کتابخانه‌ی المپیاد جهان

دانش پژوهان جوان

ناشر کتابهای المپیاد

آشنایی با معادلات دیوفانتی

تیتو آندرسکو

$$x^{۲} - dy^{۲} = ۱$$

$$x_n = \frac{۱}{۲}\left((x_{۱}+\sqrt{d}y_{۱})^n + (x_{۱}-\sqrt{d}y_{۱})^n\right),$$

$$y_n = \frac{۱}{۲\sqrt{d}}\left((x_{۱}+\sqrt{d}y_{۱})^n - (x_{۱}-\sqrt{d}y_{۱})^n\right)$$

محمد شریفی

(نقره‌ی کشوری المپیاد ریاضی ۱۳۷۹ و ۱۳۸۰)

معادلات دیوفانتی یکی از شاخه‌های علم نظریه‌ی اعداد است. معمولا پیدا کردن همه‌ی جواب‌های صحیح یک معادله از جذابیت خاصی برخوردار است. هرچند ممکن است برای این دسته معاملات، روش‌های حل مختلفی وجود داشته باشد، ولی باید اذعان کرد که مسائل بی‌شماری نیز در این حیطه، بدون حل باقی مانده‌اند.

این کتاب، به سه بخش کلی «روش‌های مقدماتی برای حل معادلات دیوفانتی»، «معادلات کلاسیک دیوفانتی» و «معادلات پل» تقسیم شده است و در هر بخش، شما با روش‌های حل معادلات مختلف، آشنا می‌شوید.

خواندن این کتاب، به شرکت‌کنندگان در المپیاد ریاضی، دانشجویان رشته‌ی ریاضی و عموم علاقمندان به علم ریاضی، توصیه می‌شود.

بسم الله الرحمن الرحیم

آشنایی با معادلات دیوفانتی

An Introduction to Diophantine Equations

تألیف:

تیتو آندرسکو

مترجم:

محمد شریفی

برنده دو مدال نقره کشوری المپیاد ریاضی ۱۳۷۹ و ۱۳۸۰

مقدمه‌ی مؤلفین

دیوفانتوس، «پدر جبر»، به خاطر کتابش حساب که در آن به جواب‌های معادلات جبری و نیز نظریه‌ی اعداد پرداخته است، مشهور است. با این وجود اساساً چیزی درباره‌ی زندگی او مشخص نیست و بحث‌های زیادی در ارتباط با این که او در چه زمانی زندگی می‌کرده است، وجود دارد.

دیوفانتوس کارش را در شهر بزرگ اسکندریه انجام داد. در آن زمان، اسکندریه مرکز آموزش ریاضیات بود. در حدود سال‌های ۲۵۰ قبل از میلاد تا ۳۵۰ بعد از میلاد، معروف بود که اسکندریه در «عصر نقره‌ای» قرار دارد. همچنین این عصر را، عصر اسکندریه‌ی جدید نیز می‌گویند. این مقطع، زمانی بود که ریاضی‌دانان به ایده‌های بسیاری پی بردند، که این ایده‌ها منجر به پدید آمدن مفهوم کلی که ما از ریاضیات امروزی می‌دانیم، شده است. این مقطع را «نقره‌ای» می‌نامند چرا که بعد از «عصر طلایی» قرار دارد. «عصر طلایی» مقطعی بود که پیشرفت‌های قابل ملاحظه‌ای در زمینه‌ی ریاضیات انجام شد. «عصر طلایی» تقریباً همان زمان اقلیدس است. کیفیتی که از این دوره‌ی زمانی آشکار شد، الهام‌بخش و پایه‌گذار قسمت زیاد ریاضیاتی هست که امروز آن را به کار می‌بریم.

با وجود این که می‌دانیم دیوفانتوس در «عصر نقره‌ای» زندگی می‌کرده، اما واقعاً سخت است که به صورت دقیق سال‌هایی را که او در آن زندگی می‌کرده، مشخص کنیم. هر چند کار بر روی بعضی از موضوعات را به دیوفانتوس نسبت می‌دهند، اما خود دیوفانتوس در کارهای خود بسیار کم به ریاضی‌دان‌های دیگر اشاره کرده و مطالب را ارجاع داده است، که این موضوع تعیین دقیق تاریخ زندگی او را سخت‌تر کرده است.

یکی از این محدود ارجاعات این است که دیوفانتوس تعریف اعداد چندضلعی را از «هایپسیکلس[1]» نقل کرده است. هایپسیکلس پیش از سال ۱۵۰ قبل از میلاد فعالیت داشته ولذا نتیجه می‌گیریم که دیوفانتوس بعد از این تاریخ زندگی می‌کرده است. از سوی دیگر، «تئون[2]» که او هم ریاضی‌دانی از اسکندریه بوده، کار دیوفانتوس را در سال ۳۵۰ بعد از میلاد نقل کرده است. حقیقتی که اکثر مورخین به آن اعتقاد دارند، این است که دیوفانتوس بیش‌تر فعالیت خود را در حدود سال ۲۵۰ بعد از میلاد انجام داده است. بیش‌ترین اطلاعاتی که درباره‌ی زندگی دیوفانتوس موجود است، احتمالاً از مجموعه‌ی معماهای ساختگی است که توسط مترودوروس[3] در حدود سال ۵۰۰ بعد از میلاد نوشته است. معما به این صورت است:

«... دوران کودکی او $\frac{1}{6}$ کل دوران زندگی‌اش بود. او بعد از $\frac{1}{7}$ دیگر از

[1] Hypsicles
[2] Theon
[3] Metrodorus

زندگی‌اش، ازدواج کرد. بعد از $\frac{۱}{۱۲}$ دیگر، ریش او درآمد و پسر او ۵ سال بعد به دنیا آمد. این پسر تا زمانی که سنش نصف سن پدر شد، زنده بود و درنهایت پدر ۴ سال بعد از پسر فوت کرد.»

همان‌طور که از عنوان این کتاب می‌توان فهمید، این کتاب، مقدمه‌ای بر مطالعه‌ی معادلات دیوفانتی است. این موضوع به دو بخش تقسیم شده است. بخش نخست شامل سه فصل است. فصل اول، خواننده را با روش‌های مقدماتی اصلی برای حل معادلات دیوفانتی، مانند تجزیه، همنهشتی، استقرای ریاضی و نزول نامتناهی، آشنا می‌کند. فصل دوم، چند نوع از معادلات دیوفانتی کلاسیک، مانند معادلات خطی، فیثاغورثی و دسته‌ای از معادلات از درجه‌های بالاتر را ارائه می‌کند. فصل سوم بر روی معادلات پل متمرکز شده است که دسته‌ای از معادلات دیوفانتی درجه‌ی دوم است. در سرتاسر بخش ۱، هر قسمت شامل مثال‌های متعددی است که بخش نظری مطلب را توضیح می‌دهند.

بخش ۲، شامل راه‌حل‌های کامل همه‌ی مثال‌هایی است که در بخش نخست مطرح شده است. برای بعضی از مسائل چندین راه‌حل ارائه شده است، ضمن این که ملاحظات مفیدی در ادامه‌ی حل مسائل آورده شده است. بسیاری از مثال‌های انتخاب شده، مثال‌های اصل هستند و یا راه‌حل‌های اصلی آن‌ها ارائه شده‌اند.

این کتاب برای دانشجویان، دانش‌آموزان دبیرستان و معلمان آن‌ها، شرکت‌کنندگان در مسابقات ریاضی (شامل المپیاد و یا رقابت پاتنام) و نیز همه‌ی علاقه‌مندان به مفهوم ریاضیات، سودمند است.

این کتاب، در فاصله‌ی زمانی اکتبر ۲۰۰۱ تا ژانویه‌ی ۲۰۰۲، زمانی که مؤلف دوم کتاب دیداری از انجمن رقابت‌های ریاضی آمریکا در دانشگاه نبراسکا ـ لینکلن داشت، به پایان رسید.

مؤلفین کتاب، از همه‌ی کسانی که تا زمان آماده‌سازی این مجموعه، هرگونه پشتیبانی از این اثر داشته‌اند، تشکر و قدردانی می‌کنند.

مؤلفین

تیتو آندرسکو، دورین آندریا

لینکلن، نبراسکا، آمریکا

ژانویه‌ی ۲۰۰۲

فهرست مندرجات

فصل ۱

روش‌های مقدماتی برای حل معادلات دیوفانتی

۱.۱ روش تجزیه

در این روش، معادله‌ی $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ را به صورتِ

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ldots f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a$$

می‌نویسیم، که $f_1, f_2, \ldots, f_k \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ و $a \in \mathbb{Z}$. حال با داشتن تجزیه‌ی a به عوامل اول، تعداد محدودی راه برای تجزیه‌ی a به عوامل $a_1, a_2, \ldots, a_k$ به دست می‌آید، که هر یک از این تجزیه‌ها منجر به دستگاه معادلاتی به فرمِ

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_2 \\ \quad \vdots \\ f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_k \end{cases}$$

می‌شود. با حل کردن همه‌ی چنین دستگاه‌هایی، مجموعه‌ی کامل جواب‌ها به دست می‌آید.

برای روشن‌تر شدن این مطلب، چند مثال ارائه می‌کنیم.

مثال ۱.۱ همه‌ی جواب‌های صحیح معادله‌ی زیر را به دست آورید:

$$(x^۲+۱)(y^۲+۱)+۲(x-y)(۱-xy)=۴(۱+xy)$$

(تیتو آندرسکو[1])

حل: معادله را به فرمِ

$$x^۲y^۲-۲xy+۱+x^۲+y^۲-۲xy+۲(x-y)(۱-xy)=۴$$

و یا

$$(xy-۱)^۲+(x-y)^۲-۲(x-y)(xy-۱)=۴$$

می‌نویسیم. این معادله هم ارز است با:

$$[xy-۱-(x-y)]^۲=۴$$

و یا

$$(x+۱)(y-۱)=\pm ۲$$

اگر $(x+۱)(y-۱)=۲$، دستگاه‌های معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases}x+۱=-۱\\y-۱=-۲\end{cases};\quad\begin{cases}x+۱=۱\\y-۱=۲\end{cases};\quad\begin{cases}x+۱=-۲\\y-۱=-۱\end{cases};\quad\begin{cases}x+۱=۲\\y-۱=۱\end{cases}$$

با حل این دستگاه‌ها، جواب‌های $(۱,۲),(-۳,۰),(۰,۳),(-۲,-۱)$ حاصل می‌شوند.

همچنین اگر $(x+۱)(y-۱)=-۲$، به دستگاه‌های زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases}x+۱=-۱\\y-۱=۲\end{cases};\quad\begin{cases}x+۱=۱\\y-۱=-۲\end{cases};\quad\begin{cases}x+۱=-۲\\y-۱=۱\end{cases};\quad\begin{cases}x+۱=۲\\y-۱=-۱\end{cases}$$

که جواب‌های این دستگاه‌ها نیز عبارتند از $(۱,۰),(-۳,۲),(۰,-۱),(-۲,۳)$.

همه‌ی ۸ زوجی که پیدا کردیم، در معادله‌ی داده شده صدق می‌کنند.

مثال ۱.۲ فرض کنید p و q دو عدد اولند. معادله‌ی زیر را در اعداد طبیعی حل کنید:

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=\frac{۱}{pq}$$

حل: معادله‌ی داده شده، هم‌ارز با معادله‌ی دیوفانتی جبری زیر است:

$$(x-pq)(y-pq)=p^۲q^۲$$

---

[1] Titu Andreescu

با در نظر گرفتن همه‌ی مقسوم علیه‌های مثبت $p^٢q^٢$، دستگاه‌های معادلات زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} x-pq=١ \\ y-pq=p^٢q^٢ \end{cases} ; \begin{cases} x-pq=p \\ y-pq=pq^٢ \end{cases} ; \begin{cases} x-pq=q \\ y-pq=p^٢q \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-pq=p^٢ \\ y-pq=q^٢ \end{cases} ; \begin{cases} x-pq=pq \\ y-pq=pq \end{cases} ; \begin{cases} x-pq=pq^٢ \\ y-pq=p \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-pq=p^٢q \\ y-pq=q \end{cases} ; \begin{cases} x-pq=q^٢ \\ y-pq=p^٢ \end{cases} ; \begin{cases} x-pq=p^٢q^٢ \\ y-pq=١ \end{cases}$$

که از حل این دستگاه‌ها، جواب‌های زیر را خواهیم داشت:

$$(١+pq, pq(١+pq)) , \quad (p(١+q), pq(١+q)) , \quad (q(١+p), pq(١+p)) ,$$
$$(p(p+q), q(p+q)) , \quad (٢pq, ٢pq) , \quad (pq(١+q), p(١+q)) ,$$
$$(pq(١+p), q(١+p)) , \quad (q(p+q), p(p+q)) , \quad (pq(١+pq), ١+pq)$$

ملاحظه. معادله‌ی

$$\frac{١}{x}+\frac{١}{y}=\frac{١}{n}$$

که در آن $n=p_١^{\alpha_١}p_٢^{\alpha_٢}\cdots p_k^{\alpha_k}$، دقیقاً $(١+٢\alpha_١)(١+٢\alpha_٢)\cdots(١+٢\alpha_k)$ جواب در مجموعه‌ی اعداد طبیعی دارد.

این معادله هم ارز است با

$$(x-y)(y-n)=n^٢$$

و عدد $n=p_١^{٢\alpha_١}p_٢^{٢\alpha_٢}\ldots p_k^{٢\alpha_k}$، دقیقاً $(١+٢\alpha_١)(١+٢\alpha_٢)\cdots(١+٢\alpha_k)$ مقسوم‌علیه مثبت دارد.

مثال ٣.١ همه‌ی زوج‌های صحیح و نامنفی (x,y) از جواب‌های معادله‌ی زیر را به دست آورید.

$$(xy-٧)^٢=x^٢+y^٢$$

(المپیاد ریاضی هند)

حل: معادله‌ی داده شده، هم ارز است با

$$(xy-٦)^٢+١٣=(x+y)^٢$$

و یا

$$(xy-٦)^{٢}-(x+y)^{٢}=-١٣$$

بنابراین معادله‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$[xy-٦-(x+y)]\,[xy-٦+(x+y)]=-١٣$$

که حل آن، منجر به دستگاه‌های زیر می‌شود:

$$\begin{cases} xy-٦-(x+y)=-١ \\ xy-٦+(x+y)=١٣ \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} xy-٦-(x+y)=-١٣ \\ xy-٦+(x+y)=١ \end{cases}$$

این دستگاه‌ها هم‌ارزند با:

$$\begin{cases} x+y=٧ \\ xy=٦ \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x+y=٧ \\ xy=٠ \end{cases}$$

در نتیجه جواب‌های معادله عبارتند از $(٠,٧),(٧,٠),(٤,٣),(٣,٤)$.

مثال ۴.۱ معادله‌ی زیر را در اعداد صحیح حل کنید:

$$x^{٢}(y-١)+y^{٢}(x-١)=١$$

(المپیاد ریاضی لهستان)

حل: با جایگذاری $x=u+١$ و $y=v+١$ معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$(u+١)^{٢}v+(v+١)^{٢}u=١$$

که هم ارز است با:

$$uv(u+x)+٤uv+(u+v)=١$$

این معادله را نیز می‌توان به صورتِ

$$uv(u+v+٤)+(u+v+٤)=٥$$

و یا

$$(u+v+٤)(uv+١)=٥$$

نوشت. یکی از این پرانتزها باید برابر ۵ یا ۵− و دیگری برابر ۱ یا ۱− باشد. بنابراین مجموع $u+v$ و حاصل ضرب uv باید در یکی از دستگاه‌های معادلات زیر صدق کنند:

$$\begin{cases} u+v=-٥ \\ uv=-٦ \end{cases} \; ; \; \begin{cases} u+v=-٣ \\ uv=٤ \end{cases} \; ; \; \begin{cases} u+v=-٩ \\ uv=-٢ \end{cases} \; ; \; \begin{cases} u+v=١ \\ uv=٠ \end{cases}$$

اما در بین این دستگاه‌ها، فقط دستگاه‌های اول و آخر جواب صحیح دارند. این جواب‌ها عبارتند از $(۱,-۶),(-۶,۱),(۱,۰),(۰,۱)$. در نتیجه زوج $(x,y)=(u+۱,v+۱)$ باید یکی از زوج‌های $(۲,-۵),(-۵,۲),(۲,۱),(۱,۲)$ باشد.

مثال ۵.۱ همه‌ی سه‌تایی‌های (x,y,z) از اعداد طبیعی را بیابید، به‌نحوی که

$$x^۳+y^۳+z^۳-۳xyz=p$$

، که p عددی اول و بزرگ‌تر از ۳ است.

(تیتو آندرسکو، دورین آندریا[۲])

حل: معادله‌ی داده شده هم ارز است با

$$(x+y+z)(x^۲+y^۲+z^۲-xy-yz-zx)=p$$

از آن جایی که $x+y+z>۱$، می‌بایست داشته باشیم:

$$x+y+z=p\ ,\quad x^۲+y^۲+z^۲-xy-yz-zx=۱$$

بنابراین $(x-y)^۲+(y-z)^۲+(z-x)^۲=۲$. بدون از دست دادن کلیت مسئله، می‌توان فرض کرد $x\geq y\geq z$. اگر $x>y>z$، داریم $x-y\geq ۱$، $y-z\geq ۱$ و $x-z\geq ۲$؛ در نتیجه $(x-y)^۲+(y-z)^۲+(z-x)^۲\geq ۶>۲$.

لذا باید داشته باشیم $x=y=z+۱$ و یا $x-۱=y=z$. پس عدد اول p به یکی از فرم‌های $۳k+۱$ یا $۳k+۲$ است. در حالت اول جواب‌های معادله عبارتند از $\left(\frac{p+۲}{۳},\frac{p-۱}{۳},\frac{p-۱}{۳}\right)$ و جایگشت‌های آن؛ و در حالت دوم جواب‌ها عبارتند از $\left(\frac{p+۱}{۳},\frac{p+۱}{۳},\frac{p-۲}{۳}\right)$ و جایگشت‌هایش.

تمرین‌ها و مسائل

۱) همه‌ی جواب‌های صحیح x,y از دستگاه معادلات زیر را به دست آورید:

$$x^۲+۶xy+۸y^۲+۳x+۶y=۲$$

[۲] Dorin Andria

۲) برای هر عدد طبیعی n، فرض کنید $s(n)$ تعداد زوج‌های مرتب (x,y) از اعداد طبیعی است که در معادله‌ی

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$$

صدق می‌کنند. همه‌ی اعداد طبیعی n را بیابید، به‌طوری که $s(n)=5$.

۳) فرض کنید p و q دو عدد اولند. تعداد زوج‌های (x,y) از اعداد طبیعی را بیابید که در معادله‌ی زیر صدق کنند:

$$\frac{p}{x}+\frac{q}{y}=1$$

(مجله‌ی KöMaL)

۴) همه‌ی جواب‌های طبیعی معادله‌ی زیر را به دست آورید:

$$x^3-y^3=xy+61$$

(المپیاد ریاضی روسیه)

۵) معادله‌ی دیوفانتی

$$x-y^4=4$$

را با فرض این که x عددی اول است، حل کنید.

۶) همه‌ی زوج‌های (x,y) از اعداد صحیح را طوری بیابید که

$$x^6+3x^3+1=y^4$$

(المپیاد ریاضی رومانی)

۷) معادله‌ی زیر را با فرض این که x,y اعدادی صحیح و نامنفی‌اند، حل کنید.

$$(x^2+y)(x+y)^2=(x-y)^3$$

(۱۶ امین المپیاد ریاضی آمریکا)

۸) همه‌ی اعداد صحیح a,b,c را با شرط $1<a<b<c$ بیابید، به‌نحوی که عددِ $(a-1)(b-1)(c-1)$ مقسوم علیهی از $abc-1$ باشد.

(۳۳ امین المپیاد جهانی ریاضیات)

۹) همه‌ی مثلث‌های قائم الزاویه را بیابید که طول اضلاع آن‌ها اعداد طبیعی باشد و مساحت و محیط آن‌ها با هم برابر شود.

۱۰) دستگاه معادلات زیر را در مجموعه‌ی اعداد صحیح حل کنید:

$$\begin{cases} x+y+z+u+v = xyuv + (x+y)(u+v) \\ xy+z+uv = xy(u+v)+uv(x+y) \end{cases}$$

(تیتو آندرسکو)

۲.۱ حل معادلات دیوفانتی با استفاده از نابرابری‌ها

در این روش، با استفاده از نابرابری‌هایی مناسب، متغیرها را در بازه‌ی تعریفشان محدودتر می‌کنیم. به طور کلی این روش منجر به محدود شدن تعداد حالت‌های همه‌ی متغیرها و یا بعضی از آن‌ها می‌شود.

مثال ۶.۱ همه‌ی زوج‌های (x,y) از اعداد صحیح را بیابید که
$x^۳+y^۳=(x+y)^۲$

حل: توجه داشته باشید که زوج‌هایی به فرمِ $(k,-k)$، که $k\in\mathbb{Z}$، در معادله صدق می‌کنند. حال اگر $x+y\neq ۰$، معادله به‌صورت زیر در می‌آید:

$$x^۲-xy+y^۲=x+y$$

که این معادله هم ارز است با

$$(x-y)^۲+(x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۲$$

در نتیجه $(x-۱)^۲\leq ۱$ و $(y-۱)^۲\leq ۱$. از این دو نابرابری، متغیرهای x,y در بازه‌ی $[۰,۲]$ محدود می‌شوند. در نهایت جواب‌های معادله عبارتند از $(۰,۱),(۱,۰),(۱,۲),(۲,۱),(۲,۲)$.

مثال ۷.۱ معادله‌ی زیر را در اعداد طبیعی حل کنید:

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}=\frac{۳}{۵}$$

(المپیاد رباضی رومانی)

حل: با توجه به تقارن مسئله نسبت به متغیرها، می‌توان فرض کرد $z \geq y \geq x \geq ۲$. در نتیجه $\frac{۳}{x} \geq \frac{۳}{۵}$ و بنابراین $x \in \{۲, ۳, ۴, ۵\}$.

اگر $x = ۱$، آن گاه $\frac{۱}{۱۰} = \frac{۱}{z} + \frac{۱}{y}$؛ پس $y \in \{۱۱, ۱۲, \ldots, ۲۰\}$. همچنین $\frac{۱۰۰}{y-۱۰} + ۱۰ = z$؛ در نتیجه $y - ۱۰|۱۰۰$. در این حالت جواب‌های $(۲, ۱۱, ۱۱۰)$، $(۲, ۱۲, ٦۰)$، $(۲, ۱۴, ۳۵)$، $(۲, ۱۵, ۳۰)$ و $(۲, ۲۰, ۲۵)$ به دست می‌آیند.

اگر $x = ۳$، داریم $\frac{۱}{۱۵} = \frac{۱}{z} + \frac{۱}{y}$؛ پس $y \in \{۳, ۴, ۵, ٦, ۷\}$. در این حالت نیز، به جواب‌های $(۳, ۴, ٦۰)$، $(۳, ۵, ۱۵)$ و $(۳, ٦, ۱۰)$ می‌رسیم.

اگر $x = ۴$، آن گاه $\frac{۲}{۵} = \frac{۱}{z} + \frac{۱}{y}$؛ بنابراین $y = z = ۵$ و جواب $(۵, ۵, ۵)$ به دست می‌آید.

مثال ۸.۱ همه‌ی چهارتایی‌های (x, y, z, w) از اعداد طبیعی را بیابید، به‌نحوی که:

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ + ۲xy + ۲x(z - ۱) + ۲y(z + ۱) = w^۲$$

(تیتو آندرسکو)

حل: داریم

$$(x + y + z \pm ۱)^۲ = x^۲ + y^۲ + z^۲ + ۲xy + ۲x(z \pm ۱) + ۲y(z \pm ۱) \pm ۲z + ۱$$

در نتیجه:

$$(x + y + z - ۱)^۲ < w^۲ < (x + y + z + ۱)^۲$$

بنابراین $x^۲ + y^۲ + z^۲ + ۲xy + ۲x(z - ۱) + ۲y(z + ۱)$ تنها می‌تواند برابر با $(x + y + z)^۲$ باشد. از برابر قرار دادن این دو عبارت نتیجه می‌گیریم $x = y$؛ بنابراین جواب‌های معادله عبارتند از $(m, m, n, ۲m + n)$، که $m, n \in \mathbb{Z}^+$.

مثال ۹.۱ همه‌ی جواب‌های صحیح معادله‌ی زیر را بیابید:

$$x^۳ + (x + ۱)^۳ + (x + ۲)^۳ + \cdots + (x + ۷)^۳ = y^۳$$

(المپیاد ریاضی مجارستان)

حل: جواب‌های معادله عبارتند از $(-۲, ٦), (-۳, ۴), (-۴, -۴), (-۵, -٦)$. فرض کنید:

$$P(x) = x^۳ + (x + ۱)^۳ + (x + ۲)^۳ + \cdots + (x + ۷)^۳ = ۸x^۳ + ۸۴x^۲ + ۴۲۰x + ۷۸۴$$

اگر $x \geq \circ$، آنگاه:

$$\begin{aligned}(\text{۲}x+\text{۷})^{\text{۳}} &= \text{۸}x^{\text{۳}}+\text{۸۴}x^{\text{۲}}+\text{۲۹۴}x+\text{۳۴۳}\\ &< P(x) < \text{۸}x^{\text{۳}}+\text{۱۲۰}x^{\text{۲}}+\text{۶۰۰}x+\text{۱۰۰۰} = (\text{۲}x+\text{۱۰})^{\text{۳}}\end{aligned}$$

بنابراین $\text{۲}x+\text{۷} < y < \text{۲}x+\text{۱۰}$؛ در نتیجه y برابر $\text{۲}x+\text{۸}$ و یا $\text{۲}x+\text{۹}$ است. اما هیچ یک از معادلاتِ

$$P(x)-(\text{۲}x+\text{۸})^{\text{۳}} = -\text{۱۲}x^{\text{۲}}+\text{۳۶}x+\text{۲۷۲} = \circ\ ,$$
$$P(x)-(\text{۲}x+\text{۹})^{\text{۳}} = -\text{۲۴}x^{\text{۲}}-\text{۶۶}x+\text{۵۵} = \circ$$

ریشه‌ی صحیح ندارند؛ پس در حالت $x \geq \circ$ جوابی نداریم. اما توجه کنید که چند جمله‌ای P در رابطه‌ی $P(-x-\text{۷}) = -P(x)$ صدق می‌کند؛ بنابراین (x,y) جوابی از معادله است، اگر و فقط اگر $(-x-\text{۷},-y)$ جوابی از معادله باشد. در نتیجه در حالت $x \leq -\text{۷}$ نیز جوابی نداریم. پس برای این که (x,y) جواب باشد، باید داشته باشیم $-\text{۶} \leq x \leq -\text{۱}$. در حالت $-\text{۳} \leq x \leq -\text{۱}$ داریم $P(-\text{۱}) = \text{۴۴۰}$، که مکعب کامل نیست و $P(-\text{۲}) = \text{۲۱۶} = \text{۶}^{\text{۳}}$ و نیز $P(-\text{۳}) = \text{۶۴} = \text{۴}^{\text{۳}}$. بنابراین به ازای $-\text{۳} \leq x \leq -\text{۱}$، فقط جواب‌های $(-\text{۲},\text{۶})$ و $(-\text{۳},\text{۴})$ را داریم. به همین صورت در حالت $-\text{۶} \leq x \leq -\text{۴}$ نیز زوج‌های $(-\text{۴},-\text{۴})$ و $(-\text{۵},-\text{۶})$ تنها جواب‌های معادله‌اند. پس تنها جواب‌های معادله عبارتند از $(-\text{۲},\text{۶})$، $(-\text{۳},\text{۴})$، $(-\text{۴},-\text{۴})$ و $(-\text{۵},-\text{۶})$.

مثال ۱۰.۱ همه‌ی سه‌تایی‌های (x,y,z) از اعداد طبیعی را بیابید به‌نحوی که:

$$\left(\text{۱}+\frac{\text{۱}}{x}\right)\left(\text{۱}+\frac{\text{۱}}{y}\right)\left(\text{۱}+\frac{\text{۱}}{z}\right) = \text{۲}$$

(المپیاد ریاضی انگلستان)

حل: بدون از دست دادن کلیت مسئله، می‌توان فرض کرد $x \geq y \geq z$. در این صورت باید داشته باشیم $\left(\text{۱}+\frac{\text{۱}}{z}\right)^{\text{۳}} \geq \text{۲}$ که منجر به نابرابری $z \leq \text{۳}$ می‌شود.

اگر $z = \text{۱}$، آن‌گاه $\left(\text{۱}+\frac{\text{۱}}{x}\right)\left(\text{۱}+\frac{\text{۱}}{y}\right) = \text{۱}$، که به وضوح غیرممکن است.

حالت $z = \text{۲}$ منجر به معادله‌ی $\left(\text{۱}+\frac{\text{۱}}{x}\right)\left(\text{۱}+\frac{\text{۱}}{y}\right) = \frac{\text{۴}}{\text{۳}}$ می‌شود. بنابراین $\left(\text{۱}+\frac{\text{۱}}{y}\right)^{\text{۲}} \geq \frac{\text{۴}}{\text{۳}}$؛ از این‌جا محدودیت $y < \text{۷}$ ایجاد می‌شود. همچنین از آنجایی که $\text{۱}+\frac{\text{۱}}{x} > \text{۱}$، نتیجه می‌گیریم $y > \text{۳}$. با جایگذاری مقادیر ممکن برای y، جواب‌های $(\text{۷},\text{۶},\text{۲})$، $(\text{۹},\text{۵},\text{۲})$ و $(\text{۱۵},\text{۴},\text{۲})$ به دست می‌آیند.

اگر $z = ۳$، آن گاه $\left(۱ + \frac{۱}{x}\right)\left(۱ + \frac{۱}{y}\right) = \frac{۳}{۲}$. با استدلال مشابهی نتیجه می‌گیریم $y < ۵$ و نیز $y \geq z = ۳$. به این ترتیب، در این حالت جواب‌های $(۸, ۳, ۳)$ و $(۵, ۴, ۳)$ حاصل می‌شوند.

بنابراین جواب‌های معادله، عبارتند از همه‌ی جایگشت‌های دوری $(۷, ٦, ۲)$، $(۹, ۵, ۲)$، $(۱۵, ۴, ۲)$، $(۸, ۳, ۳)$ و $(۵, ۴, ۳)$.

تمرین‌ها و مسائل

۱) معادله‌ی زیر را در مجموعه‌ی اعداد طبیعی حل کنید:

$$۳(xy + yz + zx) = ۴xyz$$

۲) همه‌ی سه‌تایی‌های (x, y, z) از اعداد طبیعی را بیابید، به‌نحوی که:

$$xy + yz + zx - yxz = ۲$$

۳) همه‌ی سه‌تایی‌های (x, y, z) از اعداد طبیعی را بیابید که در معادله‌ی زیر صدق کنند:

$$(x + y)^۲ + ۳x + y + ۱ = z^۲$$

(المپیاد ریاضی رومانی)

۴) همه‌ی زوج‌های مرتب (x, y) از اعداد صحیح را بیابید، که داشته باشیم:

$$(x + ۱)^۴ - (x - ۱)^۴ = y^۳$$

(المپیاد ریاضی استرالیا)

۵) نشان دهید هر یک از معادلات به فرم

$$x^٦ + ax^۴ + bx^۲ + c = y^۳$$

که $a \in \{۳, ۴, ۵\}$، $b \in \{۴, ۵, \ldots, ۱۲\}$ و $c \in \{۱, ۲, \ldots, ۸\}$ جواب صحیح ندارند.

(دورین آندریا)

٦) معادله‌ی زیر را در اعداد طبیعی حل کنید:

$$x^۲y + y^۲z + z^۲x = ۳xyz$$

۷) همه‌ی جواب‌های صحیح معادله‌ی زیر را بیابید:

$$(x^۲ - y^۲)^۲ = ۱ + ۱۶y$$

(المپیاد ریاضی روسیه)

۸) همه‌ی شش‌تایی‌های (a, b, c, x, y, z) از اعداد صحیح را بیابید، به‌نحوی که

$$a + b + c = xyz ,$$
$$x + y + z = abc$$

و $a \geq b \geq c \geq ۱$، $x \geq y \geq z \geq ۱$.

(المپیاد ریاضی لهستان)

۹) فرض کنید x، y، z، u و v اعدادی طبیعی‌اند، به‌طوری که

$$xyzuv = x + y + z + u + v$$

حداکثر مقدار ممکن برای $\max\{x, y, z, y, v\}$ را به دست آورید.

۱۰) معادله‌ی زیر را با فرض این که x, y, z, w اعدادی طبیعی و دو به دو متمایزند، حل کنید:

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ + w^۲ = ۳(x + y + z + w)$$

(تیتو آندرسکو)

۱۱) فرض کنید a و b اعدادی طبیعی‌اند، به‌نحوی که $a^۲ + b^۲$ بر $ab + ۱$ بخش‌پذیر است. نشان دهید $\frac{a^۲+b^۲}{ab+۱}$ مربع عددی صحیح است.

(۲۹ امین المپیاد جهانی ریاضیات)

۳.۱ روش پارامتری

بسیاری از اوقات، جواب‌های صحیح معادله‌ی دیوفانتی

$$f(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) = ۰$$

را می‌توان به صورت پارامتری، به شکل زیر نمایش داد:

$$x_1 = g_1(k_1, k_2, \dots, k_l) \ , \ \ x_2 = g_2(k_1, k_2, \dots, k_l) \ , \ \ \dots \ , \ \ x_n = g_n(k_1, k_2, \dots, k_l)$$

که $g_1, g_2, \dots, g_n$ توابعی صحیح و l متغیره‌اند و $k_1, k_2, \dots, k_l \in \mathbb{Z}$.

مجموعه‌ی جواب‌های بعضی از معادلات دیوفانتی ممکن است چندین نمایش پارامتری داشته باشد.

در اغلب معادلات دیوفانتی، پیدا کردن همه‌ی جواب‌ها امکان پذیر نیست. در چنین وضعیت‌هایی، از روش پارامتری می‌توان برای اثبات نامتناهی بودن تعداد جواب‌ها استفاده کرد.

مثال ۱.۱۱ ثابت کنید بی‌نهایت سه‌تایی (x, y, z) از اعداد صحیح وجود دارد، به‌نحوی که:

$$x^3 + y^3 + z^3 = x^2 + y^2 + z^2$$

(تورنمنت شهرها)

حل: با جایگذاری $z = -y$، معادله به فرم $x^3 = x^2 + 2y^2$ درمی‌آید. قرار می‌دهیم $x = my$، که $m \in \mathbb{Z}$. در این صورت داریم $x = 1 + 2m^2$. به این ترتیب بی‌نهایت جواب به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x = 2m^2 + 1 \ , \quad y = m(2m^2 + 1) \ , \quad z = -m(2m^2 + 1), \quad m \in \mathbb{Z}$$

مثال ۱.۱۲ الف) فرض کنید m و n اعدادی طبیعی و متمایزند. ثابت کنید بی‌نهایت سه‌تایی (x, y, z) از اعداد طبیعی وجود دارد، به‌طوری که

$$x^2 + y^2 = (m^2 + n^2)^z$$

(i) اگر z فرد باشد؛ (ii) z زوج باشد.

ب) نشان دهید معادله‌ی

$$x^2 + y^2 = 13^z$$

بی‌نهایت جواب در مجموعه‌ی اعداد طبیعی دارد.

حل: الف) برای (i) سه‌تایی‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$x_k = m(m^2 + n^2)^k \ , \quad y_k = n(m^2 + n^2)^k \ , \quad z_k = 2k + 1 \ ; \quad k \in \mathbb{N}$$

برای قسمت (ii) نیز سه‌تایی‌های زیر در معادله صدق می‌کنند:

$$x_k = |m^۲ - n^۲|(m^۲ + n^۲)^{k-۱}\ , \quad y_k = ۲mn(m^۲ + n^۲)^{k-۱}\ , \quad z_k = ۲k\ ; \quad k \in \mathbb{N}$$

ب) از آنجایی که $۱۳ = ۳^۲ + ۲^۲$، می‌توانیم در قسمت (الف) قرار دهیم $m = ۲$، $n = ۳$ تا جواب‌های زیر به دست آیند:

$$x'_k = ۲ \times ۱۳^k\ , \quad y'_k = ۳ \times ۱۳^k\ , \quad z'_k = ۲k + ۱\ ; \quad k \in \mathbb{N}$$
$$x''_k = ۵ \times ۱۳^{k-۱}\ , \quad y''_k = ۱۲ \times ۱۳^{k-۱}\ , \quad z''_k = ۲k\ ; \quad k \in \mathbb{N}$$

ملاحظه. ۱) با توجه به اتحادِ لاگرانژ

$$(a^۲ + b^۲)(c^۲ + d^۲) = (ac - bd)^۲ + (ad + bc)^۲$$

می‌توان نامتناهی دسته جواب، به صورت بازگشتی از دنباله‌های $(x_k)_{k\geq ۱}$ و $(y_k)_{k\geq ۱}$ به این ترتیب به دست آورد:

$$\begin{cases} x_{k+۱} = mx_k - ny_k \\ y_{k+۱} = nx_k + my_k \end{cases}$$

که $x_۱ = m$ و $y_۱ = n$.

به راحتی می‌توان بررسی کرد که سه‌تایی‌های $(|x_k|, y_k, k)$، که $k \in \mathbb{N}$، در معادله‌ی داده شده صدق می‌کنند.

۲) راه دیگری که برای تولید نامتناهی دسته جواب وجود دارد، استفاده از اعداد مختلط است. فرض کنید k عددی طبیعی است. در این صورت داریم $(m + in)^k = A_k + iB_k$، که $A_k, B_k \in \mathbb{Z}$. اگر از طرفین این تساوی اندازه (قدر مطلق) بگیریم، خواهیم داشت:

$$(m^۲ + n^۲)^k + A_k^۲ = B_k^۲$$

بنابراین $(|A_k|, |B_k|, k)$ جوابی از معادله‌ی داده شده، است.

مثال ۱۳.۱ همه‌ی سه‌تایی‌های (x, y, z) از اعداد طبیعی را بیابید، به‌طوری که:

$$\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} = \frac{۱}{z}$$

حل: معادله‌ی داده شده، هم ارز است با:

$$z = \frac{xy}{x + y}$$

فرض کنید $d = (x, y)$ (منظور از (x, y) بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک x, y است). در این صورت $x = dm$ و $y = dn$، که $(m, n) = ۱$. بنابراین $(mn, m + n) = ۱$ و در نتیجه:

$$z = \frac{dmn}{m+n}$$

پس $m + n | d$؛ یعنی $d = k(m + n)$، که $k \in \mathbb{N}$.

به این ترتیب، جواب‌های معادله به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$x = km(m+n)\ , \quad y = kn(m+n)\ , \quad z = kmn$$

که $k, m, n \in \mathbb{N}$.

مثال ۱۴.۱ ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $n \geq ۳$، معادله‌ی

$$x^n + y^n = z^{n-۱}$$

بی‌نهایت جواب در اعداد طبیعی دارد.

حل: نامتناهی دسته از جواب‌های معادله، به صورت زیر است:

$$x_k = k(k^n + ۱)^{n-۲}\ , \quad y_k = (k^n + ۱)^{n-۲}\ , \quad z_k = (k^n + ۱)^{n-۱}\ ; \quad k \in \mathbb{N}$$

مثال ۱۵.۱ فرض کنید a, b دو عدد طبیعی‌اند. ثابت کنید معادله‌ی

$$x^۲ - ۲axy + (a^۲ - ۴b)y^۲ + ۴by = z^۲$$

بی‌نهایت جواب (x, y, z) در اعداد طبیعی دارد.

(دورین آندریا)

حل: از لم کمکی زیر استفاده می‌کنیم:

لم ۱.۳.۱ اگر A, B دو عدد طبیعی نسبت به هم اول باشند، آن گاه اعداد طبیعی u, v وجود دارند به‌نحوی که:

$$Au - Bv = ۱ \qquad (۱)$$

اثبات. اعداد صحیح زیر را در نظر بگیرید:

$$۱ \times A,\ ۲ \times A,\ \ldots,\ (B - ۱)A \qquad (۲)$$

باقی‌مانده تقسیم این اعداد بر B با هم متمایز است. چرا که اگر

$$k_۱A = q_۱B + r \quad \text{و} \quad k_۲A = q_۲B + r$$

و $k_۱, k_۲ \in \{۱, ۲, \ldots, B - ۱\}$، آنگاه:

$$(k_۱ - k_۲)A = (q_۱ - q_۲)B \overset{B}{\equiv} ۰$$

از آنجایی که $(A, B) = ۱$، نتیجه می‌گیریم $|k_۱ - k_۲| \overset{B}{\equiv} ۰$.

اما از طرفی با توجه به این که $k_۱, k_۲ \in \{۱, ۲, \ldots, B - ۱\}$، داریم $|k_۱ - k_۲| < B$. بنابراین باید داشته باشیم $k_۱ - k_۲ = ۰$، که تناقض است.

واضح است که برای هر $k \in \{۱, ۲, \ldots, B - ۱\}$ داریم $kA \overset{B}{\not\equiv} ۰$؛ بنابراین باقی‌مانده‌ی دقیقاً یکی از اعداد صحیح (۲) بر B برابر ۱ است؛ یعنی عددی مانند $u \in \{۱, ۲, \ldots, B - ۱\}$ و عدد $v \in \mathbb{N}$ وجود دارد، به‌نحوی که $Au = Bv + ۱$. □

ملاحظه. فرض کنید $(u_۰, v_۰)$ کوچک‌ترین جواب معادله‌ی (۱) در اعداد طبیعی است؛ یعنی جوابی که در آن $u_۰$ (و یا $v_۰$) حداقل مقدار ممکن است. در این صورت همه‌ی جواب‌های طبیعی معادله‌ی (۱) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u_m = u_۰ + Bm \,, \quad v_m = v_۰ + Am \,; \quad m \in \mathbb{N} \tag{۳}$$

به مسئله‌ی اصلی باز می‌گردیم. دنباله‌ی $(y_n)_{n \geq ۱}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$y_{n+۱} = by_n^۲ + ay_n + ۱ \,; \quad y_۱ \in \mathbb{N} \tag{۴}$$

واضح است که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $(y_n, y_{n+۱}) = ۱$. بنابراین با توجه به لم فوق، دنباله‌هایی از اعداد طبیعی مانند $(u_n)_{n \geq ۱}$ و $(v_n)_{n \geq ۱}$ وجود دارند، به طوری که:

$$y_{n+۱}u_n - y_nv_n = ۱ \,; \quad n \in \mathbb{N}$$

با توجه به رابطه‌ی (۴) نتیجه می‌گیریم:

$$bu_ny_n^۲ + (au_n - v_n)y_n + u_n - ۱ = ۰ \,; \quad n \in \mathbb{N}$$

اگر تساوی (۵) را به صورت یک معادله‌ی درجه‌ی دوم برحسب y_n در نظر بگیریم، با توجه به این که $y_n \in \mathbb{N}$، دلتای معادله یعنی

$$D_n = (au_n - v_n)^۲ - ۴bu_n(u_n - ۱)$$

باید مربع کامل شود. در نتیجه:

$$v_n^2 - 2au_nv_n + (a^2 - 4b)u_n^2 + 4bu_n = z_n^2 ; \quad n \in \mathbb{N}$$

دنباله‌های $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ شامل زیردنباله‌هایی اکیداً صعودی مانند $(u_{nj})_{j\geq 1}$ و $(v_{nj})_{j\geq 1}$ اند؛ بنابراین سه‌تایی‌های (v_{nj}, u_{nj}, z_{nj}) نامتناهی دسته جواب برای معادله تولید می‌کنند.

تمرین‌ها و مسائل

۱) ثابت کنید معادله‌ی

$$x^2 = y^3 + z^5$$

بی‌نهایت جواب در اعداد طبیعی دارد.

۲) نشان دهید معادله‌ی

$$x^2 + y^2 = z^5 + z$$

بی‌نهایت جواب صحیح با شرط $(x, y, z) = 1$ دارد.

(المپیاد ریاضی انگلستان)

۳) ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$، معادله‌ی

$$x^n + y^n = z^{n+1}$$

بی‌نهایت جواب در اعداد طبیعی دارد.

۴) فرض کنید n عددی طبیعی و بزرگ‌تر از ۲ است. ثابت کنید معادله‌ی

$$x^n + y^n + z^n + u^n = v^{n-1}$$

بی‌نهایت جواب (x, y, z, u, v) در اعداد طبیعی دارد.

(دورین آندریا)

۵) فرض کنید a, b, c, d اعدادی طبیعی‌اند و $(a, b) = ۱$. ثابت کنید دستگاه معادلاتِ

$$\begin{cases} ax - ay - c = ۰ \\ bx - yt + d = ۰ \end{cases}$$

در مجموعه‌ی اعداد طبیعی بی‌نهایت جواب دارد.

(تیتو آندرسکو)

۶) همه‌ی سه‌تایی‌های (x, y, z) از اعداد صحیح را بیابید، به‌نحوی که:

$$xy(z + ۱) = (x + ۱)(y + ۱)z$$

۷) معادله‌ی زیر را در اعداد صحیح حل کنید:

$$x^۲ + xy = y^۲ + xz$$

۸) ثابت کنید بی‌نهایت چهارتایی (x, y, z, w) از اعداد طبیعی وجود دارد، به‌طوری که:

$$x^۴ + y^۴ + z^۴ = ۲۰۰۲^w$$

(تیتو آندرسکو)

۹) نشان دهید هر یک از معادلات زیر، در اعداد صحیح بی‌نهایت جواب دارند:

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲u^۲$$
$$x^۴ + y^۴ + z^۴ = ۲u^۲$$

۱۰) ثابت کنید بی‌نهایت چهارتایی (x, y, u, v) از اعداد طبیعی وجود دارد، به‌طوری که اعداد $xy + ۱$، $xu + ۱$، $xv + ۱$، $yu + ۱$، $yv + ۱$ و $uv + ۱$ همگی مربع کامل‌اند.

۴.۱ روش همنهشتی

بسیاری از اوقات، در نظر گرفتن همنهشتی‌های ساده در یک معادله، منجر به اثبات عدم وجود جواب در برخی معادلات دیوفانتی و یا محدود کردن جواب‌های معادله می‌شود.

مثال ۱۶.۱ نشان دهید معادله‌ی

$$(x + ۱)^۲ + (x + ۲)^۲ + \cdots + (x + ۲۰۰۱)^۲ = y^۲$$

در اعداد صحیح جواب ندارد.

حل: قرار می‌دهیم $x = z - ۱۰۰۱$؛ در این صورت معادله به شکل زیر درمی‌آید:

$$(z-۱۰۰۰)^۲+\cdots+(z-۱)^۲+z^۲+(z+۱)^۲+\cdots+(z+۱۰۰۰)^۲=y^۲$$

و یا

$$۲۰۰۱z^۲-۲(۱^۲+۲^۲+\cdots+۱۰۰۰^۲)=y^۲$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$۲۰۰۱z^۲+۲\times\frac{۱۰۰۰\times۱۰۰۱\times۲۰۰۱}{۶}=y^۲$$

و یا به صورت معادل،

$$۲۰۰۱z^۲+۱۰۰۰\times۱۰۰۱\times۶۶۷=y^۲$$

طرف چپ تساوی به دست آمده، به پیمانه‌ی ۳ با ۲ همنهشت است؛ بنابراین نمی‌تواند یک مربع کامل باشد.

مثال ۱۷.۱ همه‌ی زوج‌های (p,q) از اعداد اول را بیابید، به‌نحوی که:

$$p^۳-q^۵=(p+q)^۲$$

(المپیاد ریاضی روسیه)

حل: تنها جواب این معادله $(۷,۳)$ است. ابتدا فرض می‌کنیم هیچ یک از اعداد p و q برابر ۳ نیستند. در نتیجه $p\overset{۳}{\equiv}۱$ یا ۲ و نیز $q\overset{۳}{\equiv}۱$ یا ۲. اگر $p\overset{۳}{\equiv}q$، طرف چپ تساوی بر ۳ بخش‌پذیر می‌شود؛ در حالی که سمت راست تساوی بر ۳ بخش‌پذیر نیست. اما اگر $p\overset{۳}{\not\equiv}q$، سمت راست تساوی بر ۳ بخش‌پذیر می‌شود، در حالی که سمت چپ بر ۳ بخش‌پذیر نیست.

حال اگر $p=۳$، آن گاه $q^۵<۲۷$، که غیرممکن است.

همچنین اگر $q=۳$، خواهیم داشت $p^۳-۲۴۳=(p+۳)^۲$، که تنها جواب صحیح این معادله، $p=۷$ است.

مثال ۱۸.۱ ثابت کنید معادله‌ی $x^۵-y^۲=۴$ جوابی در اعداد صحیح ندارد.

(المپیاد ریاضی بالکان)

حل: معادله را به پیمانه‌ی ۱۱ در نظر می‌گیریم. از آنجایی که $(x^۵)^۲\overset{۱۱}{\equiv}x^{۱۰}\overset{۱۱}{\equiv}۰$ یا ۱، بنابراین $x^۵\overset{۱۱}{\equiv}-۱$ یا ۰ یا ۱. در نتیجه $x^۵-۴$ به پیمانه‌ی ۱۱ با یکی از اعداد ۶، ۷ یا ۸ همنهشت است. اما مانده‌های درجه‌ی دوم به پیمانه‌ی ۱۱ عبارتند از $۰,۱,۳,۴,۵,۹$. لذا معادله، جواب صحیح ندارد.

مثال ۱.۱۹ همه‌ی اعداد اول p را بیابید، به‌نحوی که دستگاه معادلاتِ

$$\begin{cases} p+1 = 2x^2 \\ p^2+1 = 2y^2 \end{cases}$$

جوابی در اعداد صحیح داشته باشد.

حل: تنها مقدار ممکن برای p عبارتست از $p = 7$. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم $x, y \geq 0$. توجه کنید که $p + 1 = 2x^2$ عددی زوج است، بنابراین $p \neq 2$. همچنین $2y^2 \overset{p}{\equiv} 1 \overset{p}{\equiv} 2x^2$ و نتیجتاً $x \overset{p}{\equiv} \pm y$ (چرا که p فرد است). اما با توجه به این که $x < y < p$، این رابطه‌ی همنهشتی تنها زمانی اتفاق می‌افتد که داشته باشیم $x + y = p$. در این صورت:

$$p^2 + 1 = 2(p - x)^2 = 2p^2 - 4px + p + 1$$

در نتیجه $p = 4x - 1$ و $2x^2 = 4x$. از این‌جا مقدار x برابر 0 یا 2 و مقدار p برابر -1 یا 7 به دست می‌آید، که البته -1 عددی اول نیست. اما برای $p = 7$، زوج $(x, y) = (2, 5)$ جوابی از دستگاه است.

مثال ۱.۲۰ ثابت کنید اگر n عددی طبیعی باشد، به‌نحوی که معادله‌ی

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$$

جوابی در اعداد صحیح برای (x, y) داشته باشد، آن گاه این معادله حداقل سه جواب دارد. همچنین نشان دهید این معادله در حالت $n = 2891$ جواب صحیح ندارد.

(۳۳ امین المپیاد جهانی ریاضیات)

حل: با مکعب کامل کردن جملات معادله، داریم:

$$\begin{aligned} x^3 - 3xy^2 + y^3 &= 2x^3 - 3x^2y - x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3 \\ &= 2x^3 - 3x^2y + (y - x)^3 \\ &= (y - x)^3 - 3(y - x)(-x)^2 + (-x)^3 \end{aligned}$$

بنابراین اگر (x, y) جواب از معادله باشد، $(y - x, -x)$ نیز جواب معادله است. این دو جواب با هم متمایزند، چرا که اگر $x = y - x$ و $y = -x$، نتیجه می‌گیریم $x = y = 0$.

به همین ترتیب،

$$\begin{aligned} x^3 - 3xy^2 + y^3 &= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + 2y^3 + 3x^2y - 6xy^2 \\ &= (x - y)^3 + 3xy(x - y) - 3xy^2 + 2y^3 \\ &= (-y)^3 - 3(-y)(x - y)^2 + (x - y)^3 \end{aligned}$$

در نتیجه $(-y, x-y)$ جواب سوم معادله است.

از این دو تبدیل برای حل قسمت دوم مسئله استفاده می‌کنیم. فرض کنید (x, y) جوابی از معادله است. از آنجایی که ۲۸۹۱ بر ۳ بخش‌پذیر نیست، بنابراین $x^۳ + y^۳$ نیز بر ۳ بخش‌پذیر نیست. پس یا باقی مانده‌ی x و y بر ۳ با هم برابر است (مخالف صفر) و یا دقیقاً یکی از اعداد x و y بر ۳ بخش‌پذیرند. در هر یک از حالات، یکی از اعداد $-x, y, x-y$ بر ۳ بخش‌پذیر می‌شود. با توجه به تبدیل فوق، می‌توانیم فرض کنیم y بر ۳ بخش‌پذیر است. در نتیجه $x^۳$ باید به پیمانه‌ی ۹ با ۲۸۹۱ همنهشت شود، که غیرممکن است؛ چرا که باقی مانده‌ی ۲۸۹۱ بر ۹ برابر ۲ است، اما مانده‌های درجه سوم به پیمانه‌ی ۹ عبارتند از ۰, ۱, ۸.

تمرین‌ها و مسائل

۱) نشان دهید معادله‌ی

$$(x+۱)^۲ + (x+۲)^۲ + \cdots + (x+۹۹)^۲ = y^z$$

در مجموعه‌ی اعداد صحیح، با فرض $z > ۱$ جوابی ندارد.

(المپیاد ریاضی مجارستان)

۲) همه‌ی زوج‌های (x, y) از اعداد طبیعی را بیابید، به‌نحوی که

$$x^۲ - y! = ۲۰۰۱$$

(تیتو آندرسکو)

۳) ثابت کنید معادله‌ی $x^۳ + y^۴ = ۷$ جوابی در اعداد صحیح ندارد.

