گیری  $\overline{\sigma v}$  روی توزیع سرعت برای الکترونهای  $2 \text{ eV}$  برابر با  $\sigma v$  است.

(ب) اگر چگالی جریان در امتداد ستون  $2 \text{ kA/m}^2$  و چگالی پلاسما  $10^{16} \text{ m}^{-3}$  باشد، میدان الکتریکی در امتداد ستون چقدر است؟

۲.۵ ورقه‌ای از یک پلاسمای یونیده ضعیف در هندسه مسطح دارای توزیع چگالی زیر است

$$n(x) = n_0 \cos(\pi x / 2L) \quad -L \leq x \leq L$$

پلاسما به علت پخش و بازترکیب واپاشیده می‌شود اگر  $L = 0.3 \text{ m}$ ،  $D = 0.4 \text{ m}^2/\text{sec}$  و  $\alpha = 10^{-15} \text{ m}^3/\text{sec}$  در چه چگالی آهنگ اتلاف به علت پخش برابر با اتلاف به علت بازترکیب خواهد بود؟

۳.۵ یک پلاسمای یونیده ضعیف در جعبه‌ای آلومینیومی به شکل مکعب به یال  $L$  تولید شده است. این پلاسما به علت پخش همدوقطبی واپاشیده می‌شود.

(الف) رابطه‌ای برای توزیع چگالی در پایین‌ترین مد پخش بنویسید.

(ب) تعریف کنید که منظورتان از ثابت زمانی چیست و اگر  $D_0 = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{sec}$  آن را حساب کنید.

۴.۵ یک ستون مثبت استوانه‌ای دراز دارای  $B = 0.2 \text{ T}$ ،  $KT_i = 0.1 \text{ eV}$ ، و پارامترهای دیگر مانند پارامترهای مسئله ۱.۵ است. نمایه چگالی عبارت است از

$$n(r) = n_0 J_0(r/[D\tau]^{1/2})$$

که برای آن شرط مرزی به صورت  $n = 0$  در  $r = a = 1 \text{ cm}$  است. توجه کنید که در  $z = 2.4$  داریم  $J_0(z) = 0$ .

(الف) نشان دهید ضریب پخش همدوقطبی که در بالا به کار می‌رود تقریباً برابر با  $D_{\perp e}$  است.

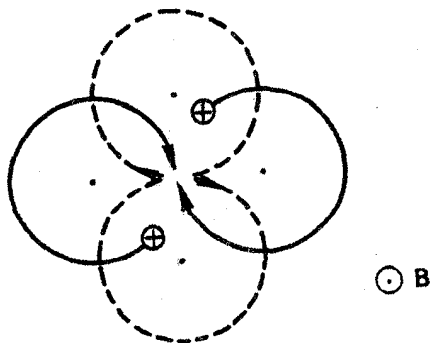
(ب) با صرف نظر کردن از بازترکیب و از اتلاف‌های دو انتهای ستون، زمان محصورسازی  $\tau$  را حساب کنید.

۵.۵ برای نمایه چگالی شکل ۷.۵، رابطه‌ای برای چگالی قله  $n_0$  برحسب شدت چشمه  $Q$  و پارامترهای دیگر مسئله به دست آورید. (راهنمایی: چشمه بر  $\text{m}^2$  را با شار ذره به طرف دیواره‌ها بر  $\text{m}^2$  مساوی قرار دهید.)

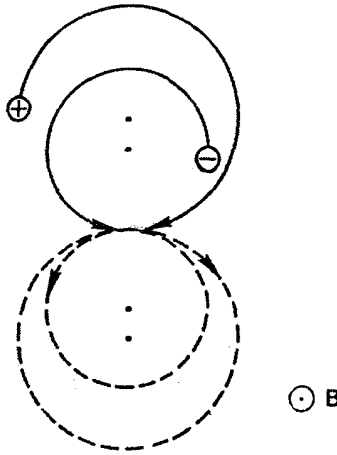
۶.۵ در یک گاز یونیده ضعیف که در آن بازترکیب سازوکار اصلی اتلاف است یک آزمایش بازترکیب انجام می‌دهید. پلاسمایی به چگالی  $10^{20} \text{ m}^{-3}$  با تابش ناگهانی پرتو فرابنفش به وجود می‌آورد و مشاهده می‌کنید که چگالی در  $10 \text{ m sec}$  به نصف مقدار اولیه اش افت می‌کند. مقدار ضریب بازترکیب  $\alpha$  را به دست آورید. واحد آن را مشخص کنید.

## ۶.۵ برخوردها در پلاسمای کاملاً یونیده

وقتی که پلاسمای تنها از الکترونها و یونها تشکیل شده است، همه برخوردهای بین ذرات باردار برخوردهای کولنی هستند. اما تفاوت بارزی میان (الف) برخوردهای بین ذرات همنام (برخوردهای یون-یون یا الکترون-الکترون) و (ب) برخوردهای بین ذرات غیرهمنام (برخوردهای یون-الکترون یا الکترون-یون) وجود دارد. برخورد دو ذره یکسان را در نظر بگیرید (شکل ۱۶.۵). این برخورد اگر رودرو باشد، دو ذره در حالی که سرعتشان عکس شده است از هم دور می‌شوند؛ آنها صرفاً مسیرهای خود را معاوضه می‌کنند، و دو مرکز راهنما در جای خود باقی می‌مانند. نتیجه مانند نتیجه برخورد سطحی است، که در آن آن مسیرها تغییر نمی‌کنند. حادثه‌ترین موردی که می‌تواند اتفاق بیفتد در یک برخورد  $90^\circ$  است، که در آن سرعتها  $90^\circ$  تغییر راستا می‌دهند. بنابراین، مدارها بعد از برخورد دایره‌های خط چین خواهند بود و مراکز راهنما تغییر مکان داده‌اند. اما روشن است که «مرکز جرم» دو مرکز راهنما ثابت باقی می‌ماند. بدین علت، برخوردهای بین ذرات همنام موجب پخش خیلی کمی می‌شوند. این وضعیت برخلاف موردی است که یونها با اتمهای خنثی برخورد می‌کنند. در این مورد، سرعت نهایی ذره خنثی مهم نیست، و یون با گامزنی کاتوره‌ای از موقعیت اولیه اش دور می‌شود. اما در مورد برخوردهای یون-یون موازنه مشخص در هر برخورد وجود دارد؛ در نتیجه یک برخورد به‌ازای هر یون که به بیرون می‌رود یون دیگری وارد می‌شود.



شکل ۱۶.۵ تغییر مکان مراکز راهنمای دو ذره همنام در برخورد  $90^\circ$  درجه‌ای.



شکل ۱۷.۵ تغییر مکان مراکز راهنمای دو ذره باردار ناهمنام در برخورد  $۱۸^\circ$  درجه‌ای.

اما وقتی که دو ذره با بار مخالف برخورد می‌کنند، وضعیت به طور کلی متفاوت است (شکل ۱۷.۵). حادثه‌ترین مورد. اکنون برخورد  $۱۸^\circ$  است، که در آن ذرات بعد از برخورد سرعتشان معکوس می‌شود. چون آنها باید به چرخش خود حول خطوط نیرو در جهت مناسب ادامه دهند، دو مرکز راهنما در یک جهت حرکت خواهند کرد. برخوردهای ذرات ناهمنام سبب پخش می‌شوند. تصویر فیزیکی برای یونها و الکترونها به دلیل متفاوت بودن جرم آنها تا حدودی فرق می‌کند. الکترونها با واجهش از یونهای تقریباً ساکن دور می‌شوند و طبق معمول گامزنی کاتوره‌ای انجام می‌دهند. یونها در هر برخورد کمی تکان می‌خورند، و در نتیجه حمله‌های متعدد الکترونها به اطراف حرکت می‌کنند. با این حال، به دلیل پایداری تکانه در هر برخورد، آهنگهای پخش برای یونها و الکترونها همان‌گونه که نشان خواهیم داد یکی است.

### ۱.۶.۵ مقاومت پلاسما

معادلات حرکت سیال شامل اثرات برخوردهای ذرات باردار را می‌توان به صورت زیر نوشت (مراجعه کنید به معادله ۴۷.۳):

$$Mn \frac{dv_i}{dt} = en(\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) - \nabla p_i - \nabla \cdot \pi_i + \mathbf{P}_{ie} \quad (58.5)$$

$$mn \frac{dv_e}{dt} = -en(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) - \nabla p_e - \nabla \cdot \pi_e + \mathbf{P}_{ei}$$

جمله‌های  $\mathbf{P}_{ei}$  و  $\mathbf{P}_{ie}$  به ترتیب عبارت‌اند از تکانه کسب‌شده سیال یون به علت برخورد با الکترونها و برعکس. تانسور تنش  $\mathbf{P}_j$  به قسمت همسانگرد  $p_j$  و تانسور چسبیدگی ناهمسانگرد  $\pi_j$  تقسیم شده است. برخورد ذرات همنام که موجب تشهای داخل هر سیال می‌شود. در  $\pi_j$  گنجانده شده است چون این برخوردها موجب پخشهای زیاد نمی‌شوند، جمله‌های  $\nabla \cdot \pi_j$  را نادیده خواهیم گرفت. برای جمله‌های  $\mathbf{P}_{ie}$  و  $\mathbf{P}_{ei}$  که بیانگر اصطکاک بین دو سیال هستند، پایستگی تکانه ایجاب می‌کند که

$$\mathbf{P}_{ie} = -\mathbf{P}_{ei} \quad (۵۹.۵)$$

به روش معمول می‌توانیم  $\mathbf{P}_{ei}$  را برحسب بسامد برخورد بنویسیم:

$$\mathbf{P}_{ei} = mn(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e)v_{ei} \quad (۶۰.۵)$$

و رابطه مشابهی برای  $\mathbf{P}_{ie}$  داریم. چون برخوردها کولنی هستند، انتظار می‌رود  $\mathbf{P}_{ei}$  متناسب با نیروی کولن باشد، که (برای یونهای تک‌باردار) متناسب با  $e^2$  است. به علاوه،  $\mathbf{P}_{ei}$  باید متناسب باشد با چگالی الکترونها  $n_e$  و چگالی مراکز پراکندگی  $n_i$ ، که البته متناسب با  $n_e$  است. سرانجام،  $\mathbf{P}_{ei}$  باید متناسب با سرعت نسبی دو سیال باشد. بنابراین، به دلایل فیزیکی می‌توانیم  $\mathbf{P}_{ei}$  را به صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{P}_{ei} = \eta e^2 n^2 (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) \quad (۶۱.۵)$$

که در آن  $\eta$  ثابت تناسب است. از مقایسه با معادله ۶۰.۵، می‌بینیم که

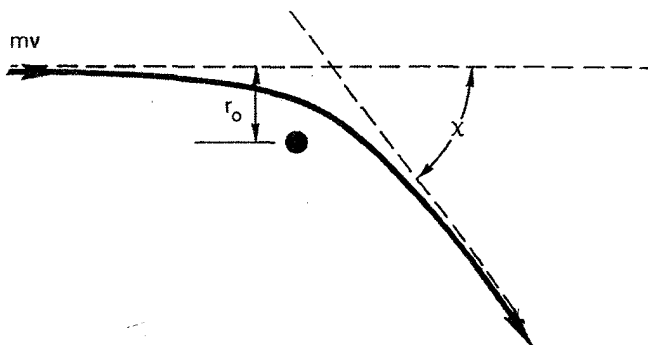
$$\boxed{v_{ei} = \frac{ne^2}{m}\eta} \quad (۶۲.۵)$$

ثابت  $\eta$  مقاومت ویژه پلاسماست؛ به زودی معلوم خواهد شد که این کمیت چگونه با معنی معمولی مقاومت مطابقت می‌کند.

### ۲.۶.۵ مکانیک برخوردهای کولنی

هنگامی که الکترونی با اتمی خنثی برخورد می‌کند، تا الکترون در مقیاس ابعاد اتمی به اتم نزدیک نشده است نیروی محسوسی بر آن وارد نمی‌شود؛ برخوردها مانند برخورد توپهای بیلیارد هستند.





شکل ۱۸.۵ مدار الکترونی که با یک یون برخورد کولنی انجام می‌دهد.

وقتی که الکترونی با یونی برخورد می‌کند، الکترون توسط میدان کولنی بلندبرد یون به تدریج منحرف می‌شود. با این حال، می‌توان سطح مقطع مؤثری برای این نوع برخورد به دست آورد. برای مقصود ما کافی است که مرتبه بزرگی سطح مقطع را تخمین بزنیم. در شکل ۱۸.۵، الکترونی با سرعت  $v$  به یون ثابتی با بار  $e$  نزدیک می‌شود. در غیاب نیروهای کولنی، الکترون دارای کمترین فاصله نزدیکی  $r_0$  خواهد بود، که پارامتر برخورد نامیده می‌شود. در حضور جاذبه کولنی، الکترون با زاویه  $\chi$  که به  $r_0$  مربوط می‌شود منحرف خواهد شد. نیروی کولن عبارت است از

$$F = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (۶۳.۵)$$

این نیرو در مدتی که الکترون در نزدیکی یون است احساس می‌شود؛ این زمان تقریباً برابر است با

$$T \approx r_0/v \quad (۶۴.۵)$$

بنابراین، تغییر تکانه الکترون تقریباً عبارت است از

$$\Delta(mv) = |FT| \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0 v} \quad (۶۵.۵)$$

می‌خواهیم سطح مقطع را برای برخوردهای با زاویه بزرگ، که در آنها  $\chi \geq 90^\circ$ ، تخمین بزنیم. برای یک برخورد  $90^\circ$ ، تغییر  $mv$  در حدود خود  $mv$  است. بنابراین

$$\Delta(mv) \cong mv \cong e^2/4\pi\epsilon_0 r_0 v, \quad r_0 = e^2/4\pi\epsilon_0 mv^2 \quad (۶۶.۵)$$

در نتیجه سطح مقطع عبارت است از

$$\sigma = \pi r_0^2 = e^2 / \sqrt{4\pi\epsilon_0} m^2 v^2 \quad (67.5)$$

بنابراین: بسامد برخورد برابر است با

$$\nu_{ei} = n\sigma v = ne^2 / \sqrt{4\pi\epsilon_0} m^2 v^2 \quad (68.5)$$

و مقاومت ویژه به صورت زیر است

$$\eta = \frac{m}{ne^2 \nu_{ei}} = \frac{e^2}{\sqrt{4\pi\epsilon_0} m v^2} \quad (69.5)$$

برای توزیع ماکسولوی الکترونها، می‌توانیم در تخمین مرتبه بزرگی مورد نظر  $KT_e/m$  را به جای  $v^2$  بنویسیم:

$$\eta \approx \frac{\pi e^2 m^{1/2}}{(\sqrt{4\pi\epsilon_0})^2 (KT_e)^{3/2}} \quad (70.5)$$

معادله ۷۰.۵ بیانگر مقاومت ویژه براساس تنها برخوردهای بزرگ-زاویه است. در عمل، به علت برد بلند نیروی کولنی، برخوردهای با زاویه کوچک به مراتب بیشترند، و اثر جمعی تعداد زیادی انحراف کوچک-زاویه از اثر برخوردهای بزرگ-زاویه بیشتر می‌شود. اسپیتزر نشان داده است که معادله ۷۰.۵ باید در عامل  $\ln \Lambda$  ضرب شود:

$$\eta \approx \frac{\pi e^2 m^{1/2}}{(\sqrt{4\pi\epsilon_0})^2 (KT_e)^{3/2}} \ln \Lambda \quad (71.5)$$

که در آن

$$\Lambda = \bar{\lambda}_D / r_0 = \sqrt{12\pi n} \lambda_D^2 \quad (72.5)$$

این عامل عبارت است از پارامتر برخورد بیشینه برحسب  $r_0$  (معادله ۶۶.۵ را ببینید) که روی توزیع ماکسولوی متوسط‌گیری شده است. پارامتر برخورد بیشینه را  $\lambda_D$  گرفته‌ایم زیرا حفاظ دمای اثر میدان را در فاصله‌های بزرگتر از بین می‌برد. اگرچه  $\Lambda$  به  $n$  و  $KT_e$  بستگی دارد، ولی لگاریتم آن به مقادیر دقیق پارامترهای پلازما حساس نیست. مقادیر نوعی  $\ln \Lambda$  در زیر داده شده‌اند.

$KT_e(\text{eV})$	$n(\text{m}^{-3})$	$\ln \Lambda$	
۰٫۲	$۱۰^{۱۵}$	۹٫۱	(ماشین Q)
۲	$۱۰^{۱۷}$	۱۰٫۲	(پلاسمای آزمایشگاهی)
۱۰۰	$۱۰^{۱۹}$	۱۳٫۷	(چنبره نوعی)
$۱۰^۴$	$۱۰^{۲۱}$	۱۶	(رآکتور همجوشی)
$۱۰^۳$	$۱۰^{۲۷}$	۶٫۸	(پلاسمای لیزری)

واضح است هنگامی که پارامترهای پلازما در گستره چند مرتبه بزرگی تغییر می‌کنند  $\ln \Lambda$  تنها با ضریب ۲ تغییر می‌کند. برای بیشتر منظورهای، به اندازه کافی دقیق خواهد بود اگر بدون توجه به نوع پلاسمایی که دخالت دارد فرض کنیم  $\ln \Lambda = ۱۰$ .

### ۳.۶.۵ معنی فیزیکی $\eta$

فرض کنید در پلاسمایی یک میدان الکتریکی  $\mathbf{E}$  وجود دارد و همه جریانی که این میدان به وجود می‌آورد از الکترون‌ها ناشی می‌شود که خیلی تحرک پذیرتر از یونها هستند. فرض کنید  $B = 0$  و  $KT_e = 0$ ، به قسمی که  $\nabla \cdot \mathbf{P}_e = 0$ . آنگاه در حالت پایا، معادله حرکت الکترون  $58.5$  به صورت زیر درمی‌آید

$$en\mathbf{E} = \mathbf{P}_{ei} \quad (۷۳.۵)$$

چون  $\mathbf{j} = en(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e)$  معادله ۶۱.۵ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{P}_{ei} = \eta en\mathbf{j} \quad (۷۴.۵)$$

بنابراین، معادله ۷۳.۵ تبدیل می‌شود به

$$\mathbf{E} = \eta\mathbf{j} \quad (۷۵.۵)$$

این همان قانون اهم است، و ثابت  $\eta$  عیناً مقاومت ویژه است. رابطه  $\eta$  در پلازما، آن‌گونه که توسط معادله ۷۱.۵ یا معادله ۶۹.۵ داده شده است، چند ویژگی دارد که باید ذکر شوند. (الف) در معادله ۷۱.۵،  $\eta$  مستقیماً از چگالی است (به استثنای وابستگی ضعیف در  $\ln \Lambda$ ). این یک نتیجه نسبتاً عجیب است، زیرا بدین معنی است که اگر یک میدان  $\mathbf{E}$  به

پلاسمایی اعمال شود جریان  $j$ ، آن گونه که با معادله  $75.5$  داده شده است، مستقل از تعداد حاملهای بار است. دلیل این است که اگرچه  $j$  با  $n_e$  افزایش می یابد، کشش اصطکاکی علیه یونها هم با  $n_i$  زیاد می شود. چون  $n_i = n_e$  این دو اثر همدیگر را خنثی می کنند. این حذف را می توان از معادلات  $68.5$  و  $69.5$  دید. بسامد برخورد  $\nu_{ei}$  در حقیقت متناسب با  $n$  است، ولی عامل  $n$  در  $\eta$  حذف می شود. از این لحاظ، رفتار پلاسمای کاملاً یونیده از پلاسمای جزء یونیده بسیار متفاوت است. در یک پلاسمای یونیده ضعیف، داریم  $\mathbf{v}_e = -\mu_e \mathbf{E}$  و  $\mathbf{v}_e = -ne\mathbf{v}_e$ ،  $j$ ، به قسمی که  $j = ne\mu_e \mathbf{E}$ . چون  $\mu_e$  تنها به چگالی خنثی بستگی دارد، جریان متناسب با چگالی پلاسمای  $n$  است.

(ب) معادله  $71.5$  نشان می دهد که  $\eta$  متناسب با  $(KT_e)^{-3/2}$  است. هنگامی که پلاسمایی گرم می شود، سطح مقطع کولنی کاهش می یابد، و مقاومت ویژه با افزایش دما نسبتاً سریع افت می کند. پلاسماهای در دماهای گرمایسته ای (ده ها keV) اساساً بدون برخورد هستند؛ به همین دلیل است که تحقیقات نظری زیادی روی پلاسماهای بی برخورد انجام شده اند. البته، همواره باید برخوردهایی وجود داشته باشد؛ در غیر این صورت، هیچگونه واکنش همجوشی هم نخواهیم داشت. یک روش ساده برای گرم کردن پلاسمای صرفاً عبور دادن یک جریان از داخل آن است. آنگاه اتلافهای  $I^2 R$  (یا  $j^2 \eta$ ) باعث افزایش دمای الکترون می شوند. این روش را گرم کردن اهمی می نامند. اما وابستگی  $\eta$  به  $(KT_e)^{-3/2}$  اجازه نمی دهد این روش تا دماهای گرمایسته ای مورد استفاده قرار گیرد. پلاسمای در دماهای بالای  $1 \text{ keV}$  چنان رسانای خوبی می شود که گرم کردن اهمی یک فرایند خیلی کند در آن ناحیه خواهد بود.

(ج) معادله  $68.5$  نشان می دهد که  $\nu_{ei}$  با  $v^{-3}$  تغییر می کند. الکترونها سریع در انتهای توزیع سرعت برخوردهای خیلی کمی انجام می دهند. بنابراین، جریان اصولاً توسط این الکترونها حمل می شود نه توسط توده الکترونها در قسمت اصلی توزیع. وابستگی شدید به  $v$  نتیجه جالب دیگری دارد. اگر یک میدان الکتریکی به طور ناگهانی به پلاسمایی اعمال شود، پدیده ای که به گریز الکترون معروف است می تواند رخ دهد. چند الکترونی که هنگام اعمال میدان در جهت  $-\mathbf{E}$  سریعاً حرکت می کنند قبل از مواجه شدن با یک یون به قدری انرژی کسب می کنند که تنها می توانند یک برخورد سطحی انجام دهند. این باعث می شود که آنها انرژی بیشتری از میدان الکتریکی بگیرند و سطح مقطع برخوردها باز هم کمتر شود. اگر  $\mathbf{E}$  به قدر کافی بزرگ باشد. سطح مقطع به قدری سریع افت می کند که این الکترونها گریزان هرگز برخوردی انجام نمی دهند. آنها یک باریکه الکترون شتابدار می سازند که از بدنه اصلی توزیع جدا شده است.

۴.۶.۵ مقدارهای عددی  $\eta$ 

محاسبات دقیق  $\eta$  با در نظر گرفتن پس زنی یون در هر برخورد و متوسط‌گیری مناسب روی توزیع الکترونی اولین بار توسط اسپیتزر انجام شد. نتیجهٔ زیر برای هیدروژن بعضی مواقع مقاومت ویژهٔ اسپیتزر نامیده می‌شود:

$$\eta_{\parallel} = 5.2 \times 10^{-5} \frac{Z \ln \Lambda}{T^{3/2} (\text{eV})} \text{ohm-m} \quad (76.5)$$

در اینجا  $Z$  عدد بار یون است که در جاهای دیگر این کتاب آن را ۱ گرفته‌ایم. چون وابستگی به  $M$  ضعیف است، از این مقادیر می‌توان برای گازهای دیگر نیز استفاده کرد. شاخص  $\parallel$  به این معنی است که این مقدار  $\eta$  باید برای حرکت‌های موازی با  $\mathbf{B}$  به‌کار برده شود. برای حرکت‌های عمود بر  $\mathbf{B}$ ، باید از  $\eta_{\perp}$  که به‌صورت زیر داده شده است استفاده کنیم

$$\eta_{\perp} = 2.0 \eta_{\parallel} \quad (77.5)$$

این رابطه بدین معنی نیست که رسانندگی در امتداد  $\mathbf{B}$  دو برابر بهتر از رسانندگی در عرض  $\mathbf{B}$  است. عاملی مانند  $\omega_e^2 \tau^2$  را نیز باید به حساب آوریم. ضریب  $2.0$  از تفاوت وزن سرعت‌های گوناگون در توزیع الکترون ناشی شده است. در حرکت‌های عمودی، الکترونها می‌کند که شعاع‌های لارمور کوچکی دارند بیشتر از آنهایی که در حرکت‌های موازی هستند در مقاومت ویژه شرکت می‌کنند.

برای  $KT_e = 10^6 \text{ eV}$  از معادلهٔ ۷۶.۵ به‌دست می‌آوریم

$$\eta = 5 \times 10^{-7} \text{ ohm-m}$$

این مقدار را باید با رساناهای فلزی دیگر مقایسه کرد:

$$\eta = 2 \times 10^{-8} \text{ ohm-m} \quad \text{مس}$$

$$\eta = 7 \times 10^{-7} \text{ ohm-m} \quad \text{فولاد زنگ‌زن}$$

$$\eta = 10^{-6} \text{ ohm-m} \quad \text{جیوه}$$

بنابراین، یک پلاسمای  $10^6 \text{ eV}$  تقریباً دارای رسانندگی فولاد زنگ‌زن است.

## ۷.۵ معادلات مغناطویدرودینامیک تک سیال

اکنون به مسئلهٔ پخش در یک پلاسمای کاملاً یونیده می‌پردازیم. چون جملهٔ اتلافی  $\mathbf{P}_{ei}$  شامل

تفاضل سرعت‌های  $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e$  است، ساده‌تر آن است که با ترکیب خطی معادلات یون و الکترون کار کنیم به قسمی که  $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e$  مجهول باشد نه سرعت‌های جداگانه  $\mathbf{v}_i$  یا  $\mathbf{v}_e$ . تاکنون، پلاسما را متشکل از دو سیال در هم آمیخته در نظر گرفته‌ایم. ترکیب خطی‌ای که می‌خواهیم انتخاب کنیم پلاسما را به‌عنوان یک تک‌سیال، مانند جیوه، با چگالی جرم  $\rho$  و رسانندگی الکتریکی  $1/\eta$  توصیف می‌کند. اینها معادلات مغناطوهیدرودینامیک (MHD) هستند.

برای یک پلاسمای شبه‌خنثی با یونهای تک باردار، می‌توانیم چگالی جرم  $\rho$ ، سرعت جرم  $\mathbf{v}$  و چگالی جریان  $\mathbf{j}$  را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$\rho \equiv n_i M + n_e m \approx n(M + m) \quad (۷۸.۵)$$

$$\mathbf{v} \equiv \frac{1}{\rho}(n_i M \mathbf{v}_i + n_e m \mathbf{v}_e) \approx \frac{M \mathbf{v}_i + m \mathbf{v}_e}{M + m} \quad (۷۹.۵)$$

$$\mathbf{j} \equiv e(n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e) \approx ne(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) \quad (۸۰.۵)$$

در معادله حرکت، یک جمله  $Mng$  برای نیروی گرانش اضافه خواهیم کرد. این جمله را می‌توان برای بیان هر نیروی غیرالکترومغناطیسی که به پلاسما اعمال می‌شود به‌کار برد. معادلات الکترون و یون را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$Mn \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = en(\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) - \nabla p_i + Mng + \mathbf{P}_{ie} \quad (۸۱.۵)$$

$$mn \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} = -en(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) - \nabla p_e + mng + \mathbf{P}_{ei} \quad (۸۲.۵)$$

برای سادگی، مانند سابق از تانسور چسبندگی  $\pi$  صرف‌نظر کرده‌ایم. اگر شعاع لامبور از طول مقیاسی که در آن کمیت‌های گوناگون تغییر می‌کنند خیلی کوچکتر باشد این چشمپوشی خطای زیادی به‌وجود نمی‌آورد. همچنین از جمله‌های  $\mathbf{v} \cdot \nabla$  صرف‌نظر کرده‌ایم زیرا در غیر این صورت مشتق‌گیری به‌طور غیرضروری معادله را پیچیده‌تر می‌کند. توجیه درستی این ساده‌سازی مشکل‌تر است. برای اجتناب از بحث طولانی، به سادگی می‌گوییم که  $\mathbf{v}$  به قدری کوچک فرض شده است که این جمله درجه دوم قابل اغماض است.

اکنون معادلات ۸۱.۵ و ۸۲.۵ را جمع می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم

$$n \frac{\partial}{\partial t}(M \mathbf{v}_i + m \mathbf{v}_e) = en(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) \times \mathbf{B} - \nabla p + n(M + m)g \quad (۸۳.۵)$$

میدان الکتریکی مانند جمله‌های برخورد  $\mathbf{P}_{ei} = -\mathbf{P}_{ie}$  حذف شده است. فشار کل را با نماد  $p$  نشان داده‌ایم

$$p = p_i + p_e \quad (۸۴.۵)$$

با استفاده از معادلات ۷۸.۵ تا ۸۰.۵، معادله ۸۳.۵ را می‌توان به صورت ساده‌تر زیر نوشت

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (۸۵.۵)$$

این معادله تک‌سیال حرکت است که جریان جرم را توصیف می‌کند. میدان الکتریکی به‌طور صریح ظاهر نمی‌شود زیرا سیال خنثی است. سه نیروی حجمی سمت راست دقیقاً همان هستند که انتظار می‌رود.

با انتخاب ترکیب خطی دیگری از معادلات دو سیال، معادله کمتر واضحی به دست می‌آید. معادله ۸۱.۵ را در  $m$  و معادله ۸۲.۵ را در  $M$  ضرب می‌کنیم و از تفریق آنها به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} Mmn \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) &= en(M + m)\mathbf{E} + en(m\mathbf{v}_i + M\mathbf{v}_e) \times \mathbf{B} - m\nabla p_i \\ &+ M\nabla p_e - (M + m)\mathbf{P}_{ei} \end{aligned} \quad (۸۶.۵)$$

با توجه به معادلات ۷۸.۵، ۸۰.۵ و ۶۱.۵، این معادله به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} \frac{Mmn}{e} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{j}}{n} \right) &= e\rho \mathbf{E} - (M + m)nen\mathbf{j} - m\nabla p_i + M\nabla p_e \\ &+ en(m\mathbf{v}_i + m\mathbf{v}_e) \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (۸۷.۵)$$

جمله آخر را می‌توان به صورت زیر ساده کرد:

$$\begin{aligned} m\mathbf{v}_i + M\mathbf{v}_e &= M\mathbf{v}_i + m\mathbf{v}_e + M(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) + m(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) \\ &= \frac{\rho}{n} \mathbf{v} - (M - m) \frac{\mathbf{j}}{ne} \end{aligned} \quad (۸۸.۵)$$

از تقسیم معادله ۸۷.۵ بر  $e\rho$ ، اکنون داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta \mathbf{j} &= \frac{1}{e\rho} \left[ \frac{Mmn}{e} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{j}}{n} \right) + (M - m)\mathbf{j} \times \mathbf{B} + m\nabla p_i - M\nabla p_e \right] \end{aligned} \quad (۸۹.۵)$$

در حرکت‌های کند می‌توان از جمله  $\partial/\partial t$  صرف‌نظر کرد، زیرا در اینجا اثرات لختی (مربوط به بسامد سیکلوترون) مهم نیستند. بنابراین، در حد  $\lim m/M \rightarrow 0$ ، معادله ۸۹.۵ به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} + \frac{1}{en} (\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p_e) \quad (90.5)$$

این دومین معادله است و آن را قانون اهم تعمیم‌یافته می‌نامند. این رابطه خواص الکتریکی سیال رسانا را توصیف می‌کند. جمله  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  را جریان هال می‌نامند. اغلب اتفاق می‌افتد که این جمله و آخرین جمله به قدر کافی کوچک هستند که می‌توان از آنها صرف‌نظر کرد؛ بنابراین، قانون اهم به صورت ساده زیر است

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} \quad (91.5)$$

معادلات پیوستگی برای چگالی جرم  $\rho$  و چگالی بار  $\sigma$  به سادگی از جمع و تفریق معادلات پیوستگی یون و الکترون به دست می‌آیند. بدین ترتیب، مجموعه معادلات MHD به قرار زیرند:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (85.5)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} \quad (91.5)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (92.5)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (93.5)$$

این معادلات، همراه با معادلات ماکسول، اغلب برای توصیف حالت تعادل پلازما به کار می‌روند. از این مجموعه همچنین برای به دست آوردن امواج پلازما می‌توان استفاده کرد، ولی دقت آن بسیار کمتر از معادلات دوسیالی است که به کار برده‌ایم. برای مسائلی که شامل مقاومت ویژه هستند، سادگی معادلات MHD از معایب آنها مهمتر است. معادلات MHD به طور گسترده‌ای توسط اخترفیزیکدانانی که در الکترودینامیک کیهانی کار می‌کنند، هیدرودینامیکدانانی که روی تبدیل انرژی MHD کار می‌کنند و فیزیکدانهای نظری همجوشی که با وضعیتهای هندسی پیچیده مغناطیسی کار می‌کنند به کار برده می‌شوند.



## ۸.۲ پخش در پلاسمای کاملاً یونیده

در غیاب گرانش، معادله‌های ۸۵.۵ و ۹۱.۵ برای حالت پایایی پلاسمایی به صورت زیر درمی‌آیند

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p \quad (۹۴.۵)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} \quad (۹۵.۵)$$

مؤلفه موازی معادله اخیر به صورت ساده زیر است

$$E_{\parallel} = \eta j_{\parallel}$$

که قانون اهم معمولی است. مؤلفه عمودی از ضرب برداری با  $\mathbf{B}$  به دست می‌آید:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} + (\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \eta_{\perp} \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \eta_{\perp} \nabla p$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} - \mathbf{v}_{\perp} B^2 = \eta_{\perp} \nabla p$$

$$\mathbf{v}_{\perp} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} - \frac{\eta_{\perp}}{B^2} \nabla p \quad (۹۶.۵)$$

اولین جمله عیناً سوق  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  هر دوگونه با هم است. جمله دوم سرعت پخش در جهت  $-\nabla p$  است. برای مثال، در یک پلاسمای استوانه‌ای با تقارن محوری که در آن  $\mathbf{E}$  و  $\nabla p$  در جهت شعاع هستند، خواهیم داشت

$$v_{\theta} = -\frac{E_r}{B} \quad v_r = -\frac{\eta_{\perp}}{B^2} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (۹۷.۵)$$

شار مرتبط به این پخش عبارت است از

$$\Gamma_{\perp} = n \mathbf{v}_{\perp} = -\frac{\eta_{\perp} n (KT_i + KT_e)}{B^2} \nabla n \quad (۹۸.۵)$$

این رابطه به صورت قانون فیک (معادله ۱۱.۵) است با ضریب پخش

$$D_{\perp} = \frac{\eta_{\perp} n \Sigma KT}{B^2} \quad (۹۹.۵)$$

این ضریب پخش به اصطلاح «کلاسیک» برای یک گاز کاملاً یونیده است.

توجه کنید که  $D_{\perp}$ ، عیناً مانند مورد گازهای کم‌پوش، متناسب با  $1/B^2$  است. این وابستگی مشخصهٔ پخش کلاسیک است و در نهایت از فرایند گامزنی کاتوره‌ای با طول گام  $n\lambda$  ناشی می‌شود. معادلهٔ ۹۹.۵ با معادلهٔ ۵۴.۵ مربوط به گاز یونیدهٔ جزئی از سه لحاظ اساسی فرق دارد. نخست،  $D_{\perp}$  در یک گاز کاملاً یونیده ثابت نیست؛ این ضریب متناسب با  $n$  است. علت این امر این است که چگالی مراکز پراکندگی توسط اتمهای خنثی تعیین نمی‌شود بلکه همان چگالی پلاسماست. دوم، چون  $\eta$  متناسب با  $(KT)^{-3/2}$  است،  $D_{\perp}$  در گاز کاملاً یونیده با افزایش دما کاهش می‌یابد. در یک گاز یونیدهٔ جزئی عکس این موضوع صحیح است. علت این اختلاف وابستگی سطح مقطع کولنی به سرعت است. سوم، در یک گاز کاملاً یونیده پخش خودبه‌خود همدوقطبی است (تا وقتی که برخوردهای ذرات همان نادیده گرفته می‌شوند). در معادلهٔ ۹۹.۵،  $D_{\perp}$  ضریب برای کل سیال است؛ میدان الکتریکی همدوقطبی به‌وجود نمی‌آید، زیرا هر دو گونه با آهنگ یکسان پخش می‌شوند. این امر نتیجهٔ پایستگی تکانه در برخوردهای یون-الکترون است. این نکته تاحدودی روشنتر می‌شود اگر از معادلات دو سیال استفاده کنیم (به مسئلهٔ ۱۵.۵ مراجعه کنید).

سرانجام، می‌خواهیم نشان دهیم که در یک گاز کاملاً یونیده تحرک عرضی وجود ندارد. معادلهٔ ۹۶.۵ برای  $v_{\perp}$  شامل هیچ مؤلفه‌ای در امتداد  $\mathbf{E}$  نیست که به  $\mathbf{E}$  بستگی داشته باشد. اگر یک میدان عرضی  $\mathbf{E}$  به یک پلاسمای یکنواخت اعمال شود، هر دو گونه با هم با سرعت  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  سوق پیدا می‌کنند. چون سوق نسبی بین دو گونه وجود ندارد، آنها با هم برخورد نمی‌کنند و سوقی در راستای  $\mathbf{E}$  روی نمی‌دهد. البته، برخوردهایی مربوط به حرکتهای گرمایی صورت می‌گیرند، و این نتیجهٔ ساده تنها یک تقریب است. که از صرف نظر کردن از (الف) برخوردهای ذرات همان، (ب) جرم الکترون، و (ج) دو جملهٔ آخر در قانون اهم، معادلهٔ ۹۰.۵، ناشی می‌شود.

## ۹.۵ جوابهای معادلهٔ پخش

چون در یک گاز کاملاً یونیده  $D_{\perp}$  ثابت نیست، یک کمیت  $A$  را که ثابت است تعریف می‌کنیم:

$$A \equiv \eta KT / B^2 \quad (100.5)$$

فرض کرده‌ایم  $KT$  و  $B$  یکنواخت هستند و از وابستگی  $\eta$  به  $n$  از طریق عامل  $\ln \Lambda$  می‌توان صرف نظر کرد. بنابراین، برای مورد  $T_e = T_i$  داریم

$$D_{\perp} = 2nA \quad (101.5)$$

اکنون معادلهٔ پیوستگی ۹۲.۵ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\partial n / \partial t = \nabla \cdot (D_{\perp} \nabla n) = A \nabla \cdot (\gamma n \nabla n)$$

$$\partial n / \partial t = A \nabla^2 n^2 \quad (102.5)$$

این یک معادلهٔ غیرخطی برای  $n$  است که به ندرت حل ساده‌ای دارد.

## ۱.۹.۵ وابستگی زمانی

اگر با انتخاب

$$n = T(t)S(\mathbf{r})$$

متغیرها را جدا کنیم، می‌توانیم معادلهٔ ۱۰۲.۵ را به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{1}{T^2} \frac{dT}{dt} = \frac{A}{S} \nabla^2 S^2 = -\frac{1}{\tau} \quad (103.5)$$

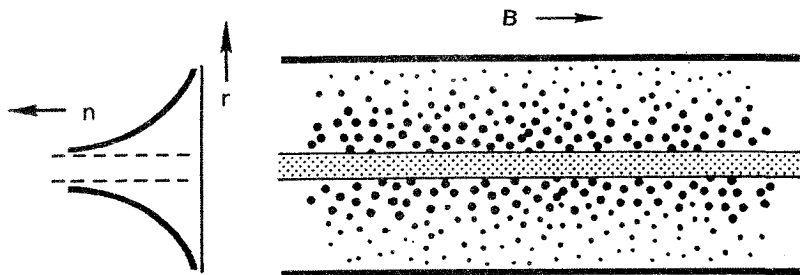
که در آن  $1/\tau -$  ثابت جداسازی است. حل قسمت فضایی این معادله مشکل است، ولی قسمت زمانی مانند معادله‌ای است که در بازترکیب، معادلهٔ ۴۱.۵، با آن مواجه شدیم. بنابراین، جواب عبارت است از

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_0} + \frac{t}{\tau} \quad (104.5)$$

در زمان زیاد  $t$ ، چگالی مانند مورد بازترکیب به صورت  $1/t$  افت می‌کند. این واپاشی معکوس چیزی است که از پلاسما کاملاً یونیده که به طور کلاسیک پخش می‌شود انتظار می‌رود واپاشی نمایی گاز کم‌بوش یک رفتار کاملاً متفاوت است.

## ۲.۹.۵ جوابهای مستقل از زمان

یک مورد وجود دارد که در آن معادلهٔ پخش را می‌توان به سادگی حل کرد. یک ستون پلاسما دراز (شکل ۱۹.۵) با چشمه‌ای روی محور در نظر بگیرید که پلاسما را در مقابل پخش شعاعی و بازترکیب در حالت پایا نگه می‌دارد. نمایهٔ چگالی بیرون ناحیهٔ چشمه را رقابت بین پخش و بازترکیب معلوم خواهد کرد. اگر پخش کوچک و بازترکیب بزرگ باشد فاصلهٔ کاهش چگالی کوچک خواهد بود، و در مورد عکس بزرگ خواهد بود. در ناحیهٔ بیرون چشمه، معادلهٔ پیوستگی عبارت است از



شکل ۱۹.۵ پخش پلاسمای استوانه‌ای کاملاً یونیده در عرض یک میدان مغناطیسی.

$$-A \nabla^2 n^2 = -\alpha n^2 \quad (105.5)$$

این معادله برحسب  $n^2$  خطی است و می‌توان آن را به‌سادگی حل کرد. در هندسهٔ استوانه‌ای، جواب یک تابع بسل است. در هندسهٔ تخت، معادلهٔ (۱۰۵.۵) به‌صورت زیر در می‌آید

$$\frac{\partial^2 n^2}{\partial x^2} = \frac{\alpha}{A} n^2 \quad (106.5)$$

و جواب آن عبارت است از

$$n^2 = n_0^2 \exp[-(\alpha/A)^{1/2} x] \quad (107.5)$$

فاصلهٔ مقیاس برابر است با

$$l = (A/\alpha)^{1/2} \quad (108.5)$$

چون  $A$  با میدان مغناطیسی تغییر می‌کند در حالی که  $\alpha$  ثابت می‌ماند، تغییر  $l$  با  $B$  می‌تواند برای واریسی پخش کلاسیک به‌کار رود. این آزمایش در واقع در یک ماشین  $Q$  که پلاسمای کاملاً یونیده تهیه می‌کند قابل اجراست. اما متأسفانه، حضور سوپهای نامتقارن  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  منجر به نوع دیگری اتلاف توسط همرفتی می‌شود که آزمایش را بی‌نتیجه می‌سازد.

سرانجام، می‌خواهیم به یک قانون مقیاس‌بندی اشاره کنیم که برای هر پلاسمای حالت پایایی کاملاً یونیده‌ای که توسط یک چشمهٔ ثابت  $Q$  در یک میدان یکنواخت  $B$  نگه داشته شده است کاربرد دارد. بنابراین، معادلهٔ پیوستگی به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$-A \nabla^2 n^2 = -\eta K T \nabla^2 (n^2/B^2) = Q \quad (109.5)$$

چون  $n$  و  $B$  تنها در ترکیب  $n/B$  ظاهر شده‌اند، نمایه چگالی هنگامی که  $B$  تغییر می‌کند بدون تغییر خواهد ماند، و خود چگالی به‌طور خطی با  $B$  زیاد خواهد شد:

$$n \propto B \quad (۱۱۰.۵)$$

چون  $D_{\perp} \propto B^{-2}$ ، شاید انتظار داشته‌اید که چگالی تعادل  $n$  متناسب با  $B^2$  باشد، ولی باید به‌خاطر آورد که خود  $D_{\perp}$  متناسب با  $n$  است.

## ۱۰.۵ پخش بوهم و پخش نوکلاسیک

اگرچه نظریه پخش از طریق برخورد های کولنی مدتها قبل شناخته شده بود، تحقیقات آزمایشگاهی وابستگی  $D_{\perp}$  به  $B^2$  در یک پلاسما کاملاً بیونیده تا دهه ۱۹۶۰ از دید همه آزمایشگران پنهان مانده بود. تقریباً در همه آزمایشهای قبلی،  $D_{\perp}$  به‌صورت  $B^{-1}$  تغییر می‌کرد نه  $B^{-2}$ ، و معلوم شده بود که واپاشی پلاسما به‌طور نمایی با زمان تغییر می‌کند نه معکوس. علاوه بر آن، قدر مطلق  $D_{\perp}$  خیلی بزرگتر از آن چیزی بود که معادله ۹۹.۵ تعیین می‌کرد. این محبوس‌سازی مغناطیسی به‌طور غیرعادی ضعیف اولین بار در سال ۱۹۴۶ توسط بوهم، بوره‌ب و مِسی که روی یک قوس مغناطیسی برای استفاده در جداسازی ایزوتوپ اورانیم کار می‌کردند مشاهده شد. بوهم فرمول نیمه تجربی زیر را به‌دست آورد

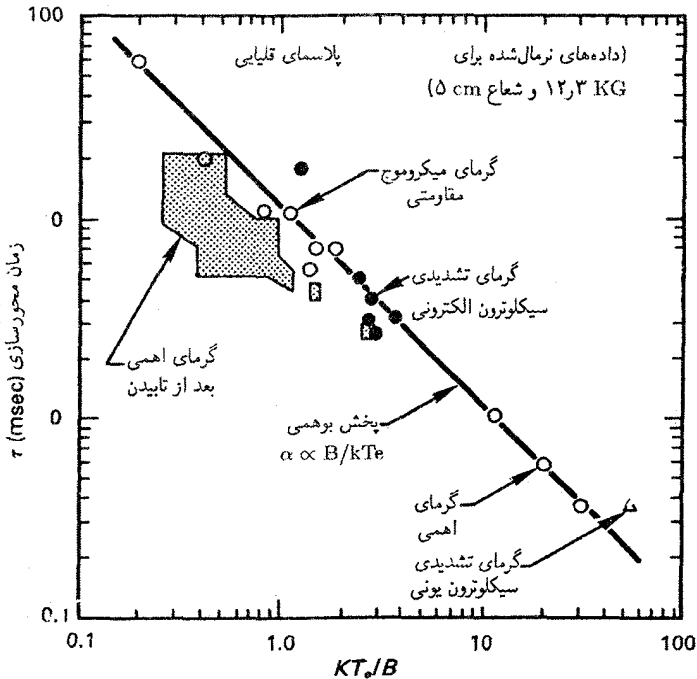
$$D_{\perp} = \frac{1}{16} \frac{KT_e}{eB} \equiv D_B \quad (۱۱۱.۵)$$

این فرمول در تعداد شگفت‌آوری از آزمایشهای مختلف موفق بوده است. پخشی که از این قانون تبعیت می‌کند پخش بوهم نامیده می‌شود. چون  $D_B$  مستقل از چگالی است، واپاشی نسبت به زمان به‌طور نمایی است. ثابت زمانی در یک ستون استوانه‌ای به‌شعاع  $R$  و طول  $L$  را می‌توان به‌صورت زیر تخمین زد:

$$\tau \approx \frac{N}{dN/dt} = \frac{n\pi R^2 L}{\Gamma_r 2\pi RL} = \frac{nR}{2\Gamma_r}$$

که در آن  $N$  تعداد کل جفتهای الکترون-نیون در پلاسماست. با شار  $\Gamma_r$  که از قانون فیک و فرمول بوهم تعیین می‌شود، داریم

$$\tau \approx \frac{nR}{2D_B \partial n / \partial r} \approx \frac{nR}{2D_B n / R} = \frac{R^2}{2D_B} \equiv \tau_B \quad (۱۱۲.۵)$$



شکل ۲۰.۵ خلاصه اندازه‌گیری‌های زمان محوسازی روی انواع مختلف تخلیه‌های الکتریکی در استلاریتور مدل C، که توافق با قانون پخش بوهم را نشان می‌دهد.

کمیت  $\tau_B$  اغلب زمان بوهم نامیده می‌شود.

شاید گسترده‌ترین رشته آزمایش‌هایی که برای تحقیق فرمول بوهم انجام شده‌اند روی نیم‌دوجین دستگاهی که استلاریتور نامیده می‌شوند در پرینستون صورت گرفته‌اند. استلاریتور ظرف مغناطیسی چنبره‌ای است با خطوط نیرویی که طوری تاب یافته‌اند که میانگین سوقهای انحنا و گرادیان  $B$  که در بخش ۳.۲ توصیف شده‌اند صفر می‌شوند. شکل ۲۰.۵ یک مجموعه از نتایج حاصل از انواع مختلف زیادی از تخلیه‌های الکتریکی در استلاریتور مدل C طی یک دهه را نشان می‌دهد. مقادیر اندازه‌گیری شده  $\tau$  نزدیک خطی که نشان‌دهنده زمان بوهم  $\tau_B$  است قرار می‌گیرند. پیروی نزدیک از پخش بوهم پیامدهای جدی برای برنامه همجوشی کنترل شده دارد. معادله ۱۱.۵ نشان می‌دهد که  $D_B$  به جای آنکه با دما کاهش یابد افزایش می‌یابد، و هرچند با  $B$  کاهش می‌یابد ولی این کاهش کندتر از حد انتظار است. از لحاظ قدر مطلق،  $D_B$  نیز خیلی بزرگتر از  $D_{\perp}$  است. برای مثال، برای پلاسمای  $100 \text{ eV}$  در میدان  $1 \text{ T}$ ، داریم

$$D_B = \frac{1}{16} \frac{(10^2)(1.6 \times 10^{-19})}{(1.6 \times 10^{-19})(1)} = 6.25 \text{ m}^2/\text{sec}$$

اگر چگالی  $10^{19} \text{ m}^{-3}$  باشد، ضریب پخش کلاسیک عبارت است از

$$D_{\perp} = \frac{2nKT\eta_{\perp}}{B^2} = \frac{(2)(10^{19})(10^2)(1.6 \times 10^{-19})}{(1)^2} \\ \times \frac{(2.0)(5.2 \times 10^{-5})(10)}{(100)^{3/2}} \\ = (320)(1.04 \times 10^{-6}) = 3.33 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{sec}$$

تفاوت از مرتبه  $10^4$  است.

چند توضیح برای پخش بوهم پیشنهاد شده‌اند. اولاً، احتمال خطاهای میدان مغناطیسی وجود دارد. در وضعیت‌های هندسی پیچیده‌ای که در تحقیق همجوشی به‌کار برده می‌شود، همواره واضح نیست که آیا خطوط نیرو روی خودشان بسته می‌شوند یا حتی در داخل چنبره باقی می‌مانند. چون مسافت‌های آزاد میانگین خیلی بزرگ هستند، تنها یک عدم تقارن کم در ساختار سیم‌پیچی مغناطیسی می‌تواند باعث شود الکترون‌ها بدون برخورد به‌طرف دیواره‌ها حرکت کنند. بنابراین، میدان الکتریکی همدوقتی یونها را به بیرون می‌کشد. ثانیاً، احتمال میدانهای الکتریکی نامتقارن وجود دارد. این میدانهای نامتقارن می‌توانند از موانعی که در پلاسما تعبیه شده‌اند، یا از عدم تقارن‌ها در اتاقک خلاء، یا از عدم تقارن در نحوه تولید پلاسما یا گرم کردن آن ناشی شوند. بنابراین، سوقهای مستقیم  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  لازم نیست موازی دیواره‌ها باشند، و یونها و الکترون‌ها توسط همرفتی  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  می‌توانند با هم به‌سوی دیواره‌ها حمل شوند. نقشهای سوق، که سلولهای همرفتی نامیده می‌شوند، مشاهده شده‌اند. نهایتاً، احتمال میدانهای الکتریکی نوسان‌کننده‌ای که از ناپایداری امواج پلاسما ناشی می‌شوند وجود دارد. اگر این میدانهای افت‌وخیزکننده کاتوره‌ای باشند، سوقهای  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  یک فرایند گامزنی کاتوره‌ای بی‌برخورد تشکیل می‌دهند. حتی اگر میدان نوسان‌کننده موج سینوسی محض باشد، می‌تواند منجر به اتلافهای تقویت‌شده شود زیرا فاز سوق  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  می‌تواند چنان باشد که وقتی افت‌وخیز چگالی مثبت است سوق همواره به‌طرف خارج باشد. می‌توان این وضعیت را به‌عنوان یک نقش سلول همرفتی متحرک در نظر گرفت. میدانهای الکتریکی افت‌وخیزکننده اغلب هنگامی که پخش غیرعادی وجود دارد مشاهده می‌شود، ولی در موارد زیادی می‌توان نشان داد که این میدانها باعث همه اتلافها نیستند. در آزمایشهای روی پلاسمای کاملاً یونیده ممکن است

هر سه سازوکار اتلاف غیرعادی همزمان حضور داشته باشند.

به آسانی می‌توان نشان داد که مقیاس بندی  $D_B$  با  $KT_e$  و  $B$ ، وقتی اتلافها توسط سوقهای  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  ساکن یا نوسان‌کننده ناشی می‌شوند، یک مقیاس بندی طبیعی است. فرض کنید شار گریز متناسب با سرعت سوق  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  باشد:

$$\Gamma_{\perp} = nv_{\perp} \propto nE/B \quad (113.5)$$

به علت حفاظ دبی، پتانسیل بیشینه در پلاسما با رابطه زیر داده می‌شود

$$e\phi_{\max} \approx KT_e \quad (114.5)$$

اگر  $R$  یک طول مقیاس مشخصه پلاسما (در حدود شعاع آن) باشد، میدان الکتریکی بیشینه عبارت است از

$$E_{\max} \approx \frac{\phi_{\max}}{R} \approx \frac{KT_e}{eR} \quad (115.5)$$

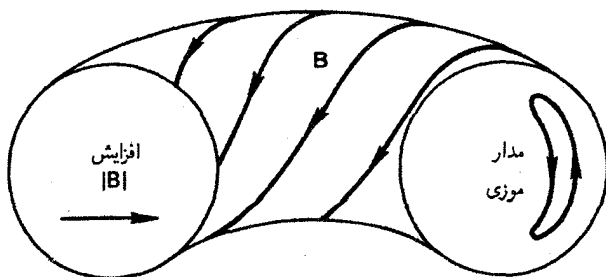
این میدان منجر به شار  $\Gamma_{\perp}$  با رابطه زیر می‌شود

$$\Gamma_{\perp} \approx \gamma \frac{n}{R} \frac{KT_e}{eB} \approx -\gamma \frac{KT_e}{eB} \nabla n = -D_B \nabla n \quad (116.5)$$

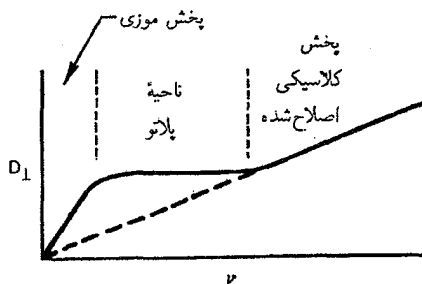
که در آن  $\gamma$  کسری کوچکتر از واحد است. بدین ترتیب، متناسب بودن  $D_B$  با  $KT_e/eB$  شگفت‌آور نیست. مقدار  $\gamma = 1/16$  دلیل نظری ندارد بلکه یک مقدار تجربی است که با بیشتر آزمایشها با ضریب دو یا سه توافق دارد.

در آزمایشهای جدید روی دستگاههای چنبره‌ای به زمانهای محبوس‌سازی حدود  $10^8 T_B$  نایل آمده‌اند. این نتیجه با حذف کامل نوسانها و نامتقارنيتها حاصل شده است. با این حال، در دستگاههای چنبره‌ای آثار دیگری حادث می‌شوند که پخش برخوردی را تقویت می‌کنند. شکل ۲۱.۵ چنبره‌ای را با خطوط نیروی ماریچی نشان می‌دهد. تاب برای حذف سوقهای یک جهتی انحناء و گردایان  $B$  لازم است. هنگامی که ذره‌ای یک خط نیرو را طی می‌کند، نزدیک دیواره داخلی چنبره با یک  $|B|$  بزرگتر و در نزدیک دیواره خارجی با  $|B|$  کوچکتری مواجه می‌شود. بعضی ذرات به علت اثر آینه مغناطیسی به دام می‌افتند و همه مسیر دور چنبره را گردش نمی‌کنند. مراکز راهنمای این ذرات به دام افتاده وقتی عبورهای متوالی از یک سطح مقطع معین انجام می‌دهند مسیره‌های موزی‌شکلی





شکل ۲۱.۵ یک مدار موزی ذره‌ای که در میدان مغناطیسی تابدار یک دستگاه محبوس‌سازی چنبره‌ای محبوس شده است. این «مدار» در واقع مکان هندسی نقاطی است که در آن ذره صفحه کاغذ را قطع می‌کند.

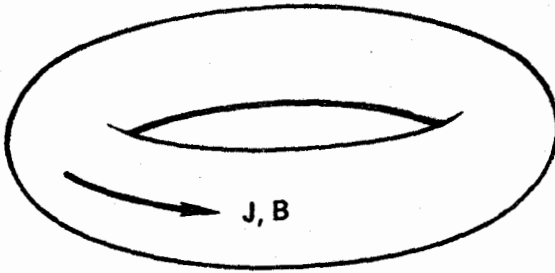


شکل ۲۲.۵ رفتار ضریب پخش نوکلاسیک با بسامد برخورد ۷.

را طی می‌کنند (شکل ۲۱.۵). هنگامی که ذره‌ای برخورد می‌کند، به‌طور متوالی به‌دام می‌افتد و رها می‌شود و از یک مدار موزی به مدار دیگری می‌رود. بنابراین، طول گام گامزنی کاتوره‌ای پهنای مدار موزی است نه شعاع  $r_L$ ، و ضریب پخش «کلاسیک» افزایش می‌یابد. این پخش پخش نوکلاسیک می‌نامند. وابستگی  $D_{\perp}$  به  $v$  در شکل ۲۲.۵ نشان داده شده است. در ناحیه  $v$ ‌های کوچک، پخش موزی بزرگتر از پخش کلاسیک است. در ناحیه  $v$ ‌های بزرگ، پخش کلاسیک وجود دارد، ولی توسط جریانهای در امتداد  $B$  تغییر می‌کند. منحنی نظری مربوط به پخش نوکلاسیک در لاجولا، کالیفرنیا، توسط آهکاوا با آزمایش مشاهده شده است.

## مسائل

۷.۵ نشان دهید مسافت آزاد میانگین  $\lambda_{ei}$  برای برخوردهای یون-الکترون متناسب با  $T_e^2$  است.



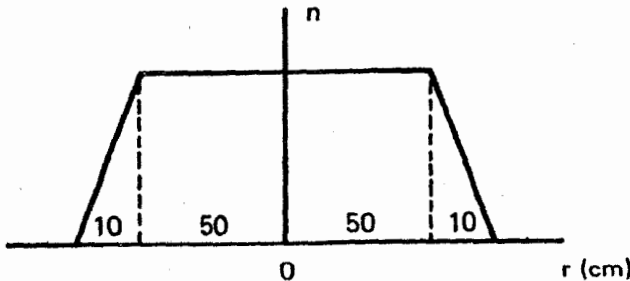
شکل م ۸.۵

۸.۵ توکاماک یک ظرف پلاسمای چنبره‌ای است که در آن جریانی از یک پلاسمای کاملاً یونیده توسط یک میدان الکتریکی اعمال شده در امتداد  $B$  عبور می‌کند (شکل م ۸.۵). این میدان الکتریکی چند  $V/m$  باید باشد تا جریان کل  $200 \text{ kA}$  را از درون پلاسمایی با  $KT_e = 500 \text{ eV}$  و سطح مقطع  $75 \text{ cm}^2$  عبور دهد؟

۹.۵ فرض کنید پلاسمای درون یک راکتور همجوشی به شکل استوانه‌ای به قطر  $2 \text{ m}$  و طول  $100 \text{ m}$  باشد. میدان مغناطیسی  $5 \text{ T}$ ، بجز در ناحیه‌های آینه‌ای دو انتها که می‌توان آن را نادیده گرفت، یکنواخت است. پارامترهای دیگر (در  $r = 0$ ) عبارت‌اند از  $KT_i = 20 \text{ keV}$ ،  $KT_e = 10 \text{ keV}$  و  $n = 10^{21} \text{ m}^{-3}$ . به‌طور تجربی معلوم شده است که نمایه چگالی تقریباً مانند شکل م ۹.۵ است. (الف) با در نظر گرفتن پخش کلاسیک،  $D_{\perp}$  را در  $r = 0.5 \text{ m}$  محاسبه کنید.

(ب)  $dN/dt$ ، تعداد کل جفتهای الکترون-یون که از ناحیه مرکزی به‌طور شعاعی در هر ثانیه خارج می‌شوند، را محاسبه کنید.

(ج) با  $\tau \approx -N/(dN/dt)$  زمان محبوس‌سازی را تخمین بزنید. تذکر: در این گونه مسائل فقط یک تخمین خام را می‌توان انتظار داشت. واضح است که فرایندهایی غیر از پخش کلاسیک بر نمایه تأثیر دارند.



شکل م ۹.۵

۱۰.۵ زمان پخش کلاسیک یک پلاسمای استوانه‌ای به شعاع  $1.0 \text{ cm}$ ، و با  $n = 10^{21} \text{ m}^{-3}$ ،  $KT_e = KT_i = 10 \text{ keV}$  و  $B = 5 \text{ T}$  را تخمین بزنید.  
 ۱۱.۵ یک ستون پلاسمای استوانه‌ای دارای توزیع چگالی زیر است

$$n = n_0 (1 - r^2/a^2)$$

که در آن  $a = 1.0 \text{ cm}$  و  $n_0 = 10^{21} \text{ m}^{-3}$ ، اگر  $KT_e = 100 \text{ eV}$ ،  $KT_i = 0$ ، و میدان مغناطیسی محوری  $B_0$  برابر با  $1 \text{ T}$  باشد، نسبت بین ضرایب پخش کلاسیکی و بوهم عمود بر  $B_0$  چیست؟

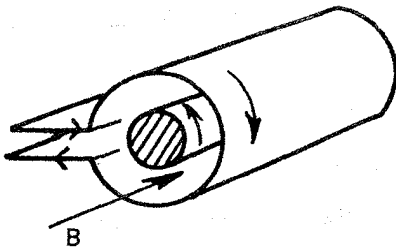
۱۲.۵ اگر  $\nu_{ei} \gg \nu_{ee}$  که در آن  $\nu_{ee}$  بسامد برخورد نوترون-الکترون است، مقاومت ویژه اسپینتر باز هم می‌تواند برای یک پلاسمای یونیده ضعیف معتبر باشد. داده‌های مربوط به سطح مقطع انتقال تکانه نوترون-الکترون  $\sigma_{ee}$  برحسب مجذور آنگستروم ( $\text{\AA}^2$ ) عبارت‌اند از:

$E = 10 \text{ eV}$	$E = 2 \text{ eV}$	
۴٫۱	۶٫۳	هلیوم
۱۳٫۸	۲٫۵	آرگون

برای پلاسماهای A و He یک بار یونیده با  $10 \text{ eV}$  و  $KT_e = 2$  (مورد ۴)، یونش نسبی را  $f \equiv n_i / (n_0 + n_i)$  که در آن  $\nu_{ei} = \nu_{ee}$  را با این فرض محاسبه کنید که مقدار  $\overline{\sigma v}(T_e)$  می‌توان با تقریب خام برابر گرفت با  $\sigma(E) |v|(E)$  که در آن  $E = KT_e$  (راهنمایی، برای  $\nu_{ee}$  از معادله ۱۱.۷ و برای  $\nu_{ei}$  از معادله‌های ۶۲.۵ و ۷۶.۵ استفاده کنید).

۱۳.۵ پلاسمای درون یک استلاریتور چنبره‌ای توسط جریانی در امتداد  $B$  به شدت  $10^5 \text{ A/m}^2$  به طور اهمی گرم می‌شود. چگالی در  $n = 10^{11} \text{ m}^{-3}$  یکنواخت است و تغییر نمی‌کند. گرمای ژول  $nZ^2$  به الکترونها داده می‌شود. هنگامی که  $KT_e = 10 \text{ eV}$  آهنگ افزایش  $KT_e$  را برحسب  $\text{eV}/\mu\text{sec}$  حساب کنید.

۱۴.۵ در یک  $\theta$ -تنگش، جریان شدیدی داخل یک سیم بیج یک حلقه‌ای تخلیه می‌شود. میدان مغناطیسی به وجود آمده درون حلقه یک جریان سطحی در این پلاسمای پرسیانش القا می‌کند. جریان سطحی در جهت خلاف جریان حلقه است و در نتیجه میدان مغناطیسی را بیرون از پلاسمای نگه می‌دارد. بنابراین، فشار میدان مغناطیسی بین حلقه و پلاسمای باعث متراکم شدن پلاسمای می‌شود. این اثر تنها وقتی می‌تواند روی دهد که میدان مغناطیسی در خلال تپ به درون پلاسمای



شکل ۱۴.۵

نفوذ نکند. با استفاده از مقاومت ویژه اسپیتزر، طول تب بیشینه را برای یک  $\theta$ -تنگش هیدروژن تخمین بزنید که شرایط اولیه آن عبارتند از  $KT_e = 10\text{ eV}$ ،  $n = 10^{22}\text{ m}^{-3}$ ،  $r = 2\text{ cm}$  فرض کنید میدان تنها در  $1/10^\circ$  فاصله تا محور نفوذ می‌کند.

۱۵.۵ یک پلاسمای استوانه‌ای متقارن محوری را با  $\mathbf{B} = B\hat{z}$ ،  $\mathbf{E} = E_r\hat{r}$  و  $\nabla p_i = \nabla p_e = \hat{r}\partial p/\partial r$  در نظر بگیرید. اگر جمله  $\mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{v})$  را نادیده بگیریم، که معادل است با نادیده گرفتن نیروی گریز از مرکز، معادلات دو سیال پایا را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$en(\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) - \nabla p_i - e^\nu n^\nu \eta(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) = 0$$

$$-en(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) - \nabla p_e - e^\nu n^\nu \eta(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) = 0$$

(الف) از مؤلفه‌های  $\theta$ ی این معادلات نشان دهید که  $v_{ir} = v_{er}$ .

(ب) از مؤلفه‌های  $r$  نشان دهید که  $v_{j\theta} = v_E + v_{Dj}$  ( $j = i, e$ ).

(ج) رابطه‌ای برای  $v_{ir}$  پیدا کنید که نشان می‌دهد که این کمیت بستگی به  $E_r$  ندارد.

۱۶.۵ با استفاده از معادله حرکت مغناطوهیدرودینامیک تک سیال و معادله پیوستگی جرم، سرعت فاز موج یون صوتی را در یک پلاسمای یکنواخت غیرمغناطیسی با  $T_e \gg T_i$  محاسبه کنید.

۱۷.۵ میرایی مقاومتی امواج آلفون را با به دست آوردن رابطه پاشیدگی از معادلات تک سیالی ۸۵.۵ و ۹۱.۵ و معادلات ماکسول ۷۲.۴ و ۷۷.۴ محاسبه کنید. با خطی سازی و نادیده گرفتن گرانش، جریان جابه‌جایی و  $\nabla p$ .

(الف) نشان دهید

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c^2 \epsilon_0 \left( \frac{B_0^2}{\rho_0} - i\omega\eta \right)$$

(ب) هنگامی که  $\omega$  حقیقی است و  $\eta$  کوچک است رابطه صریحی برای  $\text{Im}(k)$  پیدا کنید.

۱۸.۵ اگر یک پلاسمای استوانه‌ای با آهنگ بوهم پخش شود، نمایه چگالی شعاعی حالت پایای  $n(r)$  را با نادیده گرفتن این حقیقت که ممکن است ناپایدار شود، محاسبه کنید. فرض کنید چگالی در  $r = \infty$  صفر است و در  $r = r_0$  مقدار آن  $n_0$  است.

۱۹.۵ یک ستون استوانه‌ای از پلاسما در میدان مغناطیسی یکنواخت  $\mathbf{B} = B_z \hat{z}$  چگالی جریان یکنواخت  $\mathbf{j} = j_z \hat{z}$  را حمل می‌کند، که در آن  $\hat{z}$  بردار یکه موازی محور استوانه است.

(الف) میدان مغناطیسی  $\mathbf{B}(r)$  تولیدشده توسط این جریان پلاسما را حساب کنید.  
 (ب) رابطه‌ای برای سوق‌گردان  $B$  ذره‌ای باردار با  $v_{\parallel} = 0$  برحسب  $B_z$ ،  $j_z$ ،  $r$ ،  $v_{\perp}$ ،  $q$ ، و  $m$  بنویسید. می‌توانید فرض کنید که میدان محاسبه‌شده در (الف) در مقایسه با  $B_z$  کوچک است (ولی صفر نیست).

(ج) اگر پلاسما دارای مقاومت الکتریکی باشد، یک میدان الکتریکی  $\mathbf{E} = E_z \hat{z}$  نیز وجود دارد. سوق سمتی الکترون ناشی از این میدان را، با در نظر گرفتن شکل مارپیچی میدان  $\mathbf{B}$ ، محاسبه کنید.

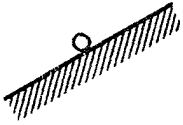
(د) نموداری ترسیم کنید که جهت سوقهای (ب) و (ج) را برای الکترونها و یونها در صفحه  $(r, \theta)$  نشان دهد.

## تبادل و پایداری

### ۱.۶ مقدمه

اگر تنها حرکت‌های ذرات منفرد را در نظر بگیریم، طراحی میدان مغناطیسی‌ای که یک پلاسمای بی‌برخورد را محصور کند کار ساده‌ای خواهد بود. تنها لازم است اطمینان یابیم که خطوط نیرو به دیوارهٔ خلاء برخورد نمی‌کنند و دستگاه را به‌گونه‌ای تقارن دهیم که تمام سرعت‌های سویی ذرات  $v_E$ ،  $v_{\nabla B}$  و غیره موازی با دیواره‌ها باشند. اما از دیدگاه ماکروسکوپی سیال، به آسانی نمی‌توان دانست که پلاسمای در میدان مغناطیسی‌ای که برای دربرگرفتن ذرات منفرد طراحی شده است محصور شده است یا نه. چگونگی آرایش میدان‌های خارجی هرچه باشد، پلاسمای می‌تواند میدان‌های داخلی ایجاد کند که حرکتش را تحت تأثیر قرار می‌دهند. مثلاً ازدحام بار الکتریکی می‌تواند میدان‌های  $E$  به‌وجود آورد که موجب سوق‌های  $E \times B$  به سمت دیواره می‌شوند. جریان‌های درون پلاسمای می‌توانند میدان‌های  $B$  تولید کنند که موجب سوق‌های گردان  $B$  به سمت خارج می‌شوند.

مسئلهٔ محصورسازی را می‌توانیم به دو قسمت اختیاری تقسیم کنیم: مسئلهٔ تعادل و مسئلهٔ پایداری. تفاوت میان تعادل و پایداری را می‌توان به بهترین وجه از مقایسه با مکانیک روشن کرد. شکل ۱.۶ وضعیت‌های متفاوت تپله‌ای ساکن را بر روی یک سطح سخت نشان می‌دهد. تعادل



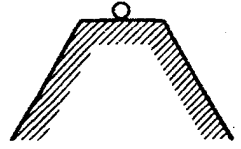
(الف)

بدون تعادل



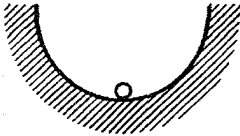
(ب)

پایدار خنثایی



(ج)

تعادل  
شبه پایدار



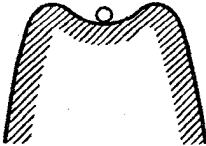
(د)

تعادل پایداری



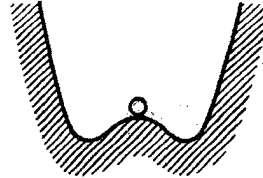
(ه)

تعادل ناپایداری



(و)

تعادل با پایداری  
خطی و ناپایداری  
غیرخطی



(ز)

تعادل با ناپایداری  
خطی و پایداری  
غیرخطی

شکل ۱.۶ مانستگی مکانیکی انواع تعادل.

حالتی است که در آن تمام نیروها به توازن رسیده‌اند و از این رو می‌توان یک جواب مستقل از زمان داشت. تعادل، بسته به آن که اختلالات کوچک در آن میرا شوند یا تقویت، می‌تواند پایدار یا ناپایدار باشد. در وضعیت (و) تا وقتی تپله را خیلی دور نبرده‌ایم تعادل پایدار است. هرگاه تپله از یک آستانه بگذرد در حالت ناپایدار خواهد بود. این وضعیت را «ناپایداری انفجاری» می‌نامند. تپله در

وضعیت (ز) در حالت ناپایدار است اما نمی‌تواند خیلی دور شود. اگر حد غیرخطی دامنه حرکت کوچک باشد، این ناپایداری خیلی خطرناک نیست. البته در مورد پلازما وضعیت بسیار پیچیده‌تر از چیزی است که در شکل ۱.۶ دیده می‌شود؛ رسیدن به تعادل مستلزم توازن نیروهای وارد بر هر جزء سیال است. از دو مسئله تعادل و پایداری بررسی پایداری ساده‌تر است. برای انحرافهای کوچک از حالت تعادل می‌توان معادلات حرکت را خطی کرد. بنابراین، درست مانند مورد امواج پلازما، معادلات خطی خواهیم داشت. از طرف دیگر، مسئله تعادل، مانند پخش، یک مسئله غیرخطی است. محاسبه تعادل در هندسه‌های پیچیده مغناطیسی کاری پرزحمت است.

## ۲.۶ تعادل هیدرومغناطیسی

با آن که مسئله عمومی تعادل پیچیده است اما می‌توان چند مفهوم فیزیکی را به آسانی از معادلات MHD به دست آورد. در حالت پایا با  $\partial/\partial t = 0$  و  $g = 0$ ، معادله‌های زیر باید برای پلازما برقرار باشند (با معادله ۸۵.۵ مقایسه کنید)

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (۱.۶)$$

و

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (۲.۶)$$

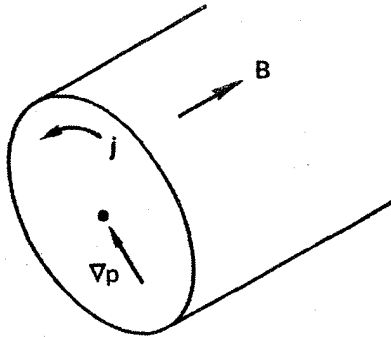
از معادله ساده ۱.۶ می‌توانیم چند نکته را دریابیم.

(الف) معادله ۱.۶ بیان می‌دارد که بین نیروهای گرادیان فشار و لورنتس توازن نیرو وجود دارد. این توازن چگونه برقرار می‌شود؟ یک پلاسمای استوانه‌ای که در آن  $\nabla p$  به سمت محور است در نظر بگیرید (شکل ۲.۶). برای خنثی شدن نیروی برونسوی انبساط باید یک جریان سمتی در جهت نشان داده شده وجود داشته باشد. بزرگی جریان لازم را می‌توان از ضرب خارجی معادله ۱.۶ با  $\mathbf{B}$  به دست آورد:

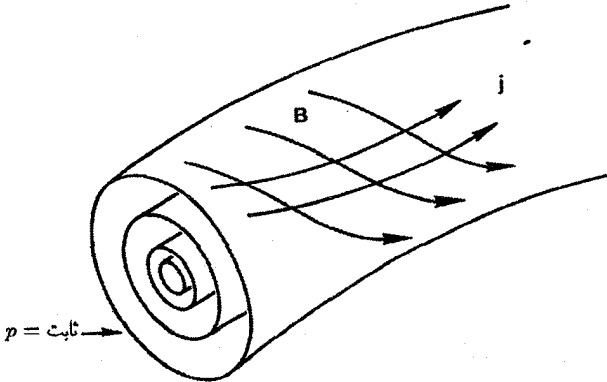
$$\mathbf{j}_\perp = \frac{\mathbf{B} \times \nabla p}{B^2} = (KT_i + KT_e) \frac{\mathbf{B} \times \nabla n}{B^2} \quad (۳.۶)$$

این همان جریان دیامغناطیسی است که قبلاً در معادله ۶۹.۳ به دست آمده بود. از دیدگاه ذره منفرد، جریان دیامغناطیسی از سرعتهای چرخش لارمور ذرات، که میانگین آنها به علت وجود گرادیان چگالی صفر نیست، ناشی می‌شود. از دیدگاه یک سیال MHD، جریان دیامغناطیسی از نیروی  $\nabla p$  در میدان  $\mathbf{B}$  به وجود می‌آید. جریان حاصل تنها برای توازن نیروهای وارد بر هر یک از اجزای سیال و توقف حرکت کافی است.





شکل ۲.۶ نیروی جریان دیامغناطیسی  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  نیروی گرادیان فشار را در حالت پایا خنثی می‌کند.

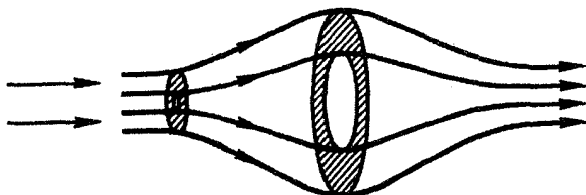


شکل ۳.۶ بردارهای  $\mathbf{B}$  و  $\mathbf{j}$  هر دو روی سطوح فشار ثابت قرار دارند.

(ب) معادله ۱.۶ به روشنی نشان می‌دهد که  $\mathbf{B}$  و  $\mathbf{j}$  هر دو بر  $\nabla p$  عمود هستند. اگر توجه کنیم که هندسه مسئله می‌تواند خیلی پیچیده باشد درمی‌یابیم که این گزاره بدیهی نیست. یک پلاسمای چنبره‌ای را در نظر بگیرید که گرادیان چگالی شعاعی همواری دارد به طوری که سطوح چگالی ثابت (درواقع  $p$  ثابت) چنبره‌های تودرتو هستند (شکل ۳.۶). چون  $\mathbf{B}$  و  $\mathbf{j}$  بر  $\nabla p$  عمودند باید روی سطوح  $p$  ثابت قرار گیرند. به طور کلی، خطوط نیرو و جریان می‌توانند به هر سو تاب داشته باشند اما نباید سطوح  $p$  ثابت را قطع کنند.

(ج) مؤلفه معادله ۱.۶ در راستای  $\mathbf{B}$  را در نظر بگیرید. این مؤلفه بیان می‌دارد که

$$\partial p / \partial s = 0 \quad (۴.۶)$$



شکل ۴.۶ انبساط پلاسمای جاری در داخل آینه.

که در آن  $s$  مختصه در امتداد خط نیرو است. در  $KT$ ی ثابت، این معادله نشان می‌دهد که در تعادل هیدرومغناطیسی، چگالی در امتداد خط نیرو ثابت است. در نگاه اول به نظر می‌رسد که این نتیجه‌گیری نباید درست باشد. اما پلاسمایی را در نظر بگیرید که به درون یک آینه مغناطیسی فرستاده می‌شود (شکل ۴.۶). همچنانکه پلاسمای با دنبال کردن خطوط نیرو پیش می‌رود انبساط می‌یابد و سپس منقبض می‌شود؛ روشن است که چگالی در راستای خط نیرو ثابت نیست. اما این وضعیت در شرایط تعادل (استاتیک) صدق نمی‌کند. جمله  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  که در بحث بالا از آن صرف نظر کرده‌ایم در اینجا صفر نیست. باید پلاسمای ایستا با  $\mathbf{v} = 0$  را در نظر بگیریم. در این مورد، ذرات در آینه به دام می‌افتند و تعداد ذرات به دام افتاده در حوالی صفحه میانی نسبت به ناحیه‌های انتهایی بیشتر است زیرا نسبت آینه در آنجا بزرگتر است. این اثر به علت سطح مقطع بزرگتر صفحه میانی دقیقاً جبران می‌شود و نتیجه نهایی آن است که چگالی در امتداد خط نیرو ثابت خواهد ماند.

### ۳.۶ مفهوم $\beta$

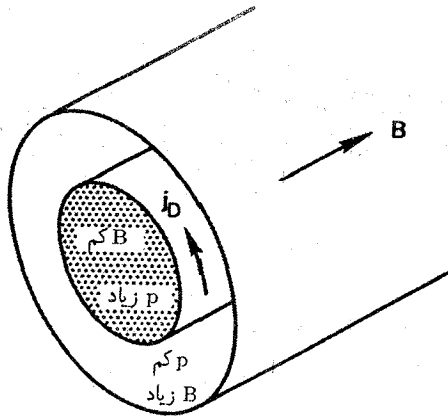
اکنون با جاگذاری معادله ۲.۶ در ۱.۶ به دست می‌آوریم

$$\nabla p = \mu_0^{-1} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \mu_0^{-1} \left[ (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2 \right] \quad (5.6)$$

یا

$$\nabla \left( p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (6.6)$$

در موارد جالب بسیاری، مانند استوانه مستقیم با میدان محوری، سمت راست این معادله صفر است؛  $\mathbf{B}$  در راستای  $\mathbf{B}$  تغییر نمی‌کند. در موارد بسیار دیگری سمت راست معادله مذکور کوچک است. بنابراین، از معادله ۶.۶ داریم



شکل ۵.۶ در یک پلاسما با  $\beta$  ی متناهی، جریان دیامغناطیسی به طور چشمگیر میدان مغناطیسی را کاهش می‌دهد و مجموع فشارهای ذرات و مغناطیسی را ثابت نگه می‌دارد.

$$p + \frac{B^2}{2\mu_0} = \text{const.} \quad (7.6)$$

چون  $B^2/2\mu_0$  فشار میدان مغناطیسی است، مجموع فشار ذره و فشار میدان مغناطیسی ثابت است. در پلاسمای با گرادیان چگالی (شکل ۵.۶)، جایی که چگالی زیاد است باید میدان مغناطیسی کوچک باشد و برعکس. می‌دانیم که کاهش میدان مغناطیسی داخل پلاسما از جریان دیامغناطیسی ناشی می‌شود. اندازه اثر دیامغناطیسی با نسبت دو جمله معادله ۷.۶ مشخص می‌شود. این نسبت را معمولاً با  $\beta$  نشان می‌دهند:

$$\beta \equiv \frac{\Sigma n k T}{B^2/2\mu_0} = \frac{\text{فشار ذره}}{\text{فشار میدان مغناطیسی}} \quad (8.6)$$

تاکنون به طور ضمنی پلاسماهای با  $\beta$  کوچک را که در آن  $\beta$  بین  $10^{-3}$  تا  $10^{-6}$  است در نظر گرفته‌ایم. بنابراین، اثر دیامغناطیسی بسیار کوچک است. به همین دلیل است که در بیان امواج پلاسما توانستیم میدان  $B_0$  را یکنواخت فرض کنیم. اگر  $\beta$  کوچک باشد اهمیتی نخواهد داشت که مخرج معادله ۸.۶ را در میدان خلاء محاسبه کنیم یا در میدانی با حضور پلاسما. اگر  $\beta$  بزرگ باشد مقدار موضعی  $B$  می‌تواند توسط پلاسما به طور چشمگیر کاهش یابد. در این مورد، مرسوم آن است که از مقدار خلاء  $B_0$  در تعریف  $\beta$  استفاده کنند. پلاسماهای با  $\beta$  بزرگ در پژوهش تبدیل انرژی MHD و فضا متداول هستند. برای آن که راکتورهای همجوشی اقتصادی باشند باید  $\beta$

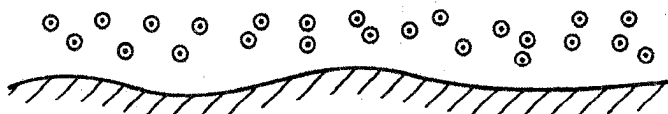
بزرگتر از ۱٪ داشته باشند زیرا انرژی تولیدشده با  $n^2$  متناسب است در حالی که هزینه محفظه مغناطیسی با توانی از  $B$  افزایش می‌یابد.

اصولاً می‌توان پلاسمای با  $\beta = 1$  داشت که در آن جریان دیامغناطیسی بتواند میدانی دقیقاً مساوی و مخالف با میدان یکنواخت خارجی ایجاد کند. در این مورد دو ناحیه داریم: ناحیه پلاسمای بدون میدان و ناحیه میدان بدون پلاسما. اگر خطوط میدان خارجی مستقیم باشند این تعادل احتمالاً ناپایدار است زیرا شبیه وضعیت یک گوی زله‌ای است که با نوارهای کشیده لاستیکی نگه داشته شده است. تنها این نکته باقی می‌ماند که بینیم آیا از این نوع پلاسمای  $\beta = 1$  می‌توان تولید کرد. در بعضی از آرایشهای مغناطیسی، میدان خلاء در داخل پلاسما صفر می‌شود؛ از این رو مقدار موضعی  $\beta$  در آنجا بینهایت خواهد شد. به عنوان مثال، این وضعیت وقتی اتفاق می‌افتد که میدانها تنها در نزدیکی سطح یک پلاسمای بزرگ اعمال شوند. از این رو، به طور متداول  $\beta$  را به صورت نسبت ماکسیم فشار ذرات به ماکسیم فشار مغناطیسی تعریف می‌کنند؛ با این تعریف، امکان ندارد که در یک پلاسمای محصور مغناطیسی  $\beta$  بزرگتر از ۱ باشد.

## ۴.۶ بخش میدان مغناطیسی به درون پلاسما

بخش میدان مغناطیسی به درون پلاسما مسئله‌ای است که غالباً در اخترفیزیک رخ می‌دهد. اگر مرزی بین ناحیه پلاسمای بدون میدان و ناحیه میدان بدون پلاسما وجود داشته باشد (شکل ۶.۶)، به همان دلیل که شاره نمی‌تواند به درون یک ابررسانا نفوذ کند، این نواحی نیز مجزا از هم باقی می‌مانند البته به شرطی که پلاسما فاقد مقاومت باشد. هر  $emf$  که توسط خطوط نیروی متحرک تولید شود باید یک جریان بینهایت به وجود آورد و این ناممکن است. بنابراین، وقتی پلاسما به اطراف حرکت می‌کند خطوط نیرو را هل می‌دهد و می‌تواند آنها را خم کند و تاب دهد. این می‌تواند دلیل ساختار رشته‌ای گاز در سحابی سرطان باشد. اما اگر مقاومت متناهی باشد، پلاسما می‌تواند به درون میدان حرکت کند و برعکس. این بخش مدت زمان معینی طول می‌کشد و اگر حرکتها

نقط B



نقط پلاسما

شکل ۶.۶ در یک پلاسمای رسانای کامل، ناحیه‌های پلاسما و میدان مغناطیسی می‌توانند توسط یک مرز مشخص از هم جدا باشند. جریانهای روی سطح مانع از نفوذ میدان به ناحیه پلاسما می‌شوند.

به اندازه کافی کند باشند خطوط نیرو الزاماً از حرکت‌های گاز و اَبیچش نمی‌یابند. زمان پخش را می‌توان به آسانی از معادلات زیر محاسبه کرد (با معادله ۹۱.۵ مقایسه کنید)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (۹.۶)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} \quad (۱۰.۶)$$

برای سادگی فرض می‌کنیم پلاسما در حال سکون است و خطوط نیرو به داخل آن حرکت می‌کنند. بنابراین  $\mathbf{v} = 0$  و داریم

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = -\nabla \times \eta \mathbf{j} \quad (۱۱.۶)$$

این رابطه با جاگذاری  $\mathbf{j}$  از معادله ۲.۶ به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\eta}{\mu_0} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{\eta}{\mu_0} [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}] \quad (۱۲.۶)$$

چون  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ، یک معادله پخش از نوعی که در فصل ۵ ملاحظه کردیم به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (۱۳.۶)$$

مطابق معمول می‌توان این معادله را با جداسازی متغیرها حل کرد. برای آن که تخمین اولیه‌ای به دست آوریم،  $L$  را طول مقیاس تغییر فضایی  $\mathbf{B}$  فرض می‌کنیم. بنابراین، داریم

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0 L^2} \mathbf{B} \quad (۱۴.۶)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{\pm t/\tau} \quad (۱۵.۶)$$

که در آن

$$\tau = \mu_0 L^2 / \eta \quad (۱۶.۶)$$

این زمان مشخصه برای نفوذ میدان مغناطیسی به درون پلاسماست.

زمان  $\tau$  را می‌توان زمان نابودی میدان مغناطیسی نیز تعبیر کرد. وقتی که خطوط میدان در پلاسما حرکت می‌کنند جریانهای القایی موجب گرمایش اهمی پلاسما می‌شوند. این انرژی از انرژی میدان

گرفته می‌شود. مقدار انرژی اتلافی در هر  $m^3$  در زمان  $\tau$  برابر با  $\eta j^2 \tau$  است. چون

$$\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} \approx \frac{B}{L} \quad (17.6)$$

که از معادلهٔ ماکسول با چشمپوشی از جریان جابه‌جایی به دست می‌آید، اتلاف انرژی برابر است با

$$\eta j^2 \tau = \eta \left( \frac{B}{\mu_0 L} \right)^2 \frac{\mu_0 L^2}{\eta} = \frac{B^2}{\mu_0} = 2 \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \quad (18.6)$$

بنابراین، اساساً  $\tau$  مدت زمانی است که طول می‌کشد تا انرژی میدان به گرمای ژول تبدیل شود.

## مسائل

۱.۶ فرض کنید در یک رآکتور  $D - D$ ، ناپایداری الکترومغناطیسی  $\beta$  را تا  $(m/M)^{1/2}$  محدود

می‌کند. فرض کنید مقاومت مواد به گونه‌ای است که میدان مغناطیسی به  $T = 20$  محدود می‌شود.

اگر  $KT_e = KT_i = 20 \text{ keV}$ ، ماکسیمم چگالی پلاسمایی که می‌توان به دست آورد را پیدا کنید.

۲.۶ در آزمایشهای همجوشی لیزری، در نتیجه جذب نور لیزری در سطح گوی، پلاسمایی با چگالی

$n = 10^{27} \text{ m}^{-3}$  و دمای  $T_e \simeq T_i \simeq 10^4 \text{ eV}$  تولید می‌شود. جریانهای گرماالکتریکی می‌توانند

میدانهای مغناطیسی خودبه‌خودی به بزرگی  $10^3 \text{ T}$  به وجود آورند.

(الف) نشان دهید در این پلاسما  $\omega_e \tau_{ei} \gg 1$ ، و از این رو حرکت الکترون به طور جدی تحت

تأثیر میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد.

(ب) نشان دهید  $\beta \gg 1$ ، و در نتیجه میدانهای مغناطیسی نمی‌توانند به طور مؤثر پلاسما را محصور کنند.

(ج) برای آن که شرایط به ظاهر متناقض (الف) و (ب) بتوانند هر دو برقرار شوند، پلاسما و میدان

باید چگونه حرکت کنند؟

۳.۶ در یک ستون پلاسمای استوانه‌ای به شعاع  $a$  میدان مغناطیسی هم‌محور  $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$  برقرار

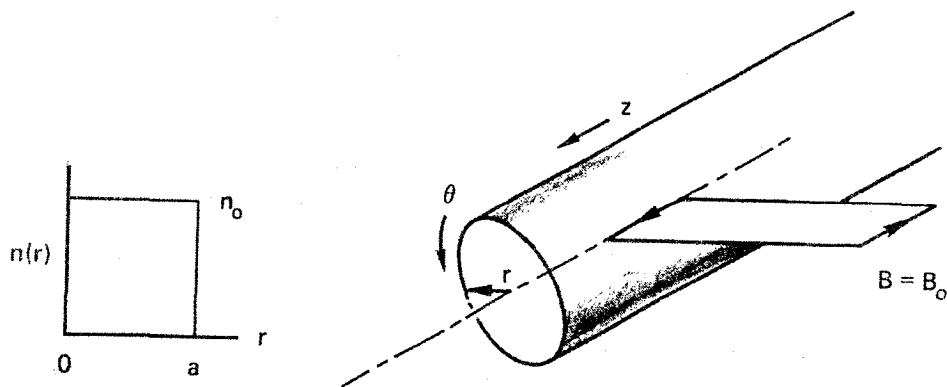
است و نمایه فشار به صورت زیر است

$$p = p_0 \cos^2(\pi r / 2a)$$

(الف) مقدار ماکسیمم  $p_0$  را حساب کنید.

