



انتشارات دانشگاه

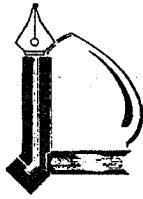
شماره ۲۲۱

چاپ هفتم

آشنایی با مکانیک کلاسیک

تألیف : آ. پ. آریا

ترجمه : جعفر گودرزی



انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد ، شماره ۲۲۱

آشنایی با

مکانیک کلاسیک

تألیف

آ. پ. آریا

ترجمه

جعفر گودرزی

Arya, Atam Parkash

آریا، آتام پارکاش

آشنایی با مکانیک کلاسیک / تألیف آ. پ. آریا؛ ترجمه جعفر گودرزی. - مشهد: دانشگاه فردوسی مشهد،

۱۳۷۶.

نوزده، ۹۲۲ ص، مصور، جدول، نمودار. - (انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد؛ شماره ۲۲۱)

ISBN: 964-6335-06-3

فهرست نویسی بر اساس اطلاعات فیبا (فهرست نویسی پیش از انتشار).

Introduction to Classical Mechanics.

عنوان اصلی:

واژه نامه.

کتابنامه.

۱. مکانیک. الف. گودرزی، جعفر. ۱۳۱۲ - ، مترجم. ب. دانشگاه فردوسی مشهد. ج. عنوان.

۵۳۱

QC ۱۲۵ / ۲ / ۲۴۲۵

۱۳۷۶

کتابخانه ملی ایران

۶۲۹۵-۱۶م



دانشگاه فردوسی مشهد

انتشارات، شماره ۲۲۱

آشنایی با مکانیک کلاسیک

تألیف

آ. پ. آریا

ترجمه

دکتر جعفر گودرزی

وزیری، ۹۴۴ صفحه، ۱۰۰۰ نسخه، چاپ هفتم، تابستان ۱۳۸۹

امور فنی و چاپ: مؤسسه چاپ و انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد

بها: ۱۳۰۰۰۰ ریال

فهرست مطالب

۱	فصل اول - آشنایی با مکانیک نیوتنی
۱	۱-۱ مقدمه
۲	۲-۱ یکاها و ابعاد
۳	سه مقیاس پایه ای : طول ، جرم ، و زمان
۴	دستگاههای یکاهای مختلف
۴	ابعاد
۶	۳-۱ قوانین نیوتن و دستگاههای لخت
۹	۴-۱ دستگاههای لخت و نالخت
۹	نیروهای نالخت
۱۱	۵-۱ کاربردهای ساده قوانین نیوتن
۱۱	قطار
۱۳	ماشین آتوود
۱۵	سطح شیب دار
۱۸	استوانه چرخان
۲۱	۶-۱ حرکت دایره ای و گرانش
۲۶	مسائل
۳۱	منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر

فصل دوم - دینامیک ذره در یک بُعد

- ۳۳ ۱-۲ مقدمه
- ۳۳ ۲-۲ نیروی اعمال شده ثابت است : ثابت $F =$
- ۳۵ ۳-۲ نیروی وابسته به زمان : $F = F(t)$
- ۳۶ ۴-۲ نیروی وابسته به سرعت : $F = F(v)$
- ۴۳ مورد خاص
- ۴۴ مورد عمومی
- ۴۶ سرعت حدی
- ۴۸ زمان مفسر
- ۴۹ یک تقریب بهتر
- ۵۰ ۵-۲ نیروهای وابسته به مکان $F = F(x)$
- ۵۴ نیروهای پایستار . انرژی پتانسیل
- ۵۴ ۶-۲ حرکت تحت اثر یک نیروی بازگرداننده خطی
- ۶۰ ۷-۲ تغییرات g در یک میدان گرانشی
- ۶۲
- ۶۶

مسائل

- ۷۱ منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر

فصل سوم - نوسانگرهای هماهنگ

- ۷۳ ۱-۳ مقدمه
- ۷۳ ۲-۳ نوسانات خطی و غیر خطی
- ۷۴ نوسانات خطی
- ۷۷ نوسانات غیر خطی
- ۷۸ ۳-۳ نوسانگر هماهنگ خطی
- ۷۹ انرژی نوسانگر هماهنگ ساده
- ۸۵ ۴-۳ نوسانگر هماهنگ میرا
- ۹۰ مورد (الف) نوسانات کندمیرا : $\omega_0^2 > \gamma^2$
- ۹۲ ملاحظات انرژی ای
- ۹۶

مورد (ب) میرایی بحرانی : $\omega_0^2 = \gamma^2$

۹۸

مورد (پ) : $\omega_0^2 < \gamma^2$

۱۰۱

۳-۵ ضریب کیفیت

۱۰۲

۳-۶ نوسانگر هماهنگ واداشته (نوسانگر هدایت شده)

۱۰۸

۳-۷ تشدید دامنه

۱۱۶

۳-۸ تشدید انرژی

۱۲۰

۳-۹ آهنگ اتلاف انرژی

۱۲۴

۱۲۶

مسائل

۱۲۹

منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر

۱۳۱

فصل چهارم - سیستمهای نوسانی

۱۳۱

۴-۱ مقدمه

۱۳۲

۴-۲ نوسانات هماهنگ در مدارهای الکتریکی

۱۳۷

ملاحظات انرژی ای

۱۳۸

۴-۳ اصل برهم نهش و سری فوریه

۱۴۵

۴-۴ حرکت هماهنگ و تابع گرین

۱۴۵

نیروی ضربه ای

۱۴۷

نیروی پیوسته دلخواه و تابع گرین

۱۵۴

۴-۵ سیستمهای نوسانی غیر خطی

۱۵۵

سیستم غیر خطی متقارن

۱۵۹

سیستم غیر خطی نامتقارن

۱۶۱

۴-۶ بحث کیفی حرکت و نمودارهای فاز

۱۶۱

نمودار انرژی

۱۶۴

نمودارهای فاز

۱۶۹

مسائل

۱۷۴

منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر

- فصل پنجم - آنالیز برداری ، عملگرهای برداری ، و تبدیلات
- ۱۷۵ ۱-۵ خواص برداری - بررسی هندسی
- ۱۷۵ نمایش کمیات برداری
- ۱۷۶ تساوی بردارها
- ۱۷۷ ضرب یک بردار در یک نرده ای
- ۱۷۷ جمع برداری
- ۱۷۸ تفریق برداری
- ۱۸۰ ۲-۵ جمع برداری : بررسی تحلیلی
- ۱۸۱ ۳-۵ ضرب نرده ای و ضرب برداری بردارها
- ۱۸۸ ضرب نرده ای (یا ضرب نقطه ای)
- ۱۸۸ ضرب برداری (یا ضرب چلیپایی)
- ۱۹۱ ضرب سه گانه نرده ای : حجم یک متوازی السطوح
- ۱۹۶ ضرب سه گانه برداری
- ۱۹۷ ۴-۵ بردارهای یکه یا بردارهای پایه
- ۱۹۷ ۵-۵ کسینوسهای جهتی
- ۲۰۲ ۶-۵ آنالیز برداری
- ۲۰۵ مشتق گیری از بردارها
- ۲۰۸ مؤلفه های مماسی و قائم شتاب
- ۲۱۰ انتگرال گیری بردارها
- ۲۱۳ ۷-۵ عملگرهای ديفرانسیلی برداری : گرادیان ، دیورژانس ، و کرل
- ۲۱۳ عملگر گرادیان ($\text{grad } u \equiv \nabla u$)
- ۲۱۴ تعبیر فیزیکی گرادیان
- ۲۱۷ دیورژانس یک بردار ($\nabla \cdot \mathbf{A} \equiv \text{div } \mathbf{A}$)
- ۲۲۳ کرل یک بردار ($\nabla \times \mathbf{A} \equiv \text{Curl } \mathbf{A}$)
- ۲۲۷ ۸-۵ تبدیل مختصات

۲۴۵	فصل ششم - حرکت در دو و سه بُعد
۲۴۵	۱-۶ دستگاههای مختصات مختلف
۲۴۵	مختصات دکارتی
۲۴۷	مختصات قطبی صفحه ای
۲۴۸	مختصات استوانه ای
۲۵۱	مختصات قطبی کروی
۲۵۲	۲-۶ سینماتیک در دستگاههای مختصات مختلف
۲۵۲	مختصات دکارتی
۲۵۴	مختصات قطبی صفحه ای
۲۵۸	مختصات استوانه ای
۲۶۰	مختصات قطبی کروی
۲۶۴	۳-۶ عملگر «دل» در مختصات استوانه ای و کروی
۲۶۶	۴-۶ تابع انرژی پتانسیل
۲۷۶	۵-۶ گشتاور نیرو
۲۷۹	۶-۶ دینامیک در سه بُعد
۲۸۱	۷-۶ نوسانگرهای هماهنگ در دو و سه بُعد
۲۸۱	نوسانهای هماهنگ در دو بُعد : منحنیهای لیسازو
۲۸۵	نوسانگرهای هماهنگ در سه بُعد
۲۸۷	۸-۶ حرکت پرتابی
۲۸۷	مقاومت هوا وجود ندارد
۲۸۹	مقاومت هوا تابع سرعت است
۲۹۲	حرکت پرتابه در سه بُعد
۲۹۴	
۳۰۳	مسائل منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر

۳۰۵	فصل هفتم - نیروی مرکزی
۳۰۵	۱-۷ نیروی مرکزی و انرژی پتانسیل

- ۳۰۸ ۲-۷ حرکت در میدان نیروی مرکزی به عنوان یک مسأله یک جسمی
- ۳۱۳ ۳-۷ خواص عمومی حرکت در میدان نیروی مرکزی
- ۳۱۳ حرکت در میدان نیروی مرکزی به یک صفحه محدود می شود
- ۳۱۵ تکانه زاویه ای و انرژی ثابتهای حرکتند
- ۳۱۷ قانون مساحتیهای برابر
- ۳۱۹ ۴-۷ معادلات حرکت
- ۳۲۵ ۵-۷ مدارهای میدان نیروی مرکزی و پتانسیل مؤثر
- ۳۳۸ ۶-۷ مدارها در یک میدان نیروی عکس مجذوری
- ۳۴۸ ۷-۷ قوانین کپلر در مورد حرکت سیارات
- ۳۵۳ ۸-۷ مدارهای دایره ای پریشیده : نوسانات حول یک مدار دایره ای
- ۳۵۸ ۹-۷ انتقالهای مداری : تقویت و تضعیف گرانشی

مسائل

- ۳۶۳ منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر
- ۳۷۱

فصل هشتم - قوانین پایستگی و برخورد

- ۳۷۳ ۱-۸ سیستم ذرات و مرکز جرم
- ۳۷۳ ۲-۸ پایستگی تکانه خطی
- ۳۷۶ ۳-۸ پایستگی تکانه زاویه ای
- ۳۷۹ ۴-۸ پایستگی انرژی
- ۳۸۲ ۵-۸ حرکت سیستمهای با جرم متغیر : موشکها و تسمه های نقاله
- ۳۸۴ حرکت موشکها
- ۳۸۴ تسمه نقاله
- ۳۸۷ ۶-۸ برخوردیهای کشسان و قوانین پایستگی
- ۳۹۵ ۷-۸ برخوردهای ناکشسان
- ۴۰۱ ۸-۸ مسأله دو جسم در دستگاه مختصات مرکز جرمی
- ۴۰۵ ۹-۸ برخورد در دستگاه مختصات مرکز جرمی
- ۴۰۹ ۱۰-۸ نیروی دافع عکس مجذوری
- ۴۱۵

۴۱۵	پراکنندگی راترفورد
۴۲۳	مسائل
۴۳۳	منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر
۴۳۵	فصل نهم - حرکت جسم صلب: (۱)
۴۳۵	۱-۹ توصیف جسم صلب
۴۳۸	۲-۹ مرکز جرم یک جسم صلب
۴۴۰	مرکز جرم یک نیمکره ، پوسته نیمکره ای ، و نیمدایره
۴۴۲	حرکت مرکز جرم
۴۴۵	۳-۹ چرخش حول یک محور
۴۵۰	۴-۹ محاسبه گشتاور لختی
۴۵۱	میله نازک
۴۵۲	قضیه محورهای موازی
۴۵۴	قضیه محور عمودی
۴۵۶	حلقه یا پوسته استوانه ای
۴۵۷	شعاع چرخش
۴۵۸	قرص دایره ای ، استوانه توپر
۴۵۹	کره و پوسته کروی
۴۶۲	۵-۹ آونگ ساده
۴۶۶	۶-۹ آونگ فیزیکی
۴۷۰	۷-۹ مرکز ضربه
۴۷۳	۸-۹ محیطهای تغییر شکل پذیر
۴۸۱	۹-۹ ترازمندی اجسام صلب
۴۸۳	۱۰-۹ ترازمندی کابلها و ریسمانهای انعطاف پذیر
۴۸۳	کابل با بار متمرکز
۴۸۵	کابلهای با توزیع بار
۴۸۸	کابلهای زنجیری

- ۴۹۰ ۱۱-۹ ترازمندی تیرهای جامد
- ۴۹۰ بررسی عمومی : گشتاورهای خمشی
- ۴۹۲ محاسبه گشتاورهای خمشی
- ۴۹۵ مسائل
- ۵۰۵ منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر
- ۵۰۷ **فصل دهم - نیرو و پتانسیل گرانشی**
- ۵۰۷ ۱-۱۰ قانون جهانی نیوتن از گرانش
- ۵۱۱ ۲-۱۰ میدان گرانشی و پتانسیل گرانشی
- ۵۱۶ ۳-۱۰ خطوط نیرو و سطوح تراز پتانسیل (هم پتانسیل)
- ۵۲۱ ۴-۱۰ محاسبه میدان گرانشی و پتانسیل گرانشی
- ۵۲۱ لایه کروی
- ۵۲۸ کره توپر
- ۵۳۱ لایه با ضخامت معین
- ۵۳۷ ۵-۱۰ قانون گاوس
- ۵۴۱ ۶-۱۰ معادلات میدان گرانشی
- ۵۴۵ مسائل
- ۵۵۲ منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر
- ۵۵۳ **فصل یازدهم - دستگاههای مختصات نالخت**
- ۵۵۳ ۱-۱۱ مقدمه
- ۵۵۴ ۲-۱۱ دستگاههای مختصات با حرکت انتقالی
- ۵۵۸ ۳-۱۱ دستگاههای مختصات چرخان
- ۵۷۰ ۴-۱۱ توصیف حرکت در روی زمین چرخان
- ۵۷۱ تأثیرات ایستایی (خط شاتول)
- ۵۷۳ تأثیرات دینامیکی (حرکت یک پرتابه و سقوط آزاد)
- ۵۷۸ اثرهای دینامیکی (حرکت یک پرتابه) : روش کلی

۵۸۲	۱۱-۵ آونگ فوگو
۵۸۸	۱۱-۶ جریانهای افقی باد : سیستمهای آب و هوایی
۵۹۳	مسائل
۶۰۲	منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر
۶۰۳	فصل دوازدهم - دینامیک لاگرانژی و هامیلتونی
۶۰۳	۱۲-۱ مقدمه
۶۰۴	۱۲-۲ مختصات تعمیم یافته و قیدها
۶۰۷	۱۲-۳ نیروهای تعمیم یافته
۶۰۷	یک تک ذره
۶۰۸	یک سیستم ذرات
۶۰۹	سیستمهای پایستار
۶۱۰	۱۲-۴ معادلات لاگرانژی حرکت برای یک ذره
۶۲۲	۱۲-۵ معادلات لاگرانژی حرکت برای یک سیستم ذرات
۶۳۰	۱۲-۶ معادلات لاگرانژی حرکت با ضرایب نامعین ؛ قیدها
۶۴۰	۱۲-۷ تکانه تعمیم یافته . مختصات دوره ای (یا قابل چشم پوشی)
۶۴۳	۱۲-۸ تابع هامیلتونی . قوانین پایستگی و اصول تقارن
۶۴۳	پایستگی تکانه خطی
۶۴۵	پایستگی تکانه زاویه ای
۶۴۷	پایستگی انرژی و تابع هامیلتونی
۶۵۰	۱۲-۹ دینامیک هامیلتونی : معادلات هامیلتونی حرکت
۶۵۷	مسائل
۶۷۰	منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر
۶۷۱	فصل سیزدهم - حرکت جسم صلب (۲)
۶۷۱	۱۳-۱ مقدمه
۶۷۲	۱۳-۲ تکانه زاویه ای و انرژی جنبشی

- ۶۷۹ ۱۳-۳ تانسور لختی
- ۶۸۶ ۱۳-۴ گشتاور لختی در دستگاهای جسمی مختلف (قضیه اشتاینر)
- ۶۸۹ قضیه محور عمودی
- ۶۹۲ ۱۳-۵ گشتاورهای لختی اصلی و محورهای اصلی
- ۶۹۴ تعادل دینامیکی
- ۶۹۵ تعیین محورهای اصلی
- ۷۰۰ ۱۳-۶ بیضوی لختی
- ۷۰۳ ۱۳-۷ توضیحات بیشتری در باره خواص تانسور لختی
- ۷۱۰ ۱۳-۸ زوایای اولر
- ۷۱۴ ۱۳-۹ معادلات اولری حرکت برای یک جسم صلب
- ۷۱۷ ۱۳-۱۰ حرکت آزاد یک فرفره متقارن
- ۷۲۴ ۱۳-۱۱ حرکت فرفره متقارن با یک نقطه تثبیت شده (فرفره وزن دار)
- ۷۲۸ حرکت تقدیمی پایا
- ۷۳۱ تغییرات θ با زمان : ترقص
- مسائل ۷۳۳
- ۷۴۲ منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر
- ۷۴۳ فصل چهاردهم - نظریه نوسانات کوچک و نوسانگرهای جفت شده
- ۷۴۳ ۱۴-۱ تعادل و انرژی پتانسیل
- ۷۴۸ ۱۴-۲ دو نوسانگر جفت شده و مختصات بهنجار
- ۷۵۲ مختصات بهنجار
- ۷۵۵ معادلات حرکت در مختصات بهنجار
- ۷۵۶ ۱۴-۳ نظریه نوسانات کوچک
- ۷۶۲ ۱۴-۴ نوسانات کوچک در مختصات بهنجار
- ۷۶۵ ۱۴-۵ فرمول بندی تانسوری نظریه نوسانات کوچک
- ۷۷۹ ۱۴-۶ ارتعاشات نزدیک به هم ورنش
- ۷۸۳ ۱۴-۷ ارتعاش مولکولها

۱۴-۸ سیستمهای اتلافی و نوسانهای واداشته

پانزده

۷۸۷

۷۹۲

۸۰۰

مسائل

منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر

۸۰۱

۸۰۱

۸۰۲

۸۰۲

۸۰۵

۸۱۲

۸۲۰

۸۲۵

۸۳۷

۸۴۱

۸۴۸

۸۵۴

۸۵۵

۸۵۶

۸۶۱

۸۶۳

۸۶۵

۸۶۸

۸۷۲

۸۸۰

فصل پانزدهم - تارهای مرتعش و سیالات

۱-۱۵ مقدمه

۱۵-۲ تار مرتعش

معادله حرکت

حل عمومی : مدهای بهنجار ارتعاش

۱۵-۳ انتشار موج در حالت کلی

۱۵-۴ فرمول بندی لاگرانژ برای یک تار مرتعش : انرژی و توان

۱۵-۵ سیستم ذرات : تار وزنه دار

۱۵-۶ رفتار موج در ناپیوستگی : جریان انرژی

۱۵-۷ امواج صوتی : امواج طولی

۱۵-۸ ایستایی سیالات

اصل ارشمیدس

۱۵-۹ سیالهای در حال حرکت

معادله پیوستگی

معادله حرکت برای جریان سیال ایده آک

معادله برنولی

۱۵-۱۰ چسبندگی و جریان چسبناک

حرکتهای لایه ای (جریانی) و متلاطم

مسائل

منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر

۸۸۱

۸۸۱

فصل شانزدهم - نظریه نسبیت خاص

۱-۱۶ مقدمه

- ۸۸۲ ۲-۱۶ تبدیلات گاليله ای و ناورداهای گاليله ای
- ۸۸۵ ۳-۱۶ اصول موضوع اینشتین و تبدیلات لورنتسی
- ۸۹۱ ۴-۱۶ چند پیامد از تبدیلات لورنتسی
- ۸۹۱ انقباض طول : انقباض فیتز جرالده - لورنتس
- ۸۹۳ انبساط زمان : کند شدن ساعتها
- ۸۹۵ همزمانی
- ۸۹۵ جمع سرعتها
- ۸۹۸ ۵-۱۶ فرمول بندی هموردا و چار - بردارها
- ۹۰۲ ۶-۱۶ دینامیک نسبیتی
- ۹۰۸ ۷-۱۶ فرمول بندی لاگرانژی و هامیلتونی دینامیک نسبیتی

مسائل

منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر

۹۱۲

۹۱۸

پیشگفتار

هدف از نوشتن این کتاب ارائه شرح نسبتاً کاملی از مکانیک کلاسیک برای مراحل میانی دوره کارشناسی است. این کتاب در انتخاب و تنظیم مطالب برای دو نیمسال سه واحدی در سطح اول یا دوم انعطاف پذیری بسیاری زیادی از خود نشان می دهد. با انتخاب و حذف مناسب بعضی قسمت‌ها می توان آن را در یک نیمسال نیز پوشش داد. فصل اول مروری است بر مفاهیم مکانیک، شامل قوانین نیوتنی حرکت و گرانش و اعمال آنها به چند مثال برگزیده. در نیمسال اول می توان فصلهای دوم تا دهم را پوشش داد و در نیمسال دوم شش فصل باقیمانده را. برای یک درس یک نیمساله می توان بیشتر دوازده فصل اول (با حذف معادل با دو فصل) را پوشش داد.

دانشجویانی می توانند این درس را شروع کنند که در فیزیک عمومی و در ریاضیات عمومی آمادگی مناسبی داشته باشند. ریاضیات لازم، از قبیل معادلات دیفرانسیل (فصل ۳)، سری فوریه (فصل ۴)، جبر برداری و تبدیلات ماتریسی (فصل ۵) و آنالیز تانسوری (فصل ۱۳) به اندازه نیاز ارائه شده است. بخش اعظم فصل ۵ شامل مروری بر آنالیز برداری است. دانشجویان متوسط نیازی به خواندن این مواد ندارند، ولی می توانند آنها را به عنوان مرجع مناسبی برای فصلهای دیگر مورد استفاده قرار دهند.

مکانیک پایه علوم محض و کاربردی است و اصول آن به گستره وسیعی از سیستمهای فیزیکی اعمال می شود. من این کتاب را به دانشجویانی که مکانیک مقدماتی در فیزیک عمومی تا سطح متوسطی از مکانیک را بطور پیوسته خوانده اند با این هدف تدریس کرده ام که به آنها پایه ای قوی برای کارهای آینده شان در علوم محض و کاربردی، بخصوص در فیزیک پیشرفته، خواهد داد. به عنوانهای زیر، که موضوع روز هستند، توجه زیادی معطوف

شده است : (الف) نوسانگرهای غیرخطی (فصل ۴) ؛ (ب) حرکت در میدان نیروی مرکزی (فصل ۷) شامل (۱) ربایش ستارگان دنباله دار ، (۲) مدارهای ماهواره ها و کنترل آنها ، (۳) پایداری مدارهای دایره ای ، (۴) مدارهای انتقالی بین سیاره ای ؛ (پ) مسأله برخورد در دستگاه مختصات مرکز جرمی که به تفصیل در فصل ۸ بررسی شده است ؛ (ت) جریان افقی بادها (سیستمهای آب و هوایی) (فصل ۱۱) ؛ و روابط بین قوانین پایستگی و اصول تقارن (فصل ۱۲) .

اگر بخواهیم مکانیک (یا بطور کلی فیزیک) را خوب درک کنیم ، باید یاد بگیریم مسأله حل کنیم . لازم نیست مشکلترین مسائل را حل کنیم ؛ حل حتی ساده ترین مسأله نیز درک مفاهیم پایه ای را افزایش می دهد . یک مشکل که بیشتر دانشجویان با آن مواجهند این است که ، بعد از خواندن یک فصل معین ، حل مسائل پایان فصل را مشکل می یابند . حل مسأله ، حتی برای یک دانشجوی متوسط ، اگر مثالها را با حلتهایی که اصول و روشهای پایه ای ریاضی را توضیح می دهند حل کرده باشد ، می تواند هم جالب باشد و هم مسرت انگیز . برای فایق آمدن به این مشکل ، من تقریباً ۶۰ مسأله حل شده در سرتاسر کتاب گنجانیده ام . وجود مثالهای حل شده ، علاوه بر این ، در وقت کلاس به مقدار زیادی صرفه جویی می کند و به کلاس اجازه می دهد که با گامهای مؤثرتری به جلو برود . به دنبال هر مثال یک تمرین آمده است ، و دانشجو باید این تمرین را قبل از پرداختن به مسائل آخر فصل ، که از نظر مشکلی درجات متفاوتی دارند ، حل کند .

در پایان هر فصل لیستی از منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر آورده ام . بیشتر این منابع به موضوعهای بحث شده در آن فصل مربوط اند . تعدادی از این مراجع برای تهیه مطالب پیش نیاز آورده شده اند ، و مراجعی که با علامت ستاره مشخص شده اند ماهیت پیشرفته تری دارند . به علاوه ، این لیستها حاوی بیشتر مراجعی هستند که در نوشتن این کتاب مورد استفاده قرار گرفته اند ، و در نتیجه ، به عنوان قدرشناسی و ادای دین من به این مؤلفان تلقی می شوند .

قدردانی و تشکر

از زمان تهیه پیش نویس تا انتشار ، مؤلف و ناشر ، جیمز اسمیت ، بطور پیوسته نظرات و پیشنهاداتی از منابعی متعدد دریافت داشته اند . به این جهت مؤلف مدیون مارتین فرر ،

دانشگاه ویرجینیای غربی ، و بازخوانهای زیر است :

پروفسور رابرت مارکینی ، دانشگاه ایالتی ممفیس

پروفسور جرج رینی ، دانشگاه ایالتی پلی تکنیک کالیفرنیا

پروفسور ژوزف ساک ، دانشگاه راتگرز

پروفسور آلستون اشتاینر ، دانشگاه کلمسون

پروفسور مالکولم واتلی ، دانشگاه ورمونت

از بخشهای تولید و چاپ آیین و بیکن ، بخصوص از آقای جیمز اسمیت ، که از آغاز تا پایان آن را بازخوانی کرد ، سپاسگزاری می کنم . همچنین از ژانت بروک ، به خاطر ماشین کردن بخشی از دستنوشته ها و کمک به تهیه فهرست ، و از دانشجویم ژن فنگ ، به خاطر بازخوانی بخشی از دستنوشته ها ، سپاسگزاری می کنم . بالاخره از همسرم پاولین ، به خاطر شرکت در بحثها و تصحیح مکرر دستنوشته ها ، صمیمانه سپاسگزاری می کنم .

A. P. A.

فصل اول

آشنایی با مکانیک نیوتنی

۱-۱ مقدمه

مکانیک یکی از قدیمی ترین و آشناترین شاخه های فیزیک است . این شاخه با اجسام در حال سکون و حرکت، و شرایط سکون و حرکت آنها تحت تأثیر نیروهای داخلی و خارجی سروکار دارد . قوانین مکانیک به تمام گستره اجسام - اعم از میکروسکوپی یا ماکروسکوپی، از قبیل الکترونها در اتمها و سیاراته در فضا یا حتی به کهکشانها در بخشهای دوردست جهان اعمال می شود .

مکانیک توضیح نمی دهد که چرا اجسام حرکت می کنند ؛ فقط نشان می دهد که یک جسم در وضعیت معینی چگونه حرکت خواهد کرد و این حرکت را چگونه می توان توصیف کرد . مطالعه مکانیک را می توان به دو بخش تقسیم کرد : سینماتیک و دینامیک . سینماتیک به توصیف هندسی محض حرکت (یا مسیرهای) اجسام، بدون توجه به نیروهایی که این حرکت را ایجاد کرده اند، می پردازد، و با مفاهیم مکان، سرعت، شتاب، زمان، و روابط بین آنها سروکار دارد . دینامیک به نیروهایی که موجب تغییر حرکت یا تغییر خواص دیگر، از قبیل شکل و اندازه اجسام، می شوند می پردازد . این بخش ما را به مفاهیم نیرو و جرم و قوانین حاکم بر حرکت اجسام هدایت می کند . یک مورد خاص در دینامیک ایستاشناسی است که با اجسامی که تحت تأثیر نیروهای خارجی در حال سکون هستند سروکار دارد .

با این که شروع مکانیک از کمیّت سرچشمه می گیرد، در زمان ارسطو فرآیند فکری مربوط به آن گسترش سریعی پیدا کرد. اما، از قرن هفدهم به بعد بود که مکانیک توسط گالیله، هویگنس و نیوتن بدرستی پایه گذاری شد. آنها نشان دادند که اجسام طبق قواعدی حرکت می کنند، و این قواعد به شکل قوانین حرکت بیان شدند. مکانیک کلاسیک یا نیوتنی عمدهً با مطالعهٔ پیامدهای قوانین حرکت، آن طور که نیوتن در مقاله ای با عنوان فلسفهٔ طبیعی اصول ریاضی در ۱۶۸۶ منتشر کرد، سروکار دارد.

با این که قوانین نیوتن راه مستقیم و ساده ای به موضوع مکانیک کلاسیک می گشاید، روشهای دیگری نیز برای فرمول بندی اصول مکانیک کلاسیک وجود دارد. در بین این روشها، روش فرمول بندی لاگرانژ و هامیلتون مهمترین روش است. این دو روش، به جای نیرو، انرژی را به عنوان مفهوم پایه ای برگزیده اند. در نصف بیشتر این کتاب، روش کلاسیک نیوتن را به کار می گیریم، و در قسمت بعدی فرمول بندی لاگرانژ و هامیلتون را وارد می کنیم.

تا آغاز قرن حاضر، قوانین نیوتن بر تمام وضعیتهای شناخته شده کاملاً قابل اعمال بودند. مشکل هنگامی بروز کرد که این قوانین به چند وضعیّت معین: (الف) اجسام بسیار سریع (اجسامی که با سرعت نزدیک به سرعت نور حرکت می کردند)، و (ب) اجسام با ابعاد میکروسکوپی مانند الکترونها درآتها، اعمال شدند.

این مشکلات منجر به اصلاح قوانین مکانیک نیوتنی به: (الف) فرمول بندی نظریهٔ نسبیت خاص برای اجسام متحرک با سرعتهای زیاد، و (ب) فرمول بندی مکانیک کوانتومی برای اجسام با ابعاد میکروسکوپی شدند. شکست مکانیک کلاسیک در این وضعیتها، نتیجهٔ نارسایی مفاهیم کلاسیکی فضا و زمان است که بطور مختصر در فصل ۱۶، نظریهٔ نسبیت خاص، مورد بحث قرار خواهند گرفت.

قبل از این که به مطالعهٔ عمیق مکانیک پردازیم، این فصل را به خلاصه کردن چند مفهوم اصلی مفید از مکانیک مقدماتی اختصاص می دهیم. بخصوص، به اهمیت نقش قوانین نیوتنی حرکت تأکید می کنیم.

۱-۲ بکاها و ابعاد

اندازه گیریها در فیزیک با کمیاتی مانند سرعت، نیرو، انرژی، دما، جریان الکتریکی، میدان مغناطیسی، و بسیاری کمیات دیگر سروکار دارد. جالبترین نکته این است که این کمیات

می توانند برحسب چند کمیّت پایه ای، مانند طول، جرم، و زمان بیان شوند. این سه کمیّت کمیتهای بنیادی یا پایه ای (یکاهای پایه ای) نامیده می شوند. تمام کمیّات دیگر که برحسب اینها بیان می شوند، کمیتهای فرعی نامیده می شوند.

سه مقیاس پایه ای: طول، جرم، و زمان

سه مجموعه یکاهای مختلف به کار گرفته می شوند. متداول ترین آنها مجموعه ای است که در آن طول برحسب متر، جرم برحسب کیلوگرم، و زمان برحسب ثانیه اندازه گیری می شود. از این جاست که نام دستگاه M.K.S. (یا دستگاه متریک) به آن اطلاق می شود.

مقیاس طول: متر. متر به صورت فاصله بین دو علامت در دو انتهای یک میله فلزی از آلیاژ پلاتینیوم- ایریدیوم که در اتاقکی با دمای کنترل شده در دفتر بین المللی اوزان و مقادیر، در سور، نزدیک پاریس، در کشور فرانسه قرار دارد، تعریف شده است. در ۱۹۶۰ کنفرانس عمومی اوزان و مقادیر، با توافق بین المللی، این مقیاس طول را به یک ثابت اتمی، با روش زیر، تغییر داد. یک لوله شیشه ای از گاز کریپتون پر شده است و بطور دایم تحت تخلیه الکتریکی است. متر مقیاس مساوی با دقیقاً $\frac{1}{299792458}$ برابر طول موج نور قرمز نارنجی گسیل شده از اتم کریپتون ۸۶ در خلأ تعریف می شود. برای افزایش دقت، در سال ۱۹۸۳، مجدداً متر برابر با فاصله طی شده به وسیله نور در یک بازه زمانی $\frac{1}{299792458}$ ثانیه تعریف شد.

مقیاس زمان: ثانیه. در گذشته، حرکت چرخشی زمین به دور محور خودش، همچنین حرکت مداری آن به دور خورشید، به منظور تعریف ثانیه به کار گرفته می شدند. به این ترتیب، یک ثانیه برابر با $\frac{1}{86400}$ یک روز متوسط خورشیدی تعریف می شد. در اکتبر سال ۱۹۶۷، مقیاس زمان به وسیله یک ساعت اتمی، که از ارتعاشات تناوبی اتمی بعضی از اتمها استفاده می کند، تعریف شد. طبق ساعت سزومی، یک ثانیه برابر با دقیقاً بازه زمانی $\frac{9192631770}{10^9}$ ارتعاش تابشی سزیوم ۱۳۳ تعریف می شود. این روش دقتی برابر با 10^{-11} دارد. دو ساعت سزیومی ممکن است در یک دوره ۵۰۰۰ ساله یک ثانیه باهم اختلاف نشان دهند.

مقیاس جرم: کیلوگرم. یک استوانه از آلیاژ پلاتین- ایریدیوم با دقت در یک مخزن دفتر بین المللی اوزان و مقادیر نگهداری می شود. جرم این استوانه دقیقاً برابر با یک کیلوگرم تعریف شده است. این تنها یکایی است که هنوز به وسیله یک مصنوع تعریف می شود. هدف

پایه ای دانشمندان این بوده است که سه مقیاس پایه ای را به طریقی تعریف کنند که با دقت و براحتی در هر آزمایشگاهی قابل بازسازی باشند .

دستگاههای یکاهای مختلف

دستگاه بین المللی . دستگاه بین المللی یکاها، که به اعتبار عبارت فرانسوی دستگاه بین المللی به SI خلاصه شده است، صورت جدید دستگاه متریک است که با توافق بین المللی پذیرفته شده است . این دستگاه برای راحتی ۷ یکه پایه ای را به کار می گیرد :

- ۱- طول، بر حسب متر (m)
 - ۲- جرم، بر حسب کیلوگرم (Kg)
 - ۳- زمان، بر حسب ثانیه (S)
 - ۴- جریان الکتریکی، بر حسب آمپر (A)
 - ۵- دما، بر حسب کلوین (K)
 - ۶- مقدار ماده، بر حسب مول (mol)
 - ۷- شدت درخشندگی، بر حسب شمع (Cd)
- دستگاه SI دویکای مکمل دیگر نیز به کار می برد :

- ۱- زاویه سطحی، بر حسب رادیان (rad)
- ۲- زاویه حجمی، بر حسب استرادیان (Sr)

دستگاه CGS یا گاوسی . در این دستگاه یکای طول سانتی متر ($10^{-2} m$) ، یکای جرم گرم ($10^{-3} kg$) و یکای زمان ثانیه است .

دستگاه انگلیسی . در این دستگاه یکای طول فوت (پا) و یکای زمان ثانیه است . این دستگاه جرم را به عنوان یکای پایه به کار نمی برد ، در عوض ، نیرو به کار گرفته می شود که یکای آن پاوند (lb) است . یکای جرم از پاوند سرچشمه می گیرد و اسلاگ ($= 32/17$ پاوند جرم) نامیده می شود . یکای دما در دستگاه انگلیسی درجه فارنهایت است .

ابعاد

بیشتر کمیات فیزیکی را می توان بر حسب طول L ، جرم M و زمان T بیان کرد که M ، L ،

T و ابعاد نامیده می شوند. یک کمیت که به صورت $L^a M^b T^c$ بیان شده، می رساند که بعد طول آن به توان a ، بعد جرم آن به توان b ، و بعد زمان آن به توان c رسیده است. به این ترتیب ابعاد حجم L^3 ، ابعاد شتاب LT^{-2} و ابعاد نیرو MLT^{-2} است.

برای افزودن یا کاستن دو کمیت در فیزیک، ابعاد آنها باید یکی باشد. به همین نحو، بدون توجه به دستگاه یکاهای به کار برده شده، تمام روابط و معادلات فیزیکی باید از نظر ابعادی درست باشند، یعنی ابعاد کمیتها در دو طرف معادله باید یکی باشند. به عنوان مثال، در معادله $x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ ، x بعد L ، $v_0 t$ بعد L ، و $\frac{1}{2} a t^2$ بعد L است. به این ترتیب آنالیز ابعادی می تواند به منظورهای زیر به کار گرفته شود:

(۱) برای تحقیق درستی شکل معادله، (۲) برای تحقیق این که آیا جواب محاسبه شده از معادله در یک وضعیت داده شده پذیرفتنی است؟ و (۳) برای رسیدن به یک فرمول، وقتی که بدانیم که یک کمیت به چه کمیتهای فیزیکی دیگری وابسته است.

مثال (۱-۱): بزرگی شتاب شعاعی a_R تابعی از بزرگی سرعت جسم و شعاع انحنای منحنی است. با روش آنالیز ابعادی، عبارتی برای a_R پیدا کنید.

داریم

$$a_R = f(v, R) \quad (۱)$$

یعنی

$$a_R = v^a R^b \quad (۲)$$

با گذاردن ابعاد داریم

$$LT^{-2} = \left(\frac{L}{T}\right)^a (L)^b = L^{a+b} T^{-a} \quad (۳)$$

از مقایسه دو طرف خواهیم داشت

$$a + b = 1 \quad \text{و} \quad -a = -2$$

که می دهد $a = 2$ و $b = -1$ و این به عبارت زیر برای شتاب شعاعی می انجامد

$$a_R = \frac{v^2}{R} \quad (۴)$$

تمرین (۱-۱): زمان تناوب T ی یک آونگ ساده تنها تابع طول آن l و شتاب ناشی از گرانش g ، است. با روش آنالیز ابعادی عبارتی برای زمان تناوب پیدا کنید.

۱-۳ قوانین نیوتن و دستگاههای لخت

قوانین نیوتن می توانند در یک شکل موجز و مختصر به صورت زیر بیان شوند :

قانون اول نیوتن : هر جسمی به حالت سکون یا حرکت یکنواخت خود در روی یک خط مستقیم ادامه می دهد مگر این که یک نیروی خارجی خالص به آن داده شود و آن حالت را تغییر دهد .

قانون دوم نیوتن : آهنگ تغییر تکانه خطی یک جسم مستقیماً متناسب با نیروست و در جهت آن است .

قانون سوم نیوتن : با هر کنشی همیشه یک واکنش مساوی و مخالف همراه است ، یعنی ، وقتی جسمی بر جسم دیگری نیروی وارد می کند ، جسم دوم نیز نیروی مساوی و مخالف آن به اوکی وارد می کند .

این بیانها ساده به نظر می آیند ، اما فریبنده اند . قوانین نیوتن نتیجه ترکیبی از تعریفها ، مشاهدات تجربی از طبیعت ، و بسیاری مفاهیم شهودی است . ما نمی توانیم حق این مفاهیم را در این جا و در این مجال مختصر ادا کنیم ، اما سعی خواهیم کرد که با بحث این بیانها با جزئیات بیشتر افکار خود را گسترش بخشیم .

حرکت اجسام در محیطهای اطراف ما به علت حضور نیروهای اصطکاک و گرانشی پیچیده است . یک جسم منزوی را که با سرعت ثابتی (یکنواخت) در فضا حرکت می کند در نظر بگیریم . منزوی بودن می رساند که این جسم از هر جسم دیگری دور است بطوری که با آنها برهم کنش نمی کند ؛ در نتیجه نیروی خالصی (گرانشی یا هر نوع دیگر) به آن وارد نمی شود . برای توصیف حرکت این جسم باید دستگاه مختصاتی رسم کنیم که این جسم نسبت به آن با سرعت یکنواخت حرکت کند . چنین دستگاه مختصاتی یک دستگاه لخت نامیده می شود . عصاره قانون اول نیوتن این است که همیشه می توان دستگاه مختصاتی پیدا کرد که یک جسم آزاد نسبت به آن با سرعت یکنواخت حرکت کند ؛ یعنی ، قانون اول نیوتن مؤید وجود دستگاههای لخت است .

قانون دوم نیوتن با موضوعاتی از قبیل : وقتی بین اجسام برهم کنش وجود دارد چه روی می دهد ؟ چگونه یک برهم کنش را نمایش می دهیم ؟ و فراتر از آن ، لختی چیست و چگونه این خاصیت جسم را اندازه گیری می کنیم ؟ سر و کار دارد . همان طور که می دانیم ، لختی خاصیتی از جسم است که مقاومت آن در مقابل حرکت را وقتی با جسم دیگری برهم کنش دارد تعیین می کند . اندازه کمی لختی ، همچنان که اکنون پی گیری خواهیم کرد ،

جرم نامیده می شود .

دو جسم در نظر می گیریم که از محیط اطراف کاملاً مجزا هستند ولی با یکدیگر برهم کنش می کنند . این برهم کنش بین این دو جسم ممکن است از اتصال آنها به یکدیگر به وسیله یک لاستیک یا یک فنر نتیجه شده باشد . برهم کنش منجر به شتاب این اجسام می شود . این شتابها را می توان با کشیدن و دور کردن اجسام از یکدیگر و رها کردن آنها ، اندازه گیری کرد . تمام اندازه گیریهای ممکن نشان می دهند که شتابهای این دو جسم همیشه در خلاف جهت یکدیگرند و نسبت شتابها ثابت است ، یعنی

$$\frac{a_A}{a_B} = -K_{BA} \quad (1-1)$$

که K_{BA} اندازه لختی نسبی جسم B نسبت به جسم A است . معادله (۱-۱) همچنین می رساند که

$$K_{BA} = -\frac{a_A}{a_B} = \frac{1}{-(a_B/a_A)} = \frac{1}{K_{AB}} \quad (2-1)$$

در این رابطه K_{AB} اندازه لختی نسبی جسم A نسبت به جسم B است . یعنی

$$K_{BA} = \frac{1}{K_{AB}} \quad (3-1)$$

چون K_{AB} اندازه یک نسبت است ، می توانیم آن را به صورت

$$K_{BA} = \frac{m_B}{m_A} \quad (4-1)$$

تعریف کنیم که m_A و m_B ، به ترتیب ، جرمهای (یا جرمهای لختی) جسم A و جسم B نامیده می شوند . نسبت $\frac{m_B}{m_A}$ باید مستقل از یکاها باشد . نسبت جرمهای دو جسم $\frac{m_B}{m_A}$ ، بدون توجه به این که برهم کنش چگونه اعمال شده است ، همیشه یکتاست . این تعریف جرم یک تعریف عملی از آن است . با ترکیب معادله های (۱-۱) و (۴-۱) ، خواهیم داشت

$$\frac{a_A}{a_B} = -\frac{m_B}{m_A} \quad (5-1)$$

یا

$$m_A a_A = -m_B a_B \quad (6-1)$$

به این ترتیب اثر برهم کنش این است که حاصلضرب جرم و شتاب ثابت است و دلیل بر تغییر

در حرکت است. این حاصلضرب نیرو نامیده می شود و نمایشگر برهم کنش است.

بنابراین می توانیم بگوییم که نیروی F_A ی وارد به جسم A که از برهم کنش با جسم B ناشی می شود عبارت است از

$$F_A = m_A a_A \quad (7-1)$$

در حالی که نیروی F_B ی وارد به جسم B ، ناشی از برهم کنش با جسم A ، عبارت است از

$$F_B = m_B a_B \quad (8-1)$$

به این ترتیب، بطور کلی، با استفاده از نمادگذاری برداری، می توانیم بنویسیم

$$F = ma \quad (9-1)$$

این معادله تعریف نیروست و فقط در دستگاههای لخت بخوبی برقرار است. به خاطر سپردن این نکته مهم است که نیروی F نتیجه برهم کنش یا، بطور ساده، نمایشگر برهم کنش است. هیچ شتابی هرگز نمی تواند بدون برهم کنش ایجاد شود.

اکنون تعریفی از نیرو، با شروع مستقیم از بیان قانون دوم نیوتن که قبلاً آورده ایم، ارائه می کنیم. جسمی به جرم m را در نظر بگیریم که با سرعت v حرکت می کند. تکانه خطی p ی آن به صورت

$$p = mv \quad (10-1)$$

تعریف می شود. طبق قانون دوم نیوتن، آهنگ تغییر تکانه به عنوان نیروی F تعریف می شود؛ یعنی،

$$F = \frac{dp}{dt} \quad (11-1)$$

این معادله، اگر جرم m برای تمام سرعتها ثابت بماند، شکل بسیار ساده تری می گیرد. اگر v در مقایسه با سرعت نور c ($= 3 \times 10^8$ m/s) خیلی کوچک باشد تغییرات جرم قابل چشم پوشی است. در نتیجه می توانیم بنویسیم

$$F = \frac{d}{dt} (mv) = m \frac{dv}{dt} = ma \quad (12-1)$$

یعنی، نیرو برابر است با حاصلضرب جرم (یا جرم لختی) در شتاب، به شرط این که m ثابت باشد. این معادله درست با معادله (۱-۹) یکی است. باید تصریح کرد که قانون اول نیوتن حالت خاص قانون دوم برای $F = 0$ است.

اکنون چند کلمه ای در باره قانون سوم نیوتن بگوییم. طبق قانون سوم نیوتن، نیروها همیشه به صورت زوج وجود دارند. بنابراین، اگر دو جسم A و B ، بایکدیگر برهم کنش کنند، و اگر به جسم A نیروی F_A وارد شود، باید به جسم B نیروی F_B وارد شود، بطوری که داشته باشیم

$$F_A = -F_B \quad (۱۳-۱)$$

به این ترتیب این قانون می‌رساند که نیروها همیشه به صورت زوج وجود دارند (وجود یک تک نیرو بدون وجود همتایش در جای دیگر غیرممکن است) و این نیروها نتیجه برهم کنشها هستند. هرگز نمی‌توانیم جسم مجزایی داشته باشیم که شتاب داشته باشد. یک جسم شتاب دار باید یک همتایی در جای دیگر با شتابی مختلف‌الجهت داشته باشد.

معادله (۱۳-۱) بروشنی می‌رساند که نیروها مساوی و مختلف‌العلامه‌اند، اما لزوماً همیشه دارای یک خط عمل نیستند. این نکات در فصل ۸ دقیقاً بررسی خواهند شد.

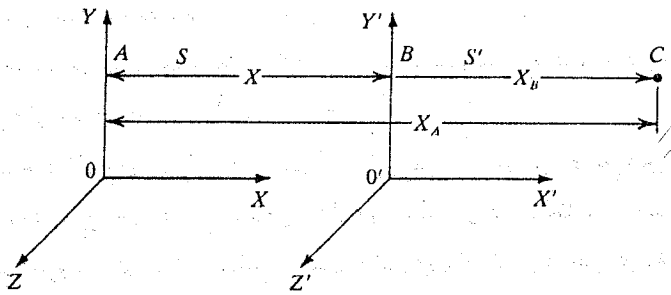
۱-۴ دستگاههای لخت و نالخت

نیروهای نالخت

همان‌طور که قبلاً متذکر شدیم، قانون اول حرکت یک نوع چارچوب مرجع خاص به نام دستگاه لخت تعریف می‌کند. یعنی، دستگاه لخت دستگاهی است که در آن قانون اول نیوتن برقرار باشد. اکنون می‌خواهیم رابطه‌ای بین اندازه‌گیریهای انجام شده توسط ناظر A در یک دستگاه لخت S و ناظر دیگر B در یک دستگاه نالخت S' ، که هر دو یک جسم مشترک C را که ممکن است حرکت شتاب دار داشته باشد مشاهده می‌کنند، پیدا کنیم. این وضعیت در شکل (۱-۱) نشان داده شده است. معنی لخت بودن دستگاه S این است که ناظر A با سرعت یکنواخت حرکت می‌کند، در حالی که معنی نالخت بودن دستگاه S' این است که ناظر B شتاب دارد. جسم C به جرم M شتاب می‌گیرد. ناظر A شتاب آن را a_A و ناظر B شتاب آن را a_B

اندازه می‌گیرد. بنابراین، طبق نظر ناظر A نیروی وارد به C عبارت است از

$$F_A = Ma_A \quad (۱۴-۱)$$



شکل (۱-۱): جسم متحرک C توسط یک ناظر در دستگاه لخت S و یک ناظر دیگر B در دستگاه نالخت S' مورد مشاهده قرار می‌گیرد

و طبق نظر ناظر B نیروی وارد به C عبارت است از

$$F_B = Ma_B \quad (15-1)$$

اگر S' نیز یک دستگاه لخت واقعی بود، نیروی F_B برابر با F_A می‌شد. اکنون رابطه بین F_A و F_B را پیدا کنیم. بنابراین شکل (۱-۱)، داریم

$$X_A(t) = X_B(t) + X(t) \quad (16-1)$$

با دو بار مشتق‌گیری و مرتب‌سازی، خواهیم داشت

$$\ddot{X}_B = \ddot{X}_A - \ddot{X} \quad (17-1)$$

از ضرب دو طرف در M نتیجه می‌گیریم

$$M\ddot{X}_B = M\ddot{X}_A - M\ddot{X}$$

یا

$$F_B = F_A - M\ddot{X} \quad (18-1)$$

چون ناظر A در دستگاه S در یک دستگاه لخت واقعی است، می‌توانیم بنویسیم

$$F_A = F_{\text{true}} = M\ddot{X}_A \quad (19-1)$$

و نیروی اندازه‌گیری شده توسط ناظر B ، که در یک دستگاه نالخت S' است، یک نیروی

واقعی نیست ، بلکه یک نیروی ظاهری است که با رابطه زیر داده می شود

$$F_B = F_{\text{apppt}} = M\ddot{X}_B \quad (20-1)$$

به این ترتیب می توانیم معادله (۱۸-۱) را به صورت

$$F_{\text{apppt}} = F_{\text{true}} - M\ddot{X} \quad (21-1)$$

بنویسیم . ناظر B نیروی واقعی اندازه نمی گیرد مگر این که $\ddot{X} = 0$ باشد ، که در این مورد B با سرعت یکنواخت نسبت به A حرکت می کند ؛ در نتیجه S' خود یک دستگاه لخت خواهد بود . بطور کلی ، برای یک حرکت سه بُعدی ، می توانیم معادله (۲۱-۱) را به صورت زیر بنویسیم

$$F_{\text{apppt}} = F_{\text{true}} - M\ddot{R} \quad (22-1)$$

که \ddot{R} شتاب دستگاه نالخت S' نسبت به دستگاه لخت S یا نسبت به هر دستگاه لخت دیگر است . اگر $\ddot{R} = 0$ باشد داریم $F_{\text{apppt}} = F_{\text{true}}$ در نتیجه هر دو دستگاه لخت خواهند بود . می توانیم معادله (۲۲-۱) را به صورت

$$F_{\text{apppt}} = F_{\text{true}} + F_{\text{fict}} \quad (23-1 \text{ الف})$$

بنویسیم که در آن

$$F_{\text{fict}} = -M\ddot{R} \quad (23-1 \text{ ب})$$

جمله آخر نیروی نالخت یا ساختگی نامیده می شود زیرا نیروی به معنی واقعی نیست ؛ برهم کنشی آن را ایجاد نکرده است . این جمله صرفاً یک حاصلضرب جرم در شتاب است .

۱-۵ کاربردهای ساده قوانین نیوتن

در این بخش و بخش بعدی چند کاربرد ساده از قوانین نیوتن مورد بحث قرار خواهند گرفت .

قطار

قطاری را که در شکل (۲-۱) نشان داده شده است در نظر بگیرید . جرم هر واگن M

است و لکوموتیو یک نیروی خالص F به قطار وارد می کند . می خواهیم نیروی وارد به هر واگن را پیدا کنیم . جرم کل سیستم (به استثنای جرم لکوموتیو) $4M$ است ، و نیروی خالص وارد به این جرم F است . در نتیجه شتاب واگنها عبارت است از

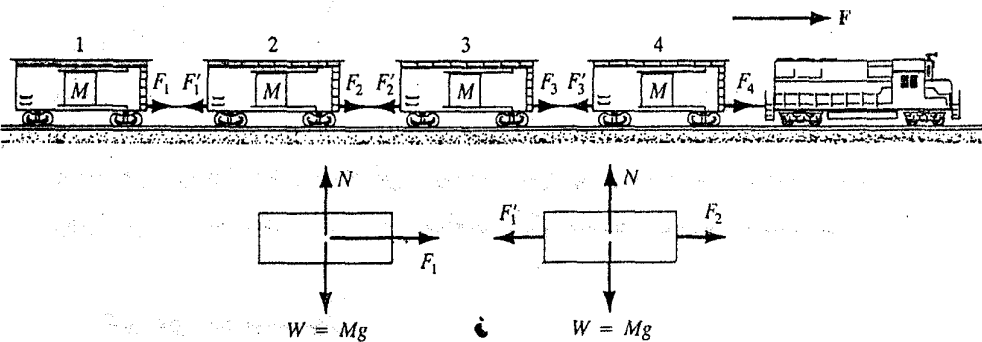
$$a = \frac{F}{4M} \quad (24-1)$$

اکنون حرکت واگن ۱ را در نظر می گیریم . وزن یک واگن W ، نیروی قائم وارد به واگن N ، و نیروی وارد به واگن ۱ از طرف واگن ۲ ، F_1 است ، در حالی که F'_1 نیرویی است که از طرف واگن ۱ به واگن ۲ وارد می شود (F_1 و F'_1 یک زوج کنش - واکنش هستند) . به این ترتیب برای واگن ۱ داریم

$$\sum F_y = N - W = 0 \quad (25-1)$$

$$\sum F_x = F_1 = Ma = M\left(\frac{F}{4M}\right) = \frac{F}{4} \quad (26-1)$$

حال حرکت واگن ۲ را در نظر می گیریم . یک بار دیگر $N - W = 0$ ، و دو نیروی افقی وارد به واگن ۲ نیروهای F_2 و F'_1 هستند که F_2 نیروی وارد شده از طرف واگن ۳ به واگن ۲ است . F'_2 نیرویی است که از طرف واگن ۲ به واگن ۳ وارد می شود . F_2 و F'_2 نیز یک زوج کنش - واکنش تشکیل می دهند .



شکل (۲-۱) : یک قطار که توسط یک لکوموتیو با نیروی خالص F کشیده می شود

بنابراین برای واگن ۲ می توانیم بنویسیم

$$\sum F_x = F_2 - F'_1 = Ma$$

اما

$$F'_1 = F_1 = \frac{F}{4}$$

در نتیجه

$$F_2 = F'_1 + Ma = \frac{F}{4} + M\left(\frac{F}{4M}\right)$$

یا

$$F_2 = \frac{2F}{4} \quad (۲۷-۱)$$

به همین نحو

$$F_3 = \frac{3F}{4} \quad (۲۸-۱)$$

$$F_4 = \frac{4F}{4} \quad (۲۹-۱)$$

توجه کنیم که نیروی خالص وارد به هر واگن $\frac{F}{4}$ و به طرف راست است .
اگر n واگن داشته بودیم شتاب می شد

$$a = \frac{F}{nM} \quad (۳۰-۱)$$

و نیروی خالص وارد به هر واگن می شد $\left(\frac{F}{n}\right)$ ، در حالی که نیروی رو به جلوی وارد به واگن k ام می بود

$$F_k = \frac{kF}{n} \quad (۳۱-۱)$$

ماشین آتوود

ماشین آتوود ، همان طور که در شکل (۳-۱) نشان داده شده است ، سیستمی شامل دو جرم است که به وسیله نخ‌ی که از روی یک قرقره عبور کرده است به یکدیگر بسته شده اند . فرض می کنیم که قرقره بدون اصطکاک است و در نتیجه نخواهد چرخید . جرم m_2 چون از جرم m_1 بزرگتر است به پایین ، و جرم m_1 به بالا حرکت می کند . سرعت $v = \frac{dx}{dt}$ رو به بالا مثبت گرفته خواهد شد ، و تنش در هر نخ است . به این ترتیب حرکت این دو جرم می تواند با معادلات زیر توصیف شود $\left(a = \frac{d^2x}{dt^2}\right)$ شتاب هر کدام از جرمهاست

$$T - m_1 g = m_1 a \quad (۳۲-۱)$$

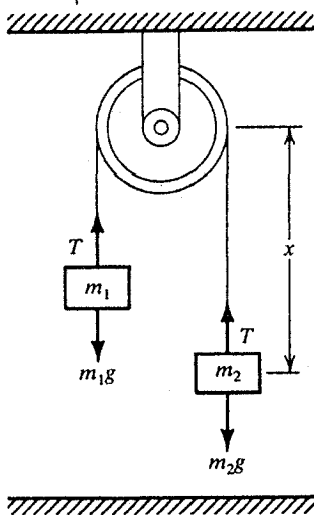
$$m_2 g - T = m_2 a \quad (۳۳-۱)$$

از حل این معادلات نتیجه می شود

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \quad (۳۴-۱)$$

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \quad (۳۵-۱)$$

اگر $m_1 = m_2$ باشد، خواهیم داشت $a = 0$ و $T = m_1 g = m_2 g$ ، که همان مورد تراز مندی ایستاست. از سوی دیگر، اگر $m_2 \gg m_1$ باشد خواهیم داشت $a \cong g$ و $T \cong 2m_1 g$.



شکل (۳-۱): ماشین آتود

اکنون موردی را در نظر بگیریم که در آن قرقره ساکن نباشد و، همان طور که در شکل (۴-۱) نشان داده شده است، با شتاب a به طرف بالا حرکت کند. در چنین وضعیتی طول کل نخ عبارت است از

$$l = \pi R + (y - y_1) + (y - y_2) \quad (۳۶-۱)$$

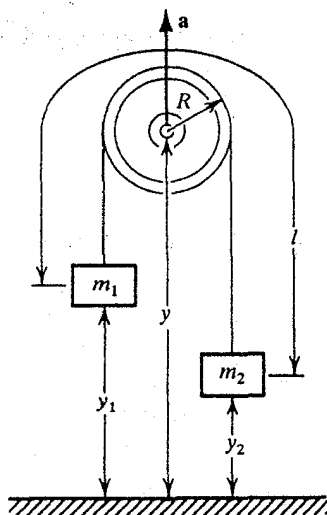
با مشتق گیری نتیجه می گیریم

$$2\ddot{y} - \ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 = 0 \quad (۳۷-۱)$$

اما $a = \ddot{y}$ شتاب رو به بالای قرقره است ، در نتیجه

$$a = \frac{1}{2}(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) \quad (۳۸-۱)$$

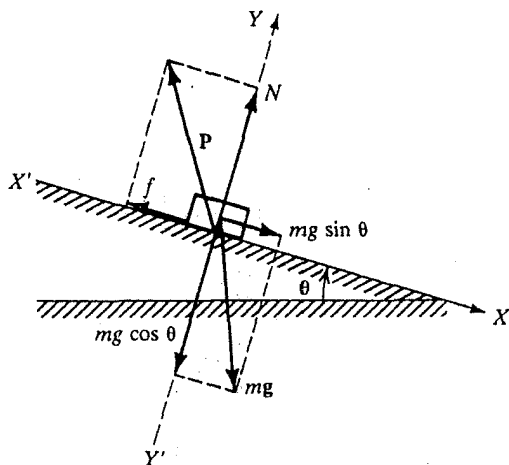
این اصول می توانند به وضعیتهای دیگری که جرمها و قرقره های زیادتری را درگیر می کنند گسترش داده شوند .



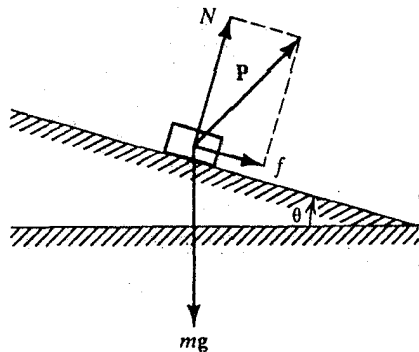
شکل (۴-۱) : حرکت جرمها وقتی که قرقره دارای يك شتاب a رو به بالاست

سطح شیب دار

جرم m را در روی یک سطح شیب دار که با افق زاویه θ می سازد ، مطابق شکل (۵-۱) ، در نظر می گیریم . به جرم m در روی این سطح ، غیر از نیروهای دیگر ، دو نیرو وارد می شود ، که عبارتند از : (۱) وزن جسم ، mg ، که رو به پایین است و (۲) واکنش سطح روی جسم P ، که بسته به این که جسم بخواهد رو به پایین یا رو به بالا حرکت کند وضع آن به صورتی است که در شکلهای (۵-۱) و (۶-۱) نمایش داده شده است . P می تواند به دو مؤلفه تجزیه شود ؛ مؤلفه N عمود بر سطح شیب دار که واکنش عمودی نام دارد ، و مؤلفه f موازی با سطح شیب دار که نیروی اصطکاک نامیده می شود .



شکل (۵-۱) : نیروهای وارد به جرم m روی سطح شیب دار در حرکت رو به پایین



شکل (۶-۱) : نیروهای وارد به جرم m در روی سطح شیب دار در حرکت به بالا

حرکت جرم m را رو به پایین سطح شیب دار ، آن طور که در شکل (۵-۱) نمایش داده شده است ، در نظر بگیریم . توجه کنیم که \vec{mg} به دو مؤلفه $mg \cos \theta$ و $mg \sin \theta$ تجزیه شده است . بنابراین ، برای حرکت جرم m می توانیم بنویسیم

$$\sum F_x = mg \sin \theta - f = ma \quad (39-1)$$

$$\sum F_y = N - mg \cos \theta = 0 \quad (40-1)$$

برای سطحی با ضریب اصطکاک μ ، نیروی اصطکاکی f برابر با حاصلضرب μ در واکنش

عمودی است . یعنی ،

$$f = \mu N = \mu mg \cos \theta \quad (41-1)$$

اگر جسم در حال سکون باشد $\mu = \mu_s$ که μ_k ضریب اصطکاک سکون است . اگر جرم در حرکت باشد $\mu = \mu_k$ که μ_k ضریب اصطکاک جنبشی است . μ_k همیشه کوچکتر از μ_s است) . با قرار دادن f در معادله (۱-۲۹) و حل آن برای a خواهیم داشت

$$a = g(\sin \theta - \mu \cos \theta) \quad (42-1)$$

اگر جرم m سرعت اولیه ای در امتداد سطح شیب دار رو به بالا داشته باشد ، جهت f ، همان طور که در شکل (۱-۶) نشان داده شده است ، در خلاف جهت حرکت است ، و عبارت شتاب حاصل خواهد بود

$$a = g(\sin \theta + \mu \cos \theta) \quad (43-1)$$

فرض کنیم جرم m در روی سطح افقی قرار گرفته است و زاویه θ ی سطح بطور پیوسته افزایش می یابد . وقتی θ به یک مقدار $\theta = \theta_f$ رسید جرم m شروع به لغزیدن می کند . در این وضعیت $a = 0$ و داریم

$$mg \sin \theta_f - f = 0$$

$$N - mg \cos \theta_f = 0$$

یا

$$\frac{f}{N} = \tan \theta_f \quad (44-1)$$

اما بر حسب تعریف $f = \mu_s N$ ، که μ_s ضریب اصطکاک سکون است ؛ در نتیجه

$$\mu_s = \tan \theta_f \quad (45-1)$$

که θ_f به زاویه اصطکاک یا زاویه آرامش موسوم است . اگر $\theta > \theta_f$ باشد جرم ساکن نخواهد ماند . برای این که جرم ساکن بماند ، باید داشته باشیم

$$\tan \theta < \tan \theta_f = \mu_s \quad (46-1)$$

با در نظر گرفتن معادله (۱-۴۲) ، که بر طبق آن اگر $a > 0$ باشد سرعت جرم افزایش می یابد ،

می توان به همین نتیجه رسید . این تنها وقتی ممکن است که

$$(\sin \theta - \mu \cos \theta) > 0$$

یعنی

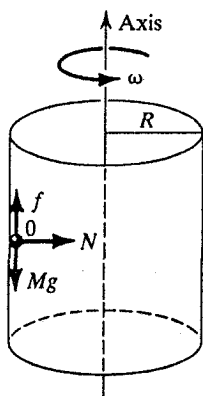
$$\theta > \tan^{-1} \mu$$

(۴۷-۱)

اگر $a = 0$ باشد داریم $\theta = \theta_f$. اگر $\theta < \theta_f$ باشد a منفی خواهد بود و ذره یا حرکت نخواهد کرد ، یا اگر در حرکت بوده است بتدریج از سرعتش کاسته شده و به حال سکون خواهد رسید .

استوانه چرخان

در یک استوانه چرخان یا در یک وسیله سواری سرگرمی در پارکها ، سوار در مقابل دیواره استوانه ایستاده است . وقتی که استوانه شروع به چرخیدن خیلی سریع می کند ، ته استوانه سقوط می کند اما سوارها در مقابل دیواره میخکوب می مانند . ما می خواهیم سرعت زاویه ای کمینه ω_{\min} را که برای آن برداشتن ته استوانه بی خطر است ، پیدا کنیم .



شکل (۷-۱) : استوانه چرخان

وضعیت در شکل (۷-۱) نشان داده شده است ، و معادله شعاعی حرکت عبارت است از :

$$N - Ma_r = 0$$

(۴۸-۱)

یا می توانستیم بگوییم که واکنش عمودی N باید نیروی مرکز گرای لازم F_c را به صورت زیر فراهم کند

$$F_c = Ma_r = M \frac{v^2}{R} = MR\omega^2 \quad (49-1)$$

بنابراین

$$N = Ma_r = MR\omega^2 \quad (50-1)$$

اگر f نیروی اصطکاکی ایستا باشد، داریم

$$f \leq \mu_s N = \mu_s MR\omega^2 \quad (51-1)$$

که μ_s ضریب اصطکاک ایستایی بین سوار و سطح استوانه است. برای این که سوار در مقابل دیواره استوانه میخکوب بماند، f باید برابر با mg باشد. با قراردادن این عبارت در معادله (51-1) نتیجه می شود

$$Mg \leq \mu_s MR\omega^2 \quad (52-1)$$

یا

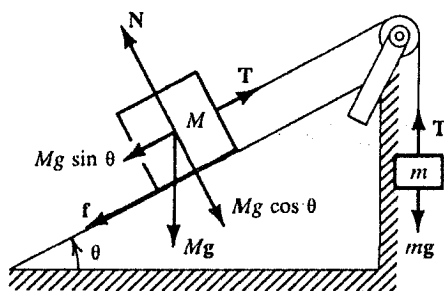
$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{\mu_s R}} \quad (53-1)$$

به این ترتیب مقدار کمینه بی خطر ω برابر است با

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{\mu_s R}} \quad (54-1)$$

اگر $R = 2\text{m}$ ، $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ، و $\mu_s = 0.3$ ، خواهیم داشت $\omega_{\min} = 4.04 \text{ rad/s}$ که می دهد

مثال (۱-۲): دو جسم به جرمهای m و M توسط نخکی که از روی قرقره ای گذشته است به یکدیگر متصل شده اند. جرم m بطور قائم آویزان است و جرم M در روی سطح شیب داری که با افق زاویه θ می سازد حرکت می کند. اگر ضریب اصطکاک جنبشی μ_k باشد، زاویه θ را که برای آن جرمها با سرعت یکنواخت حرکت کنند محاسبه کنید. در مورد خاص $m = M$ بحث کنید.



شکل (مثال ۲-۱)

وضعیت در شکل (مثال ۲-۱) نشان داده شده است. از نمودار نیروها دیده می شود که اگر جرمها در حال ترازمندی باشند، یعنی یا ساکن باشند یا با سرعت یکنواخت حرکت کنند، داریم

$$T - mg = 0 \quad (۱)$$

$$N - Mg \cos \theta = 0 \quad (۲)$$

$$T - Mg \sin \theta - f = 0 \quad (۳)$$

و از تعریف ضریب اصطکاک داریم

$$f = \mu_k N \quad (۴)$$

ترکیب معادلات (۲) و (۴) می دهد

$$f = \mu_k Mg \cos \theta \quad (۵)$$

با قرار دادن به جای T از معادله (۱) و به جای f از معادله (۵) در معادله (۳) داریم

$$mg - Mg \sin \theta - \mu_k Mg \cos \theta = 0$$

به جای $\cos \theta$ می گذاریم $\sqrt{1 - \sin^2 \theta}$ و می نویسیم

$$mg - Mg \sin \theta = \mu_k Mg \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

با مربع کردن دو طرف و مرتب سازی به صورت یک معادله درجه دوم برای $\sin \theta$ ، یعنی،

$$(1 + \mu_k^2)M^2 \sin^2 \theta - 2mM \sin \theta + (m^2 - \mu_k^2 M^2) = 0 \quad (6)$$

نتیجه می گیریم

$$\sin \theta = \frac{2mM \pm \sqrt{4m^2 M^2 - 4M^2(1 + \mu_k^2)(m^2 - \mu_k^2 M^2)}}{2(1 + \mu_k^2)M^2} \quad (7)$$

که دو مقدار θ برای حرکت یکنواخت به دست می دهد .

برای مورد خاص $m = M$ ، معادله (۷) می دهد

$$\sin \theta = \frac{2 \pm \sqrt{4\mu_k^2}}{2(1 + \mu_k^2)} \quad (8)$$

یکی از دو مقدار ممکن θ عبارت است از

$$\sin \theta_1 = \frac{2 + 2\mu_k^2}{2(1 + \mu_k^2)} = 1, \quad \text{یا} \quad \theta_1 = 90^\circ \quad (9)$$

که متناظر با مورد ساده دو جرم آویزان از یک قرقه است . مقدار دوم عبارت است از

$$\sin \theta_2 = \frac{2 - 2\mu_k^2}{2(1 + \mu_k^2)} \quad (10)$$

که زوایه خواسته شده است . به عنوان مثال ، فرض کنیم $\mu_k = 0.3$ ؛ نتیجه می شود

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{1 - (0.3)^2}{1 + (0.3)^2} \right) = \sin^{-1}(0.835) = 56.6^\circ \quad (11)$$

تعمین (۱-۲) : در مثال بالا نسبت $\frac{M}{m}$ را طوری حساب کنید که ، برای $\theta = 45^\circ$ و $\mu_k = 0.3$ ، دو جرم با سرعت یکنواخت حرکت کنند .

۱-۶ حرکت دایره‌ای و گرانج

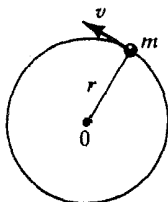
جسمی به جرم m در نظر بگیریم که در یک دایره ، چنان که در شکل (۱-۸) نشان داده شده است ، با سرعت یکنواخت حرکت می کند . شتاب جرم m به طرف مرکز دایره است و برابر است با

$$a_c = \frac{v^2}{r} \quad (1-55)$$

که شتاب مرکز گرا نامیده می شود و به توسط نیروی ثابت F_c ، به نام نیروی مرکز گرا و برابر با

$$F_c = ma_c = m \frac{v^2}{r} \quad (۵۶-۱)$$

ایجاد شده است .



شکل (۸-۱) : جرم m روی دایره ای به شعاع r با سرعت یکنواخت حرکت می کند

طبق قانون جهانی نیوتن از گرانش ، نیروی گرانشی وارد به جرم m در فاصله r از مرکز زمین به جرم M عبارت است از

$$F_G = G \frac{Mm}{r^2} \quad (۵۷-۱)$$

اگر این جرم در نقطه ای در روی زمین ، که شعاع آن R است ، باشد می توانیم بنویسیم

$$F = mg = G \frac{Mm}{R^2} \quad (۵۸-۱)$$

یعنی ،

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad \text{یا} \quad G = \frac{gR^2}{M} \quad (۵۹-۱)$$

فرض کنیم m یک ماهواره یا شیء دیگر باشد که با سرعت v در دایره ای به شعاع r حول مرکز زمین ، آن طور که شکل (۹-۱) نشان می دهد ، حرکت می کند . این نیروی گرانشی است که نیروی مرکز گرای لازم برای نگه داشتن حرکت جرم m در یک مسیر دایره ای را ایجاد می کند ؛ یعنی

$$F_c = F_G$$

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2} \quad (۶۰-۱)$$

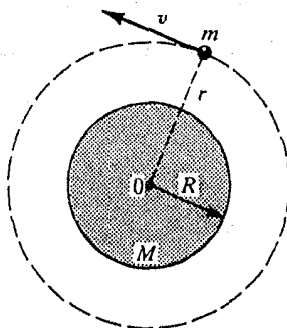
با قرار دادن $v = \frac{2\pi r}{T}$ ، که T زمان تناوب مسیر دایره‌ای است ، در معادله (۶۰-۱) ، خواهیم داشت

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \quad (۶۱-۱)$$

یا با گذاردن $GM = gR^2$ ، می‌توانیم معادله (۶۱-۱) را به صورت زیر بنویسیم

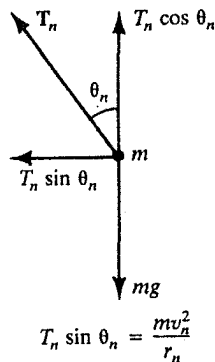
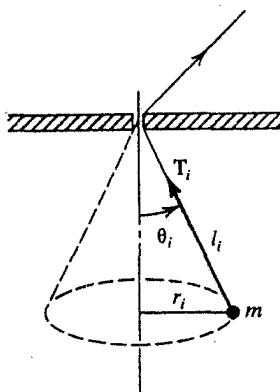
$$T^2 = \frac{4\pi^2}{gR^2} r^3 \quad (۶۲-۱)$$

معادلات (۶۱-۱) و (۶۲-۱) بیانهای قانون سوم کپلرند . اگر این معادلات را به حرکت ماه به دور زمین با $T = 27 \frac{1}{3}$ روز ، $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ و $R = 6368 \text{ km}$ اعمال کنیم ، فاصله بین ماه و زمین را برابر با $r = 383000 \text{ km}$ به دست می‌آوریم .



شکل (۹-۱) : جرم m در یک مدار دایره‌ای به شعاع r به دور زمین به جرم M و شعاع R حرکت می‌کند

مثال (۳-۱) : جرم کوچک m در انتهای نخ به طول l_1 ، که با قائم ، آن طور که شکل (مثال ۳-۱) نشان می‌دهد ، زاویه θ_1 می‌سازد ، یک دایره افقی طی می‌کند . نخ بطور مداوم از سوراخی که در تکیه گاهش تعبیه شده است بالا کشیده می‌شود و کوتاه می‌شود تا طول نهایی آن به l_2 برسد و زاویه نخ با امتداد قائم θ_2 بشود . عبارتی برای l_2 برحسب l_1 ، θ_1 و θ_2 به دست آورید .



شکل (مثال ۱-۳)

فرض کنیم در لحظه t طول نخ از جرم m تا تکیه گاه l_n ، زاویه آن با قائم θ_n ، فاصله m از محور دوران r_n ، سرعت آن v_n ، و تنش نخ T_n باشد. چون جرم m روی دایره ای به شعاع r_n حرکت می کند، مؤلفه افقی تنش نخ باید نیروی مرکز گرای لازم را ایجاد کند؛ یعنی،

$$T_n \sin \theta_n = \frac{mv_n^2}{r_n} \quad (۱)$$

و مؤلفه قائم تنش وزن جرم m را خنثی می کند، یعنی،

$$T_n \cos \theta_n = mg \quad (۲)$$

با تقسیم (۱) بر (۲) خواهیم داشت

$$\tan \theta = \frac{v_n^2}{gr_n} \quad (۳)$$

که می تواند به صورت زیر نوشته شود

$$gr_n^3 \tan \theta = v_n^2 r_n^2 \quad (۴)$$

چون گشتاور نیروی خارجی به سیستم وارد نمی شود، تکانه زاویه ای سیستم باید پایسته بماند؛ یعنی،

$$L_1 = L_2 \quad \text{یا} \quad mr_1 v_1 = mr_2 v_2 \quad \text{یا} \quad r_1 v_1 = r_2 v_2 \quad (۵)$$

بنابراین ، بطور کلی ،

$$r_n v_n = \text{constant} \quad (۶)$$

از ترکیب معادلات (۴) و (۵) نتیجه می گیریم

$$r_i^3 \tan \theta_i = r_f^3 \tan \theta_f \quad (۷)$$

اما

$$r_n = l_n \sin \theta_n \quad (۸)$$

به این ترتیب معادله (۷) به شکل زیر در می آید

$$(l_i \sin \theta_i)^3 \tan \theta_i = (l_f \sin \theta_f)^3 \tan \theta_f \quad (۹)$$

که همان نتیجه مورد نظر است و می توان l_f را از آن به دست آورد .

تمرین (۱-۳): θ_f را برای $l_i = 1\text{m}$ ، $\theta_i = 30^\circ$ ، و $l_f = 0.5\text{m}$ محاسبه کنید . سرعت ، زمان تناوب ، و تنشها را در این لحظه پیدا کنید .

مسائل

- ۱-۱ سرعت v ی امواج صوتی در هوا تابع فشار P ی جو و چگالی ρ ی هواست . با به کارگیری روش آنالیز ابعادی ، عبارتی برای v برحسب P و ρ پیدا کنید .
- ۲-۱ سرعت v ی امواج در یک تار مرتعش تابع تنش T در نخ و جرم واحد طول نخ ، λ ، است . با استفاده از روش آنالیز ابعادی عبارتی برای v پیدا کنید .
- ۳-۱ زمان تناوب T ی یک سیاره دور خورشید به جرم M با عبارت $T^2 = 4\pi^2 a^3 / MG$ داده شده است ، که a شعاع مدار دایره ای سیاره است .

الف - یکاهای G در SI چیست ؟

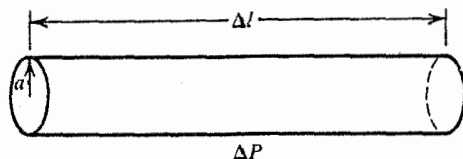
ب - عبارت قبلی را با استفاده از روش ابعادی ، یعنی ، با فرض $T = T(a, M, G)$ پیدا کنید .

- ۴-۱ وقتی سیالی در یک لوله جریان پیدا می کند ، اصطکاک بین سیال و سطح لوله به وسیله ضریب چسبناکی η بیان می شود . η با رابطه $\frac{F}{A} = \eta \frac{dv}{ds}$ تعریف می شود که F نیروی اصطکاک وارد به سطح A و $\frac{dv}{ds}$ گرادیان سرعت بین لایه های سیال است .
- الف - یکاهای η چیست ؟

ب - اگر ΔP اختلاف فشار ، و مستقیماً متناسب با Δl باشد ، با استفاده از روش آنالیز ابعادی نشان دهید

$$\frac{\Delta P}{\Delta l} = \text{constant} \frac{\eta \phi}{a^4}$$

که ϕ شار حجمی سیال از لوله و a شعاع لوله است (شکل (مسئله ۱-۴)).



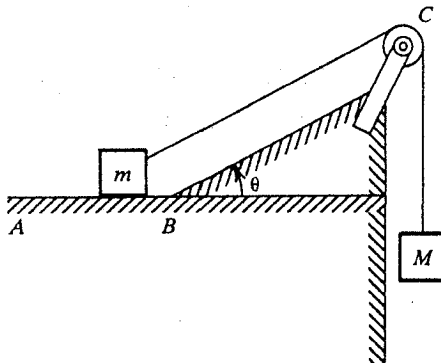
شکل (مسئله ۱-۴)

۵-۱ در شکل (۱-۱) ، جرم جسم c برابر با 100 kg ، شتاب اندازه گیری شده توسط ناظر دستگاه لخت A برابر با 100 m/s^2 ، و شتاب اندازه گیری توسط ناظر دستگاه B برابر با 90 m/s^2 است . نیروی ساختگی را پیدا کنید . شتاب دستگاه نالخت B چقدر است ؟ B چه می تواند بکند تا یک دستگاه لخت واقعی شود ؟

۶-۱ اگر در وضعیت شکل (۲-۱) بین چرخها و ریل اصطکاکی با ضریب اصطکاک μ_k وجود داشته بود ، جواب مسأله قطاری که در بخش (۱-۵) بحث شده بود ، چه تغییری می کرد .

۷-۱ جسمی به جرم m ، با سرعت اولیه v_0 به طرف بالای سطح شیب داری با زاویه شیب θ (بزرگتر از زاویه اصطکاک است) پرتاب می شود . فاصله ای را که جسم بالا می رود ، زمانی را که به این نقطه می رسد ، و زمانی را که به مکان اولش بر می گردد ، حساب کنید .

۸-۱ جعبه ای به جرم m توسط طنابی که از روی قرقره ای گذشته است به جعبه دیگری به جرم M ، آن طور که در شکل (مسأله ۱-۸) نشان داده شده است ، متصل شده است . ضریب اصطکاک بین m و سطح افقی AB یا سطح شیب دار BC ، μ است . شتاب سیستم و تنش طناب را برای وقتی که جرم m (الف) بین A و B حرکت می کند ، و (ب) بین B و C حرکت می کند ، پیدا کنید .



شکل (مسأله ۱-۸)

۹-۱ مردی به جرم M یک سورتمه را که پسر بچه ای به جرم m در آن نشسته است می کشد . ضریب اصطکاک بین سورتمه و برف μ ، و ضریب اصطکاک بین پایهای مرد و برف

μ_s است .

الف - نمودار روشنی رسم کنید که تمام نیروهای وارد به سورتمه و مرد را نشان دهد .

ب - مؤلفه های افقی و عمودی نیرو را وقتی که مرد و سورتمه با شتاب a حرکت

می کنند محاسبه کنید .

پ - شتاب بیشینه ای که مرد می تواند به خود و سورتمه بدهد چقدر است ؟

۱۰-۱ یک مرد جعبه ای به جرم M را با نیروی F توسط یک میله AB به جرم m که با قائم زاویه

θ می سازد ، آن طور که در شکل (مسأله -۱-۱۰) نشان داده شده است ، هل

می دهد ، ضریب اصطکاک بین جعبه و سطح μ است .

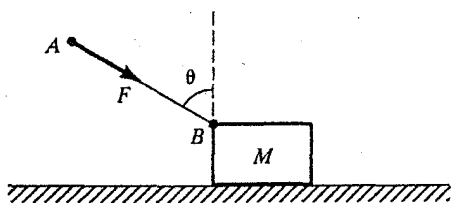
الف - نمودار روشنی رسم کنید که تمام نیروها را نشان دهد .

ب - مقدار F لازم برای این که جعبه را با سرعت یکنواخت حرکت دهد محاسبه

کنید .

پ - نشان دهید که اگر θ کمتر از زاویه اصطکاک باشد جعبه نمی تواند با تنها هل دادن

حرکت کند .



شکل (مسأله -۱-۱۰)

۱۱-۱ سیستمی شامل دو جرم و یک قرقره را ، چنان که در شکل (مسأله -۱-۱۱) نشان داده

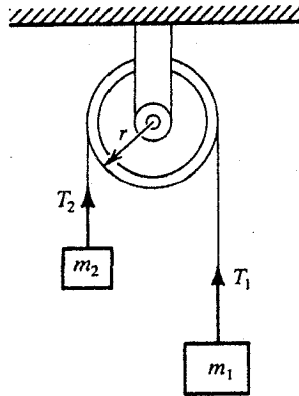
شده است ، در نظر بگیرید . فرض کنید $m_1 = 12 \text{ kg}$ ، $m_2 = 8 \text{ kg}$ ، جرم

قرقره $m = 10 \text{ kg}$ ، و شعاع آن $r = 10 \text{ cm}$ است .

الف - تمام نیروهای وارد به سیستم را نشان دهید .

ب - T_1 ، T_2 ، و شتاب a را محاسبه کنید . قرقره را یک قرص توپر فرض کنید

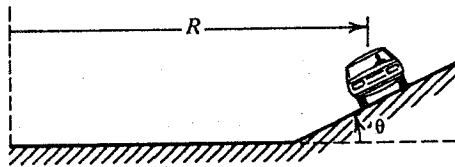
$$\cdot \left(I_{\text{disk}} = \frac{mr^2}{2} \right)$$



شکل (مسأله-۱-۱۱)

۱۲-۱ مسأله (۱۱-۱) را وقتی قرقره با همان جرم و شعاع یک حلقه توخالی ($I = mr^2$) باشد تکرار کنید.

۱۳-۱ اتومبیلی در یک بزرگراه وارد پیچی به شعاع R و زاویه شیب θ ، آن طور که در شکل (مسأله-۱-۱۳) نشان داده شده است، می شود. ضریب اصطکاک بین چرخها و جاده μ است. سرعتهای کمینه و بیشینه را برای این که اتومبیل بدون سر خوردن به طرف کناره های جاده بتواند پیچ را دور بزند حساب کنید.

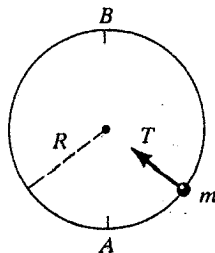


شکل (مسأله-۱-۱۳)

۱۴-۱ یک جرم m به نخ بست شده و روی یک دایره قائم، آن طور که در شکل (مسأله-۱-۱۴) نشان داده شده است، می چرخد.

الف - تنش نخ را در پایتترین نقطه A و بالاترین نقطه B حساب کنید.

ب - سرعت کمینه v_0 در نقطه بالایی B را برای این که نخ تا نشود پیدا کنید.



شکل (مسأله-۱-۱۴)

۱۵-۱ دو ذره به جرمهای m_1 و m_2 در فاصله R از یکدیگر تحت تأثیر نیروی جاذبه F قرار دارند. اگر دو جرم در روی یک دایره، با سرعت زاویه ای یکنواخت ω دور یکدیگر بچرخند نشان دهید که

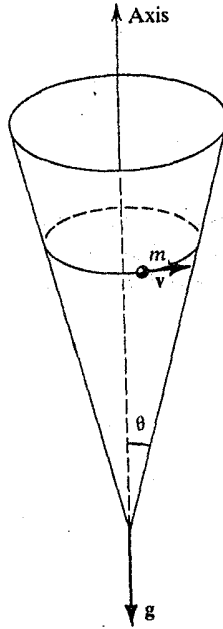
$$F = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \omega^2 R = \frac{\omega^2 R}{(1/m_1) + (1/m_2)}$$

۱۶-۱ ارتفاع و سرعت ماهواره ای را که همیشه بالای یک نقطه از زمین می ماند حساب کنید. مسیر را دایره ای فرض کنید و ارتفاع را برحسب شعاع زمین، R_p ، حساب کنید. چنین ماهواره ای، به نام ماهواره همزمان، در هر ۲۴ ساعت یک بار دور مرکز زمین می گردد، بنابراین مکان آن نسبت به یک ایستگاه زمینی ساکن به نظر می رسد. یکی از این نوع ماهواره های مخابراتی پرنده صبحگاهی نامیده شده است.

۱۷-۱ مخروطی را با نیم زاویه رأس θ ، آن طور که در شکل (مسأله-۱-۱۷) نشان داده شده است، در نظر بگیرید. ذره ای به جرم m در داخل آن بدون اصطکاک روی یک مسیر دایره ای افقی، با سرعت v می لغزد. نمودار نیرو را رسم کنید و شعاع مسیر دایره ای را برحسب θ ، v ، و g حساب کنید.

۱۸-۱ مسأله (۱-۱۷) را برای موردی که سطح بدون اصطکاک نیست و ضریب اصطکاک μ است تکرار کنید.

۱۹-۱ جرم خورشید را، با فرض این که زمین روی یک مدار دایره ای به شعاع $1/4696 \times 10^8 \text{ m}$ حرکت می کند و در مدت یک سال یک دور کامل می زند، حساب کنید.



شکل (مسئله ۱-۱۷)

منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر

- FORD, K. W., *Classical and Modern Physics*, Volume I. Lexington, Mass.: Xerox College Publishing, 1972.
- FRENCH, A. P., *Newtonian Mechanics*, Chapters 7 and 12. New York: W. W. Norton and Co., Inc., 1971.
- HALLIDAY, D., and RESNICK, R., *Physics for Students of Science and Engineering*, 2nd. ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1981.
- KITTEL, C., KNIGHT, W. D., and RUDERMAN, M. A., *Mechanics*, Berkeley Physics Course, Volume 1, Chapter 3. New York: McGraw-Hill Book Co., 1965.
- KLEPPNER, D., and KOLENKOW, R. J., *An Introduction to Mechanics*, Chapter 2. New York: McGraw-Hill Book Co., 1973.
- SEARS, F. W., ZEMANSKY, M. W., and YOUNG, H. D., *University Physics*, 5th ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1980.

- STEPHENSON, R. J., *Mechanics and Properties of Matter*, Chapter 2. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- SYMON, K. R., *Mechanics*, 3rd. ed., Chapter 1. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1971.
- TAYLOR, E. F., *Introductory Mechanics*, Chapters 1, 2, and 3. New York: John Wiley & Sons, 1963.
- TIPLER, P. A., *Physics*, 2nd. ed., Volume I. New York: Worth Publishers, Inc., 1982.
- WEIDNER, R. T., in collaboration with BROWN, M. E., *Elementary Classical Physics*. Needham Heights, Mass.: Allyn and Bacon, 1985.

فصل دوم

دینامیک ذره در یک بُعد

۱-۲ مقدمه

ذره‌ای به جرم m را که تحت تأثیر چند نیروی F_1, F_2, \dots, F_n قرار دارد در نظر بگیریم. نیروی خالص وارد به این ذره با اصل برهم نهش به صورت

$$F = \sum F_n = F_1 + F_2 + \dots + F_n \quad (1-2)$$

و حرکت ذره به وسیله قانون دوم نیوتن به صورت

$$F = \frac{dp}{dt} \quad (2-2 \text{ الف})$$

داده می شود که p تکانه خطی ذره است. تنها وقتی که جرم m ثابت می ماند می توان نوشت

$$F = m \frac{d^2r}{dt^2} = ma \quad (2-2 \text{ ب})$$

اگر حرکت را در مختصات دکارتی توصیف کنیم، معادله (۲-۲ ب) را می توان به شکل سه مؤلفه به صورت

$$F_x = \sum F_{nx} = m \frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} = ma_x \quad (3-2)$$

و عبارتهای مشابهی برای F_x و F_y ، نوشت. اگر شتاب a یا مؤلفه های a_x ، a_y و a_z آن معلوم باشند، می توان معادله (۲-۲) را برای پیدا کردن نیروی F به کار گرفت. معمولاً در دینامیک ذره وضعیت برعکس است؛ یعنی ما نیروی وارد به ذره را می دانیم و می خواهیم با حل (۲-۲) مکان ذره را به صورت تابعی از زمان t به دست آوریم. در این فصل، چون حرکت ذره را به یک بعد محدود می کنیم، تنها معادله مورد استفاده ما معادله (۲-۳) است، که بعد از حذف شاخص زیرین x به صورت

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (۴-۲)$$

نوشته می شود. برای تصریح بیشتر، می توان این معادله را به صورت

$$F(x, \dot{x}, t) = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (۵-۲)$$

نوشت، که $x = \frac{dx}{dt} = v$ سرعت ذره است و (۵-۲) بیان می دارد که نیروی وارد بر ذره تابعی از مکان، سرعت و زمان است. حل چنین مسأله ای که در آن نیروی اعمال شده، بطور همزمان تابعی از هر سه متغیر است، مشکل است. از طرف دیگر، اگر نیروی اعمال شده تابعی از تنها یک متغیر باشد، مسأله بسیار ساده است. لذا بحث خود را به چهار مورد زیر تقسیم می کنیم:

۱- نیروی اعمال شده ثابت است؛ یعنی، $F = \text{ثابت}$.

۲- نیروی اعمال شده تابعی از زمان است؛ یعنی، $F = F(t)$.

۳- نیروی اعمال شده تابعی از سرعت است؛ یعنی، $F = F(v)$.

۴- نیروی اعمال شده تابعی از مکان است؛ یعنی، $F = F(x)$.

قبل از شروع به حل معادله (۲-۴) برای این چهار مورد متفاوت، یادآوری کنیم که چون داریم

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} \quad (۶-۲)$$

معادله (۲-۴) می تواند به شکلهای متفاوت زیر نوشته شود

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (۷-۲ \text{ الف})$$

$$F = m \frac{dv}{dt} \quad (۷-۲ \text{ ب})$$

$$F = mv \frac{dv}{dx} \quad (۷-۲ \text{ ج})$$

همچنین، چون تکانه p به صورت $p = mv = m \frac{dx}{dt}$ تعریف می شود، می توان معادله (۷-۲ الف) [یا معادله (۲-۲ الف)] را وقتی به حالت یک بُعدی اعمال شود به صورت زیر نوشت

$$F = \frac{dp}{dt} \quad (۸-۲)$$

یعنی، نیروی اعمال شده برابر است با آهنگ تغییر تکانه. اگر نیروی اعمال شده بین دو لحظه t_1 و t_2 عمل کند، با انتگرال گیری از معادله (۸-۲) خواهیم داشت

$$p_2 - p_1 = \int_{t_1}^{t_2} F dt \quad (۹-۲)$$

که شکل انتگرالی قانون دوم نیوتن است، در حالی که معادلات (۷-۲) شکلهای دیفرانسیلی هستند. انتگرال طرف دوم معادله (۹-۲) ضربه ای است که توسط نیروی F در بازه زمانی کوتاه $(t_2 - t_1)$ به ذره داده شده است؛ یعنی، تغییر تکانه خطی برابر است با ضربه داده شده. به این ترتیب معادله (۹-۲) یک بیان از قضیه ضربه-تکانه است.

۲-۲ نیروی اعمال شده ثابت است: ثابت $F =$

اکنون توجه خود را به مطالعه حرکت یک ذره، وقتی نیروی وارد به ذره در زمان ثابت است، معطوف می کنیم. چون F ثابت است، شتاب a نیز ثابت است و قانون دوم نیوتن را می توان به صورت

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} = a = \text{constant} \quad (۱۰-۲)$$

نوشت. این معادله، به شرط این که شرایط اولیه را بدانیم، با انتگرال گیری حل می شود. حل معادله (۱۰-۲)، همان طور که در این جا نشان خواهیم داد، همان نتایج آشنای به دست آمده در مکانیک مقدماتی را به ما خواهد داد. فرض کنیم که در زمان $t = 0$ سرعت اولیه v_0 ، و در زمان t سرعت v است. به این ترتیب از معادله (۱۰-۲) خواهیم داشت

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt$$

که پس از انتگرال گیری نتیجه می دهد

$$v = v_0 + at \quad (11-2)$$

با قرار دادن $v = \frac{dx}{dt}$ در معادله (۱۱-۲) و در نظر گرفتن این شرط اولیه که در $t=0$ داریم $x = x_0$ ، با انتگرال گیری مستقیم نتیجه خواهیم گرفت

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (12-2)$$

از حذف t بین معادلات (۱۱-۲) و (۱۲-۲) ، خواهیم داشت

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad (13-2)$$

معادلات (۱۱-۲) ، (۱۲-۲) ، (۱۳-۲) معادلات آشنایی هستند که حرکت انتقالی یک ذره در یک بعد را توصیف می کنند .

یکی از آشناترین مثالهای حرکت با نیروی ثابت ، و در نتیجه شتاب ثابت ، حرکت اجسام در سقوط آزاد است . در این حالت g ، شتاب ناشی از گرانش ، با مقدار $g = 9.8 \text{ m/s}^2 = 32.2 \text{ ft/s}^2$ ، جانشین a می شود . بزرگی نیروی گرانش که به طرف پایین اعمال می شود mg است . مثالهای دیگری نیز از حرکت با شتاب ثابت بطور مشروح در فصل ۱ مورد بحث قرار گرفته اند .

۳-۲ نیروی وابسته به زمان : $F = F(t)$

در این مورد ، نیرو که با $F = F(t)$ داده می شود تابع صریحی از زمان است ؛ در نتیجه قانون دوم نیوتن می تواند به صورت

$$m \frac{dv}{dt} = F(t) \quad (14-2)$$

نوشته شود که با انتگرال گیری ، و با این فرض که در $t = t_0$ داریم $v = v_0$ ، می دهد

$$v = v_0 + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t) dt \quad (15-2)$$

چون $v = v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ ، با انتگرال گیری مجدد از معادله (۱۵-۲) ، می توان x را به دست

آورد؛ یعنی، با فرض $x = x_0$ در $t = t_0$ خواهیم داشت

$$\frac{dx(t)}{dt} = v_0 + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t) dt$$

یا، با انتگرال گیری مجدد،

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^{t'} F(t) dt \right] dt \quad (۱۶-۲)$$

چون دو انتگرال گیری وجود دارد، می توانیم از دو متغیر t' و t'' استفاده کنیم و معادله (۱۶-۲) را به صورت زیر بنویسیم

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} F(t'') dt'' \quad (۱۷-۲)$$

این بحث را با اعمال آن به برهم کنش امواج رادیویی با الکترونها در یونوسفر، که به بازتاب امواج رادیویی از یونوسفر می انجامد، روشن می کنیم. یونوسفر ناحیه ای است که زمین را در ارتفاع تقریباً ۲۰۰ km (حدود ۱۲۵ مایل) از سطح زمین، احاطه کرده است. یونوسفر متشکل از یونهای با بار مثبت و الکترونها با بار منفی است و یک گاز خنثی را تشکیل می دهد. هنگامی که یک موج رادیویی، که یک موج الکترومغناطیسی است، از یونوسفر عبور کند، با ذرات باردار برهم کنش می کند و به آنها شتاب می دهد. در این جا حرکت یک الکترون به جرم m و بار $-e$ وقتی با یک موج الکترومغناطیسی ورودی با شدت میدان الکتریکی E به صورت

$$E = E_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (۱۸-۲)$$

برهم کنش می کند مورد نظر است. ω فرکانس نوسانات موج الکترومغناطیسی برحسب رادیان بر ثانیه و ϕ فاز اولیه است. این برهم کنش منجر به یک نیروی F روی الکترون به صورت

$$F = -eE = -eE_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (۱۹-۲)$$

می شود و شتاب الکترون با رابطه زیر داده می شود

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{eE_0}{m} \sin(\omega t + \phi) \quad (۲۰-۲)$$

$a_0 = \frac{eE_0}{m}$ شتاب بیشینه است ، بنابراین معادله (۲۰-۲) خواهد شد

$$a = -a_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (21-2)$$

چون $a = \frac{dv}{dt}$ ، معادله حرکت الکترون را می توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{eE_0}{m} \sin(\omega t + \phi) \quad (22-2)$$

با این فرض که الکترون در ابتدا ساکن است ، یعنی در $t=0$ داریم $v=0$ ، انتگرال گیری معادله (۲۲-۲) می دهد

$$v = -\frac{eE_0}{m\omega} \cos \phi + \frac{eE_0}{m\omega} \cos(\omega t + \phi) \quad (23-2)$$

چون $v = \frac{dx}{dt}$ ، و این فرض که در $t=0$ داریم $x=0$ ، انتگرال گیری معادله (۲۳-۲) نتیجه می دهد

$$x = -\frac{eE_0}{m\omega^2} \sin \phi - \left(\frac{eE_0}{m\omega} \cos \phi\right)t + \frac{eE_0}{m\omega^2} \sin(\omega t + \phi) \quad (24-2)$$

دو جمله اول نشان می دهند که الکترون حرکتی رانشی با سرعت یکنواخت انجام می دهد و این سرعت تابعی از فقط شرایط اولیه است . به این حرکت رانشی الکترون یک حرکت نوسانی افزوده می شود که با جمله آخر نمایانده می شود . فرکانس نوسانی ω الکترون از شرایط اولیه مستقل است و برابر با فرکانس موج الکترومغناطیسی فرودی است . در آنچه که در زیر می آید ، می خواهیم بررسی کنیم که این گونه نوسانات همدموس الکترونهاي آزاد چه تغییراتی در مشخصات انتشاری امواج الکترومغناطیسی فرودی می دهند .

از مقایسه معادله (۱۹-۲) برای F و معادله (۲۴-۲) برای x ، کاملاً روشن می شود که بخش نوسانی جابه جایی x با نیروی اعمال شده ، که از میدان الکتريکی امواج فرودی ناشی می شود ، 180° اختلاف فاز دارد . معمولاً ، در یک عایق ، در فرکانسهای پایین ، بارها در جهت نیروی اعمال شده جابه جا می شوند . که این منجر به قطبیدگی بارها بطور همفاز با نیروی اعمال شده می شود . در چنین وضعیتی ، ضریب دی الکتريک ماده بزرگتر از یک است . در مورد یونوسفر ، می توان نشان داد که قطبیدگی حاصل 180° با میدان الکتريکی

اختلاف فاز دارد؛ در نتیجه ضریب دی الکتریک یونوسفر کوچکتر از یک است. این نتیجه دو پیامد دارد:

۱- سرعت فاز v ی امواج الکترومغناطیسی در یونوسفر بزرگتر از سرعت نور c است.

۲- ضریب شکست یونوسفر برای امواج الکترومغناطیسی فرودی کمتر از ضریب شکست فضای آزادی است (در این مورد خلأ) که موج از آن می آید.

این منجر به امکان بازتاب داخلی کلی، یعنی، بازتاب امواج الکترومغناطیسی فرودی از یونوسفر به طرف زمین، می شود.

سرعتهای نور در خلأ و در محیطهای دیگر به ترتیب با

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad \text{و} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (25-2)$$

داده می شوند و در نتیجه

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \mu_0}{\epsilon \mu}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu}} = \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{-1/2} \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{-1/2} \quad (26-2)$$

که در آن ϵ_0 و ϵ گذردهی الکتریکی، μ_0 و μ نفوذپذیری مغناطیسی، $\frac{\mu}{\mu_0} \approx 1$ نفوذپذیری نسبی مغناطیسی، و $\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \approx 1$ گذردهی نسبی الکتریکی است. بنابراین

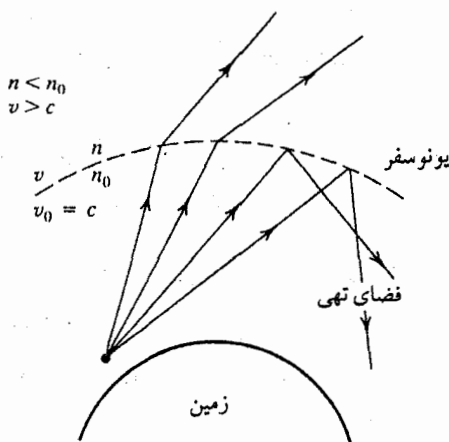
$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon/\epsilon_0}} \quad (27-2)$$

و ضریب شکست n محیط با رابطه

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = \sqrt{K} \quad (28-2)$$

داده می شود که در آن K ثابت دی الکتریک محیط است. بطور کلی، برای یونوسفر ϵ کوچکتر از ϵ_0 است؛ لذا از معادله (۲۸-۲) نتیجه می شود $v > c$. یعنی، سرعت فاز v ی امواج رادیویی در یونوسفر بزرگتر از سرعت c ی همین امواج رادیویی در خلأ یا فضای تهی است. همچنین، از معادله (۲۸-۲)، می بینیم که ضریب شکست n یونوسفر کوچکتر از ضریب شکست ($n_0 \equiv 1$) فضای تهی است. این، به بازتاب امواج از یونوسفر به طرف زمین،

همان طور که در شکل (۱-۲) نمایش داده شده است ، می انجامد .



شکل (۱-۲) : بازتاب امواج رادیویی از یونوسفر . بازتاب داخلی کلی امواج

الکترومغناطیسی از یونوسفر

مثال (۱-۲) : یک طناب مسابقه بین دو گروه A و B ، هر گروه ده نفر ، کشیده شده است . جرم متوسط هر شخص 70 kg است و هر کدام می توانند در شروع طناب را با نیروی 800 N بکشند . در شروع ، دو گروه احیاناً با یکدیگر برابری می کنند . اما افراد خسته می شوند و نیروی کشش هر کدام به صورت

$$F = 800e^{-t/\tau} \text{ N}$$

کاهش می یابد ، که در آن τ زمان خستگی میانگین است . برای گروه A داریم $\tau_A = 20 \text{ s}$ و برای گروه B داریم $\tau_B = 10 \text{ s}$. حرکت را توصیف کنید ، یعنی ، $x(t)$ و $v(t)$ را محاسبه کنید و نتایج را توضیح دهید . چون هر گروه از 10 نفر تشکیل شده است ، نیروهایی که دو گروه اعمال می کنند عبارتند از :

$$F_A = 10 \times 800e^{-t/\tau_A} \text{ N} = 8000e^{-t/20} \text{ N} \quad (1)$$

$$F_B = 10 \times 800e^{-t/\tau_B} \text{ N} = 8000e^{-t/10} \text{ N} \quad (2)$$

بنابراین نیروی اعمال شده در این سیستم عبارت است از

$$F_{\text{net}} = F_A - F_B = M \left(\frac{dv}{dt} \right) \quad (۳)$$

که در آن M جرم کل هر دو گروه و برابر است با

$$M = 20 \times 70 \text{ kg} = 1400 \text{ kg} \quad (۴)$$

ترکیب این چهار معادله به معادله زیر برای توصیف سیستم منجر می شود

$$1400 \text{ kg} \frac{dv}{dt} = 8000 \text{ N} (e^{-t/20} - e^{-t/10}) \quad (۵)$$

که پس از انتگرال گیری نتیجه می دهد

$$v = \frac{8000}{1400} (-20e^{-t/20} + 10e^{-t/10} + 10) \quad (۶)$$

$$= 57.1 \text{ m/s} (1 + e^{-t/10} - 2e^{-t/20})$$

با قرار دادن $v = \frac{dx}{dt}$ و انتگرال گیری مجدد، داریم

$$x = 57.1 \text{ m} (t - 10e^{-t/10} + 40e^{-t/20} - 30) \quad (۷)$$

مقادیر x و v بعد از یک دقیقه را محاسبه می کنیم. نتیجه عبارت است از

$$v = 51.6 \text{ m/s} \quad \text{و} \quad x = 1825 \text{ m}$$

هر دوی این مقادیر غیرواقعی هستند و علت آن پایه ای است. شخص ایستاده ممکن است بتواند نیروی ۸۰۰ نیوتنی اعمال کند، ولی وقتی حرکت می کند، بسختی می تواند چنین کاری انجام دهد، حتی اگر سرعت آن کم باشد.

تمرین (۱-۲): فرض کنیم زمانهای خستگی دو گروه به ترتیب ۲۰ و ۱۰ دقیقه باشد. آیا برای x و v بعد از یک دقیقه مقادیر معقولی به دست خواهد آمد؟ اگر نه، فکر می کنید اشکال عمده توصیف این وضعیت چیست؟

مثال (۲-۲): توده‌ای به جرم m در روی یک سطح بدون اصطکاک در مبدأ در حال سکون است. در لحظه $t = 0$ یک نیروی کاهشی به صورت $F = F_0 e^{-\lambda t}$ (که λ یک ثابت مثبت و در مقایسه با λ خیلی کوچک است) به آن اعمال می‌شود. $x(t)$ و $v(t)$ را محاسبه کنید. این مقادیر را برای (الف) t خیلی کوچک و (ب) t خیلی بزرگ پیدا کنید.

از قانون دوم نیوتن داریم

$$m \frac{dv}{dt} = F = F_0 e^{-\lambda t} \quad (1)$$

یا

$$dv = \frac{F_0}{m} e^{-\lambda t} dt \quad (2)$$

که پس از انتگرال گیری نتیجه می‌دهد

$$v = \frac{F_0}{m} \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} + C$$

چون در $t = 0$ داریم $v = v_0 = 0$ ، خواهیم داشت

$$C = \frac{F_0}{m\lambda}$$

در نتیجه، عبارت سرعت می‌شود

$$v = \frac{F_0}{m\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \quad (3)$$

با قرار دادن $v = \frac{dx}{dt}$ داریم

$$dx = \frac{F_0}{m\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) dt \quad (4)$$

که پس از انتگرال گیری، با این شرط اولیه که در $t = 0$ داریم $x = 0$ ، می‌دهد

$$x = \frac{F_0}{m\lambda^2} (e^{-\lambda t} - 1) + \frac{F_0}{m\lambda} t \quad (5)$$

اگر t خیلی کوچک باشد، معادلات (۴) و (۵) می‌دهند $x \approx 0$ و $v \approx 0$. اگر t خیلی بزرگ باشد، از این معادلات خواهیم داشت

$$v \approx \frac{F_0}{m\lambda} \quad \text{و} \quad x \approx \frac{F_0}{m\lambda} t - \frac{F_0}{m\lambda^2}$$

تمرین ۲-۲: ذره‌ای به جرم m در مبدأ مختصات در حال سکون است. در $t=0$ یک نیروی

$$F = F_0(1 - te^{-\lambda t})$$

به آن اعمال می‌شود. شتاب، سرعت، و مکان ذره را بر حسب زمان پیدا کنید.

۲-۲ نیروی وابسته به سرعت: $F = F(v)$

موارد زیادی در رخدادهای عادی روزانه وجود دارد که در آنها، علاوه بر نیروهای ثابت، نیروهایی حضور دارند که تابع سرعت هستند. به عنوان مثال، وقتی جسمی در میدان گرانشی قرار دارد، علاوه بر نیروی گرانشی، نیروی مقاومت هوا روی جسم پایین رونده یا بالارونده اعمال می‌شود، و این نیروی مقاومت تابع پیچیده‌ای از سرعت است. این مسأله در مورد اجسام متحرک در سیالات (گازها و مایعات) نیز صدق می‌کند. چنین نیروهای مقابله‌کننده با حرکت اجسام در مایعات نیروهای چسبناکی یا مقاومتهای چسبناکی نامیده می‌شوند. در این موارد قانون دوم نیوتن می‌تواند به شکل

$$F(v) = m \frac{dv}{dt} \quad (۲۹-۲)$$

یا

$$F(v) = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dx} \quad (۳۰-۲)$$

نوشته شود. با دانستن شکل نیروی $F(v)$ ، هر کدام از این دو معادله را می‌توان برای تحلیل حرکت، یعنی پیدا کردن x به صورت تابعی از t ، حل کرد. با شروع از معادله (۲۹-۲) می‌توان نوشت

$$dt = m \frac{dv}{F(v)}$$

که پس از انتگرال‌گیری می‌دهد

$$t = t(v) = m \int \frac{dv}{F(v)} \quad (۳۱-۲)$$

حل این معادله v را به صورت تابعی از t ، یعنی $v = v(t)$ ، به دست می دهد. بنابراین، با دانستن $v(t)$ ، می توان x را پیدا کرد.

$$v = \frac{dx}{dt} = v(t) \quad (2-32)$$

یا

$$dx = v(t) dt$$

که پس از انتگرال گیری می دهد

$$x = x(t) = \int v(t) dt \quad (2-33)$$

به این ترتیب مسأله حل شده است. بطور مشابه اگر با معادله (2-30) شروع کنیم خواهیم داشت

$$dx = m \frac{v dv}{F(v)} \quad (2-34)$$

که پس از انتگرال گیری می دهد

$$x = x(t) = m \int \frac{v dv}{F(v)} \quad (2-35)$$

معادلات (2-33) و (2-35)، که جابه جایی x را به صورت تابعی از زمان توصیف می کنند، ممکن است کاملاً متفاوت به نظر بیایند اما، همان طور که می توان نشان داد، وقتی محاسبه شوند به یک نتیجه می رسند. بحث خود را به دو قسمت تقسیم می کنیم. نخست مواردی را بررسی می کنیم که در آنها بجز نیروی مقاومت چسبناکی نیروی خارجی دیگری به جسم اعمال نمی شود. سپس وضعیتهای عملی تر را که در آنها هر دو نوع نیرو، هم اصطکاک و هم نیروهای دیگر، حضور دارند بررسی می کنیم.

مورد خاص

اتومبیلی در نظر بگیریم که روی یک سطح صاف بدون اصطکاک با سرعت v_0 حرکت می کند و موتور آن ناگهان خاموش می شود. فرض کنیم مقاومت متناسب با سرعت باشد، یعنی

$$F_r = F_r(v) = -kv \quad (۳۶-۲)$$

با این فرض که در $t=0$ داریم $v = v_0$ ، v و x را بر حسب t محاسبه کنید. معادلهٔ دیفرانسیل حرکت را به صورت زیر می نویسیم

$$F_r(v) = -kv = m \frac{dv}{dt} \quad (۳۷-۲)$$

$$dt = -\frac{m}{k} \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} \quad \text{یعنی}$$

که پس از انتگرال گیری می دهد ($\int \frac{dv}{v} = \ln v$)

$$t = -\frac{m}{k} \ln \left(\frac{v}{v_0} \right) \quad (۳۸-۲)$$

و پس از مرتب سازی خواهیم داشت

$$v = v_0 e^{-(k/m)t} \quad (۳۹-۲)$$

یعنی، سرعت بطور نمایی با زمان کاهش می یابد.

با قرار دادن $v = \frac{dx}{dt}$ در معادلهٔ (۳۹-۲) و مرتب سازی، داریم

$$dx = v_0 e^{-(k/m)t} dt$$

که پس از انتگرال گیری، با قرار دادن $x=0$ در $t=0$ ، می دهد

$$x = \frac{mv_0}{k} [1 - e^{-(k/m)t}] \quad (۴۰-۲)$$

از معادلات (۳۹-۲) و (۴۰-۲) روشن است که در $t=0$ داریم $v = v_0$ و $x = 0$ ، همان طور که باید باشد. از معادلهٔ (۳۹-۲) می بینیم که فقط در $t = \infty$ داریم $v = 0$ ، و بنابراین $x = \frac{mv_0}{k} = x_1$ ، که در آن x_1 فاصله حدی است. جسم هرگز دورتر از این فاصله نمی رود. (اما برای رسیدن به این فاصله بی نهایت وقت می گیرد. این مطلب را به اختصار مورد بحث قرار می دهیم).

با بازگشت به معادلات (۳۹-۲) و (۴۰-۲)، می دانیم که حرکت نمی تواند برای همیشه ادامه داشته باشد و اتومبیل باید خیلی قبل از زمان بی نهایت، که قبلاً محاسبه شد،

به حال سکون در آید. فرض کنیم که وقتی اتومبیل به یک سرعت کمینه v_1 برسد، تقریباً به فاصله نهایی a_1 رسیده است. این مسأله تا وقتی که v کوچکتر از یک مقدار کمینه v_1 باشد صادق است. با قرار دادن $v = v_1$ در معادله (۲-۳۹) می توان t_1 زمانی را که برای رسیدن به این سرعت می گیرد، محاسبه کرد، یعنی

$$v_e = v_0 e^{-(k/m)t_e} \quad (۴۱-۲)$$

یا

$$t_e = \frac{m}{k} \ln \left(\frac{v_0}{v_e} \right) \quad (۴۲-۲)$$

یک واقعیت جالب دیگر وقتی آشکار می شود که مسأله را در یک بازه زمانی کوتاه بعد از این که نیروی مقاوم یا کندساز شروع به اعمال روی جسم کند بررسی کنیم. برای این بحث طرفهای راست معادلات (۲-۳۹) و (۲-۴۰) را با استفاده از سری تیلور

$$(e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots)$$

بسط می دهیم. یعنی

$$v = v_0 - \frac{kv_0}{m} t + \dots = v_0 + \frac{F_{r0}}{m} t + \dots \quad (۴۳-۲)$$

$$= v_0 + a_{r0} t$$

همچنین،

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} \frac{kv_0}{m} t^2 + \dots = v_0 t + \frac{1}{2} \frac{F_{r0}}{m} t^2 + \dots \quad (۴۴-۲)$$

$$= v_0 t + \frac{1}{2} a_{r0} t^2 + \dots$$

اگر از جملات مرتبه های بالاتر صرف نظر کنیم، معادلات (۲-۴۳) و (۲-۴۴) حرکت ذره ای را توصیف می کنند که تحت تأثیر نیروی ثابتی قرار دارد به شرط این که t خیلی کوچک باشد. توجه کنیم که $kv_0 = F_{r0} = ma_{r0}$ - نیرویی است که در زمان $t=0$ روی جسم عمل می کند، یعنی، این معادلات بطور ساده معادلات حرکت ذره ای هستند که تحت تأثیر یک نیروی ثابت قرار دارد.

مورد عمومی

وضعیت قبلی محدود به مورد ساده ای بود که در آن نیروی کندساز $F_r(v)$ متناسب

با سرعت بود. در وضعیتهای عملی، F_r تابع پیچیده‌ای از سرعت است، و جوابها نمی‌توانند صرفاً با استفاده از جدولهای انتگرال به دست آیند، و به انتگرال گیری عددی نیاز است. اما، در بسیاری موارد، برای گستره وسیعی از سرعتها، در عمل می‌توان از تقریب زیر که در آن نیروی کندساز یا اصطکاک متناسب با بعضی از توانهای سرعت باشد، استفاده کرد. یعنی

$$F_r = (\mp)kv^n \quad (۴۵-۲)$$

که در آن k ضریب تناسب مثبتی برای شدت نیروی کندساز و n یک عدد درست مثبت است. اگر n فرد باشد، در معادله (۴۵-۲) علامت منفی باید به کار رود. اگر n زوج باشد، v^n مثبت خواهد بود، و از علامتهای + یا - در معادله (۴۵-۲) باید علامتی را برگزید که به F_r جهتی در خلاف جهت v بدهد (F_r اگر در جهت v باشد، به جای این که حرکت سیستم را آهسته کند، انرژی آن را افزایش می‌دهد). برای اجسام کوچک که با سرعتی کمتر از 25 m/s در هوا حرکت می‌کنند، آزمایش نشان می‌دهد که برای $n \equiv 1$ توافق خوبی با نتایج تجربی خواهیم داشت، در حالی که برای سرعتهای بالاتر از 25 m/s و کمتر از $32 \text{ m/s} \equiv$ استفاده از $n = 2$ توافق خوبی با مقادیر تجربی به دست می‌دهد.

اکنون این ایده‌ها را به مورد سقوط آزاد یک جسم، یعنی به حرکت قائم یک جسم در یک محیط مقاوم، که در این مورد هواست، اعمال می‌کنیم. فرض کنیم که نیروی مقاومت متناسب با v باشد، که می‌توان آن را به صورت $-kv$ ، مستقل از علامت v ، نوشت. بدین ترتیب نیروی خالص وارد بر جسم برابر است با

$$F = F_g + F_r = -mg - kv \quad (۴۶-۲)$$

و معادله دیفرانسیل توصیف کننده حرکت جسم در سقوط آزاد عبارت است از

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - kv \quad (۴۷-۲)$$

با گرفتن $v = v_0$ در $t = 0$ ، می‌توان نوشت

$$\int dt = - \int_{v_0}^v \frac{m dv}{mg + kv} = - \frac{m}{k} \ln(mg + kv) \Big|_{v_0}^v$$

یا

$$t = -\frac{m}{k} \ln \frac{mg + kv}{mg + kv_0} \quad (۴۸-۲)$$

از حل این معادله برای v خواهیم داشت

$$v = -\frac{mg}{k} + \left(\frac{mg}{k} + v_0\right) e^{-(k/m)t} \quad (۴۹-۲)$$

توجه کنیم که اگر سرعت اولیه صفر باشد، یعنی اگر در $t=0$ داشته باشیم $v_0=0$ ، خواهیم داشت

$$v = -\frac{mg}{k} [1 - e^{-(k/m)t}] \quad (۵۰-۲)$$

در معادله (۴۹-۲)، قرار می‌دهیم $v = v(t) = \frac{dx}{dt}$ ، در $t=0$ $x=x_0$ و در $t=t$ $x=x$. بعد از انتگرال‌گیری، نتیجه زیر را به دست می‌آوریم

$$x = x_0 - \frac{mg}{k} t + \left(\frac{m^2 g}{k^2} + \frac{mv_0}{k}\right) [1 - e^{-(k/m)t}] \quad (۵۱-۲)$$

سرعت حدی

یک بار دیگر معادله (۴۹-۲) را در نظر بگیریم. وقتی t افزایش می‌یابد، جمله‌نمایی کاهش می‌یابد و وقتی t در مقایسه با m/k خیلی بزرگ می‌شود به صفر میل می‌کند؛ یعنی برای $m/k \gg t$ داریم

$$e^{-(k/m)t} = e^{-[t/(m/k)]} \rightarrow e^{-\infty} = 0$$

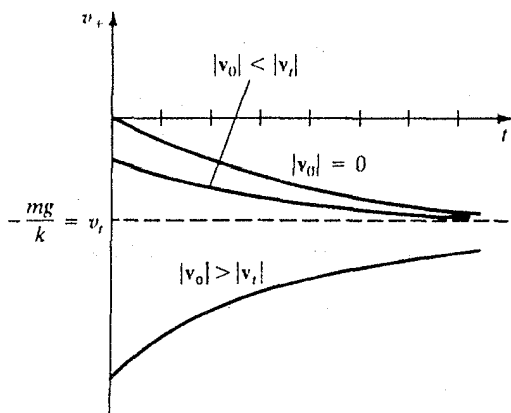
و برای چنین مقادیر بزرگ t ، سرعت v به مقدار حدی خود می‌رسد که، از معادله (۴۹-۲)، برابر است با $v_1 = -mg/k$. این سرعت حدی v_1 سرعت حدی جسم ساقط شونده نامیده می‌شود. سرعت حدی یک جسم به صورت همان سرعت وقتی نیروی کندساز (نیروی مقاومت هوا) با وزن جسم برابر می‌شود و نیروی خالص وارد به جسم صفر است (و بنابراین جسم شتابی ندارد) تعریف می‌شود؛ یعنی

$$F_r + F_g = 0 \quad \text{یا} \quad -kv_1 - mg = 0$$

یا

$$v_t = -\frac{mg}{k} \quad (۵۲-۲)$$

بزرگی سرعت حدی که برابر با mg/k است، تندی حدی نامیده می شود. به عنوان مثال، تندی حدی قطره های باران در جاهای مختلف از ۳ تا ۷ m/s تغییر می کند. اجسام متفاوت که با سرعتهای اولیه مختلف به حرکت در می آیند، در زمانهای متفاوتی به سرعتهای حدی خواهند رسید. سه امکان متفاوت برای سرعتهای اولیه وجود دارد: $|v_0| = 0$ ، $|v_0| < |v_t|$ و $|v_0| \geq |v_t|$. شکل (۲-۲) زمان رسیدن جسم به سرعت حدی را برای این سه مورد نشان می دهد.



شکل (۲-۲): نمودارها زمان رسیدن جسم به سرعت حدی را برای شرایط اولیه متفاوت نشان می دهند

زمان مفسر

از بحث قبلی باید روشن شده باشد که $\frac{m}{k}$ دارای بعد زمان است. کمیت $\frac{m}{k}$ را به عنوان زمان مفسر τ تعریف می کنیم. از معادله (۵۲-۲) (با صرف نظر کردن از علامت) داریم

$$\tau = \frac{m}{k} = \frac{v_t}{g} \quad (۵۳-۲)$$

با استفاده از تعریفهای v_0 و τ ، معادلات (۲۹-۲) و (۵۱-۲) را به صورت زیر می نویسیم

$$v = -v_i + (v_i + v_0)e^{-t/\tau} \quad (۵۴-۲)$$

$$x = x_0 - v_i t + (g\tau^2 + v_0\tau)(1 - e^{-t/\tau}) \quad (۵۵-۲)$$

یک مورد خاص را که در آن جسم از حال سکون شروع به حرکت می کند در نظر بگیریم . با قرار دادن $v_0 = 0$ در معادله (۵۴-۲) ، به دست می آوریم

$$v = -v_i(1 - e^{-t/\tau}) \quad (۵۶-۲)$$

و اگر $t = \tau$ باشد ، معادله (۵۶-۲) به شکل زیر در می آید

$$v = -v_i(1 - 1/e) = -0.63v_i$$

یعنی ، در یک زمان مفسر جسم به 0.63 سرعت حدی خود می رسد . این به ما اجازه می دهد که زمان مفسر را زمانی تعریف کنیم که در آن جسم به 0.63 سرعت حدی خود می رسد . اگر $t = 2\tau$ باشد $v = -0.87v_i$ و اگر $t = 10\tau$ داریم $v = -0.99995v_i$.

اکنون دوباره به معادلات (۲-۴۹) و (۲-۵۱) برگردیم . با استفاده از یک بسط به سری می توانیم نشان دهیم که این معادلات به معادلات آشنای حرکت برای مورد نیروی ثابت کاهش می یابند . برای $(\frac{m}{k} = \frac{v_i}{g})$ $t \ll \tau$ نتیجه می گیریم

$$v = v_0 - gt \quad (۲-۵۷ الف)$$

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (۲-۵۷ ب)$$

یعنی برای t کوچک اثر مقاومت هوا قابل چشم پوشی می شود . از طرف دیگر ، برای $t \gg \tau (= m/k)$ معادلات (۲-۴۹) و (۲-۵۱) به صورت زیر در می آیند

$$v = -v_i \quad (۲-۵۸ الف)$$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_0\tau + \left(\frac{m^2}{k^2}g - \frac{m}{k}gt\right) \\ &= x_0 + v_0\tau + (\tau^2g - g\tau t) \end{aligned} \quad (۲-۵۸ ب)$$

يك تقريب بهتر

برای اجسام کوچک ، متراکم ، و سنگین تقریب بهتری وجود دارد که در آن نیروی

کندساز یا چسبناکی متناسب با v^2 است . در این مورد معادله

$$F_r + F_g = m \frac{dv}{dt}$$

به شکل زیر در می آید

$$\mp kv^2 - mg = m \frac{dv}{dt} \quad (۵۹-۲)$$

که در آن $-kv^2$ برای اجسام بالارونده است و $+kv^2$ برای اجسام ساقط شونده . سرعت حدی با رابطه

$$F_r + F_g = 0 \quad \text{یا} \quad kv_i^2 = mg \quad (۶۰-۲)$$

یا

$$v_i = \sqrt{\frac{mg}{k}} \quad (۶۱-۲)$$

داده می شود و زمان مفسر τ عبارت است از

$$\tau = \frac{v_i}{g} = \sqrt{\frac{m}{kg}} \quad (۶۲-۲)$$

در ادامه روشی که قبلاً مطرح شد می توان معادله (۵۹-۲) را برای v و x حل کرد . نتایج به دست آمده عبارتند از

$$t = \int \frac{m dv}{-mg - kv^2}, \quad \text{برای اجسام صعودکننده} \quad (۶۳-۲)$$

$$t = \int \frac{m dv}{-mg + kv^2}, \quad \text{برای اجسام سقوط کننده} \quad (۶۴-۲)$$

که نتیجه می دهند

$$t = -\tau \tan^{-1}\left(\frac{v}{v_i}\right) + C_1, \quad \text{برای اجسام صعودکننده} \quad (۶۵-۲)$$

$$t = -\tau \tanh^{-1}\left(\frac{v}{v_i}\right) + C_2, \quad \text{برای اجسام سقوط کننده} \quad (۶۶-۲)$$

که در آن C_1 و C_2 ثابتهایی هستند که باید از شرایط اولیه به دست آیند . با حل این معادلات برای

v خواهیم داشت

$$v = v_i \tan \frac{C_1 - t}{\tau}, \quad \text{برای اجسام صعودکننده} \quad (۶۷-۲)$$

$$v = -v_i \tanh \frac{t - C_2}{\tau}, \quad \text{برای اجسام سقوط کننده} \quad (۶۸-۲)$$

فرا تر برویم و شرایط اولیه ای را در نظر بگیریم. فرض کنیم در $t = t_0 = 0$ داریم $v_0 = 0$ و $x_0 = 0$.
برای اجسام ساقط شونده به نتایج زیر می رسیم

$$v = -v_i \tanh \frac{t}{\tau} = -v_i \frac{e^{t/\tau} - e^{-t/\tau}}{e^{t/\tau} + e^{-t/\tau}} \quad (۶۹-۲)$$

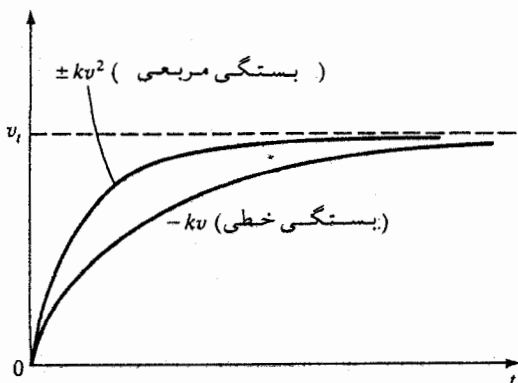
$$v = \begin{cases} = -gt, & t \ll \tau \\ = -\sqrt{\frac{mg}{k}} (= v_i), & t \gg \tau \end{cases}$$

اگر قرار دهیم $v = \frac{dx}{dt}$ و آن را برای x حل کنیم، نتیجه خواهیم گرفت

$$x = -\frac{m}{k} \ln \cosh \left(\frac{t}{\tau} \right) \quad (۷۰-۲)$$

$$x = \begin{cases} = -\frac{1}{2}gt^2, & t \ll \tau \\ = \frac{m}{k} \ln 2 - v_i t, & t \gg \tau \end{cases}$$

در مورد نیروی کندساز متناسب با توان دوم سرعت $\pm kv^2$ ، در مقایسه با مورد نیروی کندساز $\pm kv$ ، سرعت، همانطور که در شکل (۲-۳) نشان داده شده است، خیلی زودتر به سرعت حدی می رسد. در این مورد، برای $t = 5\tau$ داریم $v = -0.99991v$ ، یعنی در نصف آن مدت به همان سرعت می رسد.



شکل (۲-۳): در موردی که نیروی کندساز متناسب با توان دوم سرعت باشد سرعت

خیلی زودتر به سرعت حدی خواهد رسید تا در مورد نیروی کندساز خطی

مثال (۲-۳): گلوله‌ای به جرم m با سرعت v_0 در روی یک سطح افقی که نیروی کندساز آن با ریشه دوم سرعت لحظه‌ای متناسب است پرتاب می‌شود. سرعت و مکان گلوله را به صورت تابعی از زمان پیدا کنید. در مورد هرگونه محدودیتی بحث کنید.

نیروی کندساز با رابطه

$$F_r = -k\sqrt{v} = -kv^{1/2} \quad (۱)$$

داده می‌شود و از قانون دوم نیوتن می‌توانیم بنویسیم

$$m \frac{dv}{dt} = -kv^{1/2} \quad (۲)$$

مرتب‌سازی و انتگرال‌گیری می‌دهد

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^{1/2}} = -\frac{k}{m} \int_0^t dt$$

$$2(v^{1/2} - v_0^{1/2}) = -\frac{k}{m} t \quad \text{یا}$$

$$v = \left(v_0^{1/2} - \frac{k}{2m} t \right)^2 \quad (۳)$$

یا

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 - \frac{k}{m} t v_0^{1/2} + \frac{k^2}{4m^2} t^2 \quad (۴)$$

که پس از انتگرال‌گیری می‌دهد

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{kv_0^{1/2}}{2m} t^2 + \frac{k^2}{12m^2} t^3 \quad (۵)$$

از معادله (۳) دیده می‌شود که وقتی $v = 0$ شود داریم $t = t_{\max} = \frac{1}{2} (v_0^{1/2} / (k/m))$. معنی این مطلب این است که این معادلات برای $t \leq t_{\max}$ بخوبی برقرارند، و بعد از آن گلوله ساکن خواهد بود. با قرار دادن این مقدار t_{\max} در معادله (۵)، مقدار حدی x را برابر با

$$x_{\max} = x_0 + \frac{2}{3} \frac{m}{k} v_0^{3/2} \quad (۶)$$

به دست می آوریم .

تمرین (۲-۳): مثال بالا را برای موردی که نیروی کندساز با ریشه سوم سرعت لحظه ای متناسب باشد تکرار کنید .

۲-۵ نیروهای وابسته به مکان $F = F(x)$

نیروهای پایستار . انرژی پتانسیل

این یکی از مهمترین مواردی است که تاکنون در نظر گرفته شده است . وضعیتهای زیادی وجود دارد که در آن نیرو بستگی به مکان جسم دارد . از مثالهای نیروهای وابسته به مکان می توان از نیروی گرانشی ، نیروی کوئلی ، و نیروهای کشسان (کششی و تراکمی) نام برد . معادله دیفرانسیلی که حرکت مستقیم الخط یک جسم تحت اثر نیروی وابسته به مکان را توصیف می کند عبارت است از

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x) \quad (2-71)$$

که همچنین می تواند به صورتی نوشته شود که v تابعی از x باشد ، یعنی

$$mv \frac{dv}{dx} = F(x) \quad (2-72)$$

یا

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = F(x) \quad (2-73)$$

چون انرژی جنبشی ذره $K = \frac{1}{2}mv^2$ است ، می توان معادله (۲-۷۳) را به شکل

$$\frac{dK}{dx} = F(x) \quad (2-74)$$

نوشت که پس از انتگرال گیری می دهد

$$K - K_0 = \int_{x_0}^x F(x) dx \quad (2-75 \text{ الف})$$

یا

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{x_0}^x F(x) dx \quad (۷۵-۲) \text{ ب}$$

طرف راست برابر است با کار انجام شده وقتی که ذره از x_0 به x جابه جا شود .

در این مرحله مناسب است که انرژی پتانسیل یا یک تابع انرژی پتانسیل (یا بطور ساده

یک تابع پتانسیل) $V(x)$ وارد می کنیم بطوری که

$$-\frac{dV(x)}{dx} = F(x) \quad (۷۶-۲)$$

$V(x)$ را به عنوان کاری که توسط نیرو در جابه جایی ذره از نقطه x به نقطه مرجع به دلخواه

انتخاب شده x_0 انجام می گیرد ، تعریف می کنیم ؛ یعنی

$$V(x) = \int_x^{x_0} F(x) dx = - \int_{x_0}^x F(x) dx \quad (۷۷-۲)$$

که با معادله (۷۶-۲) سازگار است . بنابراین کار انجام شده در رفتن از x_0 به x عبارت است از

$$\int_{x_0}^x F(x) dx = \int_{x_0}^x \left[-\frac{dV(x)}{dx} \right] dx = - \int_{x_0}^x dV(x) \quad (۷۸-۲) \text{ الف}$$

$$= - \int_{x_0}^x dV(x) - \int_{x_0}^x dV(x) = +V(x_0) - V(x) = -V(x) + V(x_0)$$

یا مستقیماً از تعریف معادله (۷۷-۲) ،

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x F(x) dx &= \int_{x_0}^{x_0} F(x) dx + \int_{x_0}^x F(x) dx \\ &= +V(x_0) - V(x) = -V(x) + V(x_0) \end{aligned} \quad (۷۸-۲) \text{ ب}$$

از ترکیب معادلات (۷۵-۲) و (۷۸-۲) نتیجه می گیریم

$$K + V(x) = K_0 + V(x_0) = \text{constant} = E \quad (۷۹-۲)$$

یا

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V(x) = E \quad (۸۰-۲)$$

این معادله بیان می دارد که اگر ذره ای تحت اثر یک نیروی وابسته به مکان حرکت کند ، مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل در طول حرکتش ثابت باقی می ماند . چنین نیروهایی نیروهای پایستار نامیده می شوند . برای نیروهای ناپایستار تابع انرژی پتانسیل وجود ندارد . یک مثال نیروی ناپایستار نیروی اصطکاک است . [می توان نشان داد که اگر $V(x) + c$

جایگزین شود (c یک ثابت دلخواه است) بحث پیشین هنوز به قوت خود باقی است. به بیان دیگر حاصل جمع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل هنوز ثابت می ماند و برابر با E خواهد بود. E انرژی کل است و معادله (۲-۸۰) بیانگر قانون پایستگی انرژی است، که تنها وقتی برقرار است که $F = F(x)$. توصیف حرکت یک ذره می تواند با حل معادله انرژی، معادله (۲-۸۰)، به دست آید؛ یعنی

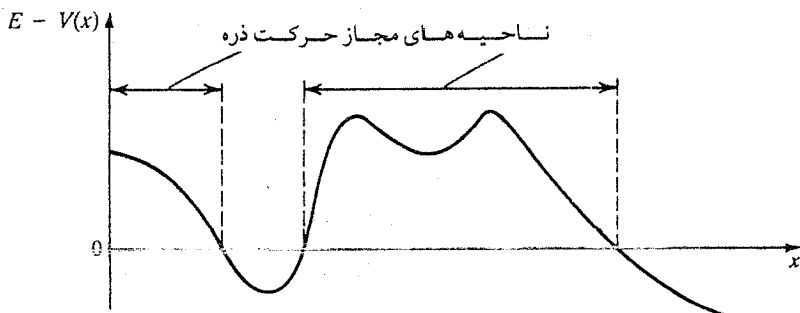
$$v\left(\frac{dx}{dt}\right) = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]} \quad (۲-۸۱)$$

که پس از انتگرال گیری می دهد

$$t - t_0 = \int \frac{\pm dx}{\sqrt{(2/m)[E - V(x)]}} \quad (۲-۸۲)$$

که t را به صورت تابعی از x به دست می دهد، [در باره علامت منفی t ، که با وارونی زمان سروکار دارد، بحثی نمی کنیم].

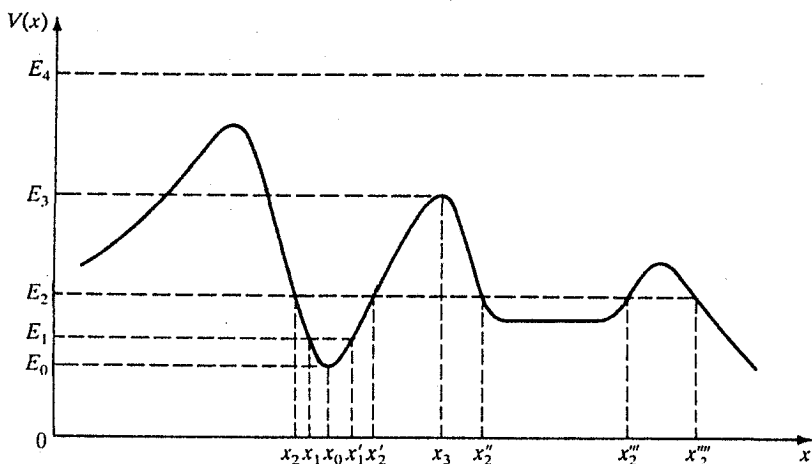
در حل معادله (۲-۸۲) باید توجه کرد که تنها آن مقادیری از x امکان پذیر هستند که برای آنها کمیت $E - V(x)$ مثبت باشد. مقادیر منفی به جوابهای موهومی و در نتیجه غیر قابل قبول منجر می شوند. بنابراین حرکت به آن مقادیری محدود می شود که برای آنها $E - V(x) \geq 0$: یعنی، جوابهای این معادله ناحیه یا ناحیه هایی را به دست می دهند که حرکت در آنها محدود شده است. این مسأله در شکل (۲-۴) نمایانده شده است. تابع $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$ انتگرال انرژی معادله حرکت $m\frac{dv}{dt} = F(x)$ نامیده می شود و چنین انتگرالی یک ثابت حرکت نامیده می شود (این اولین انتگرال از یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم است).



شکل (۲-۴): ناحیه های مجاز حرکت برای یک ذره در یک میدان نیروی وابسته به مکان

قبل از این که مثالهای خاصی از حل معادله حرکت برای $x(t)$ بیاوریم نشان خواهیم داد که خیلی چیزهایی توانیم از رسم نمودار $V(x)$ نسبت به x درباره حرکت یاد بگیریم. شکل (۵-۲) نمودار یک تابع انرژی پتانسیل را برای حرکت یک بُعدی نمایش می دهد. همان طور که قبلاً یادآوری شد حرکت ذره به ناحیه هایی محدود می شود که برای آنها $E - V(x) > 0$ یا $V(x) < E$. معادله (۲-۸۱) را به خاطر بسپاریم و موارد متفاوت را مورد بررسی قرار دهیم.

اگر $E = E_0$ باشد، همان طور که در شکل (۵-۲) نشان داده شده است، تنها در نقطه x_0 داریم $E_0 - V(x) = 0$ و طبق معادله (۲-۸۱) داریم $\dot{x} = 0$ ، یعنی، ذره $x = x_0$ به حال سکون در تعادل می ماند. موردی را در نظر بگیریم که در آن انرژی ذره کمی بزرگتر از E_0 ، مثلاً E_1 ، است. برای $x < x_1$ و $x > x_1'$ سرعت v موهومی است؛ در نتیجه ذره نمی تواند در این ناحیه ها حضور داشته باشد. بنابراین ذره با انرژی E_1 محدود می شود که در چاه (یا دره) پتانسیل بین x_1 و x_1' حرکت کند. ذره وقتی به طرف راست حرکت می کند در x_1' به طرف عقب باز تابیده می شود، و وقتی به طرف چپ حرکت کند در x_1 باز تابیده می شود. نقاط بازگشت نامیده می شوند و از حل $E_1 - V(x) = 0$ به دست می آیند. سرعت ذره در این نقاط صفر است. بین x_1 و x_1' وقتی $V(x)$ تغییر کند سرعت ذره نیز تغییر می کند. ما به اختصار حرکت یک ذره متناظر با انرژیهای متفاوت را وقتی در پتانسیل $V(x)$ حرکت می کند، آن طور که در شکل (۵-۲) نمایش داده شده است، مورد بررسی قرار می دهیم.



شکل (۵-۲): نمودار پرمتناظر است با یک انرژی پتانسیل $V(x)$ و E_0 ، E_1 ، ...

انرژیهای متفاوت ذره ای هستند که در این پتانسیل حرکت می کند

E_0 : ذره در ترازمندی پایدار است .

E_1 : ذره بین دو نقطه بازگشت x_1 و x'_1 حرکت می کند .

E_2 : ذره بین نقاط بازگشت x_2 و x'_2 ، با تغییر سرعت ، حرکت می کند . اگر بین نقاط بازگشت x''_2 و x'''_2 حرکت کند سرعت آن ثابت است و در نتیجه ذره در ناحیه ترازمندی خنثی قرار دارد . ذره همچنین می تواند در ناحیه $x > x'''_2$ وجود داشته باشد .

E_3 : وقتی ذره با این انرژی در x_3 باشد در یک وضع ترازمندی ناپایدار است . همچنین می تواند در دره طرف چپ x_3 ، همانند وقتی که انرژی آن E_2 باشد ، حرکت کند . یک بار که ذره در سمت راست x_3 به سمت راست حرکت کند ، به حرکت خود ادامه می دهد ، نخست با سرعت فزاینده تا x''_2 و سپس با سرعت ثابت تا x'''_2 .

E_4 : ذره ای با این انرژی می تواند در همه جا حرکت کند . وقتی از روی تپه ها عبور کند کند می شود ، در حالی که وقتی از دره ها عبور کند تند می شود ، همان طور که باید باشد . در ادامه بحث از نیروهای وابسته به مکان ، دو مورد خاص را ، که برای بخشهای بعدی مفیدند ، مورد بررسی قرار می دهیم :

۱- حرکت تحت اثر یک نیروی بازگرداننده خطی

۲- تغییرات g در میدان گرانشی

مثال (۲-۳): ذره ای به جرم m تحت تأثیر نیروی $F = a - 2bx$ ، که a و b ثابت هستند ، قرار دارد . (الف) انرژی پتانسیل $V(x)$ را پیدا کنید . (ب) نمودارهای $F(x)$ و $V(x)$ را رسم کنید . حرکت ذره را برای مقادیر متفاوت انرژی مورد بحث قرار دهید .

الف- چون

$$F = a - 2bx \quad (۱)$$

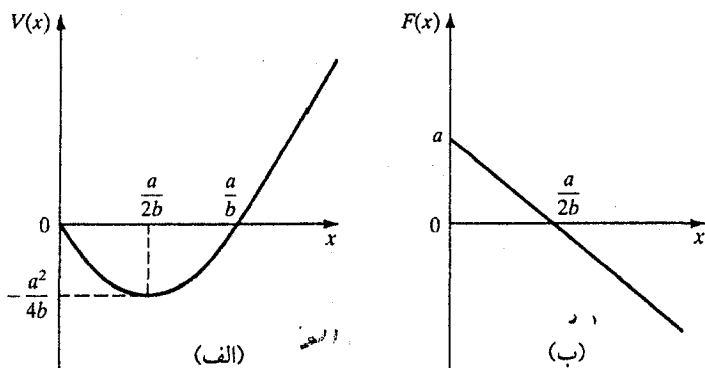
$$V(x) = - \int F dx = - \int (a - 2bx) dx \quad \text{یا}$$

$$V(x) = -ax + bx^2 \quad (۲)$$

(ب) می توانیم نقاطی را که در آنها V صفر است پیدا کنیم . $V(x) = 0 = -ax + bx^2$

می دهد $x=0$ یا $x = \frac{a}{b}$. از $\frac{dV(x)}{dx} = 0 = -a + 2bx$ نتیجه می شود که در $x = \frac{a}{2b}$ داریم $\frac{dV(x)}{dx} = 0$. همچنین چنان در $x = \frac{a}{2b}$ داریم $V_{\min} = V(x) = -a(\frac{a}{2b}) + b(\frac{a}{2b})^2$ یعنی $V_{\min} = -\frac{a^2}{4b}$. برای $x = \frac{2a}{b}$ داریم $V = 2\frac{a^2}{b}$ و برای $x = \frac{4a}{b}$ داریم $V = 12\frac{a^2}{b}$. نمودارهای $V(x)$ و $F(x)$ بر حسب x ، به ترتیب، در شکل‌های (مثال ۲-۴ الف) و (مثال ۲-۴ ب) نشان داده شده اند. توجه کنیم که معادله (۱) یک خط مستقیم را با $F=a$ در $x=0$ و $F=0$ در $x = \frac{a}{2b}$ نمایش می دهد.

مراجعه به نمودار $V(x)$ بر حسب x نشان می دهد که برای انرژی کمتر از $V_{\min} = -\frac{a^2}{4b}$ حرکتی امکان پذیر نیست. برای $0 < E < -\frac{a^2}{4b}$ ، حرکت بین $x=0$ و $x = \frac{a}{b}$ محدود است. و دو نقطه بازگشت وجود دارد. برای $E > 0$ مقادیر مجاز x بین صفر و x قرار دارند که x از رابطه $V(x) = E = -ax + bx^2$ به دست می آید. اگر ذره در سمت چپ نقطه $x = \frac{a}{b}$ باشد نمی تواند نمودار پتانسیل را قطع کند، مگر این که در طرف دیگر بوده باشد.



شکل (مثال ۲-۴)

نمونه (۲-۴): مثال را برای $F = a - 2bx^2$ تکرار کنید.

۶-۲ حرکت تحت اثر یک نیروی بازگرداننده خطی

حرکت یک ذره تحت تأثیر یک نیروی بازگرداننده خطی به شکل

$$F(x) = -kx \quad (۸۳-۲)$$

را در نظر بگیریم. این معادله یک بیان از قانون هوك است. مثال نمونه ای چنین حرکتی، حرکت جرمی است که به یک فنر بسته شده است. حرکت حاصل، که در فصل ۳ به تفصیل مورد بحث قرار خواهیم داد، هماهنگ ساده است. در حال حاضر روش انرژی را که در بخش پیشین برای پیدا کردن جواب مورد بحث قرار گرفت به کار می بریم. نقطه مرجع (همچنین نقطه ترازمندی) را در مبدأ، یعنی $x=0$ ، می گیریم. می توانیم انرژی پتانسیل را به صورت

$$V(x) = -\int_x^x F(x) dx = -\int_0^x (-kx) dx \quad \text{یا}$$

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 \quad (۸۴-۲)$$

بنویسیم. یک بار دیگر، انرژی کل یک ثابت حرکت است و به همان روش می توانیم به آن برسیم؛ یعنی

$$mv \frac{dv}{dx} = F(x) = -kx \quad (۸۵-۲)$$

$$mv dv = -kx dx$$

که پس از انتگرال گیری می دهد

$$\frac{1}{2} mv^2 = -\frac{1}{2} kx^2 + \text{constant}$$

یا

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 = E = \text{انرژی کل} \quad (۸۶-۲)$$

اکنون این معادله یا معادله (۸۲-۲) را با معادله (۸۴-۲) برای $V(x)$ ، به منظور پیدا کردن جابه‌جایی x به کار می‌بریم. برای شرایط $x = x_0$ در $t = 0$ ، معادله (۸۶-۲) یا (۸۲-۲) (بانگاه داشتن تنها علامت مثبت) به شکل زیر در می‌آید

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{(2/m)(E - \frac{1}{2}kx^2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m} \left(1 - \frac{k}{2E}x^2\right)}} \quad (۸۷-۲)$$

با قرار دادن

$$\sqrt{\frac{k}{2E}}x = \sin \theta \quad \text{و} \quad \sqrt{\frac{k}{2E}}dx = \cos \theta d\theta \quad (۸۸-۲)$$

خواهیم داشت

$$t = +\sqrt{\frac{m}{k}} \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \sqrt{\frac{m}{k}} (\theta - \theta_0) \quad (۸۹-۲)$$

طبق معمول، سرعت زاویه‌ای با $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ تعریف می‌شود. بنابراین

$$t = \frac{1}{\omega} (\theta - \theta_0)$$

یا

$$\theta = \omega t + \theta_0 \quad (۹۰-۲)$$

از ترکیب (۹۰-۲) و (۸۸-۲) خواهیم داشت

$$\sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{k}{2E}} x \right) = \omega t + \theta_0$$

یا

$$x = A \sin(\omega t + \theta_0) \quad (۹۱-۲)$$

که در آن A دامنه است و برابر است با

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} \quad (۹۲-۲)$$

بدین ترتیب معادله (۲-۹۱) بیان می‌دارد که حرکت ذره هماهنگ ساده است، یعنی مختصه x بطور هماهنگ، با دامنه A و فرکانس ω در زمان نوسان می‌کند. A و θ_0 می‌توانند از شرایط اولیه به دست آیند؛ یعنی، اگر E و x_0 داده شده باشند، از معادلات (۲-۹۲) و (۲-۹۱) خواهیم داشت

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \quad (۲-۹۳)$$

$$x_0 = A \sin \theta_0 \quad (۲-۹۴)$$

۲-۷ تغییرات g در یک میدان گرانشی

در ارتفاعات کم، درست در بالای سطح زمین، مقدار g تقریباً ثابت و برابر است با $9.8 \text{ m/s}^2 = 32.2 \text{ ft/s}^2$. اما در فاصله‌های بزرگ در بالای سطح زمین، مقدار g با فاصله تغییر می‌کند و می‌تواند به روش ساده‌ای محاسبه شود. طبق قانون گرانش نیوتن، نیروی وزن یک جسم به جرم m در یک فاصله x از مرکز زمین (به جرم M) عبارت است از

$$F(x) = -G \frac{Mm}{x^2} \quad (۲-۹۵)$$

اگر از مقاومت هوا چشم‌پوشی کنیم، معادله دیفرانسیل حرکت یک جسم در یک میدان گرانشی می‌تواند به صورت

$$m \frac{dv}{dx} = -G \frac{Mm}{x^2}$$

نوشته می‌شود. چون $v = \dot{x}$ ، می‌توانیم بنویسیم

$$m \int \dot{x} \, dx = -GMm \int \frac{dx}{x^2}$$

که پس از انتگرال‌گیری می‌دهد

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - G \frac{Mm}{x} = \text{constant} = E \quad (۲-۹۶ \text{ الف})$$

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) = E \quad (۹۶-۲) \text{ ب}$$

که در آن انرژی پتانسیل گرانشی را به صورت زیر تعریف کرده ایم

$$V(x) = -G \frac{Mm}{x} \quad (۹۷-۲)$$

[می توانیم همین عبارت برای انرژی پتانسیل گرانشی را از تعریف مستقیم تابع پتانسیل پیدا کنیم. اما بهتر است که نقطه مرجع را، به جای $x_s = 0$ که قبلاً گرفته بودیم، $x_s = \infty$ بگیریم. بنابراین

$$V(x) = - \int_{x_s}^x F(x) dx = - \int_{\infty}^x - \frac{GMm}{x^2} dx = - \frac{GMm}{x}$$

که مانند تعریف قبلی است]

می توانیم معادله (۹۶-۲ الف) را به صورت

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left(E + G \frac{Mm}{x} \right)} \quad (۹۸-۲)$$

بنویسیم که در آن علامت مثبت متناظر با حرکت رو به بالا و علامت منفی متناظر با حرکت رو به پایین است. معادله (۹۸-۲) می تواند برای $x(t)$ با انتگرال گیری حل شود، یعنی

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{[E + (GMm/x)]^{1/2}} \quad (۹۹-۲)$$

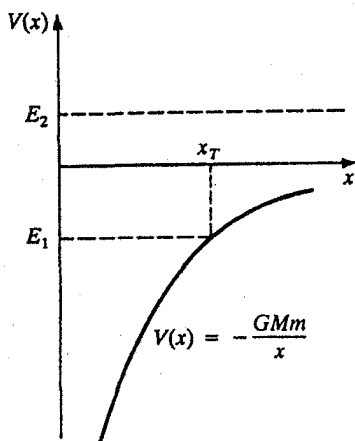
محاسبه انتگرال این معادله به سادگی مورد نیروی بازگرداننده خطی نیست. در حال حاضر آن را بیشتر ادامه نمی دهیم. اما یک تعبیر نموداری از آن ارائه می دهیم و بعضی موارد ساده را مورد بحث قرار می دهیم.

نمودار $V(x)$ بر حسب x در شکل (۲-۶) نشان داده شده است. کاملاً روشن است که برای مقادیر منفی E حرکت، با یک نقطه بازگشت x_T ، مقید است. یعنی وقتی $E = E_1$ باشد، جسم تا ارتفاع $x = x_T$ بالا می رود، متوقف می شود، و بر می گردد. برای مقادیر E بزرگتر از صفر، نقطه بازگشتی وجود ندارد و جسم هرگز به طرف زمین بر نمی گردد. بنابراین، برای انرژی کمینه $E = 0$ ، سرعت متناظر است با سرعت فرار، که در زیر محاسبه خواهیم کرد. می توانیم نقطه بازگشت را با قرار دادن سرعت $v = \dot{x} = 0$ در معادله (۹۸-۲)

(برحسب تعریف سرعت در نقطه بازگشت صفر است) پیدا کنیم . خواهیم داشت

$$-G \frac{Mm}{x_T} = E \quad \text{یا} \quad x_T = -G \frac{Mm}{E} \quad (100-2)$$

چون E منفی است، x_T مثبت خواهد بود .



شکل (۶-۲) : ذره‌ای با انرژی E در یک پتانسیل گرانشی $V(x)$ برحسب x

بار دیگر معادله (۲-۹۶ الف) را در نظر بگیریم

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - G \frac{Mm}{x} = \text{constant} \quad (101-2)$$

فرض کنیم جسم از ارتفاع $x = x_0$ با سرعت اولیه صفر رها شود . با قرار دادن $v = \dot{x} = 0$ و $x = x_0$ در معادله (۱۰۱-۲) داریم

$$-G \frac{Mm}{x_0} = \text{constant}$$

با گذاردن این مقدار به جای ثابت در معادله (۱۰۱-۲) و مرتب سازی داریم

$$\dot{x}^2 = 2GM \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right) \quad (102-2)$$

فرض کنیم g_0 مقدار شتاب ناشی از گرانش در سطح زمین که در آن $x = R$ است باشد ،

بنابراین

$$F_G = F_{g0} \quad \text{یا} \quad -G \frac{Mm}{R^2} = -mg_0$$

یعنی،

$$g_0 = \frac{GM}{R^2} \quad \text{یا} \quad G = g_0 \frac{R^2}{M} \quad (103-2)$$

معمولاً فاصله از سطح زمین اندازه گیری می شود، لذا می توان نوشت

$$x = R + r, \quad \dot{x} = \dot{r} \quad \text{و} \quad x_0 = R + h$$

که در آن $h = x_0 - R$ ارتفاع (اندازه گیری شده از سطح زمین) نقطه ای است که جسم از آن رها شده است. با بردن این نمادها در معادلات (2-102) و (2-103) می توانیم بنویسیم

$$v^2 = 2g_0 R^2 \left(\frac{1}{R+r} - \frac{1}{R+h} \right) \quad (104-2)$$

بنابراین، برای $r=0$ ، یعنی وقتی جسم به سطح زمین می رسد، $v = v_0$ ، و در نتیجه

$$v_0^2 = 2g_0 R^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) \quad (105-2)$$

و می تواند به صورت زیر نوشته شود

$$v_0^2 = 2g_0 R \left[1 - \left(1 + \frac{h}{R} \right)^{-1} \right] \quad (106-2)$$

که اگر $h \ll R$ باشد نتیجه می دهد $v_0^2 = 2g_0 h$ ، همان طور که باید باشد. معادله (2-104) همچنین به موردی که یک جسم با سرعت v_0 به طرف بالا پرتاب می شود و وقتی $v = 0$ شود به ارتفاع h می رسد، اعمال می شود.

می توانیم با قرار دادن $h = \infty$ در معادله (2-105) به عبارتی برای سرعت فرار برسیم.

$$v_e^2 = 2g_0 R = \frac{2GM}{R} \quad (107-2)$$

$$v_e = \sqrt{2g_0 R} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 11 \text{ km/s} = 7 \text{ miles/s}$$

یا می توانیم بگوییم که در سطح زمین $E = 0$ ، در نتیجه انرژی پتانسیل باید برابر با انرژی

جنبشی باشد، یعنی

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{GMm}{R}$$

$$v_e = \dot{x} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

مسائل

۱-۱ نیروی F وارد به ذره ای به جرم m با توابع زیر داده شده است

$$F(x, t) = f(x)g(t) \quad (\text{الف})$$

$$F(\dot{x}, t) = f(\dot{x})g(t) \quad (\text{ب})$$

$$F(\dot{x}, x) = f(\dot{x})g(x) \quad (\text{پ})$$

معادلات دیفرانسیل توصیف کننده این وضعیتها را بنویسید. کدام یک از این معادلات دیفرانسیل می تواند حل شود و حرکت ذره را توصیف نماید؟ توضیح دهید.

۱-۲ ذره ای به جرم m تحت تأثیر نیروهای داده شده قرار دارد. این معادلات را حل کنید و حرکت ذره را توصیف کنید.

$$F(x, t) = k(x + t^2), \text{ برای } t = 0, x = x_0 \quad (\text{الف})$$

$$F(\dot{x}, t) = kx^2\dot{x}, \text{ برای } t = 0, x = x_0 \quad (\text{ب})$$

$$F(\dot{x}, t) = k(a\dot{x} + t), \text{ برای } t = 0, v = v_0 \quad (\text{پ})$$

$$F(x, \dot{x}) = ax^2/\dot{x} \quad (\text{ت})$$

$$F(x, \dot{x}, t) = k(x + \dot{x}t) \quad (\text{ث})$$

۳-۲ جسمی به جرم m در روی یک سطح بدون اصطکاک در حال سکون است. در زمان $t=0$ نیروی فزاینده $F = kt^2$ به آن اعمال می شود. سرعت و جابه جایی جسم را به صورت تابعی از زمان پیدا کنید.

۴-۲ جسمی به جرم m در روی سطح بدون اصطکاک در مبدأ در حال سکون است. در لحظه $t=0$ یک نیروی $F = F_0 t e^{-kt}$ به آن وارد می شود. $x(t)$ و $v(t)$ را محاسبه کنید. این مقادیر را وقتی که (الف) خیلی کوچک و (ب) خیلی بزرگ باشد پیدا کنید.

۵-۲ ذره ای به جرم m در حال سکون است. در $t=0$ یک نیروی $F = F_0 \sin(\omega t + \Phi)$ به آن وارد می شود. (الف) مقادیر $x(t)$ و $v(t)$ را محاسبه کنید. (ب) نمودار $x(t)$ و $v(t)$ را نسبت به t رسم کنید.

۶-۲ ذره ای به جرم m تحت تأثیر نیروی

$$F = F_0 e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \phi)$$

قرار دارد. $v(t)$ و $x(t)$ را محاسبه کنید. سرعت حدی در این مورد چقدر است؟

۷-۲ ذره ای به جرم m در حال سکون است. در لحظه $t=0$ نیروی $F = F_0 \cos^2 \omega t$ به آن وارد می شود. (الف) $v(t)$ و $x(t)$ را محاسبه کنید. (ب) نمودارهای $x(t)$ و $v(t)$ را نسبت به t رسم کنید.

۸-۲ گلوله ای به جرم m با سرعت v_0 در روی یک سطح افقی پرتاب می شود. نیروی کندساز متناسب با ریشه دوم سرعت لحظه ای است. سرعت و مکان گلوله را بر حسب زمان پیدا کنید. در باره مقادیر حدی بحث کنید.

۹-۲ جسمی به جرم m با سرعت v_0 در روی یک سطح شیب دار با زاویه شیب θ به طرف بالا پرتاب می شود. اگر نیروی کندساز به صورت $F_r = -kv$ باشد، قبل از به حال سکون درآمدن چه مسافتی را طی خواهد کرد. اگر در برگشت نیز با همین نیروی مقاومت روبه رو باشد، چه مدت طول می کشد تا به محل اول خود برگردد؟

۱۰-۲ مسأله ۹-۲ را برای نیروی کندساز $\pm kv^2$ تکرار کنید.

۱۱-۲ حرکت یک کشتی به وسیله یک نیروی اصطکاک $F(v)$ کند می شود. سرعت آن طبق رابطه $v = k(t - t_0)^2$ کاهش می یابد، که t_0 زمانی است که طول می کشد تا کشتی متوقف شود و k ثابت است. $F(v)$ را محاسبه کنید.

۱۲-۲ موتور یک قایق سرعتی وقتی سرعت آن v است خاموش می شود. از این به بعد حرکت قایق در اثر یک نیروی کندساز $F_r = Ce^{-kv}$ کند می شود $v(t)$ و $x(t)$ را محاسبه کنید. چه مدتی زمان می برد تا قایق متوقف شود و چه فاصله ای را تا توقف طی می کند؟

۱۳-۲ ذره‌ای به جرم m ، با سرعت اولیه v_0 ، در حالی که تحت تأثیر $F = m(kv + cv^2)$ قرار دارد ، شروع به حرکت می‌کند . k و c مثبت اند . جابه‌جایی را به صورت تابعی از زمان پیدا کنید .

۱۴-۲ جسمی به جرم m از ارتفاع h سقوط می‌کند . اگر (الف) مقاومت هوا نباشد ، (ب) مقاومت هوا متناسب با سرعت لحظه‌ای باشد ، و (پ) مقاومت هوا متناسب با مربع سرعت لحظه‌ای باشد ، سرعت آن را وقتی به زمین می‌رسد محاسبه کنید .

۱۵-۲ پرتابه‌ای با سرعت v_0 بطور قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود . زمانهای رسیدن به ارتفاع بیشینه را وقتی که مقاومت هوا (الف) صفر ، (ب) متناسب با سرعت لحظه‌ای ، و (پ) متناسب با مربع سرعت لحظه‌ای باشد ، محاسبه کنید و با هم مقایسه کنید .

۱۶-۲ گلوله‌ای با سرعت اولیه v_0 بطور قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود . مقاومت هوا متناسب با مربع سرعت است . نشان دهید که سرعت گلوله هنگام بازگشت به مکان اولیه عبارت است از $\frac{v_0 v_t}{\sqrt{v_0^2 + v_t^2}}$ که v_t سرعت حدی است .

۱۷-۲ معادله (۵۱-۲) ، یعنی

$$x = x_0 - \frac{mg}{k} t + \left(\frac{m^2 g}{k^2} + \frac{mv_0}{k} \right) (1 - e^{-(k/m)t})$$

را به دست آورید .

۱۸-۲ با استفاده از معادلات (۴۹-۲) و (۵۱-۲) ، نشان دهید که برای $t \ll \tau$ به معادلات آشنای حرکت ، معادلات (۵۷-۲ الف) و (۵۷-۲ ب) ، می‌رسیم .

۱۹-۲ نشان دهید که برای $t \ll \tau$ ، معادلات (۴۹-۲) و (۵۱-۲) به معادلات (۵۸-۲ الف) و (۵۸-۲ ب) کاهش می‌یابند .

۲۰-۲ با شروع از معادله (۵۹-۲) ، معادلات (۶۵-۲) و (۶۶-۲) را به دست آورید . همچنین معادلات (۶۹-۲) و (۷۰-۲) را نیز به دست آورید .

۲۱-۲ با استفاده از قانون پایستگی انرژی ، معادلات عمومی حرکت برای اجسام با سقوط آزاد را به دست آورید .

۲۲-۲ ذره‌ای به جرم m با نیرویی که با عکس مجذور فاصله متناسب است ، یعنی $F = -k/l^2$ ، به طرف مبدأ جذب می‌شود . اگر این جرم از فاصله L رها شود ، نشان دهید که زمان رسیدن آن به مبدأ با عبارت زیر داده می‌شود .

$$t = \pi \left(\frac{mL^3}{8K} \right)^{1/2}$$

۲۳-۲ سرعت ذره ای به جرم m ، که تحت تأثیر نیروی است، با فاصله به صورت $v = k/x^n$ تغییر می کند که در آن k ثابت است. با فرض $x = x_0$ در $t = 0$ ، نیروی وارد به ذره را به صورت تابعی از (الف) فاصله x ، (ب) زمان t به دست آورید. (پ) مکان ذره را به صورت تابعی از زمان t محاسبه کنید.

۲۴-۲ ذره ای به جرم m تحت تأثیر نیروی $F = -ax + bx^2$ ، که a و b ثابت هستند، قرار دارد.

(الف) انرژی پتانسیل $V(x)$ را پیدا کنید.

(ب) نمودارهای $F(x)$ و $V(x)$ را رسم کنید.

(پ) حرکت ذره را برای مقادیر متفاوت انرژی مورد بحث قرار دهید و ناحیه هایی را که در آنها حرکت ممنوع است نشان دهید.

۲۵-۲ ذره ای به جرم m تحت تأثیر نیروی که با تابع پتانسیل $V(x) = -ax^2 + bx^4$ نمایانده می شود قرار دارد. a و b ثابت اند.

(الف) $F(x)$ را محاسبه کنید.

(ب) نمودارهای $F(x)$ و $V(x)$ را رسم کنید.

(پ) حرکت ذره را برای مقادیر مختلف انرژی مورد بحث قرار دهید. همچنین در باره محدودیتهای حرکت بحث کنید.

۲۶-۲ یک ذره در لحظه $t = 0$ در فاصله x_0 از مبدأ در حال سکون است و تحت تأثیر نیروی که با عکس فاصله متناسب است قرار می گیرد. معادله حرکت را برای این ذره حل کنید، یعنی $v(t)$ و $x(t)$ را پیدا کنید.

۲۷-۲ ذره ای به جرم m تحت تأثیر نیروی به شکل

$$F(x) = -Cx + \frac{K}{x^3}$$

قرار دارد. k و c ثابت هستند.

(الف) تابع پتانسیل $V(x)$ را پیدا کنید.

(ب) نمودارهای $F(x)$ و $V(x)$ را رسم کنید.

(پ) در ماهیت حرکت برای مقادیر مختلف انرژی بحث کنید و ناحیه‌هایی را که در آنها حرکت امکان پذیر است، تعیین کنید.

۲۸-۲ نیروی بین دو ذره در یک مولکول دو اتمی طوری است که می‌تواند با تابع پتانسیل

$$V(x) = -\frac{C_1}{x^6} + \frac{C_2}{x^{12}}$$

نمایانده شود. C_1 و C_2 ثابت‌های مثبت و x فاصله بین دو اتم است.

(الف) $F(x)$ را پیدا کنید.

(ب) نمودارهای $F(x)$ و $V(x)$ را رسم کنید.

(پ) فرض کنید که یکی از اتمها در مولکول خیلی سنگین است و در مبدأ ساکن

می‌ماند. حرکات ممکن اتم دیگر مولکول را مورد بحث قرار دهید.

۲۹-۲ یک ذره α هنگامی که داخل هسته است به وسیله پتانسیلی که برای $-R < x < R$

در شکل نشان داده شده است مقید می‌شود، در حالی که در بیرون هسته، برهم کنش

بین ذره α و هسته با پتانسیل کولنی، آن طور که در شکل (مسأله ۲-۲۹) نشان داده

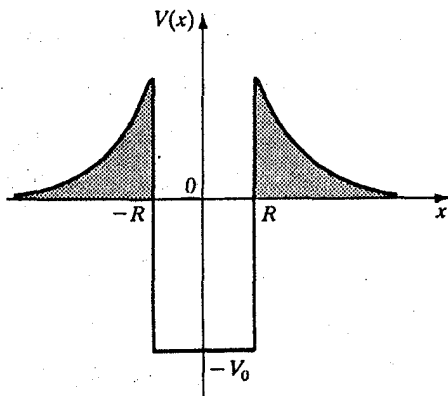
شده است، نمایانده می‌شود.

(الف) تابع پتانسیلی برای نواحی مختلف نشان داده شده در شکل بنویسید.

(ب) $F(x)$ را محاسبه کنید و نمودار آن را نسبت به x رسم کنید.

(پ) حرکت ذره α را برای مقادیر مختلف انرژی و ناحیه‌های مختلف مورد بحث

قرار دهید



شکل (مسأله ۲-۲۹)

۳۰-۲ نشان دهید که برای $h \ll R$ ، معادله (۲-۱۰۶) به $v_0^2 = 2gh$ تقلیل می‌یابد.
 ۳۱-۲ با شروع از معادله (۲-۹۶ الف) و قرار دادن

$$\cos \theta = \left(-\frac{E}{GMm} \right)^{1/2} x^{1/2}$$

نشان دهید که $x = x_T \cos^2 \theta$ که در آن

$$\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta = \sqrt{\frac{2GM}{x_T^2}} t$$

و $x = x_0 = x_T$ نقطه بازگشت است.

منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر

- ARTHUR, W., and FENSTER, S. K., *Mechanics*, Chapter 3. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1969.
- BARGER, V., and OLSSON, M., *Classical Mechanics*, Chapter 1. New York: McGraw-Hill Book Co., 1973.
- BECKER, R. A., *Introduction to Theoretical Mechanics*, Chapter 6. New York: McGraw-Hill Book Co., 1954.
- DAVIS, A. DOUGLAS, *Classical Mechanics*, Chapter 2. New York: Academic Press, Inc., 1986.
- FOWLES, G. R., *Analytical Mechanics*, Chapter 3. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1962.
- FRENCH, A. P., *Newtonian Mechanics*, Chapter 7. New York: W. W. Norton and Co., Inc., 1971.
- HAUSER, W., *Introduction to the Principles of Mechanics*, Chapter 4. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1965.
- KLEPPNER, D., and KOLENKOW, R. J., *An Introduction to Mechanics*, Chapter 4. New York: McGraw-Hill Book Co., 1973.
- MARION, J. B., *Classical Dynamics*, 2nd ed., Chapter 2. New York: Academic Press, Inc., 1970.
- ROSSBERG, K., *Analytical Mechanics*, Chapter 4. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1983.
- STEPHENSON, R. J., *Mechanics and Properties of Matter*, Chapter 2. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- SYMON, K. R., *Mechanics*, 3rd. ed., Chapter 2. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1971.
- TAYLOR, E. F., *Introductory Mechanics*, Chapter 5. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1963.

نوسانگرهای هماهنگ

۳-۱ مقدمه

سیستمی در حالت ترازمندی ایستایی یا دینامیکی پایدار در نظر بگیریم . وقتی جابه‌جایی چنین سیستمی از وضع ترازمندیش کوچک باشد ، حرکت نوسانی آن حرکت هماهنگ نامیده می‌شود . این نوع حرکتهای زیاد در طبیعت رخ می‌دهند ، و هم از دیدگاه عملی و هم از دیدگاه نظری در فیزیک و مهندسی مورد بررسی قرار می‌گیرند . چند نمونه از این نوع حرکت عبارتند از فنرهای کشسان ، تیرهای خمیده ، آونگ ، تارهای مرتعش ، تشدید کاواکهای هوا ، و حرکت بارها در بعضی مدارها و کاواکهای الکتریکی .

برای شروع ، حرکت یک نوسانگر هماهنگ خطی (حرکت حاصل از جابه‌جایی کوچک یک سیستم از وضع ترازمندیش) در یک بعد را بررسی خواهیم کرد . ورود غیرقابل احتراز اصطکاک در چنین حرکتی منجر به مطالعه یک نوسانگر هماهنگ میرا می‌شود . برای حفظ حرکت نوسانی با حضور اصطکاک ، اعمال یک نیروی خارجی ضروری است . این نوع سیستم نوسانی نوسانگر واداشته یا هدایت شده نامیده می‌شود .

وقتی جابه‌جایی سیستم از وضع ترازمندی بزرگ باشد ، سیستم دیگر خطی نیست . این گونه سیستمهای نوسانی غیرخطی نامیده می‌شوند . ما مطالعه خود را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم . این فصل عمده به مطالعه سیستمهای خطی شامل نوسانگرهای هماهنگ میرا و

واداشته می پردازد. مطالعه نوسانهای غیرخطی، معادل الکتریکی نوسانگرهای مکانیکی و نوسانگرهای چندبعدی، در فصل ۴ مورد بررسی خواهند گرفت. باید خاطر نشان کرد که، بطور کلی، نوساناتی که در طبیعت رخ می دهند، غیرخطی اند. اما تقریب آنها به سیستمهای خطی به ما اجازه می دهد که از روشهای تحلیلی قوی ای که به این منظور فراهم شده اند استفاده کنیم.

۲-۳ نوسانات خطی و غیرخطی

ذره ای به جرم m در نظر بگیریم که در یک میدان نیروی پایستار دلخواه، که در آن انرژی پتانسیل ذره تابعی از جابه جایی است و به وسیله منحنی پر در شکل (۱-۳) نمایش داده شده است، حرکت می کند. برای یک میدان نیروی پایستار، انرژی کل ذره عبارت است از

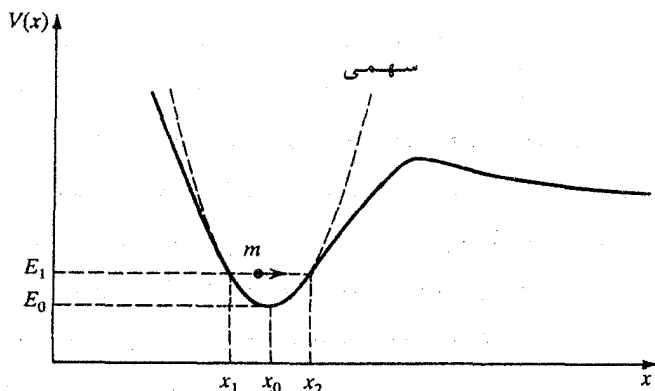
$$E = K + V = \text{constant} \quad (1-3)$$

اگر \dot{x} سرعت ذره باشد،

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) \quad (2-3)$$

که پس از حل نتیجه می دهد

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]} \quad (3-3)$$



شکل (۱-۳): ذره ای به جرم m و انرژی E در یک تابع انرژی پتانسیل دلخواه، که با

منحنی پر نمایش داده شده است. منحنی خطچین تقریب پتانسیل سهمی وار این پتانسیل دلخواه است

اگر $E = E_0$ باشد، چنان که در شکل (۳-۱) نشان داده شده است، داریم $E_0 - V(x) = 0$ و $\dot{x} = 0$ ، یعنی، ذره در $x = x_0$ ، در یک ترازمندی پایدار ساکن می ماند. اکنون موردی را در نظر می گیریم که در آن انرژی E_1 ذره اندکی بیشتر از E_0 باشد. برای $x < x_1$ و $x > x_2$ ، x موهومی خواهد بود، در نتیجه ذره نمی تواند در این نواحی وجود داشته باشد. بنابراین یک ذره با انرژی E_1 ، به حرکت در یک چاه (یا دره) پتانسیل بین x_1 و x_2 مقید می شود. وقتی ذره به طرف راست حرکت کند، در $x = x_2$ به طرف عقب باز تابیده می شود، وقتی به طرف چپ حرکت کند در $x = x_1$ باز تابیده می شود. نقاط x_1 و x_2 نقاط بازگشت نامیده می شوند، و سرعت ذره در این نقاط صفر است. این نقاط از حل $E_1 - V(x) = 0$ به دست می آیند. در بین این نقاط سرعت ذره بسته به مقدار $V(x)$ تغییر می کند. در نتیجه، وقتی انرژی ذره بیشتر از E_0 باشد، ذره در یک چاه پتانسیل بین x_1 و x_2 به طرف جلو و عقب حرکت نوسانی خواهد داشت. مکان ذره ای را که در یک چاه پتانسیل حرکت می کند، می توان با انتگرال گیری از

(۳-۳)، یعنی

$$t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \quad (۴-۳)$$

به دست آورد و زمان تناوب یک نوسان کامل با رابطه زیر داده می شود

$$T = 2(t_2 - t_1) = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \quad (۵-۳)$$

معادلات (۴-۳) و (۵-۳) را نمی توان حل کرد مگر این که شکل تابع پتانسیل $V(x)$ را بدانیم. حرکت ذره ممکن است به ناحیه ای در نزدیکیهای x_0 محدود شده باشد. برای چنین جابه جاییهای کوچکی می توانیم به جای پتانسیل دلخواه $V(x)$ یک پتانسیل سهمی وار که با منحنی خط چین در شکل (۳-۱) نشان داده شده است قرار دهیم. همان طور که بعداً خواهیم دید این پتانسیل می تواند به صورت $V(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$ ، که k ثابت است، نوشته شود، و ما را قادر می سازد که بتوانیم معادلات (۴-۳) و (۵-۳) را حل کنیم.

فرض کنیم یک ذره در اطراف نقطه ترازمندی پایدار x_0 که پتانسیل در آن جا مقدار کمینه $V(x)$ را دارد، نوسان می کند. تابع پتانسیل $V(x)$ را در اطراف نقطه x_0 به صورت یک سری تیلور

بسط می دهیم

$$V(x) = V(x_0) + \left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=x_0} (x - x_0)^2 \quad (۶-۳)$$

$$+ \frac{1}{6} \left(\frac{d^3V}{dx^3}\right)_{x=x_0} (x - x_0)^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{d^4V}{dx^4}\right)_{x=x_0} (x - x_0)^4 + \dots$$

بحث خود را به جابه جایهایی کوچک در پتانسیلهای متقارن محدود می کنیم . جمله $V(x_0)$ ثابت است و می تواند ، بدون این که بر نتایج تأثیر بگذارد ، حذف شود . همچنین چون x_0 یک نقطه کمینه است ، برای ترازمندی پایدار در یک پتانسیل متقارن ، جمله های فرد باید صفر باشند [توجه کنیم که اگر عبارت حاصل از بسط $F(x)$ به کار برده شده بود ، جملات زوج صفر می شدند] . بنابراین

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=x_0} = 0, \quad \left(\frac{d^3V}{dx^3}\right)_{x=x_0} = 0 \quad (۷-۳ الف)$$

و

$$\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=x_0} > 0 \quad (۷-۳ ب)$$

با قرار دادن

$$(x - x_0) = x' \quad (۸-۳)$$

$$\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=x_0} = k \quad (۹-۳)$$

$$\frac{1}{6} \left(\frac{d^4V}{dx^4}\right)_{x=x_0} = +\epsilon \quad (۱۰-۳)$$

انرژی پتانسیل می تواند به صورت زیر نوشته شود

$$V(x') = \frac{1}{2} kx'^2 + \frac{1}{4} \epsilon x'^4 + \dots \quad (۱۱-۳)$$

فرض کنیم که مبدأ در نقطه ترازمندی انتخاب شده است بطوری که $x_0 = 0$ و $x' = x$ ، و با

چشم پوشی از جملات مرتبه های بالاتر در معادله (۱۱-۳) ، خواهیم داشت

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{4} \epsilon x^4 \quad (12-3)$$

به علاوه ، چون حرکت ذره در یک میدان نیروی پایستار انجام می گیرد ، با استفاده از تعریف

$$F(x) = - \frac{dV}{dx}$$

و قرار دادن به جای $V(x)$ از معادله (۱۲-۳) ، می توانیم بنویسیم

$$F(x) = -kx - \epsilon x^3 \quad (13-3)$$

نوسانات خطی

در تقریب نخست ، می توانیم از تمام جملات بجز از اولین جمله در معادلات (۱۲-۳)

و (۱۳-۳) چشم پوشی کنیم ، بطوری که

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 \quad (14-3)$$

$$F(x) = -kx \quad (15-3)$$

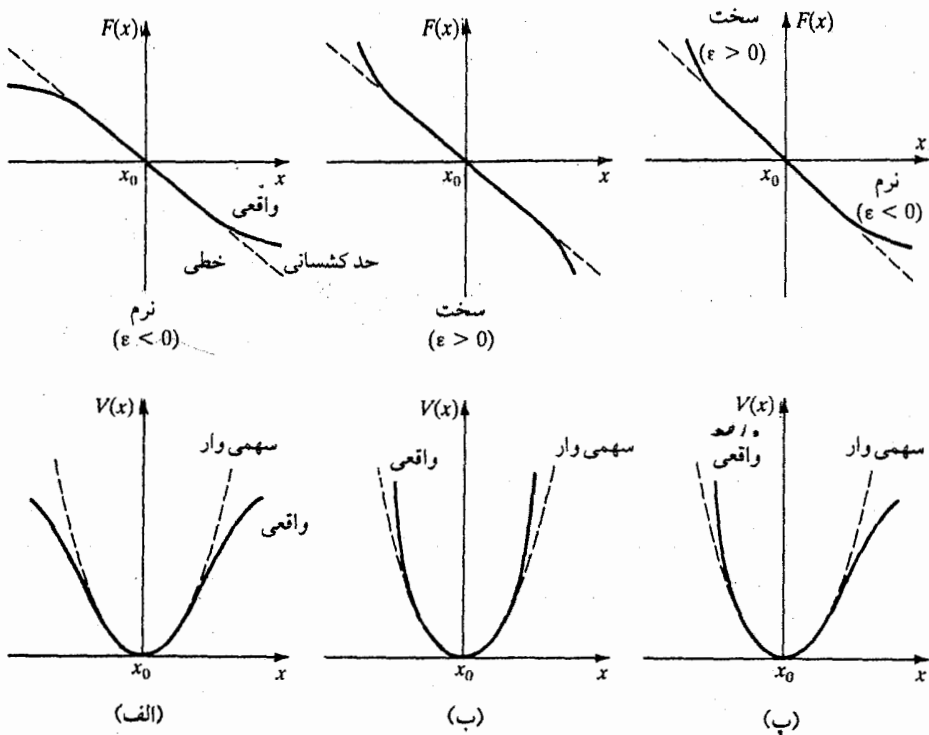
که در آنها

$$k = \left(\frac{d^2 V}{dx^2} \right)_{x=0} = - \left(\frac{dF}{dx} \right)_{x=0} \quad (16-3)$$

چون $\left(\frac{d^2 V}{dx^2} \right)_{x=0}$ همیشه مثبت است ، k نیز مثبت خواهد بود . در نتیجه نیروی $F(x) = -kx$ همیشه به طرف مرکز و متناسب با x است . چنین نیروی بازگرداننده خطی نامیده می شود . پتانسیل متناظر با چنین نیروی یک سهمی است که با معادله (۱۴-۳) داده شده ، و با منحنیهای خط چین در شکلهای (۱-۳) و (۲-۳) برای مقادیر مختلف k نمایش داده شده است . نیروهای خطی متناظر با خطوط خط چین نشان داده شده اند .

سیستمهای فیزیکی ای که فنرها ، آونگها ، و تغییر شکلهای کشسان را درگیر می کنند ، با معادلات (۱۴-۳) و (۱۵-۳) توصیف می شوند و گفته می شود که از قانون هوک پیروی می کنند . این تنها در صورتی است که جابه جاییها کوچک باشند و در محدوده کشسانی ،

آن طور که در شکل (۳-۲ الف) نشان داده شده است ، باقی بمانند . به علاوه ، نتایج به دست آمده هنوز تقریبی اند . بیشتر وقت خود را به نوسانات خطی حاصل از سیستمهای خطی تقریبی اختصاص می دهیم . به k چندین اسم داده شده است ، اما معمولاً ثابت فنری یا ثابت سختی نامیده می شود . k به عنوان نیرو بر واحد طول بایکای نیوتن بر متر (N/m) تعریف می شود . $\frac{1}{k}$ کمپلیانس فنر نامیده می شود .



شکل (۳-۲) : نمودارهای $F(x)$ و $V(x)$ بر حسب x برای سیستمهای گوناگون . بزرگی و علامت ϵ تعیین می کند که سیستم سخت است یا نرم . برای سیستمهای نرم $\epsilon < 0$ در حالی که برای سیستمهای سخت $\epsilon > 0$

نوسانات غیرخطی

اگر جابه جایی سیستم از ترازمندی پایدارش کوچک نباشد (یا اگر لزوماً اصلاحات

مرتبه های بالاتری را در تقریب خطی بخواهیم) نمی توانیم از جمله مرتبه دوم در معادلات (۱۲-۳) و (۱۳-۳) چشم پوشی کنیم. بنابراین، طبق معادله (۳-۱۳)، نیروی دیگر، به علت حضور جمله x^3 ، خطی نیست، و پتانسیل هم، به علت حضور جمله x^4 ، دیگر سهمی نیست. شکل های متفاوتی از نیروها و پتانسیلها برای سیستمهای با جابه جاییهای زیاد (در نتیجه غیرخطی) در شکل (۲-۳) نشان داده شده است.

اکنون معادله (۱۳-۳) برای یک سیستم غیرخطی، یعنی

$$F(x) = -kx - \epsilon x^3 \quad (13-3)$$

را در نظر بگیریم. باید به خاطر بیاوریم که ϵ در مقایسه با k کمیت بسیار کوچکی است، اما بزرگی و علامت آن در جمله خطی $-kx$ ، در نتیجه در نیروی کلی $F(x)$ ، تأثیر می گذارد. اگر $\epsilon < 0$ باشد بزرگی نیروی $F(x)$ کمتر از وقتی خواهد بود که تنها نیروی خطی kx وجود می داشت و گفته می شود که سیستم نرم است. از سوی دیگر، اگر $\epsilon > 0$ باشد بزرگی نیروی $F(x)$ از نیروی خطی kx بزرگتر خواهد بود، و گفته می شود که سیستم سخت است. نیروها و پتانسیلهای این گونه سیستمها در شکل (۲-۳) نمایش داده شده اند.

۳-۳ نوسانگر هماهنگ خطی

نمونه یک نوسانگر هماهنگ خطی یا ساده در شکل (۳-۳) نشان داده شده است، و آن عبارت است از یک جرم m که به انتهای فنری با ثابت نیروی k بسته شده است. این سیستم فنر-جرم در امتداد محور x روی یک سطح افقی بدون اصطکاک حرکت نوسانی یک بعدی انجام می دهد. سیستم از قانون هوک پیروی می کند، و بنابراین یک سیستم خطی است. اندازه گیری جابه جایی x از وضع ترازمندی، انرژی پتانسیل $V(x)$ عبارت است از

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (17-3)$$

و نیروی حاصل برابر است با

$$F(x) = -kx \quad (18-3)$$

از قانون دوم نیوتن، $F(x) = m \frac{d^2x}{dt^2}$ ، نتیجه می شود

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (۱۹-۳)$$

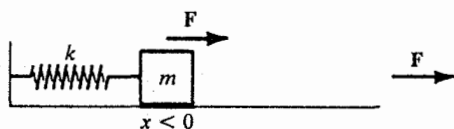
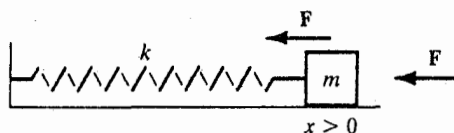
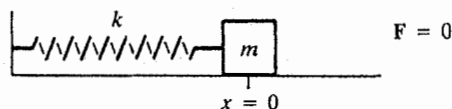
یا

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (۲۰-۳)$$

که در آن

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (۲۱-۳)$$

ω_0 ثابت است و فرکانس زاویه ای طبیعی آزاد (یا فرکانس نوسانات آزاد) سیستم نامیده می شود.



$x = -A$	$x = 0$	$x = +A$
$v = 0$	$v = v_{\max}$	$v = 0$
$a = +a_{\max}$	$a = 0$	$a = -a_{\max}$
$F = +kA$	$F = 0$	$F = -kA$

شکل (۳-۳) : نمونه یک نوسانگر هماهنگ خطی

هدف ما حل معادله (۲۰-۳) و به دست آوردن $x(t)$ است. قبل از انجام این کار، باید یادآوری کنیم که هم در فیزیک و هم در مهندسی با این نوع معادله زیاد مواجه می شویم. در نتیجه حل آن باید با دقت بررسی شود. معادله (۲۰-۳) یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن است. بالاترین مشتقی که در معادله دیفرانسیل ظاهر می شود مرتبه آن نامیده

می شود ، و یک معادله دیفرانسیل وقتی خطی است که جمله بالاتر از درجه اول بر حسب متغیر وابسته x [در معادله (۳-۲۰) متغیر وابسته است] و مشتق آن نداشته باشد . همچنین معادله (۳-۲۰) همگن است زیرا جمله ای غیر از متغیر وابسته و مشتقاتش در بر ندارد . به این ترتیب عمومی ترین شکل یک معادله دیفرانسیل مرتبه n خطی ناهمگن به صورت زیر است

$$C_n \frac{d^n x}{dt^n} + C_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + C_1 \frac{dx}{dt} = b(t) \quad (۳-۲۲)$$

اگر $b(t) = 0$ باشد ، معادله همگن است . ضرایب C_1, \dots, C_{n-1}, C_n ثابت اند و می توانند تابع زمان باشند یا نباشند ، اما ، فرض می کنیم که مستقل از زمان اند .

ما با معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم سر و کار خواهیم داشت . بعضی از خواص این گونه معادلات را که برای ما مفیدند بطور خلاصه در زیر می آوریم :

۱- جواب عمومی هر معادله دیفرانسیل مرتبه دوم بستگی به فقط دو ثابت دلخواه دارد . فرض کنیم این دو ثابت دلخواه C_1 و C_2 باشند . پس

$$x = x(t; C_1, C_2)$$

C_1 و C_2 دلخواهند زیرا هر مقداری از C_1 و C_2 در یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم صدق می کند .

۲- اگر $x_1(t)$ یک جواب معادله دیفرانسیل همگن خطی باشد ، $Cx_1(t)$ نیز جواب خواهد بود که در آن C یک ثابت دلخواه است .

۳- اگر $x_1(t)$ و $x_2(t)$ جوابهای یک معادله دیفرانسیل همگن خطی باشند ، $x_1(t) + x_2(t)$ یا هر ترکیب خطی دیگر $C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$ نیز یک جواب خواهد بود .

اکنون به معادله (۳-۲۰) برگردیم و سعی کنیم جوابهای آن را پیدا کنیم . برای شروع

آن را به صورت

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

می نویسیم . حال دو طرف را در $2\dot{x}$ ضرب می کنیم ،

$$2\dot{x}\ddot{x} = -2\omega_0^2 x\dot{x}$$

و پس از انتگرال گیری خواهیم داشت

$$\dot{x}^2 = -\omega_0^2 x^2 + C$$

که C یک ثابت است. وقتی $x=A$ باشد $\dot{x}=0$ است، در نتیجه $C = \omega_0^2 A^2$. بنابراین

$$\dot{x}^2 = \omega_0^2 (A^2 - x^2) \quad (23-3)$$

که بعد از جداسازی متغیرها می تواند به صورت زیر نوشته شود

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega_0 \int dt$$

از انتگرال گیری این معادله نتیجه می گیریم

$$\sin^{-1}\left(\frac{x}{A}\right) = \omega_0 t + \phi$$

که ϕ یک ثابت به نام فاز اولیه یا ثابت فاز است. این معادله را می توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$x = A \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (24-3)$$

به این ترتیب جواب معادله (۳-۲۰)، که یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم است، با رابطه

(۳-۲۴) داده می شود که شامل دو ثابت دلخواه A و ϕ است که باید از شرایط اولیه تعیین

شوند. معادله (۳-۲۴) جواب یک نوسانگر خطی یا نوسانگر هماهنگ است. نمودار x

بر حسب t در شکل (۳-۴) نمایش داده شده است. x جابه جایی نامیده می شود. بیشینه

جابه جایی دامنه نوسانگر نامیده می شود و برابر با A است. کمیت ω_0 فرکانس زاویه ای نامیده

می شود و با رابطه (۳-۲۱) داده می شود. همچنین $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ که ν_0 فرکانس نوسانگر نامیده

می شود. زمان تناوب T_0 نوسانگر زمان لازم برای کامل کردن یک نوسان است. بنابراین $\omega_0 T_0$

در معادله (۳-۲۴)، در مدت $\Delta t = T_0$ به اندازه 2π افزایش پیدا می کند، یعنی،

$$\omega_0 T_0 = 2\pi$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

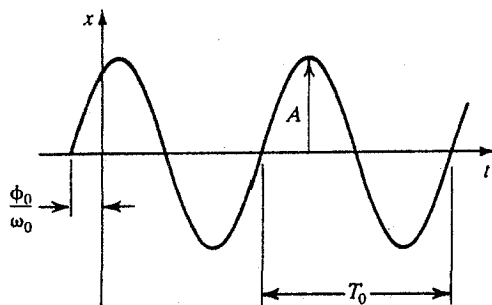
یا

(۳-۲۵ الف)

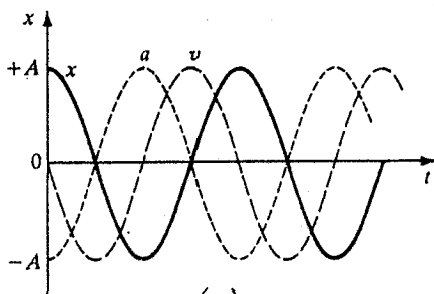
یا

$$\nu_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

(۳-۲۵ ب)



(الف)



(ب)

شکل (۳-۴) : (الف) نمودار جابه‌جایی یک نوسانگر خطی برحسب زمان و (ب)

نمودارهای x ، v ، و a برحسب t

عبارتهای سرعت و شتاب می‌توانند با مشتق‌گیری از معادله (۳-۲۴) به دست آیند، یعنی

$$v = \dot{x} = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (۳-۲۶ \text{ الف})$$

$$a = \ddot{x} = -\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \phi) = -\omega_0^2 x \quad (۳-۲۶ \text{ ب})$$

نمودارهای v و a برحسب t در شکل (۳-۴) نشان داده شده‌اند.

جوابی که با معادله (۳-۲۴) داده شده است، می‌تواند به شکل دیگری به صورت زیر

نیز نوشته شود

$$x = A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$= A \sin \omega_0 t \cos \phi + A \cos \omega_0 t \sin \phi$$

با قرار دادن

$$A \cos \phi = B$$

(۳-۲۷ الف)

و

$$A \sin \phi = C \quad (\text{ب } ۲۷-۳)$$

خواهیم داشت

$$x = B \sin \omega_0 t + C \cos \omega_0 t \quad (\text{۲۸-۳})$$

که شکل دیگری از جواب یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم است. با مربع کردن و جمع کردن معادلات (۲۷-۳ الف) و (۲۷-۳ ب) خواهیم داشت

$$A = \sqrt{B^2 + C^2} \quad (\text{۲۹-۳ الف})$$

از تقسیم (ب) بر (۲۷-۳ الف)، خواهیم یافت

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{C}{B} \right) \quad (\text{ب } ۲۹-۳)$$

معادلات (۲۷-۳) و (۲۹-۳) روابط بین ثابتهای A ، ϕ ، B ، و C را به ما می دهند. می توانیم با مشتق گیری از (۲۸-۳) عبارتهایی برای سرعت و شتاب به دست بیاوریم.

معادله (۲۰-۳) یا هر معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب ثابت را می توان با یک جواب آزمایشی به شکل نمایی حل کرد. جواب آزمایشی را به صورت

$$x = e^{\lambda t} \quad (\text{۳۰-۳})$$

بگیریم که در آن λ ثابتی است که باید تعیین شود. با قرار دادن (۳۰-۳) در (۲۰-۳) داریم

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0 \quad (\text{۳۱-۳})$$

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

این معادله، معادله مشخصه، اولیه، یا معین نامیده می شود. بنابراین

$$\lambda = \pm i\omega_0 = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{۳۲-۳})$$

که در آن $i = \sqrt{-1}$. به این ترتیب، با دو ریشه $\lambda_1 = +i\omega_0$ و $\lambda_2 = -i\omega_0$ ، جواب عمومی عبارت است از

$$x = A_+ e^{+i\omega_0 t} + A_- e^{-i\omega_0 t} \quad (3-33)$$

که A_+ و A_- دو ثابت اختیاری هستند. هر سه جواب معادلات (۳-۲۴)، (۳-۲۸)، و (۳-۳۳) هم ارزاند و هر یک از آنها می تواند از دیگری به دست آید، معادله (۳-۳۳) می تواند با به کارگیری معادله اولر

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta \quad (3-34)$$

به دو تای دیگر تبدیل شود.

خوب است به خاطر بیاوریم که در جواب (۳-۳۳)، A_+ و A_- کمیت‌هایی مختلط، و گاهی اوقات برای استفاده نامناسبند. باز هم یک راه دیگر نوشتن این جواب عمومی عبارت است از

$$\begin{aligned} x &= A e^{i(\omega_0 t + \phi)} \\ &= A \cos(\omega_0 t + \phi) + iA \sin(\omega_0 t + \phi) \end{aligned} \quad (3-35)$$

که A و ϕ ثابتند و هر دو قسمت حقیقی و موهومی این معادله جواب عمومی معادله دیفرانسیل اند.

انرژی نوسانگر هماهنگ ساده

در نوسانگر هماهنگ ساده جابه جایی عبارت است از

$$x = A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

و سرعت عبارت است از

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

مقدار بیشینه سرعت v_0 برابر است با

$$v_0 = \omega_0 A = \sqrt{\frac{k}{m}} A$$

در نتیجه انرژی جنبشی نوسانگر عبارت است از

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) \\ &= K_0 \cos^2(\omega_0 t + \phi) \end{aligned} \quad (3-36)$$

که در آن k_0 بیشینه انرژی جنبشی است که برابر است با

$$K_0 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2} k A^2 \quad (37-3)$$

انرژی پتانسیل سیستم برابر است با کار نیروی $F = -F = -(-kx) = kx$ در جابه جایی از $x=0$ تا $x=x$. بنابراین

$$V(x) = W = \int_0^x F_a dx = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2 \quad (38-3)$$

با گذاردن به جای x داریم

$$V(x) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi) \quad (39-3)$$

$$V(x) = V_0 \sin^2(\omega_0 t + \phi)$$

که V_0 بیشینه انرژی پتانسیل برای $x=A$ است، یعنی

$$V_0 = \frac{1}{2} k A^2 \quad (40-3)$$

به این ترتیب انرژی کل E ، که وقتی میدان نیرو پایدار باشد همیشه ثابت است، عبارت است از

$$E = K + V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \quad (41-3)$$

این معادله می تواند برای $x(t)$ حل شود و اطلاعات زیادتری در باره مسأله مورد نظر، چنان که در زیر نشان خواهیم داد، به ما بدهد. از معادله (41-3) داریم

$$\dot{x} = \pm \left(\frac{2E}{m} - \frac{k}{m} x^2 \right)^{1/2} \quad (42-3 \text{ الف})$$

یا

$$\pm \int \frac{dx}{\sqrt{(2E/k) - x^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \int dt \quad (42-3 \text{ ب})$$

که از آن x به صورت

$$x = A \sin(\omega_0 t + \phi_1) \quad (43-3 \text{ الف})$$

یا

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi_2) \quad (۳-۴۳)$$

به دست می آید که ϕ_1 و ϕ_2 ثابتند و دامنه A برابر است با

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} \quad (۳-۴۴)$$

این رابطه به ما می گوید که x بین $+A$ و $-A$ ، یعنی بین

$$+\sqrt{\frac{2E}{k}} \quad \text{و} \quad -\sqrt{\frac{2E}{k}}$$

تغییر می کند . این باید درست باشد زیرا تنها در این صورت است که x که از معادلات (۳-۴۲) به دست می آید حقیقی است . بنابراین مقدار x باید بین دو حد که به وسیله انرژی E و ثابت فنری k تعیین می شوند قرار داشته باشد .

برای پیدا کردن مقادیر میانگین V و K در یک دوره تناوب کامل از عبارت عمومی زیر برای مقدار میانگین کمیت $f(t)$ استفاده می کنیم

$$\langle f \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \quad (۳-۴۵)$$

یعنی ،

$$\langle V \rangle = \frac{\int_0^T V dt}{\int_0^T dt} = \frac{\int_0^T V_0 \sin^2(\omega_0 t + \phi) dt}{T} \quad (۳-۴۶)$$

$$= \frac{1}{2} V_0 = \frac{1}{4} k A^2$$

و به همین نحو

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2} K_0 = \frac{1}{4} k A^2 \quad (۳-۴۷)$$

یعنی ،

$$\langle V \rangle = \langle K \rangle = \frac{1}{2} E \quad (۳-۴۸)$$

اگر ، به جای میانگینهای زمانی ، میانگینهای فضایی را روی یک دوره تناوب کامل محاسبه کرده بودیم (رک مسأله ۳-۱) ، می داشتیم

$$\langle V \rangle_{\text{space}} = \frac{1}{6} k A^2 , \quad \langle K \rangle_{\text{space}} = \frac{1}{3} k A^2 \quad (۳-۴۹)$$

$$\langle E \rangle_{\text{space}} = \langle V \rangle_{\text{space}} + \langle K \rangle_{\text{space}} = \langle E \rangle_{\text{time}} \quad (۵۰-۳)$$

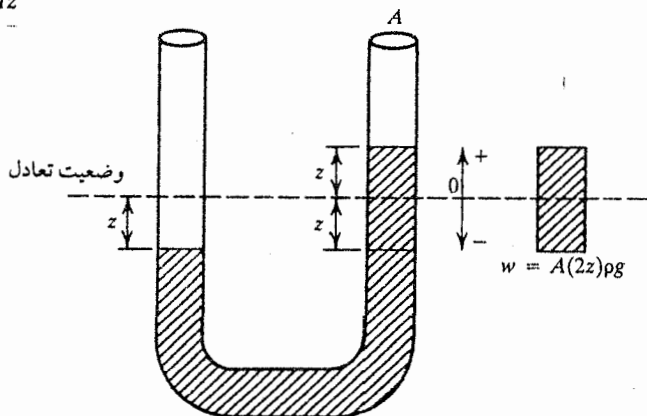
مثال (۱-۳): مایعی در یک لوله U شکل در حال ترازمندی است. وقتی مایع کمی جابه جا شود، حرکت نوسانی هماهنگ انجام می دهد. فرکانس این نوسانات را محاسبه کنید.

این وضعیت در شکل (مثال ۱-۳) نشان داده شده است. اگر مایع در ستون سمت چپ به اندازه z جابه جا شده باشد، قسمت مایع ستون سمت راست به اندازه $2z$ با آن اختلاف خواهد داشت. به این ترتیب این قسمت مایع تحت تأثیر یک نیروی بازگرداننده که برابر با وزن آن، یعنی

$$w = mg = \rho Vg = \rho(A2z)g \quad (۱)$$

است قرار می گیرد که ρ چگالی مایع و A مقطع لوله است. طبق قانون دوم نیوتن،

$$F = M\ddot{z} \quad (۲)$$



شکل (مثال ۱-۳)

که M جرم تمام مایع در لوله U شکل است. اگر L طولی از لوله باشد که با مایع پر شده است داریم $M = \rho AL$ و

$$F = (\rho AL)\ddot{z} \quad (۳)$$

اگر جهت بالا را مثبت بگیریم ، وزن w رو به پایین خواهد بود . و در نتیجه ، از معادلات (۱) و (۳) داریم

$$-2\rho Azg = \rho AL\ddot{z}$$

یا

$$\ddot{z} + \left(\frac{2g}{L}\right)z = 0 \quad (۴)$$

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 \quad (۵)$$

بنابراین فرکانس طبیعی نوسانات عبارت است از

$$\omega_0 = \left(\frac{2g}{L}\right)^{1/2} \quad (۶)$$

می توانیم با به کارگیری روش پایستگی انرژی نیز به همین نتیجه برسیم . تمام ذرات مایع با یک سرعت $v = \dot{z}$ حرکت می کنند . بنابراین انرژی جنبشی مایع عبارت است از

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}(\rho AL)\dot{z}^2 \quad (۷)$$

افزایش انرژی پتانسیل برابر است با کار انجام شده در مقابل نیروی گرانش وقتی که یک ستون از مایع به طول z از سمت چپ لوله به سمت راست حرکت کند . یعنی

$$V = mgz = (\rho Az)gz = \rho Az^2g \quad (۸)$$

بنابراین انرژی کل ، که ثابت است ، عبارت است از

$$E = \frac{1}{2}(\rho AL)\dot{z}^2 + \rho Agz^2 \quad (۹)$$

آهنگ زمانی تغییرات انرژی باید صفر باشد

$$dE/dt = 0 = \rho AL\dot{z}\ddot{z} + 2\rho Agz\dot{z} \quad (۱۰)$$

یعنی

$$\ddot{z} + \left(\frac{2g}{L}\right)z = 0 \quad (۱۱)$$

که همان نتیجه به دست آمده در معادله (۴) است .

تمرین (۳-۱) : یک قطعه چوب به مقطع A و چگالی ρ که در آب شناور است آب را به اندازه حجم V جابه جا می کند . اگر قطعه کمی جابه جا شود ، زمان تناوب نوسانات کوچک را محاسبه کنید .

۳-۴ نوسانگر هماهنگ میرا

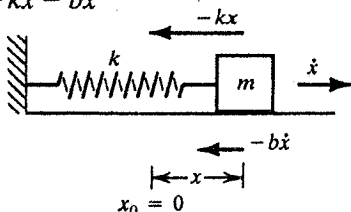
از دیدگاه نظری ، یک نوسانگر هماهنگ خطی یا ساده وقتی به حرکت در آمد ، برای همیشه به نوسان ادامه خواهد داد . چنین نوساناتی نوسانات آزادنامیده می شوند . اما در عمل ، در هر وضعیت فیزیکی نیروهای اتلافی یا میراگر وجود دارند ، و سیستم نوسانی انرژی خود را با زمان از دست می دهد . به این ترتیب سیستم نوسانی میرا می شود و سرانجام به حال سکون در می آید . معادله دیفرانسیل یک نوسانگر خطی که با (۳-۲۰) داده شده است باید طوری اصلاح شود که اثرات میرایی را شامل گردد .

یک بار دیگر یک جرم m بسته به فنری را ، چنان که در شکل (۳-۵) نمایش داده شده است ، به عنوان یک نمونه در نظر بگیریم و حرکت آن را به یک بعد محدود کنیم . وقتی جرم در یک سیال ، هوا یا مایع ، حرکت کند ، نیروی اصطکاکی ، که در این جا نیروی چسبندگی است ، میرایی ایجاد می کند . تا وقتی که سرعت آن قدر کوچک باشد که آشفتگی ایجاد نکند ، نیروی اصطکاکی یا میراگر F_d می تواند متناسب با سرعت فرض شود ، یعنی

$$F_d = -bv = -b\dot{x} \quad (۳-۵۱)$$

که در آن b باید مثبت باشد . نیروی خالص F_{net} وارد به جرم m ، همان طور که در شکل (۳-۵) نشان داده شده است ، عبارت است از

$$F_{\text{net}} = F + F_d = -kx - b\dot{x} \quad (۳-۵۲)$$



شکل (۳-۵) : نیروهای وارد به یک نمونه نوسانگر هماهنگ میرا

با استفاده از قانون دوم نیوتن و قرار دادن $F_{\text{net}} = m\ddot{x}$ در معادله (۳-۵۲) ، خواهیم داشت

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (۳-۵۳)$$

که معادله دیفرانسیل مرتبه دوم برای یک نوسانگر هماهنگ میرا است . برای حل این معادله طرفین را بر m تقسیم می کنیم و قرار می دهیم

$$\gamma = \frac{b}{2m} \quad (۳-۵۴ \text{ الف})$$

و

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (۳-۵۴ \text{ ب})$$

در نتیجه ،

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (۳-۵۵)$$

مانند قبل یک جواب نمایی به شکل زیر به کار می بریم

$$x = e^{\lambda t}, \quad \dot{x} = \lambda e^{\lambda t}, \quad \ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

و با قرار دادن در معادله (۳-۵۵) به دست می آوریم

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2) = 0$$

چون $e^{\lambda t} \neq 0$ است ، باید داشته باشیم

$$(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2) = 0 \quad (۳-۵۶)$$

این معادله مفسر دارای ریشه های زیر است

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (۳-۵۷ \text{ الف})$$

$$\lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (۳-۵۷ \text{ ب})$$

بنابراین جواب عمومی معادله (۳-۵۵) عبارت است از

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

یا

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A_1 e^{+\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t}) \quad (58-3)$$

سه مورد زیر برای این جواب سودمندی خاصی دارند و با جزئیات بیشتری مورد بحث قرار خواهند گرفت .

- مورد (الف) کند میرایی (نوسانی) ، $\omega_0^2 > \gamma^2$ ، λ_1 و λ_2 ریشه های موهومی
 مورد (ب) میرایی بحرانی (غیرنوسانی) ، $\omega_0^2 = \gamma^2$ ، λ_1 ، λ_2 ریشه های حقیقی و برابر
 مورد (پ) تند میرایی (غیرنوسانی) ، $\omega_0^2 < \gamma^2$ ، λ_1 ، λ_2 ریشه های حقیقی

مورد (الف) نوسانات کندمیرا : $\omega_0^2 > \gamma^2$

برای این مورد ، بهتر است جایگذاری زیر را انجام دهیم

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \quad (59-3)$$

به این ترتیب نماهای داخل پرانتز در معادله (۵۷-۳) موهومی است ، و می توانیم این معادله را به صورت زیر بنویسیم

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A_1 e^{+i\omega_1 t} + A_2 e^{-i\omega_1 t}) \quad (60-3)$$

که جواب یک نوسانگر کندمیرا است . با استفاده از رابطه $e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$ می توانیم معادله (۶۰-۳) را به صورت

$$x(t) = e^{-\gamma t} [i(A_1 - A_2) \sin \omega_1 t + (A_1 + A_2) \cos \omega_1 t]$$

بنویسیم . با قرار دادن $B = i(A_1 - A_2)$ و $C = (A_1 + A_2)$ ، یک شکل دیگر جواب را به صورت زیر به دست می آوریم

$$x(t) = e^{-\gamma t} [B \sin \omega_1 t + C \cos \omega_1 t] \quad (61-3)$$

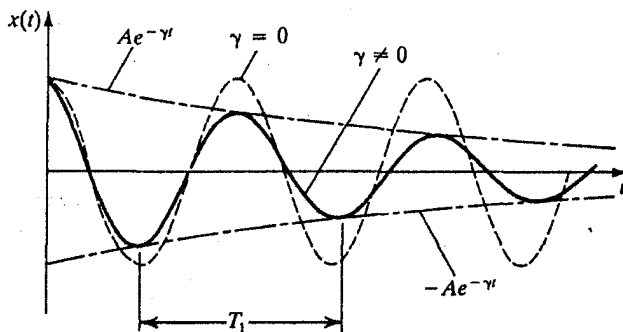
این جواب باز هم می تواند ، با جایگذاری

$$A = \sqrt{B^2 + C^2} \quad \text{و} \quad \tan \phi = -\frac{C}{B}$$

در معادله (۶۱-۳) به شکلی اندکی متفاوت نوشته شود ، یعنی ،

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \phi) \quad (62-3)$$

از سه جواب (۶۰-۳)، (۶۱-۳)، و (۶۲-۳)، توجه خود را روی معادله (۶۲-۳) متمرکز می‌کنیم. باید یادآوری کرد که ثابتهای A_1 و A_2 در دو معادله (۶۰-۳) کمیتهایی موهومی هستند، در حالی که B و C در معادله (۶۱-۳) و A و ϕ در معادله (۶۲-۳) کمیتاتی حقیقی اند. جواب (۶۲-۳) نشان می‌دهد که برای یک نوسانگر میرا حرکت نوسانی است، اما دامنه نوسانات، همان طور که در شکل (۶-۳) نشان داده شده است، بطور نمایی کاهش می‌یابد.



نامیرا	-----	$\gamma = 0$	$x(t) = A \cos \omega_0 t$
میرا	—————	$\gamma \neq 0$	$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos \omega_1 t$
پوش	- - - - -	$\gamma \neq 0$	$x(t) = \pm Ae^{-\gamma t}$

شکل (۶-۳): نمودارهای آبر حسب میرا برای یک نوسانگر هماهنگ. دامنه نوسانات

بطور نمایی کاهش می‌یابد. برای مقایسه، نوسانات نامیرا (منحنی خط چین) نیز نشان داده شده است

فرکانس زاویه ای طبیعی، ω_1 ، یا فرکانس نوسانات میرا همیشه کمتر از فرکانس نوسانات آزاد ω_0 است. فرکانس طبیعی ω_1 فرکانس به معنی واقعی کلمه نیست زیرا نوسانگر هرگز دوبار از یک نقطه با یک سرعت نمی‌گذرد؛ یعنی حرکت تناوبی نیست. اما اگر γ خیلی کوچک باشد، داریم $\omega_1 \approx \omega_0$ (همان طور که بعداً نشان داده خواهد شد). و می‌توانیم ω_1 را «فرکانس» بنامیم. اگر γ کوچک باشد، می‌توانیم معادله (۶۳-۵۹) را (با استفاده از بسط دو جمله ای) به صورت زیر بسط دهیم

$$\omega_1 = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2} = \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right)^{1/2}$$

$$= \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{2\omega_0^2} + \dots\right)$$

(۶۳-۳) الف

$$\approx \omega_0 - \frac{\gamma^2}{2\omega_0} \quad (۳-۶۳ \text{ ب})$$

اگر $\gamma \ll \omega_0$ باشد داریم

$$\omega_1 \approx \omega_0 \quad (۳-۶۳ \text{ پ})$$

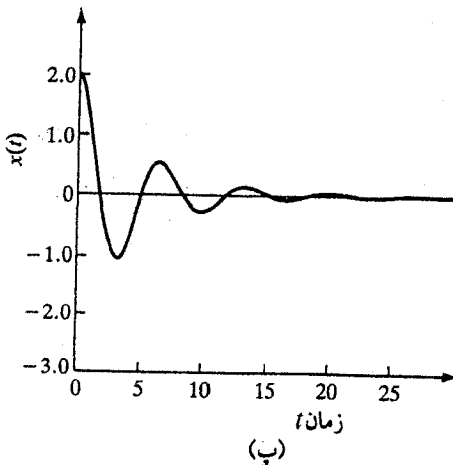
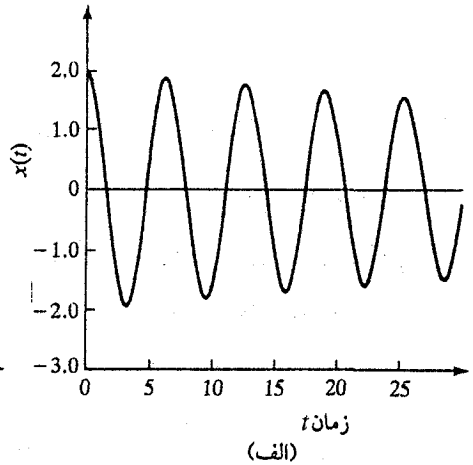
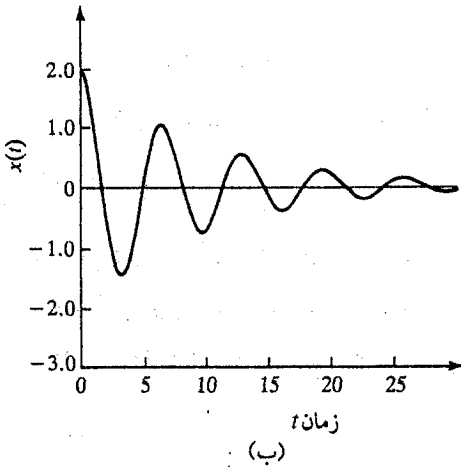
یک نمودار حرکت مربوط به معادله (۳-۶۳) برای مورد $\phi = 0$ در شکل (۳-۶) با خط پرنرنگ نمایش داده شده است. معادله (۳-۶۲) بیان می‌دارد که دامنه نوسانات، به علت ضریب $e^{-\gamma t}$ ، بطور نمایی با زمان کاهش می‌یابد و بین دو منحنی

$$A_e(t) = \pm Ae^{-\gamma t} \quad (۳-۶۴)$$

قرار دارد که $A_e(t)$ پوشی است که جابه‌جایی نوسانات را محدود می‌کند. برای مقایسه، نوسانات نوسانگر آزاد، یعنی برای $\gamma = 0$ ، با منحنی خط چین نمایش داده شده است. منحنی پر حرکت میرا ($\gamma \neq 0$) را نشان می‌دهد که پوش را در $\cos \omega_1 t = \pm 1$ ، یعنی در زمانهای $t_n = \frac{n\pi}{\omega_1}$ یا $t_n = \frac{n\pi}{\omega_1}$ (n عدد درست است) لمس می‌کند. دوره تناوب نوسان میرا $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ است. چون $\omega_1 < \omega_0$ ، یعنی فرکانس میرا کوچکتر از فرکانس آزاد است، دوره تناوب T_1 نوسان میرا بزرگتر از دوره تناوب آزاد T_0 است. این نکته از مقایسه دو نمودار در شکل (۳-۶) به روشنی دیده می‌شود. یادآوری این نکته مهم است که نقاطی که منحنی پوش را لمس می‌کنند به اندازه $\frac{T_1}{2}$ از یکدیگر فاصله دارند، اما بیشینه‌ها و کمینه‌های منحنی، با این که $\frac{T_1}{2}$ از هم فاصله دارند، بر نقاط بیشینه و کمینه منحنی حرکت نامیرا منطبق نیستند.

شکل (۳-۷) منحنیهای $x(t)$ بر حسب t برای درجات مختلف میرایی را نشان می‌دهد. چهره اصلی این نمودار را نسبت $\frac{\gamma}{\omega_1}$ تعیین می‌کند. اگر $\frac{\gamma}{\omega_1} \ll 1$ باشد، پوش دامنه $A_e(t)$ ، که با معادله (۳-۶۴) داده شده است، بسیار کند با زمان تغییر می‌کند، در حالی که جمله کسینوسی در $x(t)$ چندین مرتبه محور زمان را قطع کرده است. چنین سیستمی یک سیستم با میرایی ضعیف نامیده می‌شود. از طرف دیگر، اگر $\frac{\gamma}{\omega_1} \gg 1$ باشد، سیستم با میرایی شدید نامیده می‌شود زیرا $A_e(t)$ بسیار سریع با زمان کاهش می‌یابد و به صفر می‌رسد، در حالی که جمله کسینوسی فقط چند مرتبه محور زمان را قطع کرده است. در هر کدام از این موارد، نسبت دو بیشینه متوالی عبارت است از

$$\frac{Ae^{-\gamma t_1}}{Ae^{-\gamma t_2}} = \frac{Ae^{-\gamma t_m}}{Ae^{-\gamma(t_m - T_1)}} = e^{\gamma T_1} \quad (۳-۶۵)$$



شکل (۳-۷): نمودارهای $x(t)$ بر حسب t برای درجات مختلف میرایی: (الف) میرایی

ضعیف (ب) میرایی متوسط (پ) میرایی شدید

که $t_1 = t_m$ زمانی است که اولین بیشینه رخ می دهد ، و $t_2 = t_m + T_1$ زمانی است که بیشینه بعدی رخ می دهد . T_1 دوره تناوب نوسانات میراست . کمیّت $\exp(\gamma T_1)$ افت حرکت نامیده می شود ، و لگاریتم آن ، γT_1 ، افت لگاریتمی ، δ ، نامیده می شود ، یعنی

$$\delta = \ln e^{\gamma T_1} = \gamma T_1 = \left(\frac{b}{2m}\right)\left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right) = \frac{b}{m} \frac{\pi}{\omega_1} \quad (۳-۶۶)$$

ملاحظات انرژی ای

انرژی کل $E(t)$ ی یک سیستم هماهنگ میرا در هر زمان t با رابطه

$$E(t) = E(0) + W_f \quad (۳-۶۷)$$

داده می شود که $E(0)$ انرژی کل در زمان $t=0$ است ، و W_f کاری است که در بازه بین 0 و t به وسیله نیروی اصطکاکی انجام گرفته است . فرض کنیم نیروی اصطکاکی اتلافی به صورت $f = -b\dot{x} = -bv$ باشد ، می توانیم W_f را به طریق زیر محاسبه کنیم :

$$W_f = \int f dx = \int f \frac{dx}{dt} dt = \int fv dt = \int_0^t -bv^2 dt \quad (۳-۶۸ \text{ الف})$$

به این ترتیب آهنگ اتلاف انرژی توسط اصطکاک می تواند به صورت

$$\frac{dE}{dt} \left(= \frac{dW_f}{dt} \right) = -bv^2 \quad (۳-۶۸ \text{ ب})$$

نوشته شود که منفی است و آهنگ اتلاف انرژی و تبدیل به آن به گرما را نمایش می دهد . چون $W_f < 0$ است ، E_1 بطور پیوسته با زمان کاهش می یابد و می تواند به روش زیر محاسبه شود

$$E(t) = K(t) + U(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (۳-۶۹)$$

از معادله (۳-۶۲) داریم

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_1 Ae^{-\gamma t} \left[\sin(\omega_1 t + \phi) + \frac{\gamma}{\omega_1} \cos(\omega_1 t + \phi) \right]$$

فرض کنیم که سیستم با میرایی ضعیف است بطوری که $\frac{\gamma}{\omega_1} \ll 0$ ، و با چشم پوشی از جمله

مرتبه دوم در طرف راست عبارت قبلی \ddot{x} ، می‌توانیم به جای x و \dot{x} در معادله (۳-۶۹) مقدار قرار دهیم:

$$E(t) = \frac{1}{2} A^2 e^{-2\gamma t} [m\omega_1^2 \sin^2(\omega_1 t + \phi) + k \cos^2(\omega_1 t + \phi)]$$

چون سیستم را با میرایی ضعیف فرض کرده ایم می‌توانیم بنویسیم $\omega_1^2 \cong \omega_0^2 = k/m$ ؛ در نتیجه این معادله به شکل زیر در می‌آید

$$E(t) = \frac{1}{2} k A^2 e^{-2\gamma t} \quad (۳-۷۰)$$

چون انرژی اولیه سیستم با قرار دادن $t=0$ در معادله (۳-۷۰) به دست می‌آید، یعنی

$$E_0 = \frac{1}{2} k A^2 \quad (۳-۷۱)$$

بنابراین

$$E(t) = E_0 e^{-2\gamma t} \quad (۳-۷۲)$$

یعنی انرژی، بطور نمایی با آهنگی ($e^{-2\gamma t}$) سریعتر از آهنگ کاهش یا واپاشی دامنه ($e^{-\gamma t}$) کاهش می‌یابد (یا واپاشیده می‌شود).

بازه زمانی τ که در آن E به $\frac{1}{e}$ ($= 0.368$) مقدار اولیه اش کاهش می‌یابد زمان مشخصه یا ثابت واپاشی نامیده می‌شود و می‌توان آن را با قرار دادن $E(t) = E_0/e$ و $t = \tau$ در معادله (۳-۷۲) به دست آورد.

$$\frac{E_0}{e} = E_0 e^{-2\gamma \tau}$$

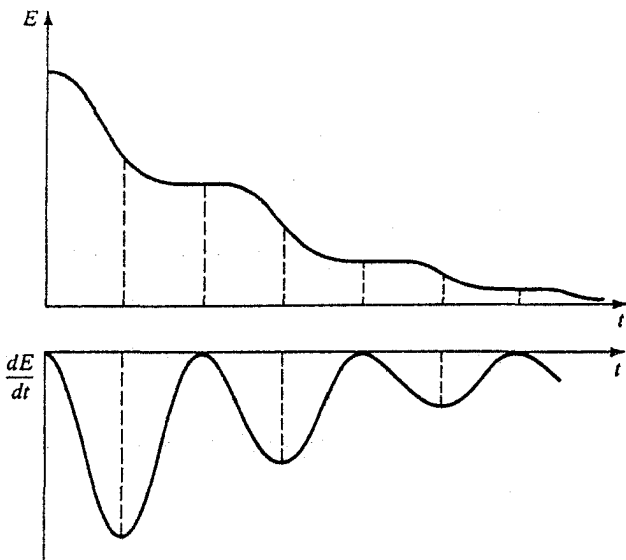
یا

$$2\gamma \tau = 1$$

یعنی

$$\tau = \frac{1}{2\gamma} = \frac{2m}{2b} = \frac{m}{b} \quad (۳-۷۳)$$

اگر γ خیلی کوچک باشد، $\tau \rightarrow \infty$ و اگر γ خیلی بزرگ باشد، $\tau \rightarrow 0$.



شکل (۸-۳) : نمودارهای E و $\frac{dE}{dt}$ بر حسب t برای یک نوسانگر میرا

همچنین ، با استفاده از معادله (۳-۷۲) ، می توانیم مشتق لگاریتمی E را به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{d}{dt} (\ln E) = \frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = -2\gamma \quad (۳-۷۴)$$

$\frac{1}{E} \frac{dE}{dt}$ نمایشگر آهنگ نسبی کاهش انرژی است . چون آهنگ اتلاف انرژی متناسب با مربع سرعت است [معادله (۳-۶۸)ب] ، اتلاف انرژی یکنواخت نیست . $\frac{dE}{dt}$ وقتی بیشینه است که \dot{x} بیشینه باشد (نزدیک تراز مندی) ، و وقتی صفر می شود که \dot{x} صفر باشد (نزدیک دامنه بیشینه) . نمودارهای E و $\frac{dE}{dt}$ در شکل (۸-۳) نمایش داده شده اند .

مورد (ب) میرایی بحرانی : $\omega_0^2 = \gamma^2$

در این مورد ، دو ریشه λ_1 و λ_2 ، که توسط معادلات (۳-۵۷) داده شده اند ، برابرند ؛

یعنی

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma$$

و جواب عمومی (۳-۵۸) به شکل زیر در می آید

$$x(t) = (A_1 + A_2)e^{-\gamma t} = B_1 e^{-\gamma t}$$

که $(A_1 + A_2) = B_1 = \text{constant}$. این جواب یک جواب عمومی نیست زیرا فقط یک ثابت دارد. می توانیم نشان دهیم که در چنین مواردی، اگر $e^{-\gamma t}$ یک جواب باشد،

$$x = te^{-\gamma t} \quad (۷۵-۳)$$

نیز یک جواب است. با قرار دادن آن در معادله دیفرانسیل

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

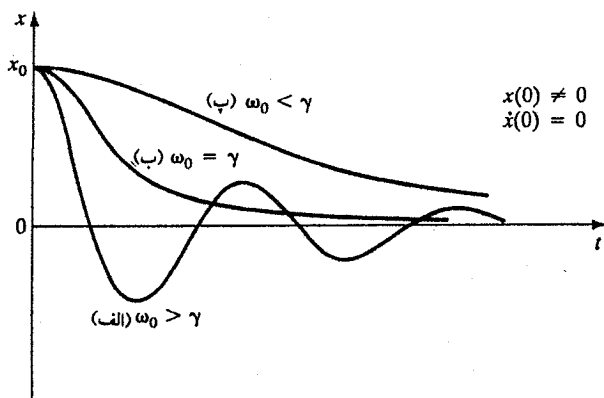
خواهیم داشت

$$(\omega_0^2 - \gamma^2)e^{-\gamma t} = 0$$

چون $\omega_1 = \gamma$ ، معادله فوق برقرار است و $te^{-\gamma t}$ نیز جواب معادله است. به این ترتیب، برای مورد میرایی بحرانی، جواب عمومی یک ترکیب خطی از $e^{-\gamma t}$ و $te^{-\gamma t}$ است، یعنی،

$$x(t) = (B_1 + B_2 t)e^{-\gamma t} \quad (۷۶-۳)$$

که در آن B_1 و B_2 ثابتند و باید از شرایط اولیه تعیین شوند. نمودار $x(t)$ بر حسب t برای مورد سرعت اولیه صفر، یعنی $x(0) \neq 0$ ، $\dot{x}(0) = 0$ ، در شکل (۹-۳) نمایش داده شده است. این جواب به نوسان منجر نمی شود؛ جابه جایی بطور مجانبی و سریعتر از موارد کند میرا و تند میرا، همان طور که نشان داده شده است، به سمت صفر میل می کند



شکل (۹-۳): نمودار $x(t)$ بر حسب t با شرایط اولیه $x(0) = x_0$ و

$\dot{x}(0) = 0$ برای سه مورد (الف) کند میرا، (ب) میرایی بحرانی، (پ) تند میرا

در شکل (۳-۱۰) سه مورد جالب (برای یک نوسانگر با میرایی بحرانی) حاصل از جواب (۳-۷۶) نمایش داده شده است. اگر از x نسبت به t مشتق بگیریم و برابر با صفر قرار دهیم، موقعیتهای پیشینه در نمودار x بر حسب t را به دست می آوریم. بنابراین $\frac{dx}{dt} = 0$ می دهد

$$t = -\frac{B_1}{B_2} + \frac{2m}{b} \quad (۳-۷۷)$$

اگر

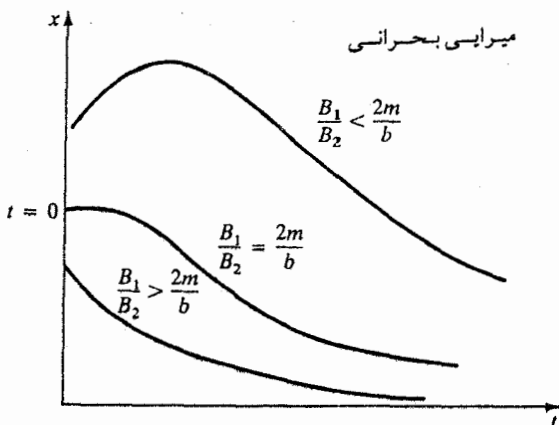
$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{2m}{b} \quad \text{و} \quad \frac{B_1}{B_2} < \frac{2m}{b}$$

نمودار x بر حسب t پیشینه هایی در $t=0$ و $t>0$ ، آن طور که شکل (۳-۱۰) نشان می دهد، دارد. اگر

$$\frac{B_1}{B_2} > \frac{2m}{b}$$

نمودار برای $t>0$ پیشینه ندارد (شکل (۳-۱۰)).

میرایی بحرانی نقش بسیار مهمی در طراحی وسایلی مانند گالوانومتر، فنرهای هیدرولیکی، و دستگاههای اندازه گیری عقربه دار ایفا می کند. خواسته می شود که سیستم در حضور میرایی اصطکاکی بطور سریع و نرم به وضع تراز مندی برسد.



