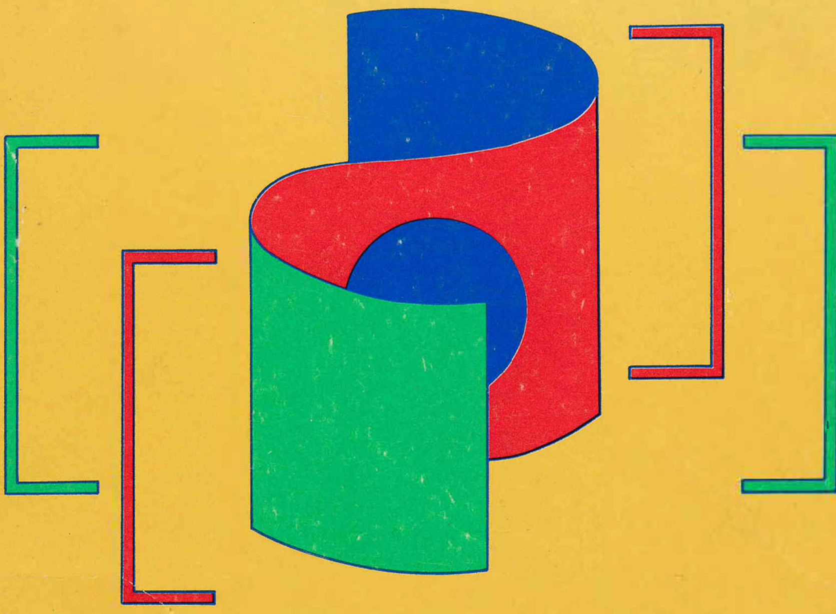
آشنایی با ماتریسها

مؤلف: سیدحسین سیدموسوی



بسم الله الرحمن الرحیم

آشنایی با ماتریسها

مؤلف: سیدحسین سیدموسوی

ویراستار: ناصر بروجردیان

MATH75.IR

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
انتشارات مدرسه
آشنایی با ماتریسها
مؤلف: سیدحسین سیدموسوی
ویراستار: ناصر بروجردیان
صفحه‌آرا: سیدمحسن طرازانی
چاپ اوّل: بهار ۱۳۷۱
تیراژ: ۱۰۰۰۰ نسخه

نشانی: تهران، ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش
پلاک ۲۶۸، تلفن ۸۲۶۰۰۷
چاپ از : چاپخانهٔ الهادی ـ قم

فهرست

سخن مؤلف

سپاس خداوند کارساز بنده‌نواز را که توفیقات آشکار و پنهانش یاری کرد تا این خدمت ناچیز سامان و پایان یافت. امید است که مقبول دانش‌پژوهان بیفتد. این کتاب حاصل سالها تدریس اینجانب است و شیوهٔ نگارش کتاب به این‌صورت است که در هر فصل ابتدا تعاریف و مفاهیم به‌طور دقیق بیان شده و سپس تمام قضایا و مسائل معروف مربوط به آن فصل بیان و اثبات شده است.

در ابتدا قرار بود که کتاب در دو جلد چاپ شود که بنابر صلاحدید مسئولین انتشارات مدرسه اینک در یک جلد چاپ می‌شود، اما سعی کرده‌ام که مطلبی را از قلم نیندازم؛ بخصوص در فصل مقادیر ویژه و بردارهای ویژه تأکید بسیاری داشته‌ام، که تعداد زیادی از مسائل و روشهای جالب را در فصل مزبور خواهید دید.

باری، نگارنده نقایص و معایبی را که در دیگر کتب مربوط به این بحث سراغ داشت کاملاً درنظر گرفته و به‌قدر طاقت، جهد و کوشش نمود تا این کتاب از آن قبیل معایب مبرّا و پیراسته از کار درآید. اگر در این مقصود توفیقی نصیبم شده و کتاب حاضر سودمند و آراسته از کار درآمده باشد، غیر از اثر لطف و عنایت خاص الهی نبوده است.

به‌طور قطع کتاب عاری از اشتباه نیست، چرا که خَطا همزاد هر اثر بشری است، ولی به هرحال تلاش ما این بوده که کتاب عاری از اشتباهات علمی باشد. با این حال اگر مخاطبین عزیز اشتباهی درکتاب دیدند ما را رهین منت خویش کرده و مطلع سازند تا در چاپهای بعد (ان شاء . . .) اصلاح شود.

در تألیف این کتاب، افراد بسیاری به‌طور مستقیم یا غیرمستقیم مرا یاری کرده‌اند که از همهٔ این بزرگواران کمال تشکر را دارم.

فصل ۱

مقدمات ماتریس

در تاریخ آمده است که اوّلین بار یک ریاضیدان انگلیسی تبار به نام **کیلی**[1] ماتریس را در ریاضیات وارد کرد. باتوجّه به آنکه در آن زمان ریاضیدانان اغلب به‌دنبال مسائل کاربردی بودند، کسی توجّهی به آن نکرد. امّا بعدها ریاضیدانان دنبالهٔ کار را گرفتند تا به امروز رسید که بدون اغراق می‌توان گفت در هر علمی به گونه‌ای با ماتریسها سروکار دارند. یکی از نقشهای اصلی ماتریسها آن است که آنها ابزار اساسی محاسبات عملی ریاضیات امروزی هستند، درست همان نقشی که سابقاً اعداد برعهده داشتند. از این نظر می‌توان گفت نقش امروز ماتریسها همانند نقش دیروز اعداد است. البته، ماتریسها به معنایی اعداد و بردارها را در بردارند، بنابراین می‌توان آنها را تعمیمی از اعداد و بردارها در نظر گرفت. در ریاضیات کاربردی ماتریسها از ابزار روزمره هستند، زیرا ماتریسها با حل دستگاه معادلات خطی ارتباط تنگاتنگی دارند و برای حل ریاضی مسائل عملی، مناسبترین تکنیک، فرمولبندی مسئله و یا تقریب زدن جوابهای مسئله با دستگاه معادلات خطی است که در نتیجه ماتریسها وارد کار می‌شوند. اما، مشکل اصلی در ریاضیات کاربردی این است که ماتریسهای ایجاد شده، بسیار بزرگ هستند و مسئله اصلی در آنجا کار کردن با ماتریسهای بزرگ است. از جنبه نظری، فیزیک امروزی که فیزیک کوانتم است، بدون ماتریسها نمی‌توانست به وجود آید. **هایزنبرگ**ـ اولین کسی که در فیزیک مفاهیم ماتریسها را به کار بردـ اعلام کرد «تنها ابزار ریاضی که من در مکانیک کوانتم به آن احتیاج دارم ماتریسها است». بسیاری از جبرهایی که تا به حال دیده‌اید، مانند جبر اعداد مختلط و جبر بردارها را با ماتریسها بسیار ساده می‌توان بیان کرد. بنابراین با مطالعه ماتریسها، در واقع یکی از مفیدترین و در عین حال جالبترین مباحث ریاضی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

1.Cayley

۱ـ۱ تعریف ماتریس

اگر بخواهیم، مانند «کیلی» ماتریس را تعریف کنیم باید گفت هر جدول مستطیلی که دارای تعدادی سطر و ستون است و در هر خانه آن یک عدد وجود دارد، یک ماتریس است. به عبارت دیگر هر آرایشی از اعداد مانند مثالهای زیر را ماتریس گویند.

$$\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۵ \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} -۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۱۰ & ۱۵ \\ ۵ & ۷ & ۱۹ \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} ۴ & ۸ & ۹ & ۶ \\ -۲ & ۷ & ۵ & ۹ \\ -۴ & ۰ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

اگر ماتریس $\begin{bmatrix} -۱ & ۱۰ & ۱۵ \\ ۵ & ۷ & ۱۹ \end{bmatrix}$ را A بنامیم، در این صورت ماتریس $\begin{bmatrix} -۱ & ۱۰ & ۱۵ \end{bmatrix}$ را سطر اول و $\begin{bmatrix} ۵ & ۷ & ۱۹ \end{bmatrix}$ را سطر دوم و $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۵ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ۱۰ \\ ۷ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱۵ \\ ۱۹ \end{bmatrix}$ را به ترتیب ستون اول، ستون دوم و ستون سوم A گویند. ماتریس A را که دارای دو سطر و سه ستون است یک ماتریس دو در سه (۲ در ۳) می‌گویند. اصطلاحاً می‌گوییم A از مرتبه ۲ در ۳ است (به‌جای ۲ در ۳، می‌نویسند: ۳ × ۲). بنابراین، ماتریس $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۵ & ۷ \end{bmatrix}$ یک ماتریس ۴ × ۱ و ماتریس C که در زیر آمده است یک ماتریس ۳ × ۳ است.

$$C = \begin{bmatrix} ۹ & -۲ & ۷ \\ ۴ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۳ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

اعداد واقع در جدول هر ماتریس را **درایه‌های** آن ماتریس می‌نامند. درایه‌های هر ماتریس در جا و مکان مشخصی قرار دارند، مثلاً در ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ & ۴ \\ ۱ & ۰ & -۷ \end{bmatrix}$$

درایه ۲ در سطر اول و ستون اول است، بهتر بگوییم درایه سطر اول ستون اول عدد ۲ است. همچنین درایه سطر دوم ستون سوم عدد ۷− است. به طور کلی اگر درایه‌های سطر iام ستون jام را با a_{ij} نشان دهیم، داریم

$$a_{۱۱} = ۲ \ , \ a_{۲۳} = -۷ \ , \ a_{۲۲} = ۰ \ , \ \cdots$$

ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ & ۴ \\ ۱ & ۰ & -۷ \end{bmatrix}$ یکی از ماتریسهای ۳ × ۲ است. در حالت کلی می‌توانیم یک ماتریس دلخواه ۳ × ۲ را به صورت زیر نمایش دهیم.

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{bmatrix}$$

اغلب برای سهولت، به جای نمایش ماتریس به صورت فوق، آن را با نماد $[a_{ij}]_{۲\times۲}$ نشان می‌دهند که در آن a_{ij} را درایه یا **عنصر عمومی** ماتریس $[a_{ij}]_{۲\times۲}$ گویند. به طورکلی برای ساختن انواعی از ماتریسهای دیگر می‌توانیم به جای آنکه درایه‌های ماتریس را از اعداد حقیقی انتخاب کنیم، درایه‌ها را از اعداد مختلط، عناصر یک میدان، توابع و یا حتی ماتریسها انتخاب کنیم.

در این کتاب ما هردو لفظ «درایه» و «عِنصر» را به یک معنا به کار خواهیم برد. به طورکلی یک ماتریس $m \times n$ به صورت $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ عبارت است از:

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & & a_{۲n} \\ \vdots & & & \\ a_{m۱} & a_{m۲} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

در ماتریس $A = [a_{ij}]_{m\times n}$، درایه‌های سطر اول به صورت $a_{۱j}$ می‌باشند که در آن j از ۱ تا n تغییر می‌کند. یعنی سطر اول ماتریس A عبارت است از:

$$[a_{۱۱} \quad a_{۱۲} \quad a_{۱۳} \qquad a_{۱n}]$$

به همین ترتیب، برای مثال درایه‌های ستون kام A به صورت a_{ik} می‌باشند که در آن i اعداد طبیعی ۱ تا m را طی می‌کند. یعنی ستون kام ماتریس A عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} a_{۱k} \\ a_{۲k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}$$

مثال: ماتریس $A = [a_{ij}]_{۳\times۳}$ را که در آن a_{ij} ها از دستور زیر به دست می‌آیند به طور صریح بنویسید.

$$a_{ij} = \begin{cases} ۰ \ ; \ i = ۱ \\ ۵ \ ; \ i = ۲ \\ ۴ \ ; \ i = ۳ \end{cases}$$

حل: از اطلاعات داده شده، معلوم است که ماتریس A دارای ۳ سطر و ۳ ستون‌است، به طوری که درایه‌های سطر اول آن مساوی صفر و درایه‌های سطر دوم آن ۵ و درایه‌های سطر سوم همگی مساوی ۴ می‌باشند. بنابراین ماتریس A به این صورت نوشته می‌شود.

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۵ & ۵ & ۵ \\ ۴ & ۴ & ۴ \end{bmatrix} \quad \square$$

مثال: ماتریس $B = [b_{ij}]_{۴\times۴}$ را مشخص کنید در صورتی که داشته باشیم:

$$b_{ij} = [[\tfrac{j}{i}]]$$

که در آن $[[\frac{j}{i}]]$ جزء صحیح[۱] $\frac{j}{i}$ است.

حل: باتوجه به تعریف جزء صحیح

$$b_{۱۱} = [[\tfrac{۱}{۱}]] = ۱ \quad , \quad b_{۱۲} = [[\tfrac{۲}{۱}]] = ۲ \quad , \quad b_{۲۱} = [[\tfrac{۱}{۲}]] = ۰$$

و به همین ترتیب سایر درایه‌ها محاسبه می‌شوند، بنابراین ماتریس A به‌صورت زیر در می‌آید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad \square$$

۱ـ۲ ماتریسهای مربع

اگر در یک ماتریس تعداد سطرها و ستونها مساوی باشد آن را **ماتریس مربع** گویند. در این حالت اگر یک ماتریس مانند A دارای مرتبه $n \times n$ باشد، گوییم A یک **ماتریس مربع مرتبه** n است. مجموعه ماتریسهای مربع مرتبهٔ n را با $M_{n\times n}$ یا M_n نشان می‌دهند.

درایه‌های $a_{۱۱}$، $a_{۲۲}$، $\cdots$ و a_{nn} در ماتریس مربع $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ را **درایه‌های قطر اصلی** A می‌نامند.

۱ـ۳ اثر یک ماتریس

فرض کنید A یک ماتریس مربع مرتبه n باشد، مجموع درایه‌های قطر اصلی A را **اثر ماتریس** A می‌نامند و با نماد $tr(A)$ نشان می‌دهند. بنابراین:

$$tr(A) = a_{۱۱} + a_{۲۲} + \cdots + a_{nn}$$

---

۱. بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x را جزء صحیح x گویند و به‌صورت $[[x]]$ نمایش می‌دهند. برای مثال $[[۴/۷]] = ۴$ و $[[-۲/۴]] = -۳$

درواقع اثر ماتریس، تابعی از مجموعه ماتریسهای مربع در مجموعه اعداد حقیقی است، یعنی:

$$tr : M_{n\times n} \to R$$

$$tr(A) = a_{۱۱} + a_{۲۲} + \cdots + a_{nn}$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} -۲ & ۵ \\ ۴ & ۹ \end{bmatrix}$ ، درایه‌های قطر اصلی A عبارت‌اند از: ۲− و ۹. بنابراین

$$tr(A) = -۲ + ۹ = ۷ \qquad \square$$

۱ـ۴ ماتریس سطری[1]

ماتریسهایی را که فقط یک سطر دارند **ماتریس سطری** یا **بردار سطری**[2] می‌نامند. مثلاً ماتریس $A = [a_{۱۱} \quad a_{۱۲} \quad \cdots \quad a_{۱n}]$ یک ماتریس سطری $۱ \times n$ است.

۱ـ۵ ماتریس ستونی[3]

ماتریس ستونی، ماتریسی است که فقط دارای یک ستون باشد. هر ماتریس ستونی را بردار ستونی[4] نیز گویند. مثلاً، ماتریس زیر یک ماتریس ستونی $m \times ۱$ است.

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} \\ a_{۲۱} \\ \vdots \\ a_{m۱} \end{bmatrix}$$

۱ـ۶ ماتریس صفر[5]

ماتریس صفر، ماتریسی است که همه درایه‌هایش صفر باشد. بنابراین ماتریس $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ماتریس صفر است هرگاه:

$$\forall i, j \qquad a_{ij} = ۰$$

ماتریس صفر از مرتبه $m \times n$ را با نماد $O_{m\times n}$ نشان می‌دهند.

---

1. Row matrix
2. Row vector
3. Column matrix
4. Column vector
5. Zero matrix

مثال:

$$O_{۲\times۲}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\qquad , \qquad O_{۲\times۳}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\qquad \square$$

اگر مرتبه ماتریس صفر، داده شده باشد و یا از طریق متن، مرتبه آن معلوم باشد، در این صورت برای سهولت ماتریس صفر را با $\bar{o}$ و یا حتی با o نشان می‌دهند.

۱ـ۷ تساوی ماتریسها[1]

هرگاه در ریاضیات اشیاء جدیدی معرفی شوند، باید مشخص شود که چه وقت دوتای آنها با هم مساویند. مثلاً در مجموعه اعداد گویا، دو عدد $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۴}{۶}$ را، علیرغم اینکه یک شکل نیستند، مساوی می‌نامند. در مورد اعداد گویا، دو عدد $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ را مساوی گویند هرگاه، $ad=bc$. تساوی ماتریسها نیز به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف. دو ماتریس $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ مساویند هرگاه هم مرتبه باشند و درایه‌های نظیر در دو ماتریس (یعنی درایه‌های هم موضع) مساوی باشند. به عبارت دیگر، دو ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ مساویند هرگاه داشته باشیم:

$$\forall i,j \qquad a_{ij}=b_{ij}$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲}\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲}\\ b_{۲۱} & b_{۲۲}\end{bmatrix}$، تساوی A و B به این معناست که

$$a_{۱۱}=b_{۱۱}\ ,\ a_{۱۲}=b_{۱۲}\ ,\ a_{۲۱}=b_{۲۱}\ ,\ a_{۲۲}=b_{۲۲}\quad \square$$

۱ـ۸ جمع ماتریسها[2]

مجموع دو ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$، ماتریسی است که با نماد $A+B$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$$

توجه کنید که برای جمع دو ماتریس می‌بایست دو ماتریس هم‌مرتبه باشند. بنا به تعریف، اگر $A+B=C=[c_{ij}]$ در این صورت

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

1.Equality of matrices

2.Addition of matrices

برای اینکه تعریف فوق روشن‌تر شود، شکل گستردهٔ آن را در حالت ماتریسهای ۲ × ۲ در زیر می‌آوریم.

$$[a_{ij}]_{۲\times۲}+[b_{ij}]_{۲\times۲}=[a_{ij}+b_{ij}]_{۲\times۲}$$

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{۱۱}+b_{۱۱} & a_{۱۲}+b_{۱۲} \\ a_{۲۱}+b_{۲۱} & a_{۲۲}+b_{۲۲} \end{bmatrix}$$

تذکر: باتوجه به تعریف، جمع دو ماتریس $A+B$ وقتی تعریف شده که A و B هم مرتبه باشند. در این صورت A و B را **ماتریسهای قابل جمع**[1] گویند.

مثال: ماتریسهای $A=[i+۲j]_{۳\times۳}$ و $B=[۳i-j]_{۳\times۳}$ مفروضند.

الف: $a_{۲۳}$ و $b_{۲۳}$ را به دست آورید.

ب: درایه سطر دوم ستون سوم $A+B$ را به دست آورید.

حل:

الف: درایه‌های سطر iام ستون jام ماتریسهای A و B عبارت‌اند از:

$$b_{ij}=۳i-j \quad \text{و} \quad a_{ij}=i+۲j$$

بنابراین،

$$a_{۲۳}=۲+۲(۳)=۸ \text{ ، } b_{۲۳}=۳(۲)-۳=۳$$

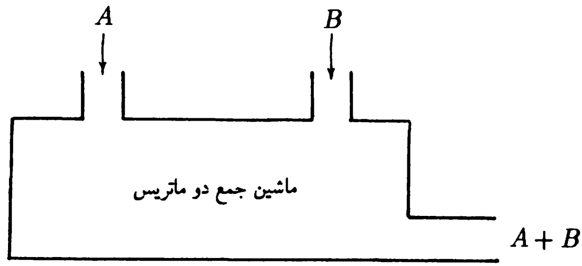
ب: اگر قرار دهیم $A+B=C$، درایه سطر دوم ستون سوم $A+B$ یعنی $c_{۲۳}$ به این صورت محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} c_{۲۳}&=a_{۲۳}+b_{۲۳}\\ &=۸+۳\\ &=۱۱ \quad \square \end{aligned}$$

۱ـ۹ تعبیر عمل جمع دو ماتریس به مثابه یک ماشین

عمل جمع را می‌توان به منزله ماشینی تصورکرد که دارای دو ورودی و یک خروجی است (شکل ۱ − ۱) ، به‌طوری‌که اگر دو ماتریس مثلاً ۲ × ۲ به آن بدهیم از خروجی آن یک ماتریس ۲ × ۲ بیرون می‌آید.

1.Additively conformable



شکل ۱ـ۱

۱ـ۱۰ قرینه یک ماتریس[1]

فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد، قرینه A ماتریسی است از همان مرتبه که با نماد $-A$ نشان می‌دهند و اگر $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ در این صورت بنابه تعریف $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$.

مثال: قرینه ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۰ \\ -۴ & ۲ & ۷ \end{bmatrix}$ عبارت است از: $-A = \begin{bmatrix} -۱ & -۳ & ۰ \\ ۴ & -۲ & -۷ \end{bmatrix}$
به سادگی می‌توان دید که

$$A + (-A) = \bar{o} \quad \square$$

۱ـ۱۱ خواص جمع ماتریسها

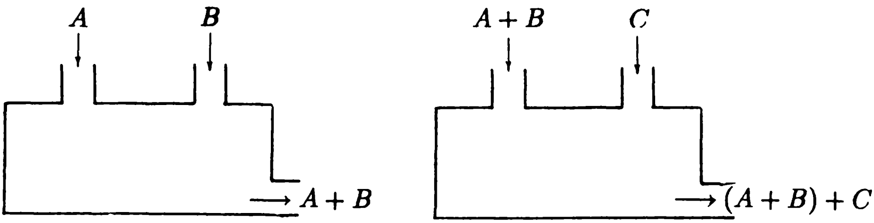
الف. جمع ماتریسها خاصیت شرکت پذیری دارد.

اثبات: فرض کنید $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ و $C = [c_{ij}]$ ، سه ماتریس هم مرتبه دلخواه باشند. نشان می‌دهیم

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

قبل از اثبات لازم است معنی عبارات $(A + B) + C$ و $A + (B + C)$ را بدانیم. در این مورد از تعبیر عمل جمع به مثابه عمل یک ماشین کمک می‌گیریم. از آنجا که ماشین جمع دو ورودی دارد نمی‌توان یکباره، سه ماتریس را با هم جمع کرد، از اینرو برای جمع سه ماتریس A و B و C، می‌توان ابتدا A و B را به ماشین داده و $A + B$ را به دست آورد. سپس $A + B$ و C را به ماشین می‌دهیم تا $(A + B) + C$ به دست آید.

1.Negative of a matrix



شکل ۱ـ۲

عبارت $A+(B+C)$ به این معناست که نخست B و C را وارد ماشین کرده‌ایم و $B+C$ را به دست آورده‌ایم و سپس A و $(B+C)$ را به ماشین داده و ماشین $A+(B+C)$ را بیرون می‌دهد.

حال می‌خواهیم نشان دهیم که در هر صورت ماتریسهای به دست آمده مساویند. برای این کار قرار می‌دهیم: $A+B=D$.

درایه سطر iام ستون jام ماتریس $(A+B)+C$ = درایه سطر iام ستون jام ماتریس $D+C$

$$= d_{ij} + c_{ij}$$

$$= (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$$

$= a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$ (بر خاصیت شرکت پذیری جمع اعداد)

= درایه سطر iام ستون jام $A+(B+C)$ ■

ب. ماتریس صفر عضو بی‌اثر مجموعه ماتریسها نسبت به عمل جمع است.

اثبات: فرض کنید $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ یک ماتریس دلخواه باشد، نشان می‌دهیم

$$\bar{o} + A = A + \bar{o} = A$$

که در آن $\bar{o}$، ماتریس صفر هم مرتبه با A است.

درایه سطر iام ستون jام $A+\bar{o}$ $= a_{ij} + 0$

$$= a_{ij}$$

= درایه سطر iام ستون jام A ■

اثبات $\bar{o} + A = A$، به طریق مشابه است.

ج. هر ماتریس نسبت به عمل جمع دارای متقابل است.

دیدیم که قرینه هر ماتریس $A=[a_{ij}]$ ، ماتریسی هم مرتبه با آن به صورت $-A=[-a_{ij}]$

است. در واقع $-A$ متقابل A نسبت به عمل جمع است، زیرا قبلاً نشان دادیم

$$A + (-A) = (-A) + A = \bar{o}$$

که در آن $\bar{o}$ ماتریس صفر هم مرتبه با A است.

د. جمع ماتریسها دارای خاصیت جابجایی است.

یعنی اگر A و B دو ماتریس دلخواه هم مرتبه باشند، داریم

$$A + B = B + A$$

اثبات:

درایه سطر iام ستون jام $(A+B)$ $= a_{ij} + b_{ij}$

بنابر خاصیت جابجایی جمع اعداد $= b_{ij} + a_{ij}$

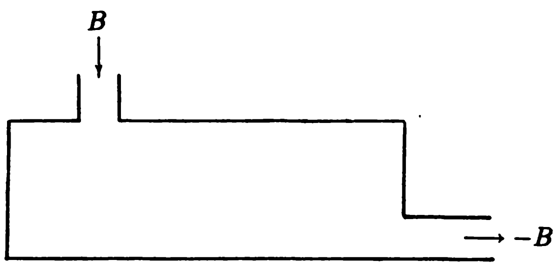
درایه سطر iام ستون jام $(B+A)$ $=$ ■

۱ـ۱۲ تفریق ماتریسها[1]

فرض کنید A و B دو ماتریس هم مرتبه باشند، $A - B$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$A - B = A + (-B)$$

از تعریف فوق نتیجه می‌گیریم برای اینکه با ماشین جمع، $A - B$ را به دست آوریم، نخست ماشینی با یک ورودی و یک خروجی می‌سازیم تا هر ماتریسی به آن دهیم آن ماتریس را قرینه کند. حال با دادن ماتریس B به این ماشین، $-B$ از آن خارج می‌شود. (شکل زیر)

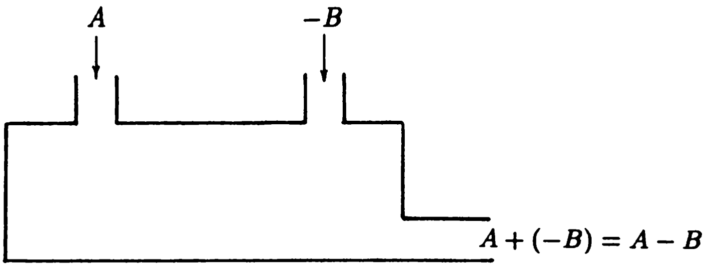


شکل ۱-۳

سپس، A و $-B$ را به ماشین جمع می‌دهیم تا $A + (-B)$ یعنی $A - B$ را بیرون دهد.

---

1. Subtraction of matrices



شکل ۱-۴

۱ـ۱۳ مقایسه خواص جمع ماتریسها با خواص جمع اعداد حقیقی

اگر به خواص ۱ تا ۴ توجه کنیم ملاحظه می‌کنیم که این خواص همانند خواص جمع اعداد حقیقی است، حال می‌خواهیم ببینیم کدامیک از خواص دیگر مجموعه اعداد حقیقی با عمل جمع در مجموعهٔ ماتریسها با عمل جمع برقرار است.

می‌دانیم برای حل معادله $a+x=b$ در مجموعه اعداد حقیقی باید به طریقی a را از طرف اول معادله حذف کرد. بنابراین، طرفین معادله را با $-a$ جمع می‌کنیم، در این صورت:

$$(-a)+(a+x)=-a+b$$

با استفاده از خاصیت جابجایی و شرکت‌پذیری جمع داریم:

$$(-a+a)+x=b-a$$

در نتیجه، $\circ+x=b-a$، یعنی $x=b-a$. این شیوه را می‌توان برای حل معادله $A+X=B$ در مجموعهٔ ماتریسها نیز به‌کار برد و گزارهٔ زیر را به دست آورد.

۱ـ۱۴ گزاره

اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه باشند، در این صورت معادله $A+X=B$ دارای جواب منحصر بفرد $X=B-A$ است. ■

یکی دیگر از خواص مجموعهٔ اعداد حقیقی با عمل جمع، قانون حذف است. یعنی اگر $a+x=a+y$ در این صورت می‌توان نتیجه گرفت $x=y$. این خاصیت نیز در مورد ماتریسها با عمل جمع وجود دارد.

۱ـ۱۵ قانون حذف در جمع ماتریسها برقرار است

اثبات: روش اول. فرض کنید A و B و C سه ماتریس هم مرتبه باشند، نشان می‌دهیم

$$A+B=A+C\Rightarrow B=C$$

طرفین تساوی $A+B=A+C$ را با $-A$ جمع می‌کنیم. باتوجه به خاصیت شرکت‌پذیری و خاصیت ماتریس صفر نتیجه می‌شود $B=C$.

روش دوم: چون $A+B=A+C$، پس

$$\text{درایهٔ سطر } i\text{ام ستون } j\text{ام } A+B = \text{درایه سطر } i\text{ام ستون } j\text{ام } A+C$$

بنابراین

$$a_{ij}+b_{ij}=a_{ij}+c_{ij}$$

در نتیجه داریم

$$b_{ij}=c_{ij}$$

این به معنای آن است که

$$B=C \quad \blacksquare$$

تذکر: برای اثبات قانون حذف دو روش مختلف ارائه دادیم. در روش اول، از خواص جمع ماتریسها یعنی شرکت‌پذیری، عضو بی‌اثر و... استفاده کردیم، یعنی همان روشی که برای اعداد حقیقی می‌توان به کار برد. اما در روش دوم ویژگیهای ماتریس نقش اصلی را ایفا می‌کرد. در واقع در مورد روش اول برای ما مهم نیست A و B و C ماتریس هستند یا عدد حقیقی و یا هر چیز دیگر؛ در مورد هر دسته‌ای از اشیاء که دارای خواص ۱ تا ۴ باشند می‌توانیم این شیوه را به کار بریم و **این همان رسالت جبر مدرن است که با اصل موضوعی کردن، قضایای مشابه را به یکباره ثابت می‌کند زیرا شیوه و روش اثبات قضیه در هر جایی که این اصول صدق می‌کنند معتبر است.** بنابراین لازم است قدری در مورد ساختمانهای جبری و بخصوص گروه صحبت کنیم.

تعریف: فرض کنید G مجموعه‌ای ناتهی و $*$ قانونی باشد که توسط آن بتوان هر دو عضو مجموعه را با هم ترکیب کرد و عضو منحصر بفردی از G را به‌دست آورد. در این صورت $*$ را یک عمل دوتایی در G گویند. مجموعه G همراه با عمل $*$ را که به صورت $(G,*)$ نشان می‌دهیم، یک ساختمان جبری گویند. حال اگر این ساختمان جبری دارای برخی خواص باشد آن‌را یک **گروه آبلی** گویند. این خواص عبارتند از:

۱) $*$ شرکت پذیر است. یعنی، برای هر سه عضو دلخواه G مانند a و b و c داریم

$$a*(b*c)=(a*b)*c$$

۲) عضوی در G وجود دارد که با e نشان می‌دهیم و دارای خاصیت زیر است.

$$\forall\, a\in G \qquad a*e=e*a=a$$

۳) هر عضو G دارای متقابل است یعنی، برای هر $a \in G$، عضوی از G مانند a' می‌توان یافت به‌طوری‌که

$$a * a' = a' * a = e$$

۴) $*$ جابجایی است یعنی، برای هر دو عضو دلخواه G مانند a و b داریم.

$$a * b = b * a$$

۱ـ۱۶ نتیجه

اگر مجموعه ماتریسهای $m \times n$ را با $M_{m\times n}$ نشان دهیم $(M_{m\times n}, +)$ که در آن $+$، جمع ماتریسهاست، یک گروه آبلی است.

حال می‌خواهیم بدانیم آگاهی از این مطلب که مجموعه ماتریسها با جمع تشکیل گروه آبلی می‌دهد، چه اثری در محاسبات با ماتریسها دارد. در زیر برخی از کارهایی را که با ماتریسها، در ارتباط با عمل جمع می‌توان انجام داد می‌آوریم.

۱) برای حل معادله $A + X = B$ یا $X + A = B$ می‌توانیم مانند جمع معمولی عمل کنیم و A را به طرف دوم برده و علامت آن را عوض کنیم یعنی، $X = B - A$.

۲) می‌توان از طرفین معادله $A + B = A + C$، ماتریس A را حذف کرد و نتیجه گرفت $B = C$.

۱ـ۱۷ ضرب یک عدد (اسکالر) در ماتریس[1]

تعریف: فرض کنید $A = [a_{ij}]$ ماتریسی از مرتبه $m \times n$ و r یک عدد حقیقی باشد. از ضرب عدد حقیقی r در A ماتریسی به دست می‌آید که آن‌را به صورت rA نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$rA = [ra_{ij}]_{m\times n}$$

بنابراین

$$\boxed{(\text{درایه سطر } i\text{ام ستون } j\text{ام ماتریس } rA) = r\cdot(\text{درایه سطر } i\text{ام ستون } j\text{ام ماتریس } A)}$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ در این صورت

$$(-۵)A = \begin{bmatrix} -۵ & -۱۰ \\ -۱۵ & -۲۰ \end{bmatrix} \quad \square$$

1.Scalar multiplication

مثال: فرض کنید $I_3 = [d_{ij}]$ یک ماتریس ۳ × ۳ باشد که در آن d_{ij} به صورت زیر تعریف می‌شود

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 \ ; \ i = j \\ 0 \ ; \ i \neq j \end{cases}$$

اگر λ یک عدد حقیقی باشد در این صورت ماتریسهای I_3 و λI_3 عبارت‌اند از

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \ \lambda I_3 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \ \square$$

تذکر: ماتریس I_3 را ماتریس‌واحد ۳ × ۳ گویند. همچنین ماتریس واحد ۲ × ۲ عبارت است از

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۱ـ۱۸ خواص ضرب عدد در ماتریس

۱ـ۱۹ گزاره

فرض کنید r و s دو عدد حقیقی و A یک ماتریس $m \times n$ باشد، در این صورت داریم

$$r(sA) = (rs)A$$

اثبات: برای سهولت قرار می‌دهیم $sA = B$.

درایهٔ سطر iام ستون jام ماتریس $r(sA)$ = درایه سطر iام ستون jام ماتریس rB

$= rb_{ij}$

$= r(sa_{ij})$ زیرا $sA = B$

$= (rs)a_{ij}$ بنابر خاصیت شرکت‌پذیری ضرب اعداد حقیقی

$=$ درایه سطر iام ستون jام ماتریس $(rs)A$ ■

۱ـ۲۰ گزاره

اگر r و s دو عدد حقیقی و A یک ماتریس $m \times n$ باشد، در این صورت داریم

$$(r + s)A = rA + sA$$

اثبات:

$$(r+s)A \text{ درایه سطر } i\text{ام ستون } j\text{ام ماتریس } = (r+s)a_{ij}$$

$$= ra_{ij} + sa_{ij}$$

$$= rA + sA \text{ درایه سطر } i\text{ام ستون } j\text{ام ماتریس } \blacksquare$$

۱ـ۲۱ گزاره

اگر r یک عدد حقیقی و A و B دو ماتریس $m \times n$ باشند، در این صورت

$$r(A+B) = rA + rB$$

اثبات: قرار می‌دهیم $A + B = D$ بنابراین

$$r(A+B) \text{ درایه سطر } i\text{ام ستون } j\text{ام ماتریس } = rD \text{ درایه سطر } i\text{ام ستون } j\text{ام ماتریس}$$

$$= rd_{ij}$$

$$= r(a_{ij} + b_{ij}) \quad A + B = D \text{ زیرا}$$

$$= ra_{ij} + rb_{ij}$$

$$= (rA + rB) \text{ درایه } i\text{ام ستون } j\text{ام ماتریس } \blacksquare$$

۱ـ۲۲ گزاره

اگر r یک عدد حقیقی ناصفر و A و B دو ماتریس دلخواه $m \times n$ باشند، در این صورت

$$rA = rB \;\Rightarrow\; A = B$$

اثبات: روش اول. چون $r \neq ۰$ پس $\frac{۱}{r}$ وجود دارد بنابراین

$$\frac{۱}{r}(rA) = \frac{۱}{r}(rB)$$

باتوجه به گزارهٔ ۱ـ۱۹ و این واقعیت که $۱A = A$ داریم

$$A = B$$

روش دوم. چون $rA = rB$ پس درایه‌های سطر iام ستون jام دو ماتریس برابرند یعنی

$$rb_{ij} = ra_{ij}$$

و از آنجا چون $r \neq ۰$ بنابر خاصیت اعداد حقیقی نتیجه می‌گیریم

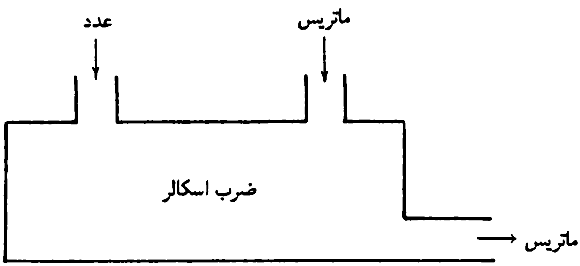
$$a_{ij} = b_{ij}$$

پس

$$A = B \quad \blacksquare$$

در اینجا نیز با دو روش کاملاً متفاوت سروکار داریم، روش دوم در ارتباط با خاصیت درونی ماتریسهاست ولی اولی مربوط به خواص ۱ـ۱۹ و ۱ـ۲۰ و ۱ـ۲۱ ضرب یک عدد در ماتریسهاست. از آنجا که این خواص در مورد بسیاری مجموعه‌های دیگر نیز برقرار است از اینرو، ریاضیدانان ساختمانهای جبری‌ای که دارای خواص مزبور باشند به طور دقیق و مفصل مورد مطالعه قرار داده‌اند و چون این خواص شبیه خواصی است که بردارها دارند، آنها را **فضاهای برداری** می‌نامند.

در ماتریسها عمل موسوم به جمع دو ماتریس و همچنین عمل ضرب اسکالر در ماتریس را تعریف کرده‌ایم از آنجا که عمل جمع قاعده‌ای است که توسط آن دو ماتریس با هم ترکیب می‌شوند و عضو دیگری از مجموعه ماتریسها به دست می‌آید، یک قانون ترکیب داخلی است. اما ضرب اسکالر در ماتریس، ضرب یک عدد در ماتریس است، از اینرو یک قانون ترکیب خارجی است.



شکل ۱ـ۵

حال به تعریف فضای برداری می‌پردازیم.

فرض کنید V مجموعه‌ای باشد که در آن یک قانون ترکیب داخلی جمع، یک قانون ترکیب خارجی موسوم به ضرب اسکالر تعریف شده باشد. V با این دو عمل که به ترتیب با $+$ و $\circ$ نشان می‌دهیم یک فضای برداری روی اعداد حقیقی است هرگاه

۱) $(V, +)$ یک گروه آبلی باشد.

۲) برای هر دو عدد حقیقی r و s و هر عضو V مانند A، داشته باشیم

$$r(sA) = (rs)A$$

۳) برای هر عدد حقیقی r و هر دو عضو دلخواه مانند A و B داشته باشیم

$$r(A+B)=rA+rB$$

۴) برای هر دو عدد حقیقی r و s و هر عضو V مانند A، داشته باشیم

$$(r+s)A=rA+sA$$

۵) اگر A عضو دلخواهی از V باشد، داشته باشیم

$$۱.A=A$$

تذکر: عضو بی‌اثر V نسبت به عمل جمع را صفر فضا می‌نامند و با $\bar{o}$ وگاه با o نشان می‌دهند.

۱ـ۲۳ نتیجه

مجموعهٔ ماتریسهای $m\times n$ با جمع ماتریسها و ضرب یک عدد در ماتریس یک فضای برداری روی اعداد حقیقی است.

قضایای زیر برای هر مجموعه‌ای که در اصول فضای برداری صدق کند، برقرار است.

قضیهٔ ۱. اگر $\bar{o}$، صفر فضای برداری V و r یک عدد حقیقی دلخواه باشد آنگاه

$$r.\bar{o}=\bar{o}$$

قضیهٔ ۲. اگر ۰، صفر اعداد حقیقی و A عضو دلخواهی از فضای V باشد آنگاه

$$۰.A=\bar{o}$$

قضیهٔ ۳. اگر r یک عدد حقیقی و A عضو دلخواهی از فضای V باشد آنگاه

$$rA=\bar{o} \;\Rightarrow\; r=۰ \text{ یا } A=\bar{o}$$

قضیهٔ ۴. اگر r یک عدد حقیقی دلخواه و A و B دو عضو دلخواه فضای V باشند آنگاه

$$r(A-B)=rA-rB$$

که در آن منظور از $A-B$ همان $A+(-B)$ است.

قضیهٔ ۵. اگر r یک عدد حقیقی ناصفر و A و B دو عضو دلخواه V باشند آنگاه

$$rA=rB \;\Rightarrow\; A=B$$

قضیهٔ ۶. اگر r و s دو عدد حقیقی و A عضو دلخواهی از V باشد آنگاه

$$(r - s)A = rA - sA$$

باتوجه به اینکه مجموعه ماتریسها یک فضای برداری است، کلیه قضایای فوق در مورد ماتریسها نیز برقرار است. با این حال، ما قضایای فوق را مجدداً برای ماتریسها ثابت خواهیم کرد. برای اثبات این قضایا دو روش وجود دارد یکی استفاده از اصول فضای برداری و دیگری استفاده از ویژگیهای خود ماتریسها. در اینجا ما روش دوم را برمی‌گزینیم زیرا، این روش تمرین خوبی برای تسلط بر مفهوم ماتریس است.

با این وجود نباید از این که مجموعه ماتریسها یک فضای برداری است غافل شویم. در زیر به بررسی مثالی می‌پردازیم که نشان می‌دهد چرا روی فضای برداری بودن ماتریسها تا این اندازه تأکید داریم.

مثال: معادله $\frac{1}{2}X - B = 3(X - 2B)$ را حل کنید، در صورتی که B ماتریسی $m \times n$ باشد.

حل: باتوجه به قضیه ۴ و اصل ۲ می‌توان به جای $3(X - 2B)$ مساویش یعنی $3X - 6B$ قرار داد. لذا خواهیم داشت.

$$\frac{1}{2}X - B = 3X - 6B$$

از طرفی از اینکه مجموعه ماتریسها با جمع گروه است. داریم

$$\frac{1}{2}X - 3X = B - 6B$$

بنا بر قضیهٔ ۶ داریم

$$B - 6B = \frac{1}{2}X - 3X \ , \ (1 - 6)B = (\frac{1}{2} - 3)X$$

و در نتیجه:

$$-\frac{5}{2}X = -5B$$

و نهایتاً باتوجه به قضیه ۵ داریم

$$X = 2B \quad \square$$

۱ـ۲۴ گزاره

اگر $\bar{o}$ ماتریس صفر و r یک عدد حقیقی باشد آنگاه

$$r \cdot \bar{o} = \bar{o}$$

اثبات:

$$r\cdot\bar{o}\text{ ام } j \text{ ام ستون } i \text{ درایه سطر } = r\cdot\cdot$$
$$=\cdot \quad \blacksquare$$

۱ـ۲۵ گزاره

اگر ۰، صفر مجموعه اعداد حقیقی و A یک ماتریس دلخواه باشد آنگاه

$$\cdot\cdot A=\bar{o}$$

اثبات:

$$\cdot\cdot A\text{ ام } j \text{ ام ستون } i \text{ درایه سطر } = \cdot\cdot a_{ij}$$
$$=\cdot \quad \blacksquare$$

۱ـ۲۶ گزاره

اگر r یک عدد حقیقی و A یک ماتریس دلخواه $m \times n$ باشد، آنگاه

$$rA=\bar{o} \Rightarrow A=\bar{o} \text{ یا } r=\cdot$$

اثبات: از $rA=\bar{o}$ نتیجه می‌گیریم همه درایه‌های rA صفر است یعنی برای هر i و j داریم $ra_{ij}=\cdot$. اگر $r=\cdot$ قضیه ثابت است، در غیراین‌صورت، همه a_{ij}ها صفرند یعنی

$$A=\bar{o} \quad \blacksquare$$

تذکر: شاید تاکنون به مزیت فشرده‌نویسی یک ماتریس $m \times n$ به صورت $[a_{ij}]_{m\times n}$ پی برده باشید و ملاحظه کرده‌اید که در اثبات قضایا و مسائل این شیوهٔ نگارش چقدر کار را آسان می‌کند. اما از طرف دیگر، این نوع فشرده‌نویسی گاهی بسیاری از اطلاعات موجود درگسترده‌نویسی یک ماتریس را نشان نمی‌دهد. برای مثال، اثبات قضیه فوق را در حالت ماتریس ۲×۲ و به شکل گسترده در زیر می‌آوریم تا با فواید و مضرات فشرده نویسی آشنا شوید.

فرض کنید $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲}\end{bmatrix}$ و r یک عدد حقیقی باشد، از $rA=\bar{o}$ نتیجه می‌گیریم

$$\begin{bmatrix} ra_{۱۱} & ra_{۱۲} \\ ra_{۲۱} & ra_{۲۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\end{bmatrix}$$

و از آنجا باتوجه به تعریف تساوی دو ماتریس داریم

$$ra_{۱۱}=\cdot \wedge ra_{۱۲}=\cdot \wedge ra_{۲۱}=\cdot \wedge ra_{۲۲}=\cdot$$

اما بنابرخاصیت اعداد حقیقی که از $ab = ۰$ می‌توان نتیجه گرفت $a = ۰$ یا $b = ۰$، خواهیم داشت

$$(r = ۰ \vee a_{۱۱} = ۰) \wedge (r = ۰ \vee a_{۱۲} = ۰) \wedge (r = ۰ \vee a_{۲۱} = ۰) \wedge (r = ۰ \vee a_{۲۲} = ۰)$$

بنابر قانون توزیع پذیری (در اینجا فاکتورگیری) $\vee$ نسبت به $\wedge$ داریم.

$$r = ۰ \vee (a_{۱۱} = ۰ \wedge a_{۱۲} = ۰ \wedge a_{۲۱} = ۰ \wedge a_{۲۲} = ۰)$$

و این به معنای آن است که

$$r = ۰ \vee A = \bar{o} \quad \blacksquare$$

۱ـ۲۷ گزاره

اگر r یک عدد حقیقی ناصفر و A و B دو ماتریس دلخواه $m \times n$ باشند آنگاه

$$rA = rB \Rightarrow A = B$$

اثبات: از $rA = rB$ نتیجه می‌گیریم

درایه سطر iام ستون jام ماتریس rB = درایه سطر iام ستون jام ماتریس rA

پس

$$ra_{ij} = rb_{ij}$$

از آنجا که $r \neq ۰$ نتیجه می‌گیریم

$$a_{ij} = b_{ij}$$

پس

$$A = B \quad \blacksquare$$

مسائل تکمیلی از جمع و ضرب یک عدد در ماتریس

۱ـ۲۸ مسئله

فرض کنید $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس ۳×۳ باشد، که در آن a_{ij}ها به صورت زیر تعریف شده است. ماتریس A را مشخص کنید.

$$a_{ij} = \begin{cases} ۳ \ ; & i = j \\ ۱ \ ; & i > j \\ ۵ \ ; & i < j \end{cases}$$

۱ـ۲۹ مسئله

کلیه ماتریسهای مربع $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$ را به گونه‌ای بسازید که داشته باشیم $a_{ij}=-a_{ji}$.

۱ـ۳۰ مسئله

برای ماتریسهای $B=[i+j]_{۲\times۲}$ و $C=[i^۲-j^۲]_{۲\times۲}$، از معادله زیر ماتریس X را به دست آورید.

$$۴X-۲B+C=۲X-C$$

قبل از پرداختن به مسائل بعد لازم است مفهوم ترکیب خطی را یادآوری کنیم.

تعریف. فرض کنید $A_۱$، $A_۲$، $\cdots$ و A_n، n عضو (بردار) از فضای برداری V باشند. یک ترکیب خطی این n بردار، عبارت است از:

$$\lambda_۱A_۱+\lambda_۲A_۲+\cdots+\lambda_nA_n$$

که در آن $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ و $\cdots$ و λ_n اعداد حقیقی هستند.

مثال: در فضای برداری ماتریسهای ۲ × ۲، اگر $A_۱=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۰\end{bmatrix}$ و $A_۲=\begin{bmatrix}۰&۰\\۰&۱\end{bmatrix}$، در این صورت $۲A_۱-۳A_۲$ یک ترکیب خطی از $A_۱$ و $A_۲$ است. به طورکلی همهٔ ترکیبات خطی $A_۱$ و $A_۲$ عبارت اند از:

$$aA_۱+bA_۲=a\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۰\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}۰&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&۰\\۰&b\end{bmatrix}$$

در این صورت اصطلاحاً گوییم ماتریسهای $A_۱$ و $A_۲$ ماتریسهای به صورت $\begin{bmatrix}a&۰\\۰&b\end{bmatrix}$ را تولید می‌کنند.

۱ـ۳۱ مسئله

ماتریسهای $E_{۱۱}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۰\end{bmatrix}$ و $E_{۱۲}=\begin{bmatrix}۰&۱\\۰&۰\end{bmatrix}$ و $E_{۲۱}=\begin{bmatrix}۰&۰\\۱&۰\end{bmatrix}$ و $E_{۲۲}=\begin{bmatrix}۰&۰\\۰&۱\end{bmatrix}$ مفروضند. نشان دهید هر ماتریس ۲×۲ را می‌توان به طور منحصر بفردی به صورت ترکیبی خطی از این ماتریسها نوشت.

۱ـ۳۲ مسئله

اگر A و B و C سه ماتریس هم مرتبه باشند، نشان دهید

$$(A+B)-C=A+(B-C)$$

مسائلی از فضای برداری ماتریسها

نخست لازم است تعریف زیر فضای برداری را یادآوری کنیم.

تعریف. فرض کنید $(V, +, \cdot)$ یک فضای برداری و S یک زیر مجموعه ناتهی V باشد. S را یک زیر فضای V می‌نامند هرگاه $(S, +, \cdot)$ فضای برداری باشد.

قضیه: زیرمجموعه ناتهی S از فضای V یک زیرفضای V است اگر و تنها اگر

الف) S نسبت به جمع بسته باشد، یعنی

$$\forall x, y \in S \quad x + y \in S$$

ب) S نسبت به ضرب اسکالر بسته باشد، یعنی

$$\forall \lambda \in R \ \forall x \in S \quad \lambda x \in S$$

۱ـ۳۳ مسئله

نشان دهید مجموعه S متشکل از ماتریسهای به شکل $\begin{bmatrix} a & \text{۰} \\ \text{۰} & b \end{bmatrix}$ یک زیر فضای فضای ماتریسهای $\text{۲} \times \text{۲}$ است.

۱ـ۳۴ مسئله

نشان دهید مجموعه S متشکل از ماتریسهای به صورت $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ با جمع ماتریسها و ضرب یک عدد در ماتریس، فضای برداری است و این فضا توسط دو ماتریس $\begin{bmatrix} \text{۱} & \text{۰} \\ \text{۰} & \text{۱} \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} \text{۰} & -\text{۱} \\ \text{۱} & \text{۰} \end{bmatrix}$ تولید می‌شود.

حل مسائل تکمیلی از جمع و ضرب یک عدد در ماتریس

حل مسئله ۱ـ۲۸

در یک ماتریس مربع، a_{ij}هایی که در آن $i = j$، درایه‌های واقع بر قطر اصلی را تشکیل می‌دهند. پس در این ماتریس، $a_{\text{۱۱}} = a_{\text{۲۲}} = a_{\text{۳۳}} = \text{۱}$. اگر $i > j$، a_{ij} درایه‌های پایین قطر اصلی و a_{ij}هایی که در آن $i < j$، درایه‌های بالای قطر اصلی را تشکیل می‌دهند. یعنی

$$A = \begin{bmatrix} \ddots & & \text{محل } a_{ij} \text{هایی که در آن} \\ \text{محل } a_{ij} \text{هایی} & \ddots & i < j. \\ \text{که در آن } i > j. & & \ddots \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۵ \\ ۱ & ۳ & ۵ \\ ۱ & ۱ & ۳ \end{bmatrix} \quad \square$$

حل مسئله ۱ـ۲۹

ابتدا نشان می‌دهیم در این ماتریسها درایه‌های واقع بر قطر اصلی همگی صفرند. یعنی تمام a_{ii}ها صفرند. برای این کار در تساوی $a_{ij} = -a_{ji}$ قرار می‌دهیم $i = j$، در نتیجه $a_{ii} = -a_{ii}$، پس $۲a_{ii} = ۰$. اما a_{ii}ها اعداد حقیقی هستند بنابراین $a_{ii} = ۰$. از طرفی مواضع درایه‌های a_{ij} و a_{ji} نسبت به قطر اصلی قرینه‌اند بنابراین ماتریس A به صورت زیر در می‌آید.

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & a & b \\ -a & ۰ & c \\ -b & -c & ۰ \end{bmatrix} \quad \square$$

حل مسئله ۱ـ۳۰

باتوجه به اینکه مجموعه ماتریسها با عمل جمع یک گروه آبلی است بنابراین خواص اعمال جمع و تفریق معمولی را دارد، بنابراین

$$۴X - ۲X = ۲B - C - C$$

در نتیجه بنابر قضیه ۴ خواهیم داشت

$$۲X = ۲B - ۲C$$

پس بنابرقضیه ۶ و ۵

$$X = B - C$$

از طرف دیگر، $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} ۰ & -۳ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}$ پس

$$X = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۰ & -۳ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۶ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix} \quad \square$$

حل مسئله ۱ـ۳۱

فرض کنید $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ یک ماتریس ۲×۲ دلخواه باشد، در این صورت .

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & b \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ c & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & d \end{bmatrix} \\ &= a\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \\ &= aE_{۱۱} + bE_{۱۲} + cE_{۲۱} + dE_{۲۲} \end{aligned}$$

به عبارت دیگر، با این چهار ماتریس تمام ماتریسهای ۲×۲ را می‌توان تولید کرد. برای اثبات منحصر بفرد بودن نمایش هر ماتریس به صورت فوق، فرض کنید ماتریسی مانند A به دو صورت

$$aE_{۱۱} + bE_{۱۲} + cE_{۲۱} + dE_{۲۲} \ , \ \ a'E_{۱۱} + b'E_{۱۲} + c'E_{۲۱} + d'E_{۲۲}$$

نوشته شده باشد، بنابراین

$$aE_{۱۱} + bE_{۱۲} + cE_{۲۱} + dE_{۲۲} = a'E_{۱۱} + b'E_{۱۲} + c'E_{۲۱} + d'E_{۲۲}$$

در نتیجه

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$$

پس $a = a'$ ، $b = b'$ ، $c = c'$ ، $d = d'$. □

حل مسئله ۱ـ۳۲

بنابه تعریف تفریق دو ماتریس داریم

$$(A+B) - C = (A+B) + (-C)$$

$$= A + [B + (-C)]$$ بنابرخاصیت شرکت پذیری جمع

$$= A + (B - C)$$ بنابر تعریف تفریق □

حل مسئله ۱ـ۳۳

فرض کنید $A = \begin{bmatrix} a & ۰ \\ ۰ & b \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} c & ۰ \\ ۰ & d \end{bmatrix}$ دو عضو دلخواه S و λ یک عدد حقیقی دلخواه باشد ، در این صورت

$$A + B = \begin{bmatrix} a + c & ۰ \\ ۰ & b + d \end{bmatrix}$$

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a & ۰ \\ ۰ & \lambda b \end{bmatrix}$$

پس S یک زیرفضای ماتریسهای ۲ × ۲ است. □

حل مسئله ۱ـ۳۴

باتوجه به اینکه S زیرمجموعه‌ای از ماتریسهای ۲×۲ است، کافی است نشان دهیم S یک زیر فضای ماتریسهای ۲×۲ است. برای این کار فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$$

دو عضو دلخواه S باشند بنابراین

$$A+B=\begin{bmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{bmatrix} \epsilon S$$

همچنین اگر λ یک عدد حقیقی دلخواه باشد، آنگاه

$$\lambda A=\begin{bmatrix} \lambda a & -\lambda b \\ \lambda b & \lambda a \end{bmatrix} \epsilon S$$

از طرف دیگر، از تساوی

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

نتیجه می‌شود که هر عضو S توسط دو ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ تولید می‌شود.□

تمرینات فصل ۱

ماتریسهای زیر را بسازید.

۱) $A=[a_{ij}]_{۲\times ۳} \quad ; \quad a_{ij}=(i+۱)(j-۲)$

۲) $B=[b_{ij}]_{۲\times ۵} \quad ; \quad b_{ij}=|i-j|$

۳) اگر

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۰ & ۷ \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} ۴ & ۷ \\ ۹ & ۶ \end{bmatrix}$$

از معادله زیر ماتریس X را به دست آورید.

$$\frac{۱}{۲}(X+A)=۳[X+(۲X+B)]+C$$

اگر

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۷ & ۵ \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} ۲ & ۷ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۷ & ۵ \end{bmatrix}$$

این معادلات را حل کنید.

۴) $۲(X+B)=۳[X+(\frac{۱}{۲}X+A)]+C$

۵) $۴۰(X+A)=۴۷(X+B)+۴۸(X+C)$

۶) $\sqrt{۲}(X+C)=۳۱[X+\sqrt{۲}(X+A-B)]$

ماتریسهای زیر را بسازید.

۷) $A = [i + j^{۲}]_{۲\times ۲}$

۸) $B = [ij]_{۲\times ۳}$

۹) $C = [i^{۲} + j^{۲}]_{۲\times ۳}$

۱۰) $D = [۲i + ۳j]_{۳\times ۲}$

۱۱) اگر A ، B ، X ، و Y ماتریسهای $m \times n$ باشند، دستگاه معادلات

$$\begin{cases} ۳X + ۷Y = A \\ X + ۲Y = B \end{cases}$$

را حل کنید و X و Y را برحسب A و B بیابید.

۱۲) چند ماتریس ۳ × ۲ وجود دارد که همه درایه‌هایشان ۰ یا ۱ است.

۱۳) از دستگاه زیر ماتریسهای X و Y را به دست آورید.

$$\begin{cases} ۲X + Y = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \\ X - ۳Y = \begin{bmatrix} ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ \end{bmatrix} \end{cases}$$

۱۴) نشان دهید مجموعه S متشکل از ماتریسهای به شکل

$$\begin{bmatrix} a & b \\ ۰ & c \end{bmatrix}$$

با جمع ماتریسها و ضرب یک عدد در ماتریس یک فضای برداری حقیقی است.

۱۵) آیا مجموعه S متشکل از ماتریسهای به شکل

$$\begin{bmatrix} a & b \\ ۱ & c \end{bmatrix}$$

با جمع و ضرب یک عدد در ماتریس یک فضای برداری حقیقی است؟

۱۶) نشان دهید مجموعه

$$S = \left\{ a \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix} \middle| a, b, \epsilon R \right\}$$

با جمع ماتریسها و ضرب یک عدد در ماتریس یک فضای برداری حقیقی است.

فصل ۲

نماد سیگما[1]

۱ـ۲

در این بخش می‌خواهیم نمادی را معرفی کنیم که برای فشرده‌نویسی مجموعها به کار می‌رود. برای این کار فرض کنید $f(k)$ تابعی بر حسب متغیر صحیح k باشد و aو b اعداد صحیحی می‌باشند به طوری که $a \leq b$. در این صورت،

$$\sum_{k=a}^{b} f(k)$$

نمایشگر مجموع جملاتی است که از قراردادن اعداد صحیح متوالی به جای k که از $k = a$ شروع می‌شود و به $k = b$ خاتمه می‌یابد. برای مثال، $\sum\limits_{k=۱}^{n} f(k)$ ، مجموعی را نشان می‌دهد که اولین جمله آن از قراردادن $k = ۱$ در $f(k)$ به دست می‌آید، و دومین جمله آن $f(۲)$ و بالاخره آخرین جمله آن $f(n)$ است، یعنی

$$\boxed{\sum_{k=۱}^{n} f(k) = f(۱) + f(۲) + \cdots + f(n)}$$

مثال. اگر $f(k) = \frac{۱}{k}$ باشد، آنگاه

$$\sum_{k=۱}^{۵} f(k) = \sum_{k=۱}^{۵} \frac{۱}{k} = \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} \quad \square$$

تذکر ۱. $\sum$ حرف بزرگ یکی از حروف یونانی یعنی «sigma» است که معادل «s» انگلیسی است که برای لفظ جمع (sum) به کار می‌رود.

1.Sigma notation

تذکر ۲. در $\sum\limits_{k=a}^{b} f(k)$ ، a و b را به ترتیب حد پایین و بالای جمع‌بندی[1] ، $f(k)$ را جمله عمومی جمع‌بندی، و k را اندیس جمع‌بندی[2] گویند. به جای k هر حرف دیگری را نیز می‌توان به کار برد. مثلاً

$$\sum_{j=۱}^{۴} j^{۳} \ , \ \sum_{n=۱}^{۴} n^{۳} \ , \ \sum_{i=۱}^{۴} i^{۳} \ , \ \sum_{k=۱}^{۴} k^{۳}$$

همگی نمایشگر مجموع زیر هستند.

$$۱^{۳} + ۲^{۳} + ۳^{۳} + ۴^{۳}$$

تذکر ۳. اگر حد بالا و حد پایین سیگما یکسان باشند در این صورت سیگما یک جمله خواهد داشت، یعنی

$$\sum_{k=n}^{n} f(k) = f(n)$$

مثال:

$$\sum_{k=۳}^{۳} \frac{۱}{k^{۲}+۱} = \frac{۱}{۳^{۲}+۱} = \frac{۱}{۱۰} \qquad \square$$

تذکر ۴. اگر در یک جمع‌بندی که با نماد $\sum$ نوشته شده است، جمله عمومی آن فاقد متغیر باشد در این صورت تمام جملات را یکی می‌گیرند. مثلاً

$$\sum_{k=۱}^{۵} ۲ = ۲+۲+۲+۲+۲$$

در واقع در مجموع $\sum\limits_{k=۱}^{n} c$ که در آن c وابسته به k نیست، تابع $f(k)$ تابع ثابت $f(k) = c$ است، بنابراین

$$f(۱) = f(۲) = \cdots = f(n) = c$$

پس :

$$\sum_{k=۱}^{n} c = \underbrace{c + c + \cdots + c}_{n\text{تا}}$$

به مثالهای زیر توجه کنید.

$$a) \sum_{k=-۳}^{۱} k^{۴} = (-۳)^{۴} + (-۲)^{۴} + (-۱)^{۴} + (۰)^{۴} + ۱^{۴}$$

1.Lower and upper limits of summation 2.Index of summation

$$b)\sum_{k=1}^{3} k\sin\frac{k\pi}{5} = \sin\frac{\pi}{5} + 2\sin\frac{2\pi}{5} + 3\sin\frac{3\pi}{5}$$

$$c)\sum_{i=1}^{5}(x_i - x_{i-1}) = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + (x_4 - x_3) + (x_5 - x_4)$$

$$d)\sum_{i=1}^{n} a(r)^{i-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \qquad \square$$

مثال: مجموع زیر را با نماد سیگما نشان دهید

$$1(1+2) + 2(2+2) + 3(3+2) + \cdots + n(n+2)$$

حل: تابعی که تک‌تک جملات را می‌سازد عبارت است از $f(k) = k(k+2)$ که در آن k از ۱ شروع شده و به n ختم می‌شود، پس این مجموع را می‌توان به صورت زیر نشان داد.

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+2) \qquad \square$$

مثال: مجموع زیر را با نماد سیگما نشان دهید

$$(\frac{6}{n})^2(\frac{6}{n}) + (2\times\frac{6}{n})^2(\frac{6}{n}) + (3\times\frac{6}{n})^2(\frac{6}{n}) + \cdots + [(n-1)\frac{6}{n}]^2(\frac{6}{n})$$

حل: جمله عمومی این مجموع بر حسب k عبارت است از

$$f(k) = (k\cdot\frac{6}{n})^2(\frac{6}{n})$$

که k از ۱ تا $(n-1)$ تغییر می‌کند. پس مجموع فوق به صورت زیر نشان داده می‌شود

$$\sum_{k=1}^{n-1}(k\cdot\frac{6}{n})^2(\frac{6}{n}) \qquad \square$$

چند مجموع مهم

$$1)\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2)\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$۳)\ \sum_{k=۱}^{n} k^{۳} = ۱^{۳} + ۲^{۳} + ۳^{۳} + \cdots + n^{۳} = \left[\frac{n(n+۱)}{۲}\right]^{۲}$$

$$۴)\ \sum_{k=۱}^{n} k^{۴} = ۱^{۴} + ۲^{۴} + ۳^{۴} + \cdots + n^{۴} = \frac{۱}{۵}n^{۵} + \frac{۱}{۲}n^{۴} + \frac{۱}{۳}n^{۳} - \frac{۱}{۳۰}n$$

$$۵)\ \sum_{k=۱}^{n} k^{۵} = ۱^{۵} + ۲^{۵} + ۳^{۵} + \cdots + n^{۵} = \frac{۱}{۶}n^{۶} + \frac{۱}{۲}n^{۵} + \frac{۵}{۱۲}n^{۴} - \frac{۱}{۱۲}n^{۲}$$

$$۶)\ \sum_{k=۱}^{n} k^{۶} = ۱^{۶} + ۲^{۶} + ۳^{۶} + \cdots + n^{۶} = \frac{۱}{۷}n^{۷} + \frac{۱}{۲}n^{۶} + \frac{۱}{۲}n^{۵} - \frac{۱}{۶}n^{۳} + \frac{۱}{۴۲}n$$

$$۷)\ \sum_{k=۱}^{n} k^{۷} = ۱^{۷} + ۲^{۷} + ۳^{۷} + \cdots + n^{۷} = \frac{۱}{۸}n^{۸} + \frac{۱}{۲}n^{۷} + \frac{۷}{۱۲}n^{۶} - \frac{۷}{۲۴}n^{۴} + \frac{۱}{۱۲}n^{۲}$$

۲-۲ خواص نماد سیگما

۳-۲ قضیه

$$\boxed{\sum_{k=۱}^{n}(x_k + y_k) = \sum_{k=۱}^{n} x_k + \sum_{k=۱}^{n} y_k}$$

اثبات :

$$\begin{aligned}\sum_{k=۱}^{n}(x_k + y_k) &= (x_۱ + y_۱) + (x_۲ + y_۲) + \cdots + (x_n + y_n) \\ &= (x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n) + (y_۱ + y_۲ + \cdots + y_n) \\ &= \sum_{k=۱}^{n} x_k + \sum_{k=۱}^{n} y_k \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

۴-۲ قضیه

اگر λ یک عدد حقیقی ثابت باشد، آنگاه

$$\boxed{\sum_{k=۱}^{n} \lambda x_k = \lambda \sum_{k=۱}^{n} x_k}$$

اثبات :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda x_k = \lambda x_1 + \lambda x_2 + \cdots + \lambda x_n$$
$$= \lambda(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$
$$= \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k \qquad \blacksquare$$

مثال:

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ij} y_{jk} = x_{ij} \sum_{k=1}^{n} y_{jk}$$

در اینجا x_{ij} وابسته به اندیس سیگما یعنی k نیست، بنابراین مانند یک عدد حقیقی ثابت است. $\square$

مثال: مطلوب است محاسبهٔ $\sum_{k=1}^{n} 4k$.

حل:

$$\sum_{k=1}^{n} 4k = 4\sum_{k=1}^{n} k$$
$$= 4\frac{n(n+1)}{2}$$
$$= 2n(n+1) \qquad \square$$

۲-۵ قضیه

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} 1 = n}$$

اثبات: در واقع در $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ ، $f(k)$ تابع ثابت $f(k) = 1$ است، بنابراین

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\text{۱ تا } n} = n \qquad \blacksquare$$

۲-۶ نتیجه

اگر c یک عدد حقیقی ثابت باشد، آنگاه

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} c = nc}$$

اثبات:

$$\sum_{k=1}^{n} c = c\sum_{k=1}^{n} 1$$
$$= nc \quad \blacksquare$$

۲-۷ نتیجه

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n} c = (n-m+1)c}$$

اثبات: کافی است توجه شود که از عدد صحیح m تا خود n، به تعداد $(n-m+1)$ عدد صحیح وجود دارد. □

مثال: مطلوب است محاسبه مجموع زیر.

$$S = 1+3+5+7+\cdots+(2n+1)$$

حل: نخست مجموع را با نماد $\sum$ نشان می‌دهیم. در اینجا تابع $f(k)$ عبارت است از $f(k) = 2k+1$ که در آن k از ۱ تا n تغییر می‌کند. پس

$$S = 1+3+5+7+\cdots+(2n-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} 2k - \sum_{k=1}^{n} 1 \qquad \text{بنا بر قضیه ۲.۳}$$
$$= 2\sum_{k=1}^{n} k - n \qquad \text{بنا بر قضیه ۲.۴}$$
$$= n(n+1) - n$$
$$= n^2 \quad \square$$

۲-۸ قضیه

اگر $m \le n < p$، آنگاه

$$\boxed{\sum_{k=m}^{p} x_k = \sum_{k=m}^{n} x_k + \sum_{k=n+1}^{p} x_k}$$

اثبات:

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{p} x_k &= (x_m + x_{m+1} + \cdots + x_n + x_{n+1} + \cdots + x_p)\\ &= (x_m + x_{m+1} + \cdots + x_n) + (x_{n+1} + \cdots + x_p)\\ &= \sum_{k=m}^{n} x_k + \sum_{k=n+1}^{p} x_k \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

نتیجه:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n+1} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}}$$

یک مجموع را می‌توان با تغییر جمله عمومی و حدود سیگما به بیش از یک روش نشان داد. مثلاً، مجموع اولین ۵ عدد زوج مثبت را می‌توان به صورتهای زیر نشان داد.

$$\sum_{k=1}^{5} 2k = 2 + 4 + 6 + 8 + 10$$

$$\sum_{k=0}^{4} (2k + 2) = 2 + 4 + 6 + 8 + 10$$

$$\sum_{k=2}^{6} (2k - 2) = 2 + 4 + 6 + 8 + 10$$

این امر از آنجا ناشی می‌شود که تابعی که مقادیر ۲ و ۴ و ۶ و ۸ و ۱۰ را تولید می‌کند، یکتا نیست. برای مثال می‌دانیم که اعداد فرد را به صورتهای مختلف می‌توان نشان داد، که برخی از آنها عبارت‌اند از:

$$2k + 3\ ,\ 2k + 1\ ,\ 2k - 1$$

برای تعویض حدود یک سیگما ابتدا به مثال زیر توجه کنید.

مثال: مجموع $\sum_{k=3}^{7} 5^{k-2}$ را به مجموعی تبدیل کنید که حد پایین آن صفر باشد.

حل: اندیس جدید j را تعریف می‌کنیم.

$$j = k - 3$$

در این صورت وقتی k از ۳ تا ۷ تغییر می‌کند، j از ۰ تا ۴ تغییر خواهد کرد. همچنین، $k = j + 3$، پس

$5^{j+1} = 5^{(j+3)-2} = 5^{k-2}$، در نتیجه

$$\sum_{k=3}^{7} 5^{k-2} = \sum_{j=0}^{4} 5^{j+1} \qquad \square$$

معمولاً در این گونه موارد، وقتی اندیس را عوض می‌کنیم، برای زیاد نشدن اندیسها ترجیح می‌دهیم که در آخر دوباره به‌جای j، از همان k استفاده کنیم و برای همین به‌جای $\sum_{j=0}^{4} 5^{j+1}$ می‌نویسیم.

$$\sum_{k=0}^{4} 5^{k+1}$$

بنابراین،

$$\sum_{k=3}^{7} 5^{k-2} = \sum_{k=0}^{4} 5^{k+1}$$

به طور کلی داریم

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \sum_{k=p}^{n+p} f(k-p)$$

بنابراین قضیهٔ زیر برقرار است.

۲-۹ قضیه

$$\boxed{\sum_{j=m}^{n} x_j = \sum_{j=m+p}^{n+p} x_{j-p}}$$

مثال: مجموع $2^5 + \cdots + 2^2 + 2^1 + 2^0$ را با نماد $\sum$ به گونه‌ای بنویسید که:

الف) حد پایین، $j = 0$ باشد.

ب) حد پایین، $j = 3$ باشد.

حل:

الف) تابع مورد نظر $f(j) = 2^j$ است که با تغییر j از صفر تا ۵ کلیهٔ جملات مجموع تولید می‌شوند، پس

$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^5 = \sum_{j=0}^{5} 2^j$$

ب) با توجه به قضیه ۲.۹، اگر بخواهیم «$j = 3$» حد پایین باشد به حد بالا و پایین ۳ واحد اضافه

می‌کنیم و در ۲^j به جای j قرار می‌دهیم $j - ۳$، بنابراین

$$۲^{۰} + ۲^{۱} + \cdots + ۲^{۵} = \sum_{j=۳}^{۸} ۲^{j-۳} \qquad \square$$

۲ـ۱۰ جمع تلسکوپی[۱] (قاعدهٔ ادغام)

در بعضی مجموعها هر جمله بخشی از جمله بعدی را حذف می‌کند مانند مجموع زیر

$$(x_{۱} - x_{۰}) + (x_{۲} - x_{۱}) + (x_{۳} - x_{۲}) + (x_{۴} - x_{۳}) + (x_{۵} - x_{۴})$$

این نوع مجموعها را **جمع تلسکوپی** نامند. در این مجموعها تنها بخشی از جمله اول و بخشی از جمله آخر باقی می‌ماند.

مثال:

$$\sum_{k=۵}^{۹}(۳^{k-۱} - ۳^{k}) = (۳^{۴} - ۳^{۵}) + (۳^{۵} - ۳^{۶}) + (۳^{۶} - ۳^{۷}) + (۳^{۷} - ۳^{۸}) + (۳^{۸} - ۳^{۹})$$
$$= ۳^{۴} - ۳^{۹}$$

به طور کلی داریم

۲ـ۱۱ قضیه

$$\boxed{\sum_{k=۱}^{n}(a_{k-۱} - a_{k}) = a_{۰} - a_{n}}$$

اثبات:

$$\sum_{k=۱}^{n}(a_{k-۱} - a_{k}) = (a_{۰} - a_{۱}) + (a_{۱} - a_{۲}) + (a_{۲} - a_{۳}) + \cdots + (a_{n-۲} - a_{n-۱}) +$$
$$(a_{n-۱} - a_{n}) = a_{۰} - a_{n} \qquad \blacksquare$$

جمع تلسکوپی در مواردی به کار می‌رود که تابع مورد نظر به صورت تفاضل دو جمله متوالی باشد یعنی به صورت $f(k) - f(k+۱)$. در این صورت نهایتاً جمله اول و آخر باقی می‌ماند به این صورت که حد پایین را در $f(k)$ و حد بالا را در $f(k+۱)$ قرار می‌دهیم و از آن کم می‌کنیم.

۱.Telescoping or collapsing sum

مثال:

$$\sum_{k=5}^{11}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{5}-\frac{1}{12}$$

مثال:

الف) نشان دهید

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

ب) مجموع زیر را حساب کنید.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$

ج) مطلوب است محاسبه حد زیر.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$

حل:

الف)

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1+k-k}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

ب)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\\&=\frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

ج)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1 \qquad \square$$

۲-۱۲ سیگمای دوگانه[1] و چندگانه

مثال: مجموع زیر را در نظر بگیرید.

$$S=(a_{11}+a_{12}+a_{13})+(a_{21}+a_{22}+a_{23})+(a_{31}+a_{32}+a_{33})+(a_{41}+a_{42}+a_{43})$$

1.Double sum

این مجموع را به صورت زیر می‌توان نوشت.

$$S = \sum_{j=1}^{3} a_{1j} + \sum_{j=1}^{3} a_{2j} + \sum_{j=1}^{3} a_{3j} + \sum_{j=1}^{3} a_{4j}$$

هر یک از جملات مجموع فوق به صورت $\sum_{j=1}^{3} a_{ij}$ می‌باشند که در آن، با قراردادن ۱ و ۲ و ۳ و ۴ به جای i، به ترتیب جملات اول و دوم و سوم و چهارم به دست می‌آیند، پس

$$S = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}$$

مجموعهایی از این نوع را **جمع دوگانه** می‌نامند.

از طرف دیگر، مجموع فوق را به صورت زیر نیز می‌توان دسته‌بندی کرد.

$$\begin{aligned} S &= (a_{11} + a_{21} + a_{31} + a_{41}) + (a_{12} + a_{22} + a_{32} + a_{42}) + (a_{13} + a_{23} + a_{33} + a_{43}) \\ &= \sum_{i=1}^{4} a_{i1} + \sum_{i=1}^{4} a_{i2} + \sum_{i=1}^{4} a_{i3} \\ &= \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{4} a_{ij} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{4} a_{ij} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}$$

به طور کلی به سادگی می‌توان برقراری قضیه زیر را نشان داد.

۲ـ۱۳ قضیه

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}}$$

توجه کنید که تفاوت بین $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ و $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$ در نوع جمع زدن است که در زیر ملاحظه می‌کنید. فرض کنید می‌خواهیم ۱۲ عدد زیر را با هم جمع کنیم. یک بار نخست سطرها را جمع می‌کنیم، سپس مجموع سطرها را جمع می‌کنیم.

$$\begin{array}{lcl} a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14} & \rightarrow & \sum_{j=1}^{4} a_{1j} \\ a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24} & \rightarrow & \sum_{j=1}^{4} a_{2j} \\ a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34} & \rightarrow & \sum_{j=1}^{4} a_{3j} \\ \hline & & \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} a_{ij} \end{array}$$

اگر نخست ستونها را جمع کنیم و بعد این مجموع را حساب کنیم، داریم

$$\begin{array}{cccc} a_{11}+ & a_{12}+ & a_{13}+ & a_{14}+ \\ a_{21}+ & a_{22}+ & a_{23}+ & a_{24}+ \\ a_{31}+ & a_{32}+ & a_{33}+ & a_{34}+ \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_{i1}+\sum_{i=1}^{3} a_{i2}+\sum_{i=1}^{3} a_{i3}+\sum_{i=1}^{3} a_{i4}=\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3} a_{ij}$$

مثال:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} 1 = nm$$

زیرا :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} 1 &= \sum_{j=1}^{m} n \\ &= n\sum_{j=1}^{m} 1 \\ &= nm \qquad \square \end{aligned}$$

مثال: مطلوب است محاسبه مجموع زیر

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{14}{n^2}$$

حل:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{14}{n^2}=\frac{14}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}1$$
$$=\frac{14}{n^2}\cdot n^2$$
$$=14 \qquad \square$$

مسائل تکمیلی در مورد سیگما

مسئله ۲-۱۴

الف) نخست مجموع $\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{8j}{n^3}$ را حساب کنید و سپس نشان دهید.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{8j}{n^3}=\frac{4(n+1)}{n}$$

ب) ثابت کنید.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{2i}{n^3}=\frac{n+1}{n}$$

ج) ثابت کنید.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{14}{n^2}+\frac{2i}{n^3}+\frac{8j}{n^3}\right)=19$$

مسئله ۲-۱۵

الف) مطلوب است محاسبه جمع زیر.

$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}1$$

ب) مطلوب است محاسبه مجموع زیر.

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^4}$$

مسئله ۲-۱۶

نشان دهید $\sum\limits_{i=1}^{2}\sum\limits_{j=1}^{2}a_{ij}x_ix_j$ عبارتی درجه دوم بر حسب x_1 و x_2 است.