۴) همه‌ی زوج‌های (x, y) از اعداد طبیعی را بیابید که در معادله‌ی زیر صدق کنند:

$$۳^x - ۲^y = ۷$$

۵) همه‌ی جواب‌های صحیح و نامنفی $(x_۱, x_۲, \ldots, x_{۱۴})$ از معادله‌ی زیر را بیابید. (از جواب‌هایی که جایگشت یکدیگرند، صرف‌نظر کنید.)

$$x_۱^۴ + x_۲^۴ + \cdots + x_{۱۴}^۴ = ۱۵۹۹$$

(۸ امین المپیاد ریاضی آمریکا)

۶) همه‌ی زوج‌های (x,y) از اعداد صحیح را بیابید، به‌نحوی که

$$x^{۳} - ۴xy + y^{۳} = -۱$$

(جی. ام ـ بخارست)

۷) همه‌ی سه‌تایی‌های (x,y,z) از اعداد صحیح نامنفی را بیابید که در معادله‌ی زیر صدق کنند:

$$۵^x ۷^y + ۴ = ۳^z$$

(المپیاد ریاضی بلغارستان)

۸) ثابت کنید معادله‌ی $۴xy - x - y = z^{۲}$ جوابی در اعداد طبیعی ندارد.

(پیشنهادی به ۲۵ امین المپیاد جهانی ریاضیات)

۹) ثابت کنید دستگاه معادلاتِ

$$\begin{cases} x^{۲} + ۶y^{۲} = z^{۲} \\ ۶x^{۲} + y^{۲} = t^{۲} \end{cases}$$

جوابی غیر بدیهی در اعداد صحیح ندارد.

۱۰) همه‌ی زوج‌های (a,b) از اعداد طبیعی را بیابید که در معادله‌ی زیر صدق کنند:

$$a^{b^{۲}} = b^a$$

(۳۷ امین المپیاد جهانی ریاضیات)

۵.۱ روش استقرای ریاضی

استقرای ریاضی روشی زیبا و قدرتمند برای اثبات حکم‌هایی است که به اعداد صحیح نامنفی ارتباط دارند.

فرض کنید $\{P(n)\}_{n\geq ۰}$ دنباله‌ای از گزاره‌هاست. روش استقرای ریاضی به ما کمک می‌کند که ثابت کنیم $P(n)$ به‌ازای هر $n \geq n_۰$ برقرار است؛ که $n_۰$ عددی صحیح و نامنفی مفروضی است.

استقرای ریاضی (فرم ضعیف): فرض کنید:

- $P(n_۰)$ درست است؛

- **برای هر $k \geq n_0$، درستی $P(k)$، درستی $P(k+1)$ را نتیجه می‌دهد.**

در این صورت $P(n)$ برای هر $n \geq n_0$ درست است.

استقرای ریاضی (با گام s): **فرض کنید s عددی طبیعی و ثابت است و**

- **$P(n_0), P(n_0+1), \ldots, P(n_0+s-1)$ درست اند؛**
- **برای هر $k \geq n_0$، درستی $P(k)$، درستی $P(k+s)$ را نتیجه می‌دهد.**

در این صورت $P(n)$ به‌ازای هر $n \geq n_0$ درست است.

این روش اثبات، به طور گسترده‌ای در شاخه‌های مختلف ریاضیات به کار می‌رود، که از جمله‌ی آن‌ها نظریه‌ی اعداد است. مثال‌های زیر نشان می‌دهند که چگونه استقرای ریاضی در حل معادلات دیوفانتی به کار می‌آید.

مثال ۱.۲۱ ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $n \geq 3$، اعداد طبیعی و فرد x, y وجود دارند، به‌طوری که $7x^2 + y^2 = 2^n$.

(المپیاد ریاضی بلغارستان)

حل: برای $n = 3$ داریم $x_3 = y_3 = 1$. حال فرض کنید برای عدد مفروض $n \geq 3$ اعداد طبیعی و فرد x_n و y_n در رابطه‌ی $7x_n^2 + y_n^2 = 2^n$ صدق می‌کنند. قصد داریم زوج (x_{n+1}, y_{n+1}) از اعداد طبیعی فرد را طوری بیابیم که $7x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = 2^{n+1}$. داریم:

$$7\left(\frac{x_n \pm y_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{7x_n \mp y_n}{2}\right)^2 = 2(7x_n^2 + y_n^2) = 2^{n+1}$$

دقیقاً یکی از اعداد $\frac{x_n+y_n}{2}$ و $\frac{|x_n-y_n|}{2}$ فرد است، چرا که مجموع این دو عدد برابر است با بزرگترین عدد در میان x_n و y_n (که در هر حال فرد است).

اگر به عنوان مثال $\frac{x_n+y_n}{2}$ فرد باشد، آن گاه عددِ

$$\frac{7x_n - y_n}{2} = 3x_n + \frac{x_n - y_n}{2}$$

نیز فرد است، زیرا مجموع عددی فرد و عددی زوج است. بنابراین در این حالت می‌توانیم x_{n+1} و y_{n+1} را به صورت زیر انتخاب کنیم:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \quad \text{و} \quad y_{n+1} = \frac{7x_n - y_n}{2}$$

همچنین اگر $\frac{x_n-y_n}{2}$ فرد باشد، آن گاه عددِ

$$\frac{7x_n + y_n}{2} = 3x_n + \frac{x_n + y_n}{2}$$

نیز فرد است، در نتیجه در این حالت قرار می‌دهیم:

$$x_{n+۱} = \frac{|x_n - y_n|}{۲} \quad \text{و} \quad y_{n+۱} = \frac{۷x_n + y_n}{۲}$$

مثال ۲۲.۱ ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، معادله‌ی زیر در اعداد طبیعی جواب دارد:

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۵۹^n$$

(دورین آندریا)

حل: برای حل، از استقرای ریاضی با گام $s = ۲$ و پایه‌ی $n_۰ = ۱$ استفاده می‌کنیم. توجه کنید که برای سه‌تایی‌های $(x_۱, y_۱, z_۱) = (۱, ۳, ۷)$ و $(x_۲, y_۲, z_۲) = (۱۴, ۳۹, ۴۲)$ داریم:

$$x_۱^۲ + y_۱^۲ + z_۱^۲ = ۵۹ \quad \text{و} \quad x_۲^۲ + y_۲^۲ + z_۲^۲ = ۵۹^۲$$

حال دنباله‌ی (x_n, y_n, z_n) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $(n \geq ۳)$

$$x_{n+۲} = ۵۹x_n\ , \quad y_{n+۲} = ۵۹y_n\ , \quad z_n = ۵۹z_n\ ; \quad n \geq ۱$$

در این صورت داریم:

$$z_{k+۲}^۲ + y_{k+۲}^۲ + z_{k+۲}^۲ = ۵۹^۲(x_k^۲ + y_k^۲ + z_k^۲)$$

بنابراین از تساوی $x_k^۲ + y_k^۲ + z_k^۲ = ۵۹^k$ نتیجه می‌گیریم $x_{k+۲}^۲ + y_{k+۲}^۲ + z_{k+۲}^۲ = ۵۹^{k+۲}$ و استقرا کامل می‌شود.

مثال ۲۳.۱ ثابت کنید برای هر $n \geq ۳$، معادله‌ی

$$\frac{۱}{x_۱} + \frac{۱}{x_۲} + \cdots + \frac{۱}{x_n} = ۱ \qquad (۱)$$

جوابی در اعداد طبیعی دارد که در آن $x_۱, x_۲, \cdots, x_n$ دو به دو با هم متمایزند.

حل: در حالت پایه‌ی $n = ۳$ داریم:

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶} = ۱$$

فرض کنید به‌ازای عددی مانند $k \geq ۳$ داشته باشیم:

$$\frac{۱}{x_۱} + \frac{۱}{x_۲} + \cdots + \frac{۱}{x_k} = ۱$$

که $x_۱, x_۲, \dots, x_k$ اعدادی طبیعی و متمایزند. بنابراین:

$$\frac{۱}{۲x_۱} + \frac{۱}{۲x_۲} + \cdots + \frac{۱}{۲x_k} = \frac{۱}{۲}$$

در نتیجه:

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲x_۱} + \frac{۱}{۲x_۲} + \cdots + \frac{۱}{۲x_k} = ۱$$

واضح است که اعداد $۲x_۱, ۲x_۲, \dots, ۲x_k$ دو به دو با هم متمایزند.

ملاحظات. ۱) توجه کنید که

$$\sum_{k=۱}^{n-۱} \frac{k}{(k+۱)!} = \sum_{k=۱}^{n-۱} \frac{(k+۱)-۱}{(k+۱)!} = \sum_{k=۱}^{n-۱} \left(\frac{۱}{k!} - \frac{۱}{(k+۱)!}\right) = ۱ - \frac{۱}{n!}$$

بنابراین:

$$\frac{۱}{\frac{۲!}{۱}} + \frac{۱}{\frac{۳!}{۲}} + \cdots + \frac{۱}{\frac{n!}{n-۱}} + \frac{۱}{n!} = ۱$$

به عبارت دیگر $\left(\frac{۲!}{۱}, \frac{۳!}{۲}, \dots, \frac{n!}{n-۱}, n!\right)$ جوابی از معادله‌ی (۱) است. (مؤلفه‌های این جواب دو به دو با هم متمایزند.

۲) جواب دیگری از معادله‌ی (۱) که مؤلفه‌های آن دو به دو با هم متمایزند، عبارتست از:

$$(۲, ۲^۲, \dots, ۲^{n-۲}, ۲^{n-۲}+۱, ۲^{n-۲}(۲^{n-۲}+۱))$$

چرا که:

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \cdots + \frac{۱}{۲^{n-۲}} + \frac{۱}{۲^{n-۲}+۱} + \frac{۱}{۲^{n-۲}(۲^{n-۲}+۱)}$$
$$= ۱ - \frac{۱}{۲^{n-۲}} + \frac{۲^{n-۲}}{۲^{n-۲}(۲^{n-۲}+۱)} + \frac{۱}{۲^{n-۲}(۲^{n-۲}+۱)} = ۱ - \frac{۱}{۲^{n-۲}} + \frac{۱}{۲^{n-۲}} = ۱$$

۳) روش دیگری نیز برای ساختن جواب‌های معادله‌ی (۱) وجود دارد. دنباله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$a_۱ = ۲\,, \quad a_{m+۱} = a_۱ a_۲ \cdots a_m + ۱\,; \quad m \geq ۱$$

در این صورت برای هر $n \geq ۳$ داریم:

$$\frac{۱}{a_۱} + \frac{۱}{a_۲} + \cdots + \frac{۱}{a_{n-۱}} + \frac{۱}{a_n - ۱} = ۱ \qquad (۲)$$

برای اثبات این رابطه، توجه کنید که با توجه به رابطه‌ی بازگشتی داریم:

$$a_{k+۱} - ۱ = a_k(a_k - ۱)\,; \quad k \geq ۱$$

و یا به صورت معادل،

$$\frac{1}{a_{k+1}-1}=\frac{1}{a_k-1}-\frac{1}{a_k}\,; \quad k\geq 1$$

بنابراین:

$$\frac{1}{a_k}=\frac{1}{a_k-1}-\frac{1}{a_{k+1}-1}$$

به این ترتیب مجموعِ $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}$ به صورت تلسکوپی درمی‌آید و حاصل آن عبارت است از

$$\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_n-1}=1-\frac{1}{a_n-1}$$

در نتیجه رابطه‌ی (۲) برقرار است.

۴) هنوز مشخص نشده است که آیا بی‌نهایت جواب $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ برای معادله‌ی (۱) وجود دارد که در آن $x_1,x_2,\ldots,x_n$ همگی اعدادی طبیعی و فرد باشند یا خیر.

بر اساس زوجیت جملات، می‌توان نشان داد که در این حالت باید n عددی فرد باشد.

مثال‌هایی نیز برای چنین nهایی به دست آمده است. به عنوان نمونه، اگر $n=9$،

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{33}+\frac{1}{45}+\frac{1}{385}=1$$

اگر $n=11$،

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{27}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{105}+\frac{1}{135}=1$$

اگر $n=15$،

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{55}$$
$$+\frac{1}{77}+\frac{1}{165}+\frac{1}{231}+\frac{1}{385}+\frac{1}{495}+\frac{1}{693}=1$$

و اگر $n=17$،

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{55}$$
$$+\frac{1}{77}+\frac{1}{165}+\frac{1}{275}+\frac{1}{385}+\frac{1}{495}++\frac{1}{825}+\frac{1}{1925}+\frac{1}{2475}=1$$

مثال ۱.۲۴ ثابت کنید برای هر $n \geq ۴۱۲$ اعداد طبیعی $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ وجود دارند، به‌طوری که

$$\frac{۱}{x_۱^۳} + \frac{۱}{x_۲^۳} + \cdots + \frac{۱}{x_n^۳} = ۱ \qquad (۱)$$

حل: داریم:

$$\frac{۱}{a^۳} = \frac{۱}{(۲a)^۳} + \frac{۱}{(۲a)^۳} + \cdots + \frac{۱}{(۲a)^۳}$$

که سمت راست تساوی، شامل ۸ جمله است. بنابراین اگر معادله‌ی (۱) در اعداد طبیعی وجود داشته باشد، آن گاه معادله‌ی

$$\frac{۱}{x_۱^۳} + \frac{۱}{x_۲^۳} + \cdots + \frac{۱}{x_{n+۷}^۳} = ۱$$

نیز در اعداد طبیعی وجود دارد.

حال اگر بخواهیم روش استقرای ریاضی را با گام ۷ بکار بریم، فقط کافی است نشان دهیم معادله‌ی (۱) برای $n = ۴۱۲, ۴۱۳, \ldots, ۴۱۸$ جواب دارد. برای این منظور نیز یک ایده‌ی کلیدی وجود دارد: جواب را به‌ازای هر یک از این مقادیر n از روی جواب دیگری که در آن تعداد متغیرها به پیمانه‌ی ۷ با n همنهشت است، می‌سازیم.

برای این منظور می‌دانیم $۱ = \frac{۱}{۳^۳} \times ۲۷$ و $۴۱۲ \overset{۷}{\equiv} ۲۷$. در نتیجه می‌توان با توجه به روندی که برای گام استقرا گفتیم، از جوابِ

$$\underbrace{\frac{۱}{۳^۳} + \frac{۱}{۳^۳} + \cdots + \frac{۱}{۳^۳}}_{\text{۲۷ تا}} = ۱$$

جوابی برای $n = ۴۱۲$ به دست آورد. در بقیه‌ی حالت‌ها نیز داریم:

$$۴ \times \frac{۱}{۲^۳} + ۹ \times \frac{۱}{۳^۳} + ۳۶ \times \frac{۱}{۶^۳} = ۱$$

$$۴ + ۹ + ۳۶ = ۴۹ \overset{۷}{\equiv} ۴۱۳ \quad \text{و}$$

$$۴ \times \frac{۱}{۲^۳} + ۳۲ \times \frac{۱}{۴^۳} = ۱$$

$$۴ + ۳۲ = ۳۶ \overset{۷}{\equiv} ۴۱۴ \quad \text{و}$$

$$۱۸ \times \frac{۱}{۳^۳} + ۲۴۳ \times \frac{۱}{۹^۳} = ۱$$

$$۱۸ + ۲۴۳ = ۲۶۱ \overset{۷}{\equiv} ۴۱۵ \quad \text{و}$$

$$۱۸ \times \frac{۱}{۳^۳} + ۱۶ \times \frac{۱}{۴^۳} + ۱۴۴ \times \frac{۱}{۱۲^۳} = ۱$$

$$18+16+144=178 \overset{7}{\equiv} 416 \quad \text{و}$$
$$4\times\frac{1}{2^3}+16\times\frac{1}{4^3}+36\times\frac{1}{6^3}+144\times\frac{1}{12^3}=1$$
$$4+16+36+144=200 \overset{7}{\equiv} 417 \quad \text{و}$$

و نهایتاً:

$$4+9+81+324 \overset{7}{\equiv} 418 \quad \text{و} \quad 4\times\tfrac{1}{2^3}+9\times\tfrac{1}{3^3}+81\times\tfrac{1}{9^3}+324\times\tfrac{1}{18^3}=1$$

مثال ۲۵.۱ معادله‌ی زیر را در اعداد طبیعی متمایز حل کنید:

$$x_1^3+x_2^3+\cdots+x_m^3=(x_1+x_2+\cdots+x_m)^2$$

(تیتو آندرسکو)

حل: ابتدا نتیجه‌ی کمکی زیر را ثابت می‌کنیم:

لم ۱.۵.۱ اگر $a_1, a_2, \ldots$ دنباله‌ای از اعداد طبیعی متمایز باشد، در این صورت برای هر عدد طبیعی $n \geq 1$ نابرابری زیر برقرار است:

$$a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3 \geq (a_1+a_2+\cdots+a_n)^2 \qquad (1)$$

اثبات. بدون از دست دادن کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. این فرض را جزء فرض استقرا در نظر می‌گیریم.

فرض کنید حکم برای $n=k$ برقرار باشد. اعداد متمایز $a_1 < a_2 < \cdots < a_k < a_{k+1}$ را در نظر بگیرید. واضح است که $a_{k+1} \geq a_k + 1$. در نتیجه:

$$\frac{(a_{k+1}-1)a_{k+1}}{2} \geq \frac{a_k(a_k+1)}{2} = 1+2+\cdots+a_k$$

توجه کنید که مجموع $1+2+\cdots+a_k$ شامل همه‌ی اعدادی طبیعی است که از a_k تجاوز نمی‌کنند، بنابراین، مجموع مذکور بزرگ‌تر یا مساوی $a_1+a_2+\cdots+a_k$ است؛ یعنی:

$$\frac{(a_{k+1}-1)a_{k+1}}{2} \geq a_1+a_2+\cdots+a_k$$

با ضرب طرفین این نابرابری در $2a_{k+1}$ داریم:

$$(a_{k+1}^2-a_{k+1})a_{k+1} \geq 2(a_1+a_2+\cdots+a_k)a_{k+1}$$

یعنی:

$$a_{k+1}^3 \geq 2(a_1+a_2+\cdots+a_k)a_{k+1}+a_{k+1}^2$$

از طرفی طبق فرض استقراء داریم:

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_k^3 \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^2$$

با جمع بستن این دو نابرابری خواهیم داشت:

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_k^3 + a_{k+1}^3 \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1})^2$$

پس حکم برای $n = k + 1$ نیز درست است. □

حال به مسئله باز می‌گردیم. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$. بنابراین $x_1 \geq 1$، $x_2 \geq 2$، ... و $x_m \geq m$. ثابت می‌کنیم $x_1 = 1$، $x_2 = 2$، ... و $x_m = m$.

داریم $x_{m-1} \leq x_m - 1$، $x_{m-2} \leq x_m - 2$، ... و $x_1 \leq x_m - (m-1)$. بنابراین:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1} \leq (m-1)x_m - \frac{(m-1)m}{2} \tag{2}$$

با توجه به لم می‌توان نوشت:

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{m-1}^3 \geq (x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1})^2 \tag{3}$$

از طرفی، با توجه به معادله‌ی مسئله داریم:

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{m-1}^3 + x_m^3 &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1})^2 \\ &+ 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1})x_m + x_m^2 \end{aligned} \tag{4}$$

از روابط (۳) و (۴) نتیجه می‌گیریم:

$$x_m^3 \leq 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1})x_m + x_m^2$$

و یا:

$$x_m^2 \leq 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1}) + x_m$$

حال با استفاده از رابطه‌ی (۲) خواهیم داشت:

$$x_m^2 \leq 2(m-1)x_m - (m-1)m + x_m$$

این نابرابری هم ارز است با

$$x_m^2 - (2m-1)x_m + (m-1)m \leq 0$$

و یا

$$(x_m - m)(x_m - (m-1)) \leq 0$$

از آنجایی که $x_m > m - 1$، با توجه به نابرابری آخر، باید داشته باشیم $x_m \leq m$. بنابراین $x_m = m$. اکنون با توجه به این که $x_1, x_2, \ldots, x_m$ اعدادی طبیعی و دو به دو متمایزند، نتیجه می‌گیریم $x_1 = 1$، $x_2 = 2$، ... و $x_m = m$.

پس جواب‌های معادله‌ی داده شده عبارتند از همه‌ی $m!$ جایگشت مجموعه‌ی $\{1, 2, \ldots, m\}$.

ملاحظه. اگر از شرط متمایز بودن x_iها صرف نظر کنیم، معادله جواب‌های دیگری نیز خواهد داشت. به عنوان مثال در حالت $m = 6$ داریم:

$$1^3 + 2^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 6^3 = (1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 6)^2$$

تمرین‌ها و مسائل

۱) ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$، اعداد صحیح و فرد x, y وجود دارند، به‌نحوی که $|x^2 - 17y^2| = 4^n$.

(تیتو آندرسکو)

۲) نشان دهید به‌ازای همه‌ی مقادیر طبیعی n، معادله‌ی زیر در اعداد صحیح جواب دارد:

$$x^2 + xy + y^2 = 7^n$$

(دورین آندریا)

۳) ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $n \geq 1$، اعداد صحیحی مانند x, y, z وجود دارند، به‌طوری که

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3^{2^n}$$

(دورین آندریا)

۴) عدد صحیح $t_k = \frac{k(k+1)}{2}$ را kامین عدد مثلثی می‌نامند. $(k \geq 1)$

ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $n \geq 3$، معادله‌ی

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = 1$$

در مجموعه‌ی اعداد مثلثی جواب دارد.

۵) نشان دهید برای هر $n \geq ٦$، معادله‌ی

$$\frac{١}{x_١^٢} + \frac{١}{x_٢^٢} + \cdots + \frac{١}{x_n^٢} = ١$$

در اعداد صحیح، جواب دارد.

٦) ثابت کنید برای هر $s \geq ٢$، اعدادی طبیعی مانند $x_٠, x_١, \ldots, x_s$ وجود دارند، به‌نحوی که

$$\frac{١}{x_١^٢} + \frac{١}{x_٢^٢} + \cdots + \frac{١}{x_s^٢} = \frac{١}{x_٠^٢}$$

و $x_٠ < x_١ < \cdots < x_s$.

۷) ثابت کنید برای هر عدد طبیعی m و هر عدد به اندازه‌ی کافی بزرگ s، معادله‌ی

$$\frac{١}{x_١^m} + \frac{١}{x_٢^m} + \cdots + \frac{١}{x_s^m} = ١$$

حداقل یک جواب در اعداد طبیعی وجود دارد.

۸) ثابت کنید برای هر عدد صحیح و نامنفی k، معادله‌ی

$$x^٢ + y^٢ - z^٢ = k$$

جوابی در اعداد طبیعی، با شرط $x < y < z$ دارد.

(تیتو آندرسکو)

۹) ثابت کنید معادله‌ی $x^٢ + (x + ١)^٢ = y^٢$ بی‌نهایت جواب در مجموعه‌ی اعداد طبیعی دارد.

١٠) معادله‌ی زیر را در مجموعه‌ی اعداد طبیعی متمایز، حل کنید:

$$x_١^٢ + x_٢^٢ + \cdots + x_{٢٠٠٢}^٢ = ١٣٣٥(x_١ + x_٢ + \cdots + x_{٢٠٠٢})$$

(تیتو آندرسکو)

۶.۱ روش نزول نامتناهی فرما

پیر دِ فرما[۳] (۱۶۶۵–۱۶۰۱) را همه‌ی ما به خاطر فعالیت‌هایش در ریاضی، می‌شناسیم، هر چند که او به عنوان ریاضی‌دانی آماتور محسوب می‌شود. فرما تحصیلاتش را در رشته‌ی حقوق مدنی در دانشگاه اورلئان[۴] پیش از سال ۱۶۳۱ تمام کرد و بعد به عنوان وکیل و سپس به عنوان عضو شورای شهر تولوز[۵] شروع به کار کرد.

فرما ثابت کرد که به خاطر روش‌ها و یافته‌هایش، جایگاهی جاودانه در جهان ریاضیات دارد. او اولین ریاضیدانی بود که روشی از اثبات را تحت عنوان «نزول نامتناهی» به کار برد.

فرض کنید P یک ویژگی از اعداد صحیح نامنفی است. $\{P(n)\}_{n\geq 1}$ را دنباله‌ی گزاره‌های زیر در نظر بگیرید:

$P(n)$: «n در ویژگی P صدق می‌کند.»

روش زیر برای اثبات این که گزاره $P(n)$ به‌ازای همه‌ی nهای به اندازه‌ی کافی بزرگ، غلط است، به کار می‌رود:

فرض کنید k عددی صحیح و نامنفی است و

- $P(k)$ **درست نیست؛**
- **هرگاه $P(m)$ به‌ازای عدد طبیعی مانند $m > k$ درست باشد، آن گاه می‌بایست عدد کوچکتری مانند j، که $m > j \geq k$ وجود داشته باشد به‌نحوی که $P(j)$ نیز درست باشد.**

در این صورت $P(n)$ به‌ازای هر $n \geq k$ نادرست است.

در واقع این روش، عکس استقرای قوی است که برای اثبات نقیض گزاره‌ی $P(n)$ به کار می‌رود. می‌توان این روش را به زبانی دیگر، به یک نردبان تشبیه کرد که:

«اگر شما بدانید که نمی‌توانید به هر یک از پله‌های نردبان، پیش از دستیابی به پله‌ی پایین‌تر برسید، و نیز بدانید که نمی‌توانید به پله‌ی پایینی نردبان برسید، در این صورت به هیچ یک از پله‌ها نخواهید رسید.»

روش فوق را معمولاً **«روش نزول نامتناهی»** می‌نامند.

روش نزول نامتناهی فرما را می‌توان به شکل ریاضی به صورت زیر بیان کرد:

فرض کنید k عددی صحیح و نامنفی است و

- **هرگاه به‌ازای عدد مانند $m > k$، گزاره‌ی $P(m)$ درست باشد، آن گاه عدد کوچک‌تر مانند j، که $m > j > k$ وجود دارد به‌نحوی که $P(j)$ نیز درست است.**

---

[۳] Pierre de Fermat

[۴] Orleans

[۵] Touluse

در این صورت $P(n)$ برای هر $n > k$ نادرست است.

دو حالت خاص از روش نزول متناهی، مخصوصاً برای بررسی حالات دیوفانتی مفید هستند:

روش نزول نامتناهی نوع ۱: هیچ دنباله‌ای مانند $n_1 > n_2 > \cdots$ از اعداد صحیح نامنفی وجود ندارد.

بعضی اوقات ساده‌تر است که روش نزول نامتناهی نوع ۱ را با این گزاره جایگزین کنیم: اگر n_0 کوچک‌ترین عدد طبیعی n است که به ازای آن $P(n)$ درست است، آن‌گاه $P(n)$ برای هر $n < n_0$ نادرست است.

روش نزول نامتناهی نوع ۲: اگر دنباله‌ای از اعداد صحیح نامنفی مانند $(n_i)_{i\geq 1}$ در نابرابری‌های $n_1 \geq n_2 \geq \cdots$ صدق کند، آن گاه عددی مانند i_0 وجود دارد، به‌طوری که $n_{i_0} = n_{i_0+1} = \cdots$.

مثال ۲۶.۱ معادله‌ی زیر را در اعداد صحیح نامنفی حل کنید:

$$x^3 + 2y^3 = 4z^3$$

حل: توجه کنید که $(0, 0, 0)$ جوابی از معادله است. ثابت می‌کنیم جواب دیگری وجود ندارد. فرض کنید (x_1, y_1, z_1) جوابی نابدیهی از این معادله است. از آنجایی که $\sqrt[3]{2}$ و $\sqrt[3]{4}$ اعدادی گنگ‌اند، باید داشته باشیم $x_1, y_1, z_1 > 0$.

از تساوی $x_1^3 + 2y_1^3 = 4z_1^3$ نتیجه می‌گیریم $2|x_1$. بنابراین $x_1 = 2x_2$، که $x_2 \in \mathbb{N}$. پس $4x_2^3 + y_1^3 = 2z_1^3$ و نتیجتاً $y_1 = 2y_2$، که $y_2 \in \mathbb{N}$. به همین ترتیب $z_1 = 2z_2$، که $z_2 \in \mathbb{N}$. به این ترتیب جواب «جدید» (x_2, y_2, z_2) به دست می‌آید که در آن $x_1 > x_2$، $y_1 > y_2$ و $z_1 > z_2$. با ادامه دادن این روند، دنباله‌ی (x_n, y_n, z_n) از جواب‌های معادله ساخته می‌شود که $x_1 > x_2 > x_3 > \cdots$. اما به وضوح این مطلب با روش نزول نامتناهی نوع ۱ در تناقض است.

مثال ۲۷.۱ معادله‌ی زیر را در اعداد صحیح نامنفی حل کنید:

$$2^x - 1 = xy$$

(رقابت‌های ریاضی پاتنام)

حل: توجه داشته باشید که زوج‌های $(0, k)$، که $k \in \mathbb{N}$ و زوج $(1, 1)$ در معادله صدق می‌کنند. نشان می‌دهیم جواب دیگری وجود ندارد. برای این منظور روش نزول نامتناهی را روی عوامل اول x به کار می‌بریم. فرض کنید p_1 عامل اولی از x است و q کوچکترین

عدد طبیعی است که $p_1|2^q - 1$. طبق قضیه فرما داریم $p_1|2^{p_1-1} - 1$؛ بنابراین $q \leq p_1 - 1 < p_1$.

حال ثابت می‌کنیم $q|x$. اگر این گونه نباشد، آن گاه $x = kq + r$، که $0 < r < q$. داریم:

$$\begin{aligned}
2^x - 1 &= 2^{kq} \cdot 2^r - 1 \\
&= (2^q)^k \cdot 2^r - 1 \\
&= (2^q - 1 + 1)^k \cdot 2^r - 1 \\
&\overset{p_1}{\equiv} 2^r - 1
\end{aligned}$$

با توجه به این که $2^x - 1 \overset{p_1}{\equiv} 0$، نتیجه می‌گیریم $p|2^r - 1$. اما این نتیجه با حداقل بودن q در تناقض است.

بنابراین $q|x$ و $1 < q < p_1$. حال فرض کنید p_2 عامل اولی از q است. واضح است که p_2 نیز مقسوم علیهی از x است و نیز $p_2 < p_1$. با ادامه دادن این روند، دنباله‌ای نامتناهی و نزولی از عوامل اول x ساخته می‌شود: $p_1 > p_2 > \cdots$، که با روش نزول نامتناهی نوع ۱ در تناقض است. در نتیجه معادله جواب دیگری ندارد.

مثال ۲۸.۱ m, n اعدادی طبیعی بین ۱ تا ۱۹۸۱‌اند که در رابطه‌ی

$$(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$$

صدق می کنند. حداکثر مقدار ممکن برای $m^2 + n^2$ را به دست آورید.

(۲۲ امین المپیاد جهانی ریاضیات)

حل: زوج $(m, n) = (1, 1)$ در رابطه‌ی $(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$ صدق می‌کند. همچنین اگر زوج (m, n) در این رابطه صدق کند و $1 < m < n$، آن گاه $m < n < 2m$ (چرا؟). با مربع کامل کردن جملات، داریم:

$$\begin{aligned}
(n^2 - mn - m^2)^2 &= \left((n-m)^2 + mn - 2m^2\right)^2 \\
&= \left((n-m)^2 + m(n-m) - m^2\right)^2 \\
&= \left(m^2 - m(n-m) - (n-m)^2\right)
\end{aligned}$$

بنابراین زوج $(n - m, m)$ نیز در این رابطه صدق می‌کند و نیز داریم $0 < n - m < m$.

طبق روش نزولی نامتناهی نوع ۲، تبدیل $(m,n) \longrightarrow (n-m,m)$ بعد از تعدادی متناهی مرحله می‌بایست خاتمه بپذیرد. واضح است که در خاتمه به زوج $(m,n)=(۱,۱)$ می‌رسیم (توجه کنید که زوج $(۱,۲)$ نیز به $(۱,۱)$ تبدیل می‌شود). در نتیجه همه‌ی اعدادی را که در این رابطه صدق می‌کنند، می‌توان از زوج $(۱,۱)$ و با تکرار تبدیل معکوس $(m,n) \longrightarrow (n,m+n)$ بعد از چند مرحله، به دست آورد:

$$(۱,۱) \longrightarrow (۱,۲) \longrightarrow (۲,۳) \longrightarrow (۳,۵) \longrightarrow \cdots$$

مؤلفه‌های هر یک از این زوج‌ها، اعداد فیبوناچی F_nاند، که تعریف اعداد فیبوناچی به این صورت است:

$$F_۰ = ۰\,, \quad F_۱ = ۱\,, \quad F_{n+۱} = F_n + F_{n-۱}\,; \quad n \geq ۱$$

بنابراین همه‌ی زوج‌های جواب، شامل جملات متوالی دنباله‌ی فیبوناچی‌اند. بزرگترین عدد فیبوناچی کوچک‌تر از ۱۹۸۱ عبارتست از $F_{۱۶} = ۱۵۹۷$؛ در نتیجه پاسخ مسئله برابر است با $F_{۱۵}^۲ + F_{۱۶}^۲ = ۳۵۱۴۵۷۸$.

مثال ۲۹.۱ دنباله‌های $(x_n)_{n\geq ۰}$ و $(y_n)_{n\geq ۰}$ به صورت بازگشتی تعریف شده‌اند:

$$x_{n+۲} = ۳x_{n+۱} - x_n\,; \quad x_۰ = ۱\,, \quad x_۱ = ۴$$

$$y_{n+۲} = ۳y_{n+۱} - y_n\,; \quad y_۰ = ۱\,, \quad y_۱ = ۲$$

الف) ثابت کنید به‌ازای همه‌ی مقادیر صحیح و نامنفی n داریم $x_n^۲ - ۵y_n^۲ = -۴$.

ب) فرض کنید a,b دو عدد طبیعی‌اند، به‌نحوی که $a^۲ - ۵b^۲ = -۴$. ثابت کنید عدد صحیح و نامنفی مانند k وجود دارد به‌طوری که $x_k = a$ و $y_k = b$.

حل: ابتدا با استقرا روی k نشان می‌دهیم که برای هر $k \geq ۰$ داریم:

$$(x_{k+۱}, y_{k+۱}) = \left(\frac{۳x_k + ۵y_k}{۲}, \frac{x_k + ۳y_k}{۲}\right)$$

برای $k=۰$ داریم $\left(\frac{۳+۵}{۲}, \frac{۱+۳}{۲}\right) = (۴,۲)$ و نیز برای $k=۱$، $\left(\frac{۱۲+۱۰}{۲}, \frac{۴+۶}{۲}\right) = (۱۱,۵)$.

حال فرض کنید این رابطه به‌ازای k و $k+۱$ برقرار باشد. با جایگزین عبارت‌های برابر با $x_{k+۲}, x_{k+۱}, y_{k+۲}, y_{k+۱}$ در رابطه‌ی $(x_{k+۳}, y_{k+۳}) = (۳x_{k+۲} - x_{k+۱}, ۳y_{k+۲} - y_{k+۱})$، نتیجه می‌گیریم که $(x_{k+۳}, y_{k+۳})$ برابر است با:

$$\left(\frac{۳}{۲}(۳x_{k+۱} - x_k) + \frac{۵}{۲}(۳y_{k+۱} - y_k), \frac{۱}{۲}(۳x_{k+۱} - x_k) + \frac{۳}{۲}(۳y_{k+۱} - y_k)\right)$$
$$= \left(\frac{۱}{۲}(۳x_{k+۲} + ۵y_{k+۲}), \frac{۱}{۲}(x_{k+۲} + ۳y_{k+۲})\right)$$

به این ترتیب گام استقرا کامل می‌شود.

الف) با استقرا روی n نشان می‌دهیم $x_n^2 - 5y_n^2 = -4$. برای $n = 0$ داریم $-4 = 1 - 5$. حال فرض کنید این رابطه برای n درست باشد. برای اثبات این رابطه برای $n+1$ داریم:

$$x_{n+1}^2 - 5y_{n+1}^2 = \left(\frac{3x_n + 5y_n}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{x_n + 3y_n}{2}\right)^2$$
$$= \frac{4x_n^2 - 20y_n^2}{4} = x_n^2 - 5y_n^2 = -4$$

بنابراین نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌شود.

ملاحظه. دنباله‌های $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ توسط روابط بازگشتی خطی مرتبه‌ی دوم تعریف شده‌اند، بنابراین جمله‌ی عمومی آن‌ها به فرم زیر است:

$$\alpha\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \quad ; \quad n \geq 0$$

برای دنباله‌ی (x_n) داریم $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ و برای دنباله‌ی (y_n)، $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ و $\beta = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$.

بنابراین:

$$x_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1} \tag{1}$$

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}\right] \tag{2}$$

با استفاده از روابط (۱) و (۲) با کمی محاسبه می‌توان نشان داد $x_n^2 - 5y_n^2 = -4$. $(n \geq 0)$

اگر کمی دقت کنید، می‌فهمید که x_n و y_n جملات فرد دنباله‌های معروف لوکا و فیبوناچی‌اند، یعنی $x_n = L_{2n+1}$ $y_n = F_{2n+1}$.

ب) فرض کنید به‌ازای اعداد طبیعی a_1, b_1 داریم $a_1^2 - 5b_1^2 = -4$ و نیز هیچ عدد kای وجود ندارد که $(x_k, y_k) = (a_1, b_1)$. (برهان خلف)

قرار می‌دهیم $(a_2, b_2) = \left(\frac{3a_1 - 5b_1}{2}, \frac{3b_1 - a_1}{2}\right)$. ثابت می‌کنیم a_2 و b_2 اعدادی طبیعی‌اند. برای این منظور می‌بایست نشان دهیم اولاً زوجیت a_1, b_1 یکسان است و ثانیاً $a_1 < 3b_1$ و $3a_1 > 5b_1$.

توجه کنید که $a_1 - b_1 \overset{2}{\equiv} 4 + 5b_1^2 - a_1^2 = 0$؛ بنابراین زوجیت a, b یکسان است. همچنین از رابطه‌ی $9b_1^2 > 4 - 5b_1^2 = a_1^2$ نتیجه می‌گیریم $3b_1 > a_1$. برای اثبات $3a_1 > 5b_1$ فرض می‌کنیم $a_1 \geq 3$ (در حالتی که a_1 برابر ۱ یا ۲ است، به وضوح این نابرابری برقرار می‌شود). در نتیجه $a_1^2 > 5$ و $5a_1^2 - 25b_1^2 + 20 < 5a_1^2 - 25b_1^2 + 4a_1^2 = 0$؛ یعنی $3a_1 > 5b_1$.

حال با توجه به شرط $a_1^2 - 5b_1^2 = -4$ با کمی محاسبه می‌توان نشان داد $a_2^2 - 5b_2^2 = -4$. از طرفی:

$$a_2 + b_2 = \frac{3a_1 - 5b_1}{2} + \frac{3b_1 - a_1}{2} = a_1 - b_1 < a_1 + b_1$$

ضمن این که می‌دانیم اندیس jای وجود ندارد که $(a_2, b_2) = (x_j, y_j)$. بنابراین با ادامه‌ی این روند، دنباله‌ی نامتناهیِ

$$a_1 + b_1 > a_2 + b_2 > a_3 + b_3 > \dots$$

ساخته می‌شود که با روش نزول نامتناهی نوع ۱ در تناقض است.

مثال ۱.۳۰ معادله‌ی زیر را در اعداد طبیعی حل کنید:

$$x^2 + y^2 + x + y + 1 = xyz$$

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم $z = 5$. فرض کنید (x_1, y_1, z_1) جوابی از معادله است که در آن $z_1 \neq 5$. در این صورت $x_1 \neq y_1$، و الّا باید داشته باشیم $x_1[x_1(z_1 - 2) - 2] = 1$، که با توجه به $z \neq 5$ غیرممکن است.

داریم:

$$\begin{aligned} 0 &= x_1^2 + y_1^2 + x_1 + y_1 + 1 - x_1 y_1 z_1 \\ &= (y_1 z_1 - x_1 - 1)^2 + y_1^2 + (y_1 z_1 - x_1 - 1) + y_1 + 1 - (y_1 z_1 - x_1 - 1) y_1 z_1 \end{aligned}$$

بنابراین $(x_2, y_2, z_2) = (y_1 z_1 - x_1 - 1, y_1, z_1)$ نیز جوابی از معادله است، چرا که از رابطه‌ی $x_1(y_1 z_1 - x_1 - 1) = y_1^2 + y_1 + 1 > 0$ نتیجه می‌گیریم $x_2 = y_1 z_1 - x_1 - 1 > 0$.

توجه کنید که اگر $x_1 > y_1$، آن گاه $x_1 \geq y_1 + 1$ و در نتیجه: (فرض $x_1 > y_1$ با توجه به متقارن بودن معادله نسبت به x_1, y_1 انجام شده است.)

$$x_1^2 > y_1^2 + y_1 + 1 = x_1(y_1 z_1 - x_1 - 1) = x_1 x_2$$

بنابراین $x_۲ < x_۱$. با ادامه دادن این روند، دنباله‌ی جواب‌های طبیعی (x_k, y_k, z_k) به دست می‌آید که در آن $\cdots < x_۳ < x_۲ < x_۱$. اما این نتیجه با روش نزول نامتناهی نوع ۱ در تناقض است.

این تناقض نشان می‌دهد که فرض $z \neq ۵$ نادرست بوده است. بنابراین $z = ۵$.

به راحتی می‌توان نشان داد که x و y هر دو فردند. در نتیجه با جایگذاری

$$u = \frac{۳x - ۱}{۲} \quad , \quad v = \frac{۳y - ۱}{۲} \tag{۱}$$

معادله به صورت $u^۲ - ۵uv + v^۲ = -۳$ در می‌آید.

$$u^۲ - ۵uv + v^۲ = -۳ \tag{۲}$$

در می‌آید. به وضوح $(u_۰, v_۰) = (۱, ۱)$ جوابی از معادله‌ی (۲) است. حال فرض کنید $(u_۱, v_۱)$ جواب دیگری از این معادله است و $u_۱ > v_۱$. در این صورت:

$$v_۱^۲ + (۵v_۱ - u_۱)^۲ + ۳ = ۵v_۱(۵v_۱ - u_۱)$$

پس $(u_۲, v_۲) = (v_۱, ۵v_۱ - u_۱)$ نیز جوابی از معادله‌ی (۲) است. از رابطه‌ی

$$(u_۱ - v_۱)(u_۱ - ۴v_۱) = u_۱^۲ - ۵u_۱v_۱ + ۴v_۱^۲ = ۳v_۱^۲ - ۳ \geq ۰$$

نتیجه می‌گیریم $u_۱ \geq ۴v_۱$. بنابراین $v_۲ = ۵u - u_۱ \leq v_۱$. به این ترتیب با شروع از زوج $(u_۱, v_۱)$، جواب‌های $(u_۲, v_۲), (u_۳, v_۳), \ldots$ ساخته می‌شوند که $\ldots \geq v_۳ \geq v_۲ \geq v_۱$. در نتیجه با توجه به روش نزول نامتناهی نوع ۲، باید داشته باشیم $v_{k+۱} = ۵v_k - u_k$ و $v_{k+۱} = v_k$ (برای هر $k \geq ۱$). بنابراین:

$$u_k = v_{k-۱}\ ; \quad k \geq ۱$$
$$v_{k+۱} = ۵v_k - v_{k-۱}\ ; \quad v_۰ = ۱\ , \quad v_۱ = ۴$$

رابطه‌ی بازگشتی دنباله‌ی $(v_v)_{n \geq ۰}$ یک رابطه‌ی خطی مرتبه‌ی دوم است. در نتیجه جمله‌ی عمومی این دنباله به صورت زیر است:

$$v_n = \alpha \left(\frac{۵ + \sqrt{۲۱}}{۲}\right)^n + \beta \left(\frac{۵ - \sqrt{۲۱}}{۲}\right)^n \ ; \quad n \geq ۰$$

با توجه با مقادیر $v_۰$ و $v_۱$ باید داشته باشیم $\alpha = \frac{۳+\sqrt{۲۱}}{۲\sqrt{۲۱}}$ و $\beta = -\frac{۳-\sqrt{۲۱}}{۲\sqrt{۲۱}}$. بنابراین:

$$u_n = \frac{۱}{\sqrt{۲۱}} \left[\frac{۳ + \sqrt{۲۱}}{۲} \left(\frac{۵ + \sqrt{۲۱}}{۲}\right)^{n-۱} - \frac{۳ - \sqrt{۲۱}}{۲} \left(\frac{۵ - \sqrt{۲۱}}{۲}\right)^{n-۱}\right], \tag{۳}$$

$$v_n = \frac{۱}{\sqrt{۲۱}}\left[\frac{۳+\sqrt{۲۱}}{۲}\left(\frac{۵+\sqrt{۲۱}}{۲}\right)^n - \frac{۳-\sqrt{۲۱}}{۲}\left(\frac{۵-\sqrt{۲۱}}{۲}\right)^n\right] \; ; \quad n \geq ۰$$

به این ترتیب با توجه به رابطه‌ی (۱) نتیجه می‌گیریم که همه‌ی جواب‌های معادله‌ی داده شده به صورت $\left(۵, \frac{۲v_n+۱}{۳}, \frac{۲u_n+۱}{۳}\right)$ اند، که u_n و v_n طبق روابط (۳) تعریف شده‌اند. $(n \geq ۰)$

تمرین‌ها و مسائل

۱) همه‌ی سه‌تایی‌های (x, y, z) از اعداد صحیح نامنفی را بیابید، به‌نحوی که

$$x^۳ + ۳y^۳ + ۹z^۳ - ۳xyz = ۰$$

(رقابت‌های ریاضی کورشاک)

۲) همه‌ی اعداد صحیح x, y, z را بیابید که در معادله‌ی زیر صدق کنند:

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۲xyz = ۰$$

(المپیاد ریاضی کره)

۳) معادله‌ی زیر را در اعداد صحیح حل کنید:

$$x^۴ + y^۴ + z^۴ = ۹u^۴$$

۴) همه‌ی جواب‌های طبیعی معادله‌ی زیر را به دست آورید:

$$x^۲ - y^۲ = ۲xyz$$

۵) همه‌ی اعداد صحیح a, b, c را بیابید، به‌طوری که:

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ = a^۲b^۲$$

(پنجمین المپیاد ریاضی آمریکا)

۶) الف) ثابت کنید اگر سه‌تایی مرتبی مانند (x, y, z) در معادله‌ی

$$x^۲ + y^۲ + ۱ = xyz$$

صدق کند، آن گاه $z = ۳$.

ب) همه‌ی چنین سه‌تایی‌ها را بیابید.

۷) دستگاه معادلات زیر را در اعداد طبیعی حل کنید:

$$\begin{cases} x^۲ + ۱ = uy \\ y^۲ + ۱ = vx \end{cases}$$

۸) ثابت کنید بی‌نهایت سه‌تایی (x, y, z) از اعداد طبیعی وجود دارد، به‌نحوی که:

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = xyz$$

(نشریه‌ی دانشگاهی ریاضیات)

۹) همه‌ی زوج‌های (a, b) از اعداد طبیعی را بیابید، به‌طوری که $ab + a + b | a^۲ + b^۲ + ۱$.

(مجله‌ی ریاضیات)

۱۰) فرض کنید a عدد طبیعی است. دنباله‌ی $(x_n)_{n\geq ۱}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$x_۱ = ۱ ; \quad x_۲ = a , \quad x_{n+۲} = ax_{n+۱} + x_n ; \quad n \geq ۱$$

ثابت کنید زوج (x, y) جوابی از معادله‌ی

$$|x^۲ + axy - y^۲| = ۱$$

است اگر و فقط اگر اندیسی مانند k وجود داشته باشد که $(x, y) = (x_k, x_{k+۱})$.

(المپیاد ریاضی رومانی)

۱۱) همه‌ی زوج‌های (m, n) از اعداد صحیح نامنفی را بیابید، به‌نحوی که:

$$(m + n - ۵)^۲ = ۹mn$$

(انتخابی تیم آمریکا برای ۴۲امین دوره‌ی المپیاد جهانی ریاضیات)

۱۲) فرض کنید x, y, z اعداد طبیعی‌اند و در رابطه‌ی $xy - z^۲ = ۱$ صدق می‌کنند. ثابت کنید اعداد صحیح و نامنفی a, b, c, d وجود ندارد، به‌طوری که:

$$x = a^۲ + b^۲ , \quad y = c^۲ + d^۲ , \quad z = ac + bd$$

(پیشنهادی به ۲۰امین المپیاد جهانی ریاضیات)

۷.۱ معادلات دیوفانتی متفرقه

تعداد زیادی از معادلات دیوفانتی، جزء هیچ یک از دسته‌هایی که گفتیم، محسوب نمی‌شوند. معادلاتی که در این بخش ارائه می‌کنیم، از این دست هستند.

مثال ۳۱.۱ معادله‌ی زیر را در مجموعه‌ی اعداد طبیعی متمایز حل کنید:

$$۱ + x_۱ + ۲x_۱x_۲ + \cdots + (n-۱)x_۱x_۲\cdots x_{n-۱} = x_۱x_۲\cdots x_n$$

(تیتو آندرسکو)

حل: معادله‌ی داده شده را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$x_۱\left(x_۲x_۳\cdots x_n - (n-۱)x_۲x_۳\cdots x_{n-۱} - \cdots - ۲x_۲ - ۱\right) = ۱$$

بنابراین $x_۱ = ۱$ و

$$x_۲\left(x_۳\cdots x_n - (n-۱)x_۳\cdots x_{n-۱} - \cdots - ۳x_۳ - ۲\right) = ۲$$

از آنجایی که $x_۱ \neq x_۲$، نتیجه می‌گیریم $x_۲ = ۲$ و

$$x_۳\left(x_۴\cdots x_n - (n-۱)x_۴\cdots x_{n-۱} - \cdots - ۴x_۴ - ۳\right) = ۳$$

می‌دانیم $x_۳ \neq x_۲$ و $x_۳ \neq x_۱$؛ در نتیجه $x_۳ = ۳$.
با ادامه دادن این روند (که یک استقرای متناهی به شمار می‌آید) نتیجه می‌گیریم:

$$x_۱ = ۱\,, \quad x_۲ = ۲\,, \quad \ldots\,, \quad x_{n-۱} = n-۱$$

در مرحله‌ی آخر نیز داریم $(n-۱)(x_n - (n-۱)) = n-۱$؛ یعنی $x_n = n$.
ملاحظه: با جایگذاری مقادیر به دست آمده برای x_iها، در معادله‌ی اصلی، اتحاد زیر حاصل می‌شود:

$$۱ + ۱\times ۱! + ۲\times ۲! + \cdots + (n-۱)(n-۱)! = n!$$

مثال ۳۲.۱ دستگاه معادلات زیر را در مجموعه‌ی اعداد طبیعی حل کنید:

$$\begin{cases} x^۲ + ۳y = u^۲ \\ y^۲ + ۳x = v^۲ \end{cases}$$

(تیتو آندرسکو)

حل: نابرابری‌های

$$x^{2}+3y\geq(x+2)^{2} \quad \text{و} \quad y^{2}+3x\geq(y+2)^{2}$$

نمی‌توانند همزمان دست باشند، چرا که با جمع بستن این دو نابرابری، به تناقض می‌رسیم. در نتیجه حداقل یکی از نابرابری‌های $x^{2}+3y<(x+2)^{2}$ و $y^{2}+3x<(y+2)^{2}$ باید برقرار باشد. بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض می‌کنیم $x^{2}+3y<(x+2)^{2}$. بنابراین $x^{2}<x^{2}+3y<(x+2)^{2}$. پس باید داشته باشیم $x^{2}+3y=(x+1)^{2}$ و یا به صورت معادل $3y=2x+1$، در نتیجه به‌ازای عددی صحیح و نامنفی مانند k داریم $x=3k+1$ و $y=2k+1$. لذا $y^{2}+3x=4k^{2}+13k+4$. اگر $k>5$، خواهیم داشت:

$$(2k+3)^{2}<4k^{2}+13k+4<(2k+4)^{2}$$

بنابراین $y^{2}+3x$ نمی‌تواند مربع کامل شود. در نتیجه کافیست فقط مقادیر $k\in\{0,1,2,3,4,5\}$ را بررسی کنیم. نهایتاً جواب‌های معادله عبارتند از:

$$x=y=1\,,\quad u=v=2 \quad \text{و}$$

$$x=16\,,\ y=11\,,\ u=17\,,\ v=13 \quad \text{و} \quad x=11\,,\ y=16\,,\ u=13\,,\ v=17$$

مثال ۱.۳۳ معادله‌ی زیر را در اعداد طبیعی حل کنید:

$$7^{x}+x^{4}+47=y^{2}$$

حل: اگر x عددی فرد باشد، آن گاه $7^{x}+x^{4}+47\overset{4}{\equiv}3$. از آنجایی که هیچ مربع کاملی به فرم $4t+3$ وجود ندارد، در این حالت معادله جواب ندارد.

حال فرض می‌کنیم $x=2k$، $(k\in\mathbb{N})$. برای $k\geq4$ داریم:

$$(7^{k})^{2}<7^{2k}+(2k)^{4}+47<(7^{k}+1)^{2}$$

سمت چپ نابرابری فوق، به وضوح برقرار است. سمت راست نیز هم ارز است با $8k^{4}+23<7^{k}$. با استقرای ریاضی می‌توان نشان داد که این نابرابری به‌ازای $k\geq3$ برقرار است.

اکنون کافی است مقادیر $k\in\{1,2,3\}$ را بررسی کنیم. در بین این مقادیر، فقط $k=2$ منجر به جواب می‌شود. در این حالت داریم $x=4$ و $y=52$.

مثال ۳۴.۱ فرض کنید M تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی

$$x^۲ - y^۲ = z^۳ - t^۳$$

با شرط $۰ \leq x, y, z, t \leq ۱۰^۶$ است و N تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی

$$x^۲ - y^۲ = z^۳ - t^۳ + ۱$$

با همان شرط است. ثابت کنید $M > N$.