(ب) با استفاده از این مقدار  $p_0$ ، جریان دیامغناطیسی  $\mathbf{j}(r)$  و میدان کل  $\mathbf{B}(r)$  را محاسبه کنید.

(ج)  $\mathbf{j}(r)$ ،  $B(r)$  و  $p(r)$  را روی یک نمودار نشان دهید.



شکل م ۴.۶

(د) اگر استوانه را به صورت یک چنبر خم کنیم و خطوط نیرو پس از یک دور روی هم بسته شوند، روشن است که تعادل موجود، که در آن نیروهای ماکروسکوپی همه جا در حالت موازنه‌اند، به هم می‌خورد. آیا ممکن است فشار  $p(r, \theta)$  را مجدداً به گونه‌ای توزیع کرد که تعادل را بازگرداند؟

۴.۶ یک پلاسمای استوانه‌ای مستقیم نامتناهی با نمایه چگالی مربعی تولید شده در میدان مغناطیسی یکنواخت  $B_0$  در نظر بگیرید (شکل م ۴.۶). به ترتیب زیر نشان دهید که اگر  $\beta = 1$  آن‌گاه  $B$  روی محور صفر می‌شود.

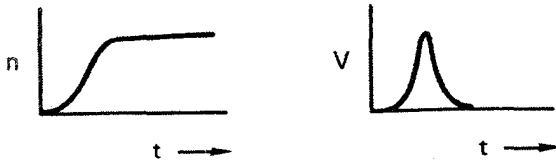
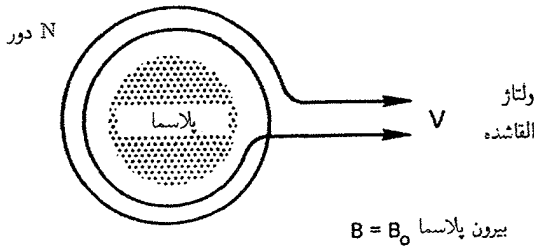
(الف) با استفاده از معادلات MHD، بردار  $\mathbf{z}$  را در حالت پایا برای  $KT = \text{const}$  به دست آورید.

(ب) با استفاده از  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$  و قضیه استوکس، روی سطح حلقه نشان داده شده انتگرال‌گیری کنید و رابطه زیر را به دست آورید

$$B_{ax} - B_0 = \mu_0 \Sigma KT \int_0^{\infty} \frac{\partial n / \partial r}{B(r)} dr \quad B_{ax} \equiv B_{r=0}$$

(ج) انتگرال را با توجه به این نکته محاسبه کنید که  $\partial n / \partial r$  یک تابع  $\delta$  است به طوری که  $B(r)$  در  $r = a$  با میانگین  $B_{ax}$  و  $B_0$  برابر است.

۵.۶ یک حلقه دیامغناطیسی ایزاری است که فشار پلاسمای را با آشکارسازی اثر دیامغناطیسی اندازه‌گیری می‌کند (شکل م ۵.۶). وقتی که پلاسمای به وجود می‌آید جریان دیامغناطیسی افزایش پیدا می‌کند،  $B$  در داخل پلاسمای کاهش می‌یابد و شار  $\Phi$  محصور شده در حلقه کم می‌شود و ولتاژی را القا می‌کند که به وسیله یک مدار  $RC$  انتگرال‌گیری زمانی می‌شود (شکل م ۵.۶).



شکل م ۵.۶

(الف) نشان دهید

$$\int_{\text{حلقه}} V dt = -N \Delta \Phi = -N \int B_d \cdot dS \quad B_d \equiv B - B_0$$

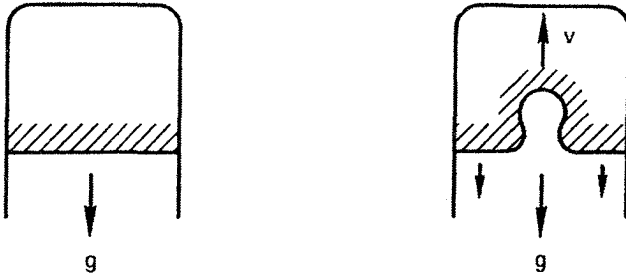
(ب) با استفاده از روش مسئله قبل و فرض  $n(r) = n_0 \exp[-(r/r_0)^2]$  میدان  $B_d(r)$  را به دست آورید. برای انجام انتگرال‌گیری فرض کنید  $\beta \ll 1$ ، و از این رو می‌توان در انتگرال  $B$  را با  $B_0$  تقریب گرفت.

(ج) نشان دهید  $\int V dt = \frac{1}{2} N \pi r_0^2 \beta B_0$  که در آن  $\beta$  با معادله ۸.۶ تعریف شده است.

## ۵.۶ رده‌بندی ناپایداریها

در بررسی امواج پلازما حالت نامختلی را فرض کردیم که یک حالت تعادل ترمودینامیکی کامل بود. ذرات توزیع سرعت ماکسولی داشتند و چگالی و میدان مغناطیسی یکنواخت بودند. در چنین حالتی که بیشترین آنتروپی را دارد، انرژی آزاد برای برانگیختن امواج وجود ندارد و ناچار شدیم امواجی را در نظر بگیریم که با عوامل خارجی برانگیخته می‌شوند، اکنون حالتی در نظر می‌گیریم که در تعادل ترمودینامیکی کامل نیستند اما به این معنی در تعادل‌اند که تمام نیروها در توازن هستند و جواب مستقل از زمان وجود دارد. انرژی آزاد موجود می‌تواند موجب شود تا امواج خود-برانگیخته شوند؛ آن‌گاه تعادل یک تعادل ناپایدار خواهد بود. ناپایداری حرکتی است که همیشه انرژی آزاد را کاهش می‌دهد و پلازما را به تعادل ترمودینامیک واقعی نزدیکتر می‌کند.





شکل ۷.۶ ناپایداری هیدرودینامیکی ریلی-تیلور یک سیال سنگین که توسط سیال سبکی نگه داشته شده است.

ناپایداریها را می‌توان با توجه به نوع انرژی آزاد موجود برای تحرک آنها رده‌بندی کرد. ناپایداریها در چهار مقولهٔ اساسی قرار می‌گیرند.

۱. ناپایداریهای جریانی، در این مورد، یا یک باریکهٔ پراثری ذرات از درون پلاسما عبور می‌کند یا جریانی در داخل پلاسما کشیده می‌شود که در نتیجه گونه‌های متفاوت نسبت به یکدیگر سوق پیدا می‌کنند. انرژی سوقی برای برانگیختگی امواج به‌کار می‌رود و انرژی نوسانی با مصرف انرژی سوقی در حالت نامختل به‌دست می‌آید.

۲. ناپایداریهای ریلی-تیلور. در این مورد پلاسما دارای گرادیان چگالی یا یک مرز مشخص است، و از این رو یکنواخت نیست. به‌علاوه، یک نیروی غیرالکترومغناطیسی خارجی بر پلاسما اعمال می‌شود. این نیرو است که ناپایداری را تحریک می‌کند. به‌عنوان تشبیه می‌توان یک لیوان آب واژگون را در نظر گرفت (شکل ۷.۶). اگرچه سطح مشترک بین آب و هوا در حال تعادل است زیرا فشار هوا وزن آب را تحمل می‌کند اما این یک تعادل ناپایدار است. هر موج کوچکی در سطح آب با مصرف انرژی پتانسیل موجود در میدان گرانشی تمایل به بزرگ شدن دارد. همان‌طور که از هیدرودینامیک به‌خوبی می‌دانیم، هرگاه یک سیال سنگین توسط یک سیال سبک نگه داشته شود این پدیده اتفاق می‌افتد.

۳. ناپایداریهای جهانی. حتی اگر نیروی محرک واضحی مانند میدان گرانشی یا الکتریکی وجود نداشته باشد، تا وقتی که پلاسما محصور است در تعادل ترمودینامیکی کامل نخواهد بود. فشار پلاسما تمایل به انبساط آن دارد و انرژی انبساطی می‌تواند باعث تحریک ناپایداری شود. معمولاً این نوع انرژی آزاد در هر پلاسمای متناهی موجود است، و امواج حاصل را ناپایداریهای جهانی می‌نامند.

۴. ناپایداریهای جنبشی. در نظریهٔ سیالات فرض می‌شود که توزیع سرعت ماکسولی است. اگر توزیعها واقعاً ماکسولی نباشند، انحرافی از تعادل ترمودینامیکی وجود خواهد داشت؛ و ناپایداریها

می‌توانند از ناهمسانگردی توزیع سرعت تحریک شوند. مثلاً اگر  $T_{\perp}$  و  $T_{\parallel}$  متفاوت باشند یک ناپایداری، که ناپایداری هریس تغییر یافته نام دارد، می‌تواند به وجود آید. در ابزارهای آینه‌ای، به علت مخروط اتلاف، کمبود ذرات با نسبت بزرگ  $v_{\parallel}/v_{\perp}$  وجود دارد؛ این ناهمسانگردی به «ناپایداری مخروط اتلافی» منجر می‌شود.

در بخشهای بعد مثالهای ساده‌ای از هر یک از این ناپایداریها ارائه می‌کنیم. ناپایداریهایی که به علت ناهمسانگردی تحریک می‌شوند نمی‌توان با نظریه سیالات توضیح داد و بیان جزئیات آنها در ورای سطح کتاب حاضر است.

برای محصورسازی پلاسما، تمام ناپایداریها به یک اندازه خطرناک نیستند. مثلاً یک ناپایداری با بسامد زیاد در نزدیکی  $\omega_p$  نمی‌تواند بر حرکت یونهای سنگین تأثیر داشته باشد. اما ناپایداریهای کم‌بسامد با  $\Omega_e \ll \omega$  می‌توانند از طریق سوپهای  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  موجب اتلافهای همدوقطبی غیرعادی شوند، ناپایداریهای با  $\Omega_e \approx \omega$  ذرات را در عرض میدان  $\mathbf{B}$  به طور مؤثر انتقال نمی‌دهند اما ماشینهای آینه‌ای که ذرات در فضای سرعت با پخش به مخروط اتلاف می‌روند خطرناک هستند.

## ۶.۶ ناپایداری دوجریانی

به عنوان مثالی از ناپایداری جریانی، پلاسمای یکنواختی در نظر بگیرید که در آن یونها ساکن‌اند و الکترونها نسبت به یونها دارای سرعت  $\mathbf{v}_0$  هستند. یعنی، ناظر در چارچوبی قرار دارد که با «جریان» یونها حرکت می‌کند. فرض کنید پلاسما سرد باشد ( $KT_e = KT_i = 0$ ) و فرض کنید میدان مغناطیسی وجود ندارد ( $B_0 = 0$ ). بنابراین، معادلات خطی شده حرکت را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$Mn_0 \frac{\partial \mathbf{v}_{e1}}{\partial t} = en_0 \mathbf{E}_1 \quad (19.6)$$

$$mn_0 \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_{e1}}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_{e1} \right] = -en_0 \mathbf{E}_1 \quad (20.6)$$

در معادله ۲۰.۶ جمله  $(\mathbf{v}_{e1} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0$  حذف شده است زیرا فرض کرده‌ایم  $\mathbf{v}_0$  یکنواخت است. در معادله ۱۹.۶ جمله  $(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1$  حذف شده است زیرا فرض کرده‌ایم  $\mathbf{v}_{i0} = 0$ . امواج الکتروستاتیکی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\mathbf{E}_1 = E e^{i(kx - \omega t)} \hat{x} \quad (21.6)$$

در اینجا  $\hat{x}$  در جهت  $v_0$  و  $k$  است. معادلات ۱۹.۶ و ۲۰.۶ به صورت زیر درمی آیند

$$-i\omega M n_o v_{i1} = en_o E_1 \quad v_{i1} = \frac{ie}{M\omega} E\hat{x} \quad (22.6)$$

$$mn_o (-i\omega + ikv_o) v_{e1} = -en_o E_1 \quad v_{e1} = -\frac{ie}{m} \frac{E\hat{x}}{\omega - kv_o} \quad (23.6)$$

سرعت‌های  $v_{j1}$  در راستای  $x$  هستند و می‌توان شاخص  $x$  را حذف کرد. از معادله پیوستگی یون داریم

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + n_o \nabla \cdot v_{i1} = 0 \quad n_{i1} = \frac{k}{\omega} n_o v_{i1} = \frac{ien_o k}{M\omega^2} E \quad (24.6)$$

توجه کنید که تمام جملات دیگر در  $\nabla \cdot (n v_i)$  صفر هستند زیرا  $\nabla \cdot v_o = v_{o,i} = 0$ . معادله پیوستگی الکترون عبارت است از

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_o \nabla \cdot v_{e1} + (v_o \cdot \nabla) n_{e1} = 0 \quad (25.6)$$

$$(-i\omega + ikv_o) n_{e1} + ikn_o v_{e1} = 0 \quad (26.6)$$

$$n_{e1} = \frac{kn_o}{\omega - kv_o} v_{e1} = -\frac{iek n_o}{m(\omega - kv_o)^2} E \quad (27.6)$$

چون نوسانهای پربسامد پلاسما امواج ناپایدار هستند تقویت پلاسما مناسب نیست و باید از معادله پواسون استفاده کنیم:

$$\epsilon_o \nabla \cdot E_1 = e(n_{i1} - n_{e1}) \quad (28.6)$$

$$ik\epsilon_o E = e(ien_o kE) \left[ \frac{1}{M\omega^2} + \frac{1}{m(\omega - kv_o)^2} \right] \quad (29.6)$$

از تقسیم این رابطه بر  $E$  رابطه پاشیدگی  $ik\epsilon_o E$  را به دست می‌آوریم:

$$1 = \omega_p^2 \left[ \frac{m/M}{\omega^2} + \frac{1}{(\omega - kv_o)^2} \right] \quad (30.6)$$

اکنون می‌خواهیم بینیم نوسانهای با  $k$ ی حقیقی پدیدارند یا ناپایدار. با ضرب این معادله در مخرج مشترک، یک معادله درجه چهار از  $\omega$  به دست می‌آید. اگر تمام ریشه‌های  $\omega$  حقیقی باشند

هر ریشه نشان‌دهنده یک نوسان ممکن خواهد بود

$$\mathbf{E}_1 = E e^{i(kx - \omega_j t)} \hat{x}$$

اگر بعضی از ریشه‌ها مختلط باشند به صورت زوجهای همیوگ مختلط خواهند بود. این ریشه‌های مختلط را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\omega_j = \alpha_j + i\gamma_j \quad (31.6)$$

در اینجا  $\alpha$  و  $\gamma$  به ترتیب  $\text{Re}(\omega)$  و  $\text{Im}(\omega)$  هستند. اکنون وابستگی به زمان را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{E}_1 = E e^{i(kx - \alpha_j t)} e^{\gamma_j t} \hat{x} \quad (32.6)$$

$\text{Im}(\omega)$  مثبت نشان‌دهنده موجی است که به صورت نمایی بزرگ می‌شود؛ در حالی که  $\text{Im}(\omega)$  منفی نشان‌دهنده یک موج میراست. چون ریشه‌های  $\omega$  به صورت زوجهای همیوگ ظاهر می‌شوند، همیشه یکی از اینها ناپایدار خواهد بود مگر آن که تمام ریشه‌ها حقیقی باشند. ریشه‌های میرا خود-برانگیخته نیستند و اهمیتی ندارند.

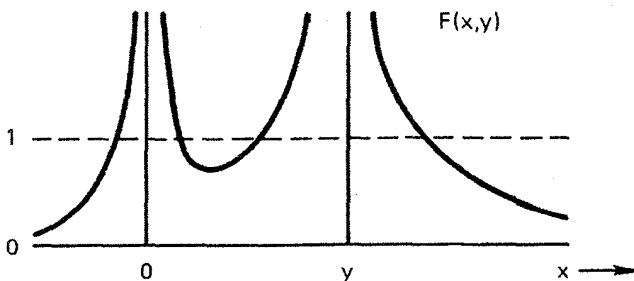
رابطه پاشیدگی ۳۰.۶ را می‌توان بدون حل واقعی معادله درجه چهار تحلیل کرد. با تعریفهای

$$x \equiv \omega / \omega_p \quad y \equiv kv_0 / \omega_p \quad (33.6)$$

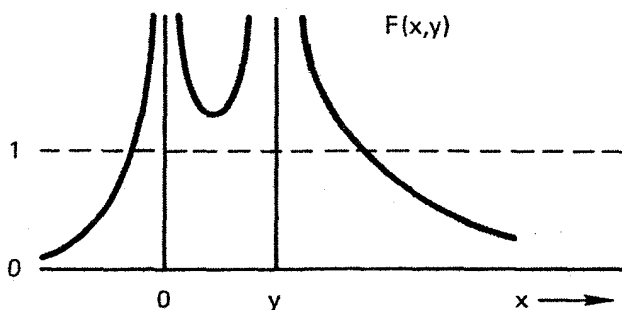
معادله ۳۰.۶ به صورت زیر درمی‌آید

$$1 = \frac{m/M}{x^2} + \frac{1}{(x-y)^2} \equiv F(x, y) \quad (34.6)$$

به‌ازای هر مقدار معین  $y$ ، می‌توانیم  $F(x, y)$  را به‌عنوان تابعی از  $x$  ترسیم کنیم. این تابع در  $x = 0$  و  $x = y$  تکنیکی دارد (شکل ۸.۶). نقاط تلاقی این منحنی با خط  $1 = F(x, y)$  مقادیری از  $x$  را می‌دهند که در رابطه پاشیدگی صدق می‌کنند. در مثال شکل ۸.۶ چهار نقطه تلاقی وجود دارند. بنابراین، چهار ریشه حقیقی برای  $\omega_j$  داریم. اما اگر مقدار کوچکتری برای  $y$  اختیار کنیم نموداری مشابه با شکل ۹.۶ به‌دست می‌آوریم. اکنون تنها دو نقطه تلاقی وجود دارند و در نتیجه دو ریشه حقیقی داریم. دو ریشه دیگر باید مختلط باشند و یکی از آنها باید به یک موج ناپایدار مربوط باشد. بنابراین، به‌ازای مقادیر به‌اندازه کافی کوچک  $kv_0$  پلاسما ناپایدار می‌شود. به‌ازای هر



شکل ۸.۶ تابع  $F(x, y)$  در ناپایداری دوجریانی هنگامی که پلاسما پایدار است.



شکل ۹.۶ تابع  $F(x, y)$  در ناپایداری دوجریانی هنگامی که پلاسما ناپایدار است.

مقدار معین  $v$ ، پلاسما همیشه در نوسانهای با طول موج بزرگ ناپایدار خواهد بود. ماکسیمم آهنگ رشد پیش‌بینی شده از معادله ۳۰.۶ به ازای  $m/M \ll 1$  عبارت است از

$$\text{Im} \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right) \approx \left( \frac{m}{M} \right)^{1/2} \quad (35.6)$$

چون برای ناپایداری باید  $k v$  مقدار کوچکی داشته باشد می‌توان گفت که به ازای یک  $k$  ی معین باید  $v$  به اندازه کافی کوچک باشد تا ناپایداری داشته باشیم. این نتیجه از لحاظ فیزیکی کم‌وبیش بی‌معنی است زیرا  $v$  چشمه انرژی محرک ناپایداری است. این مشکل از استفاده از معادلات سیال ناشی می‌شود. هر پلاسمای واقعی دارای دمای متناهی است، و باید آثار گرمایی را با روشهای نظریه جنبشی به حساب آوریم. آن‌گاه پدیده‌ای که به میرایی لاندائو موسوم است (فصل ۷) برای  $v \gtrsim v_{th}$  رخ خواهد داد، و اگر  $v$  خیلی کوچک باشد هیچ ناپایداری پیش‌بینی نمی‌شود. این ناپایداری، گاهی ناپایداری «بونمان» نامیده می‌شود، یک توضیح فیزیکی دارد: بسامد طبیعی نوسانها در سیال الکترونی  $\omega_p$  است و بسامد طبیعی نوسانها در سیال یونی عبارت است

از  $\Omega_p = (m/M)^{1/2} \omega_p$  به علت انتقال دوپلری نوسانهای  $\omega_p$  در سیال الکترونی متحرک، این دو بسامد، در صورتی که  $kv_0$  مقدار مناسبی داشته باشد، می‌توانند در چارچوب آزمایشگاه برهم‌منطبق شوند. بنابراین، افت و خیزهای چگالی الکترونها و یونها می‌توانند در معادله پواسون صدق کنند. به علاوه، می‌توان نشان داد نوسانهای الکترونی دارای انرژی منفی هستند. یعنی انرژی جنبشی کل الکترونها وقتی وجود دارد کمتر از وقتی است که نوسان وجود ندارد. در یک باریکه ناآشفته، انرژی جنبشی در هر  $m^2$  برابر با  $\frac{1}{2} mn_0 v_0^2$  است. وقتی نوسان وجود دارد انرژی جنبشی برابر با  $\frac{1}{2} m(n_0 + n_1)(v_0 + v_1)^2$  است. هرگاه از این کمیت روی فضا میانگین بگیریم ملاحظه خواهیم کرد که، به علت رابطه فازی که معادله پیوستگی بین  $n_1$  و  $v_1$  ایجاد می‌کند، نتیجه کمتر از  $\frac{1}{2} mn_0 v_0^2$  می‌شود. بنابراین، نوسانهای الکترونی انرژی منفی دارند و نوسانهای یونی دارای انرژی مثبت هستند. هنگامی که انرژی کل دستگاه را ثابت بگیریم هر دو موج می‌توانند با هم بزرگ شوند. از این نوع ناپایداری در کلیسترونها برای تولید میکروموج استفاده می‌شود. مدولاسیون سرعت ناشی از  $\mathbf{E}_1$  موجب می‌شود تا دسته‌های الکترونی تشکیل شوند. وقتی که این دسته‌ها از تشدیدگر میکروموج عبور می‌کنند می‌توانند مدهای طبیعی تشدیدگر را برانگیخته کنند و توان میکروموجی ایجاد کنند.

## مسائل

۶.۶ الف) هرگاه دو جریان الکترونی سرد با  $v_0$ های مساوی و مخالف در محیطی از یونهای ثابت برقرار باشند رابطه پاشیدگی برای ناپایداری دوجریانی حاصل را به دست آورید. چگالی هر جریان  $\frac{1}{2} n_0$  است.

(ب) ماکسیمم آهنگ رشد را محاسبه کنید.

۷.۶ پلاسمایی تشکیل شده است از دو جریان پروتونی یکنواخت با سرعتهای  $v_0 \hat{x}$  و  $-v_0 \hat{x}$  که چگالی آنها به ترتیب  $\frac{1}{2} n_0$  و  $\frac{1}{2} n_0$  است. یک سیال الکترونی خنثی‌کننده با چگالی  $n_0$  و سرعت  $v_{e0} = 0$  نیز وجود دارد. تمام گونه‌ها سرد هستند و میدان مغناطیسی وجود ندارد. رابطه پاشیدگی مربوط به ناپایداریهای جریانی این دستگاه را به دست آورید.

۸.۶ یک باریکه الکترونی سرد با چگالی  $n_0$  و  $\delta n_0$  و سرعت  $u$  به درون پلاسمای سردی با چگالی سکون  $n_0$  فرستاده می‌شود.

الف) رابطه پاشیدگی برای ناپایداری باریکه پلاسمای پربسامد حاصل را به دست آورید.

ب) محاسبه ماکسیمم آهنگ رشد دشوار است، اما اگر  $\delta \ll 1$  می‌توان از مقایسه با ناپایداری

الکترون-یون بونمان مقدار معقولی را برای  $\gamma_m$  حدس زد. با استفاده از نتیجه‌ای که بدون اثبات در معادله ۳۵.۶ داده شده است رابطه‌ای برای  $\gamma_m$  برحسب  $\delta$  به دست آورد.

۹.۶ فرض کنید دو سیال یونی سرد با جریانهای مخالف، چگالی  $\frac{1}{4}n_0$  و سرعت  $\hat{v}_0$  در میدان مغناطیسی  $B_0 \hat{z}$  همراه با یک سیال الکترونی خنثی‌کننده وجود داشته باشند. میدان  $B_0$  به اندازه‌ای قوی هست که می‌تواند الکترونها را محصور کند اما نمی‌تواند تأثیری بر مدار یونها داشته باشد. (الف) نشان دهید رابطه پاشیدگی برای امواج الکتروستاتیکی که در جهت‌های  $\hat{v}_0$  و در گستره بسامدی  $\omega_c^2 \ll \omega^2 \ll \Omega_c^2$  منتشر می‌شوند عبارت است از:

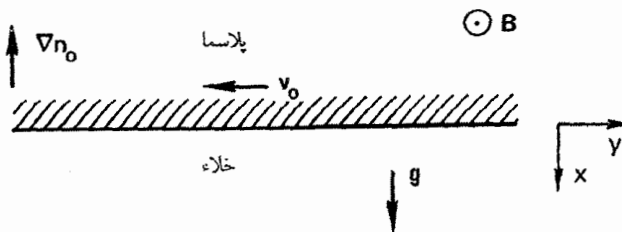
$$\frac{\Omega_p^2}{2(\omega - kv_0)^2} + \frac{\Omega_p^2}{2(\omega - kv_0)^2} = \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2} + 1$$

(ب) پاشیدگی  $\omega(k)$ ، آهنگ رشد  $\gamma(k)$  و گستره عدد موج را برای امواج ناپایدار به دست آورید.

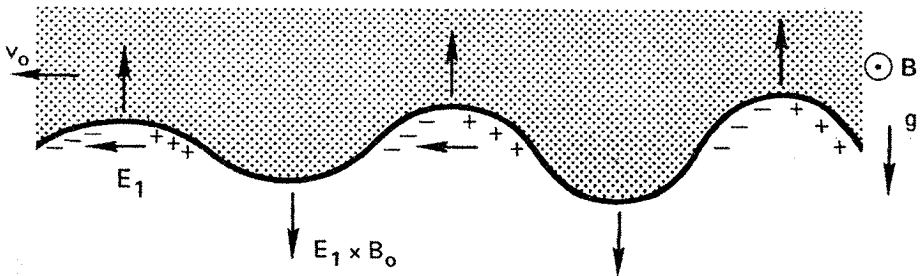
## ۷.۶ ناپایداری «گرانشی»

ناپایداری ریلی-تیلور می‌تواند در یک پلاسما رخ دهد زیرا میدان مغناطیسی به‌عنوان سیال سبکی عمل می‌کند که سیالی سنگین (پلاسما) را نگه می‌دارد. در میدانهای مغناطیسی خمیده، نیروی مرکز گریز وارد بر پلاسما که ناشی از حرکت ذره در طول خطوط خمیده نیرو است به‌عنوان یک نیروی «گرانشی» معادل عمل می‌کند. برای بررسی ساده‌ترین مورد، فرض کنید مرز پلاسما در صفحه  $yz$  قرار دارد (شکل ۱۰.۶). گرادینان چگالی  $\nabla n_0$  را در جهت  $-x$  و میدان گرانشی  $g$  را در جهت  $x$  می‌گیریم. برای سادگی می‌توانیم فرض کنیم  $KT_i = KT_e = 0$  و مورد  $\beta$  کوچک را، که در آن  $B_0$  یکنواخت است، در نظر می‌گیریم. یونها در حالت تعادل از معادله زیر تبعیت می‌کنند

$$Mn_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = en \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0 + Mn_0 \mathbf{g} \quad (۳۶.۶)$$



شکل ۱۰.۶ سطح پلاسمایی که در معرض ناپایداری گرانشی است.



شکل ۱۱.۶ سازوکار فیزیکی ناپایداری گرانشی.

اگر  $g$  ثابت باشد  $v_0$  نیز ثابت خواهد بود؛ و  $(v_0 \cdot \nabla)v_0$  صفر می‌شود. از ضرب خارجی معادله ۳۶.۶ در  $B_0$  رابطه زیر را، همچون در بخش ۲.۲، به دست می‌آوریم

$$v_0 = \frac{M}{e} \frac{g \times B_0}{B_0^2} = -\frac{g}{\Omega_c} \hat{y} \quad (37.6)$$

الکترونها سوق مخالف دارند و می‌توان در حد  $m/M \rightarrow 0$  از آن صرف نظر کرد. سوق دیامغناطیسی وجود ندارد زیرا  $KT = 0$ ، و سوق  $E_0 \times B_0$  نداریم زیرا  $E_0 = 0$ .

اگر به علت افت و خیزهای گرمایی انتقایی، موجکی در سطح مشترک به وجود آید سوق  $v_0$  موجب رشد موجک خواهد شد (شکل ۱۱.۶). سوق یونها موجب ایجاد بار الکتریکی در اطراف موجک می‌شود و یک میدان الکتریکی به وجود می‌آید که وقتی از قله به دره این اختلال می‌رویم تغییر علامت می‌دهد. همان‌طور که از شکل ۱۱.۶ می‌توان مشاهده کرد سوق  $E_1 \times B_0$  همیشه در ناحیه‌هایی که سطح به سمت بالا حرکت کرده است در جهت بالا خواهد بود و در جایی که سطح به طرف پایین حرکت کرده است در جهت پایین خواهد بود. در نتیجه این سوقهای  $E_1 \times B_0$  با فازهای مناسب موجک بزرگ می‌شود.

برای یافتن آهنگ رشد، می‌توانیم تحلیل متداول موج خطی شده را برای امواجی انجام دهیم که در جهت  $y$  یعنی با  $k = k\hat{y}$  منتشر می‌شوند. معادله حرکت یون اختلالی به صورت زیر است

$$M(n_0 + n_1) \left[ \frac{\partial}{\partial t}(v_0 + v_1) + (v_0 + v_1) \cdot \nabla(v_0 + v_1) \right] \\ = e(n_0 + n_1)[E_1 + (v_0 + v_1) \times B_0] + M(n_0 + n_1)g \quad (38.6)$$

معادله ۳۶.۶ را در  $1 + (n_1/n_0)$  ضرب می‌کنیم و به دست می‌آوریم



$$M(n_0 + n_1)(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 = e(n_0 + n_1)\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0 + M(n_0 + n_1)\mathbf{g} \quad (39.6)$$

با کم کردن این معادله از معادله ۳۸.۶ و چشمپوشی از جمله‌های مرتبه دوم، خواهیم داشت

$$Mn_0 \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\mathbf{v}_1 \right] = en_0(\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) \quad (40.6)$$

ملاحظه می‌کنیم که  $\mathbf{g}$  در این معادله حذف شده است. اما هنوز هم  $\mathbf{v}_0$  حاوی اطلاعات مربوط به  $\mathbf{g}$  است. برای اختلالهایی به صورت  $\exp[i(ky - \omega t)]$  داریم

$$M(\omega - kv_0)\mathbf{v}_1 = ie(\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) \quad (41.6)$$

این همان معادله ۹۶.۴ است به غیر از آن که  $\omega$  با  $\omega - kv_0$  تعویض شده است و کمیت‌های یونی به جای کمیت‌های الکترونی نشسته‌اند. پس جواب این معادله از معادله ۹۸.۴ با انجام تغییرات مناسب به دست می‌آید. جواب معادله به‌ازای  $E_x = 0$  و

$$\Omega_c^2 \gg (\omega - kv_0)^2 \quad (42.6)$$

به صورت زیر است

$$v_{ix} = \frac{E_y}{B_0} \quad v_{iy} = -i \frac{\omega - kv_0}{\Omega_c} \frac{E_y}{B_0} \quad (43.6)$$

کمیت اخیر سوق قطبشی در چارچوب یون است. کمیت متناظر مربوط به الکترون در حد  $m/M \rightarrow 0$  صفر می‌شود. بنابراین، برای الکترون داریم

$$v_{ex} = E_y/B_0 \quad v_{ey} = 0 \quad (44.6)$$

معادله پیوستگی مختل برای یونها به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_1}{\partial t} + \nabla \cdot (n_0 \mathbf{v}_0) + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)n_1 + n_1 \nabla \cdot \mathbf{v}_0 \\ + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla)n_0 + n_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 + \nabla \cdot (n_1 \mathbf{v}_1) = 0 \end{aligned} \quad (45.6)$$

جمله مرتبه صفرم صفر است زیرا  $\nabla n_0$  بر  $\mathbf{v}_0$  عمود است و اگر  $\mathbf{v}_0$  ثابت باشد جمله  $n_1 \nabla \cdot \mathbf{v}_0$  نیز صفر می‌شود. بنابراین، معادله مرتبه اول عبارت است از

$$-i\omega n_1 + ikv_0 n_1 + v_{ix} n'_0 + ikn_0 v_{iy} = 0 \quad (46.6)$$

که در آن  $n'_0 = \partial n_0 / \partial x$  برای الکترونها معادله ساده‌تری داریم زیرا  $v_{e0} = 0$  و  $v_{ey} = 0$ :

$$-i\omega n_1 + v_{ex} n'_0 = 0 \quad (47.6)$$

توجه داشته باشید که در اینجا تقریب پلاسما را به‌کار برده‌ایم و فرض کرده‌ایم  $n_{i1} = n_{e1}$  چنین امری امکان‌پذیر است زیرا امواج ناپایدار دارای بسامدهای کم هستند (دلیل آن بعداً روشن می‌شود). از معادله‌های ۴۳.۶ و ۴۶.۶ به‌دست می‌آوریم

$$(\omega - kv_0) n_1 + i \frac{E_y}{B_0} n'_0 + ikn_0 \frac{\omega - kv_0}{\Omega_c} \frac{E_y}{B_0} = 0 \quad (48.6)$$

از معادله‌های ۴۴.۶ و ۴۷.۶ داریم

$$\omega n_1 + i \frac{E_x}{B_0} n'_0 = 0 \quad \frac{E_y}{B_0} = \frac{i\omega n_1}{n'_0} \quad (49.6)$$

از جاگذاری در معادله ۴۸.۶ به‌روابط زیر می‌رسیم

$$(\omega - kv_0) n_1 - \left( n'_0 + kn_0 \frac{\omega - kv_0}{\Omega_c} \right) \frac{\omega n_1}{n'_0} = 0$$

$$\omega - kv_0 - \left( 1 + \frac{kn_0}{\Omega_c} \frac{\omega - kv_0}{n'_0} \right) \omega = 0 \quad (50.6)$$

$$\omega(\omega - kv_0) = -v_0 \Omega_c n'_0 / n_0 \quad (51.6)$$

اگر از معادله ۳۷.۶ مقدار  $v_0$  را در این معادله جاگذاری کنیم برای  $\omega$  معادله درجه دومی به‌صورت زیر به‌دست خواهیم آورد:

$$\omega^2 - kv_0 \omega - g(n'_0 / n_0) = 0 \quad (52.6)$$

که جوابهای آن عبارت‌اند از

$$\omega = \frac{1}{2} kv_0 \pm \left[ \frac{1}{4} k^2 v_0^2 + g(n'_0 / n_0) \right]^{1/2} \quad (53.6)$$

اگر  $\omega$  مختلط باشد یعنی اگر

$$-gn'_0/n_0 > \frac{1}{4}k^2 v_0^2 \quad (۵۴.۶)$$

آن‌گاه ناپایداری وجود دارد. از اینجا می‌بینیم که برای وجود ناپایداری لازم است  $g$  و  $n'_0/n_0$  دارای علامت مخالف باشند. این نتیجه همان بیان نگه‌داشتن سیال سنگین توسط سیال سبک است؛ در غیر این صورت،  $\omega$  حقیقی می‌شود و پلاسما پایدار خواهد بود. چون از  $g$  می‌توان برای الگوسازی آثار انحنای میدان مغناطیسی استفاده کرد می‌بینیم که پایداری به علامت انحنا بستگی دارد. پیکربندی‌هایی که در آنها خطوط میدان به درون پلاسما خم شده‌اند تمایل به پایدار کردن دارند، و برعکس. آهنگ رشد، به ازای  $k$ ی به اندازه کافی کوچک (طول موج بزرگ)، به صورت زیر داده می‌شود

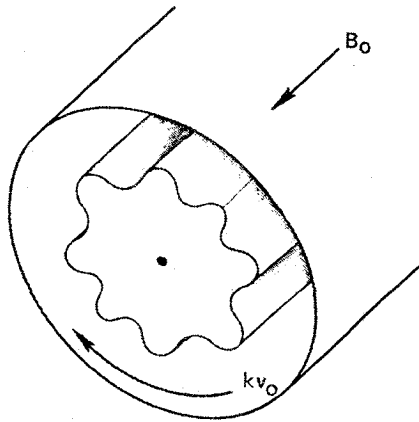
$$\gamma = \text{Im}(\omega) \approx [-g(n'_0/n_0)]^{1/2} \quad (۵۵.۶)$$

توجه کنید که قسمت حقیقی  $\omega$  جمله  $\frac{1}{4}k^2 v_0^2$  است. چون  $v_0$  سرعت یون است، همان‌گونه که قبلاً فرض کرده بودیم این یک نوسان کم‌سامد است. ضریب  $\frac{1}{4}$  صرفاً نتیجه چشمپوشی از  $v_0 \ll v_{te}$  است. در چارچوبی که میانگین چگالی-وزنی همه  $v_0$ ها صفر است موج ساکن خواهد بود، و این چارچوبی است که با سرعت  $\frac{1}{4}v_0$  حرکت می‌کند. در این مورد چارچوب آزمایشگاه اهمیت بخصوصی ندارد.

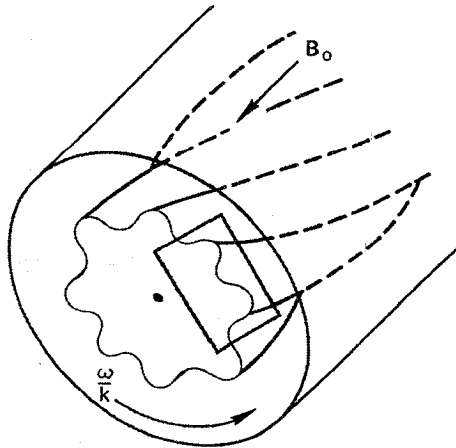
این ناپایداری که در آن  $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$ ، بنا به دلیل زیر، گاهی ناپایداری «شیاری» نامیده می‌شود. در یک استوانه اگر نیروها در راستای  $r$  باشند، امواج در راستای  $\theta$  حرکت خواهند کرد. در این مورد سطوح چگالی ثابت به ستونهای شیاردار یونانی شباهت خواهند داشت (شکل ۱۲.۶).

## ۸.۶ امواج سوقی مقاومتی

موج سوقی مقاومتی مثال ساده‌ای از ناپایداری جهانی است. امواج سوقی، برخلاف مدهای گرانشی شیاری، یک مؤلفه کوچک اما متناهی  $k$  در راستای  $\mathbf{B}_0$  دارند. بنابراین، سطوح چگالی ثابت شبیه شیارهایی با تاب ماریچی اندک هستند (شکل ۱۳.۶). شکل ۱۴.۶ نمایش دکارتی بزرگ‌شده‌ای از سطح مقطعی است که در شکل ۱۳.۶ داخل مستطیل قرار دارد. تنها نیروی محرک برای ناپایداری گرادیان فشار  $K T \nabla n_0$  است (برای سادگی فرض می‌کنیم  $K T = \text{const.}$ ). در این



شکل ۱۲.۶ ناپایداری «شیاری».

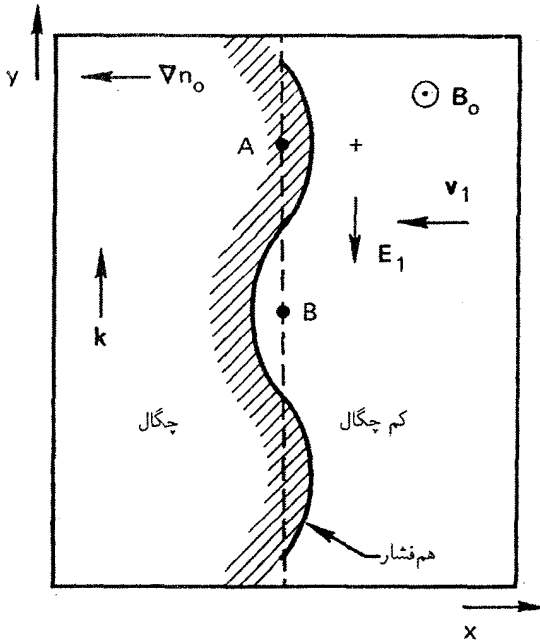


شکل ۱۳.۶ هندسه ناپایداری سوقی در یک استوانه. ناحیه داخلی مستطیل در شکل ۱۲.۶ به طور مبسوط نشان داده شده است.

مورد، سوقهای مرتبه صفرم (به ازای  $\theta = 0$ ) عبارت اند از

$$v_{i0} = v_{Di} = \frac{KT_i}{eB_0} \frac{n'_i}{n_0} \hat{y} \quad (56.6)$$

$$v_{e0} = v_{De} = -\frac{KT_e}{eB_0} \frac{n'_e}{n_0} \hat{y} \quad (57.6)$$



شکل ۱۴.۶ سازوکار فیزیکی موج سوقی.

با توجه به تجربه خود از ناپایداری شیاری، می توان پیش بینی کرد که امواج سوقی دارای سرعت فازی از مرتبه  $v_{De}$  یا  $v_{Di}$  هستند. نشان می دهیم که  $\omega/k$  تقریباً برابر با  $v_{De}$  است. چون امواج سوقی دارای  $k_z$  متناهی هستند الکترونها می توانند با حرکت در امتداد  $B_0$  تعادل ترمودینامیکی را میان خود برقرار کنند (به بحث بخش ۱۰.۴ مراجعه کنید). بنابراین، الکترونها از رابطه بولتزمن متابعت می کنند (بخش ۵.۳):

$$n_1/n_0 = e\phi_1/KT_e \quad (51.6)$$

در شکل ۱۴.۶، چگالی در نقطه  $A$  از مقدار تعادلی بزرگتر است،  $n_1$  مثبت است و بنابراین  $\phi_1$  مثبت است. به همین ترتیب، در نقطه  $B$  کمتهای  $n_1$  و  $\phi_1$  منفی هستند. اختلاف پتانسیل موجود به این معنی است که بین  $A$  و  $B$  میدان الکتریکی  $E_1$  وجود دارد. درست مانند مورد ناپایداری شیاری،  $E_1$  موجب سوق  $v_1 = E_1 \times B_0 / B_0^2$  در جهت  $x$  می شود. با حرکت موج در جهت  $y$ ، ناظر نقطه  $A$  مشاهده می کند که  $n_1$  و  $\phi_1$  با زمان نوسان می کنند. سوق  $v_1$  نیز با زمان نوسان می کند و در واقع  $v_1$  موجب نوسان چگالی می شود. چون در جهت  $-x$  یک  $\nabla n_0$  وجود دارد، پلاسما در نتیجه سوق  $v_1$  با چگالی متفاوتی توسط ناظر ثابت  $A$  مشاهده خواهد

شد. بنابراین، موج سوقی با آنکه در جهت  $y$  حرکت می‌کند سیال را در راستای  $x$  به عقب و جلو حرکت می‌دهد.

برای بیان کمی‌تر موضوع، متذکر می‌شویم که بزرگی  $v_{1x}$  به صورت زیر داده می‌شود

$$v_{1x} = E_y / B_0 = -ik_y \phi_1 / B_0. \quad (۵۹.۶)$$

فرض می‌کنیم  $v_{1x}$  نسبت به  $x$  تغییر نمی‌کند و  $k_z$  بسیار کوچکتر از  $k_y$  است؛ یعنی سیال به صورت تراکم‌ناپذیر در راستای  $x$  نوسان می‌کند. اکنون تعداد مراکز راهنما را که در نقطه ثابت  $A$  به درون  $1\text{m}^2$  آورده می‌شوند در نظر بگیرند؛ روشن است که

$$\partial n_1 / \partial t = -v_{1x} \partial n_0 / \partial x \quad (۶۰.۶)$$

این همان معادله پیوستگی مراکز راهنماست که البته فاقد سوق سیال  $v_D$  هستند. جمله  $\nabla \cdot v_1$ ،  $n_0$  بنابه فرض قبلی ما، صفر است. تفاوت میان چگالی مراکز راهنما و چگالی ذرات  $n_1$  موجب تصحیحی در معادله ۶۰.۶ می‌شود که از مرتبه بالاتر است و در اینجا می‌توان از آن صرف‌نظر کرد. با استفاده از معادلات ۵۹.۶ و ۵۸.۶ می‌توانیم معادله ۶۰.۶ را به صورت زیر بنویسیم

$$-i\omega n_1 = \frac{ik_y \phi_1}{B_0} n'_0 = -i\omega \frac{e\phi_1}{KT_e} n_0. \quad (۶۱.۶)$$

بنابراین داریم

$$\frac{\omega}{k_y} = -\frac{KT_e}{eB_0} \frac{n'_0}{n_0} = v_{De} \quad (۶۲.۶)$$

در نتیجه این امواج که با سرعت سوق دیامغناطیسی الکترون حرکت می‌کنند امواج سوقی نامیده می‌شوند. این سرعت در راستای  $y$  یا راستای سمتی است. به علاوه،  $k$  در راستای  $z$  دارای مؤلفه است. این مؤلفه، بنابه دلایلی که در اینجا بیان نمی‌کنیم، باید در شرایط زیر صدق کنند

$$k_z \ll k_y \quad v_{thi} \ll \omega / k_z \ll v_{the} \quad (۶۳.۶)$$

علت ناپایداری امواج سوقی این است که  $v_{1x}$  برای یونها با  $E_y / B_0$  دقیقاً مساوی نیست. تصحیحاتی ناشی از سوق قطبی، معادله ۶۶.۲، و سوق  $E$ ی غیریکنواخت، معادله ۵۹.۲، وجود دارند. نتیجه این سوقها همیشه آن است که توزیع پتانسیل  $\phi_1$  از چگالی توزیع  $n_1$  عقب می‌افتد (مسئله ۱.۴). این انتقال فاز موجب می‌شود تا در جایی که پلاسما به طرف خارج انتقال یافته

است  $\nu_1$  به سمت خارج باشد و برعکس؛ بنابراین، اختلال افزایش پیدا می‌کند. همان‌طور که در شکل ۱۴.۶ نشان داده شده است،  $n_1$  و  $\phi_1$  در غیاب انتقال فاز به مقدار  $90^\circ$  اختلاف فاز دارند و امواج سوقی باید نوسانی محض باشند.

مقاومت در اینجا نقش پیدا می‌کند زیرا میدان  $E_1$  نباید به وسیله جریان الکترونی در امتداد  $B$  اتصال کوتاه شود. برخورد های الکترون-یون، همراه با فاصله زیاد  $\lambda_z$  میان قله و دره موج، وجود یک افت پتانسیل مقاومتی و مقداری متناهی برای  $E_1$  را ممکن می‌سازد. رابطه تقریبی پاشیدگی امواج سوقی مقاومتی به صورت زیر است

$$\omega^2 + i\sigma_{||}(\omega - \omega_*) = 0 \quad (64.6)$$

که در آن

$$\omega_* \equiv k_y v_{De} \quad (65.6)$$

و

$$\sigma_{||} \equiv \frac{k_z^2}{k_y^2} \Omega_c(\omega_c \tau_e i) \quad (66.6)$$

اگر  $\sigma_{||}$  در مقایسه با  $\omega$  بزرگ باشد معادله ۶۴.۶ تنها در صورتی صادق خواهد بود که داشته باشیم  $\omega_* \approx \omega$ . در این مورد می‌توانیم  $\omega$  را با  $\omega_*$  در جمله اول تعویض کنیم. بنابراین، با حل معادله برای  $\omega$ ، به دست می‌آوریم

$$\omega \approx \omega_* + (i\omega_*^2 / \sigma_{||}) \quad (67.6)$$

این رابطه نشان می‌دهد  $\text{Im}(\omega)$  همیشه مثبت است و با مقاومت ویژه  $\eta$  متناسب است. بنابراین، امواج سوقی ناپایدار هستند و نهایتاً در هر پلاسمایی که گرادیان چگالی داشته باشد رخ خواهند داد. خوشبختانه آهنگ رشد نسبتاً کوچک است و راههایی برای متوقف کردن آن از طریق نایکتواخت کردن  $B$  وجود دارد.

باید توجه کرد که معادله ۵۲.۶ مربوط به ناپایداری شیاری و معادله ۶۴.۶ مربوط به ناپایداری سوقی دارای ساختارهای متفاوتی هستند. در معادله اول، ضرایب حقیقی هستند و هنگامی که بین معادله درجه دو منفی باشد  $\omega$  مختلط می‌شود. این اختصاص به ناپایداری واکنشی دارد.

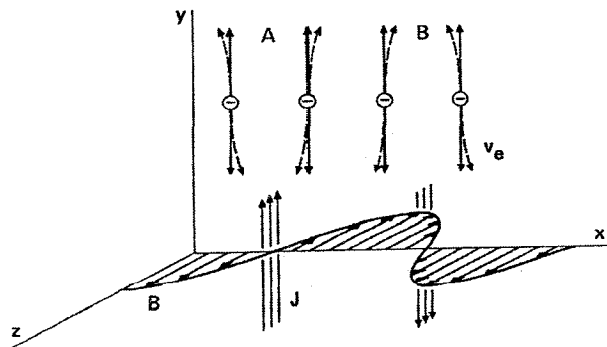
در معادلهٔ دوم، ضرایب مختلط‌اند و از این رو  $\omega$  همیشه مختلط است؛ این اختصاص به ناپایداری اتلافی دارد.

### مسئله

۱۰.۶ یک پلاسمای هیدروژنی چنبره‌ای با سطح مقطع دایره‌ای و شعاع بزرگتر  $R = 50 \text{ cm}$ ، شعاع کوچکتر  $a = 2 \text{ cm}$ ،  $B = 1 \text{ T}$ ،  $KT_e = 1 \text{ eV}$ ،  $KT_i = 1 \text{ eV}$  و  $n_0 = 10^{11} \text{ m}^{-3}$  داریم. با فرض  $n_0/n'_0 \simeq a/2$  و  $g \simeq (KT_e + KT_i)/MR$  و آهنگهای رشد موج سوقی مقاومتی  $m = 1$  و مد شیاری گرانشی  $m = 1$  را تخمین بزنید. (همیشه می‌توان فرمولهای هندسهٔ تخت را از تعویض  $k_y$  با  $m/r$  که در آن  $m$  عدد مد سمتی است برای هندسهٔ استوانه‌ای به کار برد).

### ۹.۶ ناپایداری ویبل<sup>۱</sup>

به‌عنوان مثال ساده‌ای از ناپایداری حاصل از ناهمسانگردی تابع توزیع، تصویری فیزیکی (از ب. د. فراید) از ناپایداری ویبل ارائه می‌کنیم که در آن یک اختلال مغناطیسی افزایش پیدا می‌کند. این مثال همچنین به‌عنوان نمونه‌ای از یک ناپایداری الکترومغناطیسی به‌کار می‌رود. فرض کنید یونها ثابت‌اند و الکترونها در راستای  $y$  داغتر از راستاهای  $x$  یا  $z$  هستند. بنابراین، الکترونهای سریع در جهت‌های  $y \pm$  فراوان‌ترند (شکل ۱۵.۶) اما تعداد الکترونی که بالا می‌روند با تعداد الکترونی که پایین می‌آیند برابر است و در نتیجه جریان کل صفر است. فرض کنید میدان  $B = B_z \hat{z} \cos kx$



شکل ۱۵.۶ سازوکار فیزیکی ناپایداری ویبل.

۱. بزرگداشتی از یک دوست خوب، اریک ویبل (۱۹۸۳-۱۹۲۵).



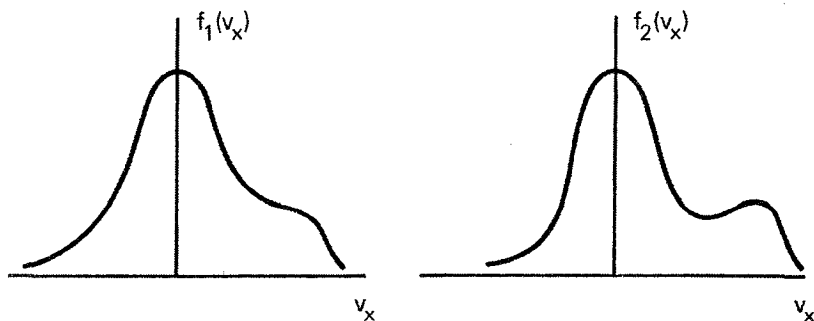
به طور خودبه خود به علت نوفه به وجود آید. بنابراین، نیروی لورنتس  $-ev \times \mathbf{B}$  مسیر الکترونها را همان طور که در شکل با منحنیهای چین نشان داده شده است خم می کند و در نتیجه الکترونهايي که پایین می آیند در  $A$  و الکترونهايي که بالا می روند در  $B$  جمع می شوند. ورقه های جریان حاصل  $\mathbf{j} = -en_0 \mathbf{v}_e$  دقیقاً فازی می یابند که میدان  $\mathbf{B}$  به شکل مفروض را تولید می کنند و اختلال افزایش پیدا می کند. بررسی مورد کلی مستلزم بررسی جنبشی است ولی مورد حدی  $v_y = v_{th}$ ،  $v_x = v_z = 0$  را می توان به طور بسیار ساده ای از همین تصویر فیزیکی محاسبه کرد که از آن آهنگ رشد  $\gamma = \omega_p v_{th}/c$  نتیجه می شود.



## نظریه جنبشی

### ۱.۷ معنای $f(v)$

نظریه سیالی که تا به حال از آن استفاده کرده‌ایم ساده‌ترین توصیف پلاسماست؛ در واقع از خوش‌اقبالی است که این تقریب به اندازه کافی دقت دارد که می‌تواند اکثر پدیده‌های مشاهده‌شده را توصیف کند. اما پدیده‌هایی وجود دارند که بررسی سیالی برای توصیف آنها کافی نیست. در این لازم است که تابع توزیع سرعت  $f(v)$  را برای هرگونه در نظر بگیریم؛ این بررسی را نظریه جنبشی می‌نامند. در نظریه سیالی، متغیرهای وابسته تابعی از تنها چهار متغیر مستقل  $x$ ،  $y$ ،  $z$  و  $t$  هستند. چنین چیزی امکان دارد زیرا توزیع سرعت تمام گونه‌ها همه‌جا ماکسولی فرض می‌شود و از این رو می‌توان آن را با یک عدد یعنی دمای  $T$  به طور یگانه مشخص کرد. از آنجا که در پلاسماهای با دمای زیاد برخورد به ندرت رخ می‌دهد انحراف از تعادل گرمایی می‌تواند در مدت زمانهای نسبتاً طولانی باقی بماند. به عنوان مثال، دو توزیع سرعت  $f_1(v_x)$  و  $f_2(v_x)$  را در یک دستگاه یک بعدی در نظر بگیرید (شکل ۱.۷). این توزیع رفتارهای کاملاً متفاوتی دارند، اما تا وقتی مساحت‌های زیر منحنیها یکسان باشند نظریه سیالی بین توزیعها تمایزی نمی‌گذارد. چگالی تابعی است از چهار متغیر نرده‌ای:  $n = n(\mathbf{r}, t)$ . هرگاه توزیعهای سرعت را در نظر



شکل ۱.۷ مثالهایی از توابع توزیع غیرماکسولی.

بگیریم هفت متغیر مستقل خواهیم داشت:  $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  منظور از  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  این است که تعداد ذرات در  $m^3$  در نقطه  $\mathbf{r}$  و زمان  $t$  با مؤلفه‌های سرعت بین  $v_x$  و  $v_x + dv_x$  و  $v_y$  و  $v_y + dv_y$  و  $v_z$  و  $v_z + dv_z$  برابر است با

$$f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t) dv_x, dv_y, dv_z$$

انتگرال این کمیت را به چند طریق معادل زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) dv \end{aligned} \quad (1.7)$$

توجه کنید که  $dv$  بردار نیست و به معنای عنصر حجمی سه‌بعدی در فضای سرعت است. اگر  $f$  بهنجار باشد یعنی داشته باشیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) dv = 1 \quad (2.7)$$

آن‌گاه این تابع یک احتمال است که آن را با  $\hat{f}$  نشان می‌دهیم. بنابراین می‌توان نوشت

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = n(\mathbf{r}, t) \hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (3.7)$$

باید توجه کرد که  $\hat{f}$  باز هم تابعی از هفت متغیر است زیرا که شکل توزیع، و همچنین چگالی، می‌تواند نسبت به فضا و زمان تغییر کند. از معادله ۲.۷ معلوم است که  $\hat{f}$  ابعاد  $(m/sec)^{-3}$  را

دارد و بنابراین با توجه به معادله ۳.۷ تابع  $f$  دارای ابعاد  $\text{sec}^3 - m^{-6}$  است. یک تابع توزیع با اهمیت ویژه تابع ماکسولی است:

$$\hat{f}_m = (m/2\pi KT)^{3/2} \exp(-v^2/v_{th}^2) \quad (4.7)$$

که در آن

$$v \equiv (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2} \quad \text{و} \quad v_{th} \equiv (2KT/m)^{1/2} \quad (5.7)$$

با استفاده از انتگرال معین

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi} \quad (6.7)$$

می‌توان به آسانی نشان داد که انتگرال  $\hat{f}_m$  روی  $dv_x dv_y dv_z$  برابر واحد است. چندین سرعت میانگین برای توزیع ماکسولی وجود دارند که به‌طور متداول مورد استفاده قرار می‌گیرند. در بخش ۳.۱ دیدیم که ریشه میانگین مجذوری سرعت با رابطه زیر داده می‌شود

$$(\bar{v}^2)^{1/2} = (3KT/m)^{1/2} \quad (7.7)$$

بزرگی میانگین سرعت  $|v|$  یا به‌طور ساده‌تر  $\bar{v}$  عبارت است از:

$$\bar{v} = \int_{-\infty}^{\infty} v \hat{f}(\mathbf{v}) d^3v \quad (8.7)$$

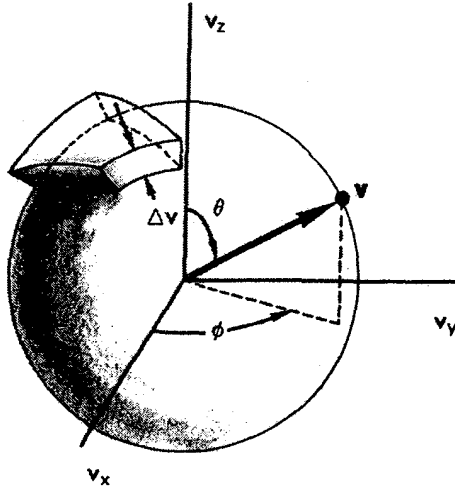
چون  $\hat{f}_m$  همسانگرد است می‌توانیم انتگرال‌گیری در فضای  $v$  را در مختصات کروی به آسانی انجام دهیم (شکل ۲.۷). چون عنصر حجمی هر پوسته کروی  $4\pi v^2 dv$  است داریم

$$\bar{v} = (m/2\pi KT)^{3/2} \int_0^{\infty} v [\exp(-v^2/v_{th}^2)] 4\pi v^2 dv \quad (9.7)$$

$$= (\pi v_{th}^2)^{-3/2} 4\pi v_{th}^3 \int_0^{\infty} [\exp(-y^2)] y^3 dy \quad (10.7)$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء، مقدار  $1/2$  برای انتگرال معین به دست می‌آید. بنابراین

$$\bar{v} = 2\pi^{-1/2} v_{th} = 2(2KT/\pi m)^{1/2} \quad (11.7)$$



شکل ۲.۷ فضای سرعت سه‌بعدی.

مؤلفه سرعت در یک راستا، مثلاً  $v_x$ ، میانگین متفاوتی دارد.  $\bar{v}_x$  برای یک توزیع همسانگرد صفر است، اما  $|\bar{v}_x|$  صفر نیست

$$|\bar{v}_x| = \int |v_x| \hat{f}_m(\mathbf{v}) d^3v \quad (12.7)$$

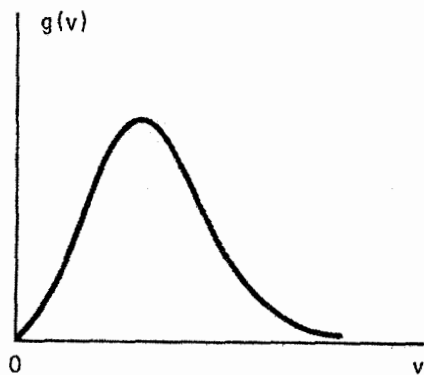
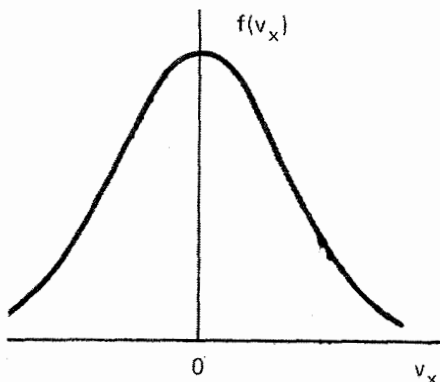
$$= \left( \frac{m}{\sqrt{\pi}KT} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \exp\left( \frac{-v_y^2}{v_{th}^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \exp\left( \frac{-v_z^2}{v_{th}^2} \right) \\ \times \int_0^{\infty} v_x \exp\left( \frac{-v_x^2}{v_{th}^2} \right) dv_x \quad (13.7)$$

با توجه به معادله ۶.۷، برای هر یک از دو انتگرال اول مقدار  $\pi^{1/2} v_{th}$  به دست می‌آید. انتگرال آخر ساده است و مقدار آن  $v_{th}$  می‌شود. بنابراین، خواهیم داشت

$$|\bar{v}_x| = (\pi v_{th}^2)^{-3/2} \pi v_{th}^3 = \pi^{-1/2} v_{th} = (2KT/\pi m)^{1/2} \quad (14.7)$$

شار کاتوره‌ای که از یک سمت به سمت دیگر یک صفحه فرضی عبور می‌کند به صورت زیر داده می‌شود

$$\Gamma_{\text{کاتوره‌ای}} = \frac{1}{4} n |\bar{v}_x| = \frac{1}{4} n \bar{v} \quad (15.7)$$



شکل ۳.۷ توزیعهای سرعت ماکسولی یک بعدی و سه بعدی.

در اینجا از معادله ۱۱.۷ و این حقیقت استفاده کرده‌ایم که در هر جهت تنها نیمی از ذرات از صفحه عبور می‌کنند. به طور خلاصه، برای توزیع ماکسولی داریم

$$v_{rms} = (3KT/m)^{1/2} \quad (۷.۷)$$

$$|\overline{v}| = 2(2KT/\pi m)^{1/2} \quad (۱۱.۷)$$

$$|\overline{v_x}| = (2KT/\pi m)^{1/2} \quad (۱۴.۷)$$

$$\overline{v_x} = 0 \quad (۱۶.۷)$$

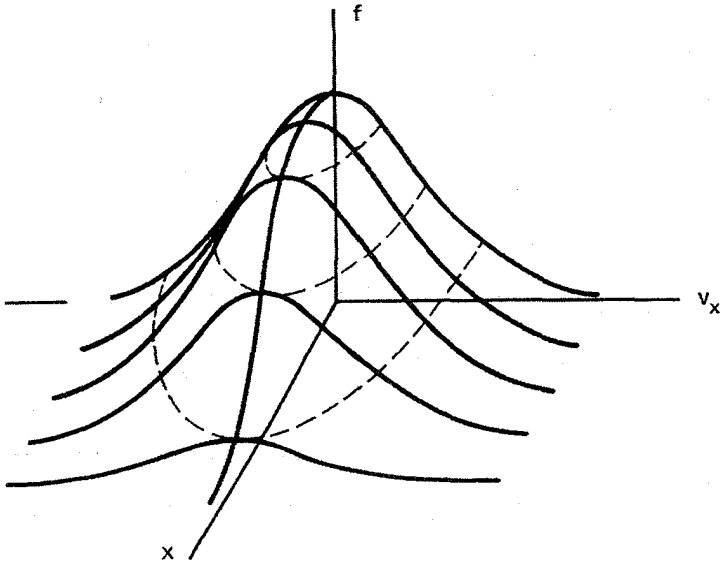
برای یک توزیع همسانگرد مانند توزیع ماکسولی می‌توانیم تابع دیگر  $g(v)$  را که تابعی از بزرگی  $v$  است تعریف کنیم به طوری که

$$\int_0^{\infty} g(v)dv = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)d^3v \quad (۱۷.۷)$$

برای توزیع ماکسولی، با توجه به معادله ۹.۷ به دست می‌آوریم

$$g(v) = 4\pi n(m/2\pi KT)^{3/2} v^2 \exp(-v^2/v_{th}^2) \quad (۱۸.۷)$$

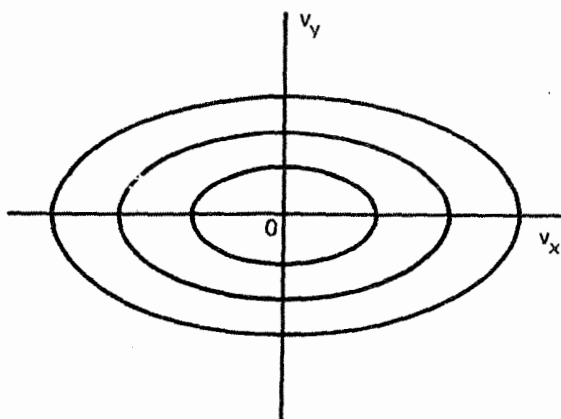
شکل ۳.۷ تفاوت بین  $g(v)$  و توزیع ماکسولی یک بعدی  $f(v_x)$  را نشان می‌دهد. با آن که  $f(v_x)$  در  $v_x = 0$  ماکسیمم است  $g(v)$  در  $v = 0$  صفر است. این تفاوت تنها نتیجه‌ای از صفر شدن حجم فضای فاز در  $v = 0$  است (شکل ۲.۷). گاهی با بی‌دقتی  $g(v)$  را با  $f(v)$  به عنوان تابعی



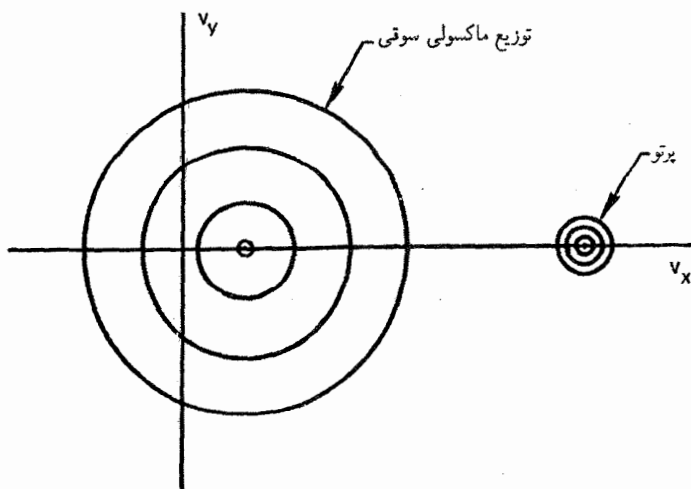
شکل ۴.۷ تغییرات فضایی تابع توزیع یک بعدی.

متمایز از  $f(v)$  نشان می‌دهند؛ اما شکل تابعی  $g(v)$  برحسب شناسه‌اش متفاوت با شکل تابعی  $f(v)$  برحسب شناسه‌اش است. از معادله ۱۸.۷ روشن است که  $g(v)$  دارای ابعاد  $\text{sec}/\text{m}^3$  است. ترسیم شکل  $f(x, v)$  در لحظه معین  $t$  امکان‌پذیر نیست مگر آن که تعداد ابعاد را کاهش دهیم. در یک دستگاه یک بعدی،  $f(x, v_x)$  را می‌توان به صورت یک سطح نشان داد (شکل ۴.۷). فصلهای مشترک این سطح با صفحه‌های  $x = \text{const}$ ، توزیعهای سرعت  $f(v_x)$  را به دست می‌دهند. فصلهای مشترک این سطح با صفحه‌های  $v_x = \text{const}$  نمایه چگالیهای ذرات با سرعت معین  $v_x$  را تعیین می‌کنند. اگر تمام منحنیهای  $f(v_x)$  شکل یکسان داشته باشند، آن منحنی که از قله می‌گذرد نمایه چگالی را نشان می‌دهد. منحنیهای چین در شکل ۴.۷ فصلهای مشترک با صفحه‌های  $f = \text{const}$  هستند؛ اینها منحنیهای تراز یا منحنیهای  $f$  ثابت هستند. تصویر این منحنیها روی صفحه  $xv_x$  نقشه توپوگرافیکی  $f$  را به دست می‌دهد. چنین نقشه‌هایی برای دریافت تصویری مقدماتی از چگونگی رفتار پلاسما بسیار مفید است؛ در بخش بعد مثالی ارائه خواهیم کرد.

اگر  $f(v)$  را در یک نقطه معین فضا در نظر بگیریم می‌توانیم نوع دیگری نقشه پربندی برای  $f$  به دست آوریم. مثلاً در حرکت دوبعدی اگر  $f$  تابع همسانگردی از  $v_x$  و  $v_y$  باشد، پربندهای  $f(v_x, v_y)$



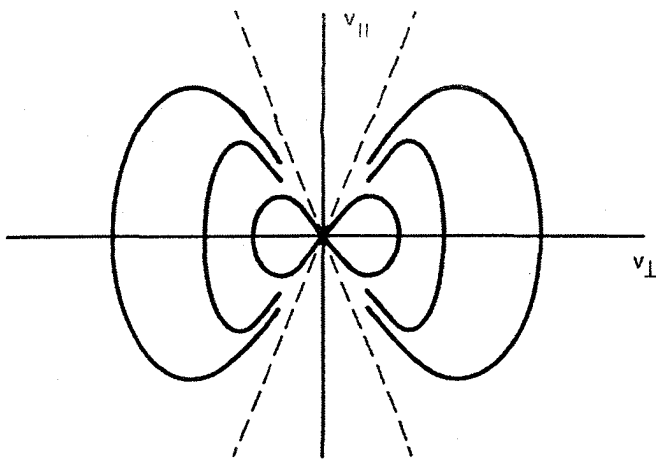
شکل ۵.۷ پربندهای  $f$  ثابت برای یک توزیع ناهمسانگرد دوبعدی.



شکل ۶.۷ پربندهای  $f$  ثابت برای یک توزیع ماکسولی سوق دهنده و یک «باریکه» در دو بعد.

دایره‌ای خواهند بود. در یک توزیع ناهمسانگرد پربندها بیضوی هستند (شکل ۵.۷). یک توزیع ماکسولی سوق دهنده دارای پربندهای دایره‌ای است که از مبدأ جابه‌جا شده‌اند، و باریکه‌ای از ذرات که در راستای  $x$  حرکت می‌کنند باید شبیه میله‌های مجزا باشد (شکل ۶.۷).  
 توزیع مربوط به مخروط اتلاف یک پلاسمای محبوس آینه‌ای را می‌توان با پربندهای  $f$  در فضای  $v_{\parallel}$ ,  $v_{\perp}$  نمایش داد. در شکل ۷.۷ نموداری از این پربندها نشان داده شده است.





شکل ۷.۷ پربندهای  $f$  ثابت برای یک توزیع مخروط اتلافی. در اینجا  $v_{\parallel}$  و  $v_{\perp}$  به ترتیب مؤلفه‌های  $v$  در راستاهای موازی با  $v$  و عمود بر میدان مغناطیسی هستند.

## ۲.۷ معادلات نظریه جنبشی

معادله بنیادی که باید در آن صدق کند معادله بولتزمن است:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c \quad (19.7)$$

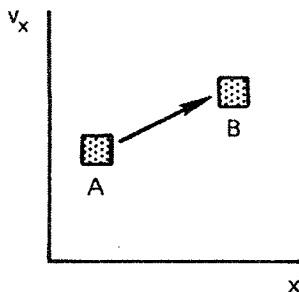
در اینجا  $(\partial f / \partial t)_c$  آهنگ زمانی تغییرات  $f$  به علت برخوردها و  $\mathbf{F}$  نیروی وارد بر ذرات است. نماد  $\nabla$  گرادیان در فضای  $(x, y, z)$  است. نماد  $\partial / \partial \mathbf{v}$  یا  $\nabla_v$  گرادیان در فضای سرعت است:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial v_x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial v_y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial v_z} \quad (20.7)$$

با توجه به این که  $f$  تابعی از هفت متغیر مستقل است معنای معادله بولتزمن روشن می‌شود. بنابراین، مشتق کامل  $f$  نسبت به زمان به صورت زیر است

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v_x} \frac{dv_x}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v_y} \frac{dv_y}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v_z} \frac{dv_z}{dt} \quad (21.7)$$

در اینجا  $\partial f / \partial t$  وابستگی صریح به زمان را نشان می‌دهد، سه جمله بعدی دقیقاً  $\mathbf{v} \cdot \nabla f$  هستند. با استفاده از قانون دوم نیوتون یعنی



شکل ۸.۷ گروه نقاط در فضای فاز، نمایشگر مختصات سرعت و مکان گروه ذرات، چگالی فضای فاز یکسانی را به هنگام حرکت با زمان حفظ می‌کند.

$$m \frac{dv}{dt} = F \quad (22.7)$$

می‌توان سه جمله آخر را به صورت  $(F/m) \cdot (\partial f / \partial v)$  نوشت. همان‌طور که قبلاً در بخش ۳.۳ بحث شد، مشتق کامل  $df/dt$  را می‌توان آهنگ تغییراتی تعبیر کرد که در چارچوبی که با ذرات حرکت می‌کند مشاهده می‌شود. در اینجا تنها تفاوت آن است که باید حرکت ذرات را در فضای شش بعدی  $(r, v)$  در نظر بگیریم؛  $df/dt$  مشتق همرفتی در فضای فاز است. معادله بولتزمن ۱۹.۷ به سادگی بیان می‌دارد که  $df/dt$  صفر است مگر آن که برخوردهایی وجود داشته باشند. درستی این موضوع را می‌توان از مثال یک بعدی در شکل ۸.۷ مشاهده کرد.

گروه ذراتی که در عنصر بینهایت کوچک  $dx dv_x$  در نقطه  $A$  وجود دارند همگی دارای سرعت  $v_x$  و مکان  $x$  هستند. چگالی ذرات در این فضای فاز دقیقاً  $f(x, v_x)$  است. با گذشت زمان، ذرات با توجه به سرعت  $v_x$  خود به  $x$  دیگری می‌روند و در اثر نیروهایی که به آنها وارد می‌شود سرعتشان تغییر می‌کند. چون این نیروها تنها به  $x$  و  $v_x$  بستگی دارند تمام ذرات در  $A$  شتابی یکسان خواهند گرفت. پس از زمان  $t$ ، تمام ذرات به ناحیه  $B$  در فضای فاز خواهند رسید. چون تمام ذرات با هم حرکت می‌کنند، چگالی در  $B$  همانند  $A$  خواهد بود. اما اگر برخورد وجود داشته باشد ذرات می‌توانند پراکنده شوند؛ و  $f$  می‌تواند با جمله  $(\partial f / \partial t)_c$  تغییر پیدا کند. در یک پلاسمای به اندازه کافی داغ می‌توان از برخوردها صرف نظر کرد. به علاوه، اگر نیروی

$F$  کاملاً الکترومغناطیسی باشد معادله ۱۹.۷ به صورت خاص زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (23.7)$$

که معادله ولانشف نام دارد. این معادله به علت سادگی نسبی خود متداول ترین معادله‌ای است که در نظریه جنبشی بررسی می‌شود. هرگاه برخورد با اتمهای خنثی وجود داشته باشد، جمله برخورد در معادله ۱۹.۷ را می‌توان به صورت زیر تقریب گرفت

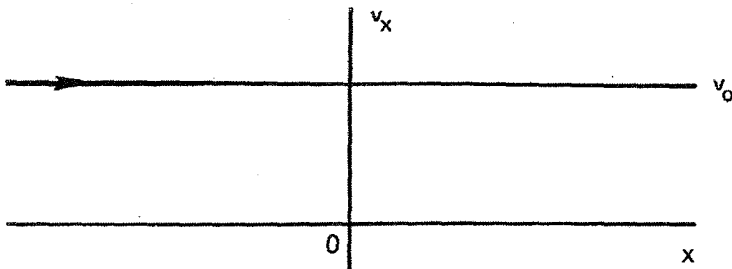
$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c = \frac{f_n - f}{\tau} \quad (24.7)$$

در اینجا  $f_n$  تابع توزیع اتمهای خنثی و  $\tau$  یک ثابت زمانی برخورد است. این جمله را که جمله برخورد کروک می‌نامند تعمیم جنبشی جمله برخورد در معادله ۵.۵ است. هرگاه برخوردهای کولنی وجود داشته باشند معادله ۱۹.۷ را می‌توان به صورت زیر تقریب گرفت

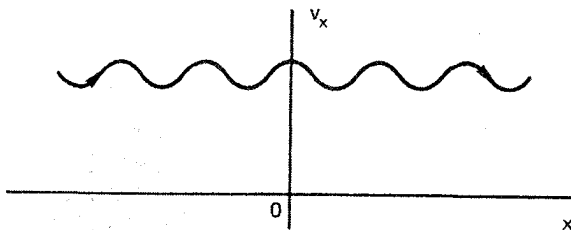
$$\frac{df}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (f \langle \Delta \mathbf{v} \rangle) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} : (f \langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle) \quad (25.7)$$

که معادله فوکریلانک نام دارد؛ این معادله تنها برخوردهای کولنی دوتایی را به حساب می‌آورد. در اینجا  $\Delta \mathbf{v}$  تغییر سرعت در یک برخورد است، و معادله ۲۵.۷ یک صورت اختصاری برای یک رابطه نسبتاً پیچیده است.

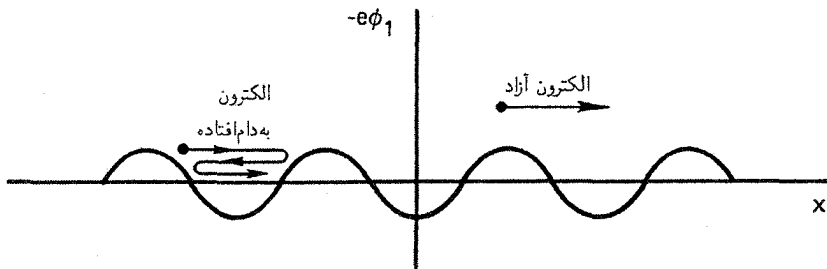
این حقیقت که  $df/dt$  در غیاب برخوردها ثابت است به معنای این است که ذرات به هنگام حرکت در فضای فاز پربندهای  $f$  ثابت را طی می‌کنند. به عنوان مثالی از چگونگی استفاده از این پربندها، ناپایداری باریکه پلاسمای بخش ۶.۶ را در نظر می‌گیریم. در یک پلاسمای نامختل، الکترونها همگی سرعت  $v_0$  دارند و پربند  $f$  ثابت یک خط راست است (شکل ۹.۷). تابع  $f(x, v_x)$  دیواره‌ای است که در  $v_x = v_0$  از صفحه کاغذ خارج می‌شود. الکترونها در طول مسیر نشان داده شده حرکت می‌کنند. هنگامی که موجی به وجود می‌آید میدان الکتریکی  $E_1$  موجب می‌شود



شکل ۹.۷ نمایش در فضای فاز یک بعدی باریکه‌ای از الکترونها که همگی سرعت یکسان  $v_0$  دارند. تابع توزیع  $f(x, v_x)$  روی این خط بینهایت است و در هر جای دیگری صفر است. این خط همچنین مسیر حرکت تک تک الکترونهاست که در جهت پیکان حرکت می‌کنند.



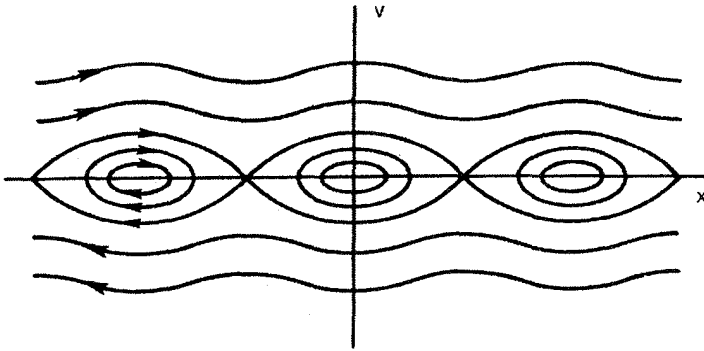
شکل ۱۰.۷ رفتار نمودار شکل ۹.۷ هنگامی که درباریکه الکترونی، موج پلاسما وجود دارد. تمام این نقش با سرعت فاز به سمت راست حرکت می‌کند. اگر ناظر با چارجوب موج حرکت کند باز هم نقش مذکور برقرار است و مشاهده می‌شود که الکترونها این منحنی را با سرعت  $v_0 - v_\phi$  طی می‌کنند.



شکل ۱۱.۷ پتانسیل یک موج پلاسما که الکترون می‌بیند. نقش با سرعت  $v_\phi$  حرکت می‌کند. الکترونی که سرعت کوچکی نسبت به موج دارد در گودی پتانسیل به دام می‌افتد و در راستای موج حمل می‌شود.

تا الکترونها ضمن حرکت در راستای جریان متحمل تغییری در  $v_x$  شوند. بنابراین، مسیر به شکل موج سینوسی درمی‌آید (شکل ۱۰.۷). این موج با سرعت فاز، نه سرعت ذرات، حرکت می‌کند. ذرات هنگامی که نسبت به موج حرکت می‌کنند روی منحنی باقی می‌مانند. اگر با بزرگ شدن موج  $E_1$  خیلی بزرگ شود و اگر تعداد برخوردها اندک باشد بعضی الکترونها در پتانسیل الکتروستاتیکی موج به دام می‌افتند. پتانسیل موج در فضای مختصات به صورتی است که در شکل ۱۱.۷ دیده می‌شود. در فضای فاز، هر جا که پتانسیل گودی داشته باشد  $f(x, v_x)$  دارای قله خواهد بود (شکل ۱۲.۷). چون پربندهای  $f$  مسیرهای حرکت الکترونی نیز هستند مشاهده می‌کنیم که بعضی از الکترونها در فضای فاز روی مدارهای بسته‌ای حرکت می‌کنند؛ این الکترونها همان الکترونها به دام افتاده هستند.

به دام‌افتادگی الکترون یک پدیده غیرخطی است که نمی‌توان آن را با حل مستقیم معادله ولاسف بررسی کرد. اما می‌توان مسیرهای الکترونی را با رایانه پیگیری کرد و غالباً نتایج به صورت



شکل ۱۲.۷ مسیره‌های الکترونی، یا پربندهای  $f$  ثابت، وقتی در چارچوب موج که در آن نقش ساکن است مشاهده می‌شوند. درک این نوع نمودار، که برای توزیع‌های متناهی  $f(v)$  متناسب است آسانتر از توزیع تابع  $\delta$ ی شکل ۱۰.۷ است.

نموداری شبیه شکل ۱۲.۷ نمایش داده می‌شوند. در شکل ۱۳.۷ مثالی از یک نتیجهٔ عددی نشان داده شده است. این نتیجه مربوط به یک ناپایداری دو جریانی است که در آن پربندهای  $f$  در ابتدا کافی در نزدیکی  $v_x = 0$  دارند. این گاف الکترونیایی را که در جهت‌های مخالف حرکت می‌کنند از هم جدا می‌سازد. توسعهٔ زمانی این گاف خالی با نواحی هاشور خوردهٔ شکل ۱۳.۷ نشان داده شده است. این شکل نشان می‌دهد که ناپایداری به طور فزاینده‌ای  $f(v)$  را به صورتی واپس‌چیده می‌کند که به سختی می‌توان آن را به طور تحلیلی توصیف کرد.

### ۳.۷ به دست آوردن معادلات سیال

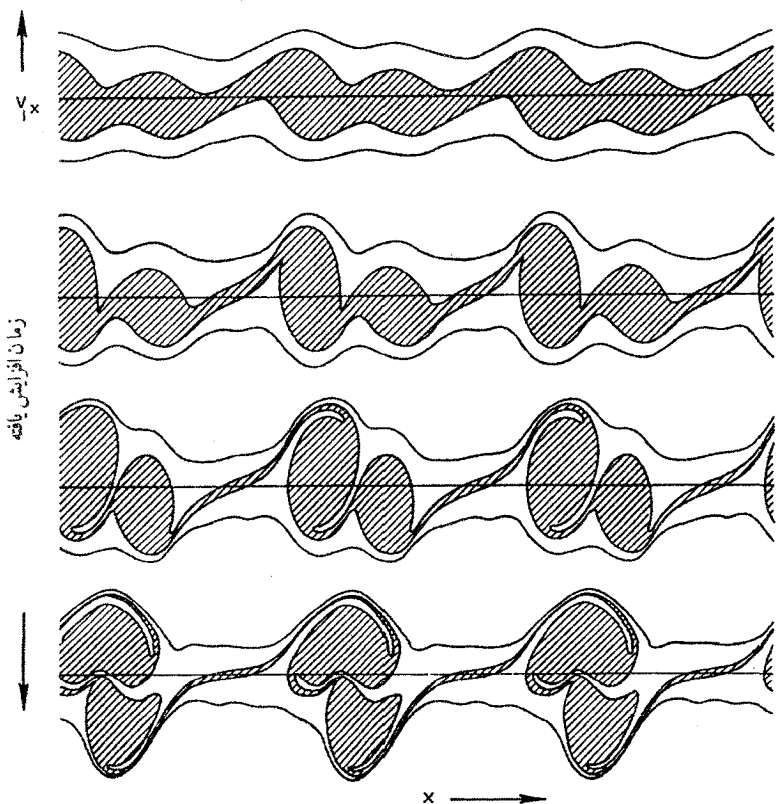
معادلات سیال که تا به حال از آنها استفاده کرده‌ایم به طور ساده گشتاورهای معادلهٔ بولتزمن هستند. اولین گشتاور از انتگرالگیری معادلهٔ ۱۹.۷، که در آن  $\mathbf{F}$  اختصاصاً نیروی لورنتس است، به دست می‌آید:

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} + \int \mathbf{v} \cdot \nabla f d\mathbf{v} + \frac{q}{m} \int (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = \int \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c d\mathbf{v} \quad (26.7)$$

جملهٔ اول را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} \int f d\mathbf{v} = \frac{\partial n}{\partial t} \quad (27.7)$$

چون  $v$  یک متغیر مستقل است و در نتیجه تحت تأثیر عملگر  $\nabla$  قرار نمی‌گیرد برای جملهٔ دوم به دست می‌آوریم



شکل ۱۳.۷ یربندهای فضای فاز الکترونها در یک ناپایداری دوبعدی. ناحیه هاشور خورده که در ابتدا سرعتهای کم در چارچوب آزمایشگاه را نشان می دهد فاقد الکترون است. وقتی ناپایداری از مرحله خطی فراتر می رود، این ناحیه های خالی در فضای فاز به صورتی که شبیه «کیسه آب» است تاب برمی دارند.

$$\int \mathbf{v} \cdot \nabla f d\mathbf{v} = \nabla \cdot \int \mathbf{v} f d\mathbf{v} = \nabla \cdot (n\bar{\mathbf{v}}) \equiv \nabla \cdot (n\mathbf{u}) \quad (28.7)$$

که در آن سرعت متوسط  $\mathbf{u}$ ، بنابه تعریف، سرعت سیال است. جمله شامل  $\mathbf{E}$  صفر است زیرا:

$$\int \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (f \mathbf{E}) d\mathbf{v} = \int_{S_\infty} f \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (29.7)$$

با انتگرال گیری از واگرایی کامل، مقدار  $f \mathbf{E}$  روی سطح واقع در  $v = \infty$  به دست می آید. همان طور که برای هر توزیعی با انرژی منتهای لازم است، اگر به ازای  $v \rightarrow \infty$ ،  $f$  سریعتر از  $v^{-2}$  به صفر میل کند مقدار مذکور صفر خواهد شد. جمله  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (f \mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathbf{v} - \int f \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathbf{v} = 0 \quad (30.7)$$

در اینجا نیز انتگرال اول را می‌توان به انتگرال سطحی تبدیل کرد. برای توزیع ماکسولوی،  $f$  به‌ازای  $v \rightarrow \infty$  سریعتر از هر توانی از  $v$  کاهش می‌یابد و در نتیجه انتگرال مذکور صفر می‌شود. انتگرال دوم نیز صفر است زیرا  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  بر  $\partial/\partial \mathbf{v}$  عمود است. و سرانجام، جمله چهارم معادله ۲۶.۷ صفر است زیرا برخوردها نمی‌توانند تعداد کل ذرات را تغییر دهند (در اینجا بازترکیب را منظور نداشته‌ایم). به این ترتیب، از معادلات ۲۷.۷ تا ۳۰.۷ معادله پیوستگی به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0 \quad (31.7)$$

گشتاور بعدی معادله بولتزمن از ضرب معادله ۱۹.۷ در  $m\mathbf{v}$  و انتگرال‌گیری روی  $d\mathbf{v}$  به‌دست می‌آید. داریم

$$m \int \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} + m \int \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \nabla) f d\mathbf{v} + q \int \mathbf{v} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = \int m\mathbf{v} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_e d\mathbf{v} \quad (32.7)$$

سمت راست این معادله تغییر تکانه ناشی از برخورد است و جمله  $\mathbf{P}_{ij}$  در معادله ۵۸.۸ را می‌دهد. از جمله اول معادله ۳۲.۷ داریم

$$m \int \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} = m \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{v} f d\mathbf{v} \equiv m \frac{\partial}{\partial t} (n\mathbf{u}) \quad (33.7)$$

انتگرال سوم در معادله ۳۲.۷ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\int \mathbf{v} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot [f \mathbf{v} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})] d\mathbf{v} - \int f \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathbf{v} - \int f (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} d\mathbf{v} \quad (34.7)$$

دو انتگرال اول در سمت راست معادله بالا بنابه دلایل قبلی صفر هستند و  $\partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{v}$  صرفاً تانسور واحد است. بنابراین، داریم

$$q \int \mathbf{v}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = -q \int (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) f d\mathbf{v} \\ = -qn(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (۳۵.۷)$$

سرانجام برای محاسبه انتگرال دوم در معادله ۳۲.۷، ابتدا از این حقیقت استفاده می‌کنیم که  $\mathbf{v}$  یک متغیر مستقل بدون ارتباط با  $\nabla$  است و می‌نویسیم

$$\int \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla) f d\mathbf{v} = \int \nabla \cdot (f \mathbf{v} \mathbf{v}) d\mathbf{v} = \nabla \cdot \int f \mathbf{v} \mathbf{v} d\mathbf{v} \quad (۳۶.۷)$$

چون میانگین یک کمیت برابر با  $1/n$  ضربدر انتگرال وزن شده آن روی  $\mathbf{v}$  است داریم

$$\nabla \cdot \int f \mathbf{v} \mathbf{v} d\mathbf{v} = \nabla \cdot n \overline{\mathbf{v} \mathbf{v}} \quad (۳۷.۷)$$

اکنون می‌توانیم  $\mathbf{v}$  را به میانگین سرعت (سیال)  $\mathbf{u}$  و سرعت گرمایی  $\mathbf{w}$  تفکیک کنیم:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w} \quad (۳۸.۷)$$

چون  $\mathbf{u}$  یک میانگین است می‌توان نوشت

$$\nabla \cdot (n \overline{\mathbf{v} \mathbf{v}}) = \nabla \cdot (n \mathbf{u} \mathbf{u}) + \nabla \cdot (n \overline{\mathbf{w} \mathbf{w}}) + 2 \nabla \cdot (n \mathbf{u} \overline{\mathbf{w}}) \quad (۳۹.۷)$$

روشن است که میانگین  $\overline{\mathbf{w}}$  صفر است. کمیت  $m n \overline{\mathbf{w} \mathbf{w}}$  دقیقاً به معنای تانسور تنش  $\mathbf{P}$  است:

$$\mathbf{P} \equiv m n \overline{\mathbf{w} \mathbf{w}} \quad (۴۰.۷)$$

جمله باقی‌مانده در معادله ۳۹.۷ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\nabla \cdot (n \mathbf{u} \mathbf{u}) = \mathbf{u} \nabla \cdot (n \mathbf{u}) + n(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (۴۱.۷)$$

با جمع‌آوری نتایج خود از معادلات ۳۳.۷، ۳۵.۷، ۴۰.۷ و ۴۱.۷، می‌توانیم معادله ۳۲.۷ را به صورت زیر بنویسیم

$$m \frac{\partial}{\partial t} (n \mathbf{u}) + m \mathbf{u} \nabla \cdot (n \mathbf{u}) + m n (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{P} - q n (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \mathbf{P}_{iz} \quad (۴۲.۷)$$



از ترکیب دو جمله اول با استفاده از معادله ۳۱.۷، سرانجام معادله حرکت سیال را به دست می آورید:

$$mn \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = qn(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot \mathbf{P} + P_{ij} \quad (۴۳.۷)$$

این معادله شارش تکانه را توصیف می کند. برای بررسی شارش انرژی، می توانیم گشتاور بعدی معادله بولتزمن را با ضرب آن در  $\frac{1}{2} m \mathbf{v} \mathbf{v}$  و انتگرال گیری به دست آوریم. به این ترتیب، به معادله شارش گرما می رسیم که در آن ضریب رسانندگی گرمایی  $\kappa$  به همان ترتیبی به دست می آید که تانسور تنش  $\mathbf{P}$  به دست آمد. معادله حالت  $p \propto \rho^\gamma$  صورت ساده ای از معادله شارش گرما به ازای  $\kappa = 0$  است.