۲-۱۷ مسئله

تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{h=1}^{m} b_{kh}c_{hj}\right) = \sum_{h=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kh}\right)c_{hj}$$

۲-۱۸ مسئله

با توجه به تساوی $i^3 - (i-1)^3 = 3i^2 - 3i + 1$، مجموع زیر را حساب کنید.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

۲-۱۹ مسئله

مجموع زیر را با نماد سیگما نشان دهید.

$$\begin{aligned} S = {} & (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \cdots + a_{in}b_{n1})(c_{11}d_{1j} + c_{12}d_{2j} + \cdots + c_{1q}d_{qj}) \\ & + (a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \cdots + a_{in}b_{n2})(c_{21}d_{1j} + c_{22}d_{2j} + \cdots + c_{2q}d_{qj}) + \cdots \\ & + (a_{i1}b_{1p} + a_{i2}b_{2p} + \cdots + a_{in}b_{np})(c_{p1}d_{1j} + c_{p2}d_{2j} + \cdots + c_{pq}d_{qj}) \end{aligned}$$

۲-۲۰ مسئله

نخست مجموع $\sum_{k=1}^{n} \log \frac{k(k+2)}{(k+1)^2}$ را حساب کنید و سپس حد زیر را بیابید.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}$$

۲-۲۱ مسئله

مجموع زیر را حساب کنید.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{1}{k(k+1)}}{\cos\frac{1}{k}\cdot\cos\frac{1}{k+1}}$$

حل مسائل تکمیلی در مورد سیگما

حل مسئلهٔ ۲.۱۴

الف)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n}\frac{8j}{n^3} &= \frac{8}{n^3}\sum_{j=1}^{n} j \\ &= \frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{4(n+1)}{n^2} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}\frac{۸j}{n^۳}=\sum_{i=۱}^{n}\frac{۴(n+۱)}{n^۲}$$
$$=\frac{۴(n+۱)}{n^۲}\sum_{i=۱}^{n}۱$$
$$=\frac{۴(n+۱)}{n}$$

ب)

$$\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}\frac{۲i}{n^۳}=\frac{۲}{n^۳}\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}i$$
$$=\frac{۲}{n^۳}\sum_{i=۱}^{n}\frac{n(n+۱)}{۲}$$
$$=\frac{(n+۱)}{n^۲}\sum_{i=۱}^{n}۱$$
$$=\frac{n+۱}{n}$$

ج)

$$\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}(\frac{۱۴}{n^۲}+\frac{۲i}{n^۳}+\frac{۸j}{n^۳})$$
$$=\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}\frac{۱۴}{n^۲}+\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}\frac{۲i}{n^۳}+\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}\frac{۸j}{n^۳}$$
$$=۱۴+\frac{۴(n+۱)}{n}+\frac{n+۱}{n}$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}(\frac{۱۴}{n^۲}+\frac{۲i}{n^۳}+\frac{۸j}{n^۳})=۱۴+۴+۱=۱۹ \quad \square$$

حل مسئلهٔ ۱۵.۲

الف)

$$\sum_{t=۱}^{n}\sum_{k=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}\sum_{i=۱}^{n}۱=\sum_{t=۱}^{n}\sum_{k=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}n$$
$$=\sum_{t=۱}^{n}\sum_{k=۱}^{n}n^۲$$
$$=\sum_{t=۱}^{n}n^۳$$
$$=n^۴$$

ب)
$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^4}=\frac{1}{n^4}\sum_{p=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} i$$
$$=\frac{1}{n^4}\sum_{p=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n+1}{2n^3}\sum_{p=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1$$
$$=\frac{n^4(n+1)}{2n^3}$$
$$=\frac{n(n+1)}{2} \qquad \square$$

حل مسئلهٔ ۲.۱۶

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{2}(a_{i1}x_ix_1+a_{i2}x_ix_2)$$
$$=\sum_{i=1}^{2}a_{i1}x_ix_1+\sum_{i=1}^{2}a_{i2}x_ix_2$$
$$=(a_{11}x_1x_1+a_{21}x_2x_1)+(a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2x_2)$$
$$=a_{11}x_1^2+(a_{21}+a_{12})x_1x_2+a_{22}x_2^2 \qquad \square$$

حل مسئله ۲.۱۷

بنا بر قضیه ۲.۴
$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(\sum_{h=1}^{m}b_{kh}c_{hj})=\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{m}(a_{ik}b_{kh}c_{hj})$$
بنا بر قضیه ۲.۱۳
$$=\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kh}c_{hj})$$
بنا بر قضیه ۲.۴ $\square$
$$=\sum_{h=1}^{m}(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kh})c_{hj}$$

حل مسئلهٔ ۲.۱۸. عملاً می‌بایست $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2$ را حساب کنیم.

$$i^3-(i-1)^3=3i^2-3i+1$$

درنتیجه
$$\sum_{i=1}^{n}(3i^2-3i+1)=\sum_{i=1}^{n}[i^3-(i-1)^3]$$
طرف دوم را با توجه به جمع تلسکوپی ساده می‌کنیم، در نتیجه

$$۳\sum i^۲ - ۳\sum i + \sum ۱ = n^۳ - ۰^۳$$

بنابراین

$$۳\sum i^۲ = \frac{۳n(n+۱)}{۲} - n + n^۳$$

پس

$$\sum i^۲ = \frac{n(n+۱)}{۲} - \frac{n}{۳} + \frac{n^۳}{۳} = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶} \qquad \square$$

حل مسئلهٔ ۲.۱۹ . نخست مجموع فوق را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$S = (\sum_{k=۱}^{n} a_{ik}b_{k۱})(\sum_{h=۱}^{q} c_{۱h}d_{hj}) + (\sum_{k=۱}^{n} a_{ik}b_{k۲})(\sum_{h=۱}^{q} c_{۲h}d_{hj}) + \cdots$$
$$+ (\sum_{k=۱}^{n} a_{ik}b_{kp})(\sum_{h=۱}^{q} c_{ph}d_{hj})$$

بنابراین

$$S = \sum_{l=۱}^{p}(\sum_{k=۱}^{n} a_{ik}b_{kl})(\sum_{h=۱}^{q} c_{lh}d_{hj}) \qquad \square$$

حل مسئلهٔ ۲. ۲۰ . ابتدا، جمله عمومی مجموع را به شکل زیر می‌نویسیم

$$\begin{aligned}\log\frac{k(k+۲)}{(k+۱)^۲} &= \log(\frac{k}{k+۱}\cdot\frac{k+۲}{k+۱})\\ &= \log\frac{k}{k+۱} + \log\frac{k+۲}{k+۱}\\ &= \log\frac{k}{k+۱} - \log\frac{k+۱}{k+۲}\end{aligned}$$

بنابراین با توجه به جمع تلسکوپی داریم

$$\begin{aligned}\sum_{k=۱}^{n}\log\frac{k(k+۲)}{(k+۱)^۲} &= \sum_{k=۱}^{n}(\log\frac{k}{k+۱} - \log\frac{k+۱}{k+۲})\\ &= \log\frac{۱}{۲} - \log\frac{n+۱}{n+۲}\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=۱}^{n}\log\frac{k(k+۲)}{(k+۱)^۲} &= \lim_{n\to\infty}[\log\frac{۱}{۲} - \log\frac{n+۱}{n+۲}]\\ &= \log\frac{۱}{۲} - \log ۱\\ &= \log\frac{۱}{۲} \qquad \square\end{aligned}$$

حل مسئلهٔ ۲.۲۱. نخست $\frac{1}{k(k+1)}$ را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

سپس با استفاده از فرمول $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$ داریم

$$\begin{aligned}\sin\frac{1}{k(k+1)}&=\sin\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\sin\frac{1}{k}\cos\frac{1}{k+1}-\sin\frac{1}{k+1}\cos\frac{1}{k}\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{\sin\frac{1}{k(k+1)}}{\cos\frac{1}{k}\cdot\cos\frac{1}{k+1}}&=\frac{\sin\frac{1}{k}\cos\frac{1}{k+1}-\sin\frac{1}{k+1}\cos\frac{1}{k}}{\cos\frac{1}{k}\cdot\cos\frac{1}{k+1}}\\&=\tan\frac{1}{k}-\tan\frac{1}{k+1}\end{aligned}$$

و با توجه به جمع تلسکوپی خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{1}{k(k+1)}}{\cos\frac{1}{k}\cdot\cos\frac{1}{k+1}}&=\sum_{k=1}^{n}\left(\tan\frac{1}{k}-\tan\frac{1}{k+1}\right)\\&=\tan 1-\tan\frac{1}{n+1}\qquad\square\end{aligned}$$

تمرینات فصل ۲

در هر یک از تمرینات زیر از نماد سیگما برای نمایش مجموع داده شده استفاده کنید.

۱) $3+2(\frac{1}{2})+2(\frac{1}{4})+2(\frac{1}{8})+\cdots+2(\frac{1}{64})$

۲) $(1)^2(2-1)+2^2(3-2)+3^2(4-3)+\cdots+6^2(7-6)$

۳) $62{,}5\pi[2\sqrt{\frac{9}{4}-y_0^2}(6-y_1)(y_1-y_0)+2\sqrt{\frac{9}{4}-y_1^2}(6-y_2)(y_2-y_1)+\cdots$
$+2\sqrt{\frac{9}{4}-y_{n-1}^2}(6-y_n)(y_n-y_{n-1})]$

۴) $1-3+5-7+9-11$

۵) $a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5$

۶) $n![1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}]$

در هر یک از تمرینات زیر مجموع داده شده را با نوشتن تک‌تک جملات بنویسید

۷) $\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i^2}$

۸) $\sum_{k=4}^{10} k \cdot 3^{k-1}$

۹) $\sum_{k=1}^{5} k(k+1)$

۱۰) $\sum_{k=1}^{n} kx^k$

در هر یک از تمرینات زیر مقادیر مجموع داده شده را حساب کنید.

۱۱) $\sum_{i=1}^{7} (2i+3)$

۱۲) $\sum_{i=2}^{7} (-1)^{i+1} \cdot 2^i$

۱۳) $\sum_{i=1}^{4} 8i^2$

۱۴) $\sum_{k=5}^{10} (2k-1)^2$

۱۵) $\sum_{j=4}^{7} \frac{1}{j(j-3)}$

۱۶) $\sum_{j=0}^{5} (-1)^j$

۱۷) $\sum_{i=7}^{20} \pi$

۱۸) $\sum_{m=3}^{5} 2^{m+1}$

۱۹) $\sum_{k=3}^{100} k$

۲۰) $\sum_{k=1}^{100} (7k+1)$

۲۱) $\sum_{k=۱}^{۲۰} k^{۲}$

۲۲) $\sum_{k=۱}^{۶}(۴k^{۳} - ۲k + ۱)$

۲۳) $\sum_{k=۱}^{۶}(k - k^{۳})$

۲۴) $\sum_{k=۱}^{۳۰} k(k - ۲)(k + ۲)$

۲۵) $\sum_{j=۰}^{m} m$

۲۶) $\sum_{i=۱}^{n} i^{۲}c$

۲۷) $\sum_{i=۰}^{n}(-۳)$

۲۸) $\sum_{i=۱}^{n}[(i + ۲)(۳i - ۵)]$

۲۹) $\sum_{i=۱}^{n} ۲i^{۲}(i - ۳)$

در هر یک از تمرینات زیر، فرمول داده شده را ثابت کنید.

۳۰) $\sum_{k=۱}^{n}(۳k - ۲) = \frac{n(۳n - ۱)}{۲}$

۳۱) $\sum_{i=۱}^{n}(۵k - ۱) = \frac{n(۵n + ۳)}{۲}$

در هر یک از تمرینات زیر، فرمول داده شده را ثابت کنید.

۳۲) $\sum_{i=۱}^{n} \frac{i}{n^{۲}} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲n}$

۳۳) $\sum_{i=۱}^{n} \frac{i^{۲}}{n^{۳}} = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲n} + \frac{۱}{۶n^{۲}}$

۳۴) $\sum_{k=۱}^{n}[۱ + (k - ۱)\frac{۲}{n}]^{۲}(\frac{۲}{n}) = ۲[۱ + ۲(۱ - \frac{۱}{n}) + \frac{۲}{۳}(۲ - \frac{۳}{n} + \frac{۱}{n^{۲}})]$

۳۵) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}$$

۳۶) $$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2$$

۳۷) $$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{1}{3}(n^3 - n)$$

۳۸) $$\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^3 = 2n^4 - n^2$$

۳۹) مجموع $\sum_{k=4}^{18} k(k-3)$ را به گونه‌ای نمایش دهید که

الف) حد پایین $k = 0$ باشد.

ب) حد پایین $k = 5$ باشد.

۴۰) مجموع $\sum_{k=5}^{9} k \cdot 2^{k+4}$ را به گونه‌ای نمایش دهید که

الف) حد پایین $k = 1$ باشد.

ب) حد بالا $k = 3$ باشد.

با استفاده از جمع تلسکوپی مجموعهای زیر را حساب کنید.

۴۱) $$\sum_{k=1}^{50} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

۴۲) $$\sum_{k=5}^{17} (3^k - 3^{k-1})$$

۴۳) $$\sum_{k=1}^{100} (2^{k+1} - 2^k)$$

۴۴) $$\sum_{k=2}^{20} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k-1)^2}\right)$$

۴۵) درستی تساوی زیر را ثابت کنید :

$$(x+y)\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} y^k = a_0 x^{n+1} + a_n y^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k + a_{k+1}) x^{n-k} y^{k+1}$$

فصل ۳

ضرب ماتریسها و خواص آن

۳ـ۱ ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی[1]

تعریف: ماتریس سطری $A = [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}]$ و ماتریس ستونی

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

را در نظر می‌گیریم. حاصل‌ضرب A در B به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$AB = [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}] \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

با توجه به‌تعریف فوق حاصل‌ضرب یک ماتریس سطری در ماتریس ستونی یک عدد حقیقی است که برای به‌دست آوردن آن به‌صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$AB = (A_{\text{درایه اول}} \times B_{\text{درایه اول}}) + (A_{\text{درایه دوم}} \times B_{\text{درایه دوم}}) + \cdots + (A_{\text{درایه }n\text{ام}} \times B_{\text{درایه }n\text{ام}})$$

یعنی،

---

1. Row by column multiplication

$$AB = \text{مجموع}(A \text{ درایه } k\text{ام} \times B \text{ درایه } k\text{ام})$$

اما درایه kام A به‌صورت $a_{۱k}$ و درایه kام B به‌صورت $b_{k۱}$ است، بنابراین

$$\boxed{\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{۱۱} \\ b_{۲۱} \\ \vdots \\ b_{n۱} \end{bmatrix} = \sum_{k=۱}^{n} a_{۱k} b_{k۱}}$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} -۲ & ۴ & -۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \\ ۶ \end{bmatrix} = (-۲ \times ۵) + (۴ \times ۲) + (-۳ \times ۶) = -۲۰ \quad \square$$

مثال: اگر $B = [b_{ij}]_{n\times ۱}$ یک ماتریس ستونی باشد به‌طوری‌که $b_{j۱} = ۱$ و سایر درایه‌ها صفر باشد، و A یک ماتریس سطری $۱ \times n$ باشد، آنگاه AB عبارت است از

$$AB = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ \vdots \\ ۱ \\ ۰ \\ \vdots \\ ۰ \end{bmatrix} = (a_{۱۱} \times ۰) + (a_{۱۲} \times ۰) + \cdots + (a_{۱j} \times ۱) + \cdots + (a_{۱n} \times ۰) = a_{۱j} \quad \square$$

درایه jام

۳ـ۲ ضرب ماتریسها در حالت کلی

تعریف. اگر $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ و $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ دو ماتریس مفروض باشند در این صورت حاصل‌ضرب AB ماتریسی است $m \times p$ که اگر آن را با C نشان دهیم داریم

$$AB = C = [c_{ij}]_{m\times p}$$

که در آن،

$$c_{ij} = A \text{ سطر } i\text{ام} \times B \text{ ستون } j\text{ام}$$

یعنی

$$c_{ij} = [a_{i۱} \quad a_{i۲} \quad \cdots \quad a_{in}] \begin{bmatrix} b_{۱j} \\ b_{۲j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i۱}b_{۱j} + a_{i۲}b_{۲j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

به‌عبارت دیگر،

$$\boxed{AB \text{ درایه سطر } i \text{ام ستون } j\text{ام} = c_{ij} = \sum_{k=۱}^{n} a_{ik}b_{kj}}$$

ملاحظاتی در مورد ضرب دو ماتریس

۱. ضرب ماتریسی AB در صورتی تعریف شده است که تعداد ستونهای ماتریس اولی، یعنی A، با تعداد سطرهای ماتریس دومی، یعنی B، برابر باشد. در این صورت گویند ماتریس A در ماتریس B قابل ضرب[1] است.

۲. اگر $AB = C$ برای به‌دست آوردن هر یک از درایه‌های ماتریس C به محلی که درایه واقع است توجه می‌کنیم، مثلاً برای به‌دست آوردن $c_{۱۲}$ سطر اول A را در ستون دوم B، طبق ضرب یک ماتریس سطری در ماتریس ستونی، ضرب می‌کنیم، و به‌همین ترتیب

$$c_{۳۵} = A \text{ سطر سوم ماتریس } \times B \text{ ستون پنجم ماتریس}$$

اگر $R_۱$ و $R_۲$ و $R_۳$ به‌ترتیب نمایشگر سطر اول و دوم و سوم ماتریس $A_{۲\times۳}$ و $C_۱$ و $C_۲$ و $C_۳$ نمایشگر ستون اول و دوم و سوم ماتریس $B_{۲\times۲}$ باشند. در این صورت AB ماتریسی ۲×۲ به‌صورت زیر است.

$$AB = \begin{bmatrix} R_۱C_۱ & R_۱C_۲ \\ R_۲C_۱ & R_۲C_۲ \end{bmatrix}$$

که در آن، برای مثال، $R_۱C_۲$، حاصل‌ضرب سطر اول A در ستون دوم B را نشان می‌دهد. به‌عبارت دیگر،

$$AB = \begin{bmatrix} \sum\limits_{k=۱}^{۳} a_{۱k}b_{k۱} & \sum\limits_{k=۱}^{۳} a_{۱k}b_{k۲} \\ \sum\limits_{k=۱}^{۳} a_{۲k}b_{k۱} & \sum\limits_{k=۱}^{۳} a_{۲k}b_{k۲} \end{bmatrix}$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$، حاصل‌ضرب AB ماتریسی ۲×۲ به‌صورت زیر است.

1.multiplicatively conformable

$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{۱۱} & c_{۱۲} \\ c_{۲۱} & c_{۲۲} \end{bmatrix}$$

$$c_{۱۱} = [۱ \quad ۲ \quad ۳] \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} = ۱ + ۶ - ۳ = ۴$$

$$c_{۱۲} = [۱ \quad ۲ \quad ۳] \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۴ \end{bmatrix} = ۲ + ۲ + ۱۲ = ۱۶$$

$$c_{۲۱} = [-۱ \quad ۰ \quad ۲] \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} = -۱ + ۰ - ۲ = -۳$$

$$c_{۲۲} = [-۱ \quad ۰ \quad ۲] \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۴ \end{bmatrix} = -۲ + ۰ + ۸ = ۶$$

بنابراین،

$$AB = \begin{bmatrix} ۴ & ۱۶ \\ -۳ & ۶ \end{bmatrix} \quad \square$$

به‌شکلی دیگر، ضرب ماتریسها را می‌توانیم به‌صورت زیر نیز نمایش دهیم.

ستون jام

سطر iام

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & & a_{۱n} \\ \vdots & & \\ \boxed{a_{i۱} \quad \cdots \quad a_{in}} & & \\ \vdots & & \\ a_{m۱} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{۱۱} & \cdots & b_{۱j} & \cdots & b_{۱p} \\ b_{۲۱} & & b_{۲j} & & b_{۲p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n۱} & & b_{nj} & & b_{np} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=۱}^{n} a_{۱k} b_{k۱} & & \sum_{k=۱}^{n} a_{۱k} b_{kn} \\ & \boxed{\sum_{k=۱}^{n} a_{ik} b_{kj}} & \\ \sum_{k=۱}^{n} a_{mk} b_{k۱} & & \sum_{k=۱}^{n} a_{mk} b_{kn} \end{bmatrix}$$

مثال: در حاصل‌ضرب زیر درایه سطر دوم ستون سوم حساب شده است.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۷ \\ ۲ & ۴ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۴ & ۳ & ۱ \\ ۶ & ۲ & ۵ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \boxed{۲۹} & \square \end{bmatrix}$$

زیرا

$$c_{۲۳} = [۲ \quad ۴ \quad ۳] \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ ۵ \end{bmatrix} = ۲ + ۱۲ + ۱۵ = ۲۹ \quad \square$$

مثال: فرض کنید

$$A = [-۱ \quad ۲ \quad ۳] \qquad , \qquad B = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۵ \\ ۴ \end{bmatrix}$$

مطلوب است محاسبه AB و BA.

حل:

$$AB = [-۱ \quad ۲ \quad ۳] \begin{bmatrix} ۲ \\ -۵ \\ ۴ \end{bmatrix} = -۲ - ۱۰ + ۱۲ = ۰$$

$$BA = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۵ \\ ۴ \end{bmatrix} [-۱ \quad ۲ \quad ۳] = \begin{bmatrix} -۲ & ۴ & ۶ \\ ۵ & -۱۰ & -۱۵ \\ -۴ & ۸ & ۱۲ \end{bmatrix} \quad \square$$

مثال: فرض کنید $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{n \times p}$.

الف) درایه سطر سوم ستون چهارم $A(\lambda B)$را به‌دست آورید، که در آن λیک عدد حقیقی است.

ب) درایه سطر سوم ستون چهارم $\lambda(AB)$ را به‌دست آورید.

حل: الف)

$$A(\lambda B)\text{درایه سطر سوم ستون چهارم} = A\text{سطر سوم} \times (\lambda B)\text{ستون چهارم‌ماتریس}$$

$$= [a_{۳۱} \quad a_{۳۲} \quad \quad a_{۳n}] \begin{bmatrix} \lambda b_{۱۴} \\ \lambda b_{۲۴} \\ \vdots \\ \lambda b_{n۴} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{k=۱}^{n} a_{۳k}(\lambda b_{k۴})$$

$$= \lambda \sum_{k=۱}^{n} a_{۳k} b_{k۴}$$

ب)

$$\lambda(AB)_{\text{درایه سطر سوم ستون چهارم}} = \lambda(AB)_{\text{درایه سطر سوم ستون چهارم}}$$
$$= \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{3k} b_{k4} \quad \square$$

با مقایسه (الف) و (ب) می‌توانیم قضیه کلی زیر را نتیجه بگیریم.

۳ـ۳ قضیه

اگر r و s دو عدد حقیقی و A و B دو ماتریسی باشند که AB تعریف شده باشد، در این صورت

$$(rA)(sB) = (rs)AB$$

اثبات: نشان می‌دهیم

$$\text{درایه سطر } i\text{ام ستون } j\text{ام ماتریس} (rA)(sB) = \text{درایه سطر } i\text{ام ستون } j\text{ام ماتریس} (rs)AB$$

برای این‌کار داریم.

$$\text{درایه سطر } i\text{ام ستون } j\text{ام ماتریس} (rA)(sB) = (\text{سطر } i\text{ام ماتریس} rA)(\text{ستون } j\text{ام ماتریس} sB)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (ra_{ik})(sb_{kj})$$
$$= (rs) \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$
$$= (rs)(AB)_{\text{درایه سطر } i\text{ام ستون } j\text{ام ماتریس}}$$
$$= (rs)AB_{\text{درایه سطر } i\text{ام ستون } j\text{ام}} \quad \blacksquare$$

۴ـ۳ نتیجه

اگر r یک عدد حقیقی باشد در این صورت داریم.

$$(rA)B = A(rB) = rAB$$

۵ـ۳ نتیجه

اگر A و B دو ماتریس قابل ضرب باشند، آنگاه

الف) $(-A)(-B) = AB$

ب) $A(-B) = -AB$

ج) $(-A)B = -AB$

ماتریس واحد[1] (همانی[2])

ماتریس واحد، ماتریس مربعی است که تمام درایه‌های قطر اصلی آن ۱ و سایر درایه‌ها صفر است. برای مثال ماتریس واحد ۲ × ۲ که با نماد $I_۲$ نمایش می‌دهیم، عبارت است از:

$$I_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

به‌همین ترتیب، ماتریس واحد ۳ × ۳ عبارت است از:

$$I_۳ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۳ـ۶ مسئله

فرض کنید I ماتریس واحد $n \times n$ و A یک ماتریس مربع مرتبه n باشد.

الف) درایه سطر دوم و ستون سوم IA را مشخص کنید.

ب) درایه سطر iام ستون jام IA را مشخص کنید و از آن نتیجه بگیرید $IA = A$.

حل: الف) سطر اول ماتریس I عبارت است $[۱ \quad ۰ \quad ۰ \quad \cdots \quad ۰]$ و سطر دوم آن به‌صورت $[۰ \quad ۱ \quad ۰ \quad \cdots \quad ۰]$ و بالاخره در سطر iام همه درایه‌ها صفرند، مگر $a_{ii} = ۱$. بنابراین

$$IA \text{ درایه سطر دوم ستون سوم } = [۰ \quad ۱ \quad ۰ \quad \quad ۰] \begin{bmatrix} a_{۱۳} \\ a_{۲۳} \\ \vdots \\ a_{n۳} \end{bmatrix}$$

$$= (۰ \cdot a_{۱۳}) + (۱ \cdot a_{۲۳}) + \cdots + (۰ \cdot a_{n۳}) = a_{۲۳}$$

ب) $$IA \text{ درایه سطر } i \text{ام ستون } j \text{ام ماتریس } = I \text{ سطر } i \text{ام ماتریس } \times A \text{ ستون } j \text{ام ماتریس }$$

$$= [\underset{}{۰} \quad ۰ \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{درایه } i\text{ام}}}{۱} \quad ۰ \quad ۰] \begin{bmatrix} a_{۱j} \\ a_{۲j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{درایه } j\text{ام} \\ \\ \\ \end{array}$$

---

1. Unit matrix
2. Identity matrix

$$= (0 \cdot a_{1j}) + (0 \cdot a_{2j}) + \cdots + (1 \cdot a_{ij}) + \cdots + (0 \cdot a_{nj})$$

$$= a_{ij}$$

$$= \text{درایه سطر } i\text{ام ستون } j\text{ام ماتریس} A$$

یعنی :

$$IA = A$$

به طریق مشابه ثابت می‌شود که

$$AI = A \quad \square$$

تذکر: ماتریس I را از اینرو، واحد گویند که رفتاری شبیه عدد ۱ در ضرب اعداد دارد و چون روی هر ماتریسی (قابل ضرب با آن) اثرکند همان ماتریس را می‌دهد بنابراین آن را ماتریس همانی نیز گویند.

۳ـ۷ گزاره

اگر در ماتریس A، سطر دوم صفر باشد و B ماتریسی باشد که AB تعریف شده باشد، در این صورت سطر دوم AB نیز صفر است.

اثبات: قرار می‌دهیم $AB = C$ درایه‌های سطر دوم AB از ضرب سطر دوم A در ستونهای B به‌دست می‌آید. فرض کنید c_{2j} درایه دلخواهی از سطر دوم AB باشد، بنابراین

$$c_{2j} = (\text{سطر دوم ماتریس} A)(\text{ستون } j\text{ام ماتریس} B)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$

$$= 0 \quad \blacksquare$$

به‌طورکلی، اگر در ماتریس A سطر iام صفر باشد در این صورت سطر iام ماتریس ABصفر است، یعنی

$$\begin{bmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0} \\ * & * & * & \cdots & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \\ * & * & & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * & & * \\ \vdots & & & & \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ * & * & * & & * \end{bmatrix}$$

سطر iام   سطر iام

به‌طریق مشابه می‌توان ثابت کرد که:

۳ـ۸ گزاره

اگر در ماتریس B ستون jام صفر باشد و A ماتریسی باشد که AB تعریف شده باشد، در این صورت ستون jام ماتریس AB صفر است. ■

مثال: فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & & ۱ \\ ۰ & ۰ & & ۰ \\ \vdots & & & \\ ۰ & ۰ & & ۰ \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & & ۰ \\ ۱ & ۰ & & ۰ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ۱ & ۰ & & ۰ \end{bmatrix}$$

دو ماتریس مربع $n \times n$ باشند. ماتریسهای AB و BA را مشخص کنید.

حل: چون سطر دوم و سوم و.... و سطر nام ماتریس A صفر است پس سطر دوم و سوم و... و سطر nام AB نیز صفر است. از طرف دیگر چون ستون دوم و سوم و... و nام B صفر است، لذا ستونهای دوم، سوم و... و nام AB صفر است. بنابراین کافی است درایه سطر اول ستون اول AB را به‌دست آوریم که عبارت است از:

$$\text{سطر اول}A \times \text{ستون اول}B = [۱ \quad ۱ \quad \cdots \quad ۱] \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ \vdots \\ ۱ \end{bmatrix} = ۱ + ۱ + \cdots + ۱ = n$$

در نتیجه،

$$AB = \begin{bmatrix} n & ۰ & & ۰ \\ ۰ & ۰ & & ۰ \\ \vdots & & & \\ ۰ & ۰ & & ۰ \end{bmatrix}$$

برای محاسبه BA قرار می‌دهیم

$$BA = D$$

$$\text{سطر اول ستون اول}BA = d_{۱۱} = \text{سطر اول}B \times \text{ستون اول}A$$

$$= [۱ \quad ۰ \quad \cdots \quad ۰] \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ \vdots \\ ۰ \end{bmatrix} = ۱$$

از آنجا که، کلیه سطرهای A یکسان و همچنین کلیه ستونهای B مشابه هم هستند، بنابر این همه

درایه‌های BA نیز مساویند، بنابراین

$$BA = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & & ۱ \\ ۱ & ۱ & & ۱ \\ \vdots & & & \\ ۱ & ۱ & & ۱ \end{bmatrix} \quad \square$$

۳ـ۹ مسئله

فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ و B و C ماتریسهای $n \times p$ باشند

الف) درایه سطر دوم ستون سوم $A(B+C)$ را مشخص کنید.

ب) درایه سطر دوم ستون سوم $AB+AC$ را مشخص کنید.

حل: الف)

$$A(B+C) \text{ درایه سطر دوم ستون سوم ماتریس} = A\text{سطر دوم ماتریس} \times (B+C)\text{ستون سوم ماتریس}$$

$$= [a_{۲۱} \quad a_{۲۲} \quad \quad a_{۲n}] \begin{bmatrix} b_{۱۳} + c_{۱۳} \\ b_{۲۳} + c_{۲۳} \\ \vdots \\ b_{n۳} + c_{n۳} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{k=۱}^{n} a_{۲k}(b_{k۳} + c_{k۳})$$

$$= \sum_{k=۱}^{n} (a_{۲k}b_{k۳} + a_{۲k}c_{k۳})$$

ب)

$$AB + AC \text{ درایه سطر دوم ستون سوم ماتریس} = AB\text{درایه سطر دوم ستون سوم} + AC\text{درایه سطر دوم ستون سوم}$$

$$= \sum_{k=۱}^{n} a_{۲k}b_{k۳} + \sum_{k=۱}^{n} a_{۲k}c_{k۳} \quad \square$$

۳ـ۱۰ مسئله

فرض کنید $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ و $B = [b_{ij}]_{n\times p}$.

الف) درایه سطر iام ستون اول AB را به‌دست آورید.

ب) درایه سطر iام ستون دوم AB را به‌دست آورید.

ج) به‌طورکلی سطر iام ماتریس AB را مشخص کنید.

حل:

الف)

$$\text{درایه سطر } i\text{ام ستون اول ماتریس } AB = \text{سطر } i\text{ام ماتریس } A \times \text{ستون اول ماتریس } B$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k1}$$

ب)

$$\text{درایه سطر } i\text{ام ستون دوم ماتریس } AB = \text{سطر } i\text{ام ماتریس } A \times \text{ستون دوم ماتریس } B$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k2}$$

ج) به‌طورکلی درایه‌های سطر iام ماتریس AB عبارتند از

$$\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k1} \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k2} \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k3} \qquad\qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kp} \right] \square$$

۳ـ۱۱ مسئله

اگر $C = [c_{ij}]_{p\times q}$ و $D = [d_{ij}]_{q\times r}$، ستون jام ماتریس CD را مشخص کنید.

حل:

$$\text{درایه سطر اول ستون } j\text{ام ماتریس } CD = \text{سطر اول ماتریس } C \times \text{ستون } j\text{ام ماتریس } D$$
$$= \sum_{k=1}^{q} c_{1k} d_{kj}$$
$$\text{درایه سطر دوم ستون } j\text{ام ماتریس } CD = \text{سطر دوم ماتریس } C \times \text{ستون } j\text{ام ماتریس } D$$
$$= \sum_{k=1}^{q} c_{2k} d_{kj}$$

نهایتاً ستون jام ماتریس CD عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{q} c_{1k} d_{kj} \\ \sum_{k=1}^{q} c_{2k} d_{kj} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{q} c_{pk} d_{kj} \end{bmatrix} \square$$

۳ـ۱۲ مسئله

فرض کنید $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ و $C=[c_{ij}]_{p\times q}$ باشد. درایه سطر سوم ستون چهارم $(AB)C$ را بیابید.

حل:

$$\text{درایه سطر سوم ستون چهارم ماتریس}(AB)C = \text{سطر سوم ماتریس}AB \times \text{ستون چهارم ماتریس}C$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{3k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{3k}b_{k2} & \sum_{k=1}^{n} a_{3k}b_{kp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{14} \\ c_{24} \\ \vdots \\ c_{p4} \end{bmatrix}$$

$$= (\sum_{k=1}^{n} a_{3k}b_{k1})c_{14} + (\sum_{k=1}^{n} a_{3k}b_{k2})c_{24} + \cdots + (\sum_{k=1}^{n} a_{3k}b_{kp})c_{p4}$$

$$= \sum_{h=1}^{p}(\sum_{k=1}^{n} a_{3k}b_{kh})c_{h4} \qquad \square$$

۳ـ۱۳ مسئله

فرض کنید $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ و $C=[c_{ij}]_{p\times q}$ و $D=[d_{ij}]_{q\times r}$ درایه سطر iام ستون jام ماتریس $(AB)(CD)$ را پیدا کنید.

حل:

$$\text{درایه سطر } i \text{ام ستون } j \text{ام ماتریس}(AB)(CD) = \text{سطر } i \text{ام ماتریس}AB \times \text{ستون } j \text{ام ماتریس}CD$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k2} & \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{h=1}^{q} c_{1h}d_{hj} \\ \sum_{h=1}^{q} c_{2h}d_{hj} \\ \\ \sum_{h=1}^{q} c_{ph}d_{hj} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{l=1}^{p}(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl})(\sum_{h=1}^{q} c_{lh}d_{hj}) \qquad \square$$

۳ـ۱۴ بررسی خاصیت جابجایی در ضرب ماتریسها

دو ماتریس A و B مفروضند. AB وقتی تعریف شده است که تعداد ستونهای A با تعداد سطرهای

B مساوی باشد. مثلاً داشته باشیم $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ و $B = [b_{ij}]_{n\times p}$. اگر m و p مساوی نباشند، BA تعریف نشده است، برای اینکه BA تعریف شده باشد لازم است که $p = m$، یعنی Bماتریس $n \times m$ باشد. در این صورت AB از مرتبه $m \times m$ و BA ماتریسی از مرتبه $n \times n$ است. حال اگر بخواهیم AB و BA هر دو موجود و هم مرتبه باشند می‌بایست A و B هر دو ماتریسهای مربع و هم مرتبه باشند. اما در این حالت نیز ممکن است $AB \neq BA$. به مثال زیر توجه کنید.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$، در این صورت داریم

$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & -۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌کنید که $AB \neq BA$. □

مثال فوق بیانگر آن است که *ضرب ماتریسها دارای خاصیت جابجایی نیست*. حال به مثال زیر توجه کنید.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۴ & -۷ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix}$، در این صورت

$$AB = \begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ & -۷ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱۳ & -۲۶ \\ ۲۶ & -۱۳ \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} ۴ & -۷ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱۳ & -۲۶ \\ ۲۶ & -۱۳ \end{bmatrix}$$

یعنی

$$AB = BA \cdot \quad \square$$

۳ـ۱۵ ماتریسهای تعویض‌پذیر[1]

تعریف. اگر A و B دو ماتریس مربع باشند به‌طوری‌که $AB = BA$، در این صورت A و B را تعویض‌پذیر گوییم، و یا گوییم A و B با یکدیگر جابه‌جا[2] می‌شوند.

مثال: دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیرند، زیرا

---

1. Commutative   2. Commute

$$AB = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ & ۰ \\ ۰ & ۱۵ \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ & ۰ \\ ۰ & ۱۵ \end{bmatrix} \quad \square$$

مثال: فرض کنید $A = \begin{bmatrix} k & ۰ \\ ۰ & k \end{bmatrix}$. نشان دهید هر ماتریس ۲ × ۲ با A جابه‌جا می‌شود، به عبارت دیگر، به ازاء هر ماتریس ۲ × ۲ مانند B داریم $AB = BA$.

حل: فرض کنید $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ یک ماتریس ۲ × ۲ دلخواه باشد، داریم

$$AB = \begin{bmatrix} k & ۰ \\ ۰ & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & ۰ \\ ۰ & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix} \quad \square$$

۳ـ۱۶ مسئله

اگر $A = \begin{bmatrix} a & ۰ \\ ۰ & b \end{bmatrix}$، کلیه ماتریسهایی را بیابید که با A تعویض‌پذیرند. (فرض کنید a و b دو عدد حقیقی متمایز و ناصفر باشند.)

حل: فرض کنید $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ ماتریسی باشد که برای آن $AB = BA$، بنابراین

$$\begin{bmatrix} a & ۰ \\ ۰ & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & ۰ \\ ۰ & b \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{bmatrix} ax & ay \\ bz & bt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & by \\ az & bt \end{bmatrix}$$

بنابه تعریف تساوی ماتریسها نتیجه می‌گیریم

$$\begin{cases} ay = by \\ bz = az \end{cases}$$

و از آنجا با توجه به آن که a و b ناصفر و متمایزند نتیجه می‌گیریم

$$\begin{cases} y = ۰ \\ z = ۰ \end{cases}$$

بنابراین ماتریس B به‌صورت صفحهٔ بعد است.

$$\begin{bmatrix} x & \cdot \\ \cdot & t \end{bmatrix} \quad \square$$

۳ـ۱۷ یک خاصیت غیر منتظره در ماتریسها (مقسوم علیه صفر[1] در مجموعه ماتریسهای مربع)

می‌دانیم که مجموعه اعداد حقیقی دارای این خاصیت است که : «*حاصل‌ضرب دو عدد حقیقی ناصفر، عددی حقیقی ناصفر است*» ، یعنی

$$\forall a, b \in R\,(a \neq \cdot \wedge b \neq \cdot) \Rightarrow ab \neq \cdot$$

به‌عبارت دیگر،

$$\forall a, b \in R \quad ab = \cdot \Rightarrow (a = \cdot \vee b = \cdot)$$

اما گزاره‌های فوق در مورد ماتریسها برقرار نیست، به مثال زیر توجه کنید. دو ماتریس غیر صفر $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۸ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۸ & ۲ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. داریم

$$AB = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۸ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۸ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

ملاحظه کردید که ماتریسهایی مانند A و B وجود دارند به‌طوری‌که $A \neq \bar{o}$ و $B \neq \bar{o}$ ولی $AB = \bar{o}$. این نوع ماتریسها را مقسوم علیه صفر گویند.

تعریف. فرض کنید A یک ماتریس مربع باشد. اگرماتریس ناصفری مانند B بتوان یافت به‌طوری‌که

$$AB = \bar{o} \text{ یا } BA = \bar{o}$$

در این صورت A را یک مقسوم علیه صفر گویند.

مثال: ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ مقسوم علیه صفر است زیرا

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad \square$$

ماتریسهایی که مقسوم علیه صفرند، ماتریسهای خوشرفتاری نیستند که بعدها به‌علت این امر پی خواهید برد.

۳ـ۱۸ حل معادله $AX = \bar{o}$ در مجموعه ماتریسهای مربع

با توجه به‌وجود مقسوم علیه صفر در مجموعه ماتریسهای مربع $n \times n$، در مورد حل معادلات به‌صورت $AX = \bar{o}$ مشکل خواهیم داشت، یعنی از $AX = \bar{o}$ حتی اگر $A \neq \bar{o}$ نمی‌توان نتیجه گرفت

1.zero divisor

$X = \bar{o}$. در بسیاری از مواقع معادله ممکن است دارای جوابهای دیگری هم باشد.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$، معادله $AX = \bar{o}$ را در مجموعه ماتریسهای ۲ × ۲ حل کنید.

حل: فرض کنید

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

بنابراین داریم

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

از آنجا خواهیم داشت

$$\begin{bmatrix} x + ۲z & y + ۲t \\ ۲x + ۴z & ۲y + ۴t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + ۲z = ۰ \\ y + ۲t = ۰ \\ ۲x + ۴z = ۰ \\ ۲y + ۴t = ۰ \end{cases}$$

با حل این دستگاه معادلات خطی نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} x = -۲z \\ y = -۲t \end{cases}$$

بنابراین ماتریس X باید به‌صورت زیر باشد

$$X = \begin{bmatrix} -۲z & -۲t \\ z & t \end{bmatrix} \quad \square$$

۳ـ۱۹ عدم برقراری قانون حذف در ماتریسها

در مجموعه اعداد حقیقی گزاره زیر موسوم به قانون حذف[1] برقرار است.

$$\forall a, b, c\, (a \neq ۰\ ,\ ab = ac \Rightarrow b = c)$$

به‌سادگی می‌توان نشان داد در هر حلقه[2] که فاقد مقسوم علیه صفر است، قانون حذف برقرار است و برعکس. بنابراین در مورد ماتریسهای مربع نیز قانون حذف در ضرب برقرار نیست. به‌مثال صفحهٔ بعد توجه کنید.

---

۱. در واقع قانون حذف از چپ

۲. تعریف حلقه در صفحات بعدی خواهد آمد

مثال: ماتریسهای

$$A = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

را در نظر می‌گیریم، داریم

$$AB = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ & ۶ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ & ۶ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌کنید که $AB = AC$ ولی $B \neq C$. □

تذکر: بعدها نشان می‌دهیم تحت شرایطی از $AB = AC$ می‌توان نتیجه گرفت که $B = C$. در واقع کافی است ماتریس A ماتریس خوش رفتاری باشد، یعنی مقسوم علیه صفر نباشد، در مثال فوق A مقسوم علیه صفر بود.

مثال: اگر

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

نشان دهید از $AB = AC$ می‌توان نتیجه گرفت $B = C$.

حل: فرض کنید

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

دو ماتریسی باشند به‌طوری‌که $AB = AC$. یعنی

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{cases} x + ۲z = a + ۲c \\ y + ۲t = b + ۲d \\ ۳x + ۴z = ۳a + ۴c \\ ۳y + ۴t = ۳b + ۴d \end{cases}$$

از حل دستگاه معادلات خطی

$$\begin{cases} x + ۲z = a + ۲c \\ ۳x + ۴z = ۳a + ۴c \end{cases}$$

نتیجه می‌شود $x = a$ و $z = c$.

و از حل دستگاه معادلات خطی

$$\begin{cases} y + 2t = b + 2d \\ 3y + 4t = 3b + 4d \end{cases}$$

نتیجه می‌گیریم $y = b$ و $t = d$.
بنابراین

$$B = C \quad \square$$

خاصیت شرکت پذیری ضرب ماتریسها[1]

۳ـ۲۰ قضیه

فرض کنید A و B و C سه ماتریس باشند به‌طوری‌که $A(BC)$ و $(AB)C$ تعریف شده باشند، در این صورت

$$A(BC) = (AB)C$$

اثبات. فرض کنید $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ و $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ و $C = [c_{ij}]_{p\times q}$. قرار می‌دهیم $BC = D$ و $AB = E$.

$$A(BC) \text{ درایه سطر } i\text{ام ستون } j\text{ام} = A \text{ سطر } i\text{ام} \times D \text{ ستون } j\text{ام}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_{kj}$$

باتوجه به این که $BC = D$، داریم

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (\sum_{l=1}^{p} b_{kl} c_{lj})$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$ زیرا اندیس a_{ik} وابسته به l نیست

از طرف دیگر،

$$(AB)C \text{ درایه سطر } i\text{ام ستون } j\text{ام} = E \text{ سطر } i\text{ام} \times C \text{ ستون } j\text{ام}$$
$$= \sum_{l=1}^{p} e_{il} c_{lj}$$
$$= \sum_{l=1}^{p} (\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl}) c_{lj}$$ زیرا $AB = E$

1. Associative law for multiplication

$$= \sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj}$$ زیرا c_{lj} وابسته به k نیست

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} a_{ik}b_{kl}c_{lj} \quad \blacksquare$$ بنا بر قضیه ۲. ۱۳

خاصیت توزیع پذیری[1] (پخشی) ضرب ماتریسها نسبت به جمع ماتریسها

می‌دانیم در مجموعه اعداد حقیقی ضرب نسبت به جمع خاصیت پخشی دارد، یعنی

$$a(b+c) = ab + ac$$

$$(b+c)a = ba + ca$$

در مورد ماتریسها نیز این خاصیت برقرار است که در قضیه زیر آمده است.

۳ـ۲۱ قضیه

فرض کنید $A = [a_{ij}]_{n\times p}$ و $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ و $C = [c_{ij}]_{m\times n}$، در این صورت

$$(B+C)A = BA + CA \qquad \text{(توزیع پذیری از راست)}$$

اثبات.

$$(B+C)A_{\text{درایه سطر } i\text{ام ستون } j\text{ام}} = (B+C)_{\text{سطر } i\text{ام}} \times A_{\text{ستون } j\text{ام}}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

$$= (b_{i1}+c_{i1})a_{1j} + (b_{i2}+c_{i2})a_{2j} + \cdots + (b_{in}+c_{in})a_{nj}$$

$$= (b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \cdots + b_{in}a_{nj}) + (c_{i1}a_{1j} + c_{i2}a_{2j} + \cdots + c_{in}a_{nj})$$

$$= BA_{\text{درایه سطر } i\text{ام ستون } j\text{ام}} + CA_{\text{درایه سطر } i\text{ام ستون } j\text{ام}}$$

$$= (BA+CA)_{\text{درایه سطر } i\text{ام ستون } j\text{ام}} \quad \blacksquare$$

اگر بخواهیم با نماد سیگما اثبات بالا را بازنویسی کنیم، خواهیم داشت.

1.Distributive law

$$
\begin{aligned}
(B+C)A \text{ درایه سطر } i\text{ام ستون } j\text{ام} &= \sum_{k=1}^{n}(b_{ik}+c_{ik})a_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(b_{ik}a_{kj}+c_{ik}a_{kj}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj} + \sum_{k=1}^{n} c_{ik}a_{kj} \\
&= (BA+CA) \text{ درایه سطر } i\text{ام ستون } j\text{ام} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

به‌طریق مشابه توزیع پذیری از چپ نیز ثابت می‌شود. یعنی داریم:

۳ـ۲۲ قضیه

اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ و $C=[c_{ij}]_{n\times p}$، آنگاه

$$A(B+C)=AB+AC \qquad \text{(توزیع پذیری از چپ)}$$

مثال: ماتریسهای $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ مفروضند، ماتریس

$$AA+AB+۲B$$

را به‌دست آورید.

حل: ابتدا توجه می‌کنیم که $A+B=۲I$ که در آن I ماتریس واحد ۲×۲ است. حال، با توجه به خاصیت توزیع پذیری از چپ، از ماتریس A فاکتور می‌گیریم، پس

$$
\begin{aligned}
AA+AB+۲B &= A(A+B)+۲B \\
&= A(۲I)+۲B \qquad A+B=۲I \text{ زیرا} \\
&= ۲A+۲B \\
&= ۲(A+B) \\
&= ۲(۲I) \\
&= ۴I \quad \square
\end{aligned}
$$

۳ـ۲۳ مقایسه بین خواص اعداد حقیقی با جمع و ضرب معمولی و ماتریسهای مربعی با جمع و ضرب ماتریسها

در جدول صفحهٔ بعد خواص مجموعه اعداد حقیقی و مجموعه ماتریسهای مربعی مرتبه n با هم مقایسه شده‌اند

مجموعه اعداد حقیقی	مجموعه ماتریسهای مربع مرتبه n
۱ـ مجموع دو عدد حقیقی، عددی حقیقی است.	۱ـ مجموع دو ماتریس $n \times n$، ماتریسی $n \times n$ است.
۲ـ جمع اعداد حقیقی شرکت پذیر است.	۲ـ جمع ماتریسها شرکت پذیر است.
۳ـ مجموعه اعداد حقیقی نسبت به عمل جمع دارای عضو بی‌اثر است که همان صفر است.	۳ـ مجموعه ماتریسهای $n \times n$ نسبت به عمل جمع دارای عضو بی‌اثر است که همان ماتریس صفر است.
۴ـ هر عدد حقیقی نسبت به عمل جمع دارای قرینه است.	۴ـ هر ماتریس $n \times n$ نسبت به عمل جمع دارای متقابل (قرینه) است.
۵ـ جمع اعداد خاصیت جابجایی دارد.	۵ـ جمع ماتریسها خاصیت جابجایی دارد.
۶ـ حاصل‌ضرب دو عدد حقیقی، عددی حقیقی است.	۶ـ حاصل‌ضرب دو ماتریس $n \times n$، ماتریسی $n \times n$ است.
۷ـ ضرب اعداد حقیقی شرکت پذیر است.	۷ـ ضرب ماتریسها شرکت پذیر است.
۸ـ ضرب اعداد حقیقی نسبت به جمع از چپ و راست توزیع پذیر است.	۸ـ ضرب ماتریسها نسبت به جمع ماتریسها از چپ و راست توزیع پذیر است.
۹ـ مجموعه اعداد حقیقی نسبت به ضرب دارای عضو بی‌اثر است که همان ۱ است.	۹ـ مجموعه ماتریسهای $n\times n$ نسبت به ضرب دارای عضو بی‌اثر است که همان ماتریس واحد یعنی I_n است.
۱۰ـ ضرب اعداد حقیقی خاصیت جابه‌جایی دارد.	۱۰ـ ضرب ماتریسها خاصیت جابه‌جایی ندارد.
۱۱ـ در مجموعه اعداد حقیقی مقسوم‌علیه صفر وجود ندارد.	۱۱ـ در مجموعه ماتریسها مقسوم‌علیه صفر وجود دارد.

ملاحظه می‌کنید که از بسیاری جهات مجموعه اعداد حقیقی با جمع و ضرب و مجموعه ماتریسهای مربع $n \times n$ با جمع و ضرب ماتریسها شبیه یکدیگرند. در واقع جز در خاصیت ۱۰ و ۱۱ در همه خواص دیگر مشترکند. ریاضیدانان مجموعه‌های دیگری ارائه داده‌اند که دارای خواص ۱ تا ۹ می‌باشند که آنها را *حلقه* می‌نامند. به‌عبارت دقیق‌تر

تعریف: اگر R مجموعه‌ای ناتهی باشد که در آن دو عمل $+$ و $\times$ تعریف شده است، ساختمان جبری $(R, +, \times)$ را یک حلقه می‌نامند هرگاه

۱. $(R, +)$ یک گروه آبلی باشد.

۲. عمل دوم، یعنی $\times$ شرکت پذیر باشد.

۳. ضرب نسبت به جمع از چپ و راست توزیع پذیر باشد.

تذکر ۱. عضو بی‌اثر حلقه نسبت به عمل $+$ را صفر حلقه می‌نامند و با نماد o نشان می‌دهند.

تذکر ۲. اگر عمل دوم، یعنی $\times$ دارای خاصیت جابجایی باشد، حلقه را جابجایی یا تعویض پذیرگویند.

تذکر ۳. اگر حلقه R نسبت به عمل دوم یعنی $\times$ دارای عضو بی‌اثر باشد آن را با 1 نشان می‌دهند در این صورت حلقه را حلقه یکدار گویند.

۳ـ۲۴ نتیجه

مجموعه ماتریسهای $n \times n$ با جمع و ضرب ماتریسها یک حلقهٔ غیرجابجایی یکدار است. قبلاً دیدیم که مجموعه ماتریسهای $n \times n$ با جمع ماتریسها و ضرب یک‌عدد درماتریس یک فضای برداری است. و همچنین قبلاً نشان دادیم که اگر A و Bدو ماتریس مربع مرتبه n و λ یک‌عدد حقیقی دلخواه باشند، داریم

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

حال، به تعریف زیر توجه کنید.

تعریف. فرض کنید R هم حلقه و هم فضای برداری باشد به‌طوری‌که برای هر عدد حقیقی α و هر x و y از R داشته باشیم

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$$

در این صورت R را یک جبر[1] (یا یک جبر خطی[2]) روی اعداد حقیقی می‌نامیم.

نتیجه. مجموعه ماتریسهای مربع مرتبه n با درایه‌های حقیقی یک جبر روی اعداد حقیقی است.

۳ـ۲۵ توانهای طبیعی یک ماتریس مربع[3]

فرض‌کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. برای آنکه AA وجود داشته باشد می‌بایست $m = n$، یعنی در صورتی AA تعریف شده است که A ماتریسی مربع باشد. در این صورت AA را با A^2 نمایش می‌دهند.

۳ـ۲۶ تعریف

اگر A یک ماتریس مربع باشد، در این صورت توانهای طبیعی A به‌صورت زیر تعریف می‌شوند. $A^1 = A$ و $A^2 = AA$ و $A^3 = AA^2$ و با استقراء

$$A^{n+1} = AA^n$$

در صورتی که A یک ماتریس مربع مرتبه n باشد توان صفر A نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$A^0 = I_n$$

که در آن I_n ماتریس واحد مرتبه n است.

1.Algebra 2.Linear algebra

3.Positive integral powers of a square matrix

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$، در این صورت A^2 و A^3 عبارتند از:

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 16 & 17 \end{bmatrix} \\ A^3 &= AA^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 16 & 17 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 41 & 42 \\ 84 & 83 \end{bmatrix} \quad \square \end{aligned}$$

مثال: *الف)* نشان دهید $AA^2 = A^2A$.

ب) نشان دهید $A^3A^4 = A^4A^3$.

حل: *الف)*

$$\begin{aligned} AA^2 &= A(AA) \\ &= (AA)A \\ &= A^2A \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} A^3A^4 &= (AAA)(AAAA) \\ &= (AAAA)(AAA) \\ &= A^4A^3 \quad \square \end{aligned}$$

به‌طورکلی، نشان می‌دهیم که توانهای مختلف هر ماتریس با هم جابجا می‌شوند. یعنی، اگر A یک ماتریس مربع و m و n دو عدد طبیعی دلخواه باشند آنگاه

$$A^mA^n = A^nA^m$$

اما ابتدا گزاره زیر را ثابت می‌کنیم.

۳ـ۲۷ گزاره

فرض کنید A یک ماتریس مربع باشد در این صورت

$$A^nA = AA^n$$

اثبات: روی n استقراء می‌کنیم

بەازاء $n = ۱$ حکم برقرار است زیرا $AA = AA$

حال فرض کنید بەازاء $n = k$ حکم برقرار باشد یعنی داشته باشیم.

$$AA^k = A^k A$$

ثابت می‌کنیم بەازاء $n = k + ۱$ حکم برقرار است یعنی نشان می‌دهیم.

$$AA^{k+۱} = A^{k+۱}A$$

$$\begin{aligned} AA^{k+۱} &= A(A^k A) \\ &= (AA^k)A && \text{بنا بر خاصیت شرکت پذیری ضرب ماتریسها} \\ &= A^{k+۱}A \quad \blacksquare \end{aligned}$$

نتیجه. اگر A یک ماتریس مربع و m و n دو عدد طبیعی باشند در این صورت

$$A^m A^n = A^n A^m$$

مثال: با فرض

$$A = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & -۱ \\ ۳ & -۳ & ۳ \\ ۵ & -۵ & ۵ \end{bmatrix}$$

$A^۳$ را حساب کنید.

حل:

$$A^۲ = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & -۱ \\ ۳ & -۳ & ۳ \\ ۵ & -۵ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & -۱ \\ ۳ & -۳ & ۳ \\ ۵ & -۵ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & -۱ \\ ۳ & -۳ & ۳ \\ ۵ & -۵ & ۵ \end{bmatrix}$$

یعنی $A^۲ = A$. از طرف دیگر، برای محاسبه $A^۳$، داریم

$$\begin{aligned} A^۳ &= AA^۲ \\ &= AA && \text{زیرا } A^۲ = A \\ &= A && \text{زیرا } A^۲ = A \quad \square \end{aligned}$$

مثال: فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & ۱ \\ ۰ & \lambda \end{bmatrix}$$

ابتدا $A^{۲}$ و $A^{۳}$ را حساب کنید، سپس یک فرمول کلی برای A^n حدس زده و حدس خود را با استقراء ثابت کنید.

حل:

$$A^{۲} = \begin{bmatrix} \lambda & ۱ \\ ۰ & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & ۱ \\ ۰ & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^{۲} & ۲\lambda \\ ۰ & \lambda^{۲} \end{bmatrix}$$

$$A^{۳} = A^{۲}A = \begin{bmatrix} \lambda^{۲} & ۲\lambda \\ ۰ & \lambda^{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & ۱ \\ ۰ & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^{۳} & ۳\lambda^{۲} \\ ۰ & \lambda^{۳} \end{bmatrix}$$

با توجه به $A^{۲}$ و $A^{۳}$ به‌نظر می‌رسد که داشته باشیم

$$A^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-۱} \\ ۰ & \lambda^n \end{bmatrix}$$

حال این حدس را با استقراء ثابت می‌کنیم. به‌ازاء $n = ۱$ داریم

$$A^{۱} = \begin{bmatrix} \lambda & ۱ \\ ۰ & \lambda \end{bmatrix}$$

که به‌وضوح درست است

$$A^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-۱} \\ ۰ & \lambda^k \end{bmatrix} \qquad \text{فرض استقراء}$$

$$A^{k+۱} = \begin{bmatrix} \lambda^{k+۱} & (k+۱)\lambda^k \\ ۰ & \lambda^{k+۱} \end{bmatrix} \qquad \text{حکم استقراء}$$

$$A^{k+۱} = AA^k = \begin{bmatrix} \lambda & ۱ \\ ۰ & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-۱} \\ ۰ & \lambda^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^{k+۱} & (k+۱)\lambda^k \\ ۰ & \lambda^{k+۱} \end{bmatrix} \qquad \square$$

۳ـ۲۸ گزاره

اگر $A = A^{۲}$. آنگاه به‌ازاء هر عدد طبیعی n داریم

$$A^n = A$$

اثبات: با استقراء گزاره را ثابت می‌کنیم.

$n = ۱ \quad ; \quad A = A$ درست است

$n = k \quad ; \quad A^k = A$ فرض استقراء

$n = k+۱ \quad ; \quad A^{k+۱} = A$ حکم استقراء

$$A^{k+۱} = AA^k$$

$= AA$ بنا بر فرض استقراء

$= A$ زیرا $A^۲ = A$ ■

مثال: اگر

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

نشان دهید

$$A^۲ = \begin{bmatrix} \cos ۲\alpha & -\sin ۲\alpha \\ \sin ۲\alpha & \cos ۲\alpha \end{bmatrix}$$

و سپس با استقراء نشان دهید

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$$

حل:

$$\begin{aligned} A^۲ &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha & -۲\sin\alpha\cos\alpha \\ ۲\sin\alpha\cos\alpha & \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos ۲\alpha & -\sin ۲\alpha \\ \sin ۲\alpha & \cos ۲\alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

حال، فرض کنید

$$A^k = \begin{bmatrix} \cos k\alpha & -\sin k\alpha \\ \sin k\alpha & \cos k\alpha \end{bmatrix}$$

داریم:

$$A^{k+۱} = AA^k = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos k\alpha & -\sin k\alpha \\ \sin k\alpha & \cos k\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos k\alpha - \sin\alpha\sin k\alpha & -\sin k\alpha\cos\alpha - \cos k\alpha\sin\alpha \\ \sin\alpha\cos k\alpha + \sin k\alpha\cos\alpha & -\sin\alpha\sin k\alpha + \cos\alpha\cos k\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(k+۱)\alpha & -\sin(k+۱)\alpha \\ \sin(k+۱)\alpha & \cos(k+۱)\alpha \end{bmatrix} \quad \square$$

۳ـ۲۹ نتایج خواص پخشی ضرب ماتریسها نسبت به جمع ماتریسها

اگر a و b و c و d چهار عدد حقیقی باشند، می‌دانیم

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

می‌خواهیم بدانیم که آیا تساوی نظیر فوق در ماتریسها نیز برقرار است. برای این کار فرض کنید A و B و C و D چهار ماتریس مربع هم‌مرتبه باشند. با توجه به خاصیت پخشی از چپ، اگر $(A+B)$ را یک ماتریس فرض کنیم داریم

$$(A+B)(C+D) = (A+B)C + (A+B)D$$

و با توجه به خاصیت پخشی از راست، داریم

$$= AC + BC + AD + BD$$

به‌همین طریق $(A-B)(C-D)$ را محاسبه می‌کنیم. ابتدا با توجه به‌تعریف تفاضل داریم

$$\begin{aligned}(A-B)(C-D) &= [A+(-B)][C+(-D)]\\ &= AC + A(-D) + (-B)C + (-B)(-D)\\ &= AC - AD - BC + BD\end{aligned}$$

مثال: اگر A و B دو ماتریس مربع هم مرتبه باشند، $(A+B)^2$ و $(A+B)(A-B)$ را حساب کنید.

حل:

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B)\\ &= AA + AB + BA + BB\\ &= A^2 + AB + BA + B^2\end{aligned}$$

از طرف دیگر،

$$\begin{aligned}(A+B)(A-B) &= AA + A(-B) + BA + B(-B)\\ &= A^2 - AB + BA - B^2 \quad \square\end{aligned}$$

گزاره‌ها و مسائل تکمیلی در مورد خواص ضرب ماتریسها

۳ـ۳۰ مسئله

فرض کنید A و B دو ماتریس مربع هم مرتبه باشند در این صورت عمل * را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$A * B = AB - BA$$

ثابت کنید موارد زیر برقرار است.

الف) $A * B = -(B * A)$

ب) $(\lambda A) * B = A * (\lambda B) = \lambda(A * B) \qquad \lambda \in R$

ج) $A * (B + C) = (A * B) + (A * C)$

د) $(B + C) * A = (B * A) + (C * A)$

هـ) $A * (B * C) = B * (A * C) + C * (B * A)$

۳_۳۱ مسئله

از معادله زیر x را بیابید.

$$\begin{bmatrix} x & ۴ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ۴ \\ -۱ \end{bmatrix} = ۰$$

۳_۳۲ مسئله

نشان دهید کلیه ماتریسهایی مانند B که برای آنها

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۳ & -۳ \end{bmatrix} B = \bar{o}$$

به‌صورت زیرند.

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}$$

۳_۳۳ مسئله

فرض کنید A و B دو ماتریس ۲ × ۲ باشند که حاصل جمع درایه‌های هر ستون آنها برابر ۱ است. نشان دهید که حاصل جمع درایه‌های هر ستون AB نیز برابر ۱ است.

۳_۳۴ گزاره

هیچ دو ماتریس ۲ × ۲ مانند A و B نمی‌توان یافت به‌طوری‌که

$$AB - BA = I$$

۳ـ۳۵ گزاره

اگر معادله $AX = B$ بیش از یک جواب داشته باشد، آنگاه بی‌نهایت جواب دارد.

۳ـ۳۶ مسئله

فرض کنید E_{ij} ماتریس ۲ × ۲ای باشد که درایه واقع بر سطر iام ستون jام آن ۱ و سایر درایه‌های آن صفر است.

الف) اگر

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

نشان دهید

$$E_{۱۱}A = \begin{bmatrix} a & b \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \qquad , \qquad AE_{۱۱} = \begin{bmatrix} a & \cdot \\ c & \cdot \end{bmatrix}$$

نتیجه بگیرید که اگر $AE_{۱۱} = E_{۱۱}A$، آنگاه $b = c = \cdot$.

ب) نشان دهید $E_{۲۱}A = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ a & b \end{bmatrix}$ و $AE_{۲۱} = \begin{bmatrix} b & \cdot \\ d & \cdot \end{bmatrix}$، ثابت کنید که اگر $AE_{۲۱} = E_{۲۱}A$ آنگاه $a = d$ و $b = \cdot$.

ج) اگر A ماتریس ۲ × ۲ای باشد که با همه ماتریسهای ۲ × ۲ جابجا شود، نشان دهید A، مضربی از ماتریس واحد است.

۳ـ۳۷ گزاره

فرض کنید E_{rs} ماتریس $m \times n$ای باشد که درایه سطر rام ستون sام آن ۱ و سایر درایه‌های آن صفر است.

الف) هر ماتریس A ترکیبی خطی از $E_{۱۱}$ و $E_{۱۲}$ و $\cdots$ است، و برای هر ماتریس دلخواه A از مرتبه $m \times n$ داریم

$$A = \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}E_{ij}$$

ب) در مورد ماتریسهای مربع داریم.

$$E_{pq}E_{rs} = \begin{cases} \bar{o} & , \quad q \neq r \text{ اگر} \\ E_{ps} & , \quad q = r \text{ اگر} \end{cases}$$

مثال: با توجه به نتایج گزاره ۳۷۰۳ حاصل‌ضربهای زیر را حساب کنید.

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

حل:

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = E_{۲۲}E_{۱۳} = \bar{o}$$

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = E_{۲۱}E_{۱۳}$$

$$= E_{۲۳}$$

$$= \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad \square$$

۳ـ۳۸ مسئله

اگر

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & ۰ & ۰ \\ ۰ & a_{۲۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & a_{۳۳} \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} b_{۱۱} & ۰ & ۰ \\ ۰ & b_{۲۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & b_{۳۳} \end{bmatrix}$$

مطلوب است محاسبه AB.

۳ـ۳۹ گزاره

ماتریس $E_{pq} = [e_{ij}]_{m\times n}$ که در آن $e_{pq} = ۱$ و سایر درایه‌ها صفر است داده شده است. فرض کنید A ماتریسی است که $E_{pq}A$ تعریف شده باشد.

الف) در این صورت همه سطرهای ماتریس $E_{pq}A$ صفر است، مگر (احتمالاً) سطر pام آن، که در این صورت سطر pام این حاصل‌ضرب عبارت است از سطر qام A.

ب) اگر A ماتریسی باشد به‌طوری‌که AE_{pq} تعریف شده است، در این صورت همه ستونهای ماتریس AE_{pq} صفر است، مگر (احتمالاً) ستون qام آن، که عبارت است از ستون pام A.

۳ـ۴۰ مسئله

با توجه به گزاره قبل حاصل ضربهای زیر را به‌دست آورید.

الف)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

ب)

$$\begin{bmatrix} -1 & 7 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 9 & 8 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۳ـ۴۱ گزاره

اگر برای هر بردار X (یعنی هر ماتریس ستونی X) داشته باشیم $AX = \bar{o}$ آنگاه $A = \bar{o}$.

۳ـ۴۲ گزاره

اگر A و B دو ماتریس $m \times n$ باشند به‌طوری‌که برای هر بردار X داشته باشیم $AX = BX$، در این صورت $A = B$.

۳ـ۴۳ مسئله

در مجموعه ماتریسهای مربع مرتبه n عمل $*$ را به‌صورت

$$A * B = \frac{1}{2}(AB + BA)$$

تعریف می‌کنیم.

الف) نشان دهید

$$A * A = A^2$$

ب) نشان دهید

$$A * I = A$$

ج) نشان دهید

$$A * (B * C) = \frac{1}{2}(ABC + ACB + BCA + CBA)$$

د) نشان دهید

$$A * (B + C) = (A * B) + (A * C)$$

ه) نشان دهید که اگر λ یک عدد حقیقی باشد داریم

$$\lambda(A * B) = (\lambda A) * B = A * (\lambda B)$$

اثبات گزاره‌های تکمیلی در مورد خواص ضرب ماتریسها

حل مسئله ۳. ۳۰ :

الف)

$$\begin{aligned} A * B &= AB - BA \\ &= -(BA - AB) \\ &= -(B * A) \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} (\lambda A) * B &= (\lambda A)B - B(\lambda A) \\ &= \lambda(AB - BA) \\ &= \lambda(A * B) \end{aligned}$$

به‌طریق مشابه تساوی $A * (\lambda B) = \lambda(A * B)$ ثابت می‌شود.

ج)

$$\begin{aligned} A * (B + C) &= A(B + C) - (B + C)A \\ &= (AB - BA) + (AC - CA) \\ &= (A * B) + (A * C) \end{aligned}$$

د)

$$\begin{aligned} (B + C) * A &= (B + C)A - A(B + C) \\ &= BA + CA - AB - AC \\ &= (BA - AB) + (CA - AC) \\ &= (B * A) - (C * A) \end{aligned}$$

ه)

$$\begin{aligned} A * (B * C) &= A(B * C) - (B * C)A \\ &= A(BC - CB) - (BC - CB)A \\ &= ABC - ACB - BCA + CBA \end{aligned}$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned}
&B*(A*C)+C*(B*A)\\
&=B(A*C)-(A*C)B+C(B*A)-(B*A)C\\
&=B(AC-CA)-(AC-CA)B+C(BA-AB)-(BA-AB)C\\
&=BAC-BCA-ACB-CAB+CBA-CAB-BAC-ABC\\
&=ABC-ACB-BCA+CBA \quad \square
\end{aligned}$$

تذکر: به هر ساختمان جبری که دارای خواص فوق باشد، یک جبر لی[1] گویند.

حل مسئله ۳.۳۱. اگر دو ماتریس اول را در هم ضرب کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{bmatrix} ۲x+۴ & x-۲ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ ۴ \\ -۱ \end{bmatrix}=۰$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
&x(۲x+۴)+۴(x-۲)-۴=۰\\
&۲x^۲+۸x-۱۲=۰
\end{aligned}$$

در نتیجه،

$$x=-۲\pm\sqrt{۱۰} \quad \square$$

حل مسئله ۳.۳۲. فرض کنید $B=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$، بنابراین

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۳ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

در نتیجه،

$$\begin{bmatrix} x-z & y-t \\ ۳x-۳z & ۳y-۳t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین $x-z=۰$ و $y-t=۰$ و $۳x-۳z=۰$ و $۳y-۳t=۰$ و از آنجا،

$$y=t \quad , \quad x=z \quad \square$$

حل مسئله ۳.۳۳. چون مجموع درایه هر ستون A و B مساوی ۱ است بنابراین A و B به‌صورت زیرند.

$$A=\begin{bmatrix} a & ۱-b \\ ۱-a & b \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} c & ۱-d \\ ۱-c & d \end{bmatrix}$$

1. Lie algebra

بنابراین برای AB داریم

$$AB = \begin{bmatrix} a & ۱-b \\ ۱-a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & ۱-d \\ ۱-c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ac+۱-b-b-c+bc & a+d-ad-bd \\ c-ac+b-bc & ۱-a-d+bd \end{bmatrix}$$

یک محاسبه ساده نشان می‌دهد که مجموع درایه‌های هر ستون AB برابر ۱ است. □

اثبات گزارهٔ ۳. ۳۴. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

دو ماتریس ۲ × ۲ای باشند که در تساوی $AB - BA = I$ صدق می‌کنند. داریم

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{bmatrix} bz-yc & ay+bt-bx-dy \\ cx+dz-az-ct & cy-bz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

در نتیجه $bz - yc = ۱$ و $cy - bz = ۱$ که این غیرممکن است. بنابراین، هیچ دو ماتریسی مانند A و B در تساوی $AB - BA = I$ صدق نمی‌کنند. ■

اثبات گزاره ۳. ۳۵. فرض کنید $X_۱$ و $X_۲$ دو جواب معادله $AX = B$ باشند، پس

$$AX_۱ = B \quad , \quad AX_۲ = B$$

در این صورت، هر ماتریس به‌صورت $rX_۱ + sX_۲$، که در آن $r + s = ۱$، نیز یک جواب معادله $AX = B$ است. زیرا

$$\begin{aligned} A(rX_۱ + sX_۲) &= r(AX_۱) + s(AX_۲) \\ &= rB + sB \\ &= (r+s)B \\ &= B \quad \blacksquare \end{aligned}$$

حل مسئله ۳. ۳۶. *الف)* $E_{۱۱}$ ماتریسی است که درایه واقع بر سطر اول ستون اول آن ۱ و بقیه درایه‌ها صفر است. یعنی

$$E_{۱۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$E_{۱۱}A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$AE_{۱۱} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & ۰ \\ c & ۰ \end{bmatrix}$$

با توجه به اینکه $AE_{۱۱} = E_{۱۱}A$ نتیجه می‌گیریم.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & ۰ \\ c & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین $b = ۰$ و $c = ۰$.

ب) $E_{۲۱}$ ماتریسی است که درایه واقع بر سطر دوم ستون اول آن ۱ و بقیه درایه‌ها صفر است. یعنی

$$E_{۲۱} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$E_{۲۱}A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ a & b \end{bmatrix}$$

$$AE_{۲۱} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & ۰ \\ d & ۰ \end{bmatrix}$$

با توجه به اینکه $AE_{۲۱} = E_{۲۱}A$ نتیجه می‌گیریم $b = ۰$ و $a = d$.

ج) فرض کنید $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ با همه ماتریسها جابجا شود، بخصوص A با ماتریسهای $E_{۱۱}$ و $E_{۲۱}$ نیز جابجا می‌شود، بنابراین $b = c = ۰$ و $a = d$. پس ماتریس A به‌صورت $\begin{bmatrix} \lambda & ۰ \\ ۰ & \lambda \end{bmatrix}$ در می‌آید، یعنی

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & ۰ \\ ۰ & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad \square$$

اثبات گزاره ۳. ۳۷. *الف*) برای سهولت، این مسئله را در مورد ماتریسهای ۳ × ۲ حل می‌کنیم.

فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{bmatrix}$$

یک ماتریس ۳ × ۲ دلخواه باشد، داریم

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & a_{۱۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & a_{۱۳} \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ a_{۲۱} & ۰ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & a_{۲۲} & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & a_{۲۳} \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$A = (a_{۱۱}E_{۱۱} + a_{۱۲}E_{۱۲} + a_{۱۳}E_{۱۳}) + (a_{۲۱}E_{۲۱} + a_{۲۲}E_{۲۲} + a_{۲۳}E_{۲۳})$$

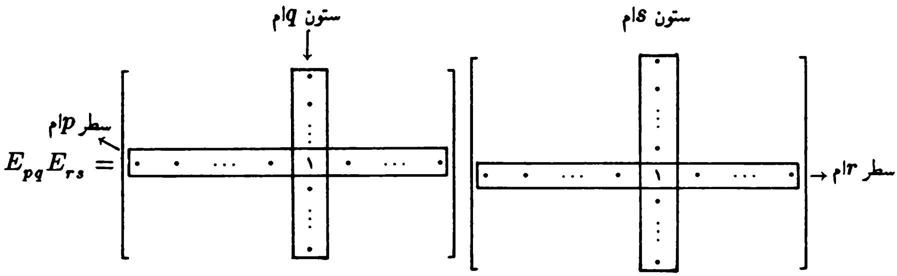
در نتیجه،

$$A = \sum_{j=۱}^{۳} a_{۱j}E_{۱j} + \sum_{j=۱}^{۳} a_{۲j}E_{۲j}$$

پس

$$A = \sum_{i=۱}^{۲}\sum_{j=۱}^{۳} a_{ij}E_{ij}$$

ب) همه سطرهای ماتریس E_{pq} جز در سطر pام و همه ستونهای ماتریس E_{rs} مگر ستون sام صفرند، بنابراین، در ضرب $E_{pq}E_{rs}$ فقط باید به ضرب سطر pام ماتریس E_{pq} در ستون sام E_{rs} توجه کنیم.



حالت اول: $q \neq r$ در این صورت داریم

$$\text{سطر } p\text{ام ماتریس } E_{pq} \times \text{ستون } s\text{ام ماتریس } E_{rs} = [\,۰ \quad ۰ \quad ۰ \quad \overset{\text{درایه } q\text{ام}}{۱} \quad ۰ \quad ۰\,] \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ \vdots \\ ۰ \\ ۱ \\ ۰ \\ \vdots \\ ۰ \end{bmatrix} \leftarrow \text{درایه } r\text{ام}$$

زیرا $q \neq r$ $\qquad = ۰$

سایر درایه‌های حاصل‌ضرب دو ماتریس صفر است، زیرا یا از ضرب یک سطر صفر در یک ستون و یا از ضرب یک سطر در یک ستون صفر به‌دست می‌آیند. پس اگر $q \neq r$، آنگاه

$$E_{pq}E_{rs} = \bar{o}$$

حالت دوم: $q = r$. در این صورت نیز همانند قبل همه درایه‌های ماتریس $E_{pq}E_{rs}$ صفر است، مگر احتمالاً درایه سطر pام ستون sام که در زیر محاسبه شده است.

$$E_{pq}E_{rs} \text{ درایه سطر } p \text{ام ستون } s\text{ام} = E_{pq} \text{ سطر } p \text{ام ماتریس} \times E_{rs} \text{ ستون } s\text{ام ماتریس}$$

$$= \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & \overset{\text{درایه } r\text{ام}}{\overset{\downarrow}{۱}} & ۰ & \cdots & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ \vdots \\ ۰ \\ ۱ \\ ۰ \\ \vdots \\ ۰ \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \longrightarrow \text{درایه } r\text{ام} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= ۱$$

پس $E_{pq}E_{rs}$ ماتریسی است که همه درایه‌های آن صفر است، مگر درایه سطر pام ستون sام که، $a_{ps} = ۱$. یعنی، اگر $q = r$ آنگاه

$$E_{pq}E_{rs} = E_{ps} \qquad \blacksquare$$

حل مسئله ۳.۳۸. با توجه به مسئله فوق این حاصل‌ضرب را حساب می‌کنیم، نخست باید توجه کرد که

$$A = a_{۱۱}E_{۱۱} + a_{۲۲}E_{۲۲} + a_{۳۳}E_{۳۳}$$

$$B = b_{۱۱}E_{۱۱} + b_{۲۲}E_{۲۲} + b_{۳۳}E_{۳۳}.$$

همچنین توجه کنید که

$$\begin{cases} E_{۱۱}E_{۱۱} = E_{۱۱} \\ E_{۱۱}E_{۲۲} = \bar{o} \\ E_{۱۱}E_{۳۳} = \bar{o} \end{cases} \qquad \begin{cases} E_{۲۲}E_{۱۱} = \bar{o} \\ E_{۲۲}E_{۲۲} = E_{۲۲} \\ E_{۲۲}E_{۳۳} = \bar{o} \end{cases} \qquad \begin{cases} E_{۳۳}E_{۱۱} = \bar{o} \\ E_{۳۳}E_{۲۲} = \bar{o} \\ E_{۳۳}E_{۳۳} = E_{۳۳} \end{cases}$$

پس

$$AB = a_{۱۱}b_{۱۱}E_{۱۱} + a_{۲۲}b_{۲۲}E_{۲۲} + a_{۳۳}b_{۳۳}E_{۳۳}$$

یعنی

$$AB = \begin{bmatrix} a_{۱۱}b_{۱۱} & ۰ & ۰ \\ ۰ & a_{۲۲}b_{۲۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & a_{۳۳}b_{۳۳} \end{bmatrix} \quad \square$$

اثبات گزاره ۳.۳۹. ماتریس A را به‌صورت ترکیب خطی E_{ij}ها می‌نویسیم، فرض کنید

$$A = [a_{ij}]_{n\times t}$$

بنابراین

$$E_{pq}A = E_{pq}(a_{۱۱}E_{۱۱} + \cdots + a_{q۱}E_{q۱} + a_{q۲}E_{q۲} + \cdots + a_{qn}E_{qn} + \cdots + a_{nt}E_{nt})$$

از طرفی به‌ازاء $j = ۱, ۲, \cdots, t$ داریم

$$E_{pq}E_{qj} = E_{pj}$$

و سایر حاصل ضربها صفر است. پس

$$\begin{aligned} E_{pq}A &= a_{q۱}E_{pq}E_{۱۱} + \cdots + a_{q۱}E_{pq}E_{q۱} + \cdots + a_{nt}E_{pq}E_{nt} \\ &= a_{q۱}E_{p۱} + \cdots + a_{qn}E_{pn} \end{aligned}$$

$$= a_{q۱}\begin{bmatrix} & O & \\ \boxed{۱ \quad ۰ \quad \cdots \quad ۰} \\ & O & \end{bmatrix} \rightarrow \text{سطر } q\text{ام} + \cdots + a_{qn}\begin{bmatrix} & O & \\ \boxed{۰ \quad ۰ \quad \cdots \quad ۱} \\ & O & \end{bmatrix} \rightarrow \text{سطر } q\text{ام}$$

$$= \begin{bmatrix} & & O & \\ a_{q۱} & a_{q۲} & \cdots & a_{qn} \\ & & O & \end{bmatrix}$$

که در آن منظور از Oهای بالا و پایین سطر qام به‌این معناست که تمام درایه‌های بالا و پایین سطر qام صفر است.

ب) اثبات (ب) به‌طریق مشابه است. ■

حل مسئله ۳.۴۰ . *الف)* ماتریس سمت چپ $E_{۲۳}$ است، با توجه به گزاره ۳۹۰۳ حاصل‌ضرب $E_{۲۳}A$ ماتریسی است که سطر دوم آن مساوی سطر سوم A است و سایر درایه‌ها هم صفر است، بنابراین حاصل‌ضرب دو ماتریس، ماتریس زیر است.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ب) ماتریس سمت راست E_{23} است، با توجه به گزاره ۳۰۹۲ حاصل‌ضرب AE_{23} ماتریسی است که ستون سوم آن مساوی ستون دوم A است. یعنی، AE_{23} ماتریس زیر است.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \square$$

اثبات گزارهٔ ۳. ۴۱. چون برای هر بردار X، $AX = \bar{o}$، بنابراین برای بردارهای

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

نیز تساوی $AX = \bar{o}$ برقرار است. اگر $A = [a_{ij}]$، داریم

$$AE_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = \bar{o}$$

یعنی ستون اول A صفر است.

به‌همین ترتیب از $AE_2 = \bar{o}$ نتیجه می‌گیریم ستون دوم A صفر است، و همین طور اگر در مورد بقیه AE_jها عمل کنیم، نتیجه می‌شود همه ستونهای A صفر است. یعنی $A = \bar{o}$. ■

اثبات گزارهٔ ۳. ۴۲. از $AX = BX$، نتیجه می‌شود $(A - B)X = \bar{o}$. چون این تساوی برای هر بردار X برقرار است، با توجه به گزاره قبل $A - B = \bar{o}$ یعنی $A = B$. ■

حل مسئله۳. ۴۳.

الف)

$$A * A = \frac{1}{2}(AA + AA) = \frac{1}{2}(2A^2) = A^2$$

ب)

$$A * I = \frac{۱}{۲}(AI + IA) = A$$

ج)

$$\begin{aligned} A * (B * C) &= \frac{۱}{۲}[A(B * C) + (B * C)A] \\ &= \frac{۱}{۲}[A(BC + CB) + (BC + CB)A] \\ &= \frac{۱}{۲}[ABC + ACB + BCA + CBA] \end{aligned}$$

د)

$$\begin{aligned} A * (B + C) &= \frac{۱}{۲}[A(B + C) + (B + C)A] \\ &= [\frac{۱}{۲}(AB + BA)] + [\frac{۱}{۲}(AC + CA)] \\ &= (A * B) + (A * C) \end{aligned}$$

ه)

$$\begin{aligned} \lambda(A * B) &= \lambda[\frac{۱}{۲}(AB + BA)] \\ &= \frac{۱}{۲}[(\lambda A)B + B(\lambda A)] = (\lambda A) * B \\ &= \frac{۱}{۲}[A(\lambda B) + (\lambda B)A] = A * (\lambda B) \quad \square \end{aligned}$$

ماتریسهای خاص

۳ـ۴۴ ماتریسهای بالا مثلثی[1]

ماتریس مربعی $A = [a_{ij}]$ را بالا مثلثی می‌نامند، هرگاه

$$\forall i, j \qquad i > j \Rightarrow a_{ij} = ۰$$

یعنی، در یک *ماتریس بالا مثلثی کلیه درایه‌های واقع در پایین قطر اصلی، صفرند.* برای مثال، یک ماتریس بالا مثلثی ۳ × ۳ در حالت کلی به‌صورت زیر است.

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ ۰ & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ ۰ & ۰ & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

این ماتریسها را به‌صورت صفحهٔ بعد هم نشان می‌دهند.

1.Upper triangular

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ O & & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

همان طور که از نامگذاری این نوع ماتریسها معلوم است، در هر ماتریس بالا مثلثی، درایه‌های واقع بر قطر اصلی و بالای قطر اصلی مشخص کننده ماتریس هستند، زیرا تمام درایه‌های پایین قطر اصلی صفرند.

مثال: ماتریس مربع و صفر ماتریس واحد، بالا مثلثی‌اند. □

۳ـ۴۵ ماتریسهای پایین مثلثی[1]

ماتریس مربع $A = [a_{ij}]$ را **پایین مثلثی** می‌نامند، هر گاه

$$\forall i, j \quad i < j \Rightarrow a_{ij} = ۰$$

یعنی، در یک *ماتریس پایین مثلثی، همه درایه‌های واقع در بالای قطر اصلی، صفرند.*

مثال: ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۳ & ۰ \\ ۵ & ۴ & ۷ \end{bmatrix}$$

یک ماتریس پایین مثلثی ۳×۳ است. گاهی برای سهولت این ماتریس را به‌صورت زیر هم نشان می‌دهند

$$\begin{bmatrix} ۱ & & O \\ ۲ & ۳ & \\ ۵ & ۴ & ۷ \end{bmatrix} \quad \square$$

نماد O در بالای قطر اصلی به‌معنای آن است که تمام درایه‌های بالای قطر اصلی، صفرند.

توجه کنید که همانند قبل، نامگذاری این نوع ماتریسها بر این اساس استوار است که در ماتریسهای پایین مثلثی درایه‌های واقع بر قطر اصلی و پایین قطر اصلی، مشخص کننده ماتریس هستند.

مثال: ماتریس مربع صفر و ماتریس واحد پایین مثلثی نیز هستند. □

۳ـ۴۶ ماتریسهای قطری[2]

ماتریس مربع $D = [d_{ij}]$ را **قطری** می‌نامند، هرگاه هم بالامثلثی و هم پایین‌مثلثی باشد. یعنی، در یک ماتریس قطری، درایه‌های پایین و بالای قطر اصلی همگی صفرند. به‌عبارت دیگر، D قطری است، هرگاه

---

1. Lower triangular

2. Diagonal matrices

$$\forall i, j \quad i \neq j \Rightarrow d_{ij} = ۰$$

بنابراین، ماتریس قطری D به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$D = \begin{bmatrix} d_{۱۱} & ۰ & ۰ & & ۰ \\ ۰ & d_{۲۲} & ۰ & & ۰ \\ ۰ & ۰ & d_{۳۳} & & ۰ \\ \vdots & & & \ddots & \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

برای سهولت این ماتریس را به‌صورت زیر هم نشان می‌دهند.

$$D = \begin{bmatrix} d_{۱۱} & & & O & \\ & d_{۲۲} & & & \\ & & d_{۳۳} & & \\ & O & & & \\ & & & & d_{nn} \end{bmatrix}$$

همان طور که از نام این نوع ماتریسها برمی‌آید، در یک ماتریس قطری فقط درایه‌های واقع بر قطر اصلی مشخص کننده ماتریس‌اند، برای همین، ماتریس قطری را به‌صورت

$$diag(d_{۱۱}, d_{۲۲}, \cdots, d_{nn})$$

نیز نشان می‌دهند.