(پیشنهادی به ۲۱امین المپیاد جهاین ریاضیات)

حل: دو معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^۲ + t^۳ = y^۲ + z^۳\,, \quad x^۲ + t^۳ = y^۲ + z^۳ + ۱$$

برای هر $k = ۰, ۱, ۲, \ldots$، تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $u^۲ + v^۳ = k$ با شرط $۰ \leq u, v \leq ۱۰^۶$ را با n_k نمایش می‌دهیم. به وضوح n_k به‌ازای kهای بزرگ‌تر از $l = (۱۰^۶)^۲ + (۱۰^۶)^۳$ برابر صفر است. نشان می‌دهیم:

$$M = n_۰^۲ + n_۱^۲ + \cdots + n_l^۲ \quad \text{و} \quad N = n_۰ n_۱ + n_۱ n_۲ + \cdots + n_{l-۱} n_l \qquad (۱)$$

برای اثبات، به عنوان مثال دومین تساوی را ثابت می‌کنیم. توجه کنید که به‌ازای هر یک از جواب‌های معادله‌ی $x^۲ + t^۳ = y^۲ + z^۳ + ۱$ با شرط $۰ \leq x, y, z, t \leq ۱۰^۶$ عدد kای وجود دارد $(l \leq k \leq l)$ به‌طوری که:

$$x^۲ + t^۳ = k\,, \quad y^۲ + z^۳ = k - ۱ \qquad (۲)$$

همچنین برای هر چنین عدد kای، می‌توان زوج‌های (x, t) و (y, z) را از جواب‌های معادلات (۲)، مستقلاً به n_k و $n_{k+۱}$ طریق انتخاب کرد. بنابراین برای هر $k = ۱, ۲, \ldots, l$ تعداد جواب‌های معادله‌ی $x^۲ + t^۳ = y^۲ + z^۳ + ۱ = k$ برابر است با $n_{k-۱} n_k$. در نتیجه $N = n_۰ n_۱ + n_۱ n_۲ + \ldots + n_{l-۱} n_l$.

اثبات اولین تساوی (۱) نیز اساساً به همین صورت است.

حال با توجه به این که $n_۰ \neq ۰$ (در واقع $n_۰ = ۱$) به راحتی می‌توان نشان داد که $M > N$. چرا که:

$$M - N = \frac{۱}{۲}\left[n_۰^۲ + (n_۰ - n_۱)^۲ + (n_۱ - n_۲)^۲ + \ldots + (n_{l-۱} - n_l)^۲ + n_l^۲\right] > ۰$$

مثال ۱.۳۵ الف) ثابت کنید بی‌نهایت سه‌تایی (x,y,z) از اعداد صحیح وجود دارد، به‌نحوی که:

$$x^3+2y^3+4z^3-6xyz=1 \qquad (1)$$

ب) همه‌ی جواب‌های صحیح معادله‌ی (۱) را به دست آورید.

(پیشنهادی آمریکا به ۳۸امین المپیاد جهانی ریاضیات)

حل: الف) فرض کنید s ریشه‌ی سوم حقیقی عدد ۲ باشدو نیز $\omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}$. در این صورت معادله‌ی (۱) را می‌توان با تجزیه‌ی عبارت سمت چپ تساوی، به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$(x+ys+zs^2)(x+ys\omega+zs^2\omega^2)(x+ys\omega^2+zs^2\omega)=1 \qquad (2)$$

فرض می‌کنیم $(x_1,y_1,z_1)=(1,1,1)$. به وضوح این سه‌تایی در معادله‌ی (۱) صدق می‌کند. بنابراین اگر سه‌تایی‌های (x_n,y_n,z_n) را به صورت

$$x_n+y_ns+z_ns^2=(x_1+y_1s+z_1s^2)^n\,; \quad n\in\mathbb{Z}$$

تعریف کنیم، این سه‌تایی‌ها نیز جواب‌هایی از معادله‌اند. (و نیز همه‌ی آن‌ها با هم متمایزند.)

ب) تنها جواب‌های معادله، سه‌تایی‌های به فرم (x_n,y_n,z_n) اند، که $n\in\mathbb{Z}$. در واقع نشان می‌دهیم که اگر (x,y,z) جوابی از معادله‌ی (۱) باشد و $x+ys+zs^2>0$، آن گاه $(x,y,z)=(x_n,y_n,z_n)$، که n عدد صحیح یکتایی است که در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$(1+s+s^2)^n\le x+ys+zs^2<(1+s+s^2)^{n+1}$$

سه‌تایی (u,v,w) که از رابطه‌ی

$$u+vs+ws^2=(x+ys+zs^2)(1+s+s^2)^{-n}$$

به دست می‌آید نیز جوابی از معادله است و داریم $1\le u+vs+ws^2<1+s+s^2$. بنابراین:

$$\begin{aligned}
1&\ge(u+vs+ws^2)^{-1}\\
&=(u+vs\omega+ws^2\omega^2)(u+vs\omega^2+ws^2\omega)\\
&=(u^2-2sw)+(2w^2-uv)s+(v^2-uw)s^2\\
&=\frac{1}{2}\left[(u-vs)^2+(vs-ws^2)^2+(ws^2-u)^2\right]
\end{aligned}$$

در نتیجه $|u-vs|$، $|vs-ws^{۲}|$ و $|ws^{۲}-u|$ همگی کوچک‌تر یا مساوی $\sqrt{۲}$اند.
بنابراین اگر $w \geq ۱$، آن گاه $u > ws^{۲} - \sqrt{۲} > ۰$ و $v > ws - s^{-۱}\sqrt{۲} > ۰$. پس $u, v \geq ۱$ و نتیجتاً $u + vs + ws^{۲} \geq ۱ + s + s^{۲}$، که تناقض است. به همین ترتیب با فرض $w \leq -۱$ نیز به تناقض $u + vs + ws^{۲} \leq -(۱ + s + s^{۲})$ می‌رسیم. در نتیجه $w = ۰$ و باید داشته باشیم:

$$|u - vs|,\ |vs|,\ |v| \leq \sqrt{۲}$$

از دومین و سومین نابرابری نتیجه می‌گیریم $-۱ \leq u, v \leq ۱$، که منجر به جواب‌های $(-۱, ۱, ۰)$ یا $(u, v, w) = (۱, ۰, ۰)$ می‌شود. جواب $(-۱, ۱, ۰)$ در شرط $|u - vs| \leq \sqrt{۲}$ صدق نمی‌کند، بنابراین $(u, v, w) = (۱, ۰, ۰)$ و نتیجتاً

$$(x, y, z) = (x_n, y_n, z_n)$$

تمرین‌ها و مسائل

۱) ثابت کنید معادله‌ی $۶(۶a^{۲} + ۳b^{۲} + c^{۲}) = ۵n^{۲}$، به جز $a = b = c = n = ۰$ جوابی در اعداد صحیح ندارد.

(المپیاد ریاضی آسیا ـ اقیانوسیه)

۲) عددی طبیعی و ثابت مانند c بیابید، به‌نحوی که معادله‌ی

$$xy^{۲} - y^{۲} - x + y = c$$

دقیقاً سه جواب (x, y) در اعداد طبیعی داشته باشد.

(المپیاد ریاضی انگلستان)

۳) همه‌ی سه‌تایی‌های (x, y, z) از اعداد طبیعی را بیابید، به‌نحوی که y عددی اول باشد، z بر y و ۳ بخش‌پذیر نباشد و نیز $x^{۳} - y^{۳} = z^{۲}$.

(المپیاد ریاضی بلغارستان)

۴) همه‌ی سه‌تایی‌های (x, k, n) از اعداد طبیعی را بیابید، به‌نحوی که:

$$۳^{k} - ۱ = x^{n}$$

(المپیاد ریاضی ایتالیا)

۵) برای عدد طبیعی و مفروض n، نشان دهید تعداد جواب‌های صحیح (x, y) از معادله‌ی $x^2 + xy + y^2 = n$ متناهی و بر ۶ بخش‌پذیر است.

۶) همه‌ی اعداد طبیعی n را بیابید، به‌نحوی که دو عدد طبیعی و نسبت به هم اول x و y و عدد طبیعی $k > 1$ وجود داشته باشد که

$$x^k + y^k = 3^n$$

(المپیاد ریاضی روسیه)

۷) ثابت کنید برای هر عدد اول p، معادله‌ی

$$2^p + 3^p = q^n$$

جوابی در اعداد طبیعی با شرط $q, n > 1$ ندارد.

(المپیاد ریاضی ایتالیا)

۸) همه‌ی زوج‌های (a, b) از اعداد صحیح را بیابید، به‌طوری که $a^2 + 4b$ و $b^2 + 4a$ هر دو مربع کامل باشند.

(المپیاد ریاضی آسیا ـ اقیانوسیه)

۹) ابعاد یک مکعب مستطیل، اعداد طبیعی است و همه‌ی وجه‌های آن را با رنگ سبز رنگ‌آمیزی کرده‌ایم. این مکعب مستطیل را توسط صفحاتی موازی وجوه، به مکعب‌های واحد تقسیم کرده‌ایم. همه‌ی مقادیر ممکن برای ابعاد مستطیل را بیابید، اگر بدانیم تعداد مکعب‌های واحدی که وجهی سبز رنگ ندارند، برابر با یک سوم تعداد کل مکعب‌ها است.

(المپیاد ریاضی بلغارستان)

۱۰) همه‌ی جواب‌های طبیعی (x, y, z, t) از معادله‌ی

$$(x + y)(y + z)(z + x) = txyz$$

را بیابید، به‌نحوی که $\gcd(x, y) = \gcd(y, z) = \gcd(z, x) = 1$. (منظور از $\gcd(a, b)$ بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و b است.)

(المپیاد ریاضی رومانی)

فصل ۲

معادلات دیوفانتی کلاسیک

۱.۲ معادلات دیوفانتی خطی

هر معادله به فرمِ

$$a_۱x_۱ + a_۱x_۲ + \cdots + a_nx_n = b \qquad (۱.۱.۲)$$

که در آن $a_,a_۲,\ldots,a_n,b$ اعدادی صحیح و ثابت‌اند، را یک **معادله‌ی دیوفانتی خطی** گویند. فرض می‌کنیم $n \geq ۱$ و ضرایب $a_۱,a_۲,\ldots,a_n$ همگی مخالف صفرند.

قضیه‌ی مهمی که در مورد معادلات دیوفانتی خطی وجود دارد، به صورت زیر است:

قضیه ۱.۱.۲ معادله‌ی (۱.۱.۲) حل‌شدنی است (یعنی جوابی در مجموعه‌ی اعداد صحیح دارد) اگر و فقط اگر $(a_۱,a_۲,\ldots,a_n)|b$.

همچنین در حالتی که معادله، حل‌شدنی است، همه‌ی جواب‌های صحیح معادله‌ی (۱.۱.۲) را می‌توان برحسب $n-۱$ پارامتر صحیح نمایش داد.

اثبات. فرض کنید $d = (a_۱,a_۲,\ldots,a_n)$.

اگر b بر d بخش‌پذیر نباشد، آن گاه معادله‌ی (۱.۱.۲) حل‌شدنی نیست، چرا که برای هر n عدد صحیح $x_۱x_۲,\ldots,x_n$ سمت چپ معادله‌ی (۱.۱.۲) بر d بخش‌پذیر است، در حالی که سمت راست بر d بخش‌پذیر نیست.

اگر $d|b$، آنگاه به معادله‌ی هم ارزِ

$$a'_۱x_۱ + a'_۲x_n + \cdots + a'_nx_n = b'$$

می‌رسیم، که $a'_i = \frac{a_i}{d}$، $(i = ۱, ۲, \ldots, n)$، و $b' = \frac{b}{d}$. به وضوح داریم $(a'_۱, a'_۲, \ldots, a'_n) = ۱$.

حال روی تعداد متغیرها، یعنی n استقرا می‌زنیم. در حالت $n = ۱$، معادله به فرم $x_۱ = b$ یا $-x_۱ = b$ در می‌آید. بنابراین جواب یکتای معادله، به هیچ پارامتری بستگی ندارد.

در ادامه فرض کنید $n \geq ۲$ و شرط حل‌شدنی بودن، برای هر معادله با $n - ۱$ متغیر برقرار است. هدف ما این است که این شرط را برای معادلات n متغیره ثابت کنیم. قرار می‌دهیم $d_{n-۱} = (a_۱, \ldots, a_{n-۱})$. در این صورت هر جواب $(x_۱, \ldots, x_n)$ از معادله‌ی (۱.۱.۲) در رابطه‌ی همنهشتی

$$a_۱x_۱ + a_۲x_۲ + \cdots + a_nx_n \overset{d_{n-۱}}{\equiv} b$$

صدق می‌کند. این رابطه هم ارز است با:

$$a_nx_n \overset{d_{n-۱}}{\equiv} b \qquad (۲.۱.۲)$$

با ضرب طرفین این رابطه‌ی همنشهتی در $a_n^{\varphi(d_{n-۱})-۱}$، که φ تابع اویلر است و توجه به این مطلب که $a_n^{\varphi(d_{n-۱})} \overset{d_n}{\equiv} ۱$[1]، نتیجه می‌گیریم:

$$x_n \overset{d_{n-۱}}{\equiv} c$$

که $c = a_n^{\varphi(d_{n-۱})-۱}b$. بنابراین $x_n = c + d_{n-۱}t_{n-۱}$، $(t_{n-۱} \in \mathbb{Z})$. با جایگذاری تساوی به‌دست آمده در معادله‌ی (۱.۱.۲) و مرتب کردن جملات، به معادله‌ی $n - ۱$ متغیره‌ی

$$a_۱x_۱ + \cdots + a_{n-۱}x_{n-۱} = b - a_nc - a_{n-۱}d_{n-۱}t_{n-۱}$$

می‌رسیم. حال کافی است نشان دهیم $d_{n-۱}|(b - a_nc - a_{n-۱}d_{n-۱}t_{n-۱})$، که هم ارز است با $a_nc \overset{d_{n-۱}}{\equiv} b$. این رابطه‌ی همنهشتی نیز با توجه به انتخاب c درست است. بنابراین می‌توانیم معادله‌ی آخر را بر $d_{n-۱}$ تقسیم کنیم. در این صورت معادله‌ی

$$a'_۱x_۱ + \cdots + a'_{n-۱}x_{n-۱} = b' \qquad (۳.۱.۲)$$

حاصل می‌شود، که $a'_i = \frac{a_i}{d_{n-۱}}$، $(i = ۱, ۲, \ldots, n - ۱)$، و $b' = \frac{b_n - a_nc}{d_{n-۱}} - a_nt_{n-۱}$. از آنجایی که $(a'_۱, \ldots, a'_{n-۱}) = ۱$، طبق فرض استقرا معادله‌ی (۳.۱.۲) برای هر $t_{n-۱} \in \mathbb{Z}$ حل‌شدنی است و جواب‌های آن را می‌توان برحسب $n - ۲$ پارامتر صحیح نمایش داد. حال اگر به این جواب‌ها، $x_n = c + d_{n-۱}t_{n-۱}$ را نیز اضافه کنیم، نتیجه می‌گیریم جواب‌های معادله‌ی (۱.۱.۲) برحسب $n - ۱$ متغیر قابل نمایش هستند. □

[1] توجه کنید که $(a_۱, a_۲, \ldots, a_{n-۱}, a_n) = (d_{n-۱}, a_n) = ۱$

نتیجه ۲.۱.۲ فرض کنید $a_۱$ و $a_۲$ اعدادی صحیح و نسبت به هم اولند. در این صورت اگر $(x_۱^\circ, x_۲^\circ)$ جوابی از معادله‌ی

$$a_۱x_۱ + a_۲x_۲ = b \qquad (۴.۱.۲)$$

باشد، آن‌گاه همه‌ی جواب‌های این معادله از رابطه‌ی

$$\begin{cases} x_۱ = x_۱^\circ + a_۲t \\ x_۲ = x_۲^\circ - a_۱t \end{cases} \qquad (۵.۱.۲)$$

به دست می آید. $(t \in \mathbb{Z})$

مثال ۱.۲ معادله‌ی زیر را در اعداد صحیح حل کنید.

$$۳x + ۴y + ۵z = ٦$$

حل: با در نظر گرفتن معادله به پیمانه‌ی ۵، داریم $۳x + ۴y \overset{۵}{\equiv} ۱$. بنابراین:

$$۳x + ۴y = ۱ + ۵s\,; \quad s \in \mathbb{Z}$$

یکی از جواب‌های این معادله، $x = -۱ + ۳s$ و $y = ۱ - s$ است. در نتیجه با توجه به روابط (۵.۱.۲) خواهیم داشت:

$$x = -۱ + ۳s + ۴t\,, \quad y = ۱ - s - ۳t\,; \quad t \in \mathbb{Z}$$

با جایگذاری مقادیر x و y در معادله نتیجه می‌گیریم $z = ۱ - s$. پس همه‌ی جواب‌های معادله عبارتند از:

$$(x, y, z) = (-۱ + ۳s + ۴t, ۱ - s - ۳t, ۱ - s)$$

برای هر n عدد طبیعی $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ که $(a_۱, a_۲, \ldots, a_n) = ۱$، بزرگترین عدد طبیعی N را که به‌ازای آن، معادله‌ی

$$a_۱x_۱ + a_۲x_۲ + \cdots + a_nx_n = N$$

در اعداد صحیح نامنفی، حل‌شدنی نباشد با $g(a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$ نمایش می‌دهیم. مسئله تعیین $g(a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$ تحت عنوان مسئله‌ی سکه‌های فروبنیوس[۲] مشهور است. (او بود که پرسید حداکثر مقدار پولی که نمی‌توان با سکه‌هایی به ارزش $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ پرداخت، چقدر است.)

[۲] Frobenius

مثال ۲.۲ (سیلوستر، ۱۸۸۴) فرض کنید a و b اعدادی طبیعی‌اند و $(a,b) = 1$. نشان دهید:

$$g(a,b) = ab - a - b$$

حل: فرض کنید $N > ab - a - b$. با توجه به نتیجه‌ی ۲.۱.۲، جواب‌های معادله‌ی $ax + by = N$ به فرم $(x,y) = (x_0 + bt, y_0 - at)$ اند، که $t \in \mathbb{Z}$. همچنین فرض کنید t عدد صحیحی است که $0 \le y_0 - at \le a - 1$. در این صورت:

$$(x_0 + bt)a = N - (y_0 - at)b > ab - a - b - (a-1)b = -a$$

بنابراین $x_0 + bt > -1$، یعنی $x_0 + bt \ge 0$. لذا در این حالت معادله‌ی $ax + by = N$ در اعداد صحیح نامنفی حل‌شدنی است. در نتیجه:

$$g(a,b) \le ab - a - b$$

حال فقط باید نشان دهیم که معادله‌ی

$$ax + by = ab - a - b$$

در اعداد صحیح نامنفی، حل‌شدنی نیست. فرض کنید این گونه نباشد. داریم:

$$ab = a(x+1) + b(y+1)$$

از آنجایی که $(a,b) = 1$، در نتیجه $a|y+1$ و $b|x+1$. بنابراین $a \le y+1$ و $b \le x+1$ و لذا:

$$ab = a(x+1) + b(y+1) \ge 2ab$$

تناقض حاصل، نشان می‌دهد که

$$g(a,b) \ge ab - a - b$$

در نتیجه $g(a,b) = ab - a - b$.

ملاحظات.

۱) حالت $n = 3$ (یعنی $g(a,b,c)$) اولین بار توسط سلمر[۳] و بیر[۴] به طور کامل و بر اساس الگوریتم یک کسر مسلسل حل شد. نتیجه‌ی آن‌ها بعداً توسط رودست[۵] و سپس توسط گرینبرگ[۶] به صورت ساده‌تری ارائه شد.

---

[۳] Selmer
[۴] Beyer
[۵] Rödesth
[۶] Greenberg

۲) هیچ فرمول کلی در حالت $n \geq ۴$ تاکنون به دست نیامده است. اما کران‌های بالایی برای آن ارائه شده است. در سال ۱۹۴۲ براور[۷] نشان داد:

$$g(a_۱, a_۲, \dots, a_n) \leq \sum_{i=۱}^{n} a_i \left(\frac{d_{i-۱}}{d_i} - ۱\right)$$

که $d_i = (a_۱, \dots, a_i)$. در سال ۱۹۷۲، اردوش و گراهام ثابت کردند:

$$g(a_۱, \dots, a_n) \leq ۲a_{n-۱} \left\lceil \frac{a_n}{n} \right\rceil - a_n$$

و نیز

$$\frac{t^۲}{n-۱} - ۵t \leq \gamma(n,t) \leq \frac{۲t^۲}{n}$$

که $\gamma(n,t) = \max\limits_{\circ < a_۱ < \dots < a_n \leq t} g(a_۱, \dots, a_n)$.

فرض کنید $a_۱, a_۲, \dots, a_m > \circ$ و معادله‌ی

$$a_۱x_۱ + a_۲x_۲ + \dots + a_mx_m = n$$

در اعداد صحیح نامنفی حل‌شدنی است. A_n را تعداد جواب‌های $(x_۱, x_۲, \dots, x_m)$ در نظر می‌گیریم.

قضیه ۳.۱.۲ a) تابع مولد دنباله‌ی $(A_n)_{n \geq ۱}$ به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{۱}{(۱ - x^{a_۱}) \dots (۱ - x^{a_m})} \,; \quad |x| < ۱ \qquad (٦.۱.۲)$$

در واقع A_n برابر است با ضریب x^n در بسط توانی f.

b) رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$a_n = \frac{۱}{n!} f^{(n)}(\circ) \qquad (۷.۱.۲)$$

اثبات. a) با توجه به حد مجموع سری هندسی داریم:

$$\frac{۱}{۱ - x^{a_k}} = ۱ + x^{a_k} + x^{۲a_k} + \dots \,; \qquad k = ۱, ۲, \dots, m$$

بنابراین

$$\begin{aligned} f(x) &= (۱ + x^{a_۱} + x^{۲a_۱} + \dots) \dots (۱ + x^{a_m} + x^{۲a_m} + \dots) \\ &= ۱ + A_۱x + A_۲x^۲ + \dots + A_nx^n + \dots \end{aligned}$$

b) اگر n بار از تابع f مشتق بگیریم، به وضوح فرمول (۷.۱.۲) به دست می‌آید. □

---

[۷] Brauer

مثال ۳.۲ تعداد زوج‌های (x,y) از اعداد صحیح نامنفی را بیابید، به‌نحوی که:

$$x+2y=n$$

حل: با توجه به قضیه‌ی ۳.۱.۲ نتیجه می‌گیریم که پاسخ مسئله برابر است با:

$$A_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$$

که تابع f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(t)=\frac{1}{(1-t)(1-t^2)}$$

داریم

$$f(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(t-1)^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t-1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t+1}$$

در نتیجه

$$f^{(n)}(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^n(n+1)!}{(t-1)^{n+2}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{(-1)^n n!}{(t-1)^{n+1}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{(-1)^n n!}{(t+1)^{n+1}}$$

بنابراین

$$f^{(n)}(0)=\frac{(n+1)!}{2}+\frac{n!}{4}+\frac{(-1)^n n!}{4}$$

و نهایتاً

$$A_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=\frac{2n+3+(-1)^n}{4}$$

تمرین‌ها و مسائل

۱) معادله‌ی زیر را در اعداد صحیح حل کنید:

$$6x+10y-15z=1$$

۲) فرض کنید a، b و c اعدادی طبیعی، متمایز و دو به دو نسبت به هم اولند. نشان دهید $2abc-ab-bc-ca$ بزرگ‌ترین عدد طبیعی است که نمی‌توان آن را به صورت $xbc+yca+xab$ نمایش داد، که x، y و z اعدادی صحیح و نامنفی‌اند.

(۲۴امین المپیاد جهانی ریاضیات)

۳) تعداد سه‌تایی‌های (x,y,z) از اعداد صحیح نامنفی را بیابید، به‌نحوی که

$$x+y+2z=n$$

۴) عدد طبیعی n را طوری بیابید که معادله‌ی

$$x+2y+z=n$$

دقیقاً ۱۰۰ جواب (x,y,z) در اعداد صحیح نامنفی داشته باشد.

۵) فرض کنید a، b، c و d اعدادی صحیح‌اند، به‌طوری که برای هر دو عدد صحیح m و n، اعداد صحیح x و y وجود دارند که $ax+by=m$ و $cx+dy=n$. ثابت کنید $ad-bc=\pm 1$.

(رقابت‌های ریاضی کورشاک)

۶) فرض کنید $n>3$ عددی طبیعی و X زیرمجموعه‌ای $3n^2$ عضوی از مجموعه‌ی $\{1,2,\ldots,n^3\}$ است. ثابت کنید ۹ عدد متمایز $a_1,a_2,\ldots,a_9$ در X وجود دارند، به‌نحوی که دستگاه معادلاتِ

$$\begin{cases} a_1x+a_2y+a_3z=0 \\ a_4x+a_5y+a_6z=0 \\ a_7x+a_8y+a_9z=0 \end{cases}$$

در اعداد صحیح مخالف صفر، حل‌شدنی است.

(المپیاد ریاضی رومانی)

۷) فرض کنید

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1q}x_q=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2q}x_q=0 \\ \qquad\vdots \\ a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+\cdots+a_{pq}x_q=0 \end{cases}$$

یک دستگاه معادلات خطی است، که $q=2p$ و $a_{ij}\in\{-1,0,1\}$. ثابت کنید جوابی از دستگاه مانند $(x_1,x_2,\ldots,x_q)$ با ویژگی‌های زیر وجود دارد:

i) برای هر $j=1,2,\ldots,q$، x_j عددی صحیح است؛

ii) اندیسِ jای وجود دارد که $x_j\neq 0$؛

iii) برای هر $j=1,2,\ldots,q$، $|x_j|\le q$.

(۱۸امین المپیاد جهانی ریاضیات)

۲.۲ سه‌تایی‌های فیثاغورثی و مسائل مربوط به آن‌ها

یکی از مهم‌ترین معادلات دیوفانتی، **معادله‌ی فیثاغورثی** است:

$$x^۲ + y^۲ = z^۲ \qquad (۸.۲.۲)$$

با توجه به مطالعه‌ای که فیثاغورث در مورد مثلث‌های قائم الزاویه‌ای که طول اضلاعشان اعدادی طبیعی است انجام داده، این معادله حتی برای بابلیان باستان نیز شناخته شده بود.

ابتدا توجه کنید که اگر سه‌تایی $(x_۰, y_۰, z_۰)$ از اعداد صحیح در معادله‌ی (۱.۲.۲) صدق کند، آن‌گاه سه‌تایی‌های به فرم $(kx_۰, ky_۰, kz_۰)$ نیز در معادله صدق می‌کنند $(k \in \mathbb{Z})$. به همین دلیل کافی است جواب‌هایی مانند (x, y, z) را بیابیم که $(x, y, z) = ۱$. این شرط، هم ارز است با این که اعداد x، y و z دو به دو نسبت به هم اول باشند.

جواب $(x_۰, y_۰, z_۰)$ از معادله‌ی (۱.۲.۲) را که در آن $x_۰$، $y_۰$ و $z_۰$ دو به دو نسبت به هم اولند، یک **جواب اولیه** می‌نامیم.

قضیه ۱.۲.۲ هر سه‌تایی اولیه‌ی (x, y, z) که در معادله‌ی (۱.۲.۲) صدق می‌کند، به فرم زیر است:

$$x = m^۲ - n^۲ , \quad y = ۲mn , \quad z = m^۲ + n^۲ \qquad (۹.۲.۲)$$

که m و n دو عدد طبیعی نسبت به هم اولند، زوجیت آن ها با هم متفاوت است و $m > n$.

اثبات. اعداد x و y نمی‌توانند هر دو فرد باشند، چرا که در این صورت:

$$z^۲ = x^۲ + y^۲ \overset{۴}{\equiv} ۲$$

که تناقض است. بنابراین دقیقاً یکی از اعداد x و y زوج است.

اتحادِ

$$(m^۲ - n^۲)^۲ + (۲mn)^۲ = (m^۲ + n^۲)^۲$$

نشان می‌دهد که سه‌تایی‌های رابطه‌ی (۲.۲.۲) جوابی از معادله‌ی (۱.۲.۲) اند و y عددی زوج است.

علاوه بر این، اگر $(x, y, z) = d \geq ۲$، آن‌گاه

$$d | ۲m^۲ = (m^۲ + n^۲) + (m^۲ - n^۲)$$

و نیز

$$d|2n^2 = (m^2 + n^2) - (m^2 - n^2)$$

از آنجایی که m و n نسبت به هم اولند، در نتیجه $d = 2$. بنابراین $m^2 + n^2$ باید عددی زوج باشد، که با متفاوت بودن زوجیت m و n در تناقض است. بنابراین $d = 1$ و جواب (۲.۲.۲)، یک جواب اولیه است.

برعکس، فرض کنید (x, y, z) جوابی اولیه برای معادله‌ی (۱.۲.۲) است و $2a = y$. در این صورت x و y فردند و نتیجتاً اعداد $z + x$ و $z - x$ زوجند. قرار می‌دهیم $z + x = 2b$ و $z - x = 2c$. حال می‌توان فرض کرد که b و c نسبت به هم اولند، چرا که در غیر این صورت z و x عامل مشترکی بزرگ‌تر از ۱ خواهند داشت. از طرفی داریم $4a^2 = y^2 = z^2 - x^2 = (z + x)(z - x) = 4ac$؛ یعنی $a^2 = bc$. با توجه به این که b و c نسبت به هم اولند، باید به‌ازای اعدادی طبیعی مانند m و n داشته باشیم $b = m^2$ و $c = n^2$. بنابراین:

$$x = b - c = m^2 - n^2\,, \quad y = 2mn\,, \quad z = b + c = m^2 + n^2 \qquad \square$$

هر سه‌تایی (x, y, z) به فرم (۲.۲.۲) را یک سه‌تایی فیثاغورثی می‌نامند. برای این که بتوانیم لیستی از سه‌تایی‌های اولیه‌ی معادله‌ی (۱.۲.۲) را به صورت قاعده‌مند تهیه کنیم، مقادیر ۲، ۳، ۴، ... را به عدد m به صورتی متوالی نسبت می‌دهیم و متناظر با هر یک از مقادیر m، به جای اعداد طبیعی کوچک‌تر از n را قرار می‌دهیم که نسبت به n اول باشند. ضمن این که هر وقت m عددی فرد بود، n را زوج انتخاب می‌کنیم.

در این‌جا جدولی از نخستین ۲۰ جواب اولیه را برحسب قاعده‌ی بالا آورده‌ایم:

m	n	x	y	z	مساحت
۲	۱	۳	۴	۵	۶
۳	۲	۵	۱۲	۱۳	۳۰
۴	۱	۱۵	۸	۱۷	۶۰
۴	۳	۷	۲۴	۲۵	۸۴
۵	۲	۲۱	۲۰	۲۹	۲۱۰
۵	۴	۹	۴۰	۴۱	۱۸۰
۶	۱	۳۵	۱۲	۳۷	۲۱۰
۶	۵	۱۱	۶۰	۶۱	۳۳۰
۷	۲	۴۵	۲۸	۵۳	۶۳۰
۷	۴	۳۳	۵۶	۶۵	۹۲۴

m	n	x	y	z	مساحت
۷	۶	۱۳	۸۴	۸۵	۵۴۶
۸	۱	۶۳	۱۶	۶۵	۵۰۴
۸	۳	۵۵	۴۸	۷۳	۱۳۲۰
۸	۵	۳۹	۸۰	۸۹	۱۵۶۰
۸	۷	۱۵	۱۱۲	۱۱۳	۸۴۰
۹	۲	۷۷	۳۶	۸۵	۱۳۸۶
۹	۴	۶۵	۷۲	۹۷	۲۳۴۰
۹	۸	۱۷	۱۴۴	۱۴۵	۱۲۲۴
۱۰	۱	۹۹	۲۰	۱۰۱	۹۹۰
۱۰	۳	۹۱	۶۰	۱۰۹	۲۷۳۰

نتیجه ۲.۲.۲ فرم کلی جواب‌های معادله‌ی (۱.۲.۲) به صورتِ

$$x = k(m^۲ - n^۲)\,, \quad y = ۲kmn\,, \quad z = k(m^۲ + n^۲) \qquad (۱۰.۲.۲)$$

است، که $k, m, n \in \mathbb{Z}$.

تعمیم بلافاصله‌ی معادله‌ی (۱.۲.۲) عبارتست از:

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = t^۲ \qquad (۱۱.۲.۲)$$

جواب‌های طبیعی (x, y, z, t) از معادله‌ی (۴.۲.۲) متناظر با ابعاد (طول یال‌ها) و طول قطر یک جعبه‌ی به شکل مکعب مستطیل‌اند. می‌خواهیم همه‌ی حالت‌هایی را پیدا کنیم که در آن‌ها، این اجزا اعدادی صحیح باشند.

قضیه ۳.۲.۲ همه‌ی جواب‌های معادله‌ی (۴.۲.۲) در اعداد طبیعی، با فرض زوج بودن y و z از رابطه‌ی

$$x = \frac{l^۲ + m^۲ - n^۲}{n}\,, \quad y = ۲l\,, \quad z = ۲m\,, \quad t = \frac{l^۲ + m^۲ + n^۲}{n} \qquad (۱۲.۲.۲)$$

به دست می آیند، که l و m اعدادی طبیعی و دلخواهند و n مقسوم‌علیه دلخواهی از $l^۲ + m^۲$ است که از $\sqrt{l^۲ + m^۲}$ کوچک‌تر است. ضمن این که هر جواب، دقیقاً یک بار طبق رابطه‌ی (۵.۲.۲) به دست می آید.

اثبات. اتحادِ

$$\left(\frac{l^۲ + m^۲ - n^۲}{n}\right)^۲ + (۲l)^۲ + (۲m)^۲ = \left(\frac{l^۲ + m^۲ + n^۲}{n}\right)^۲$$

نشان می‌دهد که چهارتایی رابطه‌ی (۵.۲.۲) جوابی از معادله‌ی (۴.۲.۲) است و y و z در آن زوجند.

برعکس، اگر (x, y, z, t) جوابی از این معادله باشد، حداقل دو تا از اعداد x، y و z باید زوج باشند، چرا که در غیر این صورت ۳ یا ۲ $\overset{۴}{\equiv} t^۲$ که غیرممکن است. فرض کنید $y = ۲l$ و $z = ۲m$، که l و m اعدادی طبیعی‌اند. با جایگذاری $t - x = u$ خواهیم داشت:

$$x^۲ + ۴l^۲ + ۴m^۲ = (x + u)^۲$$

و یا:

$$u^۲ = ۴(l^۲ + m^۲) - ۲ux$$

درنتیجه $u^۲$ عددی زوج است. بنابراین به‌ازای عددی طبیعی مانند n داریم $u = ۲n$ و نتیجتاً:

$$x = \frac{l^۲ + m^۲ - n^۲}{n}, \quad t = x + u = x + ۲n = \frac{l^۲ + m^۲ + n^۲}{n}$$

که n، m و l اعدادی طبیعی‌اند و n مقسوم علیهی از $l^۲ + m^۲$ است که از $\sqrt{l^۲ + m^۲}$ کوچک‌تر است.

حال به راحتی می‌توان دید که هر یک از جواب‌های (x, y, z, t) از معادله‌ی (۴.۲.۲) که y و z اعدادی زوج باشند، دقیقاً یک بار توسط روابط (۵.۲.۲) به دست می‌آیند؛ چرا که طبق رابطه‌ی (۵.۲.۲) داریم:

$$l = \frac{y}{۲}, \quad m = \frac{z}{۲}, \quad n = \frac{t - x}{۲}$$

بنابراین اعداد صحیح n، m و l به صورت یکتا از (x, y, z, t) به دست می‌آیند. □

قضیه‌ی ۳.۲.۲ تنها وجود جواب برای معادله‌ی (۴.۲.۲) را بیان نمی‌کند، بلکه روشی نیز برای پیدا کردن این جواب‌ها ارائه می‌کند. می‌توان نشان داد که برای جلوگیری از به وجود آمدن جواب‌هایی که جایگشتی از یک جواب دیگرند، کافی است زوج‌هایی از (l, m) را که $l < m$ حذف کرد و نیز تنها مقادیری از n را در نظر گرفت که برای x مقداری فرد به دست می‌آید. درنتیجه حالتی که در آن x، y، z و t همگی اعدادی زوجند نیز خود به خود حذف می‌شود.

در این‌جا ۱۰ جواب نخست معادله‌ی (۴.۲.۲) را که به این روش به دست می‌آیند، آورده‌ایم:

l	m	$l^۲ + m^۲$	n	x	y	z	t
۱	۱	۲	۱	۱	۲	۲	۳
۲	۲	۸	۱	۷	۴	۴	۹
۳	۱	۱۰	۱	۹	۶	۲	۱۱
۳	۱	۱۰	۲	۳	۶	۲	۷
۳	۳	۱۸	۱	۱۷	۶	۶	۱۹
۳	۳	۱۸	۲	۷	۶	۶	۱۱
۳	۳	۱۸	۳	۳	۶	۶	۹
۴	۲	۲۰	۱	۱۹	۸	۴	۲۱
۴	۲	۲۰	۴	۱	۸	۴	۹
۴	۴	۳۲	۱	۳۱	۸	۸	۳۳

ملاحظات. ۱) بی‌نهایت جواب از معادله‌ی (۴.۲.۲) را می‌توان به فرم زیر به دست آورد:

$$x = l^۲ + m^۲ - n^۲, \quad y = ۲ln, \quad z = ۲mn, \quad t = l^۲ + m^۲ + n^۲$$

که n، m و l اعدادی صحیح‌اند.

توجه داشته باشید که در این فرم، ممکن است بعضی جواب‌ها از این روابط به دست نیایند. ضمن این که این فرم جواب‌ها، کاملاً شبیه جواب‌های معادله‌ی (۱.۲.۲) است.

۲) معاله‌ی

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 = x_{k+1}^2$$

تعمیم معادلات (۱.۲.۲) و (۴.۲.۲) است. از دید هندسی، جواب‌های $(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1})$ متناظر با ابعاد (طول یال‌ها) $x_1, x_2, \ldots, x_k$ از یک مکعب مستطیل در فضای $\mathbb{R}^k$ و طول قطر x_{k+1} اند. بی‌نهایت جواب صحیح برای معادله‌ی (٦.۲.۲) از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
x_1 &= m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_{k-1}^2 - m_k^2 \\
x_2 &= 2m_1m_k \\
&\vdots \\
x_k &= 2m_{k-1}m_k \\
x_{k+1} &= m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_{k-1}^2 + m_k^2
\end{aligned}$$

که $m_1, m_2, \ldots, m_k$ اعدادی صحیح و دلخواهند. البته ممکن است بعضی از جواب‌ها به دست نیایند.

مثال ۴.۲ (معادله‌ی فیثاغورثی «منفی») معادله‌ی زیر را در اعداد طبیعی حل کنید:

$$x^{-2} + y^{-2} = z^{-2} \qquad (۱۳.۲.۲)$$

حل: معادله‌ی داده شده، هم ارز است با:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{xy}{z}\right)^2$$

بنابراین $z|xy$ و نیز $x^2 + y^2$ مربع کامل است. لذا $x^2 + y^2 = t^2$، $(t \in \mathbb{N})$، و معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$t = \frac{xy}{z} \qquad (۱۴.۲.۲)$$

فرض کنید $d = (x, y, t)$. در این صورت $x = ad$، $y = bd$ و $t = cd$، که a، b و c اعدادی طبیعی‌اند و $(a, b, c) = ۱$. به این ترتیب معادله‌ی (۸.۲.۲) به صورتِ

$$z = \frac{abd}{c} \qquad (۱۵.۲.۲)$$

در می‌آید. در ضمن با توجه به انتخاب t داریم:

$$a^۲ + b^۲ = c^۲ \qquad (۱٦.۲.۲)$$

بنابراین a، b و c دو به دو نسبت به هم اولند. پس با توجه به رابطه‌ی (۹.۲.۲) باید داشته باشیم $c|d$؛ یعنی $d = kc$، که $k \in \mathbb{N}$. در نتیجه:

$$x = ad = kac\,, \quad y = bd = kbc\,, \quad t = cd = kc^۲\,, \quad z = kab$$

که $k, m, n \in \mathbb{N}$ و نیز $m > n$.

مثال ۵.۲ ثابت کنید هیچ دو عدد طبیعی وجود ندارند، به‌نحوی که مجموع و تفاضل مربعات آن‌ها، اعدادی مربع کامل شوند.

حل: مسئله، هم ارز است با این که نشان دهیم دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ = z^۲ \\ x^۲ - y^۲ = w^۲ \end{cases} \qquad (۱۷.۲.۲)$$

در اعداد طبیعی حل‌شدنی نیست.

فرض کنید دستگاه (۱۱.۲.۲) در اعداد طبیعی حل‌شدنی است (برهان خلف). در بین جواب‌ها، زوج (x, y) را طوری انتخاب می‌کنیم که $x^۲ + y^۲$ کمترین مقدار ممکن باشد. واضح است که $(x, y) = ۱$. با جمع بستن دو معادله‌ی دستگاه، داریم:

$$۲x^۲ = z^۲ + w^۲ \qquad (۱۸.۲.۲)$$

بنابراین زوجیت z و w یکسان است و لذا $z + w$ و $z - w$ هر دو اعدادی زوجند. معادله‌ی (۱۲.۱.۲) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^۲ = \left(\frac{z+w}{۲}\right)^۲ - \left(\frac{z-w}{۲}\right)^۲$$

علاوه بر این، $(x, \frac{z+w}{۲}, \frac{z-w}{۲}) = ۱$؛ چرا که اگر

$$\left(x, \frac{z+w}{۲}, \frac{z-w}{۲}\right) = d \geq ۲$$

آن‌گاه $d|x$ و $d|z$ و $d\,|\,(x, \frac{z+w}{۲}, \frac{z-w}{۲}) =$. حال از معادله‌ی اول دستگاه (۱۱.۲.۲) نتیجه می‌گیریم $d|y$، که متناقض با رابطه‌ی $(x,y) = ۱$ است.

طبق قضیه‌ی ۱.۲.۲ باید داشته باشیم:

$$\frac{z-w}{۲} = m^۲ - n^۲\,, \quad \frac{z+w}{۲} = ۲mn$$

و یا

$$\frac{z-w}{۲} = ۲mn\,, \quad \frac{z+w}{۲} = m^۲ - n^۲$$

از آنجایی که $z^۲ - w^۲ = ۲y^۲$، در هر دو حالت داریم

$$۲y^۲ = ۲(m^۲ - n^۲) \cdot ۴mn$$

بنابراین

$$y^۲ = ۴mn(m^۲ - n^۲)$$

در نتیجه $y = ۲k$، $(k \in \mathbb{N})$، و نیز

$$k^۲ = mn(m+n)(m-n) \qquad (۱۹.۲.۲)$$

با توجه به این که m و n نسبت به هم اولند، اعداد m، n، $m+n$ و $m-n$ نیز دو به دو نسبت به هم اولند. لذا از رابطه‌ی (۱۳.۲.۲) نتیجه می‌گیریم که به‌ازای اعدادی طبیعی مانند a، b، c و d داریم $m = a^۲$، $n = b^۲$، $m+n = c^۲$ و $m-n = d^۲$. اما در این صورت $a^۲ + b^۲ = c^۲$ و $a^۲ - b^۲ = d^۲$؛ یعنی (a,b,c,d) نیز جوابی از دستگاه (۱۱.۲.۲) است. در ضمن

$$a^۲ + b^۲ = m + n < ۴mn(m^۲ - n^۲) = y^۲ < x^۲ + y^۲$$

اما این رابطه متناقض با حداقل بودن $x^۲ + y^۲$ است.

مثال ۶.۲ معادله‌ی زیر را در اعداد طبیعی حل کنید:

$$x^۲ + y^۲ = ۱۹۹۷(x-y)$$

(المپیاد ریاضی بلغارستان)

حل: جواب‌های معادله عبارتند از:

$$(x,y) = (۱۷۰, ۱۴۵) \quad \text{یا} \quad (۱۸۲۷, ۱۴۵)$$

داریم:

$$x^۲ + y^۲ = ۱۹۹۷(x - y)$$
$$(x + y)^۲ + ((x - y)^۲ - ۲ \times ۱۹۹۷(x - y)) = ۰$$
$$(x + y)^۲ + (۱۹۹۷ - x + y)^۲ = ۱۹۹۷^۲$$

از آنجایی که x و y دو عدد طبیعی‌اند، بنابراین $۰ < x + y < ۱۹۹۷$ و $۰ < ۱۹۹۷ - x + y < ۱۹۹۷$. لذا برای حل مسئله، می‌بایست معادله‌ی $a^۲ + b^۲ = ۱۹۹۷^۲$ را در اعداد طبیعی حل کنیم. می‌دانیم ۱۹۹۷ عددی اول است، در نتیجه $(a, b) = ۱$. با توجه به جواب‌های معادله‌ی فیثاغورثی، اعداد طبیعی $m > n$، که $(m, n) = ۱$ وجود دارند، به‌نحوی که:

$$۱۹۹۷ = m^۲ + n^۲ , \quad a = ۲mn , \quad b = m^۲ - n^۲$$

با توجه به این که $m^۲, n^۲ \overset{۵}{\equiv} ۰, ۱, -۱$ و $۱۹۹۷ \overset{۵}{\equiv} ۲$، بنابراین $m, n \overset{۵}{\equiv} \pm ۱$. در ضمن $m^۲, n^۲ \overset{۳}{\equiv} ۰, ۱$ و $۱۹۹۷ \overset{۳}{\equiv} ۲$، درنتیجه $m, n \overset{۳}{\equiv} ۱, -۱$. لذا $m, n \overset{۱۵}{\equiv} ۱, ۴, ۱۱, ۱۴$. از آنجایی که $m > n$، بنابراین $\frac{۱۹۹۷}{۲} \leq m^۲ \leq ۱۹۹۷$. پس تنها کافی است مقادیر $m = ۳۴, ۴۱, ۴۴$ را امتحان می‌کنیم. در بین این مقادیر، تنها جواب $(m, n) = (۳۴, ۲۹)$ به دست می‌آید. بنابراین:

$$(a, b) = (۱۹۷۲, ۳۱۵)$$

متناظر با این مقادیر a و b، جواب‌های معادله‌ی اصلی به دست می‌آیند.

تمرین‌ها و مسائل

۱) ثابت کنید دستگاه معادلاتِ

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ = u^۲ \\ x^۲ + ۲y^۲ = v^۲ \end{cases}$$

در اعداد طبیعی حل‌شدنی نیست.

۲) فرض کنید m و n دو عدد طبیعی متمایزند. نشان دهید هیچ یک از اعداد

$$۲(m^۴ + n^۴) \quad \text{و} \quad m^۴ + ٦m^۲n^۲ + n^۴$$

مربع کامل نیستند.

۳) ثابت کنید معادله‌ی $x^{2}y^{2} = z^{2}(z^{2} - x^{2} - y^{2})$ جوابی در اعداد طبیعی ندارد.

(المپیاد ریاضی بلغارستان)

۴) همه‌ی مثلث‌های فیثاغورثی را بیابید که مقدار عددی محیط و مساحت آن‌ها با هم برابر باشد.

۵) ثابت کنید هیچ مثلث فیثاغورثی وجود ندارد که مساحت آن مربع کامل باشد.

۶) نشان دهید تعداد مثلث‌های اولیه‌ی فیثاغورثی که شعاع دایره‌ی محاطی آن‌ها برابر عدد مفروض r باشد، توانی از ۲ است.

۳.۲ معادلات قابل توجه دیگر

۱.۳.۲ معادلات دیوفانتی درجه‌ی دوم و مسائل مربوط به آن‌ها

این بخش را با بررسی معادله‌ی دیوفانتی

$$x^{2} + axy + y^{2} = z^{2}\,; \quad a \in \mathbb{Z} \qquad (۲۰.۳.۲)$$

شروع می‌کنیم. معادله‌ی فیثاغورثی، حالت خاصی از این معادله است. $(a = 0)$.

قضیه ۱.۳.۲ همه‌ی جواب‌های صحیح معادله‌ی (۱.۳.۲) از روابط زیر به دست می آیند.

$$\begin{cases} x = k(m^{2} - n^{2}) \\ y = k(an^{2} - 2mn) \\ z = k(amn - m^{2} - n^{2}) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = k(an^{2} - 2mn) \\ y = k(m^{2} - n^{2}) \\ z = k(amn - m^{2} - n^{2}) \end{cases} \qquad (۲۱.۳.۲)$$

که $k, m, n \in \mathbb{Z}$.

اثبات. توجه داشته باشید که دو دسته جواب فوق نسبت به x و y متقارن‌اند.

به راحتی می‌توان بررسی کرد که سه‌تایی‌های (x, y, z) در روابط (۲.۳.۲) در معادله‌ی (۱.۳.۲) صدق می‌کنند.

از طرف دیگر می‌بایست نشان دهیم که همه‌ی جواب‌های معادله (۱.۳.۲) به فرم (۲.۳.۲)اند. برای این منظور، ابتدا توجه کنید که معادله‌ی (۱.۳.۲) هم ارز است با:

$$x(x + ay) = (z - y)(z + y) \qquad (۲۲.۳.۲)$$

در حالت خاص $z=y$، داریم $x=0$ یا $x+ay=0$، که این جواب به فرم جواب‌های (۲.۳.۲) است (چرا؟). در بقیه‌ی حالات، معادله‌ی (۳.۳.۲) معادل است با:

$$\frac{x}{z-y}=\frac{z+y}{x+ay}=\frac{m}{n}$$

که m و n دو عدد صحیح و مخالف صفرند. این رابطه، منجر به دستگاه معادلاتِ

$$\begin{cases} mx+ny-nz=0 \\ nx+(n-am)y-mz=0 \end{cases}$$

می‌رسد که جواب‌های آن عبارتند از:

$$x=\frac{an^2-2mn}{amn-m^2-n^2}\cdot z\,,\qquad y=\frac{m^2-n^2}{amn-m^2-n^2}\cdot z$$

با انتخاب $z=k(amn-m^2-n^2)$، به جواب‌های (۲.۳.۲) می‌رسیم. □

ملاحظات. ۱) در واقع قضیه‌ی ۱.۳.۲ معادله‌ی دیوفانتی درجه‌ی سوم

$$x^2+xyw+y^2=z^2 \tag{۲۳.۳.۲}$$

را نیز حل می‌کند. برای پیدا کردن جواب‌های عمومی (x,y,z,w) از این معادله کافی است قرار دهیم $w=a$، $(a\in\mathbb{Z})$، و x، y و z را از رابطه‌ی (۲.۳.۲) به دست آوریم.

۲) با روش مشابهی می‌توان نشان داد که جواب‌های معادله‌ی

$$x^2+axy+by^2=z^2 \tag{۲۴.۳.۲}$$

از رابطه‌ی

$$\begin{cases} x=k(m^2-bn^2) \\ y=k(an^2-2mn) \\ z=k(amn-m^2-bn^2) \end{cases} \tag{۲۵.۳.۲}$$

به دست می‌آیند، که $k,m,n\in\mathbb{Z}$.

۳) با استفاده از ملاحظه‌ی فوق می‌توان معادله‌ی دیوفانتی

$$x^2+uxy+vy^2=z^2$$

را حل کرد. جواب‌های این معادله به فرم (x,y,z,u,v) اند، که $u=a$، $v=b$، $(a,b\in\mathbb{Z})$، و x، y و z از رابطه‌ی (۲۵.۳.۲) به دست می‌آیند.

۴) جواب‌های طبیعی معادله‌ی (۱.۳.۲) را می‌توان به فرم زیر نمایش داد:

$$\left\{\begin{array}{l} x=k(m^{۲}-n^{۲}) \\ y=k(۲mn+an^{۲}) \\ z=k|m^{۲}+amn+n^{۲}| \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x=k(۲mn+an^{۲}) \\ y=k(m^{۲}-n^{۲}) \\ z=k|m^{۲}+amn+n^{۲}| \end{array}\right. \tag{۲۶.۳.۲}$$

که $k,m,n\in\mathbb{N}_{\circ}$، $۲m+an>\circ$ و $m>n$.

هنگامی که با یک معادله‌ی فیثاغورثی مواجه می‌شویم، به جز حالت $a=\circ$، دو حالت زیر نیز جالب توجه‌اند:

حالت اول: $a=۱$، در این صورت معادله‌ی (۱.۳.۲) به صورتِ

$$x^{۲}+xy+y^{۲}=z^{۲} \tag{۲۷.۳.۲}$$

در می‌آید. با توجه به روابط (۷.۳.۲) جواب‌های طبیعی معادله عبارتند از:

$$\left\{\begin{array}{l} x=k(m^{۲}-n^{۲}) \\ y=k(۲mn+n^{۲}) \\ z=k(m^{۲}+mn+n^{۲}) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x=k(۲mn+n^{۲}) \\ y=k(m^{۲}-n^{۲}) \\ z=k(m^{۲}+mn+n^{۲}) \end{array}\right. \tag{۲۸.۳.۲}$$

که $k,m,n\in\mathbb{N}_{\circ}$ و $m>n$.

جواب‌های (۹.۳.۲) همه‌ی سه‌تایی‌های (x,y,z) از اعداد طبیعی را تولید می‌کنند که این سه‌تایی‌ها طول اضلاع مثلث‌هایی‌اند که زاویه‌ی روبرو به ضلع z برابر $۱۲\circ^{\circ}$ است.

حالت دوم: $a=-۱$. در این حالت معادله‌ی (۱.۳.۲) به فرم

$$x^{۲}-xy+y^{۲}=z^{۲} \tag{۲۹.۳.۲}$$

در می‌آید که جواب‌های طبیعی آن عبارتند از:

$$\left\{\begin{array}{l} x=k(m^{۲}-n^{۲}) \\ y=k(۲mn-n^{۲}) \\ z=k(m^{۲}-mn+n^{۲}) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x=k(۲mn-n^{۲}) \\ y=k(m^{۲}-n^{۲}) \\ z=k(m^{۲}-mn+n^{۲}) \end{array}\right. \tag{۳\circ.۳.۲}$$

که $k,m,n\in\mathbb{N}_{\circ}$ و $m>n$.

جواب‌های معادله‌ی (۱۱.۳.۲) همه‌ی سه‌تایی‌های (x,y,z) از اعداد طبیعی را مشخص می‌کند که این سه‌تایی‌ها طول اضلاع مثلث‌هایی‌اند که زاویه‌ی روبرو به ضلع z برابر $٦\circ^{\circ}$ است.