شکل (۳-۱۰): نمودارهای $x(t)$ بر حسب t برای وضعیتهای مختلف در مورد

یک نوسانگر با میرایی بحرانی

مورد (پ): $\omega_0^2 > \gamma^2$

اگر میرایی افزایش یابد بطوری که $\gamma^2 > \omega_0^2$ باشد، دو ریشه λ_1 و λ_2 حقیقی اند. اگر

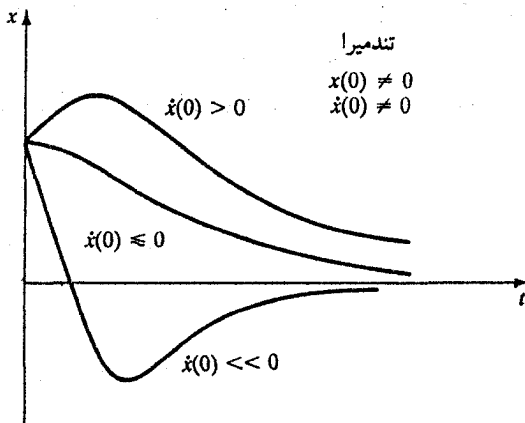
قرار دهیم

$$(\gamma^2 - \omega_0^2)^{1/2} = \omega_2$$

جواب عمومی (۳-۵۸) به شکل زیر در می آید

$$x(t) = e^{-\gamma t} [A_1 e^{\omega_2 t} + A_2 e^{-\omega_2 t}] \quad (۳-۷۸)$$

توجه کنیم که ω_2 دیگر یک فرکانس نیست زیرا حرکت دیگر نوسانی نیست. نماها حقیقی اند، و هر دو جمله طرف راست بطور نمایی کاهش می یابند، یکی سریعتر از دیگری. همان طور که در شکل (۳-۱۱) برای مورد $x(0) \neq 0$ و $\dot{x}(0) = 0$ نشان داده شده است، جاباه جایی بطور مجانبی به صفر میل می کند، اما نه به آن سرعتی که در مورد یک سیستم با میرایی بحرانی رخ می داد. تغییرات x بر حسب t برای دو مورد $\dot{x}(0) > 0$ و $\dot{x}(0) < 0$ در شکل (۳-۱۱) نشان داده شده است. برای $\dot{x}(0) > 0$ ، $x(t)$ برای $t > 0$ به یک بیشینه ای می رسد. برای $\dot{x}(0) < 0$ ولی کوچک، $x(t)$ برای $t > 0$ بیشینه ای ندارد. برای $\dot{x}(0) \ll 0$ ولی به اندازه کافی بزرگ، $x(t)$ برای $t > 0$ همان طور که نشان داده شده است، یک بیشینه دارد.



شکل (۳-۱۱): نمودارهای $x(t)$ بر حسب t برای یک نوسانگر تندمیرا با شرایط اولیه $x(0) \neq 0$ و $\dot{x}(0) \neq 0$

۳-۵ ضریب کیفیت

ضریب کیفیت Q عبارتی است که در سیستمهای نوسانی مکانیکی و همچنین در سیستمهای نوسانی الکتریکی زیاد به آن برخورد می‌کنیم. Q یک کمیت بدون بعد است و نمایشگر درجه میرایی یک نوسانگر است. ضریب کیفیت به صورت 2π برابر نسبت انرژی ذخیره شده به میانگین انرژی تلف شده در یک دوره تعریف می‌شود. بنابراین

$$Q = 2\pi \frac{\text{انرژی ذخیره شده در نوسانگر}}{\text{میانگین انرژی تلف شده در یک دوره تناوب}} \quad (۷۹-۳)$$

اگر P به عنوان اتلاف توان یا آهنگ اتلاف انرژی تعریف شود، و زمان تناوب $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ باشد، می‌توانیم مخرج را به صورت حاصل ضرب $PT_1 = \frac{2\pi P}{\omega_1}$ بنویسیم، و در نتیجه معادله (۷۹-۳) خواهد شد

$$Q = 2\pi \frac{E}{P2\pi/\omega_1} = \frac{E}{P/\omega_1} \quad (۸۰-۳)$$

اما $\frac{1}{\omega_1}$ مدت حرکت برای یک رادیان است. بنابراین

$$Q = \frac{\text{انرژی ذخیره شده در نوسانگر}}{\text{میانگین انرژی تلف شده بر رادیان}} \quad (۸۱-۳)$$

همان طور که باید روشن باشد، Q برای نوسانگر با میرایی ضعیف خیلی بزرگ خواهد بود، در حالی که برای یک نوسانگر با میرایی شدید، خیلی کوچک خواهد بود. ضریب کیفیت Q برای نوسانگر با میرایی ضعیف را می‌توانیم به طریق زیر محاسبه کنیم.

انرژی یک نوسانگر و آهنگی که با آن انرژی از دست می‌دهد با معادلات (۷۲-۳) و (۷۳-۳) داده می‌شوند

$$E(t) = E_0 e^{-2\gamma t} \quad (۷۲-۳)$$

$$\frac{dE}{dt} = -2\gamma E \quad (۷۳-۳)$$

بنابراین، انرژی تلف شده در زمان Δt خواهد بود

$$\Delta E = \left| \frac{dE}{dt} \right| \Delta t = 2\gamma E \Delta t \quad (۸۲-۳)$$

اگر Δt مدت برای یک رادیان نوسان باشد ، $\Delta t = \frac{1}{\omega_1}$ ، خواهیم داشت

$$Q = \frac{E}{\Delta E} = \frac{E}{2\gamma E/\omega_1} = \frac{\omega_1}{2\gamma} \quad (۸۳-۳)$$

برای میرایی ضعیف ، $\omega_1 \cong \omega_0$ ؛ در نتیجه

$$Q = \frac{\omega_1}{2\gamma} = \frac{\omega_0}{2\gamma} \quad (۸۴-۳)$$

اگر γ کوچک باشد ، Q بزرگ خواهد بود ، و برعکس . سیستمهای مکانیکی معمولی ، از قبیل بلندگوها و نوارپاک کن ها ، با میرایی شدید هستند و ممکن است مقدار Q برای آنها از ۵ تا ۱۰۰ باشد . از طرف دیگر ، سیستمهایی از قبیل دیپازونها و تارهای ویولون ممکن است Q بالاتر از ۱۰۰۰ داشته باشند . برای یک کاواک تشدیدی نمونه ای مقدار Q در حدود 10^4 است . سیستمهای با میرایی فوق العاده ضعیف عبارتند از اتمهای تحریک شده ($Q \cong 10^7$) ، هسته های تحریک شده ($Q \cong 10^{12}$) ، و لیزرهای گازی ($Q \cong 10^{14}$) .

مثال (۳-۲) : یک نوسانگر هماهنگ میرا که برای آن m برابر 0.050 kg و k برابر 5.0 N/m است در نظر بگیریم . حرکت این نوسانگر را برای شرایط اولیه $x = x_0 = 10 \text{ cm}$ و $\dot{x} = \dot{x}_0 = 0$ در $t = 0$ ، و ثابت میرایی b برابر با (الف) $0.1 \frac{\text{N-s}}{\text{m}}$ ، (ب) $1.0 \frac{\text{N-s}}{\text{m}}$ ، و (پ) $5 \frac{\text{N-s}}{\text{m}}$ ، مورد بحث قرار دهید .
عبارت

$$\gamma^2 - \omega_0^2 = \left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} \quad (۱)$$

ماهیت نوسانات را ، آن طور که در زیر بحث خواهیم کرد ، تعیین می کند .

$$\text{الف - } b = 0.1 \frac{\text{N-s}}{\text{m}}$$

$$\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = \left[\frac{(0.1)^2}{4(0.05)^2} - \frac{5.0}{0.05} \right] \text{N/m-kg} = -99 \text{ N/m-kg} \quad (۲)$$

که یک کمیّت منفی است و نشان می دهد که حرکت کندمیرا است . جذرگیری از معادله (۱) می دهد

$$\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} = \sqrt{99} \text{ i/s} = 9.95 \text{ i/s} \quad (۳)$$

و

$$\gamma = \frac{b}{2m} = \frac{0.1}{2(0.05)} \text{ N-s/m-kg} = 1.0/\text{s} \quad (۴)$$

به این ترتیب دو ریشه عبارتند از

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = (-1 + \sqrt{99}i)/\text{s} \quad (۵)$$

$$\lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = (-1 - \sqrt{99}i)/\text{s} \quad (۶)$$

عبارت عمومی برای حرکت کند میرا عبارت است از

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \phi) \quad (۷)$$

که ، با استفاده از معادله (۳-۵۹) ، $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{99} / \text{s}$ ، می دهد

$$x(t) = Ae^{-t} \cos(\sqrt{99}t + \phi) \quad (۸)$$

دو ثابت A و ϕ می توانند از شرایط اولیه تعیین شوند . از معادله (۸) خواهیم داشت

$$\dot{x}(t) = -Ae^{-t} \cos(\sqrt{99}t + \phi) - \sqrt{99}Ae^{-t} \sin(\sqrt{99}t + \phi) \quad (۹)$$

در معادلات (۸) و (۹) قرار می دهیم $t = 0$ ، $x(0) = 0.1 \text{ m}$ ، و $\dot{x}(0) = 0$ ، و نتیجه می گیریم

$$0.10 = A \cos \phi \quad \text{and} \quad 0 = -\cos \phi - \sqrt{99} \sin \phi \quad (۱۰)$$

از حل این معادلات نتیجه می شود

$$A = 0.101 \text{ m} \quad \text{and} \quad \phi = -0.10 \text{ radian}$$

به این ترتیب جواب عمومی عبارت است از

$$x(t) = (0.101 \text{ m})e^{-t} \cos(\sqrt{99}t - 0.10) \quad (۱۱)$$

$$b = 1 \frac{N-s}{m} \text{ برای } b =$$

$$\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = \left[\frac{(1.0)^2}{4(0.05)^2} - \frac{5.0}{0.05} \right] N/m \cdot kg = 0 \quad (12)$$

حرکت با میرایی بحرانی با ریشه های

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma = -\frac{b}{2m} = \frac{1.0}{2(0.05)} = 10/s \quad (13)$$

خواهد بود و جواب عمومی

$$x(t) = (B_1 + B_2 t) e^{-\gamma t}$$

به شکل زیر در می آید

$$x(t) = (B_1 + B_2 t) e^{-10t} \quad (14)$$

$$\dot{x}(t) = B_2 e^{-10t} - 10(B_1 + B_2 t) e^{-10t} \quad (15)$$

با به کارگیری شرایط اولیه $t = 0$ ، $x(0) = 0.1 \text{ m}$ ، و $\dot{x}(0) = 0$ در معادلات (۱۴) و (۱۵) ، خواهیم داشت

$$0.10 = B_1$$

$$0 = B_2 - 10B_1$$

که منجر می شود به

$$B_1 = 0.10 \text{ m} \quad \text{و} \quad B_2 = 1.0 \text{ m} \quad (16)$$

بنابراین جواب عمومی برای حرکت با میرایی بحرانی عبارت است از

$$x(t) = (0.10 + 1.0t) e^{-10t} \text{ m} \quad (17)$$

$$b = 5 \frac{N-s}{m} \text{ برای } b =$$

$$\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = \left[\frac{(5.0)^2}{4(0.05)^2} - \frac{5.0}{0.05} \right] N/m \cdot kg = 2400 N/m \cdot kg \quad (18)$$

که یک کمیت مثبتی است و نشان می دهد که حرکت تندیخواه خواهد بود . جذرگیری از

معادله (۱) و به کارگیری معادله (۱۸) می دهد

$$\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} = 49/s \quad (19)$$

و

$$\gamma = \frac{b}{2m} = \frac{5.0}{2(0.05)} = 50/s \quad (20)$$

دو ریشه عبارتند از

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -50 + 49 = -1/s \quad (21)$$

$$\lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -50 - 49 = -99/s \quad (22)$$

جواب عمومی

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

به شکل زیر در می آید

$$x(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-99t} \quad (23)$$

در نتیجه

$$\dot{x}(t) = -A_1 e^{-t} - 99A_2 e^{-99t} \quad (24)$$

A_1 و A_2 با استفاده از شرایط اولیه در $t=0$ ، $x(0) = 0.1$ m، و $\dot{x}(0) = 0$ تعیین

می شوند که می دهد

$$0.10 = A_1 + A_2$$

$$0 = -A_1 - 99A_2$$

یا

$$A_1 = 0.099 \text{ m} \quad \text{و} \quad A_2 = -0.001 \text{ m}$$

به این ترتیب جواب عمومی عبارت است از

$$x(t) = (0.099 \text{ m})e^{-t} - (0.001 \text{ m})e^{-99t} \quad (25)$$

تمرین (۳-۲): در حرکت یک نوسانگر هماهنگ، همان شرایط اولیه در مثال بالا، به استثنای این که (الف) جرم به 0.1 kg تغییر کرده است و k همان مقدار را دارد، (ب) k به 10 N/m تغییر کرده است و جرم همان مقدار را دارد، بحث کنید.

مثال (۳-۳): یک نوسانگر با میرایی بحرانی به جرم m ، ضریب میرایی b ، و با جابه جایی اولیه A در نظر بگیرید. آهنگ اتلاف انرژی و انرژی کل تلف شده را در بازه زمانی از $t=0$ تا $t=m/b$ حساب کنید.

طبق معادله (۳-۷۶)، جواب یک نوسانگر با میرایی بحرانی عبارت است از

$$x(t) = (B_1 + B_2 t)e^{-\gamma t} \quad (1)$$

$$\text{که } \gamma = \frac{b}{2m} \text{ و}$$

$$\dot{x}(t) = (B_2 - \gamma B_1 - \gamma B_2 t)e^{-\gamma t} \quad (2)$$

به کارگیری شرایط اولیه $t=0$ ، $x(0) = A$ ، و $\dot{x}(0) = 0$ در معادلات (۱) و (۲) نتیجه می دهد

$$B_1 = A \quad \text{و} \quad B_2 = \gamma A$$

با قرار دادن این مقادیر در معادلات (۱) و (۲) خواهیم داشت

$$x(t) = A(1 + \gamma t)e^{-\gamma t} = A\left(1 + \frac{b}{2m} t\right)e^{-(b/2m)t} \quad (3)$$

و

$$\dot{x}(t) = -\gamma^2 A t e^{-\gamma t} = -\frac{b^2}{4m^2} A t e^{-(b/2m)t} \quad (4)$$

طبق معادله (۳-۶۸) ب، آهنگ زمانی اتلاف انرژی از طریق میرایی عبارت است از

$$\left| \frac{dW_f}{dt} \right| = |-bv^2| = b\gamma^4 A^2 t^2 e^{-2\gamma t} = \frac{b^5}{16m^4} A^2 t^2 e^{-(b/m)t} \quad (5)$$

انرژی کل تلف شده بین $t=0$ و $t = \frac{m}{b} = \frac{1}{2\gamma}$ ، برابر است با

$$W_T = \int dW_f = b\gamma^4 A^2 \int_{t=0}^{t=1/2\gamma} t^2 e^{-2\gamma t} dt \quad (6)$$

با استفاده از انتگرال استاندارد

$$\int x^m e^{ax} dx = \frac{x^m e^{ax}}{a} - \frac{m}{a} \int x^{m-1} e^{ax} dx$$

معادله (۶) می دهد

$$W_T = b\gamma^4 A^2 \left[e^{-2\gamma t} \left(-\frac{t^2}{2\gamma} - \frac{2t}{(2\gamma)^2} - \frac{2}{(2\gamma)^3} \right) \right] \Big|_{t=0}^{t=1/2\gamma} \quad (7)$$

$$= \frac{b^2 A^2}{16m} (2 - 5e^{-1}) = 0.01 \frac{b^2 A^2}{m}$$

تمرین (۳-۳): با به کارگیری داده های (۳-۲) ، مقادیر $\left| \frac{dW_f}{dt} \right|$ و W_T را محاسبه کنید .

۳-۶ نوسانگر هماهنگ واداشته (نوسانگر هدایت شده)

یک نوسانگر آزاد برای همیشه نوسان می کند . اما ، در حقیقت ، برای هر سیستمی یک نوع میرایی حضور دارد (انرژی تلف می شود ، مثلاً به گرما تبدیل می شود) و سیستم سرانجام از نوسان باز خواهد ایستاد . برای حفظ نوسانات ، باید انرژی از یک منبع خارجی با آهنگی مساوی با آهنگ اتلاف انرژی نوسانگر در محیط میراگر به سیستم رسانده شود . چنین حرکتی که در آن انرژی از خارج تأمین می شود ، نوسانات واداشته یا نوسانات هدایت شده نامیده می شود ، و سیستم نوسانگر واداشته یا نوسانگر هدایت شده نامیده می شود . اگر به سیستم یک نیروی هدایت کننده F_d وارد شود ، نیروی خالص وارد به سیستم با

$$F_{net} = F_s + F_f + F_d \quad (85-3)$$

داده می شود که

$$F_s = -kx , \quad F_f = -b\dot{x}$$

و از قانون دوم نیوتن داریم $F_{net} = m\ddot{x}$. معادله (۸۵-۳) نمی تواند حل شود مگر این که شکل نیروی اعمال شده F_d را بدانیم . چون بحث خود را به نوسانگرهای خطی محدود کرده

بودیم ، راحت تر است که فرض کنیم نیروی هدایت کننده F_d شکل سینوسی دارد ،

$$F_d = F_0 \cos(\omega t + \theta_0) \quad (۸۶-۳)$$

برای این فرض که نیروی هدایت کننده به این شکل است دلایل خوبی داریم . اولاً ، در بسیاری از وضعیتهای واقعی ، درست چنین نیرویی حضور دارد ، به عنوان مثال ، در یک الکترون مقید ، وقتی امواج الکترومغناطیسی به آن بتابد ، یعنی در پراکندگی نور از الکترون مقید ، چنین نیرویی حضور دارد . ثانیاً ، هر تابع دوره‌ای از زمان می‌تواند به صورت حاصل جمع چندین جمله هماهنگ (یا سینوسی) نمایش داده شود . با استفاده از روش سری فوریه ، می‌توانیم حرکت سیستم را برای هر نیروی هدایت کننده دوره‌ای تعیین کنیم .

می‌توانیم این معادلات را ترکیب کنیم و معادله‌ی زیر را که حرکت یک نوسانگر هماهنگ هدایت شده را توصیف می‌کند بنویسیم

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t + \theta_0) \quad (۸۷-۳)$$

این معادله دیفرانسیل خطی ، مرتبه دوم ، ناهمگن است . جواب معادله (۸۷-۳) ، بنابر قضیه زیر ، به صورت مجموع دو عبارت داده می‌شود :

اگر $x_i(t)$ یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل ناهمگن باشد ، و تابع تکمیلی $x_h(t)$ جواب معادله همگن متناظر [یعنی ، معادله (۸۷-۳) با طرف راست صفر] باشد ، $x(t) = x_i(t) + x_h(t)$ نیز جواب معادله دیفرانسیل ناهمگن است .

بنابراین جواب عمومی معادله (۸۷-۳) عبارت است از

$$x(t) = x_i(t) + x_h(t) \quad (۸۸-۳)$$

که جواب معادله همگن

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

است . جواب عمومی این معادله همگن در بخش ۳-۴ به وسیله هر یک از سه معادله (۳-۶۰) ، (۳-۶۱) ، یا (۳-۶۲) داده شده است . در نتیجه

$$x_h(t) = e^{-\gamma t} [A_1 e^{+i\omega_1 t} + A_2 e^{-i\omega_1 t}] \quad (۳-۸۹ الف)$$

$$x_h(t) = e^{-\gamma t}(B \sin \omega_1 t + C \cos \omega_1 t) \quad (۳-۸۹ ب)$$

$$x_h(t) = A_h e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \phi_h) \quad (۳-۸۹ پ)$$

چون نوسانات یک نوسانگر میرا سرانجام به صفر واپاشیده می شود ، قسمت x_h جواب جمله گذرا نامیده می شود . بعد از مدتی ، قسمت x_h جواب اهمیت خود را از دست می دهد ؛ در نتیجه ، برای یک جواب حالت پایا باید توجه خود را به پیدا کردن جواب خصوصی $x_i(t)$ معطوف کنیم .

طبق معادله (۳-۸۷) ، نیروی اعمال شده بطور سینوسی تغییر می کند ، بنابراین انتظار داریم که جواب حالت پایای $x_i(t)$ بطور سینوسی تغییر کند . اگر در طرف چپ معادله جمله \dot{x} نبود ، جوابی به شکل $x = A \cos \omega t$ کاملاً قابل قبول می بود . برای رعایت این نکته ، باید جوابی به شکل زیر داشته باشیم

$$x = A \cos(\omega t \pm \phi) \quad (۳-۹۰)$$

جواب به شکل

$$x_i = A \cos(\omega t - \phi) \quad (۳-۹۱)$$

را در نظر بگیریم . برای محاسبه A و ϕ ، به جای x_i در معادله (۳-۸۷) مقدار قرار می دهیم ، و بعد از گذاردن $\theta_0 = 0$ ، خواهیم داشت

$$-m\omega^2 A \cos(\omega t - \phi) - b\omega A \sin(\omega t - \phi) + kA \cos(\omega t - \phi) = F_0 \cos \omega t$$

بعد از مرتب سازی داریم

$$(kA \cos \phi - m\omega^2 A \cos \phi + b\omega A \sin \phi) \cos \omega t$$

$$- (kA \sin \phi - m\omega^2 A \sin \phi - b\omega A \cos \phi) \sin \omega t = F_0 \cos \omega t$$

برای این که این رابطه برای تمام مقادیر t برقرار باشد ضرایب جمله های $\sin \omega t$ و $\cos \omega t$ در هر دو طرف باید جداگانه برابر باشند ، یعنی

$$(k - m\omega^2) \cos \phi + b\omega \sin \phi = \frac{F_0}{A} \quad (۳-۹۲)$$

$$(k - m\omega^2) \sin \phi - b\omega \cos \phi = 0 \quad (۳-۹۳)$$

از معادله (۳-۳۹) عبارتی برای زاویه فاز به صورت زیر به دست می آوریم

$$\tan \phi = \frac{b\omega}{k - m\omega^2} = \frac{b\omega/m}{k/m - \omega^2} \quad (۹۴-۳)$$

با به کارگیری نمادگذاری معمولی $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ و $\frac{b}{2m} = \gamma$ ، خواهیم داشت

$$\tan \phi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (۹۵-۳)$$

که از آن به دست می آوریم

$$\sin \phi = \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \quad (۹۶-۳)$$

$$\cos \phi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \quad (۹۷-۳)$$

اگر این کمیات را در معادله (۳-۹۲) قرار دهیم ، خواهیم داشت

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \quad (۹۸-۳)$$

به این ترتیب جواب خصوصی معادله ناهمگن عبارت است از

$$x_i(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t - \phi) \quad (۹۹-۳)$$

که در آن

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (۱۰۰-۳)$$

یک روش کمی متفاوت و آسان تر برای به دست آوردن جواب عمومی وجود دارد ، که قبل از اقدام به پیدا کردن جواب عمومی کامل و نهایی توضیح داده خواهد شد . نیروی هدایت کننده F_d که با معادله (۳-۸۶) داده شده است ، می تواند به شکل نمایی زیر نوشته شود .

$$F_d = F_0 e^{i(\omega t + \theta_0)} \quad (۱۰۱-۳)$$

زیرا داریم

$$e^{i(\omega t + \theta_0)} = \cos(\omega t + \theta_0) + i \sin(\omega t + \theta_0) \quad (102-3)$$

که می‌رساند که ، اگر قسمت حقیقی معادله (۱۰۲-۳) را بگیریم ، خواهیم داشت

$$\operatorname{Re} F_d = F_0 \cos(\omega t + \theta_0) \quad (103-3)$$

بنابراین معادله دیفرانسیل حاصل در صورتی برقرار خواهد بود که قسمت‌های حقیقی و موهومی دو طرف معادله برابر باشند . می‌توانیم معادله (۱۰۳-۳) را به صورت زیر بنویسیم

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 e^{i(\omega t + \theta_0)} \quad (104-3)$$

مانند قبل ، جوابی به شکل

$$x_i = x = A e^{i(\omega t + \theta)} \quad (105-3)$$

را آزمایش می‌کنیم . با جایگذاری در معادله (۱۰۴-۳) و حذف ضرایب مشترک ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} -m\omega^2 A + i b \omega A + k A &= F_0 e^{i(\theta_0 - \theta)} \\ &= F_0 \cos(\theta_0 - \theta) + i F_0 \sin(\theta_0 - \theta) \end{aligned}$$

اکنون زاویه فاز یا اختلاف فاز را به صورت اختلاف فاز بین نیروی اعمال شده و جواب x یعنی $\Phi = \theta_0 - \theta$ ، تعریف کنیم (اگر $\theta_0 = 0$ باشد ، $\Phi = -\theta$) . با برابر قرار دادن قسمت‌های حقیقی و موهومی دو طرف معادله فوق خواهیم یافت

$$F_0 \cos \phi = A(k - m\omega^2) \quad (106-3 \text{ الف})$$

$$F_0 \sin \phi = -b\omega A \quad (106-3 \text{ ب})$$

این معادلات را اکنون می‌توان حل کرد و دامنه A و زاویه فاز Φ را به دست آورد . از این نتایج ، $\sin \Phi$ و $\cos \Phi$ به دست می‌آیند . بنابراین جواب خصوصی معادله ناهمگن همانند جوابی است که با (۹۹-۳) و (۱۰۰-۳) داده شده است . در واقع ، معادله (۹۱-۳) قسمت حقیقی معادله (۱۰۵-۳) است . معادله (۹۹-۳) هیچ ثابت اختیاری ندارد ، در نتیجه نمی‌تواند جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم باشد . اما با به کارگیری این جواب به همراه جواب همگن x_h ، جواب عمومی را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$x = x_h + x_i$$

$$= A_h e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \phi_h) + \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \phi) \quad (107-3)$$

این جواب ، همان طور که انتظار می رود ، شامل دو ثابت دلخواه (انتگرال گیری) A_h و ϕ_h است . Φ یک ثابت انتگرال گیری نیست و با معادله (۱۰۰-۳) داده می شود . قسمت اول جواب با فرکانس ω_1 نوسان می کند . به علت میرایی ، نوسانات بعد از مدت زیادی ، برای $t \gg \frac{1}{\gamma}$ می میرند . جواب همگن x_h جواب گذرا نامیده می شود ، در حالی که جواب خصوصی x_i جواب حالت پایا نامیده می شود . جواب عمومی x ، به استثنای شروع نوسان که جمله گذرا هنوز سهمی در نوسان دارد ، مستقل از تأثیر شرایط اولیه است . شکل (۱۲-۳) این مسأله را برای دو مورد خاص روشن می سازد : (الف) برای $\omega < \omega_1$ ، یعنی وقتی که فرکانس هدایت کننده کمتر از فرکانس طبیعی است ، (ب) برای $\omega > \omega_1$ ، یعنی فرکانس هدایت کننده بزرگتر از فرکانس طبیعی است . برای هر دو مورد ، نمودارهای جواب همگن x_h نسبت به t با منحنیهای خط چین ، و نمودارهای جواب خصوصی x_i نسبت به t با منحنیهای پیوسته نمایش داده شده اند . منتجه این دو نمودار ، یعنی ، نمودارهای $x_h + x_i$ نسبت به t با منحنی پرنرنگ نمایش داده شده اند . همان طور که از این نمودارها روشن است ، جواب گذرای x_h تنها در شروع مؤثر است و با گذشت زمان به صفر واپاشیده می شود ، در حالی که جواب حالت پایا با زمان پایدار می ماند . به این ترتیب جواب گذرا تنها در شروع در جواب عمومی تأثیر دارد . به علاوه ، اگر $\omega < \omega_1$ باشد جمله گذرای x_h ، همان طور که شکل (۱۲-۳ الف) نشان می دهد ، باعث ایجاد یک واپیچیدگی در موج وار سینوسی منتجه می شود . از طرف دیگر ، اگر $\omega > \omega_1$ باشد ، جمله گذرای x_h ، به جای ایجاد واپیچیدگی ، دارای تأثیر مدولاسیون نوسانات ناشی از نیروی هدایت کننده است . البته ، در هر دو مورد ، بعد از این که جمله گذرا (منحنی خط چین) از بین رفت ، تابع نیرو حاکم بر نوسانات خواهد بود . علاوه بر مقادیر نسبی ω و ω_1 ، شرایط اولیه نیز روی جزئیات حرکت تأثیر خواهند داشت ، اما فقط در شروع . توجه به این نکته مهم است که جمله های گذرا نقش مهمی در مدارهای الکتریکی ایفا می کنند . در طراحی این گونه مدارها ، لازم است که وقتی در ابتدا مدار بسته است از ولتاژها و جریانهای

قله ای پرهیز کنیم .

چون برای $t \gg \frac{1}{\gamma}$ داریم $x_i \equiv x$ ، توجه خود را به بحث در جواب پایا ، یعنی ،

جواب خصوصی x_1 که با معادلات (۳-۹۹) و (۳-۱۰۰) داده شده است، متمرکز خواهیم کرد. این جواب مستقل از شرایط اولیه است.

مثال (۳-۴): یک نوسانگر میرا با $\gamma = \frac{\omega_0}{4}$ در نظر بگیریم که نیروی هدایت کننده $F = F_0 \cos \omega t$ به آن وارد می شود. جواب عمومی $x(t)$ را پیدا کنید.
معادله دیفرانسیل مرتبه دومی که نوسانگر هدایت شده را توصیف می کند عبارت است از

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

یا

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (۱)$$

که در آن $\gamma = \frac{\omega_0}{4}$ و

$$\omega_1^2 = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2} = 0.97\omega_0 \quad (۲)$$

جواب گذرا (پاهمگن)

$$x_h(t) = e^{-\gamma t} (A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \sin \omega_1 t) \quad (۳)$$

به شکل زیر در می آید

$$x_h(t) = e^{-\omega_0 t/4} (A_1 \cos 0.97t + A_2 \sin 0.97t) \quad (۴)$$

فرض کنیم برای نیروی اعمال شده $F = F_0 \cos \omega t$ ، جواب خصوصی به صورت زیر باشد

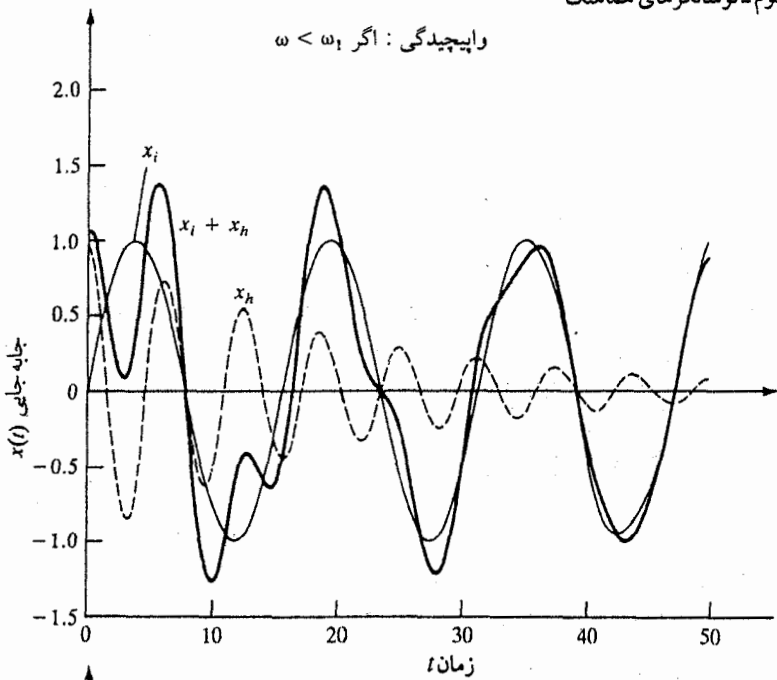
$$x_1(t) = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t \quad (۵)$$

$$\dot{x}_1(t) = -\omega B_1 \sin \omega t + \omega B_2 \cos \omega t \quad (۶)$$

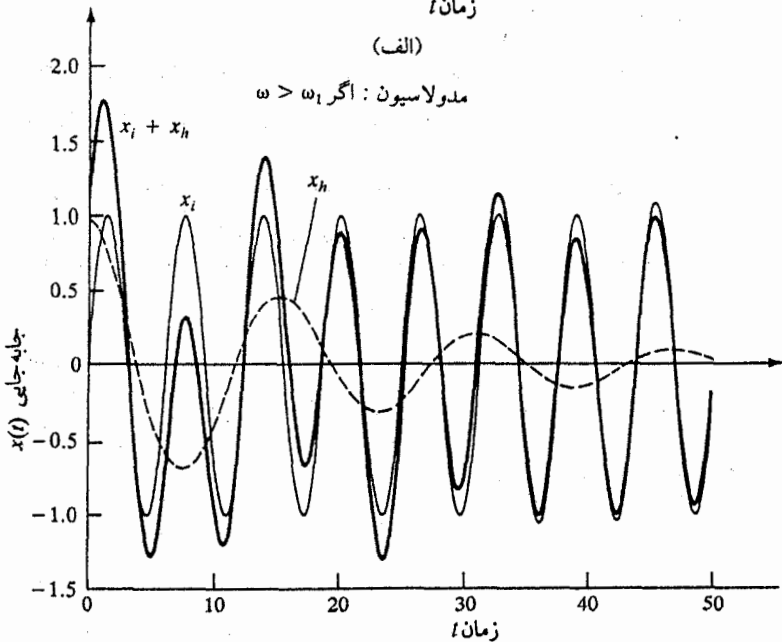
$$\ddot{x}_1(t) = -\omega^2 B_1 \cos \omega t - \omega^2 B_2 \sin \omega t \quad (۷)$$

قرار دادن این سه معادله در معادله (۱) و مرتب سازی، می دهد

$$\begin{aligned} & (-\omega^2 B_1 + 2\gamma\omega B_2 + \omega_0^2 B_1) \cos \omega t + (-\omega^2 B_2 - 2\gamma\omega B_1 + \omega_0^2 B_2) \sin \omega t \\ & = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (۸) \end{aligned}$$

وایچیدگی : اگر $\omega < \omega_1$ 

(الف)

مدولاسیون : اگر $\omega > \omega_1$ 

(ب)

شکل (۳-۱۲) : تأثیر جمله گذرا روی جواب حالت پایا برای مورد (الف) $\omega < \omega_1$ و(ب) $\omega > \omega_1$ ، که ω فرکانس هدایت‌کننده و ω_1 فرکانس طبیعی است

از برابر قرار دادن ضرایب داریم

$$(\omega_0^2 - \omega^2)B_1 + 2\gamma\omega B_2 = \frac{F_0}{m} \quad (۹)$$

$$-2\gamma\omega B_1 + (\omega_0^2 - \omega^2)B_2 = 0 \quad (۱۰)$$

از این معادلات B_1 و B_2 را برحسب F_0 پیدا می‌کنیم

$$B_1 = \frac{F_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]} \quad (۱۱)$$

$$B_2 = \frac{2\gamma\omega F_0}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]} \quad (۱۲)$$

در نتیجه جواب عمومی عبارت است از

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + x_i(t) \\ &= e^{-\omega_0 t/4} (A_1 \cos 0.97t + A_2 \sin 0.97t) \\ &\quad + B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t \end{aligned} \quad (۱۳)$$

که B_1 و B_2 توسط معادلات (۱۱) و (۱۲) داده شده‌اند، و A_1 و A_2 باید با استفاده از شرایط اولیه در معادله (۱۳) به روش معمولی محاسبه شوند (رک مثال (۳-۲)).

تمرین (۳-۳): مثال را با نیروی هدایت‌کننده $F = F_0 \cos \omega t$ با شرایط اولیه $x(0) = 0$ و $\dot{x}(0) = 0$ کامل کنید، یعنی A_1 و A_2 را محاسبه کنید.

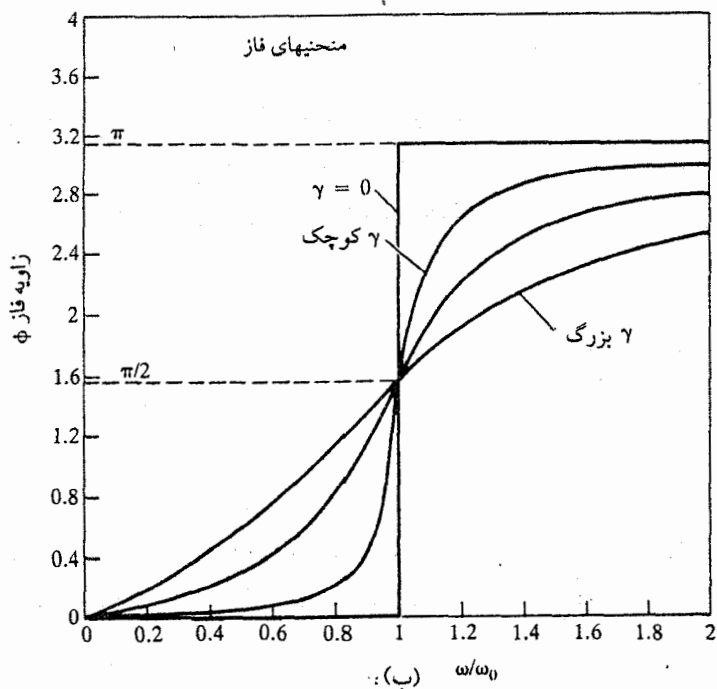
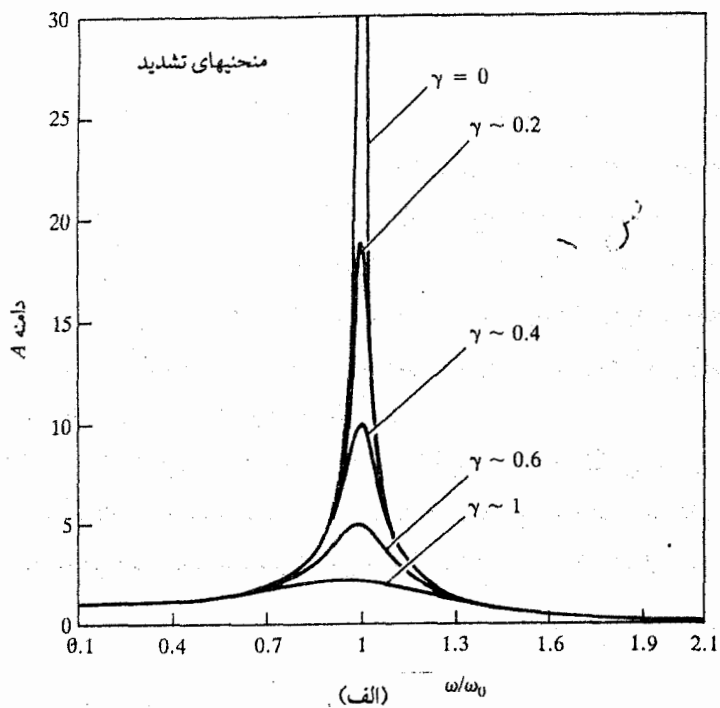
۳-۷ تشدید دامنه

دامنه A و زاویه فاز Φ ی یک حرکت پایا، طبق معادلات (۳-۹۸) و (۳-۱۰۰) عبارتند از

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \quad (۳-۱۰۸)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (۳-۱۰۹)$$

برای یک مقدار معین ω_0 ، تغییرات A و Φ برحسب فرکانس هدایت‌کننده ω برای مقادیر مختلف γ در شکل (۳-۱۳) نمایش داده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، رفتار این کمیات شدیداً به نسبت $\frac{\omega}{\omega_0}$ بستگی دارد.



شکل (۳-۱۳) : تغییرات A و ϕ با فرکانس هدایت کننده ω برای مقادیر مختلف γ

همان طور که قبلاً بیان شد، Φ اختلاف فاز بین نیروی هدایت کننده F و حرکت حاصل x را به ما می دهد، یعنی، نمایشگر تأخیر بین عمل و پاسخ است. همان طور که شکل (۳-۱۳) نشان می دهد، این تأخیر فاز، که برای $\omega = \pi$ برابر با $\phi = 0$ است، برای $\omega = \omega_0$ برابر با $\phi = \frac{\pi}{2}$ ، و برای $\omega \rightarrow \infty$ برابر با $\Phi = \pi$ است، یعنی در فرکانسهای خیلی بالا، نوسانات سیستم با نیروی هدایت کننده 180° درجه اختلاف فاز دارد، توجه به این نکته جالب است که وقتی $\gamma \rightarrow 0$ ، تغییرات فاز سریعتر و سریعتر می شود، و در مورد حدی وقتی $\gamma = 0$ است، فاز بطور ناگهانی در $\omega = \omega_0$ از 0 به π تغییر می کند.

از شکل (۳-۱۳) روشن است که، بسته به مقادیر γ ، یک فرکانس هدایت کننده ای وجود دارد که در آن دامنه A بیشینه است. فرکانسی که در آن دامنه بیشینه است فرکانس تشدید دامنه، ω_r ، نامیده می شود. این فرکانس ω_r می تواند از معادله (۳-۱۰۸) با قرار دادن

$$\left. \frac{dA}{d\omega} \right|_{\omega = \omega_r} = 0 \quad (۳-۱۱۰)$$

محاسبه شود. از حل معادله به دست آمده نتیجه می شود

$$\omega = \omega_r = (\omega_0^2 - 2\gamma^2)^{1/2} \quad (۳-۱۱۱)$$

که بیان می دارد وقتی ضریب میرایی کاهش می یابد فرکانس تشدید افزایش می یابد، و در حد وقتی $\gamma \rightarrow 0$ ، ω_r به سمت ω_0 ، فرکانس طبیعی یک نوسانگر آزاد، میل می کند. در مورد میرایی فوق العاده کوچک، می توانیم طرف راست معادله (۳-۱۱۱) را با به کارگیری قضیه دو جمله ای بسط دهیم، یعنی

$$\omega_r = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{2\gamma^2}{\omega_0^2} + \dots \right)$$

یا

$$\omega_r \approx \omega_0 - \frac{\gamma^2}{\omega_0} \quad (۳-۱۱۲)$$

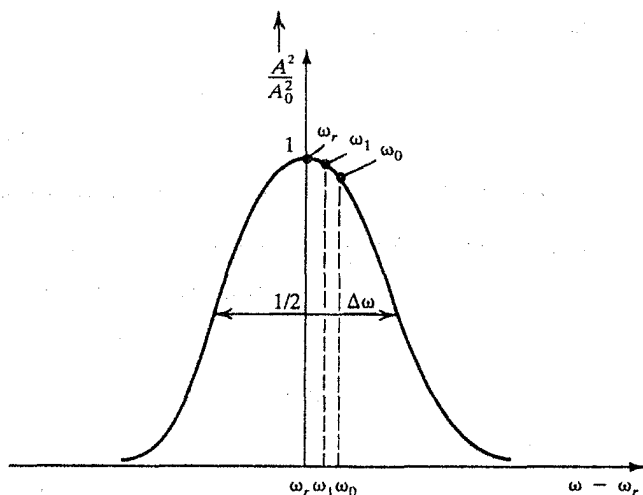
معادلات (۳-۱۱۱) و (۳-۱۱۲) برای یک نوسانگر هدایت شده را می توان با مورد یک نوسانگر میرا که قبلاً مورد بحث بود، مقایسه کرد؛ یعنی با

$$\omega_1 = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2}$$

یا ، برای γ کوچک ، با

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{\gamma^2}{2\omega_0} \quad (۱۱۳-۳)$$

درحالی که برای نوسانگر آزاد $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. بنابراین ω_1 در طرف راست ω_r قرار می گیرد ، و ω_0 باز هم دورتر از ω_r است . در $\omega = \omega_r$ ، همان طور که شکل (۳-۱۴) نشان می دهد ، داریم

$$\frac{A^2}{A_0^2} = 1$$


شکل (۳-۱۴) : موقعیتهای نسبی فرکانس تشدید ω_r ، فرکانس طبیعی ω_1 ، و فرکانس طبیعی آزاد ω_0

به این ترتیب ، بیشینه دامنه $A = A_0$ را که در $\omega = \omega_r$ رخ می دهد می توان از معادلات (۳-۱۰۸) و (۳-۱۱۱) به صورت زیر به دست آورد .

$$A = \frac{F_0/m}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \quad (۱۱۴-۳)$$

در مورد میرایی کوچک ، فرض می کنیم $\gamma \rightarrow 0$ ، در نتیجه

$$A_0 \approx \frac{F_0}{2m\gamma\omega_0} \approx \frac{F_0}{b\omega_0} \quad (۱۱۵-۳)$$

روشن است که اگر b کوچک باشد یا $\gamma \rightarrow 0$ ، دامنه A_0 خیلی بزرگ می شود. برای سیستم نامیرا، $b = 0$ و در نتیجه $A_0 = \infty$ ، اما به سختی سیستمی پیدا می شود که نامیرا باشد.

واقعیت خیلی بزرگ بودن دامنه نوسانات در فرکانس تشدید هم اثرات مطلوب دارد و هم اثرات نامطلوب. در مورد مدارهای الکتریکی که در تنظیم رادیوها و در چند نوع از آلات موسیقی مانند لوله های ارگ به کار می روند، داشتن یک پاسخ بزرگ برای یک نیروی هدایت کننده کوچک مطلوب است. از طرف دیگر، داشتن دامنه خیلی بزرگ در سیستمهای مکانیکی، مانند فنرهای اتومبیل یا فنرهایی که برای سوار کردن یک موتور الکتریکی به کار می روند، بسیار نامطلوب است. در این جا هدف کمینه کردن انتقال ارتعاشات است.

۳-۸ تشدید انرژی

در بیشتر وضعیتهای فیزیکی در طبیعت که با سیستمهای نوسانی سر و کار دارند، کمیتی که بطور تجربی مشاهده می شود انرژی است نه دامنه. همچنین انرژی کل یک سیستم نوسانی متناسب با مربع دامنه در نزدیکیهای تشدید است. در نتیجه باید در جستجوی تغییرات A^2 نسبت به ω باشیم. یک بار دیگر فرض می کنیم که ω_0 تثبیت شده است. برای حرکت حالت پایا، دامنه A ثابت است، و می توانیم بنویسیم

$$x = A \cos(\omega t + \phi) \quad (3-116 \text{ الف})$$

$$v = \dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad (3-116 \text{ ب})$$

که به ما می دهند

$$K(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \quad (3-117)$$

$$U(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) \quad (3-118)$$

$$E(t) = K(t) + U(t) \quad (3-119)$$

$$= \frac{1}{2}A^2 [m\omega^2 \sin^2(\omega t + \phi) + k \cos^2(\omega t + \phi)]$$

اکنون میانگینهای زمانی $K(t)$ ، $U(t)$ و $E(t)$ را در موردی که A با تغییر می کند، و با توجه به این که برای میانگین روی یک دوره تناوب داریم

از $\langle \cos^2(\omega t + \phi) \rangle = \langle \sin^2(\omega t + \phi) \rangle = \frac{1}{2}$ ، حساب کنیم . با قرار دادن به جای A از معادله (۳-۱۰۸) در معادله (۳-۱۱۷) ، خواهیم داشت

$$K(t) = \frac{1}{2} m \omega^2 \frac{F_0^2 / m^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \sin^2(\omega t + \phi) \quad (۳-۱۲۰)$$

یعنی

$$\langle K \rangle = \frac{1}{4} \frac{F_0^2}{m} \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \quad (۳-۱۲۱)$$

مقدار ω که برای آن $\langle K \rangle$ بیشینه است از رابطه

$$\left. \frac{d\langle K \rangle}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_k} = 0 \quad (۳-۱۲۲)$$

به دست می آید که می دهد

$$\omega_k = \omega_0 \quad (۳-۱۲۳)$$

یعنی تشدید انرژی جنبشی در فرکانس طبیعی آزاد ω_0 رخ می دهد .

چون $U(t) = \frac{1}{2} kx^2$ ، تشدید انرژی پتانسیل باید در همان موقعیت تشدید دامنه رخ بدهد ، یعنی فرکانس تشدید انرژی پتانسیل ω_u از معادله (۳-۱۱۱) برابر است با

$$\omega_u = \omega_r = (\omega_0^2 - 2\gamma^2)^{1/2} \quad (۳-۱۲۴)$$

از این که تشدید انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل در فرکانسهای متفاوت رخ می دهد نباید تعجب کرد . علت آن این است که ما با یک نوسانگر میرا سر و کار داریم که یک سیستم ناپایستار است . انرژی بطور پیوسته به وسیله محیط میراگر کشیده می شود . میانگین انرژی کل $\langle E \rangle$ از معادله (۳-۱۱۹) عبارت است از

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{1}{2} A^2 m \omega^2 \langle \sin^2(\omega t + \phi) \rangle + \frac{1}{2} k A^2 \langle \cos^2(\omega t + \phi) \rangle \\ &= \frac{1}{4} A^2 (m \omega^2 + k) = \frac{1}{4} m A^2 (\omega^2 + \omega_0^2) \end{aligned} \quad (۳-۱۲۵)$$

با قرار دادن به جای A از معادله (۳-۱۰۸) ، خواهیم داشت

$$\langle E \rangle = \frac{1}{4} \frac{F_0^2}{m} \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \quad (۳-۱۲۶)$$

برای میرایی خیلی ضعیف ، $\gamma \ll \omega_0$ ، می توانیم بنویسیم

$$\omega^2 + \omega_0^2 \approx 2\omega_0^2$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = [(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)] \approx 2\omega_0(\omega - \omega_0)$$

با بردن این تقریبهها در معادله (۳-۱۲۶) و با توجه به این که E تابعی از ω است ، و گذاردن $E(\omega)$ به جای $E(t)$ ، و ساده سازی ، خواهیم داشت

$$\langle E(\omega) \rangle = \frac{1}{8} \frac{F_0^2}{m} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \quad (۳-۱۲۷)$$

این معادله را به شکل

$$\langle E(\omega) \rangle \frac{8m}{F_0^2} = \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} = L(\omega) \quad (۳-۱۲۸)$$

بازنویسی می کنیم که در آن تابع $L(\omega)$ تمام بستگیهای فرکانسی لازم $\langle E(\omega) \rangle$ را در بردارد . نمودار تابع $L(\omega)$ نمودار تشدید یا لورنتسی نامیده می شود . در شکل (۳-۱۵) چند تا از این نمودارها برای مقادیر متفاوت γ نشان داده شده است . توجه کنیم که برای γ بزرگ ، این تابع بجز در نزدیکی فرکانس تشدید ω_0 عملاً صفر است .

ارتفاع بیشینه نمودار تشدید در ω_0 رخ می دهد و برابر است با $\frac{1}{\gamma^2}$. این ارتفاع [از

معادله (۳-۱۲۷) یا (۳-۱۲۸)] برای

$$(\omega - \omega_0)^2 = \gamma^2 \quad (۳-۱۲۹)$$

یا

$$\omega - \omega_0 = \pm \gamma \quad (۳-۱۳۰)$$

به نصف بیشینه اش تقلیل می یابد . معادله فوق بیان می کند که نمودار تشدید انرژی در $\omega_+ = \omega_0 + \gamma$ و در $\omega_- = \omega_0 - \gamma$ در طرف فرکانسهای بالاتر از ω_0 ، و در طرف فرکانسهای پایین تر از ω_0 ، به نصف بیشینه سقوط می کند . پهنای نمودار در نیمه بیشینه ، موسوم به پهنای تشدید ، توسط $\omega_+ - \omega_- = 2\gamma$ می شود . همان طور که در شکل (۳-۱۵) نشان داده شده است ، پهنای تشدید را با $\Delta\omega$ نمایش می دهیم ، در نتیجه

$$\Delta\omega = 2\gamma \quad (۱۳۱-۳)$$

وقتی γ کاهش می یابد ، پهنای $\Delta\omega$ نمودار نیز کاهش می یابد ، که معنی آن این است که نمودار بلندتر و باریکتر می شود . این مطلب می رساند که گستره فرکانسهایی که سیستم به آن پاسخ می دهد تنگ تر می شود ؛ یعنی یک سیستم نوسان کننده هر چه بیشتر فرکانس - گزین می شود .

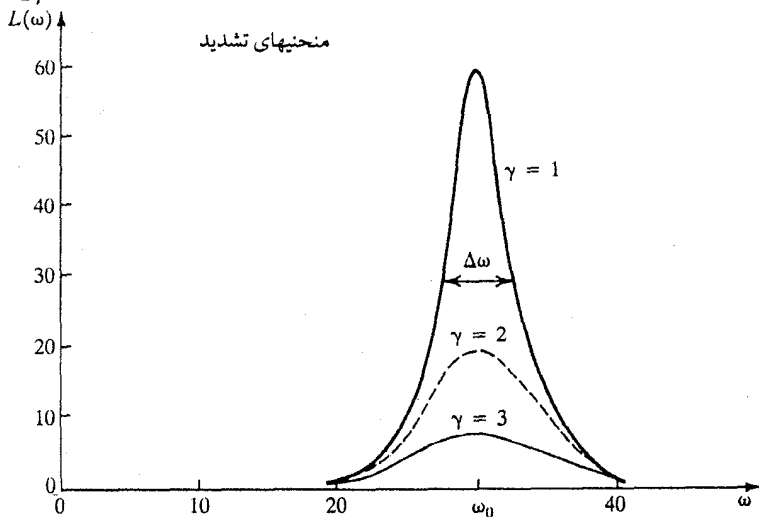
ویژگی فرکانس - گزینی یک سیستم نوسان کننده با ضریب کیفیت Q مشخص می شود . در بخش (۳-۵) ، ضریب کیفیت را به صورت نسبت انرژی کل ذخیره شده در نوسانگر به انرژی تلف شده بر رادیان تعریف کردیم . برای یک نوسانگر با میرایی ضعیف ، نشان دادیم [معادله (۳-۸۴)] که

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2\gamma} \quad (۸۴-۳)$$

وقتی چنین نوسانگری هدایت شود ، پهنای تشدید برابر با $\Delta\omega = 2\gamma$ خواهیم داشت ، و می توانیم بنویسیم

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\text{فرکانس تشدید}}{\text{پهنای فرکانسی نمودار تشدید}} \quad (۱۳۲-۳)$$

می توانیم با اعمال مستقیم تعریف انرژی ای Q به یک نوسانگر هدایت شده ثابت کنیم $Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}$.



شکل (۳-۱۵) : نمودار تشدید یا لورنتسی ، یعنی نمودارهای $L(\omega)$ بر حسب ω برای مقادیر مختلف γ

روشن می شود که سیستمهای با مقدار بزرگ Q پهنای تشدید خیلی کوچکی دارند و در نتیجه در پاسخ فرکانسی به نیروهای هدایت کننده خارجی بسیار گزینش گراند. اگر نمودار تشدید تیز باشد، سیستم تنها وقتی پاسخ می دهد که فرکانس هدایت کننده برابر با فرکانس تشدید باشد. همان طور که قبلاً در بخش (۳-۵) ذکر شد، Q می تواند برای سیستمهای مکانیکی بین ۵ تا ۱۰۰، برای سیستمهای اتمی $10^8 \approx$ ، و در مورد لیزرهای گازی $10^{14} \approx$ باشد. چنین واقعیهایی برای تعریف و ساختن معیارهای زمانی با استفاده از ساعتها اتمی به کار رفته اند.

۳-۹ آهنگ اتلاف انرژی

بالاخره آهنگی را که با آن انرژی تلف می شود، که باید برابر با آهنگی باشد که با آن کار انجام می گیرد، حساب کنیم. از معادله عمومی یک نوسانگر ادا داشته، با $\theta_0 = 0$ ،

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (3-87)$$

شروع می کنیم و دو طرف را در \dot{x} ضرب می کنیم

$$m\dot{x}\ddot{x} + b\dot{x}^2 + kx\dot{x} = F_0\dot{x} \cos \omega t$$

این معادله را می توانیم به شکل

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right) + b\dot{x}^2 = (F_0 \cos \omega t)\dot{x} \quad (3-133 \text{ الف})$$

یا

$$\frac{d}{dt} (K + U) + b\dot{x}^2 = (F_0 \cos \omega t)\dot{x} \quad (3-133 \text{ ب})$$

بنویسیم. یعنی،

$$\left(\begin{array}{c} \text{آهنگ زمانی تغییرات} \\ U \text{ و } K \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{آهنگی که با آن انرژی} \\ \text{تلف می شود} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{آهنگی که با آن انرژی به وسیله} \\ \text{نیروی هدایت کننده تأمین می شود} \end{array} \right)$$

با قرار دادن به جای x و \dot{x} از جواب خصوصی، معادله (۳-۹۰)، می توانیم ثابت کنیم که توان

میانگین $\langle P \rangle$ که با آن نیروی هدایت کننده کار انجام می دهد عبارت است از

$$\langle \dot{P} \rangle = \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \langle \dot{x} F_0 \cos \omega t \rangle$$

یا

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \dot{x}_0 F_0 \sin \phi \quad (۱۳۴-۳)$$

که در آن \dot{x}_0 سرعت پیشینه است که در $\omega = \omega_0$ رخ می دهد ، به علاوه ، می توانیم نشان دهیم که (بعد از این که جمله گذرا از بین رفت)

$$\langle P \rangle = \langle b \dot{x}^2 \rangle \quad (۱۳۵-۳)$$

همان طور که باید باشد .

طرف راست معادله (۳-۱۳۳) را که ، بعد از قرار دادن به جای \dot{x} ، می توان

به صورت

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 F_0 \cos \omega t &= -F_0 \omega A \cos \omega t \sin (\omega t - \phi) \\ &= F_0 \omega A (\cos^2 \omega t \sin \phi - \cos \omega t \sin \omega t \cos \phi) \end{aligned} \quad (۱۳۶-۳)$$

نوشت در نظر بگیریم . جمله اول طرف راست مثبت است ، که معنی آن این است که نیروی هدایت کننده انرژی تولید می کند ، در حالی که جمله دوم منفی است ، و منفی آن این است که مکانیسم هدایت کننده انرژی دریافت می دارد ، یعنی ، نیروی هدایت کننده به تناوب تولید و جذب انرژی می کند . این ممکن است عجیب به نظر بیاید ، اما واقعیتی است که در عمل رخ می دهد . باید یادآوری کرد که مقدار میانگین $\cos^2 \omega t$ برابر است با $\frac{1}{2}$ است ، در حالی که میانگین $(\sin \omega t \cos \omega t)$ صفر است . در نتیجه در مجموع عامل هدایت کننده بیشتر انرژی تولید می کند تا جذب .

مسائل

۱-۳ نتایج زیر را برای یک نوسانگر هماهنگ ساده اثبات کنید؛ یعنی، معادلات (۳-۴۹) و (۳-۵۰) را اثبات کنید.

$$\langle V \rangle_{\text{space}} = \frac{1}{6} kA^2, \quad \langle K \rangle_{\text{space}} = \frac{1}{3} kA^2$$

$$\langle E \rangle_{\text{space}} = \langle V \rangle_{\text{space}} + \langle K \rangle_{\text{space}} = \langle E \rangle_{\text{time}}$$

۲-۳ یک جرم کوچک m در یک جعبه به جرم M ، که به فنر قائمی با ثابت سختی k بسته شده است، قرار دارد. وقتی جعبه از موقعیت ترازمندی y_0 به y_1 جابه جا شده و رها می شود، حرکت هماهنگ ساده انجام می دهد، و اکنش بین m و M را به صورت تابعی از زمان محاسبه کنید. آیا جرم m همیشه در تماس با جعبه خواهد ماند؟ اگر نه، چه چیزی تعیین می کند که با M در تماس نخواهد بود؟ مقدار h از موقعیت ترازمندی را که در آن این تماس قطع می شود حساب کنید.

۳-۳ یک قطعه چوب به سطح مقطع A و چگالی جرمی ρ وقتی در آب شناور است حجمی برابر با V از آب را جابه جا می کند. اگر شخصی به جرم m روی این قطعه بپرد، دوره تناوب نوسانات کوچک را پیدا کنید.

۴-۳ یک انتهای فنری با ثابت فنری k تثبیت شده است، و انتهای دیگر آن، که جرم m به آن بسته شده است برای مدت t_0 تحت تأثیر نیروی ثابت افقی F قرار می گیرد. نشان دهید که مکان جرم m پس از قطع این نیرو با رابطه زیر داده می شود

$$x = x_0 + \frac{F}{k} \left(\cos \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_0) - \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \right)$$

۵-۳ قطعه ای به جرم M به یک فنر افقی با سختی k بسته شده است. یک جرم کوچک m روی M قرار داده شده است. ضریب اصطکاک بین M و m برابر با μ است. برای چه مقداری از دامنه A جرم m روی M خواهد لغزید؟ شرایطی را که منجر به این لغزش می شود به وضوح توصیف کنید.

۶-۳ یک جرم 0.2 کیلوگرمی به یک فنر با ثابت فنری $12 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$ بسته شده است. جرم ۶ سانتی متر جابه جا شده و رها می شود. v_0 ، T_0 ، v_{max} ، و انرژی کل را محاسبه کنید.

۷-۳ درمسأله ۳-۶، اگر جرم با سرعت 5 cm/s از موقعیت جابه جا شده اش رها شود، v_0 ، T_0 ، v_{\max} و انرژی کل را محاسبه کنید.

۸-۳ فرض کنیم که درمسأله (۳-۶)، حرکت در یک محیط چسبناک انجام می گیرد. در

۱۶ ثانیه دامنه به نصف مقدار اولیه اش تقلیل می یابد. حساب کنید (الف) ثابت میرایی، (ب) دوره تناوب T_1 و فرکانس ν_0 ، و (پ) افت حرکت را.

۹-۳ مسأله (۳-۸) را برای وضعیت مسأله (۳-۷) تکرار کنید.

۱۰-۳ یک آونگ با دوره تناوب T فاصله بین x و $x + \Delta x$ را در مدت Δt می پیماید. مقدار

$\frac{\Delta t}{T}$ را محاسبه کنید و نمودار $\frac{\Delta t}{T}$ نسبت به x را برای مقادیر مختلف دامنه A رسم کنید. مساحت سطح زیر هر منحنی را حساب کنید. معنی این نتیجه چیست؟ توجه کنید که

$$\left| \frac{\Delta t}{T} \right| = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta x}{\sqrt{A^2 - x^2}}$$

۱۱-۳ معادله (۳-۶۲) را مستقیماً از معادله (۳-۶۰) به دست آورید.

۱۲-۳ توضیح دهید چرا ثابتهای معادله (۳-۶۰) مختلط اند، در حالی که C و B در معادله

(۳-۶۱) و A و ϕ در معادله (۳-۶۲) حقیقی اند.

۱۳-۳ دوره تناوب یک نوسانگر وقتی نامیراست T_0 ، و وقتی میراست T است. فرض کنیم

بعد از n نوسان، دامنه نوسانگر میرا به $\frac{1}{e}$ مقدار اولیه اش کاهش یابد. نشان دهید که

$$\frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{1}{4\pi^2 n^2} \right)^{1/2} \approx \left(1 + \frac{1}{8\pi^2 n^2} \right)$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} \approx 1 - \frac{1}{8\pi^2 n^2}$$

۱۴-۳ یک نوسانگر هماهنگ به جرم m در نظر بگیریم که تحت تأثیر نیروی بازگرداننده $-kx$ و

نیروی میراگر $-b\dot{x}$ است. به اندازه A آن را جابه جا می کنیم و با سرعت صفر رها

می کنیم. معادله حرکتهای کندمیرا، با میرایی بحرانی، و تندمیرا را پیدا کنید.

۱۵-۳ مسأله (۳-۱۴) را وقتی جرم m از موضع جابه جا شده اش با سرعت ν_0 رها می شود

مورد بحث قرار دهید.

۱۶-۳ در یک نوسانگر هماهنگ میرا، مکان $x(t)$ را وقتی مقدار آن بیشینه یا کمینه است پیدا

کنید.

۱۷-۳ در حرکت یک نوسانگر میرا وقتی تحت تأثیر یک نیروی ثابت F_0 قرار دارد بحث کنید .

۱۸-۳ $x(t)$ را در مورد یک نوسانگر با میرایی بحرانی که سرعت آن در وضعیت ترازمندی v_0 است و تحت تأثیر نیروی $F_0 \sin \omega t$ قرار دارد پیدا کنید .

۱۹-۳ $x(t)$ را در مورد یک نوسانگر با میرایی بحرانی که سرعت آن در وضعیت ترازمندی v_0 است و تحت تأثیر نیروی $F_0 \sin \omega t$ قرار دارد پیدا کنید .

۲۰-۳ یک نوسانگر میرا که برای آن $\gamma = \frac{\omega_0}{4}$ و سرعت آن در $t=0$ $x=0$ ، v_0 است در نظر بگیرید . بعد از زمان $t = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ، یک نیروی $F = F_0 \cos \omega t$ به آن اعمال می شود . $x(t)$ را حساب کنید .

۲۱-۳ یک نوسانگر وا داشته که برای آن $\dot{x} = 0$ در $t=0$ و $F = F_0 \cos(\omega t + \theta)$ است در نظر بگیرید . جواب خصوصی و جواب عمومی را پیدا کنید :

۲۲-۳ یک نوسانگر میرا که برای آن $\gamma = \frac{\omega_0}{4}$ است در نظر بگیرید . اگر نیروی هدایت کننده با رابطه

$$F = A_1 \cos \omega t + A_3 \cos 3\omega t$$

داده شده باشد مقدار $x(t)$ را محاسبه کنید .

۲۳-۳ یک انتهای فنر بدون جرمی با طول طبیعی l_0 به یک نقطه تثبیت شده است ، و به انتهای دیگر آن یک جرم m بسته شده است . کل سیستم در یک محیط چسبناک که به m نیرویی متناسب با سرعت ($= kv$) وارد می کند شناور است . ثابت نیروی فنر $\frac{k}{4m}$ است . فنر را تا طول x_0 می کشیم و رها می کشیم . مکان m را به صورت تابعی از زمان پیدا کنید . تمام ثابتها را بر حسب شرایط اولیه محاسبه کنید . آهنگی را که با آن انرژی کل در زمان $t = \frac{\pi m}{k}$ تغییر می کند حساب کنید .

۲۴-۳ یک جرم 0.1 kg به فتری با ثابت سختی $\frac{20 \text{ N}}{\text{cm}}$ بسته شده است . این جرم به اندازه 10 cm جابه جا شده و در محیطی چسبناک رها می شود . در 12 ثانیه دامنه به $\frac{1}{2}$ مقدار اولیه اش کاهش می یابد . محاسبه کنید (الف) ثابت میرایی ، (ب) ω ، (پ) افت حرکت ، (ت) زمان مشخصه ، (ث) $x(t)$ را .

۲۵-۳ در مورد نوسانگر واداشته ای که در متن در نظر گرفته شده بود ، با به کارگیری جواب $x = A \cos(\omega t + \theta)$ ، x_1 را پیدا کنید .

۲۶-۳ معادله (۳-۱۲۹) را ، که می گوید ارتفاع نمودار تشدید برای $\gamma^2 = (\omega - \omega_0)^2$ به نصف مقدار بیشینه خود سقوط می کند ، اثبات کنید .

۲۷-۳ نشان دهید که ارتفاع بیشینه نمودار تشدید $\frac{1}{\gamma^2}$ است .

۲۸-۳ معادله (۳-۱۳۴) ، یعنی

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \dot{x}_m F_0 \sin \phi$$

را اثبات کنید .

۲۹-۳ در معادله (۳-۱۳۴) به جای $\sin \phi$ مقدار بگذارید و نتیجه نهایی را بر حسب ω ، ω_0 ، و γ بیان کنید .

۳۰-۳ معادله (۳-۱۳۵) را به دست آورید .

۳۱-۳ یک نوسانگر میرا با $m = 0.2 \text{ kg}$ ، $k = 100 \text{ N/m}$ ، و $b = 5 \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}}$ را در نظر بگیرید . نوسانگر با نیروی $F = (1.67 \text{ N}) \cos 20 t$ هدایت می شود . (الف) اگر جابه جایی به صورت $x = A \cos (\omega t - \delta)$ باشد ، مقادیر A و δ را پیدا کنید . (ب) انرژی تلف شده در یک دوره را پیدا کنید ، (پ) توان متوسط ورودی چقدر است ؟

منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر

- ARTHUR, W., and FENSTER, S. K., *Mechanics*, Chapter 6. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1969.
- BARGER, V., and OLSSON, M., *Classical Mechanics*, Chapter 1. New York: McGraw-Hill Book Co., 1973.
- BECKER, R. A., *Introduction to Theoretical Mechanics*, Chapter 7. New York: McGraw-Hill Book Co., 1954.
- DAVIS, A. DOUGLAS, *Classical Mechanics*, Chapter 3. New York: Academic Press, Inc., 1986.
- FOWLES, G. R., *Analytical Mechanics*, Chapter 3. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1962.
- FRENCH, A. P., *Vibrations and Waves*, Chapters 3 and 4. New York: W. W. Norton and Co., Inc., 1971.
- HAUSER, W., *Introduction to the Principles of Mechanics*, Chapter 4. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1965.
- HOCHSTADT, H., *Differential Equations—A Modern Approach*. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1964.
- KITTEL, C., KNIGHT, W. D., and RUDERMAN, M. A., *Mechanics*, Berkeley Physics Course, Volume 1, Chapter 7. New York: McGraw-Hill Book Co., 1965.
- KLEPPNER, D., and KOLENKOW, R. J., *An Introduction to Mechanics*, Chapter 10. New York: McGraw-Hill Book Co., 1973.
- MARION, J. B., *Classical Dynamics*, 2nd. ed., Chapters 3 and 4. New York: Academic Press, Inc., 1970.
- MURPHY, G. M., *Ordinary Differential Equations and Their Solutions*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1960.
- ROSSBERG, K., *Analytical Mechanics*, Chapter 10. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1983.
- SLATER, J. C., *Mechanics*, Chapter 2. New York: McGraw-Hill Book Co., 1947.
- STEPHENSON, R. J., *Mechanics and Properties of Matter*, Chapter 5. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- SYMON, K. R., *Mechanics*, 3rd. ed., Chapter 2. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1971.

فصل چهارم

سیستمهای نوسانی

۱-۲ مقدمه

مطالعه سیستمهای نوسانی را با تقسیم بحثمان به نوسانات در مدارهای الکتریکی و نمودارهای فاز سیستمهای غیرخطی ادامه می دهیم . در شروع ، نتایج به دست آمده برای سیستمهای نوسانی خطی مکانیکی را به سیستمهای نوسانی الکتریکی گسترش می دهیم . بین سیستمهای الکتریکی و مکانیکی شباهت کاملی وجود دارد ؛ در نتیجه ، نیازی به پیدا کردن نتایج نخواهیم داشت . یک قسمت از این فصل را به سیستمهای غیرخطی اختصاص می دهیم . برای حل سیستمهای نوسانی چند روش ارائه خواهیم داد .

فصل ۳ کاملاً به مطالعه سیستمهای نوسانی خطی اختصاص داده شد . این نوع حرکت هماهنگ ساده ، با این که بطور گسترده ای در مسائل فیزیکی و مهندسی به کار می رود ، دقیقاً فقط به موارد معدودی قابل اعمال است . طبیعت یک چنین سادگی را نمی پذیرد . حرکت نوسانی ، عموماً ، غیرخطی است . انحراف از حرکت خطی هنگامی رخ می دهد که نیروی بازگرداننده بستگی خطی به جابه جایی ندارد ؛ و به علاوه ، نیروی میراگر نیز تابع خطی از سرعت نیست . بنابراین ، معادله نمایشگر حرکت آزاد یک سیستم نوسانی می تواند به صورت

$$m\ddot{x} + G(\dot{x}) + F(x) = 0 \quad (1-4)$$

نوشته می شود که در آن F یک تابع غیرخطی از x و G یک تابع غیرخطی از \dot{x} است .
 برای توابع دلخواه F و G جوابهای عمومی معادله (۱-۴) شناخته شده نیستند . معادله (۱-۴) تنها برای بعضی موارد می تواند حل شود . عموماً برای دستیابی به ایده هایی در مورد ماهیت نوسانات ، باید از روشهای تقریبی استفاده کنیم . هر وضعیت بخصوصی باید به عنوان یک مورد خاص در نظر گرفته شود و جداگانه حل شود . باید به خاطر بسپاریم که ماهیت غیرخطی سیستمهای نوسانی ، معمولاً از دامنه های بزرگ این سیستمها سرچشمه می گیرند .
 برای پیدا کردن جوابهای تقریبی ، چند روش ارائه شده است . ممکن نیست بتوان آنها را تا هیچ حدی در این فصل مورد بررسی قرار داد . در این جا اصل برهم نهش و روشهای آنالیز فوریه را که فوق العاده در حل سیستمهای غیرخطی مؤثرند وارد می کنیم . روش تابع گرین را وقتی که به سیستم یک نیروی بزرگ در یک بازه زمانی کوتاه اعمال می شود ، به کار خواهیم برد . بحث خود را به سیستمهای غیرخطی متقارن و نامتقارن گسترش می دهیم و برای حل این گونه مسائل از روشهای بسط به سری و تقریبهای متوالی استفاده خواهیم کرد . فصل را با بحث کیفی این سیستمهای غیرخطی با استفاده از روش نمودارهای فاز به پایان می بریم .

۲-۴ نوسانات هماهنگ در مدارهای الکتریکی

بین نوسانات آزاد ، میرا ، و واداشته یک تک ذره ، که در فصل ۳ مورد بحث قرار گرفت ، و چند مدار الکتریکی ، که اکنون مورد بحث قرار می دهیم ، شباهت کاملی وجود دارد . به علاوه ، این شباهتها به بسیاری از وضعیتهای فیزیکی در طبیعت ، شامل فیزیک اتمی ، مولکولی و هسته ای گسترش پیدا می کنند . قبلاً ، مدارهای الکتریکی از شباهت با سیستمهای مکانیکی ساخته می شدند . اخیراً ، وضعیت برعکس شده است . طرحهای مدارهای الکتریکی به قدری پیشرفته اند که مهندسان مکانیک آنها را برای مطالعه مسائل نوسانی مکانیکی مورد استفاده قرار می دهند .

شکل (۱-۴ الف) سه سیستم مکانیکی که قبلاً آنها را بررسی کرده ایم ، و شکل (۱-۴ ب) سیستمهای نوسانی الکتریکی متناظر را نشان می دهد . جدول (۱-۴) کمیتهای مکانیکی و الکتریکی متناظر در سیستمهای نوسانی را ارائه می دهد . این شباهت را اکنون مورد بحث قرار می دهیم . برای شروع ، شکل (۱-۴ الف) را در نظر بگیریم ، که یک نوسانگر

هماهنگ ، شامل یک جرم m بسته به فنری با ثابت فنری k ، را نشان می دهد . جرم روی یک سطح بدون اصطکاک حرکت می کند و مانند یک نوسانگر رفتار می کند . حرکت آن با معادله

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \text{یا} \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (۲-۴)$$

نمایانده می شود که جواب آن عبارت است از

$$x = x_0 \cos \omega_0 t \quad (۳-۴-الف)$$

ω_0 فرکانس طبیعی آزاد است که با رابطه زیر داده می شود

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (۳-۴-ب)$$

مشابه الکتریکی آن در شکل (۴-۱-۱-ب) نشان داده شده است . این مدار شامل یک خازن C و یک القاگر L است . بار روی خازن را با $Q = Q(t)$ و جریان در القاگر را با $I = I(t)$ در لحظه t نشان می دهیم . روابط بین I و Q عبارتند از

$$I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q} \quad (۴-۴-الف)$$

$$Q = \int I dt \quad (۴-۴-ب)$$

اُفت ولتاژ در القاگر عبارت است از

$$V_L = L \frac{dI}{dt} \quad (۵-۴)$$

و در خازن

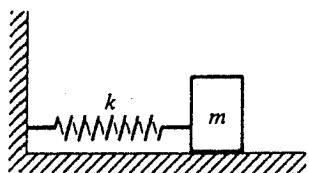
$$V_C = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int I dt \quad (۶-۴)$$

حاصل جمع ولتاژها در یک دور کامل مدار باید صفر باشد . یعنی ، با قاعده کرشهف ، خواهیم داشت

$$V_L + V_C = 0$$

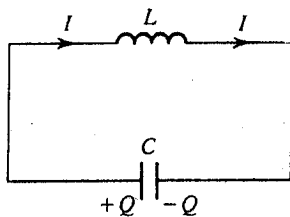
یا

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I dt = 0 \quad (۷-۴)$$

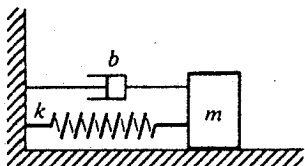


(الف) $m\ddot{x} + kx = 0$

۱- نوسانات آزاد

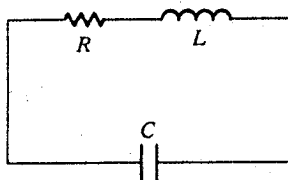


(ب) $L\ddot{Q} + \frac{1}{C}Q = 0$

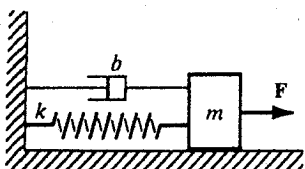


(الف) $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$

۲- نوسانات میرا

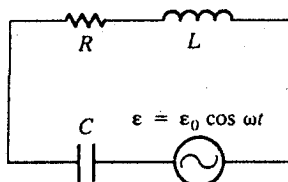


(ب) $L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = 0$



(الف) $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F$

۳- نوسانات واداشته



(ب) $L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = \epsilon$

شکل (۱-۴) : شباهت بین (الف) یک سیستم مکانیکی و (ب) یک سیستم الکتریکی :

(۱) نوسانات آزاد ، (۲) نوسانات میرا ، و (۳) نوسانات واداشته

جدول (۱-۴) شباهت بین کمیتهای مکانیکی و الکتریکی

الکتریکی		مکانیکی
بار	$Q \leftrightarrow x$	جابه جایی
جریان	$\dot{Q} \leftrightarrow \dot{x}$	سرعت
خودالقها	$L \leftrightarrow m$	جرم
ظرفیت	$C \leftrightarrow \frac{1}{k}$	پذیرفتاری
مقاومت	$R \leftrightarrow b$	ثابت میرایی
نیروی الکتروموتوری اعمال شده	$\epsilon \leftrightarrow F$	نیروی اعمال شده

با استفاده از معادله (۴-۴) داریم

$$L\ddot{Q} + \frac{1}{C}Q = 0 \quad \text{یا} \quad \ddot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0 \quad (۸-۴)$$

این معادله کاملاً شبیه به معادله سیستم مکانیکی ، معادله (۴-۲) ، است به این شرط که

$$Q \leftrightarrow x, \quad \dot{Q} \leftrightarrow \dot{x}, \quad L \leftrightarrow m, \quad \text{و} \quad C \leftrightarrow 1/k$$

جواب ، با فرض $Q = Q_0$ در $t = 0$ ، عبارت است از

$$Q = Q_0 \cos \omega_0 t \quad (۹-۴)$$

با فرکانس طبیعی آزاد

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (۱۰-۴)$$

اگر از معادله (۹-۴) مشتق بگیریم ، می توانیم بنویسیم

$$\frac{dQ}{dt} = I = -\omega_0 Q_0 \sin \omega_0 t = -I_0 \sin \omega_0 t \quad (۱۱-۴)$$

اکنون نوسانگر میرایی را که در شکل (۴-۱-۲-الف) نشان داده شده است . در نظر بگیریم . توجه کنیم که یک ضربه گیر را که با مایع چسبناکی پر شده است اضافه کرده ایم تا میرایی با ضربه میرایی b را نمایش داده باشیم . معادله دیفرانسیلی که حرکت یک نوسانگر میرا را توصیف می کند عبارت است از

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (۱۲-۴)$$

و شکل (۴-۱-۲-ب) مدار الکتریکی معادل را ، که یک مقاومت R به آن افزوده ایم ، نمایش می دهد . این مقاومت R معادل با نیروی میرایی یا اصطکاک در سیستمهای مکانیکی است . معادله الکتریکی مشابه با یک سیستم مکانیکی عبارت است از

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = 0 \quad (۱۳-۴)$$

شکل (۴-۱-۳-الف) یک نوسانگر واداشته مکانیکی را که با معادله زیر نمایانده

می شود نشان می دهد

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F = F_0 \cos \omega t \quad (۱۴-۴)$$

شکل (۴-۱-۳-ب) یک نوسانگر واداشته الکتریکی مشابه را با یک منبع نیروی الکتروموتوری، که با $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t$ داده شده است نمایش می دهد. معادله متناظر عبارت است از

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = \varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t \quad (۱۵-۴)$$

برای گسترش بیشتر این مشابهتها، مثال دیگری را، که در شکل (۴-۲-الف و ب) نشان داده شده است، می آوریم. فرض کنیم که یک نیروی F به سیستمی شامل دو فنر پشت سر هم که در شکل (۴-۲-الف) نشان داده شده است، وارد کنیم. جابه جایی خالص حاصل جمع دو جابه جایی x_1 و x_2 دو فنر است. لذا

$$x = x_1 + x_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = F \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) = \frac{F}{k}$$

یعنی وقتی دو فنر به صورت سری باشند k ی معادل با

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (۱۶-۴)$$

داده می شود. وقتی فنرها موازی باشند. چنان که در شکل (۴-۲-ب) نشان داده شده است، داریم

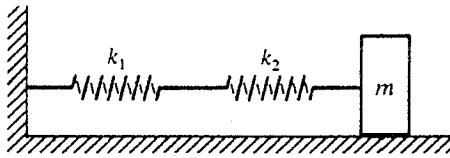
$$k = k_1 + k_2 \quad (۱۷-۴)$$

وقتی ظرفیتها بطور سری به هم بسته شده باشند، آن طور که در شکل (۴-۲-ب) نشان داده شده است، ظرفیت معادل C با رابطه زیر داده می شود

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (۱۸-۴)$$

وقتی خازنها بطور موازی، چنان که در شکل (۴-۲-ب) نشان داده شده است، به هم بسته شده باشند، ظرفیت معادل C عبارت است از

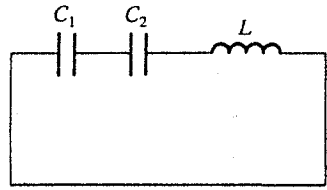
$$C = C_1 + C_2 \quad (۱۹-۴)$$



$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

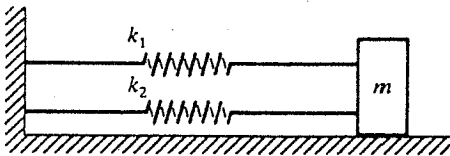
(۱)

(الف)



$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

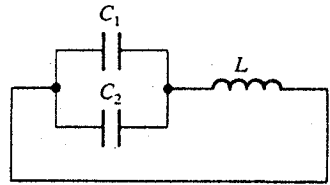
(۲)



$$k = k_1 + k_2$$

(۱)

(ب)



$$C = C_1 + C_2$$

(۲)

شکل (۲-۴) : مشابهت بین سیستمهای مکانیکی و الکتریکی (الف) سیستمهای سری (ب) سیستمهای موازی

ملاحظات انرژی

برای یک نوسانگر آزاد ، انرژی کل ، که مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل است ، تا وقتی که میرایی در کار نباشد همیشه ثابت است و با رابطه زیر داده می شود

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \text{constant} \quad (۲۰-۴)$$

از مشابهت با این معادله ، یا از جدول (۱-۴) و استفاده از معادلات (۹-۴) و (۱۱-۴) نتیجه می گیریم

$$\frac{1}{2} L I^2 + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \left(\frac{Q_0^2}{2C} \right) = \text{constant} \quad (۲۱-۴)$$

$\frac{1}{2} L I^2$ انرژی ذخیره شده در القاگر و معادل با انرژی جنبشی مکانیکی $\frac{1}{2} m v^2$ است ؛ $\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$

انرژی ذخیره شده در خازن و معادل با انرژی پتانسیل مکانیکی $\frac{1}{2}kx^2$ است .

اکنون این مشابهت را به نوسانگر میرا گسترش می دهیم . با شروع از معادله (۴-۱۳) .

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = 0$$

و ضرب دو طرف آن در \dot{Q} نتیجه می گیریم

$$L\dot{Q}\ddot{Q} + R\dot{Q}^2 + \frac{Q}{C}\dot{Q} = 0$$

یا

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}L\dot{Q}^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \right) = -R\dot{Q}^2 \quad (۲۲-۴)$$

چون $Q = I$ ، می توانیم بنویسیم

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \right) = -R\dot{Q}^2 \quad (۲۳-۴)$$

این معادله بیان می کند که آهنگ ذخیره شدن انرژی در القاگر و خازن برابر است با آهنگ اتلاف انرژی در مقاومت ، همان طور که باید باشد . برای سیستمهای مکانیکی ، معادله (۴-۲۳) ، پس از جایگذاری مناسب ، به شکل زیر در می آید

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right) = -b\dot{x}^2 \quad (۲۴-۴)$$

مشابهت پیشین می تواند فراتر رفته و به یک نوسانگر واداشته ، یعنی ، به پیدا کردن جواب آن و سپس نوشتن عبارتی برای اتلاف توان میانگین ، تشدید ، و ضریب کیفیت ، گسترش یابد .

۳-۴ اصل برهم نهش و سری فوریه

اصل برهم نهش در تمام مباحث فیزیک مورد استفاده قرار می گیرد . بیشتر دانشجویان به هنگام مطالعه حرکت موجی و اپتیک در فیزیک عمومی ، با این اصل در شکل ساده زیر بر می خورند .

اصل برهم نهش : وقتی که دو موج یا بیشتر ، بطور همزمان از قسمتی از یک محیط عبور کنند ، هر یک بطور مستقل ، گویی که موجهای دیگر حضور ندارند ، عمل می کند .

جابه جایی منتجه در هر نقطه حاصل جمع برداری جابه جایی موجهای انفرادی است .

اکنون این اصل را به مورد نوسانگرهای هماهنگ و بطور کلی عملگرهای خطی گسترش می دهیم . اگر جوابهای معادله ، برای نیروهای عمل کننده $F_1(t)$ ، $F_2(t)$ ، ... ، به ترتیب ، $x_1(t)$ ، $x_2(t)$ ، ... ، باشند ، وقتی نیروی عمل کننده $F(t) = F_1(t) + F_2(t) + \dots$ باشد جواب به صورت $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \dots$ است . می توانیم آن را به شکل زیر بیشتر گسترش دهیم . معادله دیفرانسیل مرتبه دومی که یک نوسانگر هماهنگ واداشته را توصیف می کند و با

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F(t) \quad (25-4)$$

داده می شود ، می تواند ، در شکل کلی ، به صورت

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} + b \right) x(t) = F(t) \quad (26-4)$$

نوشته شود . کمیت داخل پرانتزها در طرف چپ ، یعنی ،

$$L \equiv \left(\frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} + b \right) \quad (27-4)$$

را علمگر خطی ، L ، تعریف می کنیم . به این ترتیب معادله (۲۵-۴) یا (۲۶-۴) می تواند به شکل

$$Lx(t) = F(t) \quad (28-4)$$

نوشته شود . بر طبق اصل برهم نهش :

اگر یک مجموعه از توابع $x_n(t)$ با $n = 1, 2, 3, \dots$ ، جوابهای یک معادله دیفرانسیل

خطی

$$Lx_n(t) = F_n(t) \quad (29-4)$$

باشند ، تابع $x(t)$ ، که یک ترکیب خطی از $x_n(t)$ هاست ، یعنی

$$x(t) = \sum_n C_n x_n(t) \quad (30-4)$$

که C_n ها ثابتند ، جواب معادله دیفرانسیل

$$Lx(t) = F(t) \quad (۳۱-۴)$$

است ، که در آن

$$F(t) = \sum_n C_n F_n(t) \quad (۳۲-۴)$$

می توانیم این بیان را با قرار دادن معادله (۳۰-۴) در (۳۱-۴) اثبات کنیم ؛ یعنی ،

$$\begin{aligned} Lx(t) &= L \left[\sum_n C_n x_n(t) \right] \\ &= \sum_n C_n Lx_n(t) = \sum_n C_n F_n(t) = F(t) \end{aligned}$$

همان طور که باید باشد .

اکنون این نتایج را به مورد عمومی نوسانگر هماهنگ واداشته ای که بطور مشروح مورد بحث قرار گرفت اعمال کنیم . فرض کنیم نیروهای وادارنده انفرادی $F_n(t)$ دارای بستگی زمانی هماهنگی به شکل $\cos(\omega_n t - \theta_n)$ باشند ، بطوری که

$$F(t) = \sum_n C_n \cos(\omega_n t - \theta_n) \quad (۳۳-۴)$$

وقتی نیرو به شکل $F_0 \cos(\omega t + \theta_0)$ بود ، جواب حالت پایا با معادلات (۳-۹۹) (۳-۱۰۰) داده می شد . بنابراین برای $F(t)$ که با (۳۳-۴) داده شده است ، جواب حالت پایا عبارت است از

$$x(t) = \sum_n \frac{C_n}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_n^2}} \cos(\omega_n t - \theta_n - \phi_n) \quad (۳۴-۴)$$

که در آن

$$\phi_n = \tan^{-1} \left(\frac{2\gamma\omega_n}{\omega_0^2 - \omega_n^2} \right) \quad (۳۵-۴)$$

جواب عمومی مجموع جواب گذرا و جواب حالت پایاست و با

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta') \\ &+ \sum_n \frac{C_n}{m} \frac{\cos(\omega_n t - \theta_n - \phi_n)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_n^2}} \end{aligned} \quad (۳۶-۴)$$

داده می شود که ثابتهای A و θ' باید مطابق معمول از شرایط اولیه به دست آیند. برای موردی که بستگی $F_n(t)$ به شکل $\sin(\omega_n t - \theta_n)$ باشد، نتایج مشابهی به دست می آید.

با کمک قضیه فوریه، می توانیم نوع ملاحظات قبلی را به موردی که در آن نیروی وادارنده تناوبی (و نه هماهنگ) و پیوسته یا تکه تکه پیوسته باشد گسترش دهیم. $F(t)$ یک تابع تناوبی است اگر در شرط

$$F(t+T) = F(t) \quad (۳۷-۴)$$

صدق کند، که در آن $T = 2\pi/\omega$ دوره تناوب نیروی عمل کننده است. طبق قضیه فوریه، هر تابع متناوب دلخواهی، که پیوسته یا تکه تکه پیوسته باشد، و در دوره تناوب تنها تعداد معدودی ناپیوستگی داشته باشد، می تواند به صورت مجموع جملات هماهنگ بیان شود. بنابراین هر تابع $F(t)$ که در یک بازه زمانی $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ - تعریف شده باشد [یا یک تابع $F(x)$ در بازه مکانی $-\pi < x < \pi$] می تواند به صورت یک رشته از جملات سینوسی یا کسینوسی به صورت

$$F(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + \dots + A_n \cos n\omega t + \dots \\ + B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + \dots + B_n \sin n\omega t + \dots \quad (۳۸-۴ \text{ الف})$$

نوشته شود، که در آن A_n و B_n ثابتند و $n = 1, 2, \dots, \infty$. معادله (۳۸-۴ الف) همچنین می تواند به صورت

$$F(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) \quad (۳۸-۴ \text{ ب})$$

نوشته شود. جمله های جمع (در طرف راست) یک سری فوریه تشکیل می دهند. ثابتهای A_n و B_n می توانند با انتگرال گیری به دست آیند. به عنوان مثال، برای محاسبه A_n دو طرف معادله (۳۸-۴ ب) را در $\cos m\omega t$ (یک عدد درست است) ضرب می کنیم و بین حدود $-\frac{T}{2}$ و $\frac{T}{2}$ + انتگرال می گیریم

$$\int_{-T/2}^{+T/2} F(t) \cos m\omega t dt = \frac{A_0}{2} \int_{-T/2}^{+T/2} \cos m\omega t dt \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \int \cos n\omega t \cos m\omega t dt + B_n \int \sin n\omega t \cos m\omega t dt \right]$$

چون m و n عدد درست هستند ، برای تمام مقادیر m و n به دست می آوریم

$$\int_{-T/2}^{+T/2} \cos n\omega t \cos m\omega t dt = \frac{T}{2} \delta_{mn}$$

$$\int_{-T/2}^{+T/2} \sin n\omega t \cos m\omega t dt = 0, \quad \text{برای تمام مقادیر } m \text{ و } n$$

$$\int_{-T/2}^{+T/2} \cos m\omega t dt = T\delta_{m0}$$

بدین ترتیب مقادیر A_0 و A_n عبارتند از

$$A_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} F(t) dt \quad (4-39 \text{ الف})$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} F(t) \cos n\omega t dt \quad (4-39 \text{ ب})$$

با $n = 1, 2, 3, \dots$ به همین روش ، با ضرب معادله (4-38 ب) در $\sin m\omega t$ و انتگرال گیری ، به دست می آوریم

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} F(t) \sin n\omega t dt \quad (4-39 \text{ ج})$$

با $n = 1, 2, 3, \dots$ اگر لازم باشد می توانیم حدود انتگرال گیری $(-\frac{\pi}{\omega})$ تا $(\frac{\pi}{\omega})$ را با 0 و $T (= \frac{2\pi}{\omega})$ عوض کنیم .

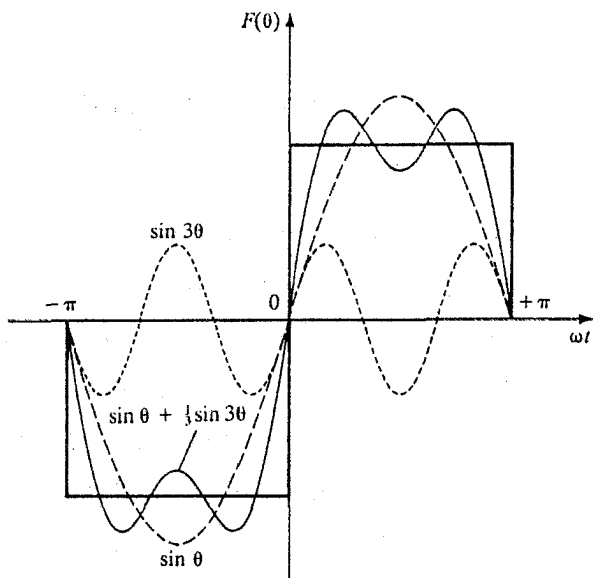
نخست باید تعداد تقریبی جملاتی از سری فوریه را که برای تقریب نیروی وادارنده موردنظر لازم است تعیین کنیم . این مطلب در دو مورد تصریح شده است : (۱) یک تابع مستطیلی و (۲) یک تابع دندانه اره ای ، که بطور مختصر مورد بحث قرار خواهیم داد . وقتی سری را شناختیم ، هر جمله نیروی اعمال شده دارای یک جواب متناظر است . با جمع کردن این جوابها ، جواب عمومی یک نوسانگر هماهنگ میرای واداشته به وسیله یک نیروی دلخواه را به دست می آوریم . در موارد عملی ، به دست آوردن جوابها با این روش کاملاً ملال آور است ، اما در بعضی موارد مفید است .

و

$$F(\theta) = +\pi/2 \quad 0 < \theta < \pi$$

را که $\theta (= \omega t)$ تابعی از زمان است و ω سرعت زاویه ای است، در نظر بگیریم. سری فوریه تابع $F(\theta)$ را پیدا کنید.

تابع واقعی به وسیله خطوط پررنگ در شکل (مثال ۴-۱) نشان داده شده است.



شکل (مثال ۴-۱)

با استفاده از معادله (۴-۳۹) و تابع $F(\theta)$ که در این جا داده شده است، می توانیم ضرایب را به روش زیر محاسبه کنیم

$$A_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} F(t) dt = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2} \int_{-\pi}^0 d\theta + \frac{\pi}{2} \int_0^{+\pi} d\theta \right) = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} F(t) \cos n\omega t dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2} \int_{-\pi}^0 \cos n\theta d\theta + \frac{\pi}{2} \int_0^{+\pi} \cos n\theta d\theta \right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$= -\frac{1}{2n} \sin n\theta \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{2n} \sin n\theta \Big|_0^{\pi} = 0 \quad (۳)$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} F(t) \sin n\omega t dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2} \int_{-\pi}^0 \sin n\theta d\theta + \frac{\pi}{2} \int_0^{+\pi} \sin n\theta d\theta \right) \quad (۴)$$

$$= +\frac{1}{2n} \cos n\theta \Big|_{-\pi}^0 - \frac{1}{2n} \cos n\theta \Big|_0^{\pi}$$

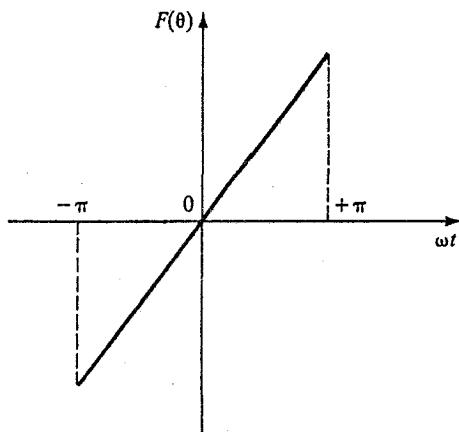
$$= \begin{cases} \frac{2}{n} & \text{برای } n \text{ فرد} \\ 0 & \text{برای } n \text{ زوج} \end{cases} \quad (۵)$$

بنابراین بسط $F(\theta)$ به سری فوریه در بازه $-\pi < \theta < +\pi$ عبارت است از

$$F(\theta) = \frac{2}{3} \sin \theta + \frac{2}{9} \sin 3\theta + \frac{2}{27} \sin 5\theta + \dots \quad (۶)$$

نمودارهای دو جمله اول در شکل نشان داده شده اند. نمودار حاصل از جمع این دو جمله نیز نشان داده شده است. هر چه تعداد جملات به کار برده شده زیادتر باشد، نمودار منتسب به نمودار واقعی نزدیکتر است. این مسأله را می توان با جمع تعداد زیادتری از جملات تحقیق کرد.

تمرین (۱-۴): تابع نشان داده شده در شکل (ت-۴-۱) در بازه $-\pi < \theta < +\pi$ را در نظر بگیرید. بسط به سری فوریه این تابع را پیدا کنید.



شکل (ت-۴-۱)

۲-۲ حرکت هماهنگ و تابع گرین

نیروی ضربه‌ای

وقتی یک نیروی قوی $F(t)$ در یک بازه زمانی خیلی کوتاه Δt عمل کند، گفته می‌شود که یک ضربه به جسم داده شده است. همچنین است برای یک نیروی ضعیف $F(t)$ وقتی در مدت کوتاه Δt روی سیستم عمل کند، و قبل و بعد از این بازه تقریباً قابل چشم‌پوشی باشد. با اعمال قضیه ضربه - تکانه و اصل برهم نهش به سیستم نوسانی، می‌توانیم به نتایج مفید جالبی برسیم. طبق قضیه ضربه - تکانه داریم

$$p_f - p_i = F \Delta t = \int F dt \quad (۴-۴۰ \text{ الف})$$

یا

$$\Delta p = F \Delta t \quad (۴-۴۰ \text{ ب})$$

و

$$\Delta v = \frac{F}{m} \Delta t \quad (۴-۴۰ \text{ پ})$$

اکنون کاربرد این قضیه به چند وضعیت را بررسی می‌کنیم.

مورد (۱): یک نوسانگر که در ابتدا ساکن است: برای شروع، فرض کنیم با یک نوسانگر نامیرای ساکن؛ یعنی، $x=0$ و $\dot{x}=0$ ، سرو کار داریم. در زمان $t=t_0$ ، یک ضربه به نوسانگر داده می‌شود، بطوری که سرعت آن بلافاصله پس از ضربه v_0 می‌شود. بنابراین، از معادله (۴-۴۰-ب) داریم

$$\Delta p = mv_0 = F \Delta t \quad (۴-۴۱ \text{ الف})$$

یا

$$v_0 = \frac{F}{m} \Delta t \quad (۴-۴۱ \text{ ب})$$

چون در $t=t_0$ ، $x=0$ است، جابه‌جایی x یک نوسانگر نامیرا عبارت است از

$$x = A \sin[\omega_0(t - t_0)] \quad (۴-۴۲ \text{ الف})$$

که در آن A باید از شرایط اولیه تعیین شود. (یادآوری کنیم که از هر جابه جایی کوچکی که ممکن است در بازه کوتاه Δt ی اعمال نیرو صورت گیرد چشم پوشی کرده ایم). با مشتق گیری از معادله (۴-۴۲ الف) و قرار دادن $\dot{x} = v_0$ در $t = t_0$ ، خواهیم داشت

$$\dot{x} = \omega_0 A \cos[\omega_0(t - t_0)] \quad (۴۲-۴) \text{ ب)}$$

$$v_0 = \omega_0 A$$

بنابراین

$$A = \frac{v_0}{\omega_0} = \frac{F \Delta t}{m \omega_0} = \frac{\Delta p}{m \omega_0} \quad (۴۳-۴)$$

بدین ترتیب جواب عمومی عبارت است از

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_0 \\ \frac{F \Delta t}{m \omega_0} \sin[\omega_0(t - t_0)], & t \geq t_0 \end{cases} \quad (۴۴-۴)$$

این روش به آسانی می تواند به مورد نوسانگرهای هماهنگ میرای ساکن، که برای آنها

$$x = A e^{-\gamma(t-t_0)} \sin[\omega_1(t - t_0)] \quad (۴۵-۴)$$

گسترش داده شود، و جواب نهایی بعد از وارد آمدن ضربه عبارت است از

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ \frac{F \Delta t}{m \omega_1} e^{-\gamma(t-t_0)} \sin[\omega_1(t - t_0)], & t \geq t_0 \end{cases} \quad (۴۶-۴)$$

مورد (۲): یک نوسانگر که در ابتدا ساکن نیست. یک بار دیگر با یک نوسانگر نامیرا

شروع کنیم، ولی این بار دارای مکان اولیه x_0 و سرعت اولیه v_0 است. لذا، با شروع از

$$x = B \cos \omega_0 t + C \sin \omega_0 t \quad (۴۷-۴)$$

و اعمال شرایط اولیه $x = x_0$ و $\dot{x} = v_0$ در $t = t_0$ ، داریم

$$x = x_0 \cos \omega_0(t - t_0) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0(t - t_0) \quad (۴۸-۴)$$

اکنون نیروی $F(t)$ را در $t = t_0$ برای بازه کوتاه Δt اعمال می کنیم . بنا بر قضیه ضربه - تکانه ،

$$\Delta p = F \Delta t \quad \text{یا} \quad \Delta v = F \frac{\Delta t}{m} \quad (۴۹-۴)$$

که در آن Δv افزایش سرعت کوچکی است که به سیستم ، که در زمان t_0 دارای سرعت v_0 بوده است ، داده شده است . افزایش جابه جایی حاصل از ضربه می تواند بطوری محاسبه شود که گویی سرعت اولیه Δv بوده است ؛ یعنی ، با قرار دادن Δv ، که از معادله (۴۹-۴) به دست آمده است ، به جای v_0 در معادله (۴۸-۴) ، افزایش جابه جایی x_1 را به صورت

$$x_1 = \frac{F \Delta t}{m \omega_0} \sin \omega_0(t - t_0) \quad (۵۰-۴)$$

به دست می آوریم .

بدین ترتیب ، جابه جایی کل عبارت است از حاصل جمع x و x_1 که با معادله (۴۸-۴) و

(۵۰-۴) داده شده اند

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0(t - t_0) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0(t - t_0) + \frac{F \Delta t}{m \omega_0} \sin \omega_0(t - t_0) \quad (۵۱-۴)$$

می توانیم این بررسی را به مورد یک نوسانگر هماهنگ میرا که در $t = t_0$ دارای $x = x_0$ و

$v = v_0$ است ، و ضربه در $t = t_0$ به آن داده می شود ، گسترش دهیم (رک مسأله ۴-۲۳) .

حرکت قبل از ضربه با

$$x = e^{-\gamma t} [B \cos \omega_1 t + C \sin \omega_1 t] \quad (۵۲-۴)$$

و بعد از ضربه با

$$x(t) = e^{-\gamma(t-t_0)} \left(x_0 \cos \omega_1(t - t_0) + \frac{v_0}{\omega_1} \sin \omega_1(t - t_0) \right) + \frac{F \Delta t}{m \omega_1} e^{-\gamma(t-t_0)} \sin[\omega_1(t - t_0)] \quad (۵۳-۴)$$

توصیف می شود .

نیروی پیوسته دلخواه و تابع گرین

تا وقتی که یک نوسانگر خطی را بررسی می کنیم می توانیم قضیه ضربه - تکانه را به مورد

یک تابع نیروی دلخواه اعمال کنیم . حل مسأله بر روشی پایه گذاری شده است که توسط

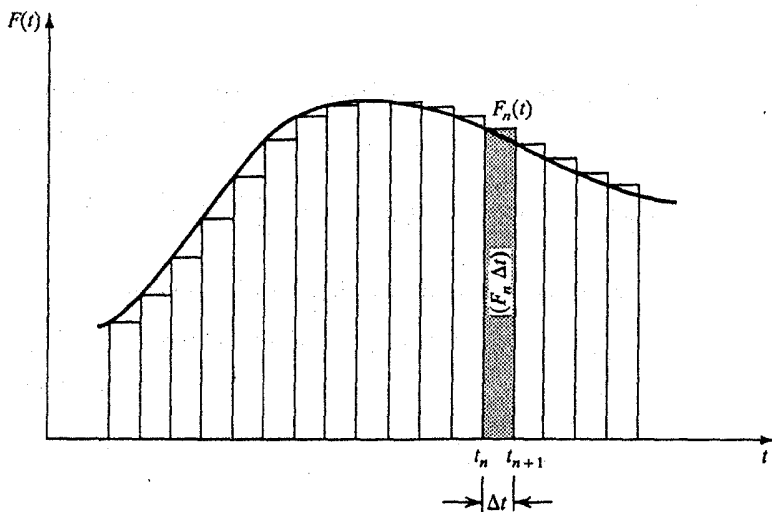
ژرژ گرین ارائه شده است . طبق روش گرین ، یک تابع نیروی دلخواه $F(t)$ می تواند به صورت

یک سری از نیروهای ضربه‌ای، که هر کدام برای یک بازه زمانی کوتاه Δt عمل می‌کنند و یک ضربه Δt $F(t)$ به سیستم می‌دهد، در نظر گرفته شود (شکل ۳-۴)

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F_n(t) \quad (۵۴-۴)$$

که در آن

$$F_n(t) \begin{cases} = F(t_n), & t_n < t < t_{n+1} \\ = 0, & t < t_n \text{ یا } t > t_{n+1} \end{cases} \quad (۵۵-۴)$$



شکل (۳-۴): تابع نیروی دلخواه به عنوان مجموع یک سری از نیروهای ضربه‌ای

و $t = n\Delta t$. از شکل (۳-۴) روشن است که اگر $\Delta t \rightarrow 0$ ، حاصل جمع سری نیروهای ضربه‌ای $F_n(t)$ به $F(t)$ نزدیک می‌شود. اگر سیستم خطی باشد، همیشه می‌توانیم اصل برهم‌نهد را به کار ببریم. این کار به ما اجازه می‌دهد که قسمت ناهمگن معادله دیفرانسیل را به صورت مجموع نیروهای ضربه‌ای انفرادی بنویسیم؛ یعنی، برای

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \sum F_n(t) \quad (۵۶-۴)$$

جواب حالت پایای کلی مجموع جوابهای انفرادی حاصل از هر $F_n(t)$ است. جوابهای

انفرادی از نوع جواب (۴-۴۶) برای یک تک ضربه هستند. بنابراین جواب حالت پایای معادله (۴-۵۶) عبارت است از

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^N \frac{F(t_n) \Delta t}{m\omega_1} e^{-\gamma(t-t_n)} \sin[\omega_1(t-t_n)] \quad (۴-۵۷)$$

که شامل همه جوابها تا N امین ضربه و خود N امین ضربه است. وقتی $\Delta t \rightarrow 0$ ، می توانیم با تبدیل جمع بندی به انتگرال گیری و $t_n = t'$ ، بنویسیم

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \frac{F(t')}{m\omega_1} e^{-\gamma(t-t')} \sin[\omega_1(t-t')] dt' \quad (۴-۵۸)$$

تابع گرین $G(t, t')$ را به صورت

$$G(t, t') = \begin{cases} \frac{e^{-\gamma(t-t')}}{m\omega_1} \sin[\omega_1(t-t')] , & t \geq t' \\ 0 , & t < t' \end{cases} \quad (۴-۵۹)$$

تعریف می کنیم. بدین ترتیب، می توانیم جواب حالت پایا، معادله (۴-۵۸)، را برحسب تابع گرین به صورت

$$x(t) = \int_{-\infty}^t F(t') G(t, t') dt' \quad (۴-۶۰)$$

بنویسیم. مزیت عمده این روش این است که جواب از هم اکنون شرایط اولیه را برآورده می کند: به عنوان مثال، جواب مورد فوق برای یک نوسانگر میراست که در آغاز در محل ترازمندی در حال سکون بوده است. برای به دست آوردن جواب کامل باید جواب گذرا را به جواب حالت پایه، معادله (۴-۶۰)، اضافه کنیم. برای شرایط اولیه متفاوت، جوابها می توانند به همین روش به دست آیند. (رک مسائل (۴-۲۴) و (۴-۲۵)).

مثال (۲-۲): ذره ای به جرم m که در یک محیط مقاوم حرکت می کند، در لحظات t_1 ، t_2 ، ... تحت تأثیر یک سری از ضربه های نیروی $F(t)$ ، که هر کدام برای مدت کوتاه Δt تأثیر می کنند، قرار می گیرد. سرعت متوجه ذره را پیدا کنید.

اگر $v = v(t)$ سرعت ذره باشد v - نیروی مقاوم وارد به ذره است. طبق

قانون دوم نیوتن داریم

$$m \frac{dv}{dt} = -bv + F(t) \quad (۱)$$

فرض کنیم نیروی $F(t)$ تنها برای یک بازه کوتاه Δt بین t و $t + \Delta t$ عمل کند. بعد از زمان $t + \Delta t$ ، معادله حرکت ذره، معادله (۱)، به

$$m \frac{dv}{dt} = -bv \quad (۲)$$

تقلیل می یابد که پس از انتگرال گیری نتیجه می دهد

$$v(t) = Ae^{-(b/m)t} \quad (۳)$$

A یک ثابت دلخواه انتگرال گیری است.

بار دیگر معادله (۱) را در نظر بگیریم و بین t_1 و $t_1 + \Delta t$ از آن انتگرال بگیریم؛

یعنی،

$$m \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} dv = -b \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} v dt + \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} F(t) dt \quad (۴)$$

اکنون هر کدام از این جملات را محاسبه کنیم. جمله آخر در طرف راست

ضربه I_1 است که به وسیله نیرو بین t_1 و $t_1 + \Delta t$ وارد شده است؛ یعنی،

$$\int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} F(t) dt = I_1 \quad (۵)$$

چون Δt خیلی کوچک است، $v(t)$ در این بازه زمانی تغییر نمی کند و جمله اول طرف

راست در معادله (۴) می شود

$$\int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} v dt = v(t_1) \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} dt = v(t_1) \Delta t \quad (۶)$$

در حالی که جمله طرف چپ معادله (۴) می شود

$$m \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} dv = m[v(t_1 + \Delta t) - v(t_1)] \quad (۷)$$

فرض کنیم که در $t_1 = 0$ ذره در حال سکون بوده است، یعنی در معادلات (۷) و (۶)

داریم $v(t_1) = 0$. بدین ترتیب با ترکیب چهار معادله پیشین، داریم

$$mv(t_1 + \Delta t) = 0 + I_1 \quad (۸)$$

یا

$$v(t_1 + \Delta t) = \frac{I_1}{m} \quad (۹)$$

چون حرکت پیوسته است، معادله (۳) در $t_1 + \Delta t$ به شکل زیر در می آید

$$v(t_1 + \Delta t) = Ae^{-(b/m)(t_1 + \Delta t)} \approx Ae^{-(b/m)t_1} \quad (۱۰)$$

از مقایسه معادلات (۹) و (۱۰) داریم

$$A = \frac{I_1}{m} e^{(b/m)t_1} \quad (۱۱)$$

در نتیجه، بعد از اولین ضربه [با استفاده از معادله (۳)] به دست می آوریم

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_1 \\ \frac{I_1}{m} e^{-(b/m)(t-t_1)}, & t > t_1 \end{cases} \quad (۱۲)$$

می توانیم این نتایج را به دسته ای از ضربه های حاصل از $F(t)$ گسترش دهیم

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_1 \\ \frac{I_1}{m} e^{-(b/m)(t-t_1)}, & t_1 < t < t_2 \\ \frac{I_1}{m} e^{-(b/m)(t-t_1)} + \frac{I_2}{m} e^{-(b/m)(t-t_2)}, & t > t_2 \end{cases} \quad (۱۳)$$

که در آن I_1 همان است که با معادله (۷) تعریف شده است و I_2 عبارت است از

$$I_2 = \int_{t_2}^{t_2 + \Delta t} F(t) dt \quad (۱۴)$$

این روش می تواند به مجموعه ای از ضربه ها تعمیم داده شود.

تمرین (۳-۲): این مثال را برای وقتی که نیروی اعمال شده به شکل $F(t) = F_0 e^{-kt}$ باشد تکرار کنید.

مثال ۳-۲: یک نوسانگر هماهنگ میرا که ناگهان در $t=0$ تحت تأثیر نیروی کاهشی

$$F(t) = F_0 e^{-kt}, \quad t > 0$$

قرار می گیرد در نظر بگیرید. جواب عمومی را با استفاده از تابع گرین پیدا کنید.

(یک مثال نمونه ای چنین نیرویی ولتاژ نزولی یک خازن است).

چون

$$F(t) = F(t') = F_0 e^{-kt'} \quad (۱)$$

با استفاده از تابع گرین، معادله (۴-۵۹)، جواب عمومی، معادله (۴-۶۰)، می شود

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t F(t') G(t, t') dt' \\ &= \frac{1}{m\omega_1} \int_0^t F_0 e^{-kt'} e^{-\gamma(t-t')} \sin[\omega_1(t-t')] dt' \end{aligned} \quad (۲)$$

اگر قرار دهیم

$$y = \omega_1(t-t'), \quad dy = -\omega_1 dt', \quad \text{یا} \quad dt' = -\frac{dy}{\omega_1} \quad (۳)$$

حدود از $t \rightarrow 0$ به $\omega_1 t \rightarrow 0$ تغییر می یابند. بنابراین

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_1^2} \int_0^{\omega_1 t} e^{-kt} e^{(k-\gamma)y/\omega_1} \sin y dy \quad (۴)$$

این معادله می تواند با استفاده از انتگرال استاندارد

$$\int e^{ax} \sin px dx = \frac{e^{ax}(a \sin px - p \cos px)}{a^2 + p^2} \quad (۵)$$

انتگرال گیری شود. بدین ترتیب انتگرال گیری معادله (۴) می دهد

$$x(t) = \frac{F_0/m}{(k-\gamma)^2 + \omega_1^2} \left[e^{-kt} - e^{-\gamma t} \left(\cos \omega_1 t - \frac{k-\gamma}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right] \quad (۶)$$

یا، با به کار بردن A برای دامنه،

$$x(t) = A \left[e^{-kt} - e^{-\gamma t} \left(\cos \omega_1 t - \frac{k-\gamma}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right] \quad (۷)$$

که همان جواب خواسته شده است. نمودارهای $x(t)$ نسبت به t در شکل (مثال ۴-۳) نشان داده شده اند. طبیعت این نمودارها به مقادیر نسبی k و γ بستگی دارد.

الف- اگر $\gamma \gg k$ باشد و هر دو نسبت به $\omega_0 = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2}$ کوچک

باشند، جمله e^{-kt} تنها برای مدت کوتاهی در شروع دارای تأثیر خواهد بود.

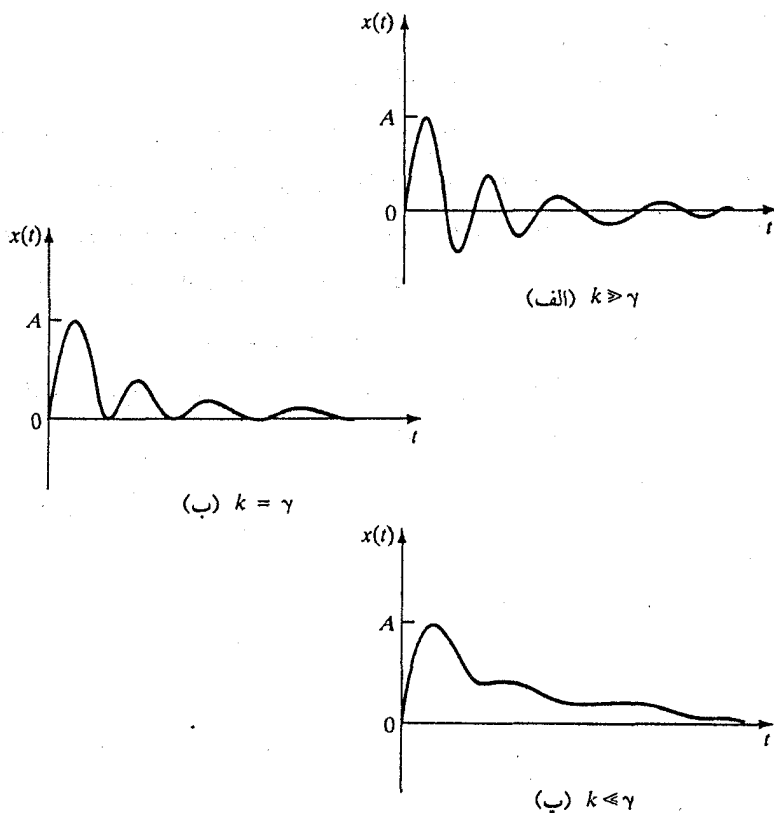
ب- وقتی $\gamma = k$ باشد و هر دو نسبت به ω_0 کوچک باشند، معادله (۶) به شکل

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_1^2} e^{-\gamma t} (1 - \cos \omega_1 t) \quad (۸)$$

در می آید ، این بدان معنی است که تابع جواب هنوز نوسانی است ، اما ، همان طور که نشان داده شده است ، با دامنه ای که بطور نمایی نزولی است .

پ - اگر $\gamma \ll k$ باشد تابع نیروی وادارنده $F(t)$ ، که با معادله (۱) داده شده است ، جانشین حرکت نوسانی می شود ، یعنی ، دامنه نوسانات پس از یک افزایش اولیه برای مدت کوتاهی ، بطور نمایی شروع به کاهش می کند .

تمرین (۳-۲) : این مثال را برای موقعی که نیروی کاهشی در $t=0$ به صورت $F(t) = -kt$ است مورد بحث قرار دهد .



شکل (ت-۳-۴)

۴-۵ سیستم‌های نوسانی غیرخطی

قبل از شروع این بخش، بد نیست که نظر دوباره‌ای به بخش (۳-۲)، که در آن اختلاف بین سیستم‌های خطی و غیرخطی را توضیح دادیم، بیندازیم. قبلاً دیدیم که سیستم‌های خطی (سیستم‌هایی که در آنها نیرو متناسب با منفی جابه‌جایی است) منجر به نوسانات هماهنگ (نوسانات با یک فرکانس) می‌شوند. شرط تحمیل شده این بود که حرکت باید به فاصله کوچکی نزدیک نقطه ترازمندی محدود باشد.

اکنون سیستم‌هایی را که در آنها حرکت محدود نیست، در نتیجه نیروی بازگرداننده متناسب با جابه‌جایی نیست، در نظر بگیریم. بطور کلی

$$m\ddot{x} + F(x) = 0 \quad (۴-۶۱)$$

که در آن $F(x)$ نیروی بازگرداننده است و دیگر خطی نیست. اگر میرایی حضور داشته باشد، یک تابع آزاد دیگر $G(\dot{x})$ خواهیم داشت، که همچنین می‌تواند غیرخطی باشد. یک ویژگی برجسته سیستم‌های غیرخطی این است که، برخلاف سیستم‌های خطی، دوره تناوب آنها بطور کلی به دامنه بستگی دارد. (در باره سیستم‌های غیرخطی چند کتاب خوب وجود دارد. ما در این جا صرفاً به معرفی موضوع می‌پردازیم).

سیستمی در نظر بگیریم که تحت تأثیر نیروی $F(x)$ باشد و از نقطه ترازمندی خود x_0 به نقطه x جابه‌جا شده باشد. $F(x)$ را به سری تیلور در اطراف نقطه x_0 بسط دهیم؛ یعنی،

$$F(x) = F(x_0) + \left(\frac{dF}{dx}\right)_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_{x_0} (x - x_0)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3F}{dx^3}\right)_{x_0} (x - x_0)^3 + \dots \quad (۴-۶۲)$$

که در آن $F(x_0) = 0$ ، زیرا x_0 نقطه ترازمندی است. $x_0 = 0$ را مبدأ انتخاب می‌کنیم. با تعریف

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)_0 = k_1, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_0 = k_2, \quad \frac{1}{6} \left(\frac{d^3F}{dx^3}\right)_0 = k_3, \dots \quad (۴-۶۳)$$

معادله (۴-۶۲) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$F(x) = k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + \dots \quad (۴-۶۴)$$

نیازی به وارد کردن جملات مرتبه‌های بالاتر نداریم. اگر تنها آن نیروهایی را که به ترازمندی

پایدار برای سیستمهای متقارن منجر می شوند در نظر بگیریم ، جملات زوج باید حذف شوند ؛ یعنی ، $k_2 = k_4 = \dots = 0$ و

$$F(x) = k_1 x + k_3 x^3 \quad (۶۵-۴)$$

نیرو در اطراف نقطه ترازمندی $x=0$ متقارن است ؛ یعنی بزرگی نیروی عمل کننده روی سیستم برای x و $-x$ یکی است . اگر قرار دهیم $k_1 = -k$ که در آن k مثبت است ، و $k_3 = -\epsilon$ ، خواهیم داشت

$$F(x) = -kx - \epsilon x^3 \quad (۶۶-۴)$$

یادآوری کنیم که اگر $\epsilon > 0$ باشد ، سیستم سخت ، و اگر $\epsilon < 0$ باشد سیستم نرم است . برای این نیرو ، پتانسیل متقارن متناظر ($F = -\frac{dV}{dx}$) با رابطه زیر داده می شود

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{4} \epsilon x^4 \quad (۶۷-۴)$$

از طرف دیگر ، اگر سیستم نامتقارن باشد ، نیرو ، از معادله (۶۴-۴) ، پس از جایگذاری $k_1 = -k$ ، $k_2 = -\lambda$ و قرار دادن $k_3 = 0$ ، می شود

$$F(x) = -kx - \lambda x^2 \quad (۶۸-۴)$$

در نتیجه پتانسیل نامتقارن عبارت است از

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{3} \lambda x^3 \quad (۶۹-۴)$$

اکنون چند وضعیت را که با پتانسیلهای متقارن و نامتقارن سر و کار دارند مورد بحث قرار می دهیم .

سیستم غیرخطی متقارن

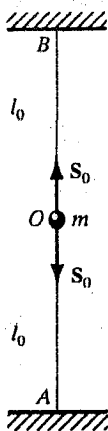
جسمی به جرم m را که بین دو نخ مشابه بسته شده است ، آن طور که در شکل (۴-۴) الف) نشان داده شده است ، در نظر بگیریم . نخها که به نقاط A و B بسته شده اند کشسان هستند و ثابت کشسانی آنها k_0 است . وقتی این سیستم در وضعیت AOB قرار دارد در تعادل است و تنش در هر نخ S_0 است . اکنون این جرم m را بطور افقی به اندازه x ، چنان که

در شکل (۴-۴) ب) نشان داده شده است، جابه‌جا کنیم. تغییر طول هر نخ $l - l_0$ ، و در نتیجه نیروی بازگرداننده $k_0(l - l_0)$ است. تنش S در هر نخ در وضعیت جابه‌جا شده عبارت است از

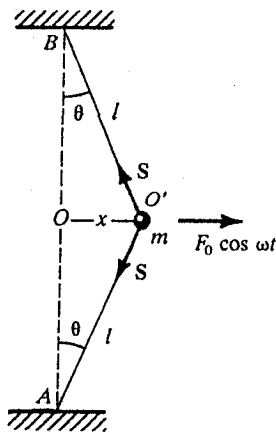
$$S = S_0 + k_0(l - l_0) \quad (۷۰-۴)$$

S را به دو مؤلفه تجزیه می‌کنیم. مؤلفه‌های قائم یکدیگر را خنثی می‌کنند، و مؤلفه‌های افقی با یکدیگر جمع می‌شوند و جمع آنها $-2S \sin \theta$ است. بنابراین حرکت جرم m با معادله زیر توصیف می‌شود

$$m\ddot{x} = -2S \sin \theta \quad (۷۱-۴)$$



(الف) وضعیت تعادل



(ب) وضعیت جابه‌جا شده

l_0 = طول کشیده نشده نخ یا فنر

l = طول کشیده شده نخ یا فنر

شکل (۴-۴) : جرم m به دو نخ (یا فنر) بسته شده و سیستم غیرخطی متقارن تشکیل

می‌دهد. (الف) در وضع تعادل و (ب) در وضع جابه‌جا شده

یادآوری کنیم که فرض کرده ایم نیروی میراگر و نیروی وادارنده نداریم. (بعداً نیروی $F_0 \cos \omega t$ را وارد کرده و مسأله را دوباره حل خواهیم کرد). از معادلات (۴-۷۰) و (۴-۷۱) به دست می آوریم

$$m\ddot{x} = -2[S_0 + k_0(l - l_0)] \sin \theta \quad (۴-۷۲)$$

از شکل (۴-۴-ب) مقادیر l و $\sin \theta$ را به صورت

$$l = (l_0^2 + x^2)^{1/2} = l_0 \left(1 + \frac{x^2}{l_0^2}\right)^{1/2} \quad (۴-۷۳ \text{ الف})$$

و

$$\sin \theta = \frac{x}{l} = x(l_0^2 + x^2)^{-1/2} = \frac{x}{l_0} \left(1 + \frac{x^2}{l_0^2}\right)^{-1/2} \quad (۴-۷۳ \text{ ب})$$

محاسبه می کنیم و در معادله (۴-۷۲) قرار می دهیم. نتیجه می شود

$$m\ddot{x} = -2 \left[S_0 + k_0 l_0 \left\{ \left(1 + \frac{x^2}{l_0^2}\right)^{1/2} - 1 \right\} \right] \frac{x}{l_0} \left(1 + \frac{x^2}{l_0^2}\right)^{-1/2} \quad (۴-۷۴)$$

چون $\frac{x^2}{l_0^2}$ کمیت کوچکی است، می توانیم از قضیه دو جمله ای برای بسط

$$\left(1 + \frac{x^2}{l_0^2}\right)^{\pm 1/2} = 1 \pm \frac{1}{2} \frac{x^2}{l_0^2} + \dots$$

استفاده کنیم. با قرار دادن آن در (۴-۷۴)، و با حذف جمله x^5 ، داریم

$$m\ddot{x} = -\frac{2S_0}{l_0} x - \left(\frac{k_0}{l_0^2} - \frac{S_0}{l_0^3}\right) x^3 \quad (۴-۷۵)$$

قرار دهیم

$$\frac{2S_0}{l_0} = k \quad \text{و} \quad \left(\frac{k_0 l_0 - S_0}{l_0^3}\right) = \epsilon \quad (۴-۷۶)$$

در نتیجه می توانیم معادله (۴-۷۵) را به صورت

$$m\ddot{x} = -kx - \epsilon x^3 \quad (۴-۷۷)$$

بنویسیم که معادله خواسته شده است و نمایشگر یک سیستم غیرخطی است. توجه کنیم که ε کمیت کوچکی است که برای یک فنر سخت مثبت و برای یک فنر نرم منفی است. فرض کنیم که حل تقریبی معادله (۷۷-۴) هنوز، مانند مورد سیستمهای خطی، سینوسی است. این بایستی تقریباً درست باشد زیرا ε کمیت کوچکی است. در نتیجه

$$x = A \cos \omega t \quad (۷۸-۴)$$

با قرار دادن $x = x_1$ و $x^3 = x_1^3$ در طرف راست معادله (۷۷-۴)، معادله جدیدی برای x_1 به دست می آید؛ یعنی،

$$m\ddot{x}_1 = -kA \cos \omega t - \varepsilon A^3 \cos^3 \omega t \quad (۷۹-۴)$$

با قرار دادن

$$\cos^3 \omega t = \frac{1}{4}(3 \cos \omega t + \cos 3\omega t)$$

در معادله (۷۹-۴) و مرتب سازی، داریم

$$m\ddot{x}_1 = -(kA + \frac{3}{4}\varepsilon A^3) \cos \omega t - \frac{1}{4}\varepsilon A^3 \cos 3\omega t \quad (۸۰-۴)$$

که پس از انتگرال گیری (با این فرض که ثابت انتگرال گیری صفر است) جواب خواسته شده

$$x_1 = \frac{1}{m\omega^2} (kA + \frac{3}{4}\varepsilon A^3) \cos \omega t + \frac{\varepsilon A^3}{36\omega^2} \cos 3\omega t \quad (۸۱-۴)$$

را به دست می دهد. این جواب برای تقریب مرتبه اول است.

برای پیدا کردن رابطه بین ω و A ، می توانیم از فرض کوچک بودن ε استفاده کنیم. با

قرار دادن $x = x_1 = A \cos \omega t$ ، معادله (۷۸-۴)، در معادله (۸۱-۴) و حذف جمله آخر، یا با مقایسه جمله ها (جمله دوم طرف راست صفر است)، داریم

$$\omega^2 = \frac{k}{m} + \frac{3}{4} \frac{\varepsilon}{m} A^2 \quad (۸۲-۴)$$

که نشان می دهد فرکانس طبیعی ω و در نتیجه دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{\omega}$ توابعی از دامنه A هستند. کمیت ω^2 به اندازه $\frac{3\varepsilon}{4m} A^2$ ، بسته به علامت ε ، از ω_0^2 افزایش یا کاهش می یابد.

اگر یک نیروی وادارنده خارجی $F = F_0 \cos \omega t$ به سیستم وارد شده بود، آن طور که

در شکل (۴-۴) نشان داده شده است ، معادله (۴-۷۷) به شکل زیر در می آید

$$m\ddot{x} = -kx - \epsilon x^3 + F_0 \cos \omega t \quad (۴-۸۳)$$

با پی گیری دقیق روش ترسیم شده ، جواب زیر را به دست می آوریم (رک مسأله ۴-۲۷)

$$x_1 = \frac{1}{m\omega^2} \left(kA + \frac{3}{4}\epsilon A^3 - \frac{F_0}{m} \right) \cos \omega t + \frac{\epsilon A^3}{36\omega^2} \cos 3\omega t \quad (۴-۸۴)$$

در این جا بحث تشدیدها را پیش نمی کشیم ، گرچه رخ می دهند ، ولی کاملاً با تشدید در سیستمهای خطی تفاوت دارند .

سیستم غیرخطی نامتقارن

طبق معادلات (۴-۶۸) و (۴-۶۹) ، نیرو و پتانسیل نامتقارنی که یک سیستم غیرخطی

را نمایش می دهند عبارتند از

$$F(x) = -kx - \lambda x^2 \quad (۴-۶۸)$$

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{3}\lambda x^3 \quad (۴-۶۹)$$

معادله دیفرانسیلی که چنین سیستم بدون میرایی را توصیف می کند عبارت است از

$$m\ddot{x} + kx + \lambda x^2 = 0 \quad (۴-۸۵)$$

با تقسیم بر m و قرار دادن $\omega_0^2 = k/m$ و $\lambda/m = \lambda_1$ ، خواهیم داشت

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \lambda_1 x^2 = 0 \quad (۴-۸۶)$$

برای به دست آوردن یک جواب تقریبی ، از روش پربشیدگی ، که در زیر توضیح می دهیم ، استفاده می کنیم .

اگر جمله غیرخطی ($\lambda_1 x^2$) نبود ، جواب x_0 می بود . چون λ_1 کمیت کوچکی است ،

جواب درست معادله (۴-۸۶) می تواند با افزودن جمله تصحیحی کوچکی به x_0 ، به دست آید ، یعنی ،

$$x(t) \approx x_0 + \lambda_1 x_1 \quad (۴-۸۷)$$

[برای داشتن تصحیحات مرتبه‌های بالاتر، باید بنویسیم

$$x(t) = x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_1^2 x_2 + \lambda_1^3 x_3 + \dots]$$

با قرار دادن معادله (۴-۸۷) در معادله (۴-۸۶)، داریم

$$(\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0) + (\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + x_0^2) \lambda_1 + 2x_0 x_1 \lambda_1^2 + x_1^2 \lambda_1^3 = 0 \quad (۴-۸۸)$$

با چشم‌پوشی از جمله‌های مرتبه‌های بالاتر λ_1^2 و λ_1^3 خواهیم داشت

$$(\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0) + (\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + x_0^2) \lambda_1 = 0 \quad (۴-۸۹)$$

برای این که این معادله برای هر مقدار λ_1 برقرار باشد، هر جمله بایستی جداگانه صفر باشد؛ یعنی،

$$(\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0) = 0 \quad (۴-۹۰)$$

$$(\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + x_0^2) = 0 \quad (۴-۹۱)$$

بدین ترتیب جواب می‌تواند نخست با حل معادله (۴-۹۰) برای x_0 و قرار دادن آن در معادله (۴-۹۱)، و سپس حل آن برای x_1 ، به دست آید. در نتیجه جواب نهایی خواهد بود

$$x(t) = x_0 + \lambda_1 x_1 \quad (۴-۹۲)$$

فرض کنیم شرایط اولیه طوری هستند که برای معادله (۴-۹۰) جواب زیر را داریم

$$x_0 = A \sin \omega_0 t \quad (۴-۹۳)$$

شرایط اولیه در این جواب گنجانیده شده‌اند؛ در نتیجه، نیازی به وارد کردن جواب گذرا نداریم. با قرار دادن معادله (۴-۹۳) در معادله (۴-۹۱) نتیجه می‌گیریم

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -A^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{A^2}{2} (1 - \cos 2\omega_0 t) \quad (۴-۹۴)$$

جواب عمومی این معادله عبارت است از

$$x_1(t) = B \cdot \cos 2\omega_0 t + C \quad (۴-۹۵)$$

با بردن این جواب در (۴-۹۴) و مرتب‌سازی، خواهیم داشت

$$\left(\frac{A^2}{2} - 3\omega_0^2 B\right) \cos 2\omega_0 t + \left(-\frac{A^2}{2} + \omega_0^2 C\right) = 0 \quad (۹۶-۴)$$

برای این که معادله برای هر مقدار t برقرار باشد، باید داشته باشیم

$$\frac{A^2}{2} - 3\omega_0^2 B = 0 \quad \text{یا} \quad B = \frac{A^2}{6\omega_0^2} \quad (۹۷-۴)$$

$$-\frac{A^2}{2} + \omega_0^2 C = 0 \quad \text{یا} \quad C = \frac{A^2}{2\omega_0^2} \quad (۹۸-۴)$$

با بردن این مقادیر در معادله (۹۵-۴)، نتیجه خواهیم گرفت

$$x_1(t) = \frac{A^2}{6\omega_0^2} \cos 2\omega_0 t + \frac{A^2}{2\omega_0^2} \quad (۹۹-۴)$$

بدین ترتیب جواب عمومی حالت پایا برای یک تقریب مرتبه اول برحسب λ ،
عبارت است از $(\lambda_1 = \frac{\lambda}{m})$

$$x(t) \approx x_0 + \lambda_1 x_1 = A \sin \omega_0 t + \frac{\lambda A^2}{6m\omega_0^2} (\cos 2\omega_0 t + 3) \quad (۱۰۰-۴)$$

یعنی، جواب شامل نه تنها فرکانس طبیعی ω_0 ، بلکه شامل هماهنگ بالاتر آن $2\omega_0$ نیز هست، این روشن بدون اشکال نیست. اگر تقریب بعدی را در نظر بگیریم، جمله t (یک جمله سده ای) در جواب وارد می شود، که از نظر فیزیکی برای وضعیت حاضر قابل قبول نیست.

۴-۶ بحث کیفی حرکت و نمودارهای فاز

نمودار انرژی

معادلات زیر [معادلات (۲-۳)، (۳-۳)، و (۴-۳)] در فصل ۳ به دست آمده بودند.

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) \quad (۱۰۱-۴)$$

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]} \quad (۱۰۲-۴)$$

$$t_2 - t_1 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \quad (۱۰۳-۴)$$

وقتی E و $V(x)$ را بدانیم، می توانیم معادله (۱۰۳-۴) را حل کنیم و رابطه بین x و t را پیدا

کنیم. اما بدون این که عملاً این معادلات را حل کنیم، می توانیم خیلی چیزها درباره ماهیت کیفی حرکت یاد بگیریم. به دوروش می توانیم به این منظور برسیم: (۱) با رسم $V(x)$ نسبت به x ، و (۲) با رسم \dot{x} نسبت به x . قبل از بحث درباره این مطلب، نکات زیر را باید به خاطر بسپاریم.

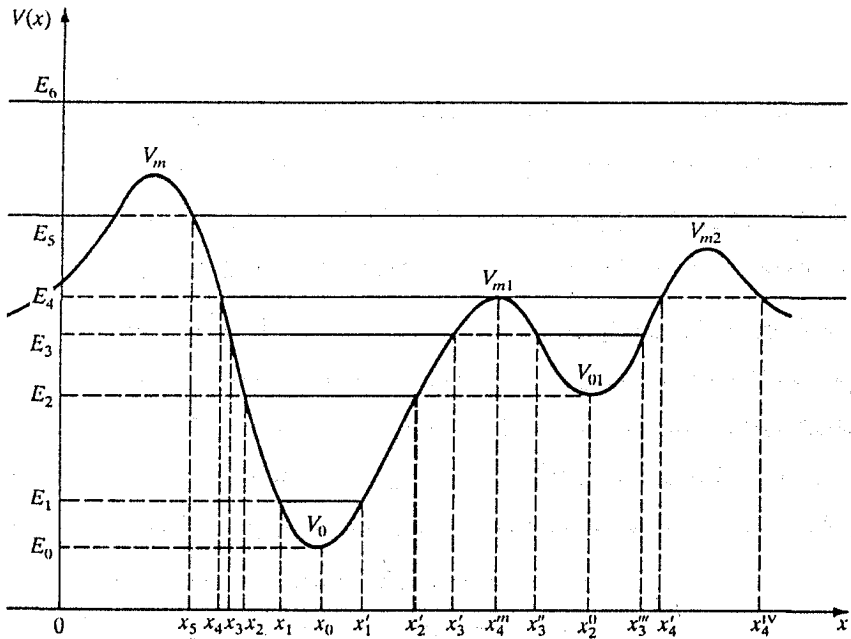
- ۱- انرژی جنبشی نمی تواند منفی باشد، این به ما اطمینان می دهد که v موهومی نیست.
- ۲- انرژی پتانسیل $V(x)$ نمی تواند بزرگتر از انرژی مکانیکی کل سیستم باشد. اگر $E = V(x)$ باشد، انرژی جنبشی سیستم باید صفر، و در نتیجه سیستم باید در حال سکون باشد.

اکنون یک نمودار پتانسیل اختیاری $V(x)$ نسبت به x چنان که در شکل (۴-۵ الف) با خط پر نشان داده شده است، در نظر بگیریم. (وضعیت مشابهی در فصل ۲ مورد بحث قرار گرفت، اما ما اکنون آن را با دوروش کمی متفاوت بحث می کنیم). فرض کنیم ذره ای به جرم m می تواند انرژیهای مختلفی را بگیرد.

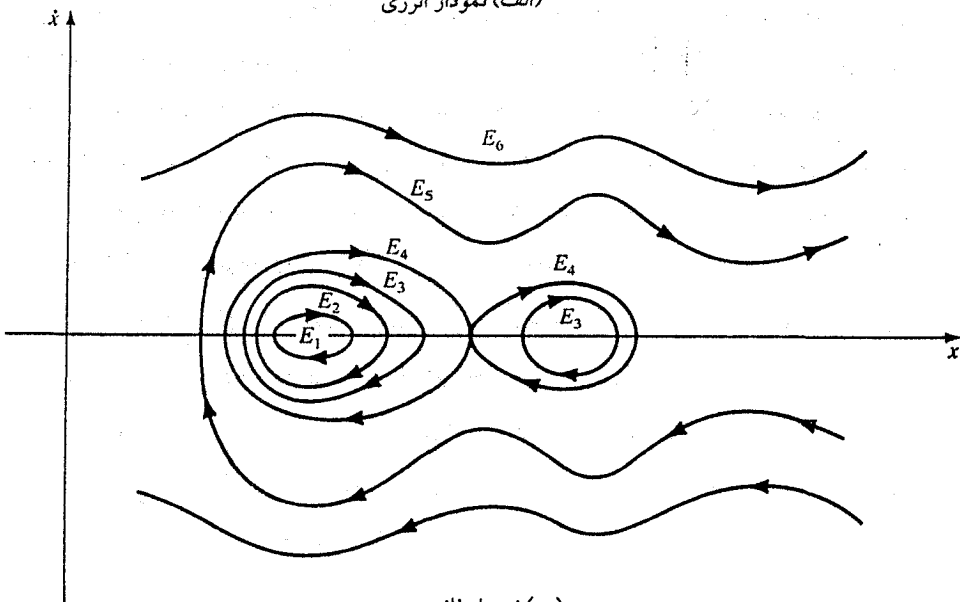
(۰) ذره با انرژی E_0 : این انرژی مستطابقاً با انرژی پتانسیل کمینه V_0 است و ذره در x_0 در حال تعادل است. در x_0 انرژی جنبشی صفر است، و ذره جابه جا نمی شود.

(۱) ذره با انرژی E_1 : این انرژی بزرگتر از انرژی پتانسیل کمینه V_0 است، و ذره بین x_1 و x'_1 نوسان می کند. چون برای انرژی پایین E_1 ، انرژی پتانسیل بین x_1 و x'_1 متقارن است، نوسان هماهنگ ساده خواهد بود. در حین نوسان، انرژی جنبشی و سرعت وقتی ذره در وسط نقاط x_1 و x'_1 است بیشینه است، در x_1 و x'_1 سرعت صفر است. وقتی ذره به هر کدام از نقاط x_1 و x'_1 نزدیک می شود سرعت آن کاهش می یابد، متوقف می شود، و سپس جهت حرکت عوض می شود. این نقاط نقاط بازگشت نامیده می شوند، و در این نقاط انرژی جنبشی صفر و انرژی پتانسیل بیشینه است. ذره نمی تواند در ناحیه $x < x_1$ و $x > x'_1$ وجود داشته باشد زیرا این منجر به سرعت موهومی برای ذره می شود.

(۲) ذره با انرژی E_2 : ذره می تواند بین x_2 و x'_2 نوسان کند، یا در x_2^0 در حال سکون در تعادل پایدار بماند. دو نقطه بازگشت x_2 و x'_2 وجود دارد. چون پتانسیل $V_{01} (> V_0)$ کمترین انرژی پتانسیل (که در این جا V_0 است) نیست، این حالت یک حالت متاپایدار نامیده می شود. همچنین پتانسیل $V(x)$ بین x_2 و x'_2 نامتقارن است، در نتیجه نوسانات غیرخطی هستند. در این مورد نیز حرکت برای $x < x_2$ و بین x'_2 و x_2^0 مجاز نیست.



(الف) نمودار انرژی



(ب) نمودار فاز

شکل (۴-۵): حرکت یک ذره با انرژیهای متفاوت E در یک پتانسیل اختیاری $V(x)$ ،

که به وسیله (الف) یک نمودار انرژی که در آن $V(x)$ نسبت به x رسم شده است، و (ب) یک نمودار

فاز که در آن \dot{x} نسبت به x رسم شده است، نمایش داده شده است

(۳) ذره با انرژی E_3 : چهار نقطه بازگشت x_3 ، x'_3 و x''_3 و x'''_3 وجود دارد. به علت طبیعت نامتقارن پتانسیل بین x_3 و x'_3 ، نوسانات در این دره غیرخطی هستند. از طرف دیگر، پتانسیل بین x''_3 و x'''_3 سهمی وار و در نتیجه متقارن است در نتیجه، نوسانات در این دره هماهنگ خطی هستند. در این مورد نیز حرکت در ناحیه های $x < x_3$ ، $x_2 < x < x''_2$ ، $x < x_3$ مجاز نیست.

(۴) ذره با انرژی E_4 : وقتی ذره در x^m_4 است، انرژی پتانسیل بیشینه (یکی از بیشینه ها) است؛ در نتیجه x^m_4 یک وضعیت تعادل ناپایدار است. اگر ذره کمی جابه جا شود، می تواند بین x_4 و x'_4 یا بین x^m_4 و x_4 نوسان کند؛ در هر دو مورد حرکت غیرخطی است زیرا پتانسیل در هر دو ناحیه نامتقارن است. همچنین وقتی ذره به x^m_4 می رسد می تواند در هر کدام از این دو ناحیه حرکت کند. این بار نیز، برای $x < x_4$ حرکت مجاز نیست زیرا منجر به انرژیهای جنبشی منفی و در نتیجه سرعتهای موهومی می شود.

(۵) ذره با انرژی E_5 : فقط یک نقطه بازگشت x_5 وجود دارد. ذره ای که از سمت راست با انرژی E_5 حرکت می کند. وقتی به x_5 می رسد متوقف می شود، جهت خود را تغییر می دهد، و به طرف راست بر می گردد. در موقع آمدن یا رفتن از بالای تپه ها یا دره هایی عبور می کند. وقتی از بالای یک تپه عبور می کند سرعت آن کاهش می یابد، و وقتی از بالای دره عبور می کند سرعت آن افزایش می یابد. همچنین هر چه دره عمیقتر باشد، سرعت بیشتر است؛ و هر چه تپه بلندتر باشد، سرعت کمتر است. یعنی، ذره وقتی از بالای تپه عبور کند شتاب کندکننده می گیرد و وقتی از بالای دره عبور کند شتاب تندکننده می گیرد.

(۶) ذره با انرژی E_6 : نقطه بازگشتی وجود ندارد. ذره حرکت خود را حفظ می کند، در بالای تپه ها کند، و در بالای دره ها تند می شود.

بحث پیشین پیامد اصل پایستگی انرژی است، که با معادله (۴-۱) داده شده است. همچنین حرکت ذره وقتی انرژی آن E_5 یا E_6 باشد. نامحدود است. در حالی که در دیگر موارد محدود است.

نمودارهای فاز

برای روشن شدن کامل حرکت یک نوسانگر یک بعدی، دو کمیت باید مشخص شوند. طبق معادله (۴-۱۰۲) داریم

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]} \quad (۱۰۲-۴)$$

اگر تابع $V(x)$ را بدانیم، حرکت می‌تواند با رسم نمودار \dot{x} نسبت به x نمایانده شود. (این مطلب با یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم که در آن دو ثابت انتگرال گیری برای توصیف حرکت مورد نیاز است، همخوانی دارد). مختصات $\dot{x}(t)$ و $x(t)$ حالت حرکت را در هر لحظه بطور یکتایی در دو بعدی توصیف می‌کنند. هر نقطه $P(\dot{x}, x)$ یک حالت حرکت را در صفحه فاز توصیف می‌کند و مکان هندسی چنین نقاطی نمودار فاز، تصویر فاز، یا مسیر فاز، نامیده می‌شود. بطور کلی، اگر با حرکت n بعدی سر و کار داشته باشیم، یا سیستم n درجه آزادی داشته باشد، $2n$ مختصه لازم است تا حرکت را در یک فضای فاز $2n$ بعدی توصیف کند. همچنین برای مقدار ثابت انرژی، یعنی، برای یک سیستم پایستار، حرکت در یک صفحه فاز دوره‌ای است، $x(t+T) = x(t)$ و $\dot{x}(t+T) = \dot{x}(t)$ و مسیرها منحنیهای بسته‌ای هستند.

نمودار فازی که در شکل (۴-۵) ب) برای انرژی پتانسیل $V(x)$ و برای مقادیر متفاوت E مربوط به شکل (۴-۵) الف) نشان داده شده است، بعد از بحثی که در زیر می‌آوریم بخوبی فهمیده می‌شود.

به عنوان مثالی روشن‌گر، ایده‌های قبلی را به مورد یک نوسانگر هماهنگ ساده یک بعدی که برای آن $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ است اعمال می‌کنیم. بدین ترتیب برای پایداری انرژی داریم

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E \quad (۴-۱۰۴ \text{ الف})$$

یا

$$\frac{x^2}{2E/k} + \frac{\dot{x}^2}{2E/m} = 1 \quad (۴-۱۰۴ \text{ ب})$$

که معادله یک بیضی با نیم قطرهای $\sqrt{\frac{2E}{m}}$ و $\sqrt{\frac{2E}{k}}$ است. هر E معرف یک بیضی است. برای مقادیر مختلف E یک دسته بیضی، آن طور که در شکل (۴-۶) نشان داده شده است، داریم. همین نتیجه را می‌توانیم با شروع از حل یک نوسانگر هماهنگ ساده به دست آوریم؛ یعنی

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (۴-۱۰۵)$$

$$\dot{x} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (۴-۱۰۶)$$

یا

$$\frac{x}{A} = \cos(\omega_0 t + \phi)$$

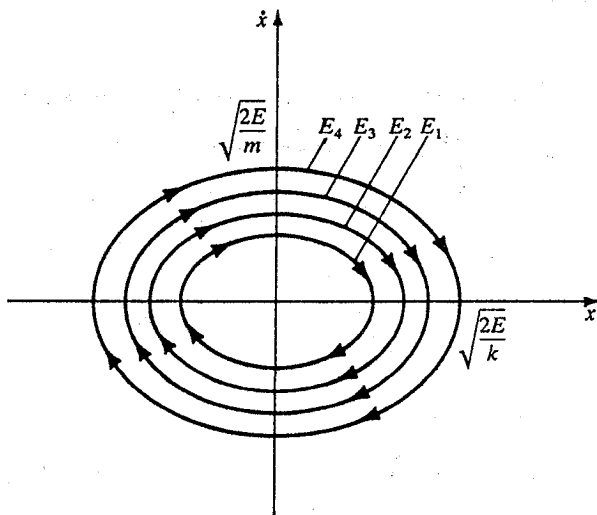
$$\frac{\dot{x}}{\omega_0 A} = -\sin(\omega_0 t + \phi)$$

برای حذف این دو معادله را مربع کرده و با هم جمع می کنیم ؛ یعنی ،

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2 A^2} = 1$$

با قرار دادن $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ و $E = \frac{1}{2}kA^2$ داریم

$$\frac{x^2}{2E/k} + \frac{\dot{x}^2}{2E/m} = 1$$



شکل (۴-۶) : نمودار فاز نوسانگر هماهنگ ساده یک بعدی برای مقادیر مختلف انرژی E

نخستین چیزی که در مسیرهای فاز در شکل (۴-۵) مشاهده می کنیم این است که حرکت در جهت ساعتگرد صورت می گیرد ، دلیل آن این است که \dot{x} برای $x > 0$ همیشه کاهشی و برای

$x < 0$ همیشه افزایشی است. به علاوه، مسیرهای فاز یکدیگر را قطع نمی کنند؛ علت آن این است که هر جواب معادله دیفرانسیل یکتاست. معنی این مطلب از نظر فیزیکی این است که اگر یک ذره قادر باشد مسیر خود، و در نتیجه انرژی خود را تغییر دهد، قانون پایستگی انرژی نقض می شود، زیرا فرض کرده ایم که ذره برای هر مسیر یک انرژی معین دارد.

اکنون ببینیم که نمودار فاز برای یک نوسانگر هماهنگ میرا به چه شکلی در می آید.

معادلات x و \dot{x} عبارتند از

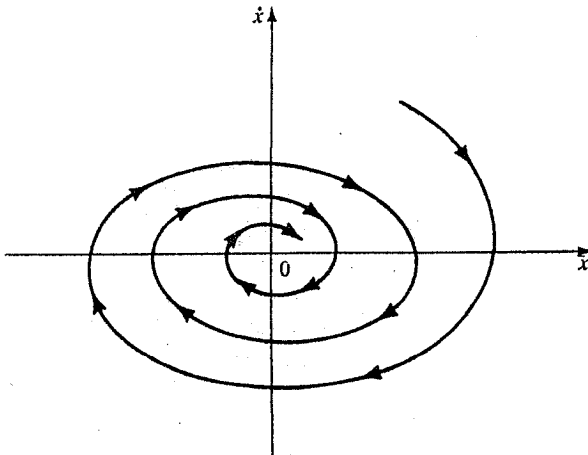
$$x = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \phi) \quad (۱۰۷-۴)$$

$$\dot{x} = -Ae^{-\gamma t} [\gamma \cos(\omega_1 t + \phi) + \omega_1 \sin(\omega_1 t + \phi)] \quad (۱۰۸-۴)$$

نوسانگر بطور پیوسته انرژی خود را از دست می دهد. با به کارگیری مختصات قطبی (θ, ρ) می توانیم نشان دهیم

$$\rho = \omega_1 A e^{(-\gamma/\omega_1)\theta} \quad (۱۰۹-۴)$$

که یک معادله مارپیچ لگاریتمی است. بدون وارد شدن به هیچ نوع جزئیاتی بیان می کنیم که مسیر فاز به صورتی است که در شکل (۷-۴) نشان داده شده است. یک ذره نوسان کننده در یک چاه پتانسیل یک مارپیچ درون گرا طی می کند و سرانجام وقتی به $x = 0$ رسید به حال سکون در می آید.

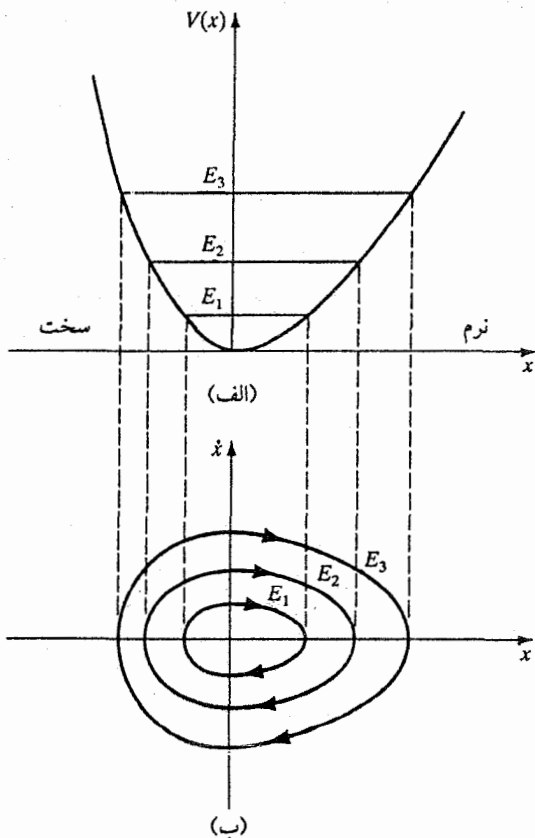


شکل (۷-۴): نمودار فاز یک نوسانگر هماهنگ میرا

بالاخره ، نمودار فاز یک سیستم غیرخطی را ، چنان که در شکل (۴-۸ الف) نشان داده شده است ، مورد بحث قرار می دهیم . پتانسیل نامتقارن نشان داده شده نمایشگر یک سیستم سخت برای $x < 0$ و یک سیستم نرم برای $x > 0$ است . با استفاده از رابطه

$$\dot{x} \propto \sqrt{E - V(x)}$$

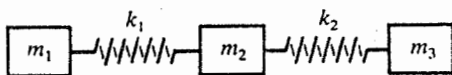
و نمودار $\dot{x}(x)$ نسبت به x ، نمودار فاز نشان داده در شکل (۴-۸ ب) را به دست می آوریم . سه مسیر بسته تخم مرغی شکل متناظر با سه انرژی متفاوتند . تا این جا فرض شده است که میرایی در کار نباشد . اگر میرایی باشد ، تمام مسیرها با حرکت مارپیچی درون گرابه $x = 0$ می رسند . اکنون فهم نمودار فاز نشان داده شده در شکل (۴-۵ ب) باید آسان باشد . این نمودار فاز متناظر با نمودار انرژی در شکل (۴-۵ الف) است .



شکل (۴-۸) : نمودارهای انرژی و فاز یک سیستم غیرخطی با پتانسیل نامتقارن

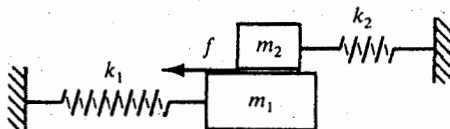
مسائل

- ۱-۴ یک مدار الکتریکی معادل با سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل (مسئله ۱-۴) رسم کنید .



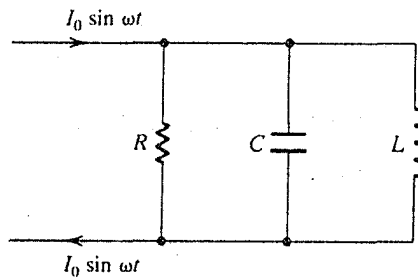
شکل (مسئله ۱-۴)

- ۲-۴ یک مدار الکتریکی معادل با سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل (مسئله ۲-۴) رسم کنید . فرکانسهای متفاوت را محاسبه کنید .



شکل (مسئله ۲-۴)

- ۳-۴ معادلات (۱۷-۴) ، (۱۸-۴) ، و (۱۹-۴) را به دست آورید .
- ۴-۴ برای فیزیکی که تحت اثر جاذبه گرانشی در امتداد قائم نوسان می کند ، سیستمهای معادل مکانیکی و الکتریکی را رسم کنید و معادلات لازم را بنویسید .
- ۵-۴ معادل الکتریکی (الف) میانگین توان تلف شده ، و (ب) ضریب کیفیت را مورد بحث قرار دهید .
- ۶-۴ سیستم الکتریکی شکل (مسئله ۶-۴) را در نظر بگیرید . (الف) فرکانس تشدید ، (ب) پهنای تشدید ، (پ) توان جذب شده در تشدید را محاسبه کنید .
- ۷-۴ فرکانس نوسان را برای مدار که در آن $R = 150 \Omega$ ، C برابر با 20 میکروفاراد (μF) ، و $L = 0.1$ هانری (H) محاسبه کنید .
- ۸-۴ نشان دهید که در یک مدار RLC که برای آن R در حد قابل چشم پوشی کوچک است ، اُفت لگاریتمی نوسان برابر است با $\pi R (CIL)^{1/2}$



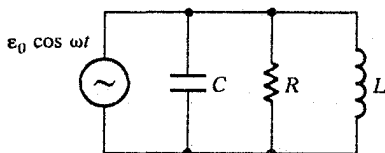
شکل (مسأله ۴-۶)

۹-۴ یک مدار الکتریکی سری شامل مقاومت R ، ظرفیت C ، و القاگر L است. یک نیروی الکتروموتوری $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t$ به مدار اعمال می‌کنیم. مسأله را حل کنید و جوابهای گذرا و حالت پایا را مورد بحث قرار دهید. عبارتی برای جریان در حالت پایا پیدا کنید. این مسأله را با مقایسه با نوسانگر هماهنگ واداشته انجام دهید. زاویه فاز بین جریان و نیروی الکتروموتوری را محاسبه کنید.

۱۰-۴ مدار RLC ی بحث شده در مسأله (۹-۴) را در نظر بگیرید و عبارتی برای جریان به صورت تابعی از زمان به دست آورید. نشان دهید که وقتی فرکانس نیروی الکتروموتوری متناوب به سمت صفر میل می‌کند جریان به صفر کاهش می‌یابد.

۱۱-۴ یک منبع نیروی الکتروموتوری به دو امپدانس Z_1 و Z_2 بطور سری بسته شده است. عبارتهایی برای توانهای تلف شده در Z_1 و Z_2 به دست آورید.

۱۲-۴ امپدانس مدار نشان داده شده در شکل (مسأله ۴-۱۲) را محاسبه کنید. نشان دهید که برای $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ جریان کمینه است. Q ی مدار را محاسبه کنید.



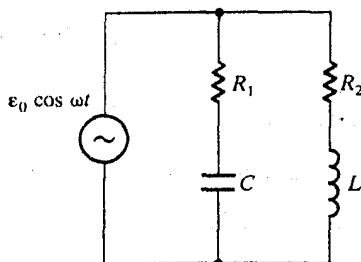
شکل (مسأله ۴-۱۲)

۱۳-۴ مدار موازی RLC نشان داده شده در شکل (مسأله ۴-۱۳) را در نظر بگیرید. Z را از

رابطه

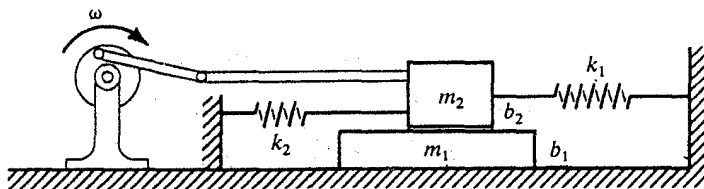
$$1/Z = 1/Z_1 + 1/Z_2$$

محاسبه کنید که در آن امپدانس Z_1 و R_1 بطور سری و Z_2 امپدانس R_2 و L بطور سری است، و در نتیجه Z_1 و Z_2 موازی هستند. مقدار جریان کل را وقتی جریان و نیروی الکتروموتوری همفاز هستند محاسبه کنید. برای $R_1 = R_2 = 0$ چه روی خواهد داد؟



شکل (مسأله ۴-۱۳)

۱۴-۴ مشابه الکتریکی سیستم نشان داده شده در شکل (مسأله ۴-۱۴) را بسازید و امپدانس را محاسبه کنید. b_1 و b_2 پارامترهای میرایی هستند که از اصطکاک بین هر جسم و سطح ناشی می‌شوند، ω فرکانس نیروی وادارنده است و جرم m_2 روی جرم m_1 به جلو و عقب می‌لغزد. این مسأله را با فرض نبود فنر k_2 انجام دهید.



شکل (مسأله ۴-۱۴)

۱۵-۴ مسأله ۴-۱۴) را با فرض حضور هر دو فنر k_1 و k_2 تکرار کنید.

۱۶-۴ با استفاده از روش فوریه، هر دو سری سینوسی و کسینوسی را در فاصله $0 < \theta < \pi$

برای تابع

$$f(\theta) = \begin{cases} 1, & 0 < \theta < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < \theta < \pi \end{cases}$$

به دست آورید .

۱۷-۴ سری فوریه (تبدیل فوریه) تابع زیر را به دست آورید

$$F(t) = \begin{cases} 0, & nT < t < (n + \frac{1}{2})T \\ F_0 = \text{constant}, & (n + \frac{1}{2})T < t < (n + 1)T \end{cases}$$

۱۸-۴ سری فوریه (تبدیل فوریه) تابع زیر را به دست آورید

$$F(t) = \begin{cases} 0, & -2\pi/\omega < t < 0 \\ \sin \omega t, & 0 < t < 2\pi/\omega \end{cases}$$

۱۹-۴ یک نوسانگر نامیرا دارای فرکانس طبیعی ω_0 است . یک نیروی ضربه ای با بزرگی ثابت

برای مدت $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ روی آن عمل می کند . تابع جواب را محاسبه کنید و برای آن

تعبیر فیزیکی بیاورید .

۲۰-۴ یک نوسانگر خطی تحت تأثیر نیروی زیر قرار دارد

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ ma \sin \omega t, & 0 < t < \pi/\omega \\ 0, & t > \pi/\omega \end{cases}$$

تابع جواب را محاسبه کنید .

۲۱-۴ یک نوسانگر میرا تحت تأثیر نیروی زیر قرار می گیرد

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ F_0 e^{-\gamma t} \sin \omega t, & t > 0 \end{cases}$$

با استفاده از تابع گرین ، تابع جواب را محاسبه کنید .

۲۲-۴ معادله (۴-۴۶) را برای مورد نوسانگر هماهنگ میرا به دست آورید .

۲۳-۴ معادله (۴-۵۳) را برای مورد نوسانگر هماهنگ میرا به دست آورید .

۲۴-۴ نتایج به دست آمده از معادله (۴-۵۱) را به مورد ضربه های چندگانه گسترش دهید و با

استفاده از تابع گرین ، که با معادلات (۴-۵۹) و (۴-۶۰) داده شده است ، یک

جواب به دست آورید .

۲۵-۴ نتایج به دست آمده در معادله (۴-۵۳) را به مورد ضربه های چندگانه گسترش دهید ، و

با استفاده از تابع گرین ، که با معادلات (۴-۵۹) و (۴-۶۰) داده شده است ، یک

جواب به دست آورید .

۲۶-۴ معادله (۴-۸۲) را با روش طرح ریزی شده در متن به دست آورید .

۲۷-۴ معادله (۴-۸۴) را با روش طرح ریزی شده در متن به دست آورید .

۲۸-۴ نشان دهید که برای یک معادله دیفرانسیل غیرخطی از نوع $\ddot{x} + cx^2 = 0$ ، اصل برهم نهش صادق نیست .

۲۹-۴ در شکل (۴-۴) فرض کنید که هر نخ باید به اندازه d کشیده شود تا به جرم m برسد . نشان دهید که تحت این شرایط داریم

$$V(x) = \left(k \frac{d}{l}\right)x^2 + \left[\frac{k(l-d)}{4l^3}\right]x^4$$

۳۰-۴ برای معادله (۴-۹۳) ، فرض کنید $x_0 = A \cos \omega_0 t$ و جوابی مشابه با جوابی که به معادله (۴-۱۰۰) منجر شد ، به دست آورید .

۳۱-۴ ذره ای را که با معادله

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \lambda x^2 = 0$$

توصیف می شود در نظر بگیرید . یک جواب مرتبه دوم درست با به کارگیری

$$x(t) = x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2$$

به دست آورید .

۳۲-۴ آونگی در نظر بگیرید که دامنه آن کوچک نباشد . نشان دهید که حرکت افقی آونگ می تواند تقریباً با معادله زیر داده شود

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x - \frac{1}{2l^3}x^3 = 0$$

۳۳-۴ یک نوسانگر تند میرا در نظر بگیرید و نمودار فاز را برای موارد زیر رسم کنید : (الف) $v_0 > 0$ ، (ب) $v_0 < 0$ و کوچک ، و (پ) $v_0 > 0$ و بزرگ .

۳۴-۴ برای مورد یک نوسانگر کند میرا معادله (۴-۱۰۹) را با به کارگیری $u = \omega_1 t$ ،

$$\rho = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \text{ در } (۴-۱۰۷) \text{ و } (۴-۱۰۸) \text{ ، و معادلات } \theta = \omega_1 t \text{ ، } v = \gamma x + \dot{x}$$

به دست آورید .

۳۵-۴ ذره ای به جرم m تحت تأثیر پتانسیل $V = A|x|^n$ قرار دارد . نشان دهید که دوره تناوب

برای چنین حرکتی با رابطه زیر داده می شود

$$T = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{2\pi m}{E}} \left(\frac{VE}{A}\right)^{1/n} \frac{\Gamma(1/n)}{\Gamma(1/2+1/n)}$$

مقدار T را برای $n=2$ و $n=3$ محاسبه کنید .

۳۶-۴ نمودار فاز را برای مورد $n=2$ در مسأله (۴-۳۵) رسم کنید .

۳۷-۴ نمودار فاز را برای $n=3$ در مسأله (۴-۳۵) ، یعنی $V = A|x|^3$ ، رسم کنید .

۳۸-۴ یک ذره تحت تأثیر نیرویی که برای $x < 0$ برابر با مقدار ثابت F_0 و برای $x > 0$ برابر با

مقدار ثابت $-F_0$ است قرار دارد . با ساختن نمودار فاز حرکت را توصیف کنید .

منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر

- ARTHUR, W., and FENSTER, S. K., *Mechanics*, Chapter 6. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1969.
- BECKER, R. A., *Introduction to Theoretical Mechanics*, Chapter 7. New York: McGraw-Hill Book Co., 1954.
- CHURCHILL, R. V., *Fourier Series and Boundary Value Problems*. New York: McGraw-Hill Book Co., 1941.
- DAVIS, H. F., *Fourier Series and Orthogonal Functions*. Needham Heights, Mass.: Allyn & Bacon, 1963.
- FRENCH, A. P., *Vibrations and Waves*, Chapter 4. New York: W. W. Norton and Co., Inc., 1971.
- HAUSER, W., *Introduction to the Principles of Mechanics*, Chapter 4. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1965.
- KITTEL, C., KNIGHT, W. D., and RUDERMAN, M. A., *Mechanics*, Berkeley Physics Course, Volume 1, Chapter 7. New York: McGraw-Hill Book Co., 1965.
- KU, Y. H., *Analysis and Control of Nonlinear Systems*. New York: Ronald Press, 1958.
- MARION, J. B., *Classical Dynamics*, 2nd ed., Chapter 5. New York: Academic Press, Inc., 1970.
- MINORSKY, N., *Introduction to Nonlinear Mechanics*. Ann Arbor, Mich.: Edwards, 1947.
- SYMON, K. R., *Mechanics*, 3rd. ed., Chapter 2. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1971.

آنالیز برداری ، عملگرهای برداری ، و تبدیلات

۵-۱ خواص برداری - بررسی هندسی

بیشتر کمیات فیزیکی که در فیزیک و مهندسی با آنها مواجه می شویم ، به دو نوع ، نرده ای و برداری ، تقسیم می شوند . یک کمیت نرده ای با بیان تنها بزرگی ، همراه با یکای آن ، اگر داشته باشد ، کاملاً مشخص می شود . نمونه های چنین کمیاتی عبارتند از جرم ، حجم ، انرژی ، زمان و اعداد . این کمیات می توانند همانند اعداد معمولی تلقی شوند و جمع ، تفریق ، ضرب ، و تقسیم آنها با قواعد ساده حساب صورت می گیرد .

یک کمیت برداری با بیان بزرگی و جهت ، هر دو کاملاً مشخص می شود . چند نمونه آن عبارتند از جابه جایی ، سرعت ، شتاب ، و شدت میدان الکتریکی . کمیات برداری از قواعد جبر برداری پیروی می کنند که در این بخش تا حدی در آن بحث خواهیم کرد . علاوه بر جبر ، هندسه ، و دیفرانسیل و انتگرال ، که با نمایش ریاضیاتی وضعیتهای فیزیکی ، نقش عظیمی در توصیف آنها ایفا می کنند ، جبر برداری نیز ضروری است . یکی از بزرگترین مزیت های آن این است که نمایش برداری بسیاری از وضعیتهای فیزیکی و ریاضیاتی پیچیده و دست و پاگیر را به شکلهای فشرده و واضحی که تحلیل آنها آسان است تبدیل می کند . به علاوه ، کاربرد و استفاده از آنها در وضعیتهای کشف نشده ، مانند تقارن ، به فرمول بندی اصول جدیدی منجر شده است . برای درک اهمیت حقیقی و کاربرد بردارها باید بدانیم که

چگونه کمیات برداری را جمع ، تفریق ، ضرب ، و تقسیم کنیم . همچنین ، همان طور که بعداً بحث خواهیم کرد ، نمایش برداری مستقل از دستگاه مختصات به کار برده شده است . اساساً سه روش برای به کارگیری بردارها وجود دارد : هندسی ، تحلیلی ، و آکسیوماتیک .

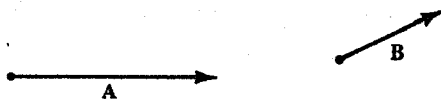
دو روش نخست را در این فصل تا اندازه ای مشروح توضیح می دهیم و در سرتاسر کتاب از آنها استفاده می کنیم . در این بخش ، خواص بردارها را باروش هندسی بررسی می کنیم .

نمایش کمیات برداری

همان طور که قبلاً بیان شد ، یک کمیت برداری هم بزرگی دارد و هم جهت . از نظر ترسیمی ، یک بردار با یک پاره خط و یک پیکان در یک انتهای آن نمایش داده می شود . طول پاره خط متناسب با بزرگی کمیت برداری است ، پیکان جهت کمیت برداری ، و گردی ابتدای بردار (اگر گذاشته شود) نقطه اثر آن را نشان می دهد [شکل (۵-۱)] . برای تمیز دادن حروفی که کمیات برداری را نمایش می دهند از آنهایی که کمیات نرده ای را نمایش می دهند ، کمیات برداری را در کتابها با حروف پررنگ نمایش می دهند : سرعت با v ، شتاب با a ، و نیرو با F نمایش داده می شود . بطور کلی ، برای نشان دادن بردارهای مختلف ، بدون رجوع به کمیت برداری خاصی ، حروف A ، B ، C ، ... ، R و غیره به کار می روند . چون به کار بردن حروف پررنگ در دستنوشته ها مشکل است ، یک راه دیگر نشان دادن بردارها گذاشتن پیکان در بالای حروف است ، به این ترتیب

$$A = \vec{A} , \quad B = \vec{B} , \quad C = \vec{C} , \dots , \quad R = \vec{R} \quad (۵-۱)$$

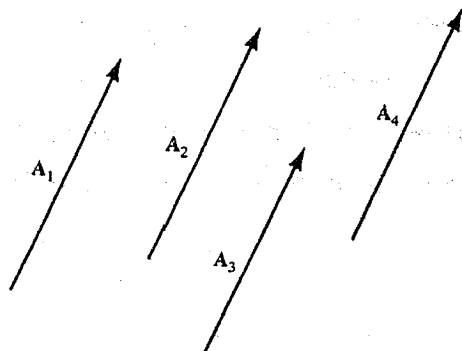
اگر فقط با بزرگی بردارها سر و کار داشته باشیم ، A ، B ، C ، ... یا $|A|$ ، $|B|$ ، $|C|$ ، ... تنها بزرگی کمیات برداری را نمایش می دهند . می توانیم خواص برداری را بدون رجوع به دستگاه مختصات خاصی بررسی کنیم . گرچه غالباً دستگاه مختصات دکارتی را به کار می بریم اما دستگاههای مختصات دیگر نیز مکرراً مورد استفاده قرار می گیرند .



شکل (۵-۱) : نمایش کمیات برداری . گردی در ابتدای بردار نقطه اثر آن را نشان می دهد

تساوی بردارها

دو بردار A و B در صورتی برابر گفته می‌شوند که بزرگیهای برابر و جهت‌های یکسانی داشته باشند. شکل (۲-۵) چهار بردار برابر A_1 ، A_2 ، A_3 ، و A_4 را نشان می‌دهد. توجه کنیم که این بردارها در نقاط متفاوتی قرار دارند. به این ترتیب می‌توانیم بگوییم که یک بردار هیچ مکانی ندارد، و هر بردار می‌تواند با بردار دیگری که موازی با آن و از نظر بزرگی برابر با آن است جایگزین بشود. این گونه بردارهایی که جهت ثابتی دارند بردارهای آزاد نامیده می‌شوند. بردارهایی که هم جهت و هم مکان (نقطه اثر) ثابتی دارند بردارهای ثابت نامیده می‌شوند. بردار لغزنده برداری است که نقطه اثر آن می‌تواند در هر جایی در امتداد خطی که از سر و ته آن می‌گذرد و تا بی‌نهایت ادامه دارد، قرار داشته باشد. بالاخره بردارهایی که هم برابرند و هم اثرهای یکسانی دارند بردارهای هم‌ارز نامیده می‌شوند.



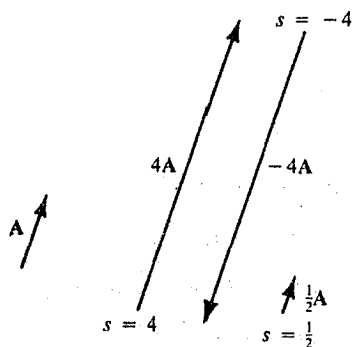
شکل (۲-۵): چهار بردار برابر

ضرب يك بردار در يك نرده ای

ضرب یک بردار در یک عدد نرده ای s منجر به بردار دیگر sA می‌شود، که بزرگی آن s برابر بزرگی A ، یعنی $|sA|$ یا $s|A|$ است. اگر s عدد مثبتی باشد، جهت بردار جدید هم جهت با A است، و اگر s منفی باشد جهت بردار جدید در خلاف جهت A است. این نکات در شکل (۳-۵) برای $s=4$ ، $s=-4$ ، و $s=\frac{1}{2}$ نشان داده شده‌اند. بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$|sA| = |s||A| = sA \quad (۲-۵)$$

بردار sA می‌تواند به صورت sA نیز نوشته شود

شکل (۳-۵) : ضرب یک بردار A در یک نرده‌ای s

جمع برداری

دو بردار A و B ، چنان که در شکل (۳-۵ الف) نشان داده شده است، در نظر بگیریم. در نقطه O برداری مساوی با بردار A رسم کنیم. از انتهای این بردار، که در a است، بردار دیگری مساوی با B رسم کنیم. خط واصل ابتدای A به انتهای B ، یعنی خط Ob ، مجموع دو بردار A و B را نمایش می‌دهد و بردار متوجه یا بطور ساده متوجه R ، نامیده می‌شود که به صورت

$$R = A + B \quad (۳-۵)$$

نوشته می‌شود. باید تأکید کرد که مجموع بزرگیهای A و B برابر با بزرگی R نیست، یعنی

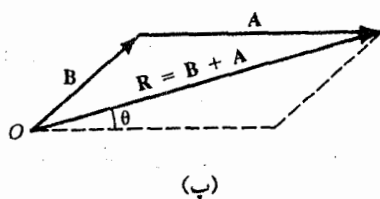
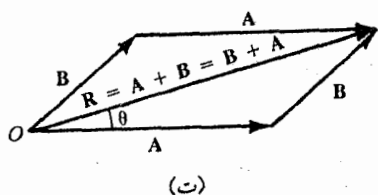
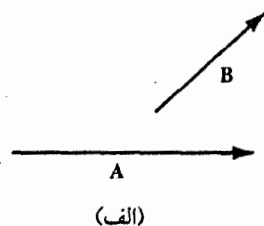
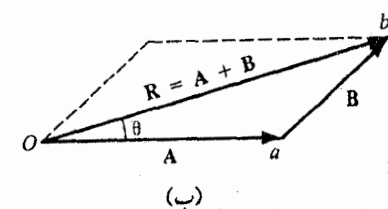
$$|R| \neq |A| + |B| \quad (۴-۵)$$

بزرگی R را می‌توان با اندازه گیری طول خط Ob و جهت آن را با زاویه θ که R با بردار A می‌سازد پیدا کرد.

به علاوه، ترتیب جمع بردارها نقشی ندارد، یعنی، چه A را با B جمع کنیم و چه B را با A جمع کنیم، همان طور که در شکل‌های (۳-۵ ب) و (۳-۵ پ) نشان داده شده است، به یک متوجه R می‌رسیم، یعنی، جمع بردارها از قاعده جابه‌جایی، چنان که در شکل (۳-۵ د) نشان داده شده است و از نظر ریاضی به صورت

$$A + B = B + A \quad (۵-۵)$$

نوشته می شود ، پیروی می کند .

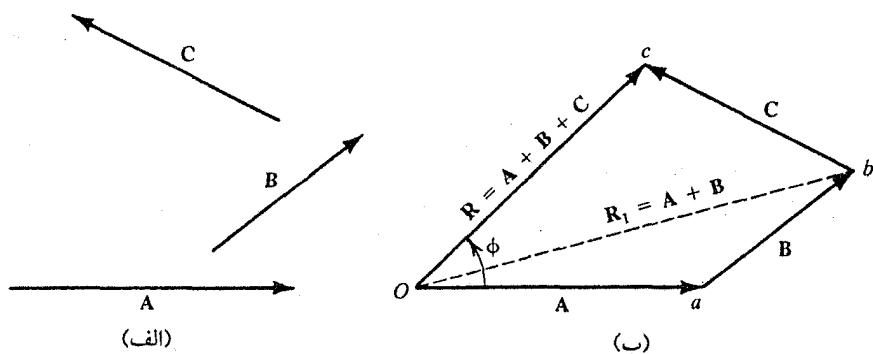


شکل (۴-۵) : جمع دو بردار A و B : $R = A + B$

اکنون روش بالا را به جمع بیش از دو بردار گسترش می دهیم . مثلاً متوجه سه بردار را ، شکل (۵-۵ الف) ، پیدا می کنیم . همان طور که در شکل (۵-۵ ب) نشان داده شده است ، بردار Oa را مساوی با A رسم می کنیم و از انتهای بردار A ، یعنی از a ، بردار ab مساوی با B را رسم می کنیم . از انتهای B ، یعنی از b ، برداری مساوی با C رسم می کنیم . خط Oc که ابتدای اولین بردار را در O به انتهای آخرین بردار C در c وصل می کند ، بردار متوجه R را تشکیل می دهد . (به روش دیگر ، R_1 متوجه $A + B$ است و وقتی C با R_1 جمع شود ، متوجه R به دست خواهد آمد . در عمل ، نیازی به رسم مرحله واسطه ای برای پیدا کردن R_1 نیست) . بنابراین می توانیم بنویسیم

$$R = R_1 + C = A + B + C \quad (۶-۵)$$

این روش می تواند به پیدا کردن جمع هر تعداد از بردارها گسترش داده شود . در تمام موارد ، نمودارها با استفاده از یک مقیاس مناسب رسم می شوند ، و متوجه نیز با همان مقیاس و با اندازه گیری زاویه ای که با یک جهت مرجع انتخاب شده ای می سازد تعیین می شود .



شکل (۵-۵): نتیجه سه بردار A ، B ، و C : $R = A + B + C$

ترتیبی که با آن سه بردار، با یکدیگر جمع شده اند، تأثیری در نتیجه ندارد، یعنی،

$$(A + B) + C = A + (B + C) \quad (۷-۵ \text{ الف})$$

که بیان می‌دارد که جمع $(A + B)$ و C همان نتیجه‌ای را می‌دهد که جمع A و $(B + C)$. این خاصیت جمع بردارها *قانون انجمنی* نامیده می‌شود. این قانون همچنین می‌رساند که

$$(ns)A = n(sA) \quad (۷-۵ \text{ ب})$$

به علاوه قانون توزیع پذیری می‌رساند که

$$(n + s)A = nA + sA \quad (۸-۵ \text{ الف})$$

$$s(A + B) = sA + sB \quad (۸-۵ \text{ ب})$$

تفریق برداری

بار دیگر، دو بردار A و B ، شکل (۵-۶ الف)، را در نظر بگیریم. می‌خواهیم B را از A کم کنیم، یعنی می‌خواهیم $A - B$ را که به بردار R منجر می‌شود پیدا کنیم. می‌نویسیم

$$R = A - B = A + (-B) \quad (۹-۵)$$

یعنی برای پیدا کردن $A - B$ به بردار A یک بردار دیگری که از نظر بزرگی مساوی و از نظر جهت در خلاف جهت B است اضافه می‌کنیم. این روش در شکل (۵-۶ ب) نمایش داده

شده است . همان طور که دیده می شود ، برداری است از a به b ، در حالی که $-B$ برداری است از a به c . به این ترتیب بردار متوجه R جمع A و $-B$ است و ، همان طور که نشان داده شده است ، از O به c است . دوروش دیگر تفریق B از A در شکلهای (۵-۶ پ) و (۵-۶ ت) نمایش داده شده اند . این روشها واضح و بدیهی اند . با این حال می توان نشان داد که

$$A + B = B + A$$

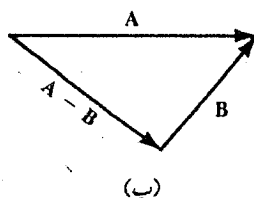
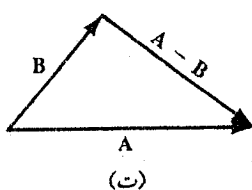
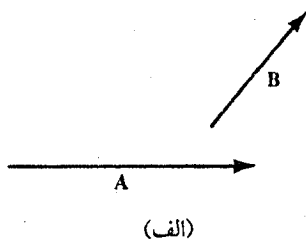
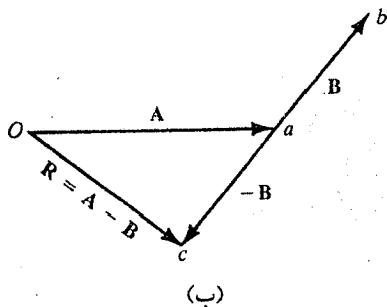
(۵-۱۰ الف)

$$A - B \neq B - A$$

به روشنی دیده می شود که

$$B - A = -(A - B)$$

(۵-۱۰ ب)



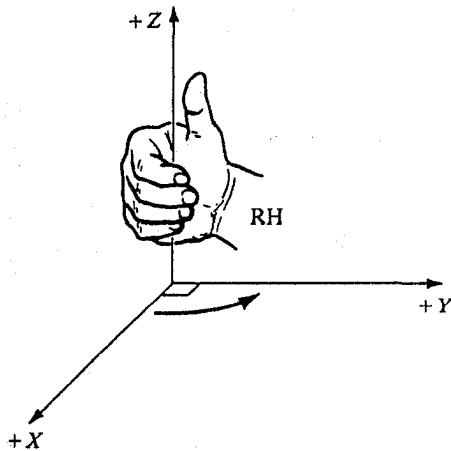
شکل (۵-۶) : تفریق بردار B از بردار A : $R = A - B$ (ت)

۵-۲ جمع برداری : بررسی تحلیلی

یک مزیت فرمول بندی برداری برای هر وضعیت خاص این است که بردارها می توانند بدون رجوع به هیچ دستگاه مختصات بخصوصی مورد استفاده قرار گیرند . اما دو دلیل عمده وجود دارد که سرانجام ما را به استفاده از یک دستگاه مختصات مناسبی وامی دارد : (۱) روش هندسی پیدا کردن متجه چند بردار پر زحمت است و خیلی دقیق نیست ، و (۲) برای یک تعبیر

مناسب ، ارائه نتایج در یک دستگاه مختصات مناسب همیشه مفید خواهد بود . یک راه این است که با به کارگیری مؤلفه های بردارها روشی تحلیلی ، که بعداً توضیح داده خواهد شد ، در پیش بگیریم .

برای شروع ، یک دستگاه مختصات دکارتی سه بُعدی انتخاب می کنیم . این دستگاه از سه محور مختصات عمود بر یکدیگر ، شکل (۷-۵) ، تشکیل شده است . در شکل (۷-۵) محور X و محور Y در یک صفحه قرار دارند و با هم زاویه 90° می سازند ، و محور Z بر صفحه شامل محور X و محور Y عمود است . این سه محور مختصات عمود بر هم ، همان طور که شکل (۷-۵) نشان می دهد ، یک دستگاه راستگرد تشکیل می دهند .



شکل (۷-۵) : دستگاه مختصات راستگرد سه بُعدی

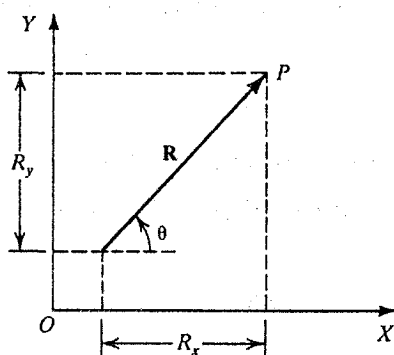
برای سادگی ، یک بردار R در دو بُعد ، آن طور که در شکل (۸-۵) نشان داده شده است ، در نظر بگیریم . در شکل (۸-۵ الف) عمودهایی از ابتدا و انتهای بردار R به محورهای X و Y رسم می کنیم . همیشه می توانیم محورها را به طریقی رسم کنیم که مبدأ O بر ابتدای بردار R منطبق باشد . این کار در شکل (۸-۵ ب) ، که در آن مساوی با R در شکل (۸-۵ الف) است ، انجام گرفته است . دو کمیت R_x و R_y مؤلفه های دکارتی بردار R هستند ، و بزرگیهای آنها عبارتند از [رک شکل (۸-۵ ب)]

$$R_x = R \cos \theta \quad \text{و} \quad R_y = R \sin \theta \quad (۱۱-۵)$$

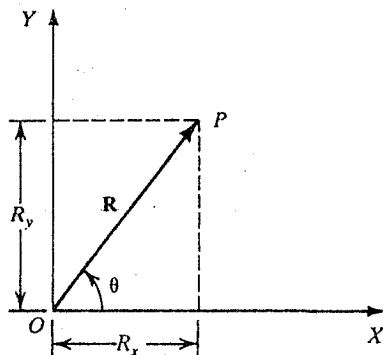
به این ترتیب اگر R و θ معلوم باشند ، می توانیم R_x و R_y را پیدا کنیم . از سوی دیگر ، اگر R_x و R_y معلوم باشند ، می توانیم R و θ را با روابط زیر حساب کنیم

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad \text{و} \quad \tan \theta = \frac{R_y}{R_x} \quad (۱۲-۵)$$

به این ترتیب اگر R و θ یا R_x و R_y را بدانیم وضع بردار در یک صفحه (دو بُعدی) کاملاً معین می شود .



(الف)



(ب)

شکل (۸-۵) : مؤلفه های دکارتی R_x و R_y یک بردار R

اکنون روش مؤلفه ای را برای جمع چند بردار به کار می گیریم . فرض کنیم سه بردار R_1 ، R_2 ، و R_3 ، مانند شکل (۵-۹ الف) ، داریم که ، به ترتیب ، با محور X زاویه های θ_1 ، θ_2 ، و θ_3 ، شکل (۵-۹ ب) ، می سازند . می خواهیم متوجه را پیدا کنیم . محورهای XY را ، مانند شکل (۵-۹ ب) ، رسم می کنیم . از نقطه O بردارهای R_1 ، R_2 ، و R_3 را موازی با بردارهای قسمت (الف) رسم می کنیم . اکنون هر بردار را به مؤلفه هایش تجزیه می کنیم . یعنی

بردار	زاویه	مؤلفه های X	مؤلفه های Y
R_1	θ_1	$R_{1x} = R_1 \cos \theta_1$	$R_{1y} = R_1 \sin \theta_1$
R_2	θ_2	$R_{2x} = R_2 \cos \theta_2$	$R_{2y} = R_2 \sin \theta_2$
R_3	θ_3	$R_{3x} = R_3 \cos \theta_3$	$R_{3y} = R_3 \sin \theta_3$

فرض کنیم R_x ، R_y مجموع مؤلفه های روی X و روی Y باشند. بنابراین

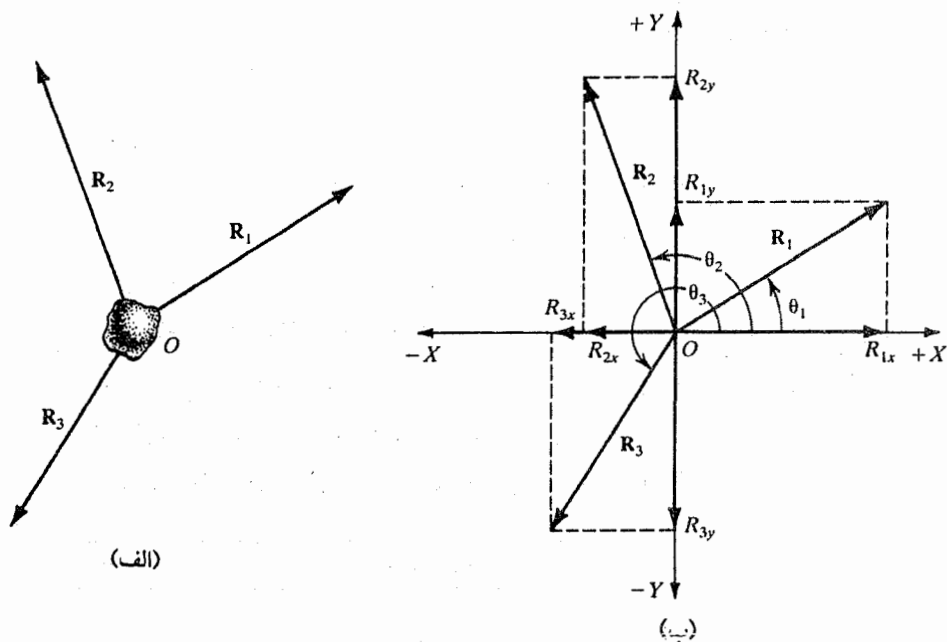
$$R_x = R_{1x} + R_{2x} + R_{3x} = \sum_{i=1}^3 R_{ix} \quad (۵-۱۳ \text{ الف})$$

$$R_y = R_{1y} + R_{2y} + R_{3y} = \sum_{i=1}^3 R_{iy} \quad (۵-۱۳ \text{ ب})$$

که علامت جمع بندی بیانگر جمع تمام مؤلفه ها از $i=1$ تا $i=3$ است. با گرفتن R_x و R_y به عنوان مؤلفه های یک بردار، متوجه را به صورت زیر به دست می آوریم

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad \text{و} \quad \tan \theta = \frac{R_y}{R_x} \quad (۵-۱۴)$$

باید یادآوری کرد که نیازی به رسم نمودار در شکل (۵-۹) نداریم. محاسبات ساده، سریع، و دقیق اند و می توانند به هر تعداد بردار گسترش داده شوند. تنها تفاوت این است



شکل (۵-۹): مؤلفه های دکارتی بردارهای R_1 ، R_2 ، و R_3

که ، برای کلی ترین مورد ، معادلات (۵-۱۳) به صورت زیر در می آید

$$R_X = R_{1x} + R_{2x} + R_{3x} + \dots + R_{nx} = \sum_{i=1}^n R_{ix} \quad (5-15 \text{ الف})$$

$$R_Y = R_{1y} + R_{2y} + R_{3y} + \dots + R_{ny} = \sum_{i=1}^n R_{iy} \quad (5-15 \text{ ب})$$

می توان R_X و R_Y را ، با استفاده از معادلات (۵-۱۴) ، برای پیدا کردن R و θ به کار گرفت .
این روش را می توانیم به بردارها در سه بُعد گسترش دهیم . همان طور که در شکل (۵-۱۰) نشان داده شده است ، بردار R می تواند به سه مؤلفه R_x ، R_y ، و R_z ، به ترتیب ، در امتدادهای X ، Y و Z تجزیه شود . به این ترتیب متجه R بردارهای R_1 ، R_2 ، R_3 ، \dots ، R_n می تواند به صورت زیر نوشته شود

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i \quad (5-16)$$

مؤلفه این بردار روی محور X را می توان به صورت

$$R_X = R_{1x} + R_{2x} + R_{3x} + \dots + R_{nx} = \sum_{i=1}^n R_{ix} \quad (5-17)$$

با عبارات مشابهی برای Y و Z نوشت . با مراجعه به شکل (۵-۱۰) ، برای متجه خواهیم داشت

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (5-18)$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{R_x^2 + R_y^2}}{R_z} \quad (5-19)$$

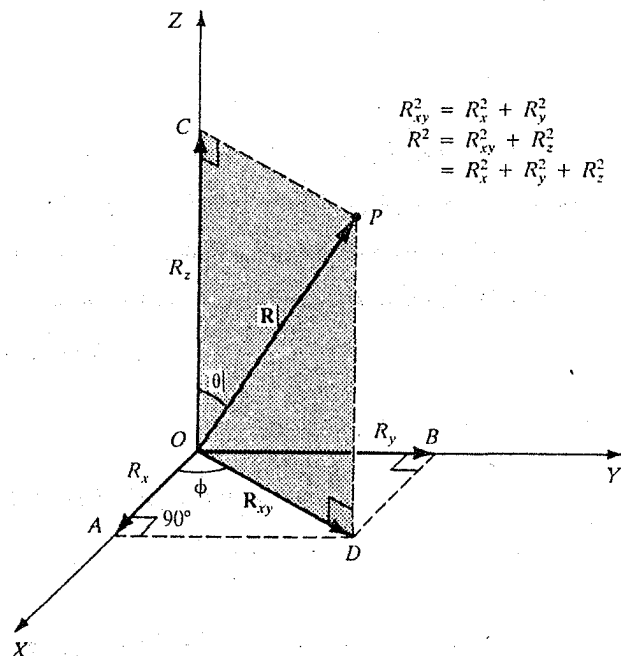
$$\tan \phi = \frac{R_y}{R_x} \quad (5-20)$$

چون مؤلفه های یک بردار نیز یک بردار را تعیین می کنند ، باید این امکان وجود داشته باشد که با گسترش روش تحلیلی به روش هندسی بحث شده در بخش پیشین ، این دو تعریف را به یکدیگر پیوند دهیم . همچنین

$$A = (A_x, A_y) \quad (5-21)$$

$$A = (A_x, A_y, A_z) \quad (5-22)$$

با استفاده از معادلات (۲۱-۵) و (۲۲-۵)، می‌توانیم خواص بردارها در شکل مؤلفه‌ای را به روش زیر بنویسیم:



$$\begin{aligned} R_{xy}^2 &= R_x^2 + R_y^2 \\ R^2 &= R_{xy}^2 + R_z^2 \\ &= R_x^2 + R_y^2 + R_z^2 \end{aligned}$$

شکل (۱۰-۵): مؤلفه‌های دکارتی R_x ، R_y ، و R_z یک بردار \mathbf{R} در سه بُعد

برابری بردارها:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \text{یا} \quad [A_x, A_y, A_z] = [B_x, B_y, B_z] \quad (۲۳-۵ \text{ الف})$$

که معنی آن عبارت است از

$$A_x = B_x, \quad A_y = B_y, \quad A_z = B_z \quad (۲۳-۵ \text{ ب})$$

ضرب در یک نرده‌ای:

$$s\mathbf{A} = s[A_x, A_y, A_z] = [sA_x, sA_y, sA_z] \quad (۲۴-۵)$$

بردار صفر: بردار صفر دارای بزرگی صفر و جهت نامعین است و با

$$\mathbf{0} = [0, 0, 0] \quad (۲۵-۵)$$

نمایش داده می شود .

جمع برداری :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{A} + \mathbf{B} = [A_x, A_y, A_z] + [B_x, B_y, B_z] \\ &= [A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z] \\ &= [R_x, R_y, R_z] \end{aligned} \quad (26-5)$$

که در آن

$$R_x = A_x + B_x, \quad R_y = A_y + B_y, \quad R_z = A_z + B_z$$

تفریق برداری :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{A} - \mathbf{B} = [A_x, A_y, A_z] - [B_x, B_y, B_z] \\ &= [A_x - B_x, A_y - B_y, A_z - B_z] \end{aligned} \quad (27-5)$$

قانون جابه جایی پذیری :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= [A_x, A_y, A_z] + [B_x, B_y, B_z] \\ &= [A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z] \\ &= [B_x + A_x, B_y + A_y, B_z + A_z] \\ &= [B_x, B_y, B_z] + [A_x, A_y, A_z] \\ &= \mathbf{B} + \mathbf{A} \end{aligned} \quad (28-5)$$

قانون انجمنی :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= [A_x + (B_x + C_x), A_y + (B_y + C_y), A_z + (B_z + C_z)] \\ &= [(A_x + B_x) + C_x, (A_y + B_y) + C_y, (A_z + B_z) + C_z] \\ &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \end{aligned} \quad (29-5)$$

به همین نحو ،

$$\begin{aligned} (ns)\mathbf{A} &= (ns)[A_x, A_y, A_z] = n[sA_x, sA_y, sA_z] \\ &= n(s\mathbf{A}) \end{aligned} \quad (30-5)$$

قانون توزیع پذیری :

$$\begin{aligned} (n + s)\mathbf{A} &= (n + s)[A_x, A_y, A_z] \\ &= [nA_x, nA_y, nA_z] + [sA_x, sA_y, sA_z] \\ &= n\mathbf{A} + s\mathbf{A} \end{aligned} \quad (31-5)$$

به همین نحو ،

$$\begin{aligned} s(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= s[A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z] \\ &= [sA_x, sA_y, sA_z] + [sB_x, sB_y, sB_z] \\ &= s\mathbf{A} + s\mathbf{B} \end{aligned} \quad (۳۲-۵)$$

۳-۵ ضرب نرده ای و ضرب برداری بردارها

بر خلاف جمع و تفریق برداری ، چند راه برای تعریف ضرب بردارها وجود دارد . اما معمولاً دو نوع ضرب برای بردارها به کار می رود ، که تا اندازه ای آنها را توضیح خواهیم داد . این دو نوع عبارتند از (۱) ضرب نرده ای دو بردار ، و (۲) ضرب برداری دو بردار : همچنین (۳) ضرب سه گانه نرده ای و (۴) ضرب سه گانه برداری را بررسی خواهیم کرد .

ضرب نرده ای (یا ضرب نقطه ای)

حاصل ضرب نرده ای یا نقطه ای دو بردار \mathbf{A} و \mathbf{B} با یک کمیت نرده ای S تعریف می شود که برابر است با حاصل ضرب بزرگی \mathbf{A} در بزرگی \mathbf{B} در کسینوس زاویه بین این دو بردار ؛ یعنی

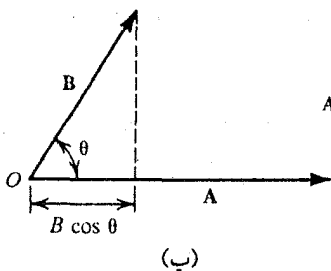
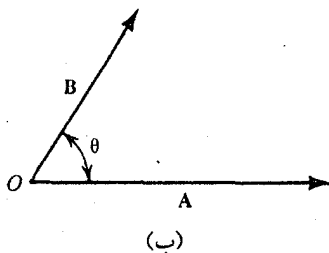
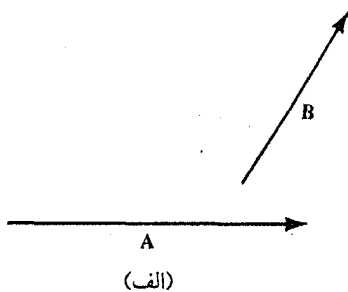
$$S = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = AB \cos \theta, \quad 0 < \theta < \pi \quad (۳۳-۵)$$

که $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ خوانده می شود \mathbf{A} نقطه \mathbf{B} و عبارت است از یک کمیت نرده ای با بزرگی $S = AB \cos \theta$. شکل (۵-۱۱ الف) بردارهای \mathbf{A} و \mathbf{B} را نشان می دهد . زاویه θ ، همان طور که در شکل (۵-۱۱ ب) نشان داده شده است ، کوچکترین زاویه بین دو بردار است . دو راه اختیاری برای تعیین حاصل ضرب نرده ای دو بردار وجود دارد که در شکل‌های (۵-۱۱ پ) و (۵-۱۱ ت) نشان داده شده اند و در زیر توضیح داده می شوند

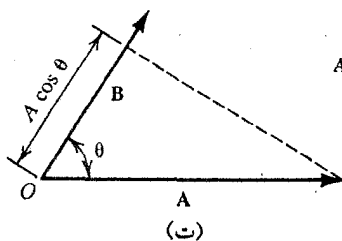
$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= |\mathbf{A}| \text{ (تصویر } \mathbf{B} \text{ روی } \mathbf{A}) \\ &= |\mathbf{A}| (|\mathbf{B}| \cos \theta) = AB \cos \theta \end{aligned} \quad (۳۴-۵)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= |\mathbf{B}| \text{ (تصویر } \mathbf{A} \text{ روی } \mathbf{B}) \\ &= (|\mathbf{A}| \cos \theta) |\mathbf{B}| = AB \cos \theta \end{aligned} \quad (۳۵-۵)$$

اکنون چند مورد خاص ضرب نرده‌ای را بررسی کنیم .



$$A \cdot B = |A|(|B| \cos \theta) = AB \cos \theta$$



$$A \cdot B = (|A| \cos \theta) |B| = AB \cos \theta$$

شکل (۵-۱۱) : ضرب نرده‌ای دو بردار A و B : $A \cdot B$

حاصل ضرب نقطه‌ای صفر است . فرض کنیم حاصل ضرب نرده‌ای یا نقطه‌ای دو بردار A و B صفر است ، یعنی $A \cdot B = 0$. این در صورتی ممکن است که حداقل یکی از این سه شرط برقرار باشد : $|A| = 0$ یا $B = 0$ ، یا A عمود بر B باشد ، یعنی $\theta = 90^\circ$. اگر A بر B عمود باشد ، گفته می‌شود که بردار A بر بردار B ارتوگونال است . بنابراین حتی اگر هیچ کدام از بردارها صفر نباشد این امکان وجود دارد که حاصل ضرب نرده‌ای آنها صفر باشد .

ضرب نرده ای جابه جایی پذیر است. براحتی می توان نشان داد که

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (۳۶-۵)$$

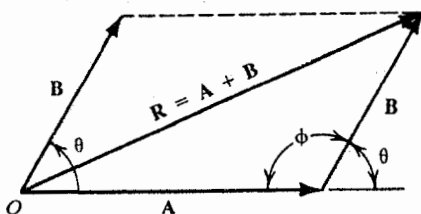
یعنی، ترتیب ضرب اهمیتی ندارد.

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{B}| |\mathbf{A}| \cos(-\theta) = AB \cos \theta = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

دو بردار برابرند. فرض کنیم $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ ؛ بنابراین $\cos(A, B) = \cos 0^\circ = 1$ و

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2 = A^2 \quad (۳۷-۵)$$

قانون کسینوسها. با استفاده از ضرب نقطه ای، قانون کسینوسها پیش پا افتاده می شود. در شکل (۱۲-۵) قرار دهیم



شکل (۱۲-۵): قانون کسینوسها در مورد $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

$$\begin{aligned} R^2 &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} + 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \\ &= A^2 + B^2 + 2AB \cos(A, B) \end{aligned}$$

یعنی

$$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta \quad (۳۸-۵)$$

چون $\cos \theta = \cos(\pi - \phi) = -\cos \phi$ خواهیم داشت

$$R^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \phi \quad (۳۹-۵)$$

به همین نحو، در شکل (۱۳-۵) قرار دهیم

$$D = A - B$$

$$D^2 = D \cdot D = (A - B) \cdot (A - B)$$

$$= A \cdot A + B \cdot B - 2A \cdot B$$

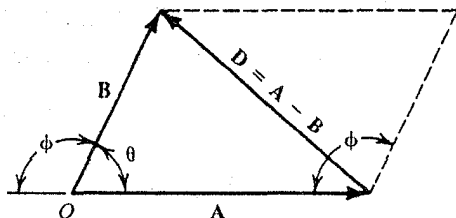
$$= A^2 + B^2 - 2AB \cos(A, B)$$

یعنی ،

$$D^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta \quad (۴۰-۵)$$

چون $\cos \theta = \cos(\pi - \phi) = -\cos \phi$ داریم

$$D^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \phi \quad (۴۱-۵)$$

شکل (۵-۱۳) : قانون کسینوسها در مورد $D = A - B$ **ضرب برداری (یا ضرب چلیپایی)**

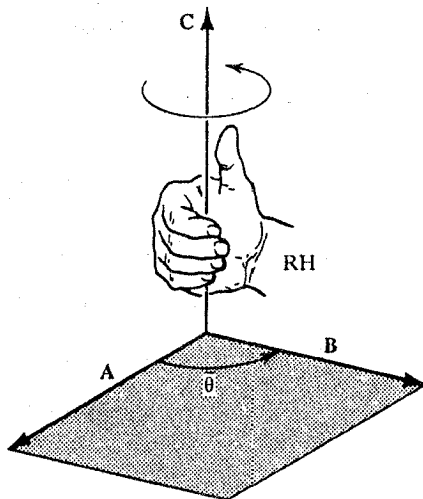
ضرب برداری دو بردار A و B به صورت بردار C تعریف می شود که بزرگی آن برابر است با حاصل ضرب بزرگی A در بزرگی B و سپس در سینوس زاویه بین A و B ، و جهت بردار C طوری است که هم عمود بر A است و هم عمود بر B ؛ یعنی C عمود بر صفحه شامل هم A و هم B است . ضرب چلیپایی را با

$$C = A \times B \quad (۴۲-۵)$$

نمایش می دهیم که $A \times B$ خوانده می شود A چلیپا B ، و به صورتی است که در شکل (۵-۱۴) نمایش داده شده است . به این ترتیب بزرگی C عبارت است از

$$C = |C| = |A||B| \sin(A, B) = AB \sin \theta , \quad 0 < \theta < \pi \quad (۴۳-۵)$$

در نتیجه C در صورتی صفر است که یا $A = 0$ یا $B = 0$ ، یا زاویه θ صفر باشد. جهت C با قاعده دست راست یا پیچ راستگرد، چنان که در شکل (۵-۱۴) نشان داده شده است، تعیین می شود. مطابق شکل (۵-۱۴)، انگشتان دست راست را در جهت A قرار دهید، سپس انگشتان خود را از راه زاویه کوچکتر θ به طرف B بچرخانید؛ جهت انگشت شست جهت بردار C را به ما می دهد. اگر A و B در صفحه XY باشند، C در امتداد محور Z خواهد بود. در واقع می توان گفت که A ، B ، و C یک متوازی السطوح با اضلاع A در امتداد محور X ، B که با X یک زاویه θ از محور X به محور Y می سازد، و C در امتداد محور Z ، تشکیل می دهند. (یک راه دیگر برای پیدا کردن جهت C پیچ راستگرد است. محور یک پیچ راستگرد را عمود بر صفحه شامل A و B بگیریم. اگر پیچ را به طریقی بچرخانیم که A را به طرف B بیاورد، C در جهتی است که پیچ جلو می رود). چند مثال برای نمایش دادن ضرب چلیپایی در شکل (۵-۱۵) نشان داده شده است. با نگاهی به این مثالها، می توانیم به نتایجی چند راجع به ضرب چلیپایی برسیم.

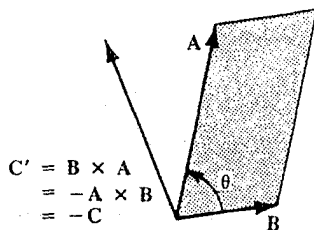
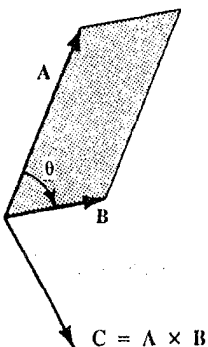
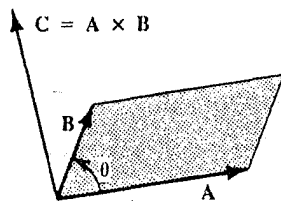
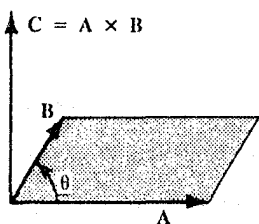


شکل (۵-۱۴): ضرب چلیپایی بردارهای A و B ؛ فایض جهت C به کمک قاعده دست راست

خاصیتهای جابه جایی پذیری و توزیع پذیری: از قاعده قراردادی برای تعریف ضرب برداری، می توانیم (از شکل (۵-۱۵)) نتیجه بگیریم که

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

(۴۴-۵)



شکل (۵-۱۰) : ضرب چلیپایی دو بردار \mathbf{A} و \mathbf{B} با جهت گیرهای متفاوت

یعنی ، ضرب برداری جابه جایی پذیر نیست ؛ پاد جابه جایی پذیر است . همچنین از معادله (۴۴-۵) دیده می شود

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

(۴۵-۵)

یعنی ، ضرب برداری هر بردار با خودش صفر است . همچنین ، علت صفر شدن $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ این است که $\sin \theta = \sin 0^\circ = 0$. اگر زاویه بین \mathbf{A} و \mathbf{B} صفر باشد داریم $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin 0^\circ = 0$.

توجه کنیم که طرف راست معادله (۴۵-۵) یک بردار صفر است که از قاعده زیر پیروی

می کند .

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{0} = 0$$

(۴۶-۵)

ضرب برداری از قانون توزیع پذیری پیروی می کند

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C \quad (۴۷-۵)$$

$$s(A \times B) = (sA) \times B = A \times (sB) \quad (۴۸-۵)$$

مساحت يك متوازی الاضلاع . در موارد بسیاری علاقه مندیم که جهت گیری یک سطح را بدانیم ، و برای این منظور مناسب است که از ضرب برداری استفاده کنیم . بردارهای B و C را که دو ضلع یک مثلث OBC یا اضلاع مجاور یک متوازی الاضلاع $OBDC$ را ، آن طور که شکل (۵-۱۶) نشان می دهد ، تشکیل می دهند ، در نظر بگیریم . مساحت A ی متوازی الاضلاع عبارت است از

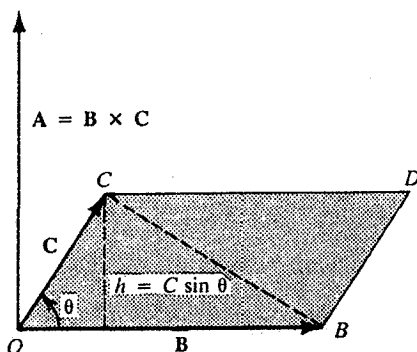
$$\begin{aligned} A &= 2 \text{ (مساحت مثلث } OBC) \\ &= 2[\text{نصف قاعده} \times \text{ارتفاع}] = 2\left[\frac{1}{2} Bh\right] \\ &= BC \sin \theta = |\mathbf{B}| |\mathbf{C}| \sin \theta \end{aligned}$$

یا ، اگر مساحت را با یک کمیت برداری A نمایش دهیم ، می توانیم بنویسیم

$$A = |\mathbf{A}| = |\mathbf{B} \times \mathbf{C}| = BC \sin(B, C) = BC \sin \theta \quad (۴۹-۵)$$

به این ترتیب مساحت یک متوازی الاضلاع به ضلعهای B و C عبارت است از $B \times C$.

چون



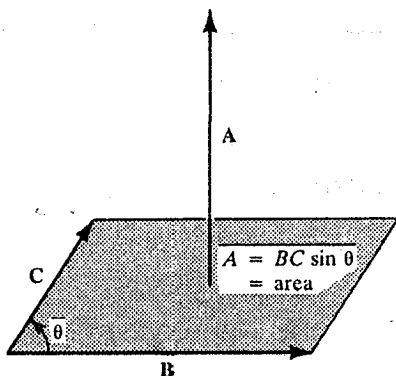
شکل (۵-۱۶) : مساحت يك متوازی الاضلاع

$B \times C$ عمود بر صفحه متوازی الاضلاع است ، بردار A به صورتی است که در شکل (۵-۱۷) نمایش داده شده است یعنی یک جهت به مساحت داده شده است .

قانون سینوسها. یک مثلث که از بردارهای A ، B ، و C با

(۵۰-۵)

$$C = A + B$$



شکل (۰-۱۷) : افزایش برداری مساحت به وسیله A که عمود بر صفحه بردارهای B و C است

تشکیل شده است در نظر بگیریم . دو طرف را در A ضرب برداری کنیم ، یعنی

(۵۱-۵)

$$A \times C = A \times A + A \times B$$

چون $A \times A = 0$ معادله (۵۱-۵) به شکل زیر در می آید

$$A \times C = A \times B$$

یا

$$AC \sin(A, C) = AB \sin(A, B)$$

یعنی

$$\frac{\sin(A, C)}{B} = \frac{\sin(A, B)}{C}$$

یا بطور کلی ،

(۵۲-۵)

$$\frac{\sin(A, C)}{B} = \frac{\sin(A, B)}{C} = \frac{\sin(B, C)}{A}$$

که قانون سینوسهاست .

ضرب سه گانه نرده ای : حجم يك متوازی السطوح

کمیت $C \cdot (A \times B)$ یک کمیت نرده ای است . می توانیم نشان دهیم که اگر A ، B ، و C اضلاع یک متوازی السطوح باشند این حاصل ضرب حجم متوازی السطوح را نمایش می دهد . از شکل (۵-۱۸) دیده می شود که حجم V برابر است با

$$V = (\text{ارتفاع}) (\text{مساحت قاعده}) = |A \times B| h$$

$$= |A \times B| |C| \sin[(A \times B), C]$$

یا

$$V = (A \times B) \cdot C \quad (5-53)$$

اگر بردارها در ضرب برداری از یک نظم دوره ای پیروی کنند ، می توانیم V را به صورت

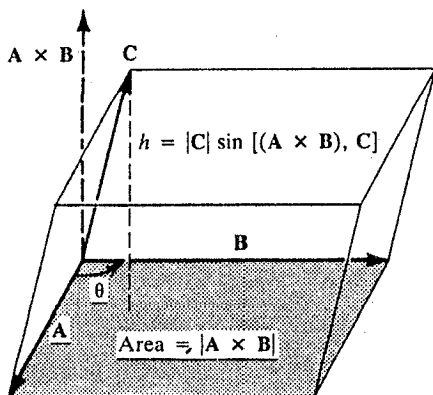
$$V = (A \times B) \cdot C = (B \times C) \cdot A = (C \times A) \cdot B \quad (5-54)$$

یا ، چون ضرب نرده ای جابه جایی پذیر است ،

$$V = A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B) \quad (5-55)$$

بنویسیم . یعنی ، اگر در ضرب سه گانه نرده ای بردارها را با رعایت نظم دوره ای جابه جا کنیم ، حاصل تغییر نمی کند . همچنین می توانیم بنویسیم

$$A \cdot (B \times C) = -A \cdot (C \times B) \quad (5-56)$$



شکل (۵-۱۸) : حجم يك متوازی السطوح بر حسب اضلاع A ، B ، و C

ضرب سه گانه برداری

دو راه متفاوت وجود دارد که حاصل ضرب سه بردار به یک بردار منجر شود . یکی از این ضربها عبارت است از

$$A(B \cdot C) = B(C \cdot A) = C(A \cdot B) \quad (57-5)$$

تعبیر آن چنین است : $(B \cdot C)$ یک نرده ای است ، در نتیجه $A(B \cdot C)$ عبارت است از بردار A ضربدر نرده ای $(B \cdot C)$. امتداد بردار جدید همان امتداد A است . به همین نحو $B(A \cdot C)$ برداری در امتداد B ، $C(A \cdot B)$ برداری در امتداد C است . ضرب سه گانه برداری دیگر عبارت است از

$$A \times (B \times C) \quad (58-5)$$

$B \times C$ برداری است عمود بر صفحه B و C . بنابراین $A \times (B \times C)$ برداری است در صفحه B و C . این گونه استدلال برای ضربهای سه گانه دیگر نیز به کار می رود . همچنین می توان نشان داد که

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B) \quad (59-5)$$

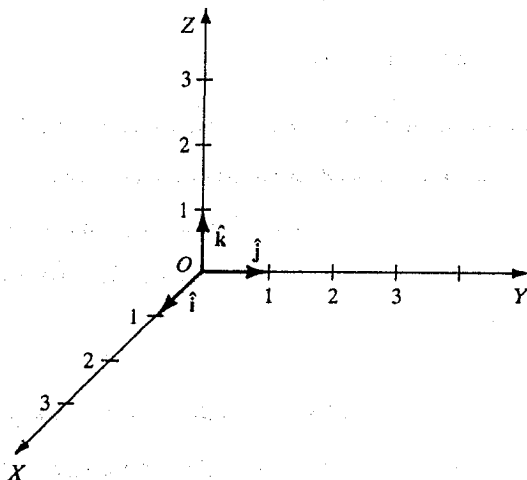
۴-۵ بردارهای یکه یا بردارهای پایه

همان طوری که از نام آن بر می آید ، بردار یکه برداری است با بزرگی واحد همراه با یک جهت . مفهوم بردار یکه را در این بخش به بحث گذاشته و آن را بارها در سرتاسر کتاب به کار خواهیم گرفت . برای یک دستگاه مختصات راست گوشه یا دکارتی ، بردارهای یکه سه بردار یکه عمود بر یکدیگر هستند ، که هر کدام برای یک بُعد به کار می روند . این بردارها بردارهای مختصه ای یکه نیز نامیده می شوند . برای یک دستگاه مختصات دکارتی ، این بردارهای یکه با i ، j ، و k نمایش داده می شوند ، که i در امتداد محور X ، j در امتداد محور Y ، و k در امتداد محور Z است [شکل (۵-۱۹)] و یک سه تایی راستگرد تشکیل می دهند (چند نوع نمادگذاری دیگر برای بردارهای پایه به کار رفته اند ، مانند x ، y ، و z یا x_1 ، یا u_1 ، با $i = 1, 2, 3$) . گاهی اوقات بردارهای پایه بطور ساده با i ، j ، و k نمایش داده می شوند . بنابراین ، برحسب تعریف ،

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1 \quad (۶۰-۵)$$

یا به شکل مؤلفه ای ،

$$\hat{i} = [1, 0, 0], \quad \hat{j} = [0, 1, 0], \quad \hat{k} = [0, 0, 1] \quad (۶۱-۵)$$



شکل (۵-۱۹) : بردارهای یکه \hat{i} ، \hat{j} ، و \hat{k} برای یک دستگاه مختصات راست گوشه (با دکارتی)

با به کارگیری این تعریف ، می توانیم بردار A را به شکل مؤلفه ای به صورت

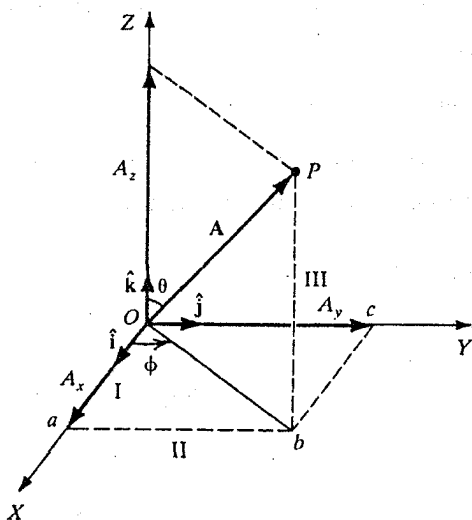
$$\begin{aligned} A &= [A_x, A_y, A_z] = [A_x, 0, 0] + [0, A_y, 0] + [0, 0, A_z] \\ &= A_x[1, 0, 0] + A_y[0, 1, 0] + A_z[0, 0, 1] \end{aligned}$$

بنویسیم ، یعنی

$$A = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad (۶۲-۵)$$

که A_x ، A_y ، و A_z مؤلفه های A در امتداد محورها هستند [شکل ۵-۲۰]. همان طور که دیده می شود ، ضرب \hat{i} در A_x ، بدون این که بزرگی یک نرده ای را تغییر دهد ، جهتی به آن می دهد ، و به همین نحو برای دو جمله دیگر ، $A_y \hat{j}$ و $A_z \hat{k}$. یعنی ضرب یک نرده ای با یک بردار یک نرده ای جهت می دهد (جهت بردار یک نرده ای بدون این که بزرگی را تغییر دهد . معادله (۵-۶۲) ، همان طور که شکل (۵-۲۰) نشان می دهد ، دارای تعبیر جالبی است . ابتدای بردار در O است و انتهای آن در P قرار دارد ، که می توان با رفتن نخست از مسیر I در امتداد Oa برابر با $A_x \hat{i}$ ، سپس با رفتن از مسیر II در امتداد Ob برابر با $A_y \hat{j}$ ، و به دنبال آن با رفتن از مسیر III در امتداد bP

برابر با $A_z \mathbf{k}$ ، به آن رسید . برای رفتن از O به P مجبور نیستیم که مجموعه مسیرهای خاص I ، II ، III را در امتداد محورهای X و Y و Z طی کنیم ؛ هر مجموعه دیگر (Y, Z, X) یا (Z, X, Y) به همین نتیجه منجر خواهد شد ، یعنی ، بعد از شروع از نقطه O به نقطه P خواهند رسید .



شکل (۰-۲۰) : مؤلفه‌های یک بردار $A = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$

با استفاده از تعریف پیشین بردارهای یکه و تعریف ضرب نرده‌ای

$$A \cdot B = AB \cos \theta$$

و ضرب برداری

$$A \times B = C \quad \text{و} \quad |C| = C = AB \sin \theta$$

می‌توانیم ، با توجه به این که بردارهای یکه بر یکدیگر عمودند ، به نتایج زیر

برسیم

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \quad (۶۳-۵)$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (۶۴-۵)$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0 \quad (۶۵-۵)$$

$$\begin{aligned}\hat{i} \times \hat{j} &= \hat{k} = -\hat{j} \times \hat{i} \\ \hat{j} \times \hat{k} &= \hat{i} = -\hat{k} \times \hat{j}\end{aligned}\quad (۶۶-۵)$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} = -\hat{i} \times \hat{k}$$

ما دو تا از این نتایج را اثبات خواهیم کرد؛ نتایج دیگر نیز به همین روش اثبات می شوند.

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = |\hat{i}| |\hat{i}| \cos 0^\circ = (1)(1)(1) = 1$$

$$|\hat{i} \times \hat{i}| = |\hat{i}| |\hat{i}| \sin 0^\circ = (1)(1)(0) = 0$$

ضربهای نرده ای و برداری، با به کارگیری نمادگذاری بردارهای یکه و خواص آنها، می توانند به شکل فشرده تری بازنویسی شوند. با استفاده از معادله (۶۲-۵) می توانیم بنویسیم

$$\mathbf{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad (۶۷-۵)$$

$$\mathbf{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k} \quad (۶۸-۵)$$

جمع و تفریق این دو بردار به صورت زیر نوشته می شود

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j} + (A_z + B_z) \hat{k} \quad (۶۹-۵)$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_x - B_x) \hat{i} + (A_y - B_y) \hat{j} + (A_z - B_z) \hat{k} \quad (۷۰-۵)$$

ضرب نرده ای این دو بردار به صورت زیر محاسبه می شود

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\ &= A_x B_x (\hat{i} \cdot \hat{i}) + A_y B_y (\hat{j} \cdot \hat{j}) + A_z B_z (\hat{k} \cdot \hat{k}) \\ &\quad + A_x B_y (\hat{i} \cdot \hat{j}) + A_x B_z (\hat{i} \cdot \hat{k}) + A_y B_x (\hat{j} \cdot \hat{i}) \\ &\quad + A_y B_z (\hat{j} \cdot \hat{k}) + A_z B_x (\hat{k} \cdot \hat{i}) + A_z B_y (\hat{k} \cdot \hat{j})\end{aligned}$$

با استفاده از نتایج معادلات (۶۳-۵)، (۶۴-۵)، $\hat{i} \cdot \hat{i} = \dots = 1$ و $\hat{i} \cdot \hat{j} = \dots = 0$ خواهیم داشت

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (۷۱-۵)$$

اکنون ضرب چلیپایی را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\ &= A_x B_x (\hat{i} \times \hat{i}) + A_y B_y (\hat{j} \times \hat{j}) + A_z B_z (\hat{k} \times \hat{k}) \\ &\quad + A_x B_y (\hat{i} \times \hat{j}) + A_x B_z (\hat{i} \times \hat{k}) + A_y B_x (\hat{j} \times \hat{i}) \\ &\quad + A_y B_z (\hat{j} \times \hat{k}) + A_z B_x (\hat{k} \times \hat{i}) + A_z B_y (\hat{k} \times \hat{j})\end{aligned}$$

با به کارگیری نتایج معادلات (۶۵-۵) و (۶۶-۵)، $(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) = \dots = 0$ و $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{k} = -(\mathbf{j} \times \mathbf{i})$ و غیره، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= A_x B_x (0) + A_y B_y (0) + A_z B_z (0) \\ &+ A_x B_y (\hat{\mathbf{k}}) + A_x B_z (-\hat{\mathbf{j}}) + A_y B_x (-\hat{\mathbf{k}}) \\ &+ A_y B_z (\hat{\mathbf{i}}) + A_z B_x (\hat{\mathbf{j}}) + A_z B_y (-\hat{\mathbf{i}}) \end{aligned} \quad (۷۲-۵)$$

$$= \hat{\mathbf{i}}(A_y B_z - A_z B_y) + \hat{\mathbf{j}}(A_z B_x - A_x B_z) + \hat{\mathbf{k}}(A_x B_y - A_y B_x)$$

که می تواند به شکل مناسبتری (با استفاده از تعریف دترمینان) مانند

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{i}} \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{j}} \begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{k}} \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \quad (۷۳-۵)$$

یا به شکل هنوز ساده تری مانند

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (۷۴-۵)$$

نوشته شود. توجه کنیم که اگر $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ یا $\mathbf{A} = s\mathbf{B}$ باشد، که s یک عدد نرده ای است، s را می توان از دترمینان خارج کرد، در نتیجه دترمینانی با دو سطر یکسان خواهیم داشت، و بنابراین کل دترمینان صفر خواهد بود. این همان نتیجه ای است که برای $\theta = 0$ ، یعنی وقتی که دو بردار موازی اند، باید داشته باشیم.

بالاخره، یک بار دیگر بردار \mathbf{A} را که در شکل (۷۱-۵) نمایش داده شده است در نظر

بگیریم. مؤلفه این بردار در امتداد محور X عبارت است از

$$A_x = A \cos \theta$$

یک راه دیگر نوشتن این عبارت ضرب نقطه ای \mathbf{A} با $\hat{\mathbf{i}}$ است، یعنی

$$\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{i}} = |\mathbf{A}| |\hat{\mathbf{i}}| \cos \theta = A \cos \theta$$

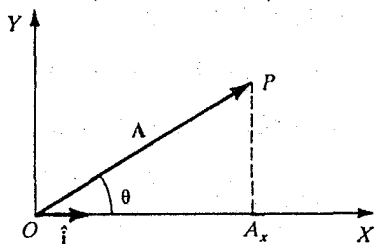
که با معادله قبل یکی است. بنابراین

$$A_x = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{i}} \quad (۷۵-۵)$$

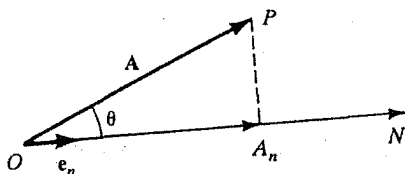
نتیجه معادله (۷۵-۵) را می توان به یک شکل عمومی نوشت. فرض کنیم بخواهیم مؤلفه A_n

بردار A در امتداد یک محور دلخواه N را که یک بردار یکه e_n در امتداد خود دارد، چنان که در شکل (۲۲-۵) نشان داده شده است، پیدا کنیم. می توانیم بنویسیم

$$A_n = A \cdot e_n \quad (۷۶-۵)$$



شکل (۲۱-۵): مؤلفه بردار A در امتداد محور X



شکل (۲۲-۵): مؤلفه بردار A در امتداد محور N

۵-۵ کسینوسهای جهتی

با بردار A به صورت معادله (۶۲-۵) با شکل اندکی متفاوت

$$A = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} = A \left(\frac{A_x}{A} \hat{i} + \frac{A_y}{A} \hat{j} + \frac{A_z}{A} \hat{k} \right) = A e_A \quad (۷۷-۵)$$

شروع می کنیم که e_A یک بردار یکه در جهت A است. A_x/A برابر با کسینوس زاویه بین A و محور X است. به این ترتیب

$$\frac{A_x}{A} = \cos(A, X) = \cos(A, \hat{i}) = \alpha \quad (۷۸-۵)$$

$$\frac{A_y}{A} = \cos(A, Y) = \cos(A, \hat{j}) = \beta \quad (۷۹-۵)$$

$$\frac{A_z}{A} = \cos(A, Z) = \cos(A, \hat{k}) = \gamma \quad (۸۰-۵)$$

که α ، β ، و γ کسینوسهای جهتی خط نمایشگر A هستند . معادله (۷۷-۵) می تواند به صورت

$$A = A(\alpha\hat{i} + \beta\hat{j} + \gamma\hat{k}) = Ae_A \quad (۸۱-۵)$$

یعنی

$$e_A = \alpha\hat{i} + \beta\hat{j} + \gamma\hat{k} \quad (۸۲-۵)$$

نوشته شود ، که بردار e_A در امتداد A را برحسب کسینوسهای جهتی A و بردارهای یکه بیان می کند . از معادله (۷۷-۵) همچنین می توانیم بنویسیم

$$A \cdot A = A^2 \left[\left(\frac{A_x}{A} \right)^2 + \left(\frac{A_y}{A} \right)^2 + \left(\frac{A_z}{A} \right)^2 \right] \quad (۸۳-۵)$$

بنا به تعریف $A \cdot A = A^2$ ، در نتیجه معادله (۸۳-۵) می شود

$$\left[\left(\frac{A_x}{A} \right)^2 + \left(\frac{A_y}{A} \right)^2 + \left(\frac{A_z}{A} \right)^2 \right] = 1 \quad (۸۴-۵)$$

یا

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad (۸۵-۵)$$

یعنی ، مجموع مربعات کسینوسهای جهتی هر خط برابر است با ۱ .

مثال (۵-۱) : بردارهای $A(6, 4, -7)$ و $B(2, -2, 3)$ را در نظر بگیرید . کمیتهای زیر را

محاسبه کنید : (الف) $A + B$ ، (ب) $A - B$ ، (پ) $4A + 2B$ ، (ت) $4A - 2B$ ،

(ث) A ، B ، $A^2 + B^2$ ، (ج) $A \cdot B$ ، (چ) زاویه بین A و B ، (ح) $A \times B$ ، (خ) مؤلفه

B در امتداد A ، و (د) کسینوسهای جهتی A و B .

$$\begin{aligned} A + B &= (6, 4, -7) + (2, -2, 3) = [6 + 2, 4 + (-2), -7 + 3] & \text{(الف)} \\ &= (8, 2, -4) = 8\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A - B &= (6, 4, -7) - (2, -2, 3) = [6 - 2, 4 - (-2), -7 - 3] & \text{(ب)} \\ &= (4, 6, -10) = 4\hat{i} + 6\hat{j} - 10\hat{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4A + 2B &= 4(6, 4, -7) + 2(2, -2, 3) = (24, 16, -28) + (4, -4, 6) & \text{(پ)} \\ &= (28, 12, -22) = 28\hat{i} + 12\hat{j} - 22\hat{k} \end{aligned}$$

$$4\mathbf{A} - 2\mathbf{B} = 4(6, 4, -7) - 2(2, -2, 3) = (24, 16, -28) - (4, -4, 6) \quad (\text{ت})$$

$$= (20, 20, -34) = 20\hat{i} + 20\hat{j} - 34\hat{k}$$

$$A^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = 6^2 + 4^2 + (-7)^2 = 101 \quad (\text{ث})$$

$$A = \sqrt{101}$$

$$B^2 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 = 2^2 + (-2)^2 + 3^2 = 17$$

$$B = \sqrt{17}$$

$$A^2 + B^2 = 101 + 17 = 118$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = (6)(2) + (4)(-2) + (-7)(3) \quad (\text{ج})$$

$$= -17$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad (\text{ج})$$

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} = \frac{-17}{\sqrt{101}\sqrt{17}} = \frac{-17}{41.4} = -0.411$$

$$\theta = 114^\circ$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & 4 & -7 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} \quad (\text{ح})$$

$$= \hat{i}(12 - 14) + \hat{j}(-14 - 18) + \hat{k}(-12 - 8)$$

$$= -2\hat{i} - 32\hat{j} - 20\hat{k}$$

$$B = \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_A = B \cos(\mathbf{B}, \mathbf{e}_A) = B \cos(\mathbf{B}, \mathbf{A}) \quad (\text{خ})$$

$$= \sqrt{17} \cos 114^\circ = -1.69$$

که بردار \mathbf{e}_A یکه در امتداد \mathbf{A} است. همین نتیجه را می توان با روشی اندکی متفاوت به دست آورد:

$$B = \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_A = \mathbf{B} \cdot \frac{\mathbf{A}}{A}$$

$$= (2\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) \cdot \left(\frac{6}{\sqrt{101}} \hat{i} + \frac{4}{\sqrt{101}} \hat{j} + \frac{-7}{\sqrt{101}} \hat{k} \right) = -1.69$$

(د) کسینوسهای جهتی $\alpha = A_x/A$ ، β و غیره، عبارتند از

$$\alpha = \frac{6}{\sqrt{101}} = 0.597, \quad \beta = \frac{4}{\sqrt{101}} = 0.398, \quad \gamma = \frac{-7}{\sqrt{101}} = -0.696$$

کسینوسهای جهتی B عبارتند از

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{17}} = 0.485, \quad \beta = \frac{-2}{\sqrt{17}} = -0.485, \quad \gamma = \frac{3}{\sqrt{17}} = 0.728$$

توجه کنیم که در هر مورد

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

تمرین (۵-۱): محاسبات بالا را برای بردارهای A (3, 4, -9) و B (4, -3, 6) تکرار کنید.