مثال: ماتریس

$$D = \begin{bmatrix} \sqrt{۲} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$$

قطری است که به‌شکل زیر نیز می‌توانیم آن را بنویسیم.

$$D = diag(\sqrt{۲}, ۳, -۲) \quad \square$$

۳ـ۴۷ چرا ماتریسهای قطری و مثلثی را مطالعه می‌کنیم؟

نخست باید بدانیم که هر چه ویژگیهای یک ماتریس افزایش می‌یابد، خواص آن نیز افزایش می‌یابد و کارکردن با آنها، به‌خصوص در محاسبات، آسانتر می‌شود. در مورد ماتریسهای مثلثی و قطری نیز به‌خاطر ویژگیهای خاص آنها، کارکردن با آنها بسیار آسانتر است تا کارکردن با ماتریسهای کلی. اما، علت اصلی

مطالعه ماتریسهای مثلثی و قطری در آن است که ماتریسهای کلی به‌معنایی، که بعداً خواهیم دید، معادل ماتریسهای مثلثی هستند، و رده بزرگی از ماتریسهای کلی معادل ماتریسهای قطری هستند، یعنی با عملیاتی می‌توانیم محاسبات با ماتریسهای کلی را به‌محاسبات با ماتریسهای مثلثی و قطری تبدیل کنیم. همین امر، به‌خودی‌خود مطالعه مستقل و همه جانبه این گونه ماتریسها را ضروری می‌سازد. علاوه بر این، در مسائل عملی، در بیشتر مواقع می‌توان مسئله را طوری فرمول‌بندی کرد که ماتریسهای پدید آمده به‌شکل مثلثی یا قطری درآیند. این دلایل و بسیاری دلایل دیگر که از جنبه نظری ماتریسها مطرح می‌باشند، باعث می‌شوند که ماتریسهای مثلثی و قطری اهمیت خاصی پیدا کنند.

۳ـ۴۸ ماتریسهای اسکالر[1]

آن دسته از ماتریسهای قطری را که همه درایه‌های واقع بر قطر اصلی آنها مساویند، ماتریس اسکالر می‌نامند. یعنی هر ماتریس به‌صورت

$$\begin{bmatrix} k & ۰ & ۰ & & ۰ \\ ۰ & k & ۰ & & ۰ \\ ۰ & ۰ & k & & ۰ \\ \vdots & & & & \\ ۰ & ۰ & ۰ & & k \end{bmatrix}$$

یک ماتریس اسکالر است.

همان طور که بعدها خواهیم دید انگیزه نامگذاری این نوع ماتریسها از آنجا است که هر ماتریس اسکالر دقیقاً با یک عدد حقیقی مشخص می‌شود و جمع و ضرب آنها دقیقاً با جمع و ضرب اعداد حقیقی یکسان است. در ریاضیات رسم بر آن است که هر خانواده از اشیایی که رفتاری مانند رفتار اعداد داشته باشند را اسکالر می‌نامند.

۳ـ۴۹ ماتریس واحد (همانی)[2]

ماتریس واحد، ماتریس اسکالری است که درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن همگی مساوی ۱ است. ماتریس واحد مرتبه n را با I_n نشان می‌دهند.

مثال: ماتریس واحد ۳ × ۳ عبارت است از

$$I_۳ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad \square$$

1.Scalar matrices

2.Identity matrix

وقتی مرتبه ماتریس واحد معلوم باشد و یا اهمیت نداشته باشد، ماتریس واحد را با I نشان می‌دهند. قبلاً دیدیم که برای هر ماتریس مرتبه n مانند A، داریم

$$I_n A = A I_n = A$$

یعنی، ماتریس واحد، عضو بی‌اثر مجموعه ماتریسهای مربع نسبت به عمل ضرب است.

برای همین، ماتریس واحد رفتاری شبیه عدد یک در ضرب اعداد دارد، از این رو، گاهی ریاضیدانان ماتریس واحد را با 1 نیز نشان می‌دهند.

مثال: به‌سادگی دیده می‌شود که، برای هر عدد طبیعی k داریم

$$I^k = I \quad \square$$

مثال: هر ماتریس اسکالر مضربی از ماتریس واحد است. یعنی،

$$\begin{bmatrix} k & ۰ & ۰ \\ ۰ & k & ۰ \\ ۰ & ۰ & k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = kI \quad \square$$

۳ـ۵۰ ماتریسهای خود توان[1]

ماتریس مربع A را خود توان می‌نامند، هرگاه

$$A^۲ = A$$

مثال: ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۴ & ۵ \\ ۱ & -۳ & -۴ \end{bmatrix}$$

خود توان است، زیرا

$$\begin{aligned} A^۲ &= \begin{bmatrix} ۲ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۴ & ۵ \\ ۱ & -۳ & -۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۴ & ۵ \\ ۱ & -۳ & -۴ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ۲ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۴ & ۵ \\ ۱ & -۳ & -۴ \end{bmatrix} \\ &= A \quad \square \end{aligned}$$

---

1. Idempotent matrices

مثال: نشان دهید ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}$$

خود توان است.

حل:

$$a^2 = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha & \cos^3\alpha\sin\alpha + \sin^3\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos^3\alpha + \sin^3\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) & \cos\alpha\sin\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) \\ \sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) & \sin^2\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= A \quad \square$$

با توجه به ۲۸۰۳ گزاره زیر برقرار است.

۳ـ۵۱ گزاره

اگر A خود توان باشد، در این صورت برای هر عدد طبیعی n، داریم

$$A^n = A$$

۳ـ۵۲ ماتریسهای پوچ توان[1]

ماتریس مربع A را پوچ توان نامند، هرگاه به‌ازاء یک عدد طبیعی، مانند n، داشته باشیم

$$A^n = \bar{o}$$

بدیهی است که اگر $A^n = \bar{o}$، به‌ازای هر عدد طبیعی بزرگتر از n مانند m داریم

$$A^m = \bar{o}$$

کوچکترین این nها را اندیس پوچ توانی A گویند.

1.Nilpotent matrices

مثال: ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۳ \\ ۵ & ۲ & ۶ \\ -۲ & -۱ & -۳ \end{bmatrix}$$

پوچ توان با اندیس ۳ است، زیرا

$$A^{۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۳ \\ ۵ & ۲ & ۶ \\ -۲ & -۱ & -۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۳ \\ ۵ & ۲ & ۶ \\ -۲ & -۱ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۳ & ۹ \\ -۱ & -۱ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$A^{۳} = A^{۲}A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۳ & ۹ \\ -۱ & -۱ & -۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۳ \\ ۵ & ۲ & ۶ \\ -۲ & -۱ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$= \bar{o} \quad \square$$

از اینکه $A^{۳} = \bar{o}$ نتیجه می‌گیریم به‌ازاء $m \geq ۳$ داریم

$$A^m = \bar{o}$$

مثال: ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} = A$ پوچ توان نیست، زیرا

$$A^{۲} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲^{۲} & ۰ \\ ۰ & ۳^{۲} \end{bmatrix}$$

$$A^{۳} = A^{۲}A = \begin{bmatrix} ۲^{۲} & ۰ \\ ۰ & ۳^{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲^{۳} & ۰ \\ ۰ & ۳^{۳} \end{bmatrix}$$

با استقراء می‌توان نشان داد.

$$A^n = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} ۲^n & ۰ \\ ۰ & ۳^n \end{bmatrix}$$

بنابراین هیچ توانی از A صفر نیست، یعنی A پوچ توان نیست. $\square$

۳ـ۵۳ ماتریسهای متناوب[1]

ماتریس مربع A را متناوب می‌نامند، هرگاه عدد طبیعی مانند k وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$A^{k+1} = A$$

کوچکترین این kها را دوره تناوب ماتریس $\mathbf{A}$ گویند.

مثال: ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

متناوب با دوره تناوب ۲ است، زیرا

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = AA^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= A \quad \square$$

بنابراین A ماتریس متناوب با دوره تناوب ۲ است.

در مورد این گونه ماتریسها به‌سادگی می‌توان هر توان آنها را حساب کرد. برای مثال،

$$\begin{aligned} A^{25} &= (A^3)^8 \cdot A \\ &= A^8 \cdot A \\ &= (A^3)^3 \\ &= A \end{aligned}$$

۳ـ۵۴ قضایا و گزاره‌های تکمیلی در مورد ماتریسهای تعویض پذیر

دیدیم که بنا به‌تعریف دو ماتریس مربع هم مرتبه A و B تعویض پذیرند، هرگاه $AB = BA$. در

---

1. Periodic matrices

این صورت، گویند A و B جابجا می‌شوند. به‌عنوان مثال، هر ماتریس مربع مرتبه n با ماتریس واحد مرتبه n جابجا می‌شود، یعنی

$$AI = IA = A$$

به‌عنوان مثالی دیگر، هر ماتریس با توانهای خودش جابجا می‌شود، یعنی داریم

$$AA^n = A^n A$$

به‌طورکلی، توانهای مختلف یک ماتریس با هم جابجا می‌شوند، یعنی

$$A^n A^m = A^m A^n$$

۳ـ۵۵ گزاره

اگر A و B تعویض پذیر باشند، در این صورت A با هر توان B نیز جابجا می‌شود، یعنی

$$AB = BA \Rightarrow AB^n = B^n A$$

اثبات: با استقراء گزاره را ثابت می‌کنیم. به‌ازای $n = ۱$ به‌وضوح حکم برقرار است. فرض کنید به ازای $n = k$ داشته باشیم $AB^k = B^k A$، ثابت می‌کنیم

$$AB^{k+۱} = B^{k+۱} A$$

برای این کار به‌صورت زیر عمل می‌کنیم

$$\begin{aligned} AB^{k+۱} &= AB^k B \\ &= B^k AB && \text{بنابر فرض استقراء} \\ &= B^k BA && AB = BA \ \text{زیرا} \\ &= B^{k+۱} A && \blacksquare \end{aligned}$$

۳ـ۵۶ گزاره

اگر A و B تعویض پذیر باشند، آنگاه $(AB)^n = A^n B^n$.

اثبات: با استقراء گزاره زیر را ثابت می‌کنیم. به‌ازای $n = ۱$ داریم $AB = BA$، که به‌وضوح درست است.

$$(AB)^k = A^k B^k \qquad \text{فرض استقراء}$$

$$(AB)^{k+1} = A^{k+1} B^{k+1} \qquad \text{حکم استقراء}$$

$$\begin{aligned}(AB)^{k+1} &= (AB)^k (AB)\\ &= A^k B^k AB\\ &= A^k A B^k B \qquad \text{بنابر گزاره ۳۰۵۵}\\ &= A^{k+1} B^{k+1} \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

۳ـ۵۷ گزاره

اگر A و B تعویض پذیر باشند، ثابت کنید

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

اثبات: قبلاً دیدیم که $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$، بنابراین

$$\begin{aligned}(A+B)^3 &= (A+B)^2(A+B)\\ &= (A^2 + B^2 + 2AB)(A+B)\\ &= A^3 + A^2B + B^2A + B^3 + 2ABA + 2AB^2\\ &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

به‌طورکلی، قضیه دو جمله‌ای در مورد ماتریسهای تعویض پذیر برقرار است.

۳ـ۵۸ قضیه

اگر A و B دو ماتریس تعویض پذیر باشند، آنگاه

$$(A+B)^n = A^n + \binom{n}{1}A^{n-1}B + \binom{n}{2}A^{n-2}B^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}AB^{n-1} + B^n$$

که در آن

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

اثبات: روی n استقراء می‌کنیم. به‌ازای $n=1$ تساوی $A+B = A+B$، به‌دست می‌آید که به طور بدیهی درست است. حال فرض کنید داشته باشیم

$$(A+B)^k = A^k + \binom{k}{1}A^{k-1}B + \cdots + \binom{k}{k-1}AB^{k-1} + B^k$$

ثابت می‌کنیم که

$$(A+B)^{k+۱} = A^{k+۱} + \binom{k+۱}{۱}A^kB + \cdots + \binom{k+۱}{k}AB^k + B^{k+۱}$$

نخست یادآوری می‌کنیم که چون A و B تعویض پذیرند، هر توان A با هر توان B جابجا می‌شود. در ضمن قاعده پاسکال در مورد ضرایب دو جمله‌ای را در زیر می‌آوریم

$$\binom{k}{t} + \binom{k}{t+۱} = \binom{k+۱}{t+۱}$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\binom{k}{۱} + \binom{k}{۰} = \binom{k+۱}{۱}, \binom{k}{۲} + \binom{k}{۱} = \binom{k+۱}{۲}, \cdots$$

همچنین، داریم

$$\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$$

بنابراین، خواهیم داشت

$$\binom{k}{k-۱} = \binom{k}{۱} \quad , \quad \binom{k}{k-۲} = \binom{k}{۲}, \cdots$$

حال، طرفین فرض استقراء را در $(A+B)$ ضرب می‌کنیم

$$\begin{aligned}
(A+B)(A+B)^k &= (A+B)\left[\binom{k}{۰}A^k + \binom{k}{۱}A^{k-۱}B + \binom{k}{۲}A^{k-۲}B^۲ + \cdots\right.\\
&\quad \left. + \binom{k}{۱}AB^{k-۱} + \binom{k}{۰}B^k\right]\\
&= \binom{k}{۰}A^{k+۱} + \binom{k}{۱}A^kB + \binom{k}{۲}A^{k-۱}B^۲ + \cdots + \binom{k}{۱}A^۲B^{k-۱}\\
&\quad + \binom{k}{۰}AB^k + \binom{k}{۰}BA^k + \binom{k}{۱}BA^{k-۱}B + \cdots + \binom{k}{۱}BAB^{k-۱}\\
&\quad + \binom{k}{۰}B^{k+۱}\\
&= \binom{k}{۰}A^{k+۱} + \left[\binom{k}{۱} + \binom{k}{۰}\right]A^kB + \cdots\\
&\quad + \left[\binom{k}{۰} + \binom{k}{۱}\right]BAB^{k-۱} + \binom{k}{۰}B^{k+۱}\\
&= A^{k+۱} + \binom{k+۱}{۱}A^kB + \binom{k+۱}{۲}A^{k-۱}B^۲ + \cdots\\
&\quad + \binom{k+۱}{۱}AB^k + B^{k+۱} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

۳ـ۵۹ نتیجه

اگر A یک ماتریس مربع مرتبه n و I ماتریس واحد مرتبه n باشد، در این صورت

$$(I+A)^n = I + nA + \frac{n(n-۱)}{۲!}A^۲ + \cdots + A^n \quad \blacksquare$$

۳ـ۶۰ قضیه

اگر A و B دو ماتریس تعویض پذیر باشند، آنگاه

$$A^n - B^n = (A-B)(A^{n-۱} + A^{n-۲}B + \cdots + B^{n-۱})$$

اثبات: با یک عمل ضرب معمولی اثبات انجام می‌شود. $\blacksquare$

۳ـ۶۱ نتیجه

اگر I ماتریس واحد و A ماتریس مربع هم مرتبه با I باشد، در این صورت

$$(A^n - I) = (A-I)(A^{n-۱} + A^{n-۲} + \cdots + I)$$

مثال: اگر A ماتریس مربع مرتبه n و I ماتریس واحد هم مرتبه با A باشد، آنگاه $A-I$ و $A+I$ تعویض پذیرند، زیرا

$$(A+I)(A-I) = A^۲ - I$$

$$(A-I)(A+I) = A^۲ - I$$

بنابراین

$$(A+I)(A-I) = (A-I)(A+I) \quad \square$$

۳ـ۶۲ گزاره

اگر A و B تعویض پذیر باشند، آنگاه همه ترکیبات خطی A و B با یکدیگر تعویض پذیرند، یعنی به‌ازای هر r و $r_۱$ و s و $s_۱$ از اعداد حقیقی داریم.

$$(rA+sB)(r_۱A+s_۱B) = (r_۱A+s_۱B)(rA+sB)$$

اثبات :

$$\begin{aligned}(rA+sB)(r_۱A+s_۱B) &= rr_۱A^۲ + (rA)(s_۱B) + (sB)(r_۱A) + ss_۱B^۲ \\ &= rr_۱A^۲ + (rs_۱ + sr_۱)AB + ss_۱B^۲\end{aligned}$$

از طرف دیگر،

$$(r_1A+s_1B)(rA+sB)=rr_1A^2+(r_1A)(sB)+(s_1B)(rA)+s_1sB^2$$
$$=rr_1A^2+(rs_1+r_1s)AB+ss_1B^2 \quad \blacksquare$$

۳ـ۶۳ مسئله

اگر $rA+sB$ و r_1A+s_1B تعویض پذیر باشند، و $sr_1-r_1s\neq 0$، ثابت کنید A و B تعویض پذیرند.

حل: بنا بر فرض مسئله، داریم

$$(rA+sB)(r_1A+s_1B)=(r_1A+s_1B)(rA+sB)$$

با انجام اعمال ضرب و ساده‌سازی نتیجه می‌شود

$$rs_1AB+sr_1BA=r_1sAB+rs_1BA$$

بنابراین

$$(rs_1-r_1s)AB=(rs_1-r_1s)BA$$

از آنجا که $rs_1-r_1s\neq 0$، با حذف آن از طرفین، داریم

$$AB=BA \quad \square$$

۳ـ۶۴ گزاره

هر دو ماتریس به‌صورت

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

با هم جابجا می‌شوند.

اثبات: فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ bc+ad & ac-bd \end{bmatrix}$$

از طرف دیگر،

$$BA = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ ad+bc & ac-bd \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$AB = BA \quad \blacksquare$$

۳ـ۶۵ نتیجه

هر دو ماتریس به‌صورت

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

با یکدیگر جابجا می‌شوند. ■

۳ـ۶۶ گزاره

هر ماتریسی که با یکی از ماتریسهای به‌صورت

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \qquad b \neq ۰$$

جابجا شود به‌همین شکل است.

اثبات: فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

ماتریسی باشد که با ماتریس

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

جابجا شود، بنابراین

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{bmatrix} ax+by & -bx+ay \\ az+bt & -bz+at \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax-bz & ay-bt \\ bx+az & by+at \end{bmatrix}$$

و از آنجا معادلات زیر به‌دست می‌آیند.

$$ax+by = ax-bz \qquad , \qquad -bx+ay = ay-bt$$

$$az+bt = bx+az \qquad , \qquad -bz+at = by+at$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\begin{cases} by = -bz \\ -bx = -bt \end{cases}$$

از آنجا که $b \neq ۰$، نتیجه می‌گیریم

$$\begin{cases} y = -z \\ x = t \end{cases}$$

پس، A به‌صورت زیر است

$$A = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

۳ـ۶۷ مسئله

اگر A و B و C ماتریسهای $n \times n$ و A با C و هم چنین B با Cتعویض پذیر باشد ثابت کنید AB با C تعویض پذیر است.

حل:

$$(AB)C = A(BC)$$

$$= A(CB) \quad \text{زیرا } B \text{ و } C \text{ تعویض پذیرند.}$$

$$= C(AB) \quad \text{زیرا } A \text{ و } C \text{ تعویض پذیرند.} \quad \square$$

۳ـ۶۸ قضایا و گزاره‌های تکمیلی در مورد اثر ماتریس

فرض کنید A یک ماتریس مربع مرتبه n باشد، اثر ماتریس A عددی است که با نماد trA نشان داده می‌شود، و بنابر تعریف برابر است با مجموع درایه‌های واقع بر قطر اصلی A، یعنی

$$trA = \sum_{k=۱}^{n} a_{kk}$$

به‌عبارت دیگر، tr (بخوانید $trace$) ، تابعی است از مجموعه ماتریسهای مربع مرتبه n در مجموعه اعداد حقیقی.

مثال: اگر

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

نشان دهید $trAB = trBA$.

حل:

$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۰ & ۳ \\ ۸ & ۸ \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۰ & ۱۴ \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$trAB = trBA = ۱۸ \quad \square$$

۳ـ۶۹ قضیه

اگر A و B دو ماتریس مربع مرتبه n باشند، آنگاه

$$tr(A+B) = trA + trB$$

اثبات:

$$\begin{aligned} tr(A+B) &= \text{مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس} A+B \\ &= \sum_{i=۱}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) \\ &= \sum_{i=۱}^{n} a_{ii} + \sum_{i=۱}^{n} b_{ii} \\ &= trA + trB \quad \blacksquare \end{aligned}$$

۳ـ۷۰ قضیه

اگر A یک ماتریس مربع مرتبه n و λ یک عدد حقیقی باشد، در این صورت

$$tr(\lambda A) = \lambda trA$$

اثبات:

$$\begin{aligned} tr(\lambda A) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \\ &= \lambda trA \quad \blacksquare \end{aligned}$$

۳ـ۷۱ نتیجه

اگر A و B دو ماتریس مربع هم مرتبه باشند، آنگاه

$$tr(A-B) = trA - trB \quad \blacksquare$$

۳ـ۷۲ قضیه

اگر A و B دو ماتریس مربع مرتبه n باشند، آنگاه

$$tr(AB) = tr(BA)$$

اثبات: قرار می‌دهیم $AB = C$ و $BA = D$.

$$tr(AB) = c_{11} + c_{22} + \cdots + c_{nn}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} + \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} + \cdots + \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{kn}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$$

از طرف دیگر،

$$\begin{aligned} tr(BA) &= d_{11} + d_{22} + \cdots + d_{nn} \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_{1i}a_{i1} + \sum_{i=1}^{n} b_{2i}a_{i2} + \cdots + \sum_{i=1}^{n} b_{ni}a_{in} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{ki} \end{aligned}$$

بنابراین،

$$tr(AB) = tr(BA) \quad \blacksquare$$

قبل از پرداختن به گزاره بعد، یادآوری می‌کنیم که اثر ماتریس واحد مرتبه n، برابر n است یعنی

$$tr(I_n) = n$$

۳ـ۷۳ گزاره

هیچ دو ماتریس مربع مرتبه n مانند A و B نمی‌توان یافت به‌طوری‌که

$$AB - BA = I$$

اثبات: اگر چنین ماتریسهایی وجود داشته باشند، خواهیم داشت

$$tr(AB - BA) = tr(I)$$

و از آنجا،

$$tr(AB) - tr(BA) = n$$

با توجه به قضیه ۳ ـ ۷۲ نتیجه می‌گیریم

$$n = ۰$$

و این ممکن نیست، زیرا مرتبه ماتریس مربع عددی طبیعی است. ■

۳ـ۷۴ گزاره

اگر A و B و C سه ماتریس مربعی مرتبه n باشد، در این صورت

$$tr(ABC) = tr(BCA)$$

اثبات:

$$\begin{aligned} tr(ABC) &= tr[A(BC)] \\ &= tr[(BC)A] \qquad \text{بنابر قضیه ۳ ـ ۷۲} \\ &= tr(BCA) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

۳ـ۷۵ قضایا و گزاره‌های تکمیلی در مورد ماتریسهای مثلثی

۳ـ۷۶ گزاره

مجموع دو ماتریس بالا مثلثی هر مرتبه، ماتریسی بالا مثلثی است.

اثبات: فرض کنید $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ دو ماتریس بالا مثلثی هم‌مرتبه باشند. بنابراین، برای $j < i$، داریم

$$a_{ij} = b_{ij} = 0$$

بنابراین به‌ازای $j < i$ خواهیم داشت

$$a_{ij} + b_{ij} = 0$$

پس $A + B$ نیز بالا مثلثی است. ■

البته، اگر ماتریسها را به‌صورت گسترده نیز بنویسیم، اثبات گزاره آسان است.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & & a_{1n}+b_{1n} \\ 0 & a_{22}+b_{22} & & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix}$$

به‌طریق مشابه ثابت می‌شود که،

۳ـ۷۷ گزاره

مجموع دو ماتریس پایین مثلثی هم مرتبه، ماتریسی پایین مثلثی است. ■

درگزارهٔ زیر می‌بینیم که اگر عددی در یک ماتریس بالا مثلثی (یا پایین مثلثی) ضرب شود، ماتریس به‌دست آمده نیز بالا مثلثی (یا پایین مثلثی) است. به‌دلیل سادگی اثبات آن را به خواننده واگذار می‌کنیم.

۳ـ۷۸ گزاره

فرض کنید A یک ماتریس بالا مثلثی (یا پایین مثلثی) و λ یک عدد حقیقی باشد، در این صورت λA نیز ماتریسی بالا مثلثی (یا پایین مثلثی) است.

۳ـ۷۹ نتیجه

مجموعه ماتریسهای بالا مثلثی مرتبه n (یا پایین مثلثی مرتبه n) یک زیر فضای برداری ماتریسهای مربعی مرتبه n می‌باشند.

۳ـ۸۰ گزاره

حاصل‌ضرب دو ماتریس پایین مثلثی هم مرتبه، ماتریسی پایین مثلثی است.

اثبات: فرض کنید $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ دو ماتریس پایین مثلثی مرتبه n باشند، در این صورت برای $i < j$ داریم

$$a_{ij} = b_{ij} = 0$$

قرار می‌دهیم $AB = [c_{ij}]$. نشان می‌دهیم برای $i < j$،

$$c_{ij} = 0$$

حال، فرض کنید $i < j$.

$c_{ij} = A$ سطر iام $\times$ B ستون jام

$$= \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \overset{\text{درایه } i\text{ام}}{\overset{\downarrow}{a_{ii}}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{jj} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \rightarrow \text{درایه } j\text{ام} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= (a_{i1} \cdot 0) + (a_{i2} \cdot 0) + \cdots + (a_{ii} \cdot 0) + (0 \cdot 0) + \cdots + (0 \cdot b_{jj}) + \cdots + (0 \cdot b_{nj})$$
$$= 0$$

در واقع با توجه به اینکه

$$a_{i,i+1} = a_{i,i+2} = \cdots = a_{in} = 0$$
$$b_{1j} = b_{2j} = \cdots = b_{j-1,j} = 0$$

داریم

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \\ &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ii}b_{ij} + a_{i,i+1}b_{i+1,j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \end{aligned}$$

$$= a_{i۱}\cdot ۰ + a_{i۲}\cdot ۰ + \cdots + a_{ii}\cdot ۰ + ۰\cdot b_{i+۱,j} + \cdots + ۰\cdot b_{nj}$$

$$= ۰ \quad \blacksquare$$

گزاره زیر به‌طریق مشابه ثابت می‌شود.

۳ـ۸۱ گزاره

حاصل‌ضرب دو ماتریس بالا مثلثی هم مرتبه ماتریسی بالا مثلثی است. ■

۳ـ۸۲ نتیجه

مجموعه ماتریسهای بالا مثلثی مرتبه n یک زیر حلقه ماتریسهای مربعی مرتبه n است. ■

۳ـ۸۳ نتیجه

مجموعه ماتریسهای پایین مثلثی مرتبه n یک زیر حلقه ماتریسهای مربع مرتبه n است. ■

می‌توان نشان داد که هر ماتریس را تحت شرایطی می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب یک ماتریس بالا مثلثی و یک ماتریس پایین مثلثی نوشت. برای این کار به مسئله زیر دقت کنید.

مثال: فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ -۱ & ۵ & ۴ \\ ۲ & ۴ & ۱۴ \end{bmatrix}$$

A را به حاصل‌ضرب دو ماتریس L و U در آورده به‌طوری‌که L ماتریسی پایین مثلثی و Uماتریسی بالا مثلثی باشد و درایه‌های قطر اصلی U مساوی ۱ باشد.

حل: فرض کنید $A = LU$، ماتریسهای L و U باید به‌شکل زیر باشند.

$$L = \begin{bmatrix} t_{۱۱} & ۰ & ۰ \\ t_{۲۱} & t_{۲۲} & ۰ \\ t_{۳۱} & t_{۳۲} & t_{۳۳} \end{bmatrix} \quad , \quad U = \begin{bmatrix} ۱ & r_{۱۲} & r_{۱۳} \\ ۰ & ۱ & r_{۲۳} \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین، داریم

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ -۱ & ۵ & ۴ \\ ۲ & ۴ & ۱۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{۱۱} & t_{۱۱}r_{۱۲} & t_{۱۱}r_{۱۳} \\ t_{۲۱} & t_{۲۱}r_{۱۲} + t_{۲۲} & t_{۲۱}r_{۱۳} + t_{۲۲}r_{۲۳} \\ t_{۳۱} & t_{۳۱}r_{۱۲} + t_{۳۲} & t_{۳۱}r_{۱۳} + t_{۳۲}r_{۲۳} + t_{۳۳} \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{array}{lll} t_{11}=1 & , \quad t_{11}r_{12}=-1 & , \quad t_{11}r_{13}=2 \\ t_{21}=-1 & , \quad t_{21}r_{12}+t_{22}=5 & , \quad t_{21}r_{13}+t_{22}r_{23}=4 \\ t_{31}=2 & , \quad t_{31}r_{12}+t_{32}=4 & , \quad t_{31}r_{13}+t_{32}r_{23}+t_{33}=14 \end{array}$$

از حل این دستگاه نتیجه می‌گیریم

$$\begin{array}{lll} t_{11}=1 & , \quad t_{21}=-1 & , \quad t_{31}=2 \\ t_{22}=4 & , \quad t_{32}=6 & , \quad t_{33}=1 \\ r_{12}=-1 & , \quad r_{13}=2 & , \quad r_{23}=\frac{3}{4} \end{array}$$

بنابراین

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad U=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \square$$

تذکر: تجزیه یک ماتریس A به‌صورت $A=LU$ را که در آن L یک ماتریس پایین مثلثی و U یک ماتریس بالا مثلثی است یک تجزیه مثلثی[1] یا یک تجزیه LU [2] ماتریس A نامند.

۳ـ۸۴ قضایا و گزاره‌های تکمیلی در مورد ماتریسهای قطری

قبلاً لازم است یادآوری کنیم که هر ماتریس قطری ترکیبی خطی از ماتریسهای E_{11} و E_{22} و $\cdots$ و E_{nn} است، و همان طور که قبلاً تعریف کردیم، $E_{ii}=[e_{kl}]$ ماتریس مربعی است که $e_{ii}=1$، و سایر درایه‌های آن صفر است. برای مثال، برای ماتریسهای مربع مرتبه ۳، داریم

$$E_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad E_{22}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad E_{33}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در ضمن، قبلاً ثابت کردیم

$$E_{ii}E_{jj}=\begin{cases} \bar{o} & ; \quad i\neq j \\ E_{ii} & ; \quad i=j \end{cases} \qquad (1)$$

حال، فرض کنید A یک ماتریس قطری 3×3 باشد، در این صورت A به‌شکل زیر است.

$$A=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

بنابراین،

---

1. Triangular decomposition
2. LU-decomposition

$$A = aE_{۱۱} + bE_{۲۲} + cE_{۳۳}$$

بدیهی است که برای هر ماتریس قطری ۳ × ۳ دیگری مانند

$$B = \begin{bmatrix} a_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & b_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & c_۱ \end{bmatrix}$$

داریم

$$B = a_۱ E_{۱۱} + b_۱ E_{۲۲} + c_۱ E_{۳۳}$$

حال، برای محاسبه AB می‌توانیم به‌شکل زیر عمل کنیم.

$$AB = (aE_{۱۱} + bE_{۲۲} + cE_{۳۳})(a_۱ E_{۱۱} + b_۱ E_{۲۲} + c_۱ E_{۳۳})$$

با توجه به رابطه (۱) نتیجه می‌شود

$$AB = aa_۱ E_{۱۱} + bb_۱ E_{۲۲} + cc_۱ E_{۳۳}$$

بنابراین

$$\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & b_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & c_۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & bb_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & cc_۱ \end{bmatrix}$$

به‌طورکلی قضیه زیر برقرار است.

۳ـ۸۵ قضیه

حاصل‌ضرب دو ماتریس قطری هم‌مرتبه ماتریسی قطری است.

اثبات: روش اول. فرض کنید $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ دو ماتریس قطری مرتبه n باشند، بنابراین

$$A = \sum_{i=۱}^{n} a_{ii} E_{ii} \qquad , \qquad B = \sum_{i=۱}^{n} b_{ii} E_{ii}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} AB &= \left(\sum_{i=۱}^{n} a_{ii} E_{ii}\right)\left(\sum_{i=۱}^{n} b_{ii} E_{ii}\right) \\ &= (a_{۱۱} E_{۱۱} + a_{۲۲} E_{۲۲} + \cdots + a_{nn} E_{nn})(b_{۱۱} E_{۱۱} + b_{۲۲} E_{۲۲} + \cdots + b_{nn} E_{nn}) \\ &= a_{۱۱} b_{۱۱} E_{۱۱} + a_{۲۲} b_{۲۲} E_{۲۲} + \cdots + a_{nn} b_{nn} E_{nn} \end{aligned}$$

روش دوم. فرض کنید $AB = [c_{ij}]$. نشان می‌دهیم به‌ازای $i \neq j$، داریم

$$c_{ij} = ۰$$

فرض کنید $i \neq j$.

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=۱}^{n} a_{ik} b_{kj} \\ &= a_{i۱}b_{۱j} + a_{i۲}b_{۲j} + \cdots + a_{ii}b_{ij} + \cdots + a_{ij}b_{jj} + \cdots + a_{in}b_{nj} \\ &= ۰ \cdot ۰ + ۰ \cdot ۰ + \cdots + ۰ \cdot ۰ + \cdots + ۰ \cdot ۰ + \cdots + ۰ \cdot ۰ \\ &= ۰ \end{aligned}$$

بنابراین، AB قطری است. در ضمن درایه‌های قطر اصلی AB را نیز می‌توان تعیین کرد، برای این کار باید c_{ii}ها را حساب کرد.

$$c_{ii} = a_{i۱}b_{۱i} + a_{i۲}b_{۲i} + \cdots + a_{ii}b_{ii} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

پس

$$c_{ii} = ۰ \cdot ۰ + ۰ \cdot ۰ + \cdots + a_{ii}b_{ii} + \cdots + ۰ \cdot ۰ = a_{ii}b_{ii}$$

بنابراین

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & O & O \\ ۰ & a_{۲۲} & O \\ \vdots & & \ddots \\ ۰ & ۰ & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{۱۱} & O & O \\ ۰ & b_{۲۲} & O \\ \vdots & & \ddots \\ ۰ & ۰ & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{۱۱}b_{۱۱} & & O \\ & a_{۲۲}b_{۲۲} & \\ & & \ddots \\ O & & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

به‌بیان دیگر

$$diag(a_{۱۱}, a_{۲۲}, \cdots, a_{nn}) \cdot diag(b_{۱۱}, b_{۲۲}, \cdots, b_{nn}) = diag(a_{۱۱}b_{۱۱}, a_{۲۲}b_{۲۲}, \cdots, a_{nn}b_{nn})$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۳} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

به‌همین ترتیب به‌سادگی دیده می‌شود که مجموع دو ماتریس قطری هم مرتبه، ماتریسی قطری است و حاصل‌ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس قطری، ماتریسی قطری است. $\square$

۳ـ۸۶ قضیه

اگر A و B دو ماتریس قطری هم مرتبه و λ یک عدد حقیقی باشد در این صورت $A+B$ و λA نیز ماتریسهایی قطری به‌شکل زیرند.

$$\begin{bmatrix} a_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_2 & \cdot \\ \vdots & & \ddots \\ \cdot & \cdot & a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & b_2 & \cdot \\ \vdots & & \ddots \\ \cdot & \cdot & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 & & O \\ & a_2+b_2 & \\ & & \ddots \\ O & & a_n+b_n \end{bmatrix}$$

و

$$\lambda \begin{bmatrix} a_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_2 & \cdot \\ \vdots & & \ddots \\ \cdot & \cdot & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 & & O \\ & \lambda a_2 & \\ & & \ddots \\ O & & \lambda a_n \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

۳ـ۸۷ نتیجه

هر دو ماتریس قطری هم مرتبه تعویض پذیرند.

۳ـ۸۸ نتیجه

مجموعه ماتریسهای قطری مرتبه n یک زیرفضای فضای ماتریسهای مرتبه n است.

۳ـ۸۹ نتیجه

مجموعه ماتریسهای قطری مرتبه n، با جمع و ضرب ماتریسها یک حلقه جابجایی یکه‌دار است.

۳ـ۹۰ ضرب ماتریسهای قطری از سمت چپ در یک ماتریس

برای سهولت، این بحث را در مورد ماتریسهای قطری ۳ × ۳ بیان می‌کنیم. به‌سادگی دیده می‌شود که بحث برای ماتریسهای از مرتبه دلخواه نیز معتبر است. در ابتدا، ضرب ماتریسهای E_{11} و E_{22} و E_{33} را از سمت چپ در یک ماتریس بررسی می‌کنیم. دیدیم که

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad , \quad E_{22} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad , \quad E_{33} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

حال، فرض کنید A یک ماتریس دلخواه ۲ × ۳ باشد، داریم

$$E_{11}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{22}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{33}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ e & f \end{bmatrix}$$

حال، اگر D یک ماتریس قطری ۳ × ۳ باشد، داریم

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} = d_{11}E_{11} + d_{22}E_{22} + d_{33}E_{33}$$

با ضرب ماتریس قطری D از سمت چپ در A، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} DA &= (d_{11}E_{11} + d_{22}E_{22} + d_{33}E_{33})A \\ &= d_{11}E_{11}A + d_{22}E_{22}A + d_{33}E_{33}A \\ &= d_{11}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d_{22}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d_{33}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ e & f \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_{11}a & d_{11}b \\ d_{22}c & d_{22}d \\ d_{33}e & d_{33}f \end{bmatrix} \end{aligned}$$

بنابراین، اگر یک ماتریس قطری از سمت چپ در ماتریس A ضرب شود، ماتریس حاصل همان ماتریس A است که هر سطر آن در درایه واقع بر سطر نظیر آن در قطر اصلی ماتریس قطری ضرب شده است. یعنی، d_{11} در سطر اول، d_{22} در سطر دوم و ... و d_{nn} در سطر nام A ضرب می‌شود.

۳ـ۹۱ ضرب ماتریسهای قطری از سمت راست در یک ماتریس

روش اول فرض کنید D یک ماتریس قطری مرتبه n به‌صورت زیر باشد.

$$D = diag(d_{11}, d_{22}, \cdots, d_{nn})$$

بنابراین

$$D = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} E_{ii}$$

حال اگر A ماتریس دلخواهی باشد به‌طوری‌که AD تعریف شده باشد، در این صورت

$$\begin{aligned} AD &= A(\sum_{i=1}^{n} d_{ii} E_{ii}) \\ &= A(d_{11}E_{11}) + A(d_{22}E_{22}) + \cdots + A(d_{nn}E_{nn}) \end{aligned}$$

با توجه به گزاره ۳۹۰۲، AE_{ii} ماتریسی است که همه ستونهای آن به‌جز احتمالاً ستون iام آن صفر است، و ستون iام آن همان ستون iام ماتریس A است. در نتیجه

$$AD = d_{11}\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & & 0 \\ a_{21} & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & & 0 \end{bmatrix} + d_{22}\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & & 0 \\ 0 & a_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \cdots + d_{nn}\begin{bmatrix} 0 & 0 & & a_{1n} \\ 0 & 0 & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

بنابراین،

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & & & O \\ & d_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & d_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d_{11}a_{11} & d_{22}a_{12} & & d_{nn}a_{1n} \\ d_{11}a_{21} & d_{22}a_{22} & & d_{nn}a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ d_{11}a_{n1} & d_{22}a_{n2} & & d_{nn}a_{nn} \end{bmatrix}$$

روش دوم. قرار می‌دهیم $AD = C$، فرض کنید c_{ij} درایه دلخواهی از ستون jام ماتریس C باشد بنابراین

$$\begin{aligned} c_{ij} &= A_{\text{سطر } i\text{ام ماتریس}} \times D_{\text{ستون } j\text{ام ماتریس}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_{kj} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{i1}d_{1j} + a_{i2}d_{2j} + \cdots + a_{ij}d_{jj} + \cdots + a_{in}d_{nj} \\
&= a_{i1}\cdot 0 + a_{i2}\cdot 0 + \cdots + a_{ij}d_{jj} + \cdots + a_{in}\cdot 0 \\
&= a_{ij}d_{jj}
\end{aligned}
$$

بنابراین، برای ضرب یک ماتریس قطری از سمت راست در یک ماتریس، کافی است که درایه‌های قطر اصلی ماتریس قطری را به‌ترتیب در ستونهای نظیر ماتریس دیگر ضرب کنیم، یعنی d_{11} در ستون اول، d_{22} در ستون دوم و ... و d_{nn} در ستون nام ضرب می‌شوند.

۳ـ۹۲ نتیجه

حاصل‌ضرب دو ماتریس قطری را می‌توان به‌عنوان حالت خاصی از قضایای فوق به‌دست آورد، بنابراین

$$
\begin{bmatrix} d_{11} & & & O \\ & d_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & d_{nn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_{11} & & & O \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_{nn} \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} d_{11}a_{11} & 0 & & 0 \\ 0 & d_{22}a_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & d_{nn}a_{nn} \end{bmatrix}
$$

۳ـ۹۳ توانهای یک ماتریس قطری

فرض کنید A یک ماتریس قطری 3×3 به‌شکل زیر باشد

$$
A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}
$$

با توجه به حاصل‌ضرب دو ماتریس قطری، داریم

$$
A^2 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix}
$$

بنابراین،

$$
\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix}
$$

با استقراء می‌توان نشان داد که

$$\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & ۰ & ۰ \\ ۰ & b^n & ۰ \\ ۰ & ۰ & c^n \end{bmatrix}$$

به‌طورکلی داریم

$$\begin{bmatrix} a_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & a_۲ & ۰ \\ \vdots & & \ddots \\ ۰ & ۰ & a_k \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_۱^n & & O \\ & a_۲^n & \\ & & \ddots \\ O & & a_k^n \end{bmatrix}$$

۳ـ۹۴ قضایا و گزاره‌های تکمیلی در مورد ماتریسهای اسکالر

دیدیم که هر ماتریس اسکالر مضربی از ماتریس واحد است. در نتیجه، ماتریسهای اسکالر رفتاری شبیه اعداد حقیقی دارند. به‌سادگی می‌توان نشان داد که

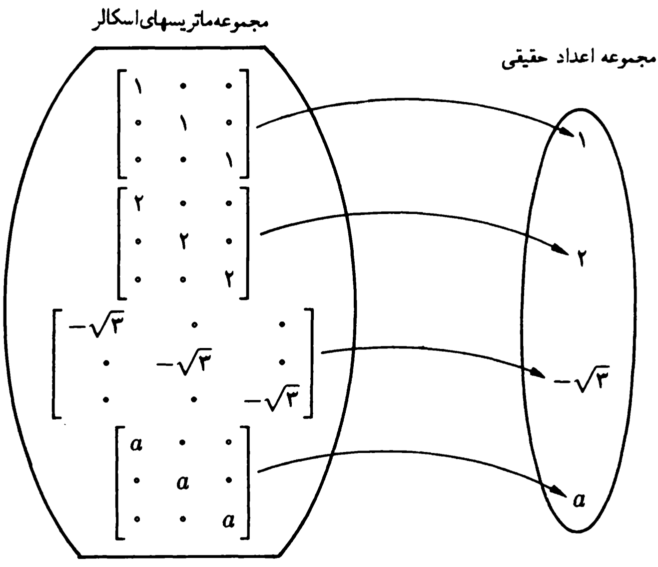
۱) مجموع و حاصل‌ضرب دو ماتریس اسکالر ماتریس اسکالری است.

۲) اگر λ یک عدد حقیقی و A یک ماتریس اسکالر باشد، λA نیز ماتریسی اسکالر خواهد بود. بنابراین،

۳) مجموعه ماتریسهای اسکالر با جمع ماتریسها و ضرب اسکالر در ماتریسها، فضای برداری است.

۴) مجموعه ماتریسهای اسکالر با جمع و ضرب ماتریسها، یک حلقه جابجایی یکه‌دار است.

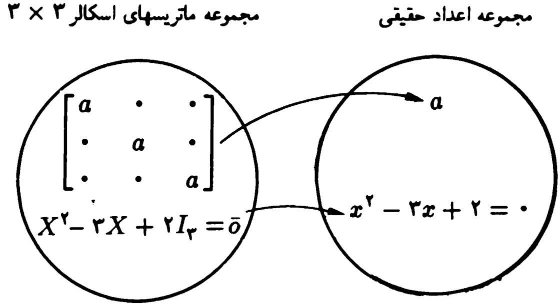
از آنجا که یک ماتریس اسکالر مضربی از ماتریس واحد است، نتیجه می‌شود که می‌توان مجموعه ماتریسهای اسکالر را با مجموعه اعداد حقیقی یکسان گرفت.



مثال: کلیه ماتریسهای اسکالری مانند X را بیابید به‌طوری‌که در معادله زیر صدق کنند.

$$X^{۲} - ۳X + ۲I_{۳} = \bar{o}$$

حل: عملاً می‌بایست ماتریسهای اسکالر ۳×۳ای مانند Xرا بیابیم که در معادله فوق صدق کنند. برای این کار از یکسانی مجموعه ماتریسهای اسکالر و مجموعه اعداد حقیقی استفاده می‌کنیم



با توجه به نمودار فوق و یکسانی مجموعه ماتریسهای اسکالر و مجموعه اعداد حقیقی، ابتدا نظیر معادله $X^{۲} - ۳X + ۲I = \bar{o}$ را در مجموعه اعداد حقیقی، یعنی معادله $x^{۲} - ۳x + ۲ = ۰$ را حل می‌کنیم. جوابهای این معادله عبارت‌اند از $x = ۱$ و $x = ۲$. نظیر این اعداد در مجموعه ماتریسهای اسکالر، یعنی

$$X = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

جوابهای معادله

$$X^{۲} - ۳X + ۲I = \bar{o}$$

می‌باشند. □

روشن است که ماتریسهای اسکالر با ماتریسهای مربعی هم‌مرتبه با آنها تعویض پذیرند. در قضیه زیر ثابت می‌شود که این خاصیت فقط منحصر به ماتریسهای اسکالر است، و هیچ ماتریس دیگری نیست که با همه ماتریسهای مربعی هم‌مرتبه با خودش جابجا شود.

۳ـ۹۵ قضیه

ماتریسهای اسکالر تنها ماتریسهایی هستند که با همه ماتریسهای مربع هم‌مرتبه خودشان تعویض‌پذیرند.

اثبات: فرض کنید A ماتریسی باشد که با همه ماتریسهای مربعی مرتبه n جابجا می‌شود. نخست نشان می‌دهیم که این ماتریس قطری است. برای این کار کافی است ثابت کنیم برای $i \neq j$، $a_{ij} = ۰$. برای مثال، نشان می‌دهیم $a_{۱۲} = ۰$. چون A با همه ماتریسها جابجا می‌شود، پس A با ماتریس $E_{۲۱}$ نیز جابجا می‌شود یعنی،

$$AE_{۲۱} = E_{۲۱}A$$

بنابراین،

$$\text{درایه سطر اول ستون اول } AE_{۲۱} = \text{درایه سطر اول ستون اول } E_{۲۱}A$$

$$\sum_{k=۱}^{n} a_{۱k}e_{k۱} = \sum_{k=۱}^{n} e_{۱k}a_{k۱}$$

در نتیجه

$$a_{۱۱}e_{۱۱} + a_{۱۲}e_{۲۱} + \cdots + a_{۱n}e_{n۱} = e_{۱۱}a_{۱۱} + e_{۱۱}a_{۲۱} + \cdots + e_{۱n}a_{n۱}$$

یا

$$a_{۱۱} \cdot ۰ + a_{۱۲} \cdot ۱ + \cdots + a_{۱n} \cdot ۰ = ۰ \cdot a_{۱۱} + ۰ \cdot a_{۲۱} + \cdots + ۰ \cdot a_{n۱}$$

پس

$$a_{۱۲} = ۰$$

به‌طریق مشابه، دیده می‌شود که تمام درایه‌های غیر واقع بر قطر صفرند. برای این کار فرض کنید $i \neq j$ و ماتریس E_{ji} را در نظر بگیرید، که تمام درایه‌هایش صفر است به‌جز e_{ji} که مساوی ۱ است. از تساوی $AE_{ji} = E_{ji}A$ نتیجه می‌شود

$$\text{درایه سطر } i \text{ام ستون } j \text{ام } AE_{ji} = \text{درایه سطر } i \text{ام ستون } j \text{ام } E_{ji}A$$

پس

$$a_{i۱}e_{۱i} + a_{i۲}e_{۲i} + \cdots + a_{ij}e_{ji} + \cdots + a_{in}e_{ni} = e_{i۱}a_{۱i} + e_{i۲}a_{۲i} + \cdots + e_{in}a_{ni}$$

بنابراین

$$a_{i۱} \cdot ۰ + a_{i۲} \cdot ۰ + \cdots + a_{ij} \cdot ۱ + \cdots + a_{in} \cdot ۰ = ۰$$

پس برای $i \neq j$، داریم

$$a_{ij} = ۰$$

بنابراین A به‌صورت زیر است.

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & ۰ & & ۰ \\ ۰ & a_{۲۲} & & ۰ \\ \vdots & & & \\ ۰ & ۰ & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

حال، باید ثابت کنیم درایه‌های واقع بر قطر اصلی مساوی هستند. برای این کار ماتریس B را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$B=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & & ۱ \\ ۱ & ۱ & & ۱ \\ \vdots & & & \\ ۱ & ۱ & & ۱ \end{bmatrix}$$

در نتیجه چون A با B نیز تعویض پذیر است پس

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & ۰ & & ۰ \\ ۰ & a_{۲۲} & & ۰ \\ \vdots & & & \\ ۰ & ۰ & & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & & ۱ \\ ۱ & ۱ & & ۱ \\ \vdots & & & \\ ۱ & ۱ & & ۱ \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & \cdots & ۱ \\ ۱ & ۱ & & ۱ \\ \vdots & & & \\ ۱ & ۱ & & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{۱۱} & ۰ & & ۰ \\ ۰ & a_{۲۲} & & ۰ \\ \vdots & & & \\ ۰ & ۰ & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۱} & & a_{۱۱} \\ a_{۲۲} & a_{۲۲} & & a_{۲۲} \\ \vdots & & & \\ a_{nn} & a_{nn} & & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۲۲} & & a_{nn} \\ a_{۱۱} & a_{۲۲} & & a_{nn} \\ \vdots & & & \\ a_{۱۱} & a_{۲۲} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

درنتیجه

$$a_{۱۱}=a_{۲۲}=\cdots=a_{nn}$$

یعنی تمام درایه‌های ماتریس قطری A مساویند، پس A ماتریسی اسکالر است. ■

۳ـ۹۶ قضایا و گزاره‌های تکمیلی ماتریسهای پوچ توان

دیدیم که اگر A یک ماتریس پوچ توان با اندیس k باشد، در این صورت $A^k=\bar{o}$ ولی $A^{k-۱}\neq\bar{o}$ و البته تمام توانهای بزرگتر از k نیز صفر است، یعنی

$$A^{k+1} = A^{k+2} = \cdots = \bar{o}$$

۳ـ۹۷ گزاره

کلیه ماتریسهای پوچ توان ۲ × ۲ با اندیس ۲ به‌صورت زیرند.

$$\begin{bmatrix} \pm ab & \pm a^2 \\ \mp b^2 & \mp ab \end{bmatrix}$$

که در آن حداقل یکی از a و b ناصفر است. (در بالا علائم a^2 و b^2 قرینه یکدیگرند و همچنین علائم ab در قطر اصلی قرینه یکدیگرند، ولی علائم قطر اصلی و فرعی مستقل از یکدیگرند.)

اثبات: باید نشان دهیم جواب معادله $A^2 = \bar{o}$، به‌صورت فوق است. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

بنابراین،

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در نتیجه، دستگاه معادلات زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} x^2 + yz = 0 \\ t^2 + yz = 0 \\ \left.\begin{array}{l} xy + yt = 0 \\ xz + tz = 0 \end{array}\right\} \begin{cases} y(x+t) = 0 \\ z(x+t) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$x + t$ حتماً صفر است، زیرا در غیر این صورت، $y = z = 0$ و در نتیجه با استفاده از معادلات بالا نتیجه می‌شود $t = x = 0$، که یعنی $x + t = 0$. بنابراین $t = -x$. به‌کمک این رابطه، معادلات بالا را به‌شکل زیر ساده می‌کنیم.

$$\begin{cases} x^2 = -yz \\ t = -x \end{cases}$$

yz باید عدد منفی باشد، پس y و z مختلف العلامه‌اند. می‌توانیم قرار دهیم $y = \pm a^2$ و $z = \mp b^2$. در نتیجه $t^2 = x^2 = a^2b^2$. از آنجا که، $x = -t$ جوابهای این معادله به‌صورت

$$t = \mp ab \qquad , \qquad x = \pm ab$$

هستند. بنابراین ماتریسهای زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{bmatrix} \pm ab & \pm a^{2} \\ \mp b^{2} & \mp ab \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

تذکر. ماتریسهای پوچ توان 2×2 با اندیس ۲ را به‌صورت زیر هم می‌توان نشان داد.

$$\begin{bmatrix} a & \frac{a^{2}}{b} \\ -b & -a \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} a & -b \\ \frac{a^{2}}{b} & -a \end{bmatrix} \qquad (b \neq 0)$$

مثال: نشان دهید هر ماتریس به‌صورت

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

که در آن $ac \neq 0$، یک ماتریس پوچ توان با اندیس ۳ است.

حل: با محاسبه مستقیم نشان می‌دهیم $A^{2} \neq \bar{o}$ ولی $A^{3} = \bar{o}$.

$$A^{2} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

چون $ac \neq 0$، پس $A^{2} \neq \bar{o}$. از طرف دیگر،

$$A^{3} = A^{2}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{o} \quad \square$$

به‌طورکلی گزاره زیر را داریم.

۳ـ۹۸ گزاره

هر ماتریس بالا مثلثی یا پایین مثلثی که درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن صفر باشد ماتریسی پوچ توان است.

اثبات: زیرا با هر بار ضرب کردن A در خودش درایه‌های واقع بر یک خط موازی قطر اصلی صفر می‌شوند، تا بالاخره کلیه درایه‌ها صفر شوند. $\blacksquare$

مثال: اگر A ماتریسی پوچ توان از مرتبه ۳ و B پوچ توان مرتبه ۲ باشد و A و B تعویض پذیر باشند، نشان دهید $A+B$ پوچ توان است.

حل: باید نشان دهیم عدد طبیعی‌ای مانند k وجود دارد به‌طوری‌که

$$(A+B)^{k} = \bar{o}$$

در اینجا k را می‌توان ۵ (در واقع هر عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی ۴) در نظر گرفت. با توجه به اینکه A و B تعویض پذیرند، خواهیم داشت.

$$(A+B)^5 = A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5$$

چون $A^3 = \bar{o}$ پس، سه جمله اول بسط فوق صفر است. همچنین از این که $B^2 = \bar{o}$، نتیجه می‌گیریم سه جمله بعدی نیز صفر است. بنابراین،

$$(A+B)^5 = \bar{o} \quad \square$$

به‌طورکلی قضیه زیر برقرار است.

۳ـ۹۹ قضیه

مجموع دو ماتریس پوچ توان و تعویض پذیر، ماتریسی پوچ توان است.

اثبات: فرض کنید A پوچ توان با اندیس m و B پوچ توان با اندیس n باشد. نشان می‌دهیم

$$(A+B)^{m+n} = \bar{o}$$

چون A و B تعویض پذیرند، می‌توان قضیه دو جمله‌ای را برای آنها به‌کار برد.

$$(A+B)^{m+n} = A^{m+n} + \binom{m+n}{1} A^{m+n-1}B + \cdots + \binom{m+n}{k} A^{m+n-k}B^k + \cdots + B^{m+n}$$

در هر یک از جملات بسط فوق، یا توان A بزرگتر یا مساوی m و یا توان B بزرگتر یا مساوی n است. زیرا، در غیر این صورت اگر جمله‌ای به‌صورت A^iB^j وجود داشته باشد به‌طوری‌که $i < m$ و $j < n$. در این صورت $i + j < m + n$ و این ممکن نیست، زیرا مجموع توانهای هر جمله بسط فوق می‌بایست مساوی $m + n$ باشد. بنابراین، همه جملات بسط فوق صفرند و در نتیجه

$$(A+B)^{m+n} = \bar{o} \quad \blacksquare$$

۳ـ۱۰۰ قضیه

اگر A یک ماتریس پوچ توان و λ یک عدد حقیقی باشد در این صورت λA نیز پوچ توان است.

اثبات: فرض کنید A پوچ توان با اندیس m باشد، در این صورت

$$\begin{aligned}(\lambda A)^m &= \lambda^m A^m \\ &= \bar{o} \qquad \text{زیرا } A^m = \bar{o} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

۳ـ۱۰۱ نتیجه

تفاضل دو ماتریس پوچ توان تعویض پذیر ماتریسی پوچ توان است.

نتیجه: اگر S یک مجموعه از ماتریسهای پوچ توان $n \times n$ باشد که عناصر آن دوبه‌دو تعویض پذیرند، آنگاه S با جمع ماتریسها و ضرب یک عدد در ماتریس تشکیل فضای برداری می‌دهد.

۳ـ۱۰۲ گزاره

حاصل‌ضرب دو ماتریس تعویض پذیر که یکی از آنها پوچ توان است، ماتریسی پوچ توان است.

اثبات: فرض کنید A پوچ توان با اندیس m و B ماتریس دیگری باشد که با A جابجا می‌شود، در این صورت

$$
\begin{aligned}
(AB)^m &= A^m B^m \\
&= \bar{o} \times B^m \\
&= \bar{o} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

۳ـ۱۰۳ گزاره

فرض کنید A یک ماتریس پوچ توان و $f(x)$ یک چند جمله‌ای با جمله ثابت صفر باشد. نشان دهید $f(A)$ نیز پوچ توان است.

اثبات: از آنجا که $f(x)$ جمله ثابت ندارد، با فاکتورگیری از x در چند جمله‌ای $f(x)$، نتیجه می‌گیریم $f(x)$ به‌صورت $xg(x)$ است که $g(x)$ یک چند جمله‌ای دیگر است. پس

$$f(A) = Ag(A)$$

اما $g(A)$ با A جابجا می‌شود، پس مطابق گزاره قبل، $f(A)$ پوچ توان است. $\blacksquare$

مثال: فرض کنید A پوچ توان با اندیس ۲ باشد. نشان دهید

$$A(A+I)^n = A$$

حل: A پوچ توان با اندیس ۲ است، پس

$$A^۲ = \bar{o}$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
A(A+I)^n &= A(I + nA + \frac{n(n-۱)}{۲}A^۲ + \cdots + A^n) \\
&= A(I + nA)
\end{aligned}
$$

$$= A + nA^{۲}$$

$$= A \quad \square$$

۳ـ۱۰۴ قضایا و گزاره‌های تکمیلی در مورد ماتریسهای خود توان

یادآوری می‌کنیم که ماتریس A خود توان است هرگاه $A^{۲} = A$، در نتیجه برای هر عدد طبیعی n داریم.

$$A^n = A$$

۳ـ۱۰۵ گزاره

اگر A ماتریسی خود توان و ناصفر باشد، آنگاه پوچ توان نیست.

اثبات: فرض کنید ماتریس $A \neq \bar{o}$ خود توان باشد، پس برای هر عدد طبیعی n، $A^n = A$. در نتیجه، هیچ توانی از A صفر نیست، یعنی A پوچ توان نیست. ■

۳ـ۱۰۶ گزاره

اگر A خود توان باشد، در این صورت $I - A$ نیز خود توان است.

اثبات:

$$(I - A)^{۲} = I - ۲A + A^{۲}$$

$$= I - ۲A + A$$

$$= I - A \quad ■$$

مثال: اگر $AB = A$ و $BA = B$. نشان دهید A و B خود توان هستند.

حل: طرفین تساوی $A = AB$ را از سمت راست در A ضرب می‌کنیم.

$$A^{۲} = ABA$$

$$= A(B) \qquad \text{زیرا } BA = B$$

$$= A$$

به‌طریق مشابه اگر طرفین تساوی $BA = B$ را از سمت راست در B ضرب کنیم ثابت می‌شود $B^{۲} = B$. □

مثال: اگر $A^{۲} = I$، نشان دهید ماتریسهای $\frac{۱}{۲}(A + I)$ و $\frac{۱}{۲}(I - A)$ خود توان هستند.

حل:

$$[\tfrac{1}{2}(A+I)]^2 = \tfrac{1}{4}(A+I)^2$$
$$= \tfrac{1}{4}(A^2+2A+I)$$
$$= \tfrac{1}{4}(2I+2A)$$
$$= \tfrac{1}{2}(A+I)$$

با محاسبه‌ای مشابه ثابت می‌شود که

$$[\tfrac{1}{2}(I-A)]^2 = \tfrac{1}{2}(I-A) \qquad \square$$

مثال: ثابت کنید اگر A و B دو ماتریس خود توان و تعویض پذیر باشند، $A+B-AB$ نیز خود توان است.

حل:

$$(A+B-AB)^2 = A^2+B^2+(AB)^2+2AB-2A(AB)-2BAB$$
$$= A+B+A^2B^2+2AB-2A^2B-2ABB$$
$$= A+B+AB+2AB-2AB-2AB$$
$$= A+B-AB \qquad \square$$

۳ـ۱۰۷ مسئله

کلیه ماتریسهای قطری خود توان ۲ × ۲ را به‌دست آورید.

حل: فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

چون A خودتوان است، پس $A = A^2$. در نتیجه

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ b^2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0,1 \\ b = 0,1 \end{cases}$$

در نتیجه چهار ماتریس صفحهٔ بعد جواب مسئله خواهند بود

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & \cdot \\ \cdot & ۱ \end{bmatrix} \qquad \square$$

۳ـ۱۰۸ گزاره

اگر A یک ماتریس خود توان باشد، در این صورت

$$(I + A)^n = I + (۲^n - ۱)A$$

اثبات: نخست یادآوری می‌کنیم که

$$\binom{n}{\cdot} + \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} + \cdots + \binom{n}{n} = ۲^n$$

حال با توجه به قضیه دو جمله‌ای در مورد ماتریسهای تعویض پذیر، داریم

$$\begin{aligned}(I + A)^n &= I + \binom{n}{۱}A + \binom{n}{۲}A^۲ + \cdots + \binom{n}{n}A^n \\ &= I + [\binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} + \cdots + \binom{n}{n}]A\end{aligned}$$

زیرا برای هر عدد طبیعی k داریم $A^k = A$. بنابراین

$$(I + A)^n = I + (۲^n - ۱)A \qquad \blacksquare$$

۳ـ۱۰۹ گزاره

کلیه ماتریسهای خود توان ۲ × ۲ به‌صورت زیرند.

$$\begin{bmatrix} \frac{۱+\lambda}{۲} & \frac{۱-\lambda^۲}{۴u} \\ u & \frac{۱-\lambda}{۲} \end{bmatrix}$$

که در آن $\lambda \in R$ دلخواه و u عدد دلخواه ناصفر است.

اثبات: فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ماتریس خود توان باشد، بنابراین

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a^۲ + bc & ab + bd \\ ac + dc & d^۲ + bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^{2}+bc=a \\ ab+bd=b \\ ac+dc=c \\ d^{2}+bc=d \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} b(a+d-1)=0 \\ c(a+d-1)=0 \end{cases}$$

حالت اول: $a+d \neq 1$. در این حالت، از معادلات بالا نتیجه می‌شود $b=c=0$ و $a^{2}=a$ و $d^{2}=d$. در نتیجه، فقط جوابهای زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حالت دوم: $a+d=1$. در این حالت، دو تا از معادلات بالا خودبه‌خود برقرارند، و از دو معادله باقی‌مانده نتیجه می‌شود که d و a جوابهای معادله $x^{2}-x+bc=0$ هستند. از طرف دیگر، جوابهای این معادله عبارتند از

$$x=\frac{1 \pm \sqrt{1-4bc}}{2}$$

قرار می‌دهیم $\lambda^{2}=1-4bc$، با توجه به صفر بودن یا نبودن c دو حالت در نظر می‌گیریم:

الف) $c=0$. در این حالت $\lambda=\pm 1$ و جوابهای a و d، یکی صفر و دیگری ۱ است و جوابهای زیر به‌دست می‌آیند

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ب) $c \neq 0$. در این حالت اگر قرار دهیم $c=u$، برای a و b و c و d جوابهای زیر به‌دست می‌آیند

$$a=\frac{1 \pm \lambda}{2}$$
$$d=\frac{1 \mp \lambda}{2}$$
$$c=u$$
$$b=\frac{1-\lambda^{2}}{4u}$$

یعنی، جوابهای زیر به‌دست می‌آیند

$$\begin{bmatrix} \frac{1+\lambda}{2} & \frac{1-\lambda^{2}}{4u} \\ u & \frac{1-\lambda}{2} \end{bmatrix} \qquad (u \neq 0) \qquad \blacksquare$$

۳ـ۱۱۰ توابع چند جمله‌ای از ماتریسها[1]

چند جمله‌ای درجه n

1.Polynomial function of matrices

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_۱ x + a_۰ \qquad (۱)$$

را که ضرایب آن اعداد حقیقی‌اند، در نظر می‌گیریم. به این چند جمله‌ای یک چند جمله‌ای ماتریسی بر حسب متغیر ماتریسی X، به صورت زیر وابسته می‌کنیم

$$f(X) = a_n X^n + \cdots + a_۱ X + a_۰ I$$

متغیر X در مجموعه ماتریسهای مربع از مرتبه مفروضی تغییر می‌کند.

در واقع در چند جمله‌ای (۱) به‌جای متغیر x، متغیر ماتریسی X و به جای عدد ثابت $a_۰$، ماتریس $a_۰ I$ را قرار داده‌ایم. برای مثال اگر

$$f(x) = ۲x^۳ - ۵x^۲ - ۷x - ۳$$

در این صورت چند جمله‌ای ماتریسی وابسته به آن، چند جمله‌ای زیر است.

$$f(X) = ۲X^۳ - ۵X^۲ - ۷X - ۳I$$

چند جمله‌ایهای ماتریسی درست مانند چند جمله‌ایهای عددی می‌توانند تجزیه شوند. برای مثال، اگر

$$f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + ۲x = x(x-۱)(x-۲)$$

در این صورت

$$f(X) = X^۳ - ۳X^۲ + ۲X = X(X-I)(X-۲I)$$

با توجه به این که $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + ۲x = x(x-۱)(x-۲)$، روشن است که معادله $f(x) = ۰$ دارای جوابهای $x = ۰$، $x = ۱$، $x = ۲$ است. بنابراین، معادله $f(X) = \bar{o}$، در مجموعه ماتریسهای مربع دارای جوابهای $X = \bar{o}$، $X = I$ و $X = ۲I$ خواهد بود. اما، از آنجا که در ماتریسها مقسوم علیه صفر وجود دارد، یعنی حاصل‌ضرب دو ماتریس ناصفر می‌تواند صفر شود، معادله $f(X) = \bar{o}$ ممکن است جوابهای دیگری هم داشته باشد.

مثال: معادله

$$f(X) = X^۲ - ۴X - ۵I = \bar{o}$$

را در نظر بگیرید. از آنجا که چند جمله‌ای

$$f(x) = x^۲ - ۴x - ۵ = ۰$$

به صورت

$$f(x) = (x + ۱)(x - ۵)$$

تجزیه می‌شود، داریم

$$X^{۲} - ۴X - ۵I = (X + I)(X - ۵I)$$

بنابراین، $X = ۵I$ و $X = -I$ دو جواب این معادله‌اند. اما این معادله دارای جوابهای دیگری نیز هست، مثلاً ماتریس زیر نیز در این معادله صدق می‌کند.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix} \qquad \square$$

۳ـ۱۱۱ گزاره

اگر

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, f(X) = X^{۲} - (a + d)X + (ad - bc)I$$

در این صورت ماتریس A در این چند جمله‌ای صدق می‌کند.

اثبات :کافی است نشان دهیم

$$f(A) = A^{۲} - (a + d)A + (ad - bc)I = \bar{o}$$

اما، این مطلب با یک محاسبه سرراست دیده می‌شود.

$$f(A) = A^{۲} - (a + d)A + (ad - bc)I$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{۲} - (a + d)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + (ad - bc)\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{۲} + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^{۲} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a^{۲} - ad & -ab - bd \\ -ac - dc & -ad - d^{۲} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} ad - bc & ۰ \\ ۰ & ad - bc \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \qquad \blacksquare$$

۳ـ۱۱۲ محاسبه توانهای مختلف یک ماتریس

در بسیاری از موارد لازم است توانهای مختلف یک ماتریس را حساب کنیم، مثلاً، برای محاسبه ماتریس e^A که به صورت زیر تعریف می‌شود، لازم است تمام توانهای A را حساب کنیم.

$$e^A = I + \frac{۱}{۱!}A + \frac{۱}{۲!}A^۲ + \frac{۱}{۳!}A^۳ + \cdots + \frac{۱}{n!}A^n + \cdots$$

یکی از روشهای محاسبه توانهای یک ماتریس محاسبه مستقیم است، به این صورت که بعد از محاسبه $A^۲$ و $A^۳$ و ... ممکن است یک فرمول کلی برای محاسبه A^n حدس زده شود که با استفاده از استقراء ریاضی حدس خود را ثابت می‌کنیم.

مثال: فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

الف) $A^۲$، $A^۳$ و $A^۴$ را حساب کنید.

ب) A^n را حساب کنید.

حل: الف)

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۴ & ۹ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^۳ = A^۲A$$

$$= \begin{bmatrix} ۴ & ۹ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۸ & ۲۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲^۳ & ۳(۲^۳ - ۱) \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^۴ = A^۳A = \begin{bmatrix} ۸ & ۲۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۱۶ & ۴۵ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲^۴ & ۳(۲^۴ - ۱) \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

ب) حدس می‌زنیم که A^n به صورت زیر باشد

$$A^n = \begin{bmatrix} ۲^n & ۳(۲^n - ۱) \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

حال، حدس خود را با استقراء ثابت می‌کنیم.

به ازاء $n = ۱$، تساوی $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳(۲-۱) \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ را خواهیم داشت که درست است. فرض کنید داشته باشیم

$$A^k = \begin{bmatrix} ۲^k & ۳(۲^k - ۱) \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

نشان می‌دهیم

$$A^{k+۱} = \begin{bmatrix} ۲^{k+۱} & ۳(۲^{k+۱} - ۱) \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

برای این کار به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$A^{k+۱} = A^k A = \begin{bmatrix} ۲^k & ۳(۲^k - ۱) \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۲^{k+۱} & ۳ \times ۲^k + ۳(۲^k - ۱) \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۲^{k+۱} & ۳(۲^{k+۱} - ۱) \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad \square$$

اما همیشه وضع از این قرار نیست، یعنی ممکن است که فرمول آنقدر پیچیده باشد که با محاسبه توانهای مختلف A نتوان آن را حدس زد، بنابراین باید در جستجوی روشهای اصولی‌تر برای محاسبه توانهای یک ماتریس مربع باشیم. نخست چند حالت ساده زیر را یادآوری می‌کنیم.

۳ـ۱۱۳ توانهای مختلف یک ماتریس قطری

$$\begin{bmatrix} d_{۱۱} & ۰ & & ۰ \\ ۰ & d_{۲۲} & & ۰ \\ \vdots & & & \\ ۰ & ۰ & & d_{kk} \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} d_{۱۱}^n & ۰ & & ۰ \\ ۰ & d_{۲۲}^n & & ۰ \\ \vdots & & \ddots & \\ ۰ & ۰ & \cdots & d_{kk}^n \end{bmatrix}$$

تعریف. به ازای هر عدد حقیقی x، تابع e^x به صورت

$$e^x = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = ۱ + \frac{x}{۱!} + \frac{x^۲}{۲!} + \cdots$$

تعریف می‌شود. به روش مشابه، به ازای هر ماتریس مربع A، ماتریس زیر تعریف می‌شود.

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots$$

به عنوان مثال، اگر

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

e^A را محاسبه می‌کنیم

$$e^A = I + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{1!} & 0 \\ 0 & \frac{5}{1!} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2^2}{2!} & 0 \\ 0 & \frac{5^2}{2!} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2^3}{3!} & 0 \\ 0 & \frac{5^3}{3!} \end{bmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \cdots & 0 \\ 0 & 1 + \frac{5}{1!} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \cdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^5 \end{bmatrix}$$

بنابراین،

$$e^{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^5 \end{bmatrix} \quad \square$$

۳ـ۱۱۴ محاسبه توانهای مختلف ماتریسهای به شکل $\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$

ابتدا توان دوم این گونه ماتریسها را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix}$$
$$= (ab)I$$

حال، با توجه به اینکه $A^2 = (ab)I$، برای محاسبه A^n، n را بر ۲ تقسیم می‌کنیم، مثلاً در مورد A^{27} داریم

$$\begin{aligned} A^{27} &= A^{2(13)+1} \\ &= (A^2)^{13} \cdot A \\ &= [(ab)I]^{13} \cdot A \\ &= (ab)^{13} A \\ &= \begin{bmatrix} 0 & a(ab)^{13} \\ b(ab)^{13} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

به طور کلی، داریم

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{cases} (ab)^t I = \begin{bmatrix} (ab)^t & 0 \\ 0 & (ab)^t \end{bmatrix} & n = 2t \text{ اگر } \\ \begin{bmatrix} 0 & a(ab)^t \\ b(ab)^t & 0 \end{bmatrix} & n = 2t+1 \text{ اگر } \end{cases}$$ □

نتیجه

$$\begin{bmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} k^n & 0 \\ 0 & k^n \end{bmatrix} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ \begin{bmatrix} 0 & k^n \\ k^n & 0 \end{bmatrix} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

۳ـ۱۱۵ محاسبه توانهای مختلف یک ماتریس پوچ توان

فرض کنید A یک ماتریس پوچ توان باشد، بنابراین یک عدد طبیعی مانند n وجود دارد به طوری که $A^n = \bar{o}$. در مورد توانهای قبل از n، یعنی A^2، A^3، ... و A^{n-1} چیزی نمی‌توان گفت. اما تمام توانهای بعد از n یعنی A^n و A^{n+1} و ... همگی صفرند. البته این نکته قابل ذکر است که عدد n را همواره می‌توان کوچکتر از یا مساوی مرتبه ماتریس گرفت.

۳ـ۱۱۶ محاسبه توانهای مختلف ماتریسهایی که ترکیبی خطی از یک ماتریس پوچ توان و ماتریس واحد می‌باشند.

فرض کنید A یک ماتریس پوچ توان با اندیس n باشد، در این صورت توانهای مختلف ماتریسهای به صورت $aI + bA$ ترکیبی خطی از ماتریسهای I، A^2، A^3، ... و A^{n-1} هستند و اگر این ماتریسها را از قبل محاسبه کرده باشیم، محاسبه توانهای $aI + bA$ به آسانی میسر است.

مثال: الف) نشان دهید ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پوچ توان است.

ب) اگر داشته باشیم

$$B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

مطلوب است محاسبه $B^{۲۰۰}$.

الف) با یک محاسبه ساده می‌توان نشان داد که $A^{۳} = \bar{o}$، همچنین

$$A^{۲} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

ب) به سادگی دیده می‌شود که

$$B = I + A$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} B^{۲۰۰} &= (I + A)^{۲۰۰} \\ &= I^{۲۰۰} + ۲۰۰A + \binom{۲۰۰}{۲}A^{۲} + \binom{۲۰۰}{۳}A^{۳} + \cdots + A^{۲۰۰} \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $A^{۳} = \bar{o}$ بنابراین به ازای $n \geq ۳$، داریم $A^{n} = \bar{o}$، پس

$$B^{۲۰۰} = I + ۲۰۰A + ۱۹۹۰۰A^{۲}$$

با جایگذاری به‌جای A و $A^{۲}$ خواهیم داشت

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}^{۲۰۰} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲۰۰ & ۲۰۱۰۰ \\ ۰ & ۱ & ۲۰۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

به طور کلی می‌توانیم B^{n} را به شکل زیر محاسبه کنیم

$$\begin{aligned} B^{n} &= (I + A)^{n} \\ &= I + nA + \frac{n(n-۱)}{۲}A^{۲} + \cdots + A^{n} \\ &= I + nA + \frac{n(n-۱)}{۲}A^{۲} \\ &= \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & n & n \\ ۰ & ۰ & n \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & \frac{n(n-۱)}{۲} \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

بنابراین،

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} ۱ & n & \frac{n(n+۱)}{۲} \\ ۰ & ۱ & n \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad \square$$

۳ـ۱۱۷ محاسبه توانهای مختلف یک ماتریس خود توان

قبلاً دیدیم که اگر A یک ماتریس خود توان باشد، در این صورت برای هر عدد طبیعی nداریم

$$A^n = A$$

۳ـ۱۱۸ محاسبه توانهای مختلف یک ماتریس متناوب

می‌دانیم ماتریس A متناوب است هر گاه عددی طبیعی مانند n بتوان یافت به طوری که

$$A^{n+۱} = A$$

برای سهولت تعریف جدیدی برای ماتریسهای متناوب ارائه می‌دهیم که در مورد رده بسیار بزرگی از ماتریسها با تعریف اول معادل است.

تعریف. ماتریس A را متناوب گوییم هر گاه عددی طبیعی مانند nبتوان یافت به طوری که

$$A^n = I$$

کوچکترین این nها را دوره تناوب A گویند.

مثال: نشان دهید ماتریس

$$A = -\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۱ & \sqrt{۳} \\ -\sqrt{۳} & ۱ \end{bmatrix}$$

متناوب است و سپس $A^{۱۵}$ و $A^{۲۳}$ را حساب کنید.

حل: برای اثبات متناوب بودن A، توانهای مختلف A را به ترتیب محاسبه می‌کنیم تا بالاخره ماتریس همانی به دست آید.

$$A^۲ = \frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۱ & \sqrt{۳} \\ -\sqrt{۳} & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & \sqrt{۳} \\ -\sqrt{۳} & ۱ \end{bmatrix}$$
$$= \frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} -۲ & ۲\sqrt{۳} \\ -۲\sqrt{۳} & -۲ \end{bmatrix}$$

$$A^{۳} = -\frac{۱}{۸}\begin{bmatrix} -۲ & ۲\sqrt{۳} \\ -۲\sqrt{۳} & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & \sqrt{۳} \\ -\sqrt{۳} & ۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین، A ماتریس متناوب با دوره تناوب ۳ است.

برای محاسبه توانهای A، می‌توانیم به شکل زیر عمل کنیم

$$\begin{aligned} A^{۱۵} &= (A^{۳})^{۵} \\ &= I^{۵} \\ &= I \\ A^{۲۳} &= A^{۲۱+۲} \\ &= (A^{۳})^{۷} \cdot A^{۲} \\ &= IA^{۲} \\ &= A^{۲} \\ &= \frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} -۲ & ۲\sqrt{۳} \\ -۲\sqrt{۳} & -۲ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

به طور کلی برای محاسبه A^n، n را بر ۳ تقسیم می‌کنیم. خواهیم داشت

$$n = ۳k + r$$

که در آن $۰ \leq r < ۳$. بنابراین،

$$\begin{aligned} A^n &= A^{۳k+r} \\ &= A^{۳k} \cdot A^r \\ &= (A^{۳})^k \cdot A^r \\ &= A^r \qquad\qquad A^{۳} = I \quad \text{زیرا} \end{aligned}$$

بنابراین، برای محاسبه A^n کافی است باقیمانده n بر ۳ را بدانیم. مثلاً اگر بخواهیم $A^{۲۳۶}$ را حساب کنیم، ۲۳۶ را بر ۳ تقسیم می‌کنیم، چون فقط به باقیمانده نیاز داریم از خواص همنهشتی استفاده می‌کنیم.

$$۲۳۶ \overset{۳}{\equiv} ۲ + ۳ + ۶ \overset{۳}{\equiv} ۲$$

بنابراین

$$۲۳۶ = ۳k + ۲$$

پس

$$\begin{aligned} A^{۲۳۶} &= A^{۳k+۲} \\ &= A^{۳k} \cdot A^{۲} \\ &= A^{۲} \qquad \square \end{aligned}$$

۳ـ۱۱۹ نتیجه

فرض کنید A یک ماتریس متناوب با دوره تناوب p باشد، بنابراین

$$A^p = I$$

برای تعیین A^n به ازای یک n دلخواه، n را بر p تقسیم می‌کنیم. بنابر الگوریتم تقسیم خواهیم داشت

$$n = pk + r$$

که در آن $۰ \leq r < p$، در این صورت

$$A^n = A^r$$

زیرا،

$$\begin{aligned} A^n &= A^{pk+r} \\ &= A^{pk} \cdot A^r \\ &= I \cdot A^r \\ &= A^r \end{aligned}$$

مثال: فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{-۱}{\sqrt{۲}} & ۰ \\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۲}} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

مطلوب است محاسبه $A^{۱۹۹۰}$.

به سادگی با محاسبه مستقیم می‌توان نشان داد که

$$A^{۴} = I$$

حال باقیمانده ۱۹۹۰ بر ۴ را به دست می‌آوریم

$$۱۹۹۰ \overset{۴}{\equiv} ۹۰$$
$$\overset{۴}{\equiv} ۲$$

بنابراین،

$$۱۹۹۰ = ۴k + ۲$$

در نتیجه

$$A^{۱۹۹۰} = A^{۲} \qquad \square$$

۳ـ۱۲۰ محاسبه توانهای مختلف ماتریسی که در یک چند جمله‌ای صدق می‌کند.

مثال: فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

نشان دهید ماتریس A در معادله $x^{۲} - ۴x - ۵ = ۰$ صدق می‌کند، و سپس $A^{۴}$ را حساب کنید.

حل: با محاسبه مستقیم می‌توان نشان داد که

$$A^{۲} - ۴A - ۵I = \bar{o}$$

برای محاسبه $A^{۴}$، چند جمله‌ای $x^{۴}$ را بر چند جمله‌ای $x^{۲} - ۴x - ۵$ تقسیم می‌کنیم، در نتیجه

$$x^{۴} = (x^{۲} - ۴x - ۵)(x^{۲} + ۴x + ۲۱) + ۱۰۴x + ۱۰۵$$

و از آنجا داریم

$$A^{۴} = (A^{۲} - ۴A - ۵I)(A^{۲} + ۴A + ۲۱) + ۱۰۴A + ۱۰۵I$$

با توجه به اینکه،

$$A^{۲} - ۴A - ۵I = \bar{o}$$

خواهیم داشت،

$$A^{۴} = ۱۰۴A + ۱۰۵I$$

یعنی،

$$A^{۴} = \begin{bmatrix} ۲۰۹ & ۲۰۸ \\ ۴۱۶ & ۴۱۷ \end{bmatrix} \qquad \square$$

قبل از ادامه بحث، لازم است چند مطلب راجع به چند جمله‌ایها را یاد آوری کنیم.

۱ـ اگر $f(x)$ یک چند جمله‌ای باشد، باقیمانده $f(x)$ بر $x - a$ برابر $f(a)$ است.