## ۴.۷ نوسانهای پلاسما و میرایی لاندائو

به عنوان مثالی مقدماتی از کاربرد معادله ولاسف، رابطه پاشیدگی نوسانهای پلاسمای الکترونی را به دست می آوریم که قبلاً در بخش ۳.۴ از دیدگاه سیالی بررسی کردیم. در این روش لازم است از انتگرال گیری پربندی اطلاع داشته باشیم. آنهایی که با این فن آشنا نیستند می توانند مستقیماً به بخش ۵.۷ مراجعه کنند. روشی ساده اما طولانی تر را که در آن نظریه متغیرهای مختلط به کار نمی رود در بخش ۶.۷ بیان خواهیم کرد.

در مرتبه صفرم، پلاسمایی با توزیع  $f_0(\mathbf{v})$  در نظر می گیریم و فرض می کنیم  $\mathbf{B}_0 = \mathbf{E}_0 = 0$ . در مرتبه اول، اختلال در  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  را با  $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  نشان می دهیم:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{v}) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (۴۴.۷)$$

با توجه به آن که اکنون  $\mathbf{v}$  یک متغیر مستقل است و لازم نیست خطی شود، معادله ولاسف مرتبه اول الکترون به صورت زیر است

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_1 - \frac{e}{m} \mathbf{E}_1 \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (۴۵.۷)$$

همچون گذشته فرض می کنیم یونها سنگین و ثابت اند و موجها امواج تخت در راستای  $x$  هستند

$$f_1 \propto e^{i(kx - \omega t)} \quad (۴۶.۷)$$

بنابراین، معادله ۴۵.۷ به صورت زیر درمی آید

$$-i\omega f_1 + ikv_x f_1 = \frac{e}{m} E_x \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \quad (۴۷.۷)$$

$$f_1 = \frac{ieE_x}{m} \frac{\partial f_0 / \partial v_x}{\omega - kv_x} \quad (۴۸.۷)$$

از معادله یواسون به دست می آوریم

$$\epsilon_0 \nabla \cdot E_1 = ik\epsilon_0 E_x = -en_1 = -e \iiint f_1 d^3v \quad (۴۹.۷)$$

با جاگذاری  $f_1$  و تقسیم بر  $ik\epsilon_0 E_x$  داریم

$$1 = -\frac{e^2}{km\epsilon_0} \iiint \frac{\partial f_0 / \partial v_x}{\omega - kv_x} d^3v \quad (۵۰.۷)$$

اگر  $f_0$  را با تابع بهنجار شده  $\hat{f}_0$  تعویض کنیم می توانیم ضریب  $n_0$  را از انتگرال خارج کنیم، و آن گاه خواهیم داشت:

$$1 = -\frac{\omega_p^2}{k} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \hat{f}_0(v_x, v_y, v_z) / \partial v_x}{\omega - kv_x} dv_x \quad (۵۱.۷)$$

اگر  $f_0$  یک تابع توزیع ماکسولوی یا هر توزیعی که قابل تجزیه به عوامل است باشد، می توان انتگرالهای روی  $v_y$  و  $v_z$  را به سادگی محاسبه کرد. آنچه باقی می ماند توزیع یک بعدی  $\hat{f}_0(v_x)$  است. مثلاً توزیع ماکسولوی یک بعدی به صورت زیر است

$$\hat{f}_m(v_x) = (m/2\pi KT)^{1/2} \exp(-mv_x^2/2KT) \quad (۵۲.۷)$$

بنابراین، رابطه پاشیدگی عبارت است از

$$1 = \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \hat{f}_0(v_x) / \partial v_x}{v_x - (\omega/k)} dv_x \quad (۵۳.۷)$$

چون مسئله یک بعدی است می توانیم شاخص  $x$  را حذف کنیم اما باید دقت داشته باشیم تا  $v$  را (که در واقع  $v_x$  است) با سرعت کل  $v$  که قبلاً به کار بردیم اشتباه نگیریم:

$$1 = \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \hat{f}_0 / \partial v}{v - (\omega/k)} dv \quad (۵۴.۷)$$

در اینجا منظور از  $\hat{f}_0$  یک تابع توزیع یک بعدی است در حالی که انتگرالهای روی  $v_y$  و  $v_z$  محاسبه

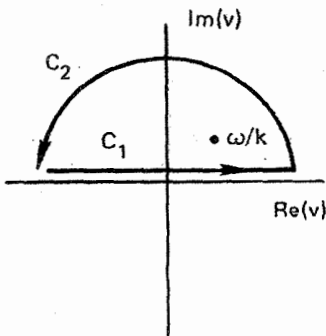
شده‌اند. معادله ۵۴.۷ برای هر توزیع تعادلی  $f_0(v)$  برقرار است؛ خصوصاً اگر  $f_0$  ماکسولی باشد معادله ۵۲.۷ را باید برای آن به‌کار ببریم.

محاسبه انتگرال معادله ۵۴.۷ سراسر نیست زیرا در  $v = \omega/k$  تکینگی وجود دارد. شاید گمان کنیم که این تکینگی اهمیتی ندارد زیرا در عمل  $\omega$  تقریباً هرگز حقیقی نیست؛ امواج معمولاً به‌علت برخوردها قدری میرایی دارند و یا از طریق یک سازوکار ناپایداری تقویت می‌شوند. از آنجا که  $v$  یک کمیت حقیقی است مخرج معادله ۵۴.۷ هیچگاه صفر نمی‌شود. لاندائو اولین کسی بود که این معادله را درست بررسی کرد. او دریافت که وجود تکینگی حتی در خارج از مسیر انتگرال‌گیری موجب تغییر مهمی در رابطه پاشیدگی موج پلاسما می‌شود و این اثری است که نظریه سیالی آن را پیش‌بینی نمی‌کند.

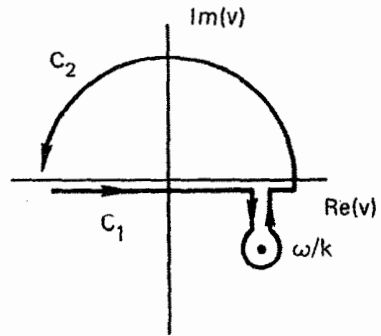
مسئله مقدار اولیه‌ای در نظر گیرید که در آن به پلاسما یک اختلال سینوسی داده می‌شود و در نتیجه  $k$  حقیقی است. اگر اختلال افزایش یابد یا افت پیدا کند  $\omega$  مختلط خواهد شد. انتگرال معادله ۵۴.۷ را باید به‌صورت انتگرال پربندی در صفحه مختلط  $v$  بیان کرد. پربندهای ممکن در شکل ۱۴.۷ برای (الف) یک موج ناپایدار با  $\text{Im}(\omega) > 0$  و (ب) یک موج میرا با  $\text{Im}(\omega) < 0$  نشان داده شده‌اند. معمولاً انتگرال خطی روی محور حقیقی را با استفاده از قضیه مانده‌ها محاسبه می‌کنند:

$$\int_{C_1} G dv + \int_{C_2} G dv = 2\pi i R(\omega/k) \quad (55.7)$$

در اینجا  $G$  تابع زیر انتگرال،  $C_1$  مسیر روی محور حقیقی،  $C_2$  نیم‌دایره در بینهایت و  $R(\omega/k)$  مانده در  $\omega/k$  است. انتگرال حقیقی به‌شرطی از قضیه مانده‌ها تعیین می‌شود که انتگرال روی  $C_2$  صفر

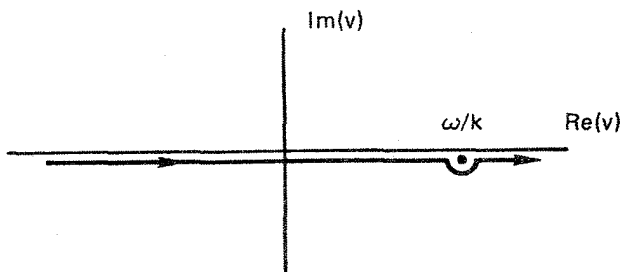


(الف)



(ب)

شکل ۱۴.۷ پربندهای انتگرال‌گیری مسئله لاندائو برای (الف)  $\text{Im}(\omega) > 0$  و (ب)  $\text{Im}(\omega) < 0$ .



شکل ۱۵.۷ انتگرال‌گیری پربندی در صفحه مختلط  $v$  برای موردی که  $\text{Im}(\omega)$  کوچک است.

شود. اما متأسفانه این موضوع برای یک توزیع ماکسولوی که عاملی به صورت زیر دارد روی نمی‌دهد

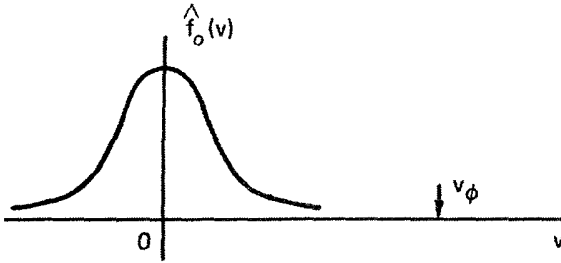
$$\exp(-v^2/v_{th}^2)$$

این عامل به‌ازای  $\pm i\infty \rightarrow v$  بسیار بزرگ می‌شود و از سهم  $C_2$  نمی‌توان صرف‌نظر کرد. لاندائو نشان داد هنگامی که این مسئله به‌عنوان یک مسئله مقدار اولیه به‌صورت مناسب بررسی شود پربند درستی که باید مورد استفاده قرار گیرد منحنی  $C_1$  است که از زیر نقطهٔ تکنیکی عبور می‌کند. به‌طور کلی، باید انتگرال را به‌صورت عددی حل کرد؛ فرایند و کنته جداولی را برای موردی که  $\hat{f}$  ماکسولوی است فراهم کرده‌اند.

با آن که تحلیل دقیق این مسئله پیچیده است می‌توانیم یک رابطهٔ پاشیدگی تقریبی را برای مورد سرعت فاز بزرگ و میرایی ضعیف به‌دست آوریم، در این مورد قطب  $\omega/k$  در نزدیکی محور حقیقی  $v$  قرار می‌گیرد (شکل ۱۵.۷). پربند توصیف‌شده توسط لاندائو خط راستی در طول محور  $\text{Re}(v)$  است که نیم‌دایرهٔ کوچکی حول قطب دارد. اگر قطب را دور بزیم مقدار  $2\pi i$  ضرب در نصف مانده در آن نقطه به‌دست می‌آید؛ بنابراین، معادلهٔ ۵۴.۷ به‌صورت زیر خواهد شد

$$1 = \frac{\omega_p^2}{k^2} \left[ P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \hat{f}_0 / \partial v}{v - (\omega/k)} dv + i\pi \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v} \Big|_{v=\omega/k} \right] \quad (۵۶.۷)$$

در اینجا  $P$  مقدار اصلی کوشی است. برای محاسبهٔ آن، ابتدا روی محور حقیقی  $v$  انتگرال‌گیری می‌کنیم اما درست قبل از مواجهه با قطب متوقف می‌شویم. اگر همان‌طور که فرض کرده‌ایم سرعت  $v_\phi = \omega/k$  به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد، قسمت صرف‌نظر‌شدهٔ پربند سهم زیادی نخواهد داشت زیرا در آنجا  $\hat{f}_0$  و  $\partial \hat{f}_0 / \partial v$  خیلی کوچک‌اند (شکل ۱۶.۷). انتگرال معادلهٔ ۵۶.۷ را می‌توان با انتگرال‌گیری جزء به جزء محاسبه کرد:



شکل ۱۶.۷ توزیع ماکسولی بهنجار شده برای مورد  $v_{th} \gg v_{\phi}$ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0}{\partial v} \frac{dv}{v - v_{\phi}} = \left[ \frac{f_0}{v - v_{\phi}} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-f_0 dv}{(v - v_{\phi})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0 dv}{(v - v_{\phi})^2} \quad (57.7)$$

چون این انتگرال میانگین  $(v - v_{\phi})^{-2}$  روی توزیع است. قسمت حقیقی رابطه پاشیدگی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\gamma = \frac{\omega_p^2}{k^2} \overline{(v - v_{\phi})^{-2}} \quad (58.7)$$

با توجه به فرض  $v \gg v_{\phi}$  می‌توان  $(v - v_{\phi})^{-2}$  را بسط داد:

$$(v - v_{\phi})^{-2} = v_{\phi}^{-2} \left( 1 - \frac{v}{v_{\phi}} \right)^{-2} = v_{\phi}^{-2} \left( 1 + \frac{2v}{v_{\phi}} + \frac{3v^2}{v_{\phi}^2} + \frac{4v^3}{v_{\phi}^3} + \dots \right) \quad (59.7)$$

جمله‌های فرد در میانگین‌گیری صفر می‌شوند، و خواهیم داشت

$$\overline{(v - v_{\phi})^{-2}} \approx v_{\phi}^{-2} \left( 1 + \frac{3\overline{v^2}}{v_{\phi}^2} \right) \quad (60.7)$$

اکنون فرض می‌کنیم  $f_0$  ماکسولی است و  $\overline{v^2}$  را محاسبه می‌کنیم. با یادآوری اینکه در اینجا  $v$  در واقع  $v_x$  است و با توجه به اینکه فقط یک درجه آزادی وجود دارد، می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{1}{2} m \overline{v_x^2} = \frac{1}{2} k T_e \quad (61.7)$$

بنابراین، رابطه پاشیدگی ۵۸.۷ به صورت زیر درمی‌آید

$$1 = \frac{\omega_p^2}{k^2} \frac{k^2}{\omega^2} \left( 1 + 3 \frac{k^2}{\omega^2} \frac{KT_e}{m} \right) \quad (۶۲.۷)$$

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{3KT_e}{m} k^2 \quad (۶۳.۷)$$

اگر تصحیح گرمایی کوچک باشد، می‌توانیم در جمله دوم  $\omega^2$  را با  $\omega_p^2$  تعویض کنیم. در نتیجه خواهیم داشت

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3KT_e}{m} k^2 \quad (۶۴.۷)$$

این همان معادله ۳۰.۴ است که از معادلات سیال به‌ازای  $\gamma = 3$  به‌دست آوردیم. اکنون به‌قسمت موهومی معادله ۵۶.۷ بازمی‌گردیم. در محاسبه این جمله کوچک، با چشمپوشی از تصحیح گرمایی در قسمت حقیقی  $\omega$  و فرض  $\omega^2 \approx \omega_p^2$  باز هم محاسبه به‌اندازه کافی دقیق خواهد بود. از معادلات ۵۷.۷ و ۶۰.۷ می‌بینیم که مقدار اصلی انتگرال معادله ۵۶.۷ تقریباً با  $k^2/\omega^2$  برابر است. اکنون معادله ۵۶.۷ به‌صورت زیر درمی‌آید

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + i\pi \frac{\omega_p^2}{k^2} \left. \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v} \right|_{v=v_\phi} \quad (۶۵.۷)$$

$$\omega^2 = \left( 1 - i\pi \frac{\omega_p^2}{k^2} \left[ \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v} \right]_{v=v_\phi} \right)^{-1} \omega_p^2 \quad (۶۶.۷)$$

پس از جذرگرفتن و بسط به‌رشته تیلور، با فرض کوچک بودن جمله موهومی به‌دست می‌آوریم

$$\omega = \omega_p \left( 1 + i \frac{\pi}{2} \frac{\omega_p^2}{k^2} \left[ \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v} \right]_{v=v_\phi} \right) \quad (۶۷.۷)$$

اگر  $\hat{f}_0$  ماکسولوی یک بعدی باشد داریم

$$\frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v} = (\pi v_{th}^2)^{-1/2} \left( \frac{-2v}{v_{th}^2} \right) \exp \left( \frac{-v^2}{v_{th}^2} \right) = -\frac{2v}{\sqrt{\pi} v_{th}^2} \exp \left( \frac{-v^2}{v_{th}^2} \right) \quad (۶۸.۷)$$

می‌توان  $v_\phi$  را در قسمت ضریب با  $\omega_p/k$  تقریب گرفت اما در قسمت نهایی باید تصحیح گرمایی در معادله ۶۲.۷ را منظور کرد. بنابراین، میرایی به‌صورت زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} \text{Im}(\omega) &= -\frac{\pi}{2} \frac{\omega_p^2}{k^2} \frac{2\omega_p}{k\sqrt{\pi}} \frac{1}{v_{th}^2} \exp\left(\frac{-\omega^2}{k^2 v_{th}^2}\right) \\ &= -\sqrt{\pi} \omega_p \left(\frac{\omega_p}{k v_{th}}\right)^2 \exp\left(\frac{-\omega_p^2}{k^2 v_{th}^2}\right) \exp\left(\frac{-3}{2}\right) \end{aligned} \quad (۶۹.۷)$$

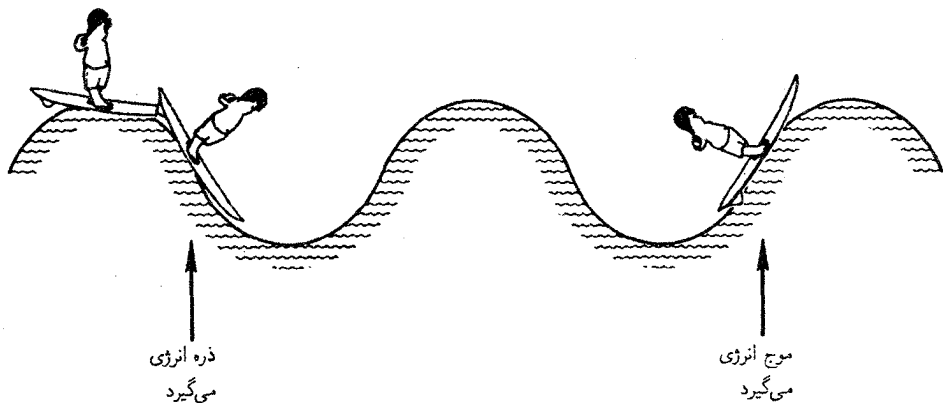
$$\text{Im}\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right) = -0.۲۲\sqrt{\pi} \left(\frac{\omega_p}{k v_{th}}\right)^2 \exp\left(\frac{-1}{2k^2 \lambda_D^2}\right) \quad (۷۰.۷)$$

چون  $\text{Im}(\omega)$  منفی است، یک میرایی بدون برخورد برای امواج پلاسما داریم که آن را میرایی لاندائو می‌نامند. همان‌طور که از معادله ۷۰.۷ معلوم است، این میرایی به‌ازای  $k\lambda_D$  کوچک بسیار کوچک است اما به‌ازای  $k\lambda_D = O(1)$  اهمیت پیدا می‌کند. این اثر به  $f_1$ ، وابیجش تابع توزیع که توسط موج به‌وجود می‌آید، ارتباط دارد.

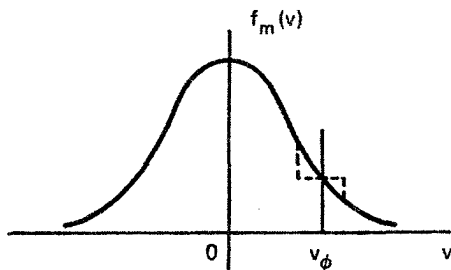
## ۵.۷ معنای میرایی لاندائو

کشف نظری میرایی موج بدون اتلاف انرژی توسط برخورد شاید حیرت‌انگیزترین نتیجه تحقیقات فیزیک پلاسما باشد. این یک اثر واقعی است که در آزمایشگاه نشان داده شده است. با آن که اکنون توضیح فیزیکی ساده‌ای برای این میرایی وجود دارد، این کشف یک پیروزی برای ریاضیات کاربردی است زیرا این اثر غیرمنتظره برای اولین بار از تحلیل دقیق یک انتگرال پربندی به‌صورت کاملاً ریاضی کشف شد. میرایی لاندائو یک مشخصه پلاسماهای بدون برخورد است اما می‌تواند در حوزه‌های دیگر نیز کاربرد داشته باشد. برای نمونه، در بررسی جنبشی تشکیل کهکشانها می‌توان ستاره‌ها را به‌صورت اتمهای یک پلاسما در نظر گرفت که به‌جای نیروهای الکترومغناطیسی برهم‌کنش گرانشی دارند. ناپایداریهایی گازهایی ستاره‌ای می‌توانند باعث تشکیل بازوهای مارپیچی شوند اما این فرایند به‌علت میرایی لاندائو محدودیت پیدا می‌کند.

برای آن‌که پی ببریم چه چیزی میرایی لاندائو را به‌وجود می‌آورد، ابتدا توجه می‌کنیم که  $\text{Im}(\omega)$  از قطب در  $v = v_\phi$  حاصل می‌شود. در نتیجه، این اثر به ذراتی در توزیع «ذرات تشدیدی» — ارتباط پیدا می‌کند که دارای سرعتی تقریباً مساوی با سرعت فاز هستند. این ذرات در امتداد موج حرکت می‌کنند و میدان الکتریکی با افت‌وخیز سریع را نمی‌بینند؛ بنابراین، آنها می‌توانند به‌طور مؤثر به مبادله انرژی با موج بپردازند. ساده‌ترین راه درک این مبادله انرژی تصویر موج‌سواری است که سعی می‌کند بر یک موج اقیانوس سوار شود (شکل ۱۷.۷). (توجه: این تصویر تنها به‌منظور دادن جهت درست به فکر است و معادله ۷۰.۷ را به‌طور صحیح توضیح نمی‌دهد). اگر تخته موج‌سواری



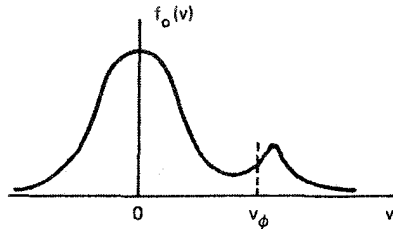
شکل ۱۷.۷ تصویر فیزیکی مرسوم از میرایی لاندائو.



شکل ۱۸.۷ واپیچش یک توزیع ماکسولی در ناحیه  $v \approx v_\phi$  ناشی از میرایی لاندائو.

حرکت نکند با حرکت موج صرفاً به بالا و پایین می‌رود و به‌طور میانگین انرژی به‌دست نمی‌آورد. به‌طور مشابه، قایقی که بسیار سریع‌تر از موج به جلو حرکت می‌کند نمی‌تواند انرژی چندانی را با موج مبادله کند. اما اگر تخته موج‌سواری سرعتی تقریباً مساوی با سرعت موج داشته باشد می‌تواند سوار بر موج شود و توسط آن به جلو رانده شود، که این، در نهایت، هدف اصلی از این ورزش است. در این وضعیت، تخته موج‌سواری انرژی به‌دست می‌آورد و بنابراین موج انرژی از دست می‌دهد و میرا می‌شود. از طرف دیگر، اگر قرار باشد که تخته موج‌سواری کمی سریع‌تر از موج حرکت کند باید در هنگامی که از موج بالا می‌رود به آن نیرو وارد کند؛ در این وضعیت، موج می‌تواند انرژی کسب کند. در یک پلاسما، هم الکترونهاى تندتر از موج وجود دارند و هم الکترونهاى کندتر از موج. اما در یک توزیع ماکسولی، الکترونهاى کند بیشتر از الکترونهاى تند هستند (شکل ۱۸.۷). در نتیجه تعداد ذراتی که از موج انرژی می‌گیرند بیشتر از تعداد آنهاى است که به موج انرژی می‌دهند و بنابراین موج میرا می‌شود. وقتی که ذرات با  $v \approx v_\phi$  در موج به دام می‌افتند،  $f(v)$  در نزدیکی سرعت فاز پهن می‌شود. این واپیچش همان





شکل ۱۹.۷ یک توزیع دوکوهانی و ناحیه‌ای که در آن ناپایداری توسعه خواهد یافت.

$f_0(v)$  است که آن را محاسبه کردیم. چنانکه از شکل ۱۸.۷ مشاهده می‌شود، تابع توزیع مختل شده تعداد یکسانی از ذرات را در بر دارد اما دارای انرژی کل بیشتری است (که از موج به دست آمده است). با توجه به این بحث می‌توان حدس زد که اگر در  $f_0(v)$  ذرات تند بیشتر از ذرات کند باشند موج می‌تواند برانگیخته شود. در واقع از معادله ۶۷.۷ روشن می‌شود که  $\text{Im}(\omega)$  مثبت است اگر  $\partial f_0 / \partial v$  در  $v = v_\phi$  مثبت باشد. این نوع توزیع در شکل ۱۹.۷ نشان داده شده است. امواجی که برای آنها  $v_\phi$  در ناحیه‌ای است که شیب مثبت است ناپایدار خواهند بود و از ذرات انرژی کسب می‌کنند. این برای دمای متناهی دقیقاً مشابه ناپایداری دو جریانی است. هنگامی که دو جریان الکترونی سرد ( $KT = 0$ ) در حرکت باشند،  $f_0(v)$  دو تابع  $\delta$  دارد. روشن است که ناپایداری داریم زیرا  $\partial f_0 / \partial v$  نامتناهی است، و در واقع ناپایداری را از نظریه سیال به دست آورده‌ایم. هنگامی که جریانهای دمای متناهی داشته باشند، نظریه جنبشی بیان می‌دارد که چگالیهای نسبی و دماهای دو جریان باید به گونه‌ای باشند که بین آنها ناحیه‌ای با  $\partial f_0 / \partial v$  مثبت وجود داشته باشند، به طور دقیقتر، برای داشتن ناپایداری باید تابع توزیع کل دارای یک مینیمم باشد.

تصویر فیزیکی موج سواری که بر امواج سوار شده است بسیار جالب است اما به اندازه کافی دقیق نیست تا درک درستی از میرایی لاندائو فراهم آورد. در واقع، دو نوع میرایی لاندائو وجود دارد، میرایی لاندائو خطی و میرایی لاندائو ناخطی. این دو میرایی مستقل از سازوکار برخوردی اتلافی هستند. اگر ذره‌ای در چاه پتانسیل یک موج محبوس شود، این پدیده را «به دام افتادن» می‌نامند. همانند مورد موج سوار، ذره به دام افتاده نیز می‌تواند انرژی به دست آورد یا از دست دهد. اما به دام افتادگی در محدوده نظریه خطی قرار نمی‌گیرد. علت آن را می‌توان از معادله حرکت زیر مشاهده کرد

$$m d^2 x / dt^2 = q E(x) \quad (71.7)$$

اگر با جاگذاری مقدار دقیق  $x$  کمیت  $E(x)$  را محاسبه کنیم معادله ناخطی می‌شود زیرا  $E(x)$

چیزی مانند  $\sin kx$  است. آنچه در نظریهٔ خطی انجام می‌شود استفاده از مدار نامختل برای  $x$  یعنی  $x = x_0 + v_0 t$  است. بنابراین، معادلهٔ ۷۱.۷ خطی می‌شود. اما هنگامی که ذره به دام می‌افتد دیگر این تقریب اعتبار ندارد. وقتی ذره با تپهٔ پتانسیلی مواجه می‌شود که به اندازهٔ کافی بزرگ باشد تا از آن بازتاب پیدا کند، قطعاً سرعت و مکانش به طور قابل ملاحظه‌ای توسط موج تغییر می‌کنند و دیگر نزدیک به مقادیر نامختل خود نخواهند بود. در نظریهٔ سیالی، معادلهٔ حرکت عبارت است از

$$m \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = q \mathbf{E}(x) \quad (۷۲.۷)$$

در اینجا  $\mathbf{E}(x)$  را باید در چارچوب آزمایشگاه محاسبه کرد که آسان است؛ اما در عوض اکنون جملهٔ  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  وجود دارد. چشمپوشی از جملهٔ  $(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1$  در نظریهٔ خطی به همان چیزی منجر می‌شود که با استفاده از مدارهای نامختل به دست می‌آید. در نظریهٔ جنبشی، جملهٔ ناخطی حذف شده، بنابه معادلهٔ ۴۵.۷، به صورت زیر است

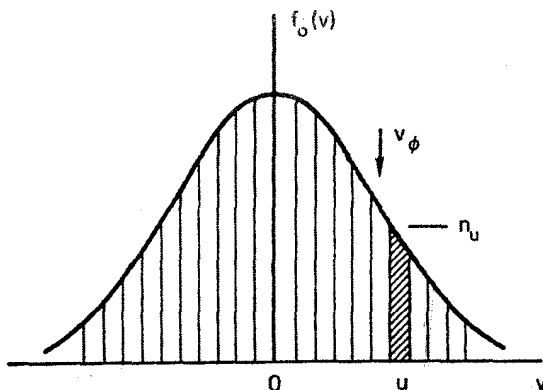
$$\frac{q}{m} E_1 \frac{\partial f_1}{\partial v} \quad (۷۳.۷)$$

هنگامی که ذرات به دام می‌افتند، جهت حرکت آنها نسبت به موج معکوس می‌شود، و در نتیجه تابع توزیع  $f(v)$  در نزدیکی  $v = \omega/k$  بسیار آشفته می‌شود. این نشان می‌دهد که  $\partial f_1 / \partial v$  قابل مقایسه با  $\partial f_0 / \partial v$  است و جملهٔ ۷۳.۷ قابل چشمپوشی نیست. بنابراین، در نظریهٔ خطی به دام افتادگی وجود ندارد.

هنگامی که یک موج دامنهٔ بزرگی پیدا می‌کند، میرایی بدون برخورد همراه با به دام افتادگی رخ می‌دهد. در این مورد درمی‌یابیم که موج به طور یکنواخت نمی‌کند بلکه در حین افت، در حالی که ذرات به دام افتاده در چاههای پتانسیل به عقب و جلو رفت و آمد می‌کنند، دامنهٔ آن افت و خیز پیدا می‌کند. این میرایی لاندائو ناخطی است. چون نتیجهٔ معادلهٔ ۶۷.۷ از نظریهٔ خطی استخراج شده است باید از اثر فیزیکی متفاوتی ناشی شده باشد. سؤال این است، آیا الکترونها به دام نیفتاده که سرعتی نزدیک به سرعت فاز موج دارند می‌توانند با موج انرژی مبادله کنند؟ قبل از پاسخ به این سؤال به بررسی انرژی چنین الکترونهايي می‌پردازیم.

### ۱.۵.۷ انرژی جنبشی باریکهٔ الکترونی

می‌توانیم توزیع الکترونی  $f_0(v)$  را به تعداد زیادی باریکهٔ تک انرژی تقسیم کنیم (شکل ۲۰.۷)، یکی از این باریکه‌ها را در نظر بگیریم: این باریکه دارای سرعت نامختل  $v$  و چگالی  $n_v$  است. اگر



شکل ۲۰.۷ تقسیم توزیع  $f_0(v)$  به تعداد زیادی باریکه تک انرژی با سرعت  $u$  و چگالی  $n_u$ .

سرعت  $u$  نزدیک به  $v_\phi$  باشد، این باریکه می‌تواند متشکل از الکترونهاى تشدید باشد. اکنون نوسان پلاسمایی  $E(x, t)$  را برقرار می‌کنیم و وقتی که باریکه از قله‌ها و دره‌های موج عبور می‌کند انرژی جنبشی آن را در نظر می‌گیریم. موج از حرکت خودسازگار همه باریکه‌ها باهم به وجود می‌آید. اگر  $n_u$  به اندازه کافی کوچک باشد (تعداد باریکه‌ها به اندازه کافی بزرگ باشد)، باریکه‌ای که بررسی می‌کنیم اثر ناچیزی بر موج دارد و می‌توان آن را در میدان مفروض  $E(x, t)$  متحرک در نظر گرفت. فرض کنید

$$E = E_0 \sin(kx - \omega t) = -d\phi/dx \quad (74.7)$$

$$\phi = (E_0/k) \cos(kx - \omega t) \quad (75.7)$$

معادله خطی شده سیال برای این باریکه عبارت است از

$$m \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} + u \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) = -eE_0 \sin(kx - \omega t) \quad (76.7)$$

یک جواب ممکن به صورت زیر است

$$v_1 = -\frac{eE_0}{m} \frac{\cos(kx - \omega t)}{\omega - ku} \quad (77.7)$$

این مدولاسیون سرعت است که توسط موج هنگامی که الکترونهاى باریکه از آن عبور می‌کنند ایجاد می‌شود. برای پایسته بودن شار ذره، باید نوسان متناظری در چگالی وجود داشته باشد که با

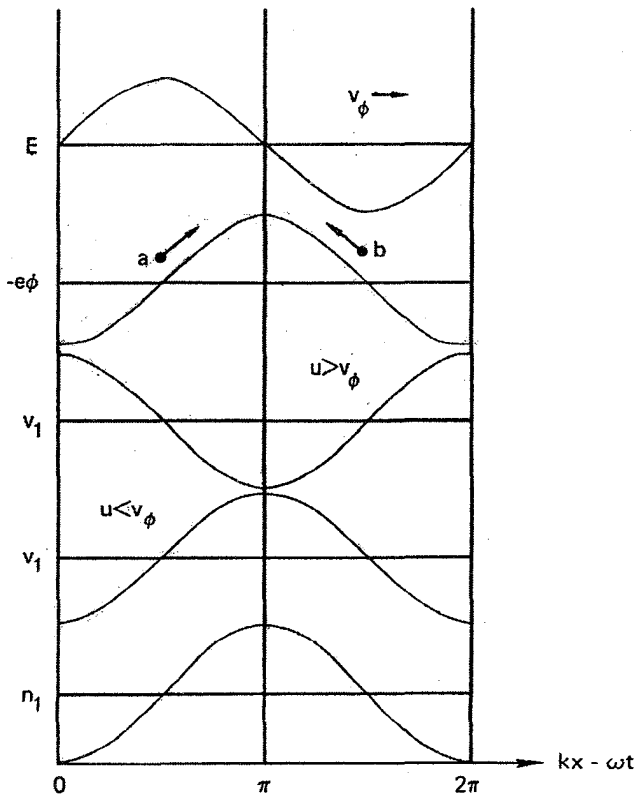
معادله پیوستگی خطی شده داده می شود:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + u \frac{\partial n_1}{\partial x} = -n_u \frac{\partial v_1}{\partial x} \quad (78.7)$$

چون  $v_1$  با  $\cos(kx - \omega t)$  متناسب است می توانیم رابطه  $n_1 = \bar{n}_1 \cos(kx - \omega t)$  را امتحان کنیم. از جاگذاری در معادله ۷۸.۷ به دست می آوریم

$$n_1 = -n_u \frac{eE_0 k}{m} \frac{\cos(kx - \omega t)}{(\omega - ku)^2} \quad (79.7)$$

شکل ۲۱.۷ معنای معادلات ۷۷.۷ و ۷۹.۷ را نشان می دهد. دو منحنی اول یک طول موج از  $E$  و از پتانسیل  $-e\phi$  را که الکترونهاى باریکه می بینند نشان می دهد. منحنی سوم نموداری



شکل ۲۱.۷ روابط فاز سرعت و چگالی الکترونهايي که در یک موج الکتروستاتیک حرکت می کنند.

از معادله ۷۷.۷ را برای مورد  $\omega - ku < 0$  یا  $u > v_\phi$  نشان می‌دهد. این را می‌توان به آسانی درک کرد: هنگامی که الکترون  $a$  از تپه پتانسیل بالا می‌رود سرعتش کم است، و برعکس. منحنی چهارم عبارت است از  $v_1$  برای مورد  $v < v_\phi$ ، و مشاهده می‌شود که علامت آن تغییر کرده است. دلیل این رفتار آن است که الکترون  $b$  که در چارچوب موج به سمت چپ حرکت می‌کند موقع بالا رفتن تا سر سد پتانسیل شتاب منفی می‌گیرد، اما چون در جهت مخالف حرکت می‌کند در آنجا سرعت آن یعنی  $v_1$  در جهت مثبت  $x$  ماکسیمم می‌شود. تپه پتانسیل متحرک الکترون  $b$  را به سمت راست شتاب می‌دهد، و در نتیجه وقتی که به سر تپه می‌رسد سرعت دارای ماکسیمم  $v_1$  است. آخرین منحنی در شکل ۲۱.۷ چگالی  $n_1$  را مطابق با معادله ۷۹.۷ نشان می‌دهد. این منحنی با  $u - v_\phi$  تغییر علامت نمی‌دهد زیرا در چارچوب موج هم الکترون  $a$  و هم الکترون  $b$  کندترین حرکت را در بالای تپه پتانسیل دارند و در نتیجه چگالی در آنجا دارای بیشترین مقدار است. نکته این است که فاز نسبی  $n_1$  و  $v_1$  با  $u - v_\phi$  تغییر علامت می‌دهد.

اکنون می‌توانیم انرژی جنبشی  $W_k$  ی باریکه را محاسبه کنیم:

$$W_k = \frac{1}{4} m (n_u + n_1) (u + v_1)^2 \quad (۸۰.۷)$$

$$= \frac{1}{4} m (n_u u^2 + n_u v_1^2 + 2u n_1 v_1 + n_1 u^2 + 2n_u u v_1 + n_1 v_1^2)$$

سه جمله آخر شامل توانهای فرد کمیت‌های نوسانی هستند و در نتیجه میانگین آنها روی یک طول موج صفر است. تغییر  $W_k$  به وسیله موج را می‌توان از کم کردن جمله اول، که انرژی اولیه است، به دست آورد. بنابراین، میانگین تغییر انرژی برابر است با

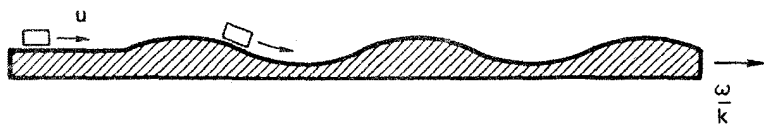
$$\langle \Delta W_k \rangle = \frac{1}{4} m \langle n_u v_1^2 + 2u n_1 v_1 \rangle \quad (۸۱.۷)$$

از معادله ۷۷.۷ داریم

$$n_u \langle v_1^2 \rangle = \frac{1}{4} n_u \frac{e^2 E_0^2}{m^2 (\omega - ku)^2} \quad (۸۲.۷)$$

ضریب  $1/2$  نمایش‌دهنده  $\langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle$  است. به همین ترتیب، از معادله ۷۹.۷ داریم

$$2u \langle n_1 v_1 \rangle = n_u \frac{e^2 E_0^2 ku}{m^2 (\omega - ku)^2} \quad (۸۳.۷)$$

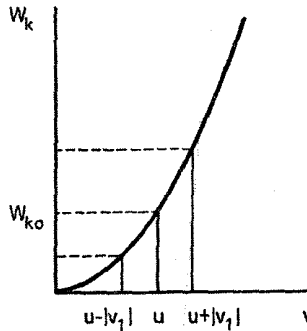


شکل ۲۲.۷ مشابه مکانیکی برای الکترونی که در یک پتانسیل متحرک حرکت می‌کند.

$$\langle \Delta W_k \rangle = \frac{1}{4} m n_u \frac{e^2 E_0^2}{m^2 (\omega - ku)^2} \left[ 1 + \frac{2ku}{(\omega - ku)} \right]$$

$$= \frac{n_u e^2 E_0^2}{4 m} \frac{\omega + ku}{(\omega - ku)^2} \quad (۸۴.۷)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که  $\langle \Delta W_k \rangle$  به چارچوب ناظر بستگی دارد و اینکه نسبت به زمان به طور دیرپا تغییر نمی‌کند. یک جسم کوچک فاقد اصطکاک را که روی یک سطح موجدار می‌لغزد در نظر بگیرید (شکل ۲۲.۷). در چارچوب سطح، چنانکه از معادله ۸۴.۷ به‌آزای  $\omega = 0$  دیده می‌شود،  $\Delta W_k$  با  $(ku)^{-2}$  متناسب است. با کمی تأمل روشن می‌شود که (۱)  $\langle \Delta W_k \rangle$  منفی است زیرا جسم در روی قله‌ها زمان بیشتری را نسبت به دره‌ها می‌گذراند (۲) وقتی نوسان شروع می‌شود جسم به طور میانگین نه انرژی به دست می‌آورد و نه از دست می‌دهد. حال اگر به چارچوبی برویم که در آن سطح موجدار با سرعت ثابت  $\omega/k$  حرکت می‌کند (سرعتی که حرکت جسم بر آن تأثیر ندارد زیرا فرض کرده‌ایم  $n_u$  در مقایسه با چگالی کل پلاسما قابل چشمپوشی است) باز هم درست است که بگوییم وقتی نوسان آغاز می‌شود جسم به طور میانگین انرژی به دست نمی‌آورد یا از دست نمی‌دهد. اما معادله ۸۴.۷ نشان می‌دهد که  $\langle \Delta W_k \rangle$  به سرعت  $\omega/k$  و بنابراین به چارچوب ناظر بستگی دارد، مخصوصاً این معادله نشان می‌دهد که اگر  $\omega - ku < 0$  یا  $\omega > v_\phi$  باریکه در حضور موج انرژی کمتری دارد تا در غیاب آن، و همچنین اگر  $\omega - ku > 0$  یا  $\omega < v_\phi$  باریکه انرژی بیشتری دارد. دلیل این موضوع را می‌توان در رابطه فاز بین  $n_1$  و  $v_1$  ردیابی کرد. همان‌طور که شکل ۲۳.۷ نشان می‌دهد  $W_k$  یک تابع سهموی از  $v$  است. هنگامی که  $v$  بین  $|v_1| - u$  و  $|v_1| + u$  نوسان می‌کند،  $W_k$  میانگین بزرگتری از مقدار تعادلی  $W_{k0}$  خواهد داشت مشروط بر آن که ذره در هر نیم‌نوسان مدت زمان مساوی سپری کند. این اثر معنای جمله اول معادله ۸۱.۷ است که معین مثبت است. جمله دوم این معادله تصحیحی است ناشی از این حقیقت که ذره زمان خود را به طور مساوی توزیع نمی‌کند. در شکل ۲۱.۷ مشاهده می‌شود که الکترونهاي  $a$  و  $b$  در بالای تپه پتانسیل نسبت به پایین آن زمان بیشتری سپری می‌کنند، اما



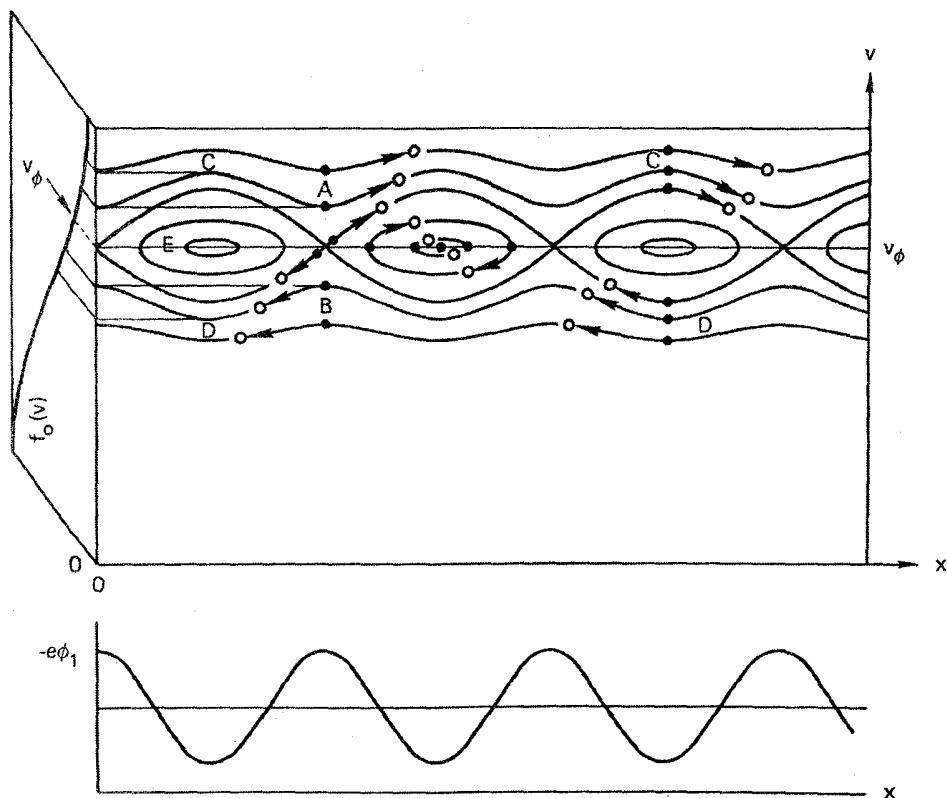
شکل ۲۳.۷ رابطه درجه دوم بین انرژی جنبشی و سرعت باعث یک اختلال سرعت متقارن می شود که موجب افزایش میانگین انرژی می شود.

الکترون  $a$  بعد از یک دوره شتاب منفی به آن نقطه می رسد و در نتیجه  $v_1$  در آنجا منفی است در حالی که الکترون  $b$  بعد از یک دوره شتاب مثبت (به سمت راست) به آن نقطه می رسد و بنابراین  $v_1$  در آنجا مثبت است. این اثر موجب می شود که  $\langle \Delta W_k \rangle$  در  $v_\phi = u$  تغییر علامت دهد.

### ۲.۵.۷ اثر شرایط اولیه

نتایجی که تاکنون به دست آورده ایم هنوز به میرایی خطی لاتدائو ارتباط پیدا نمی کنند. میرایی مستلزم افزایش پیوسته  $W_k$  است که از انرژی موج گرفته می شود، اما چنانکه دیدیم برای ذرات به دام نیفتاده  $\langle \Delta W_k \rangle$  نسبت به زمان ثابت است. اگر نه ذرات به دام افتاده و نه ذرات به دام نیفتاده باعث میرایی خطی لاتدائو نیستند این میرایی از چه ناشی می شود؟ جواب را می توان از ملاحظات زیر پیدا کرد: اگر  $\langle \Delta W_k \rangle$  مثبت باشد، باید زمانی وجود داشته باشد که در آن  $\langle \Delta W_k \rangle$  افزایش یافته است. در واقع ذراتی در توزیع اولیه وجود دارند که دارای سرعتهایی چنان نزدیک به  $v_\phi$  هستند که در زمان  $t$  هنوز به اندازه نیم طول موج نسبت موج حرکت نکرده اند. برای این ذرات نمی توان میانگین  $\langle \Delta W_k \rangle$  را تعیین کرد. این ذرات، که به درستی «ذرات تشدید» نامیده شده اند، می توانند از موج انرژی جذب کنند. با سپری شدن زمان، تعداد الکترونها تشدید کاهش می یابد زیرا تعداد بیشتری بیشتر از  $\lambda/2$  از مکان اولیه خود جابه جا می شوند. اما آهنگ میرایی می تواند ثابت بماند زیرا اکنون دامنه کوچکتر است و الکترونها کمتری برای ثابت ماندن آهنگ میرایی لازم اند.

اثر شرایط اولیه را می توان به آسان ترین صورت در نمودار فضای فاز مشاهده کرد (شکل ۲۴.۷). در این شکل، مسیرهای الکترونی در فضای فاز و همچنین پتانسیل الکتروستاتیکی  $-e\phi_1$  که



شکل ۲۴.۷ مسیره‌های فضای فاز (بالا) برای الکترونیایی که در موج پتانسیل (پایین) حرکت می‌کنند. تمام نقش به سمت راست حرکت می‌کند. پیکانها جهت حرکت الکترونها نسبت به نقش موج را نشان می‌دهند. توزیع تعادلی  $f_0(v)$  در صفحه عمود بر صفحه کاغذ ترسیم شده است.

الکترونها می‌بینند ترسیم شده‌اند. فرض کرده‌ایم که این موج الکتروستاتیکی در  $t = 0$  وجود دارد و توزیع  $f_0(v)$  که در صفحه عمود بر صفحه کاغذ ترسیم شده است در فضا یکنواخت است و در آن زمان به طور یکنوا با  $|v|$  کاهش پیدا می‌کند. برای وضوح بیشتر، اندازه موج به طور اغراق آمیز بزرگ شده است. البته وجود موج وجود  $f_1(v)$  را در  $t = 0$  ایجاب می‌کند. اما میرایی ناشی از این در واقع یک اثر مرتبه بالاتر است و در نظریه خطی از آن صرف نظر شده است. اکنون به چارچوب موج می‌رویم، که در آن نقش شکل ۲۴.۷ حرکت نمی‌کنند، و حرکت الکترونها را در آنجا در نظر می‌گیریم. الکترونیایی که ابتدا در نقطه  $A$  بوده‌اند از سر تپه پتانسیل شروع به حرکت می‌کنند و به سمت راست می‌روند زیرا برای آنها  $v > v_\phi$ . الکترونیایی که ابتدا در نقطه  $B$  بوده‌اند



شروع به حرکت به سمت چپ می‌کنند زیرا دارای  $v < v_\phi$  هستند. الکترونی‌هایی که در نقطه  $C$  و  $D$  قرار دارند از گودی پتانسیل شروع به حرکت می‌کنند و به ترتیب به سمت راست و چپ می‌روند. الکترونی‌هایی که روی پر بندهای بسته  $E$  حرکت می‌کنند انرژی کافی ندارند تا از روی تپه پتانسیل عبور کنند و به دام می‌افتند. در حد دامنه کوچک موج اولیه، می‌توان جمعیت الکترونی‌های به دام افتاده را به دلخواه کوچک گرفت. پس از مدت زمان به اندازه کافی کوچک  $t$  که در آن هیچ یک از الکترونی‌های واقع در  $A$ ،  $B$ ،  $C$  یا  $D$  بیش از نصف یک طول موج حرکت نمی‌کند، الکترونها به مکانی‌هایی که با دایره‌های توخالی مشخص شده‌اند می‌روند. مشاهده می‌شود که الکترونی‌های در  $A$  و  $D$  انرژی به دست می‌آورند اما آنهایی که در  $B$  و  $C$  هستند انرژی از دست می‌دهند. حال اگر  $f_0(v)$  ابتدا در فضا یکنواخت باشد، در ابتدا الکترونی‌های بیشتری در  $A$  نسبت به  $C$  و در  $D$  نسبت به  $B$  وجود دارند. بنابراین، الکترونها در کل انرژی کسب می‌کنند و از این رو موج در کل انرژی از دست می‌دهد. این میرایی خطی لاندائو است و به شرایط اولیه مفروض بستگی بحرانی دارد. پس از گذشت زمان طولانی، اختلاف فاز الکترونها آنقدر به هم می‌خورد که باید توزیع اولیه را کنار گذاشت، و دیگر بهره انرژی میانگین مثل آنچه در بخش قبل یافتیم وجود ندارد. در این تصویر، هم الکترونی‌های با  $v > v_\phi$  و هم با  $v < v_\phi$  به طور میانگین روی یک طول موج از موج انرژی کسب می‌کنند. این تناقض ظاهری را با مفهومی که از تصویر موج سوار به دست آمد به زودی رفع خواهیم کرد.

## ۶.۷ محاسبه فیزیکی میرایی لاندائو

اکنون در موقعیتی هستیم که می‌توانیم آهنگ میرایی لاندائو را بدون استفاده از انتگرال‌گیری پربندی به دست آوریم. همچون گذشته، پلاسما را به صورت مجموع باریکه‌هایی با سرعت  $u$  و چگالی  $n_u$  در نظر می‌گیریم و حرکت آنها را در موج زیر بررسی می‌کنیم

$$E = E_1 \sin(kx - \omega t) \quad (۸۵.۷)$$

از معادله ۷۷.۷، سرعت هر باریکه عبارت است از

$$v_1 = -\frac{eE_1}{m} \frac{\cos(kx - \omega t)}{\omega - ku} \quad (۸۶.۷)$$

این جواب در معادله ۷۶.۷ صدق می‌کند، اما شرط اولیه  $v_1 = 0$  در  $t = 0$  برای آن صادق نیست. روشن است که این شرط اولیه باید اعمال شود؛ در غیر این وضعیت،  $v_1$  در نزدیکی  $u = \omega/k$  خیلی بزرگ می‌شود و پلاسما در حالت اولیه‌ای که به طور خاص فراهم شده است

قرار می‌گیرد. برای برقراری این شرط اولیه، می‌توانیم به معادله ۸۶.۷ تابعی از  $kx - kut$  اضافه کنیم. جواب مرکب باز هم باید در معادله ۷۶.۷ صدق کند زیرا نتیجه اعمال عملگر سمت چپ معادله ۷۶.۷ بر تابع  $f(kx - kut)$  صفر است. واضح است که برای آن که در  $t = 0$  داشته باشیم  $v_1 = 0$  باید تابع  $f(kx - kut)$  به صورت  $-\cos(kx - kut)$  باشد. بنابراین، به جای معادله ۸۶.۷ داریم

$$v_1 = \frac{-eE_1}{m} \frac{\cos(kx - \omega t) - \cos(kx - kut)}{\omega - ku} \quad (۸۷.۷)$$

سپس باید معادله پیوستگی ۷۸.۷ را برای  $n_1$ ، بازم با شرط اولیه  $n_1 = 0$  در  $t = 0$ ، حل کنیم. چون اکنون هشیارتر از گذشته هستیم جوابی به صورت زیر را امتحان می‌کنیم

$$n_1 = \bar{n}_1 [\cos(kx - \omega t) - \cos(kx - kut)] \quad (۸۸.۷)$$

با جاگذاری در معادله ۷۸.۷ و استفاده از معادله ۸۷.۷ برای  $v_1$ ، به دست می‌آوریم

$$\bar{n}_1 \sin(kx - \omega t) = -n_u \frac{eE_1 k}{m} \frac{\sin(kx - \omega t) - \sin(kx - kut)}{(\omega - ku)^2} \quad (۸۹.۷)$$

ظاهراً به اندازه کافی هشیار نبوده‌ایم زیرا عامل  $\sin(kx - \omega t)$  حذف نشده است. برای به دست آوردن جمله‌ای به صورت  $\sin(kx - kut)$ ، که از جمله اضافه شده در  $v_1$  ناشی شده است، می‌توانیم جمله‌ای به صورت  $At \sin(kx - kut)$  به  $n_1$  اضافه کنیم. روشن است که این جمله در  $t = 0$  صفر است و از اعمال عملگر سمت چپ معادله ۷۸.۷ بر  $\sin(kx - kut)$  نتیجه می‌شود. هنگامی که این عملگر بر  $\sin(kx - kut)$  عمل کند نتیجه صفر است. ضریب  $A$  باید با  $(\omega - ku)^{-1}$  متناسب باشد تا با ضریب مشابه در  $\partial v_1 / \partial x$  جور شود. بنابراین،  $n_1$  را به صورت زیر می‌نویسیم

$$n_1 = -n_u \frac{eE_1 k}{m} \frac{1}{(\omega - ku)^2} \times [\cos(kx - \omega t) - \cos(kx - kut) - (\omega - ku)t \sin(kx - kut)] \quad (۹۰.۷)$$

روشن است که این عبارت در  $t = 0$  صفر است و به سادگی می‌توان نشان داد که در معادله ۷۸.۷ صدق می‌کند.

اکنون با توجه به عبارتهای  $v_1$  و  $n_1$  می‌توانیم کار انجام شده به وسیله موج بر روی هر باریکه را محاسبه کنیم. نیروی وارد بر واحد حجم هر باریکه به صورت زیر است

$$F_u = -eE_1 \sin(kx - \omega t)(n_u + n_1) \quad (91.7)$$

و بنابراین، انرژی آن با آهنگ زیر تغییر می‌کند

$$\frac{dW}{dt} = F_u(u + v_1) = -eE_1 \sin(kx - \omega t) \left( \underset{\textcircled{1}}{n_u u} + \underset{\textcircled{2}}{n_u v_1} + \underset{\textcircled{3}}{n_1 u} + \underset{\textcircled{4}}{n_1 v_1} \right) \quad (92.7)$$

اکنون روی یک طول موج میانگین‌گیری فضایی انجام می‌دهیم. جمله اول صفر می‌شود زیرا  $n_u u$  ثابت است. از جمله چهارم می‌توان صرف نظر کرد زیرا از مرتبه دوم است اما بدون این چشمپوشی هم می‌توان نشان داد که میانگین آن صفر است. جمله‌های  $\textcircled{2}$  و  $\textcircled{3}$  با استفاده از معادلات ۸۷.۷ و ۹۰.۷ و اتحادهای زیر قابل محاسبه‌اند

$$\langle \sin(kx - \omega t) \cos(kx - kut) \rangle = -\frac{1}{\pi} \sin(\omega t - kut) \quad (93.7)$$

$$\langle \sin(kx - \omega t) \sin(kx - kut) \rangle = \frac{1}{\pi} \cos(\omega t - kut)$$

به آسانی دیده می‌شود که نتیجه عبارت است از

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle_u = \frac{e^2 E_1^2}{2m} n_u \left[ \frac{\sin(\omega t - kut)}{\omega - ku} + ku \frac{\sin(\omega t - kut) - (\omega - ku)t \cos(\omega t - kut)}{(\omega - ku)^2} \right] \quad (94.7)$$

باید توجه کرد که تنها جمله‌هایی که در فرآیند میانگین‌گیری باقی مانده‌اند از شرایط اولیه آمده‌اند. کار کل انجام شده بر روی ذرات را می‌توان از جمع‌بندی روی همه باریکه‌ها به دست آورد:

$$\sum_u \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle_u = \int \frac{f_o(u)}{n_u} \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle_u du = n_o \int \frac{\hat{f}_o(u)}{n_u} \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle_u du \quad (95.7)$$

آن‌گاه با جاگذاری از معادله ۹۴.۷ و استفاده از تعریف  $\omega_p$ ، آهنگ تغییر انرژی جنبشی را به صورت

زیر به دست می آوریم

$$\left\langle \frac{dW_k}{dt} \right\rangle = \frac{\epsilon_0 E_1^2}{2} \omega_p^2 \left[ \int \hat{f}_0(u) \frac{\sin(\omega t - kut)}{\omega - ku} du + \int \hat{f}_0(u) \frac{\sin(\omega t - kut) - (\omega - ku)t \cos(\omega t - kut)}{(\omega - ku)^2} ku du \right] \quad (96.7)$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 E_1^2 \omega_p^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_0(u) du \left\{ \frac{\sin(\omega t - kut)}{\omega - ku} + u \frac{d}{du} \left[ \frac{\sin(\omega t - kut)}{\omega - ku} \right] \right\} \quad (97.7)$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 E_1^2 \omega_p^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_0(u) du \frac{d}{du} \left[ u \frac{\sin(\omega t - kut)}{\omega - ku} \right] \quad (98.7)$$

این کمیت را باید با آهنگ اتلاف چگالی انرژی موج  $W_w$  مساوی گرفت. انرژی موج از دو قسمت تشکیل شده است. قسمت اول عبارت است از چگالی انرژی میدان الکتروستاتیکی:

$$\langle W_E \rangle = \epsilon_0 \langle E^2 \rangle / 2 = \epsilon_0 E_1^2 / 4 \quad (99.7)$$

قسمت دوم انرژی جنبشی نوسان ذرات است. اگر مجدداً پلاسما را به چندین باریکه تقسیم کنیم، معادله ۸۴.۷ انرژی هر باریکه را به دست می دهد:

$$\langle \Delta W_k \rangle_u = \frac{1}{4} \frac{n_u}{m} \frac{e^2 E_1^2}{(\omega - ku)^2} \left[ 1 + \frac{2ku}{(\omega - ku)} \right] \quad (100.7)$$

در استخراج این نتیجه، شرایط اولیه صحیح را که برای ذرات تشدیدی اهمیت دارند به کار نبرده ایم؛ اما سهم این ذرات در انرژی کل موج بسیار کم است. از جمع بندی روی باریکه ها داریم

$$\langle \Delta W_k \rangle = \frac{1}{4} \frac{e^2 E_1^2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0(u)}{(\omega - ku)^2} \left[ 1 + \frac{2ku}{\omega - ku} \right] du \quad (101.7)$$

در حد  $\omega/k \gg v_{th}$  می توان از جمله دوم داخل کروشه صرف نظر کرد (این حد را از آن جهت می گیریم که نتیجه حاضر را با نتایج قبلی خود مقایسه کنیم). رابطه پاشیدگی از معادله پواسون به دست می آید:

$$k \epsilon_0 E_1 \cos(kx - \omega t) = -e \sum_u n_u \quad (102.7)$$

با استفاده از معادله ۷۹.۷ برای  $m_1$  داریم

$$1 = \frac{e^{\gamma}}{\epsilon_0 m} \sum_u \frac{n_u}{(\omega - ku)^{\gamma}} = \frac{e^{\gamma}}{\epsilon_0 m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0(u) du}{(\omega - ku)^{\gamma}} \quad (103.7)$$

از مقایسه این معادله با معادله ۱۰۱.۷ خواهیم یافت

$$\langle \Delta W_k \rangle = \frac{1}{4} \frac{e^{\gamma} E_1^{\gamma}}{m} \frac{\epsilon_0 m}{e^{\gamma}} = \frac{\epsilon_0 E_1^{\gamma}}{4} = \langle W_E \rangle \quad (104.7)$$

بنابراین

$$W_w = \epsilon_0 E_1^{\gamma} / 2 \quad (105.7)$$

آهنگ تغییر این کمیت برابر است با منفی معادله ۹۸.۷:

$$\frac{dW_w}{dt} = -W_w \omega_p^{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_0(u) \frac{d}{du} \left[ u \frac{\sin(\omega - ku)t}{\omega - ku} \right] du \quad (106.7)$$

از انتگرال‌گیری جزء به جزء به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \frac{dW_w}{dt} = -W_w \omega_p^{\gamma} \left\{ \left[ u \hat{f}_0(u) \frac{\sin(\omega - ku)t}{\omega - ku} \right]_{-\infty}^{\infty} \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{d\hat{f}_0}{du} \frac{\sin(\omega - ku)t}{\omega - ku} du \right\} \end{aligned}$$

برای توابع خوش رفتار  $\hat{f}_0(u)$  قسمت انتگرال‌گیری شده صفر است و در نتیجه داریم

$$\frac{dW_w}{dt} = W_w \frac{\omega}{k} \omega_p^{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}'_0(u) \left[ \frac{\sin(\omega - ku)t}{\omega - ku} \right] du \quad (107.7)$$

که در آن  $u$  را مساوی با  $\omega/k$  (یک ثابت) قرار داده‌ایم زیرا تنها سرعت‌های بسیار نزدیک به این مقدار در انتگرال سهمیم هستند. در واقع در زمانهای به اندازه کافی بزرگ می‌توان کروش را با یک تابع دلتا تقریب گرفت:

$$\delta\left(u - \frac{\omega}{k}\right) = \frac{k}{\pi} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sin(\omega - ku)t}{\omega - ku} \right] \quad (108.7)$$

بنابراین

$$\frac{dW_w}{dt} = W_w \omega_p^2 \frac{\pi}{k} \frac{\omega}{k} \hat{f}'_0 \left( \frac{\omega}{k} \right) = W_w \pi \omega \frac{\omega_p^2}{k^2} \hat{f}'_0 \left( \frac{\omega}{k} \right) \quad (109.7)$$

چون  $\text{Im}(\omega)$  آهنگ افزایش  $E_1$  است و  $W_w$  با  $E_1$  متناسب است باید داشته باشیم

$$dW_w/dt = 2[\text{Im}(\omega)]W_w \quad (110.7)$$

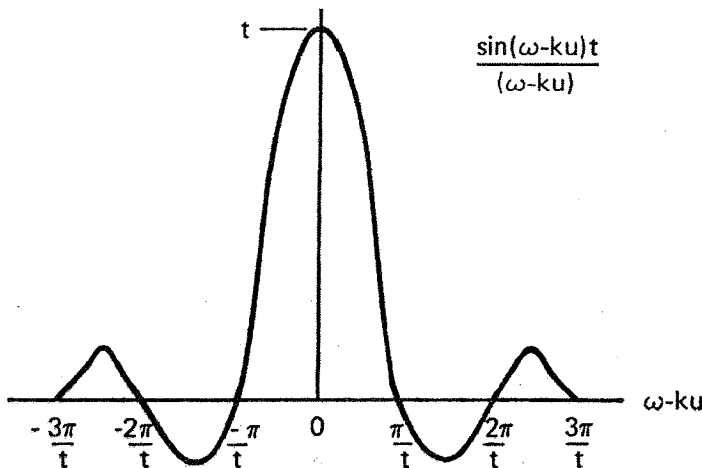
بنابراین

$$\text{Im}(\omega) = \frac{\pi}{2} \omega \frac{\omega_p^2}{k^2} \hat{f}'_0 \left( \frac{\omega}{k} \right) \quad (111.7)$$

که با نتیجه قبلی، معادله ۶۷.۷، به ازای  $\omega = \omega_p$  توافق دارد.

### ذرات تشدید

اکنون در موقعیتی هستیم تا دقیقاً ببینیم کدام ذرات تشدید در میرایی خطی لاتدائو دخالت دارند. شکل ۲۵.۷ نموداری از ضریب  $\hat{f}'_0(u)$  در تابع زیر انتگرال معادله ۱۰۷.۷ را نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که بزرگترین سهم به ذراتی مربوط می‌شود که برای آنها  $|\omega - ku| < \pi/t$  یا  $|v - v_\phi| < \pi/k = \lambda/2$  طول موج نسبت به موج حرکت نکرده‌اند. پهنای قله مرکزی چنانکه باید با گذشت زمان



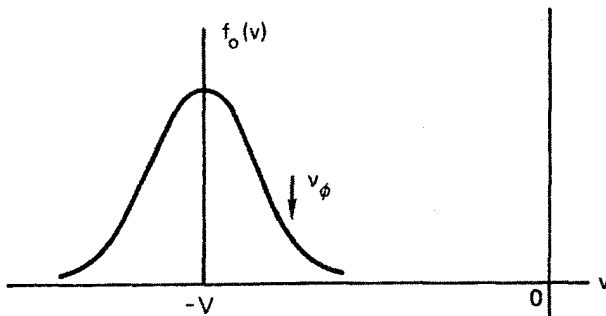
شکل ۲۵.۷ تابعی که سهم نسبی گروههای متفاوت سرعت را در میرایی لاتدائو توصیف می‌کند.

باریک می‌شود. قله‌های فرعی «نقش پراش» در شکل ۲۵.۷ ناشی از ذراتی هستند که به اندازه نیم‌طول موجهای مجاور از پتانسیل موج حرکت کرده‌اند. این ذرات به سرعت اختلاف فاز پیدا می‌کنند به طوری که سهم آنها در میانگین ناچیز می‌شود؛ توزیع اولیه نابود می‌شود. توجه کنید که پهنای قله مرکزی مستقل از دامنه اولیه موج است؛ بنابراین، ذرات تشدید می‌توانند ممکن است هم شامل ذرات به دام افتاده و هم به دام نیفتاده باشند. این پدیده با به دام افتادگی ذره ارتباطی ندارد.

### ۲.۶.۷ دو شبهه حل می‌شوند

شکل ۲۵.۷ نشان می‌دهد که تابع زیر انتگرال در معادله ۱۰۷.۷ تابع زوجی از  $\omega - ku$  است، و در نتیجه هم ذراتی که تندتر از موج و هم ذراتی که کندتر از موج حرکت می‌کنند به میرایی لاتندائو می‌افزایند. این همان تصویر فیزیکی است که در شکل ۲۴.۷ به دست آوردیم. از طرف دیگر، شیب منحنی شکل ۲۵.۷ که نمایش دهنده ضریب تابع زیر انتگرال معادله ۱۰۶.۷ است تابع فردی از  $\omega - ku$  است؛ و از اینجا می‌توان پی برد ذراتی که تندتر از موج حرکت می‌کنند به آن انرژی می‌دهند اما ذراتی که کندتر از موج حرکت می‌کنند از آن انرژی می‌گیرند. این دو توصیف با یک انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء از هم تفاوت دارند. هر دو توصیف صحیح هستند، اما این که کدام را انتخاب کنیم بستگی به این دارد که بخواهیم  $f_0(u)$  یا  $f'_0(u)$  را در تابع زیر انتگرال داشته باشیم.

شبهه دوم با مسئله نوردایی گالیله‌ای سروکار دارد. اگر این نظر را اختیار کنیم که میرایی مستلزم آن است که تعداد ذرات تندتر از موج کمتر از تعداد ذرات کندتر باشد، تا وقتی که در چارچوبی باشیم که در آن پلازما ساکن است مسئله‌ای وجود نخواهد داشت. اما اگر به چارچوب دیگری که با سرعت  $V$  حرکت می‌کند برویم (شکل ۲۶.۷) مشاهده می‌شود که تعداد ذرات تندتر از موج بیشتر از تعداد ذرات کندتر است و می‌باید انتظار داشت تا موج به جای افت رشد پیدا کند. این شبهه را با وارد کردن جمله دوم معادله ۱۰۰.۷، که از آن صرف‌نظر کرده بودیم، می‌توان حل کرد. همان‌طور که در بخش ۱.۵.۷ نشان داده شد این جمله می‌تواند  $\langle \Delta W_k \rangle$  را منفی سازد. در واقع، در چارچوبی که در شکل ۲۶.۷ نشان داده شده است، جمله دوم معادله ۱۰۰.۷ قابل چشم‌پوشی نیست و  $\langle \Delta W_k \rangle$  منفی است و موج با انرژی منفی ظاهر می‌شود (یعنی در توزیع ماکسولوی سوقی ساکن مقدار انرژی نسبت به وقتی که نوسان وجود دارد بیشتر است). موج «رشد» پیدا می‌کند اما افزودن انرژی به موجی با انرژی منفی موجب کاهش دامنه آن می‌شود.

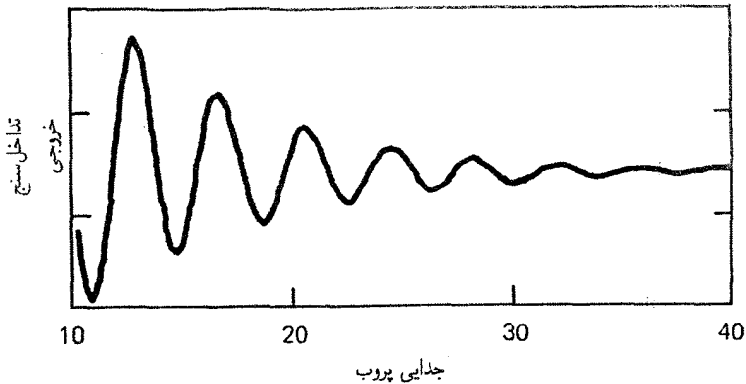


شکل ۲۶.۷ توزیع ماکسولوی که از یک چارچوب متحرک مشاهده می شود دارای ناحیه شیب ناپایدار است.

## ۷.۷ مدهای BGK و وان کمپن

مشاهده کردیم که میرایی لاندائو مستقیماً با بایستگی یکنواختی اولیه فضایی  $f_0(v)$  ارتباط دارد. از طرف دیگر، اگر در ابتدا  $f(v, t = 0)$  در امتداد مسیرهای ذره ثابت گرفته شود آن گاه می توان امواج الکترونی نامیرا تولید کرد. از شکل ۲۴.۷ به آسانی دیده می شود که اگر در ابتدا پلاسما طوری آماده شود که چگالی در امتداد هر مسیر ثابت باشد آن گاه ذرات به طور میانگین نه انرژی به دست می آورند و نه از دست می دهند. چنین موجی را مد BGK نامند، زیرا برای اولین بار ای. ب. برنشتاین، ج. م. گرین و م. د. کروسکال نشان دادند که امواج نامیرا با  $\omega$ ،  $k$ ، دامنه و شکل موج اختیاری امکان پذیر هستند. پارامتر اصلی ای که در جرح و تعدیل  $f(v, t = 0)$  برای تشکیل مد BGK باید تنظیم شود تعداد نسبی ذرات به دام افتاده به ذرات به دام نیفتاده است. اگر حد دامنه کوچک مد BGK را بگیریم آنچه که به دست می آید مد وان کمپن نامیده می شود. در این حد، تنها ذراتی با  $v = v_\phi$  به دام می افتند. می توانیم تعداد ذرات به دام افتاده را با افزودن یک جمله متناسب با  $\delta(v - v_\phi)$  به  $f(v, t = 0)$  تغییر دهیم. بررسی شکل ۲۴.۷ نشان خواهد داد که افزودن ذرات در امتداد خط  $v = v_\phi$  موجب میرایی نخواهد شد - مدتی بعد، تعداد ذره هایی که انرژی به دست می آورند دقیقاً برابر است با تعداد ذره هایی که انرژی از دست می دهند. در واقع، با انتخاب توزیعی با توابع  $\delta$  در مقادیر دیگر  $v_\phi$  می توان مدهای وان کمپن نامیرا با  $v_\phi$  اختیاری را تولید کرد. اما چنین شرایط اولیه تکینی فیزیکی نیستند. برای به دست آوردن  $f(v, t = 0)$  که تغییرات هموار داشته باشد باید روی مدهای وان کمپن با  $v_\phi$  های متفاوت جمع بزنیم. هر مد اگرچه نامیراست اما اختلال کل باعث میرایی لاندائو خواهد شد زیرا که مدهای متفاوت نسبت به هم اختلاف فاز پیدا می کنند.



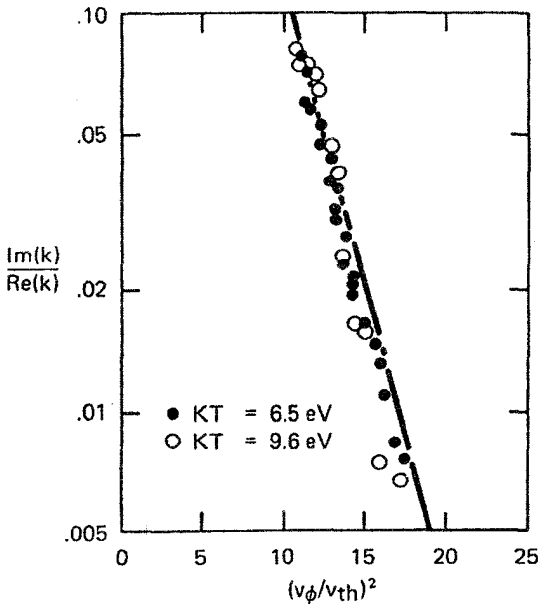


شکل ۲۷.۷ رد تداخل سنج، طرح چگالی مختل شده در یک موج پلاسماي میرا را نشان می دهد.

## ۸.۷ تأیید تجربی

اگرچه لاتدائو اثبات مختصر و مفیدی برای میرایی فاقد برخورد بیان کرد اما روشن نبود که این موضوع به یک پدیده قابل مشاهده فیزیکی مربوط باشد تا آن که ج. ام. داسون اثباتی طولانی تر و شهودی ارائه کرد که آن را در بخش ۶.۷ شرح دادیم. حتی پس از آن نیز درباره ایجاد شرایط مناسب در آزمایشگاه تردیدی وجود داشت! این تردید در سال ۱۹۶۵ با آزمایشی که توسط مالبرگ و وارتن انجام شد از بین رفت. آنها کاوه‌هایی را برای ایجاد و آشکارسازی امواج پلاسما در امتداد یک ستون پلاسماي فاقد برخورد به کار بردند و دامنه و فاز این امواج را به صورت تابعی از فاصله به روش تداخل سنجی به دست آوردند. رد تغییرات فضایی موج میرا در شکل ۲۷.۷ نشان داده شده است. چون در این آزمایش  $\omega$  حقیقی است اما  $k$  مختلط است، نمی توان نتیجه به دست آمده از معادله ۷.۷ را با این داده‌ها مقایسه کرد. به جای آن، باید  $\text{Im}(k)/\text{Re}(k)$  را به ازای  $\omega$  حقیقی محاسبه کرد. این نسبت عامل  $\exp(-v_{\phi}^2/v_{th}^2)$  را نیز شامل می شود که با تعداد الکترونهاي تشدیدي در یک توزیع ماکسولوی متناسب است. در نتیجه لگاریتم  $\text{Im}(k)/\text{Re}(k)$  باید با  $(v_{\phi}/v_{th})^2$  متناسب باشد. شکل ۲۸.۷ توافق بین اندازه گیریها و منحنی نظری را نشان می دهد.

آزمایش مشابهی توسط درفیلر و سیمون در هندسه تخت صورت گرفت، به طوری که می توان نتایج مربوط به  $\text{Re}(\omega)$  را با معادله ۶۴.۷ مقایسه کرد. شکل ۲۹.۷ اندازه گیریهای  $\text{Re}(k)$  و  $\text{Im}(k)$  توسط آنها را در بسامدهای مختلف نشان می دهد. منحنی خط چین نمایش دهنده معادله ۶۴.۷ است و با منحنی شکل ۵.۴ یکی است. به علت وجود جملات مرتبه بالاتر در



شکل ۲۸.۷ تأیید میرایی لاندائو در آزمایش مالمرگ-وارتون.

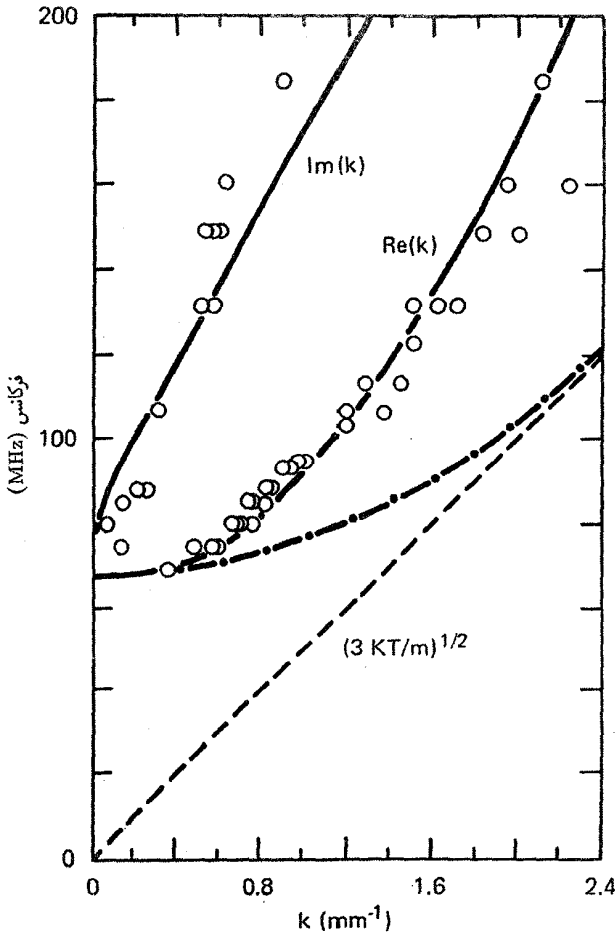
بسط معادله ۵۹.۷، نقاط تجربی از منحنی خط‌چین انحراف یافته‌اند. اما منحنی نظری که از معادله ۵۴.۷ محاسبه شده است به خوبی با داده‌ها همخوانی دارد.

## مسائل

۱.۷ در پلاسمایی امواج پلازما با  $n = 10^{17} \text{cm}^{-3}$  و  $KT_e = 10 \text{eV}$  تولید شده‌اند. اگر  $k = 10^4 \text{m}^{-1}$ ، آهنگ میرایی تقریبی لاندائو  $|\text{Im}(\omega/\omega_p)|$  را محاسبه کنید.

۲.۷ یک موج پلاسمای الکترونی با طول موج  $1 \text{cm}$  در یک پلاسمای  $10 \text{eV}$  با  $n = 10^{15} \text{m}^{-3}$  برانگیخته شده است. سپس برانگیختگی حذف می‌شود و موج لاندائو میرا می‌شود. چه مدت طول می‌کشد تا دامنه موج به مقدار یک  $e$  افت پیدا کند؟

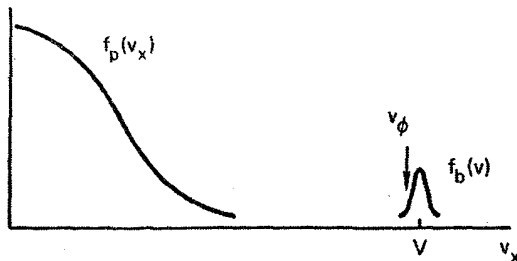
۳.۷ یک پلاسمای نامتناهی یکنواخت با یونهای ثابت دارای تابع توزیع الکترونی متشکل از قسمتهای زیر است: (۱) توزیع ماکسولی الکترونیهای «پلازما» با چگالی  $n_p$  و دمای  $T_p$  که در آزمایشگاه ساکن است، و (۲) توزیع ماکسولی الکترونیهای «باریکه» با چگالی  $n_b$  و دمای  $T_b$  و به مرکز  $v = V\hat{x}$  (شکل م ۳.۷). اگر  $n_b$  بینهایت کوچک باشد نوسانهای پلازما که در راستای  $x$  حرکت می‌کنند میرایی



شکل ۲۹.۷ اندازه‌گیری تجربی رابطه پاشیدگی امواج پلاسما در هندسه تخت.

لانداو خواهند داشت. اگر  $n_b$  بزرگ باشد یک ناپایداری دو جریانی وجود خواهد داشت. مقدار بحرانی  $n_b$  که به‌ازای آن ناپایداری ایجاد می‌شود را می‌توان از مساوی صفر قرار دادن شیب تابع توزیع کل به‌دست آورد. برای سادگی محاسبات، می‌توانیم جوابی تقریبی به‌صورت زیر پیدا کنیم. (الف) عبارتهای  $f_p(v)$  و  $f_b(v)$  را با علامت اختصاری  $v = v_{\infty}$  و  $a^2 = 2KT_p/m$  و  $b^2 = 2KT_b/m$  بنویسید.

(ب) فرض کنید سرعت فاز  $v_{\phi}$  برابر است با مقدار  $v$  که به‌ازای آن  $f_b(v)$  بزرگترین شیب مثبت را دارد.  $v_{\phi}$  و  $f'_b(v_{\phi})$  را پیدا کنید.



شکل م ۳.۷ توزیع  $f_b(v_x)$  و  $f_b(v)$  به ترتیب برای الکترونهاي پلاسما و باریکه در یک برهم‌کنش باریکه-پلاسما.

$$(ج) \quad f'_p(v_\phi) + f'_b(v_\phi) = 0 \text{ قرار دهید}$$

(د) به ازای  $b \gg V$  نشان دهید چگالی بحرانی باریکه به صورت تقریبی زیر داده می‌شود

$$\frac{n_b}{n_p} = (\gamma e)^{1/2} \frac{T_b}{T_p} \frac{V}{a} \exp(-V^2/a^2)$$

۴.۷ برای الگوسازی یک پلاسماي گرم، فرض کنید تابع توزیعهای یونی و الکترونی به صورت زیر داده شده‌اند

$$\hat{f}_{e_0}(v) = \frac{a_e}{\pi} \frac{1}{v^2 + a_e^2}$$

$$\hat{f}_{i_0}(v) = \frac{a_i}{\pi} \frac{1}{v^2 + a_i^2}$$

(الف) با فرض یک اختلال الکتروستاتیکی، رابطه پاشیدگی دقیق را در صورتبندی و لاسف به دست آورید.

(ب) اگر  $\omega \leq \Omega_p$  عبارتی تقریبی برای رابطه پاشیدگی به دست آورید. این امواج در چه شرایطی به طور ضعیف میرا می‌شوند؟ به طور فیزیکی توضیح دهید چرا به ازای  $\omega$  خیلی بزرگ داریم  $\omega \simeq \Omega_p$ .

۵.۷ یک پلاسماي نامغناطیده با زمینه یونهای خنثی‌کننده ثابت در نظر بگیرید. توزیع یک‌بعدی سرعت الکترون به صورت زیر داده شده است

$$f_{e_0}(v) = g_0(v) + h_0(v)$$

که در آن

$$g_0(v) = n_p \frac{a_e}{\pi} \frac{1}{v^2 + a_e^2} \quad h_0(v) = n_b \delta(v - v_0)$$

$$n_b \ll n_p \quad \text{و} \quad n_0 = n_p + n_b$$

(الف) رابطه پاشیدگی را برای اختلالهای الکتروستاتیکی پربسامد به دست آورید.

(ب) در حد  $\omega/k \ll a_e$  نشان دهید جوابی وجود دارد که در آن  $\text{Im}(\omega) > 0$  است (یعنی نوسانها بزرگ می شوند).

۶.۷ تابع توزیع یک بعدی زیر را در نظر بگیرید

$$f(v) = A \quad |v| < v_m$$

$$f(v) = 0 \quad |v| \geq v_m$$

(الف) مقدار ثابت  $A$  را برحسب چگالی پلاسمای  $n_0$  محاسبه کنید.

(ب) با استفاده از معادلات ویلاسف و پواسون، یک عبارت انتگرالی برای امواج پلاسمای الکترونی الکتروستاتیک به دست آورید.

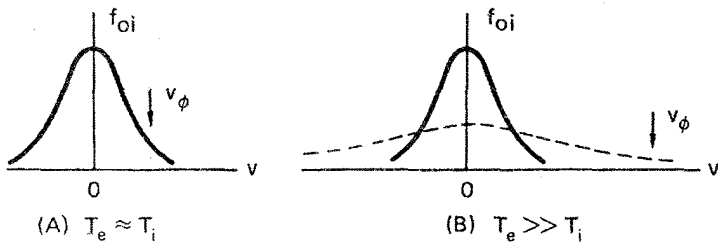
(ج) این انتگرال را محاسبه کنید و رابطه پاشیدگی  $\omega(k)$  را با نگره داشتن جمله‌های تا مرتبه سوم از کمیت کوچک  $kv_m/\omega$  به دست آورید.

## ۹.۷ میرایی یونی لاندائو

علاوه بر الکترونها ذرات تشدید دیگری نیز امکان پذیرند. اگر سرعت فاز موجی به اندازه‌ای کوچک باشد که با سرعت گرمایی یونها مطابقت داشته باشد میرایی لاندائو یونی می تواند رخ دهد. به عنوان مثال، موج اکوستیکی یونی شدیداً متحمل میرایی لاندائو می شود. از معادله ۴۱.۴ یادآوری می کنیم که رابطه پاشیدگی امواج یونی به صورت زیر است

$$\frac{\omega}{k} = v_s = \left( \frac{KT_e + \gamma_i KT_i}{M} \right)^{1/2} \quad (۱۱۲.۷)$$

همان طور که در شکل ۳۰.۷ (الف) نشان داده شده است، اگر  $T_e \leq T_i$  آن گاه سرعت فاز در ناحیه‌ای قرار می گیرد که  $f_0(v)$  شیب منفی دارد. بنابراین، در این مورد، امواج یونی میرایی لاندائو تشدید دارند. تنها اگر  $T_e \gg T_i$ ، به طوری که سرعت فاز در ناحیه انتهایی توزیع سرعت یونی



شکل ۳۰.۷ توضیح میرایی لاندائو برای امواج اکوستیکی یونی. به ازای  $T_e \approx T_i$ ، سرعت فاز به خوبی در داخل توزیع یونی قرار می‌گیرد؛ به ازای  $T_e \gg T_i$ ، سونهای بسیار اندکی در سرعت فاز خواهند بود. افزودن یک گونه یونی سبک (منحنی خط چین) موجب افزایش میرایی لاندائو می‌شود.

قرار می‌گیرد، امواج یونی قابل مشاهده هستند [شکل ۳۰.۷ (ب)]. روشی هوشمندانه برای ایجاد میرایی لاندائو تحت کنترل توسط آلکسیف، جونز و مونتگمری به کار برده شد. یک موج یونی با میرایی ضعیف در یک پلاسمای یون سنگین (همچون زنون) با  $T_e \gg T_i$  تولید شد. سپس مقدار اندکی از یک اتم سبک (هلیوم) به آن اضافه گردید. چون هلیوم تقریباً همان دمای زنون را دارد ولی جرم آن بسیار کمتر است، تابع توزیعش که در شکل ۳۰.۷ (ب) با منحنی خط چین نشان داده شده است بسیار بهتر است. بنابراین، یونهای هلیوم تشدید می‌شوند.