۵-۶ آنالیز برداری

مشتق گیری از بردارها

برداری در نظر بگیریم که تابعی از یک کمیت نرده ای ، مثلاً s ، باشد ، که s ممکن است زمان t ، زاویه θ ، یا کمیت دیگری باشد . یک نمونه ، سرعت $v(t)$ یا مکان $r(\theta)$ ی یک ذره به صورت تابعی از یک زاویه است . بردار A ، که تابعی از t است ، می تواند از نظر جبری ، به شکل مؤلفه ای ، به صورت

$$A = A(t) = A_x(t)\hat{i} + A_y(t)\hat{j} + A_z(t)\hat{k} \quad (۸۶-۵)$$

نوشته شود . مشتق A نسبت به زمان t همانند مشتق یک تابع نرده ای تعریف می شود . یعنی ،

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t} \quad (۸۷-۵)$$

این مشتق در شکل (۵-۲۳) نمایش داده شده است ، که ΔA یا $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ وقتی Δt به سمت صفر میل می کند به منحنی مماس می شود . اگر A را با r جایگزین کنیم ، $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ سرعت متوسط ، و $\frac{dr}{dt}$ سرعت لحظه ای را به ما می دهد . همچنین می توانیم مشتق یک بردار را بر حسب مؤلفه هایش به صورت

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{dA_x}{dt}, \frac{dA_y}{dt}, \frac{dA_z}{dt} \right) = \frac{dA_x}{dt} \hat{i} + \frac{dA_y}{dt} \hat{j} + \frac{dA_z}{dt} \hat{k} \quad (۸۸-۵)$$

بنویسیم . به عنوان مثال ، اگر $A = r$ باشد بردارهای جابه جایی ، سرعت ، و شتاب عبارتند از

$$r = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (۸۹-۵)$$

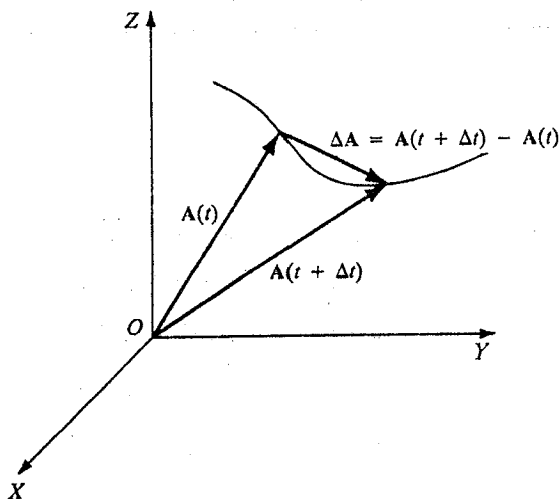
$$v = \dot{r} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} \quad (۹۰-۵)$$

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{x}\hat{\mathbf{i}} + \ddot{y}\hat{\mathbf{j}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}} \quad (91-5)$$

توجه کنیم که بزرگیهای سرعت و شتاب برابرند با

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad (92-5)$$

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \quad (93-5)$$



شکل (0-۲۳) : مشتق A نسبت به t

به این ترتیب مشتق گیری از یک بردار همان راهی را طی می کند که مشتق گیری از یک تابع نرده ای . این قواعد را می توانیم به موارد خاص زیر گسترش دهیم :

$$\frac{d}{ds} (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{ds} \pm \frac{d\mathbf{B}}{ds} \quad (94-5)$$

$$\frac{d}{ds} [f(s)\mathbf{A}(s)] = \frac{df}{ds} \mathbf{A} + f \frac{d\mathbf{A}}{ds} \quad (95-5)$$

$$\frac{d}{ds} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{ds} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{ds} \quad (96-5)$$

$$\frac{d}{ds} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{ds} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{ds} \quad (97-5)$$

باید توجه کرد که در معادله آخر ، ترتیب بردارها در ضرب برداری نباید تغییر کند . نتایج فوق

را می توان بطور مستقیم اثبات کرد . به عنوان مثال ، برای معادله (۵-۹۶) داریم

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{ds} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \right)_x &= \frac{d}{ds} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_x = \frac{d}{ds} (A_x B_x) \\ &= \frac{dA_x}{ds} B_x + A_x \frac{dB_x}{ds} \\ &= \left(\frac{d\mathbf{A}}{ds} \cdot \mathbf{B} \right)_x + \left(\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{ds} \right)_x \\ &= \left(\frac{d\mathbf{A}}{ds} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{ds} \right)_x \end{aligned}$$

می توانیم این نتایج را برای بحث مفاهیم مکان ، سرعت ، و شتاب نسبی به کار بگیریم . نقطه P_1 در فاصله \mathbf{r}_1 و نقطه P_2 در فاصله \mathbf{r}_2 ، هر دو از مبدأ O ، را در نظر بگیریم (شکل ۵-۲۴) . مکان نسبی P_2 نسبت به P_1 عبارت است از \mathbf{r}_{21} و با رابطه

$$\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad (۵-۹۸)$$

داده می شود . چون نقاط P_2 و P_1 در حرکت هستند ، سرعت نسبی P_2 نسبت به P_1 عبارت است از

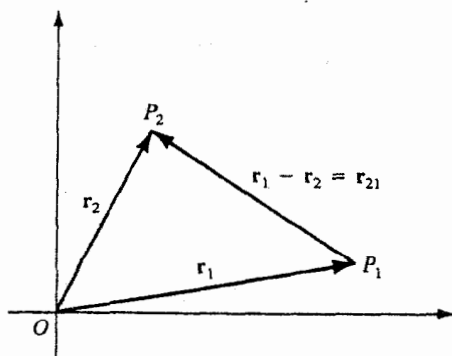
$$\mathbf{v}_{rel} = \frac{d\mathbf{r}_{21}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}$$

یعنی ،

$$\mathbf{v}_{21} = \dot{\mathbf{r}}_{21} = \dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1 \quad (۵-۹۹)$$

و به همین نحو شتاب نسبی نقطه P_2 نسبت به نقطه P_1 عبارت است از

$$\mathbf{a}_{21} = \dot{\mathbf{v}}_{21} = \ddot{\mathbf{r}}_{21} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 \quad (۵-۱۰۰)$$



شکل (۵-۲۴) : مکان نسبی P_2 نسبت به P_1 عبارت است از $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$

مؤلفه های مماسی و قائم شتاب

بنا به تعریف ، سرعت ذره ای که در روی یک مسیر منحنی حرکت می کند برابر است با حاصل ضرب تندی v در یک بردار یکه (در جهت مماس) ؛ یعنی ،

$$v = v\hat{u}_t \quad (۵-۱۰۱)$$

وقتی ذره حرکت می کند ، تندی و همچنین جهت ممکن است تغییر کند . در نتیجه شتاب ذره به صورت

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(v\hat{u}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + v \frac{d\hat{u}_t}{dt}$$

یا

$$a = \dot{v}\hat{u}_t + v \frac{d\hat{u}_t}{dt} \quad (۵-۱۰۲)$$

نوشته می شود . چون بزرگی بردار یکه \hat{u}_t ثابت است ، معنی مشتق $d\hat{u}_t/dt$ این است که جهت \hat{u}_t با زمان تغییر می کند . همان طور که در شکل (۵-۲۵ الف) نشان داده شده است ، ذره ابتدا در نقطه P قرار دارد و پس از زمان Δt فاصله Δs را طی می کند و به نقطه Q می رسد . بردارهای یکه در P و Q را \hat{u}_t و \hat{u}'_t بگیریم . همان طور که در شکل (۵-۲۵ ب) نشان داده شده است ، این دو بردار یکه توسط زاویه $\Delta\theta$ از یکدیگر متمایز می شوند . بزرگی تفاضل آنها عبارت است از

$$|\Delta\hat{u}_t| = |\hat{u}'_t - \hat{u}_t| = 2 \sin \frac{\Delta\theta}{2}$$

وقتی $\Delta\theta$ به سمت صفر میل کند ، طرف راست به $\Delta\theta$ میل می کند در نتیجه

$$\text{Limit}_{\Delta\theta \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\hat{u}_t}{\Delta\theta} \right| = 1$$

همچنین در حد ، $\Delta\hat{u}_t$ به \hat{u}_n عمود می شود و بردار یکه قائم \hat{u}_n نامیده می شود [شکل (۵-۲۵ الف)]، یعنی

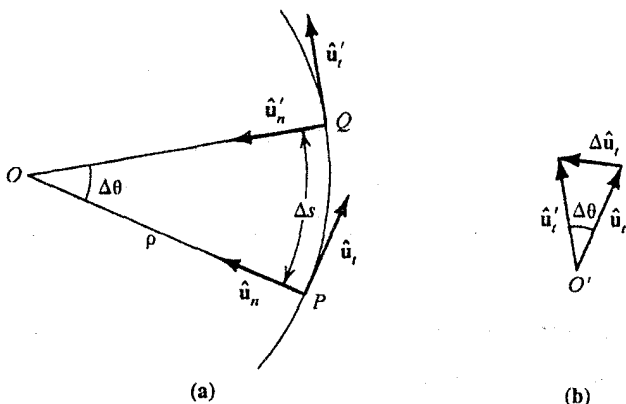
$$\hat{u}_n = \frac{d\hat{u}_t}{d\theta} \quad (۵-۱۰۳)$$

اکنون با استفاده از قاعده زنجیری ، می توانیم بنویسیم

$$\frac{d\hat{u}_t}{dt} = \frac{d\hat{u}_t}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \hat{u}_n \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dt}$$

اما $v = \frac{ds}{dt}$ و $\rho = \frac{ds}{d\theta}$ ، که ρ شعاع انحنای مسیر است . به این ترتیب

$$\frac{d\hat{u}_t}{dt} = \hat{u}_n \frac{v}{\rho} \quad (۱۰۴-۵)$$



شکل (۱۰-۵) الف : بردار یکه برای حرکت یک ذره در امتداد یک مسیر منحنی ،

ب . تفاضل Δu_t بین بردارهای یکه \hat{u}_t و \hat{u}'_t در قسمت (الف)

قرار دادن این عبارت در معادله (۱۰۲-۵) می دهد

$$\mathbf{a} = v\hat{u}_t + \frac{v^2}{\rho} \hat{u}_n \quad (۱۰۵-۵)$$

به این ترتیب شتاب برحسب دو مؤلفه مماسی و قائم توصیف می شود که عبارتند از

$$a_t = \dot{v} = \frac{d^2s}{dt^2} \quad (۱۰۶-۵)$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad (۱۰۷-۵)$$

مؤلفه قائم شتاب همیشه به طرف مقعر منحنی است و شتاب مرکزگرا نامیده می شود . بزرگی

شتاب a برابر است با

$$a = |\mathbf{a}| = \left(\dot{v}^2 + \frac{v^4}{\rho^2} \right)^{1/2} \quad (۱۰۸-۵)$$

انتگرال گیری بردارها

در حرکت سه بُعدی ، باید بین دو نوع تابع تمیز قائل شویم . توابع نقطه ای نرده ای

به شکل

$$f(\mathbf{r}) = f(x, y, z) \quad (109-5)$$

و توابع نقطه ای برداری به شکل

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(x, y, z) = [A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z)] \quad (110-5)$$

یک مثال نمونه ای تابع نقطه ای نرده ای تابع انرژی پتانسیل $V(\mathbf{r}) = V(x, y, z)$ یک ذره است ،
و مثال تابع نقطه ای برداری شدت میدان الکتریکی $\mathbf{E}(x, y, z)$ است . این توابع همچنین
می توانند تابع زمان نیز باشند .

یک منحنی C در فضا در نظر بگیریم ، و فرض کنیم یک تابع نقطه ای برداری \mathbf{A} داشته
باشیم که در هر نقطه این منحنی معین است . انتگرال خطی \mathbf{A} در امتداد منحنی C به صورت زیر
تعریف می شود [رک شکل (۵-۲۶)]

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \text{انتگرال خطی } \mathbf{A} \text{ در امتداد } C \quad (111-5)$$

و اگر \mathbf{r} بردار مکانی باشد ،

$$\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (112-5)$$

$$d\mathbf{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} \quad (113-5)$$

که dx ، dy و dz تفاضلهای دو انتهای پاره خط هستند . بنابراین ، اگر

$$\mathbf{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \quad (114-5)$$

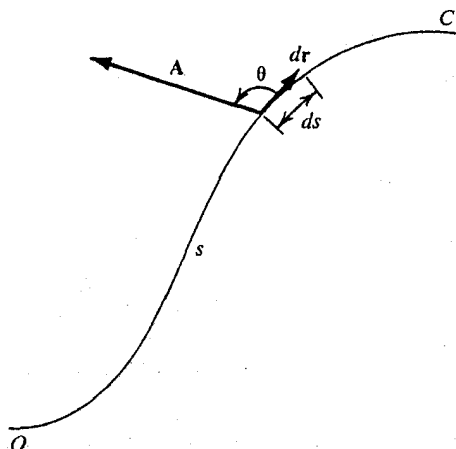
می توانیم انتگرال خطی را به صورت

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \quad (115-5)$$

بنویسیم ، یک راه دیگر ، بیان انتگرال خطی بر حسب s است ، که s فاصله اندازه گیری شده در
طول منحنی از یک نقطه ثابت است (شکل ۵-۲۶) . بنابراین ، اگر θ زاویه بین \mathbf{A} و مماس

بر منحنی در هر نقطه باشد ،

$$\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = A \cos \theta ds \quad (116-5)$$



شکل (۰-۲۶) : انتگرال خطی A در امتداد منحنی C مجموع مقادیر $A \cdot d\mathbf{r}$ است

اگر A و $\cos \theta$ را بر حسب s بدانیم می توانیم انتگرال خطی را محاسبه کنیم .

ممکن است A را بر حسب s بدانیم ، نیز تابع معینی از پارامتر s است ، یعنی ، $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ ، که s طول منحنی است (s می تواند زمان یا کمیت دیگری نیز باشد) . در چنین مواردی انتگرال خطی می تواند به صورت زیر محاسبه شود

$$\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int \left(\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) ds \quad (117-5)$$

$$= \int \left(A_x \frac{dx}{ds} + A_y \frac{dy}{ds} + A_z \frac{dz}{ds} \right) ds$$

این روش محاسبه انتگرال خطی و روشهای دیگر در مثالهای بعدی روشن خواهند شد .

مثال (۰-۲) : انتگرال خطی $\mathbf{F} = ax\mathbf{i} + bxz\mathbf{j}$ را از $(-R, 0)$ تا $(+R, 0)$ در امتداد طول

نیم دایره شکل (مثال ۰-۲) با به کارگیری پارامتر θ محاسبه کنید .

وقتی نیرو عمل می کند θ از π تا صفر تغییر می کند و بردار شعاعی

یک نیم دایره جارو می کنند ، آشکار است که پارامتری که باید به کار گرفت θ است .
به این ترتیب

$$x = R \cos \theta , \quad dx = -R \sin \theta d\theta \quad (۱)$$

$$y = R \sin \theta , \quad dy = R \cos \theta d\theta \quad (۲)$$

$$F_x = ax = aR \cos \theta \quad (۳)$$

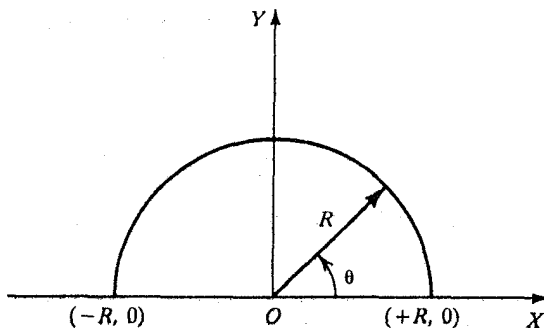
$$F_y = bxy = bR^2 \sin \theta \cos \theta \quad (۴)$$

انتگرال خطی F عبارت است از

$$\begin{aligned} \int_{(-R,0)}^{(+R,0)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int (F_x dx + F_y dy) = \int \left(F_x \frac{dx}{d\theta} + F_y \frac{dy}{d\theta} \right) d\theta \\ &= \int_{\pi}^0 [(aR \cos \theta)(-R \sin \theta) + (bR^2 \sin \theta \cos \theta)(R \cos \theta)] d\theta \\ &= \int_{\pi}^0 -aR^2 \cos \theta \sin \theta d\theta + \int_{\pi}^0 bR^3 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \quad (۵) \end{aligned}$$

با قرار دادن $u = \cos \theta$ و $du = -\sin \theta d\theta$ ، حدود انتگرال به -1 و $+1$ تغییر خواهد کرد :

$$\begin{aligned} \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{-1}^{+1} aR^2 u du - \int_{-1}^{+1} bR^3 u^2 du \\ &= 2aR^2 \int_0^1 u du - 2bR^3 \int_0^1 u^2 du \\ &= aR^2 - \frac{2}{3}bR^3 \quad (۶) \end{aligned}$$



شکل (مثال ۵-۲)

تمرین (۲-۵): انتگرال خطی $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ را از $(-R, 0)$ تا $(+R, 0)$ در امتداد نیم دایره شکل (مثال ۲-۵)، با به کارگیری پارامتر θ ، محاسبه کنید.

۲-۵ عملگرهای دیفرانسیلی برداری: گرادیان، دیورژانس، و کرل

اکنون آمادگی داریم تا ابزار ریاضی جدیدی وارد کنیم که ما را به مطالعه فیزیک بطور عمیق قادر سازد. انتظار نداریم که این مفاهیم را با یک بار خواندن درک کنیم. اما وقتی آنها را به کار می‌بندیم، با آنها آشنا می‌شویم و می‌توانیم به فایده آنها پی ببریم. این ابزار جدید عملگرهای دیفرانسیلی برداری هستند که تحت عنوان گرادیان، دیورژانس، و کرل، مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

عملگر گرادیان ($\text{grad } u \equiv \nabla u$)

یک تابع نرده‌ای u که تابع صریحی از مختصات x ، y ، و z است، یعنی $u = u(x, y, z)$ ، و یک تابع پیوسته و تک مقداری است، در نظر بگیریم. تغییرات این تابع نرده‌ای سه مؤلفه دارد، که می‌تواند به عنوان مؤلفه‌های یک بردار به نام $\text{grad } u$ یا ∇u ("del u ") در نظر گرفته شوند. یعنی، با وجود این که u یک نرده‌ای است، $\text{grad } u$ برداری است با سه مؤلفه به صورت

$$\text{grad } u = \nabla u = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial u}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial u}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (118-5)$$

باید تصریح کرد که grad یا ∇ بردار نیست: یک عملگر برداری است. وقتی grad یا ∇ روی یک تابع نرده‌ای عمل کند، یک بردار تشکیل می‌دهد. وقتی روی حاصل ضرب توابع عمل کند، باید به عنوان عملگر دیفرانسیلی مورد نظر قرار گیرد. به این ترتیب این عملگر برداری به وسیله

$$\text{grad} = \nabla \equiv \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (119-5)$$

نمایش داده می‌شود. با این عملگر می‌توانیم سه عمل انجام دهیم:

۱- عملگر گرادیان روی یک تابع نرده‌ای u عمل می‌کند و $\text{grad } u$ یا ∇u را تشکیل

می‌دهد.

۲- وقتی عملگر گرادیان با یک تابع برداری دیگر ضرب نرده ای شود ، $\nabla \cdot A$ یا $\text{div } A$ را تشکیل می دهد که دیورژانس A نامیده می شود . این کمیّت یک کمیّت نرده ای است .

۳- وقتی عملگر گرادیان با یک تابع برداری دیگر ضرب برداری شود و $\nabla \times A$ یا $\text{curl } A$ را تشکیل دهد ، نتیجه آن کرل A نامیده می شود . این کمیّت یک کمیّت برداری است .

دیورژانس A و کرل A را به اختصار مورد بحث قرار خواهیم داد . در حال حاضر توجه خود را به معنی و فایده $\text{grad } u$ متمرکز می کنیم .

تعبیر فیزیکی گرادیان

ذره ای را در نظر بگیریم که با یک تابع نقطه ای $u(x, y, z)$ توصیف می شود و از نقطه $\mathbf{r} = (x, y, z)$ به نقطه مجاور آن $\mathbf{r} + d\mathbf{r} = (x + dx, y, dy, z + dz)$ می رود . تغییر این تابع نقطه ای عبارت است از

$$u(x + dx, y + dy, z + dz) - u(x, y, z)$$

وقتی $dx \rightarrow 0$ ، $dy \rightarrow 0$ ، $dz \rightarrow 0$ ، تغییرات دیفرانسیلی du ی تابع u شکل زیر را می گیرد

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

که می تواند به صورت زیر نوشته شود

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{z}) \quad (۱۲۰-۵)$$

جمله اول طرف راست $\text{grad } u$ است و جمله دوم $d\mathbf{r}$ است . در نتیجه می توانیم این

جمله را به صورت

$$du = \text{grad } u \cdot d\mathbf{r} \quad (۱۲۱-۵)$$

بنویسیم . به این ترتیب این معادله امکان تعریف تغییرات تابع u ناشی از تغییرات متغیرهای آن را برای ما فراهم می آورد . در واقع ، معادله (۱۲۱-۵) تعریف عملگر برداری گرادیان است . این معادله بیان می کند که گرادیان u برداری است که تغییرات du ی تابع u را در تغییر مکان

کوچک دلخواه dr با رابطه (۵-۱۲۱) به ما می دهد . معادله (۵-۱۲۱) همچنین می تواند به صورت

$$du = |\text{grad } u| |dr| \cos \theta = |\text{grad } u| dr \cos \theta \quad (۵-۱۲۲)$$

نوشته شود . du وقتی بیشینه است که $\text{grad } u$ و dr در یک جهت باشند ، بطوری که $\cos \theta = \cos 0^\circ = 1$ و

$$(du)_{\max} = |\text{grad } u| dr \quad \text{وقتی } \text{grad } u \text{ موازی با } dr \text{ باشد}$$

بنابراین

$$|\text{grad } u| = \left(\frac{du}{dr} \right)_{\max} \quad (۵-۱۲۳)$$

$\text{Grad } u$ در جهتی است که در آن تغییرات u سریعترین است ، و بزرگی آن مشتق جهتی u ، یعنی ، آهنگ افزایش u بر واحد فاصله در آن جهت است .

اکنون یک منحنی یا یک سطح در نظر بگیریم که در آن u ثابت است . dr را مماس بر امتداد این منحنی با u ثابت بگیریم بطوری که $du = 0$. چون هیچ کدام از $\text{grad } u$ و dr ، معمولاً ، صفر نیست ، از معادله (۵-۱۲۱) نتیجه می شود که باید بر یکدیگر عمود باشند بطوری که $\cos 90^\circ = 0 = du = 0$. بنابراین $\text{grad } u$ بر یک منحنی (در دو بُعد) یا بر یک سطح (در سه بُعد) که برای آنها u ثابت است ، عمود است .

به این ترتیب خواص $\text{grad } u$ می تواند به صورت زیر خلاصه شود :

۱- $\text{Grad } u$ ، در هر نقطه ، بر هر منحنی (در دو بُعد) یا هر سطحی (در سه بُعد) که در آنها u ثابت است عمود است .

۲- $\text{Grad } u$ در جهتی است که در آن u سریعترین تغییرات را دارد ، و بزرگی آن مشتق جهتی u در آن جهت است .

وقتی $\text{grad } u$ را بدانیم ، آهنگ تغییرات u در هر جهت دلخواه n با (مشتق جهتی)

$$\hat{n} \cdot \text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial n} \quad (۵-۱۲۴)$$

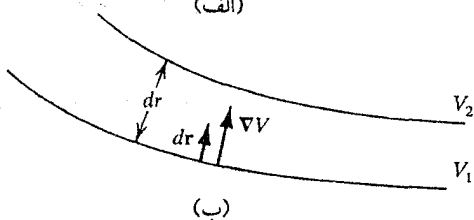
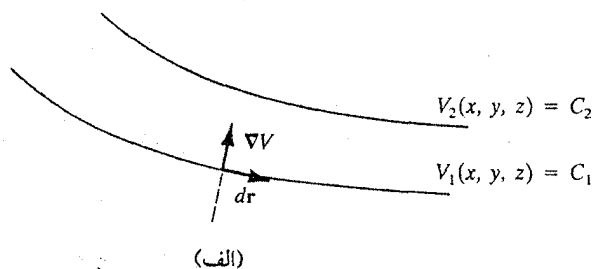
داده می شود .

اینک نکات بالا را با کمک مثالی روشن می کنیم . فرض کنیم u انرژی پتانسیل $V(x, y, z)$

باشد. دو سطح با پتانسیل ثابت، مطابق شکل (۵-۲۷ الف)، در نظر بگیریم، بطوری که تغییرات $V_2(x, y, z) = C_2$ و $V_1(x, y, z) = C_1$ ناشی از جابه جایی $d\mathbf{r}$ عبارت است از

$$dV = \text{grad } V \cdot d\mathbf{r} = \nabla V \cdot d\mathbf{r} \quad (۵-۱۲۵)$$

اگر $d\mathbf{r}$ منطبق بر یکی از این سطوح باشد داریم $dV = 0$ ، و $\nabla V \cdot d\mathbf{r} = 0$ ؛ زیرا $d\mathbf{r}$ مماس بر سطح با V ثابت است. چون ∇V و $d\mathbf{r}$ صفر نیستند، پس باید ∇V عمود بر $d\mathbf{r}$ باشد. این همان نتیجه عمومی است که در بالا بحث شد، یعنی، در هر نقطه از فضا، ∇V بر سطح پتانسیل ثابت (یا سطح انرژی پتانسیل ثابت) که از آن نقطه گذشته باشد عمود است. اگر $d\mathbf{r}$ در جهت عمود بر سطح انرژی پتانسیل ثابت باشد (شکل (۵-۲۷ ب)) بیشترین افزایش را دارد، زیرا $dV = \nabla V \cdot d\mathbf{r} = |\nabla V| d\mathbf{r} \cos 0 = |\nabla V| d\mathbf{r}$. به علاوه، چون $\mathbf{F} = -\nabla V$ ، نیروی \mathbf{F} نیز در هر نقطه بر سطح انرژی پتانسیل ثابت عمود است، و جهت آن در خلاف جهت افزایش V ، یعنی از انرژی پتانسیل بالاتر به انرژی پتانسیل پایین تر خواهد بود. همچنین، هر قدر سطوح تراز انرژی به هم نزدیکتر باشند گرادیان بزرگتر خواهد بود؛ یعنی هر جا که انرژی پتانسیل سریعتر تغییر کند نیرو، $|\nabla V| = \left(\frac{dV}{dr}\right)_{\max}$ ، بزرگتر است.



شکل (۵-۲۷): الف - برای جابه جایی $d\mathbf{r}$ در امتداد سطح تراز، $dV = 0$. در نتیجه

$\nabla V \cdot d\mathbf{r} = 0$ ، که تنها وقتی ممکن است که ∇V عمود بر $d\mathbf{r}$ باشد، (ب) در جهتی است

که V در آن جهت سریعترین افزایش را دارد، و $d\mathbf{r}$ در جهت افزایش انرژی پتانسیل است

یادآوری کنیم که $u(x, y, z)$ یک تابع نرده ای است و در نتیجه یک میدان نرده ای را تعیین می کند . مثالهای آن عبارتند از دما و فشار در حجمی از ماده . این ناحیه های فضا می توانند به وسیله گرادیان دما ، $\nabla T(x, y, z)$ ، یا گرادیان فشار ، $\nabla P(x, y, z)$ مشخص شوند . هر نقطه از فضا با یک مقدار دما یا یک مقدار فشار ، بسته به این که با یک میدان نرده ای دما یا یک میدان نرده ای فشار سر و کار داشته باشیم ، مشخص می شود .

دیورژانس یک بردار $(\nabla \cdot \mathbf{A} \equiv \text{div } \mathbf{A})$

همان طور که قبلاً گفته شد ، وقتی عملگر گرادیان در یک تابع نقطه ای برداری \mathbf{A} ضرب نرده ای شود دیورژانس \mathbf{A} را نتیجه می دهد . یعنی .

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{A} &\equiv \nabla \cdot \mathbf{A} = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \\ &= \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (126-5)$$

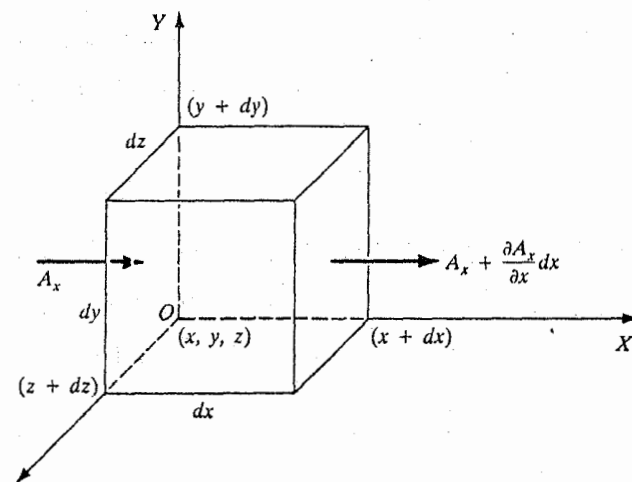
نمونه هایی از توابع نقطه ای برداری عبارتند از بردار میدان الکتریکی $\mathbf{E}(x, y, z)$ و بردار سرعت $\mathbf{v}(x, y, z)$. دیورژانسهای این نوع تابعهای نقطه ای برداری میدانهای برداری وابسته را توصیف می کنند . گاهی اوقات مناسبتر است که به جای مختصات (x, y, z) مختصات (x_1, x_2, x_3) بنویسیم ، که در این صورت داریم

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{A} &\equiv \nabla \cdot \mathbf{A} \equiv \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \equiv \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (127-5)$$

برای پی بردن به ارزش مفهوم دیورژانس یک کمیت برداری ، مثال جریان سیال را در نظر بگیریم . در ناحیه جریان سیال یک عنصر حجم مکعب مستطیل $dV = dx dy dz$ در نقطه $O(x, y, z)$ در نظر بگیریم که وجه های آن ، طوری که در شکل (۵-۲۸) نشان داده شده است ، به سه محور عمود باشند . بردار \mathbf{A} را حجم یا جرمی از سیال که در واحد زمان از واحد سطح عبور کرده باشد (یا تکانه بر واحد حجم) در نظر بگیریم . بدون تصریح ، \mathbf{A} را آهنگ جریان سیال از واحد سطح ، که عمود بر \mathbf{A} است ، فرض کنیم . عنصر حجم را آن قدر کوچک فرض می کنیم که آهنگ جریان \mathbf{A} در سرتاسر هر وجه ثابت باشد . A_x ، A_y ، A_z را مؤلفه های \mathbf{A} در امتداد سه محور مختصات در نظر بگیریم . اگر آهنگ جریان در x برابر با $A_x(x)$ باشد ، آهنگ

جریان در $A_x(x+dx)$ ، با بسط به سری تیلور ، خواهد بود

$$A_x(x+dx) = A_x(x) + \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right) dx \quad (۱۲۸-۵)$$



شکل (۲۸-۵) : برای محاسبه دیورژانس يك كمیت برداری

که از جمله های مرتبه های بالا صرف نظر کرده ایم

$$x \text{ آهنگ جریان ورودی سیال در } I_x = A_x dy dz \quad (۱۲۹-۵)$$

$$x+dx \text{ آهنگ جریان خروجی سیال در } O_x = \left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} dx\right) dy dz \quad (۱۳۰-۵)$$

جریان خالص خروجی موازی با محور X از عنصر حجم $dV = dx dy dz$ عبارت است از

$$O_x - I_x = \left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} dx\right) dy dz - A_x dy dz = \frac{\partial A_x}{\partial x} dV \quad (۱۳۱-۵ \text{ الف})$$

با عبارتهای مشابهی برای دو مجموعه وجه های موازی دیگر :

$$O_y - I_y = \frac{\partial A_y}{\partial y} dV \quad (۱۳۱-۵ \text{ ب})$$

$$O_z - I_z = \frac{\partial A_z}{\partial z} dV \quad (۱۳۱-۵ \text{ پ})$$

بنابراین ، جریان خالص خروجی از عنصر حجم مستطیلی $dV = dx dy dz$ از جمع این سه معادله به دست می آید ، یعنی ،

$$\text{آهنگ جریان خالص} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dV = (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV \quad (۱۳۲-۵)$$

معادله (۱۳۲-۵) بیان می دارد که دیورژانس \mathbf{A} عبارت است از آهنگ جریان خالص (حجم یا جرم) بر واحد حجم . اما این جریان خالص همچنین برابر است با مؤلفه \mathbf{A} عمود بر سطح dS ضربدر dS ؛ یعنی

$$\text{آهنگ جریان خالص} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{A} dS \quad (۱۳۳-۵)$$

که \mathbf{n} بردار یکه عمود بر سطح و روبه بیرون است . از معادلات (۱۳۲-۵) و (۱۳۳-۵) ، با جمع بندی روی تمام حجم و تمام سطح ، خواهیم داشت

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \iint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{A} dS \quad (۱۳۴-۵)$$

که بیان ریاضی قضیه گاوس یا قضیه دیورژانس است .

قضیه گاوس یا قضیه دیورژانس : انتگرال دیورژانس یک میدان برداری در یک حجم برابر است با شار خالصی که میدان برداری از سطح محصورکننده آن حجم عبور می دهد .

یعنی ، چون $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}$ مؤلفه بردار \mathbf{A} در امتداد عمود بر S است ، معادله (۱۳۴-۵) بیان می دارد که

$$\left(\begin{array}{l} \text{مقدار کل } \nabla \cdot \mathbf{A} \\ \text{در داخل حجم } V \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{شار خروجی سیال} \\ \text{از سطح } S \end{array} \right)$$

فرض کنیم $\mathbf{A} = \mathbf{v}$ ، سرعت حرکت سیال در هر نقطه باشد ؛ در این صورت معادله (۱۳۴-۵) شکل زیر را می گیرد

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV = \iint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} dS \quad (۱۳۵-۵)$$

که بیان می دارد

$$\left(\begin{array}{l} \text{حجمی از سیال که در واحد زمان} \\ \text{در داخل حجم } V \text{ ایجاد} \\ \text{شده است} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{حجمی از سیال که در واحد} \\ \text{زمان از سطح } S \text{ خارج} \\ \text{شده است} \end{array} \right)$$

فرض شده است که سیال تراکم ناپذیر باشد. همچنین $\nabla \cdot \mathbf{v}$ در منبع که سیال از آن به طرف بیرون جریان دارد مثبت است، و در چاه که سیال به داخل آن جریان دارد منفی است. از سوی دیگر، اگر

$$A = \rho \mathbf{v} = \text{جرم عبور کرده از واحد سطح در واحد زمان} \\ = \text{تکانه بر واحد حجم}$$

قضیه گاوس به شکل

$$\iiint_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV = \iint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot (\rho \mathbf{v}) dS \quad (5-136)$$

در می آید که برای یک سیال تراکم ناپذیر به صورت زیر نوشته می شود.

$$\rho \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV = \rho \iint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} dS \quad (5-137)$$

بار دیگر بسته به علامت $\nabla \cdot \mathbf{v}$ ، ممکن است منبع یا چاه وجود داشته باشد. (یک مثال عددی برای نمایش دادن موضوعهای قبلی در زیر آورده شده است). یک سیال تراکم ناپذیر باید با همان سرعتی از یک حجم معین خارج شود، که به آن وارد شده است، یعنی نه چاهی وجود دارد و نه منبعی، و $\text{div } A = 0$. در این صورت گفته می شود که میدان جریان سیملوله ای است.

مثال (۳-۵): جعبه ای به ابعاد ۸، ۶، و ۴ سانتی متر، مطابق شکل (مثال ۳-۵)، در نظر بگیرید. سیال از ته وارد می شود و از سطوح چپ، راست، و بالا خارج می شود. از سطوح جلوی و عقبی سیال خارج نمی شود. جریان خروجی خالص از جعبه را برای سرعتهای داده شده محاسبه کنید

با کار بست قضیه دیورژانس به یک سیال تراکم ناپذیر، معادله (۵-۱۳۵)،

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV = \iint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} dS \quad (1)$$

می توانیم مسأله را با استفاده از طرف راست یا از طرف چپ این معادله حل کنیم. برای نشان دادن این که هر دو به یک نتیجه می رسند ما هر دو را انجام می دهیم. همچنین

توجه کنیم که تنها مؤلفه‌های قائم سرعت در جریان خالص سهیم اند . طرف راست معادله (۱) می‌تواند به صورت

$$\iint_S \hat{n} \cdot \mathbf{v} \, dS = \sum \hat{n}_i \cdot \mathbf{v}_i A_i \quad (۲)$$

نوشته شود که A_i نمایشگر مساحت وجه‌های جعبه است . چون سیال فقط از سطح (۱) جریان دارد ، جریان از این سطح را حساب کنیم .

$$\begin{aligned} A_1 \text{ جریان خالص از} &= \hat{n}_1 \cdot \mathbf{v}_1 A_1 = (-\hat{j}) \cdot (v_1) (\Delta x \Delta z) \\ &= (-\hat{j}) \cdot (50\hat{j} \text{ cm/s})(32 \text{ cm}^2) \\ &= -1600\hat{j} \text{ cm}^3/\text{s} \end{aligned} \quad (۳)$$

علامت منفی نشان می‌دهد که سیال وارد می‌شود (علامت مثبت بیانگر آن است که سیال به طرف خارج جاری است) . جریان از سطوح دیگر به روش زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} &= \hat{n}_2 \cdot \mathbf{v}_2 A_2 + \hat{n}_3 \cdot \mathbf{v}_3 A_3 + \hat{n}_4 \cdot \mathbf{v}_4 A_4 \\ &= \hat{n}_2 \cdot \mathbf{v}_2 (\Delta y \Delta z) + \hat{n}_3 \cdot \mathbf{v}_3 (\Delta x \Delta z) + \hat{n}_4 \cdot \mathbf{v}_4 (\Delta y \Delta z) \\ &= \hat{i} \cdot (20.8\hat{i} + 12\hat{j}) (\text{cm/s})(24 \text{ cm}^2) \\ &\quad + \hat{j} \cdot (20\hat{j}) (\text{cm/s})(32 \text{ cm}^2) \\ &\quad + (-\hat{i}) \cdot (-15\hat{i} + 26\hat{j}) (\text{cm/s})(24 \text{ cm}^2) \\ &= (20.8 \text{ cm/s})(24 \text{ cm}^2) + (20 \text{ cm/s})(32 \text{ cm}^2) + (15 \text{ cm/s})(24 \text{ cm}^2) \\ &= 1499.2 \text{ cm}^3/\text{s} \end{aligned} \quad (۴)$$

یعنی از $1600 \text{ cm}^3/\text{s}$ سیال که به درون جعبه وارد می‌شود ، فقط $1449.2 \text{ cm}^3/\text{s}$ از جعبه خارج می‌شود . به این ترتیب جعبه به عنوان یک چاه عمل می‌کند و مقدار سیال جذب شده عبارت است از

$$\text{جریان خالص} = (-1600 + 1499.2) \text{ cm}^3/\text{s} = -100.8 \text{ cm}^3/\text{s} \quad (۵)$$

همین نتیجه را می‌توانیم با به کارگیری طرف چپ معادله (۱) به دست آوریم

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{v} \, dV = \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta x} + \frac{\Delta v_y}{\Delta y} + \frac{\Delta v_z}{\Delta z} \right) \Delta V \quad (۶)$$

که در آن

$$\frac{\Delta v_x}{\Delta x} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{\Delta x} = \frac{20.8 \text{ cm/s} - (-15 \text{ cm/s})}{8 \text{ cm}} = 4.475/\text{s} \quad (۷)$$

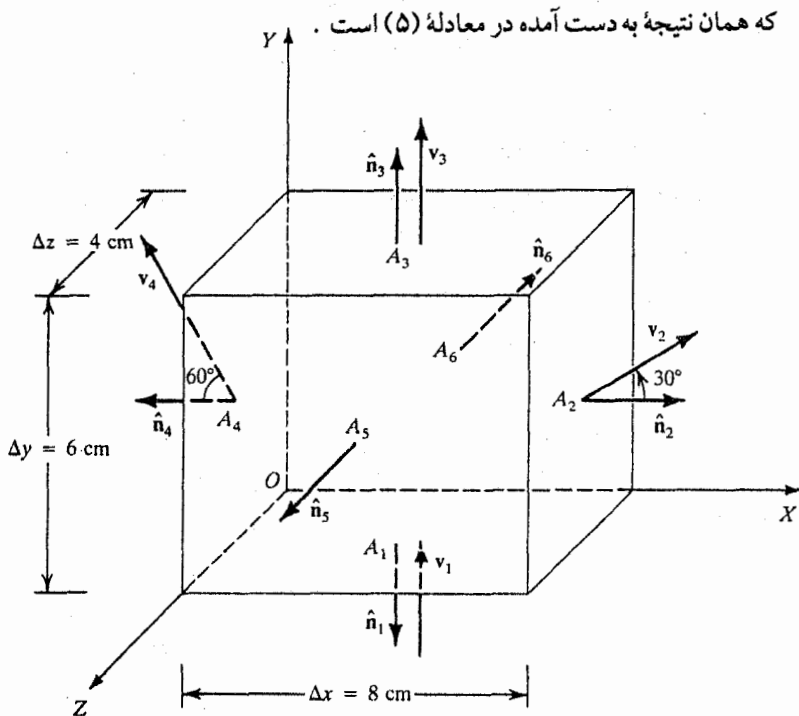
$$\frac{\Delta v_y}{\Delta y} = \frac{v_{2y} - v_{1y}}{\Delta y} = \frac{20 \text{ cm/s} - 50 \text{ cm/s}}{6 \text{ cm}} = -5/s \quad (8)$$

$$\frac{\Delta v_z}{\Delta z} = 0 \quad (9)$$

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z = (8 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}) = 192 \text{ cm}^3 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{جریان خالص} &= (\nabla \cdot \mathbf{v}) \Delta V = (4.475/s - 5/s + 0)(192 \text{ cm}^3) \\ &= -100.8 \text{ cm}^3/s \end{aligned} \quad (11)$$

که همان نتیجه به دست آمده در معادله (۵) است .



$$\begin{aligned} \hat{n}_1 &= -\hat{j} \\ \hat{n}_2 &= +\hat{i} \\ \hat{n}_3 &= +\hat{j} \\ \hat{n}_4 &= -\hat{j} \\ \hat{n}_5 &= +\hat{k} \\ \hat{n}_6 &= -\hat{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta x &= 8 \text{ cm} \\ \Delta y &= 6 \text{ cm} \\ \Delta z &= 4 \text{ cm} \\ \Delta x \Delta y &= 48 \text{ cm}^2 \\ \Delta x \Delta z &= 32 \text{ cm}^2 \\ \Delta y \Delta z &= 24 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= 50\hat{j} \text{ cm/s} \\ \mathbf{v}_2 &= (20.8\hat{i} + 12\hat{j}) \text{ cm/s} \\ \mathbf{v}_3 &= 20\hat{j} \text{ cm/s} \\ \mathbf{v}_4 &= (-15\hat{i} + 26\hat{j}) \text{ cm/s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta V &= \Delta x \Delta y \Delta z \\ &= (8 \times 6 \times 4) \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

شکل (مثال ۳-۵)

$$\begin{aligned} v_1 &= 50 \text{ cm/s} \\ v_2 &= 24 \text{ cm/s} \\ v_3 &= 20 \text{ cm/s} \\ v_4 &= 30 \text{ cm/s} \end{aligned}$$

تمرین (۳-۵): محاسبات را برای موردی که علاوه بر جریان فوق ، جریان دیگری با سرعت 10 cm/s از سطح جلوی بطور عمود بر آن وارد می شود و از سطح عقبی با سرعت 10 cm/s و تحت زاویه 45° با قائم بر سطح خارج می شود ، تکرار کنید .

کرل يك بردار ($\nabla \times \mathbf{A} \equiv \text{Curl } \mathbf{A}$)

اکنون ضرب برداری یا چلیپایی عملگر گرادینان با یک بردار را بررسی کنیم ، که به یک بردار به نام $\text{curl } \mathbf{A}$ یا $\text{rot } \mathbf{A}$ (به معنی چرخش یک میدان برداری) به شکل زیر منجر می شود .

$$\begin{aligned} \text{Curl } \mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \\ &= \hat{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (138-5) \end{aligned}$$

که می تواند به شکل فشرده

$$\text{Curl } \mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (139-5)$$

نیز نوشته شود .

برای درك معنی فیزیکی کرل یک کمیت برداری ، جریان سیالی را که با بردار سرعت \mathbf{v} توصیف می شود در نظر بگیریم . یک چرخ پره دار کوچک در درون سیال قرار دهیم . چرخ علاوه بر حرکت در داخل سیال در ناحیه ای که $\nabla \times \mathbf{v} \neq 0$ است تمایل به چرخیدن می کند . به سیالی که در آن $\text{curl } \mathbf{v}$ مخالف صفر است گفته می شود که دارای میدان گردابی است ، و به سیالی که در همه جای آن کرل صفر است گفته می شود که دارای یک میدان غیرگردابی است .

یک میدان برداری که کرل آن مخالف صفر است در نظر بگیریم . فرض کنیم این میدان با یک بردار سرعت \mathbf{v} در هر نقطه نمایش داده شود . فرض کنیم که مؤلفه v_x با z افزایش یابد و مؤلفه v_y با y ، آن طور که در شکل (۲۹-۵) نشان داده شده است . هم $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ و هم $\frac{\partial v_y}{\partial z}$

مثبت اند. اما $\frac{\partial v_y}{\partial z}$ به چرخش منفی (چرخش ساعتگرد) حول محور X منجر می شود، در صورتی که $\frac{\partial v_z}{\partial y}$ منجر به چرخش مثبت (پاد ساعتگرد) حول محور X می شود. بنابراین مؤلفه $\text{curl } v$ در امتداد X عبارت است از

$$(\text{Curl } v)_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \quad (140-5)$$

می توانیم به دو مؤلفه دیگر نیز همین معنی را بدهیم.

معنی هندسی $\text{curl } A$ همچنین می تواند به وسیله قضیه استوکس داده شود،

یعنی

$$\int_S \hat{n} \cdot (\nabla \times A) dS = \int_C A \cdot dr \quad (141-5)$$

قضیه استوکس: انتگرال خطی یک میدان برداری روی یک منحنی بسته برابر است با انتگرال سطحی کرل آن روی سطحی که به وسیله این منحنی محصور شده باشد.

در معادله (۱۴۱-۵)، C منحنی ای است که سطح S در فضا را احاطه کرده است، \hat{n} بردار یکه قائم بر سطح S است و dr در امتداد منحنی C در نظر گرفته شده است. بنابراین انتگرال طرف راست در روی مسیر، یعنی، مرز محصورکننده سطحی که در طرف چپ وارد شده است، گرفته می شود. برای یک سطح کوچک ΔS ، می توانیم قضیه استوکس را به صورت

$$\hat{n} \cdot (\nabla \times A) \Delta S = \sum A \cdot \Delta r \quad (142-5)$$

که در مثال عددی مورد استفاده قرار می گیرد، بنویسیم.
در آخر کار، یادآوری کنیم که

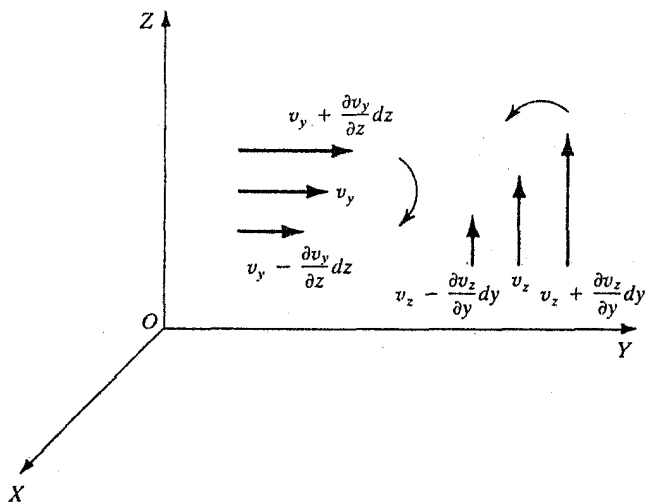
$$\nabla \cdot \nabla = \text{div grad} = \nabla^2$$

$$\begin{aligned} &= \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (143-5)$$

باید یک نرده ای باشد ، و ∇^2 ، موسوم به عملگر لاپلاسی ، چنین عملگری است . از سوی دیگر ضرب برداری ∇ با خودش صفر است زیرا دو بردار با یکدیگر موازی اند ، یعنی ،

$$\nabla \times \nabla = 0$$

(۱۴۴-۵)

شکل (۰-۲۹) : برای محاسبه کرل یک بردار سرعت v

مثال (۵-۴) : یک مربع $ABCD$ به اضلاع 8 cm در 8 cm واقع در یک میدان سرعت ، آن طور که در شکل (مثال ۵-۴) نشان داده شده است ، در نظر بگیرید . طرفهای چپ و راست قضیه استوکس ، یعنی ،

$$\iint_S (\nabla \times v) \cdot \hat{n} \, dS = \int_C v \cdot dr \quad (1)$$

را محاسبه کنید .

انتگرال طرف راست در امتداد مسیری که سطح را احاطه کرده است انجام

می گیرد . می توانیم معادله (۱) را به صورت

$$(\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta S = \sum \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{r} \quad (۲)$$

بنویسیم . نخست طرف چپ را بررسی کنیم

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \hat{\mathbf{i}} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{j}} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \hat{\mathbf{k}} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ &= 0 + 0 + \hat{\mathbf{k}} \left(0 - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (۳)$$

یا ، به شکل تقریبی ، می توانیم بنویسیم

$$\nabla \times \mathbf{v} = -\hat{\mathbf{k}} \frac{\partial v_x}{\partial y} \approx -\hat{\mathbf{k}} \frac{\Delta v_x}{\Delta y} = -\hat{\mathbf{k}} \left(\frac{4 \text{ cm/s} - 20 \text{ cm/s}}{8 \text{ cm}} \right) = 2\hat{\mathbf{k}}/\text{s} \quad (۴)$$

برای سطح ،

$$\Delta S = 8 \text{ cm} \times 8 \text{ cm} = 64 \text{ cm}^2 \quad (۵)$$

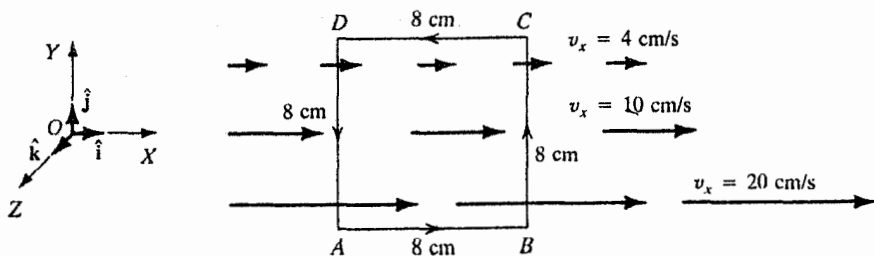
و برای مسیر نشان داده شده در شکل ، $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ ، خواهیم داشت

$$(\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta S = (2\hat{\mathbf{k}}/\text{s}) \cdot \hat{\mathbf{k}} (64 \text{ cm}^2) = 128 \text{ cm}^2/\text{s} \quad (۶)$$

اکنون طرف راست معادله (۲) را ارزیابی کنیم :

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{r} &= (\mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{r})_{AB} + (\mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{r})_{BC} + (\mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{r})_{CD} + (\mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{r})_{DA} \\ &= (20 \text{ cm/s})(8 \text{ cm}) + 0 + (-4 \text{ cm/s})(8 \text{ cm}) + 0 \\ &= 128 \text{ cm}^2/\text{s} \end{aligned} \quad (۷)$$

که همان نتیجه معادله (۶) است .



شکل (مثال ۵-۴)

تمرین (۵-۴): محاسبات بالا را برای موردی که بردارهای سرعت در هر نقطه با محور X زاویه 45° می سازند ، تکرار کنید .

۵-۸ تبدیل مختصات

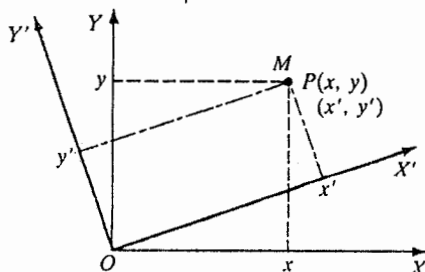
نتیجه کاربست هر قانون فیزیکی به یک سیستم معین باید از دستگاه مختصات و همچنین از مبدأ دستگاه مختصات مستقل باشد . بردارها این ویژگی خاص را دارند و در نتیجه بفرآوانی در وضعیتهای گوناگون به کار می روند . به این ترتیب دانستن روشی که با آن بردارها از یک دستگاه مختصات به دستگاه دیگری تبدیل می شوند ، یعنی ، بررسی خواص چنین تبدیلاتی ، اهمیت پیدا می کند . به علاوه ، توصیف این بردارها و همچنین تبدیلات آنها در نمادگذاری ماتریسی مناسب و مفید است .

مطلب را با توصیف یک کمیّت نرده ای در دستگاههای مختصات مختلف شروع می کنیم . جرم M را در نقطه P در نظر بگیریم و مختصات آن را در دستگاه XY با (x, y) و در دستگاه $X'Y'$ با (x', y') ، مطابق شکل (۵-۳۰) ، نمایش دهیم . مختصات این جرم در دودستگاه مختصات متفاوتند ، اما جرم ثابت می ماند ، یعنی ،

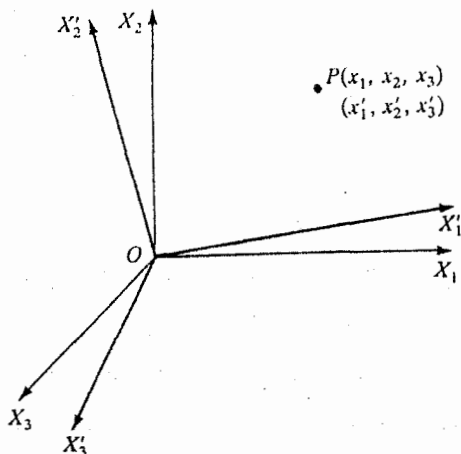
$$M(x, y) = M(x', y') = \text{constant} \quad (۵-۱۴۵)$$

کمیتهایی که در تبدیل مختصات ناورد هستند نرده ای نامیده می شوند .

اکنون روش تبدیل مختصاتی بردارها را بررسی کنیم . یک نقطه P که دارای مختصات (x_1, x_2, x_3) نسبت به دستگاه $X_1X_2X_3$ ، و (x'_1, x'_2, x'_3) نسبت به دستگاه $X'_1X'_2X'_3$ باشد ، آن طور که در شکل (۵-۳۱) نشان داده شده است ، در نظر بگیریم . یادآوری کنیم که ، برای راحتی ، (x_1, x_2, x_3) را به جای (x, y, z) به کار برده ایم .



شکل (۵-۳۰) : مختصات یک جرم نرده ای در نقطه P



شکل (۳۱-۵) : مختصات نقطه P در دو دستگاه مختصات مختلف که نسبت

به یکدیگر چرخیده‌اند ، عبارتند از (x_1, x_2, x_3) و (x'_1, x'_2, x'_3)

برای سادگی ، ارتباط بین (x'_1, x'_2) و (x_1, x_2) را پیدا کنیم . با مراجعه به شکل (۳۲-۵) ، x'_1 برابر است با

$$\begin{aligned} x'_1 &= Oa = Ob + bc + ca \\ &= x_1 \cos \theta + ce \sin \theta + cP \sin \theta \\ &= x_1 \cos \theta + (ce + cP) \sin \theta \\ &= x_1 \cos \theta + eP \sin \theta \\ &= x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \end{aligned}$$

یا

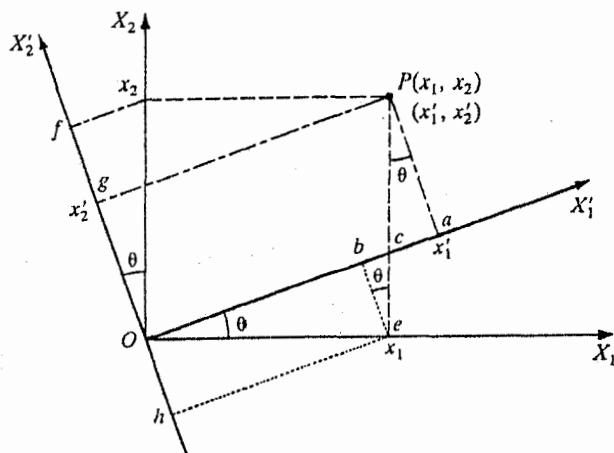
$$x'_1 = x_1 \cos \theta + x_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \quad (۱۴۶-۵)$$

به همین نحو

$$x'_2 = -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta$$

یا

$$x'_2 = x_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + x_2 \cos \theta \quad (147-5)$$

شکل (۳۲-۵): محاسبه (x'_1, x'_2) بر حسب (x_1, x_2)

به این ترتیب می‌توانیم x'_1 و x'_2 را بر حسب x_1 و x_2 و کسینوسهای زاویه θ بیان کنیم. نمادگذاری را با به کارگیری کسینوسهای جهتی می‌توان ساده کرد. فرض کنیم α_1 زاویه بین محور X'_1 و محور X_1 یا بین بردارهای \hat{x}'_1 و \hat{x}_1 باشد، یعنی

$$\alpha_1 \equiv \cos(X'_1, X_1) = \cos(\hat{x}'_1, \hat{x}_1) = \hat{x}'_1 \cdot \hat{x}_1 = \cos \theta$$

و به همین نحو،

$$\alpha_2 \equiv \cos(X'_1, X_2) = \cos(\hat{x}'_1, \hat{x}_2) = \hat{x}'_1 \cdot \hat{x}_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

$$\beta_1 \equiv \cos(X'_2, X_1) = \cos(\hat{x}'_2, \hat{x}_1) = \hat{x}'_2 \cdot \hat{x}_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta \quad (148-5)$$

$$\beta_2 \equiv \cos(X'_2, X_2) = \cos(\hat{x}'_2, \hat{x}_2) = \hat{x}'_2 \cdot \hat{x}_2 = \cos \theta$$

با این نمادگذاری معادلات (۱۴۶-۵) و (۱۴۷-۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$x'_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \quad (149-5)$$

$$x'_2 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \quad (150-5)$$

این معادلات را می‌توانیم به مورد سه بعدی گسترش دهیم.

اگر با یک نقطه P در فضا با مختصات (x_1, x_2, x_3) در دستگاه $X_1 X_2 X_3$ و (x'_1, x'_2, x'_3) در دستگاه $X'_1 X'_2 X'_3$ سر و کار داشته باشیم، خواهیم داشت

$$x'_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \quad (151-5)$$

$$x'_2 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 \quad (152-5)$$

$$x'_3 = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 \quad (153-5)$$

که γ_1 کسینوس زاویه بین x'_3 و x_1 است، و $\gamma_2, \gamma_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ نیز معانی مشابهی دارند. تبدیلات وارون، یعنی x_1, x_2, x_3 بر حسب x'_1, x'_2, x'_3 می توانند به صورت

$$x_1 = \alpha_1 x'_1 + \beta_1 x'_2 + \gamma_1 x'_3 \quad (154-5)$$

$$x_2 = \alpha_2 x'_1 + \beta_2 x'_2 + \gamma_2 x'_3 \quad (155-5)$$

$$x_3 = \alpha_3 x'_1 + \beta_3 x'_2 + \gamma_3 x'_3 \quad (156-5)$$

نوشته شوند که α_1 کسینوس زاویه بین محور X_1 و محور X'_1 است، و دیگر کسینوسهای جهتی معانی مشابهی دارند.

معادلات تبدیل، معادلات (154-5) تا (156-5)، می توانند با به کارگیری نمادگذاری زیر، به شکل آراسته تر و فشرده تری نوشته شوند. فرض کنیم λ_{ij} کسینوس زاویه بین محور X'_i و محور X_j باشد، یعنی، کسینوس جهتی λ_{ij} عبارت باشد از

$$\lambda_{ij} \equiv \cos(X'_i, X_j) = \hat{x}'_i \cdot \hat{x}_j \quad (157-5)$$

$$\lambda_{ji} \equiv \cos(X_j, X'_i) = \hat{x}_j \cdot \hat{x}'_i \quad (158-5)$$

مختصات x'_1, x'_2, x'_3 می توانند بر حسب x_1, x_2, x_3 به صورت

$$x'_1 = \lambda_{11} x_1 + \lambda_{12} x_2 + \lambda_{13} x_3 \quad (159-5)$$

$$x'_2 = \lambda_{21} x_1 + \lambda_{22} x_2 + \lambda_{23} x_3 \quad (160-5)$$

$$x'_3 = \lambda_{31} x_1 + \lambda_{32} x_2 + \lambda_{33} x_3 \quad (161-5)$$

بیان شوند، تبدیل وارون عبارت است از

$$x_1 = \lambda_{11}x'_1 + \lambda_{21}x'_2 + \lambda_{31}x'_3 \quad (۱۶۲-۵)$$

$$x_2 = \lambda_{12}x'_1 + \lambda_{22}x'_2 + \lambda_{32}x'_3 \quad (۱۶۳-۵)$$

$$x_3 = \lambda_{13}x'_1 + \lambda_{23}x'_2 + \lambda_{33}x'_3 \quad (۱۶۴-۵)$$

با استفاده از جمع بندی ، این تبدیلات می توانند به صورت

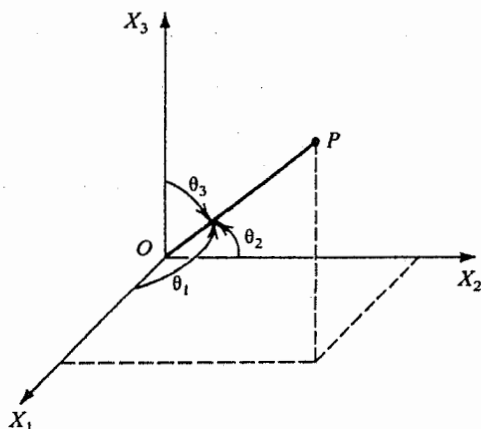
$$x'_i = \sum_{j=1}^3 \lambda_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, 3 \quad (۱۶۵-۵)$$

$$x_i = \sum_{j=1}^3 \lambda_{ji}x'_j, \quad i = 1, 2, 3 \quad (۱۶۶-۵)$$

نوشته شوند که λ_{ij} عناصر یک ماتریس مربعی 3×3 ی λ به شکل زیرند

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \quad (۱۶۷-۵)$$

ماتریس λ ، ماتریس تبدیل یا ماتریس چرخش نامیده می شود و خواص مختصات یک نقطه در اثر تبدیلات را مشخص می کند .



شکل (۳۳-۵): زاویه های θ_1 ، θ_2 ، θ_3 که OP با سه محور می سازد برای محاسبه

کسینوسهای جهت به کار می روند

بنابر معادله (۵-۱۶۷) ، برای تبدیل یک نقطه به نه کمیت λ_{ij} نیاز داریم ، اما با نگاهی عمیقتر بر ماتریس λ در می یابیم که تمام کمیت‌های λ_{ij} مستقل نیستند . برای پی بردن به این مطلب ، به دو رابطه هندسی نظری می افکنیم . در شکل (۵-۳۳) ، خط OP با محورهای X_1 ، X_2 و X_3 ، به ترتیب ، زاویه های θ_1 ، θ_2 ، θ_3 می سازد . در نتیجه کسینوسهای جهتی خط راست OP عبارتند از $\cos \theta_1$ ، $\cos \theta_2$ ، $\cos \theta_3$. همان طور که در بخش (۵-۵) بحث شد ، مجموع مربعات کسینوسهای جهتی هر خط برابر است با یک ؛ یعنی (با گذاردن θ_1 ، θ_2 ، و θ_3 به ترتیب به جای α_1 ، α_2 ، و α_3) داریم

$$\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3 = 1 \quad (۵-۱۶۸)$$

با مراجعه به شکل (۵-۳۴) ، اگر خط OP زاویه های θ_1 ، θ_2 ، θ_3 و خط OQ زاویه های θ'_1 ، θ'_2 ، θ'_3 با محورهای $X_1 X_2 X_3$ بسازند کسینوس زاویه بین این دو خط عبارت است از

$$\cos \theta = \cos \theta_1 \cos \theta'_1 + \cos \theta_2 \cos \theta'_2 + \cos \theta_3 \cos \theta'_3 \quad (۵-۱۶۹)$$

اکنون یک مجموعه محورهای $X_1 X_2 X_3$ در نظر می گیریم . وقتی این مجموعه به اندازه زاویه θ دوران کند ، به مجموعه محورهای جدید $X'_1 X'_2 X'_3$ تبدیل می شود . حال محور X'_1 را در دستگاه $X_1 X_2 X_3$ توصیف کنیم . کسینوسهای جهتی آن عبارتند از λ_{11} ، λ_{12} ، λ_{13} . همچنین کسینوسهای جهتی محور X'_2 در دستگاه $X_1 X_2 X_3$ عبارتند از λ_{21} ، λ_{22} ، λ_{23} . چون X'_1 بر X'_2 عمود است زاویه بین آنها $\frac{\pi}{2}$ است ، و با به کار بردن معادله (۵-۱۶۹) خواهیم داشت

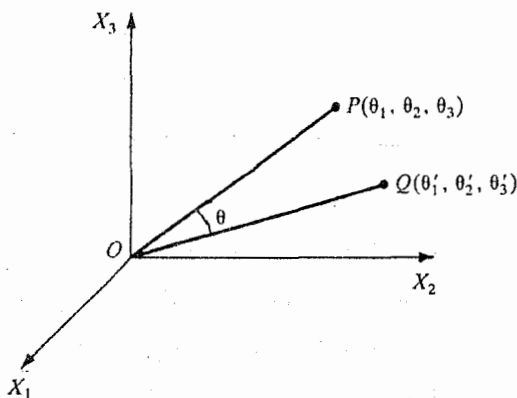
$$\lambda_{11} \lambda_{21} + \lambda_{12} \lambda_{22} + \lambda_{13} \lambda_{23} = \cos \theta = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad (۵-۱۷۰)$$

که می تواند به صورت زیر نوشته شود

$$\sum_{k=1}^3 \lambda_{1k} \lambda_{2k} = 0 \quad (۵-۱۷۱)$$

بطور کلی ، با کاربرد این روش به دو ترکیب دیگر ، خواهیم داشت

$$\sum_{k=1}^3 \lambda_{ik} \lambda_{jk} = 0, \quad i \neq j \quad (۵-۱۷۲)$$

شکل (۳۴-۵) : برای محاسبه زاویه θ بین دو خط OP و OQ

به همین نحو ، اگر معادله (۵-۱۶۸) را به سه محور X'_1 ، X'_2 ، X'_3 که جداگانه در دستگاه $X_1 X_2 X_3$ توصیف شده اند اعمال کنیم ، خواهیم داشت

$$\lambda_{11}^2 + \lambda_{12}^2 + \lambda_{13}^2 = 1$$

$$\lambda_{21}^2 + \lambda_{22}^2 + \lambda_{23}^2 = 1$$

$$\lambda_{31}^2 + \lambda_{32}^2 + \lambda_{33}^2 = 1$$

(۵-۱۷۳)

که می توانند در شکل فشرده به صورت

$$\sum_{k=1}^3 \lambda_{ik} \lambda_{jk} = 1, \quad i = j$$

(۵-۱۷۴)

نوشته شوند . معادلات (۵-۱۷۲) و (۵-۱۷۴) شرایط تعامد نامیده می شوند و در مورد هر مجموعه دستگاه مختصاتی که در آن محورهای مختصات دو به دو عمودند ، یعنی سیستمها متعامدند ، برقرارند . معادلات (۵-۱۷۲) و (۵-۱۷۴) می توانند در معادله ای به صورت زیر ترکیب شوند

$$\sum_{k=1}^3 \lambda_{ik} \lambda_{jk} = \delta_{ij}$$

(۵-۱۷۵)

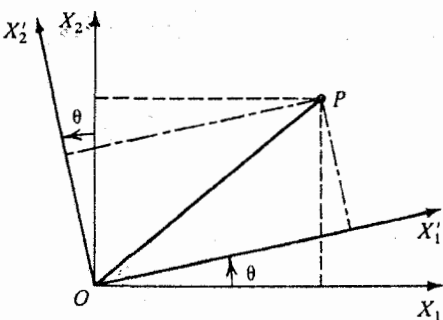
که در آن δ_{ij} دلتای کرونکر نامیده می شود که دارای خاصیت زیر است

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

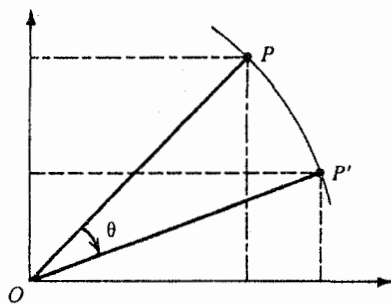
(۵-۱۷۶)

به این ترتیب معادله (۵-۱۷۵) منجر به شش رابطه بین کسینوسهای جهتی می شود ، که این معادلات باعث کاهش تعداد کمیتهای مستقل λ_{ij} در ماتریس λ به فقط سه کمیته می شوند .
ماتریس تبدیل λ که در این جا بیان شد می تواند دو تبدیل متفاوت اما خیلی نزدیک به هم را توصیف کند .

- ۱- تبدیل مختصه ای : در این مورد نقطه P ثابت است و بردارهای پایه تبدیل می شوند (مثلاً از X_1, X_2 به X'_1, X'_2) که خود باعث می شود مختصات نقطه P تغییر کند (شکل (الف) ۵-۳۵). این همان تعبیری است که در این جا توضیح داده ایم .
۲- تبدیل نقطه ای : در این جا مختصات (یا بردارهای پایه) ثابت نگاه داشته می شوند و نقطه P می چرخد و به نقطه P' می رسد ، بطوری که فاصله آن از مبدأ ثابت می ماند [شکل (ب) ۵-۳۵].



(a)



(b)

شکل (۵-۳۵): (الف) تبدیل مختصه ای و (ب) تبدیل نقطه ای

یک بار دیگر شکلهای (الف) ۵-۳۵ و (ب) ۵-۳۵ را در نظر بگیریم . در شکل (الف) ۵-۳۵ ، محورهای X_1 ، X_2 ثابتند و به عنوان محورهای مرجع به کار می روند ، در حالی که محورهای X'_1 و X'_2 از یک چرخش به اندازه θ به دست آمده اند . به این ترتیب مختصات نقطه $P(x'_1, x'_2)$ در دستگاه مختصات چرخیده بر حسب مختصات (x_1 و x_2) در دستگاه مختصات ثابت عبارتند از

$$x'_1 = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \quad (الف) \quad (۵-۱۷۷)$$

$$x'_2 = -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \quad (ب) \quad (۵-۱۷۷)$$

در این مورد تبدیل روی محورها عمل می کند و تبدیل مختصه ای نامیده می شود . اگر محورها را ثابت نگاه داریم و نقطه P را به اندازه زاویه θ (در جهت مخالف با جهتی که محورها چرخیده بودند) بچرخانیم و به نقطه P بیاوریم ، همین نتیجه را می توانیم به دست آوریم . مختصات نقطه P' در این مورد نیز با معادلات (۵-۱۷۷) داده می شوند . این نوع تبدیل ، که روی نقطه عمل می کند ، تبدیل نقطه ای نامیده می شود . این دو نوع تبدیل کاملاً هم ارزند .
 بالاخره ، یک مجموعه کمیات A_1, A_2, A_3 در دستگاه بدون پریم ممکن است به یک مجموعه پریم دار به وسیله ماتریس λ تبدیل شوند [رک . معادلات (۵-۱۶۵)] .

$$A'_i = \sum_j \lambda_{ij} A_j \quad (۵-۱۷۸)$$

کمیت‌هایی که از این قاعده تبدیل پیروی کنند بردار نامیده می شوند ، یعنی $A_i (A_1, A_2, A_3) \equiv A$ یک کمیت برداری است .

تا این جا یک ماتریس تبدیل در نظر گرفتیم که یک ماتریس مربعی 3×3 است ، یعنی ، تعداد سطرها برابر با تعداد ستونهاست . ماتریس همیشه مربعی نیست . به عنوان مثال ، مختصات (x_1, x_2, x_3) یک نقطه می تواند با یک ماتریس ستونی x به صورت

$$x \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (۵-۱۷۹)$$

یا یک ماتریس سطری به صورت

$$x \equiv (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \quad (۵-۱۸۰)$$

نمایش داده شود . یک روش متداول برای نمایش یک بردار استفاده از ماتریس ستونی (۵-۱۷۹) است ، و ما این قرارداد را به کار می بریم . به این ترتیب مختصات (x_1, x_2, x_3) و x'_1, x'_2, x'_3 ی نقطه P نسبت به دو دستگاه مختصات مرجع $X_1 X_2 X_3$ و $X'_1 X'_2 X'_3$ را می توان در نمایش ماتریسی بیان کرد . معادلات تبدیل (۵-۱۶۵)

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 \lambda_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, 3 \quad (۵-۱۶۵)$$

می توانند با نماد ماتریسی به صورت

$$x' = \lambda x \quad (۵-۱۸۱)$$

نوشته شوند . این معادله با

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (۱۸۲-۵)$$

هم ارز است ، که با معادلات زیر یکی است

$$\begin{aligned} x'_1 &= \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \lambda_{13}x_3 \\ x'_2 &= \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \lambda_{23}x_3 \\ x'_3 &= \lambda_{31}x_1 + \lambda_{32}x_2 + \lambda_{33}x_3 \end{aligned} \quad (۱۸۳-۵)$$

توجه کنیم که در معادلات (۱۸۲-۵) یا (۱۸۳-۵) ضرب در صورتی امکان پذیر است که (۱) x و x' ماتریسهای ستونی باشند ، و (۲) تعداد ستونهای ماتریس λ مساوی با تعداد سطرها در x باشد . بطور کلی ، اگر بخواهیم ماتریس A را در ماتریس B ضرب کنیم ، ماتریس حاصل C خواهد بود

$$C = AB \quad (۱۸۴-۵)$$

که تعداد ستونها در ماتریس A باید برابر با تعداد سطرها در ماتریس B باشد . یک عنصر C_{ij} از ماتریس C خواهد بود

$$C_{ij} = [AB]_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj} \quad (۱۸۵-۵)$$

ضرب ماتریسی عموماً جابه جایی پذیر نیست ، یعنی

$$AB \neq BA \quad (۱۸۶-۵)$$

مسائل

۱-۵ نامساویهای زیر را اثبات کنید :

$$|A + B| \leq |A| + |B| \quad (\text{الف})$$

$$|A \cdot B| \leq |A| |B| \quad (\text{ب})$$

$$|A \times B| \leq |A| |B| \quad (\text{پ})$$

۲-۵ برآیند سه نیروی F_1 ، F_2 ، و F_3 را بر حسب بزرگیهای آنها، F_1 ، F_2 ، F_3 ، و زاویه های θ_1 ، θ_2 ، و θ_3 بین هر دو نیرو را به دست آورید. همچنین عبارتی برای زاویه α بین نیروی برآیند F و نیروی F_1 به دست آورید.

۳-۵ بردارهای $A(4, -2, 6)$ و $B(1, 3, -4)$ را در نظر بگیرید. حساب کنید (الف) $A + B$ ، (ب) $A - B$ ، (پ) $3A + 2B$ ، (ت) $3A - 2B$ ، (ث) $A \cdot B$ ، (ج) $A^2 + B^2$ ، (د) کسینوسهای $A \cdot B$ ، (چ) زاویه بین A و B ، (ح) $A \times B$ ، (خ) مؤلفه B در امتداد A ، (د) کسینوسهای جهتی A و B .

۴-۵ بردارهای $A = 2i + 3j + 4k$ و $B = 2i - 2j - 4k$ را در نظر بگیرید. محاسبه کنید (الف) $A + B$ ، (ب) $A - B$ ، (پ) $3A + 2B$ ، (ت) $3A - 2B$ ، (ث) $A \cdot B$ ، (ج) $A_2 + B^2$ ، (چ) $A \cdot B$ ، (ج) زاویه بین A و B ، (ح) $A \times B$ ، (خ) مؤلفه B در امتداد A ، (د) کسینوسهای جهتی A و B .

۵-۵ کسینوس زاویه بین بردارهای $A = 2i + 3j + 2k$ و $B = 2i - j + 2k$ را پیدا کنید.

۶-۵ ثابت کنید که قطرهای یک لوزی بر یکدیگر عمودند.

۷-۵ بردار n را طوری پیدا کنید که بر بردار $A = i + 2j + 3k$ و $B = 2i - j + 2k$ عمود باشد.

۸-۵ بردار $A = 2i + cj + k$ بر بردار $B = i + j + 2k$ عمود است. c چقدر است؟

۹-۵ نشان دهید که بردارهای $A = i - 2j - k$ و $B = 6i + 8j + 10k$ به یکدیگر عمودند.

۱۰-۵ برای چه مقادیری از c دو بردار زیر به یکدیگر عمودند: $A = ci + 2cj - 4k$ و $B = 2i - cj + 2ck$.

۱۱-۵ نشان دهید که بردار $r = 2i + 5j$ در صفحه عمود بر محور Z قرار دارد .

۱۲-۵ بردارهای A و B دو ضلع مجاور یک متوازی الاضلاع را تشکیل می دهند . نشان دهید که مساحت این متوازی الاضلاع برابر است با $|A \times B|$.

۱۳-۵ بردارهای $A = i + j$ و $B = i + j + k$ بردارهایی هستند که ، به ترتیب ، قطر یک وجه و قطر خود مکعب را نمایش می دهند . زاویه بین این دو بردار را محاسبه کنید .

۱۴-۵ یک بردار n یک بردار A و یک بردار دلخواه است . نشان دهید که

$$A = (A \cdot \hat{n})\hat{n} + (\hat{n} \times A) \times \hat{n}.$$

۱۵-۵ برای بردارهای A ، B ، و C که در زیر آمده اند ، کمیتهای زیر را محاسبه کنید .

$$A = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}, \quad B = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}, \quad C = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

$$A - B + C \quad (\text{الف}) \quad A + B + C \quad (\text{ب})$$

$$(A + B) \cdot C \quad (\text{پ}) \quad A - B - C \quad (\text{ت})$$

$$A \cdot (B \times C) \quad (\text{ث}) \quad A \cdot (B + C) \quad (\text{ج})$$

$$A \times B \times C \quad (\text{چ}) \quad (A \times B) \cdot C \quad (\text{ح})$$

۱۶-۵ با استفاده از تعریف بنیادی مشتق یک بردار ، نتایج بیان شده در رابطه های (۵-۹۴) ، (۵-۹۵) ، و (۵-۹۷) را اثبات کنید .

۱۷-۵ برای بردارهای A و B ، کمیتهای زیر را محاسبه کنید

$$A = ae^{-kt}\hat{i} + bt\hat{j} + \hat{k} \quad \text{و} \quad B = (c \sin \omega t)\hat{i} + (d \cos \omega t)\hat{j}$$

$$\frac{dA}{dt} \quad \frac{dB}{dt} \quad \left| \frac{dA}{dt} \right| \quad \left| \frac{dB}{dt} \right| \quad (\text{الف})$$

$$|A| \quad |B| \quad \frac{d}{dt} |A| \quad \frac{d}{dt} |B| \quad (\text{ب})$$

$$\frac{d}{dt} (A \cdot B) \quad (\text{پ})$$

$$\frac{d}{dt} (A \times B) \quad (\text{ت})$$

۱۸-۵ نشان دهید که حاصل ضرب سه گانه نرده ای می تواند به شکل دترمینان به صورت زیر

$$(A \times B) \cdot C = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

نوشته شود

۱۹-۵ رابطه چرخه ای زیر را برای یک ضرب سه گانه نرده ای اثبات کنید

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$$

۲۰-۵ اتحاد زیر را اثبات کنید

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C} &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \\ &= \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \end{aligned}$$

۲۱-۵ با استفاده از خواص عملگر «دل» ، ∇ ، اتحاد زیر را ثابت کنید

$$\text{grad}(uv) = u \text{ grad } v + v \text{ grad } u.$$

۲۲-۵ با استفاده از خواص عملگر «دل» ، ∇ ، اتحاد برداری زیر را ثابت کنید

$$\text{curl}(\text{curl } \mathbf{A}) = \text{grad}(\text{div } \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

۲۳-۵ $\text{grad } S$ را که در آن $S = \frac{1}{r^3}$ و $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ ، محاسبه کنید

۲۴-۵ گرادیان توابع زیر را پیدا کنید

$$f = x + y + z \quad (\text{الف})$$

$$f = xy + xz + yz \quad (\text{ب})$$

$$f = xy^2 + yx^2 + xyz \quad (\text{پ})$$

۲۵-۵ پتانسیلی که یک نیروی عکس مجذوری را می نمایاند عبارت است از $V(r) = \frac{k}{r}$ که در آن

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

۲۶-۵ برای مسأله (۲۵-۵) بردار یکه ای پیدا کنید که در جهت افزایش بیشینه V در مکان

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

۲۷-۵ برای مسأله (۲۳-۵) بردار یکه ای پیدا کنید که در جهت افزایش بیشینه S در مکان

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

۲۸-۵ دیورژانس \mathbf{r} را در موارد زیر حساب کنید : $(\text{div } \mathbf{r} \equiv \nabla \cdot \mathbf{r})$.

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \quad (\text{الف}) \quad \mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{r} = 4x\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 4y\hat{\mathbf{k}} \quad (\text{ت}) \quad \mathbf{r} = y\hat{\mathbf{i}} - x\hat{\mathbf{j}} - z\hat{\mathbf{k}} \quad (\text{پ})$$

۲۹-۵ دیورژانس بردارهای زیر را پیدا کنید :

$$\mathbf{r} = x^2\hat{i} - y^2\hat{j} - z^2\hat{k} \quad (\text{الف}) \quad \mathbf{r} = x^2\hat{i} + y^2\hat{j} \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{r} = xy\hat{i} - yz\hat{j} + zx\hat{k} \quad (\text{پ})$$

۳۰-۵ نیروی گرانشی بین دو جرم به صورت زیر است

$$\mathbf{F} = G \frac{Mm}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = G \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r}$$

دیورژانس \mathbf{F} را حساب کنید .

۳۱-۵ سیالی از شش سطح یک مکعب به ضلع 10 cm بطور عمود بر صفحات با سرعتهای زیر

جریان دارد ، $v_x = 10 \text{ cm/s}$ ، $v_y = -10 \text{ cm/s}$ ، $v_z = 20 \text{ cm/s}$ ، $v_x = 20 \text{ cm/s}$ ، $v_y = -20 \text{ cm/s}$ ، $v_z = 50 \text{ cm/s}$ ، $v_x = 50 \text{ cm/s}$ ، $v_y = 50 \text{ cm/s}$ ، $v_z = 50 \text{ cm/s}$.

جریان خالص سیال به خارج جعبه را حساب کنید .

آیا این جعبه یک چشمه است یا یک چاه ؟

۳۲-۵ مکعبی به ضلع 5 cm در داخل یک سیال قرار دارد . دیورژانس متوسط جریان را برای

سرعتهای زیر حساب کنید . آیا در داخل جعبه چشمه وجود دارد یا چاه ؟ سرعتها

بر حسب cm/s داده شده اند .

$$\mathbf{v}_F = 30\hat{i} + 60\hat{j} - 30\hat{k} \quad \text{جلو}$$

$$\mathbf{v}_R = 20\hat{i} - 20\hat{j} + 20\hat{k} \quad \text{راست}$$

$$\mathbf{v}_L = -100\hat{i} + 200\hat{j} + 300\hat{k} \quad \text{چپ}$$

$$\mathbf{v}_T = 5\hat{i} + 50\hat{j} + 10\hat{k} \quad \text{بالا}$$

$$\mathbf{v}_{Bo} = 0 \quad \text{پایین}$$

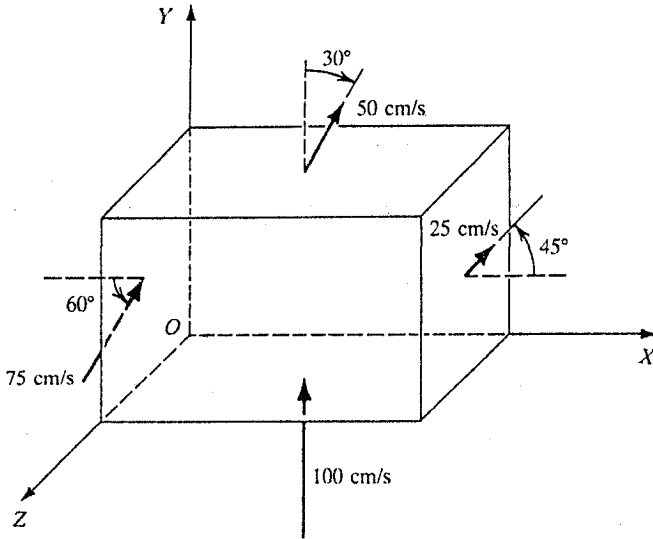
$$\mathbf{v}_{Ba} = 250\hat{k} \quad \text{عقب}$$

نمودار نشان دهنده این سرعتها را نیز رسم کنید .

۳۳-۵ جعبه ای به اضلاع $15 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ در داخل یک سیال قرار گرفته است .

آهنگهای جریان آنهاست که در شکل (مسأله ۳۳-۵) نمایش داده شده اند . جریان

خالص را حساب کنید . آیا در داخل جعبه چشمه وجود دارد یا چاه ؟



شکل (مسأله ۵-۳۳)

۳۴-۵ کرل میدانهای برداری زیر را پیدا کنید

(الف) $r = x\hat{i} + y\hat{j}$ (ب) $r = y\hat{i} + x\hat{j} + z\hat{k}$

(پ) $r = x^2\hat{i} + y^2\hat{j}$ (ت) $r = x^2\hat{i} - y^2\hat{j} - z^2\hat{k}$

(ث) $r = xy\hat{i} + yz\hat{j} + zx\hat{k}$ (ج) $r = 4x\hat{i} - 2\hat{j} + 4y\hat{k}$

۳۵-۵ $\nabla \times F$ را برای نیروهای زیر پیدا کنید

(الف) $F = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$

(ب) $F = (4abyz^2 - 10bx^2y^2)\hat{i} + (9abxz^2 - 6bx^3y)\hat{j} + 8abxyz\hat{k}$

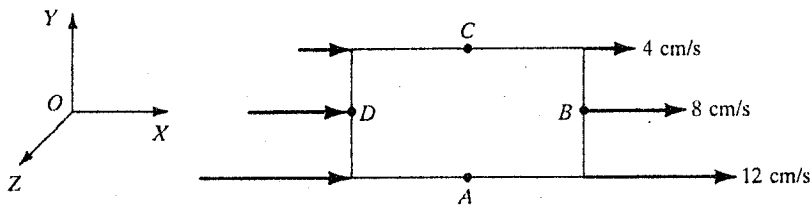
(پ) $F_x = 6abyz^3 - 20bx^3y^2$

$F_y = 6abxz^3 - 10bx^4y$

$F_z = 18abxyz^2$

۳۶-۵ با استفاده از قضیه استوکس ، مقدار متوسط کرل یک سیال را برای یک مسیر 20 cm در

10 cm ، مطابق شکل (مسأله ۵-۳۶) محاسبه کنید .



شکل (مسأله ۵-۳۶)

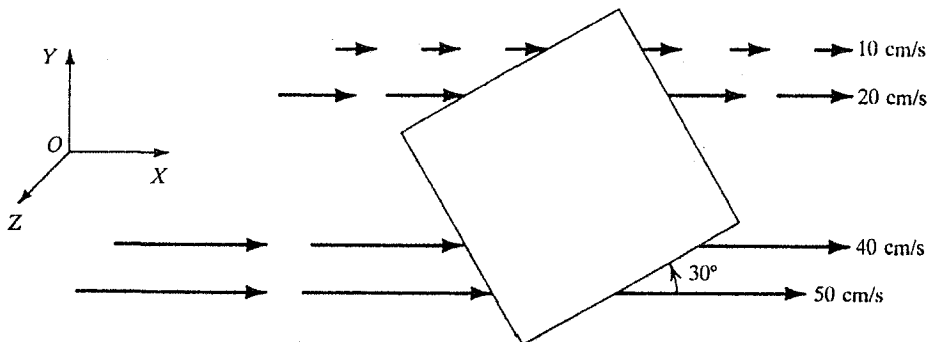
۳۷-۵ مسأله (۵-۳۶) را برای موردی که سرعتها (برحسب cm/s) در نقاط A ، B ، C ، و D عبارتند از

$$v_A = 10\hat{i} + 5\hat{j}, \quad v_B = 5\hat{i} + 10\hat{j}$$

$$v_C = 4\hat{i} + 10\hat{j}, \quad v_D = 10\hat{i} + 5\hat{j}$$

محاسبه کنید .

۳۸-۵ با استفاده از قضیه استوکس، مقدار متوسط کرل یک سیال را برای یک مربع به ضلع 10 cm ، آن طور که در شکل (مسأله ۵-۳۸) نشان داده شده است، محاسبه کنید .



شکل (مسأله ۵-۳۸)

۳۹-۵ رابطه $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ را از ملاحظات هندسی اثبات کنید .

۴۰-۵ صفحه ای که از محورهای XY تشکیل شده است به اندازه یک زاویه 30° حول محور Z چرخیده است . ماتریس این چرخش را پیدا کنید .

۴۱-۵ مکعبی به اندازه 60° حول محور Z می چرخد . ماتریس چرخش را برای تبدیل مختصه ای پیدا کنید .

- ۴۲-۵ λ را ماتریس تبدیل دوبعدی در نظر بگیریم . با بسط مستقیم نشان دهید که $|\lambda|^2 = 1$.
- ۴۳-۵ ماتریس تبدیلی را که باعث چرخش دستگاه مختصات دکارتی XYZ به اندازه 120° حول محور Z می شود پیدا کنید .
- ۴۴-۵ ماتریس تبدیلی را که دستگاه مختصات دکارتی XYZ را به اندازه 120° محوری که با سه محور مختصات دکارتی اصلی زاویه های برابر می سازد، می چرخاند ، پیدا کنید .

منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر

- ARFKEN, G., *Mathematical Methods for Physicists*. New York: Academic Press, Inc., 1968.
- ARTHUR, W., and FENSTER, S. K., *Mechanics*, Chapter 1. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1969.
- BECKER, R. A., *Introduction to Theoretical Mechanics*, Chapter 1. New York: McGraw-Hill Book Co., 1954.
- DAVIS, A. DOUGLAS, *Classical Mechanics*, Chapter 4. New York: Academic Press, Inc., 1986.
- DAVIS, H. F., *Introduction to Vector Analysis*. Needham Heights, Mass.: Allyn & Bacon, 1961.
- EISENMAN, R. L., *Matrix Vector Analysis*. New York: McGraw-Hill Book Co., 1963.
- FOWLES, G. R., *Analytical Mechanics*, Chapters 1 and 2. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1962.
- HAUSER, W., *Introduction to the Principles of Mechanics*, Chapter 1. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1965.
- KITTEL, C., KNIGHT, W. D., and RUDERMAN, M. A., *Mechanics*, Berkeley Physics Course, Volume 1, Chapter 2. New York: McGraw-Hill Book Co., 1965.
- KLEPPNER, D., and KOLENKOW, R. J., *An Introduction to Mechanics*, Chapters 1 and 5. New York: McGraw-Hill Book Co., 1973.
- LINDGREN, B. W., *Vector Calculus*. New York: Macmillan, Inc., 1964.
- MARION, J. B., *Classical Dynamics*, 2nd ed., Chapter 1. New York: Academic Press, Inc., 1970.
- MARION, J. B., *Principles of Vector Analysis*. New York: Academic Press, Inc., 1965.
- ROSSBERG, K., *Analytical Mechanics*, Chapter 1. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1983.
- SCHEY, H. M., *Div, Grad, Curl and All That*. New York: W. W. Norton & Company, 1973.
- SYMON, K. R., *Mechanics*, 3rd ed., Chapter 3. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1971.
- TAYLOR, E. F., *Introductory Mechanics*, Chapter 4. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1963.
- WYLIE, C. R. JR., *Advanced Engineering Mathematics*. New York: McGraw-Hill Book Co., 1960.

حرکت در دو و سه بُعد

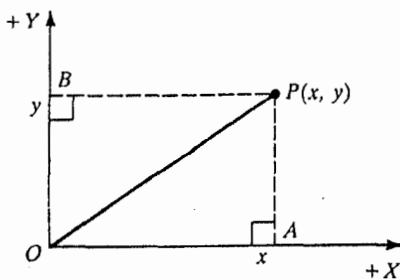
۱-۶ دستگاههای مختصات مختلف

برای توصیف مکان و حرکت یک جسم در فضا به یک دستگاه مختصات نیاز است . دستگاههای مختصاتی که عموماً مورد استفاده قرار می گیرند عبارتند از مختصات دکارتی ، مختصات قطبی صفحه ای ، مختصات استوانه ای ، و مختصات قطبی کروی .

مختصات دکارتی

برای شروع ، یک دستگاه مختصات دکارتی دوبُعدی انتخاب می کنیم . این دستگاه عبارت است از دو محور مختصات عمود بر هم که ، همان طور که در شکل (۱-۶) نشان داده شده است ، در مبدأ O یکدیگر را قطع می کنند . محورهای X و Y در صفحه کاغذ هستند و با یکدیگر زاویه 90° می سازند . مکان نقطه P به وسیله مختصات (x, y) توصیف می شود ، که با رسم عمودهایی (یا تصویرهایی) از P به محورهای X و Y ، آن طور که نشان داده شده است ، بطوری که $OA = x$ و $OB = y$ ، به دست می آیند . بنابراین می توانیم بنویسیم

$$OP^2 = OA^2 + OB^2 = x^2 + y^2 \quad (1-6)$$



شکل (۱-۶) : مختصات دکارتی یک نقطه P در دو بُعد

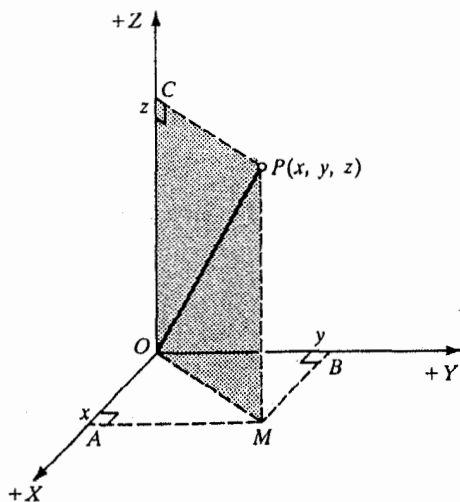
شکل (۲-۶) مجموعه‌ای از محورهای مختصات دکارتی سه بُعدی را نشان می‌دهد. باز محوره‌های X و Y در یک صفحه و عمود بر یکدیگرند و محور Z عمود بر این صفحه است. یک بار دیگر مکان نقطه P با مختصات (x, y, z) توصیف می‌شود. از P عمود PC را به محور Z وارد می‌کنیم بطوری که $OC = Z$ ، و عمود PM را به صفحه XY وارد می‌کنیم. از M به محوره‌های X و Y عمود می‌کنیم، بطوری که $OA = x$ و $OB = y$. بنابراین

$$\begin{aligned} OP^2 &= OM^2 + OC^2 \\ &= (OA^2 + OB^2) + OC^2 \end{aligned}$$

$$OP^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

یا

(۲-۶)



شکل (۲-۶) : مختصات دکارتی یک نقطه P در سه بُعد

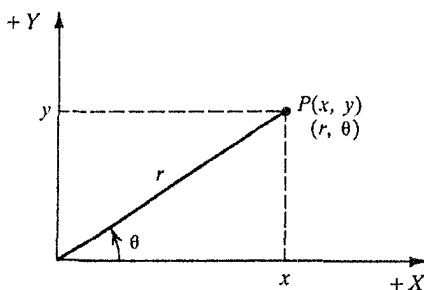
سه محور متقابلاً عمود بر همی که در شکل (۶-۲) نشان داده شده اند یک سیستم راستگرد تشکیل می دهند. یعنی، اگر دست راست خود را در امتداد محور $+X$ دراز کنید و انگشتان خود را به طرف محور $+Y$ از طریق زاویه کوچکتر بچرخانید، انگشت شست جهت محور $+Z$ را نشان می دهد.

مختصات قطبی صفحه ای

دستگاه مختصات دکارتی برای توصیف حرکت جسمی که روی یک خط مستقیم حرکت می کند کاملاً مفید است. چنین مختصاتی وقتی حرکت خمیده باشد، مانند حرکت دایره ای، همیشه مفید نیستند. برای چنین حرکتی، مختصات مناسب دیگری به کار می رود. انتخاب مناسب دستگاه مختصات حل مسأله را خیلی ساده تر می کند. به عنوان مثال، حرکت دایره ای در مختصات قطبی صفحه ای به بهترین وجه توصیف می شود.

به شکل (۶-۳) باز گردیم. مختصات دکارتی نقطه P در صفحه XY عبارتند از (x, y) . نقطه P در فاصله r از مبدأ قرار دارد، و خط OP با محور X زاویه θ می سازد. مکان نقطه P را همچنین می توان توسط مختصات (r, θ) ، که مختصات قطبی صفحه ای نامیده می شوند، توصیف کرد. از شکل (۶-۳) دیده می شود که رابطه بین (r, θ) عبارتند از

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (۶-۳)$$



شکل (۶-۳): مختصات قطبی صفحه ای (r, θ) ی یک نقطه P در دو بُعد

می توان r و θ را با روش ساده ای بر حسب x و y بیان کرد. با مربع کردن و جمع کردن

خواهیم داشت

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2$$

همچنین از معادله (۳-۶) نتیجه می گیریم

$$\frac{y}{x} = \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \tan \theta$$

یعنی

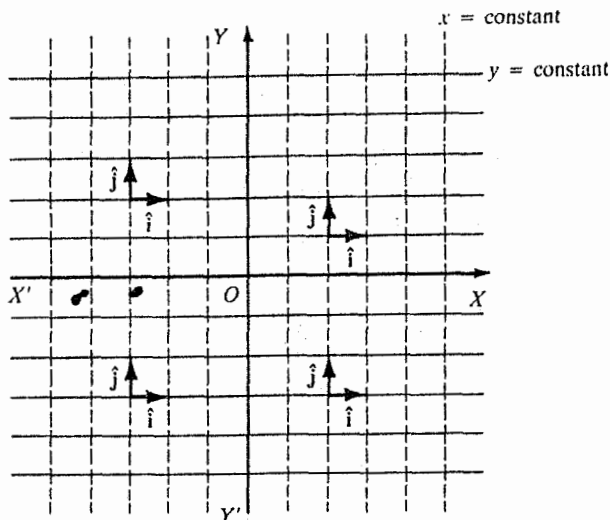
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{و} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (۴-۶)$$

بنابراین ، در یک دستگاه مختصات دو بُعدی ، (x, y) یا (r, θ) مکان یک نقطه در یک صفحه را بطور کامل مشخص می کنند . r می تواند هر مقداری بین 0 و ∞ ، و θ می تواند هر مقداری بین 0 و 2π را ، با افزایش در جهت پاد ساعتگرد ، اختیار کند .

شباهتها و اختلافات بیشتر بین مختصات دکارتی و قطبی در شکلهای (۴-۶) و (۵-۶) نمایش داده شده اند . شکل (۴-۶) نمودارهای x ثابت و y ثابت را نشان می دهد . در حالی که شکل (۵-۶) نمودارهای r ثابت و θ ثابت را نشان می دهد . در شکل (۴-۶) نمودارهای x ثابت خطوط مستقیم هستند که موازی با محور Y هستند ، در حالی که نمودارهای y ثابت خطوط مستقیم موازی با محور X هستند . این دو دسته خطوط ، همان طور که نشان داده شده است ، بر یکدیگر عمودند . در شکل (۵-۶) نمودارهای θ ثابت خطوط مستقیم هستند که از مبدأ O بطور شعاعی به طرف بیرون امتداد می یابند ، در حالی که نمودارهای r ثابت دایره ای به مرکز مبدأ هستند . خطوط θ ثابت و r ثابت نیز هر جا یکدیگر را قطع کنند بر یکدیگر عمودند .

مختصات استوانه ای

نقطه P به فاصله r از مبدأ O را در نظر بگیریم . نقطه P می تواند با به کارگیری یک مجموعه از مختصات دکارتی (x, y, z) یا مختصات استوانه ای (ρ, ϕ, z) ، آن طور که در شکل (۶-۶) نشان داده شده است و بعداً توضیح داده خواهد شد ، یا به وسیله مختصات قطبی کروی (r, θ, ϕ) ، که بعداً مورد بحث قرار خواهد گرفت ، مشخص شود .



مختصات دکارتی :

----- برای هر خط y ثابت است و x تغییر می کند

----- برای هر خط x ثابت است و y تغییر می کند

شکل (۴-۶) : نمودارهای x ثابت و y ثابت . برای هر خط پیوسته ، y ثابت است و x

تغییر می کند . برای هر خط بریده بریده ، x ثابت است و y تغییر می کند

مختصات استوانه ای (ρ, ϕ, z) در شکل (۶-۶) نشان داده شده اند و توسط معادلات زیر

به (x, y, z) مربوط می شوند

$$x = \rho \cos \phi \quad (۵-۶ \text{ الف})$$

$$y = \rho \sin \phi \quad (۵-۶ \text{ ب})$$

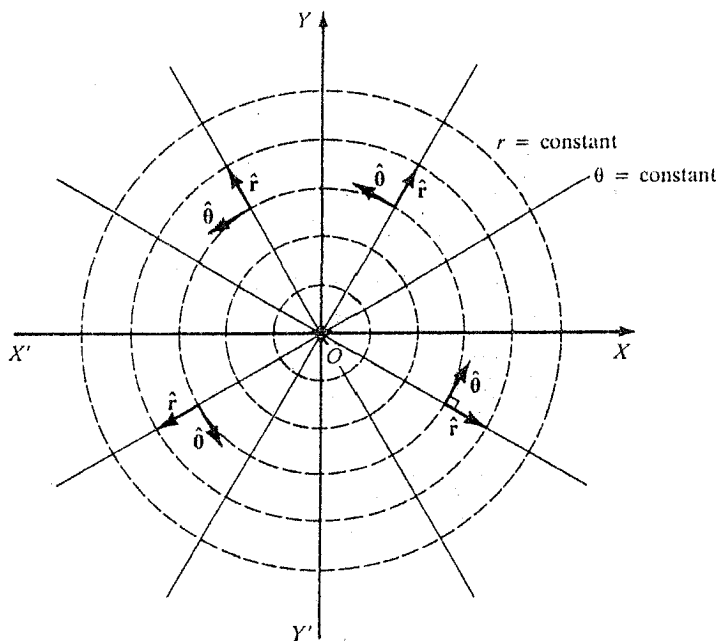
$$z = z \quad (۵-۶ \text{ پ})$$

روابط وارون می توانند از معادلات (۵-۶ الف) و (۵-۶ ب) با روشی که برای مختصات قطبی صفحه ای به کار گرفته شد به دست آیند . یعنی ،

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (۶-۶ \text{ الف})$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (۶-۶ \text{ ب})$$

$$z = z \quad (۶-۶ \text{ پ})$$



مختصات قطبی صفحه ای :

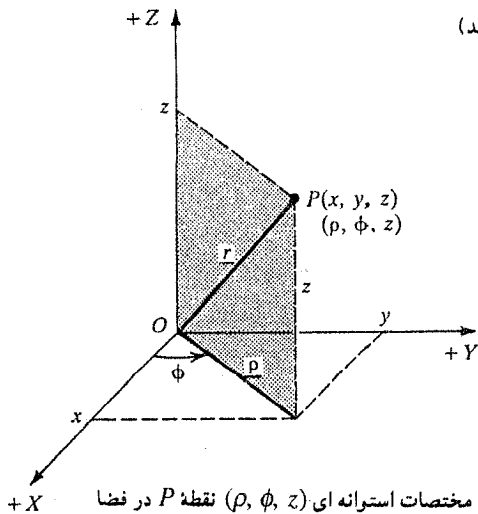
———— برای هر خط θ ثابت است و r تغییر می کند

----- برای هر خط r ثابت است و θ تغییر می کند

شکل (۶-۵) : نمودارهای r ثابت و θ ی ثابت . برای هر خط پیوسته ، θ ثابت است و r

تغییر می کند ؛ برای دایره خطچین r ثابت است و θ تغییر می کند . $(\mathbf{r}$ و θ بردارهای یکه‌ای

هستند که به جای \mathbf{i} و \mathbf{j} نشسته‌اند)



شکل (۶-۶) : مختصات استوانه ای (ρ, ϕ, z) نقطه P در فضا

توجه کنیم که در مختصات استوانه‌ای ρ به جای r و ϕ به جای θ ی مختصات قطبی صفحه‌ای نشسته‌اند .

مختصات قطبی کروی

دوباره نقطه P را در فضا در فاصله r از مبدأ O ، آن طور که در شکل (۷-۶) نشان داده شده است ، در نظر بگیریم . مختصات دکارتی این نقطه (x, y, z) و مختصات کروی آن (r, θ, ϕ) است . برای پیدا کردن رابطه بین این دو دسته مختصات ، نخست $OP = r$ را به دو مؤلفه PM و OM تجزیه می‌کنیم ، که در آن

$$OC = PM = OP \cos \theta \quad \text{یا} \quad z = r \cos \theta$$

$$OM = PC = OP \sin \theta \quad \text{یا} \quad OM = r \sin \theta$$

سپس OM را به دو مؤلفه OA و OB تجزیه می‌کنیم ، بطوری که

$$OA = OM \cos \phi \quad \text{یا} \quad x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$OB = OM \sin \phi \quad \text{یا} \quad y = r \sin \theta \sin \phi$$

بدین ترتیب روابط زیر را داریم

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad (۷-۶ \text{ الف})$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \quad (۷-۶ \text{ ب})$$

$$z = r \cos \theta \quad (۷-۶ \text{ پ})$$

رابطه‌های وارون ، یعنی r, θ, ϕ بر حسب x, y, z را می‌توانیم از شکل (۷-۶) به روش زیر به دست آوریم

$$\begin{aligned} r = OP &= \sqrt{OM^2 + OC^2} = \sqrt{(OA^2 + OB^2) + OC^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

$$\tan \theta = \frac{PC}{OC} = \frac{OM}{OC} = \frac{\sqrt{OA^2 + OB^2}}{OC} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

$$\tan \phi = \frac{OB}{OA} = \frac{y}{x}$$

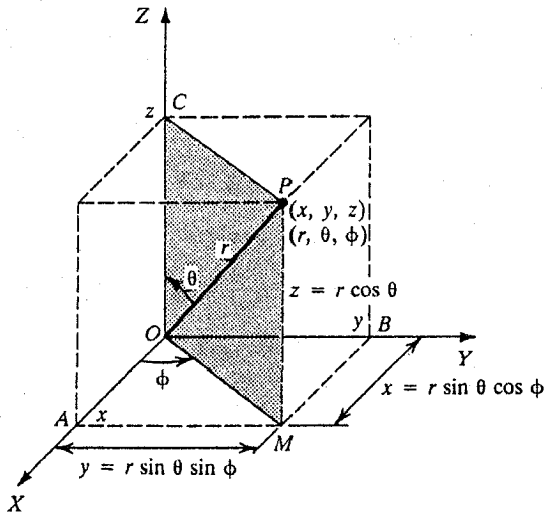
یعنی داریم

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (۸-۶ \text{ الف})$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \quad (۸-۶ \text{ ب})$$

$$\tan \phi = \frac{y}{x} \quad (۸-۶ \text{ پ})$$

این مختصات کروی در بحث حرکت در سه بُعد بسیار مفید خواهند بود .



شکل (۷-۶) : مختصات قطبی کروی (r, θ, ϕ) ی یک نقطه P در فضا

۲-۶ سینماتیک در دستگاههای مختصات مختلف

اکنون توجه خود را به توصیف حرکت یک ذره ، بدون توجه به نیروهایی که چنین حرکتی را ایجاد کرده اند ، معطوف می کنیم . به این ترتیب مکان ، سرعت ، و شتاب ذره را در دو و سه بُعد توصیف می کنیم . دستگاههای مختصات مختلفی که برای توصیف دقیق حرکت به کار می بریم عبارتند از مختصات قطبی صفحه ای ، مختصات استوانه ای ، و مختصات کروی .

مختصات دکارتی

مکان یک ذره P در صفحه XY را می توان به وسیله مختصات (x, y) مشخص کرد ، به عبارتی نقطه P می تواند به وسیله یک بردار مکانی $\mathbf{r} = (x, y)$ ، که در آن r فاصله از نقطه

معینی به نام مبدأ است، مشخص شود. حرکت نقطه P در صفحه XY می تواند با توصیف y به صورت تابعی از x ، یا برعکس، مشخص شود، یعنی

$$y = y(x), \quad x = x(y) \quad (۹-۶)$$

یا باز هم بهتر است که یک رابطه تابعی بین x و y به صورت

$$f(x, y) = 0 \quad (۱۰-۶)$$

تعیین کنیم، به عنوان مثال ذره ای که روی یک مسیر دایره ای حرکت می کند می تواند با

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (۱۱-۶)$$

توصیف شود که در آن a شعاع دایره است.

یک روش بسیار مناسبتر برای نمایش دادن مسیر یک ذره، توصیف آن برحسب یک پارامتر s است، مثلاً

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad (۶-۱۲)$$

یا

$$r = r(s) \quad (۶-۱۳)$$

در چنین وضعیتی، ذره ای که روی یک دایره حرکت می کند به وسیله

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta \quad (۱۴-۶)$$

توصیف خواهد شد، که در این مورد θ پارامتر است.

بطور کلی، اگر ذره ای در صفحه XY حرکت کند، حرکت آن به وسیله

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (۱۵-۶ \text{ الف})$$

یا

$$r = r(t) \quad (۱۵-۶ \text{ ب})$$

توصیف می شود که t در این مورد پارامتر است. می توانیم بردار مکانی r را برحسب بردارهای

یکه به صورت زیر بنویسیم

$$r = \hat{i}x + \hat{j}y$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \hat{i} \frac{dx}{dt} + \hat{j} \frac{dy}{dt} = \hat{i}v_x + \hat{j}v_y \quad (۱۷-۶)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \hat{i} \frac{d^2x}{dt^2} + \hat{j} \frac{d^2y}{dt^2} = \hat{i}a_x + \hat{j}a_y \quad (۱۸-۶)$$

حرکت سه بُعدی به وسیله روابط زیر نمایش داده می شود

$$\mathbf{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z \quad (۱۹-۶)$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \hat{i} \frac{dx}{dt} + \hat{j} \frac{dy}{dt} + \hat{k} \frac{dz}{dt} = \hat{i}v_x + \hat{j}v_y + \hat{k}v_z \quad (۲۰-۶)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \hat{i} \frac{d^2x}{dt^2} + \hat{j} \frac{d^2y}{dt^2} + \hat{k} \frac{d^2z}{dt^2} = \hat{i}a_x + \hat{j}a_y + \hat{k}a_z \quad (۲۱-۶)$$

مختصات قطبی صفحه ای

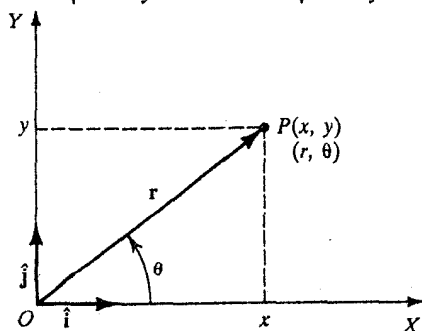
در موارد زیادی مناسبتر است که برای توصیف حرکت یک ذره از مختصات قطبی صفحه ای (r, θ) به جای مختصات دکارتی (x, y) ، استفاده کنیم. رابطه بین این دو مجموعه مختصات، شکل (۸-۶)، عبارتند از

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (۲۲-۶)$$

و روابط وارون عبارتند از

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad (۲۳-۶ \text{ الف})$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \quad (۲۳-۶ \text{ ب})$$



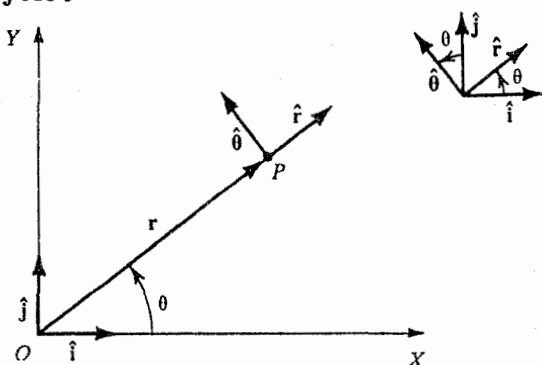
شکل (۸-۶): مختصات دکارتی (x, y) و مختصات قطبی صفحه ای (r, θ) ی

یک نقطه P . بردارهای \hat{i} و \hat{j} نیز نشان داده شده اند

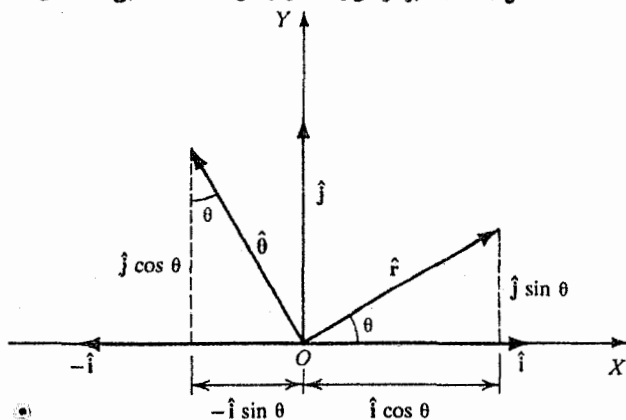
فاصله r از مبدأ، و زاویه قطبی θ از محور X در جهت پاد ساعتگرد اندازه گیری می شوند (شکل ۶-۸). بردارهای یکه \hat{i} و \hat{j} در مختصات دکارتی نیز نشان داده شده اند. اکنون دو بردار یکه در مختصات قطبی تعریف می کنیم که بر یکدیگر عمودند. این دو بردار یکه \hat{F} و $\hat{\theta}$ هستند، همان طور که در شکل (۶-۹) دیده می شود، در جهت افزایش r و θ هستند. بنابراین \hat{F} از نقطه P به طرف افزایش فاصله شعاعی r ، و $\hat{\theta}$ در جهتی که P ، اگر θ افزایش می یافت حرکت می کرد، قرار دارد. بردارهای یکه \hat{F} و $\hat{\theta}$ دستگاه مختصات جدیدی به نام مختصات قطبی صفحه ای، یا بطور ساده مختصات قطبی تشکیل می دهند. همان طور که در شکلهای (۶-۹) و (۶-۱۰) نشان داده شده است، بردارهای یکه \hat{F} و $\hat{\theta}$ توسط روابط زیر به هم مربوط می شوند

$$\hat{F} = \hat{i} \cos \theta + \hat{j} \sin \theta \quad (۶-۲۴)$$

$$\hat{\theta} = -\hat{i} \sin \theta + \hat{j} \cos \theta \quad (۶-۲۵)$$



شکل (۶-۹): بردارهای یکه \hat{F} و $\hat{\theta}$ در مختصات قطبی صفحه ای



شکل (۶-۱۰): رابطه بین بردارهای یکه $(\hat{F}, \hat{\theta})$ و (\hat{i}, \hat{j})

اکنون اگر از این دو رابطه نسبت به θ مشتق بگیریم خواهیم داشت

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = -\hat{i} \sin \theta + \hat{j} \cos \theta = \hat{\theta}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{i} \cos \theta - \hat{j} \sin \theta = -\hat{r}$$

بدین ترتیب داریم

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta} \quad \text{و} \quad \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r} \quad (۶-۲۶)$$

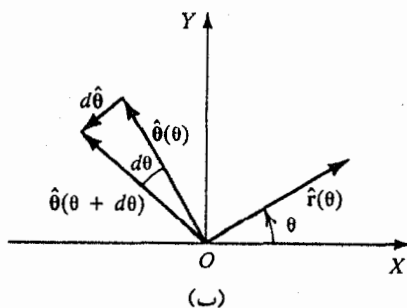
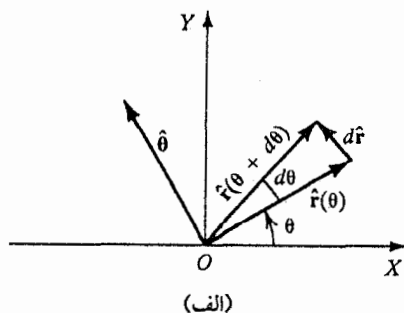
این نتایج می توانند مستقیماً با مراجعه به شکل‌های (۶-۱۱ الف) و (۶-۱۱ ب) به دست آیند. این شکل‌ها موقعیتهای \hat{r} و $\hat{\theta}$ را برای یک زاویه بخصوص $\theta + d\theta$ نشان می دهند. وقتی زاویه θ به اندازه $d\theta$ افزایش پیدا می کند برادر یک شعاعی از $\hat{r}(\theta)$ به اندازه $d\hat{r}$ تغییر کرده و به $\hat{r}(\theta + d\theta)$ می رسد. همچنین بردار یک زاویه ای $\hat{\theta}(\theta)$ به اندازه $d\hat{\theta}$ تغییر می کند و به $\hat{\theta}(\theta + d\theta)$ می رسد. توجه کنیم که $d\hat{r}$ در جهت $\hat{\theta}$ است، در حالی که $d\hat{\theta}$ در جهت مخالف \hat{r} ، یعنی در جهت $-\hat{r}$ است. از شکل (۶-۱۱ الف) و (۶-۱۱ ب)، با توجه به این که $|\hat{r}| = |\hat{\theta}| = 1$ می توان نوشت

$$\frac{d\hat{r}}{|\hat{r}|} = d\theta \hat{\theta} \quad \text{یا} \quad \frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta} |\hat{r}| = \hat{\theta}$$

و

$$\frac{d\hat{\theta}}{|\hat{\theta}|} = d\theta(-\hat{r}) \quad \text{یا} \quad \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r} |\hat{\theta}| = -\hat{r}$$

که همان نتایج به دست آمده در معادله (۶-۲۶) است.



شکل (۶-۱۱): برای محاسبه تغییرات (الف) \hat{r} با θ و (ب) $\hat{\theta}$ با θ

بردار مکانی \mathbf{r} بر حسب مختصات قطبی با رابطه زیر داده می شود

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}} = r\hat{\mathbf{r}}(\theta) \quad (۲۷-۶)$$

توجه کنیم که $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}(\theta)$ ، در نتیجه عبارت (۲۷-۶) θ را بطور صریح در بر ندارد . حرکت ذره در مختصات قطبی با $r(t)$ و $\theta(t)$ مشخص می شود . بدین ترتیب سرعت عبارت است از

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{\mathbf{r}}) = \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$$

چون $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}(\theta)$ ، با استفاده از معادله (۲۶-۶) ، باید بنویسیم

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \hat{\boldsymbol{\theta}}\dot{\theta}$$

یعنی

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (۲۸-۶)$$

می توانیم بنویسیم

$$v_r = \dot{r} \quad \text{و} \quad v_\theta = r\dot{\theta} \quad (۲۹-۶)$$

که v_r مؤلفه سرعت در امتداد $\hat{\mathbf{r}}$ است و سرعت شعاعی نامیده می شود ، در حالی که v_θ مؤلفه سرعت در امتداد $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ است و سرعت زاویه ای نامیده می شود

شتاب سیستم عبارت است از

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= \frac{d\dot{r}}{dt}\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} \\ &= \ddot{r}\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}(\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}) + \dot{r}\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot{\theta}(-\hat{\mathbf{r}})\dot{\theta} \end{aligned}$$

یعنی ،

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (۳۰-۶)$$

به این ترتیب دو مؤلفه شتاب \mathbf{a} عبارتند از شتاب شعاعی a_r و شتاب زاویه ای a_θ که با روابط زیر داده می شوند

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad (۳۱-۶)$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \quad (۳۲-۶)$$

در این مرحله یادآوری چند نکته ضروری است . جمله

$$r\dot{\theta}^2 = r\left(\frac{v_\theta}{r}\right)^2 = \frac{v_\theta^2}{r} \quad (۳۳-۶)$$

شتاب مرکز گراست که از حرکت در جهت $\hat{\theta}$ ناشی می شود . به علاوه ، اگر r ثابت نگه داشته شود ، $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ ، مسیر یک دایره با شتاب شعاعی بزرگتر مرکز گرای $a_r = -r\dot{\theta}^2 = \frac{-v_\theta^2}{r}$ است . جمله $2\dot{r}\dot{\theta}$ در a_θ شتاب کوریولیس است و ما بحث آن را به فصل ۱۱ موکول می کنیم .

مختصات استوانه ای

با اضافه کردن یک مؤلفه Z به مختصات قطبی صفحه ای ، مختصات استوانه ای را برای توصیف حرکت در سه بُعد به دست می آوریم . بردار یکه $\hat{\rho}$ ، $\hat{\phi}$ ، و \hat{z} در جهت های افزایش ρ ، ϕ ، z ، در شکل (۱۲-۶) نشان داده شده اند . توجه کنیم که \hat{z} ثابت است ، در حالی که بردارهای یکه $\hat{\rho}$ و $\hat{\phi}$ ، همانند مورد مختصات قطبی صفحه ای ، تابعی از ϕ هستند .

روابط بین مختصات دکارتی (x, y, z) و مختصات استوانه ای (ρ, ϕ, z) (رک شکل

(۱۲-۶)) عبارتند از

$$x = \rho \cos \phi \quad (۳۴-۶ \text{ الف})$$

$$y = \rho \sin \phi \quad (۳۴-۶ \text{ ب})$$

$$z = z \quad (۳۴-۶ \text{ پ})$$

و روابط وارون عبارتند از

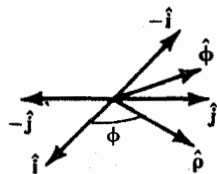
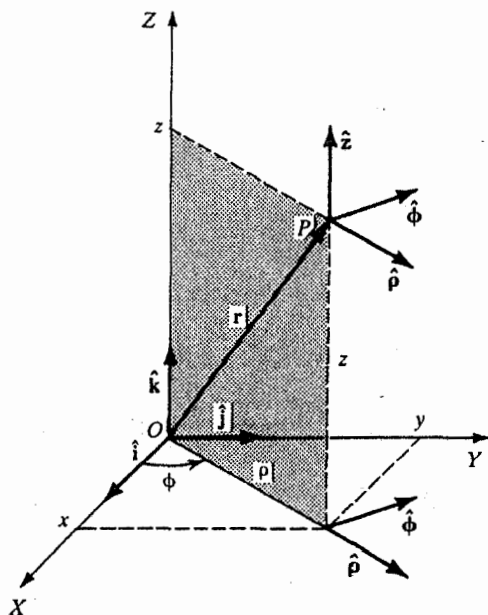
$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad (۳۵-۶ \text{ الف})$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \sin^{-1} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (۳۵-۶ \text{ ب})$$

با نشانیدن (ρ, ϕ) به جای (r, θ) و با مؤلفه اضافی Z می توانیم بنویسیم

$$\hat{\rho} = \hat{i} \cos \phi + \hat{j} \sin \phi \quad (۳۶-۶ \text{ الف})$$

$$\hat{\phi} = -\hat{i} \sin \phi + \hat{j} \cos \phi \quad (۶-۳۶)$$



شکل (۶-۱۲) : مختصات استوانه‌ای (ρ, ϕ, z) و بردارهای یک‌متناظر $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z})$

و مانند قبل ،

$$\frac{d\hat{\rho}}{d\phi} = \hat{\phi} \quad (۶-۳۷)$$

$$\frac{d\hat{\phi}}{d\phi} = -\hat{\rho} \quad (۶-۳۸)$$

بردار مکانی \mathbf{r} که مکان نقطه P را در مختصات استوانه‌ای توصیف می‌کند ، و در شکل

(۶-۱۲) نشان داده شده است ، عبارت است از

$$\mathbf{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z} \quad (۶-۳۹)$$

که ρ فاصله P از محور z ، ϕ زاویه چرخش آن از محور X ، و Z ارتفاع آن در بالای صفحه XY است . بنابراین می‌توانیم بردار سرعت را ، با توجه به این که $\hat{\rho} = \hat{\rho}(\phi)$ ، به صورت زیر بنویسیم

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (\rho \hat{\rho} + z \hat{z}) \\ &= \frac{d\rho}{dt} \hat{\rho} + \rho \frac{d\hat{\rho}}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} + \frac{dz}{dt} \hat{z} + z \frac{d\hat{z}}{dt} \\ &= \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho (\dot{\phi}) \hat{\phi} + \dot{z} \hat{z} + z(0) \end{aligned}$$

که در آن $\frac{d\hat{z}}{dt} = 0$ ، در نتیجه

$$\mathbf{v} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi} + \dot{z} \hat{z} \quad (۴۰-۶)$$

به همین نحو

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi} + \dot{z} \hat{z})$$

را می‌توانیم ، با استفاده از معادلات (۳۷-۶) و (۳۸-۶) ، بنویسیم

$$\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{\rho} + (\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi}) \hat{\phi} + \ddot{z} \hat{z} \quad (۴۱-۶)$$

اکنون هر بردار \mathbf{A} را می‌توانیم برحسب سه مؤلفه A_ρ ، A_ϕ ، و A_z در جهت‌های سه بردار
یکه عمود بر هم $\hat{\rho}$ ، $\hat{\phi}$ ، و \hat{z} بیان کنیم . یعنی

$$\mathbf{A} = A_\rho \hat{\rho} + A_\phi \hat{\phi} + A_z \hat{z} \quad (۴۲-۶)$$

که مؤلفه‌ها نه فقط به خود بردار ، بلکه به محل آن در فضا نیز بستگی دارند . علت آن این است
که $\hat{\rho}$ و $\hat{\phi}$ به ϕ بستگی دارند . بدین ترتیب اگر \mathbf{A} تابعی از یک پارامتر ، مثلاً t ، باشد ،
در محاسبه $d\mathbf{A}/dt$ باید تغییرات $\hat{\rho}$ و $\hat{\phi}$ را در مدنظر داشته باشیم . با استفاده از معادله (۴۲-۶)
داریم

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_\rho}{dt} \hat{\rho} + A_\rho \frac{d\hat{\rho}}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} + \frac{dA_\phi}{dt} \hat{\phi} + A_\phi \frac{d\hat{\phi}}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} + \frac{dA_z}{dt} \hat{z} + A_z \frac{d\hat{z}}{dt}$$

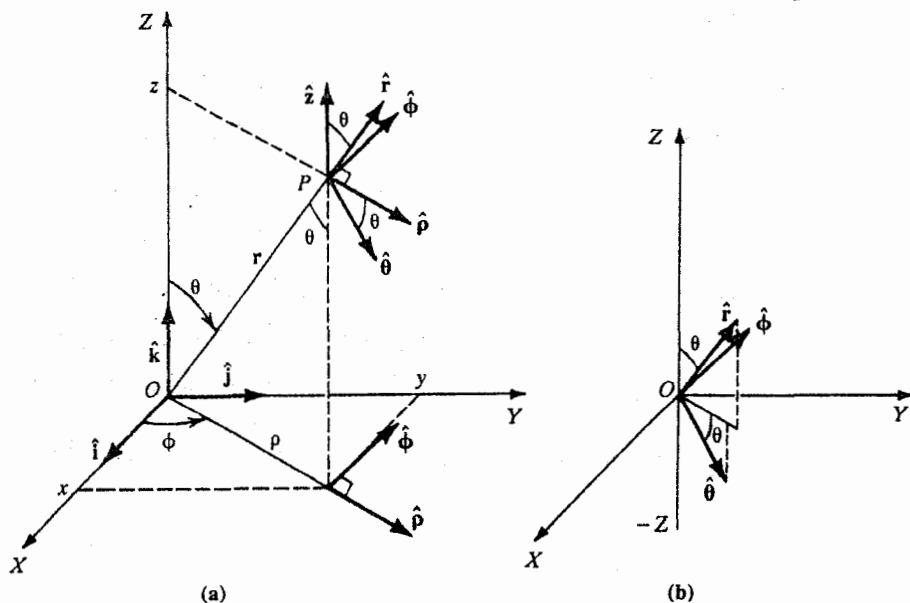
چون $d\hat{z}/dt = 0$ ، $d\hat{\rho}/d\phi = \hat{\phi}$ ، و $d\hat{\phi}/d\phi = -\hat{\rho}$ ، بعد از مرتب‌سازی ، خواهیم داشت

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{dA_\rho}{dt} - A_\phi \dot{\phi} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{dA_\phi}{dt} + A_\rho \dot{\phi} \right) \hat{\phi} + \frac{dA_z}{dt} \hat{z} \quad (۴۳-۶)$$

مختصات قطبی کروی

مختصات قطبی کروی یا مختصات کروی پرکاربردترین مختصات در وضعیت‌های با

تقارن کروی، به عنوان مثال، مورد نیروهای کولنی در آنها و مورد نیروهای گرانشی است. نقطه P در فضا توسط مختصات (r, θ, ϕ) ، مطابق شکل (۶-۱۳)، مشخص می‌شود. r فاصله شعاعی از مبدأ O است، ϕ زاویه سمتی است که صفحه‌ای را که زاویه چرخش آن از محور X اندازه‌گیری می‌شود مشخص می‌کند، و زاویه θ زاویه قطبی است که از محور Z اندازه‌گیری می‌شود. زاویه قطبی θ می‌تواند هر مقداری بین 0 و π و زاویه ϕ می‌تواند هر مقداری بین 0 و 2π را بگیرد.



شکل (۶-۱۳): (الف) مختصات قطبی کروی (r, θ, ϕ) و بردارهای یک‌به‌یک متناظر $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$. (ب) جهت‌گیری بردارهای یک‌به‌یک \hat{r} , $\hat{\theta}$ و نسبت به دستگاه مختصات XYZ زاویه قطبی θ

مختصات دکارتی (x, y, z) با روابط زیر (رک شکل ۶-۱۳) به مختصات قطبی کروی مربوط می‌شوند

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad (۶-۴۴ \text{ الف})$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \quad (۶-۴۴ \text{ ب})$$

$$z = r \cos \theta \quad (\text{پ } ۴۴-۶)$$

توجه کنیم که $r \sin \theta = \rho$. روابط وارون عبارتند از

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad (\text{الف } ۴۵-۶)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \quad (\text{ب } ۴۵-۶)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (\text{پ } ۴۵-۶)$$

سه بردار یکه متقابلاً عمود بر هم مورد استفاده در مختصات کروی، همان طور که در شکل‌های (۶-۱۳ الف) و (۶-۱۳ ب) نشان داده شده‌اند، عبارتند از \hat{r} ، $\hat{\theta}$ ، $\hat{\phi}$. همچنین بردارهای یکه \hat{i} ، \hat{j} ، \hat{k} ، \hat{z} ($=\hat{k}$)، و $\hat{\rho}$ نیز نشان داده شده‌اند. بردار یکه $\hat{\phi}$ در صفحه XY قرار دارد، در حالی که \hat{r} ، $\hat{\theta}$ ، $\hat{\rho}$ ، و \hat{z} همه در یک صفحه قائم قرار دارند. برای r و θ ی ثابت، تغییرات ϕ متناظر با چرخش حول محور Z است، در حالی که برای r و ϕ ی ثابت، تغییرات θ در صفحه شامل \hat{r} ، $\hat{\theta}$ ، $\hat{\rho}$ ، و \hat{z} است. از شکل (۶-۱۳) می‌توانیم روابط زیر را بین بردارهای یکه بنویسیم

$$\hat{r} = \hat{\rho} \sin \theta + \hat{z} \cos \theta = \hat{i} \sin \theta \cos \phi + \hat{j} \sin \theta \sin \phi + \hat{k} \cos \theta \quad (\text{الف } ۴۶-۶)$$

$$\hat{\theta} = \hat{\rho} \cos \theta - \hat{z} \sin \theta = \hat{i} \cos \theta \cos \phi + \hat{j} \cos \theta \sin \phi - \hat{k} \sin \theta \quad (\text{ب } ۴۶-۶)$$

$$\hat{\phi} = -\hat{i} \sin \phi + \hat{j} \cos \phi \quad (\text{پ } ۴۶-۶)$$

با مشتق‌گیری از این معادلات روابط زیر را به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = \hat{\theta}, \quad \frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} = \hat{\phi} \sin \theta$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} = -\hat{r}, \quad \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \phi} = \hat{\phi} \cos \theta \quad (۴۷-۶)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} = -\hat{\rho} = -\hat{r} \sin \theta - \hat{\theta} \cos \theta$$

این روابط را می‌توان از ملاحظات هندسی، با رسم شکل‌هایی مشابه با شکل‌های مورد مختصات قطبی صفحه‌ای نیز به دست آورد.

در مختصات کروی ، مکان نقطه P در فضا با بردار مکانی \mathbf{r} داده می شود .

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}} = r\hat{\mathbf{r}}(\theta, \phi) \quad (۴۸-۶)$$

اکنون می توانیم با استفاده از روابط گذشته عبارتهایی برای سرعت و شتاب پیدا کنیم .

بدین ترتیب

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt} [r\hat{\mathbf{r}}(\theta, \phi)] \\ &= \frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{r}} + r \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} \end{aligned}$$

با استفاده از معادله (۴۷-۶) داریم

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}(\theta, \phi) &= \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} \\ &= \hat{\boldsymbol{\theta}}\dot{\theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \sin \theta \dot{\phi} \end{aligned}$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + (r\dot{\phi} \sin \theta)\hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (۴۹-۶)$$

به همین روش

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} [\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + (r\dot{\phi} \sin \theta)\hat{\boldsymbol{\phi}}]$$

که پس از ساده سازی نتیجه می دهد

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)\hat{\mathbf{r}} \\ &\quad + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2)\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &\quad + (r \sin \theta \ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta)\hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (۵۰-۶)$$

چون $\hat{\mathbf{r}}$ ، $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ، و $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ یک مجموعه بردارهای یکه متقابلاً عمود بر هم تشکیل می دهند ، می توانیم

هر بردار \mathbf{A} را به شکل مؤلفه ای به صورت

$$\mathbf{A} = A_r \hat{\mathbf{r}} + A_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (۵۱-۶)$$

بنویسیم که مؤلفه ها نه تنها به \mathbf{A} که به محل آن در فضا نیز بستگی دارند . اگر \mathbf{A} تابعی از پارامتر

t ، یعنی تابعی از زمان باشد ، می توانیم بنویسیم

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_r}{dt} \hat{\mathbf{r}} + A_r \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} + \frac{dA_\theta}{dt} \hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\theta \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} + \frac{dA_\phi}{dt} \hat{\boldsymbol{\phi}} + A_\phi \frac{d\hat{\boldsymbol{\phi}}}{dt}$$

مانند قبل ، با استفاده از معادله (۶-۴۷) ، می توانیم بنویسیم

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \dot{\theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \sin \theta \dot{\phi}$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\hat{\mathbf{r}} \dot{\theta}$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\phi}}}{dt} = \frac{d\hat{\boldsymbol{\phi}}}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = -\hat{\boldsymbol{\rho}} \dot{\phi} = (-\hat{\mathbf{r}} \sin \theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} \cos \theta) \dot{\phi}$$

اگر این نتایج را در معادله پیشین ببریم ، به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} = & \left(\frac{dA_r}{dt} - A_\theta \dot{\theta} - A_\phi \sin \theta \dot{\phi} \right) \hat{\mathbf{r}} \\ & + \left(\frac{dA_\theta}{dt} + A_r \dot{\theta} - A_\phi \cos \theta \dot{\phi} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ & + \left(\frac{dA_\phi}{dt} + A_r \sin \theta \dot{\phi} + A_\theta \cos \theta \dot{\phi} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (۶-۵۲)$$

۶-۳ عملگر «دل» در مختصات استوانه ای و کروی

اکنون در وضعیتی هستیم که بتوانیم عملگر گرادینان یا «دل» را در مختصات

استوانه ای و کروی بنویسیم . در مختصات استوانه ای ، یک تابع نرده ای u عبارت است از

$$u = u(\rho, \phi, z) \quad (۶-۵۳)$$

بنابراین ، با توجه به

$$du = \frac{\partial u}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial u}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial u}{\partial z} dz \quad (۶-۵۴)$$

و

$$\mathbf{r} = \rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + z \hat{\mathbf{z}} \quad (۶-۵۵)$$

می توانیم بنویسیم

$$d\mathbf{r} = d\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial \phi} d\phi + dz \hat{\mathbf{z}} \quad (۶-۵۶)$$

با استفاده از روابط

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \phi} = \hat{\phi} \quad \text{و} \quad \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} = -\hat{\rho}$$

به دست می آوریم

$$dr = \hat{\rho} d\rho + \hat{\phi} \rho d\phi + \hat{z} dz \quad (۵۷-۶)$$

گرادیان u را توسط رابطه زیر تعریف می کنیم

$$du = \nabla u \cdot dr = dr \cdot \nabla u \quad (۵۸-۶)$$

برای این که این رابطه به معادله (۵۴-۶) منجر شود باید تعریف کنیم

$$\nabla \equiv \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (۵۹-۶)$$

بدین ترتیب اگر معادلات (۵۹-۶) و (۵۷-۶) را در معادله (۵۸-۶) بپریم ، معادله (۵۴-۶) را

به دست می آوریم ؛ یعنی

$$\begin{aligned} dr \cdot \nabla u &= (\hat{\rho} d\rho + \hat{\phi} \rho d\phi + \hat{z} dz) \cdot \left(\hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) u \\ &= \frac{\partial u}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial u}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial u}{\partial z} dz = du \end{aligned}$$

به همین روش برای مختصات کروی ، و با استفاده از (۴۸-۶) ،

$$u = u(r, \theta, \phi) \quad (۶۰-۶)$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial u}{\partial \phi} d\phi \quad (۶۱-۶)$$

$$dr = \hat{r} dr + \hat{\theta} r d\theta + \hat{\phi} r \sin \theta d\phi \quad (۶۲-۶)$$

و اگر عملگر ∇ را به صورت

$$\nabla \equiv \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (۶۳-۶)$$

تعریف کنیم خواهیم داشت $du = dr \cdot \nabla u$.

۴-۶ تابع انرژی پتانسیل

در بررسی حرکت یک ذره در یک بُعد یک تابع انرژی پتانسیل به وسیله معادله (۲-۷۷)

تعریف کردیم

$$V(x) = \int_x^{x_1} F(x) dx = - \int_{x_1}^x F(x) dx \quad (۶-۶۴)$$

و نیروی متناظر با آن عبارت است از

$$F(x) = - \frac{dV(x)}{dx} \quad (۶-۶۵)$$

اکنون می توانیم این ایده را به حرکت یک ذره در سه بُعد گسترش دهیم

ذره ای در $\mathbf{r}(x, y, z)$ در نظر بگیریم که تحت تأثیر نیروی \mathbf{F} از \mathbf{r}_1 به \mathbf{r}_2 حرکت کند . کار

انجام شده با رابطه زیر داده می شود

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (۶-۶۶)$$

و برای محاسبه این انتگرال ، باید یک مسیر مشخص کنیم . همانند مورد یک بُعدی ، می توانیم

یک تابع انرژی پتانسیل $V(\mathbf{r}) = V(x, y, z)$ ، به صورت کار انجام شده توسط نیرو وقتی که ذره

را از \mathbf{r} به یک نقطه مرجع استاندارد \mathbf{r}_0 می برد ، وارد کنیم . یعنی

$$V(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (۶-۶۷)$$

چون می دانیم که $V(\mathbf{r})$ باید تابعی از فقط مکان باشد ، این تعریف تنها وقتی امکان پذیر است که

انتگرال قبلی مستقل از مسیر انتگرال گیری باشد ، یعنی ، تنها وقتی که $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ یک نیروی پایستار

باشد و در نتیجه کار انجام شده مستقل از مسیر باشد ؛ در چنین صورتی است که تابع انرژی

پتانسیل می تواند وارد شود .

اکنون سعی می کنیم شرایط لازم و کافی برای پایستار بودن $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ، و در نتیجه توجهی

برای وجود یک تابع پتانسیل $V(\mathbf{r})$ ، پیدا کنیم . فرض کنیم کار انجام شده در رفتن از نقطه P

به Q مستقل از مسیر باشد . معنی این مطلب این است که کار انجام شده در یک مسیر بسته (رک

شکل (۶-۱۴)) در رفتن از P به Q و بازگشت به P صفر است . یعنی ،

$$W_{P \rightarrow Q \rightarrow P} = \oint_{\text{closed path}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (۶-۶۸)$$

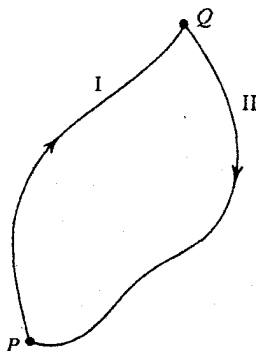
بر طبق قضیه استوکس [معادله (۵-۱۴۱)] این نتیجه را می توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$W_{P \rightarrow Q \rightarrow P} = \oint_{\text{closed path}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\text{surface}} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) dS = 0 \quad (۶-۶۹)$$

این تنها وقتی درست است که خود انتگرالده، $\nabla \times \mathbf{F}$ ، صفر باشد، یعنی

$$\nabla \times \mathbf{F} = \text{curl } \mathbf{F} = 0 \quad (۶-۷۰)$$

این یک شرط لازم و کافی برای این است که نیرو پایستار باشد، و در نتیجه تابع انرژی پتانسیل داده شده به وسیله معادله (۶-۶۷) وجود داشته باشد.



شکل (۶-۱۴): کار انجام شده در یک میدان نیروی پایستار بر روی یک مسیر بسته از

P به Q و بازگشت به P صفر است

می توانیم همین نتیجه را با روشی کمی متفاوت به دست آوریم. تغییرات تابع انرژی پتانسیل V وقتی ذره از \mathbf{r} به $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ حرکت می کند، با منفی کار انجام شده توسط نیروی \mathbf{F} داده می شود. یعنی

$$dV = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (۶-۷۱)$$

اکنون این نتیجه را با تعریف گرادیان، معادله (۵-۱۲۱)، یعنی $du = \text{grad } u \cdot d\mathbf{r}$ ، که بعد از گذاشتن V به جای u می شود

$$dV = \text{grad } V \cdot d\mathbf{r} \quad (۶-۷۲)$$

مقایسه کنیم. مقایسه (۶-۷۱) و (۶-۷۲) نتیجه می دهد

$$\mathbf{F} = -\text{grad } V = -\nabla V \quad (۷۳-۶)$$

که به شکل مؤلفه ای به صورت زیر نوشته می شود

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (۷۴-۶)$$

گرفتن کرول از هر دو طرف معادله (۷۳-۶) می دهد

$$\text{Curl } \mathbf{F} = -\nabla \times \nabla V = -\text{curl } (\text{grad } V)$$

اما $\nabla \times \nabla \equiv 0$ ، یعنی کرول گرادیان یک تابع نرده ای (V در این مورد) همیشه صفر است . در نتیجه داریم

$$\text{Curl } \mathbf{F} = 0, \quad (۷۵-۶)$$

صفر بودن $\nabla \times \mathbf{F}$ می تواند مستقیماً از معادله (۷۴-۶) حاصل شود . چون ترتیب مشتق گیری برای هر تابع پیوسته اهمیت ندارد ، می توانیم بنویسیم

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial V}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial V}{\partial y} \right) = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad (۷۶-۶)$$

که می تواند به صورت زیر نوشته می شود

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} = (\nabla \times \mathbf{F})_z = 0 \quad (۷۷-۶)$$

این مطلب برای مؤلفه های دیگر نیز صادق است ، در نتیجه ، $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ ، بدین ترتیب معادله (۷۰-۶) بیانگر شرط لازم و کافی برای وجود یک تابع پتانسیل است . یک نیروی \mathbf{F} که برای آن $\text{curl } \mathbf{F}$ صفر باشد نیروی پایستار نامیده می شود .

اکنون می توانیم نشان دهیم که اگر میدان نیرو پایستار باشد وجود تابع پتانسیل به پایستگی انرژی کل منجر می شود . کار انجام شده توسط نیروی \mathbf{F} وقتی از \mathbf{r}_1 تا \mathbf{r}_2 اعمال می شود می تواند به صورت زیر نوشته شود

$$\begin{aligned} W_{1 \rightarrow 2} &= \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_s} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathbf{r}_s}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= V_1(\mathbf{r}) - V_2(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (۷۸-۶)$$

اما کار انجام شده همچنین برابر است با تغییرات انرژی جنبشی :

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = K_2 - K_1 \quad (۷۹-۶)$$

ترکیب معادله های (۷۸-۶) و (۷۹-۶) می دهد

$$K_1 + V_1(\mathbf{r}) = K_2 + V_2(\mathbf{r}) \quad (۸۰-۶)$$

یعنی ، اگر E انرژی کل باشد ، به دست می آوریم

$$K + V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x, y, z) = E \quad (۸۱-۶)$$

که انتگرال انرژی یک حرکت در سه بُعد است .

فرض کنیم $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ باشد و فرض کنیم در هر لحظه t داشته باشیم

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (۸۲-۶)$$

و بتوانیم یک تابع پتانسیل به صورت

$$V(\mathbf{r}, t) = \int_r^{r_s} \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} \quad (۸۳-۶)$$

تعریف کنیم بطوری که

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = -\nabla V(\mathbf{r}, t) \quad (۸۴-۶)$$

اما در چنین مواردی حاصل جمع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل ثابت نیست ؛ در نتیجه $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ یک نیروی پایستار نیست .

اگر \mathbf{F} معلوم باشد و بخواهیم $V(\mathbf{r})$ را محاسبه کنیم ، می توانیم یا از روش مستقیم یا محاسبه انتگرال منحنی الخط

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{r_s}^r \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (۸۵-۶)$$

اقدام کنیم ، یا سه انتگرال معمولی را با شروع از

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

محاسبه کنیم و نتیجه بگیریم

$$V = - \int F_x dx + C_1(y, z) \quad (۸۶-۶)$$

$$V = - \int F_y dy + C_2(x, z)$$

$$V = - \int F_z dz + C_3(x, y)$$

تابع پتانسیل به دست آمده باید با هر سه عبارت داده شده در معادلات (۸۶-۶) همخوانی داشته باشد. این مطلب در مثال زیر اثبات شده است.

مثال (۶-۱): نشان دهید که نیروهای زیرپایستار هستند و پتانسیلهای متناظر را پیدا کنید.

$$\mathbf{F} = ax\hat{i} + by\hat{j} + cz\hat{k} \quad (\text{الف})$$

$$F_x = 3ayz^3 - 20bx^3y^2, F_y = 3axz^3 - 10bx^4y, F_z = 9axz^2y \quad (\text{ب})$$

(الف)

$$\begin{aligned} \text{Curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ax & by & cz \end{vmatrix} \\ &= \hat{i} \left(\frac{\partial(cz)}{\partial y} - \frac{\partial(by)}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial(ax)}{\partial z} - \frac{\partial(cz)}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial(by)}{\partial x} - \frac{\partial(ax)}{\partial y} \right) \\ &= \hat{i}(0-0) + \hat{j}(0-0) + \hat{k}(0-0) = 0 \end{aligned}$$

در نتیجه نیرو پایستار است. پتانسیل متناظر را می توان به صورت زیر محاسبه کرد

$$V_x = \int F_x dx = - \int ax dx = -\frac{a}{2} x^2 + C_1(y, z) \quad (۱)$$

$$V_y = \int F_y dy = - \int by dy = -\frac{b}{2} y^2 + C_2(x, z) \quad (۲)$$

$$V_z = \int F_z dz = - \int cz dz = -\frac{c}{2} z^2 + C_3(x, y) \quad (۳)$$

بنابراین، یک عبارت سازگار برای پتانسیل، از معادله های (۱)، (۲)، (۳) عبارت است از

$$V = -\frac{1}{2}(ax^2 + by^2 + cz^2) + C \quad (۴)$$

که C_1 ، C_2 ، C_3 و C در معادلات بالا ثابتند

(ب)

$$\begin{aligned} \text{Curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{i}} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{j}} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \hat{\mathbf{k}} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \\ &= \hat{\mathbf{i}}(9axz^2 - 9axz^2) + \hat{\mathbf{j}}(9ayz^2 - 9az^2y) \\ &\quad + \hat{\mathbf{k}}(3az^3 - 40bx^3y - 3az^3 + 40bx^3y) \\ &= 0 + 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

در نتیجه این نیرو پایستار است و پتانسیل متناظر به روش زیر محاسبه می شود

$$\begin{aligned} V_x &= \int F_x dx = - \int (3ayz^3 - 20bx^3y^2) dx \\ &= -3axyz^3 + 5bx^4y^2 + C_1(y, z) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} V_y &= \int F_y dy = - \int (3axz^3 - 10bx^4y) dy \\ &= -3axyz^3 + 5bx^4y^2 + C_2(x, z) \end{aligned} \quad (6)$$

$$V_z = \int F_z dz = - \int (9axz^2y) dz = -3axyz^3 + C_3(x, y) \quad (7)$$

بدین ترتیب اگر ثابتها را به صورت

$$C_1 = C_2 = 0, \quad C_3(x, y) = 5bx^4y^2$$

اختیار کنیم داریم $V_x = V_y = V_z$ ؛ در نتیجه برای این نیروی پایستار، پتانسیل عبارت است از

$$V = 5bx^4y^2 - 3axyz^3$$

تمرین (۶-۱): نشان دهید که نیروهای زیر پایستارند و پتانسیلهای متناظر را به دست آورید

$$\mathbf{F} = -yz\hat{\mathbf{i}} - xz\hat{\mathbf{j}} - xy\hat{\mathbf{k}} \quad (\text{الف})$$

$$F_x = -6ayzx, F_y = az(z^2 - 3x^2), F_z = 3ay(z^2 - x^2) \quad (\text{ب})$$

مثال (۶-۲): ذره ای به جرم m در روی یک مسیر نیم دایره ای به شعاع R ، مطابق شکل (مثال ۶-۲)، از A به B حرکت می کند، و به وسیله نیرویی متناسب با فاصله اش از نقطه شروع حرکت، A ، به طرف آن جذب می شود. وقتی به نقطه B می رسد مقدار این نیرو F_0 است. کار انجام شده در مقابل این نیرو را وقتی که ذره در روی این مسیر نیم دایره ای از A به B حرکت می کند، محاسبه کنید.

کار انجام شده عبارت است از

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (1)$$

با

$$\mathbf{F} = kr \quad (2)$$

که k یک ثابت است. اما در B وقتی $r = 2R$ می شود (رک شکل (مثال ۶-۲)) داریم

$$F_B = F_0 = k(2R) \quad \text{یا} \quad k = \frac{F_0}{2R} \quad (3)$$

بنابراین

$$\mathbf{F} = \frac{F_0}{2R} \mathbf{r} \quad (4)$$

برای بیان r بر حسب R و θ از قانون کسینوسها استفاده می کنیم

$$r^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos \theta = 2R^2(1 - \cos \theta)$$

$$F = kr = \frac{F_0}{2R} R \sqrt{2(1 - \cos \theta)}$$

چون $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \theta/2$ ، بنابراین

$$F = F_0 \sin \frac{\theta}{2} \quad (5)$$

از شکل داریم

$$ds = R d\theta \quad (6)$$

بنابراین

$$F \cdot ds = F ds \cos \Psi \quad (۷)$$

همچنین از شکل داریم

$$\beta + \beta + \theta = 180^\circ \quad \text{یا} \quad 2\beta + \theta = 180^\circ$$

$$\beta + \phi = 90^\circ \quad \text{یا} \quad 2(90^\circ - \phi) + \theta = 180^\circ$$

لذا $\phi = \frac{\theta}{2}$ و $\psi + \phi = 180^\circ$ ، و

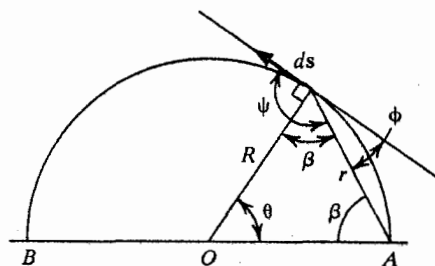
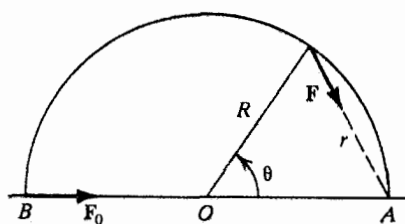
$$\cos \Psi = \cos(180^\circ - \phi) = \cos \phi = \cos \frac{\theta}{2} \quad (۸)$$

با ترکیب این معادله‌ها و به کارگیری حدود ، داریم

$$\begin{aligned} W &= F_0 R \int_0^\pi \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 2F_0 R \int_0^\pi \sin \frac{\theta}{2} d\left(\sin \frac{\theta}{2}\right) \\ &= F_0 R \sin^2 \frac{\theta}{2} \Big|_0^\pi = F_0 R (1 - 0) \end{aligned}$$

بنابراین

$$W = F_0 R$$



شکل (معاد ۶-۲)

تمرین (۶-۲): مسأله بالا را با روش پایستگی انرژی ، با توجه به این که ، برای فنر ، $F = -kx$ و انرژی پتانسیل $\frac{1}{2} kx^2$ است ، حل کنید .

مثال (۳-۶): ذره ای که در صفحه XY ، برابر شکل (مسأله ۳-۶)، حرکت می کند با نیروی $F = \frac{k}{y}$ به طرف مبدأ جذب می شود. کار انجام شده را وقتی که (الف) از A به B و سپس به C ، و (ب) از A به C در طول یک مسیر بیضی شکل به معادله $y = a \cos \theta$ و $x = 2a \sin \theta$ حرکت می کند، محاسبه کنید

(الف) در رفتن از A به B و به C ، کار انجام شده عبارت است از

$$\begin{aligned} W &= \int_A^C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_B^C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \int_A^B F dr \cos \theta_1 + \int_B^C F dr \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (1)$$

برای مسیر از $A(0, a)$ به $B(2a, a)$ داریم

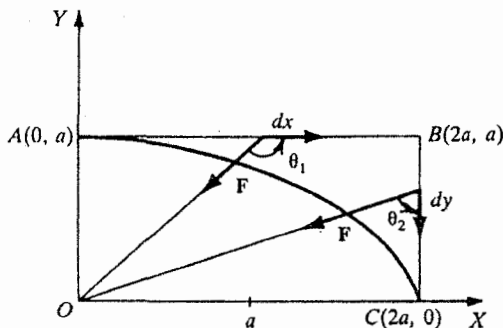
$$y = a, \quad dr = dx, \quad \cos \theta_1 = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (2)$$

و کار انجام شده عبارت است از

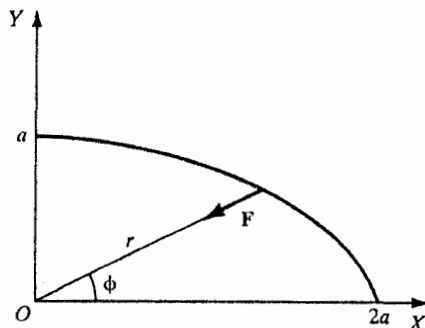
$$W_1 = -\int_0^{2a} \frac{k}{a} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = -\frac{k}{a} \int_0^{2a} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (3)$$

علامت منفی با این واقعیت نیز توجیه می شود که نیرو با جابه جایی مقابله می کند. اگر قرار دهیم

$$u = (x^2 + a^2)^{1/2}, \quad du = \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{1/2}} = \frac{x dx}{u} \quad (4)$$



(الف)



(ب)

و آنها را در معادله (۳) بپریم ، خواهیم داشت

$$W_1 = -\frac{k}{a} \int du = -\frac{k}{a} u = -\frac{k}{a} \sqrt{x^2 + a^2} \Big|_0^{2a} = k(1 - \sqrt{5}) \quad (5)$$

برای مسیر از $B(2a, a)$ به $C(2a, 0)$ ،

$$x = 2a, \quad dr = dy, \quad \cos \theta_2 = \frac{y}{\sqrt{(2a)^2 + y^2}} \quad (6)$$

و کار انجام شده عبارت است از

$$W_2 = -\int_a^0 \frac{k}{y} \frac{y}{\sqrt{(2a)^2 + y^2}} dx = -k \int_a^0 \frac{dy}{\sqrt{(2a)^2 + y^2}} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &= k \ln (y + \sqrt{(2a)^2 + y^2}) \Big|_0^a \\ &= k[\ln a(1 + \sqrt{5}) - \ln 2a] \end{aligned} \quad (8)$$

$$= k \ln \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

بنابراین کل کار انجام شده عبارت است از

$$W_{ABC} = W_1 + W_2 = k \left[(1 - \sqrt{5}) + \ln \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \right] \quad (9)$$

(ب) اکنون کار انجام شده در طول مسیر بیضی شکل را محاسبه می کنیم .

معادله این بیضی عبارت است از

$$\frac{x^2}{(2a)^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (10)$$

و

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (11)$$

برحسب دایره های محاطی و محیطی و زاویه مرکزی θ ی مذکور در مسأله ، داریم

$$x = 2a \sin \theta \quad \text{و} \quad y = a \cos \theta \quad (12)$$

کار انجام شده در رفتن از A به C در طول این مسیر بیضی شکل عبارت است از

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int F_x dx + \int F_y dy \quad (۱۳)$$

از معادله (۱۲) نتیجه می شود

$$dx = 2a \cos \theta d\theta, \quad dy = -a \sin \theta d\theta \quad (۱۴)$$

$$F_x = F \cos \phi = F \frac{x}{r} = \frac{k}{y} \frac{x}{r} = -\frac{k}{a \cos \theta} \frac{2a \sin \theta}{\sqrt{(2a \sin \theta)^2 + (a \cos \theta)^2}} \quad (۱۵)$$

$$F_y = F \sin \phi = F \frac{y}{r} = \frac{k}{y} \frac{y}{r} = -\frac{k}{\sqrt{(2a \sin \theta)^2 + (a \cos \theta)^2}} \quad (۱۶)$$

با قرار دادن اینها در (۱۳)، به دست می آوریم

$$W_{AC} = \int_0^{\pi/2} -\frac{k}{a \cos \theta} \frac{2a \sin \theta}{\sqrt{(2a \sin \theta)^2 + (a \cos \theta)^2}} (2a \cos \theta d\theta) \\ + \int_0^{\pi/2} \frac{-k}{\sqrt{(2a \sin \theta)^2 + (a \cos \theta)^2}} (-a \sin \theta d\theta)$$

که پس از ساده سازی می دهد

$$W_{AC} = k \int_0^{\pi/2} -\frac{3 \sin \theta d\theta}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta}} \quad (۱۷)$$

با انتگرال گیری استاندارد یا قرار دادن $x = \cos \theta$ و سپس انتگرال گیری، نتیجه می گیریم

$$W_{AC} = \frac{3k}{\sqrt{3}} \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{k\pi}{\sqrt{3}} \quad (۱۸)$$

تمرین (۶-۳): مسأله را برای موردی که نیرو متوجه مبدأ و برابر با $\frac{k}{x}$ است تکرار کنید.

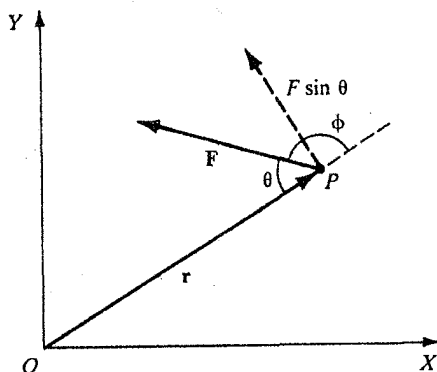
۵-۶ گشتاور نیرو

ذره ای به جرم m در نقطه P با فاصله r از مبدأ در نظر بگیرید که تحت تأثیر نیروی \mathbf{F} ، آن طور که در شکل (۶-۱۵) نشان داده شده است، قرار دارد. \mathbf{F} هر دو در صفحه XY اند. می خواهیم τ_0 را نسبت به یک محور مار بر O و عمود بر صفحه XY محاسبه کنیم. گشتاور نیرو نسبت به نقطه O را به صورت حاصل ضرب فاصله r (OP) و مؤلفه نیروی \mathbf{F} در امتداد عمود

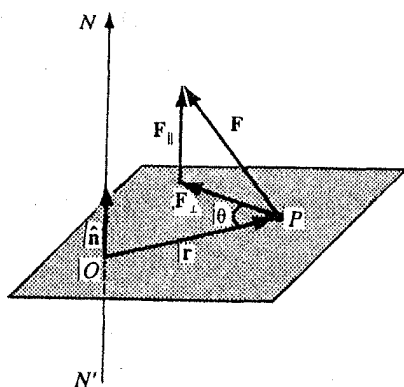
بر \mathbf{r} ، یعنی، $F \sin \phi = F \sin(\pi - \theta) = F \sin \theta$ ، تعریف می‌کنیم. در نتیجه

$$\tau_0 = rF \sin \theta \quad \text{یا} \quad \tau_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (۸۷-۶)$$

اگر \mathbf{F} در جهت پاد ساعتگرد عمل کند τ_0 در جهت محور $+Z$ ، و اگر \mathbf{F} در جهت ساعتگرد عمل کند τ_0 در جهت محور $-Z$ خواهد بود.



شکل (۱۵-۶): گشتاور τ_0 حاصل از نیروی \mathbf{F} در فاصله \mathbf{r} از مبدأ O



شکل (۱۶-۶): گشتاور $\tau_{NN'}$ (در مورد سه بُعدی) حاصل از یک نیروی \mathbf{F} در فاصله \mathbf{r} از مبدأ O

اکنون تعریف قبلی گشتاور را به مورد سه بُعدی تعمیم می‌دهیم. همان طور که در شکل (۱۶-۶) نشان داده شده است، نیروی \mathbf{F} به ذره‌ای واقع در P که در فاصله \mathbf{r} از مبدأ O قرار دارد وارد می‌شود. می‌خواهیم گشتاور نیروی \mathbf{F} را که در P عمل می‌کند، نسبت به محور NN' که

از O می‌گذرد، محاسبه کنیم. F را به دو مؤلفه F_{\parallel} موازی با NN' ، و F_{\perp} عمود بر NN' ، تجزیه کنیم. بدین ترتیب

$$F = F_{\parallel} + F_{\perp} \quad (۸۸-۶)$$

چون n یک بردار یکه در امتداد NN' است، F تصویر n در امتداد n است، در نتیجه مؤلفه موازی عبارت است از

$$F_{\parallel} = \hat{n}(\hat{n} \cdot F) \quad (۸۹-۶)$$

و مؤلفه عمودی عبارت است از

$$F_{\perp} = F - F_{\parallel} \quad (۹۰-۶)$$

بنابراین گشتاور نسبت به محور NN' می‌تواند به صورت زیر تعریف شود

$$\tau_{NN'} = \pm r F_{\perp} \sin \theta = \pm |\mathbf{r} \times \mathbf{F}_{\perp}| \quad (۹۱-۶)$$

علامت مثبت برای وقتی که گشتاور در جهت n است و علامت منفی برای وقتی که در خلاف جهت n است. از طرف دیگر، مؤلفه F_{\parallel} هیچ گشتاوری در امتداد NN' ایجاد نمی‌کند. چون $\mathbf{r} \times \mathbf{F}_{\parallel}$ برداری است عمود بر n ، مؤلفه موازی با n آن صفر است؛ یعنی،

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_{\parallel}) = n |\mathbf{r} \times \mathbf{F}_{\parallel}| \cos 90^\circ = 0 \quad (۹۲-۶)$$

این نتیجه ما را قادر می‌سازد که $\tau_{NN'}$ ، معادله (۹۱-۶)، را به صورت زیر بنویسیم

$$\tau_{NN'} = \pm |\mathbf{r} \times \mathbf{F}_{\perp}| = \hat{n} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \quad (۹۳-۶)$$

این نتیجه را می‌توانیم به روش زیر ثابت کنیم

$$\begin{aligned} \hat{n} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) &= \hat{n} \cdot (\mathbf{r} \times (\mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{F}_{\perp})) \\ &= \hat{n} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_{\parallel}) + \hat{n} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_{\perp}) \\ &= \hat{n} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_{\perp}) \end{aligned}$$

بنابراین، بدون در نظر گرفتن جهت بردار مکانی \mathbf{r} و نیروی \mathbf{F} ، گشتاور نسبت به محور NN' با رابطه

$$\tau_{NN'} = \hat{n} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \quad (۹۴-۶)$$

داده می شود که r بردار فاصله از هر نقطهٔ محور به نقطه اثر نیرو است. این رابطه خود به خود علامت درست را به ما می دهد و شامل F_{\parallel} ، که سهمی در این گشتاور ندارد، نیز هست. باید τ_{NN} را، که با معادله (۶-۹۳) داده شده است، به عنوان یک مؤلفه τ_0 ، که به صورت

$$\tau_0 = r \times F \quad (۹۵-۶)$$

تعریف شده است، در نظر بگیریم، که τ_0 گشتاور نسبت به نقطه O و بردار فاصله از O به P است.

۶-۶ دینامیک در سه بُعد

معادله ای که حرکت در سه بُعد را توصیف می کند می تواند به صورت

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (۹۶-۶)$$

نوشته شود که مجموعه ای از سه معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم جفت شده است و بطور صریح می تواند به صورت

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) \quad (۹۷-۶)$$

و عبارتهای مشابهی برای y و z ، نوشته شود. اگر مکان اولیه (x_0, y_0, z_0) و سرعت اولیه (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) داده شده باشند، شش ثابت اختیاری $x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}$ را به عنوان شرایط اولیه می شناسیم و می توانیم به حل معادلات (۶-۹۷) اقدام کنیم. حل این معادلات مشکل است و معمولاً به کمک کامپیوترها با استفاده از آنالیز عددی صورت می گیرد. وضعیتهایی وجود دارد که در آنها حل این معادلات برای حرکت دو یا سه بُعدی امکان پذیر است. به عنوان مثال، اگر هر مؤلفهٔ نیرو تابع همان مختصهٔ متناظر و مشتق آن باشد، معادله (۶-۹۶) به شکل زیر در می آید

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x(x, \dot{x}, t) \quad (۹۸-۶ \text{ الف})$$

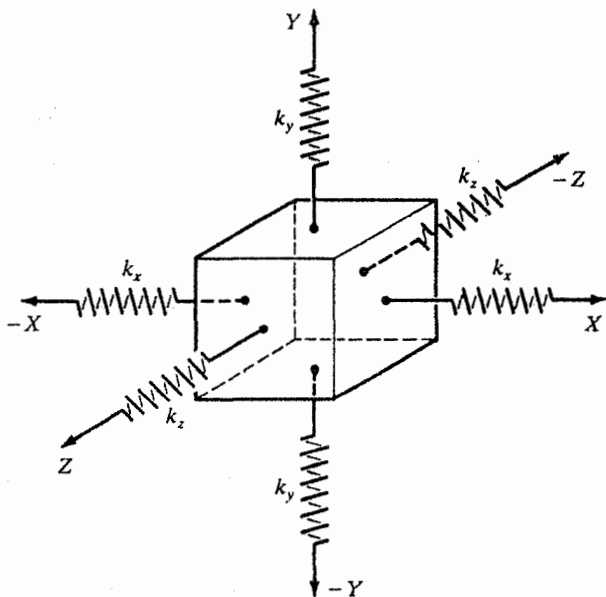
$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y(y, \dot{y}, t) \quad (۹۸-۶ \text{ ب})$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z(z, \dot{z}, t) \quad (۹۸-۶ \text{ پ})$$

این معادلات سه مسأله یک بُعدی مستقل هستند و باروشهای آشنای فصلهای پیشین برای $x(t)$ ، $y(t)$ ، $z(t)$ حل می‌شوند. مثال ساده مورد نوسانگر هماهنگ سه بُعدی، مانند حرکت اتم در شبکه بلوری با ساختار مکعبی، شکل (۶-۱۷)، است. نیروها در این مورد عبارتند از

$$F_x = -k_x x, \quad F_y = -k_y y, \quad F_z = -k_z z \quad (۶-۹۹)$$

که حل مسأله را تبدیل به حل سه نوسانگر هماهنگ جداگانه می‌کند



شکل (۶-۱۷): نوسانگر هماهنگ در سه بُعد با ثابتهای فنری k_x ، k_y ، و k_z

در باره تابع انرژی پتانسیل و انرژی کل چند تذکر لازم است. در مورد حرکت یک بُعدی اگر نیرو تنها تابع مکان باشد، $F = F(x)$ ، همیشه می‌توانیم یک تابع انرژی پتانسیل به صورت

$$V(x) = - \int_{x_0}^x F(x) dx \quad (۶-۱۰۰)$$

تعریف کنیم. علت این امر این است که وقتی ذره از x_1 به x_2 برود برای برگشت به x_1 راهی جز بازگشت از همان مسیر ندارد؛ لذا در یک رفت و برگشت کار انجام شده صفر است. بدین ترتیب انرژی کل ثابت است، $K + V = E$ ، و می‌توان از انتگرال انرژی برای حل مسأله

یک بُعدی استفاده کرد .

در مورد حرکت سه بُعدی، حتی اگر نیرو تابعی از تنها مکان باشد، یعنی، $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ ، وجود یک تابع انرژی پتانسیل $V(\mathbf{r})$ را تضمین نمی کند. وقتی چنین انرژی پتانسیلی وجود داشته باشد قضیه پایستگی انرژی برقرار است، یعنی، انرژی کل $K + V = E$ ؛ اما برخلاف مورد حرکت یک بُعدی، انتگرال انرژی دیگر برای حل مسأله حرکت دو یا سه بُعدی کافی نیست.

۶-۷ نوسانگرهای هماهنگ در دو و سه بُعد

اکنون بحث بخش گذشته را به حرکت نوسانگرهای هماهنگ دو و سه بُعدی در این بخش، و حرکت پرتابی در بخش بعدی، گسترش می دهیم.

نوسانهای هماهنگ در دو بُعد: منحنیهای لیسازو

یک مثال نمونه ای نوسانگر ناهمسانگرد دو بُعدی در شکل (۶-۱۸) نشان داده شده است. ما بحث خود را به یک نوسانگر همسانگرد که برای آن $k_x = k_y = k$ است محدود می کنیم. اگر نیروی بازگرداننده متناسب با فاصله باشد داریم

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r} \quad (۶-۱۰۱)$$

با استفاده از مختصات قطبی \mathbf{F} را به دو مؤلفه به صورت زیر تجزیه می کنیم

$$F_x = -kr \cos \theta = -kx \quad (۶-۱۰۲)$$

$$F_y = -kr \sin \theta = -ky \quad (۶-۱۰۳)$$

در نتیجه معادله دیفرانسیل، معادله (۶-۱۰۱)،

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -k\mathbf{r} \quad (۶-۱۰۴)$$

می تواند به صورت

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (۶-۱۰۵)$$

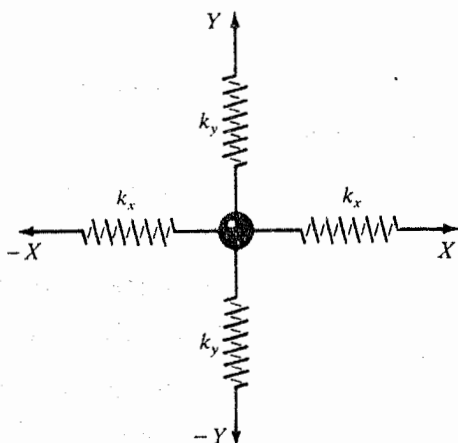
$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \quad (۶-۱۰۶)$$

نوشته شود که در آن $\omega^2 = k/m$. جوابهای این معادله ها عبارتند از

$$x = A \cos(\omega t + \phi_x) \quad (۱۰۷-۶)$$

$$y = B \cos(\omega t + \phi_y) \quad (۱۰۸-۶)$$

که در آن A ، B ، ϕ_x و ϕ_y ثابتند . هر دو نوسانگر یک فرکانس دارند ولی دامنه و فاز آنها متفاوت است . می توانیم مسیر ذره را با حذف t از معادله های (۱۰۷-۶) و (۱۰۸-۶) به دست آوریم .



شکل (۱۸-۶) : نوسانگر هماهنگ ناهمسانگرد دو بُعدی

معادله (۱۰۸-۶) را به صورت

$$\begin{aligned} \frac{y}{B} &= \cos(\omega t + \phi_y) = \cos[\omega t + \phi_x + (\phi_y - \phi_x)] \\ &= \cos(\omega t + \phi_x) \cos(\phi_y - \phi_x) - \sin(\omega t + \phi_x) \sin(\phi_y - \phi_x) \end{aligned}$$

می نویسیم . به جای $\cos(\omega t + \phi_x)$ و $\sin(\omega t + \phi_x)$ از معادله (۱۰۷-۶) قرار می دهیم و پس از مرتب سازی نتیجه می گیریم

$$\frac{y}{B} - \frac{x}{A} \cos(\phi_y - \phi_x) = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin(\phi_y - \phi_x)$$

از مربع کردن طرفین و مرتب سازی خواهیم داشت

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos(\phi_y - \phi_x) = \sin^2(\phi_y - \phi_x) \quad (۱۰۹-۶)$$

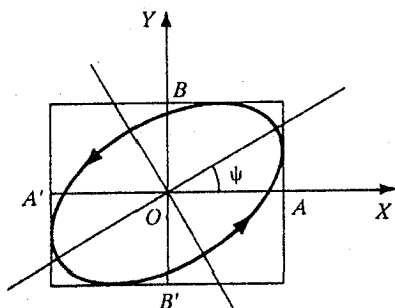
این معادله ، معادلهٔ یک بیضی است که در شکل (۶-۱۹) نشان داده شده است . قطر بزرگ این بیضی با محور X زاویهٔ Ψ می سازد که با رابطهٔ زیر داده می شود (رک مسألهٔ (۶-۳۰))

$$\tan 2\Psi = \frac{2AB \cos(\phi_y - \phi_x)}{A^2 - B^2} \quad (۶-۱۱۰)$$

[معادلهٔ (۶-۱۰۹) یک معادلهٔ عمومی به شکل

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$$

است که اگر $b^2 - 4ac$ منفی باشد بیضی، اگر مثبت باشد هذلولی، و اگر صفر باشد سهمی است.]



شکل (۶-۱۹) : حرکت متوجه دو نوسانگر هماهنگ ساده عمود بر یکدیگر ، در حالت کلی ، یک بیضی است

در معادلهٔ (۶-۱۰۹) اگر $\phi_y - \phi_x = \pi/2$ باشد داریم

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad (۶-۱۱۱)$$

که معادلهٔ یک بیضی است که قطرهای بلند و کوتاه آن ، برابر شکل (۶-۲۰) ، در امتداد محورهای X و Y است . از طرف دیگر اگر $\phi_y - \phi_x$ صفر یا π باشد ، معادلهٔ (۶-۱۰۹) به

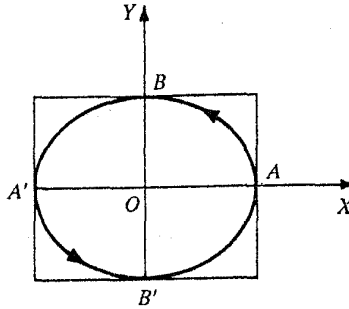
$$y = \pm \frac{B}{A} x \quad (۶-۱۱۲)$$

تبدیل می شود . این معادلات ، همان طور که در شکلهای (۶-۲۱ الف) و (۶-۲۱ ب) نشان داده شده است ، خطوط مستقیمی را نمایش می دهند .

دو باره به معادلهٔ (۶-۱۱۱) برگردیم . اگر $A = B$ باشد به شکل

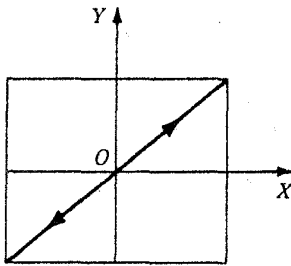
$$x^2 + y^2 = A^2 \quad (۶-۱۱۳)$$

در می آید، که معادله یک دایره است. در واقع وقتی که مقدار اختلاف فاز $\phi = \phi_y - \phi_x$ تغییر می کند شکل مدار نیز تغییر می کند (شکل ۶-۲۲)



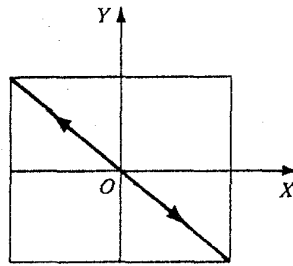
شکل (۶-۲۰): حرکت منتهجه دو نوسانگر هماهنگ ساده عمود بر یکدیگر با اختلاف

فاز $\pi/2$ یک بیضی است که قطرهای بزرگ و کوچک آن به محورهای X و Y منطبق اند



$$\begin{aligned} \phi_y - \phi_x &= 0 \\ y &= +\frac{B}{A}x \end{aligned}$$

(الف)

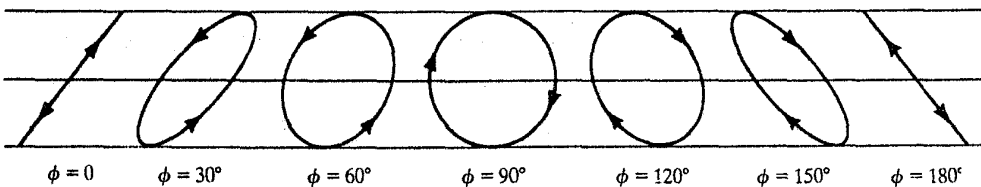


$$\begin{aligned} \phi_y - \phi_x &= \pi \\ y &= -\frac{B}{A}x \end{aligned}$$

(ب)

شکل (۶-۲۱): حرکت منتهجه دو نوسانگر هماهنگ ساده یک خط مستقیم

است اگر (الف) $\phi_y - \phi_x = 0$ و (ب) $\phi_y - \phi_x = \pi$



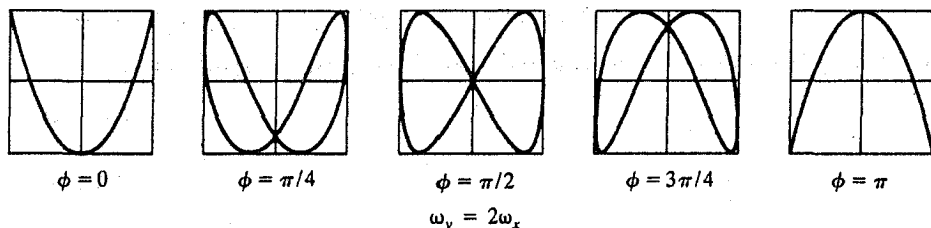
شکل (۶-۲۲): حرکت منتهجه دو نوسانگر عمود بر هم وقتی که اختلاف فاز ϕ مقادیر $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, \dots$ را می گیرد

اکنون موردی را در نظر بگیریم که در آن دو فرکانس برابر نیستند و در نتیجه جوابهای معادله های (۶-۱۰۵) ، (۶-۱۰۶) به شکل زیر هستند

$$x = A \cos(\omega_x t + \phi_x) \quad (۶-۱۱۴)$$

$$y = B \cos(\omega_y t + \phi_y) \quad (۶-۱۱۵)$$

مسیر ذره دیگر یک بیضی نیست . مسیرهای به دست آمده در چنین موردی منحنیهای لیسازو یا شکلهای لیسازو نامیده می شود . بسته به نسبت ω_x/ω_y ، منحنیها ممکن است بسته یا باز باشند . شکل (۶-۲۳) شکلهای لیسازو را برای مورد $\omega_y = 2\omega_x$ و $\phi = 0, \pi/4, \pi/2, \dots$ نشان می دهد . دستگاههای تجربی زیادی ، هم الکتریکی و هم مکانیکی ، وجود دارد که شکلهای لیسازو را نمایش می دهند .



شکل (۶-۲۳) : شکلهای لیسازو برای مورد $\omega_y = 2\omega_x$ و $\phi = 0, \pi/4, \pi/2$

نوسانگرهای هماهنگ در سه بُعد

همان طور که قبلاً گفته شد ، نیروهای عمل کننده طوری هستند که هر مؤلفه نیروی تابعی از مختصه متناظر است . یک مثال نمونه ای حرکت اتم در شبکه بلوری با ساختار مکعبی است . فرض کنیم میرایی در کار نباشد و ثابتهای فتری k_x ، k_y ، k_z باشند . وضعیت همانند وضعیتی است که در شکل (۶-۱۷) نمایش داده شده است . بدین ترتیب ، معادله های توصیف گر حرکت های سه نوسانگر هماهنگ یک بُعدی عبارتند از

$$F_x = m\ddot{x} = -k_x x \quad (۶-۱۱۶ \text{ الف})$$

$$F_y = m\ddot{y} = -k_y y \quad (۶-۱۱۶ \text{ ب})$$

$$F_z = m\ddot{z} = -k_z z \quad (۶-۱۱۶ \text{ پ})$$

جوابهای متناظر، که سه حرکت مستقل را نمایش می دهند، عبارتند از

$$x = A_x \cos(\omega_x t + \phi_x) \quad (۱۱۷-۶ \text{ الف})$$

$$y = A_y \cos(\omega_y t + \phi_y) \quad (۱۱۷-۶ \text{ ب})$$

$$z = A_z \cos(\omega_z t + \phi_z) \quad (۱۱۷-۶ \text{ پ})$$

که ω_x ، ω_y ، ω_z فرکانسهای زاویه ای به صورت زیرند

$$\omega_x^2 = \frac{k_x}{m}, \quad \omega_y^2 = \frac{k_y}{m}, \quad \omega_z^2 = \frac{k_z}{m} \quad (۱۱۸-۶)$$

شش ثابت A_x ، A_y ، A_z ، ϕ_x ، ϕ_y ، ϕ_z و تابع شرایط اولیه، یعنی، مکانهای اولیه x_0 ، y_0 ، z_0 و سرعتهای اولیه v_{0x} ، v_{0y} ، v_{0z} هستند. حرکت متوجه ذره به یک جعبه مکعب مستطیل شکل به ابعاد $2A_x \times 2A_y \times 2A_z$ واقع در اطراف مبدأ محدود می شود.

اگر فرکانسهای زاویه ای طوری باشند که برای یک دسته اعداد درست n_x ، n_y و n_z داشته باشیم

$$\frac{\omega_x}{n_x} = \frac{\omega_y}{n_y} = \frac{\omega_z}{n_z} \quad (۱۱۹-۶)$$

گفته می شود که فرکانسها همخوانند. مسیر حرکت ذره در چنین موردی بسته است، و در بازه های زمانی منظمی تکرار می شود. به علاوه اگر n_x ، n_y ، n_z طوری باشند که مقسوم علیه مشترك درستی نداشته باشند، دوره تناوب حرکت با رابطه زیر داده می شود

$$T = \frac{2\pi n_x}{\omega_x} = \frac{2\pi n_y}{\omega_y} = \frac{2\pi n_z}{\omega_z} \quad (۱۲۰-۶)$$

معنی این مطلب این است که در یک دوره تناوب T ، مختصه x ، n_x نوسان، مختصه y ، n_y نوسان، و مختصه z ، n_z نوسان می کند. در پایان یک دوره، ذره به مکان اولیه و سرعت اولیه خود بر می گردد.

اگر ω_x ، ω_y ، ω_z در معادله (۱۱۹-۶) ناهمخوان باشند، منحنی توصیف کننده حرکت ذره هرگز دوبار از یک نقطه با یک سرعت نمی گذرد. حرکت دوره ای نیست. مسیر تمام جعبه به حجم $2A_x \times 2A_y \times 2A_z$ را پر می کند، و بعد از زمان به اندازه کافی طولانی، ذره سرانجام از نزدیکی هر نقطه در جعبه عبور کرده است.

اکنون یک مثال جالب نوسانگر هماهنگ همسانگرد سه بُعدی را ، یعنی موردی را که در آن هر سه ثابت فیزی و همچنین هر سه فرکانس زاویه ای برابرند ، مورد بحث قرار می دهیم

$$k_x = k_y = k_z \quad \text{و} \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \quad (۶-۱۲۱)$$

بنابراین

$$x = A_x \cos(\omega t + \phi_x) \quad (۶-۱۲۲ \text{ الف})$$

$$y = A_y \cos(\omega t + \phi_y) \quad (۶-۱۲۲ \text{ ب})$$

$$z = A_z \cos(\omega t + \phi_z) \quad (۶-۱۲۲ \text{ پ})$$

برای تعیین مسیر ذره ، t را حذف می کنیم ، و z را برحس x و y بیان می کنیم . نتیجه به صورت زیر (رک مسأله ۶-۴۰)

$$z = K_1 x + K_2 y \quad (۶-۱۲۳)$$

که در آن K_1 و K_2 ثابتند ، در می آید . این معادله یک صفحه است . بدون توجه به شرایط اولیه ، حرکت یک نوسانگر هماهنگ همسانگرد همیشه در یک صفحه انجام می گیرد . حرکت دوره ای است ، و هر مختصه در هر دوره یک نوسان انجام می دهد . می توان نشان داد که مسیر ذره یک بیضی ، یک دایره ، یا یک خط مستقیم است .

۶-۸ حرکت پرتابی

برای شروع ، بحث خود را به دو بُعدی ، با یا بدون مقاومت ، محدود می کنیم .

مقاومت هوا وجود ندارد

پرتابه ای به جرم m در نظر بگیریم که از مبدأ دستگاه مختصات با سرعت v_0 که با افق زاویه α می سازد ، آن طور که در شکل (۶-۲۴) نشان داده شده است ، پرتاب شده است . تنها نیرویی که روی آن عمل می کند نیروی روبه پایین گرانش است ، و حرکت پرتابه در صفحه XZ با معادله

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -mg\hat{\mathbf{k}} \quad (۱۲۴-۶)$$

یا ، به شکل مؤلفه ای ، با

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \quad \text{و} \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg \quad (۱۲۵-۶)$$

داده می شود . نقطه شروع را مبدأ مختصات $(0, 0)$ بگیریم . مؤلفه های افقی و قائم سرعت اولیه عبارتند از

$$\dot{x}_0 = v_{x0} = v_0 \cos \alpha \quad \text{و} \quad \dot{z}_0 = v_{z0} = v_0 \sin \alpha \quad (۱۲۶-۶)$$

با به کار بردن این شرایط اولیه ، جواب معادلات $(۱۲۵-۶)$ ، پس از انتگرال گیری ، می شود

$$\dot{x} = v_x = v_{x0} = \text{constant} \quad (۱۲۷-۶)$$

$$\dot{z} = v_z = v_{z0} - gt \quad (۱۲۸-۶)$$

و بعد از یک انتگرال گیری دیگر ،

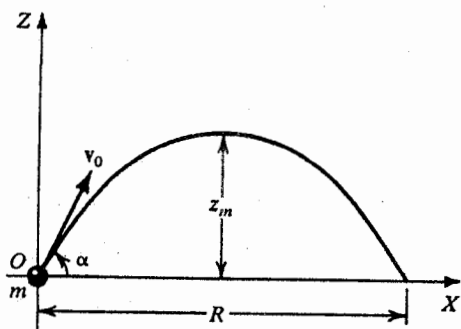
$$x = v_{x0}t \quad (۱۲۹-۶)$$

$$z = v_{z0}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (۱۳۰-۶)$$

مسیر پرتابه با حذف t بین معادلات $(۱۲۹-۶)$ و $(۱۳۰-۶)$ به صورت زیر به دست می آید

$$z = \frac{v_{z0}}{v_{x0}} x - \frac{g}{2v_{x0}^2} x^2 \quad (۱۳۱-۶)$$

که معادله یک سهمی است ، شکل $(۲۴-۶)$.



شکل $(۲۴-۶)$: پرتابه پرتاب شده از مبدأ يك دستگاه مختصات با سرعت v_0 که با افق

زاویه α می سازد . z_m ارتفاع بیشینه و R برد آن است

اکنون به پیدا کردن برد R می پردازیم . با گذاشتن $z = 0$ در معادله (۶-۱۳۱) دو مقدار برای x به دست می آید : $x = 0$ ، متناظر با نقطه شروع ، و $x = R$ به صورت

$$R = \frac{2v_{x0}v_{z0}}{g} = \frac{2v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (۶-۱۳۲)$$

این معادله نشان می دهد که برای یک مقدار داده شده v_0 ، R وقتی بیشینه خواهد بود که $\alpha = 45^\circ$ باشد .

ارتفاع بیشینه z_m که پرتابه به آن می رسد ، مطابق شکل (۶-۲۴) ، با بازنویسی معادله (۶-۱۳۱) به صورت (رک مسأله ۶-۴۲)

$$\left(x - \frac{v_{x0}v_{z0}}{g}\right)^2 = -\frac{2v_{x0}^2}{g} \left(z - \frac{v_{z0}^2}{2g}\right) \quad (۶-۱۳۳)$$

به دست می آید . چون ، از معادله (۶-۱۳۲) ، وقتی $x = \frac{R}{2} = \frac{v_{x0}v_{z0}}{g}$ است $z = z_m$ می شود ، معادله (۶-۱۳۳) می دهد

$$z_m = \frac{v_{z0}^2}{2g} \quad (۶-۱۳۴)$$

مقاومت هوا تابع سرعت است

فرض کنیم که مقاومت هوا بطور خطی با سرعت تغییر کند . چون مقاومت هوا همیشه با حرکت مقابله می کند ، جهت نیروی مقاوم در خلاف جهت سرعت v است . بدین ترتیب معادله توصیف گر حرکت عبارت است از

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{g} - b\mathbf{v} \quad (۶-۱۳۵)$$

که در آن b ضریب تناسب برای نیروی مقاومت است و

$$\mathbf{r} = x\hat{i} + z\hat{k} \quad (۶-۱۳۶)$$

$$\mathbf{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{z}\hat{k} \quad (۶-۱۳۷)$$

$$\mathbf{g} = -g\hat{k} \quad (۶-۱۳۸)$$

که در آنها $\dot{x} = v_x$ و $\dot{z} = v_z$. بدین ترتیب معادله (۶-۱۳۵) را می توان به دو مؤلفه

زیر تجزیه کرد .

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} \quad (۱۳۹-۶)$$

$$m\ddot{z} = -mg - b\dot{z} \quad (۱۴۰-۶)$$

این معادلات را اکنون می توان با روشهای آشنایی که در حل مسائل یک بُعدی به کار رفته اند حل کرد . بنابراین ، با فرض $(x_0, z_0) = (0, 0)$ و $v_0 = (\dot{x}_0, \dot{z}_0)$ در $t = 0$ ، و انتگرال گیری معادلات (۱۳۹-۶) و (۱۴۰-۶) ، به دست می آوریم

$$\dot{x} = \dot{x}_0 e^{-bt/m} \quad (۱۴۱-۶)$$

$$\dot{z} = -\frac{mg}{b} + \left(\frac{mg}{b} + \dot{z}_0\right) e^{-bt/m} \quad (۱۴۲-۶)$$

و پس از یک انتگرال گیری دیگر ،

$$x = \dot{x}_0 \frac{m}{b} (1 - e^{-bt/m}) \quad (۱۴۳-۶)$$

$$z = -\frac{mg}{b} t + \left(\frac{m^2 g}{b^2} + \frac{m\dot{z}_0}{b}\right) (1 - e^{-bt/m}) \quad (۱۴۴-۶)$$

با ترکیب معادله های (۱۴۱-۶) و (۱۴۲-۶) عبارت سرعت پرتابه به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}} \\ &= \dot{x}_0 e^{-bt/m} \hat{\mathbf{i}} + \left[-\frac{mg}{b} + \left(\frac{mg}{b} + \dot{z}_0\right) e^{-bt/m}\right] \hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (۱۴۵-۶)$$

برای مقادیر بزرگ t ، این سرعت به سرعت حدی نزدیک می شود

$$v_t = -\frac{mg}{b} , \quad (۱۴۶-۶)$$

و از معادله (۱۴۳-۶) برای مقادیر بزرگ t ، مقدار حدی x را به صورت

$$x_t = \frac{\dot{x}_0 m}{b} , \quad (۱۴۷-۶)$$

به دست می آوریم . همچنین برای مقادیر بزرگ t ، از معادله (۱۴۴-۶) دیده می شود که z به سمت منفی بی نهایت میل می کند . تمام اینها به نتیجه گیری زیر منجر می شود . مسیر دارای یک مجانب قائم با معادله $x = \dot{x}_0 m / b$ است ، یعنی ، همان طور که در شکل (۶-۲۵) نشان

داده شده است، دارای یک سقوط قائم است و این سقوط از بالای سطح افق $z=0$ شروع می شود.

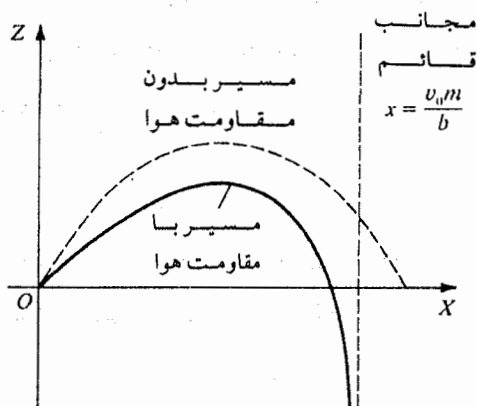
اکنون نتایج به دست آمده در معادلات (۶-۱۴۳) و (۶-۱۴۴) را با نتایج مورد بدون مقاومت هوا مقایسه کنیم. با استفاده از سری نمایی

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots$$

می توانیم معادله های (۶-۱۴۳) و (۶-۱۴۴) را به صورت زیر بنویسیم

$$x = \dot{x}_0 t - \frac{b \dot{x}_0}{2m} t^2 + \dots \quad (۶-۱۴۸)$$

$$z = \dot{z}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 - \frac{b}{m} \left(\frac{\dot{z}_0 t^2}{2} - \frac{g t^3}{b} \right) + \dots \quad (۶-۱۴۹)$$



شکل (۶-۲۵): مسیر یک پرتابه با یا بدون مقاومت هوا، که مقاومت هوا متناسب با سرعت است

جمله اول طرف راست معادله (۶-۱۴۸) و دو جمله طرف راست معادله (۶-۱۴۹) همانهایی هستند که در مورد بدون مقاومت هوا وجود دارند. جمله های باقی مانده در هر مورد جملاتی تصحیحی هستند، که برای موردی که در آن $\frac{bt}{m}$ در مقایسه با یک کوچک باشد خیلی کوچکند. بالاخره، با حذف t بین معادلات (۶-۱۴۳) و (۶-۱۴۴) یک معادله برای مسیر

به دست بیاوریم. نتیجه می شود

$$z = \left(\frac{mg}{b \dot{x}_0} + \frac{\dot{z}_0}{\dot{x}_0} \right) x - \frac{m^2 g}{b^2} \ln \left(\frac{m \dot{x}_0}{m \dot{x}_0 - bx} \right) \quad (۶-۱۵۰)$$

برای مقاومت هوای کم یا برای فاصله‌های کوتاه، یعنی، برای $1 \ll \frac{bx}{m\dot{x}_0}$ ، می‌توانیم جمله آخر را به صورت $\ln(1+u)$ بنویسیم و آن را گسترش دهیم، و به دست آوریم

$$z = \frac{\dot{z}_0}{\dot{x}_0} x - \frac{1}{2} \frac{g}{\dot{x}_0^2} x^2 - \frac{1}{3} \frac{bg}{m\dot{x}_0^3} x^3 + \dots \quad (151-6)$$

این معادله بدون جمله آخر، معادله یک سهمی است، و جمله آخر یک جمله تصحیحی است. یعنی، معادله (۱۵۱-۶) یک مسیر سهمی وار با یک جمله تصحیحی ارائه می‌دهد. مانند قبل، می‌توانیم برد را با قرار دادن $x = x_m$ وقتی $z = 0$ است، به دست آوریم. خواهیم داشت

$$x_m = \frac{2\dot{x}_0\dot{z}_0}{g} - \frac{2}{3} \frac{b}{\dot{x}_0} x_m^2 - \dots \quad (152-6)$$

جمله اول طرف راست همان برد R است وقتی که مقاومت هوا نباشد، و جمله دوم جمله تصحیحی است. برای پیدا کردن x_m از معادله (۱۵۲-۶) می‌توانیم مقدار تقریبی $x_m = \frac{2\dot{x}_0\dot{z}_0}{g}$ را در جمله آخر قرار دهیم و بدین ترتیب به دست آوریم

$$x_m \approx \frac{2\dot{x}_0\dot{z}_0}{g} - \frac{2}{3} \frac{b\dot{x}_0\dot{z}_0^2}{mg^2} \quad (153-6)$$

از طرف دیگر اگر مقاومت هوا بزرگ باشد و در تعیین برد عامل غالب باشد، یعنی، اگر $\frac{b\dot{z}_0}{mg} \gg 1$ (برد عبارت است از (مسئله ۶-۴۶))

$$x_m \approx \frac{m\dot{x}_0}{b} \quad (154-6)$$

حرکت پرتابه در سه بُعد

برای مورد نبود مقاومت هوا و مقاومت هوایی که بطور خطی متناسب با سرعت باشد، هیچ نتیجه‌ای متفاوت با آنچه برای حرکت پرتابی دوبعدی حاصل شد به دست نمی‌آوریم. یک وضعیت جالب موردی است که در آن بادهای جانبی که به یک نیروی رانش F_y در جهت Y منجر شوند، آن طور که در شکل (۶-۲۶) نشان داده شده است، حضور داشته باشند. معادله حرکت حاصل عبارت است از

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -mg\hat{\mathbf{k}} - b\mathbf{v} + F_d \hat{\mathbf{j}} \quad (155-6)$$

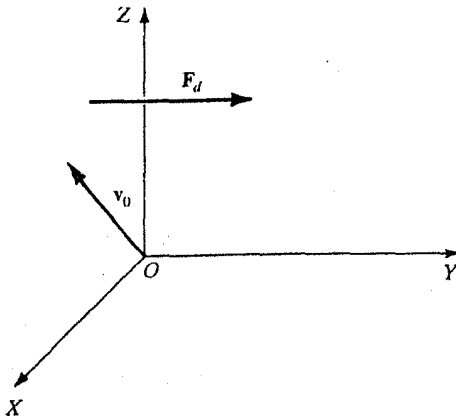
که به شکل مؤلفه ای می تواند به صورت

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} \quad (156-6)$$

$$m\ddot{y} = -b\dot{y} + F_d \quad (157-6)$$

$$m\ddot{z} = -b\dot{z} - mg \quad (158-6)$$

نوشته شود. این معادلات می توانند مانند قبل حل شوند و تقریباً به همان نتایج برسند. ما آن را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می کنیم.



شکل (۶-۲۶): نیروی رانش F_d ناشی از باد جانبی در جهت Y که روی پرتابه ای با

سرعت اولیه v_0 واقع در صفحه XZ عمل می کند

مسائل

- ۱-۶ معادله (۴۱-۶) ، عبارتی برای شتاب در مختصات استوانه ای ، را به دست آورید .
- ۲-۶ معادله های (۴۷-۶) را از ملاحظات هندسی به دست آورید .
- ۳-۶ با شروع از معادله (۴۹-۶) برای سرعت در مختصات کروی ، عبارت شتاب ، معادله (۵۰-۶) ، را به دست آورید .
- ۴-۶ حرکت یک ذره با معادلات زیر توصیف می شود . سرعت و شتاب را به دست آورید ، و در هر مورد یک تعبیر هندسی ، اگر موجود باشد ، ارائه دهید .

$$r = at\hat{i} + bt^2\hat{j} \quad (\text{الف})$$

$$r = at\hat{i} + A \cos \omega t \hat{j} \quad (\text{ب})$$

$$r = at\hat{i} + A \cos \omega t \hat{j} + B \sin \omega t \hat{k} \quad (\text{پ})$$

$$r = e^{kt}\hat{u}_r, \theta = at, \text{ در مختصات قطبی} \quad (\text{ت})$$

$$r = a\hat{u}_r, \theta = B \sin \omega t, \phi = bt, \text{ در مختصات کروی} \quad (\text{ث})$$

- ۵-۶ رودخانه ای به عرض w در نظر بگیرید . سرعت آب در نزدیکی ساحل صفر است ، اما بطور خطی افزایش می یابد و به v_0 در مرکز رودخانه می رسد . اگر قایقی از یک ساحل در جهت عمود بر رودخانه با سرعت v_1 پارو بزند ، نشان دهید وقتی به ساحل دیگر می رسد به اندازه $\frac{v_0 w}{2v_1}$ در جهت حرکت آب منحرف شده است .
- ۶-۶ نشان دهید که اگر بردار مکانی ذره ای به صورت $r = (a \sin \omega t)\hat{i} + (b \cos \omega t)\hat{j}$ باشد مسیر آن یک بیضی با قطر بزرگ $2a$ است . a ، b ، و ω ثابتند . همچنین سرعت ذره را به دست آورید .

- ۷-۶ ذره ای با سرعت ثابت v در مسیر سهمی شکلی به معادله $y^2 = 4fx$ حرکت می کند . f ثابت است . مؤلفه های سرعت و شتاب آن را در مختصات کروی و قطبی صفحه ای به دست آورید . نشان دهید که معادله سهمی در مختصات قطبی به صورت زیر است

$$r = \frac{2f}{1 - \cos \theta} \quad \text{با} \quad r \cos^2 \frac{\theta}{2} = f$$

۸-۶ شتاب a ی یک ذره تابعی از زمان t است. مؤلفه های r و θ ی بردار da/dt را در مختصات قطبی صفحه ای پیدا کنید.

۹-۶ بردار A نمایشگر مکان یک ذره متحرك، و تابعی از زمان است. مؤلفه های d^2A/dt^2 را در مختصات قطبی استوانه ای به دست آورید.

۱۰-۶ بردار A نمایشگر مکان یک ذره متحرك و تابعی از زمان است. مؤلفه های d^3A/dt^3 را در مختصات کروی پیدا کنید (مشتق زمانی شتاب $jerk$ نامیده می شود).

۱۱-۶ آهنگ تغییرات شتاب $jerk$ نامیده می شود. بزرگی و جهت این بردار برای ذره ای که روی دایره ای به شعاع R با سرعت زاویه ای ω حرکت می کند پیدا کنید.

۱۲-۶ ذره ای با سرعت ثابت حرکت می کند ولی جهت حرکت پیوسته تغییر می کند. نشان دهید که بردار شتاب همیشه بر بردار سرعت عمود است. بطور کلی، اگر طول یک بردار A همیشه ثابت بماند ولی جهت آن در فضا با زمان تغییر کند، آهنگ تغییرات A بردار دیگری است که همیشه بر بردار A عمود است.

۱۳-۶ نیروهای متناظر با تابع پتانسیلهای زیر را محاسبه کنید: (الف) $V = ax^2 + by^2 + cz^2$ ، (ب) $V = Kye^{-x}$ که a, b, c, k ثابتند.

۱۴-۶ آیا نیروهای زیر پایستارند؟ انرژی پتانسیل را، اگر وجود داشته باشد، پیدا کنید.

(الف) $F = Kxyz(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ که K ثابت است.

(ب) $F = K(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$ که K ثابت است.

(پ) $F = K(x^2y\hat{i} + xy^2\hat{j} + x^2y^2\hat{k})e^{xyz}$ که K و a ثابتند.

۱۵-۶ نشان دهید که نیروی زیر پایستار است و انرژی پتانسیل متناظر را پیدا کنید.

$$F_x = axe^{-r}, \quad F_y = bye^{-r}, \quad F_z = cze^{-r}$$

که در آن $r = ax^2 + by^2 + cz^2$ و c ثابتند.

۱۶-۶ کدام یک از نیروهای زیر پایستارند؟ پتانسیل متناظر با آنها را که پایستارند پیدا کنید.

(الف) $F = F_x(x)\hat{i} + F_y(y)\hat{j} + F_z(z)\hat{k}$

(ب) $F_x = 3az(x^2 - y^2), F_y = -6azxy, F_z = ax(x^2 - 3y^2)$

(پ) $F_x = -ay^2, F_y = ayz, F_z = -ay^2$

۱۷-۶ پیدا کنید کدام یک از نیروهای زیر پایستارند

$$F = ax^2yz\hat{i} + bxy^2z\hat{j} + cxyz^2\hat{k} \quad (\text{الف})$$

$$F = cx^2yz\hat{i} + cxy^2z\hat{j} + cxyz^2\hat{k} \quad (\text{ب})$$

$$F = ax^2y\hat{i} + ay^2x\hat{j} + az^3\hat{k} \quad (\text{پ})$$

۱۸-۶ نشان دهید که نیروی زیر پایستار است و انرژی پتانسیل متناظر را پیدا کنید .

$$F_r = ar^2 \cos \theta, \quad F_\theta = ar^2 \sin \theta, \quad F_z = 2az^2$$

a ثابت است .

۱۹-۶ نشان دهید که نیروی زیر پایستار است و انرژی پتانسیل متناظر را پیدا کنید .

$$F_r = -2ar \sin \theta \cos \phi, \quad F_\theta = -ar \cos \theta \cos \phi$$

$$F_\phi = ar \sin \theta \sin \phi,$$

a ثابت است .

۲۰-۶ ذره ای به جرم m در یک میدان گرانشی یکنواخت $F = -mg\hat{k}$ در نظر بگیریم . کار انجام

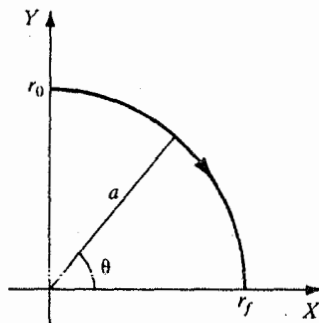
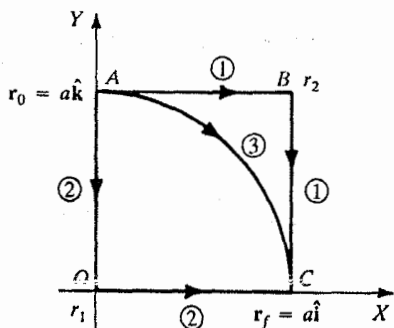
شده به هنگام رفتن از A به C از طریق سه مسیر نشان داده شده در شکل (مسأله ۶-۲۰)

را محاسبه کنید .

① (الف) از A به B و سپس از B به C . مسیر

② (ب) از A به O و سپس از O به C . مسیر

③ (پ) در طول قوس دایره از A به C . مسیر



شکل (مسأله ۶-۲۰)

۲۱-۶ مسأله (۶-۲۰) را برای موردی که ذره در میدان نیروی $F = axyi + bx^2yz$ حرکت کند ، تکرار کنید .

۲۲-۶ کار انجام شده به وسیله ذره‌ای به جرم m را وقتی از مبدأ $(0, 0, 0)$ در روی خط مستقیمی به نقطه (x_0, y_0, z_0) ، تحت اثر نیروی زیر حرکت کند محاسبه کنید

$$F_x = ax^2 + bxy + cxz , \quad F_y = ay^2 + bxy + cyz , \quad F_z = az^2$$

۲۳-۶ جسمی به جرم m می‌تواند از نقطه A ، از طریق سه مسیر متفاوت نشان داده شده در شکل (مسأله ۶-۲۳) ، به نقطه C برده شود :

(الف) از A به B و از B به C

(ب) از A به D و از D به C

(پ) از A به C بطور مستقیم .

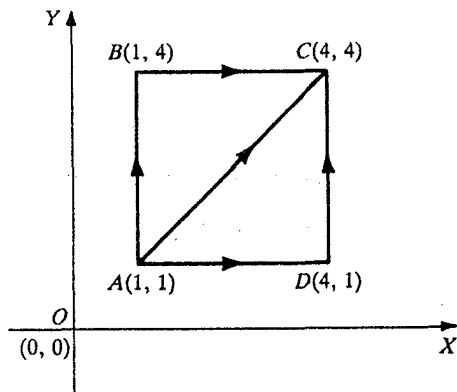
کار انجام شده در هر مورد را برای نیروهای زیر پیدا کنید .

$$F = ax\hat{i} + by\hat{j} \quad (۱)$$

$$F = (x + a)\hat{i} + (y + b)\hat{j} \quad (۲)$$

$$F = x^2y\hat{i} + y^2x\hat{j} \quad (۳)$$

$$F = x^2\hat{i} + xy\hat{j} \quad (۴)$$



شکل (مسأله ۶-۲۳)

۲۴-۶ جسمی به جرم m از سه مسیر متفاوت نمایش داده شده در شکل (مسأله ۶-۲۴)، از A به C برده می شود:

(الف) از A به B و از B به C

(ب) در طول یک خط مستقیم از A به C

(پ) در طول قوس یک دایره از A به C

کار انجام شده در هر مورد را برای هر یک از سه نیروی زیر محاسبه کنید

$$(۱)$$

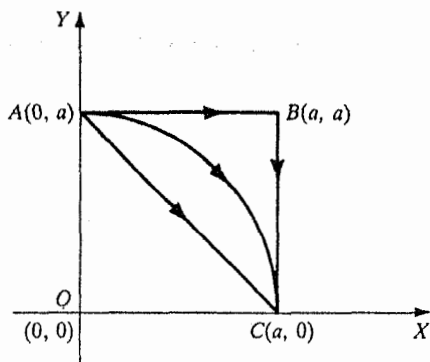
$$\mathbf{F} = kx\hat{i} + ky\hat{j}$$

$$(۲)$$

$$\mathbf{F} = \frac{k}{x}\hat{i} + \frac{k}{y}\hat{j}$$

$$(۳)$$

$$\mathbf{F} = x^2\hat{i} + y^2\hat{j}$$



شکل (مسأله ۶-۲۴)

۲۵-۶ کار انجام شده در حرکت یک جسم به جرم m را وقتی از نقطه A به نقطه C از طریق دو مسیر متفاوت، که در شکل (مسأله ۶-۲۵) نشان داده شده است، برود محاسبه کنید:

(الف) از A به B و از B به C

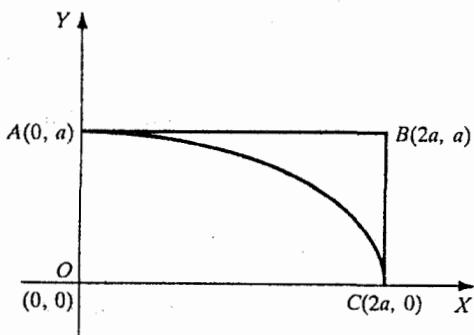
(ب) در طول قطعه ای از یک بیضی از A به C . از روابط $x = 2a \sin \theta$ و $y = a \cos \theta$ استفاده کنید.

این محاسبات را برای هر یک از سه نیروی زیر انجام دهید :

$$\mathbf{F} = kx\mathbf{i} + ky\mathbf{j} \quad (۱)$$

$$\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} \quad (۲)$$

$$\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} \quad (۳)$$



شکل (مسأله ۶-۲۵)

۶-۲۶ ذره‌ای به جرم m طوری حرکت می‌کند که

$$x = x_0 + at^2, \quad y = bt^3, \quad z = ct$$

تکانه زاویه‌ای L را به صورت تابعی از زمان پیدا کنید. همچنین \mathbf{F} و τ را پیدا کنید، و تحقیق کنید که پایستگی تکانه زاویه‌ای برقرار است.

۶-۲۷ از زمان $t=0$ نیروی $\mathbf{F} = 2a\mathbf{i} + 3b\mathbf{j}$ به ذره‌ای در مبدأ اعمال می‌شود. مکان و سرعت آن را به صورت تابعی از زمان پیدا کنید.

۶-۲۸ از زمان $t=0$ نیروی $\mathbf{F} = at\mathbf{i} + bt^2\mathbf{j} + ct^3\mathbf{k}$ به ذره‌ای در $\mathbf{r}_0 = r\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ وارد می‌شود. مکان و سرعت آن را به صورت تابعی از زمان پیدا کنید.

۶-۲۹ از زمان $t=0$ یک نیروی $\mathbf{F} = at\mathbf{i} + be^{kt}\mathbf{j}$ به ذره‌ای واقع در $\mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ و سرعت $\mathbf{v}_0 = v_{0x}\mathbf{i} + v_{0y}\mathbf{j}$ اعمال می‌شود. مکان و سرعت این ذره را برحسب زمان t پیدا کنید.

۶-۳۰ معادله (۶-۱۱۰) را به دست آورید.

۶-۳۱ دو نوسانگر هماهنگ زیر را در نظر بگیرید :

$$x = A \cos \omega_x t, \quad y = A \cos(\omega_y t + \phi)$$

منحنیهای لیسازو را برای $\omega_y = 2\omega_x$ و $\phi = 0, \pi/4, \pi/2, \pi$ رسم کنید .

۳۲-۶ مسأله (۶-۳۱) را برای $2\omega_y = 3\omega_x$ تکرار کنید .

۳۳-۶ دو نوسان هماهنگ عمود بر یکدیگر با معادلات زیر توصیف شده اند :

$$x = 12 \cos(4\pi t), \quad y = 12 \cos\left(8\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

منحنی لیسازوی این حرکت را رسم کنید .

۳۴-۶ منحنیهای لیسازوی حرکتیهای زیر را رسم کنید .

$$x = 4 \sin 2\omega t \quad \text{و} \quad y = \cos 2\omega t \quad (\text{الف})$$

$$x = 5 \cos \omega t \quad \text{و} \quad y = 5 \cos 2\omega t \quad (\text{ب})$$

۳۵-۶ منحنیهای لیسازوی حرکتیهای زیر را رسم کنید .

$$x = 5 \sin \omega t \quad \text{و} \quad y = 5 \cos 2\omega t \quad (\text{الف})$$

$$x = 5 \cos(2\omega t) \quad \text{و} \quad y = 5 \cos(2\omega t + \pi/4) \quad (\text{ب})$$

۳۶-۶ منحنیهای لیسازو را برای مورد $\phi_x = \phi_y$ و $4\omega_x = 3\omega_y$ رسم کنید .

۳۷-۶ منحنیهای لیسازو را برای مورد $\phi_x = \phi_y$ و $3\omega_x = 4\omega_y$ رسم کنید .

۳۸-۶ یک نوسانگر هماهنگ ناهمسانگرد دو بُعدی را که انرژی پتانسیل آن به صورت

$$V(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

است در نظر بگیرید . معادلات حرکت را با در نظر داشتن این که جرم ذره برابر با واحد

است حل کنید . اگر $\mathbf{r}_0 = a_2 \mathbf{i}$ و $\mathbf{v}_0 = a_1 \mathbf{i}$ باشد ، مدار نمایشگر حرکت را رسم کنید .

۳۹-۶ یک نوسانگر هماهنگ همسانگرد دو بُعدی به جرم m با معادلات

$$x(t) = A \cos \omega t \quad \text{و} \quad y(t) = B \sin \omega t$$

نمایش داده می شود . نشان دهید که تحت شرایط اولیه و دستگاه مختصات مناسبی ،

تکانه زاویه L و انرژی E عبارتند از

$$L = \sqrt{km} AB \quad \text{و} \quad E = \frac{1}{2}k(A^2 + B^2)$$

عبارت r بر حسب L, E, k, ω را پیدا کنید

۴۰-۶ معادله (۶-۱۲۳) را برای نوسانگر همسانگرد سه بُعدی به دست آورید .

۴۱-۶ حرکت یک نوسانگر سه بُعدی را که حرکت آن در جعبه ای به ابعاد $2A \times 2B \times 2C$ محدود است مورد بحث قرار دهید .

۴۲-۶ معادله (۶-۱۳۱) را به شکل (۶-۱۳۳) بنویسید .

۴۳-۶ با شروع از معادلات (۶-۱۳۹) و (۶-۱۴۰) ، معادلات (۶-۱۴۱) تا (۶-۱۴۴) را به دست آورید

۴۴-۶ نشان دهید که برای مقادیر بزرگ t ، معادله (۶-۱۴۵) به معادله (۶-۱۴۶) و معادله (۶-۱۴۳) به معادله (۶-۱۴۷) کاهش می یابد .

۴۵-۶ با شروع از معادله های (۶-۱۴۳) و (۶-۱۴۴) ، معادله (۶-۱۵۰) را به دست آورید .

۴۶-۶ با شروع از معادله (۶-۱۵۰) ، معادله های (۶-۱۵۳) و (۶-۱۵۴) را به دست آورید .

۴۷-۶ عبارتی برای x_m شبیه به عبارت داده شده در معادله (۶-۱۵۳) ، ولی با حفظ یک جمله دیگر در بسط (۶-۱۵۲) ، به دست آورید .

۴۸-۶ پرتابه ای در نظر بگیرید که با سرعت $v_0 (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$ ، در حضور بادی با سرعت

$v_w = v_{wx}$ و مقاومت هوایی متناسب با سرعت ، از مبدأ پرتاب می شود . معادلات

حرکت را برای مختصات x, y, z و بر حسب زمان t حل کنید . فرض کنید پرتابه در

نقطه (x_1, y_1) به زمین باز می گردد . این مکان را تاجمله فقط مرتبه اول بر حسب b پیدا

کنید . نشان دهید که اگر از مقاومت هوا چشم پوشی کنیم ، فاصله هدف به نسبت

$\frac{4b v_{z0}}{3mg}$ تغییر می کند ، و باد باعث تغییر دیگر در جهت y به اندازه

$\frac{2b v_w v_{0z}^2}{mg^2}$ می شود .

۴۹-۶ پرتابه ای از مبدأ با سرعت v_0 تحت زاویه θ با محور X ، در صفحه XZ پرتاب می شود و

به هدف در $(x_0, 0)$ برخورد می کند . تصحیح مرتبه اول زاویه پرتاب را ، که از

مقاومت هوا ناشی می شود ، پیدا کنید .

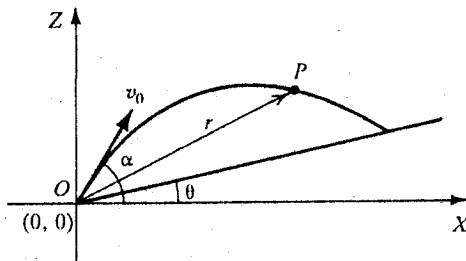
۵۰-۶ تفنگی گلوله ای را با سرعت v_{01} پرتاب می کند . برد گلوله را بر حسب زاویه پرتاب α

محاسبه کنید . از شکل (مسأله ۶-۵۰) نشان دهید که

$$r = \frac{2v_0^2}{g \cos^2 \theta} \cos \alpha \sin(\alpha - \theta)$$

$$(R_\theta)_{\max} = \frac{v_0^2}{g(1 + \sin \theta)}$$

برد بیشینه R_θ در جهتی است که با افق زاویه θ می سازد .



شکل (مسأله ۶-۵۰)

۵۱-۶ تفنگی در پای تپه ای نصب شده است و گلوله ای را که پرتاب می کند بطور عمود به تپه برخورد می کند . اگر زاویه تپه با افق ϕ باشد ، زاویه ای را که لوله تفنگ با تپه می سازد پیدا کنید .

۵۲-۶ دو پرتابه یکی با سرعت v_{11} و زاویه θ_1 و دیگری با سرعت v_{12} و زاویه θ_2 ($\theta_1 > \theta_2$) پرتاب شده اند . نشان دهید که اگر قرار باشد در هوا به یکدیگر برخورد کنند ، باید بازه زمانی بین دو پرتاب برابر باشد با

$$\frac{2v_{01}v_{02} \sin(\theta_1 - \theta_2)}{g(v_{01} \cos \theta_1 + v_{02} \cos \theta_2)}$$

۵۳-۶ پرتابه ای با سرعت v_0 پرتاب شده و از دو نقطه که هر دو در ارتفاع h بالای سطح افق هستند عبور می کند . نشان دهید که اگر زاویه پرتاب برای برد بیشینه تنظیم شده باشد ، فاصله افقی این دو نقطه عبارت است از

$$d = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 - 4gh}$$

۵۴-۶ در سقوط یک قطره کروی مایعی با چگالی ρ_0 ، نیروی مقاومتی با حرکت مقابله می کند که متناسب است با (الف) سطح قطره ، (ب) چگالی محیط ρ ، (پ) توان n ام سرعت . نشان دهید که سرعت نهایی با ریشه n ام شعاع قطره متناسب است .

۵۵-۶ معادله های (۶-۱۵۶) ، (۶-۱۵۷) ، و (۶-۱۵۸) را حل کنید .

منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر

- ARTHUR, W., and FENSTER, S. K., *Mechanics*, Chapters 2, 5, and 7. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1969.
- DAVIS, A. DOUGLAS, *Classical Mechanics*, Chapters 5 and 6. New York: Academic Press, Inc., 1986.
- FOWLES, G. R., *Analytical Mechanics*, Chapters 2 and 4. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1962.
- FRENCH, A. P., *Vibrations and Waves*, Chapter 2. New York: W. W. Norton and Co., Inc., 1971.
- HAUSER, W., *Introduction to the Principles of Mechanics*, Chapter 2. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1965.
- KITTEL, C., KNIGHT, W. D., and RUDERMAN, M. A., *Mechanics*, Berkeley Physics Course, Volume 1, Chapter 5. New York: McGraw-Hill Book Co., 1965.
- ROSSBERG, K., *Analytical Mechanics*, Chapters 1 and 2. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1983.
- SYMON, K. R., *Mechanics*, 3rd ed., Chapter 3. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1971.

نیروی مرکزی

۱-۷ نیروی مرکزی و انرژی پتانسیل

نیروی مرکزی وارد به یک ذره نیرویی است که همیشه امتداد آن از نقطه ثابتی به نام مرکز (یا منشأ) نیرو بگذرد. به علاوه، اگر برهم کنش بین هر دو جسم با نیروی مرکزی نمایش داده می شود، به خاطر این است که این نیرو در امتداد خط واصل بین مرکزهای اجسام قرار دارد. بنابراین نیروی مرکزی وارد به یک ذره واقع در فاصله r از مرکز نیرو می تواند توسط

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\hat{\mathbf{r}} \quad (1-7)$$

نمایش داده شود که $\hat{\mathbf{r}}$ بردار یکه شعاعی است. این شکل قانون نیرو می رساند که تکانه زاویه ای ذره پایسته یا ناورد است. از سوی دیگر اگر نیروی مرکزی همسانگرد باشد، یعنی

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\hat{\mathbf{r}} \quad (2-7)$$

نیروی مرکزی پایستار خواهد بود؛ در نتیجه انرژی مکانیکی ذره ثابت است. در این فصل بحثمان را به این شکل اخیر نیروی مرکزی معطوف می کنیم. در نتیجه هم تکانه زاویه ای و هم انرژی پایسته خواهد بود. این قوانین پایستگی نتیجه تقارن شعاعی در این مورد است. چون بردار یکه شعاعی می تواند به صورت $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ نوشته شود، می توانیم معادله (۲-۷) را به شکل

زیر بنویسیم

$$\mathbf{F} = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (۳-۷)$$

اهمیت نیروهای مرکزی همسانگرد وقتی آشکار می شود که می بینیم نیروهای زیادی در طبیعت از این نوعند. به عنوان مثال، (۱) نیروهای گرانشی (جاذبه) که حرکت سیارات را توصیف می کنند، (۲) نیروهای کولنی یا الکتریکی (جاذب و دافع) که، علاوه بر دیگر کاربردها، منجر به فرمول بندی مدل‌های رادرفورد و بوهرا می شوند. (۳) نیروهای بلندبرد بین مولکولی به نام *نیروهای واندروالس*، که با

$$F(r) = \frac{K_1}{r^{13}} - \frac{K_2}{r^7} \quad (۴-۷)$$

با K_1 و K_2 ثابت، توصیف می شوند [تابع پتانسیلی که به تابع نیروی (۴-۷) منجر می شود پتانسیل لندارد - جونز نامیده می شود]، (۴) نیروهای حاکم بر اتمها در بلورهای مکعبی شکل که مانند نوسانگرهای هماهنگ سه بُعدی رفتار می کنند، و (۵) نیروهای هسته‌ای از نوع یوکاوا که با

$$F(r) = \left(\frac{K_1}{r} - \frac{K_2}{r^2} \right) e^{-K_3 r} \quad (۵-۷)$$

نمایش داده می شوند و در آنها K_1 ، K_2 ، K_3 ثابتند، نیروهای مرکزی اند.

گفتیم که نیروهای مرکزی وابسته به مکان و پایستارند. در نتیجه می توانیم برای چنین نیروهایی یک تابع انرژی پتانسیل $V(r)$ وارد کنیم. اما این در صورتی ممکن خواهد بود که کرل نیرو صفر باشد، یعنی

$$\text{Curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = 0 \quad (۶-۷)$$

با نوشتن معادله (۳-۷) به شکل مؤلفه‌ای

$$\mathbf{F} = \hat{i}F_x + \hat{j}F_y + \hat{k}F_z = \frac{F(r)}{r} (\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z) \quad (۷-۷)$$

خواهیم داشت

$$F_x = \frac{x}{r} F(r), \quad F_y = \frac{y}{r} F(r), \quad F_z = \frac{z}{r} F(r) \quad (۸-۷)$$

می توانیم معادله (۶-۷) را به صورت زیر بنویسیم

$$\nabla \times \mathbf{F} = \hat{i} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = 0 \quad (9-7)$$

برای این که این رابطه درست باشد باید هر کدام از سه عبارت مؤلفه ای صفر باشد. به عنوان مثال،

$$(\nabla \times \mathbf{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \quad (10-7)$$

باید صفر باشد. با استفاده از معادله (۸-۷) خواهیم داشت

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{r} F(r) \right) = z \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{F(r)}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial y} = z \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{F(r)}{r} \right) \quad (11-7 \text{ الف})$$

به همین نحو

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = y \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{F(r)}{r} \right) \quad (11-7 \text{ ب})$$

قرار دادن معادلات (۱۱-۷) در معادله (۱۰-۷) می دهد

$$(\nabla \times \mathbf{F})_x = \left(z \frac{\partial r}{\partial y} - y \frac{\partial r}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{F(r)}{r} \right) \quad (12-7)$$

از رابطه $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ داریم

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad (13-7)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \text{و} \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

این روابط را در معادله (۱۲-۷) می بریم و نتیجه می گیریم

$$(\nabla \times \mathbf{F})_x = 0 \quad (14-7 \text{ الف})$$

به همین روش می توانیم نشان دهیم

$$(\nabla \times \mathbf{F})_y = 0 \quad \text{و} \quad (\nabla \times \mathbf{F})_z = 0 \quad (14-7 \text{ ب})$$

بنابراین برای نیروی مرکزی \mathbf{F} داریم

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \quad (15-7)$$

که می‌رساند نیروی مرکزی پایستار است و می‌توان به آن یک تابع انرژی پتانسیل وابسته کرد بطوری که

$$\mathbf{F}(r) = -\text{grad } V(r) = -\nabla V(r) \quad (۱۶-۷)$$

در مختصات کروی، عملگر گرادیان ∇ ، معادله (۶-۶۳)، عبارت است از

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (۱۷-۷)$$

چون تابع انرژی پتانسیل V تابع فقط بزرگی r است، یعنی $V = V(r)$ ، بستگی به θ و ϕ در معادله (۱۶-۷) وارد نمی‌شود، بنابراین

$$\mathbf{F} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} \quad (۱۸-۷)$$

یا بزرگی F برابر است با

$$F = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad (۱۹-۷)$$

می‌توانیم یک قدم جلوتر برویم و رابطهٔ وارون را به صورت زیر بنویسیم

$$V = V(r) = -\int_r^r F(r) dr \quad (۲۰-۷)$$

۲-۷ حرکت در میدان نیروی مرکزی به عنوان يك مسأله يك جسمی

یک سیستم متزوی شامل دو جسم که با فاصله $r = |\mathbf{r}|$ از یکدیگر جدا هستند و واکنش بین آنها با یک نیروی مرکزی $F(r)$ توصیف می‌شود در نظر بگیریم. اگر این اجسام تقارن کروی داشته باشند یا جرمهای نقطه‌ای باشند، سیستم می‌تواند با شش کمیت یا مختصه توصیف شود. به این ترتیب اگر \mathbf{r}_1 و \mathbf{r}_2 دو بردار مکانی ذرات به جرمهای m_1 و m_2 باشند، شش مؤلفهٔ این بردارهای مکانی سیستم را کاملاً توصیف می‌کنند. معادلات حرکت دو ذره عبارتند از

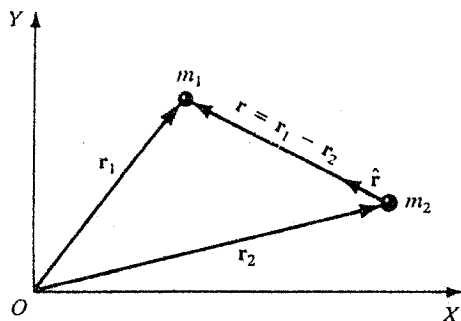
$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = F(r) \hat{\mathbf{r}} \quad (۲۱-۷ الف)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -F(r) \hat{\mathbf{r}} \quad (۲۱-۷ ب)$$

که در آنها ، همان طور که در شکل (۷-۱) نشان داده شده است ،

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (۷-۲۲)$$

اگر $F(r) > 0$ باشد نیروی بین دو ذره از نوع جاذبه ، و اگر $F(r) < 0$ باشد این نیرو دافعه است . معادلات (۷-۲۱) به وسیله روابط (۷-۲۲) جفت شده هستند ، یعنی ، رفتار \mathbf{r}_2 و \mathbf{r}_1 بستگی به بزرگی \mathbf{r} دارد .



شکل (۷-۱) : سیستم شامل دو ذره به جرمهای m_1 و m_2 واقع در \mathbf{r}_1 و \mathbf{r}_2 از مبدأ

به جای توصیف سیستم بالا با شش مختصه \mathbf{r}_1 و \mathbf{r}_2 ، راحت تر است که سیستم را با شش مختصه دیگر توصیف کنیم ، سه مختصه برای توصیف مرکز جرم \mathbf{R} و سه مختصه برای توصیف مکان نسبی \mathbf{r} ، یعنی

$$(m_1 + m_2)\mathbf{R} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 \quad (۷-۲۳)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (۷-۲۴)$$

حرکت مرکز جرم \mathbf{R} حرکت نسبی یکی از ذرات نسبت به دیگری را ، مطابق شکل (۷-۲) ، توصیف می کند . چون نیروی خارجی به سیستم وارد نمی شود ، یعنی $\dot{\mathbf{R}} = 0$ ، حرکت مرکز جرم حرکت انتقالی یکنواخت است و بنابراین سودی در بر ندارد .