مثال: باقیمانده تقسیم $f(x) = ۲x^{۳} - ۳x^{۲} - ۵x + ۹$ بر $x - ۲$ برابر است با

$$f(۲) = ۲(۲)^{۳} - ۳(۲)^{۲} - ۵(۲) + ۹ = ۳$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$f(x) = (x - ۲)Q(x) + ۳$$

۲ـ اگر $f(x)$ یک چند جمله‌ای و $g(x)$ یک چند جمله‌ای درجه دوم باشد، در این صورت باقیمانده $f(x)$ بر $g(x)$ (اگر ناصفر باشد) یک چند جمله‌ای با درجه کوچکتر از ۲ است که آن را به صورت $ax + b$ نشان می‌دهیم، بنابراین

$$f(x) = g(x)Q(x) + ax + b$$

مثال: باقیمانده تقسیم $f(x) = x^{۵} - ۷x^{۳} + ۲x - ۱$ را بر $x^{۲} - ۱$ به دست آورید.

فرض کنید باقیمانده $f(x)$ بر $x^{۲} - ۱$چند جمله‌ای $ax + b$ باشد، داریم

$$f(x) = (x^{۲} - ۱)Q(x) + ax + b$$

برای تعیین a و b از اینکه ۱− و ۱ ریشه‌های معادله $x^{۲} - ۱ = ۰$ هستند، استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} f(۱) = a + b \\ f(-۱) = -a + b \end{cases}$$

و از آنجا،

$$\begin{cases} a + b = -۵ \\ -a + b = -۳ \end{cases}$$

در نتیجه

$$a = -۱ \quad , \quad b = -۴$$

بنابراین، باقیمانده عبارت است از

$$-x - ۴ \qquad \square$$

حال به مثال زیر توجه کنید.

مثال: نشان دهید ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}$$

در معادله $x^۲ - ۳x + ۲ = ۰$ صدق می‌کند و سپس ماتریس

$$A^۵ - ۳A^۴ + ۲A^۳ - A + ۶I$$

را به دست آورید.

با محاسبه مستقیم می‌توان نشان داد که

$$A^۲ - ۳A + ۲I = \bar{o}$$

برای محاسبه ماتریس

$$A^۵ - ۳A^۴ + ۲A^۳ - A + ۶I$$

چند جمله‌ای $x^۵ - ۳x^۴ + ۲x^۳ - x + ۶$ را بر $x^۲ - ۳x + ۲$ تقسیم می‌کنیم. فرض کنید باقیمانده $ax + b$ باشد، داریم

$$x^۵ - ۳x^۴ + ۲x^۳ - x + ۶ = (x^۲ - ۳x + ۲)Q(x) + ax + b$$

چون ۱ و ۲ ریشه‌های معادله $x^۲ - ۳x + ۲ = ۰$ می‌باشند، خواهیم داشت

$$\begin{cases} f(۱) = a + b = ۵ \\ f(۲) = ۲a + b = ۴ \end{cases}$$

در نتیجه

$$a = -۱ \quad , \quad b = ۶$$

بنابراین باقیمانده $-x + ۶$ است، در نتیجه

$$x^۵ - ۳x^۴ + ۲x^۳ - x + ۶ = (x^۲ - ۳x + ۲)Q(x) \; - x + ۶$$

حال اگر به‌جای x ماتریس A را قرار دهیم با توجه به اینکه

$$A^۲ - ۳A + ۲I = \bar{o}$$

خواهیم داشت.

$$A^۵ - ۳A^۴ + ۲A^۳ - ۲A + ۶I = (A^۲ - ۳A + ۲I)Q(A) - A + ۶I$$

بنابراین

$$A^5 - 3A^4 + 2A^3 - 2A + 6I = -\ A + 6I = -\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

در نتیجه،

$$A^5 - 3A^4 + 2A^3 - 2A + 6I = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

به طورکلی برای تعیین A^n، x^n را بر $x^2 - 3x + 2$ تقسیم کرده و باقیمانده آن را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = x^n = (x^2 - 3x + 2)Q(x) + ax + b$$

بنابراین

$$f(1) = a + b = 1$$

$$f(2) = 2a + b = 2^n$$

بنابراین

$$a = 2^n - 1 \quad , \quad b = -2^n + 2$$

پس

$$x^n = (x^2 - 3x + 2)Q(x) + (2^n - 1)x + (-2^n + 2)$$

در نتیجه با جایگذاری A بجای x، داریم

$$\begin{aligned} A^n &= (A^2 - 3A + 2I)Q(A) + (2^n - 1)A + (-2^n + 2)I \\ &= (2^n - 1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} + (-2^n + 2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

پس

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5(2^n - 1) & 2^n \end{bmatrix} \qquad \square$$

این بحث را، با قضیه زیر که اثبات آن در ۳۰۱۱۱ آمده است ادامه می‌دهیم.

۳ـ۱۲۱ قضیه

فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

در این صورت ماتریس A در چند جمله‌ای

$$x^2 - (a + d)x + ad - bc$$

صدق می‌کند، یعنی

$$A^{۲} - (a+d)A + (ad-bc)I = \bar{o} \qquad \blacksquare$$

تذکر: چند جمله‌ای

$$x^{۲} - (a+d)x + ad - bc$$

چند جمله‌ای سرشتنمایی ماتریس A نامیده می‌شود.

۳ـ۱۲۲ مسئله

چند جمله‌ای سرشتنمایی ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

را مشخص کنید، و سپس ماتریس A^n را به دست آورید.

حل: چند جمله‌ای سرشتنمایی A عبارت است از

$$x^{۲} - ۵x + ۶$$

بنابر قضیه فوق، داریم

$$A^{۲} - ۵A + ۶I = \bar{o}$$

برای تعیین A^n، x^n را بر $x^{۲} - ۵x + ۶$ تقسیم می‌کنیم و باقیمانده‌اش را به دست می‌آوریم. ریشه‌های معادله عبارتند از $x = ۲$ و $x = ۳$. بنابراین،

$$f(x) = x^n = (x^{۲} - ۵x + ۶)Q(x) + ax + b$$

در نتیجه

$$\begin{cases} f(۲) = ۲a + b = ۲^n \\ f(۳) = ۳a + b = ۳^n \end{cases}$$

پس

$$a = ۳^n - ۲^n \quad , \quad b = ۳ \times ۲^n - ۲ \times ۳^n$$

$$x^n = (x^{۲} - ۵x + ۶)Q(x) + (۳^n - ۲^n)x + ۳ \times ۲^n - ۲ \times ۳^n$$

در نتیجه،

$$A^n = (۳^n - ۲^n)A + (۳ \times ۲^n - ۲ \times ۳^n)I \qquad \square$$

۳ـ۱۲۳ نتیجه

فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

یک ماتریس ۲ × ۲ دلخواه باشد، برای تعیین A^n به صورت زیر عمل می‌کنیم

۱ـ چند جمله‌ای سرشتنمایی A را به دست می‌آوریم.

۲ـ باقیمانده x^n را بر چند جمله‌ای سرشتنمایی A به دست آورده، فرض کنید $a.x + b$ باقیمانده به دست آمده باشد، در این صورت

$$A^n = a.A + b.I$$

مثال: فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ ۵ & -۳ \end{bmatrix}$$

برای محاسبه A^n، نخست چند جمله‌ای سرشتنمایی A را به دست می‌آوریم که عبارت است از،

$$x^۲ - x - ۲$$

ریشه‌های آن عبارتند از ۱– و ۲.

حال، باقیمانده $f(x) = x^n$ بر $x^۲ - x - ۲$ را به دست می‌آوریم

$$f(x) = x^n = (x^۲ - x - ۲)Q(x) + ax + b$$

برای تعیین a و b به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$\begin{cases} f(-۱) = -a + b = (-۱)^n \\ f(۲) = ۲a + b = ۲^n \end{cases}$$

و از آنجا $a = \frac{۱}{۳}[۲^n - (-۱)^n]$ و $b = \frac{۱}{۳}[۲(-۱)^n + ۲^n]$.

بنابراین باقیمانده عبارت است از

$$\frac{۱}{۳}[۲^n - (-۱)^n]x + \frac{۱}{۳}[۲(-۱)^n + ۲^n]$$

یعنی

$$A^n = \frac{۱}{۳}[۲^n - (-۱)^n]A + \frac{۱}{۳}[۲(-۱)^n + ۲^n]I$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳}(۵ \times ۲^n + (-۱)^n) & \frac{۲}{۳}(۲^n - (-۱)^n) \\ \frac{۵}{۳}(۲^n - (-۱)^n) & \frac{۱}{۳}(-۲^{n+۱} + ۵(-۱)^n) \end{bmatrix}$$ □

دیدیم که یکی از روشهای یافتن A^n، استفاده از چند جمله‌ای سرشتنمایی A است. درکلیه مثالهایی که تا به حال با آنها روبرو بوده‌ایم ریشه‌های معادله متمایز بودند. در حالتی که ریشه‌های معادله سرشتنمایی متمایز نباشند از قضیه زیر استفاده می‌کنیم.

۳ـ۱۲۴ قضیه

فرض کنید

$$f(x) = g(x)Q(x) + R(x)$$

که در آن $g(x)$ دارای یک ریشه مضاعف α است. در این صورت،

$$\begin{cases} f(\alpha) = R(\alpha) \\ f'(\alpha) = R'(\alpha) \end{cases}$$

مثال: اگر

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

برای محاسبه A^n به صورت زیر عمل می‌کنیم.

معادله سرشتنمایی A عبارت است از $x^۲ - ۲x + ۱ = ۰$، که ریشه مضاعف $\alpha = ۱$ دارد. حال x^n را بر $x^۲ - ۲x + ۱$ تقسیم می‌کنیم.

$$f(x) = x^n = (x^۲ - ۲x + ۱)Q(x) + ax + b$$

پس

$$\begin{cases} f(۱) = a + b = ۱ \\ f'(۱) = a = n \end{cases}$$

در نتیجه

$$a = n \qquad , \qquad b = ۱ - n$$

پس باقیمانده عبارت است از

$$nx + (۱ - n)$$

بنابراین

$$A^n = n\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} + (۱ - n)\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} n + ۱ & -n \\ n & ۱ - n \end{bmatrix} \qquad \square$$

به طور کلی قضیه زیر برقرار است.

۳ـ۱۲۵ قضیه

اگر $f(x) = g(x)Q(x) + R(x)$. که در آن $g(x)$ دارای ریشه چند گانه با چند گانگی k است، در این صورت

$$f(\alpha) = R(\alpha)$$

$$f'(\alpha) = R'(\alpha)$$

$$\vdots$$

$$f^{(k-۱)}(\alpha) = R^{(k-۱)}(\alpha)$$

مثال: فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & -۳ & -۱ \end{bmatrix}$$

الف) نشان دهید A در معادله

$$x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱ = ۰$$

صدق می‌کند.

ب) ماتریس

$$A^{۲۴} - ۳A^{۱۵}$$

را به دست آورید.

حل:

الف) با محاسبه مستقیم می‌توان نشان داد که

$$A^۳ - ۳A^۲ + ۳A - I = \bar{o}$$

ب) نخست توجه کنید که معادله

$$x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱ = ۰$$

دارای ریشه چند گانه $x = ۱$، با چند گانگی ۳ است. حال، $x^{۲۴} - ۳x^{۱۵}$ را بر $x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱$ تقسیم می‌کنیم.

$$f(x) = x^{۲۴} - ۳x^{۱۵} = (x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱)Q(x) + ax^۲ + bx + c$$

داریم،

$$f'(x) = ۲۴x^{۲۳} - ۴۵x^{۱۴} \quad , \quad f''(x) = (۲۴ \times ۲۳)x^{۲۲} - (۴۵ \times ۱۴)x^{۱۳}$$

$$R'(x) = ۲ax + b \quad , \quad R''(x) = ۲a$$

بنابراین

$$f(۱) = a + b + c = -۲$$

$$f'(۱) = ۲a + b = -۲۱$$

$$f''(۱) = ۲a = -۷۸$$

در نتیجه

$$a = -۳۹ \quad , \quad b = ۵۷ \quad , \quad c = -۲۰$$

بنابراین،

$$x^{۲۴} - ۳x^{۱۵} = (x^{۳} - ۳x^{۲} + ۳x - ۱)Q(x) - ۳۹x^{۲} + ۵۷x - ۲۰$$

پس

$$A^{۲۴} - ۳A^{۱۵} = -۳۹A^{۲} + ۵۷A - ۲۰I = \begin{bmatrix} -۴۴ & ۲۷۰ & -۸۴ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ ۲۱ & -۹۳ & ۴۰ \end{bmatrix} \quad \square$$

۳ـ۱۲۶ حل معادلات ماتریسی

یکی از پیچیده‌ترین مسائل در ماتریسها حل معادلات ماتریسی است. زیرا، حتی در مورد ساده‌ترین معادلات مانند معادله

$$AX = \bar{o}$$

نیز با مسئله مشکلی روبرو هستیم. زیرا، این معادله علاوه بر جواب $X = \bar{o}$ ممکن است بیشمار جواب دیگر نیز داشته باشد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال: فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

الف) معادله

$$AX = \bar{o}$$

را حل کنید که در آن $\bar{o}$ نمایشگر ماتریس ۲×۲ صفر است.

ب) معادله

$$XA = \bar{o}$$

که در آن $\bar{o}$ ماتریس ۲ × ۲ صفر است را حل کنید.

ج) آیا جوابهای این دو معادله یکسانند؟

حل:

الف) فرض کنید

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

در نتیجه،

$$۲a + ۴c = ۰ \quad , \quad -a - ۲c = ۰ \quad , \quad ۲b + ۴d = ۰ \quad , \quad -b - ۲d = ۰$$

و از آنجا

$$a = -۲c \quad , \quad b = -۲d$$

به دست می‌آید. بنابراین، جوابهای معادله $AX = \bar{o}$ ماتریسهای به شکل زیرند.

$$\begin{bmatrix} -۲c & -۲d \\ c & d \end{bmatrix}$$

ب) فرض کنید

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

در نتیجه،

$$۲x - y = ۰ \quad , \quad ۴x - ۲y = ۰ \quad , \quad ۲z - t = ۰ \quad , \quad ۴z - ۲t = ۰$$

و از آنجا

$$y = ۲x \quad , \quad t = ۲z$$

به دست می‌آید. بنابراین جوابهای معادله $XA = \bar{o}$ عبارتند از،

$$\begin{bmatrix} x & ۲x \\ z & ۲z \end{bmatrix}$$

ج) ملاحظه می‌کنید که مجموعه جواب این دو معادله یکسان نیست. برای مثال ماتریس

$$X_{\circ} = \begin{bmatrix} -۲ & -۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

جواب معادله $AX = \bar{o}$ است ولی در معادله $XA = \bar{o}$ صدق نمی‌کند. زیرا

$$AX_{\circ} = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۲ & -۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$X_{\circ}A = \begin{bmatrix} -۲ & -۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & -۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \qquad \square$$

به این مثال نیز توجه کنید تا قدری به مشکلات کار با ماتریسها آشنا شوید.

مثال: معادله

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

را حل کنید.

در قدم اول به نظر می‌رسد که جواب معادله فقط

$$X = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

است. اما در زیر نشان می‌دهیم که این معادله بیشمار جواب دارد.

فرض کنید

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$a + c = ۱ \quad , \quad -a - c = -۱ \quad , \quad b + d = ۲ \quad , \quad -b - d = -۲$$

از آنجا

$$d = ۲ - b \qquad , \qquad c = ۱ - a$$

به‌دست می‌آید. بنابراین جوابهای معادله ماتریسهای زیرند.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ ۱ - a & ۲ - b \end{bmatrix} \qquad \square$$

در مورد حل معادلات مانند

$$A^۲ = I \qquad , \qquad A^۲ = \bar{o}$$

و نظایر آن، وضع به مراتب پیچیده‌تر است. برای مثال، همان طور که قبلاً دیدیم معادله

$$A^۲ = \bar{o}$$

در مورد ماتریسهای ۲ × ۲ بیشمار جواب به صورت زیر دارد.

$$A = \begin{bmatrix} \pm ab & \pm a^۲ \\ \mp b^۲ & \mp ab \end{bmatrix} \quad \square$$

حال، به بررسی معادله $A^۲ = I$ که در آن A ماتریس ۲ × ۲ است، می‌پردازیم.

۳ـ۱۲۷ مسئله

الف) نشان دهید ماتریسهای

$$I \;,\; -I \;,\; \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \text{ که در آن } a^۲ + bc = ۱$$

در معادله $A^۲ = I$ صدق می‌کنند.

ب) کلیه جوابهای معادله

$$A^۲ = I$$

را به دست آورید.

الف) واضح است که $\pm I$ در معادله $A^۲ = I$ صدق می‌کنند. زیرا

$$(\pm I)^۲ = I^۲ = I$$

از طرف دیگر، داریم

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}^۲ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^۲ + bc & ۰ \\ ۰ & a^۲ + bc \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad a^۲ + bc = ۱ \quad \text{زیرا،} \\ &= I \end{aligned}$$

ب) فرض کنید

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

جواب معادله $A^۲ = I$ باشد، در این صورت

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{bmatrix} a^۲ + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$a^۲ + bc = ۱ \quad , \quad ab + bd = ۰ \quad , \quad ac + dc = ۰ \quad , \quad bc + d^۲ = ۱$$

بنابراین،

$$\begin{cases} a^۲ + bc = ۱ \\ \\ d^۲ + bc = ۱ \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} b(a+d) = ۰ \\ \\ c(a+d) = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + d = ۰ \\ \text{یا} \\ b, c = ۰ \end{cases} \qquad (۱)$$

دو حالت در نظر می‌گیریم

حالت اول: $a + d = ۰$ و $bc \neq ۰$.

فرض می‌کنیم

$$a = \lambda$$

بنابراین

$$d = -\lambda$$

از طرف دیگر از $a^۲ + bc = ۱$ نتیجه می‌گیریم

$$bc = ۱ - \lambda^۲$$

حال، اگر قرار دهیم

$$c = k$$

که k عددی ناصفر است، خواهیم داشت

$$b = \frac{۱ - \lambda^۲}{k}$$

پس

$$a = \lambda \quad , \quad b = \frac{1-\lambda^{2}}{k} \quad , \quad c = k \quad , \quad d = -\lambda$$

بنابراین، یک دسته جواب معادله $A^{2} = I$ عبارتند از

$$\begin{bmatrix} \lambda & \frac{1-\lambda^{2}}{k} \\ k & -\lambda \end{bmatrix}$$

که در آن λ عددی دلخواه و k عددی ناصفر است.

حالت دوم: اگر $a + d \neq 0$ و $b = c = 0$ و $a^{2} = d^{2} = 1$، در این صورت $a = 1$ و $b = 0$ و $c = 0$ و $d = 1$ یا $a = -1$ و $b = 0$ و $c = 0$ و $d = -1$. در نتیجه ماتریسهای زیر را خواهیم داشت.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad -I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \square$$

مثال: معادله

$$X^{2} - 4X + 3I_{2} = \bar{o}$$

را حل کنید.

حل: روشن است که

$$X^{2} - 4X + 3I = (X - 2I)^{2} - I$$

بنابراین، از معادله

$$X^{2} - 4X + 3I = \bar{o}$$

نتیجه می‌گیریم

$$(X - 2I)^{2} = I$$

حال، قرار می‌دهیم

$$X - 2I = A$$

بنابراین نخست می‌بایست معادله $A^{2} = I$ را حل کنیم. با توجه به مسئله قبل جوابهای معادله

$$(X - 2I)^{2} = I$$

عبارتند از

$$X - 2I = \pm I \quad , \quad X - 2I = \begin{bmatrix} \lambda & \frac{1-\lambda^{2}}{k} \\ k & -\lambda \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$X = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} \lambda + ۲ & \frac{۱-\lambda^۲}{k} \\ k & -\lambda + ۲ \end{bmatrix}$$ □

۳ـ۱۲۸ مسائل تکمیلی در مورد محاسبه توانهای یک ماتریس

۳ـ۱۲۹ مسئله

اگر B و C دو ماتریس مربع باشند که در روابط زیر صدق می‌کنند

$$A = B + C \ , \ BC = CB \ , \ C^۲ = \bar{o}$$

ثابت کنید که برای هر عدد مثبت n، داریم

$$A^{n+۱} = B^n[B + (n + ۱)C]$$

۳ـ۱۳۰ مسئله

اگر

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha + \sin\alpha & \sqrt{۲}\sin\alpha \\ -\sqrt{۲}\sin\alpha & \cos\alpha - \sin\alpha \end{bmatrix}$$

نشان دهید

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\alpha + \sin n\alpha & \sqrt{۲}\sin n\alpha \\ -\sqrt{۲}\sin n\alpha & \cos n\alpha - \sin n\alpha \end{bmatrix}$$

۳ـ۱۳۱ مسئله

اگر

$$E = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} , I = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

ثابت کنید

$$E^۲ = \bar{o}$$

و سپس نشان دهید

$$(aI + bE)^n = a^n I + na^{n-۱}bE$$

۳ـ۱۳۲ مسئله

اگر

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & q \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

نشان دهید

$$A^n = \begin{bmatrix} ۱ & nq \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۳ـ۱۳۳ مسئله

نشان دهید

$$\begin{bmatrix} ۱ & x & y \\ ۰ & ۱ & x \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} ۱ & nx & ny + \frac{n(n-۱)}{۲!}x^۲ \\ ۰ & ۱ & nx \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۳ـ۱۳۴ مسئله

نشان دهید هر ماتریس به شکل

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & b \\ -\frac{۳}{۴b} & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

یک ماتریس متناوب است و سپس

$A^{۲۹}$ [۱۷۳]

را به دست آورید.

حل مسائل تکمیلی در مورد محاسبه توانهای یک ماتریس

حل مسئله ۳.۱۲۹

روش اول: (استقراء)

به ازاء $n = ۱$ حکم به صورت

$$A^۲ = B(B + ۲C)$$

در می‌آید، که محاسبات زیر درستی آن را نشان می‌دهد.

$$A^۲ = (B + C)^۲$$

$$= B^۲ + C^۲ + ۲BC \qquad \text{زیرا } B \text{ و } C \text{ تعویض پذیرند}$$

$$= B^۲ + ۲BC \qquad \text{زیرا } C^۲ = \bar{o}$$

$$= B(B + ۲C)$$

حال، فرض کنید که حکم به ازاء $n = k$ برقرار است، یعنی

$$A^{k+۱} = B^k[B + (k + ۱)C]$$

نشان می‌دهیم به ازاء $n = k + ۱$ نیز حکم برقرار است، یعنی

$$A^{k+۲} = B^{k+۱}[B + (k + ۲)C]$$

محاسبات زیر درستی این مطلب را نشان می‌دهند.

$$\begin{aligned} A^{k+۲} &= A^{k+۱} \cdot A \\ &= B^k[B + (k + ۱)C](B + C) \\ &= B^k[B^۲ + (k + ۱)CB + BC + (k + ۱)C^۲] \\ &= B^k[B^۲ + (k + ۲)BC] \\ &= B^{k+۱}[B + (k + ۲)C] \end{aligned}$$

روش دوم: با توجه به تعویض پذیری B و C می‌توان قضیه دو جمله‌ای را به کار بریم.

$$\begin{aligned} A^{k+۱} &= (B + C)^{k+۱} \\ &= B^{k+۱} + (k + ۱)B^kC + \frac{k(k + ۱)}{۲}B^{k-۱}C^۲ + \cdots + C^{k+۱} \\ &= B^{k+۱} + (k + ۱)B^kC \\ &= B^k[B + (k + ۱)C] \end{aligned}$$

البته به این نکته توجه داشته باشید که از $C^۲ = \bar{o}$ نتیجه می‌شود.

$$C^۲ = C^۳ = \cdots = C^{k+۱} = \bar{o} \qquad \square$$

حل مسئله ۳. ۱۳۰

مسئله را با استقراء حل می‌کنیم

$$n = ۱ \qquad A^۱ = \begin{bmatrix} \cos\alpha + \sin\alpha & \sqrt{۲}\sin\alpha \\ -\sqrt{۲}\sin\alpha & \cos\alpha - \sin\alpha \end{bmatrix}$$

بدیهی است به ازاء $n = ۱$، گزاره درست است. فرض می‌کنیم به ازاء $n = k$ گزاره درست باشد، یعنی

$$A^k = \begin{bmatrix} \cos k\alpha + \sin k\alpha & \sqrt{۲}\sin k\alpha \\ -\sqrt{۲}\sin k\alpha & \cos k\alpha - \sin k\alpha \end{bmatrix}$$

باید درستی گزاره را به ازای $n = k + ۱$ ثابت کنیم، یعنی باید نشان دهیم

$$A^{k+۱} = \begin{bmatrix} \cos(k+۱)\alpha + \sin(k+۱)\alpha & \sqrt{۲}\sin(k+۱)\alpha \\ -\sqrt{۲}\sin(k+۱)\alpha & \cos(k+۱)\alpha - \sin(k+۱)\alpha \end{bmatrix}$$

حال، $A^{k+۱}$ را محاسبه می‌کنیم

$$A^{k+۱} = AA^k = \begin{bmatrix} \cos\alpha + \sin\alpha & \sqrt{۲}\sin\alpha \\ -\sqrt{۲}\sin\alpha & \cos\alpha - \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos k\alpha + \sin k\alpha & \sqrt{۲}\sin k\alpha \\ -\sqrt{۲}\sin k\alpha & \cos k\alpha - \sin k\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos k\alpha + \cos\alpha\sin k\alpha + \sin\alpha\cos k\alpha - \sin\alpha\sin k\alpha & \sqrt{۲}\cos\alpha\sin k\alpha + \sqrt{۲}\sin\alpha\cos k\alpha \\ -\sqrt{۲}\sin\alpha\cos k\alpha - \sqrt{۲}\sin k\alpha\cos\alpha & -\sin\alpha\sin k\alpha + \cos\alpha\cos k\alpha - \cos\alpha\sin k\alpha - \sin\alpha\cos k\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(k+۱)\alpha + \sin(k+۱)\alpha & \sqrt{۲}\sin(k+۱)\alpha \\ -\sqrt{۲}\sin(k+۱)\alpha & \cos(k+۱)\alpha - \sin(k+۱)\alpha \end{bmatrix} \qquad \square$$

حل مسئله ۳.۱۳۱

$$E^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

برای اثبات تساوی

$$(aI + bE)^n = a^n I + na^{n-۱}bE$$

به دو روش می‌توان عمل کرد.

روش اول: استقراء

$$n = ۱ \qquad (aI + bE)^۱ = aI + bE$$

$$n = k \qquad (aI + bE)^k = a^k I + ka^{k-۱}bE$$

$$n = k + ۱ \qquad (aI + bE)^{k+۱} = a^{k+۱}I + (k+۱)a^k bE$$

$$(aI + bE)^{k+۱} = (aI + bE)(aI + bE)^k$$

$$= a^{k+1}I^2 + ka^kbIE + a^kbEI + ka^{k-1}b^2E^2$$
$$= a^{k+1}I + (k+1)a^kbE$$

روش دوم: با توجه به فرمول دو جمله‌ای نیوتن، داریم

$$(aI+bE)^n = (aI)^n + n(aI)^{n-1}(bE) + \frac{n(n-1)}{2!}(aI)^{n-2}(bE)^2 + \cdots + (bE)^n$$

از آنجا که توان دوم E، صفر است، توانهای بعدی E نیز صفر می‌شوند، و در عبارت بالا فقط دو جمله اول ناصفر می‌باشند، پس

$$(aI+bE)^n = (aI)^n + n(aI)^{n-1}(bE)$$
$$= a^nI + na^{n-1}bE \quad \square$$

حل مسئله ۳.۱۳۲

روش اول: با استقراء به آسانی حل می‌شود.

روش دوم: داریم

$$\begin{bmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I + \begin{bmatrix} 0 & q \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

که در آن ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & q \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پوچ توان با اندیس ۲ است، یعنی

$$\begin{bmatrix} 0 & q \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \bar{o}$$

در نتیجه با استفاده از فرمول دو جمله‌ای نیوتن، داریم

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = (I + \begin{bmatrix} 0 & q \\ 0 & 0 \end{bmatrix})^n$$
$$= I^n + nI^{n-1}\begin{bmatrix} 0 & q \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{n(n-1)}{2!}I^{n-2}\begin{bmatrix} 0 & q \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 + \cdots + \begin{bmatrix} 0 & q \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^n$$
$$= I + n\begin{bmatrix} 0 & q \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & nq \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \square$$

حل مسئله ۳.۱۳۳

روش اول: این مسئله نیز به آسانی با استقراء قابل حل است.

روش دوم: ابتدا ماتریس مورد نظر را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\begin{bmatrix} ۱ & x & y \\ ۰ & ۱ & x \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & x & y \\ ۰ & ۰ & x \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

با یک محاسبه مستقیم می‌توان نشان داد ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & x & y \\ ۰ & ۰ & x \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

پوچ توان است و داریم

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & x^۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad , \quad A^۳ = \bar{o}$$

بنابراین، با استفاده از فرمول دو جمله‌ای نیوتن، داریم

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} ۱ & x & y \\ ۰ & ۱ & x \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}^n &= (I + A)^n \\ &= I^n + nI^{n-۱}A + \frac{n(n-۱)}{۲!}I^{n-۲}A^۲ \\ &\quad + \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳!}I^{n-۳}A^۳ + \cdots + A^n \\ &= \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & nx & ny \\ ۰ & ۰ & nx \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & \frac{n(n-۱)}{۲!}x^۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ۱ & nx & ny + \frac{n(n-۱)}{۲!}x^۲ \\ ۰ & ۱ & nx \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad \square \end{aligned}$$

حل مسئله ۳.۱۳۴

$$\begin{aligned} A^۲ &= \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & b \\ -\frac{۳}{۴b} & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & b \\ \frac{-۳}{۴b} & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & -b \\ \frac{۳}{۴b} & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A^{۳} = AA^{۲} = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & b \\ -\frac{۳}{۴b} & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & -b \\ \frac{۳}{۴b} & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

پس A ماتریس متناوب با دوره تناوب ۳ است.

بنابراین کلیه توانهای A را به‌سادگی می‌توان حساب کرد. برای به دست آوردن A^n، n را بر ۳ تقسیم می‌کنیم، مثلاً

$$n = ۳k + r$$

بنابراین،

$$A^n = A^{۳k+r}$$
$$= A^{۳k} \cdot A^r$$
$$= I \cdot A^r$$
$$= A^r$$

برای به دست آوردن $A^{۲۹^{۱۷۳}}$، کافی است باقیمانده تقسیم عدد $۲۹^{۱۷۳}$ بر ۳ را به دست آوریم. برای این کار به سادگی دیده می‌شود که

$$۲۹ \overset{۳}{\equiv} -۱$$

بنابراین

$$۲۹^{۱۷۳} \overset{۳}{\equiv} -۱ \overset{۳}{\equiv} ۲$$

در نتیجه

$$۲۹^{۱۷۳} = ۳k + ۲$$

پس

$$A^{۲۹^{۱۷۳}} = A^{۲}$$
$$= \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & -b \\ \frac{۳}{۴b} & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \quad \square$$

تمرینات فصل ۳

۱ـ اگر

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۴ & ۳ \\ ۱ & -۳ & -۳ \\ -۱ & ۴ & ۴ \end{bmatrix}$$

نشان دهید

$$A^{۲} = I$$

۲ـ اگر

$$U = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

الف) مطلوبست محاسبه $U^{۲}$ و $U^{۳}$ و $U^{۴}$.

ب) به طور کلی U^n را برای هر عدد طبیعی n حساب کنید.

۳ـ اگر

$$A = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & -۱ \\ ۳ & -۳ & ۳ \\ ۵ & -۵ & ۵ \end{bmatrix}$$

نشان دهید

$$(I + A)^n = I + (۲^n - ۱)A$$

۴ـ اگر $AB = -BA$، گوییم A و B پاد جابجایی‌اند. نشان دهید

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}, \sigma_y = \begin{bmatrix} ۰ & -i \\ i & ۰ \end{bmatrix}, \sigma_z = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \qquad i^{۲} = -۱$$

دوبدو پاد جابجایی‌اند.

۵ـ اگر

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

نشان دهید

$$A^{۲} - ۴A - ۵I = \bar{o}$$

۶ـ اگر

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

ثابت کنید

$$(aI + bA)^n = a^n I + na^{n-۱}bA$$

۷ـ اگر $B = \frac{۱}{n}A$ که در آن A ماتریس مرتبه nای است که

$$a_{ij} = ۱$$

نشان دهید B، خود توان است.

۸ـ اگر

$$A = \begin{bmatrix} ۴ & -۱ & -۴ \\ ۳ & ۰ & -۴ \\ ۳ & -۱ & -۳ \end{bmatrix}$$

مطلوب است محاسبه

$$A^{۱۹۹۹}$$

۹ـ فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ است بطوری‌که همه درایه‌های آن صفر است به جز درایه‌های به صورت $a_{i,i+۱}$ که مساوی ۱ می‌باشند. به عبارت دیگر

$$a_{ij} = \begin{cases} ۰ & , \quad j - i \neq ۱ \\ ۱ & , \quad j - i = ۱ \end{cases}$$

نشان دهید A ماتریسی پوچ توان از مرتبه n است.

۱۰ـ اگر

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ -۲ & ۳ & -۲ \\ -۴ & ۴ & -۳ \end{bmatrix}$$

مطلوب است محاسبه $A^{۱۹۹۱}$.

۱۱ـ ماتریسهای ۲×۲ مانند A و B ارائه دهید به طوری که $AB = \bar{o}$، ولی $BA \neq \bar{o}$.

۱۲ـ آیا ماتریسهایی مانند A و B وجود دارند که B و A دو ماتریس متمایزی باشند به طوری که $A \neq I$ و $B \neq I$ و داشته باشیم

$$AB = BA \neq \bar{o}$$

۱۳ـ فرض کنید A و B دو ماتریس ۲×۲ باشند. قرار می‌دهیم

$$[A, B] = AB - BA$$

ثابت کنید

$$[A, B] = I \Rightarrow [A, B^n] = nB^{n-۱}$$

۱۴ـ اگر

$$A = \begin{bmatrix} p & q \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم

$$A^n = \begin{bmatrix} p^n & \frac{p^n - ۱}{p - ۱} q \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۱۵ـ اگر برای هر عدد طبیعی n داشته باشیم $A^n = A$. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم

$$(I - A)^n = I - A$$

۱۶ـ نشان دهید ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۳ & -۴ \\ -۱ & ۳ & ۴ \\ ۱ & -۳ & -۴ \end{bmatrix}$$

ماتریسی پوچ توان است.

۱۷ـ اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$. ثابت کنید A و B پاد جابجایی‌اند و نشان دهید

$$(A + B)^۲ = A^۲ + B^۲$$

۱۸ـ مطلوب است تعیین مجموعه کلیه ماتریسهایی که با ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

تعویض پذیرند.

۱۹ـ کلیه ماتریسهای مربعی مرتبه ۲ مانند A را به‌قسمی تعیین کنید که

$$A^۲ = -I$$

۲۰ـ اگر

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

مطلوب است محاسبه A^n.

۲۱ـ نشان دهید که مجموعه

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} ۱ & a \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} | a \in R \right\}$$

همراه با عمل ضرب یک گروه آبلی است.

۲۲ـ ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

مفروض است. نشان دهید

$$A^n = ۳^{n-۱} A$$

۲۳ـ اگر

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

نشان دهید

$$A^n = ۲^{n-۱}A$$

۲۴ـ مجموعه

$$S=\left\{\begin{bmatrix} ۱ & a & b \\ ۰ & ۱ & c \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \middle| a,b,c\in Z\right\}$$

مفروض است. نشان دهید S نسبت به ضرب بسته است.

۲۵ـ اگر

$$C=\begin{bmatrix} ۱ & ۷ & -۱۳ \\ ۵ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \\ ۲ & -۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

آیا ماتریس نظیر A وجود دارد به‌قسمی که

$$C = AB$$

۲۶ـ اگر

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

الف) نشان دهید $A^۲ = A + ۲I$.

ب) نشان دهید $A^n = ۲^{n-۱}(A+I) + \frac{(-۱)^n}{۳}(۲I - A)$.

۲۷ـ ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix}$ مفروض است. کلیه ماتریسهای مرتبهٔ ۲ مانند B را تعیین کنید بقسمی که

$$AB = \bar{o}$$

۲۸ـ اگر برای هر عدد طبیعی n داشته باشیم

$$A^n = A$$

ثابت کنید

$$(۲A - I)^{۲۰۰} = I$$

۲۹ـ اگر

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

الف) نشان دهید $A=E_{۲۱}+E_{۲۳}+E_{۳۳}$.

ب) نشان دهید $A^{۲}=E_{۲۳}+E_{۳۳}$.

ج) نشان دهید $A^{n}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$.

۳۰ـ دستگاه معادلات زیر را حل کنید

$$\begin{cases} A\left(B+\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} \\ A\left(B+\begin{bmatrix} ۳ & ۷ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \end{cases}$$

۳۱ـ معادله

$$A\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}=۰$$

را حل کنید.

۳۲ـ کلیه ماتریسهای ۲ × ۲ به صورت

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

را بیابید به طوری که در معادله زیر صدق کند.

$$X^{۲}+I=\bar{o}$$

۳۳ـ کلیه ماتریسهای ۲ × ۲ مانند $A\neq\bar{o}$ و $B\neq\bar{o}$ را بیابید به طوری که

$$A^{۲}B^{۲}=\bar{o}$$

۳۴ـ فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

اگر B یک ماتریس ۳ × ۳ دلخواه باشد، نشان دهید ستونهای BA همگی مساویند.
در مورد سطرهای AB چه نظری دارید؟

۳۵ـ اگر B یک ماتریس ۲ × ۲ باشد به طوری که

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} B = \bar{o}$$

نشان دهید که اعداد a و b وجود دارند به طوری که

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}$$

۳۶ـ نشان دهید که ماتریس ۲ × ۲ای مانند A فقط و فقط وقتی با ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ جابجا می‌شود که اعداد a و b وجود داشته باشند به طوری که

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

۳۷ـ فرض کنید A و B دو ماتریس ۲ × ۲ باشند. اگر A و B با

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

جابجا شوند، نشان دهید که A با B جابجا می‌شود.

۳۸ـ فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد و

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

نمایشگر بردار ستونیی باشد که همه مؤلفه‌هایش بجز مؤلفه iام آن صفرند و مؤلفه iام آن ۱ است. نشان دهید Ae_i ستون iام ماتریس A است.

۳۹ـ اگر

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نشان دهید

$$A^{3k+1} = 5^k \cdot A$$

۴۰ـ همه ماتریسهای قطری A را بیابید که ۳ × ۳ هستند و

$$A^{۲} = I$$

۴۱ـ فرض کنید

$$P_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

که در آن α یک عدد حقیقی است. نشان دهید

$$P_\alpha P_\beta = P_{\alpha+\beta}$$

۴۲ـ یک ماتریس $n \times n$ را ماتریس مربع نیم جادویی گویند اگر حاصل جمع درایه‌های همه سطرها و ستونهای آن یکسان باشد. برای مثال

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

یک ماتریس مربعی نیم جادویی است. فرض کنید A و B ماتریسهای مربعی نیم جادویی هم مرتبه باشند. نشان دهید که $\lambda_۱ A + \lambda_۲ B$ و AB به ازای هر دو عدد حقیقی $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$، ماتریسهای مربعی نیم جادویی هستند.

۴۳ـ اگر جای سطر iام و سطر jام A را با هم عوض کنیم چه تغییری در ماتریس AB ایجاد می‌شود.

۴۴ـ کلیه ماتریسهایی را بیابید که با ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

جابجا می‌شوند.

۴۵ـ اگر A یک ماتریس ۲ × ۲ و k عدد طبیعی بزرگتر از یا مساوی ۲ است. ثابت کنید $A^k = \bar{o}$ اگر و تنها اگر $A^{۲} = \bar{o}$.

۴۶ـ اگر

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \lambda & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \lambda & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \lambda \end{bmatrix}$$

در این صورت

$$A^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{1}{2!}n(n-1)\lambda^{n-2} & \frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)\lambda^{n-3} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{1}{2!}n(n-1)\lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$$

۴۷ـ اگر

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اولاً A^2 و A^3 را حساب کنید، ثانیاً اگر I یک ماتریس همانی 3×3 و

$$B = I + A$$

با استفاده از A^2 و A^3 ماتریس B^3 را محاسبه کنید.

۴۸ـ اگر A و B دو ماتریس مربع هم‌مرتبه باشند و $AB + BA = \bar{o}$ ثابت کنید $A^2B = -BA^2$

۴۹ـ ثابت کنید

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^n = \frac{1}{2}\left(3^n \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

۵۰ـ فرض کنید $J_{m\times n}$ ماتریسی است که همه درایه‌های آن ۱ می‌باشد. برای مثال

$$J_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

موارد زیر را ثابت کنید

الف) $J_{2\times 3}J_{3\times 4} = 3J_{2\times 4}$

ب) $J_{m\times 3}J_{3\times n} = 3J_{m\times n}$

ج) $J_{m\times p}J_{p\times n} = PJ_{m\times n}$

۵۱ـ اگر A یک ماتریس دلخواه $m \times n$ باشد، هر یک از ماتریسهای زیر را مشخص کنید.

الف) $J_{l\times m}A$

ب) $AJ_{n\times r}$

ج) $J_{l\times m}AJ_{n\times r}$

۵۲ـ ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

داده شده است. ابتدا، $A^۲$ و $A^۳$ را حساب کرده سپس درستی رابطهٔ زیر را تحقیق کنید

$$A^۳ - ۲A^۲ + I = \bar{o}$$

۵۳ـ هرگاه $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$. اولاً a و b را طوری تعیین کنید که $A^۲ = aA + bI$. ثانیاً با استفاده از استقراء ثابت کنید

$$A^n = nA - (n - ۱)I$$

۵۴ـ اگر A یک ماتریس مربع و $A^۲ = A$ و $B = ۲A - I$ فرض شود. ثابت کنید

$$A^۳ + B^۳ = A + B$$

۵۵ـ اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ ثابت کنید

$$A^n + B^n = ۲I$$

۵۶ـ اگر ضرب ماتریسهای $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $Y = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ جابجایی باشد، a و b و c و d در چه شرایطی صدق می‌کنند؟

۵۷ـ برای چه مقادیری از x تساوی زیر برقرار است؟

$$\begin{bmatrix} x & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ۰ \\ -۳ \end{bmatrix} = ۰$$

۵۸ـ A یک ماتریس مربع مرتبه n است که عناصر آن ۰، ۱، و یا ۱− هستند و در هر سطر یا ستون آن فقط یک درایه ناصفر وجود دارد. ثابت کنید $A^۲$ و $A^۳$ و ...، به‌همین شکل‌اند و سپس نشان دهید به ازای عدد مثبتی مانند kداریم

$$A^k = I$$

۵۹ـ نشان دهید هر یک از ماتریسهای زیر خود توان می‌باشند

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۴ \\ ۱ & -۲ & -۴ \\ -۱ & ۲ & ۴ \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & ۰ & \frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۶۰ـ به ازاء چه مقادیری از m و n، ماتریس زیر خود توان است؟

$$\begin{bmatrix} -۱ & m & n \\ ۱ & -m & -n \\ -۱ & m & n \end{bmatrix}$$

۶۱ـ به ازاء چه مقادیری از a و b و c ماتریس داده شده در زیر خود توان است؟

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

فصل ۴

افراز ماتریسها

۴ـ۱ زیرماتریسها و افراز کردن[1]

یک زیرماتریس یک ماتریس مفروض A ماتریسی است که از حذف تعدادی از سطرها یا ستونهای ماتریس A به دست آمده باشد. برای مثال، اگر

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \\ ۹ & ۱۰ & ۱۱ & ۱۲ \\ ۱۳ & ۱۴ & ۱۵ & ۱۶ \end{bmatrix}$$

در این صورت هریک از ماتریسهای زیر یک زیرماتریس A می‌باشند.

$$\begin{bmatrix} ۱۰ & ۱۲ \\ ۱۴ & ۱۶ \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

زیرماتریس $\begin{bmatrix} ۱۰ & ۱۲ \\ ۱۴ & ۱۶ \end{bmatrix}$ از حذف سطرهای اول و دوم و ستونهای اول و سوم، و زیرماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ از حذف سطرهای دوم و سوم و چهارم و ستون اول به دست می‌آیند.

هرگاه با ترسیم خطوط افقی و عمودی بین سطرها و ستونهای یک ماتریس آن را تقسیم‌بندی کنیم، گوییم ماتریس را افراز کرده‌ایم. با تغییر این خطوط افرازهای متفاوتی از یک ماتریس ساخته می‌شود. مثلاً

1.Sub matrices and partitioning

$$\left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \\ \hline ۹ & ۱۰ & ۱۱ & ۱۲ \\ ۱۳ & ۱۴ & ۱۵ & ۱۶ \end{array}\right] \quad , \quad \left[\begin{array}{c|cc|c} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ \hline ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \\ ۹ & ۱۰ & ۱۱ & ۱۲ \\ ۱۳ & ۱۴ & ۱۵ & ۱۶ \end{array}\right]$$

دو افراز مختلف از ماتریس A می‌باشند.

وقتی ماتریسها از ظرفیت حافظه کامپیوتر بزرگترند، از ماتریسهای افراز شده استفاده فراوان می‌کنند. مثلاً در ضرب دو ماتریس افراز شده، می‌توان ماتریسها را روی دیسک نگه داشت و فقط زیر ماتریسهایی را که در تشکیل حاصل ضربهای زیر ماتریسی لازمند در حافظه آورد. معلوم است که افراز باید به قسمی صورت گیرد که حاصل ضرب زیر ماتریسهای نظیر، قابل تعریف باشد.

فرض کنید A و B ماتریسهایی باشند که AB تعریف شده باشد حال اگر A و B را به صورت زیر

$$A = \left[\begin{array}{c|c} C & D \\ \hline E & F \end{array}\right] \quad و \quad B = \left[\begin{array}{c|c} G & H \\ \hline J & K \end{array}\right]$$

افرازکرده باشیم در این صورت به آسانی ثابت می‌شود که برای محاسبه ماتریس ABمی‌توان C و D و ...را شبیه درایه‌ها تصور کرد و عمل ضرب را انجام داد، بنابراین

$$AB = \left[\begin{array}{c|c} C & D \\ \hline E & F \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} G & H \\ \hline J & K \end{array}\right] = \begin{bmatrix} CG + DJ & CH + DK \\ EG + FJ & EH + FK \end{bmatrix}$$

البته، این مشروط به آن است که افراز به گونه‌ای باشد که حاصل‌ضربهای فوق تعریف شده باشند.

مثال: اگر ماتریسهای A و B به صورت زیر داده شده باشند.

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۴ & -۱ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ -۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

مطلوبست محاسبه AB به کمک افراز زیر از A و B.

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} ۳ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۴ & -۱ \\ \hline ۳ & ۱ & ۲ \end{array}\right] \quad , \quad B = \left[\begin{array}{cc|c} ۱ & ۳ & ۲ \\ -۱ & ۰ & ۱ \\ \hline ۰ & ۱ & ۱ \end{array}\right]$$

حل:

$$AB = \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \end{bmatrix} \end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} ۲ & ۹ \\ -۳ & ۳ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} ۷ \\ ۶ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} ۲ & ۹ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} ۷ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۲ \end{bmatrix} \end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{cc|c} ۲ & ۱۱ & ۹ \\ -۳ & ۲ & ۵ \\ \hline ۲ & ۱۱ & ۹ \end{array}\right]=\begin{bmatrix} ۲ & ۱۱ & ۹ \\ -۳ & ۲ & ۵ \\ ۲ & ۱۱ & ۹ \end{bmatrix} \quad \square$$

مثال: مطلوبست محاسبه AB هرگاه

$$A=\left[\begin{array}{cc|c} ۳ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۰ \\ \hline ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ \hline ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right] \quad , \quad B=\left[\begin{array}{cc|ccc} ۲ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \hline ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

حل:

$$AB=\left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \end{array}\right]$$

$$AB=\left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{cc|ccc} ۵ & ۴ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \hline ۰ & ۳ & ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ \hline ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} ۵ & ۴ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad \square$$

توجه کنید که افرازهای A و B به گونه‌ای بوده است که از زیر ماتریسهای صفر حداکثر استفاده شده باشد.

مثال: فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

حاصل ضرب AB را با افرازهایی مناسب از B و A، به دست آورید.

حل: A و B را به صورت زیر افراز می‌کنیم تا به سادگی بتوان ABرا حساب کرد

$$AB = \left[\begin{array}{ccc:c} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳ \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ \hdashline ۳ & ۱ & ۲ \end{array}\right]$$

$$= [I \,\vdots\, C] \left[\frac{I}{D}\right]$$

I ماتریس واحد ۳×۳ است.

$$= I \cdot I + C \cdot D$$

$$= \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ ۶ & ۲ & ۴ \\ ۹ & ۳ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۴ & ۱ & ۲ \\ ۶ & ۳ & ۴ \\ ۹ & ۳ & ۷ \end{bmatrix} \quad \square$$

مثال: اگر

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} , B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ \\ ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \\ ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ & ۹ \\ ۹ & ۸ & ۷ & ۶ & ۵ & ۴ \\ ۸ & ۷ & ۶ & ۵ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}$$

AB را با افرازهایی مناسب از A و B حساب کنید

حل: A و B را به صورت زیر افراز می‌کنیم

$$AB=\left[\begin{array}{cc|ccc|c} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۲ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰\\ \hline ۰ & ۰ & ۳ & ۱ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰\\ \hline ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|ccc|c} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶\\ ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷\\ \hline ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸\\ ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ & ۹\\ ۹ & ۸ & ۷ & ۶ & ۵ & ۴\\ \hline ۸ & ۷ & ۶ & ۵ & ۴ & ۱ \end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{cc|ccc|c} ۱ & ۱ & & O & & O\\ ۲ & ۱ & & & & \\ \hline & & ۳ & ۱ & ۲ & \\ O & & ۱ & ۲ & ۱ & O\\ & & ۰ & ۱ & ۱ & \\ \hline O & & & O & & ۱ \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|ccc|c} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶\\ ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷\\ \hline ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸\\ ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ & ۹\\ ۹ & ۸ & ۷ & ۶ & ۵ & ۴\\ \hline ۸ & ۷ & ۶ & ۵ & ۴ & ۱ \end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{c|c|c} \begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۲ & ۳\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۴ & ۵\\ ۴ & ۵ & ۶\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۶\\ ۷\end{bmatrix}\\ \hline \begin{bmatrix}۳ & ۱ & ۲\\ ۱ & ۲ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۴\\ ۴ & ۵\\ ۹ & ۸\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}۳ & ۱ & ۲\\ ۱ & ۲ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵ & ۶ & ۷\\ ۶ & ۷ & ۸\\ ۷ & ۶ & ۵\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}۳ & ۱ & ۲\\ ۱ & ۲ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۸\\ ۹\\ ۴\end{bmatrix}\\ \hline [۱][۸ \quad ۷] & [۱][۶ \quad ۵ \quad ۴] & [۱][۱] \end{array}\right]$$

$$=\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۷ & ۹ & ۱۱ & ۱۳\\ ۴ & ۷ & ۱۰ & ۱۳ & ۱۶ & ۱۹\\ ۳۱ & ۳۳ & ۳۵ & ۳۷ & ۳۹ & ۴۱\\ ۲۰ & ۲۲ & ۲۴ & ۲۶ & ۲۸ & ۳۰\\ ۱۳ & ۱۳ & ۱۳ & ۱۳ & ۱۳ & ۱۳\\ ۸ & ۷ & ۶ & ۵ & ۴ & ۱ \end{bmatrix} \qquad \square$$

۴ـ۲ ماتریسهای شبه قطری[1]

هر ماتریس به صورت

---

1. Quasi - diagonal matrices

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & O & & O \\ O & A_2 & & O \\ \vdots & & & \\ O & O & \cdots & A_n \end{bmatrix}$$

را که در آن A_1 و A_2 و . . . و A_n ماتریسهای مربعی می‌باشند یک ماتریس شبه‌قطری گویند. این ماتریسها را به صورت

$$A = diag(A_1, A_2, \cdots, A_n)$$

نیز نشان می‌دهند.

مثال: ماتریس زیر یک ماتریس شبه قطری است.

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \square$$

فرض کنید A و B دو ماتریس شبه قطری باشند، یعنی

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & O & O \\ O & A_2 & O \\ \vdots & & \\ O & O & A_n \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & O & O \\ O & B_2 & O \\ \vdots & & \\ O & O & B_n \end{bmatrix}$$

باتوجه به مجموع و حاصل ضرب ماتریسهای افراز شده، اگر A_i و B_i ماتریسهای مربعی هم‌مرتبه باشند، در این صورت $A + B$ و AB ماتریسهای شبه قطری به صورت زیر می‌باشند.

$$A + B = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 & O & O \\ O & A_2 + B_2 & O \\ \vdots & & \\ O & O & A_n + B_n \end{bmatrix} ,$$

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 B_1 & O & O \\ O & A_2 B_2 & O \\ \vdots & & \\ O & O & A_n B_n \end{bmatrix}$$

مثال: فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۳ & ۵ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۰ & ۰ & ۰\\ -۱ & ۴ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & -۲ & ۴ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$$

مطلوب است محاسبه AB و $A+B$.

$$A+B=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & ۲\\ ۳ & ۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۲ & ۳\\ -۱ & ۴\end{bmatrix} & O & O\\ O & \begin{bmatrix} ۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۲ & ۳\\ -۲ & ۴\end{bmatrix} & O\\ O & O & ۴-۲ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۱ & ۵ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۲ & ۹ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۳ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & -۲ & ۵ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & ۲\\ ۳ & ۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۳\\ -۱ & ۴\end{bmatrix} & O & O\\ O & \begin{bmatrix} ۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۳\\ -۲ & ۴\end{bmatrix} & O\\ O & O & ۴(-۲) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -۴ & ۵ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۱ & ۲۹ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & -۲ & ۴ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۸ \end{bmatrix}\quad\square$$

مثال: ماتریس A به صورت زیر داده شده است، با افراز مناسب A، ماتریس $A^۲$ را حساب کنید

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۲\\ ۰ & ۱ & ۲ & ۴\\ ۰ & ۰ & ۲ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

حل: ماتریس A را به صورت زیر افراز می‌کنیم

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۴ \\ \hline ۰ & ۰ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ \end{array}\right]$$

حال، قرار می‌دهیم $I = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$، $O = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ در نتیجه،

$$A^۲ = \begin{bmatrix} I & B \\ O & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & B \\ O & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & B+BC \\ O & C^۲ \end{bmatrix}$$

حال اگر $B + BC$ و $C^۲$ را حساب کنیم، خواهیم داشت.

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۵ & ۷ \\ ۰ & ۱ & ۱۰ & ۱۴ \\ ۰ & ۰ & ۵ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۴ & ۵ \end{bmatrix} \qquad \square$$

تمرینات فصل ۴

۱ـ اگر

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ \hline ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \quad , \quad B = \left[\begin{array}{cc|c} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ \hline ۱ & ۱ & ۰ \end{array}\right]$$

مطلوب است محاسبه AB.

۲ـ اگر

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} ۱ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{array}\right] \quad , \quad B = \left[\begin{array}{cc} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ \hline -۱ & ۲ \end{array}\right]$$

مطلوب است محاسبه AB.

۳ـ اگر

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ \hline ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۲ \end{array}\right] \quad , \quad B = \left[\begin{array}{cc|cc} ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ \hline ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{array}\right]$$

مطلوب است محاسبه AB.

۴ـ اگر

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$$

کدامیک از ماتریسهای زیر یک زیر ماتریس A می‌باشند

الف) $\begin{bmatrix}1&3\\7&9\end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$ پ) $\begin{bmatrix}1&2\\8&9\end{bmatrix}$ ت) $\begin{bmatrix}4&6\\7&9\end{bmatrix}$

۵ـ اگر

$$A=\left[\begin{array}{cc:c}1&-1&2\\ \hdashline 3&0&4\\0&1&2\end{array}\right],\qquad B=\left[\begin{array}{ccc:c}5&2&0&2\\1&-1&3&1\\ \hdashline 0&1&1&4\end{array}\right]$$

مطلوب است محاسبه AB.

۶ـ اگر

$$A=\begin{bmatrix}4&1&0&0\\2&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&2\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}3&2&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&2&1\\0&0&1&-1\end{bmatrix}$$

با افرازهای مناسب، AB را حساب کنید.

۷ـ اگر

$$A=\left[\begin{array}{cc:c}3&1&0\\2&0&0\\ \hdashline 0&0&3\\0&0&1\\ \hdashline 0&0&0\end{array}\right],\qquad B=\left[\begin{array}{cc:ccc}2&1&0&0&0\\-1&1&0&0&0\\ \hdashline 0&1&0&0&1\end{array}\right]$$

مطلوب است محاسبه AB.

فصل ۵

ترانهاده یک ماتریس[1]

۵ـ۱ تعریف

فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. **ترانهاده A** ، ماتریسی است $n \times m$ که سطر اول آن ستون اول ماتریس A، سطر دوم آن ستون دوم A و... به طور کلی، سطر iام ترانهاده A، ستون iام ماتریس A می‌باشد. ترانهاده A را با نمادهای A'، A^t یا ${}^tA$ نشان می‌دهند. ما در این کتاب از نماد A' استفاده خواهیم کرد.

مثال: فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ & -۳ \\ ۰ & ۴ & ۹ \end{bmatrix}$$

در این‌صورت ترانهاده A، یعنی A' عبارت است از

$$A' = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۵ & ۴ \\ -۳ & ۹ \end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌کنید که درایه سطر اول ستون دوم ماتریس A مساوی ۵ است، یعنی $a_{۱۲} = ۵$. از طرف دیگر اگر درایه‌های A' را با a'_{ij} نشان دهیم درایه سطر دوم ستون اول A' نیز مساوی ۵ است، یعنی $a'_{۲۱} = ۵$. بنابراین،

$$a'_{۲۱} = a_{۱۲}$$

به طریق مشابه

1.transposed of a matrix

$$a'_{۲۳} = a_{۳۲} \quad , \quad a'_{۳۱} = a_{۱۳} \quad \square$$

درواقع، اگر $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. در این صورت ترانهاده A عبارت است از $A' = [a'_{ij}]_{n\times m}$
در آن

$$a'_{ij} = a_{ji}$$

بنابراین،

$$\boxed{\text{درایه سطر } i \text{ام ستون } j \text{ام } A' = \text{درایه سطر } j \text{ام ستون } i \text{ام } A}$$

مثال: ترانهاده یک ماتریس بالا مثلثی، یک ماتریس پایین مثلثی است و برعکس. $\square$

مثال: ترانهاده ماتریس واحد مرتبه n خود ماتریس واحد مرتبه n است، یعنی

$$I' = I \quad \square$$

۵ـ۲ ویژگیهای ترانهاده

۵ـ۳ قضیه

اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد، در این صورت

$$(A')' = A$$

اثبات:

$$\text{درایه سطر } i \text{ام ستون } j \text{ام } (A')' = \text{درایه سطر } j \text{ام ستون } i \text{ام } A'$$
$$= \text{درایه سطر } i \text{ام ستون } j \text{ام } A \quad \blacksquare$$

۵ـ۴ قضیه

اگر A و B دو ماتریس $m \times n$ باشند، در این صورت

$$(A+B)' = A' + B'$$

اثبات:

$$\text{درایه سطر } i \text{ام ستون } j \text{ام } (A+B)' = \text{درایه سطر } j \text{ام ستون } i \text{ام } (A+B)$$
$$= a_{ji} + b_{ji}$$

$$= a'_{ij} + b'_{ij}$$

$$= (A' + B') \quad \text{درایه سطر } i \text{ام ستون } j \text{ام} \qquad \blacksquare$$

نتیجه: اگر A_1، A_2، $\cdots$، و A_n ماتریسهایی هم مرتبه باشند، با استقراء ثابت می‌شود که

$$(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)' = A'_1 + A'_2 + \cdots + A'_n \qquad \blacksquare$$

۵ـ۵ قضیه

اگر A یک ماتریس $m \times n$ و λ یک عدد حقیقی باشد، در این صورت

$$(\lambda A)' = \lambda A'$$

اثبات:

$$(\lambda A)' \text{ درایه سطر } i \text{ام ستون } j \text{ام} = \lambda A \text{ درایه سطر } j \text{ام ستون } i \text{ام}$$

$$= \lambda a_{ji}$$

$$= \lambda a'_{ij}$$

$$= \lambda A' \text{ درایه سطر } i \text{ام ستون } j \text{ام} \qquad \blacksquare$$

۵ـ۶ نتیجه

اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد، در این صورت

$$(-A)' = -A' \qquad \blacksquare$$

۵ـ۷ نتیجه

اگر A و B دو ماتریس $m \times n$ باشند، در این صورت

$$(A - B)' = A' - B'$$

اثبات:

$$(A - B)' = [A + (-B)]'$$

$$= A' + (-B)'$$

$$= A' - B' \qquad \blacksquare$$

۵ـ۸ قضیه

اگر A و B دو ماتریس قابل ضرب باشند، در این صورت

$$(AB)' = B'A'$$

اثبات: فرض کنید $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ و $B = [b_{ij}]_{n\times p}$، بنابراین

درایه سطر iام ستون jام $(AB)'$ = درایه سطر jام ستون iام AB

= سطر jام A × ستون iام B

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk}$$ بنابر خاصیت جابجایی ضرب اعداد حقیقی

$$= \sum_{k=1}^{n} b'_{ik} a'_{kj}$$

= درایه سطر iام ستون jام $B'A'$ ■

۵ـ۹ نتیجه

اگر A_1، A_2، ...، و A_n ماتریسهای قابل ضرب باشند، در این صورت

$$(A_1 A_2 \cdots A_n)' = A'_n \cdots A'_2 A'_1 \quad ■$$

اثبات: تمرین (راهنمایی: از استقراء استفاده کنید)

۵ـ۱۰ نتیجه

اگر در نتیجه فوق تمام ماتریسها مساوی باشند، یعنی

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$$

در این صورت خواهیم داشت

$$(A^n)' = (A')^n \quad ■$$

مثال: طرف دوم تساویهای زیر را بنویسید.

الف) $(A - A')' = ?$ ب) $(B'AB)' = ?$ ج) $(AB' + BA')'$

حل:

الف) $(A - A')' = A' - (A')'$

$$= A' - A$$

ب) $(B'AB)' = B'A'(B')'$

$$= B'A'B$$

ج) $(AB' + BA')' = (AB')' + (BA')'$

$$= BA' + AB' \quad \square$$

مثال: اگر

$$A = \begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

عبارت $X'AX$ را به دست آورید.

حل:

$$\begin{aligned} X'AX &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ax + hy & hx + by \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= (ax + hy)x + (hx + by)y \\ &= ax^{۲} + ۲hxy + by^{۲} \quad \square \end{aligned}$$

۵ـ۱۱ ماتریس متقارن[1]

تعریف. ماتریس مربع A را متقارن می‌نامند، هرگاه

$$A' = A$$

مثال: ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۵ \\ ۲ & ۹ & ۸ \\ ۵ & ۸ & ۷ \end{bmatrix}$$

متقارن است، زیرا

1.Symmetric matrix

$$A' = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۵ \\ ۲ & ۹ & ۸ \\ ۵ & ۸ & ۷ \end{bmatrix} = A \quad \square$$

از تساوی $A = A'$ بلافاصله نتیجه می‌شود که

$$a'_{ij} = a_{ij}$$

و در نتیجه،

$$a_{ij} = a_{ji}$$

بنابراین می‌توان گفت: ماتریس A متقارن است، هرگاه

$$\forall i, j \quad a_{ij} = a_{ji}$$

بنابراین، در ماتریسهای متقارن درایه‌هایی که موضع آنها نسبت به قطر اصلی قرینه‌اند با هم مساویند.

مثال: هر ماتریس قطری متقارن است، در نتیجه، ماتریسهای اسکالر و ماتریس واحد و ماتریس صفر متقارن هستند. $\square$

۵ـ۱۲ قضیه

اگر A و B دو ماتریس متقارن هم مرتبه باشند، در این صورت $A + B$ نیز متقارن است.

اثبات: چون A و B متقارن است پس $A' = A$ و $B' = B$، بنابراین

$$(A+B)' = A' + B'$$

$$= A + B \quad \blacksquare$$

۵ـ۱۳ قضیه

اگر A متقارن و λ یک عدد حقیقی باشد، در این صورت λA نیز متقارن است.

اثبات:

$$(\lambda A)' = \lambda A'$$

$$= \lambda A \qquad A' = A \text{ زیرا} \quad \blacksquare$$

۵ـ۱۴ نتیجه

مجموعه ماتریسهای متقارن مرتبه n یک زیر فضای برداری فضای ماتریسهای مربعی مرتبه n است. $\blacksquare$

۵ـ۱۵ قضیه

اگر A و B دو ماتریس متقارن و تعویض پذیر باشند، در این صورت AB نیز متقارن است.

اثبات:

$$\begin{aligned}(AB)' &= B'A' \\ &= BA \qquad \text{زیرا } A \text{ و } B \text{ متقارن هستند.} \\ &= AB \qquad \text{زیرا } A \text{ و } B \text{ تعویض پذیرند.} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

۵ـ۱۶ ماتریس پاد متقارن (متقارن کج)[1]

تعریف: ماتریس مربع A را پاد متقارن می‌نامند هرگاه

$$A' = -A$$

مثال: ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۳ & -۲ \\ -۳ & ۰ & ۵ \\ ۲ & -۵ & ۰ \end{bmatrix}$$

پاد متقارن است، زیرا

$$A' = \begin{bmatrix} ۰ & -۳ & ۲ \\ ۳ & ۰ & -۵ \\ -۲ & ۵ & ۰ \end{bmatrix} = -A \quad \square$$

از $A' = -A$، بلافاصله نتیجه می‌شود که

$$a'_{ij} = -a_{ij}$$

بنابراین، می‌توانیم بگوییم،

ماتریس A پاد متقارن است، هرگاه

$$\forall i, j \qquad a_{ij} = -a_{ji}$$

اگر در تساوی $a_{ij} = -a_{ji}$ قرار دهیم $i = j$، خواهیم داشت $a_{ii} = -a_{ii}$، بنابراین، $۲a_{ii} = ۰$ و از آنجا $a_{ii} = ۰$، یعنی

در یک ماتریس پاد متقارن درایه واقع بر قطر اصلی همگی صفرند.

1.Skew symmetric matrix

مثال: ماتریس مربع صفر، ماتریسی پاد متقارن است. □

۵ـ۱۷ قضیه

مجموع دو ماتریس پاد متقارن، ماتریسی پاد متقارن است.

اثبات: فرض کنید A و B دو ماتریس پاد متقارن باشند، بنابراین $A' = -A$ و $B' = -B$. پس

$$\begin{aligned}(A+B)' &= A' + B'\\ &= (-A) + (-B)\\ &= -(A+B) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

۵ـ۱۸ قضیه

اگر A یک ماتریس پاد متقارن و λ یک عدد حقیقی باشد، در این صورت λA نیز پاد متقارن است.

اثبات:

$$\begin{aligned}(\lambda A)' &= \lambda A'\\ &= \lambda(-A) \quad \text{زیرا } A \text{ پاد متقارن است.}\\ &= -\lambda A \quad \blacksquare\end{aligned}$$

نتیجه. مجموعه ماتریسهای پاد متقارن مرتبه n یک زیر فضای برداری فضای ماتریسهای مربع مرتبه n است. ■

۵ـ۱۹ قضیه

اگر A و B دو ماتریس پاد متقارن تعویض پذیر باشند، در این صورت AB متقارن است.

اثبات:

$$\begin{aligned}(AB)' &= B'A'\\ &= (-B)(-A) \quad \text{زیرا } A \text{ و } B \text{ پاد متقارنند.}\\ &= BA\\ &= AB \quad \text{زیرا } A \text{ و } B \text{ تعویض‌پذیرند.} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

۵ـ۲۰ قضایا و مسائل تکمیلی در مورد ترانهاده و ماتریسهای متقارن و پاد متقارن

۵ـ۲۱ گزاره

اگر A ماتریس مربع باشد در این صورت $A + A'$ ماتریسی متقارن و $A - A'$ ماتریسی پاد متقارن است.

اثبات:

$$(A + A')' = A' + A$$
$$= A + A'$$

بنابراین، $A + A'$ متقارن است.

$$(A - A')' = A' - A$$
$$= -(A - A')$$

بنابراین، $A - A'$ پادمتقارن است. ■

۵ـ۲۲ گزاره

هر ماتریس مربع را می‌توان به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پاد متقارن نوشت.

اثبات: فرض کنید A یک ماتریس مربع دلخواه باشد، باتوجه به گزاره فوق $A + A'$ متقارن و $A - A'$ پاد متقارن است. باتوجه به قضایای پیشین $\frac{۱}{۲}(A + A')$ متقارن، و $\frac{۱}{۲}(A - A')$ پاد متقارن است. از طرف دیگر، داریم

$$A = \frac{۱}{۲}(A + A') + \frac{۱}{۲}(A - A')$$

بنابراین A مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پاد متقارن است. ■

۵ـ۲۳ گزاره

ماتریس مربع صفر تنها ماتریسی است که هم متقارن و هم پاد متقارن است.

اثبات: فرض کنید A ماتریس مربعی باشد که هم متقارن و هم پاد متقارن است. پس،

$$A' = -A \qquad \text{زیرا } A \text{ پاد متقارن است.}$$

$$A' = A \qquad \text{زیرا } A \text{ متقارن است.}$$

بنابراین، $-A = A$ و از آنجا $۲A = o$، در نتیجه $A = \bar{o}$. ■

۵ـ۲۴ گزاره

اگر A و B ماتریسهای متقارنی باشند که حاصل ضرب آنها، یعنی ABنیز متقارن است، آنگاه A و B تعویض پذیرند.

اثبات: چون AB متقارن است، پس $(AB)' = AB$، بنابراین $B'A' = AB$.

از طرفی باتوجه به این که A و B متقارنند پس $BA = AB$. یعنی A و B تعویض پذیرند. ■

به طریق مشابه گزاره زیر ثابت می‌شود.

۵ـ۲۵ گزاره

اگر A و B دو ماتریس پاد متقارن باشند به گونه‌ای که AB متقارن باشد، آنگاه A و B تعویض‌پذیرند. ■

۵ـ۲۶ گزاره

اگر A متقارن باشد، آنگاه A^n نیز متقارن است.

اثبات:

$$\begin{aligned}(A^n)' &= (A')^n && \text{بنابر ۵ − ۱۰}\\ &= A^n && \text{زیرا } A \text{ متقارن است}\end{aligned}$$ ■

۵ـ۲۷ گزاره

اگر A پاد متقارن باشد، آنگاه توانهای زوج A متقارن، و توانهای فرد A پاد متقارن است.

اثبات:

$$\begin{aligned}(A^n)' &= (A')^n\\ &= (-A)^n && \text{زیرا } A \text{ پاد متقارن است}\\ &= \begin{cases} A^n & \text{برای } n \text{ زوج}\\ -A^n & \text{برای } n \text{ فرد}\end{cases}\end{aligned}$$ ■

۵ـ۲۸ گزاره

اگر A متقارن باشد، هرچند جمله‌ای برحسب A نیز ماتریسی متقارن است.

اثبات: روش اول: فرض کنید

$$a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I$$

یک چند جمله‌ای برحسب A باشد، بنابراین

$$(a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I)' = (a_n A^n)' + \cdots + (a_1 A)' + (a_0 I)'$$
$$= a_n (A')^n + \cdots + a_1 A' + a_0 I$$
$$= a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I$$

روش دوم: چون A متقارن است، پس هر توان A نیز متقارن است، پس A، A^2، . . . ، و A^n متقارنند. در نتیجه، $a_n A^n$، . . . ، $a_2 A^2$، و $a_1 A$ نیز متقارن هستند. از طرف دیگر، $a_0 I$ نیز متقارن است، پس

$$a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I$$

که مجموع چند ماتریس متقارن است ماتریسی متقارن می‌باشد. ■

۵ـ۲۹ گزاره

فرض کنید A و B دو ماتریس مربع هم مرتبه باشند.

الف) ماتریسهای AA' و $AB' + BA'$ متقارن هستند.

ب) ماتریسهای $AB' - BA'$ پاد متقارن است.

۵ـ۳۰ گزاره

اگر A و B دو ماتریس متقارن باشند.

الف) ماتریسهای $AB + BA$ متقارن است.

ب) ماتریسهای $AB - BA$ پاد متقارن است.

۵ـ۳۱ گزاره

فرض کنید A و B دو ماتریس ناصفر باشند به گونه‌ای که A متقارن و Bپاد متقارن باشد، در این صورت A و B استقلال خطی دارند. به عبارت دیگر، برای هر دو عدد حقیقی α_1 و α_2، داریم

$$\alpha_1 A + \alpha_2 B = \bar{o} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

۵ـ۳۲ مسئله

فرض کنید A متقارن و B پاد متقارن است، و $A + B = \bar{o}$. ثابت کنید Aو B هردو صفرند.

۵ـ۳۳ مسئله

اگر A و C ماتریسهایی متقارن و B ماتریسی پاد متقارن باشد به طوری که $A + B = C$، در این صورت در مورد ماتریس B چه می‌توان گفت ؟

۵ـ۳۴ مسئله

اگر A و B تعویض پذیر باشند، نشان دهید A' و B' نیز تعویض پذیرند.

۵ـ۳۵ مسئله

اگر

$$A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

عبارت $X'AX$ را حساب کنید.

۵ـ۳۶ گزاره

فرض کنید A ماتریس متقارنی باشد به طوری که $tr(A^۲) = ۰$، در این صورت

$$A = \bar{o}$$

۵ـ۳۷ گزاره

اگر A یک ماتریس مربع باشد که برای آن $AA' = o$، در این صورت

$$A = \bar{o}$$

تذکر: گزاره ۵ . ۳۶ حالت خاصی از این گزاره است.

اثبات گزاره ۵ـ۲۹

$$(AA')' = (A')'A'$$
$$= AA'$$

$$(AB' + BA')' = (AB')' + (BA')'$$

$$= BA' + AB'$$
$$= AB' + BA'$$

$$\begin{aligned}(AB' - BA')' &= (AB')' - (BA')' \\ &= BA' - AB' \\ &= -(AB' - BA') \quad \blacksquare\end{aligned}$$

اثبات گزاره ۵ـ۳۰

$$\begin{aligned}(AB + BA)' &= (AB)' + (BA)' \\ &= B'A' + A'B' \\ &= BA + AB \qquad \text{زیرا } A \text{ و } B \text{ متقارنند} \\ &= AB + BA\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(AB - BA)' &= (AB)' - (BA)' \\ &= B'A' - A'B' \\ &= BA - AB \qquad \text{زیرا } A \text{ و } B \text{ متقارنند} \\ &= -(AB - BA) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

اثبات گزاره۵ـ۳۱ فرض کنید برای دو عدد حقیقی α_1 و α_2 داشته باشیم

$$\alpha_1 A + \alpha_2 B = \bar{o}$$

از طرفین تساوی ترانهاده می‌گیریم، در نتیجه

$$\alpha_1 A' + \alpha_2 B' = \bar{o}$$

از طرف دیگر چون $A' = A$ و $B' = -B$، داریم

$$\alpha_1 A - \alpha_2 B = \bar{o}$$

حال، با جمع دو تساوی

$$\alpha_1 A + \alpha_2 B = \bar{o}, \alpha_1 A - \alpha_2 B = \bar{o}$$

خواهیم داشت

$$۲\alpha_۱ A = \bar{o}$$

و از آنجا که $A \neq \bar{o}$، نتیجه می‌شود $\alpha_۱ = ۰$. در نتیجه،

$$\alpha_۲ B = \bar{o}$$

و چون $B \neq \bar{o}$، نتیجه می‌شود $\alpha_۲ = ۰$. ■

حل مسئله ۵ـ۳۲

روش اول: از تساوی $A + B = \bar{o}$، ترانهاده می‌گیریم، در نتیجه $A' + B' = \bar{o}$ و از آنجا $A - B = \bar{o}$. باتوجه به تساوی $A + B = \bar{o}$، نتیجه می‌گیریم $۲A = \bar{o}$، پس $A = \bar{o}$. و در نتیجه، $B = \bar{o}$.

روش دوم: از $A + B = \bar{o}$ نتیجه می‌شود که $A = -B$. چون B پاد متقارن است پس $-B$ نیز پاد متقارن است و لذا ماتریس متقارن A در عین حال پاد متقارن نیز هست بنابراین، $A = \bar{o}$ و در نتیجه $B = \bar{o}$. □

حل مسئله ۵ـ۳۳ از تساوی $A + B = C$، نتیجه می‌شود

$$A - C = -B$$

چون A و C متقارنند، پس $A - C$ نیز متقارن است، پس ماتریس B که پاد متقارن است در عین حال متقارن نیز است، بنابراین $B = \bar{o}$. □

حل مسئله ۵ـ۳۴ از تعویض پذیری A و B نتیجه می‌شود

$$AB = BA$$

بنابراین، $(AB)' = (BA)'$ در نتیجه،

$$B'A' = A'B'$$

بنابراین A' و B' تعویض پذیرند. □

حل مسئله ۵ـ۳۵

$$X'AX = [x \quad y \quad z] \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$= [ax + dy + ez \quad dx + by + fz \quad ex + fy + cz] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$= (ax + dy + ez)x + (dx + by + fz)y + (ex + fy + cz)z$$
$$= ax^۲ + by^۲ + cz^۲ + ۲dxy + ۲exz + ۲fyz \qquad \blacksquare$$

اثبات گزاره ۵ـ۳۶ فرض کنید c_{ii} درایه دلخواهی از قطر اصلی $A^۲$ باشد بنابراین

$$c_{ii} = \sum_{k=۱}^{n} a_{ik}a_{ki}$$
$$= \sum_{k=۱}^{n} a_{ik}^۲ \qquad a_{ik} = a_{ki} \qquad \text{زیرا}$$

از طرفی دیگر چون $tr(A^۲) = ۰$، بنابراین خواهیم داشت.

$$\sum_{i=۱}^{n} c_{ii} = \sum_{k=۱}^{n}\sum_{i=۱}^{n} a_{ik}^۲ = ۰$$

$a_{ik}^۲$ها نامنفی‌اند، و می‌دانیم که اگر جمع چند عدد نامنفی صفر باشد، همگی آنها حتماً صفر هستند. بنابراین تمام $a_{ik}^۲$ها صفرند. پس برای هر i و هر k، $a_{ik} = ۰$. یعنی

$$A = \bar{o} \qquad \blacksquare$$

اثبات گزاره ۵ـ۳۷ چون $AA' = o$ پس درایه سطر اول ستون اول آن صفر است، یعنی

$$\sum_{k=۱}^{n} a_{۱k}a'_{k۱} = ۰$$

بنابراین

$$\sum_{k=۱}^{n} a_{۱k}^۲ = ۰$$

در نتیجه

$$a_{۱۱}^۲ + a_{۱۲}^۲ + \cdots + a_{۱n}^۲ = ۰$$

چون $a - ij$ها اعداد حقیقی‌اند، پس

$$a_{۱۱} = a_{۱۲} = \cdots = a_{۱n} = ۰$$

یعنی درایه‌های سطر اول A همگی صفرند. به همین ترتیب، باتوجه به اینکه درایه سطر iام ستون iام AA' صفر است نتیجه می‌گیریم سطر iام ماتریس A صفر است. $\blacksquare$

تمرینات فصل ۵

۱- اگر A یک ماتریس پاد متقارن باشد، در این صورت در مورد درایه‌های قطر اصلی AA' چه می‌توان گفت؟

۲- فرض کنید E_j ماتریس ستونی $n \times ۱$ باشد که سطر iام آن یک و سایر درایه‌ها صفر باشد و E_{ij} ماتریس $n \times n$ای باشد که درایه سطر iام ستون jام یک و سایر درایه‌ها صفر است.

الف) ثابت کنید $E_{ij} = E_i E_j'$

ب) ثابت کنید $(E_{ij}E_{jk})' = E_{ki} = E_{kj}E_{ji}$

۳- اگر $AB = A$ و $BA = B$ ثابت کنید A' و B' خود توان هستند.

۴- فرض کنید $p_۱$، $p_۲$، ...، p_n نقاطی در صفحه باشند و $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس $n \times n$ که در آن a_{ij} فاصله نقطه p_i از نقطهٔ p_j است. نشان دهید که A یک ماتریس متقارن است.

۵- اگر A یک ماتریس $n \times n$، و $f(x)$ یک چند جمله‌ای باشد، نشان دهید که

$$f(A') = (f(A))'$$

۶- اگر A هر ماتریس پاد متقارن مرتبه ۳ بوده و داشته باشیم

$$W = [a \quad b \quad c]$$

ثابت کنید

$$WAW' = ۰$$

۷- اگر B ماتریسی پاد متقارن باشد، ثابت کنید $A'BA$ پاد متقارن است.

۸- اگر $A^۶ = I$ باشد مطلوب است محاسبه

$$(A')^{۱۹۹۱}$$

۹- اگر A ماتریسی مربع باشد نشان دهید ماتریس

$$۳(A + A')^۵ - ۲(AA')^۳$$

متقارن است.

۱۰- اگر A و B دو ماتریس متقارن هم مرتبه باشند ثابت کنید ماتریس

$$۵A^۲B^۳ + ۵B^۳A^۲$$

متقارن است.

۱۱- اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه باشند نشان دهید

$$A^{۲}B^{۳} - B^{۳}A^{۲}$$

پاد متقارن است.

۱۲- اگر A متقارن و B پاد متقارن باشد به طوری که $۳A^{۲} - ۲B = \bar{o}$. ثابت کنید

$$B = \bar{o}$$

۱۳- اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$, $B = ۲\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

ثابت کنید جواب معادله $X'AX = B$ به یکی از صورتهای زیر است.

$$\begin{bmatrix} k & k^{-۱} \\ -k & k^{-۱} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k & k^{-۱} \\ k & -k^{-۱} \end{bmatrix}$$

۱۴- فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ و X و Y دو ماتریس ستونی باشند.
ثابت کنید

الف) A یک ماتریس پاد متقارن است اگر و تنها اگر برای هر X، داشته باشیم

$$X'AX = o$$

ب) A متقارن است اگر و تنها اگر برای هر X و Y داشته باشیم

$$X'AY = Y'AY$$

پ) اگر A متقارن و برای هر X داشته باشیم $X'AX = o$ در این صورت

$$A = \bar{o}$$

۱۵- فرض کنید همه ماتریسهای زیر مربع و هم مرتبه‌اند، ثابت کنید اگر

$$XAX + XB - CX + D = \bar{o}$$

در این صورت یا به ازای همه ماتریسهای متقارن X و یا به ازای همه ماتریسهای پاد متقارن X داریم

$$A = D = \bar{o} \quad , \quad B = C = \lambda I$$

۱۶- اگر U و V دو بردار ستونی $n \times ۱$ باشند ثابت کنید

$$tr(U'V) = U \cdot V$$

که در آن منظور از $U \cdot V$، ضرب داخلی دو بردار U و V است.

۱۷- اگر $A \neq \bar{o}$، آنگاه ثابت کنید $tr(AA') > ۰$.