### ۱.۹.۷ تابع پاشندگی پلاسما

به منظور معرفی بعضی اصطلاحات متعارف نظریه جنبشی، اکنون میرایی لاندائو یونی را برای امواج یونی اکوستیکی در غیاب میدانهای مغناطیسی محاسبه می‌کنیم. یونها و الکترونها از معادله ولاسف ۲۳.۷ پیروی می‌کنند و اختلالهایی از نوع معادله ۴۶.۷ دارند که نشان دهنده امواج تختی است که در راستای  $x$  منتشر می‌شوند. جواب  $f_1$  از معادله ۴۸.۷ با تغییرات مناسب به دست می‌آید:

$$f_{1j} = -\frac{iq_j E}{m_j} \frac{\partial f_{0j} / \partial v_j}{\omega - kv_j} \quad (113.7)$$

در اینجا  $E$  و  $v_j$  به جای  $E_x$  و  $v_{xj}$  هستند، و ذره ژام دارای بار  $q_j$ ، جرم  $m_j$  و سرعت ذره  $v_j$  است. اختلال چگالی ذره ژام به صورت زیر داده می‌شود

$$n_{1j} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{1j}(v_j) dv_j = -\frac{iq_j E}{m_j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_{0j} / \partial v_j}{\omega - kv_j} dv_j \quad (114.7)$$

فرض کنید توزیعهای تعادلی  $f_{0j}$  ماکسولی یک بعدی باشند:

$$f_{0j} = \frac{n_{0j}}{v_{thj} \pi^{1/2}} e^{-v_j^2/v_{thj}^2} \quad v_{thj} \equiv (2KT_j/m_j)^{1/2} \quad (115.7)$$

با معرفی متغیر انتگرال گیری  $s = v_j/v_{thj}$  می توانیم  $n_{1j}$  را به صورت زیر بنویسیم

$$n_{1j} = \frac{iq_j E n_{0j}}{k m_j v_{thj}^2} \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(d/ds)(e^{-s^2})}{s - \zeta_j} ds \quad (116.7)$$

که در آن

$$\zeta_j \equiv \omega/kv_{thj} \quad (117.7)$$

اکنون تابع پاشندگی پلاسما  $Z(\zeta)$  را تعریف می کنیم:

$$Z(\zeta) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-s^2}}{s - \zeta} ds \quad \text{Im}(\zeta) > 0 \quad (118.7)$$

همان طور که در بخش ۴.۷ توضیح داده شد این انتگرال یک انتگرال پربندی است و اگر  $\text{Im}(\zeta) < 0$  باید از تمديد تحلیلی به نیم صفحه پایینی استفاده کرد.  $Z(\zeta)$  یک تابع مختلط با شناسه مختلط است (زیرا  $\omega$  یا  $k$  معمولاً دارای قسمت موهومی هستند). در مواردی که نمی توان  $Z(\zeta)$  را با یک فرمول مجانبی تقریب گرفت، جدولهای فراید و کنته یا یک زیرروال متعارف رایانه قابل استفاده اند. برای آن که  $n_{1j}$  را بر حسب  $Z(\zeta)$  بیان کنیم، نسبت به  $\zeta$  مشتق می گیریم:

$$Z'(\zeta) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-s^2}}{(s - \zeta)^2} ds$$

از انتگرال گیری جزء به جزء داریم

$$Z'(\zeta) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \left[ \frac{-e^{-s^2}}{s - \zeta} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(d/ds)(e^{-s^2})}{s - \zeta} ds$$

همان طور که برای هر تابع توزیع خوش رفتار صدق می کند، جمله اول صفر است. اکنون معادله ۱۱۶.۷ را می توان به صورت زیر نوشت

$$n_{1j} = \frac{iq_j E n_{0j}}{k m_j v_{thj}^2} Z'(\zeta_j) \quad (119.7)$$

معادله پواسون عبارت است از

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = ik\epsilon_0 E = \sum_j q_j n_{1j} \quad (120.7)$$

از ترکیب دو معادله اخیر، و با جداسازی جمله الکترونی به طور صریح و تعریف

$$\Omega_{pj} \equiv (n_{0j} Z_j^{\prime} e^{\prime} / \epsilon_0 M_j)^{1/2} \quad (121.7)$$

رابطه پاشیدگی را به دست می آوریم

$$k^{\prime} = \frac{\omega_p^{\prime}}{v_{the}^{\prime}} Z^{\prime}(\zeta_e) + \sum_j \frac{\Omega_{pj}^{\prime}}{v_{thj}^{\prime}} Z^{\prime}(\zeta_j) \quad (122.7)$$

امواج پلاسمای الکترونی با قرار دادن  $\Omega_{pj} = 0$  (یونهای بینهایت سنگین) به دست می آیند.  
با تعریف

$$k_D^{\prime} = 2\omega_p^{\prime} / v_{the}^{\prime} = \lambda_D^{-2} \quad (123.7)$$

داریم

$$k^{\prime} / k_D^{\prime} = \frac{1}{2} Z^{\prime}(\zeta_e) \quad (124.7)$$

که وقتی  $f_{oe}$  ماکسولی است همان معادله ۵۴.۷ است.

### ۲.۹.۷ امواج یونی و میرایی آنها

برای به دست آوردن امواج یونی، به معادله ۱۲۲.۷ باز می گردیم و از این حقیقت استفاده می کنیم که سرعت فاز آنها،  $\omega/k$ ، بسیار کوچکتر از  $v_{the}$  است؛ بنابراین،  $\zeta_e$  کوچک است و می توانیم  $Z(\zeta_e)$  را به صورت یک رشته توانی بسط دهیم:

$$Z(\zeta_e) = i\sqrt{\pi} e^{-\zeta_e^2} - 2\zeta_e \left(1 - \frac{2}{3}\zeta_e^2 + \dots\right) \quad (125.7)$$

جمله موهومی از مانده در قطب واقع در نزدیکی محور حقیقی  $s$  ناشی می شود (معادله ۵۶.۷) و میرایی لاندائو الکترون را نمایش می دهد. مشتق معادله ۱۲۵.۷ به ازای  $1 \ll \zeta_e$  عبارت است از

$$Z^{\prime}(\zeta_e) = -2i\sqrt{\pi} \zeta_e e^{-\zeta_e^2} - 2 + \dots \simeq -2 \quad (126.7)$$



در امواج یونی معمولاً می‌توان از میرایی لاندائو الکترون چشمپوشی کرد زیرا شیب  $f_e(v)$  در نزدیکی قله‌اش کوچک است. اگر  $-2$  را به جای  $Z'(\zeta_e)$  در معادله ۱۲۲.۷ قرار دهیم، رابطه پاشیدگی موج یونی را به دست می‌آوریم:

$$\lambda_D^2 \sum_j \frac{\Omega_{pj}^2}{v_{thj}^2} Z'(\zeta_j) = 1 + k^2 \lambda_D^2 \simeq 1 \quad (127.7)$$

جمله  $k^2 \lambda_D^2$  نشان‌دهنده انحراف از حالت شبه‌خنثی است.

اکنون موردگونه یون منفرد را اختصاصاً مد نظر قرار می‌دهیم. چون  $n_{oe} = Z_i n_{oi}$  ضریب معادله ۱۲۷.۷ به صورت زیر درمی‌آید

$$\lambda_D^2 \frac{\Omega_p^2}{v_{thi}^2} = \frac{\epsilon_o K T_e}{n_{oe} e^2} \frac{n_{oi} Z^2 e^2}{\epsilon_o M} \frac{M}{2kT_i} = \frac{1}{2} \frac{Z T_e}{T_i}$$

به‌ازای  $1 \ll k^2 \lambda_D^2$  برای رابطه پاشیدگی داریم

$$Z' \left( \frac{\omega}{k v_{thi}} \right) = \frac{2 T_i}{Z T_e} \quad (128.7)$$

حل این معادله کار ساده‌ای نیست. برای مطالعه میرایی نسبت به زمان، فرض می‌کنیم  $k$  حقیقی و  $\omega$  مختلط باشد. آنگاه قسمتهای حقیقی و موهومی  $\omega$  را باید طوری تنظیم کنیم که داشته باشیم  $\text{Re}(z') = 2T_i/ZT_e$  و  $\text{Im}(z') = 0$ . به‌طور کلی ریشه‌های متعدد  $\omega$  می‌توان یافت که در این شرطها صدق می‌کنند و برای همه آنها داریم  $\text{Im} \omega < 0$ . ریشه غالب که کمترین میرایی را دارد ریشه با کوچکترین  $|\text{Im} \omega|$  است. معمولاً میرایی در فضا باحقیقی گرفتن  $\omega$  و مختلط گرفتن  $k$  بررسی می‌شود. در این مورد مجموعه‌ای از ریشه‌های  $k$  با  $\text{Im} k > 0$  به‌دست می‌آوریم که نشان‌دهنده میرایی فضایی هستند. اما ریشه غالب با همان مقدار  $\zeta_i$  که در مورد  $\omega$  مختلط داریم مطابقت ندارد. از این‌رو در مسئله میرایی فضایی باید دقت خاصی برای سازوکار برانگیختگی در مرزها داشته باشیم و جمله الکترونی  $Z'(\zeta_e)$  را دقیقتر بررسی کنیم.

برای به‌دست آوردن نتیجه تحلیلی، حد  $1 \gg \zeta_i$  را که با نسبت دمای بزرگ  $\theta \equiv ZT_e/T_i$  مطابقت دارد در نظر می‌گیریم. عبارت مجانبی  $Z'(\zeta_i)$  به‌صورت زیر است

$$Z'(\zeta_i) = -2i\sqrt{\pi} \zeta_i e^{-\zeta_i^2} + \zeta_i^{-2} + \frac{3}{4} \zeta_i^{-4} + \dots \quad (129.7)$$

اگر میرایی کوچک باشد می‌توانیم در تقریب اول از جمله لاندائو صرف‌نظر کنیم. معادله ۱۲۸.۷ به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{1}{\zeta_i^2} \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{1}{\zeta_i^2} \right) = \frac{2}{\theta}$$

چون  $\theta$  را بزرگ گرفته‌ایم  $\zeta_i^2$  بزرگ است و می‌توانیم  $\zeta_i^2$  را در جمله دوم با  $\theta/2$  تقریب بگیریم. بنابراین

$$\frac{1}{\zeta_i^2} \left( 1 + \frac{3}{\theta} \right) = \frac{2}{\theta} \quad \zeta_i^2 = \frac{3}{2} + \frac{\theta}{2} \quad (130.7)$$

یا

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{2KT_i}{M} \left( \frac{3}{2} + \frac{ZT_e}{2T_i} \right) = \frac{ZKT_e + 3KT_i}{M} \quad (131.7)$$

این معادله رابطه پاشیدگی موج یونی ۴۱.۴ با  $\gamma_i = 3$  است که به  $Z$  اختیاری تعمیم یافته است. اکنون معادلات ۱۲۹.۷ و ۱۳۰.۷ را در معادله ۱۲۸.۷ جاگذاری می‌کنیم و جمله لاندائو را نگه می‌داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta_i^2} \left( 1 + \frac{3}{\theta} \right) - 2i\sqrt{\pi} \zeta_i e^{-\zeta_i^2} &= \frac{2}{\theta} \\ \frac{1}{\zeta_i^2} \left( 1 + \frac{3}{\theta} \right) &= \frac{2}{\theta} (1 + i\sqrt{\pi} \theta \zeta_i e^{-\zeta_i^2}) \\ \zeta_i^2 &= \left( \frac{3 + \theta}{2} \right)^{1/2} (1 + i\sqrt{\pi} \theta \zeta_i e^{-\zeta_i^2})^{-1} \end{aligned}$$

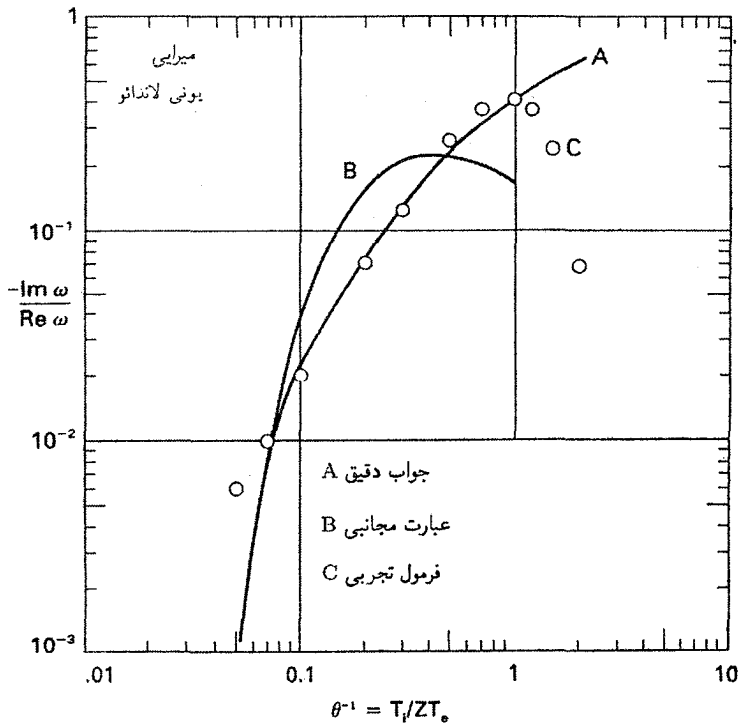
از بسط ریشه دوم داریم

$$\zeta_i \simeq \left( \frac{3 + \theta}{2} \right)^{1/2} \left( 1 - \frac{1}{2} i\sqrt{\pi} \theta \zeta_i e^{-\zeta_i^2} \right) \quad (132.7)$$

آهنگ میرایی تقریبی را می‌توانیم با استفاده از معادله ۱۳۰.۷ در جمله موهمی به دست آوریم:

$$-\frac{\text{Im } \zeta_i}{\text{Re } \zeta_i} = -\frac{\text{Im } \omega}{\text{Re } \omega} = \left( \frac{\pi}{\lambda} \right)^{1/2} \theta (3 + \theta)^{1/2} e^{-(3+\theta)/2} \quad (133.7)$$

در اینجا  $\theta = ZT_e/T_i$  و  $\text{Re } \omega$  با معادله ۱۳۱.۷ داده می‌شود.



شکل ۳۱.۷ میرایی لاندائو یونی امواج اکوستیکی. (A) جواب دقیق معادله ۱۲۸.۷ است؛ (B) فرمول مجانبی یعنی معادله ۱۳۳.۷ است؛ و (C) برازش تجربی (معادله ۱۳۴.۷) که برای  $1^\circ < \theta < 1$  مناسب است.

این عبارت مجانبی که به ازای  $\theta$  بزرگ دقیق است کاهش نمایی میرایی را با افزایش  $\theta$  نشان می‌دهد. اگر  $\theta$  از  $1^\circ$  کمتر باشد معادله ۱۳۳.۷ غیردقیق می‌شود و باید میرایی را از معادله ۱۲۸.۷ که در آن از تابع  $Z$  استفاده می‌شود محاسبه کرد. برای ناحیه  $1^\circ < \theta < 1$  که اهمیت تجربی دارد فرمول ساده زیر را داریم که یک برازش تحلیلی به جواب دقیق است:

$$-\text{Im } \omega / \text{Re } \omega = 1.1 \theta^{7/4} \exp(-\theta^2) \quad (134.7)$$

این تقریبا در شکل ۳۱.۷ با نتیجه دقیق مقایسه شده‌اند.

هنگامی که برخوردها به میرایی یونی لاندائو افزوده می‌شوند چه رخ می‌دهد؟ با کمال تعجب این اثر ناچیز است. برخوردهای الکترون-یون ضعیف هستند زیرا سیالهای الکترونی و یونی تقریباً

با هم حرکت می‌کنند و در نتیجه اصطکاک اندکی بین آنها ایجاد می‌شود. برخورد های یون-یون (چسبندگی یونی) می‌تواند امواج اکوستیکی یونی را میرا کند اما می‌دانیم که امواج صوتی در هوا می‌توانند با وجود برخوردهای فراوان به خوبی انتشار یابند. در واقع، تشدید ذرات که موجب میرایی لاندائو می‌شود توسط برخوردها از میان می‌رود و از این رو ملاحظه می‌کنیم که میرایی کل کمتر از میرایی لاندائو است مگر آن که آهنگ برخورد فوق‌العاده بزرگ باشد. به طور خلاصه، میرایی لاندائو تقریباً همیشه فرآیند غالب برای امواج یونی است و به طور نمایی با نسبت  $ZT_e/T_i$  تغییر می‌کند.

## مسائل

۷.۷ امواج اکوستیکی یونی به طول موج  $1\text{ cm}$  در یک پلاسما یونون یکبار یونیده ( $A = 131$ ) با  $T_e = 1\text{ eV}$  و  $T_i = 1\text{ eV}$  برانگیخته می‌شوند. اگر برانگیزنده خاموش شود چه مدت طول می‌کشد تا امواج در اثر میرایی لاندائو به  $1/e$  مقدار اولیه دامنۀ خود کاهش یابند؟

۸.۷ امواج یونی با  $\lambda = 5\text{ cm}$  در یک پلاسما آرگون یکبار یونیده با  $n_e = 10^{16}\text{ cm}^{-3}$ ،  $T_e = 2\text{ eV}$  و  $T_i = 2\text{ eV}$  برانگیخته شده‌اند و آهنگ میرایی لاندائو را اندازه‌گیری می‌کنیم. سپس یک ناخالصی هیدروژنی با چگالی  $n_H = \alpha n_e$  وارد می‌کنیم. مقداری از  $\alpha$  را که به ازای آن آهنگ میرایی دو برابر خواهد شد محاسبه کنید.

۹.۷ در آزمایشهای همجوشی لیزری، علاوه بر جمعیت معمولی به چگالی  $n_e$  و دمای  $T_e$  معمولاً با توزیع الکترونی داغ به چگالی  $n_h$  و دمای  $T_h$  نیز مواجه می‌شویم. الکترونها داغ می‌توانند میرایی امواج یونی را تغییر دهند و در نتیجه بر پدیده‌هایی همچون پراکندگی بریلوئن القایی اثر می‌گذارند. فرض می‌کنیم یونها دارای  $Z = 1$ ، چگالی  $n_i$  و دمای  $T_i$  هستند، و کمیت‌های  $\theta_e = T_e/T_i$ ،  $\theta_h = T_h/T_i$ ،  $\alpha = n_h/n_i$ ،  $1 - \alpha = n_e/n_i$ ،  $\epsilon = m/M$ ، و  $k_{Di}^2 = n_i e^2 / \epsilon_0 K T_i$  را تعریف می‌کنیم.

(الف) رابطه پاشیدگی امواج یونی را برای این پلاسما سه عنصری با بسط تابعهای  $Z$  الکترون بنویسید.

(ب) نشان دهید اگر  $T_h \gg T_e$  آن‌گاه میرایی لاندائو الکترونی توسط  $n_h$  افزایش قابل ملاحظه‌ای پیدا نمی‌کند.

(ج) نشان دهید  $n_h$  باعث کاهش میرایی لاندائو می‌شود و همچنین این اثر را می‌توان به عنوان افزایش در نسبت دمای مؤثر  $T_e/T_i$  توصیف کرد.

۱۰.۷ رابطه پاشیدگی امواج پلاسما الکترونی را که در راستای  $\hat{z}$  منتشر می‌شوند می‌توان از

تانسور دی‌الکتریک  $\epsilon$  (پیوست ب) و معادله پواسون  $\nabla \cdot (\epsilon \cdot \mathbf{E}) = 0$  به دست آورد که در آن  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ . بنابراین، برای پلاسمای یکنواخت داریم

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left( \epsilon_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \epsilon_{zz} k_z^2 \phi = 0$$

یعنی  $\epsilon_{zz} = 0$ . برای یک پلاسمای سرد، از مسئله ۴.۴ و معادله ب.۱۸ معلوم می‌شود که

$$\omega^2 = \omega_p^2 \quad \text{یا} \quad \epsilon_{zz} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

برای یک پلاسمای داغ، از معادله ۱۲۴.۷ به دست می‌آوریم

$$\epsilon_{zz} = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2 v_{th}^2} Z' \left( \frac{\omega}{k v_{th}} \right) = 0$$

با بسط تابع  $Z$  در حدود مناسب، نشان دهید که این معادله بسامد موج بوهم-گراس (معادله ۳۰.۴) و آهنگ میرایی لاندائو معادله ۷.۷ را به دست می‌دهد.

## ۱۰.۷ آثار جنبشی در میدان مغناطیسی

هنگامی که میدان dc مغناطیسی  $\mathbf{B}_0$  یا میدان نوسانی مغناطیسی  $\mathbf{B}_1$  متناهی باشند باید جمله  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  را در معادله ولانسف ۲۳.۷ برای پلاسمای بی‌برخورد منظور کنیم. آن‌گاه به جای معادله خطی شده ۴۵.۷ داریم

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_1 + \frac{q}{m} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{q}{m} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_1) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \quad (۱۳۵.۷)$$

اگر  $\omega/k \simeq v_{th}$ ، ذرات تشدید می‌شوند و متحرک در امتداد  $\mathbf{B}_0$  هنوز می‌توانند موجب میرایی لاندائو شوند اما اکنون دواثر جنبشی جدید روی می‌دهند که با مؤلفه سرعت عمود بر  $\mathbf{B}_0$  یعنی  $\mathbf{v}_\perp$  مرتبط‌اند. یکی از این دواثر میرایی سیکلوترون است که بعداً درباره آن بحث خواهیم کرد و دیگری تولید هماهنگهای سیکلوترون است که می‌تواند موجب نوسانهایی شود که معمولاً امواج پرنشتاین نامیده می‌شوند. هماهنگهای بسامد سیکلوترون وقتی تولید می‌شوند که مدارهای لارمور دایره‌ای ذرات توسط میدان امواج  $\mathbf{E}_1$  و  $\mathbf{B}_1$  واپیچش یابند. در نظریه معمولی سیال از این آثار مربوط به  $\tau_L$ های متناهی صرف نظر می‌شود اما با وارد کردن چسبندگی  $\pi$  می‌توان آنها را تا مرتبه  $k^2 \tau_L^2$  به حساب

آورد. بررسی جنبشی حتی به‌ازای  $k^2 r_L^2 = O(1)$  می‌تواند دقیق باشد. برای درک آن که چگونه هماهنگها ایجاد می‌شوند حرکت ذره‌ای را در میدان الکتریکی زیر در نظر بگیرید:

$$\mathbf{E} = E_x e^{i(kx - \omega t)} \hat{x} \quad (136.7)$$

معادله حرکت (از مقایسه با معادله ۱۰.۲) عبارت است از

$$\ddot{x} + \omega_c^2 x = \frac{1}{m} E_x e^{i(kx - \omega t)} \quad (137.7)$$

اگر  $kr_L$  کوچک نباشد قسمت‌نمایی از یک سمت مدار تا سمت دیگر تغییر می‌کند. با جاگذاری مدار ناآشفته  $x = r_L \sin \omega_c t$  از معادله ۷.۲ می‌توان  $kx$  را تقریب گرفت:

$$\ddot{x} + \omega_c^2 x = \frac{q}{m} E_x e^{i(kr_L \sin \omega_c t - \omega t)} \quad (138.7)$$

تابع مولد توابع بسل  $J_n(z)$  به‌صورت زیر است

$$e^{z(t - 1/t)^{1/2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(z) \quad (139.7)$$

با  $z = kr_L$  و  $t = \exp(i\omega_c t)$  به‌دست می‌آوریم

$$e^{i k_L \sin \omega_c t} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(kr_L) e^{in\omega_c t} \quad (140.7)$$

$$\ddot{x} + \omega_c^2 x = \frac{q}{m} E_x \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(kr_L) e^{-i(\omega - n\omega_c)t} \quad (141.7)$$

جواب معادله به‌صورت زیر است:

$$x = \frac{q}{m} E_x \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{J_n(kr_L) e^{-i(\omega - n\omega_c)t}}{\omega_c^2 - (\omega - n\omega_c)^2} \quad (142.7)$$

که درستی آن را می‌توان با جاگذاری مستقیم تحقیق کرد. این جواب نشان می‌دهد حرکت دارای مؤلفه‌های بسامدی است که با مضارب  $\omega_c$  از بسامد محرک تفاوت دارند و دامنه این مؤلفه‌ها با  $J_n(kr_L) / [\omega_c^2 - (\omega - n\omega_c)^2]$  متناسب است. وقتی مخرج صفر می‌شود دامنه بزرگ می‌شود.

این وضعیت هنگامی روی می‌دهد که  $\omega - n\omega_c = \pm\omega_c$  یا  $\omega = (n \pm 1)\omega_c$  باشد که در آن  $\omega_c$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) است. یعنی هنگامی که میدان  $\mathbf{E}(x, t)$  با هر یک از هماهنگهای  $\omega_c$  تشدید پیدا می‌کند. در حد سیال  $kr_L \rightarrow 0$  می‌توان  $J_n(kr_L)$  را با  $(kr_L/2)^n/n!$  تقریب گرفت که به ازای همه  $n$ ها بجز  $n = 0$  به سمت صفر می‌رود. به ازای  $n = 0$  ضریب در معادله ۱۴۲.۷ با  $(\omega^2 - \omega_c^2)^{-1}$  برابر می‌شود که نتیجه سیال است (به معادله ۵۷.۴ مراجعه کنید) که در آن تنها بسامد سیکلوترون پایه وجود دارد.

### ۱.۱۰.۷ تانسور دی‌الکتریک پلاسمای داغ

پس از تحلیل فوریه  $f_1(x, v, t)$  در فضا و زمان می‌توان معادله ۱۳۵.۷ را برای توزیع ماکسولی  $f_0(v)$  حل کرد و از عبارتهای حاصل شده  $f_1(k, v, \omega)$  می‌توان برای محاسبه چگالی و جریان هر یک از گونه‌ها استفاده کرد. نتیجه معمولاً به صورت یک تانسور دی‌الکتریک معادل بیان می‌شود به طوری که از بردار جابه‌جایی  $\mathbf{D} = \epsilon \cdot \mathbf{E}$  می‌توان در معادلات ماکسول  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$  و  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{D}$  برای محاسبه روابط پاشیدگی موجهای مختلف استفاده کرد (پیوست ب را ملاحظه کنید). از بیان عملیات جبری به علت پیچیدگی صرف نظر می‌کنیم. تنها به ذکر نتیجه محدودی می‌پردازیم که برای پلاسماهای غیرنسبیتی با فشار همسانگرد ( $T_{\perp} = T_{\parallel}$ ) و بدون سوچه‌های مرتبه صفرم  $v_z$  معتبر است؛ این محدودیتها را می‌توان به سادگی برداشت، اما فرمولهای عمودی برای مقصود ما بسیار در هم ریخته و شلوغ هستند. به علاوه فرض می‌کنیم  $\mathbf{k} = k_x \hat{x} + k_z \hat{z}$  که در راستای  $\mathbf{B}_0$  است، با مساوی صفر قرار دادن  $k_y$  عمومیت مسئله از بین نمی‌رود زیرا پلازما در صفحه عمود بر  $\mathbf{B}_0$  همسانگرد است. به این ترتیب، عناصر  $\epsilon_R = \epsilon/\epsilon_0$  عبارت‌اند از

$$\epsilon_{xx} = 1 + \sum_s \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{e^{-b}}{b} \zeta_0 \sum_{-\infty}^{\infty} n^{\nu} I_n(b) Z(\zeta_n)$$

$$\epsilon_{yy} = 1 + \sum_s \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{e^{-b}}{b} \zeta_0 \sum_{-\infty}^{\infty} \{n^{\nu} I_n(b) + 2b^{\nu} [I_n(b) - I'_n(b)]\} Z(\zeta_n)$$

$$\epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} = i \sum_s \pm \frac{\omega_p^2}{\omega^2} e^{-b} \zeta_0 \sum_{-\infty}^{\infty} n [I_n(b) - I'_n(b)] Z(\zeta_n)$$

(۱۴۳.۷)

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} = \sum_s \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{e^{-b}}{(2b)^{1/2}} \zeta_0 \sum_{-\infty}^{\infty} n I_n(b) Z'(\zeta_n)$$

$$\epsilon_{yz} = -\epsilon_{zy} = -i \sum_s \pm \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(\frac{b}{\gamma}\right)^{1/2} e^{-b} \zeta_0 \sum_{-\infty}^{\infty} [I_n(b) - I'_n(b)] Z'(\zeta_n)$$

$$\epsilon_{zz} = 1 - \sum_s \frac{\omega_p^2}{\omega^2} e^{-b} \zeta_0 \sum_{-\infty}^{\infty} I_n(b) \zeta_n Z'(\zeta_n)$$

که در آن  $Z(\zeta)$  تابع پاشندگی پلاسما با معادله ۱۱۸.۷ است،  $I_n(b)$  تابع بسل مرتبه  $n$  با شناسه موهومی است، و دیگر نمادها به صورت زیر تعریف شده‌اند

$$\omega_{ps}^2 = n_{os} Z_s^2 e^2 / \epsilon_0 m_s$$

$$\zeta_{ns} = (\omega + n\omega_{cs}) / k_z v_{ths} \quad \zeta_{os} = \omega / k_z v_{ths}$$

$$\omega_{cs} = [Z_s e B_0 / m_s] \quad (144.7)$$

$$v_{ths}^2 = 2KT_s / m_s$$

$$b_s = \frac{1}{\gamma} k_{\perp}^2 r_{Ls} = k_x^2 KT_s / m_s \omega_{cs}^2$$

جمع‌بندی اول روی گونه‌های  $s$  است و معلوم است که  $\omega_p$ ،  $b$ ،  $\zeta_0$  و  $\zeta_n$  همگی وابسته به  $s$  هستند؛ نماد  $\pm$  مربوط به علامت بار الکتریکی است. جمع‌بندی دوم روی عدد هماهنگ  $n$  است. نماد پریم نشانه مشتق‌گیری نسبت به شناسه ذریط است.

همان‌طور که انتظار داشتیم، توابع بسل با پارامتر  $b$ ی مربوط به  $r_{Ls}$ های متناهی ظاهر می‌شوند. [تبدیل  $J_n(b)$  به  $I_n(b)$  در انتگرال‌گیری روی سرعتها رخ می‌دهد]. عناصر  $\epsilon$  مربوط به حرکت در امتداد  $\hat{z}$  شامل  $Z'(\zeta_n)$  هستند که هرگاه  $n = 0$  و  $\omega / k_z \simeq v_{th}$  موجب میرایی لاندائو می‌شود. اکنون جمله‌های  $n \neq 0$  سازوکار میرایی بی‌برخورد دیگری، موسوم به میرایی سیکلوترون، را امکان‌پذیر می‌سازند که وقتی روی می‌دهد که  $(\omega \pm n\omega_c) / k_z \simeq v_{th}$ .

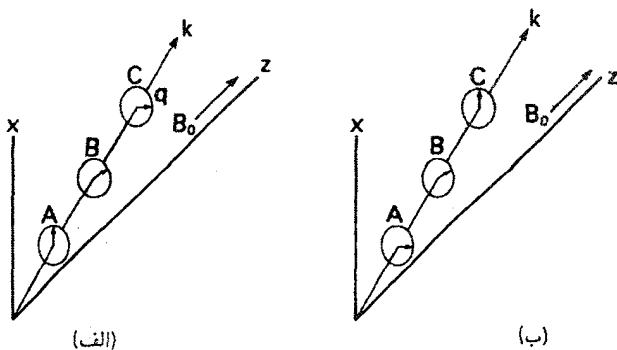
## مسئله

۱۱.۷ نشان دهید که در حد دمای صفر، عناصر  $\epsilon$  در معادله ۱۴۳.۷ به تانسور دی‌الکتریک پلاسمای سرد مندرج در پیوست ب تبدیل می‌شوند.

## ۲.۱۰.۷ میرایی سیکلوترون

هرگاه ذره‌ای با سرعت مناسب در امتداد  $B_0$  در موجی با  $k_z$  متناهی حرکت کند بسامد انتقال یافته





شکل ۳۲.۷ سازوکار میرایی سیکلوترون.

دوپلری  $\omega - k_z v_z$  مساوی با  $\pm n\omega_c$  را می‌بیند و بنابراین توسط میدان الکتریکی  $E_{\perp}$  به‌طور پیوسته شتاب می‌گیرد. ذراتی که فاز «مناسب» نسبت به  $E_{\perp}$  دارند انرژی به‌دست می‌آورند، و ذراتی که فاز «نامناسب» دارند انرژی از دست می‌دهند. چون تغییر انرژی برابر با حاصلضرب نیرو در فاصله است انرژی که ذرات شتاب‌یافته تندتر در واحد زمان به‌دست می‌آورند بیشتر از انرژی است که ذرات واشتاب‌یافته کندتر از دست می‌دهند. بنابراین، به‌طور میانگین یک بهره انرژی برای ذرات وجود دارد که از انرژی موج گرفته می‌شود، و از این‌رو موج میرا می‌شود. این سازوکار با میرایی لاندائو تفاوت دارد زیرا کسب انرژی در راستای عمود بر  $B_0$  است و از این‌رو عمود بر مؤلفه سرعتی است که ذره را به حالت تشدید می‌برد. تشدید با پدیده‌هایی مانند به‌دام افتادگی به‌آسانی از بین نمی‌رود. به‌علاوه، صرف وجود ذرات تشدیدی برای ایجاد میرایی کافی است و نیاز نیست که، همچون میرایی لاندائو،  $f'(v_z)$  شیب منفی داشته باشد.

برای روشن شدن سازوکار فیزیکی میرایی سیکلوترون، موجی را با  $k = k_x \hat{x} + k_z \hat{z}$  که در آن  $k_z$  مثبت است در نظر بگیرید. همان‌طور که در شکل ۳۲.۷ نشان داده شده است، میدان الکتریکی موج  $E_{\perp}$  را می‌توان به مؤلفه‌های قطبیده دایره‌ای راستگرد و چپگرد تجزیه کرد. برای مؤلفه چپگرد، بردار  $E_{\perp}$  در مکانهای A، B، و C در امتداد محور  $z$  مطابق شکل ۳۲.۷ الف ظاهر می‌شود. چون موج در جهت  $\hat{z}$  انتشار می‌یابد، یک الکترون ایستا می‌باید با بردارهای  $E_{\perp}$  به ترتیب در B، C، و A مواجه شود و در نتیجه یک میدان الکتریکی چپگرد می‌بیند. الکترون شتاب نمی‌گیرد زیرا چرخش لارمور آن در جهت راست (ساعتگرد) است. اما اگر الکترون سریعتر از موج در راستای  $\hat{z}$  حرکت می‌کرد بردارها را به ترتیب در A، B، و C می‌دید و در نتیجه اگر سرعت آن در شرط  $\omega - k_z v_z = -\omega_c$  صدق کند به‌طور تشدیدی شتاب می‌گرفت. مؤلفه راستگرد E باید مطابق

شکل ۳۲.۷ ب ظاهر شود. اما اگر الکترون کندتر از موج حرکت می‌کرد میدان  $\mathbf{E}$ ی چرخان در جهت ساعتگرد را می‌دید به طوری که با بردارها در  $A$  و  $B$ ،  $C$  و  $B$  به ترتیب مواجه می‌شد. اگر برای این الکترون شرط  $\omega - k_z v_z = \pm \omega_c$  برقرار باشد باید شتاب بگیرد. بنابراین، الکترونهايي که در چارچوب مرجع موج در هر جهت حرکت می‌کنند باعث میرایی سیکلوترون موج قطبیده تخت یا بیضوی می‌شوند.

### ۳.۱۰.۷ امواج برنشتاین

امواج الکتروستاتیکی که با هماهنگیهای بسامد سیکلوترون در راستاهای عمود بر  $\mathbf{B}$  انتشار می‌یابند امواج برنشتاین نامیده می‌شوند. با جاگذاری عناصر دی‌الکتریک از معادله ۱۴۳.۷ در معادله پواسون  $\nabla \cdot \epsilon \cdot \mathbf{E} = 0$ ، می‌توان رابطه پاشیدگی را به دست آورد. اگر اختلال الکتروستاتیکی را طوری فرض کنیم که  $\mathbf{E}_1 = -\nabla \phi_1$  و امواجی به صورت  $\phi_1 = \phi_1 \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$  را در نظر بگیریم، معادله پواسون به صورت زیر درمی‌آید

$$k_x^2 \epsilon_{xx} + 2k_x k_z \epsilon_{xz} + k_z^2 \epsilon_{zz} = 0 \quad (145.7)$$

توجه کنید که دستگاه مختصات را طوری اختیار کرده‌ایم که  $\mathbf{k}$  در صفحه  $xz$  قرار می‌گیرد و از این رو  $k_y = 0$ ، سپس  $\epsilon_{xx}$ ،  $\epsilon_{zz}$  و  $\epsilon_{xz}$  را از معادله ۱۴۳.۷ جاگذاری می‌کنیم و  $Z'(\zeta_n)$  را با توجه به اتحاد زیر برحسب  $Z(\zeta_n)$  بیان می‌کنیم

$$Z'(\zeta_n) = -2[1 + \zeta Z(\zeta)] \quad (146.7)$$

### مسائل

۱۲.۷ با استفاده از عبارتهای انتگرالی برای  $Z(\zeta)$  و  $Z'(\zeta)$ ، معادله ۱۴۶.۷ را ثابت کنید.  
 ۱۳.۷ قسمت اصلی  $Z(\zeta)$  برای  $\zeta$ های کوچک و بزرگ، که در معادله‌های ۱۲۵.۷ و ۱۲۹.۷ صدق می‌کنند، به صورت زیر داده می‌شود

$$Z(\zeta) \simeq -2\zeta \left(1 - \frac{3}{4}\zeta^2 + \dots\right) \quad |\zeta| \ll 1$$

$$Z(\zeta) \simeq -\zeta^{-1} \left(1 + \frac{1}{4}\zeta^{-2} + \dots\right) \quad |\zeta| \gg 1$$

با بسط مخرج معادله ۱۱۸.۷ که  $Z(\zeta)$  را تعریف می‌کند رابطه‌های فوق را ثابت کنید.  
 معادله ۱۴۵.۷ به صورت زیر درمی‌آید

$$k_x^y + k_z^y + \sum_s \frac{\omega_p^y}{\omega^y} e^{-b} \zeta_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(b) \times \left[ k_x^y \frac{n^y}{b} Z - 2 \left( \frac{y}{b} \right)^{1/2} n k_x k_z (1 + \zeta_n Z) - 2 k_z^y \zeta_n (1 + \zeta_n Z) \right] = 0 \quad (147.7)$$

عبارتهای درون کروشه را می‌توان با چند عمل جبری و استفاده از تعریفهای  $b = k_x^y v_{th}^y / 2 \omega_c^y$  و  $\zeta_n = (\omega + n \omega_c) / k_z v_{th}$  به صورت ساده  $2 k_z^y [\zeta_{-n} + \zeta_0 Z(\zeta_n)]$  درآورد. به علاوه، با توجه به این که رابطه  $k_D^y \omega_p^y \zeta_0 / \omega^y = 2 \omega_p^y / v_{th}^y \equiv k_D^y$  می‌توان معادله ۱۴۷.۷ را به صورت زیر نوشت

$$k_x^y + k_z^y + \sum_s k_D^y e^{-b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(b) [\zeta_{-n} / \zeta_0 + \zeta_0 Z(\zeta_n)] = 0 \quad (148.7)$$

جمله  $\zeta_{-n} / \zeta_0$  برابر با  $1 - n \omega_c / \omega$  است. چون  $I_n(b) = I_{-n}(b)$ ، جمله  $I_n(b) n \omega_c / \omega$  هرگاه روی  $n$  از  $-\infty$  تا  $+\infty$  جمع‌بندی کنیم صفر می‌شود؛ بنابراین، می‌توان  $\zeta_{-n} / \zeta_0$  را با ۱ تعویض کرد. با تعریف  $k^y = k_x^y + k_z^y$ ، رابطه پاشیدگی عمومی را برای امواج برنشتاین به دست می‌آوریم:

$$1 + \sum_s \frac{k_D^y}{k_{\perp 1}^y} e^{-b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(b) [1 + \zeta_0 Z(\zeta_n)] = 0 \quad (149.7)$$

(الف) امواج برنشتاین الکترونی. ابتدا امواج پربسامد را که در آن یونها حرکت نمی‌کنند در نظر می‌گیریم. این امواج نسبت به انحرافهای کوچک از انتشار عمودی حساس نیستند و می‌توانیم قرار دهیم  $k_z = 0$  و در نتیجه  $\zeta_n \rightarrow \infty$ . بنابراین، میرایی سیکلوترون وجود ندارد؛ گفهایی که در طیف مشاهده می‌کنیم از این نوع میرایی ایجاد نمی‌شوند. با توجه به معادله ۱۲۹.۷، می‌توانیم  $Z(\zeta_n)$  را به ازای  $\zeta_n$  بزرگ با  $1 / \zeta_n$  تعویض کنیم. بنابراین، جمله  $n = 0$  در جمع‌بندی دوم در معادله ۱۴۹.۷ حذف می‌شود، و می‌توانیم این جمع‌بندی را به صورت زیر تجزیه کنیم:

$$k_{\perp 1}^y + \sum_s k_D^y e^{-b} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} I_n(b) (1 - \zeta_0 / \zeta_n) + \sum_{n=1}^{\infty} I_{-n}(b) (1 - \zeta_0 / \zeta_{-n}) \right] = 0 \quad (150.7)$$

یا

$$k_{\perp 1}^y + \sum_s k_D^y e^{-b} \sum_{n=1}^{\infty} I_n(b) \left[ 2 - \frac{\omega}{\omega + n \omega_c} - \frac{\omega}{\omega - n \omega_c} \right] = 0 \quad (151.7)$$

عبارت درون کروشه با گرفتن مخرج مشترک به یک جمله تبدیل می‌شود:

$$1 = \sum_s \frac{k_D}{k_{\perp}^2} e^{-b} \sum_{n=1}^{\infty} I_n(b) \frac{2n^2 \omega_c^2}{\omega^2 - n^2 \omega_c^2} \quad (152.7)$$

با استفاده از تعریفهای  $k_D$  و  $b$ ، رابطه مشهور پاشیدگی  $k_z = 0$  به دست می‌آید

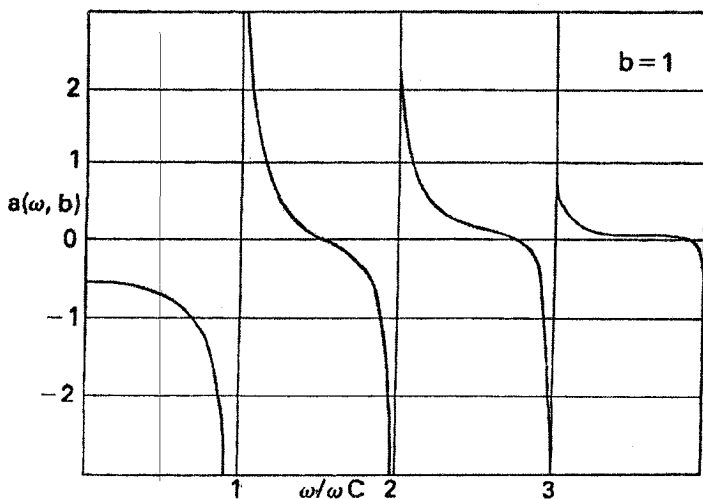
$$1 = \sum_s \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2} \frac{2}{b} e^{-b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n(b)}{(\omega/n\omega_c)^2 - 1} \quad (153.7)$$

اکنون اختصاصاً به مورد نوسانهای الکترونی می‌پردازیم با حذف جمع‌بندی روی گونه‌ها در معادله ۱۵۲.۷ خواهیم داشت

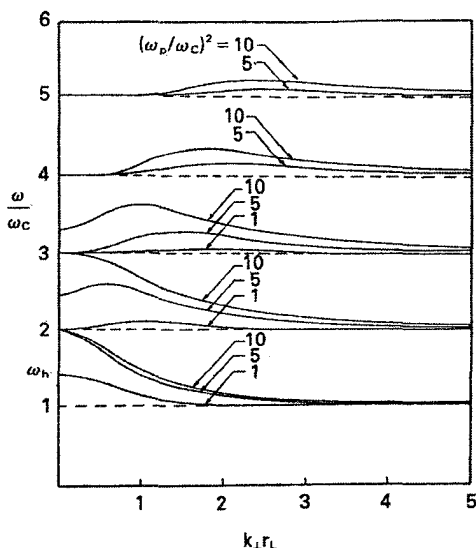
$$\frac{k_{\perp}^2}{k_D^2} = 2\omega_c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-b} I_n(b)}{\omega^2 - n\omega_c^2} n^2 \equiv \alpha(\omega, b) \quad (154.7)$$

تابع  $\alpha(\omega, b)$  به‌ازای یک مقدار معین  $b$  در شکل ۳۳.۷ نشان داده شده است. مقادیر ممکن  $\omega$  از ترسیم خط افقی در  $\alpha(\omega, b) = k_{\perp}^2/k_D^2 > 0$  به دست می‌آیند. به این ترتیب، روشن است که مقادیر ممکن  $\omega$  درست در بالای هر یک از هماهنگهای سیکلوترون قرار دارند، و یک گاف ممنوع هم‌درست در زیر هر هماهنگ وجود دارد.

برای به دست آوردن حد سیالی،  $I_n(b)$  را در معادله ۱۵۳.۷ با مقدار آن به‌ازای  $b$ ی کوچک



شکل ۳۳.۷ تابع  $\alpha(\omega, b)$  برای امواج برنشتاین الکترونی.



شکل ۳۴.۷ رابطهٔ پاشیدگی امواج برنشتاین الکترونی.

یعنی  $(b/2)^2/n!$  تعویض می‌کنیم. در حد  $b \rightarrow 0$  تنها جمله  $n = 1$  باقی می‌ماند، و به دست می‌آوریم

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2} \frac{2}{b} \frac{b}{2} \left( \frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1 \right)^{-1} = \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \quad (155.7)$$

یعنی  $\omega^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2 = \omega_h^2$  که نوسان آمیختهٔ بالاست. وقتی  $k_{\perp} \rightarrow 0$  این بسامد باید یکی از ریشه‌ها باشد. اگر  $\omega_h$  بین دو هماهنگ پر بسامد  $\omega_c$  قرار گیرد، شکل منحنیهای  $\omega - k$  در نزدیکی  $\omega = \omega_h$  به‌طور مناسب تغییر می‌کند. منحنیهای  $\omega - k$  از ضرب معادلهٔ ۱۵۴.۷ در  $2\omega_p^2/\omega_c^2$  که  $k_{\perp} r_L = 4\omega_p^2 \alpha(\omega, b)$  را به دست می‌دهد محاسبه می‌شوند. منحنیهای به دست آمده  $\omega/\omega_c$  بر حسب  $k_{\perp} r_L$  به‌ازای مقادیر مختلف  $\omega_p^2/\omega_c^2$  در شکل ۳۴.۷ نشان داده شده‌اند. توجه کنید که به‌ازای هر یک از این مقدارها، رفتار منحنیها در بالای بسامد آمیختهٔ متناظر برای هر مورد تغییر می‌کند. در منتهی‌الیه سمت چپ این نمودار، یعنی جایی که سرعت فاز به سرعت امواج نور در پلاسما نزدیک می‌شود، باید با در نظر گرفتن تصحیحات الکترومغناطیسی این منحنیها را اصلاح کرد.

مدهای برنشتاین الکترونی در آزمایشگاه مشاهده شده‌اند، اما نوسانهای خودبه‌خودی بزرگ غیرقابل توضیح در هماهنگهای پربسامد  $\omega_e$  نیز در تخلیه گازها دیده شده‌اند. این بحث مفصلتر از آن است که در اینجا بیان شود.

(ب) امواج برنشتاین یونی. در مورد موجهای با هماهنگهای سیکلوترون یونی باید بین امواج برنشتاین یونی محض، که برای آنها  $k_z = 0$ ، و امواج برنشتاین یونی خنثی شده، که برای آنها  $k_z$  مقداری کوچک اما متناهی دارد، تفاوت قائل شد. همان‌طور که قبلاً برای نوسانهای آمیخته پایین دیده‌ایم، تفاوت در این است که متناهی بودن  $k_z$  باعث می‌شود الکترونها برای خنثی کردن جدایی بارها بتوانند در امتداد  $\mathbf{B}_0$  حرکت کنند اگرچه مورد  $k_z = 0$  قبلاً در معادله ۱۵۳.۷ بررسی شد اگر یک قدم عقب‌تر به معادلات ۱۴۸.۷ و ۱۴۹.۷ بازگردیم آنگاه تمایز بین این دو مورد روشنتر خواهد شد. با جدا کردن جمله  $n = 0$  و استفاده از معادله ۱۴۶.۷، داریم

$$k_{\perp}^2 + k_z^2 + \sum_s k_D^2 e^{-b} I_0(b) \left[ -\frac{1}{v} Z'(\zeta_s) \right] + \sum_s k_D^2 e^{-b} \sum_{n \neq 0} I_n(b) [1 + \zeta_s Z(\zeta_n)] = 0 \quad (156.7)$$

خط فاصل بین امواج برنشتاین یونی محض و خنثی شده در جمله الکترونی  $n = 0$  قرار دارد. اگر برای الکترونها  $1 \gg \zeta_e$  می‌توان با استفاده از معادله ۱۲۹.۷ نوشت  $1/\zeta_e \simeq Z'(\zeta_e)$ . چون در این مورد  $v_{the} \gg \omega/k_z$ ، الکترونها نمی‌توانند برای خنثی کردن بارها با سرعت کافی در امتداد  $\mathbf{B}_0$  حرکت کنند. اگر  $1 \ll \zeta_e$ ، با استفاده از معادله ۱۲۶.۷ می‌توان نوشت  $-2 \simeq Z'(\zeta_e)$ . در این مورد  $v_{the} \ll \omega/k_z$ ، و الکترونها زمان کافی برای پیروی از رابطه بولتزمن ۷۳.۳ دارند.

ابتدا مورد  $1 \gg \zeta_e$  را در نظر می‌گیریم. در این جا  $1 \gg \zeta_e$  نیز ضرورتاً صحیح است، و در نتیجه جمله  $n = 0$  در معادله ۱۵۶.۷ به صورت زیر درمی‌آید

$$-k_z^2 \left[ \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\Omega_p^2}{\omega^2} e^{-b} I_0(b) \right]$$

در اینجا  $0 \rightarrow b_e$  را گرفته‌ایم و شاخص  $i$  را از  $b_i$  حذف کرده‌ایم. جملات  $n \neq 0$  در معادله ۱۵۶.۷ همچون گذشته بیان می‌شوند، به طوری که قسمت الکترونی با معادله ۱۵۵.۷ و قسمت یونی با جمله یونی در معادله ۱۵۳.۷ داده می‌شود. بنابراین، رابطه پاشیدگی موج برنشتاین یونی محض به صورت زیر درمی‌آید

$$k_z^2 \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\Omega_p^2}{\omega^2} e^{-b} I_0(b) \right] + k_\perp^2 \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} - \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c^2} \frac{2}{b} e^{-b} \right. \\ \left. \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n(b)}{(\omega/n\Omega_c - 1)^2} \right] = 0 \quad (157.7)$$

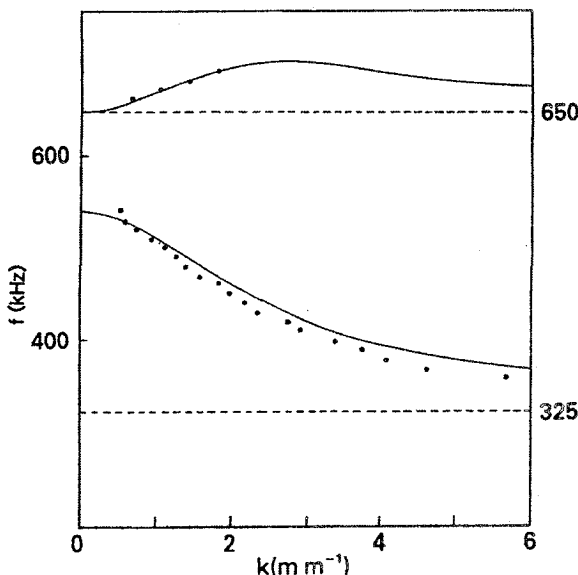
چون  $1 \gg \zeta_0 e$  مقادیر کوچک  $k_z^2$  را ایجاب می‌کند، جمله اول معمولاً قابل چشمپوشی است. برای بررسی حد سیالی، می‌توانیم کره‌شۀ دوم را مساوی صفر قرار دهیم و با جداسازی جمله  $n = 1$  و استفاده از بسط  $I_n(b)$  به ازای  $b$ ی کوچک به دست می‌آوریم

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} - \frac{\Omega_p^2}{\omega^2 - \Omega_c^2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 \Omega_p^2 (b/2)^{n-1}}{n! (\omega^2 - n^2 \Omega_c^2)} = 0 \quad (158.7)$$

جمع‌بندی روی  $n$  به ازای  $b = 0$  صفر می‌شود، و جمله‌های باقیمانده با کمیت  $S$  مندرج در پیوست ب مساوی هستند. شرط  $S = 0$  بسامدهای آمیخته بالا و پایین را تعیین می‌کند (معادلهٔ پس از معادلهٔ ۴.۷ را ببینید). بنابراین، به ازای  $k_\perp \rightarrow 0$  ریشهٔ بسامد کم به  $\omega_1$  میل می‌کند. به ازای  $b$ ی متناهی، یکی از جمله‌ها در جمع‌بندی می‌تواند با جملهٔ الکترونی حذف شود مشروط بر آن‌که  $\omega \simeq n\Omega_c$  و در نتیجه ریشه‌هایی در نزدیکی هماهنگیهای سیکلوترون وجود دارند. منحنیهای پاشیدگی  $\omega/\Omega_c$  برحسب  $k_\perp r_{Li}$  شبیه منحنیهای الکترونی در شکل ۳۴.۷ هستند. دو ریشه‌ای که از همه کوچکترند برای مورد یونی همراه با اندازه‌گیری‌های تجربی که این رابطه پاشیدگی را تأیید می‌کنند در شکل ۳۵.۷ نشان داده شده‌اند.

شاخه‌های پایینتر رابطهٔ پاشیدگی موج برنشتاین پدیدهٔ موج پس‌رو را نمایش می‌دهند که در آن منحنی  $k - \omega$  دارای شیب منفی است و نشان می‌دهد که سرعت گروه در جهت مخالف سرعت فاز است. اینکه امواج پس‌رو واقعاً در آزمایشگاه به وجود می‌آیند نه تنها با اندازه‌گیری‌های  $\omega$  برحسب  $k$ ، از نوعی که در شکل ۳۵.۷ نشان داده شده است، بلکه با ردهای تداخل سنج موجی، که حرکت جبهه‌های فاز از گیرنده به فرستنده را در جهت پس‌سو نشان می‌دهد، نیز تأیید شده است.

در پایان، امواج برنشتاین خنثی شده را، که برای آنها  $\zeta_0 e$  کوچک است و  $Z'(\zeta_0 e) \simeq -2$  در نظر می‌گیریم. جملهٔ الکترونی  $n = 0$  در معادلهٔ ۱۵۶.۷ به صورت سادهٔ  $k_{De}^2$  در می‌آید. با فرض آن که باز هم شرط  $1 \gg \zeta_0 e$  برقرار است، تحلیلی که به معادلهٔ ۱۵۷.۷ منجر شد به قوت



شکل ۳۵.۷ امواج برنشتاین یونی محض: توافق بین نظریه و آزمایش در یک پلاسما ماشین Q.

خود باقی است و معادله ۱۵۶.۷ به صورت زیر درمی آید

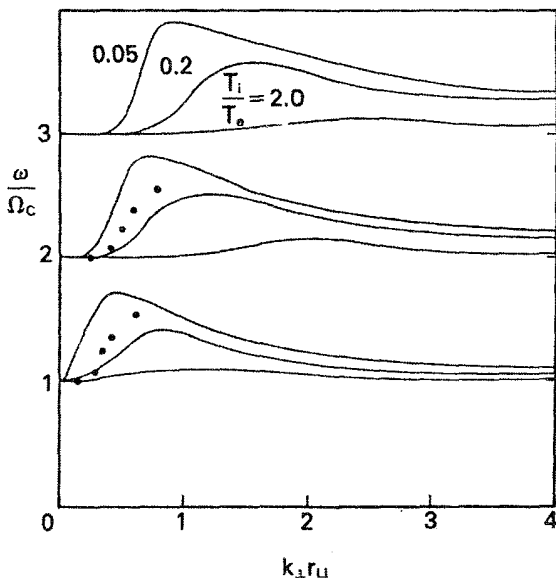
$$k_z^y \left[ 1 + \frac{k_D^y}{k_z^y} - \frac{\Omega_p^y}{\omega^y} e^{-b} I_0(b) \right] + k_{\perp}^y \left[ 1 - \frac{\omega_p^y}{\omega^y - \omega_c^y} + \frac{\Omega_p^y}{\Omega_c^y} \frac{2}{b} e^{-b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n(b)}{(\omega/n\Omega_c)^2 - 1} \right] = 0 \quad (159.7)$$

یک رابطه تقریبی برای امواج برنشتاین یونی خنثی شده بازای  $k_z^y \ll k_{\perp}^y$  عبارت است از

$$1 + k^y \lambda_D^y \left[ 1 - \frac{\omega_p^y}{\omega^y - \omega_c^y} + \frac{\Omega_p^y}{\Omega_c^y} \frac{2}{b} e^{-b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n(b)}{(\omega/n\Omega_c - 1)^2} \right] = 0 \quad (160.7)$$

توجه کنید که اکنون دمای الکترون در  $\lambda_D$  منظور شده است در حالی که امواج برنشتاین یونی محض، یعنی معادله ۱۵۷.۷، مستقل از  $KT_e$  است. اگر  $k^y \lambda_D^y$  کوچک باشد باید گروه معادله ۱۶۰.۷ بزرگ باشد، و این تنها می تواند در نزدیکی تشدید  $\omega \simeq n\Omega_c$  رخ دهد. بنابراین، مدهای خنثی شده به تشدید آمیخته پایین  $\omega_1 \simeq \omega$  حساس نیستند. در واقع وقتی  $k_{\perp} r_L \rightarrow 0$  پوش منحنی پاشیدگی





شکل ۳۶.۷ مدهای برنشتاین یونی خنثی شده: توافق بین نظریه و آزمایش در یک تخلیه میکروموج He.

پاشیدگی به رابطه موج سیکلوترون یونی الکتروستاتیک ۶۷.۴، که حد سیالی برای امواج خنثی شده است، میل می‌کند.

مدهای برنشتاین خنثی شده به خوبی مدهای برنشتاین محض شواهد تجربی ندارند، اما در شکل ۳۶.۷ موردی که مشاهده شده است را نشان داده‌ایم.



## اثرهای غیرخطی

### ۱.۸ مقدمه

تا اینجا به طور تقریباً انحصاری به پدیده‌های خطی پرداخته‌ایم، یعنی پدیده‌هایی که با معادلاتی توصیف می‌شوند که در آنها متغیرهای وابسته با توان بیشتر از یک وارد نمی‌شوند. مثلاً بررسی امواج در فصل ۴ تماماً به فرایند خطی‌سازی وابسته بود، که در آن جمله‌های مرتبه بالاتر را بسیار کوچک گرفتیم و از آن چشم‌پوشی کردیم. این روش به ما امکان می‌داد تا در یک زمان فقط یک مؤلفه فوریه را در نظر بگیریم و اطمینان داشته باشیم که هر موج غیرسینوسی را می‌توان به سادگی با تشکیل توزیع مناسبی از مؤلفه‌های فوریه بررسی کرد. تا وقتی دامنه موج به اندازه کافی کوچک باشد که معادلات خطی معتبر بمانند روش فوق‌کارایی دارد.

متأسفانه در بسیاری از آزمایشها، امواج را به هنگام مشاهده نمی‌توان با نظریه خطی توصیف کرد. مثلاً مورد امواج سوقی را در نظر بگیرید. چون این امواج ناپایدارند بنابه نظریه خطی باید دامنه آنها به طور نمایی افزایش یابد. اما این دوره افزایش به طور عادی قابل مشاهده نیست — زیرا معمولاً معلوم نیست چه زمانی باید مشاهده را شروع کرد — بلکه امواج سوقی را تنها پس از آن که دارای دامنه ایستایی بزرگی شدند مشاهده می‌کنیم. این واقعیت که امواج نمو بیشتری پیدا نمی‌کنند

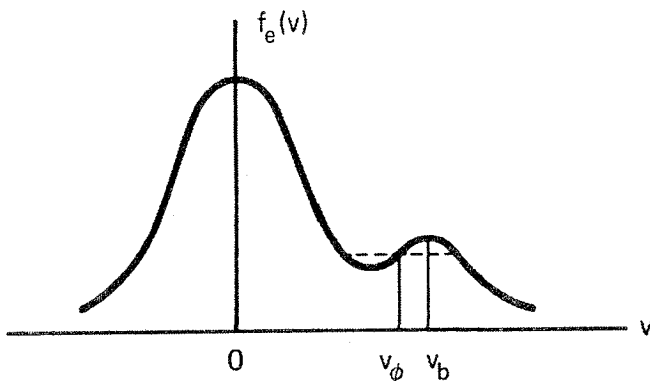
به معنای این است که نظریه خطی دیگر اعتبار ندارد و اثرهای غیرخطی دامنه را محدود می‌کنند. معلوم شده است که توضیح نظری این مشاهده مقدماتی مسئله‌ای بسیار مشکل است زیرا دامنه اشباع شده‌ای که مشاهده می‌کنیم نسبتاً کوچک است.

هنگامی که دامنه یک موج افزایش می‌یابد موج می‌تواند متحمل تغییرات متعددی شود. ممکن است شکل موج تغییر کند — مثلاً از سینوسی به مثلثی نامتقارن. این موضوع معادل با آن است که بگوئیم مؤلفه‌های فوریه با بسامدها (یا اعداد موج) دیگری تولید می‌شوند. و بالاخره، ممکن است یک موج همچون امواج اقیانوس که به ساحل می‌خورند «بشکند» و انرژی موج به انرژی گرمایی ذرات تبدیل شود. یک موج بزرگ می‌تواند ذرات را در گودیهای پتانسیل خود به دام اندازد و در نتیجه خواص محیطی را که در آن انتشار می‌یابد تغییر دهد. قبلاً در بحث میرایی لاندائو غیرخطی با این اثر مواجه شده‌ایم. اگر برانگیختگی در پلاسما آنقدر قوی باشد که طیف پیوسته‌ای از بسامدها وجود داشته باشد، پلاسما در حالت تلاطم خواهد بود. این حالت را، مانند مورد هیدروینامیک سیال معمولی، باید به صورت آماری توصیف کرد. یک نتیجه مهم تلاطم پلاسما مقاومت بی‌هنجار است که در آن الکترونها، به جای برخورد با یونها، به علت برخورد با افت‌وخیزهای کاتوره‌ای میدان الکتریکی کند می‌شوند. در جایی که مقاومت معمولی برای گرم کردن اهمی پلاسما (بخش ۳.۶.۵) تا دماهای بسیار زیاد ناکافی است این اثر قابل استفاده است.

پدیده‌های غیرخطی را می‌توان به سه رده گسترده تقسیم کرد.

۱. مسائل اساساً خطییت‌ناپذیر. به عنوان مثال، پخش در یک گاز کاملاً یونیده به طور ذاتی یک مسئله غیرخطی است (بخش ۸.۵) زیرا ضریب پخش با چگالی تغییر می‌کند. در بخش ۱.۶ دیدیم که مسایل تعادل هیدرومغناطیسی غیرخطی هستند. در بخش ۲.۸ مثال دیگری — موضوع مهم غلافهای پلاسمایی — را بیان خواهیم کرد.

۲. برهم‌کنش موج-ذره. به دام افتادن ذره (بخش ۵.۷) مثالی از این نوع است و می‌تواند به میرایی غیرخطی منجر شود. اثر شبه خطی یک مثال کلاسیک است که در آن تعادل پلاسما توسط امواج تغییر می‌کند. مورد یک پلاسما با یک باریکه الکترونی را در نظر بگیرید (شکل ۱.۸). چون تابع توزیع دارای ناحیه‌ای است که در آن  $\partial f_e / \partial v$  مثبت است، دستگاه میرایی لاندائو وارونه دارد و نوسانهای پلاسما با  $v_{ph}$  در ناحیه شیب مثبت ناپایدار هستند (معادله ۶۷.۷). ابتدا الکترونهای تشدیدی به علت برهم‌کنشهای موج-ذره تحت تأثیر قرار می‌گیرند و تابع توزیع آنها توسط میدان الکتریکی موج تغییر می‌کند. همانطور که خط چین شکل ۱.۸ نشان می‌دهد، هرگاه امواج موجب شوند  $f_e(v)$  صاف و هموار گردد امواج به پایداری می‌رسند و از این رو توزیع تعادلی جدید دیگر دارای



شکل ۱.۸ یک توزیع دو کوهانه ناپایدار الکترونی.

شیب مثبت نیست. این اثر شبه خطی نوعی است. پژواکهای موج پلاسما مثال دیگری برهمکنشهای موج-ذره هستند که در بخش ۶.۸ بیان می‌کنیم.

۳. برهمکنشهای موج-موج. امواج حتی در توصیف سیالی نیز که در آن اثرهای تک تک ذرات صرف نظر می‌شود می‌توانند برهمکنش داشته باشند. یک موج منفرد می‌تواند با تولید اولین هماهنگهای بسامد پایه خود واپاشد. آن‌گاه این هماهنگها می‌توانند با یکدیگر و با موج اولیه برهمکنش کنند و امواج دیگری با بسامدهای زنش تشکیل دهند. امواج زنش به نوبه خود می‌توانند آنقدر بزرگ شوند که بتوانند برهمکنش کنند و بسامدهای زنش بسیار دیگری تشکیل دهند تا آن که سرانجام طیف به صورت پیوسته درآید. بحث درباره راستای جریان انرژی در یک طیف تلاطمی جالب است. در دینامیک سیالات، مدهای طول موج بلند به مدهای طول موج کوتاه وامی‌باشند زیرا جریانهای سرگردان بزرگ انرژی بیشتری دارند و تنها با تقسیم به جریانهای سرگردان کوچک که همگی کم انرژی‌تر هستند می‌توانند واپاشند. آن‌گاه کوچکترین جریانهای سرگردان حرکت جنبشی خود را توسط «میرایی چسبندگی» به گرما تبدیل می‌کنند. معمولاً در پلاسما عکس این مطلب رخ می‌دهد. مدهای طول موج کوتاه تمایل دارند به صورت مدهای طول موج بلند که کم انرژی‌تر هستند با هم آمیخته شوند. علت آن است که انرژی میدان الکتریکی  $E^2/\pi$  از مرتبه  $k^2 \phi^2/\pi$  است به طوری که اگر  $e\phi$  (معمولاً توسط  $KT_e$ ) ثابت نگه داشته شود، مدهای  $k$ -کوچک ( $\lambda$ -بزرگ) انرژی کمتری دارند. در نتیجه انرژی توسط ناپایداری در  $k$ ی بزرگ به  $k$ ی کوچک انتقال می‌یابد، و باید سازوکاری را یافت که انرژی را تلف می‌کند. در  $k$ ی بزرگ که میرایی لاندائو می‌تواند رخ دهد چنین مسئله‌ای وجود ندارد. برای حرکت در امتداد  $B_0$ ، ناپایداریهای «مدولاسیونی» غیرخطی می‌توانند موجب شوند انرژی در  $k$ ی کوچک با یونها جفت شود و آنها را گرم کند. برای حرکت

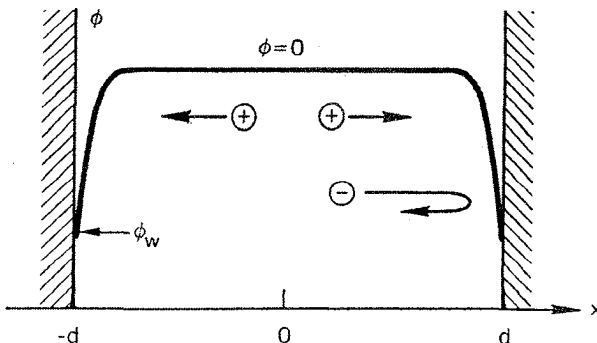
عمود بر  $B_0$ ، بزرگترین جریانه‌های سرگردان دارای طول موجهایی از مرتبه شعاع پلاسما خواهند بود و می‌تواند از طریق همرفتی موجب اتلاف پلاسما در دیواره‌ها شوند.

اگرچه هنوز مسائلی در نظریه خطی امواج و ناپایداریها باقی مانده‌اند که باید حل شوند، جریان اصلی تحقیق در پلاسما به حیطه پدیده‌های غیرخطی معطوف شده است که درک بسیار کمتری از آنها وجود دارد. مثالهای بخشهای بعدی از بعضی از اثرها که به‌طور نظری و تجربی مطالعه شده‌اند تصویری به‌دست می‌دهند.

## ۲.۸ غلافها

### ۱.۲.۸ ضرورت غلافها

در تمام ادوات عملی پلاسما، پلاسما در یک محفظه خلاء با ابعاد متناهی محبوس است. در دیواره‌ها چه اتفاقی برای پلاسما می‌افتد؟ برای سادگی، الگویی یک‌بعدی و فاقد میدان مغناطیسی را در نظر می‌گیریم (شکل ۲.۸). فرض کنید میدان الکتریکی قابل ملاحظه‌ای در داخل پلاسما وجود ندارد؛ بنابراین، می‌توانیم پتانسیل  $\phi$  را در آنجا صفر بگیریم. هنگامی که یونها و الکترونها به دیواره برخورد می‌کنند بازترکیب می‌شوند و از بین می‌روند. از آنجا که الکترونها سرعتهای گرمایی بسیار بیشتری نسبت به یونها دارند سریعتر از بین می‌روند و پلاسمایی با بار مثبت باقی می‌ماند. بنابراین، پلاسما باید نسبت به دیواره پتانسیل مثبت داشته باشد؛ یعنی پتانسیل دیواره  $\phi_w$  منفی است. این پتانسیل نمی‌تواند در تمامی پلاسما توزیع شود زیرا حفاظ دبابی (بخش ۴.۱) تغییر پتانسیل را به لایه‌ای به ضخامت چندین طول دبابی محدود می‌کند. این لایه، که باید روی

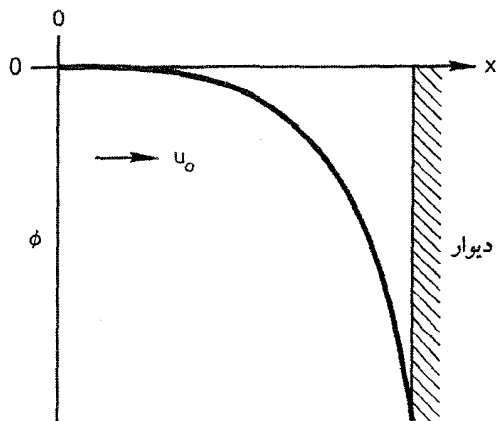


شکل ۲.۸ پتانسیل پلاسمای  $\phi$  در نزدیکی دیواره‌ها غلافهایی تشکیل می‌دهد و در نتیجه الکترونها بازتاب می‌یابند. سد کولتی  $e\phi_w$  طوری خود را تنظیم می‌کند که تعداد مساوی از الکترونها و یونها در هر تائیه به دیواره‌ها می‌رسند.

تمام دیواره‌های سردی که در تماس با پلاسما هستند وجود داشته باشد، غلاف نامیده می‌شود، کار غلاف تشکیل سد پتانسیلی است که گونه‌های با تحرک بیشتر (معمولاً الکترونها) را به‌طور الکتروستاتیک محبوس می‌کند. سد ارتفاع خود را طوری تنظیم می‌کند که شار الکترونیایی که دارای انرژی کافی برای عبور از سد به دیواره هستند درست برابر با شار یونهای باشد که به دیواره می‌رسند.

### ۲.۲.۸ معادله غلاف صفحه‌ای

در بخش ۴.۱ برای به‌دست آوردن طول دمای، معادله پواسون را خطی کردیم. اما برای آزمون رفتار دقیق  $\phi(x)$  در غلاف، باید مسئله را غیرخطی بررسی کنیم؛ خواهیم دید که همیشه جواب وجود ندارد. شکل ۳.۸ وضعیت را در مجاورت یکی از دیواره‌ها نشان می‌دهد. در صفحه  $x = 0$ ، فرض می‌کنیم که یونها با سرعت سوق  $u_0$  از پلاسمای اصلی وارد ناحیه غلاف می‌شوند. این سرعت سوق برای احتساب اتلاف یونهای که به علت یونش در ناحیه‌ای به وجود می‌آیند و در دیواره‌ها از بین می‌روند ضرورت دارد. برای سادگی، فرض کنید  $T_i = 0$  که در نتیجه تمام یونها در  $x = 0$  دارای سرعت  $u_0$  هستند. مسئله حالت پایا در ناحیه غلاف بی‌برخورد را در نظر می‌گیریم. فرض شده است که پتانسیل  $\phi$  به‌طور یکنوا برحسب  $x$  کاهش می‌یابد. در واقع  $\phi$  می‌توانست نوسانهای مکانی داشته باشد و از این‌رو می‌بایست ذرات به‌دام افتاده در حالت پایا وجود می‌داشتند. در عمل چنین چیزی رخ نمی‌دهد زیرا فرایندهای اتلافی تمایل به از بین بردن این حالت‌های بسیار سازمان یافته دارند.



شکل ۳.۸ پتانسیل  $\phi$  در یک غلاف صفحه‌ای. فرض می‌کنیم یونهای سرد با سرعت یکنواخت  $u_0$  وارد غلاف می‌شوند.

اگر  $u(x)$  سرعت یون باشد از پایستگی انرژی داریم

$$\frac{1}{2} M u^2 = \frac{1}{2} M u_0^2 - e\phi(x) \quad (1.8)$$

$$u = \left( u_0^2 - \frac{2e\phi}{M} \right)^{1/2} \quad (2.8)$$

آن‌گاه از معادله پیوستگی یون چگالی یون  $n_i$  برحسب چگالی  $n_0$  در پلاسمای اصلی به دست می‌آید:

$$n_0 u_0 = n_i(x) u(x) \quad (3.8)$$

$$n_i(x) = n_0 \left( 1 - \frac{2e\phi^-}{M u_0^2} \right)^{1/2} \quad (4.8)$$

در حالت پایا، الکترونها به‌طور کامل از رابطه بولتزمن تبعیت می‌کنند:

$$n_e(x) = n_0 \exp(e\phi/KT_e) \quad (5.8)$$

بنابراین، معادله پواسون به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\epsilon_0 \frac{d^2 \phi}{dx^2} = e(n_e - n_i) = e n_0 \left[ \exp\left(\frac{e\phi}{KT_e}\right) - \left(1 - \frac{2e\phi}{M u_0^2}\right)^{-1/2} \right] \quad (6.8)$$

با ساده کردن این معادله با استفاده از نمادهای زیر، ساختار آن را می‌توان روشنتر مشاهده کرد:

$$\chi \equiv -\frac{e\phi}{KT_e} \quad \xi \equiv \frac{x}{\lambda_D} = x \left( \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 KT_e} \right)^{1/2} \quad \mathcal{M} \equiv \frac{u_0}{(KT_e/M)^{1/2}} \quad (7.8)$$

بنابراین، معادله ۶.۸ به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\chi'' = \left( 1 + \frac{2\chi}{\mathcal{M}^2} \right)^{-1/2} - e^{-\chi} \quad (8.8)$$

که در آن علامت پریم به‌معنای  $d/d\xi$  است. این یک معادله غیرخطی غلاف صفحه‌ای است و

تنها اگر  $\mathcal{M}$  به اندازه کافی بزرگ باشد یک جواب قابل قبول خواهد داشت. علت معرفی نماد  $\mathcal{M}$  در بخش بعدی که به امواج شوک مربوط است روشن خواهد شد.

### ۳.۲.۸ معیار غلاف بوهم

با ضرب دو طرف معادله ۸.۸ در  $\chi'$  می توان از آن انتگرال گیری کرد:

$$\int_0^\xi \chi' \chi'' d\xi_1 = \int_0^\xi \left(1 + \frac{\chi}{\mathcal{M}^2}\right)^{-1/2} \chi' d\xi_1 - \int_0^\xi e^{-\chi} \chi' d\xi_1 \quad (9.8)$$

در اینجا  $\xi_1$  یک متغیر ظاهری است. چون در  $\xi = 0$  داریم  $\chi = 0$ ، از انتگرال گیری به دست می آوریم

$$\frac{1}{2}(\chi'^2 - \chi_0'^2) = \mathcal{M}^2 \left[ \left(1 + \frac{\chi}{\mathcal{M}^2}\right)^{1/2} - 1 \right] + e^{-\chi} - 1 \quad (10.8)$$

اگر در پلاسما  $E = 0$ ، باید در  $\xi = 0$  قرار دهیم  $\chi_0' = 0$ . برای به دست آوردن  $\chi$  باید انتگرال گیری دوم را به طور عددی انجام دهیم؛ اما جواب هرچه باشد، باید طرف راست معادله ۱۰.۸ به ازای همه  $\chi$ ها مثبت باشد. مخصوصاً، می توانیم طرف راست را به ازای  $\chi \ll 1$  بسط تیلور دهیم:

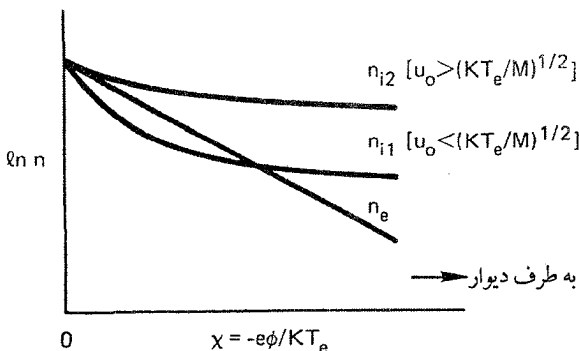
$$\mathcal{M}^2 \left[ 1 + \frac{\chi}{\mathcal{M}^2} - \frac{1}{2} \frac{\chi^2}{\mathcal{M}^4} + \dots - 1 \right] + 1 - \chi + \frac{1}{2} \chi^2 + \dots - 1 > 0$$

$$\frac{1}{2} \chi^2 \left( -\frac{1}{\mathcal{M}^2} + 1 \right) > 0$$

$$\mathcal{M}^2 > 1 \quad \text{یا} \quad u_0 > (KT_e/M)^{1/2} \quad (11.8)$$

این نامساوی که معیار غلاف بوهم نامیده می شود نشان می دهد که یونها باید با سرعتی بزرگتر از سرعت آکوستیکی  $v_s$  وارد ناحیه غلاف شوند. برای دادن این سرعت جهتدار  $u_0$  به یونها، باید یک میدان الکتریکی متناهی در پلاسما وجود داشته باشد. بنابراین، فرض  $\chi' = 0$  در  $\xi = 0$  تنها یک تقریب است و برقراری آن با توجه به این حقیقت امکان پذیر است که مقیاس ناحیه غلاف معمولاً بسیار کوچکتر از مقیاس ناحیه پلاسما اصلی است که یونها در آن شتاب می گیرند. مقدار  $u_0$  تا اندازه ای اختیاری است و بستگی به آن دارد که مرز  $x = 0$  بین پلاسما و غلاف را کجا انتخاب کنیم. البته شار یون  $n_0 u_0$  با آهنگ تولید یون مشخص می شود و در





شکل ۴.۸ تغییرات (لگاریتمی) چگالی الکترون و چگالی یون برحسب پتانسیل بهنجارشده  $\chi$  در یک غلاف. چگالی یون برای دو مورد  $u_0$  بزرگتر و  $u_0$  کوچکتر از سرعت بحرانی ترسیم شده است.

نتیجه اگر  $u_0$  تغییر کند، مقدار  $n_0$  در  $x = 0$  به طور معکوس با  $u_0$  تغییر خواهد کرد. اگر یونها دمای متناهی داشته باشند سرعت سوق بحرانی  $u_0$  اندکی کمتر خواهد بود.

دلیل فیزیکی معیار بوهم را به آسانی می توان از نمودار چگالی الکترون و چگالی یون برحسب  $\chi$  مشاهده کرد (شکل ۴.۸). چگالی الکترون  $n_e$  بنابه رابطه بولتزمن به طور نمایی با کاهش  $\chi$  می یابد. چگالی یون نیز افت پیدا می کند زیرا یونها توسط پتانسیل غلاف شتاب می گیرند. اگر یونها با انرژی زیاد شروع به حرکت کنند،  $n_i(\chi)$  به کندی افت می کند زیرا میدان غلاف تغییر نسبتاً اندکی را در سرعت یونها موجب می شود. اما اگر یونها با انرژی کمی شروع به حرکت کنند،  $n_i(\chi)$  به تندی افت می کند و می تواند زیر منحنی  $n_e$  برود. در این مورد،  $n_e - n_i$  در نزدیکی  $\chi = 0$  مثبت است و معادله ۶.۸ نشان می دهد  $\phi(x)$  باید به سمت بالا خمیدگی داشته باشد که در تعارض با ضرورت دفع الکترونها توسط غلاف است. برای اجتناب از این امر باید شیب  $n_i(\chi)$  در  $\chi = 0$  (از لحاظ قدرمطلق) کوچکتر از شیب  $n_e(\chi)$  باشد؛ این شرط با شرط  $\mathcal{M}^2 > 1$  یکسان است.

### ۴.۲.۸ قانون چابلد-لانگمویر

چون  $n_e(\chi)$  به طور نمایی با  $\chi$  افت می کند می توان از چگالی الکترون در ناحیه  $\chi$  های بزرگ در مجاورت دیواره (یا هر الکتروند منفی) صرف نظر کرد. آنگاه معادله پواسون تقریباً به صورت زیر خواهد بود

$$\chi'' \approx \left(1 + \frac{\mathcal{M}^2}{2\chi}\right)^{-1/2} \approx \frac{\mathcal{M}}{(2\chi)^{1/2}} \quad (12.8)$$

از ضرب این معادله در  $\chi'$  و انتگرال‌گیری از  $\xi_s = \xi_1$  تا  $\xi = \xi_1$  داریم

$$\frac{1}{4}(\chi'^2 - \chi_s'^2) = \sqrt{2} \mathcal{M}(\chi^{1/2} - \chi_s^{1/2}) \quad (13.8)$$

که در آن  $\xi_s$  جایی است که از آنجا شروع به حذف  $n_e$  کرده‌ایم. می‌توانیم صفر  $\chi$  را مجدداً طوری تعریف کنیم که در  $\xi_s = \xi$  داشته باشیم  $\chi_s = 0$ . از  $\chi_s'$  نیز صرف‌نظر خواهیم کرد زیرا می‌توان پیش‌بینی کرد شیب منحنی پتانسیل در ناحیه  $n_e = 0$  بسیار تندتر از ناحیه  $n_e$  متناهی است. بنابراین، معادله ۱۳.۸ به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} \chi'^2 &= 2^{3/2} \mathcal{M} \chi^{1/2} \\ \chi' &= 2^{3/4} \mathcal{M}^{1/2} \chi^{1/4} \end{aligned} \quad (14.8)$$

یا

$$d\chi/\chi^{1/4} = 3^{3/4} \mathcal{M}^{1/2} d\xi \quad (15.8)$$

با انتگرال‌گیری از  $\xi = \xi_s$  تا  $\xi = \xi_{wall} = \xi_s + d/\delta_D$  داریم

$$\frac{4}{3} \chi_w^{3/4} = 2^{3/4} \mathcal{M}^{1/2} d/\lambda_D \quad (16.8)$$

یا

$$\mathcal{M} = \frac{4\sqrt{2}}{9} \frac{\chi_w^{3/2}}{d^2} \lambda_D^2 \quad (17.8)$$

با بازگشت به متغیرهای  $u_0$  و  $\phi$  و توجه به این که جریان یونی به طرف دیواره برابر است با  $J = en_0 u_0$ ، خواهیم داشت

$$J = \frac{4}{9} \left( \frac{2e}{M} \right)^{1/2} \frac{\epsilon_0 |\phi_w|^{3/2}}{d^2} \quad (18.8)$$

این قانون معروف چایلند-لانگمویر برای جریان «بار فضایی محدود» در یک دیود تخت است. تغییرات پتانسیل در یک دستگاه پلاسما-دیواره را می‌توان به سه قسمت تقسیم کرد. نزدیکترین فاصله تا دیواره؛ این یک ناحیه بدون الکترون است که ضخامت  $d$  آن با معادله ۱۸.۸ داده می‌شود. در اینجا  $J$  از آهنگ تولید یون و  $\phi_w$  از تساوی شارهای الکترون و یون تعیین خواهد شد.

سیمس به ناحیه‌ای می‌رسیم که در آن  $n_e$  قابل ملاحظه است؛ همانطور که در بخش ۴.۱ نشان داده شد این ناحیه دارای اندازه طول دمای است. بالاخره ناحیه‌ای با اندازه طولی بسیار بزرگتر وجود دارد. در این ناحیه «پیش غلاف» است که یونها با افت پتانسیل  $|\phi| \geq \frac{1}{2}KT_e/e$  شتاب می‌گیرند تا سرعت لازم  $u_0$  را پیدا کنند. بسته به نوع آزمایش می‌توان اندازه پیش غلاف را با شعاع پلاسما، مسافت آزاد میانگین برخورد با سازوکار یونش معلوم کرد. البته توزیع پتانسیل به طور هموار تغییر می‌کند و تقسیم‌بندی به ۳ ناحیه صرفاً برای سهولت است و با توجه به یکسان نبودن اندازه‌های طولی میسر گردیده است. در روزهای اولیه تخلیه گازها، غلافها را می‌شد به صورت لایه‌های تاریکی مشاهده کرد که در آنها الکترونی وجود نداشت تا آنها را برای گسیل برانگیخته کند. در نتیجه، تغییرات پتانسیل توسط انحراف الکتروستاتیکی یک باریکه کم‌عرض الکترونی که به موازات یک دیواره ارسال می‌گردید اندازه‌گیری می‌شد.

### ۵.۲.۸ کاوه‌های الکتروستاتیکی

از معیار غلاف یعنی معادله ۱۱.۸ می‌توان برای تخمین شار یونها به طرف کاوه‌ای با پیش ولت منفی در یک پلاسما استفاده کرد. اگر مساحت سطح کاوه  $A$  باشد و اگر یونهایی که وارد غلاف می‌شوند دارای سرعت سوق  $u_0 \geq (KT_e/M)^{1/2}$  باشند، آنگاه جریان یونی جمع‌آوری شده عبارت است از

$$I = n_s e A (KT_e/M)^{1/2} \quad (۱۹.۸)$$

اگر کاوه نسبت به پلاسما به اندازه کافی (چندین مرتبه  $KT_e$ ) منفی باشد تا همه توزیع ماکسولی الکترونی بجز انتهای آن را دفع کند، آنگاه می‌توان از جریان الکترونی صرف نظر کرد چگالی  $n_s$  چگالی پلاسما در لبه غلاف است. فرض کنید لبه غلاف را جایی تعریف کنیم که  $u_0$  دقیقاً  $(KT_e/M)^{1/2}$  باشد. برای آن که یونها تا این سرعت شتاب بگیرند به پتانسیل پیش‌غلاف  $|\phi| \geq 1/2 KT_e/e$  نیاز داریم، و از این رو لبه غلاف نسبت به بدنه پلاسما دارای پتانسیل زیر است

$$\phi_s \simeq -\frac{1}{2}KT_e/e \quad (۲۰.۸)$$

اگر الکترونها ماکسولی باشند، از اینجا می‌توان  $n_s$  را تعیین کرد:

$$n_s = n_0 e^{e\phi_s/kT_e} = n_0 e^{-1/2} = 0.61n_0 \quad (۲۱.۸)$$

برای منظور ما تعویض  $۶۱e^۰$  با عدد گردی مانند  $۱/۲$  به اندازه کافی دقیق است؛ بنابراین، «جریان یونی اشباع» به کاوه منفی تقریباً برابر است با

$$I_B \simeq \frac{1}{4} n_0 e A (KT_e/M)^{1/2} \quad (22.8)$$

$I_B$  گاهی «جریان بوهم» نامیده می‌شود و هرگاه دما معلوم باشد چگالی پلاسما به آسانی از آن به دست می‌آید.

اگر طول دبی، و در نتیجه ضخامت غلاف، در مقایسه با ابعاد کاوه بسیار کوچک باشد، مساحت لبه غلاف عملاً همان مساحت  $A$  سطح کاوه (با هر شکلی که داشته باشد) خواهد بود. اما در چگالیهای کم،  $\lambda_D$  می‌تواند بزرگ باشد به طوری که بعضی از یونهایی که به غلاف می‌رسند می‌تواند با حرکت در مداری در اطراف کاوه از آن دور شوند. محاسبه مدارها برای انواع شکلهای کاوه اولین بار توسط آی. لانگمیر و ل. تونکر انجام گرفت، و از این رو نام «کاوه لانگمیر» به این روش اندازه‌گیری داده شده است. این محاسبات با آن که طولانی و پرزحمت هستند می‌توانند چگالی پلاسما را به طور دقیق تعیین کنند زیرا در آن تعویض اختیاری از لبه غلاف صورت نگرفته است. با تغییر ولتاژ کاوه، توزیع ماکسولی الکترون آزموده می‌شود، و همچنین از منحنی جریان-ولتاژ کاوه لانگمیر می‌توان دمای الکترون را نیز به دست آورد. کاوه الکتروستاتیک اولین وسیله تشخیص پلاسما بود و هنوز هم ساده‌ترین و موضعی‌ترین ابزار اندازه‌گیری است. متأسفانه، الکتروادهای مادی را می‌توان تنها در داخل پلاسماهای سرد کم چگالی تعبیه کرد.

## مسائل

۱.۸ معلوم شده است کاوه‌ای که سطح جمع‌آوری‌کننده آن یک ورقه تانتالم با مساحت  $۲ \times ۲ \text{ mm}$  است جریان اشباع یونی  $۱۰^۰ \mu A$  را در یک پلاسمای آرگون یک بار یونیده (عدد اتمی =  $۴۰$ ) به دست می‌دهد. اگر  $KT_e = 2eV$ ، چگالی تقریبی پلاسما چقدر خواهد بود؟ (راهنمایی: هر دو طرف کاوه یونها را جمع‌آوری می‌کنند!)

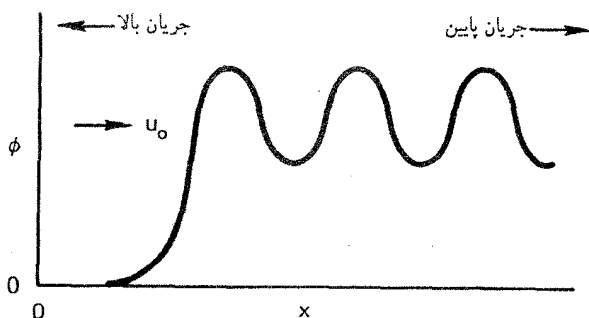
۲.۸ یک ماهواره خورشیدی که دارای شبکه‌ای متشکل از  $۱۰ \text{ km}^2$  سلول فوتولتایی است در یک مدار همگام به دور زمین گردش می‌کند. این ماهواره در یک پلاسمای هیدروژن اتمی  $1eV$  با چگالی  $۱۰^۶ \text{ m}^{-3}$  قرار دارد. در توفانهای خورشیدی، ماهواره توسط الکترونها پراثری بمباران می‌شود و آن را تا پتانسیل  $2kV$  - باردار می‌کند. شار یونهای پراثری بمباران‌کننده هر  $\text{m}^2$  از شبکه سلولها را محاسبه کنید.

۳.۸ معیار غلاف معادله ۱۱.۸ را برای یک پلاسمای سرد یونی به دست آوردیم. فرض کنید توزیع یون دارای پخش گرمایی سرعت حول سرعت سوق میانگین  $u$  است. بدون محاسبه ریاضی نشان دهید که آیا می توان برای  $u$  مقداری کمتر یا بیشتر از مقدار بوهام پیش بینی کرد و علت را توضیح دهید.

۴.۸ یک تحلیلگر سرعت یون تشکیل شده است از یک استوانه از فولاد زنگ نزن با قطر ۵ mm که یک سر آن با یک شبکه توری ریز تنگستن (شبکه ۱) پوشیده شده است. در پشت این شبکه توری و در داخل استوانه مجموعه ای از شبکه های عایق موازی قرار دارد. شبکه ۱ در یک پتانسیل «شناور» قرار دارد — اتصال الکتریکی ندارد. شبکه ۲ در پیش ولت منفی است تا تمام الکترونیایی که از شبکه ۱ می آیند را دفع کند و یونها را از خود عبور دهد. شبکه ۳ شبکه تحلیلگر است و در پیش ولتی قرار دارد که یونهای شتاب گرفته توسط شبکه ۲ را کند می کند. یونهایی که می توانند از شبکه ۳ عبور کنند توسط یک تخته جمع آوری کننده جمع آوری می شوند. شبکه ۴ شبکه بازدارنده است که الکترونیهای ثانویه گسیل شده توسط تخته جمع آوری کننده را بازمی گرداند. اگر چگالی پلاسما خیلی زیاد باشد ممکن است مسئله بار فضایی در نزدیکی شبکه ۳ رخ دهد زیرا چگالی یونها آنقدر بزرگ است که یک تپه پتانسیل در جلو شبکه ۳ تشکیل می دهد و یونهایی را که در غیاب این تپه پتانسیل به شبکه ۳ می رسیدند دفع می کند. با استفاده از قانون چاپلند-لانگمیر ماکسیمم جریان معنادار  $\text{He}^+$  را که می تواند در یک جمع آوری کننده به قطر ۴ mm اندازه گیری شود با این فرض تخمین بزنید که شبکه های ۲ و ۳ به فاصله ۱ mm از هم و در اختلاف پتانسیل  $V = 100$  باشند.