مثال ۷.۲ همه‌ی سه‌تایی‌های (x,y,z) از اعداد طبیعی را بیابید، به‌نحوی که:

$$x^{۲}+xy+y^{۲}=۴۹^{۲}$$

حل: با توجه به فرم عمومی جواب‌های (۹.۳.۲)، مسئله به این صورت درمی‌آید که همه‌ی اعداد طبیعی k، m و n، که $m > n$، را بیابیم، به‌طوری که

$$k(m^۲ + mn + n^۲) = ۴۹$$

در جدول زیر، همه‌ی زوج‌های (m, n) که در نابرابری $m^۲ + mn + n^۲ < ۴۹$ صدق می‌کنند و $m > n$، آورده شده است:

m	n	$m^۲ + mn + n^۲$
۲	۱	۷
۳	۱	۱۳
۴	۱	۲۱
۵	۱	۳۱
۶	۱	۴۳
۳	۲	۱۹
۴	۲	۲۸
۵	۲	۳۹
۴	۳	۳۷
۵	۳	۴۹

اگر $k = ۱$، با توجه به جدول فوق، رابطه‌ی $m^۲ + mn + n^۲ = ۴۹$ تنها زمانی برقرار می‌شود که داشته باشیم $m = ۵$ و $n = ۳$. در این حالت جواب‌های $(x, y) = (۳۹, ۱۶)$ و $(x, y) = (۱۶, ۳۹)$ به دست می‌آید.

اما اگر $k = ۷$، در نتیجه $m^۲ + mn + n^۲ = ۷$ و متعاقباً $m = ۲$ و $n = ۱$. در این حالت جواب‌های $(x, y) = (۳۵, ۲۱)$ و $(x, y) = (۲۱, ۳۵)$ به دست می‌آید.

در مورد معادله‌های (۸.۳.۲) و (۱۰.۳.۲) طبیعتاً این سوال به ذهن می‌رسد که چه موقع جواب‌های x و y از این معادلات، اعدادی مربع کاملند. در ادامه درباره‌ی این موضوع بحث خواهیم کرد.

قضیه ۲.۳.۲ همه‌ی جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی

$$x^۴ + x^۲y^۲ + y^۴ = z^۲ \qquad (۳۱.۳.۲)$$

عبارتند از $(x, y, z) = (k, ۰, k^۲)$ و $(x, y, z) = (۰, k, k^۲)$، که k عددی صحیح و نامنفی است.

اثبات. به وضوح می‌توان فرض کرد $(x, y) = ۱$. بنابراین زوجیت x و y با هم متفاوت است، چرا که در غیر این صورت داریم $z^۲ \overset{۴}{\equiv} ۳$. فرض کنید y عددی فرد و کمترین مقدار ممکن

(در بین yهای جواب‌های این معادله) است. معادله را به صورت هم ارزِ

$$۴x^{۲} - (۲x^{۲} + y^{۲})^{۲} = ۳y^{۴} \qquad (۳۲.۳.۲)$$

می‌نویسیم. در نتیجه $(۲z + ۲x^{۲} + y^{۲})(۲z - ۲x^{۲} - y^{۲}) = ۳y^{۴}$.

اگر $x = (۲z + ۲x^{۲} + y^{۲}, ۲z - ۲x^{۲} - y^{۲})$، آن‌گاه d عددی فرد است. همچنین $d|z$ و $d|۲x^{۲} + y^{۲}$. از معادله‌ی (۱۳.۳.۲) نتیجه می‌گیریم $d|۳y$. حال اگر $d < ۳$، آن‌گاه $d|y$ و نتیجتاً $d|۲x^{۲}$؛ یعنی $(x, y) > ۱$ که تناقض است. اما اگر $d = ۳$، در نتیجه $۳|z$. از طرفی از معادله‌ی (۱۳.۳.۲) نتیجه می‌گیریم $۳|۲x^{۲} + y^{۲}$ و نتیجتاً $۳|y$. لذا $۳|x$ و بنابراین $(x, y) \geq ۳$ که باز هم تناقض است.

در نتیجه یکی از دو حالت زیر پیش می‌آید:

$$۲z + ۲x^{۲} + y^{۲} = a^{۴}\ , \quad ۲z - ۲x^{۲} - y^{۲} = ۳b^{۴}\ , \quad y = ab$$

یا

$$۲z + ۲x^{۲} + y^{۲} = ۳a^{۴}\ , \quad ۲z - ۲x^{۲} - y^{۲} = b^{۴}\ , \quad y = ab$$

که a و b هر دو اعدادی طبیعی و فرداند.

در حالت نخست داریم:

$$۴x^{۲} = a^{۴} - ۲a^{۲}b^{۲} - ۳b^{۴} \overset{۱۶}{\equiv} -۴$$

که غیرممکن است.

در حالت دوم نیز داریم:

$$۴x^{۲} = ۳a^{۴} - ۲a^{۲}b^{۲} - b^{۴} = (a^{۲} - b^{۲})(۳a^{۲} + b^{۲})$$

از آنجایی که a و b هر دو اعدادی فردند، بنابراین به‌ازای اعدادی طبیعی مانند c و d باید داشته باشیم $a^{۲} - b^{۲} = c^{۲}$ و $۳a^{۲} + b^{۲} = ۴d^{۲}$. در نتیجه $a = p^{۲} + q^{۲}$، $b = p^{۲} - q^{۲}$، که $p, q \in \mathbb{N}$. لذا:

$$p^{۴} + p^{۲}q^{۲} + q^{۴} = d^{۲}$$

اما این معادله با حداقل بودن y در تناقض است.

پس $y = ۱$، $a = b = ۱$ و $z = ۰$، که این مقادیر منجر به جواب $(۱, ۱, ۰)$ می‌شوند. با توجه به تقارن معادله نسبت به x و y، جواب $(۱, ۰, ۱)$ نیز قابل قبول است و از این‌جا نتیجه‌ی مورد نظر حاصل می‌شود. □

مثال ۸.۲ دستگاه معادلات زیر را در مجموعه‌ی اعداد طبیعی حل کنید.

$$\begin{cases} ۳u^۲ + v^۲ = ۴s^۲ \\ u^۲ + ۳v^۲ = ۴t^۲ \end{cases}$$

حل: با جایگذاری $u = x + y$ و $v = x - y$، به دستگاه معادلات هم ارز زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} x^۲ + xy + y^۲ = s^۲ \\ x^۲ - xy + y^۲ = t^۲ \end{cases}$$

با ضرب این دو معادله، خواهیم داشت

$$x^۴ + x^۲y^۲ + y^۴ = (st)^۲$$

حال از قضیه‌ی ۲.۳.۲ نتیجه می‌گیریم

$$(x, y, st) = (\circ, k, k^۲) \quad \text{یا} \quad (x, y, st) = (k, \circ, k^۲)$$

به این ترتیب جواب‌های معادله عبارتند از:

$$(u, v, s, t) = (k, k, k, k)\ ; \quad k \in \mathbb{N}$$

قضیه ۳.۳.۲ همه‌ی جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی

$$x^۴ - x^۲y^۲ + y^۴ = z^۲ \qquad (۳۳.۳.۲)$$

عبارتند از $(x, y, z) = (k, \circ, k^۲), (\circ, k, k^۲), (k, k, k^۲)$، که $k \in \mathbb{N}_\circ$.

اثبات: فرض می‌کنیم $(x, y) = ۱$ و xy کمترین مقدار ممکن است. معادله را به صورتِ

$$(x^۲ - y^۲)^۲ + (xy)^۲ = z^۲$$

می‌نویسیم. ابتدا فرض می‌کنیم x و y هر دو فرد نیستند. بنابراین:

$$x^۲ - y^۲ = a^۲ - b^۲\ , \quad xy = ۲ab$$

که $a, b \in \mathbb{N}$ و $(a, b) = ۱$. قرار می‌دهیم $d_۱ = (x, b)$ و $d_۲ = (y, a)$. داریم:

$$x = d_۱X\ , \quad b = d_۱B\ , \quad y = d_۲Y\ , \quad a = d_۲A\ , \quad xy = ۲AB$$

از آنجایی که $(Y, A) = ۱$ و $(X, B) = ۱$، نتیجه می‌گیریم:

$$x = ۲A\ , \quad y = B \quad \text{یا} \quad x = A\ , \quad y = ۲B$$

در نتیجه

$$x = 2d_1A\,, \quad b = d_1A\,, \quad y = d_2B\,, \quad a = d_2A$$

و یا

$$x = s_1A\,, \quad b = d_1B\,, \quad y = 2d_2B\,, \quad a = d_2A$$

در حالت اول داریم

$$4d_1^2A^2 - d_2^2B^2 = d_2^2A^2 - d_1^2B^2$$

یعنی

$$d_1^2(4A^2 + B^2) = d_2^2(A^2 + B^2) \qquad (۳۴.۳.۲)$$

از شرط $(a,b) = 1$، نتیجه می‌گیریم $(A,B) = 1$. حال فرض کنید

$$(4A^2 + B^2, A^2 + B^2) = D$$

در این صورت:

$$D|4A^2 + B^2 - A^2 - B^2 = 3A^2$$

بنابراین با توجه به این که $A^2 + B^2 \overset{3}{\not\equiv} 0$، نتیجه می‌گیریم $(3,D) = 1$. پس $D|A^2$ و $D|A^2 + B^2 - A^2 = B^2$. به این ترتیب با توجه به این که $(A,B) = 1$، خواهیم داشت $D = 1$. لذا از معادله‌ی (۱۵.۳.۲) نتیجه می‌گیریم:

$$A^2 + B^2 = C^2 \quad \text{و} \quad 4A^2 + B^2 = D^2 \qquad (۳۵.۳.۲)$$

که D و C اعدادی طبیعی‌اند.

همچنین می‌توانیم فرض کنیم B نیز عددی فرد است، چرا که اگر B زوج باشد، قرار می‌دهیم $B = 2B_1$. به این ترتیب به زوج مشابهی از معادلات (۱٦.۳.۲) می‌رسیم. حال از معادله‌ی دوم (۱٦.۳.۲) داریم $B = p^2 - q^2$، $A = pq$ و نتیجتاً $p^4 - p^2q^2 + q^4 = C^2$. در ضمن $pq \le a \le \frac{xy}{2}$. پس روش نزول نامتناهی را در مورد این معادله می‌توان اجرا کرد (توجه کنید که p و q نیز هر دو اعدادی فرد نیستند). در نهایت نتیجه می‌گیریم $xy = 0$ و از این‌جا جواب‌های $(k,0,k^2)$ و $(0,k,k^2)$ به دست می‌آیند ($k \in \mathbb{N}_0$).

در حالت دوم نیز داریم

$$d_1^2A - 4d_2^2B = d_2^2A^2 - d_1^2B^2$$

بنابراین

$$d_1^2(A^2+B^2)=d_2^2(A^2+4B^2)$$

در نتیجه $A=p^2-q^2$، $B=pq$ و $pq\le b\le \frac{xy}{2}$. به این ترتیب باز هم می‌توان روش نزول نامتناهی را اجرا کرد.

حال فرض کنید x و y هر دو فردند. در این صورت:

$$xy=a^2-b^2\ ,\quad x^2-y^2=2ab\ ;\quad (a,b)=1$$

لذا a و b هر دو اعدادی فرد نیستند و داریم:

$$a^4-a^2b^2+b^4=\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2$$

بنابراین $ab=0$ و $x=y$؛ به این ترتیب جواب (k,k,k^2) به دست می‌آید $(k\in\mathbb{N}_0)$. □

مثال ۹.۲ ثابت کنید چهار عدد مربع کامل متمایز نمی‌توانند تشکیل یک تصاعد حسابی دهند.

حل: فرض کنید این چهار مربع کامل، اعداد $a^2<b^2<c^2<d^2$ اند. در این صورت:

$$a^2+c^2=2b^2\ ,\quad b^2+d^2=2c^2$$

بدون از دست دادن کلیت مسئله می‌توان فرض کرد a، b، c و d همگی اعدادی فردند. داریم:

$$a^2(2c^2-b^2)=d^2(2b^2-c^2)$$

در نتیجه:

$$2(a^2c^2-b^2d^2)=a^2b^2-c^2d^2$$

با جایگذاری $x=ac$، $y=bd$، $ab+cd=2z$ و $ab-cd=2w$ نتیجه می‌گیریم:

$$x^2-y^2=2zw \quad \text{و} \quad xy=z^2-w^2$$

و یا به صورت معادل،

$$x^4-x^2y^2+y^4=(z^2+w^2)^2$$

حال از قضیه‌ی ۳.۳.۲ نتیجه می‌گیریم $xy=0$ یا $x=y$. حالت اول غیرممکن است. همچنین در حالت دوم باید داشته باشیم $w=0$ و بنابراین $ab=cd$ که با فرض $a<b<c<d$ در تناقض است.

۲.۳.۲ معادلات دیوفانتی مرتبه‌های بالاتر

قضیه ۴.۳.۲ معادله‌ی

$$x^4 + y^4 = z^2 \qquad (۳۶.۳.۲)$$

در مجموعه‌ی اعداد صحیح مخالف صفر، حل‌شدنی نیست.

اثبات. کافی است تنها حالتی را در نظر بگیریم که x، y و z اعدادی مثبت‌اند. فرض کنید معادله‌ی (۱۷.۳.۲) حل‌شدنی است و (x_1, y_1, z_1) جوابی از این معادله است که z_1 در آن کمترین مقدار ممکن است. با فرض این که $(x_1, y_1, z_1) = 1$ و توجه به این نکته که (x_1^2, y_1^2, z_1) یک سه‌تایی فیثاغورثی است، نتیجه می‌گیریم:

$$(x_1, y_1) = (x_1, z_1) = (y_1, z_1) = 1$$

در ضمن زوجیت x_1 و y_1 متفاوت است. فرض می‌کنیم x_1 عددی فرد و y_1 عددی زوج است. توجه کنید که

$$(z_1 - x_1^2, z_1 + x_1^2) = 2 \qquad (۳۷.۳.۲)$$

در واقع اگر $d|z_1 - x_1^2$ و $d|z_1 + x_1^2$، آن‌گاه $d|2z_1$ و $d|2x_1^2$. اما می‌دانیم $(z_1, x_1) = 1$ و z_1 عددی فرد است. بنابراین $d = 2$. حال از آنجایی که $y_1^4 = (z_1 - x_1^2)(z_1 + x_1^2)$، در نتیجه یکی از اعداد $z_1 - x_1^2$ و $z_1 + x_1^2$ بر ۲ بخش‌پذیر است ولی بر ۴ بخش‌پذیر نیست و عدد دیگر بر ۸ بخش‌پذیر است. لذا $y_1 = 2ab$ و

$$z_1 - x_1^2 = 2a^4\ , \quad z_1 + x_1^2 = 8b^4 \qquad (۳۸.۳.۲)$$

یا

$$z_1 - x_1^2 = 8a^4\ , \quad z_1 + x_1^2 = 2b^4 \qquad (۳۹.۳.۲)$$

که در هر دو حالت، a عددی فرد است و $(a, b) = 1$.

حالت (۱۹.۳.۲) امکان پذیر نیست، چرا که در این حالت تساوی $x_1^2 = -a^2 + 4b^4$ منجر به رابطه‌ی $-1 \overset{4}{\equiv} 1$ می‌شود، که غیرممکن است. در نتیجه حالت دوم اتفاق می‌افتد؛ یعنی $z_1 = a^4 + 4b^4$، که $0 < a < z_1$ و نیز:

$$4b^4 = (a^2 - x_1)(a^2 + x_1)$$

با توجه به این که $(a,b) = 1$، داریم $(a,x_1) = 1$ و در ضمن همان‌طور که در اثبات رابطه‌ی (۱۸.۳.۲) دیدیم، باید داشته باشیم $(a^2 - x_1, a^2 + x_1) = 2$. بنابراین

$$a^2 - x_1 = 2x_2^4 \quad \text{و} \quad a^2 + x_1 = 2y_2^4$$

که $b = y_1 y_2$، با جایگذاری $a = z_2$ نتیجه می‌گیریم

$$x_2^4 + y_2^4 = z_2^2$$

حال توجه کنید که $z_1 > z_2 > 0$؛ که متناقض با حداقل بودن z_1 است. به این ترتیب معادله‌ی (۱۷.۳.۲) جواب ندارد. □

نتیجه ۵.۳.۲ معادله‌ی

$$x^4 + y^4 = z^4 \tag{۴۰.۳.۲}$$

در اعداد صحیح مخالف صفر، حل‌شدنی نیست.

بررسی معادله‌ی

$$x^3 + y^3 = z^3 \tag{۴۱.۳.۲}$$

بسیار پیچیده‌تر است و اولین بار این کار توسط اویلر انجام شد.

فرض کنید m و a اعدادی صحیح‌اند، به‌نحوی که $m \neq 0$ و $(a,m) = 1$. می‌گوییم a یک مانده‌ی درجه‌ی دوم به پیمانه‌ی m است، هرگاه معادله‌ی همنهشتی $x^2 \overset{m}{\equiv} a$ جواب داشته باشد. اگر $p > 2$ عددی اول باشد و $(a,p) = 1$، نماد لژاندر $(\frac{a}{p})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1; & \text{اگر } a \text{ یک مانده‌ی درجه دوم باشد} \\ -1; & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

نتیجه‌ی زیر که منسوب به اویلر است، در ادامه‌ی بحثمان به کار خواهد آمد.

اگر $p > 2$ عددی اول باشد و $(a,p) = 1$، آنگاه

$$a^{\frac{p-1}{2}} \overset{p}{\equiv} \left(\frac{a}{p}\right)$$

قضیه ۶.۳.۲ فرض کنید n عددی طبیعی است. در این صورت معادله‌ی دیوفانتیِ

$$x^2 + 3y^2 = n$$

در اعداد صحیح، حل‌شدنی است اگر و فقط اگر توان‌های هر یک از عوامل اولی از n که به فرم $3k - 1$ اند، اعدادی زوج باشند.

اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم که عدد اول p را می‌توان به فرم $p = x^2 + 3y^2$ نوشت، اگر و فقط اگر $p = 3$ و یا $p = 3k + 1$، که $k \in \mathbb{N}$. می‌دانیم $0^2 + 3 \times 1^2 = 3$. حال فرض کنید $p > 3$ و $p = x^2 + 3y^2$. در این صورت $(x,p) = 1$ و $(y,p) = 1$. در نتیجه عدد صحیحی مانند y' وجود دارد که $yy' \overset{p}{\equiv} 1$. حال از رابطه‌ی همنهشتی $x^2 \overset{p}{\equiv} -3y^2$ نتیجه می‌گیریم $(xy')^2 \overset{p}{\equiv} -3$. اما $(xy', 3) = 1$، بنابراین $(\frac{-3}{p}) = 1$ و یا به صورت معادل: [8]

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{3}{p}\right) = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

با توجه به قوانین تقابل مربعی داریم:

$$\left(\frac{3}{p}\right)\left(\frac{p}{3}\right) = (-1)^{\frac{3-1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

از آنجایی که $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = (\frac{3}{p})$، بنابراین $(\frac{p}{3}) = 1$؛ یعنی $p \overset{3}{\equiv} 1$.

برعکس، اگر p عددی اول به فرم $3k + 1$ باشد، آن‌گاه عدد صحیحی مانند a وجود دارد که $a^2 \overset{p}{\equiv} -3$. علاوه بر این نشان می‌دهیم اعداد طبیعی x و y وجود دارند، به‌نحوی که $0 < x, y < \sqrt{p}$ و $p | a^2x^2 - y^2$. برای این منظور می‌دانیم $(a,p) = 1$. حال اگر قرار دهیم $b = \lfloor \sqrt{p} \rfloor$، آن‌گاه $(b+1)^2 > p$. پس $(b+1)^2$ تا زوج $(u,v) \in \{0, 1, \ldots, b\} \times \{0, 1, \ldots, b\}$ و نتیجتاً $(b+1)^2$ تا عدد به فرم $au + v$ وجود دارد $(0 \leq u, v \leq b)$. بنابراین دو زوج $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$ وجود دارند، به‌نحوی که $au_1 + v_1 \overset{p}{\equiv} au_2 + v_2$. فرض کنید $u_1 \geq u_2$، $x = u_1 - u_2$ و $y = |v_1 - v_2|$. در نتیجه $0 < x, y \leq b < \sqrt{p}$ و $ax \pm y \overset{p}{\equiv} 0$ (یکی از علامت‌های + و − قابل قبولند). لذا $a^2x^2 - y^2 \overset{p}{\equiv} 0$. در ادامه توجه کنید که

$$p | (a^2 + 3)x^2 - (3x^2 + y^2)$$

---

[8] اگر p و q دو عدد اول فرد و متمایز باشند، روابط زیر برقرارند:
(i) $(\frac{-1}{p}) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$؛ (ii) $(\frac{2}{p}) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$؛ (iii) $(\frac{p}{q})(\frac{q}{p}) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$. مترجم

یعنی $lp = ۳x^۲ + y^۲$، که $l \in \mathbb{N}$. با توجه به نابرابری‌های $p > x^۲ > ۰$ و $p > y^۲ > ۰$ باید داشته باشیم $l \in \{۱, ۲, ۳\}$.

اگر $l = ۱$، داریم $p = ۳x^۲ + y^۲$.

اگر $l = ۲$، تساوی $۲p = ۳x^۲ + y^۲$ امکان پذیر نیست، چرا که در این حالت زوجیت x و y یکسان است و نتیجتاً $۲p \overset{۴}{\equiv} ۰$، که تناقض است.

اگر $l = ۳$، داریم $۳p = ۳x^۲ + y^۲$. بنابراین $y = ۳y_۱$ و $p = x^۲ + ۳y_۱^۲$.

اکنون توجه کنید که اگر $p \geq ۳$ عددی اول به فرم $۳k - ۱$ باشد و $p | x^۲ + ۳y^۲$، آن‌گاه $p|x$ و $p|y$. چرا که اگر $p \not| x$، آن‌گاه $(p, x) = ۱$. لذا عددی صحیح مانند y' وجود دارد که $yy' \overset{p}{\equiv} ۱$. از طرفی طبق رابطه‌ی $x^۲ \overset{p}{\equiv} -۳y^۲$ نتیجه می‌گیریم $(xy')^۲ \overset{p}{\equiv} -۳$؛ یعنی $\left(\frac{-۳}{p}\right) = ۱$ و $p \overset{۳}{\equiv} ۱$، که تناقض است.

برای اثبات قضیه‌ی ۶.۳.۲ فرض کنید $n = a^۲b$، که b عددی طبیعی و خالی از مربع است. لذا $b = \prod_{i=۱}^{m} p_i$، که $p_i = ۳$ یا $p_i \overset{۳}{\equiv} ۱$. بنابراین $p_i = x_i^۲ + ۳y_i^۲$. در ضمن می‌توان عدد $b = p_۱p_۲ \dots p_m$ را نیز به فرم $x^۲ + ۳y^۲$ نمایش داد؛ برای این منظور، کافی است توجه کنید که اگر $n_۱ = x_۱^۲ + ۳y_۱^۲$ و $n_۲ = x_۲^۲ + ۳y_۲^۲$، در این صورت:

$$n_۱n_۲ = (x_۱x_۲ + ۳y_۱y_۲)^۲ + ۳(x_۱y_۲ - x_۲y_۱)^۲$$

در نهایت نتیجه می‌گیریم $n = a^۲b = (ax)^۲ + ۳(ay)^۲$. □

لم ۷.۳.۲ معادله‌ی دیوفانتی

$$x^۲ + ۳y^۲ = z^۳ \qquad (۴۲.۳.۲)$$

دارای جوابی مانند $(x_۰, y_۰, z_۰)$ است که در آن $z_۰$ فرد است و $(x_۰, y_۰) = ۱$، اگر و فقط اگر اعداد صحیحی مانند α و β وجود داشته باشند، به‌نحوی که $\beta \overset{۲}{\not\equiv} \alpha$، $(\alpha, ۳\beta) = ۱$ و

$$x_۰ = \alpha(\alpha^۲ - ۹\beta^۲)\,, \quad y_۰ = ۳\beta(\alpha^۲ - \beta^۲)\,, \quad z_۰ = \alpha^۲ + ۳\beta^۲$$

اثبات. ابتدا فرض کنید $(x_۰, y_۰, z_۰)$ یک سه‌تایی از اعداد صحیح است که در شرایط بالا صدق می‌کند. از اتحادِ

$$\alpha^۲(\alpha^۲ - ۹\beta^۲)^۲ + ۳(۳\beta(\alpha^۲ - \beta^۲))^۲ = (\alpha^۲ + ۳\beta^۲)^۳$$

نتیجه می‌گیریم $(x_۰, y_۰, z_۰)$ جوابی از معادله‌ی (۲۳.۳.۲) است.

در ضمن از آنجایی که $\beta \overset{۲}{\not\equiv} \alpha$، بنابراین $z_۰$ عددی فرد است. همچنین از این که $(\alpha, ۳\beta) = ۱$، نتیجه می‌گیریم:

$$(\alpha, ۳(\alpha^۲ - \beta^۲)) = (\alpha, \alpha^۲ - \beta^۲) = (\alpha, \beta^۲) = ۱ ,$$
$$(\alpha^۲ - ۹\beta^۲, ۳\beta) = (\alpha^۲, ۳\beta) = ۱$$

حال با توجه به این که $\beta \overset{۲}{\not\equiv} \alpha$، خواهیم داشت

$$(\alpha^۲ - ۹\beta^۲, \alpha^۲ - \beta^۲) = (-۸\beta^۲, \alpha^۲ - \beta^۲)$$
$$= (\beta^۲, \alpha^۲ - \beta^۲) = (\beta^۲, \alpha^۲) = ۱$$

برای اثبات عکس این مطلب، روی تعداد عوامل اول $z_۰$ استقرا می‌زنیم. $(x_۰, y_۰, z_۰)$ را جوابی از معادله‌ی (۲۳.۳.۲) در نظر می‌گیریم که در آن $z_۰$ عددی فرد است و نیز $(x_۰, y_۰) = ۱$.

اگر $z_۰ = ۱$، داریم $x_۰ = \pm ۱$، $y_۰ = ۰$ و $\alpha = \pm ۱$، $\beta = ۰$. حال $z_۰ > ۱$ را در نظر بگیرید و فرض کنید p عامل اولی از $z_۰$ است. بنابراین $z_۰ = pt$، که p و t اعدادی فردند. از معادله‌ی

$$(pt)^۳ = x_۰^۲ + ۳y_۰^۲$$

و با توجه به این که $(x_۰, y_۰) = ۱$، طبق نتیجه‌ی قضیه‌ی ۶.۳.۲ خواهیم داشت $p = ۶k + ۱$؛ و ضمناً اعداد صحیحی مانند $\alpha_۱$ و $\beta_۱$ وجود دارند، به‌نحوی که:

$$p = \alpha_۱^۲ + ۳\beta_۱^۲$$

از آنجایی که p عددی اول است و $p = ۶k + ۱$، نتیجه می‌گیریم $(\alpha_۱, ۳\beta_۱) = ۱$ و $\beta_۱ \overset{۲}{\not\equiv} \alpha_۱$.

با توجه به فرم p، می‌توان $p^۳$ را به صورت $p^۳ = a^۲ + ۳b^۲$ نمایش داد، که

$$a = \alpha_۱(\alpha_۱^۲ - ۹\beta_۱^۲) , \quad b = ۳\beta_۱(\alpha_۱^۲ - \beta_۱^۲)$$

به راحتی می‌توان نشان داد که $b \overset{۲}{\not\equiv} a$ و $(a, ۳b) = ۱$. داریم:

$$p^۶t^۳ = p^۳z_۰^۳ = (a^۲ + ۳b^۲)(x_۰^۲ + ۳y_۰^۲) = (ax_۰ + ۳by_۰)^۲ + ۳(bx_۰ - ay_۰)^۲$$
$$= (ax_۰ - ۳by_۰)^۲ + ۳(bx_۰ + ay_۰)^۲$$

در ضمن توجه کنید که

$$(bx_\circ + ay_\circ)(bx_\circ - ay_\circ) = b^{\text{۲}}x_\circ^{\text{۲}} - a^{\text{۲}}y_\circ^{\text{۲}} = b^{\text{۲}}x_\circ^{\text{۲}} - (p^{\text{۳}} - \text{۳}b^{\text{۲}})y_\circ^{\text{۲}}$$
$$= b^{\text{۲}}(x_\circ^{\text{۲}} + \text{۳}y_\circ^{\text{۲}}) - p^{\text{۳}}y_\circ^{\text{۲}} = b^{\text{۲}}z_\circ^{\text{۳}} - p^{\text{۳}}y_\circ^{\text{۲}} = b^{\text{۲}}p^{\text{۳}}t^{\text{۳}} - p^{\text{۳}}y_\circ^{\text{۲}}$$

بنابراین $p^{\text{۳}}|(bx_\circ + ay_\circ)(bx_\circ - ay_\circ)$. می‌دانیم $(abx_\circ y_\circ, p) = \text{۱}$؛ لذا $bx_\circ + ay_\circ$ و $bx_\circ - ay_\circ$ همزمان نمی‌توانند بر p بخش‌پذیر باشند، در نتیجه عدد $\varepsilon \in \{-\text{۱}, \text{۱}\}$ وجود دارد، به‌نحوی که $bx_\circ - \varepsilon ay_\circ = p^{\text{۳}}d$. بنابراین $ax_\circ + \text{۳}\varepsilon by_\circ = p^{\text{۳}}c$ و $t^{\text{۳}} = c^{\text{۲}} + \text{۳}d^{\text{۲}}$. نتیجتاً:

$$x_\circ = ac + \text{۳}db\ , \qquad y_\circ = \varepsilon(bc - ad)$$

حال اگر $z_\circ$ از ضرب n عامل اول تشکیل شده باشد، با توجه به این که $z_\circ = pt$ نتیجه می‌گیریم t از ضرب $n - \text{۱}$ عامل اول تشکیل شده است. همچنین از رابطه‌ی $(x_\circ, y_\circ) = \text{۱}$ می‌توان نشان داد $(c, d) = \text{۱}$. از آنجایی که t عددی فرد است، در فرض استقرا به‌ازای $n - \text{۱}$ صدق می‌کند. لذا اعداد صحیحی مانند $\alpha_{\text{۲}}$ و $\beta_{\text{۲}}$ وجود دارند، به‌نحوی که $\alpha_{\text{۲}} \overset{\text{۲}}{\not\equiv} \beta_{\text{۲}}$، $(\alpha_{\text{۱}}, \text{۳}\beta_{\text{۲}}) = \text{۱}$ و

$$c = \alpha_{\text{۲}}(\alpha_{\text{۲}}^{\text{۲}} - \text{۹}\beta_{\text{۲}}^{\text{۲}})\ , \qquad d = \text{۳}\beta_{\text{۲}}(\alpha_{\text{۲}}^{\text{۲}} - \beta_{\text{۲}}^{\text{۲}})\ , \qquad t = \alpha_{\text{۲}}^{\text{۲}} + \text{۳}\beta_{\text{۲}}^{\text{۲}}$$

قرار می‌دهیم

$$\alpha = \alpha_{\text{۱}}\alpha_{\text{۲}} + \text{۳}\beta_{\text{۱}}\beta_{\text{۲}}\ , \qquad \beta = \varepsilon(\alpha_{\text{۲}}\beta_{\text{۱}} - \alpha_{\text{۱}}\beta_{\text{۲}})$$

در نتیجه $z_\circ = \alpha^{\text{۲}} + \text{۳}\beta^{\text{۲}}$ و نیز:

$$x_\circ = \alpha(\alpha_{\text{۲}}^{\text{۲}} - \text{۹}\beta_{\text{۲}}^{\text{۲}})\ , \qquad y_\circ = \text{۳}\beta(\alpha_{\text{۲}}^{\text{۲}} - \beta_{\text{۲}}^{\text{۲}})$$

در نهایت داریم:

$$\alpha - \beta \overset{\text{۲}}{\equiv} \alpha_{\text{۱}}\alpha_{\text{۲}} + \beta_{\text{۱}}\beta_{\text{۲}} - (\alpha_{\text{۱}}\beta_{\text{۲}} + \alpha_{\text{۲}}\beta_{\text{۱}}) \overset{\text{۲}}{\equiv} (\alpha_{\text{۱}} - \beta_{\text{۱}})(\alpha_{\text{۲}} - \beta_{\text{۲}}) \Rightarrow \alpha \overset{\text{۲}}{\not\equiv} \beta$$

همچنین از رابطه‌ی $(x_\circ, y_\circ) = \text{۱}$ نتیجه می‌گیریم $(\alpha, \text{۳}\beta) = \text{۱}$. □

قضیه ۸.۳.۲ معادله‌ی (۲۲.۳.۲) در اعداد صحیح مخالف صفر، حل‌شدنی نیست.

اثبات. فرض کنید معادله‌ی (۲۲.۳.۲) حل‌شدنی است (برهان خلف) و $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ جوابی از معادله است که $x_\circ y_\circ z_\circ \neq \circ$ و $|x_\circ, y_\circ, z_\circ|$ کمترین مقدار ممکن است.

واضح است که دو تا از اعداد صحیح x_0، y_0 و z_0 فردند. فرض کنید x_0 و y_0 این دو عددند. قرار می‌دهیم:

$$x_0 + y_0 = 2u \quad \text{و} \quad x_0 - y_0 = 2v$$

در نتیجه $x_0 = u + v$ و $y_0 = u - v$. به این ترتیب معادله‌ی (۲۲.۳.۲) به صورت زیر درمی‌آید:

$$2u(u^2 + 3v^2) = z_0^3 \qquad (۴۳.۳.۲)$$

از آنجایی که x_0 عددی فرد است، زوجیت u و v با هم متفاوت است؛ یعنی $u^2 + 3v^2$ عددی فرد است. همچنین با توجه به این که $(x_0, y_0) = 1$ نتیجه می‌گیریم $(u, v) = 1$ و نیز:

$$(2u, u^2 + 2v^2) = (u, u^2 + 3v^2) = (u, 3v^2) = (u, 3)$$

پس دو حالت پیش می‌آید:

حالت اول: $(u, 3) = 1$. در این صورت از معادله‌ی (۲۴.۳.۲) نتیجه می‌گیریم:

$$2u = t^3 , \quad u^2 + 3v^2 = s^3 , \quad ts = z_0$$

طبق لم ۷.۳.۲ می‌توان گفت که اعداد صحیح α و β وجود دارند، به‌طوری که $(\alpha, 3\beta) = 1$، $\alpha \not\equiv \beta$ و نیز:

$$s = \alpha^2 + 3\beta^2 , \quad u = \alpha(\alpha^2 - 9\beta^2) , \quad v = 3\beta(\alpha^2 - \beta^2)$$

بنابراین $2u = t^3 = (2\alpha)(\alpha - 3\beta)(\alpha + 3\beta)$. اعداد 2α، $\alpha - 3\beta$ و $\alpha + 3\beta$ دو به دو نسبت به هم اولند. در نتیجه:

$$2\alpha = Z^3 , \quad \alpha - 3\beta = X^3 , \quad \alpha + 3\beta = Y^3$$

و لذا:

$$X^3 + Y^3 = Z^3 ; \quad XYZ \neq 0$$

در واقع (X, Y, Z) نیز جوابی صحیح و مخالف صفر از معادله‌ی (۲۲.۳.۲) است. از طرفی داریم:

$$|XYZ| = \sqrt[3]{|2\alpha(\alpha^2 - 9\beta^2)|} = \sqrt[3]{2u} = \sqrt[3]{x_0 + y_0} < |\sqrt[3]{x_0 y_0}| < |x_0 y_0 z_0|$$

که این رابطه با حداقل بودن $|x_\circ y_\circ z_\circ|$ در تناقض است.

حالت دوم: $(u,۳) = ۳$. در این صورت قرار می‌دهیم $u = ۳u_۱$. در ضمن از معادله‌ی (۲۴.۳.۲) داریم $z_\circ = ۳z_۱$. همچنین:

$$۲u_۱(۳u_۱^۲ + v^۲) = ۳z_۱^۲ \qquad (۴۴.۳.۲)$$

با توجه به این که $(u,v) = ۱$، نتیجه می‌گیریم $(v,۳) = ۱$ و $(۳u_۱^۲ + v^۲, ۳) = ۱$. حال از معادله‌ی (۲۵.۳.۲) داریم $u_۱ = ۳u_۲$، که $u_۲ \in \mathbb{Z}$ و نتیجتاً $۲u_۲(۳u_۱^۲ + v^۲) = z_۱^۲$.

از آنجایی که $(۲u_۲, ۳u_۱^۲ + v^۲) = ۱$، نتیجه می‌گیریم

$$۲u_۲ = m^۳ \quad \text{و} \quad ۳u_۱^۲ + v^۲ = n^۳$$

که n عددی صحیح و فرد است.

طبق لم ۷.۳.۲ اعداد صحیحی مانند α و β وجود دارند، به‌نحوی که $(\alpha, ۳\beta) = ۱$، $\alpha \stackrel{۲}{\not\equiv} \beta$ و نیز:

$$v = \alpha(\alpha^۲ - ۹\beta^۲)\,, \quad u_۱ = ۳\beta(\alpha^۲ - \beta^۲)$$

بنابراین $u_۲ = \beta(\alpha^۲ - \beta^۲)$ و $m^۳ = ۲\beta(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$.

می‌دانیم ۲β، $\alpha - \beta$ و $\alpha + \beta$ دو به دو نسبت به هم اولند، پس $\alpha - \beta = X^۳$، $\alpha + \beta = Z^۳$ و $۲\beta = Y^۳$، که X، Y و Z اعدادی صحیح‌اند. در نتیجه:

$$X^۳ + Y^۳ = Z^۳$$

از طرفی:

$$|XYZ| = \sqrt[۳]{|۲\beta(\alpha^۲ - \beta^۲)|} = |\sqrt[۳]{۲u}| = |\sqrt[۳]{x_\circ + y_\circ}| < |x_\circ y_\circ z_\circ|$$

اما نتیجه‌ی فوق، با حداقل بودن $|x_\circ y_\circ z_\circ|$ در تناقض است. □

ملاحظات. ۱) معادلات (۲۱.۳.۲) و (۲۲.۳.۲) حالت‌های خاصی از معادله‌ی فرما، یعنی

$$x^n + y^n = z^n \qquad (۴۵.۳.۲)$$

اند، که n عددی طبیعی و بزرگ‌تر از ۲ است و نیز x، y و z اعدادی صحیح و مخالف صفرند.

قضیه‌ی آخر فرما بیان می‌کند که معادله‌ی (۲۶.۳.۲) در حالت $n > ۲$ جوابی در اعداد صحیح مخالف صفر برای x، y و z ندارد.

در حدود سال ۱٦۳۰، فرما یادداشتی را در حاشیه‌ی یکی از صفحات کتاب «حساب دیوفانتی» نوشت که به این صورت بود:

«من برای این قضیه، اثبات بدیع و قابل ملاحظه‌ای پیدا کرده‌ام که در حاشیه‌ی این صفحه نمی‌گنجد.»

اثبات فرما هرگز یافت نشد، اما قضیه‌ی او شهرت یافت و توجه ریاضی‌دانان جهان را به خود جلب کرد.

طی سال‌های بعد، بسیاری از ریاضی‌دانان بزرگ روی حالت‌های خاص این قضیه کار کردند و توانستند اثبات‌های کاملی نیز ارائه کنند؛ که از آن جمله اویلر[۹] ($n = ۳$)، سوفی گرمین[۱۰] (حالتی که n و $۲n + ۱$ اعدادی اول باشند، $n < ۱۰۰$ و x، y و z بر n بخش‌پذیر نباشند)، دیریکله[۱۱] ($n = ۵$ و $n = ۱۴$)، لام[۱۲] ($n = ۷$) می‌باشند. لیوویل[۱۳] و کومر[۱۴] نیز در مسیر اثبات این قضیه، توانستند به نتایج و قضایای مهمی دست پیدا کنند.

در سال ۱۹۹۳ به وسیله‌ی تکنیکی که کومر از آن استفاده کرد، قضیه‌ی آخر فرما به کمک کامپیوترها برای n های کوچک‌تر از ۴۰۰۰۰۰۰ ثابت شد.

در سال ۱۹۸۳، گرد فالتینگز[۱۵] توانست کمک بزرگی به حل این قضیه کند. او ثابت کرد که برای هر $n > ۲$، تعداد جواب‌های معادله‌ی (۲٦.۳.۲) که نسبت به هم اولند، متناهی است.

فصل پایانی این داستان، در سال ۱۹۵۵، شروع شد؛ هر چند در این مرحله، کاری که انجام شد به نظر نمی‌رسید ارتباطی به قضیه‌ی آخر فرما داشته باشد. در این سال یاکوتا تانیاما[۱٦] سوالاتی درباره‌ی خم‌های بیضوی مطرح کرد؛ یعنی خم‌هایی به فرم $y^۲ = x^۳ + ax + b$ (a و b اعدادی ثابت‌اند). ویل[۱۷] و شیمورا[۱۸] با کار بیش‌تر روی این خم‌ها توانستند حدسی را مطرح کنند که به حدس شیمورا ـ تانیاما ـ ویل شهرت دارد. در سال ۱۹۸٦ فری[۱۹] توانست ارتباطی میان قضیه‌ی آخر فرما و حدس شیمورا ـ تانیاما ـ ویل برقرار کند. او نشان داد که قضیه‌ی آخر فرما عملاً بی ارتباط با تلاش‌های نه چندان مهمی

---

[۹] Euler
[۱۰] Sophie Germain
[۱۱] Dirichlet
[۱۲] Lamé
[۱۳] Liouville
[۱۴] Kummer
[۱۵] Gred Faltings
[۱٦] Yakuta Taniyama
[۱۷] Weil
[۱۸] Shimura
[۱۹] Frey

بود که تاکنون انجام شده بود و در حقیقت این قضیه، به ویژگی‌های بنیادین فضا ارتباط دارد. تلاش‌های ریاضی‌دانان دیگر ثابت کرد که هر مثال نقضی برای قضیه‌ی آخر فرما، منجر به مثال نقضی برای حدس شیمورا ـ تانیاما ـ ویل می‌شود. در نهایت اثبات قضیه‌ی آخر فرما در سال ۱۹۹۳ توسط آندره وایلز[۲۰] ریاضی‌دان انگلیسی که در پرینستون آمریکا فعالیت می‌کرد، کامل شد. وایلز سه سخنرانی برای اثبات این قضیه، در انجمن ایزاک نیوتن در کامبریج انگلستان انجام داد که اولین آن‌ها را در دوشنبه، ۲۱ ژوئن، سپس ۲۲ ژوئن و در نهایت سخنرانی آخر را در چهارشنبه ۲۳ ژوئن ۱۹۹۳ در حدود ساعت ۱۰:۳۰ صبح ایراد کرد. وایلز اعلام کرد که اثبات قضیه‌ی آخر فرما، از نتایج مهم او ناشی می‌شود. در حالی که قضیه‌ی فرما روی تخته سیاه نوشته شود بود، او در انتهای سخنرانی‌اش گفت: «من اثبات را همین جا متوقف می‌کنم و می‌نشینم». وایلز در سخنرانی‌اش حدس شیمورا ـ تانیاما ـ ویل را با دسته‌ای از مثال‌ها ثابت کرده بود؛ مثال‌هایی که برای اثبات قضیه‌ی فرما لازم بودند. اما به هر حال این پایان کار نبود. در ۴ دسامبر سال ۱۹۹۳، آندره وایلز مطلب زیر را اعلام کرد:

«نکته‌ی کلیدی تبدیل حالت‌های حدس تانیاما ـ شیمورا به محاسبات گروه سلمر[۲۱] کاملاً درست است. اما به هر حال، محاسبه‌ی نهایی کران بالایی دقیق برای گروه سلمر در حالت نیم ـ مربع (از نمایش مربع متقارن متناظر با یک فرم قدر مطلقی) هنوز کامل نشده است. من اعتقاد دارم که خواهم توانست این کار را در آینده‌ی نزدیک با استفاده از ایده‌هایی که در سخنرانی‌هایم در کمبریج ارائه کردم، به پایان ببرم.»

در ابتدای سال ۱۹۹۴، وایلز با همکاری ریچارد تیلور[۲۲] سعی کردند خلأهای موجود در اثبات را برطرف کنند. اما آن‌ها به این نتیجه رسیدند که یکی از گام‌های کلیدی در اثبات، که در آن از روش‌هایی منسوب به فلچ[۲۳] استفاده می‌شود، با شکست مواجه می‌شود. در نتیجه آن‌ها رویکردی جدید را برای اثبات شروع کردند، که البته توفیق چندانی در آن حاصل نشد. در آگوست سال ۱۹۹۴ وایلز یک سخنرانی در کنگره‌ی بین المللی ریاضیات انجام داد، ولی باز هم نتوانست به حل پیچیدگی‌های به وجود آمده، نزدیک شود. تیلور از وایلز خواست که برای بار آخر روی تعمیم روش فلچ تلاش کند. وایلز اگر چه متقاعد شده بود که این روش کارساز نیست، ولی برای اینکه ناکارآمدی این روش را به تیلور نشان دهد، تصمیم گرفت یک بار دیگر روی این مطلب فکر کند. او تقریباً دو هفته روی این موضوع فکر کرد تا این که ناگهان مطلبی به او الهام شد:

---

[۲۰] Andrew Wiles

[۲۱] Selmer

[۲۲] Richard Taylor

[۲۳] Flach

«در یک لحظه من مشاهده کردم که چیزی که من اثباتم را در آن‌جا متوقف کرده بودم [تعمیم روش فلچ] اگر کار کند، همان چیزی خواهد بود که می‌تواند با روشی دیگر، کار قبلی من را تکمیل کند.»

در ٦ اکتبر سال ۱۹۹۴، وایلز اثبات جدیدی به سه دانشگاه که فالتینگز در آن فعالیت می‌کرد، فرستاد. در نهایت، همه این اثبات را که اساساً ساده‌تر از اثبات قبلی بود، پذیرفتند.

پییر دِ فرما[۲۴] در سال ۱٦٦۵ درگذشت. امروزه ما فرما را به عنوان یکی از دانشمندان علم نظریه‌ی اعداد می‌شناسیم. در واقع شاید او مشهورترین دانشمند نظریه‌ی اعدادی است که تاکنون می‌زیسته است. بنابراین جالب است بدانید که فرما در حقیقت یک حقوقدان و نیز فقط یک ریاضی‌دان آماتور بوده است. همچنین عجیب است که او فقط یک مقاله‌ی ریاضی در زندگی‌اش نوشته است و این مقاله هم که به عنوان ضمیمه‌ای از یک کتاب دانشگاهی بوده، بی‌نام است.

۲) اویلر حدس زد که معادله‌ی

$$x^n + y^n + z^n = w^n \qquad (۴٦.۳.۲)$$

در حالتی که n عددی طبیعی و بزرگ‌تر از ۳ است، جواب طبیعی ندارد.

در سال ۱۹۸۸، نوام الکایس[۲۵] مثال نقض زیر را ارائه کرد:

$$۲٦۸۲۴۴۰^۴ + ۱۵۳٦۵٦۳۹^۴ + ۱۸۷۹٦۷٦۰^۴ = ۲۰٦۱۵٦۷۳^۴$$

پیرو او، روگر فرای[۲٦] (۱۹۸۸) توانست کوچک‌ترین جواب معادله‌ی (۲۷.۳.۲) را پیدا کند:

$$۹۵۸۰۰^۴ + ۲۱۷۵۱۹^۴ + ۴۱۴۵٦۰^۴ = ۴۲۲۴۸۱^۴$$

مثال ۲.۱۰ معادله‌ی

$$x^۴ - y^۴ = z^۲ \qquad (۴۷.۳.۲)$$

در اعداد صحیح مخالف صفر، حل‌شدنی نیست.

حل: می‌توان فرض کرد $x, y, z > ۰$. جواب (x, y, z) را طوری در نظر می‌گیریم که $(x, y) = ۱$ و نیز x کمترین مقدار ممکن باشد. در این صورت $(y^۲, z, x^۲)$ یک سه‌تایی اولیه‌ی فیثاغورثی است. در نتیجه دو حالت پیش می‌آید:

[۲۴] Pierre de Fermat
[۲۵] Noam Elkies
[۲٦] Roger Frye

$x^۲ = a^۲ + b^۲$ ،$z = ۲ab$ ،$y^۲ = a^۲ - b^۲$ (۱°
که $a > b > ۰$ و $(a,b) = ۱$. در این حالت داریم

$$a^۴ - b^۴ = (xy)^۲$$

اما این معادله با حداقل بودن x در تناقض است، چرا که $a < x$.
$x^۲ = a^۲ + b^۲$ ،$z = a^۲ - b^۲$ ،$y^۲ = ۲ab$ (۲°
که $a > b > ۰$ و $(a,b) = ۱$. از آنجایی که (a,b,x) نیز یک سه‌تایی فیثاغورثی اولیه است، می‌توانیم فرض کنیم a زوج و b فرد است. در این صورت به‌ازای اعدادی طبیعی مانند p و q و $q \overset{۲}{\equiv} ۱$ داریم $a = ۲p^۲$ و $b = q^۲$. در نتیجه

$$x^۲ = ۴p^۲ + q^۴ \,, \quad y = ۲pq$$

پس $(۲p^۲, q^۲, x)$ نیز خودش یک سه‌تایی فیثاغورثی اولیه است. لذا:

$$p^۲ = rs \,, \quad q^۲ = r^۲ - s^۲$$

که r و s اعدادی طبیعی‌اند، $r > s$ و $(r,s) = ۱$.

در نهایت با توجه به تساوی $p^۲ = rs$، اعداد طبیعی v و u وجود دارند، به‌طوری که $(u,v) = ۱$، $r = u^۲$ و $s = v^۲$. بنابراین:

$$u^۴ - v^۴ = q^۲$$

در ضمن $u = \sqrt{r} \leq p < ۲p^۲ < x$ که متناقض با حداقل بودن x است. □

اثبات دیگر: معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(x^۲ - y^۲)(x^۲ + y^۲) = z^۲$$

به راحتی می‌توان نشان داد:

$$(x^۲ - y^۲, x^۲ + y^۲) = ۱ \text{ یا } ۲$$

در حالت اول به معادلات زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ = u^۲ \\ x^۲ - y^۲ = v^۲ \end{cases}$$

اما این معادله با توجه به مثال ۲ فصل ۲.۲ جواب ندارد.

در حالت دوم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8r^2 \\ x^2 + y^2 = 2s^2 \end{cases}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} s^2 + (2r)^2 = x^2 \\ s^2 - (2r)^2 = y^2 \end{cases}$$

در نتیجه، به همان دلیل قبل، این معادله باز هم جواب ندارد. □

مثال ۱۱.۲ معادله‌ی زیر را در اعداد صحیح حل کنید:

$$x^4 + y^4 = 2z^2$$

حل: بدون از دست دادن کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $(x, y) = 1$. در این صورت x و y اعدادی فردند و نیز:

$$z^4 - (xy)^4 = \left(\frac{x^2 - y^2}{2}\right)^2$$

حال از مثال ۴ نتیجه می‌گیریم $xyz = 0$ و یا $x^4 - y^4 = 0$. لذا $x = y = z = 0$ و یا $x^2 = y^2 = z$.

به این ترتیب جواب‌های معادله به فرم (k, k, k^2) اند، که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال ۱۲.۲ معادله‌ی زیر را در اعداد صحیح حل کنید:

$$x^4 + 6x^2y^2 + y^2 = z^2$$

حل: فرض کنید (x, y, z) جوابی از معادله است. در این صورت:

$$(2x)^4 + 6(2x)^2(2y)^2 + (2y)^4 = (4z)^2$$

با جایگذاری $2x = u + v$ و $2y = u - v$، $(u, v \in \mathbb{Z})$، به معادله‌ی

$$(u+v)^4 + 6(u^2 - v^2)^2 + (u - v)^4 = 16z^2$$

می‌رسیم، که این معادله هم ارز است با:

$$u^4 + v^4 = 2z^2$$

حال از مثال قبل نتیجه می‌گیریم $(u, v, z) = (k, k, k^2)$، که منجر به جواب‌های $(x, y, z) = (k, 0, k^2)$ و $(x, y, z) = (0, k, k^2)$ می‌شود. $(k \in \mathbb{Z})$

ملاحظه. نمونه‌ی این سوال در قسمت دوم مسئله‌ی ۲ از فصل ۲.۲ داده شده است.

تمرین‌ها و مسائل

۱) ثابت کنید معادله‌ی

$$x^۲ + xy + y^۲ = ۳٦^۲$$

در اعداد طبیعی حل‌شدنی نیست.

۲) همه‌ی زوج‌های (x, y) از اعداد طبیعی را بیابید، به‌نحوی که

$$x^۲ - xy + y^۲ = ۷۲۹$$

(المپیاد ریاضی ترکیه)

۳) عدد طبیعی z را دارای ویژگی (P) می‌نامیم هرگاه به‌ازای اعدادی طبیعی و متمایز مانند x و y داشته باشیم $z = x^۲ + xy + y^۲$. ثابت کنید:

الف) اگر z دارای ویژگی P باشد، $z^۲$ نیز دارای این ویژگی است.

ب) اگر $z^۲$ دارای ویژگی P باشد و $(x, y) = ۱$، آن‌گاه z نیز دارای ویژگی P است.

(دورین آندریا)

۴) معادله‌ی زیر را در اعداد صحیح حل کنید:

$$x^۲ + ۳y^۲ = ۴z^۲$$

۵) همه‌ی سه‌تایی‌های (x, y, z) از اعداد صحیح نامنفی را بیابید که در معادله‌ی $x^۴ + ۱۴x^۲y^۲ + y^۴ = z^۲$ صدق کنند.

٦) همه‌ی جواب‌های طبیعی معادله‌ی زیر را به دست آورید:

$$۳x^۴ + ۱۰x^۲y^۲ + ۳y^۴ = z^۲$$

۷) همه‌ی اعداد $a^۲$، $b^۲$ و $c^۲$ از مربع کامل‌های متمایز را بیابید، به‌نحوی که این اعداد تشکیل یک تصاعد حسابی دهند.