۱۸- ثابت کنید

$$|tr(AB)| \leq \{tr(AA')\}^{\frac{۱}{۲}}\{tr(BB')\}^{\frac{۱}{۲}}$$

۱۹- اگر A و B دو ماتریس مربع هم مرتبه باشند قرار می‌دهیم

$$A \times B = AB - BA$$

الف) اگر A و B ماتریسهای پاد متقارن باشند ثابت کنید $A \times B$ پاد متقارن است.

ب) اگر A و B متقارن باشند، ثابت کنید $A \times B$ متقارن است.

۲۰- اگر A و B ماتریسهای پاد متقارن بوده و داشته باشیم

$$(A+B)^{۲} = A^{۲} + ۲AB + B^{۲}$$

ثابت کنید AB متقارن است.

فصل ۶

دترمینان یک ماتریس[1]

۶ـ۱

به هر ماتریس مربع، عددی نسبت داده می‌شود،که دترمینان آن ماتریس نامیده می‌شود. دترمینان یک ماتریس، مانند مشتق یک تابع، اطلاعاتی در مورد آن ماتریس در اختیار می‌گذارد. برای مثال، بعدها خواهیم دید که با استفاده از دترمینان می‌توان دریافت که یک ماتریس وارون دارد یا نه؟ و یا اینکه در حل دستگاههای nمعادله n مجهولی می‌توان از دترمینان استفاده کرد.

به روشهای مختلفی دترمینان را می‌توان تعریف کرد. ما در این کتاب، دترمینان را به همان روش معمول در کتابهای مقدماتی جبر خطی تعریف می‌کنیم. هرچند، این تعریف در وهله اول ساده به نظر می‌رسد اما، با این تعریف، اثبات قضایای دترمینان اغلب پیچیده و خسته کننده است. تعاریف دیگری که برای دترمینان ارائه می‌دهند، اندکی پیچیده است اما این خوبی را دارد که با آنها، اثبات قضایای مربوط به دترمینان به سادگی انجام می‌گیرد.

۶ـ۲ دترمینان ماتریسهای ۱×۱

فرض کنید $[a]_{1\times 1}$ یک ماتریس 1×1 باشد، دترمینان این ماتریس که با نماد $det[a]$ نشان داده می‌شود، عبارت است از:

$$det[a] = a$$

1.Determinant of a matrix

۶ـ۳ دترمینان ماتریسهای ۲×۲

ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

را در نظر می‌گیریم. دترمینان A که با هریک از نمادهای

$$|A| \quad , \quad detA \quad , \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

نشان می‌دهند، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$|A| = detA = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال:

الف)

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۴ & ۳ \end{vmatrix} = (۳ \times ۱) - (۲ \times ۴) = -۵$$

ب)

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix} = -\cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha = -۱ \qquad \square$$

حال، می‌خواهیم به طورکلی دترمینان یک ماتریس $n \times n$ را تعریف کنیم. اما، قبلاً لازم است مفاهیم کهاد و همسازه را تعریف کنیم.

۶ـ۴ کهاد (مینور[1])

تعریف: فرض کنید $A = [a_{ij}]$ ماتریسی $n \times n$ باشد. ماتریسی راکه از حذف سطر iام ستون jام ماتریس A به دست می‌آید با M_{ij} نشان می‌دهیم. دترمینان M_{ij} یعنی $|M_{ij}|$ را کهاد یا مینور a_{ij} می‌نامند.

۶ـ۵ همسازه (کوفاکتور[2])

تعریف: فرض کنید $A = [a_{ij}]$ ماتریسی $n \times n$ باشد. همسازه Δ_{ij} از درایه a_{ij} به صورت

$$\Delta_{ij} = (-۱)^{i+j}|M_{ij}|$$

تعریف می‌شود.

1.Minor 2.Cofactor

تذکر ۱. در برخی کتابها به جای Δ_{ij}، نماد A_{ij} به کار می‌رود.

تذکر ۲. $(-۱)^{i+j}$ در هر حالت مقادیر ۱ یا ۱− را می‌گیرد، در واقع

$$(-۱)^{i+j} = \begin{cases} ۱. & \text{زوج است } i+j \\ -۱. & \text{فرد است } i+j \end{cases}$$

مثال: فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

در این صورت،

$$M_{۱۲} = \text{ماتریس حاصل از حذف سطر اول ستون دوم} A = \begin{bmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

$$a_{۱۲}\text{کهاد} = |M_{۱۲}| = \begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix}$$

$$a_{۱۲}\text{همسازه} = (-۱)^{۱+۲}|M_{۱۲}| = -\begin{vmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix} \quad \square$$

مثال: فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}$$

در این صورت

$$a_{۲۱}\text{کهاد} = |M_{۲۱}| = \text{دترمینان ماتریس حاصل از حذف سطردوم ستون اول} = a_{۱۲}$$

$$\Delta_{۱۲} = (-۱)^{۲+۱}|M_{۲۱}| = -a_{۱۲} \quad \square$$

۶ـ۶ تعریف دترمینان ماتریسهای $n \times n$

تعریف: فرض کنید $A = [a_{ij}]$ ماتریسی $n \times n$ باشد $(n \geq ۲)$، در این صورت دترمینان A به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\boxed{|A| = a_{۱۱}\Delta_{۱۱} + a_{۱۲}\Delta_{۱۲} + \cdots + a_{۱n}\Delta_{۱n}}$$

اگر در فرمول بالا کمی دقت کنید، می‌بینید که در محاسبه دترمینان A فقط از درایه‌های سطر اول و کهاد آنها استفاده شده است، ما این فرمول را در مورد هر سطر دلخواه دیگر هم می‌توانستیم بنویسیم. مثلاً، فرمول بالا برای سطر iام به شکل صفحهٔ بعد است.

$$\boxed{|A| = a_{i۱}\Delta_{i۱} + a_{i۲}\Delta_{i۲} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}}$$

ثابت می‌شود که مقدار بالا بستگی به i ندارد و همان مقدار $|A|$ به دست می‌آید. فرمول بالا را **بسط دترمینان نسبت به سطر iام** می‌نامند، و در محاسبه دترمینان نسبت به هر سطری که بسط داده شود، حاصل همواره یکی است.

همچنین در فرمول بسط دترمینان به جای استفاده از سطرهای ماتریس ما بی هیچ اشکالی می‌توانستیم از ستونهای ماتریس استفاده کنیم و به فرمول زیر که **بسط دترمینان نسبت به ستون jام** نام دارد برسیم.

$$|A| = a_{۱j}\Delta_{۱j} + a_{۲j}\Delta_{۲j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj}$$

در این مورد، نیز ثابت می‌شود که مقدار بالا بستگی به j ندارد و همان $|A|$ است.

تذکر: همانطورکه دیدید، ما برای تعریف دترمینان ازکهاد درایه‌های یک ماتریس استفاده کردیم، ولی خود کهاد دترمینان ماتریس دیگری است، بنابراین، تعریف ممکن است دوری به نظر رسد، چون برای تعریف دترمینان دوباره از خود دترمینان استفاده کرده‌ایم. اما، توجه داشته باشید که اگر ماتریس A ماتریس مرتبه nباشد، کهادهای‌دترمینان ماتریسهای مرتبه $(n - ۱)$ هستند. بنابراین چون دترمینان ماتریسهای ۱×۱ را تعریف کرده‌ایم. با این تعریف به طور استقرایی مرتبه ماتریسهایی که دترمینان آنها باید محاسبه شود کم می‌شود تا به ماتریسهای مرتبه ۱ برسیم.

مثال: مطلوب است محاسبه دترمینان A، که A به صورت زیر است.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۷ \\ ۱ & ۲ & -۵ \\ ۰ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

حل: دترمینان را نسبت به سطر اول بسط می‌دهیم.

$$|A| = ۲\begin{vmatrix} ۲ & -۵ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ۱ & -۵ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} + ۷\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{vmatrix}$$

$$= ۲(۲ + ۱۵) - ۱ + ۲۱ = ۵۴$$

البته، بهتر بود نسبت به ستون اول بسط می‌دادیم زیرا، در این حالت یک دترمینان کمتر حساب می‌کردیم.

$$|A| = ۲\begin{vmatrix} ۲ & -۵ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ۱ & ۷ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix} + ۰\begin{vmatrix} ۱ & ۷ \\ ۲ & -۵ \end{vmatrix}$$

$$= ۲(۲ + ۱۵) - (۱ - ۲۱) = ۵۴ \quad \square$$

برای محاسبه دترمینان یک ماتریس $n \times n$ می‌بایست n همسازه را حساب کنیم. هر همسازه، دترمینان ماتریسی از مرتبه $n-1$ است، بنابراین برای محاسبه $|A|$ به بیش از $n!$ ضرب نیاز داریم. برای مثال، برای محاسبه دترمینان یک ماتریس ۲۵×۲۵ حداقل $۲۵!$ ضرب باید انجام دهیم. اگر قرار باشد از یک کامپیوتر مدرن که توانایی انجام ۱۰۰ بیلیون ضرب در ثانیه را داشته باشد، استفاده کنیم، محاسبه $|A|$ چهار میلیون سال طول خواهد کشید. بنابراین، برای محاسبه دترمینان یک ماتریس می‌بایست به دنبال روشهای دیگری باشیم.

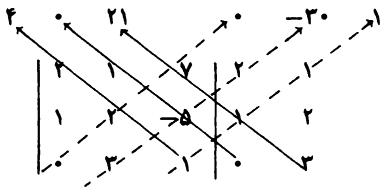
برای محاسبه دترمینانهای ۳×۳ روشی موسوم به «دستور ساروس» وجود دارد که در زیر می‌آوریم.

۶ـ۷ قاعده ساروس برای محاسبه دترمینانهای ۳×۳

در این روش، ابتدا دو ستون اول دترمینان را در سمت راست دترمینان به صورت زیر می‌نویسند.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} ۲ & ۱ & ۷ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ & -۵ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ & ۱ & ۰ & ۳ \end{array}\right.$$

حاصل ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی و حاصل ضرب درایه‌های واقع بر دو خط موازی قطر اصلی را جداگانه حساب می‌کنیم. به همین ترتیب، در مورد قطر فرعی و دو خط موازی آن عمل می‌کنیم



در این مورد، $|A|$ برابر است با مجموع حاصل ضربهای درایه واقع بر قطر اصلی و دو خط موازی آن منهای مجموع حاصل ضرب درایه‌های واقع بر قطر فرعی و دو خط موازی آن. بنابراین

$$|A| = (۴ + ۰ + ۲۱) - (۰ - ۳۰ + ۱) = ۵۴$$

توجه. قاعده ساروس را فقط برای محاسبه دترمینان ماتریسهای ۳×۳ می‌توان به کار برد.

۶ـ۸ دترمینان ماتریسهای مثلثی و قطری و اسکالر

۶ـ۹ قضیه

دترمینان هر ماتریس بالا مثلثی (پایین مثلثی) برابر است با حاصل ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن، یعنی

$$\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & & a_{۱n} \\ \circ & a_{۲۲} & & a_{۲n} \\ \vdots & & & \\ \circ & \circ & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{۱۱}a_{۲۲}\cdots a_{nn}$$

اثبات این قضیه به آسانی با استقراء میسر است، و اثبات آن را به خواننده واگذار می‌کنیم. ■

مثال:

$$\begin{vmatrix} -۲ & \circ & \circ \\ ۵ & ۴ & \circ \\ ۶ & ۷ & -۳ \end{vmatrix} = (-۲)(۴)(-۳) = ۲۴ \quad \square$$

۶ـ۱۰ نتیجه

دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی آن. زیرا هر ماتریس قطری یک ماتریس مثلثی است. ■

۶ـ۱۱ نتیجه

دترمینان ماتریس اسکالر برابر است با حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی، درواقع

$$\begin{vmatrix} k & & O \\ & k & \\ O & & k \end{vmatrix} = k^n \quad \blacksquare$$

۶ـ۱۲ نتیجه

دترمینان ماتریس واحد برابر ۱ است، یعنی

$$|I| = ۱ \quad \blacksquare$$

۶ـ۱۳ نتیجه

دترمینان ماتریس مربعی صفر برابر صفر است. ■

۶ـ۱۴ ویژگیهای دترمینان

۶ـ۱۵ گزاره

اگر ماتریسی دارای یک سطر یا یک ستون صفر باشد، در این صورت دترمینان آن صفر است.

اثبات: فرض کنید سطر iام ماتریس A صفر باشد، یعنی به ازای $k = ۱, ۲, \cdots, n$ داشته باشیم $a_{ik} = ۰$. بنابراین،

$$|A| = a_{i۱}\Delta_{i۱} + a_{i۲}\Delta_{i۲} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} = ۰ + ۰ + \cdots + ۰ = ۰$$

به طریق مشابه دیده می‌شود که اگر ستون jام صفر باشد، دترمینان صفر است. ■

۶ـ۱۶ گزاره

> اگر A ماتریسی مربع باشد، در این صورت
> $$|A| = |A'|$$

مثال: اگر A متقارن و B پاد متقارن باشد، ثابت کنید

$$|A + B| = |A - B|$$

حل: چون A متقارن و B پاد متقارن است، پس $A' = A$ و $B' = -B$، بنابراین

$$(A + B)' = A' + B' = A - B$$

از آنجا که،

$$|(A + B)'| = |A + B|$$

داریم

$$|(A + B)'| = |A - B|$$

پس

$$|A + B| = |A - B|$$

۶ـ۱۷ قضیه

> اگر A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند، در این صورت
> $$|AB| = |A||B|$$

به خاطر پیچیدگی اثبات، از اثبات آن صرف نظر می‌کنیم. گاهی از این قضیه به عنوان ویژگی ضربی بودن دترمینان نام می‌بریم.

مثال: اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد، ثابت کنید

$$|AA'| \geq ۰$$

حل:

$$\begin{aligned} |AA'| &= |A||A'| \\ &= |A||A| && \text{زیرا } |A| = |A'| \\ &= |A|^{۲} \geq \cdot \quad \square \end{aligned}$$

مثال: اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد به طوری که $AA' = ۲I$ مطلوب است محاسبه $|A|$.

حل: از تساوی $AA' = ۲I$ نتیجه می‌شود.

$$AA' = \begin{bmatrix} ۲ & \cdot & \cdot \\ \cdot & ۲ & \cdot \\ \cdot & \cdot & ۲ \end{bmatrix}$$

بنابراین،

$$|AA'| = \begin{vmatrix} ۲ & \cdot & \cdot \\ \cdot & ۲ & \cdot \\ \cdot & \cdot & ۲ \end{vmatrix}$$

از این که $|AA'| = |A|^{۲}$ نتیجه می‌شود

$$|A|^{۲} = ۲^{۳}$$

پس

$$|A| = \pm ۲\sqrt{۲} \quad \square$$

۶ـ۱۸ گزاره

اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد، ثابت کنید برای هر عدد طبیعی k، داریم

$$|A^{k}| = |A|^{k}$$

اثبات: گزاره را با استقراء ثابت می‌کنیم. به ازای $k = ۱$، حکم مسئله به وضوح برقرار است. فرض کنید مسئله برای عدد k درست باشد، ثابت می‌کنیم برای $k + ۱$ نیز درست است یعنی، نشان می‌دهیم

$$|A^{k+۱}| = |A|^{k+۱}$$

$$\begin{aligned} |A^{k+۱}| &= |A \cdot A^{k}| = |A||A^{k}| \\ &= |A||A|^{k} && \text{بنابر فرض استقراء} \\ &= |A|^{k+۱} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

۶ـ۱۹ گزاره

اگر یک سطر (یا یک ستون) ماتریس A در عدد ثابت λ ضرب شود، در این صورت دترمینان A در λ ضرب می‌شود.

یعنی، اگر ماتریس جدید را B بنامیم، خواهیم داشت.

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & & \lambda a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda |A|$$

اثبات: دترمینان B را نسبت به سطر iام بسط می‌دهیم.

$$\begin{aligned} |B| &= \lambda a_{i1}\Delta_{i1} + \lambda a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + \lambda a_{in}\Delta_{in} \\ &= \lambda[a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}] \\ &= \lambda |A| \quad \blacksquare \end{aligned}$$

تذکر: خاصیت فوق را به صورتهای زیر نیز می‌توان بیان کرد.

الف) در یک دترمینان در یک سطر یا ستون آن می‌توان از هر عددی فاکتور گرفت و در بیرون دترمینان قرار داد. برای مثال

$$\begin{vmatrix} (a+b+c) & a & b \\ (a+b+c) & b & c \\ (a+b+c) & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$$

ب) اگر بخواهیم عددی که در یک دترمینان ضرب شده است را به داخل دترمینان ببریم، این عدد را فقط در یک سطر (یا یک ستون) آن می‌توان ضرب کرد.

حال به مثال دیگری توجه کنید.

$$\begin{vmatrix} a & \lambda b & kc \\ a_1 & \lambda b_1 & kc_1 \\ a_2 & \lambda b_2 & kc_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b & kc \\ a_1 & b_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & kc_2 \end{vmatrix}$$

حال اگر مجدداً ویژگی ۴ را به کار بندیم، خواهیم داشت

$$\begin{vmatrix} a & \lambda b & kc \\ a_1 & \lambda b_1 & kc_1 \\ a_2 & \lambda b_2 & kc_2 \end{vmatrix} = k\lambda \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

به طور کلی، نتیجه زیر برقرار است.

۶ـ۲۰ نتیجه

اگر λ یک عدد حقیقی و A ماتریسی $n \times n$ باشد، در این صورت

$$|\lambda A| = \lambda^n |A|$$

اثبات: می‌دانیم λI ماتریسی اسکالر به صورت زیر است.

$$\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & \lambda \end{bmatrix}$$

بنابراین، $|\lambda I| = \lambda^n$. از طرف دیگر

$$\lambda A = (\lambda I)A$$

پس

$$|\lambda A| = |(\lambda I)A|$$

$$= |\lambda I||A| \quad \text{بنابر ویژگی ضربی بودن دترمینان}$$

$$= \lambda^n |A| \quad \blacksquare$$

مثال: اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد، در این صورت

$$|-A| = (-1)^n |A| \quad \square$$

۶ـ۲۱ گزاره

دترمینان هر ماتریس پاد متقارن مرتبه فرد برابر صفر است.

اثبات: فرض کنید A ماتریسی پاد متقارن مرتبه n باشد که در آن n عددی است فرد. بنابراین، $A' = -A$، در نتیجه، $|A'| = |-A|$. بنابراین $|A| = (-1)^n|A|$ و چون n فرد است، پس $|A| = -|A|$، بنابراین $2|A| = 0$. پس $|A| = 0$. $\blacksquare$

مثال: اگر $|A| = 5$ و A ماتریسی از مرتبه ۳ باشد، $|-2A^2|$ را حساب کنید.

حل:

$$
\begin{aligned}
|-۲A^{۲}| &= (-۲)^{۳}|A^{۲}| \\
&= (-۲)^{۳}|A|^{۲} \\
&= -۸(۵)^{۲} \\
&= -۲۰۰ \quad \square
\end{aligned}
$$

۶ـ۲۲ گزاره

اگر جای دو سطر (یا جای دو ستون) ماتریس A را با هم عوض کنیم، دترمینان ماتریس جدید، قرینه دترمینان ماتریس A است.

اثبات: ابتدا، این قضیه را در حالت خاصی که دو سطر مجاور با هم عوض شده باشند ثابت می‌کنیم. حالت کلی را به سادگی می‌توان از این حالت خاص نتیجه گرفت. فرض کنید جای سطر iام و سطر $(i+۱)$ام A را عوض کرده باشیم و ماتریس B به وجود آمده باشد. یعنی،

$$
A=\begin{bmatrix}
a_{۱۱} & a_{۱۲} & & a_{۱n} \\
a_{۲۱} & a_{۲۲} & & a_{۲n} \\
\vdots & & & \\
a_{i۱} & a_{i۲} & & a_{in} \\
a_{i+۱,۱} & a_{i+۱,۲} & & a_{i+۱,n} \\
\vdots & & & \\
a_{n۱} & a_{n۲} & & a_{nn}
\end{bmatrix},\quad
B=\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \text{سطر } (i+۱)\text{ام} \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array}
\begin{bmatrix}
a_{۱۱} & a_{۱۲} & & a_{۱n} \\
a_{۲۱} & a_{۲۲} & & a_{۲n} \\
\vdots & & & \\
a_{i+۱,۱} & a_{i+۱,۲} & & a_{i+۱,n} \\
a_{i۱} & a_{i۲} & & a_{in} \\
\vdots & & & \\
a_{n۱} & a_{n۲} & & a_{nn}
\end{bmatrix}
$$

$|A|$ را نسبت به سطر iام و $|B|$ را نسبت به سطر $(i+۱)$ام آن بسط می‌دهیم.

$$|A| = a_{i۱}A_{i۱} + a_{i۲}A_{i۲} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

$$|B| = a_{i۱}B_{i+۱,۱} + a_{i۲}B_{i+۱,۲} + \cdots + a_{in}B_{i+۱,n}$$

A_{ij}ها همسازه‌های سطر iام A می‌باشند، یعنی

$$A_{ij} = (-۱)^{i+j}|M_{ij}|$$

که در آن M_{ij}ها از حذف سطر iام ستون jام ماتریس A به دست آمده‌اند. از طرف دیگر، $B_{i+۱,j}$ها همسازه‌های سطر $(i+۱)$ام B می‌باشند. باتوجه به ساخت B از حذف سطر $i+۱$ام ستون jام همان M_{ij}ها به دست می‌آیند. یعنی،

$$B_{ij} = (-۱)^{i+۱+j}|M_{ij}| = (-۱)(-۱)^{i+j}|M_{ij}| = -A_{ij}$$

بنابراین

$$|B| = -|A| \quad \blacksquare$$

مثال: اگر

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۴ \\ ۰ & -۲ & ۵ \end{bmatrix}$$

در این صورت $|A| = ۱۶$. حال اگر جای سطر اول و سوم را عوض کنیم، داریم

$$B = \begin{bmatrix} ۰ & -۲ & ۵ \\ ۳ & ۱ & ۴ \\ ۱ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

و با محاسبه مستقیم دیده می‌شود

$$|B| = -۱۶ \quad \square$$

۶ـ۲۳ گزاره

اگر دو سطر (یا دو ستون) ماتریس A مساوی باشند دترمینان A مساوی صفر است.

اثبات: فرض کنید سطر iام و سطر jام ماتریس A مساویند، با تعویض جای این دو سطر ماتریس B به دست می‌آید، و باتوجه به گزاره ۶۰۲۲، $|B| = -|A|$.

اما، چون سطر iام و سطر jام یکسان هستند، پس با تعویض جای این دو سطر، ماتریس جدیدی به دست نمی‌آید، یعنی $A = B$. بنابراین $|B| = |A| = -|A|$. پس $۲|A| = ۰$. بنابراین $|A| = ۰$. $\blacksquare$

مثال: ثابت کنید دترمینان زیر صفر است.

$$|A| = \begin{vmatrix} ۲a & a_۱ & ۳a \\ ۲b & b_۱ & ۳b \\ ۲c & c_۱ & ۳c \end{vmatrix}$$

حل: باتوجه به ویژگی ۶۰۱۹، داریم

$$|A| = (۲ \times ۳) \begin{vmatrix} a & a_۱ & a \\ b & b_۱ & b \\ c & c_۱ & c \end{vmatrix}$$

$$= ۶ \times ۰$$ زیرا دو ستون دترمینان مساوی است.

$$= ۰$$

۶ـ۲۴ گزاره

اگر یک سطر (یا یک ستون) ماتریس A مضربی از سطر (یا ستون) دیگری از A باشد، در این صورت: $$\lvert A\rvert = 0$$

به عبارت دیگر، اگر دو سطر (یا دو ستون)، یک ماتریس متناسب باشند، دترمینان آن ماتریس صفر است.

اثبات: فرض کنید سطر jام A مضربی از سطر iام باشد یعنی داشته باشیم

$$[a_{j1} \quad a_{j2} \quad \cdots \quad a_{jn}] = [\lambda a_{i1} \quad \lambda a_{i2} \quad\quad \lambda a_{in}]$$

بنابراین

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{j1} & a_{j2} & & a_{jn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ \vdots & & & \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & & \lambda a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$= \lambda \cdot 0$ زیرا دو سطر دترمینان مساوی است.

$= 0$ ■

۶ـ۲۵ گزاره

اگر A و B و C سه ماتریس مربع مرتبه n باشند، به طوری که ستون jام C مساوی مجموع ستون jام A و B باشد و سایر ستونهای سه ماتریس یکسان باشند، در این صورت $$\lvert C\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert$$

به عبارت دیگر،

$$\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱j} & & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲j} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & b_{۱j} & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & b_{۲j} & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & b_{nj} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱j}+b_{۱j} & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲j}+b_{۲j} & a_{۲n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & a_{nj}+b_{nj} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

یعنی اگر همه ستونهای دو دترمینان بجز ستون jام آن یکسان باشند، در این صورت دو دترمینان را می‌توان با هم جمع کرد و مجموع آن دو به صورت فوق در می‌آید.

اثبات: $|C|$ را نسبت به ستون jام بسط می‌دهیم، داریم

$$\begin{aligned} |C| &= (a_{۱j}+b_{۱j})\Delta_{۱j} + (a_{۲j}+b_{۲j})\Delta_{۲j} + \cdots + (a_{nj}+b_{nj})\Delta_{nj} \\ &= (a_{۱j}\Delta_{۱j} + a_{۲j}\Delta_{۲j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj}) + (b_{۱j}\Delta_{۱j} + b_{۲j}\Delta_{۲j} + \cdots + b_{nj}\Delta_{nj}) \\ &= |A| + |B| \quad \blacksquare \end{aligned}$$

تذکر: این ویژگی در مورد سطرها نیز برقرار است.

مثال: نشان دهید مجموع زیر صفر است.

$$|C| = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \\ ۵ & ۴ & ۲۰ \\ ۴ & ۸ & ۱۱ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \\ ۳ & ۱۲ & ۲ \\ ۴ & ۸ & ۱۱ \end{vmatrix}$$

حل: چون سطر اول و سوم این دو دترمینان یکسان می‌باشند لذا مجموع آنها دترمینانی به صورت زیر است.

$$|C| = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \\ ۵+۳ & ۴+۱۲ & ۲۰+۲ \\ ۴ & ۸ & ۱۱ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \\ ۸ & ۱۶ & ۲۲ \\ ۴ & ۸ & ۱۱ \end{vmatrix}$$

$= ۰$ زیرا سطر دوم و سوم آن متناسبند $\square$

تعبیر دیگر این ویژگی آن است که یک دترمینان را می‌توان به صورت مجموع دو دترمینان به صورت فوق تجزیه کرد.

مثال: درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} a_1x+b_1y+c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

حل:

$$\begin{vmatrix} a_1x+b_1y+c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x & b_1 & c_1 \\ a_2x & b_2 & c_2 \\ a_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} b_1y & b_1 & c_1 \\ b_2y & b_2 & c_2 \\ b_3y & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1z & b_1 & c_1 \\ c_2z & b_2 & c_2 \\ c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

در دترمینانهای دوم و سوم، دو ستون متناسبند بنابراین مقدار آنها صفر است، در دترمینان اول در ستون اول از x فاکتور می‌گیریم، داریم.

$$= x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \square$$

تذکر: در حالت کلی تساوی $|A+B| = |A| + |B|$ برقرار نیست.

۶ـ۲۶ گزاره

اگر مضربی از یک سطر (ستون) A را به سطر (یا ستون) دیگری از A بیفزاییم، مقدار دترمینان A تغییر نمی‌کند.

به عبارت دیگر، فرض کنید λ برابر سطر iام A را به سطر jام آن بیفزاییم و ماتریس به دست آمده را B بنامیم، آنگاه

$$|B| = |A|$$

اثبات:

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & & a_{۱n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i۱} & a_{i۲} & & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i۱} + a_{j۱} & \lambda a_{i۲} + a_{j۲} & & \lambda a_{in} + a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n۱} & a_{n۲} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & & a_{۱n} \\ \vdots & & & \\ a_{i۱} & a_{i۲} & & a_{in} \\ \vdots & & & \\ \lambda a_{i۱} & \lambda a_{i۲} & & \lambda a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n۱} & a_{n۲} & & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & & a_{۱n} \\ \vdots & & & \\ a_{i۱} & a_{i۲} & & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{j۱} & a_{j۲} & & a_{jn} \\ \vdots & & & \\ a_{n۱} & a_{n۲} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$= ۰ + |A|$ زیرا دو سطر دترمینان اولی متناسبند

$= |A|$ ■

مثال: فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۴ & ۱ \\ ۳ & ۷ & ۵ \end{bmatrix}$$

(-۳) برابر سطر اول را به سطر سوم افزوده، و سپس $|A|$ را حساب کنید.

حل: باتوجه به ویژگی ۶ ۰ ۲۶، داریم

$$|A| = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۴ & ۱ \\ -۳(۱) + ۳ & -۳(۲) + ۷ & -۳(۳) + ۵ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۴ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۴ \end{vmatrix}$$

حال، نسبت به ستون اول بسط می‌دهیم.

$$= \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -17 \quad \square$$

با استفاده از ویژگی ۶۰۶ ۲ دترمینانهای از مرتبه بالا را به راحتی می‌توان حساب کرد. زیرا، با استفاده مکرر از این خاصیت می‌توان آن را به دترمینانی تبدیل کرد که در ستون اول همه درایه‌ها به جز درایه سطر اول صفرند. برای مثال، در مورد دترمینانهای ۴ × ۴ با انجام این عمل به دترمینان زیر می‌توانیم برسیم.

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix}$$

مثال: دترمینان زیر را حساب کنید.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

حل: چون درایه سطر دوم ستون اول صفر است، می‌بایست درایه‌های سطر سوم و سطر چهارم از ستون اول را صفر کنیم. برای این کار، ابتدا، (۲−) برابر سطر اول را به سطر سوم و سپس (۳−) برابر سطر اول را به سطر چهارم می‌افزاییم. در نتیجه،

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -11 & 2 \end{vmatrix}$$

حال، نسبت به ستون اول بسط می‌دهیم.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -5 & -1 & 2 \\ -7 & -11 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \\ 7 & -11 & 2 \end{vmatrix}$$

حال، (۵−) برابر سطر اول را به سطر دوم و (۷−) برابر سطر اول را به سطر سوم می‌افزاییم.

در نتیجه،

$$|A| = -\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۴ \\ ۰ & -۱۶ & -۱۸ \\ ۰ & -۳۲ & -۲۶ \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -۱۶ & -۱۸ \\ -۳۲ & -۲۶ \end{vmatrix}$$

در ستون اول از (۱۶−) و در ستون دوم از (۲−) فاکتور می‌گیریم.

$$= -(-۲)(-۱۶)\begin{vmatrix} ۱ & ۹ \\ ۲ & ۱۳ \end{vmatrix}$$

$$= -۳۲(۱۳ - ۱۸)$$

$$= ۱۶۰ \quad \square$$

تذکر: اگر دترمینان فوق را می‌خواستیم مستقیماً با استفاده از تعریف دترمینان، نسبت به سطر اول بسط دهیم، می‌بایست ۱۲ دترمینان ۲ × ۲ حساب کنیم. در صورتی که با این روش عملاً، به محاسبه یک دترمینان ۲ × ۲ نیاز داریم. این روش محاسبه دترمینان را «روش جارو کردن»[1] می‌نامند.

برای سهولت در حل مسائل دترمینان آنها را به چند دسته تقسیم می‌کنیم.

۶ـ۲۷ دسته اول. دترمینانهایی که مقدار آنها صفر است

معمولاً این نوع دترمینانها به دترمینانی تبدیل می‌شوند که یک سطر یا ستون آنها صفر است و یا این که دو سطر (یا دو ستون) آنها مساوی یا متناسبند.

۶ـ۲۸ مسئله

دترمینان زیر را حساب کنید.

$$|A| = \begin{vmatrix} ۲ & ۷ & ۵ \\ ۳ & ۴ & -۶ \\ ۵ & ۱۱ & -۱ \end{vmatrix}$$

حل: سطر اول را به سطر دوم می‌افزاییم.

1.Sweep-out

$$|A| = \begin{vmatrix} ۲ & ۷ & ۵ \\ ۵ & ۱۱ & -۱ \\ ۵ & ۱۱ & -۱ \end{vmatrix}$$

$= ۰$ زیرا دو سطر دترمینان مساوی است. □

۶ـ۲۹ مسئله

اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد، به طوری که $A' = ۳A$، مطلوب است محاسبه $|A|$.

حل: از $A' = ۳A$ نتیجه می‌گیریم $|A'| = |۳A|$. بنابراین

$$|A| = ۳^n|A|$$

$$\Rightarrow (۳^n - ۱)|A| = ۰$$

$$\Rightarrow |A| = ۰$$ زیرا $(n \epsilon N) ۳^n - ۱ \neq ۰$ □

۶ـ۳۰ مسئله

مجموع زیر را حساب کنید.

$$|A| = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۷ & ۹ & -۲ \\ ۶ & ۷ & ۱۰ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۴ \\ ۶ & ۷ & ۱۰ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۰ & ۴ & -۸ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۶ & ۷ & ۱۰ \end{vmatrix}$$

حل: در دترمینان سومی جای سطر اول و دوم را عوض می‌کنیم، خواهیم داشت

$$|A| = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۷ & ۹ & -۲ \\ ۶ & ۷ & ۱۰ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۴ \\ ۶ & ۷ & ۱۰ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۴ & -۸ \\ ۶ & ۷ & ۱۰ \end{vmatrix}$$

و با ضرب (-۱) در سطر دوّم دترمینان سوّم خواهیم داشت

$$= \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۷ & ۹ & -۲ \\ ۶ & ۷ & ۱۰ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۴ \\ ۶ & ۷ & ۱۰ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & -۴ & ۸ \\ ۶ & ۷ & ۱۰ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۷ - ۱ - ۰ & ۹ + ۲ - ۴ & -۲ + ۴ + ۸ \\ ۶ & ۷ & ۱۰ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۶ & ۷ & ۱۰ \\ ۶ & ۷ & ۱۰ \end{vmatrix}$$

$$= ۰ \quad \square$$

۶ـ۳۱ مسئله

درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} ۰ & a & ۰ \\ b & c & d \\ ۰ & e & ۰ \end{vmatrix} = ۰$$

حل: در ستون اول از b و در ستون سوم از d فاکتور می‌گیریم.

$$\begin{vmatrix} ۰ & a & ۰ \\ b & c & d \\ ۰ & e & ۰ \end{vmatrix} = bd \begin{vmatrix} ۰ & a & ۰ \\ ۱ & c & ۱ \\ ۰ & e & ۰ \end{vmatrix}$$

$$= bd(۰)$$

$$= ۰ \quad \square$$

۶ـ۳۲ مسئله

نشان دهید دترمینان زیر صفر است.

$$|A| = \begin{vmatrix} \sin^۲\alpha & ۲ & \cos^۲\alpha \\ \sin^۲\beta & ۲ & \cos^۲\beta \\ \sin^۲\gamma & ۲ & \cos^۲\gamma \end{vmatrix}$$

حل: ستون سوم را به ستون اول می‌افزاییم.

$$|A| = \begin{vmatrix} \sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha & ۲ & \cos^۲\alpha \\ \sin^۲\beta + \cos^۲\beta & ۲ & \cos^۲\beta \\ \sin^۲\gamma + \cos^۲\gamma & ۲ & \cos^۲\gamma \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & \cos^۲\alpha \\ ۱ & ۲ & \cos^۲\beta \\ ۱ & ۲ & \cos^۲\gamma \end{vmatrix}$$

$= \cdot$ زیرا ستون اول و دوم متناسبند. $\square$

۶ـ۳۳ مسئله

درستی تساوی زیر را ثابت کنید. (مرتبه دترمینان $n + ۱$ است.)

$$|A| = \begin{vmatrix} -n & ۱ & ۱ & & ۱ \\ ۱ & -n & ۱ & & ۱ \\ ۱ & ۱ & -n & & ۱ \\ \vdots & & & & \\ ۱ & ۱ & ۱ & & -n \end{vmatrix} = \cdot$$

حل: ستون دوم و سوم و ... و $(n + ۱)$ام را به ستون اول می‌افزاییم، در نتیجه

$$|A| = \begin{vmatrix} \cdot & ۱ & ۱ & & ۱ \\ \cdot & -n & ۱ & & ۱ \\ \cdot & ۱ & -n & & ۱ \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \cdot & ۱ & ۱ & & -n \end{vmatrix} = \cdot \quad \square$$

۶ـ۳۴ مسئله

درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$|A| = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & \sin(x+t) \\ \sin y & \cos y & \sin(y+t) \\ \sin z & \cos z & \sin(z+t) \end{vmatrix} = \cdot$$

حل:

$$|A| = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & \sin x \cos t + \sin t \cos x \\ \sin y & \cos y & \sin y \cos t + \sin t \cos y \\ \sin z & \cos z & \sin z \cos t + \sin t \cos z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & \sin x \cos t \\ \sin y & \cos y & \sin y \cos t \\ \sin z & \cos z & \sin z \cos t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & \sin t \cos x \\ \sin y & \cos y & \sin t \cos y \\ \sin z & \cos z & \sin t \cos z \end{vmatrix}$$

در هریک از دترمینانهای فوق دو ستون متناسب وجود دارد، بنابراین مقدار هر یک از آنها صفر است، پس $|A| = \cdot$. $\square$

۶ـ۳۵ دسته دوم. محاسبه دترمینانها با استفاده از مثلثی کردن آنها

۶ـ۳۶ مسئله

درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱+x & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱+y & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱+z \end{vmatrix} = xyz$$

حل: (-۱) برابر سطر اول را به سایر سطرها می‌افزاییم.

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱+x & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱+y & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ \cdot & x & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & y & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & z \end{vmatrix}$$

$$= xyz \quad \square$$

۶ـ۳۷ مسئله

درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} ۱+a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ a_۱ & ۱+a_۲ & a_۳ \\ a_۱ & a_۲ & ۱+a_۳ \end{vmatrix} = (۱+a_۱+a_۲+a_۳)$$

حل: ستون دوم و سوم را به ستون اول می‌افزاییم

$$\begin{vmatrix} ۱+a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ a_۱ & ۱+a_۲ & a_۳ \\ a_۱ & a_۲ & ۱+a_۳ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱+a_۱+a_۲+a_۳ & a_۲ & a_۳ \\ ۱+a_۱+a_۲+a_۳ & ۱+a_۲ & a_۳ \\ ۱+a_۱+a_۲+a_۳ & a_۲ & ۱+a_۳ \end{vmatrix}$$

$$= (۱+a_۱+a_۲+a_۳)\begin{vmatrix} ۱ & a_۲ & a_۳ \\ ۱ & ۱+a_۲ & a_۳ \\ ۱ & a_۲ & ۱+a_۳ \end{vmatrix}$$

حال، (-۱) برابر سطر اول را به سایر سطرها می‌افزاییم.

$$= (1 + a_1 + a_2 + a_3)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1 + a_1 + a_2 + a_3) \quad \square$$

۶ـ۳۸ مسئله

درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 + a_1 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 + a_2 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 1 + a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 + a_n \end{vmatrix} = (a_1 a_2 \cdots a_n)(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i})$$

حل: در ستونهای اول، دوم، سوم، ...، و nام به ترتیب از a_1، a_2، a_3، ...، و a_n فاکتور می‌گیریم.

$$|A| = (a_1 a_2 \cdots a_n)\begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 1 + \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & 1 + \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & 1 + \frac{1}{a_n} \end{vmatrix}$$

ستون دوم، سوم، ...، و nام را به ستون اول می‌افزاییم.

$$= (a_1 a_2 \cdots a_n)\begin{vmatrix} 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_n} \\ 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} & 1 + \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_n} \\ 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} & \frac{1}{a_2} & 1 + \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_n} \\ \vdots & & & \\ 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & 1 + \frac{1}{a_n} \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 a_2 \cdots a_n)(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i})\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_n} \\ 1 & 1 + \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_n} \\ 1 & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_n} \\ \vdots & \vdots & \\ 1 & \frac{1}{a_2} & 1 + \frac{1}{a_n} \end{vmatrix}$$

حالا، (-1) برابر سطر اول را به سایر سطرها می‌افزاییم.

$$= (a_1 a_2 \cdots a_n)(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & & \frac{1}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 a_2 \cdots a_n)(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}) \quad \square$$

۶ـ۳۹ مسئله

درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-b)(c-a)$$

حل: (-1) برابر سطر اول را به سایر سطرها می‌افزاییم

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix}$$

(-1) برابر سطر دوم را به سطر سوم می‌افزاییم .

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-b)(c-a) \quad \square$$

۶ـ۴۰ دسته سوم

۶ـ۴۱ مسئله

بدون بسط، درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

حل: در دترمینان طرف دوم در سطر اول از a و در سطر دوم از b و در سطر سوم از c فاکتور می‌گیریم. خواهیم داشت.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{b} & 1 & b \\ \frac{1}{c} & 1 & c \end{vmatrix}$$

حال، abc را در ستون اول ضرب می‌کنیم.

$$= \begin{vmatrix} bc & 1 & a \\ ac & 1 & b \\ ab & 1 & c \end{vmatrix}$$

جای ستون اول و دوم را عوض می‌کنیم.

$$= -\begin{vmatrix} 1 & bc & a \\ 1 & ac & b \\ 1 & ab & c \end{vmatrix}$$

حال، جای ستون دوم و سوم را عوض می‌کنیم.

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} \quad \square$$

۶ـ۴۲ مسئله

بدون بسط، درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ b & a & 0 & c \\ c & 0 & a & b \\ 0 & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & b & c & 0 \\ b & -a & 0 & c \\ c & 0 & -a & b \\ 0 & c & b & -a \end{vmatrix}$$

حل: در دترمینان سمت راست، در سطر اول و چهارم از (-1) فاکتور می‌گیریم.

$$\text{طرف دوم} = \begin{vmatrix} a & -b & -c & 0 \\ b & -a & 0 & c \\ c & 0 & -a & b \\ 0 & -c & -b & a \end{vmatrix}$$

حال، اگر در ستون دوم و سوم این دترمینان از (-1) فاکتور بگیریم، طرف اول به دست می‌آید. $\square$

۶ـ۴۳ مسئله

بدون بسط، درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & c & a+b+c \\ ۱ & a+b+c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & c \\ ۱ & a+b & ۰ \end{vmatrix}$$

حل: در دترمینان طرف دوم با اضافه کردن c برابر ستون اول به ستون دوم و سپس $(a+b)$ برابر ستون اول به ستون سوم، طرف اول به دست می‌آید. □

۶ـ۴۴ دسته چهارم. محاسبه دترمینان با استفاده از خاصیت ضربی دترمینان

۶ـ۴۵ گزاره

فرض کنید A و B دو ماتریس مربع باشند به طوری که $AB = I$. نشان دهید $|A| \neq ۰$ و $|B| = \frac{۱}{|A|}$.

اثبات: از تساوی $AB = I$، نتیجه می‌شود

$$|AB| = |I| \Rightarrow |A||B| = ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |A| \neq ۰ \\ |B| = \frac{۱}{|A|} \end{cases} \quad \square$$

۶ـ۴۶ گزاره

الف) اگر A یک ماتریس خودتوان باشد، نشان دهید $|A| = ۰$ یا $|A| = ۱$.

ب) اگر A یک ماتریس پوچ توان باشد، نشان دهید $|A| = ۰$.

اثبات: *الف)* از آنجا که A خودتوان است، بنابه‌تعریف $A^۲ = A$. بنابراین،

$$|A^۲| = |A| \Rightarrow |A|^۲ = |A|$$

$$\Rightarrow |A|(|A| - ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |A| = ۰ \\ \text{یا} \\ |A| = ۱ \end{cases}$$

ب) از پوچ توانی A نتیجه می‌شود که یک عدد طبیعی مانند k وجود دارد به طوری که $A^k = ۰$.

بنابراین،

$$|A^k| = \cdot \Rightarrow |A|^k = \cdot$$
$$\Rightarrow |A| = \cdot \quad \square$$

۶ـ۴۷ مسئله

با استفاده از ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

و با استفاده از AA' و خاصیت ضربی دترمینان، اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$(a^{\text{۲}} + b^{\text{۲}})(c^{\text{۲}} + d^{\text{۲}}) - (ac + bd)^{\text{۲}} = (ad - bc)^{\text{۲}}$$

حل: ابتدا AA' را حساب می‌کنیم.

$$AA' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{\text{۲}} + b^{\text{۲}} & ac + bd \\ ac + bd & c^{\text{۲}} + d^{\text{۲}} \end{bmatrix}$$

بنابراین،

$$|AA'| = \begin{vmatrix} a^{\text{۲}} + b^{\text{۲}} & ac + bd \\ ac + bd & c^{\text{۲}} + d^{\text{۲}} \end{vmatrix}$$

در نتیجه،

$$|AA'| = |A|^{\text{۲}} = (a^{\text{۲}} + b^{\text{۲}})(c^{\text{۲}} + d^{\text{۲}}) - (ac + bd)^{\text{۲}}$$

از طرف دیگر

$$|A| = ad - bc$$

بنابراین،

$$(a^{\text{۲}} + b^{\text{۲}})(c^{\text{۲}} + d^{\text{۲}}) - (ac + bd)^{\text{۲}} = (ad - bc)^{\text{۲}} \quad \square$$

۶ـ۴۸ مسئله

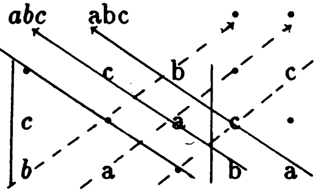
ابتدا دترمینان ماتریس زیر را حساب کنید.

$$A = \begin{bmatrix} \cdot & c & b \\ c & \cdot & a \\ b & a & \cdot \end{bmatrix}$$

سپس، با استفاده از خاصیت ضربی دترمینان نشان دهید .

$$\begin{vmatrix} b^۲+c^۲ & ab & ac \\ ab & c^۲+a^۲ & bc \\ ac & bc & a^۲+b^۲ \end{vmatrix} = ۴a^۲b^۲c^۲$$

حل: با استفاده از دستور ساروس، مقدار دترمینان A را حساب می‌کنیم.

$|A| =$ 

بنابراین،

$$|A| = ۲abc$$

حال، اگر AA' را حساب کنیم خواهیم داشت.

$$AA' = \begin{bmatrix} ۰ & c & b \\ c & ۰ & a \\ b & a & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & c & b \\ c & ۰ & a \\ b & a & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^۲+c^۲ & ab & ac \\ ab & c^۲+a^۲ & bc \\ ac & bc & a^۲+b^۲ \end{bmatrix}$$

بنابراین،

$$\begin{vmatrix} b^۲+c^۲ & ab & ac \\ ab & c^۲+a^۲ & bc \\ ac & bc & a^۲+b^۲ \end{vmatrix} = |AA'| = |A|^۲ = ۴a^۲b^۲c^۲ \quad \square$$

۶ـ۴۹ مسئله

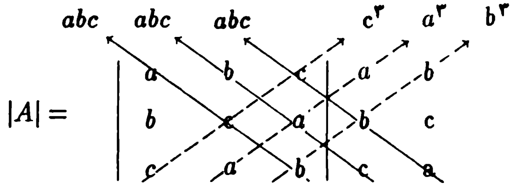
نخست، دترمینان ماتریس زیر را حساب کنید.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$$

و سپس، مقدار دترمینان زیر را حساب کنید.

$$|B| = \begin{vmatrix} ۲bc-a^۲ & c^۲ & b^۲ \\ c^۲ & ۲ca-b^۲ & a^۲ \\ b^۲ & a^۲ & ۲ab-c^۲ \end{vmatrix}$$

حل: با استفاده از دستور ساروس مقدار $|A|$ را حساب می‌کنیم



بنابراین،

$$|A| = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$$

اگر به درایه‌های روی قطر B توجه کنیم، خواهیم دید

$$b_{11} = 2bc - a^2 = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a \\ c \\ b \end{bmatrix}$$

$$b_{22} = 2ca - b^2 = \begin{bmatrix} b & c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b \\ a \\ c \end{bmatrix}$$

$$b_{33} = 2ab - c^2 = \begin{bmatrix} c & a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c \\ b \\ a \end{bmatrix}$$

با یک محاسبهٔ ساده دیده می‌شود، ماتریس B حاصل ضرب دو ماتریس زیر است.

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$$

ماتریس اول همان A است و ماتریس دومی نیز از ماتریس A با تعویض جای سطر دوم و سوم و ضرب سطر اول در (-1) به دست می‌آید، بنابراین، دترمینانش با دترمینان Aبرابر است. پس،

$$|B| = \begin{vmatrix} 2bc - a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ac - b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab - c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

$$= (3abc - a^3 - b^3 - c^3)^2 \quad \square$$

۶ـ۵۰ مسئله

دترمینان زیر را به صورت حاصل ضرب دو دترمینان درآورید، و سپس نشان دهید مقدار آن صفر است.

$$|A| = \begin{vmatrix} ۱ & \cos(b-a) & \cos(c-a) \\ \cos(a-b) & ۱ & \cos(c-b) \\ \cos(a-c) & \cos(b-c) & ۱ \end{vmatrix}$$

حل: به سادگی می‌توان دید.

$$A = \begin{bmatrix} \cos a & \sin a & ۰ \\ \cos b & \sin b & ۰ \\ \cos c & \sin c & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین،

$$|A| = \begin{vmatrix} \cos b & \sin a & ۰ \\ \cos b & \sin b & ۰ \\ \cos c & \sin c & ۰ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{vmatrix} = ۰ \quad \square$$

۶ـ۵۱ محاسبه دترمینان حاصل ضرب دو ماتریس غیرمربع

قبلاً دیدیم که اگر A و B دو ماتریس مربع هم مرتبه باشند، در این صورت

$$|AB| = |A||B|$$

حال، اگر A و B دو ماتریس غیرمربع باشند به طوری که A از مرتبه $m \times n$ و Bاز مرتبه $n \times m$ باشد، در این صورت AB یک ماتریس مربع مرتبه m است، بنابراین $|AB|$ وجود دارد. اما در این حالت $|A|$ و $|B|$ تعریف نشده‌اند، بنابراین برای محاسبه $|AB|$ رابطه $|AB| = |A||B|$ را نمی‌توان به کار برد.

قبل از بیان چند قضیه، نخست به تعریف زیر توجه کنید.

تعریف: فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. «**دترمینانهای اصلی**[1]» ماتریس A عبارتند از دترمینان بزرگترین زیر ماتریسهای A از حیث مرتبه. برای مثال، فرض کنید.

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{bmatrix}$$

هریک از دترمینانهای زیر یک دترمینان اصلی ماتریس A است.

$$|A_۱| = \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{vmatrix}, |A_۲| = \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۳} \end{vmatrix}, |A_۳| = \begin{vmatrix} a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{vmatrix}$$

1.Major determinants

همچنین، برای ماتریس

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

دترمینانهای اصلی آن عبارتند از

$$|B_1| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}, |B_2| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}, |B_3| = \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}$$

تذکر: برای ماتریسهای مربعی، فقط یک دترمینان اصلی وجود دارد، که همان دترمینان خود ماتریس است.

دترمینان اصلی $|A_1|$ از ماتریس A و دترمینان اصلی $|B_1|$ از ماتریس B را **متناظر**[1] یکدیگر گویند، زیرا ستونهای $|A_1|$، ستون اول و دوم A، و سطرهای $|B_1|$، سطرهای اول و دوم ماتریس B می‌باشند. به همین ترتیب، اگر ستون دوم و سوم از A و سطر دوم و سوم از B را انتخاب کنیم دو دترمینان اصلی متناظر $|A_3|$ و $|B_3|$ به دست می‌آیند.

به طور کلی، اگر A ماتریس $m \times n$ $(n \leq m)$ و B ماتریس $n \times m$ باشند، دترمینانهای اصلی A و B در یک تناظر یک به یک بایکدیگر قرار می‌گیرند. این تناظر به این شکل است که اگر $|A_1|$ یک دترمینان اصلی باشد، دترمینان اصلی $|B_1|$ از B متناظر با $|A_1|$ است، هرگاه شماره سطرهای B_1 همان شماره ستونهای A_1 باشد.

حال، قضیه زیر را بدون اثبات می‌آوریم.

۶ـ۵۲ قضیه

اگر $m \leq n$ و A ماتریسی $m \times n$ و B ماتریسی $n \times m$ باشد، آنگاه $|AB|$ مساوی مجموع حاصل ضربهای دترمینانهای اصلی متناظر A و Bاست.

مثال: اگر

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

مطلوب است محاسبه $|AB|$.

حل: دترمینانهای اصلی متناظر A و B به ترتیب عبارتند از

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

---

1. Corresponding Majors

بنابراین

$$|AB| = \begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۵ & ۴ \end{vmatrix}\begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ ۰ & ۴ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -۱ & ۳ \\ ۵ & ۱ \end{vmatrix}\begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۱ \end{vmatrix}\begin{vmatrix} ۰ & ۴ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix}$$
$$= (-۱۴)(۱۲) + (-۱۶)(-۷) + (-۱۰)(-۸)$$
$$= ۲۴$$

۶ـ۵۳ نتیجه

اگر $n \leq m$، و A ماتریسی $m \times n$ باشد، آنگاه

$$|AA'| \geq ۰$$

اثبات: برای سهولت این نتیجه را برای یک ماتریس ۳×۲ ثابت می‌کنیم. فرض کنید،

$$A = \begin{bmatrix} x_۱ & x_۲ & x_۳ \\ y_۱ & y_۲ & y_۳ \end{bmatrix}$$

در این صورت،

$$A' = \begin{bmatrix} x_۱ & y_۱ \\ x_۲ & y_۲ \\ x_۳ & y_۳ \end{bmatrix}$$

دترمینانهای اصلی متناظر A و A' عبارتند از

$$\begin{vmatrix} x_۱ & x_۲ \\ y_۱ & y_۲ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_۱ & y_۱ \\ x_۲ & y_۲ \end{vmatrix} ، \begin{vmatrix} x_۱ & x_۳ \\ y_۱ & y_۳ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_۱ & y_۱ \\ x_۳ & y_۳ \end{vmatrix} ، \begin{vmatrix} x_۲ & x_۳ \\ y_۲ & y_۳ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_۲ & y_۲ \\ x_۳ & y_۳ \end{vmatrix}$$

ملاحظه کنید که در این حالت دترمینانهای اصلی متناظر A و A' با هم برابرند، برای مثال

$$\begin{vmatrix} x_۱ & x_۲ \\ y_۱ & y_۲ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_۱ & y_۱ \\ x_۲ & y_۲ \end{vmatrix}$$

بنابراین،

$$|AA'| = \begin{vmatrix} x_۱ & x_۲ \\ y_۱ & y_۲ \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_۱ & y_۱ \\ x_۲ & y_۲ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_۱ & x_۳ \\ y_۱ & y_۳ \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_۱ & y_۱ \\ x_۳ & y_۳ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_۲ & x_۳ \\ y_۲ & y_۳ \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_۲ & y_۲ \\ x_۳ & y_۳ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_۱ & x_۲ \\ y_۱ & y_۲ \end{vmatrix}^۲ + \begin{vmatrix} x_۱ & x_۳ \\ y_۱ & y_۳ \end{vmatrix}^۲ + \begin{vmatrix} x_۲ & x_۳ \\ y_۲ & y_۳ \end{vmatrix}^۲ \geq ۰$$

حال به بررسی مقدار $|AB|$ در حالتی که $m > n$ و A ماتریسی $m \times n$ و B ماتریسی $n \times m$ باشند، می‌پردازیم. نخست به مثال زیر توجه کنید.

مثال: فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۰ \\ ۴ & -۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

مطلوب است محاسبه $|AB|$.

روش اول- نخست AB را حساب می‌کنیم با یک محاسبه مستقیم دیده می‌شود که

$$|AB| = ۰$$

روش دوم- با یک محاسبه ساده می‌توان نشان داد که

$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۰ \\ ۴ & -۳ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۴ & ۳ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۰ \\ ۴ & -۳ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین،

$$|AB| = \begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۴ & ۳ & ۰ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -۲ & ۱ & ۰ \\ ۴ & -۳ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{vmatrix} = ۰ \times ۰ = ۰ \qquad \square$$

نتیجه فوق تصادفی نیست، در قضیه زیر نشان می‌دهیم که این نتیجه کلی است، یعنی

۶ـ۵۴ قضیه

اگر $n < m$ و A ماتریسی $m \times n$ و B ماتریسی $n \times m$ باشند، در این صورت

$$|AB| = ۰$$

اثبات: چون $m > n$ پس $m - n > ۰$، در ماتریس A، تعداد $m - n$ ستون صفر و به ماتریس B، $m - n$ سطر صفر می‌افزاییم. به سادگی ثابت می‌شود که

$$AB = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & & a_{۲n} \\ \vdots & & \\ a_{m۱} & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & & b_{۱m} \\ \vdots & & & \\ b_{n۱} & b_{n۲} & & a_{nm} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & & a_{1n} & 0 & & 0 \\ a_{21} & & a_{2n} & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & & a_{mn} & \underbrace{0 \quad \cdots}_{m-n \text{ ستون}} & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & & b_{1m} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & & b_{nm} \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m-n \text{ سطر}$$

بنابراین،

$$|AB| = 0 \times 0 = 0$$

۶ـ۵۵ نتیجه

اگر $m > n$ و A ماتریسی $m \times n$ باشد، در این صورت

$$|AA'| = 0$$

بنابراین، به طور کلی، اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد، در این صورت

$$|AA'| \geq 0$$

۶ـ۵۶ بسط قطری دترمینان یک ماتریس

با محاسبه مستقیم، به سادگی می‌توان درستی تساوی زیر را نشان داد.

$$\begin{vmatrix} d_1 & b_{12} \\ b_{21} & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{vmatrix} + d_1 d_2$$

در مورد دترمینان ماتریسهای 3×3 نیز داریم

$$\begin{vmatrix} d_1 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & d_2 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & 0 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ d_1 \begin{vmatrix} 0 & b_{23} \\ b_{32} & 0 \end{vmatrix} + d_2 \begin{vmatrix} 0 & b_{13} \\ b_{31} & 0 \end{vmatrix} + d_3 \begin{vmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ d_1 d_2 d_3$$

مثال: مطلوب است محاسبه دترمینان زیر

$$|A| = \begin{vmatrix} ۱ & -۲ & ۳ \\ ۲ & ۴ & ۵ \\ -۳ & -۵ & ۲ \end{vmatrix}$$

حل: با توجه به بسط قطری داریم.

$$|A| = \begin{vmatrix} ۰ & -۲ & ۳ \\ ۲ & ۰ & ۵ \\ -۳ & -۵ & ۰ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۰ & ۵ \\ -۵ & ۰ \end{vmatrix} + ۴\begin{vmatrix} ۰ & ۳ \\ -۳ & ۰ \end{vmatrix} + ۲\begin{vmatrix} ۰ & -۲ \\ ۲ & ۰ \end{vmatrix} + ۱ \times ۴ \times ۲$$

با توجه به این که اولین دترمینان، دترمینان یک ماتریس پادمتقارن مرتبه فرد است، صفر است، پس

$$|A| = ۰ + ۲۵ + ۳۶ + ۸ + ۸ = ۷۷ \quad \square$$

در مورد ماتریسهای ۴ × ۴ بسط قطری به صورت زیر درمی‌آید.

$$|A| = \begin{vmatrix} d_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳} & b_{۱۴} \\ b_{۲۱} & d_{۲۲} & b_{۲۳} & b_{۲۴} \\ b_{۳۱} & b_{۳۲} & d_{۳۳} & b_{۳۴} \\ b_{۴۱} & b_{۴۲} & b_{۴۳} & d_{۴۴} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۰ & b_{۱۲} & b_{۱۳} & b_{۱۴} \\ b_{۲۱} & ۰ & b_{۲۳} & b_{۲۴} \\ b_{۳۱} & b_{۳۲} & ۰ & b_{۳۴} \\ d_{۴۱} & d_{۴۲} & d_{۴۳} & ۰ \end{vmatrix}$$

$$+ d_{۱۱}|M_{۱۱}| + d_{۲۲}|M_{۲۲}| + d_{۳۳}|M_{۳۳}| + d_{۴۴}|M_{۴۴}|$$

$$+ d_{۱۱}d_{۲۲}|M_{۱۱,۲۲}| + d_{۱۱}d_{۳۳}|M_{۱۱,۳۳}| + \cdots + d_{۳۳}d_{۴۴}|M_{۳۳,۴۴}|$$

$$+ d_{۱۱}d_{۲۲}d_{۳۳}d_{۴۴}$$

که در آن M_{ii} ماتریس حاصل از حذف سطر iام ستون iام A است که درایه‌های روی قطر آن همگی صفرند و $M_{ii,jj}$ ماتریس حاصل از حذف سطر iام ستون iام و، سطر jام ستون jام است.

۶ـ۵۷ مسئله

الف) نخست نشان دهید

$$|A| = \begin{vmatrix} ۰ & b & c & d \\ -b & ۰ & -d & c \\ -c & d & ۰ & -b \\ -d & -c & b & ۰ \end{vmatrix} = (b^۲ + c^۲ + d^۲)^۲$$

ب) سپس ثابت کنید.

$$|B| = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} = (a^{۲} + b^{۲} + c^{۲} + d^{۲})^{۲}$$

حل: در ستون دوم از b، در ستون سوم از c و در ستون چهارم ز d فاکتور می‌گیریم

$$|A| = bcd \begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ -b & ۰ & -\frac{d}{c} & \frac{c}{d} \\ -c & \frac{d}{b} & ۰ & -\frac{b}{d} \\ -d & -\frac{c}{b} & \frac{b}{c} & ۰ \end{vmatrix}$$

قرینه ستون دوم را به ستون سوم و چهارم می‌افزاییم.

$$= bcd \begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ -b & ۰ & -\frac{d}{c} & \frac{c}{d} \\ -c & \frac{d}{b} & -\frac{d}{b} & -\frac{b^{۲}+d^{۲}}{bd} \\ -d & -\frac{c}{b} & \frac{b^{۲}+c^{۲}}{bc} & \frac{c}{b} \end{vmatrix}$$

حال در سطر دوم از $(-b)$ در سطر سوم از $(-c)$ و در سطر چهارم از $(-d)$ فاکتور می‌گیریم.

$$= -b^{۲}c^{۲}d^{۲} \begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & \frac{d}{bc} & -\frac{c}{bd} \\ ۱ & -\frac{d}{bc} & \frac{d}{bc} & \frac{b^{۲}+d^{۲}}{bcd} \\ ۱ & \frac{c}{bd} & -\frac{b^{۲}+c^{۲}}{bcd} & -\frac{c}{bd} \end{vmatrix}$$

قرینه سطر دوم را به سطر سوم و چهارم می‌افزاییم.

$$= -b^{۲}c^{۲}d^{۲} \begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & \frac{d}{bc} & -\frac{c}{bd} \\ ۰ & -\frac{d}{bc} & ۰ & \frac{b^{۲}+c^{۲}+d^{۲}}{bcd} \\ ۰ & \frac{c}{bd} & -\frac{(b^{۲}+c^{۲}+d^{۲})}{bcd} & ۰ \end{vmatrix}$$

دترمینان را نسبت به ستون اول بسط می‌دهیم.

$$= b^{۲}c^{۲}d^{۲} \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -\frac{d}{bc} & ۰ & \frac{b^{۲}+c^{۲}+d^{۲}}{bcd} \\ bd & -\frac{(b^{۲}+c^{۲}+d^{۲})}{bcd} & ۰ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{d}{bc} & 0 & b^2+c^2+d^2 \\ bd & -(b^2+c^2+d^2) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & b^2+c^2+d^2 \\ -(b^2+c^2+d^2) & 0 \end{vmatrix} = (b^2+c^2+d^2)^2$$

ب) باتوجه به بسط قطری، $|B|$ به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & b & c & d \\ -b & 0 & -d & c \\ -c & d & 0 & -b \\ -d & -c & b & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ a \begin{vmatrix} 0 & -d & c \\ d & 0 & -b \\ -c & b & 0 \end{vmatrix} + \cdots + a \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & -d \\ -c & d & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ a^2 \begin{vmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{vmatrix} + a^2 \begin{vmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{vmatrix} + a^2 \begin{vmatrix} 0 & -d \\ d & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ a^2 \begin{vmatrix} 0 & -d \\ d & 0 \end{vmatrix} + a^2 \begin{vmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{vmatrix} + a^2 \begin{vmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ a \cdot a \cdot a \cdot a$$

مقدار اولین دترمینان از قسمت (الف) معلوم است، و تمام دترمینانهای 3×3 دترمینان ماتریس پاد متقارن مرتبه فرد می‌باشند، پس همگی صفرند. بنابراین

$$|B| = (b^2+c^2+d^2)^2 + 2a^2(b^2+c^2+d^2)^2 + a^4$$
$$= (a^2+b^2+c^2+d^2)^2 \quad \square$$

تذکر: روش دیگر محاسبه دترمینان B در مسئله ۶ − ۸۷ آورده شده است.

۶ـ۵۸ محاسبه دترمینان ماتریسهای پاد متقارن مرتبه زوج

ابتدا، دترمینان ماتریس پاد متقارن مرتبه ۲ را حساب می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{vmatrix} = a^2$$

ملاحظه می‌کنید که مقدار دترمینان مربع کامل است.

در مثال قبل دترمینان یک ماتریس پاد متقارن مرتبه ۴ را حساب کردیم که به صورت زیر درآمد.

$$\begin{vmatrix} 0 & b & c & d \\ -b & 0 & -d & c \\ -c & d & 0 & -b \\ -d & -c & b & 0 \end{vmatrix} = (b^2 + c^2 + d^2)^2$$

ملاحظه می‌کنید که این نیز مربع کامل است.

درگزاره زیر نشان می‌دهیم که دترمینان هر ماتریس پاد متقارن مرتبه ۴ مربع کامل تابعی گویا برحسب عناصر آن است.

۶ـ۵۹ گزاره

اگر A یک ماتریس پاد متقارن مرتبه ۴ باشد، آنگاه

$$|A| = (a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2$$

اثبات: قرار می‌دهیم

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{bmatrix}$$

فرض کنید حداقل یکی از درایه‌های سطر اول ناصفر باشد، زیرا در غیر این صورت $|A| = 0$ و چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند.

فرض کنید، مثلاً $a_{12} \neq 0$، در این صورت در سطر اول از a_{12} فاکتور می‌گیریم.

$$|A| = a_{12}\begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{a_{13}}{a_{12}} & \frac{a_{14}}{a_{12}} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{vmatrix}$$

حال، $\frac{-a_{13}}{a_{12}}$ برابر ستون دوم را به ستون سوم و $\frac{-a_{14}}{a_{12}}$ برابر ستون دوم را به ستون چهارم می‌افزاییم. در نتیجه

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & \frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}} & \frac{a_{14}a_{23}}{a_{12}} + a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & \frac{a_{13}a_{24}}{a_{12}} - a_{34} & \frac{a_{14}a_{24}}{a_{12}} \end{vmatrix}$$

حال، با عملیات زیر، تمام درایه‌های سطر دوم بجز درایه سطر دوم ستون اول را صفر می‌کنیم، برای این کار، ابتدا در ستون اول از $-a_{12}$ فاکتور می‌گیریم.

$$|A| = -a_{12}^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ \frac{a_{13}}{a_{12}} & -a_{23} & \frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}} & \frac{a_{14}a_{23}}{a_{12}} + a_{34} \\ \frac{a_{14}}{a_{12}} & -a_{24} & \frac{a_{13}a_{24}}{a_{12}} - a_{34} & \frac{a_{14}a_{24}}{a_{12}} \end{vmatrix}$$

حال $(-a_{23})$ برابر ستون اول را به ستون سوم و $-a_{24}$ برابر ستون اول را به ستون چهارم می‌افزاییم

$$|A| = -a_{12}^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_{13}}{a_{12}} & -a_{23} & 0 & \frac{a_{14}a_{23}-a_{24}a_{13}}{a_{12}} + a_{34} \\ \frac{a_{14}}{a_{12}} & -a_{24} & \frac{a_{13}a_{24}-a_{23}a_{14}}{a_{12}} - a_{34} & 0 \end{vmatrix}$$

با بسط نسبت به سطر دوم داریم:

$$|A| = a_{12}^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_{23} & 0 & \frac{(a_{14}a_{23}-a_{24}a_{13}+a_{12}a_{34})}{a_{12}} \\ -a_{24} & \frac{-(a_{12}a_{34}-a_{13}a_{24}+a_{14}a_{23})}{a_{12}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (a_{14}a_{23} - a_{24}a_{13} + a_{12}a_{34})^2$$

حال، نشان می‌دهیم این نتیجه برای دترمینانهای پاد متقارن مرتبه ۶ نیز برقرار است. برای این کار فرض کنید،

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 & a_{45} & a_{46} \\ -a_{15} & -a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & 0 & a_{56} \\ -a_{16} & -a_{26} & -a_{36} & -a_{46} & -a_{56} & 0 \end{vmatrix}$$

همانند قبل فرض کنید $a_{12} \neq 0$.

$$|A| = a_{12}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ -a_{13} & -a_{23} & \frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}} & a_{34} - \frac{a_{14}a_{23}}{a_{12}} & a_{35} - \frac{a_{15}a_{23}}{a_{12}} & a_{36} - \frac{a_{16}a_{23}}{a_{12}} \\ -a_{14} & -a_{24} & \frac{+a_{13}a_{24}}{a_{12}} - a_{34} & \frac{a_{14}a_{24}}{a_{12}} & a_{45} + \frac{a_{15}a_{24}}{a_{12}} & a_{46} - \frac{a_{16}a_{24}}{a_{12}} \\ -a_{15} & -a_{25} & \frac{a_{13}a_{25}}{a_{12}} - a_{35} & -a_{45} + \frac{a_{14}a_{25}}{a_{12}} & \frac{a_{15}a_{25}}{a_{12}} & a_{56} + \frac{a_{16}a_{25}}{a_{12}} \\ -a_{16} & -a_{26} & \frac{a_{13}a_{26}}{a_{12}} - a_{36} & -a_{46} + \frac{a_{14}a_{26}}{a_{12}} & -a_{56} + \frac{a_{15}a_{26}}{a_{12}} & \frac{a_{16}a_{26}}{a_{12}} \end{vmatrix}$$

ابتدا در ستون اول از $-a_{12}$ فاکتور می‌گیریم، سپس با عملیاتی مشابه، تمام درایه‌های سطر دوم بجز درایه سطر دوم ستون اول را صفر می‌کنیم.

$$|A| = -a_{12}^{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_{13}}{a_{12}} & -a_{23} & & a_{34} + \frac{-a_{24}a_{13}+a_{14}a_{23}}{a_{12}} & a_{35} + \frac{-a_{25}a_{13}-a_{15}a_{23}}{a_{12}} & a_{36} + \frac{-a_{26}a_{13}-a_{16}a_{23}}{a_{12}} \\ \frac{a_{14}}{a_{12}} & -a_{24} & \frac{-a_{23}a_{14}+a_{13}a_{24}}{a_{12}} - a_{34} & & a_{45} + \frac{-a_{25}a_{14}+a_{15}a_{24}}{a_{12}} & a_{46} + \frac{-a_{26}a_{14}-a_{16}a_{24}}{a_{12}} \\ \frac{a_{15}}{a_{12}} & -a_{25} & \frac{a_{13}a_{25}-a_{23}a_{15}}{a_{12}} - a_{35} & -a_{45} + \frac{a_{14}a_{25}-a_{24}a_{15}}{a_{12}} & & a_{56} + \frac{a_{16}a_{25}-a_{26}a_{15}}{a_{12}} \\ \frac{a_{16}}{a_{12}} & -a_{26} & \frac{a_{13}a_{26}-a_{23}a_{16}}{a_{12}} - a_{36} & -a_{46} + \frac{a_{14}a_{26}-a_{24}a_{16}}{a_{12}} & -a_{56} + \frac{-a_{25}a_{16}+a_{15}a_{26}}{a_{12}} & \end{vmatrix}$$

در نتیجه

$$|A| = +a_{12}^{2}\begin{vmatrix} 0 & \frac{a_{34}a_{12}-a_{24}a_{13}+a_{14}a_{23}}{a_{12}} & \frac{-a_{35}a_{12}-a_{15}a_{23}+a_{25}a_{13}}{a_{12}} & \frac{a_{36}a_{12}-a_{26}a_{13}+a_{16}a_{23}}{a_{12}} \\ \frac{-a_{23}a_{14}+a_{13}a_{24}-a_{34}a_{12}}{a_{12}} & 0 & \frac{-a_{25}a_{14}+a_{15}a_{24}+a_{45}a_{12}}{a_{12}} & \frac{a_{46}a_{12}-a_{26}a_{14}+a_{16}a_{24}}{a_{12}} \\ \frac{a_{13}a_{25}-a_{23}a_{15}-a_{35}a_{12}}{a_{12}} & \frac{-a_{45}a_{12}+a_{14}a_{25}-a_{24}a_{15}}{a_{12}} & 0 & \frac{a_{56}a_{12}+a_{16}a_{25}-a_{26}a_{15}}{a_{12}} \\ \frac{a_{13}a_{26}-a_{23}a_{16}-a_{12}a_{36}}{a_{12}} & \frac{-a_{12}a_{46}+a_{14}a_{26}-a_{24}a_{16}}{a_{12}} & \frac{-a_{12}a_{56}-a_{25}a_{16}+a_{15}a_{26}}{a_{12}} & 0 \end{vmatrix}$$

ملاحظه می‌کنید که دترمینان فوق، دترمینان یک ماتریس پاد متقارن مرتبه ۴ است. برای سهولت قرار می‌دهیم

$$|A| = a_{12}^2 \begin{vmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} & A_{24} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 & A_{34} \\ -A_{14} & -A_{24} & -A_{34} & 0 \end{vmatrix}$$

باتوجه به مسئله قبل، داریم

$$\begin{aligned} |A| &= a_{12}^2(A_{12}A_{34} - A_{24}A_{13} + A_{14}A_{23})^2 \\ &= [(a_{34}a_{12} - a_{24}a_{13} + a_{14}a_{23})(a_{56}a_{12} + a_{16}a_{25} - a_{26}a_{15}) \\ &- (-a_{25}a_{13} - a_{15}a_{23} - a_{35}a_{12})(a_{46}a_{12} - a_{26}a_{14} + a_{16}a_{24}) \\ &+ (a_{36}a_{12} - a_{26}a_{13} + a_{16}a_{23})(-a_{25}a_{14} + a_{15}a_{24} + a_{45}a_{12})]^2 \end{aligned}$$

به طور کلی با استقراء می‌توان نشان داد که دترمینان هر ماتریس پاد متقارن مرتبه زوج مربع کامل تابعی گویا از درایه‌هایش می‌باشد. برای اثبات به [۴] مراجعه کنید.

۶ـ۶۰ محاسبه دترمینان با استفاده از جدا کردن عاملهای خطی

اگر درایه‌های یک ماتریس مربع، چند جمله‌ای باشند، دترمینان آن نیز یک چند جمله‌ای است، برای مثال، دترمینان زیر

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1+x & 3 \\ 1 & 2 & 1+x \end{vmatrix}$$

یک چند جمله‌ای درجه ۲ برحسب متغیر x است، زیرا

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$$

گاهی می‌توان بدون بسط دادن عاملهای چند جمله‌ای حاصل را تشخیص داد. اما نخست لازم است مطالبی را از نظریه چند جمله‌ایها یادآوری کنیم.

تبدیل دوری متغیرها ـ فرض کنید $p(x, y, z)$ یک چند جمله‌ای سه متغیره با متغیرهای x و y و z باشد. اگر در این چند جمله‌ای x به y، y به z و z به x تبدیل شود گویند در مورد این سه حرف یک تبدیل دوری انجام داده‌ایم.

چند جمله‌ای متقارن ـ چند جمله‌ای $p(x, y, z)$ برحسب این سه متغیر را متقارن می‌نامند هرگاه با هر تبدیل دوری دلخواه تغییر نکند.

مثال: چند جمله‌ای $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ یک چند جمله‌ای متقارن است. $\square$

چند جمله‌ای همگن ـ هرچند جمله‌ای که همه جملات آن از یک درجه باشند یک چند جمله‌ای همگن نامیده می‌شود.

مثال: چند جمله‌ای $5x^2y - 3xy^2 + 7y^3$ یک چند جمله‌ای همگن درجه ۳ است. $\square$

مثال: کلیه چند جمله‌ایهای متقارن درجه ۲ از سه متغیر y و x و z به صورت زیر می‌باشند.

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + B(xy + yz + xz) + C(x + y + z) + D$$

که در آن A و B و C و D چهار عدد حقیقی می‌باشند. $\square$

مثال: کلیه چند جمله‌ایهای متقارن و همگن درجه ۲ از سه متغیر x و y و z به صورت زیر می‌باشند.

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + B(xy + yz + xz) \quad \square$$

روش ضرایب نامعین برای تجزیه عبارات و اثبات اتحادها

مثال: چند جمله‌ای $x^4 + x^2 + 1$ را به حاصل ضرب دو چند جمله‌ای درجه ۲ تجزیه کنید.

حل: چون ضریب x^4 و عدد ثابت هر دو یک است، می‌توان نوشت.

$$(x^4 + x^2 + 1) = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1)$$

برای محاسبه a و b به ترتیب زیر عمل می‌کنیم

$$x^4 + x^2 + 1 = x^4 + (b + a)x^3 + (ab + 2)x^2 + (a + b)x + 1$$

بنابراین

$$a + b = 0 \quad , \quad ab + 2 = 1$$

در نتیجه

$$a = 1 \quad , \quad b = -1$$

پس

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \quad \square$$

مثال: عبارت $(x - y)(x + y)^4 + (y - z)(y + z)^4 + (z - x)(z + x)^4$ را به حاصل ضرب عوامل تجزیه کنید.

حل: اگر این چند جمله‌ای را برحسب متغیر x در نظر بگیریم، به سادگی دیده می‌شود که این چند جمله‌ای به ازای $x = y$ و همچنین به ازای $x = z$ برابر صفر می‌شود. به همین ترتیب، اگر این چند جمله‌ای را برحسب متغیر y در نظر بگیریم دیده می‌شود که به ازاء $y = z$ چند جمله‌ای صفر می‌شود. بنابراین، این

چند جمله‌ای بر عوامل خطی $(x-y)$ و $(z-x)$ و $(y-z)$ قابل قسمت است. بنابراین، این چند جمله‌ای بر $(x-y)(y-z)(z-x)$ قابل قسمت است. از طرف دیگر، چون این چند جمله‌ای متقارن و همگن از درجه ۵، و چند جمله‌ای $(x-y)(x-z)(y-z)$ متقارن و همگن از درجه ۳ هستند، خارج قسمت نیز می‌بایست چند جمله‌ای متقارن و همگن از درجه ۲ باشد. پس خارج قسمت به صورت زیر است.

$$A(x^۲+y^۲+z^۲)+B(xy+xy+yz)$$

با استفاده از روش ضرایب نامعین، داریم

$$\begin{aligned}&(x-y)(x+y)^۴+(y-z)(y+z)^۴+(z-x)(z+x)^۴\\=&(x-y)(y-z)(z-x)[A(x^۲+y^۲+z^۲)+B(xy+xz+yz)]\end{aligned}$$

با مساوی قرار دادن ضرایب $x^۴y$ در دو طرف، $A=-۳$ به دست می‌آید و اگر قرار دهیم، $x=۱$ و $y=۱$ و $z=۰$، خواهیم داشت $B=-۵$. پس

$$\begin{aligned}&(x-y)(x+y)^۴+(y-z)(y+z)^۴+(z-x)(z+x)^۴\\=&(x-y)(y-z)(z-x)[-۳(x^۲+y^۲+z^۲)-۵(xy+xz+yz)]\end{aligned}$$ □

۶ـ۶۱ مسئله

درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\Delta=\begin{vmatrix}۱&۱&۱\\a&b&c\\a^۲&b^۲&c^۲\end{vmatrix}=(b-c)(c-a)(a-b)$$

حل: اگر دترمینان را یک چند جمله‌ای برحسب a در نظر بگیریم ملاحظه می‌کنید که به ازای $a=b$، دترمینان صفر می‌شود. (زیرا ستون اول و دوم یکسان می‌شوند.) بنابراین $a-b$ یک عامل این دترمینان است. به طریق مشابه ثابت می‌شود که $b-c$ و $c-a$ نیز عاملهای این چند جمله‌ای هستند. چون این دترمینان یک چند جمله‌ای درجه ۳ برحسب a و b و c است، و از طرف دیگر $(b-c)(c-a)(a-b)$ نیز یک چند جمله‌ای درجه ۳ برحسب a و b و c است، بنابراین

$$\Delta=\lambda(b-c)(c-a)(a-b)$$

که در آن λ عددیست حقیقی. برای یافتن λ ضرایب $bc^۲$ را در دو طرف مساوی قرار می‌دهیم، و $\lambda=۱$ به دست می‌آید. □

۶ـ۶۲

درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ a & b & c \\ a^۳ & b^۳ & c^۳ \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$$

حل: این دترمینان را با Δ نشان می‌دهیم. اگر دترمینان را یک چند جمله‌ای برحسب a در نظر بگیریم، به ازای $a = b$، Δ برابر صفر می‌شود (زیرا ستون اول و دوم مساوی می‌شوند). بنابراین $a - b$ عامل Δ است. به طریق مشابه، $b - c$ و $c - a$ نیز عاملهای Δ می‌باشند. اگر دترمینان را بسط دهیم یک چند جمله‌ای متقارن و همگن درجه ۴ برحسب a و b و c به دست می‌آید. بنابراین، می‌بایست

$$\Delta = f(a,b,c)(b-c)(c-a)(a-b)$$

که در آن $f(a,b,c)$ یک چند جمله‌ای متقارن همگن، از درجه یک است. بنابراین،

$$f(a,b,c) = k(a+b+c)$$

برای تعیین k در دو طرف قرار می‌دهیم $a = ۰$ و $b = ۱$ و $c = ۲$، خواهیم داشت

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۸ \end{vmatrix} = k(-۱)(۲)(-۱)(۳) \Rightarrow k = ۱$$

بنابراین،

$$\Delta = (b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c) \quad \square$$

۶ـ۶۳ مسئله

درستی تساوی زیر را نشان دهید

$$\begin{vmatrix} ۱ & a^۲+bc & a^۳ \\ ۱ & b^۲+ca & b^۳ \\ ۱ & c^۲+ab & c^۳ \end{vmatrix} = -(b-c)(c-a)(a-b)(a^۲+b^۲+c^۲)$$

حل: مقدار دترمینان را با Δ نشان می‌دهیم. مانند مثالهای فوق به سادگی معلوم می‌شود که $(b-c)$ و $(c-a)$ و $(a-b)$ عوامل Δ هستند. از طرف دیگر، با بسط دترمینان معلوم می‌شود که Δ یک چند جمله‌ای متقارن و همگن از درجه ۵ نسبت به a و b و c است، بنابراین

$$\Delta = f(a,b,c)(b-c)(c-a)(a-b) \qquad (۱)$$

که در آن $f(a,b,c)$ یک چند جمله‌ای متقارن و همگن از درجه ۲ است. بنابراین $f(a,b,c)$ به صورت زیر است.

$$f(a,b,c) = \lambda(a^۲ + b^۲ + c^۲) + k(bc + ca + ab)$$

λ و k دو عدد حقیقی هستند که باید تعیین شوند. برای تعیین آنها، در دو طرف تساوی (۱) مقادیر معینی از a و b و c را قرار می‌دهیم. یک بار قرار می‌دهیم $a = ۰$ و $b = ۱$ و $c = ۲$، در نتیجه

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۴ & ۸ \end{vmatrix} = (-۱)(۲)(-۱)(۵\lambda + k)$$

پس از ساده کردن معادله زیر به دست می‌آید

$$۵\lambda + ۲k = -۵ \qquad (۲)$$

بار دیگر قرار می‌دهیم $a = ۰$ و $b = ۱$ و $c = -۲$، در نتیجه، پس از محاسبات معادله زیر به دست می‌آید.

$$۵\lambda - ۲k = -۵ \qquad (۳)$$

با حل دستگاه معادلات (۲) و (۳)، λ و k به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\lambda = -۱ \quad , \quad k = ۰$$

بنابراین،

$$\Delta = -(b-c)(c-a)(a-b)(a^۲ + b^۲ + c^۲) \quad \square$$

۶ـ۶۴ مسئله

معادله زیر را حل کنید.