### ۳.۸ امواج شوک اکوستیکی یونی

هرگاه یک هواپیمای جت سریعتر از صوت حرکت کند یک موج شوک ایجاد خواهد کرد. این پدیده اساساً یک پدیده غیرخطی است زیرا هنگامی که موج کوچک است و شروع به نمو می کند دوره ای وجود ندارد. سرعت هواپیمای جت بیشتر از سرعت امواج در هواست و در نتیجه محیط ناشسته تا قبل از برخورد موج بزرگ شوک با آن نمی تواند از طریق علامتهای پیشرو «آگاه» شود. در امواج شوک هیدرودینامیکی برخورد ها غالب هستند. امواج شوک در پلاسما نیز وجود دارند حتی اگر برخوردی نباشد. وقتی زمین از پلاسمای بین سیاره ای عبور می کند و یک میدان مغناطیسی دو قطبی را با خود می کشد یک شوک مغناطیسی یا «شوکی کمائی» تولید می کند. در اینجا مثالی ساده تر را بررسی می کنیم که عبارت است از موج شوک یک بعدی بی برخورد که از یک موج یونی بزرگ دامنه به وجود می آید.



شکل ۵.۸ توزیع پتانسیل نوعی در یک موج شوک اکوستیکی یونی. موج به سمت چپ حرکت می‌کند و در نتیجه جریان یونها در چارچوب موج از سمت چپ و با سرعت  $u_0$  به سمت موج است.

### ۱.۳.۸ پتانسیل ساگدیف

شکل ۵.۸ نمایه پتانسیل ایده‌آلی یک موج شوک اکوستیکی یونی را نشان می‌دهد. دلیل چنین شکلی به زودی معلوم خواهد شد. موج با سرعت  $u_0$  به سمت چپ حرکت می‌کند. اگر به چارچوبی که با موج حرکت می‌کند برویم، تابع  $\phi(x)$  نسبت به زمان ثابت می‌شود و جریانی از پلاسما را مشاهده خواهیم کرد که از سمت چپ با سرعت  $u_0$  با موج برخورد می‌کند. برای سادگی فرض کنید  $T_i$  صفر باشد که در نتیجه تمام یونها با سرعت یکسان  $u_0$  فرود می‌آیند، و فرض کنید الکترونها ماکسولی باشند. چون شوک بسیار کندتر از سرعت گرمایی الکترونی حرکت می‌کند، می‌توان از انتقال مربوط به مرکز سرعت این ماکسولی چشمپوشی کرد. سرعت یونها در موج شوک، بنابه پایستگی انرژی، برابر است با

$$u = \left( u_0^2 - \frac{\gamma e \phi}{M} \right)^{1/2} \quad (23.8)$$

اگر  $n_0$  چگالی پلاسمای ناآشفته باشد، چگال یون در شوک برابر است با

$$n_i = \frac{n_0 u_0}{u} = n_0 \left( 1 - \frac{\gamma e \phi}{M u_0^2} \right)^{-1/2} \quad (24.8)$$

چگالی الکترون از رابطه بولتزمن تعیین می‌شود. آنگاه از معادله پواسون داریم

$$\epsilon_0 \frac{d^2 \phi}{dx^2} = e(n_e - n_i) = e n_0 \left[ \exp\left(\frac{e \phi}{K T_e}\right) - \left( 1 - \frac{\gamma e \phi}{M u_0^2} \right)^{-1/2} \right] \quad (25.8)$$

این همان معادله‌ای است که برای غلاف داشتیم (معادله ۶.۸). موج شوک چیزی بیش از یک غلاف متحرک در داخل پلاسما نیست. اکنون متغیرهای بی‌بعد را تعریف می‌کنیم

$$\chi \equiv + \frac{e\phi}{KT_e} \quad \xi \equiv \frac{x}{\lambda_D} \quad \mathcal{M} \equiv \frac{u_0}{(KT_e/M)^{1/2}} \quad (26.8)$$

دقت کنید که در تعریف  $\chi$  علامت را تغییر داده‌ایم تا در این مسئله، و همچنین در مسئله غلاف، مثبت باشد. کمیت  $\mathcal{M}$  عدد ماخ شوک نامیده می‌شود. اکنون می‌توان معادله ۲۵.۸ را به صورت زیر نوشت

$$\frac{d^2\chi}{d\xi^2} = e^{\chi} - \left(1 - \frac{\chi}{\mathcal{M}^2}\right)^{-1/2} \equiv -\frac{dV(\chi)}{d\chi} \quad (27.8)$$

تفاوت این معادله با معادله غلاف ۸.۸ تنها در تغییر علامت  $\chi$  است.

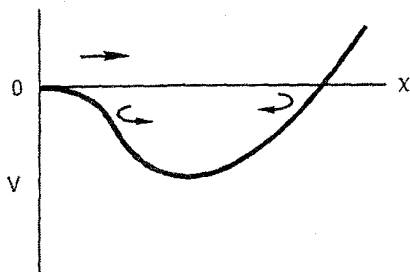
رفتار جواب معادله ۲۷.۸ توسط ر. ز. ساگدییف از مقایسه با نوسانگر در چاه پتانسیل روشن شد. جابه‌جایی  $x$  نوسانگر تحت نیروی  $-m dV(x)/dx$  با معادله زیر داده می‌شود

$$d^2x/dt^2 = -dV/dx \quad (28.8)$$

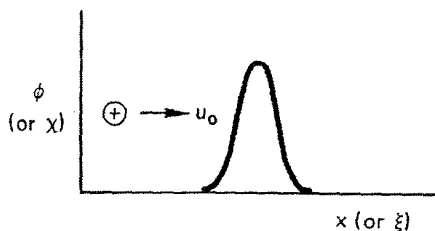
اگر طرف راست معادله ۲۷.۸ را به صورت  $-dV/d\chi$  تعریف کنیم معادله یک نوسانگر را به دست می‌آوریم که در آن پتانسیل  $\chi$  به جای  $x$  و  $d/dt$  به جای  $d/d\xi$  نشسته است. شبه پتانسیل  $V(\chi)$  را گاهی پتانسیل ساگدییف می‌نامند. تابع  $V(\chi)$  را می‌توان با انتگرال‌گیری از معادله ۲۷.۸ با شرایط مرزی  $V(\chi) = 0$  در  $\chi = 0$  به دست آورد:

$$V(\chi) = 1 - e^{\chi} + \mathcal{M}^2 \left[ 1 - \left(1 - \frac{\chi}{\mathcal{M}^2}\right)^{1/2} \right] \quad (29.8)$$

هرگاه مقدار  $\mathcal{M}$  در ناحیه خاصی قرار گیرد نمودار تابع بالا همانند شکل ۶.۸ خواهد بود. اگر این یک چاه واقعی بود، ذره‌ای که از سمت چپ وارد آن می‌شد به سمت راست چاه می‌رفت ( $x > 0$ )، آنگاه بازتاب پیدا می‌کرد و سپس به  $x = 0$  باز می‌گشت و به این ترتیب یک گذر منفرد انجام می‌داد. همان‌طور که در شکل ۷.۸ نشان داده شده است، یک شبه‌ذره به‌طور مشابه یک سفر منفرد به  $\chi$  مثبت انجام می‌دهد و به  $\chi = 0$  باز می‌گردد. چنین تپی سولیتون نامیده می‌شود؛ این یک آشفستگی چگالی و پتانسیل است که در شکل ۷.۸ با سرعت  $u$  به سمت چپ حرکت می‌کند.



شکل ۶.۸ پتانسیل ساگدیف  $V(x)$ . پیکان بالایی مسیر شبه ذره توصیف‌کننده سولیتون است؛ این شبه‌ذره در سمت راست بازتاب می‌یابد و باز می‌گردد. پیکانهای پایینی حرکت شبه ذره‌ای را نمایش می‌دهند که انرژی از دست داده است و در چاه پتانسیل به دام افتاده است. واچش به عقب و جلو توصیفگر نوسانهای در پشت جبهه شوک است.



شکل ۷.۸ پتانسیل در سولیتونی که به سمت چپ حرکت می‌کند.

اما اگر ذره در چاه متحمل اتلاف انرژی شود، هرگز به  $x = 0$  باز نخواهد گشت و حول یک مقدار مثبت  $x$  نوسان (زمانی) انجام می‌دهد. به‌طور مشابه، یک اتلاف کوچک موجب نوسان (فضایی) پتانسیل موج شوک حول یک مقدار مثبت  $\phi$  خواهد شد. این دقیقاً رفتاری است که در شکل ۵.۸ نشان داده شده است. در واقع برای این امر نیازی به اتلاف نیست؛ بازتاب یونها از جبهه شوک دارای همین اثر خواهد بود. برای درک این موضوع، فرض کنید یونها یک پهن‌شدگی گرمایی کوچک در انرژی داشته باشند و ارتفاع  $e\phi$ ی جبهه موج دقیقاً به مقدار کافی بزرگ باشد که بعضی از یونها را به سمت چپ بازگرداند در حالی که بقیه یونها با عبور از تپه پتانسیل به سمت راست می‌روند. یونهای بازتاب‌یافته موجب افزایش چگالی یونی در ناحیه مخالف جریان در سمت چپ جبهه موج می‌شوند (شکل ۵.۸). این به معنای کاهش کمیت زیر است

$$\chi' = \frac{1}{n_0} \int_0^{\xi} (n_e - n_i) d\xi, \quad (30.8)$$



چون  $\chi'$  مانسته  $dx/dt$  در مسئله نوسانگر است، نوسانگر فرضی ما سرعت از دست می‌دهد و در چاه پتانسیل شکل ۶.۸ به دام می‌افتد.

### ۲.۳.۸ عددهای ماخ بحرانی

جوابهای از نوع سولیتون یا از نوع قطار موج تنها برای گستره‌ای از مقادیر  $M$  وجود دارند. حد پایین  $M$  از این شرط داده می‌شود که  $V(\chi)$  به جای تپه پتانسیل چاه پتانسیل باشد. از بسط معادله ۲۹.۸ به ازای  $\chi \ll 1$  داریم

$$\frac{1}{3}\chi^2 - (\chi^2/2M^2) > 0 \quad M^2 > 1 \quad (31.8)$$

این رابطه هم از نظر فیزیکی و هم از نظر ریاضی دقیقاً همانند معیار بوهم برای وجود غلاف (معادله ۱۱.۸) است.

حد بالای  $M$  از این شرط معلوم می‌شود که تابع  $V(\chi)$  در شکل ۶.۸ باید محور  $\chi$  را در  $\chi > 0$  قطع کند؛ در غیر این وضعیت، ذره مجازی بازتاب نخواهد داشت و پتانسیل به طور نامحدود افزایش پیدا می‌کند. بدین ترتیب، از معادله ۲۹.۸ به ازای  $x > 0$  باید داشته باشیم

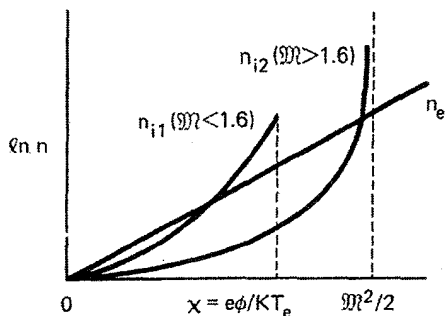
$$e^x - 1 < M^2 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{2\chi}{M^2} \right)^{1/2} \right] \quad (32.8)$$

اگر از عدد ماخ بحرانی پایین بگذریم ( $M > 1$ ) طرف چپ نامساوی بالا، که انتگرال چگالی الکترون از صفر تا  $\chi$  را نمایش می‌دهد، در ابتدا از طرف راست نامساوی، که نمایش دهنده چگالی یون است، بزرگتر است. اگر  $M^2$  بیش از اندازه بزرگ نباشد، با افزایش  $\chi$  طرف راست می‌تواند مساوی با طرف چپ شود. اما به علت وجود ریشه دوم، بیشترین مقداری که  $\chi$  می‌تواند داشته باشد  $M^2/2$  است. دلیل این امر آن است که  $e\phi$  نمی‌تواند از  $\frac{1}{2}Mu_0^2$  بگذرد؛ در غیر این وضعیت، یونها در ناحیه همسو با جریان باید از پلاسما حذف شوند. با قرار دادن بزرگترین  $\chi$  در معادله ۳۲.۸ داریم

$$M < 1.6 \quad \text{یا} \quad \exp(M^2/2) - 1 < M^2 \quad (33.8)$$

این عدد ماخ بحرانی بالاست. بنابراین، امواج شوک در یک پلاسمای سرد یونی تنها به ازای  $1 < M < 1.6$  وجود خواهند داشت.

وضعیت فیزیکی را می‌توانیم، همچون مورد غلافها، به بهترین وجه با نمودار  $n_e$  و  $n_i$  برحسب

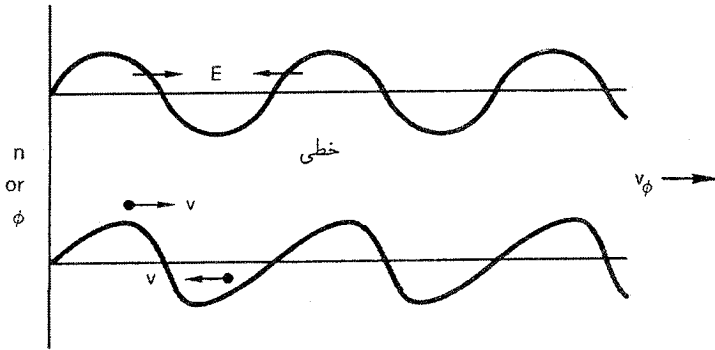


شکل ۸.۸ تغییرات (لگاریتمی) چگالی یون و الکترون نسبت به پتانسیل بهنجار شده  $\chi$  در یک سولیتون چگالی یون برای دو مورد عدد ماخ بزرگتر و کوچکتر از ۱٫۶ ترسیم شده است.

$\chi$  توضیح دهیم (شکل ۸.۸). ملاحظه می شود این نمودار با شکل ۴.۸ تفاوت دارد زیرا علامت  $\phi$  تغییر کرده است. از آنجا که اکنون یونها به جای شتاب گرفتن کند می شوند  $n_i$  در  $\chi = M^2/2$  به بینهایت میل می کند. عدد ماخ بحرانی پایین تضمین می کند که در  $\chi$  کوچک منحنی  $n_i$  در زیر منحنی  $n_e$  قرار می گیرد به طوری که پتانسیل  $\phi(x)$  با علامت درست برای انحنایش شروع می شود. هنگامی که منحنی  $n_{i1}$  منحنی  $n_e$  را قطع کند، سولیتون  $\phi(x)$  (شکل ۷.۸) دارای یک نقطه عطف خواهد بود. بالاخره، هرگاه  $\chi$  به اندازه کافی بزرگ باشد تا مساحت های زیر منحنی های  $n_e$  و  $n_i$  باهم مساوی شوند سولیتون به قله می رسد، و وقتی  $\chi$  به صفر بازمی گردد منحنی های  $n_{i1}$  و  $n_e$  روی خود برگشت می کنند. تساوی مساحتها تضمین می کند که بار خالص سولیتون صفر است؛ بنابراین، میدان الکتریکی در خارج وجود ندارد. اگر  $M$  بزرگتر از ۱٫۶ باشد منحنی  $n_{i2}$  را خواهیم داشت که در آن حتی اگر  $\chi$  به ماکسیمم مقدار خود یعنی  $M^2/2$  برسد باز هم سطح زیر منحنی بسیار کوچک خواهد بود.

### ۳.۳.۸ تغییر شیب موج

اگر یک موج یونی در پلاسمای یون سرد انتشار یابد دارای سرعت فازی خواهد بود که از معادله ۴۲.۴ داده می شود و با  $M = 1$  متناظر است در این مورد چگونه می توان با  $M > 1$  شوک تولید کرد؟ باید یادآوری کنیم که معادله ۴۲.۴ یک نتیجه خطی است که تنها در دامنه های کوچک اعتبار دارد. یک موج یونی با افزایش دامنه سرعت می گیرد و شکل آن نیز از سینوسی به دندانه ای با شیب تندتری در لبه جلویی تغییر می یابد (شکل ۹.۸). علت آن است که میدان الکتریکی موج



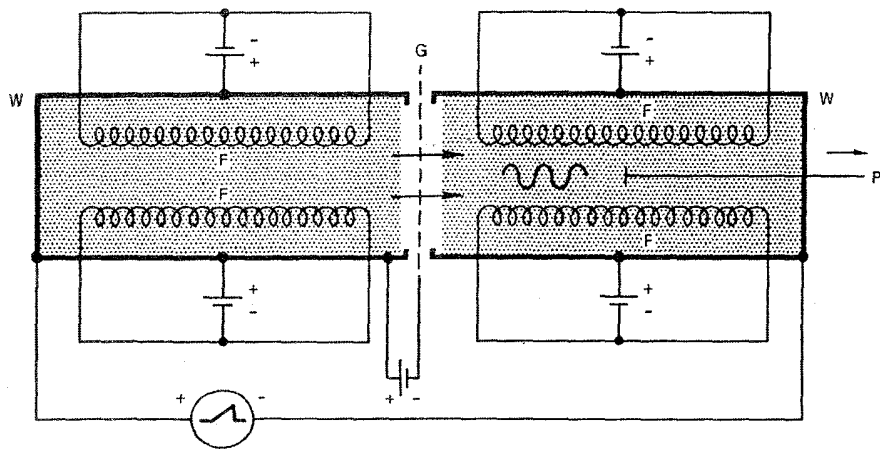
غیرخطی

شکل ۹.۸ یک موج یونی با دامنه بزرگ طوری شیب پیدا می‌کند که لبه جلویی آن دارای شیب تندتری نسبت به لبه عقبی می‌شود.

به یونها شتاب می‌دهد. در شکل ۹.۸، یونهای واقع در قله توزیع پتانسیل نسبت به یونهای واقع در گودی آن دارای سرعت بیشتری در راستای  $v_\phi$  هستند، زیرا اندکی قبل با عبور موج از آنها یک دوره شتابگیری را متحمل شده‌اند. این اختلاف سرعت در نظریه خطی منظور می‌شود اما جابه‌جایی حاصل از آن به حساب آورده نمی‌شود. در نظریه غیرخطی، به آسانی مشاهده می‌شود که یونهای واقع در قله به سمت راست انتقال می‌یابند اما آنهایی که در گودی هستند به سمت چپ انتقال می‌یابند، و بدین ترتیب، شکل موج تغییر شیب پیدا می‌کند. چون اختلال چگالی همفاز با پتانسیل است، تعداد یونهایی که به سمت راست شتاب می‌گیرند بیشتر از آنهایی است که به سمت چپ شتاب می‌یابند و موج باعث شارش خالص جرم در جهت انتشار می‌شود. این امر موجب می‌گردد سرعت موج از سرعت اکوستیکی در پلاسمای ناآشفته بیشتر شود، و از این رو  $M$  بزرگتر از واحد می‌شود.

#### ۴.۳.۸ مشاهدات تجربی

امواج شوک اکوستیکی یونی به صورت نشان داده شده در شکل ۵.۸ توسط ر. ج. تیلور، د. ر. بیکر و ه. ایکزی تولید شده‌اند. برای انجام این کار، یک چشمه جدید پلاسمای یعنی ابزار DP (یا پلاسمای دوتایی) اختراع شد. طرح کلی نحوه کارکرد آن در شکل ۱۰.۸ نشان داده شده است. پلاسماهای یکسان با تخلیه بین رشته‌های F و دیواره‌های W در دو اتاقک که به طور الکتریکی منزوی شده‌اند ایجاد می‌شوند. شبکه G که دارای پیش‌ولت منفی است و با دفع الکترون‌ها یک غلاف یونی در دو طرف خود به وجود می‌آورد پلاسماهای را از هم جدا می‌کند. یک تپ ولتاژ که معمولاً به شکل شبیدار



شکل ۱۰.۸ طرح کلی یک ماشین DP که در آن امواج شوک اکوستیکی یونی تولید و آشکارسازی می‌شوند.

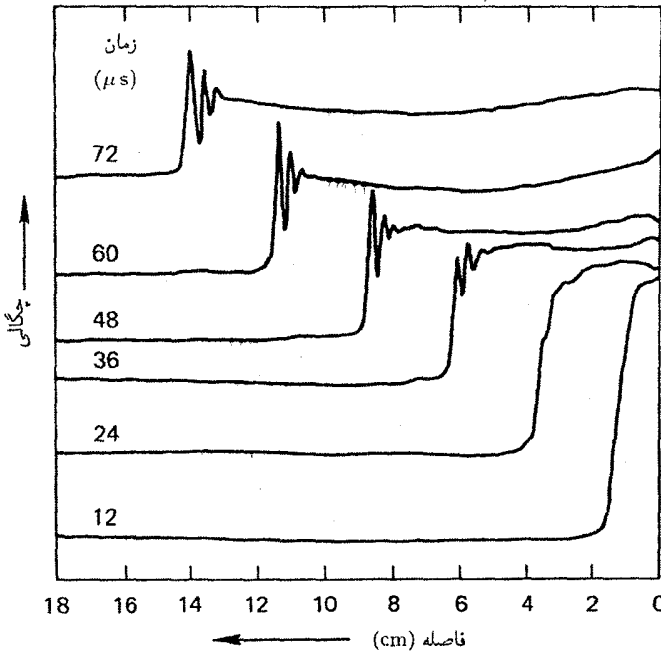
است بین دو اتاقک اعمال می‌شود. این ولتاژ باعث می‌شود که یونهای یک اتاقک به اتاقک دیگر جریان پیدا کنند و یک موج تخت بزرگ دامنه را برانگیزند. این موج با یک کاوه متحرک یا تحلیلگر سرعت ذره P آشکارسازی می‌شود. شکل ۱۱.۸ اندازه‌گیرهای افت‌وخیز چگالی در موج شوک را به صورت تابعی از زمان و مکان کاوه نشان می‌دهد. مشاهده می‌کنیم که جبهه موج سراسیمه پیدا می‌کند و آنگاه به موج شوک با شکل کلاسیکی تبدیل می‌شود. میرایی نوسانها از برخوردها ناشی می‌شود.

### مسئله

۵.۸ ماکسیمم سرعت ممکن یک موج شوک اکوستیکی یونی را در آزمایشی همانند آنچه در شکل ۱۰.۸ نشان داده شده است تعیین کنید. فرض کنید  $T_e = 1.5 \text{ eV}$ ،  $T_i = 2 \text{ eV}$  و گاز آرگون باشد. ماکسیمم ممکن دامنه موج شوک برحسب ولت چقدر است؟

### ۵.۳.۸ لایه‌های دوتایی

یک پدیده مرتبط با شوکهای اکوستیکی یونی و غلافها پدیده لایه دوتایی است. این پدیده یک جهشی پتانسیل جایگزیده است که نه منتشر می‌شود نه به هیچ مرزی متصل است، و اعتقاد بر این است که در یون سپهر به طور طبیعی رخ می‌دهد. علت این نامگذاری وجود لایه‌های متوالی بار



شکل ۱۱.۸ اندازه‌گیریهای توزیع چگالی در موج شوک در زمانهای مختلف که نشان می‌دهند چگونه صورت مشخصه موج شکل ۵.۸ توسعه می‌یابد.

خالص مثبت و بار خالص منفی است که برای ایجاد پله  $\phi(x)$  ضرورت دارند. چنین پله‌ای تنها در صورتی می‌تواند در فضا پایا بماند که یک جریان پلاسما وجود داشته باشد تا جبهه شوک را طوری انتقال دوپلری دهد که سرعت آن در چارچوب آزمایشگاه به صفر برسد، یا آن که تابعهای توزیع تراکسیل شده و بازتاب‌یافته یونی و الکترونی در دو طرف ناپیوستگی مخصوصاً طوری تنظیم شده باشند تا این پایایی را ممکن سازند. لایه‌های دوتایی در ادوات «پلاسمای سه‌تایی» در آزمایشگاه تولید شده‌اند؛ این ادوات مشابه با ماشین DP در شکل ۱۰.۸ هستند با این تفاوت که اتاقک آزمایشی سومی (بدون رشته) بین دو اتاقک چشمه قرار داده شده است. با تنظیم پتانسیلهای نسبی سه اتاقک، که توسط شبکه‌ها منزوی شده‌اند، می‌توان جریانی از الکترون یا یون به اتاقک وسطی سرازیر کرد تا یک لایه دوتایی تشکیل گردد. لایه‌های دوتایی در وضعیتهای طبیعی، برخلاف مشابه‌سازیهای آزمایشگاه که Bی صفر یا یکنواخت دارند، احتمالاً در جایی ایجاد می‌شوند که گرادینتهای میدان مغناطیسی وجود داشته باشند. در این مورد، نیروی  $\mu \nabla B$  (معادله ۳۸.۲) می‌تواند در جایگزین کردن لایه دوتایی در مکانهایی دور از تمام مرزها اهمیت زیادی داشته باشد.

درواقع سد گرمایی در رآکتورهای آینه‌ای دو مرحله‌ای مثالی از لایهٔ دوتایی با به‌دام‌اندازی قوی مغناطیسی است.

## ۴.۸ نیروی محرکهٔ وزنی

امواج نور فشار تابشی اعمال می‌کنند که معمولاً بسیار ضعیف است و به سختی آشکارسازی می‌شود. حتی در مثال پیچیدهٔ دم یک دنباله‌دار، که توسط فشار نور خورشید تشکیل می‌شود، اثر اضافی جریان ذراتی که از خورشید گسیل می‌شوند اثر فشار تابش را مخدوش می‌کند. اما با استفاده از باریکه‌های پرتوان میکروموج یا لیزری برای گرم کردن یا محبوس کردن پلاسما، فشار تابش می‌تواند تا چند صد هزار اتمسفر برسد! هرگاه این نیرو به پلاسمایی اعمال شود به نحو نسبتاً مبهمی با ذرات جفت می‌شود و آن را نیروی محرکهٔ وزنی می‌نامند. بسیاری از پدیده‌های غیرخطی را می‌توان براساس نیروی محرکهٔ وزنی به‌سادگی توضیح داد.

آسان‌ترین راه محاسبهٔ این نیروی غیرخطی در نظر گرفتن حرکت الکترون در میدانهای نوسانی  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{B}$  یک موج است. از میدانهای dc  $\mathbf{E}_0$  و  $\mathbf{B}_0$  صرف‌نظر می‌کنیم. معادلهٔ حرکت الکترون عبارت است از

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e[\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})] \quad (34.8)$$

این معادله تنها در صورتی دقیق است که  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{B}$  در مکان لحظه‌ای الکترون محاسبه شوند. بخشی از غیرخطی بودن از جملهٔ  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  ناشی می‌شود که از مرتبهٔ دوم است زیرا در حالت تعادل  $\mathbf{v}$  و  $\mathbf{B}$  هر دو صفر هستند، و در نتیجه این جمله از  $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_1$ ، که در آن  $\mathbf{v}_1$  و  $\mathbf{B}_1$  مقادیر نظریهٔ خطی هستند، بزرگتر نیست. همان‌طور که خواهیم دید، بخش دیگر غیرخطی بودن از محاسبهٔ  $\mathbf{E}$  در مکان واقعی ذره به‌جای مکان اولیهٔ آن ناشی می‌شود. فرض کنید میدان الکتریکی موج به‌صورت زیر باشد

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) \cos \omega t \quad (35.8)$$

که در آن  $\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$  متضمن وابستگی فضایی است. در مرتبهٔ اول می‌توانیم از جملهٔ  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  در معادلهٔ ۳۴.۸ صرف‌نظر کنیم و  $\mathbf{E}$  را در مکان اولیهٔ  $\mathbf{r}_0$  حساب کنیم. داریم

$$m \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = -e\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \quad (36.8)$$

$$\mathbf{v}_1 = -(e/m\omega)\mathbf{E}_s \sin \omega t = d\mathbf{r}_1/dt \quad (37.8)$$

$$\delta \mathbf{r}_1 = (e/m\omega^2) \mathbf{E}_s \cos \omega t \quad (38.8)$$

در یک محاسبه غیرخطی باید توجه داشت که نمی‌توان ابتدا  $e^{i\omega t}$  را نوشت و بعداً قسمت حقیقی آن را گرفت. علت آن است که در نظریه غیرخطی حاصل ضرب عاملهای نوسانی ظاهر می‌شوند و می‌دانیم که عملیات ضرب و گرفتن قسمت حقیقی جابه‌جایی‌پذیر نیستند. در مرتبه دوم،  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  را حول  $\mathbf{r}_0$  بسط می‌دهیم:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) + (\delta \mathbf{r}_1 \cdot \nabla) \mathbf{E}|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} + \dots \quad (39.8)$$

اکنون باید جمله  $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_1$  را اضافه کنیم که در آن  $\mathbf{B}_1$  از معادلهٔ ماکسول داده می‌شود:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t \\ \mathbf{B}_1 &= -(1/\omega) \nabla \times \mathbf{E}_s|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} \sin \omega t \end{aligned} \quad (40.8)$$

بنابراین، قسمت مرتبه دوم معادلهٔ ۳۴.۸ عبارت است از

$$m \, d\mathbf{v}_1/dt = -e[(\delta \mathbf{r}_1 \cdot \nabla) \mathbf{E} + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_1] \quad (41.8)$$

با قرار دادن معادلات ۳۷.۸، ۳۸.۸ و ۴۰.۸ در ۴۱.۸ و میانگین‌گیری روی زمان، داریم

$$m \left\langle \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \right\rangle = -\frac{e^2}{m\omega^2} \frac{1}{2} [(\mathbf{E}_s \cdot \nabla) \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_s \times (\nabla \times \mathbf{E}_s)] = \mathbf{f}_{NL} \quad (42.8)$$

در اینجا از  $\langle \sin^2 \omega t \rangle = \langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2$  استفاده کرده‌ایم. ضرب خارجی دوگانه را می‌توان به صورت حاصل جمع دو جمله نوشت که یکی از آنها جمله  $(\mathbf{E}_s \cdot \nabla) \mathbf{E}_s$  را حذف می‌کند. آنچه باقی می‌ماند عبارت است از

$$\mathbf{f}_{NL} = -\frac{1}{4} \frac{e^2}{m\omega^2} \nabla E_s^2 \quad (43.8)$$

این نیروی غیرخطی مؤثر است که بر الکترون وارد می‌شود. این نیرو در هر  $m^2$  برابر با حاصلضرب چگالی الکترون  $n_0$  و  $\mathbf{f}_{NL}$  است که می‌توان آن را برحسب  $\omega_p^2$  نوشت. چون  $E_s^2 = 2 \langle E^2 \rangle$ ، سرانجام می‌توان فرمول نیروی محرکهٔ وزنی را به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{F}_{NL} = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \nabla \frac{\langle \epsilon_0 E^2 \rangle}{2} \quad (44.8)$$

اگر موج الکترومغناطیسی باشد جمله دوم معادله ۴۲.۸ غالب است و سازوکار فیزیکی برای  $\mathbf{F}_{NL}$  به‌قرار زیر است. الکترونها در راستای  $\mathbf{E}$  نوسان می‌کنند اما میدان مغناطیسی موج مدار آنها را وایچیده می‌کند. یعنی، نیروی لورنتس  $-\mathbf{e}\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  الکترونها را در جهت  $\mathbf{k}$  می‌کشد (زیرا  $\mathbf{v}$  در جهت  $\mathbf{E}$  قرار دارد، و  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  در جهت  $\mathbf{k}$  واقع می‌شود). فازهای  $\mathbf{v}$  و  $\mathbf{B}$  طوری هستند که میانگین حرکت در یک نوسان صفر نمی‌شود بلکه یک سوق دیرپا در امتداد  $\mathbf{k}$  وجود خواهد داشت. اگر موج دارای دامنهٔ یکنواخت باشد برای حفظ این سوق نیازی به نیرو نیست؛ اما اگر دامنهٔ موج تغییر کند، الکترونها در ناحیه‌های دامنهٔ کوچک انباشته می‌شوند و غلبه بر بار فضایی مستلزم نیرو است. به‌همین دلیل، نیروی مؤثر  $\mathbf{F}_{NL}$  با گرادیان  $\langle E^2 \rangle$  متناسب است. چون سوق یکسانی برای هر الکترون داریم،  $\mathbf{F}_{NL}$  با چگالی متناسب است — نتیجه عامل  $\omega_p^2/\omega^2$  در معادله ۴۴.۸ است.

اگر موج الکتروستاتیک باشد جمله اول معادله ۴۲.۸ غالب است. در این مورد، سازوکار فیزیکی به‌طور ساده عبارت است از آن که الکترون نوسان‌کننده در راستای  $\mathbf{E}$  در نیم‌دوره‌ای که از ناحیهٔ میدان قوی به ناحیهٔ میدان ضعیف حرکت می‌کند مسافت بیشتری نسبت به حالت عکس می‌پیماید، و از این رو یک سوق برآیند داریم.

با آن که  $\mathbf{F}_{NL}$  اساساً بر الکترونها وارد می‌شود اما نهایتاً به‌یونها انتقال می‌یابد زیرا این یک اثر کم‌بسامد یا dc است. وقتی الکترونها توسط  $\mathbf{F}_{NL}$  کنار هم جمع می‌شوند میدان تفکیک بار  $\mathbf{E}_{cs}$  ایجاد می‌شود. نیروی کل وارد بر الکترونها برابر است با

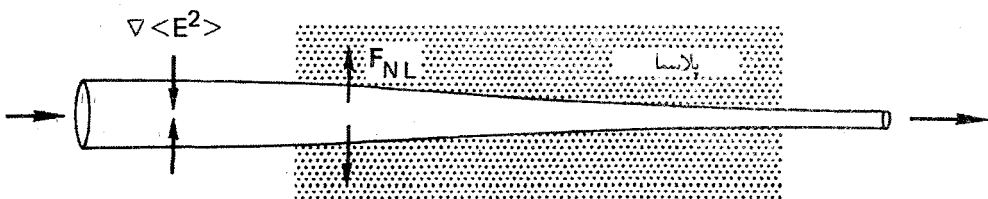
$$\mathbf{F}_e = -e\mathbf{E}_{cs} + \mathbf{F}_{NL} \quad (۴۵.۸)$$

چون نیروی محرکهٔ وزنی وارد بر یونها به مقدار  $\Omega_p^2/\omega_p^2 = m/M$  کوچکتر است، نیروی وارد بر سیال یونی تقریباً به‌صورت زیر خواهد بود

$$\mathbf{F}_i = e\mathbf{E}_{cs} \quad (۴۶.۸)$$

از جمع دو معادلهٔ اخیر در می‌یابیم که نیروی وارد بر پلاسما  $\mathbf{F}_{NL}$  است. اثر مستقیم  $\mathbf{F}_{NL}$  خودکانونی شدن نور لیزر در پلاسماست. در شکل ۱۲.۸ مشاهده می‌کنیم که یک باریکهٔ لیزری با قطر متناهی یک نیروی محرکهٔ وزنی با راستای شعاعی در پلاسما به‌وجود می‌آورد. این نیرو پلاسما را از باریکه خارج می‌کند، و از این رو در داخل باریکه مقدار  $\omega_p$  کمتر و مقدار ثابت دی‌الکتریک  $\epsilon$  بیشتر از مقادیر متناظر در خارج باریکه است. بنابراین، پلاسما همچون یک عدسی محدب عمل می‌کند و باریکه را در قطر کوچکتری کانونی می‌سازد.





شکل ۱۲.۸ خودکانونی شدن باریکه لیزری از نیروی محرکه وزنی ناشی می‌شود.

## مسائل

۶.۸ یک باریکه لیزری با توان یک تراوات (۱ TW) روی لکه‌ای به قطر  $50 \mu\text{m}$  از یک هدف جامد کانونی شده است. باریکه پلاسمایی تولید و گرم می‌کند، و پلازما می‌خواهد منبسط شود. نیروی محرکه وزنی باریکه، که اساساً روی ناحیه چگالی بحرانی ( $n = n_c$  با  $\omega = \omega_p$ ) عمل می‌کند، پلازما را به عقب می‌راند و یک «تغییر نمایه» که تغییر ناگهانی چگالی در لایه بحرانی است ایجاد می‌کند.

(الف) نیروی محرکه وزنی چه مقدار فشار (برحسب  $\text{N/m}^2$  و  $\text{bf/in}^2$ ) وارد می‌کند؟ (راهنمایی: توجه کنید که  $F_{NL}$  دارای ابعاد  $\text{N/m}^2$  است و گرادیان طول حذف می‌شود. برای محاسبه  $\langle E^2 \rangle$  فرض کنید که  $\langle E^2 \rangle$  همان مقداری را که در خلا دارد داشته باشد، و شار پوینتینگ ۱ TW را مساوی با حاصل ضرب چگالی انرژی باریکه و سرعت گروه آن در خلا قرار دهید.)

(ب) نیروی کل وارد شده (برحسب تن) از طرف باریکه بر پلازما چقدر است؟

(ج) اگر  $T_i = T_e = 1 \text{ keV}$ ، اندازه جهش چگالی که فشار نور می‌تواند تأمین کند چقدر است؟  
۷.۸ خودکانونی کردن هنگامی رخ می‌دهد که یک باریکه لیزری با تقارن استوانه‌ای و بسامد  $\omega$  در پلاسمایی منتشر شود که کم چگالی است، یعنی چگالی به صورت زیر است

$$n < n_c \equiv \epsilon_0 m \omega^2 / e^2$$

در حالت پایا، نمایه شدت باریکه و افت چگالی که باریکه ایجاد می‌کند (شکل ۱۲.۸) با موازنه نیرو به هم مرتبط می‌گردند. چشمپوشی از گرمایش پلازما (ثابت  $KT \equiv KT_e + KT_i$ ) رابطه زیر را ثابت کنید

$$n = n_0 e^{-\epsilon_0 \langle E^2 \rangle / 2n_c KT} \equiv n_0 e^{-\alpha(r)}$$

کمیت  $\alpha$  (°) اندازه ارزش نسبی فشار محرکه وزنی به فشار پلاسماست.

## ۵.۸ ناپایداریهای پارامتری

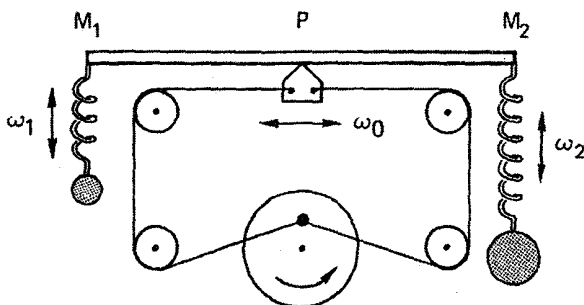
برهمکنشهای غیرخطی موج-موج که از همه کاملتر بررسی شده‌اند «ناپایداریهای پارامتری» نام دارند، این نامگذاری از شباهت با تقویت‌کننده‌های پارامتری است که از ابزارهای مشهور در مهندسی برق هستند. یک دلیل برای درک نسبتاً خوب این موضوع آن است که نظریهٔ مزبور اساساً خطی است اما خطی بودن حول تعادل نوسانی است.

### ۱.۵.۸ نوسانگرهای جفت شده

الگوی مکانیکی شکل ۱۳.۸ را در نظر بگیرید که در آن دو نوسانگر  $M_1$  و  $M_2$  به میلهٔ سوارشده بروی یک محور جفت شده‌اند. محور  $P$  با بسامد  $\omega_0$  به عقب و جلو می‌لغزد؛ نوسانگرها دارای بسامد طبیعی  $\omega_1$  و  $\omega_2$  هستند. واضح است که محور، در غیاب اصطکاک، تا وقتی  $M_1$  و  $M_2$  حرکت نکنند با مقاومتی مواجه نمی‌شود، علاوه براین، اگر  $P$  حرکت نکند و  $M_2$  را به حرکت در آوریم،  $M_1$  نیز حرکت خواهد کرد؛ اما چون  $\omega_2$  بسامد طبیعی  $M_1$  نیست دامنهٔ حرکت کوچک خواهد بود. اکنون فرض کنید  $P$  و  $M_2$  را به حرکت در آوریم. جابه‌جایی  $M_1$  با حاصلضرب جابه‌جایی  $M_2$  و طول بازوی اهرم متناسب خواهد بود و بنابراین به‌صورت زیر نسبت به زمان تغییر خواهد کرد

$$\cos \omega_2 t \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} \cos[(\omega_2 + \omega_0)t] + \frac{1}{2} \cos[(\omega_2 - \omega_0)t] \quad (۴۷.۸)$$

اگر  $\omega_1$  با  $\omega_2 + \omega_0$  یا  $\omega_2 - \omega_0$  مساوی باشد  $M_1$  به‌صورت تشدید می‌برانگیخته می‌شود و دامنهٔ آن بزرگ خواهد شد. وقتی که  $M_1$  شروع به نوسان می‌کند  $M_2$  نیز انرژی کسب می‌کند زیرا یکی از بسامدهای زنش  $\omega_1$  با  $\omega_0$  درست برابر با  $\omega_2$  است. بنابراین وقتی یکی از نوسانگرها شروع به



شکل ۱۳.۸ مانستهٔ مکانیکی ناپایداری پارامتری.

حرکت می‌کند نوسانگر دیگر نیز برانگیخته می‌شود و دستگاہ ناپایدار می‌گردد. روشن است که انرژی از «دهنده»  $P$  به دست می‌آید که هنگام مایل شدن میله با مقاومت مواجه می‌شود. اگر دهنده به اندازه کافی قوی باشد دامنه نوسان آن تحت تأثیر  $M_1$  و  $M_2$  قرار نمی‌گیرد؛ بنابراین، می‌توان ناپایداری را با یک نظریه خطی بررسی کرد. در پلاسما، نوسانگرهای  $P$ ،  $M_1$  و  $M_2$  می‌توانند انواع مختلف امواج باشند.

### ۲.۵.۸ جورشستگی بسامد

معادله حرکت نوسانگر هماهنگ ساده  $x_1$  عبارت است از

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_1^2 x_1 = 0 \quad (48.8)$$

در اینجا  $\omega_1$  بسامد تشدید نوسانگر است. اگر این نوسانگر با نیروی وابسته به زمانی که با حاصلضرب دامنه  $E_0$  مربوط به وادارنده، یا دمنده، و دامنه نوسانگر دوم  $x_2$  متناسب است به نوسان واداشته شود، معادله حرکت آن به صورت زیر خواهد بود

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_1^2 x_1 = c_1 x_2 E_0 \quad (49.8)$$

در اینجا  $c_1$  مقداری است ثابت که نشان‌دهنده شدت جفت‌شدگی است. معادله مشابهی برای  $x_2$  برقرار است:

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_2^2 x_2 = c_2 x_1 E_0 \quad (50.8)$$

فرض کنید  $x_1 = \bar{x}_1 \cos \omega t$ ،  $x_2 = \bar{x}_2 \cos \omega' t$  و  $E_0 = \bar{E}_0 \cos \omega_0 t$ . معادله ۵۰.۸ به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} (\omega_1^2 - \omega'^2) \bar{x}_2 \cos \omega' t &= c_2 \bar{E}_0 \bar{x}_1 \cos \omega_0 t \cos \omega t \\ &= c_2 \bar{E}_0 \bar{x}_1 \frac{1}{2} \{ \cos[(\omega_0 + \omega)t] + \cos[(\omega_0 - \omega)t] \} \end{aligned} \quad (51.8)$$

جملات وادارنده در طرف راست می‌توانند نوسانگرهای  $x_2$  را با بسامدهای زیر برانگیزند

$$\omega' = \omega_0 \pm \omega \quad (52.8)$$

در غیاب برهم‌کنشهای غیرخطی،  $x_2$  تنها می‌تواند دارای بسامد  $\omega_2$  باشد، و در نتیجه باید داشته باشیم  $\omega_2 = \omega'$ . اما جملات وادارنده می‌توانند موجب جابه‌جایی بسامد شوند به طوری که  $\omega'$  تنها تقریباً با  $\omega_2$  برابر است. به علاوه،  $\omega'$  می‌تواند مختلط باشد زیرا میرایی (که تا به حال برای سادگی از آن چشم پوشیده‌ایم) وجود دارد، یا (اگر ناپایداری وجود داشته باشد) نمو می‌تواند وجود داشته باشد.  $x_2$  در هر دو مورد یک نوسانگر با  $Q$ ی متناهی است و می‌تواند به گستره‌ای از بسامدهای حول  $\omega_2$  پاسخ دهد. اگر  $\omega$  کوچک باشد، از معادلهٔ ۵۲.۸ ملاحظه می‌کنیم که هر دو انتخاب  $\omega'$  می‌توانند در درون پهنای نوار  $x_2$  قرار گیرند و باید وجود دو نوسانگر،  $x_2(\omega_0 + \omega)$  و  $x_2(\omega_0 - \omega)$  را مجاز دانست. اکنون فرض می‌کنیم  $x_1 = \bar{x}_1 \cos \omega'' t$  و  $x_2 = \bar{x}_2 \cos[(\omega_0 \pm \omega)t]$  و آنها را در معادلهٔ ۴۹.۸ قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} & (\omega_1^2 - \omega''^2) \bar{x}_1 \cos \omega'' t \\ & = c_1 \bar{E}_0 \bar{x}_2 \frac{1}{\gamma} \{ \cos\{[\omega_0 + (\omega_0 \pm \omega)]t\} + \cos\{[\omega_0 - (\omega_0 \pm \omega)]t\} \} \\ & = c_1 \bar{E}_0 \bar{x}_2 \frac{1}{\gamma} \{ \cos[(2\omega_0 \pm \omega)t] + \cos \omega t \} \end{aligned} \quad (53.8)$$

جملات وادارنده می‌توانند نه تنها نوسان اصلی  $x_1(\omega)$  بلکه همچنین بسامدهای جدید  $2\omega_0 \pm \omega$  را برانگیزند. مورد  $|\omega_1| \gg |\omega_0|$  را در نظر می‌گیریم به طوری که  $2\omega_0 \pm \omega$  در خارج از گسترهٔ بسامدهایی که  $x_1$  می‌تواند به آنها پاسخ دهد قرار خواهد گرفت، و می‌توان از  $x_1(2\omega_0 \pm \omega)$  صرف‌نظر کرد. بنابراین، سه نوسانگر،  $x_1(\omega)$ ،  $x_2(\omega_0 - \omega)$  و  $x_2(\omega_0 + \omega)$  داریم که توسط معادلات ۴۹.۸ و ۵۰.۸ جفت شده‌اند:

$$\begin{aligned} & (\omega_1^2 - \omega^2) x_1(\omega) - c_1 E_0(\omega_0) [x_2(\omega_0 - \omega) + x_2(\omega_0 + \omega)] = 0 \\ & [\omega_1^2 - (\omega_0 - \omega)^2] x_2(\omega_0 - \omega) - c_2 E_0(\omega_0) x_1(\omega) = 0 \quad (54.8) \\ & [\omega_1^2 - (\omega_0 + \omega)^2] x_2(\omega_0 + \omega) - c_2 E_0(\omega_0) x_1(\omega) = 0 \end{aligned}$$

رابطهٔ پاشیدگی از مساوی صفر قرار دادن دترمینان ضرایب داده می‌شود:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \omega_1^2 & c_1 E_0 & c_1 E_0 \\ c_2 E_0 & (\omega_0 - \omega)^2 - \omega_1^2 & 0 \\ c_2 E_0 & 0 & (\omega_0 + \omega)^2 - \omega_1^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (55.8)$$

جوابی با  $\text{Im}(\omega) > 0$  نشان دهنده ناپایداری است.

برای انتقالهای کوچک بسامد و آهنگهای کوچک میرایی یا نمو، می‌توانیم  $\omega$  و  $\omega'$  را تقریباً مساوی با بسامدهای ناآشفته  $\omega_1$  و  $\omega_2$  بگیریم. آنگاه معادله ۵۲.۸ شرط جورشدگی بسامد را می‌دهد:

$$\omega_0 \approx \omega_2 \pm \omega_1 \quad (56.8)$$

هرگاه نوسانگرها امواج درون پلاسما باشند، باید  $\omega t$  را با  $\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  تعویض کرد. بنابراین، شرط جورشدگی طول موج زیر نیز وجود خواهد داشت

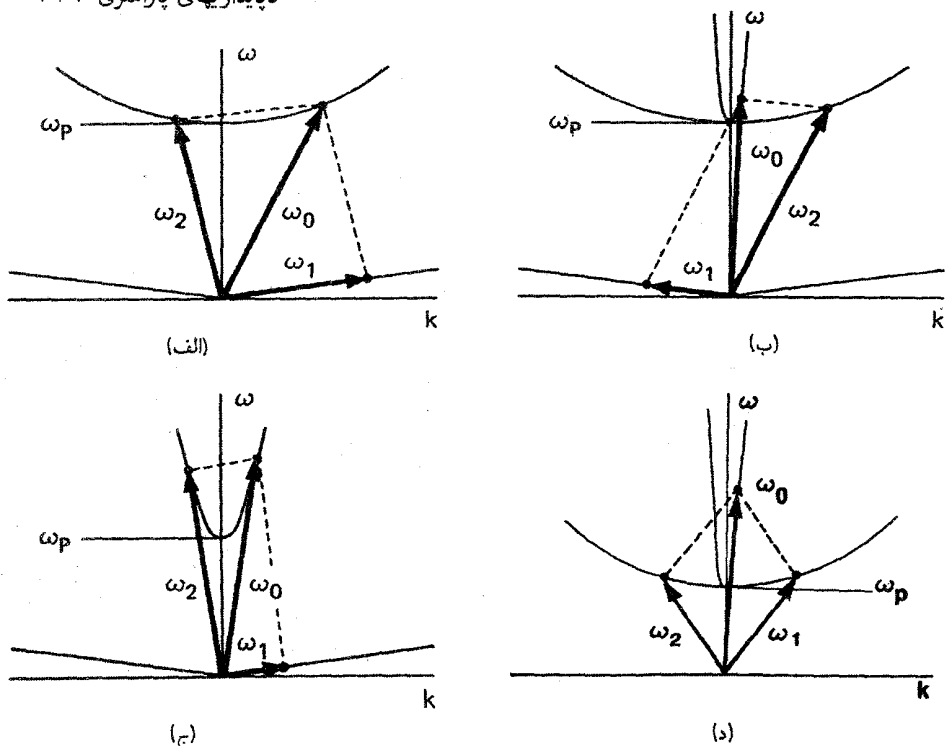
$$\mathbf{k}_0 \approx \mathbf{k}_2 \pm \mathbf{k}_1 \quad (57.8)$$

که توصیف‌کننده زندهای فضایی یعنی دوره‌مندی نقاط تداخل سازنده و ویرانگر در فضا است. دو شرط ۵۶.۸ و ۵۷.۸ را می‌توان به سادگی از مقایسه با مکانیک کوانتومی درک کرد. از ضرب رابطه اول در ثابت پلانک  $\hbar$  داریم

$$\hbar\omega_0 = \hbar\omega_2 \pm \hbar\omega_1 \quad (58.8)$$

برای مثال،  $E_0$  و  $x_2$  می‌توانند امواج الکترومغناطیسی باشند، و در نتیجه  $\hbar\omega_0$  و  $\hbar\omega_2$  انرژیهای فوتونی هستند. نوسانگر  $x_1$  می‌تواند یک موج لانگمویر، یا پلاسمون، با انرژی  $\hbar\omega_1$  باشد. معادله ۵۴.۸ در واقع بیانگر پایستگی انرژی است. به همین ترتیب، معادله ۵۳.۸ بیانگر پایستگی تکانه  $\hbar\mathbf{k}$  است. برای امواج پلاسما برقراری همزمان معادلات ۵۲.۸ و ۵۳.۸ در مسایل یک‌بعدی تنها برای ترکیبهای معینی از امواج ممکن است. روابط لازم به بهترین صورت در نمودار  $\omega - k$  (شکل ۱۴.۸) دیده می‌شوند. شکل ۱۴.۸ (الف) منحنیهای پاشیدگی یک موج پلاسمای الکترونی (موج گراس-بوهم) و یک موج اکوستیکی یونی را نشان می‌دهد (با شکل ۱۳.۴ مقایسه کنید). موج الکترونی بزرگ دامنه  $(\omega_0, k_0)$  می‌تواند به موج الکترونی پس‌رو  $(\omega_2, k_2)$  و موج یونی  $(\omega_1, k_1)$  واپاشیده شود. ترسیم متوازی‌الاضلاع تضمین می‌کند که  $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$  و  $k_0 = k_1 + k_2$ . مکانهای  $(\omega_0, k_0)$  و  $(\omega_2, k_2)$  روی منحنی الکترونی باید طوری تنظیم شوند که بردار تفاضل روی منحنی یونی قرار گیرد. توجه کنید که یک موج الکترونی نمی‌تواند به دو موج الکترونی دیگر واپاشیده شود زیرا هیچ راهی برای قرار دادن بردار تفاضل روی منحنی الکترونی وجود ندارد.

شکل ۱۴.۸ (ب) ترسیم متوازی‌الاضلاع را برای ناپایداری «واپاشی پارامتری» نشان می‌دهد. در اینجا  $(\omega_0, k_0)$  یک موج الکترومغناطیسی فرودی با سرعت فاز بزرگ  $c \approx \omega_0 / k_0$  است.



شکل ۱۴.۸ ترسیم متوازی الاضلاع شرط جورشدهی  $\omega$  و  $k$  را برای سه ناپایداری پارامتری نشان می‌دهد: (الف) ناپایداری واپاشی الکترون، (ب) ناپایداری واپاشی پارامتری، (ج) ناپایداری پس‌پراکندهی القایی بریلوئن، و (د) ناپایداری واپاشی دو پلاسما. در تمام موارد،  $\omega$  موج فرودی و  $\omega_1$  و  $\omega_2$  امواج واپاشی هستند. خطوط مستقیم رابطه پاشیدگی امواج یونی، سهمیهای باریک رابطه پاشیدگی امواج نور و سهمیهای عریض رابطه پاشیدگی امواج الکترونی هستند.

این موج یک موج الکترونی و یک موج یونی را که در جهت‌های مخالف حرکت می‌کنند برمی‌انگیزند. چون  $|k_0|$  کوچک است، برای این ناپایداری داریم  $|k_1| \approx -|k_2|$  و  $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ .

شکل ۱۴.۸ (ج) نمودار  $\omega - k$  را برای ناپایداری «پس‌پراکندهی پارامتری» نشان می‌دهد که در آن موج نور یک موج یونی و یک موج نور دیگر را که در جهت‌های مخالف حرکت می‌کنند برمی‌انگیزند. این پدیده هرگاه که موج یونی با موج پلاسما تعویض شود نیز می‌تواند روی دهد. این فرایندها، از مقایسه با پدیده‌های مشابه در فیزیک حالت جامد، به‌ترتیب «پراکندهی بریلوئن القایی» و «پراکندهی رامان القایی» نامیده شده‌اند.

شکل ۱۴.۸ (د) ناپایداری واپاشی دو پلاسما موج الکترومغناطیسی را نشان می‌دهد. توجه کنید که دو موج واپاشی هر دو امواج پلاسما الکترونی هستند، و در نتیجه جورشدهی بسامد

تنها در صورتی رخ می‌دهد که  $\omega_p \simeq \omega$ . بیان این شرط برحسب چگالی معادل است با  $n \simeq n_c/4$  که در آن  $n_c$  چگالی بحرانی (معادله ۸۸.۴) وابسته به  $\omega$  است. بنابراین، انتظار می‌رود این ناپایداری تنها در نزدیکی لایه «ربع بحرانی» در پلاسمای ناهمگن رخ دهد.

### ۳.۵.۸ آستانه ناپایداری

اگر میرایی وجود نداشته باشد ناپایداریهای پارامتری در هر دامنه‌ای رخ خواهند داد، اما در عمل حتی مقدار کوچکی میرایی برخوردی یا لاندائو مانع ناپایداری خواهد شد مگر آن که موج دمیش نسبتاً قوی باشد. برای محاسبه آستانه، باید آهنگهای میرایی  $\Gamma_1$  و  $\Gamma_2$  مربوط به نوسانگرهای  $x_1$  و  $x_2$  را وارد کنیم. آن‌گاه معادله ۴۸.۸ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_1^2 x_1 + 2\Gamma_1 \frac{dx_1}{dt} = 0 \quad (59.8)$$

برای مثال، اگر  $x_1$  جابه‌جایی یک فنر میرای از اصطکاک باشد، آخرین جمله نمایشگر نیروی متناسب با سرعت است. اگر  $x_1$  چگالی الکترون در یک موج پلاسمای میرای ناشی از برخوردی الکترون-خنثی باشد،  $\Gamma_1$  برابر با  $\nu_c/2$  خواهد بود (به مسئله ۵.۴ مراجعه کنید). بررسی معادلات ۴۹.۸، ۵۰.۸ و ۵۴.۸ نشان می‌دهد که استفاده از نمادنگاری نمایی و جانشانی  $d/dt \rightarrow -i\omega$  برای  $x_1$  و  $x_2$  درست است به شرط آن که  $E$  را حقیقی بگیریم و  $\bar{x}_1$  و  $\bar{x}_2$  را مختلط منظور کنیم. آن‌گاه معادلات ۴۹.۸ و ۵۰.۸ تبدیل می‌شوند به

$$(\omega_1^2 - \omega^2 - 2i\omega\Gamma_1)x_1(\omega) = c_1 x_2 E_0 \quad (60.8)$$

$$[\omega_2^2 - (\omega - \omega_0)^2 - 2i(\omega - \omega_0)\Gamma_2]x_2(\omega - \omega_0) = c_2 x_1 E_0$$

از این پس، تنها مورد ساده دو موج را در نظر می‌گیریم — یعنی وقتی  $\omega \simeq \omega_1$  و  $\omega - \omega_0 \simeq \omega_2$  — اما  $\omega + \omega_0$  به اندازه کافی دور از  $\omega_2$  است که تشدید ایجاد نمی‌شود — در این مورد می‌توان از سطر و ستون سوم در معادله ۵۵.۸ صرف نظر کرد. اکنون اگر  $x_1$ ،  $x_2$  و  $E_0$  را برحسب مقدارهای قله آنها بیان کنیم (مانند معادله ۵۳.۸)، ضریب  $1/2$  در طرف راست معادله ۶۰.۸ ظاهر می‌شود. با چشمپوشی از جمله‌های ناتشدیدی و حذف  $\bar{x}_1$  و  $\bar{x}_2$  از معادله ۶۰.۸، به دست می‌آوریم

$$(\omega^2 - \omega_1^2 + 2i\omega\Gamma_1)[(\omega_0 - \omega)^2 - \omega_2^2 - 2i(\omega_0 - \omega)\Gamma_2] = \frac{1}{4} c_1 c_2 \bar{E}_0^2 \quad (61.8)$$

در آستانه، می‌توانیم قرار دهیم  $\text{Im}(\omega) = 0$ . پایینترین آستانه دقیقاً در جورشدگی بسامد یعنی

$\omega = \omega_1$  و  $\omega = \omega_2 - \omega_0$  رخ می‌دهد. بنابراین، از معادله ۶۱.۸ داریم

$$c_1 c_2 (\bar{E}_0^2)_{\text{آستانه}} = 16 \omega_1 \omega_2 \Gamma_1 \Gamma_2 \quad (62.8)$$

با میرایی هر یک از موجها، آستانه به سمت صفر می‌رود.

## مسائل

۸.۸ ثابت کنید پراکندگی رامان القایی نمی‌تواند در چگالیهای بیش از  $n_c/4$  رخ دهد.

۹.۸ پراکندگی القایی بریلوئن هنگامی رخ می‌دهد که باریکه لیزر نئودیمیم-شیشه ( $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$ ) به یک هدف  $D_2$  جامد ( $Z = 1, M = 2M_H$ ) تابانده شود. نور پس‌پراکنده به اندازه  $21.9 \text{ \AA}$  انتقال به سرخ پیدا می‌کند. از طیف پرتو ایکس معلوم می‌شود که  $KT_e = 1 \text{ keV}$ . با فرض اینکه پراکندگی در ناحیه  $\omega^2 \ll \omega_p^2$  رخ می‌دهد و با استفاده از معادله ۴۱.۴ با  $\gamma_i = 3$ ، دمای یونی را تخمین بزنید.

۱۰.۸ در پراکندگی بریلوئن القایی (SBS) می‌توانیم فرض کنیم  $x_1$  در معادله ۶۰.۸ نمایشگر چگالی افت‌وخیز موج یونی  $n_1$  و  $x_2$  نمایشگر میدان الکتریکی موج بازتابیده  $E_2$  است. بنابراین، ضرایب جفت‌شدگی با روابط زیر داده می‌شوند

$$c_1 = \epsilon_0 k_1^2 \omega_p^2 / \omega_0 \omega_2 M$$

$$c_2 = \omega_p^2 \omega_2 / n_0 \omega_0$$

و شدت  $\bar{E}_0$  آستانه در یک پلاسما همگن با معادله ۶۲.۴ داده می‌شود. این را معمولاً برحسب  $\langle v_{\text{osc}}^2 \rangle$  یعنی ریشه میانگین مجذوری سرعت نوسان الکترونی حاصل از موج  $\bar{E}_0$  بیان می‌کنند (به معادله ۳۷.۸ مراجعه کنید)

$$v_{\text{osc}} \equiv e \bar{E}_0 / m \omega_0$$

آهنگ میرایی  $\Gamma_2$  را می‌توان از مسئله ۳۷.۴ (ب) به‌ازای  $v/\omega \ll 1$  یافت.

(الف) نشان دهید به‌ازای  $T_i \ll T_e$  و  $v_e^2 \equiv KT_e/m_0$ ، آستانه SBS به‌صورت زیر داده می‌شود

$$\frac{\langle v_{\text{osc}}^2 \rangle}{v_e^2} = \frac{4 \Gamma_1 \nu}{\omega_1 \omega_2}$$

که در آن  $\omega_1 = k_1 v_s$  و  $\Gamma_1$  آهنگ میرایی لاندائو یونی است که از معادله ۱۳۳.۷ داده می‌شود.



(ب) شدت لیزری آستانه  $I_0$  را برحسب  $W/cm^2$  برای SBS مربوط به نور  $CO_2$  ( $10.6 \mu m$ ) در یک پلاسما ی هیدروژنی یکنواخت با  $T_e = 10^6 eV$ ,  $T_i = 10 eV$  و  $n_0 = 10^{22} m^{-3}$  محاسبه کنید. (راهنمایی: برای محاسبه  $\nu_{ei}$  از مقاومت اسپیتزر استفاده کنید.)

۱۱.۸. آهنگ نمو پراکندگی بریلوئن القایی بسیار بالاتر از آستانه را در یک پلاسمای همگن می توان از معادله ۶۱.۸ و با چشمپوشی از جمله های میرایی محاسبه کرد. با نوشتن  $\omega = \omega_s + i\gamma$  و فرض  $\omega_s \ll \gamma$  و  $n \ll n_0$  نشان دهید

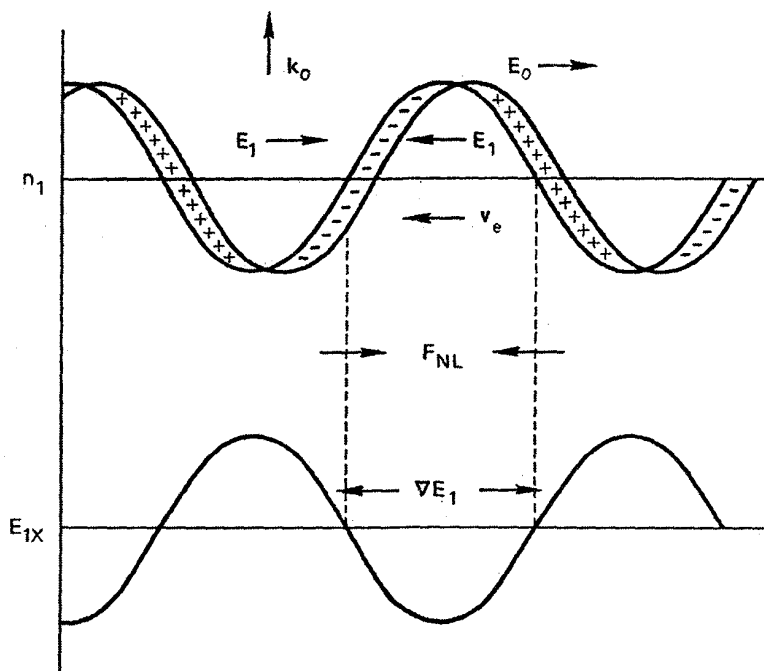
$$\gamma = \frac{\bar{v}_{osc}}{2c} \left( \frac{\omega_0}{\omega_s} \right)^{1/2} \Omega_p$$

که در آن  $\bar{v}_{osc}$  قله سرعت نوسانی الکترونهاست.

#### ۴.۵.۸ سازوکار فیزیکی

برانگیختگی پارامتری امواج را می توان برحسب نیروی محرکه وزنی (بخش ۴.۸) به صورتی بسیار ساده درک کرد. به عنوان یک مثال توضیحی، مورد موج الکترومغناطیسی  $(\omega, k_0)$  را در نظر بگیرید که محرک یک موج الکترونی پلاسمای  $(\omega_2, k_2)$  و یک موج یونی کم بسامد  $(\omega_1, k_1)$  است [شکل ۱۴.۸ (ب)]. چون  $\omega_1$  کوچک است،  $\omega_0$  باید به  $\omega_p$  نزدیک باشد. اما وضعیت به ازای  $\omega_p < \omega_0$  و  $\omega_p > \omega_0$  بسیار متفاوت است. مورد اول به ناپایداری «دوجریانی نوسانی» (که به تفصیل بررسی خواهیم کرد) و مورد دوم به ناپایداری «واپاشی پارامتری» منجر می شود.

فرض کنید یک اختلال چگالی به شکل  $n_1 \cos k_1 x$  در پلاسما وجود دارد؛ این اختلال می تواند به عنوان یک مؤلفه نوبه گرمایی خود به خود رخ دهد. فرض کنید موج دمش، همان طور که در شکل ۱۵.۸ نشان داده شده است، دارای میدان الکتریکی  $E_0 \cos \omega_0 t$  در راستای  $x$  است. در غیاب میدان dc  $B_0$ ، موج دمش از رابطه  $\omega_1^2 = \omega_p^2 + c^2 k_1^2$  تبعیت می کند. به طوری که به ازای  $\omega_p \approx \omega_0$  داریم  $k_0 \approx 0$ . بنابراین می توانیم  $E_0$  را از نظر فضایی یکنواخت در نظر بگیریم. اگر  $\omega$  از  $\omega_p$ ، یعنی بسامد تشدید سیال الکترون سرد، کمتر باشد الکترونها در جهت مخالف  $E_0$  حرکت خواهند کرد در حالی که یونها در مقیاس زمانی  $\omega$  حرکت نمی کنند. آنگاه، همان طور که در شکل ۱۵.۸ نشان داده شده است، موجک چگالی باعث جداسازی بار می شود. بارهای الکتروستاتیکی میدان الکتریکی  $E_1$  را تولید می کنند که با بسامد  $\omega$  نوسان می کند. نیروی محرکه وزنی ناشی از میدان کل با معادله (۴.۸) داده می شود:



شکل ۱۵.۸ سازوکار فیزیکی ناپایداری دوجریانی نوسانی.

$$F_{NL} = -\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \nabla \frac{\langle (E_0 + E_1)^2 \rangle}{2} \epsilon_0 \quad (۶۳.۸)$$

چون  $E_0$  یکنواخت و بسیار بزرگتر از  $E_1$  است، تنها جملهٔ ضربدری اهمیت خواهد داشت:

$$F_{NL} = -\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\langle 2E_0 E_1 \rangle}{2} \epsilon_0 \quad (۶۴.۸)$$

میانگین این نیرو صفر نیست زیرا  $E_1$  با  $E_0$  تغییر علامت می‌دهد. همان‌طور که در شکل ۱۵.۸ مشاهده می‌شود،  $F_{NL}$  در قله‌ها و دره‌های  $n_1$  صفر است اما در جایی که  $\nabla n_1$  بزرگ باشد بزرگ می‌شود. این توزیع فضایی باعث می‌شود که  $F_{NL}$  الکترونها را از ناحیه‌های چگالی کم به ناحیه‌های چگالی زیاد براند. میدان الکتریکی dc که به این ترتیب حاصل می‌شود یونها را نیز با خود می‌کشد، و اختلال چگالی نمو پیدا می‌کند. مقدار آستانهٔ  $F_{NL}$  مقداری است که تنها برای غلبه بر فشار  $\nabla n_1 (KT_i + KT_e)$ ، که تمایل به هموار کردن چگالی دارد، کفایت می‌کند.

موجک چگالی منتشر نمی‌شود، و در نتیجه  $\text{Re}(\omega_1) = 0$ . این پدیده را ناپایداری دوجریانی نوسانی می‌نامند زیرا الکترونهاى چسبناک دارای یک تابع توزیع میانگیری شده‌ی زمانی هستند که همچون ناپایداری دوجریانی (بخش ۶.۶). دارای دو قله است.

اگر  $\omega$  بزرگتر از  $\omega_p$  باشد، این سازوکار فیزیکی کار نمی‌کند زیرا نوسانگری که سریعتر از بسامد تشدید آن به نوسان واداشته می‌شود در جهت مخالف نیروی اعمال شده حرکت می‌کند (این موضوع در بخش بعد با وضوح بیشتری توضیح داده خواهد شد). بنابراین، جهت‌های  $\mathbf{v}_e$ ،  $\mathbf{E}_1$  و  $\mathbf{F}_{NL}$  در شکل ۱۵.۸ برعکس می‌شوند، و نیروی محرکه‌ی وزنی یونها را از ناحیه‌های چگالی زیاد به ناحیه‌های چگالی کم حرکت می‌دهد. اگر اختلال چگالی حرکت نکند باید واپاشیده شود. اما، اگر یک موج آکوستیکی یونی متحرک داشته باشیم، تأخیر لختی بین اعمال نیروی  $F_{NL}$  و تغییر مکان یون موجب می‌شود ماکسیممهای چگالی به ناحیه‌هایی حرکت کنند که  $F_{NL}$  یونها را بدانجا می‌راند. البته این تنها هنگامی اتفاق می‌افتد که سرعت فاز موج یونی دقیقاً مقدار مناسب را داشته باشد. این مقدار  $v_s$  است و علت را از این حقیقت می‌توان دریافت که فاز نیروی  $F_{NL}$  در شکل ۱۵.۸ (با پیکانهایی که اکنون معکوس هستند) در جایی با فاز نیروی بازگرداننده‌ی الکتروستاتیکی در موج یونی دقیقاً برابر می‌شود که در ماکسیمم چگالی پتانسیل نیز ماکسیمم باشد و برعکس. در نتیجه،  $F_{NL}$  با نیروی بازگرداننده جمع می‌شود و موج یونی را تقویت می‌کند. در این حال اگر میدان دمش در نزدیکی بسامد طبیعی سیال الکترونی باشد، یعنی  $\omega_1^2 = \omega_p^2 + \frac{1}{4}k^2 v_{th}^2$ ، الکترونها با دامنه‌ی بزرگ نوسان خواهند کرد. دمش نمی‌تواند دقیقاً بسامد  $\omega_1$  را داشته باشد زیرا رزش بین  $\omega_1$  و  $\omega_2$  باید در بسامد موج یونی  $\omega_1 = kv_s$  باشد تا عبارت مربوط به  $F_{NL}$  در معادله ۶۴.۸ بتواند بسامد مناسب برای برانگیختن امواج یونی داشته باشد. اگر این جورشدگی بسامد برقرار شود، یعنی  $\omega_1 = \omega_0 - \omega_2$ ، هم یک موج یونی و هم یک موج الکترونی توسط موج دمش برانگیخته می‌شود. این سازوکار ناپایداری واپاشی پارامتری است.

### ۵.۵.۸ ناپایداری نوسانی دوجریانی

اکنون این ساده‌ترین مثال ناپایداری پارامتری را با استفاده از تصویر فیزیکی که در بخش قبل داده شده است عملاً محاسبه می‌کنیم. برای سادگی فرض کنید دماهای  $T_e$  و  $T_i$  آهنکهای برخورد  $v_e$  و  $v_i$  همگی صفر باشند. بنابراین، سیال یونی از معادلات مربوط به بسامد کم تبعیت می‌کند

$$Mn_0 \frac{\partial v_{i1}}{\partial t} = en_0 E = F_{NL} \quad (۶۵.۸)$$

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v_{i1}}{\partial x} = 0 \quad (۶۶.۸)$$

چون تعادل به طور فضایی همگن فرض شده است، می توانیم از تحلیل فوریه در فضا استفاده کنیم و  $ik$  را به جای  $\partial/\partial x$  بگذاریم. آن گاه از دو معادله اخیر داریم

$$\frac{\partial^2 n_{e1}}{\partial t^2} + \frac{ik}{M} F_{NL} = 0 \quad (67.8)$$

که در آن  $F_{NL}$  از معادله ۶۴.۸ داده می شود. برای یافتن  $E_1$  باید حرکت الکترونها را در نظر بگیریم که با معادله زیر بیان می شود

$$m \left( \frac{\partial v_e}{\partial t} + v_e \frac{\partial}{\partial x} v_e \right) = -e(E_0 + E_1) \quad (68.8)$$

که در آن  $E_1$  از طریق معادله یواسون به چگالی  $n_{e1}$  مربوط می شود

$$ik\epsilon_0 E_1 = -en_{e1} \quad (69.8)$$

اکنون باید این واقعیت را در نظر بگیریم که کمینهای  $E_1$ ،  $v_e$  و  $n_{e1}$  هر یک دارای دو قسمت هستند: قسمت بسامد زیاد که در آن الکترونها مستقل از یونها حرکت می کنند، و قسمت بسامد کم که در آن الکترونها همراه با یونها به نحوی شبه خشی حرکت می کنند. در پایینترین مرتبه، حرکت یک حرکت بسامد زیاد در پاسخ به میدان یکنواخت فضایی  $E_0$  است:

$$\frac{\partial v_{e0}}{\partial t} = -\frac{e}{m} E_0 = -\frac{e}{m} \hat{E}_0 \cos \omega_0 t \quad (70.8)$$

با خطی کردن حول این تعادل نوسانی، داریم

$$\frac{\partial v_{e1}}{\partial t} + ikv_{e0} v_{e1} = -\frac{e}{m} E_1 = -\frac{e}{m} (E_{1h} + E_{1l}) \quad (71.8)$$

در اینجا شاخصهای  $h$  و  $l$  مشخص کننده قسمتهای بسامد زیاد و بسامد کم هستند. جمله اول عمدتاً شامل سرعت بسامد زیاد  $v_{eh}$  است که به صورت زیر داده می شود

$$\frac{\partial v_{eh}}{\partial t} = -\frac{e}{m} E_{1h} = \frac{n_{eh} e^2}{ik\epsilon_0 m} \quad (72.8)$$

که در آن از معادله ۶۹.۸ استفاده کرده ایم. قسمت بسامد کم معادله ۷۱.۸ به صورت زیر است

$$ikv_{e0} v_{eh} = -\frac{e}{m} E_{1l}$$

طرف راست این معادله همان جمله محرکه وزنی است که از آن در معادله ۶۵.۸ برای محاسبه امواج یونی استفاده کردیم. این جمله از زنش بسامد کم بین  $v_{eh}$  و  $v_{e0}$  نتیجه می شود. طرف چپ به قسمت الکتروستاتیک عبارت نیروی محرکه وزنی در معادله ۴۲.۸ مربوط است

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + ikv_{e0} n_{e1} + n_0 ikv_{e1} = 0 \quad (۷۳.۸)$$

قسمت بسامد زیاد این معادله مورد توجه ماست. در جمله میانی، اگر از پدیده های در نزدیکی  $2\omega_0$  و هماهنگهای بالاتر صرف نظر کنیم، تنها چگالی بسامد کم  $n_{e1}$  می تواند با  $v_{e0}$  زنش کند تا یک جمله بسامد زیاد به دست دهد. اما از شبه خنثی بودن می دانیم  $n_{e1} = n_{i1}$  و در نتیجه داریم

$$\frac{\partial n_{eh}}{\partial t} + ikn_0 v_{eh} + ikv_{e0} n_{i1} = 0 \quad (۷۴.۸)$$

با مشتق گیری زمانی، چشمپوشی از  $\partial n_{i1}/\partial t$  و استفاده از معادلات ۷۰.۸ و ۷۲.۸، به دست می آوریم

$$\frac{\partial^2 n_{eh}}{\partial t^2} + \omega_p^2 n_{eh} = \frac{ike}{m} n_{i1} E_0 \quad (۷۵.۸)$$

فرض کنید  $n_{eh}$  به صورت  $\exp(-i\omega t)$  تغییر کند:

$$(\omega_p^2 - \omega^2) n_{eh} = \frac{ike}{m} n_{i1} E_0 \quad (۷۶.۸)$$

بنابراین، از معادلات ۶۹.۸ و ۷۶.۸ میدان بسامد زیاد به دست می آید:

$$E_{\backslash h} = -\frac{e^2}{\epsilon_0 m} \frac{n_{i1} E_0}{\omega_p^2 - \omega^2} \approx -\frac{e^2}{\epsilon_0 m} \frac{n_{i1} E_0}{\omega_p^2 - \omega_0^2} \quad (۷۷.۸)$$

با قرار دادن  $\omega \approx \omega_0$  فرض کرده ایم آهنگ نمو  $n_{i1}$  در مقایسه با بسامد  $E_0$  بسیار کوچک است. نیروی محرکه وزنی از معادله ۶۴.۸ حاصل می شود:

$$F_{NL} \approx \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{e^2}{m} \frac{ikn_{i1}}{\omega_p^2 - \omega_0^2} \langle E_0^2 \rangle \quad (۷۸.۸)$$

توجه کنید که هم  $E_{\nu h}$  و هم  $F_{NL}$  با  $\omega_p^2 - \omega_0^2$  تغییر علامت می‌دهند. به همین دلیل است که سازوکار ناپایداری دوجریانی نوسانی به‌ازای  $\omega_0^2 > \omega_p^2$  کار نمی‌کند. ماکسیمم پاسخ به‌ازای  $\omega_0^2 \approx \omega_p^2$  رخ خواهد داد و می‌توان از عامل  $(\omega_p^2/\omega_0^2)$  صرف‌نظر کرد. در نتیجه، معادلهٔ ۶۷.۸ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\frac{\partial^2 n_{i1}}{\partial t^2} \approx \frac{e^2 k^2}{2Mm} \frac{\hat{E}_0^2 n_{i1}}{\omega_p^2 - \omega_0^2} \quad (۷۹.۸)$$

چون اختلال بسامد کم در این ناپایداری انتشار نمی‌یابد، می‌توانیم فرض کنیم  $n_{i1} = \bar{n}_{i1} \exp \gamma t$  که در آن  $\gamma$  آهنگ نمو است. بدین ترتیب داریم

$$\gamma^2 \approx \frac{e^2 k^2}{2Mm} \frac{\hat{E}_0^2}{\omega_p^2 - \omega_0^2} \quad (۸۰.۸)$$

اگر  $\omega_p^2 < \omega_0^2$  آهنگ نمو  $\gamma$  حقیقی خواهد بود. مقدار واقعی  $\gamma$  وابسته به آن است که چقدر مخرج کسر در معادلهٔ ۷۷.۸ را می‌توان بدون تقریب  $\omega^2 = \omega_0^2$  کوچک ساخت. اگر میرایی متناهی باشد  $\omega^2 - \omega_p^2$  دارای قسمت موهومی خواهد بود که متناسب است با  $2\Gamma_2 \omega_p$  که در آن  $\Gamma_2$  آهنگ میرایی نوسانهای الکترونی است. بنابراین، داریم

$$\gamma \propto \hat{E}_0 / \Gamma_2^{1/2} \quad (۸۱.۸)$$

در ناحیهٔ بسیار بالاتر از آستانه، آنچه در قسمت موهومی  $\omega$  حاکم است آهنگ نمو  $\gamma$  است نه  $\Gamma_2$ . در این مورد خواهیم داشت

$$\gamma^2 \propto \frac{\hat{E}_0^2}{\gamma} \quad \gamma \propto (\hat{E}_0)^{2/3} \quad (۸۲.۸)$$

این رابطهٔ  $\gamma$  با  $E_0$  رفتار نوعی تمام ناپایداریهای پارامتری است. محاسبهٔ دقیق  $\gamma$  و مقدار آستانهٔ  $E_0$  مستلزم آن است که انتقال بسامد  $\omega_p = \omega$  را دقیقتر از آنچه در اینجا امکان داشت بررسی کنیم.

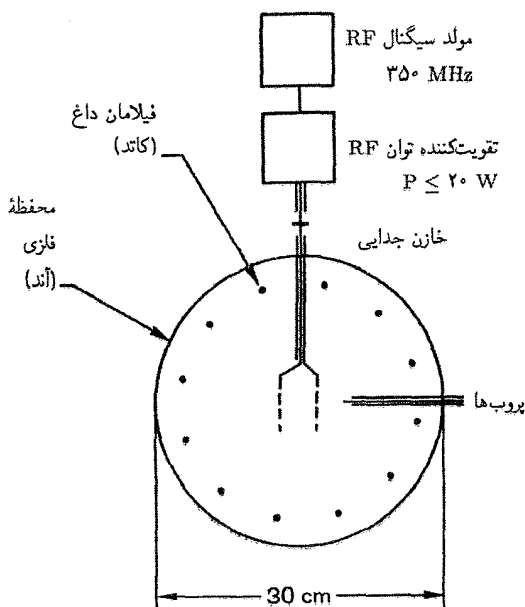
برای حل دقیق مسئله، باید  $n_{i1}$  را از معادلهٔ ۷۶.۸ به‌دست آوریم و در معادلهٔ ۷۹.۸ بگذاریم؛

$$\frac{\partial^2 n_{i1}}{\partial t^2} = -\frac{ike}{M} n_{eh} E_0 \quad (۸۳.۸)$$

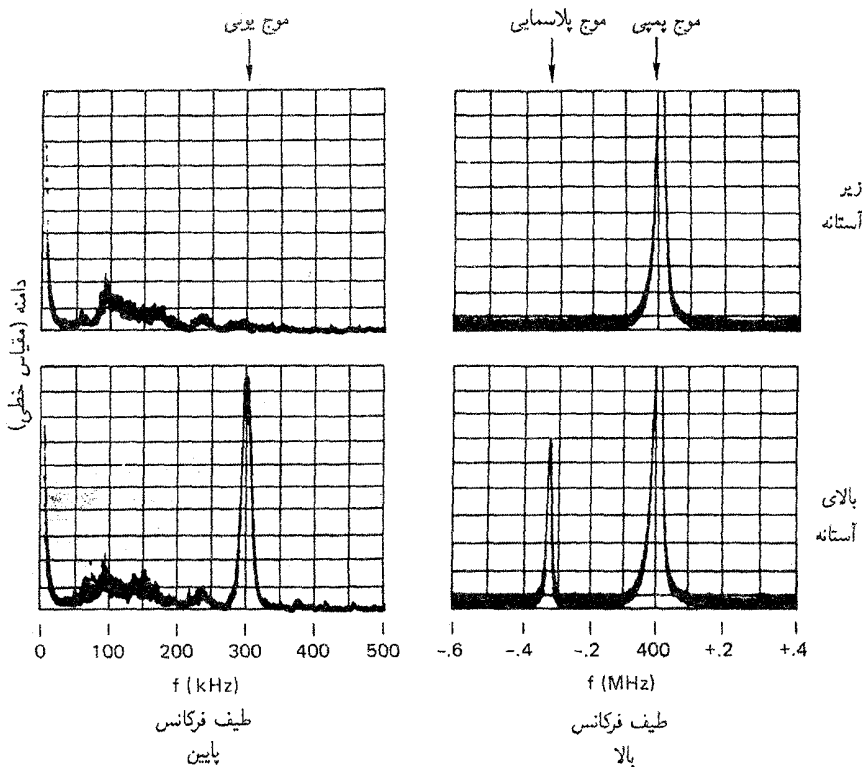
در نتیجه، معادله‌های ۷۵.۸ و ۸۳.۸ زوج معادلاتی به صورت ۴۹.۸ و ۵۰.۸ تشکیل می‌دهند، و از جواب معادله ۵۵.۸ می‌توان استفاده کرد. در آن مورد، بسامد  $\omega_1$  صفر است زیرا موج یونی در حد دمای صفر دارای  $\omega_1 = 0$  است.

### ۶.۵.۸ ناپایداری واپاشی پارامتری

برای مورد  $\omega_p > \omega_0$  محاسبه به همان روش بالاست و به برانگیختگی یک موج پلاسما و یک موج یونی منجر می‌شود. عملیات جبری مسئله را که از مورد ناپایداری دو جریانی نوسانی تا اندازه‌ای طولانی‌تر است حذف خواهیم کرد و به جای آن چند مشاهده تجربی را توصیف می‌کنیم. برای ناپایداری واپاشی پارامتری مدارک تجربی خوبی داریم که هم در یون‌سپهر و هم در آزمایشگاه مشاهده شده‌اند. ناپایداری دو جریانی نوسانی، غالباً مشاهده نمی‌شود بخشی به این علت که  $\text{Re}(\omega) = 0$  و بخشی به علت اینکه  $\omega_0 < \omega_p$  به معنای آن است که موج فرودی گذراست. شکل ۱۶.۸ دستگاه استنژل و وُنگ را نشان می‌دهد، که تشکیل شده است از یک چشمه پلاسما مشابه با چشمه شکل ۱۰.۸، یک جفت شبکه که بین آنها میدان الکتریکی  $E_0$  توسط یک نوسانگر تولید می‌شود، و یک کلاه که به دو تحلیلگر طیف بسامد متصل است. شکل ۱۷.۸ طیفهای



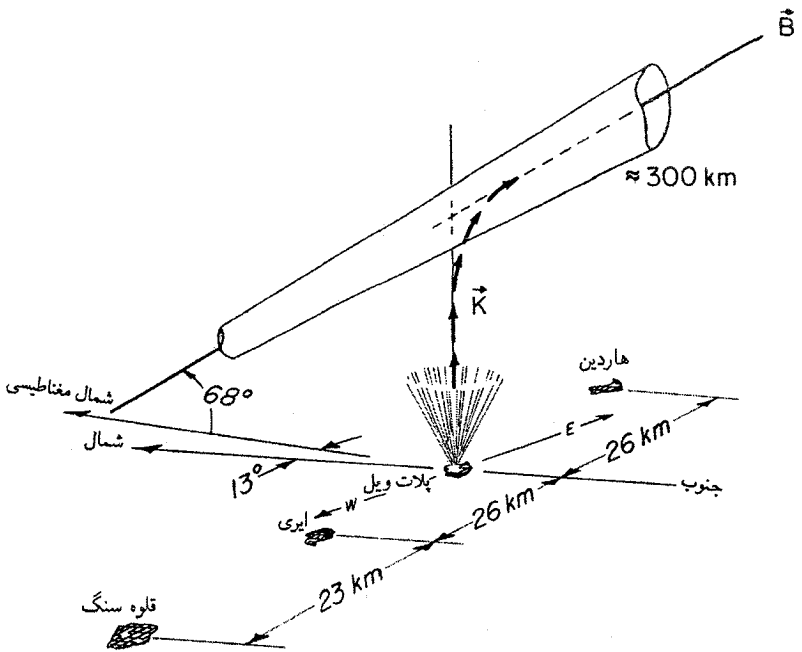
شکل ۱۶.۸ طرح کلی برای آزمایشی که در آن ناپایداری واپاشی پارامتری تأیید شده است.



شکل ۱۷.۸ نوسان نگاشتهای نمایشگر طیفهای بسامد نوسانهای مشاهده شده در دستگاه شکل ۱۶.۸. هنگامی که توان وادارنده درست در زیر آستانه است در طیف بسامد کم تنها نوفه و در طیف بسامد زیاد تنها علامت وادارنده (دمش) دیده می شود. افزایش کوچکی در توان دستگاه را به بالای آستانه می برد و همزمان بسامدهای یک موج پلاسمای و یک موج یونی ظاهر می شوند.

علامتهای آشکار شده در پلاسمای را نشان می دهد. در زیر آستانه، طیف بسامد زیاد تنها موج دمش در  $400 \text{ MHz}$  را نشان می دهد، در حالی که طیف بسامد کم تنها اندکی نوفه نشان می دهد. وقتی دامنه موج دمش کمی افزایش می یابد، یک موج یونی با بسامد  $300 \text{ kHz}$  در طیف بسامد کم و در همان زمان یک نوار جانبی با بسامد  $399.7 \text{ MHz}$  در طیف بسامد زیاد ظاهر می شود. این نوار جانبی یک موج پلاسمای الکترونی با بسامد تفاضل است. آن گاه می توان مشاهده کرد که موج یونی با موج دمش زنش می کند و در نتیجه علامت کوچکی در بسامد مجموع،  $3 \text{ MHz}$  در  $400$ ، می دهد. این ناپایداری در آزمایشهای یون سپهر نیز مشاهده شده است. شکل ۱۸.۸ هندسه یک آزمایش اصلاح شده یون سپهر را نشان می دهد که با رادیو تلسکوپ بزرگ پلات ویل کلورادو انجام شده است. یک باریکه بسامد رادیویی  $2 \text{ MW}$  با بسامد  $7 \text{ WHz}$  از آنتن به یون سپهر ارسال می شود. در





شکل ۱۸.۸ هندسهٔ یک آزمایش اصلاح شدهٔ یون‌سپهری که در آن امواج با بسامد رادیویی توسط واپاشی پارامتری جذب می‌شوند.

لایه‌ای که  $\omega_p \gtrsim \omega$ ، امواج الکترونی و یونی تولید می‌شوند و الکترونها یون‌سپهری گرم می‌شوند. در آزمایش دیگری که با آنتن بشقابی آرسایبو در پورتوریکو انجام شده است  $\omega$  و  $k$  امواج الکترونی از طریق کاوش با یک باریکهٔ راداری  $430 \text{ MHz}$  و مشاهدهٔ پراکندگی از توری حاصل از اختلالات چگالی الکترونی اندازه‌گیری شده‌اند.

## مسائل

۱۲.۸ در گداخت لیزری، گوی محتوی سوخت گرماهسته‌ای توسط باریکه‌های پرشدت لیزری گرم می‌شود. ناپایداری واپاشی پارامتری با تبدیل انرژی لیزری به انرژی موج پلاسما، که توسط میرایی لاندائو به الکترونها انتقال می‌یابد، می‌تواند بازده گرمایش را افزایش دهد. اگر از یک لیزر بود با طول موج  $1/3 \mu\text{m}$  استفاده شود، واپاشی پارامتری در کدام چگالی پلاسما روی می‌دهد؟

۱۳.۸ (الف) رابطهٔ پاشیدگی زیر را برای موج اکوستیکی یونی در حضور نیروی محرکهٔ وزنی اعمال شدهٔ خارجی  $F_{NL}$  اثبات کنید:

$$(\omega^2 + 2i\Gamma\omega - k^2 v_s^2) n_1 = ikF_{NL}/M$$

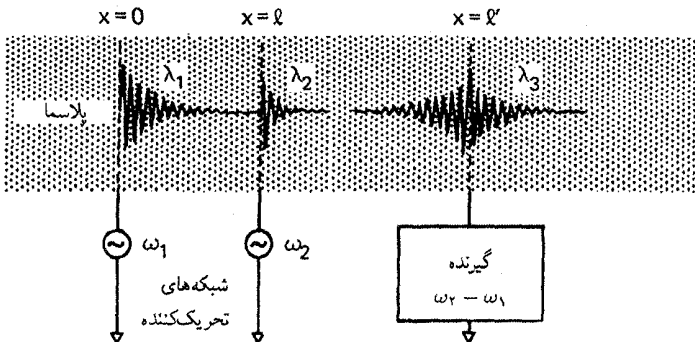
که در آن  $\Gamma$  آهنگ میرایی موج ناو داشته است (وقتی که  $F_{NL} = 0$ ). (راهنمایی: «بسامد برخورد»)  $\nu$  را در معادله حرکت یونی وارد کنید،  $\Gamma$  را برحسب  $\nu$  به دست آورید و سرانجام  $\nu$  را با معادل  $\Gamma$ ی آن تعویض کنید.