اکنون به پیدا کردن حرکتی که با \mathbf{r} توصیف می شود می پردازیم . معادله (۷-۲۱ الف)

را بر m_1 و معادله (۷-۲۱ ب) را بر m_2 تقسیم می کنیم و از هم کم می کنیم

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) F(r) \hat{\mathbf{f}}$$

که بعد از مرتب سازی می دهد

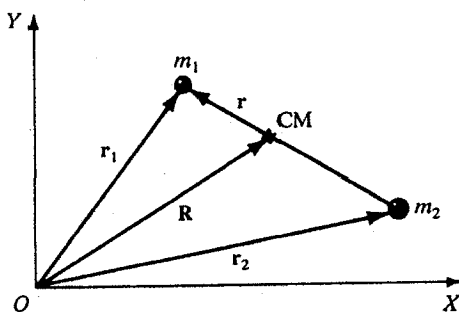
$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2) = F(r) \hat{\mathbf{r}} \quad (۲۵-۷) \text{ الف}$$

یا

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = F(r) \hat{\mathbf{r}} \quad (۲۵-۷) \text{ ب}$$

که در آنها

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (۲۶-۷)$$



شکل (۷-۲) : توصیف یک سیستم دو ذره‌ای با شش مختصه: سه مختصه مرکز جرم را

با R ، و سه مختصه مکان نسبی را با r توصیف می کند

و μ جرم کاهش یافته نامیده می شود. معادله (۷-۲۵) ب) به معادله (۷-۲۱ الف) یا (ب) شبیه است، که حرکت یک تک ذره به جرم m_1 یا m_2 تحت تأثیر نیروی مرکزی $F(r)$ را توصیف می کند. در معادله (۷-۲۵) ب) به جای m جرم کاهش یافته μ قرار گرفته است. به این ترتیب معادله (۷-۲۵) ب) می تواند با آنچه که در شکل (۷-۳) نمایش داده شده است توضیح داده شود. یک مسأله دو جسمی به یک مسأله یک جسمی هم ارز تبدیل شده است، که در آن باید حرکت ذره‌ای به جرم μ را در یک میدان نیروی مرکزی $F(r)$ تعیین کنیم. (توجه: یک مسأله سه جسمی، یا بیشتر، نمی تواند، آن طور که در این جا انجام داده ایم، به مسأله یک جسمی تبدیل شود. در نتیجه جوابهای چنین مسائلی شناخته شده نیستند).

اکنون می توانیم از معادله (۷-۲۵) ب)، $r(t)$ و سپس r_1 و r_2 را با به کارگیری معادلات

(۲۳-۷) و (۲۴-۷) ، یعنی ،

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (۲۷-۷)$$

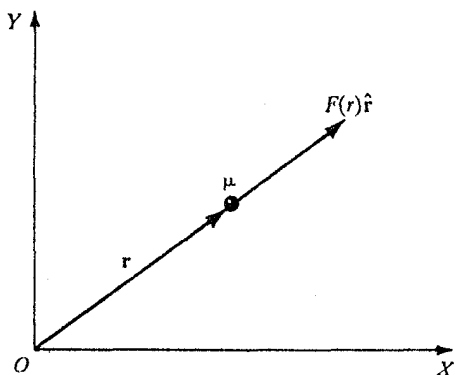
$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (۲۸-۷)$$

پیدا کنیم ، همان طور که قبلاً گفتیم ، مرکز جرم با سرعت یکنواخت حرکت می کند ، لذا

$$\ddot{\mathbf{R}} = 0 \quad (۲۹-۷)$$

که جواب آن عبارت است از

$$\mathbf{R} = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{R}_0 \quad (۳۰-۷)$$

شکل (۳-۷) : سیستم دوجسمی که به وسیله یک مسأله یک جسمی هم‌ارز به جرم μ و مختصه نسبی Γ توصیف می‌شودبا انتخاب شرایط اولیه به نحوی که در $t = 0$ داشته باشیم $\mathbf{v}_0 = 0$ و $\mathbf{R}_0 = 0$ ، خواهیم داشت $\mathbf{R} \equiv 0$ ، یعنی ، مبدأ بر مرکز جرم منطبق است ، و معادلات (۲۷-۷) و (۲۸-۷) به

$$\mathbf{r}_1 = + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (۳۱-۷)$$

$$\mathbf{r}_2 = - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (۳۲-۷)$$

کاهش می‌یابند ، که \mathbf{r}_1 و \mathbf{r}_2 ، همان طور که در شکل (۴-۷) نشان داده شده است ، از مرکز

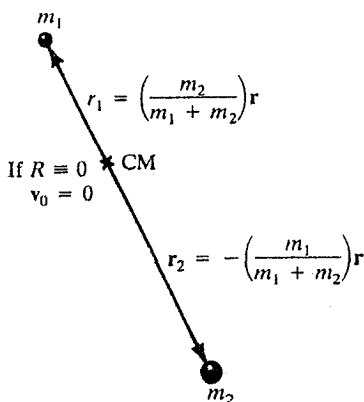
جرم اندازه گیری می شوند .

بالاخره ، باید یادآوری کرد که ، اگر جرم یکی از دو ذره خیلی بزرگ باشد ، یعنی $m_2 \gg m_1$ ، داریم

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \approx \frac{1}{m_1}$$

و معادله (۷-۲۵) به

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}} = F(r) \hat{\mathbf{r}}$$



شکل (۷-۴) : مکان دو ذره سیستم از مرکز جرم که در مبدأ ساکن است

کاهش می یابد که بیان می دارد که اگر $m_2 \gg m_1$ باشد (یعنی ، مانند این که m_2 در مقایسه با m_1 بی نهایت باشد) مرکز جرم تقریباً روی m_2 قرار دارد ، $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \cong \mathbf{r}_1$. در نتیجه مسأله می تواند همانند مسأله یک جسمی مورد بررسی قرار گیرد . بنابراین ، هر وقت m را به جای μ به کار می بریم ، نشان می دهیم که جرم دیگر خیلی بزرگ است ، در حالی که به کارگیری μ نشان می دهد که یا دو جرم با یکدیگر قابل مقایسه اند ، یا دقت بیشتری در محاسبات مورد نظر ماست .

وقتی $\mathbf{r}(t)$ حساب شد ، می توانیم $\mathbf{r}_1(t)$ و $\mathbf{r}_2(t)$ را از معادلات (۷-۳۱) و (۷-۳۲) به دست آوریم . بیشتر اوقات منظور ما مسیر یا مدار یک ذره نسبت به ذره دیگر است . در نتیجه ، نیازی به پیدا کردن $\mathbf{r}_1(t)$ و $\mathbf{r}_2(t)$ نداریم .

۳-۷ خواص عمومی حرکت در میدان نیروی مرکزی

معادله (۷-۲۵) ب، یعنی

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = F(r) \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{ب } 25-7)$$

همان طور که در شکل (۷-۳) نشان داده شده است، حرکت یک ذره به جرم μ را توصیف می‌کند و تنها وقتی می‌تواند برای $\mathbf{r}(t)$ حل شود که شکل نیروی مرکزی $F(r)$ را بدانیم. به علاوه، این معادله یک معادله برداری است، و لذا سه مؤلفه باید در نظر گرفته شود. اگر بدانیم که نیرو مرکزی است، حتی اگر شکل واقعی نیروی مرکزی را ندانیم، می‌توانیم بدون حل واقعی این معادلات خیلی چیزها درباره حرکت یاد بگیریم. خواص جواب عمومی معادله (۷-۲۵) برپایه قوانین پایستگی استوار است.

حرکت در میدان نیروی مرکزی به یک صفحه محدود می‌شود

در وضعیت مورد بررسی، نیروی مرکزی $\hat{\mathbf{r}} F(r)$ در امتداد \mathbf{r} است، در نتیجه نمی‌تواند روی جرم کاهش یافته μ گشتاور τ ایجاد کند. این بدان معنی است که تکانه زاویه‌ای L جرم μ نسبت به مرکز نیرو ثابت است، که در زیر ثابت می‌کنیم. اگر \mathbf{p} تکانه خطی ذره‌ای به جرم μ باشد، گشتاور نیروی τ نسبت به مرکز نیرو عبارت است از

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \times m\mathbf{v} \end{aligned} \quad (33-7)$$

اما

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad \text{و} \quad \mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$$

در نتیجه

$$\tau = \frac{dL}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (34-7)$$

چون

$$|\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = |\mathbf{r}| |\mathbf{F}| \sin 0^\circ = 0$$

خواهیم داشت

$$\tau = \frac{dL}{dt} = 0 \quad (۳۵-۷)$$

یعنی

$$L = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{constant} \quad (۳۶-۷)$$

بنابراین ، اگر تکانه زاویه ای L جرم μ ثابت باشد ، بزرگی و جهت آن در فضا ثابت است . در نتیجه ، بنا بر تعریف ضرب برداری ، اگر جهت L ثابت است ، بردارهای \mathbf{r} و \mathbf{p} باید در یک صفحه عمود بر L قرار داشته باشند . یعنی ، حرکت ذره به جرم μ به یک صفحه عمود بر L محدود می شود .

به این ترتیب ، اگر تکانه زاویه ای ذره ثابت باشد ، حرکت ذره ، همان طور که در شکل (۵-۷) نمایش داده شده است ، به یک صفحه محدود می شود . مسأله به یک حرکت دوبعدی ، به جای سه بعدی ، ساده شده است . اگر این صفحه به عنوان صفحه XY انتخاب شود ، حرکت می تواند با مختصات x و y توصیف شود . راحت تر است که مختصات قطبی تخت (r, θ) را به کار ببریم ، و درچنین مختصاتی ، معادله حرکت (۷-۲۵ ب) ، یعنی ،

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = F(r) \hat{\mathbf{r}} \quad (۷-۲۵ ب)$$

بعد از جایگزینی $\ddot{\mathbf{r}}$ به وسیله \mathbf{a} و استفاده از معادله (۶-۳۰) به شکل

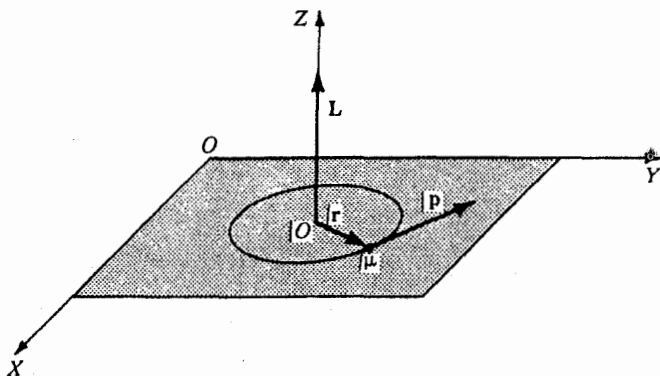
$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + \mu(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}} = F(r)\hat{\mathbf{r}} \quad (۳۷-۷)$$

یا ، با برابر قرار دادن ضرایب $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ در دو طرف ، به شکل

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r) \quad (۳۸-۷)$$

$$\mu(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \quad (۳۹-۷)$$

در می آید . از معادلات فوق برای رسیدن به بعضی خواص مهم حرکت در میدان نیروی مرکزی استفاده خواهیم کرد .



شکل (۵-۷) : حرکت یک ذره در اثر نیروی مرکزی به صفحه XY عمود بر L محدود است

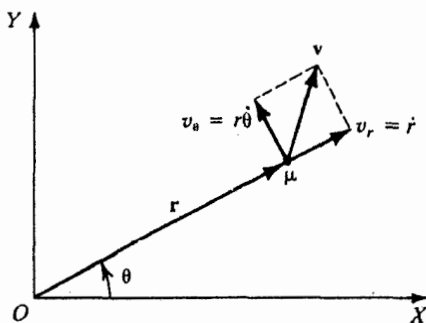
تکانه زاویه‌ای و انرژی ثابت‌های حرکتند

برای رسیدن به نتایج قبلی از این واقعیت استفاده کردیم که L ثابت است در حرکت در نیروی مرکزی دو ثابت دیگر وجود دارد : (۱) بزرگی تکانه زاویه‌ای L ، یعنی $L = |L|$ ؛ و (۲) انرژی کل E سیستم. هر کدام از این ثابتها، L و E ، انتگرال حرکت (یا انتگرال اولیه حرکت) نامیده می‌شود. برای حل مسأله حرکت در نیروی مرکزی، به کارگیری این ثابتها خیلی راحت‌تر از حل معادلات (۷-۳۸) و (۷-۳۹) است.

با استفاده از شکل (۷-۶)، تکانه زاویه‌ای ذره‌ای به جرم μ در فاصله r از مرکز نیرو

عبارت است از

$$L = r p_{\theta} = r \mu v_{\theta} = r \mu (r \dot{\theta})$$



شکل (۶-۷) : توصیف حرکت یک ذره در مختصات قطبی تخت

یعنی ، چون L ثابت است ،

$$L = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{constant} \quad (40-7)$$

به روش دیگر ، می توانیم از معادله (۳۹-۷) استفاده کنیم و نشان دهیم $\frac{dL}{dt} = 0$ و در نتیجه ، مانند (۴۰-۷) ، $L = \text{constant}$.

یادآوری کنیم که گفتیم حرکت مرکز جرم یکنواخت است ، و در نتیجه فایده چندانی ندارد . یک راه دیگر برای بیان این نکته این است که بگوییم پایداری تکانه خطی (با این که ثابت حرکت است) خیلی به توصیف حرکت نمی افزاید . انتگرال اولیه باقی مانده حرکت پایداری انرژی کل E است . چون سیستم اتلافی نیست و نیروهای مرکزی پایستارند ، انرژی کل ثابت است ، یعنی

$$E = K + V(r) = \text{constant} \quad (41-7)$$

که در آن $V(r) = - \int F(r) \cdot dr$ ، و E از شرایط اولیه تعیین می شود . با استفاده از شکل (۶-۷) داریم

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2 + V(r) = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + V(r) \quad (42-7)$$

با قرار دادن $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}$ از معادله (۴۰-۷) در معادله (۴۲-۷) ،

$$E = \frac{1}{2} \left(\mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{\mu r^2} \right) + V(r) \quad (43-7)$$

توجه کنیم که عبارت E شامل θ نیست .

می توانیم با شروع از معادله (۳۸-۷) به قانون پایداری انرژی برسیم . بعد از قرار دادن به جای $\dot{\theta}$ از معادله (۴۰-۷) در معادله (۳۸-۷) ،

$$\mu \ddot{r} - \frac{L^2}{\mu r^3} = F(r) \quad (44-7)$$

دو طرف را در \dot{r} ضرب کرده و خواهیم داشت

$$\mu \ddot{r} \dot{r} - \frac{L^2}{\mu r^3} \dot{r} = F(r) \dot{r} \quad (45-7)$$

که طرف چپ برابر است با

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \right) \quad (46-7)$$

و طرف راست می تواند به صورت

$$F(r)\dot{r} = -\frac{dV(r)}{dr} \frac{dr}{dt} = -\frac{dV(r)}{dt} \quad (۴۷-۷)$$

نوشته شود. در نتیجه معادله (۴۵-۷) به شکل زیر در می آید

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) \right) = 0 \quad (۴۸-۷)$$

یا

$$\frac{1}{2} \left(\mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{\mu r^2} \right) + V(r) = \text{constant} = E \quad (۴۹-۷)$$

که همان نتیجه به دست آمده در معادله (۴۳-۷) است. جمله اول طرف چپ سهم شعاعی در انرژی جنبشی، و جمله دوم سهم تکانه زاویه ای در انرژی پتانسیل است.

قانون مساحت‌های برابر

نشان دادیم که برای ذره ای که در یک میدان نیروی مرکزی $F(r)$ ، که می تواند هر تابعی از r باشد، حرکت می کند، تکانه زاویه ای L سیستم ثابت است، یعنی، هم از نظر اندازه و هم از نظر جهت ثابت است. یک نتیجه مهم این واقعیت این است که بردار مکانی \mathbf{r} در بازه های زمانی مساوی، همان طور که در زیر نشان خواهیم داد، مساحت‌های مساوی جارو می کند.

جسمی به جرم μ در فاصله $r(\theta)$ از مرکز نیروی O در زمان t ، مطابق شکل (۷-۷)، در نظر بگیریم. در بازه زمانی dt ، جرم از P به Q می رود و در Q فاصله آن از O ، $r(\theta + d\theta)$ است. مساحت dA که بردار مکانی \mathbf{r} در بازه زمانی dt جارو می کند (چون $d\theta$ کوچک است، ds نیز کوچک است و در نتیجه تقریباً یک خط راست است) برابر است با مساحت مثلث OPQ ، یعنی

$$dA = \frac{1}{2} r(r d\theta) = \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad (۵۰-۷)$$

یا

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

با قرار دادن $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}$ از معادله (۷-۴۰) خواهیم داشت

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2\mu} = \text{constant} \quad (۷-۵۱)$$

که بیان می‌دارد سرعت سطحی ثابت است، و این مسأله برای هر ذره‌ای که تحت اثر یک نیروی مرکزی حرکت کند صادق است. معادله (۷-۵۱) بیانی است از قانون دوم کپلر برای حرکت سیارات، که قانون مساحت‌های برابر نیز نامیده می‌شود. علاوه بر این، اگر حرکت تناوبی با زمان تناوب T باشد، می‌توانیم از معادله (۷-۵۱) انتگرال‌گیری کنیم و نتیجه بگیریم

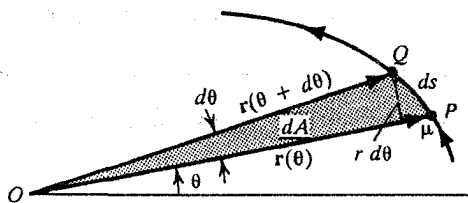
$$\int dA = \int_0^T \frac{L}{2\mu} dt$$

یا

$$A = \frac{L}{2\mu} T \quad (۷-۵۲)$$

چون قانون مساحت‌های برابر نتیجه‌ای از ثابت بودن L است، می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2 \quad (۷-۵۳)$$



شکل (۷-۷): سطح dA که به وسیله بردار مکانی \mathbf{r} در زمان dt جارو شده است

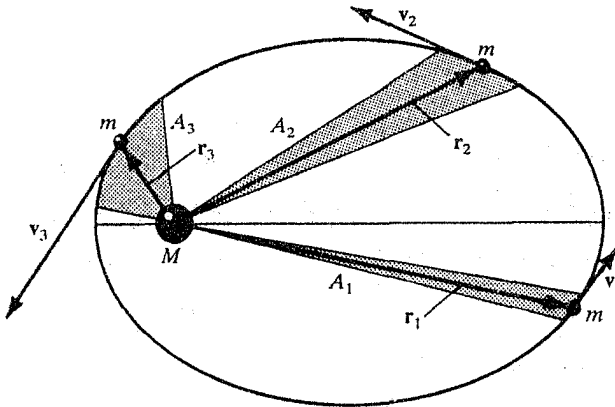
با اعمال این رابطه به وضعیتی که در شکل (۷-۸) نشان داده شده است، و در آن جرم m روی مداری دور جرم M ، مانند حرکت زمین به دور خورشید، حرکت می‌کند، می‌توانیم بنویسیم $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ ، که v سرعت ذره است، در نتیجه

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{v}_3 \quad (۷-۵۴)$$

برای این که سرعت سطحی ثابت باشد، اگر r افزایش یابد، همان طور که در شکل (۷-۸) نشان داده شده است، v کاهش می‌یابد، بطوری که

$$A_1 = A_2 = A_3$$

(۵۵-۷)



شکل (۸-۷) قانون دوم کپلر ، یعنی قانون مساحتهاى برابر : $A_1 = A_2 = A_3$

۲-۷ معادلات حرکت

اکنون به معادلات (۴۰-۷) و (۴۳-۷) ، یعنی ،

$$L = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{constant} \quad (۴۰-۷)$$

$$E = \frac{1}{2} \left(\mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{\mu r^2} \right) + V(r) \quad (۴۳-۷)$$

برگردیم . اگر $V(r)$ را بدانیم ، این معادلات حرکت سیستم را توصیف می کنند و می توان با حل آنها به ترتیب $\theta(t)$ و $r(t)$ ، را پیدا کرد . مجموعه $[r(t), \theta(t)]$ مدار ذره را به شکل پارامتری ، که t پارامتر آن است ، توصیف می کند . پیشتر اوقات ، به پیدا کردن معادله مدار به شکل رابطه ای بین r و θ ، یعنی ، $r = r(\theta)$ ، علاقه مندیم . معادلات را طوری ترتیب می دهیم که بتوانیم جوابی به این شکل پیدا کنیم . به نظر می رسد که حل معادلات (۳۸-۷) و (۳۹-۷) را در مختصات قطبی تخت شروع کرده ، و در یک جایی در بین راه آن را رها کرده ایم ، ولی این طور نیست . اگر دقیقتر نگاه کنیم ، معادلات (۴۰-۷) و (۴۳-۷) ، به ترتیب ، پیامدهای مستقیم معادلات (۳۹-۷) و (۳۸-۷) هستند .

می‌توانیم معادله (۷-۳۸) را ، با توجه به $\mu = \frac{Mm}{M+m}$ و $M \gg \mu$ در نتیجه $\mu \cong m$ ،
به صورت زیر بنویسیم

$$m\ddot{r} = F(r) + mr\dot{\theta}^2 \quad (۵۶-۷)$$

[این تقریب تا وقتی که نیاز به دقت زیاد نداشته باشیم کافی است . به این ترتیب کار را با
گذاردن m به جای μ شروع می‌کنیم ، مگر این که شرایط مسأله راه دیگری را تحمیل کرده
باشد] . اگر در این معادله به جای θ [از معادله (۷-۴۰)] $\frac{L}{mr^2}$ را قرار دهیم و جمله‌ای به نام
نیروی مؤثر ، F_{eff} ، وارد کنیم خواهیم داشت

$$F_{\text{eff}}(r) = F(r) + mr\dot{\theta}^2 = F(r) + \frac{L^2}{mr^3} \quad (۵۷-۷)$$

که در آن $mr\dot{\theta}^2 (= \frac{L^2}{mr^3})$ به عنوان یک نیروی دیگر - یک نیروی کاذب (زیرا صرفاً یک
حاصل ضرب جرم در شتاب است) - در نظر گرفته می‌شود و معمولاً نیروی گریز از مرکز ،
 F_{cent} ، نامیده می‌شود

$$F_{\text{cent}} = mr\dot{\theta}^2 = \frac{L^2}{mr^3} \quad (۵۸-۷)$$

به این ترتیب معادله (۷-۵۶) به

$$m\ddot{r} = F_{\text{eff}}(r) \quad (۵۹-۷)$$

کاهش می‌یابد و می‌تواند به عنوان معادله‌ای در یک بُعد مورد بررسی قرار گیرد .
مانند قبل ، می‌توانیم تعریف نیروی مؤثر ، معادله (۷-۵۷) ، را برای وازد کردن یک
پتانسیل مؤثر ، $V_{\text{eff}}(r)$ ، به کار بگیریم ،

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(r) &= \int_r^{r_s} F_{\text{eff}}(r) dr = \int_r^{r_s} \left(F(r) + \frac{L^2}{mr^3} \right) dr \\ &= \int_r^{r_s} F(r) dr + \frac{L^2}{m} \int_r^{r_s} \frac{dr}{r^3} \end{aligned}$$

با فرض $r_s = \infty$ خواهیم داشت

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \quad (۶۰-۷)$$

به این ترتیب پتانسیل مؤثر عبارت است از مجموع پتانسیل حقیقی و یک جمله اضافی به نام پتانسیل گریز از مرکز یا سد گریز از مرکز به صورت

$$V_{\text{cent}} = \frac{L^2}{2mr^2} \quad (۶۱-۷)$$

در آوردن معادله (۶۱-۷) به شکل معادله (۵۹-۷) معنی عمیق تری دارد. با به کارگیری (۵۹-۷) حرکت شعاعی را آن طور که از چارچوب مرجع چرخان دیده می شود مشاهده می کنیم. در این چارچوب چرخان، نیرو برابر با $F_{\text{eff}}(r)$ به نظر می آید. طبیعت مرکزی بودن این نیرو است که به پایداری انرژی، معادله (۶۱-۷)، می انجامد. از حل معادله (۶۱-۷) برای \dot{r} (با به کارگیری m به جای μ) داریم

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \right)} \quad (۶۲-۷)$$

با انتگرال گیری از این معادله خواهیم داشت

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}} \quad (۶۳-۷)$$

که $t(r)$ را به دست می دهد، اما می توان با مرتب سازی $r(t)$ را از آن به دست آورد. وقتی $t(t)$ پیدا شد، می توان با انتگرال گیری از معادله (۶۳-۷)، $\theta(t)$ را به دست آورد، یعنی،

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2} \quad (۶۴-۷)$$

از انتگرال گیری این معادله نتیجه می شود

$$\theta = \theta_0 + \int_0^t \frac{L}{mr^2} dt \quad (۶۵-۷)$$

می توانیم بگوییم که معادلات (۶۳-۷) و (۶۵-۷) به ترتیب جوابهای معادلات (۳۸-۷) و (۳۹-۷) هستند. البته، این جوابها تابع چهار ثابت L ، E ، r_0 ، و θ_0 هستند. این ثابتها می توانند از شرایط اولیه، یعنی، مکان اولیه و سرعت اولیه حرکت در صفحه، تعیین شوند. اگر رابطه $r(\theta)$ یا $\theta(r)$ را بخواهیم، می توانیم به روش زیر اقدام کنیم:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta}$$

$$d\theta = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} dr$$

با قرار دادن به جای \dot{r} و $\dot{\theta}$ از معادلات (۶۲-۷) و (۶۴-۷) خواهیم داشت

$$d\theta = \frac{(L/mr^2) dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}} \quad (۶۶-۷)$$

که پس از انتگرال گیری می دهد

$$\theta(r) = \int \frac{(L/mr^2) dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}} \quad (۶۷-۷)$$

چون L باز مان ثابت است، علامت θ ثابت است، یعنی θ بطور یک طرفه با زمان افزایش خواهد یافت.

به این ترتیب توصیف حرکت در یک مسأله نیروی مرکزی مستلزم، انتگرال گیری، یک، دو، یا هر سه معادله (۶۳-۷)، (۶۵-۷)، و (۶۷-۷) است. این انتگرال گیریها همیشه امکان پذیر نیستند. فرض کنیم قانون نیرو بستگی به توانی از فاصله شعاعی داشته باشد و با

$$F(r) = Kr^n \quad (۶۸-۷)$$

داده شده باشد که k ثابت است. برای $n = 1$ ، قانون نیرو متناظر است با یک نوسانگر هماهنگ برای $n = -2$ قانون نیرو متناظر است با نیروی عکس مجذور فاصله که نمایشگر نیروی گرانشی و نیروی کولنی است. این دو مورد مهمترین مواردند. یکی از اینها، مورد $n = 1$ ، قبلاً بطور مشروح بحث شده است، در حالی که دیگری، $n = -2$ ، در این فصل و فصلهای آینده مورد بحث قرار خواهد گرفت. برای $n = 1, -2, -3$ جوابهای به دست آمده معمولاً بر حسب توابع دایره ای بیان می شوند. برای بعضی از مقادیر دیگر n (درست یا کسری) جوابها عموماً بر حسب انتگرالهای بیضوی بیان می شوند.

در بیشتر موارد، ما پلیم که (الف) مسیر سیستم (مسیر ذره در فضا) را بدون توجه به بستگی زمانی آن و با دانستن قانون نیروی $F(r)$ یا (ب) اگر مسیر سیستم داده شده است، شکل قانون نیرو را پیدا کنیم. معادله ای که می تواند هر کدام از این منظورها را برآورده کند

می تواند با شروع از معادله (۳۸-۷) ،

$$F(r) = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 \quad (38-7)$$

و قرار دادن

$$r = \frac{1}{u} \quad (69-7)$$

به دست آید ، از معادله (۴۰-۷) داریم

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{m} u^2 \quad (70-7)$$

و از معادله (۶۹-۷) \dot{r} و \ddot{r} را به صورت زیر به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \\ &= -\frac{1}{u^2} \dot{\theta} \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{u^2} \left(\frac{L}{m} u^2 \right) \frac{du}{d\theta} \end{aligned} \quad (71-7)$$

$$\dot{r} = -\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta}$$

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -\frac{L}{m} \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{d\theta} \right) = -\frac{L}{m} \frac{d^2u}{d\theta^2} \frac{d\theta}{dt} \\ &= -\frac{L}{m} \dot{\theta} \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{L}{m} \left(\frac{L}{m} u^2 \right) \frac{d^2u}{d\theta^2} \end{aligned} \quad (72-7)$$

$$\ddot{r} = -\frac{L^2}{m^2} u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}$$

با قرار دادن r ، \dot{r} و \ddot{r} در معادله (۳۸-۷) خواهیم داشت

$$F\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{L^2}{m} u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{L^2}{m} u^3$$

که بعد از مرتب سازی می تواند به شکل

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right) \quad (73-7)$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u - \frac{m}{L^2u^2} F\left(\frac{1}{u}\right) \quad (۷۴-۷)$$

نوشته شود. این معادله یک معادله دیفرانسیل است که می توان از آن $u(\theta)$ ، و در نتیجه $r(\theta)$ را، که مدار حرکت یک ذره را در میدان نیروی مرکزی $F(r)\hat{r}$ توصیف می کند، به دست آورد. از سوی دیگر، اگر مدار ذره در مختصات قطبی، $r(\theta)$ ، معلوم باشد، از این معادله می توان قانون نیروی $F(r)$ را به دست آورد. برای مورد خاص $L=0$ معادله بالا برقرار نیست. از معادله (۷-۴۰) داریم $mr^2\dot{\theta} = L=0$ چون $r \neq 0$ و $m \neq 0$ است، پس $\dot{\theta} = 0$ یا $\theta = \text{cte}$ ، که می رساند مسیر ذره یک خط مستقیم است که از مبدأ می گذرد.

مثال (۷-۱): ذره ای به جرم m در یک مدار مارپیچ به معادله $r = k\theta$ که k ثابت است حرکت می کند. آیا ممکن است در یک میدان نیروی مرکزی چنین مسیری داشت؟ اگر ممکن است، شکل تابع نیرو را تعیین کنید.

برای تعیین شکل قانون نیرو از معادله دیفرانسیل مدار، معادله (۷-۷۳)، یعنی

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2u^2} F(u^{-1}) \quad (۱)$$

استفاده می کنیم، قرار دهیم

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{k\theta} \quad (۲)$$

از معادله (۲) دو بار نسبت به θ مشتق می گیریم

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{k\theta^2} \quad \text{و} \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} = +\frac{2}{k\theta^3} = \frac{2k^2}{r^3} = 2k^2u^3 \quad (۳)$$

با قرار دادن اینها در معادله (۱) خواهیم داشت

$$2k^2u^3 + u = -\frac{m}{L^2u^2} F(u^{-1})$$

$$F(u^{-1}) = -\frac{L^2}{m} (u^3 + 2ku^5)$$

که با قرار دادن $u = \frac{1}{r}$ می دهد

$$F(r) = -\frac{L^2}{m} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{2k^2}{r^5} \right) \quad (۴)$$

به این ترتیب قانون نیروی مرکزی است و ترکیبی است از یک عکس مکعبی و یک عکس توان پنجم. چنین نیرویی این مدار خاص را ایجاد می کند.

تمرین (۷-۱): مثال را برای موردی که مدار به صورت $r = k\theta^2$ است تکرار کنید.

۷-۵ مدارهای میدان نیروی مرکزی و پتانسیل مؤثر

برای توصیف حرکت ذره در یک میدان نیروی مرکزی، نشان دادیم که حرکت به دو بُعد محدود می شود. به علاوه، بابه کارگیری پایستگی تکانه زاویه ای و انرژی، یک حرکت دوبُعدی را به دو حرکت یک بُعدی کاهش دادیم. پایستگی انرژی کل، بنا بر معادله (۷-۴۳)، عبارت است از

$$E = \frac{1}{2}mr\dot{\theta}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad (57-7)$$

$$= K_{\text{rad}} + V_{\text{cent}}(r) + V(r)$$

که V_{cent} و K_{rad} ، به ترتیب، انرژیهای جنبشی ناشی از حرکتهای شعاعی و زاویه ای هستند. V_{cent} را می توان به صورت K_{ang} ، که نمایشگر انرژی جنبشی ناشی از حرکت زاویه ای است، نوشت. چون V_{cent} تابعی از r است و $V(r)$ نیز چنین است، این دو جمله با هم ترکیب می شوند و انرژی پتانسیل مؤثر را به شکل زیر پدید می آورند

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) \quad (76-7)$$

که در آن

$$V_{\text{eff}}(r) = V_{\text{cent}}(r) + V(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad (77-7)$$

بستگی انرژی کل به r و \dot{r} ، اگر r را با x ، \dot{r} را با \dot{x} ، و $V_{\text{eff}}(r)$ را با $V(x)$ جایگزین کنیم، شبیه به حرکت یک ذره در یک بُعد (آن طور که در بخش ۲-۵ بحث شد) می شود. در نتیجه روش نمودار انرژی که در فصل ۲ بحث شد در این جا نیز می تواند به کار رود.

قبل از این که جلوتر برویم، لازم است بدانیم که بین روش انرژی که در حرکت یک بُعدی به کار رفت و روش انرژی که در هر حرکت دوبُعدی که به دو حرکت یک بُعدی کاهش یافته است، به کار می رود، دو تفاوت مهم وجود دارد. اولاً، در یک بُعد، انرژی بتهایی ماهیت حرکت در یک میدان نیروی پایستار را تعیین می کند. در حرکت در نیروی

مرکزی، مشخصه حرکت به دو عامل، انرژی E و تکانه زاویه ای L ، بستگی دارد. ثانیاً، نباید فراموش کنیم که، در حالی که فاصله شعاعی r با زمان تغییر می کند، θ نیز با زمان تغییر می کند. یعنی وقتی r تغییر می کند، بردار \mathbf{r} دوران نیز می کند. در نتیجه، با این که ما برای فهمیدن مسیر مداری r را پیدا می کنیم، هم r و هم θ هر دو باید در نظر گرفته شوند. تنها استثنا در این مسأله، مورد حرکت دایره ای است که در آن بزرگی بردار \mathbf{r} ثابت و برابر با r_0 ، شعاع متناظر با کمینه انرژی پتانسیل V_{eff} ، باقی می ماند.

اکنون روش نمودار انرژی را، با رسم نمودارهای $V_{\text{eff}}(r)$ بر حسب r ، به دو قانون نیروی متداول اعمال می کنیم: (۱) قانون نیروی هماهنگ همسانگرد، و (۲) قانون نیروی عکس مجذور فاصله. جنبه های برجسته حرکت در یک نیروی مرکزی را می توان نخست با بررسی مورد یک نوسانگر هماهنگ، مطابق شکل (۷-۹)، فهمید. برای این مورد،

$$F(r) = -kr \quad \text{یا} \quad V(r) = \frac{1}{2}kr^2 \quad (7-78)$$

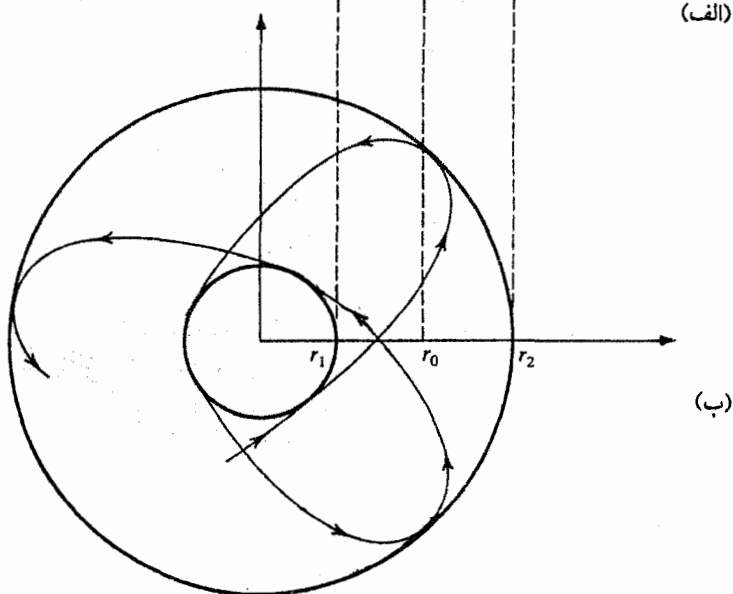
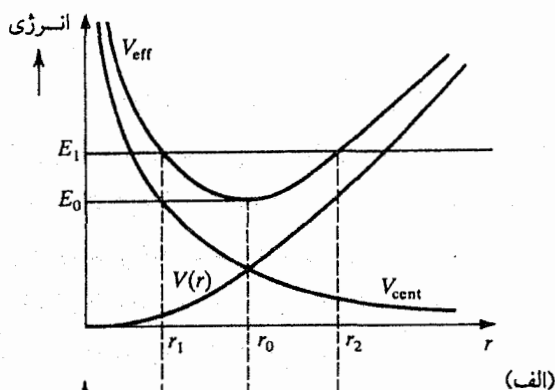
در نتیجه معادله (۷-۷۷) برای پتانسیل مؤثر می شود

$$V_{\text{eff}}(r) = V_{\text{cent}}(r) + V(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2 \quad (7-79)$$

نمودارهای $V(r)$ ، V_{cent} ، و V_{eff} در شکل (۷-۹ الف) نشان داده شده اند. برای یک انرژی کل E (بزرگتر از انرژی کمینه $E_0 = [V_{\text{eff}}(r)]_{\text{min}}$) ذره بین دو مقدار حدی $r_1 = r_{\text{min}}$ و $r_2 = r_{\text{max}}$ ، یعنی $r_{\text{min}} \leq r \leq r_{\text{max}}$ نوسان می کند. این دو نقطه نقاط بازگشت حرکتند. در این نقاط سرعت شعاعی صفر است، یعنی، $\dot{r} = 0$. این نقاط بازگشت ریشه های معادله (۷-۷۵) (پایستگی انرژی)، با $\dot{r} = 0$ هستند، یعنی

$$E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2} = 0 \quad (7-80)$$

این دو فاصله شعاعی، r_1 و r_2 ، دو دایره به شعاعهای r_1 و r_2 حول مرکز نیرو در صفحه مدار تعیین می کنند. و این حرکت زاویه ای است که حرکت ذره را در بین این دو دایره، همان طور که در شکل (۷-۹ ب) نشان داده شده است، محدود می کند.

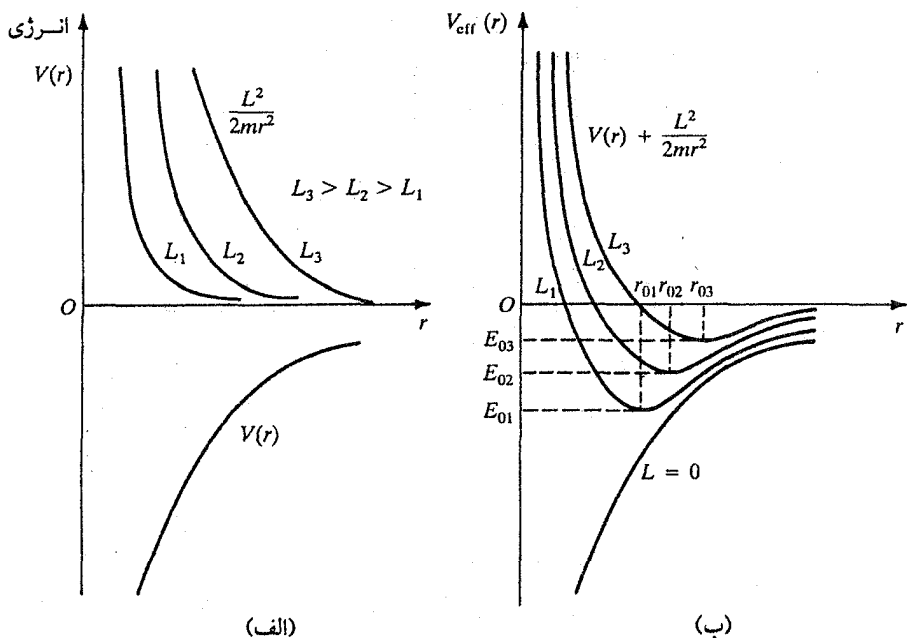


شکل (۷-۹): (الف) نمودارهای $V(r)$ ، V_{cent} و V_{eff} برای یک قانون نیروی هماهنگ
همسانگرد (ب) حرکت یک ذره با انرژی $E > E_0$ به $r_1 (r_{\text{min}}) < r < r_2 (r_{\text{max}})$ محدود شده است

اکنون در حرکت ذره با کمک یک نمودار انرژی نمونه ای بحث کنیم. شکل (۷-۱۰ الف) پتانسیل جاذبه $V(r)$ نسبت به r را نشان می دهد که از $r = 0$ ، با پتانسیل منفی خیلی بزرگ شروع می شود، با افزایش r افزایش می یابد، و وقتی r بی نهایت شد به صفر می رسد، یعنی،

$$V(r) = -\infty, \quad r = 0 \quad \text{و} \quad V(r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty$$

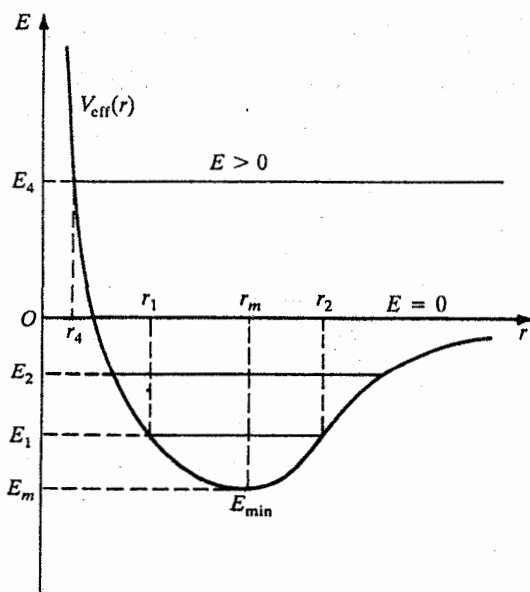
به علاوه ، بستگی پتانسیل به صورت $\frac{1}{r}$ است و نیروی متناسب با آن به صورت عکس مجذور فاصله است ، یعنی ، $F = Kr^{-2}$ که برای یک نیروی جاذب منفی است . در شکل (۷-۹ الف) همچنین نمودارهای $\frac{L^2}{2mr^2}$ برای سه مقدار متفاوت تکانه زاویه ای $L_3 > L_2 > L_1$ نشان داده شده است . پتانسیل مؤثر منتهی به $V_{\text{eff}}(r)$ از ترکیب پتانسیل $V(r)$ با هر کدام از سه نمودار پتانسیل گریز از مرکز جداگانه ، آن طور که در شکل (۷-۱۰ ب) نشان داده شده است ، به دست می آید . تمام این نمودارها کمینه ای در پتانسیل نشان می دهند ، و این ناشی از این واقعیت است که پتانسیل $V(r)$ به صورت $\frac{1}{r}$ (یا $F(r)$ به صورت $\frac{1}{r^2}$) تغییر می کند . [اگر $V(r)$ به صورت $\frac{1}{r^2}$ یا هر توان بالاتری از r تغییر کند ، کمینه ای در نمودار رخ نخواهد داد] .



شکل (۷-۱۰) : (الف) نمودارهای $V(r)$ نسبت به r برای یک نیروی جاذب عکس مجذور فاصله و $V_{\text{cent}}(r)$ نسبت به r برای مقادیر مختلف L . (ب) نسبت به r برای مقادیر مختلف L

در شکل (۷-۱۱) نمودار $V_{\text{eff}}(r)$ بر حسب r برای یک مقدار بخصوص L نشان داده شده است . اگر انرژی ذره کمتر از انرژی کمینه E_m باشد ، حرکت فیزیکی معنی داری امکان پذیر نخواهد

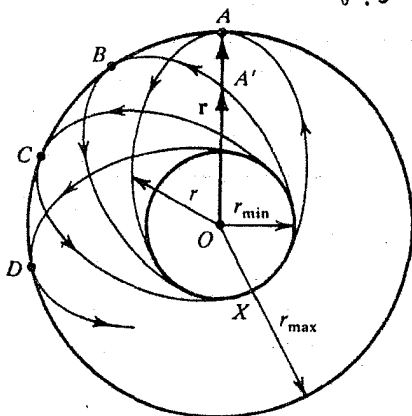
بود زیرا این وضعیت منجر به این می شود که \dot{r} یک کمیت موهومی است. اگر انرژی ذره برابر با $E = E_m$ باشد، حرکت شعاعی وجود ندارد، در نتیجه ذره باید روی یک دایره به شعاع r_0 حرکت کند. اگر انرژی ذره بزرگتر از صفر، مثلاً E_4 ، باشد، حرکت آن نامحدود خواهد بود. وقتی ذره به طرف مرکز نیرو می آید می تواند تا r_4 برسد و سپس باید برگردد و می تواند تا بی نهایت برود. می گوئیم که تنها یک نقطه بازگشت در $r = r_4$ وجود دارد. بنابراین برای یک ذره با انرژی $E > 0$ و با انرژی پتانسیل مفروض در بالا، حرکت نامحدود و تنها یک نقطه بازگشت وجود دارد.



شکل (۷-۱۱): نمودار $V_{\text{eff}}(r)$ بر حسب r برای یک مقدار بخصوص L : گستره حرکت ذرات با انرژیهای مختلف

اکنون ذره ای با انرژی بین $E = E_m$ و $E = E_0$ ، مثلاً E_1 ، برابر شکل (۷-۱۱)، در نظر بگیریم. حرکت شعاعی ذره محدود به مقادیر $r = r_1 = r_{\text{min}}$ و $r = r_2 = r_{\text{max}}$ خواهد بود. نقاط r_2 و r_1 نقاط بازگشت اند. در واقع، حرکت ذره به سطح بین دو دایره به شعاعهای r_1 و r_2 مطابق شکل (۷-۱۲)، محدود می شود. حرکت تناوبی است با زمان تناوب شعاعی T_r ، که مدت زمانی است که ذره از r_{min} به r_{max} می رود و به r_{min} بر می گردد. در شکل (۷-۱۲) برابر است با زمان رفتن از A به B ، به علاوه مسیر باید طوری باشد که به هر دو دایره در نقاط

بازگشت ، مانند A در روی دایرهٔ خارجی و X در روی دایرهٔ داخلی ، مماس باشد . دلیل آن این است که در نقاط بازگشت سرعت شعاعی \dot{r} باید صفر باشد ، در حالی که سرعت مماسی به علت وجود تکانه زاویه ای نمی تواند صفر باشد . همان طور که شکل (۷-۱۲) نشان می دهد ، مدار در A بر دایرهٔ خارجی و در X بر دایرهٔ داخلی مماس است . مدار ادامه می دهد و یک بار دیگر در B بر دایرهٔ خارجی مماس می شود . زمانی که ذره می گیرد تا از A به X و سپس به B برود برابر با زمان تناوب شعاعی T_r است . توجه کنیم که بردار \mathbf{r} بطور پیوسته تغییر جهت می دهد . زمانی را که می گیرد تا به اندازهٔ زاویهٔ 2π بچرخد موسوم به زمان تناوب زاویه ای T_θ است که زمان تناوب مشخصه یا زمان تناوب دوران نیز نامیده می شود . در شکل (۷-۱۲) اگر شروع بردار \mathbf{r} را OA بگیریم بعد از دوران به اندازهٔ زاویهٔ 2π به OA' می رسد . زمانی که \mathbf{r} از OA به OA' می رسد برابر با زمان تناوب T_θ است .



شکل (۷-۱۲) : حرکت یک ذره با انرژی $0 < E < E_m$ بین دو دایره به شعاعهای

$r_1 = r_{min}$ و $r_2 = r_{max}$ ، که به حرکت تقدیمی منجر می شود

به این ترتیب روشن است که ، برای یک ذره با انرژی $0 < E < E_m$ ، حرکت متناوب دوگانه با دوره های تناوب T_r و T_θ است . مشخصه مدار شدیداً به نسبت این دو دوره تناوب وابسته است . اگر دوره ها هممتوا باشند ، یعنی ، نسبت دو دوره تناوب $\frac{T_r}{T_\theta}$ بتواند به صورت نسبت دو عدد درست بیان شود ، ذره در نهایت (در زمانی برابر با کوچکترین مضرب مشترک T_r و T_θ) به وضعیت اول بر می گردد . چنین مدارهایی مدارهای بسته نامیده می شوند . یک روش دیگر بیان این واقعیت این است که مدار در صورتی بسته خواهد بود که داشته باشیم

$$\frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{a}{b} \quad (۸۱-۷)$$

که در آن a و b اعداد درست هستند؛ یعنی $\Delta\theta$ یک کسر گویا از 2π است. اگر مدار بسته باشد فرکانس میانگین دوران، \bar{f}_{rev} ، (یا فرکانس زاویه ای) را می توان به صورت زیر تعریف کرد

$$\bar{f}_{rev} = \frac{1}{T_{rev}} = \frac{\text{تعداد نوسانات لازم برای بسته شدن مدار}}{\text{زمان لازم برای بسته شدن مدار}} \quad (۸۲-۷)$$

نسبت $\frac{T_\theta}{T_r}$ به قانون نیرو و مقادیر E و L بستگی دارد. اگر دو دوره تناوب T_r و T_θ برابر باشند، بسته شدن مدار فقط بعد از یک دوره تناوب رخ می دهد، و در این مدت θ به اندازه 2π افزایش می یابد. این وضعیت در مورد قانون نیروی عکس مجذور فاصله (نیروهای گرانشی و الکتریکی) به وقوع می پیوندد. از سوی دیگر برای وضعیتی، مانند آنچه که در شکل (۷-۱۲) نشان داده شده است و در آن T_r کمی بزرگتر از T_θ است، بردار مکانی r برای این که یک دور کامل از r_{min} تا r_{max} و برگشت به r_{min} انجام دهد، بیشتر از 2π دوران می کند. ذره قبل از این که به وضع اولش برگردد مقدار زیادی دوران انجام می دهد؛ در نتیجه مدار تقریباً بسته است. این نوع حرکت مداری به حرکت تقدیمی موسوم است.

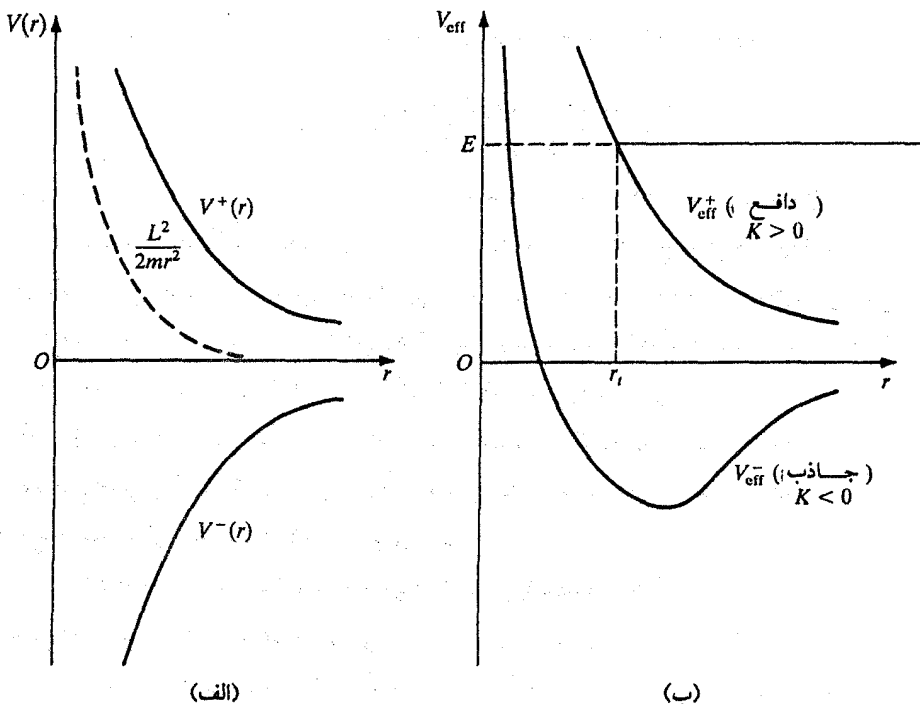
اگر دوره های تناوب شعاعی و زاویه ای ناهموا باشند، مدار هرگز بسته نخواهد شد، یعنی از نوع مدار باز است. تمام مساحت بین دایره ها با حرکت بین r_{min} ، r_{max} کاملاً پر خواهد شد. اکنون مورد یک نیروی دافع $F(r) = \frac{K}{r^2}$ و $V(r) = -\frac{K}{r}$ را، که k مثبت است، در نظر بگیریم. $V(r)$ مثبت است و با افزایش r بطور یکنوا کاهش می یابد. پتانسیل مؤثر متوجه همیشه مثبت خواهد بود و در نتیجه حرکت محدود نخواهد بود. این نکات در شکل (۷-۱۳) بوضوح نشان داده شده است. در شکل (۷-۱۳ الف) نمودارهای $V^+(r) = \frac{L^2}{2mr^2}$ ، $V_{cent}(r)$ ، که یک پتانسیل دافع است، و $V^-(r)$ که به همان بزرگی $V^+(r)$ است با این استثنا که یک پتانسیل جاذب است، برای یک مقدار معین L نمایش داده شده اند. شکل (۷-۱۳ ب) نمودارهای

$$V_{eff}^+ = V^+(r) + \frac{L^2}{2mr^2}, \quad \text{نیروی دافع} \quad (۸۳-۷)$$

$$V_{eff}^- = V^-(r) + \frac{L^2}{2mr^2}, \quad \text{نیروی جاذب} \quad (۸۴-۷)$$

را نشان می دهد. کاملاً روشن است که برای هر انرژی $E (> 0)$ ذره حرکت محدود وجود ندارد، و فقط یک نقطه بازگشت در r_1 ، آن طور که نشان داده شده است، وجود دارد.

اگر یک ذره تحت تأثیر چنین پتانسیلهای V_{eff}^+ یا V_{eff}^- باشد مسیر آن به صورتی که در شکل (۷-۱۴) نشان داده شده است و در زیر توضیح داده خواهد شد ، خواهد بود .



شکل (۷-۱۴) : (الف) نمودارهای پتانسیل جاذب $V^-(r)$ ، پتانسیل دافع $V^+(r)$ ، و

(ب) نمودارهای پتانسیل مؤثر جاذب $V_{\text{eff}}^-(r)$ و پتانسیل مؤثر دافع $V_{\text{eff}}^+(r)$ نسبت به r ، $V_{\text{cent}} (= \frac{L^2}{2mr^2})$ نسبت به r ،

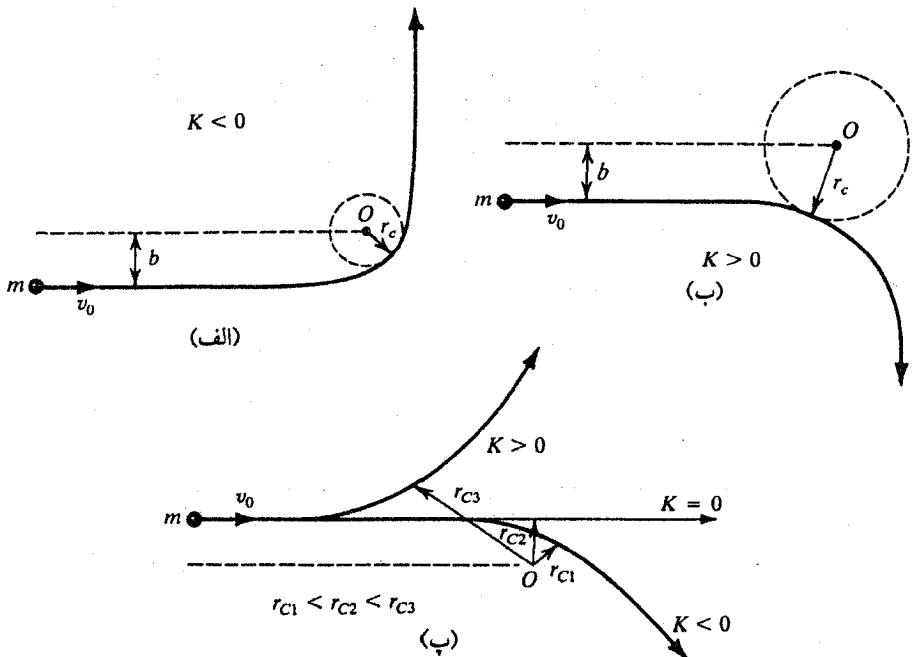
ذره‌ای با انرژی E در نظر بگیریم که در بی نهایت است و به طرف مرکز نیروی O حرکت است . در فاصله‌های زیاد هم $V(r)$ و هم $\frac{L^2}{2mr^2}$ صفر هستند ، در نتیجه ذره در روی یک خط مستقیم با سرعت $v_0 = (\frac{2E}{m})^{1/2}$ حرکت می‌کند . این خط مستقیم از فاصله b ، موسوم به پارامتر برخورد ، از مرکز نیرو ، برابر شکل (۷-۱۴) ، عبور خواهد کرد . بنابراین تکانه زاویه‌ای ذره عبارت است از

$$L = mv_0 b$$

مقدار انرژی E را تعیین می کند و همراه با مقدار b تکانه زاویه ای L را تعیین می کند. به این ترتیب، برای این مقادیر معین E و L (یا b و v_0)، به شکل (۷-۱۴ الف) مسیر یک ذره را در یک پتانسیل جاذب، و شکل (۷-۱۴ ب) مسیر آن را در یک پتانسیل دافع نشان می دهد. روشن است که نزدیکترین فاصله r_c (از مرکز نیرو) یا نقطه بازگشت برای یک پتانسیل جاذب کمتر است تا برای یک پتانسیل دافع. در شکل (۷-۱۴ ب) نزدیکترین فاصله ها برای پتانسیلهای جاذب و دافع و همچنین پتانسیل صفر ($K = 0$) با ترتیب زیر نشان داده شده اند

$$r_{c1} (\text{جاذب}) < r_{c2} (\text{بدون پتانسیل}) < r_{c3} (\text{دافع})$$

وقتی مسائل پراکنندگی یا برخورد را مورد بحث قرار دهیم با این مسیرها سر و کار خواهیم داشت.

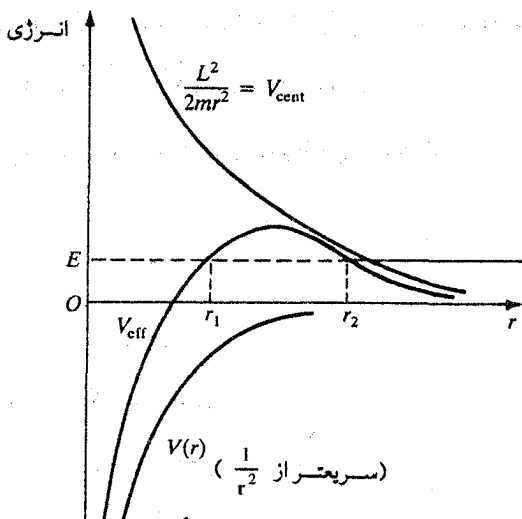


شکل (۷-۱۴): مسیر یک ذره در (الف) یک پتانسیل جاذب، (ب) یک پتانسیل دافع،

و (پ) پتانسیل جاذب، پتانسیل دافع، و پتانسیل صفر. توجه کنیم که $r_{c1} < r_{c2} < r_{c3}$

بالاخره پتانسیلهایی را که با افزایش r سریعتر از $\frac{1}{r^2}$ به صفر می رسند مورد بحث قرار دهیم. پتانسیل مؤثر منتهجه در شکل (۷-۱۵) نمایش داده شده است. برای یک مقدار معین E ذره

دو حرکت ممکن دارد. یک حرکت محدود اگر بین $r = r_1$ و $r = 0$ باشد و یک حرکت نامحدود برای $r > r_2$. ناحیه بین r_1 و r_2 ممنوع است. این پتانسیل شبیه به پتانسیل بین یک پروتون فرودی و یک هسته اتمی است. بنابراین تعبیر نمودار انرژی، پروتون ممکن است بین $r = r_1$ و $r = 0$ به دام بیفتد، یا ممکن است در $r > r_2$ ، که نقطه بازگشت است، آزاد باشد. (در مکانیک کوانتومی ثابت می شود که برای ورود پروتون به ناحیه ممنوعه $r_2 - r_1$ مقداری احتمال وجود دارد).



شکل (۷-۱۵): نمودارهای $V(r)$ ، $V_{\text{cent}} (= \frac{L^2}{2mr^2})$ و V_{eff} نسبت به r برای

پتانسیلهای که سریع تر از $\frac{1}{r^2}$ سقوط می کنند

مثال (۷-۲): بنابراین نظریه یوکاوا در مورد نیروهای هسته ای، نیروی جاذب بین یک نوترون و یک پروتون در داخل هسته با تابع پتانسیلی به شکل

$$V(r) = \frac{ke^{-ar}}{r} \quad (۱)$$

نمایش داده می شود که k و a ثابتند و $k < 0$.

(الف) نیروی $F(r)$ را پیدا کنید و آن را رسم کنید.

(ب) در حرکت یک ذره به جرم m تحت تأثیر چنین نیرویی، با رسم نمودار

$V_{\text{eff}}(r)$ ، بحث کنید.

(پ) E و L را اگر ذره روی دایره ای به شعاع r_0 حرکت کند محاسبه کنید .
 (ت) زمان تناوب حرکت دایره ای و زمان تناوب نوسانهای کوچک را برای مدار دایره ای پریشیده محاسبه کنید .

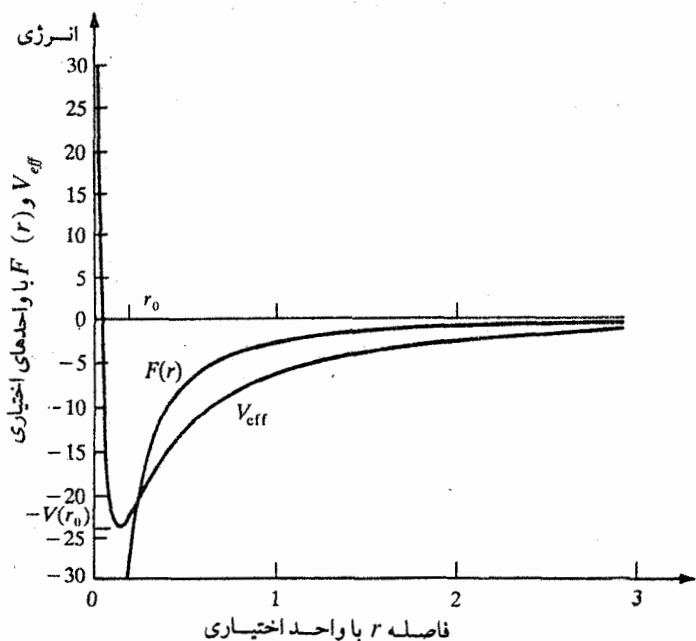
(الف) نیروی بین پروتون و نوترون می تواند به روش زیر محاسبه شود

$$F(r) = -\frac{d}{dr} V(r) = -\frac{d}{dr} \left(k \frac{e^{-ar}}{r} \right) = -\frac{d}{dr} [ke^{-ar} r^{-1}] \quad (2)$$

یعنی

$$F(r) = \frac{ke^{-ar}}{r^2} (ar + 1) = e^{-ar} \left(\frac{ka}{r} + \frac{k}{r^2} \right) \quad (3)$$

نمودار $F(r)$ در شکل (مثال ۷-۲) نمایش داده شده است .



شکل (مثال ۷-۲)

(ب) پتانسیل مؤثر $V_{\text{eff}}(r)$ از معادله (۷-۷) عبارت است از

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{ke^{-ar}}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \quad (4)$$

چون نمودار $V_{\text{eff}}(r)$ نسبت به r ، آن طور که نمایش داده شده است، خیلی شبیه به نمودار مربوط به قانون نیروی عکس مجذور فاصله است که در متن بحث شد، حرکت ذره در این مورد خیلی شبیه به حرکتی است که در متن بحث شده است.

(۱) برای $E > 0$ حرکت نامحدود است. ذره از بی نهایت به طرف مرکز نیرو می آید و فقط یک نقطه بازگشت دارد. انرژی ذره تعیین می کند که چقدر به مرکز نیرو نزدیک خواهد شد.

(۲) برای $0 < E < V(r_0)$ ذره حول نقطه ترازمندی r_0 بین دو نقطه بازگشت به طرف جلو و عقب نوسان می کند.

(۳) برای $E = V(r_0)$ ذره روی دایره ای به شعاع r_0 حرکت می کند. این مقدار r_0 را می توانیم به روش زیر محاسبه کنیم

$$\left. \frac{d}{dr} V_{\text{eff}}(r) \right|_{r=r_0} = \left. \frac{d}{dr} \left(\frac{k}{r} e^{-ar} + \frac{L^2}{2mr^2} \right) \right|_{r=r_0} = 0$$

که نتیجه می دهد

$$-kme^{-ar_0}(ar_0^2 + r_0) = L^2 \quad (5)$$

و مقدار r_0 را می توان از آن حساب کرد.

$$F(r_0) = F_c$$

$$\frac{ke^{-ar_0}}{r_0^2} (ar_0 + 1) = -\frac{mv_0^2}{r_0}$$

یا

$$v_0^2 = -\frac{ke^{-ar_0}}{mr_0} (ar_0 + 1) \quad (6)$$

انرژی کل E را، که مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل است، می توان به صورت زیر نوشت

$$E = KE + PE = \frac{1}{2}mv^2 + V(r) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{ke^{-ar}}{r} \quad (7)$$

این رابطه برای یک مدار دایره‌ای به شعاع $r = r_0$ ، بعد از قرار دادن به جای v_0^2 از معادله (۶) ، به شکل

$$E = \frac{ke^{-ar_0}}{2r_0} (1 - ar_0) \quad (۸)$$

در می‌آید . تکانه زاویه‌ای برای یک مدار دایره‌ای ، بعد از قرار دادن به جای v_0 از معادله (۶) عبارت است از

$$L = mv_0 r_0 = [-mr_0 ke^{-ar_0} (ar_0 + 1)]^{1/2} \quad (۹)$$

(ت) زمان تناوب حرکت دایره‌ای برابر است با

$$T_\theta = \frac{2\pi r_0}{v_0} \quad (۱۰)$$

که ، بعد از قرار دادن به جای v_0 از معادله (۶) ، می‌دهد

$$T_c = 2\pi \left[-\frac{ke^{-ar_0}}{mr_0^3} (ar_0 + 1) \right]^{-1/2} \quad (۱۱)$$

زمان تناوب T_r نوسانهای شعاعی ناشی از یک مدار دایره‌ای کمی پریشیده عبارت است از

$$T_r = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_{\text{eff}}}} \quad (۱۲)$$

که در آن

$$k_{\text{eff}} = \left. \frac{d^2 V_{\text{eff}}(r)}{dr^2} \right|_{r=r_0} \quad (۱۳)$$

با بردن مقدار پتانسیل مؤثر (۴) در معادله (۱۳) ، خواهیم داشت

$$k_{\text{eff}} = -\frac{ke^{-ar_0}}{r_0^3} [1 + ar_0 - a^2 r_0^2] \quad (۱۴)$$

که با بردن آن در معادله (۱۲) می‌دهد

$$T_r = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_{\text{eff}}}} = 2\pi \sqrt{\frac{mr_0^3}{-ke^{-ar_0} [1 + ar_0 - a^2 r_0^2]}} \quad (۱۵)$$

به این ترتیب نسبت دو زمان تناوب عبارت است از

$$\frac{T_r}{T_c} = \sqrt{\frac{1 + ar_0}{1 + ar_0 - a^2 r_0^2}} \quad (۱۶)$$

اگر a کوچک باشد، یعنی $a^2 r_0^2$ در مقایسه با ۱ قابل چشم پوشی باشد، دوزمان تناوب با هم برابرند.

تمرین (۷-۲): مثال را برای مورد یک پتانسیل به شکل $V(r) = \frac{ke^{-ar}}{r^2}$ تکرار کنید.

۷-۶ مدارها در یک میدان نیروی عکس مجذوری

نیروی وارد به ذره‌ای که در فضا در یک میدان نیروی عکس مجذوری حرکت می‌کند می‌تواند به صورت

$$F(r) = \frac{K}{r^2} \hat{r} \quad \text{یا} \quad F(r) = \frac{K}{r^2} \quad (۸۶-۷)$$

نوشته شود و انرژی پتانسیل آن عبارت است از

$$V(r) = - \int_{r_s}^r F(r) dr = - \int_{r_s}^r \frac{K}{r^2} dr$$

که با فرض $r_s = \infty$ و $V(\infty) = 0$ ، خواهد شد

$$V(r) = \frac{K}{r} \quad (۸۷-۷)$$

برای نیروی جاذب $K < 0$ و برای نیروی دافع $K > 0$ است. دو مورد مهم نیروهای عکس مجذوری عبارتند از (۱) نیروی گرانشی، که همیشه جاذب است، و ثابت K برابر است با

$$K = -Gm_1 m_2 \quad \text{و} \quad G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N-m}^2/\text{kg}^2 \quad (۸۸-۷)$$

و (۲) نیروی کولنی که برای آن K عبارت است از

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \quad (۸۹-۷)$$

که در آن

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N-m}^2$$

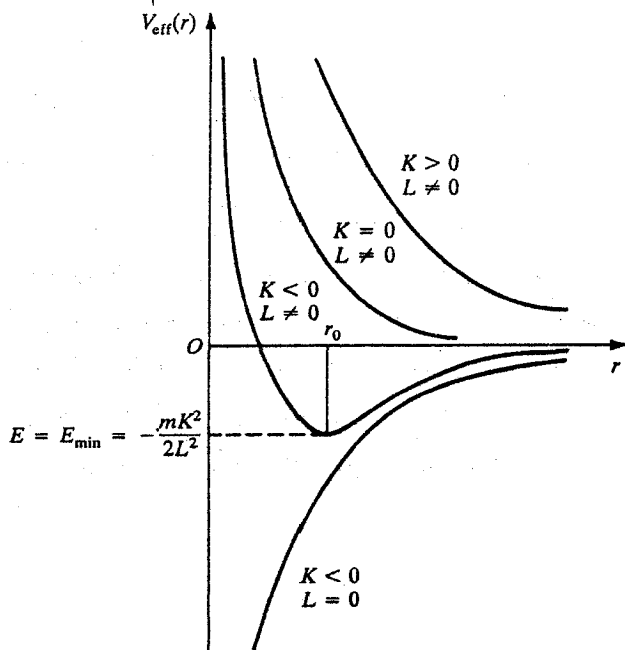
ϵ_0 گذردهی فضای آزاد است. اگر q_1 و q_2 یک علامت داشته باشند نیرو دافع است و $K > 0$ ، و

اگر q_1 و q_2 دارای علامتهای مخالف باشند، نیرو جاذب است و $K < 0$ (منفی).

مانند قبل، بدون این که عملاً معادله های حرکت را حل کنیم، می توانیم ماهیت مدارها را با بحث در پتانسیل مؤثر، که برای نیروی عکس مجذوری [معادله های (۷۷-۷) و (۷۸-۷)] عبارت است از

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{K}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \quad (۹۰-۷)$$

تعیین کنیم. نمودارهای $V_{\text{eff}}(r)$ بر حسب r برای چهار وضعیت $(K < 0, L = 0)$ ، $(K < 0, L \neq 0)$ ، $(K = 0, L \neq 0)$ ، $(K > 0, L \neq 0)$ در شکل (۷-۱۶) نمایش داده شده اند. همان طور که قبلاً بحث شد، برای $K > 0$ ، E همیشه مثبت است و در r حرکت تناوبی وجود ندارد. برای مورد $K = 0$ نیز همین طور است، با این استثنا که برای یک مقدار معین E و L ، بازگشت در مقدار کوچکتري از r ، در مقایسه با مورد $K > 0$ ، رخ می دهد. حرکت در هر دو مورد نامحدود است. برای یک نیروی جاذب $(K < 0)$ هر دو حرکت محدود $(L \neq 0)$ و نامحدود $(L = 0)$ امکان پذیر است. مورد اخیر مربوط به حرکت یک بُعدی یک جسم ساقط شونده است.



شکل (۷-۱۶): نمودارهای $V_{\text{eff}}(r)$ بر حسب r برای مقادیر مختلف K و L . برای

$$E = E_{\text{min}} = -\frac{K^2}{2L^2}$$

ذره روی دایره ای به شعاع r_0 حرکت می کند

برای $K < 0$ و $L \neq 0$ ، اگر $E > 0$ باشد حرکت ذره نامحدود خواهد بود و نقطه بازگشت در فاصله ای کوچکتر از این فاصله برای $K = 0$ رخ می دهد. اگر $E < 0$ باشد حرکت محدود و تناوبی خواهد بود. کمینه انرژی پتانسیل مؤثر با این شرط که در نقطه تراز مندی $\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = 0$ است داده می شود،

$$\frac{d}{dr} V_{\text{eff}}(r) = \frac{d}{dt} \left(\frac{K}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \right) \Big|_{r=r_0} = -\frac{K}{r_0^2} - \frac{L^2}{mr_0^3} = 0$$

یعنی

$$r_0 = -\frac{L^2}{mK} \quad (91-7)$$

و مقدار V_{eff} در $r = r_0$ با بردن r_0 از معادله (91-7) در معادله (90-7) به دست می آید؛ یعنی

$$V_{\text{eff}}(r_0) = \frac{K}{r_0} + \frac{L^2}{2mr_0^2} = \frac{K}{-L^2/mK} + \frac{L^2}{2m(-L^2/mK)^2}$$

یا، همان طور که در شکلهای (7-16) و (7-17) نمایش داده شده است،

$$V_{\text{eff}}(r_0) = -\frac{1}{2} \frac{mK^2}{L^2} \quad (92-7)$$

به این ترتیب برای $E = E_0 = E_{\text{min}} = V_{\text{eff}}(r_0)$ ، که با معادله (92-7) داده شده است، ذره در روی دایره ای به شعاع $r_0 (= \frac{-L^2}{mK})$ ، معادله (91-7)، حرکت می کند. اما اگر انرژی کمتر از صفر ولی بزرگتر از $\frac{-mK^2}{2L^2}$ باشد، مختصه r بین دو نقطه بازگشت، مطابق شکل (7-17)، نوسان می کند. برای تمام مقادیر منفی E و $L \neq 0$ ، مدار بیضی است. اگر مقدار E خیلی نزدیک به مقدار کمینه E_{min} باشد، زمان تناوب نوسانهای کوچک در r با زمان تناوب دوران یکی است. مدار یک مدار بسته (دایره) است که مرکز آن کمی خارج از مرکز نیروست. در بقیه این بخش بحثمان از یک نیروی جاذب را ادامه خواهیم داد.

اکنون به بررسی تحلیلی مسأله نیروی جاذب عکس مجذوری می پردازیم. با شروع از معادله (7-73)،

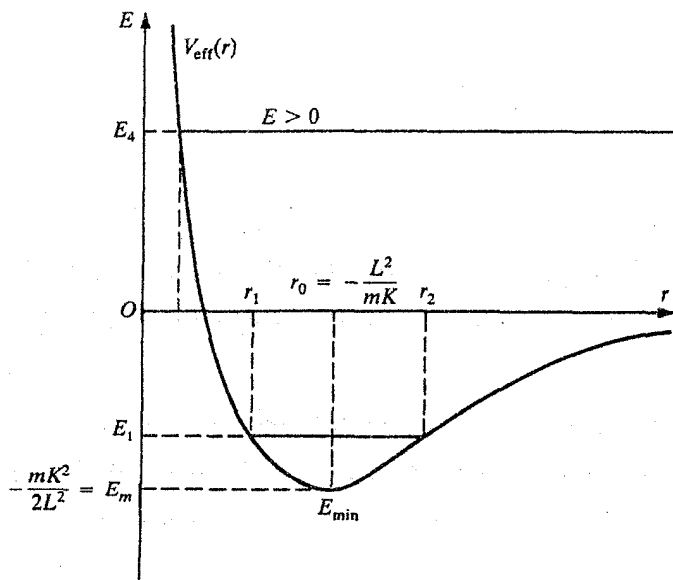
$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2u^2} F\left(\frac{1}{u}\right) \quad (73-7)$$

و بردن

$$F\left(\frac{1}{u}\right) = F(r) = \frac{K}{r^2} = Ku^2 \quad (۹۳-۷)$$

در آن خواهیم داشت

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{mK}{L^2} \quad (۹۴-۷)$$



شکل (۷-۱۷): برای $-\frac{mK^2}{2L^2} < E < 0$ ، مختصه r بین دو نقطه بازگشت نوسان

می‌کند. برای تمام مقادیر منفی E و $L \neq 0$ ، مدار ذره یک بیضی است. برای E ی نزدیک به E_{\min} مدار یک منحنی بسته (دایره) با مرکز کمی در خارج از مبدأ است. r_1 و r_2 نقاط بازگشت ذره با انرژی E_1 هستند. برای $E > 0$ مدار نامحدود است.

این معادله، یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم ناهمگن، شبیه به معادله یک نوسانگر هماهنگ واداشته است (رک فصل ۳)، با این استثنا که θ نقش r را ایفا می‌کند. قسمت همگن معادله،

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 0 \quad (۹۵-۷)$$

که شبیه به معادله نوسانگر هماهنگ ساده با $\omega = 1$ است، جوابی به شکل

$$u_h = A \cos(\theta - \phi) \quad (۹۶-۷)$$

دارد که A و ϕ ثابتهای دلخواهند. جواب خصوصی معادله ناهمگن (۷-۹۴) یک ثابت برابر با

$$u_p = -\frac{mK}{L^2} \quad (۷-۹۷)$$

است. بنابراین جواب عمومی (۷-۹۴) عبارت است از

$$u = u_p + u_h$$

یا

$$u = \frac{1}{r} = -\frac{mK}{L^2} + A \cos(\theta - \phi) \quad (۷-۹۸)$$

این معادله، معادله یک مقطع مخروطی (بیضی، سهمی، یا هذلولی) است که کانون آن در $r=0$ است. ثابت ϕ جهت گیری مدار را در صفحه تعیین می کند و می تواند صفر در نظر گرفته شود. ثابت A مثبت است و نقاط بازگشت در حرکت r را، آن طور که در زیر بحث می کنیم، تعیین می کند.

فرض کنیم r_1 و r_2 فاصله های کمینه و بیشینه نقاط بازگشت متناظر با مقادیر کمینه و بیشینه r در معادله (۷-۹۸) باشند. این نقاط را می توان با قرار دادن مقادیر بیشینه و کمینه $A \cos(\theta - \phi)$ ، که به ترتیب عبارتند از $+A$ و $-A$ ، به دست آورد. بنابراین نقاط بازگشت (شکل (۷-۱۷)) عبارتند از

$$\frac{1}{r_1} = -\frac{mK}{L^2} + A \quad \text{و} \quad \frac{1}{r_2} = -\frac{mK}{L^2} - A \quad (۷-۹۹)$$

A نمی تواند از $\frac{mK}{L^2}$ کمتر باشد زیرا در غیر این صورت به r مقداری منفی خواهد داد و اگر A بزرگتر از $\frac{-mK}{L^2}$ باشد، همان طور که در شکل (۷-۱۶) نشان داده شده است، تنها یک نقطه بازگشت وجود خواهد داشت (مانند مورد $K > 0$)

راه دیگر پیدا کردن نقاط بازگشت حل معادله زیر برای انرژی E است

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{K}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} = E \quad (۷-۱۰۰)$$

این معادله، یک معادله درجه دوم برحسب $\frac{1}{r}$ است، و دو ریشه آن عبارتند از

$$\frac{1}{r_1} = -\frac{mK}{L^2} + \left[\left(\frac{mK}{L^2} \right)^2 + \frac{2mE}{L^2} \right]^{1/2} \quad (۷-۱۰۱)$$

$$\frac{1}{r_2} = -\frac{mK}{L^2} - \left[\left(\frac{mK}{L^2} \right)^2 + \frac{2mE}{L^2} \right]^{1/2} \quad (102-7)$$

از مقایسه معادلات (۷-۹۹) با (۷-۱۰۱) و (۷-۱۰۲) مقدار A را بر حسب E و L به صورت

$$A = \left(\frac{m^2 K^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2} \right)^{1/2} \quad (103-7)$$

پیدا می کنیم و آن را در (۷-۹۸) برای توصیف مدار ذره به کار می گیریم .

شرطی که ماهیت مدار را تعیین می کند می تواند از مقایسه معادله (۷-۹۸) با معادله استاندارد یک مقطع مخروطی به دست آید . معادله یک مقطع مخروطی ، از هندسه مسطحه ، عبارت است از

$$r = r_0 \frac{1+e}{1+e \cos \theta} \quad (104-7)$$

که e خروج از مرکز مدار نامیده می شود و r_0 شعاع دایره مدار متناظر با مقادیر داده شده K ، L و m (یا برای $r = r_0$ ، $e = 0$) است . اکنون معادله (۷-۹۸) را [با $\phi = 0$ و A از معادله (۷-۱۰۳)] به شکل زیر مرتب می کنیم

$$r = -\frac{L^2}{mK} \frac{1}{1 + [-AL^2/mK] \cos \theta} \quad (105-7)$$

از مقایسه معادله (۷-۱۰۴) با معادله (۷-۱۰۵) خواهیم داشت

$$e = -\frac{AL^2}{mK} \quad (106-7)$$

$$r_0 = -\frac{L^2}{mK} \frac{1}{1+e} \quad (107-7)$$

کمینه مقدار r با قرار دادن $\theta = 0$ و $\cos \theta = 1$ در معادلات (۷-۱۰۴) و (۷-۱۰۵) به دست می آید ، یعنی

$$r_{\min} = r_2 = r_0 \frac{1+e}{1+e} = r_0 = -\frac{L^2}{mK} \frac{1}{1+e} \quad (108-7)$$

و بیشینه مقدار r با قرار دادن $\theta = \pi$ و $\cos \theta = -1$ در معادله های (۷-۱۰۴) و (۷-۱۰۵) به دست می آید ، یعنی

$$r_{\max} = r_1 = r_0 \frac{1+e}{1-e} = -\frac{L^2}{mK} \frac{1}{1-e} \quad (109-7)$$

می توانیم از معادله $(۷-۱۰)$ ، e را پیدا کنیم ، یعنی ،

$$e = -\frac{L^2}{mKr_0} - 1 \quad (۷-۱۱۰)$$

با ترکیب معادله های $(۷-۱۰۶)$ و $(۷-۱۰۳)$ خواهیم داشت

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mK^2}} \quad (۷-۱۱۱)$$

به این ترتیب مقادیر r_1 (فاصله کمینه) ، r_2 (فاصله بیشینه) ، A ، و e را ، به ترتیب ، با معادلات $(۷-۱۰۹)$ ، $(۷-۱۰۸)$ ، $(۷-۱۰۳)$ ، و $(۷-۱۱۱)$ به دست آورده ایم . همان طور که در شکل $(۷-۱۸)$ نشان داده شده است ، مقدار e شکل مدار را تعیین می کند . از شکل $(۷-۱۷)$ دیده می شود که برای $E_m = V_0$ ، مدارهای مختلف عبارتند از

$$V_0 < E < 0, \quad 0 < e < 1, \quad \text{بیضی}$$

$$E = V_0, \quad e = 0, \quad \text{دایره (حالت خاص بیضی)}$$

$$E = 0, \quad e = 1, \quad \text{سه می}$$

$$E > 0, \quad e > 1, \quad \text{هذلولی}$$

$$E < V_0, \quad e < 0, \quad \text{غیرمجاز}$$

این مدارها در شکلهای $(۷-۱۸)$ و $(۷-۲۰)$ نشان داده شده اند .

(الف) بیضی : یک بیضی مکان هندسی نقاطی است که مجموع فاصله های آنها از دو نقطه ثابت F و F' (به نام کانون) ثابت باشد ، یعنی (شکلهای $(۷-۱۹)$ و $(۷-۲۰)$) ،

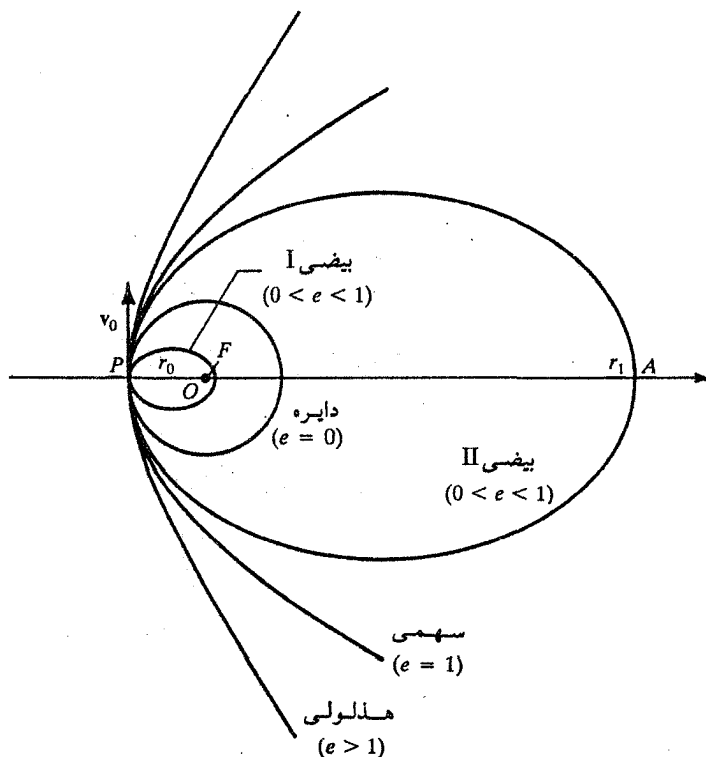
$$r + r' = 2a$$

با استفاده از شکل $(۷-۱۹)$ ، معادله یک بیضی را ، که مبدأ مختصات در یکی از کانونهای آن است ، در مختصات قطبی به صورت زیر به دست می آوریم

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \theta} \quad (۷-۱۱۲)$$

که a ، نیم قطر بزرگ ، با رابطه

$$r_0 = a(1 - e) \quad (۷-۱۱۳)$$



$$e = -\frac{AL^2}{mK} = -\frac{L^2}{mKr_0} - 1 = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mK^2}}$$

شکل (۷-۱۸): مقدار خروج از مرکز e شکل مدار را تعیین می کند

به شعاع کمینه r_0 مربوط می شود، و نیم قطر کوچک b با

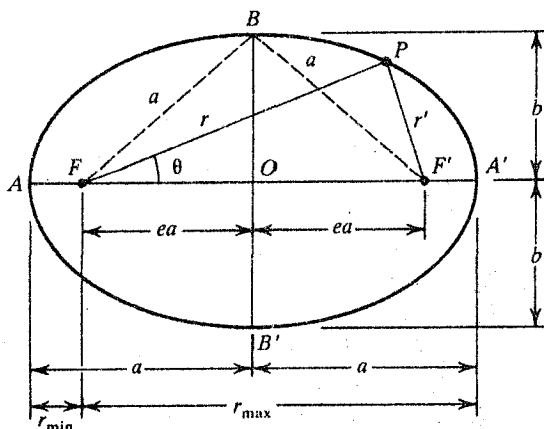
$$b = a(1 - e^2)^{1/2} \quad (۷-۱۱۴)$$

داده می شود که در آن $e < 1$. به علاوه، می توانیم طول قطر بزرگ را برحسب انرژی ذره محاسبه کنیم. طبق معادلات (۷-۱۰۷)، (۷-۱۰۸)، و (۷-۱۰۹) داریم

$$2a = r_{\min} + r_{\max} = -\frac{2L^2}{mK} \frac{1}{1 - e^2} \quad (الف ۷-۱۱۵)$$

با قرار دادن e از معادله (۷-۱۱۱)، خواهیم داشت

$$2a = +\frac{K}{E} \quad (ب ۷-۱۱۵)$$



کل (۷-۱۹) : تعریف کمیتهای مختلف در مدارهای بیضی شکل

که بیان می‌دارد طول قطر بزرگ مستقل از L است، و تمام مدارهای با یک قطر بزرگ یک انرژی دارند، و برعکس. به علاوه

$$\frac{r_{\max}}{r_{\min}} = \frac{1+e}{1-e} \quad (۷-۱۱۶)$$

یعنی، شکل بیضی به مقدار e ، و نه به r_0 ، بستگی دارد. r_0 صرفاً یک ضریب معیار است. (ب) دایره: اگر $e=0$ باشد داریم $a=b$ و دو کانون F و F'' به یکدیگر منطبق می‌شوند، و معادله (۷-۱۱۲) می‌دهد

$$r(\theta) = r = a \quad (۷-۱۱۷)$$

که معادله یک دایره است (رک شکل (۷-۲۰))

(پ) هذلولی: هذلولی مکان هندسی نقاطی است که تفاضل فاصله‌های آنها از دو نقطه ثابت F و F'' (به نام کانون) ثابت است. هذلولی دو شاخه دارد

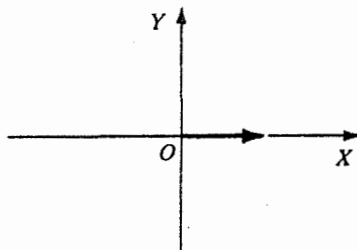
$$r' - r = 2a, \quad (+ \text{ شاخه طرف چپ})$$

$$r' - r = -2a, \quad (- \text{ شاخه طرف راست})$$

برای هذلولی $e > 1$ ، و معادله (۷-۱۰۴) شکل زیر را می‌گیرد

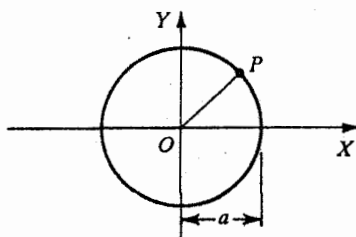
$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{\pm 1 - e \cos \theta} \quad (۷-۱۱۸)$$

این ویژگیهای هذلولی در شکل (۷-۲۰) نشان داده شده است. زاویه α که مجانبها با محور



خط مستقیم

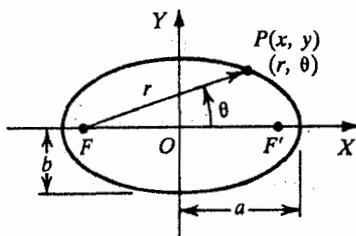
$$\begin{aligned} y &= 0 \\ \theta &= 0 \end{aligned}$$



دایره

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2 \\ r &= a \end{aligned}$$

O، مرکز نیروی جاذبه

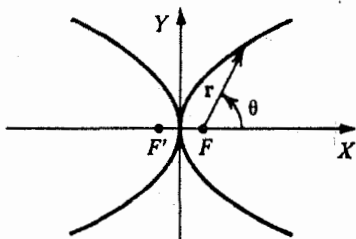


بیضی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \theta}$$

F یا F'، مرکز نیروی جاذب



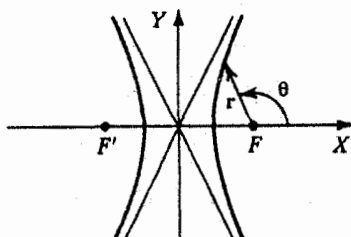
سهمی

$$y^2 = \pm 4ax$$

$$r = \frac{2a}{1 - \cos \theta}$$

F، مرکز نیروی جاذب

F'، مرکز نیروی دافع



هذلولی

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{\pm 1 - e \cos \theta}$$

F، مرکز نیروی جاذب

F'، مرکز نیروی دافع

شکل (۷-۲۰): شکلهای مدارهای مختلف و معادله‌های آنها در مختصات دکارتی و قطبی

می سازند با قرار دادن $r = \infty$ و $\theta = \alpha$ در معادله (۷-۱۱۸) به دست می آید، یعنی

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{e} \quad (7-119)$$

(ت) سهمی: سهمی مکان هندسی نقاطی است که فاصله آنها از یک نقطه ثابت به نام کانون F ، همیشه برابر با فاصله آنها از یک خط ثابت به نام خط هادی است. معادله حاصل [که از معادله (۷-۱۰۴) با قرار دادن $e=1$ ، و این فرض که برای $\theta = \pi$ کمینه است به دست می آید] عبارت است از

$$r = \frac{2a}{1 - \cos \theta} \quad (7-120)$$

که a فاصله کانون F تا خط هادی است (رک شکل (۷-۲۰)).

به عنوان یک انتخاب، می توانیم معادله یک مقطع مخروطی را به شکل عمومی تری

به صورت

$$\frac{1}{r} = B + A \cos(\theta + \phi) \quad (7-121)$$

بنویسیم. با مقایسه نتایج به دست آمده و با یادآوری

$$B > A \quad (7-122 \text{ الف})$$

$$B = A \quad (7-122 \text{ ب})$$

$$0 < B < A \quad \text{یا} \quad -A < B < 0, \quad (7-122 \text{ و})$$

می توانیم مقادیر e ، A ، و B را بر حسب m ، K ، L ، و E برای مدارهای مختلف به دست آوریم (رک مسأله ۷-۳۱)

۷-۷ قوانین کپلر در مورد حرکت سیارات

بعد از سالها تحلیل اختر فیزیکی از داده هایی که توسط تیکوبراهه تهیه شده بودند، در اوایل قرن هفدهم یوناس کپلر سه قانون بیان کرد که حرکت سیارات حول خورشید را توصیف کردند. دو قانون اول در ۱۶۰۹ و قانون سوم در ۱۶۱۹ منتشر شد. این قوانین، موسوم به قوانین کپلر، می توانند به شکل زیر بیان شوند:

۱- قانون مدارها: سیارات در مدارهایی بیضی وار که خورشید در یکی از

کانونهاست، حرکت می کنند.

۲- قانون مساحتها : خط واصل هر سیاره به خورشید (بردار مکانی) در بازه های زمانی مساوی مساحت های مساوی جارو می کند .

۳- قانون زمان تناوبها : مربع زمان تناوب دوران هر سیاره متناسب است با مکعب نیم قطر بزرگ مدار آن

قانون نیوتن از گرانش جهانی کمی بعد از قوانین کپلر ارائه شد ، و توصیف نظری حرکت سیارات را ، سازگار با واقعیت های تجربی ، به دنبال آورد . بین قوانین نیوتن از حرکت و قوانین کپلر تفاوتی اساسی وجود دارد . قوانین نیوتن ، بطور کلی ، در مورد حرکت و نیرو هستند و بطور ضمنی بر هم کنش بین اجسام را وارد می کنند ، در صورتی که قوانین کپلر حرکت یک سیستم سیاره ای را توصیف می کنند و کاری به تعبیر آن ندارند . قوانین نیوتن دینامیکی هستند ، و روابط بین نیرو ، جرم ، فاصله ، و زمان را به ما می دهند ، در حالی که قوانین کپلر سینماتیکی هستند و رابطه بین فاصله و زمان را به ما می دهند . قوانین کپلر نه تنها به سیستم خورشیدی که به اقمار دور سیارات و به ماهواره های مصنوعی نیز اعمال می شوند . علاوه بر این ، قوانین کپلر وقتی معتبرند که قانون نیرو عکس مجذوری باشد .

قبلاً دیدیم که قانون اول کپلر ، قانون مدارها ، مستقیماً از قانون نیوتنی گرانش ، یعنی ، از ماهیت عکس مجذوری نیروی گرانش نتیجه می شود . قانون دوم ، قانون مساحتها ، از واقعیت ثابت ماندن تکانه زاویه ای نتیجه می شود . قبلاً نشان دادیم که این باید درست باشد (رک بخش ۷-۳) ، زیرا نیروی گرانش یک نیروی مرکزی است ، در نتیجه تکانه زاویه ای پایسته است . در این بخش ، قانون سوم ، قانون زمان تناوبها ، را اثبات می کنیم .

فرض کنیم T زمان تناوب یک مدار بیضی وار باشد . بنابراین ، طبق معادله (۷-۵۲) ،

$$\text{مساحت بیضی} = \frac{LT}{2\mu} = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1-e^2} \quad (7-123)$$

که در آن a نیم قطر بزرگ ، b نیم قطر کوچک ، و e خروج از مرکز است . اما با استفاده از معادله (۷-۱۱۵ الف) (توجه کنیم که به جای m جرم کاهش یافته μ را به کار می بریم) ، داریم

$$a = -\frac{L^2}{\mu k} \frac{1}{1-e^2}$$

$$1-e^2 = -\frac{L^2}{\mu Ka}$$

که ، با قرار دادن در معادله (۷-۱۲۳) ، نتیجه می دهد

$$T^2 = \frac{4\pi^2\mu}{-K} a^3 \quad (الف \ ۱۲۴-۷)$$

یا

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2\mu}{-K} = \text{constant} \quad (ب \ ۱۲۴-۷)$$

که همان بیان قانون سوم کپلر است . با قرار دادن $K = -GMm$ و $\mu = \frac{Mm}{M+m}$ ، خواهیم داشت

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} a^3 \quad (۱۲۵-۷)$$

در تمام وضعیتهای واقعی ، m در مقایسه با جرم M خیلی کوچک است ؛ در نتیجه می توان از آن صرف نظر کرد . به عنوان مثال ، حتی برای بزرگترین سیاره ، مشتری ، $m = \frac{M}{1000}$ که M جرم خورشید است . بنابراین با چشم پوشی از m در مقایسه با M ، معادله (۷-۱۲۵) به

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \quad (۱۲۶-۷)$$

کاهش خواهد یافت . نتیجه اعمال قانون سوم کپلر به بعضی از سیاره ها و ماهواره های مصنوعی زمین در جدول (۷-۱) نشان داده شده است .

جدول (۷-۱) : اعمال قانون سوم کپلر به سیاره ها و ماهواره ها

	e	a ($\times 10^7$ km)	T (yr)	a^3/T^2
سیارات				
عطارد	0.206	5.79	0.24	3.39×10^{18}
زهره	0.007	10.82	0.62	3.31×10^{18}
زمین	0.017	14.96	1.00	3.36×10^{18}
مریخ	0.093	22.79	1.88	3.37×10^{18}
مشتری	0.048	77.83	11.86	3.37×10^{18}
زحل	0.055	142.7	29.46	3.36×10^{18}
اورانوس	0.047	286.9	84.01	3.36×10^{18}
نپتون	0.009	449.8	164.97	3.37×10^{18}
پلوتو	0.249	590.0	248.4	3.35×10^{18}
ماهواره ها				
کاسموس ۳۸۳	0.260	18,117	143	2.91×10^8
ATS 2	0.455	24,123	219.7	2.91×10^8
کاوشگر ۲۸	0.952	273,740	8.4×10^{13}	2.91×10^8

مثال (۷-۳): ماهواره ای به جرم 2500 kg حول زمین در یک مدار بیضی وار حرکت می کند. در دورترین نقطه از زمین (اوج) ارتفاع آن 3600 km است. در حالی که در نزدیکترین نقطه به زمین (حضیض) ارتفاع آن 1100 km است. انرژی E و تکانه زاویه ای L ماهواره و سرعتهای v_p و v_a ی آن را، به ترتیب، در اوج و حضیض حساب کنید. با استفاده از رابطه

$$2a = r_{\min} + r_{\max} = 2R_e + d_a + d_p \quad (1)$$

که R_e شعاع زمین، d_p و d_a ارتفاعهای ماهواره در اوج و حضیض، و $2a$ قطر بزرگ است، به دست می آوریم

$$2a = 2(6400 \text{ km}) + 3600 \text{ km} + 1100 \text{ km} = 17,500 \text{ km} \quad (2)$$

بنابراین انرژی ماهواره در یک مدار بیضی وار، از معادله (۷-۱۱۵ ب) عبارت است از

$$E = \frac{K}{2a} = -\frac{GMm}{2a} \quad (3)$$

چون

$$\begin{aligned} GMm &= mgR_e^2 \\ &= (2500 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(6400 \times 10^3 \text{ m})^2 \\ &= 10.04 \times 10^{17} \text{ J}\cdot\text{m} \end{aligned} \quad (4)$$

که m جرم ماهواره و M جرم زمین است، از معادله (۷-۱۱۵ ب) خواهیم داشت

$$E = -\frac{10.04 \times 10^{17} \text{ J}\cdot\text{m}}{17500 \times 10^3 \text{ m}} = -5.73 \times 10^{10} \text{ J} \quad (5)$$

انرژی ماهواره قبل از پرتاب E_i است که برابر است با

$$\begin{aligned} E_i &= -\frac{GMm}{R_e} = -\frac{mgR_e^2}{R_e} = -mgR_e \\ &= -(2500 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(6400 \times 10^3 \text{ m}) \\ &= -15.68 \times 10^{10} \text{ J} \end{aligned} \quad (6)$$

به این ترتیب انرژی لازم برای قرار دادن ماهواره در مدار عبارت است

$$\begin{aligned}\Delta E &= E - E_i = [-5.73 - (-15.68)] \times 10^{10} \text{ J} \\ &= 9.95 \times 10^{10} \text{ J}\end{aligned}\quad (۷)$$

خروج از مرکز مدار بیضی وار ، بعد از مرتب سازی معادله (۷-۱۱۶) ، برابر است با

$$e = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}} = \frac{d_a - d_p}{2a} = \frac{2500 \text{ km}}{17500 \text{ km}} = \frac{1}{7}\quad (۸)$$

از معادله (۷-۱۱۱) داریم

$$e^2 = 1 + \frac{2EL^2}{mK^2}\quad (۹)$$

یا

$$L = \left[\frac{mK^2(e^2 - 1)}{2E} \right]^{1/2}\quad (۱۰)$$

که بعد از قرار دادن مقادیر می دهد

$$L = 1.47 \times 10^{14} \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}\quad (۱۱)$$

با بردن مقدار E از معادله (۵) و $K = -GMm$ از معادله (۴) در معادله

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{K}{r}\quad (۱۲)$$

یا

$$E = \frac{1}{2}mv_a^2 + \frac{K}{r_a}\quad (۱۳)$$

که در آن

$$r_a = (R_e + d_a) = (6400 + 3600) \text{ km} = 10^7 \text{ m}$$

خواهیم داشت

$$-5.73 \times 10^{10} \text{ J} = \frac{1}{2}(2500 \text{ kg})v_a^2 - \frac{10.04 \times 10^{17} \text{ J}\cdot\text{m}}{10^7 \text{ m}}$$

که می دهد

$$v_a = 5872 \text{ m/s}\quad (۱۴)$$

می‌توانیم v_p را با همین روش، یا با معادله (۷-۵۴)، $r_a v_a = r_p v_p$ ، محاسبه کنیم، یعنی

$$v_p = \frac{r_a}{r_p} v_a = \frac{10^7 \text{ m}}{75 \times 10^5 \text{ m}} 5872 \text{ m/s} = 7829 \text{ m/s} \quad (15)$$

تمرین (۷-۳): مثال را برای ماهواره ATS که برای آن $e = 0.455$ و $a = 24123 \text{ km}$ است، تکرار کنید.

۸-۷ مدارهای دایره‌ای پرنشیده: نوسانات حول یک مدار دایره‌ای

بحث این بخش را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. نخست مورد خاصی که در آن تنها یک نیروی جاذب عکس مجذوری وارد می‌شود و، دوم، مورد کلی‌تری که یک قانون نیروی عمومی وارد می‌شود. ماهواره‌ای به جرم m حول زمین در روی یک مدار دایره‌ای به شعاع r_0 و با انرژی E_0 در نظر بگیریم. فرض کنیم که انرژی ماهواره از E_0 به $E_0 + \Delta E$ افزایش یابد، که ΔE یک نمو کوچک در انرژی آن است، اما تکانه زاویه‌ای آن ثابت می‌ماند. این کار با روشن کردن موتور آن برای مدت کوتاهی در جهت شعاعی به طرف مرکز زمین انجام می‌گیرد. این وضعیت در شکل (۷-۲۱)، که در آن $V_{\text{eff}}(r)$ برحسب r رسم شده است، نشان داده شده است. برای انرژی E_0 ، متناظر با نقطه ترازمندی r_0 در نمودار پتانسیل، مدار دایره‌ای است با شعاع r_0 و به وسیله $r(t) = r_0 = \text{constant}$ توصیف می‌شود. می‌خواهیم مدار جدیدی متناظر با انرژی $E_0 + \Delta E$ ، آن طور که نشان داده شده است، پیدا کنیم. برای یک ΔE ی کوچک، روش زیر را به کار می‌بریم که به تغییر کوچکی در مدار دایره‌ای می‌انجامد. برای $E_0 + \Delta E$ ، جسم دو حرکت دارد: (۱) یک حرکت زاویه‌ای متناظر با حرکت دایره‌ای به شعاع r_0 و انرژی E_0 ، و (۲) علاوه بر آن، یک حرکت شعاعی بین r_{min} و r_{max} . برای انحرافهای کوچک از انرژی E_0 ، پتانسیل مؤثر $V_{\text{eff}}(r)$ در نزدیکی r_0 می‌تواند به یک پتانسیل سهموی تقریب زده شود. بنابراین، جابه‌جاییهای کوچک حول وضعیت ترازمندی که از حرکت شعاعی ناشی می‌شود یک حرکت هماهنگ ساده حول وضع ترازمندی r_0 خواهد بود. ما دو حرکت هماهنگ ساده شعاعی و زاویه‌ای را به روش زیر بررسی می‌کنیم.

پتانسیل مؤثر در این مورد، معادله (۷-۹۰)، عبارت است از

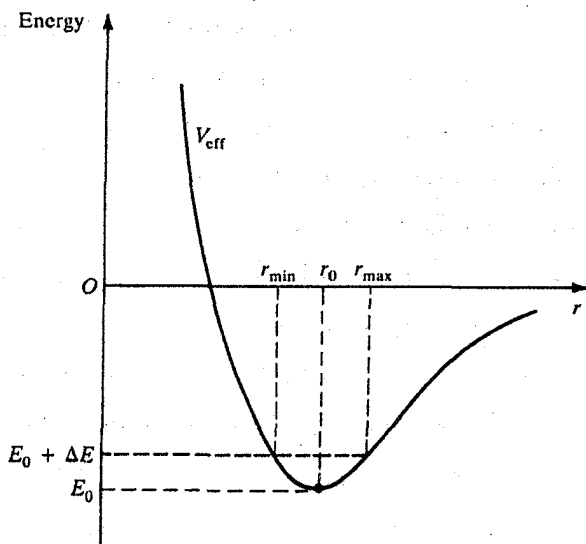
$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{K}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2} \quad (90-7)$$

که $K = -GMm$ و $\mu = \frac{Mm}{M+m}$. صفر بودن مشتق در کمینه پتانسیل ، یعنی

$$\left. \frac{dV_{\text{eff}}}{dr} \right|_{r=r_0} = 0 = -\frac{K}{r_0^2} - \frac{L^2}{\mu r_0^3} \quad (۱۲۷-۷)$$

می دهد

$$L = \sqrt{-\mu Kr_0} \quad (۱۲۸-۸)$$



شکل (۷-۲۱) : برای ذره‌ای با انرژی E_0 ، مدار یک دایره است . افزایش مختصر انرژی

به $E_0 + \Delta E$ به برهم نمی حرکت هماهنگ ساده شعاعی به مدار دایره‌ای (حرکت زاویه‌ای) می انجامد

ثابت فنری مؤثر برای حرکت هماهنگ ساده را می توان با گرفتن مشتق مرتبه دوم V_{eff} به دست آورد ، یعنی

$$k_{\text{eff}} = \left. \frac{d^2 V_{\text{eff}}}{dr^2} \right|_{r=r_0} \quad (۷-۱۲۹ \text{ الف})$$

که می دهد

$$k_{\text{eff}} = \frac{2K}{r_0^3} + \frac{3L^2}{\mu r_0^4} \quad (۷-۱۲۹ \text{ ب})$$

با به کارگیری مقدار L^2 از معادله (۷-۱۲۸) ، خواهیم داشت

$$k_{\text{eff}} = -\frac{K}{r_0^3} \quad (۷-۱۳۰)$$

و فرکانس حرکت شعاعی خواهد شد

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k_{\text{eff}}}{\mu}} = \sqrt{\frac{-K}{\mu r_0^3}} \quad (۷-۱۳۱ \text{ الف})$$

قرار دادن به جای K از معادله (۷-۱۲۸) در معادله (۷-۱۳۱ الف) می دهد

$$\omega_r = \sqrt{\frac{-K}{\mu r_0^3}} = \frac{L}{\mu r_0^2} \quad (۷-۱۳۱ \text{ ب})$$

به این ترتیب موقعیت شعاعی یک ذره با شرط $r = r_0$ در $t = 0$ ، عبارت است از

$$r = r_0 + A \sin \omega_r t \quad (۷-۱۳۲)$$

که می دهد $r = r(\theta)$. اما ، برای توصیف مدار باید $r = r(\theta)$ را بدانیم . برای این کار حرکت

زاویه ای را در نظر بگیریم که ، بنابر معادله (۷-۴۰) ، برای $r = r_0$ ، عبارت است از

$$\omega_\theta = \dot{\theta} = \frac{L}{\mu r_0^2} \quad (۷-۱۳۳)$$

در نتیجه

$$\theta = \omega_\theta t = \frac{L}{\mu r_0^2} t \quad (۷-۱۳۴)$$

از مقایسه معادلات (۷-۱۳۳) و (۷-۱۳۱ ب) نتیجه جالب زیر به دست می آید . برای

نوسانات کوچک یا برای پریشیدگیهای کوچک مدار دایره ای ، فرکانس شعاعی حرکت برابر با

فرکانس دوران است ؛ یعنی

$$\omega_r = \omega_\theta \quad (۷-۱۳۵)$$

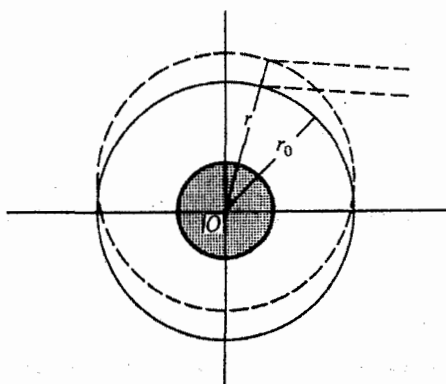
در نتیجه معادله (۷-۱۳۲) ، با کمک معادله (۷-۱۳۴) ، به شکل

$$r = r_0 + A \sin \theta \quad (۷-۱۳۶)$$

در می آید . مدار جدید با منحنی خط چین در شکل (۷-۲۲) نشان داده شده است . مدار

تقریباً یک دایره است با این تفاوت که مرکز آن بر مرکز زمین منطبق نیست ، بلکه کمی

جابه جا شده است. همین نتیجه را می توان از معادله عمومی مدار برای $r_0 \ll A$ به دست آورد
(رک مسأله (۷-۴۲))



شکل (۷-۲۲): مدار پریشده يك جسم حول زمین هنوز يك دایره است با این تفاوت که مرکز آن به مرکز زمین منطبق نیست

اکنون وضعیت قبلی را به مورد کلی تری که برای آن قانون نیرو به شکل

$$F(r) = Kr^n \quad (۷-۱۳۷)$$

است تعمیم می دهیم. با عبارت پتانسیل مؤثر شروع می کنیم

$$V_{\text{eff}} = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} \quad (۷-۱۳۸)$$

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = \frac{dV}{dr} - \frac{L^2}{\mu r^3} \quad (۷-۱۳۹)$$

یا

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = -F(r) - \frac{L^2}{\mu r^3} \quad (۷-۱۴۰)$$

چون در ترازمندی $\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} \Big|_{r=r_0} = 0$ ، از معادله (۷-۱۴۰) خواهیم داشت

$$F(r_0) = -\frac{L^2}{\mu r_0^3} \quad (۷-۱۴۱)$$

اکنون ثابت فنری را برای نوسانات شعاعی کوچک حساب می کنیم. از معادله

(۷-۱۴۰) داریم

$$\frac{d^2 V_{\text{eff}}}{dr^2} = -\frac{dF}{dr} + \frac{3L^2}{\mu r^4} \quad (142-7)$$

$$k_{\text{eff}} = \left. \frac{d^2 V_{\text{eff}}}{dr^2} \right|_{r=r_0} = -F'(r_0) + \frac{3L^2}{\mu r_0^4} = -F'(r_0) - \frac{3F(r_0)}{r_0} \quad (143-7)$$

که علامت پریم نمایشگر مشتق نسبت به r است. بنابراین

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k_{\text{eff}}}{\mu}} = \sqrt{\frac{-F'(r_0) - (3/r_0)F(r_0)}{\mu}} \quad (144-7)$$

و زمان تناوب نوسانات شعاعی عبارت است از

$$T_r = \frac{2\pi}{\omega_r} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{-F'(r_0) - (3/r_0)F(r_0)}} \quad (145-7)$$

برای حرکت زاویه ای، مانند قبل داریم

$$\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r_0^2}$$

با استفاده از معادله (۱۴۱-۷) برای حذف L خواهیم داشت

$$\omega_\theta = \dot{\theta} = \sqrt{\frac{-F(r_0)}{\mu r_0}} \quad (146-7)$$

وقتی r از r_{max} به r_{min} می رود زاویه ای را جارو می کند که زاویه اوجی نامیده می شود و

برابر است با

$$\Psi = \omega_\theta \left(\frac{1}{2} T_r \right) \quad (147-7)$$

با قرار دادن به جای ω_θ و T_r خواهیم داشت

$$\Psi = \frac{\pi}{\sqrt{3 + [F'(r_0)/F(r_0)]r_0}} \quad (148-7)$$

ترکیب این معادله با معادله (۱۴۳-۷)، به نتایج خیلی مهمی می انجامد که در زیر برای مورد عمومی $F(r) = Kr^n$ مورد بحث قرار می دهیم.

برای این که نوسانات پایدار رخ دهد باید $k_{\text{eff}} > 0$. برای $k_{\text{eff}} < 0$ ، نیروی بازگرداننده

وجود ندارد. هر پریشیدگی شعاع $r = r_0$ مدار دایره ای را افزایش می دهد. در نتیجه ناپایدار

خواهد بود. بنابراین، برای مدارهای پایدار، از معادله (۱۴۳-۷)، داریم

$$k_{\text{eff}} > 0 \quad \text{یا} \quad -F'(r_0) - \frac{3}{r_0} F(r_0) > 0 \quad (149-7)$$

با قرار دادن $F(r_0) = Kr_0^n$ و $F'(r_0) = nKr_0^{n-1}$ خواهیم داشت

$$-nKr_0^{n-1} - \frac{3}{r_0} Kr_0^n > 0$$

$$-n - 3 > 0$$

یا

$$n > -3$$

$$(150-7)$$

همچنین بردن $F(r_0)$ و $F'(r_0)$ در معادله (۱۴۸-۷) می دهد

$$\Psi = \frac{\pi}{\sqrt{3+n}} \quad (151-7)$$

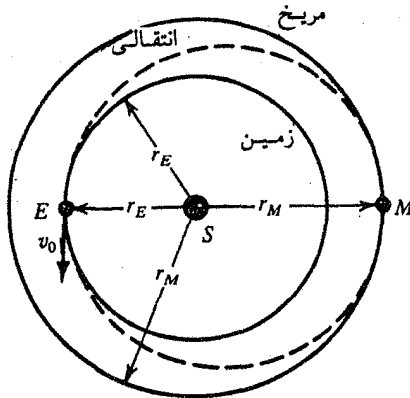
برای هر مدار بسته ای که خود را تکرار کند باید مخرج $\sqrt{3+n}$ یک عدد درست باشد. این شرط، همراه با شرط $n > -3$ ، منجر می شود به $n = -2, 1, 6, 13$. با قبول این مقادیر برای n ، روشن است که $n = -2$ متناظر است با یک نیروی عکس مجذوری، در حالی که $n = 1$ متناظر است با یک نیروی بازگرداننده در حرکت هماهنگ ساده. برای این مقادیر n ، مدارها پایدار و بین r_{\min} و r_{\max} محدودند.

۹-۷ انتقالهای مداری: تقویت و تضعیف گرانشی

در چند دهه قبل فرستادن سفینه های فضایی از زمین به سیارات دیگر غیر قابل تصور بود. اما دانش فنی تا جایی پیشرفت کرده است که بعضی از داستانهای علوم تخیلی به حقیقت پیوسته اند. در این بخش، روش فرستادن کاوشگرهای فضایی از یک سیاره به سیاره دیگر را مورد بررسی قرار می دهیم. پرتاب کاوشگر بطور مستقیم در امتداد شعاعی خورشید به طرف خارج یا داخل عملی نیست. مؤثرترین راه انجام این کار قرار دادن کاوشگر روی مداری (بیضی وار یا دایره ای) است که مدار زمین و مدار سیاره دیگر را به یکدیگر وصل کند. برای ساده کردن مسأله می توانیم فرض کنیم که مدارهای سیاره ها حول خورشید دایره ای هستند (این تقریب چندان بد نیست زیرا بیشتر مدارها تقریباً دایره ای هستند).

فرض کنیم بخواهیم یک کاوشگر فضایی را از زمین به سیاره دیگری، مثلاً مریخ، بفرستیم. مدارهای این دو سیاره را دایره هایی به شعاعهای r_E و r_M از مرکز مشترك خورشید

بگیریم . وضعیت مورد نظر در شکل (۷-۲۳) نشان داده شده است که در آن مدار انتقالی با خط چین مشخص شده است . این مدار انتقالی مماس به مدار زمین در E و همچنین مماس به مدار مریخ در M است . طول قطر بزرگ این مدار ، آن طور که نشان داده شده است ، برابر با مجموع شعاعهای مدارهای زمین و مریخ است ؛ یعنی $r_c = r_E + r_M$. همچنین $2r_E < 2r_c < 2r_M$ ، یعنی قطر بزرگ مدار انتقالی بین قطرهای مدارهای دایره ای اولیه و نهایی است . چون $E = \frac{K}{2a}$ ، انرژی کل مدار انتقالی بین مقادیر انرژی مدارهای دایره ای اولیه و نهایی قرار دارد . بنابراین برای انتقال یک کاوشگر فضایی از مدار زمین به مدار مریخ ، باید یک بار در نقطه E به آن شتاب داد (که هم E و هم L را تغییر دهد) ، و یک بار دیگر در نقطه M به آن شتاب داد (که مقادیر L' و E' را تغییر دهد) بطوری که بتواند مریخ را دور بزند . (توجه کنیم که $E' > E$ و $L' > L$) . اگر بخواهیم یک کاوشگر به زهره ، مطابق شکل (۷-۲۴) ، بفرستیم ، وضعیت برعکس می شود . انرژی در مدار دایره ای نهایی دور زهره کمتر از انرژی در مدار دایره ای اولیه حول زمین خواهد بود . این بدان معنی است که به کاوشگر در دور زمین باید به گونه ای تأخیر داد که بتواند به مدار انتقالی برود ، و وقتی به زهره رسید تأخیر ناگهانی دیگری به او داد بطوری که بتواند به مدار دایره ای دور زهره برود . این مراحل را برای مورد انتقال یک کاوشگر از زمین به مریخ بطور کمی توضیح خواهیم داد .



شکل (۷-۲۳) : مدار انتقالی از زمین به مریخ (مدار خط چین) مدارهای دایره ای زمین

و مریخ به دور خورشید را به یکدیگر متصل می کند . مدار انتقالی در نقاط E و M به ترتیب به مدارهای زمین و مریخ مماس است

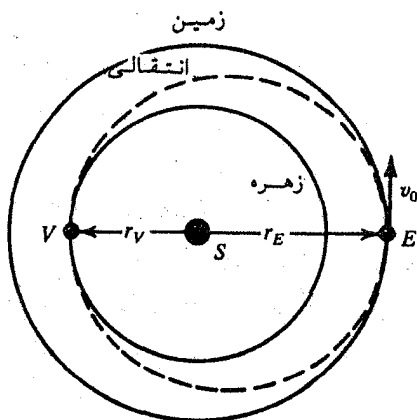
برای این که زمین در یک مدار دایره ای به شعاع r_E با سرعت v_0 حول خورشید به جرم M_s

بگردد، داریم

$$\frac{mv_0^2}{r_E} = \frac{GM_s m}{r_E^2} \quad (7-152 \text{ الف})$$

بنابراین

$$v_0^2 = \frac{GM_s}{r_E} \quad (7-152 \text{ ب})$$



شکل (۷-۲۴): مدار انتقالی از زمین به زهره، مدارهای دایره ای زمین و زهره به دور خورشید را به یکدیگر متصل می کند. مدار انتقالی به مدارهای دایره ای زمین و زهره، به ترتیب، در E و V محاس است

که v_0 نیز با رابطه زیر داده می شود

$$v_0 = \frac{2\pi r_E}{T_E} \quad (7-153)$$

و T_E زمان تناوب حرکت مداری زمین است. در نقطه E به کاوشگر فضایی یک جهش سرعت داده می شود بطوری که سرعت آن به v_1 برسد و در روی مدار انتقالی قرار گیرد. با استفاده از (۷-۱۱۵) ب، که داریم

$$E = \frac{K}{2a} = \frac{-GM_s m}{2a} \quad (7-154)$$

قطر بزرگ

می توانیم (از شکل (۷-۲۳)) بنویسیم

$$E = -\frac{GM_S m}{r_E + r_M} = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GM_S m}{r_E} \quad (155-7)$$

بنابراین ، با به کارگیری (۷-۱۵۲) ب ، خواهیم داشت

$$v_1^2 = 2GM_S \frac{r_M}{r_E(r_M + r_E)} = v_0^2 \frac{2r_M}{r_M + r_E} \quad (156-7)$$

وقتی کاوشگر مدار زمین را ترك کرد و وارد مدار انتقالی شد ، سرعت v_1 آن بزرگتر از v_0 است . اما وقتی کاوشگر به مدار مریخ در نقطه M رسید ، سرعت v_1 آن کمتر از سرعت مداری مریخ ، v_M ، است . یعنی ، وقتی کاوشگر به مریخ برسد سرعتی کمتر از مریخ دارد ، در نتیجه مریخ از کاوشگر جلو می زند . از نظر یک ناظر مریخی به نظر می رسد که کاوشگر از جهت مخالف نزدیک می شود . برای پرهیز از این وضعیت ، وقتی کاوشگر به نقطه M رسید ، سرعت آن از v_1 به $v_2 = v_M$ افزایش داده می شود .

وقتی کاوشگر در مدار انتقالی قرار گرفت ، به طرف مریخ می تازد ، و برای رسیدن از زمین به مریخ به اندازه نصف زمان تناوب مدار انتقالی وقت می گیرد . بنابر قوانین کپلر ، T^2 متناسب با مکعب قطر بزرگ ، می توانیم بنویسیم

$$\frac{T_E^2}{(2r_E)^3} = \frac{T^2}{(r_E + r_M)^3}$$

یعنی

$$T = \left(\frac{r_E + r_M}{2r_E} \right)^{3/2} T_E \quad (157-7)$$

وقتی کاوشگر به مریخ رسید ، باید سرعت آن را به v_2 ، که از قانون پایستگی انرژی زیر تعیین می شود ، افزایش داد

$$E = -\frac{GM_S m}{r_E + r_M} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{GM_S m}{r_M} \quad (158-7)$$

بنابراین

$$v_2^2 = 2GM_S \frac{r_E}{r_M(r_M + r_E)} = v_0^2 \frac{2r_E^2}{r_M(r_M + r_E)} \quad (159-7)$$

با دانستن r_E ، r_M ، T_E ، می توانیم v_0 ، v_1 ، v_2 ، و T را از معادلات (۷-۱۵۳)، (۷-۱۵۶)، (۷-۱۵۹)، و (۷-۱۵۷)، آن طور که در مثال زیر روشن شده است، حساب کنیم. اگر بخواهیم کاوشگر را از زمین به یکی از سیاره های داخلی، مانند زهره یا تیر انتقال دهیم، وضعیت کاملاً فرق می کند. اولاً، در شروع از نقطه E باید سرعت از v_0 به v_1 کاهش یابد تا آن را در مدار انتقالی کوچکتری قرار دهد. وقتی به نزدیکی نقطه V رسید، به نظر می آید که سرعت آن از سیاره پیشی می گیرد. برای پرهیز از این وضعیت، سرعت ماهواره از v_1 به v_2 ($v_2 = v_p$)، سرعت مداری زهره) کاهش داده می شود. تغییر سرعت به وسیله روشن کردن موشکهای (آن طور که در فصل ۸ توضیح داده خواهد شد) انجام می گیرد.

مثال (۷-۴): یک سفینه فضایی از زمین باهدف قرار گرفتن در مدار زهره پرتاب می شود. v_0 ، v_1 ، T_1 ، و v_2 را، آن طور که در بخش قبل تعریف شد، محاسبه کنید.

سرعت v_0 سفینه فضایی حول زمین با معادله (۷-۱۵۳) داده می شود

$$v_0 = \frac{2\pi r_E}{T_E} = \frac{2\pi \times 1.49 \times 10^8 \text{ km}}{3.16 \times 10^7 \text{ s}} = 29.6 \text{ km/s} \quad (1)$$

سرعت v_1 سفینه فضایی در مدار انتقالی، بنابر معادله (۷-۱۵۶)، عبارت است از

$$v_1^2 = v_0^2 \frac{2r_v}{r_E + r_v} = v_0^2 \frac{2(0.72r_E)}{r_E + 0.72r_E} = 0.837v_0^2 \quad (2)$$

یا

$$v_1 = 27.1 \text{ km/s} \quad (3)$$

بنابراین، در نقطه E در شکل (۷-۲۴)، سرعت سفینه باید به اندازه $29.6 - 27.1 = 2.5 \text{ km/s}$ کاهش یابد. زمان تناوب مدار انتقالی، از معادله (۷-۱۵۷)، برابر است با

$$T = \left(\frac{r_E + r_v}{2r_E} \right)^{3/2} T_E = \frac{r_E + 0.72r_E}{2r_E} T_E = 0.86 T_E \quad (4)$$

به این ترتیب سفینه در نیم دوره تناوب به نقطه V (شکل (۷-۲۴)) خواهد رسید.

$$\frac{1}{2}(0.86 T_E) = \frac{1}{2}(0.86)(1 \text{ yr}) = 0.43 \text{ yr} = 156 \text{ days} \quad (5)$$

سرعت سفینه وقتی به نقطه V می‌رسد ، از معادله (۷-۱۵۹) ، عبارت است از

$$v_2^2 = v_0^2 \frac{2r_E^2}{r_V(r_V + r_E)} = v_0^2 \frac{2}{0.72(0.72 + 1)} = 1.615v_0^2 \quad (۶)$$

در نتیجه

$$v_2 = 37.62 \text{ km/s}$$

سرعت مداری زهره برابر است با

$$v_V = \frac{2\pi r_V}{T_V} = \frac{2\pi(1.078 \times 10^8 \text{ km})}{0.62(3.16 \times 10^7 \text{ s})} = 34.5 \text{ km/s} \quad (۷)$$

بنابراین ، وقتی سفینه به نقطه V برسد ، باید سرعت آن به اندازه $37.62 - 34.5 = 3.12 \text{ km/s}$ کاهش یابد تا بتواند به مدار زهره برود .

تمرین (۷-۲) : مسأله را برای زمین و مریخ تکرار کنید .

مسائل

۱-۷ مؤلفه های نیروهای متناظر با توابع انرژی پتانسیل زیر را محاسبه کنید :

$$V = kxyz \quad (\text{الف})$$

$$V = \frac{1}{2}kr^2 \quad (\text{ب})$$

$$V = \frac{1}{2}(k_x x^2 + k_y y^2 + k_z z^2) \quad (\text{پ})$$

۲-۷ در مولکول هیدروژن ، انرژی پتانسیل یک الکترون با

$$V(r) = -\frac{e^2}{r_1} - \frac{e^2}{r_2}$$

داده شده است ، که r_1 فاصله الکترون از نقطه $(-a, 0, 0)$ و r_2 فاصله آن از نقطه $(a, 0, 0)$ است . نیروی وارد بر الکترون را حساب کنید .

۳-۷ نشان دهید که تکانه زاویه ای یک ذره نسبت به یک نقطه O تنها در صورتی صفر خواهد بود که یکی از شرایط زیر برقرار باشد: (الف) ذره در O باشد، (ب) $p = 0$ باشد، (پ) p موازی یا پاد موازی با r باشد.

۴-۷ نشان دهید که گشتاور نیروی F نسبت به نقطه O تنها و تنها در صورتی صفر خواهد بود که یکی از شرایط زیر برقرار باشد: (الف) ذره در O باشد، (ب) $F = 0$ باشد، (پ) F موازی یا پاد موازی با r باشد.

۵-۷ بیانهای زیر را اثبات کنید.
 (الف) تکانه زاویه ای نسبت به مبدأ، بجز برای نیروی مرکزی، لزوماً پایستار نیست.
 (ب) اگر جرم مرکز نیرو خیلی بزرگتر از جرم ذره نباشد، دستگاه مختصات متصل به جسم مرکزی لخت نیست.

۶-۷ ذره ای به جرم m در یک میدان نیروی جاذب عکس مکعبی

$$F = \frac{K}{r^3} \hat{r}, \quad K < 0$$

حرکت می کند.

(الف) حرکت را بطور کیفی با روش پتانسیل مؤثر مورد بحث قرار دهید.
 (ب) E و L را وقتی که ذره روی یک مدار دایره ای حرکت می کند پیدا کنید. زمان تناوب مدار را پیدا کنید.

(پ) اگر مدار کمی پریشیده باشد، زمان تناوب نوسانهای کوچک چقدر است؟

۷-۷ با اثبات این که انتگرال

$$\int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr$$

مستقل از مسیر است و تنها تابع مقادیر r_1 و r_2 است، نشان دهید که نیروی $F(r) = \hat{r}F(r)$ پایستار است. F و r را در مختصات کروی بیان کنید.

۸-۷ یک نوسانگر هماهنگ همسانگرد که انرژی پتانسیل آن به صورت $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$ است در نظر بگیرید.

(الف) نیروی $F(r)$ را حساب کنید و نمودارهای $V(r)$ و $F(r)$ را رسم کنید.

(ب) نمودار پتانسیل مؤثر را برای ذره ای به جرم m و با انرژی E و تکانه زاویه ای L رسم

کنید. حرکت ذره را بدون حل معادله های حرکت توصیف کنید.

(پ) مقادیر E و L را برای یک مدار دایره ای پیدا کنید.

(ت) فرکانس دوران برای مدار دایره ای و فرکانس نوسانهای شعاعی کوچک را حساب کنید.

(ث) ماهیت مداری را که با مدار دایره ای اندکی تفاوت دارد توضیح دهید.

۹-۷ نوسانگر هماهنگ همسانگردی که انرژی پتانسیل آن با $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$ داده شده است در نظر بگیرید. مقادیر $r(t)$ و $\theta(t)$ را برای مدار ذره پیدا کنید. چه نتیجه ای می توانید از این مقادیر بگیرید؟

۱۰-۷ در مسأله ۷-۱ معادله های حرکت را برای وضعیتهای مختلف پیدا کنید. $r(\theta)$ را از آنها به دست آورید، و در ماهیت حرکت بحث کنید.

۱۱-۷ جسمی به جرم m در مداری مارپیچی به معادله $r = r_0 e^{k\theta}$ حرکت می کند. نشان دهید که نیرویی که چنین مداری را ایجاد می کند یک نیروی مرکزی عکس مکعبی است. همچنین نشان دهید که θ به صورت لگاریتمی با زمان تغییر می کند.

۱۲-۷ جسمی به جرم m در یک میدان نیروی مرکزی روی دایره ای که از مرکز نیرو می گذرد حرکت می کند. در نتیجه مدار به صورت $r = r_0 \cos \theta$ نوشته می شود. نشان دهید که این نیروی مرکزی با توان پنجم فاصله شعاعی نسبت عکس دارد.

۱۳-۷ ذره ای به جرم m ، تحت تأثیر یک نیروی مرکزی که همیشه متوجه مبدأ است، مداری با معادله $r = a(1 + \cos \theta)$ را طی می کند. قانون نیرو را پیدا کنید.

۱۴-۷ مدار ذره ای به جرم m که تحت تأثیر یک نیروی مرکزی است به صورت $r = A \sin n\theta$ است، که A و n ثابتند. قانون نیرو را برحسب n ، A ، m ، r ، و تکانه زاویه ای L پیدا کنید.

۱۵-۷ ذره ای به جرم m تحت تأثیر یک نیروی مرکزی مداری را با معادله

$$r = \frac{ab}{(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}$$

طی می کند که a و b ثابتند. قانون نیرو را پیدا کنید.

۱۶-۷ ذره ای به جرم m روی دایره ای به شعاع r_0 ، در یک میدان نیروی جاذبی به معادله $F(r) = \frac{k_2}{r^2} + \frac{k_4}{r^4}$ حرکت می کند، که k_2 و k_4 ثابتند و مرکز نیرو در مرکز دایره قرار

دارد. نشان دهید که این مدار تنها در صورتی پایدار است که $k_2 > k_1$.

۱۷-۷ نشان دهید که سرعت فرار یک ذره در نقطه‌ای به فاصله r از مرکز زمین برابر است با

$$\sqrt{2}$$

برابر سرعت ذره در یک مدار دایره‌ای پایدار به شعاع r .

۱۸-۷ ذره‌ای به جرم m در میدان نیرویی که پتانسیل آن به صورت $V(r) = kr^4$ با $K > 0$ است، حرکت می‌کند.

(الف) $F(r)$ را حساب کنید و نمودارهای $F(r)$ و $V(r)$ را رسم کنید.

(ب) نمودار پتانسیل مؤثر را رسم کنید و بدون حل معادلات حرکت در حرکت ذره بحث کنید.

(پ) مقادیر E و L و شعاع مدار دایره‌ای را پیدا کنید.

(ت) دوره تناوب این حرکت دایره‌ای را حساب کنید.

(ث) زمان تناوب نوسانهای شعاعی کوچک، یعنی زمان تناوب حرکت را وقتی ذره اندکی از مدار دایره‌ای منحرف شده است، پیدا کنید.

۱۹-۷ ذره‌ای در نظر بگیرید که تحت تأثیر نیرویی به صورت

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} + \frac{k'}{r^3}$$

حرکت می‌کند. $k > 0$ و k' می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

(الف) $V(r)$ را محاسبه کنید و نمودارهای $V(r)$ و $F(r)$ را رسم کنید.

(ب) نمودارهای پتانسیل مؤثر را در موارد مختلف رسم کنید و در ماهیت حرکت ذره، بدون این که معادلات حرکت آن را عملاً حل کنید، بحث کنید.

(پ) فرکانس یک مدار دایره‌ای ممکن را حساب کنید.

(ت) فرکانس نوسانهای شعاعی کوچک را محاسبه کنید.

۲۰-۷ ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر نیرویی با قانون $F(r) = \frac{-k}{r^2}$ در فاصله d از مرکز نیرو قرار دارد. نشان دهید که زمانی که طول می‌کشد تا ذره به مرکز نیرو سقوط کند برابر است

$$\text{با } \frac{\sqrt{m\pi^2 d^3}}{8k}$$

۲۱-۷ یک سیستم دو ستاره‌ای تحت تأثیر جاذبه گرانشی متقابلشان مدارهایی دایره‌ای با زمان تناوب T حول یکدیگر طی می‌کنند. اگر ناگهان سرعت خود را از دست بدهند، نشان

دهید که بعد از یک بازه زمانی $\frac{T}{4\sqrt{2}}$ به یکدیگر می‌رسند.

۲۲-۷ رابطه زیر را برای یک بیضی ثابت کنید .

$$e = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}}$$

۲۳-۷ حرکت ذره‌ای به جرم m را که تحت تأثیر یک نیروی مرکزی جاذب متناسب با عکس مکعب فاصله شعاعی حرکت می‌کند در نظر بگیرید

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{K}{r^3} \hat{\mathbf{r}}, \quad K < 0$$

(الف) حرکت ذره را با روش رسم نمودار پتانسیل مؤثر مورد بحث قرار دهید .

(ب) معادله مدار $r = r(\theta)$ را پیدا کنید و نشان دهید که جواب می‌تواند برای وضعیتهای مختلف به یکی از شکلهای زیر نوشته شود

$$\frac{1}{r} = A \cos[\beta(\theta - \theta_0)]$$

$$\frac{1}{r} = A \cosh[\beta(\theta - \theta_0)]$$

$$\frac{1}{r} = A \sinh[\beta(\theta - \theta_0)]$$

$$\frac{1}{r} = A(\theta - \theta_0)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} e^{\pm \beta \theta}$$

(پ) گستره مقادیر E و L را که برای آنها معادلات پیشین بخوبی برقرارند پیدا کنید .

(ت) در هر کدام از موارد پیشین یک مدار نمونه‌ای رسم کنید .

۲۴-۷ ذره‌ای به جرم m در یک میدان نیروی مرکزی دافع به شکل $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = Kr\hat{\mathbf{r}}$ با $K > 0$ ، حرکت می‌کند . نشان دهید که مسیر ذره باید هذلولی شکل باشد .

۲۵-۷ جسمی به جرم m در یک میدان نیروی عکس مکعبی به شکل

$$\mathbf{F} = \frac{K}{r^3} \hat{\mathbf{r}}, \quad K > 0$$

حرکت می‌کند . نشان دهید که مسیر $r(\theta)$ ی جسم با

$$\frac{1}{r} = A \cos[\beta(\theta - \theta_0)]$$

داده می‌شود . مقادیر ثابت A و β را برحسب L ، سرعت ، و مکان اولیه پیدا کنید .

۲۶-۷ اگر جرم خورشید ناگهان به نصف تقلیل یابد ، نشان دهید که مدار دایره ای زمین سهمی شکل خواهد شد .

۲۷-۷ ذره ای به جرم m روی یک مسیر بیضی وار حول یک مرکز نیروی جاذب ، واقع در یکی از کانونهایش ، که به شکل $\frac{k}{r^2}$ با k ی ثابت است حرکت می کند . نشان دهید که سرعت v ی ذره در هر نقطه مدار عبارت است از

$$v^2 = k \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

۲۸-۷ ذره ای به جرم m در یک مدار بیضی وار تحت تأثیر یک نیروی عکس مجذوری حرکت می کند . فرض کنیم n نسبت بیشینه سرعت زاویه ای به کمینه آن باشد . نشان دهید که خروج از مرکز e ی بیضی برابر است با

$$e = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$$

۲۹-۷ نشان دهید که حاصل ضرب سرعت‌های بیشینه و کمینه یک ذره در یک مدار بیضی وار عبارت است از $\left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2$.

۳۰-۷ برای ذره ای که در یک مدار بیضی وار با خروج از مرکز e و نیم قطر بزرگ a حرکت می کند ، نشان دهید که $r = r(t)$ و $\theta = \theta(t)$ می توانند به صورت زیر داده شوند

$$r(t) = a(1 - e \cos \omega t + \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^2 \cos 2\omega t + \dots)$$

$$\theta(t) = \omega t + 2e \sin \omega t + \frac{3}{4}e^2 \sin 2\omega t + \dots$$

۳۱-۷ با استفاده از معادله (۷-۱۲۱) برای یک مقطع مخروطی و معادله های (۷-۱۲۲) ، مقادیر A ، B ، e و r را بر حسب m ، k ، L ، و E به دست آورید .

۳۲-۷ یک سیارک در فاصله 2×10^6 km از زمین با سرعت 10 km/s حرکت می کند . اگر کشش زمین نبود این سیارک از فاصله عمودی 25000 km از مرکز زمین عبور می کرد . نزدیکترین فاصله بین سیارک و مرکز زمین چقدر است ؟ آیا به زمین برخورد می کند یا نه ؟ اگر نه آیا دوباره به طرف زمین بر خواهد گشت ؟

۳۳-۷ یک ستاره دنباله دار در یک مسیر سهمی شکل ، در صفحه مدار زمین حرکت می کند . کمترین فاصله ستاره دنباله دار از خورشید $\frac{1}{3}$ شعاع مدار زمین است . با استفاده از قانون مساحتها نشان دهید که ستاره دنباله دار نمی تواند برای مدتی بیش از $\frac{2\pi}{3}$ سال (۷۴۵ روز) در داخل مدار زمین باشد .

۷-۳۴ ذره‌ای به جرم m با سرعت u_0 در بی نهایت ، به طرف یک نیروی دافع عکس مکعبی حرکت می کند . اگر توسط نیرو منحرف نمی شد از فاصله b از مرکز نیرو عبور می کرد . انحراف زاویه ای این ذره فرودی را حساب کنید .

۷-۳۵ به دو انتهای یک نخ که از سوراخی در سطح افقی یک میز گذشته است دو جرم یکسان بسته شده است . یک جرم بطور قائم آویزان است ، در حالی که جرم دیگر در روی سطح صاف میز ، دایره ای به شعاع r_0 با سرعت $(gr_0)^{1/2}$ طی می کند . نشان دهید که جرم قائم ساکن می ماند ، اما اگر اندکی در سطح قائم منحرف شود زمان تناوب نوسانهای کوچک $2\pi(\frac{2r_0}{3g})^{1/2}$ است .

۷-۳۶ ستاره دنباله داری در نظر بگیرید که در مداری سهمی شکل در صفحه مدار زمین حرکت می کند . کمترین فاصله آن از خورشید γr_0 است ، که r_0 شعاع مدار زمین و $\gamma < 1$ است . نشان دهید که کل زمانی که ستاره دنباله دار در داخل مدار زمین به سر می برد عبارت است از

$$\sqrt{2(1-\gamma)} \times \frac{1+2\gamma}{3\pi} \times 1 \text{ سال}$$

۷-۳۷ با استفاده از قوانین اول و دوم کپلر و قوانین نیوتنی حرکت ، قانون جاذبه جهانی را به دست آورید .

۷-۳۸ حضيض اسپونتيك (۱) ، 227km بالای سطح زمین و سرعت آن در این نقطه 28.710 km/n بود . فاصله اوج آن را از سطح زمین و زمان تناوب دوران را پیدا کنید .

۷-۳۹ یک ستاره دنباله دار در فاصله 10^8 km از مرکز خورشید مشاهده شده است که با سرعت 56.6 km/s به طرف خورشید در حرکت است و با شعاع خورشید زاویه 45° می سازد . مدار ستاره دنباله دار را ، در حالی که خورشید در مرکز است و محور X از ستاره دنباله دار می گذرد ، پیدا کنید . تا چه فاصله ای به خورشید نزدیک می شود ؟

۷-۴۰ یک ستاره دنباله دار در فاصله D ، برحسب یکای اختر فیزیکی ، از خورشید مشاهده شده است که با سرعتی S برابر سرعت مداری زمین حرکت می کند . نشان دهید که اگر $DS^2 > 2$ باشد مدار یک هذلولی و اگر $DS^2 = 2$ باشد مدار یک سهمی و اگر $DS^2 < 2$ باشد مدار یک بیضی خواهد بود .

۷-۴۱ خروج از مرکز ستاره دنباله دار هالی 0.967 و فاصله حضيض آن 89×10^6 km است .

فاصلهٔ اوج ، سرعت در حضیض و اوج ، و زمان تناوب مدار را پیدا کنید .

۴۲-۷ بامراجعه به شکل (۷-۲۱) ، برای انرژی $E + \Delta E$ ، معادلهٔ یک بیضی رامی توان به صورت

$$r = \frac{r_0}{1 - (A/r_0) \sin \theta}$$

نوشت . نشان دهید که برای $\frac{A}{r_0} \ll 1$ ، این معادله به $r = r_0 + A \sin \theta$ (معادلهٔ

۷-۱۳۶) کاهش می یابد که ، با تقریب مرتبهٔ اول در A ، یک بیضی است . توضیح

دهید .

۴۳-۷ ذرهٔ ای به جرم m تحت تأثیر یک نیروی جاذب $F(r) = \frac{1}{r^2} e^{-r/a}$ در دایره ای به شعاع

r_0 حرکت می کند . نشان دهید که این حرکت دایره ای در صورتی پایدار است که شعاع

r_0 دایره کوچکتر از a باشد .

۴۴-۷ ذرهٔ ای به جرم m در میدان نیروی مرکزی $F(r) = \frac{-k}{r^n}$ حرکت می کند . نشان دهید

که ، اگر مدار ذرهٔ دایره ای باشد که از مرکز نیرو بگذرد ، n باید برابر با ۵ باشد .

۴۵-۷ نشان دهید که مدار ذرهٔ ای به جرم m که تحت تأثیر نیروی مرکزی

$$F(r) = -\frac{k_2}{r^2} - \frac{k_3}{r^3}$$

که در آن k_1 و k_2 ثابت و بزرگتر از صفرند ، حرکت می کند ، یک بیضی با حرکت

تقدیمی است .

۴۶-۷ شرایط پایداری یک حرکت دایره ای را برای یک ذرهٔ به جرم m که تحت تأثیر نیروهای

مرکزی زیر حرکت می کند ، پیدا کنید .

$$F(r) = -(k/r^2) e^{-r/a} \quad (\text{الف})$$

$$F(r) = -k_2/r^2 - k_4/r^4 \quad (\text{ب})$$

۴۷-۷ ذرهٔ ای به جرم m تحت تأثیر نیروی $F(r) = \frac{-k}{r^2} e^{-r/a}$ یک مدار تقریباً دایره ای

به شعاع r_0 طی می کند . زاویهٔ اوجی را پیدا کنید .

منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر

- ARTHUR, W., and FENSTER, S. K., *Mechanics*, Chapter 8. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1969.
- BARGER, V., and OLSSON, M., *Classical Mechanics*, Chapter 4. New York: McGraw-Hill Book Co., 1973.
- BECKER, R. A., *Introduction to Theoretical Mechanics*, Chapter 10, New York: McGraw-Hill Book Co., 1954.
- DAVIS, A. DOUGLAS, *Classical Mechanics*, Chapter 7. New York: Academic Press, Inc., 1986.
- FOWLES, G. R., *Analytical Mechanics*, Chapter 6. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1962.
- FRENCH, A. P., *Newtonian Mechanics*, Chapters 8, 11, and 13. New York: W. W. Norton and Co., Inc., 1971.
- *GOLDSTEIN, H., *Classical Mechanics*, 2nd ed., Chapter 3. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1980.
- HAUSER, W., *Introduction to the Principles of Mechanics*, Chapter 7. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1965.
- KITTEL, C., KNIGHT, W. D., and RUDERMAN, M. A., *Mechanics*, Berkeley Physics Course, Volume 1, Chapter 9. New York: McGraw-Hill Book Co., 1965.
- KLEPPNER, D., and KOLENKOW, R. J., *An Introduction to Mechanics*, Chapter 9. New York: McGraw-Hill Book Co., 1973.
- *LANDAU, L. D., and LIFSHITZ, E. M., *Mechanics*, Chapter 3. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1960.
- MARION, J. B., *Classical Dynamics*, 2nd ed., Chapters 2 and 8. New York: Academic Press, Inc., 1970.
- MCCUSKEY, S. W., *Celestial Mechanics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1963.
- *MOORE, E. N., *Theoretical Mechanics*, Chapter 4. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1983.
- ROSSBERG, K., *Analytical Mechanics*, Chapter 6. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1983.
- STEPHENSON, R. J., *Mechanics and Properties of Matter*, Chapter 4. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- SYMON, K. R., *Mechanics*, 3rd ed., Chapter 3. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1971.
- TAYLOR, E. F., *Introductory Mechanics*, Chapter 6. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1963.

سیستم ذرات :

قوانین پایستگی و برخورد

۸-۱ سیستم ذرات و مرکز جرم

در این فصل و فصلهای بعد ، حرکت یک سیستم از ذرات یا اجسامی را که شامل تعداد زیادی ذره اند مورد بررسی قرار می دهیم . برای شروع ، قوانین پایستگی تکانه خطی ، تکانه زاویه ای ، و انرژی چنین سیستمهایی را مورد بحث قرار خواهیم داد . این قوانین را به بعضی از سیستمهای موردنظر ، مانند حرکت موشکها و تسمه های نقاله اعمال خواهیم کرد . استفاده از این قوانین در مطالعه مسائل پراکندگی یا برخورد ، موارد کشسان و ناکشسان ، اجتناب ناپذیر است . چنین مطالعاتی به درک برهم کنشهای بین سیستمهای میکروسکوپی و همچنین ماکروسکوپی می انجامد . هر وقت با سیستمی شامل تعداد زیادی ذره سر و کار داریم ، توصیف حرکت در دستگاه مختصات مرکز جرمی ، که بعداً ارائه خواهد شد ، نه تنها مناسب ، بلکه ضروری است . اکنون یک سیستم شامل N ذره با برچسبهای $1, 2, \dots, N$ در نظر می گیریم . جرمهای این ذرات m_1, m_2, \dots, m_N و در فاصله های r_1, r_2, \dots, r_N از مبدأ O ، آن طور که در شکل (۸-۱) نمایش داده شده است ، قرار دارند . سرعتهای این ذرات به ترتیب عبارتند از $\dot{r}_1, \dot{r}_2, \dots, \dot{r}_N$ (یا v_1, v_2, \dots, v_N) و شتابهای آنها $\ddot{r}_1, \ddot{r}_2, \dots, \ddot{r}_N$ ، (یا a_1, a_2, \dots, a_N) . برای چنین سیستمی از ذرات ، مرکز جرم نقطه ای است در فاصله

$\mathbf{R}(X, Y, Z)$ از مبدأ که با رابطه زیر تعریف می شود

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_N)\mathbf{R} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \dots + m_N\mathbf{r}_N$$

یا

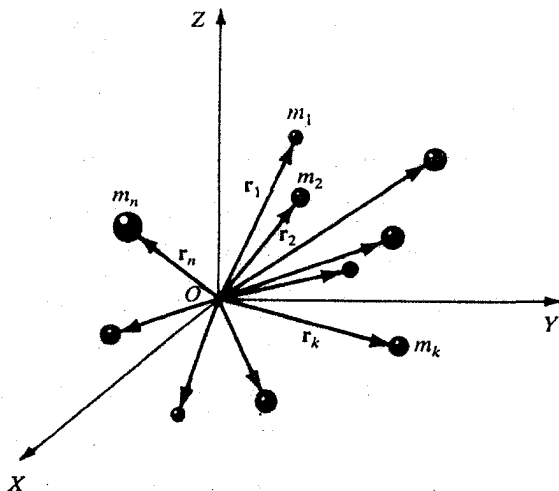
$$\sum_{k=1}^N m_k \mathbf{R} = \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{r}_k$$

یعنی ،

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_k \mathbf{r}_k}{\sum m_k} = \frac{\sum m_k \mathbf{r}_k}{M} \quad (1-8)$$

که در آن $M = \sum m_k$ حاصل جمع تمام جرمهای سیستم است و جمع بندی \sum از $k=1$ تا $k=N$ انجام می گیرد . به شکل مؤلفه ای ، می توانیم بنویسیم

$$X = \frac{1}{M} \sum m_k x_k, \quad Y = \frac{1}{M} \sum m_k y_k, \quad Z = \frac{1}{M} \sum m_k z_k \quad (2-8)$$



شکل (۱-۸) : سیستم ذرات با جرمهای متفاوت در فاصله های متفاوت از مبدأ

از معادله (۱-۸) باید روشن شده باشد که مرکز جرم یک مکان میانگین جرم دار است . سرعت $\mathbf{V}(=\dot{\mathbf{R}})$ مرکز جرم را می توان با مشتق گیری از معادله (۱-۸) نسبت به t پیدا کرد ،

یعنی ،

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}} = \frac{1}{M} \sum m_k \dot{\mathbf{r}}_k \quad (۳-۸)$$

و مؤلفه های سرعت مرکز جرم می توانند به صورت زیر نوشته شوند

$$V_X = \dot{X} = \frac{1}{M} \sum m_k \dot{x}_k, V_Y = \dot{Y} = \frac{1}{M} \sum m_k \dot{y}_k, V_Z = \dot{Z} = \frac{1}{M} \sum m_k \dot{z}_k \quad (۴-۸)$$

شتاب A ی مرکز جرم با مشتق گیری دوباره به دست می آید ، یعنی

$$\mathbf{A} = \ddot{\mathbf{R}} = \frac{1}{M} \sum m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \quad (۵-۸)$$

یا ، به شکل مؤلفه ای ،

$$A_X = \ddot{X} = \frac{1}{M} \sum m_k \ddot{x}_k, A_Y = \ddot{Y} = \frac{1}{M} \sum m_k \ddot{y}_k, A_Z = \ddot{Z} = \frac{1}{M} \sum m_k \ddot{z}_k \quad (۶-۸)$$

در بخشهای بعدی ، توصیف حرکت مرکز جرم و حرکت در دستگاه مختصات مرکز جرمی را جالب و مفید خواهیم یافت .

اکنون سه قانون پایستگی زیر و اعمال آنها را به سیستم ذرات بتفصیل مورد بحث

قرار می دهیم .

۱- پایستگی تکانه خطی

۲- پایستگی تکانه زاویه ای

۳- پایستگی انرژی

برای بررسی این مسأله دوروش وجود دارد : (۱) قوانین نیوتن ، و (۲) اصول تقارن .

قوانین پایستگی پیامدهای مستقیم تعریفهای ارائه شده در مکانیک نیوتنی ، یعنی ، قانون

دوم نیوتن ، هستند . اعتبار این قوانین تا جایی برقرار است که مکانیک نیوتنی توصیف مناسبی

از طبیعت ارائه دهد . به علاوه ، چون چیزی به عنوان سیستم منزوی واقعی ، به معنی درست

کلمه ، وجود ندارد ، این قوانین تنها می توانند بتقریب برقرار باشند . اما در نهایت ، از

دیدگاهی جدید ، این قوانین پیامد تقارنهای اساسی ای است که در این جا باختصار و در

فصل ۱۳ بتفصیل آنها را مورد بحث قرار خواهیم داد .

بطور کلی ، وقتی سیستم تقارن دارد که مشخصه ای در سیستم ، با وجود تغییر سیستم از

بعضی جهات ، بدون تغییر بماند . به عنوان مثال ، اگر به سیستم یک جابه جایی خطی داده

شود سیستم در اثر این جابه جایی خطی یا انتقال ناوردا بماند ، گفته می شود که سیستم دارای

تقارن انتقالی است. به همین طریق، گفته می شود یک سیستم دارای تقارن چرخشی است اگر در اثر چرخش ناوردا بماند. بین قوانین پایستگی و اصول تقارن ارتباط نزدیکی وجود دارد. پایستگی تکانه خطی، یک پیامد مستقیم تقارن انتقالی، یعنی همگنی فضا است. قانون پایستگی انرژی به همگنی زمان می انجامد. در واقع باید یک قدم جلوتر برویم و بگوییم:

هر قانون پایستگی بیان ناوردایی یک خاصیت فیزیکی در طول یک فرآیند فیزیکی است. در حال حاضر، قوانین پایستگی را از دیدگاه مکانیک نیوتنی بررسی می کنیم.

۸-۲ پایستگی تکانه خطی

برای ذره ای به جرم m که با سرعت v و تکانه خطی p حرکت می کند، قانون دوم نیوتن عبارت است از

$$F = \frac{dp}{dt} \quad (7-8)$$

که F نیروی خارجی وارد شده به جرم m است، و

$$p = mv \quad (8-8)$$

اگر m ثابت باشد،

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) = m \frac{dv}{dt} = ma \quad (9-8)$$

به علاوه، اگر $F = 0$ باشد داریم $p = \text{constant}$ ، که قانون پایستگی تکانه خطی برای یک ذره است.

اکنون این ایده ها را به سیستمی با N ذره، آن طور که در شکل (۸-۱) نشان داده شده است، گسترش می دهیم. حرکت ذره k ام به جرم m_k را که در فاصله r_k از مبدأ با سرعت $\dot{r}_k (= v_k)$ و شتاب \ddot{r}_k حرکت می کند، در نظر بگیریم. نیروی کل F_k ی وارد به ذره k ام مجموع دو دسته نیروست: (۱) مجموع نیروهای خارجی F_k^e ی وارد به ذره k ام، و (۲) مجموع نیروهای داخلی وارد به ذره k ام از طرف $N-1$ ذره دیگر سیستم. بنابراین، معادله حرکت ذره k ام، طبق قانون دوم نیوتن عبارت است از

$$F_k = F_k^e + F_k^i = m_k \ddot{r}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (10-8)$$

که در آن

$$\mathbf{F}_k^i = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \mathbf{F}_{kl}^i \quad (11-8)$$

و \mathbf{F}_{kl}^i نیروی وارد به ذره k ام از طرف ذره l ام است. به علت طبیعت برداری معادله (۱۰-۸)، $3N$ معادله دیفرانسیل مرتبه دوم همزمان وجود دارد که باید حل شوند. حرکت هر ذره k با حل این معادلات برحسب $6N$ ثابت دلخواه $3N$ برای مکانهای اولیه و $3N$ برای سرعتهای اولیه به دست می آید. هیچ روش عمومی برای حل معادله (۱۰-۸) که به استثنای بعضی موارد خاص فوق العاده مشکل است، وجود ندارد. یک راه چاره، حل این معادلات با استفاده از مختصات مرکز جرمی است، که بعداً توضیح خواهیم داد.

تکانه ذره k ام عبارت است از

$$\mathbf{p}_k = m_k \mathbf{v}_k = m_k \dot{\mathbf{r}}_k \quad (12-8)$$

با توجه به این رابطه، معادله (۱۰-۸) به شکل زیر در می آید

$$\frac{d\mathbf{p}_k}{dt} = \mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k^e + \mathbf{F}_k^i \quad (13-8)$$

از جمع بندی دوطرف روی تمام ذرات خواهیم داشت

$$\sum_{k=1}^N \frac{d\mathbf{p}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N \mathbf{p}_k = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^e + \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^i \quad (14-8)$$

\mathbf{p} را تکانه کل سیستم N ذره و \mathbf{F} را نیروی کل خارجی وارد به سیستم بگیریم،

$$\mathbf{P} = \sum_{k=1}^N \mathbf{p}_k = \sum_{k=1}^N m_k \dot{\mathbf{r}}_k \quad (15-8)$$

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^e \quad (16-8)$$

به علاوه، نشان خواهیم داد که مجموع تمام نیروهای داخلی وارد به تمام ذرات صفر است، یعنی

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^i = 0 \quad (17-8)$$

از ترکیب معادلات (۱۵-۸)، (۱۶-۸)، و (۱۷-۸) با (۱۴-۸) به دست می آوریم

$$\frac{dP}{dt} = F \quad (18-8)$$

این رابطه بیانگر قضیهٔ تکانه برای یک سیستم از ذرات است .

پایستگی تکانه خطی : آهنگ تغییرات تکانهٔ خطی کل برابر است با نیروی کل اعمال شده خارجی ؛ بنابراین ، اگر جمع تمام نیروهای خارجی اعمال شده صفر باشد ، تکانهٔ خطی کل P سیستم ثابت خواهد بود .

$$P = \text{constant} , \quad F = 0 \quad (19-8)$$

برحسب مختصات مرکز جرم ، طبق معادله های (۳-۸) و (۱۵-۸) داریم

$$P = \sum_{k=1}^N m_k \dot{r} = M\dot{R} \quad (20-8)$$

که با قرار دادن در (۱۸-۸) نتیجه می دهد

$$M\ddot{R} = F \quad (21-8)$$

معادله های (۱۸-۸) و (۲۱-۸) از نظر شکل شبیه به قانون دوم نیوتن است که به یک ذرهٔ اعمال شده باشد . بنابراین ، از معادلهٔ (۲۱-۸) می توانیم نتیجه بگیریم :

حرکت مرکز جرم یک سیستم ذرات شبیه به حرکت یک ذرهٔ به جرم M (جرم کل سیستم) است که تحت تأثیر یک نیروی F برابر با مجموع تمام نیروهای خارجی وارد به سیستم قرار دارد .

تمام این گفته ها تنها وقتی درست است که ما بتوانیم معادلهٔ (۱۷-۸) را توجیه کنیم . اکنون به اثبات این نکته با دو روش متفاوت می پردازیم : (۱) قانون سوم نیوتن ، و (۲) اصل کار مجازی . طبق معادلهٔ (۱۱-۸) ، داریم

$$F_k^i = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N F_{kl}^i \quad (11-8)$$

که در آن نیرویی F_{kl}^i است که از طرف ذرهٔ l به ذرهٔ k وارد می شود . بنابر قانون سوم نیوتن ، نیرویی که از طرف ذرهٔ l به ذرهٔ k وارد می شود مساوی و مختلف الجهد با نیرویی است که از طرف ذرهٔ k به ذرهٔ l وارد می شود ؛ یعنی ،

$$F_{kl}^i = -F_{lk}^i \quad (22-8)$$

این معادله بیانی از قانون سوم نیوتن به شکل ضعیف آن است ، زیرا تنها می رساند که دو نیرو مساوی و مختلف الجهت هستند ، اما لزوماً در امتداد خط و اصل دو ذره عمل نمی کنند . شکل قوی می رساند که خط عمل آنها نیز باید یکی باشد . با استفاده از معادله (۸-۱۱) ، مجموع تمام نیروهای داخلی عبارت است از

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^i = \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \mathbf{F}_{kl}^i \quad (23-8)$$

طرف راست شامل تمام نیروهایی است که زوجهای ذرات بر یکدیگر وارد می کنند . برای هر زوج ، جمع کل بنابر معادله (۸-۲۲) صفر است ؛ $\mathbf{F}_{kl}^i + \mathbf{F}_{lk}^i = 0$. در نتیجه طرف راست معادله (۸-۲۳) صفر است ، و بدین ترتیب ثابت می شود که جمع تمام نیروهای داخلی صفر است .

در اثبات قبلی ، مجبور بودیم نیروهای داخلی را به صورت زوجی در نظر بگیریم . اگر بخواهیم از اصل کار مجازی یا جابه جایی مجازی استفاده کنیم نیازی به این کار نداریم . فرض کنیم که به هر ذره سیستم یک جابه جایی کوچک $\delta \mathbf{r}$ داده شده باشد . چون به تمام ذرات سیستم یک جابه جایی داده شده است ، برای سیستم جابه جایی نسبی وجود ندارد ؛ در نتیجه کار خالصی توسط نیروهای داخلی انجام نمی گیرد . به این علت کار خالص انجام نمی گیرد که حالت سیستم در اثر این جابه جایی مجازی تغییر نمی کند . کار نیروی داخلی \mathbf{F}_k^i در یک جابه جایی مجازی کوچک $\delta \mathbf{r}$ ذره k ام عبارت است از

$$\delta W_k = \mathbf{F}_k^i \cdot \delta \mathbf{r} \quad (24-8)$$

کار کل انجام شده توسط تمام نیروهای داخلی عبارت است از

$$\delta W = \sum_{k=1}^N \delta W_k = \sum_{k=1}^N (\mathbf{F}_k^i \cdot \delta \mathbf{r}) = \delta \mathbf{r} \cdot \left[\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^i \right] \quad (25-8)$$

از $\delta \mathbf{r}$ فاکتور گرفته شده است زیرا برای تمام ذرات یکی است . اگر کار کل انجام شده توسط نیروهای داخلی برای هر جابه جایی صفر باشد ، داریم

$$\delta \mathbf{r} \cdot \left[\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^i \right] = 0$$

چون $\delta \mathbf{r}$ صفر نیست ، باید داشته باشیم (همان طور که انتظار می رود)

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^i = \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \mathbf{F}_{kl}^i = 0 \quad (26-8)$$

۳-۸ پایستگی تکانه زاویه‌ای

تکانه زاویه‌ای یک ذره با یک حاصل ضرب برداری به صورت

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (27-8)$$

تعریف می‌شود. اکنون این تعریف را به یک سیستم N ذره‌ای گسترش می‌دهیم. تکانه زاویه‌ای کل \mathbf{L} نسبت به مبدأ می‌تواند به صورت جمع برداری

$$\mathbf{L} = \sum_{k=1}^N (\mathbf{r}_k \times \mathbf{p}_k) = \sum_{k=1}^N (\mathbf{r}_k \times m_k \dot{\mathbf{r}}_k) \quad (28-8)$$

نوشته شود. تکانه زاویه‌ای کل می‌توانست نسبت به هر نقطه A ، به جای مبدأ O ، در نظر گرفته شود. اما در این مورد می‌بایستی $\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_A$ را به جای \mathbf{r}_k بگذاریم، که \mathbf{r}_A فاصله نقطه A از مبدأ است. برای سادگی، عبارت (۲۸-۸) را به کار می‌بریم. با مشتق‌گیری از تکانه زاویه‌ای در (۲۸-۸) خواهیم داشت

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{k=1}^N (\dot{\mathbf{r}}_k \times m_k \dot{\mathbf{r}}_k) + \sum_{k=1}^N (\mathbf{r}_k \times m_k \ddot{\mathbf{r}}_k) \quad (29-8)$$

جمله اول طرف راست به خاطر ($\dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}} = 0$) صفر می‌شود، حال آن‌که $m_k \ddot{\mathbf{r}}_k$ ، از معادله (۱۰-۸)، برابر با نیروی کل وارد به ذره k ام است؛ یعنی به دست می‌آوریم

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{k=1}^N \left[\mathbf{r}_k \times \left(\mathbf{F}_k^e + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \mathbf{F}_{kl}^i \right) \right] \quad (30-8)$$

که در آن، مانند قبل، \mathbf{F}_k^e نیروی خارجی کل وارد به ذره k ام، و \mathbf{F}_{kl}^i نیروی داخلی وارد بر ذره k ام از طرف ذره l ام است. اگر از قانون سوم نیوتن به صورت قوی استفاده کنیم، یعنی اگر نیروها مساوی و مختلف‌الجهت باشند و خط عمل آنها نیز یکی باشد، می‌توانیم ثابت کنیم که جمله دوم طرف راست صفر است. جمله دوم طرف راست شامل مجموع زوجهای گشتاورهای مربوط به زوجهای نیرو است، که طبق قانون سوم نیوتن مساوی و مختلف‌الجهت هستند. یک چنین زوجی عبارت است از

$$(\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{kl}^i) + (\mathbf{r}_l \times \mathbf{F}_{lk}^i) \quad (31-8)$$

چون $\mathbf{F}_{kl}^i = -\mathbf{F}_{lk}^i$ ، می توانیم عبارت (۸-۳۱) را به صورت (رک . شکل ۸-۲)

$$(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l) \times \mathbf{F}_{kl}^i = \mathbf{r}_{kl} \times \mathbf{F}_{kl}^i \quad (۳۲-۸)$$

بنویسیم . اگر نیروهای داخلی مرکزی باشند ، یعنی ، اگر نیروها در امتداد خط واصل دو ذره عمل کنند و باعث جذب یا دفع یکدیگر شوند ، این عبارت صفر است . به این ترتیب جمله دوم طرف راست (۸-۳۰) حذف می شود ، و معادله حاصل عبارت خواهد بود از

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^e \quad (۳۳-۸)$$

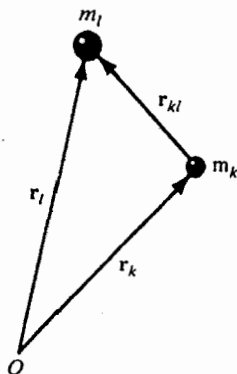
چون $\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^e$ گشتاور نیروی خارجی \mathbf{F}_k^e است ، طرف راست معادله (۸-۳۳) گشتاور کل همه نیروهای خارجی وارد به سیستم است . اگر $\boldsymbol{\tau}_k$ را گشتاور وارد به ذره k ام و $\boldsymbol{\tau}$ را گشتاور کل بگیریم ، می توانیم بنویسیم

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\tau}_k = \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^e \quad (۳۴-۸)$$

و

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau} \quad (۳۵-۸)$$

که بیان می کند آهنگ زمانی تغییر تکانه زاویه ای یک سیستم برابر است با گشتاور کل ناشی از تمام نیروهای خارجی وارد به سیستم . به این ترتیب می توانیم اصل زیر را بیان کنیم



شکل (۸-۲) : فاصله نسبی \mathbf{r}_{kl} بین یک جفت ذره

پایستگی تکانه زاویه ای : برای یک سیستم منزوی ، یعنی ، سیستمی که هیچ نیروی بر آن عمل نمی کند ، گشتاور کل $\boldsymbol{\tau}$ صفر است ؛ در نتیجه تکانه زاویه ای هم از نظر اندازه و هم از نظر

جهت ثابت می ماند .
یعنی ، اگر $\tau = 0$ باشد داریم

$$\tau = 0, \quad \frac{dL}{dt} = 0$$

و

$$L = \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k = \text{constant} \quad (36-8)$$

۲-۸ پایستگی انرژی

در وضعیتهای زیادی ، نیروی کل وارد به ذره در یک سیستم از ذرات تابعی از مکانهای ذرات در سیستم است . به این ترتیب نیروی \mathbf{F}_k ی وارد به ذره k ام عبارت است از

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k^e + \mathbf{F}_k^i = \mathbf{F}_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (37-8)$$

نیروهای خارجی \mathbf{F}_k^e ممکن است تابع مکان \mathbf{r}_k ی ذره k باشد ، نیروی داخلی \mathbf{F}_k^i تابع مکانهای نسبی ذرات دیگر نسبت به ذره k ، یعنی $\mathbf{r}_{kl} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l$ است ، اگر نیروی \mathbf{F}_k شرط

$$\nabla \times \mathbf{F}_k = \text{curl } \mathbf{F}_k = 0 \quad (38-8)$$

را برآورده کند ، یک تابع پتانسیلی به صورت

$$V = V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (39-8)$$

وجود دارد ، بطوری که

$$F_{kx} = -\frac{\partial V}{\partial x_k}, \quad F_{ky} = -\frac{\partial V}{\partial y_k}, \quad F_{kz} = -\frac{\partial V}{\partial z_k}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (40-8)$$

به این ترتیب ، تحت چنین شرایطی ، می توانیم قانون پایستگی انرژی را به دست آوریم . حرکت ذره k ام توسط

$$m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = m_k \dot{\mathbf{v}}_k = \mathbf{F}_k \quad (41-8)$$

توصیف می شود که ، با ترکیب با معادله (۴۰-۸) ، نتیجه می دهد

$$m_k \frac{dv_{kx}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x_k}, \quad m_k \frac{dv_{ky}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial y_k}, \quad m_k \frac{dv_{kz}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial z_k} \quad (42-8)$$

با ضرب معادله اول در $v_{kx} (= \frac{dx_k}{dt})$ ، معادله دوم در $v_{ky} (= \frac{dy_k}{dt})$ ، و معادله سوم در

$v_{kz} (= \frac{dz_k}{dt})$ ، و جمع آنها (با استفاده از $v_k^2 = v_{kx}^2 + v_{ky}^2 + v_{kz}^2$) خواهیم داشت

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_k v_k^2 \right) + \frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z_k} \frac{dz_k}{dt} = 0, \quad (۴۳-۸ \text{ الف})$$

$$k = 1, 2, \dots, N$$

جمع بندی روی تمام مقادیر k می دهد

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{2} m_k v_k^2 \right) + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z_k} \frac{dz_k}{dt} \right) = 0 \quad (۴۳-۸ \text{ ب})$$

که در آن

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{2} m_k v_k^2 \right) = K \quad (\text{انرژی جنبشی}) \quad (۴۴-۸)$$

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z_k} \frac{dz_k}{dt} \right) = \frac{dV}{dt} \quad (۴۵-۸)$$

در نتیجه معادله (۴۳-۸ ب) به شکل

$$\frac{d}{dt} (K + V) = 0$$

یا

$$K + V = E = \text{constant} \quad (۴۶-۸)$$

در می آید. انرژی کل E ، که مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل است ، ثابت است ؛

به این ترتیب معادله (۴۶-۸) بیانی از قانون پایستگی انرژی یا قضیه پایستگی انرژی است .

اگر نیروهای خارجی به مکان بستگی نداشته باشند ، ولی نیروهای داخلی مشتق از

یک تابع پتانسیل باشند ، قضیه پایستگی انرژی به شکل زیر در می آید

$$\frac{d}{dt} (K + V^i) = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^e \cdot \dot{\mathbf{r}}_k \quad (۴۷-۸)$$

چون فرض کرده ایم که در این مورد نیروهای داخلی به مکان بستگی دارند ، و انرژی پتانسیل

متناظر V^i به مکان نسبی زوجهای ذرات بستگی دارد ، یعنی

$$V_{kl}^i = V_{kl}^i(\mathbf{r}_{kl}) = V_{kl}^i(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l) \quad (۴۸-۸)$$

$$V^i = \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{k-1} V_{kl}^i(\mathbf{r}_{kl}) \quad (۴۹-۸)$$

می توانیم نتیجه بگیریم

$$F_k^i = -\hat{i} \frac{\partial V^i}{\partial x_k} - \hat{j} \frac{\partial V^i}{\partial y_k} - \hat{k} \frac{\partial V^i}{\partial z_k} \quad (۵۰-۸)$$

لازم است یادآوری کنیم که در صورتی یک تابع پتانسیل وجود دارد که معادله (۳۸-۸) برقرار باشد. همان طور که در فصلهای پیشین بحث شد، تنها وقتی این امکان وجود دارد که کار انجام شده به وسیله نیرو بین دو نقطه مستقل از مسیر باشد. به این ترتیب یک سیستم بسته، یعنی، سیستمی که هیچ نیروی خارجی به آن وارد نمی شود، به قانون پایستگی انرژی به شکل معادله (۴۶-۸) منجر می شود.

فرض کنیم در یک سیستم نیروهای اصطکاک داخلی وجود داشته باشد. چنین نیروهای داخلی به سرعت‌های نسبی ذرات بستگی دارند و مرکزی نیستند. بنابراین قانون پایستگی انرژی، معادله (۴۶-۸)، برای چنین سیستمی برقرار نیست.

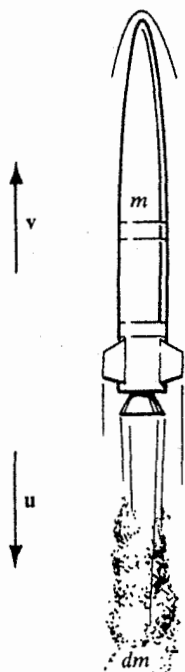
۵-۸ حرکت سیستمهای با جرم متغیر: موشکها و تسمه های نقاله

قوانین پایستگی بحث شده در بخش پیشین را به چند وضعیت بخصوص اعمال می کنیم. قوانین پایستگی به هر سیستم معینی از ذرات، که ممکن است بطور دلخواه انتخاب شده باشد، تا وقتی که نیروهای وارد به قسمت انتخاب شده سیستم تغییر نکنند، قابل اعمال است. یک محدودیت دیگر به قانون پایستگی انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل مربوط می شود. این قانون تا وقتی برقرار است که انرژی مکانیکی به صورتهای دیگر انرژی، از قبیل گرمای ایجاد شده توسط نیروهای اصطکاک، در نیامده باشد، یا این که این مقدار انرژی تبدیل شده به حساب آید.

حرکت موشکها

دانش فنی موشک بر پایه اصل بسیار ساده پایستگی تکانه خطی استوار است. یک موشک با پرتاب جرم در جهت عقب به صورت گازهای حاصل از سوخت، به طرف جلو رانده می شود. به این ترتیب، نیروی پیشران موشک واکنش نیروی رو به عقب گازهای پرتاب شده (سوخت سوخته شده) است. مسأله ما پیدا کردن سرعت موشک در هر لحظه بعد از پرتاب یا ترك زمین است. همان طور که در شکل (۳-۸) نشان داده شده است، در لحظه t ، موشک به جرم m با سرعت v نسبت به مبدأ ساکنی، مثلاً زمین، حرکت می کند. فرض کنیم سرعت گاز خارج شده از موشک نسبت به موشک u باشد؛ در نتیجه سرعت آن نسبت

به دستگاه مختصات ساکن $u + v$ است. در یک بازه زمانی بین t و $t + dt$ مقدار سوخت خارج شده dm است (منفی است)، در نتیجه آهنگ سوخت خارج شده عبارت است از $\left| \frac{dm}{dt} \right| = -\frac{dm}{dt}$ و بعد از این بازه جرم موشک $m + dm$ و سرعت آن $v + dv$ خواهد بود



شکل (۳-۸): حرکت یک موشک در لحظه t

تکانه سیستم در لحظه t عبارت است از

$$P(t) = mv \quad (۵۱-۸)$$

و تکانه آن در لحظه $t + dt$ عبارت است از

$$\begin{aligned} P(t + dt) &= P_{\text{rocket}}(t + dt) + P_{\text{fuel}}(t + dt) \\ &= (m + dm)(v + dv) + (-dm)(v + u) \end{aligned} \quad (۵۲-۸)$$

تغییر تکانه در بازه زمانی dt به صورت زیر است

$$dP = P(t + dt) - P(t) \approx m dv - u dm \quad (۵۳-۸)$$

که جمله مرتبه دوم $dm dv$ را حذف کرده ایم. چون آهنگ تغییرات تکانه dP/dt برابر با نیروی خارجی اعمال شده F است، می توانیم معادله (۸-۳۳) را به صورت

$$\frac{dP}{dt} = F = m \frac{dv}{dt} - u \frac{dm}{dt} \quad (8-54)$$

بنویسیم. یادآوری کنیم که u سرعت گازهای خروجی است. معادله (۸-۵۴) می تواند به صورت

$$m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt} + F \quad (8-55)$$

نوشته شود که F نیروی گرانشی، نیروی مقاومت هوا، یا هر نیروی خارجی دیگر است. $u \frac{dm}{dt}$ پیشران موتور موشک نامیده می شود. چون $\frac{dm}{dt}$ منفی است، پیشران در خلاف جهت سرعت u ی گازهای فراری است. [پیشران موتور موشک را می توان با ساکن نگاه داشتن موشک و سوزاندن سوخت با آهنگ $\frac{dm}{dt}$ محاسبه کرد. نیروی F_0 لازم برای ساکن نگاه داشتن موشک ($\frac{dv}{dt} = 0$)

$$F_0 = -u \frac{dm}{dt} \quad (8-56)$$

اندازه پیشران را به ما می دهد].

اکنون یک مورد خاص معادله (۸-۵۵) را، وقتی $F = 0$ است، یعنی نیروی گرانش یا مقاومت هوا حضور ندارد، در نظر بگیریم. موردی که موشک در فضاهای دور حرکت می کند می تواند یکی از این موارد باشد. معادله (۸-۵۵) برای $F = 0$ می شود

$$m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt} \quad (8-57)$$

با ضرب دو طرف در $\frac{dt}{m}$ و انتگرال گیری خواهیم داشت

$$\int_{v_0}^v dv = u \int_{m_0}^m \frac{dm}{m}$$

$$v - v_0 = u \ln m \Big|_{m_0}^m$$

چون $m_0 > m$ بهتر است بنویسیم

$$v = v_0 - u \ln \frac{m_0}{m} \quad (8-58)$$

که بیان می کند تغییر سرعت $v - v_0$ ، یا سرعت نهایی v به دو عامل بستگی دارد. مقدار زیاد

سرعت v از (۱) مقادیر زیاد u ، سرعت گاز خارج شده، و (۲) مقادیر زیاد $\frac{m_0}{m}$ ، ناشی می شود که m_0 جرم اولیه موشک و سوخت آن، و m جرم نهایی وقتی که سوخت تمام شده است، می باشد. سرعت نهایی مستقل از آهنگ مصرف سوخت است. مقادیر زیاد $\frac{m_0}{m}$ به این معنی است که نسبت سوخت به موشک خالی زیاد است. برای افزایش $\frac{m_0}{m}$ به مقادیر زیاد، از موشکهای چند طبقه برای پرتاب ماهواره ها یا فضاپیماها استفاده می کنند.

در نزدیکی سطح زمین نمی توانیم از نیروی کشش گرانشی چشم پوشی کنیم. بنابراین، با قرار دادن $F = mg$ در معادله (۸-۵۵) داریم

$$m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt} + mg \quad (۸-۵۹)$$

که پس از مرتب سازی و انتگرال گیری، یعنی

$$\int_{v_0}^v dv = u \int_{m_0}^m \frac{1}{m} dm + g \int_0^t dt$$

منجر به

$$v = v_0 - u \ln \frac{m_0}{m} + gt \quad (۸-۶۰)$$

می شود. با این فرض که در $t = 0$ داریم $v_0 = 0$ و چون u در خلاف جهت v است، می توانیم معادله (۸-۶۰) را به شکل نرده ای

$$v = u \ln \frac{m_0}{m} - gt \quad (۸-۶۱)$$

بنویسیم. در آغاز، پیشران موشک باید آن قدر بزرگ باشد که بر نیروی گرانشی $m_0 g$ غلبه کند. از آن به بعد، معادلات پیشین حرکت موشک را توصیف می کنند.

تسمه نقاله

یک تسمه نقاله، آن طور که در شکل (۸-۴) نشان داده شده است، در نظر بگیریم. می خواهیم نیروی F لازم را برای این که تسمه با سرعت افقی یکنواخت v حرکت کند، در حالی که ماسه یا مواد دیگری بطور پیوسته از یک قیف ساکن با آهنگ $\frac{dm}{dt}$ روی آن ریخته می شود، حساب کنیم. فرض کنیم M جرم تسمه و m جرم ماسه روی تسمه باشد. تکانه کل

سیستم ، تسمه و ماسه روی تسمه ، عبارت است از

$$p = (m + M)v \quad (۶۲-۸)$$

بنابراین ، طبق قضیهٔ تکانهٔ خطی ، چون M و u ثابت و m متغیر است ، داریم

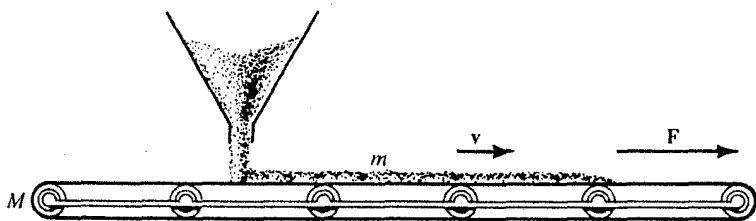
$$F = \frac{dp}{dt} = v \frac{dm}{dt} \quad (۶۳-۸)$$

که F نیروی اعمال شده به تسمه است . توانی که باید به وسیله نیرو تأمین شود تا سرعت حرکت تسمه را یکنواخت نگاه دارد عبارت است از

$$P = Fv = v^2 \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} mv^2 = 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) \quad (۶۴-۸)$$

$$= 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (m + M)v^2 \right) = 2 \frac{dK}{dt}$$

یعنی ، توان مورد نیاز دو برابر آهنگ افزایش انرژی جنبشی است . این می رساند که قانون پایستگی انرژی مکانیکی در این جا برقرار نیست . توان تلف شده صرف انجام کار در مقابل نیروی اصطکاک می شود ، که بعداً توضیح خواهیم داد .



شکل (۸-۴) : تسمه نقاله

وقتی ماسه به تسمه برخورد می کند باید در فاصله کوتاهی ، که در آن مدت بین تسمه و ماسه لغزشی صورت می گیرد ، شتاب بگیرد و از سرعت صفر به سرعت تسمه برسد . از نظر یک ناظر ساکن روی تسمه ، ماسه ساقط شونده با سرعت u در خلاف جهت حرکت تسمه حرکت می کند . تسمه یک نیروی افقی dF_f روی ماسه به جرم dm وارد می کند که برابر است با

$$dF_f = \mu(dm)g \quad (۶۵-۸)$$

که در آن μ ضریب اصطکاک جنبشی بین تسمه و ماسه است. به این ترتیب شتاب ماسه $(a = \frac{F}{m})$ عبارت است از

$$a = \frac{dF_f}{dm} = \mu g \quad (۶۶-۸)$$

فاصله x که در آن سرعت ماسه از v به صفر رسیده است $(v^2 = v_0^2 + 2ax)$ برابر است با

$$x = \frac{v^2}{2a} = \frac{v^2}{2\mu g} \quad (۶۷-۸)$$

و کار انجام شده توسط نیروی اصطکاک به صورت زیر است

$$dW_f = dF_f x = \mu(dm)g \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{1}{2}(dm)v^2 \quad (۶۸-۸)$$

توان تلف شده ذرات نیروی اصطکاک برابر است با

$$P_m = \frac{dW_f}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} v^2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{1}{2} P \quad (۶۹-۸)$$

مهم نیست که زمان شتاب گیری یک ثانیه یا $\frac{1}{100}$ ثانیه باشد، توان تلف شده توسط نیروی اصطکاک بین تسمه و ماسه درست نصف توان مصرف شده است.

مثال (۸-۱): جرم یک قطره باران کروی وقتی از داخل مه یا غبار عبور می کند، با آهنگی متناسب با سطح مقطع و سرعت آن افزایش می یابد. شتاب قطره را برحسب شعاع و سرعت آن پیدا کنید. فرض می شود که قطره از حالت سکون با ابعاد بی نهایت کوچک شروع به حرکت کرده است.

در لحظه t سرعت قطره را u و شعاع آن را r بگیریم. اگر ρ چگالی قطره باشد، مقطع A و جرم m با روابط زیر داده می شوند

$$A = \pi r^2 \quad (۱)$$

$$m = \rho \frac{4\pi r^3}{3} \quad (۲)$$

به این ترتیب آهنگ افزایش جرم قطره برابر است با

$$\frac{dm}{dt} = kAu = k(\pi r^2)v \quad (۳)$$

که در آن k ضریب تناسب است .

برای قطره‌ای به جرم m و سرعت u ، تکانه اولیه عبارت است از

$$p_i = mv \quad (4)$$

وقتی جرم از m به $m + dm$ و سرعت از u به $u + du$ تغییر می‌کند ، تکانه نهایی عبارت است از

$$p_f = (m + dm)(v + dv) \approx mv + v dm + m dv \quad (5)$$

که از جمله کوچک $dm du$ صرف نظر کرده‌ایم . تغییر تکانه برابر است با

$$dp = \Delta p = p_f - p_i = v dm + m dv \quad (6)$$

اما

$$dp = F dt = mg dt \quad (7)$$

از برابر قرار دادن معادله‌های (۶) و (۷) و مرتب‌سازی ، خواهیم داشت

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{v}{m} \frac{dm}{dt} \quad (8)$$

m را از معادله (۲) و $\frac{dm}{dt}$ را از معادله (۳) جایگزین می‌کنیم ، داریم

$$a = g - \frac{v}{\rho(4\pi r^3/3)} k(\pi r^2)v$$

یعنی ،

$$a = g - \frac{3k}{4\rho} \frac{v^2}{r} = g - K \frac{v^2}{r} \quad (9)$$

که $K = \frac{3k}{4\rho}$ یک ثابت است .

تمرین (۸-۱) : قطره‌ای از ارتفاع 300 m سقوط می‌کند ، وقتی به زمین می‌رسد شعاع آن 1 mm و سرعت آن 10 m/s است . زمانی را که به زمین می‌رسد بر حسب k و K محاسبه کنید .

مثال (۸-۲) : یک موشک یک طبقه در نظر بگیرید فرض کنید که g ثابت ، آهنگ تغییر

جرم k ثابت ، سرعت گاز خروجی u_0 ثابت ، و حرکت تنها در امتداد قائم است .
(الف) سرعت نهایی را وقتی سوخت تمام شد ، و (ب) ارتفاعی را که موشک به آن می رسد محاسبه کنید .

(الف) فرض کنید جرم اولیه m_i جرم نهایی ، و آهنگ ثابت تغییر

جرم

$$\frac{dm}{dt} = -k \quad (۱)$$

باشد که k یک ثابت مثبت است . معادله حرکت موشک عبارت است از

$$ma = kv_0 - mg \quad (۲)$$

با قرار دادن a و k و مرتب سازی ، خواهیم داشت

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt} v_0 - mg \quad (۳)$$

با ضرب دو طرف در dt و گذاردن $dt = -\frac{dm}{k}$ از معادله (۱) ، داریم

$$dv = -v_0 \frac{dm}{m} + \frac{g}{k} dm \quad (۴)$$

که پس از انتگرال گیری از طرفین ، می دهد

$$dv = -v_0 \int_{m_i}^m \frac{dm}{m} + \frac{g}{k} \int_{m_i}^m dm \quad (۵)$$

$$v = -v_0 \ln m + v_0 \ln m_i + \frac{g}{k} m - \frac{g}{k} m_i \quad (۶)$$

در نتیجه سرعت نهایی پس از اتمام سوخت ، وقتی $m = m_f$ است ، می شود

$$v_f = v_b = v_0 \ln \frac{m_i}{m_f} - \frac{g}{k} (m_i - m_f) \quad (۷)$$

اما نسبت جرم اولیه به جرم نهایی عبارت است از

$$R = \frac{m_i}{m_f} \quad (۸)$$

$$k = -\frac{dm}{dt} = -\frac{\Delta m}{\Delta t} = -\frac{m_f - m_i}{\Delta t} = \frac{m_i - m_f}{\Delta t} \quad (۹ \text{ الف})$$

یا

$$\Delta t = t_b = \frac{m_i - m_f}{k} \quad (9 \text{ ب})$$

که t_b زمان اتمام سوخت است. معادله (۷) به شکل زیر در می آید

$$v_b = v_0 \ln R - g t_b \quad (10)$$

که سرعت در موقع اتمام سوخت است.

(ب) یک بار دیگر از معادله (۶)، با قرار دادن $v = \frac{dz}{dt}$ ، نتیجه

می شود

$$dz = -v_0 \ln m dt + v_0 \ln m_i dt + \frac{g}{k} m dt - \frac{g}{k} m_i dt \quad (11)$$

با گذاردن $dt = -\frac{dm}{k}$ از معادله (۱) و مرتب سازی، خواهیم داشت

$$dz = \left(\frac{v_0}{k} \ln m \right) dm - \left(\frac{g}{k^2} m \right) dm + \left(\frac{g}{k^2} m_i - \frac{v_0}{k} \ln m_i \right) dm \quad (12)$$

انتگرال گیری از جرم اولیه m_i تا جرم نهایی m_f در اتمام سوخت، می دهد

$$z = \int_{m_i}^{m_f} \frac{v_0}{k} \ln m dm - \int_{m_i}^{m_f} \frac{g}{k^2} m dm + \int_{m_i}^{m_f} \left(\frac{g}{k^2} m_i - \frac{v_0}{k} \ln m_i \right) dm$$

که نتیجه می شود $(\int \ln m dm = m \ln m - m)$

$$z = \frac{v_0}{k} [m_f \ln m_f - m_f - m_i \ln m_i + m_i] - \frac{g}{2k^2} (m_f^2 - m_i^2) \quad (13)$$

$$+ \left(\frac{g m_i}{k^2} - \frac{v_0 \ln m_i}{k} \right) (m_f - m_i)$$

با گذاردن

$$t_b = \frac{m_i - m_f}{k} \quad \text{و} \quad R = \frac{m_i}{m_f}$$

ارتفاع را در اتمام سوخت به صورت زیر به دست می آوریم

$$z_b = v_0 t_b - \frac{1}{2} g t_b^2 - \frac{m_f v_0}{k} \ln R \quad (14)$$

نهمین (۸-۴): نشان دهید ارتفاع بیشینه ای که موشک مورد بحث در مثال به آن می رسد

عبارت است از

$$z_{\max} = \frac{v_0^2 (\ln R)^2}{2g} - v_0 t_b \left(\frac{\ln R}{1-R} - 1 \right)$$

(راهنمایی: بعد از اتمام سوخت موشک بدون توان به راه خود ادامه می دهد:

$$(mgh = \frac{1}{2} m v_b^2)$$

مثال (۳-۸): زنجیری به طول l و جرم M بطور قائم طوری نگه داشته شده است که انتهای پایینی آن، همان طور که در شکل (مثال-۸-۳) نشان داده شده است، درست سطح یک میز افقی را لمس می کند. اگر انتهای بالایی زنجیر رها شود، نیروی وارد به سطح میز را به هنگام سقوط بر حسب طولی از زنجیر که بالای میز در هواست حساب کنید. فرض کنیم λ چگالی جرمی خطی باشد

$$\lambda = \frac{M}{L} \quad (۱)$$

در زمان t ، طول x زنجیر در هوا، و طول $L-x$ آن روی میز است، و زنجیر هنوز در حال سقوط است. در زمان t وزن قسمت روی میز $\lambda(L-x)g$ است که رو به پایین است و یک عکس العمل F ایجاد می کند. بنابراین، نیروی وارد به زنجیر (رک شکل (مثال-۸-۳)) عبارت است از

$$F_{\text{net}} = F - \lambda(L-x)g \quad (۲)$$

جرم روی میز حاصل از سقوط آزاد با آهنگ

$$\frac{dm}{dt} = \lambda v \quad (۳)$$

افزایش می یابد که v سرعت زنجیر در زمان t است. بنابر قانون دوم نیوتن داریم

$$F_{\text{net}} = \frac{d}{dt} mv = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} = 0 + v(\lambda v) \quad (۴)$$

با برابر قرار دادن معادله های (۲) و (۴) خواهیم داشت

$$F - \lambda(L-x)g = \lambda v^2$$

$$F = \lambda[(L-x)g + v^2] \quad (5)$$

v ، سرعت زنجیر درست در بالای میز (برابر با سرعت سقوط آزاد) ، عبارت است از

$$v = \sqrt{2g(L-x)} \quad (6)$$

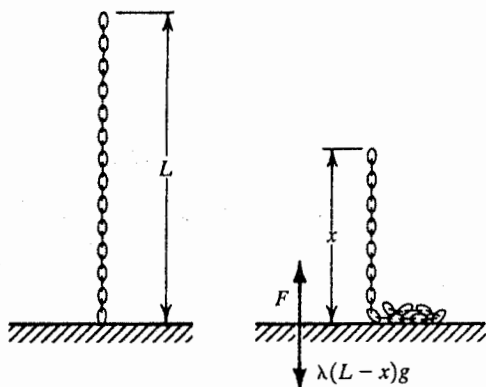
با قرار دادن v در معادله (۵) نتیجه می گیریم

$$F = 3\lambda g(L-x) \quad (7)$$

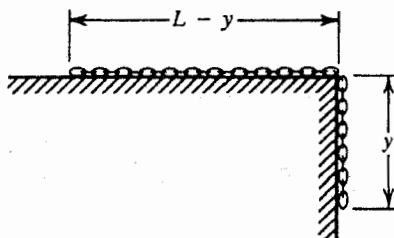
اما $w = \lambda g$ وزن واحد طول است ، لذا

$$F = 3w(L-x) \quad (8)$$

نیروی وارد به میز مساوی و مختلف الجهد با F است .



شکل (مثال . ۳-۸)



شکل (ت . ۳-۸)

تمرین (۳-۸): برای زنجیر شکل (ت-۸-۳) نشان دهید که وقتی تمام زنجیر از میز جدا می شود سرعت آن برابر است با

$$v = \sqrt{(g/L)(L^2 - a^2)}$$

که وقتی $t=0$ است داریم $y=a$.

۶-۸ برخوردهای کشسان و قوانین پایستگی

وقتی دو یا چند جسم ، بایا بدون حضور نیروهای خارجی ، طوری به یکدیگر نزدیک شوند (بایا بدون هرگونه تماس فیزیکی) که بین آنها نوعی برهم کنش رخ دهد ، گوییم که برخوردی بین آنها صورت گرفته است . بعد از برخورد ، سرعتهای ذرات برخوردکننده ممکن است همانند قبل از برخورد باشند ، یا نباشند . اغلب اوقات می خواهیم که نوع برهم کنش (یا نوع نیرو) بین ذرات میکروسکوپیکی را توصیف کنیم . اگر ذرات به یک هدف بتابند ، مسیر و انرژی ذرات برخوردکننده تغییر می کند . با اندازه گیری انرژی و توزیع زاویه ای این ذرات پراکنده شده ، می توانیم اطلاعاتی در باره ساختار و طبیعت نیروهای درگیر به دست آوریم .

با اعمال قوانین پایستگی ، جزئیات زیادی از برخورد را ، بدون آگاهی زیادی از طبیعت برهم کنش یا نیرو ، می توان پیشگویی کرد . برخوردها را می توان به دو گروه تقسیم کرد : برخوردهای کشسان ، که در آنها هم تکانه خطی و هم انرژی جنبشی پایسته است ، و برخوردهای ناکشسان ، که در آنها پایستگی تکانه خطی بخوبی برقرار است ، اما انرژی جنبشی پایسته نیست . بنابراین ، اگر P_i و K_i تکانه خطی و انرژی جنبشی قبل از برخورد ، و P_f و K_f تکانه و انرژی جنبشی پس از برخورد باشند ، داریم

$$P_i = P_f \quad \text{و} \quad K_i = K_f \quad \text{برای برخوردهای کشسان} \quad (۷۰-۸)$$

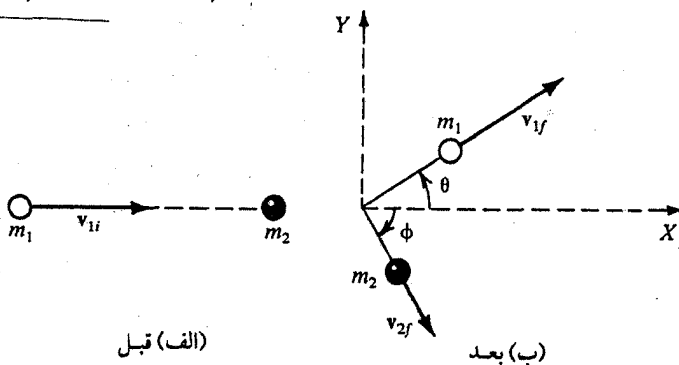
$$P_i = P_f \quad \text{و} \quad K_i \neq K_f \quad \text{برای برخوردهای ناکشسان} \quad (۷۱-۸)$$

در این بخش ، بحث خود را به برخوردهای کشسان محدود می کنیم . یک برخورد کشسان بین دو ذره ، آن طور که در شکل (۵-۸) نمایش داده شده است ، در نظر بگیریم . جسمی به جرم m_1 و با سرعت v_{1i} ، موسوم به ذره فرودی ، به جسمی به جرم

m_2 و در حال سکون ، موسوم به ذره هدف ، هر دو در روی محور X ، برخورد می کند .
 (این فرض که یکی از ذرات در حال سکون باشد چیزی از کلیت مسأله کم نمی کند .
 اگر هر دو جسم در حرکت بودند ، می توانستیم برخورد را از دید دستگاه مرجعی که با سرعت یکی از جرمها ، مثلاً m_2 ، حرکت می کند در نظر بگیریم . در این دستگاه مرجع m_2 در حال سکون خواهد بود) . بعد از برخورد ، جرم m_1 با سرعت v_{1f} و با زاویه θ نسبت به X ، و جرم m_2 با سرعت v_{2f} و با زاویه ϕ نسبت به محور X ، آن طور که در شکل (۸-۵) نشان داده شده است ، حرکت می کند . باید یادآوری کرد که اگر v_{1f} در صفحه XY باشد ، نیز باید در همین صفحه باشد . علت آن این است که اگر v_{2f} در صفحه XY نباشد ، بعد از برخورد مؤلفه سرعتی در امتداد Z خواهیم داشت . اما چنان چیزی نمی تواند رخ دهد زیرا قبل از برخورد مؤلفه سرعتی در امتداد محور Z نداشتیم ، و بنابراین به ناپایستگی تکانه خطی خواهد انجامید .

پایستگی تکانه خطی و انرژی ایجاب می کند که

$$P_i = P_f \quad \text{و} \quad K_i = K_f \quad (۷۲-۸)$$



شکل (۵-۸) : برخورد کشسان بین دو ذره : (الف) قبل از برخورد ، و (ب) بعد از برخورد

که P_i و P_f تکانه های خطی اولیه و نهایی ، K_i و K_f انرژیهای جنبشی اولیه و نهایی هستند ،
 یعنی ،

$$P_{1i} + P_{2i} = P_{1f} + P_{2f} \quad (۷۳-۸)$$

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f} \quad (۷۴-۸)$$

که در آن

$$p_{1i} = m_1 v_{1i}, \quad p_{2i} = 0, \quad p_{1f} = m_1 v_{1f}, \quad p_{2f} = m_2 v_{2f}$$

$$K_{1i} = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2, \quad K_{2i} = 0, \quad K_{1f} = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2, \quad K_{2f} = \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

با استفاده از این روابط و نوشتن معادله (۷۳-۸) به شکل مؤلفه‌ای در امتداد محورهای X و Y ، به کمک شکل (۵-۸) ، خواهیم داشت

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \theta + m_2 v_{2f} \cos \phi \quad (۷۵-۸)$$

$$0 = m_1 v_{1f} \sin \theta - m_2 v_{2f} \sin \phi \quad (۷۶-۸)$$

و از معادله (۷۴-۸) داریم

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad (۷۷-۸)$$

در بیشتر موارد ، m_1 ، m_2 ، v_{1f} معلوم ، v_{1i} ، v_{2f} ، θ ، ϕ کمیت‌های مجهول هستند . به این ترتیب سه معادله [(۷۵-۸) ، (۷۶-۸) ، و (۷۷-۸)] و چهار مجهول داریم . می‌توانیم یکی از چهار مجهول ، مثلاً ϕ ، را حذف کنیم ، و روابط بین سه کمیت دیگر v_{1f} ، v_{2f} ، و θ را پیدا کنیم . می‌توانیم معادله‌های (۷۵-۸) و (۷۶-۸) را به صورت زیر بنویسیم

$$m_1 v_{1i} - m_1 v_{1f} \cos \theta = m_2 v_{2f} \cos \phi$$

$$m_1 v_{1f} \sin \theta = m_2 v_{2f} \sin \phi$$

با مربع کردن و جمع کردن این دو معادله و تقسیم بر m_1^2 خواهیم داشت

$$v_{1i}^2 + v_{1f}^2 - 2v_{1i}v_{1f} \cos \theta = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 v_{2f}^2 \quad (۷۸-۸)$$

و از معادله (۷۷-۸) به دست می‌آوریم

$$v_{2f}^2 = \frac{m_1}{m_2} (v_{1i}^2 - v_{1f}^2) \quad (۷۹-۸)$$

با قرار دادن v_{2f}^2 از معادله (۷۹-۸) در معادله (۷۸-۸) یک معادله درجه دوم برای $\frac{v_{1f}}{v_{1i}}$ حاصل می‌شود که پس از حل نتیجه می‌دهد

$$\frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left[\cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - \left(\frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2}\right)} \right] \quad (۸۰-۸)$$

این معادله اطلاعات زیادی در باره برخورد‌های کشسان به ما می‌دهد . در بحث زیر ، باید

به خاطر بسپاریم که کمیت زیر علامت رادیکال نمی تواند منفی باشد زیرا ، در غیر این صورت ، به مقدار موهومی برای v_{1f} منجر می شود ، که از نظر فیزیکی بی معنی است .

مورد (الف) $\theta = 0$: این برخوردها یک بُعدی هستند ؛ یعنی ، برخورد سر به سر است . با قرار دادن $\theta = 0$ در معادله (۸-۸۰) نتیجه می گیریم

$$\frac{v_{1f}}{v_{1i}} = 1 \quad \text{یا} \quad \frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \quad (۸۱-۸)$$

این عبارت را در معادله (۸-۷۹) می بریم و نتیجه می گیریم

$$v_{2f} = 0, \quad \frac{v_{1f}}{v_{1i}} = 1 \quad (۸۲-۸)$$

که متناظر با عدم برخورد است ؛ و

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad (۸۳-۸)$$

برای

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad (۸۴-۸)$$

به این ترتیب معادله های (۸۳-۸) و (۸۴-۸) برخورد سر به سر ، یعنی ، برخورد در یک بُعد را نمایش می دهند . اکنون چند مورد خاص از این دو معادله را برای برخوردهای سر به سر بررسی می کنیم .

(۱) فرض کنیم $m_1 = m_2$ ، از معادله های (۸۳-۸) و (۸۴-۸) نتیجه می شود

$$v_{1f} = 0 \quad \text{و} \quad v_{2f} = v_{1i} \quad (۸۵-۸)$$

یعنی ، ذره فرودی متوقف می شود ، و ذره هدف با سرعت اولیه ذره فرودی شروع به حرکت می کند .

(۲) اگر $m_1 \ll m_2$ باشد ، خواهیم داشت

$$v_{1f} \approx -v_{1i} \quad \text{و} \quad v_{2f} \approx 0 \quad (۸۶-۸)$$

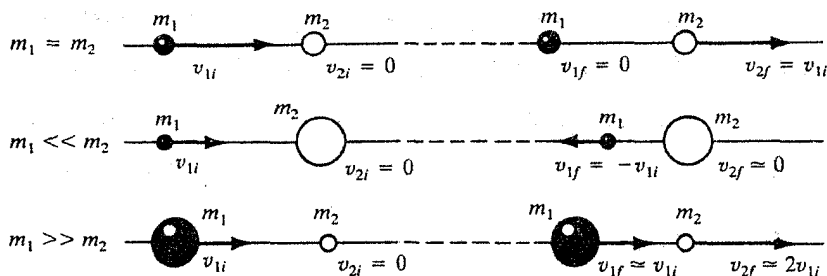
یعنی ، ذره فرودی با همان سرعت به عقب بر می گردد ، و ذره هدف بسختی حرکت می کند

(۳) اگر $m_1 \gg m_2$ باشد ، نتیجه می گیریم

$$v_{1f} \approx v_{1i} \quad \text{و} \quad v_{2f} = 2v_{1i} \quad (۸۷-۸)$$

یعنی ، ذره فرودی حرکت خود را حفظ می کند ، بطوری که گویی هیچ اتفاقی نیفتاده است ، و ذره هدف با سرعتی دو برابر سرعت ذره فرودی دور می شود .

تمام این موارد در شکل (۸-۶) نمایش داده شده اند



قبل از برخورد

بعد از برخورد

شکل (۸-۶) : برخورد کشسان يك بُعدی بین دو جسم

مورد (ب) $m_1 > m_2$: برای این که v_{1f} حقیقی باشد ، کمیت زیر علامت رادیکال باید

مثبت باشد ، یعنی ،

$$\cos^2 \theta \geq \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2} \quad (۸۸-۸)$$

به علاوه ، کمیت زیر علامت رادیکال برای $\theta = \theta_m$ ، صفر (کمینه) خواهد شد که ، طبق معادله

(۸۸-۸) ، عبارت است از

$$\cos^2 \theta_m = \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2} = 1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}, \quad 0 \leq \theta_m \leq \frac{\pi}{2} \quad (۸۹-۸)$$

زاویه پراکندگی θ باید کمتر از θ_m باشد زیرا ، اگر $\theta > \theta_m$ و $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ ، کمیت زیر علامت

رادیکال منفی خواهد شد . به این ترتیب θ_m نمایشگر θ_{max} خواهد بود ؛ در نتیجه (چون $\cos \theta$ با افزایش θ کاهش می یابد)

$$\theta \leq \theta_{max} \quad \text{و} \quad 0 < \theta_{max} < \frac{\pi}{2} \quad (۹۰-۸)$$

شکل (۷-۸) نمودار زاویه پراکندگی بیشینه θ_{\max} را بر حسب $\frac{m_2}{m_1}$ نمایش می دهد. توجه کنیم که اگر $m_1 \gg m_2$ باشد زاویه پراکندگی خیلی کوچک خواهد بود (یک جرم خیلی بزرگ بسختی می تواند توسط یک جرم کوچک منحرف شود). به علاوه، برای $\theta < \theta_{\max}$ ، دو مقدار برای $\frac{v_{1f}}{v_{1i}}$ وجود خواهد داشت؛ مقدار بزرگتر مربوط به برخورد خراشان، و مقدار کوچکتر مربوط به برخورد سر به سر است.

مورد (پ) $m_1 < m_2$: در این مورد محدودیتی برای مقدار زاویه پراکندگی نیست و می تواند در هر جایی بین 0 و π باشد. وضعیتی که در آن θ بزرگتر از $\frac{\pi}{2}$ است، پراکندگی روبه عقب نامیده می شود. اگر $\theta = 0$ باشد، $\frac{v_{1f}}{v_{1i}} = 1$ ، که مربوط به عدم برخورد است. اگر $\theta = 0$ و $\phi = 0$ [مانند مورد (الف)] داریم

$$\frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{و} \quad \frac{v_{2f}}{v_{1i}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \quad (۹۱-۸)$$

همچنین می توانیم نشان دهیم که برای برخورد سر به سر

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{2K_{1i}}{K_{2f}} - 1 \pm \left[\left(\frac{2K_{1i}}{K_{2f}} - 1 \right) - 1 \right]^{1/2} \quad (۹۲-۸)$$

مورد (ت) $m_1 = m_2$: با ضرب معادله (۷۸-۸) در $\cos \theta$ و (۷۶-۸) در $\sin \theta$ و جمع کردن آنها، خواهیم داشت

$$v_{1i} \cos \theta = v_{1f} + v_{2f} \cos(\theta + \phi) \quad (۹۳-۸)$$

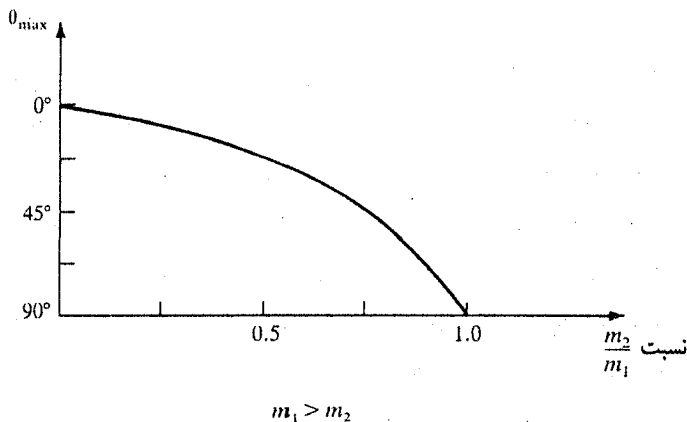
چون $m_1 = m_2$ ، معادله (۸۸-۸) می دهد

$$v_{1f} = v_{1i} \cos \theta \quad (۹۴-۸)$$

از معادله های (۹۳-۸) و (۹۴-۸) به دست می آوریم

$$\cos(\theta + \phi) = 0 \quad \text{یا} \quad \theta + \phi = \frac{\pi}{2} \quad (۹۵-۸)$$

یعنی، دو ذره در جهت های عمود بر هم یکدیگر را ترك می کنند. مثال چنین برخوردی در روی میز بیلیارد، وقتی توپ فرودی و توپ هدف با زاویه قائمه یکدیگر را ترك می کنند، مشاهده می شود.



شکل (۷-۸) : نمودار زاویه پراکندگی بیشینه θ_{\max} نسبت به $\frac{m_2}{m_1}$ برای برخوردهای کشسان با $m_1 > m_2$

۷-۸ برخوردهای ناکشسان

در موارد زیادی ، در هر دو جهان ماکروسکوپی و میکروسکوپی ، انرژی جنبشی سیستم قبل از برخورد با بعد از برخورد یکی نیست ؛ یعنی انرژی جنبشی پایسته نیست . به عنوان مثال ، اتمها ، مولکولها ، و هسته ها دارای انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل داخلی هستند . وقتی چنین ذراتی برخورد می کنند انرژی جنبشی می تواند جذب یا آزاد شود . برخوردهایی که در آنها انرژی جنبشی نهایی سیستم کمتر از انرژی جنبشی اولیه است ، یعنی ، برخوردهایی که در آنها انرژی جنبشی نهایی بیش از انرژی جنبشی اولیه است ؛ یعنی ، انرژی جنبشی آزاد شده است ، برخوردها یا واکنشهای نوع اول یا انرژی خواه نامیده می شوند . ترتیب اگر انرژی جنبشی اولیه با K_i و انرژی جنبشی نهایی با K_f نمایش داده شود ، انرژی تجزیه Q و اکنش به صورت زیر تعریف می شود

$$Q = K_f - K_i \quad (۹۶-۸)$$

(الف ۹۷-۸) $Q > 0$ ، انرژی زا ، ناکشسان نوع دوم

(ب ۹۷-۸) $Q < 0$ ، انرژی خواه ، ناکشسان نوع اول

(پ ۹۷-۸) $Q = 0$ ، برخورد کشسان

در تمام موارد، قانون پایستگی تکانه خطی بخوبی برقرار است. قانون پایستگی انرژی تنها موقعی بخوبی برقرار است که تمام انرژیهای داخلی، از قبیل آنچه که برای ایجاد گرما توسط اصطکاک مصرف شده است، مانند هر انرژی دیگر به حساب آورده شود. در برخوردهای ناکشسان، ماهیت ذرات بعد از برخورد ممکن است با ماهیت آنها قبل از برخورد کاملاً متفاوت باشد.

یک برخورد ناکشسان بین ذره‌ای به جرم m_1 و سرعت v_1 با ذره ساکنی به جرم m_2 ، مطابق شکل (۸-۸)، در نظر بگیریم. برخورد بین این دو ذره به دو ذره جدید به جرمهای m_3 و m_4 منجر می‌شود که با سرعتهای v_{3f} و v_{4f} ، تحت زاویه‌های θ_3 و θ_4 نسبت به جهت اولیه سرعت ذره فرودی m_1 ، که محور X است، حرکت می‌کنند. انرژیهای جنبشی ذرات m_1 ، m_2 ، m_3 و m_4 را به ترتیب K_1 ، K_2 ، K_3 و K_4 ، و انرژی تجزیه را Q در نظر بگیریم. از قوانین پایستگی تکانه خطی و انرژی جنبشی، می‌توانیم بنویسیم

$$m_1 v_{1i} = m_3 v_{3f} \cos \theta_3 + m_4 v_{4f} \cos \theta_4 \quad (98-8)$$

$$0 = m_3 v_{3f} \sin \theta_3 - m_4 v_{4f} \sin \theta_4 \quad (99-8)$$

و

$$K_1 + Q = K_3 + K_4 \quad (100-8)$$

θ_4 را می‌توان از معادله‌های (۹۸-۸) و (۹۹-۸)، با مرتب‌سازی، مربع کردن، و جمع کردن حذف کرد و نتیجه گرفت

$$(m_4 v_{4f})^2 = (m_1 v_{1i})^2 + (m_3 v_{3f})^2 - 2m_1 m_3 v_{1i} v_{3f} \cos \theta_3 \quad (101-8)$$

از ترکیب معادلات (۱۰۰-۸) و (۱۰۱-۸) و استفاده از روابط

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2, \quad K_3 = \frac{1}{2} m_3 v_{3f}^2, \quad K_4 = \frac{1}{2} m_4 v_{4f}^2$$

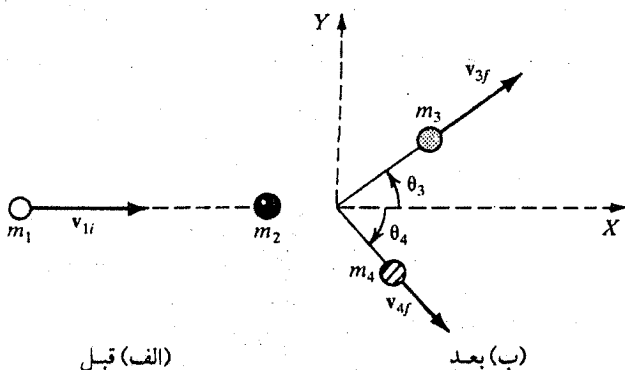
می‌توانیم مقدار زیر را برای Q به دست آوریم

$$Q = K_3 + K_4 - K_1 \quad (102-8)$$

$$= K_3 \left(1 + \frac{m_3}{m_4}\right) - K_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_4}\right) - 2 \left(\frac{m_1 m_3 K_1 K_3}{m_4^2}\right)^{1/2} \cos \theta_3$$

بنابراین، وقتی ذره‌ای به جرم m_1 و سرعت معلوم v_{1i} به جرم m_2 برخورد می‌کند، معادله (۱۰۲-۸) به ما امکان می‌دهد تا مقدار Q را با اندازه‌گیری θ_3 و سرعت v_{3f} ذره با جرم m_3 ، و

دانستن جرم m_4 محاسبه کنیم. یادآوری می‌کنیم که کمیت v_{4f} را حذف کرده ایم، زیرا معمولاً، بخصوص در واکنشهای هسته‌ای، اندازه گیری این کمیت بسیار مشکل است.



شکل (۸-۸): برخورد ناکشسان بین دو ذره: (الف) قبل، و (ب) بعد از برخورد

یک برخورد ناکشسان یک بُعدی بین دو جسم در نظر بگیریم. چنین برخوردهایی، همان طور که اکنون نشان می‌دهیم، انرژی خواه هستند. فرض کنیم جسمی به جرم m_1 ، به سرعت v_1 ، به جسمی به جرم m_2 که در حال سکون است برخورد می‌کند و بعد از برخورد به یکدیگر می‌چسبند (مانند گلوله‌ای که به قطعه چوبی برخورد کند و در آن گیر کند) و هر دو با سرعت v_2 حرکت می‌کنند. به این ترتیب، طبق قانون پایستگی تکانه، داریم

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2$$

یا

$$v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \quad (۱۰۳-۸)$$

انرژی جنبشی در این مورد پایسته نیست؛ در نتیجه

$$Q = K_f - K_i = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_2^2 - \frac{1}{2}m_1 v_1^2$$

با قرار دادن v_2 از معادله (۱۰۳-۸)، به دست می‌آوریم

$$Q = K_i \frac{-m_2}{m_1 + m_2} \quad (۱۰۴-۸)$$

که یک کمیّت منفی است؛ بنابراین برخورد انرژی خواه است. مقدار انرژی تبدیل شده به حرارت برابر با Q است. در این بحث فرض کرده ایم که انرژیهای چرخشی وارد نشده اند. معادله (۸-۱۰۴) همچنین ایجاب می کند که کمترین انرژی جنبشی K_1 مورد نیاز برای به راه انداختن یک واکنش انرژی خواه باید بزرگتر از Q با یک ضریب $(1 + \frac{m_1}{m_2})$ باشد. به این جهت کمیّنه انرژی، انرژی آستانه نامیده می شود.

$$(K_1)_{\text{thres}} = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) |Q| \quad (8-105)$$

بطور کلی، برای واکنشهای انرژی خواه باید $K_1 \geq (K_1)_{\text{thres}}$ باشد.

در آخر کار، عبارت دیگری در برخورد تعریف کنیم که زیاد مورد استفاده قرار می گیرد، و آن ضریب بازگشت است. یک برخورد کشسان سر به سر بین دو جرم، آن طور که در شکل (۸-۹) نشان داده شده است، در نظر بگیریم. قوانین پایستگی تکانه و انرژی ایجاب می کند که

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \quad (8-106)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad (8-107)$$

از حل این دو معادله نتیجه می شود

$$v_{2f} - v_{1f} = v_{1i} - v_{2i} \quad (8-108 \text{ الف})$$

$$(v_{\text{rel}})_f = -(v_{\text{rel}})_i \quad (8-108 \text{ ب})$$

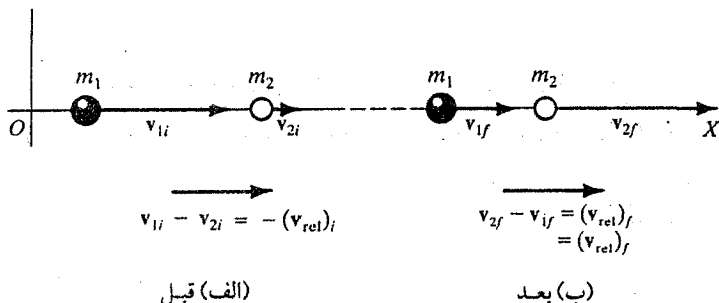
سرعت نزدیک شدن = سرعت دور شدن

این نتیجه بیان می دارد که در یک برخورد سر به سر بین دو جسم، نسبت سرعت نسبی بعد از برخورد به سرعت نسبی قبل از برخورد ثابت است. این مطلب می تواند به صورت زیر نوشته شود.

$$v_{2f} - v_{1f} = e(v_{1i} - v_{2i}) \quad (8-109)$$

که e ضریب بازگشت نامیده می شود. همان طور که آشکار است، اگر برخورد کشسان باشد، $e = 1$ ، و اگر برخورد ناکشسان کامل (که در آن دو جسم پس از برخورد با هم حرکت می کنند)

باشد، $e = 0$ است. برای برخورد‌های ناکشسان دیگر، e بین 0 و 1 تغییر می‌کند.



شکل (۸-۱): برخورد کشسان یک بُعدی بین دو جرم m_2 و m_1 ، که نشان می‌دهد $(v_{rel})_f = -(v_{rel})_i$

۸-۸ مسأله دو جسم در دستگاه مختصات مرکز جرمی

در وضعیت‌های بسیاری کاملاً مناسب و مفید می‌یابیم که حرکت یک سیستم دو جسمی را از دیدگاه دستگاه مختصات مرکز جرمی یا CMCS (یا سیستم CM)، به جای دستگاه مختصات آزمایشگاهی (LCS) یا سیستم LAB توصیف کنیم. بدین جهت برخورد بین دو جسم را از دیدگاه CMCS توصیف خواهیم کرد. مزیت استفاده از CMCS این است که مسأله دو جسمی تحت شرایط خاصی به مسأله حرکت دو جسم مستقل: (۱) حرکت مرکز جرم، و (۲) حرکت نسبی؛ یعنی، حرکت یکی از ذرات نسبت به دیگری، تبدیل می‌شود. در فصل ۷ مورد بررسی قرار گرفت، اما در این فصل آن را با جزئیات بیشتری ادامه می‌دهیم.

سیستمی شامل دو ذره به جرم‌های m_2 و m_1 در نظر بگیریم که در فاصله‌های r_2 و r_1 از مبدأ، مطابق شکل (۸-۱۰)، قرار دارند. فرض کنیم F_1^e و F_2^e به ترتیب نیروهای خارجی وارد به m_2 و m_1 ، و F_{21}^i نیروی داخلی وارد به m_2 از طرف m_1 باشد. طبق قانون سوم نیوتن، نیروی f می‌تواند به صورت زیر تعریف می‌شود

$$F_{12}^i = -F_{21}^i = f \quad (۱۱۰-۸)$$

و نیروی خارجی کل وارد به سیستم عبارت است از

$$F = F_1^e + F_2^e \quad (۱۱۱-۸)$$

بنابر قانون دوم نیوتن، حرکت دو جسم در دستگاه آزمایشگاهی به صورت زیر است

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_1^e + \mathbf{F}_{12}^i \quad (112-8)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_2^e + \mathbf{F}_{21}^i \quad (113-8)$$

اکنون برای تغییر از دستگاه آزمایشگاهی به دستگاه مرکز جرمی، روابط زیر را، که در فصل ۷ مورد بحث قرار گرفت، به کار می‌بریم. مختصه مرکز جرم \mathbf{R} (از بخش ۷-۲) با رابطه

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (114-8)$$

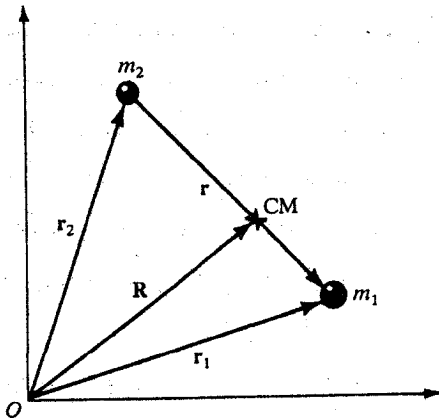
و مختصه نسبی \mathbf{r} با رابطه

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (115-8)$$

داده می‌شود. تبدیلهای وازون با رابطه زیر داده می‌شوند

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (116-8)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (117-8)$$



شکل (۸-۱۰): حرکت مرکز جرم و حرکت نسبی برای یک سیستم دو ذره‌ای

می‌خواهیم حرکت دو ذره m_1 و m_2 را برحسب مختصات مرکز جرم \mathbf{R} و مختصات نسبی \mathbf{r} بازنویسی کنیم. برای انجام این کار، نخست معادله‌های (۸-۱۱۲) و (۸-۱۱۳) را با یکدیگر جمع می‌کنیم. یعنی،

با استفاده از معادلات (۸-۱۱۰)، (۸-۱۱۱)، و (۸-۱۱۴)، معادله بالا به صورت زیر نوشته می شود

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_1^e + \mathbf{F}_2^e + \mathbf{F}_{12}^i + \mathbf{F}_{21}^i$$

یا

$$(m_1 + m_2) \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}$$

$$M \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}$$

(۸-۱۱۸)

که در آن $M = m_1 + m_2$ جرم کل و \mathbf{F} نیروی خارجی کل وارد به سیستم است. این اولین معادله از دو معادله ای است که ما در جستجوی آن هستیم.

اکنون اگر معادله (۸-۱۱۲) را در m_2 و معادله (۸-۱۱۳) را در m_1 ضرب کنیم و از

یکدیگر کم کنیم خواهیم داشت

$$m_1 m_2 (\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2) = m_2 \mathbf{F}_1^e - m_1 \mathbf{F}_2^e + m_2 \mathbf{F}_{12}^i - m_1 \mathbf{F}_{21}^i$$

با استفاده از نتیجه داده شده در معادله (۸-۱۱۰)، می توانیم این معادله را به صورت

$$m_1 m_2 (\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2) = m_1 m_2 \left(\frac{\mathbf{F}_1^e}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_2^e}{m_2} \right) + (m_1 + m_2) \mathbf{f} \quad (۸-۱۱۹)$$

بنویسیم. اکنون مورد خاصی را در نظر بگیریم که در آن یا

$$\mathbf{F}_1^e = \mathbf{F}_2^e = 0 \quad (۸-۱۲۰)$$

یا

$$\frac{\mathbf{F}_1^e}{m_1} = \frac{\mathbf{F}_2^e}{m_2} \quad (۸-۱۲۱)$$

یعنی، نیروهای خارجی وارد به ذرات متناسب با جرم آنهاست؛ در نتیجه معادله (۸-۱۱۹) می تواند به صورت

$$m_1 m_2 (\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2) = (m_1 + m_2) \mathbf{f} \quad (۸-۱۲۲)$$

نوشته شود. با وارد کردن جرم کاهش یافته μ به صورت

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (۸-۱۲۳)$$

و استفاده از معادله (۸-۱۱۵)، $\mathbf{f} = \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2$ ، می توانیم معادله (۸-۱۲۲) را به صورت

زیر بنویسیم

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f} \quad (124-8)$$

معادله های (۱۱۸-۸) و (۱۲۴-۸) دو معادله مورد جستجوی ما هستند. معادله (۱۱۸-۸) معادله آشنای حرکت مرکز جرم است که طبق آن جرم M تحت تأثیر نیروی کل \mathbf{F} قرار دارد، و شتاب $\ddot{\mathbf{R}}$ را به خود می گیرد، و معادله (۱۲۴-۸) معادله حرکت جرم μ است که تحت تأثیر نیروی داخلی $\mathbf{f} = \mathbf{F}'_{12}$ قرار دارد و شتاب $\ddot{\mathbf{r}}$ را به خود می گیرد. معادله (۱۲۴-۸) همچنین می تواند به عنوان حرکت ذره ای به جرم μ واقع در محل m_1 از دید مکان m_2 ، با این فرض که m_2 ساکن است، توصیف شود.

همچنین می توانیم عبارتی برای تکانه خطی \mathbf{P} ، تکانه زاویه ای \mathbf{L} و انرژی جنبشی کل K در مختصات مرکز جرمی بنویسیم. با استفاده از معادله های (۱۱۴-۸) تا (۱۱۷-۸)، می توانیم سرعت \mathbf{v} مرکز جرم را به صورت

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}} = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2}{M} \quad (125-8)$$

و سرعت نسبی \mathbf{v} را به صورت

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2 \quad (126-8)$$

بنویسیم. و برای تبدیلات وارون می توانیم بنویسیم

$$\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{R}} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}} + \frac{\mu}{m_1} \dot{\mathbf{r}} \quad (127-8)$$

$$\mathbf{v}_2 = \dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{R}} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}} - \frac{\mu}{m_2} \dot{\mathbf{r}} \quad (128-8)$$

تکانه خطی کل سیستم عبارت است از

$$\mathbf{P} = m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = M \dot{\mathbf{R}} \quad (129-8)$$

و تکانه زاویه ای کل \mathbf{L} سیستم برابر است با

$$\mathbf{L} = m_1 (\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1) + m_2 (\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2) \quad (130-8)$$

با قرار دادن $\dot{\mathbf{r}}_1$ و $\dot{\mathbf{r}}_2$ از معادلات (۱۲۷-۸) و (۱۲۸-۸)، به دست می آوریم

$$L = M(\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}) + \mu(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})$$

یا

$$L = M(\mathbf{R} \times \mathbf{V}) + \mu(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \quad (۱۳۱-۸)$$

انرژی جنبشی کل K با رابطه زیر داده می شود

$$K = \frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2 \quad (۱۳۲-۸)$$

با قرار دادن به جای \dot{r}_1 و \dot{r}_2 خواهیم داشت

$$K = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu v^2 \quad (۱۳۳-۸)$$

یا

$$K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\mu v^2 \quad (۱۳۴-۸)$$

این معادله بیان می کند که انرژی جنبشی سیستم برابر است با مجموع انرژی جنبشی جرم M که با سرعت V ی مرکز جرم حرکت می کند (انرژی جنبشی مرکز جرم) ، و انرژی جنبشی جرم کاهش یافته μ که با سرعت نسبی v حرکت می کند (انرژی جنبشی حرکت نسبی) .

۸-۹ برخورد در دستگاه مختصات مرکز جرمی

در بخشهای پیشین، برخوردهای کشسان و ناکشسان بین دو ذره را از دیدگاه یک ناظر که نسبت به یک دستگاه مختصات آزمایشگاهی ساکن بود، مورد بحث قرار دادیم. در وضعیتهای زیادی مناسبتر است که مشاهدات از یک دستگاه مختصاتی که نسبت به دستگاه آزمایشگاهی در حرکت است، صورت گیرد. یکی از این نوع دستگاههای مختصات متداول دستگاه مختصات مرکز جرمی است، که قبلاً مورد بحث قرار گرفت. برخوردها توسط ناظری واقع در مرکز جرم، که در نتیجه با همان سرعت مرکز جرم حرکت می کند، مشاهده می شوند. بحث خود را با بررسی برخورد کشسان بین دو جسم از دید ناظر مرکز جرمی شروع می کنیم.

فرض کنیم که در یک لحظه ذره به جرم m_1 در x_1 با سرعت v_1 حرکت می کند، و ذره به جرم m_2 ، همان طور که در شکل (۸-۱۱) نشان داده شده است، ساکن است. مکان مرکز

جرم x_c با رابطه

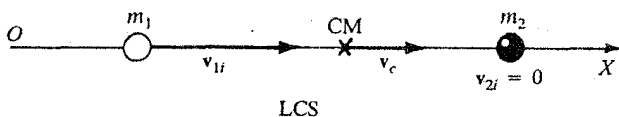
$$(m_1 + m_2)x_c = m_1x_1 + m_2x_2 \quad (۱۳۵-۸)$$

داده می شود و سرعت مرکز جرم با مشتق گیری از معادله (۱۳۵-۸) به صورت

$$(m_1 + m_2)v_c = m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 \quad (۱۳۶-۸)$$

به دست می آید که در آن $v_c = dx_c / dt$. برای وضعیت نشان داده شده در شکل (۸-۱۱)،
 $\dot{x}_2 = 0$ و $\dot{x}_1 = v_{1i}$. به این ترتیب سرعت v_c ی مرکز جرم نسبت به دستگاه آزمایشگاهی
 عبارت است از

$$v_c = \frac{m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2} = \frac{\mu}{m_2} v_{1i} \quad (۱۳۷-۸)$$

که μ جرم کاهش یافته سیستم است.

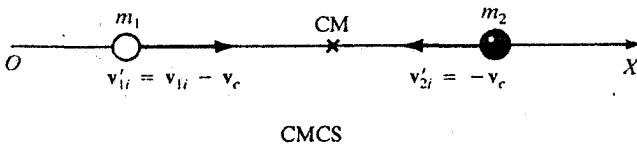
شکل (۸-۱۱): سرعتهای m_1 و m_2 و مرکز جرم آنها در دستگاه مختصات آزمایشگاهی

اکنون فرض کنیم که برخورد بین m_2 و m_1 توسط ناظری که با سرعت v_c ی مرکز جرم حرکت می کند، یعنی، ناظری که در دستگاه مختصات مرکز جرمی است، مشاهده می شود. سرعت جرمهای m_1 و m_2 نسبت به دستگاه مختصات مرکز جرمی عبارت است از v'_{1i} و v'_{2i} (علامت پریم نشان می دهد که کمیت در دستگاه مختصات مرکز جرمی توصیف شده است).

$$v'_{1i} = v_{1i} - v_c = v_{1i} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{\mu}{m_1} v_{1i} \quad (۱۳۸-۸)$$

$$v'_{2i} = v_{2i} - v_c = 0 - v_c = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} = -\frac{\mu}{m_2} v_{1i} \quad (۱۳۹-۸)$$

شکل (۸-۱۲) حرکت این دو ذره را نسبت به دستگاه مختصات مرکز جرمی نشان می دهد.