۸) معادله‌ی زیر را در اعداد صحیح حل کنید:

$$xy(x^۲ + y^۲) = ۲z^۲$$

(تیتو آندرسکو)

۹) همه‌ی سه‌تایی‌های (x, y, z) از اعداد صحیح را بیابید، به‌طوری که:

$$x^{4} - 6x^{2}y^{2} + y^{4} = z^{2}$$

۱۰) نشان دهید اگر a و b دو عدد طبیعی متمایز باشند، آن‌گاه $2a(a^{2} + 3b^{2})$ مکعب کامل نیست.

۱۱) ثابت کنید معادله‌ی $x^{6} - y^{6} = 4z^{3}$ در اعداد طبیعی حل‌شدنی نیست.

(تیتو آندرسکو)

۱۲) ثابت کنید دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x + y = z^{2} \\ xy = \frac{z^{4} - z}{3} \end{cases}$$

در اعداد صحیح مخالف صفر جواب ندارد.

(تیتو آندرسکو)

فصل ۳

معادلات پل

در سال ۱۹۹۰، ا. تیو قضیه‌ی مهم زیر را ثابت کرد:

فرض کنید $f = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر از درجه‌ی حداقل ۳ و با ضرایب صحیح است. چندجمله‌ای همگن $F(x,y)$ را متناظر با f به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(x,y) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y + \cdots + a_1 x y^{n-1} + a_0 y^n$$

حال اگر m عددی صحیح و مخالف صفر باشد، آن‌گاه معادله‌ی

$$F(x,y) = m$$

یا جواب صحیح ندارد و یا تعداد جواب‌های صحیح آن متناهی است.

این مطلب در حالتی که درجه‌ی F برابر ۲ است، برقرار نیست. در این حالت اگر $F(x,y) = x^2 - Dy^2$، که D عددی طبیعی و غیر مربع کامل است، آن گاه برای هر عدد صحیح و مخالف صفر m، معادله‌ی کلی پل، یعنی

$$x^2 - Dy^2 = m$$

یا جواب صحیح ندارد و یا بی‌نهایت جواب صحیح دارد.

۱.۳ معادله‌ی پل: تاریخچه و منشأ

اویلر، پس از مطالعه‌ی سطحی کتاب «آهنگ ریاضیات» والیز[1] اشتباهاً اولین مطالعات و بررسی‌های مربوط به جواب‌های نابدیهی مطالعات به فرم $x^۲ - dy^۲ = ۱$ ($x \neq ۱$ و $y \neq ۰$) را به جان پل[2] (ریاضی‌دان اهل کرامول[3]) نسبت داد؛ هر چند مدرکی در مورد بررسی این نوع معادلات توسط پل، که فارغ التحصیل دانشگاه آمستردام بود، یافت نشده است. شاید شایسته بود که این معادلات را معادلات فرما می‌نامیدند، چرا که فرما اولین شخصی بوده که در مورد خواص جواب‌های نابدیهی چنین معادلاتی تحقیق کرد. به هر حال، معادلات پل تاریخچه‌ای طولانی دارند و می‌توان ردّ آن‌ها را در یونان قدیم پیدا کرد. ازمیری‌ها، $\frac{x}{y}$ را، که x و y جواب‌های طبیعی معادله‌ی $x^۲ - ۲y^۲ = ۱$ اند، به عنوان تقریبی برای $\sqrt{۲}$ استفاده می‌کردند. در حالت کلی اگر $x^۲ = dy^۲ + ۱$، آن گاه $\frac{x^۲}{y^۲} = d + \frac{۱}{y^۲}$. بنابراین برای yهای بزرگ، $\frac{x}{y}$ تقریب خوبی برای $\sqrt{d}$ است. این موضوع را اولین بار ارشمیدس بیان کرد.

مسئله‌ی گاوهای ارشمیدس، ۲۰۰۰ سال طول کشید تا حلی برای آن ارائه شد. بر اساس دست‌نوشته‌های خطی که در کتابخانه‌ی ولفنباتل[4] در سال ۱۷۷۳ به دست آمد، ارشمیدس به خاطر انتقادی که توسط حکومت پرگا[5] به یکی از دستاوردهای او شده بود، بسیار ناراحت بود. او مسئله‌ای را تحت عنوان مسئله‌ی گاوها مطرح کرده بود که حل آن مستلزم انجام محاسبات بسیار زیاد بود. ارشمیدس این مسئله را به بیرون از مرزهای پرگا نیز فرستاد.

پیدا کردن کمترین تعدادی از گاوها که در هفت شرط مسئله گاوها که شامل ۸ مجهول است، صدق می‌کند منجر به حل معادله‌ی پل $x^۲ - ۴۷۲۹۴۹y^۲ = ۱$ می‌شود. کمترین مقدار طبیعی y که در این معادله صدق می‌کند، ۴۱ رقم دارد و توسط کارل آمتوف[6] در سال ۱۸۸۰ به دست آمد. با توجه به راه‌حل او، تعداد گاوهای سفید، عددی با بیش از ۲×۱۰^۵ رقم است.

در کتاب «حساب»، دیوفانتوس[7] سوالی را در مورد پیدا کردن جواب‌های گویای معادلات به فرم $x^۲ - dy^۲ = ۱$ مطرح می‌کند. در حالت $d = m^۲ + ۱$، دیوفانتوس جواب صحیح $x = ۲m^۲ + ۱$ و $y = ۲m$ را پیشنهاد می‌کند. معادلات پل در ریاضیات هندو نیز

---

[1] Wallis
[2] John Pell
[3] Cromwell
[4] Wolfenbüttel
[5] Perga
[6] Carl Amthov
[7] Diophantus

یافت می‌شود. در قرن چهارم، ریاضیدان هندی، بادهایانا[۸] پی برد که $x = ۵۵۷$ و $y = ۴۰۸$ جوابی از معادله‌ی $x^۲ - ۲y^۲ = ۱$ است و کسر $\frac{۵۷۷}{۴۰۸}$ را به عنوان تقریبی برای $\sqrt{۲}$ استفاده کرد. در قرن هفتم، براهماگوپتا[۹] با بررسی مسئله پل $x^۲ - ۹۲y^۲ = ۱$ پی برد که کوچک‌ترین جواب‌های این معادله عبارتست از $x = ۱۱۵۱$ و $y = ۱۲۰$.

در قرن دوازدهم، ریاضی‌دان هندو، باسکارا[۱۰]، به این نتیجه رسید که کوچک‌ترین جواب طبیعی معادله‌ی پل $x^۲ - ۶۱y^۲ = ۱$، عبارتست از $x = ۲۲۶۱۵۳۹۸۰$ و $y = ۱۷۶۶۳۱۹۰۴۹$.

در سال ۱۶۵۷، فرما بیان کرد که اگر d عددی طبیعی و غیر مربع کامل باشد، آن گاه معادله‌ی پل، بی‌نهایت جواب دارد. البته فرما برای این مطلب اثباتی ارائه نکرد. اما توجه کنید که اگر (x, y) جوابی از معادله‌ی $x^۲ - dy^۲ = ۱$ باشد، آنگاه:

$$۱^۲ = (x^۲ - dy^۲)^۲ = (x^۲ + dy^۲)^۲ - d(۲xy)^۲$$

بنابراین $(x^۲ + dy^۲, ۲xy)$ نیز جوابی از معادله‌ی $x^۲ - dy^۲ = ۱$ است. در نتیجه اگر معادله‌ی پل جواب داشته باشد، آن گاه بی‌نهایت جواب خواهد داشت.

فرما در سال ۱۶۵۷، ویلیام برونکر[۱۱] از کستل لین ایرلند و جان والیز را برای پیدا کردن جواب‌های صحیح معادلات $x^۲ - ۱۵۱y^۲ = ۱$ و $x^۲ - ۳۱۳y^۲ = ۱$ به چالش کشید. فرما خاطر نشان کرد که آن‌ها جواب‌های گویای این معادله را حتی به آن دسته از ریاضی‌دانان سطح پایین‌تر که می‌توانستند چنین جواب‌هایی را به دست آورند، ارائه نکنند. در نهایت والیز جواب $(۱۷۲۸۱۴۸۰۴۰, ۱۴۰۶۳۴۶۹۳)$ و برونکر جواب $(۱۲۶۸۶۲۳۶۸, ۷۱۷۰۶۸۵)$ را به ترتیب برای معادلات اول و دوم ارائه کردند.

در سال ۱۷۷۰، اویلر نشان داد که هیچ عدد مثلثی بجز ۱ مکعب کامل نیست؛ هم‌چنین هیچ عدد مثلثی به جز ۱ توان چهارم کامل نیست. او روشی را برای پیدا کردن اعداد طبیعی که هم مثلثی و هم مربع کاملند، ابداع کرد. این روش منجر به حل معادله‌ی پل $x^۲ - ۸y^۲ = ۱$ می‌شد.

در سال ۱۷۶۶، لاگرانژ ثابت کرد که معادله‌ی $x^۲ = dy^۲ + ۱$، که d عددی طبیعی و غیر مربع کامل است، بی‌نهایت جواب دارد.

---

[۸] Buadhayana

[۹] Brahmagupta

[۱۰] Baskara

[۱۱] William Browncker

معادله‌ی دیوفانتی درجه‌ی دوم

$$ax^۲ + bxy + cy^۲ + dx + ey + f = ۰ \qquad (۱.۱.۳)$$

که ضرایب a، b، c، d، e و f اعدادی صحیح‌اند، قابل تبدیل به فرم اصلی معادله‌ی پل است. در ادامه، نحوه‌ی این تبدیل را شرح خواهیم داد. معادله‌ی (۱.۱.۳) نمایشگر یک سطح مقطع مخروطی در صفحه‌ی کارتزین xOy است. بنابراین حل معادله‌ی (۱.۱.۳) به معنای پیدا کردن همه‌ی نقاط شبکه‌ای واقع بر مقطع مخروطی است. معادلات به شکل (۱.۱.۳) را با تبدیل این مقطع مخروطی، به فرم استانداردش حل می‌کنیم. مبین یا دلتای معادله‌ی (۱.۱.۳) به صورت $\Delta = b^۲ - ۴ac$ تعریف می‌شود. اگر $\Delta < ۰$، مقطع مخروطی (۱.۱.۳)، یک بیضی است؛ در این حالت معادله‌ی مذکور فقط تعدادی متناهی جواب دارد. اگر $\Delta = ۰$، این مقطع، یک سهمی است. اگر $۲ae - bd = ۰$، معادله‌ی (۱.۱.۳) به صورت $(۲ax + by + d)^۲ = d^۲ - ۴af$ در می‌آید، که حل آن چندان سخت نیست؛ اما در حالتی که $۲ae - bd \neq ۰$، با تغییر متغیرِ

$$X = ۲ax + by + d\ , \quad Y = (۴ae - ۲bd)y + ۴af - d^۲$$

معادله‌ی (۱.۱.۳) به فرم $X^۲ + Y = ۰$ درمی‌آید، که حل آن راحت است. جالب‌ترین حالت، حالت $\Delta > ۰$ است، که مقطع مخروطی معادله‌ی (۱.۱.۳) به فرم یک هذلولی درمی‌آید. با استفاده از دنباله‌ای از تغییر متغیرها، در نهایت معادله‌ی (۱.۱.۳) به فرمول عمومی معادله‌ی پل، یعنی

$$X^۲ - DY^۲ = N \qquad (۲.۱.۳)$$

تبدیل می‌شود. برای روشن‌تر شدن مطالب بالا، معادله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$۲x^۲ - ٦xy + ۳y^۲ = -۱$$

توجه کنید $\Delta = ۱۲ > ۰$. بنابراین، مقطع مخروطی متناظر با این معادله، یک هذلولی است. این معادله را می‌توان به صورت $x^۲ - ۳(y-x)^۲ = ۱$ بازنویسی کرد. حال با تغییر متغیر $X = x$، $Y = y - x$، این معادله به فرم معادله‌ی پل $X^۲ - ۳Y^۲ = ۱$ درمی‌آید.

۲.۳ حل معادله‌ی پل با استفاده از روش‌های مقدماتی

در این جا رویکردی مقدماتی را برای حل معادله‌ی پل، که به لاگرانژ منسوب است، ارائه می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۳ اگر D عددی طبیعی و غیر مربع کامل باشد، آن گاه معادله‌ی

$$u^{2} - Dv^{2} = 1 \qquad (۳.۲.۳)$$

بی‌نهایت جواب در مجموعه‌ی اعداد طبیعی دارد و فرم کلی این جواب‌ها به صورت زوج‌های $(u_n, v_n)_{n\geq 1}$ از رابطه‌ی زیر به دست می آیند:

$$u_{n+1} = u_0 u_n + D v_0 v_n \ , \quad v_{n+1} = v_0 u_n + u_0 v_n \ , \quad u_1 = u_0 \ , \quad v_1 = v_0$$

(۴.۲.۳)

که (u_0, v_0) جواب اساسی این معادله است، یعنی کوچک‌ترین جواب این معادله. (غیر از $(1, 0)$)

اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم که معادله‌ی (۱.۲.۳) دارای جوابی اساسی است.

فرض کنید c_1 عددی طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ است. نشان می‌دهیم که اعداد طبیعی $t_1, w_1 \geq 1$ وجود دارند، به‌نحوی که

$$|t - w_1\sqrt{D}| < \frac{1}{c_1} \quad \text{و} \quad w_1 \leq c_1$$

برای این منظور، فرض کنید $l_k = [k\sqrt{D} + 1]$، که $k \in \{0, 1, \ldots, c_1\}$. در نتیجه به‌ازای هر $0 \leq k \leq c_1$ داریم $0 < l_k - k\sqrt{D} \leq 1$. در ضمن از آنجایی که $\sqrt{D}$ عددی گنگ است، نتیجه می‌گیریم برای هر $k' \neq k''$ داریم $l_{k'} \neq l_{k''}$.

در نتیجه اعداد $i, j, p \in \{0, 1, 2, \ldots, c_1\}$ وجود دارند، به‌نحوی که $i \neq j$ و $p \neq 0$ و نیز

$$\frac{p-1}{c_1} < l_i - i\sqrt{D} \leq \frac{p}{c_1} \quad \text{و} \quad \frac{p-1}{c_1} < l_j - j\sqrt{D} \leq \frac{p}{c_1}$$

این مطلب از آن‌جا ناشی می‌شود که تعداد بازه‌های به فرم $(\frac{p-1}{c_1}, \frac{p}{c_1})$، که $1 \leq p \leq c$، برابر است با $c_1 + 1$؛ در حالی که c_1 عدد به فرم $l_k - k\sqrt{D}$ داریم $(0 \leq k \leq c_1)$.

از نابرابری‌های بالا نتیجه می‌گیریم $|(l_i - l_j) - (j - i)\sqrt{D}| < \frac{1}{c_1}$. با جایگذاری $|l_i - l_j| = t_1$ و $|j - i| = w_1$ خواهیم داشت

$$|t_1 - w_1\sqrt{D}| < \frac{1}{c_1} \quad \text{و} \quad w_1 \leq c_1$$

با ضرب این نابرابری در نابرابریِ $t_1 + w_1\sqrt{D} < 2w_1\sqrt{D} + 1$ داریم

$$|t_1^2 - Dw_1^2| < \frac{2w_1}{c_1} \cdot \sqrt{D} + \frac{1}{c_1} < 2\sqrt{D} + 1$$

حال اگر عدد طبیعی $c_2 > c_1$ را طوری انتخاب کنیم که $|t_1 - w\sqrt{D}| > \frac{1}{c_2}$، نتیجه می‌گیریم اعدادی طبیعی مانند w_2 و t_2 وجود دارند، به‌نحوی که

$$|t_2^2 - Dw_2^2| < 2\sqrt{D} + 1 \quad \text{و} \quad |t_1 - t_2| + |w_1 - w_2| \neq 0$$

با ادامه دادن این روند، دنباله‌ای از زوج‌های متمایز $(t_n, w_n)_{n\geq 1}$ به دست می‌آید که به‌ازای هر n، در نابرابری $|t_n^2 - Dw_n^2| < 2\sqrt{D} + 1$ صدق می‌کنند. لذا بازه‌ی $(-2\sqrt{D} - 1, 2\sqrt{D} + 1)$ شامل عددی صحیح مانند k است، به‌طوری که زیردنباله‌ای نامتناهی از دنباله‌ی $(t_n, w_n)_{n\geq 1}$ وجود دارد که در معادله‌ی $x^2 - Dw^2 = k$ صدق می‌کند. این زیردنباله، شامل حداقل دو زوج (t_s, w_s) و (t_r, w_r) است که

$$t_s \overset{|k|}{\equiv} t_r\,, \quad w_s \overset{|k|}{\equiv} w_r\,, \quad t_s w_r - t_r w_s \neq 0$$

(در غیر این صورت داریم $t_s = t_r$ و $w_s = w_r$ که متناقض با شرط $|t_s - t_r| + |w_s - w_r| \neq 0$ است.)

فرض کنید $t_0 = t_s t_r - Dw_s w_r$ و $w_0 = t_s w_r - t_r w_s$. در این صورت

$$t_0^2 - Dw_0^2 = k^2 \tag{۵.۲.۳}$$

از طرفی، $t_0 = t_s t_r - Dw_s w_r \overset{|k|}{\equiv} t_s^2 - Dw_s^2 \overset{|k|}{\equiv} 0$. به همین ترتیب $w_0 \overset{|k|}{\equiv} 0$. زوج (t, w)، که $t_0 = t|k|$ و $w_0 = w|k|$، جوابی نابدیهی برای معادله‌ی پل (۱.۲.۳) است.

حال نشان می‌دهیم زوج‌های (u_n, v_n) که طبق روابط (۲.۲.۳) تعریف می‌شوند، در معادله‌ی پل صدق می‌کنند. برای این منظور، روی n استقرا می‌زنیم. به وضوح (u_0, v_0) جوابی از معادله‌ی (۱.۲.۳) است. اگر (u_n, v_n) جوابی از این معادله باشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 - Dv_{n+1}^2 &= (u_0 u_n + Dv_0 v_n)^2 - D(v_0 u_n + u_0 v_n)^2 \\ &= (u_0^2 - Dv_0^2)(u_n^2 - Dv_n^2) = 1 \end{aligned}$$

یعنی زوج (u_{n+1}, v_{n+1}) نیز جوابی از معادله‌ی (۱.۲.۳) است.

در ادامه ثابت می‌کنیم که برای هر عدد طبیعی n،

$$u_{n-1} + v_{n-1}\sqrt{D} = (u_0 + v_0\sqrt{D})^n$$

فرض کنید $z_n = u_{n-1} + v_{n-1}\sqrt{D} = (u_\circ + v_\circ\sqrt{D})^n$. توجه داشته باشند که $\cdots < z_n < \cdots < z_2 < z_1$. نشان می‌دهیم که همه‌ی جواب‌های معادله‌ی (۱.۲.۳) به فرم (۴.۲.۳) اند. برای این منظور، اگر معادله‌ی (۱.۲.۳) جوابی مانند (u,v) داشته باشد، به‌طوری که عدد $z = u + v\sqrt{D}$ به فرم (۴.۲.۳) نباشد، در این صورت به‌ازای عددی طبیعی مانند m داریم $z_m < z < z_{m+1}$. بنابراین:

$$\begin{aligned} & 1 < (u+v\sqrt{D})(u_m - v_m\sqrt{D}) < u_\circ + v_\circ\sqrt{D} \\ & \Rightarrow 1 < (uu_m - Dvv_m) + (u_m v - uv_m)\sqrt{D} < u_\circ + v_\circ\sqrt{D} \end{aligned}$$

از طرفی داریم:

$$(uu_m - Dvv_m)^2 - D(u_m v - uv_m)^2 = (u^2 - Dv^2)(u_m^2 - dv_m^2) = 1$$

در نتیجه $(uu_m - Dvv_m, u_m v - uv_m)$ جوابی از معادله‌ی (۱.۲.۳) است که از $(u_\circ, v_\circ)$ کوچک‌تر است. اما این مطلب با فرض حداقل بودن زوج $(u_\circ, v_\circ)$ در تناقض است. $\square$

ملاحظات. ۱) روابط (۱.۲.۳) را می‌توان به فرم ماتریسی، به صورت زیر نمایش داد.

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\circ & Dv_\circ \\ v_\circ & u_\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\circ & Dv_\circ \\ v_\circ & u_\circ \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u_\circ \\ v_\circ \end{pmatrix} \tag{۶.۲.۳}$$

حال اگر فرض کنیم

$$\begin{pmatrix} u_\circ & Dv_\circ \\ v_\circ & u_\circ \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

آن گاه هر یک از اعداد a_n، b_n، c_n و d_n ترکیب‌های خطی از λ_1^n و λ_2^n اند، که λ_1 و λ_2 مقادیر ویژه‌ی ماتریس $\begin{pmatrix} u_\circ & Dv_\circ \\ v_\circ & u_\circ \end{pmatrix}$ اند.

با استفاده از رابطه‌ی (۵.۲.۳) و انجام مقداری محاسبه، می‌توان نشان داد:

$$\begin{aligned} u_n &= \tfrac{1}{2}\left[(u_\circ + v_\circ\sqrt{D})^n + (u_\circ - v_\circ\sqrt{D})^n\right], \\ v_n &= \tfrac{1}{2\sqrt{D}}\left[(u_\circ + v_\circ\sqrt{D})^n - (u_\circ - v_\circ\sqrt{D})^n\right] \end{aligned} \tag{۷.۲.۳}$$

۲) جواب‌های معادله‌ی پل را که از هر یک از فرم‌های (۴.۲.۳) یا (۶.۲.۳) به دست می‌آیند، می‌توان به عنوان تقریبی از ریشه‌ی دوم اعداد طبیعی که مربع کامل نیستند، در نظر

گرفت. در واقع اگر (u_n, v_n) جواب‌های معادله‌ی (۱.۲.۳) باشند، آنگاه:

$$u_n - v_n\sqrt{D} = \frac{۱}{u_n + v_n\sqrt{D}}$$

بنابراین:

$$\frac{u_n}{v_n} - \sqrt{D} = \frac{۱}{v_n(u_n + v_n\sqrt{D})} < \frac{۱}{\sqrt{D}v_n^{۲}} < \frac{۱}{v_n^{۲}}$$

در نتیجه:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \sqrt{D} \qquad (۸.۲.۳)$$

به عبارت دیگر، $\frac{u_n}{v_n}$ تقریبی از $\sqrt{D}$ با خطای کم‌تر از $\frac{۱}{v_n^{۲}}$ است.

روش کلی تعیین جواب اساسی معادله‌ی پل (۱.۲.۳)، استفاده از کسرهای مسلسل است. از آنجایی که این روش، جزء بحث ما نیست، جدول مفید زیر را که شامل جواب‌های اساسی معادله‌ی پل، به‌ازای $D \leq ۱۰۳$ است، آورده‌ایم:

D	$u_\circ$	$v_\circ$	D	$u_\circ$	$v_\circ$	D	$u_\circ$	$v_\circ$
۲	۳	۲	۳۸	۳۷	۶	۷۱	۳۴۸۰	۴۱۳
۳	۲	۱	۳۹	۲۵	۴	۷۲	۱۷	۲
۵	۹	۴	۴۰	۱۹	۳	۷۳	۲۲۸۱۲۴۹	۲۶۷۰۰۰
۶	۵	۲	۴۱	۲۰۴۹	۳۲۰	۷۴	۳۶۹۹	۴۳۰
۷	۸	۳	۴۲	۱۳	۲	۷۵	۲۶	۳
۸	۳	۱	۴۳	۳۴۸۲	۵۳۱	۷۶	۵۷۷۹۹	۶۶۳۰
۱۰	۱۹	۶	۴۴	۱۹۹	۳۰	۷۷	۳۵۱	۴۰
۱۱	۱۰	۳	۴۵	۱۶۱	۲۴	۷۸	۵۳	۶
۱۲	۷	۲	۴۶	۲۴۳۳۵	۳۵۸۸	۷۹	۸۰	۹
۱۳	۶۴۹	۱۸۰	۴۷	۴۸	۷	۸۰	۹	۱
۱۴	۱۵	۴	۴۸	۷	۱	۸۲	۱۶۳	۱۸
۱۵	۴	۱	۵۰	۹۹	۱۴	۸۳	۸۲	۹
۱۷	۳۳	۸	۵۱	۵۰	۷	۸۴	۵۵	۶
۱۸	۱۷	۴	۵۲	۶۴۹	۹۰	۸۵	۲۸۵۷۶۹	۳۰۹۹۶
۱۹	۱۷۰	۳۹	۵۳	۶۶۲۴۹	۹۱۰۰	۸۶	۱۰۴۰۵	۱۱۲۲
۲۰	۹	۲	۵۴	۴۸۵	۶۶	۸۷	۲۸	۳
۲۱	۵۵	۱۲	۵۵	۸۹	۱۲	۸۸	۱۹۷	۲۱
۲۲	۱۹۷	۴۲	۵۶	۱۵	۲	۸۹	۵۰۰۰۰۱	۵۳۰۰۰
۲۳	۲۴	۵	۵۷	۱۵۱	۲۰	۹۰	۱۹	۲
۲۴	۵	۱	۵۸	۱۹۶۰۳	۲۵۷۴	۹۱	۱۵۷۴	۱۶۵
۲۶	۵۱	۱۰	۵۹	۵۳۰	۶۹	۹۲	۱۱۵۱	۱۲۰
۲۷	۲۶	۵	۶۰	۳۱	۴	۹۳	۱۲۱۵۱	۱۲۶۰
۲۸	۱۲۷	۲۴	۶۱	۱۷۶۶۳۱۹۰۴۹	۲۲۶۱۵۳۹۸۰	۹۴	۲۱۴۳۲۹۵	۲۲۱۰۶۴

D	$u_\circ$	$v_\circ$	D	$u_\circ$	$v_\circ$	D	$u_\circ$	$v_\circ$
۲۹	۹۸۰۱	۱۸۲۰	۶۲	۶۳	۸	۹۵	۳۹	۴
۳۰	۱۱	۲	۶۳	۸	۱	۹۶	۴۹	۵
۳۱	۱۵۲۰	۲۷۳	۶۵	۱۲۹	۱۶	۹۷	۶۲۸۰۹۶۳۳	۶۳۷۷۳۵۲
۳۲	۱۷	۳	۶۶	۶۵	۸	۹۸	۹۹	۱۰
۳۳	۲۳	۴	۶۷	۴۸۸۴۲	۵۹۶۷	۹۹	۱۰	۱
۳۴	۳۵	۶	۶۸	۳۳	۴	۱۰۱	۲۰۱	۲۰
۳۵	۶	۱	۶۹	۷۷۷۵	۹۳۶	۱۰۲	۱۰۱	۱۰
۳۷	۷۳	۱۲	۷۰	۲۵۱	۳۰	۱۰۳	۲۲۷۵۲۸	۲۲۴۱۹

مثال ۳.۱ به یاد داشته باشید که $t_m = \frac{m(m+۱)}{۲}$ را m امین عدد مثلثی گویند ($m \geq ۱$). همه‌ی اعداد مثلثی را بیابید که مربع کامل باشند.

حل: معادله‌ی $t_x = y^۲$ هم ارز است با:

$$(۲x+۱)^۲ - ۸y^۲ = ۱$$

جواب اساسی معادله‌ی پلِ

$$u^۲ - ۸v^۲ = ۱$$

عبارتست از $(u_\circ, v_\circ) = (۳, ۱)$. بنابراین با توجه به فرمول‌های (۳.۲.۶) داریم

$$u_n = \frac{۱}{۲}\left[(۳+\sqrt{۸})^n+(۳-\sqrt{۸})^n\right], \quad v_n = \frac{۱}{۲\sqrt{۸}}\left[(۳+\sqrt{۸})^n-(۳-\sqrt{۸})^n\right]; \quad n \geq ۱$$

در نتیجه:

$$۲x_n + ۱ = u_n = \frac{۱}{۲}\left[(۱+\sqrt{۲})^{۲n} + (۱-\sqrt{۲})^{۲n}\right]$$

بنابراین:

$$x_n = \begin{cases} \left[\frac{(۱+\sqrt{۲})^n+(۱-\sqrt{۲})^n}{۲}\right]^۲ & ;\ n\text{های فرد} \\ \left[\frac{(۱+\sqrt{۲})^n-(۱-\sqrt{۲})^n}{۲}\right]^۲ & ;\ n\text{های زوج} \end{cases}$$

مثال ۳.۲ ثابت کنید بی‌نهایت سه‌تایی از اعداد طبیعی متوالی وجود دارد که هر یک از آن‌ها برابر مجموع دو مربع‌اند.

(رقابت‌های ریاضی پاتنام)

حل: اولین سه‌تایی با ویژگی مسئله عبارتست از $۲^۲ + ۲^۲ = ۸$، $۳^۲ + ۰^۲ = ۹$ و $۳^۲ + ۱^۲ = ۱۰$. به این ترتیب این ایده به ذهن می‌رسد که اعداد را به فرم $x^۲ + ۱$، $x^۲$ و $x^۲ - ۱$ در نظر بگیریم.

معادله‌ی پل $x^۲ - ۲y^۲ = ۱$ را در نظر بگیرید. جواب‌های این معادله عبارتند از:

$$x_n = \frac{۱}{۲}\left[(۳+۲\sqrt{۲})^n + (۳-۲\sqrt{۲})^n\right], \quad y_n = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\left[(۳+۲\sqrt{۲})^n - (۳-۲\sqrt{۲})^n\right]$$

که $n \geq ۱$. بنابراین سه‌تایی‌های $(x_n^۲ - ۱, x_n^۲, x_n^۲ + ۱)$ در شرط مسئله صدق می‌کنند، چرا که

$$x_n^۲ - ۱ = y_n^۲ + y_n^۲, \quad x_n^۲ = x_n^۲ + ۰^۲, \quad x_n^۲ + ۱ = x_n^۲ + ۱^۲$$

ملاحظه. با همین روش می‌توان ثابت کرد که برای هر عدد غیر مربع کامل $m \geq ۲$، بی‌نهایت $(m + ۱)$ تایی از اعداد طبیعی متوالی وجود دارد که هر یک از این اعداد، مجموع m مربع‌اند.

برای این منظور، معادله‌ی پلِ $x^۲ - my^۲ = ۱$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $(x_n, y_n)_{n\geq ۰}$ جواب‌های این معادله‌اند. بنابراین $(m + ۱)$تایی‌های به فرم $(x_n^۲ - ۱, x_n^۲, x_n^۲ + ۱, \ldots, x_n^۲ + m - ۱)$ ویژگی مطلوب را دارند.

تمرین‌ها و مسائل

۱) همه‌ی اعداد طبیعی n را بیابید، به‌نحوی که $\frac{n(n+۱)}{۳}$ مربع کامل شود.

(دورین آندریا)

۲) همه‌ی مثلث‌هایی را بیابید که طول اضلاع آن اعدادی طبیعی و متوالی و مساحت آن‌ها اعدادی طبیعی شود.

۳) دستگاه معادلاتِ زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x + y = z + u \\ ۲xy = zu \end{cases}$$

بیش‌ترین مقدار عدد حقیقی و ثابت m را بیابید، به‌نحوی که برای هر جواب طبیعی این دستگاه مانند (x, y, z, u) که $x \geq y$، داشته باشیم $m \leq \frac{x}{y}$.

(۴۲امین المپیاد جهانی ریاضیات)

۳.۳ معادله‌ی $ax^۲ - by^۲ = ۱$

در این بخش، به بررسی معادله‌ی کلی‌ترِ

$$ax^۲ - by^۲ = ۱ \qquad (۹.۳.۳)$$

می‌پردازیم ($a, b \in \mathbb{N}$). با توجه به بحثی که در بخش ۱.۳ انجام دادیم، $\Delta = ۴ab > ۰$؛ بنابراین معادله‌ی (۱.۳.۳) را می‌توان به معادله‌ی پل تبدیل کرد.

قضیه ۱.۳.۳ اگر $ab = k^۲$، که k عددی طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ است، آن گاه معادله‌ی (۱.۳.۳) در اعداد طبیعی جواب ندارد.

اثبات. فرض کنید معادله‌ی (۱.۳.۳) جوابی مانند $(x_۰, y_۰)$ دارد که $x_۰$ و $y_۰$ اعدادی طبیعی‌اند. در این صورت $ax_۰^۲ - by_۰^۲ = ۱$ و به وضوح a و b نسبت به هم اولند. از شرط $ab = k^۲$ نتیجه می‌گیریم که اعدادی طبیعی مانند $k_۱$ و $k_۲$ وجود دارند که $a = k_۱^۲$ و $b = k_۲^۲$. حال معادله‌ی $k_۱^۲x_۰^۲ - k_۲^۲y_۰^۲ = ۱$ را می‌توان به صورت $(k_۱x_۰ - k_۲y_۰)(k_۱x_۰ + k_۲y_۰) = ۱$ نوشت. بنابراین

$$۱ < k_۱x_۰ + k_۲y_۰ = k_۱x_۰ - k_۲y_۰ = ۱$$

که تناقض است. □

معادله‌ی پلِ

$$u^۲ - abv^۲ = ۱ \qquad (۱۰.۳.۳)$$

را حلال معادله‌ی (۱.۳.۳) می‌نامیم.

قضیه ۲.۳.۳ فرض کنید معادله‌ی (۱.۳.۳) در اعداد طبیعی جواب دارد و (A, B) کوچک‌ترین جواب آن است. در این صورت فرم عمومی جواب‌های این معادله، زوج‌های $(x_n, y_n)_{n\geq ۰}$ است، که

$$x_n = Au_n + bBv_n\ , \qquad y_n = bu_n + aAv_n \qquad (۱۱.۳.۳)$$

و $(u_n, v_n)_{v\geq ۰}$ جواب عمومی معادله‌ی حلال (۲.۳.۳)است.

اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم که (x_n, y_n) جوابی از معادله‌ی (۱.۳.۳) است. برای این منظور توجه کنید که

$$\begin{aligned} ax_n^۲ - by_n^۲ &= a(Au_n + bBv_n)^۲ - b(Bu_n + aAv_n)^۲ \\ &= (aA^۲ - bB^۲)(u_n^۲ - abv_n^۲) = ۱ \times ۱ = ۱ \end{aligned}$$

از طرفی، فرض کنید (x,y) جوابی از معادله‌ی (۱.۳.۳) است. در این صورت زوج (u,v)، که $u = aAx - bBy$ و $v = Bx - Ay$، جوابی از معادله‌ی حلال (۲.۳.۳) است. حال اگر دستگاه این دو معادله‌ی خطی را برحسب x و y حل کنیم، نتیجه می‌گیریم $x = Au + bBv$ و $y = Bu + aAv$؛ یعنی (x,y) به فرم جواب‌های (۳.۳.۳) است.

مثال ۳.۳ معادله‌ی زیر را در مجموعه‌ی اعداد طبیعی حل کنید:

$$6x^2 - 5y^2 = 1$$

حل: کوچک‌ترین جواب این معادله، عبارتست از $(A,B) = (1,1)$. معادله‌ی حلال، $u^2 - 30v^2 = 1$ است که جواب اساسی آن $(11,2)$ است. به این ترتیب فرم کلی جواب‌های معادله، به صورت

$$x_n = u_n + 5v_n \ , \quad y_n = u_n + 6v_n \ ; \quad n = 0, 1, \ldots$$

درمی‌آید، که $(u_n, v_n)_{n \geq 0}$ جواب عمومی حلال معادله است. در نتیجه:

$$u_{n+1} = 11u_n + 60v_n \ , \quad v_{n+1} = 2u_n + 11v_n \ ; \quad n = 0, 1, \ldots$$

که $u_0 = 1$ و $v_0 = 2$.

فرمول صریح این جواب‌ها را می‌توان با استفاده از فرمول‌های (۶.۲.۳) به دست آورد. در این صورت خواهیم داشت

$$x_n = \frac{6+\sqrt{30}}{12}(11+2\sqrt{30})^n + \frac{6-\sqrt{30}}{12}(11-2\sqrt{30})^n \ ,$$
$$y_n = \frac{5+\sqrt{30}}{10}(11+2\sqrt{30})^n + \frac{5-\sqrt{30}}{10}(11-2\sqrt{30})^n$$

مثال ۴.۳ همه‌ی اعداد طبیعی n را بیابید، به‌نحوی که $2n+1$ و $3n+1$ اعدادی مربع کامل شوند.

(ماهنامه‌ی ریاضیات آمریکا)

حل: قرار می‌دهیم $2n + 1 = x^2$ و $3n + 1 = y^2$. معادله‌ی اول را در ۳ و معادله‌ی دوم را در ۲ ضرب می‌کنیم و معادلات به دست آمده را از هم می‌کنیم. در نهایت خواهیم داشت:

$$3x^2 - 2y^2 = 1 \tag{۱۲.۳.۳}$$

کوچک‌ترین جواب این معادله عبارتست از $x = y = 1$. معادله‌ی حلال نیز به صورت $u^2 - 6v^2 = 1$ و جواب اساسی آن، $(u_0, v_0) = (5,2)$ است. با توجه به قضیه‌ی ۲.۳.۳،

جواب‌های عمومی معادله‌ی (۴.۳.۳) از رابطه‌های $x_m = u_m + ۲v_m$ و $y_m = u_m + ۳v_m$ به دست می‌آیند، که

$$u_m = \frac{۱}{۲}[(۵+۲\sqrt{۶})^m + (۵-۲\sqrt{۶})^m]\,, \qquad v_m = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}[(۵+۲\sqrt{۶})^m - (۵-۲\sqrt{۶})^m]$$

در نتیجه

$$n = y_m^۲ - x_m^۲ = (u_m + ۳v_m)^۲ - (u_m + ۲v_m)^۲ = v_m(۲u_m + ۵v_m)\,, \qquad m \geq ۰$$

تمرین‌ها و مسائل

۱) ثابت کنید بی‌نهایت چهارتایی (x, y, z, w) از اعداد طبیعی وجود دارد، به‌طوری که $x^۲ + y^۲ = ۶(z^۲ + w^۲) + ۱$ و $۳|x$ و $۲|y$.

(دورین آندریا)

۲) الف) همه‌ی اعداد طبیعی n را بیابید، به‌نحوی که $n + ۱$ و $۳n + ۱$ همزمان مربع کامل باشند.

ب) اگر $n_۱ < n_۲ < \cdots < n_k < \cdots$ همه‌ی اعداد طبیعی باشند که در ویژگی قسمت (الف) صدق می‌کنند، ثابت کنید $n_k n_{k+۱} + ۱$ نیز به‌ازای هر $k = ۱, ۲, \ldots$ مربع کامل است.

(ماهنامه‌ی ریاضیات آمریکا)

۳) ثابت کنید دو دنباله‌ی اکیداً صعودی (a_n) و (b_n) از اعداد طبیعی وجود دارند، به‌نحوی که برای هر $n \geq ۱$، $b_n^۲ + ۱$ بر $a_n(a_n + ۱)$ بخش‌پذیر است.

(پیشنهادی به ۴۰امین المپیاد جهانی ریاضیات)

۴.۳ معادله‌ی پل منفی

هر چند معادله‌ی پل $x^۲ - dy^۲ = ۱$ به‌ازای همه‌ی مقادیر طبیعی و غیر مربع کامل d حل‌شدنی است، اما معادله‌ی

$$x^۲ - dy^۲ = -۱ \qquad (۱۳.۴.۳)$$

فقط به‌ازای مقادیر خاصی از d حل‌شدنی است.

قصد داریم جواب‌های معادله‌ی (۱.۴.۳) را با استفاده از روشی که در بخش ۳.۳ شرح دادیم، به دست آوریم.

معادله‌ی (۱.۴.۳) را تحت عنوان **معادله‌ی پل منفی** می‌شناسند. از قضیه‌ی ۲.۳.۳، قضیه‌ی زیر نتیجه می‌شود:

قضیه ۱.۴.۳ فرض کنید معادله‌ی (۱.۴.۳) در اعداد طبیعی جواب دارد و (A,B) کوچک‌ترین جواب آن است. در این صورت جواب‌های معادله‌ی (۱.۴.۳) زوج‌های $(x_n,y_n)_{n\geq 0}$اند، که

$$x_n = Bu_n + dAv_n\ ,\qquad y_n = Au_n + Bv_n \tag{۱۴.۴.۳}$$

و $(u_n,v_n)_{n\geq 0}$ جواب عمومی معادله‌ی پل $u^2 - dv^2 = 1$ است.

ملاحظات. ۱) طبق فرمول‌های (۲.۴.۳) جواب‌های معادله‌ی پل منفی، به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\begin{aligned} x_n &= \tfrac{1}{2}(B + A\sqrt{d})(u_0 + v_0\sqrt{d})^n + \tfrac{1}{2}(B - A\sqrt{d})(u_0 - v_0\sqrt{d})^n \\ y_n &= \tfrac{1}{2}\left(A + \tfrac{B}{\sqrt{d}}\right)(u_0 + v_0\sqrt{d})^n + \tfrac{1}{2}\left(A - \tfrac{B}{\sqrt{d}}\right)(u_0 - v_0\sqrt{d})^n \end{aligned} \tag{۱۵.۴.۳}$$

۲) دنباله‌های $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ که طبق روابط (۲.۴.۳) یا (۳.۴.۳) به دست می‌آیند، در تساوی زیر صدق می‌کنند:

$$x_n = \lfloor y_n\sqrt{d}\rfloor\ ;\qquad n = 0, 1, \ldots \tag{۱۶.۴.۳}$$

در واقع از رابطه‌ی $x_n^2 - dy_n^2 = -1$ نتیجه می‌گیریم $(y_n\sqrt{d}+x_n)(y_n\sqrt{d}-x_n) = 1$. حال از آنجایی که $y_n\sqrt{d}+x_n > 1$، بنابراین $0 < y_n\sqrt{d}-x_n < 1$؛ از این جا رابطه‌ی (۴.۴.۳) به دست می‌آید.

قضیه ۲.۴.۳ اگر p عددی اول باشد و $p \overset{4}{\equiv} 1$، آن گاه معادله‌ی پل منفی $x^2 - py^2 = -1$ در اعداد طبیعی حل‌شدنی است.

اثبات. فرض کنید (u_0,v_0) جواب اساسی معادله‌ی حلال $x^2 - pv^2 = 1$ باشد. در این صورت $pv_0^2 = u_0^2 - 1$ و u_0 نمی‌تواند زوج باشد؛ چرا که در غیر این صورت، $p \overset{4}{\equiv} -1$. بنابراین u_0 عددی فرد است و بزرگ‌ترین مقسوم علیه اعداد $u_0 - 1$ و $u_0 + 1$ برابر ۲ است. لذا $u_0 \pm 1 = 2\alpha^2$ و $u_0 \mp 1 = 2p\beta^2$، که α و β اعدادی طبیعی‌اند و $v_0 = 2\alpha\beta$.

با حذف u_0 نتیجه می‌گیریم $\alpha^۲ - p\beta^۲ = \pm ۱$. حال با توجه به این که $\beta < v_0$، رابطه‌ی $\alpha^۲ - p\beta^۲ = ۱$ نمی‌تواند برقرار باشد (چرا که (u_0, v_0) کوچک‌ترین جواب این معادله است). در نتیجه $\alpha^۲ - p\beta^۲ = -۱$ و قضیه، اثبات می‌شود. □

روش اصلی تعیین جواب اساسی معادله‌ی پل منفی، استفاده از کسرهای مسلسل است. جدول زیر شامل جواب‌های اساسی معادله‌ی (۱.۴.۳)، البته در صورت داشتن جواب، است:

d	A	B	d	A	B	d	A	B
۲	۱	۱	۳۷	۶	۱	۷۳	۱۰۶۸	۱۲۵
۵	۲	۱	۴۱	۳۲	۵	۷۴	۴۳	۵
۱۰	۳	۱	۵۰	۷	۱	۸۲	۹	۱
۱۳	۱۸	۵	۵۳	۱۸۲	۲۵	۸۵	۳۷۸	۴۱
۱۷	۴	۱	۵۸	۹۹	۱۳	۸۹	۵۰۰	۵۳
۲۶	۵	۱	۶۱	۲۹۷۱۸	۳۸۰۵	۹۷	۵۶۰۴	۵۶۹
۲۹	۷۰	۱۳	۶۵	۸	۱	۱۰۱	۱۰	۱

مثال ۵.۳ نشان دهید معادله‌ی $x^۲ - ۳۴y^۲ = -۱$ در اعداد طبیعی حل‌شدنی نیست.

حل: جواب اساسی معادله‌ی حلال عبارتست از (۳۵,۶). حال اگر معادله‌ی $x^۲ - ۳۴y^۲ = -۱$ حل‌شدنی باشد و جواب اساسی آن (A, B) باشد، آن‌گاه $(A + B\sqrt{۳۴})^۲ = ۳۵ + ۶\sqrt{۳۴}$؛ (چرا؟) یعنی $A^۲ + ۳۴B^۲ = ۳۵$ و $۲AB = ۶$. اما این دستگاه معادلات، جوابی در اعداد طبیعی ندارد. لذا معادله‌ی مسئله، حل‌شدنی نیست.

مثال ۶.۳ همه‌ی زوج‌های (k, m) از اعداد طبیعی را بیابید، به‌طوری که $k < m$ و

$$۱ + ۲ + \cdots + k = (k + ۱) + (k + ۲) + \cdots + m$$

(نشریه‌ی ریاضیات دانشگاهی)

حل: به دو طرف تساوی، عبارت $۱ + ۲ + \cdots + k$ را اضافه می‌کنیم. در نتیجه داریم $۲k(k + ۱) = m(m + ۱)$. این تساوی را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$(۲m + ۱)^۲ - ۲(۲k + ۱)^۲ = -۱$$

زوج $(۱, ۱)$ کوچک‌ترین جواب طبیعی معادله‌ی $x^۲ - ۲y^۲ = -۱$ است. طبق روابط (۲.۴.۳) جواب عمومی (x_n, y_n) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x_n = u_n + ۲v_n\ , \quad y_n = u_n + v_n\ ; \quad n \geq ۱$$

که

$$u_n = \tfrac{1}{2}\left[(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n\right],$$
$$v_n = \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n\right]; \quad n \geq 1$$

بنابراین:

$$x_n = \tfrac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{2n+1} + (1-\sqrt{2})^{2n-1}\right],$$
$$y_n = \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^{2n-1} - (1-\sqrt{2})^{2n-1}\right]; \quad n \geq 1$$

در ضمن از آنجایی که $x^2 - 2y^2 = -1$، نتیجه می‌گیریم x^2 عددی فرد و در نتیجه x به فرم $2l + 1$ است. بنابراین $y^2 = 2l^2 + 2l + 1$، یعنی y عددی فرد است. به این ترتیب، زوج‌های خواسته شده عبارتند از:

$$(k, m) = \left(\frac{y_n - 1}{2}, \frac{x_n - 1}{2}\right); \quad n \geq 2$$

تمرین‌ها و مسائل

۱) همه‌ی زوج‌های (x, y) از اعداد طبیعی را بیابید که در معادله‌ی زیر صدق کنند:

$$x^2 - 6xy + y^2 = 1$$

(تیتو آندرسکو)

۲) ثابت کنید بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد، به‌نحوی که $n^2 + 1 | n!$.

(مجله‌ی کوانتوم)

۳) فرض کنید:

$$a_n = \lfloor\sqrt{n^2 + (n+1)^2}\rfloor; \quad n \geq 1$$

ثابت کنید بی‌نهایت مقدار n وجود دارد، به‌طوری که $a_n - a_{n-1} > 1$ و $a_{n+1} - a_n = 1$.

فصل ۴

روش‌های مقدماتی برای حل معادلات دیوفانتی

۱.۴ روش تجزیه

۱) معادله را به فرم $(x+2y)(x+4y)+3(x+2y)=2$ و یا $(x+2y)(x+4y+3)=2$ می‌نویسیم. در نهایت جواب‌های معادله عبارتند از $(0,-1)$، $(3,-2)$، $(3,-1)$ و $(6,-2)$.

۲) فرض کنید $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$. با توجه به ملاحظه‌ی مثال ۲، نتیجه می‌گیریم که $(1+2\alpha_1)(1+2\alpha_2)\cdots(1+2\alpha_k)=5$. بنابراین $k=1$ و $\alpha_1=2$. لذا $n=p^2$، که p عددی اول است.

۳) معادله هم ارز است با $(x-p)(y-p)=pq$. چهار جواب برای این معادله وجود دارد:

$$(1+p,q(1+p))\ , \quad (2p,2q), \quad (p+q,p+q)\ , \quad (p(1+q),1+q)$$

ملاحظه. برای معادله‌ی

$$\frac{m}{x}+\frac{n}{y}=1$$

که m و n اعدادی طبیعی‌اند، تعداد جواب‌های طبیعی معادله را با $s(m,n)$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید برای هر $N>1$، تعداد مقسوم علیه‌های مثبت N برابر $v(N)$

است. در این صورت داریم:

$$s(m,n) = v(mn)$$

۴) معادله را در ۲۷ ضرب کرده و ۱ واحد به طرفین معادله‌ی به دست آمده، اضافه می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$(۳x)^۳ + (-۳y)^۳ + (-۱)^۳ - ۳(۳x)(-۳y)(-۱) = ۱۶۴۶$$

سمت چپ این معادله به فرم $a^۳ + b^۳ + c^۳ - ۳abc$ است و می‌توان آن را همانند مثال ۵ تجزیه کرد:

$$(۳x - ۳y - ۱)(۹x^۲ + ۹y^۲ + ۱ + ۹xy + ۳x - ۳y) = ۲ \times ۸۲۳$$

از آنجایی که عبارت دوم سمت چپ تساوی بالا از عبارت اول بزرگ‌تر است، و نیز با توجه به اینکه ۸۲۳ عددی اول است و $۳x - ۳y - ۱ \overset{۳}{\equiv} ۲$، نتیجه می‌گیریم:

$$۳x - ۳y - ۱ = ۲\,, \quad ۹x^۲ + ۹y^۲ + ۱ + ۹xy + ۳x - ۳y = ۸۲۳$$

جواب معادلات فوق، زوج $(۶,۵)$ است.

۵) معادله‌ی داده شده هم ارز است با $x = (y^۲ + ۲)^۲ - (۲y)^۲$. بنابراین:

$$x = \left[(y-۱)^۲ + ۱\right]\left[(y+۱)^۲ + ۱\right]$$

اگر $y \neq \pm ۱$، آن‌گاه x برابر با حاصل ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ می‌شود؛ در نتیجه نمی‌تواند عددی اول شود. در نهایت، جواب‌های معادله عبارتند از $(۵,۱)$ و $(۵,-۱)$.

۶) معادله را به فرم $(x^۳ + ۱)^۲ + (x^۳ + ۱) = y^۴ + ۱$ و یا به صورت معادل $(۲x^۳ + ۳)^۲ - ۴y^۴ = ۵$ می‌نویسیم. به این ترتیب ۴ حالت پیش می‌آید:

$$\begin{cases} ۲x^۳ - ۲y^۲ + ۳ = ۱ \\ ۲x^۳ + ۲y^۲ + ۳ = ۵ \end{cases} ; \quad \begin{cases} ۲x^۳ - ۲y^۲ + ۳ = -۱ \\ ۲x^۳ + ۲y^۲ + ۳ = -۵ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۲x^۳ - ۲y^۲ + ۳ = ۵ \\ ۲x^۳ + ۲y^۲ + ۳ = ۱ \end{cases} ; \quad \begin{cases} ۲x^۳ - ۲y^۲ + ۳ = -۵ \\ ۲x^۳ + ۲y^۲ + ۳ = -۱ \end{cases}$$

از این دستگاه‌ها، جواب‌های $(۰,۱)$ و $(۰,-۱)$ به دست می‌آید.

۷) معادله‌ی مسئله را می‌توان به صورت یک معادله‌ی درجه‌ی دوم برحسب y نوشت:

$$۲y^۲ + (x^۲ - ۳x)y + ۳x^۲ + x = ۰$$

جواب‌های این معادله، اعدادی صحیح‌اند اگر و فقط اگر دلتای معادله یعنی $x(x+۱)^۲(x-۸)$ مربع کامل باشد. در نتیجه $x(x-۸) = z^۲$ و یا $(x-۴)^۲ - z^۲ = ۱۶$. بنابراین به معادله‌ی $(x-z-۴)(x+z-۴) = ۱۶$ می‌رسیم که جواب‌های آن عبارتند از $(-۱, -۱)$، $(۸, -۱۰)$، $(۹, -۱۰)$ و $(۹, -۲۱)$.

۸) برای راحتی کار قرار می‌دهیم $x = a - ۱$، $y = b - ۱$ و $z = c - ۱$. در این صورت با شرط $۱ \leq x < y < z$ باید داشته باشیم:

$$xyz | xy + yz + zx + x + y + z$$

ایده‌ی پیدا کردن جواب‌های رابطه‌ی فوق، در این مطلب است که به‌ازای بسیاری از مقادیر x، y و z از اعداد طبیعی، رابطه‌ی $xyz \leq xy + yz + zx + x + y + z$ نمی‌تواند برقرار باشد. فرض کنید $f(x, y, z)$ نسبتِ این دو عبارت است.

با توجه به فرم جبریِ

$$f(x, y, z) = \frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} + \frac{۱}{z} + \frac{۱}{xy} + \frac{۱}{yz} + \frac{۱}{zx}$$

به راحتی می‌تون دید که f تابعی نزولی برحسب هر یک از متغیرهای x، y و z است. با توجه به تقارن f نسبت به x، y و z و متمایز بودن این سه عدد، داریم:

$$f(x, y, z) \leq f(۱, ۲, ۳) = ۲ + \frac{۵}{۶} < ۳$$

بنابراین اگر رابطه‌ی بخش‌پذیری برقرار شود، باید داشته باشیم $f(x, y, z) = ۱$ و یا $f(x, y, z) = ۲$. لذا می‌بایست معادله‌ی

$$xy + yz + zx + x + y + z = kxyz \qquad (۱)$$

را در اعداد طبیعی با فرض ۲ یا $k = ۱$ حل کنیم.

توجه کنید که $f(۳, ۴, ۵) = \frac{۵۹}{۶۰} < ۱$؛ در نتیجه $x \in \{۱, ۲\}$. در ضمن $f(۲, ۳, ۴) = \frac{۳۵}{۲۴} < ۲$؛ بنابراین در حالت $x = ۲$ باید داشته باشیم $k = ۱$. پس برای پیدا کردن جواب‌های مسئله، کافی است تنها سه تا از معادلات به فرم (۱) را بررسی کنیم.