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & x+۱ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & x+۱ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ & x+۱ \end{vmatrix} = ۰$$

حل: دترمینان فوق یک چند جمله‌ای درجه ۳ برحسب x است. از طرف دیگر، با قرار دادن $x = ۱$، ستون اول و دوم متناسب می‌شوند، در نتیجه دترمینان به ازای $x = ۱$ صفر می‌شود بنابراین $x = ۱$ یک جواب معادله فوق است. به طریق مشابه معلوم می‌شود که $x = ۲$ و $x = ۳$ نیز در معادله فوق صدق

می‌کنند. چون معادله داده شده درجه ۳ است، غیر از این سه عدد جواب دیگری وجود ندارد.

۶ـ۶۵ مسئله

معادله زیر را حل کنید.

$$\begin{vmatrix} ۴ & ۹ & x^۲ \\ ۲ & ۳ & x \\ ۸ & ۲۷ & x^۳ \end{vmatrix} = ۰$$

حل: دترمینان فوق یک چند جمله‌ای درجه ۳ است. با قراردادن $x = ۰$، ستون سوم دترمینان صفر می‌شود، بنابراین مقدار دترمینان به ازاء $x = ۰$، صفر است. با قراردادن $x = ۲$ ستون اول و سوم مساوی می‌شوند، بنابراین $x = ۲$ ریشه دیگر معادله است. به طریق مشابه $x = ۳$ در معادله صدق می‌کند. بنابراین، جوابهای معادله عبارتند از، $x = ۰$ و $x = ۲$ و $x = ۳$. □

۶ـ۶۶ مسئله

بدون بسط نشان دهید یکی از ریشه‌های معادله زیر صفر است.

$$\begin{vmatrix} ۰ & x-a & x-b \\ x+a & ۰ & x-c \\ x+b & x+c & ۰ \end{vmatrix} = ۰$$

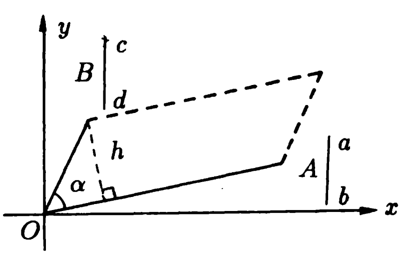
حل: با قراردادن $x = ۰$، داریم

$$\begin{vmatrix} ۰ & -a & -b \\ a & ۰ & -c \\ b & c & ۰ \end{vmatrix} = ۰$$

این تساوی برقرار است زیرا دترمینان فوق، دترمینان یک ماتریس پاد متقارن مرتبه فرد است. □

۶ـ۶۷ تعبیر هندسی دترمینان

متوازی الاضلاعی را که با بردارهای $A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ ساخته می‌شود در نظر بگیرید (شکل زیر).



اگر مساحت این متوازی الاضلاع را با S نشان دهیم، خواهیم داشت.

$$S = |\overrightarrow{OA}| \cdot h$$
$$= |\overrightarrow{OA}|(|\overrightarrow{OB}| \sin\alpha)$$

بنابراین،

$$S^۲ = |\overrightarrow{OA}|^۲|\overrightarrow{OB}|^۲ \sin^۲\alpha$$
$$= |\overrightarrow{OA}|^۲|\overrightarrow{OB}|^۲(۱ - \cos^۲\alpha)$$
$$= |\overrightarrow{OA}|^۲|\overrightarrow{OB}|^۲ - [|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\alpha]^۲$$
$$= |\overrightarrow{OA}|^۲|\overrightarrow{OB}|^۲ - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^۲$$
$$= (a^۲ + b^۲)(c^۲ + d^۲) - (ac + bd)^۲$$
$$= (ad - bc)^۲$$

در نتیجه:

$$S = \pm(ad - bc) = \pm\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \quad \blacksquare$$

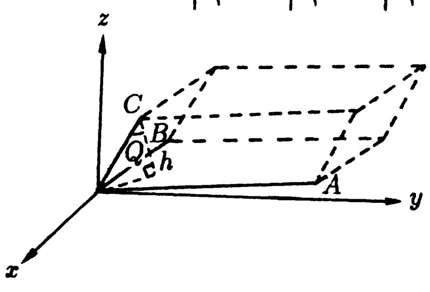
بنابراین، قدر مطلق $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$، درواقع، مساحت متوازی الاضلاعی است که دو ضلع مجاورآن دو بردار $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ می‌باشند.

۶ـ۶۸ نتیجه

مساحت مثلثی که یک رأس آن مبدأ مختصات و دو رأس دیگر آن $A\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix} c \\ d \end{vmatrix}$ باشد به صورت زیر است.

$$S_{OAB} = \pm\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \quad \blacksquare$$

حال، متوازی السطوحی را که با سه بردار $A\begin{vmatrix} a_۱ \\ a_۲ \\ a_۳ \end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix} b_۱ \\ b_۲ \\ b_۳ \end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix} c_۱ \\ c_۲ \\ c_۳ \end{vmatrix}$ ساخته می‌شود در نظر بگیرید (شکل زیر).



می‌خواهیم حجم این متوازی السطوح را حساب کنیم. نخست محاسبات زیر را انجام می‌دهیم. بنابه آنچه که از ضرب خارجی دو بردار در R^3 می‌دانیم، مساحت متوازی الاضلاعی که با بردارهای $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ درست شده. عبارت است از اندازهٔ بردار $\vec{N} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ که بر صفحه متوازی الاضلاع عمود است.

اما،

$$\vec{N} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

بنابراین،

$$(\text{مساحت متوازی الاضلاع})^2 = s^2 = |\overrightarrow{N}|^2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2$$

۲ـ از طرف دیگر،

$$\text{ارتفاع متوازی السطوح} = h = \frac{\overrightarrow{OC} \cdot \vec{N}}{|\vec{N}|}$$

بنابراین،

$$V = h \cdot s$$

$$\Rightarrow V^2 = h^2 s^2 = \frac{\overrightarrow{OC} \cdot \vec{N}}{|N|}^2 \cdot |N|^2 = (\overrightarrow{OC} \cdot \vec{N})^2$$

$$\Rightarrow V = \pm(\overrightarrow{OC} \cdot \vec{N})$$

$$\Rightarrow V = \pm(c_1, c_2, c_3) \cdot \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow V = \pm \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \blacksquare$$

۶ـ۶۹ دترمینان واندر موند[1]

قبلاً دیدیم که

1. Vander monde Determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

به طریق مشابه، ثابت می‌شود که

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c)$$

باتوجه به موارد بالا به تعریف زیر می‌رسیم.

تعریف: هر دترمینان به صورت

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & & a_n^n \end{vmatrix}$$

را دترمینان واندر موند گویند.

با استقراء می‌توان نشان داد که

$$|A_n| = [(a_1 - a_0)][(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)][(a_3 - a_0)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)] \cdots [(a_n - a_0)(a_n - a_1)\cdots(a_n - a_{n-1})]$$

۶ـ۷۰ مسئله

مطلوب است محاسبه دترمینان زیر.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & bcd \\ 1 & b & b^2 & acd \\ 1 & c & c^2 & abd \\ 1 & d & d^2 & abc \end{vmatrix}$$

حل: سطر اول را در a ضرب و تقسیم می‌کنیم به طریق مشابه b و c و d را به ترتیب در سطرهای دوم و سوم و چهارم ضرب و تقسیم می‌کنیم، خواهیم داشت

$$|A| = \frac{1}{abcd}\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & abcd \\ b & b^2 & b^3 & abcd \\ c & c^2 & c^3 & abcd \\ d & d^2 & d^3 & abcd \end{vmatrix}$$

حال $\frac{1}{abcd}$ را در ستون چهارم ضرب می‌کنیم

$$= \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & 1 \\ b & b^2 & b^3 & 1 \\ c & c^2 & c^3 & 1 \\ d & d^2 & d^3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$= -(b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c) \quad \square$$

۶ـ۷۱ مسئله

بدون بسط درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & bc+ad & b^2c^2+a^2d^2 \\ 1 & ca+bd & c^2a^2+b^2d^2 \\ 1 & ab+cd & a^2b^2+c^2d^2 \end{vmatrix}$$

$$= -(b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d)$$

حل: $2abcd$ برابر ستون اول را به ستون سوم می‌افزاییم

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & bc+ad & b^2c^2+a^2d^2+2abcd \\ 1 & ca+bd & c^2a^2+b^2d^2+2abcd \\ 1 & ab+cd & a^2b^2+c^2d^2+2abcd \end{vmatrix}$$

قرار می‌دهیم $bc+ad=x$ و $ca+bd=y$ و $ab+cd=z$، خواهیم داشت

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

دترمینان اخیر یک دترمینان واندر موند مرتبه ۳ است، بنابراین

$$|A| = (y-x)(z-x)(z-y)$$

اما،

$$(y-x) = ca + bd - bc - ad = (a-b)(c-d)$$

$$(z-x) = ab + cd - bc - ad = (a-c)(b-d)$$

$$(z-y) = ab + cd - ca - bd = (b-c)(a-d)$$

در نتیجه،

$$|A| = -(b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d) \quad \square$$

مسائل تکمیلی در مورد محاسبه دترمینان

۶ـ۷۲ مسئله

به کمک ماتریسهای

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$$

و با استفاده از خاصیت ضربی دترمینان، اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$$

۶ـ۷۳ مسئله

درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = a^4 + 4a^3$$

۶ـ۷۴ مسئله

درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix} = x^{۳}(x+a+b+c+d)$$

۶ـ۷۵ مسئله

درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\begin{vmatrix} a_{۱}+b_{۱}x & a_{۱}x+b_{۱} & c_{۱} \\ a_{۲}+b_{۲}x & a_{۲}x+b_{۲} & c_{۲} \\ a_{۳}+b_{۳}x & a_{۳}x+b_{۳} & c_{۳} \end{vmatrix} = (۱-x^{۲}) \begin{vmatrix} a_{۱} & b_{۱} & c_{۱} \\ a_{۲} & b_{۲} & c_{۲} \\ a_{۳} & b_{۳} & c_{۳} \end{vmatrix}$$

۶ـ۷۶ مسئله

بدون بسط درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} ۱+x^{۲} & x & ۰ \\ x & ۱+x^{۲} & x \\ ۰ & -x & ۱+x^{۲} \end{vmatrix} = (۱+x^{۲})^{۳}$$

۶ـ۷۷ مسئله

فرض کنید a و b و c سه عدد حقیقی متمایز باشند و اگر

$$\begin{vmatrix} a & a^{۲} & a^{۳}+۱ \\ b & b^{۲} & b^{۳}+۱ \\ c & c^{۲} & c^{۳}+۱ \end{vmatrix} = ۰$$

ثابت کنید

$$abc+۱=۰$$

۶ـ۷۸ مسئله

بدون بسط درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\begin{vmatrix} a-b & ۱ & a \\ b-c & ۱ & b \\ c-a & ۱ & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & ۱ & b \\ b & ۱ & c \\ c & ۱ & a \end{vmatrix}$$

۶ـ۷۹ مسئله

فرض کنید A یک ماتریس مربع مرتبه ۲ باشد که در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$\big|\,|A|A\,\big| + \left|\,\frac{۲}{|A|}A\,\right| = ۵|A|$$

مطلوب است محاسبه $|A|$.

۶ـ۸۰ مسئله

اگر A یک ماتریس $n \times n$ و I ماتریس همانی $n \times n$ و $\lambda \in R$. ثابت کنید.

$$|A - \lambda I| = |A' - \lambda I|$$

۶ـ۸۱ مسئله

اگر A و B دو ماتریس $n \times n$ و n فرد باشد و $AB = -BA$، ثابت کنید

$$|A| = ۰ \quad \text{یا} \quad |B| = ۰$$

۶ـ۸۲ مسئله

بدون بسط، با استفاده از قوانین مربوط به دترمینانها، رابطه زیر را ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & ۰ & ۰ \\ c & ۰ & a & ۰ \\ d & ۰ & ۰ & a \end{vmatrix} = a^{۲} \begin{vmatrix} a^{۲} & ۱ & ۱ & ۱ \\ b^{۲} & ۱ & ۰ & ۰ \\ c^{۲} & ۰ & ۱ & ۰ \\ d^{۲} & ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix}$$

۶ـ۸۳ مسئله

بدون بسط و با استفاده از ویژگیهای دترمینان ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} m & a-d & mb+mc \\ m & b-d & ma+mc \\ m & c-d & ma+mb \end{vmatrix} = ۰$$

۶ـ۸۴ مسئله

با استفاده از ویژگیهای دترمینان و با فرض

$$\begin{vmatrix} ۱ & a & a^{۲}(b+c) \\ ۱ & b & b^{۲}(a+c) \\ ۱ & c & c^{۲}(a+b) \end{vmatrix} = ۰$$

ثابت کنید

$$\begin{vmatrix} ۱ & a & a^{۳} \\ ۱ & b & b^{۳} \\ ۱ & c & c^{۳} \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} ۱ & a & a^{۲} \\ ۱ & b & b^{۲} \\ ۱ & c & c^{۲} \end{vmatrix}$$

۶ـ۸۵ مسئله

بدون بسط و با استفاده از ویژگیهای دترمینانها ثابت کنید

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱+a & a^{۲}(b+c) \\ ۱ & ۱+b & b^{۲}(a+c) \\ ۱ & ۱+c & c^{۲}(a+b) \end{vmatrix} = ۰$$

۶ـ۸۶ مسئله

دترمینان طرف اول تساوی زیر را با استفاده از قوانین و بسط دترمینان آنقدر ساده کنید تا طرف دوم به دست آید.

$$\begin{vmatrix} a & b & ۰ & ۰ \\ c & d & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & a' & b' \\ ۰ & -۱ & c' & d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{vmatrix}$$

۶ـ۸۷ مسئله

بدون بسط مقدار دترمینان زیر را حساب کنید.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$$

۶ـ۸۸ مسئله

بدون بسط درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

مسئله ۶ـ۸۹

بدون بسط، درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\begin{vmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ac & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & ab & ac \\ ab & ac & bc \\ ac & bc & ab \end{vmatrix}$$

مسئله ۶ـ۹۰

بدون بسط، درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ a-1 & b-1 & c-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & c & 1 \\ c & a & 1 \end{vmatrix}$$

مسئله ۶ـ۹۱

بدون بسط، درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3-1 & y^3-1 & z^3-1 \end{vmatrix} = (xyz-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

مسئله ۶ـ۹۲

درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\begin{vmatrix} 1+x & y & z \\ x & 1+y & z \\ x & y & 1+z \end{vmatrix} = x+y+z+1$$

مسئله ۶ـ۹۳

با استفاده از قوانین دترمینان و دترمینان ماتریس بالا مثلثی، بدون بسط، صحت تساوی زیر را نشان

دهید.

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

۶ـ۹۴ مسئله

اگر

$$B = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$$

مطلوب است محاسبه $|B^n|$.

۶ـ۹۵ مسئله

درستی تساوی زیر را نشان دهید. (مرتبه دترمینان $n+1$ است.)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & b & & b \\ b & a & b & & b \\ b & b & a & & b \\ \vdots & & & & \\ b & b & b & & a \end{vmatrix} = (a+nb)(a-b)^n$$

۶ـ۹۶ مسئله

درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2 & bc+ac+ab & bc+ac+ab \\ bc+ac+ab & a^2+b^2+c^2 & bc+ac+ab \\ bc+ac+ab & bc+ac+ab & a^2+b^2+c^2 \end{vmatrix} = (3abc-a^3-b^3-c^3)^2$$

۶ـ۹۷ راهنمایی و حل بعضی از مسائل تکمیلی در مورد محاسبه دترمینان

حل مسئلهٔ ۶.۷۳ نخست $|A|$ و $|B|$ و $|AB|$ را جداگانه به دست آورید و سپس در رابطه

$$|AB| = |A||B|$$

قرار دهید. □

حل مسئلهٔ ۶.۷۴ ستونهای دوم و سوم و چهارم را به ستون اول افزوده و در ستون اول از $(a+۴)$ فاکتور بگیرید و سپس قرینه سطر اول را به سایر سطرها بیفزایید. □

حل مسئلهٔ ۶.۷۵ ستون دوم و سوم و چهارم را به ستون اول افزوده و در ستون اول از $(x+a+b+c+d)$ فاکتور بگیرید و سپس قرینه سطر اول را به سایر سطرها بیفزایید. □

حل مسئلهٔ ۶.۷۶

$$\text{طرف اول} = \begin{vmatrix} a_۱ & a_۱x+b_۱ & c_۱ \\ a_۲ & a_۲x+b_۲ & c_۲ \\ a_۳ & a_۳x+b_۳ & c_۳ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_۱x & a_۱x+b_۱ & c_۱ \\ b_۲x & a_۲x+b_۲ & c_۲ \\ b_۳x & a_۳x+b_۳ & c_۳ \end{vmatrix}$$

در دترمینان اولی $(x-)$ برابر ستون اول را به ستون دوم می‌افزاییم و در دترمینان دوم نخست در ستون اول از x فاکتورگرفته و سپس $(۱-)$ برابر ستون اول را به ستون دوم می‌افزاییم. □

حل مسئلهٔ ۶.۷۷ سطر سوم را به سطر اول افزوده و سپس قرینه ستون اول را به ستون سوم می‌افزاییم. □

حل مسئلهٔ ۶.۷۸ دترمینان را به دو دترمینان تجزیه کنید به طوری که ستون اول و دوم ثابت بمانند. سپس از دترمینان واندر موند ۳×۳ استفاده کنید. □

حل مسئلهٔ ۶.۷۹ در دترمینان طرف اول، قرینه ستون سوم را به ستون اول می‌افزاییم. □

حل مسئلهٔ ۶.۸۰ چون A ماتریسی ۲×۲ است، بنابراین

$$|\,|A|A\,| = |A|^۲|A| = |A|^۳ \quad , \quad |\,\tfrac{۲}{|A|}A\,| = (\frac{۲}{|A|})^۲|A| = \frac{۴}{|A|}$$

پس از جایگذاری و حل معادله خواهیم داشت.

$$|A| = \pm ۱, \pm ۲ \quad \square$$

حل مسئلهٔ ۶.۸۱ از روابط زیر استفاده کنید.

$$|(A-\lambda I)'| = |A-\lambda I|\,,\ I' = I \quad \square$$

حل مسئلهٔ ۶.۸۲ از طرفین تساوی $AB = -BA$، دترمینان بگیرید و در ضمن از رابطه زیر نیز استفاده کنید.

$$|-BA| = (-۱)|BA| \quad \square$$

حل مسئلهٔ ۶.۸۳ در سطر دوم و سوم و چهارم از a فاکتور می‌گیریم و یک a را در ستون اول ضرب می‌کنیم. پس از آن، در ستون دوم و سوم و چهارم به ترتیب از b و c و dفاکتورگرفته و b و c و d را به ترتیب در سطر دوم وسوم و چهارم ضرب کنید. □

حل مسئلهٔ ۶.۸۴ در ستون اول و سوم از m فاکتور می‌گیریم و سپس ستون دوم را به ستون سوم می‌افزاییم، دو ستون متناسب می‌شوند. □

حل مسئلهٔ ۶.۸۵

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & a^2(b+c) \\ 1 & b & b^2(a+c) \\ 1 & c & c^2(a+b) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2(a+b+c) \\ 1 & b & b^2(a+b+c) \\ 1 & c & c^2(a+b+c) \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \quad \square$$

حل مسئلهٔ ۶.۸۶ قرینه ستون اول را به ستون دوم می‌افزاییم و سپس در سطر اول و دوم و سوم به ترتیب از a و b و c فاکتور می‌گیریم

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2(b+c) \\ 1 & b & b^2(a+c) \\ 1 & c & c^2(a+b) \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 1 & ab+ac \\ \frac{1}{b} & 1 & ab+bc \\ \frac{1}{c} & 1 & ac+bc \end{vmatrix}$$

حال، abc را در ستون اول ضرب کرده و سپس ستون اول را به ستون سوم می‌افزاییم

$$= \begin{vmatrix} bc & 1 & ab+ac \\ ac & 1 & ab+bc \\ ab & 1 & ac+bc \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} bc & ۱ & ab+ac+bc \\ ac & ۱ & ab+ac+bc \\ ab & ۱ & ab+ac+bc \end{vmatrix} = ۰$$

زیرا ستون دوم و سوم متناسبند. □

حل مسئلهٔ ۸۷.۶ a برابر سطر سوم و b برابر سطر چهارم را به سطر اول اضافه می‌کنیم

$$\text{طرف اول} = \begin{vmatrix} ۰ & ۰ & aa'+bc' & ab'+bd' \\ c & d & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & a' & b' \\ ۰ & -۱ & c' & d' \end{vmatrix}$$

c برابر سطر سوم و d برابر سطر چهارم را به سطر دوم اضافه کنید و سپس نسبت به ستون اول بسط دهید. □

حل مسئلهٔ ۸۸.۶ فرض کنید A یک ماتریس ۴ × ۴ باشد که دترمینان آن دترمینان داده شده در مسئله باشد، اگر AA' را حساب کنید ملاحظه می‌کنید که AA' یک ماتریس اسکالر است. □

حل مسئلهٔ ۸۹.۶ در دترمینان سمت راست، در سطر اول از bc و در سطر دوم از ac و در سطر سوم از ab فاکتور می‌گیریم و سپس ستون اول را در abc و ستون دوم را در a و ستون سوم را در b و ستون چهارم را در c ضرب می‌کنیم. □

حل مسئلهٔ ۹۰.۶ فرض می‌کنیم a و b و c هیچکدام صفر نیستند. در دترمینان سمت چپ در سطر اول از a و در سطر دوم از b و در سطر سوم از c فاکتور می‌گیریم. سپس ستون اول را در a و ستون دوم را در b و ستون سوم را در c ضرب می‌کنیم. □
در صورت صفر بودن یکی از پارامترهای a و b و c، همین عملیات را می‌توان انجام داد، غیر از آنکه عمل فاکتورگیری و ضرب نسبت به عاملی که صفر است انجام نمی‌شود. □

حل مسئلهٔ ۹۱.۶ در دترمینان سمت چپ سطر سوم را به سطر دوم بیفزایید و سپس قرینه سطر دوم را به سطر اول اضافه کنید. در آخر سطر اول را در ۱− ضرب کرده و سپس جای سطر اول و دوم را عوض کنید. □

حل مسئلهٔ ۹۲.۶ نخست طرف اول را به مجموع دو دترمینان تجزیه کنید به طوری که سطر اول و دوم ثابت بمانند. در دترمینان اولی با فاکتورگیری x و y و z به ترتیب از ستونهای اول و دوم و سوم و در دترمینان دومی، دوبار جای سطرها را با هم عوض کنید تا نظیر دترمینان اولی گردد. □

حل مسئلهٔ ۹۳.۶ ستون دوم و سوم را به ستون اول بیفزایید. $\square$

حل مسئلهٔ ۹۴.۶ سطر دوم و سوم را به سطر اول بیفزایید. $\square$

حل مسئلهٔ ۹۵.۶ به سادگی می‌توان دید که $|B| = ۲abc$. بنابراین

$$|B^n| = |B|^n = (۲abc)^n \quad \square$$

حل مسئلهٔ ۹۶.۶ تمام ستونها را به ستون اول بیفزایید و سپس قرینه سطر اول را به سایر سطرها اضافه کنید. $\square$

حل مسئلهٔ ۹۷.۶ ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$$

را در نظر بگیرید.

در مسئله ۴۹.۶ دیدیم که $|A| = ۳abc - a^۳ - b^۳ - c^۳$. از طرف دیگر

$$A^۲ = \begin{bmatrix} a^۲ + b^۲ + c^۲ & ab + ac + bc & ab + bc + ac \\ ab + ac + bc & a^۲ + b^۲ + c^۲ & ab + bc + ac \\ ab + ac + bc & ab + ac + bc & a^۲ + b^۲ + c^۲ \end{bmatrix} \quad \square$$

تمرینات فصل ۶

بدون بسط، درستی تساویهای زیر را نشان دهید.

$$۱)\ \begin{vmatrix} ۱ & b + c & b^۲ + c^۲ \\ ۱ & c + a & c^۲ + a^۲ \\ ۱ & a + b & a^۲ + b^۲ \end{vmatrix} = (b - c)(c - a)(a - b)$$

$$۲)\ \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ a^۲ & b^۲ & c^۲ \\ a^۳ & b^۳ & c^۳ \end{vmatrix} = (ab + ac + bc)(b - c)(c - a)(a - b)$$

$$۳)\ \begin{vmatrix} -۲a & a + b & a + c \\ b + a & -۲b & b + c \\ c + a & c + b & -۲c \end{vmatrix} = ۴(b + c)(c + a)(a + b)$$

۴) $$\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3$$

۵) $$\begin{vmatrix} a^2 & a^2-(b-c)^2 & bc \\ b^2 & b^2-(c-a)^2 & ca \\ c^2 & c^2-(a-b)^2 & ab \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$

۶ـ معادله زیر را حل کنید.

$$\begin{vmatrix} 3x-8 & 3 & 3 \\ 3 & 3x-8 & 3 \\ 3 & 3 & 3x-8 \end{vmatrix} = 0$$

۷ـ مقدار دترمینان زیر را حساب کنید

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & a^2 & bc \\ \frac{1}{b} & b^2 & ca \\ \frac{1}{c} & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

۸ـ اگر $r^2 = a^2 + b^2 + c^2$ و $u^2 = bc + ca + ab$ در این صورت نشان دهید.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} r^2 & u^2 & u^2 \\ u^2 & r^2 & u^2 \\ u^2 & u^2 & r^2 \end{vmatrix}$$

و سپس نشان دهید مقدار دترمینان سمت راست مساوی $(3abc - a^3 - b^3 - c^3)^2$ است.

۹ـ اگر $u = ax + by + cz$ و $v = ay + bz + cx$ و $w = az + bx + cy$ ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw$$

۱۰ـ ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ac-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix} = (3abc - a^3 - b^3 - c^3)^2$$

(راهنمایی: حاصل ضرب زیر را در نظر بگیرید.)

$$\begin{vmatrix} -a & b & c \\ -b & c & a \\ -c & a & b \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

۱۱ـ ثابت کنید مربع دترمینان

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cos x & \sin x \\ \sin x & \cdot & \cos x \\ \cos x & \sin x & \cdot \end{vmatrix}$$

به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{vmatrix} ۱ & \lambda & \lambda \\ \lambda & ۱ & \lambda \\ \lambda & \lambda & ۱ \end{vmatrix}$$

که در آن $\lambda = \sin x \cos x$.

۱۲ـ ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} (x-a)^۲ & (x-b)^۲ & (x-c)^۲ \\ (y-a)^۲ & (y-b)^۲ & (y-c)^۲ \\ (z-a)^۲ & (z-b)^۲ & (z-c)^۲ \end{vmatrix}$$

$$= ۲ \begin{vmatrix} x^۲ & x & ۱ \\ y^۲ & y & ۱ \\ z^۲ & z & ۱ \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ -a & -b & -c \\ a^۲ & b^۲ & c^۲ \end{vmatrix}$$

$$= ۲(y-z)(z-x)(x-y)(b-c)(c-a)(a-b)$$

۱۳ـ ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} (۱+ax)^۲ & (۱+bx)^۲ & (۱+cx)^۲ \\ (۱+ay)^۲ & (۱+by)^۲ & (۱+cy)^۲ \\ (۱+az)^۲ & (۱+bz)^۲ & (۱+cz)^۲ \end{vmatrix}$$

$$= ۲ \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ a & b & c \\ a^۲ & b^۲ & c^۲ \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ x & y & z \\ x^۲ & y^۲ & z^۲ \end{vmatrix}$$

$$=2(b-c)(c-a)(a-b)(y-z)(z-x)(x-y)$$

۱۴ـ دترمینان زیر را به حاصل ضرب دو دترمینان تجزیه کنید و سپس نشان دهید که مقدار آن صفر است.

$$\begin{vmatrix} 2 & a+b+c+d & ab+cd \\ a+b+c+d & 2(a+b)(c+d) & ab(c+d)+cd(a+b) \\ ab+cd & ab(c+d)+cd(a+b) & 2abcd \end{vmatrix}$$

(راهنمایی: نشان دهید دترمینان داده شده را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a+b & c+d & 0 \\ ab & cd & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ c+d & a+b & 0 \\ cd & ab & 0 \end{vmatrix}$$

۱۵ـ دترمینان زیر را به حاصل ضرب دو دترمینان تجزیه کنید و سپس نشان دهید مقدار آن صفر است.

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(b-a) & \cos(c-a) \\ \cos(a-b) & 1 & \cos(c-b) \\ \cos(a-c) & \cos(b-c) & 1 \end{vmatrix}$$

(راهنمایی: نشان دهید دترمینان داده شده را به صورت زیر می‌توان نوشت.)

$$\begin{vmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ \cos b & \sin b & 0 \\ \cos c & \sin c & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ \cos b & \sin b & 0 \\ \cos c & \sin c & 0 \end{vmatrix}$$

۱۶ـ دترمینان زیر را به صورت حاصل ضرب دو دترمینان نوشته و سپس مقدار آن را حساب کنید.

$$\begin{vmatrix} 3 & a+b+c & a^2+b^2+c^2 \\ a+b+c & a^2+b^2+c^2 & a^3+b^3+c^3 \\ a^2+b^2+c^2 & a^3+b^3+c^3 & a^4+b^4+c^4 \end{vmatrix}$$

۱۷ـ درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ -x & 0 & r & q \\ -y & -r & 0 & p \\ -z & -q & -p & 0 \end{vmatrix} = (px-qy+rz)^2$$

۱۸ـ بدون بسط درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\begin{vmatrix} ۲a & ۲b & ۲c & ۲d \\ m & m & m & m \\ b+c & c+d & a+d & a+b \\ d & a & b & c \end{vmatrix} = ۰$$

۱۹ـ درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\begin{vmatrix} ۰ & -c & b & -l \\ c & ۰ & -a & -m \\ -b & a & ۰ & -n \\ x & y & z & ۰ \end{vmatrix} = (al+bm+cn)(ax+by+cz)$$

۲۰ـ درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{array}{c} -(a+b+c+d)(b+c-a-d) \\ (c+a-b-d)(a+b-c-d) \end{array}$$

۲۱ـ درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\begin{vmatrix} a & b & b & & b \\ b & a & b & & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ b & b & b & & a \end{vmatrix} = (a+nb)(a-b)^n$$

(مرتبه دترمینان $n + ۱$ است.)

۲۲ـ دترمینان زیر را حساب کنید.

$$\begin{vmatrix} ۱+x_۱ & x_۲ & & x_n \\ x_۱ & ۱+x_۲ & & x_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_۱ & x_۲ & & ۱+x_n \end{vmatrix}$$

۲۳ـ بدون بسط ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} bcd & a & a^۲ & a^۳ \\ acd & b & b^۲ & b^۳ \\ abd & c & c^۲ & c^۳ \\ abc & d & d^۲ & d^۳ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & a^۲ & a^۳ & a^۴ \\ ۱ & b^۲ & b^۳ & b^۴ \\ ۱ & c^۲ & c^۳ & c^۴ \\ ۱ & d^۲ & d^۳ & d^۴ \end{vmatrix}$$

۲۴ـ درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\begin{vmatrix} ۱^۲ & ۲^۲ & ۳^۲ & ۴^۲ \\ ۲^۲ & ۳^۳ & ۴^۲ & ۵^۲ \\ ۳^۲ & ۴^۲ & ۵^۲ & ۶^۲ \\ ۴^۲ & ۵^۲ & ۶^۲ & ۷^۲ \end{vmatrix} = ۰$$

مقدار دترمینانهای زیر را حساب کنید.

۲۵) $$\begin{vmatrix} \sin^۲ x & \sin^۲ y & \sin^۲ z \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ \cos^۲ x & \cos^۲ y & \cos^۲ z \end{vmatrix}$$

۲۶) $$\begin{vmatrix} x & x' & ax+bx' \\ y & y' & ay+by' \\ z & z' & az+bz' \end{vmatrix}$$

۲۷) $$\begin{vmatrix} (a^x+a^{-x})^۲ & (a^x-a^{-x})^۲ & ۱ \\ (b^y+b^{-y})^۲ & (b^y-b^{-y})^۲ & ۱ \\ (c^z+c^{-z})^۲ & (c^z-c^{-z})^۲ & ۱ \end{vmatrix}$$

۲۸) $$\begin{vmatrix} \sin^۲ x & \sin^۲ y & \sin^۲ z \\ \cos^۲ x & \cos^۲ y & \cos^۲ z \\ \cos ۲x & \cos ۲y & \cos ۲z \end{vmatrix}$$

۲۹) $$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x & \sin(x+t) \\ \sin y & \cos y & \sin(y+t) \\ \sin z & \cos z & \sin(z+t) \end{vmatrix}$$

۳۰ـ اگر α و β و γ ریشه‌های معادله $x^۳+px+q=۰$ باشند، نشان دهید

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix} = ۰$$

بدون بسط درستی تساویهای زیر را نشان دهید.

۳۱) $$\begin{vmatrix} ۱ & a & a^۴ \\ ۱ & b & b^۴ \\ ۱ & c & c^۴ \end{vmatrix} = (a^۲+b^۲+c^۲+ab+ac+bc)(b-a)(c-a)(c-b)$$

$$32)\quad \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+bc+ac)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

۳۳ـ معادله زیر را حل کنید.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & & n-x \end{vmatrix} = 0$$

۳۴ـ مقدار دترمینان زیر را حساب کنید.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

بدون بسط درستی تساویهای زیر را ثابت کنید (همه دترمینانها مرتبه n هستند).

$$35)\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & & n \\ -1 & 0 & 3 & & n \\ -1 & -2 & 0 & & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & & 0 \end{vmatrix} = n!$$

$$36)\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & & n & n & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & & n & n & n \end{vmatrix} = n(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$37)\quad \begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & & x_n \end{vmatrix} = x_1(x_2-a_{12})(x_3-a_{23})\cdots(x_n-a_{n-1,n})$$

$$
۳۸)\quad \begin{vmatrix} ۳ & ۲ & ۲ & & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۲ & & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۳ & & ۲ \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ ۲ & ۲ & ۲ & & ۳ \end{vmatrix} = ۲n + ۱
$$

$$
۳۹)\quad \begin{vmatrix} a_۰ & a_۱ & a_۲ & & a_n \\ -x & x & ۰ & & ۰ \\ ۰ & -x & x & & ۰ \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & & x \end{vmatrix} = (a_۰ + a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n)x^n
$$

$$
۴۰)\quad \begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ & & a_n \\ -x_۱ & x_۲ & ۰ & & ۰ \\ ۰ & -x_۲ & x_۳ & & ۰ \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & & x_n \end{vmatrix} = x_۱ x_۲ \cdots x_n \left(\frac{a_۱}{x} + \frac{a_۲}{x_۲} + \cdots + \frac{a_n}{x_n}\right)
$$

۴۱ـ فرض کنید $A = [a_{ij}]$ که در آن $a_{ij} = min\{i, j\}$.
ثابت کنید، $|A| = ۱$

۴۲ـ فرض کنید $A = [a_{ij}]$ که در آن $a_{ij} = max\{i, j\}$.
ثابت کنید،

$$
|A| = n(-۱)^{n-۱}
$$

۴۳ـ اگر $A = [a_{ij}]$ که در آن $a_{ij} = |i - j|$.
ثابت کنید،

$$
|A| = (-۱)^{n-۱}(n - ۱)۲^{n-۲}
$$

ـ۴۴

$$
\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & & n \\ ۱ & x + ۱ & ۳ & & n \\ ۱ & ۲ & x + ۱ & & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ ۱ & ۲ & ۳ & & x + ۱ \end{vmatrix} = (x - ۱)(x - ۲)\cdots(x - n + ۱)
$$

۴۵ـ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 3-x & & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & & (n+1)-x \end{vmatrix} = (-1)^n (x-1)(x-2)\cdots(x-n)$$

۴۶ـ

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & & a_n \\ a_0 & x & a_2 & & a_n \\ a_0 & a_1 & x & & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & & x \end{vmatrix} = a_0 (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

۴۷ـ می‌دانیم اعداد ۵۴۶ و ۲۷۳ و ۱۶۹ بر ۱۳ بخش‌پذیرند، ثابت کنید دترمینان زیر نیز بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

۴۸ـ درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & a_3 b_2 c_1 & a_2 b_3 c_1 \\ 1 & a_3 b_1 c_2 & a_2 b_1 c_3 \end{vmatrix}$$

۴۹ـ درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & z' & y \\ b & z & 0 & x' \\ c & y' & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & cz' & by \\ 1 & cz & 0 & ax' \\ 1 & by' & ax & 0 \end{vmatrix}$$

درستی تساویهای زیر را نشان دهید.

۵۰) $$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 2abc$$

۵۱) $\begin{vmatrix} ۱ & a & -b \\ -a & ۱ & c \\ b & -c & ۱ \end{vmatrix} = ۱ + a^۲ + b^۲ + c^۲$

۵۲) $\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۵ \end{vmatrix} = ۰$

۵۳) $\begin{vmatrix} ۰ & a & b \\ a & ۱ & \cos c \\ b & \cos c & ۱ \end{vmatrix} = -(a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos c)$

۵۴) $\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۳ & ۶ & ۱۰ \\ ۱ & ۴ & ۱۰ & ۲۰ \\ ۱ & ۵ & ۱۵ & ۳۵ \end{vmatrix} = ۱$

۵۵) $\begin{vmatrix} -۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & -۱ \end{vmatrix} = -۱۶$

۵۶) $\begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{vmatrix} = -۳$

۵۷) $\begin{vmatrix} ۷ & ۱۰ & ۳ \\ ۳۰ & ۳۸ & ۱۲ \\ ۳۷ & ۵۰ & ۱۵ \end{vmatrix} = ۱۲$

۵۸) $\begin{vmatrix} ۳ & ۱۶ & ۲۴ & ۳۳ \\ ۱ & ۵ & ۷ & ۹ \\ ۵ & ۲۷ & ۳۶ & ۵۵ \\ ۷ & ۳۸ & ۵۱ & ۷۸ \end{vmatrix} = -۱$

۵۹ـ نشان دهید معادله

$$\begin{vmatrix} y & ۳ & ۸ & ۵ \\ x^{۲} & ۴ & ۹ & ۱ \\ x & ۲ & ۳ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

معادله یک سهمی است که از سه نقطه $(۲,۳)$، $(۳,۸)$، $(-۱,۵)$ می‌گذرد.

۶۰ـ نشان دهید معادله

$$\begin{vmatrix} y & y_{۱} & y_{۲} & y_{۳} \\ x^{۲} & x_{۱}^{۲} & x_{۲}^{۲} & x_{۳}^{۲} \\ x & x_{۱} & x_{۲} & x_{۳} \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

نمایشگر یک سهمی است که از سه نقطه $(x_{۱}, y_{۱})$، $(x_{۲}, y_{۲})$، $(x_{۳}, y_{۳})$ می‌گذرد.

۶۱ـ فرض کنید A یک ماتریس ۳×۳ باشد که هریک از درایه‌های آن ۰ یا ۱ است. بزرگترین مقدار ممکن $|A|$ چیست؟

۶۲ـ اگر $f_{۱}(x)$، $f_{۲}(x)$، $g_{۱}(x)$ و $g_{۲}(x)$ توابعی مشتقپذیر باشند و اگر

$$w = \begin{vmatrix} f_{۱}(x) & f_{۲}(x) \\ g_{۱}(x) & g_{۲}(x) \end{vmatrix}$$

در این صورت

$$\frac{dw}{dx} = \begin{vmatrix} f'_{۱}(x) & f'_{۲}(x) \\ g_{۱}(x) & g_{۲}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{۱}(x) & f_{۲}(x) \\ g'_{۱}(x) & g'_{۲}(x) \end{vmatrix}$$

۶۳ـ بدون بسط دترمینان، نشان دهید که $x = ۰$ و $x = ۲$ در معادله زیر صدق می‌کنند.

$$\begin{vmatrix} x^{۲} & x & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۵ \end{vmatrix} = ۰$$

۶۴ـ اگر A و B دو ماتریس باشد به طوری که $A = B$، در این صورت $detA = detB$. آیا عکس این مطلب درست است. یعنی از اینکه $detA = detB$ می‌توان نتیجه گرفت $A = B$؟

۶۵ـ ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & a_{۱۴} \\ ۰ & a_{۲۲} & a_{۲۳} & a_{۲۴} \\ ۰ & ۰ & a_{۳۳} & a_{۳۴} \\ ۰ & ۰ & a_{۴۳} & a_{۴۴} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ ۰ & a_{۲۲} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{۳۳} & a_{۳۴} \\ a_{۴۳} & a_{۴۴} \end{vmatrix}$$

فصل ۷

وارون یک ماتریس[1]

۱ـ۷

برای حل معادلات به صورت $ax = b$ در مجموعه اعداد حقیقی، باید کاری کرد که ضریب x برابر ۱ شود، برای این کار باید طرفین را در وارون a یعنی $\frac{1}{a} = a^{-1}$ضرب کرد، در نتیجه

$$x = a^{-1}b$$

البته، روشن است که این معادله را وقتی می‌توان به این صورت حل کرد که $a \neq 0$. نظیر این معادلات در ماتریسها نیز مطرح است، یعنی معادلات به صورت

$$AX = C$$

که در آن A و C ماتریسهای مربع هستند. همانند اعداد، راحت‌ترین کار برای حل این نوع معادلات از میان برداشتن A است، به عبارت دیگر، طرفین معادله را می‌بایست از سمت چپ در ماتریسی ضرب کنیم که A را خنثی کند. منظور از خنثی کردن A آن است که ماتریسی مانند B به دست آوریم به طوری که $BA = I$. در این صورت، B را وارون A و یا به عبارت دقیقتر وارون چپ A گویند.

تعریف: فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد. اگر ماتریسی مانند B وجود داشته باشد، به طوری که

$$AB = BA = I$$

که در آن I ماتریس واحد مرتبه n است، ماتریس B را یک وارون A گویند. در این صورت

1.Inverse of a matrix

می‌گویند Aوارون‌پذیر[1] یا غیر منفرد (ناتکین[2]) است.

مثال: نشان دهید ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۸ \end{bmatrix}$$

وارون‌پذیر است.

حل: باتوجه به تعریف باید ماتریسی ۲ × ۲ مانند B ارائه دهیم، به طوری که

$$AB = BA = I$$

برای این کار، فرض کنید

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

بنابراین،

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۲x + ۳z & ۲y + ۳t \\ ۵x + ۸z & ۵y + ۸t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ۲x + ۳z = ۱ \, , \, ۲y + ۳t = ۰ \, , \, ۵x + ۸z = ۰ \, , \, ۵y + ۸t = ۱$$

از حل دستگاه فوق نتیجه می‌شود که،

$$x = ۸ \, , \, y = -۳ \, , \, z = -۵ \, , \, t = ۲$$

بنابراین،

$$B = \begin{bmatrix} ۸ & -۳ \\ -۵ & ۲ \end{bmatrix}$$

به سادگی می‌توان دید که

$$\begin{bmatrix} ۸ & -۳ \\ -۵ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۸ \end{bmatrix}$ است، درنتیجه A وارون‌پذیر است. $B = \begin{bmatrix} ۸ & -۳ \\ -۵ & ۲ \end{bmatrix}$ وارون □

مثال: آیا ماتریس

1.Invertible

2.Nonsingular

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

وارون‌پذیر است؟

حل: در صورتی ماتریس A وراون پذیر است که ماتریس ۲×۲ای مانند

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

وجود داشته باشد، به‌طوری که

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

در نتیجه، باید برای دستگاه معادلات زیر جوابی وجود داشته باشد.

$$x + ۲z = ۱ \;,\; ۲x + ۴z = ۰ \;,\; y + ۲t = ۰ \;,\; ۲y + ۴t = ۱$$

اما این دستگاه جواب ندارد، بنابراین ماتریس A وارون‌پذیر نیست. □

در قضیه زیر نشان می‌دهیم، وارون یک ماتریس در صورت وجود یکتاست.

قبل از بیان و اثبات قضیه نخست این قضیه را در مورد یک گروه $(G, *)$ اثبات می‌کنیم. فرض کنید a دارای دو وارون a' و a'' باشد، در این صورت

زیرا e عضو بی‌اثر است.	$a'' = e * a''$
زیرا a' وارون a است.	$= (a' * a) * a''$
زیرا $*$ شرکت‌پذیر است.	$= a' * (a * a'')$
زیرا a'' وارون a است.	$= a' * e$
	$= a'$

پس، $a'' = a'$، یعنی وارون a منحصر بفرد است.

حال، اثبات فوق را برای یکتایی وارون یک ماتریس تکرار می‌کنیم.

۲ـ۷ قضیه

وارون یک ماتریس در صورت وجود منحصر بفرد است.

اثبات: فرض کنید A دارای دو وارون A' و A'' باشد، نشان می‌دهیم $A'' = A'$.

I ماتریس واحد است.	$A'' = IA''$

$$= (A'A)A''$$
$$= A'(AA'')$$
$$= A'I$$
$$= A' \quad \blacksquare$$

قرارداد. اگر A یک ماتریس مربع وارون‌پذیر باشد، در این صورت وارون A را با A^{-1} نشان می‌دهند. بنابراین

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I}$$

مثال: نشان دهید ماتریس $5I$ وارون‌پذیر است.

حل: باید ماتریسی ارائه دهیم که حاصل ضرب آن در ماتریس $5I$ ماتریس واحد باشد. برای این کار ماتریس $\frac{1}{5}I$ را برمی‌گزینیم. زیرا،

$$(5I)(\frac{1}{5}I) = (\frac{1}{5}I)(5I) = I$$

بنابراین، $5I$ وارون‌پذیر است و وارون آن $\frac{1}{5}I$ است. یعنی،

$$(5I)^{-1} = \frac{1}{5}I \quad \square$$

تذکر: تساویهای $(\frac{1}{5}I)(5I) = (5I)(\frac{1}{5}I) = I$ علاوه براینکه نشان می‌دهند $5I$وارون‌پذیر است، هم چنین نشان می‌دهند که $\frac{1}{5}I$ وارون $5I$ است.

به طریق مشابه ثابت می‌شود که برای هر عدد حقیقی ناصفر λ، ماتریس λI وارون‌پذیر است و وارون آن $\frac{1}{\lambda}I$ است، یعنی

$$(\lambda I)^{-1} = \frac{1}{\lambda}I$$

نتیجه. I و $-I$ وارون‌پذیرند و وارون I و $-I$ خود این ماتریسهاست. یعنی،

$$I^{-1} = I\ ,\ (-I)^{-1} = -I \quad \square$$

در فصل سوم دیدیم که قانون حذف در ضرب ماتریسها برقرار نیست، یعنی از $AB = AC$ همیشه نمی‌توان نتیجه گرفت که $B = C$. در قضیه زیر روشن می‌کنیم که تحت چه شرایطی قانون حذف برقرار است.

۳ـ۷ قضیه

اگر A ماتریسی وارون‌پذیر و B و C دو ماتریس دلخواه باشند به طوری که AB و AC تعریف شده باشند، در این صورت

$$AB = AC \Rightarrow B = C$$

اثبات: چون A وارون‌پذیر است، پس A^{-1} وجود دارد. بنابراین، با ضرب A^{-1} در طرفین تساوی $AB = AC$ از سمت چپ، داریم

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC)$$

باتوجه به شرکت‌پذیری ضرب ماتریسها و این واقعیت که $A^{-1}A = I$، نتیجه می‌گیریم

$$B = C \quad \blacksquare$$

نتیجه. اگر λ عددی حقیقی و ناصفر و A و B دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، در این صورت

$$\lambda A = \lambda B \Rightarrow A = B$$

اثبات: از $(\lambda I)A = \lambda A$ و $(\lambda I)B = \lambda B$، نتیجه می‌گیریم

$$(\lambda I)A = (\lambda I)B$$

چون $\lambda \neq 0$، پس λI وارون‌پذیر است و بنابر قضیه فوق می‌توان آن را از طرفین حذف کرد، یعنی

$$A = B \quad \blacksquare$$

۴ـ۷ قضیه

فرض کنید A ماتریسی وارون‌پذیر باشد. به طوری که $AB = \bar{o}$. در این صورت،

$$B = \bar{o}$$

اثبات: چون A وارون‌پذیر است، پس A^{-1} وجود دارد، و می‌توانیم تساوی زیر را نتیجه بگیریم

$$A^{-1}(AB) = A^{-1} \cdot \bar{o}$$

بنابراین،

$$IB = \bar{o} \Rightarrow B = \bar{o} \quad \blacksquare$$

قبل از اثبات قضایای زیر لازم است توجه خوانندگان را به این نکته جلب کنیم که در صورتی B وارون A است که حاصل ضرب B از سمت چپ و راست در A مساوی ماتریس واحد شود اما بعداً در قضیه ۴۵۰۷ خواهیم دید که شرط لازم و کافی برای اینکه Bوارون A باشد آن است که $AB = I$ (یا $BA = I$) . در ضمن از تساوی $AB = I$ دو مطلب زیر نتیجه می‌شود،

۱) A وارون‌پذیر است. (یا B وارون‌پذیر است.)

۲) B وارون A است. (یا A وارون B است.)

برای مثال، تساوی $A(A - ۲I) = I$ نشان می‌دهد که A وارون‌پذیر است، و در ضمن

$$A^{-۱} = A - ۲I$$

از طرف دیگر، از این تساوی می‌فهمیم که $(A - ۲I)$ نیز وارون‌پذیر است و

$$(A - ۲I)^{-۱} = A \quad \square$$

«تقسیم» در ماتریسها وجود ندارد زیرا در حالت کلی $AB^{-۱}$ مساوی $B^{-۱}A$ نیست. به علاوه برای هر ماتریس مربع مانند B معلوم نیست $B^{-۱}$ وجود داشته باشد. برای مثال، اگر بخواهیم از معادله

$$A(X + A)B^{-۱} = C$$

ماتریس X را به دست آوریم، نخست طرفین تساوی را از سمت چپ در وارون A ضرب می‌کنیم (مشروط بر اینکه $A^{-۱}$ وجود داشته باشد)

$$A^{-۱}A(X + A)B^{-۱} = A^{-۱}C$$

در نتیجه

$$(X + A)B^{-۱} = A^{-۱}C$$

حال دو طرف تساوی را از راست در B ضرب می‌کنیم

$$(X + A)B^{-۱}B = A^{-۱}CB$$

بنابراین

$$X + A = A^{-۱}CB$$

بالاخره

$$X = A^{-۱}CB - A \quad \square$$

۷ـ۵ قضیه

اگر A و B وارون‌پذیر باشند، آنگاه AB نیز وارون‌پذیر است و

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

اثبات: کافی است نشان دهیم

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$$

برای این کار محاسبات زیر را انجام می‌دهیم.

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1}\\ &= AIA^{-1}\\ &= I \quad \blacksquare\end{aligned}$$

مثال: اگر A و B و C سه ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند در این صورت برای محاسبه $(ABC)^{-1}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$\begin{aligned}(ABC)^{-1} &= [(AB)C]^{-1}\\ &= C^{-1}(AB)^{-1}\\ &= C^{-1}B^{-1}A^{-1} \quad \square\end{aligned}$$

۷ـ۶ نتیجه

اگر A_1 و A_2 و $\cdots$ و A_k، ماتریسهای مربع هم‌مرتبه و وارون‌پذیر باشند، در این صورت

$$(A_1A_2\cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

اثبات: با استقراء. $\square$

۷ـ۷ نتیجه.

اگر A ماتریسی وارون‌پذیر باشد در این صورت برای هر عدد طبیعی n، ماتریس A^n وارون‌پذیر است و وارون آن $(A^{-1})^n$ است، یعنی

$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n \quad \square$$

۷ـ۸ توانهای منفی یک ماتریس

باتوجه به نتایج فوق می‌توان برای ماتریسهای وارون‌پذیر، توان منفی نیز تعریف کرد. فرض کنید n عددی طبیعی باشد، در این صورت A^{-n} به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$A^{-n} = (A^{-1})^{n}$$

۷ـ۹ قضیه

اگر A وارون‌پذیر باشد، در این صورت A' نیز وارون‌پذیر است و داریم،

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'$$

اثبات: نشان می‌دهیم $(A^{-1})'(A') = I$.

$$\begin{aligned}(A^{-1})'(A') &= (AA^{-1})' \\ &= I' \\ &= I \quad \blacksquare\end{aligned}$$

۷ـ۱۰ قضیه

اگر A ماتریسی وارون‌پذیر و k عددی ناصفر باشد، در این صورت kAوارون‌پذیر است و داریم

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$$

اثبات: روشن است که

$$(kA)(\frac{1}{k}A^{-1}) = k(\frac{1}{k})I$$

$$= I \quad \blacksquare$$

۷ـ۱۱ نتیجه

اگر A ماتریسی وارون‌پذیر باشد، در این صورت

$$(-A)^{-1} = -A^{-1} \quad \square$$

۷ـ۱۲ گزاره

اگر A ماتریسی متقارن و وارون‌پذیر باشد، در این صورت $A^{-۱}$ نیز متقارن است.

اثبات: چون A متقارن است بنابراین $A' = A$، در نتیجه

$$(A^{-۱})' = (A')^{-۱}$$ بنابر قضیه ۷ – ۹

$$= A^{-۱}$$ زیرا A متقارن است. ■

۷ـ۱۳ گزاره

اگر A ماتریسی پاد متقارن و وارون‌پذیر باشد، در این صورت $A^{-۱}$ نیز پاد متقارن است.

اثبات: چون A پاد متقارن است پس $A' = -A$، در نتیجه

$$(A^{-۱})' = (A')^{-۱}$$

$$= (-A)^{-۱}$$

$$= -A^{-۱}$$ ■

۷ـ۱۴ قضیه

اگر A ماتریسی وارون‌پذیر باشد، در این صورت $|A| \neq ۰$.

اثبات: چون A وارون‌پذیر است بنابراین $A^{-۱}$ وجود دارد و داریم

$$AA^{-۱} = I$$

$$\Rightarrow |AA^{-۱}| = ۱$$

$$\Rightarrow |A||A^{-۱}| = ۱$$

چون حاصل ضرب دو عدد حقیقی $|A|$ و $|A^{-۱}|$ مخالف صفر است، بنابراین هر کدام مخالف صفرند. بخصوص $|A| \neq ۰$. ■

۷ـ۱۵ نتیجه

اگر A وارون‌پذیر باشد، داریم

$$|A^{-۱}| = \frac{۱}{|A|}$$ □

۷ـ۱۶ نتیجه

اگر A وارون‌پذیر باشد در این صورت برای هر عدد صحیح دلخواه n، داریم

$$|A^n| = |A|^n \quad \square$$

مثال: اگر P ماتریسی وارون‌پذیر باشد، در این صورت $|P^{-۱}AP| = |A|$ زیرا،

$$\begin{aligned} |P^{-۱}AP| &= |P^{-۱}||A||P| \\ &= \frac{۱}{|P|} \cdot |P| \cdot |A| \\ &= |A| \quad \square \end{aligned}$$

مثال: اگر A ماتریسی $n \times n$ و B ماتریسی وارون‌پذیر باشد، در این صورت

$$(B^{-۱}AB)^۲ = B^{-۱}A^۲B$$

زیرا

$$\begin{aligned} (B^{-۱}AB)^۲ &= (B^{-۱}AB)(B^{-۱}AB) \\ &= B^{-۱}A(BB^{-۱})AB \\ &= B^{-۱}AAB \\ &= B^{-۱}A^۲B \quad \square \end{aligned}$$

به طورکلی گزاره زیر برقرار است.

۷ـ۱۷ گزاره

فرض کنید A یک ماتریس دلخواه $m \times m$ و B ماتریسی $m \times m$ و وارون‌پذیر باشد. در این صورت برای هر عدد طبیعی n، داریم

$$(B^{-۱}AB)^n = B^{-۱}A^nB$$

اثبات: به ازاء $n = ۱$، حکم گزاره به وضوح برقرار است.

فرض استقراء $\quad n = k \;:\; (B^{-۱}AB)^k = B^{-۱}A^kB$

حکم استقراء $\quad n = k + ۱ \;:\; (B^{-۱}AB)^{k+۱} = B^{-۱}A^{k+۱}B$

$$\begin{aligned} (B^{-۱}AB)^{k+۱} &= (B^{-۱}AB)(B^{-۱}AB)^k \\ &= (B^{-۱}AB)(B^{-۱}A^kB) \end{aligned}$$

$$= B^{-1}A(BB^{-1})A^kB$$
$$= B^{-1}A^{k+1}B \quad \blacksquare$$

۷ـ۱۸ نتیجه

اگر A و B دو ماتریس وارون‌پذیر و هم‌مرتبه باشند، در این صورت برای هر عدد صحیح دلخواه n، داریم

$$\boxed{(B^{-1}AB)^n = B^{-1}A^nB}$$

اثبات: برای nهای طبیعی درگزاره فوق این نتیجه ثابت شده است. برای $n = 0$ هر دو طرف تساوی ماتریس واحد هستند. باتوجه به تساوی

$$(B^{-1}AB)^{-k} = [(B^{-1}AB)^k]^{-1}$$

کافی است حکم به ازاء $n = -1$ ثابت شود.

$$(B^{-1}AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}(B^{-1})^{-1}$$
$$= B^{-1}A^{-1}B \quad \square$$

تذکر: به طریق مشابه ثابت می‌شود که برای هر عدد صحیح دلخواه n داریم

$$\boxed{(BAB^{-1})^n = BA^nB^{-1}}$$

ازگزاره فوق می‌توان در محاسبه توانهای یک ماتریس استفاده کرد.

مثال: فرض کنید $AV = VD$ که در آن V ماتریسی وارون‌پذیر است. برای محاسبه A^n به صورت زیر عمل می‌کنیم.

طرفین تساوی $AV = VD$ را از سمت راست در V^{-1} ضرب می‌کنیم.

$$AVV^{-1} = VDV^{-1} \Rightarrow A = VDV^{-1}$$
$$\Rightarrow A^n = VD^nV^{-1} \quad \square$$

۷ـ۱۹ مسئله

فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},\ V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

الف) نشان دهید

$$V^{-۱} = \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

ب) نشان دهید

$$AV = VD$$

که در آن

$$D = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

ج) $A^{۱۹۹۱}$ را حساب کنید.

حل: قسمتهای «الف» و «ب» با محاسبه مستقیم ثابت می‌شوند، برای قسمت «ج» از $AV = VD$ نتیجه می‌شود $A = VDV^{-۱}$، در نتیجه

$$A^{۱۹۹۱} = VD^{۱۹۹۱}V^{-۱}$$

$$= \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-۱)^{۱۹۹۱} & ۰ \\ ۰ & ۵^{۱۹۹۱} \end{bmatrix}\frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$= \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} -۲ + (۵)^{۱۹۹۱} & ۱ + ۵^{۱۹۹۱} \\ ۲ + ۲(۵) & -۱ + ۲(۵)^{۱۹۹۱} \end{bmatrix} \quad \square$$

۷ـ۲۰ محاسبه وارون ماتریسی که در یک معادله صدق می‌کند

مثال: فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

الف) نشان دهید ماتریس A در معادله

$$A^{۳} - ۳A^{۲} - ۹A + ۳I = \bar{o}$$

صدق می‌کند.

ب) نشان دهید A وارون‌پذیر است و وارون A را حساب کنید.

حل: با محاسبه مستقیم می‌توان نشان داد که ماتریس A در معادله فوق صدق می‌کند. از طرف دیگر،

$$A^{۳} - ۳A^{۲} - ۹A + ۳I = \bar{o}$$

$$\Rightarrow A^{3} - 3A^{2} - 9A = -3I$$

$$\Rightarrow A[A^{2} - 3A - 9I] = -3I$$

$$\Rightarrow A[-\frac{1}{3}(A^{2} - 3A - 9I)] = I$$

این تساوی نشان دهنده آن است که A وارون‌پذیر است، و در ضمن

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}(A^{2} - 3A - 9I)$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

به طور کلی، فرض کنید A ماتریسی باشد که در معادله

$$A^{n} + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_{1}A + a_{0}I = 0$$

صدق می‌کند. اگر $a_0 \neq 0$، در این صورت A وارون‌پذیر است، زیرا

$$A^{n} + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_{1}A = -a_{0}I$$

$$\Rightarrow A[-\frac{1}{a_0}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_{1}I)] = I$$

پس A وارون‌پذیر است و همچنین

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_{1}I) \quad \square$$

۷ـ۲۱ قضیه

فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

و $ad - bc \neq 0$، در این صورت A وارون‌پذیر است، و

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

اثبات: در مسئله‌۳۰۸ ۱۲ دیدیم که هر ماتریس به صورت

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

در معادله

$$x^{۲} - (a+d)x + ad - bc = ۰$$

صدق می‌کند، یعنی

$$A^{۲} - (a+d)A + (ad-bc)I = \bar{o}$$

چون $ad - bc \neq ۰$ پس

$$A[A-(a+d)I] = -(ad-bc)I$$

$$\Rightarrow A\left[-\frac{۱}{ad-bc}(A-(a+d)I)\right] = I$$

پس A وارون‌پذیر است، و همچنین

$$A^{-۱} = -\frac{۱}{ad-bc}[A-(a+d)I]$$

$$= -\frac{۱}{ad-bc}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a+d & ۰ \\ ۰ & a+d \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

۷ـ۲۲ قضایا و گزاره‌های تکمیلی در مورد وارون یک ماتریس

۷ـ۲۳ مسئله

فرض کنید A ماتریسی وارون‌پذیر باشد، و برای ماتریسی مانند B، ماتریسهای $A+B$ و $A-B$ نیز وارون‌پذیر باشند، ثابت کنید.

الف) $$(A+B)A^{-۱}(A-B) = (A-B)A^{-۱}(A+B)$$

ب) $$(A-B)^{-۱}A(A+B)^{-۱} = (A+B)^{-۱}A(A-B)^{-۱}$$

۷ـ۲۴ گزاره

اگر A ماتریسی متقارن و وارون‌پذیر و B ماتریسی پاد متقارن باشد که برای آنها $A+B$ وارون‌پذیر باشد، اگر قرار دهیم

$$M = (A+B)^{-1}(A-B)$$

در این صورت

$$A = M'AM$$

۷ـ۲۵ گزاره

اگر A و B ماتریسهایی وارون‌پذیر و تعویض پذیر باشند، در این صورت
الف) A^{-1} و B تعویض پذیرند.
ب) A^{-1} و B^{-1} تعویض پذیرند.

۷ـ۲۶ گزاره

اگر r و s دو عدد حقیقی و A و B دو ماتریس وارون‌پذیر باشند که در تساوی $B = rA + sI$ صدق می‌کنند، در این صورت

$$A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

۷ـ۲۷ گزاره

اگر A یک ماتریس پوچ توان با اندیس n باشد، در این صورت $I - A$ وارون‌پذیر است. و

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^{2} + \cdots + A^{n-1}$$

۷ـ۲۸ مسئله

فرض کنید

$$f(x) = x^{5} - 3x^{2} + 7x - 1$$

و M یک ماتریس مربع وارون‌پذیر و D یک ماتریس مربع هم‌مرتبه با M باشد، ثابت کنید

$$f(MDM^{-1}) = Mf(D)M^{-1}$$

۷ـ۲۹ مسئله

اگر A و B دو ماتریس وارون‌پذیر از مرتبه n باشند، و $AB = BA$، $A^{2} = A$، $B^{2} = B$، و $k \neq -1$. اولاً، ثابت کنید ماتریس $W = I + kAB$ وارون‌پذیر است. ثانیاً، ثابت کنید

$$W^{-1} = I - \frac{k}{k+1}AB$$

۷ـ۳۰ مسئله

فرض کنید V ماتریس وارون‌پذیری باشد به طوری که $V^{-1} = V'$ و D یک ماتریس قطری باشد که برای آن $AV = VD$. ثابت کنید A ماتریسی متقارن است.

۷ـ۳۱ مسئله

اگر X و Y دو ماتریس مربع باشند و داشته باشیم $X + Y = XY$. ثابت کنید که اگر X وارون‌پذیر باشد، آنگاه Y نیز وارون‌پذیر است و

$$X^{-1} + Y^{-1} = I$$

۷ـ۳۲ مسئله

فرض کنید A ماتریس وارون‌پذیری باشد به طوری که

$$A^{-2} - A^{-1} - A + I = \bar{o}$$

ثابت کنید

$$A^{-1} = A^{2} - A + I$$

۷ـ۳۳ گزاره

فرض کنید A و B ماتریسهای مربع مرتبه n باشند. اگر ماتریس وارون پذیری مانند P وجود داشته باشد به طوری که $P^{-1}AP$ و $P^{-1}BP$ قطری باشند، در این صورت A و B تعویض‌پذیرند.

۷ـ۳۴ گزاره

اگر P ماتریسی وارون‌پذیر باشد، آنگاه

$$|P^{-1}AP - \lambda I| = |A - \lambda I|$$

۷ـ۳۵ گزاره

اگر A یا B دو ماتریس وارون‌پذیر هم‌مرتبه باشند، آنگاه

$$|AB - \lambda I| = |BA - \lambda I|$$

۷ـ۳۶ گزاره

اگر A و B دو ماتریس ناصفر باشند، و $\bar{o} = AB$، در این صورت A و Bهیچکدام وارون‌پذیر نیستند. به عبارت دیگر

$$AB = \bar{o} \Rightarrow (|A| = \cdot \wedge |B| = \cdot)$$

حل مسائل و اثبات گزاره‌های تکمیلی، در مورد وارون یک ماتریس

حل مسئله ۲۳.۷:

الف)

$$\begin{aligned}(A+B)A^{-\backprime}(A-B) &= (A+B)(A^{-\backprime}A - A^{-\backprime}B)\\ &= (A+B)(I - A^{-\backprime}B)\\ &= (A - AA^{-\backprime}B + B + BA^{-\backprime}B)\\ &= A + BA^{-\backprime}B\end{aligned}$$

ب)کافی است از طرفین تساوی «الف» وارون بگیریم. □

اثبات گزاره ۲۴.۷. نخست توجه کنید که

$$\begin{aligned}M' &= [(A+B)^{-\backprime}(A-B)]'\\ &= (A-B)'[(A+B)^{-\backprime}]'\\ &= (A'-B')[(A+B)']^{-\backprime}\\ &= (A'-B')[(A'+B')]^{-\backprime}\\ &= (A+B)(A-B)^{-\backprime}\end{aligned}$$

زیرا A متقارن و B پاد متقارن است.

حال، $M'AM$ را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}M'AM &= (A+B)(A-B)^{-\backprime}A(A+B)^{-\backprime}(A-B)\\ &= (A+B)(A+B)^{-\backprime}A(A-B)^{-\backprime} \quad \text{بنابر مسئلهٔ قبل}\\ &= IAI\\ &= A \quad \blacksquare\end{aligned}$$

اثبات گزاره ۲۵.۷. از تعویض پذیری A و B، نتیجه می‌گیریم

$$AB = BA$$
$$\Rightarrow A^{-۱}(AB)A^{-۱} = A^{-۱}(BA)A^{-۱}$$
$$\Rightarrow BA^{-۱} = A^{-۱}B$$

به طریق مشابه ثابت می‌شود که $B^{-۱}$ و A نیز تعویض پذیرند.

ب) چون A و B تعویض پذیرند، پس

$$AB = BA$$
$$\Rightarrow (AB)^{-۱} = (BA)^{-۱}$$
$$\Rightarrow B^{-۱}A^{-۱} = A^{-۱}B^{-۱} \quad \blacksquare$$

اثبات گزاره ۷.۲۶. به سادگی دیده می‌شود که A و B تعویض پذیرند. زیرا

$$AB = A(rA + sI) = rA^{۲} + sA$$
$$BA = (rA + sI)A = rA^{۲} + sA$$

حال از تساوی $AB = BA$ نتیجه می‌گیریم $B^{-۱}A^{-۱} = A^{-۱}B^{-۱}$ $\blacksquare$

اثبات گزاره ۷.۲۷. در گزاره ۳ . ۶۱ دیدیم که تساوی زیر برقرار است.

$$(I - A)(I + A + A^{۲} + \cdots + A^{n-۱}) = I - A^n$$

چون A پوچ توان با اندیس n است، پس $A^n = ۰$، و در نتیجه

$$(I - A)(I + A + A^{۲} + \cdots + A^{n-۱}) = I$$

یعنی، $I - A$ وارون‌پذیر است، و

$$(I - A)^{-۱} = I + A + A^{۲} + \cdots + A^{n-۱} \quad \blacksquare$$

حل مسئله ۷.۲۸

$$\begin{aligned}
f(MDM^{-۱}) &= (MDM^{-۱})^{۵} - ۳(MDM^{-۱})^{۲} + ۷(MDM^{-۱}) - I \\
&= MD^{۵}M^{-۱} - ۳MD^{۲}M^{-۱} + ۷MDM^{-۱} - MIM^{-۱} \\
&= MD^{۵}M^{-۱} + M(-۳D^{۲})M^{-۱} + M(۷D)M^{-۱} + M(-I)M^{-۱} \\
&= M(D^{۵} - ۳D^{۲} + ۷D - I)M^{-۱} \\
&= Mf(D)M^{-۱} \quad \square
\end{aligned}$$

حل مسئله ۲۹.۷ (روش اول) ـ با اثبات تساوی

$$(I + kAB)(I - \frac{k}{k+1}AB) = I$$

قسمتهای اولاً و ثانیاً با هم ثابت می‌شود. نخست، $(AB)^2$ را حساب می‌کنیم.

$$\begin{aligned}(AB)^2 &= ABAB \\ &= A(AB)B \qquad AB = BA \text{ زیرا} \\ &= A^2B^2 \\ &= AB \qquad\qquad B^2 = B \text{ و } A^2 = A \text{ زیرا}\end{aligned}$$

حال، به محاسبه اصلی می‌پردازیم.

$$\begin{aligned}(I + kAB)(I - \frac{k}{k+1}AB) &= I - \frac{k}{k+1}AB + kAB - \frac{k^2}{k+1}(AB)^2 \\ &= I + (\frac{-k}{k+1} + k - \frac{k^2}{k+1})AB \\ &= I\end{aligned}$$

بنابراین $I + kAB$ وارون‌پذیر است، و

$$(I + kAB)^{-1} = I - \frac{k}{k+1}AB$$

همان طورکه دیدید ما از شرط وارون‌پذیری A و B استفاده نکردیم، و درواقع برای هر دو ماتریسی که در شرایط مسئله منهای شرایط وارون‌پذیری صدق کنند، این مطلب صادق است.

روش دوم ـ اگر بخواهیم از فرض وارون‌پذیری A و B استفاده کنیم، ابتدا از شرط $A^2 = A$ نتیجه می‌گیریم $A = I$، و به طریق مشابه $B = I$. یعنی با شرایط مسئله عملاً ماتریسهای A و B ماتریسهای واحد می‌باشند، در نتیجه W به صورت زیر در می‌آید.

$$W = I + kI = (k+1)I$$

که به ازاء $k \neq -1$، وارون‌پذیر است، و

$$W^{-1} = \frac{1}{k+1}I$$

در این حالت نیز، شرط $AB = BA$ زائد است زیرا به وضوح این تساوی برقرار است. □

حل مسئله ۳۰.۷ . نشان می‌دهیم $A' = A$. برای این کار نخست از تساوی $AV = VD$ ماتریس A را به دست می‌آوریم. کافی است طرفین تساوی را از سمت چپ در V^{-1} ضرب کنیم.

$$
\begin{aligned}
& A = VDV^{-1} \\
\Rightarrow\ & A' = (VDV^{-1})' \\
& = (V^{-1})'D'V' \\
& = (V')^{-1}D'V' && \text{بنابر قضیه؛} \\
& = (V')'D'V^{-1} && \text{زیرا } V^{-1} = V' \\
& = VDV^{-1} && \text{زیرا هر ماتریس قطری متقارن است.} \\
& = A \quad \square
\end{aligned}
$$

حل مسئله ۷. ۳۱. چون X وارون‌پذیر است طرفین تساوی $X + Y = XY$ را از سمت چپ در X^{-1}ضرب می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
I + X^{-1}Y = Y &\Rightarrow Y - X^{-1}Y = I \\
&\Rightarrow (I - X^{-1})Y = I
\end{aligned}
$$

یعنی Y وارون‌پذیر است و وارون آن $I - X^{-1}$ است، بنابراین

$$
\begin{aligned}
& Y^{-1} = I - X^{-1} \\
\Rightarrow & X^{-1} + Y^{-1} = I \quad \square
\end{aligned}
$$

حل مسئله ۷. ۳۲. طرفین تساوی

$$A^{-2} - A^{-1} - A + I = \bar{o}$$

را در A^2 ضرب می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
& I - A - A^3 + A^2 = \bar{o} \\
\Rightarrow & A^3 - A^2 + A = I \\
\Rightarrow & A(A^2 - A + I) = I \\
\Rightarrow & A^{-1} = A^2 - A + I \quad \square
\end{aligned}
$$

اثبات گزاره ۳۳.۷ . قرار می‌دهیم $D_1 = PAP^{-1}$ و $D_2 = PBP^{-1}$، که در آن D_1 و D_2 در ماتریس قطری می‌باشند. چون ماتریسهای قطری تعویض پذیرند، بنابراین

$$D_1 D_2 = D_2 D_1$$
$$\Rightarrow (P^{-1}AP)(P^{-1}BP) = (P^{-1}BP)(P^{-1}AP)$$
$$\Rightarrow P^{-1}ABP = P^{-1}BAP$$

چون P وارون‌پذیر است پس می‌توان P^{-1} و P را از هر دو طرف حذف کرد بنابراین

$$AB = BA \quad \blacksquare$$

اثبات گزاره ۷.۳۴. نخست به تساوی زیر توجه کنید.

$$\lambda I = P^{-1}(\lambda I)P$$

بنابراین

$$P^{-1}AP - \lambda I = P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda I)P$$
$$= P^{-1}(A - \lambda I)P$$

در نتیجه،

$$|P^{-1}AP - \lambda I| = |P^{-1}(A - \lambda I)P|$$
$$= |P^{-1}||A - \lambda I||P|$$
$$= |A - \lambda I||P^{-1}||P|$$
$$= |A - \lambda I| \quad \blacksquare$$

اثبات گزاره ۷.۳۵.

$$|AB - \lambda I| = |A^{-1}||AB - \lambda I||A|$$
$$= |A^{-1}(AB - \lambda I)A|$$
$$= |A^{-1}(AB)A - A^{-1}(\lambda I)A|$$
$$= |BA - \lambda I| \quad \blacksquare$$

اثبات گزاره ۷.۳۶ (برهان خلف) . اگر A وارون‌پذیر باشد، در این صورت طرفین تساوی $AB = \bar{o}$ را از سمت چپ در A^{-1} ضرب می‌کنیم.

$$\Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}\bar{o}$$
$$\Rightarrow B = \bar{o}$$

که خلاف فرض است. به طریق مشابه اگر B وارون‌پذیر باشد، نتیجه می‌گیریم $A = o$،که خلاف فرض است. $\blacksquare$

۷ـ۳۷ روش محاسبه وارون یک ماتریس

برای به دست آوردن وارون یک ماتریس (در صورت وجود) روشهای مختلفی وجود دارد، در این جا یک روش آن را بیان می‌کنیم. برای این کار نخست تعاریف زیر را انجام می‌دهیم.

۷ـ۳۸ تعریف

فرض کنید $A = [a_{ij}]$ ماتریسی مربع باشد. اگر به جای هر a_{ij} همسازه آن، یعنی Δ_{ij} را قرار دهیم، ماتریس به دست آمده را **ماتریس همسازهٔ**[1] A گویند و با نمادهای $cof(A)$، A^c و یا N نشان می‌دهند. بنابراین،

$$N = cof(A) = [\Delta_{ij}]$$

که Δ_{ij}ها را به صورت زیر تعریف کرده بودیم

$$\Delta_{ij} = (-۱)^{i+j}|M_{ij}|$$

۷ـ۳۹ تعریف

اگر A یک ماتریس مربعی باشد، ترانهاده ماتریس همسازه آن را **ماتریس الحاقی**[2] A می‌نامند و با نماد $adjA$ نشان می‌دهند. بنابراین

$$adjA = N'$$

مثال: ماتریس الحاقی

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ -۲ & ۵ & ۴ \\ ۱ & ۳ & ۶ \end{bmatrix}$$

را به دست آورید.

$$\Delta_{۱۱} = \begin{vmatrix} ۵ & ۴ \\ ۳ & ۶ \end{vmatrix} = ۱۸\ ,\ \Delta_{۱۲} = -\begin{vmatrix} -۲ & ۴ \\ ۱ & ۶ \end{vmatrix} = ۱۶\ ,\ \Delta_{۱۳} = \begin{vmatrix} -۲ & ۵ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} = -۱۱$$

$$\Delta_{۲۱} = -\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۶ \end{vmatrix} = ۰\ ,\ \Delta_{۲۲} = \begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۶ \end{vmatrix} = ۱۶\ ,\ \Delta_{۲۳} = -\begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} = -۸$$

$$\Delta_{۳۱} = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۵ & ۴ \end{vmatrix} = -۶\ ,\ \Delta_{۳۲} = -\begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ -۲ & ۴ \end{vmatrix} = -۱۶\ ,\ \Delta_{۳۳} = \begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ -۲ & ۵ \end{vmatrix} = ۱۷$$

---

1. Cofactor matrix
2. Adjoint

بنابراین،

$$cof(A) = N = \begin{bmatrix} ۱۸ & ۱۶ & -۱۱ \\ ۰ & ۱۶ & -۸ \\ -۶ & -۱۶ & ۱۷ \end{bmatrix}$$

$$adjA = N' = \begin{bmatrix} ۱۸ & ۰ & -۶ \\ ۱۶ & ۱۶ & -۱۶ \\ -۱۱ & -۸ & ۱۷ \end{bmatrix} \quad \square$$

مثال: اگر

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ماتریس الحاقی را به دست آورید و درستی تساوی زیر را تحقیق کنید.

$$AN' = |A|I$$

حل:

$$\Delta_{۱۱} = d \ , \ \Delta_{۱۲} = -c \ , \ \Delta_{۲۱} = -b \ , \ \Delta_{۲۲} = a$$

بنابراین،

$$cof(A) = N = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

و

$$N' = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

حال با محاسبه مستقیم داریم

$$AN' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ad - bc & ۰ \\ ۰ & ad - bc \end{bmatrix}$$

$$= (ad - bc)I$$

$$= |A|I \quad \square$$

نتیجه فوق اتفاقی نیست بلکه در قضیه زیر نشان می‌دهیم این تساوی برای ماتریسهای مرتبه بالاتر نیز برقرار است. اما نخست لازم است بسط دترمینان A نسبت به سطر iام و همچنین ستون jام را

یادآوری کنیم.

اگر $A = [a_{ij}]$، ماتریسی $n \times n$ و Δ_{ij} همسازه درایه a_{ij} باشد، در این صورت،

$$|A| = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} \qquad (1)$$

$$|A| = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj} \qquad (2)$$

۷ـ۴۰ قضیه

فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد، در این صورت

$$a_{1i}\Delta_{1j} + \cdots + a_{ni}\Delta_{nj} = a_{i1}\Delta_{j1} + a_{i2}\Delta_{j2} + \cdots + a_{in}\Delta_{jn} = \begin{cases} 0 & ; \quad i \neq j \\ |A| & ; \quad i = j \end{cases}$$

اثبات: باتوجه به (۱) و (۲) کافی است نشان دهیم برای $i \neq j$، داریم

$$a_{i1}\Delta_{j1} + a_{i2}\Delta_{j2} + \cdots + a_{in}\Delta_{jn} = 0 = a_{1i}\Delta_{1j} + \cdots + a_{ni}\Delta_{nj} = 0$$

برای این کار قرار می‌دهیم

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ B = \\ \text{سطر زام} \longleftarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

چون دو سطر B مساویند، بنابراین $|B| = 0$. اما B بجز در سطر زام با Aمساوی است، بنابراین اگر $|B|$ را نسبت به سطر زام آن بسط دهیم، در موقع محاسبه همسازه‌ها، سطر زام حذف می‌شود و خواهیم داشت.

$$|B| = a_{i1}\Delta_{j1} + a_{i2}\Delta_{j2} + \cdots + a_{in}\Delta_{jn} = 0$$

همچنین، اگر ماتریس B را به گونه‌ای تشکیل دهیم که ستون jام آن همان ستون iام Aباشد و در بقیه جاها همان A باشد، باز هم $|B| = 0$ و با بسط $|B|$ نسبت به ستون jام آن نتیجه مطلوب به دست می‌آید. ■

۷ـ۴۱ قضیه

فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد، در این صورت

$$AN' = N'A = |A|I$$

یا

$$A(adjA) = (adjA)A = |A|I$$

اثبات: ابتدا، تساوی $AN' = |A|I$ را ثابت می‌کنیم. به طریق مشابه تساوی $N'A = |A|I$ نیز ثابت می‌شود. نخست باید توجه داشت که

$$|A|I = \begin{bmatrix} |A| & 0 & & 0 \\ 0 & |A| & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & |A| \end{bmatrix}$$

$$AN' \text{ درایه سطر } i\text{ام ستون } j\text{ام} = (A \text{ سطر } i\text{ام})(N' \text{ ستون } j\text{ام})$$

$$= [a_{i1}a_{i2}\cdots a_{in}] \begin{bmatrix} \Delta_{j1} \\ \Delta_{j2} \\ \vdots \\ \Delta_{jn} \end{bmatrix}$$

$$= a_{i1}\Delta_{j1} + a_{i2}\Delta_{j2} + \cdots + a_{in}\Delta_{jn}$$

$$= \begin{cases} 0 & ; \quad i \neq j \\ |A| & ; \quad i = j \end{cases} \quad \text{باتوجه به قضیه‌قبل}$$

$$= |A|I \text{ درایه سطر } i\text{ام ستون } j\text{ام ماتریس}$$ ■

مثال: فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۳ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۳ & ۵ & ۷ \end{bmatrix}$$

الف) $|A|$ و ماتریس الحاقی A یعنی N' را حساب کنید و درستی تساوی $AN' = N'A = |A|I$ را تحقیق کنید.

ب) نشان دهید A وارون‌پذیر است و وارون آن را به دست آورید.