شکل (۸-۱۲) : حرکت ذرات m_1 و m_2 در دستگاه مختصات مرکز جرمی

تکانه متناظر با هر ذره قبل از برخورد در دستگاه مختصات مرکز جرمی عبارت است از

$$p'_{1i} = m_1 v'_{1i} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad (۸-۱۴۰)$$

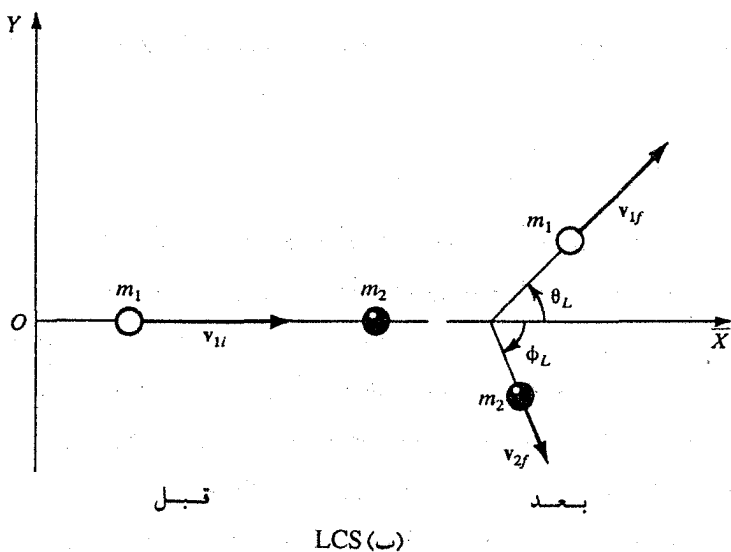
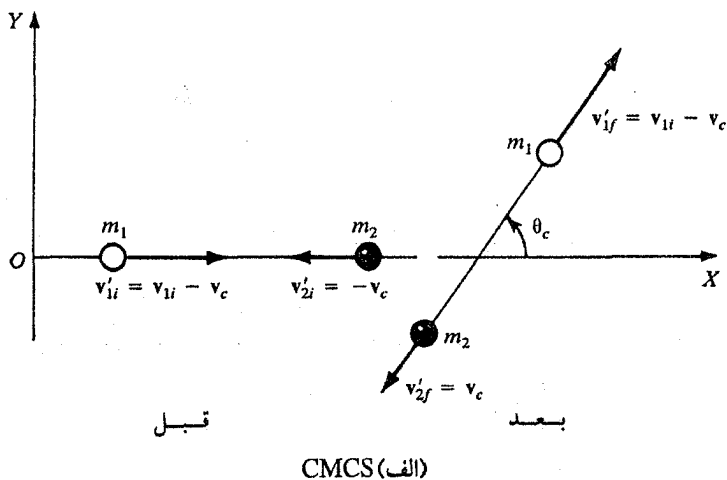
$$p'_{2i} = m_2 v'_{2i} = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad (۸-۱۴۱)$$

به این ترتیب تکانه خطی کل سیستم در دستگاه مختصات مرکز جرمی قبل از برخورد برابر است با

$$P'_i = p'_{1i} + p'_{2i} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} = 0 \quad (۸-۱۴۲)$$

صفر بودن تکانه خطی کل قبل از برخورد یکی از مهمترین ویژگیهای دستگاه مختصات مرکز جرمی است. این می‌رساند که برای این که تکانه خطی پایسته باشد، تکانه خطی کل در دستگاه مختصات مرکز جرمی بعد از برخورد نیز باید صفر باشد. یعنی، از دید دستگاه مختصات مرکز جرمی، دو ذره به جرّمهای m_1 و m_2 در امتداد یک خط مستقیم به یکدیگر نزدیک می‌شوند، پس از برخورد روی یک خط مستقیم، همان طور که در شکل (۸-۱۳ الف) نشان داده شده است، با همان سرعتهای اولیه از یکدیگر دور می‌شوند. خط واصل دو ذره هنگام دور شدن ممکن است هر زاویه θ_c با خط قبل از برخورد (در دستگاه مختصات مرکز جرمی) بسازد. برای مقایسه، برخورد از دید دستگاه مختصات آزمایشگاهی در شکل (۸-۱۳ ب) نمایش داده شده است.

اکنون به مسأله زیر نظری بیفکنیم. اولاً، چگونه از دستگاه مختصات مرکز جرمی به دستگاه مختصات آزمایشگاهی برگردیم؟ ثانیاً، رابطه بین زاویه‌هایی که ذرات بعد از برخورد با جهت اولیه شان در دو دستگاه مختصات آزمایشگاهی مرکز جرمی می‌سازند چیست؟



شکل (۸-۱۳) : برخورد بین دوزره به جرمهای m_1 و m_2 از دید (الف) مختصات مرکز

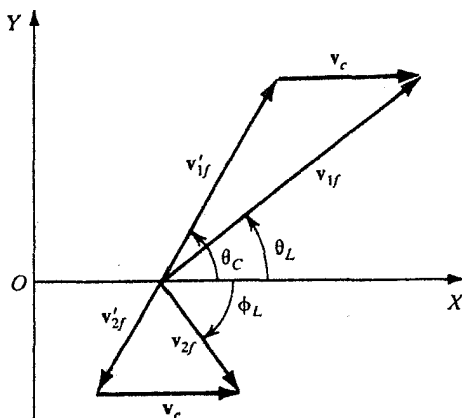
جرمی و (ب) مختصات آزمایشگاهی

در دستگاه مختصات مرکز جرمی ، سرعت نهایی و جهت ذرات بعد از برخورد ، در شکل (۸-۱۳ الف) نشان داده شده اند . برای پیدا کردن سرعتهای نهایی ذرات در دستگاه آزمایشگاهی ، می توانیم روش به کار برده شده برای تبدیل از دستگاه آزمایشگاهی به دستگاه

مرکز جرمی را وارونه کنیم . این کار با اضافه کردن سرعت مرکز جرم v_c به سرعت‌های نهایی v'_{1f} و v'_{2f} (در دستگاه مختصات مرکز جرمی) ، آن طور که در شکل (۸-۱۴) نشان داده شده است ، صورت می‌گیرد . به این ترتیب ، سرعت‌های v_{1f} و v_{2f} و جرم‌های m_1 و m_2 در دستگاه آزمایشگاهی ، به ترتیب ، عبارتند از

$$v_{1f} = v'_{1f} + v_c \quad (۸-۱۴۳)$$

$$v_{2f} = v'_{2f} + v_c \quad (۸-۱۴۴)$$



شکل (۸-۱۴) : رابطه بین زاویه‌های θ_L و ϕ_L در دستگاه آزمایشگاهی و θ_C و ϕ_C در دستگاه مرکز جرمی بعد از برخورد

به کمک شکل (۸-۱۴) می‌توانیم رابطه بین زاویه‌های θ_L و ϕ_L در دستگاه آزمایشگاهی ، و θ_C در دستگاه مرکز جرمی را پیدا کنیم . به عنوان مثال ، معادله (۸-۱۴۳) و نیمه بالایی شکل (۸-۱۴) را در نظر بگیریم . معادله (۸-۱۴۳) به شکل مؤلفه‌ای به صورت زیر نوشته می‌شود

$$v_{1f} \cos \theta_L = v_c + v'_{1f} \cos \theta_C \quad (۸-۱۴۵)$$

$$v_{1f} \sin \theta_L = v'_{1f} \sin \theta_C \quad (۸-۱۴۶)$$

تقسیم آنها بر یکدیگر می‌دهد

$$\tan \theta_L = \frac{v'_{1f} \sin \theta_C}{v_c + v'_{1f} \cos \theta_C} = \frac{\sin \theta_C}{(v_c/v'_{1f}) + \cos \theta_C} \quad (۸-۱۴۷)$$

یا

$$\tan \theta_L = \frac{\sin \theta_C}{\gamma + \cos \theta_C} \quad (148-8)$$

که در آن

$$\gamma = \frac{v_c}{v'_{1f}} = \frac{\text{سرعت مرکز جرم در LCS}}{\text{سرعت } m_1 \text{ بعد از برخورد در CMCS}} \quad (149-8)$$

مقادیر v_c و v'_{1f} توسط معادله های (۱۳۷-۸) و (۱۳۸-۸) داده شده اند. از معادله (۱۳۷-۸) نتیجه می شود

$$v_c = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{\mu}{m_2} v_{1i} \quad (150-8)$$

که μ جرم کاهش یافته و v_{1i} سرعت نسبی اولیه ($v_{1i} - v_{2i} = v_{1i} - 0 = v_{1i}$) است. $v'_{1f} (= v'_{1i})$ ، سرعت نسبی نهایی ، از معادله (۱۳۸-۸) برابر است با

$$v'_{1f} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{1f} = \frac{\mu}{m_1} v_{1f} \quad (151-8)$$

به این ترتیب با ترکیب سه معادله پیشین (و توجه به این نکته که در دستگاه مختصات مرکز جرمی سرعت های نهایی با سرعت های اولیه برابرند) خواهیم داشت

$$\gamma = \frac{v_c}{v'_{1f}} = \frac{m_1 v_{1i}}{m_2 v_{1f}} \quad (152-8)$$

برای برخوردهای ناکشسان ، $v_{1i} \neq v_{1f}$ ، و معادله (۱۴۸-۸) می شود

$$\tan \theta_L = \frac{\sin \theta_C}{(m_1 v_{1i} / m_2 v_{1f}) + \cos \theta_C} \quad (153-8)$$

برای برخوردهای کشسان ، $v_{1f} = v_{1i}$ ، و معادله (۱۵۳-۸) به شکل زیر در می آید

$$\tan \theta_L = \frac{\sin \theta_C}{(m_1 / m_2) + \cos \theta_C} \quad (154-8)$$

اکنون چند مورد خاص معادله (۱۵۴-۸) را برای برخوردهای کشسان در نظر بگیریم .

مورد (الف) : اگر $m_1 = m_2$ باشد ، مانند برخورد بین نوترونها و پروتونها ، می توانیم

معادله (۱۵۴-۸) را به صورت

$$\tan \theta_L = \frac{\sin \theta_C}{1 + \cos \theta_C} = \frac{2 \sin(\theta_C/2) \cos(\theta_C/2)}{2 \cos^2(\theta_C/2)} = \tan \frac{\theta_C}{2} \quad (155-8)$$

بنویسیم ، یعنی

$$\theta_L = \frac{\theta_C}{2} \quad (156-8)$$

چون در دستگاه مختصات مرکز جرمی θ_C می تواند هر مقداری بین 0 و π را بگیرد ، θ_L می تواند یک مقدار بیشینه $\pi/2$ ، در توافق با بحث قبلی ، داشته باشد .

مورد (ب) : اگر $m_2 \gg m_1$ باشد ، می توانیم معادله (8-154) را به صورت

$$\tan \theta_L \approx \frac{\sin \theta_C}{\cos \theta_C} = \tan \theta_C \quad (157-8)$$

بنویسیم ، یعنی

$$\theta_L = \theta_C \quad (158-8)$$

که بیان می دارد ، برای هدفهای سنگین ، زاویه پراکندگی در دستگاه آزمایشگاهی با زاویه پراکندگی در دستگاه مرکز جرمی یکی است .

مورد (پ) : اگر $m_1 > m_2$ باشد ذره فرودی سنگین تراز ذره هدف است . در این مورد θ_L ، بدون توجه به مقدار θ_C ، باید خیلی کوچک باشد . این دقیقاً به وضعیتی در معادله (8-90) مربوط می شود ، که یادآوری شد که θ_L نمی تواند از یک مقدار بیشینه θ_{\max} بیشتر شود .

۸-۱۰ نیروی دافع عکس مجذوری

پراکندگی راترفورد

بیشتر کوشش ما صرف مطالعه حرکت ذرات در یک میدان نیروی جاذب عکس مجذوری شده است . در یک گروه مهم از کاربردهای فیزیکی ، حرکت ذره در یک میدان نیروی دافع متناسب با عکس مجذور فاصله صورت می گیرد . این گونه موارد ، انحراف یا پراکندگی ذرات اتمی سریع ، مانند پروتونها و ذرات α ، توسط هسته های با بار مثبت را به همراه دارند . مسیرهای چنین ذرات پراکنده شده ای هذلولی شکل هستند . نخستین آزمایشهایی که پراکندگی ذرات α توسط هسته ها را در برداشتند ، توسط گایگر و مارسدن (دانشجویان راترفورد) انجام ، و توسط راترفورد مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفتند و در این جا تا حدی مورد بحث قرار خواهند گرفت .

همان طور که در شکل‌های (۸-۱۵ الف) و (۸-۱۵ ب) نشان داده شده است، یک ذره با بار مثبت q ، جرم m ، و سرعت v_0 به طرف یک هسته با بار مثبت Q ، جرم M ، و در حال سکون فرود می‌آید. نیروی دافع متناسب با عکس مجذور فاصله بین دو ذره عبارت است از

$$F = k \frac{Qq}{r^2} = \frac{K}{r^2} \quad (۸-۱۵۹)$$

که در مورد خاص پراکندگی ذره α توسط هسته داریم $Q = Ze$ و $q = 2e$ که Z عدد اتمی هسته است. چون $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$ (کولن) C ، خواهیم داشت

$$K = kQq = 2kZe^2 = (4.6 \times 10^{-28} \text{N}\cdot\text{m}^2)Z \quad (۸-۱۶۰)$$

معادله (۷-۱۱۱) برای خروج از مرکز e ،

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mK^2}} \quad (۷-۱۱۱)$$

ایجاب می‌کند که $e > 1$ ؛ در نتیجه مسیر یک ذره α ی فرودی، همان طور که در شکل (۸-۱۵ الف) نشان داده شده است، هذلولی شکل است. این شاخه، شاخه منفی هذلولی است. مرکز نیروی دافع در کانون F است. زاویه پراکندگی θ ، زاویه بین دو مجانب، عبارت است از

$$\theta = \pi - 2\alpha \quad (۸-۱۶۱)$$

بنابراین

$$\tan \frac{\theta}{2} = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cot \alpha \quad (۸-۱۶۲)$$

در معادله هذلولی از فصل ۷، داشتیم

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 - e \cos \theta} \quad (۷-۱۱۸)$$

برای ذره در بی نهایت، $r = \infty$ ، $\theta = \alpha$ ، معادله بالا نتیجه خواهد داد

$$\cos \alpha = \frac{1}{e} \quad (۸-۱۶۳)$$

که e خروج از مرکز است. بنابراین ترکیب معادله‌های (۸-۱۶۲) و (۸-۱۶۳) می‌دهد

$$\tan \frac{\theta}{2} = \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1/e}{(1 - 1/e^2)^{1/2}} \quad (۱۶۴-۸)$$

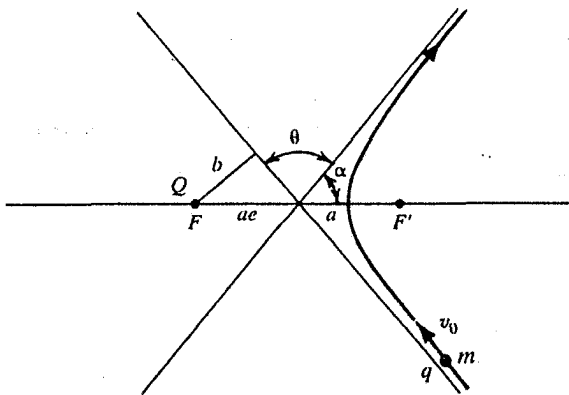
$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}}$$

با قرار دادن e^2 از معادله (۷-۱۱۱)، به دست می آوریم

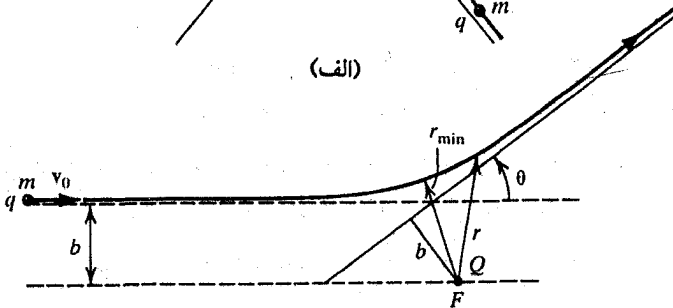
$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{mK^2}{2EL^2}} \quad (۱۶۵-۸)$$

با مراجعه به شکل (۸-۱۵ ب)، وقتی ذره α در بی نهایت است، انرژی پتانسیل آن با $V = \frac{K}{r} = \frac{K}{\infty} = 0$ است؛ در نتیجه انرژی کل آن تماماً انرژی جنبشی است و برابر است با

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (۱۶۶-۸)$$



(الف)



(ب)

شکل (۸-۱۵)؛ (الف) مسیر هذلولی شکل یک ذره با بار مثبت q در میدان نیروی یک ذره با بار مثبت Q واقع در مرکز O ، یعنی در یک میدان نیروی دافع. توجه کنیم که θ زاویه پراکنندگی و b پارامتر برخورد است. (ب) همان شکل (الف) است که رابطه بین r ، r_{\min} و b و θ را نشان می دهد

یک ذره α که به طرف مرکز نیروی F فرود می آید، در غیاب نیرو منحرف نمی شود از کمترین فاصله b از مرکز نیرو می گذرد. این فاصله b که کمترین فاصله ذره از مرکز نیرو است، پارامتر برخورد نامیده می شود. همچنین تکانه زاویه ای ذره عبارت است از

$$L = mv_0 b \quad (۱۶۷-۸)$$

که در تمام طول حرکت، به خاطر قانون پایستگی تکانه زاویه ای، ثابت می ماند. با قرار دادن E و L از معادله های (۱۶۶-۸) و (۱۶۷-۸) در معادله (۱۶۵-۸) خواهیم داشت

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{mK^2}{2(\frac{1}{2}mv_0^2)(mv_0 b)^2}}$$

در نتیجه

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{K}{mv_0^2 b} \quad (۱۶۸-۸)$$

که $K = kQq$ می تواند به صورت

$$b = \frac{K}{mv_0^2} \cot \frac{\theta}{2} \quad (۱۶۹-۸)$$

یا

$$\theta = 2 \operatorname{arccot} \left[\left(\frac{mv_0^2}{K} \right) b \right] \quad (۱۷۰-۸)$$

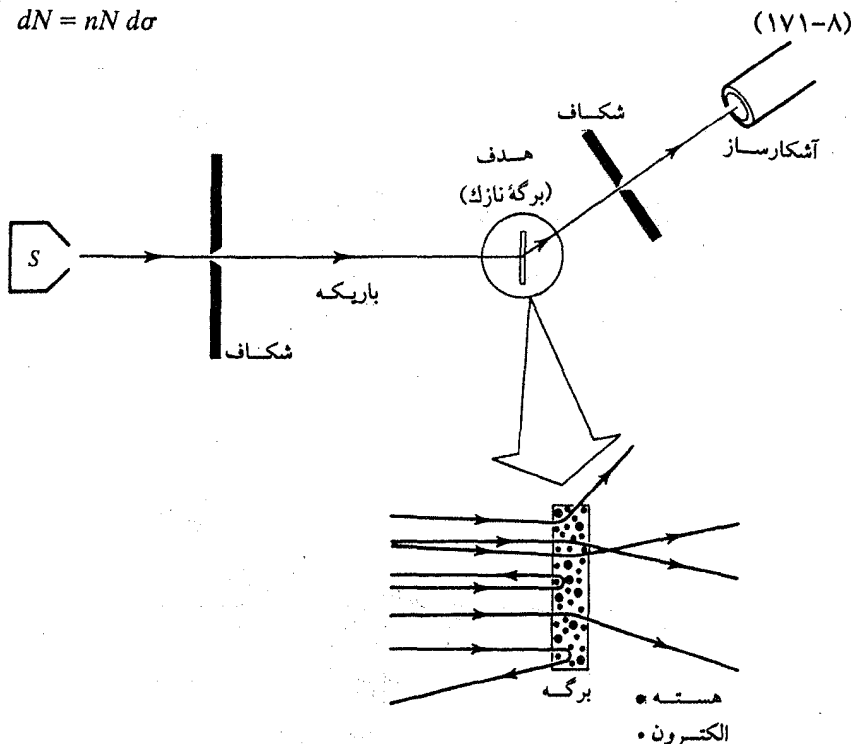
نوشته شود. زاویه θ را می توان بطور تجربی اندازه گیری کرد؛ در نتیجه پارامتر برخورد b می تواند از معادله (۱۷۰-۸) محاسبه شود. معادله (۱۶۹-۸) همچنین بیان می دارد که وقتی b افزایش می یابد θ کاهش می یابد؛ یعنی، هر چه پارامتر برخورد بیشتر باشد زاویه پراکندگی کمتر می شود. در عمل، ما تعداد ذرات $N(\theta)$ را که با زاویه های متفاوت پراکنده می شوند اندازه گیری می کنیم. در نتیجه باید راهی برای حذف b در معادله (۱۷۰-۸) پیدا کنیم و رابطه بین $N(\theta)$ و θ را پیدا کنیم. این کار منجر به مفهوم مقطع مؤثر منجر می شود که در زیر مورد بحث قرار خواهد گرفت.

طرح یک آزمایش نمونه ای در شکل (۱۶-۸) نمایش داده شده است. یک دسته ذرات باردار از منبع S روی یک برگه نازک که هدف است می تابد. ذرات بعد از برخورد با هسته های هدف در جهتهای مختلف پراکنده می شوند. فرض کنیم ذرات با پارامتر برخورد b تحت زاویه

θ منحرف شوند ؛ بنابراین ذرات با پارامتر برخورد $b + db$ ، همان طور که در شکل (۸-۱۷) نشان داده شده است ، تحت زاویه $\theta + d\theta$ منحرف می شوند ، که $d\theta$ منفی است . فرض کنیم ذره به برگه هدف فرود می آید و هدف شامل n هسته بر واحد سطح است ؛ یعنی n مرکز پراکندگی بر واحد سطح وجود دارد . (برگه آن قدر نازک در نظر گرفته شده است که هسته ها یکدیگر را نمی پوشانند) . به این ترتیب تعداد dN ذره α که در زاویه بین θ و $\theta + d\theta$ منحرف می شود متناسب با تعداد مراکز پراکندگی n و تعداد ذرات فرودی N است ؛ یعنی ،

$$dN = nN d\sigma$$

(۸-۱۷۱)



شکل (۸-۱۶) : طرح آزمایش نمونه ای برای بررسی پراکندگی ذرات از یک هدف برگه نازک

که $d\sigma$ به عنوان مقطع مؤثر برای پراکندگی در زاویه بین θ و $\theta + d\theta$ تعریف شده است . می توان $d\sigma$ را به عنوان سطح مؤثری دانست که هر مرکز پراکندگی را احاطه کرده است و ذره فرودی برای این که پراکنده شود باید به آن برخورد کند . به این ترتیب سطح حساس پراکندگی در یک واحد سطح هدف $d\sigma$ است ؛ که توجیهی است برای معادله (۸-۱۷۱) . (توجه کنیم

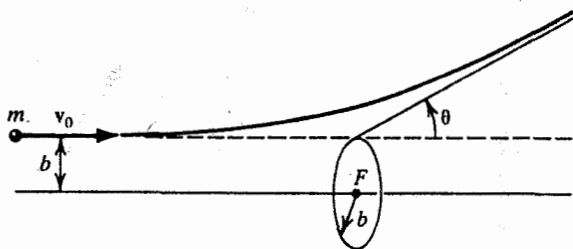
که اگر پارامتر برخورد ذرات فرودی بین 0 و b باشد ذرات تحت زاویه θ یا بزرگتر از آن پراکنده خواهند شد. مقطع مؤثر در این مورد σ است و برابر با سطح قرصی به شعاع b و مرکز F در شکل (۸-۱۷) است:

$$\sigma = \pi b^2 \quad (8-172)$$

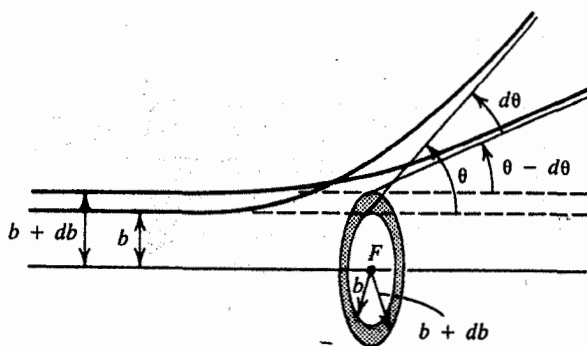
در نتیجه

$$d\sigma = 2\pi b db \quad (8-173)$$

همان طور که بعداً خواهیم دید



(الف)



(ب)

شکل (۸-۱۷) : (الف) یک ذره با پارامتر برخورد b تحت زاویه θ منحرف شده است.

(ب) ذرات با پارامترهای برخورد بین b و $b + db$ تحت زاویه های بین θ و $\theta - d\theta$

منحرف شده اند

شکل (۸-۱۷) (ب) ذرات فرودی ای با پارامتر برخورد بین b و $b + db$ را که به مرکز

پراکندگی F نزدیک می‌شوند، نشان می‌دهد. این ذرات روی سطح حلقه‌ای در اطراف F به شعاع داخلی b و شعاع خارجی $b + db$ فرود می‌آیند و تحت زاویه‌ای بین θ و $\theta - d\theta$ منحرف می‌شوند. به این ترتیب مساحت سطح حلقه مقطع مؤثر $d\sigma$ است؛ یعنی،

$$d\sigma = 2\pi b db \quad (۱۷۳-۸)$$

می‌توانیم با استفاده از معادله (۸-۱۶۹)، b و db را بر حسب θ و $d\theta$ بیان کنیم،

$$b = \frac{K}{mv_0^2} \cos \frac{\theta}{2} \quad (۱۶۹-۸)$$

که با مشتق‌گیری از آن خواهیم یافت

$$db = -\frac{K}{2mv_0^2} \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} d\theta \quad (۱۷۴-۸)$$

همچنین می‌توانیم از معادله (۸-۱۶۹) b را به صورت

$$b = \frac{K}{2mv_0^2} \frac{\sin \theta}{\sin^2(\theta/2)} \quad (۱۷۵-۸)$$

بنویسیم. با قرار دادن b و db از معادله‌های (۸-۱۷۴) و (۸-۱۷۵) در معادله (۸-۱۷۳) و حذف علامت منفی، به دست می‌آوریم

$$d\sigma = 2\pi \left(\frac{K}{2mv_0^2} \right)^2 \frac{\sin \theta}{\sin^4(\theta/2)} d\theta \quad (۱۷۶-۸)$$

با یادآوری این که $K = kQq$ ، نتیجه می‌گیریم

$$d\sigma = 2\pi \left(\frac{kQq}{2mv_0^2} \right)^2 \frac{\sin \theta}{\sin^4(\theta/2)} d\theta \quad (۱۷۷-۸)$$

که فرمول پراکندگی راترفورد است. $d\sigma$ را می‌توان بطور تجربی با استفاده از معادله (۸-۱۷۱) اندازه‌گیری کرد و آن را با مقدار نظری محاسبه شده از معادله (۸-۱۷۷) مقایسه کرد.

راترفورد فرمولهای به دست آمده را برای تعبیر آزمایشش روی پراکندگی ذرات α ($q = 2e$) توسط هسته‌های هدف ($Q = Ze$) موجود در یک برگه نازک به کار برد. عبارت (۸-۱۷۷) تا وقتی که فاصله حقیقی $(a + ae)$ بزرگتر از $10^{-14} m$ بود بخوبی برقرار بود. از این مطلب به این نتیجه رسید که بار مثبت هسته در کوره‌ای با شعاع کمتر از $10^{-14} m$ متمرکز شده است. ذره α ی فرودی می‌تواند برای $b = 0$ به نزدیکترین فاصله تا هسته برسد. این به کمترین

فاصله حضيض می انجامد ، و در این فاصله تمام انرژی جنبشی ذره α فرودی به انرژی پتانسیل تبدیل می شود ، و ذره شروع به بازگشت می کند . بنابراین

$$K = V = \frac{kQq}{r_{\min}} \quad (178-8)$$

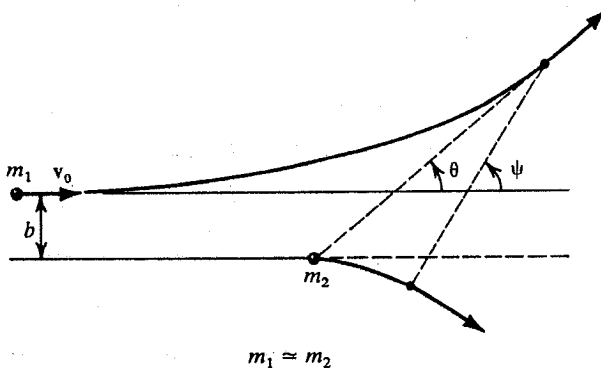
استفاده از معادله (۱۷۸-۸) ایده هایی در باره بزرگی شعاع هسته به ما می دهد . انحراف از معادله پراکندگی راترفورد وقتی رخ می دهد که انرژی جنبشی K ی ذره فرودی بیش از انرژی پتانسیل کمینه در فاصله r_{\min} باشد . راترفورد از چنین مشاهداتی نتیجه گرفت که شعاع هسته $10^{-14}m$ است .

در بحث پیشین ، فرض شده بود که هسته هدف در مقایسه با ذره فرودی سنگین است و در نتیجه در مدت برخورد در حال سکون است . اگر هسته هدف سنگین نباشد ، خود هسته در مدت برخورد ، آن طور که در شکل (۱۸-۸) نشان داده شده است ، حرکت خواهد کرد . به این مشکل می توان با در نظر گرفتن برخورد در دستگاه مختصات مرکز جرمی فایق آمد . نتیجه نهایی با نشان دادن جرم کاهش یافته $\mu = \frac{mM}{M+m}$ به جای m و θ_c به جای θ در معادله (۱۷۶-۸) به دست می آید ؛ یعنی ،

$$d\sigma = 2\pi \left(\frac{K}{2\mu v_0^2} \right)^2 \frac{\sin \theta_c}{\sin^4(\theta_c/2)} d\theta_c \quad (179-8)$$

در موردی که $m_1 = m_2$ باشد ، در معادله (۱۵۶-۸) نشان دادیم که $\theta_c = 2\theta_L$ ؛ در نتیجه

$$d\sigma = 4\pi \left(\frac{K}{2\mu v_0^2} \right)^2 \frac{\sin 2\theta}{\sin^4 \theta} d\theta \quad (180-8)$$



$$m_1 = m_2$$

شکل (۱۸-۸) : پراکندگی توسط جرم m_2 ، که تقریباً برابر با جرم ذره فرودی m_1 است ؛ یعنی $m_1 \approx m_2$

مسائل

۱-۸ مکان مرکز جرم ، سرعت مرکز جرم ، تکانه خطی و انرژی جنبشی سیستمهای زیر را پیدا کنید .

$$m_1 = 1 \text{ kg}, \quad \mathbf{r}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}, \quad \mathbf{v}_1 = 2\hat{i} + 3\hat{j}$$

$$m_2 = 2 \text{ kg}, \quad \mathbf{r}_2 = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, \quad \mathbf{v}_2 = 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

۲-۸ سه ذره زیر را در نظر بگیرید :

$$m_1 = 2 \text{ kg}, \quad \mathbf{r}_1 = 2t^2\hat{i} + 3t\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$m_2 = 3 \text{ kg}, \quad \mathbf{r}_2 = (1 + t^2)\hat{i} + (2 + 5t)\hat{j}$$

$$m_3 = 4 \text{ kg}, \quad \mathbf{r}_3 = (1 + 2t^2 + 3t^3)\hat{i} + (3t + 4t^2)\hat{k}$$

کمیتهای زیر را در $t = 0$ و $t = 10$ ثانیه محاسبه کنید :

(الف) مکان مرکز جرم ، (ب) سرعت مرکز جرم ، (پ) تکانه خطی ، و (ت) انرژی جنبشی سیستم .

۳-۸ سرعت و شتاب مرکز جرم دو ذره ای زیر را در $t = 0$ و $t = 10$ s حساب کنید

$$m_1 = 2 \text{ kg}, \quad \mathbf{r}_1 = 2\hat{i} + 3t\hat{j} + 4t^2\hat{k}$$

$$m_2 = 4 \text{ kg}, \quad \mathbf{r}_2 = t^2\hat{i} + 5t\hat{j} + 6t^3\hat{k}$$

۴-۸ پرتابه ای به جرم m با سرعت 50 m/s تحت زاویه 60° با افق پرتاب می شود . این پرتابه در قله (بیشینه ارتفاع) منفجر شده و به دو قسمت تقسیم می شود و یک انرژی اضافی E ایجاد می کند . یکی از قطعات مستقیماً به طرف بالا حرکت می کند . جهت قطعه دیگر چیست ؟ سرعتهای هر دو قطعه را محاسبه کنید .

۵-۸ پرتابه ای به جرم $M (= m_1 + m_2)$ با سرعت v و تحت زاویه θ با افق پرتاب می شود . در قله منفجر می شود و به دو جرم m_1 و m_2 تجزیه می شود و در عین حال یک انرژی اضافی E ایجاد می کند . نشان دهید که فاصله نقاط برخورد دو قطعه با زمین برابر است با

$$\frac{v \sin \theta}{g} \left[2E \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \right]^{1/2}$$

۶-۸ اگر یک پرتابه در قله (بیشینه ارتفاع) به دو قطعه تجزیه شود و انرژی اضافی E ایجاد کند ،

تحت چه شرایطی یکی از قطعات در مکان شروع به زمین می رسد ؟

۷-۸ یک قایق آتش نشانی آب را از یک خلیج توسط یک سوراخ در امتداد قائم می کشد و آن را با سرعت 10 m/s می پاشد. قطر لوله آب پاش 20 cm است. نیروی افقی لازم از طرف

پره ها را برای این که قایق ساکن بماند محاسبه کنید. چگالی آب 1020 kg/m^3 است.

۸-۸ سطلی به جرم 0.5 kg روی یک ترازوی فنری قرار دارد و آب از ارتفاع 2 متری با آهنگ 5 ml/s به درون آن می ریزد. عددی را که ترازو می خواند بر حسب زمان پیدا کنید.

۹-۸ قسمتی از زنجیری به طول L و جرم M از گوشه میز بدون اصطکاکی آویزان است. طول قسمت آویزان شده هنگام رها شدن s است. سرعت زنجیر وقتی آخرین حلقه آن به گوشه میز می رسد چقدر است ؟

۱۰-۸ یک زنجیر 3 متری روی میزی با 1.2 m ارتفاع طوری قرار دارد که یک انتهای آن درست زمین را لمس می کند. سرعت انتهای دیگر زنجیر وقتی درست میز را ترک می کند چقدر است ؟

۱۱-۸ یک قطره باران وقتی از درون مه یا غبار عبور می کند با آهنگ یکنواختی جرم به خود می گیرد. قطره از حال سکون با شعاع ناچیز شروع می کند و همیشه کروی می ماند. نشان دهید که شتاب سقوط آن $\frac{g}{3}$ است.

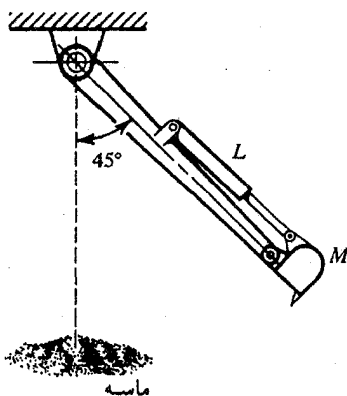
۱۲-۸ یک قطره باران با جرم اولیه m_0 تحت اثر نیروی گرانش سقوط می کند. در اثر تراکم شدن از مه یا غبار، جرم قطره با آهنگی مستقیماً متناسب با جرم لحظه ای و سرعتش افزایش می یابد. نشان دهید که سرانجام سرعت قطره ثابت می شود. عبارتی برای این سرعت نهایی پیدا کنید.

۱۳-۸ یک قطره باران با جرم اولیه m_0 که در مه یا غبار سقوط می کند در نظر بگیرید. در اثر تراکم، جرم قطره با آهنگی متناسب با جرم و سرعتش افزایش می یابد. علاوه بر نیروی وزن، نیروی اصطکاک نیز حضور دارد که متناسب با سرعت و جرم قطره است، یعنی $F_f = -kmv$. سرعت قطره را بر حسب زمان پیدا کنید. نمودار v نسبت به t را رسم کنید.

۱۴-۸ قطره ای به جرم m_0 بطور قائم از میان مه یا غبار سقوط می کند. در اثر تراکم، جرم قطره متناسب با زمان افزایش می یابد؛ یعنی $m = m_0 + \lambda t$. نیروی اصطکاک روی جرم m متناسب با جرم و سرعت آن است؛ یعنی $F_f = -kmv$. سرعت قطره را، با

در نظر گرفتن نیروی گرانشی و نیروی اصطکاکی ، برحسب زمان پیدا کنید .

۱۵-۸ بیلی به جرم M به انتهای یک بازوی بدون جرمی به طول L بسته شده و آزادانه می تواند شبیه یک آونگ ساده ، آن طور که در شکل (مسأله ۸-۱۵) نشان داده شده است ، نوسان کند . بیل از زاویه 45° رها می شود ، پایین می آید ، و مقداری ماسه به جرم m با خود بر می دارد . با فرض نبود اصطکاک ، زاویه ای را که بازو بالا می رود حساب کنید .



شکل (مسأله ۸-۱۵)

۱۶-۸ طنابی با چگالی جرمی خطی λ (برحسب kg/m) روی زمین افقی چنبره شده است . یک سر طناب با سرعت ثابتی بالا کشیده می شود . نیروی لازم را برحسب ارتفاع تعیین کنید . چه مقدار کار توسط این نیرو ، در مقایسه با تغییرات انرژی جنبشی طناب ، انجام شده است ؟

۱۷-۸ برای موشک بحث شده در متن ، کمیات زیر را محاسبه کنید : (الف) سرعت در اتمام سوخت ، (ب) صعود قائم موشک برحسب زمان ، و (پ) ارتفاع بیشینه ای که موشک به آن می رسد .

۱۸-۸ رانش یک موتورجت آزمایشی را ، اگر هوا را با آهنگ 100 kg/s ببلعد و با سرعت 500 m/s به بیرون بیندازد ، محاسبه کنید .

۱۹-۸ جرم اولیه یک موشک 60000 kg ، و سرعت خروج گاز حاصل از سوخت 6000 m/s است . کمینه آهنگ خروج گاز چقدر باید باشد تا بتواند از سطح زمین کنده شود ؟

۲۰-۸ جرم یک موشک 60000 kg ، آهنگ سوخت 150 kg/s ، و سرعت گازهای خروجی

۶۰۰۰ m/s است. اگر موشک از سطح زمین بطور قائم به حرکت در آید، ارتفاع و

سرعت آن بعد از این که ۴۵۰۰۰ kg از سوخت مصرف شد، چقدر است؟

۲۱-۸ جرم یک اتومبیل از نوع جت، بدون سوخت، m_0 و جرم سوخت آن m است. سرعت

سوخت پرتاب شده نسبت به راکت v ، و آهنگ سوخت $\frac{dm}{dt} = k$ است. شتاب را

برحسب زمان و سرعت را وقتی که سوخت به اتمام رسیده است، پیدا کنید.

۲۲-۸ یک موشک وقتی صعود می کند جرمش با آهنگی متناسب با جرم کاهش می یابد؛

یعنی، $\frac{dm}{dt} = -bm$ ، که b ثابت است. یک نیروی مقاومت متناسب با سرعت،

یعنی، $F_f = -kv$ ، با حرکت موشک مقابله می کند. k ثابت است. سرعت موشک

را برحسب زمان پیدا کنید.

۲۳-۸ یک موشک در ثانیه اول پروازش $\frac{1}{5}$ جرمش را با سرعت ۲۰۰۰ m/s به بیرون پرتاب

می کند. شتاب موشک را محاسبه کنید. اگر موشک گاز را با آهنگ ثابتی خارج

کند، آیا امکان دارد که به شتاب ثابتی برسد؟

۲۴-۸ موشکی به جرم $M + m$ که m جرم سوخت است، بطور قائم از زمین بلند می شود و

گاز را با آهنگ q و با سرعت خروج u پرتاب می کند. سرعت و شتاب را برحسب

زمان حساب کنید. جرم اولیه 4×10^3 kg، $q = 600$ kg/s، و $u = 2000$ m/s. اگر

سوخت در ۵۰ ثانیه تمام شود، شتاب را در $t = 0$ s، 20 s، 40 s، و 50 s

حساب کنید.

۲۵-۸ موشکی به جرم m_0 و نسبت جرمی R ، با آهنگ سوخت $\frac{dm}{dt}$ ، گاز را با سرعت

u_0 به خارج پرتاب می کند. پیدا کنید بعد از چه مدتی از شروع روشن شدن موتور،

موشک از زمین کنده می شود. محاسبات را برای مورد $m_0 = 5 \times 10^3$ kg، $R = 3$ ،

$u_0 = 1000$ m/s، و آهنگ 120 kg/s، انجام دهید.

۲۶-۸ یک فضاپیما در نزدیکی سطح ماه خود را بدون حرکت نگاه می دارد (پرپر می زند).

یک سوم جرم آن سوخت و سرعت خروجی گاز از آن $u = 1200$ m/s است. چه

مدت طول می کشد تا سوخت فضاپیما تمام شود؟ فرض کنید شتاب گرانشی روی

سطح ماه $\frac{1}{6}$ شتاب گرانشی روی سطح زمین است.

۲۷-۸ یک موشک دومرحله ای با جرم m_i شروع می کند. در پایان مرحله اول، جرم موشک

m_1 است. قبل از این که موتور مرحله دوم روشن شود، قسمتی از جرم جدا شده

است ، و جرم اولیه m_2 است . جرم نهایی وقتی که موتورهای مرحله دوم از کار افتاده اند m_f است . با فرض این که سرعت خروجی در هر دو مرحله v_0 است ، سرعت نهایی مرحله دوم را پیدا کنید .

۲۸-۸ یک واگن خالی به جرم M تحت اثر نیروی F از حال سکون به حرکت در می آید . در همین لحظه زغال سنگ از بالا با آهنگ $b = \frac{dm}{dt}$ شروع به ریخته شدن به درون آن می کند . سرعت واگن را وقتی جرم زغال سنگی که به درون آن ریخته شده است m باشد حساب کنید .

۲۹-۸ یک واگن رویاب با سرعت ثابت 90 km/hr حرکت می کند و آب رگبار را جمع می کنند . اگر در فاصله 1000 متر 50 kg آب جمع بکنند ، نیرو و توان لازم را برای ثابت نگاه داشتن سرعت پیدا کنید .

۳۰-۸ یک واگن باری به جرم m حامل m کیلوگرم زغال سنگ است . در $t=0$ ، نیروی F اعمال می شود . وقتی واگن شروع به حرکت می کند ، زغال سنگ با آهنگ $b = \frac{dm}{dt}$ از آن می ریزد . سرعت واگن را وقتی تمام زغال سنگ بیرون ریخته شد حساب کنید .

۳۱-۸ از ناودانی ماسه با آهنگ $500 \frac{\text{kg}}{\text{min}}$ روی یک تسمه نقاله که با افق زاویه 10° می سازد و با سرعت 4 m/s حرکت می کند ، ریخته می شود . ماسه با سرعت 5 m/s سقوط می کند . نیروی لازم برای این که سرعت تسمه ثابت بماند چقدر است ؟

۳۲-۸ یک تسمه نقاله در نظر بگیرید که با افق زاویه θ می سازد . بطوری که تسمه یک سطح شیب دار تشکیل می دهد . در انتهای پایین تسمه ، مواد با آهنگ $\frac{dm}{dt}$ روی آن گذاشته می شود و پس از پیمودن طول l از انتهای بالایی سطح شیب دار برداشته می شود . توان لازم برای ثابت نگاه داشته شدن سرعت تسمه را حساب کنید .

۳۳-۸ یک تسمه نقاله در نظر بگیرید که با افق زاویه θ می سازد ، بطوری که تسمه یک سطح شیب دار می سازد . در انتهای بالایی تسمه ، ماده ای با آهنگ $\frac{dm}{dt}$ روی آن گذاشته می شود و پس از پیمودن طول l از انتهای پایینی سقوط می کند . با در نظر گرفتن یک نیروی اصطکاک ثابت f ، سرعت ثابت تسمه را محاسبه کنید .

۳۴-۸ معادله (۸-۸۰) را به دست آورید .

۳۵-۸ معادله های (۸-۹۱) و (۸-۹۲) را به دست آورید .

۳۶-۸ در شکل (۸-۶ الف) اگر $v_{2i} \neq 0$ باشد . ثابت کنید که بعد از برخورد داریم $v_{1f} = v_{2i}$ و $v_{2f} = v_{1i}$.

۳۷-۸ نوترونی به جرم m_1 با سرعت v به هسته اتمی به جرم m_2 و در حال سکون برخورد می کند . بیشینه انرژی جنبشی از دست رفته نسبی نوترون را اگر هسته اتم (الف) هیدروژن ، (ب) کربن ، (پ) آهن و (ت) سرب باشد محاسبه کنید .

۳۸-۸ ذره ای به جرم m_1 و سرعت v_{1i} با ذره ای به جرم m_2 و سرعت v_{2i} ، درست در جهت مخالف ، برخورد می کند . اگر بعد از برخورد ، جرم m_1 زاویه θ_1 با جهت اولیه بسازد ، مقدار v_{1f} چقدر است ؟

۳۹-۸ ذره ای به جرم m_1 و سرعت v_{1i} با ذره ای به جرم m_2 و در حال سکون بطور کشسان برخورد می کند . در چه زاویه پراکندگی تکانه جرم m_1 نصف مقدار اولیه اش خواهد بود ؟

۴۰-۸ یک گلوله بیلیارد به جرم m با یک گلوله مشابه در حال سکون برخورد می کند . بعد از برخورد ، دو گلوله با زاویه های $\pm\theta$ نسبت به جهت اولیه حرکت می کنند . ثابت کنید برای این که این برخورد صورت گیرد ، باید انرژی جنبشی چرخشی دو گلوله برابر با $K_1 \left[1 - \frac{\cos^2 \theta}{2} \right]$ باشد که K_1 انرژی جنبشی اولیه است . فرض بر این است که اتلاف اصطکاکی انرژی در کار نیست .

۴۱-۸ یک برخورد کشسان کامل بین دو گلوله یکی به جرم m و دیگری به جرم نامعلوم که هردو با سرعت v_1 در جهت مخالف یکدیگر حرکت می کنند ، در نظر بگیرید . بعد از برخورد گلوله با جرم نامعلوم متوقف می شود . جرم نامعلوم و سرعت گلوله با جرم m را محاسبه کنید .

۴۲-۸ گلوله ای با جرم m و انرژی E به یک گلوله به جرم M و در حال سکون برخورد می کند . بعد از برخورد ، گلوله با جرم m با زاویه 90° نسبت به جهت اولیه پراکنده می شود . انرژی جرم M را بعد از برخورد محاسبه کنید .

۴۳-۸ ذره ای به جرم m_1 و سرعت v_1 به ذره ای به جرم m_2 و سرعت v_2 برخورد می کند . انرژی جنبشی اولیه هر دو یکی است . شرایطی را برحسب $\frac{v_1}{v_2}$ و $\frac{m_1}{m_2}$ تعیین کنید که جرم m_1 بعد از برخورد در حال سکون بماند .

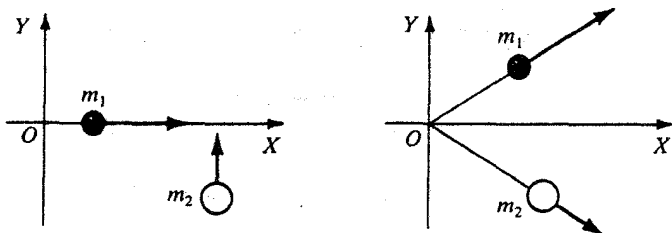
۴۴-۸ ذره‌ای به جرم m با سرعت v_0 به ذره‌ای به جرم M که در جهت مخالف حرکت می‌کند برخورد می‌کند. بعد از برخورد جرم m با سرعت $\frac{v_0}{2}$ در جهت عمود بر جهت اولیه، و جرم M در جهتی که با مسیر اولیه m زاویه 30° می‌سازد، حرکت می‌کند. نسبت $\frac{m}{M}$ را پیدا کنید.

۴۵-۸ ذره‌ای به جرم m_1 با ذره‌ای به جرم m_2 که در حال سکون است برخورد سر به سر انجام می‌دهد. اگر ضریب بازگشت e باشد انرژی تلف شده را در این برخورد پیدا کنید.

۴۶-۸ گلوله‌ای به جرم m از ارتفاع h در روی یک سطح افقی سقوط می‌کند. نشان دهید که مسافت کل طی شده توسط گلوله قبل از این که جهیدنش قطع شود عبارت است از $h \frac{1+e^2}{1-e^2}$ ، که e ضریب بازگشت است.

۴۷-۸ نشان دهید که اتلاف انرژی جنبشی در برخورد دو گلوله $\frac{1}{2}\mu V^2(1-e^2)$ است، که μ جرم کاهش یافته، V سرعت نسبی قبل از برخورد، و e ضریب بازگشت است.

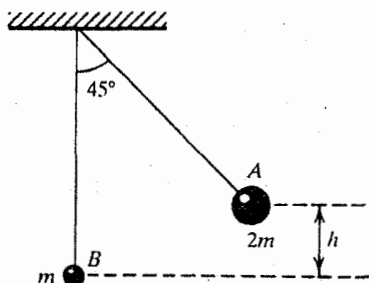
۴۸-۸ ذره‌ای به جرم m_1 با ذره‌ای به جرم m_2 که در جهت عمود بر یکدیگر حرکت می‌کنند، مطابق شکل (مسأله ۸-۴۸)، برخورد می‌کند. سرعت هر ذره را پس از برخورد پیدا کنید. فرض کنید ضریب بازگشت $0/4$ ، $m_1 = 3 \text{ kg}$ ، $m_2 = 2 \text{ kg}$ ، $v_{1i} = 3 \text{ m/s}$ ، $v_{2i} = 3 \text{ m/s}$.



شکل (مسأله ۸-۴۸)

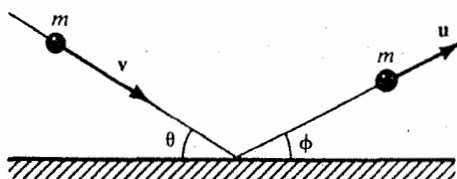
۴۹-۸ وضعیت نشان داده شده در شکل (مسأله ۸-۴۹) را در نظر بگیرید. گلوله A به جرم m تا ارتفاع h بالا برده شده است، بطوری که نخ آن با امتداد قائم زاویه 45° می‌سازد.

سپس رها می شود. اگر ضریب بازگشت 0.5 باشد گلوله B به جرم m تا چه ارتفاعی خواهد رفت؟



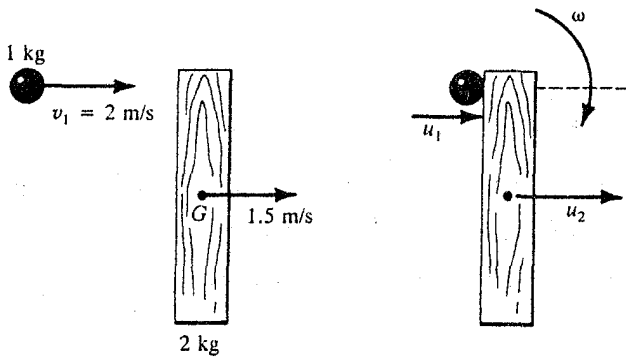
شکل (مسئله ۸-۴۹)

۸-۵۰ گلوله ای به جرم m با سرعت v در امتدادی که با افق زاویه θ می سازد به زمین برخورد می کند و تحت زاویه ϕ ، برابر شکل (مسئله ۸-۵۰)، از زمین جدا می شود. سرعت گلوله، زاویه ϕ ، و تغییر انرژی جنبشی را محاسبه کنید. فرض کنید که سطح صاف و ضریب بازگشت e است.



شکل (مسئله ۸-۵۰)

۸-۵۱ گلوله ای به جرم 1 kg با سرعت 2 m/s به یک میله چوبی به جرم 2 kg که با سرعت مرکز جرم $1/5 \text{ m/s}$ به طرف راست حرکت می کند، آن طور که در شکل (مسئله ۸-۵۱) نشان داده شده است، برخورد می کند. اگر ضریب بازگشت 0.4 ، و سطحی که در آن برخورد صورت می گیرد صاف باشد، کمیات زیر را درست بعد از برخورد محاسبه کنید: (الف) سرعت گلوله، (ب) سرعت خطی و سرعت زاویه ای میله.



شکل (مسأله ۸-۵۱)

۵۲-۸ نوترونی در یک رآکتور هسته‌ای با سرعت اولیه 120 m/s با یک دوترون (هیدروژن سنگین که در آن هسته از یک پروتون و یک نوترون تشکیل شده است) در حال سکون برخورد می‌کند. نوترون با زاویه 30° پراکنده می‌شود. زاویه پس‌زنی دوترون، و سرعت‌های نوترون و دوترون را بعد از برخورد محاسبه کنید. نمودار نمایش دهنده این برخورد را در دستگاه مختصات مرکز جرمی و زاویه‌های متناظر را در این دستگاه رسم کنید.

۵۳-۸ مسأله (۵۲-۸) را با گذاردن یک اتم کربن به جرم $12u$ به جای دوترون تکرار کنید.

۵۴-۸ یک ذره α به جرم $4u$ و سرعت 2000 m/s با یک اتم کربن به جرم $12u$ و در حال سکون برخورد می‌کند. ذره α با زاویه 30° پراکنده می‌شود. با این فرض که برخورد کاملاً کشسان است، سرعت‌های هر دو ذره بعد از برخورد، و زاویه پراکندگی کربن را محاسبه کنید. این برخورد را در دستگاه مختصات مرکز جرمی توصیف کنید.

۵۵-۸ عبارتی برای مقطع مؤثر پراکندگی راترفورد بر حسب زاویه پس‌زنی به دست آورید.

۵۶-۸ عبارتی برای مقطع مؤثر پراکندگی راترفورد برای موردی که در آن ذره فرودی در مقایسه با ذره هدف خیلی سنگین است، به دست آورید.

۵۷-۸ در جایی از فضاهاى دوردست یک ستاره به جرم m و سرعت v_0 به طرف ستاره‌ای به جرم $2m$ و در حال سکون پیش می‌رود. اگر پارامتر برخورد b باشد، سرعت‌ها و جهت‌های دو ستاره را محاسبه کنید.

۵۸-۸ نشان دهید که مقطع مؤثر پراکندگی دیفرانسیلی جرم m از یک مرکز نیروی ساکن

$$F = \frac{K}{r^3} \hat{r}$$

با رابطه زیر داده می شود

$$\sigma(\theta) = \frac{k\pi^2(\pi - \theta)}{mv_0^2\theta^2(2\pi - \theta)^2 \sin \theta}$$

۵۹-۸ یک فضاپیما به جرم m با سرعت v_0 به ماه نزدیک می شود ($M \gg m$). نزدیکترین فاصله آن از ماه b ، و سرعت v_0 عمود بر سرعت مداری v ی ماه است. نشان دهید که اگر فضاپیما از پشت ماه بگذرد، وقتی از ماه دور می شود انرژی جنبشی کسب می کند.

۶۰-۸ عبارتی برای مقطع مؤثر پراکندگی دیفرانسیلی در دستگاه مختصات مرکز جرمی برای موردی که ذره هدف خیلی سنگین تر از ذره فرودی باشد به دست آورید.

۶۱-۸ ذره ای به جرم m و سرعت v_0 با ذره ای به جرم M و در حال سکون برخورد می کند. M در دستگاه مختصات مرکز جرمی با زاویه θ_0 پراکنده می شود. سرعت نهایی m را در دستگاه آزمایشگاهی پیدا کنید. اتلاف نسبی انرژی جنبشی m را محاسبه کنید.

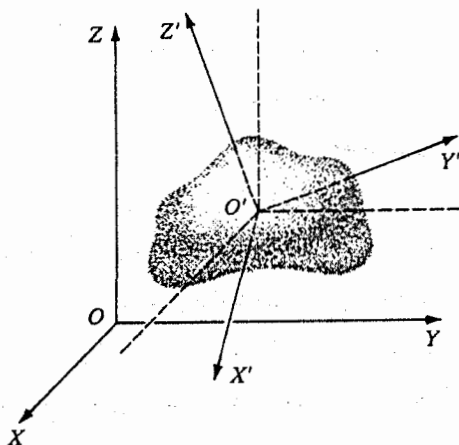
منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر

- ARTHUR, W., and FENSTER, S. K., *Mechanics*, Chapter 11. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1969.
- BARGER, V., and OLSSON, M., *Classical Mechanics*, Chapter 3. New York: McGraw-Hill Book Co., 1973.
- BECKER, R. A., *Introduction to Theoretical Mechanics*, Chapters 3, 4, and 8. New York: McGraw-Hill Book Co., 1954.
- DAVIS, A. DOUGLAS, *Classical Mechanics*, Chapter 8. New York: Academic Press, Inc., 1986.
- FOWLES, G. R., *Analytical Mechanics*, Chapter 7. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1962.
- FRENCH, A. P., *Newtonian Mechanics*, Chapter 9. New York: W. W. Norton and Co., Inc., 1971.
- HAUSER, W., *Introduction to the Principles of Mechanics*, Chapter 8. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1965.
- KITTEL, C., KNIGHT, W. D., and RUDERMAN, M. A., *Mechanics*, Berkeley Physics Course, Volume 1, Chapter 6. New York: McGraw-Hill Book Co., 1965.
- KLEPPNER, D., and KOLENKOW, R. J., *An Introduction to Mechanics*, Chapters 3 and 4. New York: McGraw-Hill Book Co., 1973.
- * LANDU, L. D., and LIFSHITZ, E. M., *Mechanics*, Chapter 4. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1960.
- MARION, J. B., *Classical Dynamics*, 2nd. ed., Chapter 9. New York: Academic Press, Inc., 1970.
- * MOORE, E. N., *Theoretical Mechanics*, Chapter 1. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1983.
- ROSSBERG, K., *Analytical Mechanics*, Chapter 7. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1983.
- STEPHENSON, R. J., *Mechanics and Properties of Matter*, Chapter 3. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- SYMON, K. R., *Mechanics*, 3rd. ed., Chapter 4. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1971.
- TAYLOR, E. F., *Introductory Mechanics*, Chapters 5, 7, and 10. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1963.

حرکت جسم صلب: (۱)

۹-۱ توصیف جسم صلب

جسم صلب به سیستمی اطلاق می شود که شامل تعداد زیادی جرم نقطه ای به نام ذره است و فاصله هر دو جرم نقطه ای ثابت باقی بماند ، حتی اگر جسم حرکت کند یا تحت تأثیر نیروهای خارجی قرار داشته باشد . این توصیف ایده آلی جسم صلب است زیرا (۱) چیزی به عنوان جرم نقطه ای یا ذره به معنی درست آن وجود ندارد ، و (۲) هیچ جسمی با هیچ ابعادی دقیقاً صلب نیست ، زیرا تحت اثر نیروهای خارجی تغییر شکل می دهد . با این وجود ، مفهوم یک جسم صلب ایده آل در توصیف حرکت مفید واقع می شود ، و انحرافها چندان مهم نیستند . نیروهایی که فاصله های بین ذرات یا جرمهای نقطه ای را ثابت نگاه می دارند نیروهای داخلی هستند و نیروهای قیدی نامیده می شوند . این نیروها به صورت زوج وجود دارند و از قانون سوم نیوتن به شکل قوی آن پیروی می کنند ، یعنی ، مساوی و مخالف الجهتند و خط عمل آنها یکی است . در نتیجه می توانیم از قوانین پابستگی تکانه خطی و تکانه زاویه ای برای توصیف حرکت اجسام صلب استفاده کنیم . به علاوه ، در هر جابه جایی ، فاصله و جهت گیری نسبی ذرات مختلف نسبت به یکدیگر ثابت می مانند ، در نتیجه کاری توسط نیروهای داخلی یا نیروهای قیدی انجام نمی گیرد . این مطلب می رساند که در یک جسم کاملاً صلب قانون پابستگی انرژی مکانیکی نیز برقرار است .



شکل (۲-۹): پیکربندی يك جسم صلب به وسیله شش مختصه مستقل مشخص می شود. مختصات O' و جهت گیری محورهای $X'Y'Z'$ نسبت به محورهای XYZ

۲-۹ مرکز جرم يك جسم صلب

حتی در یک جسم جامد با ابعاد کوچک، تعداد بسیار زیادی اتم و مولکول وجود دارد. راحت تر است که ساختار این جسم را به وسیله چگالی متوسط آن، به صورت جرم بر واحد حجم، یعنی $\rho = \frac{M}{V}$ نمایش دهیم که M جرم و V حجم است. چگالی موضعی یا بطور ساده چگالی به صورت

$$\rho = \frac{dM}{dV} \quad (۲-۹)$$

تعریف می شود که dM جرم حجم dV است. چون فرض شده است که جسم در تمام حجم پیوسته است، جرم کل، که با جمع بندی محدود روی جرم ذرات، m_k ، داده شده بود، باید اکنون جای خود را به انتگرال حجمی با جرمهای بی نهایت کوچک dM بدهد، یعنی،

$$\sum m_k \rightarrow M = \iiint dM = \iiint \rho dV \quad (۳-۹)$$

برای یک سیستم شامل تعدادی ذرات گسسته با جرمهای m_k ، واقع در فاصله های r_k ، مرکز جرم R در فصل ۸ به صورت زیر تعریف شد

$$R = \frac{\sum m_k r_k}{\sum m_k} \quad (۴-۹)$$

برای توضیح این که تنها شش مختصه برای مشخص کردن مکانهای این سه نقطه مرجع مورد نیاز است راه دیگری نیز وجود دارد . برای مشخص کردن نقطه مرجع P_1 به سه مختصه (x_1, y_1, z_1) نیاز داریم . وقتی P_1 تثبیت شد ، P_2 می تواند با تنها دو مختصه مشخص شود ، زیرا مقید است که روی سطح کره ای به مرکز P_1 باشد . این دو مختصه (ϕ_2, θ_2) هستند . با تثبیت این دو نقطه ، نقطه P_3 در روی دایره ای به شعاع a که مرکز آن در روی خط واصل P_1 و P_2 است قرار دارد . به این ترتیب تنها شش مختصه برای تثبیت سه نقطه غیر واقع بر یک خط P_1 ، P_2 ، و P_3 یک جسم مورد نیاز است . وقتی این نقاط تثبیت شدند . مکانهای تمام نقاط دیگر جسم صلب تثبیت شده اند ؛ یعنی ، پیکربندی جسم صلب در فضا تثبیت شده است . اگر قیدهای دیگری روی جسم باشد ، تعداد مختصات مورد نیاز برای تشخیص موقعیت جسم صلب می تواند از شش کمتر باشد .

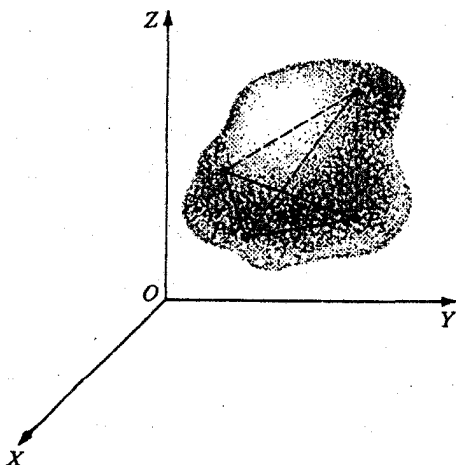
برای انتخاب این مختصات چند راه وجود دارد . یکی از این راهها در شکل (۹-۲) نشان داده شده است . مختصات پریم دار $X'Y'Z'$ ، مجموعه محورهای جسمی ، که در جسم صلب رسم شده اند ، می توانند بطور کامل وضع جسم صلب را نسبت به مختصات خارجی XYZ ، مجموعه محورهای فضایی ، مشخص کنند . به این ترتیب سه مختصه برای مشخص کردن مبدأ محورهای جسمی لازم است ، در حالی که سه مختصه باقی مانده باید جهت گیری مجموعه محورهای جسمی (محورهای پریم دار) را نسبت به محورهای موازی با محورهای فضایی (محورهای بدون پریم) ، آن طور که در شکل (۹-۲) نشان داده شده است ، مشخص کند . به این ترتیب باید مختصات O' را نسبت به O و جهت گیری $X'Y'Z'$ را نسبت به محورهای XYZ بدانیم .

اکنون حرکت یک جسم صلب را که مقید به چرخش حول یک نقطه ثابت است در نظر بگیریم . چون انتقالی در کار نیست ، تنها با گشتاور نیرو که حرکت چرخشی ایجاد می کند سر و کار داریم . اما قبل از انجام این کار ، باید سه مختصه که جهت گیری محورهای جسمی را نسبت به محورهای فضایی توصیف می کنند انتخاب کنیم . انتخاب ساده نیست . نمی توان مجموعه متقارنی از مختصات پیدا کرد که بتواند جهت گیری جسم صلب را توصیف کند . بحث چرخش یک جسم صلب حول یک نقطه ثابت را به فصل ۱۳ موکول خواهیم کرد . مسأله پیچیده و مشکل است . در این فصل بحث خود را به مسائل ساده چرخش حول یک محور ثابت (و نه یک نقطه ثابت) محدود می کنیم

قدم بعدی ما تعیین تعدادی مختصه لازم برای توصیف موقعیت یا پیکربندی جسم صلب در فضا است. فرض کنیم جسم صلب شامل N ذره باشد. چون موقعیت هر ذره به وسیله سه مختصه مشخص می شود، ممکن است ما را به این نتیجه هدایت کند که برای توصیف یک جسم صلب به $3N$ مختصه نیاز داریم. این نتیجه گیری در صورتی درست است که موقعیت و حرکت تمام ذرات مستقل باشند، اما چنین نیست. فاصله r_{ki} بین هر جفت ذره ثابت است و تعداد این زوجها زیاد است. در زیر نشان خواهیم داد که تنها شش مختصه مستقل برای توصیف موقعیت یک جسم صلب کافی است. یک جسم صلب را آن طور که در شکل (۱-۹) نمایش داده شده است، در نظر بگیریم. برای توصیف جرم نقطه ای k ، نیازی به تعیین فاصله های آن از تمام جرمهای نقطه ای دیگر در جسم نیست، فقط فاصله های آن از سه نقطه دیگر غیر واقع بر یک خط، مانند P_1 ، P_2 ، و P_3 ، مطابق شکل (۱-۹)، مورد نیاز است. بنابراین، اگر مکانهای این سه نقطه مشخص باشند مکانهای بقیه نقاط جسم به وسیله قیود مشخص می شوند. اما برای مشخص شدن P_1 ، P_2 ، و P_3 ، در فضا حداکثر به نه مختصه نیاز داریم. حتی همه این نه مختصه نیز مستقل نیستند. فاصله های r_{12} ، r_{13} ، و r_{23} ثابتند، یعنی

$$r_{12} = d_1, \quad r_{13} = d_2, \quad r_{23} = d_3 \quad (1-9)$$

که d_1 ، d_2 ، و d_3 ثابتند. این سه رابطه، به نام معادلات قیدی، تعداد مختصه های لازم برای توصیف موقعیت جسم صلب را به شش کاهش می دهند.



شکل (۱-۹): مکان هر جرم نقطه ای k در فضا با شناختن مکانهای سه نقطه P_1 ، P_2 ، و P_3 ، تعیین می شود

برای یک جسم گسترده ، جمع بندی می تواند جای خود را به انتگرال گیری روی تمام حجم جسم بدهد ، یعنی ، مرکز جرم $R(X, Y, Z)$ عبارت است از

$$R = \frac{\iiint r \, dM}{\iiint dM} = \frac{1}{M} \iiint r \rho \, dV \quad (5-9)$$

که $dM = \rho \, dV$ ، و M جرم کل جسم است . مرکز جرم به شکل مؤلفه ای به صورت زیر نوشته می شود

$$X = \frac{1}{M} \iiint xp \, dV , Y = \frac{1}{M} \iiint yp \, dV , Z = \frac{1}{M} \iiint zp \, dV \quad (6-9)$$

اگر جسم صلب به صورت یک ورقه نازک باشد معادله مرکز جرم به شکل

$$R = \frac{1}{M} \iint r \sigma \, dA \quad (7-9)$$

است که σ چگالی سطحی ، جرم بر واحد سطح ، dA یک عنصر کوچک سطح ، و M جرم کل است که برابر است با

$$M = \iint \sigma \, dA \quad (8-9)$$

به همین نحو ، اگر جسم به صورت یک سیم نازک باشد مرکز جرم عبارت است از

$$R = \frac{1}{M} \int r \lambda \, dL \quad (9-9)$$

که λ چگالی خطی ، جرم بر واحد طول ، dL یک عنصر کوچک طول ، و M جرم کل است که برابر است با

$$M = \int \lambda \, dL \quad (10-9)$$

اگر ρ ، σ ، و λ ثابت باشند ، می توانند از علامت انتگرال خارج شده ، و مسأله را قدری ساده تر کنند .

فرض کنیم سیستمی از دو یا چند قسمت مجزا تشکیل شده باشد بطوری که مرکز جرم M_1 در r_1 ، مرکز جرم M_2 در r_2 ، باشد ، در این صورت مرکز جرم سیستم عبارت است از

$$R = \frac{M_1 r_1 + M_2 r_2 + \dots}{M_1 + M_2 + \dots} \quad (11-9)$$

یا ، به شکل مؤلفه ای ،

$$X = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2 + \dots}{M_1 + M_2 + \dots} \quad (12-9)$$

با عبارتهای مشابهی برای Y و Z . توجه کنیم که (x_1, y_1, z_1) ، (x_2, y_2, z_2) ، ... ، به ترتیب ، مختصات مرکز جرمهای M_1 ، M_2 ، ... هستند .

در محاسبه مرکز جرم ، باید بتوانیم از ملاحظات تقارنی بهره گیری کنیم . فرض کنیم جسم تقارن صفحه ای داشته باشد ، یعنی ، هر جرم m_k دارای یک تصویر آینه ای m'_k نسبت به آن صفحه است . این صفحه تقارن را صفحه XY بگیریم . در این مورد ،

$$Z = \frac{\sum (m_k z_k + m'_k z'_k)}{\sum (m_k + m'_k)} \quad (13-9)$$

اما ، به علت تقارن ، $m_k = m'_k$ ، $z_k = -z'_k$ ، خواهیم یافت $Z = 0$ ، که می رساند که مرکز جرم در صفحه XY ، صفحه تقارن ، است . به همین نحو ، اگر جسم صلب یک محور تقارن داشته باشد ، مرکز جرم در روی این محور قرار دارد . اکنون برای توضیح کاربرد معادلات پیشین به چند مثال می پردازیم .

مرکز جرم يك نیمکره ، پوسته نیمکره ای ، و نیمدایره

در شکل (۳-۹) یک نیمکره توپر به شعاع a و چگالی یکنواخت ρ ، و در نتیجه جرم $M = \frac{2\pi}{3} a^3 \rho$ ، نشان داده شده است . از ملاحظات تقارنی می دانیم که مرکز جرم روی شعاعی قرار دارد که بر صفحه عمود است . یعنی ، همان طور که نشان داده شده است ، در روی محور Z قرار دارد . برای محاسبه Z مرکز جرم عنصر حجم هاشور خورده را در نظر می گیریم بطوری که

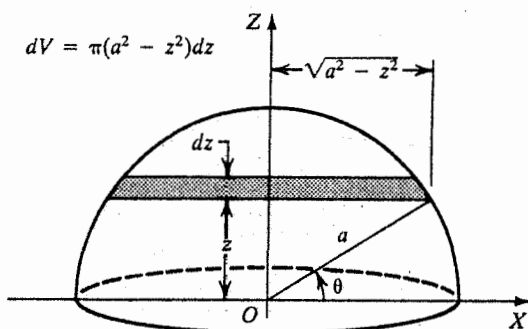
$$dV = \pi(a^2 - z^2) dz \quad (14-9)$$

بنابراین ، مختصه Z مرکز جرم ، بنابر معادله (۵-۹) ، عبارت است از

$$Z = \frac{\int_0^a z \rho dV}{\int_0^a \rho dV} = \frac{\int_0^a z \rho \pi (a^2 - z^2) dz}{\int_0^a \rho \pi (a^2 - z^2) dz} = \frac{3}{8} a \quad (15-9)$$

برای یک پوسته نیمکره ای ، وضعیت به گونه ای است که در شکل (۴-۹) نشان داده

شده است .



شکل (۹-۳) : مرکز جرم يك نیمکره توپیر

این بار نیز ، از ملاحظات تقارنی ، مرکز جرم روی محور Z است . مساحت یک سطح کوچک به طول $\frac{1}{2} 2\pi(a^2 - z^2)$ و پهنای $a d\theta$ ، آن طور که نشان داده شده است . عبارت است از

$$dA = 2\pi(a^2 - z^2)^{1/2} a d\theta \quad (۹-۱۶ \text{ الف})$$

بنابر شکل (۹-۴) ،

$$z = a \sin \theta , \quad dz = a \cos \theta d\theta$$

$$d\theta = \frac{dz}{a \cos \theta} = \frac{dz}{(a^2 - z^2)^{1/2}}$$

قرار دادن اینها در معادله (۹-۱۶ الف) می دهد

$$dA = 2\pi a dz \quad (۹-۱۶ \text{ ب})$$

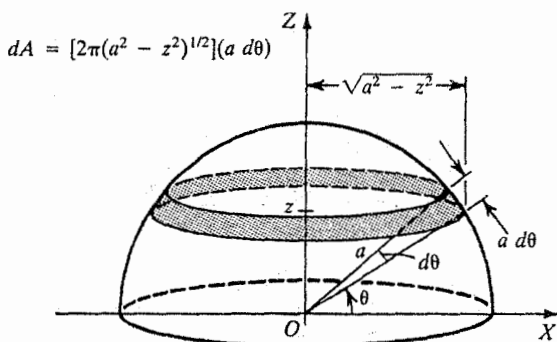
چگالی سطحی یکنواخت σ به وسیله $\sigma = \frac{M}{A} = \frac{M}{2\pi a^2}$ به جرم پوسته مربوط می شود . لذا ، بنابر معادله (۹-۷) ، مرکز جرم عبارت است از

$$Z = \frac{\int_0^a z \sigma dA}{\int_0^a \sigma dA} = \frac{\int_0^a z \sigma 2\pi a dz}{\int_0^a \sigma 2\pi a dz} = \frac{1}{2} a \quad (۹-۱۷)$$

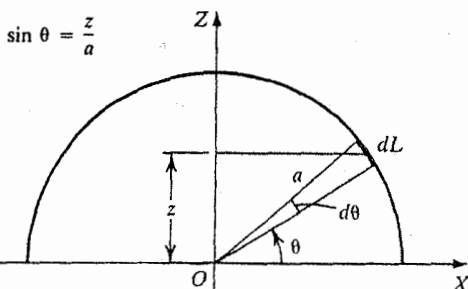
اکنون یک سیم را که به شکل نیمدایره خم شده است ، شکل (۹-۵) ، در نظر

بگیریم . در این جا نیز مرکز جرم روی محور Z است . چگالی خطی $\lambda = \frac{M}{\pi a}$ ، $dL = a d\theta$ ، و $z = a \sin \theta$. به این ترتیب ، بنابر معادله (۹-۹) ،

$$Z = \frac{\int_0^a z \lambda dL}{\int_0^a \lambda dL} = \frac{\int_0^\pi (a \sin \theta) a d\theta}{\int_0^\pi a d\theta} = \frac{2}{\pi} a \quad (۹-۱۸)$$



شکل (۹-۴) : مرکز جرم يك پوسته نیمکره‌ای



شکل (۹-۵) : مرکز جرم يك سیم به شکل نیمدایره

حرکت مرکز جرم

حال جسمی در نظر بگیریم که تحت هیچ قیدی نیست و آزاد است که به هر طریقی حرکت کند. در چنین مواردی، حرکت جسم به راحتی به وسیله مرکز جرم $\mathbf{R}(x, y, z)$ توصیف می شود. حرکت انتقالی جسم با رابطه

$$\mathbf{F} = M\ddot{\mathbf{R}} \quad (۹-۱۹)$$

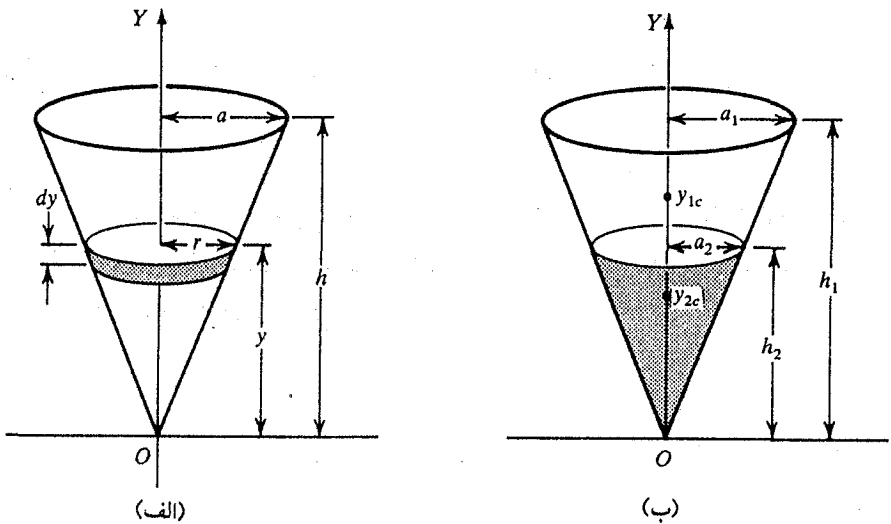
توصیف می شود که \mathbf{F} نیروی خارجی کل وارد بر جسم به جرم M است. حرکت چرخشی جسم با معادله

$$\tau = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (۹-۲۰)$$

توصیف می شود که \mathbf{L} تکانه زاویه ای و τ گشتاور کل نیروهای خارجی نسبت به مرکز جرم

است . به این ترتیب معادلات (۹-۱۹) و (۹-۲۰) شش معادلهٔ جفت شده تشکیل می دهند و باید همزمان حل شوند ، که کار پردردسری است . اما تحت بعضی قیودها ، که بعداً بحث خواهیم کرد ، تعداد معادلات بطور قابل ملاحظه ای کم می شود .

مثال (۹-۱) : مرکز جرم (الف) یک مخروط توپر ، و (ب) یک مخروط ناقص ، را پیدا کنید .



شکل (مثال - ۹-۱)

(الف) مخروطی به شعاع a ، ارتفاع h ، و چگالی ρ در نظر بگیریم . نخست جرم مخروط و سپس مرکز جرم آن را پیدا می کنیم . جرم یک عنصر کوچک به شعاع r و ضخامت dy ، مطابق شکل (مثال - ۹-۱ - الف) ، عبارت است از

$$dm = \rho \pi r^2 dy \quad (۱)$$

از هندسهٔ شکل داریم

$$\frac{r}{a} = \frac{y}{h}, \quad r = \frac{ay}{h} \quad (۲)$$

با قرار دادن به جای r در معادله (۱) خواهیم داشت

$$dm = \frac{\pi \rho a^2 y^2}{h^2} dy \quad (۳)$$

در نتیجه ، جرم مخروط عبارت است از

$$M = \int dm = \frac{\pi \rho a^2}{h^2} \int_0^h y^2 dy = \frac{\pi \rho a^2 h}{3} \quad (۴)$$

مرکز جرم y_{cm} ، با استفاده از معادله (۳) با

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \int_0^h y dm = \frac{\pi \rho a^2}{M h^2} \int_0^h y^3 dy$$

داده می شود . با انتگرال گیری و قرار دادن به جای M از معادله (۴) ، خواهیم داشت

$$y_{cm} = \frac{3h}{4} \quad (۵)$$

(ب) مخروط ناقص ، همان طور که در شکل (مثال ۹-۱ ب) نشان داده شده

است ، مخروطی است که قسمت پایین آن را که با هاشور نشان داده شده است ، برداشته باشند . از هندسه شکل داریم

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a_1}{a_2}, \quad h_2 = \frac{a_2}{a_1} h_1 \quad (۶)$$

جرمهای دو مخروط ، از معادله (۴) ، برابرند با

$$M_1 = \frac{\pi \rho a_1^2 h_1}{3} \quad \text{و} \quad M_2 = \frac{\pi \rho a_2^2 h_2}{3} = \frac{\pi \rho}{3} \frac{a_2^3}{a_1} h_1 \quad (۷)$$

و مرکز جرمهای آنها عبارتند از

$$y_{1c} = \frac{3}{4} h_1, \quad y_{2c} = \frac{3}{4} h_2 = \frac{3}{4} \frac{a_2}{a_1} h_1 \quad (۸)$$

به این ترتیب مرکز جرم مخروط ناقص عبارت است از

$$y_c = \frac{M_1 y_{1c} - M_2 y_{2c}}{M_1 - M_2} = \frac{3}{4 a_1} \frac{a_1^4 - a_2^4}{a_1^3 - a_2^3} h_1 \quad (۹)$$

همچنین ، باید توجه کرد که اگر ارتفاع مخروط ناقص را با $h = h_1 - h_2$ نمایش دهیم ،

خواهیم داشت

$$\frac{a_1 - a_2}{h} = \frac{a_1}{h_1} \quad \text{یا} \quad h_1 = \frac{a_1 h}{a_1 - a_2} \quad (10)$$

بردن h_1 در معادله (۹)، y_c را برحسب a_1 ، a_2 ، و h به صورت زیر به دست می دهد .

$$y_c = \frac{(a_1^2 + a_2^2)(a_1 + a_2)}{(a_1^3 - a_2^3)} h \quad (11)$$

تمرین (۹-۱): مثال را برای وقتی که مخروط و مخروط ناقص توخالی باشند، و چگالی ماده هنوز ρ باشد تکرار کنید .

۹-۳ چرخش حول يك محور

ساده ترین حرکت جسم صلب، بعد از حرکت انتقالی خالص آن، حرکت چرخشی حول یک محور ثابت است. وقتی جسمی آزاد است که حول محور ثابتی بچرخد، تنها به یک مختصه برای مشخص شدن جهت گیری اش نیاز دارد. جسم صلبی در نظر بگیریم که حول محور ثابت Z بچرخد، آن طور که در شکل (۹-۶ الف) نشان داده شده است. موقعیت جسم می تواند به وسیله یک زاویه θ ، زاویه بین یک خط OA در جسم و محور X ، مشخص شود. ذره ای به جرم m_k به عنوان یک ذره نماینده واقع در فاصله $r_k(x_k, y_k, z_k)$ از مبدأ در نظر بگیریم، که با سرعت v_k و سرعت زاویه ای ω حرکت می کند. مسیر این ذره دایره ای است به شعاع $r_k = (x_k^2 + y_k^2)^{\frac{1}{2}}$ که مرکزش روی محور Z است. زاویه بین جهت خط OA در جسم و شعاع r_k از محور Z به جرم m_k را Ψ بگیریم. چون برای یک جسم صلب Ψ ثابت است، همان طور که در شکل نشان داده شده است، داریم $\phi = \theta + \Psi$ ، و در نتیجه

$$\dot{\phi} = \dot{\theta} = \omega \quad (21-9)$$

$$v_k = r_k \omega \quad (22-9)$$

یا، در شکل برداری،

$$v_k = \omega \times r_k \quad (23-9)$$

از معادله (۹-۲۳) یا از شکل (۹-۶ ب)، داریم

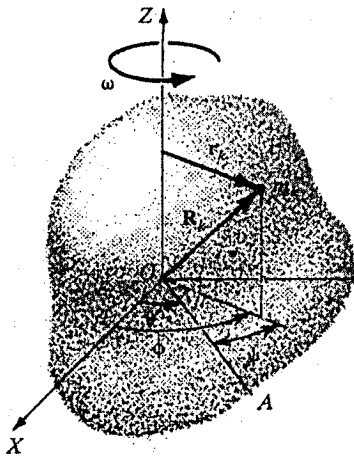
$$\dot{x}_k = -v_k \sin \phi = -\omega y_k \quad (24-9 \text{ الف})$$

$$\dot{y}_k = v_k \cos \phi = \omega x_k \quad (۲۴-۹) \text{ (ب)}$$

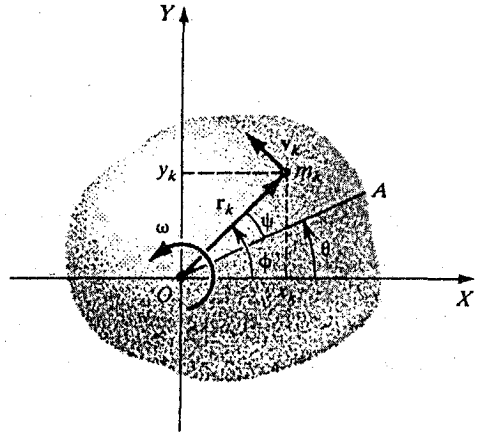
$$\dot{z}_k = 0 \quad (۲۴-۹) \text{ (پ)}$$

و

$$v_k = r_k \omega = (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2)^{1/2} \quad (۲۵-۹)$$



(ب)



(الف)

شکل (۹-۶) : چرخش يك جسم صلب حول يك محور ثابت : (الف) نمای از پهلو ، (ب) نمای از بالا

برای محاسبات بیشتر، می توانیم خواه از مختصات دکارتی (x, y, z) یا از مختصات استوانه ای (r, θ, z) استفاده کنیم. انرژی جنبشی K ی جسم چرخنده حول محور Z عبارت است از

$$K = \sum_k \frac{1}{2} m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \left[\sum_k m_k r_k^2 \right] \omega^2$$

یا

$$K = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \dot{\theta}^2 \quad (۲۶-۹)$$

که در آن

$$I_z = \sum_k m_k r_k^2 = \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2) \quad (۲۷-۹)$$

کمیت I_z برای یک جسم صلب که حول یک محور معینی (در این مورد محور Z) می چرخد ثابت است و گشتاور لختی حول این محور نامیده می شود. چون جسم

پیوسته است ، می توانیم به جای جمع بندی انتگرال گیری کنیم و I_z را به صورت زیر بنویسیم .

$$I_z = \iiint r^2 dm = \iiint r^2 \rho dV \quad (۲۸-۹)$$

اکنون تکانه زاویه ای جسم حول محور Z را حساب کنیم . برحسب تعریف ، تکانه زاویه ای جسم حول محور Z عبارت است از

$$L = \sum_k r_k (m_k v_k) = \left(\sum_k m_k r_k^2 \right) \omega \quad (۲۹-۹)$$

یا

$$L = I\omega = I\dot{\theta} \quad (۳۰-۹)$$

آهنگ تغییرات تکانه زاویه ای هر سیستم برابر است با گشتاور کل نیروهای خارجی (یا ممان نیروها) ، τ_z ، (که N نیز نوشته می شود) . بنابراین ، برای یک جسم صلب که حول محور Z می چرخد ، چون I_z ثابت است ، داریم ،

$$\tau_z = \frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\ddot{\theta} \quad (۳۱-۹)$$

این معادله ، معادله حرکت برای چرخش یک جسم صلب حول یک محور ثابت است و شبیه به معادله حرکت انتقالی یک ذره در امتداد یک خط مستقیم ، یعنی قانون دوم نیوتن ، است . به همین نحو ، گشتاور لختی I شبیه به جرم m است ، یعنی ، I اندازه ای از لختی چرخشی نسبت به محور چرخش است ، درست همان طوری که m اندازه ای از لختی انتقالی جسم است . یادآوری کنیم که تفاوت آنها در این است که گشتاور لختی به محور چرخش بستگی دارد ، در حالی که جرم به موقعیت آن بستگی ندارد . شباهت بین کمیت های انتقالی و چرخشی ، همان طور که در جدول (۹-۱) نشان داده شده است ، می تواند گسترده تر باشد . به علاوه ، به عنوان یک شباهت با حرکت انتقالی ، می توانیم انرژی پتانسیل چرخشی را به صورت

$$V(\theta) = - \int_{\theta_0}^{\theta} \tau_z(\theta) d\theta \quad (۳۲-۹)$$

تعریف کنیم ، و در نتیجه

$$\tau_z = - \frac{dV}{d\theta} \quad (۳۳-۹)$$

به این ترتیب انرژی پتانسیل چرخشی عبارت است از کار انجام شده در مقابل نیروهایی که گشتاور τ_z را ایجاد کرده اند وقتی که جسم از موقعیت زاویه ای مرجع θ_s به مکان زاویه ای جدید θ چرخیده باشد .

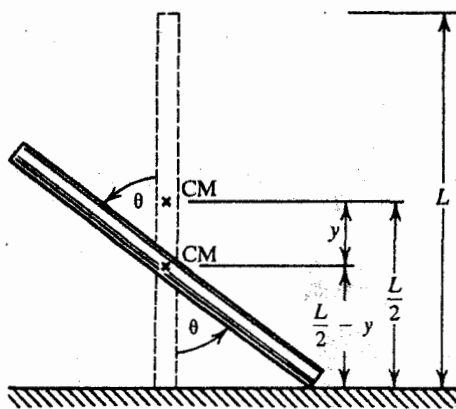
جدول (۹-۱) : شباهت بین حرکت مستقیم الخط و حرکت چرخشی حول يك محور

چرخشی	مستقیم الخط
مکان زاویه ای : θ	مکان : x
سرعت زاویه ای : ω	سرعت : u
شتاب زاویه ای : $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$	شتاب : $a = \frac{du}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$
$\omega = \omega_0 + \alpha t$	$v = v_0 + at$
$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
گشتاور لختی : $I = \sum m_k r_k^2$	جرم : M
تکانه زاویه ای : $L = I\omega$	تکانه خطی : $p = mv$
گشتاور نیرو : $\tau = rF \sin \theta$	نیرو : F
$\tau = I\alpha$	$F = ma$
$\tau = \frac{dL}{dt}$	$F = \frac{dp}{dt}$
انرژی جنبشی چرخشی : $K = \frac{1}{2}I\omega^2$	انرژی جنبشی انتقالی : $K = \frac{1}{2}mv^2$
انرژی پتانسیل : $V(\theta) = - \int_{\theta_s}^{\theta} \tau(\theta) d\theta$	انرژی پتانسیل : $V(x) = - \int_{x_s}^x F(x) dx$
$\tau(\theta) = - \frac{dV(\theta)}{d\theta}$	$F(x) = - \frac{dV(x)}{dx}$

مثال (۹-۲) : میله ای به جرم M و طول L در روی یک میز بدون اصطکاک ، مطابق شکل (مثال - ۹-۲) ، بطور قائم در حال سکون قرار دارد . اگر میله شروع به افتادن کند ، سرعت مرکز جرم آن را به صورت تابعی از زاویه ای که میله با قائم می سازد پیدا کنید .

وضعیت به گونه ای است که در شکل نشان داده شده است . سرعت مرکز جرم

را می‌توانیم با به کارگیری روش پایستگی انرژی پیدا کنیم. تنها نیرویی که به میله وارد می‌شود نیروی گرانشی Mg رو به پایین، و نیروی عکس‌العمل سطح رو به بالاست. چون در جهت افق نیرویی به میله وارد نمی‌شود، مرکز جرم بطور قائم رو به پایین حرکت می‌کند. سرعت مرکز جرم را \dot{y} بگیریم.



شکل (مثال - ۹-۲)

در آغاز جسم ساکن است، انرژی جنبشی آن صفر و انرژی پتانسیل آن $\frac{MgL}{2}$ است. بنابراین

$$E_i = K_i + V_i = \frac{MgL}{2} \quad (1)$$

بعد از این که مرکز جرم به اندازه y پایین می‌آید، میله به اندازه زاویه θ ، آن طور که شکل نشان می‌دهد، چرخیده است. به این ترتیب انرژی پتانسیل نهایی میله عبارت است از

$$V_f = Mg\left(\frac{L}{2} - y\right) \quad (2)$$

و انرژی جنبشی نهایی، با توجه به این که سرعت قائم \dot{y} و سرعت زاویه ای چرخش $\omega = \dot{\theta}$ خواهد بود

$$K_f = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2 \quad (3)$$

که I_0 گشتاور لختی میله حول محور ماربر مرکز جرم است؛ یعنی (همان طور که بطور خلاصه در بخش (۹-۴) نشان خواهیم داد)،

$$I_0 = \frac{1}{12} ML^2 \quad (۴)$$

بنابراین ، انرژی کل نهایی عبارت است از

$$E_f = K_f + V_f = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 + Mg \left(\frac{L}{2} - y \right) \quad (۵)$$

از پایستگی انرژی $E_i = E_f$ خواهیم داشت

$$Mg \frac{L}{2} = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 + Mg \left(\frac{L}{2} - y \right) \quad (۶)$$

برای به دست آوردن \dot{y} باید θ را حذف کرد . با توجه به شکل داریم

$$y = \frac{L}{2} (1 - \cos \theta) \quad (۷)$$

در نتیجه

$$\dot{y} = \frac{L}{2} \sin \theta \dot{\theta} \quad \text{یا} \quad \dot{\theta} = \frac{2\dot{y}}{L \sin \theta} \quad (۸)$$

با قرار دادن به جای I_0 و θ از معادلات (۴) و (۸) در معادله (۶) و مرتب سازی ، نتیجه خواهیم گرفت

$$\dot{y} = \left(\frac{6gy \sin^2 \theta}{1 + 3 \sin^2 \theta} \right)^{1/2} \quad (۹)$$

تمرین (۹-۲): مثال را برای وقتی که به جای میله ، یک دمبل (دو جرم که به وسیله میله بدون جرمی به طول L به یکدیگر متصل شده اند) بگذاریم تکرار کنید .

۹-۲ محاسبه گشتاور لختی

برای سیستمی که شامل جرمهای m_k واقع در فاصله های r_k از یک محور چرخش است ، گشتاور لختی عبارت است از

$$I = \sum_{k=1}^N m_k r_k^2 \quad (۹-۳۴)$$

توجه به این نکته مهم است که r_k فاصله عمودی m_k از محور چرخش است . برای یک جسم صلب گسترده و پیوسته ، گشتاور لختی حول یک محور چرخش عبارت است از

$$I = \int r^2 dm \quad (۳۵-۹)$$

که r فاصله عمودی عنصر جرم dm از محور چرخش است. برای یک جسم یک بُعدی با چگالی جرمی خطی λ (جرم بر واحد طول)، برای یک جسم دو بُعدی با چگالی جرمی سطحی σ (جرم بر واحد سطح)، و برای یک جسم سه بُعدی با چگالی جرمی ρ (جرم بر واحد حجم)، گشتاور لختی به صورت‌های زیر نوشته می‌شود

$$I = \int r^2 \lambda dl \quad (۳۶-۹)$$

$$I = \iint r^2 \sigma dA \quad (۳۷-۹)$$

$$I = \iiint r^2 \rho dV \quad (۳۸-۹)$$

که dl عنصر طول، dA عنصر سطح، و dV عنصر حجم است.

تعریف گشتاور لختی می‌تواند به اجسام مرکب گسترش داده شود. به این ترتیب، اگر I_1 ، I_2 ، ... گشتاورهای لختی قسمت‌های مختلف جسم حول یک محور بخصوص باشند، گشتاور لختی کل جسم حول همین محور عبارت است از

$$I = I_1 + I_2 + \dots \quad (۳۹-۹)$$

اکنون گشتاور لختی چند جسم با شکلهای متفاوت را حساب کنیم.

میله نازک

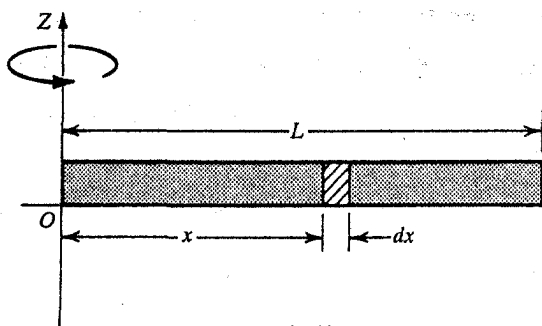
یک میله نازک به طول L و جرم M ، و در نتیجه چگالی جرمی خطی $\lambda = \frac{M}{L}$ ، در نظر بگیریم. فرض کنیم بخواهیم گشتاور لختی حول یک محور عمود بر میله در یک انتهای آن را [شکل ۹-۷ الف] پیدا کنیم. بنابر معادله (۳-۹۶)،

$$I = \int_0^L x^2 \lambda dx = \frac{1}{3} L^3 \lambda = \frac{1}{3} ML^2 \quad (۴۰-۹)$$

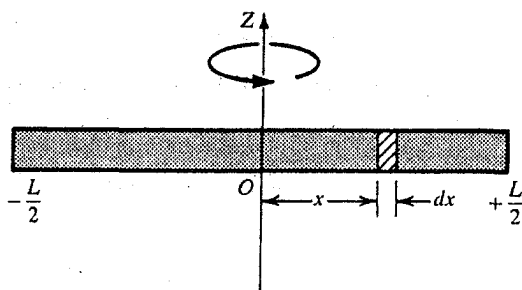
که در آن قرار داده ایم $\lambda = \frac{M}{L}$. اگر محور چرخش از مرکز میله، آن‌طور که شکل (۹-۷ ب) نشان می‌دهد، عبور کرده بود، گشتاور لختی می‌شد

$$I = \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 \lambda dx = \frac{1}{12} L^3 \lambda = \frac{1}{12} ML^2 \quad (۴۱-۹)$$

قبل از هر چیز ، در این مرحله مهم است که دو قضیه مهم را بیان و اثبات کنیم : قضیه محوره‌های موازی و قضیه محور عمودی .



(الف)



(ب)

شکل (۹-۷) : گشتاور لختی یک میله نازک (الف) حول یک محور عمود بر میله در یک

انتها ، و (ب) حول یک محور عمود بر میله در مرکز

قضیه محوره‌های موازی

جسمی در نظر بگیریم که حول محوری که از نقطه O گذشته است می‌چرخد . اگر این محور را Z فرض کنیم از عمومیت مسأله کاسته نمی‌شود . برحسب تعریف ، گشتاور لختی حول یک محور ما بر O عبارت است از

$$I_0 = \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2) = \iiint (x^2 + y^2) \rho \, dV \quad (۹-۴۲)$$

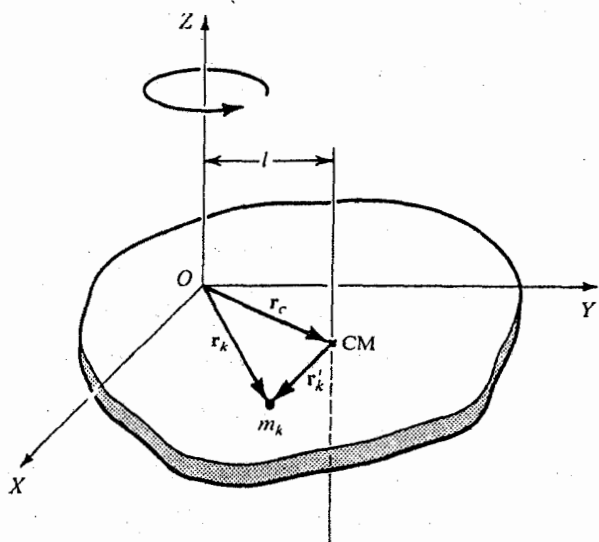
که جرم m_k در فاصله r_k از مبدأ و در فاصله $(x_k^2 + y_k^2)^{\frac{1}{2}}$ از محور Z قرار دارد . بنابراین

معادله (۸-۹) ،

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}'_k \quad (۴۳-۹)$$

\mathbf{r}_c فاصله مرکز جرم از مبدأ O ، و \mathbf{r}'_k مختصه نسبی m_k نسبت به مرکز جرم است . با استفاده از معادله (۴۳-۹) ، (با حذف k) ،

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x_c + x')^2 + (y_c + y')^2 \\ &= x_c^2 + y_c^2 + x'^2 + y'^2 + 2x_c x' + 2y_c y' \end{aligned} \quad (۴۴-۹)$$



شکل (۸-۹) : قضیه محورهای موازی

با قرار دادن این عبارت در معادله (۴۲-۹) ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} I_0 &= \iiint (x'^2 + y'^2) \rho \, dV + (x_c^2 + y_c^2) \iiint \rho \, dV \\ &\quad + 2x_c \iiint x' \rho \, dV + 2y_c \iiint y' \rho \, dV \end{aligned} \quad (۴۵-۹)$$

که جمله اول طرف راست گشتاور لختی حول محوری است که از مرکز جرم موازی با محور Z گذشته است ، یعنی

$$I_c = \iiint (x'^2 + y'^2) \rho \, dV \quad (۴۶-۹)$$

جمله دوم طرف راست معادله (۹-۴۵) برابر است با جرم M جسم ضرب در مربع فاصله l بین مرکز جرم و محور Z ، یعنی

$$(x_c^2 + y_c^2) \iiint \rho dV = (x_c^2 + y_c^2)M = Ml^2 \quad (۹-۴۷)$$

دو جمله آخر در معادله (۹-۴۵)، بر حسب تعریف مرکز جرم، صفرند، یعنی، آنها صرفاً مرکز جرم را نسبت به خودش تعیین می کنند،

$$\iiint x' \rho dV = \iiint y' \rho dV = 0 \quad (۹-۴۸)$$

به این ترتیب، از ترکیب معادلات (۹-۴۶)، (۹-۴۷)، و (۹-۴۸) با (۹-۴۹) نتیجه خواهیم گرفت

$$I_0 = I_c + Ml^2 \quad (۹-۴۹)$$

که قضیه محورهاى موازی است و به صورت زیر بیان می شود:

قضیه محورهاى موازی: گشتاور لختی هر جسم حول هر محور برابر است با مجموع گشتاور لختی حول یک محور موازی مارّبر مرکز جرم و گشتاور لختی جرم کل جسم واقع در مرکز جرم حول محور مورد نظر.

در نتیجه، اگر مرکز جرم و گشتاور لختی حول مرکز جرم را بدانیم، گشتاور لختی حول هر محور موازی را می توان با استفاده از این قضیه حساب کرد.

قضیه محور عمودی

جسمی که جرم آن در روی یک سطح تخت توزیع شده است، یک لایه تخت نامیده می شود. قضیه محور عمودی به یک لایه صفحه ای با هر شکلی قابل اعمال است. یک جسم سخت به شکل یک لایه صفحه ای در صفحه XY ، مطابق شکل (۹-۹)، در نظر بگیریم. گشتاور لختی حول محور Z عبارت است از

$$I_Z = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) = \iiint (x^2 + y^2) \rho dV \quad (۹-۵۰)$$

گشتاور لختی این جسم حول محور X برابر است با (برای این لایه $z=0$ و در نتیجه جمله z^2 وجود ندارد)

$$I_X = \iiint y^2 \rho \, dV \quad (۵۱-۹)$$

و ، به همین نحو ، گشتاور لختی حول محور Y خواهد بود

$$I_Y = \iiint x^2 \rho \, dV \quad (۵۲-۹)$$

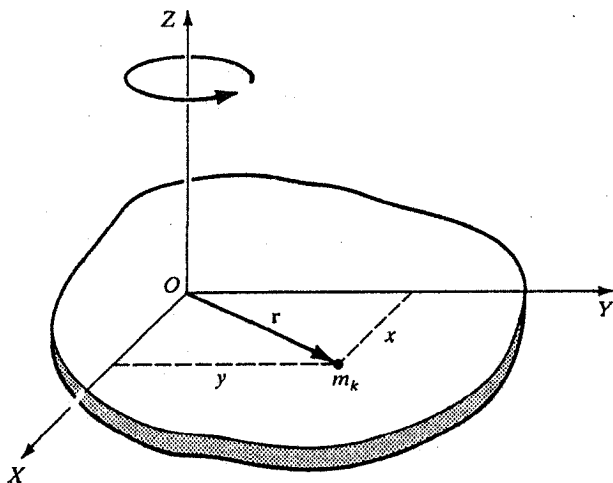
ترکیب معادلات (۵۱-۹) و (۵۲-۹) با (۵۰-۹) می دهد

$$I_Z = I_X + I_Y \quad (۵۳-۹)$$

که قضیه محور عمودی است و می تواند به طریق زیر بیان شود :

قضیه محور عمودی : مجموع گشتاورهای لختی یک لایه صفحه ای حول هر دو محور عمود بر هم در صفحه لایه برابر است با گشتاور لختی حول محوری که از نقطه تقاطع این دو محور بگذرد و بر صفحه عمود باشد .

اکنون این قضیه را به وضعیتهای مختلفی اعمال می کنیم



شکل (۹-۹) : قضیه محور عمودی که به یک لایه در صفحه XY اعمال می شود

حلقه یا پوسته استوانه‌ای

یک حلقه به جرم M و شعاع a ، مطابق شکل (۹-۱۰)، در نظر بگیریم. تمام جرم حلقه در فاصله a از محور متمرکز شده است. در نتیجه گشتاور لختی حول محور Z عبارت است از

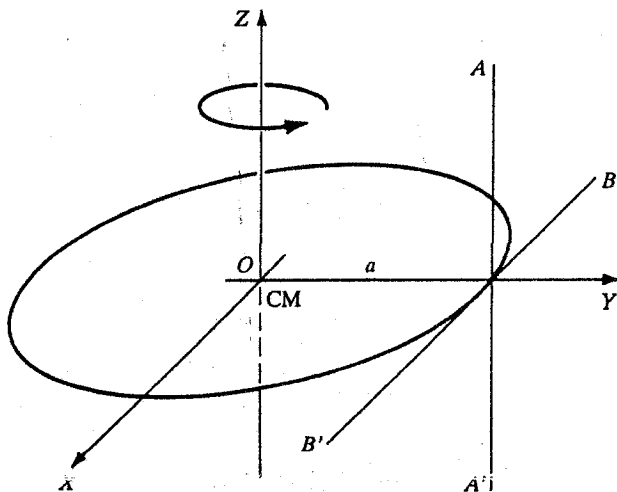
$$I_Z = Ma^2 \quad (۹-۵۴)$$

فرض کنیم اکنون بخواهیم گشتاور لختی حول محور AA' را که موازی با محور Z و در لبه حلقه، آن طور که شکل (۹-۱۰) نشان می‌دهد، عمود بر صفحه حلقه است، حساب کنیم. وضعیت دیگر متقارن نیست و محاسبه گشتاور لختی حول محور AA' دیگر پیش پا افتاده نیست. اما به کارگیری قضیه محورها موازی، معادله (۹-۴۹)، یعنی

$$I_0 = I_c + Ml^2$$

این محاسبه را ساده می‌کند. اعمال این رابطه به وضعیت در شکل (۹-۱۰) می‌دهد

$$\begin{aligned} I_{AA'} &= I_Z + Ma^2 = Ma^2 + Ma^2 \\ &= 2Ma^2 \end{aligned} \quad (۹-۵۵)$$



شکل (۹-۱۰): گشتاور لختی یک حلقه حول سه محور متفاوت: محور Z ، محور AA' ، و محور BB'

سپس به محاسبه گشتاور لختی حلقه حول یک محور واقع در صفحه حلقه ، مثلاً حول محور X یا محور Y ، پردازیم . از تقارن وضعیت داریم

$$I_X = I_Y \quad (۵۶-۹)$$

و با به کارگیری قضیه محور عمودی ، معادله (۹-۵۳) ، می دهد

$$Ma^2 = I_X + I_X = I_Y + I_Y \quad \text{یا}$$

$$I_X = I_Y = \frac{1}{2} Ma^2 \quad (۵۷-۹)$$

اکنون می توانیم قضیه محورهای موازی را برای پیدا کردن گشتاور لختی حول محور BB' ، که در صفحه حلقه و مماس بر لبه آن است ، مطابق شکل (۹-۱۰) ، به کار بگیریم . به این ترتیب

$$\begin{aligned} I_{BB'} &= I_X + Ma^2 = \frac{1}{2} Ma^2 + Ma^2 \\ &= \frac{3}{2} Ma^2 \end{aligned} \quad (۵۸-۹)$$

یک پوسته استوانه ای بطور ساده تعداد زیادی حلقه است که روی یکدیگر چیده شده اند . بنابراین گشتاور لختی پوسته استوانه ای به جرم M ، شعاع a ، و طول l را می توان به طریقی مشابه با حلقه قبلی محاسبه کرد .

شعاع چرخش

مناسب است که گشتاور لختی یک جسم صلب را بر حسب فاصله k ، به نام شعاع چرخش ، که به صورت زیر تعریف می شود بیان کنیم

$$I = Mk^2, \quad k = \sqrt{\frac{I}{M}} \quad (۵۹-۹)$$

یعنی ، شعاع چرخش فاصله ای از محور چرخش است که می توانیم تمام جرم جسم را در آن متمرکز فرض کنیم . بنابراین ، به عنوان مثال ، شعاع چرخش میله نازک نسبت به محور چرخشی که از مرکز آن می گذرد عبارت است از

$$k = \sqrt{\frac{I}{M}} = \sqrt{\frac{(1/12)Ma^2}{M}} = \frac{a}{\sqrt{12}} \quad (۶۰-۹)$$

وقتی که k را برای یک جسم صلب که حول یک محور معین می چرخد بدانیم ، گشتاور لختی آن بطور ساده از $I = Mk^2$ حساب شود .

قرص دایره ای ، استوانه توپر

اکنون یک قرص توپر به جرم M و شعاع a ، که حول محوری که از مرکزش گذشته و برصفحه آن عمود است ، برابر شکل (۹-۱۱) ، می چرخد در نظر بگیریم . قرص را به چند حلقه متحدالمركز ، مانند قسمت هاشور خورده شکل (۹-۱۱) ، تقسیم کنیم . به این ترتیب گشتاور لختی این حلقه حول محور مورد بحث عبارت است از

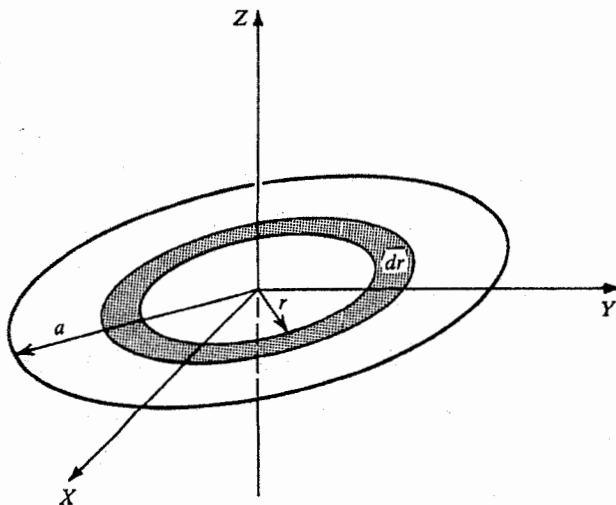
$$dI = r^2 dm$$

که r شعاع حلقه است . چگالی سطحی برابر است با $\sigma = \frac{M}{\pi a^2}$ ؛ در نتیجه جرم dm عبارت است از

$$dm = \sigma dA = \frac{M}{\pi a^2} 2\pi r dr = \frac{2M}{a^2} r dr$$

گشتاور لختی قرص می تواند به صورت زیر نوشته شود

$$I = \int dI = \int r^2 dm = \int_0^a r^2 \frac{2M}{a^2} r dr = \frac{2M}{a^2} \int_0^a r^3 dr = \frac{1}{2} Ma^2 \quad (۹-۱۶)$$



شکل (۹-۱۱) : گشتاور لختی یک قرص حول یک محور عمود بر صفحه آن

همین نتیجه را می توانیم با استفاده از مختصات قطبی و انتگرال گیری دوگانه به دست آوریم .
در عبارت گشتاور لختی

$$I = \iint r^2 \sigma \, dA$$

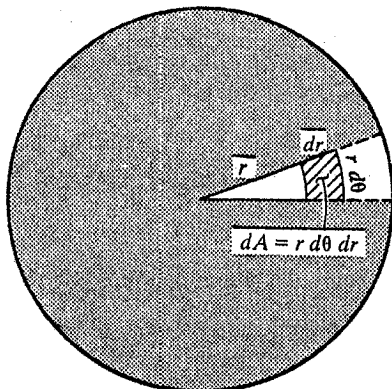
$dA = r \, d\theta \, dr$ مساحتی است که در شکل (۹-۱۲) نشان داده شده است و $\sigma = \frac{M}{\pi a^2}$ جرم
بر واحد سطح است . با قرار دادن اینها در عبارت پیشین I ، خواهیم داشت

$$I = \frac{M}{\pi a^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} r^3 \, dr \, d\theta = \frac{M}{\pi a^2} 2\pi \int_0^a r^3 \, dr$$

یعنی

$$I = \frac{1}{2} Ma^2$$

که همان نتیجه معادله (۹-۶۱) است . برای به دست آوردن گشتاور لختی حول محورهای
مختلف ، می توانیم از قضایای محورهای موازی و عمودی استفاده کنیم .



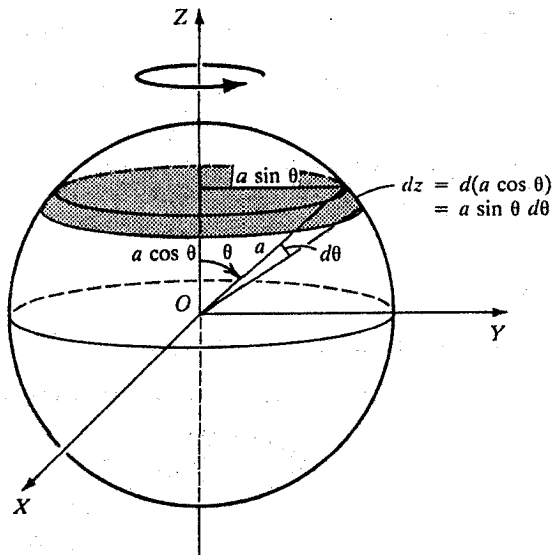
شکل (۹-۱۲) : گشتاور لختی يك قرص با به کارگیری مختصات قطبی

کره و پوسته کروی

اینک گشتاور لختی یک کره توپر یکنواخت به شعاع a و جرم M را حول یک محور ،
مثلاً محور Z ، که از مرکز عبور می کند ، برابر شکل (۹-۱۳) ، محاسبه کنیم . می توانیم کره
را به صورت مجموعه ای از قرصها ، آن طور که در شکل نشان داده شده است ، در نظر بگیریم ،
بطوری که گشتاور لختی کل کره خواهد بود $I = \int dl$. نخست dl را حساب می کنیم . شعاع

قرص نشان داده شده $r = a \sin \theta$ است ، و چگالی ، جرم بر واحد حجم ، ماده قرص عبارت است از

$$\rho = \frac{M}{4\pi a^3/3}$$



شکل (۹-۱۳) : گشتاور لختی یک کره توپر حول محور Z که از مرکز آن گذشته است ، با استفاده از مختصات کروی

و حجم قرص ، با توجه به $z = a \cos \theta$ ، برابر است با

$$dV = \pi r^2 dz = \pi (a \sin \theta)^2 d(a \cos \theta) \quad (۹-۶۲)$$

به این ترتیب گشتاور لختی قرص ، با استفاده از معادله (۹-۶۱) ، عبارت است از

$$\begin{aligned} dI &= \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{1}{2} r^2 \rho dV \\ &= \frac{1}{2} (a \sin \theta)^2 \frac{M}{4\pi a^3/3} \pi (a \sin \theta)^2 d(a \cos \theta) \\ &= -\frac{3}{8} Ma^2 \sin^5 \theta d\theta \end{aligned}$$

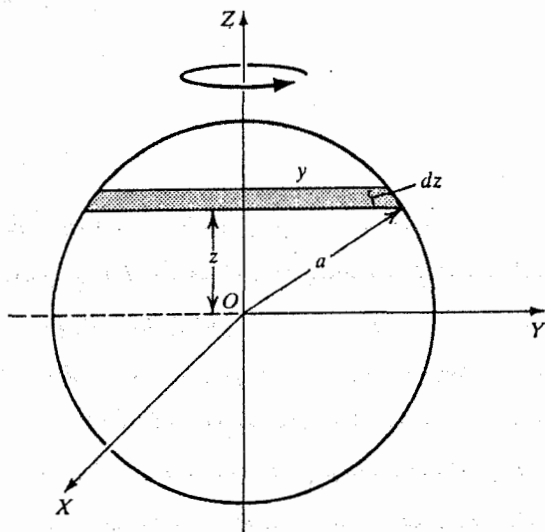
در نتیجه گشتاور لختی کره حول محور Z با رابطه زیر داده می شود

$$I = \int dI = -\frac{3}{8} Ma^2 \int_0^\pi \sin^5 \theta d\theta = \frac{2}{5} Ma^2 \quad (۹-۶۳)$$

اکنون همین نتایج را با به کارگیری مختصات دکارتی ، برابر شکل (۹-۱۴) ، به دست

می آوریم

$$dI = \frac{1}{2} y^2 dm = \frac{1}{2} y^2 (\rho \pi y^2 dz)$$



شکل (۹-۱۴) : گشتاور لختی يك کره توپر حول محور Z که از مرکز آن گذشته است .

با به کارگیری مختصات دکارتی

در نتیجه ،

$$I = \int dI = \int_{-a}^{+a} \frac{1}{2} \pi \rho y^4 dz = \int_{-a}^{+a} \frac{1}{2} \pi \rho (a^2 - z^2)^2 dz$$

یعنی

$$I = \frac{8}{15} \pi \rho a^5 \quad (۹-۶۴)$$

که با قرار دادن به جای ρ ، نتیجه به دست آمده در معادله (۹-۶۳) را به دست می دهد .

سرانجام ، گشتاور لختی یک پوسته نازک کروی را حساب کنیم . این کار می تواند یا با

انتگرال گیری مستقیم ، که انجام داده ایم ، یا با استفاده از معادله (۹-۶۴) انجام گیرد . ما

روش اخیر را به کار می گیریم . اگر از معادله (۹-۶۴) مشتق بگیریم ، گشتاور لختی یک پوسته

کروی به شعاع a و ضخامت da را به دست می آوریم ؛ یعنی

$$I_{\text{shell}} = \frac{8}{3} \pi \rho a^4 da \quad (۶۵-۹)$$

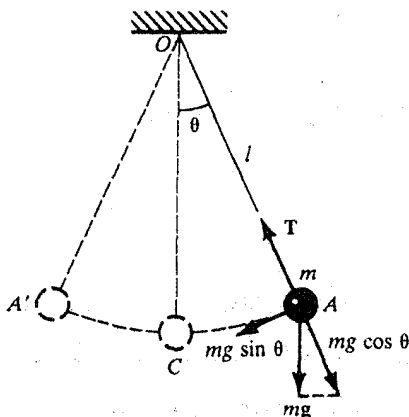
چون حجم پوسته $4\pi a^2 da$ است، چگالی آن می شود $\rho = \frac{M}{4\pi a^2 da}$. با قرار دادن این عبارت در معادله (۶۵-۹) نتیجه می گیریم

$$I = \frac{2}{3} Ma^2 \quad (۶۶-۹)$$

۹-۵ آونگ ساده

این نخستین مثال از بسیاری از مثالهای بررسی حرکت چرخشی است. یک آونگ ساده تشکیل شده است از یک جرم m که از نقطه ثابت O توسط یک نخ کشیده شده بدون جرم (یا یک میله بدون جرم) به طول l ، مطابق شکل (۹-۱۵)، آویزان شده است. این سیستم به عنوان یک جسم صلب تلقی می شود. وقتی جرم m از وضع ترازمندی قائم جابه جا شود، در روی قوسی از یک دایره، آن طور که شکل نشان می دهد، به جلو و عقب حرکت می کند. به این ترتیب حرکت یک آونگ با یک حرکت چرخشی در یک صفحه قائم حول محور Z که از O گذشته و بر صفحه مزبور عمود است، هم ارز است. اکنون معادله (۹-۳۱) را به این وضعیت اعمال کنیم:

$$\tau_z = I_z \ddot{\theta} \quad (۹-۳۱)$$



شکل (۹-۱۵): آونگ ساده

که در آن

$$I_z = ml^2 \quad (۶۷-۹)$$

و گشتاور نیرو حول محور Z که به وسیله نیروی mg ایجاد شده عبارت است از

$$\tau_z = -(mg \sin \theta)l \quad (۶۸-۹)$$

علامت منفی به خاطر این است که گشتاور در جهت کاهش زاویه θ عمل می کند . با قرار دادن

معادلات (۶۹-۹) و (۶۸-۹) در معادله (۳۱-۹) نتیجه می گیریم

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (۶۹-۹)$$

حل این معادله به این آسانی نیست . اما فرض می کنیم که جابه جایی θ خیلی کوچک باشد ،یعنی $\theta \ll \pi/2$ ، لذا $\sin \theta \cong \theta$ و معادله (۶۹-۹) به شکل

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (۷۰-۹)$$

در می آید که معادله نوسانگر هماهنگ ساده است و جواب آن عبارت است از

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (۷۱-۹)$$

که در آن

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (۷۲-۹)$$

 θ_0 و ϕ دو ثابت اختیاری هستند که دامنه و فاز نوسانات را از شرایط اولیه تعیینمی کنند . توجه کنیم که بسامد (فرکانس) f و زمان تناوب T مستقل از دامنه نوسانات است

به شرطی که دامنه آن قدر کوچک باشد که معادله (۷۰-۹) بخوبی برقرار باشد .

مستقل بودن T از دامنه نوسانات برای جابه جاییهای کوچک ، کاربرد آونگ را در

ساعتها برای تنظیم آهنگ مناسب می سازد . حل درست حرکت آونگ ساده ،

همان طور که خواهیم دید ، نشان می دهد که زمان تناوب آونگ با افزایش دامنه

طولانی تر می شود .

اکنون حرکت آونگ را بدون این محدودیت که دامنه کوچک است مورد بحث قرار

می دهیم . چون حرکت آونگ در اثر یک نیروی پایستار انجام می گیرد ، می توانیم

مسئله حرکت آن را با انتگرال انرژی حل کنیم . انرژی پتانسیل چرخشی وابسته به گشتاور

نیروی (۹-۶۹) عبارت است از

$$\begin{aligned} V(\theta) &= -\int_{\theta_0}^{\theta} \tau_z(\theta) d\theta = -\int_{\pi/2}^{\theta} (-mgl \sin \theta) d\theta \\ &= -mgl \cos \theta \end{aligned} \quad (۷۳-۹)$$

که در آن زاویه مرجع θ_0 را $\pi/2$ گرفته ایم. انرژی جنبشی جرم m برابر است با

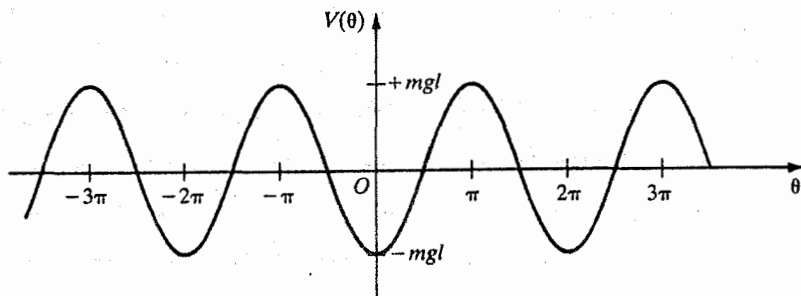
$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \quad (۷۴-۹)$$

به این ترتیب انتگرال انرژی توصیف کننده حرکت عبارت است از

$$K + V = E = \text{constant} \quad (۷۵-۹)$$

$$\frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = E$$

قبل از حل این معادله، جنبه های عمومی حرکت را با رسم یک نمودار انرژی مورد بحث قرار می دهیم. شکل (۹-۱۶) نمودار $V(\theta)$ را بر حسب θ با پیشینه mgl و کمینه $-mgl$ نشان می دهد. حرکت یک جرم m با انرژی اندکی بزرگتر از $-mgl$ ، هماهنگ ساده خواهد بود. برای E بین $-mgl$ و $+mgl$ ، حرکت نوسانی خواهد بود ولی هماهنگ نیست. برای $E > mgl$ ، حرکت غیرنوسانی می شود و آونگ آن قدر انرژی دارد که روی یک دایره کامل دوران کند. اما حرکت هنوز تناوبی است، و زمان تناوب آن زمانی است که یک دور کامل انجام می دهد، یعنی θ به اندازه 2π افزایش یا کاهش می یابد.



شکل (۹-۱۶): نمودار انرژی پتانسیل $V(\theta)$ نسبت به θ برای یک آونگ. برای θ ی

کوچک، پتانسیل سهمی شکل و حرکت هماهنگ ساده است

از معادله (۷۵-۹) ، وقتی $\theta = \theta_0$ ، $\theta = 0$ ، انرژی کل عبارت است از

$$E = -mgl \cos \theta_0 \quad (۷۶-۹)$$

با قرار دادن این مقدار در معادله (۷۵-۹) و مرتب سازی ، خواهیم داشت

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \int_0^t dt \quad (۷۷-۹)$$

با فرض کوچک بودن θ و با استفاده از $\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ ، بعد از مرتب سازی ، همان نتیجه ای را به دست می آوریم که برای نوسانات کوچک به دست آمد . اما می توانیم بدون محدودیت در دامنه ، به حل معادله (۷۷-۹) پردازیم . برای به دست آوردن یک جواب درست ، باید معادله (۷۷-۹) را به یک شکل ویژه انتگرال بیضوی تبدیل کنیم . با استفاده از اتحاد $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ می نویسم

$$\cos \theta - \cos \theta_0 = 2 \left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

معادله (۷۷-۹) می شود -

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}} = 2\sqrt{\frac{g}{l}} \int_0^t dt \quad (۷۸-۹)$$

که θ بین $\pm \theta_0$ تغییر می کند . اکنون با قرار دادن

$$\sin \phi = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)} = \frac{\sin(\theta/2)}{K} \quad (۷۹-۹)$$

که در آن

$$K = \sin \frac{\theta_0}{2} \quad (۸۰-۹)$$

متغیر را تغییر دهیم . وقتی آونگ روی یک دایره نوسان می کند θ بین $-\theta_0$ و $+\theta_0$ تغییر می کند ، در نتیجه ϕ بین $-\pi$ و $+\pi$ تغییر می کند ، یعنی ϕ برای هر دور از 0 تا 2π را در می نوردد . با استفاده از معادلات (۷۹-۹) و (۸۰-۹) ، معادله (۷۸-۹) به شکل زیر در می آید

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \phi}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \int dt \quad (۸۱-۹)$$

از این معادله روی یک دوره ، یعنی ، وقتی ϕ از 0 تا 2π و t از 0 تا T تغییر می کند ، انتگرال می گیریم . به این ترتیب

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \phi}} = \sqrt{\frac{g}{l}} T \quad (۸۲-۹)$$

این انتگرال ، انتگرال بیضوی از نوع اول است ، و مقدار آن می تواند از جداول متعارف به دست آید . با این وجود ، بسط انتگرالده و سپس انتگرال گیری ، گویاتر خواهد بود ؛ یعنی ،

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{2\pi} (1 + \frac{1}{2} K^2 \sin^2 \phi + \dots) d\phi \quad (۸۳-۹)$$

$$= \sqrt{\frac{l}{g}} \left(2\pi + \frac{2\pi}{4} K^2 + \dots \right)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right) \quad (۸۴-۹)$$

که به وضوح بیان می دارد که وقتی دامنه θ_0 نوسانات بزرگ می شود ، زمان نوسان اندکی بزرگتر از مورد نوسانات کوچک می شود . حتی برای نوسانات با دامنه کوچک ، عبارت $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ می تواند با فرض

$$\theta_0 \ll 1, \quad \sin^2(\theta_0/2) \approx \frac{\theta_0^2}{4}$$

اصلاح شود . در نتیجه برای نوسانات کوچک ، معادله (۸۴-۹) به شکل

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \dots \right) \quad (۸۵-۹)$$

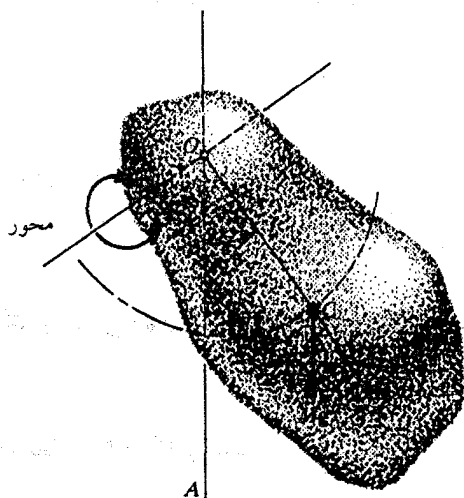
در می آید که به علت حضور جمله دوم عبارت درست تری است . عبارت (۸۵-۹) را می توان با اندازه گیری زمان تناوبهای دو آونگ با یک طول ولی با دامنه نوسان متفاوت ، بطور تجربی تحقیق کرد .

۹-۶ آونگ فیزیکی

یک جسم صلب آویزان که می تواند در اثر نیروی وزنش آزادانه حول یک محور چرخش افقی ثابت نوسان کند آونگ فیزیکی یا آونگ مرکب نامیده می شود . این جسم صلب می تواند تا وقتی که محور افقی از مرکز جرم آن نگذشته باشد هر شکلی داشته باشد . همان طور که

در شکل (۹-۱۷) نشان داده شده است ، آونگ روی قوسی از یک دایره حول محور چرخش افقی که از نقطه O گذشته است نوسان می کند ؛ نقطه O نقطه آویز آونگ است . نقطه C مرکز جرم آونگ فیزیکی است . فاصله بین O و C را با l نمایش می دهیم . موقعیت آونگ به وسیله زاویه θ بین خط OC و خط قائم OA مشخص می شود . گشتاور τ_0 حول محور چرخش مار بر O که به وسیله نیروی Mg وارد بر نقطه C ایجاد شده است عبارت است از

$$\tau_0 = -Mgl \sin \theta \quad (۹-۸۶)$$



شکل (۹-۱۷) : آونگ فیزیکی

اگر I گشتاور لختی جسم حول محور چرخش مار بر O باشد ، معادله حرکت

$$\tau_0 = I\ddot{\theta}$$

به شکل

$$-Mgl \sin \theta = I\ddot{\theta}$$

یا

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgl}{I} \sin \theta = 0 \quad (۹-۸۷)$$

در می آید . یک بار دیگر ، مانند مورد آونگ ساده برای نوسانات کوچک ، فرض می کنیم

$\sin \theta \equiv \theta$ ، در نتیجه

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgl}{I} \theta \approx 0 \quad (۸۸-۹)$$

این معادله ، معادلهٔ نوسانگر هماهنگ ساده است و جواب آن به صورت

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (۸۹-۹)$$

است که دامنهٔ θ_0 و زاویهٔ فاز ϕ دو ثابت اختیاری اند که باید از شرایط اولیه تعیین شوند . بسامد زاویه‌ای ω عبارت است از

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgl}{I}} \quad (۹۰-۹)$$

و زمان تناوب T و فرکانس f برابرند با

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgl}} \quad (۹۱-۹)$$

اگر k شعاع چرخش برای گشتاور لختی حول محور چرخش ماربر O باشد ، داریم

$$I = Mk^2 \quad (۹۲-۹)$$

قرار دادن معادلهٔ (۹۲-۹) در معادلهٔ (۹۱-۹) می‌دهد

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k^2}{gl}} \quad (۹۳-۹)$$

که بیان می‌دارد که یک آونگ ساده به طول $\frac{k^2}{l}$ دارای همان زمان تناوبی است که یک آونگ فیزیکی ، معادلهٔ (۹۱-۹) ، دارد .

گشتاور لختی جسم صلب حول محور ماربر مرکز جرم C جسم و موازی با محور ماربر O را I_c ، و شعاع چرخش متناظر آن را k_c بگیریم .

$$I_c = Mk_c^2 \quad (۹۴-۹ الف)$$

با استفاده از قضیهٔ محورهای موازی ، رابطهٔ زیر را بین I و I_c به دست می‌آوریم

$$I = I_c + MI^2$$

$$Mk^2 = Mk_c^2 + MI^2$$

(۹-۴۹ ب)

$$k^2 = k_c^2 + l^2$$

به این ترتیب زمان تناوب (۹-۹۳) می تواند به صورت زیر نوشته شود

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k_c^2 + l^2}{gl}} \quad (۹-۹۵)$$

اکنون محور چرخش این آونگ فیزیکی را به یک موقعیت دیگر O' به فاصله l' از مرکز جرم C ، برابر شکل (۹-۱۷)، تغییر می دهیم، زمان تناوب نوسانات حول این محور چرخش جدید عبارت است از

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{k_c^2 + l'^2}{gl'}} \quad (۹-۹۶)$$

به علاوه، فرض کنیم O' و l' طوری انتخاب شده اند که زمان تناوبهای T و T' با هم برابرند؛ یعنی،

$$T = T' \quad (۹-۹۷)$$

$$\frac{k_c^2 + l^2}{l} = \frac{k_c^2 + l'^2}{l'}$$

که ساده می شود به

$$k_c^2 = ll' \quad (۹-۹۸)$$

نقطه O' که با این رابطه به نقطه O مربوط می شود مرکز نوسان برای نقطه O نامیده می شود. به همین نحو، نقطه O نیز مرکز نوسان برای نقطه O' است.

قرار دادن معادله (۹-۹۸) در معادله (۹-۹۵) یا (۹-۹۶) می دهد

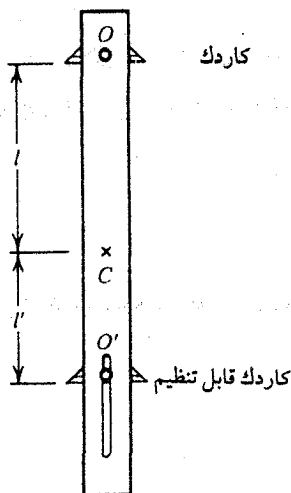
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l+l'}{g}} \quad (۹-۹۹)$$

یا

$$g = 4\pi^2 \frac{l+l'}{T^2} \quad (۹-۱۰۰)$$

بنابراین، اگر فاصله بین O و O' را بدانیم، یعنی اگر $l+l'$ را بدانیم و زمان تناوب T را اندازه بگیریم، مقدار g می تواند، بدون دانستن مکان مرکز جرم، دقیقاً اندازه گیری شود. هائری کاتر از این روش برای تعیین دقیق g استفاده کرد. آونگ کاتر، شکل (۹-۱۸)،

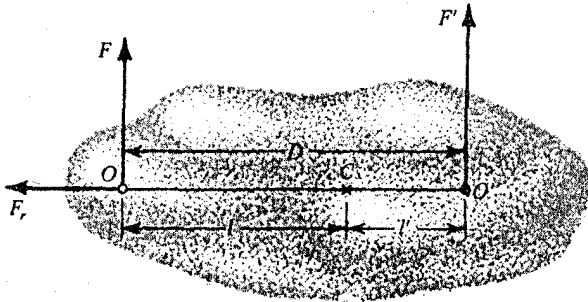
دو کاردک دارد. آونگ می تواند از هر کدام از این کاردکها آویزان شود. موقعیت کاردکها را می توان طوری تنظیم کرد که دو زمان تناوب برابر باشند. وقتی این کار انجام شد، $l + l'$ دقیقاً اندازه گیری می شود، و با دانستن T ، مقدار g از معادله (۹-۱۰۰) محاسبه می شود.



شکل (۹-۱۸): آونگ کاتر

۹-۷ مرکز ضربه

آونگهای فیزیکی گوناگون کاربردهای روزانه متنوعی دارند که اکنون به بحث در آنها می پردازیم. جسمی همانند آنچه که در شکل (۹-۱۹) نمایش داده شده است و آزاد است که حول یک محور ماربر O بچرخد، در نظر می گیریم. به نقطه O' در فاصله D از محور چرخش ماربر O ضربه ای وارد کنیم. ضربه در امتداد عمود بر خط OCO' ، که مرکز جرم جسم است، وارد می شود. نیروهای وارد بر جسم در مدت برخورد عبارتند از نیروی F' در نقطه برخورد و نیروی دیگر F که برای ثابت نگه داشتن جسم در مدت برخورد به جسم وارد می شود. اگر جسم با سرعت زاویه ای ω شروع به چرخش کند، یک نیروی شعاعی F_r در نقطه O در امتداد خط $O'CO$ نیروی جذب به مرکز لازم را تأمین می کند. می خواهیم شرطی پیدا کنیم که نیروی F صفر یا کمینه باشد. این شرط با کاربرد قوانین پایستگی تکانه خطی و تکانه زاویه ای به دست می آید.



شکل (۹-۱۹) : موقعیت‌های نسبی مرکز نوسان O ، مرکز ضربه O' ، و مرکز جرم C یک جسم صلب

تکانه خطی مرکز جرم و تکانه زاویه‌ای حول محور چرخش O را در نظر بگیریم. بنابراین تعریف تکانه زاویه‌ای L ، تغییرات L عبارت است از

$$dL = \tau dt$$

$$L_f - L_i = \int_{t_i}^{t_f} \tau dt \quad (9-101)$$

تکانه زاویه‌ای اولیه‌ای L_i جسم صفر است و تکانه زاویه‌ای نهایی L_f آن $I\omega$ است، که I گشتاور لختی حول محور چرخش ماربر O است. گشتاور نیروی τ حول نقطه O عبارت است از $F'D$. بنابراین

$$I\omega = D \int F' dt \quad (9-102)$$

که انتگرال گیری روی بازه زمانی برخورد انجام گرفته است. حرکت مرکز جرم به وسیله

$$\mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i = \int \mathbf{F} dt \quad (9-103)$$

توصیف می‌شود که \mathbf{P}_i و \mathbf{P}_f تکانه‌های اولیه و نهایی و \mathbf{F} نیروی کل وارد بر جسم است. فرض شده است که جسم در آغاز در حال سکون بوده است. تغییر تکانه خطی در امتداد Y برابر است با $Mv_{cy} = Ml\omega$ که l فاصله مرکز جرم از O و v_{cy} سرعت مرکز جرم در امتداد Y ، امتداد نیروهای F و F' است. مؤلفه Y نیروی کل \mathbf{F} عبارت است از $F + F'$. به این ترتیب معادله (۹-۱۰۳) شکل زیر را به خود می‌گیرد

$$Ml\omega = \int (F + F') dt \quad (9-104)$$

چون

$$J = \int F dt, \quad J' = \int F' dt, \quad \omega = \dot{\theta} \quad (105-9)$$

که J و J' ضربه‌های حاصل از F و F' است؛ می‌توانیم معادله (۹-۱۰۴) را به صورت زیر بنویسیم

$$Ml\dot{\theta} = J + J' \quad (106-9)$$

آهنگ تغییرات تکانه زاویه‌ای، از معادله (۹-۱۰۲)، عبارت است از

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} I\omega = DF' \quad (107-9)$$

یا، با استفاده از (۹-۱۰۵)،

$$I\dot{\theta} = DJ' \quad (108-9)$$

حذف θ بین معادلات (۹-۱۰۸) و (۹-۱۰۶) می‌دهد

$$\frac{MID}{I} = 1 + \frac{J}{J'} \quad (109-9)$$

گشتاور لختی I حول محور O عبارت است از

$$I = Mk_0^2 \quad (110-9)$$

که k_0 شعاع چرخش گشتاور لختی حول محور O است. با قرار دادن در معادله (۹-۱۰۹) خواهیم داشت

$$ID = k_0^2 \left(1 + \frac{J}{J'} \right) \quad (111-9)$$

اگر $J = 0$ ، یعنی اگر نیرویی به نقطه O وارد نشود، معادله (۹-۱۱۱) می‌دهد

$$ID = k_0^2 \quad (112-9)$$

با استفاده از قضیه محورها موازی

$$k_0^2 = k_c^2 + l^2$$

$$D = I + I'$$

در معادله (۹-۱۱۲) ، نتیجه می شود

$$(۹-۱۱۳)$$

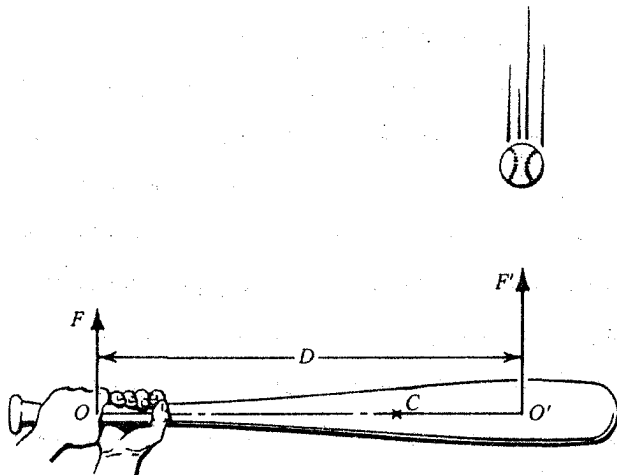
$$H' = k_c^2$$

بنابراین ، اگر این رابطه برقرار باشد ، وقتی به O' ضربه ای وارد شود ، در O ضربه ای احساس نخواهد شد . این نقطه O' مرکز ضربه نسبت به نقطه O نامیده می شود . یعنی ، نقطه اعمال یک ضربه که برای آن واکنشی در محور چرخش ایجاد نشود به مرکز ضربه موسوم است . رابطه (۹-۱۱۳) درست با رابطه ای که برای یک آونگ فیزیکی به وسیله معادله (۹-۹۸) داده شده بود یکسان است . بنابراین مرکز نوسان O و مرکز ضربه O' یکسانند ، یعنی نقاط O و O' تعویض پذیرند . اکنون دو کاربرد مهم هر روزه را مطرح کنیم . (۱) یک بازیکن بیسبال توپ را با چوب مخصوص بیسبال می زند . بازیکن باید سعی کند که ضربه را به مرکز ضربه در O' نسبت به دستش در O وارد کند . این کار ضربه وارد به دست را به حداقل می رساند ، یعنی ، از واکنش وارد به دست بازیکن جلوگیری می کند (شکل (۹-۲۰ الف) . (۲) حفاظها برای جلوگیری از آسیب دیدن و شکسته شدن لولاها به کار می روند ، و باید طوری نصب شوند که ، همان طور که در شکل (۹-۲۰ ب) نشان داده شده است ، به مرکز ضربه O' در فاصله D از لولاها ، که روی محور چرخش در قرار دارند ، برخورد کنند .

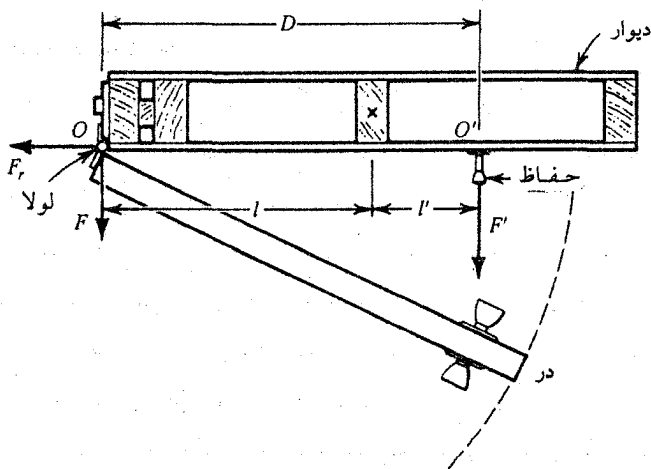
۹-۸ محیطهای تغییر شکل پذیر

در بیشتر جامدات ، اتمها و مولکولها در نظمی معین مرتب شده اند . درجه استحکام این اتمها و مولکولها در اطراف موقعیتهای ترازمندی شان بستگی به شدت نسبی نیروهای کوتاه برد الکتریکی بین آنها دارد . با این که سیستمهایی مانند تارهای مرتعش از تعداد زیادی ذرات گسسته تشکیل شده اند ، بهتر است که به جای یک سیستم ذرات گسسته یک توزیع پیوسته ماده جاگزین کنیم . تا این جا چنین محیطهای پیوسته ای را به عنوان جسم صلب در نظر می گرفتیم . در واقع ، ماده تغییر شکل پذیر است . وقتی تحت تأثیر نیروهای داخلی یا خارجی قرار گیرد ، در ابعاد و شکل آن تغییراتی صورت می گیرد . لذا ، در این بخش ، با ماده ای سروکار خواهیم داشت که فرض می کنیم هم پیوسته و هم تغییر شکل پذیر ، یعنی ، یک پیوستار تغییر شکل پذیر ، باشد . وقتی نیروهای خارجی به چنین سیستمی وارد شوند ، به علت جابه جایی اتمها از مکانهای ترازمندی شان نوعی واپیچیدگی ایجاد می شود ، و گفته می شود که جسم در حالت تنش است . بعد از این که نیروی خارجی برداشته شد ، جسم به وضع

ترازندی بر می گردد ، به شرطی که نیروی اعمال شده خیلی بزرگ نبوده باشد . قابلیت جسم به برگشت به شکل اولیه اش کشسانی نامیده می شود . برای رسیدن به تعریف کمی از کشسانی ، باید تعریفهای تنش و تغییر بعد را خوب بدانیم .



(الف)



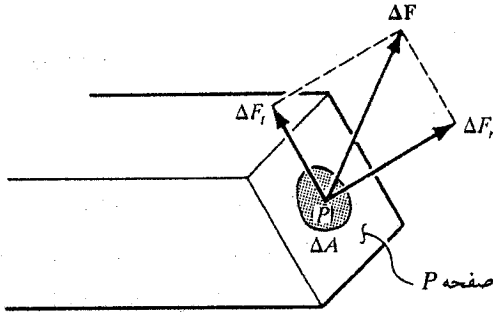
(ب)

شکل (۹-۲۰) : موقعیتهای نسبی O ، O' ، و C در مورد (الف) بازیکنی که توپ را

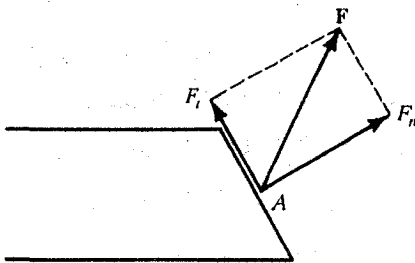
می زند ، و (ب) یک دری که به حفاظ می خورد

جسمی را در نظر بگیریم که به یک سطح A آن نیروهای خارجی با برآیند F ، که نه عمود بر سطح است و نه مماس بر آن ، وارد می شود . تنش میانگین S وارد به سطح A به صورت نیروی وارد به واحد سطح تعریف می شود ،

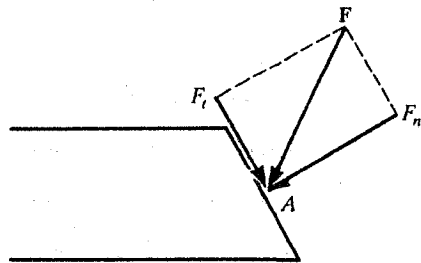
$$\bar{S} = \frac{F}{A} \quad (۱۱۴-۹)$$



(الف)



(ب)



(پ)

شکل (۹-۲۱) : (الف) نیروی ΔF وارد به سطح ΔA . (ب) نیروی F يك تنش کششی و يك تنش برشی ایجاد می کند.

(ب) نیروی F يك تنش تراکمی و يك تنش برشی ایجاد می کند

اکنون یک عنصر سطح ΔA ، آن طور که در شکل (۹-۲۱ الف) نشان داده شده است ، که نیروی ΔF به آن وارد می شود در نظر بگیریم . به این ترتیب تنش در نقطه P به صورت زیر تعریف می شود

$$S = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \quad (۱۱۵-۹)$$

بزرگی S بستگی به جهت گیری صفحه P ، که ΔA جزئی از آن است، دارد. می توانیم تنش S را با تجزیه ΔF به مؤلفه های قائم ΔF_n و مماسی ΔF_t ، که به صفحه P ، به ترتیب، قائم و مماسند، تجزیه کنیم. تنش قائم σ به صورت

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A} = \frac{dF_n}{dA} \quad (۱۱۶-۹)$$

تعریف می شود، در حالی که تنش برشی به صورت

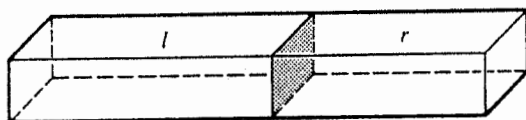
$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_t}{\Delta A} = \frac{dF_t}{dA} \quad (۱۱۷-۹)$$

تعریف می شود. اگر تنش عمودی کششی باشد، کشش نامیده می شود، و اگر تنش عمودی تراکمی باشد تراکم یا فشار نامیده می شود، و تنش مماسی تنش برشی نامیده می شود. بنابراین، نیروی عمودی در شکل های (۹-۲۱ الف) و (۹-۲۱ ب) به کشش، و در شکل (۹-۲۱ پ)، آن طور که نشان داده شده است، به تراکم منجر می شود. مؤلفه های مماسی در هر سه مورد به تنش برشی می انجامند. بزرگی کشش و تراکم در قسمتهای (ب) و (پ) $\frac{F_n}{A}$ ، و بزرگی تنش برشی $\frac{F_t}{A}$ است.

تنشها می توانند از نیروهای داخلی نیز نتیجه شوند. یک تیر جامد، یک میله، یا یک سیم، آن طور که در شکل (۹-۲۲ الف) نشان داده شده است، در نظر بگیریم. یک مقطع فرضی تیر را در نظر بگیریم و آن را با P نمایش دهیم. قسمت سمت چپ نیرویی به قسمت سمت راست و، طبق قانون سوم نیوتن، قسمت سمت راست نیز نیرویی به قسمت سمت چپ وارد می کند. این نیروها می توانند به تنشهایی منجر شوند، که ممکن است کششی، تراکمی یا برشی باشند، مطابق شکل های (۹-۲۲ الف)، (ب)، (پ)، و (ت).

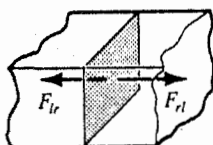
نتیجه تنش ایجاد و پیچیدگی یا تغییر در ابعاد و شکل جسم است. تغییر نسبی در ابعاد یا شکل جسم وقتی تحت تأثیر تنش قرار دارد با کمیتی به نام کرنش (استرین) بیان می شود. ما بحث خود را به سه نوع تغییر بعد محدود می کنیم (۱) تغییر در طول، (۲) تغییر در شکل، و (۳) تغییر در حجم.

یک سیم یا یک میله به طول L_0 و مساحت مقطع A که تحت تأثیر نیروی کششی F است در نظر بگیریم. نیروی اعمال شده طول را افزایش می دهد. اگر طول نهایی L باشد، تغییر طول عبارت است از $\Delta L = L - L_0$. تنش عمودی یا کششی را به صورت

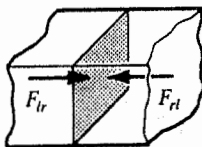


صفحه P

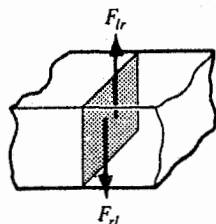
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

شکل (۹-۲۲) : نیروهای داخلی وارد به صفحه P در قسمت (الف) باعث ایجاد ،

(ب) کشش ، (پ) تراکم ، و (ت) تنشهای برشی می‌شوند

$$\sigma = \frac{F_n}{A} \quad (۹-۱۱۸)$$

تعریف می‌کنیم و تغییر نسبی طول را با ϵ ، که کرنش طولی یا کششی نامیده می‌شود ، به وسیله رابطه زیر داده می‌شود

$$\epsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (۹-۱۱۹)$$

بتجربه محقق شده است که نسبت تنش به کرنش برای یک ماده معین مقداری است

ثابت . این نسبت مدول کشسانی نامیده می‌شود . نسبت تنش طولی به کرنش طولی مدول

یانگ ، γ ، نامیده می‌شود ،

$$Y = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{F_n/A}{\Delta L/L_0} \quad (۹-۱۲۰)$$

چون کرنش یک کمیت بدون بُعد است ، یکاهای مدول یانگ همان یکاهای تنش ، یعنی ،

$\frac{N}{m^2}$ ، و غیره است . [کرنش عرضی (تغییر طول در جهت عمود بر نیرو) کوچک است ،

اما به اختصار مورد بررسی قرار خواهد گرفت] .

اگر ماده تشکیل دهنده سیم از قانون هوک پیروی کند ، تغییر طول متناسب با نیروی

اعمال شده است

$$F_n = k \Delta L \quad (۱۲۱-۹)$$

که k سختی یا ثابت فنری سیم است. می‌توانیم معادله (۹-۱۲۰) را به صورت

$$F_n = \frac{YA}{L_0} \Delta L \quad (۱۲۲-۹)$$

بنویسیم. از مقایسه این دو معادله خواهیم داشت

$$k = \frac{YA}{L_0} \quad (۱۲۳-۹)$$

چون برای یک ماده معین Y ، A و L_0 ثابت است، k نیز، در قانون هوک [معادله (۹-۱۲۱)]، ثابت است.

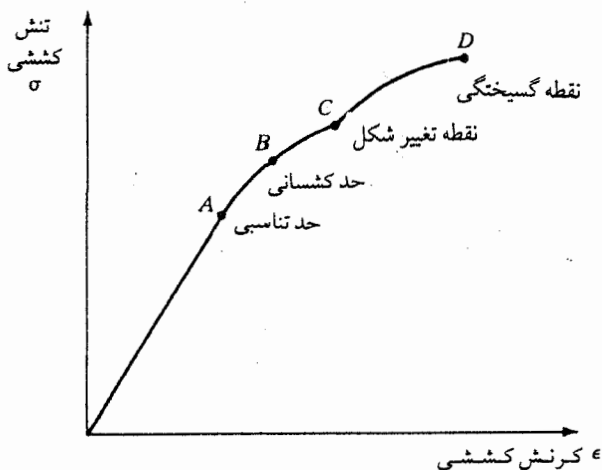
به این ترتیب، با افزایش نیرو طول افزایش می‌یابد. وقتی نیرو برداشته شود، سیم به طول اولیه‌اش برمی‌گردد. نمودار تنش کششی σ نسبت به کرنش کششی ϵ در شکل (۹-۲۳) نمایش داده شده است. رابطه تناسبی بین σ و ϵ تنها وقتی که تنش کمتر از یک مقدار بیشینه‌ای است، بخوبی برقرار است. همان‌طور که در شکل (۹-۲۳) نشان داده شده است، این مقدار حدی در نقطه A ، حد تناسبی یا نقطه تسلیم، حاصل می‌شود. اگر مقدار تنش اعمال شده بین A و B باشد، تناسب وجود ندارد، اما وقتی تنش برداشته شد جسم به مقدار اولیه‌اش برمی‌گردد. اگر تنش اعمال شده بیش از C باشد، در جسم تغییرشکل دائمی رخ می‌دهد و سرانجام، اگر تنش اعمال شده زیاد باشد، از هم خواهد گسست.

در نمودار شکل (۹-۲۳) فرض شده است که مساحت A ثابت می‌ماند و برابر با مساحت اولیه قبل از اعمال هر نیرویی است؛ اما در وضعیت‌های عملی تراکم جانبی خواهیم داشت. به این ترتیب تنش نشانگر نیرو خواهد بود و نه نسبت نیرو به مساحت واقعی. در نتیجه می‌توانیم کرنش واقعی را به صورت زیر تعریف کنیم. فرض می‌کنیم dL مقدار بی‌نهایت کوچک تغییر طول وقتی که طول لحظه‌ای L است باشد. اگر L_0 طول اولیه و L_f طول نهایی باشد، کرنش واقعی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\epsilon_{\text{true}} = \int_{L_0}^{L_f} \frac{dL}{L} = \ln \frac{L_f}{L_0} \quad (۱۲۴-۹)$$

برای تغییر طولهای کوچک، اگر $\ln \frac{L_f}{L_0}$ را بسط دهیم و از جمله‌های مرتبه‌های بالا چشم‌پوشی کنیم، ϵ را به صورتی که در معادله (۹-۱۱۹) داده شده است، یعنی $\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$

به دست می آوریم .



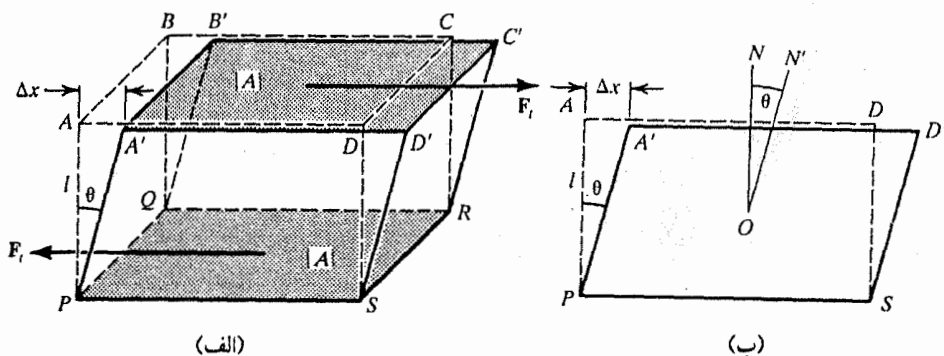
شکل (۹-۲۳) : ویژگیهای کشسانی یک جامد نمونه‌ای تحت تأثیر تنش عمودی

اکنون مدول سختی حاصل از اعمال تنش برشی را در نظر بگیریم . وقتی یک جفت نیروی مساوی و مختلف‌الجهت که در روی یک خط عمل نمی‌کنند ، آن‌طور که در شکل (۹-۲۴ الف) نشان داده شده است ، اعمال شود ، تنش برشی حاصل تغییری در شکل جسم ایجاد می‌کند (اما تغییر طول وجود ندارد) . کرنش ایجاد شده کرنش برشی نامیده می‌شود . به نظر می‌آید که ماده از لایه‌هایی تشکیل شده است ، و هنگامی که تنش اعمال می‌شود ، لایه‌ها سعی دارند روی یکدیگر بلغزند . همان‌طور که در شکل (۹-۲۴ الف) نشان داده شده است ، لایه $ABCD$ اثر یک تنش برشی به $A'B'C'D'$ آمده است ، در حالی که لایه $PQRS$ جابه‌جا نشده است . تنش برشی τ ، آن‌طور که در معادله (۹-۱۱۷) تعریف شده است ، عبارت است از

$$\tau = \frac{F_t}{A} \quad (۹-۱۲۵)$$

کرنش برشی γ به صورت نسبت جابه‌جایی Δx به طول l ، شکل (۹-۲۴) ، تعریف می‌شود . برای مقادیر کوچک Δx ، این نسبت برابر است با تانژانت زاویه θ . یعنی کرنش برشی عبارت است از

$$\gamma = \frac{\Delta x}{l} \approx \tan \theta \quad (۹-۱۲۶)$$



شکل (۹-۲۴) : (الف) یک جسم تأثیر یک جفت نیروی مماسی است ، که به تنش برشی منجر می شود ، (ب) نمای جانبی قسمت (الف)

به این ترتیب مدول برشی ، یا مدول سختی ، یا مدول پیچشی ، η ، به صورت زیر تعریف می شود

$$\eta = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{F_t/A}{\tan \theta} \quad (9-127)$$

در مورد سیالات ، نیروها باید بطور عمودی به سطح وارد شوند . سیالی با حجم V در نظر بگیریم که تحت تأثیر نیروی عمود بر سطح A ، که به تغییر حجم ΔV منجر شده است ، قرار دارد . نیروی عمودی وارد به یک سیال فشار P نامیده می شود . به این ترتیب تنش و کرنش با روابط زیر داده می شوند

$$\text{تنش حجمی} = \sigma = \frac{F_n}{A} = \Delta P \quad (9-128)$$

$$\text{کرنش حجمی} = \frac{\Delta V}{V} \quad (9-129)$$

کشسانی حجمی یا مدول حجمی ، B ، که به صورت نسبت تنش حجمی به کرنش حجمی تعریف شده است ، عبارت است از

$$B = \frac{\Delta P}{-\Delta V/V} = -V \frac{\Delta P}{\Delta V} \quad (9-130)$$

علامت منفی نشانگر این است که وقتی فشار افزایش می یابد ، حجم کاهش می یابد . عکس مدول حجمی تراکم پذیری β ($\beta = \frac{1}{B}$) نامیده می شود .

با توجه به این که ، تنش عمودی $\Delta P = \sigma$ ، می توانیم معادله (۹-۱۳۰) را به صورت

زیر بنویسیم

$$\sigma = -B \frac{\Delta V}{V} \quad (۹-۱۳۱)$$

وقتی تنش در یک جهت اعمال می شود ، به یک کرنش طولی و همچنین یک کرنش عرضی (جانبی) می انجامد . در مورد کشش ساده ، نسبت کرنش جانبی ϵ_i به کرنش طولی ϵ_l نسبت پواسن ، ν ، نامیده می شود .

$$\nu = \frac{\epsilon_i}{\epsilon_l} \quad (۹-۱۳۲)$$

ν برای شیشه کوچک است (≈ 0.25) ، در حالی که برای لاستیک 0.75 است . بین B ، Y ، و ν رابطه ساده ای وجود دارد که ما بدون اثبات آن را ذکر می کنیم

$$B = \frac{Y}{3(1-2\nu)} \quad (۹-۱۳۳)$$

توجه کنیم که این رابطه فرض می کند که ماده یکنواخت ، یعنی ، همگن و همسانگرد است .

۹-۹ ترازمندی اجسام صلب

برای شروع ، شرایط ترازمندی را مورد بحث قرار می دهیم . این شرایط را در بررسی ترازمندی ریسمانهای انعطاف پذیر و کابلها و سپس ترازمندی تیرهای جامد به کار خواهیم گرفت .

جسمی به جرم M در نظر بگیریم که مرکز جرم آن در فاصله R از یک نقطه معین O قرار دارد و نیروهای F_i به آن وارد می شود ، و تکانه زاویه ای آن نسبت به نقطه O ، L_0 است . معادلاتی که حرکت جسم صلب را توصیف می کنند عبارتند از

$$\sum_i F_i = M\ddot{R} \quad (۹-۱۳۴)$$

$$\sum_i \tau_{i0} = \frac{dL_0}{dt} = I\ddot{\theta} \quad (۹-۱۳۵)$$

که τ_{i0} ها گشتاورهای نیروها نسبت به نقطه O ، I گشتاور لختی ، و θ شتاب زاویه ای است . وقتی گشتاورهای نیروها نسبت به نقطه O معلوم باشند ، گشتاورهای این نیروها نسبت

به هر نقطه دیگر O' را می توان از رابطه زیر محاسبه کرد

$$\sum_i \tau_{iO'} = \sum_i \tau_{iO} + (\mathbf{r}_O - \mathbf{r}_{O'}) \times \sum_i \mathbf{F}_i \quad (۱۳۶-۹)$$

که \mathbf{r}_O و $\mathbf{r}_{O'}$ بردارهای فاصله نقاط O و O' از مبدأ هستند. معادله (۹-۱۳۶) بیان می دارد که گشتاور کل نسبت به O' برابر با مجموع دو جمله است: گشتاور کل نسبت به O و گشتاور کل نسبت به O' با این فرض که نیروی کل به نقطه O وارد شده است. اثبات این مطلب ساده و سراسر است. فرض کنید \mathbf{F}_i نیروی وارد در نقطه i که در فاصله \mathbf{r}_i از مبدأ قرار دارد باشد. بنا به تعریف، گشتاور نسبت به O' عبارت است از

$$\begin{aligned} \sum_i \tau_{iO'} &= \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{O'}) \times \mathbf{F}_i \\ &= \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_O + \mathbf{r}_O - \mathbf{r}_{O'}) \times \mathbf{F}_i \\ &= \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_O) \times \mathbf{F}_i + \sum_i (\mathbf{r}_O - \mathbf{r}_{O'}) \times \mathbf{F}_i \\ &= \sum_i \tau_{iO} + (\mathbf{r}_O - \mathbf{r}_{O'}) \times \sum_i \mathbf{F}_i \end{aligned}$$

برای این که یک جسم صلب در ترازمندی انتقالی، یعنی، ساکن یا در حرکت با سرعت یکنواخت باشد، باید حاصل جمع نیروها صفر باشد. برای این که جسم در ترازمندی دورانی، یعنی، ساکن یا در حرکت دورانی با سرعت یکنواخت باشد، باید مجموع گشتاورهای خارجی صفر باشد. بنابراین، از معادلات (۹-۱۳۴) و (۹-۱۳۵)، خواهیم داشت

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0 \quad (۱۳۷-۹)$$

$$\sum_i \tau_{iO} = 0 \quad (۱۳۸-۹)$$

توجه کنیم که، اگر مجموع گشتاورها حول یک نقطه صفر باشد، از معادله (۹-۱۳۶) دیده می شود که حول هر نقطه دیگر صفر خواهد بود.

چون مشاهده می کنیم که حرکت یک جسم صلب به وسیله نیروی کل و گشتاور کل تعیین می شود، می توانیم بیان زیر را، که در بحث ترازمندی اجسام صلب مفید خواهیم یافت، ارائه کنیم. دو سیستم نیروی وارد به یک جسم صلب هم ارزند اگر یک برآیند و

یک گشتاور کل حول هر نقطه داشته باشند .

برحسب تعریف ، یک زوج نیرو مجموعه ای از نیروهاست که جمع آنها صفر باشد ، یعنی

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0 \quad (۱۳۹-۹)$$

گشتاور کل حاصل از یک زوج نیرو حول تمام نقاط یکی است و برابر است با

$$\sum_i \tau_{iO'} = \sum_i \tau_{iO} = \sum_i \mathbf{r}_{iO} \times \mathbf{F}_i \quad (۱۴۰-۹)$$

به این ترتیب یک زوج نیرو می تواند به وسیله یک بردار ، که گشتاور کل است ، مشخص شود . این نکته ما را به بیان زیر هدایت می کند : تمام زوجهایی که یک گشتاور کل داشته باشد هم ارزند .

از این بحث ، می توانیم نتیجه بسیار مفید زیر را ، که به قضیه جسم صلب موسوم است ، بگیریم . هر مجموعه نیروهای وارد به یک جسم صلب ، می تواند به یک تک نیرو ، با نقطه اثر دلخواه ، و یک زوج نیرو تقلیل یابد .

بسته به نوع ترازمندی ، نیروی برآیند و / یا گشتاور ممکن است صفر باشد .

۹-۱۰ ترازمندی کابلهای و ریسمانهای انعطاف پذیر

یک کابل یا طناب انعطاف پذیر کابل یا ریسمانی است که هیچ تنش تراکمی یا برشی را تحمل نمی کند ، اما می تواند تنش کششی را در امتداد مماس بر نخ در هر نقطه تحمل کند . کابلهای ، زنجیرها ، و نخهای سبکی که در بیشتر ساختارها به کار گرفته می شوند می توانند به عنوان ریسمانهای انعطاف پذیر ایده آل در نظر گرفته شوند . به علاوه ، فرض می کنیم که وزن کابل در مقایسه با بار خارجی وارد بر آن ناچیز است ، یا بار خارجی وجود ندارد و وزن کابل تنها بار آن است . می توانیم بحث خود را به دو قسمت تقسیم کنیم :

(۱) کابلهای با وزن قابل چشم پوشی ، و (۲) کابلهای با توزیع بار (یا نیروی) پیوسته در سراسر طول آنها .

کابل با بار متمرکز

یک کابل انعطاف پذیر ایده آل با وزن ناچیز در نظر بگیریم که بین دو نقطه P_1 و P_2 آویزان

است و یک نیروی خارجی F به نقطه P_3 ، آن طور که در شکل (۹-۲۵) نشان داده شده است ، وارد می شود . نیروی F کابل را کشیده شده نگاه می دارد . طول قطعه بین $P_3 P_1$ را با l_1 ، طول قطعه بین $P_3 P_2$ را با l_2 ، و فاصله بین نقاط P_2 و P_1 را با l_{12} نمایش می دهیم . تنشهای کششی در دو قطعه ریسمان را ، آن طور که نشان داده شده است ، T_1 و T_2 می گیریم . با به کارگیری قانون کسینوسها ، زاویه های α و β بر حسب l_1 ، l_2 ، و l_{12} با روابط زیر داده می شوند

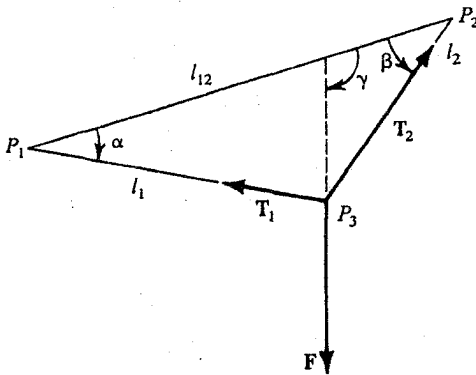
$$\cos \alpha = \frac{l_1^2 + l_{12}^2 - l_2^2}{2l_1 l_{12}} \quad \text{و} \quad \cos \beta = \frac{l_2^2 + l_{12}^2 - l_1^2}{2l_2 l_{12}} \quad (۹-۱۴۱)$$

فرض شده است که ریسمان کشیده نمی شود (تغییر طول نمی دهد) بطوری که مکان نقطه P_3 مستقل از نیروی F است . چون نقطه P_3 در حال ترازمندی است ، می توانیم بنویسیم

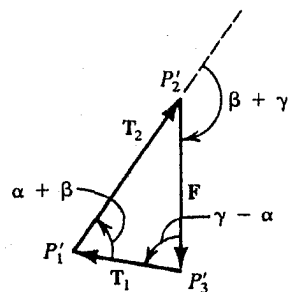
$$F + T_1 + T_2 = 0 \quad (۹-۱۴۲)$$

که همان رابطه مثلثی شکل (۹-۲۵ ب) است . با به کارگیری قانون سینوسها ، از شکل (۹-۲۵ ب) ، عبارتهایی برای T_1 و T_2 بر حسب F به دست می آوریم ، یعنی ،

$$T_1 = F \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{و} \quad T_2 = F \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (۹-۱۴۳)$$



(الف)



(ب)

شکل (۹-۲۵) : (الف) کابل انعطاف پذیر ایده آل تحت تأثیر یک نیروی خارجی F ،

(ب) F ، T_1 و T_2 یک مثلث بسته تشکیل می دهند

این معادلات نشان می دهند که می توانیم زاویه ها را از معادله (۹-۱۴۱) برحسب فاصله ها پیدا کنیم و سپس T_1 و T_2 را از معادله (۹-۱۴۳) محاسبه کنیم . اما این جواب درست نیست ، زیرا فرض کرده بودیم که ریسمان کشیده نمی شود ؛ در واقع تنش کششی طول قطعه های ریسمانها را تعیین می کند . بنابراین در محاسبه T_1 و T_2 باید این نکته را به حساب آوریم . این نیروها می توانند با روش تقریب متوالی یا روش واهلش ، که در زیر بحث می کنیم ، محاسبه شوند .

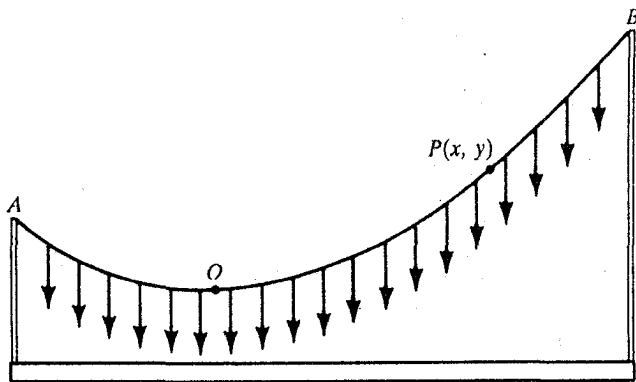
طبق قانون هوک ، طولهای کشیده نشده l_{10} و l_{20} در اثر تنشهای کششی به l_1 و l_2 ، با روابط زیر ، تبدیل می شوند

$$l_1 = l_{10}(1 + kT_1) \quad \text{و} \quad l_2 = l_{20}(1 + kT_2) \quad (۹-۱۴۴)$$

که k ثابت تناسب است . اکنون برای محاسبه کمیتهای متفاوت α ، β ، T_1 ، T_2 و روش تقریب متوالی را به کار می گیریم . برای نخستین تقریب ، فرض کنیم ریسمان کشیده نمی شود بطوری که $l_1 = l_{10}$ و $l_2 = l_{20}$. با استفاده از این مقادیر در معادلات (۹-۱۴۱) و (۹-۱۴۳) ، α ، β ، T_1 ، T_2 را حساب می کنیم . اکنون این مقادیر T_1 و T_2 را در معادله (۹-۱۴۴) می بریم و l_1 و l_2 جدیدی به دست می آوریم ، و این مقادیر l_1 و l_2 را در معادله (۹-۱۴۱) می بریم و مقادیر جدیدی برای α و β به دست می آوریم ، و این مقادیر جدید T_1 و T_2 را می توان برای به دست آوردن مقادیر باز هم بهتر l_1 و l_2 در معادله (۹-۱۴۴) بردو دوباره معادلات (۹-۱۴۱) و (۹-۱۴۳) را برای پیدا کردن مقادیر بهتر α ، β ، T_1 ، T_2 به کار گرفت . این روش را می توان بیشتر و بیشتر تکرار کرد تا مقادیر l_1 و l_2 ، α ، β ، T_1 ، T_2 به مقادیر درست نزدیک شوند . در بیشتر وضعیتها ، مقدار کشیدگی کوچک است ، و فقط چند تکرار اول به مقادیر درست منجر می شود . همان طور که قبلاً گفته شد ، این روش ، روش تقریب متوالی است .

کابلهای با توزیع بار

کابلهای سهمی وار . یک کابل AB که بار یکنواختی بطور افقی در آن توزیع شده است ، مانند آنچه که در شکل (۹-۲۶) نشان داده شده است ، در نظر بگیریم . بار به وسیله پیکانهای قائم و به طرف پایین نمایش داده شده است . فرض کنیم بار به صورت w بر واحد طول ، طول افقی ، باشد . O پایین ترین نقطه و $P(x, y)$ یک نقطه غیر مشخص کابل است .



شکل (۹-۲۶) : کابل AB باری را که بطور یکنواخت در امتداد افقی توزیع شده است تحمل می کند

اکنون ترازمندی قطعه OP ی کابل را ، برابر شکل (۹-۲۷ الف) ، که بطور افقی باردار شده است ، در نظر بگیریم . T_0 را تنش کششی در پایین ترین نقطه O که افقی است ، و T را تنش کششی در نقطه P که با افق زاویه θ می سازد ، بگیریم . مبدأ محورهای مختصات در O ، و XY صفحه قائم انتخاب شده است . W باری است که به قطعه OP ی کابل وارد می شود و برابر است با w . بنابراین ، برای ترازمندی ایستایی ، از شکل (۹-۲۷ ب) داریم

$$T + T_0 + W = 0 \quad (۹-۱۴۵)$$

یا

$$T \cos \theta = T_0 \quad (۹-۱۴۶)$$

$$T \sin \theta = W = wx \quad (۹-۱۴۷)$$

با حل آن برای T و θ ، خواهیم داشت

$$T = \sqrt{T_0^2 + w^2 x^2} \quad (۹-۱۴۸)$$

$$\tan \theta = \frac{w}{T_0} x \quad (۹-۱۴۹)$$

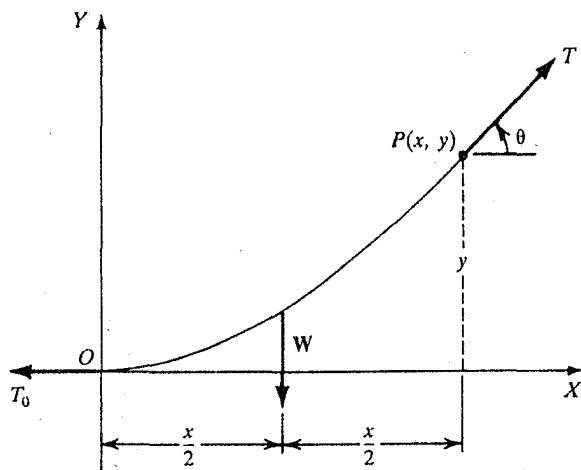
چون بار یکنواخت است ، خط اثر W در فاصله $\frac{x}{2}$ ، آن طور که در شکل (۹-۲۷ الف) نشان داده شده است ، قرار دارد . با گرفتن گشتاور نسبت به نقطه P ، داریم

$$W \frac{x}{2} = T_0 y \quad \text{یا} \quad wx \frac{x}{2} = T_0 y \quad (۱۵۰-۹)$$

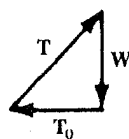
یعنی ،

$$y = \frac{w}{2T_0} x^2 \quad (۱۵۱-۹)$$

که معادله یک هذلولی است ؛ یعنی ، یک کابل تحت تأثیر باری که از لحاظ افقی یکنواخت توزیع شده است ، به شکل هذلولی در می آید . کابل پل معلق یک مثال مشخص از این نوع است .



(الف)



(ب)

شکل (۹-۲۷) : (الف) قطعه کوچک OP ی یک ریسمان با بار یکنواخت ، (ب) برای

ترازندی ایستایی ، T ، T_0 ، و W یک مثلث تشکیل می دهند

در شکل (۹-۲۶) ، اگر A و B در یک ارتفاع باشند ، فاصله افقی بین آنها دهانه نامیده می شود ، و فاصله قائم h پایین ترین نقطه O از A یا B ، اُفت نامیده می شود . با قرار دادن $y = h$ و $x = \frac{L}{2}$ در معادله (۹-۱۵۱) ، تنش کششی T_0 در پایین ترین نقطه عبارت است از

$$T_0 = \frac{wL^2}{8h} \quad (۱۵۲-۹)$$

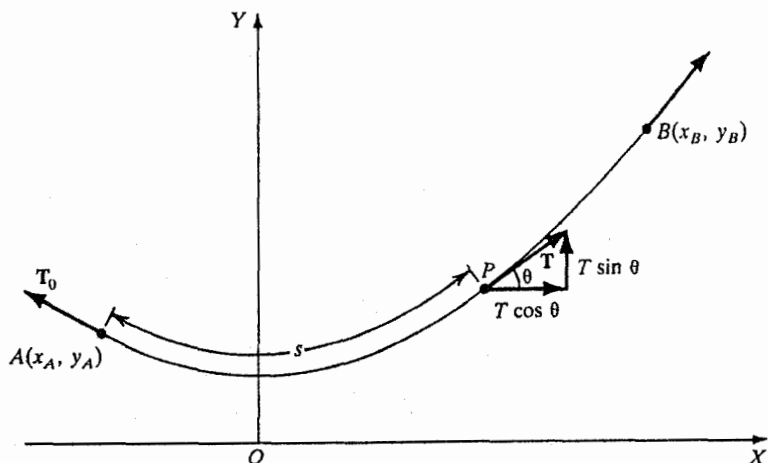
با به کارگیری مختصات نقطه A ، یعنی (x_A, y_A) ، و مختصات نقطه B ، یعنی (x_B, y_B)

در معادله (۹-۱۵۱)، می‌توانیم $L = x_B - x_A$ را حساب کنیم (رک مسأله ۹-۴۶).

کابلهای زنجیری

اینک کابلی در نظر می‌گیریم که بار بطور یکنواخت در سراسر طول آن (نه در امتداد فاصله افقی مانند کابلهای سهمی وار) توزیع شده است. یک مثال نمونه‌ای کابلی است که وزن خود را، آن طور که در شکل (۹-۲۸) نشان داده شده است، تحمل می‌کند. نقطه P را به فاصله s از نقطه $s=0$ ، که ثابت است، در نظر بگیریم. نیروی نگهدارنده در انتهای $s=0$ را با T_0 ، تنش کششی در نقطه P را با $T(s)$ ، و نیروی وارد بر واحد طول را با $w(s)$ نمایش دهیم [توجه کنیم که $w(s) \neq w(x)$]. $w ds$ نمایشگر نیروی وارد به قطعه کوچکی به طول ds است. بنابراین، برای قطعه کابل AP که در حال ترازمندی است، باید داشته باشیم

$$T_0 + T(s) + \int_0^s w(s) ds = 0 \quad (9-153)$$



شکل (۹-۲۸): یک کابل که بار بطور یکنواخت در طول آن (و نه در فاصله افقی آن) توزیع شده است

$T(s)$ را می‌توانیم با مشتق گرفتن از معادله (۹-۱۵۳)، یعنی

$$\frac{dT}{ds} = -w(s) \quad (9-154)$$

به دست آوریم . θ را زاویه ای که T با محور X می سازد (شکل (۹-۱۲۸) بگیریم . مؤلفه های قائم و افقی معادله (۹-۱۵۴) عبارتند از

$$\frac{d}{ds} (T \sin \theta) = w \quad (۹-۱۵۵)$$

$$\frac{d}{ds} (T \cos \theta) = 0 \quad (۹-۱۵۶)$$

از معادله (۹-۱۵۶) نتیجه می شود

$$T \cos \theta = C \quad (= \text{constant}) \quad (۹-۱۵۷)$$

این معادله می رساند که مؤلفه افقی تنش کششی ثابت است ، که چنان است که باید باشد زیرا نیروهای خارجی ، بجز در دو انتها ، قائمند . با حذف T از سه معادله پیشین ، خواهیم داشت

$$\frac{d}{ds} \tan \theta = \frac{w}{C} \quad (۹-۱۵۸)$$

همچنین ، طول ds ریمان عبارت است از

$$\begin{aligned} ds &= (dx^2 + dy^2)^{1/2} \\ &= dx(1 + y'^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (۹-۱۵۹)$$

که در آن

$$y' = \frac{dy}{dx} = \tan \theta \quad (۹-۱۶۰)$$

از ترکیب معادلات (۹-۱۵۹) ، (۹-۱۶۰) با معادله (۹-۱۵۸) ، نتیجه می گیریم

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{w}{C} (1 + y'^2)^{1/2} \quad (۹-۱۶۱)$$

مرتب سازی و انتگرال گیری ، یعنی

$$\int \frac{dy'}{(1 + y'^2)^{1/2}} = \int \frac{w}{C} dx \quad (۹-۱۶۲)$$

می دهد

$$\sinh^{-1} y' = \frac{w}{C} x + A \quad (۹-۱۶۳)$$

که A ثابت انتگرال گیری است . معادله (۹-۱۶۳) را به صورت

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{w}{C} x + A\right) \quad (۱۶۴-۹)$$

بازنویسی می‌کنیم و پس از انتگرال‌گیری نتیجه می‌گیریم

$$y = \frac{C}{w} \cosh\left(\frac{w}{C} x + A\right) + B \quad (۱۶۵-۹)$$

این معادله، معادلهٔ یک منحنی به نام منحنی زنجیر است. A ، B ، و C ثابتند و باید طوری انتخاب شوند که y مقادیر مناسب خود را در دو انتها بگیرد. اگر دستگاه مختصات را طوری انتخاب کنیم که در $x=0$ داشته باشیم $y=0$ ، خواهیم داشت $A=0$

۹-۱۱ ترازمندی تیرهای جامد

بررسی عمومی: گشتاورهای خمشی

اکنون یک تیر افقی که تنها تحت تأثیر نیروهای قائم است در نظر بگیریم. به علاوه فرض کنیم که هیچ تنش کششی یا تراکمی به تیر وارد نمی‌شود، و پیچشی حول محور تیر وجود ندارد. تحت چنین شرایطی تیر فقط در یک سطح قائم خم می‌شود. این یک مثال ساده از ساختارهای تحت نیروهای برشی و گشتاورهای خمشی است. این کمیات و خمش حاصل را می‌توانیم به طریق زیر محاسبه کنیم.

فرض کنیم نیروهای قائم F_1 ، F_2 ، ...، F_n نیروهایی باشند که در فاصله‌های x_1 ، x_2 ، ...، x_n ، آن‌طور که در شکل (۹-۲۹) نشان داده شده است، به تیر افقی وارد شده باشند. نیروهایی را که رو به بالا عمل کنند مثبت و آنهایی را که رو به پایین عمل کنند منفی در نظر می‌گیریم. یک صفحهٔ عمود بر تیر در فاصلهٔ x از انتهای چپ آن رسم می‌کنیم. تمام نیروهای وارد به صفحهٔ AA' که از قسمت طرف راست آن ناشی می‌شوند، می‌توانند به یک نیروی F_1 با نقطهٔ اثر دلخواه در صفحه، و یک زوج نیرو با گشتاور τ تقلیل یابند. چون در مورد حاضر هیچ نیروی تراکمی یا کششی وجود ندارد F_1 باید قائم باشد؛ در نتیجه یک نیروی برشی است که از طرف راست به قسمت چپ از طریق صفحهٔ AA' ، همان‌طور که نشان داده شده است، وارد می‌شود. فرض کرده بودیم که پیچشی در میله نبوده است، چون تمام نیروها قائمند، گشتاور خمشی τ (یا گشتاور τ) باید در امتداد محور افقی عمود بر تیر و در صفحهٔ AA' باشد. چرخشهای پاد ساعتگرد صفحه حول این محور افقی مثبت در نظر گرفته

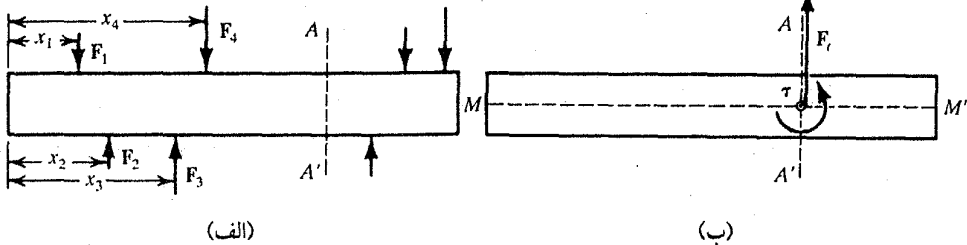
می شوند . (بنا به قانون سوم نیوتن ، از طرف قسمت چپ تیر یک نیرو و یک گشتاور مساوی و مختلف الجهد با F_1 و τ به صفحه AA' وارد می شوند) .

اکنون ترازمندی تیر در طرف چپ صفحه AA' را در نظر می گیریم . فرض کنیم وزن واحد طول تیر w باشد . بنابراین از دو شرط تعادل و از شکل (۹-۲۹) ، خواهیم داشت

$$F_1 + \sum_{x_i < x} F_i - \int_0^x w dx = 0 \quad (۹-۱۶۶)$$

و

$$\tau - \sum_{x_i < x} (x - x_i) F_i + \int_0^x (x - x') w dx' - \tau_0 = 0 \quad (۹-۱۶۷)$$



شکل (۹-۲۹) : (الف) تیر افقی تحت تأثیر نیروهای قائم . (ب) نیروهای وارد به تیر

در طرف راست صفحه AA' با یک نیروی برشی F_1 و یک گشتاور τ هم‌ارزند

که F_1 نیروی برشی و τ گشتاور خمشی است که در فاصله x از انتهای چپ عمل می کنند . جمله دوم معادله (۹-۱۶۶) مجموع نیروهای خارجی است که از انتهای چپ تا صفحه AA' به تیر وارد می شوند ، و جمله سوم وزن همین قسمت تیر است که رو به پایین عمل می کند . τ_0 گشتاور خمشی است که به وسیله انتهای چپ تیر به جایگاه آن وارد می شود ، و باعث محکم نگاه داشته شدن یا درگیر شدن تیر در این انتها می شود . اگر همه نیروها معلوم باشند ، F_1 و τ وارد به تیر در فاصله x را می توان از معادلات (۹-۱۶۶) و (۹-۱۶۷) به دست آورد . اگر انتهای طرف راست تیر آزاد باشد ، $F_1 = 0$ و $\tau = 0$ ، و می توان معادلات را برای محاسبه دو نیروی دیگر به کار گرفت . بسته به این که دو انتها آزاد باشند یا مقید ، می توانیم از این شرایط برای حل معادلات پیشین کمک بگیریم .

نیروی برشی F_1 و گشتاور خمشی τ به x بستگی دارند و می توانند با مشتق گیری از

معادلات (۹-۱۶۶) و (۹-۱۶۷) ،

$$\frac{dF_i}{dx} = w \quad (۹-۱۶۸)$$

$$\frac{d\tau}{dx} = \sum_{x_i < x} F_i - \int_0^x w dx' = -F_i \quad (۹-۱۶۹)$$

به صورت تابعی از x به دست آیند .

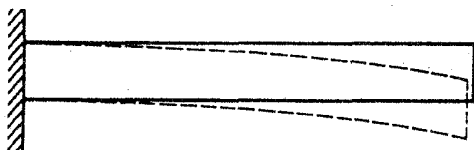
محاسبه گشتاورهای خمشی

یک میله افقی یا یک تیر که یک انتهای آن درگیر شده و انتهای دیگر آن باری را تحمل می کند ، در نظر بگیریم . گشتاور بار تیر را طوری خم می کند که خمش در همان سطح قائمی که شامل نیروهای اعمال شده است صورت می گیرد . تغییر شکل تیر نیروهای مقاومتی را وارد بازی می کند . در شرط ترازمندی ، گشتاوری که به وسیله این نیروها تشکیل می شود باید مساوی و مختلف الجهت با گشتاور خمشی باشد . وقتی میله در اثر گشتاور وارد شده خم می شود ، رشته ها (لایه ها) ی داخلی منحنی و موازی با طول در امتداد طولشان متراکم می شوند ، و رشته های قسمت خارجی منحنی کشیده یا منبسط می شوند . این وضعیت برای یک مقطع کوچک تیر به صورتی است که در شکل (۹-۳۰ ب) یا (پ) نشان داده شده است . این بدان معنی است که ، وقتی از خارج به داخل می رویم ، طول رشته ها کاهش می یابد . در بین راه رشته هایی وجود دارند که در آنها انبساط یا تراکمی رخ نداده است . این لایه سطح خنثی نامیده می شود ، و محوری مانند MM' [شکل (۹-۳۰ ب)] در این صفحه خمش محور خنثی نامیده می شود . تغییر در طول هر رشته با فاصله آن از سطح خنثی متناسب است .

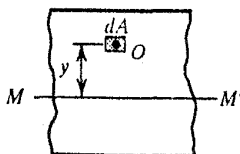
یک قطعه کوچک از تیر را که بعد از خم شدن به شکل $ABCD$ ، آن طور که در شکل (۹-۳۰ ب) نشان داده شده است ، درآمده است و به شکل قوسی از دایره ای به شعاع R است ، در نظر بگیریم . MM' محور خنثی است . اگر یک رشته QQ' در فاصله y از رشته PP' در روی محور خنثی باشد ، آن طور که شکل نشان می دهد ، داریم

$$PP' = R d\theta$$

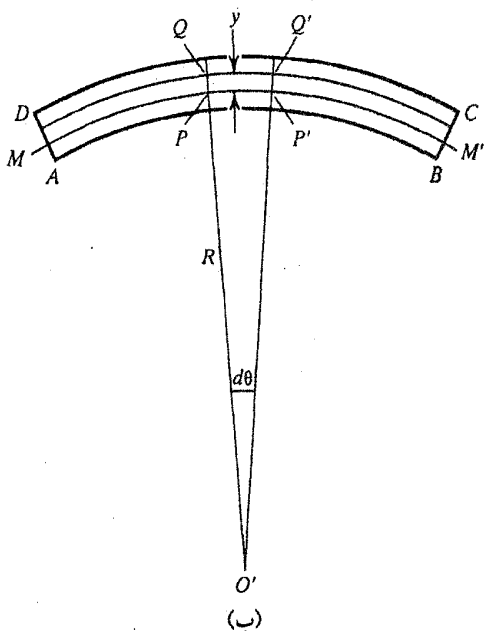
$$QQ' = (R + y) d\theta$$



(الف)



(ب)



(ب)

شکل (۹-۳۰) : (الف) تیر افقی قبل و بعد از خم شدن . (ب) مقطع کوچکی از یک تیر بعد از خم شدن . (پ) مساحت کوچک dA در اطراف نقطه O در فاصله y از محور خنثای MM'

بنابراین ، افزایش طول رشته عبارت است از

$$\Delta s = QQ' - PP' = (R + y) d\theta - R d\theta = y d\theta \quad (۹-۱۷۰)$$

چون طول اولیه رشته $R d\theta$ است ، می توانیم بگوییم

$$\text{کرنش طولی} = \frac{y d\theta}{R d\theta} = \frac{y}{R} \quad (۹-۱۷۱)$$

توجه کنیم که هیچ تغییری در کرنش حجمی یا برشی صورت نمی گیرد ، و تراکم و انبساطهای طولی باید از نیروهایی که در امتداد طول رشته ها یا عمود بر میله و صفحه خمش (صفحه قائم) عمل می کنند ، حاصل شده باشند . بنابراین ، برای مقطع کوچکی از یک لایه یا رشته هایی که در شکل (۹-۳۰) ب نشان داده شده است ، نیروهایی که باعث انبساط در نیمه بالا شده اند با نیروهایی که در نیمه پایین باعث انقباض شده اند ، مخالف یکدیگرند ، و هر دو عمود بر صفحه این عنصرند . اکنون یک سطح کوچک dA حول یک نقطه O در فاصله y از لایه خنثای MM' ، آن طور که در شکل (۹-۳۰) ب نشان داده شده است ، در نظر بگیریم .

همان طور که در معادله (۹-۱۷۱) محاسبه شد، کرنش مساوی با $\frac{y}{R}$ است، در نتیجه تنش در نقطه O عبارت است از

$$\frac{dF}{dA} = Y \frac{y}{R} \quad (۹-۱۷۲)$$

که Y مدول یانگ ماده تشکیل دهنده تیر است. به این ترتیب نیروی وارد به سطح dA عبارت است از

$$dF = Y \frac{y}{R} dA \quad (۹-۱۷۳)$$

همچنین، چون، طول $R d\theta = ds = PP'$ ، می توانیم معادله (۹-۱۷۳) را به صورت

$$dF = Y y \frac{d\theta}{ds} dA \quad (۹-۱۷۴)$$

بنویسیم. این معادله را می توان برای محاسبه تنشهای تراکمی یا کششی در هر فاصله y از لایه خنثی به کار برد. به این ترتیب نیروی کل تراکمی وارد به سطح مقطع A ی تیر با رابطه زیر داده می شود

$$F = \int \int_A dF = Y \frac{d\theta}{ds} \int \int_A y dA \quad (۹-۱۷۵)$$

و گشتاور خمشی حاصل از نیروهای حول خط خنثای MM' عبارت است از

$$\tau = \int \int_A y dF_i = Y \frac{d\theta}{ds} \int \int_A y^2 dA = Y \frac{d\theta}{ds} K^2 A \quad (۹-۱۷۶)$$

که $K^2 A$ گشتاور لختی هندسی نامیده می شود، و K شعاع چرخش است که با رابطه

$$K^2 = \frac{1}{A} \int \int_A y^2 dA \quad (۹-۱۷۷)$$

داده می شود، و کمیت $YK^2 A$ سختی خمشی نامیده می شود.

توجه به این نکته مهم است که، با این که نیروها در لایه های بالای لایه خنثی مساوی و مختلف الجهدت با نیروها در لایه های زیر آن است، گشتاورهای نیروهای هر دو مجموعه لایه ها در یک جهتند. فرض کنیم که تیر یک میله استوانه ای با شعاع r باشد. بنابراین $A = \pi r^2$ و $K^2 = \frac{r^2}{4}$ و $\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R}$ ، که R شعاع انحنای تیر خمیده شده است. از معادله (۹-۱۷۶)

خواهیم داشت

$$\tau_{\text{cyl}} = \frac{\pi r^4}{4R} Y \quad (۱۷۸-۹)$$

برای یک میله با مقطع مستطیل شکل ، $A = bd$ ، $K^2 = \frac{d^2}{12}$ ، که b عرض و d ضخامت است ، داریم

$$\tau_{\text{rect}} = \frac{bd^3}{12R} Y \quad (۱۷۹-۹)$$

با دانستن τ (از وزن و نیروهای خارجی) ، به کارگیری رابطه $R d\theta = ds$ ، و انتگرال گیری ، می توانیم θ و خمش تیر را محاسبه کنیم . این محاسبات را بیشتر ادامه نمی دهیم .

مسائل

- ۱-۹ مرکز جرم اجسام زیر را پیدا کنید :
- (الف) یک سیم یکنواخت نازک با چگالی جرمی خطی λ که به شکل L با طولهای قائم و افقی مساوی خم شده است . (ب) یک سیم یکنواخت نازک با چگالی جرمی خطی λ که به شکل یک ربع دایره به شعاع R خم شده است
- ۲-۹ مرکز جرم اجسام زیر را پیدا کنید :
- (الف) یک ورقه نازک یکنواخت فلزی با چگالی سطحی σ به شکل یک نیمدایره به شعاع R .
- (ب) یک ورقه نازک یکنواخت فلزی با چگالی سطحی σ به شکل یک مثلث با اضلاع a, a, b .
- (پ) یک ورقه نازک یکنواخت فلزی با چگالی سطحی σ به شکل یک لایه نازک $\frac{1}{8}$ کره با شعاع R .
- ۳-۹ مرکز جرم یک قطعه به شکل $\frac{1}{8}$ کره توپر به شعاع R و با چگالی یکنواخت ρ

پیدا کنید.

۴-۹ مرکز جرم یک کره توپر به شعاع R را که چگالی آن یکنواخت نیست پیدا

کنید. چگالی عبارت است از (الف) $\rho = \rho(z) = \rho_0(1 + \frac{z}{R})$ ، و

(ب) $\rho = \rho(r) = \rho_0(1 + \frac{r}{R})$.

۵-۹ مرکز جرم یک ورقه نازک در صفحه XY به شکل یک سهمی به معادله $y = ax^2$ را که بین

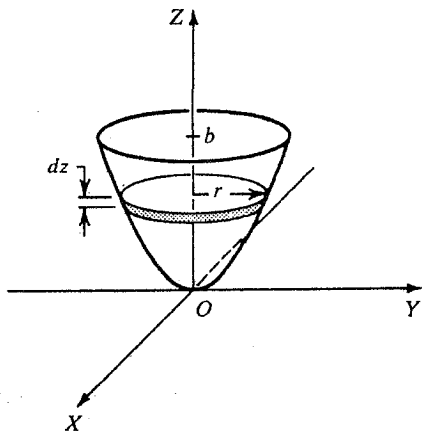
دو خط $y = 0$ و $y = b$ محدود شده است ، پیدا کنید . محاسبات را برای موردی که

$b = 20$ cm و چگالی سطحی 10 kg/m^2 است انجام دهید .

۶-۹ مرکز جرم یک سهمی وار به معادله $z = a(x^2 + y^2)$ بین $z = 0$ و $z = b$ را ، آن طور که که

در شکل (مسئله - ۶-۹) نشان داده شده است ، پیدا کنید . محاسبه را برای $b = 20$ cm

و چگالی $\rho = 8000(1 - 0.5z) \text{ kg/m}^3$ انجام دهید .



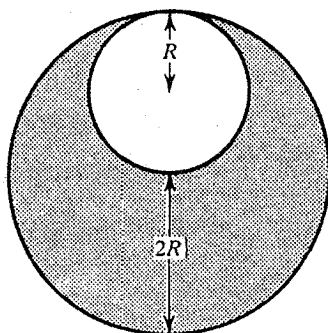
شکل (مسئله - ۶-۹)

۷-۹ یک ورقه دایره ای به شعاع $2R$ با چگالی سطحی یکنواخت σ در نظر بگیرید .

یک سوراخ دایره ای شکل به شعاع R در فاصله R از مرکز دایره اولی ، آن طور که

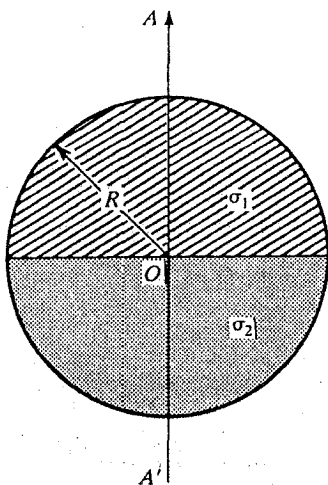
در شکل (مسئله - ۷-۹) نشان داده شده است ، در آن ایجاد شده است . مرکز جرم

قطعه باقیمانده را پیدا کنید .



شکل (مسأله - ۹-۷)

۸-۹ مرکز جرم یک ورقه دایره ای را که ، آن طور که در شکل (مسأله - ۹-۸) نشان داده شده است ، از دو نیمدایره با چگالیهای سطحی σ_1 و σ_2 تشکیل شده است ، پیدا کنید



شکل (مسأله - ۹-۸)

۹-۹ مرکز جرم یک نیمکره توپر به شعاع R را که چگالی آن با فاصله از مرکز بطور خطی تغییر می کند ، یعنی $\rho = \rho_0 \frac{r}{R}$ ، پیدا کنید .

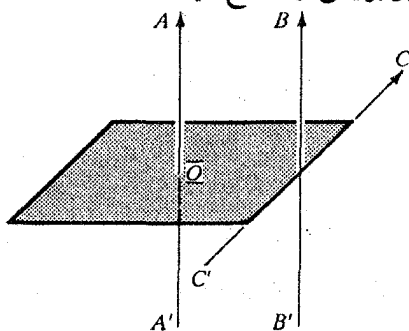
۱۰-۹ یک کره توپر به شعاع R و چگالی یکنواخت ρ در نظر بگیرید که یک حفره کروی به شعاع $\frac{R}{2}$ که مرکز آن در فاصله $\frac{R}{2}$ از مرکز قرار دارد در آن ایجاد شده است . مرکز جرم را پیدا کنید .

۱۱-۹ گشتاور لختی یک لایه مربعی شکل به جرم M و ضلع L را، آن طور که در شکل (مسأله - ۱۱-۹) نشان داده شده است، حول محورهای زیر پیدا کنید:

(الف) محور AA' که از مرکز می گذرد و عمود بر لایه است

(ب) محور BB' موازی با AA' و در فاصله $\frac{L}{2}$.

(پ) محور CC' منطبق بر یکی از اضلاع لایه

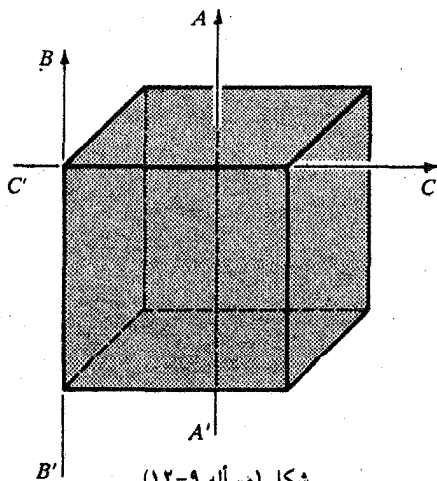


شکل (مسأله - ۱۱-۹)

۱۲-۹ یک مکعب به جرم M و ضلع L ، برابر شکل (مسأله - ۱۲-۹) در نظر بگیرید. گشتاور لختی آن را حول محورهای زیر پیدا کنید:

(الف) محور AA' که عمود بر یک وجه از مرکز جرم می گذرد.

(ب) محور BB' موازی با محور قسمت (الف) و منطبق بر یکی از اضلاع.



شکل (مسأله - ۱۲-۹)

۱۳-۹ گشتاور لختی را در موارد زیر پیدا کنید :

(الف) یک استوانه به جرم M ، شعاع R ، و ارتفاع H حول محور تقارن

(ب) همانند قسمت (الف) ، اما حول محوری موازی با محور تقارن و مماس بر سطح

۱۴-۹ گشتاور لختی یک مخروط توپر را حول محور تقارن آن پیدا کنید .

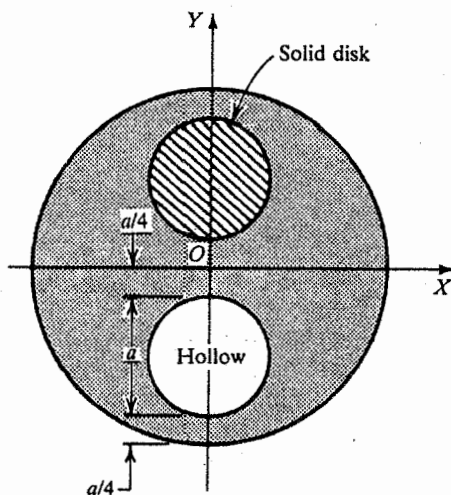
۱۵-۹ گشتاور لختی یک مخروط ناقص به جرم M و شعاعهای R_1 و R_2 را حول محور تقارنش پیدا کنید .

۱۶-۹ گشتاور لختی قرصی به شعاع a را که ، آن طور که در شکل (مسأله - ۹-۱۶) نمایش

داده شده است ، یک قرص کوچکتری از آن بریده و جابه جا کرده ایم ، نسبت

به محوری که از مرکز O گذشته و بر صفحه قرص عمود است ، پیدا کنید . همچنین I_x

و I_y را پیدا کنید .



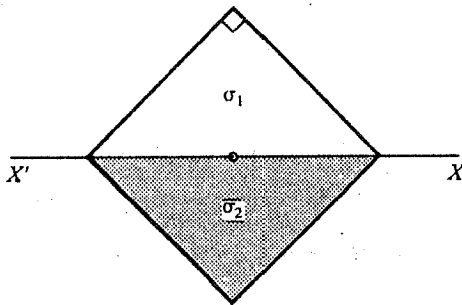
شکل (مسأله - ۹-۱۶)

۱۷-۹ مربع نازک یکنواختی به ضلع L که قطر آن در امتداد محور X است ، آن طور که در شکل

(مسأله - ۹-۱۷) نشان داده شده است ، در نظر بگیرید . چگالی نیمه بالایی σ_1 و

چگالی نیمه پایینی σ_2 است . گشتاور لختی آن را حول محور ماربر مرکز و عمود

بر مربع پیدا کنید . همچنین I_x و I_y را محاسبه کنید .



شکل (مسأله -۹-۱۷)

۱۸-۹ گشتاور لختی کره ای را به شعاع R و با چگالیهای زیر حول محور تقارنش پیدا کنید .

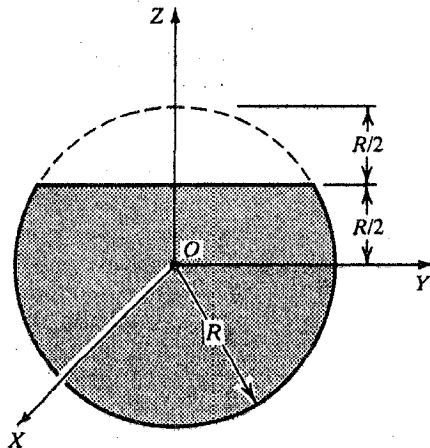
(الف) $\rho_0(r) = \rho_0(kr/R)$

(ب) $\rho_0(r) = \rho_0 e^{-kr/R}$

(پ) $\rho_0(r) = \rho_0(1 - kr/R)$

در مورد $1 \ll k$ بحث کنید .

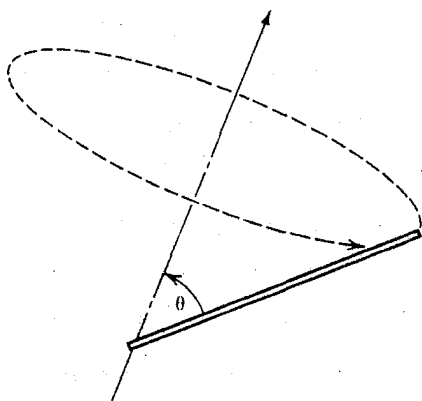
۱۹-۱۹ یک قرص نازک به شعاع R و جرم M در نظر بگیرید . قسمت کوچکی از آن به پهنای بیشینه $\frac{R}{2}$ ، آن طور که شکل (مسأله -۹-۱۸) نشان می دهد ، جدا شده است . مرکز جرم و گشتاور لختی آن را حول محور عمود بر قرص و مارتر مرکز پیدا کنید .



شکل (مسأله -۹-۱۹)

۲۰-۹ کره ای به شعاع R در نظر بگیرید که یک قسمت آن ، مانند قرص مسأله (۹-۱۹) ، جدا شده است . مرکز جرم و گشتاور لختی آن را حول محور تقارنش پیدا کنید .

۲۱-۹ گشتاور لختی و شعاع چرخش یک میله یکنواخت را به جرم M و طول L حول محوری که از یک انتهای آن می گذرد و با میله زاویه θ می سازد ، شکل (مسأله ۹-۲۱) ، پیدا کنید .



شکل (مسأله ۹-۲۱)

۲۲-۹ نشان دهید که گشتاور لختی یک قطعه $\frac{1}{8}$ کره ای یکنواخت به جرم m و شعاع a حول محوری که منطبق بر یکی از لبه های مستقیم آن است عبارت است از $\frac{2}{3}ma^2$.

۲۳-۹ گشتاور لختی یک متوازی السطوح را حول یک محور تقارنش پیدا کنید .

۲۴-۹ نشان دهید که گشتاور لختی یک بیضی وار با محورهای اصلی $2a$ ، $2b$ ، $2c$ حول محور بزرگ عبارت است از $\frac{M}{5}(b^2 + c^2)$.

۲۵-۹ یک چرخ می تواند آزادانه حول محور ثابت و بدون اصطکاکای بچرخد . یک نوار بدون وزن به دور آن پیچیده شده است . نوار را بان نیروی ثابت می کشیم . وقتی نوار به اندازه L باز شد سرعت زاویه ای چرخ ω است . از این معلومات گشتاور لختی چرخ را پیدا کنید .

۲۶-۹ اگر نیروی کل وارد به سیستمی از ذرات صفر باشد ، نشان دهید که گشتاور نیروهای وارد به سیستم نسبت به تمام نقاط یکی است .

۲۷-۹ نشان دهید که اگر تکانه خطی کل یک سیستم از ذرات صفر باشد ، تکانه زاویه ای

سیستم نسبت به تمام نقاط یکی است .

۲۸-۹ اگر τ_z تابعی از فقط θ باشد ، با شروع از معادله $I_c \ddot{\theta} = \tau_z$ نشان دهید مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل سیستم ثابت است .

۲۹-۹ مانند مورد حرکت انتقالی ، فرض کنید که گشتاور اصطکاکی متناسب با سرعت زاویه ای باشد ، یعنی $\tau_f = -k\theta$ ، و گشتاور وادارنده برابر است با $\tau = \tau_0 (1 + \alpha \cos \omega_0 t)$ ، حرکت حالت پایا را پیدا کنید .

۳۰-۹ موتوری را در نظر بگیرید که جرم چرخنده آن ۲kg و شعاع چرخش آن ۸cm است . سرعت بدون بار آن ۱۶۰۰ دور بر دقیقه است ، و در این حالت یک جریان ۲ آمپری با اختلاف پتانسیل ۱۱۰ ولت از آن عبور می کند . اگر گشتاور اصطکاکی متناسب با سرعت زاویه ای و بازده الکتریکی ۷۵٪ باشد ، زمان لازم را برای این که سرعت زاویه ای به ۱۲۰۰ دور بر دقیقه برسد محاسبه کنید .

۳۱-۹ یک نخ سبک به دور یک قرص همگن دایره ای به جرم M و شعاع R پیچیده شده است . یک سر نخ به نقطه ثابتی بسته شده است . قرص را رها می کنیم تا در اثر نیروی گرانش ، با باز شدن نخ سقوط کند . شتاب مرکز جرم را پیدا کنید .

۳۲-۹ یک میله یکنواخت به طول L و جرم M مانند یک نردبام در مقابل یک دیوار بدون اصطکاک و یک کف بدون اصطکاک قرار گرفته است . در حالی که با قائم زاویه α می سازد ، آن را از حال سکون رها می کنیم . نشان دهید که واکنش اولیه دیوار و کف عبارتند از

$$R_w = \frac{3}{4} mg \cos \alpha \sin \alpha , \quad R_f = mg(1 - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha)$$

و زاویه ای که در آن میله از دیوار جدا می شود برابر است با $\cos^{-1}(\frac{2}{3} \cos \alpha)$ (فقط از یک متغیر برای توصیف حرکت استفاده کنید) .

۳۳-۹ اگر در مسأله (۳۲-۹) ضریب اصطکاک بین کف و میله μ باشد ، محاسبه کنید :

(الف) مؤلفه های افقی و قائم واکنش را برحسب زاویه θ ، (ب) زاویه ای را که در آن میله شروع به لغزیدن می کند ، و (پ) سرعت زاویه ای آن را وقتی که به زمین می افتد .

۳۴-۹ یک میله یکنواخت به جرم M و طول L بطور افقی با دو دست در A و B نگه داشته شده است . اگر A ناگهان رها شود ، (الف) گشتاور حول B ، (ب) شتاب زاویه ای حول

B ، (پ) شتاب قائم مرکز جرم ، و (ت) نیروی قائم در B را پیدا کنید .

۳۵-۹ فرض کنید که در آونگ ساده تصحیح را تا مرتبه چهارم ، به جای تا مرتبه دوم ، آن طور که در متن انجام شده است ، پیش ببریم . نشان دهید که

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{K^2}{4} + \frac{9K^4}{64} + \dots \right)$$

و اگر θ کوچک ، مثلاً θ_0 ، باشد

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + \frac{11}{3072}\theta_0^4 + \dots \right)$$

۳۶-۹ یک آونگ ساده به طول یک متر ($T_0 \cong 2s$) بادامنه 5 cm در نظر بگیرید . نشان دهید

$$\frac{dT}{T_0} = -\theta_0 d\theta_0$$

اگر θ_0 به اندازه 1.0% تغییر کند ، یعنی ، $d\theta_0 = \frac{\theta_0}{10}$ ، و خطای حاصل

در یک روز را محاسبه کنید .

۳۷-۹ در مورد یک آونگ مرکب ، نشان دادیم که وقتی $T = T'$ است عبارت g با معادله

(۹-۱۰) داده می شود . فرض کنیم $T' = T(1 + \delta)$ که $\delta \ll 1$ ، عبارت جدیدی

برای g پیدا کنید .

۳۸-۹ میله ای به طول L و جرم M در نظر بگیرید . یک جرم m به یک انتهای آن چسبیده شده و

میله از انتهای دیگر آویزان شده است . اگر مانند یک آونگ مرکب رفتار کند ، زمان

تناوب نوسانات را محاسبه کنید .

۳۹-۹ یک ورقه نازک به جرم M و به شکل یک مثلث متساوی الاضلاع با ضلع L در نظر

بگیرید . گشتاور لختی آن را حول محوری که از رأس گذشته و عمود بر ورقه است

پیدا کنید . اگر این ورقه مانند یک آونگ مرکب رفتار کند زمان تناوب را برای نوسانات

کوچک پیدا کنید .

۴۰-۹ یک نیمکره همگن به جرم M و شعاع R در نظر بگیریم . آن را روی یک سطح افقی

کاملاً خشن طوری قرار می دهیم که طرف تخت آن رو به بالا باشد . عبارتی برای طول

آونگ ساده هم ارز برای نوسانات کوچک حول وضع تعادل پیدا کنید . شعاع چرخش

حول محور افقی را که از مرکز جرم می گذرد k_g بگیرد .

۴۱-۹ یک قرص به جرم m و شعاع r در نظر بگیرید که به میله ای به طول L و جرم M بسته شده

است. سیستم از انتهای دیگر میله آویزان شده است و می تواند نوسان کند. زمان تناوب نوسانات را پیدا کنید. اگر قرص به شیوه ای سوار شده باشد که بتواند آزادانه بچرخد (مثلاً روی یک بلبرینگ بدون اصطکاک سوار شده باشد) زمان تناوب نوسانات چه خواهد بود؟

۴۲-۹ فرض کنیم وقتی که توپ بیسبال به چوب مخصوص آن در دست بازیکن می خورد بازیکن چوب را رها می کند تا آزادانه حرکت کند و دوران کند. برای یک ربع دور چوب (الف) حرکت مرکز جرم، و (ب) حرکت مرکز ضرب را توصیف و ترسیم کنید، یعنی $x(t)$ ، $y(t)$ را برای هر دو مورد رسم کنید، از تأثیر گرانش چشم پوشی کنید.

۴۳-۹ یک ورقه مربع شکل به جرم M و ضلع L در نظر بگیرید. ورقه مانند یک آونگ مرکب حول محوری که از یک گوشه ورقه گذشته و عمود بر صفحه آن است نوسان می کند. مرکز ضرب و زمان تناوب نوسانات را پیدا کنید.

۴۴-۹ یک آونگ فیزیکی از یک قرص یکنواخت به جرم M و شعاع R که از میله ای با جرم ناچیز آویزان شده است، تشکیل شده است. فاصله مرکز قرص از نقطه آویز L است. زمان تناوب نوسانات را پیدا کنید. برای چه مقدار L زمان تناوب کمینه است؟ مرکز ضرب را پیدا کنید.

۴۵-۹ نشان دهید که اگر تنش حجمی در یک مکعب به ضلع a ، ΔP باشد، کرنش حجمی با $\frac{\Delta V}{V} = 3 \frac{\Delta a}{a}$ داده می شود.

۴۶-۹ اگر دو نقطه انتهایی یک کابل در (x_A, y_A) و (x_B, y_B) باشند، نشان دهید که فاصله افقی دوسر آن با $L = x_B - x_A = \frac{8dT_0}{w}$ داده می شود، که d تابعی از $y_A - y_B$ است.

۴۷-۹ سیمی به طول $۱/۵m$ و قطر $۲mm$ در نظر بگیرید. انتهای بالایی آن درگیر شده و به انتهای پایینی آن جرم $۵ kg$ آویزان شده است. مدول یانگ $۹ \times ۱۰^{۱۱} N/m^2$ و نسبت پواسون آن $۰/۲۵$ است. محاسبه کنید: (الف) انبساط سیم، (ب) کاهش مساحت مقطع در اثر کرنش جانبی، (پ) کار انجام شده توسط نیروی کشنده، و (ت) انرژی پتانسیل سیم کشیده شده.

۴۸-۹ کار انجام شده بر واحد حجم را در موارد زیر محاسبه کنید: (الف) برای یک تنش برشی که جسم را به اندازه زاویه θ برش می دهد، و (ب) برای یک تنش یکنواخت P

که یک کرنش حجمی $\frac{\Delta V}{V}$ ایجاد می کند .

۹-۴۹ یک میله بدون وزن به طول L بطور افقی در دو انتها درگیر شده است . وزنه ای به وزن W در مرکز آن قرار داده شده است . نشان دهید که معادله شکل میله عبارت است از

$$y = \frac{W}{YK^2A} \left(\frac{x^3}{12} - \frac{Lx^2}{16} \right)$$

جابه جایی مرکز را محاسبه کنید .

منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر

- ARTHUR, W., and FENSTER, S. K., *Mechanics*, Chapter 13. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1969.
- BECKER, R. A., *Introduction to Theoretical Mechanics*, Chapter 9. New York: McGraw-Hill Book Co., 1954.
- FOWLES, G. R., *Analytical Mechanics*, Chapter 8. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1962.
- FRENCH, A. P., *Newtonian Mechanics*, Chapter 14. New York: W. W. Norton and Co., Inc., 1971.
- HAUSER, W., *Introduction to the Principles of Mechanics*, Chapter 9. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1965.
- KLEPPNER, D., and KOLENKOW, R. J., *An Introduction to Mechanics*, Chapter 6. New York: McGraw-Hill Book Co., 1973.
- SLATER, J. C., *Mechanics*, Chapter 12. New York: McGraw-Hill Book Co., Inc., 1947.
- STEPHENSON, R. J., *Mechanics and Properties of Matter*, Chapter 6. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- SYMON, K. R., *Mechanics*, 3rd ed., Chapter 5. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1971.
- TAYLOR, E. F., *Introductory Mechanics*, Chapter 8. New York: John Wiley & Sons, 1963.

نیرو و پتانسیل گرانشی

در این فصل قانون جهانی نیوتن از گرانش و کاربردهای آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم و مفهوم شدت میدان گرانشی (یا بطور ساده میدان گرانشی) g و پتانسیل گرانشی V را وارد می‌کنیم. این کمیات را برای توزیع جرمهای مختلف، با استفاده از قانون نیوتنی گرانش، محاسبه خواهیم کرد. قانون گاوس برای محاسبه g و V برای توزیع جرمهای متقارن ساده به کار گرفته خواهد شد. بالاخره، معادلات میدان گرانشی، که معادلات دیفرانسیلی برای توابعی مثل g و V هستند، وارد خواهند شد. این معادلات روشهای جالب کلی تری فراهم می‌کنند.

۱-۱۰ قانون جهانی نیوتن از گرانش

قانون جهانی نیوتن برای گرانش (که یک قانون نیرو است)، همراه با قانون نیوتن برای حرکت، توسط فزیکدانها برای پیشگویی و محاسبه خیلی دقیق حرکت سیاره‌ها، قمرها، ماهواره‌ها، و دیگر چیزها در جهان به کار گرفته شده‌اند. در سال ۱۶۶۶ نیوتن در سن ۲۳ سالگی، قانون جهانی گرانش را به شکل زیر بیان کرد.

قانون جهانی نیوتن از گرانش: نیروی (یا برهم‌کنش) گرانشی جاذبه بین هر دو جسم

در عالم بطور مستقیم متناسب با حاصل ضرب جرمهای آنها و بطور معکوس متناسب با مربع فاصله بین آنهاست .

به این ترتیب بزرگی نیروی F بین هر دو جسم به جرمهای m_i و m_j و با فاصله r_{ij} عبارت است از

$$F = G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \quad (1-10)$$

که G ثابت گرانشی است ؛ مقدار پذیرفته شده آن در حال حاضر برابر است با

$$G = (6.673 \pm 0.003) \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2 \quad (2-10)$$

با مراجعه به شکل (۱-۱۰ الف) می توانیم این قانون را به شکل برداری به صورت

$$\mathbf{F}_{ij} = -G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}} = -G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} \quad (3-10)$$

بنویسیم که \mathbf{F}_{ij} نیروی گرانشی است که با آن جرم m_j جرم m_i را جذب می کند ، $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ فاصله بین دو جرم m_i و m_j و \mathbf{F}_{ji} نیرویی است که توسط آن جرم m_i جرم m_j را جذب می کند . طبق قانون سوم نیوتن داریم

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \quad (4-10)$$

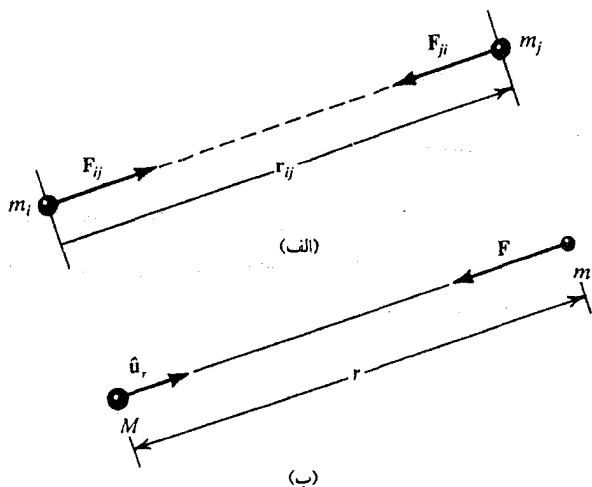
$$|\mathbf{F}_{ij}| = |\mathbf{F}_{ji}| = F = G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}$$

در شکل (۱-۱۰ ب) جرم m توسط جرم M با نیروی \mathbf{F} جذب می شود ؛ می توانیم

بنویسیم

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r \quad (5-10)$$

که برادر یکه $\hat{\mathbf{u}}_r$ در جهت از M به m است . علامت منفی نشان می دهد که \mathbf{F} یک نیروی جاذبه است که خط عمل آن برخط واصل دو جرم منطبق است . به این ترتیب نیرو به طرف جرم M متوجه است و نیروی گرانشی یک نیروی مرکزی است . معادلات پیشین به وضعیتهایی که در آنها جرمها نقطه ای هستند اعمال می شوند . این تنها در صورتی ممکن است که ابعاد جرمها در مقایسه با فاصله های بین آنها قابل چشم پوشی باشد .



شکل (۱۰-۱) : (الف) نیروهای گرانشی بین دو جرم m_i و m_j . (ب) نیروی گرانشی وارد به جرم m از طرف جرم M

یک جرم نقطه‌ای m واقع در نقطه P که توسط یک جسم گسترده به جرم M ، آن طور که در شکل (۱۰-۲) نشان داده شده است ، جذب می شود ، در نظر بگیرید . برای محاسبه نیروی وارد به m در P ، باید فرض کنیم که میدان گرانشی یک میدان خطی است . یعنی ، نیرو در P می تواند با جمع برداری نیروهای انفرادی که به وسیله برهم کنشهای بین ذره نقطه‌ای m و تعداد زیاد ذرات جسم گسترده ایجاد شده اند ، محاسبه شود . نیروی dF بین m و یک عنصر حجمی کوچک dV' با جرم dm' عبارت است از

$$dF = -G \frac{m dm'}{r^2} \hat{u}_r \quad (6-10)$$

که در آن چگالی $\rho(\mathbf{r})$ و $dm' = \rho(\mathbf{r}) dV'$ است . نیروی F وارد به m از طرف جسم گسترده به جرم M می تواند با انتگرال گیری معادله (۶-۱۰) به دست می آید ؛ یعنی ،

$$F = - \int_{V'} G \frac{m \rho(\mathbf{r})}{r^2} \hat{u}_r dV' \quad (7-10)$$

که نشان می دهد که انتگرال گیری روی تمام حجم انجام شده است . اگر جسم گسترده یک ورقه با چگالی سطحی σ باشد ، $dm = \sigma dA$ ، می توانیم بنویسیم

$$F = - \int_A G \frac{m \sigma(\mathbf{r})}{r^2} \hat{u}_r dA \quad (8-10)$$

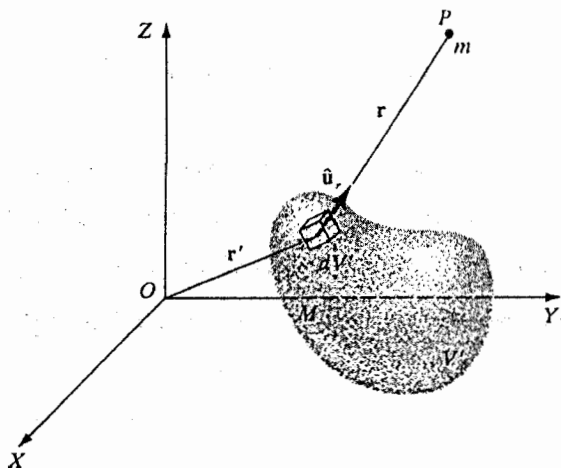
که A نشان می دهد که انتگرال گیری روی تمام سطح انجام گرفته است. اگر جسم گسترده یک منبع خطی با چگالی خطی λ باشد، $dm' = \lambda dL$ ، می توانیم بنویسیم

$$\mathbf{F} = - \int_L G \frac{m\lambda(r)}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r dL \quad (9-10)$$

اگر جسم گسترده با تعداد زیادی جرمهای گسسته $m_1, m_2, m_3, \dots, m_N$ ، جانشین شود، نیروی وارد به جرم m را می توان به صورت

$$\mathbf{F} = - \sum_i G \frac{mm_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{u}}_i \quad (10-10)$$

نوشت که $\hat{\mathbf{u}}_i$ بردار یکه در امتداد خط واصل m_i به m است.

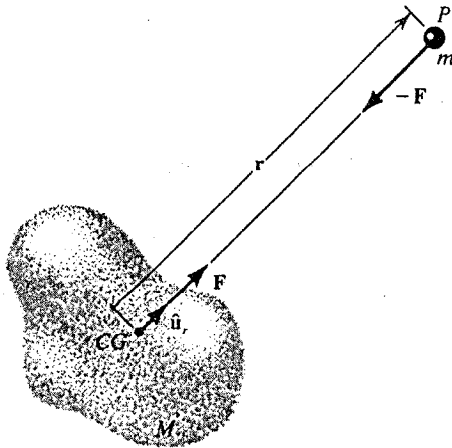


شکل (۱۰-۲): نیروی گرانشی وارد به جرم m در P از طرف جسم گسترده به جرم M و حجم V'

بنابراین معادله (۱۰-۷) برآیند نیروهای وارد به قسمتهای مختلف جسم گسترده از طرف جرم m در یک نیروی \mathbf{F} است که در امتداد خطی که از m می گذرد عمل می کند. طبق قانون سوم نیوتن، نیروی وارد به m ، همان طور که در شکل (۱۰-۳) نشان داده شده است، $-\mathbf{F}$ است. در روی این خط عمل \mathbf{F} ، یک نقطه CG به فاصله r از m در P طوری انتخاب می کنیم که داشته باشیم

$$\mathbf{F} = G \frac{mM}{r^2} \quad (11-10)$$

تحت این شرایط ، نیروی گرانشی بین جسمی به جرم M و ذره‌ای به جرم m معادل است با یک نیروی برآیند F که در نقطه CG به M وارد می شود ، و $-F$ که در P به m وارد می شود . جسم گسترده طوری عمل می کند که گویی تمام جرم آن در CG متمرکز شده است . نقطه CG مرکز گرانش جسم با جرم M نسبت به جرم نقطه‌ای m در P نامیده می شود . اگر مکان m تغییر کند مکان CG نیز تغییر می کند . بطور کلی ، CG به مرکز جرم M منطبق نیست ؛ حتی ممکن است روی خط واصل مرکز جرم M با P نباشد . مرکز گرانش در شرایط زیر به مرکز جرم منطبق می شود : (۱) اگر جرم m خیلی دور از M باشد ، میدان گرانشی یکنواخت خواهد بود ، نیروی وارد به قسمتهای مختلف جسم یکسان خواهند بود ، و مرکز گرانش بر مرکز جرم منطبق خواهد شد . (۲) برای یک جسم متقارن ، مثل یک کره یکنواخت ، مرکز گرانش آن بر مرکز جرمش منطبق می شود .



شکل (۱۰-۳) : مرکز گرانش CG ی یک جسم گسترده با جرم M نسبت به جرم m در نقطه P

۱۰-۲ میدان گرانشی و پتانسیل گرانشی

همان طور که قبلاً بیان شد ، نیروی گرانشی یک نیروی مرکزی است ؛ یعنی ، یک نیروی کاملاً شعاعی است که از نقطه معینی ، به نام مرکز نیرو ، می گذرد . به علاوه ، نیروی گرانشی تقارن کروی دارد ؛ یعنی بزرگی نیرو تنها تابع فاصله شعاعی از مرکز نیروست و نه جهت آن . نشان خواهیم داد که نیروهای مرکزی با تقارن کروی پایستارند ؛ در نتیجه مجموع

انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل ثابت است. برعکس، اگر یک میدان نیروی مرکزی پایستار باشد، باید متقارن کروی نیز باشد. (توجه: نیرویی که پایستار است ممکن است هم مرکزی و هم متقارن کروی با هم باشد یا نباشد).

ذره‌ای به جرم m در نظر بگیریم که تحت تأثیر نیروی مرکزی F با تقارن کروی و مرکزی نیروی O ، آن طور که در شکل (۱۰-۴) نشان داده شده است، قرار دارد. در این وضعیت، F فقط یک مؤلفه شعاعی F_r دارد که تابعی از فقط r است و می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$F_r = f(r) \quad (10-12)$$

کار dW انجام شده توسط نیروی F وقتی m یک جابه‌جایی کوچک ds انجام می‌دهد، عبارت است از

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F ds \cos \theta \quad (10-13)$$

اما

$$ds \cos \theta = dr$$

که در آن dr تغییر فاصله شعاعی m از O در اثر جابه‌جایی کوچک ds است. بنابراین

$$dW = F dr \quad (10-14)$$

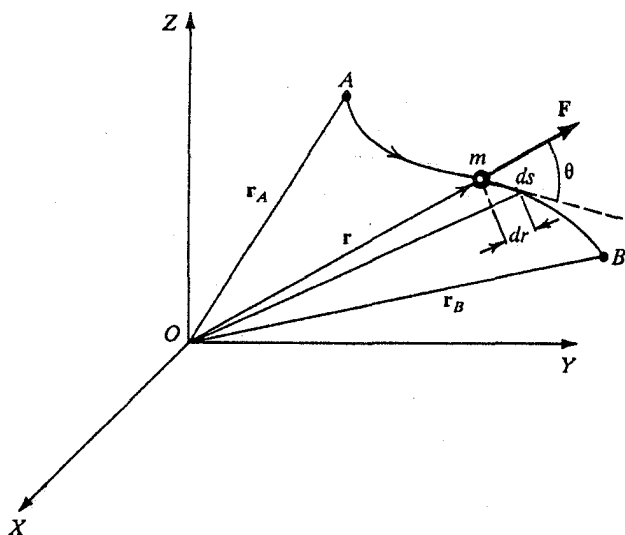
چون بزرگی نیروی F تنها تابع r است، کار انجام شده در رفتن از A به B ، آن طور که در شکل (۱۰-۴) نشان داده شده است، خواهد بود

$$W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} F dr = \int_{r_A}^{r_B} f(r) dr \quad (10-15)$$

چون این انتگرال در نتیجه کار انجام شده تنها تابع مقادیر اوکیه و نهایی r است، و نه خود مسیر، نیروی با تقارن کروی باید پایستار باشد.

وقتی بدانیم که نیرو پایستار است، می‌توانیم به تعیین تابع انرژی پتانسیل $U(r)$ یک جسم در یک چنین میدان نیروی مرکزی با تقارن کروی بپردازیم. به این ترتیب، در رفتن از A به B ، تغییرات انرژی پتانسیل یک جسم عبارت است از

$$\Delta U = U_B - U_A = - \int_{r_A}^{r_B} f(r) dr \quad (10-16)$$



شکل (۱۰-۴) : کار انجام شده توسط نیروی مرکزی F وقتی جرم m از نقطه A به نقطه B می رود

از معادلات (۱۵-۱۰) و (۱۶-۱۰) نتیجه می گیریم

$$W_{AB} = -\Delta U = -(U_B - U_A) \quad (17-10)$$

اما کار انجام شده همچنین برابر است با تغییرات انرژی جنبشی ؛ یعنی ،

$$W_{AB} = K_B - K_A = -(U_B - U_A) \quad (18-10)$$

بنابراین ، اگر E انرژی کل باشد ، معادله (۱۸-۱۰) می دهد

$$K_A + U_A = K_B + U_B = E \quad (19-10)$$

که قانون پایستگی انرژی است .