حالت اول: $x = ۱$ و $k = ۱$. در این صورت به معادله‌ی

$$۱ + ۲(y+z) + yz = yz$$

می‌رسیم که جوابی در اعداد طبیعی ندارد.

حالت دوم: $x = ۱$ و $k = ۲$. در این حالت داریم:

$$۱ + ۲(y+z) = yz$$

این معادله را به صورت $(y-۲)(z-۲) = ۵$ می‌نویسیم. به این ترتیب $y - ۲ = ۱$ و $z - ۲ = ۵$ و جواب یکتای این حالت عبارتست از $y = ۳$ و $z = ۷$.

حالت سوم: $x = ۲$ و $k = ۱$. در این حالت، معادله‌ی

$$۲ + ۳(y+z) = yz$$

به دست می‌آید، که می‌توان آن را به فرم $(y-۳)(z-۳) = ۱۱$ بازنویسی کرد. بنابراین $y - ۳ = ۱$ و $z - ۳ = ۱۱$. پس در این حالت، جواب یکتای $y = ۴$ و $z = ۱۵$ حاصل می‌شود.

در نهایت از حالت‌های دوم و سوم به ترتیب خواهیم داشت $a = ۲$، $b = ۴$، $c = ۸$ و $a = ۳$، $b = ۵$، $c = ۱۶$. به این ترتیب مسئله دو جواب دارد.

۹) فرض کنید x و y طول‌های اضلاع زاویه‌ی قائمه و z طول وتر مثلث است. در این صورت طبق قضیه‌ی فیثاغورث داریم $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$. با مساوی قرار دادن محیط و مساحت مثلث، خواهیم داشت:

$$\frac{xy}{۲} = x + y + \sqrt{x^۲ + y^۲}$$

این معادله پس از ساده کردن به صورت

$$(xy - ۲(x+y))^۲ = ۴(x^۲ + y^۲)$$

و یا

$$x^۲y^۲ - ۴xy(x+y) + ۴(x^۲ + y^۲ + ۲xy) = ۴(x^۲ + y^۲)$$

درمی‌آید. بنابراین

$$x^۲y^۲ - ۴xy(x+y) + ۸xy = ۰$$

به وضوح می‌توان طرفین این معادله را بر xy تقسیم کرد، زیرا $x, y \neq ۰$. در نتیجه

$$xy - ۴x - ۴y + ۸ = ۰$$

با اضافه کردن ۸ واحد به دو طرف معادله‌ی بالا و تجزیه‌ی عبارت سمت چپ خواهیم داشت:

$$(x - ۴)(y - ۴) = ۸$$

از آنجایی که x و y اعدادی طبیعی‌اند، فقط تعداد محدودی از مقادیر x و y در این معادله صدق می‌کنند. جواب‌های این معادله عبارتند از

$$(x, y) = (۶, ۸), (۸, ۶), (۵, ۱۲), (۱۲, ۵)$$

متناظر با این جواب‌ها، مثلث‌های قائم الزاویه ۱۰ − ۸ − ۶ و ۱۳ − ۱۲ − ۵ به دست می آیند.

۱۰) با کم کردن معادله‌ی دوم از معادله‌ی اول خواهیم داشت:

$$(x + y + xy) + (u + v - uv) = (x + y - xy)(u + v - uv)$$

بنابراین:

$$\big[(x + y - xy) - ۱\big]\big[(u + v - uv) - ۱\big] = ۱$$

این معادله نیز هم ارز است با $(x - ۱)(y - ۱)(u - ۱)(v - ۱) = ۱$. جواب‌های این معادله عبارتند از:

$$(۰, ۰, ۰, ۰)\ ,\ \ (۰, ۰, ۲, ۲)\ ,\ \ (۰, ۲, ۰, ۲)\ ,\ \ (۰, ۲, ۲, ۰)\ ,$$
$$(۲, ۰, ۰, ۲)\ ,\ \ (۲, ۰, ۲, ۰)\ ,\ \ (۲, ۲, ۰, ۰)\ ,\ \ (۲, ۲, ۲, ۲)$$

به این ترتیب جواب‌های (x, y, z, u, v) از دستگاه معادلات، پنج‌تایی‌های زیرند:

$$(۰, ۰, ۰, ۰, ۰)\ ,\ \ (۰, ۰, -۴, ۲, ۲)\ ,\ \ (۰, ۲, ۰, ۰, ۲)\ ,\ \ (۰, ۲, ۰, ۲, ۰)\ ,$$
$$(۲, ۰, ۰, ۰, ۲)\ ,\ \ (۲, ۰, ۰, ۲, ۰)\ ,\ \ (۲, ۲, -۴, ۰, ۰)\ ,\ \ (۲, ۲, ۲۴, ۲, ۲)$$

۲.۴ حل معادلات دیوفانتی با استفاده از نابرابری‌ها

۱) معادله‌ی داده شده، هم ارز است با $\frac{۴}{۳} = \frac{۱}{z} + \frac{۱}{y} + \frac{۱}{x}$. با فرض $x \leq y \leq z$ نتیجه می‌گیریم $\frac{۴}{۳} \geq \frac{۳}{x}$ و یا $x \leq \frac{۹}{۴}$. بنابراین $x \in \{۱, ۲\}$. با بررسی دو حالت $x = ۱$ و $x = ۲$ می‌توان نشان داد که جواب‌های معادله عبارتند از سه‌تایی‌های $(۱, ۴, ۱۲)$، $(۱, ٦, ٦)$ و $(۲, ۲, ۳)$ و جایگشت‌های آن‌ها.

۲) فرض کنید $u = x - ۱$، $v = y - ۱$ و $w = z - ۱$. به این ترتیب، معادله‌ی مسئله به صورت $u + v + w = uvw$ در می‌آید. بنابراین یا $u = v = w = ۰$ و یا $uvw \neq ۰$، که در حالت دوم معادله، هم ارز است با

$$\frac{۱}{vw} + \frac{۱}{wu} + \frac{۱}{uv} = ۱$$

این معادله به فرم $۱ = \frac{۱}{m} + \frac{۱}{n} + \frac{۱}{p}$ است که جواب‌های آن با فرض $m \leq n \leq p$ عبارتند از:

$$(m, n, p) = (۲, ۳, ٦), (۲, ۴, ۴), (۳, ۳, ۳)$$

دو حالت آخر، قابل قبول نیستند، چرا که در این صورت به ترتیب باید داشته باشیم $(uvw)^۲ = ۳۲$ و $(uvw)^۲ = ۲۷$. لذا $vw = ۲$، $wu = ۳$ و $uv = ٦$. بنابراین $uvw = ٦$ و نتیجتاً $u = ۳$، $v = ۲$ و $w = ۱$. به این ترتیب جواب‌های معادله عبارتند از $(۱, ۱, ۱)$، $(۲, ۳, ۴)$ و جایگشت‌های آن.

۳) از نابرابری‌های

$$(x + y)^۲ < (x + y)^۲ + ۳x + y + ۱ < (x + y + ۲)^۲$$

نتیجه می‌گیریم $(x + y)^۲ + ۳x + y + ۱ = (x + y + ۱)^۲$. بنابراین $x = y = k \in \mathbb{N}$. در نتیجه همه‌ی جواب‌های معادله، سه‌تایی‌های به فرم $(k, k, ۲k + ۱)$اند.

۴) داریم $(x + ۱)^۴ - (x - ۱)^۴ = ۸x^۳ + ۸x$. فرض کنید زوج (x, y) از اعداد صحیح جوابی از معادله‌ی مسئله است و $x \geq ۱$. در این صورت

$$(۲x)^۳ < (x + ۱)^۴ - (x - ۱)^۴ < (۲x + ۱)^۳$$

بنابراین $۲x < y < ۲x + ۱$، که تناقض است. لذا برای هر جواب (x, y)، عدد صحیح x باید کوچک‌تر یا مساوی صفر باشد. حال توجه کنید که اگر (x, y) جوابی از معادله

باشد، آن‌گاه $(-x, -y)$ نیز جوابی از معادله است؛ در نتیجه $-x$ نیز باید عددی کوچک‌تر یا مساوی صفر باشد. پس زوج $(0, 0)$ تنها جواب مسئله است.

۵) از شرط‌های مسئله نتیجه می‌گیریم

$$x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 < y^3 < x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8$$

یعنی $(x^2 + 1)^3 < y^3 < (x^2 + 2)^3$، که نشان می‌دهد هیچ یک از معادلات مذکور جواب ندارند.

۶) توجه داشته باشید که این معادله، حالت تساوی نابرابری واسطه‌ی حسابی ـ هندسی است.

$$x^2y + y^2z + z^2x \geq 3\sqrt[3]{(x^2y)(y^2z)(z^2x)}$$

بنابراین باید داشته باشیم $x^2y = y^2z = z^2x$. در نتیجه $x^2 = yz$، $y^2 = zx$ و $z^2 = xy$ و یا به صورت معادل،

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$$

به این ترتیب جواب‌های مسئله، سه‌تایی‌های به فرم (k, k, k)اند، که $k \in \mathbb{N}$.

۷) نشان می‌دهیم که جواب‌های معادله عبارتند از $(\pm1, 0)$، $(\pm4, 3)$ و $(\pm4, 5)$. ابتدا توجه کنید که $y \geq 0$. حال از آنجایی که عبارت سمت راست معادله، مخالف صفر است، باید سمت چپ نیز مخالف صفر باشد. بنابراین $|x| \geq |y| + 1$ و یا $|x| \leq |y| - 1$. در هر دو حالت داریم $(x^2 - y^2)^2 \geq (2y-1)^2$. در نتیجه:

$$(2y-1)^2 \leq 1 + 16y$$

از این نابرابری نتیجه می‌گیریم $y \leq 5$. با امتحان کردن مقادیر قابل قبول برای y، جواب‌های فوق به دست می‌آیند.

۸) راه‌حل اول. ابتدا ادعا می‌کنیم که حداقل یکی از مقادیر bc و yz کوچک‌تر از ۳ است. اگر $bc = 3$، آن‌گاه $b = 3$ و $c = 1$. بنابراین:

$$a + b + c < 3a = abc$$

همچنین اگر $bc > 3$، آن‌گاه $abc < 3a \leq a + b + c$. در نتیجه در حالت $bc \geq 3$ داریم $abc > a + b + c$. لذا:

$$3x \geq x + y + z = abc > a + b + c = xyz \Rightarrow 3 > yz$$

به این ترتیب ادعایمان ثابت می‌شود. بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض می‌کنیم $yz = ۱$ یا ۲.

اگر $yz = ۱$، آن‌گاه $y = z = ۱$ و داریم:

$$abc = x + y + z = x + ۲ = xyz + ۲ = a + b + c + ۲$$

اکنون اگر $c \geq ۲$، در این صورت $bc \geq ۴$ و نیز $۴a \leq abc = a + b + c + ۲ \leq ۴a$. بنابراین $a = b = c = ۲$ و جواب‌های $(۲, ۲, ۲, ۶, ۱, ۱)$ و $(۶, ۱, ۱, ۲, ۲, ۲)$ به دست می‌آیند. اما اگر $c = ۱$، آن‌گاه $ab = a + b + ۳$. حال اگر $b \geq ۳$ خواهیم داشت

$$۳a \leq ab = a + b + ۳ \leq ۳a \Rightarrow a = b = ۳$$

در این حالت نیز به جواب‌های $(۳, ۳, ۱, ۷, ۱, ۱)$ و $(۷, ۱, ۱, ۳, ۳, ۱)$ می‌رسیم. در حالت $b = ۲$ داریم $a = ۵$ و جواب‌های $(۵, ۲, ۱, ۸, ۱, ۱)$ و $(۸, ۱, ۱, ۵, ۲, ۱)$ حاصل می‌شوند. در نهایت اگر $b = ۱$، به رابطه‌ی غیرممکن $a = a + ۴$ می‌رسیم.

اگر $yz = ۲$، آن‌گاه $y = ۲$ و $z = ۱$ و داریم

$$۲abc = ۲(x + y + z) = ۲x + ۶ = xyz + ۶ = a + b + c + ۶ \leq ۳a + ۶$$

در این حالت اگر $c \geq ۲$، آن‌گاه $۸a \leq ۲abc \leq ۳a + ۶$ و نتیجتاً $۵a < ۶$ که با شرط $a \geq c$ در تناقض است. پس $c = ۱$ و در نتیجه $۲ab = a + b + ۷$. حال اگر $b \geq ۳$، در این صورت

$$۶a \leq ۲ab = a + b + ۷ \Rightarrow a \leq \frac{b}{۵} + \frac{۷}{۵}$$

که باز هم با شرط $a \geq b$ در تناقض است. اگر $b = ۲$، داریم $۴a = ۲ab = a + ۹$؛ پس $a = ۳$ و جواب $(۳, ۲, ۱, ۳, ۲, ۱)$ به دست می‌آید. در نهایت اگر $b = ۱$، آن‌گاه $a = ۸$ و جواب تکراری $(۸, ۱, ۱, ۵, ۲, ۱)$ حاصل می‌شود.

راه‌حل دوم. قرار می‌دهیم

$$A = (ab - ۱)(c - ۱)\ , \qquad B = (a - ۱)(b - ۱)$$
$$X = (xy - ۱)(z - ۱)\ , \qquad Y = (x - ۱)(y - ۱)$$

بنابراین A، B، X و Y اعدادی صحیح و نامنفی‌اند که در رابطه‌ی

$$A + B + X + Y = ۴$$

صدق می‌کنند. به وضوح هیچ یک از اعداد c و z نمی‌توانند از ۲ بزرگ‌تر باشند؛ چرا که در این صورت یکی از اعداد A یا Y از ۴ بزرگ‌تر می‌شود، که متناقض با رابطه‌ی $A+B+X+Y=۴$ است.

اگر $c=۲$، داریم $a,b\geq ۲$ و $A\geq ۳$ و $B\geq ۱$. بنابراین $A=۳$ و $B=۱$ و $X=Y=۰$. در نتیجه $(۲,۲,۲,۶,۱,۱)$ به دست می‌آید. به همین ترتیب اگر $z=۲$، جواب $(۶,۱,۱,۲,۲,۲)$ می‌رسیم.

حال فرض کنید $c=z=۱$. در این صورت $A=X=۰$ و $B+Y=۴$. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم $Y\leq B$ (یعنی $Y=۰,۱,۲$). اگر $Y=۰$، داریم $B=(a-۱)(b-۱)=۴$. این تساوی منجر به جواب‌های $(۵,۲,۱,۸,۱,۱)$ و $(۳,۳,۱,۷,۱,۱)$ می‌شود. با توجه به تقارن مسئله، جواب‌های $(۸,۱,۱,۵,۲,۱)$ و $(۷,۱,۱,۳,۳,۱)$ نیز به دست می‌آیند.

اگر $Y=۱$، آن‌گاه $x=y=۲$ و $B=(a-۱)(b-۱)=۳$. بنابراین $a=۴$ و $b=۲$. اما در این صورت $a+b+c=۷\neq xyz$.

در نهایت اگر $Y=۲$، آن‌گاه:

$$(x-۱)(y-۱)=(a-۱)(b-۱)=۲\Rightarrow a=x=۳\,,\quad b=y=۲$$

در نتیجه $(۳,۲,۱,۳,۲,۱)$ آخرین جواب این معادله است.

۹) **راه‌حل اول.** فرض کنید $x\leq y\leq z\leq u\leq v$. می‌بایست حداکثر مقدار v را پیدا کنیم. از آنجایی که

$$v<x+y+z+u+v\leq ۵v$$

بنابراین $v<xyzuv\leq ۵v$ و یا $۱<xyzu\leq ۵$. در نتیجه:

$$(x,y,z,u)=(۱,۱,۱,۲),(۱,۱,۱,۳),(۱,۱,۱,۴),(۱,۱,۲,۲),(۱,۱,۱,۵)$$

از این جواب‌ها به راحتی می‌توان نشان داد که $\max\{v\}=۵$.

راه‌حل دوم. توجه کنید که:

$$\begin{aligned}۱&=\frac{۱}{yzuv}+\frac{۱}{zuvx}+\frac{۱}{uvxy}+\frac{۱}{vxyz}+\frac{۱}{xyzu}\\&\leq\frac{۱}{uv}+\frac{۱}{uv}+\frac{۱}{uv}+\frac{۱}{v}+\frac{۱}{u}=\frac{۳+u+v}{uv}\end{aligned}$$

بنابراین $uv \le ۳ + u + v$ و یا به صورت معادل $۴ \le (u-۱)(v-۱)$. اگر $u = ۱$، آن‌گاه $x = y = z = ۱$ و $v = v + ۴$، که غیرممکن است. لذا $u - ۱ \ge ۱$ و $v - ۱ \le ۴$؛ یعنی $v \le ۵$. به راحتی می‌توان نشان داد که $(۱, ۱, ۱, ۲, ۵)$ جوابی از معادله است. در نتیجه $\max\{v\} = ۵$.

ملاحظه. از راه‌حل دوم می‌توان برای پیدا کردن حداکثر مقدار $\max\{x_۱, x_۲, \ldots, x_n\}$، با این فرض که $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ اعدادی طبیعی‌اند که در رابطه‌ی

$$x_۱ x_۲ \cdots x_n = x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n$$

صدق می‌کنند، استفاده کرد.

۱۰) بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم $x < y < z < w$. در این صورت $x \ge ۱$، $y \ge ۲$، $z \ge ۳$ و $w \ge ۴$. داریم:

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ + w^۲ = ۳(x + y + z + w)$$

$$۱ \le y - x \,,$$

$$۹ \le ۳z \,,$$

$$۲۰ \le ۵w$$

با جمع بستن روابط فوق، خواهیم داشت:

$$(x-۱)^۲ + (y-۲)^۲ + (z-۳)^۲ + (w-۴)^۲ \le ۰$$

بنابراین $x = ۱$، $y = ۲$، $z = ۳$ و $w = ۴$.

به این ترتیب جواب‌های معادله‌ی داده شده عبارتند از $(۱, ۲, ۳, ۴)$ و جایگشت‌های آن.

۱۱) فرض کنید (a, b) زوجی از اعداد صحیح است که در ویژگی مسئله صدق می‌کند. در این صورت (a, b) جوابی از معادله‌ی دیوفانتی نیز است:

$$a^۲ - kab + b^۲ = k \qquad (۱)$$

اگر $a = ۰$ یا $b = ۰$، آن‌گاه به وضوح k مربع کامل می‌شود. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم $a \ne ۰$ و $b \ne ۰$. در این صورت a و b هم علامت خواهند بود، چرا که اگر $ab < ۰$، آن‌گاه

$$a^۲ - kab + b^۲ > k \qquad (۲)$$

حال می‌توان فرض کرد $a > 0$ و $b > 0$ و متعاقباً $k > 0$. اگر $a = b$، از رابطه‌ی $0 < k = (2 - k)a^2$ نتیجه می‌گیریم $k = 1$. لذا فرض می‌کنیم $a > b > 0$ و زوج (a, b) جوابی از معادله‌ی (۱) است که در آن b کمترین مقدار ممکن است. به راحتی می‌توان نشان داد که $(b, kb - a)$ نیز جوابی از معادله‌ی (۱) است. اگر $kb = a$، در این صورت به وضوح k مربع کامل می‌شود. اما اگر $kb \neq a$، داریم $kb > a$، چرا که علامت b و $kb - a$ یکسان است. ادعا می‌کنیم که $kb - a < b$. برای این منظور داریم:

$$kb - a < b \Longleftrightarrow k < \frac{a+b}{2} \Longleftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{1 + ab} < \frac{a}{b} + 1$$

نابرابری آخر نیز برقرار است، زیرا:

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} < \frac{a^2 + ab}{ab + 1} < \frac{a^2 + ab}{ab} = \frac{a}{b} + 1$$

در نتیجه جواب $(b, kb - a)$ با حداقل بودن b در جواب (a, b) در تناقض است. بنابراین $kb = a$ و نتیجتاً k مربع کامل می‌شود.

۳.۴ روش پارامتری

۱) دسته‌ای از جواب‌های معادله به صورت زیر است:

$$x_n = n^{10}(n+1)^8, \quad y_n = n^7(n+1)^5, \quad z_n = n^4(n+1)^3; \quad n \in \mathbb{N}$$

۲) برای حل مسئله از اتحاد لاگرانژ (ملاحظه‌ی ۱۱ مثال را ببینید).۱۲. و دو نتیجه‌ی معروف زیر استفاده می‌کنیم:

1° بی‌نهایت عدد اول به فرم $4k + 1$ وجود دارد.

2° هر عدد اول به فرم $4k + 1$ را می‌توان به صورت مجموع دو مربع کامل نمایش داد. (برای اثبات این مطلب، ملاحظه‌ی مسئله ۱۲ بخش ۵.۱ را ببینید.)

عددی اولی به فرم $4k + 1$ را در نظر بگیرید. طبق ویژگی 2°، این عدد را می‌توان به صورت مجموع دو مربع کامل نمایش داد. حال از آنجایی که $p^4 + 1$ نیز مجموع دو مربع کامل است، $p^5 + p = p(p^4 + 1)$ را نیز می‌توان به این صورت نمایش داد. فرض کنید $p^5 + p = u^2 + v^2$؛ در این صورت $x = u$، $y = v$ و $z = p$ جوابی از معادله‌ی مسئله است. با توجه به اینکه p عددی اول است، x، y و z نسبت به هم اولند. حال

کافی توجه کنید است که طبق نتیجه‌ی ۱°، تعداد اعداد اول به فرم $۴k + ۱$ نامتناهی است.

توجه کنید همین استدلال در مورد معادله‌ی دیوفانتی

$$x^۲ + y^۲ = z^{۲n+۱} + z$$

که n عددی طبیعی است، برقرار است.

۳) دسته‌ای از جواب‌های معادله، به صورت زیر است

$$x_k = k^n + ۱\ , \quad y_k = k(k^n + ۱)\ , \quad z_k = k^n + ۱\ ; \quad k \in \mathbb{N}$$

۴) فرض کنید $(x_{k_۱}, y_{k_۱}, z_{k_۱})$ و $(x_{k_۲}, y_{k_۲}, z_{k_۲})$ دو جواب از معادله‌ی مثال ۴ $(x^n + y^n = z^{n-۱})$اند. در این صورت

$$x^n_{k_۱} + y^n_{k_۱} = z^{n-۱}_{k_۱}\ , \quad x^n_{k_۲} + y^n_{k_۲} = z^{n-۱}_{k_۲}$$

با ضرب این دو تساوی، خواهیم داشت:

$$(x_{k_۱}x_{k_۲})^n + (x_{k_۱}y_{k_۲})^n + (y_{k_۱}x_{k_۲})^n + (y_{k_۱}y_{k_۲})^n = (z_{k_۱}z_{k_۲})^{n-۱}$$

بنابراین دسته‌ای از جواب‌های این معادله عبارتست از

$$(x_{k_۱}x_{k_۲}, x_{k_۱}y_{k_۲}, y_{k_۱}x_{k_۲}, y_{k_۱}y_{k_۲}, z_{k_۱}z_{k_۲})$$

که $k_۱, k_۲ \in \mathbb{N}$.

۵) با توجه به ملاحظه‌ی مثال ۱۵.۱، نتیجه می‌گیریم که بی‌نهایت زوج (u_n, v_n) از اعداد طبیعی وجود دارد، به نحوی که $au_n - bv_n = ۱$. در نتیجه

$$x_n = cu_n + dv_n\ , \quad y_n = ad + bc\ , \quad z_n = v_n\ , \quad t_n = u_n\ ; \quad n \in \mathbb{N}$$

جوابی از دستگاه معادلات مسئله است.

۶) معادله را به صورت

$$۱ + \frac{x + y + ۱}{xy} = ۱ + \frac{۱}{z}$$

می‌نویسیم. بنابراین $\frac{xy}{x+y+۱}$ باید عددی صحیح باشد. فرض کنید $x+y+۱=u$. در نتیجه $\frac{x(u-x-۱)}{u} \in \mathbb{Z}$ و یا به صورت معادل $\frac{x(x+۱)}{u} = v \in \mathbb{Z}$. به این ترتیب همه‌ی جواب‌های معادله، به فرم

$$x = w\,, \quad y = u - w - ۱\,, \quad z = w - v$$

اند که $u, v, w \in \mathbb{Z}$ و نیز v مقسوم‌علیه دلخواهی از $w(w+۱)$ است.

۷) راه‌حل اول. معادله‌ی داده شده، هم ارز است با

$$y^۲ = x(x + y - z)$$

بنابراین:

$$x = mp^۲\,, \quad x + y - z = mq^۲\,, \quad y = mpq$$

در نتیجه جواب‌های معادله عبارتند از

$$x = mp^۲\,, \quad y = mpq\,, \quad z = m(p^۲ + pq - q^۲)\,; \quad m, p, q \in \mathbb{Z}$$

راه‌حل دوم. معادله را به فرم

$$x(x - z) = y(y - x)$$

می‌نویسیم. اگر $d = (x, y)$، آن‌گاه $x = d\alpha$ و $y = d\beta$، که $(\alpha, \beta) = ۱$. در این صورت داریم $y - x = k\alpha$ و $x - z = k\beta$. از آنجایی که $(\alpha, \beta - \alpha) = ۱$، داریم:

$$k\alpha = y - x = d\beta - d\alpha = d(\beta - \alpha) \Rightarrow \beta - \alpha | k$$

با جایگذاری $k = m(\beta - \alpha)$ خواهیم داشت $d = m\alpha$. در نتیجه

$$x = m\alpha^۲\,, \quad y = m\alpha\beta\,, \quad z = m(\alpha^۲ + \alpha\beta - \beta^۲)\,; \quad m, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$$

۸) توجه کنید که $۶^۴ + ۵^۴ + ۳^۴ = ۲۰۰۲$. بنابراین دسته‌ای از جواب‌های معادله، به صورت زیر است:

$$x_k = ۳ \times ۲۰۰۲^k\,, \quad y_k = ۵ \times ۲۰۰۲^k\,, \quad z_k = ۶ \times ۲۰۰۲^k\,, \quad w_k = ۴k + ۱$$

که k عددی طبیعی است.

۹) دسته‌ای از جواب‌های معادله‌ی اول به صورتِ

$$(3m^2 + 2mn - n^2, 3m^2 - 2mn - n^2, 4mn, 3m^2 + n^2) \; ; \quad m, n \in \mathbb{N}$$

و دسته‌ای از جواب‌های معادله‌ی دوم به صورت زیر است:

$$(m+n, m-n, 2m, 3m^2 + n^2) \; ; \quad m, n \in \mathbb{N}$$

ملاحظه. توجه کنید که معادله‌ی

$$x^4 + y^4 + z^4 = 2u^4$$

نیز بی‌نهایت جواب دارد. دسته‌ای از جواب‌های این معادله، عبارتست از

$$\begin{cases} x = a^2 + 2ac - 2bc - b^2 \,, \\ y = b^2 - 2ab - 2ac - c^2 \,, \\ z = c^2 + 2ab + 2bc - a^2 \,, \\ u = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \end{cases}$$

که $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

۱۰) کافی است چهارتایی‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$(n, n+2, 4n+4, 4(n+1)(2n+1)(2n+3)) \; ; \quad n \in \mathbb{N}$$

۴.۴ روش همنهشتی

۱) توجه کنید که

$$\begin{aligned} y^z &= (x+1)^2 + (x+2)^2 + \cdots + (x+99)^2 \\ &= 99x^2 + 2(1+2+\cdots+99)x + (1^2 + 2^2 + \cdots + 99^2) \\ &= 99x^2 + \frac{2 \times 99 \times 100}{2} x + \frac{99 \times 100 \times 199}{6} \\ &= 33(3x^2 + 300x + 50 \times 199) \end{aligned}$$

بنابراین $3|y$. از آنجایی که $z \geq 2$، نتیجه می‌گیریم $3^2|y^z$؛ اما از طرفی $33(3x^2 + 300x + 50 \times 199)$ بر ۹ بخش‌پذیر نیست. بنابراین معادله جواب ندارد.

۲) برای yهای بزرگ‌تر از ۵، $y!$ بر ۹ بخش‌پذیر است. بنابراین $y! + 2001 \overset{9}{\equiv} 3$. اما ۳ یک مانده‌ی درجه دوم به پیمانه‌ی ۹ نیست. لذا تنها مقادیر ممکن برای y عبارتند از $y = 1, 2, 3, 4, 5$، که از بین این مقادیر فقط $y = 4$ در معادله صدق می‌کند و مقدار x متناظر با آن، $x = 45$ است.

۳) برای هر دو عدد صحیح و دلخواه x و y داریم

$$x^3 \overset{13}{\equiv} 0, 1, 5, 8, 12 \quad \text{و} \quad y^4 \overset{13}{\equiv} 0, 1, 3, 9$$

در نتیجه $x^3 + y^4 \overset{13}{\not\equiv} 7$.

۴) ابتدا فرض کنید $y \geq 3$. اگر معادله را به پیمانه‌ی ۸ در نظر بگیریم، نتیجه می‌گیریم $3^x \overset{8}{\equiv} 7$. اما از طرفی باقیمانده‌ی 3^x، برحسب اینکه x عددی زوج و یا فرد باشد، برابر ۱ و یا ۳ است. بنابراین تنها می‌بایست دو حالت $y = 1$ و $y = 2$ را بررسی کنیم، که کار ساده‌ای است. در نهایت تنها جواب معادله، $x = 2$ و $y = 1$ است.

۵) نشان می‌دهیم که همنشتیِ

$$x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{14}^4 \overset{16}{\equiv} 15999$$

در اعداد صحیح جوابی ندارد. با اثبات این مطلب، نتیجه می‌گیریم که معادله‌ی داده شده نیز جوابی در اعداد صحیح ندارد. برای این منظور، اگر n عددی زوج باشد، آن‌گاه $n = 2k$، $(k \in \mathbb{Z})$، و نتیجتاً $n^4 = 16k^4 \overset{16}{\equiv} 0$. اما اگر n عددی فرد باشد، داریم:

$$n^4 - 1 = (n-1)(n+1)(n^2+1) \overset{16}{\equiv} 0$$

رابطه‌ی فوق، از آنجا ناشی شده است که اعداد $n - 1$، $n + 1$ و $n^2 + 1$ همگی زوجند و نیز یکی از اعداد $n - 1$ و $n + 1$ بر ۴ بخش‌پذیر است. بنابراین n^4 به پیمانه‌ی ۱۶، به‌ازای nهای زوج، همنهشت با ۰ و به‌ازای nهای فرد، همنهشت با ۱ است. لذا اگر دقیقاً r تا از اعداد $x_1, x_2, \ldots, x_{14}$ فرد باشند، آن‌گاه:

$$x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{14}^4 \overset{16}{\equiv} r$$

حال توجه کنید که $15999 = 16000 - 1 \overset{16}{\equiv} 15$. در نتیجه از آنجایی که $0 \leq r \leq 14$، رابطه‌ی همنهشتیِ

$$x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{14}^4 \overset{16}{\equiv} 15$$

جوابی ندارد و معادله‌ی مسئله، حل‌شدنی نیست.

۶) **راه‌حل اول.** دو طرف را در ۲۷ ضرب کرده و سپس ۶۴ واحد به طرفین معادله‌ی به دست آمده اضافه می‌کنیم. در نهایت خواهیم داشت:

$$۲۷x^۳ + ۲۷y^۳ + ۴^۳ - ۴ \times ۲۷xy = ۳۷ \qquad (۱)$$

با استفاده از اتحادِ

$$a^۳ + b^۳ + c^۳ - ۳abc = (a+b+c)(a^۲ + b^۲ + c^۲ - ab - bc - ca)$$

معادله‌ی (۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$(۳x + ۳y + ۴)(۹x^۲ + ۹y^۲ + ۱۶ - ۹xy - ۱۲x - ۱۲y) = ۳۷$$

از آنجایی که ۳۷ عددی اول است و پرانتز دوم را می‌توان به صورتِ

$$\frac{۱}{۲}[(۳x - ۳y)^۲ + (۳x - ۴)^۲ + (xy - ۴)^۲] \geq ۰$$

نوشت، بنابراین $۳x+۳y+۴ > ۰$ و نتیجتاً $۳x+۳y+۴ = ۱$ یا $۳x+۳y+۴ = ۳۷$.
حالت دوم امکان پذیر نیست؛ چرا که در این صورت داریم:

$$x + y = ۱۱\,, \qquad (۳x - ۳y)^۲ + (۳x - ۴)^۲ + (۳y - ۴)^۲ = ۲$$

و این دو تساوی نمی‌توانند همزمان برقرار شوند (زوجیت x و y متفاوت است و در نتیجه $|۳x - ۳y| \geq ۳$).

بنابراین $۳x + ۳y + ۴ = ۱$ و $۹x^۲ + ۹y^۲ + ۱۶ - ۹xy - ۱۲x - ۱۲y = ۷۴$. به این ترتیب جواب‌های $(-۱, ۰)$ و $(۰, -۱)$ به دست می‌آید.

ملاحظه. این راه‌حل را با استفاده از راه‌حل مسئله ۴ بخش ۱.۱ مقایسه کنید.

راه‌حل دوم. قرار می‌دهیم $x + y = s$ و $xy = p$. در این صورت معادله به فرم $s^۳ - ۳sp - ۴p + ۱ = ۰$ در می‌آید، که این معادله هم ارز است با

$$p = \frac{s^۳ + ۱}{۳s + ۴}$$

از آنجایی که $p \in \mathbb{Z}$، بنابراین $۲۷p \in \mathbb{Z}$؛ یعنی:

$$\frac{۲۷s^۳ + ۲۷}{۳s + ۴} \in \mathbb{Z}$$

در نتیجه:

$$9s^2 - 12s + 16 - \frac{37}{3s+4} \in \mathbb{Z}$$

از رابطه‌ی فوق نتیجه می‌گیریم $3s+4 \in \{-1, 1, 37, -37\}$. لذا $s \in \{-1, 11\}$.

اگر $s = 11$، آن‌گاه $p = \frac{11^2+1}{37} \notin \mathbb{Z}$.

همچنین اگر $s = -1$، آن‌گاه $p = 0$ و جواب‌های $(-1, 0)$ و $(0, -1)$ به دست می‌آیند.

۷) بدیهی است که حداقل یکی از اعداد x و y مخالف صفرند. اگر معادله را به پیمانه‌ی ۴ و یا ۷ در نظر بگیریم، نتیجه می‌گیریم که z باید عددی زوج باشد (در حالت اول، z باید به فرم $4k+2$ و در حالت دوم به فرم $6k+4$ باشد). قرار می‌دهیم $z = 2z_1$ و معادله را به صورت $(3^{z_1}-2)(3^{z_1}+2) = 5^x 7^y$ بازنویسی می‌کنیم. از آنجایی که دو پرانتز سمت راست تساوی، فقط عامل‌های ۵ و ۷ دارند و از طرفی تفاضل آن‌ها برابر ۴ است، بنابراین باید نسبت به هم اول باشند. در نتیجه:

$$3^{z_1} + 2 = 5^x \quad \text{و} \quad 3^{z_1} - 2 = 7^y$$

و یا

$$3^{z_1} + 2 = 7^y \quad \text{و} \quad 3^{z_1} - 2 = 5^x$$

در حالت اول، فرض می‌کنیم $y \geq 1$. با کم کردن دو معادله داریم $5^x - 7^y = 4$. حال اگر این معادله را به پیمانه‌ی ۷ در نظر بگیریم، نتیجه می‌گیریم که x باید عددی به صورت $6k+2$ باشد؛ پس x عددی زوج است. اما در این صورت، با جایگذاری $x = 2x_1$ داریم $(5^{x_1}-2)(5^{x_1}+2) = 7^y$ که غیرممکن است، چرا که تفاضل بین عبارت‌های دو پرانتز برابر ۴ است و نتیجتاً این دو عبارت نمی‌توانند هر دو توانی از ۷ باشند. لذا $y = 0$ و در نتیجه $x = 1$ و $z = 2$.

در حالت دوم، باز هم با تفریق دو معادله خواهیم داشت $7^y - 5^x = 4$. با بررسی این معادله به پیمانه‌ی ۵ به راحتی می‌توان نشان داد که y عددی زوج است. حال مشابه استدلال حالت قبل می‌توان نتیجه گرفت که جوابی در این حالت نداریم.

۸) معادله‌ی داده شده، هم ارز است با:

$$(4x-1)(4y-1) = 4z^2 + 1$$

فرض کنید p عامل اولی از $۱ - ۴x$ است. در این صورت $-۱ \overset{p}{\equiv} ۴z^۲$؛ یعنی $-۱ \overset{p}{\equiv} (۲z)^۲$). طبق قضیه‌ی فرما داریم $(۲z)^{p-۱} \overset{p}{\equiv} ۱$.

بنابراین:

$$۱ \overset{p}{\equiv} (۲z)^{p-۱} \overset{p}{\equiv} \left((۲z)^۲\right)^{\frac{p-۱}{۲}} \overset{p}{\equiv} (-۱)^{\frac{p-۱}{۲}}$$

در نتیجه $p \overset{۴}{\equiv} ۱$.

پس هر عامل اول $۱ - ۴x$، به پیمانه‌ی ۴ همنهشت با ۱ است؛ بنابراین $۴x - ۱ \overset{۴}{\equiv} ۱$، که تناقض است.

۹) فرض کنید دستگاه معادلات، جوابی نابدیهی دارد. در این صورت با تقسیم اعداد x، y، z و t بر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترکشان، می‌توانیم فرض کنیم که این چهار عدد عامل مشترکی ندارند. با جمع بستن دو معادله‌ی دستگاه داریم $۷(x^۲ + y^۲) = z^۲ + t^۲$. مانده‌های درجه‌ی دوم به پیمانه‌ی ۷ عبارتند از ۰، ۱، ۲، ۴. به راحتی می‌توان نشان داد که تنها زمانی مجموع دو تا از این مانده‌ها به پیمانه‌ی ۷ برابر صفر می‌شود که هر دو برابر صفر باشند. بنابراین $z = ۷z_۰$ و $t = ۷t_۰$، که $t_۰$ و $z_۰$ اعدادی صحیح‌اند. اما در این صورت $x^۲ + y^۲ = ۷(z_۰^۲ + t_۰^۲)$. با استدلال مشابهی نتیجه می‌گیریم که x و y نیز بر ۷ بخش‌پذیرند. لذا هر یک از اعداد x، y، z و t بر ۷ بخش‌پذیرند، که تناقض است. در نتیجه دستگاه معادلات، جواب نابدیهی ندارد.

۱۰) نشان می‌دهیم که تنها جواب‌های معادله عبارتند از $(۱, ۱)$، $(۱٦, ۲)$ و $(۲۷, ۳)$.

فرض کنید (a, b) جوابی از معادله است و $d = (a, b)$ در این صورت $a = du$ و $b = dv$، که u و v اعدادی طبیعی و نسبت به هم اولند. به این ترتیب، معادله‌ی مسئله هم ارز است با

$$(du)^{dv^۲} = (du)^u \qquad (۱)$$

با مقایسه‌ی توان‌های $dv^۲$ و u، سه حالت پیش می‌آید:

حالت اول. $dv^۲ = u$. در این صورت از معادله‌ی (۱) نتیجه می‌گیریم $u = v$. از آنجایی که u و v نسبت به هم اولند، باید داشته باشیم $u = v = ۱$ و نتیجتاً $d = ۱$. بنابراین یکی از جواب‌های مسئله، $(a, b) = (۱, ۱)$ است.

حالت دوم. $dv^۲ > u$. در این حالت معادله را به فرم

$$d^{dv^۲-u} \cdot u^{dv^۲} = v^u \qquad (۲)$$

بازنویسی می‌کنیم. بنابراین $u^{dv^2}|v^u$. حال با توجه به اینکه u و v نسبت به هم اولند، باید داشته باشیم $u = 1$ و نتیجتاً معادله‌ی (۲) به صورت زیر درمی‌آید:

$$d^{dv^2-1} = v \qquad (3)$$

اگر $d = 1$، آن‌گاه از رابطه‌ی (۳) نتیجه می‌گیریم $v = 1$. اما در این صورت، نابرابری $dv^2 > u$ برقرار نمی‌شود. حال اگر $d = 2$، آن‌گاه:

$$d^{dv^2-1} \geq 2^{2v^2-1} \geq 2^{2v-1} > v\,; \quad v = 1, 2, 3, \cdots$$

اما این نابرابری با رابطه‌ی (۳) در تناقض است. پس در این حالت، معادله جواب ندارد.

حالت سوم. $dv^2 < u$. در این صورت $d < u$. به این ترتیب معادله‌ی (۱) به فرم

$$u^{dv^2} = d^{u-dv^2} \cdot v^u \qquad (4)$$

درمی‌آید. لذا $v^u|u^{dv^2}$. حال از آنجایی که u و v نسبت به هم اولند، در نتیجه $u = 1$. بنابراین

$$u^d = d^{u-d} \qquad (5)$$

می‌دانیم $d < u$؛ لذا باید داشته باشیم $d < u - d$. در ضمن طبق رابطه‌ی (۵)، هر عامل اول d، مانند p، عامل اولی از u است. فرض کنید α و β بزرگ‌ترین اعداد صحیحی‌اند که $p^\alpha|u$ و $p^\beta|v$. در این صورت با توجه به رابطه‌ی (۵) باید داشته باشیم $\alpha d = \beta(u - d)$ و نتیجتاً $\alpha > \beta$. بنابراین $d|u$ و می‌توان قرار داد $u = kd$، ($k \in \mathbb{N}$). علاوه بر این $k \geq 3$، چرا که $u > 2d$. با جایگذاری $u = kd$ در رابطه‌ی (۵) داریم:

$$k = d^{k-2} \qquad (6)$$

اگر $k = 3$، آن‌گاه $d = 3$ و $u = dk = 9$. به این ترتیب، جواب $a = 27$ و $b = 3$ به دست می‌آید.

اگر $k = 4$، در این صورت $d = 2$ و $u = 8$. در نتیجه $a = 16$ و $b = 2$.

اما اگر $k \geq 5$، آن‌گاه $d^{k-2} \geq 2^{k-2} > k$، که نشان می‌دهد در این حالت معادله‌ی (۶) جواب ندارد.

۵.۴ روش استقرای ریاضی

۱) برای $n = ۲$ قرار می‌دهیم $x_۲ = y_۲ = ۱$. حال فرض کنید برای عدد صحیح $n \geq ۲$، اعداد صحیح و فرد x_n و y_n وجود دارند، به‌نحوی که $|x_n^۲ - ۱۷y_n^۲| = ۴^n$. می‌خواهیم زوج $(x_{n+۱}, y_{n+۱})$ از اعداد صحیح فرد را طوری بیابیم که

$$|x_{n+۱}^۲ - ۱۷y_{n+۱}^۲| = ۴^{n+۱}$$

داریم:

$$\left(\frac{x_n \pm ۱۷y_n}{۲}\right)^۲ - ۱۷\left(\frac{x_n \pm y_n}{۲}\right)^۲ = ۴(x_n^۲ - ۱۷y_n^۲) \qquad (۱)$$

ضمن اینکه دقیقاً یکی از اعدادِ

$$\frac{x_n + y_n}{۲} \quad \text{و} \quad \frac{x_n - y_n}{۲}$$

فردند (چرا که مجموع آن‌ها، عددی فرد است). اگر به عنوان مثال، $\frac{x_n+y_n}{۲}$ فرد باشد، آن‌گاه عددِ

$$\frac{x_n + ۱۷y_n}{۲} = ۸y_n + \frac{x_n + y_n}{۲}$$

نیز فرد است. در نتیجه در این حالت می‌توان قرار داد

$$x_{n+۱} = \frac{x_n + ۱۷y_n}{۲}, \quad y_{n+۱} = \frac{x_n + y_n}{۲}$$

در ضمن طبق رابطه‌ی (۱) داریم

$$|x_{n+۱}^۲ - ۱۷y_{n+۱}^۲| = ۴|x_n^۲ - ۱۷y_n^۲| = ۴ \times ۴^n = ۴^{n+۱}$$

همچنین اگر $\frac{x_n-y_n}{۲}$ فرد باشد، $x_{n+۱}$ و $y_{n+۱}$ را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$x_{n+۱} = \frac{x_n - ۱۷y_n}{۲}, \quad y_{n+۱} = \frac{x_n - y_n}{۲}; \quad n \geq ۱$$

۲) در حالت $n = ۱$، معادله دارای جواب $x_۱ = ۲$ و $y_۱ = ۱$ است. فرض کنید اعداد طبیعی x_n و y_n در رابطه‌ی

$$x_n^۲ + x_n y_n + y_n^۲ = ۷^n$$

صدق می‌کنند. تعریف می‌کنیم $x_{n+1} = 2x_n - y_n$ و $y_{n+1} = x_n + 3y_n$. بنابراین:

$$x_{n+1}^2 + x_{n+1}y_{n+1} + y_{n+1}^2 = 7(x_n^2 + x_ny_n + y_n^2) = 7 \times 7^n = 7^{n+1}$$

۳) اگر $n = 1$، می‌توان قرار داد $x_1 = 1$ و $y_1 = z_1 = 2$. فرض کنید اعداد صحیح x_n، y_n و z_n وجود دارند، به‌نحوی که

$$x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = 3^{2^n}$$

تعریف می‌کنیم

$$x_{n+1} = x_n^2 + y_n^2 - z_n^2\,, \quad y_{n+1} = 2y_nz_n\,, \quad z_{n+1} = 2x_ny_n$$

داریم

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 + z_{n+1}^2 &= (x_n^2 + y_n^2 - z_n^2) + 4y_n^2z_n^2 + 4x_n^2z_n^2 \\ &= (x_n^2 + y_n^2 + z_n^2)^2 = (3^{2^n})^2 = 3^{2\cdot 2^n} = 3^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

۴) به راحتی می‌توان بررسی کرد که:

$$\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_2} = 1\,, \quad \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_3} = 1$$

بنابراین کافی است مسئله را در حالت $n \geq 5$ حل کنیم. اگر n فرد باشد، یعنی $n = 2k - 1$، $(k \geq 3)$، آن‌گاه:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + \cdots + \frac{1}{t_{k-1}} + \frac{k+1}{t_k} \\ &= \frac{2}{2 \times 3} + \frac{2}{3 \times 4} + \cdots + \frac{2}{(k-1)k} + \frac{2}{k} \\ &= 2\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)\right] + \frac{2}{k} = 1 \end{aligned}$$

ضمن اینکه سمت چپ تساوی بالا، مجموعِ $n = 2k - 1 = (k+1) + (k-2)$ عدد مثلثی است.

حال اگر n عددی زوج باشد، یعنی $n = 2k$، $(k \geq 3)$، در این صورت در حالت $k = 3$ داریم $\frac{6}{t_3} = 1$. برای مقادیر $k > 3$ نیز داریم:

$$\frac{2}{t_3} + \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_4} + \cdots + \frac{1}{t_{k-1}} + \frac{k+1}{t_k}$$

$$= \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۳ \times ۴} + \frac{۲}{۴ \times ۵} + \cdots + \frac{۲}{(k-۱)k} + \frac{۲}{k}$$
$$= \frac{۱}{۳} + ۲\left[(\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴}) + (\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۵}) + \cdots + (\frac{۱}{k-۱} - \frac{۱}{k})\right] + \frac{۲}{k} = ۱$$

در ضمن سمت چپ تساوی فوق، مجموعِ $n = ۲k = (k+۱) + (k-۱)$ عدد مثلثی است.

۵) توجه کنید که

$$\frac{۱}{a^۲} = \frac{۱}{(۲a)^۲} + \frac{۱}{(۲a)^۲} + \frac{۱}{(۲a)^۲}\frac{۱}{(۲a)^۲}$$

بنابراین اگر $(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) = (a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$ جواب صحیحی از معادله‌ی

$$\frac{۱}{x_۱^۲} + \frac{۱}{x_۲^۲} + \cdots + \frac{۱}{x_n^۲} = ۱$$

باشد، آن‌گاه $n + ۳$ تاییِ

$$(a_۱, a_۲, \ldots, a_{n-۱}, ۲a_n, ۲a_n, ۲a_n, ۲a_n)$$

جوابی صحیح از معادله‌ی

$$\frac{۱}{x_۱^۲} + \frac{۱}{x_۲^۲} + \cdots + \frac{۱}{x_{n+۳}^۲} = ۱$$

است. در نتیجه اگر معادله را به‌ازای $n = ۶, ۷, ۸$ حل کنیم، به صورت استقرایی برای همه‌ی مقادیر n جوابی برای معادله به دست می‌آید.

اگر $n = ۶$، آن‌گاه $(۲, ۲, ۲, ۳, ۳, ۶)$ جوابی از معادله است. همچنین در حالت $n = ۷$، $(۲, ۲, ۲, ۴, ۴, ۴, ۴)$ و در حالت $n = ۸$، $(۲, ۲, ۲, ۳, ۴, ۴, ۱۲, ۱۲)$ جوابی از معادله است.

۶) اگر $s = ۲$، آن‌گاه $x_۰ = ۱۲$، $x_۱ = ۱۵$ و $x_۲ = ۲۰$ جوابی از معادله است. در واقع به راحتی می‌توان نشان داد که

$$\frac{۱}{۱۲^۲} = \frac{۱}{۱۵^۲} + \frac{۱}{۲۰^۲}$$

حال فرض می‌کنیم حکم مسئله برای هر $s \geq ۲$ برقرار است، یعنی اعداد طبیعی $x_۰ < x_۱ < \cdots < x_s$ وجود دارند، به‌نحوی که

$$\frac{۱}{x_۰^۲} = \frac{۱}{x_۱^۲} + \frac{۱}{x_۲^۲} + \cdots + \frac{۱}{x_s^۲}$$

قرار می‌دهیم $y_\circ = ۱۲x_\circ$، $y_۱ = ۱۵x_\circ$. همچنین برای هر $i = ۲,۳,\dots,s+۱$ فرض می‌کنیم $y_i = ۲x_{i-۱}$. در این صورت به راحتی می‌توان دید که $y_\circ < y_۱ < \cdots < y_{s+۱}$. علاوه بر این، داریم

$$\frac{۱}{y_\circ^۲} = \frac{۱}{x_\circ^۲}\cdot\frac{۱}{۱۲^۲} = \frac{۱}{x_\circ^۲}\left(\frac{۱}{۱۵^۲}+\frac{۱}{۲\circ^۲}\right) = \frac{۱}{۱۵^۲}\cdot\frac{۱}{x_\circ^۲} + \frac{۱}{۲\circ^۲}\left(\frac{۱}{x_۱^۲}+\cdots+\frac{۱}{x_s^۲}\right)$$
$$= \frac{۱}{y_۱^۲}+\frac{۱}{y_۲^۲}+\cdots+\frac{۱}{y_s^۲}+\frac{۱}{y_{s+۱}^۲}$$

به این ترتیب، اثبات استقرائیمان کامل می‌شود.

۷) فرض کنید m عددی طبیعی و مفروض است. برای حالت $s = ۲^m$، معادله دارای جواب $x_۱ = x_۲ = \cdots = x_s = ۲$ در اعداد طبیعی است.

حال a را عددی طبیعی و ثابت در نظر بگیرید و فرض کنید معادله برای عدد طبیعی s، در اعداد طبیعی جواب دارد. بنابراین اعداد طبیعی $t_۱, t_۲, \dots, t_n$ وجود دارند، به‌نحوی که

$$\frac{۱}{t_۱^m}+\frac{۱}{t_۲^m}+\cdots+\frac{۱}{t_s^m} = ۱$$

از آنجایی که $\frac{۱}{t_s^m} = \frac{a^n}{(at_s)^m}$، اگر قرار دهیم

$$x_۱ = t_۱\ ,\ x_۲ = t_۲\ ,\quad \dots\ ,\quad x_{s-۱} = t_{s-۱}\ ,\ x_s = x_{s+۱} = \cdots = x_{s+a^m-۱} = at_s$$

خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{x_۱^m}+\frac{۱}{x_۲^m}+\cdots+\frac{۱}{x_{s+a^m-۱}^m} = ۱$$

در نتیجه اگر معادله‌ی مسئله، به‌ازای عددی طبیعی مانند s جواب داشته باشد، آن‌گاه معادله به‌ازای $s + a^n - ۱$ نیز در اعداد طبیعی حل‌شدنی است. به صورت کلی‌تر، به‌ازای هر عدد طبیعی k، معادله به‌ازای $s + (a^m - ۱)k$، جواب طبیعی دارد. با جایگذاری $a = ۲$ و $a = ۲^m - ۱$ (برای $s = ۲^m$) نتیجه می‌گیریم که معادله، به‌ازای هر عدد طبیعی به فرم $۲^m + (۲^m - ۱)k + [(۲^m - ۱)^m - ۱]l$، که k و l اعدادی طبیعی و دلخواهند، جواب دارد.

در ادامه، از مطلب زیر استفاده می‌کنیم.

لم ۱.۵.۴ اگر a و b دو عدد طبیعی و نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه همه‌ی اعداد طبیعی $n \geq ab + ۱$ را می‌توان به‌ازای اعدادی طبیعی مانند x و y، به صورت $n = ax + by$ نمایش داد.

اثبات. با استفاده از لمی که در راه‌حل مثال ۵ بخش ۳.۱ گفتیم، نتیجه می‌گیریم که اعداد طبیعی u و v وجود دارند به نحوی که $au - bv = ۱$. لذا برای اعداد $n > ab$ داریم $anu - bnv = n > ab$ و نتیجتاً

$$\frac{nu}{b} - \frac{nv}{a} > ۱$$

بنابراین عددی طبیعی مانند t وجود دارد که $\frac{nv}{a} < t < \frac{nu}{b}$. فرض کنید $x = nu - bt$ و $y = at - nv$. در این صورت $x, y > ۰$ و نیز

$$ax + by = a(nu - bt) + b(at - nv) = n \quad \square$$

به وضوح اعداد $۲^m - ۱$ و $(۲^m - ۱)^m - ۱$ نسبت به هم اولند. بنابراین طبق لم بالا، هر عدد طبیعی بزرگ‌تر یا مساوی $(۲^m - ۱)[(۲^m - ۱)^m - ۱] + ۱$ را می‌توان به‌ازای مقادیری طبیعی از k و l به صورت $(۲^m - ۱)k + [(۲^m - ۱)^m - ۱]l$ نمایش داد. لذا معادله‌ی مسئله برای هر عدد طبیعیِ

$$s \geq ۲^m + (۲^m - ۱)[(۲^m - ۱)^m - ۱] + ۱$$

در اعداد طبیعی جواب دارد.