(ب)  $F_{NL}$  را برای مورد پراکندگی القایی بریلوئن برحسب دامنه های  $E_0$  و  $E_1$  که به ترتیب به دوش موج پس پراکنده مربوط اند محاسبه کنید، و در نتیجه ثابت  $c_1$  در مسئله ۱۰.۸ را به دست آورید. (راهنمایی: به معادله ۶۴.۸ مراجعه کنید.)

۱۴.۸ در شکل ۱۷.۸ مشاهده می شود که نوار جانبی بالایی در  $\omega_0 + \omega_1$  وجود ندارد. در واقع در غالب فرایندهای پارامتری مشاهده می شود که نوار جانبی بالایی کوچکتر از نوار جانبی پایینی است. با استدلال ساده انرژی، و شاید با یک مانسته مکانیک کوانتومی، توضیح دهید که چرا باید چنین چیزی رخ دهد.

## ۶.۸ پژواکهای پلاسما

از آنجا که میرایی لاندائو شامل برخورد یا اتلاف نیست یک فرایند برگشت پذیر است. این حقیقت به روشنی با پدیده قابل توجه پژواکهای پلاسما توضیح داده می شود. شکل ۱۹.۸ طرح کلی آزمایش را نشان می دهد. یک موج پلاسما با بسامد  $\omega_1$  و طول موج  $\lambda_1$  در شبکه اول تولید می شود و به سمت راست انتشار می یابد. این موج تا زیر آستانه آشکار پذیری متحمل میرایی لاندائو می شود. موج دوم با  $\omega_2$  و  $\lambda_2$  به وسیله شبکه دوم که در فاصله  $l$  از توری اول قرار دارد تولید می شود. موج دوم نیز با میرایی



شکل ۱۹.۸ طرح کلی آزمایش پژواک پلاسما.

از بین می‌رود. شبکهٔ سوم به یک گیرنده که در بسامد  $\omega = \omega_2 - \omega_1$  کوک شده است متصل است. اگر این شبکه در طول ستون پلاسما حرکت کند پژواکی را در فاصله  $l = l\omega_2 / (\omega_2 - \omega_1)$  خواهد یافت. آنچه اتفاق می‌افتد آن است که ذرات تشدید می‌شوند که موجب میرایی موج اول شده‌اند اطلاعات مربوط به موج را در تابع توزیع خود نگه می‌دارند. اگر شبکهٔ دوم برای وارونه کردن تغییر توزیع ذرات تشدید می‌ساخته شده باشد آن‌گاه می‌توان یک موج را مجدداً ظاهر کرد. روشن است که این فرایند تنها می‌تواند در یک پلاسما تقریباً بی‌برخورد اتفاق افتد. در واقع دامنهٔ پژواک به عنوان اندازهٔ حساسی از آهنگ برخورد به‌کار می‌رود. شکل ۲۰.۸ تصویری فیزیکی از علت رخ دادن پژواک را ارائه می‌دهد. همین سازوکار اساسی مبنای مشاهدهٔ پژواک با امواج پلاسمای الکترونی یا امواج سیکلوترون است. شکل ۲۰.۸ نموداری از فاصله نسبت به زمان است که در آن مسیر ذره‌ای با سرعت معین یک خط راست است. در  $x = 0$ ، یک شبکه دسته‌های ذرات باگستره‌ای از سرعت را به‌طور دوره‌ای از خود عبور می‌دهد. به علت پخش شدگی سرعت، دسته‌های ذرات با هم مخلوط می‌شوند و چگالی، که در طرف راست نمودار نشان داده شده است، در فاصله  $l$  مقداری ثابت نسبت به زمان خواهد داشت. شبکه دوم که در  $l$  قرار دارد ذرات را در بسامدی بزرگتر به‌طور متناوب مسدود می‌کند و عبور می‌دهد. آن‌گاه این‌گزینش مسیر ذرات در فضا-زمان موجب می‌شود تا دستهٔ ذرات مجدداً در  $l = x$  ایجاد شود. رابطهٔ بین  $l$  و  $l'$  را می‌توان از این تصویر ساده شده به‌دست آورد که در آن از تأثیر میدان الکتریکی موج بر مسیر ذرات صرف‌نظر می‌شود. اگر  $f_1(v)$  تابع توزیع در شبکهٔ اول باشد و با  $\cos \omega_1 t$  مدوله شود، توزیع در  $x > 0$  به‌صورت زیر خواهد بود

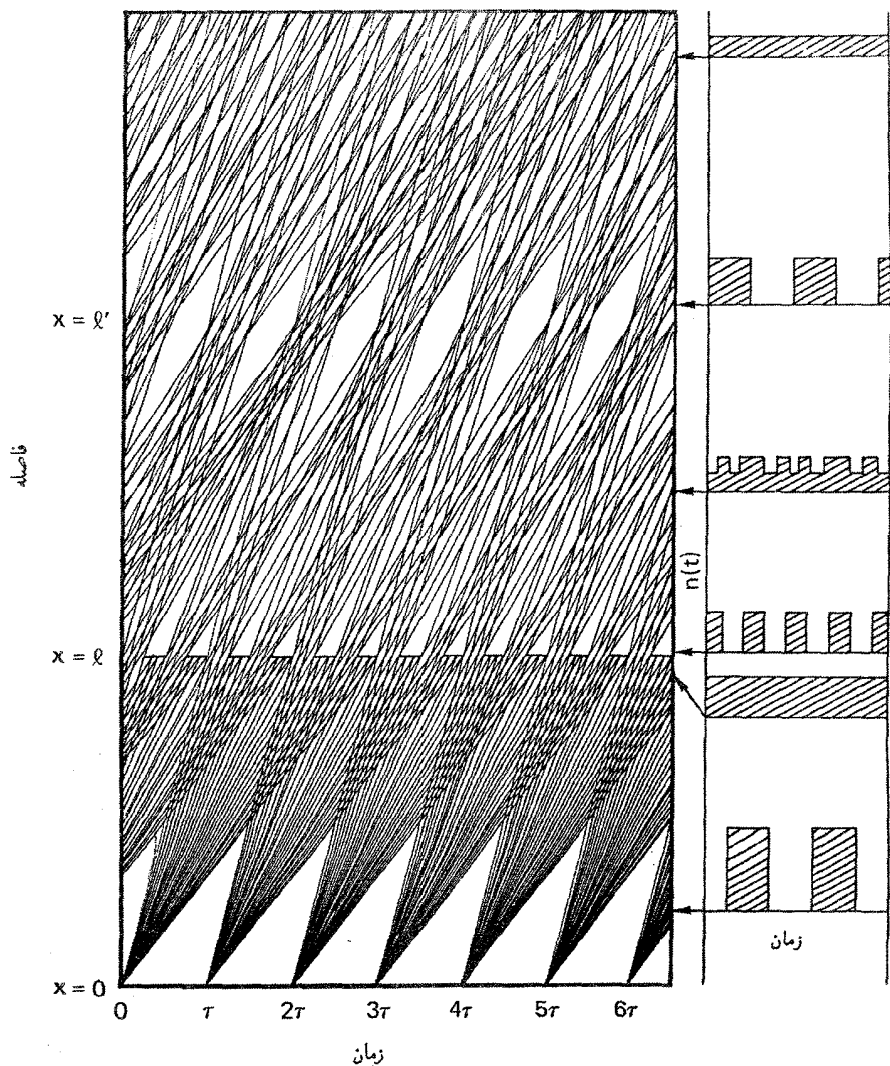
$$f(x, v, t) = f_1(v) \cos \left( \omega_1 t - \frac{\omega_1}{v} x \right) \quad (۸۴.۸)$$

شبکهٔ دوم در  $x = l$  این توزیع را یکبار دیگر با عاملی شامل  $\omega_2$  و فاصله  $x - l$  مدوله می‌کند:

$$f(x, v, t) = f_{12}(v) \cos \left( \omega_1 t - \frac{\omega_1}{v} x \right) \cos \left[ \omega_2 t - \frac{\omega_2}{v} (x - l) \right] \quad (۸۵.۸)$$

$$= f_{12}(v) \frac{1}{2} \left\{ \cos \left[ (\omega_2 + \omega_1)t - \frac{\omega_2(x-l) + \omega_1 x}{v} \right] + \cos \left[ (\omega_2 - \omega_1)t - \frac{\omega_2(x-l) - \omega_1 x}{v} \right] \right\} \quad (۸۶.۸)$$

پژواک از جملهٔ دوم ناشی می‌شود که با بسامد  $\omega = \omega_2 - \omega_1$  نوسان می‌کند و شناسهٔ آن مستقل



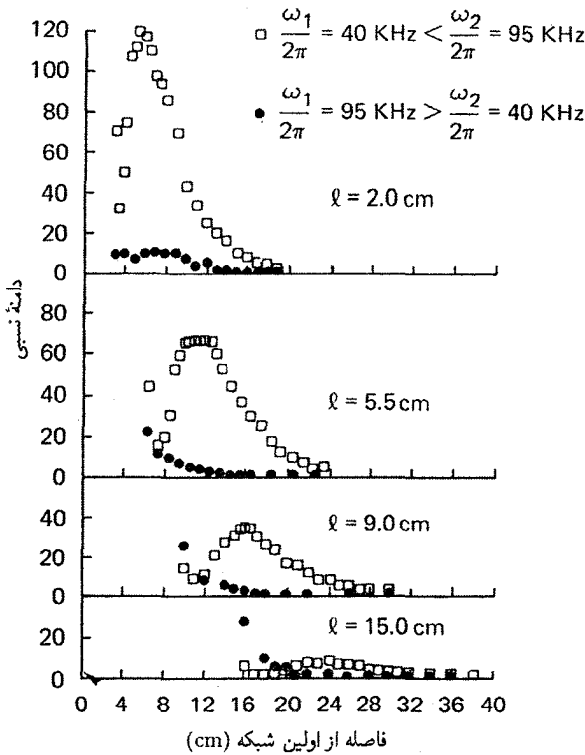
شکل ۲۰.۸ مسیره‌های فضا-زمان ذرات دروازه‌ای، نشان‌دهنده دسته‌هایی هستند که پژواک ایجاد می‌کنند. در قسمت راست شکل، چگالی مربوط به فواصل مختلف نشان داده شده است.

از  $v$  خواهد بود اگر

$$\omega_2(x-1) = \omega_1 x$$

یا

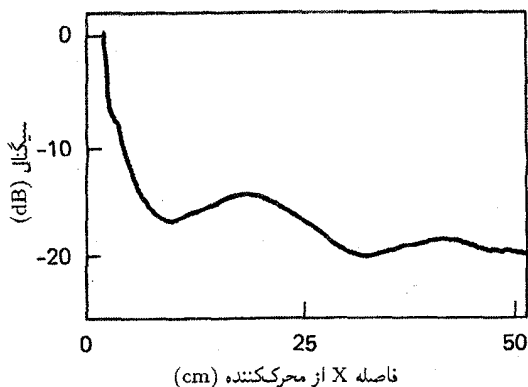
$$x = \omega_2 l / (\omega_2 - \omega_1) \equiv l' \tag{۸۷.۸}$$



شکل ۲۱.۸ اندازه‌گیری‌های نمایه دامنه پژواک برای فواصل مختلف  $l$  بین شبکه‌های وادارنده. دایره‌های سیاه به مورد  $\omega_2 < \omega_1$  مربوط‌اند، که برای آن هیچ پژواکی پیش‌بینی نمی‌شود.

بنابراین، پخش شدگی سرعت بر جمله دوم در  $w = l'$  تأثیر نمی‌گذارد و آمیختگی فاز انجام نمی‌شود. هرگاه روی سرعت انتگرال‌گیری شود، این جمله افت‌وخیز چگالی را در  $w = \omega_2 - \omega_1$  به دست می‌دهد. جمله اول قابل آشکارسازی نیست زیرا آمیختگی فاز باعث هموار شدن اختلال‌های چگالی شده است. واضح است که تنها در صورتی  $l'$  مثبت است که داشته باشیم  $\omega_2 > \omega_1$ . دلیل فیزیکی به این قرار است که فاصله شبکه دوم کمتر از آن است که بتواند اختلال‌های ناشی از شبکه اول را جداسازی کند، و در نتیجه باید در بسامدهای بزرگتر کار کند.

شکل ۲۱.۸ اندازه‌گیری‌های بیکر، آرن و وُنگ را روی پژواک‌های موج یونی نشان می‌دهد. فاصله  $l$  مطابق معادله ۸۷.۸ با  $l'$  تغییر می‌کند. دایره‌های پر به مورد  $\omega_2 < \omega_1$  مربوط‌اند و، چنانکه باید، عدم پژواک را نشان می‌دهند. دامنه پژواک با فاصله کاهش می‌یابد زیرا برخوردها همدوسی مدولاسیون‌های سرعت را از بین می‌برند.



شکل ۲۲.۸ اندازه‌گیری نمایه دامنه یک موج الکترونی غیرخطی که افت نایکونا را نشان می‌دهد.

### ۷.۸ میرایی غیرخطی لاندائو

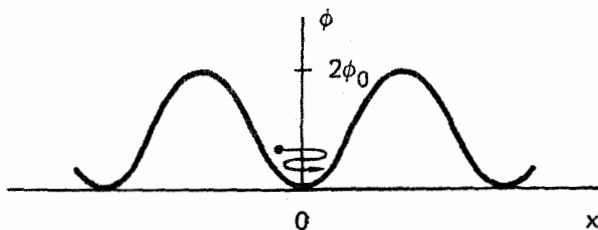
هرگاه دامنه یک موج الکترونی یا یونی را که مثلاً با یک شبکه برانگیخته شده است در فضا دنبال کنیم، در صورتی که دامنه بزرگ باشد غالباً ملاحظه می‌کنیم که، برخلاف پیش‌بینی نظریه خطی، افت به صورت نمایی نیست. به جای آن، نوعاً مشاهده می‌شود که دامنه پس از چند افت و خیز و پیش از رسیدن به یک مقدار ثابت نوسان می‌کند. این رفتار برای یک موج الکترونی در ۳۸ MHz در شکل ۲۲.۸ نشان داده شده است. اگرچه اثرهای دیگری ممکن است در کار باشند، اما این نوسانهای دامنه دقیقاً چیزی است که برای اثر غیرخطی ذره به دام افتاده (مبحث بخش ۵.۷) پیش‌بینی می‌شود. به دام افتادگی ذره‌ای با سرعت  $v$  هنگامی رخ می‌دهد که انرژی آن در چارچوب موج کوچکتر از پتانسیل موج باشد، یعنی هرگاه

$$|e\phi| > \frac{1}{4}m(v - v_\phi)^2$$

امواج کوچک تنها می‌توانند ذراتی را که با سرعت‌های زیاد نزدیک به  $v_\phi$  حرکت می‌کنند به دام اندازند. برای به دام افتادن تعداد زیادی ذره در قسمت اصلی توزیع (در نزدیکی  $v = 0$ ) باید

$$|q\phi| = \frac{1}{4}mv_\phi^2 = \frac{1}{4}m(\omega/k)^2 \quad (۸۸.۸)$$

هرگاه موج تا این مقدار بزرگ باشد، می‌توان انتظار داشت رفتار خطی آن به مقدار زیادی تغییر یابد. چون  $|\phi| = |E/k|$ ، شرط ۸۸.۸ معادل رابطه زیر است



شکل ۲۳.۸ واجهش ذره به دام افتاده در چاه پتانسیل موج.

$$\omega \simeq \omega_B \quad (\text{الف } ۸۹.۸)$$

که در آن

$$\omega_B^2 \equiv |qkE/m| \quad (\text{ب } ۸۹.۸)$$

کمیت  $\omega_B$  را بسامد واجهش می‌نامند زیرا این بسامد نوسان ذره‌ای است که در ته چاه پتانسیل سینوسی به دام افتاده است (شکل ۲۷.۸). پتانسیل با رابطه زیر داده می‌شود

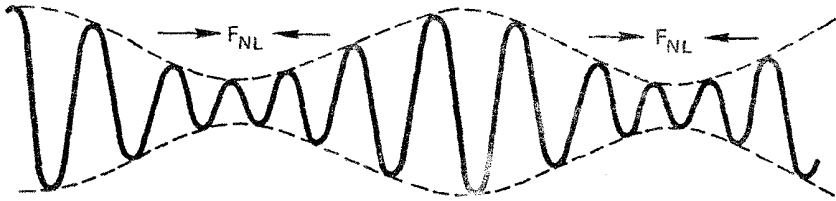
$$\phi = \phi_0 (1 - \cos kx) = \phi_0 \left( \frac{1}{2} k^2 x^2 + \dots \right) \quad (۹۰.۸)$$

معادله حرکت عبارت است از

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega^2 x = qE = -q \frac{d\phi}{dx} = -qk\phi_0 \sin kx \quad (۹۱.۸)$$

بسامد  $\omega$  ثابت نیست مگر آن که  $x$  کوچک باشد،  $\sin kx \approx kx$  و  $\phi$  تقریباً سهموی باشد. آن‌گاه مقدار  $\omega$  برابر می‌شود با  $\omega_B$  که در معادله ۸۹.۸ تعریف شده است. وقتی ذرات تشدید می‌شوند پتانسیل بازتابیده می‌شوند، انرژی جنبشی به موج پس می‌دهند و دامنه افزایش پیدا می‌کند. وقتی ذرات دوباره از سمت دیگر واجهش می‌کنند، این انرژی به ذرات باز می‌گردد و موج میرا می‌شود. بدین ترتیب، باید انتظار داشت دامنه در چارچوب موج با بسامد  $\omega_B$  نوسان کند. در چارچوب آزمایشگاه، بسامد عبارت است از  $\omega' = \omega_B + kv_\phi$  و نوسانهای دامنه باید عدد موج  $k' = \omega'/v_\phi = k[1 + (\omega_B/\omega)]$  را داشته باشند.

معلوم می‌شود که شرط  $\omega_B \gtrsim \omega$  معرف عدم کارایی نظریه خطی است حتی اگر فرایندهای دیگری علاوه بر به دام افتادگی ذره نیز دخیل باشند. نوع دیگری از میرایی غیرخطی لاندائو با زنش دو موج



شکل ۲۴.۸ نیروی محرکهٔ وزنی ناشی از پوش یک موج مدوله می‌تواند ذرات را به دام اندازد و باعث تشدیدهای موج-ذره در سرعت گروه شود.

سروکار دارد. فرض کنید دو موج الکترونی پرسامد  $(\omega_1, k_1)$  و  $(\omega_2, k_2)$  داریم که با هم زنش می‌کنند که در نتیجه یک پوش دامنهٔ متحرک با سرعت  $v_g = d\omega/dk \approx (\omega_2 - \omega_1)/(k_2 - k_1)$  تشکیل می‌شود. این سرعت ممکن است به اندازهٔ کافی کوچک باشد که در داخل تابع توزیع یونی قرار گیرد. بنابراین، مبادلهٔ انرژی با یونهای تشدید می‌تواند صورت گیرد. پتانسیلی که یونها می‌بینند پتانسیل مؤثر ناشی از نیروی محرکهٔ وزنی است (شکل ۲۴.۸) و نمویا میرایی لاتدائو می‌تواند اتفاق افتد. میرایی روشی مؤثر برای گرمایش یونها با امواج پرسامد، که معمولاً برهم‌کنش با یونها ندارند، فراهم می‌کند. اگر توزیع یونی دوکوهانی باشد می‌تواند امواج الکترونی را برانگیزد. این ناپایداری را ناپایداری مدوله‌ای می‌نامند.

## مسائل

۱۵.۸ نموداری ترسیم کنید که به روشنی درجهٔ توافق بین داده‌های پژواک شکل ۲۱.۸ و معادلهٔ ۸۷.۸ را نشان دهد.

۱۶.۸ بسامد واجهش الکترونی را محاسبه کنید که در موج پلاسمایی با دامنهٔ ریشهٔ میانگین مجزوری  $10^7$  V و طول موج  $1$  cm عمیقاً به دام افتاده است.

## ۸.۸ معادلات فیزیک پلاسمای غیرخطی

دو معادلهٔ غیرخطی وجود دارند که در ارتباط با امواج پلاسمای غیرخطی به‌طور گسترده‌ای بررسی شده‌اند: معادلهٔ کورت‌وگ-دووری و معادلهٔ غیرخطی شرودینگر. هر یک از این معادله‌ها با نوع متفاوتی از ناخطیت سروکار دارد. هرگاه یک موج اکوستیکی یونی دامنه‌ای بزرگ پیدا کند، اثر غیرخطی عمدهٔ آن شبیدار شدن موج است که توضیح فیزیکی آن در بخش ۳.۳.۸ داده شد. این اثر از جمله  $\nabla \cdot \nabla v$  در معادلهٔ حرکت یون ناشی می‌شود و از نظر ریاضی با معادلهٔ کورت‌وگ-دووری بیان می‌شود. جوابهای قطار موج و سولیتون شکل‌های ۵.۸ و ۷.۸ نیز از این معادله پیش‌بینی می‌شوند.



یک موج پلاسمای الکترونی هرگاه غیرخطی شود، اثر جدید غالب آن است که نیروی محرکه وزنی با به عقب راندن زمینه پلاسما موجب یک کاهش موضعی چگالی موسوم به کواپتون می‌شود. سپس امواج پلاسمای به دام افتاده در این کاواک یک ساختار منزوی تشکیل می‌دهند که سولیتون پوش یا موج انفرادی پوش نامیده می‌شود. این سولیتونها با معادله غیرخطی شرودینگر توصیف می‌شوند. با در نظر گرفتن تفاوت الگوی فیزیکی و صورت ریاضی معادله‌های حاکم، شگفت‌انگیز است که سولیتونها و سولیتونهای پوش تقریباً شکل یکسانی دارند.

### ۱.۸.۸ معادله کورته‌وگ-دووری

این معادله در بسیاری از وضعیتهای فیزیکی، از جمله موج یونی غیرخطی ضعیف، ظاهر می‌شود:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0 \quad (92.8)$$

که در آن  $U$  دامنه است، و  $\tau$  و  $\xi$  به ترتیب متغیرهای زمان‌گونه و فضاگونه هستند. اگرچه برای به دست آوردن این معادله به چند تبدیل متغیر نیاز داریم، از هم اکنون دو ویژگی فیزیکی را می‌توان ملاحظه کرد. جمله دوم معادله ۹۲.۸ را به سادگی نمی‌توان به عنوان جمله همرفتی  $\nabla \cdot \nabla$  که به شیدار شدن موج منجر می‌شود باز شناخت. جمله سوم از پاشیدگی موج یعنی وابستگی سرعت فاز به  $k$  ناشی می‌شود. امواج یونی به ازای  $T_i = 0$  از رابطه زیر تبعیت می‌کنند (معادله ۴۸.۴)

$$\omega^2 = k^2 c_s^2 (1 + k^2 \lambda_D^2)^{-1} \quad (93.8)$$

جمله پاشیدگی  $k^2 \lambda_D^2$  حاصل انحراف از خنثایی کامل است. از بسط رشته تیلور، به دست می‌آوریم

$$\omega = kc_s - \frac{1}{4} k^3 c_s \lambda_D^2 \quad (94.8)$$

که نشان می‌دهد جمله پاشیدگی با  $k^2$  متناسب است. این امر دلیل جمله مشتق سوم در معادله ۹۲.۸ است. برای جلوگیری از غلبه غیرواقعی جبهه‌های موج بسیار شیدار (متناظر با  $k$  خیلی بزرگ) بر رفتار غیرخطی باید پاشیدگی را در نظریه حفظ کرد.

برای معادله کورته‌وگ-دووری جوابی به صورت سولیتون به دست می‌آید، یعنی یک تپ منفرد که به هنگام انتشار با سرعتی مانند  $c$  (اما نه سرعت نور!) شکل خود را حفظ می‌کند. این نشان می‌دهد که  $U$ ، به جای وابستگی جداگانه به متغیرهای  $\tau$  یا  $\xi$ ، فقط به متغیر  $\xi - c\tau$  بستگی

دارد. با تعریف  $\zeta \equiv \xi - c\tau$  و در نتیجه  $\partial/\partial\tau = -cd/d\zeta$  و  $\partial/\partial\xi = d/d\zeta$  می‌توانیم معادله ۹۲.۸ را به صورت زیر بنویسیم

$$-c \frac{dU}{d\zeta} + U \frac{dU}{d\zeta} + \frac{1}{2} \frac{d^2 U}{d\zeta^2} = 0 \quad (95.8)$$

با انتگرال‌گیری از این معادله داریم

$$-c \int_{\zeta}^{\infty} \frac{dU}{d\zeta'} d\zeta' + \frac{1}{2} \int_{\zeta}^{\infty} \frac{dU^2}{d\zeta'} d\zeta' + \frac{1}{2} \int_{\zeta}^{\infty} \frac{d}{d\zeta'} \left( \frac{d^2 U}{d\zeta'^2} \right) d\zeta' = 0 \quad (96.8)$$

که در آن  $\zeta'$  یک متغیر ظاهری است. اگر  $U(\zeta)$  و مشتق‌های آن در فواصل دور از سولیتون ( $|\zeta| \rightarrow \infty$ ) صفر شوند، نتیجه به صورت زیر خواهد بود

$$cU - \frac{1}{2} U^2 - \frac{1}{2} \frac{d^2 U}{d\zeta^2} = 0 \quad (97.8)$$

با ضرب تک‌تک جمله‌ها در  $dU/d\zeta$ ، می‌توانیم یکبار دیگر انتگرال‌گیری کنیم:

$$\frac{1}{3} cU^3 - \frac{1}{6} U^3 - \frac{1}{4} \left( \frac{dU}{d\zeta} \right)^2 = 0 \quad (98.8)$$

یا

$$\left( \frac{dU}{d\zeta} \right)^2 = \frac{2}{3} U^2 (3c - U) \quad (99.8)$$

جواب سولیتونی زیر در این معادله صدق می‌کند

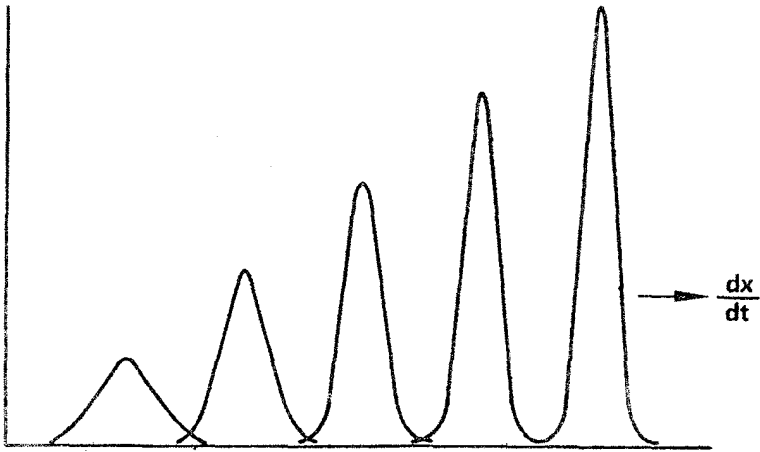
$$U(\zeta) = 3c \operatorname{sech}^2[(c/2)^{1/2} \zeta] \quad (100.8)$$

که درستی آن را می‌توان با جاگذاری مستقیم و استفاده از اتحاد‌های زیر تحقیق کرد

$$\frac{d}{dx} (\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x \quad (101.8)$$

و

$$\operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1 \quad (102.8)$$



شکل ۲۵.۸ قطاری از سولیتونها که در طرف چپ تولید شده‌اند و براساس رابطه میان سرعت، ارتفاع و پهنا مرتب شده‌اند.

معادله ۱۰۰.۸ ساختاری مشابه شکل ۷.۸ را توصیف می‌کند که در  $\zeta = 0$  به قله می‌رسد و در  $\pm\infty \rightarrow \zeta$  صفر می‌شود. این سولیتون دارای سرعت  $c$ ، دامنه  $3c$  و نیم‌پهنای  $(2/c)^{1/2}$  است. همه اینها با هم ارتباط دارند، و از این رو  $c$  انرژی سولیتون را مشخص می‌کند. هر قدر انرژی بزرگتر باشد سرعت و دامنه بزرگتر و پهنا باریکتر می‌شود. پیدایش سولیتونها به شرایط اولیه بستگی دارد. اگر آشفتگی اولیه انرژی کافی داشته باشد و فازها مناسب باشند، سولیتون می‌تواند به وجود آید؛ در غیر این صورت، یک موج بزرگ دامنه پدیدار خواهد شد. اگر آشفتگی اولیه دارای انرژی چندین سولیتون باشد و فازها مناسب باشند، یک جواب  $N$ -سولیتونی خواهیم داشت. از آنجا که سرعت سولیتونها با اندازه آنها افزایش می‌یابد، سولیتونها پس از مدتی در یک آرایش مرتب همچون شکل ۲۵.۸ پراکنده می‌شوند.

اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که معادله کورتیه-گلد-دووری امواج یونی بزرگ دامنه را توصیف می‌کند. مورد ساده امواج یک بعدی با یونهای سرد را در نظر بگیرید. معادلات سیال برای حرکت و پیوستگی عبارت‌اند از

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} = -\frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (103.8)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_i v_i) = 0 \quad (104.8)$$

فرض کنید الکترونها بولتزمن باشند (معادله ۷۳.۳). بنابراین، معادله پواسون به صورت زیر خواهد بود

$$\epsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = e(n_0 e^{e\phi/KT_e} - n_i) \quad (105.8)$$

تمام ضرایب با متغیرهای بی بعد زیر واحد می شوند

$$\begin{aligned} x' &= x/\lambda_D = x(n_0 e^2 / \epsilon_0 K T_e)^{1/2} \\ t' &= \Omega_p t = t(n_0 e^2 / \epsilon_0 M)^{1/2} \\ \chi &= e\phi/KT_e \quad n' = n_i/n_0 \\ v' &= v/v_s = v(M/KT_e)^{1/2} \end{aligned} \quad (106.8)$$

بنابراین، مجموعه معادلات ما به صورت زیر درمی آیند

$$\frac{\partial v'}{\partial t'} + v' \frac{\partial v'}{\partial x'} = - \frac{\partial \chi}{\partial x'} \quad (107.8)$$

$$\frac{\partial n'}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'}(n' v') = 0 \quad (108.8)$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x'^2} = e^{\chi} - n' \quad (109.8)$$

اگر به چارچوب متحرک با سرعت  $v' = \mathcal{M}$  برویم معادله [۲۷.۸] را مجدداً به دست می آوریم. همان طور که پس از معادله [۲۷.۸] نشان داده شده است، جوابهای این مجموعه معادلات برای گستره ای از اعداد ماخ  $\mathcal{M}$  سولیتون هستند.

### مسئله

۱۷.۸ با فرض آن که  $\chi$ ،  $n'$  و  $v'$  تنها به متغیر  $t' - \mathcal{M}x' \equiv \xi'$  وابسته هستند معادلات ۱۰۷.۸ تا ۱۰۹.۸ را به معادله ۲۷.۸ تبدیل کنید. همچون در معادلات ۹۶.۸ تا ۹۸.۸، دوبار انتگرال گیری کنید تا رابطه زیر را به دست آورید

$$\frac{1}{4} (d\chi/d\xi')^2 = e^{\chi} - 1 + \mathcal{M}[(\mathcal{M}^2 - 2\chi)^{1/2} - \mathcal{M}]$$

نشان دهید جوابهای سولیتونی تنها می‌توانند به‌ازای  $۱ < \mathcal{M} < ۱.۶$  و  $۱ < \chi_{\max} < ۱.۳$  وجود داشته باشند.

برای به‌دست آوردن معادله  $K - dV$  (کورت‌ه‌وگ-دووری) باید برحسب دامنه موج بسط دهیم و جمله یک مرتبه بالاتر از نظریه خطی را نگه داریم. چون دامنه و سرعت سولیتونها با هم ارتباط دارند، می‌توانیم پارامتر بسط را عدد ماخ کاسته  $\delta$  اختیار کنیم که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\delta \equiv \mathcal{M} - 1 \quad (۱۱۰.۸)$$

بنابراین، می‌نویسیم

$$n' = 1 + \delta n_1 + \delta^2 n_2 + \dots$$

$$\chi = \delta \chi_1 + \delta^2 \chi_2 + \dots \quad (۱۱۱.۸)$$

$$v' = \delta v_1 + \delta^2 v_2 + \dots$$

همچنین باید تبدیل به متغیرهای مقیاس‌بندی شده زیر را انجام دهیم\*

$$\xi = \delta^{1/2}(x' - t') \quad \tau = \delta^{3/2}t' \quad (۱۱۲.۸)$$

که در نتیجه

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \delta^{3/2} \frac{\partial}{\partial \tau} - \delta^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (۱۱۳.۸)$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \delta^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

از جاگذاری ۱۱۱.۸ و ۱۱۳.۸ در ۱۰۹.۸ می‌بینیم که جملات پایتترین مرتبه با  $\delta$  متناسب هستند، و از آنها به‌دست می‌آوریم

$$\chi_1 = n_1 \quad (۱۱۴.۸)$$

\* ضرورت ندارد که توضیح دهیم چرا این تبدیل را انجام می‌دهیم، پایان کار توجیه‌کننده راه است.

با انجام همین کار در معادلات ۱۰۷.۸ و ۱۰۸.۸، معلوم خواهد شد که جملات پایینترین مرتبه با  $\delta^{3/2}$  متناسب هستند، و در نتیجه داریم

$$\frac{\partial v_1}{\partial \xi} = \frac{\partial \chi_1}{\partial \xi} = \frac{\partial n_1}{\partial \xi} \quad (115.8)$$

چون وقتی  $\xi \rightarrow \infty$  همهٔ کمیتها صفر می‌شوند، با انتگرال‌گیری به دست می‌آوریم

$$n_1 = \chi_1 = v_1 \equiv U \quad (116.8)$$

بدین ترتیب، بهنجارسازی ما طوری است که تمام اختلالهای خطی با هم مساوی می‌شوند و می‌توان آنها را  $U$  نامید. سپس جملات متناسب با  $\delta^2$  در معادلهٔ ۱۰۹.۸ و متناسب با  $\delta^{5/2}$  در معادلات ۱۰۷.۸ و ۱۰۸.۸ را برمی‌گزینیم. بنابراین، مجموعهٔ زیر به دست خواهد آمد

$$\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial \xi^2} = \chi_2 - n_2 + \frac{1}{2} \chi_1^2 \quad (117.8)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \tau} - \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} = -\frac{\partial \chi_2}{\partial \xi} \quad (118.8)$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial \tau} - \frac{\partial n_2}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi}(v_2 + n_1 v_1) \quad (119.8)$$

با جاگذاری  $n_2$  از ۱۱۷.۸ و  $\partial v_2 / \partial \xi$  از ۱۱۳.۸ در معادلهٔ ۱۱۹.۸، خواهیم داشت

$$\frac{\partial n_1}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \chi_2}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial \chi_1^2}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \tau} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \chi_2}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi}(n_1 v_1) = 0 \quad (120.8)$$

خوشبختانه  $\chi_2$  حذف می‌شود، و از تعویض تمام جملات مرتبهٔ اول بالا به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = 0 \quad (121.8)$$

که همان معادلهٔ ۹۲.۸ است. بنابراین، امواج یونی با دامنهٔ یک مرتبه بیشتر از خطی با معادلات کورتیه‌وگ-دووری توصیف می‌شوند.

## مسئله

۱۸.۸ سولیتونی با قلهٔ دامنهٔ  $12 \text{ V}$  در یک پلاسماى هیدروژنی با  $KT_e = 10 \text{ eV}$  و

$n_0 = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$  برانگیخته می‌شود. با فرض آن که معادله کورته‌وگدووری توصیف‌کننده این سولیتون است، سرعت آن (برحسب m/sec) و پهنای کامل در نیم‌ماکسیمم آن (برحسب mm) را محاسبه کنید. (راهنمایی: ابتدا نشان دهید که با واحدهای بهنجار شده‌ای که برای به‌دست آوردن معادله کورته‌وگدووری به‌کار بردیم، سرعت سولیتون  $c$  برابر با یک است.

### ۲.۸.۸ معادله شرودینگر غیرخطی

این معادله به‌صورت متعارف بی‌بعد زیر است

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + p \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + q |\psi|^2 \psi = 0 \quad (۱۲۲.۸)$$

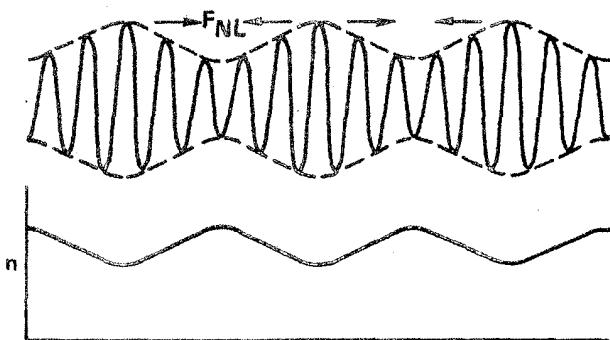
که در آن  $\psi$  دامنه موج است،  $i = (-1)^{1/2}$  و  $p$  و  $q$  ضرایبی هستند که معنای فیزیکی آنها به‌زودی توضیح داده خواهد شد. معادله ۱۲۲.۸ با معادله شرودینگر معمولی یعنی

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - V(x, t) \psi = 0$$

از این لحاظ تفاوت دارد که در آن پتانسیل  $V(x, t)$  به‌خود  $\psi$  وابسته است و در نتیجه جمله آخر را غیرخطی می‌کند. اما توجه کنید که  $V$  تنها به بزرگی  $|\psi|^2$  بستگی دارد. و مستقل از فاز  $\psi$  است. تا جایی که به امواج پلاسمای الکترونی مربوط است این ویژگی باید وجود داشته باشد، زیرا غیرخطی بودن از نیروی محرکه وزنی حاصل می‌شود که به گرادیان شدت موج بستگی دارد.

اگر  $p, q > 0$ ، جوابهای موج تخت معادله ۱۲۲.۸ از لحاظ مدولاسیون ناپایدار هستند؛ یعنی یک موجک روی پوش موج تمایل به نمو دارد. این تصویر همان تصویر شکل ۲۴.۸ است اگرچه در اینجا اثرهای مربوط به سیال، و نه مربوط به ذره گسسته، را بررسی می‌کنیم. برای امواج پلازما، به‌آسانی می‌توان نشان داد که چگونه نیروی محرکه وزنی می‌تواند باعث ناپایداری مدولاسیونی شود. شکل ۲۴.۸ موج پلاسمایی با پوش موجکدار را نشان می‌دهد: گرادیان شدت موج باعث یک نیروی محرکه وزنی می‌شود که هم الکترونها و هم یونها را به سمت مینیمهای شدت می‌برد، و در نتیجه یک موجک در چگالی پلازما تشکیل می‌شود. امواج پلازما در نواحی کم‌چگالی به‌دام می‌افتند زیرا رابطه پاشیدگی آنها یعنی

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3}{4} k^2 v_{th}^2 \quad (۳۰.۴)$$



شکل ۲۶.۸ نیروی محرکه وزنی یک موج پلازما با شدت نایکناوخت موجب می‌شود تا یونها به سمت مینیممهای شدت بروند. موجک چگالی حاصل امواج را در گودیهای خود به دام می‌اندازد، و به این ترتیب مدولاسیون پوش را تقویت می‌کند.

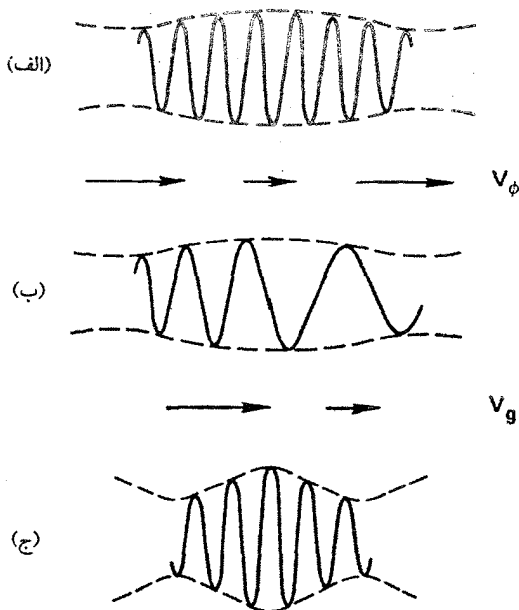
اجازه می‌دهد که موجهای با  $k$ ی بزرگ تنها در ناحیه‌های با  $\omega_p$ ی کوچک وجود داشته باشند. قسمت به دام اندازنده طیف  $k$  شدت موج را در ناحیه‌هایی که از قبل زیاد بوده است باز هم افزایش می‌دهد، و در نتیجه سبب می‌شود که یک موجک رشد یابنده توسط پوش به وجود آید. دلیل اهمیت علامت  $pq$  آن است که  $p$  و  $q$  برای امواج پلازما به ترتیب با پاشیدگی گروه  $dv_g/dk$  و انتقال بسامد غیرخطی  $\delta\omega \propto \partial\omega/\partial|\psi|^2$  متناسب‌اند. بعداً نشان خواهیم داد که

$$p = \frac{1}{2} \frac{dv_g}{dk} \quad q = -\frac{\partial\omega}{\partial|\psi|^2} \propto -\delta\omega \quad (۱۲۳.۸)$$

ناپایداری مدولاسیونی وقتی رخ می‌دهد که  $pq > 0$ ، یعنی وقتی که  $\delta\omega$  و  $dv_g/dk$  علامتهای مخالف داشته باشند. شکل ۲۷.۸ دلیل این امر را نشان می‌دهد. در شکل ۲۷.۸ الف، موجکی در پوش موج به علت افت و خیزهای کاتوره‌ای ایجاد شده است. فرض کنید  $\delta\omega$  منفی باشد. آنگاه سرعت فاز  $\omega/k$ ، که با  $\omega$  متناسب است، در ناحیه‌ای که شدت زیاد است تا اندازه‌ای کوچکتر می‌شود. این موجب می‌شود که قله‌های موج در طرف چپ شکل ۲۷.۸ ب انباشته شوند و در طرف راست از هم باز شوند. بنابراین، مقدار موضعی  $k$  در طرف چپ بزرگ و در طرف راست کوچک است. اگر  $dv_g/dk$  مثبت باشد سرعت گروه در طرف چپ بیشتر از طرف راست خواهد بود، و از این رو انرژی موج در ناحیه کوچکتری انباشته خواهد شد. اگر  $\delta\omega$  و  $dv_g/dk$  هم‌علامت باشند، ناپایداری مدولاسیونی رخ نمی‌دهد.

با آن که وقتی  $pq$  مثبت است جوابهای موج تخت معادله ۱۲۳.۸ ناپایدار مدولاسیونی هستند،





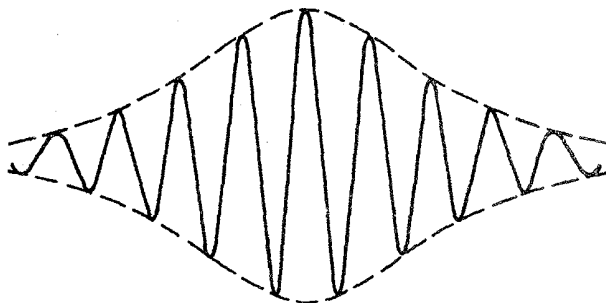
شکل ۲۷.۸ ناپایداری مدولاسیونی هنگامی رخ می‌دهد که انتقال بسامد غیرخطی و پاشیدگی سرعت گروه دارای علامتهای مخالف باشند.

اما ساختارهای انفرادی موسوم به سولیتون پوش که پایدار هستند می‌توانند وجود داشته باشند. اینها از جواب پایه زیر تولید می‌شوند

$$w(x, t) = \left(\frac{2A}{q}\right)^{1/2} \operatorname{sech} \left[ \left(\frac{A}{p}\right)^{1/2} x \right] e^{iAt} \quad (124.8)$$

که در آن  $A$  یک ثابت اختیاری است که دامنه، پهنا و بسامد بسته سولیتون را به هم مرتبط می‌کند. در هر لحظه از زمان، آشفتگی به یک سولیتون ساده (معادله ۱۰۰.۸) شباهت دارد (اگرچه  $\operatorname{sech}$  در اینجا به توان دو نرسیده است)، اما عامل نمایی موجب می‌شود  $w(x, t)$  بین مقادیر مثبت و منفی نوسان کند. یک سولیتون پوش که با سرعت  $V$  حرکت می‌کند صورت عمومی‌تر زیر را در (شکل ۲۸.۸)

$$\psi(x, t) = \left(\frac{2A}{q}\right)^{1/2} \operatorname{sech} \left[ \left(\frac{A}{p}\right)^{1/2} (x - x_0 - Vt) \right] \times \exp i \left( At + \frac{V}{2p} x - \frac{V^2}{4p} t + \theta_0 \right) \quad (125.8)$$



شکل ۲۸.۸ یک سولیتون پوش.

که در آن  $x_0$  و  $\theta_0$  مکان و فاز اولیه هستند. مشاهده می‌شود که بزرگی  $V$  همچنین تعداد طول موجهای داخل پوش را در هر زمان معین تعیین می‌کند.

### مسائل

۱۹.۸ با جاگذاری مستقیم نشان دهید که معادله ۱۲۴.۸ یک جواب معادله ۱۲۲.۸ است.  
 ۲۰.۸ با نشان دادن آن که اگر  $w(x, t)$  یک جواب معادله ۱۲۲.۸ باشد آنگاه

$$\psi = w(x - x_0 - Vt, t) \exp \left[ i \left( \frac{V}{2p} x - \frac{V^2}{4p} t + \theta_0 \right) \right]$$

نیز یک جواب است درستی معادله ۱۲۵.۸ را تحقیق کنید.

اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که معادله غیرخطی شرودینگر امواج پلاسمای الکترونی بزرگ دامنه را توصیف می‌کند. روش کار عبارت است از تعیین خودسازگار کاواک چگالی که امواج با نیروی محرکه وزنی خود ایجاد می‌کنند و رفتاری که امواج در چنین کاواکی دارند. معادلات ۱۸.۴، ۱۹.۸ و ۲۸.۴ بر حرکت پربسامد الکترونها حاکم هستند که آنها را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{e}{m} E - \frac{3KT_e}{mn_0} \frac{\partial n}{\partial x} \quad (126.8)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (127.8)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\epsilon_0^{-1} en \quad (128.8)$$

در اینجا  $n_0$  چگالی نامختل یکنواخت است؛  $E$ ،  $n$  و  $u$  به ترتیب اختلال در میدان الکتریکی، در چگالی الکترون و در سرعت سیال هستند. این معادله‌ها خطی شده‌اند، به طوری که ناخطیهای ناشی از جمله‌های  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$  و  $\nabla \cdot (n\mathbf{u})$  در نظر گرفته نشده‌اند. اگر از معادلهٔ ۱۲۷.۸ نسبت به زمان و از معادلهٔ ۱۲۶.۸ نسبت به  $x$  مشتق بگیریم و آنگاه  $u$  و  $E$  را با استفاده از معادلهٔ ۱۲۸.۸ حذف کنیم، به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - \frac{3KT_e}{m} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{n_0 e^2}{m\epsilon_0} n = 0 \quad (129.8)$$

برای توصیف کاواک چگالی اکنون  $n_0$  را با  $n_0 + \delta n$  تعویض می‌کنیم؛ این تنها اثر غیرخطی است که در نظر گرفته‌ایم. البته معادلهٔ ۱۲۹.۸ بر هر یک از متغیرهای خطی حاکم است. بهتر است که این معادله را برحسب  $u$  بنویسیم و از تعریف  $\omega_p$  استفاده کنیم؛ در نتیجه، داریم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{3KT_e}{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega_p^2 \left(1 + \frac{\delta n}{n_0}\right) u = 0 \quad (130.8)$$

سرعت  $u$  تشکیل شده است از یک قسمت پربسامد که در  $\omega_0$  (اساساً بسامد پلاسما) نوسان می‌کند و یک قسمت کم‌بسامد  $u_1$  که حرکت شبه‌خنثای الکترونی را توصیف می‌کند که با حرکت به‌دنبال یونها کاواک چگالی به‌وجود می‌آورند. تغییرات تند و کند فضایی هر دو در  $u_1$  منظور شده‌اند.

فرض کنید

$$u(x, t) = u_1(x, t) e^{-i\omega_0 t} \quad (131.8)$$

با دوبار مشتق‌گیری زمانی به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\ddot{u}_1 - 2i\omega_0 \dot{u}_1 - \omega_0^2 u_1) e^{-i\omega_0 t}$$

که در آن نقطه نشان‌دهندهٔ مشتق زمانی در مقیاس زمانی کند است. بنابراین، می‌توانیم از  $\ddot{u}_1$  که بسیار کوچکتر از  $\omega_0^2 u_1$  است، صرف نظر کنیم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -(\omega_0^2 u_1 + 2i\omega_0 \dot{u}_1) e^{-i\omega_0 t} \quad (132.8)$$

با جاگذاری در معادله ۱۳۰.۸ نتیجه می‌گیریم که

$$\left[ 2i\omega_0 \dot{u}_l + \frac{3KT_e}{m} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2} + \left( \omega_0^2 - \omega_p^2 - \omega_p^2 \frac{\partial n}{\partial n_0} \right) u_l \right] e^{-i\omega_0 t} = 0 \quad (133.8)$$

اکنون با تبدیل به واحدهای طبیعی

$$\begin{aligned} t' &= \omega_p t & \omega' &= \omega/\omega_p & x' &= x/\lambda_D \\ u' &= u(KT_e/m)^{-1/2} & \delta n' &= \delta n/n_0 \end{aligned} \quad (134.8)$$

به‌دست می‌آوریم

$$\left[ i\omega_0' \frac{\partial u_l'}{\partial t'} + \frac{3}{2} \frac{\partial^2 u_l'}{\partial x'^2} + \frac{1}{2} (\omega_0'^2 - 1 - \delta n') u_l' \right] e^{-i\omega_0' t'} = 0$$

با تعریف انتقال بسامد  $\Delta$  به‌صورت

$$\Delta \equiv (\omega_0 - \omega_p)/\omega_p = \omega_0' - 1 \quad (135.8)$$

و فرض  $\Delta \ll 1$  داریم  $\omega_0' - 1 \simeq \Delta$ ، اکنون می‌توانیم پیرامون  $\Delta$  بسامد را (با مفروض بودن آنها) حذف کنیم، توسط معادله ۱۳۱.۸ به  $u(x, t)$  برگردیم و  $\omega_0'$  را در جمله اول با ۱ تقریب بگیریم، که در نتیجه به‌دست می‌آوریم

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{3}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( \Delta - \frac{1}{2} \partial n \right) u = 0 \quad (136.8)$$

فرض بر این است که  $\partial/\partial t$  در اینجا مشتق زمانی در مقیاس زمانی کند است، اگرچه  $u$  هم عامل  $\exp(-i\omega_0 t)$  و هم ضریب کندتغییر  $u_l$  را در بر دارد. تا اینجا اساساً معادله غیرخطی شرویدینگر ۱۲۲.۸ را به‌دست آورده‌ایم ولی محاسبه  $\delta n$  برحسب  $|u_l|^2$  باقی مانده است.

با چشمپوشی از جمله لختی در معادله ۲۸.۴ و افزودن جمله نیروی محرکه وزنی ۴۴.۸ معادله حرکت کم‌بسامد برای الکترونها به‌دست می‌آید

$$0 = -enE - KT_e \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon_0 E^2 \right) \quad (137.8)$$

در اینجا قرار داده‌ایم  $\gamma_e = 1$  زیرا حرکت کم بسامد باید همدم باشد نه بی‌دررو. با حل معادله بسامد زیاد ۱۲۶.۸ بدون تصحیح گرمایی، می‌توانیم قرار دهیم

$$\langle E^2 \rangle \simeq \frac{m^2 \omega_0^2}{e^2} \langle u^2 \rangle \quad (138.8)$$

با  $E = -\nabla\phi$  و  $\chi = e\phi/KT_e$ ، معادله ۱۳۷.۸ به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial}{\partial x}(\chi - \ln n) - \frac{1}{\gamma} \frac{m}{KT_e} \frac{\partial}{\partial x} \langle u^2 \rangle = 0 \quad (139.8)$$

با انتگرال‌گیری، قرار دادن  $n = n_0 + \delta n$  و استفاده از واحدهای طبیعی ۱۳۴.۸، خواهیم داشت

$$\frac{1}{\gamma} \langle u^2 \rangle = \frac{1}{\gamma} |u|^2 = \chi - \ln(1 + \delta n) \simeq \chi - \delta n \quad (140.8)$$

اکنون باید  $\chi$  را با حل معادلات یون سرد ۱۰۳.۸ و ۱۰۴.۸ حذف کنیم. چون اکنون از متغیرهای الکترونی ۱۳۴.۸ استفاده می‌کنیم، و چون  $\Omega_p = \epsilon\omega_p$  و  $v_s = \epsilon(KT_e/m)^{1/2}$  در آن  $\epsilon \equiv (m/M)^{1/2}$ ، معادله‌های یونی به صورت بی‌بعد زیر خواهند بود

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0 \quad (141.8)$$

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \delta n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[(1 + \delta n_i)u_i] = 0 \quad (142.8)$$

در اینجا قرار داده‌ایم  $n'_i = (n_0 + \delta n_i)/n_0 = 1 + \delta n'_i$  و پریم را حذف کرده‌ایم. اگر سولیتون در چارچوبی که با سرعت  $V$  حرکت می‌کند ساکن باشد، اختلالها تنها از طریق ترکیب  $\xi = x - x_0 - Vt$  و  $t$  وابسته هستند. بنابراین

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \quad \frac{\partial}{\partial t} = -V \frac{\partial}{\partial \xi}$$

و پس از خطی کردن خواهیم داشت

$$-\frac{V}{\epsilon} \frac{\partial u_i}{\partial \xi} + \frac{\partial \chi}{\partial \xi} = 0 \quad u_i = \frac{\epsilon}{V} \chi \quad (143.8)$$

$$-\frac{V}{\epsilon} \frac{\partial \delta n_i}{\partial \xi} + \frac{\partial u_i}{\partial \xi} = 0 \quad \delta n_i = \frac{\epsilon}{V} u_i \quad (144.8)$$

از اینجا و شرط شبه‌خنتایی برای حرکت‌های کند، به دست می‌آوریم

$$\delta n_e = \delta n_i = \frac{\epsilon^2}{V^2} \chi \quad (145.8)$$

با جاگذاری مقدار  $\chi$  از این رابطه در معادله ۱۴۰.۸ که در آن  $\delta n$  در واقع  $\delta n_e$  است، به رابطه زیر می‌رسیم

$$\delta n_e = \frac{1}{4} |u|^2 \left( \frac{V^2}{\epsilon^2} - 1 \right)^{-1} \quad (146.8)$$

سرانجام با قرار دادن این رابطه در معادله ۱۳۶.۸، خواهیم داشت

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{3}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left[ \Delta - \frac{1}{\lambda} \left( \frac{V^2}{\epsilon^2} - 1 \right)^{-1} |u|^2 \right] u = 0 \quad (147.8)$$

از مقایسه با معادله ۱۲۲.۸ می‌بینیم که معادله ۱۴۷.۸ معادله غیرخطی شرودینگر است اگر بتوانیم از  $\Delta$  صرف‌نظر کنیم

$$p = \frac{3}{2} \quad q = -\frac{1}{\lambda} \left( \frac{m/M}{V^2 - m/M} \right) \quad (148.8)$$

در این مرحله آخر، باید نشان دهیم  $p$  و  $q$  مطابق روابط ۱۲۳.۸ با پاشیدگی گروه و انتقال بسامد غیرخطی ارتباط دارند. این موضوع به‌ازای  $V^2 \ll m/M$  صادق است. رابطه پاشیدگی بوهم-گراس ۳۰.۴ برحسب واحدهای بی‌بعد به صورت زیر است

$$\omega'^2 = 1 + \delta n' + 3k'^2 \quad (149.8)$$

که در آن  $k' = k \lambda_D$  و  $\omega$  را به  $\omega_p$  یعنی مقدار خارج از کاواک چگالی بهنجار کرده‌ایم. سرعت گروه برابر است با

$$v'_g = \frac{d\omega'}{dk'} = \frac{3k'}{\omega'} \quad (150.8)$$

بنابراین

$$\frac{dv'_g}{dk'} = \frac{3}{\omega'} \approx 3$$

و

$$p = \frac{1}{2} \frac{dv'_g}{dk'} = \frac{3}{2} \quad (151.8)$$

از معادله ۱۴۶.۸ به‌ازای  $V^2 \ll \epsilon^2$  داریم

$$\delta n' = -\frac{1}{4}|u'|^2$$

و در نتیجه معادله ۱۴۴.۸ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\omega'^2 = 1 - \frac{1}{4}|u'|^2 + 3k'^2 \quad (152.8)$$

بنابراین،

$$2\omega' d\omega' = -\frac{1}{4}d|u'|^2$$

و

$$\delta\omega' \propto \frac{d\omega'}{d|u'|^2} \simeq -\frac{1}{8} \quad (153.8)$$

از معادله ۱۴۸.۸ به‌ازای  $V^2 \ll \epsilon^2$  رابطه زیر را، همان‌طور که قبلاً بیان شد، به‌دست می‌آوریم

$$q \simeq \frac{1}{8} = -\frac{d\omega'}{d|u'|^2}$$

اگر شرط  $V^2 \ll \epsilon^2$  صادق نباشد، دینامیک یونی را باید با دقت بیشتری بررسی کنیم؛ سولیتونهای الکترونی و یونی جفت‌شده‌ای داریم که نسبت به زمان با همدیگر تحول می‌یابند. این وضعیتی است که طبعاً در آزمایش با آن مواجه می‌شویم و به‌طور نظری بررسی شده است.

به‌طور خلاصه، سولیتون موج لانگموری توسط معادله ۱۲۵.۸، با  $p = 3/2$  و  $q = 1/8$  و با  $\psi(x, t)$  به‌معنای قسمت بسامد کم  $u(x, t)$  که در آن  $x$  و  $t$  برحسب واحدهای بی‌بعد هستند، توصیف می‌شود. با جاگذاری عامل  $\exp(-i\omega_0 t)$  و صفرگرفتن  $x_0$  و  $\theta_0$ ، می‌توانیم معادله ۱۲۵.۸ را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$u(x, t) = 4A^{1/2} \operatorname{sech} \left[ \left( \frac{2A}{3} \right)^{1/2} (x - Vt) \right] \\ \times \exp \left\{ -i \left[ \left( \omega_0 + \frac{V^2}{6} - A \right) t - \frac{V}{3} x \right] \right\} \quad (154.8)$$

پوش سولیتون با سرعت  $V$  منتشر می‌شود که تا به حال نامعین مانده است. پیدا کردن مقدار دقیق آن مستلزم حل همزمان معادله کورته‌وگ-دووری حاکم بر حرکت کاواک چگالی است اما فیزیک زیربنای آن را می‌توان به صورتی بسیار ساده‌تر توضیح داد. امواج پلاسمای الکترونی دارای سرعت گروه هستند و اگر بخواهیم انرژی موج با پوش حرکت کند باید  $V$  نزدیک به این سرعت باشد. با توجه به معادله ۱۵۰.۸، این سرعت برحسب واحدهای بی بعد به صورت زیر است

$$V \simeq v'_g = \frac{3k'}{\omega'} \simeq 3k' \quad (155.8)$$

بنابراین، جمله  $i(V/3)x$  در قسمت نمایی معادله ۱۵۴.۸ عبارت است از عامل  $ikx$  که نشان دهنده انتشار امواج در داخل پوش است. به طور مشابه، عامل  $-i(V^2/6)t$  همان  $-i(3/2)k'^2 t'$  است که می‌توان آن را با توجه به معادله ۱۴۹.۸ به عنوان بسامد بوهم-گراس به ازای  $\delta n' = 0$  دانست (ضریب  $1/2$  ناشی از بسط مجذور است). با توجه به آن که  $\omega_0 \simeq \omega_p$ ، عبارت  $(V^2/6) + \omega_0$  نمایشگر بسامد بوهم-گراس است، و بنابراین  $A$  انتقال بسامد (برحسب  $\omega_p$ ) ناشی از کاواک در  $\delta n'$  است. دامنه و پهنای سولیتون در معادله ۱۵۴.۸ برحسب انتقال  $A$  داده شده‌اند، و میدان الکتریکی پربسامد را می‌توان از معادله ۱۳۸.۸ بدست آورد.

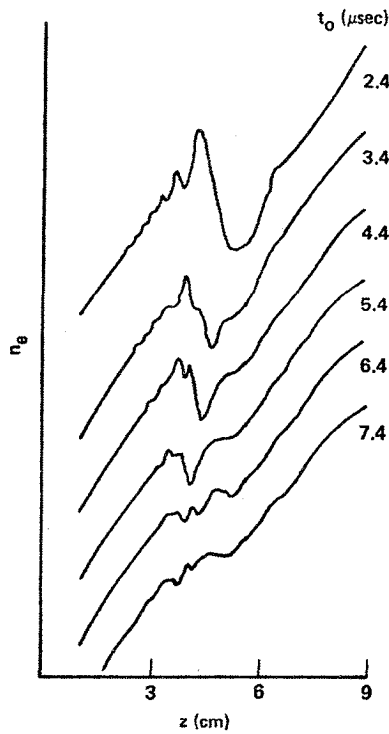
کاویتونها در ادواتی مشابه شکل ۱۶.۸ مشاهده شده‌اند. شکلهای ۲۹.۸ و ۳۰.۸ دو آزمایش را نشان می‌دهند که در آنها ساختارهایی مانند سولیتونهای پوش (که در بالا بررسی کردیم) با تزریق بسامد رادیویی پرتوان در پلاسمای ساکن تولید شده‌اند. این آزمایشها سرآغاز تعبیر داده‌های گداخت لیزری برحسب «تغییر نمای» بوده‌اند، یعنی تغییر نمای چگالی حاصل از نیروی محرکه وزنی تابش لیزری در نزدیک لایه بحرانی که در آن  $\omega_0 \simeq \omega_p$  و  $\omega_0$  بسامد لیزر است.

## مسائل

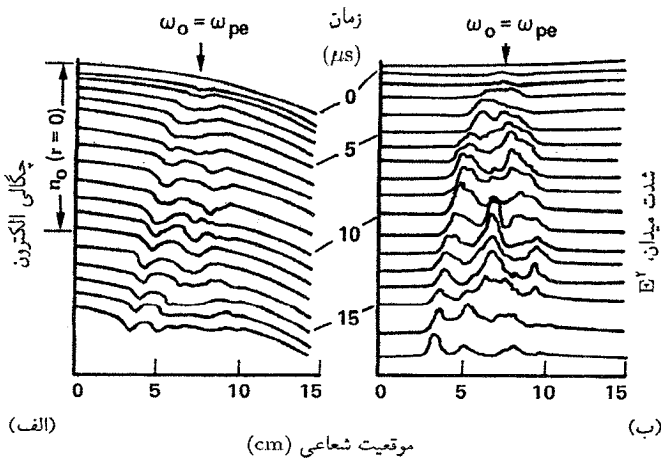
۲۱.۸ با محاسبه میانگین کاهش چگالی در سولیتون و میانگین تغییر متناظر در  $\omega_p$ ، تحقیق کنید که رابطه بین انتقال بسامد  $A$  و دامنه سولیتون در معادله ۱۵۴.۸ موجه است (راهنمایی: از معادله ۱۴۶.۸ استفاده کنید و فرض کنید عامل  $\text{sech}^2$  دارای مقدار میانگین تقریباً  $1/2$  روی پهنای سولیتون است).

۲۲.۸ یک سولیتون موج لانگمویری با دامنه پوش قله به قله  $3r_{2V}$  در یک پلاسمای  $2eV$  با  $n_0 = 10^{15} \text{cm}^{-3}$  برانگیخته می‌شود. اگر برای امواج الکترونی  $\lambda_D = r_{2V}$ ،  $k\lambda_D = 3$  (الف) پهنای کامل در





شکل ۲۹.۸ یک کاواک چگالی، یا کاویتون، که توسط نیروی محرکهٔ وزنی میدان  $rf$  (پسامد رادیویی) در نزدیکی لایهٔ بحرانی ایجاد شده است. نوسانهای پرسامد (که نشان داده نشده‌اند) با یک باریکهٔ الکترونی کاوشگری شده‌اند.



شکل ۳۰.۸ سولیتونهای موج الکترونی و یونی جفت‌شده. (الف) کاواکهای چگالی کم‌پسامد که به سمت چپ انتشار می‌یابند. (ب) میدان الکتریکی پرسامد، که توسط گاوهای سیمی اندازه‌گیری می‌شود، در مینیمهای چگالی موضعی بزرگ است.

نیم ماکسیمم پوش (برحسب mm)، (ب) تعداد طول موجهای داخل این پهنا، و (ج) انتقال بسامد (برحسب MHz) از بسامد بوهم-گراس نظریه خطی را به دست آورید.

۲۳.۸ یک کاواک چگالی به شکل چاهی مربعی در یک پلاسمای یک بعدی با  $KT_e = 3\text{eV}$  تولید شده است. چگالی در خارج کاواک برابر است با  $n_0 = 10^{16}\text{m}^{-3}$  و در داخل آن برابر است با  $n_i = 0.4 \times 10^{16}\text{m}^{-3}$ . اگر کاواک به اندازه کافی دراز باشد که بتوانیم از تشدیدهای مرزی صرف نظر کنیم، طول موج کوتاهترین موج پلاسمای الکترونی که می تواند در کاواک به دام افتد چقدر است؟

پیوستها

# پیوست الف

## واحدها، ثابتها، و فرمولها، روابط برداری

### الف ۱. واحدها

فرمولهای این کتاب برحسب واحدهای mks دستگاه بین‌المللی (SI) نوشته شده‌اند. در بسیاری از متون تحقیقی هنوز دستگاه گاوسی cgs به‌کار برده می‌شود. در جدول زیر، معادلات ماکسول در خلا، معادله حرکت سیال و قانون اهم ایده‌آلی در این دو دستگاه نوشته شده‌اند:

mks – SI

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = e(n_i - n_e)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \dot{\mathbf{D}}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

گاوسی – cgs

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi e(n_i - n_e)$$

$$c \nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$c \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j} + \dot{\mathbf{E}}$$

$$\epsilon = \mu = 1$$

$$mn \frac{d\mathbf{v}}{dt} = qn(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla p \quad mn \frac{d\mathbf{v}}{dt} = qn \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) - \nabla p$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$$

معادله پیوستگی در هر دو دستگاه یکسان است.

در دستگاه گاوسی تمام کمیت‌های الکتریکی برحسب واحدهای الکتروستاتیکی (esu) هستند و  $\mathbf{B}$  برحسب گاوس (emu) است؛ برای تطبیق این استثنا، ضرایب  $c$  به‌طور صریح نوشته شده‌اند.  $\mathbf{B}$  در دستگاه mks برحسب تسلا ( $\text{Wb/m}^2$ ) که معادل  $10^4$  گاوس است اندازه‌گیری می‌شود. میدان الکتریکی  $\mathbf{E}$  در دستگاه cgs برحسب  $\text{esu/cm}$  و در دستگاه mks برحسب  $\text{V/m}$  است. چون یک واحد پتانسیل esu برابر با  $300 \text{ V}$  است، یک  $\text{esu/cm}$  معادل  $3 \times 10^4 \text{ V/m}$  است. نسبت  $E$  به  $B$  در دستگاه گاوسی فاقد بعد است، و از این رو  $v_E = cE/B$ . در دستگاه mks، نسبت  $E/B$  دارای ابعاد سرعت است، و از این رو  $v_E = E/B$ . هنگامی که ابعاد جمله‌های مختلف یک معادله را برای یافتن اشتباه‌های محاسباتی واری می‌کنیم به‌خاطر داشتن نکتهٔ بالا مفید است.

چگالی جریان  $\mathbf{j} = nev$  در هر دو دستگاه صورت یکسانی دارد.  $n$  و  $v$  در دستگاه cgs برحسب  $\text{cm}^{-3}$  و  $\text{cm/sec}$  هستند و  $e$  دارای مقدار  $4.8 \times 10^{-10} \text{ esu}$  است. بنابراین،  $\mathbf{j}$  برحسب  $\text{esu/cm}^2$  می‌شود که در آن جریان  $1 \text{ esu}$  برابر با  $c^{-1} \text{ emu}$  یا  $(3 \times 10^9) \text{ A}$  و  $10/c = 1/(3 \times 10^9) \text{ A}$  است.  $n$  و  $v$  در دستگاه mks برحسب  $\text{m}^{-3}$  و  $\text{m/sec}$  هستند و  $e$  مقدار  $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$  را دارد، و در نتیجه  $\mathbf{j}$  برحسب  $\text{A/m}^2$  می‌شود.

بسیاری از فرمولهای دستگاه cgs را می‌توان با جانشانی  $B/c \rightarrow B$  و  $\epsilon_0^{-1} \rightarrow 4\pi$  به فرمولهای دستگاه mks تبدیل کرد، که در آن  $9 \times 10^9 = 1/4\pi\epsilon_0$ . به‌عنوان مثال، چگالی انرژی میدان الکتریکی در دستگاه cgs برابر با  $E^2/8\pi$  و در دستگاه mks برابر با  $\epsilon_0 E^2/2$  است، و چگالی انرژی میدان مغناطیسی در دستگاه cgs برابر با  $B^2/8\pi$  و در دستگاه mks برابر با  $B^2/2\mu_0$  برابر است. در اینجا از رابطهٔ  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/sec} = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$  استفاده کرده‌ایم.

انرژی  $KT$  معمولاً برحسب الکترون ولت داده می‌شود. در دستگاه cgs باید  $T_{\text{eV}}$  را با ضرب کردن در  $10^{-12} \text{ erg/eV} \times 6 \times 10^9$  به ارگ (erg) تبدیل کرد. در دستگاه mks باید  $T_{\text{eV}}$  را با ضرب کردن در  $10^{-11} \text{ J/eV} \times 6 \times 10^9$  به ژول (J) تبدیل کرد. البته عدد اخیر همان بار  $e$  در دستگاه mks است زیرا بر همین مبنا الکترون ولت تعریف شده است.

## الف ۲. ثابتها و فرمولهای مفید

ثابتها

cgcs	mks		
$3 \times 10^{10} \text{ cm/sec}$	$3 \times 10^8 \text{ m/sec}$	سرعت نور	$c$
$4.8 \times 10^{-10} \text{ esu}$	$1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$	بار الکترون	$e$
$0.91 \times 10^{-27} \text{ g}$	$0.91 \times 10^{-30} \text{ kg}$	جرم الکترون	$m$
$1.67 \times 10^{-24} \text{ g}$	$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$	جرم پروتون	$M$
۱۸۳۷	۱۸۳۷		$M/m$
۴۳	۴۳		$(M/m)^{1/2}$
$1.38 \times 10^{-16} \text{ erg/}^\circ\text{K}$	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J/}^\circ\text{K}$	ثابت بولتزمن	$K$
$1.6 \times 10^{-12} \text{ erg}$	$1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$	الکترون ولت	$eV$
۱۱۶۰۰۰ K	۱۱۶۰۰۰ K	دمای $KT$ برای ۱ eV	
	$8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$	گذردهی فضای تهی	$\epsilon_0$
	$4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$	تراوایی فضای تهی	$\mu_0$
$0.88 \times 10^{-16} \text{ cm}^2$	$0.88 \times 10^{-20} \text{ m}^2$	سطح مقطع اتم H	$\pi a_0^2$
$3.3 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2}$	$3.3 \times 10^{19} \text{ m}^{-2}$	چگالی اتمهای خنثی در دمای	
		اتاق و فشار ۱ Torr	

فرمولها

فرمول سودمند ( $n$ برحسب $\text{cm}^{-3}$ )	-cgcs گاوسی	mks	
$f_p = 9000 \sqrt{n} \text{ sec}^{-1}$	$\left(\frac{4\pi n e^2}{m}\right)^{1/2}$	$\left(\frac{n e^2}{\epsilon_0 m}\right)^{1/2}$	$\omega_p$ بسامد پلاسما
$f_c = 2.8 \text{ GHz/kG}$	$\frac{eB}{mc}$	$\frac{eB}{m}$	$\omega_c$ بسامد سیکلوترون الکترون
$740 (T_{eV}/n)^{1/2} \text{ cm}$	$\left(\frac{KT_e}{4\pi n e^2}\right)^{1/2}$	$\left(\frac{\epsilon_0 KT_e}{n e^2}\right)^{1/2}$	$\lambda_D$ طول دمای
$\frac{1.7 T_{eV}^{1/2}}{B_{kG}} \text{ mm(H)}$	$\frac{mv_{\perp} c}{eB}$	$\frac{mv_{\perp}}{eB}$	$r_L$ شعاع لارمور

فرمولھا

فرمول سودمند ( $n$ بر حسب $\text{cm}^{-3}$ )	-cgs گاوسی	mks	
$2.2 \times 10^{11} \frac{B}{\sqrt{n}} \frac{\text{m}}{\text{sec}} (\text{H})$	$\frac{B}{(\frac{4}{3}\pi\rho)^{1/2}}$	$\frac{B}{(\mu_0 \rho)^{1/2}}$	$v_A$ سرعت آلفون
$10^6 T_{eV}^{1/2} \frac{\text{cm}}{\text{sec}} (\text{H})$	$\left(\frac{KT_e}{M}\right)^{1/2}$	$\left(\frac{KT_e}{M}\right)^{1/2}$	$v_s$ سرعت آکوسیتیکی ( $T_i = 0$ )
$10^8 \frac{E(\text{V/cm})}{B(\text{G})} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$	$\frac{cE}{B}$	$\frac{E}{B}$	$v_E$ سرعت سوق $E \times B$
$10^8 \frac{T_{eV}}{B} \frac{1}{R} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$	$\frac{cKT}{eB} \frac{n'}{n}$	$\frac{KT}{eB} \frac{n'}{n}$	$v_D$ سرعت رانش دیامغناطیس
	$\frac{nKT}{B^2/\lambda\pi}$	$\frac{nKT}{B^2/\mu_0}$	$\beta$ فشار مغناطیسی/پلاسما
$0.9 \times 10^9 T_{eV}^{1/2} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$	$\left(\frac{2KT_e}{m}\right)^{1/2}$	$\left(\frac{2KT_e}{m}\right)^{1/2}$	$v_{the}$ سرعت گرمایی الکترون
$\approx 2 \times 10^{-6} \frac{Zn_e \ln \Lambda}{T_{eV}^{2/3}} \text{sec}^{-1}$	$\approx \frac{\omega_p}{N_D}$		$v_{ei}$ بسامد برخورد الکترون-یون
$\approx 5 \times 10^{-6} \frac{n \ln \Lambda}{T_{eV}^{2/3}} \text{sec}^{-1}$			$v_{ee}$ بسامد برخورد الکترون-الکترون
$Z^2 \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{2/3} v_{ee}$			$v_{ii}$ بسامد برخورد یون-یون
$\approx 3.4 \times 10^{12} \frac{T_{eV}^2}{n \ln \Lambda} \text{cm}(\text{H})$		$\approx \lambda_{ee} \approx \lambda_{ii}$	$\lambda_{ei}$ مسافت آزاد میانگین برای برخورد
$\frac{v_{osc}^2}{c^2} = 3.7^2 I_{11} \lambda_\mu^2$	$\frac{eE_0}{m\omega_0}$	$\frac{eE_0}{m\omega_0}$	$v_{osc}$ سرعت لرزش الکترون قله
$\frac{v_{osc}^2}{v_e^2} = 3.7^2 \frac{I_{12} \lambda_\mu^2}{T_{eV}}$			

### الف ۳. روابط برداری مفید

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \equiv (\mathbf{ABC})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{ABD})\mathbf{C} - (\mathbf{ABC})\mathbf{D} = (\mathbf{ACD})\mathbf{B} - (\mathbf{BCD})\mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \mathbf{A}$$

$$\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \nabla \phi \times \mathbf{A} + \phi \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A} = \nabla \left( \frac{1}{2} A^r \right) - \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

$$\nabla \times [(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A}] = (\mathbf{A} \cdot \nabla)(\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla \cdot \mathbf{A})(\nabla \times \mathbf{A}) - [(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \nabla]\mathbf{A}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

$$\nabla \times \nabla \phi = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

مختصات استوانه‌ای  $(r, \theta, z)$

$$\nabla^r \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} A_\theta + \frac{\partial}{\partial z} A_z$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla^r \mathbf{A} = (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{A} = \left[ \nabla^r A_r - \frac{1}{r^2} \left( A_r + r \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) \right] \hat{\mathbf{r}}$$



$$\begin{aligned}
 & + \left[ \nabla^r A_\theta - \frac{1}{r^2} \left( A_\theta - r \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \right] \hat{\theta} + \nabla^r A_z \hat{z} \\
 (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} = & \hat{r} \left( A_r \frac{\partial B_r}{\partial r} + A_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} + A_z \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{1}{r} A_\theta B_\theta \right) \\
 & + \hat{\theta} \left( A_r \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + A_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + A_z \frac{\partial B_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} A_\theta B_r \right) \\
 & + \hat{z} \left( A_r \frac{\partial B_z}{\partial r} + A_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

## پیوست ب

### نظریهٔ امواج در پلاسمای یکنواخت سرد

اگر  $T_e = T_i = 0$ ، امواج توصیف شده در فصل ۴ را می‌توان به آسانی به هر تعداد از گونه‌های ذرات باردار و هر زاویهٔ انتشار  $\theta$  نسبت به میدان مغناطیسی تعمیم داد. امواجی همچون امواج اکوستیکی یونی که به  $T$  متناهی وابسته‌اند در این بررسی وارد نمی‌شوند. ابتدا تانسور دی‌الکتریک پلازما را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. معادلهٔ چهارم ماکسول عبارت است از

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j} + \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}) \quad (\text{ب. ۱})$$

که در آن  $\mathbf{j}$  جریان پلاسمای حاصل از حرکت گونه‌های مختلف ذرات باردار با چگالی  $n_s$ ، بار  $q_s$  و سرعت  $\mathbf{v}_s$  است:

$$\mathbf{j} = \sum_s n_s q_s \mathbf{v}_s \quad (\text{ب. ۲})$$

اگر پلازما را یک دی‌الکتریک با جریانهای داخلی  $\mathbf{j}$  در نظر بگیریم، معادلهٔ ب. ۱ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \dot{\mathbf{D}} \quad (\text{ب. ۳})$$

که در آن

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \frac{i}{\omega} \mathbf{j} \quad (\text{ب. ۴})$$

در اینجا برای تمام حرکت‌های پلاسما یک وابستگی  $\exp(-i\omega t)$  در نظر گرفته‌ایم. فرض کنید جریان  $\mathbf{j}$  با  $\mathbf{E}$  متناسب است اما (به علت میدان مغناطیسی  $B_0 \hat{z}$ ) ضرورتاً همراستا با آن نیست؛ در نتیجه می‌توانیم تانسور رسانندگی  $\sigma$  را با رابطهٔ زیر تعریف کنیم

$$\mathbf{j} = \sigma \cdot \mathbf{E} \quad (\text{ب. ۵})$$

معادلهٔ ب. ۴ به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \left( \mathbf{I} + \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \sigma \right) \cdot \mathbf{E} = \epsilon \cdot \mathbf{E} \quad (\text{ب. ۶})$$

بنابراین، ثابت دی‌الکتریک پلاسما عبارت است از تانسور

$$\epsilon = \epsilon_0 (\mathbf{I} + i\sigma/\epsilon_0 \omega) \quad (\text{ب. ۷})$$

که در آن  $\mathbf{I}$  تانسور واحد است.

برای محاسبهٔ  $\sigma$ ، از معادلهٔ خطی شدهٔ حرکت سیال برای گونهٔ  $s$ ، با چشمپوشی از جمله‌های برخورد و فشار، استفاده می‌کنیم:

$$m_s \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} = q_s (\mathbf{E} + \mathbf{v}_s \times \mathbf{B}_0) \quad (\text{ب. ۸})$$

با تعریف بسامدهای سیکلوترون و پلاسما برای هر یک از گونه‌ها به صورت

$$\omega_{cs} \equiv \left| \frac{q_s B_0}{m_s} \right| \quad \omega_{ps} \equiv \frac{n_s q_s^2}{\epsilon_0 m_s} \quad (\text{ب. ۹})$$

می‌توانیم معادلهٔ ب. ۸ را به مؤلفه‌های  $x$ ،  $y$  و  $z$  تفکیک کنیم و مؤلفه‌های  $\mathbf{v}_s$  را به دست آوریم

$$v_{xs} = \frac{iq_s}{m_s \omega} \frac{[E_x \pm i(\omega_{cs}/\omega)E_y]}{1 - (\omega_{cs}/\omega)^2} \quad (\text{ب. ۱۰ الف})$$

$$v_{ys} = \frac{iq_s}{m_s \omega} \frac{[E_y \mp i(\omega_{cs}/\omega)E_x]}{1 - (\omega_{cs}/\omega)^2} \quad (\text{ب. } 10)$$

$$v_{zs} = \frac{iq_s}{m_s \omega} E_z \quad (\text{ج. } 10)$$

در اینجا  $\pm$  نمایشگر علامت بار  $q_s$  است. جریان پلاسما برابر است با

$$\mathbf{j} = \sum_s n_{os} q_s \mathbf{v}_s \quad (\text{ب. } 11)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{i}{\epsilon_o \omega} j_x &= \sum_s \frac{in_{os}}{\epsilon_o \omega} \frac{iq_s^2}{m_s \omega} \frac{E_x \pm i(\omega_{cs}/\omega)E_y}{1 - (\omega_{cs}/\omega)^2} \\ &= \sum_s -\frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{E_x \pm i(\omega_{cs}/\omega)E_y}{1 - (\omega_{cs}/\omega)^2} \end{aligned} \quad (\text{ب. } 12)$$

با استفاده از اتحادهای

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - (\omega_{cs}/\omega)^2} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\omega}{\omega \mp \omega_{cs}} + \frac{\omega}{\omega \pm \omega_{cs}} \right] \\ \pm \frac{\omega_{cs}/\omega}{1 - (\omega_{cs}/\omega)^2} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\omega}{\omega \mp \omega_{cs}} - \frac{\omega}{\omega \pm \omega_{cs}} \right] \end{aligned} \quad (\text{ب. } 13)$$

می‌توان معادلهٔ ب. ۱۲ را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_o \omega} j_x &= -\frac{1}{2} \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \left[ \left( \frac{\omega}{\omega \mp \omega_{cs}} + \frac{\omega}{\omega \pm \omega_{cs}} \right) E_x \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\omega}{\omega \mp \omega_{cs}} - \frac{\omega}{\omega \pm \omega_{cs}} \right) iE_y \right] \end{aligned} \quad (\text{ب. } 14)$$

به همین ترتیب، مؤلفه‌های  $y$  و  $z$  عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} \frac{i}{\epsilon_o \omega} j_y &= -\frac{1}{2} \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \left[ \left( \frac{\omega}{\omega \pm \omega} - \frac{\omega}{\omega \mp \omega} \right) iE_x \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\omega}{\omega \mp \omega_{cs}} + \frac{\omega}{\omega \pm \omega_{cs}} \right) E_y \right] \end{aligned} \quad (\text{ب. } 15)$$

$$\frac{i}{\epsilon_0 \omega} j_z = - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} E_z \quad (۱۶. ب)$$

با جاگذاری معادلهٔ ب.۱۴ در معادلهٔ ب.۴ داریم

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_0} D_x = E_x - \frac{1}{2} \sum_s \left[ \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \left( \frac{\omega}{\omega \mp \omega_{cs}} + \frac{\omega}{\omega \pm \omega_{cs}} \right) E_x \right. \\ \left. + \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \left( \frac{\omega}{\omega \mp \omega_{cs}} - \frac{\omega}{\omega \pm \omega_{cs}} \right) i E_y \right] \quad (۱۷. ب) \end{aligned}$$

اکنون اختصارهای زیر را تعریف می‌کنیم

$$R \equiv 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \left( \frac{\omega}{\omega \pm \omega_{cs}} \right)$$

$$L \equiv 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \left( \frac{\omega}{\omega \mp \omega_{cs}} \right)$$

(۱۸. ب)

$$S \equiv \frac{1}{2}(R + L) \quad D \equiv \frac{1}{2}(R - L)^*$$

$$P \equiv 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2}$$

با استفاده از این نمادها در معادلهٔ ب.۱۷ و عملیاتی مشابه با آنچه برای مؤلفه‌های  $y$  و  $z$  انجام دادیم خواهیم داشت

$$\epsilon_0^{-1} D_x = S E_x - i D E_y$$

$$\epsilon_0^{-1} D_y = i D E_x + S E_y \quad (۱۹. ب)$$

$$\epsilon_0^{-1} D_z = P E_z$$

از مقایسه با معادلهٔ ب.۶ ملاحظه می‌شود که

\* دقت کنید که  $D$  در اینجا بیانگر «تفاضل» است و بردار جابه‌جایی  $\mathbf{D}$  نیست.

$$\epsilon = \epsilon_0 \begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \equiv \epsilon_0 \epsilon_R \quad (\text{ب. } 20)$$

اکنون با گرفتن تاو از معادله  $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$  و جاگذاری  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}$ ، معادله موج را به دست می آوریم:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \epsilon_0 (\epsilon_R \cdot \ddot{\mathbf{E}}) = -\frac{1}{c^2} \epsilon_R \cdot \ddot{\mathbf{E}} \quad (\text{ب. } 21)$$

با فرض وابستگی فضایی  $\exp(ik \cdot \mathbf{r})$  برای  $\mathbf{E}$  و تعریف ضریب شکست برداری

$$\mu = \frac{c}{\omega} \mathbf{k} \quad (\text{ب. } 22)$$

می توانیم معادله ب. ۲۱ را به صورت زیر بنویسیم

$$\mu \times (\mu \times \mathbf{E}) + \epsilon_R \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (\text{ب. } 23)$$

پلاسمای یکنواخت در صفحه  $xy$  همسانگرد است، و در نتیجه می توانیم، بدون نقض عمومیت بحث، محور  $y$  را طوری برگزینیم که  $k_y = 0$ . بنابراین، اگر زاویه بین  $\mathbf{k}$  و  $\mathbf{B}_0$  باشد داریم

$$\mu_x = \mu \sin \theta \quad \mu_z = \mu \cos \theta \quad \mu_y = 0 \quad (\text{ب. } 24)$$

قدم بعدی عبارت است از تفکیک معادله ب. ۲۳ به مؤلفه های آن با استفاده از عناصر  $\epsilon_R$  که در معادله ب. ۲۰ داده شده اند. با این روش به آسانی به دست می آوریم

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{E} \equiv \begin{pmatrix} S - \mu^2 \cos^2 \theta & -iD & \mu^2 \sin \theta \cos \theta \\ iD & S - \mu^2 & 0 \\ \mu^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & P - \mu^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{ب. } 25)$$

از اینجا واضح است که مؤلفه های  $E_x$  و  $E_y$  تنها در صورتی با  $E_z$  جفت می شوند که از زاویه های اصلی  $\theta = 0^\circ, 90^\circ$  انحراف پیدا کنیم.

معادله ب. ۲۵ مجموعه ای از سه معادله همزمان همگن است؛ شرط وجود جواب برای معادله آن است که دترمینان  $\mathbf{R}$  صفر باشد، یعنی  $\|\mathbf{R}\| = 0$ . از بسط این دترمینان برحسب کهادهای

ستون دوم، خواهیم داشت

$$(iD)^{\nu}(P - \mu^{\nu} \sin^{\nu} \theta) + (S - \mu^{\nu}) \times [(S - \mu^{\nu} \cos^{\nu} \theta)(P - \mu^{\nu} \sin^{\nu} \theta) - \mu^{\nu} \sin^{\nu} \theta \cos^{\nu} \theta] = 0 \quad (\text{ب. } 26)$$

با قرار دادن  $1 - \sin^{\nu} \theta$  به جای  $\cos^{\nu} \theta$  و حل معادله برای  $\sin^{\nu} \theta$  به دست می‌آوریم

$$\sin^{\nu} \theta = \frac{-P(\mu^{\nu} - 2S\mu^{\nu} + RL)}{\mu^{\nu}(S - P) + \mu^{\nu}(PS - RL)} \quad (\text{ب. } 27)$$

که در آن از اتحاد  $S^{\nu} - D^{\nu} = RL$  استفاده کرده‌ایم. به همین ترتیب، داریم

$$\cos^{\nu} \theta = \frac{S\mu^{\nu} - (PS + RL)\mu^{\nu} + PRL}{\mu^{\nu}(S - P) + \mu^{\nu}(PS - RL)} \quad (\text{ب. } 28)$$

از تقسیم دو معادلهٔ اخیر خواهیم داشت

$$\tan^{\nu} \theta = \frac{P(\mu^{\nu} - 2S\mu^{\nu} + RL)}{S\mu^{\nu} - (PS + RL)\mu^{\nu} + PRL}$$

چون  $2S = R + L$ ، می‌توانیم با تجزیهٔ صورت و مخرج کسر بالا رابطهٔ پاشیدگی پلاسمای سرد را به دست آوریم:

$$\tan^{\nu} \theta = -\frac{P(\mu^{\nu} - R)(\mu^{\nu} - L)}{(S\mu^{\nu} - RL)(\mu^{\nu} - P)} \quad (\text{ب. } 29)$$

با قرار دادن  $\theta = 90^{\circ}$  و  $\theta = 0^{\circ}$  می‌توانیم مدهای اصلی فصل ۴ را به دست آوریم. هرگاه  $\theta = 0^{\circ}$ ، سه ریشهٔ  $P = 0$  (موج لانگمویر)،  $\mu^{\nu} = R$  (موج  $R$ ) و  $\mu^{\nu} = L$  (موج  $L$ ) وجود خواهد داشت. هرگاه  $\theta = 90^{\circ}$ ، دو ریشهٔ  $\mu^{\nu} = RL/S$  (موج غیرعادی) و  $\mu^{\nu} = P$  (موج عادی) وجود خواهد داشت. با استفاده از تعریفهای ب. ۱۸، می‌توان دریافت که این روابط با روابط پاشیدگی در فصل ۴ یکسان هستند، در حالی که تصحیحات ناشی از حرکت‌های یونی در اینجا اضافه شده‌اند.

تشدیدها را می‌توان با میل دادن  $\mu$  به سمت  $\infty$  به دست آورد. در این مورد خواهیم داشت

$$\tan^{\nu} \theta_{\text{res}} = -P/S \quad (\text{ب. } 30)$$

این رابطه نشان می‌دهد که بسامدهای تشدید به زاویه  $\theta$  بستگی دارند. اگر  $\theta = 0^\circ$ ، جوابهای ممکن عبارت‌اند از  $P = 0^\circ$  و  $S = \infty$ . جواب اول تشدید پلاسما  $\omega = \omega_p$  است در حالی که جواب دوم هنگامی رخ می‌دهد که  $R = \infty$  (تشدید سیکلوترون الکترونی) یا  $L = \infty$  (تشدید سیکلوترون یونی). اگر  $\theta = 90^\circ$ ، جوابهای ممکن  $P = \infty$  یا  $S = 0^\circ$  خواهند بود. جواب اول نمی‌تواند برای  $\omega$  و  $\omega_p$  متناهی وجود داشته باشد، و جواب دوم بسامدهای آمیخته بالایی و پایینی، و همچنین بسامد آمیخته دو یونی وقتی بیش از یک گونه یون وجود دارند، را به دست می‌دهد. بسامدهای قطع را می‌توان با قرار دادن  $\mu = 0$  در معادله ب. ۲۶ به دست آورد. مجدداً با استفاده از رابطه  $S^2 - D^2 = RL$ ، درمی‌یابیم که شرط قطع مستقل از  $\theta$  است:

$$PRL = 0 \quad (\text{ب. } 31)$$

شرطهای  $R = 0$  و  $L = 0$  بسامدهای قطع  $\omega_L$  و  $\omega_R$  فصل ۴ را به اضافه تصحیحات یونی تعیین می‌کنند. مشاهده می‌شود که شرط  $P = 0$  با قطع و تشدید متناظر است. این واگنی به علت چشمپوشی از حرکت‌های گرمایی است. در واقع،  $P = 0$  (یا  $\omega = \omega_p$ ) تشدید برای امواج طولی و قطع برای امواج عرضی است.