چون نیروی گرانشی یک نیروی متناسب با عکس مجذور فاصله است ، داریم

$$F(r) = f(r) = \frac{C}{r^2} \quad (20-10)$$

که C یک ثابت است . با قرار دادن این عبارت در معادله (۱۶-۱۰) ، خواهیم داشت

$$U_B - U_A = - \int_{r_A}^{r_B} \frac{C}{r^2} dr$$

که پس از انتگرال گیری می دهد

$$U_B - U_A = C \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \quad (۲۱-۱۰)$$

برای سهولت ، همان طور که معمولاً انجام می شود ، U_A را وقتی $r_A \rightarrow \infty$ صفر می گیریم ،
لذا

$$U_B = \frac{C}{r_B}$$

یا ، بطور کلی

$$U(r) = \frac{C}{r} \quad (۲۲-۱۰)$$

که بیان می دارد انرژی پتانسیل یک ذره در یک میدان نیروی مرکزی تنها تابعی از فاصله r از مرکز نیروست . ثابت C برای نیروهای جاذبه منفی و برای نیروهای دافعه مثبت است . چون نیروی گرانشی جاذبه است و به شکل کلی

$$F(r) = - \frac{GMm}{r^2} = \frac{C}{r^2} \quad (۲۳-۱۰)$$

است ، انرژی پتانسیل m در میدان M در فاصله r از M عبارت است از

$$U(r) = - \frac{GMm}{r} \quad (۲۴-۱۰)$$

اگر M توزیع جرم پیوسته ای با شکل دلخواه باشد ، انرژی پتانسیل m در نقطه r عبارت است از

$$U(r) = - \int_{V'} \frac{Gm\rho(r)}{r} dV' \quad (۲۵-۱۰)$$

که در آن r فاصله بین جرم m و عنصر حجمی dV' است .

برای این که سه معادله قبلی را از m (جرم آزمون) مستقل کنیم ، مفاهیم میدان گرانشی و پتانسیل گرانشی را وارد می کنیم .

شدت میدان گرانشی ، یا بردار میدان گرانشی ، یا بطور ساده میدان گرانشی ، g ،

به عنوان نیروی وارد بر واحد جرم در میدان گرانشی جرم M تعریف می شود ؛ یعنی

$$g = \frac{F}{m} = - \frac{GM}{r^2} \hat{u}_r \quad (۲۶-۱۰)$$

یا ، برای یک جسم گسترده به جرم M ، می توانیم بنویسیم

$$\mathbf{g} = - \int_{V'} \frac{G\rho(\mathbf{r}')}{r'^2} \hat{\mathbf{u}}_r' dV' \quad (۲۷-۱۰)$$

که بردار $\hat{\mathbf{u}}_r$ در جهت از عنصر حجمی dV' به جرم نقطه ای m است .

\mathbf{g} دارای دیمانسیون نیرو بر واحد جرم ، یعنی ، شتاب است . بزرگی این شتاب گرانشی در روی سطح زمین تقریباً 9.8 m/s^2 است . هر وقت یک میدان برداری پایستار باشد ، مانند میدان نیروی گرانشی ، می توانیم همیشه یک پتانسیل گرانشی (که یک کمیت نرده ای است) برای نمایش این میدان وارد کنیم ، به شرط این که شرایطی برقرار باشند . شرط لازم این است که کرل میدان برداری \mathbf{g} باید صفر باشد . چون \mathbf{g} متناسب با $\frac{1}{r^2}$ است داریم

$$\text{Curl } \mathbf{g} \equiv \nabla \times \mathbf{g} = 0 \quad (۲۸-۱۰)$$

(همان طور که در فصل ۶ اثبات شد) . این شرط همچنین وقتی برقرار خواهد بود که \mathbf{g} برابر با گرادیان یک کمیت نرده ای باشد ؛ یعنی ،

$$\mathbf{g} \equiv -\text{grad } V \equiv -\nabla V \quad (۲۹-۱۰)$$

($\nabla \times \nabla V = 0$) ، که V پتانسیل گرانشی نامیده می شود و دارای دیمانسیون انرژی بر واحد جرم است . چون \mathbf{g} فقط تابع r است ، V نیز فقط تابع r خواهد بود . با قرار دادن \mathbf{g} از معادله (۲۶-۱۰) در معادله (۲۹-۱۰) ، خواهیم داشت

$$-\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r = -\frac{dV}{dr} \hat{\mathbf{u}}_r$$

که با انتگرال گیری نتیجه می دهد

$$V(r) = -\frac{GM}{r} \quad (۳۰-۱۰)$$

لازم نیست که در معادله (۳۰-۱۰) یک ثابت انتگرال گیری داشته باشیم زیرا فرض کرده ایم که وقتی $r \rightarrow \infty$ داریم $V(r) \rightarrow 0$.

پتانسیل گرانشی حاصل از یک توزیع جرم پیوسته M می تواند به صورت زیر نوشته

شود

$$V(r) = - \int_{V'} \frac{G\rho(\mathbf{r}')}{r} dV' \quad (۳۱-۱۰)$$

این بحث را می‌توانیم به صورت زیر خلاصه کنیم :
نیرو :

$$\mathbf{F} = - \int_{V'} G \frac{m\rho(\mathbf{r})}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r dV' \quad (۷-۱۰)$$

انرژی پتانسیل :

$$U(r) = - \int_{V'} \frac{Gm\rho(\mathbf{r})}{r} dV' \quad (۲۵-۱۰)$$

میدان گرانشی :

$$\mathbf{g} = - \int_{V'} \frac{G\rho(\mathbf{r})}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r dV' \quad (۲۷-۱۰)$$

پتانسیل گرانشی :

$$V(r) = - \int_{V'} \frac{G\rho(\mathbf{r})}{r} dV' \quad (۳۱-۱۰)$$

همچنین

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} \quad (۱۰-۳۲ الف)$$

$$U = mV \quad (۱۰-۳۲ ب)$$

$$\mathbf{g} = -\nabla V = -\text{grad } V \quad (۱۰-۳۲ پ)$$

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -\text{grad } U \quad (۱۰-۳۲ ت)$$

هر وقت یک جرم m در میدان M قرار بگیرد معمول است که از انرژی پتانسیل جرم m صحبت شود ، اگرچه چنین انرژی پتانسیلی در میدان نهفته است نه در خود جرم .

۱۰-۳ خطوط نیرو و سطوح تراز پتانسیل (هم پتانسیل)

خطوط نیرو و خطوط هم پتانسیل در دو بُعد و سطوح هم پتانسیل در سه بُعد در روشن کردن میدان نیرو کمک بزرگی می‌کنند . یک جرم M که در فضای اطراف خود یک میدان گرانشی ایجاد می‌کند و می‌تواند به وسیله بردار میدان گرانشی \mathbf{g} توصیف شود ،

در نظر بگیریم . از یک نقطه دلخواه شروع می کنیم و قطعه خط کوچکی در جهت بردار g در این نقطه رسم می کنیم . در انتهای این قطعه خط ، قطعه خط دیگری در جهت g در این نقطه جدید رسم می کنیم . این فرآیند را ادامه می دهیم و وقتی این قطعه خطهای کوچک را به هم وصل کنیم یک منحنی هموار یا منحنی موسوم به خط نیرو یا خط میدان نیرو به دست می آید . می توانیم تعداد زیادی از این گونه خطوط در فضای اطراف یک جرم ، آن طور که در شکل (۱۰-۵) نشان داده شده است ، رسم کنیم . این خطوط از سطح جرم شروع شده و تا بی نهایت ادامه می یابند . برای یک جرم نقطه ای ، خطوط نیرو خطوطی مستقیم (یا خطوطی شعاعی) هستند که ، همان طور که نشان داده شده است ، تا بی نهایت ادامه می یابند ، و حال آن که برای بعضی پیکربندیهای جرمی دیگر ، همان طور که در شکل (۱۰-۶) نشان داده شده است ، ممکن است خیلی پیچیده باشند .

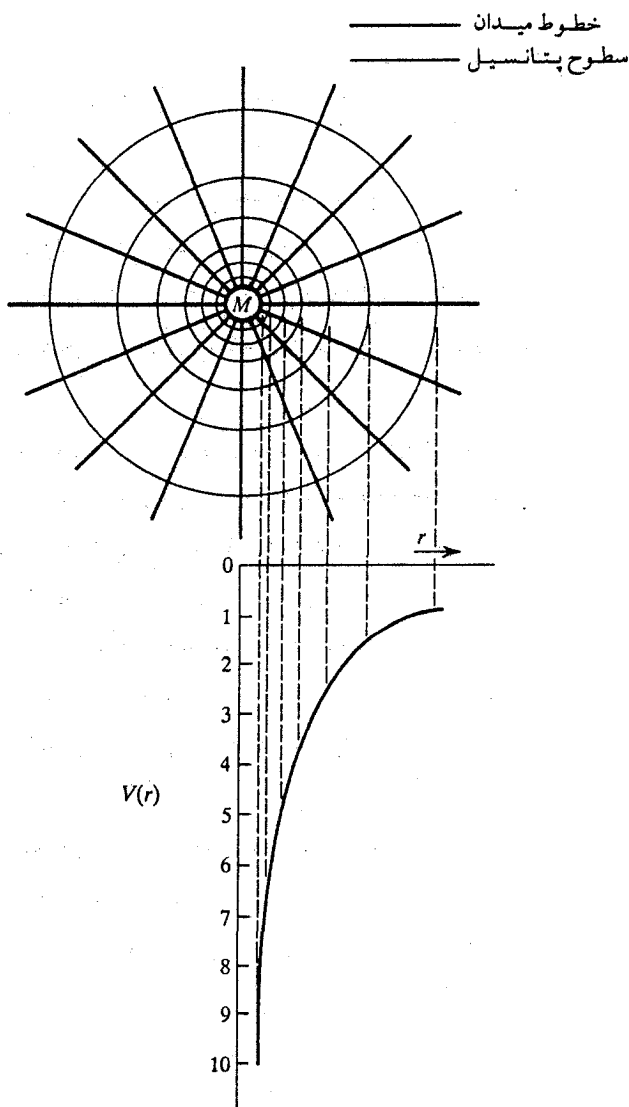
این تصویر از خطوط نیرو می تواند برای توصیف جهت و بزرگی میدان برداری g مورد استفاده قرار گیرد . مماس رسم شده در هر نقطه به خط میدان ، جهت میدان نیرو (F یا g) را در این نقطه به دست می دهد . چگالی این خطوط ، تعداد خطوطی که از واحد سطح (سطح کوچک است اما نقطه مورد نظر را در بردارد) بزرگی میدان برداری g را در آن نقطه به دست می دهد . هیچ دو خط میدانی یکدیگر را قطع نمی کنند زیرا g یک تابع یک مقدراری است ؛ یعنی ، در هر نقطه فقط یک مقدار دارد . لازم به یادآوری است که این خطوط نیرو وجود حقیقی ندارند ، اما تصویر روشنی می دهند که می توان خواص میدان نیرو را از آن استنباط کرد .

اکنون به بررسی رابطه بین خطوط میدان نیرو و سطوح پتانسیل گرانشی می پردازیم . فرض کنیم پتانسیل گرانشی V در فضای اطراف جرم m را می دانیم . چون پتانسیل گرانشی V برای هر نقطه از فضا معین است و تابعی یک مقدراری است ، می توانیم بنویسیم

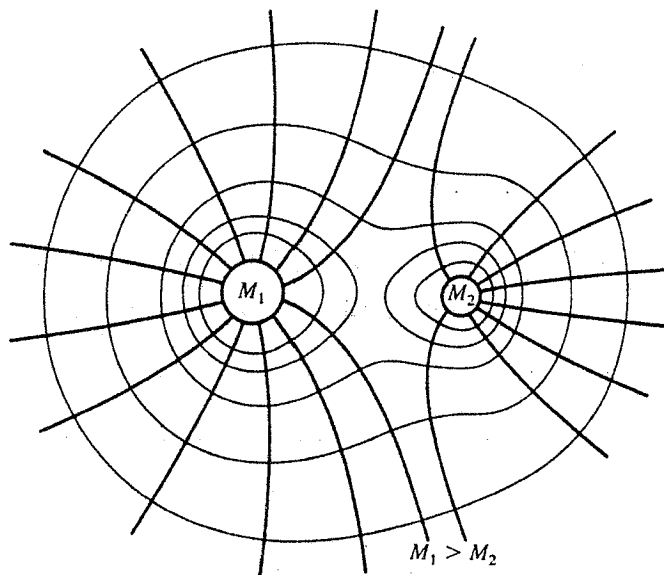
$$V = V(x, y, z) \quad (۱۰-۳۳)$$

فرض کنیم تمام نقاطی را که یک پتانسیل گرانشی V_0 دارند به یکدیگر وصل کنیم ؛ معادله نمایشگر این نقاط عبارت است از

$$V = V(x, y, z) = V_0 = \text{constant} \quad (۱۰-۳۴)$$



شکل (۱۰-۵) : خطوط میدان گرانشی (خطوط پررنگ) و سطوح هم پتانسیل ناشی از کره‌ای به جرم M . این نمودار مقدار نسبی $V(r)$ را نسبت به r نشان می‌دهد



خطوط میدان
سطوح پتانسیل

شکل (۱۰-۶) : خطوط میدان گرانشی (خطوط پرننگ) و سطوح هم پتانسیل گرانشی حاصل از دو جرم نزدیک به هم M_1 و M_2 ($M_1 > M_2$)

این معادله ، معادله یک سطح است و سطح هم پتانسیل نامیده می شود . می توانیم برای هر مقدار متفاوتی از V_0 یک سطح هم پتانسیل رسم کنیم ، که به تعداد زیادی ، یا یک گروه کاملی ، سطوح هم پتانسیل منجر می شود . در مورد دوبعدی ، به جای سطوح هم پتانسیل ، خطوط هم پتانسیل به دست می آوریم . یک بار دیگر ، چون $V(x, y, z)$ تابع یک مقداری است ، هیچ دو سطح یا دو خط هم پتانسیلی یکدیگر را قطع نمی کنند . فرض کنیم جرم m را در روی یک خط هم پتانسیل از یک نقطه به نقطه دیگر ببریم . برحسب تعریف کاری انجام نمی گیرد . این ما را به این نتیجه می رساند که خطوط نیرو در همه جا عمود (یا قائم) بر خطوط هم پتانسیل هستند . این درست است ، زیرا $g = -\nabla V$ ؛ معنی آن این است که g نمی تواند مؤلفه ای در امتداد سطح هم پتانسیل داشته باشد زیرا V ثابت است . به این ترتیب هر خط نیرو باید ، همان طور که در شکل (۱۰-۵) نشان داده شده است ، عمود بر سطح هم پتانسیل باشد .

در زیر به موشکافی این مسأله می پردازیم. ضمناً، شکل (۱۰-۶) سطوح هم پتانسیل حاصل از دو جرم M_1 و M_2 را نشان می دهد. سطوح هم پتانسیل در این مورد با معادله زیر تعریف می شوند

$$V = -G \left(\frac{M_1}{r_1} + \frac{M_2}{r_2} \right) = \text{constant} \quad (۱۰-۳۵)$$

یک جرم در نقطه P در نظر بگیریم و فرض کنیم به اندازه ds جابه جا شود. تغییرات انرژی پتانسیل آن، که برابر کار انجام شده است، با رابطه زیر داده می شود

$$dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -F_s ds \quad (۱۰-۳۶)$$

که F_s مؤلفه نیرو در جهت جابه جایی ds است. معادله (۱۰-۳۶) را می توان به صورت

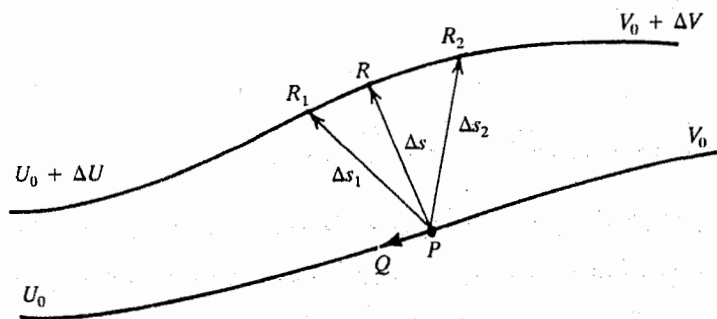
$$F_s = -\frac{dU}{ds} \quad (۱۰-۳۷)$$

نوشت. این معادله بیان می دارد که مؤلفه F در هر جهتی برابر است با منفی آهنگ تغییرات انرژی پتانسیل با فاصله در این جهت. طرف راست معادله (۱۰-۳۷) مشتق جهتی نامیده می شود زیرا مقدار آن تابع جهت ds نسبت به \mathbf{F} خواهد بود. به عنوان مثال، دو خط هم انرژی پتانسیل $U_0 + \Delta U$ و U_0 یا دو خط هم پتانسیل $V_0 + \Delta V$ و V_0 ، آن طور که در شکل (۱۰-۷) نمایش داده شده است، در نظر بگیریم. اگر از P به Q ، که روی یک خط هم پتانسیل قرار دارند، حرکت کنیم، $\frac{dU}{ds}$ صفر خواهد بود؛ اما اگر از P به R_1 یا R_2 در روی یک خط هم پتانسیل دیگر حرکت کنیم، برای مسیرهای مختلف متفاوت خواهد بود، بطوری که $\frac{dU}{ds} > \frac{dU}{ds_1}$ ، $\frac{dU}{ds} < \frac{dU}{ds_2}$ ، ... در این مورد $\frac{dU}{ds}$ وقتی بیشینه خواهد بود که ds کوتاهترین راه باشد و در نتیجه عمود بر خط هم پتانسیل در آن نقطه باشد. جهت خاصی که برای آن $\frac{dU}{ds}$ بیشینه است جهت خط نیرو، و بیشینه بزرگی $\frac{dU}{ds}$ بزرگی بردار نیرو در آن نقطه است. بیشینه مقدار $\frac{dU}{ds}$ و جهت آن گرادیان انرژی پتانسیل نامیده می شود و برابر است با نیروی \mathbf{F} ؛ یعنی،

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U \quad (۱۰-۳۸)$$

چون $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ و $U = mV$ ، می توانیم بنویسیم

$$\mathbf{g} = -\text{grad } V = -\nabla V \quad (۱۰-۳۹)$$



شکل (۷-۱۰) گرادیان انرژی پتانسیل . بزرگی گرادیان $\Delta U/\Delta s$ است

۴-۱۰ محاسبه میدان گرانشی و پتانسیل گرانشی

با محاسبه نیروی گرانشی بین یک لایه کروی یکنواخت به جرم M و یک جرم نقطه ای m شروع می کنیم . نشان خواهیم داد که هر لایه کروی را می توان همانند یک جرم نقطه ای واقع در مرکز لایه در نظر گرفت . در واقع ، این مطلب برای هر توزیع متقارن کروی ماده صدق می کند . در هر کدام از این وضعیتها ، به جای محاسبه نیرو (که یک کمیّت برداری است) راحت تر است پتانسیل گرانشی را (که یک کمیّت نرده ای است) محاسبه کنیم . وقتی پتانسیل گرانشی دانسته شد ، نیروی گرانشی را می توان از آن محاسبه کرد . ما هر دو روش را دقیقاً بررسی خواهیم کرد .

لایه کروی

یک لایه نازک یکنواخت به جرم M و شعاع R ، برابر شکل (۷-۱۰) ، در نظر بگیریم . ذره ای به جرم m در خارج از لایه در نقطه P به فاصله r ($r > R$) از مرکز لایه قرار گرفته است . لایه را به تعداد زیادی حلقه های دایره ای ، شبیه حلقه های هاشور زده در شکل ، تقسیم می کنیم . می توانیم نیروی بین یکی از این حلقه ها و جرم m را محاسبه کنیم و سپس روی تمام حلقه ها جمع بندی کنیم . همان طور که در شکل نشان داده شده است ، پهنای حلقه های هاشور زده $R d\theta$ ، شعاع حلقه $R \sin \theta$ ، محیط حلقه $2\pi R \sin \theta$ ، و سطح نوار حلقوی یا نوار هاشور زده

$$dA = (2\pi R \sin \theta) R d\theta = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta \quad (۴۰-۱۰)$$

است . اگر σ چگالی ماده بر واحد سطح لایه باشد ، جرم کل لایه عبارت است از

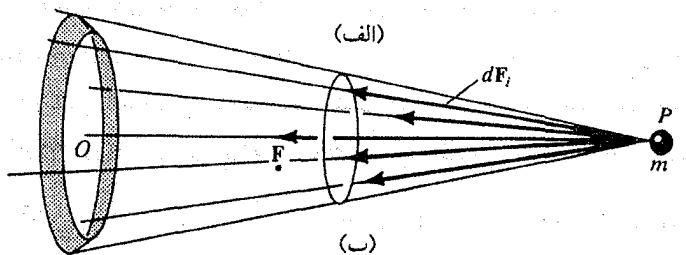
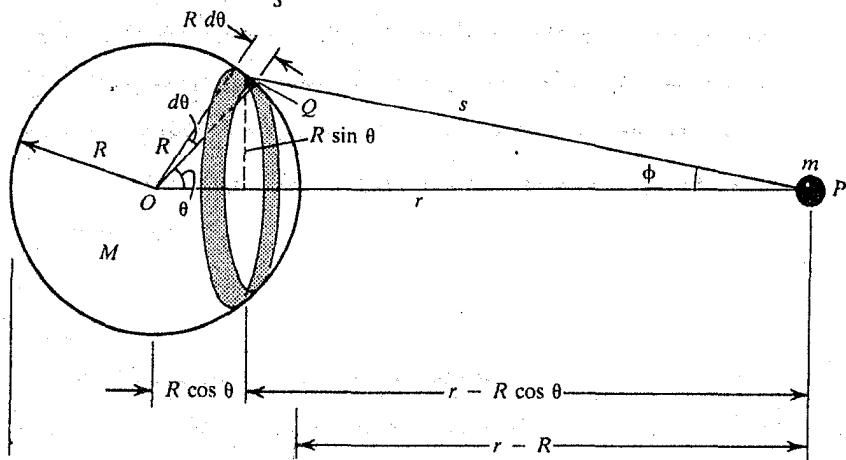
$$M = (4\pi R^2)\sigma, \quad \sigma = \frac{M}{4\pi R^2} \quad (۴۱-۱۰)$$

و جرم dM حلقه هاشور خورده عبارت است از

$$dM = \sigma dA = \sigma 2\pi R^2 \sin \theta d\theta = \frac{M}{2} \sin \theta d\theta \quad (۴۲-۱۰)$$

فاصله نقطه Q یا هر نقطه دیگری روی حلقه هاشور خورده از جرم نقطه ای m در P برابر با s است. نیروی dF_i وارد به m از طرف قسمت کوچکی از این حلقه، مانند قسمت نزدیک Q ، در جهت از m به همین قسمت است (رک شکل ۱۰-۸ ب). این نیرو می تواند به مؤلفه عرضی $dF \sin \phi$ ، که بر PO عمود است، و مؤلفه دیگر $dF \cos \phi$ ، که موازی با PO است تجزیه شود. به علت تقارن وضعیت، جمع تمام مؤلفه های عرضی حاصل از تمام حلقه صفر است، و جمع تمام مؤلفه های موازی با PO می دهد

$$dF = \sum dF_i = \sum \frac{Gm dM}{s^2} \cos \phi \quad (۴۳-۱۰)$$



شکل (۸-۱۰): نیروی گرانشی بین جرم نقطه ای m و لایه کروی به جرم M و شعاع R

یا ، با قرار دادن به جای dM ، داریم

$$dF = \frac{GMm}{2s^2} \sin \theta \, d\theta \cos \phi \quad (۴۴-۱۰)$$

نیروی حاصل از کل لایه برابر است با

$$F = \int dF = \int_0^\pi \frac{GMm \sin \theta \, d\theta}{2s^2} \cos \phi$$

یا

$$F = GMm \int_0^\pi \frac{\cos \phi \sin \theta \, d\theta}{2s^2} \quad (۴۵-۱۰)$$

از مثلث OPQ ، با استفاده از قانون کسینوسها ، داریم

$$s^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta \quad (۴۶-۱۰)$$

چون r و R ثابتند ، مشتق گیری نتیجه می دهد

$$2s \, ds = 2rR \sin \theta \, d\theta \quad (۴۷-۱۰)$$

به همین نحو ، از همین مثلث OPQ خواهیم داشت

$$R^2 = s^2 + r^2 - 2sr \cos \phi$$

یا

$$\cos \phi = \frac{s^2 + r^2 - R^2}{2sr} \quad (۴۸-۱۰)$$

با قرار دادن $\sin \theta \, d\theta$ و $\cos \phi$ از معادلات (۴۷-۱۰) و (۴۸-۱۰) در معادله (۴۵-۱۰) و تغییر

حدود ، با استفاده از (۴۶-۱۰) ، از $0 \rightarrow \pi$ به $r+R \rightarrow r-R$ ، به دست می آوریم

$$\begin{aligned} F &= \frac{GMm}{4r^2R} \int_{r-R}^{r+R} \left(\frac{s^2 + r^2 - R^2}{s^2} \right) ds \\ &= \frac{GMm}{4r^2R} \int_{r-R}^{r+R} \left(1 + \frac{r^2 - R^2}{s^2} \right) ds \end{aligned} \quad (۴۹-۱۰)$$

که پس از انتگرال گیری نتیجه می دهد

$$F = \frac{GMm}{r^2} \quad (۵۰-۱۰)$$

در نمادگذاری برداری ، این معادله می تواند به صورت

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r, \quad r > R \quad (۱۰-۵۱ \text{ الف})$$

و

$$\mathbf{g} = -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r, \quad r > R \quad (۱۰-۵۱ \text{ ب})$$

نوشته شود که $\hat{\mathbf{u}}_r$ بردار یکه شعاعی از مبدأ O است . این نتیجه نشان می دهد که یک لایه کروی یکنواخت چنان عمل می کند که گویی تمام جرم لایه در مرکز آن متمرکز شده است . هر جسم کروی توپر یکنواخت را می توان به صورت تعداد زیادی لایه کروی متحدالمركز در نظر گرفت . هر لایه را می توان به گونه ای در نظر گرفت که گویی جرم آن در مرکز متمرکز شده است ؛ در نتیجه می توان جرم کل کره را در مرکز آن در نظر گرفت .

برای محاسبه نیروی وارد به جرم m واقع در داخل کره ، تنها کاری که باید بکنیم تغییر حد پایینی $r-R$ به $r+r$ و حد بالایی $r+R$ به $R+r$ است . بنابراین

$$F = \frac{GMm}{4r^2R} \int_{R-r}^{R+r} \left(1 + \frac{r^2 - R^2}{s^2}\right) ds$$

که پس از انتگرال گیری نتیجه می دهد

$$F = \frac{GMm}{4r^2R} \left(s + \frac{R^2 - r^2}{s}\right) \Big|_{R-r}^{R+r} = 0$$

بنابراین

$$F = 0 \quad \text{و} \quad g = 0, \quad r < R \quad (۱۰-۵۲)$$

باید به خاطر داشت که این نتیجه (برای $r < R$) تنها برای یک لایه کروی درست است نه برای یک کره توپر .

با استفاده از رابطه (۱۰-۱۶) ، یعنی

$$\Delta U = -\int_{r_A}^{r_B} f(r) dr = -\int_{r_A}^{r_B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (۱۰-۱۶)$$

و معادلات (۱۰-۵۱ الف) و (۱۰-۵۲) می توانیم انرژی پتانسیل را به صورت زیر محاسبه کنیم

$$U = - \int \left(- \frac{GMm}{r^2} \right) dr = - \frac{GMm}{r}, \quad r > R \quad (۵۳-۱۰)$$

$$U = \text{constant} = C_1, \quad r < R$$

مقدار ثابت را می‌توانیم با قرار دادن $r = R$ در معادله (۵۳-۱۰) ارزیابی کنیم؛ یعنی،

$$U = - \frac{GMm}{R} = C_1, \quad r < R \quad (۵۴-۱۰)$$

و انرژی پتانسیل $V (= \frac{U}{m})$ عبارت است از

$$V = - \frac{GM}{r}, \quad r > R \quad (۵۵-۱۰)$$

$$V = \text{constant} = C_2 = - \frac{GM}{R}, \quad r < R \quad (۵۶-۱۰)$$

تغییرات g و V برای این مورد در شکل (۹-۱۰) نشان داده شده است.

نتایج پیشین را می‌توانیم نخست با محاسبه انرژی پتانسیل $U(r)$ و سپس با محاسبه

F از رابطه $F = - \frac{du}{dr}$ ، آن‌طور که بعداً نشان خواهیم داد، به دست آوریم.

انرژی پتانسیل جرم m در میدان یک حلقه دایره‌ای به جرم dM ، که با رابطه (۴۲-۱۰)

داده شده است، در نقطه P به فاصله s (تمام نقاط حلقه از P به یک فاصله اند) عبارت است از

(رک شکل ۸-۱۰)

$$dU = \frac{Gm dM}{s} = - \frac{GMm}{2} \frac{\sin \theta d\theta}{s} \quad (۵۷-۱۰)$$

و انرژی پتانسیل کل m در P برابر است با

$$U(r) = - \frac{GMm}{2} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{s} \quad (۵۸-۱۰)$$

از مثلث OPQ در شکل (۸-۱۰) داریم

$$s^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta \quad (۴۶-۱۰)$$

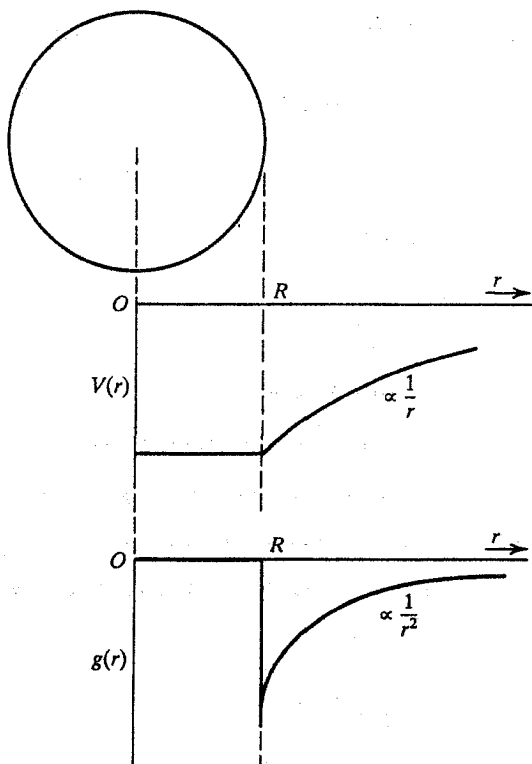
پس از مشتق‌گیری، با توجه به این که r و R ثابتند، و مرتب‌سازی خواهیم داشت

$$\frac{\sin \theta d\theta}{s} = \frac{ds}{Rr}$$

قرار دادن این عبارت در معادله (۵۸-۱۰) نتیجه می دهد

$$U(r) = -\frac{GMm}{2Rr} \int ds \quad (۵۹-۱۰)$$

حدود انتگرال گیری بستگی به مکان نقطه m ، همان طور که بعداً بحث خواهد شد، دارد.



شکل (۹-۱۰): تغییرات g و V در مورد یک لایه کروی

مورد (۱): $r > R$ ؛ یعنی جرم نقطه ای m در P در خارج لایه کروی است. مانند قبل،

حدود $0 \rightarrow \pi$ به $s_{\min} = r - R \rightarrow s_{\max} = r + R$ تغییر می کند. به این ترتیب

$$U(r) = -\frac{GMm}{2Rr} \int_{r-R}^{r+R} ds = -\frac{GMm}{2Rr} 2R$$

که می دهد

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}, \quad r > R \quad (۶۰-۱۰)$$

یعنی ، انرژی پتانسیل به شکل $\frac{1}{r}$ تغییر می کند ، و

$$F = -\frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr} \left(-\frac{GMm}{r} \right)$$

می دهد

$$F = -\frac{GMm}{r^2}, \quad r > R \quad (۶۱-۱۰)$$

همچنین می توانیم بنویسیم

$$V(r) = -\frac{GM}{r}, \quad r > R \quad (۶۲-۱۰)$$

و

$$g(r) = -\frac{GM}{r^2}, \quad r > R \quad (۶۳-۱۰)$$

مورد (۲) : $r < R$ ؛ یعنی ، جرم نقطه ای m در P در داخل لایه است . در نتیجه حدود

انتگرال گیری $0 \rightarrow \pi \rightarrow 0$ به $s_{\text{maz}} = R + r \rightarrow s_{\text{min}} = R - r$. بنابراین

$$U(r) = -\frac{GMm}{2Rr} \int_{R-r}^{R+r} ds = -\frac{GMm}{2Rr} 2r$$

که می دهد

$$U(r) = -\frac{GMm}{R}, \quad r < R \quad (۶۴-۱۰)$$

یعنی ، پتانسیل داخل لایه ثابت است ، و

$$F = -\frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr} \left(-\frac{GMm}{R} \right) = 0 \quad (۶۵-۱۰)$$

$$F = 0, \quad r < R$$

همچنین می توانیم بنویسیم

$$V(r) = -\frac{GM}{R}, \quad r < R \quad (۶۶-۱۰)$$

$$g(r) = 0, \quad r < R \quad (۶۷-۱۰)$$

این نتایج در شکل (۱۰-۹) ، همان طور که قبلاً ذکر شد ، به صورت نمودار ترسیم شده اند .

کره توپر

نتایج به دست آمده برای لایه کروی می توانند به یک کره توپر گسترش داده شوند . تنها شرط این است که توزیع ماده ، یعنی چگالی ، تقارن کروی داشته باشد . به علاوه ، اگر چگالی یکنواخت باشد مسأله ساده می شود .

مورد (۱) : $r > R$ ؛ یعنی ، جرم نقطه ای m در خارج یک کره توپر به جرم M و شعاع R است . کره می تواند به تعداد زیادی لایه های نازک تقسیم شود که هر کدام طوری عمل می کنند که گویی جرم لایه در مرکز متمرکز شده است . مستقل از تغییرات چگالی با فاصله شعاعی (یعنی ، متقارن آمانه لزوماً یکنواخت) ، مانند مورد یک لایه ، به دست می آوریم

$$F = -\frac{GMm}{r^2}, \quad r > R \quad (68-10)$$

$$g(r) = -\frac{GM}{r^2}, \quad r > R \quad (69-10)$$

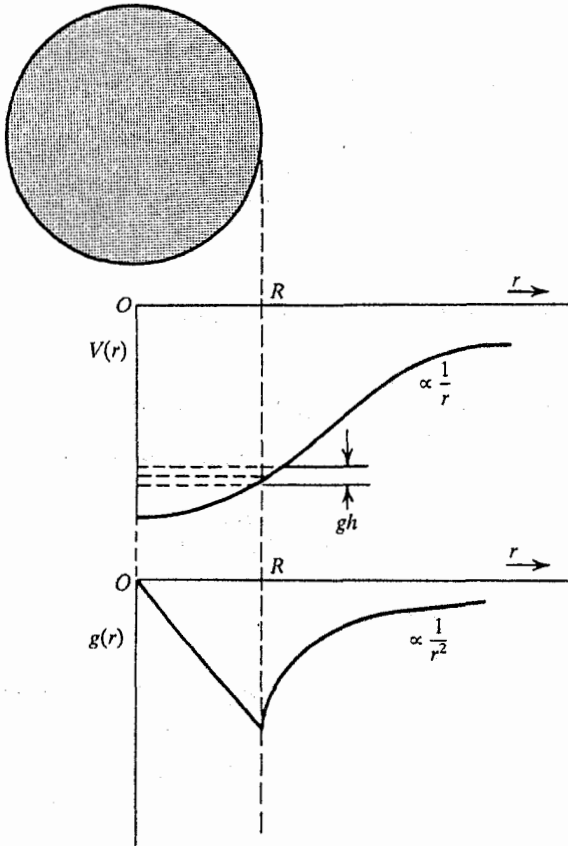
$$U(r) = -\frac{GMm}{r}, \quad r > R \quad (70-10)$$

$$V(r) = -\frac{GM}{r}, \quad r > R \quad (71-10)$$

نمودارهای $V(r)$ و $g(r)$ در شکل (۱۰-۱۰) نمایش داده شده اند .

مورد (۲) : $r < R$ ؛ یعنی ، جرم m در داخل یک کره توپر به جرم M است . یک بار دیگر لایه های کروی را ترسیم می کنیم . تمام لایه هایی که خارج از کره ای به شعاع r هستند در نیرو سهمی ندارند . در حالی که لایه های داخل r در ایجاد نیرو شرکت دارند . برای سادگی ، فرض کنیم چگالی یکنواخت است ، یعنی کره همگن است . مقدار نسبی جرم داخل کره ای به شعاع r (رک به شکل ۱۰-۱۱) عبارت است از

$$\frac{(4\pi/3)r^3\rho}{(4\pi/3)R^3\rho} = \frac{r^3}{R^3}$$

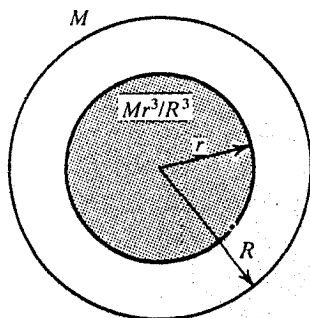


شکل (۱۰-۱۰): نمودارهای $V(r)$ و $g(r)$ حاصل از یک کره توپر همگن به شعاع R

و جرم M ، نسبت به r

که ρ چگالی ماده است. به این ترتیب جرم متمرکز در مرکز Mr^3/R^3 است. در نتیجه نیرو در r با عبارت زیر داده می شود

$$F(r) = -\frac{Gm}{r^2} \left(\frac{Mr^3}{R^3} \right) = -\frac{GMm}{R^3} r, \quad r < R \quad (۷۲-۱۰)$$



شکل (۱۰-۱۱) : مقدار نسبی جرم کره‌ای به شعاع r در داخلی یک کره همگن به شعاع R و جرم M

انرژی پتانسیل $U(r)$ یک جرم در داخل یک کره را می‌توانیم با استفاده از معادله (۱۰-۷۲) محاسبه کنیم، به دست می‌آوریم

$$U(r) - U(R) = - \int_r^R F dr = - \int_r^R \frac{GMm}{R^3} r dr$$

یعنی ،

$$U(r) - U(R) = - \frac{GMm}{2R^3} (R^2 - r^2) \tag{۱۰-۷۳}$$

اما در $r=R$ ، از معادله (۱۰-۷۰) ، نتیجه می‌گیریم

$$U(R) = - \frac{GMm}{R}$$

با قرار دادن این عبارت در معادله (۱۰-۷۳) ، خواهیم یافت

$$U(r) = - \frac{GMm}{2R^3} (3R^2 - r^2), \quad r < R \tag{۱۰-۷۴}$$

یا

$$V(r) = - \frac{GM}{2R^3} (3R^2 - r^2), \quad r < R \tag{۱۰-۷۵}$$

می‌توانیم $U(r)$ و $V(r)$ در $r=0$ ، یعنی ، در مرکز را محاسبه کنیم

$$U(0) = - \frac{3GMm}{2R}, \quad r=0 \tag{۱۰-۷۶}$$

و

$$V(0) = - \frac{3GM}{2R}, \quad r=0 \tag{۱۰-۷۷}$$

نمودارهای $g(r)$ و $V(r)$ برای $r > R$ و $r < R$ در شکل (۱۰-۱۰) نشان داده شده اند .

لایه با ضخامت معین

یک لایه کروی با ضخامت معین به شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 ، برابر شکل (۱۰-۱۲) ، در نظر بگیریم . می خواهیم پتانسیل را در نقطه P به فاصله r از مرکز لایه حساب کنیم . برحسب تعریف ، پتانسیل $V(r)$ در P عبارت است از

$$V(r) = -G \int_{V'} \frac{\rho(R)}{s} dV' \quad (۷۸-۱۰)$$

که dV' یک عنصر حجمی در R است .

$$dV' = (R \sin \theta d\phi)(R d\theta) dR = R^2 \sin \theta dR d\theta d\phi \quad (۷۹-۱۰)$$

به علت تقارن نسبت به خط واصل از O به P ، زاویه سمتی ϕ را می توان با انتگرال گیری روی $d\phi$ ، یعنی $\int d\phi = 2\pi$ ، حذف کرد . همچنین برای یک کره همگن داریم ، ثابت $\rho(R) = \rho$. بنابراین

$$V(r) = -2\pi G\rho \int_{R_1}^{R_2} R^2 dR \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{s} d\theta \quad (۸۰-۱۰)$$

از مثلث OPQ ، شکل (۱۰-۱۲) ، داریم

$$s^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta \quad (۸۱-۱۰)$$

که در آن r و R ثابتند . در نتیجه مشتق گیری می دهد

$$2s ds = 2Rr \sin \theta d\theta$$

$$\frac{\sin \theta d\theta}{s} = \frac{ds}{Rr}$$

با قرار دادن این عبارت در معادله (۸۰-۱۰) نتیجه می گیریم

$$V(r) = -2\pi G\rho \int_{R_1}^{R_2} R^2 dR \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} \frac{ds}{Rr} \quad (۸۲-۱۰)$$

از معادله (۸۱-۱۰) دیده می شود که $\theta = 0$ می دهد $s_{\min} = r - R$ و $\theta = \pi$ می دهد $s_{\max} = r + R$.

بنابراین برای $r > R_2$

$$V(r) = -\frac{2\pi G\rho}{r} \int_{R_1}^{R_2} R dR \int_{r-R}^{r+R} ds \quad (۸۳-۱۰)$$

$$= -\frac{4\pi G\rho}{r} \int_{R_1}^{R_2} R^2 dR$$

یعنی ،

$$V(r) = -\frac{4\pi}{3} \frac{G\rho}{r} (R_2^3 - R_1^3) \quad (۸۴-۱۰)$$

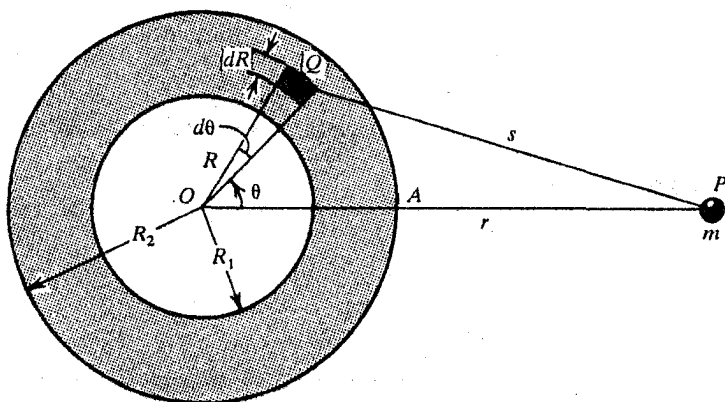
چون

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho (R_2^3 - R_1^3), \quad (۸۵-۱۰)$$

برای پتانسیل گرانشی در خارج لایه عبارت زیر را به دست می آوریم

$$V(r) = -\frac{GM}{r}, \quad r > R_2 \quad (۸۶-۱۰)$$

به این ترتیب پتانسیل گرانشی در هر نقطه خارج یک لایه یا کره با توزیع جرم متقارن کروی مستقل از توزیع است . این لایه یا کره طوری رفتار می کند که گویی تمام جرم آن در مرکز متمرکز شده است .



شکل (۱۲-۱۰) : پتانسیل و نیروی وارد به جرم m در P ، از طرف یک لایه با ضخامت معین

برای یک نقطه در داخل لایه ، با تغییر حدود در معادله (۱۰-۸۳) (آن طور که برای مورد پیشین انجام دادیم) ، برای $r < R_1$ ، به دست می آوریم

$$\begin{aligned} V(r) &= -\frac{2\pi G\rho}{r} \int_{R_1}^{R_2} R dR \int_{R-r}^{R+r} ds \\ &= -4\pi G\rho \int_{R_1}^{R_2} R dR \end{aligned} \quad (۸۷-۱۰)$$

که می دهد

$$V(r) = -2\pi G\rho(R_2^2 - R_1^2) = \text{constant}, \quad r < R_1 \quad (۸۸-۱۰)$$

به این ترتیب پتانسیل داخل ($r < R_1$) لایه ثابت و مستقل از مکان است .

محاسبه پتانسیل داخل لایه ($R_1 < r < R_2$) کمی مشکل است . اما یک روش ساده برخوردار با این مسأله عبارت است از تغییر حد پایینی با گذاردن r به جای R_1 در معادله (۱۰-۸۷) برای $r < R_1$ ، و تغییر حد بالایی با گذاردن r به جای R_2 در معادله (۱۰-۸۳) برای $r > R_2$ ، به این ترتیب ، ترکیب این دو ، پتانسیل در داخل لایه را به صورت زیر به دست می دهد

$$V(R_1 < r < R_2) = -2\pi G\rho(R_2^2 - r^2) - \frac{4\pi G\rho}{3r} (r^3 - R_1^3)$$

یعنی ،

$$V(R_1 < r < R_2) = -4\pi G\rho \left(\frac{R_2^2}{2} - \frac{R_1^3}{3r} - \frac{r^2}{6} \right), \quad R_1 < r < R_2 \quad (۸۹-۱۰)$$

بردار شدت میدان g را می توان از رابطه $g = -\frac{dV}{dr}$ برای هر سه ناحیه ، با استفاده از معادلات (۱۰-۸۶) ، (۱۰-۸۹) ، و (۱۰-۸۸) محاسبه کرد ، یعنی ،

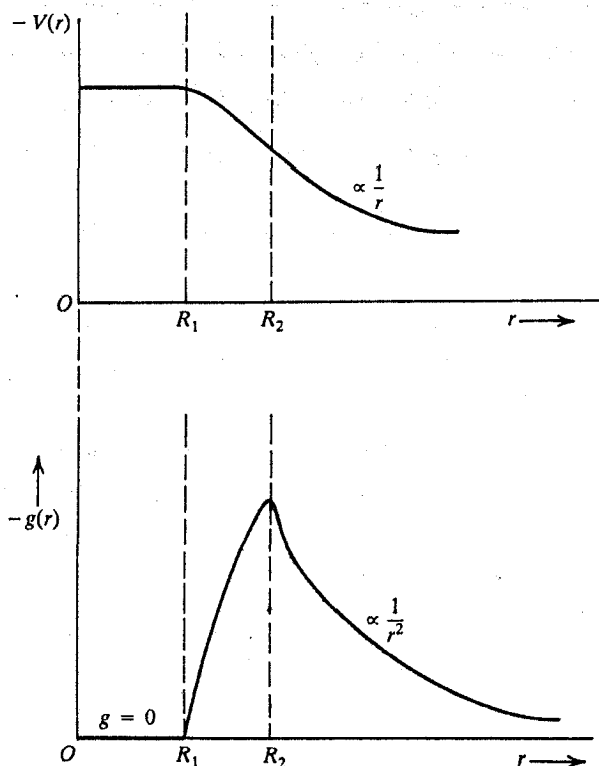
$$g(r) = -\frac{GM}{r^2}, \quad r > R_2 \quad (۹۰-۱۰)$$

$$g(r) = \frac{4\pi G\rho}{3} \left(\frac{R_1^3}{r^2} - r \right), \quad R_1 < r < R_2 \quad (۹۱-۱۰)$$

$$g(r) = 0, \quad r < R_1 \quad (۹۲-۱۰)$$

نمودارهای $V(r)$ با استفاده از معادلات (۱۰-۸۶) ، (۱۰-۸۸) ، و (۱۰-۸۹) ، و نمودارهای $g(r)$ با استفاده از معادلات (۱۰-۹۰) ، (۱۰-۹۱) ، و (۱۰-۹۲) در شکل (۱۰-۱۳) نمایش داده شده اند . اکنون چند مشاهده مهم انجام دهیم . تابع پتانسیل $V(r)$ که در شکل (۱۰-۱۳)

نموده شده است، در نقاط $r = R_1$ و $r = R_2$ پیوسته است، و گرادیان آن، که نیروی $g(r)$ است، نیز، همان طور که نشان داده شده است، پیوسته است. اگر تابع پتانسیل $V(r)$ پیوسته نبود، مشتق آن بی نهایت می شد. یعنی، نیرو بی نهایت می بود، که معنایی ندارد. به این ترتیب برای این که نیرو معنایی داشته باشد باید تابع پتانسیل پیوسته باشد (توجه کنیم که مشتق تابع نیرو پیوسته نیست). پیوسته بودن تابع پتانسیل می تواند از نظر ریاضی به طریق زیر مشاهده شود. اگر در معادله (۱۰-۸۹) قرار دهیم $r = R_2$ ، همان نتیجه ای را به دست می آوریم که از معادله (۱۰-۸۴) به دست می آوریم. به همین شیوه، اگر در معادله (۱۰-۸۹) قرار دهیم $r = R_1$ ، به همان نتیجه ای می رسیم که از معادله (۱۰-۸۸) به دست می آوریم.



شکل (۱۰-۱۳): تغییرات $V(r)$ و $g(r)$ نسبت به r برای لایه کروی با ضخامت معین

مثال (۱۰-۱): یک قرص دایره‌ای همگن به شعاع R ، ضخامت t ، و چگالی متوسط ρ (جرم بر واحد حجم) در نظر بگیرید. پتانسیل گرانشی و شدت میدان گرانشی را در یک نقطه خارج قرص و روی محور متقارن محاسبه کنید.

یک قرص دایره‌ای به شعاع R در شکل (مثال ۱۰-۱) نشان داده شده است. جرم آن با رابطه

$$M = \rho V' = \rho(\pi R^2)t \quad (1)$$

داده می‌شود که t ضخامت قرص است. همان طور که در شکل (مثال ۱۰-۱ ب) نشان داده شده است، یک حلقه به شعاع r و پهنای dr در نظر بگیریم. تمام اجزای کوچک این حلقه از نقطه P به یک فاصله s اند. اکنون پتانسیل حاصل از این حلقه را در نقطه P حساب می‌کنیم. نقطه P از تمام اجزای این حلقه به یک فاصله است و در روی محور قرص قرار دارد. جرم حلقه عبارت است از

$$dm = \rho dV' = \rho(2\pi r dr t) \quad (2)$$

در نتیجه پتانسیل حاصل از این حلقه در نقطه P برابر است با

$$dV = -\frac{G dm}{s} = -\frac{G2\pi r t dr}{(z^2 + r^2)^{1/2}} \quad (3)$$

از این رابطه می‌توان انتگرال گیری کرد و نتیجه گرفت

$$\begin{aligned} V &= \int dV = -2\pi\rho Gt \int_0^R \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{1/2}} \\ &= -2\pi\rho Gt[(z^2 + R^2)^{1/2} - z] \end{aligned} \quad (4)$$

ساده‌ترین راه برای محاسبه g در P گرادیان گرفتن از V در معادله (۴) است. از تقارن وضعیت روشن است که g در نقطه P باید عمود و رو به پایین باشد؛ در نتیجه می‌توانیم بزرگی g را به صورت زیر بنویسیم

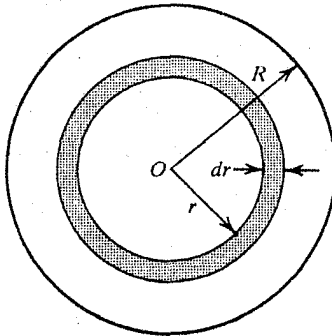
$$g = -\frac{\partial V}{\partial z} = 2\pi\rho Gt \left(1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}}\right) \quad (5)$$

این نتیجه را مستقیماً و با روش معمولی می‌توان به دست آورد. دو جزء حلقه در A و B را در شکل (مثال ۱۰-۱ ب) در نظر بگیریم. شدتهای حاصل از این دو جزء در A و B عبارتند از g_1 و g_2 ، که به ترتیب در امتداد خطوط PA و PB قرار دارند. وقتی g_1 و g_2

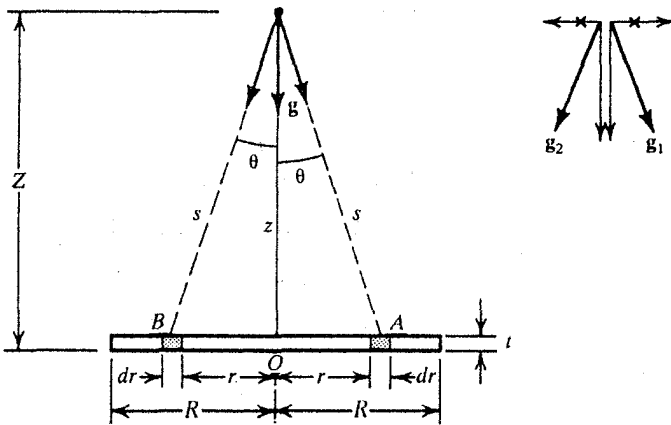
تجزیه شدند ، مؤلفه های افقی یکدیگر را حذف می کنند . به علت تقارن وضعیت ، تمام مؤلفه های افقی یکدیگر را حذف می کنند و مؤلفه های قائم با یکدیگر جمع می شوند و می دهند

$$g = - \int G \frac{dm}{s^2} \cos \theta = \int_{r=0}^R - \frac{2\pi\rho Gtzr dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \quad (۶)$$

که پس از انتگرال گیری معادله (۷) را به دست می دهد . جهت g در امتداد محور Z و به طرف قرص است .



(الف)



(ب)

شکل (مثال - ۱۰-۱)

تمرین (۱۰-۱): مثال بالا را برای یک حلقه دایره ای به شعاع R و چگالی خطی λ که جرم آن مساوی با جرم قرص فوق است تکرار کنید و دو نتیجه را با هم مقایسه کنید.

۱۰-۵ قانون گاوس

قانون گاوس بطور گسترده ای در ارتباط با میدانهای الکتریکی در الکتروستاتیک ساکن به کار می رود. در واقع، قانون گاوس به هر وضعیتی که نیروی عکس مجذور فاصله را وارد می کند قابل اعمال است. گفتنی است که قانون گاوس شکل فشرده ای از بیان قانون عکس مجذور فاصله است. چون نیروی گرانشی یک نیروی عکس مجذور فاصله است، قانون گاوس را اعمال می کنیم و به فایده آن در محاسبه شدت میدان گرانش g در موارد ساده پی خواهیم برد.

یک جرم نقطه ای M را در نظر بگیریم. میدان گرانشی g در فاصله r از M با عبارت زیر داده می شود

$$g(r) = -\frac{GM}{r^2} \hat{u}_r \quad (10-93)$$

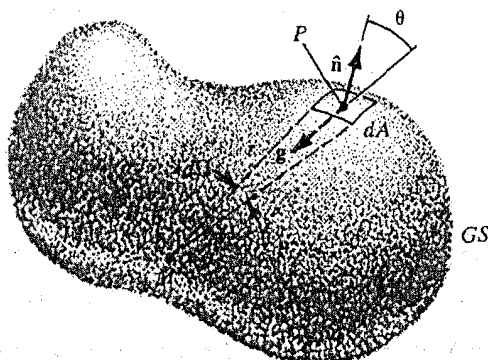
کره ای به شعاع r و به مرکز M رسم کنیم. جهت شعاعی رو به بیرون را مثبت می گیریم. شار ϕ ی میدان گرانشی g از سطح کره، با استفاده از معادله (۱۰-۹۳)، به صورت زیر تعریف می شود

$$\phi = 4\pi r^2 g_r = -4\pi GM \quad (10-94)$$

که g_r مؤلفه شعاعی g و $4\pi r^2$ مساحت سطح کره ای به شعاع r است. اکنون نشان می دهیم که شار کل حاصل از هر جرم مستقل از فاصله r است.

یک جرم M که کاملاً توسط یک سطح بسته دلخواه محصور شده است، مطابق شکل (۱۰-۱۴) نشان می دهد، در نظر می گیریم. چنین سطح بسته ای سطح گاوسی (GS) نامیده می شود. یک نقطه P در روی این سطح در نظر بگیریم که قائم بر سطح برون سوی آن با r از M به P زاویه θ می سازد. g را به دو مؤلفه، یک مؤلفه شعاعی (یا قائم) و یک مؤلفه عرضی (مؤلفه موازی با سطح)، تجزیه کنیم. تنها مؤلفه قائم است که سهمی در شار g دارد. چون مؤلفه قائم g برابر با $\cos \theta \frac{GM}{r^2}$ است، شار $d\phi$ از یک جزء سطح dA عبارت است از

$$d\phi = -\frac{GM}{r^2} \cos \theta \, dA = \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{g} \, dA \quad (95-10)$$



شکل (۱۰-۱۴): جرم \$M\$ محصور در یک سطح گاوسی (GS)

تصویر \$dA\$ روی سطح عمود بر \$\mathbf{r}\$ برابر است با \$dA \cos \theta = \mathbf{n} \cdot d\mathbf{A}\$ و \$\frac{dA \cos \theta}{r^2} = d\Omega\$، که \$d\Omega\$ زاویه فضایی است که همان طور که نشان داده شده است، \$dA\$ را از \$M\$ فرا می‌گیرد. به این ترتیب معادله (۹۵-۱۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$d\phi = -GM \, d\Omega \quad (96-10)$$

شار کل \$\phi\$ حاصل از \$\mathbf{g}\$ با انتگرال‌گیری از معادله (۹۶-۱۰)، که در آن سهم تمام اجزای زاویه حجمی در نظر گرفته شده است، به دست می‌آید. با توجه به این که زاویه فضایی کامل \$4\pi\$ است، نتیجه می‌گیریم

$$\phi = \int d\phi = -GM \int d\Omega = -4\pi GM \quad (97-10)$$

این همان نتیجه‌ای است که با استفاده از سطح کروی، معادله (۹۴-۱۰)، به دست آمد. از شکل (۱۰-۱۴) و معادلات (۹۵-۱۰) و (۹۶-۱۰) می‌توانیم نتیجه بگیریم که شار \$d\phi\$ حاصل ضرب نرده‌ای \$\mathbf{g}\$ و \$d\mathbf{A}\$ است، یعنی

$$d\phi = \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{g} \, dA \quad (98-10)$$

که \$\mathbf{n} \cdot d\mathbf{A} = dA \cos \theta\$ تصویر سطح \$dA\$ روی عمود بر \$\mathbf{r}\$ است.

اکنون بحث خود را به تعداد زیادی جرم \$M_1, M_2, M_3, \dots\$ در داخل یک سطح

بسته دلخواه گسترش می دهیم . در هر نقطه P روی این سطح ، میدان گرانشی کل عبارت است از

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3 + \dots \quad (۹۹-۱۰)$$

و شار گرانشی کل از این سطح بسته برابر است با

$$\phi = \int \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = \int \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{g} \, dA \quad (۱۰۰-۱۰)$$

ترکیب معادلات (۹۹-۱۰) و (۱۰۰-۱۰) می دهد

$$\begin{aligned} \phi &= \int \mathbf{g}_1 \cdot d\mathbf{A} + \int \mathbf{g}_2 \cdot d\mathbf{A} + \dots \\ &= -4\pi G(M_1 + M_2 + \dots) \end{aligned}$$

اگر $M_{\text{total}} = M_1 + M_2 + \dots$ نتیجه می شود

$$\phi = -4\pi GM_{\text{total}} \quad (۱۰۱-۱۰)$$

معادله (۱۰۱-۱۰) بیانی از قانون گاوس است ، و اعتبار آن بر این واقعیت استوار است که نیرو از قانون عکس مجذور فاصله پیروی می کند . وقتی شار از معادله (۱۰۱-۱۰) محاسبه شد ، می توانیم معادله (۱۰۰-۱۰) را در وضعیتهای متقارن برای محاسبه \mathbf{g} ، همان طور که از مثال زیر روشن می شود ، به کار ببریم .

مثال (۱۰-۴): با استفاده از قانون گاوس ، شدت میدان گرانشی حاصل از یک ورقه تخت بی نهایت با چگالی جرمی سطحی σ را در نقطه ای به فاصله x از آن محاسبه کنید .

یک سطح گاوسی به شکل یک استوانه دوار قائم ، آن طور که در شکل (مثال ۱۰-۲) نشان داده شده است ، در نظر بگیریم . مساحت سطح هر کدام از سطوح قاعده A است . شار کل از مساحتی سه سطح (راست ، چپ و خمیده) ناشی می شود و با رابطه زیر داده می شود .

$$\begin{aligned} \int \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{g} \, dA &= \int \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} \quad (۱) \\ &= \int_{\text{right}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} + \int_{\text{left}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} + \int_{\text{curved}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} \end{aligned}$$

g همیشه عمود بر ورقه خواهد بود. در روی سطح خمیده استوانه، هر عنصر، مانند dA_3 (آن طور که در شکل (مثال - ۱۰ - ۲) نشان داده شده است) عمود بر g خواهد بود؛ در نتیجه شاری از سطح خمیده نخواهیم داشت، یعنی

$$\int_{\text{curved}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = \int g dA \cos 90^\circ = 0 \quad (۲)$$

در قاعده‌ها، g همیشه، آن طور که نشان داده شده است، با سطوح پاد موازی هستند، لذا

$$\int_{\text{right}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = \int g dA \cos 180^\circ = -gA \quad (۳)$$

$$\int_{\text{left}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = \int g dA \cos 180^\circ = -gA \quad (۴)$$

بنابراین شار کل

$$\Phi = \int_{\text{total}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = -2gA \quad (۵)$$

است که A سطح هر قاعده است، و همچنین برابر با مساحت سطح ورقه محصور است. جرم ورقه محصور $M_{\text{total}} = \sigma A$ است. در نتیجه شار کل، بنابر قانون گاوس، عبارت است از

$$\Phi = -4\pi GM_{\text{total}} = -4\pi G(\sigma A) \quad (۶)$$

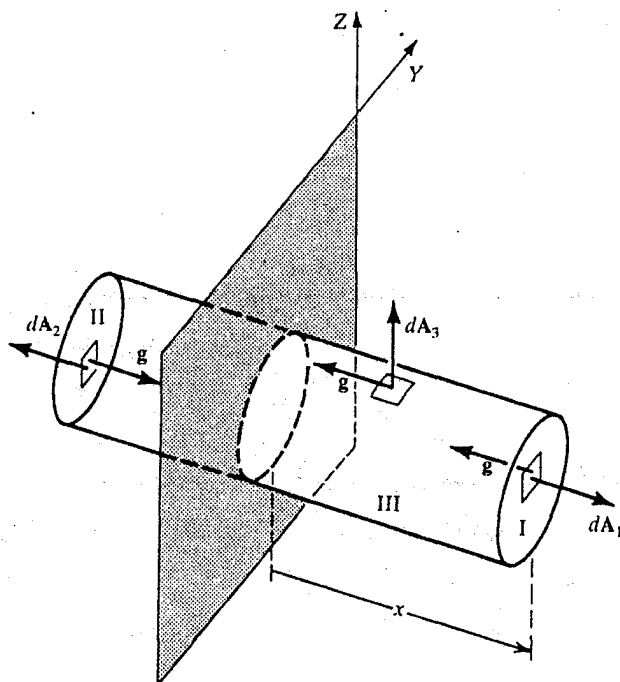
ترکیب معادلات (۵) و (۶) می‌دهد

$$-2gA = -4\pi G(\sigma A)$$

یا

$$g = 2\pi G\sigma \quad (۷)$$

به این ترتیب g مستقل از فاصله از ورقه است، یعنی، در همه جا یکی است و عمود بر ورقه و به طرف آن است.



شکل (مثال - ۱۰-۲)

تمرین (۲-۱۰): با استفاده از قانون گاوس، شدت میدان گرانشی را، درست خارج از سطح یک لایه کروی به جرم M ، شعاع R ، و چگالی سطحی σ محاسبه کنید.

۱۰-۶ معادلات میدان گرانشی

در بخش پیشین روش محاسبه g و ϕ را با استفاده از قانون گاوس برای توزیع جرمهای متقارن و همچنین با کاربرد مستقیم قانون عکس مجذور فاصله میدان گرانشی، طرح ریزی کردیم. روش کلی تری برای این کار معادلات دیفرانسیلی است که شدت میدان گرانشی $g(r)$ و پتانسیل گرانشی $V(r)$ در آنها صدق کنند. به این ترتیب، از معادله (۱۰-۲۹)، می دانیم که رابطه بین g و V باید به صورت

$$g(r) = -\nabla V(r)$$

(۱۰۲-۱۰)

باشد. با گرفتن کرل از هر دو طرف، و یادآوری این که کرل یک گرادیان صفر است، داریم

$$\nabla \times \mathbf{g} = -\nabla \times \nabla V = 0 \quad (10-103)$$

یعنی،

$$\nabla \times \mathbf{g}(\mathbf{r}) = 0 \quad (10-104)$$

این معادله برداری مجموعه ای از سه معادله دیفرانسیل است که روابط بین مؤلفه های \mathbf{g} (g_x, g_y, g_z) را به دست می دهد، یعنی

$$\frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial g_x}{\partial z} - \frac{\partial g_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} = 0 \quad (10-105)$$

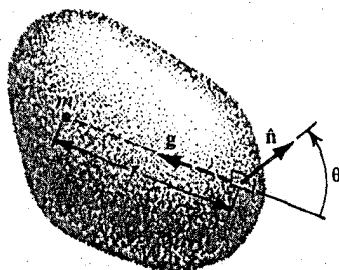
این معادلات برای هر میدان گرانشی برقرارند. برای تعیین \mathbf{g} بطور یکتا، به رابطه ای بین \mathbf{g} و توزیع جرم نیاز داریم. این کار می تواند به راه زیر صورت گیرد.

یک جرم m ، آن طور که در شکل (10-15) نشان داده شده است، محصور در یک حجم V با مساحت سطح A در نظر بگیریم. شار ϕ از این سطح عبارت است از

$$\phi = \iint_A \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{g} \, dA \quad (10-106)$$

اما ϕ همچنین با معادله (10-97) داده شده است، یعنی

$$\phi = -4\pi GM$$



شکل (10-15): جرم m در داخل یک حجم V محصور به سطح A

یا، برای یک توزیع جرم پیوسته،

$$\phi = -\iiint_{V'} 4\pi G \, dm = -\iiint_{V'} 4\pi G \rho \, dV' \quad (10-107)$$

که $dm = \rho dV'$ ، و چگالی جرمی است . از برابر قرار دادن دو معادله پیشین داریم

$$\iint_A \hat{n} \cdot \mathbf{g} \, dA = - \iiint_{V'} 4\pi G\rho \, dV' \quad (10-108)$$

قضیه دیورژانس گاوس برای هر بردار \mathbf{B} (رک فصل ۵) عبارت است از

$$\iint_A \hat{n} \cdot \mathbf{B} \, dA = \iiint_{V'} \nabla \cdot \mathbf{B} \, dV' \quad (10-109)$$

با اعمال این قضیه به طرف چپ معادله (۱۰۸-۱۰) ، خواهیم داشت

$$\iint_A \hat{n} \cdot \mathbf{g} \, dA = \iiint_{V'} \nabla \cdot \mathbf{g} \, dV' \quad (10-110)$$

با بردن این عبارت در معادله (۱۰۸-۱۰) خواهیم یافت

$$\iiint_{V'} \nabla \cdot \mathbf{g} \, dV' = - \iiint_{V'} 4\pi G\rho \, dV'$$

یا

$$\iiint_{V'} (\nabla \cdot \mathbf{g} + 4\pi G\rho) \, dV' \quad (10-111)$$

چون این رابطه برای هر حجم دلخواه V' برقرار است ، می توانیم بنویسیم

$$\nabla \cdot \mathbf{g} + 4\pi G\rho = 0$$

یا

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho \quad (10-112)$$

که رابطه خواسته شده بین \mathbf{g} و توزیع جرمی توصیف شده توسط $\rho(x, y, z)$ است . در مختصات دکارتی ، معادله (۱۱۲-۱۰) را می توان به شکل زیر نوشت .

$$\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z} = -4\pi G\rho \quad (10-113)$$

دانستن $\rho(x, y, z)$ ، با استفاده از معادلات (۱۰۵-۱۰) و (۱۱۳-۱۰) و شرط مرزی $g \rightarrow 0$ در $r \rightarrow \infty$ ، میدان \mathbf{g} را بطور یکتا تعیین می کند .

با قرار دادن $g = -\nabla V$ در معادله (۱۰-۱۱۲) خواهیم داشت

$$\nabla \cdot g = \nabla \cdot (-\nabla V) = -4\pi G\rho$$

یا

$$\nabla^2 V = 4\pi G\rho \quad (10-114)$$

بازنویسی این رابطه در مختصات دکارتی می دهد

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 4\pi G\rho \quad (10-115)$$

این معادله ، معادله پواسون نامیده می شود و بطور یکتا مقدار $V(r)$ را با شرایط حدی $V(r) \rightarrow 0$ در $r \rightarrow \infty$ تعیین می کند . جواب عمومی معادله (۱۰-۱۰۴) عبارت است از

$$V(r) = \iiint \frac{G\rho(r)}{r} dV' \quad (10-116)$$

که $\rho(r)$ چگالی حجمی جزء dV' است . این مقدار با مقدار $V(r)$ که با معادله (۱۰-۳۱) داده شده است همخوانی دارد .

بطور خلاصه ، نظریه نیوتنی گرانش را می توان بطور کامل توسط یک دسته سه معادله ای [(۱۰-۲۶) ، (۱۰-۲۹) ، و (۱۰-۱۱۴)] ، یعنی ،

$$g(r) = \frac{F}{m} , \quad g = -\nabla V , \quad \text{و} \quad \nabla^2 V = -4\pi G\rho \quad (10-117)$$

یا ، به شکل دیگر ، معادلات (۱۰-۲۶) ، (۱۰-۱۰۴) ، و (۱۰-۱۱۲) ، یعنی

$$g(r) = \frac{F}{m} , \quad \nabla \times g = 0 , \quad \text{و} \quad \nabla \cdot g = -4\pi G\rho \quad (10-118)$$

خلاصه کرد .

مسائل

۱-۱۰ با شروع از قوانین کپلر در مورد حرکت سیارات و قوانین نیوتنی حرکت، قانون جهانی نیوتن از گرانش را به دست آورید.

۲-۱۰ سیاره ای به جرم M ، شعاع R ، و چگالی همگن ρ در نظر بگیرید. تونلی در این سیاره کنده شده و دو نقطه روی سطح آن را به یکدیگر متصل می کند جسمی به جرم m در این تونل انداخته شده است

(الف) نشان دهید که حرکت این جسم نوسانی ساده است و دوره تناوب این حرکت را حساب کنید.

(ب) دوره تناوب را اگر این سیاره زمین می بود حساب کنید.

(پ) دوره تناوب را اگر این تونل در ماه کنده می شد حساب کنید.

۳-۱۰ اگر نیروهای متعددی به جسمی وارد شود. نتیجه ترکیب آنها یک نیرو و یک گشتاور است. چرا در شکل (۳-۱۰) گشتاوری روی M وجود ندارد؟ (راهنمایی: نقطه اختیاری P را در نظر بگیرید و نشان دهید که نیروها از آن می گذرند).

۴-۱۰ جسمی به جرم m از فاصله بسیار زیادی از مرکز زمین به طرف زمین سقوط می کند. حساب کنید زمانی را که طول می کشد تا (الف) به نیمه راه از مرکز زمین برسد، و (ب) از نیمه راه به مرکز زمین برسد. این دو بازه زمانی را با هم مقایسه کنید. زمین را یک جرم نقطه ای فرض کنید.

۵-۱۰ با استفاده از عبارت $U(r) = -\frac{GMm}{r}$ برای $r > R$ ، نشان دهید که وقتی جرم m از سطح زمین به ارتفاع h برده شود تغییر انرژی پتانسیل آن تقریباً برابر است با mgh .

۶-۱۰ ذره ای به جرم m در میدان نیرویی به شکل $F = -\frac{k}{x^3}$ به طرف مرکز نیرو حرکت می کند. زمانی را که طول می کشد تا ذره از فاصله D از مرکز نیرو به مرکز نیرو برسد حساب کنید.

۷-۱۰ جسمی در نظر بگیرید که از ارتفاع h ($h \gg R_E$)، که R_E شعاع زمین است) رها می شود. نشان دهید که سرعت آن وقتی به زمین برخورد می کند برابر است با

$$v = \sqrt{2gh} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{h}{R_E} \right)$$

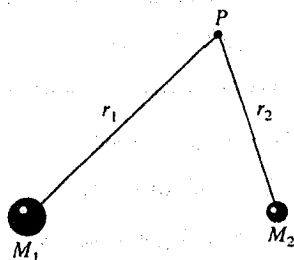
۸-۱۰ جسمی از فاصله بی نهایت از سطح زمین در میدان گرانشی زمین سقوط آزاد می کند، و جسم دیگری از ارتفاع $h = R_E$ با شتاب ثابت g سقوط می کند. نشان دهید که هر دو با یک سرعت به سطح زمین می رسند.

۹-۱۰ خطوط میدان گرانشی و خطوط هم پتانسیل را برای یک میله باریک با طول معین رسم کنید. در باره سطوح هم پتانسیل میله چه می توانید بگویید؟

۱۰-۱۰ پتانسیل گرانشی حاصل از دو جرم M_1 و M_2 (رک شکل (مسأله ۱۰-۱۰)) با رابطه

$$V(r) = -\frac{GM_1}{r_1} - \frac{GM_2}{r_2}$$

داده می شود. فرض کنید $M_1 = nM_2$ که n برابر است با ۲ یا ۳. روشی برای رسم خطوط هم پتانسیل طرح ریزی کنید، و آنها را برای این دو مورد رسم کنید.



شکل (مسأله ۱۰-۱۰)

۱۱-۱۰ در مسأله (۱۰-۱۰) اگر دو جسم نقطه ای نباشند و کره هایی با ابعاد معینی باشند، در خطوط هم پتانسیل چه تغییراتی رخ خواهد داد؟

۱۲-۱۰ خطوط نیرو و خطوط هم پتانسیل حاصل از دو جرم M_1 و M_2 را وقتی که (الف) $M_1 = M_2$ و (ب) $M_1 \gg M_2$ باشد رسم کنید.

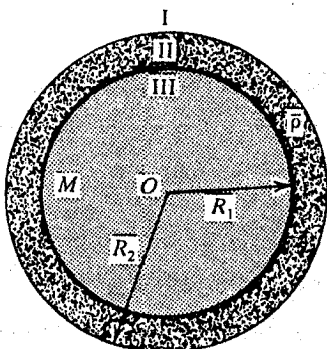
۱۳-۱۰ مراحل لازم برای رسیدن به معادله (۱۰-۸۹) را توضیح دهید.

۱۴-۱۰ یک لایه نیمکره ای همگن به شعاع R و جرم M که مرکز آن در $z=0$ است در نظر بگیرید. فرض کنیم محور Z محور تقارن آن باشد. پتانسیل گرانشی و شدت میدان گرانشی را در هر نقطه روی محور Z محاسبه کنید.

۱۵-۱۰ یک نیمکره توپر همگن به شعاع R و جرم M که مرکز آن در $z=0$ است و محور Z محور تقارن آن است در نظر بگیرید. پتانسیل گرانشی و شدت میدان گرانشی را

در هر نقطه روی محور Z محاسبه کنید .

۱۰-۱۶ سیاره ای به شعاع R_1 و جرم M در نظر بگیرید که به وسیله مخلوطی از گازها با چگالی میانگین $\bar{\rho}$ احاطه شده است . پتانسیل گرانشی و شدت میدان گرانشی را در ناحیه های I ، II ، و III (رک شکل (مسأله ۱۰-۱۶)) محاسبه کنید .



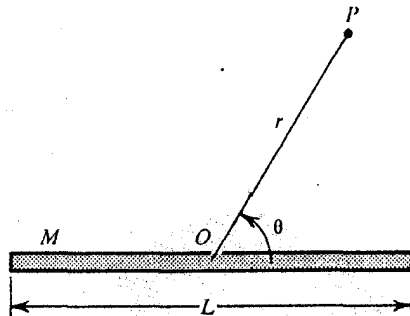
شکل (مسأله ۱۰-۱۶)

۱۰-۱۷ کره ای به شعاع R و چگالی متغیر $\rho = \rho_0 e^{-ar}$ برای $r < R$ ، که a ثابت است ، در نظر بگیرید . پتانسیل و شدت میدان گرانشی را در نقطه ای در داخل و خارج کره حساب کنید .

۱۰-۱۸ در تونلی در فاصله h زیر سطح زمین ، چگالی ماده زمین ρ_h است . در این عمق ، تغییر نسبی دوره تناوب یک ساعت آونگی ، یعنی $\frac{\Delta T}{T}$ ، چقدر خواهد بود ؟ آیا ساعت تندتر کار می کند یا کندتر ؟ جواب را بر حسب h ، M ، R_E ، و R_h حساب کنید . اگر $\frac{\Delta T}{T}$ را بطور تجربی اندازه گیری کنیم ، آیا می توانیم جرم زمین را ، با دانستن سایر کمیات ، تعیین کنیم ؟

۱۰-۱۹ میله باریکی به طول L و جرم M در نظر بگیریم . پتانسیل گرانشی و شدت میدان گرانشی را در یک نقطه به فاصله r از مرکز میله و در جهت عمود بر میله حساب کنید .

۱۰-۲۰ میله باریکی به طول L و جرم M در نظر بگیرید . پتانسیل گرانشی و شدت میدان گرانشی را در نقطه P به فاصله r ($r \geq L$) از مرکز میله و در جهتی که با میله زاویه θ می سازد ، آن طور که در شکل (مسأله ۱۰-۲۰) نشان داده شده است ، محاسبه کنید . محاسبه را فقط تا مرتبه دوم برحسب $\frac{L}{r}$ انجام دهید .

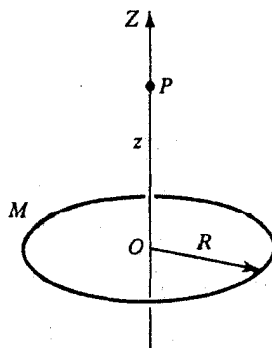


شکل (مسأله - ۱۰-۲۰)

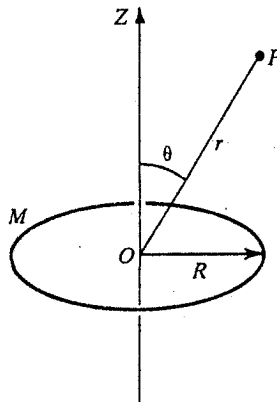
۱۰-۲۱ پتانسیل گرانشی و شدت میدان گرانشی حاصل از یک حلقه دایره ای نازک به شعاع R و جرم M را در یک نقطه واقع در صفحه آن پیدا کنید. برای فاصله های زیاد از حلقه عبارت پتانسیل را بسط دهید و جمله تصحیحی مرتبه اول را پیدا کنید.

۱۰-۲۲ پتانسیل گرانشی و شدت میدان گرانشی حاصل از یک حلقه دایره ای به جرم M و شعاع R در یک نقطه روی محور Z ، عمود بر صفحه حلقه، همان طور که در شکل (مسأله - ۱۰-۲۲) نشان داده شده است، محاسبه کنید. فرض کنید $z \gg R$ ، و عبارت پتانسیل را تنها تا جمله مرتبه دوم بر حسب $\frac{R}{z}$ گسترش دهید.

۱۰-۲۳ پتانسیل گرانشی و شدت میدان گرانشی حاصل از یک حلقه دایره ای باریک به جرم M و شعاع R در نقطه P به فاصله r از مرکز حلقه و در جهتی که با محور Z ، آن طور که در شکل (مسأله - ۱۰-۲۳) نشان داده شده است، زاویه θ می سازد محاسبه کنید. فرض کنید $r \gg R$ ، و عبارت پتانسیل را تنها تا جمله مرتبه دوم بر حسب $\frac{R}{r}$ گسترش دهید.



شکل (مسأله - ۱۰-۲۲)



شکل (مسأله ۱۰-۲۳)

۱۰-۲۴ پتانسیل گرانشی و شدت میدان گرانشی حاصل از یک قرص دایره ای نازک به جرم M و شعاع R را در یک نقطه در صفحه قرص محاسبه کنید. برای فاصله های زیاد از قرص، عبارت پتانسیل را بسط دهید و جمله تصحیحی مرتبه اول را پیدا کنید.

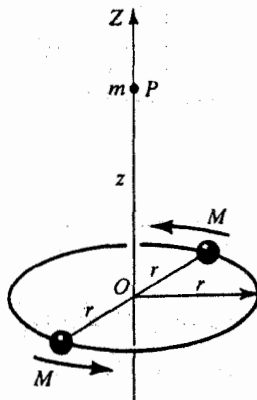
۱۰-۲۵ پتانسیل گرانشی و شدت میدان گرانشی حاصل از یک قرص دایره ای به شعاع R و جرم M را در یک نقطه P روی محور Z ، عمود بر سطح قرص، محاسبه کنید. فرض کنید $R \gg z$ ، و عبارت پتانسیل را تنها تا جمله مرتبه دوم برحسب $\frac{R}{z}$ گسترش دهید.

۱۰-۲۶ پتانسیل گرانشی و شدت میدان گرانشی حاصل از یک قرص به جرم M و شعاع R را در یک نقطه P به فاصله r از مرکز قرص که با محور Z زاویه θ می سازد، شبیه به (مسأله ۱۰-۲۳)، محاسبه کنید. فرض کنید $r \gg R$ ، و عبارت پتانسیل را تنها تا جمله مرتبه دوم برحسب $\frac{R}{r}$ گسترش دهید.

۱۰-۲۷ جسمی باتقارن استوانه ای و با چگالی $\rho(r, \theta)$ برای $r < R$ و $\rho = 0$ برای $r > R$ ، را در نظر بگیرید. پتانسیل گرانشی را در نقطه (r, θ) دور از جسم محاسبه کنید (برحسب $\frac{R}{r}$ بسط دهید).

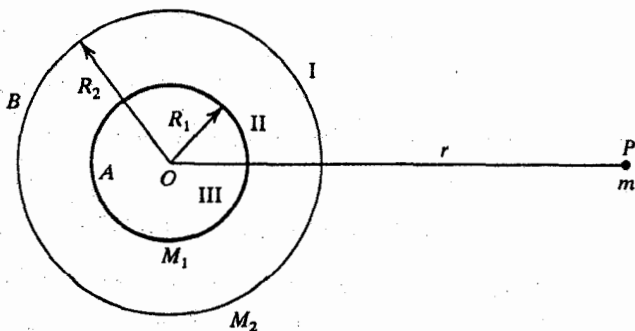
۱۰-۲۸ سیستمی از ستارگان دوتایی در نظر بگیرید که جرم هر کدام M و فاصله آنها از یکدیگر $2r$ است. این ستاره ها حول مرکز جرم مشترکشان دوران می کنند. یک جرم m در نقطه P ، آن طور که در شکل (مسأله ۱۰-۲۸) نشان داده شده است، قرار گرفته است. (الف) پتانسیل گرانشی و شدت میدان و نیروی گرانشی را در نقطه P حساب کنید.

(ب) قسمت (الف) را برای $r(1) \geq z$ و $r(2) \ll z$ تکرار کنید .
 (پ) فرض کنید جرم m در نقطه O است و سپس کمی جابه جا می شود . نشان دهید که حرکت نوسانی ساده انجام می دهد .



شکل (مسأله -۱۰-۲۸)

۱۰-۲۹ و B دو لایه هم مرکز به شعاعهای R_1 و R_2 و جرمهای M_1 و M_2 هستند . جرم نقطه ای m در نقطه ای به فاصله r از O قرار دارد . پتانسیل گرانشی و شدت میدان گرانشی را در سه ناحیه نشان داده شده در شکل (مسأله -۱۰-۲۹) حساب کنید . اگر m از بی نهایت رها شود سرعت آن وقتی به O می رسد چقدر است ؟



شکل (مسأله -۱۰-۲۹)

۱۰-۳۰ با استفاده از قانون گاوس ، شدت میدان گرانشی و پتانسیل گرانشی حاصل از یک کره همگن به شعاع R را محاسبه کنید .

۱۰-۳۱ شدت میدان گرانشی و پتانسیل گرانشی را در فاصله x از یک ورقه بی نهایت با چگالی سطحی σ در صفحه XY محاسبه کنید .

۱۰-۳۲ جرم m در عمق h در داخل تونلی در زمین قرار گرفته است . با استفاده از قانون گاوس نشان دهید که نیروی وارد به این جرم از جرم قسمت کروی زیر تونل ناشی می شود . نیروی وارد به جسم در نیمه راه شعاع زمین چقدر خواهد بود .

۱۰-۳۳ با استفاده از قانون گاوس ، شدت میدان گرانشی را در داخل و خارج یک لایه استوانه ای بی نهایت طویل به شعاع R و جرم M محاسبه کنید .

۱۰-۳۴ با استفاده از قانون گاوس ، شدت میدان گرانشی را در فاصله x از یک میله استوانه ای بی نهایت طویل با چگالی خطی σ ، حساب کنید .

۱۰-۳۵ نشان دهید که اگر یک جرم M در خارج یک سطح بسته در نظر بگیریم ، شار عبوری از این سطح بسته صفر است .

۱۰-۳۶ نشان دهید که معادله های $\nabla \times \mathbf{g} = 0$ ، $\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho$ ، و $\nabla^2 V = 4\pi G\rho$ برای شدت میدان گرانشی و پتانسیل گرانشی مسائل (۱۰-۳۰) و (۱۰-۳۱) برقرارند .

۱۰-۳۷ نشان دهید $\text{curl } \mathbf{g} = 0$.

منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر

- BARGER, V., and OLSSON, M., *Classical Mechanics*, Chapter 7. New York: McGraw-Hill Book Co., 1973.
- FRENCH, A. P., *Newtonian Mechanics*, Chapters 8 and 11. New York: W. W. Norton and Co., Inc., 1971.
- KITTEL, C., KNIGHT, W. D., and RUDERMAN, M. A., *Mechanics*, Berkeley Physics Course, Volume 1, Chapter 9. New York: McGraw-Hill Book Co., 1965.
- MARION, J. B., *Classical Dynamics*, 2nd ed., Chapter 2. New York: Academic Press, Inc., 1970.
- STEPHENSON, R. J., *Mechanics and Properties of Matter*, Chapter 4. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- SYMON, K. R., *Mechanics*, 3rd ed., Chapter 6. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1971.

دستگاههای مختصات نالخت

۱-۱۱ مقدمه

در فصلهای پیشین ، مناسب دیدیم که حرکت یک ذره یا سیستمی از ذرات را در یک دستگاه مختصات ثابت توصیف کنیم . یعنی ، معادلات حرکت ، مثلاً قانون دوم نیوتن ، در یک دستگاه لخت توصیف می شدند . اما وضعیتهایی وجود دارد که در آنها دستگاه شتاب دار است ، و در این موارد چارچوب مرجع متصل به این دستگاه یک چارچوب مرجع نالخت خواهد بود . برای توصیف یک چنین سیستم دینامیکی باید یا معادلات معمولی حرکت را تغییر دهیم بطوری که به یک دستگاه نالخت قابل اعمال باشند ، یا صرفاً از اختلاف چشم پوشی کنیم . یک مورد بجا و مناسب زمین است ، که می چرخد (همچنین انتقال می یابد) و در نتیجه شتاب دار است . به این ترتیب چارچوب مرجع متصل به زمین یک دستگاه نالخت خواهد بود . برای توصیف حرکت یک ذره یا یک جسم در روی سطح زمین ، با استفاده از قوانین نیوتن ، باید یک دستگاه لخت را که در فضا نسبت به بعضی از ستارگان ثابت است به کار گرفت . راه دیگر تغییر معادلات نیوتنی حرکت است ، بطوری که بتوانند به چارچوب متصل به زمین ، یعنی به یک دستگاه نالخت ، اعمال شوند . ما در این جا راه دوم را بر می گزینیم و تغییراتی در قانون دوم نیوتن جستجو کنیم تا بتواند در دستگاههای نالخت به کار گرفته شود . برای شروع ، بحث مختصری از دستگاههای با شتاب انتقالی ارائه می دهیم ، و بحث

مشروح تر را برای دستگاههای مختصات چرخان خواهیم گذاشت .

۱۱-۲ دستگاههای مختصات با حرکت انتقالی

یک دستگاه مختصات پریم دار $S'(x', y', z')$ که نسبت به یک دستگاه مختصات بدون پریم ساکن $S(x, y, z)$ ، آن طور که در شکل (۱-۱۱) نشان داده شده است، در حرکت انتقالی است در نظر بگیریم. در هر لحظه t ، مکان یک نقطه P در فضا نسبت به مبدأهای دو دستگاه مختصات O و O' ، به ترتیب، با \mathbf{r} و \mathbf{r}' معین می شود. مبدأ O' در فاصله \mathbf{r}_0 از مبدأ O قرار دارد. رابطه بین \mathbf{r} و \mathbf{r}' عبارت است از

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0 \quad (1-11)$$

یا به شکل مؤلفه ای،

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0, \quad z = z' + z_0 \quad (2-11)$$

فرض می کنیم که در طول حرکت محورهای X' ، Y' و Z' همیشه موازی یا محورهای X ، Y ، و Z باقی می ماند. این حرکت دستگاه مختصات پریم دار نسبت به مختصات بدون پریم انتقال نامیده می شود. به علاوه، سرعت و شتاب O' نسبت به O را \mathbf{v}_0 و \mathbf{a}_0 بگیریم. به این ترتیب با مشتق گیری از (۱-۱۱) می توانیم روابط بین سرعت و شتاب نقطه P ، در شکل (۱-۱۱)، نسبت به دستگاههای مختصات پریم دار و بدون پریم S' و S را به صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} \quad (3-11)$$

یا

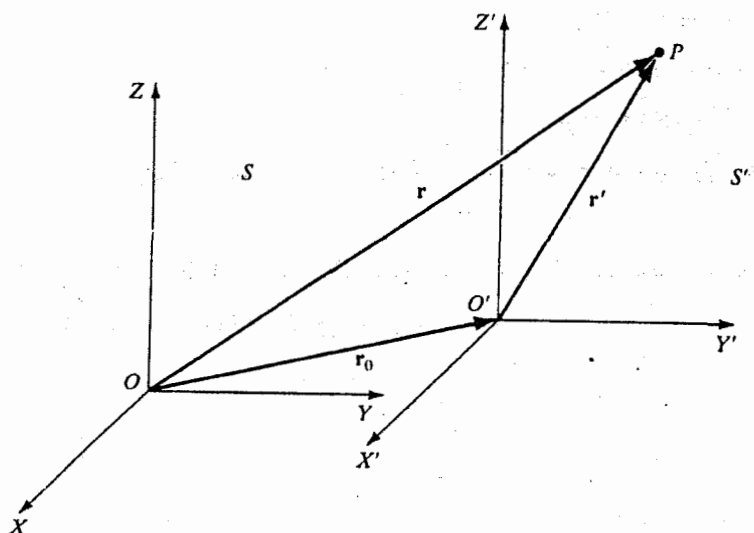
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 \quad (4-11)$$

و

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} + \frac{d^2\mathbf{r}_0}{dt^2} \quad (5-11)$$

یا

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_0 \quad (6-11)$$



شکل (۱-۱۱) : دستگاه مختصات پریم دار S' نسبت به دستگاه مختصات بدون پریم ساکن S در حرکت انتقالی است

بنابراین ، اگر ذره‌ای به جرم m در نقطه P تحت تأثیر نیروی F قرار داشته باشد ، می توانیم قانون دوم نیوتن را در دستگاه مختصات ثابت S به صورت

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (۷-۱۱)$$

بنویسیم . در دستگاه مختصات متحرک S' ، از معادلات (۵-۱۱) و (۷-۱۱) ، خواهیم داشت

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F} - m \mathbf{a}_0 \quad (۸-۱۱)$$

شکل قانون دوم نیوتن ، همان طور که از معادلات (۷-۱۱) و (۸-۱۱) روشن است ، در دو دستگاه مختصات متفاوت است . اگر دستگاه پریم دار S' با سرعت یکنواخت نسبت به دستگاه S حرکت کند ، معادله (۸-۱۱) به شکل زیر در می آید

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{a}_0 = 0 \quad (۹-۱۱)$$

که از نظر شکل شبیه به معادله (۷-۱۱) است . به این ترتیب می توانیم نتیجه بگیریم که شکل قانون دوم نیوتن در تمام دستگاههای مرجعی که با سرعتهای نسبی یکنواخت حرکت می کنند

یکسان است. این اصل نسبیت نیوتنی نامیده می شود و بیان می دارد که چارچوب مرجع یگانه ای وجود ندارد؛ یعنی، تمام چارچوبهای مرجعی که با سرعتهای یکنواخت نسبت به یکدیگر حرکت می کنند هم ارزند. تمام این چارچوبهای مرجع دستگاههای لخت نامیده می شوند. راه دیگر بیان این مطلب این است که بگوییم معادلات حرکت نیوتنی از نظر شکل ناوردا می مانند.

بنابراین، بنابر معادله (۱۱-۸)، اگر دستگاه مختصات S' با شتاب یکنواخت a_0 نسبت به S حرکت کند، قانون دوم نیوتن به شکل زیر در می آید

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F}' \quad (11-10)$$

که

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_0 = m\mathbf{a}' \quad (11-11)$$

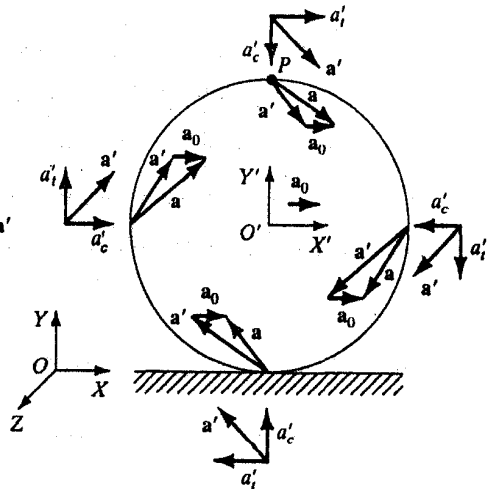
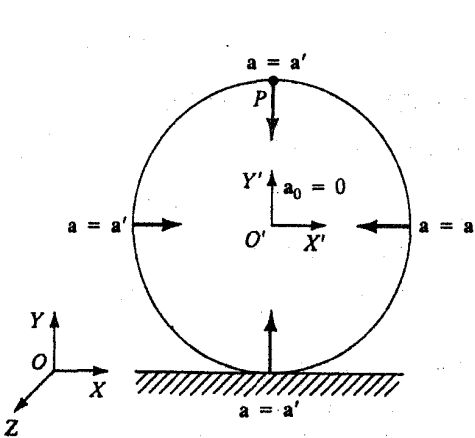
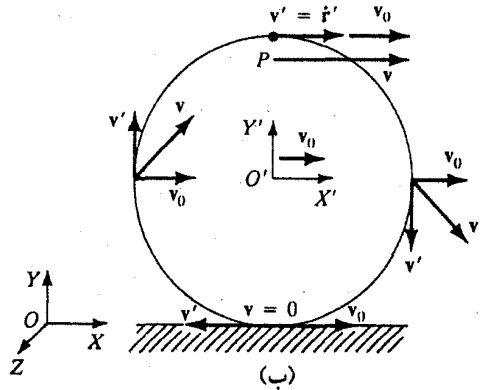
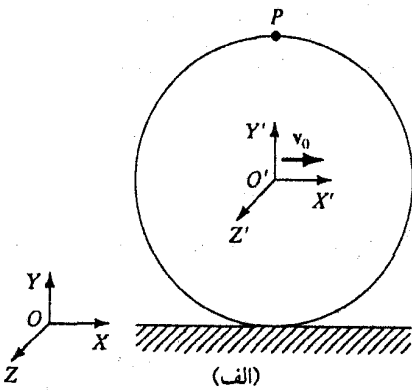
معادله (۱۱-۱۰)، $\mathbf{F}' = m\mathbf{a}'$ ، در دستگاه مختصات متحرک S' ، شبیه به معادله (۱۱-۷)، $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ، در دستگاه مختصات ثابت S است، اما $\mathbf{F}' \neq \mathbf{F}$. \mathbf{F}' باید، همان طور که معادله (۱۱-۱۱) نشان می دهد، با $\mathbf{F} - m\mathbf{a}_0$ جایگزین شود. جمله $-m\mathbf{a}_0$ نیروی نالختی یا نیروی ظاهری نامیده می شود. نیروی \mathbf{F} نیروی حقیقی نامیده می شود زیرا اثر \mathbf{F} روی m بستگی به مکانها و سرعتهای اشیایی دارد که با آنها برهم کنش می کند. از سوی دیگر، از دیدگاه مکانیک کلاسیک، جمله $-m\mathbf{a}_0$ اصلاً نیرو نیست، بلکه صرفاً یک حاصل ضرب جرم در شتاب است. این نیروی نالختی به شتاب دستگاه مختصات متحرک نسبت به دستگاه مختصات ثابت بستگی دارد. (برعکس، در نظریه نسبیت عام، نیروهایی مانند $-m\mathbf{a}_0$ به عنوان نیروهای حقیقی در دستگاه مختصات متحرک تلقی می شوند). دستگاه مختصات ثابت دستگاه لخت یا چارچوب مرجع لخت نامیده می شود، در حالی که دستگاه متحرک شتاب دار دستگاه نالخت نامیده می شود. در یک دستگاه نالخت، قانون دوم نیوتن به شکل معادلات (۱۱-۸)، (۱۱-۱۰) یا (۱۱-۱۱) است.

مثال (۱-۱۱): چرخشی به شعاع R با سرعت خطی ثابت v_0 در امتداد یک خط مستقیم، آن طور که در شکل (مثال ۱-۱۱) نشان داده شده است، می غلتد. مکان، سرعت، و شتاب یک نقطه روی چرخ را از دید (الف) یک چارچوب مرجع متصل به چرخ، و

(ب) یک ناظر ساکن در روی زمین پیدا کنید .

یک دستگاه مختصات $O'X'Y'Z'$ که مبدأ O' آن مرکز چرخ است و با چرخ حرکت انتقالی دارد در نظر بگیریم . چارچوب مرجع ساکن در روی زمین با $OXYZ$ ، برابر شکل (مثال ۱-۱۱) ، نمایش داده شده است . حرکت نقطه P متصل به طوقه چرخ را ، آن طور که در شکل (مثال ۱-۱۱ الف) نشان داده شده است ، در نظر بگیریم . (الف) طبق نظر ناظر در دستگاه مختصات متحرک $X'Y'Z'$ ، سرعت زاویه ای

چرخ عبارت است از



(پ)

شکل (مثال ۱-۱۱)

(ت)

$$\omega = \frac{v_0}{R} \quad \text{یا} \quad v_0 = R\omega \quad (1)$$

مکان ، سرعت ، و شتاب نقطه P برای ناظر متحرك عبارتند از

$$\mathbf{r}' = R\hat{\mathbf{j}}' \quad (2)$$

$$\dot{\mathbf{r}}' = \mathbf{v}' = R\omega\hat{\mathbf{i}}' = v_0\hat{\mathbf{i}}' \quad (3)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{a}' = -\frac{v_0^2}{R}\hat{\mathbf{j}}' = -R\omega^2\hat{\mathbf{j}}' \quad (4)$$

(ب) اکنون از دستگاه مختصات ساکن XYZ به نقطه P نگاه کنیم . جهتهای

محورهای دودستگاه مختصات را طوری انتخاب کنیم که $\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{i}}'$ ، $\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}}'$ ، و $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}}'$.

مکان نقطه O نسبت به O عبارت است از

$$\mathbf{r}_0 = v_0\hat{\mathbf{i}} + R\hat{\mathbf{j}} \quad (5)$$

بنابراین ، با استفاده از معادلات (۱-۱۱) ، (۴-۱۱) ، و (۶-۱۱) ، حرکت نقطه P از

دید چارچوب مرجع ساکن XYZ عبارت است از

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{r} = v_0\hat{\mathbf{i}} + 2R\hat{\mathbf{j}} \quad (6)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = 2v_0\hat{\mathbf{i}} \quad (7)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_0, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a} = -\frac{v_0^2}{R}\hat{\mathbf{j}} = -R\omega^2\hat{\mathbf{j}} \quad (8)$$

توجه کنیم که $\mathbf{a}_0 = 0$. این نتایج در شکل (مثال ۱-۱۱ ب) ، (پ) ، و (ت) نمایش

داده شده اند . در قسمت (ب) بردارهای سرعت برای مکانهای مختلف ذره ،

در قسمت (پ) بردارهای شتاب در مکانهای مختلف برای یک سرعت ثابت O' ، یعنی

$\mathbf{a}_0 = 0$ ، و در قسمت (ت) بردارهای شتاب در مکانهای مختلف برای موردی که چرخ

شتابی رو به جلو دارد ، نمایش داده شده است .

تمرین (۱-۱۱) : مثال را برای موردی که چرخ روی یک سطح شیب دار با زاویه شیب θ

به طرف پایین می غلتد تکرار کنید .

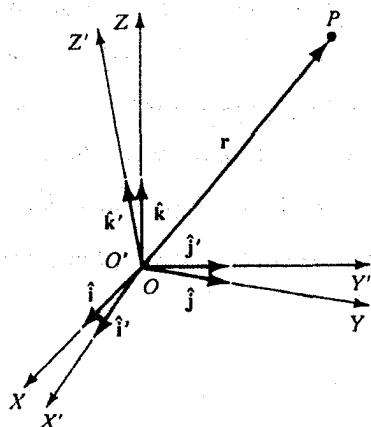
۳-۱۱ دستگاههای مختصات چرخان

یک چارچوب مرجع ثابت S با محورهای مختصات XYZ و یک چارچوب چرخان S' با

محورهای مختصات $X'Y'Z'$ در نظر بگیریم. به این ترتیب S یک دستگاه لخت است و S' یک دستگاه ناخست. مبدأهای دو دستگاه مختصات همیشه بر هم منطبقند. بردارهای یکه در دو دستگاه مختصات، همان طور که در شکل (۱۱-۲) نشان داده شده است، به ترتیب عبارتند از \hat{i} ، \hat{j} ، \hat{k} و \hat{i}' ، \hat{j}' ، \hat{k}' . مکان هر نقطه P در فضا را با Γ نمایش دهیم. چون مبدأهای دو دستگاه مختصات بر هم منطبقند، Γ در هر دو دستگاه یکی است؛ اما مؤلفه های آن در امتداد محورهای مختلف متفاوتند. (به علاوه، Γ مجبور نیست که از مبدأ اندازه گیری شده باشد). به این ترتیب Γ را در هر یک از این دستگاههای مختصات می توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (11-12)$$

$$\mathbf{r} = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}' \quad (11-13)$$



شکل (۱۱-۲): محورهای مختصات X' ، Y' ، Z' دستگاه S' نسبت به محورهای

مختصات ساکن X ، Y ، Z دستگاه S می چرخد.

روابط بین مؤلفه ها در دو دستگاه مختصات با به کارگیری حاصل ضرب نقطه ای به دست می آیند

$$\begin{aligned} x &= \mathbf{r} \cdot \hat{i} = x'(\hat{i}' \cdot \hat{i}) + y'(\hat{j}' \cdot \hat{i}) + z'(\hat{k}' \cdot \hat{i}) \\ y &= \mathbf{r} \cdot \hat{j} = x'(\hat{i}' \cdot \hat{j}) + y'(\hat{j}' \cdot \hat{j}) + z'(\hat{k}' \cdot \hat{j}) \\ z &= \mathbf{r} \cdot \hat{k} = x'(\hat{i}' \cdot \hat{k}) + y'(\hat{j}' \cdot \hat{k}) + z'(\hat{k}' \cdot \hat{k}) \end{aligned} \quad (11-14)$$

این معادلات همچنین می‌توانند به صورت زیر نیز نوشته شوند

$$\begin{aligned} x &= \lambda_{11}x' + \lambda_{21}y' + \lambda_{31}z' \\ y &= \lambda_{12}x' + \lambda_{22}y' + \lambda_{32}z' \end{aligned} \quad (15-11)$$

$$z = \lambda_{13}x' + \lambda_{23}y' + \lambda_{33}z'$$

که $\lambda_{11}, \lambda_{21}, \dots, \lambda_{33}$ کسینوسهای زاویه‌های بین بردارهای یکه پریم دار و بدون پریم هستند. به عنوان مثال، $\lambda_{11} = \cos \theta_{11} = \frac{(\hat{i}' \cdot \hat{i})}{|\hat{i}'||\hat{i}|} = \lambda_{11}$ ، که θ_{11} زاویه بین \hat{i}' و \hat{i} است، به همین شیوه $\lambda_{21} = \cos \theta_{21} = \frac{(\hat{j}' \cdot \hat{i})}{|\hat{j}'||\hat{i}|}$ که θ_{21} زاویه بین \hat{j}' و \hat{i} است، و قس علی هذا. چون محورهای پریم دار نسبت به محورهای بدون پریم می‌چرخند، کسینوسهای زاویه‌ها تابعی از زمان هستند.

اکنون یک بردار A در فضا در نظر بگیریم. چون محورها می‌چرخند، اگر A در یکی از دستگاههای مختصات با زمان ثابت باشد، در دستگاه مختصات دیگر ثابت نخواهد بود. یعنی مشتقات زمانی یک بردار در دو دستگاه مختصات مختلف متفاوت خواهد بود. علت این است که $A(t)$ با گذشت زمان Δt در یک دستگاه مختصات به $A(t + \Delta t)$ تغییر می‌کند، و خود $A(t)$ نیز در دستگاه مختصات دیگر به علت چرخش دستگاه تغییر کرده است. مؤلفه‌های A در دستگاههای مختصات بدون پریم و پریم دار را، به ترتیب، (A_x, A_y, A_z) و (A'_x, A'_y, A'_z) بگیریم، به این ترتیب

$$A = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad (16-11)$$

$$A = A'_x \hat{i}' + A'_y \hat{j}' + A'_z \hat{k}' \quad (17-11)$$

فرض کنیم $\frac{d}{dt}$ مشتق نسبت به دستگاه مختصات بدون پریم (ثابت) و $\frac{d}{dt}$ مشتق نسبت به دستگاه مختصات پریم دار (چرخان) باشد. از معادلات (16-11) و (17-11) خواهیم داشت

$$\frac{dA}{dt} = \dot{A}_x \hat{i} + \dot{A}_y \hat{j} + \dot{A}_z \hat{k} \quad (18-11)$$

$$\frac{d'A}{dt} = \dot{A}'_x \hat{i}' + \dot{A}'_y \hat{j}' + \dot{A}'_z \hat{k}' \quad (19-11)$$

برای به دست آوردن رابطه بین $\frac{dA}{dt}$ و $\frac{d'A}{dt}$ ، به شیوه زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} (A'_x \hat{i}' + A'_y \hat{j}' + A'_z \hat{k}')$$

$$= \dot{A}'_x \hat{i}' + \dot{A}'_y \hat{j}' + \dot{A}'_z \hat{k}' + A'_x \frac{d\hat{i}'}{dt} + A'_y \frac{d\hat{j}'}{dt} + A'_z \frac{d\hat{k}'}{dt} \quad (20-11)$$

یا ، با به کارگیری نتیجه معادله (۱۱-۱۹) در معادله (۱۱-۲۰) ،

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d'\mathbf{A}}{dt} + A'_x \frac{d\hat{i}'}{dt} + A'_y \frac{d\hat{j}'}{dt} + A'_z \frac{d\hat{k}'}{dt} \quad (21-11)$$

به این ترتیب کار ما محاسبه سه جمله آخر است . برای انجام این کار ، فرض کنیم که دستگاه مختصات حول یک محور ON که از مبدأ گذشته است ، با سرعت زاویه ای ω ، آن طور که در شکل (۱۱-۳) نشان داده شده است ، بچرخد . یک بردار \mathbf{B} در نظر بگیریم که با محور ON زاویه θ می سازد و در دستگاه مختصات پریم دار ثابت است . بنابراین مشتق پریم دار آن صفر است ، $d'\mathbf{B}/dt = 0$ ، و اکنون مشتق آن را در دستگاه بدون پریم دار حساب می کنیم . (توجه کنیم که مشتق زمانی \mathbf{B} بستگی به مؤلفه های آن در امتداد محورها دارد نه به مکان \mathbf{B} در فضا) . در زمان t ، بردار \mathbf{B} در امتداد OP است و در زمان $t + \Delta t$ بردار $\mathbf{B}(t + \Delta t)$ در امتداد OQ است . لذا $\mathbf{B}(t + \Delta t) - \mathbf{B}(t) = \Delta \mathbf{B}$ ، از شکل (۱۱-۳) ، عبارت است از

$$\Delta \mathbf{B} = RQ \Delta \phi = (B \sin \theta)(\omega \Delta t) \quad (22-11)$$

$$\frac{\Delta \mathbf{B}}{\Delta t} = \omega B \sin \theta$$

یا ، در حد $\Delta t \rightarrow 0$ ، خواهیم داشت

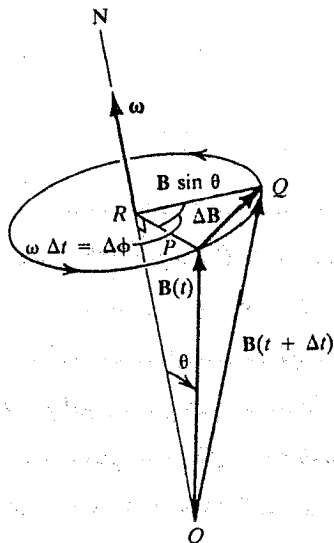
$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \omega B \sin \theta \quad (23-11)$$

یا

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B} \quad (24-11)$$

این معادله دقیقاً جهت $d\mathbf{B}/dt$ را با استفاده از تعریف حاصل ضرب برداری به دست می دهد . جهت $d\mathbf{B}/dt$ بر صفحه شامل $\boldsymbol{\omega}$ و \mathbf{B} عمود است . می توانیم از معادله (۱۱-۲۴) برای محاسبه سه جمله آخر معادله (۱۱-۲۱) استفاده کنیم . هر یک از سه جمله به شکل زیر در می آید .

$$\frac{d\hat{i}'}{dt} = \omega \times \hat{i}', \quad \frac{d\hat{j}'}{dt} = \omega \times \hat{j}', \quad \frac{d\hat{k}'}{dt} = \omega \times \hat{k}' \quad (۲۵-۱۱)$$



شکل (۲-۱۱) : دستگاه مختصات پریم دار همراه با بردار B حول محور ON با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد

با قرار دادن این عبارتها در معادله (۲۱-۱۱) به دست می‌آوریم

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d'A}{dt} + A'_x(\omega \times \hat{i}') + A'_y(\omega \times \hat{j}') + A'_z(\omega \times \hat{k}')$$

یا

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d'A}{dt} + \omega \times A \quad (۲۶-۱۱)$$

به این ترتیب، با داشتن مشتق زمانی A در دستگاه مختصات بدون پریم (ثابت)، می‌توانیم مشتق زمانی A را، با استفاده از معادله (۲۶-۱۱)، در دستگاه مختصات پریم دار چرخان محاسبه کنیم. بطور کلی، می‌توانیم رابطه بین $\frac{d'}{dt}$ و $\frac{d}{dt}$ را به صورت

$$\frac{d}{dt} = \frac{d'}{dt} + \omega \times \quad (۲۷-۱۱)$$

بنویسیم. وقتی آن را به بردار مکانی r اعمال کنیم می‌دهد

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d'r}{dt} + \omega \times r \quad (۲۸-۱۱)$$

یا

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (۲۹-۱۱)$$

معادله (۲۸-۱۱) یا (۲۹-۱۱) رابطه بین سرعت \mathbf{v} در یک دستگاه مختصات ثابت و سرعت \mathbf{v}' در یک دستگاه مختصات چرخان است. این رابطه حتی وقتی $\boldsymbol{\omega}$ از نظر بزرگی و جهت تغییر کند نیز صادق است. اکنون به پیدا کردن مشتق دوم \mathbf{r} می پردازیم. این کار با مشتق گرفتن دوباره از معادله (۲۸-۱۱) انجام می شود، یعنی،

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d'\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \right) \quad (۳۰-۱۱)$$

با قرار دادن از معادله (۲۷-۱۱)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= \left(\frac{d'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \right) \left(\frac{d'\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \right) \\ &= \frac{d'^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d'\mathbf{r}}{dt} + \frac{d'\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d'\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \end{aligned}$$

یا

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d'^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d'\mathbf{r}}{dt} + \frac{d'\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} \quad (۳۱-۱۱)$$

همچنین می توانیم $\frac{d'\boldsymbol{\omega}}{dt}$ را با $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ جایگزینی کنیم زیرا مشتقهای پریم دار و بدون پریم هر بردار موازی با محور دوران یکسانند. این نکته را می توانیم با به کارگیری معادله (۲۶-۱۱)، که در آن قرار می دهیم $A = \boldsymbol{\omega}$ ، تحقیق کنیم، یعنی

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d'\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \frac{d'\boldsymbol{\omega}}{dt} \quad \text{یا} \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}' \quad (۳۲-۱۱)$$

چون $0 \leq \theta < \pi$ ، $|\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}| = \omega^2 \sin \theta$ ، $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}$ یک بردار صفر است.

بطور خلاصه، می توانیم بگوییم که اگر O و O' ثابت بمانند، هر نقطه از فضا با یک بردار مکانی \mathbf{r} مشخص می شود، که در هر دو دستگاه مختصات یکی است. ولی سرعت و شتاب، به ترتیب، به وسیله معادلات (۲۸-۱۱) و (۳۱-۱۱) تعیین می شوند.

معادله (۳۱-۱۱) بیانی از قضیه کوریولیس است. توضیح مختصر جملات این معادله به صورت زیر است.

شتاب نسبت به دستگاه مختصات بدون پریم یا ثابت : $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$

شتاب نسبت به دستگاه مختصات پریم دار : $\frac{d'^2 \mathbf{r}}{dt^2}$

شتاب جذب به مرکز یک نقطه در چرخش حول یک محور : $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

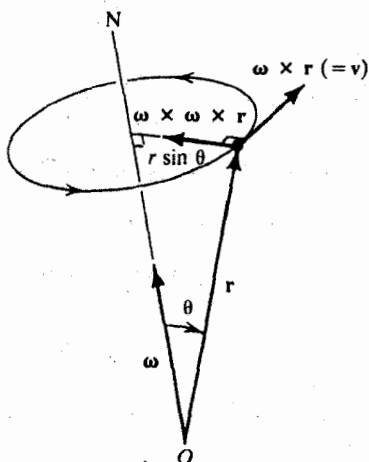
شتاب کوریولیس ، که وقتی ظاهر می شود که ذره در دستگاه مختصات پریم دار (چرخان) حرکت داشته باشد . $2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d' \mathbf{r}}{dt}$

در چرخش غیریکنواخت ظاهر می شود ، که اگر $\boldsymbol{\omega}$ نسبت به دستگاه مختصات ساکن ثابت باشد صفر است . $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}$

اگر فرض کنیم که قانون دوم نیوتن در دستگاه مختصات بدون پریم برقرار است ، با

به کارگیری معادله (۱۱-۳۱) خواهیم داشت

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} = m \frac{d'^2 \mathbf{r}}{dt^2} + m \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + 2m \boldsymbol{\omega} \times \frac{d' \mathbf{r}}{dt} + m \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} \quad (۱۱-۳۳)$$



شکل (۱۱-۴) : شتاب جذب به مرکز $a_c = |\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|$ که از چرخش دستگاه مختصات پریم دار ناشی می شود

نیروی مؤثر \mathbf{F}' ، که در دستگاه مختصات چرخان به m وارد می شود ، عبارت است از

$$m \frac{d'^2 \mathbf{r}}{dt^2} \equiv \mathbf{F}' = \mathbf{F} - m \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} - 2m \boldsymbol{\omega} \times \frac{d' \mathbf{r}}{dt} - m \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} \quad (۱۱-۳۴)$$

که در آن

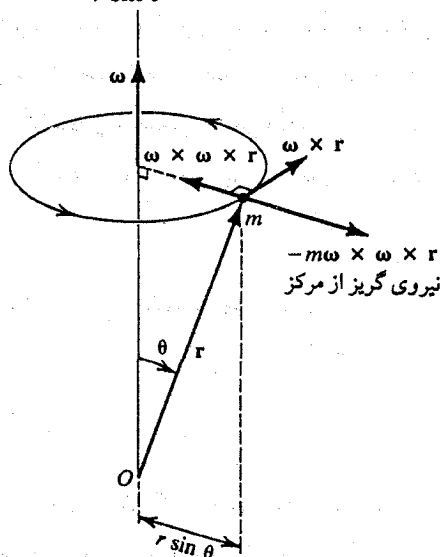
$$-m\omega \times \omega \times \mathbf{r} \equiv \text{نیروی گریز از مرکز که، همان طور که به زودی توضیح خواهیم داد، در جهت از محور به طرف بیرون است.} \quad (۱۱-۳۵ \text{ الف})$$

$$-2m\omega \times \frac{d'\mathbf{r}}{dt} \equiv \text{نیروی کوریولیس} \quad (۱۱-۳۵ \text{ ب})$$

$$-m \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r} \equiv \text{نیروی عرضی برای مورد چرخش غیریکنواخت، که صفر است، زیرا ما تنها با چرخشهای یکنواخت سر و کار داریم} \quad (۱۱-۳۵ \text{ پ})$$

در معادله (۱۱-۳۳)، شتاب $|\omega \times \omega \times \mathbf{r}|$ شتاب جذب به مرکز است زیرا، همان طور که در شکل (۱۱-۴) نشان داده شده است، به طرف مرکز و عمود بر محور چرخش است. همچنین $v = \omega \times \mathbf{r}$ یا $v = \omega r \sin \theta$ که v سرعت حرکت دایره‌ای و $r \sin \theta$ فاصله از محور است. از شکل (۱۱-۵)، با قرار دادن $\omega = \frac{v}{r \sin \theta}$ خواهیم داشت

$$a_c = |\omega \times \omega \times \mathbf{r}| = \omega^2 r \sin \theta = \frac{v^2}{r \sin \theta} \quad (۱۱-۳۶)$$



شکل (۱۱-۵): نیروی گریز از مرکز ناشی از حرکت چرخشی است که رو به بیرون از محور است

کمیت $-m\omega \times \omega \times \mathbf{r}$ نیروی گریز از مرکز نامیده می‌شود و برای موردی که ω عمود

بر بردار شعاعی است برابر است با $-m\omega^2 r$. علامت منفی بیانگر این است که نیروی گریز از مرکز به طرف بیرون یا دور شدن از مرکز دوران است. بنابراین مکانیک کلاسیک، نیروی گریز از مرکز یک نیروی واقعی نیست، بلکه یک نیروی مجازی یا نالخت است. این نیرو فقط وقتی حضور پیدا می کند که چارچوب مرجع در فضا متحرک باشد. به این ترتیب، به عنوان مثال، در حرکت ذره ای که روی دایره ای حرکت می کند نیروی گریز از مرکز حضور ندارد، بلکه نیرویی به طرف مرکز حضور دارد که شتاب مرکز گرا ایجاد می کند. از سوی دیگر، اگر حرکت یک ذره را از چارچوب مرجعی که با ذره حرکت می کند مشاهده کنیم، ذره در این دستگاه ساکن خواهد بود. نیرویی به طرف مرکز وجود دارد اما ذره به مرکز سقوط نمی کند. این تنها وقتی ممکن است که نیروی مرکز گرا را یک نیروی برون سو، نیروی گریز از مرکز، خنثی کند.

جمله $2m\omega \times \frac{dr}{dt}$ - نیروی کوریولیس نامیده می شود و از حرکت ذره در یک دستگاه مختصات چرخان ناشی می شود. این نیرو مستقیماً متناسب با سرعت v است و وقتی از بین می رود که حرکتی نباشد. این نیرو نیز، بنابراین مکانیک کلاسیک، یک نیروی حقیقی نیست، بلکه یک نیروی نالخت (یا نیروی مجازی) است.

توجه به این نکته مهم است که هر دو نیروی مرکز گریز و کوریولیس برای فقط یک منظور وارد شده اند: برای نوشتن معادله ای که شبیه به قانون دوم نیوتن باشد و در دستگاههای نالخت شامل دستگاههای مختصات چرخان نیز قابل اعمال باشد. به این ترتیب، اگر قانون دوم نیوتن در دستگاه مختصات بدون پریم (یا ثابت) را به صورت

$$F = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{a}$$

بنویسیم، نیروی F' وارد به m در یک دستگاه مختصات چرخان خواهد بود

$$F' = m \frac{d'^2 \mathbf{r}}{dt'^2} = m\mathbf{a}'$$

$$= \mathbf{F} + \text{نیروهای نالخت}$$

(۱۱-۳۷)

$$= \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{cent}} + \mathbf{F}_{\text{Cor}} + \mathbf{F}_{\text{trans}}$$

که نیروهای نالخت (یا مجازی) نیروهای مرکز گریز و کوریولیس هستند. این اصلاحات، همان طور که در بخشهای بعدی خواهیم دید، به منظور بسیار مفیدی به کار گرفته خواهند شد.

اگر دستگاه مختصات پریم دار هم حرکت انتقالی و هم چرخشی داشته باشد، روابط

بین بردارهای جابه جایی، سرعت، و شتاب در دو دستگاه با معادلات زیر داده می شوند

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0 \quad (۳۸-۱۱)$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} \quad (۳۹-۱۱)$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d'^2\mathbf{r}'}{dt^2} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \frac{d^2\mathbf{r}_0}{dt^2} \quad (۴۰-۱۱)$$

نیروهای مرکز گریز و کوریولیس حاصل هیچ بر هم کنش فیزیکی نیستند ، بلکه یک نتیجه سینماتیکی هستند ؛ به این علت چنین نیروهایی ، نیروهای نالخت یا مجازی نامیده می شوند . به عنوان مثال ، نیروهای حقیقی همیشه با فاصله کاهش می یابند . این درست است که استفاده از دستگاههای مختصات چرخان برای توصیف حرکت چرخشی یک جسم مناسبتر است ، اما باید به خاطر داشت که نیروهای نالخت مجازی فقط باید در دستگاه نالخت یا دستگاه مختصات چرخان به کار روند و نه در یک دستگاه لخت . به عنوان مثال ، وقتی که سنگی را به نخ بسته و روی یک دایره به چرخانیم ، احساس می کنیم که نیروی آن را به طرف بیرون می کشد و ما آن را نیروی مرکز گریز می نامیم . برای ناظری که در یک دستگاه مختصات چرخان با سنگ می چرخد ، سنگ ساکن است و نیروی برون سوی مرکز گریز کشش درون سوی ریسمان را خنثی می کند . اما در یک دستگاه لخت ، نیروی مرکز گریز وجود ندارد و فقط کشش نخ است که باعث ایجاد شتاب شعاعی می شود . توصیف حرکت در هر کدام از دستگاههای مختصات درست است به شرط این که نیروهای خاص در نظر گرفته شوند . به همین نحو ، وقتی اتومبیلی در یک مسیر منحنی خیلی سریع می رود ، به طرف بیرون می لغزد . از دید یک ناظر در یک دستگاه لخت ، نیروی جانی که از طرف جاده به لاستیکهای اتومبیل وارد می شود برای نگهداری اتومبیل روی جاده کافی نیست . برای یک ناظر در اتومبیل (در یک دستگاه نالخت) ممکن است چنین احساس شود که اتومبیل به وسیله یک نیروی مرکز گریز به طرف بیرون کشیده می شود .

مثال (۲-۱۱) : یک سطل حاوی مقداری آب (یا هر مایع دیگر) با سرعت زاویه ای $\boldsymbol{\omega}$ حول یک محور قائم می چرخد . نشان دهید که سطح آب شکل یک سهموی دوار را به خود می گیرد .

یک دستگاه مختصات متصل به سطل که حول محور Z در امتداد قائم می چرخد ، مطابق شکل (مثال ۲-۱۱-الف) در نظر بگیریم . مسأله از دید چنین

دستگاه مختصاتی ، یک مسأله ترازمندی پایدار است . حجم کوچکی از آب به جرم m را در سطح آب در نظر بگیریم . نیروهای وارد به این جرم m [همان طور که در شکل (مثال ۱۱-۲ ب) نشان داده شده است] عبارتند از وزن $W = mg$ که بطور قائم رو به پایین وارد می شود ، نیروی تماسی F_{cont} ، یا نیروی واکنش ، که در امتداد قائم بر سطح آب عمل می کند زیرا ، برخلاف جامدات ، مایعات نمی توانند نیروی ایستایی در امتداد مماس بر سطح وارد کنند ، و نیروی نالخت یا مجازی F_{fict} که نیروی گریز از مرکز است . برای ترازمندی ، مجموع این نیروها باید صفر باشد ؛ یعنی ،

$$F_{\text{cont}} + W + F_{\text{fict}} = 0 \quad (1)$$

با تجزیه این نیروها به مؤلفه های افقی و قائم ، می توانیم بنویسیم

$$\sum F_H = F_{\text{fict}} - F_{\text{cont}} \sin \theta = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_V = F_{\text{cont}} \cos \theta - W = 0 \quad (3)$$

چون $W = mg$ و $F_{\text{fict}} = m\omega^2 r$ ، می توانیم معادلات (۲) و (۳) را به صورت

$$F_{\text{cont}} \sin \theta = m\omega^2 r \quad (4)$$

$$F_{\text{cont}} \cos \theta = mg \quad (5)$$

بنویسیم . از تقسیم معادله (۴) بر معادله (۵) خواهیم داشت

$$\tan \theta = \frac{\omega^2 r}{g} \quad (6)$$

برای پیدا کردن شکل سطح ، باید رابطه ای بین r و z پیدا کنیم . همان طور که در شکل (مثال ۱۱-۲ پ) نشان داده شده است ، شیب سطح در هر نقطه عبارت است از

$$\tan \theta = \frac{dz}{dr} \quad (7)$$

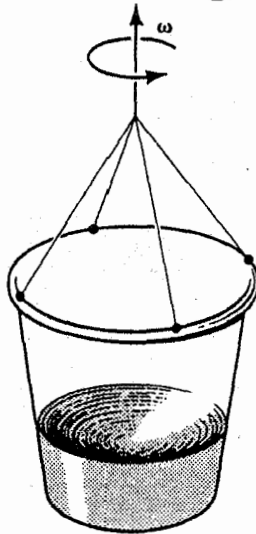
از معادلات (۶) و (۷) نتیجه می شود

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

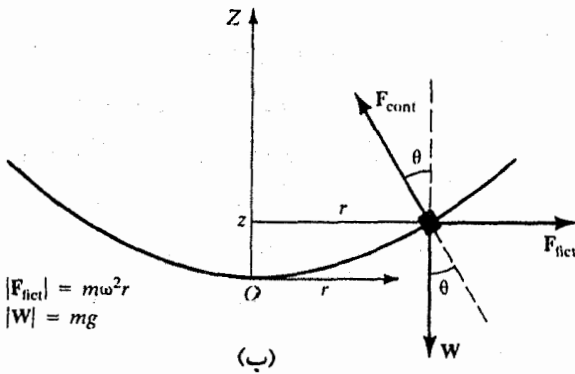
این رابطه پس از انتگرال گیری می دهد

$$z = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} r^2 \quad (8)$$

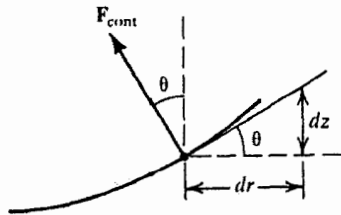
که معادله یک سهموی دوآر است .



(الف)



(ب)



(پ)

شکل (مثال-۱۱-۲)

تمرین (۱۱-۲): پیشنهاد شده است که برای یک تلسکوپ نجومی می توان آینه ای از یک استخر چرخان پر از جیوه تشکیل داد. آهنگ چرخش لازم برای تشکیل آینه هایی با فاصله های کانونی 10m ، 15m و 20m را پیدا کنید.

۲-۱۱ توصیف حرکت در روی زمین چرخان

اکنون می توانیم نتایج به دست آمده در بخش پیشین را برای توصیف حرکت در یک دستگاه مختصات که متصل به زمین است و در نتیجه با زمین چرخان حرکت می کند به کار بگیریم، یعنی حرکت را در یک دستگاه مختصات نالخت توصیف کنیم. سرعت زاویه ای زمین نسبت به بردار مکانی زمین از خورشید 2π رادیان بر روز است. مقدار این سرعت زاویه ای نسبت به ستارگان ثابت، بعد از تصحیح، عبارت است از

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600 \text{ s}} \frac{366.5}{365.5} = 7.292 \times 10^{-5} \text{ rad/s} \quad (11-41)$$

که $366.5/5$ عبارت است از تعداد روزهای نجومی در یک سال و $365.5/5$ تعداد روزهای خورشیدی در یک سال است. این سرعت زاویه ای، اگرچه خیلی کوچک است، تأثیرهای عمیقی دارد. بعضی از کمیتهایی که می توان ذکر کرد عبارتند از:

۱- چرخش زمین است که باعث برآمدگی استوایی شده است، یعنی زمین در قطبهای شمالی و جنوبی تخت شده است، که در نتیجه آن شعاع استوایی در حدود ۲۱ کیلومتر (تقریباً ۱۳ مایل) از شعاع قطبی بزرگتر است.

۲- این نیروی کوریولیس وارد به اجسام متحرک است که باعث گردش پاد ساعتگرد بادهای در نیمکره شمالی می شود، و روی جریان بادهای دریایی و گلف استریم تأثیر می گذارد.

۳- برای محاسبه دقیق مسیر پرتابه های با برد بلند و موشکها لازم است که نیروی کوریولیس در نظر گرفته شود.

۴- حرکت آونگ فو کو نتیجه نیروی کوریولیس است.

یک ذره به جرم m در فاصله r از مرکز زمین که تحت تأثیر نیروی گرانشی mg و یک نیروی غیر گرانشی دیگر F مانند اصطکاک قرار دارد در نظر بگیریم. معادله حرکت این ذره

نسبت به مختصات ثابت در فضا عبارت است از

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} + m\mathbf{g} \quad (۴۲-۱۱)$$

برای به دست آوردن معادله حرکت این ذره نسبت به دستگاه مختصات متصل به زمین ، که دارای سرعت زاویه ای ω است ، نتایج به دست آمده در معادله (۳۳-۱۱) یا (۳۴-۱۱) را به کار می گیریم . با توجه به این که برای سرعت زاویه ای ثابت $\frac{d\omega}{dt} = 0$ است ، معادله حرکت ذره را به صورت زیر به دست می آوریم

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} + m\mathbf{g} = m \frac{d'^2 \mathbf{r}}{dt'^2} + m\omega \times \omega \times \mathbf{r} + 2m\omega \times \frac{d' \mathbf{r}}{dt'} \quad (۴۳-۱۱)$$

یا

$$\mathbf{F}' = m \frac{d'^2 \mathbf{r}}{dt'^2} = \mathbf{F} + m\mathbf{g} - m\omega \times \omega \times \mathbf{r} - 2m\omega \times \frac{d' \mathbf{r}}{dt'} \quad (۴۴-۱۱)$$

بحث خود را به دو قسمت تقسیم می کنیم : (۱) تأثیرات ایستایی (امتداد شاقول) ، و (۲) تأثیرات دینامیکی (حرکت پرتابی و سقوط آزاد)

تأثیرات ایستایی (خط شاقول)

می خواهیم نیروی گرانشی وارد به جسمی به جرم m و ساکن در روی زمین را ، هم از نظر بزرگی و هم از نظر جهت ، اندازه بگیریم . برای این وضعیت معادله (۴۴-۱۱) را به کار می گیریم . در این مورد $d' \mathbf{r} / dt' = 0$ ، و در غیاب نیروی اصطکاک یا هر نیروی دیگر ، $\mathbf{F} = 0$. بنابراین ، می توانیم بنویسیم

$$\mathbf{F}' = m \frac{d'^2 \mathbf{r}}{dt'^2} = m\mathbf{g} - m\omega \times \omega \times \mathbf{r} = m\mathbf{g}_e \quad (۴۵-۱۱)$$

که در آن

$$\mathbf{g}_e = \mathbf{g} - \omega \times \omega \times \mathbf{r} \quad (۴۶-۱۱)$$

کمیت $\omega \times \omega \times \mathbf{r}$ ، همان طور که در شکل (۶-۱۱) نشان داده شده است ، بطور شعاعی رو به بیرون از محور زمین است . ترکیب این جمله با \mathbf{g} است که برآیند \mathbf{g}_e را می دهد . همان طور که از شکل پیداست ، \mathbf{g}_e در هر نقطه در شمال خط استوا ، کمی به طرف جنوب مرکز زمین

متوجه است. هر جسم که در نزدیکی سطح زمین رها شود، جهت g_p را دنبال می کند. شاقول نیز در این جهت قرار می گیرد. اگر سطلی با مایع چرخان داشته باشیم، سطح مایع چرخان طوری خواهد بود که در هر نقطه آن g_p عمود بر سطح است (رک مثال ۱۱-۲). به همین دلیل است که زمین به شکل یک بیضوی تخت است، که در قطبها تخت شده است. ترکیب شتاب مرکز گرا و تخت شدگی زمین است که باعث شده است شعاع قطبی زمین در حدود ۲۱ کیلومتر (تقریباً ۱۳ مایل) کوچکتر از شعاع استوایی باشد؛ $r_p = r_e + 21 \text{ km}$. این اختلاف شعاع باعث می شود که g_p در استوا در حدود 0.53% کمتر باشد تا در قطب.

بطور کلی، مقدار g_p با عرض جغرافیایی λ تغییر می کند و می تواند به شیوه زیر محاسبه شود. با مراجعه به شکل (۱۱-۶-ب)، بزرگی شتاب مرکز گریز یک جرم نقطه ای m عبارت است از

$$\rho\omega^2 = (r \cos \lambda)\omega^2 \quad (۴۷-۱۱)$$

که ρ فاصله جرم m از محور و λ عرض جغرافیایی محل نقطه P روی زمین است. بزرگی نیروی گریز از مرکز عبارت است از

$$m\rho\omega^2 = (mr \cos \lambda)\omega^2 \quad (۴۸-۱۱)$$

زاویه ϵ بین g_p یا امتداد شاقولی و g (جهت نیروی گرانشی)، از شکل (۱۱-۶-پ)، با رابطه زیر داده می شود

$$\frac{\sin \epsilon}{mr\omega^2 \cos \lambda} = \frac{\sin \lambda}{mg_e} \quad (۴۹-۱۱)$$

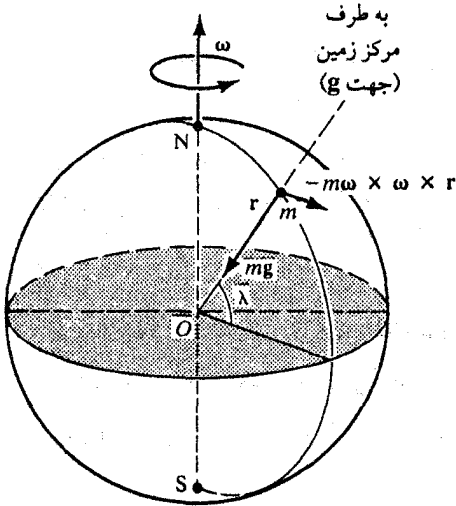
چون ϵ خیلی کوچک است، می توانیم بنویسیم

$$\sin \epsilon \approx \epsilon = \frac{r\omega^2}{g_e} \sin \lambda \cos \lambda = \frac{r\omega^2}{2g_e} \sin 2\lambda \quad (۵۰-۱۱)$$

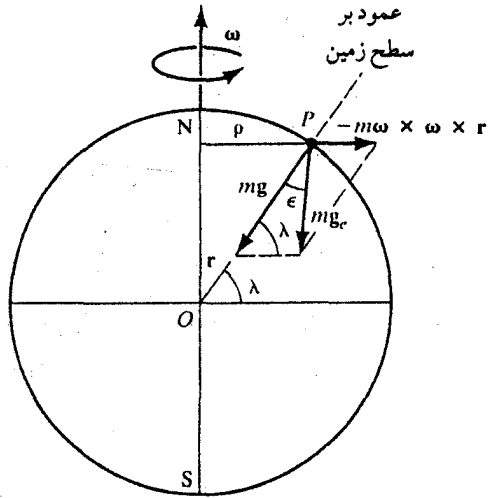
در استوا ($\lambda = 0$) و در قطبها ($\lambda = 90^\circ$)، ϵ صفر خواهد بود، در حالی که بیشینه انحراف شاقول از قائم واقعی در $\lambda = 45^\circ$ است، که در آن جا

$$\epsilon_{\max} = \frac{r\omega^2}{2g_e} \sin(2 \times 45^\circ) = 1.7 \times 10^{-3} \text{ rad} = \frac{1}{10} \text{ degree} \quad (۵۱-۱۱)$$

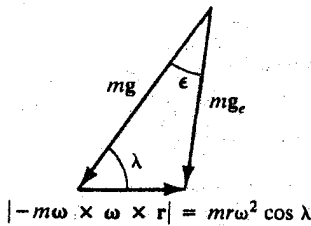
جهت شاقول در هر نقطه عمود بر سطح زمین است.



(الف)



(ب)



(ب)

شکل (۱۱-۶) : زمین چرخان : (الف) نیروی مرکز گریز $-m\omega \times \omega \times r$ که به جسمی به جرم m که در روی سطح زمین در حال سکون است وارد می شود . (ب) جهت شاقول در جهت g_e است ، و (پ) انحراف ϵ از قائم

تأثیرات دینامیکی (حرکت یک پرتابه و سقوط آزاد)

بحثمان را به دو قسمت تقسیم می کنیم :

۱- انحراف پرتابه ای که بطور افقی پرتاب شده باشد

۲- انحراف از قائم یک جسم در سقوط آزاد

یک بار دیگر ، معادله (۱۱-۴۴) را به این وضعیتها اعمال می کنیم . فرض کنیم نیروی اصطکاک یا نیروی خارجی دیگری به ذره وارد نمی شود ؛ یعنی $F = 0$. همچنین جمله $m\omega \times \omega \times r$ خیلی کوچک است و می توان از آن صرف نظر کرد . در نتیجه تنها نیروی ناشی

از حرکت چرخشی زمین نیروی کوریولیس است ، و معادله حرکت عبارت است از

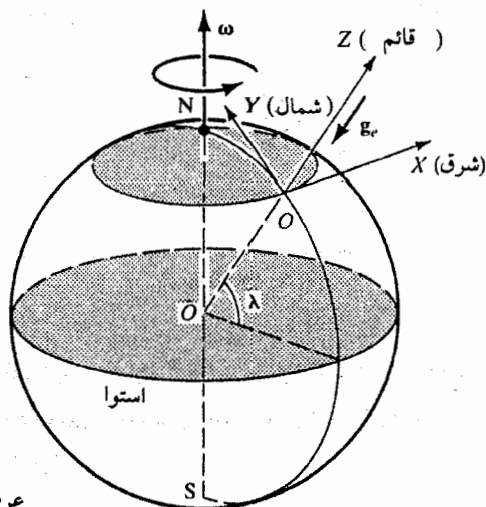
$$m \frac{d'^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{g} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d'\mathbf{r}}{dt} \quad (۵۲-۱۱)$$

که نیروی کوریولیس عبارت است از

$$\mathbf{F}_{\text{Cor}} = m\mathbf{a}_{\text{Cor}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d'\mathbf{r}}{dt} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad (۵۳-۱۱)$$

اکنون به شکل (۷-۱۱) برگردیم و دو مورد خاص را مورد بحث قرار دهیم . ω در امتداد محوری است که از قطب شمال می گذرد . از شکل (۷-۱۱-ب) خواهیم داشت

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = \omega \cos \lambda, \quad \omega_z = \omega \sin \lambda \quad (۵۴-۱۱)$$

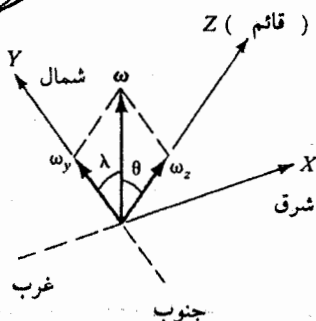


(الف)

- λ = عرض جغرافیایی
- θ = متمم عرض
- $\theta = 90^\circ - \lambda$
- $\boldsymbol{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}$
- $\omega_x = 0$
- $\omega_y = \omega \cos \lambda$
- $\omega_z = \omega \sin \lambda$
- $\mathbf{g}_e = -g\hat{k}$

- $\lambda = 0$ در استوا : $\omega_y = \omega, \omega_z = 0$
- $\lambda = 90^\circ$ در قطب شمال : $\omega_y = 0, \omega_z = \omega$

(ب)



شکل (۷-۱۱) : (الف) مختصات XYZ ، ω ، \mathbf{g} ، و عرض جغرافیایی λ که برای

توصیف حرکت پرتابه مورد نیاز است ، و (ب) مؤلفه های ω

که λ عرض جغرافیایی محل است .

انحراف پرتابه ای که بطور افقی پرتاب شده است . بنا بر معادله (۱۱-۵۳) ، نیروی کوریولیس وارد به هر ذره هم بر ω و هم بر v' عمود است . در نیمکره شمالی ، ω به طرف خارج زمین است . اگر پرتابه در امتداد موازی با سطح پرتاب شده باشد ، این جهت ، جهت v' است . به این ترتیب نیروی کوریولیس $v' \times \omega = -2m\omega \times v'$ ، همان طور که در شکل (۱۱-۸) نشان داده شده است ، سعی دارد که پرتابه را به طرف راست جهت حرکت منحرف کند . جهت انحراف در نیمکره جنوبی در جهت مخالف است . در استوا ω افقی است (در امتداد Y است) [شکل (۱۱-۷ ب)] . در استوا ω مؤلفه ای در امتداد محور Z ندارد ، در نتیجه انحراف صفر است . این انحراف را در محل‌های دیگر می‌توانیم به روش زیر محاسبه کنیم .

فرض کنیم پرتابه در نیمکره شمالی بطور افقی پرتاب شده است . شتاب کوریولیس ، از معادله (۱۱-۵۳) ، عبارت است از

$$a_{Cor} = |2\omega \times v'| = 2\omega_z v' = 2\omega v' \sin \lambda \quad (11-55)$$

انحراف خطی ($y = s$) بعد از زمان t خواهد بود

$$s = \frac{1}{2} a_{Cor} t^2 = \frac{1}{2} (2\omega v' \sin \lambda) t^2 = \omega v' t^2 \sin \lambda \quad (11-56)$$

اگر R برد افقی در زمان t باشد داریم $R = v' t$ یا $t = \frac{R}{v'}$. بنابراین

$$y = s = \omega v' \left(\frac{R}{v'} \right)^2 \sin \lambda = \frac{\omega}{v'} R^2 \sin \lambda \quad (11-57)$$

لذا انحراف زاویه ای θ ، شکل (۱۱-۸) ، عبارت است از

$$\theta = \frac{\text{انحراف خطی}}{\text{فاصله طی شده}} = \frac{\omega v' t^2 \sin \lambda}{v' t} \quad (11-58 \text{ الف})$$

$$\theta = \omega t \sin \lambda \quad (11-58 \text{ ب})$$

در قطب شمال $\lambda = 90^\circ$ و $\sin 90^\circ = 1$ ؛ در نتیجه بیشینه مقدار a_{Cor} ، از معادله (۱۱-۵۵) ، عبارت است از

$$a_{Cor} = 2\omega v' = (1.5 \times 10^{-4} / \text{s}) v'$$

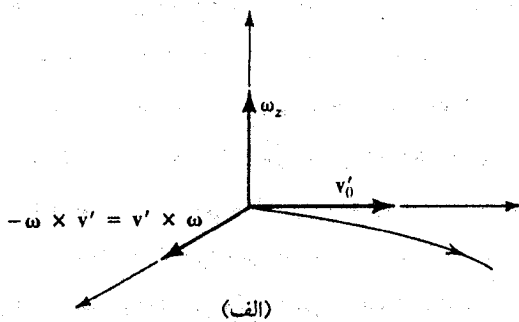
که برای $v' = 10^3 \text{ m/s}$ ، می‌دهد

$$a_{\text{Cor}} \approx 0.15 \text{ m/s}^2 \approx (0.015)g$$

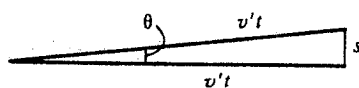
انحراف θ در قطب ، از معادله (۱۱-۵۸) ب) ، عبارت است از

$$\theta = \omega t$$

(۱۱-۵۹)



مسیر افقی در نیمکره شمالی (انحراف به طرف راست)



شکل (۱۱-۸) : در نیمکره شمالی ، یک پرتابه که بطور افقی پرتاب می‌شود در اثر

نیروی کوریولیس به طرف راست منحرف می‌شود

که زاویه ای است که زمین در مدت t می‌چرخد . این نتیجه می‌رساند که وقتی پرتابه ای در قطب شمال پرتاب می‌شود میسر آن در دستگاه لخت یک خط مستقیم است ؛ انحراف ظاهری از چرخش زمین در زیر آن ناشی می‌شود . برای $s = 100$ ، از معادله (۱۱-۵۹) داریم

$$\theta \approx 7 \times 10^{-5} \text{ rad/s} \times 100 \text{ s} \approx 7 \times 10^{-3} \text{ rad} \approx 0.4^\circ$$

گرچه θ کوچک است ، ولی در پرتاب راکت‌های بلند برد و موشک‌ها اهمیت پیدا می‌کند .

انحراف یک جسم با سقوط آزاد از قائم . با مراجعه به شکل (۱۱-۷) ، چون سرعت جسم تقریباً در امتداد محور Z ، و ω در صفحه قائم شمالی-جنوبی ، یعنی ، در صفحه YZ قرار دارد ، نیروی کوریولیس ، که نیروی منحرف کننده $\omega \times v' = 2m \omega \times v'$ است ، در جهت

شرقی - غربی خواهد بود . به این ترتیب در نیمکره شمالی یک جسم با سقوط آزاد به طرف شرق (محور X) منحرف خواهد شد . معادله حرکت در جهت x عبارت است از

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -2m(\omega \times v')_x \quad (۶۰-۱۱)$$

$$= -2m\omega v'_z \sin \theta$$

که $\theta = 90^\circ - \lambda$ زاویه متمم عرض جغرافیایی است .

[جمله $\omega \times v'$ را می توانیم به روش زیر محاسبه کنیم

$$\omega \times v' = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \omega \cos \lambda & \omega \sin \lambda \\ 0 & 0 & v'_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\omega v'_z \cos \lambda + 0 + 0$$

$$= (\omega \times v')_x = \hat{i}\omega v'_z \cos(90^\circ - \theta) = \hat{i}\omega v'_z \sin \theta]$$

تأثیر نیروی کوریولیس در v'_z خیلی کوچک و در نتیجه در انحراف افقی x قابل چشم پوشی است . v'_z را طوری محاسبه می کنیم که گویی نیروی کوریولیس وجود ندارد ، یعنی

$$v'_z = -gt \quad (۶۱-۱۱)$$

و

$$z = \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{یا} \quad t = \sqrt{\frac{2z}{g}} \quad (۶۲-۱۱)$$

با گذاردن به جای v'_z از معادله (۶۱-۱۱) در معادله (۶۰-۱۱) خواهیم یافت

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega(-gt) \sin \theta = 2\omega gt \sin \theta \quad (۶۳-۱۱)$$

با دوبار انتگرال گیری از این معادله و این شرط اولیه که در $t=0$ داریم $x=0$ ، و $\dot{x}=0$ ، خواهیم داشت

$$x = \frac{1}{3}\omega gt^3 \sin \theta \quad (۶۴-۱۱)$$

با قرار دادن به جای t از معادله (۶۲-۱۱) ، و $\theta = 90^\circ - \lambda$ ، نتیجه خواهد شد

$$x = \frac{\omega}{3} \sqrt{\frac{8z^3}{g}} \sin \theta = \frac{\omega}{3} \sqrt{\frac{8z^3}{g}} \cos \lambda \quad (۶۵-۱۱)$$

به این ترتیب در استوا ، $\lambda = 0$ ($\theta = \pi/2$) ، و برای $z = 100 \text{ m}$ ، معادله (۶۵-۱۱)

می دهد $x \cong 2/3$ cm. در قطب، $\lambda = 90^\circ$ ، می دهد $x = 0$ ، در حالی که در $\lambda = 45^\circ$ ، داریم $x \cong 1/55$ cm. بنابراین، انحراف در استوا بیشینه است. انحراف در نیمکره شمالی همیشه به طرف راست (یا به طرف شرق) است. این انحراف از قائم با انحرافهای ناشی از اصطکاک یا جریانهای هوا قابل مقایسه است. این تأثیرات کوچک در آونگ فوکو (رک بخش ۱۱-۵) و ترازهای چرخشی و ارتعاشی مولکولها بهتر دیده خواهند شد.

انرژی دینامیکی (حرکت یک پرتابه): روش کلی

در این روش با معادله عمومی یک پرتابه شروع می کنیم و سپس آن را به دو موردی که قبلاً بحث شد اختصاص می دهیم. معادله عمومی حرکت یک پرتابه [معادله (۱۱-۵۲)] عبارت است از

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{g} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (11-66)$$

که

$$\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{k}} \quad (11-67)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \hat{\mathbf{i}} + \omega_y \hat{\mathbf{j}} + \omega_z \hat{\mathbf{k}} \quad (11-68)$$

و در نتیجه (یادآوری: دیگر نماد پریم به کار نمی بریم).

$$\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & \omega \cos \lambda & \omega \sin \lambda \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad (11-69)$$

$$= \hat{\mathbf{i}}(\omega v_z \cos \lambda - \omega v_y \sin \lambda) + \hat{\mathbf{j}}(\omega v_x \sin \lambda) + \hat{\mathbf{k}}(-\omega v_x \cos \lambda)$$

به این ترتیب معادله (۱۱-۶۶) را می توان به شکل مؤلفه ای زیر نوشت

$$\ddot{x} = -2\omega(z \cos \lambda - y \sin \lambda) \quad (11-70)$$

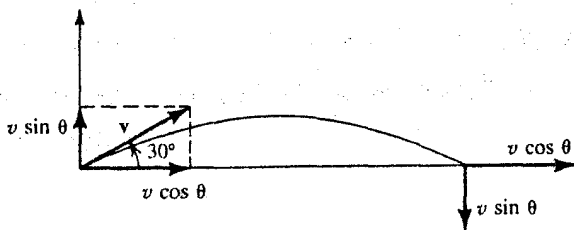
$$\ddot{y} = -2\omega(\dot{x} \sin \lambda) \quad (11-71)$$

$$\ddot{z} = -g + 2\omega(\dot{x} \cos \lambda) \quad (11-72)$$

از حل این معادلات (با دو بار انتگرال گیری و چشم پوشی از جمله های شامل ω^2)، معادلات

(۱۱-۶۵) و (۱۱-۵۶) را ، به ترتیب ، برای x و y به دست می آوریم .

مثال (۱۱-۳): پرتابه ای با سرعت اولیه $v = 500 \text{ m/s}$ تحت زاویه $\theta = 30^\circ$ نسبت به افق از نقطه ای به عرض جغرافیایی λ برابر 60° شمالی به طرف جنوب ، آن طور که شکل (مثال-۱۱-۳) نشان می دهد ، پرتاب شده است . نقطه برخورد با زمین را پیدا کنید .



شکل (مثال-۱۱-۳)

با چشم پوشی از اثر نیروی گریز از مرکز ، فرض کنیم که g در تمام طول مسیر پرتابه ثابت می ماند . نخست مسأله پیدا کردن برد را با چشم پوشی از چرخش زمین ، یعنی چشم پوشی از نیروی کوریولیس ، حل می کنیم . جهت پرتاب با افق زاویه θ می سازد و پرتابه به طرف جنوب پرتاب شده است . به این ترتیب مؤلفه افقی سرعت $v_h = v \cos \theta$ و مؤلفه قائم آن $v_v = v \sin \theta$ است . زمان پرواز پرتابه عبارت است از

$$t_f = \frac{2v \sin \theta}{g} \quad (1)$$

و برد R برابر است با

$$R = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g} \quad (2)$$

برای $v = 500 \text{ m/s}$ ، $g = 9/8 \text{ m/s}^2$ ، و $\theta = 30^\circ$ ، $(\theta$ زاویه متمم عرض نیست) داریم

$$R = 22092.5 \text{ m} = 22.09 \text{ km} \quad (3)$$

اکنون اثر نیروی کوریولیس را در تغییر مکان نقطه برخورد محاسبه کنیم .
نیروی کوریولیس [از معادله (۱۱-۶۰)] عبارت است از

$$\mathbf{F}_{\text{Cor}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (4)$$

یا

$$F_{\text{Cor}} = 2m\omega v \cos \lambda \quad (5)$$

وقتی پرتابه به طرف بالا حرکت کند ، یعنی v رو به بالا باشد ، نیرو با رابطه بالا داده می شود ، و انحراف به طرف غرب است ، و وقتی پرتابه به طرف پایین حرکت کند ، یعنی v به طرف پایین باشد ، نیروی F_{Cor} به طرف شرق خواهد بود ، در نتیجه انحراف به طرف شرق است . علاوه بر این دو انحراف ، اگر پرتابه دارای سرعت v_{N-S} در جهت شمالی - جنوبی باشد ، دو انحراف دیگر وجود دارد ؛ یعنی ، [از معادله (۱۱-۵۵)]

$$F_{\text{Cor}} = 2m\omega v_{N-S} \sin \lambda$$

یا

$$F_{\text{Cor}} = 2m\omega v_N \sin \lambda , \quad \text{به طرف شرق} \quad (6)$$

$$F_{\text{Cor}} = 2m\omega v_S \sin \lambda , \quad \text{به طرف غرب} \quad (7)$$

به این ترتیب چهار انحراف وجود دارد ، دو انحراف از معادله (۵) و دو انحراف از معادلات (۶) (۷) . حتی اگر یک حرکت شرقی - غربی می داشتیم ، هیچ انحرافی حاصل نمی شد زیرا جهت شرقی - غربی بر ω عمود است .

اکنون انحراف را با استفاده از معادله (۵) محاسبه کنیم . مؤلفه عمودی سرعت

برحسب زمان عبارت است از

$$v_v = v \sin \theta - gt \quad (8)$$

با قرار دادن این عبارت در معادله (۵) ، شتاب رو به غرب ، با این شرایط اولیه که در $t = 0$ سرعت و جابه جایی در جهت غرب صفر است ، با رابطه زیر داده می شود

$$a_{w1} = 2\omega(v \sin \theta - gt) \cos \lambda \quad (9)$$

دو بار انتگرال گیری از (۹) نتیجه می دهد

$$x_{w1} = \omega v \sin \theta \cos \lambda t^2 - \frac{1}{2} \omega g \cos \lambda t^3 \quad (10)$$

از معادله (۱) به جای $t = t$ مقدار قرار می دهیم و ، پس از ساده سازی ، داریم

$$x_{w1} = \frac{4}{3} \frac{\omega v^3 \sin^3 \theta \cos \lambda}{g^2} \quad (11)$$

توجه کنیم که این عبارت شامل هر دو انحراف پرتابه، حرکت رو به بالا و رو به پایین است و، همان طور که در نگاه اول به نظر می آید، صفر نیست.

اینک، با استفاده از معادله (۷)، می توانیم انحراف را برای مؤلفه رو به جنوب سرعت محاسبه کنیم. [انحرافی متناظر با معادله (۶) نداریم زیرا سرعت رو به شمال نداریم]. مؤلفه رو به جنوب سرعت v_s با مؤلفه افقی سرعت پرتابه یکی است، یعنی

$$v_s = v_h = v \cos \theta \quad (12)$$

با ترکیب معادلات (۷) و (۱۲)، شتاب رو به غرب عبارت است از

$$a_{w2} = 2\omega v \cos \theta \sin \lambda \quad (13)$$

به این ترتیب انحراف به طرف غرب برابر است با

$$x_{w2} = \frac{1}{2} a_{w2} t^2 \quad (14)$$

ترکیب معادلات (۱)، (۱۳) و (۱۴) می دهد

$$x_{w2} = \frac{1}{2} (2\omega v \cos \theta \sin \lambda) \left(\frac{2v \sin \theta}{g} \right)^2$$

یا

$$x_{w2} = \frac{4\omega v^3}{g^2} \sin^2 \theta \cos \theta \sin \lambda \quad (15)$$

انحراف کلی رو به غرب از جمع معادلات (۱۱) و (۱۵) به دست می آید

$$x_w = x_{w1} + x_{w2} \quad (16)$$

$$= \frac{4}{3} \frac{\omega v^3}{g^2} \sin^2 \theta (\sin \theta \cos \lambda + 3 \cos \theta \sin \lambda)$$

با قرار دادن $g = 9/8 \text{ m/s}^2$ ، $v = 500 \text{ m/s}$ ، $\theta = 30^\circ$ ، $\lambda = 60^\circ$ ، و $\omega = 7.292 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ ، برای جابه جایی کل رو به غرب نقطه برخورد خواهیم داشت

$$x_w = 316.4 \text{ m}$$

بنابراین، پرتابه در $22,09$ کیلومتری جنوب نقطه پرتاب و در حدود $316,4$ متر به طرف غرب به زمین خواهد رسید.

تمرین (۱۱-۳): مثال را برای پرتابه ای که در عرض جغرافیایی $60^\circ = \lambda$ جنوبی پرتاب شود تکرار کنید .

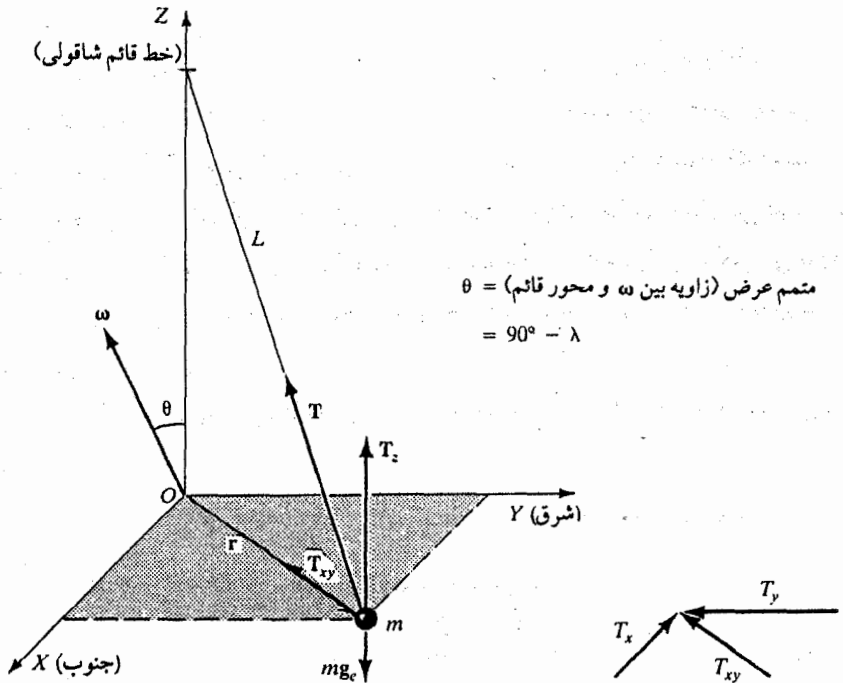
۱۱-۵ آونگ فوکو

در ۱۸۵۱ ، ژان لئون فوکو (۱۸۱۹-۱۸۶۸) سیستمی پیشنهاد کرد که نشان می داد زمین یک دستگاه نالخت است . به بیان دیگر ، همان طور که نشان خواهیم داد ، او حضور نیروی کوریولیس ناشی از چرخش زمین را نشان داد . آونگ فوکو از یک گلوله سنگین به جرم 28 kg که با سیم بلندی به طول 67 m از گنبد پانتئون در پاریس آویزان شده بود تشکیل می شد . آونگ آزادانه در هر سطح قائمی نوسان می کرد . وقتی آونگ در سطح قائم معینی به نوسان در آورده شد ، مشاهده شد که صفحه نوسان آونگ حول محور قائم می چرخد . صفحه نوسان در هر دور تقریباً به اندازه یک سانتی متر حرکت تقدیمی داشت ، که مستقیماً نشان می داد که زمین می چرخد . (یک چنین آونگی در آموزشگاه اسمیتسونی در واشنگتن به نمایش گذاشته شده است) .

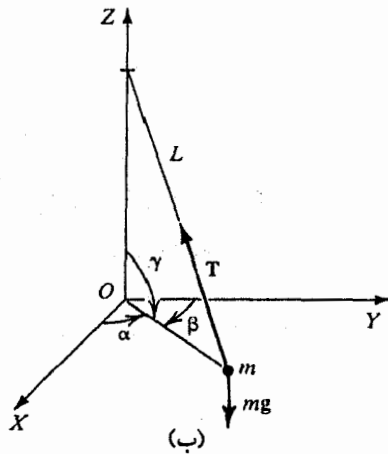
ما مسأله حرکت آونگ فوکو را با کمک یک نمودار ، شکل (۱۱-۹) تجزیه و تحلیل می کنیم . شرایط لازم عبارتند از : بزرگ بودن طول نخ ، بزرگ بودن جرم گلوله ، و بدون اصطکاک بودن جایگاه آویز ، برای این که آونگ بتواند آزادانه نوسان کند . همان طور که نشان داده شده است ، نقطه O ، مبدأ دستگاه مختصات $OXYZ$ مستقیماً در زیر نقطه آویز قرار دارد و نقطه ترازمندی آونگ است . محور Z قائم محلی است ، و صفحه XY یک صفحه افقی است . برای انجام این کار ، حرکت آونگ به نوسانات خیلی کوچک محدود است . با این شرایط ، جابه جایی \mathbf{r} گلوله ، از نقطه ترازمندی تقریباً افقی است . در نتیجه $\dot{z} = v_z$ در مقایسه با $\dot{x} (= v_x)$ یا $\dot{y} (= v_y)$ خیلی کوچک است . اگر \mathbf{T} تنش نخ $\dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}/dt$ $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ سرعت گلوله باشد ، معادله حرکت جرم m را می توان به صورت زیر نوشت

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{T} + m\mathbf{g}_e - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (۱۱-۷۳)$$

جمله آخر در این معادله نیروی کوریولیس است و اگر زمین نمی چرخید غایب می بود . معادله (۱۱-۷۳) بدون جمله آخر صرفاً معادله یک آونگ ساده در زمین بدون چرخش است .



(الف)



(ب)

شکل (۱۱-۹): نیروهای وارد به گلوله یک آونگ فوکو به جرم m

برای سرعت‌های کوچک ، مثلاً $v \equiv 10 \text{ km/h}$ ، نیروی کوریولیس تقریباً $1/100$ نیروی گرانشی mg_e است ؛ در نتیجه مؤلفه قائم نیروی کوریولیس در مقایسه با mg_e قابل چشم‌پوشی است . از سوی دیگر ، مؤلفه افقی نیروی کوریولیس که عمود بر $\dot{\mathbf{r}}$ و در صفحه XY است ، اثر قابل ملاحظه‌ای بر حرکت آونگ دارد زیرا نیروهای دیگری در این صفحه عمل نمی‌کنند . این مؤلفه نیروی کوریولیس تداوم نوسان آونگ در یک صفحه قائم ثابت را غیرممکن می‌سازد و باعث می‌شود که این صفحه حول محور قائم بچرخد . بسامد این چرخش را به روش زیر حساب می‌کنیم .

معادله دیفرانسیل حرکت جرم m را که با معادله (۱۱-۷۳) داده شده است می‌توان

به صورت

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{T} + m\mathbf{g}_e - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (۱۱-۷۴)$$

نوشت . مؤلفه‌های $\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}$ که قبلاً نیز حساب شده‌اند عبارتند از

$$\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & \omega \cos \lambda & \omega \sin \lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} \quad (۱۱-۷۵)$$

$$= \hat{\mathbf{i}}(\omega \dot{z} \cos \lambda - \omega \dot{y} \sin \lambda) + \hat{\mathbf{j}}(\omega \dot{x} \sin \lambda) + \hat{\mathbf{k}}(-\omega \dot{x} \cos \lambda)$$

مؤلفه‌های \mathbf{T} ، از شکل (۱۱-۹) عبارتند از

$$T_x = -T \cos \alpha = -\frac{x}{L} T \quad (۱۱-۷۶ \text{ الف})$$

$$T_y = -T \cos \beta = -\frac{y}{L} T \quad (۱۱-۷۶ \text{ ب})$$

$$T_z = T \cos \gamma = \frac{z}{L} T \quad (۱۱-۷۶ \text{ پ})$$

که α ، β ، و γ کسینوسهای هادی هستند . با به‌کارگیری این معادلات ، می‌توانیم معادله دیفرانسیل ، معادله (۱۱-۷۴) ، را به شکل مؤلفه‌ای به صورت زیر بنویسیم

$$m\ddot{x} = -\frac{x}{L} T - 2m\omega(\dot{z} \cos \lambda - \dot{y} \sin \lambda) \quad (۱۱-۷۷)$$

$$m\ddot{y} = -\frac{y}{L} T - 2m\omega \dot{x} \sin \lambda \quad (۱۱-۷۸)$$

$$m\ddot{z} = T_z - mg + 2m\omega \dot{x} \cos \lambda \quad (۱۱-۷۹)$$

در این مورد، جابه‌جایی قائم‌آونگ خیلی کوچک است، بطوری که $z \cong L$ و، از معادله (۱۱-۷۶) پ، $T_z \cong T \cong mg$. همچنین در این مورد z در مقایسه با \dot{x} و \dot{y} تقریباً صفر است. به این ترتیب حرکت جرم m در صفحه XY با معادلات (۱۱-۷۷) و (۱۱-۷۸) با $z = 0$ و $T = mg$ توصیف می‌شود؛ یعنی

$$m\ddot{x} = -\frac{x}{L} mg + 2m\omega\dot{y} \sin \lambda \quad (۱۱-۸۰)$$

$$m\ddot{y} = -\frac{y}{L} mg - 2m\omega\dot{x} \sin \lambda \quad (۱۱-۸۱)$$

با تعریف

$$\omega' = \omega \sin \lambda \quad (۱۱-۸۲)$$

معادلات (۱۱-۸۰) و (۱۱-۸۱) به شکل زیر در می‌آیند

$$\ddot{x} = -\frac{g}{L} x + 2\omega'\dot{y} \quad (۱۱-۸۳)$$

$$\ddot{y} = -\frac{g}{L} y - 2\omega'\dot{x} \quad (۱۱-۸۴)$$

این معادلات، معادلات جفت شده نامیده می‌شوند، زیرا معادله \ddot{x} شامل \dot{y} و معادله \ddot{y} شامل \dot{x} است. به جای این که سعی کنیم برای داشتن یک تعبیر فیزیکی این معادلات را حل کنیم، راحت‌تر است که روش دیگری، که در زیر بحث می‌کنیم، اختیار کنیم.

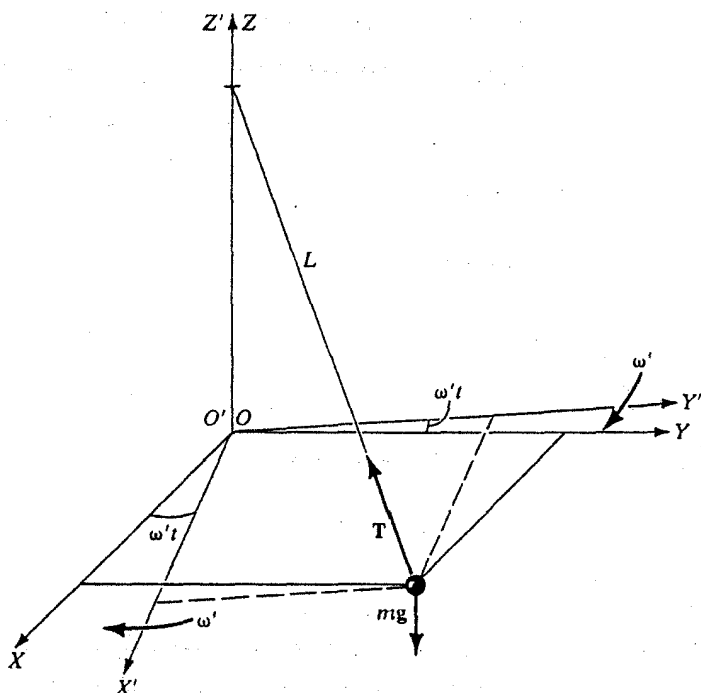
حرکت توصیف شده توسط معادلات (۱۱-۸۳) و (۱۱-۸۴) را می‌توانیم با تبدیل به محورهای جدید OXY' که با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega' (= -\omega \sin \lambda)$ نسبت به محورهای Oxy در صفحه XY ، آن‌طور که در شکل (۱۱-۱۰) نشان داده شده است، می‌چرخند، نمایان سازیم. توجه کنیم که چرخش حول محور Z' ، که بر محور Z منطبق است، انجام می‌گیرد. معادلات تبدیل عبارتند از

$$x = x' \cos \omega't + y' \sin \omega't \quad (۱۱-۸۵)$$

$$y = -x' \sin \omega't + y' \cos \omega't \quad (۱۱-۸۶)$$

با محاسبه مقادیر \ddot{x} و \ddot{y} از معادلات (۱۱-۸۵) و (۱۱-۸۶)، حذف جمله‌های شامل ω'^2 ، قرار دادن مقادیر x ، \dot{x} ، \dot{y} و \ddot{x} در معادله (۱۱-۸۳)، و مرتب‌سازی، خواهیم داشت

$$\left(\ddot{x}' + \frac{g}{L} x'\right) \cos \omega' t + \left(\ddot{y}' + \frac{g}{L} y'\right) \sin \omega' t = 0 \quad (۸۷-۱۱)$$



شکل (۱۱-۱۰): حرکت آونگ فوکو در يك دستگاه مختصات جديد $O'X'Y'$ که در صفحه XY با سرعت زاویه‌ای ثابت $-\omega'$ ($= -\omega \sin \lambda$) نسبت به محورهای $OXYZ$ می‌چرخد.

برای این که این معادله برای هر مقدار t برقرار باشد، ضرایب $\cos \omega' t$ و $\sin \omega' t$ باید صفر باشند. یعنی

$$\ddot{x}' + \frac{g}{L} x' = 0 \quad (۸۸-۱۱)$$

$$\ddot{y}' + \frac{g}{L} y' = 0 \quad (۸۹-۱۱)$$

با تعریف

$$\omega_x^2 = \frac{g}{L} \quad \text{و} \quad \omega_y^2 = \frac{g}{L} \quad (۹۰-۱۱)$$

معادلات (۸۸-۱۱) و (۸۹-۱۱) به شکل

$$\ddot{x}' + \omega_x^2 x' = 0 \quad (۹۱-۱۱)$$

$$\ddot{y}' + \omega_y^2 y' = 0 \quad (۹۲-۱۱)$$

در می آیند . معادلات (۹۱-۱۱) و (۹۲-۱۱) نشان می دهند که مسیر جرم m در دستگاه مختصات $O'X'Y'$ ، همان طور که در شکل (۱۱-۱۱ الف) نشان داده شده است ، یک بیضی است (که از دو حرکت هماهنگ ساده عمود بر یکدیگر حاصل شده است) . در مختصات OXY قطر بزرگ بیضی جهت ثابتی دارد ، اما وقتی این قطر از دستگاه مختصات OXY مشاهده شود چنین نیست زیرا $O'X'Y'$ نسبت به OXY با سرعت زاویه ای ثابت ω می چرخد . بنابراین قطر بزرگ ، وقتی از دستگاه مختصات OXY مشاهده می شود دارای یک چرخش پیوسته در جهت ساعتگرد (در نیمکره شمالی) با سرعت زاویه ای ثابت $\omega = -\omega \sin \lambda$ است . یعنی ، صفحه قائم نوسان از دید دستگاه OXY ، همان طور که در شکل (۱۱-۱۱ ب) نشان داده شده است ، با سرعت زاویه ω حول قائم محل می چرخد . زمان تناوب T_p ی حرکت تقدیمی عبارت است از

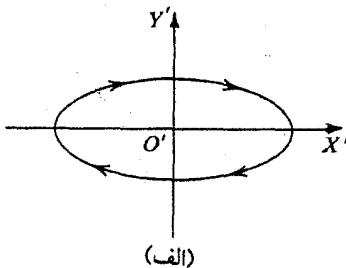
$$T_p = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\omega \sin \lambda} = \frac{T_0}{\sin \lambda} = \frac{24 \text{ h}}{\sin \lambda} \quad (۹۳-۱۱)$$

بنابراین ،

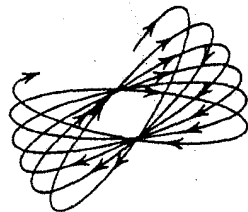
$$\lambda = 45^\circ \quad T_p \approx 34 \text{ h} \quad (۹۴-۱۱ \text{ الف})$$

$$\lambda = 90^\circ \text{ (قطب شمال)} , \quad T_p = 24 \text{ h} \quad (۹۴-۱۱ \text{ ب})$$

$$\lambda = 0^\circ \text{ (استوا)} \quad T_p = \infty \quad (۹۴-۱۱ \text{ پ})$$



(الف)



(ب)

شکل (۱۱-۱۱) : (الف) مسیر بیضی شکل گلوله یک آونگ فوکو از دید دستگاه چرخان

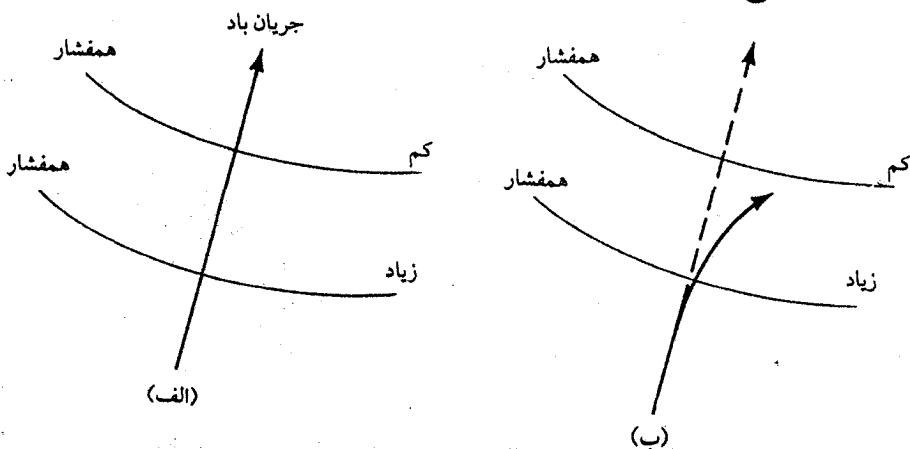
$O'X'Y'$. (ب) چرخش پیوسته قطر بزرگ بیضی وقتی از دستگاه OXY مشاهده می شود ، یعنی

فایشگر چرخش صفحه قائم آونگ است

در قطب شمال یا جنوب ، $\omega = \pm \omega$ ، یعنی ، آونگ در یک صفحه قائم (که نسبت به یک دستگاه لخت ، که به وسیله فضا یا ستارگان تعریف شده است ، ثابت است) نوسان می کند ، در حالی که زمین در زیر آن با زمان تناوب ۲۴ ساعت می چرخد . در استوا $\omega = 0$ ؛ در نتیجه صفحه آونگ نمی چرخد .

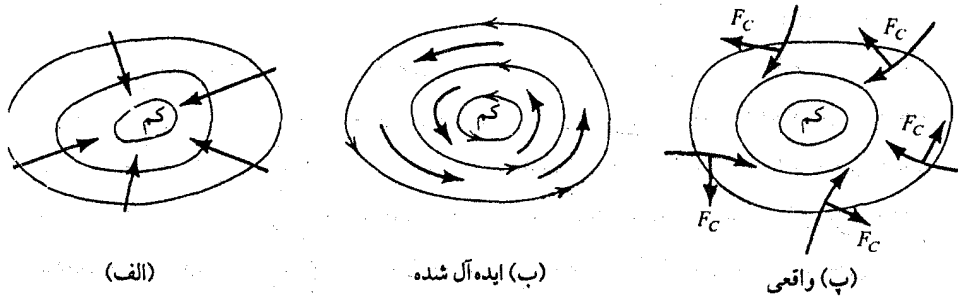
۱۱-۶ جریانهای افقی باد : سیستمهای آب و هوایی

نیروی کوریولیس یکی از چند عاملی است که در حرکت بادهای در نتیجه در سیستم آب و هوایی تأثیر می گذارد . ما در این جا چهره بسیار ساده شده ای از این وضعیت را ارائه می دهیم . فرض کنیم که به علت اختلاف دمای هوا ، یک ناحیه کم فشار در جو ایجاد شود . منحنیهای افقی در شکل (۱۱-۱۲) و منحنیهای بسته در شکلهای (۱۱-۱۳) و (۱۱-۱۴) خطوط با فشار ثابت را نشان می دهند و همفشار نامیده می شوند . به علت وجود گرادیان فشار ، به هر جزیی از هوا نیرویی وارد می شود و در غیاب هر نیروی دیگری ، توده هوا از ناحیه پرفشار به طرف ناحیه کم فشار به حرکت در می آید ، و در مدت کمی اختلاف فشار از بین رفته و فشار یکسان می شود . چنین جریان هوایی جریان ناشی از گرادیان فشار نامیده می شود . نیروی ناشی از گرادیان فشار در امتداد قائم با نیروی گرانشی خنثی می شود . در نتیجه توده های هوا فقط در سطح افقی حرکت می کنند و باد نامیده می شوند .

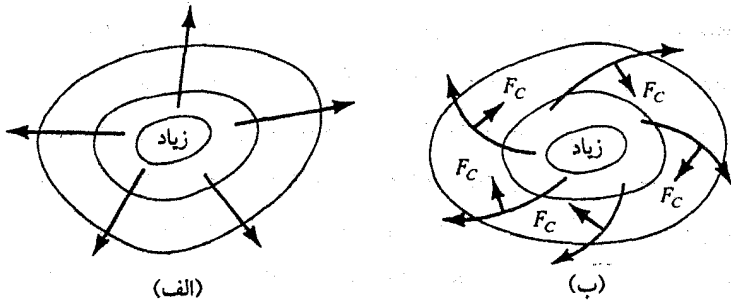


شکل (۱۱-۱۲) : جهت باد از پرفشار به کم فشار (الف) در غیاب نیروی کوریولیس ،

و (ب) در حضور نیروی کوریولیس



شکل (۱۱-۱۳) : جریان باد حول کم فشار در نیمکره شمالی (الف) بدون نیروی کوریولیس ، (ب) ایده آل شده در حضور نیروی کوریولیس F_c ، و (پ) واقعی



شکل (۱۱-۱۴) : جریان باد حول ناحیه پرفشار در نیمکره شمالی (الف) بدون نیروی کوریولیس ، و (ب) واقعی با نیروی کوریولیس و نیروهای دیگر

حضور نیروی کوریولیس ، که قابل مقایسه با نیروهای گرادیان فشاری است ، وضعیت را تغییر می دهد . در غیاب نیروهای کوریولیس ، جهت باد ، همان طور که شکل (۱۱-۱۲ الف) نشان می دهد ، عمود بر هم فشارها خواهند بود . نیروی کوریولیس آنها را به طرف راست منحرف می کند [شکل (۱۱-۱۲ ب)] . این انحراف توده های هوا به طرف راست تا وقتی که جهت باد موازی با هم فشار شود و نیروی کوریولیس درست نیروی گرادیان فشاری را خنثی کند ادامه دازد . به این ترتیب باد به حرکت در امتداد هم فشار ادامه می دهد و در جهت پاد ساعتگرد حول ناحیه کم فشار در نیمکره شمالی می چرخد [شکل (۱۱-۱۳) ، که در قسمت (الف) آن جریان بدون حضور نیروی کوریولیس ، در قسمت (ب) جریان ایده آل شده ای در حضور نیروی کوریولیس ، و در قسمت (پ) جریان واقعی (با اصلاحات

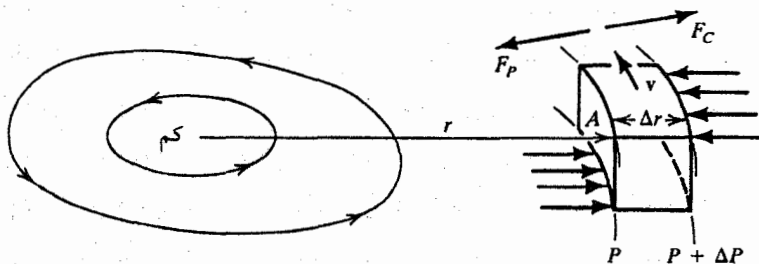
حاصل از اصطکاک و نیروهای دیگر) نشان داده شده است]. از سوی دیگر، بادهای در نیمکره شمالی در جهت ساعتگرد حول ناحیه های پر فشار، آن طور که شکل (۱۱-۱۴) نشان می دهد، می چرخند [تشکیل بادهای تند (گردباد و توفان) حول یک ناحیه پر فشار، همان طور که بعداً توضیح خواهیم داد، خیلی متداول نیست]. جهت های جریان باد در نیمکره جنوبی حول ناحیه های کم فشار و پرفشار مخالف جهت باد در نیمکره شمالی است. این نوع بادهای بادهای ژئوستروفیک یا بادهای گردبادی نامیده می شوند. در استوا نیروی کوریولیس وجود ندارد، و عدم وجود بادهای چرخشی به آب و هوای یکنواخت تری در نزدیکی استوا منجر می شود.

اکنون این حرکت را از دیدگاهی تحلیلی بررسی می کنیم. یک توده هوا به حجم $V = A\Delta r$ ، که A مساحت سطح مقطع Δr ضخامت است (رک شکل (۱۱-۱۵) در نظر بگیریم. این توده هوا در فاصله r از مرکز کم فشار قرار دارد. نیروی فشار وارد به سطح داخلی PA و نیروی فشار وارد به سطح خارجی $(P + \Delta P)A$ است. به این ترتیب نیروی فشاری خالص F_p ی وارد به این توده برابر با ΔPA و به طرف داخل است. نیروی کوریولیس F_c برابر با $2m\omega v \sin \lambda$ است، که $m = \rho V = \rho A \Delta r$ جرم هوا، ρ چگالی، و v سرعت آن است. چون توده هوا در جهت پاد ساعتگرد می چرخد، نیروی کوریولیس به طرف بیرون عمل می کند. توجه به این که شتاب مرکز گرا $\frac{v^2}{r}$ است، می توانیم معادله حرکت این توده هوا را به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{mv^2}{r} = \Delta PA - 2m\omega v \sin \lambda \quad (11-95)$$

با قرار دادن $m = \rho A \Delta r$ و در حد $\Delta r \rightarrow 0$ خواهیم داشت

$$\frac{v^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - 2\omega v \sin \lambda \quad (11-96)$$



شکل (۱۱-۱۵): نیروهای وارد به یک توده هوا در فاصله r از مرکز کم فشار

در نزدیکی مرکز کم فشار ، $\frac{dP}{dr}$ خیلی بزرگ ، و در نتیجه سرعت باد خیلی زیاد است . از سوی دیگر ، دور از مرکز کم فشار ، می توانیم از جمله $\frac{v^2}{r}$ چشم پوشی کنیم و بنویسیم

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = 2\omega v \sin \lambda \quad (۹۷-۱۱)$$

$$v = \frac{1}{2\omega \sin \lambda} \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} \quad (۹۸-۱۱)$$

جریان باد حول ناحیه های کم فشار و پرفشار و جهت های نیروی کوریولیس F_C و نیروی فشاری F_p که از گردایان فشار ناشی می شود ، در شکل (۱۱-۱۶) نمایش داده شده است .

در مورد یک ناحیه کم فشار ، برای گردایان فشار پایین (۱ تا ۴ میلی بار بر متر) سرعت باد را از مرتبه کوچکتر از 80 km/hr به دست می آوریم . اگر گردایان فشار در حدود ۳۰ میلی بار بر متر باشد سرعت بادها به حدود 160 km/hr می رسد و توفان نامیده می شوند . این محاسبات در مثال (۱۱-۴) ارائه شده اند .

در مورد یک ناحیه پرفشار ، جهت های F_C و F_p ، همان طور که شکل (۱۱-۱۶) پ نشان می دهد ، در خلاف جهت مورد ناحیه کم فشار هستند ، و بعد از بازنویسی معادله (۱۱-۹۶) ، خواهیم داشت

$$v = r\omega \sin \lambda - \left[(r\omega \sin \lambda)^2 - \frac{r}{\rho} \left| \frac{dP}{dr} \right| \right]^{1/2} \quad (۹۹-۱۱)$$

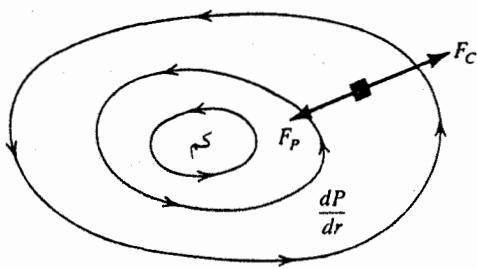
بنابراین اگر

$$\frac{r}{\rho} \left| \frac{dP}{dr} \right| > (r\omega \sin \lambda)^2 \quad (۱۰۰-الف)$$

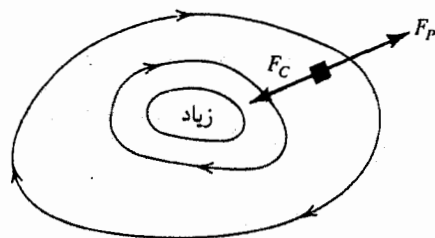
یا

$$\frac{1}{\rho} \left| \frac{dP}{dr} \right| > r(\omega \sin \lambda)^2 \quad (۱۰۰-ب)$$

یعنی ، $F_p > F_C$ ، پرفشار نمی تواند شتاب مرکز گرا برای تشکیل یک توفان ایجاد کند . علت آن این است که نیروی کوریولیس برای تأمین نیروی مرکز گرای مورد نیاز خیلی ضعیف است . به این ترتیب نتیجه می گیریم که توفانها و تندبادها همیشه سیستمهایی کم فشارند ، نه پرفشار .



(الف) برای کم فشار



(ب) برای پر فشار

شکل (۱۱-۱۶): جریان و جهت نیروها حول (الف) ناحیه کم فشار، و (ب) ناحیه پرفشار

مثال (۱۱-۳): فرض کنیم در محلی با عرض جغرافیایی $20^\circ N$ فشار جو 10^5 N/m^2 و چگالی هوا 1.3 kg/m^3 است. (الف) سرعت باد را در فاصله 100 km از مرکز کم فشار وقتی گرادیان فشار $1/5$ میلی بار بر متر باشد حساب کنید. (ب) سرعت باد را در همین فاصله وقتی که گرادیان فشار 30 میلی بار بر متر باشد حساب کنید.

$$dP/dr = 1.5 \text{ mb/m} = 1.5 \times 10^{-3} \text{ N/m}^3 \quad (\text{الف}) \quad (1)$$

چون این گرادیان فشار پایین است، می توانیم از جمله شامل شتاب مرکز گرا صرف نظر کنیم، و معادله (۱۱-۹۸) می دهد

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{2\omega \sin \lambda} \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} \\ &= \frac{1}{2 \times 7.292 \times 10^{-5} \text{ rad/s} \times \sin 20^\circ} \frac{1}{1.3 \text{ kg/m}^3} 1.5 \times 10^{-3} \text{ N/m}^3 \\ &= 23 \text{ m/s} = 83 \text{ km/h} = 52 \text{ mi/h} \end{aligned} \quad (2)$$

(ب) در این مورد $\frac{dP}{dr}$ بزرگ است، و نمی توانیم از جمله $\frac{v^2}{r}$ چشم پوشیم. معادله (۱۱-۹۶) می دهد

$$v = \left[(r\omega \sin \lambda)^2 + \frac{r}{\rho} \frac{dP}{dr} \right]^{1/2} - r\omega \sin \lambda \quad (3)$$

با قرار دادن $r = 100 \text{ km}$ ، $\lambda = 20^\circ$ و $\frac{dP}{dr} = 3 \times 10^{-3} \text{ N/m}^2$ ، خواهیم داشت

$$v = 45 \text{ m/s} = 160 \text{ km/h} = 100 \text{ mi/h}$$

توده های هوایی که با چنین سرعتهای بالایی حرکت می کنند توفان نامیده می شوند . محاسبات با مشاهدات سازگارند . توجه کنیم که v در این مورد خیلی بزرگ است ؛ در نتیجه نمی توانیم ، آن طور که در مورد (الف) انجام دادیم ، با چشم پوشی از جمله $\frac{v^2}{r}$ شروع کنیم . اگر F_p از F_c تجاوز کند (نیروی ناشی از گردایان فشار از نیروی کوریولیس زیادتر شود) ، می تواند یک شتاب مرکز گرا ایجاد کند .

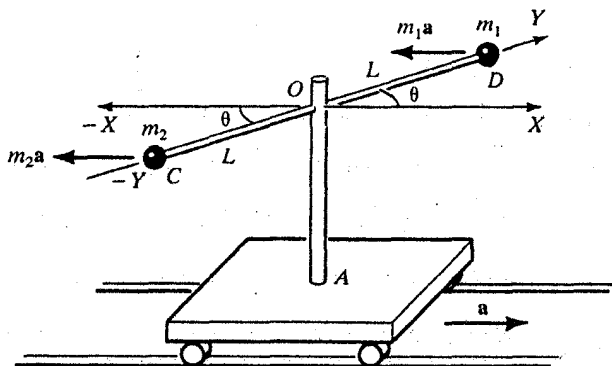
تمرین (۱۱-۲) : قسمت‌های (الف) و (ب) را وقتی که گردایان فشار در مثال از یک ناحیه پرفشار باشد انجام دهید . در قسمت (ب) چه نتیجه ای می گیرید ؟

مسائل

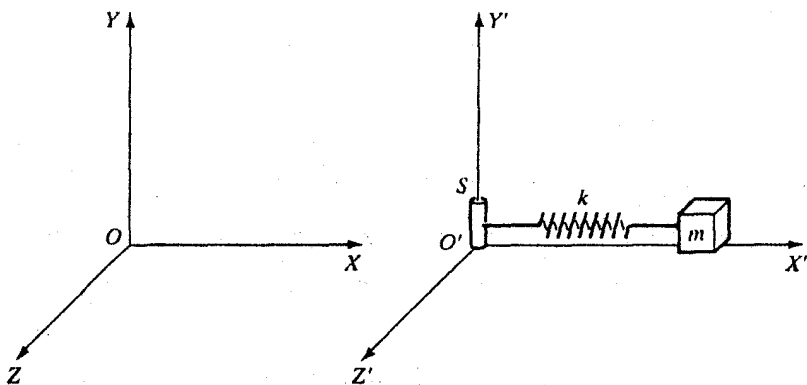
۱-۱۱ چرخشی به شعاع a در یک جاده گلی با سرعت v_0 در امتداد یک خط مستقیم می غلتد و ضمن حرکت گل از آن پرت می شود . محاسبه کنید (الف) بیشینه ارتفاعی از سطح زمین که گل می تواند به آن برسد ، و (ب) نقطه ای از طوقه که این گل از آن جدا می شود .

۲-۱۱ یک ارابه با شتاب ثابت a در امتداد محور X به طرف راست حرکت می کند . یک ستون OA روی ارابه نصب شده است . در روی این ستون میله CD به طول $2L$ لولا شده و می تواند آزادانه در صفحه افقی XY ، آن طور که در شکل (مسئله ۱۱-۲) نشان داده شده است ، بچرخد . جرمهای m_1 و m_2 در دو انتهای میله نصب شده اند . در مورد حرکت میله نسبت به دستگاه مختصات متحرک متصل به ارابه بحث کنید . زمان تناوب را برای وقتی که میله بچرخد یا نوسان کند پیدا کنید .

۳-۱۱ یک جرم m به فتری با ثابت فتری k بسته شده است ، و فتر به تکیه گاه S ، مطابق شکل (مسئله ۱۱-۳) ، بسته شده است . S یک حرکت هماهنگ ساده با بسامد ω و دامنه A نسبت به یک دستگاه مرجع ساکن $OXYZ$ انجام می دهد . اگر جرم m نیز در امتداد محور X حرکت کند ، جابه جایی و زمان تناوب را از دید دستگاه مرجع متصل به تکیه گاه S پیدا کنید .



شکل (مسأله-۱۱-۲)



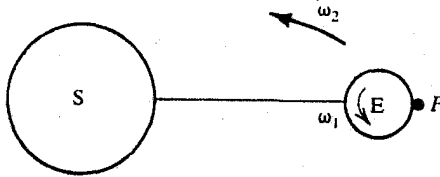
شکل (مسأله-۱۱-۳)

۴-۱۱ یک لاستیک دوچرخه به شعاع R با سرعت v (الف) در روی یک خط مستقیم ، و (ب) روی یک مسیر دایره ای به شعاع R حرکت می کند . شتاب پیچ هوارا وقتی در پایین چرخ باشد نسبت به زمین پیدا کنید .

۵-۱۱ جرم m به نخى به طول L بسته شده و از سقف یک ترن آویزان شده است . تنش نخ و انحراف از قائم را وقتی که (الف) ترن با شتاب ثابت a روی ریل مستقیم حرکت می کند ، و (ب) ترن روی یک منحنی به شعاع R با سرعت v دور می زند ، پیدا کنید .

۶-۱۱ در یک دستگاه مختصات بدون پریم ، عبارتی به نام *یرک* (Jerk) با $\vec{r} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{a}}{dt}$ تعریف می شود . عبارتی برای *یرک* در دستگاه مختصات پریم دار پیدا کنید .

۷-۱۱ می توانیم بنویسیم $\mathbf{a}_{PS} = \mathbf{a}_{PE} + \mathbf{a}_{ES}$ ، که شتاب نقطه P در روی سطح زمین نسبت به مرکز زمین ، و \mathbf{a}_{ES} شتاب زمین نسبت به خورشید است . هر دو شتاب از حرکت های دورانی آنها ناشی شده است (رک شکل (مسئله ۷-۱۱)) . نشان دهید که شتاب \mathbf{a}_{PS} نقطه P نسبت به خورشید در مقایسه با g کوچک است .



شکل (مسئله ۷-۱۱)

۸-۱۱ یک چرخ فلک با بسامد ω می چرخد . کودکی در فاصله d از مرکز a نشسته و نخى به طول L را که جرم کوچکی به جرم m به انتهای آن بسته شده است در دست دارد . جرم با حرکت هماهنگ ساده کم دامنه نوسان می کند . زمان تناوب نوسانات را پیدا کنید .

۹-۱۱ میله ای در روی یک میز گردان در یک امتداد شعاعی از مرکز نصب شده است . مهره ایی در روی این میله قرار دارد و از O به طرف A رو به بیرون شروع به لغزیدن می کند . مهره می تواند با نیرویی که بیشینه آن مساوی با وزن مهره در روی زمین است خود را روی میله نگاه می دارد . اگر میز با بسامد زاویه ای ω بچرخد ، مهره تا چه فاصله ای می تواند از مرکز دور شود بدون این که میله را ترك کند ؟

۱۰-۱۱ در روی یک میز گردان با قطر ۱۲ اینچ و سرعت زاویه ای ۳۳ دور بر دقیقه ، یک مهره از مرکز به طرف محیط شروع به حرکت می کند . با فرض این که ضریب اصطكاك $\mu = 0.2$ است ، آیا مهره به لبه خواهد رسید ؟

۱۱-۱۱ اثر چرخش زمین روی وزن جسم در استوا بیش از جای دیگر است . سهم چرخش زمین در وزن جسم را محاسبه کنید . نشان دهید که حتی وقتی وزن را با نیروسنج اندازه گیری می کنید این اثر ناچیز است .

۱۲-۱۱ نشان دهید که انحراف زاویه ای ϵ یک شاقول از قائم واقعی در نقطه ای از سطح زمین با عرض جغرافیایی λ عبارت است از

$$\epsilon = \frac{R_E \omega^2 \sin \lambda \cos \lambda}{g_0 - r_0 \omega^2 \cos^2 \lambda}$$

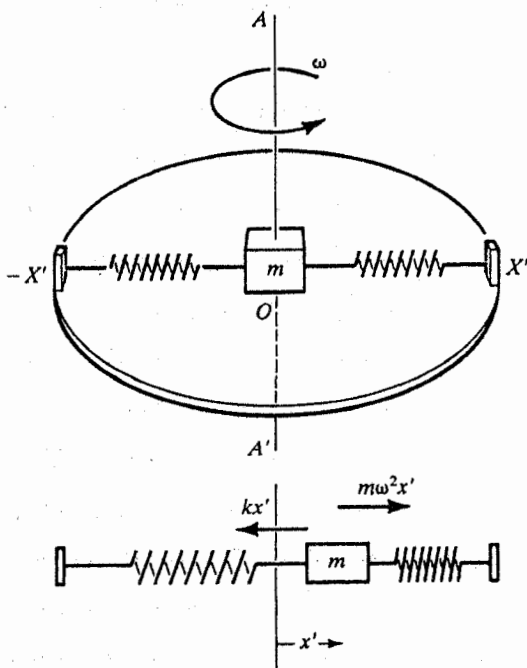
که R_E شعاع زمین است .

۱۱-۱۳ در متن نشان دادیم که $g_r = g_0 + a$ که در جهت قائم به طرف مرکز زمین است ، و a شتاب مرکز گراست . باچشم پوشی از جمله های شامل توانهای بالای ω ، نشان دهید که

$$g_r = g_0 \left(1 - \frac{\omega^2 R}{g_0} \cos^2 \theta \right)$$

که R شعاع زمین ، θ متمم عرض ، و ω سرعت زاویه ای زمین است .

۱۱-۱۴ جرم کوچک m بسته به وسط فنری بین دو انتهای یک شیار در امتداد محور X' ، آن طور که در شکل (مسأله ۱۱-۱۴) نشان داده شده است ، قرار گرفته است . شیار روی میزی که با سرعت زاویه ای ω حول محور قائم دوران می کند تعبیه شده است . اگر T_0 زمان تناوب نوسان وقتی که میز دوران نمی کند باشد ، زمان تناوب را برای وقتی که میز دوران می کند پیدا کنید .



شکل (مسأله ۱۱-۱۴)

۱۱-۱۵ مکان یک ذره با بردار $\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ که با سرعت زاویه‌ای $\omega = \omega\hat{k}$ حول محور Z می‌چرخد تعیین می‌شود. جهت شتاب مرکز گرا را پیدا کنید. شتاب را وقتی که ذره روی محور Z قرار داشته باشد به دست آورید.

۱۱-۱۶ معادله حرکت چرخشی حول مرکز جرم عبارت است از $\frac{dL}{dt} = \tau$ که L تکانه زاویه‌ای و τ گشتاور نیرو نسبت به نقطه مرکز جرم است، که در فاصله R از مبدأ ساکن O قرار دارد. وقتی حرکت از یک دستگاه شتاب دار مشاهده شود معادله پیشین به چه شکلی در می‌آید؟

۱۱-۱۷ یک جت در بالای فرودگاهی با سرعت 250 km/h در روی دایره‌ای به شعاع 6 km می‌چرخد. در داخل جت یک جرم 0.5 کیلوگرمی از ارتفاع 1.5 متر از حال سکون سقوط می‌کند. جابه‌جایی جانبی نقطه برخورد را پیدا کنید.

۱۱-۱۸ بزرگی و جهت نیروی مرکز گرای وارد به یک جت 2 تنی را که در عرض جغرافیایی 45° روی زمین نشسته است پیدا کنید. این نیرو را با نیروی کوریولیس وارد به آن وقتی با سرعت 750 km/hr حرکت می‌کند مقایسه کنید.

۱۱-۱۹ بزرگی نیروی کوریولیس وارد به یک خودرو 1200 کیلوگرمی را که در عرض جغرافیایی 60° شمالی با سرعت 90 km/hr به طرف شمال حرکت می‌کند پیدا کنید.

۱۱-۲۰ ذره‌ای به جرم m از ارتفاع 500 متری از حال سکون رها می‌شود. چه موقع به زمین برخورد می‌کند؟

۱۱-۲۱ مهره‌ای در روی یک میزگردان در مسیری دایره‌ای می‌لغزد. نشان دهید که، اگر مهره از دید یک ناظر در خارج ساکن به نظر برسد، نیروی مرکز گرا باید با نیروی کوریولیس برابر باشد.

۱۱-۲۲ ذره‌ای به جرم m در نیمکره شمالی واقع در عرض جغرافیایی λ با سرعت v به مؤلفه‌های $v = v_r + v_s + v_\phi$ حرکت می‌کند، که e و s ، و ϕ نمایشگر شرق، جنوب، و قائم روبه بالا از مرکز زمین است. F_r ، F_s ، و F_ϕ ، مؤلفه‌های نیروی کوریولیس F_{Cor} را پیدا کنید.

۱۱-۲۳ یک جت از قطب شمال با سرعت 900 km/hr در امتداد نصف النهاری که با زمین می‌چرخد، پرواز می‌کند. زاویه بین شاقولی را که آزادانه از این جت آویزان شده است وقتی که از روی قطب می‌گذرد، و شاقولی را که از جت ساکن در روی زمین

در قطب شمال آویزان شده است ، محاسبه کنید .

۱۱-۲۴ مسأله (۱۱-۲۳) را برای وقتی که همین جت در نقطه ای به عرض جغرافیایی $45^\circ N$ قرار دارد تکرار کنید .

۱۱-۲۵ دو پسر بچه در نظر بگیرید که در دو انتهای یک چرخ فلک به قطر 6m که با سرعت زاویه ای ۱۲ دور بر دقیقه می چرخد ، ایستاده اند . یکی از پسر بچه ها یک توپ بسکتبال به جرم 0.5 kg با سرعت 6 m/s به طرف دیگری پرتاب می کند . محاسبه کنید : (الف) نیروی کوریولیس وارد به توپ را وقتی توپ در هوا است ، و (ب) فاصله ای را که به علت نیروی کوریولیس از هدف منحرف می شود .

۱۱-۲۶ جسمی از نقطه ای در روی سطح زمین در عرض جغرافیایی $45^\circ N$ با سرعت 15 m/s به طرف بالا پرتاب می شود . جابه جایی نقطه برخورد را به زمین در اثر نیروی کوریولیس محاسبه کنید .

۱۱-۲۷ پرنده ای به جرم m در عرض جغرافیایی λ با سرعت v پرواز می کند . نیروی کوریولیس وارد به این پرنده را بر حسب عرض جغرافیایی محاسبه کنید . پرنده چه باید بکند تا مطمئن شود که در یک خط مستقیم پرواز می کند ؟ برای یک مورد نمونه ای که در آن $m = 0.5 \text{ kg}$ ، $v = 30 \text{ km/h}$ ، و $\lambda = 45^\circ N$ ، محاسبه عددی انجام دهید .

۱۱-۲۸ ماهواره ای در فاصله R از مرکز زمین در یک مدار دایره ای با سرعت زاویه ای ω حول زمین می چرخد . فرض کنیم دستگاه مختصات متصل به ماهواره طوری باشد که محور X در امتداد خط واصل ماهواره به مرکز زمین و محور Y در امتداد حرکت آن باشد . نشان دهید که به ذره ای به جرم m در نزدیکی ماهواره نیرویی به شکل $F_{inertial} = 3m\omega^2 x\hat{i} - 2m\omega \times r$ وارد می شود .

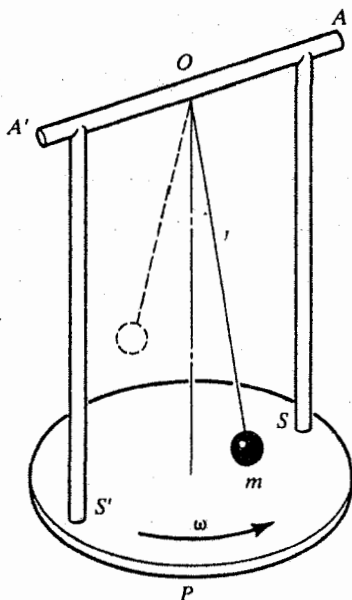
۱۱-۲۹ ذره ای به جرم m از قطب شمال در مسیری که نزدیک سطح زمین است پرتاب می شود . عبارتی برای انحراف زاویه ای این ذره به دست آورید . انحراف زاویه ای را برای موشکی که فاصله 1200 km را در سه دقیقه طی می کند پیدا کنید . انحراف از هدف را ، اگر موشک به طرف هدف نشانه گیری شده بود ، پیدا کنید .

۱۱-۳۰ اختلاف مقادیر ظاهری شتاب ناشی از گرانش را در استوا و قطب (با فرض کروی بودن زمین) محاسبه کنید .

۱۱-۳۱ عبارتهای آشنای سرعت در مختصات قطبی را با بررسی حرکت یک ذره در یک دستگاه مختصات چرخان که در آن سرعت بطور لحظه ای شعاعی است، به دست آورید. به یاد داشته باشید که در یک دستگاه مختصات لخت داریم $v = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$.

۱۱-۳۲ یک دستگاه مختصات قطبی چسبیده به یک چرخ فلک در نظر بگیریم. حرکت و شتاب یک تماشاچی را که در نزدیکی ایستاده است در این دستگاه مختصات توصیف کنید. شتاب آن را از دید چارچوب چرخان برحسب شتابهای مرکز گریز و کوریولیس بیان کنید.

۱۱-۳۳ آونگی به طول l به محور AA' محکم بسته شده است. پایه های S و S' به سکوی P که با سرعت زاویه ای ω می چرخد، آن طور که شکل (مسئله ۱۱-۳۳) نشان می دهد، چسبیده اند. آونگ می تواند در یک صفحه عمود بر محور AA' با دامنه خیلی کوچک نوسان کند. بسامد و زمان تناوب این آونگ را محاسبه کنید.



شکل (مسئله ۱۱-۳۳)

۱۱-۳۴ یک واگن 500 تنی در عرض جغرافیایی $30^\circ N$ با سرعت 120 km/h به طرف جنوب حرکت می کند. بزرگی و جهت نیروی وارد به ریل را به دست آورید.

۱۱-۳۵ جسمی از ارتفاع 100 متری بالای سطح زمین در عرض جغرافیایی $45^\circ N$ سقوط

می کند. انحراف جسم از نقطه پای عمود مکان اولیه را، با داشتن $\omega = 7.29 \times 10^{-5}$ rad/s، پیدا کنید.

۱۱-۳۶ جسمی در عرض جغرافیایی شمالی λ ، موازی با خط شاقول، به طرف بالا پرتاب می شود تا به ارتفاع h برسد. در کجا به زمین برخورد می کند؟

۱۱-۳۷ یک جریان جزر و مدی در امتداد کانالی به عرض d در عرض جغرافیایی شمالی λ به طرف شمال حرکت می کند. نشان دهید که ارتفاع آب در ساحل شرقی از ارتفاع آب در ساحل غربی به اندازه $\frac{2d v \omega \sin \lambda}{g}$ بیشتر است، که در آن v سرعت آب و ω سرعت زاویه ای زمین است.

۱۱-۳۸ یک سکوی دایره ای به شعاع 5 m با سرعت زاویه ای $\omega = 0.25$ rad/s می چرخد. پسر بچه ای به جرم 50 kg با سرعت ثابت $v = 1$ m/s در امتداد قطر سکو قدم می زند. فرض کنیم در لحظه $t = 0$ از مرکز حرکت می کند و در لحظه $t = 5$ s از لبه سکو می پرد. عبارتهایی برای نیروی مرکز گرا و نیروی کوریولیس که پسر بچه احساس می کند بنویسید. نمودارهای این کمیت را در بازه زمانی بین $t = 0$ و $t = 5$ s ترسیم کنید.

۱۱-۳۹ پرتابه ای از نقطه ای در روی سطح زمین در عرض جغرافیایی شمالی λ با سرعت v_0 و زاویه میل α نسبت به افق به سمت مشرق پرتاب شده است. نشان دهید که وقتی پرتابه به زمین می رسد انحراف جانبی آن (با صرف نظر از جمله های شامل ω^2) عبارت است از

$$\Delta x = \frac{2v_0^3}{g^2} \omega \sin 2\alpha \sin \alpha \sin \lambda$$

۱۱-۴۰ در مسأله (۱۱-۳۹) اگر برد پرتابه برای $\omega = 0$ را با R نمایش دهیم، نشان دهید که تغییر برد ΔR در اثر چرخش زمین (با چشم پوشی از جملات شامل ω^2) عبارت است از

$$\Delta R = \sqrt{\frac{2R^3}{g}} \omega \cos \lambda [\cot^{1/2} \alpha - \frac{1}{3} \tan^{3/2} \alpha]$$

۱۱-۴۱ جرم m از ارتفاع کوچکی بالای سطح زمین در عرض جغرافیایی شمالی λ رها می شود. مقاومت هوا متناسب با سرعت، با ضریب تناسب ثابت k است. زمان سقوط جرم t_0 است. نشان دهید که وقتی جرم به زمین می رسد، انحراف آن نسبت به

مورد زمین بدون چرخش برابر است با

$$\Delta D = \frac{g\omega \cos \lambda}{3} t_0^3 \left(1 - \frac{k}{4m} t_0\right)$$

می توانیم فرض کنیم که شتاب انتقالی زمین قابل چشم پوشی است و از جمله های از مرتبه k^2 نیز صرف نظر شده است .

۴۲-۱۱ یک آونگ کروی نوسانات کوچکی حول یک زاویه مخروطی ϕ انجام می دهد . اگر

آونگ در عرض جغرافیایی $45^\circ N$ باشد ، برای چه مقادیری از ϕ حرکت تقدیمی

مربوط به چرخش زمین دقیقاً حرکت تقدیمی طبیعی آونگ را خنثی می کند ؟

۴۳-۱۱ گلوله ای به جرم m در روی یک صفحه افقی بدون اصطکاک در روی سطح زمین

می لغزد . نشان دهید که حرکت گلوله شبیه به حرکت آونگ فوکو است به شرط این که

جرم نزدیک نقطه تماس بماند . زمان تناوب و بسامد نوسانات را پیدا کنید .

۴۴-۱۱ گلوله با جرم m یک آونگ به طول L طوری به حرکت واداشته شده است که یک مسیر

دایره ای طی کند . سهم ناشی از نیروی کوریولیس را حساب کنید ، یعنی ، نشان دهید

که بسامد حرکت تقدیمی آن تقریباً برابر است با $-\omega \sin \lambda$. توجه کنیم که از مؤلفه قائم

نیروی کوریولیس می توان صرف نظر کرد زیرا بطور متوسط صفر است .

۴۵-۱۱ فرض کنیم در محلی با عرض جغرافیایی $20^\circ N$ فشار جو 10^5 N/m^2 و چگالی هوا

1.3 kg/m^3 باشد . v را برای گرادیان فشار ۳ میلی بار بر متر در فاصله 100 km از مرکز

ناحیه کم فشار محاسبه کنید .

۴۶-۱۱ مسأله ۴۵-۱۱ را برای وقتی که گرادیان فشار از یک ناحیه پرفشار باشد تکرار کنید .

۴۷-۱۱ مسأله ۴۵-۱۱ را برای عرض جغرافیایی $40^\circ N$ و گرادیان فشار 1.5 میلی بار بر متر

تکرار کنید .

۴۸-۱۱ مسأله ۴۵-۱۱ را برای عرض جغرافیایی $45^\circ N$ و گرادیان فشار 35 میلی بار بر متر

تکرار کنید . اگر این مرکز یک ناحیه پرفشار باشد چه اتفاقی خواهد افتاد ؟

منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر

- ARTHUR, W., and FENSTER, S. K., *Mechanics*, Chapter 9. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1969.
- BARGER, V., and OLSSON, M., *Classical Mechanics*, Chapter 6. New York: McGraw-Hill Book Co., 1973.
- BECKER, R. A., *Introduction to Theoretical Mechanics*, Chapter 11. New York: McGraw-Hill Book Co., 1954.
- DAVIS, A. DOUGLAS, *Classical Mechanics*, Chapter 6. New York: Academic Press, Inc., 1986.
- FOWLES, G. R., *Analytical Mechanics*, Chapter 5. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1962.
- FRENCH, A. P., *Newtonian Mechanics*, Chapter 12. New York: W. W. Norton and Co., Inc., 1971.
- HAUSER, W., *Introduction to the Principles of Mechanics*, Chapter 3. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1965.
- KLEPPNER, D., and KOLENKOW, R. J., *An Introduction to Mechanics*, Chapter 8. New York: McGraw-Hill Book Co., 1973.
- MARION, J. B., *Classical Dynamics*, 2nd ed., Chapter 11. New York: Academic Press, Inc., 1970.
- SYMON, K. R., *Mechanics*, 3rd ed., Chapter 7. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1971.
- TAYLOR, E. F., *Introductory Mechanics*, Chapter 9. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1963.

فصل دوازدهم

دینامیک لاگرانژی و هامیلتونی

۱۲-۱ مقدمه

در فصلهای پیشین ، اهمیت قوانین نیوتن را اثبات و ارائه کردیم . با استفاده از قانون دوم نیوتن و شرایط اولیه داده شده ، توانستیم معادلات حرکت یک سیستم معین را به دست آوریم و حرکت سیستم را توصیف کنیم . قوانین نیوتن را تنها وقتی می توان به کار برد که نیروهای وارد به سیستم شناخته شده باشند ، یعنی ، شرایط دینامیکی شناخته شده باشند . به علاوه ، بیشتر از مختصات دکارتی ، و به مناسبتهایی از مختصات قطبی ، استوانه ای ، یا کروی استفاده کردیم .

در بیشتر موارد ، حل مسائل به کمک شرایط دینامیکی و اولیه ساده نیست ؛ به عنوان مثال ، جرمی که مقید به حرکت روی سطح یک کره ، یا مهره ای که مقید به حرکت روی یک سیم باشد . در این وضعیتها ، نه تنها شکل نامعلوم نیروهای قیدی حل مسأله را مشکل می کند ، که به کارگیری مختصات دکارتی یا مختصات معمول دیگر ممکن است پرداختن به مسأله را ، حتی اگر نیروهای قیدی هم شناخته شده باشند ، ناممکن سازد . دوروش متفاوت ، معادلات لاگرانژی و معادلات هامیلتونی ، برای بررسی چنین مسائلی ارائه شده اند . این دوروش نتیجه نظریه های جدیدی نیستند ؛ از قانون دوم نیوتن به دست می آیند ، اما سهولت بیشتری را برای بررسی مسائل بسیار مشکل با ماهیت فیزیکی فراهم می کنند .

اولاً، این روشها از مختصات تعمیم یافته استفاده می کنند. یعنی، به جای محدود بودن به استفاده از مختصات دکارتی یا مختصات قطبی، و نظایر آن، هر کمیت مناسبی، مانند سرعت، تکانه زاویه ای، یا (طول)، برای حل مسائل مورد استفاده قرار می گیرد. چنین مختصات تعمیم یافته ای معمولاً با q_k نمایش داده می شوند. که q_1 ممکن است v ، q_2 ممکن است x ، q_3 ممکن است زاویه θ ، و غیره باشد. به علاوه این روشها، از روش انرژی استفاده می کنند که کمترین مزیت آن سر و کار داشتن با کمیات نرده ای، به جای کمیات برداری، است. این مطالب را به تفصیل در بخشهای زیر مورد بحث قرار خواهیم داد. اختلاف بین روش لاگرانژی و روش هامیلتونی را به اختصار یادآوری می کنیم. در صورت بندی لاگرانژی، مختصات تعمیم یافته به کار گرفته شده مکان و سرعت هستند که به معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم منجر می شوند. در صورت بندی هامیلتونی، مختصات تعمیم یافته به کار گرفته شده مکان و تکانه اند، و به معادلات دیفرانسیل مرتبه اول منجر می شوند. این روشها نه تنها در حل معادلات حرکتی که سیستم را توصیف می کنند سودمندند، که همچنین می توانند برای محاسبه نیروهای واکنش قیدی مورد استفاده قرار گیرند.

۲-۱۲ مختصات تعمیم یافته و قیدها

برای شناختن مکان یک ذره نیاز به سه مختصه داریم. این مختصات می توانند مختصات دکارتی x, y, z ، مختصات استوانه ای r, θ, z ، مختصات کروی r, θ, ϕ ، یا هر سه مختصه مناسب دیگر باشند. اگر محدودیتها یا قیدهایی روی حرکت ذره باشد به کمتر از سه مختصه نیاز داریم. به عنوان مثال، اگر ذره ای به حرکت روی یک سطح تخت مقید باشد، تنها دو مختصه کافی است، در حالی که اگر ذره به حرکت روی یک خط مستقیم مقید باشد، فقط یک مختصه برای توصیف حرکت آن کافی است.

یک سیستم مکانیکی شامل N ذره در نظر بگیریم. برای مشخص کردن موقعیت چنین سیستمی در هر لحظه، به N بردار نیاز داریم، و هر بردار با سه مختصه توصیف می شود. بنابراین، بطور کلی، برای توصیف یک سیستم مکانیکی داده شده به $3N$ مختصه نیاز داریم. اگر قیودی وجود داشته باشند، تعداد کل مختصات مورد نیاز برای توصیف سیستم کاهش خواهد یافت. به عنوان مثال، فرض کنیم سیستم ما یک جسم صلب است، و همان طور که می دانیم فاصله های بین ذرات مختلف ثابتند. این فاصله های ثابت می توانند به شکل

معادله‌هایی بیان شوند. همان‌طور که در فصل ۹ توضیح دادیم، هر جسم صلب را می‌توان با تنها شش مختصه کاملاً توصیف کرد، یعنی، تنها شش مختصه برای مشخص کردن پیکربندی یک جسم صلب مورد نیاز است. سه مختصه از این شش مختصه، مکان یک نقطه مرجع مناسب، معمولاً مرکز جرم، نسبت به یک دستگاه مختصات انتخاب شده، و سه مختصه باقیمانده جهت‌گیری جسم را در فضا توصیف می‌کنند.

اکنون به پیدا کردن کمترین تعداد مختصات مورد نیاز برای توصیف یک سیستم N ذره‌ای پردازیم. معمولاً، قیود روی هر سیستم معین توسط معادلاتی توصیف می‌شوند. فرض کنیم تعداد چنین معادله‌هایی که قیود را توصیف می‌کنند m باشد. کمترین تعداد مختصات مورد نیاز، n ، برای توصیف کامل حرکت یا پیکربندی چنین سیستمی در هر لحظه با رابطه

$$n = 3N - m \quad (۱۲-۱)$$

داده می‌شود که n تعداد درجات آزادی سیستم است. لازم نیست که این n مختصه دکارتی، استوانه‌ای، یا هر مختصات منحنی الخط دیگری باشد. در واقع این n مختصه می‌توانند هر پارامتری، از قبیل طول، 2 (طول)، زاویه، انرژی، یک کمیته بی‌بعد، یا هر کمیته دیگری، تا وقتی که پیکربندی سیستم را کاملاً توصیف کنند، باشند. اسم مختصات تعمیم یافته، به هر مجموعه کمیته‌هایی که حالت یا پیکربندی یک سیستم را کاملاً توصیف کنند، اطلاق می‌شود. این n مختصه تعمیم یافته معمولاً با

$$q_1, q_2, q_3, \dots, q_n \quad (۱۲-۲ \text{ الف})$$

یا

$$q_k, \quad \text{با} \quad k = 1, 2, 3, \dots, n \quad (۱۲-۲ \text{ ب})$$

نمایش داده می‌شوند. این n مختصه تعمیم یافته توسط هیچ قیدی محدود نمی‌شوند. اگر هر مختصه بتواند مستقل از مختصات دیگر تغییر کند، گفته می‌شود که سیستم هولونومیک است. در یک سیستم فیرهومونومیک، تمام مختصات نمی‌توانند بطور مستقل تغییر کنند. در نتیجه در چنین سیستمی تعداد درجات آزادی کمتر از تعداد کمیته مختصات مورد نیاز برای توصیف پیکربندی سیستم است. به عنوان مثال، برای توصیف حرکت کره‌ای که مقید است

روی یک سطح کاملاً ناصاف بغلند ، فقط به پنج مختصه نیاز داریم ، دو تا برای مکان مرکز جرم و سه تا برای جهت گیری آن ؛ اما این پنج مختصه نمی توانند همه بطور مستقل تغییر کنند . وقتی کره می غلند ، حداقل دو مختصه باید تغییر کند . لذا این سیستم یک سیستم غیر هولونومیک است . بررسی و توصیف سیستمهای غیر هولونومیک پیچیده است و در این جا به آن نمی پردازیم . در حال حاضر بحث خود را به سیستمهای هولونومیک محدود می کنیم .

یک مجموعه مناسب مختصات تعمیم یافته برای یک سیستم مجموعه ای است که معادلات حرکت حاصل از آن ما را به تغییر راحتی از حرکت سیستم برساند . این n مختصه تعمیم یافته یک فضای پیکربندی تشکیل می دهند که هر بُعد آن با یک مختصه q_k نمایانده می شود . مسیر سیستم توسط یک نمودار در این فضای پیکربندی نمایانده می شود . مسیر در فضای پیکربندی دارای همان تعبیری نیست که در فضای سه بُعدی معمولی دارد . مشابه با مختصات دکارتی ، می توانیم مشتقات q_k ، یعنی \dot{q}_1 ، \dot{q}_2 ، ... ، یا \dot{q}_k را به عنوان سرعتهای تعمیم یافته تعریف کنیم .

ذره ای در نظر بگیریم که مختصات x ، y ، و z آن تابعی از مختصات تعمیم یافته q_1 ، q_2 ، و q_3 باشند ، یعنی

$$\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3) = x(\mathbf{q}_k) \\ y &= y(q_1, q_2, q_3) = y(\mathbf{q}_k) \\ z &= z(q_1, q_2, q_3) = z(\mathbf{q}_k) \end{aligned} \quad (3-12)$$

فرض کنیم سیستم از یک پیکربندی اولیه (q_1, q_2, q_3) به یک پیکربندی نزدیک $(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, q_3 + \delta q_3)$ تغییر کند . می توانیم تغییرات متناظر در مختصات دکارتی را با روابط

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} \delta q_3 = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x}{\partial q_k} \delta q_k \quad (4-12)$$

با عبارتهای مشابهی برای δy و δz ، بیان کنیم ، که n برابر است با سه و مشتقات جزئی $\frac{\partial x}{\partial q_k}$ و غیره ، توابعی از q ها هستند . مقدار n بستگی به درجات آزادی دارد . به عنوان مثال ، اگر قیدی در کار نباشد ، $m = 0$ ، از معادله (۱۲-۱) برای $N = 1$ نتیجه می شود $n = 3$. اگر قیودی روی ذره باشد n کمتر از ۳ خواهد بود .

اکنون مورد کلی تری که در آن سیستم مکانیکی شامل تعداد زیادی ذره با n درجه آزادی

باشد در نظر بگیریم. پیکربندی سیستم با مختصات تعمیم یافته q_1, q_2, \dots, q_n و q_n مشخص می شود. فرض کنیم پیکربندی سیستم از (q_1, q_2, \dots, q_n) به پیکربندی جدید $(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \dots, q_n + \delta q_n)$ تغییر کند. مختصات دکارتی ذره i ام از (x_i, y_i, z_i) به $(x_i + \delta x_i, y_i + \delta y_i, z_i + \delta z_i)$ تغییر می کند. جابه جایهای $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ می توانند بر حسب مختصات تعمیم یافته q_k به صورت

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_n} \delta q_n = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (5-12)$$

با عبارتهای مشابهی برای δy_i و δz_i ، نوشته شوند. بار دیگر یادآوری می کنیم که مشتقات جزئی توابعی از مختصات تعمیم یافته q_k هستند.

در این مرحله لازم است که بین دو نوع جابه جایی تمایز قائل شویم: جابه جایی واقعی $d\mathbf{r}_i$ و جابه جایی مجازی (غیر واقعی) $\delta \mathbf{r}_i$. فرض کنیم یک نیروی خارجی \mathbf{F}_i به جرم m_i وارد شود و باعث حرکت آن از \mathbf{r}_i به $\mathbf{r}_i + d\mathbf{r}_i$ در یک بازه زمانی dt شود. این جابه جایی باید هم با معادلات حرکت و هم با معادلات قیدی که این سیستم جرمی را توصیف می کنند سازگار باشد، لذا چنین جابه جایهایی، جابه جایهای واقعی هستند. از طرف دیگر جابه جایهای مجازی با معادله های قیدی سازگارند، اما با معادلات حرکت، یا زمان سازگار نیستند. به عنوان مثال، گلوله یک آونگ به طول l می تواند در هر بازه زمانی دلخواه، تا وقتی که روی دایره ای به شعاع l باقی بماند، از (l, θ) به $(l, \theta + \delta\theta)$ برده شود. به این ترتیب $\delta \mathbf{r}_i$ و δq_i به کار رفته در بالا جابه جایهای مجازی هستند. از اصل کار مجازی در زیر استفاده خواهیم کرد. یک جابه جایی مجازی $\delta \mathbf{r}$ ، که به کار مجازی δW منجر می شود، ایجاد می کنیم. اساساً، در چنین جابه جایهایی جهتها و فاصله های نسبی بین ذرات بدون تغییر می مانند.

۱۲-۳ نیروهای تعمیم یافته

يك تک ذره

یک نیروی \mathbf{F} که به تک ذره ای به جرم m وارد می شود و یک جابه جایی مجازی $\delta \mathbf{r}$ برای این ذره در نظر بگیریم. کار انجام شده δW توسط این نیرو با

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z \quad (6-12)$$

داده می شود که F_x ، F_y ، و F_z مؤلفه های دکارتی \mathbf{F} هستند. می توانیم جابه جایهای δx ، δy و δz را بر حسب مختصات تعمیم یافته q_k بیان کنیم. با استفاده از معادلات (۱۲-۴) و (۱۲-۶) می توانیم بنویسیم

$$\delta W = \sum_{k=1}^n \left(F_x \frac{\partial x}{\partial q_k} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_k} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k \quad (7-12)$$

که در آن

$$Q_k = F_x \frac{\partial x}{\partial q_k} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_k} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_k} \quad (8-12)$$

Q_k نیروی تعمیم یافته وابسته به مختصه تعمیم یافته q_k نامیده می شود. ابعاد Q_k بستگی به ابعاد q_k دارد. ابعاد δq_k Q_k ابعاد کار است. اگر نمو δq_k دارای ابعاد فاصله باشد، Q_k ابعاد نیرو را خواهد داشت؛ اگر δq_k ابعاد زاویه داشته باشد Q_k دارای ابعاد گشتاور نیروی τ_θ خواهد بود. باید یادآوری کرد که کمیت δq_k و کمیات δx ، δy ، و δz جابه جایهای مجازی سیستم نامیده می شوند زیرا چنین جابه جایهایی لازم نیست نمایشگر هیچ جابه جایی واقعی باشند.

یک سیستم ذرات

اکنون ایده های پیشین را به مورد کلی سیستمی شامل N ذره، که به هر کدام نیروی \mathbf{F}_i وارد می شود، $(i = 1, 2, \dots, N)$ اعمال کنیم. کار کل انجام شده δW برای تغییر مکان مجازی $\delta \mathbf{r}_i$ سیستم عبارت است از

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N F_{x_i} \delta x_i + F_{y_i} \delta y_i + F_{z_i} \delta z_i \quad (9-12)$$

بار دیگر، با بیان جابه جایهای مجازی بر حسب مختصات تعمیم یافته، با استفاده از معادله (۱۲-۵)، خواهیم داشت

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \left[\sum_{k=1}^n \left(F_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k \right] \quad (10-12 \text{ الف})$$

با عوض کردن ترتیب جمع بندی داریم

$$\delta W = \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=1}^N \left(F_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k \right] \quad (10-12 \text{ ب})$$

یا

$$\delta W = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k \quad (11-12)$$

که در آن

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \left(F_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \quad (12-12)$$

Q_k نیروی تعمیم یافته وابسته به مختصه تعمیم یافته q_k نامیده می شود. بار دیگر یادآوری کنیم که، ابعاد نیروی تعمیم یافته Q_k بستگی به ابعاد q_k دارد.

سیستمهای پایستار

اکنون می خواهیم عبارتی برای نیروهای تعمیم یافته پایستار بنویسیم. فرض کنیم یک میدان نیروی پایستار توسط تابع پتانسیل $V = V(x, y, z)$ نمایش داده شده است. مؤلفه های دکارتی نیروی وارد به یک ذره به وسیله

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (13-12)$$

داده می شود. عبارت یک نیروی تعمیم یافته که توسط معادله (۱۲-۸) داده شده است می شود

$$Q_k = F_x \frac{\partial x}{\partial q_k} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_k} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_k} \quad (14-12)$$

$$= -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_k} \right)$$

عبارت داخل پرانتزها مشتق جزئی تابع V نسبت به q_k است. یعنی،

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (14-12)$$

این معادله بیانگر رابطه بین یک نیروی تعمیم یافته و پتانسیل نمایشگر یک سیستم پایستار است.

مثال (۱-۱۲): حرکت ذره ای به جرم m را در یک صفحه در نظر بگیریم. با استفاده از مختصات قطبی تخت (r, θ) به عنوان مختصات تعمیم یافته، محاسبه کنید (الف) جابه جایی δx و δy ، و (ب) نیروهای تعمیم یافته برای ذره ای که نیروی

$F = iF_x + jF_y + kF_z$ به آن وارد می شود. چون مختصات قطبی تخت مختصات تعمیم یافته هستند،

$$q_1 = r \quad \text{و} \quad q_2 = \theta$$

$$x = x(r, \theta) = r \cos \theta, \quad \frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta \quad (1)$$

$$y = y(r, \theta) = r \sin \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta \quad (2)$$

(الف) تغییرات مختصات دکارتی عبارتند از

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial r} \delta r + \frac{\partial x}{\partial \theta} \delta \theta = \cos \theta \delta r - r \sin \theta \delta \theta \quad (3)$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial r} \delta r + \frac{\partial y}{\partial \theta} \delta \theta = \sin \theta \delta r + r \cos \theta \delta \theta \quad (4)$$

(ب) از تعریف نیروهای تعمیم یافته،

$$Q_k = F_x \frac{\partial x}{\partial q_k} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_k} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_k}$$

خواهیم داشت

$$Q_r = F_x \frac{\partial x}{\partial r} + F_y \frac{\partial y}{\partial r} = F_x \cos \theta + F_y \sin \theta = F_r \quad (5)$$

$$Q_\theta = F_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + F_y \frac{\partial y}{\partial \theta} = -rF_x \sin \theta + rF_y \cos \theta \quad (6)$$

$$= r(-F_x \sin \theta + F_y \cos \theta) = rF_\theta$$

نمونه (۱۲-۱): حرکت ذره ای به جرم m را در فضا در نظر بگیرید. با استفاده از مختصات تعمیم یافته (r, θ, z) ، (الف) جابه جایی δx ، δy ، δz ، و (ب) نیروهای تعمیم یافته را برای ذره ای که نیروی $F = iF_x + jF_y + kF_z$ به آن وارد می شود، محاسبه کنید.