ملاحظه. کران پایینی که برای s به دست می‌آوریم، بهترین مقدار ممکن نیست. به عنوان مثال، اگر $m = ۳$، با توجه به راه‌حل بالا کران پایین s برابر است با $۲^۳ + (۲^۳ - ۱) \cdot [(۲^۳ - ۱)^۳ - ۱] + ۱ = ۲۴۰۳$؛ در صورتی که در مثال ۴ نشان دادیم که برای sهای بزرگ‌تر از ۴۱۱ این معادله جواب دارد.

۸) اگر k عددی زوج باشد، قرار می‌دهیم $k = ۲n$. حال اتحاد زیر را در نظر بگیرید:

$$۲n = (۳n)^۲ + (۴n - ۱)^۲ - (۵n - ۱)^۲$$

از آنجایی که برای هر $n > ۱$ داریم $۳n < ۴n - ۱ < ۵n - ۱$ و نیز

$$۰ = ۳^۲ + ۴^۲ - ۵^۲, \quad ۲ = ۵^۲ + ۱۱^۲ - ۱۲^۲$$

در نتیجه در این حالت، معادله جواب دارد.

همچنین اگر k فرد باشد، قرار می‌دهیم $k = ۲n + ۳$. در این صورت کافی است از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم:

$$۲n + ۳ = (۳n + ۲)^۲ + (۴n)^۲ - (۵n + ۱)^۲$$

با توجه به اینکه برای هر $n > ۲$ داریم $۳n + ۲ < ۴n < ۵n + ۱$ و در ضمن

$$۱ = ۴^۲ + ۷^۲ - ۸^۲ , \quad ۳ = ۴^۲ + ٦^۲ - ۷^۲ ,$$
$$۵ = ۴^۲ + ۵^۲ - ٦^۲ , \quad ۷ = ٦^۲ + ۱۴^۲ - ۱۵^۲$$

بنابراین در حالت فرد بودن k نیز نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌شود.

۹) توجه کنید که $x_۱ = ۳$، $y_۱ = ۵$ جوابی از معادله‌ی داده شده، است. دنباله‌های $(x_n)_{n\geq ۱}$ و $(y_n)_{n\geq ۱}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_{n+۱} = ۳x_n + ۲y_n + ۱ \\ y_{n+۱} = ۴x_n + ۳y_n + ۲ \end{cases} ; \quad x_۱ = ۳ , \quad y_۱ = ۵$$

حال فرض کنید (x_n, y_n) جوابی از معادله‌ی مسئله است. در این صورت با توجه به رابطه‌ی $x_n^۲ + (x_n + ۱)^۲ = y_n^۲$ نتیجه می‌گیریم:

$$x_{n+۱}^۲ + (x_{n+۱} + ۱)^۲ = (۳x_n + ۲y_n + ۱)^۲ + (۳x_n + ۲y_n + ۲)^۲ = (۴x_n + ۳y_n + ۲)^۲$$

بنابراین $x_{n+۱}^۲ + (x_{n+۱} + ۱)^۲ = y_{n+۱}^۲$؛ یعنی $(x_{n+۱}, y_{n+۱})$ نیز جوابی از معادله است.

۱۰) ثابت می‌کنیم که تنها جواب معادله‌ی

$$x_۱^۲ + \cdots + x_m^۲ = \frac{۲m + ۱}{۳}(x_۱ + \cdots + x_m)$$

در اعداد طبیعی متمایز، صرف‌نظر از جایگشت x_iها، عبارتست از $x_۱ = ۱$، $x_۲ = ۲$، ... و $x_m = m$.

برای اثبات این مطلب، نیاز به لم کمکی زیر داریم:

لم ۲.۵.۴ اگر $a_۱, a_۲, \ldots$ دنباله‌ای از اعداد طبیعی متمایز باشد، آن‌گاه برای هر $n \geq ۱$ نابرابری زیر برقرار است.

$$a_۱^۲ + a_۲^۲ + \cdots + a_n^۲ \geq \frac{۲n + ۱}{۳}(a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n)$$

(المپیاد ریاضی رومانی)

اثبات. بدون از دست دادن کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $۰ < a_۱ < a_۲ < \cdots$.

نابرابری لم را با استقرا ثابت می‌کنیم. برای $n = 1$، از رابطه‌ی $a_1 \geq 1$ نتیجه می‌گیریم:

$$a_1^2 \geq \frac{2 \times 1 + 1}{3} a_1$$

حال کافی است ثابت کنیم:

$$a_{n+1}^2 \geq \frac{2}{3}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + \frac{2n+3}{3} a_{n+1}$$

و یا به صورت معادل:

$$3a_{n+1}^2 - (2n+3)a_{n+1} \geq 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

از آنجایی که

$$2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \leq 2(1 + 2 + \cdots + a_n) = a_n(a_n + 1) \leq (a_{n+1} - 1)a_{n+1}$$

بنابراین کافی است نشان دهیم:

$$3a_{n+1}^2 - (2n+3)a_{n+1} \geq (a_{n+1} - 1)a_{n+1}$$

اما این نابرابری نیز هم ارز است با $a_{n+1} \geq n + 1$، که به وضوح برقرار است. □

حال به مسئله باز می‌گردیم. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m$. در این حالت،

$$x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 2, \quad \ldots, \quad x_m \geq m$$

داریم:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 = \frac{2m+1}{3}(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)$$

از طرفی با توجه به لم، نتیجه می‌گیریم:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{m-1}^2 \geq \frac{2m-1}{3}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1})$$

در نتیجه:

$$x_m^2 \leq \frac{2}{3}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1}) + \frac{2m+1}{3} \cdot x_m$$

از آنجایی که $x_{m-1} \leq x_m - 1$، $x_{m-2} \leq x_m - 2$، ... و $x_1 \leq x_m - (m-1)$، داریم:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1} \leq (m-1)x_m - \frac{(m-1)m}{2}$$

بنابراین

$$x_m^2 \leq \frac{2(m-1)}{3}x_m - \frac{(m-1)m}{3} + \frac{2m+1}{3}x_m$$

و یا

$$x_m^2 - \frac{4m-1}{3}x_m + \frac{(m-1)m}{3} \leq 0$$

این نابرابری را می‌توان به صورت $(x_m - m)\left(x_m - \frac{m-1}{3}\right) \leq 0$ نوشت. لذا از آنجایی که $x_m > \frac{m-1}{3}$، پس باید داشته باشیم $x_m \leq m$؛ یعنی $x_1 = 1$، $x_2 = 2$، ...، $x_{m-1} = m - 1$ و $x_m = m$.

۶.۴ روش نزول نامتناهی فرما

۱) توجه کنید که $(0, 0, 0)$ جوابی از معادله است. فرض کنید (x_1, y_1, z_1) جواب دیگری از معادله است. اگر یکی از مؤلفه‌های x_1، y_1 و یا z_1 برابر صفر باشند، آن‌گاه با توجه به گنگ بودن $\sqrt[3]{3}$ یا $\sqrt[3]{9}$ نتیجه می‌گیریم که دو مغیر دیگر نیز برابر صفرند. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم $x_1, y_1, z_1 > 0$.

با استدلالی مشابه آنچه که در مثال ۱ انجام دادیم، به راحتی می‌توان نشان داد که $x_1 = 3x_2$، $y_1 = 3y_2$ و $z_1 = 3z_2$ و (x_1, y_1, z_1) جوابی از معادله است. به این ترتیب، دنباله‌ای از جواب‌های طبیعی $(x_n, y_n, z_n)_{n\geq 1}$ به دست می‌آید که $x_1 > x_2 > x_3 > \cdots$. اما این نتیجه، متناقض با روش نزول نامتناهی نوع ۱ است. بنابراین تنها جواب معادله عبارتست از $(0, 0, 0)$.

۲) تنها جواب معادله، سه‌تایی $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ است. برای اثبات این مطلب، ابتدا توجه کنید که x، y و z نمی‌توانند همگی فرد باشند، چرا که در این صورت $x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ عددی فرد می‌شود و بنابراین مخالف صفر خواهد بود. در نتیجه $2|xyz$ و لذا $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ بر ۴ بخش‌پذیر می‌شود. از آنجایی که هر مربع کامل به پیمانه‌ی ۴ با یکی از اعداد ۰ یا ۱ همنهشت است، در نتیجه x، y و z هر

سه باید اعدادی زوج باشند. قرار می‌دهیم $x = 2x_1$، $y = 2y_1$ و $z = 2z_1$. در این صورت،

$$4x_1^2 + 4y_1^2 + 4z_1^2 = 16x_1y_1z_1 \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1$$

با توجه به اینکه سمت راست معادله‌ی به دست آمده بر ۴ بخش‌پذیر است، باز هم x_1، y_1 و z_1 باید اعدادی زوج باشند. لذا قرار می‌دهیم $x_1 = 2x_2$، $y_1 = 2y_2$ و $z_1 = 2z_2$. با جایگذاری مقادیر x_1، y_1 و z_1 در معادله، به معادله‌ی $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 8x_2y_2z_2$ می‌رسیم. در حالت کلی، اگر $n \geq 1$، آن‌گاه از رابطه‌ی $x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = 2^{n+1}x_ny_nz_n$ نتیجه می‌گیریم x_n، y_n و z_n همگی اعدادی زوجند. پس می‌توان نوشت $x_n = 2x_{n+1}$، $y_n = 2y_{n+1}$ و $z_n = 2z_{n+1}$ و معادله‌ی $x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 + z_{n+1}^n = 2^{n+2}x_{n+1}y_{n+1}z_{n+1}$ به دست می‌آید. با تکرار این روند، دنباله‌ی نامتناهی $x_1, x_2, x_3, \ldots$ از اعداد صحیح حاصل می‌شود که $x_i = 2x_{i+1}$ (برای هر i). بنابراین $|x_1| > |x_2| > |x_3| > \cdots$، که متناقض با روش نزول نامتناهی فرمای نوع ۱ است.

۳) اگر $u = 0$، آن‌گاه $x = y = z = 0$ و جوابی از معادله به دست می‌آید. حال نشان می‌دهیم که معادله جواب دیگری ندارد. فرض کنید اعداد صحیح x، y، z و u در معادله‌ی داده شده صدق می‌کنند و $u \neq 0$. قرار می‌دهیم $d = u^4$. اگر عدد u بر ۵ بخش‌پذیر نباشد، طبق قضیه‌ی کوچک فرما داریم $u^4 \overset{5}{\equiv} 1$ در نتیجه باید داشته باشیم:

$$x^4 + y^4 + z^4 \overset{5}{\equiv} 4$$

اما این رابطه‌ی همنهشتی، امکان پذیر نیست؛ چرا که طبق قضیه‌ی فرما اعداد x^4، y^4 و z^4 به پیمانه‌ی ۵ همنهشت با ۰ یا ۱ اند. بنابراین u بر ۵ بخش‌پذیر است، یعنی $u = 5u_1$، که u_1 عددی صحیح است. به این ترتیب خواهیم داشت

$$x^4 + y^4 + z^4 \overset{5}{\equiv} 0$$

از این رابطه نتیجه می‌گیریم که x، y و z همگی بر ۵ بخش‌پذیرند؛ یعنی $x = 5x_1$، $y = 5y_1$ و $z_1 = 5z_1$، که $x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{Z}$. با جایگذاری این مقادیر در معادله‌ی اصلی و تقسیم معادله‌ی به دست آمده بر 5^4، به معادله‌ی

$$x_1^4 + y_1^4 + z_1^4 = 9u_1^4$$

می‌رسیم. لذا x_1، y_1، z_1 و u_1 نیز در معادله صدق می‌کنند. در ضمن

$$u_1^4 = \frac{u^4}{5^4} < u^4 = d$$

با ادامه دادن این روند، دنباله‌ی $u_1^4 > u_2^4 > u_3^4 > \cdots$ حاصل می‌شود. که متناقض با روش نزول نامتناهی نوع ۱ است.

۴) فرض کنید اعداد طبیعی x، y و z در معادله‌ی مسئله صدق می‌کنند و $d = xy$. اگر $d = 1$ آن‌گاه $x = y = 1$ و با توجه به معادله داریم $z = 0$، که غیرممکن است. بنابراین $d > 1$. عدد p را عامل اولی از d در نظر بگیرید. از آنجایی که

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2 = 2xyz \overset{p}{\equiv} 0$$

در نتیجه $x \overset{p}{\equiv} y$ و یا $x \overset{p}{\equiv} -y$. با توجه به اینکه $p|xy$، پس x و یا y بر p بخش‌پذیر است. در نتیجه $x \overset{p}{\equiv} y \overset{p}{\equiv} 0$. بنابراین $x_1 = \frac{x}{p}$ و $y_1 = \frac{y}{p}$ اعدادی طبیعی‌اند و نیز:

$$(px_1)^2 - (py_1)^2 = 2(px_1)(py_1)z$$

با تقسیم تساوی فوق بر p^2، می‌بینیم که x_1، y_1 و z نیز در معادله صدق می‌کنند. در ضمن:

$$x_1 y_1 = \frac{x}{p} \cdot \frac{y}{p} = \frac{d}{p^2} < d$$

به این ترتیب، دنباله‌ای نزولی از اعداد طبیعی $x_1 > x_2 > x_3 > \cdots$ به دست می‌آید، که غیرممکن است.

۵) با در نظر گرفتن معادله به پیمانه‌ی ۴ و بررسی فرد یا زوج بودن a، b و c نشان می‌دهیم که این سه عدد باید لزوماً زوج باشند. توجه کنید که می‌توانیم فرض کنیم که a، b و c همگی اعدادی نامنفی‌اند. برای اعداد زوج و فرد داریم:

$$(2n)^2 \overset{4}{\equiv} 0 \quad \text{و} \quad (2n+1)^2 \overset{4}{\equiv} 1$$

حالت اول: a، b و c همگی اعدادی فردند. در این صورت

$$a^2 + b^2 + c^2 \overset{4}{\equiv} 3 \quad \text{و} \quad a^2 b^2 \overset{4}{\equiv} 1$$

حالت دوم: دو تا از اعداد فردند و دیگری زوج است. در این صورت

$$a^2 + b^2 + c^2 \overset{4}{\equiv} 2 \quad \text{و} \quad a^2 b^2 \overset{4}{\equiv} 1$$

حالت دوم: دو تا از اعداد زوجند و دیگری فرد است. در این صورت

$$a^2 + b^2 + c^2 \overset{4}{\equiv} 1 \quad \text{و} \quad a^2b^2 \overset{4}{\equiv} 0$$

بنابراین حالت‌های فوق امکان پذیر نیستند. از آنجایی که تنها حالت باقی‌مانده، زوج بودن a، b و c است، قرار می‌دهیم $a = 2a_1$، $b = 2b_1$ و $c = 2c_1$. در نتیجه به معادله‌ی

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 4a_1^2b_1^2\,; \quad a_1 \leq a\,, \quad b_1 \leq b\,, \quad c_1 \leq c$$

می‌رسیم. می‌دانیم $4a_1^2b_1^2 \overset{4}{\equiv} 0$ و نیز هر یک از اعداد a_1^2، b_1^2 و c_1^2 به پیمانه‌ی ۴ همنهشت با ۰ یا ۱ اند. بنابراین می‌بایست داشته باشیم $a_1^2 \overset{4}{\equiv} b_1^2 \overset{4}{\equiv} c_1^2 \overset{4}{\equiv} 0$. پس a_1، b_1 و c_1 اعدادی زوجند و داریم $a_1 = 2a_2$، $b_1 = 2b_2$ و $c_1 = 2c_2$. به این ترتیب، معادله‌ی

$$16a_2^2b_2^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$$

به‌دست می‌آید. با استدلالی مشابه نتیجه می‌گیریم که a_2، b_2 و c_2 نیز اعدادی زوجند و نتیجتاً

$$64a_3^2b_3^2 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2$$

که $a = 8a_3$، $b = 8b_3$ و $c = 8c_3$. اگر این روند را ادامه دهیم، اعداد a، b و c بر هر توان دلخواهی از ۲ بخش‌پذیر می‌شوند، که غیرممکن است. لذا تنها جواب معادله عبارتست از $a = b = c = 0$.

۶) الف) فرض کنید (x, y, z) جوابی از معادله است که در آن $z \neq 3$. در این صورت $x \neq y$، والّا خواهیم داشت $z^2(z-2) = 1$ که غیرممکن است، چرا که $z - 2 \neq 1$. داریم:

$$\begin{aligned} 0 = x^2 + y^2 + 1 - xyz &= (x - yz)^2 + y^2 + 1 + xyz - y^2z^2 \\ &= (yz - x)^2 + y^2 + 1 - (yz - x)yz \end{aligned}$$

بنابراین $(yz - x, y, z)$ نیز جوابی از معادله است. از آنجایی که $x(yz - x) = xyz - x^2 = y^2 + 1 > 0$، نتیجه می‌گیریم $yz - x > 0$. توجه داشته باشید که اگر $x > y$، آن‌گاه $x(yz - x) = y^2 + 1 < x^2$. بنابراین $x > yz - x$، که نشان می‌دهد جواب جدید، از این لحاظ که $x + y > (yz - x) + y$، از جواب قبلی

...تر است. به هر حال، با فرض $x \neq y$، این روند می‌تواند بی‌نهایت بار تکرار شود، که غیرممکن است؛ زیرا در این روند، دنباله‌ای نزولی و نامتناهی از اعداد طبیعی ساخته می‌شود، که متناقض با روش نزولی نامتناهی نوع ۱ است. این تناقض نشان می‌دهد که معادله در حالت $z \neq ۳$ جوابی ندارد.

ب) به وضوح $(۱, ۱)$ جوابی از معادله‌ی

$$x^۲ + y^۲ + ۱ = ۳xy$$

است. فرض کنید زوج (a, b) که $a > b$، جواب دیگری از معادله است. در این صورت:

$$b^۲ + (۳b - a)^۲ + ۱ = ۳b(۳b - a)$$

پس $(b, ۳b - a)$ نیز جوابی از معادله است. همچنین از رابطه‌ی

$$(a - b)(a - ۲b) = a^۲ - ۳ab + ۲b^۲ = b^۲ - ۱ > ۰$$

نتیجه می‌گیریم که $a > ۲b$. لذا $۳b - a < b$. بنابراین مؤلفه‌ی دوم (b) در جواب جدید، کوچک‌تر است. باتکرار این روند، در نهایت به جوابی می‌رسیم که در آن $b = ۱$. در نتیجه $۳a = a^۲ + ۲$، که منجر به مقادیر $a = ۱$ و $a = ۲$ می‌شود. بنابراین همه‌ی جواب‌های معادله، از زوج $(a_۱, b_۱) = (۱, ۱)$ و با رابطه‌ی بازگشتی

$$(a_{n+۱}, b_{n+۱}) = (۳a_n - b_n, a_n)$$

به دست می‌آیند. دنباله‌های $(a_n)_{n \geq ۱}$ و $(b_n)_{n \geq ۱}$ در یک رابطه‌ی بازگشتی مشترک صدق می‌کنند:

$$x_{n+۱} = ۳x_n - x_{n-۱}\,; \quad x_۱ = ۱\,, \quad x_۲ = ۲$$

این رابطه‌ی بازگشتی، جملات با اندیس فرد دنباله‌ی فیبوناچی را تولید می‌کند. در نتیجه برای هر $n \geq ۱$ داریم $(a_n, b_n) = (F_{۲n+۱}, F_{۲n-۱})$.

به این ترتیب جواب‌های معادله، عبارتند از $(۱, ۱)$، $(F_{۲n+۱}, F_{۲n-۱})$ و $(F_{۲n-۱}, F_{۲n+۱})$، که $n \geq ۱$.

ملاحظات. ۱) شکل‌های دیگری از این سوال، در مسابقات ریاضی مختلف مطرح شده است. که در اینجا به نمونه‌ای از آن‌ها اشاره می‌کنیم:

همه‌ی زوج‌های (m,n) از اعداد طبیعی را با این ویژگی بیابید که $mn|(m-n)^2+1$.

(اردوی تابستانی المپیاد ریاضی آمریکا)

۲) معادله‌ی دیوفانتی

$$x^2+y^2+z^2=3xyz$$

تحت عنوان **معادله‌ی مارکوف** معروف است. ساختار حل این مسئله کاملاً پیچیده است. با توجه به مسئله‌ی فوق، نتیجه می‌گیریم که سه‌تایی‌های $(1,1,1)$، $(F_{2n-1},F_{2n+1},1)$ و $(F_{2n+1},F_{2n-1},1)$ در معادله صدق می‌کنند.

۷) به وضوح x و y نسبت به هم اولند. داریم

$$x^2+y^2+1=x(x+v)=y(y+u) \qquad (1)$$

در نتیجه $x|x^2+y^2+1$ و $y|x^2+y^2+1$. لذا عدد طبیعی z وجود دارد، به‌نحوی که

$$x^2+y^2+1=xyz \qquad (2)$$

از مسئله‌ی ٦ نتیجه می‌گیریم که $z=3$، $x=F_{2n-1}$ و $y=F_{2n+1}$ (و یا بالعکس). از طرفی طبق رابطه‌ی (۱) و از آنجایی که $x^2+y^2+1=3xy$، داریم:

$$x+v=3y\ , \qquad y+u=3x$$

بنابراین:

$$u=3x-y=3F_{2n-1}-F_{2n+1}=F_{2n-3}\ ,$$
$$v=3y-x=3F_{2n+1}-F_{2n-1}=F_{2n+3}$$

به این ترتیب جواب‌های دستگاه معادلات عبارتند از:

$$(x,y,u,v)=(F_{2n-1},F_{2n+1},F_{2n-3},F_{2n+3}),\ (F_{2n+1},F_{2n-1},F_{2n+3},F_{2n-3})$$

که $n\geq 1$ و $F_{-1}=1$.

ملاحظه. شکل‌های دیگری از این مسئله در اردوها و رقابت‌های ریاضی مطرح شده است، که در اینجا به نمونه‌ای از آن اشاره می‌کنیم.

ثابت کنید بی‌نهایت زوج (a,b) از اعداد طبیعی وجود دارد، به‌طوری که $a|b^2+1$ و $b|a^2+1$.

(تورنمنت شهرها)

۸) کافی است حالت $z = ۳$ را بررسی کنیم. در این صورت به معادله‌ی $x^۲ + y^۲ + ۹ = ۳xy$ می‌رسیم. با جایگذاری $x = ۳u$ و $y = ۳v$، معادله به شکل $u^۲ + v^۲ + ۱ = ۳uv$ درمی‌آید. همان طور که در مسئله‌ی ٦ دیدیم، جواب‌های این معادله عبارتند از

$$(u, v) = (۱, ۱),\ (F_{۲n-۱}, F_{۲n+۱}),\ (F_{۲n+۱}, F_{۲n-۱})\ ; \quad n \geq ۱$$

بنابراین دسته‌ای نامتناهی از جواب‌های معادله، به صورت به‌دست می‌آید:

$$(x, y, z) = (۳F_{۲n+۱}, ۳F_{۲n-۱}, ۳)\ ; \quad n \geq ۱$$

۹) نشان می‌دهیم که یا $a = b = ۱$ و یا a و b دو مربع کامل متوالیند.

شرط بخش‌پذیری مسئله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$k(a + b + ab) = a^۲ + b^۲ + ۱\ ; \quad k \in \mathbb{N} \qquad (۱)$$

اگر $k = ۱$، آن‌گاه معادله‌ی (۱) هم ارز است با:

$$(a - b)^۲ + (a - ۱)^۲ + (b - ۱)^۲ = ۰$$

لذا $a = b = ۱$. اگر $k = ۲$، معادله‌ی (۲) را می‌توان به صورتِ

$$۴a = (b - a - ۱)^۲$$

بانویسی کرد. درنتیجه a باید یک مربع کامل باشد، یعنی $a = d^۲$. به این ترتیب $b - d^۲ - ۱ = \pm ۲d$ و نتیجتاً $b = (d \pm ۱)^۲$ و a و b دو مربع کامل متوالی می‌شوند.

حال فرض کنید جواب‌های دیگری از معادله‌ی (۱) وجود دارد که در آن، $k \geq ۳$. زوج (a, b) را جوابی از معادله در نظر می‌گیریم که در آن a کمترین مقدار ممکن است و فرض می‌کنیم $a \leq b$. معادله‌ی (۱) را به صورت یک عبارت درجه‌ی دوم برحسب b مرتب می‌کنیم:

$$b^۲ - k(a + ۱)b + (a^۲ - ka + ۱) = ۰$$

از آنجایی که یکی از ریشه‌ها، یعنی b، عددی صحیح است، ریشه‌ی دوم نیز که آن را r می‌نامیم باید عددی صحیح باشد. توجه کنیدکه $r = k(a + ۱) - b$. در ضمن به راحتی می‌توان نشان داد:

$$k = \frac{a^۲ + b^۲ + ۱}{a + b + ۱} > \frac{a + ۱}{b}$$

در نتیجه r عددی مثبت است. می‌دانیم $a \le b$ و حاصل ضرب ریشه‌ها $a^۲ - ka + ۱$ است که از $a^۲$ کمتر است؛ بنابراین $r < a$. اما در این صورت (r, a) جوابی از معادله است که با حداقل بودن a در تناقض است. پس در این حالت معادله جواب ندارد.

۱۰) فرض کنید $f(x,y) = x^۲ + axy - y^۲$. داریم $f(x_۱, x_۲) = f(۱, a) = ۱$. با استفاده از استقرا، به راحتی می‌توان نشان داد که برای هر $n \ge ۱$، زوج $(x_n, x_{n+۱})$ جوابی از معادله است.

حال فرض کنید $(x,y) \in \mathbb{N}_۰ \times \mathbb{N}_۰$ جوابی از معادله‌ی داده شده، است. از رابطه‌ی $x^۲ + axy - y^۲ = \pm ۱$ نتیجه می‌گیریم که $y(y - ax) = x^۲ \pm ۱ \ge ۰$ و تساوی تنها زمانی اتفاق می‌افتند که $x = ۱$ و $y = a$. در این حالت داریم $(x,y) = (x_۱, x_۲)$ و این جواب با حکم مسئله سازگار است. اما اگر $y > ax$، زوج $(x^{(۱)}, y^{(۱)}) = (y - ax, x)$ نیز جوابی از معادله است، چرا که از رابطه‌ی $f(x,y) = \pm ۱$ نتیجه می‌گیریم که $f(y - ax, x) = \mp ۱$. علاوه بر این می‌توان مانند مسائل قبل نشان داد که $x + y \ge x^{(۱)} + y^{(۱)}$ و $y^{(۱)} \ge ax^{(۱)}$. به این ترتیب دنباله‌ای از جواب‌های $(x^{(n)}, y^{(n)})_{n \ge ۱}$ به دست می‌آید، به‌نحوی که $y^{(n)} - ax^{(n)} \ge ۰$ و نیز

$$x + y = x^{(۱)} + y^{(۱)} \ge x^{(۲)} + y^{(۲)} \ge \cdots$$

با توجه به روش نزول نامتناهی نوع ۲ نتیجه می‌گیریم که عددی طبیعی مانند k وجود دارد، به‌نحوی که برای هر $n \ge k$ داریم $x^{(n)} + y^{(n)} = x^{(k)} + y^{(k)}$. در این صورت، برای جواب $(x^{(k)}, y^{(k)})$ داریم $y^{(k)} = ax^{(k)}$ و نتیجتاً $(x,y) = (x_k, x_{k+۱})$.

۱۱) توجه داشته باشید که معادله نسبت به m و n متقارن است. ثابت می‌کنیم جواب‌های معادله، زوج‌های نامرتب

$$(۵F_{۲k}^۲, ۵F_{۲k+۲}^۲)\ , \quad (L_{۲k-۱}^۲, L_{۲k+۱}^۲)$$

اند، که k عددی صحیح و نامنفی است و $\{F_j\}$ و $\{L_i\}$ دنباله‌های فیبوناجی و لوکا هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$F_۱ = F_۲ = ۱\ , \quad L_۱ = ۱\ , \quad L_۲ = ۳$$

$$F_{j+۲} = F_{j+۱} + F_j\ ; \quad L_{j+۲} = L_{j+۱} + L_j\ ; \quad j \ge ۱$$

برای اصلاح دنباله‌ی لوکا، فرض می‌کنیم $L_{-1} = -1$ و $L_0 = 2$. بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک m و n را با g نمایش می‌دهیم. در این صورت $m = gm_1$ و $n = gn_1$. از آنجایی که $9mn$ مربع کامل است، m_1 و n_1 باید مربع باشند. قرار می‌دهیم $m_1 = x^2$ و $n_1 = y^2$. به این ترتیب معادله‌ی مسئله به صورتِ

$$(gx^2 + gy^2 - 5)^2 = 9y^2x^2y^2$$

درمی‌آید. با جذر گرفتن از طرفین این رابطه خواهیم داشت:

$$g(x^2 + y^2) - 5 = \pm 3gxy$$

و یا

$$g(x^2 + y^2 \pm 3xy) = 5$$

اگر $g(x^2 + y^2 + 3xy) = 5$، آن‌گاه $x^2 + y^2 + 3xy \leq 5$. پس $x = y = g = 1$ و $(m, n) = (1, 1)$. در غیر این صورت: $g(x^2 + y^2 - 3xy) = 5$ و $g = 1$ یا ۵. مقدار g را ثابت و برابر یکی از دو مقدار ۱ یا ۵ در نظر می‌گیریم. بنابراین:

$$x^2 - 3xy + y^2 = \frac{5}{g} \qquad (1)$$

زوج نامرتب (a, b) را یک g ـ زوج گوییم هرگاه زوج $(x, y) = (a, b)$ (و یا به صورت معادل، $(x, y) = (b, a)$) در رابطه‌ی (۱) صدق می‌کند و a و b اعدادی طبیعی باشند. همچنین زوج نامرتب (p, q) را **کوچک‌تر** (**بزرگ‌تر**) از زوج نامرتب دیگری مانند (r, s) است، هرگاه $p + q$ کوچک‌تر (بزرگ‌تر) از $r + s$ باشد.

فرض کنید (a, b) یک g ـ زوج است. رابطه‌ی (۱) را به صورت یک عبارت درجه‌ی دوم تکین برحسب x در نظر می‌گیریم و b را ثابت فرض می‌کنیم. ضریب x در عبارت درجه‌ی دوم تکین $(x - r_1)(x - r_2)$ برابر است با $-(r_1 + r_2)$؛ بنابراین $(3b - a, b)$ نیز جوابی از معادله‌ی (۱) است، چرا که:

$$b^2 - 3b(3b - a) + (3b - a)^2 = a^2 - 3ab + b^2 = \frac{5}{g}$$

همچنین اگر $b > 2$، آن‌گاه:

$$a^2 - 3ab + b^2 = \frac{5}{g} < b^2$$

بنابراین $a^{2}-3ab<0$، یعنی $3b-a>0$. در نتیجه اگر (a,b) یک g ـ زوج باشد که $b>2$، در این صورت $(3b-a,b)$ نیز یک g ـ زوج است. ضمناً توجه کنید که اگر قرار دهیم $a'=b$ و $b'=3b-a$، آن‌گاه $(a,b)=(3a'-b',a')$. علاوه بر این، اگر $a\geq b$، در این صورت $a\neq b$؛ چرا که اگر $a=b$ داریم $-a^{2}=g>0$، که غیرممکن است. لذا $a>b$ و نیز

$$a^{2}-3ab+b^{2}=\frac{5}{g}>b^{2}-a^{2}$$

در نتیجه $a(2a-3b)>0$ و نتیجتاً $a+b>b+(3b-a)$ و $3b-a<b$. پس $(b,3b-a)$ کوچک‌تر از (a,b) است و نیز $b>3b-a$ (چرا؟).

برای هر g ـ زوج (a,b) که $b\leq a$، b، اگر $2\leq b$، آن‌گاه a باید برابر با $r(g)$ باشد، که $r(5)=3$ و $r(1)=4$ (توجه کنید که اگر $b=2$، مقدار قابل قبولی برای a به دست نمی‌آید. پس $b=1$)؛ در حالت $b>2$ با تکرار روند بالا، به g ـ زوجی خواهیم رسید که در آن $\min(a,b)\leq 2$، یعنی g ـ زوج $(r(g),1)$. به این ترتیب با شروع از زوج $(r(g),1)$ و با جایگزین کردن (x,y) با g ـ زوج بزرگ‌تر $(3x-y,x)$، می‌توان روند بالا را برعکس کرد. با این روش، همه‌ی g ـ زوج‌ها تولید می‌شوند، زیرا می‌توان همه‌ی g ـ زوج‌ها را به $(r(g),1)$ تبدیل کرد. حال همه‌ی این زوج‌ها را برحسب دنباله‌های فیبوناچی و لوکا می‌نویسیم؛ برای $g=1$، توجه کنید که $L_{2}=1$، $L_{4}=4=r(1)$ و نیز

$$\begin{aligned}L_{2k+4}&=L_{2k+3}+L_{2k+2}=(L_{2k+2}+L_{2k+1})+L_{2k+2}\\&=\left(L_{2k+2}+(L_{2k+2}-L_{2k})\right)+L_{2k+2}=3L_{2k+2}-L_{2k}\end{aligned}$$

در حالت $g=5$ نیز اعداد فیبوناچی در رابطه‌ی بازگشتی مشابهی صدق می‌کنند و $F_{2}=1$ و $F_{4}=3=r(5)$. بنابراین:

$$(m,n)=(L_{2k}^{2},L_{2k+2}^{2})\quad \text{و}\quad (m,n)=(5F_{2k}^{2},5F_{2k+2}^{2})\,;\qquad k\geq 0$$

۱۲) فرض کنید سه‌تایی (x_{0},y_{0},z_{0}) از اعداد طبیعی وجود دارد که $x_{0}y_{0}-z_{0}^{2}=1$، به‌نحوی که هیچ چهار عدد صحیح و نامنفی a، b، c و d یافت نمی‌شود که در روابط $x_{0}=a^{2}+b^{2}$، $y_{0}=c^{2}+d^{2}$ و $z_{0}=ac+bd$ صدق کند (برهان خلف). همچنین این فرض را هم اضافه می‌کنیم که $2\leq x_{0}\leq y_{0}$ و z_{0} کمترین مقدار ممکن است (در واقع اگر $x_{0}=1$، آن‌گاه $x_{0}=0^{2}+1^{2}$، $y_{0}=1^{2}+k^{2}$ و $z_{0}=0\times 1+1\times k$).

با شروع از سه‌تایی (x_0, y_0, z_0)، سه‌تایی دیگری را می‌سازیم که در رابطه‌ی $xy - z^2 = 1$ صدق کند. به این ترتیب که ابتدا قرار می‌دهیم $z = x + u$. در این صورت داریم $xy - (x^2 + 2xu + u^2) = 1$ و یا $x(y - x - 2u) - u^2 = 1$. از آنجایی که $u = z - x$، داریم $y - x - 2u = x + y - 2z$. بنابراین سه‌تایی $(x_1, y_1, z_1) = (x_0, x_0 + y_0 - 2z_0, z_0 - x_0)$ در این رابطه صدق می‌کند. حال نشان می‌دهیم که $x_1, y_1, z_1 \geq 0$. برای این منظور، از نابرابریِ

$$z_0^2 = x_0 y_0 - 1 < x_0 y_0 \leq \left(\frac{x_0 + y_0}{2}\right)^2$$

نتیجه می‌گیریم $z_0 < \frac{x_0+y_0}{2}$؛ یعنی $y_1 \geq 1$. همچنین داریم:

$$z_0^2 = x_0 y_0 - 1 \geq x_0^2 - 1 \Rightarrow z_0 \geq x_0 - 1$$

اگر $z_0 = x_0 - 1$، آن‌گاه $x_0(y_0 - x_0 + 2) = 2$، که غیرممکن است. چرا که $x_0 \geq 2$ و $y_0 - x_0 + 2 \geq 2$.

همچنین اگر $z_0 = x_0$، در این صورت $x_0(y_0 - x_0) = 1$، که باز هم غیرممکن است؛ زیرا $x_0 \geq 2$. در نتیجه $z_1 = z_0 - x_0 \geq 1$.

علاوه بر این، اگر داشته باشیم $x_1 = m^2 + n^2$، $y_1 = p^2 + q^2$ و $z_1 = mp + nq$، آن‌گاه

$$x_0 = m^2 + n^2 , \quad x_0 + y_0 - 2z_0 = p^2 + q^2 , \quad z_0 - x_0 = mp + nq$$

بنابراین

$$y_0 = p^2 + q^2 + 2z_0 - x_0 = p^2 + q^2 + 2mp + 2nq + x_0 = (p + m)^2 + (q + n)^2,$$
$$z_0 = m(p + m) + n(q + n)$$

اما این نتیجه با فرض اولیه‌ی ما در مورد سه‌تایی (x_0, y_0, z_0) در تناقض است.

به این ترتیب توانستیم سه‌تایی (x_1, y_1, z_1) از اعداد طبیعی را پیدا کنیم که در همه‌ی ویژگی‌های ابتدای اثبات صدق کند و نیز $z_1 < z_0$، که متناقض با حداقل بودن z_0 است. این تناقض، درستی حکم مسئله را نشان می‌دهد.

ملاحظه. ثابت می‌کنیم اگر p عدد اولی به فرم $4s + 1$ باشد، آن‌گاه با انتخاب $z = (2s)!$، می‌توان p را به صورت مجموع دو مربع کامل نمایش داد. برای این منظور،

طبق قضیه‌ی ویلسون داریم $(p-1)!+1 \overset{p}{\equiv} 0$؛ یعنی $(4s)!+1=pr$، که r عددی طبیعی است. اما:

$$\begin{aligned}(4s)! &= (2s)!(4s+1-1)(4s+1-2)\cdots(4s+1-2s)\\ &\overset{p}{\equiv} (2s)!(-1)^{2s}(2s)! \overset{p}{\equiv} \left((2s)!\right)^2\end{aligned}$$

در نتیجه $\left((2s)!\right)^2 = py-1$. حال اگر حکم مسئله به‌ازای $x=p$ و $z=(2s)!$ به کار ببریم، ادعایمان اثبات می‌شود.

۷.۴ معادلات دیوفانتی متفرقه

۱) فرض کنید معادله جوابی نابدیهی مانند (a,b,c,n) دارد. از آنجایی که می‌توانیم معادله را بر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a، b، c و n تقسیم کنیم، فرض می‌کنیم $(a,b,c,n)=1$. داریم:

$$6a^2+3b^2+c^2=\frac{5n^2}{6}$$

به وضوح $6|n$. اگر $n=6m$، آن‌گاه:

$$2a^2+b^2+\frac{c^2}{3}=10m^2$$

در نتیجه $3|c$. با جایگذاری $c=3d$ داریم:

$$2a^2+b^2+3d^2=10m^2$$

برای هر عدد صحیح x داریم: $x^2 \overset{8}{\equiv} 0,1,4$. بنابراین:

$$2a^2 \overset{8}{\equiv} 0,2 \quad \text{و} \quad b^2 \overset{8}{\equiv} 0,1,4 \quad \text{و} \quad 3d^2 \overset{8}{\equiv} 0,3,4$$

اما:

$$2a^2+b^2+3d^2=10m^2 \overset{8}{\equiv} 0,2$$

لذا b^2 و $3d^2$ و در نتیجه b و d باید اعدادی زوج باشند. به این ترتیب، c نیز باید عددی زوج باشد. قرار می‌دهیم $b=2r$ و $c=2s$؛ در این صورت معادله‌ی مسئله به صورتِ

$$36a^2+72r^2+24s^2=180m^2$$

درمی‌آید. پس $۸|۳۶a^۲$؛ یعنی a نیز زوج است. در نتیجه همه‌ی اعداد a، b، c و n زوجند، که متناقض با فرض $(a,b,c,n) = ۱$ است.

۲) اگر $y = ۱$، سمت چپ معادله برابر صفر می‌شود. بنابراین در این حالت نمی‌توانیم سه جواب داشته باشیم. لذا می‌توانیم معادله را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$x = \frac{y(y-۱)+c}{(y+۱)(y-۱)}$$

صورت این کسر به پیمانه‌ی $y+۱$ همنهشت با $c + (-۲)(-۱)$ و به پیمانه‌ی $y-۱$ همنهشت با c است. بنابراین باید داشته باشیم $c \overset{y+۱}{\equiv} -۲$ و $c \overset{y-۱}{\equiv} ۰$. از آنجایی که عدد $c = y - ۱$ در این روابط همنهشتی صدق می‌کند، داریم:

$$c \overset{[y-۱,y+۱]}{\equiv} y - ۱$$

اگر y زوج باشد، آن‌گاه $[y-۱, y+۱] = y^۲ - ۱$. اما اگر y فرد باشد، آن‌گاه $[y-۱, y+۱] = \frac{y^۲-۱}{۲}$.

در نتیجه برای $y = ۲, ۳, ۱۱$ به ترتیب داریم $c \overset{۳}{\equiv} ۱$، $c \overset{۴}{\equiv} ۲$ و $c \overset{۶۰}{\equiv} ۱۰$. بنابراین حالت $c = ۱۰$ را بررسی می‌کنیم. برای اینکه x عددی صحیح شود، باید داشته باشیم $y - ۱|۱۰$. از اینجا مقادیر $y = ۲, ۳, ۶, ۱۱$ و متناظر با آن‌ها، مقادیر $x = ۴, ۲, \frac{۲}{۷}, ۱$ به دست می‌آید. لذا در این حالت معادله دقیقاً سه جواب دارد که عبارتند از $(x,y) = (۴,۲), (۲,۳), (۱,۱۱)$.

۳) معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$(x-y)(x^۲+xy+y^۲) = z^۲$$

هر مقسوم‌علیه مشترک $x - y$ و $x^۲ + xy + y^۲$، اعداد $z^۲$ و

$$(x^۲+xy+y^۲) - (x+۲y)(x-y) = ۳y^۲$$

را می‌شمارد. از آنجایی که $z^۲$ و $۳y^۲$ طبق معلومات مسئله، نسبت به هم اولند، $x - y$ و $x^۲ + xy + y^۲$ نیز نسبت به هم اولند. بنابراین هر دو عدد $x - y$ و $x^۲ + xy + y^۲$ مربع کاملند.

حال قرار می‌دهیم $a = \sqrt{x-y}$. داریم

$$x^۲+xy+y^۲ = (a^۲+y)^۲ + (a^۲+y)y + y^۲ = a^۴ + ۳a^۲y + ۳y^۲$$
$$\Rightarrow ۴(x^۲+xy+y^۲) = (۲a^۲+۳y)^۲ + ۳y^۲$$

اگر $m = ۲\sqrt{x^۲ + xy + y^۲}$ و $n = ۲a^۲ + ۳y$، خواهیم داشت:

$$m^۲ = n^۲ + ۳y^۲ \iff (m-n)(m+n) = ۳y^۲$$

بنابراین $(m-n, m+n) = (۱, ۳y^۲), (۳, y^۲)$ یا $(y, ۳y)$.

در حالت اول داریم $۲n = ۳y^۲ - ۱$ و $۴a^۲ = ۲n - ٦y = ۳y^۲ - ٦y - ۱$. اما این رابطه به پیمانه‌ی ۳ هیچ‌گاه برقرار نمی‌شود.

در حالت سوم داریم $n = y < ۲a^۲ + ۳y = n$، که تناقض است.

در حالت دوم داریم $۴a^۲ = ۲n - ٦y = y^۲ - ٦y - ۳ < (y - ۳)^۲$. اگر $y \geq ۱۰$، آن‌گاه $(y-۴)^۲ < y^۲ - ٦y - ۳$؛ بنابراین باید داشته باشیم ۷ یا $y = ۲, ۳, ۵,$. در این صورت $a = \frac{\sqrt{y^۲-٦y-۳}}{۲}$ باید صحیح شود، که این اتفاق تنها به‌ازای $y = ۷$ می‌افتد. در این حالت داریم $a = ۱$، $x = y + a^۲ = ۸$ و $z = ۱۳$. به این ترتیب جواب یکتای $(x, y, z) = (۸, ۷, ۱۳)$ به دست می‌آید.

۴) جواب‌های معادله، عبارتند از همه‌ی سه تایی‌های به فرم $(۳^k - ۱, k, ۱)$ و سه‌تایی $(۲, ۲, ۳)$.

حالت $n = ۱$ بدیهی است. حال توجه کنید که n نمی‌تواند عددی زوج باشد، چرا که در این صورت $۳ \nmid ۳^k = (x^{\frac{n}{۲}})^۲ + ۱$ (زیرا هیچ مربع کاملی به پیمانه‌ی ۳ همنهشت با ۲ نیست). همچنین باید داشته باشیم $x \neq ۱$.

فرض کنید $n > ۱$ عددی فرد است و نیز $x \geq ۲$. در این صورت

$$۳^k = (x+۱)\sum_{i=۰}^{n-۱}(-x)^i$$

پس اعداد $x + ۱$ و $\sum_{i=۰}^{n-۱}(-x)^i$ هر دو، توان‌هایی از ۳ اند. می‌دانیم:

$$x + ۱ \leq x^۲ - x + ۱ \leq \sum_{i=۰}^{n-۱}(-x)^i$$

لذا باید داشته باشیم:

$$۰ \overset{x+۱}{\equiv} \sum_{i=۰}^{n-۱}(-x)^i \overset{x+۱}{\equiv} n$$

در نتیجه $x + ۱|n$؛ این به آن معنی است که $۳|n$.

قرار می‌دهیم $x' = x^{\frac{n}{3}}$. به این ترتیب داریم $3^k = x'^3 + 1 = (x'+1)(x'^2 - x' + 1)$.
همان طور که گفتیم $x' + 1$ برابر با توانی از ۳ است، یعنی $x' + 1 = 3^t$. بنابراین:

$$3^k = (3^t - 1)^3 + 1 = 3^{3t} - 3^{2t+1} + 3^{t+1}$$

از طرفی برای هر $t > 1$ داریم

$$3^{3t-1} < 3^{3t} - 3^{2t+1} + 3^{t+1} < 3^{3t}$$

در نتیجه $t = 1$ و متعاقباً $x' = 2$ و $k = 2$. در این صورت جواب $(x, k, n) = (2, 2, 3)$ به دست می‌آید.

۵) اگر (x, y) جواب صحیحی از معادله‌ی $x^2 + xy + y^2 = n$ باشد، آن‌گاه $(-x, -y)$ جواب متمایز دیگری از این معادله است. بنابراین جواب‌های معادله، به صورت زوج‌هایی از جواب‌ها هستند. اگر نشان دهیم که جواب‌های معادله به صورت دسته‌های شش‌تایی ظاهر می‌شوند و نیز تعداد جواب‌ها متناهی است، کار تمام است. برای اینکه ببینیم چرا جواب‌های معادله به صورت دسته‌های شش‌تایی ظاهر می‌شوند، می‌بایست با استفاده از روابط جبری، عبارت $x^2 + xy + y^2$ را به‌ازای زوج‌هایی مانند $(a, b) \neq (x, y)$ به صورت $a^2 + ab + b^2$ نمایش می‌دهیم.

ابتدا توجه کنید که برای هر جواب (x, y) داریم:

$$2n = 2x^2 + 2xy + 2y^2 = x^2 + y^2 + (x+y)^2 \geq x^2 + y^2$$

بنابراین هر جواب صحیح معادله، یکی از نقاط شبکه‌ای (نقاطی که مؤلفه‌های آن‌ها اعداد صحیح‌اند) بر رو و یا دورن دایره‌ای به شعاع $\sqrt{2n}$ است. لذا تعداد جواب‌های صحیح معادله، متناهی است.

حال توجه کنید که

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= (x+y)^2 - xy \\ &= (x+y)^2 - x(x+y) + x^2 \\ &= (x+y)^2 + (x+y)(-x) + (-x)^2 \end{aligned}$$

پس اگر (x, y) جواب صحیحی از معادله‌ی $x^2 + xy + y^2 = n$، آن‌گاه زوج $(x+y, -x)$ نیز جوابی از معادله است. اگر این روند را با جواب‌های جدید تکرار کنیم،

جواب‌ها تشکیل دوری به طول ٦ می‌دهند:

$$(x,y),\ (x+y,-x),\ (y,-x-y),\ (-x,-y),\ (-x-y,x),\ (-y,x+y) \quad (۱)$$

جواب بعدی، مجدداً به (x,y) باز می‌گردد. در ضمن به راحتی می‌توان نشان داد که از آنجایی که x و y همزمان نمی‌توانند برابر صفر باشند، همه‌ی شش جواب دور (۱) با هم متمایزند.

٦) تنها پاسخ مسئله عبارتست از $n = ۲$. فرض کنید $۳^n = x^k + y^k$، که x و y اعدادی طبیعی و نسبت به هم اولند، $x > y$، $k > ۱$ و n عددی طبیعی است. به وضوح هیچ‌یک از اعداد x و y مضرب ۳ نیستند. بنابراین اگر k زوج باشد، باقیمانده‌ی x^k و y^k بر ۳ برابر ۱ می‌شود؛ پس مجموع آن‌ها به پیمانه‌ی ۳ همنهشت با ۲ است و نمی‌تواند توانی از ۳ باشد. اما اگر $k > ۱$ عددی فرد باشد، آن‌گاه:

$$۳^n = (x+y)(x^{k-۱} - x^{k-۲}y + \cdots + y^{k-۱})$$

لذا $x + y = ۳^m$، که m عددی طبیعی است. در ادامه نشان می‌دهیم که $n \geq ۲m$. از آنجایی که $۳|k$ (چرا؟)، با جایگذاری $x_۱ = x^{\frac{k}{۳}}$ و $y_۱ = y^{\frac{k}{۳}}$ توان $x_۱$ و $y_۱$ برابر ۳ می‌شود. در نتیجه می‌توانیم فرض کنیم $k = ۳$. در این صورت داریم $x^۳ + y^۳ = ۳^n$ و $x + y = ۳^m$. برای اثبات نابرابری $n \geq ۲m$ کافی است نشان دهیم $x^۳ + y^۳ \geq (x+y)^۲$ و یا به صورت معادل $x^۲ - xy + y^۲ \geq x + y$. با توجه به اینکه $x \geq y + ۱$ داریم:

$$x \geq y + ۱ \Rightarrow x^۲ - x = x(x - ۱) \geq xy$$

به این ترتیب نابرابری $n \geq ۲m$ ثابت می‌شود.

حال از اتحاد $(x+y)^۳ - (x^۳ + y^۳) = ۳xy(x+y)$ نتیجه می‌گیریم:

$$۳^{۲m-۱} - ۳^{n-m-۱} = xy$$

لذا $۲m - ۱ \geq ۱$ و $n - m - ۱ \geq n - ۲m \geq ۰$. اگر $n - m - ۱ > ۰$، آن‌گاه $۳^{۲m-۱} - ۳^{n-m-۱}$ بر ۳ بخش‌پذیر می‌شود، در حالی که xy بر ۳ بخش‌پذیر نیست. در نتیجه $n - m - ۱ = n - ۲m = ۰$ و متعاقباً $m = ۱$، $n = ۲$ و $۱^۳ + ۲^۳ = ۳^۲$.

ملاحظه. نابرابری $x^۲ - xy + y^۲ \geq x + y$ را می‌توان به صورت دیگری نیز ثابت کرد:

$$x^۲ - xy + y^۲ - x - y = (x-y)^۲ + (x-۱)(y-۱) - ۱ \geq ۰$$

(چرا که $(x-y)^{۲} \geq ۱$.)

۷) اگر $p = ۲$، آن‌گاه $q^n = ۱۳$، که غیرممکن است؛ بنابراین p عددی فرد است و $۵|۲^p + ۳$. از آنجایی که $n > ۱$ نتیجه می‌گیریم $۲۵|۲^p + ۳^p$. بنابراین:

$$\circ \overset{۲۵}{\equiv} ۲^p + (۵-۲)^p \overset{۲۵}{\equiv} ۲^p + \left(\binom{p}{۱}۵\cdot(-۲)^{p-۱} + (-۲)^p\right) = ۵p\cdot ۲^{p-۱}$$

در نتیجه $۵|p$ و لذا $p = ۵$. اما در این حالت، معادله‌ی $q^n = ۲^۵ + ۳^۵ = ۵^۲ \times ۱۱$ جوابی ندارد.

۸) اگر $a = \circ$، آن‌گاه b باید مربع کامل باشد؛ همین مطلب برای b نیز برقرار است. بنابراین فرض می‌کنیم a و b مخالف صفرند. در ضمن توجه کنید که زوجیت $a^۲ + ۴b$ و $a^۲$ یکسان است. همچنین زوجیت $b^۲ + ۴a$ و $b^۲$ نیز یکسان است.

اگر b عددی مثبت باشد،آن‌گاه

$$a^۲ + ۴b \geq (|a| + ۲)^۲ = a^۴ + ۴|a| + ۴ \Rightarrow |b| \geq |a| + ۱$$

اما اگر b منفی باشد، داریم

$$a^۲ + ۴b \leq (|a| - ۲)^۲ = a^۲ - ۴|a| + ۴ \Rightarrow |b| \geq |a| - ۱$$

به همین ترتیب برای $a > \circ$، رابطه‌ی $|a| \geq |b| + ۱$ و برای $a < \circ$، رابطه‌ی $|a| \geq |b| - ۱$ برقرار است.

بدون از دست دادن کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $a \geq b$. اگر a و b مثبت باشند، آن‌گاه با توجه به نابرابری‌های بالا داریم $b \geq a + ۱$ و $a \geq b + ۱$، که تناقض است.

اگر a و b منفی باشند، آن‌گاه از نابرابری‌های مذکور نتیجه می‌گیریم $a = b$ یا $a = b - ۱$. به راحتی می‌توان نشان داد که در حالت $b \geq -۵$ فقط جواب‌های $(a,b) = (-۴,-۴),(-۵,-۶)$ را داریم. در حالت $b < -۵$ داریم $(b+۴)^۲ < b^۲ + ۴a < (b+۲)^۲$، که باز هم تناقض است.