حل:

$$\Delta_{۱۱} = ۱۲\ ,\ \Delta_{۱۲} = -۳\ ,\ \Delta_{۱۳} = -۳$$

$$\Delta_{۲۱} = -۱۳\ ,\ \Delta_{۲۲} = ۵\ ,\ \Delta_{۲۳} = ۲$$

$$\Delta_{۳۱} = -۷\ ,\ \Delta_{۳۲} = ۲\ ,\ \Delta_{۳۳} = ۲$$

بنابراین،

$$N' = \begin{bmatrix} ۱۲ & -۱۳ & -۷ \\ -۳ & ۵ & ۲ \\ -۳ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

از طرف دیگر،

$$|A| = \begin{vmatrix} ۲ & ۴ & ۳ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۳ & ۵ & ۷ \end{vmatrix} = ۲(۱۲) + ۳(-۷) = ۳$$

حال، AN' را حساب می‌کنیم

$$AN' = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۳ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۳ & ۵ & ۷ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱۲ & -۱۳ & -۷ \\ -۳ & ۵ & ۲ \\ -۳ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} = ۳I = |A|I$$

به طریق مشابه

$$N'A = ۳I = |A|I$$

ب) چون $AN' = N'A = ۳I$، طرفین را در $\frac{۱}{۳}$ ضرب می‌کنیم، داریم

$$A(\frac{۱}{۳}N') = (\frac{۱}{۳}N')A = I$$

بنابراین A وارون‌پذیر است و $\frac{۱}{۳}N'$ وارون آن است، یعنی

$$A^{-۱} = \frac{۱}{۳}N'$$

اکنون، همه چیز برای پاسخ به دو سؤال زیر آماده است.

۱ـ در چه صورت یک ماتریس مربع وارون‌پذیر است؟

۲ـ وارون یک ماتریس وارون‌پذیر را چگونه می‌توان به دست آورد؟

در قضیه زیر به این دو سؤال پاسخ می‌دهیم.

۷ـ۴۲ قضیه

فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ با دترمینان ناصفر باشد، در این صورت A وارون‌پذیر است، و داریم

$$\boxed{A^{-۱} = \frac{۱}{|A|}N'}$$

یا

$$\boxed{A^{-۱} = \frac{۱}{|A|}adj A}$$

اثبات: در قضیه ۷۰۴۰ دیدیم که

$$AN' = N'A = |A|I$$

چون $|A| \neq ۰$، پس می‌توان طرفین را در $\frac{۱}{|A|}$ ضرب کرد

$$A\left(\frac{۱}{|A|}N'\right) = \left(\frac{۱}{|A|}N'\right)A = I$$

باتوجه به تعریف وارون، ماتریس A وارون‌پذیر است و وارون A عبارت است از

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|}N' \quad \blacksquare$$

۷ـ۴۳ نتیجه

ماتریس A وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر $|A| \neq ۰$، یا اینکه ماتریس A وارون‌پذیر نیست اگر و تنها اگر $|A| = ۰$.

اثبات: اگر $|A| \neq ۰$، بنابر قضیه بالا، A وارون‌پذیر است، برعکس این مطلب در قضیه ۱۴.۷ ثابت شده است. $\blacksquare$

مثال: ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

وارون‌پذیر نیست، زیرا

$$|A| = ۰ \quad \square$$

۷ـ۴۴ قضیه

اگر ماتریس ناصفر A مقسوم علیه صفر باشد در این صورت وارون‌پذیر نیست.

اثبات: چون A مقسوم علیه صفر است پس ماتریس ناصفری مانند B وجود دارد به طوری که

$$AB = \bar{o}$$

باتوجه به گزاره ۷ ـ ۳۶ نتیجه می‌گیریم $|A| = ۰$ و $|B| = ۰$ یعنی Aوارون‌پذیر نیست. ■

تذکر: عکس این قضیه نیز درست است ولی با اطلاعات کنونی نمی‌توان آن را ثابت کرد. بنابراین صرفاً به بیان آن می‌پردازیم.

۷ـ۴۵ قضیه:

اگر A وارون‌پذیر نباشد در این صورت مقسوم علیه صفر است.

مثال: ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix}$$

مقسوم علیه صفر است زیرا $|A| = ۰$.

وارون ماتریسهای ۲×۲

در صورتی که ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

وارون‌پذیر باشد، وارون آن به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$N' = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

مثلاً هر ماتریس به صورت

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

وارون‌پذیر است زیرا دترمینان آن ناصفر است، و وارون آن به صورت زیر است.

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

تذکر: اگرچه در این بخش برای به دست آوردن وارون یک ماتریس فرمولی ارائه شده است، اما استفاده از این فرمول برای ماتریسهای بزرگ چندان عملی نیست. برای همین به خاطر اهمیت کاربردی مسئله یافتن وارون یک ماتریس روشهای بسیاری برای به دست آوردن آن ارائه شده است که اغلب آنها از جنبه محاسباتی به مسئله وارون یک ماتریس توجه دارند. ما در این کتاب بیشتر به جنبه نظری مفهوم وارون یک ماتریس علاقمندیم و همین قضایای نظری برای وارون یک ماتریس برای ما کافی است.
بالاخره این بخش را با قضیه زیر به پایان می‌رسانیم.

۷ـ۴۶ قضیه

اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه باشند به طوری که

$$AB = I$$

در این صورت A وارون‌پذیر است و $B = A^{-1}$.

اثبات: از اینکه $AB = I$ نتیجه می‌گیریم $|A||B| = 1$، بنابراین $|A| \neq 0$ یعنی A وارون‌پذیر است. حال اگر طرفین تساوی $AB = I$ را از سمت چپ در A^{-1} ضرب کنیم نتیجه می‌شود $B = A^{-1}$. ■

۷ـ۴۷ قضایا و گزاره‌های تکمیلی در مورد ماتریس الحاقی

دیدیم که اگر $A = [a_{ij}]$ ماتریسی $n \times n$ و $N = [\Delta_{ij}]$ ماتریس همسازه آن باشد، Δ_{ij}ها به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

ترانهاده ماتریس همسازه A، یعنی N' را ماتریس الحاقی نامیدیم. نمایش ماتریس الحاقی A با N' چندان صحیح نیست، زیرا وابستگی آن را به A نشان نمی‌دهد. از این رو، در اغلب کتابهای جبر خطی ماتریس الحاقی A را با $adjA$ نشان می‌دهند.

در قضیه ۷۰۴۱ دیدیم که

$$A(adjA) = (adjA)A = |A|I$$

مثال: مثالی از یک ماتریس غیر صفر ارائه دهید که ماتریس الحاقی آن صفر باشد.

حل: ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

را در نظر بگیرید. به سادگی دیده می‌شود که تمام همسازه‌های آن صفر است، بنابراین

$$N' = adj(A) = \bar{o} \quad \square$$

۷ـ۴۸ گزاره

اگر A یک ماتریس ۲ × ۲ باشد، در این صورت

$$adj(adjA) = A$$

اثبات: فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

در این صورت

$$adjA = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow adj(adjA) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A \quad \blacksquare$$

ـ۴۹ گزاره

اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد، در این صورت

$$|N'| = |adjA| = |A|^{n-۱}$$

اثبات: دو حالت تشخیص می‌دهیم.

حالت اول. $|A| = 0$، داریم $A \cdot adjA = 0$. در این صورت اگر A ماتریس صفر باشد، بدیهی است $adjA$ نیز ماتریس صفر است و دترمینان هر دو ماتریس صفر است بنابراین رابطه مورد نظر برقرار است. در حالتی که $A \neq 0$ باشد. از این که $A \cdot adjA = 0$ نتیجه می‌گیریم $adjA$ وارون ناپذیر است و $|adjA| = 0$ و باز هم رابطه مورد نظر برقرار است.

حالت دوم. $|A| \neq 0$. در این صورت از $A \cdot adjA = |A|I$ نتیجه می‌گیریم

$$|A||adjA| = |\,|A|I\,|$$

چون A از مرتبه n است، پس

$$|A||adjA| = |A|^n|I|$$

چون $|A| \neq 0$، پس

$$|adjA| = |A|^{n-1} \quad \blacksquare$$

۷ـ۵۰ گزاره

اگر A و B دو ماتریس وارون‌پذیر هم‌مرتبه باشند، در این صورت

$$adj(AB) = adjB \cdot adjA$$

اثبات: می‌دانیم

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|AB|}adj(AB) = \frac{1}{|B|}adjB \cdot \frac{1}{|A|} \cdot adjA$$

و از آنجا

$$\Rightarrow adjAB = adjB \cdot adjA \quad \blacksquare$$

۷ـ۵۱ گزاره

اگر A ماتریسی $n \times n$ با دترمینان ناصفر باشد، در این صورت

$$adj(adjA) = |A|^{n-2}A$$

اثبات: باتوجه به قضیه ۴۱۰۷ داریم

$$\begin{aligned} (adjA)adj(adjA) &= |adjA|I \\ &= |A|^{n-1}I \\ \Rightarrow A(adjA)adj(adjA) &= |A|^{n-1}\cdot A \\ \Rightarrow |A|I\cdot adj(adjA) &= |A|^{n-1}\cdot A \\ \Rightarrow adj(adjA) &= |A|^{n-2}\cdot A \end{aligned}$$

زیرا $|A| \neq 0$ ■

۵۲ـ۷ گزاره

اگر A ماتریسی $n \times n$ با دترمینان ناصفر باشد، در این صورت

$$|adj(adjA)| = |A|^{(n-1)^2}$$

اثبات: درگزاره قبل دیدیم که

$$adj(adjA) = |A|^{n-2}A$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |adj(adjA)| &= |\, |A|^{n-2}\cdot A\,| \\ &= (|A|^{n-2})^n|A| \\ &= |A|^{n^2-2n+1} \\ &= |A|^{(n-1)^2} \end{aligned}$$

روش دوم. باتوجه به گزاره ۴۹۰۷ داریم

$$\begin{aligned} |adj(adjA)| &= |adjA|^{n-1} \\ &= (|A|^{n-1})^{n-1} \\ &= |A|^{(n-1)^2} \end{aligned}$$ ■

مثال: اگر A ماتریسی $n \times n$ با دترمینان ناصفر باشد، مطلوب است محاسبه

$$|adj(adj(adjA))|$$

حل:

$$\begin{aligned}|adj(adj(adjA))| &= |adj(adjA)|^{n-1} \\ &= (|A|^{(n-1)^2})^{n-1} \\ &= |A|^{(n-1)^3} \quad \square\end{aligned}$$

۷ـ۵۳ گزاره

اگر A ماتریس متقارن و وارون‌پذیر باشد در این صورت $adjA$ نیز متقارن است.

اثبات: می‌دانیم

$$AadjA = |A|I = (adjA)A$$

از طرفین $(adjA)A = |A|I$ ترانهاده می‌گیریم. باتوجه به اینکه A و $|A|I$ متقارن هستند، داریم

$$A(adjA)' = |A|I$$

از طرف دیگر

$$A(adjA) = |A|I$$

بنابراین

$$A(adjA)' = A(adjA)$$

چون A وارون‌پذیر است، بنابراین می‌توان آن را از طرفین حذف کرد یعنی،

$$(adjA)' = adjA$$

یعنی، $adjA$ متقارن است. ■

۷ـ۵۴ گزاره

اگر A ماتریسی وارون‌پذیر و پاد متقارن باشد، در این صورت $adjA$ نیز پاد متقارن است.

اثبات: تمرین.

۷ـ۵۵ گزاره

اگر A ماتریسی بالا مثلثی باشد، در این صورت ماتریس الحاقی A نیز بالا مثلثی است.

اثبات: فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

نشان می‌دهیم ماتریس همسازه A یعنی

$$N = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & & \Delta_{2n} \\ \vdots & & & \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & & \Delta_{nn} \end{bmatrix}$$

پایین مثلثی است. یعنی ثابت می‌کنیم به ازای $p < q$، $\Delta_{pq} = 0$. برای مثال اگر بخواهیم نشان دهیم $\Delta_{57} = 0$، از روی ماتریس A، ماتریسی می‌سازیم که تمام درایه‌های سطر پنجم و ستون هفتم آن به جز درایه سطر پنجم ستون هفتم آن که مساوی واحد است صفرند و سایر درایه‌هایش همان درایه‌های A باشد. یعنی

$$\begin{array}{r|ccccc|} & & & & \text{ستون هفتم} & \\ & & & & \uparrow & \\ & a_{11} & a_{12} & a_{15} & 0 & a_{1n} \\ & 0 & a_{22} & a_{25} & 0 & a_{2n} \\ & \vdots & & & & \\ \text{سطر پنجم} \leftarrow & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \vdots & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{7n} \\ & \vdots & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{array}$$

اگر این دترمینان را نسبت به سطر پنجم یا ستون هفتم بسط دهیم مساوی Δ_{57} است. از طرف دیگر چون این دترمینان بالا مثلثی است و حداقل دو درایه واقع بر قطر یعنی a_{55} و a_{77} صفرند، بنابراین مقدار دترمینان صفر است. در نتیجه $\Delta_{57} = 0$. به همین شیوه ثابت می‌شود که به ازای $p < q$، $\Delta_{pq} = 0$. یعنی N پایین مثلثی است در نتیجه، N' یعنی ماتریس الحاقی A بالا مثلثی است. ■

به طریق مشابه گزاره زیر ثابت می‌شود.

۷ـ۵۶ گزاره

اگر A ماتریسی پایین مثلثی باشد، در این صورت ماتریس الحاقی A نیز پایین مثلثی است.

۷ـ۵۷ نتیجه

ماتریس الحاقی هر ماتریس قطری، یک ماتریس قطری است.

۷ـ۵۸ وارون ماتریسهای خاص

۷ـ۵۹ وارون ماتریس واحد

باتوجه به تساوی $II = I$ معلوم است که $I^{-۱} = I$.

۷ـ۶۰ وارون ماتریسهای اسکالر

می‌دانیم هر ماتریس اسکالر به صورت kI است که k عددی است حقیقی. روشن است که این ماتریس در صورتی وارون‌پذیر است که $k \neq ۰$. از طرف دیگر باتوجه به تساوی

$$(\frac{۱}{k}I)(kI) = (kI)(\frac{۱}{k}I) = I$$

نتیجه می‌گیریم

$$(kI)^{-۱} = \frac{۱}{k}I$$

یعنی، وارون یک ماتریس اسکالر ماتریسی اسکالر است و در واقع

$$\begin{bmatrix} k & & O \\ \vdots & & \\ O & & k \end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix} k^{-۱} & & O \\ \vdots & & \\ O & & k^{-۱} \end{bmatrix}$$

۷ـ۶۱ وارون ماتریسهای قطری

چون دترمینان هر ماتریس قطری برابر حاصل ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی است، پس یک ماتریس قطری وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر تمام درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن ناصفر باشند. از طرف دیگر اگر ماتریس قطری

$$\begin{bmatrix} d_۱ & & & O \\ & d_۲ & & \\ \vdots & & & \vdots \\ O & & & d_n \end{bmatrix}$$

را در نظر بگیریم و فرض کنیم که تمام d_iها ناصفر باشند. در این صورت، داریم

$$\begin{bmatrix} d_1 & & O \\ & d_2 & \\ O & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & & O \\ & \frac{1}{d_2} & \\ O & & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & O \\ & 1 & \\ O & & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین،

$$\begin{bmatrix} d_1 & & O \\ & d_2 & \\ O & & d_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & & O \\ & \frac{1}{d_2} & \\ O & & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر، اگر

$$D = diag(d_1, d_2, \cdots, d_n)$$

در این صورت،

$$D^{-1} = diag(d_1^{-1}, d_2^{-1}, \cdots, d_n^{-1})$$

۷ـ۶۲ وارون ماتریسهای مثلثی

چون دترمینان یک ماتریس مثلثی برابر حاصل ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن است، ازاین‌رو یک ماتریس مثلثی، وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر تمام درایه‌های واقع بر قطر آن ناصفر باشند

مثال: وارون ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

را به دست آورید.

حل: ماتریس الحاقی A عبارت است از

$$adj A = \begin{bmatrix} 12 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

از طرفی ۲۴ = $|A|$ بنابراین

$$A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 12 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{24} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad \square$$

ملاحظه می‌کنید که وارون ماتریس بالا مثلثی A، ماتریسی بالا مثلثی است. این نتیجه اتفاقی نیست و قضیه زیر حالت کلی این نتیجه را بیان می‌دارد.

۷ـ۶۳ قضیه

وارون یک ماتریس بالا مثلثی وارون‌پذیر ماتریسی بالا مثلثی است.

اثبات: باتوجه به گزاره ۷ ـ ۵۵ الحاقی هر ماتریس بالا مثلثی، ماتریسی بالامثلثی است، بنابراین باتوجه به تساوی

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj A$$

A^{-1} نیز بالامثلثی است.

به طریق مشابه می‌توان قضیه زیر را نیز ثابت کرد.

۷ـ۶۴ قضیه

وارون هر ماتریس پایین مثلثی، ماتریسی پایین مثلثی است.

۷ـ۶۵ گزاره

اگر در ماتریس بالا (پایین) مثلثی A، a_{11}، a_{22}، $\cdots$ و a_{nn} همگی ناصفر باشند، در این صورت درایه‌های قطر اصلی A^{-1} عبارتند از

$$\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \cdots, \frac{1}{a_{nn}}$$

اثبات: یک محاسبه ساده نشان می‌دهد که در ضرب دو ماتریس بالا (یا پایین) مثلثی، درایه‌های قطر اصلی از حاصل ضرب درایه‌های قطرهای اصلی آن دو ماتریس به دست می‌آیند، یعنی

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & * & & * \\ & a_{۲۲} & & * \\ & & & \vdots \\ O & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{۱۱} & * & & * \\ & b_{۲۲} & & * \\ & & & \vdots \\ O & & & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{۱۱}b_{۱۱} & * & & * \\ & a_{۲۲}b_{۲۲} & & * \\ & & \ddots & \vdots \\ O & & & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

که در بالا علامت * نمایانگر اعداد دلخواه هستند. بنابراین اگر ماتریس بالا مثلثی $B = [\,b_{ij}\,]$ وارون ماتریس بالا مثلثی $A = [\,a_{ij}\,]$ باشد، باید

$$AB = I$$

در نتیجه درایه‌های قطر اصلی AB همگی مساوی ۱ هستند. از طرف دیگر، درایه‌های قطر اصلی AB به صورت

$$a_{ii}b_{ii}$$

هستند. در نتیجه

$$a_{ii}b_{ii} = ۱$$

بنابراین،

$$b_{ii} = \frac{۱}{a_{ii}} \quad \blacksquare$$

۷ـ۶۶ محاسبه وارون یک ماتریس با استفاده از افرازبندی

۷ـ۶۷ قضیه

اگر A و C ماتریسهای وارون‌پذیر باشند نشان دهید.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix} A^{-۱} & -A^{-۱}BC^{-۱} \\ O & C^{-۱} \end{bmatrix}$$

اثبات: فرض کنید وارون $\begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}$ به صورت زیر باشد.

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$$

بنابراین،

$$\begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix}$$

در نتیجه،

$$\begin{cases} AP + BR = I \\ AQ + BS = O \\ CR = O \\ CS = I \end{cases}$$

چون C وارون‌پذیر است از دو معادله آخر نتیجه می‌شود $R = O$ و $S = C^{-1}$. در نتیجه، $P = A^{-1}$ و $Q = -A^{-1}BC^{-1}$.

یعنی،

$$\begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}$$

مثال: وارون ماتریس زیر را به دست آورید.

$$T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & -\sin\beta & \cos\beta \\ 0 & 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

حل: قرار می‌دهیم.

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

بنابراین،

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}$$

از طرف دیگر،

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \ C^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

$$-A^{-۱}BC^{-۱} = -\begin{bmatrix} \cos(\alpha-\beta+\gamma) & -\sin(\alpha-\beta+\gamma) \\ \sin(\alpha-\beta+\gamma) & \cos(\alpha-\beta+\gamma) \end{bmatrix}$$

بنابراین،

$$T^{-۱} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & -\cos(\alpha-\beta+\gamma) & \sin(\alpha-\beta+\gamma) \\ \sin\alpha & \cos\alpha & -\sin(\alpha-\beta+\gamma) & -\cos(\alpha-\beta+\gamma) \\ ۰ & ۰ & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ ۰ & ۰ & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

تمرینات فصل ۷

۱ـ اگر A و B دو ماتریس وارون‌پذیر و هم‌مرتبه باشند، ثابت کنید ماتریس

$$D = (A')^{-۱}B^{-۱} - (B')^{-۱}A^{-۱}$$

پاد متقارن است.

۲ـ در صورتی که ماتریس A به شکل زیر داده شده باشد.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

اولاً، اعداد p و q را چنان پیدا کنید که

$$A^{۲} + pA + qI = ۰$$

ثانیاً، با استفاده از تساوی اخیر، ماتریس وارون A را پیدا کنید.

۳ـ ماتریس مربع A در رابطه $A^{۲} + A + I = \bar{o}$ صدق می‌کند. ثابت کنید Aوارون‌پذیر است.

۴ـ اگر A یک ماتریس $n \times n$ و I ماتریس همانی $n \times n$ و

$$A^{۲} = A + ۲I$$

اولاً، ثابت کنید A وارون‌پذیر است. ثانیاً، $A^{-۱}$ را برحسب A و I به دست آورید.

۵ـ اگر

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

α و β را چنان معین کنید که داشته باشیم

$$A^{2} = \alpha A + \beta I$$

سپس به کمک این تساوی، A^{-1} را به دست آورید.

۶ـ اگر ماتریس A در رابطه $A^{3} = 2I$ صدق کند، ثابت کنید $A - I$ وارون‌پذیر است.

۷ـ اگر

$$M = \{[(BC)(A' + B)(A - C)^{-1}]'\}^{-1}$$

و

$$M_{1} = [(A + B')(BC)']^{-1}(A' - C')$$

اولاً، ثابت کنید $M = M_{1}$.

ثانیاً، با فرض $B + C = A - A'$ ثابت کنید

$$M = (C^{-1}B^{-1})'$$

۸ـ دو ماتریس A و B را متشابه گویند، هرگاه ماتریس وارون‌پذیری مانند P وجود داشته باشد به طوری که

$$B = P^{-1}AP$$

نشان دهید تشابه ماتریسها یک رابطه هم ارزی است.

۹ـ نشان دهید که وارون ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & -1 & 0 \\ c & d & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

با خود ماتریس برابر است.

۱۰ـ اگر A پوچ توان باشد نشان دهید هر ماتریس متشابه با A نیز پوچ توان است.

۱۱ـ اگر A خود توان باشد نشان دهید هر ماتریس متشابه با A نیز خود توان است.

۱۲ـ دو ماتریس A و B را همنهشت گویند، هرگاه ماتریس وارون‌پذیری مانند P وجود داشته باشد به طوری که

$$B = P'AP$$

نشان دهید همنهشتی ماتریسها یک رابطه هم ارزی است.

۱۳ـ نشان دهید ماتریس الحاقی

$$A = \begin{bmatrix} -۴ & -۳ & -۳ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۴ & ۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

مساوی خود ماتریس A است.

۱۴ـ فرض می‌کنیم $A_n = [a_{ij}]$، ماتریس پایین مثلثی‌ای باشد که درایه‌های پایین و روی قطر اصلی آن اعداد مثلث پاسکال باشند. برای مثال،

$$A_۴ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

همچنین فرض می‌کنیم $B = [b_{ij}]$ ماتریسی به صورت زیر باشد

$$b_{ij} = (-۱)^{i+j} a_{ij}$$

به ازای $n = ۲, ۳, ۴$، ثابت کنید

$$adj A_n = [b_{ij}] = A_n^{-۱}$$

۱۵ـ گوییم ماتریس $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ دارای **وارون راست** است هرگاه برای ماتریسی مانند B داشته باشیم $AB = I$ و گوییم A دارای **وارون چپ** است هرگاه برای ماتریسی مانند C داشته باشیم $CA = I$. a و b و c را طوری تعیین کنید که ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۷ & -۱ & -۱ & a \\ -۳ & ۱ & ۰ & b \\ -۳ & ۰ & ۱ & c \end{bmatrix}$$

وارون چپ ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۴ & ۳ \\ ۳ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

باشد.

۱۶ـ اگر

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۴ \\ -۱ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$$

نشان دهید

$$A^{-۱} = -\frac{۱}{۳}(A^{۲} - ۲A - ۴I)$$

۱۷ـ اگر $A^{-۱}$ و $B^{-۱}$ وجود داشته باشد آیا می‌توان گفت که $(A+B)^{-۱}$ وجود دارد؟

۱۸ـ وارون ماتریس $B = [b_{ij}]_{۴\times۴}$ را به دست آورید در صورتی که:

$$b_{ij} = [[\tfrac{j}{i}]]$$

۱۹ـ وارون ماتریس $A = [a_{ij}]_{۳\times۳}$ را به دست آورید در صورتی که:

$$a_{ij} = \frac{(i+j)!}{i!j!}$$

۲۰ـ دو ماتریس وارون‌پذیر $A = [a_{ij}]_{۲\times۲}$ و $B = [b_{ij}]_{۲\times۲}$ را چنان بیابید که $A+B$ نیز وارون‌پذیر باشد.

۲۱ـ اگر $a \neq ۰$، وارون ماتریس

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ ۰ & a & b & c \\ ۰ & ۰ & a & b \\ ۰ & ۰ & ۰ & a \end{bmatrix}$$

را بیابید.

۲۲ـ اگر A و B دو ماتریس وارون‌پذیر هم‌مرتبه باشند، نشان دهید چهار تساوی زیر معادلند.

الف) $AB = BA$ ب) $AB^{-۱} = B^{-۱}A$

ج) $A^{-۱}B = BA^{-۱}$ د) $A^{-۱}B^{-۱} = B^{-۱}A^{-۱}$

۲۳ـ هریک از عبارات زیر را تا حد امکان ساده کنید.

۱. $A(B + A^{-۱})(B^{-۱}A^{-۱})$

۲. $(A + B)(A^{-۱} - B^{-۱})$

۳. $[(A^{۳})^{-۱}A^{۲}]^{-۱}$

۲۴ـ وارون هریک از ماتریسها را باتوجه به افرازهای مشخص شده پیدا کنید.

$$a)\ \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \qquad b)\ \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

۲۵ـ یک افراز مناسب برای هریک از ماتریسهای زیر مشخص کنید و سپس وارون آنها را پیدا کنید.

$$a)\ \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} \qquad b)\ \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & +۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

۲۶ـ فرض کنید $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$.

a) $A+B$، $(A+B)^{-۱}$ و $A^{-۱}+B^{-۱}$ را بیابید و سپس نشان دهید

$$(A+B)^{-۱} \neq A^{-۱}+B^{-۱}$$

۲۷ـ دو ماتریس A و B ارائه دهید به طوری که $A^{-۱}$ و $B^{-۱}$ موجود باشد اما $(A+B)^{-۱}$ موجود نباشد.

۲۸ـ فرض کنید A، X، B و C ماتریسهای $n \times n$ باشند و $A^{-۱}$ وجود داشته باشد.
از معادله $A(X+B)A^{-۱} = C$، X را به دست آورید.

۲۹ـ اگر A و B دو ماتریس وارون‌پذیر باشند به طوری که $(AB)^{۲} = A^{۲}B^{۲}$
نشان دهید A و B تعویض پذیرند. در صورتی که حداقل یکی از دو ماتریس A یا Bوارون‌پذیر نباشد آیا می‌توان همین نتیجه را گرفت؟

فصل ۸

تبدیلات خطی صفحه[1]

۸ـ۱

قبل از پرداختن به تعریف تبدیل خطی در صفحه، نخست به مطالب زیر توجه کنید.

می‌دانیم $R^۲$، مجموعه همه زوج مرتبهای به صورت (x, y) است که x و y اعدادی حقیقی هستند. یعنی:

$$R^۲ = \{(x, y) | x, y \in R\}$$

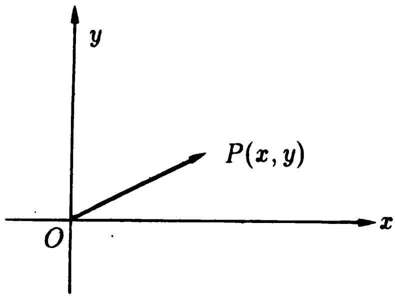
با تحلیلی کردن صفحه توسط انتخاب یک دستگاه مختصات به هر نقطه P در صفحه، زوج مرتب (x, y) از اعداد حقیقی، موسوم به مختصات آن، مربوط می‌شود. بر عکس، به هر زوج مرتب از $R^۲$ نیز نقطه‌ای از صفحه مربوط می‌شود. نقطه P به مختصات (x, y) را با $P(x, y)$، یا فقط (x, y)، نشان می‌دهیم. بنابراین مجموعه $R^۲$ را می‌توان مجموعه تمام نقاط صفحه پنداشت. ماتریس ۱ × ۲

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

را که در آن x و y اعدادی حقیقی‌اند، در نظر می‌گیریم. به X پاره‌خط جهت‌داری را که نقطه ابتدایی آن مبدأ و نقطه انتهایی آن $P(x, y)$ است نظیر می‌کنیم. پاره‌خط جهت‌دار از O به P را با $\overrightarrow{OP}$ نشان می‌دهیم، و Oرا ابتدا و P را انتهای آن می‌نامیم. جهت هر پاره‌خط جهت‌دار با علامت سهم روی آن مشخص می‌شود (شکل ۸ ـ ۱).

---

1. Plane Linear Transformations



شکل ۸ـ۱

به عکس، به هر پاره‌خط جهت‌دار $\overrightarrow{OP}$، با ابتدای O و انتهای $P(x,y)$ ماتریس $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نظیر می‌شود.

پاره‌خط جهت‌دار $\overrightarrow{OP}$ را بردار نیز می‌نامند. بنابراین هر بردار در صفحه یک ماتریس ۱ × ۲ به صورت $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ است و بر عکس. از طرف دیگر به هر بردار $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ می‌توان نقطه منحصر به فرد $P(x,y)$ را نظیر کرد و برعکس به هر نقطه $P(x,y)$ بردار منحصر به فرد $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نظیر می‌شود. از این رو، بردار $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ را به صورت (x,y) نیز خواهیم نوشت. البته این ارتباط به وسیله پاره‌خط جهت‌دار $\overrightarrow{OP}$، که O مبدأ و P نقطه‌ای به مختصات (x,y) است، انجام می‌شود (شکل ۸ ۱).

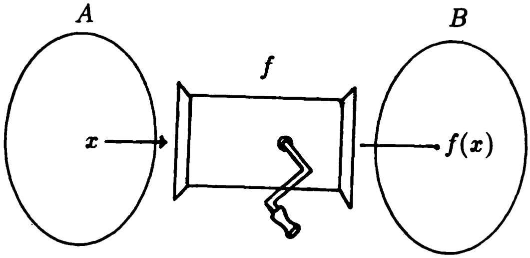
خلاصه اینکه:

از این پس، عضو (x,y) از R^2 را با نقطه P از صفحه یکی می‌گیریم و به (x,y) نقطه صفحه هم می‌گوییم. از طرف دیگر به کمک نقطه (x,y) در صفحه ماتریس $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ را می‌توان مشخص کرد. پس هر یک از نمادهای P، $\overrightarrow{OP}$، $\vec{P}$ و $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ همگی نمایش یک نقطه از صفحه است. یعنی با تحلیلی کردن صفحه با یک دستگاه مختصات می‌توان صفحه را همزمان هم مجموعه تمام نقاط و هم مجموعه تمام بردارها در نظر گرفت. به این دلیل و باتوجّه به متن، R^2 را گاهی مجموعه زوجهای مرتب (x,y) و گاهی مجموعه تمام ماتریسهای ۱ × ۲ مانند $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ خواهیم گرفت.

۸ـ۲ تبدیل

در این فصل می‌خواهیم به بررسی توابعی بپردازیم که از یک فضای برداری در فضای برداری دیگری تعریف شده‌اند، به خصوص توجه خاصی به توابع از R^2 در R^2 خواهیم داشت. بنابراین لازم است ابتدا مفهوم تابع را یادآوری کنیم.

یک تابع از یک مجموعه A در یک مجموعه B، قاعده‌ای است که به هر عضو A (تمام اعضای A)، عضو معینی از B را مربوط سازد. در واقع یک تابع را می‌توان به منزله یک ماشین تصور کرد، که وقتی عضوی از A را در داخل این ماشین قرار می‌دهیم ماشین روی این عضو اثر کرده و عضوی از B را بیرون می‌دهد. مجموعه A را دامنه و مجموعه B را مجموعه هدف تابع A می‌گوییم.



شکل ۸ـ۲

در کتابهای مقدماتی جبر، ما صرفاً با توابعی سر و کار داریم که A و B زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی‌اند اما در اینجا A و B فضای برداری‌اند. در این حالت هر تابع از یک فضای برداری V در یک فضای برداری W را یک **تبدیل** گوییم، به ویژه هر تابع از $R^۲$ در $R^۲$ را یک **تبدیل در صفحه** گوییم.

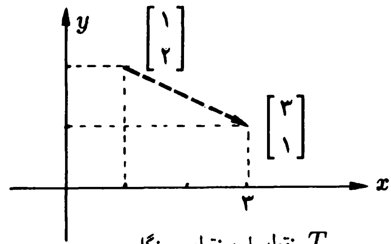
۸ـ۳ تعریف

هر تبدیل صفحه، تابعی است از $R^۲$ در $R^۲$. یعنی هر تبدیل T در صفحه به هر نقطه از صفحه طبق قاعده معینی، نقطه دیگری از صفحه را نظیر می‌کند.

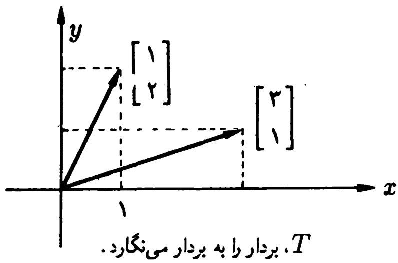
مثال: تابع T از $R^۲$ به $R^۲$ که به صورت $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x^۳ + ۲ \\ y - ۱ \end{bmatrix}$ تعریف شده، یک تبدیل در صفحه است. مثلاً $T\left(\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$. در این صورت گوییم تبدیل T، نقطه $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ را به نقطه $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$ می‌نگارد یا گویند $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$ تصویر یا تبدیل یافته $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ تحت T است. گاهی این تبدیل را به صورت زیر هم نشان می‌دهند.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{T} \begin{bmatrix} x^۳ + ۲ \\ y - ۱ \end{bmatrix}$$

به دو روش می‌توان تساوی $T\left(\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$ را تعبیر هندسی کرد. ما می‌توانیم ماتریسهای $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$ را هم به عنوان بردار و هم به عنوان نقاط در نظر بگیریم. با تعبیر اول، T یک بردار را به یک بردار دیگر می‌نگارد و با تعبیر دوم، تبدیل T، یک نقطه را به نقطه دیگر می‌برد (شکل ۸ـ۳). □



T، نقطه را به نقطه می‌نگارد.



T، بردار را به بردار می‌نگارد.

شکل ۸ـ۳

۸ـ۴ برد[1] (فضای مقادیر) یک تبدیل

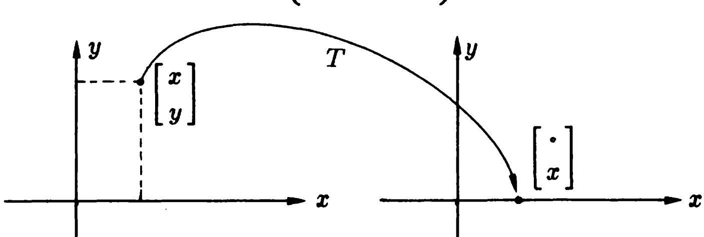
فرض کنید $T : R^۲ \to R^۲$ یک تبدیل صفحه باشد، مجموعه تمام تصاویر $R^۲$ تحت تبدیل T را برد T گویند. یعنی:

$$R_T = \left\{ T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) \Big| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in R^۲ \right\}$$

مثال: برد تبدیل $T : R^۲ \to R^۲$ تعریف شده به صورت $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x \\ ۰ \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

حل: با توجه به اینکه $\begin{bmatrix} x \\ ۰ \end{bmatrix}$، نقطه‌ای روی محور xها است بنابراین تبدیل T هر نقطه صفحه را به نقطه‌ای واقع بر محور xها می‌نگارد، و هر نقطه واقع بر محور xها، تصویر نقطه‌ای از $R^۲$ تحت تبدیل T است. پس

$$R_T = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ ۰ \end{bmatrix} \Big| x \in R \right\} \qquad \square$$



شکل ۸ـ۴

مثال: تبدیل T از $R^۲$ به $R^۲$ تعریف شده به صورت

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x + y \\ x - y \end{bmatrix}$$

را در نظر می‌گیریم. نشان دهید برد T مساوی تمام صفحه یعنی $R^۲$ است.

---

1. Range

حل: باید نشان دهیم برای هر $\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$ در $R^۲$، دست کم یک $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ موجود است به قسمی که

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$$

یعنی:

$$\begin{bmatrix}x+y\\ x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$$

بنابراین می‌بایست نشان دهیم دستگاه معادلات

$$\begin{cases}x+y=\alpha\\ x-y=\beta\end{cases}$$

برای هر α و β دارای جواب است. روشن است که این دستگاه دارای جواب است لذا برد T مساوی $R^۲$ است. □

مثال: تبدیل $T:R^۲\to R^۲$ را که به صورت

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}۲x-y\\ x+y\end{bmatrix}$$

تعریف شده، در نظر می‌گیریم. نقاط $\begin{bmatrix}۰\\ ۰\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}۱\\ ۰\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}۱\\ ۱\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}۰\\ ۱\end{bmatrix}$ رئوس مربع واحد در صفحه می‌باشند. نشان دهید تصاویر این نقاط تحت تبدیل T رئوس یک متوازی الاضلاع اند.

حل:

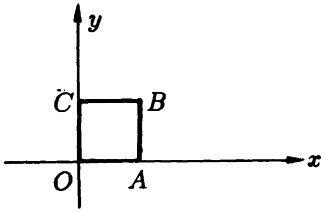
$$T\left(\begin{bmatrix}۰\\ ۰\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}۰\\ ۰\end{bmatrix}=O \quad , \quad T\left(\begin{bmatrix}۱\\ ۰\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}=A'$$

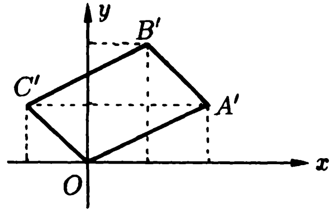
$$T\left(\begin{bmatrix}۱\\ ۱\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}۱\\ ۲\end{bmatrix}=B' \quad , \quad T\left(\begin{bmatrix}۰\\ ۱\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-۱\\ ۱\end{bmatrix}=C'$$

باتوجه به آنکه

$$\begin{cases}x_O+x_{B'}=x_{A'}+x_{C'}\\ y_O+y_{B'}=y_{A'}+y_{C'}\end{cases}$$

بنابراین، O و A' و B' و C' رئوس متوالی یک متوازی‌الاضلاع‌اند. □





شکل ۸ـ۵

مثال: تبدیل $T : R^۲ \to R^۲$ تعریف شده به صورت

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۳x \\ ۲y \end{bmatrix}$$

را در نظر می‌گیریم. تبدیل یافته دایره $x^۲ + y^۲ = ۱$ را تحت تبدیل T به دست آورید.

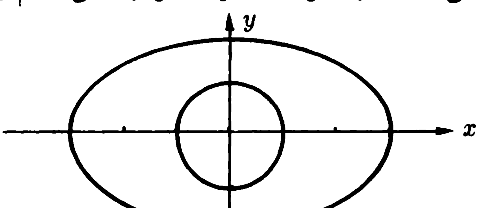
حل: فرض کنید $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ نقطه دلخواهی از دایره $x^۲ + y^۲ = ۱$ باشد، تبدیل یافته $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ تحت T را $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ می‌نامیم. بنابراین

$$\begin{array}{c} T\left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۳\alpha \\ ۲\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \end{array} \quad \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{u}{۳} \\ \beta = \frac{v}{۲} \end{cases}$$

از آنجا که $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ روی دایره است بنابراین $\alpha^۲ + \beta^۲ = ۱$ و از آنجا

$$(\frac{u}{۳})^۲ + (\frac{v}{۲})^۲ = ۱ \Rightarrow \frac{u^۲}{۹} + \frac{v^۲}{۴} = ۱$$

که معادله یک بیضی است. در شکل ۸. ۶ نمودار دایره و بیضی با هم رسم شده است. □



شکل ۸ـ۶

تبدیل خطی صفحه

۸ـ۵ تعریف:

هر تبدیل $T : R^۲ \to R^۲$ تعریف شده به صورت

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

را یک تبدیل خطی صفحه گویند،که در آن a، b، c و d اعداد حقیقی ثابت هستند.

مثال: تبدیلات زیر هر کدام نمایشگر یک تبدیل خطی در صفحه‌اند.

$$T_۱\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۲x - y \\ ۷x \end{bmatrix} \quad , \quad T_۲\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$$

$$T_۳\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \quad , \quad T_۴\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \square$$

تذکر: تبدیلات $T_۳$ و $T_۴$ را به ترتیب تبدیل صفر[1] و تبدیل همانی[2] گویند.

مثال: تبدیل $T : R^۲ \to R^۲$ تعریف شده به صورت

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + ۱ \\ y + ۲ \end{bmatrix}$$

یک تبدیل خطی نیست. این تبدیل را انتقال در راستای بردار $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ گویند. $\square$

۸ـ۶ ماتریس یک تبدیل خطی[3]

تبدیل خطی T تعریف شده به صورت

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۲x + ۳y \\ ۵x - ۴y \end{bmatrix}$$

را در نظر می‌گیریم. بردارهای پایه دستگاه مختصات یعنی $\vec{i} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ و $\vec{j} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم.

تصویر این دو بردار تحت تبدیل T به صورت زیر است.

$$T(\vec{i}) = T\left(\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \end{bmatrix} \ , \ T(\vec{j}) = T\left(\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۴ \end{bmatrix}$$

ماتریسی را در نظر بگیرید که ستون اول آن $T(\vec{i})$ و ستون دومش $T(\vec{j})$ باشد، یعنی

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & -۴ \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ T(\vec{i}) & T(\vec{j}) \end{array}$$

---

1. Zero transformation
2. Identity transformation
3. Matrix representation of linear transformation

با ضرب ماتریس A در $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ داریم.

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & -۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲x + ۳y \\ ۵x - ۴y \end{bmatrix}$$

یعنی،

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & -۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

و یا اگر $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = X$، آنگاه

$$T(X) = AX$$

این نتیجه در حالت کلی در قضیه زیر آورده شده است.

۸ـ۷ قضیه

اگر T یک تبدیل خطی صفحه باشد در این صورت ماتریس $A = [a_{ij}]_{۲\times۲}$ که ستون اول و دوم آن به ترتیب $T\left(\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}\right)$ و $T\left(\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}\right)$ است دارای این خاصیت است که برای هر $X \in R^۲$ داریم

$$T(X) = AX$$

اثبات: فرض کنید $T : R^۲ \to R^۲$ یک تبدیل خطی باشد. بنابراین

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

اما:

$$T\left(\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \;,\; T\left(\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$AX = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

یعنی:

$$T(X) = AX \quad \blacksquare$$

۸ـ۸ تعریف

ماتریس A را ماتریس تبدیل خطی T نسبت به پایه متعارف $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = \vec{i}$ و $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} = \vec{j}$ گویند.

مثال: ماتریس تبدیل T تعریف شده به صورت

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -y \\ ۲x \end{bmatrix}$$

را به دست آورید.

حل: تبدیل T را به صورت زیر نیز می‌توان نشان داد.

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۰x - y \\ ۲x + ۰y \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس تبدیل T به صورت زیر است.

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$T(X) = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix} X \qquad \square$$

باتوجه به قضیه فوق، هر تبدیل خطی در $R^۲$ با یک ماتریس ۲×۲ مشخص می‌شود در نتیجه، ماتریس ماهیت یک تابع را به خود می‌گیرد و عملاً چیزی فراتر از یک جدول از اعداد خواهد بود و یک تساوی به صورت

$$\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

بیانگرآن است که ماتریس $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$، نقطه $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ را به نقطه $\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$ می‌نگارد.

۸ـ۹ چند تبدیل خطی مهم صفحه و ماتریسهای آن

۸ـ ۱۰ تقارنها[1] (انعکاسها)

تقارن نسبت به یک خط l که از مبدأ می‌گذرد، تبدیلی است که هر نقطه از صفحه را به نقطه قرینه‌اش نسبت به خط l می‌نگارد. مهمترین تقارنها عبارتند از تقارن نسبت به محورهای مختصات و خطوط $y = x$ و $y = -x$.

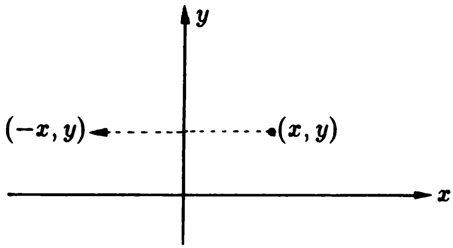
۸ـ۱۱ تقارن نسبت به محور y [2]

فرض کنید $T : R^۲ \to R^۲$ تبدیلی باشد که هر نقطه را به نقطه قرینه‌اش نسبت به محور yها

1.Reflections

2.Reflection about the y-axis

می‌نگارد (شکل ۸ ۰ ۷).



شکل ۸ـ۷

این تبدیل به صورت زیر عمل می‌کند.

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

ماتریس این تبدیل را به دو روش به‌دست می‌آوریم.

روش اول:

$$T(\vec{i}) = T\left(\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{j}) = T\left(\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ T(\vec{i}) \; T(\vec{j}) \end{array}$$

روش دوم: تبدیل T را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x + ۰y \\ ۰x + y \end{bmatrix}$$

بنابراین

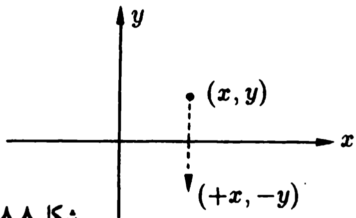
$$A = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

ماتریس $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ را ماتریس تقارن نسبت به محور y گویند. ■

۸ـ۱۲ تقارن نسبت به محور x [1]

تبدیلی است که هر نقطه را به قرینه‌اش نسبت به محور xها می‌نگارد (شکل ۸ ۰ ۸).

1.Reflection about the x-axis



شکل ۸ـ۸

و به صورت زیر عمل می‌کند.

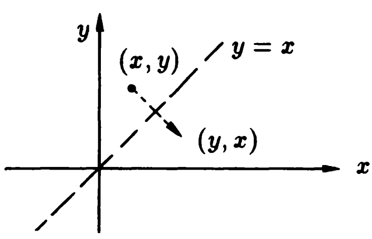
$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

به روش مشابه ماتریس این تبدیل به صورت زیر در می‌آید.

ماتریس تقارن نسبت به محور xها $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ ■

۸ـ۱۳ تقارن نسبت به خطوط $\mathbf{y = x}$ و $\mathbf{y = -x}$

تقارن نسبت به خط $y = x$ هر نقطه را به قرینه‌اش نسبت به خط $y = x$ تبدیل می‌کند (شکل ۸ ۰ ۹).

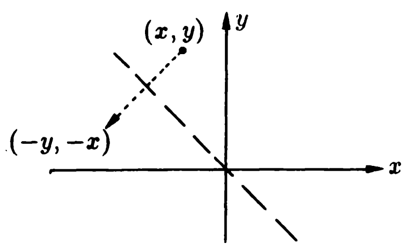


شکل ۸ـ۹

و به صورت $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ می‌باشد.

همین طور تقارن نسبت به خط $y = -x$ به صورت زیر تعریف می‌شود (شکل ۸ ۰ ۱۰).

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$$



شکل ۸ـ۱۰

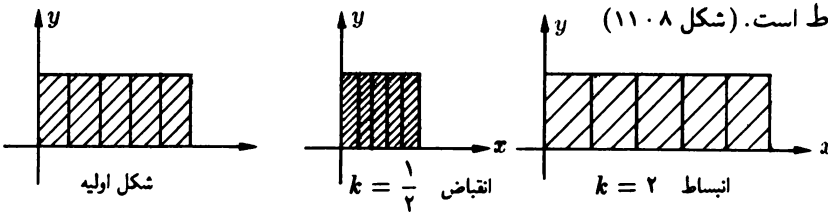
ماتریسهای این دو تبدیل عبارتند از:

ماتریس تقارن نسبت به خط $y = x$ $\qquad \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

ماتریس تقارن نسبت به خط $y = -x$ $\qquad \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ■

۸ـ۱۴ کشش[1] (انبساط[2] و انقباض[3])

اگر مختص x هر نقطه صفحه در عدد حقیقی k ضرب شود، آنگاه هر شکل در صفحه در امتداد محور x منبسط یا منقبض می‌شود. اگر $۰ < k < ۱$، نتیجه یک انقباض و اگر $k > ۱$، نتیجه یک انبساط است. (شکل ۸ـ۱۱)



شکل ۸ـ۱۱

این تبدیل به صورت

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} kx \\ y \end{bmatrix}$$

می‌باشد و ماتریس آن عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} k & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

به طریق مشابه، تبدیلی که مختص y هر نقطه را در عدد حقیقی k ضرب می‌کند، انبساط و یا انقباض را در امتداد محور yها ایجاد می‌کند. این تبدیل به صورت

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ ky \end{bmatrix}$$

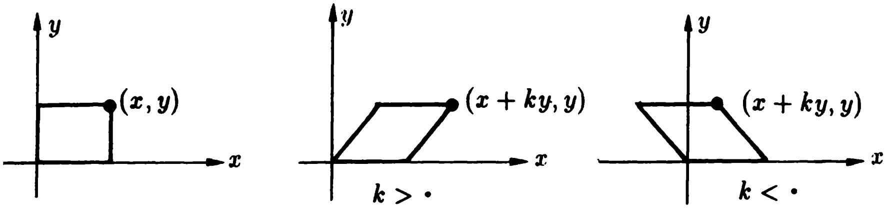
می‌باشد و ماتریس آن عبارت است از

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & k \end{bmatrix}$$ ■

1.Strech
2.Expansion
3.Compression

۸ـ۱۵ برش[1]

یک برش در امتداد محور xها[2] تبدیلی است که هر نقطه (x, y) را به موازات محور x با افزودن k برابر مختص y آن به مختص x به نقطه $(x + ky, y)$ می‌نگارد. تحت یک چنین تبدیلی، نقاط روی محور x حرکت نمی‌کنند، زیرا $y = ۰$ (شکل ۸٫۱۲).



شکل ۸ـ۱۲

این تبدیل و ماتریس آن در زیر آورده شده است.

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + ky \\ y \end{bmatrix} \ , \ \begin{bmatrix} ۱ & k \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

یک برش در امتداد محور yها[3] تبدیلی است که هر نقطه (x, y) را به موازات محور y با افزودن k برابر مختص x به مختص y به نقطه $(x, y + kx)$ می‌برد. تحت یک چنین تبدیلی، نقاط روی محور yها حرکت نمی‌کنند زیرا $x = ۰$.

اگر T تبدیل برش در امتداد محور y باشد در این صورت

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ kx + y \end{bmatrix}$$

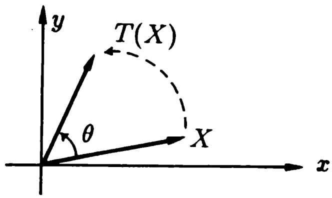
و ماتریس آن عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ k & ۱ \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

۸ـ۱۶ دوران[4]

فرض کنید θ یک عدد حقیقی ثابت باشد، در این صورت دوران حول مبدأ به اندازه زاویه θ در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت، تبدیلی است مانند T به طوری که اگر X یک بردار دلخواه $R^۲$ باشد، در این صورت $T(X)$ دوران یافته Xحول مبدأ به اندازهٔ θ در جهت خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. (شکل ۸٫۱۳)

1.Shear
2.Shear in the x-direction with factor k
3.Shear in the y-direction with factor k
4.Rotation



شکل ۸ـ۱۳

برای یافتن ماتریس دوران به صورت زیر عمل می‌کنیم.[۱]

$$T\left(\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{۲}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{۲}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

بنابراین

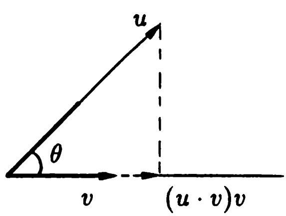
$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

۸ـ۱۷ تصویر قائم[۲]

فرض کنید u و v دو بردار در $R^۲$ باشند به قسمی که $|\vec{v}| = ۱$، بردار

$$proj_v u = (u \cdot v)v$$

را تصویر قائم u روی خطی که از v می‌گذرد گویند (شکل ۸ ـ ۱۴).



شکل ۸ـ۱۴

توجه کنید که $u \cdot v$ ضرب درونی (اسکالر) دو بردار u و v است. یعنی

$$u \cdot v = |u||v|\cos\theta$$

---

۱. این روش را در صورتی می‌توان انجام داد که بپذیریم دوران حول مبدأ به اندازه α یک تبدیل خطی است.

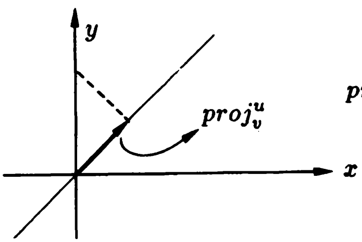
2.Orthogonal projection

باتوجه به‌اینکه در اینجا $|v| = ۱$، بنابراین تصویر قائم u روی vعبارت است از

$$proj_v u = (|u| \cos\theta)v$$

مثال: تصویر قائم بردار $u = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$ را روی خط $y = x$ به دست آورید.

حل: نخست روی خط $y = x$ یک بردار با اندازه ۱ انتخاب می‌کنیم. برای این کار بردار دلخواهی از این خط مثلاً $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ را انتخاب می‌کنیم. بردار واحد واقع براین خط عبارت است از $v = \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{bmatrix}$. بنابراین تصویر قائم u روی خـ !. $y = x$ عبارت است از:



$$proj_v u = (u \cdot v)v = (\frac{۲}{\sqrt{۲}}) \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \quad \square$$

شکل ۸ـ۱۵

حال v را برداری در صفحه فرض کنید که $|v| = ۱$. اگر T تبدیلی باشد که به هر بردار دلخواه صفحه مانند X، تصویر قائم آن روی v را نظیر کند، در این صورت

$$T(X) = (X \cdot v)v$$

اگر $v = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ در این صورت T تصویر روی محور xهاست و داریم

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ ۰ \end{bmatrix}$$

و ماتریس آن عبارت است از

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

به روش مشابه، تصویر روی محور yها به صورت زیر است:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۰ \\ y \end{bmatrix}$$

و ماتریس آن عبارت است از

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۸ـ۱۸ تقارن نسبت به خط $\mathbf{y = mx}$

برای به دست آوردن ماتریس تقارن نسبت به خط $y = mx$ چندین روش وجود دارد که در اینجا با استفاده از تبدیل تصویر، روشی برای یافتن این ماتریس ارائه می‌دهیم. ابتدا به لم زیر توجه کنید.

لم: فرض کنید v برداری باشد به طوری که $|v| = ۱$، در این صورت قرینه uنسبت به خطی که از بردار v می‌گذرد برابر است با:

$$۲proj_v u - u$$

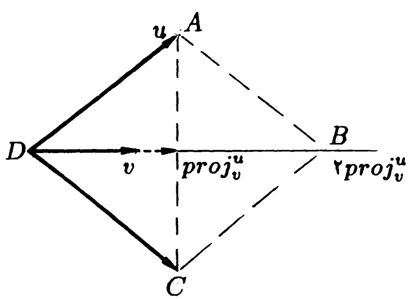
اثبات: باتوجه به شکل ۸ـ۱۶

روشن است که

$$۲proj_v u - u = \overrightarrow{AB}$$

اما $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$، بنابراین

$$\text{قرینه } u \text{ نسبت به خط گذرنده از } v = \overrightarrow{DC} = ۲proj_v u - u \qquad \blacksquare$$



شکل ۸ـ۱۶

حال برای یافتن تبدیل تقارن نسبت به خط $y = mx$، یک بردار با اندازه واحد روی این خط اختیار می‌کنیم، برای این کار اگر فرض کنیم $y = x\tan\alpha$ در این صورت اگر $\begin{bmatrix} ۱ \\ \tan\alpha \end{bmatrix}$ بردار دلخواهی روی این خط باشد بردار $\begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۱+\tan^۲\alpha}} \\ \frac{\tan\alpha}{\sqrt{۱+\tan^۲\alpha}} \end{bmatrix}$، یعنی $v = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$ برداری با طول واحد روی این خط است.

اکنون فرض کنید $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ بردار دلخواهی از صفحه و T تبدیلی باشد که قرینه X را نسبت به خط $y = mx$ می‌دهد، بنابراین

$$T(X) = ۲proj_v X - X$$

$$= ۲(X \cdot v)v - X$$

$$= ۲(x\cos\alpha + y\sin\alpha)\begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}۲x\cos^۲\alpha + ۲y\sin\alpha\cos\alpha - x\\ ۲x\sin\alpha\cos\alpha + ۲y\sin^۲\alpha - y\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}(۲\cos^۲\alpha - ۱)x + (۲\sin\alpha\cos\alpha)y\\ (۲\sin\alpha\cos\alpha)x + (۲\sin^۲\alpha - ۱)y\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}(\cos ۲\alpha)x + (\sin ۲\alpha)y\\ (\sin ۲\alpha)x - (\cos ۲\alpha)y\end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس تقارن نسبت به خط $y = mx$، $(y = x\tan\alpha)$ برابر است با:

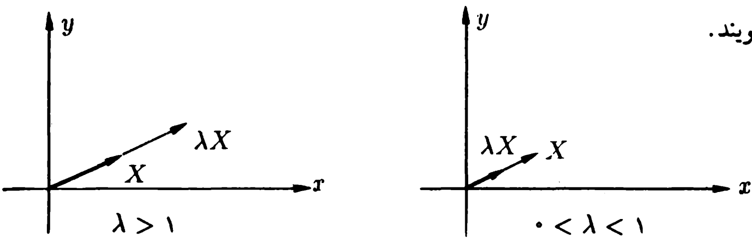
$$\begin{bmatrix}\cos ۲\alpha & \sin ۲\alpha\\ \sin ۲\alpha & -\cos ۲\alpha\end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

۸ـ۱۹ تجانس

فرض کنید λ یک عدد حقیقی ثابت باشد، تبدیل $T : R^۲ \to R^۲$ تعریف شده به صورت

$$T(X) = \lambda X$$

را یک تجانس گویند.



شکل ۸ـ۱۷

اگر $X = \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ در این صورت

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\lambda x\\ \lambda y\end{bmatrix}$$

و لذا ماتریس تبدیل تجانس یک ماتریس اسکالر به صورت زیر است

$$\begin{bmatrix}\lambda & ۰\\ ۰ & \lambda\end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

۸ـ۲۰ ترکیب دو تبدیل خطی

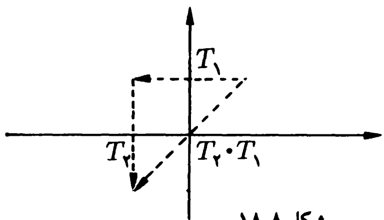
فرض کنید T_1 و T_2 دو تبدیل خطی صفحه باشند بنابراین T_1 و T_2 دو تابع در R^2 می‌باشند و لذا می‌توان از ترکیب T_1 با T_2 سخن گفت. برای مثال اگر T_1 تقارن نسبت به محور xها و T_2 تقارن نسبت به محور yها باشد، در این صورت:

$$T_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} \quad , \quad T_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

حال ترکیب T_1 با T_2 به صورت زیر است.

$$(T_2 \circ T_1)\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = T_2\left(T_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)\right) = T_2\left(\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

یعنی ترکیب تقارن نسبت به محور xها با تقارن نسبت به محور yها، تقارن نسبت به مبدأ مختصات است (شکل ۸ ـ ۱۸).



شکل ۸ـ۱۸

به طورکلی با یک محاسبه ساده می‌توان نشان داد ترکیب دو تبدیل خطی خود یک تبدیل خطی است.

۸ـ۲۱ ماتریس ترکیب دو تبدیل

۸ـ۲۲ قضیه

فرض کنید A_1 و A_2 به ترتیب ماتریسهای دو تبدیل خطی T_1 و T_2 باشند، در این صورت A_2A_1ماتریس تبدیل $T_2 \circ T_1$ است.

اثبات:
$$T_1(X) = A_1X \quad , \quad T_2(X) = A_2X$$

$$\Rightarrow (T_2 \circ T_1)(X) = T_2(T_1(X)) = T_2(A_1X) = A_2(A_1X) = A_2A_1X \quad \blacksquare$$

۸ـ۲۳ نتیجه

اگر تبدیلات $T_1(X) = A_1X$ و $T_2(X) = A_2X$، ... و $T_k(X) = A_kX$ از R^2 به R^2 به طور متوالی عمل کنند (اول T_1، بعد T_2 و الی آخر) در این صورت ماتریس ترکیب این تبدیلات یعنی $T_k \circ \cdots \circ T_2 \circ T_1$ عبارت است از

$$A_k \cdots A_2A_1 \quad \blacksquare$$

مثال: (الف) یک ماتریس تبدیل از $R^{۲}$ به $R^{۲}$ را پیدا کنید که ابتدا هر نقطه را در امتداد محور xها برشی با ضریب $k = ۲$ دهد و سپس قرینه آن را نسبت به خط $y = x$ به دست آورد.

(ب) یک ماتریس تبدیل از $R^{۲}$ به $R^{۲}$ را پیدا کنید که ابتدا قرینه هر نقطه را نسبت به خط $y = x$ به دست دهد و سپس آن را برشی در امتداد محور xها با ضریب $k = ۲$ دهد.

حل: (الف) ماتریس برش در امتداد محور xها با ضریب $k = ۲$ عبارت است از

$$A_{۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

و برای تقارن نسبت به خط $y = x$ عبارت است از

$$A_{۲} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

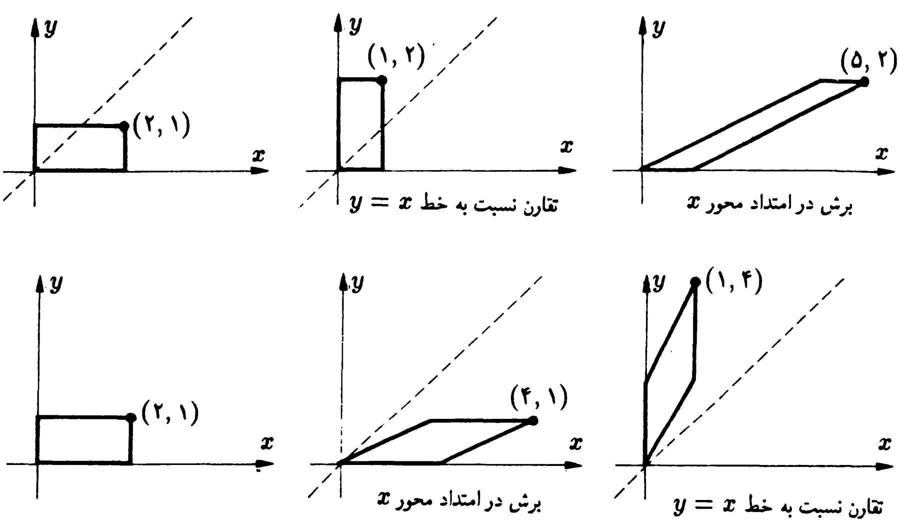
بنابراین، ماتریس ترکیب دو تبدیلی که اولی برش و دومی تقارن است عبارت است از

$$A_{۲}A_{۱} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

حل: (ب) ماتریس ترکیب دو تبدیلی که اولی تقارن و دومی برش است به صورت زیر است.

$$A_{۱}A_{۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \quad \square$$

در این مثال، توجه کنید که $A_{۱}A_{۲} \neq A_{۲}A_{۱}$، بنابراین، ترتیب اثر کردن تبدیلات مهم است. این مطلب در شکل (۸ـ۱۹) به طور هندسی در مورد یک مستطیل توضیح داده شده است.



شکل ۸ـ۱۹

۸ـ۲۴ وارون یک تبدیل خطی

فرض کنید $T : R^۲ \to R^۲$ یک تبدیل خطی صفحه باشد، بنابراین ماتریس ۲×۲ای مانند A وجود دارد به قسمی که

$$T(X) = AX$$

اگر T وارون پذیر باشد آنگاه ماتریس آن یعنی A نیز وارون پذیر خواهد بود. وارون T که با نماد $T^{-۱}$ نشان داده می‌شود، تبدیلی خطی است که ماتریس آن $A^{-۱}$ است و بنابراین

$$T^{-۱}(X) = A^{-۱}X$$

مثال: فرض کنید $T : R^۲ \to R^۲$ کشش در امتداد محور yها با ضریب $k = \frac{۱}{۲}$ باشد یعنی

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ \frac{۱}{۲}y \end{bmatrix}$$

پس T هر شکل را در امتداد محور yها منقبض می‌کند. بی‌درنگ می‌توانیم نتیجه بگیریم وارون این تبدیل هر شکل را در امتداد محور yها به اندازهٔ $k = ۲$ منبسط می‌کند یعنی کشش در امتداد محور yها باضریب $k = ۲$ است. برای اثبات این مطلب می‌دانیم که ماتریس کشش در امتداد محور yها با ضریب $k = \frac{۱}{۲}$ عبارت است از

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

وارون این ماتریس عبارت است از

$$A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$T^{-۱}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ ۲y \end{bmatrix} \quad \square$$

مثال: اگر T تصویر روی محور x باشد یعنی

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ ۰ \end{bmatrix}$$

در این صورت T وارون پذیر نیست زیرا ماتریس این تبدیل

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

وارون پذیر نیست. $\square$

مثال: هریک از تبدیلات زیر وارون پذیرند

الف) برش در امتداد محور xها و محور yها.

ب) تقارن نسبت به خط $y = x$ و $y = -x$ و محور xها و yها.

ج) کشش در امتداد محور xها و محور yها.

د) تقارن نسبت به خط $y = mx$.

ه) دوران. $\square$

۸ـ۲۵ خواص تبدیلات خطی

۸ـ۲۶

هر تبدیل خطی وارون پذیر یک خط راست را به یک خط راست تبدیل می‌کند (می‌نگارد) .

اثبات: معادله یک خط راست در صفحه عبارت است از

$$Ax + By + E = 0 \qquad (A \neq 0 \text{ یا } B \neq 0) \qquad (1)$$

فرض کنید T یک تبدیل خطی وارون پذیر باشد بنابراین

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

که در آن $ad - bc \neq 0$. حال به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{d}{ad-bc}x' - \frac{b}{ad-bc}y' \\ \\ y = \frac{-c}{ad-bc}x' + \frac{a}{ad-bc}y' \end{cases}$$

با قراردادن x و y به دست آمده از دستگاه فوق در معادله (۱) داریم

$$A\left(\frac{d}{ad-bc}x' - \frac{b}{ad-bc}y'\right) + B\left(\frac{-c}{ad-bc}x' + \frac{a}{ad-bc}y'\right) + E = 0$$

و از آنجا

$$(Ad - Bc)x' + (aB - bA)y' + E(ad - bc) = \cdot \qquad (۲)$$

به سادگی می‌توان نشان داد که $Ad - Bc$ و $aB - bA$ هردو باهم صفر نیستند.

بنابراین (۲) معادله یک خط راست است. ■

مثال: باتوجه به قضیه فوق، ماتریس وارون پذیر

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

خط $y = ۲x + ۱$ را به خط راستی تبدیل می کند. معادله آن را پیدا کنید.

حل: فرض کنید (x, y) نقطه‌ای روی خط $y = ۲x + ۱$ و نقطه (x', y') تصویر آن تحت ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد. در این صورت

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x' - y' \\ y = -۲x' + ۳y' \end{cases}$$

با قراردادن در $y = ۲x + ۱$ خواهیم داشت

$$-۲x' + ۳y' = ۲(x' - y') + ۱$$

$$\Rightarrow y' = \frac{۴}{۵}x' + \frac{۱}{۵}$$

یا

$$y = \frac{۴}{۵}x + \frac{۱}{۵} \quad \square$$

۲۷ـ۸

هر تبدیل خطی وارون پذیر، دو خط متوازی را به دو خط متوازی تبدیل می‌کند، یعنی: هر تبدیل خطی وارون پذیر، توازی را ثابت نگه می‌دارد.

اثبات: دو خط موازی $Ax+By+E_{۱}=۰$ و $Ax+By+E_{۲}=۰$ را در نظر می‌گیریم، تبدیل خطی وارون پذیر T که ماتریس آن عبارت است از

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad (ad-bc\neq ۰)$$

خطوط $Ax+By+E_{۱}=۰$ و $Ax+By+E_{۲}=۰$ را به ترتیب به خطوط

$$(Ad-Bc)x+(aB-bA)y+E_{۱}(ad-bc)=۰$$

$$(Ad-Bc)x+(aB-bA)y+E_{۲}(ad-bc)=۰$$

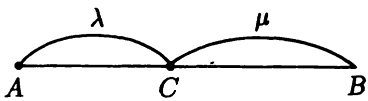
تبدیل می‌کند. به وضوح این دو خط با هم موازیند. ■

۸ـ۲۸

هر تبدیل خطی وارون پذیر نقطه C را که پاره خط AB را به نسبت $\frac{\lambda}{\mu}$ تقسیم می‌کند به نقطه C' تبدیل می‌کند که تصویر AB یعنی $A'B'$ را به نسبت $\frac{\lambda}{\mu}$ تقسیم می‌کند.

اثبات: فرض کنید $A=\begin{bmatrix} x_{۱} \\ y_{۱} \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} x_{۲} \\ y_{۲} \end{bmatrix}$ بنابراین

$$C=\begin{bmatrix} \frac{\lambda x_{۲}+\mu x_{۱}}{\lambda+\mu} \\ \frac{\lambda y_{۲}+\mu y_{۱}}{\lambda+\mu} \end{bmatrix}$$



شکل ۸ـ۲۰

فرض کنید $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وارون پذیر باشد، بنابراین

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{۱} \\ y_{۱} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax_{۱}+by_{۱} \\ cx_{۱}+dy_{۱} \end{bmatrix}=A'$$

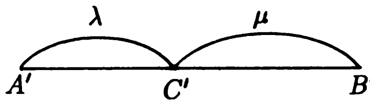
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{۲} \\ y_{۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax_{۲}+by_{۲} \\ cx_{۲}+dy_{۲} \end{bmatrix}=B'$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\lambda x_{۲}+\mu x_{۱}}{\lambda+\mu} \\ \frac{\lambda y_{۲}+\mu y_{۱}}{\lambda+\mu} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a\frac{\lambda x_{۲}+\mu x_{۱}}{\lambda+\mu}+b\frac{\lambda y_{۲}+\mu y_{۱}}{\lambda+\mu} \\ c\frac{\lambda x_{۲}+\mu x_{۱}}{\lambda+\mu}+d\frac{\lambda y_{۲}+\mu y_{۱}}{\lambda+\mu} \end{bmatrix}=C'$$

در صورتی که C' پاره‌خط $A'B'$ را به نسبت $\frac{\lambda}{\mu}$ تقسیم می‌کند که داشته باشیم

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda(ax_۲+by_۲)+\mu(ax_۱+by_۱)}{\lambda+\mu} = a\dfrac{\lambda x_۲+\mu x_۱}{\lambda+\mu} + b\dfrac{\lambda y_۲+\mu y_۱}{\lambda+\mu} \\ \dfrac{\lambda(cx_۲+dy_۲)+\mu(cx_۱+dy_۱)}{\lambda+\mu} = c\dfrac{\lambda x_۲+\mu x_۱}{\lambda+\mu} + d\dfrac{\lambda y_۲+\mu y_۱}{\lambda+\mu} \end{cases}$$

اما تساویهای فوق درست است. بنابراین C' پاره خط $A'B'$ را به نسبت $\frac{\lambda}{\mu}$ تقسیم می‌کند. ■



شکل ۸ـ۲۱

۸ـ۲۹ نتیجه

هر تبدیل خطی وارون پذیر وسط یک پاره خط را به وسط پاره خط تبدیل یافته می‌نگارد. ■

۸ـ۳۰ نتیجه

هر تبدیل خطی وارون پذیر تمام نقاط بین پاره خط AB را به نقاطی بین A' و B' تبدیل می‌کند و نقاط خارج پاره خط AB را به نقاط خارج پاره خط $A'B'$ می‌برد. ■

۸ـ۳۱ نتیجه

هر تبدیل خطی وارون پذیر یک متوازی الاضلاع را به یک متوازی الاضلاع تبدیل می‌کند. ■

۸ـ۳۲

هرتبدیل خطی وارون پذیر با ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ مثلث ABC با مساحت S را به مثلث $A'B'C'$ با مساحت $|ad-bc| \times S$ تبدیل می‌کند.

اثبات: فرض کنید $A=\begin{bmatrix} x_۱ \\ y_۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} x_۲ \\ y_۲ \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} x_۳ \\ y_۳ \end{bmatrix}$ توسط ماتریس وارون پذیر

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

به نقاط $A'=\begin{bmatrix} x'_۱ \\ y'_۱ \end{bmatrix}$ و $B'=\begin{bmatrix} x'_۲ \\ y'_۲ \end{bmatrix}$ و $C'=\begin{bmatrix} x'_۳ \\ y'_۳ \end{bmatrix}$ تبدیل شده باشند.

یعنی

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x'_1 = ax_1 + by_1 \\ y'_1 = cx_1 + dy_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x'_2 = ax_2 + by_2 \\ y'_2 = cx_2 + dy_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x'_3 \\ y'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x'_3 = ax_3 + by_3 \\ y'_3 = cx_3 + dy_3 \end{cases}$$

در این صورت:

$$\pm(\text{مساحت مثلث } A'B'C') = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 \\ x'_3 & y'_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} ax_1 + by_1 & cx_1 + dy_1 & 1 \\ ax_2 + by_2 & cx_2 + dy_2 & 1 \\ ax_3 + by_3 & cx_3 + dy_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(ad - bc)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \pm(ad - bc)\ (\text{مساحت مثلث } ABC) \qquad \blacksquare$$

۸ـ۳۳ نتیجه

هر تبدیل خطی وارون پذیر سه نقطه واقع بر یک خط را به سه نقطه واقع بر یک خط می‌نگارد. ■

۸ـ۳۴

هر تبدیل خطی وارون پذیر با ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هر ناحیه محدود با مساحت S را به ناحیه محدودی با مساحت $|ad - bc|S$ می‌نگارد.

از اثبات این خاصیت صرف نظر می‌کنیم و تنها به ذکر مثالی اکتفا می‌کنیم.

۸ـ۳۵ مسئله

ثابت کنید ماتریس $\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$ بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ را به دایره واحد تبدیل می‌کند و با استفاده از آن مساحت این بیضی را حساب کنید.

حل:

$$\begin{bmatrix} \frac{۱}{a} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۱}{a}x = x' \\ \frac{۱}{b}y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ax' \\ y = by' \end{cases}$$

حال اگر در $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$ به جای x و y مقادیرشان را قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\frac{a^۲x'^۲}{a^۲} + \frac{b^۲y'^۲}{b^۲} = ۱ \Rightarrow x'^۲ + y'^۲ = ۱$$

اگر مساحت بیضی را S و مساحت دایره واحد را S' بنامیم بنابر خاصیت ۸ـ۳۲

$$S' = (\frac{۱}{a} \cdot \frac{۱}{b})S$$

اما مساحت دایره واحد برابر π است.

$$\pi = \frac{۱}{ab}S \Rightarrow S = \pi ab \quad \square$$

۸ـ۳۶ خواص تقارن نسبت به یک خط گذرنده از مرکز

در ۸ـ۱۸ دیدیم که ماتریس تقارن نسبت به خط $y = mx$، $(m = \tan\alpha)$ به صورت زیر است

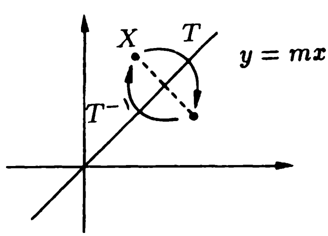
$$\begin{bmatrix} \cos ۲\alpha & \sin ۲\alpha \\ \sin ۲\alpha & -\cos ۲\alpha \end{bmatrix}$$

۸ـ۳۷ وارون تقارن نسبت به خط $y = mx$ با خودش برابر است.

اثبات: به وضوح معلوم است که:

$$\begin{bmatrix} \cos ۲\alpha & \sin ۲\alpha \\ \sin ۲\alpha & -\cos ۲\alpha \end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix} \cos ۲\alpha & \sin ۲\alpha \\ \sin ۲\alpha & -\cos ۲\alpha \end{bmatrix}$$

این واقعیت از نقطه نظر هندسی نیز روشن است زیرا



شکل ۸ـ۲۲

۸ـ۳۸

ترکیب دو تقارن نسبت به خط گذرا از مرکز، یک دوران است.

اثبات: فرض کنید ماتریسهای این دو تبدیل به صورت زیر باشند

$$\begin{bmatrix} \cos ۲\alpha & \sin ۲\alpha \\ \sin ۲\alpha & -\cos ۲\alpha \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} \cos ۲\beta & \sin ۲\beta \\ \sin ۲\beta & -\cos ۲\beta \end{bmatrix}$$

ماتریس این دو ترکیب عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} \cos ۲\alpha & \sin ۲\alpha \\ \sin ۲\alpha & -\cos ۲\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos ۲\beta & \sin ۲\beta \\ \sin ۲\beta & -\cos ۲\beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos ۲\alpha \cos ۲\beta + \sin ۲\alpha \sin ۲\beta & \cos ۲\alpha \sin ۲\beta - \sin ۲\alpha \cos ۲\beta \\ \sin ۲\alpha \cos ۲\beta - \cos ۲\alpha \sin ۲\beta & \sin ۲\alpha \sin ۲\beta + \cos ۲\alpha \cos ۲\beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(۲\alpha - ۲\beta) & -\sin(۲\alpha - ۲\beta) \\ \sin(۲\alpha - ۲\beta) & \cos(۲\alpha - ۲\beta) \end{bmatrix} = R_{(۲\alpha - ۲\beta)} \quad \blacksquare$$

۸ـ۳۹

هر تقارن نسبت به خط $y = mx$، مساحت یک شکل را ثابت نگه می‌دارد.

اثبات: زیرا

$$\begin{vmatrix} \cos ۲\alpha & \sin ۲\alpha \\ \sin ۲\alpha & -\cos ۲\alpha \end{vmatrix} = -۱ \quad \blacksquare$$

۸ـ۴۰

ترکیب یک دوران و یک تقارن، تقارن است.

اثبات:

$$\begin{bmatrix} \cos ۲\alpha & \sin ۲\alpha \\ \sin ۲\alpha & -\cos ۲\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos ۲\alpha \cos \beta + \sin ۲\alpha \sin \beta & -\cos ۲\alpha \sin \beta + \sin ۲\alpha \cos \beta \\ \sin ۲\alpha \cos \beta - \sin \beta \cos ۲\alpha & -\sin ۲\alpha \sin \beta - \cos ۲\alpha \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(۲\alpha - \beta) & +\sin(۲\alpha - \beta) \\ \sin(۲\alpha - \beta) & -\cos(۲\alpha - \beta) \end{bmatrix}$$

که ماتریس اخیر، نمایشگر تقارن نسبت به خط $y = x \tan \frac{۲\alpha - \beta}{۲}$ است. $\blacksquare$

مثال: قرینه دایره $x^{۲}+(y-۵)^{۲}=۱$ را نسبت به خط $y=۲x$ به دست آورید.

حل: چون تقارن، هر دایره را به دایره‌ای با همان شعاع تبدیل می‌کند بنابراین کافی است قرینه مرکز دایره را نسبت به خط $y=۲x$ به دست آوریم. برای این کار ابتدا ماتریس تقارن نسبت به خط $y=۲x$ را به دست می‌آوریم.

$$\tan\alpha=۲ \longrightarrow \begin{cases} \cos ۲\alpha=\dfrac{۱-\tan^{۲}\alpha}{۱+\tan^{۲}\alpha}=\dfrac{۱-۴}{۱+۴}=\dfrac{-۳}{۵} \\[2ex] \sin ۲\alpha=\dfrac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^{۲}\alpha}=\dfrac{۴}{۵} \end{cases}$$

در نتیجه

$$\begin{bmatrix} -\frac{۳}{۵} & \frac{۴}{۵} \\ \frac{۴}{۵} & \frac{۳}{۵} \end{bmatrix}$$

ماتریس تقارن نسبت به خط $y=۲x$ است. مرکز دایره داده شده عبارت است از $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۵ \end{bmatrix}$ بنابراین،

$$\begin{bmatrix} -\frac{۳}{۵} & \frac{۴}{۵} \\ \frac{۴}{۵} & \frac{۳}{۵} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

پس معادله دایره به دست آمده به صورت زیر است.

$$(x-۴)^{۲}+(y-۳)^{۲}=۱ \qquad \square$$

۸ـ۴۱

ترکیب دو تقارن (نسبت به خط) در حالت کلی جابجایی نیست.

اثبات: فرض کنید $T_{۱}$ تقارن نسبت به خط $y=x$ و $T_{۲}$ تقارن نسبت به محور xها باشد، در این صورت ماتریسهای $T_{۱}$ و $T_{۲}$ به ترتیب عبارتند از

$$A_{۲}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \quad , \quad A_{۱}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین،

$$A_{۱}A_{۲}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}=R_{۹۰}.$$

$$A_{۲}A_{۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}=R_{-۹۰}.$$

ملاحظه می‌کنید که $A_{۱}A_{۲}\neq A_{۲}A_{۱}$ $\blacksquare$

۸ـ۴۲ خواص ماتریس دوران

۸ـ۴۳

ترکیب دو دوران، یک دوران است.

اثبات: فرض کنید R_α و R_β به ترتیب بیانگر دوران به اندازه α و β باشند پس

$$R_\beta \cdot R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\beta\sin\alpha - \sin\beta\cos\alpha \\ \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha & -\sin\beta\sin\alpha + \cos\beta\cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

۸ـ۴۴ نتیجه

با محاسبه $R_\alpha \cdot R_\beta$ نتیجه می‌شود که:

$$R_\beta \cdot R_\alpha = R_\alpha \cdot R_\beta \quad \blacksquare$$

۸ـ۴۵ نتیجه

$$R_\alpha \cdot R_\beta = R_{\alpha+\beta} \quad \blacksquare$$

۸ـ۴۶ نتیجه

$$R_\alpha^{۲} = R_{۲\alpha}$$

و به طورکلی برای هر عدد طبیعی n داریم

$$R_\alpha^n = R_{n\alpha} \quad \blacksquare$$

۸ـ۴۷

وارون یک دوران به اندازه α، دوران به اندازه $-\alpha$ است.

یعنی

$$R_\alpha^{-۱} = R_{-\alpha}$$

اثبات:

$$R_\alpha^{-۱} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$R_{-\alpha} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

۸ـ۴۸ نتیجه

برای هر عدد صحیح n داریم

$$R_\alpha^n = R_{n\alpha} \quad \blacksquare$$

۸ـ۴۹ خواص تبدیل تصویر قائم روی یک خط

۸ـ۵۰

تصویر قائم روی یک خط که از مرکز می‌گذرد تبدیلی خود توان است.