۱۲-۲ معادلات لاگرانژی حرکت برای یک ذره

می خواهیم حرکت یک ذره را به وسیله معادلاتی که بر حسب مختصات تعمیم یافته نوشته شده اند، توصیف کنیم. این کار ما را به معادلات لاگرانژی هدایت می کند. می توانستیم با قانون دوم نیوتن، $F = ma$ ، شروع کنیم. اما مناسب است که با عبارتی برای

انرژی بر حسب مختصات دکارتی شروع کنیم و سپس T را بر حسب مختصات تعمیم یافته بنویسیم. (توجه کنیم که برای انرژی جنبشی، T را به جای k به کار می‌بریم). x ، y و z را مختصات دکارتی ذره، و q_1 ، q_2 ، q_3 را مختصات تعمیم یافته در نظر بگیریم. انرژی جنبشی ذره در مختصات دکارتی عبارت است

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (15-12)$$

چون

$$x = x(q_1, q_2, q_3) = x(q) \quad (16-12)$$

و همچنین

$$y = y(q), \quad z = z(q) \quad (17-12)$$

می‌توانیم \dot{x} را با روش زیر بر حسب q_k پیدا کنیم

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial q_3} \frac{\partial q_3}{\partial t} \\ &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial t} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x}{\partial q_k} \dot{q}_k = \dot{x}(q, \dot{q}) \end{aligned} \quad (18-12)$$

به این ترتیب می‌توانیم مؤلفه‌های مختلف سرعت را بر حسب مختصات تعمیم یافته q_k و سرعت‌های تعمیم یافته \dot{q}_k توصیف کنیم، یعنی،

$$\dot{x} = \dot{x}(q, \dot{q}), \quad \dot{y} = \dot{y}(q, \dot{q}), \quad \dot{z} = \dot{z}(q, \dot{q}) \quad (19-12)$$

اکنون می‌توانیم معادله (۱۵-۱۲) برای انرژی جنبشی را به صورت

$$T = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2(q, \dot{q}) + \dot{y}^2(q, \dot{q}) + \dot{z}^2(q, \dot{q})] \quad (20-12)$$

بنویسیم. با مشتق‌گیری از آن نسبت به سرعت تعمیم یافته \dot{q}_k داریم

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = m \left(\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_k} + \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_k} + \dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_k} \right) \quad (21-12)$$

با استفاده از معادله (۱۸-۱۲) می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x}{\partial q_k} \quad (22-12)$$

یادآوری کنیم که $\frac{\partial x}{\partial q_k}$ ضریب \dot{q}_k در بسط \dot{x} در معادله (۱۲-۱۸) است. با بردن این عبارت و عبارتهای مشابهی برای جملات دیگر در معادله (۱۲-۲۱)، داریم

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = m \left(\dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_k} + \dot{y} \frac{\partial y}{\partial q_k} + \dot{z} \frac{\partial z}{\partial q_k} \right) \quad (۱۲-۲۳)$$

اکنون از هر دو طرف این معادله نسبت به t مشتق بگیریم

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) &= m \ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_k} + m \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_k} + m \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_k} + m \dot{x} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q_k} \right) + m \dot{y} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial q_k} \right) \\ &\quad + m \dot{z} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial q_k} \right) \end{aligned} \quad (۱۲-۲۴)$$

برای ساده کردن سه جمله آخر در طرف راست، ثابت می‌کنیم که $\frac{d}{dt}$ و $\frac{\partial}{\partial q_k}$ جابه‌جایی پذیرند. با یک تابع f شروع کنیم،

$$f = f(q_1, q_2, q_3) \quad (۱۲-۲۵)$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial t} + \dots = \frac{\partial f}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots \quad (۱۲-۲۶)$$

اگر در معادله (۱۲-۲۶) قرار دهیم $f = \frac{\partial x}{\partial q_k}$ خواهیم داشت

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_k} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_2 \partial q_k} \dot{q}_2 + \dots \quad (۱۲-۲۷)$$

اما، همان‌طور که در معادله (۱۲-۱۸) نشان داده شده است،

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots \quad (۱۲-۱۸)$$

یا

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_k} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_2 \partial q_k} \dot{q}_2 + \dots \quad (۱۲-۲۸)$$

مقایسه معادله (۱۲-۲۸) با معادله (۱۲-۲۷) می‌دهد

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{dx}{dt} \right) \quad (۱۲-۲۹ \text{ الف})$$

یعنی، عملگرهای $\frac{\partial}{\partial q_k}$ و $\frac{d}{dt}$ جابه‌جایی پذیرند؛ به همین طریق،

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_k} \quad \text{و} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_k} \quad (۱۲-۲۹ \text{ ب})$$

به این ترتیب چهارمین جمله طرف راست معادله (۱۲-۲۴) را می توان به صورت زیر نوشت

$$m\dot{x} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial \dot{q}_k} \right) = m\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2 \right) \quad (۱۲-۳۰ \text{ الف})$$

و به همین شیوه

$$m\dot{y} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial \dot{q}_k} \right) = m\dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} m\dot{y}^2 \right) \quad (۱۲-۳۰ \text{ ب})$$

$$m\dot{z} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial \dot{q}_k} \right) = m\dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} m\dot{z}^2 \right) \quad (۱۲-۳۰ \text{ پ})$$

همچنین یادآوری کنیم که

$$F_x = m\ddot{x}, \quad -F_y = m\ddot{y}, \quad F_z = m\ddot{z} \quad (۱۲-۳۱)$$

از ترکیب معادلات (۱۲-۳۰) و (۱۲-۳۱) با معادله (۱۲-۲۴)، به دست می آوریم

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = F_x \frac{\partial x}{\partial \dot{q}_k} + F_y \frac{\partial y}{\partial \dot{q}_k} + F_z \frac{\partial z}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left[\frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \right] \quad (۱۲-۳۲)$$

استفاده از تعریف نیروی تعمیم یافته و انرژی جنبشی که با معادله های (۱۲-۸) و (۱۲-۳۰) داده شده اند، یعنی

$$Q_k = F_x \frac{\partial x}{\partial \dot{q}_k} + F_y \frac{\partial y}{\partial \dot{q}_k} + F_z \frac{\partial z}{\partial \dot{q}_k} \quad (۱۲-۸)$$

$$T = \frac{1}{2} m[\dot{x}^2(q, \dot{q}) + \dot{y}^2(q, \dot{q}) + \dot{z}^2(q, \dot{q})] \quad (۱۲-۲۰)$$

در معادله (۱۲-۳۲) می دهد

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = Q_k + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \quad (۱۲-۳۳)$$

این معادلات دیفرانسیل حرکت یک ذره را در مختصات تعمیم یافته توصیف می کنند و به معادلات لاگرانژی حرکت موسومند.

اگر حرکت در یک میدان نیروی پایستار، یعنی،

$$Q_k = - \frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (۳۴-۱۲)$$

صورت گیرد معادلات لاگرانژی شکل بسیار ساده تری به خود می گیرند. با قرارداد (۳۴-۱۲) در معادله (۳۳-۱۲) خواهیم داشت

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (۳۵-۱۲)$$

اکنون یک تابع لاگرانژی L به صورت تفاضل بین انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل تعریف می کنیم، یعنی،

$$L = T - V \quad \text{یا} \quad L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q) \quad (۳۶-۱۲)$$

مهم است بدانیم که اگر V تابعی از مختصات تعمیم یافته باشد و نه از سرعتهای تعمیم یافته، داریم

$$V = V(q) \quad \text{و} \quad \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (۳۷-۱۲)$$

اگر V مستقل از سرعت \dot{q} نباشد، $V = V(q, \dot{q})$ به یک نیروی تانسوری منجر می شود که ما در این جا بحث نخواهیم کرد. به این ترتیب می توانیم بنویسیم

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (T - V) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} (T - V) = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

با قرار دادن این نتایج در معادله (۳۵-۱۲) خواهیم داشت

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (۳۸-۱۲)$$

که معادلات توصیف کننده حرکت یک ذره در یک میدان نیروی پایستار هستند. برای حل این معادلات باید تابع لاگرانژی L را در مختصات تعمیم یافته مناسبی بدانیم. چون انرژی یک کمیت نرده ای است، لاگرانژی L نیز یک کمیت نرده ای است. بنابراین لاگرانژی L نسبت به تبدیل مختصات ناورد خواهد بود. این بدان معنی است که، در شرایط داده شده، لاگرانژی در تمام مختصات تعمیم یافته به کار گرفته شده یک توصیف برای سیستم به دست می دهد. به این ترتیب معادله (۳۸-۱۲) حرکت یک ذره را در یک میدان نیروی پایستار

برحسب هر دستگاه مختصات تعمیم یافته ای توصیف می کند .

مثال (۱۲-۲): ذره ای به جرم m در یک صفحه در نظر بگیریم که تحت تأثیر یک نیروی جاذبه متناسب با عکس مجذور فاصله قرار دارد . معادلات حرکت و عباراتی برای نیروهای تعمیم یافته به دست آورید .

مختصات به کار گرفته شده در این مسأله را مختصات قطبی تخت (r, θ) بگیریم . مختصات (r, θ) و مختصات دکارتی (x, y) با روابط زیر به هم مربوط می شوند

$$x = r \cos \theta \quad , \quad y = r \sin \theta \quad (۱)$$

با استفاده از این روابط ، عبارتهای زیر را برای انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل به دست می آوریم :

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \quad (۲)$$

$$V = -\frac{k}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = -\frac{k}{r} \quad (۳)$$

به این ترتیب لاگرانژی در این مختصات عبارت است از

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r} \quad (۴)$$

در معادلات لاگرانژی

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

قرار می دهیم $q_1 = r$ و $q_2 = \theta$ ، بنابراین

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad (۵)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (۶)$$

از معادله (۱۷) داریم

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad , \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = m\ddot{r} \quad , \quad \text{و} \quad \frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\theta}^2 - \frac{k}{r^2}$$

با قرار دادن این نتایج در معادله (۵) نتیجه می گیریم

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = -\frac{k}{r^2} \quad (۷)$$

چون ذره در یک میدان نیروی پایستار حرکت می کند ، می توانیم بنویسیم

$$F(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{k}{r} \right) = -\frac{k}{r^2} \quad (۸)$$

و معادله (۷) ، با توجه به این که $F(r) = F_r$ ، به شکل زیر در می آید

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + F_r \quad (۹)$$

یک بار دیگر از معادله (۴) داریم

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 2mr\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta}$$

در نتیجه معادله لاگرانژ (۶) به شکل زیر در می آید

$$2mr\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} = 0 \quad (۱۰)$$

یا

$$\frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) = \frac{dJ}{dt} = 0 \quad (۱۱)$$

که J ، که می تواند به عنوان تکانه زاویه ای وانمود شود ، ثابت است . یعنی ،

انتگرال گیری معادله (۱۱) نتیجه می دهد

$$J = mr^2\dot{\theta} = \text{constant} \quad (۱۲)$$

به این ترتیب می توانیم نتیجه بگیریم که در این میدان نیروی پایستار تکانه زاویه ای J

یک ثابت حرکت است . همچنین ، همانند مثال پیشین ،

$$Q_r = F_r, \quad Q_\theta = rF_\theta$$

می توانیم ، با استفاده از معادله (۱۲-۳۳) ، به نتیجه زیر برسیم

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r = F_r = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 \quad (۱۳)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = rF_\theta = \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) \quad (۱۴)$$

یعنی ،

$$F_r = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2$$

و

$$Q_\theta = \tau = rF_\theta = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = \frac{dJ}{dt} = 0$$

که $Q_\theta = \tau$ گشتاور نیرو و برابر با صفر است .

تمرین (۱۲-۲) : مثال بالا را برای موردیک نیروی دافعه متناسب با عکس مجذور فاصله تکرار کنید . وضعیت در این تمرین چه تفاوتی با وضعیت در مثال دارد ؟

مثال (۱۲-۳) : ماشین آتوود : یک ماشین آتوود شامل یک قرقره با گشتاور لختی I نسبت به محوری که از مرکز آن می گذرد و عمود بر صفحه آن است در نظر بگیرید . طول نخ غیر قابل کششی که از روی قرقره می گذرد و دو جرم را به هم وصل می کند است . شتاب سیستم را محاسبه کنید .

فاصله قائم متغیر از قرقره تا جرم m_1 را x بگیریم ، بنابراین فاصله جرم m_2 از قرقره ، همان طور که در شکل (۱۲-۳) نشان داده شده است ، $l-x$ است . به این ترتیب تنها یک درجه آزادی x وجود دارد که پیکربندی سیستم را نمایش می دهد . سرعت دو جرم و سرعت زاویه ای قرص به صورت زیر نوشته می شوند .

$$v_1 = \frac{dx}{dt} = \dot{x} , \quad v_2 = \frac{d(l-x)}{dt} = -\dot{x} \quad (۱)$$

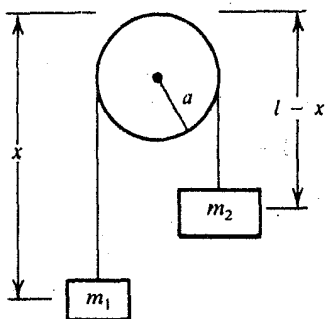
$$\omega = \frac{v}{a} , \quad v = |v_1| = |v_2| = \dot{x} \quad (۲)$$

بنابراین ، انرژی جنبشی کل سیستم عبارت است از

$$T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\frac{\dot{x}^2}{a^2} \quad (۳)$$

و انرژی پتانسیل آن ،

$$V = -m_1gx - m_2g(l-x) \quad (۴)$$



شکل (مثال-۱۲-۳)

لاگرانژی سیستم عبارت است از

$$L = T - V = \frac{1}{2} \left(m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2} \right) \dot{x}^2 + g(m_1 - m_2)x + m_2 gl \quad (5)$$

تنها یک درجه آزادی وجود دارد، که مختص تعمیم یافته $x = q$ است. معادله لاگرانژی به صورت

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

است. از معادله (۵) داریم

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \left(m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2} \right) \dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \left(m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2} \right) \ddot{x} \quad \text{و} \quad \frac{\partial L}{\partial x} = g(m_1 - m_2)$$

با قرار دادن این عبارات در معادله (۶)، معادله لاگرانژی به شکل زیر در می آید

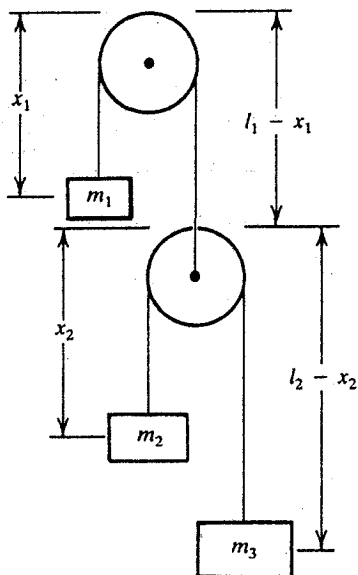
$$\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2} \right) \ddot{x} = g(m_1 - m_2) \quad (7)$$

$$\ddot{x} = \frac{g(m_1 - m_2)}{\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2} \right)}$$

اگر $I = 0$ باشد داریم $\ddot{x} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) g$

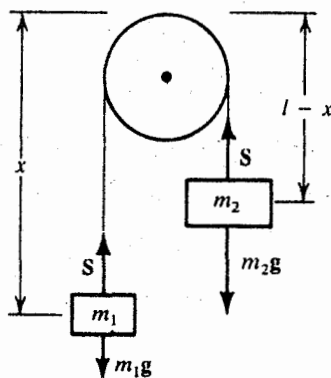
اگر $m_1 > m_2$ باشد جرم m_1 با شتاب ثابتی پایین می آید
اگر $m_1 < m_2$ باشد جرم m_1 با شتاب ثابتی بالا می رود .

تمرین (۳-۱۲): یک ماشین آتوود دوتایی ، آن طور که در شکل (تمرین - ۱۲-۳) نشان داده شده است ، در نظر بگیرید . با فرض این که قرقره ها بدون جرم هستند ، یعنی $I_1 = I_2 = 0$ ، شتاب هر جرم را محاسبه کنید . دو درجه آزادی x_1 و x_2 ، آن طور که در شکل نشان داده شده است ، در نظر بگیرید .



شکل (تمرین - ۱۲-۳)

مثال (۲-۱۲): ماشین آتوود مثال (۳-۱۲) را در نظر بگیرید . فرض کنید قرقره بدون جرم است . تنش k نخ را ، آن طور که در شکل (مثال - ۱۲-۴) نشان داده شده است ، محاسبه کنید .



شکل (مثال ۱۲-۴)

در مثال (۱۲-۳)، وقتی ماشین آتوود را مطالعه می کردیم فقط به حرکت سیستم توجه داشتیم، در نتیجه l مقید بود که مقدار ثابتی داشته باشد. برای پیدا کردن تنش در نخ، طول l باید به عنوان یک مختصه وارد شود. چون قرقره بدون جرم است، انرژی جنبشی چرخشی وجود ندارد. در نتیجه انرژی جنبشی به صورت زیر داده می شود

$$T = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\frac{d}{dt} (l - x) \right]^2 \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (l - \dot{x})^2$$

دو نیروی وارد به سیستم، همان طور که در شکل نشان داده شده است، عبارتند از تنش S در نخ و نیروی گرانش. کار انجام شده وقتی x به $x + \delta x$ افزایش یابد، در حالی که l ثابت باقی می ماند، برابر است با

$$\begin{aligned} \delta W &= (m_1 g - S) \delta x + (m_2 g - S) \delta(l - x) \\ &= (m_1 g - S) \delta x + (m_2 g - S)(-\delta x) \\ &= (m_1 - m_2) g \delta x \end{aligned}$$

از مقایسه با

$$\delta W = Q_x \delta x$$

خواهیم داشت

$$Q_x = (m_1 - m_2)g \quad (۲)$$

کار انجام شده وقتی l به $l + \delta l$ افزایش می یابد ، در حالی که x ثابت باقی می ماند ، عبارت است از

$$\begin{aligned} \delta W &= (m_1 g - S) \delta x + (m_2 g - S) \delta(l - x) \\ &= 0 + (m_2 g - S) \delta l \end{aligned}$$

مقایسه با

$$\delta W = Q_l \delta l$$

می دهد

$$Q_l = m_2 g - S \quad (۳)$$

توجه کنیم که نیروی تعمیم یافته Q_x شامل S نیست ، در حالی که Q_l به S بستگی دارد . برای پیدا کردن S باید دو معادله لاگرانژی زیر را حل کرد

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x \quad (۴)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{l}} \right) - \frac{\partial T}{\partial l} = Q_l \quad (۵)$$

روش کار مبتنی بر این است که حرکت کوچکی در جهت نیرو ، گرچه اثبات است ، در نظر گرفته شود . به این ترتیب معادلات (۴) و (۵) را با استفاده از عبارت T از معادله (۱) ، و مقادیر Q_x و Q_l از معادلات (۲) و (۳) ، و سپس قرار دادن $\dot{l} = \ddot{l} = 0$ ، محاسبه می کنیم . بنابراین ، برای معادلات (۴) و (۵) خواهیم داشت

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} - m_2\ddot{l} = (m_1 - m_2)g$$

و

$$m_2\ddot{l} - m_2\ddot{x} = m_2 g - S$$

اگر قرار دهیم $\dot{l} = \ddot{l} = 0$ ، معادلات زیر حاصل خواهند شد

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} = (m_1 - m_2)g \quad (۶)$$

$$-m_2\ddot{x} = m_2 g - S \quad (۷)$$

از معادله (۶) داریم

$$\ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

که پس از دو بار انتگرال گیری نتیجه می دهد

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g t^2 \quad (۸)$$

x_0 و v_0 ثابتهای انتگرال گیری هستند و شرایط اولیه را نمایش می دهند. از معادله (۱۷)

نتیجه می گیریم

$$S = m_2(g + \ddot{x}) = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \quad (۹)$$

تمرین (۱۲-۴): مسأله را با این دو فرض که قرقره بدون جرم نیست و گشتاور لختی دارد، تکرار کنید.

۱۲-۵ معادلات لاگرانژی حرکت برای يك سیستم ذرات

اکنون روش طرح ریزی شده در بخش قبل را به یک مورد کلی تر شامل N ذره گسترش

دهیم. انرژی جنبشی چنین سیستمی عبارت است از

$$T = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \right] \quad (۱۲-۳۹)$$

مختصات دکارتی را، به جای x ، y و z ، با x_i نمایش می دهیم. چون هر ذره سه درجه آزادی

دارد، تعداد کل مختصات x_i مورد نیاز برای نمایاندن N ذره $3N$ خواهد بود. در نتیجه

می توانیم انرژی جنبشی سیستم را به صورت

$$T = \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \quad (۱۲-۴۰)$$

بنویسیم، که مختصات دکارتی x_i توابعی از مختصات تعمیم یافته q_k هستند. ممکن است که

روابط بین x_i و q_k زمان را بطور صریح در برداشته باشند. در نتیجه می توانیم بنویسیم

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = x_i(q, t) \quad (۱۲-۴۱)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

یعنی ،

$$\dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (۴۲-۱۲)$$

تعمیم یافته یا درجات آزادی سیستم است و N تعداد ذرات سیستم است و $k = 1, 2, \dots, n$ که n تعداد مختصات

از معادله (۴۲-۱۲) ، می توانیم نتیجه بگیریم که T تابعی از مختصات تعمیم یافته q_k ، سرعت‌های تعمیم یافته \dot{q}_k و زمان t است ؛ بنابراین

$$T = T(q, \dot{q}, t) \quad (۴۳-۱۲)$$

با مشتق گیری از T نسبت به \dot{q}_k ، خواهیم داشت

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right) = \sum_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right) = \sum_i \left(m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

از معادله (۲۲-۱۲) داریم

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x}{\partial q_k} \quad (۲۲-۱۲)$$

که با جایگذاری در معادله قبلی نتیجه می دهد

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_i \left(m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) \quad (۴۴-۱۲)$$

از مشتق گیری نسبت به t نتیجه می گیریم

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = \sum_i m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) \quad (۴۵-۱۲)$$

عبارت نیروی تعمیم یافته Q_k ، معادله (۸-۱۲) ،

$$Q_k = F_x \frac{\partial x}{\partial q_k} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_k} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_k} \quad (۸-۱۲)$$

برای یک سیستم ذرات شکل زیر را به خود می گیرد

$$Q_k = \sum_i F_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \sum_i m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \quad (۴۶-۱۲)$$

نتایج (۱۲-۳۰ الف) را به مورد حاضر برای یک سیستم ذرات گسترش می دهیم ؛ یعنی ،

$$\sum_i m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_k} \right) = \sum_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \quad (۴۷-۱۲)$$

از ترکیب معادلات (۱۲-۴۵)، (۱۲-۴۶)، و (۱۲-۴۷)، معادلات لاگرانژی زیر را برای یک سیستم ذرات به دست می آوریم

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (۴۸-۱۲)$$

تعداد معادلات برابر با تعداد درجات آزادی n سیستم است.

اگر سیستم پایستار باشد بطوری که یک تابع پتانسیل $V(q)$ وجود داشته باشد، می توانیم بنویسیم

$$Q_k = - \frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (۴۹-۱۲)$$

و، مانند قبل، می توانیم یک تابع لاگرانژی $L = T - V$ تعریف کنیم و معادلات لاگرانژی حرکت یک سیستم ذرات را به صورت

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (۵۰-۱۲)$$

بنویسیم. فرض کنیم بخشی از نیروهای تعمیم یافته Q_k ، مثلاً Q'_k ، پایستار نیست و نمی تواند از یک تابع پتانسیل مشتق شده باشد، در حالی که بقیه نیروها پایستار هستند. (نیروهای اصطکاکی مثالی نمونه ای از نیروهای ناپایستارند). در چنین مواردی هنوز می توانیم تابع لاگرانژی را به صورت $L = T - V$ تعریف کنیم، ولی معادلات (۱۲-۴۹) و (۱۲-۵۰) به شکل زیر در می آیند

$$Q_k = Q'_k + \left(- \frac{\partial V}{\partial q_k} \right) \quad (۵۱-۱۲)$$

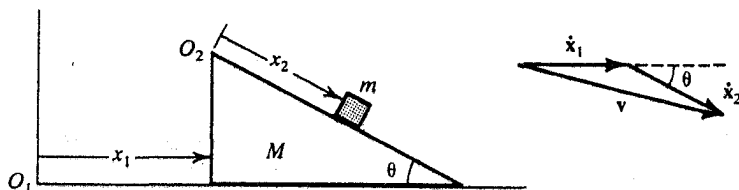
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q'_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (۵۲-۱۲)$$

این معادلات می توانند به حرکت یک تک ذره نیز اعمال شوند.

اکنون در وضعیتی هستیم که بتوانیم کاربرد روش لاگرانژ را برای به دست آوردن و حل معادلات در سیستمهای ساده نشان دهیم. برای انجام این کار مناسب است که روش زیر را به عنوان راهنما به کار بگیریم

- ۱- یک مجموعه مختصات تعمیم یافته مناسب برای نمایش پیکربندی سیستم انتخاب کنیم .
- ۲- انرژی جنبشی T سیستم را برحسب مختصات تعمیم یافته و مشتقات زمانی آنها (سرعت‌های تعمیم یافته) بیان کنیم .
- ۳- اگر سیستم پایستار است ، انرژی پتانسیل V را به صورت تابعی از مختصات تعمیم یافته بیان کنیم ، در غیر این صورت ، عبارتی برای نیروهای تعمیم یافته Q_i پیدا کنیم .
- ۴- بالاخره ، با استفاده از اطلاعات قبلی معادلات لاگرانژی حرکت را بنویسیم . برای سیستم‌های مقید و برای پیدا کردن نیروهای قیدی ، همان طور که در بخش بعدی مورد بحث قرار خواهند گرفت ، چند قدم دیگر باید فراتر رفت .

مثال (۱۲-۵): یک گوه (سطح شیب دار) به جرم M در روی یک سطح صاف افقی می لغزد ، و ذره‌ای به جرم m هم ، مطابق شکل (مثال-۱۲-۵) ، روی گوه می لغزد . معادلات حرکت ذره و گوه را پیدا کنید .



شکل (مثال-۱۲-۵)

سیستم دو درجه آزادی دارد ، بنابراین برای توصیف پیکربندی سیستم به دو مختصه تعمیم یافته نیاز داریم . این دو مختصه را x_1 و x_2 که به ترتیب نمایشگر جابه جاییهای M و m از مبدهای O_1 و O_2 هستند ، آن طور که در شکل نشان داده شده است ، در نظر بگیریم . سرعت M نسبت به O_1 عبارت است از \dot{x}_1 و سرعت m نسبت به O_2 عبارت است از \dot{x}_2 . سرعت v ی جرم m نسبت به O_1 ، همان طور که در شکل تکمیلی نشان داده شده است ، عبارت است از

$$v = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 \quad (1)$$

$$v^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2 \cos \theta \quad (۲)$$

به این ترتیب انرژی جنبشی کل سیستم از دید O_1 برابر است با

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2 \cos \theta) \quad (۳)$$

انرژی پتانسیل سیستم تنها از m ناشی می شود و عبارت است از

$$V = -mgx_2 \sin \theta$$

M روی سطح افقی است و انرژی پتانسیل آن می تواند صفر یا ثابت در نظر گرفته شود و تأثیری بر حرکت ندارد. به این ترتیب لاگرانژی سیستم عبارت است از

$$L = T - V \\ = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2 \cos \theta) + mgx_2 \sin \theta \quad (۵)$$

معادلات لاگرانژی برای مختصات x_2 و x_1 ،

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \quad (۶)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \quad (۷)$$

به شکل زیر در می آیند

$$M\ddot{x}_1 + m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 \cos \theta) = 0 \quad (۸)$$

$$m(\ddot{x}_1 \cos \theta + \ddot{x}_2) - mg \sin \theta = 0 \quad (۹)$$

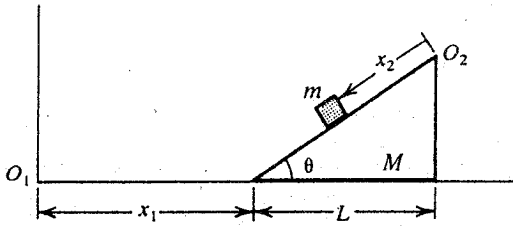
حل معادلات (۸) و (۹) می دهد

$$\ddot{x}_2 = \frac{g \sin \theta}{1 - [m \cos^2 \theta / (M + m)]} \quad (۱۰)$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{-g \sin \theta \cos \theta}{[(M + m)/m] - \cos^2 \theta} \quad (۱۱)$$

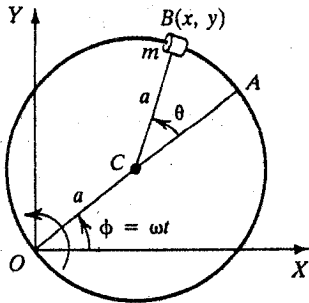
معادلات (۱۰) و (۱۱) معادلاتی هستند که پس از انتگرال گیری، با دانستن شرایط اولیه، سرعتها و جابه جاییها را به ما می دهند.

تمرین (۵-۱۲): مثال را برای مورد شکل (تمرین ۵-۱۲) حل کنید

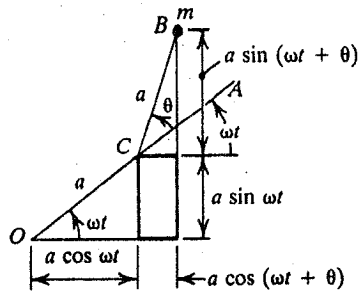


شکل (قرین-۱۲-۵)

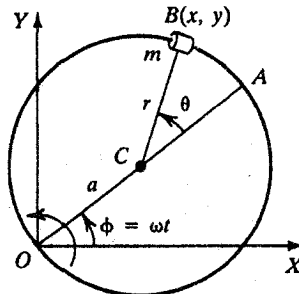
مثال (۱۲-۶): مهره ای به جرم m در نظر بگیریم که روی یک سیم دایره ای صاف به شعاع a آزادانه می تواند بلغزد. سیم در جهت خلاف عقربه های ساعت در یک صفحه افقی حول محوری که از O می گذرد با سرعت زاویه ای ω می چرخد. (الف) حرکت مهره را بررسی کنید و (ب) واکنش سیم را پیدا کنید.



(الف)



(ب)



(ب)

شکل (مثال-۱۲-۶)

(الف) وضعیت به صورتی است که در شکل (مثال ۱۲-۶) نمایش داده شده است. C مرکز سیم دایره ای است. قطر OA با محور X زاویه $\phi = \omega t$ می سازد، و مهره به جرم m با قطر OA زاویه θ می سازد. اگر فقط حرکت مهره مورد نظر ما بود، مسأله فقط یک درجه آزادی و در نتیجه یک مختصه تعمیم یافته θ می داشت. با مراجعه به شکل (مثال ۱۲-۶ الف و ب) می توانیم بنویسیم

$$x = a \cos \omega t + a \cos(\omega t + \theta) \quad (۱)$$

$$y = a \sin \omega t + a \sin(\omega t + \theta) \quad (۲)$$

$$\dot{x} = -a\omega \sin \omega t - a[\sin(\omega t + \theta)](\omega + \dot{\theta}) \quad (۳)$$

$$\dot{y} = a\omega \cos \omega t + a[\cos(\omega t + \theta)](\omega + \dot{\theta}) \quad (۴)$$

با مربع کردن و جمع معادله های (۳) و (۴) عبارتی برای انرژی جنبشی به صورت

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}ma^2[\omega^2 + (\dot{\theta} + \omega)^2 + 2\omega(\dot{\theta} + \omega) \cos \theta] \quad (۵)$$

به دست می آوریم و در نتیجه

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ma^2(\dot{\theta} + \omega + \omega \cos \theta)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = ma^2(\ddot{\theta} - \omega \dot{\theta} \sin \theta) \quad (۶)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -ma^2\omega(\dot{\theta} + \omega) \sin \theta \quad (۷)$$

بنابراین معادله لاگرانژی

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1$$

که در آن $Q_1 = 0$ و $q_1 = \theta$ ، به شکل

$$ma^2(\ddot{\theta} - \omega \dot{\theta} \sin \theta) + ma^2\omega(\dot{\theta} + \omega) \sin \theta = 0$$

یا

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0 \quad (۸)$$

در می آید . معادله (۸) حرکت مهره را روی سیم توصیف می کند . برای مقادیر کوچک θ معادله (۸) به

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \quad (۹)$$

کاهش می یابد که معادله یک آونگ ساده است . از مقایسه این معادله با

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

نتیجه می گیریم

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \quad \text{یا} \quad l = \frac{g}{\omega^2} \quad (۱۰)$$

یعنی ، مهره حول خط چرخان OA مانند یک آونگ ساده با طول $l = (\frac{g}{\omega^2})$ نوسان می کند . حل معادله (۸) را می توان پیشتر برد و سرعت و مکان را پیدا کرد .

(ب) برای محاسبه واکنش سیم ، باید یک جابه جایی مجازی m در جهت عمود بر سیم در نظر بگیریم . برای این منظور ، فاصله CB را برابر با r (یک متغیر و نه یک ثابت در حال حاضر) ، آن طور که در شکل (مثال - ۱۲ - ۶ ب) نشان داده شده است ، در نظر بگیریم . بنابراین دو درجه آزادی و دو مختصه تعمیم یافته r و θ وجود دارد . از شکل داریم

$$x = a \cos \omega t + r \cos(\omega t + \theta) \quad (۱۱)$$

$$y = a \sin \omega t + r \sin(\omega t + \theta)$$

$$\dot{x} = -a\omega \sin \omega t + \dot{r} \cos(\omega t + \theta) - r[\sin(\omega t + \theta)](\omega + \dot{\theta}) \quad (۱۲)$$

$$\dot{y} = a\omega \cos \omega t + \dot{r} \sin(\omega t + \theta) + r[\cos(\omega t + \theta)](\omega + \dot{\theta})$$

با مربع کردن و جمع دو عبارت آخر ، می توانیم عبارت انرژی جنبشی را به صورت زیر

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad \text{بنویسیم}$$

$$= \frac{1}{2} m [a^2 \omega^2 + \dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta} + \omega)^2 + 2a\omega \dot{r} \sin \theta + 2a\omega r (\dot{\theta} + \omega) \cos \theta] \quad (۱۳)$$

برای پیدا کردن واکنش ، از معادله لاگرانژ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r \quad (۱۴)$$

استفاده می‌کنیم، که $Q_r = R$ نیروی واکنش است. می‌توان مقادیر $\frac{\partial T}{\partial r}$ و $\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}$ را از معادله (۱۳) پیدا کرد و پس از بردن در معادله (۱۴) نتیجه گرفت

$$R = m[\ddot{r} + a\omega\dot{\theta} \cos \theta - r(\ddot{\theta} + \omega)^2 - a\omega(\dot{\theta} + \omega) \cos \theta] \quad (15)$$

اکنون می‌توانیم شرط جابه‌جایی مجازی را کنار بگذاریم و قرار دهیم

$$r = a, \quad \dot{r} = 0, \quad \ddot{r} = 0 \quad (16)$$

که نتیجه می‌دهد

$$R = -ma[\omega^2 \cos \theta + (\ddot{\theta} + \omega)^2] \quad (17)$$

این همان عبارت مورد نظر برای واکنش سیم است و در جهت کاهش r است.

تمرین (۱۲-۶): قسمت (الف) مثال بالا را در مختصات دکارتی انجام دهید.

۱۲-۶ معادلات لاگرانژی حرکت با ضوابط نامعین: قیدها

در شروع این فصل، اختلاف بین سیستمهای هولونومیک (که در آنها مختصات می‌توانند مستقلاً تغییر کنند) و سیستمهای غیرهولونومیک را به اختصار بیان کردیم. در این بخش، قیدهای هولونومیک و غیرهولونومیک و فایده آنها را در پیدا کردن نیروها یا واکنشهای قیدی با تفصیل بیشتری توصیف می‌کنیم. قیدهای هولونومیک می‌توانند به صورت روابط جبری بین مختصات، مانند

$$f_l(x_i, t) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, m \quad (12-53)$$

بیان شوند، که m تعداد قیدهاست. در چنین مواردی همیشه می‌توان مجموعه‌ای از مختصات تعمیم یافته مناسب پیدا کرد که معادلات حرکت را بتوان برحسب آنها نوشت و از مراجعه صریح به قیود آزاد بود. برعکس، در قیود غیرهولونومیک، قیود به صورت روابطی بین سرعتهای ذرات سیستم، مانند

$$f_l(x_i, \dot{x}_i, t) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, m \quad (12-54)$$

بیان می‌شوند. اگر بتوان از این معادلات قیدی غیرهولونومیک انتگرال گیری کرد و به روابطی

بین مختصات رسید ، قیدها هولونومیک می شوند و می توان از روش معمول برای حل معادلات استفاده کرد . معادلات نمایشگر نامساویها ، مانند یک مولکول که در داخل یک جعبه مکعبی حرکت می کند ، مثالهایی از قیدهای غیرهولونومیک هستند ، زیرا در این مورد قید روی حرکت مولکول به این صورت است که تا وقتی که $x \leq L$ ، $y \leq L$ ، $z \leq L$ باشد ، مولکول هر جا می تواند باشد . اکنون این نکات را با کمک چند مثال روشن می کنیم .

به عنوان مثال قید هولونومیک ، حرکت یک ذره را که مقید است روی یک سطح کروی به شعاع a و مرکز مبدأ حرکت کند ، در نظر بگیریم . در مختصات دکارتی ، معادله قیدی عبارت است از

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (55-12)$$

جابه جایها توسط رابطه

$$x dx + y dy + z dz = 0 \quad (56-12)$$

به یکدیگر مربوط می شوند . از معادله دیفرانسیل (۵۶-۱۲) می توان انتگرال گرفت و معادله (۵۵-۱۲) را به دست آورد . بنابراین معادلات (۵۵-۱۲) و (۵۶-۱۲) فقط یک معادله قیدی تشکیل می دهند . سه مختصه x ، y و z از یکدیگر مستقل نیستند . چون یک معادله قیدی وجود دارد ، تنها دو مختصه برای توصیف مکان ذره کافی خواهد بود . همچنین ، در مختصات کروی داریم

$$r = a = \text{constant}$$

θ و ϕ برای توصیف ذره کافی خواهند بود . فرض کنیم برای توصیف مکان ذره از کسینوسهای جهتی به عنوان مختصات تعمیم یافته استفاده کنیم ، یعنی

$$q_1 = \frac{x}{a}, \quad q_2 = \frac{y}{a}, \quad q_3 = \frac{z}{a} \quad (57-12)$$

q_1 ، q_2 ، و q_3 تماماً مستقل نیستند ، و از معادله (۵۵-۱۲) داریم

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2 = 1$$

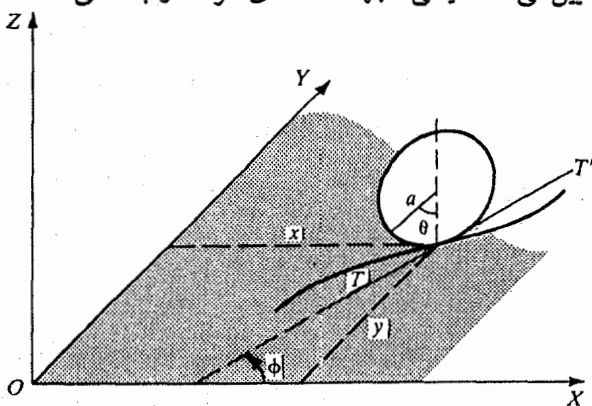
یا

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \quad (58-12)$$

یعنی

$$q_3 = \sqrt{1 - q_1^2 - q_2^2} \quad (۱۲-۵۹)$$

چون q_3 می تواند بر حسب مختصات q_1 و q_2 بیان شود، تنها دو متغیر مستقل وجود دارد. به عنوان دومین مثال، یک قرص دایره ای به شعاع a در نظر بگیریم، که روی یک سطح کاملاً خشن (مطلقاً لغزش وجود ندارد) افقی XY ، آن طور که در شکل (۱۲-۱) نشان داده شده است، می غلتد. صفحه قرص در هر لحظه قائم است (یعنی $z = a$ و $\alpha = \pi/2$)، که زاویه بین صفحه قرص و صفحه افقی XY است). بنابراین برای توصیف پیکربندی قرص در هر لحظه، نیاز به چهار مختصه x ، y ، θ ، و ϕ داریم. مختصات x و y مرکز قرص (با حرکت انتقالی قرص را توصیف و مکان نقطه تماس آن را با صفحه افقی مشخص می کنند). زاویه θ حرکت چرخشی قرص حول مرکز جرم را توصیف می کند، یعنی، زاویه بین یک شعاع معین در قرص با امتداد قائم است. زاویه ϕ جهت گیری صفحه قرص نسبت به محور X را تعیین می کند، یعنی، جهت لحظه ای حرکت را به ما می دهد.



شکل (۱۲-۱): غلتش قرص دایره ای به شعاع a روی یک سطح افقی کاملاً خشن

(مطلقاً بدون لغزش) XY ، تماس TT' با محور X زاویه ϕ می سازد

این مختصات تماماً مستقل نیستند. به علت قیود، سرعت v ی مرکز جرم و θ با رابطه

$$v = a\dot{\theta} \quad (۱۲-۶۰)$$

به یکدیگر مربوطند که به مؤلفه های سرعت

$$\dot{x} = v \cos \phi = a\dot{\theta} \cos \phi \quad (۶۱-۱۲)$$

$$\dot{y} = -v \sin \phi = -a\dot{\theta} \sin \phi$$

می انجامد . این معادلات دو معادله قیدی زیر را به دست می دهند

$$dx = a d\theta \cos \phi \quad (۶۲-۱۲)$$

$$dy = -a d\theta \sin \phi$$

از هیچیک از این معادلات دیفرانسیل نمی توان انتگرال گرفت و دو رابطه بین x ، y ، θ ، و ϕ به دست آورد . چنین قیدهایی که در آنها معادلات دیفرانسیل انتگرال پذیر نیستند قیدهایی غیرهولونومیک نامیده می شوند . سیستمی که شامل چنین قیدهایی است سیستم غیرهولونومیک نامیده می شود . به این ترتیب قرص در این مثال چهار درجه آزادی دارد و ما برای حل مسأله نیاز به چهار مختصه داریم .

اگر صفحه خشن نبود ، یعنی ، لغزش رخ می داد ، چه اتفاقی می افتاد ؟ در چنین مواردی معادلات قیدی (۶۲-۱۲) برقرار نبود و سیستم هولونومیک می شد ، و در نتیجه دوباره به چهار مختصه برای توصیف حرکت نیاز بود . ما نیاز به دانستن \dot{x} ، \dot{y} ، $\dot{\theta}$ ، و $\dot{\phi}$ داریم . از طرف دیگر ، وقتی قرص فقط می غلتد ، اگر $\dot{\theta}$ داده شده باشد ، و یکی از سه کمیت باقیمانده \dot{x} ، \dot{y} ، و $\dot{\phi}$ ، نیز داده شده باشد ، دوسرعت باقیمانده دیگر را می توان از معادلات (۶۱-۱۲) محاسبه کرد . این قرص غلتان دو درجه آزادی دارد . می تواند آزادانه بغلتد و بچرخد . به عنوان یک انتخاب ، فرض کنیم قرص مقید است که در امتداد منحنی معینی بغلتد ، و s را طول مسیر در امتداد این منحنی در نظر بگیریم . در این مورد معادله (۶۰-۱۲) به شکل زیر در می آید

$$ds = a d\theta \quad (۶۳-۱۲)$$

که می تواند پس از انتگرال گیری به صورت

$$s - a\theta = \text{constant} \quad (۶۴-۱۲)$$

نوشته شود . در این جا یک قید هولونومیک ، و در نتیجه یک سیستم هولونومیک داریم . بالاخره ، مثال یک قرص غلتان روی یک سطح شیب دار به طرف پایین را ، آن طور که در شکل (۱۲-۲) نشان داده شده است ، در نظر بگیریم . قرص بدون لغزش می غلتد . موقعیت آن با دو مختصه s و θ معین می شود . سرعتهای \dot{s} و $\dot{\theta}$ توسط

$$\dot{s} = a\dot{\theta} \quad (۶۵-۱۲)$$

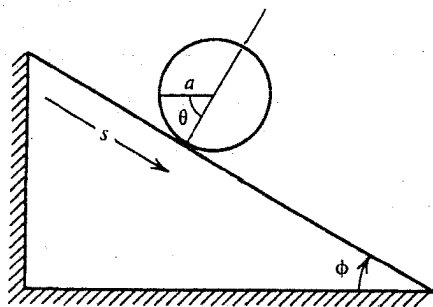
$$ds = a d\theta \quad (۶۶-۱۲)$$

به هم مربوط می شوند که پس از انتگرال گیری می دهد

$$s - a\theta = \text{constant } C \quad (۶۷-۱۲)$$

اگرچه قید در ابتدا برحسب سرعتها ، معادله (۶۵-۱۲) ، بیان شده است ، از آن می توان انتگرال گرفت و رابطه ای بین مختصات ، معادله (۶۷-۱۲) ، به دست آورد . بنابراین سیستم ، با یک معادله قیدی ، هولونومیک است و تنها یک مختصه برای توصیف آن کافی است .

به این ترتیب نتیجه می گیریم : اگر در سیستمی ، قید روی سرعتها بتواند انتگرال گیری شود و رابطه ای بین مختصات به دست دهد ، قید هولونومیک است .



شکل (۱۲-۲) : قرص غلتان ، بدون لغزش ، روی یک سطح شیب دار پایین می آید

بحث خود را کمی بیشتر ادامه دهیم . یک رابطه قیدی به شکل زیر در نظر بگیریم

$$\sum_i A_i \dot{x}_i + B = 0 \quad (۶۸-۱۲)$$

بطور کلی ، این معادله انتگرال ناپذیر است ؛ در نتیجه یک قید غیر هولونومیک است . اما اگر A_i و B به شکل زیر باشند

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad f = f(x_i, t) \quad (۶۹-۱۲)$$

معادله (۶۸-۱۲) را می توان به صورت

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (۷۰-۱۲)$$

نوشت که می دهد

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad (۷۱-۱۲)$$

و می تواند پس از انتگرال گیری بدهد

$$f(x_i, t) = \text{constant} \quad (۷۲-۱۲)$$

در نتیجه قید داده شده با معادله (۱۲-۶۸) عملاً هولونومیک است. بنابراین بطور کلی یک قید به صورت

$$\sum_{l=1}^m \frac{\partial f_l}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial f_l}{\partial t} = 0 \quad (۷۳-۱۲)$$

یا

$$\sum_{l=1}^m \frac{\partial f_l}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f_l}{\partial t} = 0 \quad (۷۴-۱۲)$$

کاملاً معادل است با

$$f_l = f_l(q_k, t) = 0 \quad (۷۵-۱۲)$$

بیان قیود به شکل معادلات دیفرانسیل، به جای عبارات جبری، مزیت‌هایی دارد. در این موارد، روابط قیدی می‌توانند مستقیماً (بدون این که نخست انتگرال گیری شوند) به وسیله ضرایب نامعین لاگرانژ وارد معادلات لاگرانژی شوند. فرض کنیم قیدها به صورت

$$\sum_l \frac{\partial f_l}{\partial q_k} dq_k = 0 \quad (۷۶-۱۲)$$

بیان شده باشند که $k = 1, 2, \dots, n$ و $l = 1, 2, \dots, m$. آنگاه معادلات لاگرانژی به شکل*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_l \lambda_l(t) \frac{\partial f_l}{\partial q_k} \quad (۷۷-۱۲)$$

در می‌آیند که $\lambda_l(t)$ ضرایب نامعین هستند و نمایشگر نیروها قیدی اند. تعداد λ_l ها به اندازه تعداد معادلات قیدی است. مثالهای زیر کاربرد معادلات قیدی و روش ضرایب نامعین را برای محاسبه نیروهای قیدی روش می‌کنند.

* نتایج داده شده در معادله (۱۲-۷۷) را در صورتی می‌توان به دست آورد که معادلات لاگرانژی از روش هامیلتون با استفاده از اصل کمترین عمل به دست آمده باشند.

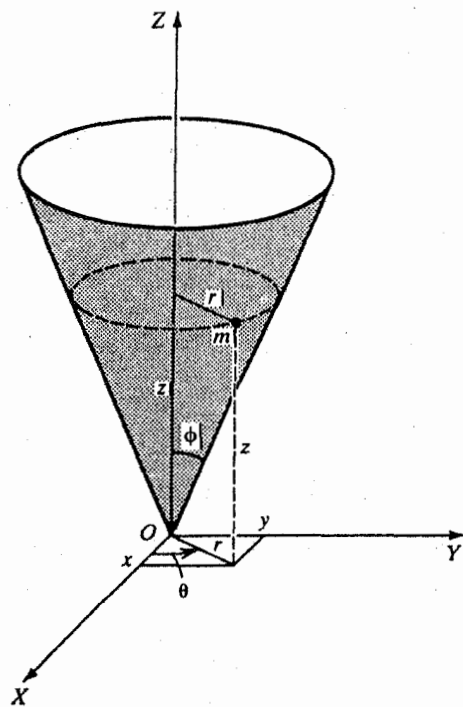
مثال (۱۲-۷): حرکت ذره‌ای به جرم m را که روی سطح یک مخروط با نیم زاویه ϕ ، آن طور که در شکل (مثال-۱۲-۷) نشان داده شده است ، تحت اثر نیروی گرانش حرکت می‌کند مورد بحث قرار دهید .

رأس مخروط را در مبدأ O ، و محور مخروط را محور Z بگیریم . مکان ذره روی سطح مخروط با مختصات دکارتی x ، y و z داده می‌شود . با این وجود ، ما از مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) به عنوان مختصات تعمیم یافته استفاده می‌کنیم . اما این سه مختصه از یکدیگر مستقل نیستند . مختصات z و r از طریق نیم زاویه مخروط ϕ ، با رابطه

$$z = r \cot \phi \quad (۱)$$

به یکدیگر مربوط می‌شوند که یک معادله قیدی است ، و

$$\dot{z} = \dot{r} \cot \phi \quad (۲)$$



شکل (مثال-۱۲-۷)

به این ترتیب فقط دو درجه آزادی داریم. r و θ را به عنوان مختصات تعمیم یافته به کار می‌بریم و z را با استفاده از معادله قیدی، (۱) یا (۲)، حذف می‌کنیم. انرژی جنبشی جرم m عبارت است از

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2] = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 (1 + \cot^2 \phi) + r^2 \dot{\theta}^2]$$

یا

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 \csc^2 \phi + r^2 \dot{\theta}^2) \quad (۳)$$

انرژی پتانسیل m (با فرض این که $V = 0$ در $z = 0$) عبارت است از

$$V = mgz = mgr \cot \phi \quad (۴)$$

به این ترتیب لاگرانژی L سیستم به صورت زیر است

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 \csc^2 \phi + r^2 \dot{\theta}^2) - mgr \cot \phi \quad (۵)$$

معادله لاگرانژی مختصه r عبارت است از

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad (۶)$$

با استفاده از معادله (۵) برای L ، نتیجه می‌گیریم

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \csc^2 \phi, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = m \ddot{r} \csc^2 \phi, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\theta}^2 - mg \cot \phi$$

با قرار دادن این عبارتها در معادله (۶) به دست می‌آوریم

$$\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \sin^2 \phi + g \cos \phi \sin \phi = 0 \quad (۷)$$

که معادله حرکت برای مختصه r است.

معادله لاگرانژی برای مختصه θ عبارت است از

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (۸)$$

با استفاده از معادله (۵) برای L ، خواهیم داشت

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

با قرار دادن این عبارتها در معادله (۸) به دست می آوریم

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = \frac{d}{dt}(J_z) = 0 \quad (9)$$

که می دهد

$$J_z = mr^2\dot{\theta} = \text{constant} \quad (10)$$

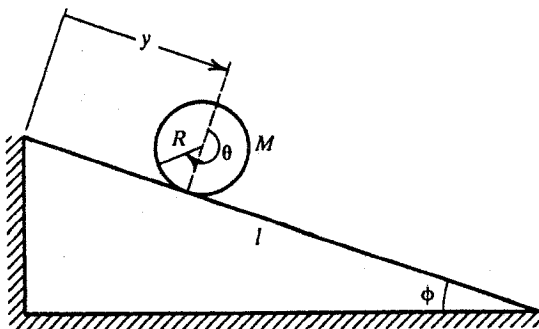
J_z تکانه زاویه ای نسبت به محور Z ، یعنی نسبت به محور تقارن است. به این ترتیب، همان طور که انتظار می رفت، معادله (۱۰) نمایشگر پایستگی تکانه زاویه ای نسبت به محور تقارن در یک میدان گرانشی پایستار است.

تعریف (۱۲-۷): مثال را با استفاده از z و θ به عنوان مختصات تعمیم یافته، به جای r و θ ، تکرار کنید.

مثال (۱۲-۸): حرکت یک قرص را که روی یک سطح شیب دار، بدون لغزش، رو به پایین می غلتد مورد بحث قرار دهید. همچنین نیروهای قیدی را با استفاده از روش ضرایب نامعین پیدا کنید.

وضعیت در شکل (مثال ۱۲-۸) نشان داده شده است. از y و θ به عنوان مختصات تعمیم یافته استفاده می کنیم. به این ترتیب انرژی جنبشی کل که مجموع انرژی انتقالی و انرژی چرخشی است می تواند، با توجه به این که گشتاور لختی قرص $I = \frac{1}{2}MR^2$ است، به صورت زیر نوشته شود

$$T = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 \quad (1)$$



شکل (مثال ۱۲-۸)

و انرژی پتانسیل ، با این فرض که انرژی در پایین سطح صفر است ، عبارت است از

$$V = Mg(l - y) \sin \phi \quad (۲)$$

بنابراین لاگرانژی سیستم به صورت زیر است

$$L = T - V = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{4} MR^2 \dot{\theta}^2 - Mg(l - y) \sin \phi \quad (۳)$$

معادله قید هولونومیکی که رابطه بین y و θ را می دهد عبارت است از

$$f(y, \theta) = y - R\theta = 0 \quad (۴)$$

بنابراین اگر قرص بدون لغزش بغلند ، رابطه قیدی پیشین باید برقرار باشد . در نتیجه ، به جای دو درجه آزادی y و θ ، تنها یک درجه آزادی داریم . یکی از دو مختصه y و θ را می توان از معادله (۳) ، با استفاده از معادله (۴) ، حذف کرد ، و سپس معادلات حرکت با استفاده از معادلات لاگرانژ به دست می آیند (رک . تمرین (۱۲-۸) .

همچنین می توانیم هر دوی y و θ را به عنوان مختصات تعمیم یافته نگاه داریم و از روش ضرایب نامعین استفاده کنیم . این روش ، همان طور که در زیر خواهیم دید ، اطلاعات زیادتری به ما می دهد . معادلات لاگرانژی برای مختصات y و θ عبارتند از معادلات (۱۲-۷۷) ،

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} - \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (۵)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} - \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \quad (۶)$$

از رابطه (۴) خواهیم داشت

$$f = y - R\theta = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = -R \quad (۷)$$

با استفاده از L در معادله (۳) و روابط پیشین ، معادلات (۵) و (۶) به شکل زیر

در می آیند

$$M\ddot{y} - Mg \sin \phi - \lambda = 0 \quad (۸)$$

$$-\frac{1}{2} MR^2 \ddot{\theta} - \lambda R = 0 \quad (۹)$$

با به کارگیری رابطه قیدی $y = R\theta$ ، خواهیم داشت

$$\ddot{y} = R\ddot{\theta} \quad (10)$$

معادلات (۸)، (۹)، و (۱۰) دارای سه متغیر \ddot{y} ، $\ddot{\theta}$ ، و λ هستند و پس از حل می دهند

$$\ddot{y} = \frac{2g \sin \phi}{3} \quad (11)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{2g \sin \phi}{3R} \quad (12)$$

$$\lambda = -\frac{Mg \sin \phi}{3} \quad (13)$$

می توان از این معادلات انتگرال گرفت و سرعت و مکان قرص را پیدا کرد. معادله (۱۳) بزرگی نیروی قیدی حاصل از نیروی اصطکاک را به مامی دهد. این قید است که باعث کاهش شتاب از $\ddot{y} = g \sin \phi$ (وقتی لغزش بدون غلتش باشد) به $\ddot{y} = \frac{2}{3}g \sin \phi$ (وقتی که لغزش نباشد و فقط غلتش باشد) می شود.

نمونه (۱۲-۸): (الف) در مثال بالا معادلات لاگرانژی را با استفاده از θ به عنوان مختصه مستقل به دست آورید. معادله را حل کنید و نتایج را تفسیر نمایید.
(ب) معادله لاگرانژی را برای مثال با استفاده از y به عنوان مختصه مستقل به دست آورید. معادله را حل کنید و نتایج را تفسیر کنید.

۱۲-۷ تکانه تعمیم یافته. مختصات دوره ای (یا قابل چشم پوشی)

در بخشهای پیشین، نشان دادیم که چگونه یک سیستم را به کمک معادلات لاگرانژی توصیف کنیم. برای سیستمی با n درجه آزادی، به n مختصه تعمیم یافته نیاز داریم. انرژی L بر حسب مختصات تعمیم یافته q_k و سرعتهای تعمیم یافته \dot{q}_k توصیف شد. به علاوه، اگر لاگرانژی تابع صریحی از زمان بود می نوشتیم

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t) \quad (78-12)$$

همان طور که می دانیم، صورت بندی لاگرانژی به n معادله دیفرانسیل مرتبه دوم می انجامد.

یک صورت بندی دیگر صورت بندی هامیلتونی است. صورت بندی هامیلتونی بر حسب مختصات تعمیم یافته و تکانه های تعمیم یافته شکل گرفته است. یعنی، اگر هامیلتونی H تابع صریحی از زمان باشد، داریم

$$H = H(q, p, t) = H(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n; t) \quad (۷۹-۱۲)$$

این صورت بندی برای یک سیستم با n درجه آزادی به $2n$ معادله دیفرانسیل مرتبه اول می انجامد. حل این $2n$ معادله مرتبه اول بسیار راحت تر از حل n معادله دیفرانسیل مرتبه دوم در صورت بندی لاگرانژی است.

برای شروع تکانه تعمیم یافته را تعریف کنیم. به عنوان یک مثال ساده، حرکت یک ذره را با سرعت \dot{x} در امتداد محور x ها در نظر بگیریم. انرژی جنبشی چنین ذره ای عبارت است از

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (۸۰-۱۲)$$

معمولاً تکانه p را به صورت $p = m\dot{x}$ تعریف می کنند. اما در صورت بندی حاضر، تکانه p را به صورت

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \quad (۸۱-۱۲)$$

تعریف می کنیم. اگر مقدار T را از معادله (۸۰-۱۲) در معادله (۸۱-۱۲) قرار دهیم، خواهیم داشت $p = m\dot{x}$. به علاوه، اگر V تابع سرعت \dot{x} نباشد، یعنی، $V = V(x)$ ، تکانه p را همچنین می توان به صورت زیر نوشت.

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \quad (۸۲-۱۲)$$

اکنون این مفهوم را برای تعریف تکانه تعمیم یافته به کار می بریم. برای سیستمی که با یک مجموعه مختصات تعمیم یافته q_1, q_2, \dots, q_n ، و تکانه های تعمیم یافته p_1, p_2, \dots, p_n ، توصیف می شود، تکانه تعمیم یافته p_k ، متناظر با مختصه تعمیم یافته q_k ، را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (۸۳-۱۲)$$

تکانه تعمیم یافته p_k ، گشتاور مزدوج p_k (مزدوج با مختصه q_k) نیز نامیده می شود. می توان نشان داد که تکانه تعمیم یافته همیشه آن مفهوم فیزیکی را که در فیزیک مقدماتی با به کارگیری

مختصات دکارتی داشت ندارد .

برای یک سیستم پایستار ، معادلات لاگرانژی عبارتند از

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (۱۲-۸۴)$$

و ، از معادله (۱۲-۸۳) ،

$$\dot{p}_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (۱۲-۸۵)$$

در نتیجه معادلات لاگرانژی به شکل زیر در می آیند

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (۱۲-۸۶)$$

اکنون به ارتباط بین تکانه های تعمیم یافته و ثابتهای حرکت پردازیم . کمیتهایی که تابع مختصات و سرعتها باشند و در زمان ثابت بمانند ، ثابتهای حرکت نامیده می شوند . فرض کنیم که در عبارت لاگرانژی L سیستمی یک مختصه q_λ صریحاً حضور نداشته باشد . در چنین مواردی

$$\frac{\partial L}{\partial q_\lambda} = 0 \quad (۱۲-۸۷)$$

بنابراین ، معادله (۱۲-۸۵) و معادله (۱۲-۸۶) به شکل زیر در می آید

$$\dot{p}_\lambda = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\lambda} \right) = 0 \quad (۱۲-۸۸)$$

که پس از انتگرال گیری می دهد

$$p_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\lambda} = \text{a constant} = C_\lambda \quad (۱۲-۸۹)$$

یعنی ، هر وقت تابع لاگرانژ شامل مختصه q_λ بطور صریح نیست ، تکانه تعمیم یافته متناظر p_λ یک ثابت حرکت است . مختصه q_λ مختصه دوره ای یا قابل چشم پوشی نامیده می شود . به این ترتیب می توانیم نتیجه بگیریم که تکانه تعمیم یافته وابسته به یک مختصه قابل چشم پوشی یک ثابت حرکت سیستم است .

به عنوان مثال ، حرکت یک ذره را در یک میدان نیروی مرکزی در نظر بگیریم .

در مختصات قطبی ، لاگرانژی عبارت است از

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) \quad (۹۰-۱۲)$$

چون L شامل θ نیست ، θ دوره ای (یا قابل چشم پوشی) است و تکانه تعمیم یافته متناظر با θ عبارت است از

$$p_{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = \text{constant} \quad (۹۱-۱۲)$$

که تکانه زاویه ای است و یک ثابت حرکت است .

یادآوری مهم : وقتی p_{θ} یک ثابت حرکت است ، معنی آن این نیست که θ ثابت است . به عنوان مثال ، در یک مدار بیضی شکل حاصل از یک نیروی جاذبه متناسب با عکس مجذور فاصله ، θ تغییر می کند ، اما r نیز به شیوه ای تغییر می کند که p_{θ} را ثابت نگاه دارد .

۸-۱۲ تابع هامیلتونی . قوانین پایستگی و اصول تقارن

سیستمی که با هیچ چیز در خارج از خود برهم کنش نکند یک سیستم بسته نامیده می شود . ممکن است بین ذرات سیستم بسته برهم کنش باشد یا نباشد . در هر مورد ، برای چنین سیستم بسته ای همیشه هفت ثابت حرکت یا انتگرال حرکت وجود دارد . (۱) تکانه خطی ، که سه مؤلفه دارد . (۲) تکانه زاویه ای ، که نیز سه مؤلفه دارد ، و (۳) انرژی کل . در این بخش فرآیندی را که در آن این ثابتها از ملاحظات لاگرانژی یک سیستم بسته به دست می آیند مورد بررسی قرار می دهیم .

پایستگی تکانه خطی

لاگرانژی یک سیستم بسته در یک چارچوب مرجع لخت را در نظر بگیریم . یک ویژگی برجسته هر دستگاه لخت این است که فضا در یک دستگاه یا چارچوب لخت همگن است . یعنی ، یک سیستم بسته در اثر یک انتقال کل سیستم در فضا بدون تغییر می ماند . این می رساند که لاگرانژی یک سیستم بسته در یک چارچوب لخت بدون تغییر می ماند یا ناورداست . برای سهولت ، یک تک ذره را با یک لاگرانژی $L(q, \dot{q})$ در نظر بگیریم . تغییرات L ناشی از تغییرات مختصات تعمیم یافته باید صفر باشد . یعنی ، L ناورداست .

$$\delta L = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k = 0 \quad (92-12)$$

چون به سیستم فقط جابه‌جایی داده‌ایم، δq_i ها تابع زمان نیستند؛ در نتیجه

$$\delta \dot{q}_k = \delta \left(\frac{dq_k}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\delta q_k) = 0 \quad (93-12)$$

و معادله (۹۲-۱۲) به

$$\delta L = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k = 0 \quad (94-12)$$

کاهش می‌یابد. هر جابه‌جایی δq_k مستقل یا دلخواه است. در نتیجه δL در معادله (۹۴-۱۲) تنها وقتی صفر خواهد بود که مشتقات جزئی L صفر باشند؛ یعنی

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (95-12)$$

به این ترتیب معادله لاگرانژی، معادله (۸۴-۱۲)، به

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0 \quad (96-12)$$

کاهش می‌یابد، و از آن‌جا

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \text{constant} \quad (97-12)$$

چون $L = T(\dot{q}_k) - V(q_k)$ ، می‌توانیم معادله (۹۷-۱۲) را به صورت

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (T - V) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} m \sum_k \dot{q}_k^2 \right) \quad (98-12)$$

$$= m \dot{q}_k = p_k = \text{constant}$$

بنویسیم. معادله (۹۸-۱۲) بیان می‌دارد که اگر فضا همگن باشد، تکانه خطی p_k ی یک سیستم بسته ثابت است. چون حرکت یک تک ذره می‌تواند با سه مختصه دکارتی (یا هر سه مختصه تعمیم یافته دیگر) توصیف می‌شود، سه ثابت حرکت p_x ، p_y ، p_z خواهیم داشت، که سه مؤلفه یک بردار تکانه خطی \mathbf{p} هستند. به عبارت کلی‌تر، می‌توانیم بیان زیر را ارائه دهیم:

اگر لاگرانژی یک سیستم، بسته یا غیربسته، نسبت به انتقال در یک جهتی ناوردا

باشد، تکانه خطی سیستم در این جهت با زمان ثابت است.

پایستگی تکانه زاویه‌ای

یک ویژگی برجسته دیگر دستگاه لخت این است که، در یک چارچوب لخت فضا همسانگرد است: یعنی، یک سیستم بسته در تغییر جهت گیری یا چرخش کل سیستم بدون تغییر می‌ماند. این می‌رساند که اگر یک سیستم بسته به اندازه یک زاویه بی‌نهایت کوچک بچرخد، لاگرانژی سیستم ناوردا می‌ماند. یک بار دیگر یک سیستم شامل یک تک ذره در نظر بگیریم. تغییرات لاگرانژی که با معادله (۹۲-۱۲) داده شده است، عبارت است از

$$\delta L = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k = 0 \quad (92-12)$$

برحسب تعریف

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (83-12)$$

در نتیجه معادلات لاگرانژی، معادلات (۸۴-۱۲)، می‌توانند به صورت زیر نوشته شوند

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (99-12)$$

از ترکیب معادلات پیشین با معادله (۹۲-۱۲)، می‌توانیم بنویسیم

$$\delta L = \sum_k \dot{p}_k \delta q_k + \sum_k p_k \delta \dot{q}_k = 0 \quad (100-12)$$

اکنون این نتایج را به مورد نشان داده شده در شکل (۳-۱۲) اعمال کنیم. یک ذره نقطه‌ای در فاصله r از مبدأ O قرار دارد. سیستم به اندازه زاویه $\delta\theta$ حول یک محور می‌چرخد. مقدار r به صورت زیر تغییر می‌کند

$$\delta r = \delta\theta \times r \quad (101-12)$$

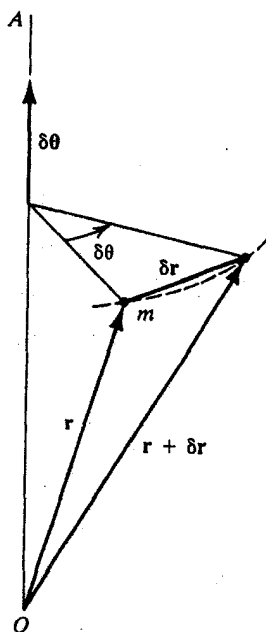
این به تغییری در سرعت به صورت

$$\delta \dot{r} = \delta\theta \times \dot{r} \quad (102-12)$$

می‌انجامد. با اعمال معادله (۱۰۰-۱۲) به این مورد خواهیم داشت

$$\delta L = \dot{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{p} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}} = 0$$

(۱۰۳-۱۲)



شکل (۳-۱۲) : چرخش يك ذره نقطه‌ای به جرم m در فاصله r از مبدأ ، حول محور OA

با بردن معادله‌های (۱۰۱-۱۲) و (۱۰۲-۱۲) در معادله (۱۰۳-۱۲) داریم

$$\dot{\mathbf{p}} \cdot (\delta \theta \times \mathbf{r}) + \mathbf{p} \cdot (\delta \theta \times \dot{\mathbf{r}}) = 0 \quad (۱۰۴-۱۲)$$

با استفاده از خواص حاصل ضرب سه گانه نرده‌ای ، معادله (۱۰۴-۱۲) به شکل زیر درمی‌آید

$$\delta \theta \cdot (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}) + \delta \theta \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}) = 0 \quad (۱۰۵-۱۲)$$

یا

$$\delta \theta \cdot [(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}) + (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p})] = 0 \quad (۱۰۶-۱۲)$$

یا

$$\delta \theta \cdot \left(\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \right) = 0 \quad (۱۰۷-۱۲)$$

اما

$$\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{J} \quad (108-12)$$

که \mathbf{J} تکانه زاویه ای نسبت به مبدأ است ، بنابراین

$$\delta \theta \cdot \frac{d\mathbf{J}}{dt} = 0 \quad (109-12)$$

چون $\delta \theta$ اختیاری است ، باید داشته باشیم

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = 0 \quad (110-12)$$

یعنی

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{constant} \quad (111-12)$$

که \mathbf{J} دارای سه مؤلفه است . بطور کلی :

اگر در چرخش حول یک محور لاگرانژی ناوردا بماند ، مؤلفه تکانه زاویه ای سیستم روی این محور با زمان ثابت می ماند .

سیستمی در نظر بگیریم که تحت تأثیر یک نیروست و حول این میدان نیرو تقارن دارد . معنی این مطلب آن است که لاگرانژی این سیستم حول این محور تقارن ناوردا خواهد بود . در نتیجه تکانه زاویه ای \mathbf{J} ی سیستم حول این محور با زمان ثابت خواهد ماند .

پایستگی انرژی و تابع هامیلتونی

ویژگی برجسته دیگر هر چارچوب لخت این است که در یک چارچوب مرجع لخت زمان همگن است . این می رساند که لاگرانژی یک سیستم بسته نمی تواند تابع صریحی از زمان باشد ، یعنی ، در دیفرانسیل کامل L ،

$$dL = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (112-12)$$

باید داشته باشیم

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (113-12)$$

در نتیجه مشتق کامل L نسبت به زمان به

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\dot{q}_k}{dt} = 0$$

یا

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k = 0 \quad (۱۲-۱۱۴)$$

کاهش می یابد. از معادلات لاگرانژی داریم

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (۱۲-۸۴)$$

با گذاردن به جای $\frac{\partial L}{\partial q_k}$ در معادله (۱۲-۱۱۴) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_k \dot{q}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \\ &= \sum_k \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0 \end{aligned}$$

یعنی

$$\sum_k \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{dL}{dt} = 0 \quad (۱۲-۱۱۵)$$

یا

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L \right) = 0 \quad (۱۲-۱۱۶)$$

بنابراین کمیت داخل پرانتز باید با زمان ثابت باشد. این ثابت که با H نمایش داده می شود، هامیلتونی H نامیده می شود، و [با استفاده از تعریف تکانه تعمیم یافته در معادله (۱۲-۸۳)] با رابطه زیر داده می شود

$$H = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = \sum_k p_k \dot{q}_k - L = \text{constant} \quad (۱۲-۱۱۷)$$

در نتیجه اگر L تابع صریحی از زمان نباشد، یعنی $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ باشد، H یک ثابت حرکت است. اگر دو فرض زیر را در نظر بگیریم H شکل بخصوصی به خود می گیرد:

(۱) انرژی پتانسیل V از مختصه سرعتی مستقل باشد، بطوری که

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \quad (۱۲-۱۱۸)$$

(۲) معادلات نمایشگر تبدیل مختصات صریحاً به t بستگی نداشته باشند؛ در این صورت انرژی جنبشی نه تنها یک تابع درجه دوم از سرعت‌های تعمیم یافته خواهد بود، که همچنین در تمام جملات همگن خواهد بود. (احتیاط: معادلات تبدیل بین مختصات، مثلاً از دکارتی به تعمیم یافته، در صورتی بطور صریح تابع زمان خواهد بود که q ها نسبت به مختصات لغت (مثلاً دکارتی) بچرخند یا قیدها تابعی از زمان باشند).

اکنون، بنابراین قضیه اولر برای یک تابع همگن $f(q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_n)$ از مرتبه N نسبت به متغیرهای q_1, q_2, \dots, q_n ، داریم

$$\sum_{k=1}^N q_k \frac{\partial f}{\partial q_k} = Nf \quad (۱۲-۱۱۹)$$

بنابراین اگر انرژی جنبشی T یک تابع درجه دوم همگن، یعنی از مرتبه $N=2$ باشد. از معادله (۱۱۹-۲) خواهیم داشت

$$\sum_{k=1}^N \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T \quad (۱۲-۱۲۰)$$

از ترکیب معادلات (۱۲-۱۱۸) و (۱۲-۱۲۰) با معادله (۱۲-۱۱۷)، به دست می آوریم

$$H = 2T - (T - V) = T + V = E = \text{constant} \quad (۱۲-۱۲۱)$$

که E انرژی کل، و ثابت است. یعنی، با فرضیهایی که در بالا داده شده است، (۱) $V = V(q)$ و (۲) T یک تابع درجه دوم همگن است، ثابت حرکت، هامیلتونی H ، برابر با E انرژی کل سیستم است. بسیار مهم است که به خاطر بسپاریم که هامیلتونی همیشه انرژی کل نیست. امکانات مختلف از این قرارداد:

H ثابت است و برابر است با انرژی کل E

H ثابت است اما برابر نیست با انرژی کل E

H ثابت نیست اما برابر است با انرژی کل E

H ثابت نیست و برابر نیست با انرژی کل E .

قوانین پایستگی به دست آمده در این جا را می توان به صورتی که در جدول (۱۲-۱) نشان داده شده است خلاصه کرد. توجه به این نکته مهم است که ناوردایی کمیات فیزیکی از

تقارنهای سیستم حاصل می شود و محدود به سه مورد بحث شده نیست. نوع استدلال قبلی غالباً برای رسیدن به قوانین پایستگی مختلف در نظریه های ذرات بنیادی و میدانها مورد استفاده قرار می گیرد.

جدول (۱۲-۱): خواص تقارنی و قوانین پایستگی

خواص در چارچوب لختی	کمیت پایسته	محدودیت در لاگرانژی L
فضا همگن	تکانه خطی	L در انتقال ناورداست؛ $\delta L = 0$
فضا همسانگرد	تکانه زاویه ای	L در چرخش ناورداست؛ $\delta L = 0$
زمان همگن	انرژی کل	L تابع صریح زمان t نیست؛ $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

۱۲-۹ دینامیک هامیلتونی: معادلات هامیلتونی حرکت

اکنون به تعیین معادلات هامیلتونی حرکت، که معادلات بنیادی حرکت نیز نامیده می شوند می پردازیم. لاگرانژی L تابعی از مختصات تعمیم یافته و سرعتهای تعمیم یافته است، و ممکن است بطور صریح تابع زمان باشد، یعنی

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t) \quad (12-122)$$

دیفرانسیل L عبارت است از

$$dL = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (12-123)$$

با استفاده از روابط زیر، که قبلاً با تعریف تکانه تعمیم یافته و معادله لاگرانژ اثبات شد،

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad \text{و} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k \quad (12-124)$$

به دست می آوریم

$$dL = \sum_{k=1}^n (\dot{p}_k dq_k + p_k d\dot{q}_k) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (12-125)$$

به دو طرف این معادله $\sum_{k=1}^n \dot{q}_k dp_k$ را اضافه می کنیم، و بعد از مرتب سازی، خواهیم داشت

$$d\left(\sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k - L\right) = \sum_{k=1}^n (\dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (12-126)$$

مانند قبل، تابع هامیلتونی H را به صورت

$$H = \sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k - L(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t) \quad (12-127)$$

تعریف می‌کنیم و معادله (۱۲-۱۲۶) به شکل زیر در می‌آید

$$dH = \sum_{k=1}^n (\dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (12-128)$$

اکنون برای لحظه‌ای فکر خود را روی معادله (۱۲-۱۲۷) متمرکز کنیم. L تابع صریحی از $(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$ است. در موارد بسیاری می‌توان H را به صورت تابع صریحی از $(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, t)$ بیان کرد. این کار را می‌توان با استفاده از روابطی که تکانه‌های تعمیم یافته را تعریف می‌کنند، یعنی $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k$ ، انجام داد؛ در نتیجه می‌توان \dot{q}_k را بر حسب p_k بیان کرد. وقتی که این کار ممکن باشد، می‌توانیم بنویسیم

$$H = H(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t) \quad (12-129)$$

یعنی H ، به صورت تابعی از مختصات تعمیم یافته، تکانه‌های تعمیم یافته، و t بیان شده است. به این ترتیب، با استفاده از معادله (۱۲-۱۲۹) می‌توانیم دیفرانسیل H را به شکل

$$dH = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (12-130)$$

بنویسیم. از مقایسه (۱۲-۱۳۰) و (۱۲-۱۲۸) نتیجه می‌گیریم

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (12-131)$$

$$-\dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (12-132)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (12-133)$$

[با قرار دادن معادلات (۱۲-۱۳۱) و (۱۲-۱۳۲) در معادله (۱۲-۱۳۰) همچنین نتیجه می‌گیریم $\left[\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \right]$ معادلات (۱۲-۱۳۱) و (۱۲-۱۳۲) معادلات هامیلتونی حرکت هستند، و به خاطر طبیعت تقارنی آنها، معادلات بندادی حرکت نیز نامیده می‌شوند. این روش توصیف حرکت توسط این معادلات دینامیک هامیلتونی نامیده می‌شود. حل این $2n$

معادله دیفرانسیل مرتبه اول بسیار راحت تر از حل n معادله دیفرانسیل مرتبه دوم در صورت بندی لاگرانژی است. از معادله (۱۲-۱۳۲) روشن است که اگر هر مختصه q_k قابل چشم پوشی باشد، یعنی در هامیلتونی H نباشد، تکانه مزدوج متناظر p_k یک ثابت حرکت است.

اکنون موردی را در نظر بگیریم که در آن L ، و در نتیجه H ، شامل زمان بطور صریح نباشد. در چنین شرایطی $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ ، و معادله (۱۲-۱۳۰) به

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) \quad (12-134)$$

کاهش می یابد. با استفاده از معادلات هامیلتونی (۱۲-۱۳۱) و (۱۲-۱۳۲)، به دست می آوریم

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = 0 \quad (12-135)$$

در نتیجه H در صورتی یک ثابت حرکت است که تابع صریح زمان نباشد. به علاوه، همان طور که قبلاً نشان دادیم، H در صورتی همسان با E است که (۱) معادلات توصیف کننده تبدیلات مختصات تعمیم یافته شامل زمان بطور صریح نباشند، و (۲) انرژی پتانسیل تابع سرعتهای تعمیم یافته نباشد.

مثال (۱۲-۹): با استفاده از روش هامیلتون عبارتی به دست آورید که حرکت ذره ای با حرکت هماهنگ ساده را توصیف کند.

در مختصات دکارتی برای حرکت هماهنگ ساده داریم

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad V = \frac{1}{2} k x^2 \quad (1)$$

$$L(x, \dot{x}) = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \quad (2)$$

برای نوشتن هامیلتونی باید به جای \dot{x} تکانه تعمیم یافته p_x را بنشانیم:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \quad \text{یا} \quad \dot{x} = \frac{p_x}{m} \quad (3)$$

در نتیجه

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{p_x^2}{2m} \quad (۴)$$

و بنابراین

$$H = H(x, p_x) = T + V = \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{1}{2} kx^2 \quad (۵)$$

از معادلات (۱۲-۱۳۱) و (۱۲-۱۳۲) ، معادلات بندادی یا هامیلتونی عبارتند از

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \quad \text{یا} \quad p_x = m\dot{x} \quad (۶)$$

$$-\dot{p}_x = \frac{\partial H}{\partial x} = kx \quad \text{یا} \quad \dot{p}_x = -kx \quad (۷)$$

با قرار دادن p_x از معادله (۶) در معادله (۷) داریم

$$\frac{d}{dt} m\dot{x} = -kx \quad \text{یا} \quad m\ddot{x} + kx = 0 \quad (۸)$$

که معادله آشنای یک نوسانگر هماهنگ ساده است

تمرین (۱۲-۹) : هامیلتونی یک آونگ ساده را بنویسید و معادله حرکت را پیدا کنید .

مثال (۱۲-۱۰) : ذره ای به جرم m به وسیله نیرویی با بزرگی k/r^2 به طرف یک نقطه معین جذب می شود ، که k یک ثابت است . عبارت هامیلتونی و معادلات هامیلتونی حرکت را پیدا کنید .

با به کارگیری مختصات قطبی تخت (r, θ) ،

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \quad (۱)$$

$$V = -\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int \frac{k}{r^2} dr = -\frac{k}{r} \quad (۲)$$

بنابراین

$$L = L(r, \dot{r}, \dot{\theta}) = T - V = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r} \quad (۳)$$

\dot{r} و $\dot{\theta}$ در معادله (۱) باید با p_r و p_θ ، با استفاده از معادله (۳)، جایگزین شوند. یعنی

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \text{یا} \quad \dot{r} = \frac{p_r}{m} \quad (۴)$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad \text{یا} \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \quad (۵)$$

به این ترتیب انرژی جنبشی در معادله (۱) را می توان به صورت زیر نوشت

$$T = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{p_r}{m} \right)^2 + r^2 \left(\frac{p_\theta}{mr^2} \right)^2 \right] = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} \quad (۶)$$

در نتیجه هامیلتونی می شود

$$H = H(r, p_r, p_\theta) = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) - \frac{k}{r} \quad (۷)$$

معادلات حرکت اکنون می توانند از معادلات بندادی (۱۲-۱۳۱) و (۱۲-۱۳۲) به دست آیند

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k \quad \text{و} \quad \frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k$$

مختصات تعمیم یافته عبارتند از r ، θ ، p_r ، p_θ . بنابراین

$$-\dot{p}_r = \frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{k}{r^2} \quad \text{یا} \quad \dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{k}{r^2} \quad (۸)$$

$$-\dot{p}_\theta = \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad \text{یا} \quad \dot{p}_\theta = 0 \quad \text{یا} \quad p_\theta = \text{constant} \quad (۹)$$

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \quad \text{یا} \quad p_r = m\dot{r} \quad (۱۰)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \quad \text{یا} \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta} \quad (۱۱)$$

توجه کنیم که معادلات (۱۰) و (۱۱) همان معادلات (۴) و (۵) هستند، در حالی که معادله (۹) (چون H شامل θ نیست) ثابت حرکت آشای $p_\theta = mr^2\dot{\theta} = \text{constant}$ را به دست می دهد.

نمونه (۱۲-۱۰): مثال بالا را در مختصات دکارتی تکرار کنید.

مثال (۱۱-۱۲): حرکت ذره‌ای به جرم m را که مقید به حرکت در روی سطح یک استوانه به شعاع a است و توسط نیروی متناسب با فاصله ذره از مبدأ به طرف مبدأ جذب می‌شود، توصیف کنید.

حرکت ذره‌ای به جرم m در شکل (مثال-۱۲-۱۱) را می‌توان در مختصات دکارتی x ، y ، z یا مختصات استوانه‌ای r ، θ ، z توصیف کرد. معادله قیدی عبارت است از

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (۱)$$

و نیروی جاذبه به صورت

$$F = -kr \quad (۲)$$

است که k ثابت است و $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. با استفاده از مختصات استوانه‌ای، انرژی جنبشی عبارت است از

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) \quad (۳)$$

چون در وضع حاضر داریم $r = a$ و $\dot{r} = 0$ ، لذا

$$T = \frac{1}{2}m(a^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) \quad (۴)$$

انرژی پتانسیل، با توجه به معادله (۱)، به صورت زیر است

$$V = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}k(a^2 + z^2) \quad (۵)$$

بنابراین،

$$L = L(z, \theta, \dot{z}) = T - V = \frac{1}{2}m(a^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}k(a^2 + z^2) \quad (۶)$$

باید θ و \dot{z} را با p_θ و p_z جایگزین کنیم. به این ترتیب

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ma^2\dot{\theta} \quad \text{یا} \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ma^2} \quad (۷)$$

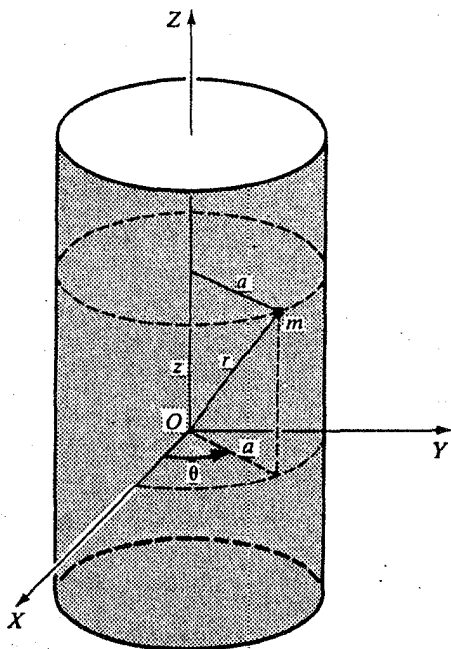
$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \quad \text{یا} \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m} \quad (۸)$$

با قرار دادن این معادلات در معادله (۴) داریم

$$T = \frac{1}{2}m \left[a^2 \left(\frac{p_\theta}{ma^2} \right)^2 + \left(\frac{p_z}{m} \right)^2 \right] = \frac{p_\theta^2}{2ma^2} + \frac{p_z^2}{2m}$$

بنابراین

$$H = H(z, \theta, p_\theta, p_z) = T + V = \frac{p_\theta^2}{2ma^2} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}kz^2 \quad (9)$$



شکل (مثال-۱۲-۱۱)

که جمله ثابت $\frac{1}{2}ka^2$ را کنار گذاشته ایم. با استفاده از معادلات بندادی

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k \quad \text{و} \quad \frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k$$

و مختصات تعمیم یافته z, θ, p_θ, p_z ، به دست می آوریم

$$z = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} \quad \text{یا} \quad p_z = mz \quad (10)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ma^2} \quad \text{یا} \quad p_\theta = ma^2 \dot{\theta} \quad (11)$$

$$-\dot{p}_z = \frac{\partial H}{\partial z} = kz \quad \text{یا} \quad \dot{p}_z = -kz \quad (12)$$

$$-\dot{p}_\theta = \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad \text{یا} \quad \dot{p}_\theta = 0 \quad \text{یا} \quad p_\theta = \text{constant} \quad (13)$$

از ترکیب معادلات (۱۰) و (۱۲) نتیجه می‌گیریم

$$m\ddot{z} + kz = 0 \quad (14)$$

که بیان می‌دارد که حرکت ذره در جهت z حرکت هماهنگ ساده با بسامد ω به صورت زیر است

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (15)$$

و از معادله (۱۱) و (۱۳) نتیجه می‌گیریم

$$p_\theta = \text{constant} = ma^2\dot{\theta} \quad (16)$$

یعنی، تکانه زاویه‌ای حول محور z ، همان طور که باید باشد، یک ثابت حرکت است، زیرا z محور تقارن است.

تمرین (۱۲-۱۱): مثال بالا را برای جرم لغزان مثال (۱۲-۵) با استفاده از دینامیک هامیلتونی و پیدا کردن مختصه دوره‌ای و ثابت حرکت، تکرار کنید.

مسائل

۱-۱۲ برای چهار سیستم نشان داده شده در شکل (مسأله ۱۲-۱) لاگرانژی را بنویسید و

معادلات حرکت را به دست آورید:

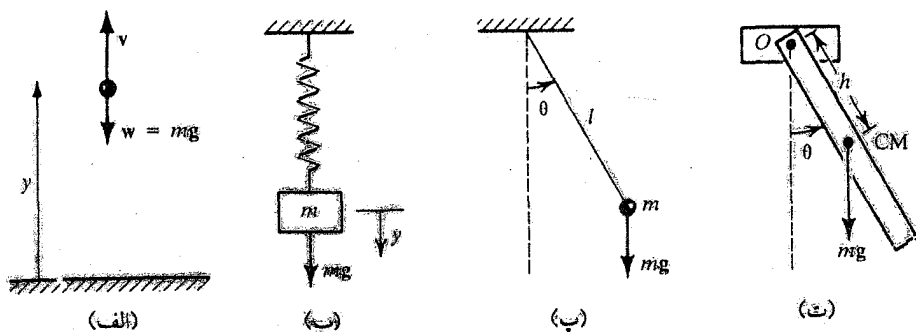
(الف) ذره‌ای به جرم m که بطور قائم به طرف بالا در یک میدان گرانشی یکنواخت پرتاب شده است.

(ب) یک جرم m که به انتهای فنری با ثابت فنری k بسته شده است و در میدان گرانشی یکنواخت در امتداد قائم نوسان می‌کند.

(پ) آونگ ساده‌ای که در یک صفحه قائم نوسان می‌کند.

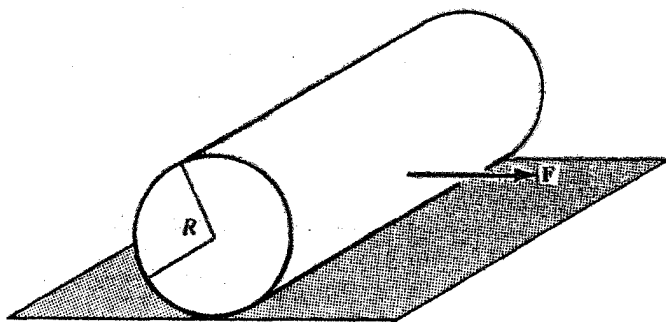
(ت) میله یکنواختی به جرم m و طول L که حول یک نقطه O به فاصله h از مرکز جرم

در صفحه قائم در یک میدان گرانشی یکنواخت نوسان می کند .



شکل (مسأله - ۱۲-۴)

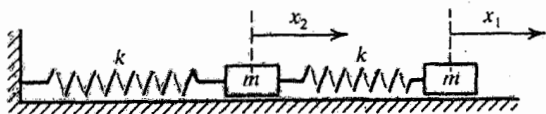
۲-۱۲ یک میله استخوانه ای یکنواخت به جرم M ، طول L ، و شعاع R ، در روی یک صفحه افقی تحت تأثیر نیروی افقی F که به مرکز جرم آن وارد می شود ، آن طور که در شکل (مسأله - ۱۲-۲) نشان داده شده است ، بدون لغزش می غلتند (هم می چرخند و هم انتقال می یابد) . معادلات لاگرانژی حرکت را پیدا کنید .



شکل (مسأله - ۱۲-۲)

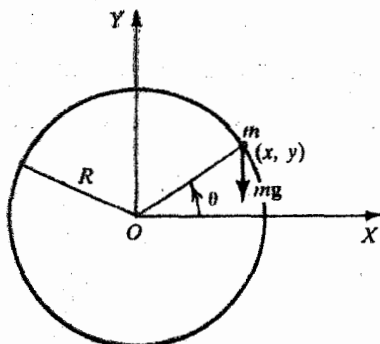
۳-۱۲ دو جرم مشابه به دو فنر مشابه ، آن طور که در شکل (مسأله - ۱۲-۳) نشان داده شده است ، بسته شده اند ، و روی یک صفحه افقی صاف حرکت می کنند . معادلات حرکت سیستم را با استفاده از روش لاگرانژی

پیدا کنید .



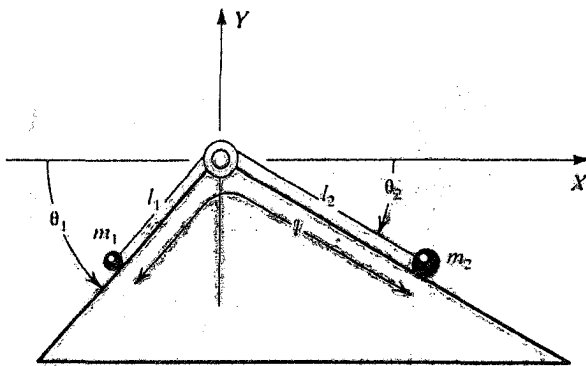
شکل (مسأله-۱۲-۳)

۴-۱۲ ذره ای به جرم m در روی سطح خارجی یک حلقه ، مطابق شکل (مسأله-۱۲-۴) حرکت می کند . مکان جرم را به صورت تابعی از زمان t پیدا کنید . در چه نقطه ای ذره از حلقه جدا می شود ؟



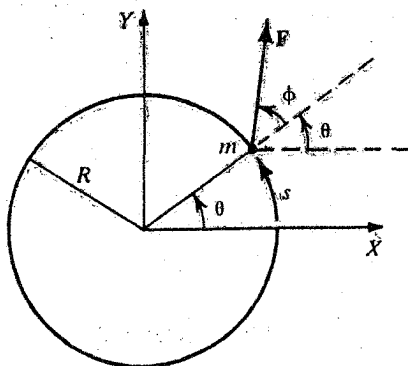
شکل (مسأله-۱۲-۴)

۵-۱۲ دو جرم m_1 و m_2 به وسیله یک نخ به جرمی به طول l به هم بسته شده و ، آن طور که در شکل (مسأله-۱۲-۵) نمایش داده شده است ، روی دو سطح شیب دار بدون اصطکاک ، تحت اثر نیروی گرانش ، می لغزند . عبارتی بران نیروی تعمیم یافته با استفاده از (الف) l به عنوان مختصه تعمیم یافته ، و (ب) l_1 به عنوان مختصه تعمیم یافته ، بنویسید . تحت چه شرایطی سیستم در تعادل خواهد بود ؟ مکان تعادل را پیدا کنید .



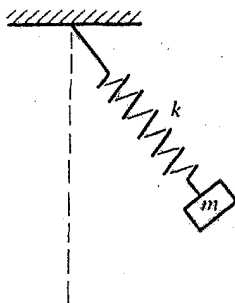
شکل (مسأله ۱۲-۵)

۶-۱۲ نقطه ای به جرم m مقید است که روی دایره ای به شعاع R ، تحت تأثیر یک نیروی F ، آن طور که در شکل (مسأله ۱۲-۶) نمایش داده شده است ، حرکت کند . نیروی تعمیم یافته و کار مجازی انجام شده را با در نظر گرفتن (الف) s به عنوان مختصه تعمیم یافته ، و (ب) θ به عنوان مختصه تعمیم یافته ، محاسبه کنید .



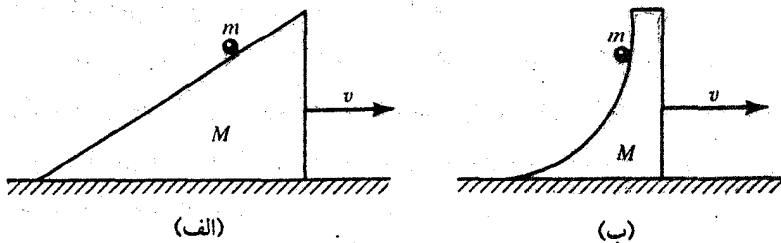
شکل (مسأله ۱۲-۶)

۷-۱۲ یک آونگ نوسان کننده ، آن طور که در شکل (مسأله ۱۲-۷) نشان داده شده است ، عبارت است از یک جرم m که به انتهای فنر بدون جرمی با ثابت فنری k و طول طبیعی l_0 بسته شده است . معادلات لاگرانژی حرکت را پیدا کنید . تحت چه شرایطی این سیستم به (الف) یک آونگ ساده ، و (ب) یک نوسانگر هماهنگ خطی ، کاهش می یابد ؟



شکل (مسأله-۱۲-۷)

۸-۱۲ جرم نقطه‌ای m در روی گوه‌ای به جرم M ، برابر شکل (مسأله-۱۲-۸)، به طرف پایین می‌لغزد. گوه نیز روی یک صفحه افقی با سرعت v می‌لغزد. معادلات لاگرانژی سیستم را در حالتی که (الف) گوه یک سطح شیب‌دار است، و (ب) سطح گوه ربع دایره‌ای به شعاع R است، بنویسید.

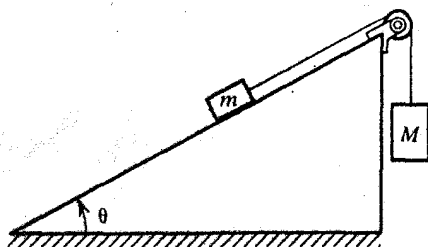


شکل (مسأله-۱۲-۸)

۹-۱۲ ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر نیرویی با مؤلفه‌های کروی F_r ، F_θ ، F_ϕ قرار دارد. معادلات لاگرانژی حرکت را برای این ذره در مختصات کروی r ، θ ، ϕ پیدا کنید. (ب) معادلات حرکت ذره قسمت (الف) را وقتی که ذره در مختصات کروی با سرعت زاویه‌ای ω حول محور Z بچرخد پیدا کنید. آیا می‌توانید نیروهای گریز از مرکز و کوریولیس تعمیم یافته را با مقایسه با نتایج قسمت (الف) تشخیص دهید؟

۱۰-۱۲ نقطه‌ای 10 آویز یک آونگ ساده به طول l با شتاب ثابت a بالا برده می‌شود. زمان تناوب را پیدا کنید.

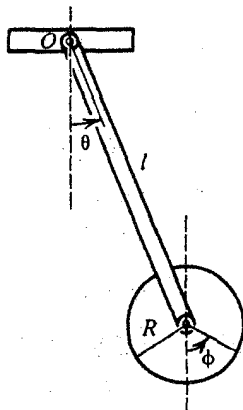
۱۱-۱۲ دو جرم m و M به وسیله یک نخ غیر قابل کشش سبک، آن طور که شکل (مسئله ۱۲-۱۱) نشان می دهد، به هم بسته شده اند. اگر سطح بدون اصطکاک باشد. معادلات حرکت را به دست آورید و شتاب سیستم را پیدا کنید.



شکل (مسئله ۱۲-۱۱)

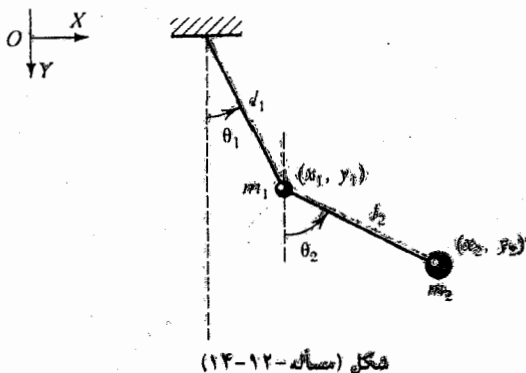
۱۲-۱۲ ذره ای به جرم m در روی یک سطح شیب دار صاف که زاویه شیب θ ی آن با آهنگ ثابت ω و شروع از $\theta = 0$ در زمان $t = 0$ افزایش می یابد می لغزد. معادلات توصیف کننده حرکت ذره را بنویسید.

۱۳-۱۲ میله یکنواختی به طول l و جرم m در O لولا شده است و می تواند در یک صفحه قائم، مطابق شکل (مسئله ۱۲-۱۳)، نوسان کند. انتهای دیگر میله به مرکز جرم یک قرص به جرم M و شعاع R لولا شده است (میله نوسان می کند، در حالی که قرص هم نوسان می کند و هم می چرخد). با استفاده از معادلات لاگرانژی، معادلات حرکت سیستم را به دست آورید و حرکت را توصیف کنید.



شکل (مسئله ۱۲-۱۳)

۱۲-۱۴ با استفاده از معادلات لاگرانژی، معادلات یک آونگ دوتایی هم صفحه را، آن طور که در شکل (مسئله ۱۲-۱۴) نشان داده شده است، به دست آورید. فرض کنید که دامنه های نوسان بسیار کوچکند.



شکل (مسئله ۱۲-۱۴)

۱۲-۱۵ مسئله آونگ دوتایی را برای موارد خاص (الف) $m_1 \gg m_2$ ، و (ب) $m_1 \ll m_2$ مورد بحث قرار دهید.

۱۲-۱۶ حرکت یک آونگ کروی را با استفاده از معادلات لاگرانژی تجزیه و تحلیل کنید. همان طور که در شکل (مسئله ۱۲-۱۶) نشان داده شده است، مختصات کروی R ، θ و ϕ را به کار ببرید.

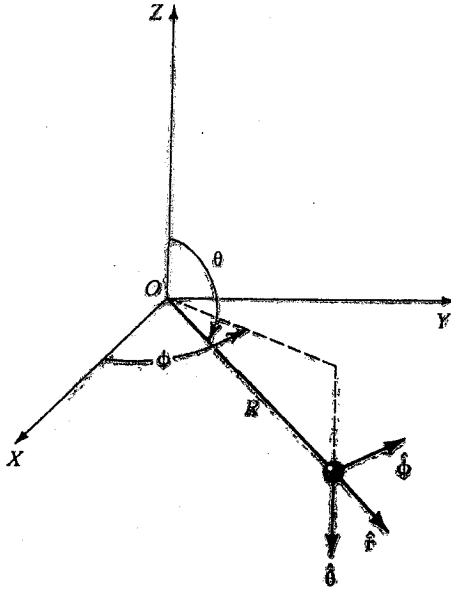
۱۲-۱۷ دو جرم نقطه ای m_1 و m_2 با یک نخ بدون جرم به طول l که از یک سوراخ در روی میز افقی گذشته است، به هم متصل شده اند (شکل (مسئله ۱۲-۱۷)). جرم m در روی میز بدون اصطکاک روی یک مسیر دایره ای حرکت می کند، در حالی که جرم m_2 مانند گلوله ای یک آونگ ساده نوسان می کند. معادلات لاگرانژی حرکت را به دست آورید و حل کنید.

۱۲-۱۸ در مسئله (۱۲-۱۷)، اگر جرمهای m_1 و m_2 فقط در روی خطوط افقی و قائم در یک میدان گرانشی یکنواخت حرکت کنند، معادلات لاگرانژی حرکت را پیدا کرده و حل کنید.

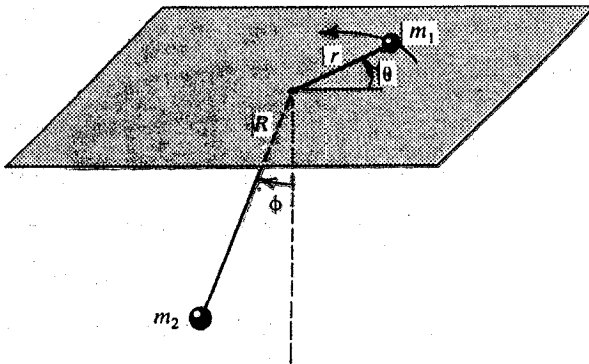
۱۲-۱۹ مختصات بیضوی (u, v) یک جرم نقطه ای m با روابط زیر تعریف می شوند

$$u = A \cosh u \cos v \quad \text{و} \quad y = A \sinh u \sin v$$

که در آن A ثابت است. انرژی جنبشی ذره و معادلات لاگرانژی آن را پیدا کنید.



شکل (مسأله-۱۲-۱۶) : آونگ کروی یک آونگ ساده است که آزاده است هر تمام زاویه فضایی نوسان کند



شکل (مسأله-۱۲-۱۷)

۱۲-۲۰ فرض کنیم معادلات تبدیل مختصات دکارتی به مختصات قطبی صفحه ای شامل زمان بطور صریح به صورت زیر باشند

$$x = r \cos \theta + vt \quad \text{و} \quad y = r \sin \theta + at^2$$

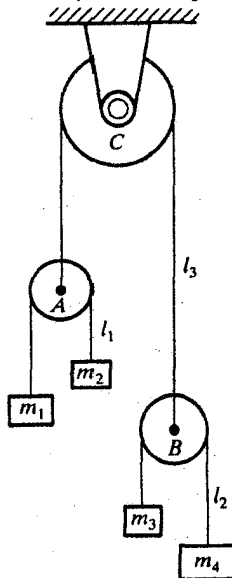
که در آنها v و a ثابتند. نشان دهید که انرژی جنبشی در مختصات قطبی صفحه‌ای یک تابع درجه دوم همگن از سرعت‌های \dot{r} و $\dot{\theta}$ نیست. معادلات لاگرانژی حرکت را پیدا کنید.

۱۲-۲۱ مختصات (u, v) با روابط زیر به مختصات قطبی صفحه‌ای (r, θ) به هم مربوط شده‌اند

$$u = \ln \frac{r}{a} - \theta \cot \phi \quad \text{و} \quad v = \ln \frac{r}{a} - \theta \tan \phi$$

و ϕ ثابتند. انرژی جنبشی ذره‌ای به جرم m را بر حسب مختصات u و v محاسبه کنید. نیروهای Q_v و Q_u را محاسبه کنید.

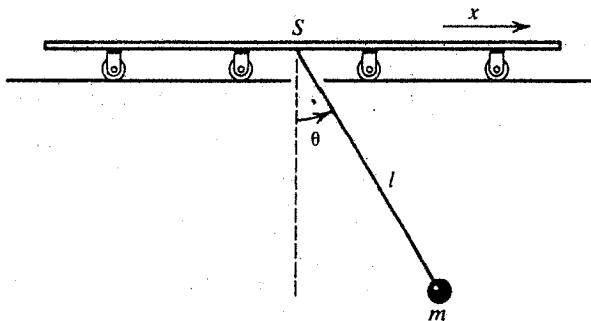
۱۲-۲۲ ماشین آتوود دوتایی: سیستمی از جرم‌ها و قرقره‌ها، آن‌طور که در شکل (مسئله ۱۲-۲۲) نشان داده شده است، در نظر بگیرید. جرم‌های m_1 و m_2 از نخ به طول l_1 ؛ و جرم‌های m_3 و m_4 از نخ به طول l_2 آویزان شده‌اند. قرقره‌های A و B از دو انتهای نخ به طول l_3 که از روی قرقره سوم C گذاشته است آویزانند. معادلات لاگرانژی را پیدا کنید، و شتابها و تنش در هر یک از نخها را پیدا کنید. شتابها را وقتی $m_1 = m$ ، $m_2 = 2m$ ، $m_3 = 3m$ ، و $m_4 = 4m$ باشد پیدا کنید.



شکل (مسئله ۱۲-۲۲)

۱۲-۲۳ نردبامی به جرم M و طول L در مقابل یک دیوار صاف قرار گرفته است و با کف زاویه θ می سازد. نردبام شروع به لغزیدن، هم روی کف و هم روی دیوار، می کند. معادلات لاگرانژی حرکت را، با این فرض که نردبام در تماس با دیوار می ماند، پیدا کنید. در چه زاویه ای نردبام از دیوار جدا می شود؟

۱۲-۲۴ جرم m به وسیله یک نخ به طول l از تکیه گاه S آویزان شده، و مانند یک آونگ ساده در یک صفحه قائم شامل محور X نوسان می کند و چنان که در شکل (مسأله ۱۲-۲۴) نشان داده شده است، با قائم زاویه θ می سازد. تکیه گاه S در امتداد محور افقی X طبق معادله $x = a \cos \omega t$ به جلو و عقب رفت و آمد می کند. معادلات لاگرانژی حرکت را پیدا کنید. نشان دهید که سیستم برای مقادیر کوچک θ مانند یک نوسانگر هماهنگ واداشته رفتار می کند.



شکل (مسأله ۱۲-۲۴)

۱۲-۲۵ با استفاده از روش لاگرانژ، شتاب یک کره توپر را که روی یک سطح شیب دار کاملاً خشن با زاویه شیب θ نسبت به افق، رو به پایین می غلتد، پیدا کنید.

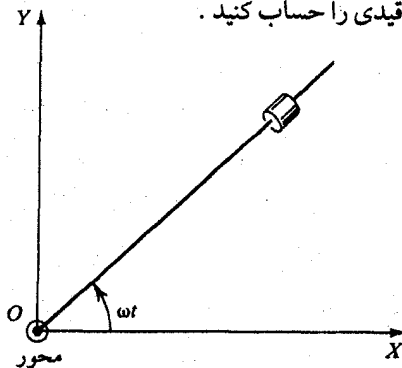
۱۲-۲۶ نشان دهید که روش لاگرانژ به معادلات درست حرکت یک ذره متحرك در یک سطح، در یک دستگاه مختصات چرخان OXY ، می انجامد.

۱۲-۲۷ ذره ای به جرم m مقید است که روی سطح داخلی یک مخروط با نیم زاویه α حرکت کند. رأس مخروط در مبدأ و محور آن قائم است. سرعت زاویه ای ω ی این ذره چقدر باشد تا روی دایره ای افقی در ارتفاع h بالای رأس حرکت کند.

۱۲-۲۸ حلقه ای به جرم m شعاع r روی یک سطح شیب دار به جرم M و زاویه شیب α بدون لغزش رو به پایین می غلتد. سطح شیب دار می تواند روی یک سطح بدون اصطکاک بلغزد. معادلات لاگرانژی سیستم را پیدا کرده و حل کنید.

۱۲-۲۹ دو جرم m_1 و m_2 توسط یک نخ به طول l به یکدیگر متصل شده اند. یک جرم روی یک سطح افقی صاف قرار دارد، در حالی که جرم دیگر پس از گذشتن نخ از روی قرقره ای به جرم M و شعاع R که در گوشه میز تعبیه شده است آویزان است. لاگرانژی و معادلات حرکت را پیدا کنید.

۱۲-۳۰ مهره ای به جرم m که هیچ نیروی خارجی به آن وارد نمی شود، مقید به حرکت روی سیم مستقیمی است که با سرعت زاویه ای ثابت ω حول محوری که از O گذشته و به سیم عمود است، می چرخد. (شکل (مسئله ۱۲-۳۰)). با استفاده از معادلات لاگرانژی، معادلات حرکت را هم در مختصات دکارتی و هم در مختصات قطبی پیدا کنید. نیروی قیدی را حساب کنید.



شکل (مسئله ۱۲-۳۰)

۱۲-۳۱ یک سیم صاف به شکل یک مارپیچ که معادلات آن در مختصات استوانه ای $r = a$ و $z = k\theta$ است، خم شده است. k و a ثابتند. مبدأ مرکز یک نیروی جاذبه ای است که مستقیماً متناسب با فاصله تغییر می کند. با استفاده از معادلات لاگرانژی، حرکت مهره ای را که می تواند آزادانه روی سیم بلغزد مورد بحث قرار دهید.

۱۲-۳۲ در مسئله (۱۲-۳۱)، مؤلفه های واکنش سیم را در جهتهای r ، θ و z پیدا کنید.

۱۲-۳۳ ذره ای به جرم m از بالای کره بزرگ ساکن بدون اصطکاک به شعاع R تحت اثر نیروی گرانش به طرف پایین می لغزد. معادلات لاگرانژی را به کار ببرید و واکنش کره روی

ذره را برای هر مقدار زاویه θ (زاویه بین قطر ماربر جرم و قطر قائم) پیدا کنید. مقدار θ را وقتی ذره از کره جدا می شود، پیدا کنید.

۱۲-۳۴ ذره ای به جرم m مقید است که روی یک سیم دایره ای افقی به شعاع a حرکت کند. در ابتدا سرعت v_0 است. حرکت تحت تأثیر یک نیروی مقاومت هوا متناسب با مربع سرعت قرار دارد. با استفاده از روش لاگرانژ، مکان زاویه ای ذره را برحسب زمان پیدا کنید. واکنش سیم روی ذره را محاسبه کنید. از تأثیر گرانش چشم پوشی کنید.

۱۲-۳۵ در مسأله (۱۲-۳۴) اگر سیم خشن و ضریب اصطکاک μ باشد، واکنش متوجه سیم روی ذره را حساب کنید.

۱۲-۳۶ معادلات هامیلتونی را برای یک جرم نقطه ای که روی یک خط مستقیم حرکت می کند بنویسید.

۱۲-۳۷ دو جرم m_1 و m_2 به دو انتهای یک فنر بدون جرم با ثابت فنری k و طول طبیعی l_0 بسته شده اند. سیستم آزادانه در یک صفحه هم نوسان می کند و هم می چرخد.

(الف) تعداد درجات آزادی را پیدا کنید.

(ب) معادلات هامیلتونی را به دست آورید.

(پ) مختصات دوره ای را مشخص کنید و قوانین پایستگی متناظر را بیان کنید.

۱۲-۳۸ معادلات هامیلتونی آونگ مسأله (۱۲-۱) (آونگ فنری-جرمی) را پیدا کنید.

۱۲-۳۹ جرم نقطه ای m در یک میدان نیروی مرکزی همسانگرد قرار دارد. با استفاده از

مختصات قطبی تخت، هامیلتونی H این جرم نقطه ای نسبت به چارچوب مرجع S

ثابت در فضا را با هامیلتونی H' همین جرم نقطه ای نسبت به چارچوب S' که حول

مرکز نیرو با سرعت زاویه ای ثابت ω ، $(\phi' = \phi - \omega t)$ می چرخد مقایسه کنید.

۱۲-۴۰ برای مسأله (۱۲-۳۹)، معادلات هامیلتونی ذره را برحسب r' و θ' پیدا کنید.

همچنین این معادلات را برحسب r و θ بنویسید.

۱۲-۴۱ معادلات بنیادی هامیلتون را برای (الف) یک پرتابه در دو بُعد، و (ب) یک آونگ

ساده، پیدا کنید.

۱۲-۴۲ معادلات هامیلتونی را برای یک نوسانگر هماهنگ که برای آن $V = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}\epsilon x^4$ ،

با k و ϵ ثابت، پیدا کنید.

۱۲-۴۳ ذره ای به جرم m در روی مارپیچی به معادلات $r = a$ و $z = k\theta$ که a و k ثابتند و محور

Z در امتداد قائم است ، تحت تأثیر نیروی گرانش حرکت می کند . معادلات هامیلتونی حرکت را به دست آورید .

۴۴-۱۲ آونگی به جرم m و طول l از واگنی به جرم M که می تواند در روی یک ریل مستقیم افقی و بدون اصطکاک حرکت کند ، آویزان شده است . آونگی فقط در یک سطح قائم شامل ریل نوسان می کند .

(الف) لاگرانژی L و هامیلتونی H را پیدا کنید .

(ب) نشان دهید که یک مختصه دوره ای (قابل چشم پوشی) وجود دارد . این مختصه را حذف کنید و درباره حرکت بحث کنید .

۴۵-۱۲ جرم m به وسیله یک فنر قائم با ثابت فنری k و طول طبیعی l_0 آویزان شده است . نقطه آویز با شتاب a_0 به طرف بالا حرکت می کند . شتاب ناشی از گرانش g است . لاگرانژی و معادلات حرکت را پیدا کنید . تابع هامیلتونی را محاسبه کنید و معادلات هامیلتونی را بنویسید . زمان نوسان حرکت چقدر است ؟

۴۶-۱۲ ذره ای به جرم m در یک میدان نیروی جاذبه مرکزی با بزرگی $\frac{k}{r^2} e^{-\alpha r}$ ، که k و α ثابتند ، حرکت می کند . توابع لاگرانژی و هامیلتونی را پیدا کنید . معادلات هامیلتونی حرکت را پیدا کنید . آیا H ثابت است ؟ آیا انرژی کل است ؟

۴۷-۱۲ جرم m توسط نخ به طول L ، که از سوراخی در روی یک میز عبور کرده است ، آویزان شده است ، نخ با آهنگ ثابت k (cm/s) بالا کشیده می شود ، یعنی $\frac{dL}{dt} = -k$. نقطه آویز ثابت باقی می ماند و جرم مانند یک آونگ نوسان می کند . توابع لاگرانژی و هامیلتونی را محاسبه کنید . هامیلتونی را با انرژی کل مقایسه کنید ، و در مورد پایستگی انرژی سیستم بحث کنید . آیا H یک ثابت حرکت است ؟ آیا انرژی کل است ؟ معادلات هامیلتونی حرکت را به دست آورید .

۴۸-۱۲ ذره ای به جرم m در یک بُعد تحت تأثیر نیروی

$$F(x, t) = \frac{k}{x^2} e^{-\alpha t}$$

حرکت می کند ، که k و α ثابت و مثبتند . توابع لاگرانژی و هامیلتونی را محاسبه کنید . آیا هامیلتونی یک ثابت حرکت است ؟ آیا انرژی کل است ؟ معادلات حرکت را به دست آورید و حل کنید .

منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر

- ARTHUR, W., and FENSTER, S. K., *Mechanics*, Chapter 14. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1969.
- BECKER, R. A., *Introduction to Theoretical Mechanics*, Chapter 13. New York: McGraw-Hill Book Co., 1954.
- CORBEN, H. C., and STEHLE, P., *Classical Mechanics*, Chapters 6, 7, and 10. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1960.
- DAVIS, A. DOUGLAS, *Classical Mechanics*, Chapter 10. New York: Academic Press, Inc., 1986.
- FOWLES, G. R., *Analytical Mechanics*, Chapter 10. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1962.
- *GOLDSTEIN, H., *Classical Mechanics*, 2nd ed., Chapters 1 and 2. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1980.
- HAUSER, W., *Introduction to the Principles of Mechanics*, Chapters 5 and 6. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1965.
- MARION, J. B., *Classical Dynamics*, 2nd ed., Chapters 6 and 7. New York: Academic Press, Inc., 1970.
- *MOORE, E. N., *Theoretical Mechanics*, Chapters 2 and 3. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1983.
- ROSSBERG, K., *Analytical Mechanics*, Chapter 8. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1983.
- SLATER, J. C., *Mechanics*, Chapter 4. New York: McGraw-Hill Book Co., 1947.
- SOMMERFELD, A., *Mechanics*, Chapters 2 and 6. New York: Academic Press, Inc., 1952.
- STEPHENSON, R. J., *Mechanics and Properties of Matter*, Chapter 7. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- SYMON, K. R., *Mechanics*, 3rd ed., Chapter 9. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1971.
- SYNGE, J. L., and GRIFFITH, B. A., *Principles of Mechanics*, Chapter 15. New York: McGraw-Hill Book Co., 1959.

حرکت جسم صلب (۲)

۱-۱۳ مقدمه

بحث حرکت جسم صلب را که در فصل ۹ شروع شد ادامه می دهیم . خواص اجسام صلب را که در آن جا بحث شد به اختصار مرور می کنیم . یک جسم صلب به صورت مجموعه ای از ذرات نقطه ای گسسته تعریف می شود که فاصله بین هر دو ذره با زمان ثابت می ماند . در واقع ، این ذرات نقطه ای آنها و مولکولها هستند که بطور مداوم در حرکت ارتعاشی هستند . اما این ارتعاشات در مقیاس میکروسکوپی بوده و می توان از آنها چشم پوشی کرد . یک جسم کاملاً صلب تغییر شکل کشسانی ندارد ، و یک تپ مکانیکی (یک ضربه) با سرعت بی نهایت از آن عبور می کند . در عمل ، تمام اجسام صلب خاصیت کشسانی دارند و سرعت انتقال در آنها در حدود 10^3 m/s است . در بیشتر موارد تغییر شکل کشسان را نادیده می گیریم .

حرکت یک جسم صلب را می توان با استفاده از دو دستگاه مختصات توصیف کرد ، یکی دستگاه مختصات لخت و دیگری دستگاه مختصات جسمی ، یعنی دستگاه مختصاتی که به جسم متصل است . به علاوه ، برای مشخص کردن موقعیت جسم شش مختصه باید مشخص شود . سه تا از این مختصات معمولاً مرکز جرم جسم صلب (معمولاً مبدأ دستگاه مختصات جسمی منطبق بر مرکز جرم انتخاب می شود) ، و سه مختصه دیگر زاویه هایی انتخاب می شوند که جهت گیری دستگاه مختصات جسمی را نسبت به محورهای مختصات لخت (یا ثابت) توصیف کنند . یک

مجموعه سه زاویه ای مستقل متداول زوایای اولرند ، که در این فصل توصیف خواهند شد .

۱۳-۲ تکانه زاویه ای و انرژی جنبشی

یک جسم صلب B ، برابر شکل (۱-۱۳) ، در نظر بگیریم . جسم حول محوری که از نقطه ثابت O گذشته است می چرخد ، در حالی که دستگاه محورهای مختصات $OXYZ$ با مبدأ O در جسم تثبیت شده است . سرعت انتقالی لحظه ای v_i ی ذره P به جرم m_i ، که در فاصله r_i از مبدأ O قرار دارد ، عبارت است از

$$v_i = \omega \times r_i \quad (1-13)$$

که ω سرعت زاویه ای جسم با مؤلفه های $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ است ، شکل (۱-۱۳) . تکانه زاویه ای L یک سیستم از ذرات m_i نسبت به مبدأ O به صورت زیر تعریف می شود

$$L = \sum_{i=1}^n m_i r_i \times v_i \quad (2-13)$$

با قرار دادن به جای v_i از معادله (۱-۱۳) خواهیم داشت

$$L = \sum_{i=1}^n m_i r_i \times (\omega \times r_i) \quad (3-13)$$

با به کارگیری اتحاد مربوط به ضرب برداری سه گانه

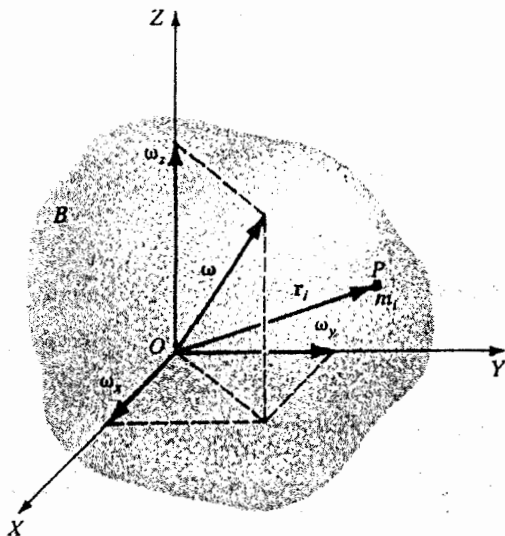
$$A \times (B \times A) = A^2 B - A(A \cdot B) \quad (4-13)$$

می توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} r_i \times (\omega \times r_i) &= r_i^2 \omega - r_i (r_i \cdot \omega) \\ &= (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)(\hat{i}\omega_x + \hat{j}\omega_y + \hat{k}\omega_z) \\ &\quad - (\hat{i}x_i + \hat{j}y_i + \hat{k}z_i)(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z) \end{aligned} \quad (5-13)$$

از ترکیب این نتیجه با معادله (۳-۱۳) و مرتب سازی نتیجه خواهیم گرفت

$$\begin{aligned} L &= \hat{i}L_x + \hat{j}L_y + \hat{k}L_z \\ &= \hat{i} \left[\omega_x \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i - \omega_z \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i \right] \\ &\quad + \hat{j} \left[-\omega_x \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i + \omega_y \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + z_i^2) - \omega_z \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i \right] \\ &\quad + \hat{k} \left[-\omega_x \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i - \omega_y \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i + \omega_z \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) \right] \end{aligned} \quad (6-13)$$



شکل (۱-۱۳): جسم صلب B با سرعت زاویه‌ای ω ($\omega_x, \omega_y, \omega_z$) حول محوری که از نقطه ثابت O گذشته است می‌چرخد

می‌توانیم همین نتیجه را با استفاده از عبارت ماتریسی

$$\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ x_i & y_i & z_i \\ (\omega_y z_i - \omega_z y_i) & (\omega_z x_i - \omega_x z_i) & (\omega_x y_i - \omega_y x_i) \end{vmatrix} \quad (7-13)$$

به دست آوریم که پس از ساده سازی و ترکیب با معادله (۱۳-۳) به همان نتیجه معادله (۱۳-۶) منجر می‌شود.

معادله (۱۳-۶) را می‌توانیم به شکل فشرده زیر بنویسیم

$$\begin{aligned} L &= \hat{\mathbf{i}}L_x + \hat{\mathbf{j}}L_y + \hat{\mathbf{k}}L_z \\ &= \hat{\mathbf{i}}[\omega_x I_{xx} - \omega_y I_{xy} - \omega_z I_{xz}] \\ &\quad + \hat{\mathbf{j}}[-\omega_x I_{yx} + \omega_y I_{yy} - \omega_z I_{yz}] \\ &\quad + \hat{\mathbf{k}}[-\omega_x I_{zx} - \omega_y I_{zy} + \omega_z I_{zz}] \end{aligned} \quad (8-13)$$

که کمیت‌های I_{xx} ، I_{yy} ، I_{zz} شامل مجموع‌های مربعی‌های مختصات هستند و گشتاورهای لختی جسم نسبت به محورهای مختصات نامیده می‌شوند، یعنی (جمع بندی از ۱ تا n صورت گرفته است)

گشتاور لختی نسبت به محور X $I_{xx} = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) = \sum m_i (r_i^2 - x_i^2)$

گشتاور لختی نسبت به محور Y $I_{yy} = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) = \sum m_i (r_i^2 - y_i^2)$ (۹-۱۳)

گشتاور لختی نسبت به محور Z $I_{zz} = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i (r_i^2 - z_i^2)$
 کمیت‌های I_{xx} ، I_{yy} ، I_{zz} ، ... شامل مجموع‌های حاصل ضربهای مختصات هستند و حاصل ضربهای لختی نامیده می‌شوند، یعنی

$I_{xy} = I_{yx} = \sum m_i x_i y_i$ ، حاصل ضرب لختی xy

$I_{yz} = I_{zy} = \sum m_i y_i z_i$ ، حاصل ضرب لختی yz (۱۰-۱۳)

$I_{zx} = I_{xz} = \sum m_i z_i x_i$ ، حاصل ضرب لختی zx

از معادله (۸-۱۳) آشکار است که L لزوماً همیشه در جهت محور چرخش لحظه‌ای نیست، یعنی L همیشه در جهت ω نیست، به عنوان مثال، اگر محور Z جهت چرخش باشد یعنی $\omega = (0, 0, \omega)$ ، یعنی $\omega_x = \omega_y = 0$ و $\omega_z = \omega$ ، از معادله (۸-۱۳) خواهیم داشت

$$L_x = -I_{xz} \omega, \quad L_y = -I_{yz} \omega, \quad L_z = +I_{zz} \omega$$

یعنی، L یک مؤلفه ω $L_z = I_{zz} \omega$ در جهت محور چرخش دارد، اما دو مؤلفه دیگر در جهت‌های عمود بر-محور چرخش نیز دارد. بنابراین L و ω در یک جهت نیستند. این نکته در مثال (۱-۱۳) روشنتر خواهد شد.

مؤلفه‌های L در معادله (۸-۱۳) می‌تواند به شکل فشرده‌ای به صورت

$$L_k = \sum_{l=1}^3 \omega_l I_{kl} \quad (۱۱-۱۳)$$

نوشته شود که $k = 1, 2, 3$ و $l = 1, 2, 3$ یعنی به جای x, y, z ، اعداد ۱، ۲ و ۳ را قرار داده ایم. اکنون در موقعیتی هستیم که یک عبارت عمومی برای انرژی جنبشی چرخشی یک جسم بنویسیم. در موارد ساده، محور چرخش همیشه عمود بر یک صفحه ثابت باقی می‌ماند. این مورد نیاز به بررسی در این جا ندارد. اکنون به محاسبه انرژی جنبشی صلبی که با سرعت زاویه‌ای ω حول محوری که از نقطه ثابتی گذشته است می‌چرخد می‌پردازیم. سرعت ذره m_i

در فاصله r_i عبارت است از

$$v_i = \omega \times r_i \quad (۱۳-۱)$$

به این ترتیب انرژی جنبشی کل جسم عبارت خواهد بود از

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i \cdot v_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [(\omega \times r_i) \cdot (m_i v_i)] \quad (۱۳-۱۲)$$

اما در یک ضرب نرده ای سه گانه ، می توان جای ضرب نرده ای و برداری را عوض کرد ، یعنی

$$(A \times B) \cdot C = A \cdot (B \times C) \quad (۱۳-۱۳)$$

یا

$$(\omega \times r_i) \cdot m_i v_i = \omega \cdot (r_i \times m_i v_i) \quad (۱۳-۱۴)$$

برای انرژی جنبشی T ، می توانیم معادله (۱۳-۱۲) را به شکل

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega \cdot (r_i \times m_i v_i) \quad (۱۳-۱۵ \text{ الف})$$

بنویسیم . چون ω برای تمام ذرات یکسان است ، و از تعریف تکانه زاویه ای که با معادله

(۱۳-۲) داده شده است ، می توانیم بنویسیم

$$T = \frac{1}{2} \omega \cdot \left[\sum_{i=1}^n (r_i \times m_i v_i) \right] \quad (۱۳-۱۵ \text{ ب})$$

یا

$$T = \frac{1}{2} \omega \cdot L \quad (۱۳-۱۶)$$

یادآوری کنیم که برخلاف L که یک بردار است و سه مؤلفه دارد ، انرژی جنبشی

چرخشی T یک نرده ای (یک ضرب نقطه ای ω و L) است . این عبارت برای T شبیه

به عبارت انرژی جنبشی انتقالی T_{tran} به صورت

$$T_{\text{tran}} = \frac{1}{2} v_c \cdot p_c \quad (۱۳-۱۷)$$

است که v_c سرعت مرکز جرم و p_c تکانه خطی سیستم است . با بردن عبارت

$$\omega = \hat{i}\omega_x + \hat{j}\omega_y + \hat{k}\omega_z \quad (۱۳-۱۸)$$

و معادله (۱۳-۸) برای L در معادله (۱۳-۱۶) ، می توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} = \frac{1}{2} \omega_x L_x + \frac{1}{2} \omega_y L_y + \frac{1}{2} \omega_z L_z \\
 &= \frac{1}{2} \omega_x^2 I_{xx} + \frac{1}{2} \omega_y^2 I_{yy} + \frac{1}{2} \omega_z^2 I_{zz} \\
 &\quad - \omega_x \omega_y I_{xy} - \omega_y \omega_z I_{yz} - \omega_z \omega_x I_{zx}
 \end{aligned} \quad (۱۹-۱۳)$$

به جای استفاده از (x, y, z) ، می‌توانیم از $k = 1, 2, 3$ و $l = 1, 2, 3$ استفاده کنیم و T را به شکل فشرده زیر بنویسیم

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ l=1}}^3 \omega_k \omega_l I_{kl} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} \quad (۲۰-۱۳)$$

در بسیاری از موارد عملی، جسم صلب یک جرم پیوسته با چگالی ρ است، که ممکن است ثابت نباشد. در این گونه موارد، جمع بندی باید جای خود را به انتگرال گیری حجمی بدهد. به این ترتیب گشتاورهای لختی و حاصل ضربهای لختی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned}
 I_{xx} &= \int_V \rho (y^2 + z^2) dx dy dz \\
 I_{yy} &= \int_V \rho (x^2 + z^2) dx dy dz \\
 I_{zz} &= \int_V \rho (x^2 + y^2) dx dy dz
 \end{aligned} \quad (۲۱-الف)$$

$$\begin{aligned}
 I_{xy} &= \int_V \rho xy dx dy dz \\
 I_{yz} &= \int_V \rho yz dx dy dz
 \end{aligned} \quad (۲۱-ب)$$

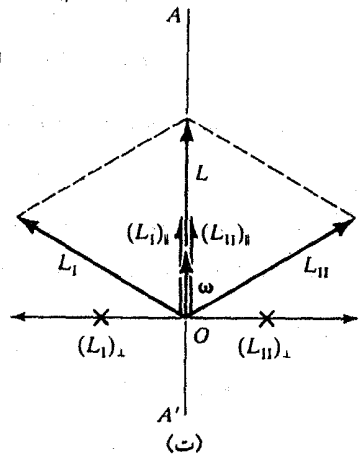
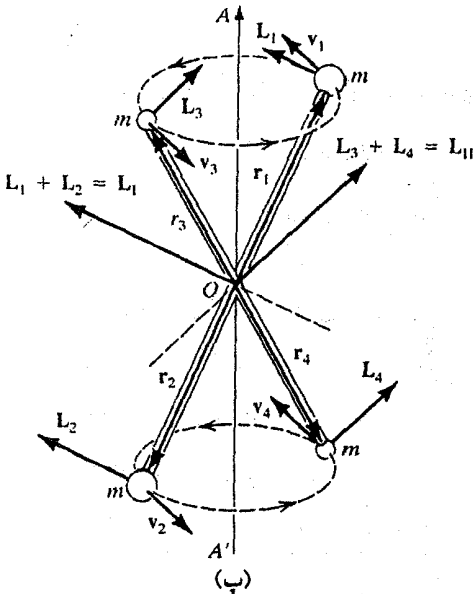
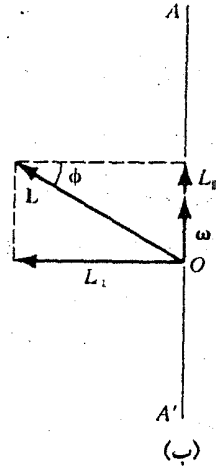
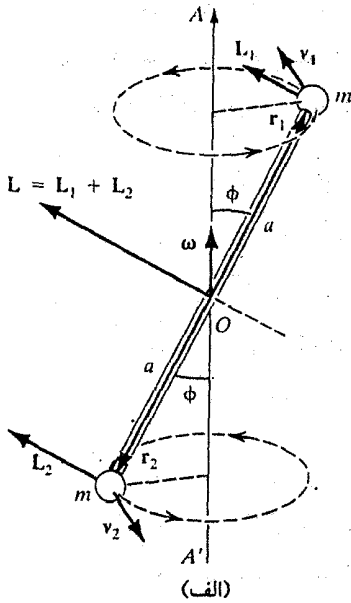
$$I_{zx} = \int_V \rho zx dx dy dz$$

مثال (۱۳-۱): دو جرم نقطه ای با جرمهای یکسان m به وسیله میله صلب بدون جرمی به طول $2a$ به یکدیگر متصل شده و تشکیل یک دمبل داده اند. این دمبل مقید شده است که با سرعت زاویه ای ثابت ω حول محوری که با میله زاویه ϕ می‌سازد دوران کند. بزرگی و جهت تکانه زاویه ای و گشتاور نیروی وارد به سیستم را حساب کنید.

همان طور که در شکل (۱۳-۱ الف) نشان داده شده است، فرض کنیم دمبل با سرعت زاویه ای ω حول محور AOA' که از O گذشته و در دستگاه مختصات لخت قرار دارد دوران می‌کند. (AOA' همچنین جهت محورهاست و لولاها در O قرار دارند). نقطه

O مبدأ دستگاه مختصات است. تکانه زاویه ای سیستم ناشی از دو جرم عبارت است از

$$L = L_1 + L_2 = m r_1 \times (\omega \times r_1) + m r_2 \times (\omega \times r_2) \quad (۱)$$



شکل (مثال-۱۳-۱)

دقت کنید که هم L_1 و هم L_2 با L ، چنان که در شکل (مثال ۱۳-۱ الف) نشان داده شده است، در یک جهتند. کاملاً آشکار است که L در جهت ω نیست. همان طور که در قسمت (ب) نشان داده شده است، اگر L به دو مؤلفه تجزیه شود، فقط L_{\parallel} در جهت ω است، در حالی که L_{\perp} ، با این که در صفحه عمود بر ω است، صفر نیست. بزرگی تکانه زاویه ای عبارت است از

$$L = ma^2\omega \sin \phi + ma^2\omega \sin \phi = 2ma^2\omega \sin \phi = I\omega \sin \phi \quad (۲)$$

که I گشتاور لختی دمبل نسبت به یک محور عمود بر میله اتصال است.

به علاوه، بردار تکانه زاویه ای L ، با دوران حول ω ، بطور پیوسته جهت خود را تغییر می دهد. بنابراین L ثابت نیست، و برای حفظ این حرکت لازم است یک گشتاور τ وارد شود. برحسب تعریف

$$\tau = \frac{dL}{dt} = \dot{L} \quad (۳)$$

که \dot{L} برداری است که نوک (یا سر) بردار L در آن جهت حرکت می کند. با مقایسه با رابطه $\dot{r} = \omega \times r$ ، می توانیم بنویسیم

$$\dot{L} = \omega \times L \quad (۴)$$

به این ترتیب بزرگی گشتاور [با قرار دادن به جای L از معادله (۲)] عبارت است از

$$|\tau| = |\dot{L}| = \omega L \sin(90^\circ - \phi) = 2ma^2\omega^2 \sin \phi \cos \phi \quad (۵)$$

و جهت گشتاور، از معادله (۴)، در هر لحظه به صفحه شامل L و ω عمود است.

شکل (مثال ۱۳-۱ پ) وضعیتی را نشان می دهد که در آن دو دمبل بطور متقارن حرکت می کنند. در این مورد، همان طور که در قسمت (ت) نشان داده شده است، L و ω در یک جهتند.

تمرین (۱۳-۱): حرکت یک دمبل دو گانه را که جرمهای یک دمبل با جرمهای دمبل دیگر متفاوت است (مثلاً دو برابر است) بررسی کنید.

۱۳-۳ تانسور لختی

اکنون به نوشتن عباراتی برای انرژی جنبشی و تکانه زاویه ای در نمادگذاری تانسوری می پردازیم. یک بار دیگر، یک جسم صلب را که حول محوری که از نقطه ثابتی، در داخل یا خارج جسم، گذشته است می چرخد در نظر بگیریم. از i و z به عنوان شاخصهای گردان برای نمایش ذرات، و از k و l و s به عنوان شاخصهای گردان برای نمایش محورهای مختصات استفاده می کنیم. انرژی جنبشی چرخشی عبارت است از

$$T = T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\omega \times \mathbf{r}_i)^2 \quad (13-22)$$

با استفاده از اتحاد برداری

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = A^2 B^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 \quad (13-23)$$

در معادله (۱۳-۲۲)، می توانیم بنویسیم

$$T = T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i [\omega^2 r_i^2 - (\omega \cdot \mathbf{r}_i)^2] \quad (13-24)$$

مؤلفه های بردار \mathbf{r}_i عبارتند از x_{is} ، یعنی (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) ، و مؤلفه های ω عبارتند از ω_k یعنی $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. لذا

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\left(\sum_{k=1}^3 \omega_k^2 \right) \left(\sum_{s=1}^3 x_{is}^2 \right) - \left(\sum_{k=1}^3 \omega_k x_{ik} \right) \left(\sum_{l=1}^3 \omega_l x_{il} \right) \right] \quad (13-25)$$

با به کارگیری رابطه

$$\omega_k = \sum_l \omega_l \delta_{kl}$$

خواهیم داشت

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{k,l} m_i \left[\omega_k \omega_l \delta_{kl} \left(\sum_s x_{is}^2 \right) - \omega_k \omega_l x_{ik} x_{il} \right]$$

[از معادله (۱۵-۱۷) ب]، می نویسیم $\delta_{kl} = 1$ برای $k = l$ و $\delta_{kl} = 0$ برای $k \neq l$. چون تمام نقاط جسم صلب سرعت زاویه ای یکسان دارند، می توانیم با فاکتورگیری بنویسیم

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,l} \omega_k \omega_l \sum_i m_i \left[\delta_{kl} \sum_s x_{is}^2 - x_{ik} x_{il} \right] \quad (13-26)$$

اگر I_{kl} را kl مین عنصر جمع روی i تعریف کنیم، یعنی

$$I_{kl} = \sum_{i=1}^n m_i \left[\delta_{kl} \sum_s x_{is}^2 - x_{ik}x_{il} \right] \quad (۱۳-۲۷ \text{ الف})$$

یا ، با توجه به $x_{A1}^2 + x_{A2}^2 + x_{A3}^2 = r_A^2$ ، می توانیم بنویسیم

$$I_{kl} = \sum_{i=1}^n m_i \left[\delta_{kl} r_i^2 - x_{ik}x_{il} \right] \quad (۱۳-۲۷ \text{ ب})$$

دراین صورت معادله (۱۳-۲۶) برای انرژی جنبشی چرخشی می شود

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,l} I_{kl} \omega_k \omega_l \quad (۱۳-۲۸)$$

I_{kl} ، که با معادله (۱۳-۲۷) داده شده است ، نه مؤلفه دارد و عناصر یک کمیت I به نام تانسور گشتاور لختی یا بطور ساده ، تانسور لختی جسم صلب نسبت به یک دستگاه مختصات جسمی را تشکیل می دهند . I از نظر شکل بسیار شبیه به یک ماتریس 3×3 است و همان طور که خواهیم دید ، ضریب تناسبی است بین L و ω و همچنین بین T و $\omega\omega$ (کمیتی به نام دوتایی (دیادیک) که در بخش (۱۳-۷) مورد بحث قرار خواهد گرفت) . دیمانسیون I جرم \times (طول) است . عناصر I از معادله (۱۳-۷) به دست می آیند و در یک آرایه 3×3 نوشته می شوند

$$I = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (x_{i2}^2 + x_{i3}^2) & -\sum_i m_i x_{i1}x_{i2} & -\sum_i m_i x_{i1}x_{i3} \\ -\sum_i m_i x_{i2}x_{i1} & \sum_i m_i (x_{i1}^2 + x_{i3}^2) & -\sum_i m_i x_{i2}x_{i3} \\ -\sum_i m_i x_{i3}x_{i1} & -\sum_i m_i x_{i3}x_{i2} & \sum_i m_i (x_{i1}^2 + x_{i2}^2) \end{pmatrix} \quad (۱۳-۲۹)$$

که برای یک جرم نقطه ای به صورت

$$I = m \begin{pmatrix} x_2^2 + x_3^2 & -x_1x_2 & -x_1x_3 \\ -x_2x_1 & x_1^2 + x_3^2 & -x_2x_3 \\ -x_3x_1 & -x_3x_2 & x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix} \quad (۱۳-۳۰)$$

یا ، بطور کلی ، به صورت

$$I = I_{kl} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \quad (۱۳-۳۱)$$

کاهش می یابد. عناصر قطری I_{11} ، I_{22} ، I_{33} ، یعنی

$$I_{kk} = \sum_{i=1}^n m_i (r_i^2 - x_{ik}^2) \quad (۱۳-۳۲)$$

گشتاور لختی نسبت به محور k نامیده می شوند. عناصر غیر قطری

$$I_{kl} = I_{lk} = - \sum_{i=1}^n m_i x_{ik} x_{il} \quad (۱۳-۳۳)$$

حاصل ضرب لختی نامیده می شوند. چون عناصر غیر قطری متقارند، $I_{kl} = I_{lk}$ ، تانسور لختی یک تانسور متقارن است. بنابراین تنها شش عنصر I مستقلند، به علاوه، دترمینان تانسور مثبت معین است.

یک عنصر مشخص I_{11} ، یعنی

$$\begin{aligned} I_{11} &= \sum_{i=1}^n m_i (r_i^2 - x_{i1}^2) \\ &= \sum_{i=1}^n m_i (x_{i1}^2 + x_{i2}^2 + x_{i3}^2 - x_{i1}^2) \\ &= \sum_{i=1}^n m_i (x_{i2}^2 + x_{i3}^2) \end{aligned} \quad (۱۳-۳۴)$$

را در نظر بگیریم. $(x_{i2}^2 + x_{i3}^2)$ مربع فاصله جرم i ام تا محور X_1 است، در نتیجه I_{11} همیشه مثبت یا صفر است. بطور کلی، می توانیم نتیجه بگیریم که عناصر قطری I_{kk} همیشه مثبت یا صفرند. I_{kk} تنها وقتی صفر است که جرمها در روی محور k باشند. از سوی دیگر، عناصر غیر قطری ممکن است مثبت، منفی و یا صفر باشند.

خاصیت دیگر تانسور لختی خاصیت جمع پذیری عناصر است. یعنی، تانسور لختی یک جسم را می توان به صورت مجموع تانسورهای قسمت‌های مختلف جسم در نظر گرفت. بنابراین، برای یک توزیع پیوسته، با استفاده از معادله (۱۳-۲۷) می توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} I_{kl} &= \iiint_V \rho(\mathbf{r}) \left[\delta_{kl} \sum_s x_s^2 - x_k x_l \right] dV \\ &= \iiint_V \rho(\mathbf{r}) [\delta_{kl} r^2 - x_k x_l] dV \end{aligned} \quad (۱۳-۳۵)$$

که $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ عنصر حجمی، $\rho(\mathbf{r})$ چگالی است، و انتگرال در روی حجم گرفته

می شود . توجه کنیم که در این جا نیازی به شاخص برای جرم ذرات نیست .

می توانیم با شروع از عبارت تکانه زاویه ای نیز به همین عبارت برای تانسور لختی برسیم . بنا به تعریف

$$L = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \quad (۱۳-۳۶)$$

با استفاده از اتحاد برداری

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = A^2 \mathbf{B} - \mathbf{A}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (۱۳-۳۷)$$

خواهیم داشت

$$L = \sum_{i=1}^n m_i [r_i^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})] \quad (۱۳-۳۸)$$

برخلاف T ، تکانه زاویه ای یک کمیت برداری است ، و در نتیجه برای مؤلفه k ام می توانیم

بنویسیم

$$\begin{aligned} L_k &= \sum_i m_i \left[\omega_k \sum_s x_{is}^2 - x_{ik} \sum_l x_{il} \omega_l \right] \\ &= \sum_i m_i \sum_l \left[\omega_l \delta_{kl} \sum_s x_{is}^2 - \omega_l x_{ik} x_{il} \right] \\ &= \sum_l \omega_l \sum_i m_i \left[\delta_{kl} \sum_s x_{is}^2 - x_{ik} x_{il} \right] \end{aligned} \quad (۱۳-۳۹)$$

مانند قبل ، I_{kl} به صورت زیر تعریف می شود

$$I_{kl} = \sum_{i=1}^n m_i \left[\delta_{kl} \sum_s x_{is}^2 - x_{ik} x_{il} \right] \quad (۱۳-۲۷ الف)$$

و می توانیم بنویسیم

$$L_k = \sum_l I_{kl} \omega_l \quad (۱۳-۴۰)$$

یا در نماد تانسوری

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (۱۳-۴۱)$$

همان طور که قبلاً یادآوری شد و در مثال (۱-۱۳) نشان داده شد ، \mathbf{L} و $\boldsymbol{\omega}$ در یک جهت نیستند . رابطه بین \mathbf{L} و T را می توان به روش زیر به دست آورد . دو طرف معادله (۱۳-۴۰) را

در ω_k ضرب می‌کنیم و روی k جمع بندی می‌کنیم

$$\frac{1}{2} \sum_k \omega_k L_k = \frac{1}{2} \sum_{k,l} I_{kl} \omega_k \omega_l = T$$

یا

$$T = \frac{1}{2} \sum_k \omega_k L_k = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} \quad (۴۲-۱۳)$$

با قرار دادن به جای \mathbf{L} از معادله (۴۱-۱۳) خواهیم داشت

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (۴۳-۱۳)$$

از معادله (۴۱-۱۳) می‌توانیم نتیجه بگیریم که حاصل ضرب دو بردار و یک تانسور یک نرده‌ای است.

مثال (۲-۱۳): مؤلفه‌های تانسور گشتاور لختی را برای پیکربندی زیر حساب کنید.

چهار جرم نقطه‌ای به جرم‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ واحد واقع در نقاط $(1, 0, 0)$ ، $(1, 1, 0)$ ، $(1, 1, -1)$ و $(1, 1, 1)$.

از داده‌های فوق داریم $m_1 = 1$ ، $m_2 = 2$ ، $m_3 = 3$ ، $m_4 = 4$ ، $\mathbf{r}_1 = (1, 0, 0)$ ، $\mathbf{r}_2 = (1, 1, 0)$ ، $\mathbf{r}_3 = (1, 1, 1)$ و $\mathbf{r}_4 = (1, 1, -1)$ ، که می‌دهند $r_1^2 = 1$ ، $r_2^2 = 2$ ، $r_3^2 = 3$ و $r_4^2 = 3$. از معادله (۳۲-۱۳) خواهیم داشت.

$$I_{kk} = \sum_{i=1}^n m_i (r_i^2 - x_{ik}^2)$$

$$I_{11} = \sum_{i=1}^4 m_i (r_i^2 - x_{i1}^2) = \sum_{i=1}^4 m_i r_i^2 - \sum_{i=1}^4 m_i x_{i1}^2$$

$$= m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2 - (m_1 x_{11}^2 + m_2 x_{21}^2 + m_3 x_{31}^2 + m_4 x_{41}^2)$$

$$= 1(1) + 2(2) + 3(3) + 4(3)$$

$$- [1(1)^2 + 2(1)^2 + 3(1)^2 + 4(1)^2]$$

$$I_{11} = 16$$

به همین نحو، $I_{22} = 17$ و $I_{33} = 19$.

از معادله (۳۳-۱۳) خواهیم داشت

$$I_{kl} = I_{lk} = - \sum_{i=1}^n m_i x_{ik} x_{il}$$

$$I_{12} = I_{21} = - \sum_{i=1}^4 m_i x_{i1} x_{i2}$$

$$= -m_1 x_{11} x_{12} - m_2 x_{21} x_{22} - m_3 x_{31} x_{32} - m_4 x_{41} x_{42}$$

$$= -1(1)(0) - 2(1)(1) - 3(1)(1) - 4(1)(1)$$

$$= -9$$

$$I_{13} = I_{31} = - \sum_{i=1}^4 m_i x_{i1} x_{i3} = +1$$

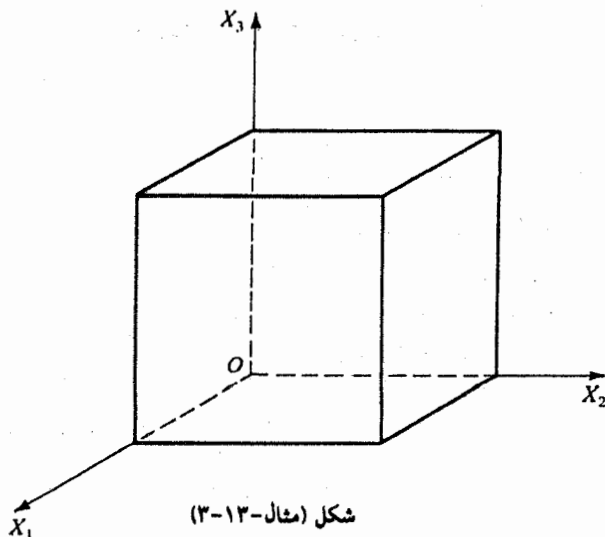
$$I_{23} = I_{32} = - \sum_{i=1}^4 m_i x_{i2} x_{i3} = +1$$

به این ترتیب تانسور لختی عبارت است از

$$I = \begin{pmatrix} 16 & -9 & 1 \\ -9 & 17 & 1 \\ 1 & 1 & 19 \end{pmatrix}$$

تصویر (۱۳-۲): I را برای جرمهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۱ واحدی واقع در (1, 1, -1)، (1, 1, 1)، (1, 1, 0)، و (1, 0, 0) محاسبه کنید.

مثال (۱۳-۳): یک مکعب همگن به چگالی ρ ، جرم M ، و ضلع L در نظر بگیرید. اگر مبدأ O در یک گوشه و محورها در جهت لبه‌ها باشند، آن‌طور که در شکل مثال (۱۳-۳) نشان داده شده است، عناصر تانسور لختی را محاسبه کنید.



شکل (مثال-۱۳-۳)

عناصر تانسور لختی را می توانیم با استفاده از معادله (۱۳-۳۵) محاسبه کنیم :

$$I_{kl} = \iiint_V \rho(r) \left[\delta_{kl} \sum_s x_s^2 - x_k x_l \right] dV$$

چون مکعب همگن است ، $\rho(r) = \rho$ ، و $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ ، و $(\delta_{11} = 1)$ داریم ،

$$I_{11} = \rho \iiint_V \left[\delta_{11} \sum_{s=1}^3 x_s^2 - x_1 x_1 \right] dx_1 dx_2 dx_3 \quad (1)$$

$$= \rho \iiint_V (x_2^2 + x_3^2) dx_1 dx_2 dx_3$$

$$= \rho \int_0^L dx_3 \int_0^L (x_2^2 + x_3^2) dx_2 \int_0^L dx_1$$

$$= \rho L \int_0^L dx_3 \int_0^L (x_2^2 + x_3^2) dx_2$$

$$= \rho L \int_0^L dx_3 \left(\frac{L^3}{3} + Lx_3^2 \right) \quad (2)$$

$$= \rho L \left(\frac{L^3 x_3}{3} + \frac{Lx_3^3}{3} \right) \Big|_0^L$$

$$= \frac{2}{3} \rho L^5$$

چون $M = \rho L^3$ ، نتیجه می شود

$$I_{11} = \frac{2}{3} ML^2 \quad (3)$$

از تقارن مسأله آشکار است که تمام عناصر قطری برابرند :

$$I_{11} = I_{22} = I_{33} = \frac{2}{3} ML^2 \quad (4)$$

اکنون یکی از عناصر غیر قطری را با استفاده از معادله (۱۳-۳۵) و با توجه به این که

$\delta_{kl} = 0$ برای $k \neq l$ و $\delta_{kl} = 1$ برای $k = l$ ، حساب می کنیم

$$I_{12} = \rho \iiint_V \left(\delta_{12} \sum_{s=1}^3 x_s^2 - x_1 x_2 \right) dx_1 dx_2 dx_3 \quad (5)$$

$$= \rho \iiint_V (-x_1 x_2) dx_1 dx_2 dx_3$$

$$= -\rho \int_0^L x_1 dx_1 \int_0^L x_2 dx_2 \int_0^L dx_3 \quad (6)$$

$$= -\rho \frac{L^5}{4} = -\frac{1}{4} ML^2$$

یک بار دیگر می بینیم که تمام عناصر غیر قطری با هم برابرند ، یعنی

$$I_{12} = I_{13} = I_{23} = I_{32} = I_{21} = I_{31} = -\frac{1}{4}ML^2 \quad (۷)$$

با به کارگیری نماد $\gamma = ML^2$ تانسور لختی به صورت زیر نوشته می شود

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\gamma & -\frac{1}{4}\gamma & -\frac{1}{4}\gamma \\ -\frac{1}{4}\gamma & \frac{2}{3}\gamma & -\frac{1}{4}\gamma \\ -\frac{1}{4}\gamma & -\frac{1}{4}\gamma & \frac{2}{3}\gamma \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

تمرین (۱۳-۳): مثال را برای یک جسم معکب مستطیل با چگالی همگن و اضلاع a ، a و $2a$ تکرار کنید .

۱۳-۴ گشتاور لختی در دستگاههای جسمی مختلف (قضیه اشتاینر)

دیدیم که اگر یک دستگاه مختصات جسمی که مبدأ آن در مرکز جرم جسم باشد انتخاب کنیم ، می توانیم انرژی جنبشی را به صورت مجموع انرژیهای جنبشی انتقالی و چرخشی بنویسیم . بنابراین بهتر است که ارتباط بین تانسورهای لختی در دستگاههای مختصات جسمی مختلف را بدانیم . \mathbf{I} را تانسور لختی در یک دستگاه جسمی یا مبدأ O_B و \mathbf{I} را تانسور لختی در دستگاه دیگری که مبدأ آن در مرکز جرم O_C باشد بگیریم . [شکل (۱۳-۲)] . به علاوه فرض شده است که محورهای مختصات دکارتی در دو دستگاه همان طور که نشان داده شده است ، با یکدیگر موازی اند . یعنی جهت گیری یکسانی دارند . می خواهیم رابطه بین \mathbf{I} و \mathbf{I}' را پیدا کنیم . مؤلفه های I_{kl} تانسور گشتاور لختی \mathbf{I} از معادله (۱۳-۲۷ الف) عبارتند از

$$I_{kl} = \sum_{i=1}^n m_i \left[\delta_{kl} \sum_s x_{is}^2 - x_{ik}x_{il} \right] \quad (۱۳-۲۷)$$

و مؤلفه های I'_{kl} تانسور لختی \mathbf{I}' عبارتند از

$$I'_{kl} = \sum_{i=1}^n m_i \left[\delta_{kl} \sum_s x'_{is}{}^2 - x'_{ik}x'_{il} \right] \quad (۱۳-۴۴)$$

با بازگشت به شکل (۱۳-۲) ، اگر مرکز جرم O_C در فاصله \mathbf{a} از مبدأ O_B قرار داشته باشد ، رابطه بین \mathbf{r} و \mathbf{r}' عبارت است از

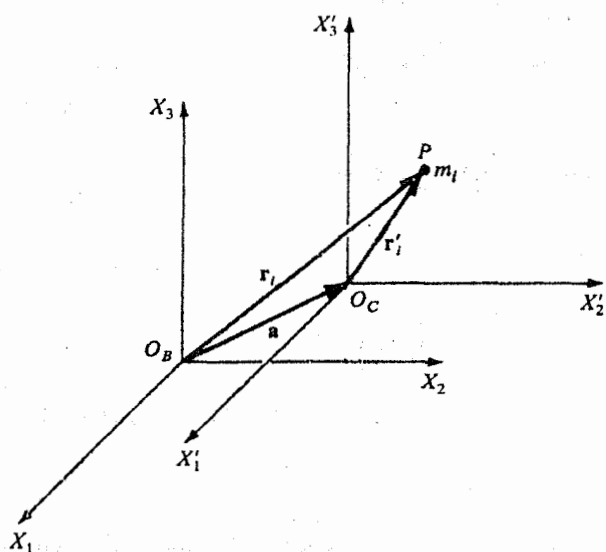
$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{a}$$

(۱۳-۴۵ الف)

یا به شکل مؤلفه ای ،

(۱۳-۴۵ ب)

$$x_{is} = x'_{is} + a_s, \quad s = 1, 2, 3$$



شکل (۱۳-۲) : محورهای دستگاه مختصات جسمی با مبدأ O_B با محورهای مختصات

مرکز جرمی با مبدأ O_C موازی اند

با بردن این عبارت در معادله (۱۳-۲۷) و مرتب سازی خواهیم داشت

$$\begin{aligned} I_{kl} &= \sum_i m_i \left[\delta_{kl} \sum_s (x'_{is} + a_s)^2 - (x'_{ik} + a_k)(x'_{il} + a_l) \right] \\ &= \sum_i m_i \left[\delta_{kl} \sum_s x'^2_{is} - x'_{ik} x'_{il} \right] + \sum_i m_i \left[\delta_{kl} \sum_s a_s^2 - a_k a_l \right] \\ &\quad + 2 \sum_i m_i [\delta_{kl} x'_{is} a_s] - \sum_i m_i x'_{ik} a_l - \sum_i m_i x'_{il} a_k \end{aligned} \quad (۱۳-۴۶)$$

هر یک از سه جمله آخر طرف راست ، با توجه به تعریف مرکز جرم در O_C ، صفر است . یعنی

$$\sum_i m_i x'_i = 0$$

یا به شکل مؤلفه ای

$$\sum_i m_i x'_{is} = 0$$

به این ترتیب معادله (۱۳-۴۶) با کمک معادله (۱۳-۴۴) به شکل زیر در می آید

$$I_{kl} = I'_{kl} + \sum_i m_i \left[\delta_{kl} \sum_s a_s^2 - a_k a_l \right] \quad (۱۳-۴۷)$$

اگر به جای ذرات گسسته یک جسم صلب گسترده داشتیم، روابط زیر را به دست می آوریم
(رک . مسأله ۱۳-۱۴)

$$I_{kl} = I'_{kl} + (\delta_{kl} a_s^2 - a_k a_l) \iiint \rho dV \quad (۱۳-۴۸)$$

در این دو مورد جرم M به صورت

$$M = \sum_i m_i \quad \text{یا} \quad M = \iiint \rho dV$$

است و معادله (۱۳-۴۷) یا معادله (۱۳-۴۸) خواهد شد

$$I_{kl} = I'_{kl} + M(a^2 \delta_{kl} - a_k a_l) \quad (۱۳-۴۹)$$

که همان رابطه خواسته شده است. این رابطه بیان می دارد که تفاضل عناصر، $I_{kl} - I'_{kl}$ ، برابر است با جرم M ضرب در مربع فاصله $(a^2 \delta_{kl} - a_k a_l)$.

به عنوان یک مورد خاص، رابطه بین عناصر قطری را پیدا کنیم، یعنی

$$I_{kk} = I'_{kk} + M(a^2 - a_k^2) = I'_{kk} + M d_k^2 \quad (۱۳-۵۰ الف)$$

که d_k کوتاهترین فاصله بین محور دستگاه جسمی و مرکز جرم است. رابطه (۱۳-۵۰ الف) بیان ریاضی قضیه اشتاینراست:

گشتاور لختی یک جسم صلب نسبت به یک محور دستگاه مختصات جسمی برابر است با گشتاور لختی جسم نسبت به محور دستگاه مرکز جرمی که موازی محور مورد نظر است، به اضافه گشتاور لختی M واقع در مرکز جرم نسبت به محور جسمی مورد نظر.

توجه کنیم که اگر O_C و O_B بر یکدیگر منطبق باشند داریم $d_k = 0$ ، که می رساند که جسم نسبت به دستگاه مختصات مرکز جرمی کمترین گشتاور لختی را دارد.

رابطه بین عناصر قطری را در نظر بگیریم

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= I'_{11} + M(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_1^2) \\
 &= I'_{11} + M(a_2^2 + a_3^2) \\
 &= I'_{11} + Md_1^2
 \end{aligned}
 \tag{۱۳-۵۰}$$

که $d_1^2 = a_2^2 + a_3^2$. معادله (۱۳-۵۰) بیان می‌دارد که تفاضل بین عناصر $I_{11} - I'_{11}$ برابر است با جرم M ضرب در مربع فاصله بین دو محور موازی . این مورد خاصی از قضیه اشتاینر است و قضیه محورهاى موازی نامیده می‌شود .

قضیه محور عمودی

همان‌طور که قبلاً توضیح داده شد ، یک لایه صفحه‌ای جسم صلبی است که جرم آن در روی یک صفحه توزیع شده است ، یعنی ضخامت آن تقریباً صفر است . فرض کنیم که این لایه صفحه‌ای در صفحه $X_1 - X_2$ قرار دارد در نتیجه $x_3 = 0$. جرم واحد سطح را با σ نمایش دهیم ، و یک عنصر سطح کوچک را dA بگیریم . در چنین وضعیتی ، عناصر قطری تانسور گشتاور لختی I ی لایه صفحه‌ای عبارتند از

$$I_{11} = \iint_A \sigma x_2^2 dA \tag{۱۳-۵۱}$$

$$I_{22} = \iint_A \sigma x_1^2 dA$$

$$I_{33} = \iint_A \sigma (x_1^2 + x_2^2) dA$$

از این روابط می‌توانیم نتیجه بگیریم

$$I_{33} = I_{11} + I_{22} \tag{۱۳-۵۲}$$

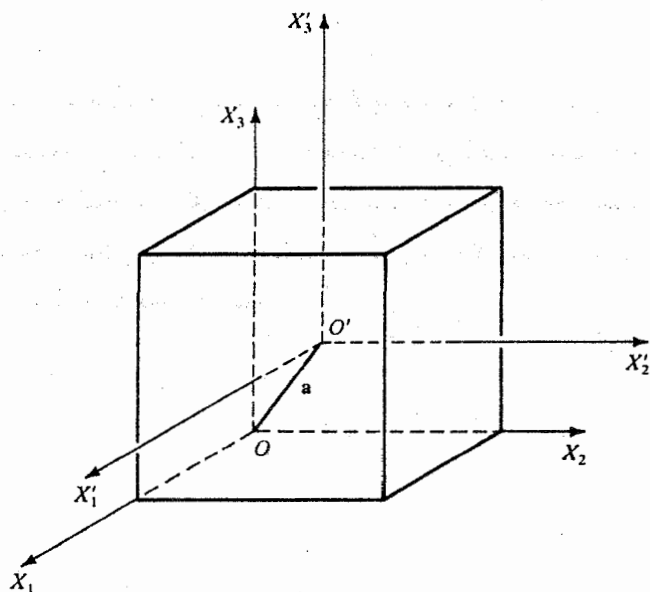
که بیانگر قضیه محور عمودی است :

اگر برای یک جسم صلب به شکل لایه صفحه‌ای ، گشتاورهای لختی نسبت به محورهای X_1 و X_2 ، واقع در صفحه ، I_{11} و I_{22} باشند ، گشتاور لختی نسبت به محور X_3 ، همواره بر صفحه ، برابر با $I_{11} + I_{22}$ خواهد بود .

(۱۳-۳) بحث شد در نظر بگیریم. عناصر تانسور گشتاور لختی را نسبت به دستگاه محوره‌های مختصاتی با مبدأ در مرکز جرم مکعب، آن طور که در شکل (مثال ۱۳-۴) نشان داده شده است، محاسبه کنید.

برای تبدیل عناصر تانسور گشتاور لختی از یک دستگاه مختصات به دستگاه دیگر، از روابط (۱۳-۴۹)، یعنی

$$I_{kl} = I'_{kl} + M(a^2 \delta_{kl} - a_k a_l) \quad (1)$$



شکل (مثال ۱۳-۴)

استفاده می‌کنیم، که I_{kl} ، عناصر تانسور لختی I در مثال (۱۳-۳) محاسبه شده‌اند و عبارتند از

$$I = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \gamma, \quad \gamma = ML^2 \quad (2)$$

$$I_{11} = I_{22} = I_{33} = \frac{2}{3} ML^2 \quad \text{یعنی}$$

$$I_{12} = I_{13} = I_{23} = -\frac{1}{4} ML^2 \quad (3)$$

محورهای مختصات جدید با مبدأ O' در مرکز جرم با X'_i نمایش داده می شوند. مرکز جرم مکعب در دستگاه مختصات X_i در $(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, \frac{L}{2})$ قرار دارد و مؤلفه های \mathbf{a} عبارتند از

$$a_1 = a_2 = a_3 = \frac{L}{2} \quad (۴)$$

از معادله (۱) نتیجه می شود

$$I'_{kl} = I_{kl} - M(a^2 \delta_{kl} - a_k a_l) \quad (۵)$$

از ترکیب معادلات (۲)، (۳)، و (۴) می توانیم عناصر مختلف I'_{kl} تانسور لختی \mathbf{I}' را حساب کنیم، یعنی

$$\begin{aligned} I'_{11} &= I_{11} - M(a^2 \delta_{11} - a_1 a_1) = I_{11} - M(a^2 - a_1^2) \\ &= I_{11} - M(a_2^2 + a_3^2) \\ &= \frac{2}{3} ML^2 - M\left(\frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{4}\right) = \frac{1}{6} ML^2 \end{aligned}$$

بنابراین

$$I'_{11} = I'_{22} = I'_{33} = \frac{1}{6} ML^2 \quad (۶)$$

به همین نحو

$$\begin{aligned} I'_{12} &= I_{12} - M[a^2 \delta_{12} - a_1 a_2] \\ &= I_{12} - M(-a_1 a_2) = -\frac{1}{4} ML^2 + \frac{1}{4} ML^2 = 0 \end{aligned} \quad (۷)$$

$$I'_{12} = I'_{13} = I'_{23} = 0$$

به این ترتیب گشتاور لختی با مبدأ واقع در مرکز جرم عبارت است از

$$\mathbf{I}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} ML^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} ML^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} ML^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{6} ML^2$$

که می توان آن را به صورت

$$\mathbf{I}' = \frac{1}{6} ML^2 \mathbf{1} \quad (۸)$$

نوشت که $\mathbf{1}$ تانسور یکه است و به صورت زیر تعریف شده است

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (۹)$$

تمرین (۱۳-۴): محاسبات را برای مورد بحث شده در تمرین (۱۳-۳) تکرار کنید .

۱۳-۵ گشتاورهای لختی اصلی و محورهای اصلی

تانسور لختی یک جسم صلب را نسبت به مجموعه‌ای از محورهای مختصات که مبدأ آنها در خود جسم بود توصیف کردیم . می‌توان مجموعه‌ای از محورهای مختصات خاص انتخاب کرد که عناصر حاصل ضربهای لختی در آن صفر باشند . مجموعه محورهایی که این ویژگی را داشته باشند محورهای اصلی نامیده می‌شوند . این مجموعه محورها را در خیلی از موارد برای توصیف جسم صلب بسیار مفید می‌یابیم .

سه محور متقابلاً عمود بر هم که در O یکدیگر را قطع کنند یک مجموعه محورهای اصلی تشکیل می‌دهند ، مشروط بر این که تمام عناصر حاصل ضرب لختی I_{xy} ، I_{xz} ، و I_{yz} در این مجموعه صفر باشند . سه صفحه مختصات ، که هر کدام از دو محور می‌گذرند ، صفحات اصلی در نقطه O نامیده می‌شوند .

اگر عناصر حاصل ضرب لختی صفر باشند ، تانسور لختی فقط از عناصر قطری تشکیل

می‌شود ، یعنی

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (۱۳-۵۳)$$

یا به شکل فشرده می‌توانیم بنویسیم

$$I_{kl} = I_k \delta_{kl} \quad (۱۳-۵۴)$$

به علاوه به کارگیری محورهای اصلی به ساده‌سازی قابل ملاحظه‌ای در عبارتهای L و T می‌انجامد .

$$L_k = \sum_l I_{kl} \omega_l = \sum_l I_k \delta_{kl} \omega_l = I_k \omega_k \quad (۱۳-۵۵)$$

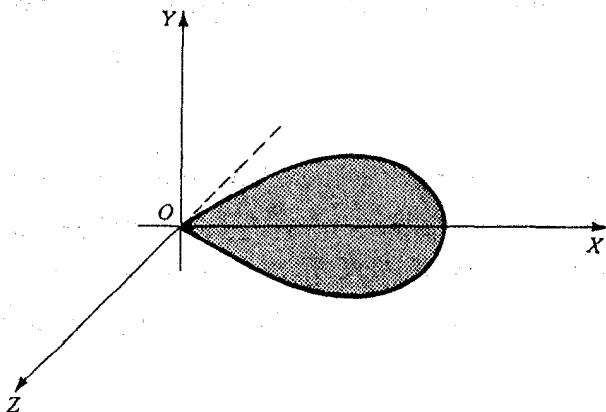
$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,l} I_{kl} \omega_k \omega_l = \frac{1}{2} \sum_{k,l} I_k \delta_{kl} \omega_k \omega_l = \frac{1}{2} \sum_k I_k \omega_k^2 \quad (۱۳-۵۶)$$

قبل از پرداختن به روش ریاضی پیدا کردن محورهای اصلی ، که در آنها تانسور لختی قطری است ، یک توصیف فیزیکی از این فرآیند و بعضی از موارد خاص جالب ارائه می‌دهیم .

برای بعضی موارد در دینامیک جسم صلب، محورهای اصلی را می توان با ملاحظات تقارنی جسم تعیین کرد. به عنوان مثال، یک جسم لایه ای تخت در صفحه XY ، که برای هر ذره $z=0$ ، در نظر بگیریم. به این ترتیب،

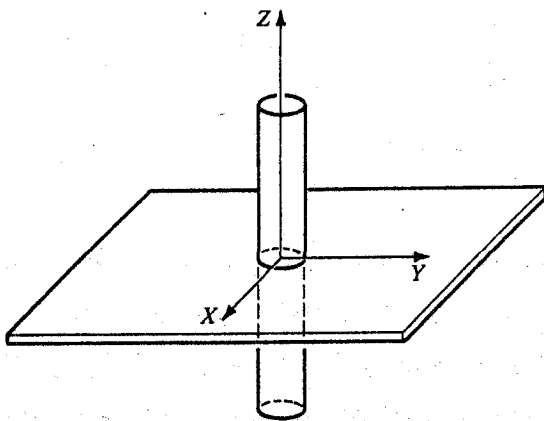
$$I_{yz} = I_{zx} = 0$$

به علاوه، فرض کنیم که لایه دارای یک محور تقارن، مثلاً X ، آن طور که در شکل (۱۳-۳) نشان داده شده است، باشد. در این صورت $\int \rho xy \, dV$ از دو قسمت با بزرگی یکسان و با علامتهای مخالف تشکیل می شود. این نکته به $I_{xy} = 0$ می انجامد. به این ترتیب تانسور لختی قطری است و سه محور مختصات در این مورد محورهای اصلی جسم صلب لایه ای هستند. این مطلب (با استفاده از تعریف محورهای اصلی) به این واقعیت منجر می شود که اگر صفحه های مختصات صفحه های تقارن باشند محورهای مختصات محورهای اصلی خواهند بود. (یادآوری: برای این که حاصل ضربهای لختی یک جسم صفر باشند لازم نیست که جسم حتماً متقارن باشد) اما تقارن یک جسم صلب به پیدا کردن محورهای اصلی از راه حدس کمک می کند. به عنوان مثال، میله استوانه ای (که یک جامد دوار است) دارای یک محور اصلی در امتداد محور تقارن، مثلاً محور Z ، است که از مرکز جرم می گذرد، و دو محور اصلی دیگر، همان طور که در شکل (۱۳-۴) نشان داده شده است، در صفحه عمود بر محور تقارن قرار دادند. جهت گیری این دو محور اصلی در صفحه XY اختیاری است.



شکل (۱۳-۳): جسم لایه ای تخت در صفحه XY با محور تقارن در امتداد محور X ،

که عناصر حاصل ضرب لختی آن صفر است



شکل (۱۳-۴) : میله استوانه‌ای با یک محور اصلی در امتداد محور Z و دو محور

اصلی دیگر در صفحه عمود بر محور Z

رابطه بین L و ω را برای یک جسم صلب وقتی که محورهای مختصات محورهای اصلی هستند در نظر بگیریم در چنین وضعیتی L به شکل

$$L = \hat{i}I_x\omega_x + \hat{j}I_y\omega_y + \hat{k}I_z\omega_z \quad (۱۳-۵۷)$$

در می‌آید که I_x ، I_y ، I_z گشتاورهای لختی اصلی هستند. فرض کنیم جسم حول محور Z دوران کند، بطوری که $\omega_2 = \omega$ و $\omega_x = \omega_y = 0$ ، در این صورت معادله (۱۳-۵۷) به شکل زیر در می‌آید

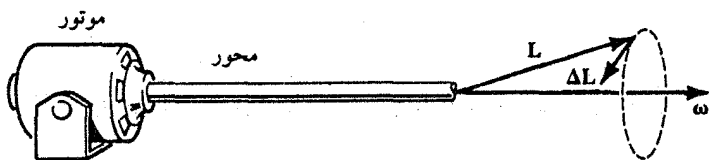
$$L = \hat{k}I_z\omega_z \quad (۱۳-۵۸)$$

که بیان می‌دارد تکانه زاویه‌ای موازی با محور چرخش است، یعنی L در جهت ω است. به این ترتیب می‌توانیم نتیجه بگیریم که، اگر L و ω در یک جهت باشند، محور چرخش محور اصلی است. اگر محور چرخش محور اصلی نباشد، L و ω در جهتهای متفاوتی هستند. یکی از کاربردهای مهم این اصل در زیر توضیح داده خواهد شد.

تبادل دینامیکی

یک وسیله چرخان مانند پنکه (بادبزن الکتریکی) یا چرخ لنگر در نظر بگیریم. اگر مرکز

جرم این وسیله در روی محور چرخش باشد، در تعادل استاتیکی خواهد بود. برای این که این وسیله در تعادل دینامیکی باشد، محور چرخش باید محور اصلی باشد. در نتیجه ω و L در امتداد این محور چرخش خواهند بود. اگر محور چرخش محور اصلی نباشد، جهت تکانه زاویه ای، همان طور که شکل (۱۳-۵) نشان می دهد، تغییر می کند. این تغییرات ایجاب می کند که باید یک گشتاور نیرویی، $\tau = \dot{L} = \frac{dL}{dt}$ ، به جسم وارد شود و جهت این گشتاور نیز بر جهت چرخش عمود است. این وضعیت به این می انجامد که یک جسم صلب، در این مورد یک چرخنده، از نظر دینامیکی نامتعادل باشد و در نتیجه باعث لرزش در کل دستگاه می شود.



شکل (۱۳-۵): هم جهت نبودن L و ω در یک وسیله چرخان مانند پنکه به این می انجامد که وسیله در تعادل دینامیکی نباشد

تعیین محورهای اصلی

فرض کنیم گشتاورهای لختی و حاصل ضربهای لختی یک جسم صلب را در یک دستگاه مختصات اختیاری با مبدأ O داشته باشیم. می خواهیم محورهای اصلی با مبدأ O را پیدا کنیم. این عمل قطری کردن تانسور لختی نامیده می شود. از این واقعیت استفاده می کنیم که اگر محور چرخش محور اصلی باشد هم تکانه زاویه ای L و هم سرعت زاویه ای ω در امتداد این محور هستند و در نتیجه با یکدیگر متناسبند. اگر I گشتاور لختی حول محور چرخش باشد، می توانیم بنویسیم

$$L = I\omega = I\omega_x \hat{i} + I\omega_y \hat{j} + I\omega_z \hat{k} \quad (۱۳-۵۹)$$

بنابراین، با استفاده از معادله (۱۳-۴۰) می توانیم بنویسیم

$$L_x = I\omega_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$

$$L_y = I\omega_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \quad (۱۳-۶۰)$$

$$L_z = I\omega_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

یا ، پس از مرتب سازی ،

$$(I_{xx} - I)\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z = 0$$

$$I_{yx}\omega_x + (I_{yy} - I)\omega_y + I_{yz}\omega_z = 0 \quad (۶۱-۱۳)$$

$$I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + (I_{zz} - I)\omega_z = 0$$

برای این که این معادلات جوابهای غیر صفر داشته باشند ، باید دترمینان ضرایب صفر شود ، یعنی

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - I & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - I & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - I \end{vmatrix} = 0 \quad (۶۲-۱۳)$$

معادله (۶۲-۱۳) ، به نام معادله مفسر ، نسبت به I از درجه سه و به شکل زیر است

$$-I^3 + AI^2 + BI + C = 0 \quad (۶۳-۱۳)$$

که A ، B ، و C ثابتند و به مقادیر گشتاورهای لختی و حاصل ضربهای لختی بستگی دارند . هریک از سه ریشه I_x ، I_y ، I_z (یا I_1 ، I_2 ، و I_3) متناظر با گشتاور لختی حول یکی از محورهای اصلی است . این مقادیر I_x ، I_y ، I_z گشتاورهای لختی اصلی نامیده می شوند . جهت هریک از محورهای اصلی با قرار دادن یکی از سه ریشه I_x ، I_y ، I_z ، مثلاً I_x ، به جای I در معادله (۶۱-۱۳) و تعیین مؤلفه های سرعت زاویه ای ω ، یعنی تعیین ω_x ، ω_y ، و ω_z ، مشخص می شود . به این ترتیب می توانیم کسینوسهای هادی محوری را که گشتاور لختی نسبت به آن I_x است تعیین کنیم . مشابه همین روش را برای تعیین جهت محورهای اصلی متناظر با گشتاورهای لختی اصلی I_y و I_z دنبال می کنیم . این روش به تعیین جهت محورها می انجامد . بزرگی سرعت زاویه ای اختیاری است و می توانیم هر مقداری را به آن بدهیم . عناصر گشتاورهای لختی اصلی معمولاً ویژه مقادیر یا مقادیر مفسر ، تانسور لختی نامیده می شوند . جهت های محورهای اصلی ویژه بردار یا بردار مفسر نامیده می شوند .

در بیشتر موارد ، در دینامیک جسم صلب ، جسم دارای شکل منظمی است و محورهای اصلی با تعیین تقارن جسم تعیین می شوند . محور تقارن یک محور اصلی است . به علاوه ، اگر جسم یک جسم دوار باشد و گشتاور لختی آن حول محور تقارن I باشد ، داریم $I_y = I_z$ ؛ در نتیجه معادله مفسر یک ریشه مضاعف دارد . به همین روش ، اگر معادله

مفسری یک ریشه سه گانه داشته باشد، یعنی $I_x = I_y = I_z$ ، فرفره کروی نامیده می شود، و اگر سه ریشه متمایز باشند، یعنی $I_x \neq I_y \neq I_z$ ، فرفره نامتقارن نامیده می شود. جسم را چرخنده می نامیم اگر $I_x = I_y = I_z = 0$ باشد، مانند دمبل و مولکولهای دو اتمی.

اگر یکی از محورهای اصلی از خواص تقارنی یا از راه دیگری معلوم باشد، دو محور دیگر را می توان به روش زیر پیدا کرد. فرض کنیم یکی از محورهای اصلی محور Z باشد؛ در نتیجه دو محور دیگر باید در صفحه XY باشد. چون محور Z محور اصلی است، باید داشته باشیم

$$I_{zx} = I_{zy} = 0 \quad (۱۳-۶۴)$$

و دو معادله اول (۱۳-۶۴) به شکل زیر در می آید

$$(I_{xx} - I)\omega_x + I_{xy}\omega_y = 0 \quad (۱۳-۶۵)$$

$$I_{xy}\omega_x + (I_{yy} - I)\omega_y = 0$$

قرار دهیم

$$\tan \phi = \frac{\omega_y}{\omega_x} \quad (۱۳-۶۶)$$

که در آن ϕ زاویه بین محور اصلی و محور X است. با بردن معادله (۱۳-۶۶) در معادله (۱۳-۶۵) و حذف I از این دو معادله نتیجه می گیریم (رک. مسأله ۱۳-۱۵).

$$\tan 2\phi = \frac{2I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}} \quad (۱۳-۶۷)$$

این معادله دو مقدار برای ϕ بین 0° و 180° به دست می دهد، و اینها جهت های دو محور اصلی در صفحه XY هستند.

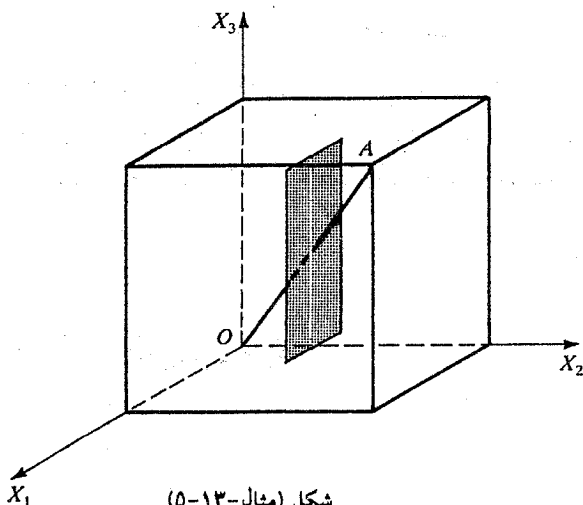
مثال (۱۳-۵): یک مکعب همگن به چگالی ρ ، جرم M و ضلع L ، مانند مورد مثال

(۱۳-۳)، در نظر بگیریم. محورهای اصلی و گشتاورهای لختی متناظر با آنها را پیدا کنید.

تانسور گشتاور لختی مکعب با مبدأ در یک گوشه و محورها در امتداد ضلعها،

آن طور که در مثال (۱۳-۳) محاسبه شد، عبارت است از

$$I = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\gamma & -\frac{1}{4}\gamma & -\frac{1}{4}\gamma \\ -\frac{1}{4}\gamma & \frac{2}{3}\gamma & -\frac{1}{4}\gamma \\ -\frac{1}{4}\gamma & -\frac{1}{4}\gamma & \frac{2}{3}\gamma \end{pmatrix} \gamma, \quad \gamma = ML^2 \quad (1)$$



شکل (مثال-۱۳-۵)

برای محاسبه گشتاورهای لختی، باید معادله مفسر [معادله (۱۳-۶۲)] را حل کنیم، یعنی

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3}\gamma - I & -\frac{1}{4}\gamma & -\frac{1}{4}\gamma \\ -\frac{1}{4}\gamma & \frac{2}{3}\gamma - I & -\frac{1}{4}\gamma \\ -\frac{1}{4}\gamma & -\frac{1}{4}\gamma & \frac{2}{3}\gamma - I \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

سطردوم را از سطر اول کم کنیم و از جمله مشترک $\frac{11}{12}\gamma - I$ در سطر اول فاکتور بگیریم.

$$\left(\frac{11}{12}\gamma - I\right) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{4}\gamma & \frac{2}{3}\gamma - I & -\frac{1}{4}\gamma \\ -\frac{1}{4}\gamma & -\frac{1}{4}\gamma & \frac{2}{3}\gamma - I \end{pmatrix} = 0 \quad (3)$$

که می دهد

$$\left(\frac{11}{12}\gamma - I\right)\left(\frac{11}{12}\gamma - I\right)\left(\frac{1}{6}\gamma - I\right) = 0 \quad (4)$$

در نتیجه سه ریشه زیر را، که می توانند برای تعیین محورهای اصلی به کار گرفته شوند، به دست می آوریم

$$I_1 = \frac{1}{6}\gamma, \quad I_2 = \frac{11}{12}\gamma, \quad I_3 = \frac{11}{12}\gamma \quad (5)$$

چون دو ریشه یکسان است ، یعنی $I_2 = I_3$ ، محور اصلی وابسته به ریشه I_1 محور تقارن است . تانسور گشتاور لختی قطری شده عبارت است از

$$I = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{12}\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{12}\gamma \end{pmatrix} \quad (۶)$$

اکنون جهت‌های محورهای اصلی وابسته به سه ریشه را ارزیابی کنیم . برای ارزیابی محورهای اصلی وابسته به I_1 ، در معادله (۶۱-۱۳) قرار دهیم $I = \frac{1}{6}\gamma$ ، و به جای ω_k قرار دهیم ω_{k1} ، که شاخص دوم ۱ نشان می‌دهد که محورهای اصلی متناظر با $I = I_1$ را بررسی می‌کنیم :

$$\left(\frac{2}{3}\gamma - \frac{1}{6}\gamma\right)\omega_{11} - \frac{1}{4}\gamma\omega_{21} - \frac{1}{4}\gamma\omega_{31} = 0 \quad (۷)$$

$$-\frac{1}{4}\gamma\omega_{11} + \left(\frac{2}{3}\gamma - \frac{1}{6}\gamma\right)\omega_{21} - \frac{1}{4}\gamma\omega_{31} = 0 \quad (۸)$$

$$-\frac{1}{4}\gamma\omega_{11} - \frac{1}{4}\gamma\omega_{21} + \left(\frac{2}{3}\gamma - \frac{1}{6}\gamma\right)\omega_{31} = 0 \quad (۹)$$

با ضرب تمام جملات در $\frac{4}{\gamma}$ ، خواهیم داشت

$$2\omega_{11} - \omega_{21} - \omega_{31} = 0 \quad (۱۰)$$

$$-\omega_{11} + 2\omega_{21} - \omega_{31} = 0 \quad (۱۱)$$

$$-\omega_{11} - \omega_{21} + 2\omega_{31} = 0 \quad (۱۲)$$

کم کردن (۹) از (۱۰) نتیجه می‌دهد

$$\omega_{11} = \omega_{21} \quad (۱۳)$$

با قرار دادن این رابطه در یکی از معادلات پیشین ، خواهیم داشت

$$\omega_{11} = \omega_{12} = \omega_{13} \quad (۱۴)$$

یعنی

$$\omega_{11} : \omega_{12} : \omega_{13} = 1 : 1 : 1 \quad \text{یا} \quad \omega = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k} \quad (۱۵)$$

معادله (۱۵) بیان می‌دارد که وقتی مکعب حول یک محور که گشتاور لختی وابسته به آن $I_1 = \frac{1}{6}ML^2$ است می‌چرخد ، سه مؤلفه ω روی سه محور مختصات برابرند . این

می‌رساند که محور اصلی متناظر با I_1 باید در امتداد قطر مکعب، یعنی، در امتداد OA ، آن طور که در شکل (مثال ۱۳-۵) نشان داده شده است، قرار داشته باشد. چون $I_2 = I_3$ ، دو محور اصلی دیگر باید در صفحه عمود بر محور OA قرار داشته باشند. این صفحه در شکل با هاشور نشان داده شده است. به این ترتیب محور اصلی دوم می‌تواند در هر جهتی در این صفحه انتخاب شود و محور سوم عمود بر محور دوم و در همان صفحه خواهد بود.

تمرین (۱۳-۵): محورهای اصلی و گشتاورهای لختی وابسته را برای تانسور لختی به دست آمده در تمرین (۱۳-۳) محاسبه کنید.

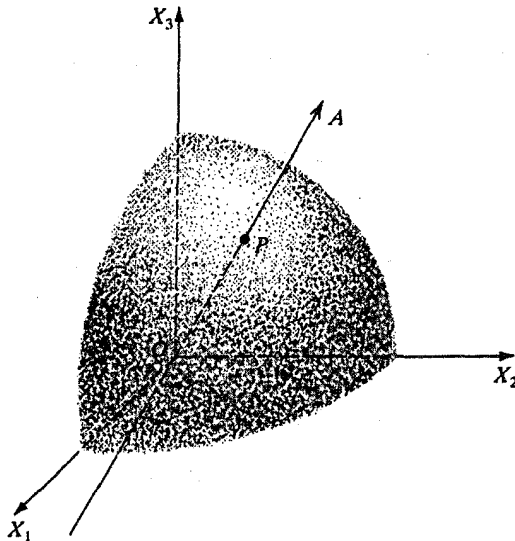
۱۳-۶ بیضوی لختی

بیضوی لختی برای مجسم کردن تانسور لختی بطور هندسی و در نتیجه امکان پیشگویی بعضی از خواص جسم صلب بدون ورود عمیق به جزئیات ریاضی، کمک قابل ملاحظه‌ای می‌کند. حرکت یک جسم صلب بستگی به سه عدد I_1 ، I_2 ، و I_3 ، گشتاورهای لختی اصلی دارد. اجسامی که گشتاورهای لختی اصلی یکسان دارند، مستقل از شکل و ابعادشان، دقیقاً حرکتی یکسانی دارند (به این شرط که از اثرهای نیروهای اصطکاکی و نیروهای دیگری که ممکن است تابع شکل جسم باشند چشم‌پوشی شود). در زیر نشان خواهیم داد که، ساده‌ترین شکل هندسی یک جسم با سه گشتاور لختی اصلی معین یک بیضوی همگن است. از آن جا می‌توانیم نتیجه بگیریم که حرکت هر جسم صلب می‌تواند به وسیله حرکت یک بیضوی معادل نمایش داده شود. یک محور چرخش دلخواه OA را که از یک جسم گذشته است، مطابق شکل (۱۳-۶)، در نظر بگیریم. نقطه P را در روی این محور طوری انتخاب کنیم که فاصله OP مساوی با عکس جذر گشتاور لختی I حول OA باشد، یعنی

$$OP = \frac{1}{\sqrt{I}} \quad (68-13)$$

اگر مختصات OP ، x ، y ، و z و کسینوسهای هادی خط OP ، l ، m ، و n باشند، داریم

$$l = \frac{x}{OP} = x\sqrt{I}, \quad m = \frac{y}{OP} = y\sqrt{I}, \quad n = \frac{z}{OP} = z\sqrt{I} \quad (69-13)$$



شکل (۱۳-۶) : محور چرخش OA در يك جسم با شكل دلخواه و مارِ بر يك نقطه P

به این ترتیب گشتاور لختی یک جسم صلب نسبت به هر محور برحسب کسینوسهای هادی آن محور و عناصر تانسور گشتاور لختی نسبت به یک دستگاه محوره‌ای مختصات که مبدأ آن در روی محور مزبور قرار دارد، عبارت است از

$$I = l^2 I_{xx} + m^2 I_{yy} + n^2 I_{zz} + 2nm I_{yz} + 2ln I_{zx} + 2ml I_{xy} \quad (۷۰-۱۳)$$

با قرار دادن به جای l ، m ، n از معادله (۱۳-۶۹)، معادله (۷۰-۱۳) پس از مرتب سازی شکل زیر را می‌گیرد

$$x^2 I_{xx} + y^2 I_{yy} + z^2 I_{zz} + 2yz I_{yz} + 2zx I_{zx} + 2xy I_{xy} = 1 \quad (۷۱-۱۳)$$

این معادله، معادله یک سطح (مکان هندسی نقطه P) است که وقتی محور OA تغییر می‌کند ایجاد می‌شود. این معادله، معادله یک سطح درجه دوم عمومی در سه بُعد است، و یک سطح بسته است؛ بنابراین باید یک بیضوی باشد. اگر محوره‌ای مختصات محوره‌ای اصلی باشند، معادله (۷۰-۱۳) خواهد شد

$$I = l^2 I_{xx} + m^2 I_{yy} + n^2 I_{zz} \quad (۷۲-۱۳)$$

و بیضوی لختی، معادله (۷۱-۱۳) خواهد شد

$$x^2 I_1 + y^2 I_2 + z^2 I_3 = 1 \quad (۷۳-۱۳)$$

که I_1 ، I_2 ، و I_3 (که به جای I_{xx} ، I_{yy} ، و I_{zz} انشسته اند) گشتاورهای لختی اصلی هستند. دویضوی لختی (۷۱-۱۳) و (۷۳-۱۳) در شکل (۷-۱۳-الف و ب) نشان داده شده اند. یادآوری کنیم که نیم قطرهای بیضوی در شکل (۷-۱۳-الف) عبارتند از

$$\frac{1}{\sqrt{I_{11}}}, \quad \frac{1}{\sqrt{I_{22}}}, \quad \frac{1}{\sqrt{I_{33}}}$$

و نیم قطرهای بیضوی در شکل (۷-۱۳-ب)

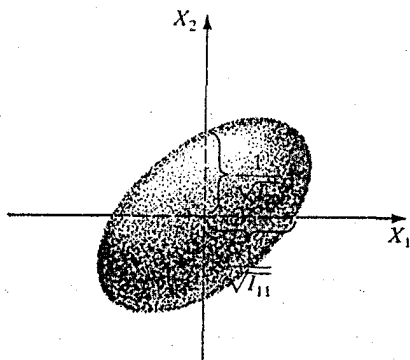
$$\frac{1}{\sqrt{I_1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{I_2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{I_3}}$$

یعنی نیم قطرها عبارتند از

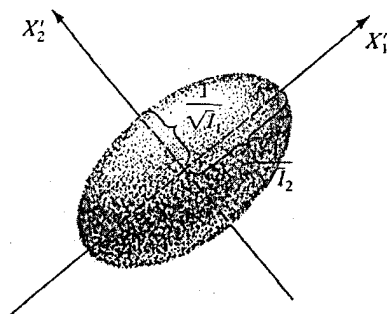
$$x_k = \frac{1}{\sqrt{I_k}} \quad (۷۴-۱۳)$$

همچنین، بیضوی شکل (۷-۱۳-ب) می تواند از (۷-۱۳-الف) با چرخش مناسبی به دست آید. اگر $I_1 = I_2 = I_3$ ، بیضوی لختی به یک کره کاهش می یابد، و گشتاورهای لختی حول

هر محوری که از مرکز بگذرد مساوی است.



(الف)



(ب)

شکل (۷-۱۳): (الف) بیضوی لختی در یک دستگاه محورهای مختصات غیراصولی با

معادله (۷۱-۱۳)، و (ب) بیضوی لختی در یک دستگاه محورهای مختصات اصلی با

معادله (۷۳-۱۳)

۱۳-۷ توضیحات بیشتری در باره خواص تانسور لختی

با تعریف تانسور لختی و تانسورها بطور کلی شروع می کنیم و سپس یک روش اندکی متفاوت برای تعریف تانسور لختی به وسیله ضرب دو تایی (دیاد) ارائه می دهیم، و سرانجام، شباهت بین بررسی تانسورها و ماتریسها را خواهیم دید.

رابطه بین کمیت‌های L و ω را می توان به صورت

$$I = \frac{L}{\omega} \quad (۱۳-۷۵)$$

نوشت ، که I خارج قسمت دو بردار است . بطور کلی ، خارج قسمت دو کمیت برداری لزوماً از نوع عوامل به هم تقسیم شونده نیست . در نتیجه انتظار نداریم که نسبت دو بردار یک بردار باشد . در واقع ، این نسبت کمیت متفاوتی به نام تانسور مرتبه دوم است . در فضای سه بعدی دکارتی ، هر تانسور دکارتی مرتبه N به صورت زیر تعریف می شود : (۱) کمیتی که 3^N مؤلفه $T_{ijk \dots N}$ دارد ، و (۲) تحت تبدیلات متعامد مختصات از قاعده زیر پیروی کند

$$T'_{ijk \dots N}(x') = a_{il} a_{jm} a_{kn} \dots T_{lmn \dots N}(x) \quad (۱۳-۷۶)$$

که a_{jm} ، a_{il} ، . . . عناصر تبدیل هستند . چون از دستگاه مختصات دیگری غیر از دکارتی استفاده نمی کنیم ، به جای جمله تانسور دکارتی T ، فقط جمله تانسور T را به کار می بریم . بنا به این تعریف ، برای $N=0$ داریم $1=3^0$ ، یعنی تانسور مرتبه صفر فقط یک مؤلفه دارد . از این رو این کمیت تحت یک تبدیل متعامد ناورد است . می توانیم بگوییم که یک نرده ای تانسور مرتبه صفر است و فقط یک مؤلفه دارد . از سوی دیگر اگر $N=1$ باشد ؛ $3^1=3$ ؛ تانسور مرتبه اول سه مؤلفه دارد . این مؤلفه ها ، بنابر معادله (۱۳-۷۶) ، به شکل زیر

$$T'_i = a_{ij} T_j \quad (۱۳-۷۷)$$

تبدیل می شوند که شبیه به معادله تبدیل یک بردار است . بنابراین یک بردار یک تانسور مرتبه اول است ، و سه مؤلفه دارد . برای $N=2$ ، یک تانسور مرتبه دوم سه مؤلفه دارد ، که به صورت زیر تبدیل می شوند

$$T'_{ij} = a_{il} a_{jm} T_{lm} \quad (۱۳-۷۸)$$

این تبدیل شبیه به یک ماتریس مربعی 3×3 است ، به استثنای یک تفاوت مهم بین آن دو . برخلاف یک تانسور مرتبه دوم ، یک تبدیل ماتریسی محدود به فقط تبدیل متعامد نیست .

به رغم این تفاوتها، از خواص ماتریسها در تانسورها استفاده خواهیم کرد.

راه دیگر نمایش یک تانسور I مانند یک دیاد است. با تعریف تکانه زاویه ای، معادله

(۱۳-۳۸)، شروع می کنیم:

$$L = \sum_{i=1}^n m_i [r_i^2 \omega - r_i (r_i \cdot \omega)] \quad (13-38)$$

یا می توانیم آن را به صورت

$$L = \left(\sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \right) \omega - \left(\sum_{i=1}^n m_i r_i r_i \right) \cdot \omega \quad (13-79)$$

بنویسیم. جمله دوم طرف راست معنی ندارد، زیرا هنوز کمیتهای به شکل $r_i r_j$ را تعریف نکرده ایم. یک دیاد (دوتایی) را به صورت زوج ساده ای از دو بردار که به شکل AB نوشته می شود تعریف می کنیم. کمیته AB تنها وقتی معنی دارد که روی کمیتهای دیگر عمل کند. به این ترتیب حاصل ضرب نرده ای یک دیاد با یک بردار C را به عنوان برداری تعریف می کنیم که با رابطه زیر تعریف می شود

$$(AB) \cdot C = A(B \cdot C) \quad (13-80)$$

یا

$$C \cdot (AB) = (C \cdot A)B \quad (13-81)$$

که C. B یک نرده ای $(b_1 c_1 + b_2 c_1 + b_3 c_3)$ است. بنابراین C. (AB) یک بردار است. همچنین (AB). C یک بردار است. اما دو بردار معادلات (۱۳-۸۰) و (۱۳-۸۱) معمولاً برابر نیستند. یعنی، ضرب نرده ای یک دیاد با یک بردار جابه جایی پذیر نیست. اگر قرار دهیم

$$T = AB \quad (13-82)$$

می توانیم بنویسیم

$$T \cdot C = A(B \cdot C) \quad (13-83)$$

$$C \cdot T = (C \cdot A)B \quad (13-84)$$

همچنین

$$T \cdot (C + D) = T \cdot C + T \cdot D \quad (13-85)$$

$$\mathbf{T} \cdot (c\mathbf{C}) = c(\mathbf{T} \cdot \mathbf{C}) \quad (۱۳-۸۶)$$

که c مقداری ثابت است .

یک چندجمله‌ای خطی از دیادها ، مانند $\mathbf{AB} + \mathbf{CD} + \dots$ یک دیا دیک نامیده می شود .
 در واقع ، هر دیا د را می توان به صورت یک دیا دیک بیان کرد . اگر بردارهای \mathbf{A} و \mathbf{B} را بر حسب
 بردارهای یکه بنویسیم ، یعنی

$$\mathbf{C} = c_1 \hat{\mathbf{i}} + c_2 \hat{\mathbf{j}} + c_3 \hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{A} = a_1 \hat{\mathbf{i}} + a_2 \hat{\mathbf{j}} + a_3 \hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{B} = b_1 \hat{\mathbf{i}} + b_2 \hat{\mathbf{j}} + b_3 \hat{\mathbf{k}}$$

دیا د \mathbf{AB} می تواند به صورت دیا دیک زیر نوشته شود

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = \mathbf{AB} &= a_1 b_1 \hat{\mathbf{i}}\hat{\mathbf{i}} + a_1 b_2 \hat{\mathbf{i}}\hat{\mathbf{j}} + a_1 b_3 \hat{\mathbf{i}}\hat{\mathbf{k}} \\ &+ a_2 b_1 \hat{\mathbf{j}}\hat{\mathbf{i}} + a_2 b_2 \hat{\mathbf{j}}\hat{\mathbf{j}} + a_2 b_3 \hat{\mathbf{j}}\hat{\mathbf{k}} \\ &+ a_3 b_1 \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{i}} + a_3 b_2 \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{j}} + a_3 b_3 \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (۱۳-۸۷)$$

بنابراین ، در نمادگذاری ماتریسی ، می توانیم بنویسیم

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} \quad (۱۳-۸۸)$$

هر مؤلفه \mathbf{T} به صورت T_{ij} نوشته می شود .

به شکل مؤلفه ای ، می توانیم بنویسیم

$$\mathbf{C} = \sum_{j=1}^3 c_j \hat{\mathbf{u}}_j \quad (۱۳-۸۹)$$

که $\hat{\mathbf{u}}_j = (\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2, \hat{\mathbf{u}}_3)$ بردارهای یکه هستند . از این رو

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{C})_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij} c_j \quad (۱۳-۹۰)$$

$$(\mathbf{C} \cdot \mathbf{T})_i = \sum_{j=1}^3 c_j T_{ji} \quad (۱۳-۹۱)$$

$$T_{ij} = \hat{\mathbf{u}}_i \cdot (\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{u}}_j) = (\hat{\mathbf{u}}_i \cdot \mathbf{T}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_j \quad (۱۳-۹۲)$$

$$\mathbf{T} = \sum_{i,j=1}^3 T_{ij} \hat{u}_i \hat{u}_j \quad (۹۳-۱۳)$$

اکنون می توانیم یک دیادیک یکه به صورت

$$\mathbf{1} = \hat{i}\hat{i} + \hat{j}\hat{j} + \hat{k}\hat{k} \quad (۹۴-۱۳)$$

تعریف کنیم ، که $\mathbf{1}$ درست مانند یک ماتریس یکه رفتار می کند و می دهد

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{A} \quad (۹۵-۱۳)$$

همچنین می توانیم $\mathbf{1}$ را به عنوان یک تانسور یکه به صورت زیر تعریف کنیم

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (۹۶-۱۳)$$

بالاخره ، از این واقعیت که هر تانسور مرتبه دوم شباهت بسیار زیادی به ماتریس مربعی 3×3 دارد بهره زیادی می بریم . از این رو ، خواص تبدیل مختصات دکارتی متعامد می تواند در این جابه کار گرفته شود . بایک بردار \mathbf{L} که در فضا یا در یک دستگاه مختصات لخت تثبیت شده است بطوری که

$$L_k = \sum_i I_{ki} \omega_i \quad (۹۷-۱۳)$$

باشد ، شروع کنیم . در یک دستگاه مختصات جسمی که نسبت به مختصات فضایی فقط دوران می کند ، تکانه زاویه ای \mathbf{L}' باید شکل مشابهی داشته باشد :

$$L'_i = \sum_j I'_{ij} \omega'_j \quad (۹۸-۱۳)$$

با به کارگیری خواص تبدیل بردارها از معادله (۵-۱۶۶) ، یعنی

$$x_i = \sum_j \lambda_{ji} x'_j \quad (۱۶۶-۵)$$

که λ_{ij} عنصر ماتریس تبدیل λ است ، می توانیم تبدیل \mathbf{L} و ω را به صورت

$$L_k = \sum_m \lambda_{mk} L'_m \quad (۹۹-۱۳)$$

$$\omega_l = \sum_j \lambda_{jl} \omega'_j \quad (۱۰۰-۱۳)$$

بنویسیم . با بردن این روابط در معادله (۱۳-۹۷) ، نتیجه خواهیم گرفت

$$\sum_m \lambda_{mk} L'_m = \sum_l I_{kl} \sum_j \lambda_{jl} \omega'_j \quad (۱۰۱-۱۳)$$

دو طرف را در λ_{ik} ضرب می کنیم و روی k جمع بندی می کنیم

$$\sum_m \left(\sum_k \lambda_{ik} \lambda_{mk} \right) L'_m = \sum_j \left(\sum_{k,l} \lambda_{ik} \lambda_{jl} I_{kl} \right) \omega'_j \quad (۱۰۲-۱۳)$$

طرف چپ را می توان به صورت زیر نوشت

$$\sum_m \left(\sum_k \lambda_{ik} \lambda_{mk} \right) L'_m = \sum_m \delta_{im} L'_m = L'_i$$

یعنی

$$L'_i = \sum_j \left(\sum_{k,l} \lambda_{ik} \lambda_{jl} I_{kl} \right) \omega'_j \quad (۱۰۳-۱۳)$$

اما این باید با معادله (۱۳-۹۸) یکسان باشد . از مقایسه این دو نتیجه می شود

$$I'_{ij} = \sum_{k,l} \lambda_{ik} \lambda_{jl} I_{kl} \quad (۱۰۴-۱۳)$$

به این ترتیب هر عنصر I'_{ij} از تانسور لختی I' را در دستگاه مختصات چرخان می توان از

عناصر I_{ij} از تانسور لختی I در دستگاه مختصات ثابت ، به دست آورد . نتیجه پیشین را می توان

به صورت زیر نوشت

$$I'_{ij} = \sum_{k,l} \lambda_{ik} I_{kl} \lambda'_{lj} \quad (۱۰۵-۱۳)$$

که در آن عناصر ماتریس ترانهاد λ' هستند . درست همانند نمادگذاری ماتریسی ، می توانیم

بنویسیم

$$I' = \lambda I \lambda' \quad (۱۰۶-۱۳)$$

چون برای تبدیلات متعامد داریم $\lambda' = \lambda^{-1}$ که λ^{-1} ماتریس وارون است ، می توانیم بنویسیم

$$I' = \lambda I \lambda^{-1} \quad (۱۰۷-۱۳)$$

که تبدیل تشابهی است (I' متشابه I است).

این نتایج روش انتقال یک تانسور لختی از یک دستگاه به دستگاه چرخیده را با استفاده از ماتریس چرخش به ما نشان می دهد. به علاوه، می توانیم این روش را با تعیین ویژه مقادیر از معادلهٔ مفسر

$$|I_{ml} - I\delta_{ml}| = 0 \quad (108-13)$$

یعنی

$$\begin{vmatrix} I_{11} - I & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} - I & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} - I \end{vmatrix} = 0 \quad (109-13)$$

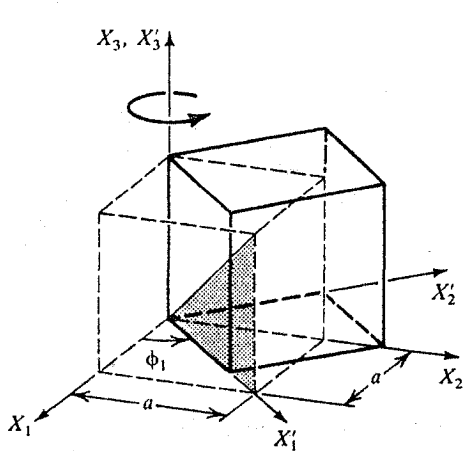
که همانند معادلهٔ (۱۳-۶۲) است، برای تعیین محورهای اصلی به کار بریم. این نکات در مثال زیر نمایان می شوند.

مثال (۱۳-۶): تانسور لختی مکعب را با چرخاندن محورهای مختصات قطری کنید.

مانند قبل، مبدأ را در یکی از گوشه های مکعب می گیریم. باید چرخش را طوری انجام دهیم که محور X_1 منطبق بر قطر مکعب شود. این کار می تواند با دو چرخش انجام گیرد: (۱) یک چرخش به اندازهٔ زاویهٔ $\phi_1 = 45^\circ$ حول محور X_3 ، و (۲) چرخش دیگر به اندازهٔ $\phi_2 = \cos^{-1} \sqrt{\frac{2}{3}}$ حول محور X'_2 ، همان طوری که در شکل (مثال ۱۳-۶) نشان داده شده است. به این ترتیب دو ماتریس متناظر با این دو چرخش عبارتند از

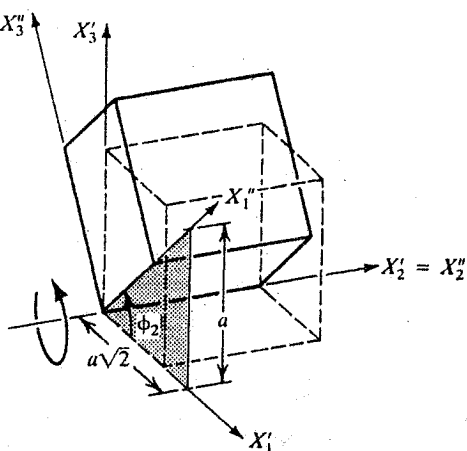
$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} \cos \phi_1 & \sin \phi_1 & 0 \\ -\sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\lambda_2 = \begin{pmatrix} \cos \phi_2 & 0 & \sin \phi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi_2 & 0 & \cos \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \quad (2)$$



$$\phi_1 = 45^\circ$$

(الف)



$$\cos \phi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \sin \phi_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

(ب)

شکل (مثال-۱۳-۶)

چرخش کلی توسط یک ماتریس λ به صورت زیر نمایش داده می شود

$$\lambda = \lambda_2 \lambda_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (۳)$$

با دانستن λ می توانیم تانسور وارون

$$I' = \lambda I \lambda' \quad (۴)$$

را محاسبه کنیم. با $\gamma = ML^2$ و I که در مثال (۱۳-۳) داده شده است می توانیم نخست I را در λ' و سپس λ را در نتیجه ضرب کنیم و بدین ترتیب I' را محاسبه کنیم؛

یعنی

$$I' = \frac{\gamma}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{\frac{3}{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (5)$$

یا

$$I' = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{12} \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{12} \gamma \end{pmatrix} \quad (6)$$

که همان نتیجه‌ای است که قبلاً در مثال (۱۳-۵) به دست آوردیم. به این ترتیب برای قطری کردن تانسور لختی روش دومی در اختیار داریم. اگر از پیش یکی از محورهای اصلی را از ملاحظات تقارنی نداشته باشیم، این روشها می‌توانند خیلی پیچیده باشند. **نمونه (۱۳-۶):** تانسور لختی جسم مکعب مستطیل شکل مثال (۱۳-۳) را با چرخش محورهای مختصات قطری کنید.

۱۳-۸ زوایای اولر

می‌خواهیم ماتریسی را محاسبه کنیم که با آن بتوانیم یک دستگاه مختصات را به یک دستگاه دیگر تبدیل کنیم. به بیان دیگر، می‌خواهیم از مختصات X' یک دستگاه مختصات ثابت یا لخت به مختصات X یک دستگاه مختصات جسمی برسیم. این تبدیل می‌تواند توسط یک معادله ماتریسی

$$X = \lambda X' \quad (13-110)$$

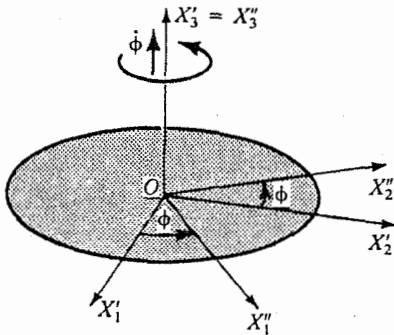
نمایش داده شود که ماتریس چرخش λ کاملاً جهت‌گیری نسبی دو دستگاه را مشخص می‌کند. این ماتریس چرخشی باید شامل سه زاویه مستقل باشد. از چندانتخاب ممکن برای این زاویه‌ها، متداولترین و مناسبترین آنها برای استفاده، زوایای اولرند که با θ ، ϕ و ψ نمایش داده می‌شوند. برای رفتن از دستگاه X' به دستگاه X ، مجموعه سه چرخش زاویه‌ای زیر، آن طور که

در شکل (۱۳-۸) نشان داده شده است، به کار گرفته می‌شود

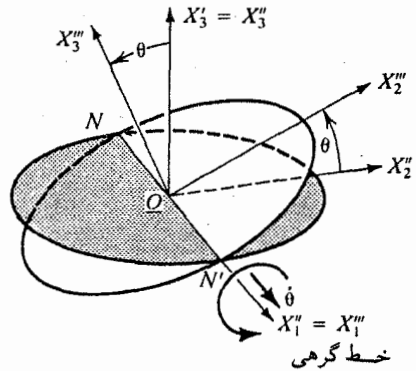
۱- چرخش اول به اندازه زاویه ϕ در جهت پاد ساعتگرد حول محور X''_3 و در صفحه $X'_1 - X'_2$ انجام می‌گیرد و، آن طور که در شکل (۱۳-۸ الف) نشان داده شده است، تبدیل $X'_1 \rightarrow X''_1$ را انجام می‌دهد. ماتریس تبدیل برای این چرخش در صفحه $X'_1 - X'_2$ عبارت است از

$$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (۱۳-۱۱۱)$$

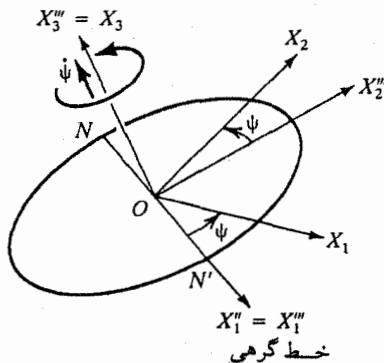
زاویه ϕ زاویه تقدیمی نامیده می‌شود.



(الف)



(ب)



(پ)

شکل (۱۳-۸) : مجموعه سه چرخش زاویه‌ای که برای رفتن از دستگاه X' به دستگاه X به کار می‌رود

۲- چرخش دوم به اندازه زاویه θ در جهت پاد ساعتگرد حول محور X''_1 در صفحه $X''_2 - X''_3$ انجام می گیرد و ، آن طور که شکل (۱۳-۸) نشان می دهد ، تبدیل $X''_1 \rightarrow X'''_1$ را انجام می دهد . ماتریس تبدیل برای این چرخش در صفحه $X''_2 - X''_3$ عبارت است از

$$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (112-13)$$

زاویه θ زاویه ترقصی نام دارد .

۳- چرخش سوم به اندازه زاویه ψ در جهت پاد ساعتگرد حول محور X'''_3 در صفحه $X'''_1 - X'''_2$ انجام می گیرد و تبدیل $X'''_1 \rightarrow X_1$ را انجام می دهد، که در شکل (۱۳-۸) نشان داده شده است . ماتریس تبدیل برای این چرخش عبارت است از

$$R_\psi = \begin{pmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (113-13)$$

زاویه ψ زاویه جسمی نامیده می شود .

خط NN' که از تقاطع صفحه محورهای $X_1 - X_2$ در دستگاه جسمی با صفحه محورهای $X'_1 - X'_2$ در دستگاه ثابت ایجاد شده است خط گرهی نامیده می شود . تبدیل از دستگاه مختصات ثابت X'_i به دستگاه مختصات جسمی X_i با ماتریس چرخش λ که از ضرب سه ماتریس R_ψ ، R_θ ، و R_ϕ به دست آمده است نمایش داده می شود . یعنی

$$\lambda = R_\psi R_\theta R_\phi \quad (114-13)$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \cos \Psi \cos \phi & \cos \Psi \cos \phi & \sin \Psi \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \phi \sin \Psi & +\cos \theta \cos \phi \sin \Psi & \\ -\sin \Psi \cos \phi & -\sin \Psi \sin \phi & \cos \Psi \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \phi \cos \Psi & +\cos \theta \cos \phi \cos \Psi & \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (115-13)$$

هر چرخش بی نهایت کوچک می تواند توسط نمادبرداری نمایش داده شود. این نکته ما را قادر می سازد تا سه مشق زمانی چرخش، یعنی $\dot{\phi}$ ، $\dot{\theta}$ و $\dot{\psi}$ ، را به عنوان مؤلفه های برداری یک بردار سرعت زاویه ای $(\omega_\phi, \omega_\theta, \omega_\psi)$ نمایش دهیم. سه مؤلفه ω تماماً در امتداد محورهای ثابت یا محورهای جسمی نیستند. در واقع،

$$\begin{aligned} \omega_\phi &= \dot{\phi} & X_3 \text{ (ثابت)} & \text{ در جهت محور} \\ \omega_\theta &= \dot{\theta} & & \text{ در جهت خط گرهی} \end{aligned} \quad (۱۱۶-۱۳)$$

$$\omega_\psi = \dot{\psi} \quad X_3 \text{ (جسمی)} \quad \text{در جهت محور}$$

این مؤلفه ها برای توصیف حرکت یک جسم صلب خیلی مناسب نیستند. معادلات حرکت جسم صلب بر حسب دستگاه مختصات جسمی توصیف می شوند. بنابراین باید بردار سرعت زاویه ای $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ در دستگاه مختصات جسمی را حساب کنیم. برای این کار باید نخست $\dot{\phi}$ ، $\dot{\theta}$ ، و $\dot{\psi}$ را در امتداد محورهای جسمی تجزیه کنیم

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \Psi & X_1 \text{ محور} & \text{ در جهت محور} \\ \dot{\phi}_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \Psi & X_2 \text{ محور} & \text{ در جهت محور} \end{aligned} \quad (۱۱۷-۱۳)$$

$$\dot{\phi}_3 = \dot{\phi} \cos \theta \quad X_3 \text{ محور} \quad \text{در جهت محور}$$

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta} \cos \Psi \quad X_1 \text{ محور} \quad \text{در جهت محور}$$

$$\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta} \sin \Psi \quad X_2 \text{ محور} \quad \text{در جهت محور} \quad (۱۱۸-۱۳)$$

$$\dot{\theta}_3 = 0 \quad X_3 \text{ محور} \quad \text{در جهت محور}$$

$$\dot{\psi}_1 = 0 \quad X_1 \text{ محور} \quad \text{در جهت محور}$$

$$\dot{\psi}_2 = 0 \quad X_2 \text{ محور} \quad \text{در جهت محور} \quad (۱۱۹-۱۳)$$

$$\dot{\psi}_3 = \dot{\psi} \quad X_3 \text{ محور} \quad \text{در جهت محور}$$

با استفاده از این نتایج مؤلفه های ω را به صورت زیر به دست می آوریم

$$\omega_1 = \dot{\phi}_1 + \dot{\theta}_1 + \dot{\psi}_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \Psi + \dot{\theta} \cos \Psi$$

$$\omega_2 = \dot{\phi}_2 + \dot{\theta}_2 + \dot{\psi}_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \Psi - \dot{\theta} \sin \Psi \quad (۱۲۰-۱۳)$$

$$\omega_3 = \dot{\phi}_3 + \dot{\theta}_3 + \dot{\psi}_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}$$

این معادلات، معادلات هندسی اولر نامیده می شوند. این معادلات را حرکت جسم صلب با به کارگیری محورهای جسمی مورد استفاده قرار ناکید بر این نکته مهم است که جابه جاییهای زاویه ای و دیگر

وقتی می توانند به صورت برداری نمایش داده شوند که این کمیات بی نهایت کوچک باشند ، و در این صورت از قاعده جمع برداری پیروی می کنند . موردی که در آن چرخشها در یک صفحه هستند از این قاعده مستثناست .

۱۳-۹ معادلات اولری حرکت برای یک جسم صلب

حرکت انتقالی یک جسم صلب با معادلات زیر توصیف می شود

$$F = \frac{dP}{dt}, \quad P = MV \quad (13-121)$$

F نیروی منتسجه وارد به جسم ، P تکانه خطی ، M جرم و V سرعت مرکز جرم آن است . حرکت چرخشی جسم با معادله

$$\tau = \frac{dL}{dt}, \quad L = I\omega \quad (13-122)$$

توصیف می شود که τ گشتاور نیروی خالص وارد به جسم صلب ، L تکانه زاویه ای ، ω سرعت زاویه ای ، و I تانسور لختی آن است .

روشهای به کار رفته در حل معادلات حرکت انتقالی را می توان فقط در مورد خاصی که حرکت چرخشی محدود به دوران حول یک محور ثابت است ، مستقیماً به حرکت چرخشی گسترش داد . مورد کلی ، همان طور که در زیر توضیح داده می شود ، چنین نیست .

کمیت M یک نرده ای است و همیشه ثابت می ماند ، در حالی که I یک تانسور است و بستگی به دستگاه مختصات دارد . این می رساند که ، با این که P همیشه موازی با V است ، L نیازی به موازی بودن با ω ندارد . برای یک جسم صلب ، I تنها وقتی ثابت می ماند که دستگاه محورهای مختصات با خود جسم بچرخد . به علاوه ، در حرکت چرخشی ، مجموعه مقارنی از سه مختصه که بتواند برای توصیف جهت گیری جسم صلب به کار گرفته شود وجود ندارد . بر این مشکلات وقتی پیروز خواهیم شد که برای توصیف حرکت جسم صلب ، (۱) فرض کنیم که محورهای X_i جسمی محورهای اصلی هستند ، و (۲) از زوایای اولر (ψ, θ, ϕ) به عنوان متغیرهای هندسی برای توصیف جهت گیری جسم استفاده کنیم . از بحثهای پیشین باید روشن شده باشد که ، توصیف حرکت یک جسم صلب آزاد پیش از بحث مورد عمومی آسانتر است . برای یک حرکت آزاد انرژی پتانسیل $V = 0$ است . لاگرانژی $L = T - V = T$ به انرژی جنبشی چرخشی منحصر است ، در نتیجه

$$T = \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2 \quad (۱۲۳-۱۳)$$

معادله لاگرانژ برای مختصه Ψ عبارت است از

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\Psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \Psi} = 0 \quad (۱۲۴-۱۳)$$

که می تواند به صورت

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{\Psi}} \right) - \left(\sum_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial \Psi} \right) = 0 \quad (۱۲۵-۱۳)$$

نوشته شود. با استفاده از مقدار $\omega(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ از معادله (۱۲۰-۱۳) و مشتق گیری نسبت به Ψ ، نتیجه خواهیم گرفت

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \Psi} = \dot{\phi} \sin \theta \cos \Psi - \dot{\theta} \sin \Psi = \omega_2 \quad (۱۲۶-۱۳) \text{ الف}$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial \Psi} = -\dot{\phi} \sin \theta \sin \Psi - \dot{\theta} \cos \Psi = -\omega_1 \quad (۱۲۶-۱۳) \text{ ب}$$

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial \Psi} = 0 \quad (۱۲۶-۱۳) \text{ پ}$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \Psi} = \frac{\partial \omega_2}{\partial \Psi} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial \Psi} = 1 \quad (۱۲۷-۱۳)$$

و از معادله (۱۲۳-۱۳) داریم

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_i} = I_i \omega_i \quad (۱۲۸-۱۳)$$

با استفاده از معادلات (۱۲۶-۱۳)، (۱۲۷-۱۳)، و (۱۲۸-۱۳)، معادله (۱۲۵-۱۳) به شکل

$$\frac{d}{dt} (I_3 \omega_3) - I_1 \omega_1 \omega_2 - I_2 \omega_2 (-\omega_1) = 0$$

یا

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 = 0 \quad (۱۲۹-۱۳) \text{ الف}$$

در می آید. به همین نحو برای $\dot{\omega}_1$ و $\dot{\omega}_2$ می توانیم بنویسیم

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_3 \omega_2 = 0 \quad (۱۲۹-۱۳) \text{ ب}$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = 0 \quad (129-13) \text{ پ}$$

معادلات (۱۲۹-۱۳) معادلات اولر برای حرکت آزاد یک جسم صلب هستند. توجه به این نکته مهم است که معادله (۱۲۹-۱۳ الف) برای ω_3 ، معادله لاگرانژ برای مختصه ψ است، در حالی که معادلات (۱۲۹-۱۳ ب) و (۱۲۹-۱۳ پ) برای ω_1 و ω_2 معادلات لاگرانژ برای مختصات ϕ و θ نیستند.

اکنون به پیدا کردن معادلات اولر برای حرکت جسم صلب در یک میدان نیرو می پردازیم. بار دیگر، به معادله (۱۲۳-۱۳) باز گردیم، که حرکت یک جسم صلب را از دید یک دستگاه مختصات ثابت، لخت، یا آزمایشگاهی (LCS) توصیف می کند و می تواند به صورت

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt} (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\tau} \quad (130-13)$$

نوشته شود. دقت کنیم که وقتی جسم می چرخد \mathbf{I} تغییر می کند. برای چیره شدن به این مشکل، معادله (۱۳۰-۱۳) را به مجموعه محورهایی که به جسم چرخان متصل است می بریم. اگر $\frac{d}{dt}$ را مشتق زمانی نسبت به محورهای مختصات ثابت در جسم بگیریم، با استفاده از نتایج داده شده در فصل ۱۱ [معادله (۱۱-۲۶)]، معادله (۱۳۰-۱۳) به شکل زیر در می آید

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d'\mathbf{L}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \boldsymbol{\tau} \quad (131-13)$$

چون $\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$ ، که \mathbf{I} نسبت به محورهای جسمی ثابت است، می توانیم آن را در معادله (۱۳۱-۱۳) قرار دهیم و نتیجه بگیریم

$$\frac{d'(\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega})}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\tau} \quad (132-13)$$

$$\mathbf{I} \cdot \frac{d'\boldsymbol{\omega}}{dt} + \frac{d'\mathbf{I}}{dt} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\tau}$$

اما

$$\frac{d'\mathbf{I}}{dt} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{d'\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \quad (133-13)$$

که وقتی در معادله (۱۳۲-۱۳) برده می شود نتیجه می دهد

$$\mathbf{I} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\tau} \quad (134-13)$$

برای سادگی، فرض کنیم محورهای جسمی محورهای اصلی باشند بطوری که

$$\mathbf{L} = I \cdot \boldsymbol{\omega} = \hat{i}L_1 + \hat{j}L_2 + \hat{k}L_3$$

همچنین

$$L_i = I_i \omega_i$$

یعنی

$$L_1 = I_1 \omega_1, \quad L_2 = I_2 \omega_2, \quad L_3 = I_3 \omega_3$$

با استفاده از این روابط، معادله (۱۳-۱۳۴) را می توان در شکل مؤلفه ای به صورت زیر نوشت

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_3 \omega_2 = \tau_1 \quad (۱۳-۱۳۵ \text{ الف})$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = \tau_2 \quad (۱۳-۱۳۵ \text{ ب})$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 = \tau_3 \quad (۱۳-۱۳۵ \text{ پ})$$

این معادلات به نام معادلات دینامیکی اولر یا بطور ساده معادلات اولر برای حرکت جسم صلب در یک میدان نیرو نامیده می شوند. در نبود گشتاور نیرو، معادلات (۱۳-۱۳۵) به معادلات (۱۳-۱۲۹) کاهش می یابند. به علاوه، برای گشتاور نیروی خارجی صفر، تکانه زاویه ای باید هم از نظر بزرگی و هم از نظر جهت ثابت بماند. به این علت معادلات اولر ایجاب می کنند که اگر $\omega_1 \neq 0$ ، نتیجه می شود $\omega_2 = \omega_3 = 0$ ، و اگر $\omega_2 \neq 0$ ، نتیجه می شود $\omega_1 = \omega_3 = 0$. این نتایج ایجاب می کنند که در نبود گشتاور نیروی خارجی، فقط چرخش حول محورهای اصلی جسمی امکان پذیر است.

همان طور که از بحثمان روشن است، سه عنصر گشتاور لختی اصلی I_1 ، I_2 ، و I_3 حرکت جسم صلب را تعیین می کنند. هر دو جسم صلبی که یک گشتاور لختی اصلی داشته باشند، صرف نظر از ساختار و شکلشان، دارای یک رفتار خواهند بود. حرکتهای چنین اجسامی به وسیله یک بیضوی معادل که، همان طور که در بخش ۱۳-۶ بحث شد، با عناصر گشتاور لختی ساخته می شود، توصیف می شوند.

۱۳-۱۰ حرکت آزاد يك فرفره متقارن

معادلات اولر، معادلات (۱۳-۱۲۹)، را می توانیم برای مورد خاصی که در آن $\tau = 0$ باشد حل کنیم. به علاوه، بحث خود را به موردی که در آن جسم تقارن دارد، یعنی، فرفره

مقتارنی که دو تا از گشتاورهای لختی اصلی آن برابرند ، محدود می کنیم . محور X_3 را در امتداد محور تقارن می گیریم بنابراین $I_1 = I_2 = I_{12} \neq I_3$. به این ترتیب معادلات (۱۳-۱۲۹) به معادلات زیر کاهش می یابند

$$I_{12}\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_{12})\omega_2\omega_3 = 0 \quad (13-136)$$

$$I_{12}\dot{\omega}_2 + (I_{12} - I_3)\omega_1\omega_3 = 0 \quad (13-137)$$

$$I_3\dot{\omega}_3 = 0 \quad (13-138)$$

قبل از حل این معادلات ، دو نکته باید روشن شود . اولاً ، چون حرکت آزاد است ، مرکز جرم جسم باید ساکن یا با حرکت یکنواخت باشد . اگر فرض کنیم مرکز جرم ساکن است و در مبدأ یک دستگاه مختصات ثابت یا آزمایشگاهی قرار دارد ، چیزی از عمومیت مسأله کاسته نخواهد شد . ثانیاً ، فرض کنیم سرعت زاویه ای ω در امتداد یکی از محورهای اصلی دستگاه مختصات جسمی نیست ، زیرا در غیر این صورت مسأله یک مسأله پیش پا افتاده خواهد بود .