در نهایت اگر a منفی و b مثبت باشد، در این صورت داریم $|b| \geq |a| + ۱$ و $|a| \geq |b| - ۱$. در نتیجه باید داشته باشیم $|b| = |a| + ۱$ و نتیجتاً $a + b = ۱$. هر زوج (a,b) که در این رابطه صدق کند، جوابی از مسئله است، چرا که

$$a^۲ + ۴b = (a-۲)^۲ \quad \text{و} \quad b^۲ + ۴a = (b-۲)^۲$$

بنابراین تنها زوج‌های ممکن برای جواب مسئله عبارتند از:

$$(a,b)=(-۴,-۴),(-٦,-۵),(-۵,-٦),(۰,n^۲),(n^۲,۰),(n,۱-n)$$

که n عددی صحیح و دلخواه است.

۹) ابعاد مکعب مستطیل را a، b و c در نظر می‌گیریم. هر یک از این طول‌ها باید حداقل برابر ۳ باشند، چرا که در غیر این صورت هر یک از مکعب‌های واحد، وجهی سبز رنگ خواهند داشت. شرط مسئله هم ارز است با

$$۳(a-۲)(b-۲)(c-۲)=abc$$

و یا به صورت معادل

$$۳=\frac{a}{a-۲}\cdot\frac{b}{b-۲}\cdot\frac{c}{c-۲}$$

اگر همه‌ی طول‌های a، b و c حداقل برابر ۷ باشند، آن‌گاه

$$\frac{a}{a-۲}\cdot\frac{b}{b-۲}\cdot\frac{c}{c-۲}\leq\left(\frac{۷}{۵}\right)^۳=\frac{۳۴۳}{۱۲۵}<۳$$

که تناقض است. بنابراین طول یکی از ابعاد، مثلاً a، برابر ۳، ۴، ۵ و یا ٦ است. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم $b\leq c$.

اگر $a=۳$، داریم $bc=(b-۲)(c-۲)$، که غیرممکن است.

اگر $a=۴$، با مرتب کردن جملات معادله داریم $(b-٦)(c-٦)=۲۴$. لذا:

$$(b,c)=(۷,۳۰),(۸,۱۸),(۹,۱۴),(۱۰,۱۲)$$

اگر $a=۵$، معادله به صورت $(۲b-۹)(۲c-۹)=۴۵$ درمی‌آید. در نتیجه:

$$(b,c)=(۵,۲۷),(٦,۱۲),(۷,۹)$$

در نهایت اگر $a=٦$، به معادله‌ی $(b-۴)(c-۴)=۸$ می‌رسیم که جواب‌های آن عبارتند از

$$(b,c)=(۵,۱۲),(٦,۸)$$

بنابراین ابعاد ممکن برای مکعب مستطیل عبارتست از:

$$۷\times۴\times۳۰,\ ۴\times۸\times۱۸,\ ۴\times۹\times۱۴,\ ۴\times۱۰\times۱۲,$$

$$۵\times۵\times۲۷,\ ۵\times٦\times۱۲,\ ۵\times۷\times۹,\ ٦\times٦\times۸$$

واضح است که $(x, x+y) = (x, x+z) = ۱$. بنابراین $x|y+z$، $y|z+x$ و $z|x+y$.

۱۰) فرض کنید a، b و c اعدادی طبیعی‌اند، به‌نحوی که:

$$\begin{cases} x+y=cz\,, \\ y+z=ax\,, \\ z+x=by \end{cases}$$

اگر معادلات بالا را دستگاهی از معادلات خطی در نظر بگیریم که جوابی مخالف صفر دارد، آن‌گاه دترمینان ضرایب یعنی:

$$\Delta = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & -c \\ ۱ & -b & ۱ \\ -a & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

باید برابر صفر شود. درنتیجه $\Delta = abc - ۲ - a - b - c = ۰$. برای حل معادله‌ی دیوفانتی $abc - ۲ = a + b + c$، با توجه به تقارن معادله نسبت به a, b, c حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

(۱) $a = b = c$. در این صورت $a = ۲$ و درنتیجه $x = y = z$. با توجه به اینکه x، y و z دو به دو نسبت به هم اولند، باید داشته باشیم $x = y = z = ۱$. بنابراین $t = ۸$ و جواب $(۱, ۱, ۱, ۸)$ به دست می‌آید.

(۲) $a = b$ و $a \neq c$. در این حالت معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$a^۲c - ۲ = ۲a + c \Longleftrightarrow c(a^۲ - ۱) = ۲(a + ۱) \Longleftrightarrow c(a - ۱) = ۲$$

اگر $c = ۲$، آن‌گاه $x = y = z$ (که همان حالت (۱) است). لذا $c = ۱$ و نتیجتاً $x = y = ۱$ و $z = ۲$. به این ترتیب جواب $(۱, ۱, ۱, ۸)$ حاصل می‌شود.

(۳) $a > b > c$. در این حالت داریم $abc - ۲ = a + b + c < ۳a$. درنتیجه $a(bc - ۳) < ۲$. پس $bc - ۳ < ۲$، یعنی $bc < ۵$ و حالت‌های زیر پیش می‌آید:

i) $b = ۳$، $c = ۱$. در این صورت $a = ۳$ و مجدداً به حالت (۲) باز می‌گردیم.

ii) $b = ۲$، $c = ۱$. در این صورت $a = ۵$ و جواب $(۱, ۲, ۳, ۱۰)$ به دست می‌آید.

iii) $b = ۴$، $c = ۱$. بنابراین $۳a = ۷$، که غیرممکن است.

به این ترتیب جواب‌های معادله عبارتند از $(۱, ۱, ۱, ۸)$، $(۱, ۱, ۲, ۹)$، $(۱, ۲, ۳, ۱۰)$ و جواب‌هایی که از جایگشت‌های x, y, z در این چهارتایی‌ها به دست می‌آیند.

فصل ۵

معادلات دیوفانتی کلاسیک

۱.۵ معادلات دیوفانتی خطی

۱) اگر معادله را به پیمانه‌ی ۳ در نظر بگیریم، داریم $y \overset{3}{\equiv} 1$. بنابراین $y = 1 + 3s$، که $s \in \mathbb{Z}$. در این صورت معادله به فرمِ

$$6x - 15z = -9 - 30s$$

و یا به صورت معادلِ $2x - 5z = -3 - 10s$ در می‌آید. با در نظر گرفتن این معادله به پیمانه‌ی ۲ نتیجه می‌گیریم $z \overset{2}{\equiv} 1$؛ یعنی $z = 1 + 2t$، ($t \in \mathbb{Z}$). لذا $x = 1 - 5s + 5t$. بنابراین جواب‌های معادله عبارتند از

$$(x, y, z) = (1 - 5s + 5t, 1 + 3s, 1 + 2t) \; ; \quad s, t \in \mathbb{Z}$$

۲) گام اول. نشان می‌دهیم که عدد $2abc - ab - bc - ca$ قابل نمایش به فرم خواسته شده نیست. فرض کنید بتوان این کار را انجام داد (برهان خلف). یعنی:

$$2abc - ab - bc - ca = xbc + yca + zab$$

که $x, y, z \geq 0$. در این صورت:

$$2abc = bc(x + 1) + ca(y + 1) + ab(z + 1)$$

و $x+1>0$، $y+1>0$، $z+1>0$. از تساوی به‌دست آمده نتیجه می‌گیریم $a|bc(x+1)$.

از آنجایی که a نسبت به b و c اول است، بنابراین $a|x+1$، یعنی $a \leq x+1$. با همین استدلال نتیجه می‌گیریم $b \leq y+1$ و $c \leq z+1$. لذا:

$$2abc = bc(x+1) + ca(y+1) + ab(z+1) \geq 3abc$$

تناقض حاصل نشان می‌دهد که فرض ما نادرست بوده است.

گام دوم. نشان می‌دهیم هر عدد N که $N > 2abc - ab - bc - ca$، را می‌توان به صورت $N = xbc + yca + zab$ نمایش داد.

ابتدا توجه کنید که $2abc - ab - bc - ca + 1 > 0$. چرا که:

$$\frac{1}{abc}(2abc-ab-bc-ca+1) = 2-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}+\frac{1}{abc} > 2-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{abc} > 0$$

در ادامه توجه کنید که دو حالت پیش می‌آید: N بر abc بخش‌پذیر است و یا N بر abc بخش‌پذیر نیست. اگر $N \overset{abc}{\equiv} 0$، آن‌گاه $N = abcq$ و می‌توان نمایش N را به صورت $N = (ab)cq + bc\cdot 0 + ca \cdot 0$ در نظر گرفت.

حال فرض کنید $N \overset{abc}{\not\equiv} 0$. از آنجایی که $(bc, a) = 1$، رابطه‌ی همنهشتی

$$xbc \overset{a}{\equiv} N$$

جوابی مانند x_0 دارد که $0 < x_0 < a$. به همین ترتیب همنهشتی‌های

$$yca \overset{b}{\equiv} N ,$$
$$zab \overset{c}{\equiv} N$$

نیز جواب‌هایی مانند y_0 و z_0 دارند که $0 < y_0 < b$ و $0 < z_0 < c$.

قرار می‌دهیم $A = x_0bc + y_0ca + z_0ab$. در این صورت:

$$A \overset{a}{\equiv} x_0bc \overset{a}{\equiv} N , \quad A \overset{b}{\equiv} N , \quad A \overset{c}{\equiv} N$$

با توجه به این که a، b و c دو به دو نسبت به هم اولند، نتیجه می‌گیریم $A \overset{abc}{\equiv} N$.

عدد A به صورت ترکیب خواسته شده نمایش داده شده است. در ضمن از آنجایی که $x_0 \leq a-1$، $y_0 \leq b-1$ و $z_0 \leq c-1$ خواهیم داشت $A \leq 3abc - bc - ca - ab$.

همچنین با توجه به این که $A \overset{abc}{\equiv} N$، می‌توان نوشت $N = A + kabc$. می‌دانیم $k \geq ۰$، چرا که $N > ۲abc - bc - ca - ab$. بنابراین:

$$N = (x_۰ + ka)bc + y_۰ca + z_۰ab$$

که $x_۰ + ka \geq ۰$، $y_۰ \geq ۰$ و $z_۰ \geq ۰$.

ملاحظه. این مسئله، در واقع همان مسئله‌ی سکه‌های فروبنیوس در حالت $n = ۳$ و با ضرایب ca، bc و ab است.

۳) طبق قضیه‌ی ۳.۱.۲ نتیجه می‌گیریم که عدد خواسته شده برابر است با

$$A_n = \frac{۱}{n!} f^{(n)}(۰)$$

که در این جا تابع مولد f عبارتست از

$$f(t) = \frac{۱}{(۱ - t)(۱ - t)(۱ - t^۲)}$$

داریم

$$f(t) = -\frac{۱}{۲} \cdot \frac{۱}{(t - ۱)^۳} + \frac{۱}{۴} \cdot \frac{۱}{(t - ۱)^۲} - \frac{۱}{۸} \cdot \frac{۱}{t - ۱} + \frac{۱}{۸} \cdot \frac{۱}{t + ۱}$$

بنابراین

$$f^{(n)}(t) = -\frac{۱}{۴} \cdot \frac{(-۱)^n (n + ۲)!}{(t - ۱)^{n+۳}} + \frac{۱}{۴} \cdot \frac{(-۱)^n (n + ۱)!}{(t - ۱)^{n+۲}}$$
$$-\frac{۱}{۸} \cdot \frac{(-۱)^n n!}{(t - ۱)^{n+۱}} + \frac{۱}{۸} \cdot \frac{(-۱)^n n!}{(t + ۱)^{n+۱}}$$

در نتیجه

$$f^{(n)}(۰) = \frac{(n + ۲)!}{۴} + \frac{(n + ۱)!}{۴} + \frac{n!}{۸} + \frac{(-۱)^n \cdot n!}{۸}$$

و نیز

$$A_n = \frac{۱}{n!} f^{(n)}(۰) = \frac{۲(n + ۱)(n + ۳) + ۱ + (-۱)^n}{۸}$$

۴) با توجه به نتیجه‌ی مسئله ۳، تعداد سه‌تایی‌های (x, y, z) از اعداد صحیح نامنفی که در معادله‌ی $x + ۲y + z = n$ صدق می‌کنند، برابر است با:

$$A_n = \frac{۲(n + ۱)(n + ۳) + ۱ + (-۱)^n}{۸}$$

اگر $n = 2k$، آن‌گاه $A_n = (k+1)^2$. در نتیجه $k = 9$ و $n = 18$.

اما اگر $n = 2k+1$، آن‌گاه $A_n = (k+1)(k+2)$. در این حالت معادله‌ی $(k+1)(k+2) = 100$ جواب صحیح ندارد.

۵) ابتدا فرض کنید $a = 0$. در این صورت هر عدد صحیح m را طبق فرض مسئله می‌توان به صورت by نمایش داد. بنابراین $b = \pm 1$ و $cx = n \pm dm$. پس برای هر دو عدد صحیح m و n داریم $c|n \pm dm$؛ لذا $c = \pm 1$ و $ad - bc = \pm 1$. همین استدلال در حالتی که در هر یک از اعداد b، c و یا d برابر صفر باشند، نیز برقرار است.

اگر $abcd \neq 0$، قرار می‌دهیم $\Delta = ad - bc$. فرض کنید $\Delta = 0$، در این صورت $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$. اگر مقدار یکسان این دو نسبت برابر λ باشد، $n = cx + dy = \lambda(ax+by) = \lambda m$؛ این به آن معنی است که برای هر دو عدد صحیح m و n داریم $\lambda = \frac{m}{n}$، که البته غیرممکن است. در نتیجه $\Delta \neq 0$. حال معادلات $ax + by = m$ و $cx + dy = n$ را برحسب x و y حل می‌کنیم. در این صورت داریم

$$x = \frac{dm - bn}{\Delta}, \quad y = \frac{an - cm}{\Delta}$$

می‌دانیم برای هر دو عدد صحیح m و n، مقادیر x و y اعدادی صحیح‌اند. در حالت خاصِ $(m,n) = (1,0)$، اعداد $x_1 = \frac{d}{\Delta}$ و $y_1 = \frac{-c}{\Delta}$ صحیح‌اند. همچنین برای $(m,n) = (0,1)$ نیز، اعداد $x_2 = -\frac{b}{\Delta}$ و $y_2 = \frac{a}{\Delta}$ صحیح‌اند. بنابراین عدد

$$x_1y_2 - x_2y_1 = \frac{ad - bc}{\Delta^2} = \frac{1}{\Delta}$$

نیز باید صحیح باشد. تنها عدد صحیحی که معکوس آن نیز صحیح است، ± 1 است. از آنجایی که به وضوح Δ عددی صحیح است، نتیجه می‌گیریم $\Delta = \pm 1$.

۶) اعضای مجموعه‌ی X را به ترتیب صعودیِ $x_1 < x_2 < \cdots < x_{3n^2}$ مرتب می‌کنیم. قرار می‌دهیم:

$$X_1 = \{x_1, \ldots, x_{n^2}\}, \quad X_2 = \{x_{n^2+1}, \ldots, x_{2n^2}\}, \quad X_3 = \{x_{2n^2+1}, \ldots, x_{3n^2}\}$$

تابع $f : X_1 \times X_2 \times X_3 \to X \times X$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(a,b,c) = (b-a, c-b)$$

دامنه‌ی f شامل $n^۶$ عضو است. از طرفی اعضای برد f متعلق به زیرمجموعه‌ای از $X \times X$ اند که مجموع مؤلفه‌های اعضایش حداکثر $n^۳$ است؛ تعداد اعضای این مجموعه برابر است با:

$$\sum_{k=۱}^{n^۳-۱} k = \frac{n^۳(n^۳-۱)}{۲} < \frac{n^۶}{۲}$$

بنابراین، طبق اصل لانه‌کبوتری سه‌تایی‌های (a_i, b_i, c_i)، $(i = ۱, ۲, ۳)$، وجود دارند، که به یک زوج از برد f متناظر می‌شوند. در این صورت، اعداد $x = b_۱ - c_۱$، $y = c_۱ - a_۱$ و $z = a_۱ - b_۱$ جوابی از دستگاه معادلات، در اعداد صحیح مخالف صفر است. توجه کنید که a_i نمی‌تواند با b_j برابر باشد، چرا که مجموعه‌های $X_۱$ و $X_۲$ جدا از هم هستند (به همین ترتیب b_i, c_j و a_i, c_i با هم متمایزند). در ضمن اگر $a_۲ = a_۱$، آن‌گاه سه‌تایی‌های $(a_۱, b_۱, c_۱)$ و $(a_۲, b_۲, c_۲)$ با هم برابر می‌شوند، که تناقض است. درنتیجه همه‌ی این ۹ عدد انتخاب شده با هم متمایزند.

۷) فرض کنید $(y_۱, y_۲, \ldots, y_q)$ یک q- تایی از اعداد صحیح است که $|y_j| \leq p$، $(j = ۱, ۲, \ldots, q)$. در این صورت مقدار عبارت سمت چپ تساوی در r امین معادله، عددی بین $-pq$ و pq است، چرا که ضرایب ۱-، ۰ و یا ۱ اند. بنابراین عبارتِ

$$\sum_{i=۱}^{q} a_{ri} y_i$$

حداکثر می‌تواند $۲pq + ۱$ مقدار را بپذیرد: pq عدد طبیعی، pq عدد صحیح منفی و مقدار صفر. حال p- تایی شامل همه‌ی p تا عبارت سمت چپ معادلات دستگاه را در نظر بگیرید. از آنجایی که هر یک از این عبارت‌ها حداکثر $۲pq + ۱$ مقدار را می‌توانند اختیار کنند، حداکثر $(۲pq + ۱)^p$ تا p- تایی می‌توانیم داشته باشیم. هر یک از y_iها عددی صحیح بین $-p$ و p است؛ در نتیجه برای انتخاب هر یک از y_iها $۲p + ۱$ حالت وجود دارد. با توجه به این که در هر q- تایی، q تا y_i وجود دارد، حداکثر می‌توانیم $(۲p + ۱)^q$ تا q- تایی مختلف بسازیم.

می‌دانیم $q = ۲p$؛ پس تعداد q- تایی‌های $(y_۱, y_۲, \ldots, y_q)$ با شرط $|y_j| \leq p$ برابر است با:

$$(۲p + ۱)^q = (۲p + ۱)^{۲p} = \left[(۲p + ۱)^۲\right]^p = (۴p^۲ + ۴p + ۱)^p$$

در صورتی که تعداد p− تاییهای

$$\left(\sum_{j=1}^{q} a_{1j}y_j,\ \sum_{j=1}^{q} a_{2j}y_j,\ \ldots,\ \sum_{j=1}^{q} a_{pj}y_j\right)$$

حداکثر برابر است با

$$(2pq+1)^p = (4p^2+1)^p$$

از آنجایی که تعداد q− تاییهای $(y_1, y_2, \ldots, y_q)$ از تعداد p− تاییهای مقادیر معادلات دستگاه بیشتر است، طبق اصل لانه‌کبوتری حداقل دو q− تایی متمایز، مقادیر یکسانی به‌ازای عبارت‌های طرف چپ معادلات دستگاه خواهند داشت. فرض کنید این q− تاییها عبارتند از

$$(y_1, y_2, \ldots, y_q) \quad \text{و} \quad (z_1, z_2, \ldots, z_q) \qquad (1)$$

ادعا میکنیم که q تایی $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$، که $x_j = y_j - z_j$، $(j = 1, 2, \cdots, q)$، جوابی از دستگاه است که در ویژگیهای (i)، (ii) و (iii) صدق میکند. برای اثبات این ادعا ابتدا توجه کنید که از رابطه‌ی

$$\sum_{j=1}^{q} a_{rj}y_j = \sum_{j=1}^{q} a_{rj}z_j\ ; \qquad r = 1, 2, \ldots, p$$

نتیجه میگیریم

$$\sum_{j=1}^{q} a_{rj}x_j = \sum_{j=1}^{q} a_{rj}(y_j - z_j) = \sum_{j=1}^{q} a_{rj}y_j - \sum_{j=1}^{q} a_{rj}z_j = 0$$

بنابراین x_i ها در دستگاه معادلات صدق میکنند. علاوه بر این، از آنجایی که y_i و z_i ها اعدادی صحیح‌اند، تفاضل آن‌ها یعنی x_i ها نیز اعدادی صحیح‌اند و ویژگی (i) برقرار میشود. در ضمن q− تاییهای (۱) با هم متمایزند، پس همه‌ی x_j ها برابر صفر نمیتوانند باشند و ویژگی (ii) نیز برقرار است. در نهایت، با توجه به این که $|y_j| \leq p$ و $|z_j| \leq p$، از نامساوی مثلث نتیجه میگیریم

$$|x_j| = |y_j - z_j| \leq |y_j| + |z_j| \leq 2p \Rightarrow |x_j| \leq q$$

لذا ویژگی (iii) نیز برقرار است.

۲.۵ سه‌تایی‌های فیثاغورثی و مسائل مربوط به آن‌ها

۱) فرض کنید دستگاه معادلات جواب دارد و (x, y, u, v) جوابی از آن است (برهان خلف). در این صورت:

$$u^۲ - y^۲ = x^۲ \quad \text{و} \quad u^۲ + y^۲ = v^۲$$

اما این روابط با نتیجه‌ی مثال ۵.۲ در تناقض است.

۲) فرض کنید به‌ازای عددی طبیعی مانند v داریم $۲(m^۴ + n^۴) = v^۲$. در نتیجه

$$(۲mn)^۲ + (m^۲ - n^۲)^۲ = (m^۲ + n^۲)^۲$$

و نیز

$$(۲mn)^۲ + ۲(m^۲ - n^۲)^۲ = v^۲$$

که متناقض با نتیجه مسئله‌ی ۱ است.

به همین ترتیب، اگر $m^۴ + ٦m^۲n^۲ + n^۴ = v^۴$، که $v \in \mathbb{N}$، آن‌گاه

$$(m^۲ - n^۲)^۲ + (۲mn)^۲ = (m^۲ + n^۲)^۲$$

و نیز:

$$(m^۲ - n^۲)^۲ + ۲(mn)^۲ = v^۲$$

به این ترتیب باز هم طبق نتیجه‌ی مسئله‌ی ۱ به تناقض می‌رسیم.

۳) با حل معادله برحسب $z^۲$، نتیجه می‌گیریم که دلتای معادله‌ی به دست آمده، برابر $x^۴ + ٦x^۲y^۲ + y^۴$ است. طبق مسئله ۲، این عبارت نمی‌تواند مربع کامل باشد. به این ترتیب نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌شود.

۴) با استفاده از فرمول‌های (۳.۲.۲) نتیجه می‌گیریم که طول اضلاع این مثلث، به فرمِ

$$k(m^۲ - n^۲)\,, \quad ۲kmn\,, \quad k(m^۲ + n^۲)$$

اند. شرط مسئله هم ارز است با

$$k^۲mn(m^۲ - n^۲) = ۲km(m + n)$$

پس از ساده کردن این معادله داریم

$$kn(m-n) = ۲$$

با بررسی ساده‌ای روی حالت‌های ممکن برای سه‌تایی‌های (k, m, n) به راحتی می‌توان نشان داد که فقط سه‌تایی‌های (۱ ,۲ ,۲)، (۲ ,۳ ,۱) و (۱ ,۳ ,۱) در این رابطه صدق می‌کنند. متناظر با این سه‌تایی‌ها، مثلث‌های فیثاغورثی ۱۰ – ۸ – ۶ و ۱۳ – ۱۲ – ۵ حاصل می‌شوند.

۵) فرض کنید چنین مثلثی با اضلاع (a, b, c) وجود دارد (برهان خلف). در این صورت به‌ازای عددی طبیعی مانند d داریم

$$a^۲ + b^۲ = c^۲ \quad \text{و} \quad ab = ۲d^۲$$

بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم $a > b$، چرا که حالت $a = b$ منجر به تساوی $۲a^۲ = c^۲$ می‌شود، که امکان پذیر نیست. بنابراین

$$c^۲ + (۲d)^۲ = (a+b)^۲ \quad \text{و} \quad c^۲ - (۲d)^۲ = (a-b)^۲$$

اما این نتیجه با مثال ۵.۲ در تناقض است.

۶) فرض کنید a، b و c طول اضلاع یک مثلث فیثاغورثی با شعاع دایره‌ی محاطی r اند $(r \in \mathbb{N})$. با توجه به روابط ساده‌ی هندسی داریم:

$$\frac{a+b-c}{۲} = r$$

از طرفی، اعدادی طبیعی مانند m و n وجود دارند که $m > n$، زوجیت m و n متفاوت است، $(m, n) = ۱$ و نیز

$$a = m^۲ - n^۲, \quad b = ۲mn, \quad c = m^۲ + n^۲$$

با ترکیب این دو مطلب خواهیم داشت $n(m-n) = r$.

r را به فرم $r = ۲^k l$ می‌نویسیم، که l عددی طبیعی و فرد است. بنابراین $n = ۲^k d$ و $m - n = \frac{l}{d}$، که d مقسوم علیهی از l است و $(d, \frac{l}{d}) = ۱$. هر زوج (m, n) به صورت یکتا از روی زوج $(d, \frac{l}{d})$ به‌دست می‌آید. تعداد زوج‌های $(d, \frac{l}{d})$ که در شرط $(d, \frac{l}{d}) = ۱$ صدق می‌کنند برابر است با $۲^{\mu(l)}$، که $\mu(l)$ تعداد عوامل اول l است.

۳.۵ معادلات قابل توجه دیگر

۱) فرض کنید $x^۲ + xy + y^۲ = ۳۶^۲$ حل‌شدنی است. با استفاده از فرمول‌های (۹.۳.۲) نتیجه می‌گیریم:

$$k(m^۲ + mn + n^۲) = ۳۶$$

بنابراین $m^۲ + mn + n^۲$ برابر یکی از اعداد ۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۹, ۱۲, ۱۸, ۳۶ است. هیچ یک از این اعداد در ستون سوم جدول مثال ۷.۲ ظاهر نمی‌شوند.

۲) با توجه به فرم کلی جواب‌های (۱۱.۳.۲)، مسئله به این صورت درمی‌آید که همه‌ی اعداد طبیعی k، m و n را بیابیم به‌نحوی که $m > n$ و نیز:

$$k(m^۲ - mn + n^۲) = ۲۷$$

در جدول زیر، همه‌ی زوج‌های (m, n) که به‌ازای آن‌ها نابرابری $m^۲ - mn + n^۲ \leq ۲۸$ برقرار است، آورده شده است:

m	n	$m^۲ - mn + n^۲$
۲	۱	۳
۳	۱	۷
۴	۱	۱۳
۵	۱	۲۱
۳	۲	۷
۴	۲	۱۲
۵	۲	۱۹
۶	۲	۲۸
۴	۳	۱۳
۵	۳	۱۹
۶	۳	۲۷
۵	۴	۲۱
۶	۴	۲۸

اگر $k = ۱$، آن‌گاه $m = ۶$ و $n = ۳$. همچنین اگر $k = ۳$، آن‌گاه $m = ۲$ و $n = ۱$. در هر دوی این حالت‌ها به جواب $(x, y, z) = (۲۷, ۲۷, ۲۷)$ می‌رسیم.

۳) الف) از آنجایی که به‌ازای اعدادی طبیعی مانند m و n که $m > n$ داریم $z = m^۲ + mm + n^۲$، بنابراین $z^۲$ را نیز می‌توان به فرم $z^۲ = q^۲ + qr + r^۲$ نمایش داد. برای این منظور کافی است قرار دهیم

$$q = ۲mn + n^۲ \quad \text{و} \quad r = m^۲ - n^۲$$

ب) اگر $x^۲ + xy + y^۲ = z^۲$ و $(x, y) = ۱$، آن‌گاه از روابط (۹.۳.۲) نتیجه می‌گیریم:

$$x = ۲mn + n^۲\ , \quad y = m^۲ - n^۲\ , \quad z = m^۲ + mn + n^۲$$

که m و n اعدادی طبیعی‌اند و $m > n$.

۴) بدون از دست دادن کلیت مسئله می‌توانیم فرض کنیم $(x, y) = ۱$. در ضمن توجه داشته باشید که x و y نمی‌توانند زوجیت متفاوتی داشته باشند. در نتیجه x و y هر دو اعدادی فردند. با جایگذاری $x + y = ۲a$ و $x - y = ۲b$، $(a, b \in \mathbb{Z})$، معادله به صورت زیر درمی‌آید

$$a^۲ - ab + b^۲ = z^۲$$

از روابط (۱۱.۳.۲) نتیجه می‌گیریم

$$\begin{cases} a = m^۲ - n^۲ \\ b = ۲mn - n^۲ \\ z = m^۲ - mn + n^۲ \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} a = ۲mn - n^۲ \\ b = m^۲ - n^۲ \\ z = m^۲ - mn + n^۲ \end{cases}$$

که m و n اعدادی صحیح‌اند.

به این ترتیب جواب‌های عمومی معادله عبارتند از

$$(k(m^۲ + ۲mn - ۲n^۲), k(۲mn - m^۲), k(m^۲ - mn + n^۲))$$

و

$$(k(m^۲ + ۲mn - ۲n^۲), k(m^۲ - ۲mn), k(m^۲ - mn + n^۲))$$

که $k, m, n \in \mathbb{Z}$.

۵) فرض کنید (x, y, z) جوابی از معادله است. در این صورت

$$(۲x)^۴ + ۱۴(۲x)^۲(۲y)^۲ + (۲y)^۴ = (۴z)^۲$$

با جایگذاری $۲x = a + b$ و $۲y = a - b$، ($a, b \in \mathbb{N}_۰$ و $a \geq b$) به معادله‌ی هم ارز زیر می‌رسیم

$$(a + b)^۴ - ۱۴(a^۲ - b^۲)^۲ + (a - b)^۴ = ۱۶z^۲$$

این معادله پس از ساده‌شدن، به‌صورت

$$a^۴ - a^۲b^۲ + b^۴ = z^۲$$

درمی‌آید. از قضیه‌ی ۳.۳.۲ نتیجه می‌گیریم:

$$(a, b, z) = (k, k, k^{۲}) \quad \text{و} \quad (a, b, z) = (k, ۰, k^{۲})\ ; \quad k \in \mathbb{N}_۰$$

بنابراین جواب‌های معادله عبارتند از:

$$(x, y, z) = (۲k, ۰, k^{۲}), (۰, ۲k, k^{۲}) \quad \text{و} \quad (x, y, z) = (l, l, ۴l^{۲})$$

که $k, l \in \mathbb{N}_۰$.

۶) **راه‌حل اول.** معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(۳x^{۲} + y^{۲})(x^{۲} + ۳y^{۲}) = z^{۲}$$

به راحتی می‌توان نشان داد که زوجیت x و y یکسان است، چرا که در غیر این صورت خواهیم داشت $z^{۲} \overset{۴}{\equiv} ۳$، که غیر ممکن است. در ضمن می‌توانیم فرض کنیم $(x, y) = ۱$. بنابراین $(۳x^{۲} + y^{۲}, x^{۲} + ۳y^{۲}) = ۴$ و لذا:

$$۳x^{۲} + y^{۲} = ۴s^{۲} \quad \text{و} \quad x^{۲} + ۳y^{۲} = ۴t^{۲}$$

که s و t اعداد طبیعی‌اند. اما با توجه به نتیجه‌ی مثال ۸.۲ باید داشته باشیم $x = y = s = t = ۱$.

به این ترتیب فرم کلی جواب‌ها به صورت زیر است:

$$(x, y, z) = (k, k, ۴k^{۲})\ ; \quad k \in \mathbb{N}$$

راه‌حل دوم. از آنجایی که زوجیت x و y یکسان است، قرار می‌دهیم $x = a + b$، $y = a - b$ و $z = ۴c$، که $a, b, c \in \mathbb{N}$ و $a > b$. بنابراین:

$$۳(a + b)^{۴} + ۱۰(a^{۲} - b^{۲})^{۲} + ۳(a - b)^{۴} = ۱۶c^{۲}$$

این معادله پس از ساده شدن، به صورتِ

$$a^{۴} + a^{۲}b^{۲} + b^{۴} = c^{۲}$$

درمی‌آید. از قضیه‌ی (۲.۳.۲)، نتیجه می‌گیریم که $(a, b, c) = (k, ۰, k^{۲})$ و یا $(a, b, c) = (۰, k, k^{۲})$، که $k \in \mathbb{N}$.

در نتیجه جواب‌های معادله عبارتند از:

$$(x, y, z) = (k, k, ۴k^{۲})\ ; \quad k \in \mathbb{N}$$

۷) طبق فرض مسئله داریم $a^2 + c^2 = 2b^2$. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم a و c هر دو فردند و $(a,c) = 1$.

باجایگذاری $a = u+v$ و $c = u-v$، که $u, v \in \mathbb{N}$ و $u > v$، به رابطه‌ی $u^2 + v^2 = b^2$ می‌رسیم. بنابراین

$$\begin{cases} u = m^2 - n^2 \\ v = 2mn \\ b = m^2 + n^2 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} u = 2mn \\ v = m^2 - n^2 \\ b = m^2 + n^2 \end{cases}$$

که m و n اعدادی طبیعی با زوجیت مختلف‌اند، $(m,n) = 1$ و $m > n$. لذا سه‌تایی‌های مورد نظر عبارتند از

$$(a,b,c) = (m^2+2mn-n^2, m^2+n^2, |m^2-2mn-n^2|) \; ; \quad m, n \in \mathbb{N}\,, \quad m > n$$

و هر سه‌تایی به فرم (ka, kb, kc).

۸) راه‌حل اول. معادله را در ۸ ضرب کرده و معادله‌ی به دست آمده را به صورتِ

$$(x+y)^4 - (x-y)^4 = (4z)^2$$

بازنویسی می‌کنیم. طبق مثال ۱۰.۲، نتیجه می‌گیریم $x - y = 0$. بنابراین جواب‌های معادله عبارتند از $(x,y,z) = (k,k,k^2)$، که $k \in \mathbb{Z}$.

راه‌حل دوم. می‌توانیم فرض کنیم $x, y, z > 0$ و $(x,y) = 1$. حال معادله را به فرمِ

$$2xy(x^2+y^2) = (2z)^2$$

بازنویسی می‌کنیم. از شرط $(x,y) = 1$ نتیجه می‌گیریم:

$$(2xy, x^2+y^2) = 2 \quad \text{یا} \quad (2xy, x^2+y^2) = 1$$

در حالت اول داریم $2xy = u^2$ و $x^2 + y^2 = v^2$، که $u, v \in \mathbb{N}$. به این ترتیب به دستگاه معادلاتِ

$$\begin{cases} v^2 + u^2 = (x+y)^2 \\ v^2 - u^2 = (x-y)^2 \end{cases}$$

می‌رسیم. این معادله، تنها زمانی جواب دارد که $u = 0$ (مثال ۵.۲ بخش ۲.۲ را ببینید). لذا $xy = 0$، که غیرممکن است.

در حالت دوم، دستگاه معادلاتِ

$$\begin{cases} xy = u^{2} \\ x^{2} + y^{2} = 2v^{2} \end{cases}$$

به دست می‌آید. این دستگاه هم ارز است با:

$$\begin{cases} (x+y)^{2} + (x-y)^{2} = (2v)^{2} \\ (x+y)^{2} - (x-y)^{2} = (2u)^{2} \end{cases}$$

باز هم با استدلالی مشابه نتیجه می‌گیریم $x - y = 0$ و جواب‌های دستگاه به صورت $(x, y, z) = (k, k, k^{2})$ به دست می‌آید.

۹) فرض می‌کنیم $x, y, z > 0$، $x > y$ و $(x, y) = 1$. حال معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(x^{2} - y^{2})^{2} - 4x^{2}y^{2} = z^{2}$$

بنابراین

$$(x^{2} - y^{2} + z)(x^{2} - y^{2} - z) = (2xy)^{2}$$

در ادامه نشان می‌دهیم که $(x^{2} - y^{2} + z, x^{2} - y^{2} - z) = 2$. توجه کنید که x و y نمی‌توانند همزمان فرد باشند، چرا که در این صورت $z^{2} \overset{16}{\equiv} -4$. لذا فرض می‌کنیم x فرد و y زوج است. در این صورت z نیز فرد است. از طرفی $(x^{2} - y^{2} + z, x^{2} - y^{2} - z) | 2z$، در نتیجه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این دو عدد برابر ۲ است (در غیر این صورت باید داشته باشیم $(x, y) > 1$ که متناقض با فرض اولیه ماست). بنابراین به‌ازای اعدادی طبیعی مانند a و b که $(a, b) = 1$ و $xy = ab$ داریم:

$$x^{2} - y^{2} + z = 2a^{2}, \quad x^{2} - y^{2} - z = 2b^{2}$$

در نتیجه $x^{2} - y^{2} = a^{2} + b^{2}$ و داریم

$$(x^{2} + y^{2})^{2} = (a^{2} + b^{2})^{2} + 4a^{2}b^{2}$$

بنابراین

$$a^{4} + 6a^{2}b^{2} + b^{4} = (x^{2} + y^{2})^{2}$$

با توجه به مثال ۱۲.۲، جواب‌های این معادله عبارتند از $(0, k)$ یا $(a, b) = (k, 0)$، که $k \in \mathbb{Z}$.

به این ترتیب فرم کلی جواب‌های معادله‌ی اصلی به صورت زیر است:

$$(x,y,z)=(k,0,k^2) \quad \text{و} \quad (x,y,z)=(0,k,k^2)\,; \quad k\in\mathbb{Z}$$

۱۰) توجه کنید که

$$2a(a^2+3b^2)=(a+b)^3+(a-b)^3$$

بنابراین اگر $2a(a^2+3b^2)=c^3$، آن‌گاه:

$$(a+b)^3+(a-b)^3=c^3$$

اما این معادله طبق قضیه‌ی (۸.۳.۲) در اعداد طبیعی متمایز جواب ندارد.

۱۱) فرض کنید معادله را در اعداد طبیعی حل‌شدنی است و (x,y,z) جوابی از آن است. در این صورت $2(x^6-y^6)$ یک مکعب کامل است. در نتیجه عبارتِ

$$2(x^2-y^2)\big[(x^2-y^2)^2+3(xy)^2\big]$$

باید مکعب کامل شود، که طبق مسئله ۱۰ غیرممکن است.

۱۲) فرض کنید (x,y,z) جوابی از دستگاه معادلات در اعداد صحیح مخالف صفر است. داریم

$$x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy=z^4-(z^4-z)=z$$

بنابراین $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=z^3\cdot z=z^3$، که متناقض با قضیه‌ی (۸.۳.۲) است.

فصل ۶

معادلات پل

۱.۶ حل معادله‌ی پل با استفاده از روش‌های مقدماتی

۱) قرار می‌دهیم $\frac{n(n+1)}{3} = y^2$. این معادله هم ارز است با

$$(2n+1)^2 - 12y^2 = 1$$

جواب اساسی معادله‌ی پل $x^2 - 12y^2 = 1$ عبارتست از $(7,2)$. ضمن این که همه‌ی جواب‌های این معادله به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$x_m = \frac{1}{2}\left[(7+2\sqrt{12})^m + (7-2\sqrt{12})^m\right],$$
$$y_m = \frac{1}{2\sqrt{12}}\left[(7+2\sqrt{12})^m - (7-2\sqrt{12})^m\right]$$

در نتیجه

$$2n_m + 1 = x_m = \frac{1}{2}\left[(2+\sqrt{3})^{2m} + (2-\sqrt{3})^{2m}\right]; \quad m \geq 1$$

بنابراین اعداد خواسته شده در مسئله عبارتند از

$$n_m = \left[\frac{(2+\sqrt{3})^m - (2-\sqrt{3})^m}{2}\right]^2 = 3\left[\frac{(2+\sqrt{3})^m - (2-\sqrt{3})^m}{2\sqrt{3}}\right]^2$$

که $m \geq 1$.

ملاحظه. توجه کنید که همه‌ی nهایی که در مسئله صدق می‌کنند، به فرم $3k^2$ اند، که $k \in \mathbb{N}$.

۲) طول اضلاع مثلث را $z - ۱$، z و $z + ۱$ در نظر می‌گیریم. اگر s نصف محیط و A مساحت مثلث باشد، داریم:

$$s = \frac{۳z}{۲} \quad \text{و} \quad A = \frac{z\sqrt{۳(z^۲ - ۴)}}{۴}$$

اگر A عددی صحیح شود، آن‌گاه z نمی‌تواند فرد باشد. لذا قرار می‌دهیم $z = ۲x$ و $z^۲ - ۴ = ۳u^۲$. بنابراین $۴x^۲ - ۴ = ۳u^۲$. پس u نیز باید زوج باشد. با جایگذاری $u = ۲y$ به معادله‌ی پل $x^۲ - ۳y^۲ = ۱$ می‌رسیم که جواب اساسی آن $(۲, ۱)$ است. در نتیجه همه‌ی جواب‌های طبیعی (x_n, y_n) از روابط زیر به دست می آیند:

$$x_n = \frac{۱}{۲}\left[(۲ + \sqrt{۳})^n + (۲ - \sqrt{۳})^n\right], \quad y_n = \frac{۱}{۲\sqrt{۳}}\left[(۲ + \sqrt{۳})^n - (۲ - \sqrt{۳})^n\right]$$

که $n \geq ۱$. به این ترتیب، اضلاع مثلث برابر $۲x_n + ۱$، $۲x_n$ و $۲x_n - ۱$ و مساحت آن برابر $۳x_ny_n$ است.

۳) معادله‌ی اول دستگاه را به توان ۲ می‌رسانیم و چهار برابر معادله‌ی دوم را از آن کم می‌کنیم. در نهایت خواهیم داشت:

$$x^۲ - ۶xy + y^۲ = (z - u)^۲$$

در نتیجه:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^۲ - ۶\left(\frac{x}{y}\right) + ۱ = \left(\frac{z - u}{y}\right)^۲ \qquad (۱)$$

عبارت درجه‌ی دوم $w^۲ - ۶w + ۱$ به‌ازای $w = ۳ \pm ۲\sqrt{۲}$ مقدار صفر را می‌پذیرد و نیز برای $w > ۳ + ۲\sqrt{۲}$ مقداری مثبت دارد. از آنجایی که $\frac{x}{y} \geq ۱$ و سمت راست تساوی (۱) مربع کامل است. سمت چپ باید مقداری مثبت داشته باشد. بنابراین باید داشته باشیم $\frac{x}{y} > ۳ + ۲\sqrt{۲}$. حال نشان می‌دهیم که $\frac{x}{y}$ می‌تواند به اندازه‌ی دلخواه به $۳ + \sqrt{۲}$ نزدیک شود و نتیجتاً مقدار خواسته شده برای m همان $۳ + ۲\sqrt{۲}$ است. برای این منظور ثابت می‌کنیم که عبارت $(\frac{z-u}{y})^۲$ در معادله‌ی (۱) به اندازه‌ی دلخواه می‌تواند کوچک شود.

برای اثبات این مطلب، ابتدا راهی برای پیدا کردن جواب‌های دستگاه ارائه می‌کنیم. اگر p عامل اولی از z و u باشد، آن‌گاه p عاملی از هر دو عدد x و y است. لذا بدون از دست دادن کلیت مسئله می‌توانیم فرض کنیم که z و u نسبت به هم اولند. اگر طرفین

معادله‌ی نخست دستگاه را مجذور کنیم و سپس دو برابر معادله‌ی دوم را از آن کم کنیم، داریم:

$$(x-y)^۲ = z^۲ + u^۲$$

بنابراین $(z, u, x-y)$ یک سه‌تایی فیثاغورثی اولیه است و می‌توان فرض کرد u زوج است. در نتیجه اعدادی طبیعی و نسبت به هم اول مانند a و b وجود دارند، به‌نحوی که یکی از آن‌ها زوج و دیگری فرد است و نیز

$$z = a^۲ - b^۲\ , \quad u = ۲ab\ , \quad x - y = a^۲ + b^۲$$

با ترکیب تساوی‌های بالا با رابطه‌ی $x + y = z + u$ نتیجه می‌گیریم:

$$x = a^۲ + ab \quad \text{و} \quad y = ab - b^۲$$

در ضمن توجه کنید که $z - u = a^۲ - b^۲ - ۲ab = (a-b)^۲ - ۲b^۲$. اگر $z - u = ۱$، معادله‌ی پلِ

$$(a-b)^۲ - ۲b^۲ = ۱$$

حاصل می‌شود، که جواب اساسی آن عبارتست از $a - b = ۳$ و $b = ۲$.

این معادله‌ی پل، بی‌نهایت جواب طبیعی برای $a - b$ و b دارد. در ضمن هر دوی این مقادیر می‌توانند به اندازه‌ی دلخواه بزرگ شوند. در نتیجه $y = ab - b^۲$ نیز به اندازه‌ی دلخواه می‌تواند بزرگ شود. پس سمت راست معادله‌ی (۱) می‌تواند به هر میزان دلخواه کوچک و مقدار $\frac{x}{y}$ متناظر با آن، می‌تواند به اندازه‌ی دلخواه به $۳ + ۲\sqrt{۲}$ نزدیک شود.

۲.۶ معادله‌ی $ax^۲ - by^۲ = ۱$

۱) کوچک‌ترین جواب معادله‌ی $۳r^۲ - ۲s^۲ = ۱$ عبارتست از $(r, s) = (۱, ۱)$. طبق قضیه‌ی ۲.۳.۳ همه‌ی جواب‌های این معادله، از روابط بازگشتی

$$r_n = u_n + ۲v_n\ , \quad s_n = u_n + ۳v_n\ ; \quad n \geq ۰$$

به دست می‌آیند، که $(u_n, v_n)_{n\geq ۰}$ جواب عمومی معادله‌ی حلال $u^۲ - ۶v^۲ = ۱$ است.

حال نشان می‌دهیم که چهارتایی‌های $(x, y, z, w) = (۳r_k r_l, ۲s_k s_l, r_k s_l, r_l s_k)$ ویژگی خواسته شده را دارند. برای این منظور، توجه کنید که

$$x^۲ + y^۲ - ۶(z^۲ + w^۲) = ۹r_k^۲ r_l^۲ + ۴s_k^۲ s_l^۲ - ۶r_k^۲ s_l^۲ - ۶r_l^۲ s_k^۲$$
$$= (۳r_k^۲ - ۲s_k^۲)(۳r_l^۲ - ۲s_l^۲) = ۱ \times ۱ = ۱$$

ضمن این که $۳|x$ و $۲|y$.

۲) الف) اگر $n + ۱ = x^۲$ و $۳n + ۱ = y^۲$، آن‌گاه $۳x^۲ - y^۲ = ۲$. با جایگذاری $u = \frac{۱}{۲}(۳x - y)$ و $v = \frac{۱}{۲}(y - x)$، معادله‌ی پل

$$u^۲ - ۳v^۲ = ۱$$

به دست می‌آید، که جواب‌های عمومی $(u_k, v_k)_{k\geq ۱}$ از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$u_k = \frac{۱}{۲}\left[(۲ + \sqrt{۳})^k + (۲ - \sqrt{۳})^k\right], \quad v_k = \frac{۱}{۲\sqrt{۳}}\left[(۲ + \sqrt{۳})^k - (۲ - \sqrt{۳})^k\right]$$

بنابراین

$$n_k = x_k^۲ - ۱ = (u_k + v_k)^۲ - ۱ = \frac{۱}{۶}\left[(۲+\sqrt{۳})^{۲k+۱} + (۲-\sqrt{۳})^{۲k+۱} - ۴\right]; \quad k \geq ۱$$

ب) داریم

$$n_k n_{k+۱} + ۱ = \left(\frac{۱}{۶}\left[(۲ + \sqrt{۳})^{۲k+۲} + (۲ - \sqrt{۳})^{۲k+۲} - ۸\right]\right)^۲; \quad k \geq ۱$$

۳) کافی است دنباله‌های اکیداً صعودی (a_n) و (b_n) از اعداد طبیعی و عدد طبیعی k را طوری بیابیم که برای هر $n \geq ۱$ داشته باشیم $k(a_n^۲ + a_n) = b_n^۲ + ۱$. این رابطه، هم ارز است با:

$$k(۲a_n + ۱)^۲ - (۲b_n)^۲ = k + ۴$$

به‌ازای $k = ۵$، این معادله به صورتِ

$$۵x^۲ - y^۲ = ۹$$

درمی‌آید، که بی‌نهایت جواب دارد؛ در واقع $(۳, ۶)$ جوابی از این معادله است و زوج‌های (x_n, y_n) که از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند، در معادله صدق می‌کنند:

$$x_n = ۳u_n + ۶v_n, \quad y_n = ۶u_n + ۱۵v_n; \quad n \geq ۱$$

که در این جا (u_n, v_n) جواب عمومی معادله‌ی پل $u^2 - 5v^2 = 1$ است. برای اثبات این مطلب، توجه کنید که برای هر $n \geq 1$ داریم:

$$\begin{aligned} 5x_n^2 - y_n^2 &= 5(3u_n + 6v_n)^2 - (6u_n + 15v_n)^2 \\ &= 9u_n^2 - 45v_n^2 = 9(u_n^2 - 5v_n^2) = 1 \end{aligned}$$

واضح است که با توجه به رابطه‌ی $u_n^2 - 5v_n^2 = 1$، u_n فرد و v_n زوج است (برای هر $n \geq 1$).

بنابراین دنباله‌های (b_n) و (a_n) که در رابطه‌های

$$a_n = \frac{x_n - 1}{2} = \frac{3u_n - 1}{2} + 3v_n\,, \quad b_n = \frac{y_n}{2} = 3u_n + \frac{15v_n}{2}\,; \quad n \geq 1$$

صدق می‌کنند، اکیداً صعودی‌اند و نیز $a_n(a_n + 1) | b_n^2 + 1$.

۳.۶ معادله‌ی پل منفی

۱) معادله‌ی داده شده هم ارز است با:

$$2(x-y)^2 - (x+y)^2 = 1$$

با جایگذاری $X = x + y$ و $Y = x - y$، $(x \geq y)$، به معادله‌ی پل منفي

$$X^2 - 2Y^2 = -1$$

می‌رسیم. طبق قضیه‌ی (۱.۴.۳) جواب عمومی (X_n, Y_n) به صورت زیر به دست می آید:

$$X_n = u_n + 2v_n\,, \quad Y_n = u_n + v_n$$

که $(u_n, v_n)_{n\geq 1}$ جواب عمومی معادله‌ی حلال $u^2 - 2v^2 = 1$ است، یعنی:

$$u_n = \frac{1}{2}\left[(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n\right]\,, \quad v_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n\right]$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} X_n &= u_n + 2v_n = \frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{2n+1} + (1-\sqrt{2})^{2n+1}\right]\,, \\ Y_n &= u_n + v_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^{2n+1} - (1-\sqrt{2})^{2n+1}\right] \end{aligned}$$

بنابراین

$$x_n = \frac{۱}{۲}(X_n + Y_n) = \frac{۱}{۴\sqrt{۲}}[(۱+\sqrt{۲})^{۲n+۲} - (۱-\sqrt{۲})^{۲n+۲}] ,$$
$$y_n = \frac{۱}{۲}(X_n - Y_n) = \frac{۱}{۴\sqrt{۲}}[(۱+\sqrt{۲})^{۲n} - (۱-\sqrt{۲})^{۲n}]$$

دنباله‌ی $(P_m)_{m\geq ۱}$ را که از رابطه‌ی

$$P_m = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}[(۱+\sqrt{۲})^m - (۱-\sqrt{۲})^m]$$

به دست می‌آید، دنباله‌ی پل می‌نامند. این دنباله را در رابطه‌ی بازگشتی $P_{m+۱} = ۲P_m + P_{m-۱}$ صدق می‌کنند، ضمن این که $P_۱ = ۱$ و $P_۲ = ۲$. در نتیجه جواب‌های معادله‌ی مسئله را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{۱}{۲}P_{۲n+۲}, \frac{۱}{۲}P_{۲n}\right) \quad , \quad (x_n, y_n) = \left(\frac{۱}{۲}P_{۲n}, \frac{۱}{۲}P_{۲n+۲}\right) \quad ; \quad n \geq ۱$$

توجه کنید که جواب دوم از تقارن معادله نسبت به x و y به دست آمده است.

۲) معادله‌ی $x^۲ - ۵y^۲ = -۱$ را در نظر بگیرید. زوج $(۲, ۱)$ کوچک‌ترین جواب مثبت این معادله است؛ در نتیجه این معادله، بی‌نهایت جواب دارد. جواب‌هایی از این معادله را در نظر بگیرید که در آن‌ها $y > ۵$. بنابراین:

$$۴y^۲ \leq ۵y^۲ - ۱ = x^۲ \Rightarrow ۵ < y < ۲y \leq x$$

حال به راحتی می‌توان نشان داد که $۲(x^۲+۱) = ۵y \cdot ۲y | x!$ (چرا که $x \geq ۲y$).

۳) ابتدا فرض کنید $n^۲ + (n+۱)^۲ = y^۲$. این رابطه را می‌توان به صورت $(۲n+۱)^۲ - ۲y^۲ = -۱$ که یک معادله‌ی پل منفی است، بازنویسی کرد. این معادله بی‌نهایت جواب (x,y) دارد و در هر یک از این جواب‌ها، x عددی فرد است، یعنی $x = ۲n+۱$، $(n \in \mathbb{N})$. به‌ازای این nها داریم $y = a_n$ و نیز

$$a_{n-۱} = \lfloor\sqrt{(n-۱)^۲ + n^۲}\rfloor = \lfloor\sqrt{y^۲ - ۴n}\rfloor$$

در نتیجه با توجه به این که $y \leq ۲n$ خواهیم داشت

$$a_{n-۱} \leq \sqrt{y^۲ - ۴n} < y - ۱ = a_n - ۱$$

یعنی $a_n - a_{n-۱} > ۱$.

ضمن این که برای این مقادیر n داریم

$$a_{n+1} = \lfloor\sqrt{(n+1)^2+(n+2)^2}\rfloor = \lfloor\sqrt{y^2+4n+4}\rfloor$$

از آنجایی که $n < y < 2n+1$، به راحتی می‌توان نشان داد

$$y+1 < \sqrt{y^2+4n+4} < y+2 \Rightarrow a_{n+1} - a_n = (y+1) - y = 1$$