اطلاعات مندرج در معادله ب. ۲۹ در نمودار کلموف-مولالی-آلیس خلاصه شده‌اند. نتیجه دیگری را که در این نمودار نیست می‌توان به آسانی از این فرمولبندی به دست آورد. سطر میانی معادله ب. ۲۵ عبارت است از

$$iDE_x + (S - \mu^2)E_y = 0 \quad (\text{ب. } 32)$$

بنابراین، قطبش در صفحه عمود بر  $B_0$  با رابطه زیر داده می‌شود

$$\frac{iE_x}{E_y} = \frac{\mu^2 - S}{D} \quad (\text{ب. } 33)$$

از اینجا به آسانی دیده می‌شود که امواج در بسامد تشدید ( $\mu^2 = \infty$ ) قطبیده خطی و در بسامد قطع ( $\mu^2 = 0$ ،  $R = 0$  یا  $L = 0$ ، و در نتیجه  $S = \pm D$ ) قطبیده دایره‌ای هستند.



## پیوست ج

### نمونه امتحان سه ساعته در پایان نیمسال

قسمت اول (یک ساعت، کتاب بسته)

۱. تعداد الکترونها در یک کره دبابی با  $n = 10^{17} \text{m}^{-3}$  و  $KT_e = 10 \text{eV}$  تقریباً برابر است با

(الف) ۱۳۵

(ب) ۰٫۱۴

(ج)  $7.4 \times 10^3$

(د)  $1.7 \times 10^5$

(ه)  $3.5 \times 10^{10}$

۲. بسامد پلاسمای الکترونی در پلاسمایی با چگالی  $n = 10^{20} \text{m}^{-3}$  برابر است با

(الف) ۹۰ MHz

(ب) ۹۰۰ MHz

(ج) ۹ GHz

(د) ۹۰ GHz

(ه) هیچکدام از جوابهای بالا با تقریب ۱۰٪

۳. یک هسته هلیوم (با بار  $+2e$ ) با انرژی  $3.5\text{MeV}$  در میدان مغناطیسی  $8\text{ T}$  دارای شعاع لارمور ماکسیممی است تقریباً برابر با

(الف)  $2\text{ mm}$

(ب)  $2\text{ cm}$

(ج)  $20\text{ cm}$

(د)  $2\text{ m}$

(ه)  $2\text{ ft}$

۴. برای یک پلاسمای آزمایشگاهی با  $n = 10^{16}\text{ m}^{-3}$ ،  $KT_e = 2\text{ eV}$ ،  $KT_i = 0.1\text{ eV}$  و  $B = 0.3\text{ T}$ ، مقدار تقریبی بتا (فشار پلازما بر فشار میدان مغناطیسی) برابر است با

(الف)  $10^{-7}$

(ب)  $10^{-6}$

(ج)  $10^{-4}$

(د)  $10^{-2}$

(ه)  $10^{-1}$

۵.  $\mathbf{v} \nabla B$  یعنی  $B$  سوق گرادیان

(الف) همیشه همجهت با  $\mathbf{v}_E$  است.

(ب) همیشه در خلاف جهت  $\mathbf{v}_E$  است.

(ج) گاهی با  $\mathbf{B}$  موازی است.

(د) همیشه مخالف سوق خمیدگی  $\mathbf{v}_R$  است.

(ه) گاهی موازی با سوق دیامغناطیسی  $\mathbf{v}_D$  است.

۶. در پلاسمای چنبره‌ای (شکل زیر)، جریان دیامغناطیسی اساساً در کدام جهت حرکت می‌کند؟

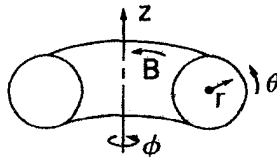
(الف)  $+\hat{\phi}$

(ب)  $-\hat{\phi}$

(ج)  $+\hat{\theta}$

(د)  $-\hat{\theta}$

(ه)  $+\hat{z}$



۷. در پلاسمای چنبره‌ای (شکل سؤال ۶)، امواج پیچشی آلفون می‌توانند در جهت‌های زیر انتشار

یابند

(الف)  $\pm \hat{r}$

(ب)  $\pm \hat{\theta}$

(ج)  $\pm \hat{\phi}$

(د) تنها  $+\hat{\theta}$

(ه) تنها  $-\hat{\theta}$

۸. پلاسمای  $A$  ده بار چگالی تر از پلاسمای  $B$  است ولی دارای همان دما و ترکیب است. مقاومت

$A$  نسبت به مقاومت  $B$

(الف)  $10^0$  بار کوچکتر است

(ب)  $10^1$  بار کوچکتر است

(ج) تقریباً یکسان است

(د)  $10^1$  بار بزرگتر است

(ه)  $10^0$  بار بزرگتر است

۹. میانگین سرعت الکترونی  $|\bar{v}|$  در یک پلاسمای ماکسولی  $10 \text{ keV}$  برابر است با

(الف)  $7 \times 10^2 \text{ m/sec}$

(ب)  $7 \times 10^3 \text{ m/sec}$

(ج)  $7 \times 10^5 \text{ m/sec}$

(د)  $7 \times 10^6 \text{ m/sec}$

(ه)  $7 \times 10^7 \text{ m/sec}$

۱۰. هنگامی که  $B_0 = 0$ ، کدام موج نمی‌تواند انتشار پیدا کند؟

(الف) موج پلاسمای الکترونی

(ب) موج عادی

(ج) موج آلفون

(د) موج آکوستیکی یونی

(ه) موج بوهم‌گراس

۱۱. یک «موج پسر» موجی است که برای آن

(الف)  $k$  مخالف  $B_0$  است.

(ب)  $\omega/k < 0$

(ج)  $d\omega/dk < 0$

$$v_i = -v_e \quad (د)$$

(ه)  $v_\phi$  مخالف  $v_g$  است.

۱۲. «قطع» و «تشدید» به ترتیب به شرایطی مربوط اند که ثابت دی الکتریک

(الف)  $0$  و  $\infty$  است

(ب)  $\infty$  و  $0$  است

(ج)  $0$  و  $1$  است

(د)  $1$  و  $0$  است

(ه) از تقریب پلاسما قابل محاسبه نیست

۱۳. بسامدهای پایینی و بالایی آمیخته به ترتیب عبارت اند از

$$(\omega_p \omega_c)^{1/2} \text{ و } (\Omega_p \Omega_c)^{1/2} \quad (الف)$$

$$(\omega_p^2 + \omega_c^2)^{1/2} \text{ و } (\Omega_p^2 + \Omega_c^2)^{1/2} \quad (ب)$$

$$(\omega_p^2 + \omega_c^2)^{1/2} \text{ و } (\omega_c \Omega_c)^{1/2} \quad (ج)$$

$$(\omega_p^2 + \omega_c^2)^{1/2} \text{ و } (\omega_p^2 - \omega_c^2)^{1/2} \quad (د)$$

$$(\omega_p \omega_c)^{1/2} \text{ و } (\omega_R \omega_L)^{1/2} \quad (ه)$$

۱۴. در یک پلاسما کاملاً یونیده، پخش در عرض  $B$  اساساً ناشی از

(الف) برخوردهای یون-یون است

(ب) برخوردهای الکترون-الکترون است

(ج) برخوردهای الکترون-یون است

(د) برخوردهای سه جسمی است

(ه) دیامغناطیس پلاسماست

۱۵. افت چگالی نمایی با زمان مشخصه

(الف) پلاسماهای کاملاً یونیده تحت پخش کلاسیک است.

(ب) پلاسماهای کاملاً یونیده تحت بازترکیب است.

(ج) پلاسماهای یونیده ضعیف تحت بازترکیب است.

(د) پلاسماهای یونیده ضعیف تحت پخش کلاسیک است.

(ه) پلاسماهای کاملاً یونیده تحت پخش و بازترکیب است.

۱۶. مد سوت زن دارای قطبش دایره‌ای است که

(الف) با مشاهده در جهت  $+B$ ، ساعتگرد است.

- (ب) با مشاهده در جهت  $-B_0$ ، ساعتگرد است.
- (ج) با مشاهده در جهت  $+k$ ، پاد ساعتگرد است.
- (د) با مشاهده در جهت  $-k$ ، پاد ساعتگرد است.
- (ه) هر دو گردش را دارد زیرا موج قطبیده تخت است.
۱۷. سرعت فاز امواج الکترومغناطیسی در پلاسما
- (الف) همیشه بزرگتر از  $c$  است.
- (ب) هیچگاه بزرگتر از  $c$  نیست.
- (ج) گاهی بزرگتر از  $c$  است.
- (د) همیشه کوچکتر از  $c$  است.
- (ه) هیچگاه کوچکتر از  $c$  نیست.
۱۸. کدام گزینه روشی ممکن برای گرم کردن پلاسما نیست:
- (الف) گرمایش شدید سیکلوترون
- (ب) تراکم بی‌دررو
- (ج) گرمایش اهمی
- (د) دیمش مغناطیسی زمان گذار
- (ه) ترابری نوکلاسیک
۱۹. کدام گزینه، ابزاری برای محبوس‌سازی پلاسما نیست:
- (الف) پیچۀ بیسبال
- (ب) حلقه دیامغناطیسی
- (ج) استلاراتور به شکل 8
- (د) هشت قطبی شناور
- (ه) تنگش‌تا
۲۰. میرایی لاندائو
- (الف) ناشی از ذرات «تشدیدی» است.
- (ب) همیشه در پلاسمای بی‌برخورد روی می‌دهد.
- (ج) هرگز در پلاسمای بی‌برخورد روی نمی‌دهد.
- (د) یک نتیجه ریاضی است که در تجربه تحقق نمی‌یابد.
- (ه) مانده تکینگیهای موهومی واقع بر روی نیم‌دایره است.

## قسمت ب (دو ساعت، کتاب باز، ۴ مسئله از ۵ مسئله را حل کنید)

۱. پلاسمای سردی در نظر بگیرید که از  $n_0$  یون هیدروژن،  $1/2 n_0$  یون دوبار یونیده He و  $2 n_0$  الکترون تشکیل شده است. نشان دهید که دو بسامد آمیخته پایین وجود دارند و عبارتی تقریبی برای هر یک به دست آورید. [راهنمایی: می‌توانید از تقریب پلاسما، فرض  $m/M \ll 1$  و فرمولهای ۷۱ که در کتاب داده شده‌اند استفاده کنید. (لازم نیست معادلات حرکت را دوباره حل کنید؛ تنها از جواب معلوم استفاده کنید.)]

۲. موجودات هوشمند یک سیاره دور با ارسال امواج رادیویی قوی که در هر دقیقه بسامدهای از ۱۰ MHz تا ۵۰ MHz را جاروب می‌کند سعی دارند با زمین ارتباط برقرار کنند. گسیلهای قطبیده خطی باید طوری از پلاسمای کمر بند تابشی عبور کنند که  $E$  و  $k$  عمود بر  $B_0$  باشند. معلوم شده است که در حین بروز زبانه‌های خورشیدی (در خورشید آنها)، بسامدهای بین ۲۴٫۲۵ MHz و ۲۸ MHz نمی‌توانند از کمر بند تابشی آنها عبور کنند. از اینجا چگالی پلاسما و میدان مغناطیسی را به دست آورید. (راهنمایی، اعداد را خیلی زود گرد نکنید.)

۳. هرگاه  $\beta$  بزرگتر از  $m/M$  باشد، امکان جفت‌شدگی یک موج سوقی با یک موج آلفون برای ایجاد ناپایداری وجود دارد. یک شرط لازم برای وقوع این پدیده آن است که بین سرعتهای موازی مربوط به این دو موج (در امتداد  $B_0$ ) همگامی وجود داشته باشد.  
(الف) نشان دهید شرط  $m/M > \beta > v_A < v_{th}$  معادل است.

(ب) اگر  $KT_e = 10^4 \text{ eV}$ ،  $B = 2 \text{ T}$ ،  $k_y = 1 \text{ cm}^{-1}$  و  $n = 10^{21} \text{ m}^{-3}$ ، مقدار لازم  $k_z$  را برای این برهم‌کنش در یک پلاسمای هیدروژنی به دست آورید. می‌توانید فرض کنید  $n'_0/n_0 = 1 \text{ cm}^{-1}$  که در آن  $n'_0 = dn_0/dr$ .

۴. هرگاه پخش غیرعادی توسط نوسانهای ناپایدار ایجاد شود، قانون پخش فیک ضرورتاً برقرار نخواهد بود. به‌عنوان مثال، آهنگ رشد امواج سوقی به  $\nabla n/n$  وابسته است، و در نتیجه ضریب پخش  $D_{\perp}$  می‌تواند به  $\nabla n$  وابسته باشد فرض کنید  $D_{\perp}$  در مختصات استوانه‌ای به صورت عمومی زیر است

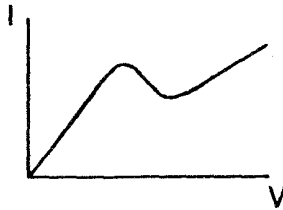
$$D_{\perp} = Ar^s n^p \left( \frac{\partial n}{\partial r} \right)^q$$

نشان دهید که رفتار زمانی واپاشی پلاسما تحت پخش از معادله زیر تبعیت می‌کند

$$\frac{\partial n}{\partial t} = f(r)n^{p+q+1}$$

همچنین نشان دهید که رفتار پلاسماهای یونیده کامل و ضعیف در حدهای مناسب مجدداً به دست می‌آید.

۵. در بعضی از نیمرساناها همچون آرسنید گالیوم، رابطهٔ جریان-ولتاژ مشابه شکل زیر است:



مشاهده می‌کنیم که یک ناحیهٔ تحرک یا مقاومت منفی وجود دارد. فرض کنید ماده‌ای با تحرک منفی برای تمام مقادیر جریان داریم. با استفاد از معادلهٔ حرکت برای پلاسماهای یونیده ضعیف با  $KT = B = 0$ ، به علاوه معادلهٔ پیوستگی الکترون و معادلهٔ پواسون، و با انجام تحلیل متداول موج خطی شده، نشان دهید که به ازای  $\mu_e < 0$  ناپایداری وجود خواهد داشت.

## پیوست د

### حل تعدادی از مسائل

۱.۱ الف) یک مول گاز کامل، در دما و فشار متعارف، دارای  $۶۰۲۲ \times ۱۰^{۲۳}$  (عدد آوگادرو) مولکول است و  $۲۲۴$  لیتر حجم اشغال می‌کند. بنابراین، تعداد در  $m^3$  برابر است با

$$۶۰۲۲ \times ۱۰^{۲۳} / ۲۲۴ \times ۱۰^{-۲} = ۲۶۶ \times ۱۰^{۲۵} m^{-۳}$$

ب) چون  $PV = NRT$  داریم  $n = N/V = P/RT$  بنابراین،  $n_1/n_0 = P_1 T_0 / P_0 T_1$ .  
چگالی قسمت الف) را  $n_0$  و قسمت ب) را  $n_1$  بگیرد. در نتیجه

$$n_1 = (۲۶۶ \times ۱۰^{۲۵}) \frac{۱۰^{-۲}}{۷۶۰} \frac{۲۷۳}{(۲۷۳ + ۲۰)} = ۳۳۰ \times ۱۰^{۱۹} m^{-۳}$$

توجه کنید که تعداد اتمهای یک گاز دواتمی، مانند  $H_2$ ، در هر torr دو برابر گاز تک اتمی، مانند He، است.

۲.۱ انتگرال زیر را در فضای دوبعدی در نظر بگیرید

$$I^2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

با تبدیل به مختصات استوانه‌ای داریم



$$I^2 = \iint e^{-r^2} r \, dr \, d\phi = 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} r \, dr$$

$$= \pi \int e^{-r^2} d(r^2) = -\pi e^{-r^2} \Big|_0^\infty = \pi$$

بنابراین

$$I = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

و

$$\nu = \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(u) du = A \left( \frac{2KT}{m} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^\infty e^{-mu^2/2KT} d \left[ u \left( \frac{m}{2KT} \right)^{1/2} \right]$$

$$= AI \left( \frac{2KT}{m} \right)^{1/2}$$

$$\therefore A = (m/2\pi KT)^{1/2}$$

۴.۱

$$p = n(KT_e + KT_i) = 10^{21} (4 \times 10^3) (1.6 \times 10^{-14})$$

$$= 6.4 \times 10^8 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ atm} \simeq 10^5 \text{ N/m}^2 \quad p = 6.4 \text{ atm}$$

$$1 \text{ atm} \simeq 14.7 \text{ lb/in}^2 = (14.7)(144)/(2000)$$

$$= 1.06 \text{ tons/ft}^2$$

$$p \simeq 6.8 \text{ tons/ft}^2$$

۵.۱

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\frac{e(n_i - n_e)}{\epsilon_0} = -\frac{1}{\epsilon_0} n_\infty e (e^{-e\phi/KT_i} - e^{e\phi/KT_e})$$

$$\simeq \frac{n_\infty e}{\epsilon_0} \left( \frac{e\phi}{KT_i} + \frac{e\phi}{KT_e} \right)$$

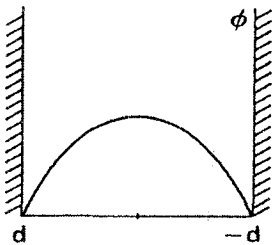
$$\phi = \phi_0 e^{-|x|/\lambda_D}, \quad \frac{1}{\lambda_D^2} = \frac{n_\infty e^{\chi}}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{KT_e} + \frac{1}{KT_i} \right)$$

$$\lambda_D \simeq (KT_i \epsilon_0 / n_\infty e^{\chi})^{1/2}, \quad T_i \ll T_e \text{ اگر}$$

$$\lambda_D \simeq (KT_e \epsilon_0 / n_\infty e^{\chi})^{1/2}, \quad T_e \ll T_i \text{ اگر}$$

۶.۱ (الف)

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\frac{nq}{\epsilon_0}$$



فرض کنید  $\phi = Ax^2 + Bx + c$ ؛ بنابراین،  $\phi' = 2Ax + B$ ،  $\phi'' = 2A$  و  $\phi' = 0$  در  $x = 0$  با توجه به تقارن داریم و در نتیجه  $B = 0$  در  $x = \pm d$  داریم  $\phi = 0$ ؛ بنابراین،  $C = -Ad^2$  و  $0 = Ad^2 + C$  چون  $\phi'' = 2A = -nq/\epsilon_0$  پس  $A = -1/2 \epsilon_0 nq$  و

$$\phi = Ax^2 - Ad^2 = \frac{1}{2\epsilon_0} nq(d^2 - x^2)$$

(ب) انرژی برای بردن بار  $q$  از  $x_1$  به  $x_2$  برابر با تغییر انرژی پتانسیل  $\Delta(q\phi) = q(\phi_2 - \phi_1)$  است. فرض کنید در  $x = \pm d$  داریم  $\phi_1 = 0$  و در  $x = 0$  داریم  $\phi_2 = (1/2\epsilon_0) nq d^2$ ؛ بنابراین،

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\epsilon_0} nq^2 d^2$$

فرض کنید  $d = \lambda_D$ ؛ در نتیجه، برای توزیع ماکسولی یک بعدی داریم

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\epsilon_0} nq^2 \frac{KT\epsilon_0}{nq^2} = \frac{1}{2} KT = E_{AV}$$

بنابراین، اگر  $d > \lambda_D$  داریم  $\mathcal{E} > E_{AV}$ . اگر سرعتها در سه بعد توزیع شده باشند آن گاه  $E_{AV} = \frac{3}{2} KT$  و  $\mathcal{E} > \frac{1}{2} E_{AV}$ ؛ ضریب ۳ در اینجا اهمیتی ندارد. نکته آن است که اگر باریک گونه توسط گونه دیگر خنثی نشود، ذره گرمایی به اندازه کافی انرژی نخواهد داشت که در پلاسما زیاد پیش برود ( $d \gg \lambda_D$ ).

$$N_D = ۴۷۸ \times ۱۰^۴, \lambda_D = ۷۴۰۰ (۲/۱۰^{۱۶})^{1/2} = ۱۰^{-۴} \text{m (الف) } ۷.۱$$

$$N_D = ۵۷۴ \times ۱۰^۴, \lambda_D = ۷۴۰۰ (۰.۱/۱۰^{۲۲})^{1/2} = ۲.۳ \times ۱۰^{-۳} \text{m (ب)}$$

$$N_D = ۱.۲ \times ۱۰^۵, \lambda_D = ۷۴۰۰ (۸۰۰/۱۰^{۲۲})^{1/2} = ۶.۶ \times ۱۰^{-۷} \text{m (ج)}$$

$$r_L = mv_{\perp}/eB \text{ و } v_{\perp} = (۲E/m)^{1/2} \text{ و در نتیجه } E = \frac{1}{2}mv_{\perp}^2 \quad ۱.۲$$

(الف)

$$v_{\perp} = \left[ \frac{(۲)(۱۰^۴)(۱.۶ \times ۱۰^{-۱۹})}{۹.۱۱ \times ۱۰^{-۳۱}} \right]^{1/2}$$

$$= ۵.۹۳ \times ۱۰^۷ \text{m/sec}$$

$$r_L = \frac{(۹.۱۱ \times ۱۰^{-۳۱})(۵.۹۳ \times ۱۰^۷)}{(۱.۶ \times ۱۰^{-۱۹})(۰.۵ \times ۱۰^{-۴})} = ۶.۷۵ \text{m}$$

(ب)

$$v_{\perp} = (۳۰۰)(۱۰۰۰) = ۳ \times ۱۰^۵ \text{m/sec}$$

$$r_L = \frac{(۱.۶۷ \times ۱۰^{-۲۷})(۳ \times ۱۰^۵)}{(۱.۶ \times ۱۰^{-۱۹})(۵ \times ۱۰^{-۹})} = ۶.۲۶ \times ۱۰^۵ \text{m} = ۶۲۶ \text{km}$$

(ج)

$$v_{\perp} = \left[ \frac{(۲)(۱۰^۳)(۱.۶ \times ۱۰^{-۱۹})}{(۴)(۱.۶۷ \times ۱۰^{-۲۷})} \right]^{1/2}$$

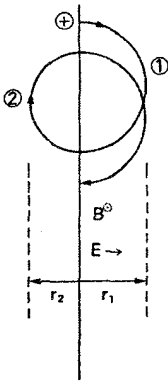
$$= ۲.۱۹ \times ۱۰^۵ \text{m/sec}$$

$$r_L = \frac{(۴)(۱.۶۷ \times ۱۰^{-۲۷})(۲.۱۹ \times ۱۰^۵)}{(۱.۶ \times ۱۰^{-۱۹})(۵.۰۰ \times ۱۰^{-۲})} = ۰.۱۸۳ \text{m}$$

(د)

$$r_L = \frac{۲ME}{qB} = \frac{[(۲)(۴)(۱.۶۷ \times ۱۰^{-۲۷})(۳.۵ \times ۱۰^۶)(۱.۶ \times ۱۰^{-۱۹})]^{1/2}}{(۲)(۱.۶ \times ۱۰^{-۱۹})(۸)}$$

$$= ۳.۳۸ \times ۱۰^{-۲} \text{m}$$



۴.۲ فرض کنید انرژی اولیه  $\mathcal{E}_0$  باشد و همان طور که در شکل نشان داده شده است  $r_1$  و  $r_2$  شعاعهای لارمور باشند. انرژی در ① برابر است با  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0 + eEr_1$  و در ② برابر است با  $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0 - eEr_2$ . (بیان این نکته باید در اینجا قابل قبول باشد که  $\mathcal{E}_{1,2} = \mathcal{E}_0 \pm eE\bar{r}_L$ ). همچنین  $v_{\perp 1,2}^2 = 2\mathcal{E}_{1,2}/M$  از ما خواسته شده است که تقریب زیر را انجام دهیم

$$r_{1,2} = \frac{Mv_{\perp 1,2}}{eB} = \frac{M}{eB} \left( \frac{2\mathcal{E}_{1,2}}{M} \right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{\Omega_c} \left( \frac{2\mathcal{E}_0}{M} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{eE}{\mathcal{E}_0} r_{1,2} \right)^{1/2}$$

به ازای  $E$  کوچک می‌توانیم ریشهٔ دوم را به رشتهٔ تیلور بسط دهیم:

$$r_{1,2} \approx \frac{1}{\Omega_c} \left( \frac{2\mathcal{E}_0}{M} \right)^{1/2} \left( 1 \pm \frac{1}{2} \frac{eE}{\mathcal{E}_0} r_{1,2} \right)$$

$$r_{1,2} = \frac{1}{\Omega_c} \left( \frac{2\mathcal{E}_0}{M} \right)^{1/2} \left[ 1 \pm \frac{1}{2} \frac{eE}{\mathcal{E}_0} \frac{1}{\Omega_c} \left( \frac{2\mathcal{E}_0}{M} \right)^{1/2} \right]^{-1}$$

$$\approx \frac{1}{\Omega_c} \left( \frac{2\mathcal{E}_0}{M} \right)^{1/2} \left[ 1 \pm \frac{1}{2} \frac{eE}{\mathcal{E}_0} \frac{1}{\Omega_c} \left( \frac{2\mathcal{E}_0}{M} \right)^{1/2} \right]$$

بنابراین،

$$r_1 - r_2 = \frac{eE}{\mathcal{E}_0} \frac{1}{\Omega_c^2} \left( \frac{2\mathcal{E}_0}{M} \right) = \frac{2eE}{M\Omega_c^2}$$

که مستقل از  $\mathcal{E}_0$  است. مرکز راه‌ها در زمان  $2\pi/\Omega_c$  مسافت  $2(r_1 - r_2)$  را طی می‌کند، و در نتیجه

$$v_{gc} = 2(r_1 - r_2)(\Omega_c/2\pi) = \frac{2eE}{M\Omega_c} \frac{1}{2\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{E}{B} \approx \frac{E}{B}$$

بنابراین، سوق مرکز راهنما مستقل از انرژی یونی  $\mathcal{C}$  است. اگر از تقریب خام بالا استفاده نمی‌کردیم، عامل  $2/\pi$  باید  $1$  می‌شد.

۵.۲ (الف)

$$n = n_0 e^{e\phi/KT_e} \therefore \phi = (KT_e/e) \ln(n/n_0)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\phi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} = -\frac{KT_e}{e} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} = \frac{KT_e}{e\lambda} \hat{\mathbf{r}}$$

(ب)

$$v_E = -\frac{E_r}{B} \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{KT_e}{eB\lambda} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

الکترونها را در نظر بگیرد:

$$v_{th} = \left(\frac{2KT_e}{m}\right)^{1/2} \therefore |v_E| = \frac{KT_e}{m} \frac{m}{eB} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \frac{v_{th}^2}{\omega_c} \frac{1}{\lambda}$$

اما  $r_L = mv_{\perp}/eB$  و در نتیجه برای توزیع سرعتها باید میانگین  $r_L$  را به دست آوریم. از آنجا که  $v_{\perp}$  متضمن دو درجه آزادی است، خواهیم داشت

$$\frac{1}{2} m \overline{v_{\perp}^2} = 2 \times \frac{1}{2} KT_e$$

مناسبترین میانگین عبارت است از

$$\langle v_{\perp} \rangle_{rms} = (2KT_e/m)^{1/2} = v_{th}$$

با استفاده از این مقدار برای  $v_{\perp}$  در رابطه  $r_L$ ، به دست می‌آوریم

$$|v_E| = \frac{1}{2} \frac{v_{th}}{\lambda} \frac{v_{\perp}}{\omega_c} = \frac{1}{2} \frac{v_{th} r_L}{\lambda}$$

از این رو تساوی  $|v_E| = v_{th}$  مقدار  $r_L = 2\lambda$  را ایجاب می‌کند. (ج) اگر به جای الکترونها یونها را در نظر بگیریم خواهیم داشت

$$v_{thi} = (2KT_i/M)^{1/2} = v_{\perp i}$$

$$r_{Li} = v_{\perp i} / \omega_{ci}$$

$$|v_E| = \frac{1}{2\lambda} \left( \frac{2KT_e}{M} \right) \left( \frac{M}{eB} \right) = \frac{1}{2\lambda} \frac{T_e}{T_i} \frac{v_{thi} v_{\perp i}}{\omega_{ci}} = \frac{1}{2} \frac{T_e}{T_i} v_{thi} r_{Li}$$

اگر  $|v_E| = v_{thi}$ ، باز هم رابطه  $r_{Li} = 2\lambda$  برقرار است به شرط آن که داشته باشیم  $T_i = T_e$ .  
 ۶.۲ (الف)

$$n = n_0 \exp(e^{-r^2/a^2} - 1) = n_0 e^{e\phi/KT_e}$$

$$\therefore \frac{e}{KT_e} \phi(r) = e^{-r^2/a^2} - 1$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} \quad E_r(r) = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{KT_e}{e} \frac{2r}{a^2} e^{-r^2/a^2}$$

$$\frac{dE_r}{dr} = \frac{2KT_e}{ea^2} \left( 1 - \frac{2r^2}{a^2} \right) e^{-r^2/a^2} = 0 \quad \frac{r^2}{a^2} = \frac{1}{2}$$

$$E_{\max} = \frac{KT_e}{ea} \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-1/2} = \frac{(0.2)(1.6 \times 10^{-11})}{(1.6 \times 10^{-19})(1)} \sqrt{2} e^{-1/2} = 17 \frac{N}{C}$$

$$= 17V/m$$

$$\mathbf{v}_E = -\frac{E_r}{B} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad v_{E\max} = \frac{E_{\max}}{B} = \frac{17}{0.2} = 85m/sec$$

(ب) نیروی  $Mg$  را با نیروی  $eE$  در مورد یک یون مقایسه کنید.  $m_g$  برای الکترون  $1836$  بار کوچکتر است.  $M_g = (39)(1.67 \times 10^{-27})(9.8) = 6.38 \times 10^{-25} N$ .  $g = 9.8 m/sec^2$ .  
 $eE_{\max} = (1.6 \times 10^{-19})(17) = 2.75 \times 10^{-18} N = 4 \times 10^6 M_g$  بنابراین، سوق گرانشی  $4$  میلیون بار کوچکتر است.

(ج)

$$r_L = \frac{Mv_{\perp}}{eB} = 10^{-2} m$$

$$v_{\perp} = (2KT/M)^{1/2} = \left[ \frac{(2)(0.2)(1.6 \times 10^{-11})}{(39)(1.67 \times 10^{-27})} \right]^{1/2}$$

$$= 9.9 \times 10^2 m/sec$$

$$B = \frac{(39)(1.67 \times 10^{-27})(9.9 \times 10^7)}{(10^{-2})(1.6 \times 10^{-11})} = 4.9 \times 10^{-2} T$$

۸.۲

$$B = \frac{c}{r^2} = \frac{0.3 \times 10^{-7}}{(r/R)^2} T$$

$$B_{\nabla B} = \frac{1}{2} v_{\perp} r_L \left| \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} \right| = \frac{1}{2} v_{\perp} r_L \left| \frac{\nabla B}{B} \right|$$

(الف)

$$\nabla B = \frac{\partial B}{\partial r} \hat{r} = -2 \frac{c}{r^3} \hat{r} = \frac{2}{r} B (-\hat{r})$$

$$\left| \frac{\nabla B}{B} \right| = \frac{2}{r}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} v_{\perp} r_L &= \frac{1}{2} \frac{v_{\perp}^2}{\omega_c} = \frac{1}{2} \frac{2KT/m}{eB/m} = \frac{KT}{eB} \\ &= \frac{(1.6 \times 10^{-11})(KT)_{eV}}{1.6 \times 10^{-11}} \frac{1}{B} = \frac{(KT)_{eV}}{B} \end{aligned}$$

$$B(r = \Delta R) = \frac{0.3 \times 10^{-7}}{\Delta^2} = 2.4 \times 10^{-7} T$$

$$\Delta R = (5)(4000 \text{ mile})(1.6 \text{ km/mile})(10^3 \text{ m/km}) = 3.2 \times 10^7 \text{ m}$$

$$v_{\nabla B} = 10^8 \frac{(KT)_{eV}}{2.4 \times 10^{-7}} = 0.39 (KT)_{eV} \text{ m/sec}$$

یونها:  $KT = 1 \text{ eV}$      $v_{\nabla B} = 0.39 \text{ m/sec}$

الکترونها:  $KT = 3 \times 10^6 \text{ eV}$      $v_{\nabla B} = 1.17 \times 10^6 \text{ m/sec}$

(ب) یونها: به سمت غرب؛ الکترونها: به سمت شرق.

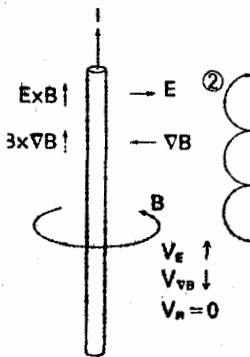
$$2\pi r = (6.28)(3.2 \times 10^7) = 2.0 \times 10^8 \text{ m (ج)}$$

$$t = \frac{2\pi r}{v_{\nabla B}} = \frac{(2.0 \times 10^8)}{(1.17 \times 10^6)} = 1.7 \times 10^2 \text{ sec} = 4.7 \text{ hr}$$

(د)

با چشپوشی از یونها  $j = nev_{\nabla B}$

$$= (10^7)(1.6 \times 10^{-11})(1.17 \times 10^4) = 1.87 \times 10^{-4} \text{ A/m}^2$$



۹.۲ (الف)  $v_R = 0$  زیرا الکترون در راستای موازی  $(\hat{\theta})$  انرژی کسب نمی‌کند. از آنجا که الکترون بدون انرژی گرمایی از سکون شروع به حرکت می‌کند، از یک دور به حال سکون برمی‌گردد. بنابراین، مدار به جای حلقه دارای نوکهای تیزی خواهد بود. روشن است که سوق  $v_E$  باید غالب باشد زیرا الکترون شروع به حرکت به سمت چپ می‌کند و نیروی لورنتس آن را به سمت بالا حرکت می‌دهد. (ب) در هندسه استوانه‌ای داریم  $\phi = A \ln r + B$  آنجا که  $\phi(0.1 \text{ m}) = 0$  و  $\phi(10^{-2}) = 460 \text{ V}$  داریم

$$460 = A \ln(10^{-2}) + B$$

$$0 = A \ln(0.1) + B \quad B = -A \ln(0.1)$$

$$460 = A \ln(10^{-2}) - A \ln(0.1)$$

$$= A \ln(0.01) \quad A = 460 / \ln(0.01)$$

$$\phi(r) = \frac{460}{\ln(0.01)} [\ln r - \ln(0.1)] = 460 \frac{\ln(0.1r)}{\ln 100} V$$

$$E = \frac{-\partial \phi}{\partial r} = \frac{-460}{\ln 100} \left( \frac{r}{0.1} \right) \left( \frac{-0.1}{r^2} \right) = \frac{460/r}{\ln 100} \frac{V}{m}$$

$$= \frac{460}{(4.6)(1)} = 10^2 \frac{V}{m} \quad r = 10^{-2} \text{ m در}$$

$$B = \frac{I(A) 10^{-2}}{\delta r} = \frac{500 \times 10^{-2}}{(5)(1)} = 0.01 \text{ T}$$

$$|v_E| = |E/B| = 10^8 \frac{10^2 \text{ V/cm}}{0.01 \text{ T}} = 10^6 \text{ m/sec}$$



برای تخمین سوق  $\nabla B$  باید  $v_{\perp}$  را در چارچوبی به دست آوریم که با مرکز راهنما حرکت می کند. به خاطر داشته باشید که برای به دست آوردن  $v_{\nabla B}$ ،  $v_{\perp}$  را به عنوان سرعت در مدار دایره ای ناممختل در نظر گرفته ایم. این مدار در اینجا با سرعت  $v_E$  حرکت می کند و در نتیجه در چارچوب آزمایشگاه دایره ای به نظر نمی رسد. با وجود این، می توان آن را به یک حرکت دایره ای با سرعت  $v_{\perp}$  به اضافه سوق  $E \times B$  مرکز راهنما تجزیه کرد. مؤلفه  $z$  سرعت (در راستای سیم) را در نظر بگیرد. در نقطه ① از مدار داریم  $v_z = v_E + v \cos \omega_c t = 0$  با  $\cos \omega_c t = -1$  یعنی کمترین مقدار آن؛ بنابراین  $v_E = v_{\perp}$  همین نتیجه را می توان با در نظر گرفتن این واقعیت به دست آورد که در نقطه ② داریم  $v_z = v_E + v_{\perp} (\cos \omega_c t = 1)$ . در آنجا انرژی یعنی  $\frac{1}{2}(mv_z^2)$  باید با انرژی حاصل از سقوط به مسافت  $2r_L$  در میدان الکتریکی مساوی باشد. بنابراین

$$\frac{1}{2} m (v_E + v_{\perp})^2 2r_L e E = 2eE \frac{mv_{\perp}}{eB} = 2mv_{\perp} \frac{E}{B} = 2mv_{\perp} v_E$$

$$v_E^2 + 2v_{\perp} v_E + v_{\perp}^2 = 2v_{\perp} v_E \quad (v_E - v_{\perp})^2 = 0 \quad v_E = v_{\perp}$$

اکنون می توانیم  $v_{\nabla B}$  را محاسبه کنیم:

$$v_{\nabla B} = \frac{1}{2} \frac{v_{\perp}^2}{\omega_c} \left| \frac{\nabla B}{B} \right| \quad \omega_c = \frac{eB}{m} = \frac{(1.6 \times 10^{-19})(10^{-2})}{(9.11 \times 10^{-31})}$$

$$= 1.76 \times 10^9 \text{ sec}^{-1}$$

$$\frac{dB}{dr} = \frac{I(-1)10^{-2}}{r^2} = -\frac{B}{r} \quad \left| \frac{\nabla B}{B} \right| = 10^2 \text{ m}^{-1}$$

$$v_{\nabla B} = \frac{1}{2} \frac{v_E^2}{\omega_c} = \frac{1}{2} \frac{10^{16}}{1.76 \times 10^9} = \underline{2.78 \times 10^4 \text{ m/sec}}$$

این منجر می شود به کند شدن سوق  $v_E$  ناشی از واپسپیش مدار به شکل  $\epsilon$  به علت تغییر شعاع لارمور. مدار ناممختل مسیری است که شیر باد چرخ دوچرخه طی می کند:



سرانجام، متذکر می شویم که تصحیح شعاع لارمور متناهی بر  $v_E$  قابل چشمپوشی است:

$$\frac{1}{4} r_L^2 \nabla^2 \frac{E}{B} \approx \frac{1}{4} \frac{r_L^2}{r^2} \frac{E}{B}$$

$$r_L = \frac{(9.11 \times 10^{-31})(10^6)}{(1.6 \times 10^{-19})(0.1)} = 5.7 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$r \approx 10^{-2} \text{ m} \therefore \frac{1}{4} \frac{r_L^2}{r^2} = 7.0 \cdot 8$$

۱۲.۲ فرض کنید همه سرعتها به صفحه میانی مربوط باشند، و شاخصهای  $i$  و  $f$  به حالت‌های اولیه و نهایی (قبل و بعد از شتابگیری) مربوط باشند.

(الف معلوم:  $R_m = 5$  و  $v_{\parallel i} = v_{\parallel f}$  زیرا  $\mu$  پایسته است،  $v_{\perp f} = v_{\perp i}$  و تنها  $v_{\parallel}$  افزایش خواهد یافت. این افزایش ادامه خواهد یافت تا آن که زاویه گام  $\theta$  به مخروط اتلاف برسد:

$$\sin^2 \theta_m = \frac{v_{\perp f}^2}{v_{\perp f}^2 + v_{\parallel f}^2} = \frac{1}{1 + v_{\parallel f}^2 / v_{\perp i}^2} = \frac{1}{R_m} = \frac{1}{5}$$

بنابراین،  $v_{\parallel f} = 2v_{\perp i}$ ،  $v_{\parallel f}^2 / v_{\perp i}^2 = 4$  انرژی برابر است با

$$E_f = \frac{1}{2} M (v_{\parallel f}^2 + v_{\perp f}^2) = \frac{1}{2} M (4 + 1) v_{\perp i}^2 = \frac{5}{2} M v_{\perp i}^2$$

$$E_i = \frac{1}{2} M (v_{\parallel i}^2 + v_{\perp i}^2) = \frac{1}{2} M (1 + 1) v_{\perp i}^2 = M v_{\perp i}^2$$

$$\therefore E_f = 2.5 E_i = (2.5)(1) = 2.5 \text{ keV}$$

(ب) (۱) فرض کنید ذره‌ای دارای  $v_0 > 0$  باشد و با

پیستون که با سرعت  $v_m < 0$  حرکت می‌کند برخورد کند.

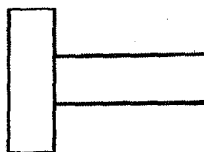
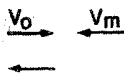
در چارچوب پیستون، ذره به طور کشسان واجهش می‌کند و

با سرعت اولیه خود در جهت مخالف باز می‌گردد. فرض

کنید علامت ' به چارچوب مرجع پیستون مربوط باشد.

سرعت‌های اولیه و نهایی در این چارچوب عبارت‌اند از

$$v'_i = v_0 - v_m \quad v'_f = -(v_0 - v_m)$$



(توجه:  $v_m$  منفی است.) در چارچوب آزمایشگاه داریم

$$v_f = v'_f + v_m = -v_o + 2v_m$$

از آنجا که  $v_m$  منفی است تغییر سرعت برابر با  $2|v_m|$  است.

(۲) تغییر تکانه در هر واجهش برابر است با  $2m|v_m| \Delta p_{||}$ . اگر تعداد واجهشها  $N$  باشد

داریم  $p_{||f} = p_{||i} + N \Delta p$ . بنابراین،

$$N = \frac{p_{||f} - p_{||i}}{\Delta p} = \frac{v_{||f} - v_{||i}}{2v_m} = \frac{2v_{\perp i} - v_{\perp i}}{2v_m} = \frac{1}{2} \frac{v_{\perp i}}{v_m}$$

$$E_i = Mv_{\perp i}^2 = 1 \text{ keV} = (10^3)(1.76 \times 10^{-19}) = 1.76 \times 10^{-16} \text{ J}$$

$$\therefore v_{\perp i} = \left( \frac{1.76 \times 10^{-16}}{1.67 \times 10^{-27}} \right)^{1/2} = 3.1 \times 10^5 \text{ m/sec}$$

$$v_m = 10^4 \text{ m/sec}$$

$$\therefore N = \frac{1}{2} \frac{(3 \times 10^5)}{10^4} = 15 \text{ برخورد}$$

(۳) میانگین  $v_{||}$  برابر است با

$$\bar{v} = \frac{1}{2}(v_{||i} + v_{||f}) = \frac{1}{2}(v_{\perp i} + 2v_{\perp i})$$

$$= \frac{3}{2}v_{\perp i} = 4.6 \times 10^5$$

$$L = 10^{13} \text{ m}$$

$$\therefore t = \frac{NL}{\bar{v}} = \frac{(15)(10^{13})}{4.6 \times 10^5} = 3.2 \times 10^8 \text{ sec}$$

$$(= 10 \text{ y})$$

اما تغییر  $L$  در این مدت برابر است با

$$\Delta L = 2v_m t = (2)(10^4)(3.2 \times 10^8) = 6.4 \times 10^{12} \text{ m}$$

از این روزمان واقعی محتمل تر  $2.5 \times 10^8 \text{ sec}$  است. از آنجا که دقت ضریب دوکفایت می‌کند

ضرورتی به جمع‌بندی رشته نیست — پاسخ بالا  $(3.2 \times 10^8 \text{ sec})$  مناسب است.

$$\int v_{\parallel} ds = v_{\parallel} L = \text{const.} \quad \therefore \dot{v}_{\parallel} L + v_{\parallel} \dot{L} = 0 \quad (الف) \quad ۱۳.۲$$

(ب)

$$\frac{\dot{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} = -\frac{\dot{L}}{L} \quad \dot{v}_{\parallel} \simeq \frac{\Delta v_{\parallel}}{T} = \frac{v_{\parallel}}{L} (-\dot{L})$$

$$T \simeq \frac{\Delta v_{\parallel}}{\bar{v}_{\parallel}} \frac{L}{-\dot{L}} = \frac{2v_{\perp i} - v_{\perp i}}{\frac{1}{4}(2v_{\perp i} + v_{\perp i})} \frac{L}{2v_m} = \frac{2}{3} \frac{10^{12}}{2 \times 10^4}$$

$$= \underline{3.3 \times 10^8 \text{ sec}}$$

۱۴.۲ با افزایش  $B$  معادلهٔ ماکسول  $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$  یک میدان الکتریکی  $E$  پیش‌بینی می‌کند. این میدان القایی  $E$  دارای مؤلفه‌ای در امتداد  $\mathbf{v}$  است و به ذره شتاب می‌دهد. اگر  $B$  به‌کندی و به‌صورت بی‌دررو افزایش یابد،  $E$  کوچک خواهد بود؛ اما اثر انتگرال‌گیری شده روی تعداد زیادی دورهٔ لارمور متناهی خواهد بود. ناوردایی  $\mu$  باعث می‌شود که بتوانیم افزایش انرژی را بدون انتگرال‌گیری محاسبه کنیم.

$$\dot{\sigma} = -\nabla \cdot [(\rho/B^2)\dot{\mathbf{E}}] \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_p = (\rho/B^2)\dot{\mathbf{E}} \quad \text{که در آن } \partial\sigma/\partial t + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad ۱.۳$$

مشتق زمانی معادلهٔ پواسون عبارت است از  $\nabla \cdot \dot{\mathbf{E}} = \dot{\sigma}/\epsilon_0$ .

$$\therefore \nabla \cdot \dot{\mathbf{E}} = -\left(\frac{1}{\epsilon_0}\right) \nabla \cdot \left(\frac{\rho}{B^2}\right) \dot{\mathbf{E}} \quad \nabla \cdot \left(1 + \frac{\rho}{\epsilon_0 B^2}\right) \dot{\mathbf{E}} = 0$$

با فرض اینکه ثابت دی‌الکتریک  $\epsilon$  نسبت به زمان ثابت باشد، به‌دست می‌آوریم  $\nabla \cdot \dot{\mathbf{D}} = \nabla \cdot (\epsilon \dot{\mathbf{E}}) = 0$  از مقایسه داریم  $\epsilon = 1 + \rho/\epsilon_0 B^2$ .

۲.۳

$$\epsilon \simeq 1 + \frac{nM}{\epsilon_0 B^2} \simeq \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c^2} = \frac{ne^2}{\epsilon_0 M} \frac{M^2}{e^2 B^2} = \frac{nM}{\epsilon_0 B^2}$$

این رابطه در صورتی صادق است که  $\epsilon \gg 1$ .  
۳.۳ از معادلات ۵۶.۳ و ۵۸.۳ واگرایی می‌گیریم:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \dot{\mathbf{B}} = 0 \quad \therefore \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0$$

بنابراین،  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  اگر در ابتدا صفر باشد. این معادله ۵۷.۳ است

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0 = \mu_0 [q_i \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i) + q_e \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e)] + \frac{\nabla \cdot \dot{\mathbf{E}}}{c^2}$$

از معادله ۶۰.۳ داریم  $\nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i) = -\dot{n}_i$ ،  $\nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) = -\dot{n}_e$

$$\therefore \mu_0 (-q_i \dot{n}_i - q_e \dot{n}_e) + \frac{\nabla \cdot \dot{\mathbf{E}}}{c^2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{\epsilon_0} (n_i q_i + n_e q_e) \right] = 0$$

اگر در ابتدا  $[\ ] = 0$  آن‌گاه  $\nabla \cdot \mathbf{E} = (1/\epsilon_0)(n_i q_i + n_e q_e)$  این معادله ۵۵.۳ است.

۴.۳

$$\mathbf{j}_D = (KT_i + KT_e) \frac{\mathbf{B} \times \nabla n}{B^2} \propto \frac{KT}{e} \frac{ne}{BL}$$

چون  $KT \propto e\phi$  و  $E \propto -\phi/L$ ،  $KT/eL \propto E$ ، و بنابراین  $\mathbf{j}_D \propto neE/B \propto nev$

$$E/B = v_E$$

۵.۳ فرض کنید  $\mathbf{j}_D$  در جعبه با پهنای  $L$  ثابت باشد. با توجه به تقاضای جریانهای روی دو دیواره

داریم:  $\Delta n = n'L$ ،  $|J_D| = |\Delta nev_y| = |n'Lev_y|$ . این جریان  $J_D$  روی جعبه‌ای با پهنای

$L$  است، و از این رو چگالی جریان معادل برابر است با

$$|j_D| = |J_D|/L = |n'ev_y|$$

از معادله ۶۹.۳ داریم  $|j_D| \simeq |KT \nabla n / B| = |KT n' / B|$ ؛ بنابراین وقتی  $v_y$  طوری انتخاب

شود که این دو فرمول به‌ازای یک مقدار  $L$  در توافق باشند آنها به‌ازای هر مقدار  $L$  در توافق خواهند

بود زیرا که  $L$  حذف می‌گردد.

۶.۳ (الف)

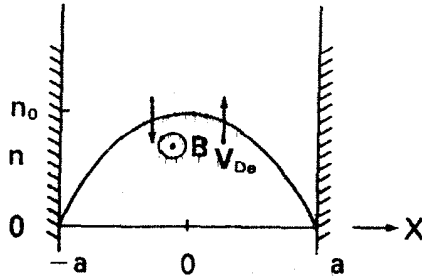
$$\mathbf{v}_{Dc} = -\frac{\gamma KT_e}{eB} \frac{\hat{z} \times \nabla n}{n}$$

همدمایی به معنای  $\gamma = 1$  است.

$$\nabla_n = \hat{x} \frac{\partial n}{\partial x} = -\frac{n_0}{a^2} \hat{x}$$

$$v_{De} = \hat{y} \frac{KT_e}{eB} \frac{\gamma n_0}{a^{\gamma}} \frac{x}{n_0} \left(1 - \frac{x^{\gamma}}{a^{\gamma}}\right)^{-1} = \hat{y} \frac{KT_e}{eB} \frac{\gamma x}{a^{\gamma}} \left(1 - \frac{x^{\gamma}}{a^{\gamma}}\right)^{-1}$$

(ب)



$$v_{De} = (\gamma) / (\circ, \gamma) \Lambda \text{ (ج)}$$

$$\Lambda^{-1} = \left| \frac{n'}{n} \right| = \frac{(\gamma n_0 / a^{\gamma})(a / \gamma)}{n_0 (1 - a^{\gamma} / \gamma a^{\gamma})} = \frac{1 / \circ, \gamma \circ \gamma}{\gamma / \gamma} = \gamma \gamma \gamma m^{-1}$$

$$\therefore v_{De} = (1 \circ)(\gamma \gamma \gamma) = \gamma \gamma \gamma m / \text{sec}$$

$$n = n_0 e^{-r^{\gamma} / r_0^{\gamma}} = n_0 e^{e\phi / KT_e} \gamma \gamma$$

$$\phi = \frac{KT_e}{e} \ln \frac{n}{n_0} = \frac{KT_e}{e} \left( -\frac{r^{\gamma}}{r_0^{\gamma}} \right)$$

(الف)

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} = \frac{KT_e}{e} \frac{\gamma r}{r_0^{\gamma}} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^{\gamma}} = -\frac{E_r}{B_z} \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{KT_e}{eB} \frac{\gamma r}{r_0^{\gamma}}$$

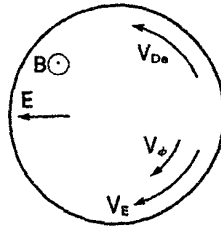
$$v_{De} = -\frac{\mathbf{B} \times \nabla p}{enB^{\gamma}} = -\frac{KT_e}{eB} \frac{\partial n / \partial r}{n} \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{KT_e}{eB} \frac{\partial}{\partial r} (\ln n)$$

$$= -\hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{KT_e}{eB} \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{r^{\gamma}}{r_0^{\gamma}} \right) = \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{KT_e}{eB} \frac{\gamma r}{r_0^{\gamma}} = -\mathbf{v}_E \quad (\text{رابطه مطلوب})$$

(ب) از (الف) نتیجه می‌گیریم که بسامد چرخش ثابت است. صرف نظر از آن که  $v_{Di}$ ,  $v_{De}$ ,  $\mathbf{v}_E$

یا هر ترکیب آنها را اختیار کنیم زیرا  $\omega = v_{\theta}/r$  و  $v_{\theta} \propto r$   
 (ج) در چارچوب آزمایشگاه داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_{\phi} + \mathbf{v}_E = 0.5 \mathbf{v}_{De} + (-\mathbf{v}_{De}) \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{v}_{De} \end{aligned}$$



۸.۳ (الف)

$$j_D = ne(v_{Di} - v_{De}) = -\hat{\theta} \frac{n_o (KT_e + KT_i)}{B} \cdot \frac{2r}{r_o^2} e^{-r^2/r_o^2}$$

(ب)

$$j_D = \frac{(10^{16})(0.5)(1.6 \times 10^{-19})}{0.4(r_o^2/2r)(2718)} = 0.147 \text{ A/m}^2$$

یا:

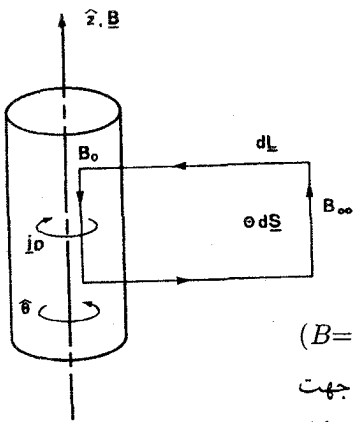
$$j_D = n_e(|v_{De}| + |v_{Di}|)$$

$$|v_{De}| = |v_{Di}| = \frac{(KT)_{eV}}{B} \frac{2r}{r_o^2} = \frac{(0.25)2r}{0.4r_o^2} = 1.25 \frac{r}{r_o} \text{ m/sec}$$

با استفاده از  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$  و  $\epsilon = 2718$  داریم

$$j_D = (10^{16})(1.6 \times 10^{-19})(2)(1.25) \frac{r\epsilon^{-1}}{r_o^2} = 0.147 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

(ج) با توجه به آن که در چارچوب آزمایشگاه  $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_{De} = \mathbf{v}_E - \mathbf{v}_E = 0$  جریان به طور کامل از یونها تشکیل می شود.



$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_D$$

$$\int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int \mathbf{j}_D \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \mu_0 \int \mathbf{j}_D \cdot d\mathbf{S}$$

حلقه‌ای برمی‌گزینیم که یک ساق آن در امتداد محور ( $B=B_0$ ) و ساق دیگر دور از آن ( $B=B_\infty$ ) باشد. چون  $\mathbf{j}_D$  در جهت  $\hat{\mathbf{z}}$  است می‌توانیم جهت انتگرال‌گیری  $d\mathbf{L}$  را مطابق شکل  $-\hat{\theta}$  طوری انتخاب کنیم که  $\mathbf{j}_D \cdot d\mathbf{S}$  مثبت باشد.  $B_r$  وجود ندارد؛ بنابراین

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = (B_\infty - B_0)L$$

$$\mathbf{j}_D = -\hat{\theta} \frac{n(KT_i + KT_e)}{B} \frac{\gamma r}{r_0^2}$$

$$\int \mathbf{j}_D \cdot d\mathbf{S} = \frac{n_0(KT_i + KT_e)}{B_\infty r_0^2} \int_0^L \int_0^\infty e^{-r^2/r_0^2} \gamma r dr dz$$

$$= \frac{Ln_0(KT_i + KT_e)}{B_\infty} \left[ -e^{-r^2/r_0^2} \right]_0^\infty = \frac{\gamma Ln_0 KT}{B_\infty}$$

که در آن  $T_e = T_i$ . در این انتگرال،  $B(r)$  را با  $B_\infty$  تقریب گرفته‌ایم زیرا  $B$  با چنین  $\mathbf{j}_D$  کوچکی تغییر بزرگی پیدا نمی‌کند. بنابراین

$$\Delta B = B_\infty - B_0 = \mu_0 \frac{\gamma n_0 KT}{B_\infty}$$

$$= \frac{\gamma (4\pi \times 10^{-7}) (10^{16}) (0.25) (1.6 \times 10^{-11})}{0.4}$$

$$= 2.5 \times 10^{-4} \text{ T}$$

۱.۴ الف) با حل برای  $\phi_1$  داریم:

$$\phi_1 = \frac{KT_e}{e} \frac{n_1}{n_0} \frac{\omega + ia}{\omega^* + ia} \times \frac{\omega^* - ia}{\omega^* - ia}$$



$$= \frac{KT_e}{e} \frac{\omega\omega^* + a^2 + ia(\omega^* - \omega)}{\omega^2 + a^2} \frac{n_1}{n_0}$$

اگر  $n_1$  حقیقی باشد داریم

$$\frac{Im(\phi_1)}{Re(\phi_1)} = \frac{a(\omega^* - \omega)}{\omega\omega^* + a^2} = \tan \delta$$

بنابراین

$$\delta = \tan^{-1} \left[ \frac{a(\omega^* - \omega)}{\omega\omega^* + a^2} \right]$$

(ب)  $n_1 = \bar{n}_1 e^{i(kx - \omega t)}$  و  $\phi_1 = An_1 e^{i(kx - \omega t + \delta)}$  که در آن  $A$  ثابت مثبت است. به ازای  $\omega < \omega^*$  داریم  $\delta > 0$ . فرض کنید فاز  $n_1$  در  $(x_0, t_0)$  صفر باشد:  $kx_0 - \omega t_0 = 0$ . اگر  $k$  مثبت باشند و  $x_0$  ثابت باشد، فاز  $\phi_1$  در  $kx_0 - \omega t + \delta = 0$  یا  $t > t_0$  صفر خواهد شد. بنابراین  $\phi_1$  از  $n_1$  تأخر زمانی دارد. اگر  $t_0$  ثابت باشد در  $x < x_0$  داریم  $kx - \omega t_0 + \delta = 0$  بنابراین  $\phi_1$  از  $n_1$  تأخر فضایی نیز دارد (چون  $\omega/k > 0$  و موج به سمت راست حرکت می‌کند، موج مقدم در  $x$  بزرگتری است). اگر  $k < 0$ ،  $\omega > 0$ ، فاز  $\phi_1$  در  $x > x_0$  صفر می‌شود؛ اما چون اکنون موج به سمت چپ حرکت می‌کند  $\phi_1$  باز هم از  $n_1$  تأخر دارد.

۲.۴

$$ikE_1 = \frac{1}{\epsilon_0} e(n_{e1} - n_{e1})$$

$$-i\omega m v_{e1} = -eE_1 \quad (\text{الکترونها})$$

$$-i\omega M v_{i1} = eE_1 \quad (\text{یونها})$$

$$-i\omega n_{e1} = -ikn_0 v_{e1} \quad (\text{الکترونها})$$

$$-i\omega n_{i1} = -ikn_0 v_{i1} \quad (\text{یونها})$$

$$n_{e1} = \frac{k}{\omega} n_0 \left( \frac{-ie}{m\omega} \right) E_1 \quad n_{i1} = \frac{k}{\omega} n_0 \left( \frac{ie}{M\omega} \right) E_1$$

$$ikE_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{k}{\omega} n_0 \frac{ie}{\omega} \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) E_1 = \frac{ikE_1}{\omega^2} (\Omega_p^2 + \omega_p^2)$$

$$\underline{\omega^2 = (\omega_p^2 + \Omega_p^2)}$$

۳.۴  $\phi_1$ ،  $E_1$  و  $v_1$  را بر حسب  $n_1$  پیدا می‌کنیم:

$$۲۲.۴ \text{ معادله } v_1 = \frac{\omega}{k} \frac{n_1}{n_0}$$

$$۲۳.۴ \text{ معادله } E_1 = \frac{ie}{\epsilon_0 k} n_1$$

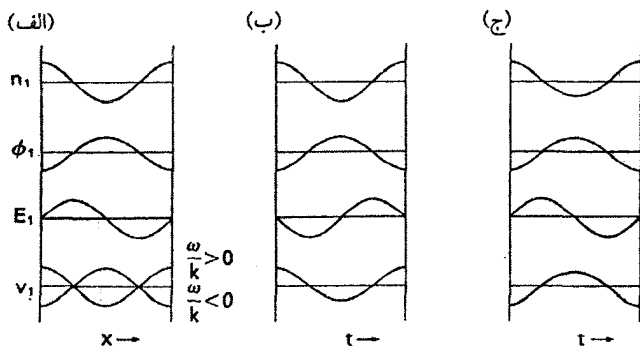
اما  $E_1 = -ik\phi_1$  و در نتیجه

$$\therefore \phi_1 = -\frac{e}{\epsilon_0 k^2} n_1$$

بنابراین،  $E_1$  نسبت به  $n_1$  اختلاف فاز  $90^\circ$  دارد؛  $\phi_1$  اختلاف فاز  $180^\circ$  دارد؛ و  $v_1$  بسته به علامت  $\omega/k$ ، همفاز است یا اختلاف فاز  $180^\circ$  خواهد داشت. در (الف)،  $E_1$  از شیب منحنی  $\phi_1$  به دست می‌آید زیرا  $E_1 = -\partial\phi_1/\partial x$ . در (ب)،  $E_1/n_1 \propto i \times \text{sgn}(k)$  و در نتیجه  $\delta = \pm\pi/2$ . اگر  $\omega/k > 0$  داریم

$$E_1 \propto \exp i(kx \pm |\omega|t \pm \pi/2)$$

که در آن  $\pm$  نشان‌دهنده علامت  $k$  است. بنابراین،  $E_1$  به مقدار  $90^\circ$  از  $n_1$  تقدم دارد. اگر  $\omega/k < 0$  نتیجه برعکس است.



$$ikE_1 = -\frac{1}{\epsilon_0} en_1 = -\frac{1}{\epsilon_0} en_0 \frac{k}{\omega} v_1 = -\frac{1}{\epsilon_0} en_0 \frac{k}{\omega} \left( \frac{-ie}{m\omega} \right) E_1$$

$$\nabla \cdot \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \mathbf{E}_1 = 0 \quad \text{یا} \quad ik \left( 1 - \frac{n_o e^2}{\epsilon_o m \omega^2} \right) \mathbf{E}_1 = 0$$

$$\therefore \epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

۶.۴ (الف)

$$mn_o (-i\omega)v_1 = -en_o E_1 - mn_o \nu v_1$$

$$v_1 \left( 1 + \frac{i\nu}{\omega} \right) = \frac{ieE_1}{m\omega}$$

$$ikE_1 = -\frac{1}{\epsilon_o} en_1 \quad n_1 = \frac{k}{\omega} n_o v_1 \quad (\text{بیوستگی})$$

$$ikE_1 = -\frac{1}{\epsilon_o} e \frac{k}{\omega} n_o \frac{ieE_1}{m\omega} \left( 1 + \frac{i\nu}{\omega} \right)^{-1}$$

$$\omega^2 \left( 1 + \frac{i\nu}{\omega} \right) = \omega_p^2 \quad \underline{\omega^2 + i\nu\omega = \omega_p^2}$$

(ب) فرض کنید  $\omega = x + iy$ . بنابراین، رابطه پاشیدگی عبارت است از

$$x^2 - y^2 + 2ixy + i\nu x - \nu y = \omega_p^2$$

باید قسمت موهومی را تعیین کنیم:  $2xy + \nu x = 0$  یا  $y = (-1/2)\nu$  و در نتیجه  $\text{Im}(\omega) = -\nu/2$  چون  $x = \text{Re}(\omega)$  و  $\nu > 0$

$$E_1 \propto e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t} e^{\nu t} = e^{-ixt} e^{-(1/2)\nu t}$$

پس نوسان نسبت به زمان میرا است.

$$mn_o (-i\omega)v_1 = en_o E_1 - en_o (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_o) \quad ۷.۴$$

جهت  $\hat{x}$  می‌گیریم. بنابراین، برای مؤلفه  $y$  داریم

$$-i\omega m v_y = e v_x B_o \quad \frac{v_x}{v_y} = -i \frac{\omega}{\omega_c}$$

از آنجا که  $\omega = \omega_h > \omega_c$  داریم  $|v_x/v_y| > 1$  و مدار در جهت  $\hat{x}$  که جهت  $\mathbf{k}$  است کشیدگی پیدا می‌کند.

۸.۴ (الف)

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = -\frac{1}{\epsilon_o} en_1 \quad \mathbf{k} = k_x \hat{x} + k_z \hat{z} \quad E_y = k_y = 0$$

$$i(k_x E_x + k_z E_z) = -\frac{1}{\epsilon_0} e n_1$$

به  $n_1$  نیاز داریم:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \quad -i\omega n_1 + n_0 i(k_x v_x + k_z v_z) = 0$$

به  $v_x$  و  $v_z$  نیازمندیم:

$$M n_0 (-i\omega) \mathbf{v}_1 = -e n_0 \mathbf{E}_1 - e n_0 (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0)$$

$$v_x = -\frac{ie}{m\omega} E_x - \frac{i\omega_c}{\omega} v_y \quad \text{مؤلفه } x$$

$$v_y = 0 + \frac{i\omega_c}{\omega} v_x \quad \text{مؤلفه } y$$

$$v_x = -\frac{ie}{m\omega} E_x + \frac{\omega_c^r}{\omega^r} v_x = \frac{-ie}{m\omega} E_x \left( 1 - \frac{\omega_c^r}{\omega^r} \right)^{-1}$$

$$v_z = -\frac{ie}{m\omega} E_z \quad \text{مؤلفه } z$$

$$n_1 = \frac{n_0}{\omega} \left( \frac{-ie}{m\omega} \right) \left[ k_x E_x \left( 1 - \frac{\omega_c^r}{\omega^r} \right)^{-1} + k_z E_z \right] \quad \text{پیوستگی}$$

$$k_x E_x + k_z E_z = i \frac{e n_0}{\epsilon_0 \omega} \left( \frac{-ie}{m\omega} \right) \left[ k_x E_x \left( 1 - \frac{\omega_c^r}{\omega^r} \right)^{-1} + k_z E_z \right]$$

$$k_x = k \sin \theta \quad k_z = k \cos \theta$$

$$\therefore E_1 \sin^r \theta + k E_1 \cos^r \theta = \frac{\omega_p^r}{\omega^r} \left[ k E_1 \sin^r \theta \left( 1 - \frac{\omega_c^r}{\omega^r} \right)^{-1} + k E_1 \cos^r \theta \right]$$

$$1 = \frac{\omega_p^r}{\omega^r} \left[ \sin^r \theta \left( 1 - \frac{\omega_c^r}{\omega^r} \right)^{-1} + \cos^r \theta \right]$$

$$1 - \frac{\omega_c^r}{\omega^r} = \frac{\omega_p^r}{\omega^r} \left[ 1 - \cos^r \theta + \left( 1 - \frac{\omega_c^r}{\omega^r} \right) \cos^r \theta \right]$$

$$\omega^2 - \omega_c^2 - \omega_p^2 = -\frac{\omega_p^2 \omega_c^2}{\omega^2} \cos^2 \theta$$

$$\omega^2 (\omega^2 - \omega_h^2) + \omega_p^2 \omega_c^2 \cos^2 \theta = 0 \quad (\text{رابطه مطلوب})$$

(ب)

$$\omega^4 - \omega_h^2 \omega^2 + \omega_p^2 \omega_c^2 \cos^2 \theta = 0$$

$$2\omega^2 = \omega_h^2 \pm (\omega_h^2 - 4\omega_p^2 \omega_c^2 \cos^2 \theta)^{1/2}$$

بازای  $\theta \rightarrow 0$  داریم  $\cos^2 \theta \rightarrow 1$  و

$$2\omega^2 = \omega_h^2 \pm [(\omega_p^2 + \omega_c^2)^2 - 4\omega_p^2 \omega_c^2]^{1/2}$$

$$= \omega_p^2 + \omega_c^2 \pm (\omega_p^2 - \omega_c^2)$$

$$\omega^2 = \omega_p^2, \omega_c^2$$

ریشه  $\omega = \omega_p$  نوسان لانگمویر عادی است. ریشه  $\omega = \omega_c$  غیرواقعی است زیرا در  $\theta \rightarrow 0$

در مسئله وارد نمی‌شود. بازای  $\theta \rightarrow \pi/2$  داریم  $\cos^2 \theta \rightarrow 0$ ،  $2\omega^2 = \omega_h^2 \pm \omega_h^2$  و

$\omega = 0$ ، ریشه  $\omega = \omega_h$  نوسان آمیخته بالایی عادی است. ریشه  $\omega = 0$  معنای فیزیکی

ندارد. زیرا در نوسان، اختلال فرض شده بود.

(ج)

$$\omega^4 - \omega_h^2 \omega^2 + \frac{1}{4} \omega_h^4 = \frac{1}{4} \omega_h^4 - \omega_p^2 \omega_c^2 \cos^2 \theta$$

$$(\omega^2 - \frac{1}{4} \omega_h^2) + (\omega_p \omega_c \cos \theta)^2 = \left( \frac{1}{4} \omega_h^2 \right)^2$$

$$(y - 1)^2 + \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad (\text{رابطه مطلوب})$$

(د)

$$\frac{\omega_p / \omega_c}{1} \quad a = \frac{1}{4} (\omega_c / \omega_p + \omega_p / \omega_c)$$

۱

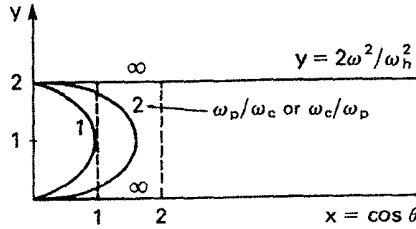
۱

۲

۵/۴

∞

∞



(ه)

$$\omega^2 = \frac{1}{\gamma}(\omega_p^2 + \omega_c^2) \pm [(\omega_p^2 + \omega_c^2)^2 - 4\omega_p^2\omega_c^2 \cos^2 \theta]^{1/2}$$

ریشه کوچکتر: علامت (-) را می‌گیریم؛ هرگاه  $\cos^2 \theta$  ماکسیمم (۱) باشد  $\omega$  ماکسیمم می‌شود. از این رو

$$\begin{aligned} \omega_-^2 &< \frac{1}{\gamma}[(\omega_p^2 + \omega_c^2) - |\omega_p^2 - \omega_c^2|] \\ &= \omega_c^2 \quad \text{اگر } \omega_p > \omega_c \\ &= \omega_p^2 \quad \text{اگر } \omega_c > \omega_p \end{aligned}$$

ریشه بزرگتر: علامت (+) را می‌گیریم؛ هرگاه  $\cos^2 \theta = 0$  هرگاه  $\omega$  ماکسیمم می‌شود،  $\omega^2 = \omega_h^2$  بنابراین  $\omega_+^2 < \omega_h^2$  هرگاه  $\cos^2 \theta = 1$  این ریشه مینیمم می‌شود؛ از این رو

$$\begin{aligned} \omega_+^2 &> \frac{1}{\gamma}[(\omega_p^2 + \omega_c^2) + |\omega_p^2 - \omega_c^2|] \\ &= \omega_p^2 \quad \text{اگر } \omega_p > \omega_c \\ &= \omega_c^2 \quad \text{اگر } \omega_c > \omega_p \end{aligned}$$

۱۰.۴ از  $N_+$  و  $V_+$  برای سرعت و چگالی پروتون، از  $V_-$  و  $N_-$  برای پاد پروتون، از  $v_-$  و  $n_-$  برای الکترون و از  $v_+$  و  $n_+$  برای پوزیترون استفاده می‌کنیم.

(الف)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{\dot{\mathbf{E}}}{c^2} \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\left(\mu_0 \mathbf{j} + \frac{\ddot{\mathbf{E}}}{c^2}\right)$$

$$-(\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathbf{E}) = - \left[ \mu_0 n_0 e (\dot{\mathbf{v}}_+ - \dot{\mathbf{v}}_-) - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} \right]$$

$$= k^2 \mathbf{E} - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})$$

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} n_0 e (\dot{\mathbf{v}}_+ - \dot{\mathbf{v}}_-)$$

$$m n_0 \mathbf{v}_{\pm} = \pm e n_0 \mathbf{E} \quad \dot{v}_{\pm} = \pm \frac{e}{m} \mathbf{E}$$

$$\omega^2 - c^2 k^2 = \frac{1}{\epsilon_0} n_0 e \frac{e}{m} (1 + 1) = 2 \omega_p^2$$

$$\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \quad \omega^2 = 2 \omega_p^2 + c^2 k^2$$

(یا آن که ۲ را می‌توان در تعریف  $\omega_p$  گنجاند.)

$n_{\pm} = n_0 e^{-e\phi/KT_{\pm}}$  در آن  $\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = (1/\epsilon_0)(N_+ - N_- + n_+ - n_-)$  (ب)

و  $n_- = n_0 e^{e\phi/KT_-}$  فرض کنید  $n_{\pm} = \mp n_0 e^{\pm e\phi/KT_e}$  توجه:  $T_+ = T_- = T_e$

$$N_{\pm} = n_{\pm} \equiv n_0$$

$$\frac{\partial N_{\pm}}{\partial t} + N_{\pm} \nabla \cdot \mathbf{V}_{\pm} = 0 \quad N_{1\pm} = N_{0\pm} \frac{k}{\omega} V_{\pm} = n_0 \frac{k}{\omega} V_{\pm}$$

$$M(-i\omega)V_{\pm} = \pm e \mathbf{E}_1 = \pm i k e \phi \quad (M_+ = M_- = M)$$

$$V_{\pm} = \pm \frac{k}{\omega} \frac{e\phi}{M} \quad N_{1\pm} = \pm \frac{k^2}{\omega^2} \frac{n_0 e\phi}{M}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = k^2 \phi = \frac{e}{\epsilon_0} \left( \frac{k^2}{\omega^2} + \frac{k^2}{\omega^2} \right) \frac{n_0 e\phi}{M} + \frac{e}{\epsilon_0} (-n_0 - n_0) \frac{e\phi}{KT_e}$$

$$= \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 M} \frac{2k^2}{\omega^2} \phi - \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 k T_e} \phi = 2\phi \left( \Omega_p^2 \frac{k^2}{\omega^2} - \frac{1}{\lambda_D^2} \right)$$

$$k^2 \lambda_D^2 + 2 = \frac{2k^2}{\omega^2} \Omega_p^2 \lambda_D^2 = \frac{2k^2}{\omega^2} v_s^2 \quad v_s^2 \equiv \frac{k T_e}{M}$$

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{2v_s^2}{2 + k^2 \lambda_D^2} = \frac{v_s^2}{1 + (1/2)k^2 \lambda_D^2} \quad \lambda_D \equiv \left( \frac{k T_e \epsilon_0}{n_0 e^2} \right)^{1/2}$$

$$\tilde{n} = \frac{ck}{\omega} \quad \omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 \quad \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \epsilon$$

$$\therefore \tilde{n} = \sqrt{\epsilon}$$

۱۲.۴ در معادله  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_1$ ،  $\mathbf{j}_1$  جریانی است که تنها توسط الکترونها حمل می‌شود زیرا یونهای  $\text{Cl}^-$  در پاسخ به علامت در بسامدهای میکروموج سنگینتر از آن هستند که حرکت محسوسی داشته باشد. از این رو داریم

$$j_1 = -n_0 e v_e = -(1 - \kappa) n_0 e v_{e1}$$

اگر  $\omega_p$  با  $n_0$  تعریف شود (یعنی  $\omega_p^2 = n_0 e^2 / \epsilon_0 m$ )، رابطه پاشیدگی به صورت زیر خواهد شد

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - (1 - \kappa) \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

قطع در  $(\omega_p^2)^{1/2} f_p = (0.4)^{1/2} (9)(n_0)^{1/2}$  رخ خواهد داد که در آن

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^{10}}{3} = 10^{10}$$

در نتیجه،

$$n_0 = \left[ \frac{10^{10}}{(0.63)(9)} \right]^2 = 3.1 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$$

۱۳.۴ (الف) روش ۱: فرض کنید  $N$  تعداد طول موجها در طول  $L = 0.8 \text{ m}$  و  $N_0$  تعداد طول موجها در غیاب پلاسما باشد.

$$N = \frac{L}{\lambda} \quad N_0 = \frac{L}{\lambda_0} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} \quad \frac{ck}{\omega} = \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)^{1/2}$$

$$\Delta N = N_0 - N = \frac{L}{\lambda_0} - \frac{Lk}{2\pi} = \frac{L}{\lambda_0} - \frac{L}{2\pi} \frac{\omega}{c} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)^{1/2}$$

$$\frac{\omega}{2\pi c} = \frac{1}{\lambda_0} \therefore \Delta N = \frac{L}{\lambda_0} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \right] = 0.1$$



$$\frac{L}{\lambda_0} = \frac{0.8}{0.008} = 10$$

$$\therefore \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{1/2} = 1 - 10^{-2} \quad 1 - \frac{f_p^2}{f^2} = 1 - (2 \times 10^{-2})$$

$$f_p^2 = f^2 \times 2 \times 10^{-2} = \left(\frac{c}{\lambda_0}\right)^2 \times 2 \times 10^{-2} = 2.8 \times 10^{14}$$

$$n = \frac{2.8 \times 10^{14}}{(9)^2} = 3.5 \times 10^{12} \text{ m}^{-2}$$

روش ۲: فرض کنید  $k = k_0$  فضای آزاد باشد. انتقال فاز برابر است با

$$\Delta\phi = \int_0^L \Delta k \, dx = (k_0 - k)L = (0.1)2\pi$$

این رابطه به همان جواب خواهد رسید.

(ب) با توجه به قسمت بالا،  $\Delta N$  کوچک است اگر  $\omega_p^2/\omega^2$  کوچک باشد؛ از این رو می‌توان ریشه دوم را بسط داد:

$$\Delta N \approx \frac{L}{\lambda_0} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\right] = \frac{L}{\lambda_0} \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \propto n \quad (\text{رابطه مطلوب})$$

۱۴.۴ از معادله ۱۰.۱.۴ الف برای موج  $X$  داریم

$$(\omega^2 - \omega_h^2)E_x + i \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega} E_y = 0$$

در تشدید داریم  $\omega = \omega_h$  و بنابراین  $E_x = E_x \hat{x}$ ،  $E_y = 0$  و بنابراین  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$  پس  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$  و موج طولی و الکتروستاتیک است.

۱۵.۴ چون  $\omega_h^2 = \omega_c^2 + \omega_p^2$  روشن است که  $\omega_p < \omega_h$  به علاوه،

$$\begin{aligned} \omega_L &= \frac{1}{2} [-\omega_c + (\omega_c^2 + 4\omega_p^2)^{1/2}] \\ &< \frac{1}{2} [-\omega_c + (\omega_c^2 + 4\omega_c\omega_p + 4\omega_p^2)^{1/2}] \\ &= \frac{1}{2} [-\omega_c + (\omega_c + 2\omega_p)] = \omega_p \therefore \omega_L < \omega_p \end{aligned}$$

همچنین

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{2}} [\omega_c + (\omega_c^2 + 4\omega_p^2)^{1/2}] > \omega_c$$

و

$$\omega_R^2 - \omega_R \omega_c - \omega_p^2 = 0 \quad (\text{معادله } [10.7.4])$$

$$\therefore \omega_R^2 = \omega_R \omega_c + \omega_p^2 > \omega_c^2 + \omega_p^2 = \omega_h^2$$

۱۷.۴ الف) از ضرب معادله ۱۱۲.۴ ب در  $i$  و جمع با معادله ۱۱۲.۴ الف داریم:

$$(\omega^2 - c^2 k^2 - \alpha)(E_x + iE_y) + \alpha \frac{\omega_c}{\omega} (E_x + iE_y) = 0$$

از معادله ۱۱۲.۴ الف کم می‌کنیم:

$$(\omega^2 - c^2 k^2 - \alpha)(E_x - iE_y) - \alpha \frac{\omega_c}{\omega} (E_x - iE_y) = 0$$

بنابراین

$$F(\omega) = \omega^2 - c^2 k^2 - \alpha(1 + \omega_c/\omega)$$

$$G(\omega) = \omega^2 - c^2 k^2 - \alpha(1 - \omega_c/\omega)$$

با توجه به تعریف  $\alpha$  یعنی

$$\alpha \equiv \frac{\omega_p^2}{(1 - \omega_c^2/\omega^2)}$$

خواهیم داشت

$$F(\omega) = \omega^2 \left( 1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 - \omega_c/\omega} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right)$$

$$G(\omega) = \omega^2 \left( 1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 + \omega_c/\omega} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right)$$

از معادلات ۱۱۶.۴ و ۱۱۷.۴ داریم

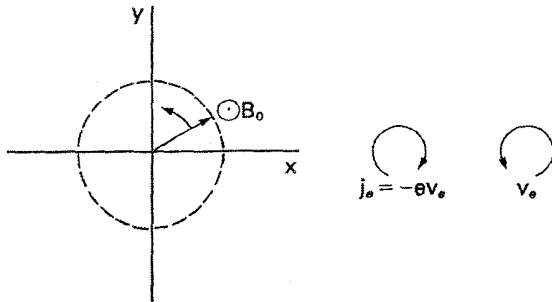
$$F(\omega) = 0 \quad \text{برای موج } R$$

و

$$G(\omega) = 0 \quad \text{برای موج } L$$

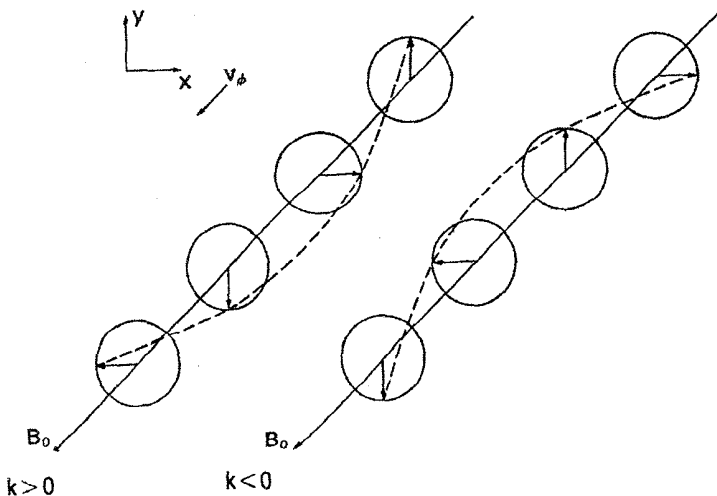
(ب)  $E_x = -iE_y$  و در نتیجه  $E_y = iE_x$ . فرض کنید  $E_x = f(z)e^{-i\omega t}$ . بنابراین،

$$E_y = f(z)ie^{-i\omega t} = f(z)e^{-i\omega t + i(\pi/2)} = f(z)e^{-i[\omega t - (\pi/2)]}$$



$E_y$  به اندازه  $90^\circ$  از  $E_x$  تأخیر دارد. بنابراین  $E$  در این نمودار به صورت پاد ساعتگرد می چرخد. این همان روشی است که الکترونها برای ایجاد یک جریان ساعتگرد و تولید میدان  $B$  مخالف با  $B_0$  چرخش می کنند.

(ج) برای موج  $R$  داریم  $E_y = iE_x$ . وابستگی فضایی به صورت  $E_x = f(t)e^{ikz}$  و  $E_y = f(t)e^{i(kz + \pi/2)} = f(t)e^{i(kz + \pi/2)}$  است. به ازای  $k > 0$ ،  $E_y$  از  $E_x$  تقدم دارد (همان فاز را در  $z$  کوچکتر دارد). به ازای  $k < 0$ ،  $E_y$  نسبت به  $E_x$  تأخیر پیدا می کند (همان فاز را در  $z$  بزرگتر خواهد داشت).



$$\frac{c^{\gamma} k^{\gamma}}{\omega^{\gamma}} = 1 - \frac{\omega_p^{\gamma}/\omega^{\gamma}}{1 - \omega_c/\omega} \quad c^{\gamma} v_{\phi}^{-\gamma} = 1 - \frac{\omega_p^{\gamma}/\omega^{\gamma}}{1 - \omega_c/\omega}$$

$$c^{\gamma} (-\gamma) v_{\phi}^{-\gamma} \frac{dv_{\phi}}{d\omega} = -\omega_p^{\gamma} \frac{-1}{(\omega^{\gamma} - \omega\omega_c)^{\gamma}} (\gamma\omega - \omega_c) = 0$$

$$\therefore \gamma\omega - \omega_c = 0 \quad \omega = \frac{1}{\gamma}\omega_c$$

در داریم  $\omega = 1/\gamma\omega_c$

$$\frac{c^{\gamma}}{v_{\phi}^{\gamma}} = 1 - \frac{\omega_p^{\gamma}}{\frac{1}{\gamma}\omega_c^{\gamma} - \frac{1}{\gamma}\omega_c^{\gamma}} = 1 + \frac{\gamma\omega_p^{\gamma}}{\omega_c^{\gamma}} > 1$$

$$\therefore v_{\phi} < c$$

$$\frac{c^{\gamma} k^{\gamma}}{\omega^{\gamma}} = 1 - \frac{\omega_p^{\gamma}/\omega^{\gamma}}{1 - \omega_c/\omega} \quad c^{\gamma} k^{\gamma} = \omega^{\gamma} - \frac{\omega\omega_p^{\gamma}}{\omega - \omega_c}$$

$$c^{\gamma} \gamma k \, dk = \gamma\omega \, d\omega - \frac{(\omega - \omega_c) - \omega}{(\omega - \omega_c)^{\gamma}} \omega_p^{\gamma} d\omega$$

$$= \left[ \gamma\omega + \frac{\omega_c\omega_p^{\gamma}}{(\omega - \omega_c)^{\gamma}} \right] d\omega$$

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{kc^{\gamma}}{\omega + \omega_c\omega_p^{\gamma}/\gamma(\omega - \omega_c)^{\gamma}} \approx \frac{kc^{\gamma}}{\omega + \omega_p^{\gamma}/\gamma\omega_c} \quad \omega \ll \omega_c \text{ اگر}$$

اما

$$ck = \left( \omega^{\gamma} - \frac{\omega_p^{\gamma}}{1 - \omega_c/\omega} \right)^{1/\gamma} \approx \left( \omega^{\gamma} + \frac{\omega\omega_p^{\gamma}}{\omega_c} \right)^{1/\gamma} \quad \omega \ll \omega_c \text{ اگر}$$

$$\therefore \frac{d\omega}{dk} = c \frac{(\omega^{\gamma} + \omega\omega_p^{\gamma}/\omega_c)^{1/\gamma}}{\omega + \omega_p^{\gamma}/\gamma\omega_c} = c \frac{(1 + \omega_p^{\gamma}/\omega\omega_c)^{1/\gamma}}{1 + \omega_p^{\gamma}/\gamma\omega\omega_c}$$

برای اثبات نتیجه مطلوب باید همچنین فرض کنیم  $v_{\phi}^{\gamma} \ll c^{\gamma}$  که برای سوت‌زن‌ها صادق است.

به طوری که (از سطر ۱) داریم  $\omega_p^2/\omega\omega_c \ll 1$  در نتیجه

$$\frac{d\omega}{dk} \approx \omega_c \left( \frac{\omega\omega_c}{\omega_p^2} \right)^{1/2} \propto \omega^{1/2}$$

۲۱.۴

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \mathbf{E}_1 = \frac{1}{\epsilon_0} i\omega \mathbf{j}_1 \quad (\text{معادله } [۸۱.۴])$$

$$\mathbf{j}_1 = n_0 e (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_e) \quad (v_p \text{ سرعت پوزیترون است})$$

از معادلات حرکت داریم

$$v_x = \frac{\pm ie}{m\omega} \left( E_x \pm \frac{i\omega_c}{\omega} E_y \right) \left( 1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1}$$

$$v_y = \frac{\pm ie}{m\omega} \left( E_y \mp \frac{i\omega_c}{\omega} E_x \right) \left( 1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\omega^2 - c^2 k^2) E_x &= \left( -\frac{1}{\epsilon_0} i\omega \right) (n_0 e) \left( \frac{ie}{m\omega} \right) (1 + 1) E_x \left( 1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1} \\ &= \frac{2\omega_p^2}{1 - \omega_c^2/\omega^2} E_x \end{aligned}$$

جمله  $E_y$  حذف می شود. به طور مشابه داریم

$$(\omega^2 - c^2 k^2) E_y = \frac{2\omega_p^2}{1 - \omega_c^2/\omega^2} E_y$$

جمله  $E_x$  حذف می گردد. هر دو معادله به دست می دهند

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{2\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2}$$

امواج  $R$  و  $L$  واگن هستند و سرعت فاز یکسانی دارند — بنابراین، چرخش فاراده وجود ندارد.

۲۲.۴ از آنجا که اختلاف فاز بین امواج  $R$  و  $L$  دو برابر زاویه چرخش است داریم

$$\int_0^L (k_L - k_R) dz = \pi$$

$$k_{R,L} = k_0 \left( 1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 \pm \omega_c/\omega} \right)^{1/2}$$

برای به دست آوردن عبارت ساده‌ای برای  $k_L - k_R$  می‌خواهیم ریشهٔ دوم را بسط دهیم. فرض کنید می‌توانیم این کار را انجام دهیم و سپس سازگاری آن را در آخر واریسی می‌کنیم

$$k_{R,L} \approx k_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 \pm \omega_c/\omega} \right)$$

$$\begin{aligned} k_L - k_R &= \frac{1}{2} k_0 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left( \frac{1}{1 - \omega_c/\omega} - \frac{1}{1 + \omega_c/\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2} k_0 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{2\omega_c/\omega}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \end{aligned}$$

$$\pi = L(k_L - k_R) = k_0 L \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega} \frac{1}{\omega^2 - \omega_c^2} \quad k_0 = \frac{\omega}{c}$$

$$\omega_p^2 = \frac{\pi c}{L \omega_c} (\omega^2 - \omega_c^2) \quad f_p^2 = \frac{c}{2L} \frac{f^2 - f_c^2}{f_c}$$

$$f_c = 2.78 \times 10^{10} \text{ (} \circ \text{r } 1) \text{ Hz}$$

$$f = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3 \times 10^8}{8 \times 10^{-2}} = 3.75 \times 10^{10} \text{ Hz}$$

$$f_p^2 = \frac{(3 \times 10^8) (1.41 \times 10^{21} - 7.78 \times 10^{18})}{(2)(1) \quad 2.78 \times 10^9}$$

$$= 7.5 \times 10^{11} = 9^2 n$$

$$n = 9.3 \times 10^{14} \text{ m}^{-2}$$

برای تأیید این بسط، متذکر می‌شویم که  $f_c \ll f$  و بنابراین

$$\frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 \pm \omega_c/\omega} \approx \frac{f_p^2}{f^2} = \frac{7.5 \times 10^{11}}{(3.75 \times 10^{10})^2} = 0.5 \ll 1$$

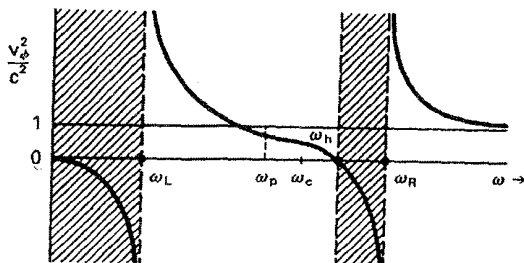
۲۵.۴ (الف) بسامدهای قطع موج  $X$  در معادله [۱۰۷.۴] داده شده‌اند. از این رو داریم

$$\omega_p^2 = \omega(\omega \pm \omega_c) = \frac{4\pi n e^2}{m}$$

$$n_{cx} = \frac{m\omega}{4\pi e^2}(\omega + \omega_c)$$

علامت (+) را که با بسامد قطع  $L$  متناظر است انتخاب می‌کنیم زیرا چگالی بزرگتر را به دست می‌دهد.