یعنی

$$T^۲ = T$$

اثبات: فرض کنید v برداری در صفحه باشد به طوری که $|v| = ۱$، بنابراین

$$T(X) = (X \cdot v)v$$

اما

$$\begin{aligned} T(T(X)) &= T((X \cdot v)v) \\ &= ((X \cdot v)v \cdot v)v \\ &= (X \cdot v)(v \cdot v)v \\ &= (X \cdot v)v \qquad \text{زیرا } v \cdot v = |v|^۲ = ۱ \\ &= T(X) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

مثال: فرض کنید T، تصویر قائم روی بردار $v = (\frac{۱}{\sqrt{۲}}, \frac{۱}{\sqrt{۲}})$ باشد، ماتریس T را به دست آورید نشان دهید خود توان است.

حل:

$$T(X) = (X \cdot v)v = \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T(X) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ماتریس مورد نظر است، اما

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = A$$

یعنی A خود توان است. □

تمرینات فصل ۸

۱ـ فرض کنید $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$ ماتریس تبدیل $T : R^2 \rightarrow R^2$ باشد. کدامیک از بردارهای زیر در برد T قرار دارد؟

$$(a) \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \quad , \quad (b) \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad (c) \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \end{bmatrix}$$

۲ـ ماتریس هریک از تبدیلات زیر را به دست آورید.

$$(a)\ T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x - y \\ x + y \end{bmatrix} \qquad (b)\ T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۳ـ تبدیل یافته مستطیل با رئوس $(0,0)$، $(1,0)$، $(1,2)$ و $(0,2)$ را تحت هریک از تبدیلات زیر به دست آورید.

(a) تقارن نسبت به محور x.

(b) تقارن نسبت به محور y.

(c) کشش در امتداد محور y با ضریب $k = \frac{1}{4}$.

(d) کشش در امتداد محور x با ضریب $k = ۲$.

(e) برش در امتداد محور x با ضریب $k = ۳$.

(f) برش در امتداد محور y با ضریب $k = -۲$.

۴ـ در هریک از قسمتها، اثر ماتریس داده شده را تعبیر هندسی کنید.

$$(a)\ \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۵ \end{bmatrix} \qquad (c)\ \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۵ـ در هریک از قسمتها، ماتریس ترکیب این تبدیلات را به دست آورید.

(a) کشش درامتداد محور xها با ضریب $\frac{۱}{۲}$ و سپس کشش درامتداد محور yها با ضریب ۵.

(b) کشش در امتداد محور yها با ضریب ۵، سپس کشش در امتداد محور yها با ضریب ۲.

(c) تقارن در امتداد $y = x$، سپس دوران به اندازهٔ ۱۸۰°.

(d) تقارن نسبت به محور yها، سپس کشش در امتداد محور x با ضریب $k = ۵$ و سپس تقارن نسبت به خط $y = x$.

(e) دوران به اندازه ۳۰°، سپس برش در امتداد محور y با ضریب $k = -۲$ و سپس کشش در امتداد محور y با ضریب $k = ۳$.

۶ـ هریک از موارد زیر را ثابت کنید.

(a) وارون تقارن نسبت به خط $y = x$، تقارن نسبت به خط $y = x$ است.

(b) وارون کشش (انبساط) در امتداد محور xها، کشش (انقباض) در امتداد محور xها است.

(c) وارون تقارن نسبت به محور x، تقارن نسبت به محور x است.

۷ـ معادله تصویر خط $y = -۴x + ۳$ را تحت ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۴ & -۳ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$$

به دست آورید.

۸ـ در قسمتهای (a) تا (e)، معادله تصویر خط $y = x$ را تحت تبدیلات زیر به دست آورید.

(a) برش در امتداد محور x با ضریب ۳.

(b) کشش در امتداد محور y، با ضریب $k = \frac{۱}{۲}$.

(c) تقارن نسبت به خط $y = x$.

(d) تقارن نسبت به محور y.

(e) دوران به اندازه ۶۰°.

۹ـ ماتریس برشی در امتداد محور xها را به دست آورید به طوری که مثلث با رئوس $(۰, ۰)$ و $(۲, ۱)$ و $(۳, ۰)$ را به مثلث قائم‌الزاویه‌ای با رأس قائمه در مبدأ تبدیل کند.

۱۰ـ نشان دهید ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۶ \end{bmatrix}$ تمام نقاط صفحه را به روی خط $y = ۲x$ می‌برد.

۱۱ـ اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $|A| = ۰$، ثابت کنید تبدیل هر نقطه مانند $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ تحت ماتریس A روی خط $y = \frac{c}{a}x$ قرار دارد.

۱۲ـ فرض کنید

$$\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} x'_۱ \\ x'_۲ \end{bmatrix}$$

دو بردار مستقل خطی در $R^۲$ باشند. فرض کنید T تبدیلی خطی از $R^۲$ به $R^۲$ باشد به‌قسمی‌که

$$T\left(\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{bmatrix} \quad , \quad T\left(\begin{bmatrix} x'_۱ \\ x'_۲ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y'_۱ \\ y'_۲ \end{bmatrix}$$

نشان دهید $T(X) = AX$،که در آن، A ماتریس ۲ × ۲ی

$$A = \begin{bmatrix} y_۱ & y'_۱ \\ y_۲ & y'_۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ & x'_۱ \\ x_۲ & x'_۲ \end{bmatrix}^{-۱}$$

است.

۱۳ـ فرض کنید S،T و U تبدیلات خطی روی $R^۲$ باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \quad , \quad S\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ x + y \end{bmatrix}$$

$$U\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

ماتریسهای وابسته به هریک از تبدیلات خطی زیر را بیابید.

(الف) SoT (ب) ToS (ج) $S^۲$ (د) $S^۳$

(هـ) $S^{-۱}$ (و) $So(ToU)$ (ز) $SoT - ToS$

۱۴ـ معادله تبدیل یافته منحنی با معادله $۴xy - ۱ = ۰$ را تحت ماتریس

$$\begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ \frac{-۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{bmatrix}$$

به دست آورید.

فصل ۹

ماتریسهای متعامد[1]

۹ـ۱

در این بخش می‌خواهیم به این سؤال پاسخ دهیم

ـ کدامیک از تبدیلات خطی صفحه، اندازه یک بردار و زاویه بین دو بردار را تغییر نمی‌دهند؟

روشی که در اینجا ارائه می‌شود، برخلاف سیر تاریخی پاسخ به سؤال فوق است، و اغلب مؤلفین از نظر آموزشی ترجیح می‌دهند به شکل زیر به بررسی این سؤال بپردازند.

۹ـ۲ تعریف

ماتریس وارون‌پذیر A را **متعامد** گویند هرگاه وارون‌پذیر بوده و

$$A^{-۱} = A'$$

بنابراین A متعامد است اگر و تنها اگر

$$AA' = I$$

مثال: ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} \frac{۲}{\sqrt{۵}} & \frac{۱}{\sqrt{۵}} \\ -\frac{۱}{\sqrt{۵}} & \frac{۲}{\sqrt{۵}} \end{bmatrix}$$

1.orthogonal matrices

متعامد است زیرا:

$$AA' = \begin{bmatrix} \frac{۲}{\sqrt{۵}} & \frac{۱}{\sqrt{۵}} \\ -\frac{۱}{\sqrt{۵}} & \frac{۲}{\sqrt{۵}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۲}{\sqrt{۵}} & \frac{-۱}{\sqrt{۵}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۵}} & \frac{۲}{\sqrt{۵}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad \square$$

۹ـ۳ ویژگیهای ماتریس متعامد

۹ـ۴ قضیه

دترمینان یک ماتریس متعامد ۱ یا ۱− است.

اثبات: اگر A متعامد باشد، در این صورت $AA' = I$، در نتیجه $|I| = |AA'|$، بنابراین $۱ = |A|^۲$. پس $۱ = |A|$ یا $|A| = -۱$. ■

مثال: ماتریس $\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & ۱ \\ ۱ & +\frac{۱}{۲} \end{bmatrix} = A$ متعامد نیست زیرا $|A| = -\frac{۵}{۴}$. □

مثال: با اینکه دترمینان $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix} = A$، یک است اما A متعامد نیست. یعنی عکس قضیه درست نیست. □

۹ـ۵ قضیه

حاصل ضرب دو ماتریس متعامد، یک ماتریس متعامد است.

اثبات: فرض کنید A و B دو ماتریس متعامد باشند. نشان می‌دهیم ABمتعامد است.

$$(AB)(AB)' = ABB'A'$$

$$= AIA' \qquad \text{زیرا } B \text{ متعامد است.}$$

$$= I \qquad \text{زیرا } A \text{ متعامد است.} \quad ■$$

۹ـ۶ قضیه

وارون یک ماتریس متعامد، ماتریسی متعامد است.

اثبات: فرض کنید A متعامد باشد، در این صورت نشان می‌دهیم $A^{-۱}$ متعامد است.

$$(A^{-۱})(A^{-۱})' = (A^{-۱})(A')^{-۱}$$

$$= (A'A)^{-۱}$$

$$= I^{-۱}$$

$$= I \quad ■$$

۹ـ۷ نتیجه

مجموعه ماتریسهای متعامد با ضرب ماتریسها یک گروه (غیر جابجایی) است.

۹ـ۸ قضیه

ماتریسهای متعامد اندازه یک بردار را تغییر نمی‌دهند.

اثبات: فرض کنید A یک ماتریس متعامد و $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ بردار دلخواهی در صفحه باشند، تبدیل یافته X تحت ماتریس متعامد A را Z می‌نامیم. یعنی

$$AX = Z$$

نشان می‌دهیم $|Z| = |X|$.

$$\begin{aligned} |Z|^2 &= Z'Z \\ &= (AX)'(AX) \\ &= X'A'AX \\ &= X'X && \text{زیرا } A \text{ متعامد است.} \\ &= |X|^2 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

۹ـ۹ قضیه

ماتریسهای متعامد، زاویه بین دو بردار را تغییر نمی‌دهند.

اثبات: فرض کنید A یک ماتریس متعامد و X و Y دو بردار دلخواه صفحه باشند. اگر ماتریس A، دو بردار X و Y را به ترتیب به Z و T تبدیل کند در این صورت

$$AX = Z \qquad , \qquad AY = T$$

اگر α زاویهٔ اصلی بین X و Y و β زاویهٔ اصلی بین Z و T باشند در این صورت

$$\begin{aligned} \cos\beta = \frac{Z'T}{|Z||T|} &= \frac{X'A'AY}{|X||Y|} \\ &= \frac{X'Y}{|X||Y|} && \text{زیرا } A \text{ متعامد است.} \\ &= \cos\alpha \end{aligned}$$

چون $0 \le \alpha ، \beta \le \pi$. در نتیجه از $\cos\beta = \cos\alpha$ نتیجه می‌شود $\beta = \alpha$. ■

دیدیم که هر ماتریس متعامد، زاویه بین دو بردار و همچنین اندازه یک بردار را تغییر نمی‌دهد. از طرف دیگر از نظر هندسی معلوم است که تقارن نسبت به یک خط که از مبدأ می‌گذرد و دوران، اندازه یک بردار و همچنین زاویه بین دو بردار را تغییر نمی‌دهند. بنابراین سؤال زیر مطرح می‌شود:

آیا ماتریسهای دوران و تقارن نسبت به خط $y = mx$، متعامد هستند؟

پاسخ سؤال فوق بسیار ساده است. زیرا به سادگی می‌توان نشان داد که اگر A و B به ترتیب دوران و تقارن باشند در این صورت

$$AA' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BB' = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

یعنی ماتریسهای دوران و تقارن متعامدند.

اینک سؤال زیر را مطرح می‌کنیم:

آیا غیر از دوران و تقارن در صفحه، ماتریسهای 2×2ی متعامد دیگری وجود دارد؟

برای پاسخ به سؤال فوق نخست مطالب زیر را عنوان می‌کنیم

۱. هر ماتریس به فرم

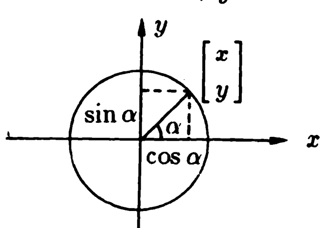
$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

یک تقارن نسبت به خط $y = x\tan\frac{\alpha}{2}$ است.

۲. دترمینان هر ماتریس دوران برابر ۱ و دترمینان ماتریس تقارن برابر ۱− است.

۳. اگر $x^2 + y^2 = 1$ در این صورت $x = \cos\alpha$ و $y = \sin\alpha$

زیرا: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نقطه از دایره واحد $x^2 + y^2 = 1$ است.



شکل ۹ـ۱

۹ـ۱۰ قضیه

هر ماتریس متعامد 2×2 به یکی از دو صورت زیر است.

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

دوران به اندازه α — تقارن نسبت به خط $y = x\tan\frac{\alpha}{۲}$

اثبات: فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

یک ماتریس متعامد باشد. بنابراین $A^{-۱} = A'$ در نتیجه:

$$\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

چون A متعامد است بنابراین $|A| = ۱$ یا $|A| = -۱$ در نتیجه دو حالت در نظر می‌گیریم

حالت ۱) $|A| = ۱$ در این صورت

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases}$$

پس ماتریسهای متعامدی که $|A| = +۱$ به صورت زیرند

$$A = \begin{bmatrix} a & -c \\ c & a \end{bmatrix}$$

از طرف دیگر $|A| = a^۲ + c^۲$ پس $a^۲ + c^۲ = ۱$ و لذا $a = \cos\alpha$ و $c = \sin\alpha$ پس A به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

حالت ۲) $|A| = -۱$ به طریق مشابه ثابت می‌شود A به صورت زیر است.

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} \qquad \blacksquare$$

۹ـ۱۱ نتیجه

۱) ماتریسهای متعامدی که دترمینان آنها مساوی ۱ است عبارتند از دوران به اندازه α.

۲) ماتریسهای متعامدی که دترمینان آنها مساوی ۱− است عبارتند از تقارن نسبت به یک خط $y = mx$. $\blacksquare$

دیدیم که هر ماتریس متعامد به یکی از دو صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

اگر ستونهای هر یک از ماتریسهای فوق را به منزله یک بردار در نظر بگیریم به سادگی دیده می‌شود که در هر یک از ماتریسهای فوق، ستونها بر هم عمودند و اندازه هر یک از ستونها برابر واحد است. بنابراین گزاره زیر را خواهیم داشت.

۹ـ۱۲ گزاره

یک ماتریس ۲ × ۲ متعامد است اگر و تنها اگر اندازه هر یک از ستونها برابر واحد بوده و ستونها بر هم عمود باشند.

اثبات: فرض کنید A یک ماتریس باشد بنابراین

$$A'A = I$$

اگر $C_۱$ و $C_۲$ به ترتیب ستونهای A باشند در این صورت $C'_۱$ و $C'_۲$ سطرهای A' خواهند بود و داریم

$$A'A = \begin{bmatrix} C'_۱C_۱ & C'_۱C_۲ \\ C'_۲C_۱ & C'_۲C_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

اما $C'_۱C_۱ = |C_۱|^۲$ و $C'_۲C_۲ = |C_۲|^۲$ بنابراین $|C_۱| = ۱$ و $|C_۲| = ۱$ یعنی اندازه ستون اول و دوم A برابر واحد است. از اینکه $C'_۱C_۲ = ۰$ یا $C'_۲C_۱ = ۰$ نتیجه می‌گیریم که ستون اول بر ستون دوم عمود است. ■

تذکر: روشی که برای اثبات قضیه فوق به کار بردیم می‌توان برای هر ماتریس $n \times n$ به کار برد بنابراین می‌توان گفت که:

ماتریس A متعامد است اگر و تنها اگر ستونها دوبه‌دو بر هم عمود باشند و اندازه هر یک از ستونها برابر واحد باشد.

تذکر: همین نتیجه برای سطرها برقرار است.

مثال: نشان دهید ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} & ۰ & \frac{۱}{\sqrt{۲}} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{\sqrt{۲}} & ۰ & \frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

ماتریس متعامد است.

حل: با یک محاسبه ساده می‌توان نشان داد، که ستونها دوبه‌دو بر هم عمودند. برای مثال ستون دوم و سوم را بررسی می‌کنیم

$$C_۲'C_۳ = [\cdot \quad \frac{۱}{\sqrt{۲}} \quad \frac{۱}{۲} \quad \frac{۱}{۲}] \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ \cdot \\ \frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix} = \cdot$$

همچنین اندازه هر یک از ستونها مساوی واحد است برای مثال

$$|C_۲| = \sqrt{\cdot + (\frac{۱}{\sqrt{۲}})^۲ + (\frac{۱}{۲})^۲ + (\frac{۱}{۲})^۲} = ۱ \qquad \square$$

۹ـ۱۳ مسائل تکمیلی در مورد ماتریسهای متعامد

۹ـ۱۴ مسئله

فرض کنید S یک ماتریس پاد متقارنی باشد به طوری که $I + S$ وارون‌پذیر باشد. ثابت کنید $(I - S)(I + S)^{-۱}$ متعامد است.

حل: قبل از حل مسئله نخست نشان می‌دهیم $(I - S)$ و $(I + S)$ تعویض‌پذیرند

$$(I + S)(I - S) = I - S^۲$$

$$(I - S)(I + S) = I - S^۲$$

اینک قرار می‌دهیم $A = (I - S)(I + S)^{-۱}$، نشان می‌دهیم $A'A = I$.

$$\begin{aligned} A'A &= [(I - S)(I + S)^{-۱}]'[(I - S)(I + S)^{-۱}] \\ &= [(I + S)^{-۱}]'(I - S)'(I - S)(I + S)^{-۱} \\ &= [(I + S)']^{-۱}(I' - S')(I - S)(I + S)^{-۱} \\ &= [(I' + S')]^{-۱}(I' - S')(I - S)(I + S)^{-۱} \\ &= (I - S)^{-۱}(I + S)(I - S)(I + S)^{-۱} && \text{زیرا } S \text{ پاد متقارن است.} \\ &= (I - S)^{-۱}(I - S)(I + S)(I + S)^{-۱} && \text{زیرا } I - S \text{ و } I + S \text{ تعویض‌پذیرند} \\ &= I \qquad \square \end{aligned}$$

۹ـ۱۵ مسئله

فرض کنید A ماتریس متعامدی باشد به طوری که $I+A$ وارون‌پذیر باشد. ثابت کنید $(I-A)(I+A)^{-۱}$ پاد متقارن است.

حل: قرار می‌دهیم $S=(I-A)(I+A)^{-۱}$، نشان می‌دهیم $S'=-S$

$$\begin{aligned} S' &= [(I+A)^{-۱}]'(I-A)' \\ &= (I'+A')^{-۱}(I'-A') \\ &= (I+A')^{-۱}(I-A') \\ &= (A'A+A')^{-۱}(A'A-A') && \text{زیرا } A \text{ متعامد است.} \\ &= [A'(A+I)]^{-۱}[A'(A-I)] \\ &= (I+A)^{-۱}(A')^{-۱}(A')(A-I) \\ &= (A+I)^{-۱}I(A-I) \\ &= (A+I)^{-۱}(A-I) \\ &= -(I-A)(I+A)^{-۱} && \text{زیرا } I+A \text{ و } I-A \text{ تعویض‌پذیرند.} \\ &= -S \qquad \square \end{aligned}$$

۹ـ۱۶ مسئله

اگر A ماتریس تقارن نسبت به خط $y=mx$ و Bماتریس دوران باشد در این صورت ماتریس $A^{۴}B^{۳}$ نمایشگر چه تبدیلی است؟

حل: با توجه به اینکه حاصل ضرب دو ماتریس متعامد، ماتریسی متعامد است نتیجه می‌گیریم $A^{۴}B^{۳}$ یا ماتریس تقارن نسبت به یک خط $y=m'x$ است و یا یک دوران و چون

$$|A^{۴}B^{۳}|=|A|^{۴}|B|^{۳}=(-۱)^{۴}(۱)=۱$$

لذا $A^{۴}B^{۳}$ یک دوران است. $\square$

تمرینات فصل ۹

۱ـ فرض کنید $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ یک ماتریس متعامد باشد. نشان دهید

$$P = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & a & b \\ ۰ & c & d \end{bmatrix}$$

نیز ماتریسی متعامد است.

۲ـ نشان دهید هر یک از ماتریسهای زیر متعامد است.

(a) $\begin{bmatrix} \frac{۳}{۵} & -\frac{۴}{۵} \\ \frac{۴}{۵} & \frac{۳}{۵} \end{bmatrix}$ $\quad$ (b) $\begin{bmatrix} \frac{۳}{۵} & \frac{۴}{۵} \\ \frac{۴}{۵} & -\frac{۳}{۵} \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۳}{۵} & \frac{۴}{۵} \\ ۰ & \frac{۴}{۵} & -\frac{۳}{۵} \end{bmatrix}$ $\quad$ (d) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۳}{۵} & -\frac{۴}{۵} \\ ۰ & \frac{۴}{۵} & \frac{۳}{۵} \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} \frac{۲۹}{۴۵} & -\frac{۴}{۹} & \frac{۲۸}{۴۵} \\ \frac{۲۸}{۴۵} & \frac{۷}{۹} & -\frac{۴}{۴۵} \\ -\frac{۴}{۹} & \frac{۴}{۹} & \frac{۷}{۹} \end{bmatrix}$ $\quad$ (f) $\begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳\sqrt{۲}} \\ ۰ & \frac{۱}{۳} & -\frac{۴}{۳\sqrt{۲}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} & -\frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳\sqrt{۲}} \end{bmatrix}$

۳ـ اگر A یک ماتریس مربع دلخواه و C یک ماتریس متعامد هم مرتبه با A باشد با استقراء ثابت کنید

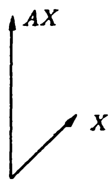
$$(C'AC)^n = C'A^nC$$

فصل ۱۰

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

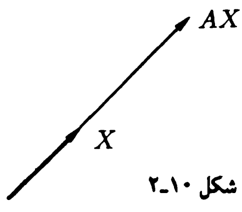
۱ـ۱۰

اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، بین بردار X و تبدیل‌یافته آن یعنی AX هیچ ارتباط آشکاری وجود ندارد (شکل ۱۰ ۰ ۱).



شکل ۱۰ـ۱

اما با این وجود گاهی بردار ناصفری وجود دارد که تبدیل‌یافته آن آن تحت ماتریس Aمضربی از آن بردار می‌شود (شکل ۱۰ ۰ ۲).



شکل ۱۰ـ۲

مثال: ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

مفروض است. اثر ماتریس A را روی دو بردار

$$Y = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

مطالعه می‌کنیم.

$$AY = \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۵ \end{bmatrix}$$

$$AX = \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۳ \end{bmatrix} = ۳ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۳X$$

ملاحظه می‌کنید که ماتریس A بردار $X = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ را به مضربی از آن تبدیل کرده است. در این صورت اصطلاحاً گویند ماتریس A، *امتداد بردار X را ثابت نگه‌داشته است*. در حالی که، ماتریس A امتداد بردار Y را تغییر داده است. □

بردارهایی که امتدادشان تحت یک ماتریس مفروض A پایدار می‌ماند در تجزیه و تحلیل تبدیلات خطی نقش عمده‌ای ایفا می‌کنند و به طور طبیعی در مطالعه سیستمهای الکتریکی، ژنتیک، واکنشهای شیمیایی، مکانیک کوانتم، اقتصاد و هندسه ظاهر می‌شوند. در این فصل می‌خواهیم نشان دهیم که چگونه این بردارها را به دست می‌آوریم. نخست به تعریف زیر توجه کنید.

تعریف. اگر A یک‌ماتریس $n \times n$ باشد، دراین‌صورت بردار ناصفر X را یک بردار ویژه[1] A گویند هرگاه AX مضربی از X باشد، یعنی به ازای یک عدد حقیقی λ،

$$AX = \lambda X$$

عدد حقیقی λ را یک مقدار ویژه[2] A می‌نامند.

تذکر ۱: لغت «$eigenvector$» ، لغتی آلمانی انگلیسی است. پیشوند «$eigen$» را می‌توان به صورت «$proper$» یا «$characteristic$» ترجمه کرد. از این رو مقادیر ویژه را نیز «مقادیر خاص[3]» یا «مقادیر مشخصه[4]» نیز می‌گویند. در متنهای قدیمی‌تر ریاضی آن را «ریشه‌های نهفته[5]» نیز می‌گفتند.

تذکر ۲: اگر $AX = \lambda X$، در این صورت X را یک *بردار ویژه وابسته* به λ گویند.

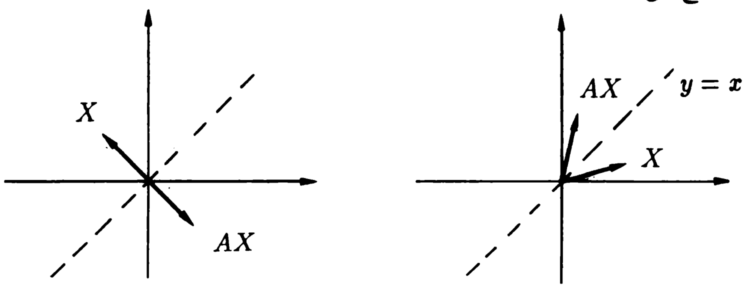
تذکر ۳: توجه کنید همان طورکه در تعریف دیدیم بردار ویژه برداری است مخالف صفر. علت کنارگذاشتن صفر را می‌توان در این مسئله دانست که $X = \bar{o}$ در معادله $AX = \lambda X$ برای هر λ صدق می‌کند لذا این بردار مورد توجه ما نیست زیرا بردار صفر به یک مقدار ویژه منحصر به‌فرد وابسته نمی‌شود.

1.Eigenvector
2.Eigenvalue
3.Proper value
4.Characteristic
5.Latent roots

مثال: ماتریس تقارن نسبت به خط $y = x$ عبارت است از

$$A = \begin{bmatrix} \text{۰} & \text{۱} \\ \text{۱} & \text{۰} \end{bmatrix}$$

از نظر هندسی می‌توان فهمید ماتریس A امتداد چه بردارهایی را ثابت نگه می‌دارد و چه بردارهایی را از امتدادشان خارج می‌کند ؟



شکل ۱۰ـ۳

از شکل ۱۰ . ۳ الف معلوم است که اگر X برداری باشد که امتداد آن بر $y = x$ عمود باشد در این صورت ماتریس A امتداد X را ثابت نگه می‌دارد، در واقع

$$AX = -X$$

یعنی کلیه بردارهای عمود بر $y = x$ (یعنی واقع بر خط $y = -x$) بردار ویژه‌ای برای ماتریس A می‌باشند که مقدار ویژهٔ آنها ۱− است.

از شکل ۱۰ . ۳ ب معلوم است که اگر برداری بر خط $y = x$ منطبق یا عمود نباشد راستایش تحت ماتریس A تغییر می‌کند، یعنی بردار ویژه نیست. □

۱۰ـ۲ روش به دست آوردن مقادیر ویژه یک ماتریس

برای یافتن مقادیر ویژه ماتریس A، تساوی $AX = \lambda X$ را به صورت

$$AX = \lambda IX$$

و یا به صورت زیر می‌توان نوشت

$$(A - \lambda I)X = \bar{o} \qquad (\text{۱})$$

در صورتی λ یک مقدار ویژه است که یک دستگاه همگن (۱) دارای جواب غیر صفر باشد. یعنی می‌بایست دترمینان ضرایب آن صفر باشد. پس λ یک مقدار ویژه A است اگر و تنها اگر

$$\boxed{|A - \lambda I| = ۰}$$

این معادله را، *معادله مشخصه*[1] (سرشتنمایی) A گویند. ریشه‌های این معادله مقادیر ویژه A را مشخص می‌کنند. وقتی $A - \lambda I$ را بسط دهیم، $|A - \lambda I|$ یک چند جمله‌ای است که آن را *چند جمله‌ای مشخصه*[2] A گویند.

مثال: مقادیر ویژهٔ ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

را به دست آورید.

حل: نخست $A - \lambda I$ را تشکیل می‌دهیم

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ - \lambda & ۲ \\ -۱ & -\lambda \end{bmatrix}$$

چند جمله‌ای سرشتنمایی A عبارت است از

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} ۳ - \lambda & ۲ \\ -۱ & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^۲ - ۳\lambda + ۲$$

و معادله سرشتنمایی A به صورت زیر است.

$$\lambda^۲ - ۳\lambda + ۲ = ۰$$

جوابهای این معادله عبارتند از $\lambda = ۱$ و $\lambda = ۲$، که همان مقادیر ویژه A هستند. □

مثال: مقادیر ویژه ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} -۲ & -۱ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}$$

را به دست آورید.

حل: اگر مانند مثال قبلی عمل کنیم داریم.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -۲ - \lambda & -۱ \\ ۵ & ۲ - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^۲ + ۱$$

مقادیر ویژه A ریشه‌های معادله $\lambda^۲ + ۱ = ۰$ می‌باشند. اما این معادله ریشه‌های حقیقی دارد. بنابراین ماتریس A دارای مقادیر ویژه (حقیقی) نیست. □

---

1. Characteristic equation

2. Characteristic polynomial

مثال: مقادیر ویژه

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۴ & -۱۷ & ۸ \end{bmatrix}$$

را به دست آورید.

حل: مانند مثالهای قبل

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & ۱ & ۰ \\ ۰ & -\lambda & ۱ \\ ۴ & -۱۷ & ۸ - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^۳ - ۸\lambda^۲ + ۱۷\lambda - ۴$$

مقادیر ویژه A ریشه‌های معادله

$$\lambda^۳ - ۸\lambda^۲ + ۱۷\lambda - ۴ = ۰ \qquad (۱)$$

است. برای حل این معادله، از جستجو برای یافتن ریشه‌های صحیح معادله شروع می‌کنیم. این کار را با آزمودن مقسوم‌علیه‌های عدد ثابت معادله یعنی ± ۴، ± ۲، ± ۱ انجام می‌دهیم. با قرار دادن این اعداد در معادله (۱) معلوم می‌شود که $\lambda = ۴$ یک جواب صحیح معادله است. در نتیجه، چند جمله‌ای سمت چپ معادله (۱) دارای عامل $\lambda - ۴$ است. با تقسیم آن بر $\lambda - ۴$، معادله (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$(\lambda - ۴)(\lambda^۲ - ۴\lambda + ۱) = ۰$$

در نتیجه مقادیر ویژه ماتریس A عبارتند از

$$\lambda = ۴, \lambda = ۲ + \sqrt{۳}, \lambda = ۲ - \sqrt{۳} \quad \square$$

تذکر: همان طور که ملاحظه کردید برای یافتن مقادیر ویژه یک ماتریس مرتبه n می‌بایست یک معادله درجه n را حل کرد. در مورد ماتریسهای از مرتبه بزرگ اغلب با معادلاتی روبرو می‌شویم که حل آن ناممکن و یا بسیار مشکل است. از این رو در درسهای بالاتر جبر خطی یا آنالیز عددی روشهایی تقریبی برای یافتن مقادیر ویژه یک ماتریس ارائه می‌دهند.

۱۰ـ۳ روش تعیین بردارهای ویژه یک ماتریس

بعد از اینکه مقادیر ویژه A را به دست آوردیم، برمی‌گردیم به مسئله یافتن بردارهای ویژه A. بردارهای ویژه متناظر به یک مقدار ویژه λ، بردارهای ناصفری مانند X هستند که در دستگاه $AX = \lambda X$ صدق می‌کنند. به عبارت معادل می‌بایست جوابهای ناصفر دستگاه $(A - \lambda I)X = ۰$ را به دست آورد.

مجموعه جواب این دستگاه را **فضای ویژه**[1] A متناظر با λ گویند.

مثال: بردارهای ویژه ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

را به دست آورید.

حل: نخست مقادیر ویژه A را به دست می‌آوریم. برای این کار داریم

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} ۴ - \lambda & -۱ \\ ۲ & ۱ - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^{۲} - ۵\lambda + ۶$$

بنابراین مقادیر ویژه جوابهای معادله

$$\lambda^{۲} - ۵\lambda + ۶ = ۰$$

هستند که عبارتنداز $\lambda_۱ = ۲$، $\lambda_۲ = ۳$.

برای یافتن بردارهای ویژه نظیر $\lambda_۱ = ۲$ می‌بایست معادله $AX = ۲X$ و یا به عبارت معادل دستگاه

$$(A - ۲I)X = \bar{o}$$

را حل کرد. بنابراین داریم

$$\begin{bmatrix} ۴ - ۲ & -۱ \\ ۲ & ۱ - ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x - y = ۰ \\ ۲x - y = ۰ \end{cases}$$

جوابهای این دستگاه عبارتند ازکلیه نقاط واقع بر خط $y = ۲x$. پس فضای ویژه نظیر $\lambda_۱ = ۲$ عبارت است از

$$\{(x, y) | y = ۲x\}$$

و بردار ویژه نظیر $\lambda_۱ = ۲$ جوابهای ناصفر این دستگاه است. برای مثال

$$\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

یک بردار ویژه نظیر $\lambda_۱ = ۲$ است.

---

1. Eigenspace

به همین ترتیب بردارهای ویژه $\lambda_۲ = ۳$ جوابهای ناصفر $AX = ۳X$ یا

$$(A - ۳I)X = \bar{o}$$

می‌باشند

$$\begin{bmatrix} ۴-۳ & -۱ \\ ۲ & ۱-۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = ۰ \\ ۲x - ۲y = ۰ \end{cases}$$

بنابراین بردارهای ویژه نظیر $\lambda_۲ = ۳$ عبارتند از بردارهایی به صورت

$$\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \qquad x \neq ۰$$

و فضای ویژه $\lambda_۲ = ۳$ عبارت است از

$$\{(x, y) | y = x\} \qquad \square$$

۱۰ـ۴ صورت کلی معادله سرشتنمایی یک ماتریس ۲ × ۲

ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

را در نظر می‌گیریم. چند جمله‌ای سرشتنمایی A به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$

$$= \lambda^۲ - (a+d)\lambda + ad - bc$$

می‌دانیم trA مجموع درایه‌های قطر اصلی A است یعنی $trA = a + d$ و همچنین $|A| = ad - bc$، بنابراین معادله سرشتنمایی A عبارت است از:

$$\boxed{\lambda^۲ - (trA)\lambda + |A| = ۰}$$

۱۰ـ۵ نتیجه

اگر $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ مقادیر ویژه ماتریس مرتبه ۲ی Aباشند، در این صورت

$$\boxed{A \text{ مجموع مقادیر ویژه } = \lambda_1 + \lambda_2 = trA}$$

$$\boxed{A \text{ حاصل ضرب مقادیر ویژه } = \lambda_1 \lambda_2 = |A|}$$

مثال: m را چنان تعیین کنید که مجموع مقادیر ویژه $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & m \end{bmatrix}$ برابر ۴ شود.

حل:

$$A \text{ مجموع مقادیر ویژه } = trA$$

$$4 \quad = 1 + m \Rightarrow \boxed{m = 3} \qquad \square$$

۱۰ـ۶ صورت کلی معادله‌سرشتنمایی یک ماتریس ۳ × ۳

۱۰ـ۷ قضیه

معادله سرشتنمایی ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

عبارت است از

$$\boxed{\lambda^3 - (trA)\lambda^2 + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda - |A| = 0}$$

اثبات:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} + 0 & a_{13} + 0 \\ a_{21} + 0 & a_{22} - \lambda & a_{23} + 0 \\ a_{31} + 0 & a_{32} + 0 & a_{33} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & -\lambda & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & -\lambda & 0 \\ a_{31} & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & a_{13} \\ 0 & -\lambda & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= |A| - \lambda\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right)$$

$$+ \lambda^2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) - \lambda^3$$

بنابراین معادله سرشتنمایی آن عبارت است از:

$$\lambda^3 - (trA)\lambda^2 + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right)\lambda - |A| = 0 \quad \blacksquare$$

مثال: معادله سرشتنمایی ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ -7 & -3 & -1 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

را به دست آورید.

حل:

$$|A - \lambda I| = -\lambda^3 + (5 - 3 + 2)\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\right)\lambda$$

$$+ |A| = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 7\lambda - 10$$

بنابراین معادله سرشتنمایی A به صورت زیر در می‌آید

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

با توجه به اینکه مجموع ضرایب معادله صفر است آن را به صورت زیر می‌توان تجزیه کرد.

$$(\lambda - 1)(\lambda - 5)(\lambda + 2) = 0$$

بنابراین مقادیر ویژه A عبارتند از:

$$\lambda = 1 \;,\; \lambda = 5 \;,\; \lambda = -2 \quad \square$$

۱۰ـ۸ صورت کلی معادله سرشتنمایی یک ماتریس $n \times n$

اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد معادله سرشتنمایی A یک معادله درجه n است که برخی از ضرایب این معادله معلوم است که عبارتند از ضریب درجه n و درجه $n-1$ و عدد ثابت معادله، که در زیر آورده شده است.

$$\boxed{\lambda^{n} - (trA)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^{n}|A| = 0}$$

مثال: معادله سرشتنمایی ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

را به دست آورید.

حل:

$$\text{ضریب}\lambda^{4} = 1 \quad , \quad \text{ضریب}\lambda^{3} = -trA = -(1+0-2+6) = -5$$

$$\text{ضریب}\lambda^{2} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} \right) = 9$$

$$\text{ضریب}\lambda = -\left(\begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 6 \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} \right) = -7$$

$$\text{عدد ثابت} = |A| = 2$$

بنابراین معادله سرشتنمایی A عبارت است از

$$\lambda^{4} - 5\lambda^{3} + 9\lambda^{2} - 7\lambda + 2 = 0 \quad \square$$

۱۰ـ۹ نتیجه

اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد

$$\boxed{trA = \text{مجموع مقادیر ویژه } A}$$

$$\boxed{|A| = \text{حاصل ضرب مقادیر ویژه } A}$$

۱۰ـ۱۰ مقادیر ویژه ماتریسهای بالا مثلثی (پایین مثلثی)

۱۰ـ۱۱ قضیه

مقادیر ویژه ماتریسهای بالا مثلثی (پایین مثلثی) همان درایه‌های واقع بر قطر اصلی‌اند.

اثبات: فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & ۰ & & ۰ \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & & ۰ \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n۱} & a_{n۲} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{۱۱} - \lambda & ۰ & & ۰ \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} - \lambda & & ۰ \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n۱} & a_{n۲} & & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = ۰$$

در نتیجه معادله سرشتنمایی A عبارت است از:

$$(a_{۱۱} - \lambda)(a_{۲۲} - \lambda)\cdots(a_{nn} - \lambda) = ۰$$

پس $\lambda_۱ = a_{۱۱}$، $\lambda_۲ = a_{۲۲}$، $\cdots$ و $\lambda_n = a_{nn}$ مقادیر ویژه A می‌باشند. ■

۱۰ـ۱۲ نتیجه

مقادیر ویژه یک ماتریس قطری، همان درایه‌های واقع بر قطر اصلی هستند.

۱۰ـ۱۳ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه وارون یک ماتریس

۱۰ـ۱۴ قضیه

ماتریس A وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر همه مقادیر ویژه آن مخالف صفر باشند.

اثبات: چون عدد ثابت معادله سرشتنمایی ماتریس A عبارت است از $(-۱)^n|A|$ بنابراین همه جوابهای معادله سرشتنمایی A ناصفر است اگر و تنها اگر $(-۱)^n|A| \neq ۰$. یعنی همه جوابهای معادله سرشتنمایی Aناصفر است اگر و تنها اگر $|A| \neq ۰$. ■

۱۰ـ۱۵ نتیجه

اگر یکی از مقادیر ویژه یک ماتریس صفر باشد آن ماتریس وارون‌پذیر نیست و بر عکس.

اینک در قضیه زیر رابطه بین مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یک ماتریس مانند A با وارونش بیان می‌کنیم.

۱۰ـ۱۶ قضیه

اگر $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ و $\cdots$ و λ_n مقادیر ویژه ماتریس وارون‌پذیر A باشند، در این صورت $\frac{۱}{\lambda_۱}$، $\frac{۱}{\lambda_۲}$ و $\cdots$ و $\frac{۱}{\lambda_n}$ مقادیر ویژه $A^{-۱}$ می‌باشند.

اثبات: فرض کنید λ مقدار ویژه‌ای از ماتریس A و X بردار ویژه نظیر λ باشد پس

$$AX = \lambda X$$

اینک اگر از سمت چپ ماتریس $A^{-۱}$ را ضرب کنیم داریم

$$A^{-۱}AX = A^{-۱}(\lambda X)$$

در نتیجه

$$X = \lambda(A^{-۱}X)$$

چون A وارون‌پذیر است پس $\lambda \neq ۰$ و لذا $\frac{۱}{\lambda}$ وجود دارد بنابراین داریم

$$A^{-۱}X = \frac{۱}{\lambda}X$$

که نشان می‌دهد $\frac{۱}{\lambda}$ یک مقدار ویژه $A^{-۱}$ است. ■

۱۰ـ۱۷ نتیجه

بردارهای ویژه A وابسته به λ مساوی بردارهای ویژه $A^{-۱}$ وابسته به $\frac{۱}{\lambda}$ است.

۱۰ـ۱۸ رابطه بین مقادیر ویژه A و A′

قضیه: مقادیر ویژه A و A' یکسان هستند.

اثبات: کافی است نشان دهیم چند جمله‌ای سرشتنمایی آنها مساوی است. می‌دانیم

$$(A-\lambda I)' = A' - (\lambda I)'$$
$$= A' - \lambda I$$

و

$$|(A-\lambda I)| = |(A-\lambda I)'|$$
$$= |A' - \lambda I|$$

یعنی چند جمله‌ای سرشتنمایی A و A' مساویند. پس مقادیر ویژه A و A' یکسانند. ■

۱۰ـ۱۹ مقادیر ویژه چند جمله‌ایهای ماتریسی

۱۰ـ۲۰ قضیه

اگر k یک عدد حقیقی و λ یک مقدار ویژه A باشد در این صورت $k\lambda$ یک مقدار ویژه ماتریس kA است.

اثبات: فرض کنید λ مقدار ویژه A باشد، پس برای یک بردار ویژه X وابسته به λ داریم

$$AX = \lambda X$$

و از آنجا

$$k(AX) = k(\lambda X)$$

در نتیجه

$$(kA)X = (k\lambda)X$$

یعنی $k\lambda$ یک مقدار ویژهٔ kA است. ■

۱۰ـ۲۱ قضیه

اگر λ_1 و λ_2 و $\cdots$ و λ_k مقادیر ویژه A باشند، در این صورت λ_1^n، λ_2^n، $\cdots$ و λ_k^n مقادیر ویژه A^n می‌باشند $(n \in N)$.

اثبات: با استقراء به سادگی می‌توان نشان داد که اگر

$$AX = \lambda X \qquad \text{آنگاه} \qquad A^n X = \lambda^n X$$

یعنی اگر λ یک مقدار ویژه A باشد، λ^n یک مقدار ویژه A^n است.

۱۰ـ۲۲ نتیجه

اگر λ یک مقدار ویژه A و $f(x)$ یک چند جمله‌ای باشد در این صورت $f(\lambda)$ یک مقدار ویژه $f(A)$ است.

اثبات: فرض کنید $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ بنابراین

$$f(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I$$

چون λ یک مقدار ویژه A است پس $a_n \lambda^n$ یک مقدار ویژه $a_n A^n$ و $\cdots$ و $a_1 \lambda$ یک مقدار ویژه $a_1 A$ و a_0 مقدار ویژه $a_0 I$ است. بنابراین از اینکه $AX = \lambda X$، نتیجه می‌گیریم

$$(a_n A^n)X = (a_n \lambda^n)X$$

$$(a_1 A)(X) = (a_1 \lambda)X$$
$$(a_0 I)X = a_0 X$$

پس

$$(a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I)X = (a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0)X$$

یعنی

$$f(A)X = f(\lambda)X$$

پس $f(\lambda)$ یک مقدار ویژه $f(A)$ است. ■

مثال: اگر

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

نشان دهید ماتریس $۲A^۳ - ۵A^۲ - ۶A + I$ وارون‌پذیر نیست.

حل: معادله سرشتنمایی A عبارت است از

$$\lambda^۲ - (۱ + ۳)\lambda + (۳ - ۸) = ۰$$

پس

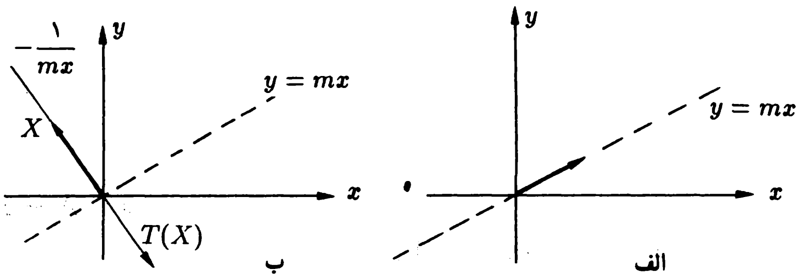
$$\lambda^۲ - ۴\lambda - ۵ = ۰$$

یعنی $\lambda = 5$ و $\lambda = -1$ مقادیر ویژه A می‌باشند، بنابراین $2(-1)^3 - 5(-1)^2 - 6(-1) + 1$ و $2(5)^3 - 5(5)^2 - 6(5) + 1$ یعنی ۰ و ۹۶ مقادیر ویژه $2A^3 - 5A^2 - 6A + I$ می‌باشند. از آنجا که یکی از مقادیر ویژه این ماتریس مساوی صفر است پس این ماتریس وارون‌پذیر نیست. □

۱۰ـ۲۳ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه چند تبدیل مهم

۱۰ـ۲۴ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه تقارن نسبت به خط $\mathbf{y = mx}$

روش اول (روش هندسی): با توجه به شکل زیر معلوم است که



شکل ۱۰ـ۴

تقارن نسبت به خط $y = mx$ راستای دو نوع بردار را تغییر نمی‌دهد

۱) بردارهایی که روی خط $y = mx$ قرار دارند، قرینه آنها نسبت به خط $y = mx$ مساوی خودشان می‌باشد یعنی اگر A ماتریس تقارن نسبت به خط $y = mx$ و X برداری واقع بر این خط باشد در این صورت

$$AX = X$$

(شکل ۱۰ . ۴ الف را ببینید)

۲) بردارهایی که روی خط عمود بر $y = mx$ قرار دارند، در این صورت اگر X برداری واقع بر خط عمود بر $y = mx$ باشد داریم

$$AX = -X$$

معلوم است که تقارن نسبت به خط $y = mx$، راستای سایر بردارها را تغییر می‌دهد. در نتیجه ۱ و ۱- مقادیر ویژه و بردارهای واقع بر خط $y = mx$ و خط $y = -\frac{1}{m}x$ به ترتیب بردارهای ویژه نظیر ۱ و ۱- می‌باشند.

روش دوم: ماتریس تقارن نسبت به خط $y = mx$، $(y = x\tan\alpha)$ عبارت است از

$$\begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}$$

در نتیجه معادله سرشتنمایی آن به صورت زیر است.

$$\lambda^{2} - 1 = 0$$

و لذا مقادیر ویژه آن عبارتند از

$$\lambda = -1 \quad , \quad \lambda = 1$$

برای به دست آوردن بردارهای ویژه $\lambda = 1$ می‌بایست دستگاه

$$AX = X$$

و یا

$$(A - I)X = \bar{o}$$

را حل کرد. داریم

$$\begin{bmatrix} \cos 2\alpha - 1 & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \bar{o}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\cos 2\alpha - 1)x + (\sin 2\alpha)y = 0 \\ (\sin 2\alpha)x - (\cos 2\alpha + 1)y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} x$$

اما

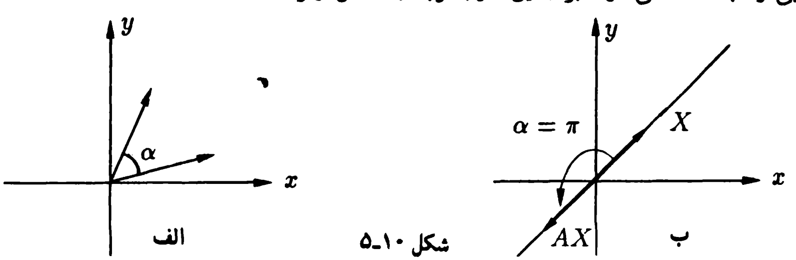
$$\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2\sin^{2}\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \tan\alpha$$

پس امتداد بردارهای ویژه نظیر $\lambda = 1$ عبارتند از خود خط $y = x\tan\alpha$.

به طریق مشابه ثابت می‌شود که امتداد بردارهای ویژه نظیر $\lambda = -1$ عبارت است از $y = -x\cot\alpha$.

۱۰ـ۲۵ بردارها و مقادیر ویژه دوران

روش اول: برای یافتن بردارهای ویژه دوران حول مبدأ به اندازه α باید دید که دوران راستای چه بردارهایی را ثابت نگه می‌دارد؟ برای این کار با توجه به شکل زیر



شکل ۱۰ـ۵

معلوم است که دوران راستای هر بردار را تغییر می‌دهد (شکل ۱۰ ۰ ۵ الف) مگر اینکه زاویه دوران $\alpha = \pi$ باشد (شکل ۱۰ ۰ ۵ ب). بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که

یک دوران به اندازه α هیچ بردار ویژه‌ای ندارد مگر اینکه α مضربی از π باشد.

حال اگر $\alpha = \pi$ باشد، از شکل (b ۱۰ ۰ ۵) معلوم است که برای هر بردار ناصفر X،

$$AX = -X$$

و چون این مطلب برای هر مضرب فرد π نیز درست است، بنابراین می‌توان گفت

اگر α مضرب فردی از π باشد در این صورت ماتریس دوران به اندازه α یک مقدار ویژه (۱−) دارد و همه بردارهای ناصفر صفحه، بردار ویژه وابسته به $\lambda = -1$ می‌باشند.

اگر α مضرب زوجی از π باشد، در این صورت ماتریس دوران همان ماتریس همانی است و داریم

$$AX = X$$

یعنی:

اگر α مضرب زوجی از π باشد، در این صورت هر بردار ناصفر صفحه یک بردار ویژه وابسته به $\lambda = 1$ است.

روش دوم: ماتریس دوران به اندازه α عبارت است از

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

معادله سرشتنمایی این ماتریس به صورت زیر است.

$$\lambda^2 - 2(\cos\alpha)\lambda + 1 = 0$$

این معادله در صورتی جواب حقیقی دارد که

$$\Delta' = \cos^2\alpha - 1 \geq 0$$

اما $\cos^2\alpha \leq 1$ بنابراین $\cos^2\alpha - 1 \leq 0$، در نتیجه می‌بایست $\cos^2\alpha - 1 = 0$ یعنی $\cos\alpha = \pm 1$ و بنابراین $\alpha = 2k\pi$ یا $\alpha = 2k\pi + \pi$ ،$k \in Z$.

یعنی در صورتی معادله جواب دارد که α مضربی فرد یا زوج از π باشد.

۱۰ـ۲۶ مقادیر ویژه ماتریسهای متعامد

قبلاً دیدیم که مقادیر ویژه تقارن نسبت به خط $y = mx$ و دوران ۱± است. چون هر ماتریس متعامد به یکی از این دو صورت است نتیجه می‌گیریم که مقادیر ویژه هر ماتریس متعامد ۲ × ۲، ۱± است. اینک می‌خواهیم به روش دیگری این نتیجه را بگیریم.

۱۰ـ۲۷ قضیه

مقادیر ویژه هر ماتریس متعامد، ۱± است.

برهان: فرض کنید λ یک مقدار ویژه ماتریس متعامد A باشد، بنابراین بردار ناصفری مانند X وجود دارد به طوری که

$$AX = \lambda X \qquad (۱)$$

چون A متعامد است پس اندازه بردار را ثابت نگه می‌دارد. یعنی

$$|AX| = |X|$$

از طرف دیگر از (۱) نتیجه می‌شود

$$|AX| = |\lambda X|$$

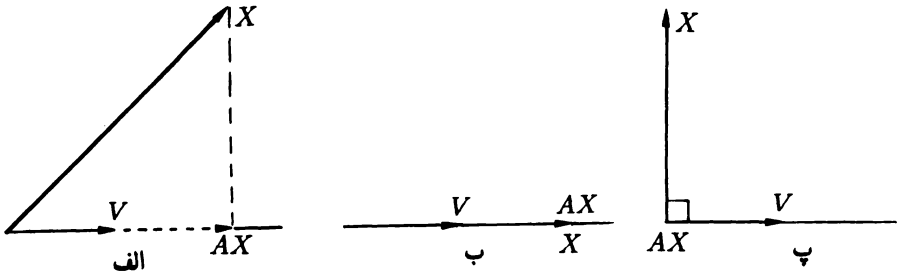
بنابراین

$$\begin{aligned} & |\lambda X| = |X| \\ \Rightarrow & |\lambda||X| = |X| \\ \Rightarrow & |\lambda| = ۱ \qquad\qquad \text{زیرا } |X| \neq ۰ \\ \Rightarrow & \lambda = \pm ۱ \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

۱۰ـ۲۸ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس تصویر

فرض کنید V یک بردار واحد در صفحه باشد. اگر A ماتریس تصویر قائم روی خط گذرنده از V باشد، در این صورت معلوم است که A هر بردار واقع بر خط گذرنده از V را ثابت نگه می‌دارد. بنابراین اگر X مضربی از V باشد در این صورت

$$AX = X \qquad \text{(شکل ۱۰.۶ ب را نگاه کنید)}$$



شکل ۱۰ـ۶

یعنی هر بردار ناصفر مضرب V یک بردار ویژه ماتریس تصویر و $\lambda = ۱$ نیز یک مقدار ویژه آن است.

اگر X بر V عمود باشد، در این صورت $AX = \bar{o}$

در نتیجه

$$AX = ۰ \cdot X$$

یعنی هر بردار ناصفری که بر V عمود باشد یک بردار ویژه نظیر $\lambda = ۰$ است.

به طور خلاصه نشان داده‌ایم که

مقادیر ویژه ماتریس تصویر روی بردار واحد V عبارتند از $\lambda = ۰$ و $\lambda = ۱$. مضارب ناصفر V بردارهای ویژه وابسته به $\lambda = ۱$ و بردارهای ناصفر عمود بر V بردارهای ویژه وابسته به $\lambda = ۰$ می‌باشند.

مثال: بدون استفاده از نتیجه قبل مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

را به دست آورید. (این ماتریس، ماتریس تصویر روی خط $y = x$ است.)

حل: معادله سرشتنمایی A عبارت است از

$$\lambda^۲ - \lambda = ۰$$

پس $\lambda = ۰$ و $\lambda = ۱$ مقادیر ویژه A می‌باشند.

برای تعیین بردارهای ویژه A وابسته به $\lambda = ۰$، می‌بایست دستگاه

$$AX = ۰ \cdot X$$

را حل کرد.

$$\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

از آنجا

$$\begin{cases} \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۲}y = ۰ \\ \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۲}y = ۰ \end{cases} \Rightarrow y = -x$$

پس بردارهای ویژه نظیر $\lambda = ۰$ کلیه بردارهای ناصفر واقع بر خط $y = -x$اند (که بر $y = x$ عمود است).

به همین ترتیب بردارهای ویژه نظیر $\lambda = ۱$ به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$AX = ۱X \qquad \text{یا} \qquad (A - I)X = \bar{o}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۲}y = ۰ \\ -\frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۲}y = ۰ \end{cases}$$

یعنی بردارهای ناصفر واقع بر خط $y = x$ بردارهای ویژه نظیر $\lambda = ۱$اند. □

۱۰ـ۲۹ مسائل گوناگون از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

۱۰ـ۳۰ مسئله

اگر A یک ماتریس $n \times n$ و P یک ماتریس $n \times n$ وارون‌پذیر باشد، نشان دهید مقادیر ویژه A و $P^{-۱}AP$ یکسانند.

حل: نشان می‌دهیم

$$|P^{-۱}AP - \lambda I| = |A - \lambda I|$$

برای این کار لازم است بدانیم:

$$P^{-۱}AP - \lambda I = P^{-۱}AP - P^{-۱}\lambda IP = P^{-۱}(A - \lambda I)P$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} |P^{-۱}AP - \lambda I| &= |P^{-۱}(A - \lambda I)P| \\ &= |P^{-۱}||(A - \lambda I)||P| \\ &= |A - \lambda I| \end{aligned}$$

۱۰ـ۳۱ مسئله

اگر λ یک مقدار ویژه ماتریس وارون‌پذیر A باشد، در این صورت $\frac{|A|}{\lambda}$ نیز یک مقدار ویژه ماتریس $adjA$ است.

حل: چون A وارون‌پذیر است پس داریم $A^{-1} = \frac{1}{|A|}adjA$.

از طرف دیگر مقادیر ویژه A^{-1} عکس مقادیر ویژه A می‌باشند پس $\frac{1}{\lambda}$ یک مقدار ویژه A^{-1} و لذا $\frac{1}{\lambda} \cdot |A|$ یک مقدار ویژه $|A| \cdot A^{-1}$ یعنی $adjA$ است.

۱۰ـ۳۲ مسئله

نشان دهید مقادیر ویژه هر ماتریس خود توان صفر یا یک است.

حل: فرض کنید λ یک مقدار ویژه ماتریس خود توان A باشد بنابراین

$$AX = \lambda X$$
$$\Rightarrow A(AX) = A(\lambda X)$$
$$\Rightarrow A^{2}X = \lambda AX$$
$$\Rightarrow AX = \lambda(AX) \qquad A^{2} = A \quad \text{زیرا}$$
$$\Rightarrow \lambda X = \lambda(\lambda X)$$
$$\Rightarrow (\lambda^{2} - \lambda)X = \bar{o}$$
$$\Rightarrow \lambda^{2} - \lambda = 0 \qquad X \neq \bar{o} \quad \text{زیرا}$$
$$\Rightarrow \lambda = 0 \quad \text{یا} \quad \lambda = 1$$

۱۰ـ۳۳ گزاره

بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه متمایز، استقلال خطی دارند.

اثبات: برای سهولت فرض کنید A دارای سه مقدار ویژه متمایز λ_1 و λ_2 و λ_3 است، بنابراین بردارهای ناصفر X_1، X_2، X_3 وجود دارند به طوری که

$$AX_1 = \lambda_1 X_1,$$
$$AX_2 = \lambda_2 X_2, \qquad (1)$$
$$AX_3 = \lambda_3 X_3$$

چون می‌خواهیم نشان دهیم X_1 و X_2 و X_3 استقلال خطی دارند، می‌بایست نشان دهیم که اگر

$$(2) \qquad c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 = \bar{o} \qquad \text{آنگاه} \qquad c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

طرفین (۲) را از سمت چپ در A ضرب می‌کنیم داریم

$$c_1AX_1 + c_2AX_2 + c_3AX_3 = A \cdot \bar{o} = \bar{o}$$

و لذا از (۱) نتیجه می‌شود

$$(3) \qquad c_1\lambda_1X_1 + c_2\lambda_2X_2 + c_3\lambda_3X_3 = \bar{o}$$

اگر طرفین (۳) را نیز از سمت چپ در A ضرب کنیم، با توجه به معادلات (۱) داریم

$$(4) \qquad c_1\lambda_1^2X_1 + c_2\lambda_2^2X_2 + c_3\lambda_3^2X_3 = \bar{o}$$

معادلات (۲) و (۳) و (۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1X_1 \\ c_2X_2 \\ c_3X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

دترمینان ضرایب این دستگاه یک دترمینان واندرموند است که مقدار آن برابر است با $(\lambda_2 - \lambda_1)$ $(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)$. چون λ_1 و λ_2 و λ_3 متمایزند در نتیجه دترمینان ضرایب دستگاه فوق مخالف صفر است و لذا وارون‌پذیر است. با ضرب کردن طرفین دستگاه در وارون این ماتریس خواهیم داشت

$$\begin{bmatrix} c_1X_1 \\ c_2X_2 \\ c_3X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و از آنجا

$$c_1X_1 = 0$$

$$c_2X_2 = 0$$

$$c_3X_3 = 0$$

و چون X_1 و X_2 و X_3 ناصفرند، پس $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

مسئله ۱۰ـ۳۴

اگر A و B دو ماتریس مربعی باشند به طوری که A یا B وارون‌پذیر باشند. نشان دهید معادله سرشتنمایی AB و BA یکسان است.

حل: فرض کنید A وارون‌پذیر باشد داریم

$$\begin{aligned}|AB - \lambda I| &= |A^{-۱}||AB - \lambda I||A|\\ &= |A^{-۱}(AB - \lambda I)A|\\ &= |(B - A^{-۱}\lambda A)A|\\ &= |BA - \lambda I|\end{aligned}$$

۱۰ـ۳۵ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریسهای متقارن

۱۰ـ۳۶ قضیه

مقادیر ویژه هر ماتریس متقارن اعداد حقیقی‌اند.

اثبات: این قضیه را فقط در حالت $n = ۲$ یعنی ماتریسهای مربع مرتبه ۲ ثابت می‌کنیم. یک ماتریس متقارن ۲×۲ به صورت زیر است.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

معادله سرشتنمایی A عبارت است از

$$\lambda^۲ - (a+c)\lambda + ac - b^۲ = ۰$$

نشان می‌دهیم $\Delta \geq ۰$.

$$\begin{aligned}\Delta &= (a+c)^۲ - ۴(ac - b^۲)\\ &= a^۲ + c^۲ - ۲ac + ۴b^۲\\ &= (a-c)^۲ + ۴b^۲ \geq ۰\end{aligned}$$

مثال: مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۴ & ۷ \end{bmatrix}$$

را به دست آورید.

حل: معادله سرشتنمایی A عبارت است از

$$\lambda^۲ - ۸\lambda - ۹ = ۰$$

بنابراین مقادیر ویژه A عبارتند از

$$\lambda = -۱ \qquad , \qquad \lambda = ۹$$

برای یافتن بردارهای ویژه می‌بایست دستگاههای

$$AX = ۹X \qquad , \qquad AX = -X$$

را حل کرد.

جواب دستگاه $AX = ۹X$ عبارت است از نقاط واقع بر خط $y = ۲x$

و جواب دستگاه $AX = -X$، نقاط واقع بر خط $y = -\frac{۱}{۲}x$ می‌باشند.

ملاحظه می‌کنید که بردارهای ویژه وابسته به این دو مقدار ویژه بر هم عمودند. این نتیجه اتفاقی نیست بلکه داریم

۱۰ـ۳۷ قضیه

اگر A یک ماتریس متقارن باشد، بردارهای ویژه وابسته به مقادیر ویژه متمایز A بر هم عمودند.

اثبات: فرض کنید $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ دو مقدار ویژه متمایز ماتریس متقارن A باشد و همچنین فرض کنید X و Y به ترتیب بردارهای ویژه وابسته به $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ باشند. بنابراین

$$AX = \lambda_۱ X \qquad (۱)$$

$$AY = \lambda_۲ Y$$

از طرفین (۱) ترانهاده می‌گیریم داریم

$$X'A' = \lambda_۱ X'$$

$$\Rightarrow X'AY = \lambda_۱ X'Y$$

$$\Rightarrow X'\lambda_۲ Y = \lambda_۱ X'Y \qquad \Rightarrow (\lambda_۲ - \lambda_۱)X'Y = ۰$$

چون $\lambda_۱ \neq \lambda_۲$ پس $X'Y = ۰$، و لذا X بر Y عمود است.

۱۰ـ۳۸ محاسبه توانهای یک ماتریس با استفاده از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

قبل از پرداختن به قضیه زیر، نخست به خاصیت زیر در ضرب ماتریسها توجه کنید

لم: اگر $V = [X_۱ \ \ X_۲]$ یک ماتریس ۲×۲ باشد که در آن $X_۱$ و $X_۲$ به ترتیب ستون اول و دوم V می‌باشند، در این صورت برای هر ماتریس ۲×۲ مانند A داریم

$$AV = [AX_۱ \ \ AX_۲]$$

۱۰ـ۳۹ قضیه

اگر A یک ماتریس ۲×۲ و $X_۱$ و $X_۲$ بردارهای ویژه وابسته به مقادیر ویژه $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ باشند، قرار می‌دهیم

$$X_۱ = \begin{bmatrix} x_۱ \\ y_۱ \end{bmatrix} \text{ و } X_۲ = \begin{bmatrix} x_۲ \\ y_۲ \end{bmatrix} \text{ که در آن } V = [X_۱ \;\; X_۲] \text{ و } D = \begin{bmatrix} \lambda_۱ & ۰ \\ ۰ & \lambda_۲ \end{bmatrix}$$

در این صورت

$$AV = VD$$

اثبات: بنابر لم قبل

$$AV = [AX_۱ \quad AX_۲]$$

از طرف دیگر داریم

$$AX_۱ = \lambda_۱ X_۱ \qquad , \qquad AX_۲ = \lambda_۲ X_۲$$

بنابراین

$$AV = [\lambda_۱ X_۱ \quad \lambda_۲ X_۲]$$
$$= \begin{bmatrix} \lambda_۱ x_۱ & \lambda_۲ x_۲ \\ \lambda_۱ y_۱ & \lambda_۲ y_۲ \end{bmatrix}$$

حال اگر VD را حساب کنیم داریم

$$VD = \begin{bmatrix} x_۱ & x_۲ \\ y_۱ & y_۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_۱ & ۰ \\ ۰ & \lambda_۲ \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \lambda_۱ x_۱ & \lambda_۲ x_۲ \\ \lambda_۱ y_۱ & \lambda_۲ y_۲ \end{bmatrix}$$

۱۰ـ۴۰ نتیجه

اگر A دارای دو مقدار ویژه متمایز باشد، در این صورت ماتریس وارون پذیری مانند V و ماتریس قطری D وجود دارند به طوری که:

$$A = VDV^{-۱}$$

اثبات: چون بردارهای ویژه وابسته به مقادیر ویژه متمایز استقلال خطی دارند، بنابراین ستونهای ماتریس V که بردارهای ویژه A می‌باشند استقلال خطی دارند و لذا V وارون پذیر است. در نتیجه

اگر طرفین تساوی $AV = VD$ را از سمت راست در $V^{-۱}$ ضرب کنیم خواهیم داشت

$$A = VDV^{-۱} \quad \blacksquare$$

درگزاره ۷۰۷ ۱ دیدیم که برای هر عدد طبیعی n داریم

$$(VDV^{-۱})^n = VD^nV^{-۱}$$

بنابراین روش زیر را در مورد محاسبه توانهای یک ماتریس خواهیم داشت.

مرحله اول: مقادیر ویژه A را به‌دست می‌آوریم (می‌بایست A دارای دو مقدار ویژه متمایز باشد)
مرحله دوم: بردارهای ویژه A وابسته به هر یک از این دو مقدار ویژه را حساب می‌کنیم.
مرحله سوم: با استفاده از بردارهای ویژه ماتریس V و با استفاده از مقادیر ویژه ماتریس قطری D را می‌سازیم
مرحله چهارم: با توجه به قضیه فوق خواهیم داشت $A = VDV^{-۱}$ و از آنجا

$$A^n = VD^nV^{-۱}$$

مثال: اگر

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۲ & -۲ \end{bmatrix}$$

ماتریس A^n را حساب کنید.

حل: معادله سرشتنمایی A عبارت است از

$$\lambda^۲ - \lambda - ۲ = ۰$$

بنابراین مقادیر ویژه A عبارتند از $\lambda = -۱$ و $\lambda = ۲$.

$$AX = -X \Rightarrow (A + I)X = \bar{o}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴x + ۲y = ۰ \\ -۲x - y = ۰ \end{cases} \Rightarrow y = -۲x$$

یک بردار ویژه وابسته به $\lambda = -۱$ عبارت است از $\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$ و با حل دستگاه

$$AX = ۲X$$

داریم

$$(A - ۲I)X = \bar{o} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۲ & -۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + ۲y = ۰ \\ -۲x - ۴y = ۰ \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}x$$

بنابراین $\begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ یک بردار ویژه وابسته به $\lambda = ۲$ است.

پس $D = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $V = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$

می‌توانیم V و D را به صورت زیر انتخاب کنیم

$$V = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$A^n = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱} \qquad \square$$

در نتیجه

$$A^n = -\frac{۱}{۳} \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-۱)^n & ۰ \\ ۰ & (۲)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

و لذا

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۲ & -۲ \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \frac{-(-۱)^n + ۲^{n+۲}}{۳} & \frac{۲^{n+۱} - ۲(-۱)^n}{۳} \\ \frac{-۲(-۱)^{n+۱} - ۲^{n+۱}}{۳} & \frac{-۴(-۱)^{n+۱} - ۲^n}{۳} \end{bmatrix}$$

۱۰ـ۴۱ قضیه کیلی ـ هامیلتون[1]

اینک آماده‌ایم یکی از مهمترین قضایای تئوری ماتریسها را بیان کنیم، از اثبات این قضیه خودداری می‌کنیم. اما نخست یادآور می‌شویم که درگزاره ۳ ۰ ۱۲۱ نشان دادیم که هر ماتریس ۲ × ۲ در معادله سرشتنمایی خود صدق می‌کند. یعنی اگر

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$ ،

1.Cayley-Hamilton Theorem

معادله سرشتنمایی A به صورت زیر است.

$$\lambda^{۲} - (trA)\lambda + |A| = ۰$$

در این صورت

$$A^{۲} - (trA)A + |A|I = \bar{o}$$

حال به مثال زیر توجه کنید.

مثال: ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

داده شده است.

الف) معادله سرشتنمایی A را به دست آورید.

ب) نشان دهید ماتریس A در معادله سرشتنمایی خود صدق می‌کند.

حل: (الف) باتوجه به گزاره ۷۰۱۰ معادله سرشتنمایی A به صورت زیر است.

$$\lambda^{۳} - (trA)\lambda^{۲} + \left(\begin{vmatrix} ۲ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & ۲ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} \right) \lambda - |A| = ۰$$

بنابراین

$$\lambda^{۳} - ۷\lambda^{۲} + ۱۱\lambda - ۵ = ۰$$

(ب) برای اینکه نشان دهیم A در معادله سرشتنمایی خود صدق می‌کند باید داشته باشیم

$$A^{۳} - ۷A^{۲} + ۱۱A - ۵I = \bar{o}$$

برای این کار $A^{۲}$ و $A^{۳}$ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$A^{۲} = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ & ۱۲ & ۶ \\ ۶ & ۱۳ & ۶ \\ ۶ & ۱۲ & ۷ \end{bmatrix}$$

$$A^{۳} = A^{۲}A = \begin{bmatrix} ۷ & ۱۲ & ۶ \\ ۶ & ۱۳ & ۶ \\ ۶ & ۱۲ & ۷ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳۲ & ۶۲ & ۳۱ \\ ۳۱ & ۶۳ & ۳۱ \\ ۳۱ & ۶۲ & ۳۲ \end{bmatrix}$$

با یک محاسبه ساده معلوم می‌شود که

$$A^{۳} - ۷A^{۲} + ۱۱A - ۵I = \bar{o} \quad \square$$

این نتیجه اتفاقی نیست در قضیه زیر بیان می‌کنیم که این مطلب در مورد همه ماتریسهای مربع صادق است، که از اثبات آن صرفنظر می‌کنیم.

۱۰ـ۴۲ قضیه

(کیلی ـ هامیلتون) ـ هر ماتریس مربع در معادله سرشتنمایی خود صدق می‌کند. یعنی، در صورتی که معادله سرشتنمایی یک ماتریس $n \times n$ مانند، A به شکل

$$\lambda^{n} + a_{n-۱}\lambda^{n-۱} + \cdots + a_{۱}\lambda + a_{۰} = ۰$$

باشد آنگاه

$$A^{n} + a_{n-۱}A^{n-۱} + \cdots + a_{۱}A + a_{۰}I = \bar{o}$$

یکی از کاربردهای قضیه کیلی ـ هامیلتون محاسبه وارون یک ماتریس است که در مثال زیر آورده شده است.

۱۰ـ۴۳ مسئله

با استفاده از قضیه کیلی هامیلتون وارون

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

را به دست آورید

حل: معادله سرشتنمایی A عبارت است از

$$\lambda^{۳} - ۳\lambda^{۲} - ۹\lambda + ۳ = ۰$$

در نتیجه بنابر قضیه کیلی هامیلتون داریم

$$A^{۳} - ۳A^{۲} - ۹A + ۳I = \bar{o}$$

بنابراین

$$A^{۳} - ۳A^{۲} - ۹A = -۳I$$

$$A(A^{۲} - ۳A - ۹I) = -۳I$$

یا،

$$A\left(-\frac{۱}{۳}A^{۲} + A + ۳I\right) = I$$

پس

$$A^{-۱} = -\frac{۱}{۳}A^{۲} + A + ۳I$$

$$= \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۳ & -۶ & ۰ \\ -۴ & ۵ & ۲ \\ -۲ & ۴ & ۱ \end{bmatrix} \qquad \square$$

به عنوان کاربرد دیگری از قضیه کیلی ـ هامیلتون به گزاره زیر توجه کنید، اثباتی از این گزاره در ۶۲۰۷ آمده است.

۱۰ـ۴۴ گزاره

وارون یک ماتریس بالامثلثی وارون پذیر ماتریسی بالامثلثی است.

اثبات: فرض کنید A یک ماتریس بالامثلثی باشد که معادله سرشتنمایی آن به صورت

$$\lambda^{n} + a_{n-۱}\lambda^{n-۱} + \cdots + a_{۰} = ۰$$

است بنابر قضیه کیلی‌ـهامیلتون

$$A^{n} + a_{n-۱}A^{n-۱} + \cdots + a_{۱}A + a_{۰}I = ۰$$

چون A وارون پذیر است، پس $a_{۰} \neq ۰$ در نتیجه

$$A(A^{n-۱} + a_{n-۱}A^{n-۲} + \cdots + a_{۱}I) = -a_{۰}I$$

$$A(-\frac{۱}{a_{۰}}A^{n-۱} - \frac{a_{n-۱}}{a_{۰}}A^{n-۲} - \cdots - \frac{a_{۱}}{a_{۰}}I) = I$$

از آنجا

$$A^{-۱} = -\frac{۱}{a_{۰}}A^{n-۱} - \frac{a_{n-۱}}{a_{۰}}A^{n-۲} - \cdots - \frac{a_{۱}}{a_{۰}}I$$

از طرف دیگر بنابر گزارهٔ ۳۰۸۱، $A^{n-۱}$، $A^{n-۲}$، $\cdots$، A بالامثلثی‌اند، در نتیجه

$$-\frac{۱}{a_{۰}}A^{n-۱} - \frac{a_{n-۱}}{a_{۰}}A^{n-۲} - \cdots - \frac{a_{۱}}{a_{۰}}I$$

یعنی $A^{-۱}$ بالامثلثی است. ■

تمرینات فصل ۱۰

۱ ـ فرض کنید $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ نشان دهید

$$A^n = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲^n & n \cdot ۲^{n-۱} \\ ۰ & ۲^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

۲ ـ مقادیر ویژه ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ & -۱ \end{bmatrix}$$

را به دست آورید.

۳ ـ فرض کنید T یک تبدیل خطی صفحه باشد که به صورت $T(X) = ۲X$ تعریف شده، نشان دهید ۲، تنها مقدار ویژه T است. بردارهای ویژه T را به دست آورید.

۴ ـ مقادیر ویژه هریک از ماتریسهای زیر را به دست آورید.

الف) $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$

ب) $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$

ج) $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$

د) $A = \begin{bmatrix} ۶ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ -۴ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

هـ) $A = \begin{bmatrix} ۷ & ۷ & ۷ \\ -۵ & -۷ & -۹ \\ ۵ & ۷ & ۹ \end{bmatrix}$

و) $A = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۴ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$

ز) $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۵ \\ -۳ & -۲ & -۸ \\ ۳ & ۳ & ۹ \end{bmatrix}$

ح) $A = \begin{bmatrix} -۱ & -۱ & ۲ & -۱۰ \\ ۴ & ۳ & ۰ & ۱۴ \\ ۰ & ۰ & ۵ & ۹ \\ ۰ & ۰ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$

ط) $A = \begin{bmatrix} ۶ & ۴ & ۴ \\ -۷ & -۲ & -۱ \\ ۷ & ۴ & ۳ \end{bmatrix}$

ی) $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ -۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$

۵ ـ اگر $A = \begin{bmatrix} ۷ & ۴ \\ -۲ & -۲ \end{bmatrix}$، مطلوب است محاسبه A^n.

۶ـ اگر یکی از مقادیر ویژه

$$A = \begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۴ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

$\lambda = ۱$ باشد، سایر مقادیر ویژه A را به دست آورید.

۷ـ فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ & -۱ \\ -۲ & ۳ & ۲ \\ ۴ & -۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

(الف) اگر بدانیم ۲ یک مقدار ویژه A است، یک بردار ویژه نظیر آن را پیدا کنید.

(ب)اگر بدانیم $(۱, -۱, ۱)$ یک بردار ویژه A است، مقدار ویژه نظیر آن را پیدا کنید.

۸ـ فرض کنید

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۵ \\ ۵ \end{bmatrix}$$

باتوجه به این تساوی، مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ A را به دست آورید.

۹ـ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریسهای زیر را به دست آورید.

الف) $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$ ب) $A + I = \begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۴ & ۴ \end{bmatrix}$

ج) $A - ۲I = \begin{bmatrix} ۰ & ۵ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}$

۱۰ـ نشان دهید معادله سرشتنمایی

$$A = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

عبارت است از:

$$|A - \lambda I| = (\frac{۱}{۲} - \lambda)^۳ + \frac{۱}{۸}$$

۱۱ـ مقادیر ویژه هریک از ماتریسهای زیر را پیدا کنید.

الف) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۴ \\ ۰ & ۳ & ۷ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$

ه) $\begin{bmatrix} ۰ & \sin\alpha & \cos\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & ۰ & \cos\alpha\cos\beta \\ -\cos\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\cos\beta & ۰ \end{bmatrix}$

۱۲ ـ نشان دهید معادله سرشتنمایی ماتریسهای

$$a)\ \begin{bmatrix} b & c & a \\ c & a & b \\ a & b & c \end{bmatrix} \quad b)\ \begin{bmatrix} c & a & b \\ a & b & c \\ b & c & a \end{bmatrix} \quad c)\ \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$$

یکسانند.

۱۳ ـ اگر $\lambda^۳ - p\lambda^۲ + q\lambda - r = ۰$ معادله سرشتنمایی ماتریس ۳ × ۳ی A باشد، نشان دهید $\lambda^۳ - q\lambda^۲ + rp\lambda - r = ۰$ معادله سرشتنمایی $adjA$ است.

۱۴ ـ اگر

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

مطلوب است محاسبه $A^۵ - ۲۷A^۳ + ۶۵A^۲$

۱۵ ـ اگر

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

عبارت $۲A^۵ - ۳A^۴ + A^۲ - ۴I$ را برحسب یک ترکیب خطی A بنویسید.

۱۶ ـ اگر

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

نشان دهید به ازاء $n \geq ۳$، داریم $A^n = A^{n-۲} + A^۲ - I$.

۱۷ ـ نشان دهید ضرائب معادله سرشتنمایی یک ماتریس پاد متقارن نامنفی‌اند اگر A یک ماتریس

متعامدی باشد به طوری که $|A| = -۱$، نشان دهید یکی از مقادیر ویژه A، -۱ است.

۱۸ ـ فرض کنید A یک ماتریس پاد متقارن $n \times n$ باشد، با استفاده از تساوی

$$|A - \lambda I| = (-۱)^n |A + \lambda I|$$

نشان دهید اگر μ یک مقدار ویژه A باشد در این صورت $-\mu$ نیز یک مقدار ویژه آن است.

۱۹ ـ اگر A و B دو ماتریس ۲×۲ باشند، نشان دهید معادله سرشتنمایی AB و BAیکسانند ولی معلوم نیست بردارهای ویژه آنها یکسان باشد.

۲۰ ـ اگر λ_iها مقادیر ویژه A باشند، ثابت کنید

$$tr(A^p) = \sum_{i=۱}^{n} \lambda_i^p$$

سپس نشان دهید

$$\sum \lambda_i^۲ = (\sum \lambda_i)^۲ - ۲\sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j$$

و سپس نتیجه بگیرید.

$$\sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j = \frac{۱}{۲}((trA)^۲ - tr(A^۲))$$

۲۱ ـ اگر $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس قطری باشد، به طوری که $a_{ii} > ۰$، نشان دهید ماتریسی مانند C هست به طوری که

$$C^۲ = A$$

۲۲ ـ اگر A ماتریس $n \times n$ای با مقادیر ویژه متمایز و مثبت باشد نشان دهید ماتریسی مانند C هست به طوری که

$$C^۲ = A$$

۲۳ ـ اگر

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۵ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۷ \end{bmatrix}$$

مطلوب است ماتریسی مانند C به طوری که

$$C^۲ = A$$

۲۴ ـ نشان دهید $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$ بردارهای ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ هستند. مقادیر ویژه متناظر

A را مشخص کنید.

۲۵ ـ مقادیر ویژه هریک از ماتریسهای زیر را به دست آورید:

$$\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۲۶ ـ برای هریک از ماتریسهای زیر ماتریس وارون پذیری مانند P ارائه دهید به طوری که $P^{-۱}AP$ یک ماتریس قطری شود.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

۲۷ ـ برای هریک از ماتریسهای زیر ماتریس متعامدی مانند P ارائه دهید به طوری که $P^{-۱}AP$ یک ماتریس قطری شود.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

۲۸ ـ مقادیر ویژه ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۴ \\ ۲ & ۰ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

را به دست آورید.

۲۹ ـ نشان دهید هر سه مقدار ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} -۱ & -۳ & -۹ \\ ۰ & ۵ & ۱۸ \\ ۰ & -۲ & -۷ \end{bmatrix} = A$ مساویند.

۳۰ ـ یک ماتریس ۲ × ۲ را که دارای دو خاصیت زیر باشد ماتریس احتمال گویند.

(i) برای هر i و j، $a_{ij} \geq ۰$.

(ii) مجموع درایه‌های هر ستون مساوی ۱ است.

ثابت کنید یکی از مقادیر ویژه هر ماتریس احتمال مساوی ۱ است.

فهرست منابع

1. Anton, Howard; *Elementary Linear Algebra* 5e
2. Bronson, Richard; *Matrix Methods, an Introduction*
3. John, Franz E. ; *Elementary Matrix Algebra*
4. Kapur, J. N. and Singal, M. K; *Matrices*
5. Gillett, Philip; *Introduction to Linear Algebra*
6. Kapur, J. N; *Transformation Geometry*
7. Archbold J. W; *Algebra*
8. Pillis, John de; *Linear Algebra*
9. Moore, John T. ; *Elementary Linear and Matrix Algebra: The view point of Geometry*
10. Brinkmann, Hexinrich W. and Kloltz, Eugene A. ; *Linear Algebra and Analytic Geometry*
11. Williamson, Richard E. and Trotter, Hale F. ; *Multivariable Mathematics*
12. Grossman, Stanley I. ; *Calculus part 2.*
13. Batlacharya, P. B. and Jain, S. K. ; *First Course in Linear Algebra*
14. Shields, Paul C. *Elementary Linear Algebra*

۱۵ . اونان ، مایکل ؛ جبر خطی ، ترجمهٔ : محمدی حسن‌آبادی ، علی‌اکبر

۱۶ . کلمن ، برنارد ؛ جبر خطی مقدماتی ، ترجمهٔ : عالم‌زاده ، علی‌اکبر و فرزان ، مسعود

انتشارات مدرسه

تهران: ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش پلاک ۲۶۸
تلفن ۸۲۶۰۰۷

۱۷۰۰ ریال