(ب)



شاخهٔ چپ شاخه‌ای است که دارای قطع در  $\omega = \omega_L$  است. اگر موج از خارج پلاسما ارسال شود می‌توان نگران بود که این شاخه قابل دسترسی نباشد. اما اگر  $\omega$  کمتر از  $\omega_c$  گرفته شود از نوار ایست بین  $\omega_R$  و  $\omega_h$  کاملاً اجتناب خواهد شد.

۲۸.۴ (الف)

$$f_p = 9\sqrt{n} = (9)(10^{15})^{1/2} = 2.7 \times 10^8 \text{ Hz}$$

$$f_c = 2.8 \text{ GHz/T} = (2.8 \times 10^{10}) \times (10^{-2}) = 2.8 \times 10^8 \text{ Hz}$$

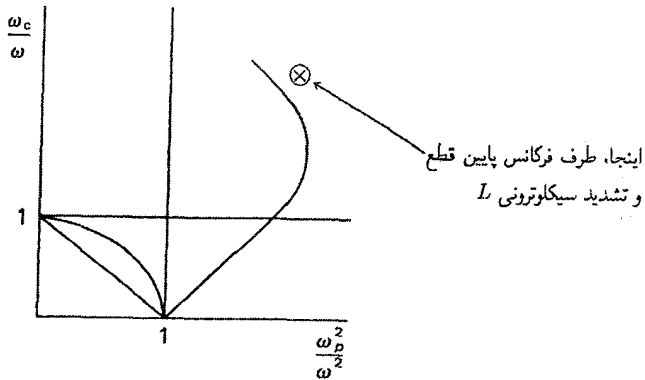
$$f = 1.6 \times 10^8 \text{ Hz} \therefore \omega_p/\omega > 1 \quad \omega_c/\omega > 1$$

$$\omega_L = \frac{1}{4}[-\omega_c \pm (\omega_c^2 + 4\omega_p^2)^{1/2}] \approx \frac{1}{4}(-\omega_c + \sqrt{5}\omega_c)$$

$$= 0.62\omega_c \quad \omega_c \approx \omega_p \text{ برای}$$

$$f_L = (0.62)(2.8 \times 10^8) = 1.73 \times 10^8 > f$$

همچنین،  $f$  از تمام بسامدهای یونی بزرگتر است.



(ب) موج  $R$  (مد سوت زن) تنها موجی است که در اینجا انتشار پیدا می کند.  
۲۹.۴ (الف)

$$v_A = \frac{B}{(\mu_0 n M)} = \frac{1}{[(1.26 \times 10^{-6})(10^{11})(1.67 \times 10^{-27})]^{1/2}}$$

$$= 6.9 \times 10^6 \text{ m/sec}$$

$$\Omega_c = \frac{eB}{M} = \frac{(1.6 \times 10^{-19})(1)}{(1.67 \times 10^{-27})} = 9.58 \times 10^7 \text{ rad/sec}$$

$$\omega = 0.1 \Omega_c = 9.58 \times 10^6 \text{ rad/sec}$$

$$\omega = kv_A = 2\pi v_A / \lambda$$

$$\lambda = 2L \text{ اگر}$$

$$L = \frac{\pi v_A}{\omega} = \frac{\pi(6.9 \times 10^6)}{9.58 \times 10^6} = 2.26 \text{ m}$$

(ب)

$$L \propto v_A / \omega \propto v_A / \Omega_c \propto B(nM)^{-1/2} B^{-1} M \propto (M/n)^{1/2}$$

$$\therefore L = (2.26) \left(\frac{133}{1}\right)^{1/2} \left(\frac{10^{11}}{10^{18}}\right)^{1/2} = 82 \text{ m}$$

بدین دلیل است که امواج آلفون را، بدون توجه به  $B$ ، نمی توان در ماشینهای  $Q$  مطالعه کرد.



$$\omega^{\gamma} = \omega_p^{\gamma} + c^{\gamma} k^{\gamma} \quad \gamma \omega d\omega = c^{\gamma} \gamma k dk$$

$$v_g = d\omega/dk = c^{\gamma} k/\omega$$

$$\frac{ck}{\omega} = \left(1 - \frac{\omega_p^{\gamma}}{\omega^{\gamma}}\right)^{1/\gamma}$$

$$\therefore v_g = c \left(1 - \frac{\omega_p^{\gamma}}{\omega^{\gamma}}\right)^{1/\gamma} \approx c \left(1 - \frac{1}{\gamma} \frac{\omega_p^{\gamma}}{\omega^{\gamma}}\right) \quad \omega^{\gamma} \gg \omega_p^{\gamma} \text{ برای}$$

$$v_g t = x \therefore t = x/v_g$$

$$\frac{dt}{d\omega} = \frac{x}{c} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \frac{\omega_p^{\gamma}}{\omega^{\gamma}}\right)^{-\gamma} \left(-\frac{\omega_p^{\gamma}}{\omega^{\gamma}}\right) \approx -\frac{x}{c} \frac{\omega_p^{\gamma}}{\omega^{\gamma}}$$

$$\therefore \frac{df}{dt} \approx -\frac{c}{x} \frac{f^{\gamma}}{f_p^{\gamma}}$$

(ب)

$$x = \frac{cf^{\gamma}}{f_p^{\gamma}} \left(-\frac{df}{dt}\right)^{-1} = \frac{(3 \times 10^8)(8 \times 10^9)^{\gamma}}{(9)^{\gamma}(2 \times 10^5)(5 \times 10^6)} = 1.9 \times 10^{18} \text{ m}$$

$$= (1.9 \times 10^{18})(3 \times 10^{16})^{-1} = 63 \text{ parsec}$$

۳۱.۴ (الف) فرض کنید  $n_e = n_0 e^{\phi/kT_e}$ ،  $n_0^{(2)} = \epsilon n_0$ ،  $n_0^{(1)} = (1 - \epsilon)n_0$

پواسون:  $ikE_{\perp} = k^{\gamma} \phi = \frac{1}{\epsilon_0} e(n_i^{(1)} + n_i^{(2)} - n_e)$

(فرض کنید  $\nu = 1$  زیرا بار یونی به طور صریح مشخص نشده است.)

پیوستگی:  $n_1^{(1)} = (1 - \epsilon)n_0 \frac{k}{\omega} v_1^{(1)}$ ،  $n_1^{(2)} = \epsilon n_0 \frac{k}{\omega} v_1^{(2)}$

معادله حرکت:  $v_1^{(j)} = \frac{e}{M_j} \frac{k}{\omega} \phi \left(1 - \frac{\Omega_{cj}^{\gamma}}{\omega^{\gamma}}\right)^{-1}$  ([۶۸.۴] معادله)

$$\therefore k^{\nu} \phi = \frac{e}{\epsilon_0} \left[ (1 - \epsilon) n_0 \frac{k^{\nu}}{\omega^{\nu}} \frac{e}{M_1} \left( 1 - \frac{\Omega_{c1}^{\nu}}{\omega^{\nu}} \right)^{-1} + \epsilon n_0 \frac{k^{\nu}}{\omega^{\nu}} \frac{e}{M_r} \left( 1 - \frac{\Omega_{cT}^{\nu}}{\omega^{\nu}} \right)^{-1} - n_0 \frac{e}{KT_e} \right] \phi \approx 0 \quad (\text{تقریب پلاسما})$$

$$1 = (1 - \epsilon) \frac{k^{\nu} v_{s1}^{\nu}}{\omega^{\nu} - \Omega_{c1}^{\nu}} + \epsilon \frac{k^{\nu} v_{sT}^{\nu}}{\omega^{\nu} - \Omega_{cT}^{\nu}} \Leftarrow$$

(ب) دو ریشه یکی نزدیک  $\omega = \Omega_{c1}$  و دیگری نزدیک  $\omega = \Omega_{cT}$  وجود دارند. اگر  $\epsilon \rightarrow 0$  ریشه نزدیک  $\Omega_{cT}$  به  $\Omega_{c1}$  میل می‌کند تا جمله آخر منتهای بماند. ریشه معمولی، در نزدیکی  $\Omega_{c1}$  به علت حضور گونه  $M_r$  انتقال پیدا می‌کند:

$$\omega^{\nu} - \Omega_{c1}^{\nu} = k^{\nu} v_{s1}^{\nu} - \epsilon \left[ k^{\nu} v_{s1}^{\nu} - k^{\nu} v_{sT}^{\nu} \frac{\omega^{\nu} - \Omega_{c1}^{\nu}}{\omega^{\nu} - \Omega_{cT}^{\nu}} \right]$$

در جمله آخر می‌توانیم  $\omega^{\nu}$  را با  $k^{\nu} v_{s1}^{\nu} + \Omega_{c1}^{\nu}$  تقریب بگیریم. بنابراین،

$$\omega^{\nu} \approx \Omega_{c1}^{\nu} + k^{\nu} v_{s1}^{\nu} + \epsilon \left[ \frac{k^{\nu} v_{sT}^{\nu}}{\Omega_{c1}^{\nu} - \Omega_{cT}^{\nu}} - 1 \right] k^{\nu} v_{s1}^{\nu}$$

(ج)

$$1 = \frac{1}{2} \frac{k^{\nu} v_{sD}^{\nu}}{\omega^{\nu} - \omega_{cD}^{\nu}} + \frac{1}{2} \frac{k^{\nu} v_{sT}^{\nu}}{\omega^{\nu} - \Omega_{cT}^{\nu}}$$

$$v_{sD}^{\nu} = KT_s/M_D = (10^{\nu})(1.6 \times 10^{-19})/(2)(1.67 \times 10^{-27}) = 4.79 \times 10^{11}$$

$$v_{sT}^{\nu} = \frac{2}{3} v_{sD}^{\nu} = 3.19 \times 10^{11}$$

$$\Omega_{cD}^{\nu} = eB/M_D = (1.6 \times 10^{-19})(5)/(2)(1.67 \times 10^{-27}) = 2.40 \times 10^8$$

$$\Omega_{cT}^{\nu} = \frac{2}{3} \Omega_{cD}^{\nu} = 1.60 \times 10^8 \quad k = 100 \text{ m}^{-1}$$

$$(\omega^{\nu} - \Omega_{cD}^{\nu})(\omega^{\nu} - \Omega_{cT}^{\nu}) = \frac{1}{2} k^{\nu} [v_{sD}^{\nu}(\omega^{\nu} - \Omega_{cT}^{\nu}) + v_{sT}^{\nu}(\omega^{\nu} - \Omega_{cD}^{\nu})]$$

$$\omega^r - \omega^r [\Omega_{cD}^r + \Omega_{cT}^r + \frac{1}{\gamma} k^r (v_{sD}^r + v_{sT}^r)]$$

$$+ \Omega_{cD}^r \Omega_{cT}^r + \frac{1}{\gamma} k^r (v_{sD}^r \Omega_{cT}^r + v_{sT}^r \Omega_{cD}^r) = 0$$

$$\omega^r - \omega^r [1.732 \times 10^{16} + 3.99 \times 10^{15}] + 1.47 \times 10^{22} + 1.53 \times 10^{22} = 0$$

$$\omega^r - 1.772 \times 10^{16} \omega^r + 1.63 \times 10^{22} = 0$$

$$\omega^r = \frac{1}{\gamma} [1.772 \times 10^{16} \pm (1.760 \times 10^{22} - 6.952 \times 10^{22})^{1/2}]$$

$$= 6.90 \times 10^{16}, \quad 2.772 \times 10^{16}$$

$$\omega = 2.45, 1.65 \times 10^8 \text{ sec}^{-1} \quad f = 39, 26.3 \text{ MHz}$$

۳۲.۴

$$\mathcal{L} = n_0 \left\langle \frac{1}{\gamma} m v_e^r \right\rangle \quad v_e = \frac{e}{im\omega} E$$

$$\therefore \langle v_e^r \rangle = \frac{e^r}{m^r \omega^r} \langle E^r \rangle$$

$$\mathcal{L} = n_0 \frac{1}{\gamma} m \frac{e^r}{m^r \omega^r} \langle E^r \rangle = \frac{\epsilon_0 \omega_p^r}{\omega^r} \frac{\langle E^r \rangle}{\gamma}$$

اما  $\omega^r = \omega_p^r$  و در نتیجه  $\mathcal{L} = \frac{1}{\gamma} \epsilon_0 \langle E^r \rangle$

۳۳.۴

$$\mathcal{L} = n_0 \left\langle \frac{1}{\gamma} M v_i^r \right\rangle \quad v_i \approx E_1 / B_0$$

$$\therefore \mathcal{L} = \frac{1}{\gamma} M n_0 \langle E_1^r \rangle / B_0$$

اما  $\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\dot{B}_1$  و در نتیجه  $\langle E_1^r \rangle = (\omega^r / k^r) \langle B_1^r \rangle$

$$\mathcal{L} = \frac{M n_0}{\gamma B_0} \frac{\omega^r}{k^r} \langle B_1^r \rangle$$

برای موج آلفون داریم

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{B_0^2}{\mu_0 n_0 M} = \frac{\langle B_1^2 \rangle}{2\mu_0}$$

۳۴.۴ الف) برای موج  $L$ ، قطع در  $\omega = \omega_L$  رخ می‌دهد، و بنابراین لازم است که  $\omega_L^2 < \epsilon\omega^2$ . چون  $\omega_L < \omega_p$  اگر  $n_0$  ثابت باشد (مسئله ۱۵.۴)، می‌توان به مقادیر بزرگتر  $n_0$  (با  $\epsilon\omega^2$  ثابت) در موج  $L$  نسبت به موج  $O$  دسترسی پیدا کرد.

ب) برای قطع  $L$  داریم

$$\frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\omega_c}{\omega} \therefore n_c = \frac{\epsilon_0 m \omega^2}{e^2} \left( 1 + \frac{\omega_c}{\omega} \right)$$

بنابراین برای دو برابر کردن چگالی قطع معمولی  $\epsilon_0 m \omega^2 / e^2$ ، باید داشته باشیم  $f_c = f$

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{337 \times 10^{-6}} = 8.9 \times 10^{11} \text{ Hz}$$

$$f_c = 28 \times 10^9 \text{ Hz/T} \therefore B_0 = \frac{8.9 \times 10^{11}}{28 \times 10^9} = 31.8 \text{ T}$$

این به‌طور ناموجهی پرهزینه است.

ج) پلاسما دارای چگالی ماکسیمم در مرکز است و بنابراین شبیه یک عدسی محدب عمل می‌کند. این عدسی کانونی می‌کند اگر  $\tilde{n} > 1$  و واکانونی می‌کند اگر  $\tilde{n} < 1$ . موج سوت همیشه با سرعت  $v_\phi < c$  حرکت می‌کند (مسئله ۱۹.۴)؛ بنابراین،  $\tilde{n} = c/v_\phi > 1$  و پلاسما این موج را کانونی می‌کند.

د) این سؤالی درباره قابلیت دسترسی است. اگر همه جا  $\omega_c < \omega$ ، موج سوت زن بدون توجه به  $n_0$  انتشار پیدا خواهد کرد. اما اگر  $\omega > \omega_c$ ، موج در ناحیه‌های کم‌چگالی قطع خواهد شد. از قسمت ب) مشاهده می‌کنیم که یک میدان ۳۱.۸ T لازم است؛ این برای عملی بودن طرح بیش از حد بزرگ به نظر می‌رسد.

۳۵.۴ باید جوابی مانند جواب پلاسما سرد به دست آید.

۳۶.۴ معادله خطی شده حرکت برای هر یک از گونه‌ها به صورت زیر است

$$-i\omega m n_0 \mathbf{v}_1 = q n_0 (\mathbf{E} + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) - \gamma k T_i k n_1$$

از این رو

$$-i\omega mn_0 \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 = qn_0 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) - \gamma k T_i k^2 n_1$$

اما برای موج عرضی داریم  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$  و بنابه فرض  $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) = -\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{B}_0) = 0$  معادله خطی شده پیوستگی عبارت است از

$$-i\omega n_1 + n_0 i k \cdot \mathbf{v}_1 = 0$$

با جاگذاری برای  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1$ ، به دست می آوریم

$$i\omega^2 mn_1 = i\gamma k T k^2 n_1$$

بنابراین  $n_1$  اختیاری است و می توانیم آن را صفر بگیریم. بنابراین، جمله  $\nabla p$  هم برای یونها و هم برای الکترونها صفر می شود.

۴۴.۴ بازای یک چگالی معین، بزرگترین بسامد قطع  $\omega_R$  است. از این رو پایین ترین کران  $n$  با  $\omega = \omega_R$  داده می شود.

$$\frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{f_p^2}{f^2} = 1 - \frac{\omega_c}{\omega} = 1 - \frac{(1.6 \times 10^{-11})(36 \times 10^{-4})}{(0.91 \times 10^{-30})(2\pi)(1.2 \times 10^8)} = 0.16$$

$$n = f_p^2 / q^2 = (0.16)(1.2 \times 10^8)^2 q^{-2} = 2.8 \times 10^{13} \text{ m}^{-3}$$

۴۶.۴ فرض کنید در  $r_1$  داریم  $\omega = \omega_R$  که در آن  $n = n_1$  و  $\omega_p = \omega_{p1}$  و در  $r_2$  داریم  $\omega = \omega_h$  که در آن  $n = n_2$  و  $\omega_p = \omega_{p2}$ . بنابراین

$$\omega_{p2}^2 = \omega^2 - \omega_c^2 \quad (105.4)$$

$$\omega_{p1}^2 = \omega^2 - \omega\omega_c \quad (107.4)$$

پس

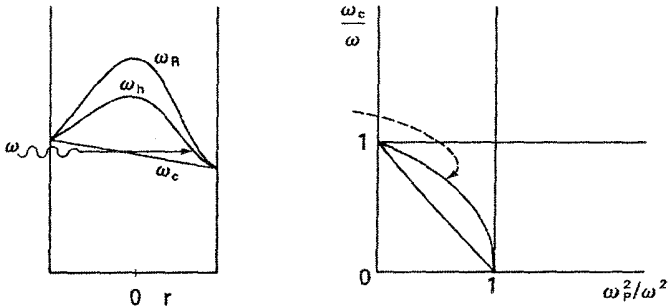
$$\omega_{p2}^2 - \omega_{p1}^2 = \omega_c(\omega - \omega_c) = (n_2 - n_1)e^2 / \epsilon_0 m$$

اما

$$n_2 - n_1 \approx d|\partial n / \partial r| \approx n_1 d / r_0 = (\epsilon_0 m / e^2)(\omega)(\omega - \omega_c)(d / r_0)$$

$$d \approx (\omega_c/\omega)r_o.$$

۴۷.۴ (الف) تشدید قابل دسترسی در کناره دور، پس از ماکسیمم چگالی، است.



(ب) فرض کنید  $\omega_{c0}$  در مرز چپ  $\omega_c$  باشد، و  $\omega_c$  مقدار در لایه تشدید باشد که در آن  $\omega = \omega_p$ . بنابراین، باید

$$\omega_{c0} > \omega, \quad \omega^2 = \omega_c^2 + \omega_p^2$$

از این رو

$$\begin{aligned} \omega_{c0}^2 &> \omega_c^2 + \omega_p^2 & \omega_{c0}^2 - \omega_c^2 &> \omega_p^2 \\ (\omega_{c0} + \omega_c)(\omega_{c0} - \omega_c) &\approx 2\omega_c \Delta\omega_c > \omega_p^2 \\ \frac{\Delta\omega_c}{\omega_c} &= \frac{\Delta B_o}{B_o} > \frac{\omega_p^2}{2\omega_c^2} \end{aligned}$$

۴۸.۴ اینها عبارتند از بسامدهای آمیخته بالا و پایین و بسامدهای قطع سمت راست و سمت چپ با احتساب حرکت یونها. توجه کنید که  $\omega_p^2/\omega_c = \Omega_p^2/\Omega_c$  تشدید:

$$\omega^4 - (\omega_p^2 + \omega_c^2 + \Omega_p^2 + \Omega_c^2) + \omega_p^2 \Omega_c^2 + \omega_c^2 \Omega_p^2 + \omega_c^2 \Omega_c^2 = 0$$

$$\omega_+^2 \approx \omega_h^2 + \Omega_p^2 (1 - \omega_c^2/\omega_h^2) \quad (\text{آمیخته بالا})$$

$$\frac{1}{\omega_-^2} = \frac{1}{\omega_c \Omega_c} + \frac{1}{\Omega_p^2} \quad \text{یا} \quad \omega_-^2 \approx \omega_c^2 \Omega_p^2 / \omega_h^2 \quad (\text{آمیخته پایین})$$

قطع:

$$\frac{\bar{\omega}_p^2}{\omega^2} = \left(1 \mp \frac{\omega_c}{\omega}\right) \left(1 \pm \frac{\Omega_c}{\omega}\right) \quad \left( \begin{array}{l} \text{راست} \\ \text{قطع} \\ \text{چپ} \end{array} \right)$$

این نتیجه را می‌توان، بدون تقریب، از صورت داده شده در مسئله ۵۰.۴ آسانتر به دست آورد.

$$D_e = KT_e/mv \quad \text{الف) ۱.۵}$$

$$\sigma = (6\pi)(0.53 \times 10^{-10})^2 = 5.29 \times 10^{-20} \text{ m}^2$$

$$v = \left(\frac{2E}{m}\right)^{1/2} = \left[\frac{(2)(2)(1.6 \times 10^{-19})}{(9.11 \times 10^{-31})}\right]^{1/2}$$

$$= 8.49 \times 10^5 \text{ m/sec}$$

از مسئله ۱.۱ ب داریم

$$n_o = (3.3 \times 10^{14})(10^2) = 3.3 \times 10^{16} \text{ m}^{-3}$$

$$v = n_o \bar{v} = n_o \sigma v = (3.3 \times 10^{16})(5.29 \times 10^{-20})(8.49 \times 10^5)$$

$$= 1.46 \times 10^4 \text{ sec}^{-1}$$

$$D_e = \frac{(2)(1.6 \times 10^{-19})}{(9.11 \times 10^{-31})(1.46 \times 10^4)} = 2.4 \times 10^2 \text{ m}^2/\text{sec}$$

$j = \mu n e E$  (ب)

$$\mu_e = eD_e/KT_e = \frac{(1.6 \times 10^{-19})(2.4 \times 10^2)}{(2)(1.6 \times 10^{-19})}$$

$$= 1.2 \times 10^2 \text{ m}^2/\text{V sec}$$

$$E = \frac{j}{\mu n_e} = \frac{2 \times 10^2}{(1.2 \times 10^2)(10^{16})(1.6 \times 10^{-19})} = 1.04 \times 10^2 \text{ V/m}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \nabla^2 n - \alpha n^2$$

$$D\nabla^2 n = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = -Dn_0 \left( \frac{\pi}{2L} \right)^2 \cos \frac{\pi x}{2L} = -D \left( \frac{\pi}{2L} \right)^2 n = -\alpha n^2$$

$$\therefore n = \frac{D}{\alpha} \left( \frac{\pi}{2L} \right)^2 = \frac{0.4}{10^{-15}} \left( \frac{\pi}{0.06} \right)^2 = 1.1 \times 10^{18} \text{m}^{-3}$$

۴.۵ الف) از مسئله ۱.۵ الف) داریم  $v_{en} = 1.46 \times 10^4 \text{sec}^{-1}$  باید تعیین کنیم که آیا  $\mu_{e\perp}/\mu_{i\perp}$  بزرگ است یا کوچک:

$$\frac{\mu_e}{\mu_i} = \frac{Mv_{in}}{mv_{en}} \quad v_{jn} = n_n \sigma v_j \propto v_{thj} \propto m_j^{-1/2}$$

زیرا برای برخورد های یون-خنثی و الکترون-خنثی،  $\sigma$  تقریباً یکسان است. بنابراین

$$\frac{\mu_e}{\mu_i} \approx \left( \frac{M}{m} \right)^{1/2} = (4 \times 1836)^{1/2} = 85.7$$

$$\omega_c = \frac{eB}{m} = \frac{(1.6 \times 10^{-19})(0.2)}{9.11 \times 10^{-31}} = 3.52 \times 10^{10}$$

$$\omega_c \tau_{en} = \frac{3.52 \times 10^{10}}{1.46 \times 10^4} \times 24 \quad 1 + \omega_c^2 \tau_{en}^2 = 580$$

$$\Omega_c \tau_{in} = \omega_c \tau_{en} \left( \frac{m}{M} \right) \left( \frac{M}{m} \right)^{1/2} = (24)(85.7)^{-1} = 0.28$$

$$\frac{\mu_{e\perp}}{\mu_{i\perp}} = \frac{\mu_e}{\mu_i} \frac{1 + \Omega_c^2 \tau_{in}^2}{1 + \omega_c^2 \tau_{en}^2} = (85.7) \frac{1.08}{580} = 0.16 \ll 1$$

$$\begin{aligned} \therefore D_{a\perp} &= \frac{\mu_{i\perp} D_{e\perp} + \mu_{e\perp} D_{i\perp}}{\mu_{i\perp} + \mu_{e\perp}} \approx D_{e\perp} + \frac{\mu_{e\perp}}{m_{i\perp}} D_{i\perp} \\ &= D_{e\perp} + 0.16 D_{i\perp} \end{aligned}$$

۱۱

$$D = \frac{KT}{e} \mu$$

$$\therefore \frac{D_{i\perp}}{D_{e\perp}} = \frac{\mu_{i\perp}}{\mu_{e\perp}} \frac{T_i}{T_e} = \frac{1}{0.16} \frac{0.1}{2} = 0.3$$

$$\therefore D_{a\perp} = D_{e\perp} [1 + (0.16)(0.3)] = 1.05 D_{e\perp} \approx D_{e\perp}$$



(ب)

$$\frac{a}{(D\tau)^{1/2}} = ۲,۴ \therefore \tau = \left(\frac{a}{۲,۴}\right)^2 \frac{1}{D_{e\perp}}$$

$$\tau = \frac{1}{(۲,۴ \times ۱۰^{-۲})^2} \frac{1}{D_{e\perp}}$$

$$D_{e\perp} = \frac{۲,۴ \times ۱۰^۲}{۵۸۰} = ۰,۴۱۴۰ \text{ (از مسئله ۱.۵)}$$

$$\therefore \tau = ۴۲ \mu \text{sec}$$

۵.۵

$$\Gamma = -Ddn/dx \quad n = n_0(1 - x/L)$$

$$\Gamma = Dn_0/L \quad (x > 0)$$

$$Q = 2\Gamma = 2Dn_0/L \therefore n_0 = QL/2D$$

۷.۵

$$\lambda_{ei} \approx v_{the} \tau_{ei} = v_{the}/\nu_{ei}$$

$$\nu_{ei} \propto T_e^{-3/2} \text{ و } v_{the} \propto T_e^{1/2} \text{ اما}$$

$$\therefore \lambda_{ei} \propto T_e^{1/2}/T_e^{-3/2} \propto T_e^2$$

۸.۵

$$\eta_{\parallel} = ۵,۲ \times ۱۰^{-۵} \frac{\ln \Lambda}{T_{ev}^{3/2}} \Omega m \quad (Z = ۱ \text{ فرض})$$

$$= \frac{(۵,۲ \times ۱۰^{-۵})(۱۰)}{(۵۰۰)^{3/2}} = ۴,۶۵ \times ۱۰^{-۸} \Omega m$$

$$j = I/A = (۲ \times ۱۰^۵)/(۲,۵ \times ۱۰^{-۲}) = ۲,۶۷ \times ۱۰^۷ \text{ A/m}^2$$

$$E = \eta_{\parallel} j = (۴,۶۵ \times ۱۰^{-۸})(۲,۶۷ \times ۱۰^۷) = ۱,۲۷ \text{ V/m}$$

$$KT_i = ۲۰ \text{ keV} \quad KT_e = ۱۰ \text{ keV} \quad n = ۱۰^{۲۱} \text{ m}^{-۳}$$

$$B = \Delta T \quad D_{\perp} = \frac{\eta n (KT_i + KT_e)}{B^2}$$

$$\eta_{\perp} = (۲,۰)(\Delta,۲ \times ۱۰^{-۵}) \frac{\ln \Lambda}{T_{ev}^{r/r}} = \frac{(۱۰^{-۲})(۱۰)}{(۱۰^۴)^{r/r}}$$

$$= ۱,۰ \times ۱۰^{-۹} \Omega \text{ m}$$

$$D_{\perp} = \frac{(۱,۰ \times ۱۰^{-۹})(۱۰^{۲۱})(۳ \times ۱۰^۴)(۱,۶ \times ۱۰^{-۱۱})}{\Delta^2}$$

$$= ۳,۰ \times ۱۰^{-۴} \text{ m}^2 / \text{sec}$$

(ب)

$$\frac{dN}{dt} = ۲\pi r L \Gamma_r \quad \Gamma_r = -D_{\perp} \frac{\partial n}{\partial r}$$

$$\frac{\partial n}{\partial r} = \frac{n}{r} \quad r = ۰,۵ \text{ m} \quad L = ۱۰ \text{ m}$$

$$-\frac{dN}{dt} = (۲\pi)(۰,۵)(۱۰^{۲۱})(۳,۰ \times ۱۰^{-۴})(۱۰^{۲۱}/۰,۵) = ۶ \times ۱۰^{۲۰} \text{ sec}$$

(ج)

$$\tau = \frac{N}{-dN/dt} = \frac{n\pi r^2 L}{-dN/dt} \quad r_{\text{eff}} = ۰,۵ \text{ m}$$

$$\tau = \frac{(۱۰^{۲۱})(\pi)(۰,۵)^2(۱۰^۲)}{۶ \times ۱۰^{۲۰}} = ۱۵ \text{ sec}$$

۱۳.۵

$$\eta_{\parallel} = \Delta,۲ \times ۱۰^{-۵} \frac{\ln \Lambda}{T_{ev}^{r/r}} \Omega \text{ m} = (\Delta,۲ \times ۱۰^{-۵}) \frac{۱۰}{۱۰^۴ r/r}$$

$$= ۱,۶ \times ۱۰^{-۵} \Omega \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \eta j^r &= (1.6 \times 10^{-5})(10^5)^2 = 1.6 \times 10^5 \text{ W/m}^2 \\ &= 1.6 \times 10^5 \text{ J}/(\text{m}^2 \text{ sec}) \\ &= (1.6 \times 10^5)/(1.6 \times 10^{-11}) = 10^{16} \text{ eV}/\text{m}^2 \text{ sec} \\ &= \frac{dE_{ev}}{dt} \end{aligned}$$

$$E = \frac{3}{2} n K T_e \therefore \frac{dE_{ev}}{dt} = \frac{3}{2} n \frac{dT_{ev}}{dt}$$

$$\frac{dT_{ev}}{dt} = \frac{2}{3} \frac{1}{10^{11}} 10^{16} = 0.67 \times 10^5 \text{ eV/sec} = 0.67 \text{ eV}/\mu \text{ sec}$$

۱۵.۵ (الف)

$$\begin{aligned} en(E \nearrow_{\theta}^{\circ} - v_{ir} B) - \nabla \nearrow_{\theta}^{\circ} p_i - e^r n^r \eta (v_{i\theta} - v_{e\theta}) &= 0 \\ -en(E \nearrow_{\theta}^{\circ} - v_{er} B) - \nabla \nearrow_{\theta}^{\circ} p_e + e^r n^r \eta (v_{i\theta} - v_{e\theta}) &= 0 \end{aligned}$$

جمع می‌کنیم:

$$-v_{ir} B + v_{er} B = 0 \therefore v_{ir} = v_{er}$$

(این نتیجه نشاندهندهٔ بخش همدوقطبی است.)

(ب)

$$en(E_r + v_{i\theta} B) - \frac{\partial p_i}{\partial r} - e^r n^r \eta (v \nearrow_{ir}^{\circ} - v_{er}) = 0$$

$$-en(E_r + v_{e\theta} B) - \frac{\partial p_e}{\partial r} + e^r n^r \eta (v_{ir} - v_{er}) = 0$$

$$v_{i\theta} = -\frac{E_r}{B} + \frac{1}{enB} \frac{\partial p_i}{\partial r} = v_E + v_{Di}$$

$$v_{e\theta} = -\frac{E_r}{B} - \frac{1}{enB} \frac{\partial p_e}{\partial r} = v_E + v_{De}$$

(ج) از معادلهٔ اول قسمت (الف) داریم

$$v_{ir} = -\frac{e^r n^r \eta}{enB} (v_{i\theta} - v_{e\theta})$$

$$= \frac{en\eta}{B} \frac{1}{enB} \left( \frac{\partial p_i}{\partial r} + \frac{\partial p_e}{\partial r} \right) = -\frac{\eta}{B^2} \frac{\partial p}{\partial r} = v_{er}$$

(این نتیجه نشاندهنده غیاب تحرک میدان متقاطع است.)

۱۷.۵ (الف)

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0 \quad (۱)$$

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0 = \eta \mathbf{j}_1 \quad (۲)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\dot{\mathbf{B}}_1 \quad \nabla \times \mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{j}_1$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_1 = -\nabla \times \dot{\mathbf{B}}_1 = -\mu_0 \mathbf{j}_1$$

$$-k(k \cdot \nabla \cdot \mathbf{E}) + k^2 \mathbf{E}_1 = i\omega \mu_0 \mathbf{j}_1 \quad (۳)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (\text{موج عرضی})$$

معادله (۲) را برای  $\mathbf{v}_1$  حل می‌کنیم:

$$\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0 + (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 = \eta \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0$$

$$-\mathbf{v}_{1\perp} B_0^2$$

$$\mathbf{v}_{1\perp} = \frac{\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0}{B_0^2} - \frac{\eta \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0}{B_0^2}$$

با جاگذاری در (۱) که مؤلفه موازی ندارد خواهیم داشت:

$$-i\omega \rho_0 \left( \frac{\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0}{B_0^2} - \frac{\eta \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0}{B_0^2} \right) = \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0$$

با توجه به معادله (۳)،  $\mathbf{E}_1$  و  $\mathbf{j}_1$  جهت یکسانی دارند و از این رو هر دو را در جهت  $\hat{x}$  می‌گیریم.

بنابراین، برای مؤلفه  $y$  داریم

$$\frac{E_{1y}}{B_0} = \left( \frac{iB_0}{\omega \rho_0} + \frac{\eta}{B_0} \right) j_{1y}$$

معادله (۳) به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned}
 k^\gamma E_\lambda &= \mu_o i\omega \frac{E_\lambda}{B_o} \left( \frac{iB_o}{\omega\rho_o} + \frac{\eta}{B_o} \right)^{-1} \\
 &= \mu_o \omega^\gamma \left( \frac{B_o^\gamma}{\rho_o} - i\eta\omega \right)^{-1} E_\lambda \\
 \frac{\omega^\gamma}{k^\gamma} &= \mu_o \left( \frac{B_o^\gamma}{\rho_o} - i\omega\eta \right)
 \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned}
 k &= (\mu_o \omega^\gamma)^{1/\gamma} \left( \frac{B_o^\gamma}{\rho_o} - i\omega\eta \right)^{-1/\gamma} \\
 &= \omega \left( \frac{\mu_o \rho_o}{B_o^\gamma} \right)^{1/\gamma} \left( 1 - \frac{i\omega\eta\rho_o}{B_o^\gamma} \right)^{-1/\gamma}
 \end{aligned}$$

$$\text{Im}(k) = \omega \frac{\omega\eta\rho_o}{\gamma B_o^\gamma} \left( \frac{\mu_o \rho_o}{B_o^\gamma} \right)^{1/\gamma} = \frac{\omega^\gamma \eta}{\gamma} \frac{1}{v_A^\gamma}$$

اما برای  $\eta$ ی کوچک داریم  $\omega \approx kv_A$  که در آن  $k = R_e(k)$

$$\therefore \text{Im}(k) \approx \frac{(\eta)(k^\gamma)}{\gamma v_A}$$

۴.۶ (الف)

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p = KT \nabla n \quad (KT = KT_e + KT_i \text{ در اینجا})$$

$$(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = KT \nabla n \times \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{j} \cdot \mathbf{B}) - jB^2$$

مؤلفه موازی عبارت است از  $\mathbf{j} \parallel B^2 - j \parallel B^2 = 0$  و در نتیجه  $j \parallel$  اختیاری است. مؤلفه عمودی برابر است با

$$\mathbf{j}_\perp = \frac{KT}{B^2} \mathbf{B} \times \nabla n = \frac{KT}{B} \frac{\partial n}{\partial r} \hat{\theta}$$

(ب)

$$\int \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \mu_0 \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 L \int_0^\infty j_\theta dr$$

زیرا  $\mathbf{j}$  و  $d\mathbf{S}$  هر دو در جهت  $\hat{\theta}$  هستند و  $L$  پهنای حلقه در راستای  $\hat{z}$  است. بنابه تقارن،  $B_r$  نمی‌تواند وجود داشته باشد، و در نتیجه تنها ساقهای  $z$  حلقه در انتگرال سهم دارند. با جاگذاری برای  $j_\theta$  داریم

$$(B_{ax} - B_0)L = \mu_0 LKT \int_0^\infty \frac{\partial n / \partial r}{B(r)} dr$$

(ج)  $\partial n / \partial r = -n_0 \delta(r - a)$  زیرا  $\partial n / \partial r$  تابعی است که همه جا صفر است بجز در  $r = a$  که در آن بینهایت است، و انتگرال آن برابر است با  $-n_0$ . از این رو

$$B_{ax} - B_0 = \mu_0 KT \int_0^\infty -n_0 \frac{\delta(r - a)}{B(r)} dr$$

از آنجاکه تمام جریان دیامغناطیسی در  $r = a$  متمرکز است،  $B$  از مقدار ثابت  $B_{ax}$  در داخل پلاسما به مقدار ثابت دیگر  $B_0$  در خارج پلاسما جهش پیدا می‌کند. (توجه کنید که میدان داخل یک سیملولهٔ بینهایت دراز یکنواخت است.) با انتگرال‌گیری روی این جهش، می‌توان مقدار میانگین  $B$  را در دو طرف به دست آورد یعنی  $B(a) = 1/2(B_{ax} + B_0)$  از این رو خواهیم داشت

$$B_{ax} - B_0 = \mu_0 KT n_0 \frac{-1}{\frac{1}{2}(B_{ax} + B_0)}$$

$$B_{ax}^2 - B_0^2 = -2\mu_0 n_0 KT$$

$$1 - \frac{B_{ax}^2}{B_0^2} = \frac{2\mu_0 n_0 KT}{B_0^2} \equiv \beta = 1 \therefore B_{ax} = 0$$

۵.۶ (الف) از قانون فاراده داریم  $V = -d\Phi/dt$

$$\therefore \int V dt = -N \int \frac{d\Phi}{dt} dt = -N \Delta\Phi$$

چون  $\Delta\Phi$  تغییر شار حاصل از کاهش دیامغناطیسی در  $B$  است،

$$-N\Delta\Phi = -N \int (\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) \cdot d\mathbf{S}$$

علامت بسته به آن است که کدام طرف  $V$  را مثبت بگیریم. در عمل این هیچ تأثیری ندارد زیرا رد اسیلوسکوپ را با استفاده از کلید قطبیت می‌توان به آسانی وارونه کرد.  
 (ب) در مسئله ۴.۶ می‌توان حلقه را طوری ترسیم کرد که ساق داخلی آن به جای قرار گرفتن بر روی محور روی شعاع اختیاری  $r$  قرار گیرد. بنابراین، داریم

$$B(r) - B_0 = \mu_0 KT \int_r^\infty \frac{\partial n / \partial r}{B(r')} dr' \approx \mu_0 KT \int_r^\infty \frac{\partial n / \partial r'}{B_0} dr'$$

که در آن مجدداً  $KT$  به جای  $\sum KT$  است

$$\frac{\partial n}{\partial r} = n_0 \left( \frac{-2r}{r_0^2} \right) e^{-r^2/r_0^2}$$

$$\begin{aligned} B(r) - B_0 &= \frac{\mu_0 KT}{B_0} \frac{n_0}{r_0^2} \int_r^\infty e^{-r'^2/r_0^2} 2r' dr' \\ &= \frac{\mu_0 n_0 KT}{B_0} [e^{-r'^2/r_0^2}]_r^\infty = \frac{-\mu_0 n_0 KT}{B_0} e^{-r^2/r_0^2} \end{aligned}$$

این تغییر دیامغناطیسی  $B$  در هر  $r$  است. برای به دست آوردن علامت حلقه‌ای باید روی سطح مقطع پلاسما انتگرال‌گیری کنیم.

$$\int V dt = -N \int (\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) \cdot d\mathbf{S} = -N \iint [B(r) - B_0] r dr d\theta$$

که در اینجا  $\mathbf{B}$  و  $d\mathbf{S}$  هر دو در جهت  $\hat{z}$  هستند. یا جاگذاری برای  $B(r) - B_0$  و فرض آن که سیم بیچ کاملاً خارج پلاسما قرار دارد خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int V dt &= N \frac{\mu_0 n_0 KT}{B_0} 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2/r_0^2} r dr \\ &= N\pi \frac{\mu_0 n_0 KT}{B_0} r_0^2 [e^{-r^2/r_0^2}]_0^\infty = \frac{1}{2} N\pi r_0^2 \left( \frac{2\pi n_0 KT}{B_0} \right) B_0 \end{aligned}$$

(ج) بنا به تعریف، کمیت داخل پرانتز  $\beta$  است، و از این رو داریم

$$\int V dt = \frac{1}{\gamma} N \pi r_o^2 \beta B_o$$

هر دو طرف این معادله دارای واحد شار هستند.

۶.۶ (الف) برای هر یک از جریانها داریم

$$m \left( \frac{\partial \mathbf{v}_\lambda}{\partial t} + \mathbf{v}_o \cdot \nabla \mathbf{v}_\lambda \right) = -e \mathbf{E}_\lambda = (-i\omega + ikv_o) \mathbf{v}_\lambda$$

$$\mathbf{v}_\lambda = \frac{-ie \mathbf{E}_\lambda}{m(\omega - kv_o)}$$

$$\frac{\partial n_\lambda}{\partial t} + n_o (\nabla \cdot \mathbf{v}_\lambda) + (\mathbf{v}_o \cdot \nabla) n_\lambda = 0$$

$$(-i\omega + ikv_o) n_\lambda + ik n_o v_\lambda = 0 \quad n_\lambda = n_o \frac{kv_\lambda}{\omega - kv_o}$$

$$\therefore n_{\lambda j} = n_o j \frac{-ik E_{\lambda e}}{m(\omega - kv_{oj})^2}$$

پواسون:  $ikE_\lambda = (e/\epsilon_o)(n_{\lambda a} + n_{\lambda b})$  که در آن جریان  $a$  دارای  $v_{oa} = v_o \hat{x}$  و  $n_{oa} = \frac{1}{\gamma} n_o$  است؛ و جریان  $b$  دارای  $v_{ob} = -v_o \hat{x}$  و  $n_{ob} = \frac{1}{\gamma} n_o$  است. از این رو خواهیم داشت

$$ikE_\lambda = - \left( \frac{e}{\epsilon_o} \right) \left( \frac{-ikeE_\lambda}{m} \right) \left[ \frac{\frac{1}{\gamma} n_o}{(\omega - kv_o)^2} + \frac{\frac{1}{\gamma} n_o}{(\omega + kv_o)^2} \right]$$

$$1 = \frac{n_o e^2}{\epsilon_o m} \cdot \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{1}{(\omega - kv_o)^2} + \frac{1}{(\omega + kv_o)^2} \right]$$

$$1 = \frac{1}{\gamma} \omega_p^2 \left[ \frac{1}{(\omega - kv_o)^2} + \frac{1}{(\omega + kv_o)^2} \right]$$

(ب)

$$1 = \omega_p^2 \frac{\omega^2 + k^2 v_o^2}{(\omega^2 - k^2 v_o^2)^2}$$



$$\omega^2 - (\omega_p^2 + 2k^2 v_o^2) \omega^2 + k^2 v_o^2 (k^2 v_o^2 - \omega_p^2) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{1}{2} (\omega_p^2 + 2k^2 v_o^2) \pm \frac{1}{2} (\omega_p^4 + 4\omega_p^2 k^2 v_o^2)^{1/2}$$

فرض کنید

$$x = \frac{2k^2 v_o^2}{\omega_p^2} \quad y^2 = \frac{2\omega^2}{\omega_p^2}$$

بنابراین

$$y^2 = 1 + x \pm (1 + 4x)^{1/2}$$

$y$  تنها با علامت (-) می‌تواند مختلط باشد. در این مورد  $y$  موهومی محض می‌شود و می‌توان فرض کرد  $y = i\gamma$ :

$$\gamma^2 = (1 + 4x)^{1/2} - (1 + x)$$

$$\frac{d}{dx}(\gamma^2) = 2(1 + 4x)^{-1/2} - 1 = 0 \quad x = \frac{3}{4}$$

پس

$$\gamma^2 = (1 + 3)^{1/2} - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\gamma = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2} \operatorname{Im}(\omega)}{\omega_p} \operatorname{Im}(\omega) = \frac{\omega_p}{2\sqrt{2}}$$

۸.۶ (الف)

$$1 = \omega_p^2 \left[ \frac{1}{\omega^2} + \frac{\delta}{(\omega - ku)^2} \right]$$

که در آن  $\omega_p^2 \equiv n_o e^2 / \epsilon_o m$

(ب) این معادله درست مانند معادله ۳۰.۶ است بجز آن که  $m/M$  با  $\delta$  تعویض شده است، اما این کمیت نیز کوچک است، و همچنین چارچوب سکون به چارچوب متحرک با سرعت  $u$  تغییر یافته است. ماکسیمم آهنگ رشد به چارچوب بستگی ندارد، که این نکته را می‌توان از شکل ۱۱.۶ و با تصور آن که  $\gamma$  در راستای  $z$  برحسب  $x$  و  $y$  ترسیم شده است ملاحظه کرد؛ انتقال مبدأ  $x$

تأثیری بر قله منحنی ندارد. بنابراین، از مانستگی با معادله ۳۵.۶ داریم

$$\gamma_{\max} \approx \delta^{1/2} \omega_p$$

(مقدار دقیق ثابت که باید اینجا ظاهر می‌شد  $0.69 = 4/3 - 3^{1/2} 2^{-4/3}$  است. محاسبه  $\gamma_{\max}$  که به علت مکعبی بودن رابطه پاشیدگی مشکل است، و اثبات استقلال آن از چارچوب برای  $k$  حقیقی به صورت تمرین به‌عهده دانشجوی پیشرفته گذاشته می‌شود.)

۹.۶ (الف) از آنجا که تنها مؤلفه  $y$  از  $v_j$  و  $E$  دخیل هستند، رابطه داده‌شده را می‌توان به‌آسانی از معادلات ۹۸.۴ (ب) و ۲۳.۶ به‌اضافه معادله‌های پیوستگی و پواسون یافت. توجه کنید که  $\Omega_p$  با  $n_0$  تعریف شده است نه با  $(\frac{1}{\tau})n_0$ .

(ب) فرض کنید  $\alpha \equiv \frac{1}{\tau} \Omega_p^2 (1 + \omega_p^2 / \omega_c^2)^{-1}$  و  $\beta \equiv k^2 v_0^2$ . بنابراین، رابطه پاشیدگی به صورت زیر درمی‌آید

$$\omega^4 - 2(\alpha + \beta)\omega^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 0$$

پاشیدگی  $\omega(k)$  با رابطه زیر داده می‌شود

$$\omega^2 = \alpha + \beta \pm (\alpha^2 + 4\alpha\beta)^{1/2}$$

ناپایداری به شرطی رخ خواهد داد که  $\alpha + \beta > (\alpha^2 + 4\alpha\beta)^{1/2}$  یا  $\beta < 2\alpha$ ، یعنی

$$k^2 < (\Omega_p^2 / v_0^2) (1 + \omega_p^2 / \omega_c^2)^{-1}$$

هرگاه این رابطه برقرار باشد، آهنگ رشد به صورت زیر خواهد بود

$$\gamma = [(\alpha^2 + 4\alpha\beta)^{1/2} - (\alpha + \beta)]^{1/2}$$

۳.۷ (الف)

$$f_p(v) = \frac{n_p}{a\pi^{1/2}} e^{-v^2/a^2}$$

$$f_b(v) = \frac{n_b}{b\pi^{1/2}} e^{-(v-V)^2/b^2}$$

(ب)

$$f'_b(v) = \frac{n_b}{b\pi^{1/2}} \frac{-\gamma(v-V)}{b^2} e^{-(v-V)^2/b^2}$$

$$f''_b(v) = \frac{-\gamma n_b}{b^2 \pi^{1/2}} \left[ 1 - \frac{\gamma(v-V)^2}{b^2} \right] e^{-(v-V)^2/b^2} = 0$$

$$v - V = \pm b/\sqrt{\gamma} \quad v_\phi = V - b/\sqrt{\gamma}$$

$$f'_b(v_\phi) = \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{1/2} \frac{n_b}{b^2} e^{-1/2}$$

(ج)

$$f'_p(v_\phi) = \frac{n_p}{a\pi^{1/2}} \left(\frac{-\gamma}{a^2}\right) \left(V - \frac{b}{\gamma^{1/2}}\right) e^{-(V-b/\sqrt{\gamma})^2/a^2}$$

$$\approx -\frac{\gamma n_p V}{a^2 \pi^{1/2}} e^{-V^2/a^2} \quad V \gg b$$

(د)

$$\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{1/2} \frac{n_b}{b^2} e^{-1/2} = \frac{\gamma n_p V}{a^2 \pi^{1/2}} e^{-V^2/a^2}$$

$$\frac{n_b}{n_p} = (\gamma e)^{1/2} \frac{b^2}{a^2} V e^{-V^2/a^2} \quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{T_b}{T_p}$$

$$\therefore \frac{n_b}{n} = (\gamma e^{1/2}) \frac{T_b}{T_p} \frac{V}{a} e^{-V^2/a^2}$$

۸.۷ از معادله ۱۲۷.۷ به دست می آوریم  $\sum \alpha_j Z'(\zeta_j) = \gamma T_i/T_e$  که در آن  $n_{o_j}/n_{o_e}$   $\alpha_j = \omega/kv_{thj}$  و ابتدا فرض کنید  $\alpha_H$  کوچک باشد، و از این رو  $\alpha_H \approx 1$ ؛  $\alpha_H = \alpha$ ،  $\alpha_A \approx 1$  به علاوه  $\alpha$  کوچک به معنای آن است که  $v_\phi$  از  $v_s$  آرگون تقریباً بدون تغییر خواهد ماند. بنابراین، دو برابر کردن آهنگ میرایی لاندائو به معنای  $\text{Im } Z'(\zeta_H) = \text{Im } Z'(\zeta_A)$  است که در آن  $\text{Im } Z'(\zeta_j) = -\gamma i \sqrt{\pi} \zeta_j e^{-\zeta_j^2}$  از این رو خواهیم داشت

$$\zeta_A e^{-\zeta_A^2} = \alpha \zeta_H e^{-\zeta_H^2} \quad \alpha = \frac{\zeta_A}{\zeta_H} e^{-(\zeta_A^2 - \zeta_H^2)}$$

$$\frac{\zeta_A}{\zeta_H} = \left( \frac{M_A}{M_H} \right)^{1/2} \quad \alpha = (40)^{1/2} e^{-\zeta_A^2(1-1/40)}$$

$$\zeta_A^2 = \frac{KT_e + 3KT_i}{M_A} \cdot \frac{M_A}{2KT_i} = \frac{13}{2}$$

$$a = \sqrt{40} e^{-6.5(0.175)} = 1.12 \times 10^{-2} \approx 1\%$$

بنابراین،  $\alpha$  آنقدر کوچک است که فرضهای اولیه ما را توجیه می‌کند.

۹.۷ (الف)

$$\frac{2k^2}{k_{Di}^2} = Z'(\zeta_i) + \frac{1-\alpha}{\theta_e} Z'(\zeta_e) + \frac{\alpha}{\theta_h} Z'(\zeta_h)$$

(ب)

$$Z'(\zeta) \approx -2 - 2i\sqrt{\pi}\zeta e^{-\zeta^2}$$

از آنجا که  $1 \ll \zeta_e \ll \zeta_h$ ، داریم

$$|\text{Im } Z'(\zeta_h)| \ll |\text{Im } Z'(\zeta_e)|$$

(ج) چون  $-2 \approx Z'(\zeta_e) \approx Z'(\zeta_h)$ ، اگر  $\theta_h \gg \theta_e$  و  $\alpha < 1/2$  جمله  $\zeta_h$  در (الف) در مقایسه با  $\zeta_e$  کوچک است. اکنون رابطه پاشیدگی به صورت زیر است

$$Z'(\zeta_i) = \frac{2k^2}{k_{Di}^2} + \frac{2(1-\alpha)}{\theta_e} = \frac{2T_i}{T_e} \left( 1 - \alpha + \frac{T_e k^2}{T_i k_{Di}^2} \right)$$

جمله آخر تقریباً برابر با  $k^2 \lambda_D^2$  است و هرگاه شبه خنثی بودن برقرار باشد قابل چشمپوشی است. بنابراین، رابطه پاشیدگی موج یونی مثل همیشه است بجز آن که  $T_i/T_e$  با  $(1-\alpha)T_i/T_e$  تعویض شده است. از آنجا که  $T_i/T_e$  کوچک به معنای میرایی لاندائوی کمتر است، الکترونها داغ موجب کاهش میرایی لاندائوی یونی شده‌اند.

۳.۸ شکل ۴.۸ را در نظر بگیرید. تعدادی یون با  $v = u_0$  در نظر می‌گیریم و آنها را به دو گروه با  $v = u_0 + \Delta$  و  $v = u_0 - \Delta$  تقسیم می‌کنیم. پس از شتاب‌گیری در پتانسیل  $\phi$ ، یونها تندتر دریافت انرژی نسبی کمتری خواهند داشت (زیرا با انرژی بیشتری شروع کرده‌اند) و در نتیجه

کاهش چگالی نسبی کمتری خواهند داشت. عکس این امر برای یونهای کندتر صادق است، و کاهش چگالی کل در مرتبه اول همان است که اگر همه یونها سرعت  $v = u_0$  می‌داشتند. اما یک اثر مرتبه دوم وجود دارد که موجب برتری گروه یونهای کندتر می‌شود. برای اثبات این موضوع، می‌توان  $\Delta$  را آنقدر بزرگ گرفت که برای نیمه کندتر  $v \approx 0$ ، و از این رو روشن است که باید کاهش چگالی خیلی بزرگی را متحمل شوند. برای جبران این کاهش، باید  $u_0$  به مقداری بیش از مقدار بوهام افزایش یابد.

۴.۸ ماکسیمم جریان هنگامی روی می‌دهد که بار فضای مربوط به یونهای واشتابیده نزدیک شبکه باعث شود میدان الکتریکی به صفر کاهش یابد. بنابراین، می‌توانیم قانون چایلند-لانگمویر را برای ناحیه بین شبکه‌های ۲ و ۳ به کار ببریم.

$$J = \frac{4}{9} \left[ \frac{(2)(1.6 \times 10^{-19})}{(4)(1.67 \times 10^{-27})} \right]^{1/2} \frac{(1.85 \times 10^{-12})(100)^{3/2}}{(10^{-2})^2} = 27.2 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

$$A = \frac{\pi}{4} (4 \times 10^{-2})^2 = 1.26 \times 10^{-5} \text{m}^2$$

$$I = JA = \underline{0.34 \text{mA}}$$

۶.۸ الف) در  $\omega = \omega_p$  داریم

$$F_{NL} = -\frac{\epsilon_0 \langle E^2 \rangle}{2L} = -\nabla p_{\text{eff}} = \frac{p_{\text{eff}}}{L}$$

بنابراین،  $p_{\text{eff}} = \frac{1}{4} \epsilon_0 \langle E^2 \rangle$ ، اما  $I_0 = c \epsilon_0 \langle E^2 \rangle = P/A$  که در آن  $P = 10^{12}$  و

$$A = (\pi/4)(50 \times 10^{-6})^2 = 1.96 \times 10^{-9} \text{m}^2$$

$$p_{\text{eff}} = \frac{P}{2cA} = \frac{10^{12}}{(2)(3 \times 10^8)(1.96 \times 10^{-9})} = 8.50 \times 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$= \frac{(8.50 \times 10^{11})(0.2248)}{(39.37)^2} = 1.23 \times 10^8 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2}$$

(ب)

$$F = pA \quad P/2c = 10^{12}/(2)(3 \times 10^8) = 1667 \text{N}$$

$$F = Mg \quad M = F/g = 1667/9.8 = 170 \text{kg} = 0.17 \text{tonnes}$$

(ج)

$$\Upsilon nKT = p_{\text{eff}}$$

$$\therefore n = \frac{\lambda_j \Delta \times 10^{11}}{(\Upsilon)(10^2)(1_j \epsilon \times 10^{-14})} = 2_j 66 \times 10^{27} \text{m}^{-3}$$

۷.۸

$$F_{\text{NL}} = \nabla p \therefore \frac{\partial}{\partial r}(nKT) = -\frac{n}{n_c} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\epsilon_0 \langle E^2 \rangle}{\Upsilon} \right)$$

$$\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} - \frac{\epsilon_0}{\Upsilon n_c KT} \frac{\partial}{\partial r} \langle E^2 \rangle \quad \ln n = -\frac{\epsilon_0 \langle E^2 \rangle}{\Upsilon n_c KT} + \ln n_0$$

$$n = n_0 e^{-\epsilon_0 \langle E^2 \rangle / \Upsilon n_c KT}$$

در  $r = 0$  داریم

$$n_{\text{min}} = n_0 e^{-\epsilon_0 \langle E^2 \rangle_{\text{max}} / \Upsilon n_c KT} = n_0 e^{-\alpha}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\epsilon_0 \langle E^2 \rangle_{\text{max}}}{\Upsilon n_c KT}$$

۹.۸

$$k_0 = 2\pi/\lambda_0 = 2\pi/1_j 06 \times 10^{-6} = 5_j 93 \times 10^8 \text{m}^{-1}$$

$$k_i \approx 2k_0 = 1_j 19 \times 10^9 \text{m}^{-1}$$

$$v_s = \left( \frac{KT_e + \Upsilon KT_i}{M} \right)^{1/2} = \left[ \frac{(10^2)(1_j 6 \times 10^{-14})}{(\Upsilon)(1_j 67 \times 10^{-27})} \right]^{1/2} \left( 1 + \frac{\Upsilon}{\theta} \right)^{1/2}$$

$$\omega_i = \Delta\omega = k_i v_s = (1_j 19 \times 10^9)(2_j 19 \times 10^5) \left( 1 + \frac{\Upsilon}{\theta} \right)^{1/2}$$

$$= 2_j 61 \times 10^{14} \left( 1 + \frac{\Upsilon}{\theta} \right)^{1/2}$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \therefore \Delta\omega = -\frac{\omega_0}{\lambda_0} \Delta\lambda = -\frac{2\pi c}{\lambda_0^2} \Delta\lambda$$

$$= -\frac{(2\pi)(3 \times 10^4)}{(1.06 \times 10^{-6})^2} (2.19 \times 10^{-10})$$

$$= 3.67 \times 10^{12}$$

$$1 + \frac{\theta}{\theta} = \left( \frac{3.67 \times 10^{12}}{2.61 \times 10^{12}} \right)^2 = 2 \quad \theta = \frac{T_e}{T_i} = 3 \therefore T_i = \frac{1}{3} \text{keV}$$

۱۰.۸ (الف)

$$\langle E_o^r \rangle = \frac{1}{r} \bar{E}^r = \frac{\lambda \omega_1 \omega_r \Gamma_1 \Gamma_r}{c_1 c_r}$$

$$c_1 c_r = \frac{\epsilon_0 k_1^r \omega_p^r}{n_0 \omega_o^r M} \quad \Gamma_r = \frac{\omega_p^r \nu}{\omega_1^r r}$$

$$\langle E_o^r \rangle = \frac{r \omega_1 \Gamma_1 \omega_o^r \nu}{\omega_r k_1^r} \frac{n_0 M}{\epsilon_0 \omega_p^r} = \frac{r \omega_1 \Gamma_1 \omega_o^r \nu M m}{\omega_r k_1^r e^r}$$

$$\langle v_o^r \rangle = \frac{e^r \langle E_o^r \rangle}{m^r \omega_o^r} = \frac{r \omega_1 \Gamma_1 \nu M}{\omega_r k_1^r m}$$

$$k_1^r = \frac{\omega_1^r}{v_s^r} = \frac{\omega_1^r M}{KT_e} = \frac{\omega_1^r v_e^r M}{m} \therefore \frac{\langle v_o^r \rangle}{v_e^r} = \frac{r \Gamma_1 \nu}{\omega_1 \omega_r}$$

(ب)

$$\frac{\langle v_o^r \rangle}{v_e^r} = \frac{r \Gamma_1 \nu_{ei}}{\omega_1 \omega_o}$$

زیرا  $\omega_r \approx \omega_o$  هرگاه  $n \ll n_c$

$$\omega_o = \frac{2\pi c}{\lambda_o} = \frac{(2\pi)(3 \times 10^8)}{1.06 \times 10^{-6}} = 1.78 \times 10^{14} \text{sec}^{-1}$$

$$v_e^r = \frac{KT_e}{m} = \frac{(10^3)(1.36 \times 10^{-14})}{(9.1 \times 10^{-31})} = 1.49 \times 10^{12} \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$

$$\frac{\Gamma_1}{\omega_1} = \left( \frac{\pi}{\lambda} \right)^{1/2} \theta (3 + \theta)^{1/2} e^{-(3+\theta)/2} \quad \theta = \frac{T_e}{T_i} = 10$$

$$= ۳,۴۰ \times ۱۰^{-۲}$$

$$\eta = ۵,۲ \times ۱۰^{-۵} \frac{\ln \Lambda}{T_{eV}^{3/2}} = \frac{(۵,۲ \times ۱۰^{-۵})(۱۰)}{(۱۰۰)^{3/2}} = ۵,۲ \times ۱۰^{-۷} \Omega m$$

$$v_{ei} = \frac{ne^r \eta}{m} = \frac{(۱۰^{۲۳})(۱,۶ \times ۱۰^{-۱۱})^2 (۵,۲ \times ۱۰^{-۷})}{(۰,۹۱ \times ۱۰^{-۳۰})} = ۱,۴۶ \times ۱۰^۴ \text{ sec}^{-1}$$

$$\langle v_o^r \rangle = \frac{(۴)(۳,۴ \times ۱۰^{-۲})(۱,۴۶ \times ۱۰^۴)}{۱,۷۸ \times ۱۰^{۱۴}} (۱,۷۶ \times ۱۰^{۱۲}) = ۱,۹۶ \times ۱۰^۷ \frac{m^r}{\text{sec}^r}$$

از مسئله ۶.۸ الف):

$$I_o = c \epsilon_o \langle E^r \rangle = c \epsilon_o \frac{m^r \omega_o^r}{e^r} \langle v_o^r \rangle$$

$$I_o = (۳ \times ۱۰^۸)(۸,۸۵۴ \times ۱۰^{-۱۲}) \frac{(۰,۹۱ \times ۱۰^{-۳۰})^2 (۱,۷۸ \times ۱۰^{۱۲})^2 (۱,۹۶ \times ۱۰^۷)}{(۱,۶ \times ۱۰^{-۱۱})^2}$$

$$= ۵,۳۴ \times ۱۰^{۱۰} \frac{W}{m^r} = ۵,۳۴ \times ۱۰^۶ \frac{W}{\text{cm}^r}$$

$$(\omega_s^r + 2i\gamma\omega_s - \omega_o^r)[(\omega_s + i\gamma - \omega_o)^r - \omega_o^r] = \frac{1}{2} c_1 c_r \bar{E}_o^r \quad ۱۱.۸$$

اگر  $\omega_s^r = \omega_o^r$ ،  $(\omega_s - \omega_o)^r = \omega_o^r$  و  $\gamma/\omega_s \ll ۱$  داریم

$$(2i\gamma\omega_s)[2i\gamma(\omega_s - \omega_o)] = \frac{1}{2} c_1 c_r \bar{E}_o^r = ۴\gamma^r \omega_s \omega_r$$

از مسئله ۱۰.۸

$$c_1 c_r = \frac{\epsilon_o k_p^r \omega_p^r}{n_o \omega_o^r M} = \frac{k_p^r \omega_p^r e^r}{\omega_o^r m M}$$

$$\gamma^r = \frac{k_p^r \omega_p^r e^r \bar{E}_o^r}{16 \omega_s \omega_r \omega_o^r m M} = \frac{k_p^r \omega_p^r \bar{v}_o^r m}{16 \omega_s \omega_r M} \approx \frac{(2k_o)^r \Omega_p^r \bar{v}_o^r}{16 \omega_o \omega_s}$$

$$= \frac{\omega_o^r \Omega_p^r \bar{v}_o^r}{4 c^r \omega_o \omega_s} \therefore \gamma = \frac{\bar{v}_o}{2} \left( \frac{\omega_o}{\omega_s} \right)^{1/2} \Omega_p$$



$$Mn_0 \frac{\partial v}{\partial t} = en_0 E - \gamma_i K T_i \nabla n - M n_0 \nu v + F_{NL}$$

$$Mn_0 (-i\omega + \nu)v = en_0 (-ik\phi) - \gamma_i K T_i i k n_1 + F_{NL}$$

که با  $e\phi/KT_e = n_1/n_0$  درمی‌آید

$$(\omega + i\nu)v = kv_s^2 \frac{n_1}{n_0} + \frac{iF_{NL}}{Mn_0}$$

بیوستگی:

$$-i\omega n_1 + i k n_0 v = -i\omega n_1 + i k n_0 (\omega + i\nu)^{-1} \left[ kv_s^2 \frac{n_1}{n_0} + \frac{iF_{NL}}{Mn_0} \right] = 0$$

$$(\omega^2 + i\nu\omega - k^2 v_s^2) n_1 = ikF_{NL}/M$$

هرگاه  $F_{NL} = 0$  داریم

$$\omega^2 \left( 1 + i\frac{\nu}{\omega} \right) = k^2 v_s^2 \therefore \omega \approx kv_s \left( 1 - \frac{1}{2} i\frac{\nu}{\omega} \right) = kv_s - \frac{i}{2} \nu$$

در نتیجه  $-\text{Im } \omega \equiv \Gamma = \nu/2$ . بنابراین  $(\omega^2 + 2i\Gamma\omega - k^2 v_s^2) n_1 = ikF_{NL}/M$  (ب)

$$F_{NL} = -\frac{\omega_p^2}{\omega_0 \omega_T} \nabla \epsilon_0 \langle E_0 E_T \rangle = -\frac{\omega_p^2}{\omega_0 \omega_T} ik \epsilon_0 \langle E_0 E_T \rangle$$

از این رو

$$c_1 = \frac{ikF_{NL}}{M} \frac{1}{\langle E_0 E_T \rangle} = \frac{ik}{M} \left( \frac{-\omega_p^2}{\omega_0 \omega_T} ik \epsilon_0 \right) = \frac{\omega_p^2}{\omega_0 \omega_T} \frac{k^2 \epsilon_0}{M}$$

۱۴.۸ نوار جانبی بالایی دارای  $\hbar\omega_T = \hbar\omega_0 + \hbar\omega_1$  است، و در نتیجه فوتون خروجی انرژی بیشتری نسبت به فوتون اولیه  $\hbar\omega_0$  دارد. باید انتظار داشت نوار جانبی پایینی از نظر انرژی مناسب‌تر باشد زیرا یک واکنش گرمای با  $\hbar\omega_0 = \hbar\omega_0 - \hbar\omega_1$  است.

$$U(\xi - c\tau) = \frac{1}{2} c \text{sech}^2 \left[ (c/2)^{1/2} (\xi - c\tau) \right] \quad ۱۸.۸$$

$$\delta = \mathcal{M} - 1, t' = \Omega_p t, x' = x/\lambda_D, \tau = \delta^{1/2} t'$$

$$\zeta = \xi - ct = \delta^{1/2} \left( \frac{x - v_s t}{\lambda_D} - \delta c \frac{v_s}{\lambda_D} t \right)$$

از آنجا که  $\lambda_D \Omega_p = v_s$

$$\zeta = \frac{\delta^{1/2}}{\lambda_D} [x - (1 + \delta c) v_s t]$$

سولیتون در  $\zeta = 0$  دارای قله است. سرعت قله برابر است با  $dx/dt = (1 + \delta c) v_s$ . بنابه تعریف،

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{M} v_s = (1 + \delta) v_s$$

$$\therefore c = 1 \quad \therefore U_{\max} = 3c = 3$$

از معادله ۱۱.۸ داریم

$$x_{\max} \equiv \frac{e \phi_{\max}}{K T_e} \approx \delta x_{1\max} = \delta U_{\max}$$

$$\therefore \delta = \frac{e}{K T_e} \frac{\phi_{\max}}{U_{\max}} = \frac{12}{10} \frac{1}{3} = 0.4$$

$$v_\phi = (1 + \delta) v_s = 1.4 v_s$$

$$v_s = \left( \frac{K T_e}{M} \right)^{1/2} = \left[ \frac{(10)(1.6 \times 10^{-11})}{1.67 \times 10^{-27}} \right] = 3.1 \times 10^4$$

$$v_\phi = \underline{4.33 \times 10^4 \text{ m/sec}}$$

در نیمه ماکسیمم داریم  $\text{sech}^2 a = 1/2$ ، و از این رو  $\sqrt{1/2} \zeta = a = 0.8814$ ، به طوری که مثلاً در  $t = 0$  خواهیم داشت  $\zeta = 1.25 = \delta^{1/2} x / \lambda_D$ .

$$\delta^{1/2} = \sqrt{0.4} = 0.632$$

$$\lambda_D = \left( \frac{\epsilon_0 K T_e}{n_0 e^2} \right)^{1/2} = 2.35 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.235 \text{ mm}$$

$$x = \frac{1.25 \lambda_D}{0.632} = 0.46 \text{ mm} \quad \text{FWHM} = 2x = \underline{0.93 \text{ mm}}$$

$$|u| = \sqrt[4]{A} |\operatorname{sech} x| \therefore |u|^2 = \sqrt[2]{A} |\operatorname{sech} x|^2$$

$$\delta n = \frac{1}{\sqrt[4]{A}} |u|^2 \left( \frac{V^2}{\epsilon^2} - 1 \right)^{-1} \approx -\frac{1}{\sqrt[4]{A}} |u|^2 = -\sqrt[4]{A} |\operatorname{sech} x|^2$$

$$\overline{\delta n} = -\sqrt[4]{A} |\overline{\operatorname{sech} x}|^2 \approx -2A$$

$$\frac{\delta \omega_p}{\omega_p} = \frac{1}{2} \frac{\delta n}{n} = -\frac{1}{2} (2A) = -A$$

بنابراین،  $A$  بسامد انتقال یافته ناشی از  $\delta n$  است.

۲۲.۸ برحسب واحدهای حقیقی داریم

$$u = \frac{v}{v_e} = \sqrt[4]{A} \operatorname{sech} \left[ \left( \frac{2A}{3} \right)^{1/2} \left( \frac{x}{\lambda_D} - \frac{V}{v_e} \omega_p t \right) \right]$$

$$\exp \left\{ -i \left[ \left( \frac{\omega_0}{\omega_p} + \frac{1}{6} \frac{V^2}{v_e} - A \right) \omega_p t - \frac{V}{3v_e} \frac{x}{\lambda_D} \right] \right\}$$

$$v_e = \left( \frac{KT_e}{m} \right)^{1/2} = 5.93 \times 10^5 \text{ m/sec} \quad \omega_p = \left( \frac{ne^2}{\epsilon_0 m} \right)^{1/2}$$

$$= 1.78 \times 10^{11} \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$\lambda_D = \frac{v_e}{\omega_p} = 3.33 \times 10^{-7} \text{ m} \quad k = \frac{(k\lambda_D)}{\lambda_D} = \frac{0.3}{\lambda_D} = 9.02 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

$$u_{p-p} = \sqrt[4]{A} \quad -i\omega m v = -eE = -e(-ik\phi) \therefore \phi = -\frac{m\omega v}{ek}$$

$$\phi_{p-p} \approx \frac{m\omega}{ek} \sqrt[4]{A} v_e \quad \omega \approx (\omega_p^2 + 3k^2 v_e^2)^{1/2} = 2.01 \times 10^{11}$$

$$A^{1/2} = \frac{ke\phi_{p-p}}{2m\omega v_e} = \frac{k}{2\omega} \frac{e\phi_{p-p}}{KT_e} \frac{KT_e}{m} \frac{1}{v_e} = \frac{kv_e}{2\omega} \frac{e\phi_{p-p}}{KT_e}$$

$$= \frac{kv_e}{2\omega} \frac{3.2}{2} = 0.106$$

$$A = 1.13 \times 10^{-2}$$

(الف)

$$\operatorname{sech} X = \frac{1}{2} \quad X = 1,315 = \left(\frac{2A}{3}\right)^{1/2} \frac{x}{\lambda_D}$$

$$x = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \frac{(1,315)(3,33 \times 10^{-2})}{0,106} = 5,04 \times 10^{-2}$$

$$\text{FWHM} = 2x = 1,01 \times 10^{-2} = 1,01 \text{ mm}$$

(ب)

$$N = \frac{1,01 \times 10^{-2}}{2\pi/k} = 1,45$$

(ج)

$$\delta\omega = A\omega_p = (1,13 \times 10^{-2})(1,78 \times 10^9) = 2 \times 10^7 \text{ rad/sec}$$

$$\delta f = \delta\omega/2\pi = 3,2 \times 10^6 = 3,2 \text{ MHz}$$

٢٣.٨

$$3v_e^2 = \frac{(3)(3)(1,6 \times 10^{-19})}{0,91 \times 10^{-30}} = 1,58 \times 10^{12} \text{ m}^2/\text{sec}^2$$

$$\omega_p^2(\text{خارج}) = \frac{(1,016)(1,6 \times 10^{-19})^2}{(1,7824 \times 10^{-12})(0,91 \times 10^{-30})} = 3,18 \times 10^{14} \text{ rad}^2/\text{sec}^2$$

$$\omega_p^2(\text{داخل}) = 0,4\omega_p^2(\text{خارج})$$

$$\begin{aligned} k_{\max}^2 &= \frac{\omega_p^2(\text{خارج}) - \omega_p^2(\text{داخل})}{3v_e^2} = \frac{3,18 \times 10^{14}}{1,58 \times 10^{12}} (1 - 0,4) \\ &= 1,21 \times 10^2 \text{ m}^{-2} \end{aligned}$$

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi}{k_{\max}} = 1,81 \times 10^{-2} \text{ m} = \underline{1,81 \text{ mm}}$$

## نمایه

- آرسایبو ۳۴۰  
آزمایش لنت-هو ۱۸۲  
آزمایش لونی-براون ۹۷  
آزمایش مالبرگ-وارتون ۲۷۶  
آینه مغناطیسی ۲۱۳، ۳۷  
اثر شبه خطی ۳۰۲  
اثر شعاع منتهای لامور ۴۶  
ارتباطات رادیویی ۱۲۷  
استخر پلاسما ۱۵۵  
استلاریتور ۲۰۱  
الکترون ولت ۱۳، ۳۷۰  
الکترونهای به دام افتاده ۲۴۷  
امواج R ۱۳۷  
امواج الکترومغناطیسی ۱۲۰  
امواج الکترونی پلاسما ۹۵  
امواج برنشتاین ۲۹۳  
الکترونی ۲۹۵  
خنتی شده ۲۹۸  
یونی ۲۹۷  
امواج بنیادی پلاسما، خلاصه ۱۵۲، ۱۵۴  
امواج بوهم-گراس ۹۶  
امواج پلاسما-الکترون  
رابطه پاشندگی جنبشی ۲۸۸-۲۹۰  
غیرخطی ۳۵۴  
امواج در پلاسما یکنواخت سرد ۳۷۴  
امواج سوقی مقاومتی ۲۳۰، ۲۳۳  
امواج سیکلوترونی یونی الکتروستاتیک ۱۱۸،  
۱۵۶  
امواج شوکی ۳۱۲  
امواج صوتی ۱۰۱  
امواج لانگمویر ۱۰۱  
امواج مغناطوسوتی ۱۴۹  
امواج هیدرومغناطیسی ۱۴۳  
امواج یونی ۱۰۲  
رابطه پاشیدگی جنبشی ۲۸۴  
غیرخطی ۳۴۸

- باد خورشیدی ۲۱، ۷  
 باز ترکیب  
 تابشی ۱۷۵  
 سه‌جسمی ۱۷۵  
 بازگشت سفینه فضایی ۱۲۸  
 بتا ۲۱۳  
 برخورد کولن ۱۸۷  
 برخوردهای  
 ذرات غیرهمنام ۱۸۵  
 ذرات همنام ۱۸۵  
 کولنی ۱۸۷  
 برهمکنشهای موج-ذره ۳۰۲  
 برهمکنشهای موج-موج ۳۰۳  
 بسامد آمیخته بالا ۱۱۱  
 بسامد برخورد  
 الکترون-الکترون ۳۷۱  
 الکترون-یون ۳۷۱، ۱۸۸  
 یون-یون ۳۷۱  
 بسامد پلاسما ۳۷۵، ۳۷۰، ۹۲، ۹۰  
 بسامد تشدید ۳۸۰  
 بسامد سیکلوترون ۳۷۵، ۲۶  
 الکترون ۳۷۰، ۹۳  
 بسامد غیرخطی ۳۵۵  
 بسامد قطع ۱۳۴  
 بسامد واجهش ۳۴۶  
 پادماده ۱۲۸  
 پارادوکس لانگمویر ۷۳  
 پارامتر برخورد ۱۸۸  
 پارامتر پلاسما ۱۸  
 پاشیدگی گروه ۳۵۵  
 پتانسیل ساگدیف ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۵  
 پخش ۱۹۶، ۱۶۷، ۱۸۰  
 بوهم ۲۰۰  
 درعرض ۱۷۶  
 غیرعادی ۱۸۳  
 میدان مغناطیسی ۲۱۵  
 نوکلاسیک ۲۰۴  
 همدوقطبی ۱۹۷  
 پذیرفتاری مغناطیسی ۶۳  
 پراکندگی بریلوفن القایی ۳۲۹، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۴۱  
 پراکندگی رامان القایی ۳۲۹، ۳۳۱  
 یژواکهای پلاسما ۳۴۱  
 پس پراکندگی پارامتری ۳۲۹  
 پلاسما با  $\beta$  بزرگ ۲۱۴  
 پلاسماهای یونیده شده جزئی ۱۶۳  
 پلاسمای لانگمویر  
 چگالی انرژی ۱۵۶  
 پیشرانش یونی ۲۲  
 پیش غلاف ۳۱۰  
 تابع  $Z$  ۲۸۲  
 تابع بسل ۱۷۲، ۲۸۹  
 تابع پاشندگی پلاسما ۲۸۱  
 تابع یونش ۱۷۳  
 تانسور تنش ۶۹، ۲۵۱، ۶۹، ۷۱  
 تانسور چسبیدگی ۱۸۷  
 تانسور دی‌الکتریک ۳۷۴  
 جنبشی ۲۹۱  
 تبدیل انرژی مغناطوهیدرودینامیکی ۲۲  
 تپ‌اختر ۲۲، ۱۵۶  
 تتا-تنگش ( $\theta$  تنگش) ۲۰۶  
 تحرک عرضی ۱۶۶، ۱۹۷  
 تحلیلگر سرعت ۳۱۲  
 تخلیه‌های گازی ۲۰  
 تداخل سنج میکروموج ۱۲۴، ۱۲۸، ۱۴۳  
 تراکم بی‌دررو ۵۰، ۵۷  
 ترانزیستو اثر میدان ۲۴

حفاظ دبابی ۱۴	تشدید ۱۳۳
حلقه دیامغناطیسی ۲۱۸	تشدید قابل دسترسی ۴۲۶
خطوط نیرو ۳۳	تعادل ۲۱۰
انجماد پلاسما ۱۴۷	تعریف پلاسما ۹
خمیدگی ۳۶	تعریف عمود ۱۰۹
خودکانونی ۳۲۴، ۳۲۳	تعریف موازی ۱۰۹
دام اندازی ۳۰۲	تغییر نمایه ۳۶۲
در عامل $\ln A$ ۱۸۹	تقریب پلاسمایی ۱۰۵، ۸۴
دستگاه گاوسی ۳۶۸	نلاطم ۳۰۳، ۳۰۲
دما ۱۰	توزیع غیرماکسولی ۲۳۸
دمای پلاسما ۱۳	توزیع ماکسول ۱۰، ۲۳۹، ۲۴۱
دیش مغناطیسی ۵۲، ۵۶	توزیع مخروط اتلافی ۲۴۴
دیامغناطیسی ۲۷	توصیف یون سپهر ۳۳۹
ذرات تشدیدی ۲۷۳	ثابت بولتزمن ۱۰، ۳۷۰
رابطه اینشتین ۱۶۶	ثابت دی الکتریک ۹۵، ۱۴۵
رابطه بولتزمن ۸۳	کم بسامد ۶۵
رابطه پاشندگی اپلتون-هارتری ۱۵۸	نابتهای فیزیکی ۳۷۰
رابطه پاشندگی پلاسمای سرد ۳۷۹	جدولهای فراید وکنته ۲۸۲
رادپوتلسکوپ ۳۳۹	جرم مؤثر ۲۳
رفتار جمعی ۱۸	جریان بوهم ۳۱۱
روابط برداری ۳۶۸	جریان دیامغناطیس ۲۱۱، ۷۹
ستارگان نوترونی ۲۰	جریان قطبش ۴۷
سحابی خرچنگ (سحابی سرطان) ۲۲، ۲۱۵	جریان هال ۱۹۵
سرعت آلفون ۱۴۶، ۳۷۱	جریانهای سرگردان ۳۰۳
سرعت امواج یونی ۱۰۴، ۱۰۵	جمله برخورد کروک ۲۴۶
سرعت فاز ۸۷	جورسازی k ۳۲۸
سرعت گرمایی الکترون ۳۷۱	جورشستگی بسامد ۳۲۶
سرعت گروه ۸۸، ۱۴۲	چرخش فاراده ۱۴۰، ۱۴۲، ۱۴۳
سرعت لرزش ۳۷۱	چسبندگی ۷۲، ۷۳
سرعت میانگین، ماکسولی ۲۳۹	بی برخورد ۷۲
سطح مقطع	مغناطیسی ۷۲، ۷۳
اتم H ۳۷۰	چگالی بحرانی ۱۲۷
انتقال تکانه ۲۰۶	حرکت ذرات ۲۴۷، ۲۴۸

- تعریف ۱۶۴  
 سطح مقطع برخورد نوترون-الکترون ۲۰۶  
 سطوح ثابت ۲۱۲  
 سلول همرفتی ۲۰۲  
 سوق  $E \times B$ ، ۲۹، ۷۷، ۳۷۱  
 سوق دیامغناطیسی ۳۷۱، ۷۷  
 سوق قطبش ۵۷، ۴۷  
 سوق گزادیان B، ۳۳، ۳۵، ۸۰  
 سوق گرانشی ۳۰  
 سوقهای مرکز راهنما ۵۰  
 سولیتون ۳۱۵، ۳۱۶، ۳۵۰، ۳۵۳  
 جفت شده ۳۶۲  
 سولیتون پوش ۳۴۸، ۳۵۶  
 سولیتون لانگمویر ۳۶۳  
 سیملوله خطی ۱۲۶  
 شبه خنثی بودن ۱۷  
 شتابگیری پرتوهای کیهانی ۴۳  
 شعاع لارمور ۲۷، ۳۷۰  
 شفق شمالی ۷  
 شکست موج ۳۰۲  
 شوک آکوستیکی یونی ۳۱۲  
 شوک کمانی زمین ۳۱۲  
 شیب دار کردن موج ۳۱۸  
 ضریب باز ترکیب ۱۷۶  
 ضریب پخش ۱۶۶  
 بوهم ۲۰۰  
 کلاسیک ۱۹۶  
 همدوقطبی ۱۶۸  
 طول دبای ۱۶، ۳۷۰  
 عدد آواگادرو ۳۸۸  
 عدد لوشمیت ۱۴  
 عدد ماخ ۳۱۴  
 عدسی پلاسمایی ۱۲۶
- عرضی ۱۰۹  
 عمق پوستی ۱۲۴  
 غلافها ۱۶، ۳۰۴  
 فرمولهای مفید ۳۷۰  
 فشار ۷۱  
 فشار میدان مغناطیسی ۲۱۴  
 فوق آلفونی ۱۶۰  
 فیزیک فضا ۲۱  
 قانون اهم تعمیم یافته ۱۹۵  
 قانون چابلد-لانگمویر ۳۰۸  
 قانون فیک ۱۶۷  
 قطبش ۱۳۷، ۱۴۱، ۳۸۰  
 قطبش امواج  $I, R$ ، ۱۴۲  
 قطع ۱۲۳، ۱۳۳، ۳۸۰، ۴۲۷  
 سمت چپ ۱۳۴  
 سمت راست ۱۳۴  
 قطع ارتباطات ۱۲۸  
 کاواکی ۳۴۸، ۳۶۳  
 کاوه لانگمویر ۳۱۱  
 کاوه‌های الکتروستاتیک ۳۱۰  
 کمربندهای تابشی وان آلن ۷، ۲۱، ۴۱  
 گازهای یونیده ضعیف ۱۶۳  
 گاما (γ) ۷۵  
 گامزنی کاتوره‌ای ۱۸۱  
 گذاخت لیزر ۳۴۰  
 گرمایش آمیخته پایین ۱۶۲  
 گرم کردن اهمی ۱۹۱، ۲۰۶  
 گریز الکترون ۱۹۱  
 گشتاور مغناطیسی ۳۸، ۳۹، ۶۳  
 لایه دوتایی ۳۱۹  
 لایه ربع بحرانی ۳۳۰  
 لیزر  
 CO<sub>2</sub> ۱۲۶



- معادله ولتسلف ۲۴۶  
 معیار غلاف بوهم ۳۰۷  
 مغناطیس سپهر ۲۱  
 مقاومت ۱۸۹، ۱۸۶  
 عمودی ۱۹۲  
 موازی ۱۹۲  
 مقاومت بی‌هنجار ۳۰۲  
 مقاومت ویژه اسپیتزر ۱۸۹، ۱۹۲  
 منحنیهای تریپولیس-گولد ۱۱۳، ۱۱۵  
 موج  $L$  ۱۳۷  
 موج آکوستیکی یونی ۱۰۲، ۲۸۰، ۳۴۰  
 موج آلفون ۱۴۳  
 برشی ۱۴۸  
 پیشی ۱۴۸  
 چگالی انرژی ۱۵۶  
 میرایی ۲۰۷  
 موج استیکس ۱۶۲  
 موج سوق ۸۸، ۲۳۰  
 موج سیکلوترونی یونی الکترومغناطیسی ۱۶۲  
 موج عادی ۱۲۹  
 میرایی ۱۵۷  
 موج غیرعادی ۱۳۰، ۱۳۵، ۱۶۱  
 موج مغناطیصوتی ۱۵۱  
 موج با انرژی منفی ۲۷۴  
 میدان مغناطیسی  
 پخش در پلاسما ۲۱۵  
 خودبه‌خود ۱۳۹  
 مانع از نفوذ ۲۱۵  
 میدان مغناطیسی زمین ۵۴  
 میرایی سیکلوترون ۲۹۱  
 میرایی لاتداو  
 الکترون ۲۵۲، ۲۵۹  
 غیرخطی ۲۶۱، ۳۴۵  
 فرسوخ دور ۲۳، ۱۵۶  
 گازی ۲۳  
 لیزر  $CO_2$  ۱۲۶  
 لیزرپتی HCN ۱۵۷  
 لیزریود ۳۴۰  
 ماشین DP ۳۱۹  
 ماشین Q ۷۸، ۱۰۷، ۱۱۸، ۱۹۹  
 مختصات استوانه‌ای ۳۷۲  
 مخروط اتلاف ۴۱  
 مد BGK ۲۷۵  
 مد سوت‌زن ۱۳۹، ۱۴۲  
 مدار موزی ۲۰۴  
 مدهای بالاتر پخش ۱۷۰  
 مدهای وان کمین ۲۷۵  
 مرکز راهنمایی ۲۷  
 مسافت آزاد ۱۶۵  
 الکترون-یون ۲۰۵، ۳۷۱  
 مشتق همرفتی ۶۶  
 معادلات سیال ۷۵  
 معادلات ماکسول ۶۱  
 معادلات مغناطوهیدرودینامیک (MHD) ۱۹۳  
 معادله بولتزمن ۲۴۴  
 معادله پخش ۱۹۷  
 معادله پواسون ۱۵  
 معادله پیوستگی ۷۴  
 معادله تک‌سیال ۱۹۳  
 معادله حالت ۷۴  
 معادله ساها ۷  
 معادله شارش گرما ۲۵۲  
 معادله شرودینگر غیرخطی ۳۵۴  
 معادله فوکر-پلانک ۲۴۶  
 معادله کورته‌وگ-دووری ۳۴۸  
 معادله ناویر-استوکس ۱۰۲

- یون ۲۸۰، ۲۸۵، ۲۸۶  
 میکروموج ۲۲۴  
 نابودی میدان مغناطیسی ۲۱۶  
 ناپایداری  
 انفجاری ۲۱۰  
 باریکه پلاسما ۲۲۵، ۲۷۹-۲۷۷  
 بونمان ۲۲۴  
 پس پراکندگی القایی بریلوئن ۳۲۹  
 دوچرانی ۲۲۱  
 زبلی-تیلور ۲۲۰، ۲۲۶  
 شیاری ۲۳۰  
 سوق ۲۳۰  
 کادامتسف و نئاسپاسف ۱۸۳  
 گرانشی ۲۲۶  
 مخروط اتلافی ۲۲۱  
 مدولاسیونی ۳۰۳، ۳۴۷، ۳۵۵، ۳۵۶  
 واپاشی الکترون ۳۲۹  
 ویبیل ۲۳۵  
 واپاشی پارامتری ۳۲۹، ۳۳۴، ۳۳۸  
 واپاشی دوپلاسونی ۳۲۹  
 هریس ۲۲۱  
 ناپایداری(های)  
 پارامتری ۳۲۵  
 جریان‌ی ۲۲۰
- جنشی ۲۲۰  
 جهانی ۲۲۰  
 ذرات در فضای سرعت ۲۲۱  
 طبقه‌بندی ۲۱۹  
 ناوردهای بی‌دررو ۵۱  
 ناوردایی بی‌دررو،  $\mu$  ۴۹، ۵۱  
 ناوردایی بی‌دررو،  $\Phi$  ۵۷  
 ناوردایی بی‌دررو، J ۵۳  
 نقطه برگشت ۵۳  
 نمودار CMA ۱۵۳  
 نمودار فضا سرعت ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۶۷  
 نمودار کلموف-مولالی-الیس (نمودار CMA)  
 ۱۵۳، ۳۸۰  
 نوسانگرهای جفت‌شده ۳۲۵  
 نوسانهای پلاسما ۱۰۱، ۲۵۲  
 نوسانهای پلاسما و میرایی ۲۵۲  
 نیروی محرکه وزنی ۳۲۱، ۳۲۳  
 واکنش D-T ۲۱  
 هاله خورشید ۲۱  
 هماهنگها ۳۰۳  
 هماهنگهای سیکلوترون ۲۸۸  
 همجوشی گرماسته‌ای ۲۰  
 یون‌سپهر ۲۱  
 یونهای منفی ۱۲۸، ۱۵۹