از معادله (۱۳-۱۳۸) ، چون $I_3 \neq 0$ ، خواهیم داشت $\omega_3 = 0$ ، که پس از انتگرال گیری

نتیجه می دهد

$$\omega_3(t) = \text{constant} \quad (13-139)$$

این معادله بیان می دارد که برای هر جسم صلب با سرعت زاویه ای ω ، مؤلفه سرعت زاویه ای در امتداد محور تقارن ، ω_3 ، ثابت می ماند . (اگر ω در امتداد محور X_3 ، محور اصلی ، بود ، کل سرعت زاویه ای ω ثابت می ماند)

معادلات (۱۳-۱۳۶) و (۱۳-۱۳۷) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\dot{\omega}_1 + \frac{I_3 - I_{12}}{I_{12}} \omega_3 \omega_2 = 0 \quad (13-140)$$

$$\dot{\omega}_2 - \frac{I_3 - I_{12}}{I_{12}} \omega_3 \omega_1 = 0 \quad (13-141)$$

Ω (یا دقیقتر بگوییم Ω_B) را به شکل

$$\Omega_B \equiv \frac{I_3 - I_{12}}{I_{12}} \omega_3 = \gamma \omega_3 \quad (13-142)$$

تعریف کنیم و معادلات (۱۳-۱۴۰) و (۱۳-۱۴۱) را به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$\dot{\omega}_1 + \Omega_B \omega_2 = 0 \quad (۱۴۳-۱۳)$$

$$\dot{\omega}_2 - \Omega_B \omega_1 = 0 \quad (۱۴۴-۱۳)$$

این معادلات دو معادله مرتبه اول جفت شده هستند و به روش معمولی می توان آنها را حل کرد. معادله دوم را در i ضرب کنیم و با اولی جمع کنیم، یعنی

$$(\dot{\omega}_1 + i\dot{\omega}_2) - i\Omega_B(\omega_1 + i\omega_2) = 0 \quad (۱۴۵-۱۳)$$

با قرار دادن

$$\eta \equiv \omega_1 + i\omega_2 \quad (۱۴۶-۱۳)$$

$$\dot{\eta} = \dot{\omega}_1 + i\dot{\omega}_2 \quad (۱۴۷-۱۳)$$

در معادله (۱۴۵-۱۳)، خواهیم داشت

$$\dot{\eta} - i\Omega_B \eta = 0 \quad (۱۴۸-۱۳)$$

با این فرض که برای $t=0$ زاویه فاز $\delta=0$ است، جواب معادله (۱۴۸-۱۳) عبارت است از

$$\eta(t) = A e^{i\Omega_B t} \quad (۱۴۹-۱۳)$$

یا

$$\omega_1 + i\omega_2 = A \cos \Omega_B t + iA \sin \Omega_B t \quad (۱۵۰-۱۳)$$

که A یک ثابت اختیاری است. مقایسه دو طرف می دهد

$$\omega_1(t) = A \cos \Omega_B t \quad (۱۵۱-۱۳)$$

$$\omega_2(t) = A \sin \Omega_B t \quad (۱۵۲-۱۳)$$

از مربع کردن دو معادله و جمع کردن آنها نتیجه می شود

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = A^2 \quad (۱۵۳-۱۳)$$

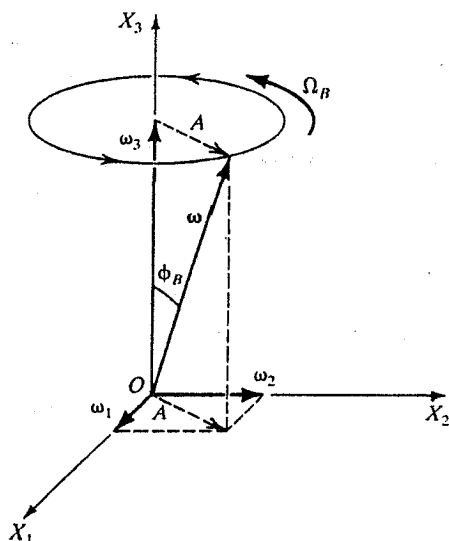
یعنی، مجموع مربعهای مؤلفه های ω_1 و ω_2 ی سرعت زاویه ای ثابت و برابر با A^2 است. به علاوه، طبق معادله (۱۳۹-۱۳)، ω_3 نیز ثابت است، بنابراین بزرگی ω ثابت است، یعنی

$$\omega = |\omega| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} = \sqrt{A^2 + \omega_3^2} = \text{constant} \quad (۱۵۴-۱۳)$$

معادلات (۱۵۱-۱۳) و (۱۵۲-۱۳) معادلات پارامتری یک دایره اند، و ω_1 و ω_2

مؤلفه های ω در صفحه $X_1 X_2$ ی جسمی هستند . به این ترتیب مؤلفه های ω_1 و ω_2 ی ω با گذشت زمان یک دایره در صفحه $X_1 X_2$ رسم می کنند ، و می رسانند که بردار سرعت زاویه ای ω در روی یک مخروط حول محور X_3 (محور تقارن جسم) با بسامد زاویه ای ثابت Ω_B حرکت تقدیمی انجام می دهد [شکل (۹-۱۳)] ، و در این حرکت ω_3 ثابت می ماند . نتیجه خالص از دید ناظر دستگاه مختصات جسمی این است که ω یک مخروط حول محور تقارن جسم طی می کند . این مخروط ، مخروط جسمی نامیده می شود ، و نیم زاویه آن ، ϕ_B ، در چارچوب مرجع جسمی ، همان طور که در شکل (۹-۱۳) نشان داده شده است ، عبارت است از

$$\tan \phi_B = \frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^{1/2}}{\omega_3} = \frac{A}{\omega_3} \quad (۱۳-۱۵۵)$$



شکل (۹-۱۳) : بردار سرعت زاویه ای ω در یک مخروط حول محور X_3 ، محور تقارن جسم ، با بسامد زاویه ای ثابت Ω_B حرکت تقدیمی انجام می دهد. ϕ_B نیم زاویه مخروط جسمی است

به یاد داشته باشید که ما حرکت آزاد یک جسم صلب را بررسی کرده ایم . از دید دستگاه لخت باید دو ثابت حرکت وجود داشته باشد ، تکانه زاویه ای و انرژی جنبشی . بنابراین ، از دید دستگاه ثابت ، LCS ، یا دستگاه مختصات لخت ، داریم

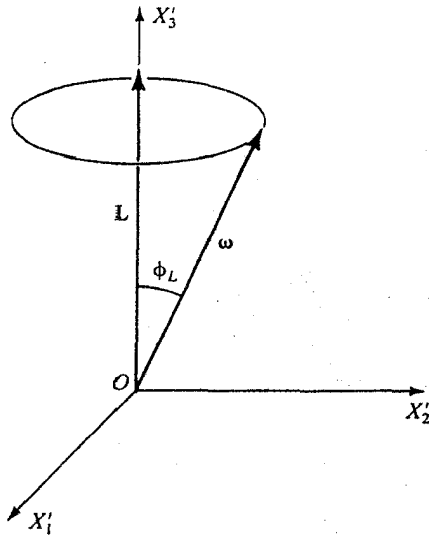
$$L(t) = \text{constant}$$

و در امتداد محور X'_3 ، همان طور که در شکل (۱۳-۱۰) نشان داده شده است ، قرار دارد . چون مرکز جرم ساکن است ، انرژی جنبشی تماماً چرخشی و ثابت است ، یعنی ،

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega \cdot \mathbf{L} = \text{constant} \quad (13-157)$$

می دانیم که \mathbf{L} ثابت است . T_{rot} تنها وقتی ثابت است که ω طوری حرکت کند که تصویر آن در روی بردار تکانه زاویه ای \mathbf{L} یا محور X'_3 ثابت باشد . همان طور که در شکل (۱۳-۱۰) نشان داده شده است ، زاویه ϕ_L بین ω و \mathbf{L} با رابطه [با استفاده از تعریف ضرب نرده ای و معادله (۱۳-۱۵۷)]

$$\cos \phi_L = \frac{\omega \cdot \mathbf{L}}{\omega L} = \frac{2T_{\text{rot}}}{\omega L} = \text{constant} \quad (13-158)$$



شکل (۱۳-۱۰) : از دید یک دستگاه مختصات ثابت ، LCS ، یا لخت ، سرعت

زاویه ای ω طوری حرکت می کند که تصویر آن در روی بردار تکانه زاویه ای \mathbf{L} یا محور X'_3 ثابت

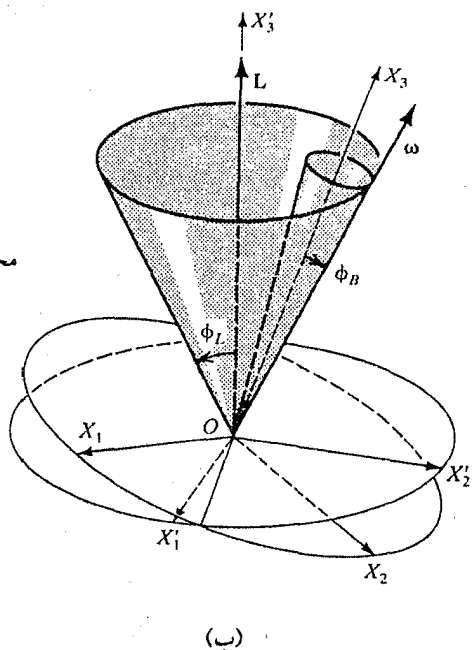
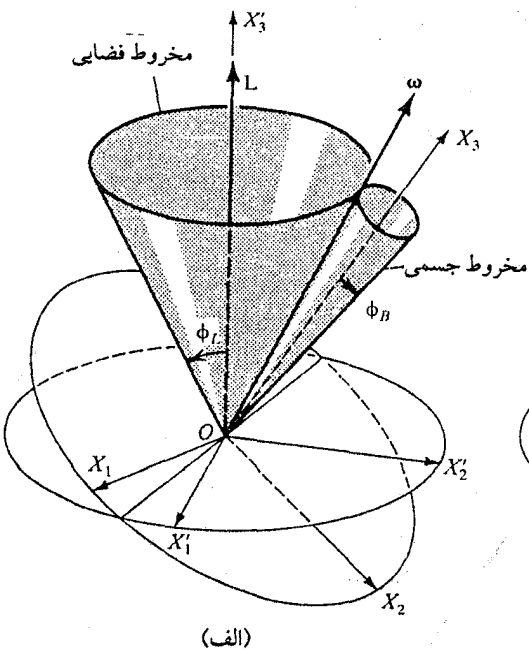
است . ϕ_L نیم زاویه مخروط فضایی است

داده می شود . زاویه ϕ_L ثابت می ماند و نیم زاویه مخروط فضایی یا آزمایشگاهی است . این مخروط حاصل دوران ω حول تکانه زاویه ای ثابت \mathbf{L} از دید چارچوب مرجع لخت یا LCS است . ω ، \mathbf{L} ، و محور (جسمی) X_3 در یک صفحه قرار دارند ، و چون \mathbf{L} در امتداد محور

X'_3 اختیار شده است ، نتیجه می شود که ω از دید دستگاه مختصات لخت یا LCS ، حول محور X'_3 حرکت تقدیمی انجام می دهد . از سوی دیگر ، از دید دستگاه مختصات جسمی ، ω یک حرکت تقدیمی حول محور (جسمی یا تقارن) X_3 انجام می دهد .

این وضعیت در شکل (۱۳-۱۱-الف و ب) نشان داده شده است و به صورت غلتش یک مخروط روی مخروط دیگر توصیف می شود ؛ یعنی مخروط جسمی بدون لغزش حول مخروط فضایی می غلتد و خط تماس آنها جهت سرعت زاویه ای ω را نشان می دهد که از دید چارچوب مرجع جسمی حول محور X_3 و از دید چارچوب LCS حول محور X'_3 حرکت تقدیمی انجام می دهد . بسامد زاویه ای حرکت تقدیمی ω حول محور X_3 (محور تقارن) ، چنان که قبلاً بیان شد ، همان معادله (۱۳-۱۴۲) است ،

$$\Omega_B \equiv \frac{I_3 - I_{12}}{I_{12}} \omega_3 = \gamma \omega_3 \quad (13-142)$$



شکل (۱۳-۱۱) : مخروط جسمی حول مخروط LCS بدون لغزش می غلتد . بسته به مقادیر I_3 و I_{12} مخروط جسمی می تواند (الف) در خارج مخروط فضایی یا (ب) در داخل آن بغلتد

و بسامد زاویه ای حرکت تقدیمی ω حول محور X'_3 (یا L) عبارت است از

$$\Omega_L = \gamma \omega_3 \frac{\sin \phi_B}{\sin \phi_L} \quad (13-159)$$

بسته به مقادیر I_{12} و I_3 ، مخروط جسمی یا در خارج مخروط فضایی می غلتد یا در داخل آن [شکل (۱۳-۱۱)] .

یک مثال بسیار جالب کاربرد نظریه فوق در چرخش زمین است . زمین در نزدیکی قطبها اندکی تخت است که به این منجر شده است که شکل کره وار تختی داشته باشد . این وضعیت نتیجه می دهد $I_3 \equiv I_{12}$ و $I_3 > I_{12}$ ، که باعث می شود

$$\Omega = \frac{I_3 - I_{12}}{I_{12}} \omega_3$$

در مقایسه با ω_3 خیلی کوچک باشد ، به نحوی که $\Omega \equiv \omega_3/300$. چون زمان تناوب چرخش زمین برابر است با ، یک روز $= \frac{1}{\omega}$ و $\omega_3 \equiv \omega$ نتیجه خواهیم گرفت ($\frac{1}{\Omega} \equiv 300$ روز)

$$T_P = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi I_{12}}{\omega_3(I_3 - I_{12})} = \frac{1 \text{ day}}{0.00327} = 305 \text{ روز} \quad (13-160)$$

مقدار اندازه گیری شده ۴۴۰ روز است . این انحراف ناشی از کاستی اطلاعات ما از I_3 و I_{12} نیست ، بلکه ناشی از این واقعیت است که زمین نه یک جسم کاملاً صلب است و نه از نظر شکل یک کره است . در واقع شکل زمین شبیه به یک کره پخت است . به این ترتیب محور چرخش زمین به دور قطب شمال دایره ای را به شعاع حدود ۱۰ متر و با دوره تناوب حدود ۴۳۰ روز طی می کند . چون عرض جغرافیایی وابسته به محور چرخش است ، تغییری قابل اندازه گیری در عرض جغرافیایی ایجاد خواهد شد . این تغییرات در عرض جغرافیایی لنگش کاندلر نامیده می شود و در سال ۱۸۹۱ توسط کاندلر کشف شد .

یک حرکت تقدیمی دیگر و آشناتر محور زمین ، روی مخروطی با نیم زاویه 23.5° ، نتیجه گشتاورهای گرانشی خارجی ناشی از خورشید و ماه است . (محور چرخش با صفحه مدار زمین حول خورشید زاویه 23.5° می سازد) این گشتاورها باعث حرکت تقدیمی کندی برای محور زمین می شود . دوره تناوب این حرکت تقدیمی ۲۶۰۰۰ سال است . این بدان معنی است که ، با گذشت زمان ، ستارگان متفاوتی ستاره قطبی می شوند . در ۳۰۰۰ سال قبل از میلاد ، توبان ستاره قطبی بود ؛ در ۱۴۰۰۰ سال بعد از میلاد وگا ستاره قطبی خواهد بود . این از حرکت

تقدیمی محور چرخش زمین، که خود از نیروهای گرانشی خورشید و ماه حاصل می شود، ناشی می شود.

۱۱-۱۳ حرکت فرفره متقارن با يك نقطه تثبیت شده (فرفره وزن دار)

یک جسم صلب که حول نقطه ثابتی می چرخد و تحت تأثیر گشتاور نیروی حاصل از وزنش (در میدان نیروی گرانشی) قرار دارد فرفره وزن دار نامیده می شود. بحث خود را به مورد خاص یک فرفره متقارن که در آن $I_3 > I_1 = I_2 (= I_{12})$ ، محدود می کنیم. به علاوه، نقطه ثابت O بر مرکز جرم منطبق نیست، اما روی محور تقارن قرار دارد. یک چنین موردی در شکل (۱۲-۱۳) نمایش داده شده است. نقطه ثابت O که بر مبدأ دستگاههای مختصات ثابت و جسمی منطبق است. به علت انطباق مبدأهای دستگاههای ثابت و جسمی، انرژی جنبشی انتقالی صفر خواهد بود زیرا $v = \dot{r} = 0$. محور (ثابت) X_3 در امتداد قائم است و محور (جسمی) X_3 محور تقارن فرفره است. نوک فرفره در O در حال سکون است. تنها دو نیروی وارد عبارتند از نیروی واکنش F که از نقطه O می گذرد و گشتاوری ایجاد نمی کند، و نیروی گرانشی Mg که یک گشتاور τ موازی با خط گرهی ایجاد می کند. می توانیم از زوایای اولر برای توصیف حرکت فرفره متقارن استفاده کنیم. گشتاور τ روی فرفره متقارن عبارت است از

$$\tau = r \times Mg \quad (۱۶۱-۱۳)$$

به این ترتیب

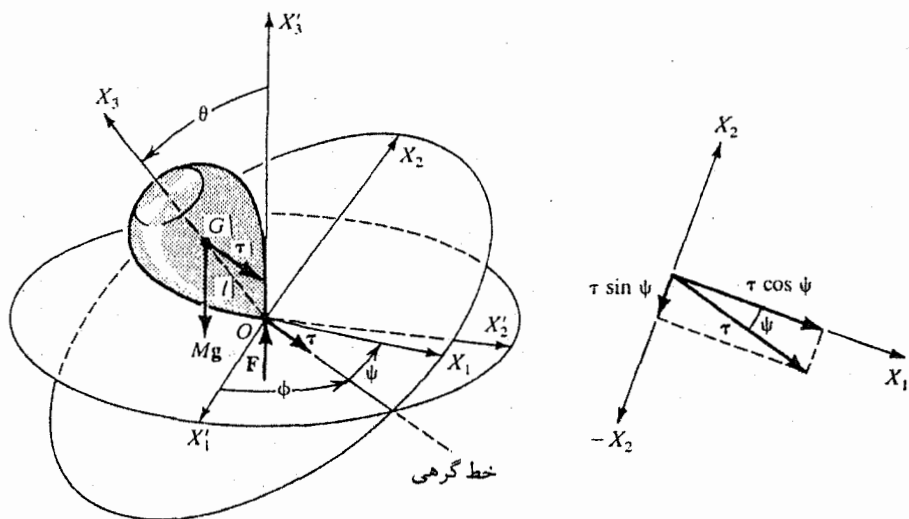
$$\tau = Mgl \sin \theta \quad (۱۶۲-۱۳)$$

گشتاور τ که در امتداد خط گرهی است می تواند، همان طور که در پیوست شکل (۱۲-۱۳) نشان داده شده است، در امتداد محورهای جسمی تجزیه شود، و نتیجه دهد

$$\tau_1 = Mgl \sin \theta \cos \Psi \quad (۱۶۳-۱۳)$$

$$\tau_2 = Mgl \sin \theta \sin \Psi \quad (۱۶۴-۱۳)$$

$$\tau_3 = 0 \quad (۱۶۵-۱۳)$$



شکل (۱۳-۱۲) : فرقه متقارن وزن دار با يك نقطه ثابت

با استفاده از مقادیر ω_1 ، ω_2 ، و ω_3 از معادلات (۱۳-۱۲) و معادلات اولر، معادلات (۱۳-۱۳)، معادلات اولر زیر را برای فرقه متقارن به دست می آوریم

$$I_{12} \frac{d}{dt} (\dot{\phi} \sin \theta \sin \Psi + \dot{\theta} \cos \Psi) + (I_3 - I_{12})(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\Psi}) \\ \times (\dot{\phi} \sin \theta \cos \Psi - \dot{\theta} \sin \Psi) = Mgl \sin \theta \cos \Psi \quad (۱۳-۱۶۶)$$

$$I_{12} \frac{d}{dt} (\dot{\phi} \sin \theta \cos \Psi - \dot{\theta} \sin \Psi) - (I_3 - I_{12})(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\Psi}) \\ \times (\dot{\phi} \sin \theta \sin \Psi + \dot{\theta} \cos \Psi) = -Mgl \sin \theta \sin \Psi \quad (۱۳-۱۶۷)$$

$$I_3 \frac{d}{dt} (\dot{\Psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = 0 \quad (۱۳-۱۶۸)$$

معادلات اولر را علی الاصول می توان حل کرد و سه انتگرال اولیه (دو تکانه زاویه ای و یک انرژی)، و از آن جا سه زاویه اولر را به دست آورد. چون این کار پردردسر است، روش دیگری را به کار خواهیم گرفت، و آن صورت بندی لاگرانژی است.

انرژی جنبشی فرقه متقارن عبارت است از

$$T = \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2 = \frac{1}{2} I_{12} (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 \quad (۱۳-۱۶۹)$$

که در آن ، از معادلات (۱۳-۱۲۰) ،

$$\omega_1^2 = (\dot{\phi} \sin \theta \sin \Psi + \dot{\theta} \cos \Psi)^2$$

$$\omega_2^2 = (\dot{\phi} \sin \theta \cos \Psi - \dot{\theta} \sin \Psi)^2$$

یعنی

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \quad (۱۳-۱۷۰)$$

$$\omega_3^2 = (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\Psi})^2 \quad (۱۳-۱۷۱)$$

با بردن این مقادیر در معادله (۱۳-۱۶۹) خواهیم داشت

$$T = \frac{1}{2} I_{12} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\Psi})^2 \quad (۱۳-۱۷۲)$$

و انرژی پتانسیل عبارت است از

$$V = Mgl \cos \theta \quad (۱۳-۱۷۳)$$

به این ترتیب لاگرانژی L عبارت است از

$$\begin{aligned} L &= L(\theta, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\Psi}) \\ &= \frac{1}{2} I_{12} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\Psi})^2 - Mgl \cos \theta \end{aligned} \quad (۱۳-۱۷۴)$$

می بینیم که ϕ و Ψ مختصات قابل چشم پوشی یا دوره ای هستند . بنابراین ، گشتاورهای مزدوج این مختصات ثابتهای حرکتند . این مختصات دوره ای زاویه اند ، لذا گشتاورهای مزدوج تکانه زاویه ای اند . به این ترتیب

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_{12} \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3 \cos \theta (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\Psi}) = \text{constant} \quad (۱۳-۱۷۵)$$

$$p_\Psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}} = I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\Psi}) = \text{constant} \quad (۱۳-۱۷۶)$$

اینها دو انتگرال اولیه حرکتند . انتگرال اولیه دیگر انرژی است ، که به اختصار در باره آن صحبت خواهیم کرد . تکانه زاویه ای p_ϕ از چرخش زاویه ای ϕ حول محور (ثابت و قائم) X_3' ناشی می شود ، و p_Ψ از چرخش زاویه ای Ψ حول محور (جسمی) X_3 ، که محور تقارن جسم نیز هست ، ناشی می شود . به علاوه ، این مطلب با این واقعیت تأیید می شود که گشتاور τ همان طور که در شکل (۱۳-۱۲) (ضمیمه) نشان داده شده است ، هیچ مؤلفه ای در امتداد محور X_3' و محور X_3 ندارد زیرا هر دو محور به خط گرهی عمودند . از معادله (۱۳-۱۷۶) داریم

$$\dot{\Psi} = \frac{p_{\Psi} - I_3 \dot{\phi} \cos \theta}{I_3} \quad (۱۷۷-۱۳)$$

با قرار دادن این عبارت در معادله (۱۷۵-۱۳) و حل آن برای $\dot{\phi}$ خواهیم داشت

$$\dot{\phi} = \frac{p_{\phi} - p_{\Psi} \cos \theta}{I_{12} \sin^2 \theta} \quad (۱۷۸-۱۳)$$

این رابطه را در معادله (۱۷۷-۱۳) می‌بریم و نتیجه می‌گیریم

$$\dot{\Psi} = \frac{p_{\Psi}}{I_3} - \frac{(p_{\phi} - p_{\Psi} \cos \theta) \cos \theta}{I_{12} \sin^2 \theta} \quad (۱۷۹-۱۳)$$

به این ترتیب معادلات (۱۷۸-۱۳) و (۱۷۹-۱۳) عبارتهایی برای $\dot{\phi}$ و $\dot{\Psi}$ برحسب θ هستند.

چون فرفره متقارن در میدان نیروی گرانشی، که پایستار است، قرار دارد انرژی کل

یک ثابت حرکت است و به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned} E &= T + V = \frac{1}{2} I_{12} (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 + Mgl \cos \theta \\ &= \frac{1}{2} I_{12} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\Psi})^2 + Mgl \cos \theta \quad (۱۸۰-۱۳) \\ &= \text{constant} \end{aligned}$$

از معادلات (۱۷۱-۱۳) و (۱۷۶-۱۳) داریم

$$p_{\Psi} = I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\Psi}) = I_3 \omega_3 = \text{constant} \quad (۱۸۱-۱۳)$$

$$\frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 = \frac{p_{\Psi}^2}{2I_3} = \text{constant} \quad (۱۸۲-۱۳)$$

به این ترتیب نه تنها E ، که $E' = E - \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$ نیز یک ثابت حرکت است، یعنی

$$E' = E - \frac{p_{\Psi}^2}{2I_3} = \frac{1}{2} I_{12} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + Mgl \cos \theta = \text{constant} \quad (۱۸۳-۱۳)$$

با قرار دادن به جای $\dot{\phi}$ از معادله (۱۷۸-۱۳) در معادله (۱۸۳-۱۳) و مرتب‌سازی،

خواهیم داشت

$$E' = \frac{1}{2} I_{12} \dot{\theta}^2 + \frac{p_{\phi} - p_{\Psi} \cos \theta}{2I_{12} \sin^2 \theta} + Mgl \cos \theta \quad (۱۸۴-۱۳)$$

یا

$$E' = \frac{1}{2} I_{12} \dot{\theta}^2 + V(\theta) \quad (۱۸۵-۱۳)$$

که در آن

$$V(\theta) = \frac{P_\phi - P_\psi \cos \theta}{2I_{12} \sin^2 \theta} + Mgl \cos \theta \quad (13-186)$$

$V(\theta)$ انرژی پتانسیل مؤثر نامیده می شود. از معادله (13-183) نتیجه می شود

$$\dot{\theta} = \left(\frac{2}{I_{12}} [E' - V(\theta)] \right)^{1/2} \quad (13-187)$$

که با انتگرال گیری می دهد

$$t(\theta) = \int \frac{d\theta}{\sqrt{(2/I_{12})[E' - V(\theta)]}} \quad (13-188)$$

این معادله، در اصل می تواند حل شود و $\theta(t)$ را به دست دهد. این مقادیر $\theta(t)$ را می توان در معادلات (13-178) و (13-179) قرار داد و پس از انتگرال گیری $\phi(t)$ و $\psi(t)$ را به دست آورد. به این ترتیب هر سه زاویه اولر را، که جهت گیری جسم صلب را مشخص می کنند. خواهیم داشت. در نتیجه مسأله مورد نظر کاملاً حل شده است. متأسفانه، انتگرال گیری این معادلات یک انتگرال بیضوی وارد می کند و این روش پیچیده می شود. از این رو، لازم می آید که بحث را به یک بحث کیفی، نظیر آنچه که در توصیف حرکت یک ذره در یک میدان نیروی مرکزی به کار رفت، محدود کنیم.

حرکت تقدیمی پایا

شکل (13-13) نمودار پتانسیل مؤثر $V(\theta)$ [معادله (13-186)] را نسبت به θ در گسترده قابل قبول $0 \leq \theta \leq \pi$ نمایش می دهد. این نمودار انرژی با یک پتانسیل مؤثر کمینه شبیه به نمودار مربوط به میدان نیروی مرکزی است. برای یک مقدار انرژی $E' = E'_1$ ، حرکت بین دو مقدار حدی، که شبیه به نقاط بازگشت هستند، یعنی بین $\theta = \theta_1$ و $\theta = \theta_2$ ، آن طور که نشان داده شده است، محدود می شود. اگر انرژی فرفره برابر با $E' = E'_0 = V_{\min}$ ، مقدار θ به یک تک مقدار $\theta = \theta_0$ محدود می شود. حرکت حاصل یک حرکت تقدیمی پایا در تک زاویه میل θ_0 است. این یک مورد خاص جالب از حرکت تقدیمی پایا است که در آن محور ژيروسکوپ یا فرفره متقارن، یک مخروط دوار حول محور قائم (محور X'_3) جاو می کند. قبل از بحث مورد کلی، این مورد را قدری دقیق تر بحث می کنیم. مقدار θ_0 را می توانیم با مساوی با صفر قرار دادن مشتق پتانسیل مؤثر $V(\theta)$ در θ_0 به دست آوریم. (دقت کنیم که،

بطور کلی، $\tau(\theta) = -\frac{dV(\theta)}{d\theta}$. از این رو، از معادله (۱۳-۱۸۶)،

$$\tau(\theta_0) = \left. -\frac{\partial V}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta_0)^2 \cos \theta_0 - (p_\phi - p_\psi \cos \theta_0) p_\psi \sin^2 \theta_0}{I_{12} \sin^3 \theta_0} \quad (۱۸۹-۱۳)$$

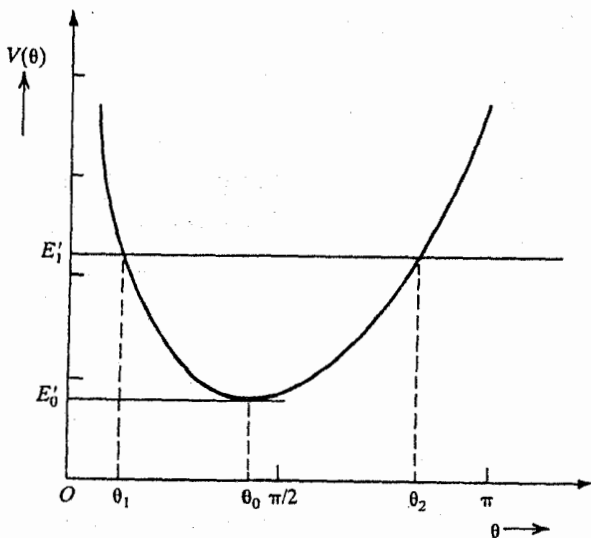
$$+ Mgl \sin \theta_0 = 0$$

قرار دهیم

$$\gamma \equiv p_\phi - p_\psi \cos \theta_0 \quad (۱۹۰-۱۳)$$

و معادله (۱۳-۱۸۹) را به شکل زیر بازنویسی کنیم

$$(\cos \theta_0) \gamma^2 - (p_\psi \sin^2 \theta_0) \gamma + (Mgl I_{12} \sin^4 \theta_0) = 0 \quad (۱۹۱-۱۳)$$



شکل (۱۳-۱۹۱): نمودار انرژی: منحنی انرژی پتانسیل مؤثر $V(\theta)$ بر حسب θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) برای فرغره متقارن

این معادله یک معادله درجه دوم بر حسب γ است، که پس از حل می دهد

$$\gamma = \frac{p_\psi \sin^2 \theta_0}{2 \cos \theta_0} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4Mgl I_{12} \cos \theta_0}{p_\psi^2}} \right] \quad (۱۹۲-۱۳)$$

چون γ یک کمیت حقیقی است، مقدار زیر رادیکال در معادله (۱۳-۱۹۲) باید مثبت باشد.

یعنی اگر $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$ باشد ، باید داشته باشیم

$$p_{\Psi}^2 \geq 4MglI_{12} \cos \theta_0 \quad (13-193)$$

اما از معادله (۱۳-۱۸۲) داریم

$$p_{\Psi}^2 = I_3^2 \omega_3^2 \quad (13-194)$$

از ترکیب این معادلات نتیجه می گیریم

$$\omega_3 \geq \frac{2}{I_3} \sqrt{MglI_{12} \cos \theta_0} \quad (13-195)$$

بنابراین ، طبق این نتیجه ، یک حرکت تقدیمی پایا در زاویهٔ میل θ_0 تنها وقتی امکان پذیر است که سرعت زاویه ای فرفره چرخان بزرگتر از مقدار کمینه داده شده در معادله (۱۳-۱۹۵) باشد . برای مقدار داده شده $\theta = \theta_0$ ، نظری به مقدار $\dot{\phi}$ بیندازیم . از معادله (۱۳-۱۷۸) داریم

$$\dot{\phi} = \frac{p_{\phi} - p_{\Psi} \cos \theta}{I_{12} \sin^2 \theta} = \frac{\gamma}{I_{12} \sin^2 \theta_0} \quad (13-196)$$

سرعت زاویه ای تقدیمی $\dot{\phi}_0$ دو مقدار ممکن دارد ، که هر کدام از آنها به یک مقدار γ از معادله (۱۳-۱۹۲) ، مربوط می شود . مقدار بزرگ γ به حرکت تقدیمی تند و مقدار کوچک آن به حرکت تقدیمی کند منجر می شود ، یعنی

$$\dot{\phi}_0(+)=\dot{\phi}_{0f} \rightarrow \text{تقدیمی تند} \quad (13-197)$$

$$\dot{\phi}_0(-)=\dot{\phi}_{0s} \rightarrow \text{تقدیمی کند}$$

اگر ω_3 خیلی بزرگ باشد ، از معادله (۱۳-۱۹۴) نتیجه می شود که p_{Ψ} خیلی بزرگ است . این بدان معنی است که جمله دوم در زیر علامت رادیکال معادله (۱۳-۱۹۲) خیلی کوچک است . اگر رادیکال را بسط دهیم و فقط اولین جمله غیر صفر را نگه داریم ، از معادله (۱۳-۱۹۶) به دست می آوریم

$$\dot{\phi}_{0f} \approx \frac{I_3 \omega_3}{I_{12} \cos \theta_0} \quad (13-198)$$

$$\dot{\phi}_{0s} \approx \frac{Mgl}{I_3 \omega_3} \quad (13-199)$$

معادله (۱۳-۱۹۹) همان نتیجه آشنای نظریه ژيروسکوپی مقدماتی است ، و این سرعت زاویه ای تقدیمی کند $[\dot{\phi}_0(-) = \dot{\phi}_{0s}]$ است که معمولاً مشاهده می شود .

بنابراین ، برای محور تقارن در $\theta = \theta_0$ و کمتر از $\pi/2$ ، فرقه با بسامد زاویه ای ω_3 ، معادله (۱۳-۱۹۵) ، به دور محور تقارن می چرخد ، و محور تقارن به دور محور ثابت با دوبسامد زاویه ای ممکن $\dot{\phi}$ ، که با معادلات (۱۳-۱۹۸) و (۱۳-۱۹۹) داده می شوند ، حرکت تقدیمی انجام می دهد . یک مورد خاص را که مهم است در نظر بگیریم . اگر فرقه با سرعت کافی بچرخد و در وضعیت قائم باشد ، محور فرقه در جهت قائم ثابت خواهد ماند . این شرط خواب رفتگی نامیده می شود و فرقه را خواب رفته گویند . اگر فرقه در اثر اصطکاک یا علل دیگر کند شود ، به حرکت ترقصی (که بعداً بحث خواهد شد) می افتد و سرانجام می افتد .

اکنون موردی را بحث کنیم که در آن $\theta_0 > \pi/2$. در این مورد ، نوک ثابت فرقه در موقعیتی بالاتر از مرکز جرم قرار دارد . محور فرقه متقارن در زیر افق قرار می گیرد و فرقه آویزان است . همچنین ، از معادله (۱۳-۱۹۲) ، اگر $\theta_0 > \pi/2$ باشد عبارت زیر رادیکال همیشه مثبت است و محدودیت یا کمینه ای برای ω_3 وجود ندارد . به علاوه ، چون عبارت زیر رادیکال بزرگتر از واحد است ، مقادیر $\dot{\phi}_{0f}$ در همان جهتی است که برای $\theta_0 < \pi/2$ انجام می گیرد ، در حالی که حرکت تقدیمی کند $\dot{\phi}_{0s}$ در خلاف جهت انجام می گیرد .

تغییرات θ با زمان : ترقص

همان طور که قبلاً در ارتباط با نمودار پتانسیل مؤثر $V(\theta)$ نسبت به θ در شکل (۱۳-۱۳) بحث شد ، حرکت محور تقارن برای هر انرژی E فرقه به $\theta_1 < \theta < \theta_2$ محدود می شود . وقتی θ بین این حدود تغییر می کند ، مقدار $\dot{\phi}$ که با معادله (۱۳-۱۷۸) داده شده است می تواند تغییر علامت بدهد یا ندهد . اگر تغییری در علامت $\dot{\phi}$ روی ندهد ، فرقه بطور یکنواخت حول محور ثابت ، لخت ، X'_3 حرکت تقدیمی انجام می دهد ، و درعین حال ، محور (تقارن) X_3 ی جسم بین $\theta = \theta_1$ و $\theta = \theta_2$ نوسان می کند . این حرکت فرقه ترقص نامیده می شود . تصویر مسیری طی شده توسط محور تقارن جسم روی کره ای به شعاع واحد در دستگاه ثابت در شکل (۱۳-۱۴ الف) نمایش داده شده است . از سوی دیگر ، اگر $\dot{\phi}$ بین مقادیر حدی θ تغییر علامت دهد ، سرعت زاویه ای تقدیمی ، باید در $\theta = \theta_1$ و $\theta = \theta_2$

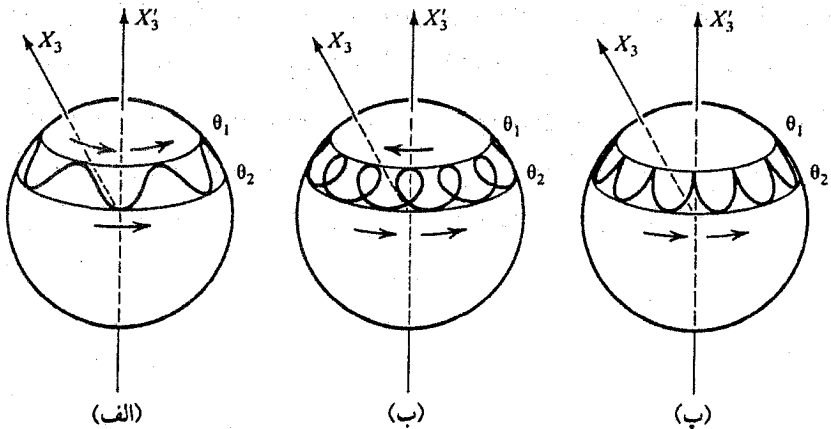
مختلف العلامت باشد . در این وضعیت حرکت تقدیمی - ترقصی به یک حرکت حلقه ای برای محور تقارن منجر می شود که در شکل (۱۳-۱۴ ب) ، به صورت تصویر محور تقارن در روی کره ای به شعاع واحد ، نمایش داده شده است . دقت کنیم که تغییرات در ϕ تنها از مقادیر p_ϕ و p_ψ ناشی نمی شوند . اگر این مقادیر طوری باشند که در $\theta = \theta_1$ داشته باشیم

$$(p_\phi - p_\psi \cos \theta)|_{\theta=\theta_1} = 0 \quad (۱۳-۲۰۰)$$

نتیجه خواهیم گرفت

$$\dot{\phi}|_{\theta=\theta_1} = 0, \quad \dot{\theta}|_{\theta=\theta_1} = 0, \quad \dot{\psi} = \omega_3 \quad (۱۳-۲۰۱)$$

حرکت تصویر محور تقارن در روی کره واحد ، همان طور که در شکل (۱۳-۱۴ پ) نشان داده شده است ، دندانان اره ای است .



شکل (۱۳-۱۴) : حرکت θ (ترقص) : حرکت محور تقارن بین $\theta_1 < \theta < \theta_2$ محدود است . نمودارها تصویر مسیر محور تقارن جسم را در روی یک کره واحد در دستگاه ثابت نشان می دهند : (الف) حرکت تقدیمی یکنواخت ، (ب) حرکت حلقوی ، (پ) حرکت دندانان اره ای محور تقارن حول یک محور ثابت

مسائل

۱-۱۳ معادله (۷-۱۳) را با معادله (۳-۱۳) ترکیب کنید و معادله (۶-۱۳) را به دست آورید .

۲-۱۳ اتحادهای زیر را ثابت کنید .

$$A \times (B \times A) = A^2 B - A(A \cdot B) \quad (\text{الف})$$

$$(A \times B) \cdot (C \times D) = (A \cdot C)(B \cdot D) - (B \cdot C)(A \cdot D) \quad (\text{ب})$$

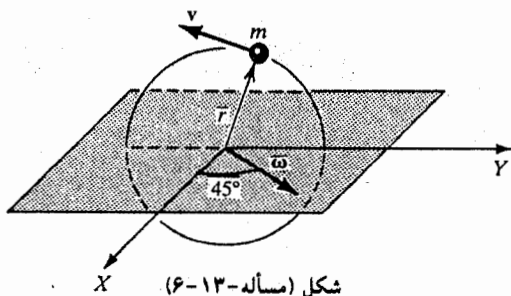
$$(A \times B)^2 = (A \times B) \cdot (A \times B) = (A \cdot A)(B \cdot B) - (B \cdot A)(A \cdot B) \\ = A^2 B^2 - (A \cdot B)^2 \quad (\text{پ})$$

۳-۱۳ تکانه زاویه ای و انرژی جنبشی را برای چرخش یک لایه مربعی یکنواخت به ضلع L و جرم M حول یک قطر با سرعت زاویه ای ω به دست آورید .

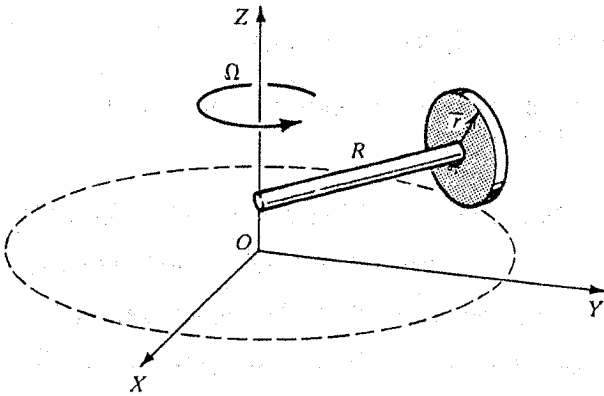
۴-۱۳ یک لایه مستطیلی یکنواخت به اضلاع a و b و چگالی سطحی (جرم بر واحد سطح) σ در نظر بگیرید . این مستطیل حول یک قطر با سرعت زاویه ای ثابت ω می چرخد . بزرگی و جهت تکانه زاویه ای و همچنین انرژی جنبشی را محاسبه کند .

۵-۱۳ یک قرص یکنواخت به شعاع R و جرم M با سرعت زاویه ای یکنواخت ω حول یک محور که با محور قرص زاویه θ می سازد می چرخد . (الف) تکانه زاویه ای (بزرگی و همچنین جهت) ، و (ب) انرژی جنبشی چرخشی را محاسبه کنید .

۶-۱۳ ذره ای به جرم m در یک صفحه قائم با سرعت زاویه ای ω که ، مطابق شکل (مسأله -۱۳-۶) ، در صفحه XY قرار دارد و با محور X زاویه 45° می سازد می چرخد . سرعت v ، تکانه زاویه ای L ، و انرژی جنبشی چرخشی را حساب کنید . آیا ω و L در یک جهتند ؟ این مطلب چه چیزی را می رساند ؟

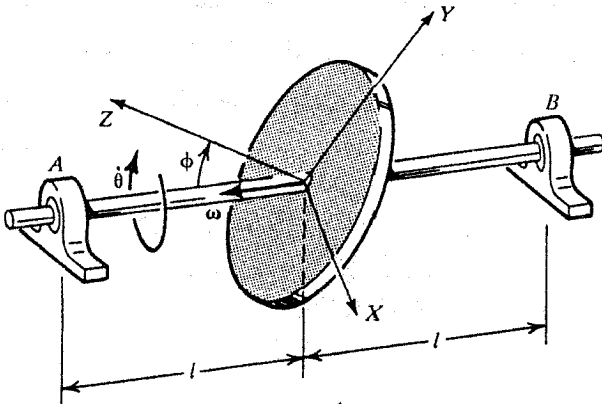


۷-۱۳ یک قرص نازک یکنواخت به جرم m ، شعاع r ، و ضخامت h بدون لغزش حول محور Z می‌گردد. این قرص توسط محوری به طول R که از مرکز آن می‌گذرد (آن طور که در شکل (مسئله ۷-۱۳) نشان داده شده است) نگه داشته شده و با سرعت زاویه ای Ω حول محور Z دوران می‌کند. سرعت زاویه ای لحظه ای ω و تکانه زاویه ای L آن را حساب کنید. آیا ω و L با یکدیگر موازی اند؟



شکل (مسئله ۷-۱۳)

۸-۱۳ محور تقارن یک چرخنده، آن طور که در شکل (مسئله ۸-۱۳) نشان داده شده است، با محور چرخش زاویه ϕ می‌سازد. اگر سرعت زاویه ای چرخشی چرخنده θ باشد، واکنش بلبرینگها را در A و B پیدا کنید. شعاع قرص R ، ضخامت آن h ، و جرم آن M است.



شکل (مسئله ۸-۱۳)

۹-۱۳ عناصر تانسور لختی میله ای به جرم M و طول l را پیدا کنید. مبدأ مختصات در مرکز، محور X در امتداد میله، و محور Z عمود بر آن است.

۱۰-۱۳ گشتاور لختی یک لایه مربعی به ضلع L و جرم M را در دستگاه مختصاتی که مبدأ آن (الف) در یک گوشه، و (ب) در مرکز لایه باشد پیدا کنید.

۱۱-۱۳ گشتاور لختی یک لایه مستطیل شکل به اضلاع L و W و جرم M را در دستگاه مختصاتی که مبدأ آن (الف) در یک گوشه، و (ب) در مرکز آن باشد پیدا کنید.

۱۲-۱۳ یک کره یکنواخت به جرم M و شعاع R در نظر بگیرید. گشتاورهای لختی I_1 ، I_2 و I_3 را در دستگاه مختصاتی که مبدأ آن در مرکز باشد پیدا کنید.

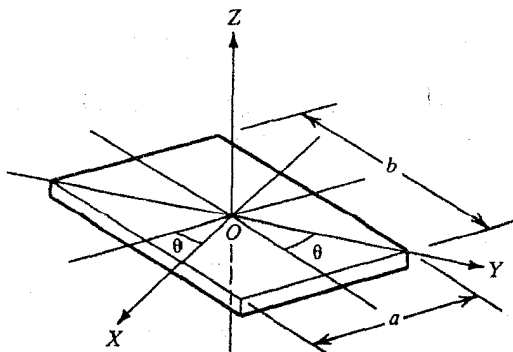
۱۳-۱۳ نشان دهید که برای هر چند وجهی یکنواخت منتظم گشتاورهای لختی اصلی در دستگاهی که مبدأ آن در مرکز چندوجهی باشد برابرند. شعاع کره توپر یکنواختی با همین جرم و همین عناصر گشتاور لختی را پیدا کنید.

۱۳-۱۴ با شروع از تعریف I_{ki} و I'_{ki} برای یک جسم پیوسته، معادله (۱۳-۴۸) را به دست آورید. به علاوه، نشان دهید که این رابطه را می توان به صورت زیر نوشت

$$I_{ki} = I'_{ki} + (r_0^2 - x_{0k}x_{0i}) \iiint_V \rho \, dV$$

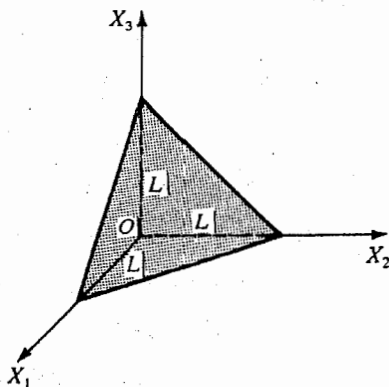
۱۳-۱۵ معادله (۱۳-۶۷) را به دست آورید.

۱۳-۱۶ گشتاورهای لختی یک توده مکعب مستطیل شکل به جرم M و ابعاد $a \times b \times c$ را پیدا کنید. مبدأ محورها بر مرکز جرم منطبق است، محور Z موازی با ضخامت c ، محور Y موازی با یک قطر مستطیل $a \times b$ ، مطابق شکل (مسئله ۱۳-۱۶)، است. رابطه بین محورهای مختصات و محورهای اصلی را پیدا کنید.



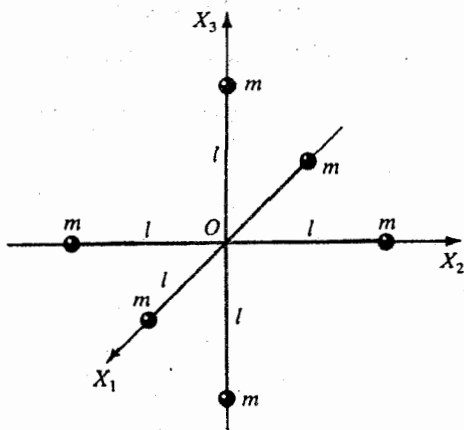
شکل (مسئله ۱۳-۱۶)

۱۷-۱۳ یک چهاروجهی راستگوشه به جرم M و طول L در امتداد محورهای X_1 ، X_2 ، و X_3 ، آن طور که در شکل (مسأله-۱۳-۱۷) نمایش داده شده است، در نظر بگیرید. عناصر تانسور لختی را برای این محورها حساب کنید



شکل (مسأله-۱۳-۱۷)

۱۸-۱۳ شش ذره هر کدام به جرم m به سرهای میله های بدون جرمی به طول $2l$ ، آن طور که در شکل (مسأله-۱۳-۱۸) نشان داده شده است، متصل شده اند. عناصر تانسور لختی را برای محورهایی که در امتدادهای این سه میله اند پیدا کنید. نشان دهید که این محورها، محورهای اصلی اند.



شکل (مسأله-۱۳-۱۸)

۱۹-۱۳ نشان دهید که هر یک از سه گشتاور لختی اصلی نمی تواند از مجموع دوتای دیگر بزرگتر باشد .

۱۳-۲۰ یک جسم ، با چگالی یکنواخت به جرم M و با شکل یک بیضوی با معادله

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

در نظر بگیرید که $2a > 2b > 2c$ ابعاد آن هستند . گشتاورهای لختی اصلی I_1 ، I_2 ، و I_3 و محورهای اصلی را پیدا کنید .

۱۳-۲۱ یک مخروط یکنواخت به جرم M ، ارتفاع h ، و شعاع R در نظر بگیرید . مبدأ را در رأس مخروط و محور X_3 را در امتداد محور تقارن آن بگیرید . عناصر تانسور لختی را حساب کنید . تبدیلی انجام دهید که در آن مرکز جرم مخروط مبدأ محورهای مختصات نیز باشد . گشتاورهای لختی اصلی را در این دستگاه جدید حساب کنید .

۱۳-۲۲ نشان دهید که در یک لایه مستطیل شکل تخت جهت محورهای اصلی در یک گوشه با رابطه زیر داده می شود

$$\tan 2\phi = \frac{2(Mab/4)}{(Ma^2/3) - (Mb^2/3)} = \frac{3ab}{2(a^2 - b^2)}$$

۱۳-۲۳ برای دو مورد زیر ، طرح بیضوی لختی را رسم کنید . (الف) قرص دایره ای یکنواخت به شعاع R و جرم M ، و (ب) مکعب مستطیلی به جرم M و اضلاع a ، $2a$ ، $4a$.

۱۳-۲۴ طرحی از بیضوی لختی یک استوانه دوار به شعاع R و طول $L (= 8R)$ رسم کنید . نسبت $\frac{R}{L}$ را طوری پیدا کنید که بیضوی لختی وقتی مبدأ مختصات در مرکز باشد یک کره باشد .

۱۳-۲۵ گشتاورهای لختی اصلی و محورهای اصلی را برای جسم مثلثی مسأله (۱۳-۱۷) پیدا کنید . نوع چرخش و ماتریس چرخش لازم را برای رفتن از محورهای داده شده به محورهای اصلی پیدا کنید .

۱۳-۲۶ یک استوانه با مقطع بیضی به جرم M در نظر بگیرید . این استوانه با صفحه های $Z = -c$ و $Z = +c$ محدود شده و دیواره آن یک سطح بیضی وار با معادله $1 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$ است . گشتاور لختی را نسبت به محور Z پیدا کنید .

۱۳-۲۷ در مسأله (۱۳-۱۰) ، با یک ماتریس چرخش مناسب از (الف) به (ب) بروید .

۱۳-۲۸ در مسأله (۱۳-۱۱) ، با یک ماتریس چرخش مناسب از (الف) به (ب) بروید .

۱۳-۲۹ رد یک تانسور I به صورت مجموع عناصر قطری آن تعریف شده است، یعنی $R \cdot I = \sum_k I_{kk}$ با انجام یک تبدیل تشابهی، نشان دهید که رد در تبدیل مختصات ناورد است؛ یعنی $R \cdot I = I'$ ، که I' تانسور در دستگاه مختصاتی است که نسبت به دستگاه مختصاتی که تانسور در آن است چرخیده است.

۱۳-۳۰ نشان دهید که درمیان یک تانسور در دستگاههای مختصات مختلفی که نسبت به یکدیگر چرخیده اند ناورد است.

۱۳-۳۱ یک تانسور $T = AB + BA$ ، که در آن $A = 10u_1 - 6u_2 + 4u_3$ و $B = u_2 + 2u_3$ است در نظر بگیرید. تبدیل این تانسور را در دستگاه مختصاتی که به اندازه 45° حول محور X_3 چرخیده است، پیدا کنید.

۱۳-۳۲ تانسور زیر را قطری کنید و محورهای اصلی آن را پیدا کنید

$$T = \begin{pmatrix} 7 & \sqrt{6} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{6} & 2 & -5\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -5\sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}$$

۱۳-۳۳ یک ورقه نازک یکنواخت به جرم M و ابعاد w واقع در صفحه $X_1 - X_2$ در نظر بگیرید. نشان دهید که گشتاور لختی آن به شکل زیر است.

$$T = \begin{pmatrix} A & -C & 0 \\ -C & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{pmatrix}$$

مقادیر A ، B ، C و w را بر حسب M پیدا کنید.

اکنون محورهای مختصات را به اندازه θ حول محور X_3 بچرخانید. نشان دهید

که تانسور لختی جدید شکل زیر را می گیرد

$$T' = \begin{pmatrix} A' & -C' & 0 \\ -C' & B' & 0 \\ 0 & 0 & A' + B' \end{pmatrix}$$

مقادیر A' ، B' ، C' و θ را بر حسب A ، B ، C پیدا کنید.

نشان دهید که اگر زاویه چرخش θ با عبارت

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2C}{B-A}$$

داده شده باشد محورهای X_2 و X_3 محورهای اصلی خواهند بود.

۱۳-۳۴ معادلات (۱۳-۱۳۹ ب) و (۱۳-۱۳۹ پ) را به دست آورید .

۱۳-۳۵ مؤلفه های سرعت زاویه ای ω را مستقیماً از ماتریس تبدیل λ در معادله (۱۳-۱۱۵) به دست آورید .

۱۳-۳۶ ماتریس تبدیل وارون λ را در معادله (۱۳-۱۱۵) به دست آورید ، و سپس مؤلفه های ω' را پیدا کنید .

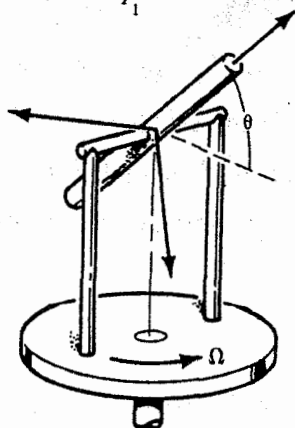
۱۳-۳۷ با استفاده از شکل (۱۳-۸) ، مؤلفه های ω را در امتداد محورهای X' به دست آورید ؛ یعنی ω_1 ، ω_2 ، و ω_3 را حساب کنید .

۱۳-۳۸ معادله (۱۳-۱۵۹) را به دست آورید .

۱۳-۳۹ مؤلفه های تانسور متناظر با یک چرخش حول محور Z به اندازه θ ، و سپس یک چرخش حول محور Y به اندازه ϕ را به دست آورید .

۱۳-۴۰ یک کره یکنواخت با گشتاورهای لختی $I_1 = I_2 = I_3$ در نظر بگیرید . معادلات حرکت کره را با استفاده از معادلات اولر به دست آورید .

۱۳-۴۱ یک میله یکنواخت به طول l و جرم m از مرکز روی یک محور افقی بدون اصطکاک سوار شده است . محور روی سکویی که با سرعت زاویه ای Ω ، آن طور که در شکل (مسئله ۱۳-۴۱) نشان داده شده است ، می چرخد سوار شده است . محور سکو از مرکز جرم میله می گذرد . با استفاده از معادلات اولر ، زاویه θ را که میله با افق می سازد بر حسب زمان پیدا کنید . نشان دهید که برای θ کوچک ، حرکت میله هماهنگ ساده با بسامد زاویه ای $\Omega \left[\frac{I_3 - I_2}{I_1} \right]^{\frac{1}{2}}$ خواهد بود .



شکل (مسئله ۱۳-۴۱)

۱۳-۴۲ معادلات (۱۳-۱۹۸) و (۱۳-۱۹۹) را به دست آورید .

۱۳-۴۳ حرکت آزاد یک فرفره متقارن را در نظر بگیرید و نشان دهید که سرعت زاویه ای ω ،

تکانه زاویه ای L ، جهت محور (ثابت) X_3 ، و محور X_3 در یک صفحه اند .

۱۳-۴۴ یک قرص دایره ای به جرم M و شعاع R آزادانه و بدون گشتاور نیروی خارجی

می چرخد . زاویه بین محور تقارن قرص و سرعت زاویه ای ω با ϕ نمایش داده

می شود . زمانی را که محور تقارن یک مخروط حول L ، یعنی حول خط تغییرناپذیر ،

طی می کند حساب کنید .

۱۳-۴۵ چرخش آزاد یک لایه تخت را در نظر بگیرید . با استفاده از معادلات اولر نشان دهید

که بزرگی مؤلفه سرعت زاویه ای در صفحه لایه ثابت است . تحت چه شرایطی مؤلفه

سرعت زاویه ای در امتداد عمود بر صفحه لایه ثابت خواهد بود ؟

۱۳-۴۶ یک جسم صلب متقارن که آزادانه در فضا حرکت می کند در نظر بگیرید . این جسم

به دو موتور جت که نسبت به محور تقارن (یعنی محور X_3) بطور متقارن قرار گرفته اند

و یک گشتاور نیروی ثابت τ در امتداد محور تقارن ایجاد می کنند. مجهز است . عبارت

عمومی سرعت زاویه ای ω را بر حسب زمان به دست آورید . نشان دهید که بزرگی ω

باز مان افزایش می یابد و مؤلفه های عمود بر محور X_3 یک بیضی ثابت رسم می کند .

۱۳-۴۷ یک جسم صلب با سه گشتاور لختی اصلی متفاوت $I_1 > I_2 > I_3$ در نظر بگیرید که

آزادانه حول مرکز جرمش می چرخد . با استفاده از معادلات اولر نشان دهید که

حرکت چرخشی جسم حول هر کدام از محورهای با بزرگترین گشتاور لختی یا با

کوچکترین گشتاور لختی پایدار است .

۱۳-۴۸ یک جسم صلب متقارن و آزاد از هر نوع گشتاور نیروی خارجی ، آزادانه حول

یک نقطه ثابت می چرخد . زاویه بین محور چرخش و محور سیستم را θ بگیریم .

گشتاور لختی I_s حول محور تقارن بزرگتر از گشتاور لختی I_n حول یک عمود بر محور

تقارن است . نشان دهید که زاویه بین محور چرخش و خط تغییرناپذیر (بردار L)

عبارت است از

$$\tan^{-1} \left[\frac{(I_s - I_n) \tan \theta}{I_s + I_n \tan^2 \theta} \right]$$

۱۳-۴۹ یک چرخ طیار (یک قرص به جرم M و شعاع R) در روی یک کامیون به گونه ای سوار

شده است که محور آن قائم است و به عنوان یک ژيروسکوپ متعادل گر کار می کند .
فرض کنیم قرص با حداکثر سرعت زاویه ای ω می چرخد . نشان دهید که گشتاور
نیروی لازم برای این که یک حرکت تقدیمی در صفحه قائم انجام دهد برابر است با
$$\tau \equiv \frac{1}{2} MR^2 \omega \Omega$$
 ، که Ω بسامد حرکت تقدیمی است .

۱۳-۵۰ فرض کنید یک فرفره وزن دار در یک پیکربندی پایدار می چرخد . اثر اصطکاک
در کاهش تدریجی مقدار ω چیست ؟

۱۳-۵۱ یک ژيروسکوپ ساده از یک قرص به جرم $۰/۲$ کیلوگرم و شعاع $۰/۰۶$ متر تشکیل
شده است ، و در مرکز میله بی وزنی به طول $۰/۱۲$ متر سوار شده است . این
ژيروسکوپ طوری به چرخش در آورده می شود که بسامد تقدیمی آن $۰/۱۲$ دور
بر ثانیه باشد . بسامد چرخش را به تقریب حساب کنید .

۱۳-۵۲ یک جسم صلب متقارن با سرعت زاویه ای ω ، در حرکت سه بُعدی ، حول مرکز
جرمش دوران می کند . اگر یک گشتاور اصطکاکی $b\omega$ ناشی از مقاومت هوا به آن
وارد شود ، نشان دهید که مؤلفه ω در جهت محور تقارن بطور نمایی با زمان
کاهش می یابد .

۱۳-۵۳ برای بررسی نقاط بازگشت حرکت ترقصی یک فرفره متقارن ، قرار می دهیم $\theta = 0$.
نشان دهید که معادله حاصل بر حسب θ $\cos \theta$ یک معادله درجه ۳ با دو ریشه حقیقی و
یک ریشه موهومی برای θ است .

منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر

- ARTHUR, W., and FENSTER, S. K., *Mechanics*, Chapter 12. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1969.
- BARGER, V., and OLSSON, M., *Classical Mechanics*, Chapter 6. New York: McGraw-Hill Book Co., 1973.
- BECKER, R. A., *Introduction to Theoretical Mechanics*, Chapter 12. New York: McGraw-Hill Book Co., 1954.
- CORBEN, H. C., and STEHLE, P., *Classical Mechanics*, Chapter 9. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1960.
- DAVIS, A. DOUGLAS, *Classical Mechanics*, Chapter 9. New York: Academic Press, Inc., 1986.
- FOWLES, G. R., *Analytical Mechanics*, Chapter 9. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1962.
- *GOLDSTEIN, H., *Classical Mechanics*, 2nd ed., Chapters 4 and 5. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1980.
- HAUSER, W., *Introduction to the Principles of Mechanics*, Chapter 9. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1965.
- KITTEL, C., KNIGHT, W. D., and RUDERMAN, M. A., *Mechanics*, Berkeley Physics Course, Volume 1, Chapter 8. New York: McGraw-Hill Book Co., 1965.
- KLEPPNER, D., and KOLENKOW, R. J., *An Introduction to Mechanics*, Chapter 7. New York: McGraw-Hill Book Co., 1973.
- *LANDAU, L. D., and LIFSHITZ, E. M., *Mechanics*, Chapter 6. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1960.
- MARION, J. B., *Classical Dynamics*, 2nd ed., Chapter 12. New York: Academic Press, Inc., 1970.
- *MOORE, E. N., *Theoretical Mechanics*, Chapters 5 and 6. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1983.
- ROSSBERG, K., *Analytical Mechanics*, Chapter 9. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1983.
- SCARBOROUGH, J. B., *The Gyroscope: Theory and Applications*. New York: Wiley-Interscience, 1958.
- SLATER, J. C., *Mechanics*, Chapters 5 and 6. New York: McGraw-Hill Book Co., 1947.
- SYMON, K. R., *Mechanics*, 3rd ed., Chapters 10 and 11. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1971.
- SYNGE, J. L., and GRIFFITH, B. A., *Principles of Mechanics*, Chapter 14. New York: McGraw-Hill Book Co., 1959.

فصل چهاردهم

نظریهٔ نوسانات کوچک و نوسانگرهای جفت شده

۱-۱۴ تعادل و انرژی پتانسیل

برای درک نظریهٔ عمومی ارتعاشات ، دانستن ارتباط بین انرژی پتانسیل و تعادل که به شرایط تعادل پایدار یا ناپایدار یک سیستم معین منجر می شود اساسی است . برای شروع ، سیستمی با n درجه آزادی در نظر بگیریم و فرض کنیم پیکربندی آن با مختصات تعمیم یافته q_1 ، q_2 ، ... ، q_n مشخص شده باشد . به علاوه ، فرض کنیم که سیستم پایسته است ؛ در نتیجه انرژی پتانسیل تابعی از مختصات است ، یعنی

$$V = V(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (1-14)$$

نیروهای تعمیم یافته Q_k با روابط زیر داده می شوند

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2-14)$$

اگر سیستم در یک پیکربندی تعادل باشد ، تمام نیروهای تعمیم یافته Q_k باید صفر باشند . به این ترتیب شرط یک پیکربندی تعادل عبارت است از

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0 \quad (3-14)$$

اگر در این پیکربندی به سیستم نیروی خارجی وارد نشود، سیستم در حال سکون باقی خواهد ماند. اکنون سیستم را کمی از این پیکربندی تعادل جابه‌جا کنیم. بعد از جابه‌جایی سیستم ممکن است به پیکربندی تعادل باز گردد یا باز ننگردد. اگر بعد از یک جابه‌جایی کوچک سیستم به پیکربندی تعادل اولیه باز گردد، گفته می‌شود که سیستم در یک تعادل پایدار است. اگر سیستم به پیکربندی تعادل باز ننگردد، در یک تعادل ناپایدار است. از طرف دیگر، اگر سیستم جابه‌جا شود و تمایلی به بازگشت یا دور شدن از پیکربندی تعادل نداشته باشد، گفته می‌شود که سیستم در تعادل خنثی است.

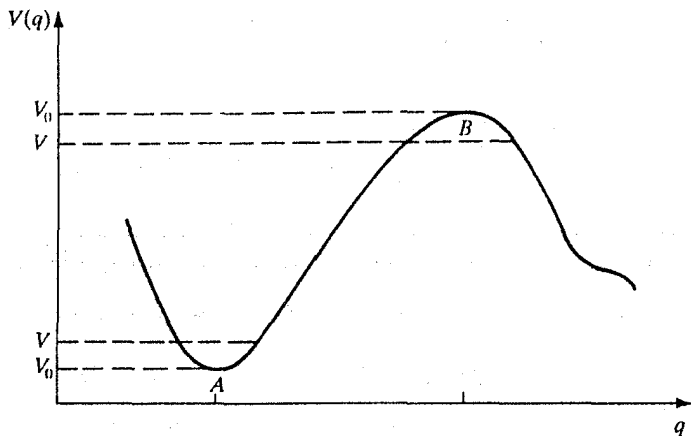
اکنون توجه خود را به پیدا کردن ارتباط بین تابع انرژی پتانسیل V و پایداری سیستم معطوف می‌کنیم. فرض کنیم وقتی سیستم در یک پیکربندی تعادل است، انرژی جنبشی آن T_0 و انرژی پتانسیل آن V_0 است. بعد از یک جابه‌جایی کوچک، انرژی جنبشی سیستم T و انرژی پتانسیل آن V خواهد بود. چون انرژی کلی پایسته است

$$\begin{aligned} T_0 + V_0 &= T + V \\ T - T_0 &= -(V - V_0) \end{aligned} \quad (۴-۱۴)$$

اکنون نموداری دلخواه از تابع انرژی پتانسیل V را نسبت به q ، مطابق شکل (۱۴-۱)، در نظر بگیریم. نقاط A و B ، که در آنها $\frac{\partial V}{\partial q}$ صفر است، نقاط تعادل هستند. حال ماهیت پایداری در این نقاط را مورد بررسی قرار دهیم.

فرض کنیم در ابتدا سیستم در تعادل متناظر با پیکربندی در B ، که انرژی پتانسیل آن V_0 آن بیشینه است، می‌باشد. هر جابه‌جایی از این تعادل سیستم را به یک انرژی پتانسیل V که کمتر از V_0 است می‌برد. بنابراین $V - V_0$ منفی است و، از معادله (۴-۱۴)، $T - T_0$ مثبت خواهد بود؛ یعنی T افزایش می‌یابد. چون T با جابه‌جایی افزایش می‌یابد، سیستم هرگز به نقطه تعادل B باز نخواهد گشت. در نتیجه B یک موقعیت تعادل ناپایدار است. اکنون نقطه A را، که در آن پتانسیل تعادلی V_0 کمینه است، در نظر بگیریم. اگر سیستم کمی جابه‌جا شود، انرژی پتانسیل آن V به V_0 افزایش می‌یابد، در نتیجه $V - V_0$ مثبت است و، از معادله (۴-۱۴)، $T - T_0$ منفی خواهد بود؛ در نتیجه T با جابه‌جایی کاهش می‌یابد. چون T نمی‌تواند منفی باشد، به کاهش خود ادامه می‌دهد تا در یک پیکربندی حدی در نزدیکی پیکربندی تعادل صفر شود؛ سیستم شروع به بازگشت به طرف پیکربندی تعادل خواهد کرد. به این ترتیب سیستم در تعادل پایدار است. نتیجه این که برای جابه‌جاییهای کوچک، شرط تعادل پایدار این

است که V_0 در پیکربندی تعادل کمینه باشد. به علاوه، در تعادل $\frac{dV}{dq}$ صفر است، مثبت بودن $V - V_0$ می‌رساند که $\frac{d^2V}{dq^2}$ در تعادل پایدار مثبت است. در یک موقعیت تعادل ناپایدار، $\frac{d^2V}{dq^2}$ منفی خواهد بود، زیرا $V - V_0$ منفی است.



شکل (۱-۱۴) شکل دلخواه یک تابع پتانسیل V نسبت به q

با اعمال بحث پیشین به سیستمی با یک درجه آزادی، می‌توانیم بنویسیم

$$V = V(q) \quad (۵-۱۴)$$

و در پیکربندی تعادل

$$Q = -\frac{dV}{dq} = 0 \quad (۶-۱۴)$$

شرط پایداری را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{d^2V}{dq^2} > 0 \quad (۷-۱۴)$$

$$\frac{d^2V}{dq^2} < 0 \quad (۸-۱۴)$$

برای $\frac{d^2V}{dq^2} = 0$ ، باید مشتق‌های مرتبه‌های بالاتر را امتحان کنیم. اگر مرتبه‌اولین مشتق غیرصفر فرد باشد، سیستم باید در تعادل ناپایدار باشد. از طرف دیگر، اگر اولین مشتق

غیر صفر از مرتبه زوج باشد ، بسته به مقدار مشتق (که آیا بزرگتر یا کوچکتر از صفر است) سیستم می تواند در یک تعادل ، پایدار یا ناپایدار باشد .

$$\frac{d^n V}{dq^n} \neq 0, \quad n > 2 \text{ و فرد, سیستم ناپایدار} \quad (9-14)$$

$$\frac{d^n V}{dq^n} > 0 \quad n > 2 \text{ و زوج, سیستم پایدار} \quad (10-14)$$

$$\frac{d^n V}{dq^n} < 0 \quad n > 2 \text{ و زوج, سیستم ناپایدار} \quad (11-14)$$

یک مورد کلی تر این وضعیت به زودی مورد بحث قرار خواهد گرفت

مثال (۱-۱۴): نشان دهید که یک چوب بیسبال به طول l که از نقطه O آویزان شده است و مرکز جرمش در فاصله d از O قرار دارد ، در وضعیت تعادل پایدار است .

وضعیت در شکل (مثال-۱۴-الف) نمایش داده شده است . وقتی چوب جابه جا شود ، خط OC با قائم ، همان طور که در شکل (مثال-۱۴-ب) نشان داده شده است ، زاویه θ می سازد . مرکز جرم به اندازه h بالا رفته است و انرژی پتانسیل با

$$V = mgh = mgd(1 - \cos \theta) \quad (1)$$

داده می شود . همان طور که نشان داده شده است ، پیکربندی تعادل $\theta = 0$ است . به این ترتیب

$$\frac{dV}{d\theta} = mgd \sin \theta \quad (2)$$

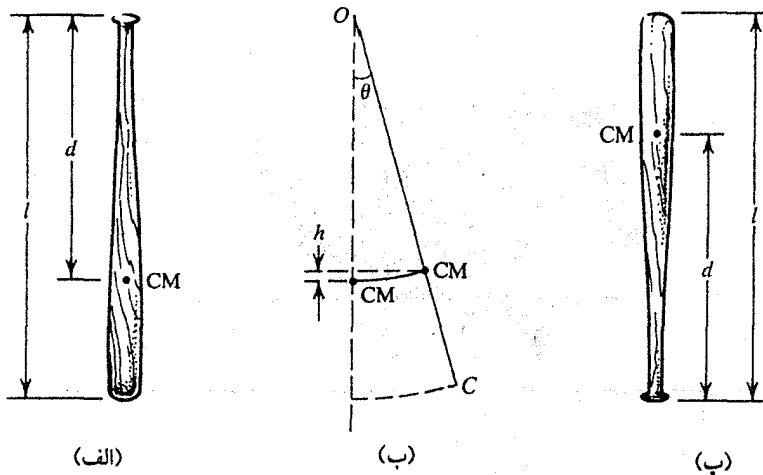
و

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = mgd \cos \theta \quad (3)$$

در نتیجه برای $\theta = 0$ ،

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{d^2V}{d\theta^2} = mgd > 0 \quad (4)$$

و سیستم در تعادل پایدار است .



شکل (مثال-۱۴-۱)

از طرف دیگر ، اگر چوب ، مانند شکل (مثال-۱۴-۱ پ) ، وارونه آویزان شده باشد ، داریم

$$V = -mgd(1 - \cos \theta) \quad (۵)$$

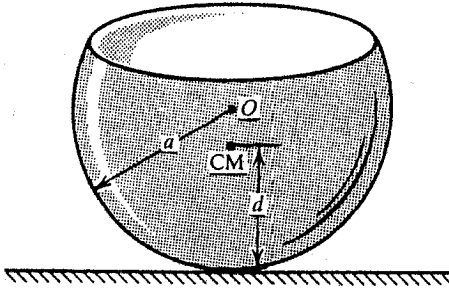
برای $\theta = 0$ ،

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{d^2V}{d\theta^2} = -mgd < 0 \quad (۶)$$

در نتیجه سیستم در یک تعادل ناپایدار است .

از بحث بالا ، می توانیم نتیجه بگیریم که اگر مرکز جرم زیر نقطه آویز باشد سیستم در تعادل پایدار خواهد بود ؛ و اگر مرکز جرم بالای نقطه آویز باشد سیستم در تعادل ناپایدار خواهد بود .

نهمین (۱-۱۴) : جسم کروی یا استوانه ای نشان داده شده در شکل (مثال-۱۴-۱) در روی یک سطح افقی تخت قرار گرفته است . شعاع انحنا a است و مرکز جرم ، همان طور که نشان داده شده است ، در فاصله d قرار دارد . نشان دهید که سیستم در تعادل پایدار است .



شکل (ت-۱۴-۱)

۱۴-۲ دو نوسانگر جفت شده و مختصات بهنجار

به عنوان مثالی ساده از یک سیستم جفت شده، دو نوسانگر هماهنگ جفت شده با یکدیگر توسط یک فنر را، آن طور که در شکل (۱۴-۲) نشان داده شده است، در نظر بگیریم. هر نوسانگر هماهنگ یک ذره به جرم m و یک فنر دارد که ثابت فنری یکی k_1 و دیگری k_2 است. این دو نوسانگر توسط فنر دیگری با ثابت فنری k' با یکدیگر جفت شده اند. حرکت دو جرم به امتداد خط واصل آنها به یکدیگر، مثلاً محور X ، محدود شده است. بنابراین سیستم دو درجه آزادی دارد که با x_1 و x_2 نمایش داده می شوند. پیکربندی سیستم توسط جابه جاییهای جرمها به ترتیب از مکانهای تعادل O_1 و O_2 نمایش داده می شود. جابه جاییهای به طرف راست مثبت و به طرف چپ منفی در نظر گرفته می شود. اگر دو نوسانگر به یکدیگر متصل نبودند هر کدام از آنها مستقل از دیگری با یکی از بسامدهای

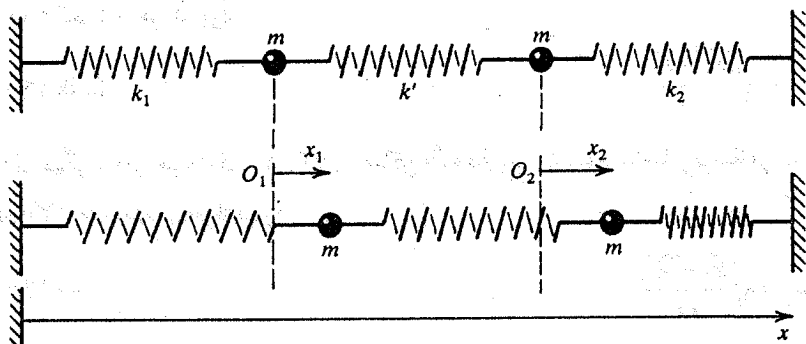
$$\omega_{10} = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \quad \text{و} \quad \omega_{20} = \sqrt{\frac{k_2}{m}} \quad (۱۲-۱۴)$$

نوسان می کرد. وقتی این نوسانگرها به وسیله فنری با ثابت فنری k' به یکدیگر متصل شوند، سیستم با بسامدهای دیگری ارتعاش می کند، که اکنون می خواهیم آنها را محاسبه کنیم. انرژی جنبشی سیستم عبارت است

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 \quad (۱۳-۱۴)$$

و انرژی پتانسیل آن برابر است با

$$V = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 + \frac{1}{2}k'(x_1 - x_2)^2 \quad (14-14)$$

شکل (۱۴-۲) : دو نوسانگر هماهنگ جفت شده توسط فنری با ثابت فنری k' در نتیجه تابع لاگرانژی L عبارت است از

$$L = T - V \quad (15-14)$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_2x_2^2 - \frac{1}{2}k'(x_1 - x_2)^2$$

معادلات لاگرانژی حرکت

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \quad (16-14)$$

به شکل زیر در می آید

$$m\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k'(x_1 - x_2) = 0 \quad (\text{الف } 17-14)$$

$$m\ddot{x}_2 + k_2x_2 + k'(x_2 - x_1) = 0 \quad (\text{ب } 17-14)$$

جمله سوم هر یک از این معادلات نتیجه جفت شدگی بین دو نوسانگر است. اگر جفت شدگی نبود، این نوسانگرها با بسامدهای داده شده توسط معادله (۱۴-۱۲) نوسان می کردند.

معادلات دیفرانسیل خطی پیشین را می توان به صورت زیر نوشت

$$m\ddot{x}_1 + (k_1 + k')x_1 - k'x_2 = 0 \quad (\text{الف } 18-14)$$

$$m\ddot{x}_2 + (k_2 + k')x_2 - k'x_1 = 0 \quad (\text{ب } 18-14)$$

این معادلات ، اگر جمله سوم در هر کدام حضور نداشت ، از یکدیگر مستقل می بودند . یعنی ، اگر جرم دوم را در $x_2 = 0$ ساکن نگاه داریم ، بسامد ارتعاش نوسانگر اول ، از معادله (۱۴-۱۸) الف) ، خواهد بود

$$\omega'_1 = \sqrt{\frac{k_1 + k'}{m}} \quad (۱۴-۱۹) \text{ الف)}$$

از طرف دیگر ، اگر جرم اول را در $x_1 = 0$ ساکن نگاه داریم ، بسامد ارتعاش نوسانگر دوم ، از معادله (۱۴-۱۸) ب) ، خواهد بود

$$\omega'_2 = \sqrt{\frac{k_2 + k'}{m}} \quad (۱۴-۱۹) \text{ ب)}$$

بسامدهای ω_1 و ω_2 که از معادلات (۱۴-۱۹) داده شده اند از ω_{20} و ω_{10} که توسط معادله (۱۴-۱۲) داده شده است بیشترند . دلیل آن این است که هر جرم به دو فنر بسته شده است نه به یک فنر .

برای به دست آوردن مدهای ممکن ارتعاش ، باید معادلات دیفرانسیل خطی (۱۴-۱۸) را همزمان حل کنیم . اگر فرض کنیم دو نوسانگر کاملاً یکسان باشند ، یعنی ،

$$k_1 = k_2 = k \quad (۱۴-۲۰)$$

مسأله قدری ساده تر خواهد شد و معادلات (۱۴-۱۸) به شکل زیر در می آیند

$$m\ddot{x}_1 + (k + k')x_1 - k'x_2 = 0 \quad (۱۴-۲۱)$$

$$m\ddot{x}_2 + (k + k')x_2 - k'x_1 = 0 \quad (۱۴-۲۲)$$

جواب آزمایشی این معادلات می تواند هر یک از سه شکل زیر را اختیار کند

$$x = A \cos(\omega t + \phi) \quad (۱۴-۲۳)$$

$$x = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t \quad (۱۴-۲۴)$$

$$x = Ae^{i(\omega t + \delta)} \quad (۱۴-۲۵)$$

که δ ضریب فاز اولیه است . جواب آزمایشی را به صورت معادله (۱۴-۲۵) بگیریم ، بنابراین

$$x_1 = Ae^{i(\omega t + \delta_1)} \quad \text{و} \quad x_2 = Be^{i(\omega t + \delta_2)}$$

اگر ضرایب فاز اولیه را صفر بگیریم، یعنی $\delta_1 = \delta_2 = 0$ ، این دو جواب به شکل زیر در می آیند

$$x_1 = Ae^{i\omega t} \quad (26-14)$$

$$x_2 = Be^{i\omega t} \quad (27-14)$$

با قرار دادن این عبارات در معادلات (۱۴-۲۱) و (۱۴-۲۲)، بعد از مرتب سازی، به دست می آوریم

$$(k + k' - m\omega^2)A - k'B = 0 \quad (28-14)$$

$$-k'A + (k + k' - m\omega^2)B = 0 \quad (29-14)$$

اکنون دو معادله جبری با سه مجهول A ، B و ω داریم. این معادلات را می توان برای A/B حل کرد، یعنی

$$\frac{A}{B} = \frac{k'}{k + k' - m\omega^2} = \frac{k + k' - m\omega^2}{k'} \quad (30-14)$$

می توانیم از تساوی آخر در معادله (۱۴-۳۰) ω را پیدا کنیم، یا می توانستیم مستقیماً معادلات (۱۴-۲۸) و (۱۴-۲۹) را، با توجه به این که درمیان ضرایب A و B صفر است، یعنی

$$\begin{vmatrix} k + k' - m\omega^2 & -k' \\ -k' & k + k' - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (31-14)$$

حل کنیم. معادله بالا معادله مفسر نامیده می شود و می توان آن را به صورت

$$(k + k' - m\omega^2)^2 - k'^2 = 0 \quad (32-14)$$

یا

$$\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)\left(\frac{k + 2k'}{m} - \omega^2\right) = 0 \quad (33-14)$$

نوشت که به دو ریشه زیر منجر می شود

$$\omega = \pm \omega_1 = \pm \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} \quad (14-34 \text{ الف})$$

و

$$\omega = \pm \omega_2 = \pm \left(\frac{k + 2k'}{m} \right)^{1/2} \quad (۱۴-۳۴ \text{ ب})$$

جوابهای عمومی معادلات (۱۴-۲۱) برحسب ریشه های ω_1 و ω_2 را می توان به صورت

زیر نوشت

$$x_1 = A_1 e^{i\omega_1 t} + A_{-1} e^{-i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t} + A_{-2} e^{-i\omega_2 t} \quad (۱۴-۳۵)$$

$$x_2 = B_1 e^{i\omega_1 t} + B_{-1} e^{-i\omega_1 t} + B_2 e^{i\omega_2 t} + B_{-2} e^{-i\omega_2 t} \quad (۱۴-۳۶)$$

برای این دو معادله دیفرانسیل هشت ثابت دلخواه وجود دارد ، اما این ثابتها همه مستقل نیستند . با قرار دادن معادلات (۱۴-۳۴ الف) و (۱۴-۳۴ ب) در معادلات (۱۴-۲۸) و

(۱۴-۲۹) یا در معادله (۱۴-۳۰) ، می توانیم نسبت A/B را برای مقادیر مختلف ω به صورت

زیر به دست آوریم

$$\omega = \omega_1 , \quad A = +B \quad (۱۴-۳۷)$$

$$\omega = \omega_2 , \quad A = -B \quad (۱۴-۳۸)$$

از ترکیب معادلات (۱۴-۳۷) و (۱۴-۳۸) با معادلات (۱۴-۳۵) و (۱۴-۳۶) ،

خواهیم داشت

$$x_1 = A_1 e^{i\omega_1 t} + A_{-1} e^{-i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t} - A_{-2} e^{i\omega_2 t} \quad (۱۴-۳۹)$$

$$x_2 = A_1 e^{i\omega_1 t} + A_{-1} e^{-i\omega_1 t} - A_2 e^{i\omega_2 t} - A_{-2} e^{-i\omega_2 t} \quad (۱۴-۴۰)$$

به این ترتیب فقط چهار ثابت اختیاری A_1 ، A_{-1} ، A_2 ، A_{-2} ، همان طور که از جواب عمومی دو معادله دیفرانسیل مرتبه دوم انتظار می رود ، داریم . مقادیر واقعی ثابتها را می توان از شرایط اولیه پیدا کرد .

مختصات بهنجار

بعد از تعیین ثابتها در معادلات (۱۴-۳۹) و (۱۴-۴۰) ، هر مختصه (x_1 و x_2)

می تواند تابع دو بسامد ω_1 و ω_2 باشند . در نتیجه تعبیر نوع حرکت نوسانی سیستم به این

سادگی نیست . می توان مختصات جدیدی مانند X_1 و X_2 را به گونه ای پیدا کرد که یک ترکیب

خطی از x_1 و x_2 باشند و هر کدام با یک تک بسامد نوسان کنند . در وضعیت حاضر ، مجموع و

تفاضل x_1 و x_2 [با استفاده از معادلات (۱۴-۳۹) و (۱۴-۴۰)] مختصات جدید را به ما می دهند، یعنی

$$X_1 = x_1 + x_2 = 2(A_1 e^{i\omega_1 t} + A_{-1} e^{-i\omega_1 t}) \quad (۱۴-۴۱)$$

$$= C e^{i\omega_1 t} + D e^{-i\omega_1 t}$$

$$X_2 = x_1 - x_2 = 2(A_2 e^{i\omega_2 t} + A_{-2} e^{-i\omega_2 t}) \quad (۱۴-۴۲)$$

$$= E e^{i\omega_2 t} + F e^{-i\omega_2 t}$$

که C ، D ، E و F ثابتهای جدید هستند. مختصات جدید X_1 و X_2 متناظر با مدهای نوسانی جدیدی هستند، که هر مد با یک تک بسامد نوسان می کند. این مدها، مدهای بهنجار، و مختصات متناظر با آنها مختصات بهنجار نامیده می شوند. یک ویژگی برجسته مدهای بهنجار این است که، برای هر مد داده شده (X_1 یا X_2) تمام مختصات (x_1 و x_2 در این مورد) با یک بسامد نوسان می کنند. معمولاً، تمام مختصات بهنجار، بجز در شرایط خاص، بطور همزمان تحریک می شوند. با این وجود اگر یک مد از ابتدا تحریک شده نباشد، در سرتاسر حرکت به همین صورت باقی خواهد ماند.

ماهیت هر یک از مدهای بهنجار را در صورتی می توان جداگانه بررسی کرد که تمام مدهای بهنجار دیگر را بتوان برابر با صفر قرار داد. در وضعیت حاضر، برای مطالعه ظهور مد X_1 ، باید داشته باشیم $X_2 = 0$ ؛ یعنی اگر $X_1 \neq 0$ ،

$$X_2 = 0 = x_1 - x_2 \quad \text{یا} \quad x_1 = x_2 \quad (۱۴-۴۳)$$

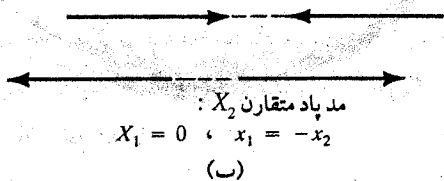
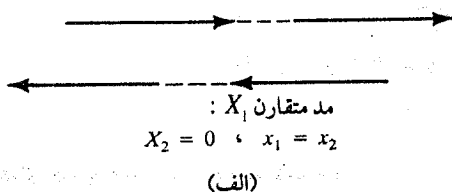
به این ترتیب X_1 یک مد متقارن است. و، همان طور که در شکل (۱۴-۱۳ الف) نشان داده شده است، هر دو جرم دارای یک جابه جایی و یک بسامد ($\omega_1 = (\frac{k}{m})^{\frac{1}{2}}$) هستند، و همفازند. از طرف دیگر، ظهور مد X_2 با گذاردن $X_1 = 0$ ممکن می شود؛ یعنی، اگر $X_2 \neq 0$ ،

$$X_1 = 0 = x_1 + x_2 \quad \text{یا} \quad x_1 = -x_2 \quad (۱۴-۴۴)$$

به این ترتیب X_2 یک مد پاد متقارن است و به صورتی است که در شکل (۱۴-۳ ب) نمایش داده شده است. هر دو جرم جابه جایی برابر و مختلف الجهتی (غیر همفاز) دارند، اما با یک بسامد $\omega_2 = [(k + k') / m]^{\frac{1}{2}}$ نوسان می کنند. بطور خلاصه

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad X_2 = 0: x_1 = x_2 \quad \text{مد متقارن } X_1 \quad (۴۵-۱۴)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}, \quad X_1 = 0: x_1 = -x_2 \quad \text{مد پاد متقارن } X_2 \quad (۴۶-۱۴)$$



شکل (۳-۱۴) : مسدای ارتعاشی دو نوسانگر جفت شده در شکل (۲-۱۴) :

(الف) مدمتقارن ، و (ب) مد پاد متقارن

روشن است که در یک مد متقارن دو نوسانگر طوری نوسان می کنند که گویی جفت شدگی بین آنها نیست و بسامد آنها همان بسامد اصلی است . در مد پاد متقارن ، نتیجه جفت شدگی طوری است که نوسانگرها غیر همفاز نوسان می کنند ، و بسامد آنها بزرگتر از بسامد انفرادی جفت نشده آنها است . بطور کلی ، مدی که بیشترین تقارن را دارد ، کمترین بسامد را دارد ، و بسامد پاد متقارن بیشترین است . وقتی تقارن از بین برود ، فترها باید سخت تر کار کنند ، و در نتیجه بسامد افزایش می یابد .

برای تحریک مد متقارن ، دو جرم باید از مکانهای تعادل خود به یک طرف و به یک اندازه کشیده شوند و سپس رها شوند ، بطوری که $x_1 = x_1(t)$ و $x_2 = x_2(t)$ شکل زیر را داشته باشد

$$x_1(0) = x_2(0) \quad \text{و} \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) \quad (۴۷-۱۴)$$

برای تحریک مد پاد متقارن، دو جرم باید به یک اندازه ولی در جهت‌های مخالف کشیده شده و رها شوند، به گونه‌ای که

$$x_1(0) = -x_2(0) \quad \text{و} \quad \dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0) \quad (۴۸-۱۴)$$

بطور کلی حرکت سیستم ترکیبی از این دو مد خواهد بود.

معادلات حرکت در مختصات بهنجار

اکنون عبارتهایی برای انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل در مختصات بهنجار به دست می‌آوریم. از معادلات (۴۱-۱۴) و (۴۲-۱۴) نتیجه می‌شود

$$x_1 = \frac{X_1 + X_2}{2} \quad (۴۹-۱۴)$$

$$x_2 = \frac{X_1 - X_2}{2} \quad (۵۰-۱۴)$$

با گذاردن این مقادیر در معادلات (۱۳-۱۴) و (۱۴-۱۴) خواهیم داشت

$$T = \frac{m}{2} \left(\frac{\dot{X}_1 + \dot{X}_2}{2} \right)^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{\dot{X}_1 - \dot{X}_2}{2} \right)^2 = m \left(\frac{\dot{X}_1}{2} \right)^2 + m \left(\frac{\dot{X}_2}{2} \right)^2$$

$$V = \frac{k}{2} \left(\frac{X_1 + X_2}{2} \right)^2 + \frac{k}{2} \left(\frac{X_1 - X_2}{2} \right)^2 + \frac{k'}{2} X_2^2 \quad (۵۱-۱۴)$$

یا

$$V = \frac{k}{2} \left(\frac{X_1^2}{2} \right) + \left(\frac{k + 2k'}{2} \right) \left(\frac{X_2^2}{2} \right) \quad (۵۲-۱۴)$$

بنابراین

$$L = T - V = \frac{m}{4} \dot{X}_1^2 + \frac{m}{4} \dot{X}_2^2 - \frac{k}{4} X_1^2 - \left(\frac{k + 2k'}{4} \right) X_2^2 \quad (۵۳-۱۴)$$

توجه کنیم که عبارتهای T ، V و L شامل جملات ضربدری نیستند. به این ترتیب معادلات لاگرانژی حرکت در مختصات بهنجار،

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial X_1} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial X_2} = 0 \quad (۵۴-۱۴)$$

نتیجه می دهد

$$\ddot{X}_1 + \omega_1^2 X_1 = 0, \quad \omega_1 = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} \quad (۵۵-۱۴)$$

و

$$\ddot{X}_2 + \omega_2^2 X_2 = 0, \quad \omega_2 = \left(\frac{k + 2k'}{m}\right)^{1/2} \quad (۵۶-۱۴)$$

یعنی ، مد X_1 با بسامد ω_1 و مد X_2 با بسامد ω_2 ، در توافق با نتایجی که قبلاً به دست آمده است ، نوسان می کنند . [یادآوری می کنیم که این معادلات می توانند مستقیماً با قرار دادن معادلات (۱۴-۴۹) و (۱۴-۵۰) در معادله (۱۴-۱۸) به دست آیند] .

از این بحث می توانیم در مورد مختصات بهنجار به نتایج زیر برسیم : وقتی انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل برحسب مختصات بهنجار بیان شوند ، هیچ جمله ضربدری در آنها حضور نخواهد داشت ، یعنی ، T و V توابع درجه دوم همگن هستند . معادلات دیفرانسیل خود به خود جدا می شوند ، یعنی ، برای هر مختصه بهنجار یک معادله دیفرانسیل وجود دارد . حل هر معادله دیفرانسیل یک مد ارتعاشی جداگانه به دست می دهد . در زیر ، روش عمومی تبدیل به مختصات بهنجار ، و در نتیجه به مدهای ارتعاشی بهنجار را بررسی خواهیم کرد .

۱۴-۳ نظریه نوسانات کوچک

یک سیستم شامل n ذره برهم کنش کننده ، با $3n$ درجه آزادی که با مجموعه مختصات تعمیم یافته $(q_1, q_2, \dots, q_{3n})$ توصیف می شود در نظر بگیریم . به علاوه ، فرض کنیم نیروی اصطکاکی در کار نیست و نیروهای بین ذرات پایستارند . نشان خواهیم داد که می توان روش معادلات لاگرانژ را برای تعیین بسامدها و دامنه های نوسانات کوچک حول وضعیتهای تعادل پایدار در یک سیستم پایستار به کار گرفت .

برای چنین سیستم پایستاری ، انرژی پتانسیل را با $(q_1, q_2, \dots, q_{3n})$ نمایش می دهیم . نوسانات کوچک حول یک نقطه تعادل با مختصات تعمیم یافته $(q_{10}, q_{20}, \dots, q_{3n0})$ انجام می گیرند . با بسط انرژی پتانسیل حول یک نقطه تعادل به سری تیلور چندبُعدی ، داریم

داریم

$$\begin{aligned}
 V(q_1, q_2, \dots, q_{3n}) &= V(q_{10}, q_{20}, \dots, q_{3n0}) \\
 &+ \frac{1}{1!} \sum_{l=1}^{3n} \left(\frac{\partial V}{\partial q_l} \right) \Big|_{q_l=q_{l0}} (q_l - q_{l0}) \\
 &+ \frac{1}{2!} \sum_{l=1}^{3n} \sum_{m=1}^{3n} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_l \partial q_m} \right) \Big|_{\substack{q_l=q_{l0} \\ q_m=q_{m0}}} (q_l - q_{l0})(q_m - q_{m0}) \\
 &+ \dots
 \end{aligned} \tag{۵۷-۱۴}$$

چون صفر انرژی پتانسیل اختیاری است، اولین جمله طرف راست ثابت است و می توان آن را برابر با صفر قرار داد بدون این که بر معادلات حرکت تأثیر بگذارد. همچنین، به خاطر این که سیستم در تعادل است، نیروهای تعمیم یافته Q_l باید صفر باشند، یعنی

$$Q_l = -\frac{\partial V}{\partial q_l} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, 3n \tag{۵۸-۱۴}$$

و جمله دوم در بسط حذف می شود. به این ترتیب با حفظ جملات مرتبه دوم و حذف جملات مرتبه های بالاتر، می توانیم انرژی پتانسیل را به صورت

$$V(q_1, q_2, \dots, q_{3n}) = \frac{1}{2!} \sum_{l=1}^{3n} \sum_{m=1}^{3n} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_l \partial q_m} \right) \Big|_{\substack{q_l=q_{l0} \\ q_m=q_{m0}}} (q_l - q_{l0})(q_m - q_{m0}) \tag{۵۹-۱۴}$$

بنویسیم. با وارد کردن مجموعه جدیدی از مختصات تعمیم یافته η_l ، که جابه جایها از وضعیت تعادل را نمایش می دهند، داریم

$$V = V(\eta_l) = \frac{1}{2!} \sum_{l=1}^{3n} \sum_{m=1}^{3n} V_{lm} \eta_l \eta_m \tag{۶۰-۱۴}$$

$$\eta_l = (q_l - q_{l0}) \quad \text{و} \quad \eta_m = (q_m - q_{m0}) \tag{۶۱-۱۴}$$

که در آن

$$V_{lm} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_l \partial q_m} \right) \Big|_{\substack{q_l=q_{l0} \\ q_m=q_{m0}}} = V_{ml} = \text{constant} \tag{۶۱-۱۴}$$

ثابت های V_{lm} یک ماتریس متقارن V تشکیل می دهند. چون حرکت را در اطراف نقطه تعادل بررسی می کنیم، انرژی پتانسیل باید کمینه باشد، یعنی $V(\eta) > V(0)$. در نتیجه صورت درجه دوم همگن V که با معادله (۶۰-۱۴) داده شده است، باید مثبت باشد. [یعنی، برای مورد یک بُعدی $(\frac{\partial^2 V}{\partial q^2})_{q=q_0} > 0$ ، یا مشتق مرتبه دوم در نقطه تعادل بزرگتر از صفر

است. [به این ترتیب برای یک سیستم چندبُعدی، شرایط لازم و کافی برای این که یک صورت درجه دوم همگن مثبت معین باشد (مشتقات در نقاط تعادل محاسبه شده اند) عبارتند از

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_l^2} > 0, \quad l = 1, 2, \dots, 3n$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial q_l^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_l \partial q_m} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_l \partial q_m} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_m^2} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{matrix} l = 1, 2, \dots, 3n \\ m = 1, 2, \dots, 3n \\ l \neq m \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_{3n}} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_{3n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_{3n} \partial q_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_{3n} \partial q_2} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_{3n}^2} \end{vmatrix} > 0 \quad (۶۲-۱۴)$$

یا، برحسب نمادگذاری ماتریسی، ضرایب $V_{lm} = V_{ml}$ باید در شرایط زیر صدق کنند

$$V_{11} > 0$$

$$\begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} & \dots & V_{1m} \\ V_{21} & V_{22} & \dots & V_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{l1} & V_{l2} & \dots & V_{lm} \end{vmatrix} > 0 \quad (۶۳-۱۴)$$

که در آن V_{lm} ها با معادله (۶۱-۱۴) داده شده اند و نیازی نیست که همه V_{lm} ها بطور جداگانه مثبت باشند.

اگر برای تمام مقادیر l و m مشتق $V_{lm} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_l \partial q_m} = 0$ باشد تعادل پایدار باز هم امکان پذیر است به شرط این که اولین مشتق غیر صفر پتانسیل از مرتبه زوج باشد.

اکنون انرژی جنبشی سیستم را در نظر بگیریم. انرژی جنبشی در مختصات دکارتی عبارت است از

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3n} m_j \dot{x}_j^2 \quad (۱۴-۶۴)$$

برای بیان T بر حسب مختصات تعمیم یافته می توان از معادلات تبدیل مختصات دکارتی به مختصات تعمیم یافته، یعنی

$$x_j = x_j(q_1, q_2, \dots, q_l, t)$$

$$\dot{x}_j = \sum_{l=1}^{3n} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial x_j}{\partial t}$$

استفاده کرد. در نتیجه انرژی جنبشی داده شده در معادله (۱۴-۶۴) را می توان به صورت زیر نوشت

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3n} m_j \left(\sum_{l=1}^{3n} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial x_j}{\partial t} \right) \left(\sum_{m=1}^{3n} \frac{\partial x_j}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial x_j}{\partial t} \right) \quad (۱۴-۶۵)$$

با بسط طرف راست در می یابیم که T شامل سه نوع جمله است: (۱) جملاتی که نسبت به سرعت‌های تعمیم یافته از درجه دومند، (۲) جملاتی که نسبت به سرعت‌های تعمیم یافته خطی اند، (۳) جملاتی که از سرعت‌های تعمیم یافته مستقلند. ما معادلات تبدیلی را می خواهیم که شامل زمان بطور صریح نباشند ($\frac{\partial x_j}{\partial t} = 0$). معنی این مطلب این است که T در معادله (۱۴-۶۵) باید تنها جملاتی را در برداشته باشد که نسبت به سرعت‌های تعمیم یافته از درجه دوم هستند. (معادلات تبدیلی که جملات دیگر را وارد کنند، به عنوان مثال، در دستگاه مختصات چرخان رخ می دهند). در نتیجه معادله (۱۴-۶۵) برای انرژی جنبشی شکل زیر را به خود می گیرد

$$T = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{3n} \sum_{m=1}^{3n} \left(\sum_{j=1}^{3n} m_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \frac{\partial x_j}{\partial q_m} \right) \dot{q}_l \dot{q}_m \quad (۱۴-۶۶)$$

برای نوسانات کوچک حول نقطه تعادل، می توانیم جمله های داخل پرانتز را گسترش دهیم و

به صورت زیر بنویسیم

$$\sum_{j=1}^{3n} m_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \frac{\partial x_j}{\partial q_m} = \sum_{j=1}^{3n} m_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_l} \right)_{q_{l0}} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_m} \right)_{q_{m0}} + \sum_{j=1}^{3n} m_j \sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_l} \frac{\partial x_j}{\partial q_m} \right)_{q_{l0}, q_{m0}} \eta_k + \dots \quad (۶۷-۱۴)$$

که در آن $\eta_k = (q_k - q_{k0})$. چون به نوسانات کوچک علاقه مندیم، تنها به حفظ جملاتی از T بر حسب η نیاز داریم که با جملات V بر حسب η از یک مرتبه باشند. در نتیجه، از معادلات (۶۶-۱۴) و (۶۷-۱۴)، با یادآوری این که $\dot{q}_l = \dot{\eta}_l$ و $\dot{q}_m = \dot{\eta}_m$ ، می‌توانیم بنویسیم

$$T \approx \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{3n} \sum_{m=1}^{3n} T_{lm} \dot{\eta}_l \dot{\eta}_m \quad (۶۸-۱۴)$$

که در آن

$$T_{lm} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3n} m_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_l} \right)_{q_{l0}} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_m} \right)_{q_{m0}} = T_{ml} \quad (۶۹-۱۴)$$

و T_{lm} عناصر ماتریس متقارن T هستند.

بعد از به دست آوردن عبارتهایی برای انرژی پتانسیل، معادله (۶۰-۱۴)، و انرژی جنبشی، معادله (۶۸-۱۴)، اکنون در وضعیتی هستیم که لاگرانژی را بنویسیم:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{3n} \sum_{m=1}^{3n} (T_{lm} \dot{\eta}_l \dot{\eta}_m - V_{lm} \eta_l \eta_m) \quad (۷۰-۱۴)$$

در نتیجه معادلات لاگرانژی

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \eta} = 0 \quad (۷۱-۱۴)$$

به شکل

$$\sum_{m=1}^{3n} (T_{lm} \dot{\eta}_m + V_{lm} \eta_m) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, 3n \quad (۷۲-۱۴) \text{ الف}$$

یا

$$T_{11} \dot{\eta}_1 + V_{11} \eta_1 + T_{12} \dot{\eta}_2 + V_{12} \eta_2 + \dots + T_{13n} \dot{\eta}_{3n} + V_{13n} \eta_{3n} = 0 \quad (۷۲-۱۴) \text{ ب}$$

در می آیند. معادلات (۷۲-۱۴) نمایشگر $3n$ معادله دیفرانسیل مرتبه دوم جفت شده خطی هستند. از تجربه مان در حل مورد یک بعدی، می توانیم جواب معادله (۷۲-۱۴) را به صورت

$$\eta_m = A_m \cos(\omega t + \phi_m) \quad (۷۳-۱۴)$$

بنویسیم، که دامنه A_m و زاویه فاز ϕ_m باید از شرایط اولیه تعیین شوند. در حالی که بسامد طبیعی ω از ثابتهای سیستم تعیین می شود. با قرار دادن معادله (۷۳-۱۴) در معادله (۷۲-۱۴ الف)، به دست می آوریم

$$\sum_{m=1}^{3n} [V_{lm} A_m \cos(\omega t + \phi_m) - \omega^2 T_{lm} A_m \cos(\omega t + \phi_m)] = 0, \quad l = 1, 2, \dots, 3n \quad (۷۴-۱۴)$$

برای یک ω ی معین، همه ϕ_m ها باید یکسان باشند، $\phi_m = \phi$ ، در نتیجه می توان از $\cos(\omega t + \phi)$ فاکتور گرفت؛ یعنی،

$$\cos(\omega t + \phi) \sum_{m=1}^{3n} [V_{lm} A_m - \omega^2 T_{lm} A_m] = 0, \quad l = 1, 2, \dots, 3n \quad (۷۵-۱۴)$$

چون $\cos(\omega t + \phi)$ عموماً صفر نیست، باید داشته باشیم

$$\sum_{m=1}^{3n} [V_{lm} A_m - \omega^2 T_{lm} A_m] = 0, \quad l = 1, 2, \dots, 3n \quad (۷۶-۱۴)$$

به این ترتیب، کلاً $3n$ معادله جبری خطی همگن برای A_m و ω به صورت زیر داریم

$$\begin{aligned} (V_{11} - \omega^2 T_{11})A_1 + (V_{12} - \omega^2 T_{12})A_2 + \dots + (V_{1,3n} - \omega^2 T_{1,3n})A_{3n} &= 0 \\ \vdots & \\ (V_{3n,1} - \omega^2 T_{3n,1})A_1 + (V_{3n,2} - \omega^2 T_{3n,2})A_2 + \dots + (V_{3n,3n} - \omega^2 T_{3n,3n})A_{3n} &= 0 \end{aligned} \quad (۷۷-۱۴)$$

برای به دست آوردن یک جواب غیر صفر، دترمینان ضرایب A_m در معادله (۷۷-۱۴) باید صفر

باشد، یعنی

$$\begin{vmatrix} (V_{11} - \omega^2 T_{11}) & (V_{12} - \omega^2 T_{12}) & \dots & (V_{1,3n} - \omega^2 T_{1,3n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (V_{3n,1} - \omega^2 T_{3n,1}) & (V_{3n,2} - \omega^2 T_{3n,2}) & \dots & (V_{3n,3n} - \omega^2 T_{3n,3n}) \end{vmatrix} = 0 \quad (۷۸-۱۴ \text{ الف})$$

$$|V - \omega^2 T| = 0 \quad (۷۸-۱۴ \text{ ب})$$

این به یک معادله مفسر به صورت یک چندجمله ای از درجه $3n$ بر حسب ω می انجامد. هریک

از $3n$ ریشه این معادله بسامد متفاوتی به ما می دهد. به این ترتیب جواب عمومی، برای نوسانات کم دامنه، عبارت است از

$$\eta_l = \sum_{k=1}^{3n} A_{kl} \cos(\omega_k t + \phi_k) \quad (14-79)$$

که مقادیر ω_k از معادله مفسر، معادله (14-87)، تعیین می شود، در حالی که A_k و ϕ_k از شرایط اولیه تعیین می شوند.

اگر ω^2 منفی باشد ($\omega^2 < 0$)، ω موهومی خواهد بود و نوسانات کوچکی وجود نخواهد داشت. اگر $\omega^2 = 0$ باشد، مختصه η ثابت می ماند، در نتیجه نوسان نداریم، فقط انتقال یا چرخش کل سیستم داریم. تنها اگر $\omega^2 > 0$ باشد نوساناتی حول تعادل پایدار وجود خواهد داشت. به این ترتیب

$$\omega_k^2 > 0, \quad \eta_k = A_k e^{i\omega_k t} + B_k e^{-i\omega_k t} \quad (14-80)$$

$$\omega_k^2 = 0, \quad \eta_k = C_k t + D_k \quad (14-81)$$

$$\omega_k^2 < 0, \quad \eta_k = E_k e^{\omega_k t} + F_k e^{-\omega_k t} \quad (14-82)$$

ما بسامدها را پیدا کرده ایم، اما محاسبه دامنه ها هنوز باقی مانده است. دامنه های A_{kl} به وسیله معادلات جبری (14-77) به یکدیگر مربوطند. با قرار دادن هر یک از مقادیر ω_k بطور جداگانه در معادلات (14-77)، می توان تمام ضرایب A_{kl} بجز یکی از آنها، مثلاً A_{k1} ، را تعیین کرد. به این ترتیب می توان ضرایب A_{kl} را بر حسب A_{k1} ، به شکل

$$\frac{A_{k2}}{A_{k1}}, \frac{A_{k3}}{A_{k1}}, \dots, \frac{A_{k,3n}}{A_{k1}} \quad (14-83)$$

تعیین کرد. ما باید $6n$ ثابت ($3n$ تا A_{kl} و $3n$ تا ϕ_k) از شرایط اولیه تعیین کنیم.

۱-۴ نوسانات کوچک در مختصات بهنجار

بار دیگر یک سیستم اختیاری با r درجه آزادی در نظر بگیریم که در اطراف یک تعادل پایدار نوسانات کوچک انجام می دهد. انرژی پتانسیل بر حسب مختصات تعمیم یافته (q'_1)، (q'_2, \dots, q'_r) ، و پیکربندی تعادل با مختصات $(q'_{10}, q'_{20}, \dots, q'_{r0})$ توصیف شده است. برای تعادل پایدار، همان طور که در بخش پیشین توضیح داده شد، تنها جمله غیر صفر

قابل ملاحظه در بسط انرژی پتانسیل $V(q'_1, q'_2, \dots, q'_r)$ عبارت است از

$$V = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^r V_{lm} \eta'_l \eta'_m \quad (14-14)$$

که در آن

$$\eta'_i = q'_i - q'_{i0}$$

$$\eta'_m = q'_m - q'_{m0}$$

و

$$V_{lm} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q'_l \partial q'_m} \right) \Bigg|_{\substack{q'_i = q'_{i0} \\ q'_m = q'_{m0}}} = V_{ml} = \text{constant} \quad (14-15)$$

به این ترتیب انرژی پتانسیل، همان طور که قبلاً ذکر شد، نه تنها یک صورت درجه دوم همگن است، که برای تعادل ناپایدار، مثبت معین نیز هست. این تابع نمی تواند منفی باشد و تنها وقتی صفر است که تمام مختصات آن صفر باشد. برای چنین سیستمی انرژی پتانسیل V را می توان به صورت زیر نوشت

$$V = a_{11} \eta_1'^2 + a_{22} \eta_2'^2 + \dots + a_{rr} \eta_r'^2 + 2a_{12} \eta_1' \eta_2' + \dots \quad (14-16)$$

که هر جمله آن نسبت به مختصات از درجه دوم است و ضرایب $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{12}, a_{rr}, \dots$ و غیره همه ثابتند. توجه کنیم که هم جملات مربعی حضور دارند و هم جملات ضربدری.

به همین نحو، دیدیم که اگر انرژی جنبشی T شامل زمان بطور صریح نباشد، نسبت به سرعت های تعمیم یافته همگن خواهد بود و می توان آن را به صورت

$$T = b_{11} \dot{\eta}_1'^2 + b_{22} \dot{\eta}_2'^2 + \dots + b_{rr} \dot{\eta}_r'^2 + b_{12} \dot{\eta}_1' \dot{\eta}_2' + \dots \quad (14-17)$$

نوشت. برای نوسانات کوچک، کمیت های $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{12}, b_{rr}, \dots$ و غیره ثابت هستند، در نتیجه T مثبت معین است. یک بار دیگر به حضور جملات ضربدری توجه کنیم.

ممکن است یک تبدیل خطی به مختصات تعمیم یافته $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ بدهیم که در آن V و T جملات ضربدری نداشته باشند. ترکیب خطی مختصات تعمیم یافته اصلی

$\eta_1, \dots, \eta_2, \eta_1$ می تواند به مختصات تعمیم یافته جدید $\eta'_1, \dots, \eta'_2, \eta'_r$ منجر شود

$$\eta_1 = e_{11}\eta'_1 + e_{12}\eta'_2 + \dots + e_{1r}\eta'_r$$

$$\eta_2 = e_{21}\eta'_1 + e_{22}\eta'_2 + \dots + e_{2r}\eta'_r \quad (۸۸-۱۴)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\eta_r = e_{r1}\eta'_1 + e_{r2}\eta'_2 + \dots + e_{rr}\eta'_r$$

بطوری که V و T به صورتهای زیر، که شامل جملات ضربدری نیستند، درآیند

$$V = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 \eta_1^2 + \lambda_2^2 \eta_2^2 + \dots + \lambda_r^2 \eta_r^2) \quad (۸۹-۱۴)$$

و

$$T = \frac{1}{2}(m_1 \dot{\eta}_1^2 + m_2 \dot{\eta}_2^2 + \dots + m_r \dot{\eta}_r^2) \quad (۹۰-۱۴)$$

که λ ها و m ها ثابتند. مجموعه جدید $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ مختصات بهنجار سیستم نامیده می شود.

اکنون معادلات لاگرانژی برای مختصات بهنجار عبارتند از

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_i} = 0 \quad (۹۱-۱۴)$$

که $L = T - V$. اگر V و T توسط معادلات (۸۹-۱۴) و (۹۰-۱۴) داده شده باشند، معادلات حاصل حرکت برای η_i عبارت است از

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = 0 \quad (۹۲-۱۴)$$

که ω بسامدهای بهنجار هستند که با رابطه زیر داده شده اند

$$\omega_i^2 = \frac{\lambda_i^2}{m_i} \quad (۹۳-۱۴)$$

کمیات $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ مختصات بهنجار، و $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$ بسامدهای بهنجار متناظر هستند. جواب معادله (۹۲-۱۴) عبارت است از

$$\eta_i^2 > 0, \quad \eta_i = A_i e^{i\omega_i t} + B_i e^{-i\omega_i t} \quad (۹۴-۱۴ \text{ الف})$$

$$\eta_i = A'_i \cos(\omega_i t + \phi_i) \quad (۹۴-۱۴ \text{ ب})$$

$$\omega_l^2 = 0, \quad \eta_l = C_l t + D_l \quad (95-14)$$

$$\omega_l^2 < 0, \quad \eta_l = E_l e^{\omega_l t} + F_l e^{-\omega_l t} \quad (96-14)$$

که F_l و E_l ، D_l ، C_l ، ϕ_l ، A'_l ، B_l ، A_l همه ثابتند .

همان طور که قبلاً ثابت شد و از معادله (۹۲-۱۴) نیز روشن است ، هر مختصه بهنجار تنها ، با یک بسامد بهنجار ω_l نوسان می کند ، و به این دلیل است که این نوسانات مدهای بهنجار ارتعاشی نامیده می شوند و هر مختصه بهنجار η_l با رابطه (۹۴-۱۴) داده می شود . توجه به این نکته لازم است که اگر بسامد ω_l ی وابسته به مختصه تعمیم یافته η_l بزرگتر از صفر نباشد ، چنین مختصه ای متناظر با حرکت نوسانی حول تعادل نیست . بنابراین ، اگر $\omega_l^2 = 0$ باشد ، همان طور که از جواب (۹۵-۱۴) آشکار است ، مد حرکت یک مد حرکت انتقالی است ؛ یعنی ، اگر ذره کمی جابه جا شود ، نیروی بازگرداننده ای در کار نخواهد بود ، و ذره در اطراف مرکز جرم حرکت انتقالی خواهد داشت . از طرف دیگر ، اگر $\omega_l^2 < 0$ باشد ، همان طور که از معادله (۹۶-۱۴) روشن است ، حرکت غیرنوسانی است ؛ این به خاطر جملات نمایی افزایشی و کاهشی است ، که به رشد بدون مرز جابه جایی می انجامد .

۱۴-۵ فرمول بندی تانسوری نظریه نوسانات کوچک

مسائل نوسانات کوچک را که در دو بخش پیشین بحث شد ، اکنون می توان با ظرافت بیشتری ، با به کارگیری روشهای آنالیز تانسوری ، شبیه به آنچه که در توصیف حرکت جسم صلب در فصل ۱۳ به کار رفت ، مورد بحث قرار داد .

برای یک سیستم با $3n$ درجه آزادی ، عبارتهای مربوط به نوسانات کوچک حول تعادل پایدار ، معادلات لاگرانژی طبق معادله (۷۶-۱۴) ، عبارتند از

$$\sum_{m=1}^{3n} [V_{lm} A_m - \omega^2 T_{lm} A_m] = 0, \quad l = 1, 2, \dots, 3n \quad (97-14)$$

که در آن

$$V_{lm} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_l \partial q_m} \right) \Big|_{\substack{q_l = q_{l0} \\ q_m = q_{m0}}} = V_{ml} \quad (98-14)$$

$$T_{lm} = \frac{1}{2} \sum m_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_l} \right)_{q_{l0}} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_m} \right)_{q_{m0}} = T_{ml} \quad (99-14)$$

معادله (۹۷-۱۴) معادل با $3n$ معادله خطی به شکل زیر است

$$\begin{aligned} (V_{11} - \omega^2 T_{11})A_1 + (V_{12} - \omega^2 T_{12})A_2 + \dots + (V_{1,3n} - \omega^2 T_{1,3n})A_{3n} &= 0 \\ \vdots & \\ (V_{3n,1} - \omega^2 T_{3n,1})A_1 + (V_{3n,2} - \omega^2 T_{3n,2})A_2 + \dots + (V_{3n,3n} - \omega^2 T_{3n,3n})A_{3n} &= 0 \end{aligned} \quad (100-14)$$

کمیات V_{lm} عناصر ماتریس مقارن V

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & \dots & V_{1,3n} \\ V_{21} & V_{22} & \dots & V_{2,3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{3n,1} & V_{3n,2} & \dots & V_{3n,3n} \end{bmatrix} \quad (101-14)$$

و کمیات T_{lm} عناصر ماتریس مقارن T هستند

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1,3n} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2,3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{3n,1} & T_{3n,2} & \dots & T_{3n,3n} \end{bmatrix} \quad (102-14)$$

و معادلات لاگرانژی، معادلات (۹۷-۱۴) و (۱۰۰-۱۴)، را می توان به شکل تانسوری به صورت

$$(V - \omega^2 T)A = 0 \quad (103-14)$$

نوشت که A یک بردار ستونی است :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{3n} \end{bmatrix} \quad (104-12)$$

به هر بسامد ω_k یک بردار A_k متناظر است، در نتیجه، مانند قبل، جواب عمومی

ترکیب خطی جوابهای انفرادی خواهد بود.

کار بعدی ما تعیین مختصات بهنجار متناظر با هر بسامد بهنجار، یعنی، تعیین مدهای

بهنجار ارتعاشی است. این کار مستلزم بردن V و T به مجموعه مختصات بهنجار جدیدی

است که در آن V و T هر دو قطری هستند (یعنی، عناصر غیرقطری صفر خواهند بود). وجود

چنین تبدیل مختصاتی که باعث قطری شدن همزمان V و T می شود تنها وقتی امکان پذیر است

که هر دو ماتریس V و T مقارن و با عناصر حقیقی باشند، و V و همچنین T مثبت معین باشند

(درمیان بزرگتر از صفر باشد). این فرآیند قطری سازی همزمان، معادله (۱۰۳-۱۴) را به

$$(V' - \omega^2 T')A = 0 \quad (105-14)$$

تغییر خواهد داد که

$$(\mathbf{V}' - \omega^2 \mathbf{T}') = \begin{bmatrix} V'_{11} - \omega^2 T'_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V'_{22} - \omega^2 T'_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & V'_{33} - \omega^2 T'_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & V'_{3n,3n} - \omega^2 T'_{3n,3n} \end{bmatrix} \quad (106-14)$$

قطری سازی به شیوه ای که در فصل ۱۳ توضیح داده شد انجام خواهد شد

برای هر بسامد بهنجار ω_m جوابی به شکل

$$\eta_l = C_m a_{lm} \cos(\omega_m t + \phi_m) \quad (107-14)$$

وجود دارد که C_m ضریب معیار، a_{lm} ضریب، و ϕ_m زاویه فاز است. این جواب یک ترکیب خطی از دو تابع مستقل $\cos \omega t$ و $\sin \omega t$ است. به این ترتیب عمومی ترین جواب خواهد بود

$$\eta_l(t) = \sum_{m=1}^n a_{lm} C_m \cos(\omega_m t + \phi_m) \quad (108-14)$$

که یک ترکیب خطی از $2n$ تابع است. معادله (۱۰۸-۱۴) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\eta_l(t) = \sum_{m=1}^n [a_{lm}(C_m \cos \phi \cos \omega_m t - C_m \sin \phi \sin \omega_m t)] \quad (109-14)$$

با تعریف

$$A_m = C_m \cos \phi \quad \text{و} \quad B_m = -C_m \sin \phi$$

می توانیم معادله (۱۰۹-۱۴) را به صورت

$$\eta_l(t) = \sum_{m=1}^n [a_{lm}(A_m \cos \omega_m t + B_m \sin \omega_m t)] \quad (110-14)$$

بنویسیم که ضرایب a_{lm} یک مجموعه وابسته به بسامد ω_m یا m امین مد بهنجار است.

ثابتها در معادله (۱۱۰-۱۴) اکنون می توانند با روش زیر تعیین شوند. نخست

بسامدهای بهنجار ω_m را از معادله مفسر

$$\det |V - \omega^2 T| = 0$$

محاسبه می‌کنیم. سپس در معادلات

$$\sum_{l=1}^n [V_{lm} - \omega^2 T_{lm}] a_{lm} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (14-111)$$

ω^2 را با ω_m^2 جایگزین می‌کنیم و n مجموعه جوابهای (a_{lm}) را، هر مجموعه برای یک m ، محاسبه می‌کنیم. (یکی از ضرایب a_{lm} را باید برابر با یک گرفت؛ در غیر این صورت، فقط نسبتهای ضرایب محاسبه خواهند شد). در مرحله سوم، A_m و B_m را می‌توان با استفاده از شرایط اولیه سیستم محاسبه کرد.

$$\eta_l(0) \equiv \eta_{l0} = \sum_{m=1}^n a_{lm} A_m \quad (14-112)$$

$$\dot{\eta}_l(0) \equiv \dot{\eta}_{l0} (= v_{l0}) = \sum_{m=1}^n a_{lm} \omega_m B_m \quad (14-113)$$

در یک مورد خاص، اگر تعداد درجات آزادی خیلی بزرگ باشد، شرط $a_{lm} = \delta_{lm}$ را تحمیل کنیم، معادلات (14-110)، (14-112)، و (14-113) خواهند شد

$$\eta_l(t) = A_l \cos \omega_l t + B_l \omega_l t$$

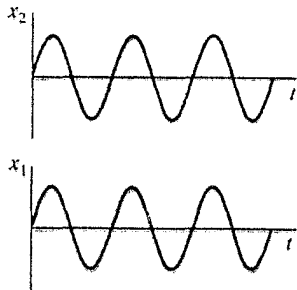
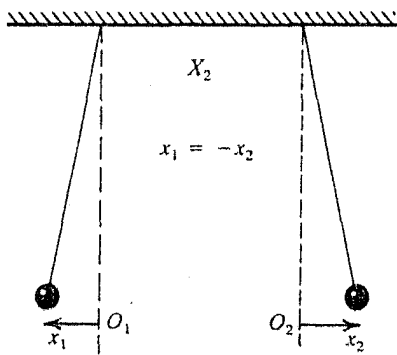
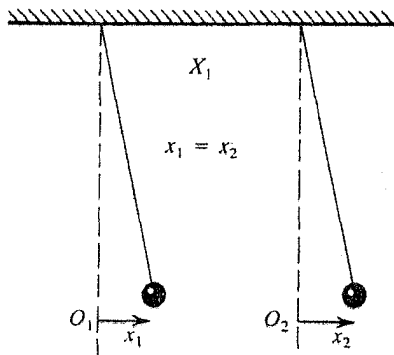
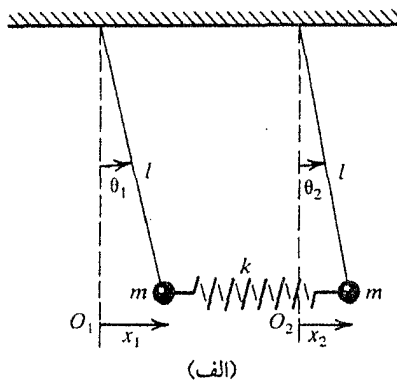
$$\eta_l(0) \equiv \eta_{l0} = A_l$$

$$\dot{\eta}_l(0) \equiv v_{l0} = \omega_l B_l$$

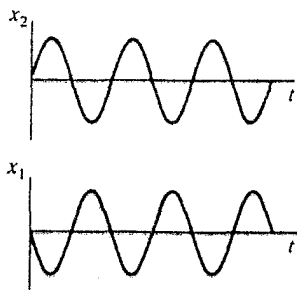
این معادلات برای مختصات بهنجار برقرارند؛ یعنی، ممکن است تبدیل مختصات را طوری پیدا کنیم که تمام $\eta_l(t)$ مختصات بهنجار باشند و با این معادله نمایش داده شوند.

مثال (۱۴-۲): دو آونگ جفت شده را مطابق شکل (مثال-۱۴-۲)، در نظر بگیرید. با استفاده از نمادگذاری ماتریسی، (الف) مؤلفه‌های V_{lm} ماتریس V ، (ب) مؤلفه‌های T_{lm} ماتریس T ، (پ) بسامدهای بهنجار، و (ت) مدهای بهنجار، (ث) معادلات حرکت، و (ج) جواب عمومی را پیدا کنید.

همان‌طور که در شکل (مثال-۱۴-۲) نشان داده شده است، هر دو آونگ دارای طول l و جرم m است و تعادل در جایی است که در آن $x_1 = x_2 = 0$. دو جرم توسط یک فنر با ثابت فنری k به یکدیگر بسته شده‌اند. جابه‌جاییهای x_1 و x_2 به طرف راست، و θ_1 و θ_2 در جهت پاد ساعتگرد مثبتند.



(ب) مد متقارن : $x_1 = x_2$



(پ) مد پاد متقارن : $x_1 = -x_2$

(الف) انرژی پتانسیل سیستم با

$$V = mgl(1 - \cos \theta_1) + mgl(1 - \cos \theta_2) + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2$$

داده می شود. برای زاویه های کوچک

$$\begin{aligned} mgl(1 - \cos \theta) &= mgl \left[1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \dots \right) \right] \approx mgl \frac{\theta^2}{2} \\ &\approx \frac{mgl}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^2 \approx \frac{mg}{2l} x^2 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} V &= \frac{mg}{2l} x_1^2 + \frac{mg}{2l} x_2^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(k + \frac{mg}{l} \right) x_1^2 + \frac{1}{2} \left(k + \frac{mg}{l} \right) x_2^2 - kx_1x_2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x_1} \right|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = \left(k + \frac{mg}{l} \right) x_1 - kx_2 \Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = 0 \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x_2} \right|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = \left(k + \frac{mg}{l} \right) x_2 - kx_1 \Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = 0 \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} \right|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = k + \frac{mg}{l} \quad , \quad \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} \right|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = k + \frac{mg}{l} \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_1} \right|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = -k \quad \text{و} \quad \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} \right|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = -k$$

به این ترتیب ماتریس انرژی پتانسیل عبارت است از

$$V = \begin{bmatrix} k + \frac{mg}{l} & -k \\ -k & k + \frac{mg}{l} \end{bmatrix} \quad (5)$$

چون (۵) می دهد

$$\begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{vmatrix} > 0$$

صورت درجه دوم همگن وابسته مثبت معین است.

(ب) عبارت انرژی جنبشی به قرار زیر است

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 \quad (6)$$

مؤلفه‌های T_{lm} و T_{ll} ضرایب $\frac{1}{2} \dot{x}_l^2$ و $\dot{x}_l \dot{x}_m$ هستند. در نتیجه

$$T = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad (7)$$

بنابراین لاگرانژی سیستم عبارت است از

$$L = T - V = \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \frac{1}{2} (T_{lm} \dot{x}_l \dot{x}_m - V_{lm} x_l x_m) \quad (8)$$

و معادلات لاگرانژی عبارتند از

$$\sum_{l=1}^2 (T_{lm} \ddot{x}_l + V_{lm} x_l) = 0, \quad m = 1, 2 \quad (9)$$

یعنی

$$T_{11} \ddot{x}_1 + V_{11} x_1 + T_{12} \ddot{x}_2 + V_{12} x_2 = 0$$

$$T_{21} \ddot{x}_1 + V_{21} x_1 + T_{22} \ddot{x}_2 + V_{22} x_2 = 0$$

با استفاده از معادلات (۵) و (۷) در معادلات قبلی، خواهیم

داشت

$$m \ddot{x}_1 + \left(k + \frac{mg}{l}\right) x_1 - k x_2 = 0 \quad (10)$$

$$m \ddot{x}_2 + \left(k + \frac{mg}{l}\right) x_2 - k x_1 = 0 \quad (11)$$

این معادلات دو معادله جفت شده هستند.

(پ) برای تعیین بسامدهای بهنجار یا ویژه از معادله (۱۴-۷۸)، یعنی

$$|V - \omega^2 T| = 0$$

استفاده می‌کنیم. به این ترتیب

$$\begin{vmatrix} k + \frac{mg}{l} - m\omega^2 & -k \\ -k & k + \frac{mg}{l} - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

یا

$$\left(k + \frac{mg}{l} - m\omega^2\right)^2 - k^2 = 0$$

(۱۲)

$$\left(k + \frac{mg}{l} - m\omega^2 - k\right)\left(k + \frac{mg}{l} - m\omega^2 + k\right) = 0$$

یا

$$k + \frac{mg}{l} - m\omega^2 - k = 0$$

که می دهد

$$\omega^2 = \omega_1^2 = \frac{g}{l} \quad \text{یا} \quad \omega_1 = \pm \left(\frac{g}{l}\right)^{1/2} \quad (13)$$

یا

$$k + \frac{mg}{l} - m\omega^2 + k = 0$$

که می دهد

$$\omega^2 = \omega_2^2 = \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\right) \quad \text{یا} \quad \omega_2 = \pm \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\right)^{1/2} \quad (14)$$

مانند قبل ، جوابهای

$$x_1 = Ae^{i\omega t} \quad \text{و} \quad x_2 = Be^{i\omega t} \quad (15)$$

را آزمایش می کنیم . با قرار دادن آنها در معادلات (۱۰) و (۱۱) خواهیم داشت

$$\left(k + \frac{mg}{l} - m\omega^2\right)A - kB = 0$$

$$\left(k + \frac{mg}{l} - m\omega^2\right)B - kA = 0$$

$$\omega^2 = \omega_1^2 = \frac{g}{l}, \quad \rightarrow \quad A = B \quad (16)$$

$$\omega^2 = \omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2k}{m}, \quad \rightarrow \quad A = -B \quad (17)$$

در نتیجه ، با استفاده از این معادلات ، جواب عمومی می شود

$$x_1 = A_1 e^{i\omega_1 t} + A_{-1} e^{-i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t} + A_{-2} e^{-i\omega_2 t} \quad (18)$$

$$x_2 = A_1 e^{i\omega_1 t} + A_{-1} e^{-i\omega_1 t} - A_2 e^{i\omega_2 t} - A_{-2} e^{-i\omega_2 t} \quad (19)$$

این دو معادله همان طور که برای دو معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم انتظار می رود، چهار ثابت دارند. این ثابتها از شرایط اولیه تعیین می شوند.

(ت) اکنون از معادله (۱۴-۱۰۳) یا (۱۴-۷۶) به تعیین مختصات بهنجار می پردازیم

یا

$$\sum_{m=1}^2 |V_{lm} - \omega^2 T_{lm}| A_m = 0, \quad l=1,2$$

که برای $\omega^2 = \omega_1^2 = g/l$ خواهد شد

$$\begin{pmatrix} k + \frac{mg}{l} - \frac{mg}{l} & -k \\ -k & k + \frac{mg}{l} - \frac{mg}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} = 0$$

یا

$$\begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} = 0$$

با قرار دادن $a_{11} = 1$ خواهیم داشت

$$a_{12} = 1 \quad (20)$$

به همین نحو، برای $\omega^2 = \omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2k}{m}$ خواهیم داشت

$$\begin{pmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} = 0$$

که با قرار دادن $a_{21} = 1$ می دهد

$$a_{22} = -1 \quad (21)$$

به این ترتیب مدهای بهنجار عبارتند از

$$\eta_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$\eta_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

با قرار دادن مقادیر a_{11} ، a_{12} ، a_{21} ، و a_{22} از معادلات (۲۰) و (۲۱) و x_1 و x_2 از معادلات (۱۸) و (۱۹)، خواهیم یافت

$$\eta_1 = x_1 + x_2 = 2(A_1 e^{i\omega_1 t} + A_{-1} e^{-i\omega_1 t}) \quad (22)$$

$$\eta_2 = x_1 - x_2 = 2(A_2 e^{i\omega_2 t} + A_{-2} e^{-i\omega_2 t}) \quad (23)$$

دیده می شود که هر مد بهنجار فقط به یک بسامد بستگی دارد. به علاوه می توانیم، مانند قبل، معنی فیزیکی این مدها را ببینیم. برای مد η_1 ، قرار می دهیم $\eta_2 = 0$ ، بنابراین

$$x_1 - x_2 = 0 \quad \text{یا} \quad x_1 = x_2 \quad (24)$$

یعنی، دو نوسانگر همفاز حرکت می کنند. این مد، مد متقارن است که در شکل (مثال ۱۴-۲-ب) نمایش داده شده است.

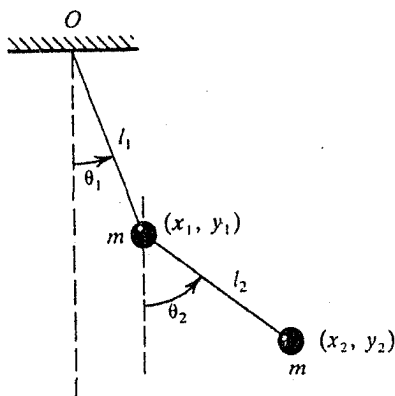
به همین نحو، برای مد η_2 ، می گذاریم $\eta_1 = 0$ ؛ بنابراین

$$x_1 + x_2 = 0 \quad \text{یا} \quad x_1 = -x_2 \quad (25)$$

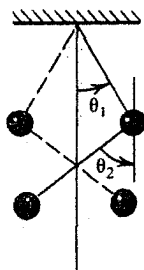
یعنی، دو نوسانگر کاملاً در فازهای متقابل ارتعاش می کنند. این مد، مد پادمقارن است که در شکل (مثال ۱۴-۲-پ) نمایش داده شده است. بطور کلی، هر دو مد بطور همزمان تحریک می شوند. هنوز مقادیر ثابتها مانده اند که باید از شرایط اولیه تعیین شوند.

تمرین (۲-۱۴): برای سیستم نشان داده در شکل (۲-۱۴) و بحث شده در بخش (۲-۱۴)، بسامدها و مدهای بهنجار را با استفاده از روش ماتریسی بحث شده در بالا پیدا کنید.

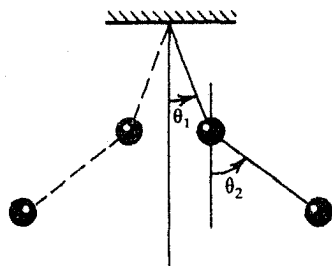
مثال (۱۴-۳): بسامدهای نوسانات کوچک را برای یک آونگ دوتایی، آن طور که در شکل (مثال ۱۴-۲-الف) نشان داده شده است، پیدا کنید. فرض کنید $m_1 = m_2 = m$ و $l_1 = l_2 = l$.



(الف)



(ب) مد پاد متقارن



(پ) مد متقارن

شکل (مثال-۱۴-۳)

فرض کنیم (x_1, y_1) و (x_2, y_2) مختصات دو جرم آونگ باشند، بطوری که طولهای آونگها، همان طور که نشان داده شده است، با قائم زاویه های θ_1 و θ_2 بسازند. از شکل (مثال-۱۴-۳ الف)، داریم

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1$$

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2$$

$$y_1 = l_1 \cos \theta_1$$

$$y_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2$$

به این ترتیب انرژی پتانسیل سیستم عبارت است از

$$\begin{aligned}
 V &= -mgy_1 - mgy_2 \\
 &= -mgl \cos \theta_1 - mgl(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \quad (1) \\
 \left. \frac{\partial V}{\partial \theta_1} \right|_{\substack{\theta_1=0 \\ \theta_2=0}} &= 0 \quad \text{و} \quad \left. \frac{\partial V}{\partial \theta_2} \right|_{\substack{\theta_1=0 \\ \theta_2=0}} = 0
 \end{aligned}$$

مؤلفه های V_{im} عبارتند از

$$\begin{aligned}
 V_{11} &= \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} \right|_{\substack{\theta_1=0 \\ \theta_2=0}} = mgl + mgl = 2mgl \\
 V_{22} &= \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} \right|_{\substack{\theta_1=0 \\ \theta_2=0}} = mgl \quad V_{12} = V_{21} = 0
 \end{aligned}$$

بنابراین

$$V = \begin{pmatrix} 2mgl & 0 \\ 0 & mgl \end{pmatrix} \quad (2)$$

چون

$$\begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad (3)$$

بنابراین ، صورت درجه دوم همگن متناظر مثبت معین است .

مؤلفه های T_{im} ماتریس T به روش زیر محاسبه می شوند

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\
 &= \frac{1}{2}m[l \cos \theta_1 \dot{\theta}_1]^2 + \frac{1}{2}m[l(-\sin \theta_1) \dot{\theta}_1]^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}m[l \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + l \cos \theta_2 \dot{\theta}_2]^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}m[l(-\sin \theta_1) \dot{\theta}_1]^2 + [l(-\sin \theta_2) \dot{\theta}_2]^2 \\
 &= \frac{1}{2}ml^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m[l^2 \dot{\theta}_1^2 + l^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2]
 \end{aligned} \quad (4)$$

در نقطه تعادل $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ،

$$T = \frac{1}{2}(2ml^2) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2 \dot{\theta}_2^2 + ml^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \quad (5)$$

مؤلفه های T_{im} و T_{ii} ضرایب $\frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2$ و $\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_m$ هستند ، یعنی

$$T_{11} = 2ml^2 , \quad T_{22} = ml^2 , \quad T_{12} = T_{21} = ml^2$$

بنابراین

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{pmatrix} \quad (۶)$$

بسامدهای بهنجار این آونگ به وسیله

$$|\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T}| = 0 \quad (۷)$$

یعنی

$$\begin{vmatrix} 2mgl - \omega^2 2ml^2 & -\omega^2 ml^2 \\ -\omega^2 ml^2 & mgl - \omega^2 ml^2 \end{vmatrix} = 0$$

داده می شوند که می دهد

$$\omega_1^2 = (2 - \sqrt{2}) \frac{g}{l} \quad \text{و} \quad \omega_2^2 = (2 + \sqrt{2}) \frac{g}{l} \quad (۸)$$

مدهای بهنجار یک آونگ دوتایی برای $\omega^2 = \omega_1^2$ عبارتند از

$$\begin{pmatrix} 2mgl - (2 - \sqrt{2}) \frac{g}{l} 2ml^2 & -(2 - \sqrt{2}) \frac{g}{l} ml^2 \\ -(2 - \sqrt{2}) \frac{g}{l} ml^2 & mgl - (2 - \sqrt{2}) \frac{g}{l} ml^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = 0 \quad (۹)$$

که به

$$(2 - 2\sqrt{2})a_{11} + (2 - \sqrt{2})a_{21} = 0 \quad (۱۰)$$

$$(2 - \sqrt{2})a_{11} + (1 - \sqrt{2})a_{21} = 0 \quad (۱۱)$$

کاهش می یابد و اگر $a_{11} = 1$ باشد نتیجه می شود

$$a_{21} = \sqrt{2} \quad (۱۲)$$

به همین نحو، برای $\omega^2 = \omega_2^2$ و قرار دادن $a_{12} = 1$ ، خواهیم داشت

$$a_{22} = -\sqrt{2} \quad (۱۳)$$

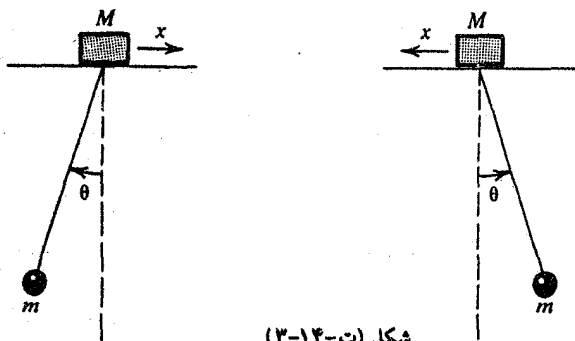
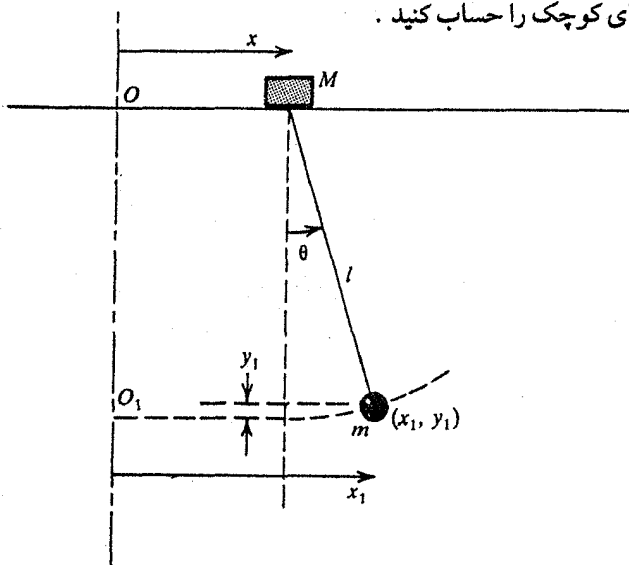
 a_{11} و a_{12} مربوط به ذره ۱ و a_{21} و a_{22} مربوط به ذره ۲ هستند. دو مد عبارتند از

$$\eta_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = x_1 + x_2 \quad (۱۴)$$

$$\eta_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \sqrt{2}(x_1 - x_2) \quad (۱۵)$$

در مد η_1 ، ذرات در فازهای متقابل حرکت می کنند و ، همان طور که در شکل (مثال ۱۴-۳ ب) نشان داده شده است ، یک مد پاد متقارن است . در مد η_2 ، ذرات همفاز حرکت می کنند و ، آن طور که در شکل (مثال ۱۴-۳ پ) نشان داده شده است ، یک مد متقارن است .

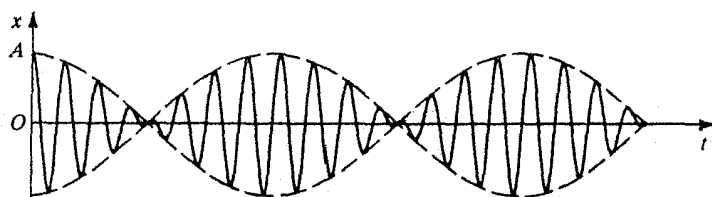
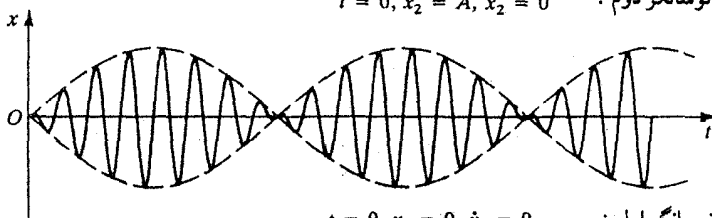
تمرین (۱۴-۳) : وضعیت نشان داده شده در شکل (ت-۱۴-۳) را در نظر بگیرید . جرم M مقبید است که در روی یک خط افقی بدون اصطکاک حرکت کند . جرم دیگر m به وسیله یک نخ غیر قابل کشش بدون جرم به طول l به M متصل است . بسامد نوسانهای کوچک را حساب کنید .



شکل (ت-۱۴-۳)

۱۴-۶ ارتعاشات نزدیک به هم و زنش

دو نوسانگر ساده هر کدام به طول l و جرم m که توسط فنری با ثابت فنری k جفت شده اند، مطابق شکل (ت-۱۴-۲)، در نظر بگیرید. اگر فنر مقاومت کوچکی در مقابل حرکت نسبی دو آونگ ایجاد کند، می‌گوییم که سیستم جفت شدگی ضعیفی دارد؛ در صورتی که اگر فنر مقاومت شدیدتری ایجاد کند، می‌گوییم که سیستم جفت شدگی قوی دارد. اگر آونگها از نظر طول یا جرم دقیقاً یکسان نباشند، می‌گوییم که دو آونگ غیر هم‌نوا یا ناهم‌نوا هستند. در حال حاضر، فرض کنیم که جرم و طول آونگها دقیقاً برابرند، و توسط یک فنر بطور ضعیفی جفت شده‌اند. همچنین فرض کنیم که در یک صفحه نوسان می‌کنند. به علاوه، فرض کنیم که یکی از آونگها به وسیله جابه‌جایی اولیه‌ای تحریک شده است، در حالی که آونگ دیگر در حال سکون است. نوسانات متوجه دو آونگ با گذشت زمان در شکل (۱۴-۴) نمایش داده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود نوسانات مدوله شده‌اند و انرژی بطور پیوسته از یکی به دیگری منتقل می‌شود. وقتی یک آونگ با بیشینه دامنه حرکت کند، آونگ دیگر در حال سکون است، و برعکس. این پدیده را تشدید بین دو سیستم می‌نامند. انتقال تناوبی انرژی بین دو آونگ را می‌توان با بیان ریاضی که بعداً توضیح داده خواهد شد اثبات کرد. این، همان‌طور که در شکل (۱۴-۴) نمایش داده شده است، نظریه تشدید است. یک ناهم‌نوايي مختصر، همان‌طور که بعداً خواهیم دید، به پدیده زنش می‌انجامد.

نوسانگر دوم: $t = 0, x_2 = A, \dot{x}_2 = 0$ نوسانگر اول: $t = 0, x_1 = 0, \dot{x}_1 = 0$

شکل (۱۴-۴): تشدید بین دو نوسانگر (در این مورد آونگها) که بطور ضعیفی جفت شده‌اند

برای مورد شکل (ت-۱۴-۲) فرض کنیم که در $t=0$ داریم $x_1=0$ ، $\dot{x}_1=0$ ، $x_2=A$ و $\dot{x}_2=0$. با اعمال این شرایط به معادلات (۱۸) و (۱۹) در مثال (۲-۱۴) [یا برای سیستم نشان داده شده در شکل (۲-۱۴) که به معادلات (۳۹-۱۴) و (۴۰-۱۴) منجر می شود] داریم

$$x_1(t) = A_1 e^{i\omega_1 t} + A_{-1} e^{-i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t} + A_{-2} e^{-i\omega_2 t} \quad (۱۱۴-۱۴)$$

$$x_2(t) = A_1 e^{i\omega_1 t} + A_{-1} e^{-i\omega_1 t} - A_2 e^{i\omega_2 t} - A_{-2} e^{-i\omega_2 t} \quad (۱۱۵-۱۴)$$

در $t=0$ خواهیم داشت

$$A_1 + A_{-1} + A_2 + A_{-2} = 0 \quad (الف ۱۱۶-۱۴)$$

$$A_1 + A_{-1} - A_2 - A_{-2} = A \quad (ب ۱۱۶-۱۴)$$

$$i\omega_1(A_1 - A_{-1}) + i\omega_2(A_2 - A_{-2}) = 0 \quad (الف ۱۱۷-۱۴)$$

$$i\omega_1(A_1 - A_{-1}) - i\omega_2(A_2 - A_{-2}) = 0 \quad (ب ۱۱۷-۱۴)$$

حل این معادلات نتیجه می دهد

$$A_1 = A_{-1} = \frac{A}{4} \quad \text{و} \quad A_2 = A_{-2} = -\frac{A}{4} \quad (۱۱۸-۱۴)$$

با قرار دادن این مقادیر معادلات (۱۱۴-۱۴) و (۱۱۵-۱۴) ، به دست می آوریم

$$x_1(t) = \frac{A}{4} [(e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t}) - (e^{i\omega_2 t} + e^{-i\omega_2 t})]$$

$$x_2(t) = \frac{A}{4} [(e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t}) + (e^{i\omega_2 t} + e^{-i\omega_2 t})]$$

چون $2 \cos \theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ ، می توانیم بنویسیم

$$x_1 = \frac{A}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \quad (۱۱۹-۱۴)$$

$$x_2 = \frac{A}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) \quad (۱۲۰-۱۴)$$

معادلات (۱۱۹-۱۴) و (۱۲۰-۱۴) را می توان به شکل زیر نوشت

$$x_1 = A \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \quad (۱۲۱-۱۴)$$

$$x_2 = A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \quad (122-14)$$

قرار دهیم $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_0$ و $\omega_1 \cong \omega_2$ ، در این صورت می توانیم بنویسیم

$$x_1 = A \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \sin \omega_0 t \quad (123-14)$$

$$x_2 = A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos \omega_0 t \quad (124-14)$$

توجه کنیم که ، همان طور که انتظار می رفت ، در $t = 0$ داریم $x_1 = 0$ و $x_2 = A$. این معادلات بیان می دارند که x_1 و x_2 حرکاتی نوسانی به صورت $\sin \omega_0 t$ و $\cos \omega_0 t$ ، با دامنه هایی که به کندی تغییر می کنند و به ترتیب با

$$A \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \quad (125-14)$$

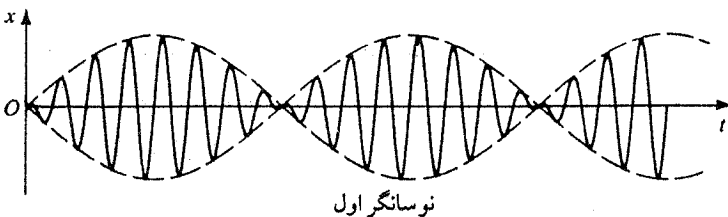
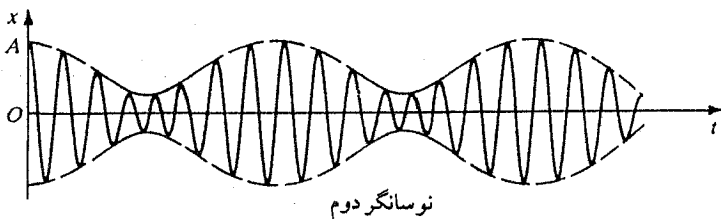
$$A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \quad (126-14)$$

نمایش داده می شوند ، انجام می دهند . این مطلب می رساند که هرچه دامنه x_1 بزرگتر شود دامنه x_2 کوچکتر می شود ، و برعکس . این مطلب در شکل (۱۴-۴) نشان داده شده است . معنی این مطلب انتقال انرژی بتناوب از یکی به دیگری است . دوره تناوب T این انتقال انرژی عبارت است از

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi}{\omega_2 - \omega_1} \quad (127-14)$$

اگر این دو آونگ کمی ناهمنوا باشند (بسامدهای کمی متفاوت داشته باشند) تبادل انرژی باز هم صورت می گیرد ، اما این تبادل کامل نیست . آونگ دوم که در آغاز تحریک شده بود ، به دامنه کمینه ای می رسد ، اما نه دامنه صفر . آونگ اول که در آغاز ساکن بود ، در طول نوسانش به دامنه صفر می رسد و این مطلب به پدیده زنش ، آن طور که در شکل (۱۴-۵) نشان داده شده است ، منجر می شود . به این ترتیب تشدید در اثر یک ناهمنوایی مختصر به هم می خورد . این ملاحظات را می توانیم به مثال دیگری اعمال کنیم و آن آونگ دوتایی است که در مثال (۱۴-۳) مورد بحث قرار گرفت و در شکل (مثال-۱۴-۳) نشان داده شد . اگر دو جرم و دو طول مساوی باشند ، هنوز می توانیم ارتعاشات تشدید داشته باشیم ، اما فرض

کنیم که جرم (و در نتیجه وزن) بالایی خیلی بزرگتر از جرم پایینی باشد. این مطلب به ناهمنوایی مختصر و به تشکیل زنش منجر می شود. فرض کنیم آونگها را با خارج کردن اندک جرم بالایی از وضع قائم و رها کردن آن به حرکت درآوریم. در حرکت بعدی، در بازه های منظم، جرم پایینی به حال سکون در می آید، در حالی که جرم بالایی به بیشینه دامنه می رسد، یا وقتی جرم پایینی به بیشینه دامنه می رسد جرم بالایی دامنه کمینه ای (مخالف با صفر) خواهد داشت. این همان پدیده زنش است، که در شکل (۱۴-۵) نمایش داده شده است. یک بار دیگر، به علت ناهمنوایی مختصر، یک انتقال ناقص انرژی خواهیم داشت.



شکل (۱۴-۵): پدیده زنش بین دو نوسانگر کمی ناهمنوا و با جفت شدگی ضعیف

اگر در مثالهای پیشین، هر دو آونگ بطور همزمان، یا (۱) در یک جهت یا (۲) در جهت های مخالف، به حرکت در آورده شده بودند، به این نتیجه می رسیدیم که بین دو آونگ تبادل انرژی صورت نمی گرفت. مدهای بهنجار ارتعاشی را، آن طور که در بخش (۱۴-۲) و در مثال (۱۴-۲) بحث شد، به دست می آوریم.

بحث پیشین برای سیستمهای نوسان کننده مکانیکی را می توان به سیستمهای الکتریکی گسترش داد. نوسانات نزدیک به هم در مدارهای الکتریکی اهمیت زیادی دارد. در سیستمهای الکتریکی یک مدار اولیه و یک مدار ثانویه داریم که معمولاً توسط القا به یکدیگر جفت شده اند. بنابراین اگر مدار اولیه تحریک شده باشد، مدار ثانویه نیز، در موقع تشدید،

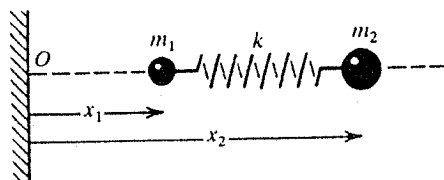
شدیداً نوسان می‌کند. برخلاف آونگهای جفت شده که قبلاً بررسی شد، در مدارهای الکتریکی میرایی باید گنجانده شده باشد. همان طور که در فصل ۴ بحث شد، میرایی معادل با مقاومت اهمی، جرم متناظر با خودالقایی، و نیروی بازگرداننده متناظر با اثرات ظرفیتی است. به علاوه، در نوسانات الکتریکی، تنها با «جفت شدگی مکانی» سر و کار نداریم، بلکه با «جفت شدگیهای سرعتی و شتابی نیز سر و کار داریم.

۱۴-۷ ارتعاش مولکولها

اکنون مدهای ممکن ارتعاشی را برای مولکولهای دو اتمی و سه اتمی بررسی کنیم. یک مولکول دو اتمی نمونه‌ای را می‌توان معادل با دو جرم m_1 و m_2 در نظر گرفت که به وسیلهٔ یک فنر بدون جرم با ثابت فنری k و طول طبیعی a به یکدیگر وصل شده‌اند، و در امتداد خط واصل دو جرم، آن طور که در شکل (۱۴-۶) نشان داده شده است، نوسان می‌کنند. x_1 و x_2 را مختصات m_1 و m_2 از یک نقطهٔ ثابت O در نظر بگیریم. انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی سیستم عبارت است از

$$V = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - a)^2 \quad (14-128)$$

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \quad (14-129)$$



شکل (۱۴-۶): طرح‌وارهٔ یک سیستم معادل با یک مولکول دو اتمی

عبارت انرژی پتانسیل یک تابع درجهٔ دوم همگن نیست؛ در نتیجه تبدیل خطی به مختصات تعمیم یافته ممکن نیست. اما می‌توان با جایگذاری

$$u = x_2 - a \quad \text{و} \quad \dot{u} = \dot{x}_2 \quad (14-130)$$

بر این مشکل پیروز شد. با قرار دادن این عبارات در معادلات (۱۴-۱۲۸) و (۱۴-۱۲۸) داریم

$$V = \frac{1}{2}k(u - x_1)^2 \quad (۱۳۱-۱۴)$$

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{u}^2 \quad (۱۳۲-۱۴)$$

به این ترتیب مختصات تعمیم یافته جدید x_1 و u هستند و لاگرانژی به شکل

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{u}^2) - \frac{1}{2}k(u - x_1)^2 \quad (۱۳۳-۱۴)$$

در می آید. معادلات لاگرانژی

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial L}{\partial u} = 0 \quad (۱۳۴-۱۴)$$

می دهند

$$m_1\ddot{x}_1 + kx_1 - ku = 0 \quad (۱۳۵-۱۴)$$

$$m_2\ddot{u} + ku - kx_1 = 0 \quad (۱۳۶-۱۴)$$

جوابها را به شکل زیر در نظر بگیریم

$$x_1 = Ae^{i\omega t} \quad \text{و} \quad u = Be^{i\omega t} \quad (۱۳۷-۱۴)$$

با قرار دادن این داده ها در معادلات (۱۳۵-۱۴) و (۱۳۶-۱۴)، به دست می آوریم

$$(-m_1\omega^2 + k)A - kB = 0 \quad (۱۳۸-۱۴)$$

$$-kA + (-m_2\omega^2 + k)B = 0 \quad (۱۳۹-۱۴)$$

برای محاسبه بسامدهای ω ، دترمینان ضرایب A و B را برابر با صفر قرار می دهیم؛ یعنی،

$$\begin{vmatrix} m_1\omega^2 - k & k \\ k & m_2\omega^2 - k \end{vmatrix} = 0 \quad (۱۴۰-۱۴)$$

که به

$$(m_1\omega^2 - k)(m_2\omega^2 - k) - k^2 = 0 \quad (۱۴۱-الف)$$

یا

$$\omega^2[m_1m_2\omega^2 - k(m_1 + m_2)] = 0 \quad (۱۴۱-ب)$$

منجر می شود به این ترتیب دو بسامد ممکن عبارت است از

$$\pm \omega_1 = 0 \quad \text{و} \quad \pm \omega_2 = \pm \left(\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} \right)^{1/2} \quad (14-142)$$

با قرار دادن این داده ها در معادلات (۱۴-۱۳۸) و (۱۴-۱۳۹) نتیجه می شود

$$\omega = \omega_1 = 0, \quad A = B \quad (14-143 \text{ الف})$$

$$\omega = \omega_2, \quad A = -\frac{m_2}{m_1} B \quad (14-143 \text{ ب})$$

بنابراین جواب عمومی را می توان به صورت زیر نوشت

$$x_1 = A_1 t + A_{-1} + A_2 e^{i\omega_2 t} + A_{-2} e^{-i\omega_2 t} \quad (14-144)$$

$$x_2 = A_1 t + A_{-1} - \frac{m_1}{m_2} A_2 e^{i\omega_2 t} - \frac{m_1}{m_2} A_{-2} e^{-i\omega_2 t} \quad (14-145)$$

با به کارگیری ترکیبات خطی مناسب x_1 و u ، می توانیم مختصات تعمیم یافته X_1 و X_2 متناظر با ω_2 و ω_1 را پیدا کنیم. به این ترتیب

$$X_1 = \frac{m_1}{m_2} x_1 + u = \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) (A_1 t + A_{-1}) \quad (14-146)$$

$$X_2 = x_1 - u = \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) (A_2 e^{i\omega_2 t} + A_{-2} e^{-i\omega_2 t}) \quad (14-147)$$

اگر مد X_1 تحریک شده باشد، X_2 باید حذف شود؛ یعنی، برای مد X_1 داریم

$$X_1: \quad X_2 = x_1 - u = 0$$

یا

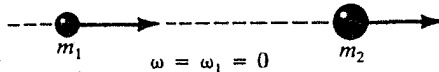
$$x_1 = u = x_2 - a \quad (14-148)$$

که متناظر با حرکت انتقالی یکنواخت سیستم است، و در شکل (۱۴-۷-الف) نمایش داده شده است. به همین نحو، اگر مد X_2 تحریک شده باشد، X_1 باید حذف شود؛ یعنی برای مد X_2 داریم

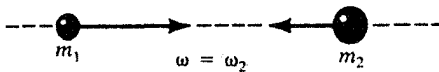
$$X_2: \quad X_1 = \frac{m_1}{m_2} x_1 + u = 0 \quad \text{یا}$$

$$x_1 = -\frac{m_2}{m_1} u = -\frac{m_2}{m_1} (x_2 - a) \quad (۱۴-۱۴۹)$$

که نشان می دهد دو جرم ، آن طور که در شکل (۱۴-۷ ب) نمایش داده شده است ، نسبت به مرکز جرم نوسان می کنند .



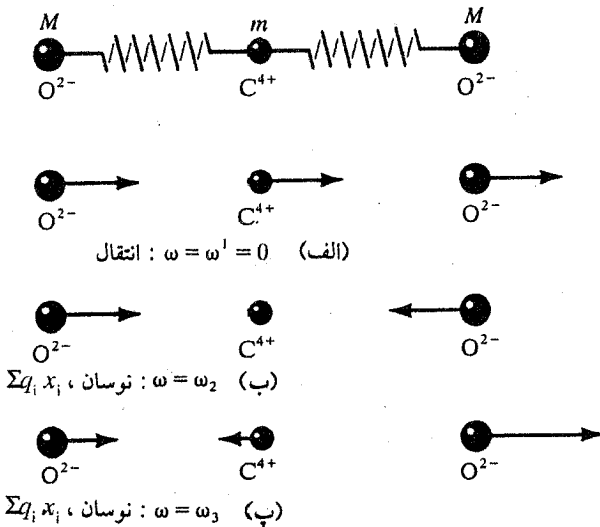
(الف) انتقال یکنواخت : X_1



(ب) X_2 : نوسان

شکل (۱۴-۷) : دو مد بهنجار ممکن ارتعاشی سیستم شکل (۱۴-۶)

نتایج به دست آمده را می توانستیم با واری و وضعیت و شناخت مسأله فیزیکی پایه ای به دست آوریم . این مطلب را در مورد یک مولکول سه اتمی مانند CO_2 ، آن طور که در شکل (۱۴-۸) نشان داده شده است ، ارائه می دهیم . CO_2 یک مولکول خطی است و اگر حرکت مقید به امتداد یک خط باشد ، سه درجه آزادی ، و در نتیجه سه مد بهنجار خواهد داشت . این بسامدها و مدهای بهنجار را می توانیم آن طور که در مثالهای پیشین بحث شد به دست آوریم . ما فقط به بحث نتایجی که از وضعیت حدس می زنیم می پردازیم . اولین مد که در آن $\omega = \omega_1 = 0$ است ، همان طور که در شکل (۱۴-۸ الف) نشان داده شده است ، مد انتقال ساده مرکز جرم است . مد دوم که در آن $\omega = \omega_2$ است ، به صورتی است که در شکل (۱۴-۸ ب) نمایش داده شده است . اتم کربن ، که در مرکز جرم است ، در حال سکون است ، و دو اتم اکسیژن ، همان طور که نشان داده شده است ، با دامنه های برابر و در جهت های مخالف یا در فازهای مخالف ارتعاش می کنند . در این مد مرکز بارها همیشه به مرکز جرم منطبق است و در نتیجه گشتاور دوقطبی نوسانی کل ، که $\sum q_i x_i$ است ، صفر است . بنابر نظریه تابش ، چنین مدی ، با دوقطبی نوسانی صفر ، هیچ تابشی گسیل نمی دارد و در نتیجه نمی تواند آشکار شود .



شکل (۸-۱۴) : يك مولکول سه‌اتمی و سه مد بهنجار ممکن ارتعاشی آن

مد سوم که در آن $\omega = \omega_3$ ، به صورتی است که در شکل (۸-۱۴) پ نشان داده شده است . در این مد اتمهای اکسیژن با دامنه‌های نابرابر ، اما همفاز با یکدیگر ، ارتعاش می‌کنند . اتم کربن نسبت به مرکز جرم حرکت می‌کند و حرکت آن با حرکت اتمهای اکسیژن ، آن‌طور که نشان داده شده است ، در فاز متقابل است . همچنین ، گشتاور دوقطبی نوسانی کل $\sum q_i x_i$ صفر نیست ؛ در نتیجه ، بنا بر نظریه تابش ، تابش الکترومغناطیسی گسیل خواهد شد .

۸-۱۴ سیستمهای اتلافی و نوسانهای واداشته

تا این جا در بحث نوسانات کوچک ، از اثرات نیروهای چسبندگی یا اصطکاکی چشم‌پوشی کردیم . یک وضعیت متداول وضعیتی است که در آن نیروهای میراگر چسبندگی با توان اول سرعت متناسبند . در چنین وضعیتهایی حرکت ذره i ام می‌تواند توسط قانون دوم نیوتن به صورت زیر توصیف شود

$$m_i \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_i - c_i \dot{\mathbf{r}}_i \quad (۱۴-۱۵۰)$$

که به شکل مؤلفه ای به صورت زیر نوشته می شود

$$m_i \ddot{x}_i = F_{ix} - c_i \dot{x}_i \quad (۱۴-۱۵۱ \text{ الف})$$

$$m_i \ddot{y}_i = F_{iy} - c_i \dot{y}_i \quad (۱۴-۱۵۱ \text{ ب})$$

$$m_i \ddot{z}_i = F_{iz} - c_i \dot{z}_i \quad (۱۴-۱۵۱ \text{ پ})$$

که در آنها c_i ثابتند و F_{ix} ، F_{iy} ، F_{iz} مؤلفه های نیروی برآیند F_i هستند که مشتق از یک پتانسیل است و پتانسیل یک تابع درجه دوم همگن از مختصات تعمیم یافته است.

فرض کنیم سیستم l درجه آزادی داشته باشد و به وسیله l مختصه تعمیم یافته مستقل

$$q'_1, q'_2, \dots, q'_l \quad (۱۴-۱۵۲)$$

توصیف شود. روابط بین این مختصات و مختصات x ، y ، z برای n ذره با $3n$ معادله زیر داده می شوند

$$x_i = x_i(q'_1, q'_2, \dots, q'_l)$$

$$y_i = y_i(q'_1, q'_2, \dots, q'_l)$$

$$z_i = z_i(q'_1, q'_2, \dots, q'_l)$$

(۱۴-۱۵۳)

توجه کنیم که بستگی صریحی به زمان t وجود ندارد، زیرا T یک تابع درجه دوم همگن از سرعتهاست. هر یک از معادلات (۱۴-۱۵۱) را، به ترتیب، در $\frac{\partial x_i}{\partial q'_j}$ ، $\frac{\partial y_i}{\partial q'_j}$ و $\frac{\partial z_i}{\partial q'_j}$ ضرب کنیم و هر سه معادله را با هم و روی تمام ذرات جمع بندی کنیم، نتیجه می شود

$$\sum_{i=1}^n m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q'_j} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q'_j} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q'_j} \right) \quad (۱۴-۱۵۴)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q'_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q'_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q'_j} \right) - \sum_{i=1}^n c_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q'_j} + \dot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q'_j} + \dot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q'_j} \right)$$

که در آن

$$\equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}'_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q'_j}$$

$$\equiv - \frac{\partial V}{\partial q'_j} \equiv Q_j$$

$$\equiv - \frac{\partial}{\partial q'_j} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \right]$$

$$= - \frac{\partial F_r}{\partial q'_j}$$

و $F_r = \frac{1}{2} \sum c_j (\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2)$ تابع اتلاف است که توسط رالی نام گذاری شده است و نمایشگر نصف آهنگ اتلاف انرژی از راه نیروهای اصطکاکی است. به این ترتیب معادله (۱۴-۱۵۴) را می توان به صورت

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}'_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q'_j} = - \frac{\partial V}{\partial q'_j} - \frac{\partial F_r}{\partial \dot{q}'_j} \quad (14-155)$$

نوشت. چون $L = T - V$ ، معادله (۱۴-۱۵۱) یا (۱۴-۱۵۵) به شکل زیر در می آید

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}'_j} \right) = \frac{\partial L}{\partial q'_j} + Q_{rj} \quad (14-156)$$

که در آن نیروی میراگر تعمیم یافته است

$$Q_{rj} = - \frac{\partial F_r}{\partial \dot{q}'_j} \quad (14-157)$$

برای جابه جاییهای به اندازه کافی کوچک، عبارتهای V ، T ، و F_r را می توان به شکل زیر نوشت

$$V = a_{11} q_1'^2 + \dots + a_{11} q_1'^2 + 2a_{12} q_1' q_2' + \dots \quad (14-158 \text{ الف})$$

$$T = b_{11} \dot{q}_1'^2 + \dots + b_{11} \dot{q}_1'^2 + 2b_{12} \dot{q}_1' \dot{q}_2' + \dots \quad (14-158 \text{ ب})$$

$$F_r = c_{11} \dot{q}_1'^2 + \dots + c_{11} \dot{q}_1'^2 + 2c_{12} \dot{q}_1' \dot{q}_2' + \dots \quad (14-158 \text{ پ})$$

که a_{11} ، b_{11} ، c_{11} ، \dots ثابتند.

معادلات دیفرانسیل حرکت که از معادله (۱۴-۱۵۱) یا (۱۴-۱۵۶) به دست می آیند شبیه به مورد نامیرا هستند، با این تفاوت که جمله های شامل \dot{q} نیز حضور دارند. برای محاسبه مدهای بهنجار، باید مختصات جدیدی پیدا کنیم که ترکیبهای q_1' ، q_2' ، \dots ، q_1' باشند بطوری که V ، T ، و F_r وقتی برحسب مختصات η_1 ، η_2 ، \dots ، η_j بیان شوند جملات ضربدری در بر نداشته باشند؛ یعنی، فقط شامل مربعهای مختصات جدید و مشتقات زمانی آنها باشند. به علت حضور F_r ، همیشه ممکن نیست چنین مختصات جدیدی پیدا کرد. در بعضی از موارد می توان یک تبدیل به مختصات بهنجار پیدا کرد، و معادلات دیفرانسیل حاصل به صورت

$$m_j \ddot{\eta}_j + c_j \dot{\eta}_j + k_j \eta_j = 0 \quad (۱۴-۱۵۹)$$

هستند که جوابهایی به شکل زیر دارند

$$\eta_j = A_j e^{-\lambda_j t} \cos(\omega_j t + \phi_j) \quad (۱۴-۱۶۰)$$

به این ترتیب، برخلاف حرکت نامیرا که در آن نوسان وجود دارد، در مورد حاضر حرکت می تواند، بسته به مورد، کند میرا، با میرایی بحرانی، و تند میرا باشد؛ در نتیجه حرکت ممکن است غیر نوسانی باشد. مختصات بهنجار و فازهای آنها به همان صورتی هستند که در مسأله حرکت نامیرای متناظر بودند. دامنه بطور نمایی با زمان کاهش می یابد، و بسامدها با بسامدهای مورد نامیرا متفاوتند.

اولاً باید فرض کنیم که نیروهای محرک آن قدر کوچکند که مربعهای جابه جایها و سرعتها به گونه ای خواهند بود که معادلات حرکت هنوز خطی هستند. اگر نیروها ثابت باشند، مانند سیستمهای تحت اثر نیروهای گرانشی، تنها موقعیت تعادل، که نوسانات حول آن انجام می گیرند، تغییر می کند. اگر نیروی محرک دوره ای باشد، می توان حرکت را برحسب مختصات بهنجار توصیف کرد. برای سادگی، فرض کنیم که تنها یک نیروی هماهنگ از نوع $Q_j \cos \omega t$ یا $Q_j e^{i\omega t}$ اعمال می شود. معادله حرکت حاصل در مختصات بهنجار (در حضور نیروی بازگرداننده، نیروی اتلافی، و نیروی محرک) به شکل زیر است

$$m_j \ddot{\eta}_j + c_j \dot{\eta}_j + k_j \eta_j = Q_{jext} e^{i\omega t} \quad (۱۴-۱۶۱)$$

اگر بسامد نیروی محرک برابر با یکی از بسامدهای بهنجار سیستم باشد، مد بهنجار متناظر بزرگترین دامنه را در حال پایا خواهد پذیرفت. به علاوه، اگر ثابتهای میرایی کوچک باشند، همه مد های بهنجار تا حد قابل ملاحظه ای تحریک نمی شوند؛ تنها یک مد بهنجار که بسامد آن برابر بسامد نیروی محرک است تحریک خواهد شد.

مثال (۱۴-۵): یک بار دیگر وضعیت دو آونگ جفت شده را، که در مثال (۱۴-۲) بحث شد، در نظر بگیریم. فرض کنیم نیروی محرک به صورت $F \cos \omega t$ ، و نیروی اصطکاکی متناسب، با سرعت به صورت $c\dot{x}$ است، که c ثابت است. حل این مسأله را مورد بحث قرار دهید.

معادلات توصیف کننده سیستم عبارتند از

$$m\ddot{x}_1 + \frac{mg}{l}x_1 + k(x_1 - x_2) = -c\dot{x}_1 + F \cos \omega t$$

$$m\ddot{x}_2 + \frac{mg}{l}x_2 - k(x_1 - x_2) = -c\dot{x}_2 + F \cos \omega t$$

معادلاتی که مختصات بهنجار X_1 ، X_2 را وارد می کنند عبارتند از ($\eta_1 = X_1 = x_1 + x_2$) و

$$(\eta_2 = X_2 = x_1 - x_2)$$

$$\ddot{X}_1 + \frac{c}{m}\dot{X}_1 + \frac{g}{l}X_1 = \frac{2F}{m}\cos \omega t$$

$$\ddot{X}_2 + \frac{c}{m}\dot{X}_2 + \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\right)X_2 = 0$$

این معادلات دیفرانسیل و جواب آنها را، به صورت زیر، می شناسیم

$$X_1 = e^{-(c/2m)t}(A_1 e^{i\omega_1 t} + A_{-1} e^{-i\omega_1 t}) + \frac{2F \cos(\omega t - \phi)}{[m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2]^{1/2}}$$

و

$$X_2 = e^{-(c/2m)t}(A_2 e^{i\omega_2 t} + A_{-2} e^{-i\omega_2 t})$$

که در آنها

$$\omega_0 = \left(\frac{g}{l}\right)^{1/2}, \quad \omega_1 = \left(\frac{g}{l} - \frac{c^2}{4m^2}\right)^{1/2}, \quad \omega_2 = \left[\left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\right) - \frac{c^2}{4m^2}\right]^{1/2}$$

$$\tan \phi = \frac{\omega c}{[m(\omega_0^2 - \omega^2)]}, \quad g/l > c^2/4$$

هم X_1 و هم X_2 شامل جمله های گذرا هستند. فقط X_1 یک جمله حالت پایا دارد، و فقط X_1 (برای هر شرایط اولیه ای) با بسامدی برابر با بسامد نیروی رانش در حال حرکت می ماند، که شبیه به یک سیستم با یک درجه آزادی است. X_2 در بازه کوتاهی از بین می رود.

تمرین (۱۴-۵): تمام مراحل حذف شده در مثال را کامل کنید.

مسائل

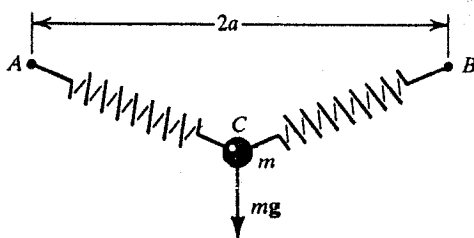
۱-۱۴ مکعبی به ضلع $2a$ در روی یک سطح کروی خشن به شعاع a قرار گرفته است. نشان دهید که برای $R > a$ تعادل پایدار و برای $R < a$ تعادل ناپایدار است. برای $R = a$ چه اتفاقی رخ می دهد؟ بسامد نوسانهای کوچک را پیدا کنید.

۲-۱۴ در مسأله (۱-۱۴)، اگر به جای مکعب یک نیمکره توپر به شعاع r قرار دهیم، نشان دهید که تعادل پایدار وقتی برقرار است که $r < \frac{3}{2}R$ باشد.

۳-۱۴ مکعب مستطیل نازکی به ضخامت d روی استوانه ساکن خشنی به شعاع R که محور آن افقی است قرار گرفته است. با فرض این که لغزش در کار نباشد، نشان دهید که شرط پایداری تعادل $R > \frac{d}{2}$ است. نمودار تابع انرژی پتانسیل را برحسب جابه جایی زاویه ای θ رسم کنید و نشان دهید که برای $R > \frac{d}{2}$ ، نه برای $R < \frac{d}{2}$ ، کمینه ای در $\theta = 0$ دارد. بسامد نوسانات کوچک را حول تعادل پیدا کنید.

۴-۱۴ یک قرص همگن به جرم M و شعاع R بدون لغزش روی یک سطح افقی می غلتد و به طرف نقطه ای که در فاصله d زیر سطح قرار دارد جذب می شود. نیروی جاذبه متناسب با فاصله بین مرکز جرم و مرکز نیروست. آیا قرص در تعادل پایدار است؟ اگر چنین است، بسامد نوسانات کوچک را پیدا کنید.

۵-۱۴ دو فنر مشابه هر کدام با طول طبیعی l_0 و ضریب سختی k به هم بسته شده اند. دو انتهای دیگر فنرها به دو نقطه A و B که فاصله آنها $2a$ است بسته شده اند و جرم m از نقطه اتصال دو فنر، برابر شکل (مسأله ۵-۱۴)، آویزان شده است. موقعیت تعادل را پیدا کنید. آیا تعادل این موقعیت پایدار است؟ بسامد نوسانات کوچک را پیدا کنید.



شکل (مسأله ۵-۱۴)

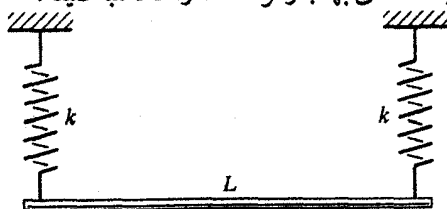
۶-۱۴ جرم m تحت تأثیر نیرویی که انرژی پتانسیل آن به صورت

$$V = V_0 \exp[(5x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 8yz - 26ya - 8za)/a^2]$$

است قرار دارد. V_0 و a ثابتند. مکان تعادل پایدار یا ناپایدار را، اگر وجود داشته باشد، پیدا کنید. بسامدهای بهنجار نوسان حول کمینه را پیدا کنید.

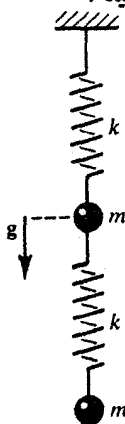
۷-۱۴ ذره ای به جرم m در امتداد X تحت تأثیر انرژی پتانسیل $V(x) = -Axe^{-x}$ ، که A و k ثابتند، حرکت می کند. نمودار $V(x)$ را بر حسب x رسم کنید. همچنین بسامد نوسانات کوچک را پیدا کنید.

۸-۱۴ میله ای به طول l و جرم m به وسیله دو فنر، آن طور که در شکل (مسئله ۸-۱۴) نشان داده شده است، نگاه داشته شده است. با فرض این که میله در یک صفحه قائم خواهد ماند، بسامدهای بهنجار نوسانات را محاسبه کنید.



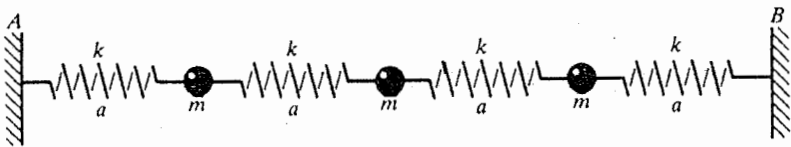
شکل (مسئله ۸-۱۴)

۹-۱۴ در پیکربندی دو جرم و دو فنر، آن طور که در شکل (مسئله ۹-۱۴) نشان داده شده است، بسامدهای بهنجار و مختصات بهنجار را با این فرض که حرکت محدود به یک سطح قائم است، محاسبه کنید.



شکل (مسئله ۹-۱۴)

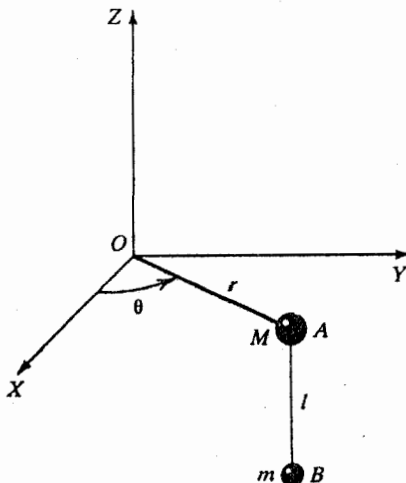
۱۴-۱۰ سه جرم مشابه و چهار فنر مشابه ، مطابق شکل (مسئله-۱۴-۱۰) ، به یکدیگر بسته شده اند . اگر سیستم از حالت تعادل خود در امتداد خط واصل جرمها جابه جا شود ، بسامدهای بهنجار و مختصات بهنجار را برای نوسانات کوچک محاسبه کنید . طول طبیعی هر فنر a و ثابت فنری آن k است .



شکل (مسئله-۱۴-۱۰)

۱۴-۱۱ در مسئله (۱۴-۱۰) ، در نقاط A و B یک تنش T در فنر وجود دارد . بسامدها و مختصات بهنجار را برای نوسانات عرضی کوچک محاسبه کنید .

۱۴-۱۲ میله سبکی به طول r به نقطه O بسته شده است و جرم M ، آن طور که در شکل (مسئله-۱۴-۱۲) نشان داده شده است ، به سر دیگر آن بسته شده است . میله ناگزیر باید در صفحه XY حرکت کند . یک آونگ به طول l و جرم m به نقطه A بسته شده و می تواند در صفحه YZ نوسان کند . بسامدهای و مدهای بهنجار ارتعاش را پیدا کنید .



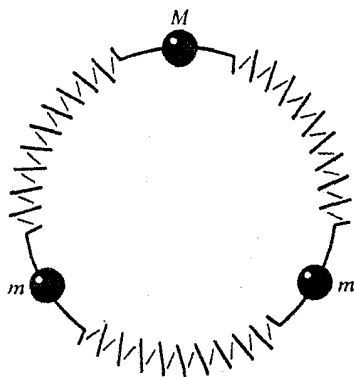
شکل (مسئله-۱۴-۱۲)

۱۳-۱۴ سه نوسانگر هز کدام به جرم m طوری به هم وصل شده اند که نیروی بین آنها به وسیله تابع انرژی پتانسیل

$$V = \frac{1}{2} [k_1(x_1^2 + x_3^2) + k_2x_2^2 + k_3(x_1x_2 + x_2x_3)]$$

داده می شود که در آن $k_3 = (2k_1k_2)^{\frac{1}{2}}$. نقاط تعادل و پایداری آنها را پیدا کنید. بسامدهای بهنجار سیستم و مدهای بهنجار ارتعاش را پیدا کنید. آیا معنی فیزیکی ای برای مد صفر وجود دارد؟

۱۴-۱۴ سه جرم M ، m ، و m با فنرهای مشابهی با ضریب منحنی k به هم بسته شده اند و بر روی یک حلقه دایره ای ثابت در فضا، آن طور که در شکل (مسئله ۱۴-۱۴) نشان داده شده است، قرار گرفته اند. بسامدها و مختصات بهنجار را محاسبه کنید. اگر $M = m$ باشد چه پیش می آید؟



شکل (مسئله ۱۴-۱۴)

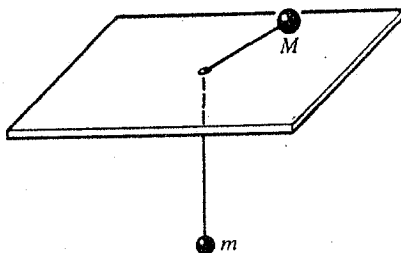
۱۴-۱۵ ذره ای به جرم m در میدان نیرویی که با انرژی پتانسیل زیر نمایانده شده است حرکت می کند

$$V(x) = (1 - \alpha x)e^{-\alpha x}, \quad x \geq 0$$

α یک ثابت مثبت است. (الف) نقاط تعادل، (ب) ماهیت نقاط تعادل، و (پ) بسامد نوسانات کوچک در اطراف تعادل را پیدا کنید.

۱۴-۱۶ جرم m به جرم دیگر M به وسیله نخ سبکی به طول l بسته شده است. جرم M بدون

اصطکاک روی یک میز می لغزد، و جرم دیگر، آن طور که در شکل (مسأله-۱۴-۱۶) نشان داده شده است، از سوراخ میز بطور قائم آویزان است. حرکت حالت پایا، بسامدها و مدهای بهنجار را برای نوسانات کوچک پیدا کنید.



شکل (مسأله-۱۴-۱۶)

۱۴-۱۷ دو نوسانگر هماهنگ یکسان از طریق نیرویی متناسب با سرعت نسبی دو جرم (به جای متناسب بودن با فاصله) جفت شده اند. بسامدها و مدهای بهنجار ارتعاشات را پیدا کنید.

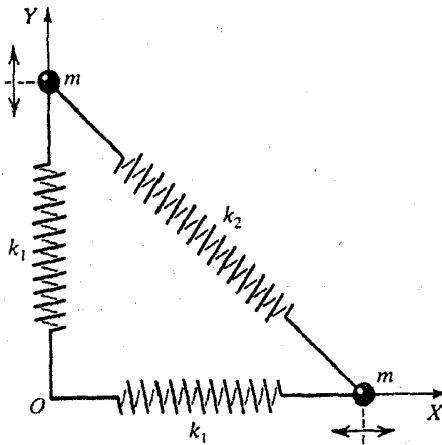
۱۴-۱۸ حلقه باریکی به جرم M و شعاع R از یک نقطه روی محیطش آویزان شده است. مهره ای به جرم m روی حلقه قرار گرفته و مقید به حرکت (بدون اصطکاک) در روی آن است. حلقه نیز آزاد است که در صفحه خودش نوسان کند. بسامدها و مدهای بهنجار ارتعاشات را پیدا کنید. اگر $M = m$ باشد نشان دهید

$$\omega_1 = \sqrt{2} \sqrt{\frac{g}{R}} \quad \text{و} \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{g}{R}}$$

آیا مدهای بهنجار یک وضعیت فیزیکی را توصیف می کنند؟

۱۴-۱۹ یک آونگ دوتایی را که شامل یک آونگ به طول l_1 و جرم m_1 و آونگ دیگری به طول l_2 و جرم m_2 است، در نظر بگیرید. بسامدها و مدهای بهنجار را حساب کنید. برای چه شرایط اولیه ای سیستم در مدهای بهنجار خود نوسان می کند؟

۱۴-۲۰ بسامدها و مدهای بهنجار سیستم نشان داده شده در شکل (مسأله-۱۴-۲۰) را، که از سه فنر و دو جرم به شکل یک مثلث قائم الزاویه تشکیل شده است، پیدا کنید.

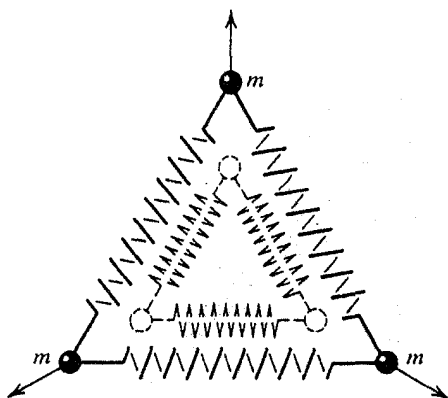


شکل (مسأله ۱۴-۲۰)

۱۴-۲۱ در حلقه های بی وزن و بدون اصطکاک یک زیروسکوپ یک جسم صلب متقارن سوار شده است. یک حلقه یک گشتاور نیروی $k\phi$ (زاویه اولر است) حول محور Z به آن وارد می کند. (این کار توسط یک فنر ظریف انجام می گیرد). حرکت حالت پایا را برای ارتعاشات کوچک بررسی کنید.

۱۴-۲۲ عبارتهایی برای بسامدها و مدهای بهنجار ارتعاشات مولکول سه اتمی بحث شده در بخش (۱۴-۷)، یعنی CO_2 ، به دست آورید. جرم کربن m_1 و جرم اکسیژن m_2 است. و فرض می شود که نیروی بین اتمهای مجاور را می توان با فنری با ثابت فنری k نمایش داد. بین اتمهای دو انتها بر هم کنشی وجود ندارد.

۱۴-۲۳ یک مولکول سه اتمی تخت شامل سه جرم مساوی در سه رأس یک مثلث متساوی الاضلاع، آن طور که در شکل (مسأله ۱۴-۲۳) نشان داده شده است، کشیده شده و کشیده نشده) در نظر بگیرید. طول کشیده نشده هر فنر a ، و ثابت فنری آن k است. نوسانات را در سطح مثلث در نظر بگیرید. چند مد بهنجار انتظار دارید و چند تا از آنها بسامد بهنجار صفر دارند؟ بسامد نوسانات کوچک را برای مدی که در آن هر سه فنر، آن طور که نشان داده شده است، بطور متقارن کشیده می شوند، پیدا کنید.



شکل (مسأله-۱۴-۲۳)

۱۴-۲۴ دو آونگ ساده با نیروی جاذبه ضعیفی به شکل $\frac{K}{r^2}$ جذب می شوند ، که r فاصله بین دو جرم است . نشان دهید که برای یک جابه جایی کوچک از وضع تعادل ، لاگرانژی به شکل لاگرانژی دو نوسانگر جفت شده است . به علاوه ، اگر یک آونگ به نوسان در آورده شود در حالی که آونگ دیگر ساکن است ، سرانجام آونگ دوم به نوسان در می آید ، و اولی به حال سکون . این فرآیند با زمان تکرار می شود .

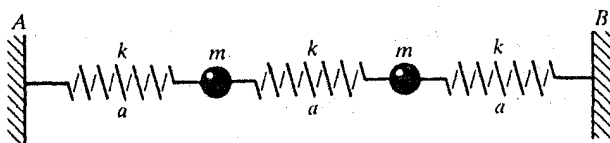
۱۴-۲۵ مانند مورد مسأله (۱۴-۲۴) ، بار دیگر مسأله دو آونگ را که بطور خطی جفت شده اند ، با این تفاوت که طولهای دو فنر مساوی نیستند ، در نظر بگیرید . بسامدها و مدهای بهنجار نوسانات را پیدا کنید . نشان دهید که ، برخلاف مورد مسأله (۱۴-۲۴) ، انرژی سیستم هرگز بطور کامل به یکی از آونگها منتقل نمی شود .

۱۴-۲۶ دو آونگ مشابه که با یک فنر ، آن طور که در شکل (مثال-۱۴-۲) نشان داده شده است ، جفت شده اند ، در محیطی که یک نیروی میراگر متناسب با سرعت ایجاد می کند حرکت می کنند . بسامدها و مدهای بهنجار را پیدا کنید .

۱۴-۲۷ سه جرم مساوی m توسط دو فنر مشابه با ثابت فنری k به هم وصل شده اند . سیستم آزاد است که در امتداد خط واصل جرمها نوسان و حرکت کند . سیستم در یک محیط چسبناک ، که نیروی کندسازی متناسب با سرعت به آن وارد می کند ، قرار گرفته است . بسامدها و مدهای بهنجار نوسانات را پیدا کنید .

۱۴-۲۸ دو جرم مساوی و سه فنر مشابه ، آن طور که در شکل (مسأله-۱۴-۲۸) نشان داده

شده است، به هم متصل شده، و در محیط چسبناکی که نیرویی متناسب با سرعت وارد می‌کند، قرار گرفته است. در A و B تنش فنر T است. یک جرم نگه داشته شده و جرم دیگر بطور عمودی به اندازه d جابه‌جا می‌شود. و سپس هر دو رها می‌شوند. بسامدها و مدهای بهنجار نوسانات را پیدا کنید.



شکل (مسأله-۱۴-۲۸)

۱۴-۲۹ در مسألهٔ (۱۴-۲۴)، سیستم توسط یک محیط چسبناک که یک نیروی میراگر متناسب با سرعتش ایجاد می‌کند احاطه شده است. بسامدها و مدهای بهنجار نوسانات را پیدا کنید. شرایط اولیه را مناسب در نظر بگیرید.

۱۴-۳۰ سیستم نشان داده شده در شکل (مسأله-۱۴-۲۸) را در نظر بگیرید. طول کشیده نشده هر فنر a است. (الف) بسامدها و مدهای بهنجار نوسانات را پیدا کنید. (ب) فرض کنید هر جرم m تحت تأثیر نیروی $F = F_0 \sin \omega t$ از زمان $t = 0$ که سیستم ساکن است، قرار گرفته است. با به کارگیری مختصات بهنجار حرکت سیستم را مورد بحث قرار دهید.

۱۴-۳۱ در مسألهٔ ۱۴-۳۰، هر جرم تحت تأثیر نیروی اصطکاکی $-bm\dot{x}$ قرار دارد. حرکت سیستم را مورد بحث قرار دهید.

منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر

- BECKER, R. A., *Introduction to Theoretical Mechanics*, Chapter 14. New York: McGraw-Hill Book Co., 1954.
- CORBEN, H. C., and STEHLE, P., *Classical Mechanics*, Chapter 8. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1960.
- FOWLES, G. R., *Analytical Mechanics*, Chapter 11. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1962.
- FRENCH, A. P., *Vibrations and Waves*, Chapter 5. New York: W. W. Norton and Co., Inc., 1971.
- *GOLDSTEIN, H., *Classical Mechanics*, 2nd ed., Chapter 6. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1980.
- HAUSER, W., *Introduction to the Principles of Mechanics*, Chapter 11. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1965.
- *LANDAU, L. D., and LIFSHITZ, E. M., *Mechanics*, Chapter 5. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1960.
- MARION, J. B., *Classical Dynamics*, 2nd ed., Chapters 6 and 7. New York: Academic Press, Inc., 1970.
- *MOORE, E. N., *Theoretical Mechanics*, Chapter 7. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1983.
- ROSSBERG, K., *Analytical Mechanics*, Chapter 10. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1983.
- SLATER, J. C., *Mechanics*, Chapter 7. New York: McGraw-Hill Book Co., 1947.
- STEPHENSON, R. J., *Mechanics and Properties of Matter*, Chapter 5. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- SYMON, K. R., *Mechanics*, 3rd ed., Chapter 12. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1971.

تارهای مرتعش و سیالات

۱-۱۵ مقدمه

این فصل ادامه مطالعه مکانیک محیطهای پیوسته مانند تارها و سیالات (گازها و مایعات) است. چون تعداد زیادی ذره درگیر می شوند، اعمال قوانین مکانیک و بررسی حرکت حاصل پردردسر است. باید فرضهای ساده گری در نظر گرفت و یک سیمای کلی از حرکت به دست آورد. بحث خود را به سه قسمت تقسیم می کنیم. نخست، ارتعاشات عرضی تارها را در یک بُعد بررسی می کنیم. برای شروع، یک مورد ساده در نظر می گیریم و سپس با روش فرمول بندی لاگرانژ آن را تعمیم می دهیم. در مرحله دوم، امواج صوتی، یعنی امواج عرضی را در محیطهای گازی مطالعه می کنیم. در هر دو مورد، مسأله اصلی ما برقراری یک معادله موج که وضعیت حاضر را توصیف کند و سپس حل این معادله دیفرانسیل با به کارگیری شرایط مرزی مناسب است.

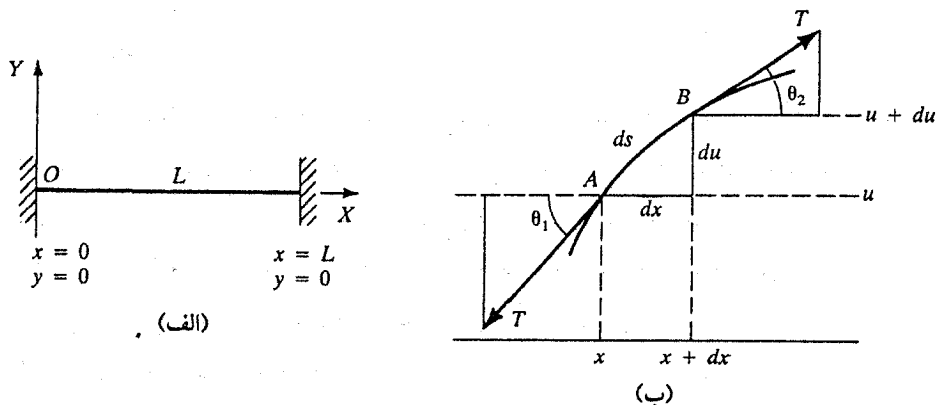
در مرحله سوم، سیالات را در سکون و در حرکت بررسی می کنیم. می توانستیم روشهای به کار رفته برای جامدات و گازها را به ارتعاش مایعات نیز گسترش دهیم، اما این کار را دنبال نخواهیم کرد. این فصل را با مطالعه حرکت سیالات در حضور نیروهای اصطکاکی (نیروهای چسبندگی) به پایان می بریم.

۱۵-۲ تار مرتعش

در این جا انتشار امواج در طول تارهای مرتعش را بررسی می کنیم . بحث ما به دو قسمت تقسیم می شود : معادله حرکت و حل عمومی (مدهای بهنجار ارتعاش) .

معادله حرکت

یک تار یکنواخت به طول L که دو سر آن در $x = 0$ و $x = L$ تثبیت شده اند در نظر بگیریم . تار دارای چگالی خطی (جرم بر واحد طول) μ است و در تمام طول تحت کشش T قرار دارد ؛ این تار ، همان طور که در شکل (۱۵-۱-الف) نشان داده شده است ، در امتداد محور X در حال تعادل است . می خواهیم حرکت چنین تاری را در اثر یک جابه جایی عرضی اولیه از وضع تعادلی بررسی کنیم . همچنین ، جابه جاییهایی تار آن قدر بزرگ نیستند که کشش T را بطور قابل ملاحظه ای تغییر دهند . به علاوه ، فرض می کنیم که نیروی ناشی از گرانش ($= \mu Lg$) در مقایسه با کشش T کوچک است و می توان از آن چشم پوشی کرد .



شکل (۱۵-۱) : (الف) تاری به طول L که به هنگام تعادل افقی است ، (ب) یک

قسمت کوچک ds در اثر جابه جایی کوچک به ارتعاش عرضی در می آید

برای به دست آوردن معادله دیفرانسیلی که حرکت تار را توصیف کند ، یک قسمت کوچک AB به طول ds و طول افقی dx بین x و $x + dx$ ، آن طور که در شکل (۱۵-۱-ب) نشان داده شده است ، در نظر بگیریم . چون برای جابه جاییهایی کوچک کشش T بدون تغییر می ماند می توانیم مؤلفه های X و Y کششهای اعمال شده به این عنصر کوچک را به صورت

$$\sum F_x = T \cos \theta_2 - T \cos \theta_1 \quad (15-1 \text{ الف})$$

$$\sum F_y = T \sin \theta_2 - T \sin \theta_1 \quad (15-1 \text{ ب})$$

بنویسیم . اگر θ_1 و θ_2 کوچک باشند ، $\cos \theta_1 \cong \cos \theta_2$ ، و در نتیجه نیروی افقی نخواهیم داشت . این بدان معنی است که جابه‌جایی طولی در تار وجود ندارد . یعنی ، برای جابه‌جایی‌هایی کوچک تار ، فقط با حرکت عرضی (حرکت عمود بر طول تار) سر و کار خواهیم داشت ، و تار در صفحه XY ارتعاش می‌کند . همچنین ، برای جابه‌جایی‌ها یا زاویه‌های کوچک می‌توانیم به جای سینوس تانژانت بگذاریم ، یعنی

$$\sin \theta_1 \cong \tan \theta_1 \quad \text{و} \quad \sin \theta_2 \cong \tan \theta_2 \quad (15-2)$$

به این ترتیب نیروی مؤثر در جهت Y عبارت است از

$$\sum F_y \cong T \tan \theta_1 - T \tan \theta_2 \quad (15-3)$$

حرکت تار با تابع جابه‌جایی $u(x, t)$ در هر نقطه x و در یک لحظه t توصیف می‌شود . جابه‌جایی تار را در x با u و در $x + dx$ با $u + du$ نمایش دهیم . بنابر قانون دوم نیوتن داریم

$$\sum F_y = ma_y = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (15-4)$$

که در آن m جرم تار به طول AB ، $m = \mu ds$ و $u = u(x, t)$ جابه‌جایی عرضی تار در مکان x و در لحظه t است (چون u تابعی از x و t است مشتقات جزئی به کار گرفته می‌شوند) . با ترکیب معادلات پیشین و فرض $ds \cong dx$ خواهیم داشت

$$\mu dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \tan \theta_2 - T \tan \theta_1 \quad (15-5)$$

با به کارگیری

$$T \tan \theta = T \frac{\partial u}{\partial x} \quad (15-6)$$

می‌توانیم نیروی مؤثر عمودی را به صورت زیر بنویسیم

$$T \tan \theta_2 - T \tan \theta_1 = T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_B - T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_A \quad (15-7)$$

شیب تار در B را می توان با به کارگیری سری تیلور بسط داد ؛ یعنی

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_B = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_A + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_A dx + \dots \quad (۸-۱۵)$$

که با بردن در معادله (۷-۱۵) و ترکیب با (۵-۱۵) می دهد

$$\mu dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \quad (۹-۱۵)$$

یا

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (۱۰-۱۵)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (۱۱-۱۵)$$

چون ابعاد μ به صورت $[ML^{-1}]$ و ابعاد T همان ابعاد $[MLT^{-2}]$ است ، ابعاد μ/T عبارت است از $[L^{-2} T^2]$ ، یعنی ، عکس توان دوم سرعت . در نتیجه ، معادله موج تار مرتعش عبارت است از

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (۱۲-۱۵)$$

که در آن

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (۱۳-۱۵)$$

v فقط یک سرعت انتشار نیست ، و تعبیر خیلی عمیق تر فیزیکی دارد که بعداً آن را جستجو خواهیم کرد . در این جا v را می توان به عنوان سرعت موج که با آن موج در طول تار منتشر می شود در نظر گرفت .

اگر یک نیروی خارجی عمودی F_e بر واحد طول به تار وارد می شد ، معادله (۹-۱۵)

به شکل

$$\mu dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + F_e dx$$

یا

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F_e \quad (14-15)$$

در می‌آید. ما با این وضعیت سر و کار نخواهیم داشت و به معادله (۱۵-۱۲) برای بحث بیشتر باز خواهیم گشت.

حل عمومی: مدهای پهنجار ارتعاش

معادله (۱۵-۱۲) یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی برای تابع $u(x, t)$ است که حرکت یک تار مرتعش را توصیف می‌کند. برای محاسبه تابع $u(x, t)$ ، از شرایط اولیه و شرایط مرزی استفاده می‌کنیم. فرض کنیم در $t=0$ تابع $u(x, t)$ شرایط اولیه زیر را برآورده می‌کند

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (15-15)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_{t=0} = \dot{u}_0(x) \quad (16-15)$$

که در آنها $u_0(x)$ جابه‌جایی تار و $\dot{u}_0(x)$ سرعت آن در $t=0$ است، و هر دو توابعی از x اند. چون تار در دو انتها محکم شده است، باید در شرایط مرزی زیر صدق کند

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (17-15)$$

یعنی جابه‌جایی در دو انتها همیشه صفر است.

اکنون به پیدا کردن جواب $u(x, t)$ برای معادله دیفرانسیل (۱۵-۱۲) می‌پردازیم. از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌کنیم. قرار دهیم

$$u(x, t) = X(x)\Theta(t) \quad (18-15)$$

که در آن X تابعی از فقط x و Θ تابعی از فقط t است. از معادله (۱۵-۱۸) نتیجه می‌شود

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Theta \frac{d^2 X}{dx^2} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X \frac{d^2 \Theta}{dt^2} \quad (19-15)$$

با بردن اینها در معادله (۱۵-۱۲) و مرتب‌سازی خواهیم یافت

$$\frac{v^2}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{dt^2} \quad (20-15)$$

طرف چپ این معادله تابعی از فقط x است در حالی که طرف راست آن تابعی از فقط t است. این تساوی برای تمام مقادیر x و t تنها در صورتی ممکن است که هر دو طرف معادله برابر با یک مقدار ثابت باشد. این ثابت را $-\omega^2$ بگیریم. علامت منفی نشان می دهد که شتاب عنصر تار همیشه به طرف وضع تعادل (موقعیت تار وقتی که در امتداد محور X قرار دارد) می باشد، یعنی، شتاب در جهت مخالف جابه جایی است. به این ترتیب، از معادله (۱۵-۱۲) نتیجه می شود

$$\frac{v^2}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\omega^2 \quad \text{یا} \quad \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2} X = 0 \quad (21-15)$$

و

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{dt^2} = -\omega^2 \quad \text{یا} \quad \frac{d^2 \Theta}{dt^2} + \omega^2 \Theta = 0 \quad (22-15)$$

که در آنها ω می تواند به عنوان سرعت زاویه ای تعبیر شود. جواب معادله (۱۵-۲۱) عبارت است از

$$X(x) = C \cos \frac{\omega}{v} x + D \sin \frac{\omega}{v} x \quad (23-15)$$

و جواب معادله (۱۵-۲۲) عبارت است از

$$\Theta(t) = E \cos \omega t + F \sin \omega t \quad (24-15)$$

که ثابتهای C ، D ، E و F چهار ثابت انتگرال گیری هستند و باید به وسیله شرایط اولیه و مرزی (۱۵-۱۵) تا (۱۷-۱۵) تعیین شوند.

به این ترتیب، با قرار دادن به جای $X(x)$ و $\Theta(t)$ از معادلات (۱۵-۲۳) و (۱۵-۲۴) در معادله (۱۵-۱۸)، جواب عمومی زیر را به دست می آوریم.

$$u(x, t) = \left(C \cos \frac{\omega}{v} x + D \sin \frac{\omega}{v} x \right) (E \cos \omega t + F \sin \omega t) \quad (25-15)$$

اکنون می توانیم شرایط مرزی را برای پیدا کردن ثابتهای C و D به کار بگیریم. در $x = 0$ برای تمام مقادیر t داریم $u(0, t) = 0$ ، یعنی در معادله (۱۵-۲۳) داریم $X(0) = 0$

$$0 = C \cos\left(\frac{\omega}{v} 0\right) + D \sin\left(\frac{\omega}{v} 0\right)$$

که تنها وقتی امکان پذیر است که $C = 0$ باشد؛ بنابراین

$$X(x) = D \sin \frac{\omega}{v} x \quad (۲۶-۱۵)$$

در $x = L$ نیز برای تمام مقادیر t داریم $u(L, t) = 0$ ؛ یعنی، در معادله (۲۶-۱۵) داریم

$$0 = D \sin \frac{\omega}{v} L \quad (۲۷-۱۵)$$

چون $C = 0$ است و D نمی تواند صفر باشد، زیرا در آن صورت یک جواب صفر به ما خواهد داد، برای برقرار بودن معادله (۲۷-۱۵) باید داشته باشیم

$$\sin \frac{\omega}{v} L = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{\omega}{v} L = n\pi \quad (۲۸-۱۵)$$

که $n = 1, 2, 3, \dots$. با قرار دادن ω_n به جای ω ، و $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

$$\omega_n = \frac{n\pi v}{L} = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (۲۹-۱۵)$$

بنابراین، با $C = 0$ و قرار دادن $DE = A_n$ و $DF = B_n$ ، می توانیم معادله (۲۵-۱۵) را به شکل زیر بنویسیم

$$u(x, t) = (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (۳۰-۱۵)$$

که در آن $\omega_n = 2\pi\nu_n$ و ν_n بسامدهای بهنجار ارتعاشات است. برای مقدار معین n می توانیم بنویسیم

$$u(x, t) = A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi v}{L} t + B_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi v}{L} t \quad (۳۱-۱۵)$$

معادله (۳۰-۱۵) یا (۳۱-۱۵) مد بهنجار ارتعاش تار، بخصوص n امین مد، را نمایش می دهد. سرعت مد بهنجار را می توان با مشتق گیری از معادله (۳۱-۱۵) به دست آورد

$$\begin{aligned} \dot{u}(x, t) &= \frac{d}{dt} u(x, t) \\ &= A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(-\frac{n\pi v}{L}\right) \sin \frac{n\pi v}{L} t \\ &\quad + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(\frac{n\pi v}{L}\right) \cos \frac{n\pi v}{L} t \end{aligned} \quad (۳۲-۱۵)$$

اکنون می توانیم ثابتهای A_n و B_n را برای n امین مدار تعاش با به کارگیری شرایط اولیه ،

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{و} \quad \dot{u}(x, 0) = \dot{u}_0(x) \quad (۳۳-۱۵)$$

محاسبه کنیم. با اعمال این شرایط به معادلات (۳۱-۱۵) و (۳۲-۱۵)، به ترتیب خواهیم داشت

$$u_0(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (۳۴-۱۵)$$

$$\dot{u}_0(x) = \frac{n\pi v}{L} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (۳۵-۱۵)$$

از نظریه معادلات دیفرانسیل می دانیم که اگر $u_1(x, t)$ و $u_2(x, t)$ دو جوابی باشند که

شرایط مرزی (۱۷-۱۵) را برآورده می کنند $u(x, t)$ که یک ترکیب خطی از $u_1(x, t)$ و $u_2(x, t)$

است ، یعنی

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) \quad (۳۶-۱۵)$$

نیز یک جواب است . یک جواب کلی تر با جمع کردن تمام n جواب خصوصی ، با به کارگیری

ثابتهای متفاوت A_n و B_n متناظر با بسامدهای متفاوت ω_n به دست می آید ، به این ترتیب جواب

عمومی حرکت یک تار مرتعش ترکیبی خطی از تعداد زیادی مدهای بهنجار [معادله (۱۵-۳۰)]

است ، و با رابطه

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \omega_n t + B_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \omega_n t \right) \quad (۳۷-۱۵)$$

داده می شود که در آن

$$\omega_n = \frac{n\pi v}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

که جوابی است شامل تعداد بی نهایت ثابت دلخواه ، اگر شرایط اولیه ، متناظر با مدهای

متفاوت ، داده شده باشد ، یعنی در $t=0$ داشته باشیم

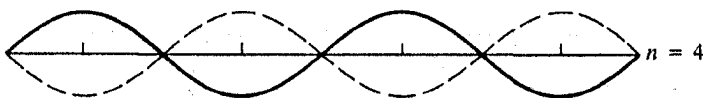
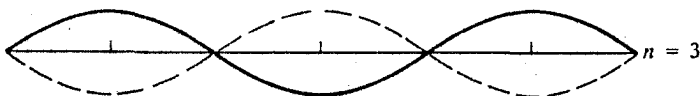
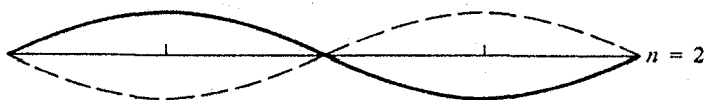
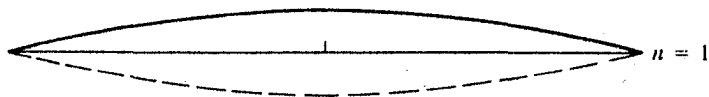
$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{و} \quad \dot{u}(x, 0) = \dot{u}_0(x) \quad (۳۸-۱۵)$$

آن گاه از معادله (۳۷-۱۵) خواهیم یافت

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (۳۹-۱۵)$$

$$\dot{u}_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi v}{L} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (40-15)$$

قبل از این که درگیر محاسبه ثابتها شویم، در شکل (۱۵-۲) نمودارهای $u(x, t)$ نسبت به x را برای $n = 1, 2, 3, 4$ نمایش می دهیم. مد ارتعاشی برای $n = 1$ هماهنگ اول یا مبنا نامیده می شود. مد ارتعاشی برای $n = 2$ اورتون اول یا هماهنگ دوم نامیده می شود. و به همین روش $n = 3$ متناظر است با اورتون دوم یا هماهنگ سوم. بسامد n امین هماهنگ n برابر بسامد مبنا است. بطور کلی، یک تار بطور همزمان با چند مد نوسان می کند.



شکل ۱۵-۲: چند مد ممکن ارتعاش یک تار. بطور کلی، یک تار با ترکیب چند تا از این مدها نوسان می کند

جواب عمومی داده شده به وسیله معادله (۱۵-۳۷)، شامل مجموع سینوسها و یا کسینوسها، سری فوریه نامیده می شود. اگر ضرایب A_n و B_n معلوم باشند، جواب عمومی کاملاً معلوم است. این ضرایب را می توان به کمک شرایط اولیه، یعنی $u_0(x)$ و $\dot{u}_0(x)$ محاسبه

کرد. برای محاسبه این ضرایب از روش فوریه استفاده می کنیم. هر دو طرف معادله (۱۵-۳۹) را در $\sin \frac{m\pi x}{L}$ ضرب می کنیم و از $x=0$ تا $x=L$ انتگرال می گیریم (m یک عدد درست است)

$$\int_0^L u_0(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\sin \frac{n\pi x}{L} \right) \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right) dx \quad (41-15)$$

تمام جملات طرف راست بجز $m=n$ صفر می شوند. به این ترتیب پس از انتگرال گیری خواهیم داشت

$$\int_0^L u_0(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = A_n \int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = A_n \frac{L}{2}$$

یا

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (42-15)$$

به همین روش، با ضرب هر دو طرف معادله (۱۵-۴۰) در $\sin \frac{m\pi x}{L}$ و انتگرال گیری از $x=0$ تا $x=L$ ، یعنی

$$\int_0^L \dot{u}_0(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi v}{L} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx$$

مانند قبل نتیجه می گیریم

$$B_n = \frac{2}{n\pi v} \int_0^L \dot{u}_0(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (43-15)$$

به این ترتیب معادلات (۱۵-۴۲) و (۱۵-۴۳) بیان می دارند که، اگر جابه جایی $u_0(x)$ و سرعت $\dot{u}_0(x)$ در هر نقطه تار در یک لحظه معلوم باشند، می توان A_n و B_n را محاسبه کرد. وقتی این ثابتها معلوم شد، حرکت تار در هر لحظه بعدی معلوم می شود.

مثال ۱۵-۱: تاری به طول L و جرم واحد طول μ از دو انتها تثبیت شده و تحت تأثیر کشش T است. میانه تار به اندازه h ($h \ll L$) جابه جا شده و رها می شود. ضرایب فوریه را برای حرکت بعدی تار محاسبه کنید.

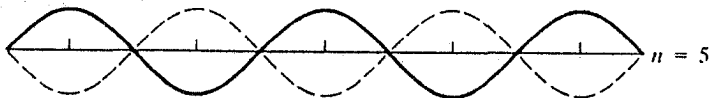
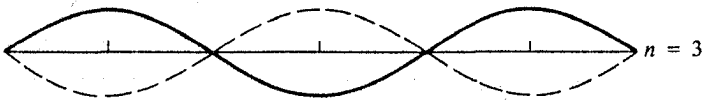
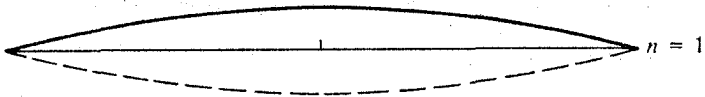
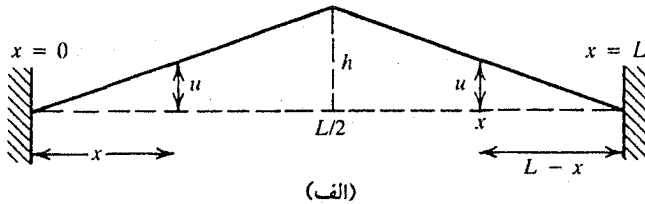
شکل (۱۵-۱-الف) پیکربندی اولیه تار را نمایش می دهد. لذا شرایط اولیه

عبارت است از

$$0 < x < \frac{L}{2}, \quad \frac{u}{x} = \frac{h}{L/2} \quad \text{یا} \quad u = \frac{2h}{L} x \quad (۱)$$

$$\frac{L}{2} < x < L, \quad \frac{u}{L-x} = \frac{h}{L/2} \quad \text{یا} \quad u = \frac{2h}{L} (L-x) \quad (۲)$$

$$t=0, \quad \frac{du_0(x)}{dt} = \dot{u}_0(x) = 0 \quad (۳)$$



(ب)

شکل (مثال ۱۵-۱)

با قرار دادن مقدار $\dot{u}_0(x)$ از معادله (۳) در معادله (۱۵-۴۳) روشن می شود که برای تمام مقادیر n داریم $B_n = 0$. مقادیر A_n را می توان با استفاده از شرایط اولیه (۱) و (۲) محاسبه کرد. با بردن اینها در معادله (۱۵-۴۲) خواهیم یافت

$$A_n = \frac{2}{L} \left[\frac{2h}{L} \int_0^{L/2} x \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{2h}{L} \int_{L/2}^L (L-x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right] \quad (۴)$$

با استفاده از جدولهای متعارف انتگرال ، و محاسبه انتگرالها برای مقادیر مختلف n ، خواهیم داشت

$$A_n = 0 , \quad \text{برای } n \text{ زوج} \quad (5)$$

$$A_n = \frac{8h}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{L} , \quad \text{برای } n \text{ فرد} \quad (6)$$

با بردن اینها در معادله (۱۵-۳۷) ، جواب عمومی را به صورت زیر به دست می آوریم

$$u(x, t) = \frac{8h}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi vt}{L} + \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi x}{L} \cos \frac{3\pi vt}{L} \\ + \frac{1}{5^2} \frac{8h}{\pi^2} \sin \frac{5\pi x}{L} \cos \frac{5\pi vt}{L} + \dots \quad (7)$$

توجه کنیم که تنها هماهنگهای فرد تحریک شده اند . نمودارهای سه هماهنگ فرد اول در شکل مشال (۱۵-۱-ب) نمایش داده شده اند ، و روشن است که هیچ کدام از هماهنگهایی که یک گره در وسط تار داشته باشند تحریک نشده است . مدهای نشان داده شده و دیگران معمولاً بطور همزمان تحریک می شوند .

تمرین (۱۵-۱)؛ مثال را برای موردی که تار در آغاز به اندازه h در $x = \frac{L}{4}$ به طرف پایین جابه جا شده است تکرار کنید .

۱۵-۳ انتشار موج در حالت کلی

حرکت موجی به ارتعاش تارها محدود نمی شود . این پدیده در بسیاری از شاخه های مختلف فیزیک رخ می دهد و مواردی مانند امواج صوتی ، امواج روی سطح مایعات ، و امواج الکترومغناطیسی را در بر می گیرد . با پیشرفت مکانیک کوانتومی ، که در آن با ایده های انتزاعی مانند امواج احتمالاتی سر و کار داریم ، حرکت موجی نقشی بسیار مهمتر و بنیادی تر به عهده می گیرد . می توان گفت که حرکت موجی با پدیده هایی سر و کار دارد که در آنها تناوب یا نوساناتی بروز می دهد . اما معمولاً این همیشه درست نیست . به عنوان مثال ، یک تپ که از روی یک تسمه عبور می کند یا یک موج جذر و مدی ، تناوب بروز نمی دهد .

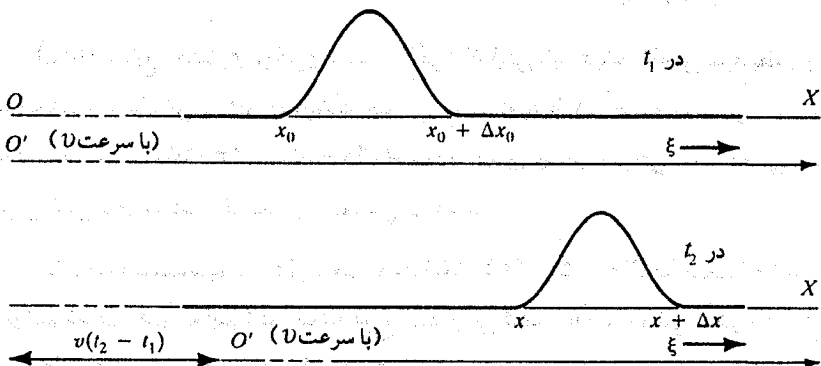
تعریف بهتری از حرکت موجی بر پایه انتقال انرژی بیان می شود . وقتی یک موج به قسمتی از یک محیط می رسد ذرات محیط را به حرکت در می آورد . پس از این که موج رد شد این

ذرات به حال سکون در می آیند و ذرات مجاور به حرکت در می آیند. از این مطلب می توان به این نتیجه رسید که یکی از شاخصهای متعارف تمام حرکت های موجی به صورت زیر است :

حرکت موجی ساز و کاری برای انتقال انرژی از یک نقطه به نقطه دیگر ، بدون انتقال فیزیکی هیچ ماده ای بین این دو نقطه ، فراهم می آورد .

می توان نشان داد که حرکات موجی در جامدات ، مایعات ، و گازها برای انتقال انرژی به یک محیط نیاز دارند ، در صورتی که امواج الکترومغناطیسی می توانند بدون نیاز به محیط انرژی را انتقال دهند . به این ترتیب لازم است که دیدگاه بنیادی تری از حرکت موجی را پذیریم (دیدگاه سینماتیکی به جای دیدگاه دینامیکی که قبلاً بیان شد) .

اکنون به بحث در مورد انتشار یک تپ در یک بُعد می پردازیم . یک تسمه کشیده شده که با تکان دادن یک سر آن تپی ایجاد شده است و این تپ در طول تسمه حرکت کرده و به صورتی که در شکل (۱۵-۳) نشان داده شده درآمده است ، در نظر بگیریم . این تپ ، موج ، یا اغتشاش در طول تسمه ، مثلاً در امتداد محور x ، بدون واپسچیدگی در شکل حرکت می کند ، یعنی همان شکلی را که در لحظه t_1 دارد در هر لحظه دیرتر t_2 نیز دارد . ما مورد ایده آلی را فرض کرده ایم که در آن شکل تپ تغییر نمی کند . در عمل ، به علت میرایی ، تغییری در شکل خواهیم داشت . تپ با سرعت ثابتی حرکت می کند . همین ملاحظات را می توان در مورد هر اغتشاش موجی یا حرکت موجی در نظر گرفت . به این ترتیب می توانیم حرکت موجی را به صورت اغتشاشی که با سرعت ثابت ، بدون این که شکل یا گره آن تغییر کند ، منتشر می شود تعریف کنیم .



شکل (۱۵-۳) : انتشار یک تپ در روی تسمه به طرف راست از دید ناظری که با سرعت

v در امتداد محوری موازی با تسمه حرکت می کند

تپ یا اغتشاشی در نظر بگیریم که در امتداد محور X با سرعت ثابت v حرکت می‌کند. اکنون این تپ را از دید محور ξ ، که با سرعت ثابت v در امتداد و موازی با محور X حرکت می‌کند نگاه کنیم. به علاوه، اگر مبدأ محور X و مبدأ محور ξ در $t = 0$ بر یکدیگر منطبق باشند، می‌توانیم بنویسیم

$$\xi = x - vt \quad (15-44)$$

بنابراین از دید هر ناظری در دستگاه ξ ، شکل و موقعیت اغتشاش بدون تغییر می‌ماند، یعنی، بستگی زمانی اغتشاش طوری است که فقط تابعی از ξ است. لذا موج منتشرشونده به طرف راست عبارت است از

$$u(x, t) = f(\xi) \equiv f(x - vt) \quad (15-45)$$

که $f(\xi)$ تابعی کاملاً اختیاری است. معادله (۱۵-۴۵) تضمین می‌کند که این موج به طرف راست حرکت می‌کند. بنابراین وقتی t افزایش می‌یابد x نیز باید طوری افزایش یابد که ξ ثابت بماند. در نتیجه، $f(\xi)$ نمایشگر موجی است که به طرف راست حرکت می‌کند. به همین طریق با تعریف

$$\eta = x + vt \quad (15-46)$$

موج منتشرشونده به طرف چپ با عبارت زیر داده می‌شود

$$u(x, t) = g(\eta) \equiv g(x + vt) \quad (15-47)$$

که در آن $g(\eta)$ تابع اختیاری دیگری است. اگر t افزایش یابد x باید کاهش یابد بطوری که η ثابت بماند و، بنابراین، $g(\eta)$ نمایشگر موجی است که به طرف چپ منتشر می‌شود. f و g که در معادلات (۱۵-۴۶) و (۱۵-۴۷) آمده‌اند صورتهای موجی نامیده می‌شوند و عمومی‌ترین نوع حرکت یک بُعدی را نمایش می‌دهند.

با بردن مستقیم f و g از معادلات (۱۵-۴۵) و (۱۵-۴۷) در معادله (۱۵-۱۲) می‌توانیم نشان دهیم که اینها در معادله موج صدق می‌کنند. اما ما روشی اختیار می‌کنیم که اندکی متفاوت است. یک معادله با مشتقات جزئی جستجو می‌کنیم که f و g ، مستقل از جهت انتشار، در آن صدق کنند. چون داریم

$$\xi = x - vt \quad \text{و} \quad \eta = x + vt \quad (۴۸-۱۵)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -v \quad , \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = +v$$

جواب عمومی، که یک ترکیب خطی از f و g است، عبارت است از

$$u(x, t) = f(\xi) + g(\eta) \quad (۴۹-۱۵)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial g}{\partial \eta} \quad (۵۰-۱۵)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \end{aligned} \quad (۵۱-۱۵)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \left(\frac{\partial g}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left[v \left(\frac{\partial g}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \right] \\ &= v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + v^2 \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \end{aligned} \quad \text{یا}$$

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \quad (۵۲-۱۵)$$

اما، بنابر معادله موج

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (۱۲-۱۵)$$

طرف راست معادلات (۵۱-۱۵) و (۵۲-۱۵) باید برابر باشند. این در صورتی ممکن است که

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (۵۳-۱۵)$$

این رابطه تنها در صورتی امکان پذیر است که عمومی ترین عبارت برای u ترکیبی از دو تابع،

یکی فقط تابع ξ و دیگری فقط تابع η ؛ یعنی، مجموع دو تابع از ξ و η [توابع انفرادی $f(\xi)$ و $g(\eta)$] نیز تا وقتی خطی باشند جواب معادله اند [باشد

$$u(x, t) = f(\xi) + g(\eta) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad (54-15)$$

بدین ترتیب عمومی ترین جواب معادله موج، معادله (۱۵-۱۲)، با معادله (۱۵-۵۴) یا هر ترکیب خطی دیگری از $f(\xi)$ و $g(\eta)$ داده می شود. این که معادله (۱۵-۵۴) یک جواب عمومی است با این واقعیت سازگار است که جواب عمومی یک معادله با مشتقات جزئی مرتبه دوم شامل دو تابع اختیاری است.

اکنون به محاسبه این توابع با استفاده از شرایط اولیه، یعنی در $t = 0$

$$u = u_0(x) \quad \text{و} \quad \dot{u} = \dot{u}_0(x) \quad (55-15)$$

بپردازیم که می دهند

$$u(x, 0) = f(x) + g(x) = u_0(x) \quad (56-15)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_{t=0} = \left[-v \frac{df}{d\xi} + v \frac{dg}{d\eta} \right]_{t=0} = \dot{u}_0(x) \quad (57-15)$$

در $t = 0$ داریم $\xi = \eta = x$ ، و معادله (۱۵-۵۷) به شکل زیر در می آید

$$v \frac{d}{dx} [-f(x) + g(x)] = \dot{u}_0(x) \quad (58-15)$$

که پس از انتگرال گیری می دهد

$$-f(x) + g(x) = \frac{1}{v} \int_0^x \dot{u}_0(x) dx + C \quad (59-15)$$

C ثابت انتگرال گیری است. با جمع و تفریق معادلات (۱۵-۵۶) و (۱۵-۵۹) خواهیم یافت

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[u_0(x) - \frac{1}{v} \int_0^x \dot{u}_0(x) dx - C \right] \quad (60-15)$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \left[u_0(x) + \frac{1}{v} \int_0^x \dot{u}_0(x) dx + C \right] \quad (61-15)$$

چون این جوابها برای هر مقدار x برقرارند می توانیم به جای x ، ξ یا η را قرار دهیم. ثابت C را نیز می توان کنار گذاشت زیرا می توان آن را در ترکیب خطی جوابها حذف کرد. بنابراین

$$f(\xi) = \frac{1}{2} \left[u_0(\xi) - \frac{1}{v} \int_0^\xi \dot{u}_0(\xi) d\xi \right] \quad (۱۵-۶۲)$$

$$g(\eta) = \frac{1}{2} \left[u_0(\eta) + \frac{1}{v} \int_0^\eta \dot{u}_0(\eta) d\eta \right] \quad (۱۵-۶۳)$$

گام بعدی بررسی ارتباط بین جواب عمومی به دست آمده در این بخش و جوابهای به دست آمده در بخشهای پیشین در مورد نوسان تارهاست. معادله با مشتقات جزئی (۱۲-۱۵) به دو معادله دیفرانسیل (۱۵-۲۱) و (۱۵-۲۲)، یعنی

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2} X = 0 \quad (۱۵-۲۱)$$

$$\frac{d^2 \Theta}{dt^2} + \omega^2 \Theta = 0 \quad (۱۵-۲۲)$$

تجزیه شد. به جای نوشتن جوابها به شکل سینوسی یا کسینوسی، معادلات (۱۵-۲۳) و (۱۵-۲۴)، می توانیم جوابهای این معادلات را به شکل دیگر

$$X(x) = Ce^{i(\omega/v)x} + De^{-i(\omega/v)x} \quad (۱۵-۶۴)$$

$$\Theta(t) = Ee^{i\omega t} + Fe^{-i\omega t} \quad (۱۵-۶۵)$$

بنویسیم که C ، D ، E و F ثابتهایی هستند که باید از شرایط مرزی به دست آیند. به این ترتیب جواب عمومی به شکل زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} u(x, t) &= X(x)\Theta(t) = Ae^{\pm i(\omega/v)x} e^{\pm i\omega t} \\ &= Ae^{\pm i(\omega/v)(x \pm vt)} \end{aligned} \quad (۱۵-۶۶)$$

که در آن A مقداری است ثابت. این رابطه بیان می دارد که جواب عمومی $u(x, t)$ ترکیبی خطی از جملات زیر است

$$\pm i(\omega/v)(x \pm vt) \quad (۱۵-۶۷)$$

دقت کنیم که این جوابها شامل چهار کمیتند که توابعی از $x + vt$ و $x - vt$ هستند. با گرفتن مقدار حقیقی یا با اضافه کردن مزدوج مختلط و تقسیم بر ۲، می توانیم جوابهای زیر را به دست آوریم

$$u(x, t) = A \cos \frac{\omega}{v} (x - vt) \quad (۱۵-۶۸)$$

$$u(x, t) = A \cos \frac{\omega}{v} (x + vt) \quad (۶۹-۱۵)$$

و با گرفتن مقدار موهومی یا کم کردن مزدوج مختلط و تقسیم بر $2i$ ، خواهیم یافت

$$u(x, t) = A \sin \frac{\omega}{v} (x - vt) \quad (۷۰-۱۵)$$

$$u(x, t) = A \sin \frac{\omega}{v} (x + vt) \quad (۷۱-۱۵)$$

جوابهای شامل $x - vt$ امواجی را نمایش می دهند که به سمت راست حرکت می کنند، و آنهایی که شامل $x + vt$ هستند امواجی را نمایش می دهند که به طرف چپ حرکت می کنند. این جوابها شرایط مرزی را برآورده نمی کنند، زیرا امواجی را نمایش می دهند که از تار یا محیط عبور می کنند.

به علاوه، این معادلات فقط با یک مقدار بخصوص ω^2 برآورده نمی شوند، مقادیر بسیار دیگری نیز امکان پذیرند. بنابراین جواب عمومی تنها یک ترکیب خطی از جملات هماهنگ (۱۵-۶۶) نیست، بلکه باید روی تمام بسامدهای ممکن نیز جمع بندی گردد. به این ترتیب عمومی ترین جواب عبارت است از

$$u(x, t) = \sum_n A_n e^{\pm i(\omega_n/v)(x \pm vt)} \quad (۷۲-۱۵)$$

وقتی شرایط مرزی معلوم باشد، می توان ثابتها را با روشی شبیه به مورد محاسبه ضرایب در سری بی نهایت فوریه به دست آورد. ما برای بحث خود، جواب را به شکل زیر می نویسیم، البته با این منظور که جواب کامل روی تمام بسامدها جمع بندی می شود:

$$u(x, t) = A e^{i(\omega/v)(x - vt)} \quad (۷۳-۱۵)$$

کمیت k موسوم به ثابت انتشار یا عدد موجی زاویه ای یا بطور ساده عدد موجی (تعداد موج بر واحد طول) دارای بُعد عکس طول است و به صورت زیر تعریف می شود

$$k^2 \equiv \frac{\omega^2}{v^2} \quad \text{یا} \quad |k| = \frac{\omega}{v} \quad (۷۴-۱۵)$$

به این ترتیب معادله موج برای X ، معادله (۱۵-۲۱)، و جواب عمومی آن، معادله (۱۵-۷۳)، به شکل زیر در می آیند

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 X = 0 \quad (۷۵-۱۵)$$

$$u(x, t) = Ae^{ik(x-vt)} = Ae^{i(kx-\omega t)} \quad (۷۶-۱۷)$$

اگر v بسامد ارتعاش باشد، بطوری که $\omega = 2\pi v$ ، طول موج λ به صورت فاصله برای یک نوسان کامل موج تعریف می شود

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{2\pi v}{2\pi\nu} = \frac{2\pi v}{\omega} \quad (۷۷-۱۵)$$

از ترکیب این رابطه با معادله (۷۴-۱۵) خواهیم یافت

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (۷۸-۱۵)$$

اکنون ببینیم اگر دو موج را، که هر دو یک بسامد و یک دامنه دارند، اما یکی از آنها به طرف راست و دیگری به طرف چپ حرکت می کند، بر هم نهسیم چه رخ می دهد؟ در این صورت

$$u = u_1 + u_2 = Ae^{i(kx-\omega t)} + Ae^{i(kx+\omega t)} \quad (۷۹-۱۵)$$

$$u = 2Ae^{-i\omega t} \cos kx \quad (۸۰-۱۵)$$

قسمت حقیقی این معادله می دهد

$$u(x, t) = 2A \cos kx \cos \omega t \quad (۸۱-۱۵)$$

موج حاصل این خاصیت را دارد که با زمان به طرف جلو حرکت نمی کند. این برهم نهی امواج به تشکیل امواج ساکن می انجامد. نقاطی یافت می شوند که، به علت حذف یک موج توسط موج دیگر، اصلاً حرکتی ندارند. چنین نقاطی گره نامیده می شوند. چون در گرهها حرکتی امکان پذیر نیست، انرژی از یک طرف آن به طرف دیگر انتقال نمی یابد؛ از همین جاست که نام امواج ایستاده سرچشمه می گیرد. از معادله (۸۱-۱۵) می توانیم شرطی را برای مکانهای گرهها به صورت زیر به دست می آوریم

$$x = (2n+1) \frac{\lambda}{4} = (2n+1) \frac{\pi}{2k} \quad (۸۲-۱۵)$$

قبل از به پایان بردن این بخش، قدری در مورد سرعت فاز و پاشندگی صحبت کنیم. برای

شروع ، فرض می کنیم یک تک موج (یا تک بسامد) با معادله (۷۶-۱۵) داریم

$$u(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} \quad (76-15)$$

کمیت $kx - \omega t$ به عنوان فاز ϕ ی موجی که با $u(x, t)$ نمایش داده می شود تعریف می شود ، یعنی

$$\phi \equiv kx - \omega t \quad (83-15)$$

اگر ϕ ثابت بماند گرهه یا شکل موج با زمان بدون تغییر می ماند . برای این که ϕ ثابت بماند باید داشته باشیم

$$d\phi = 0 \quad \text{یا} \quad k dx - \omega dt = 0 \quad (84-15)$$

یعنی ، سرعت فاز v_p را سرعتی تعریف می کنیم که گرهه موجی با آن حرکت می کند . این سرعت با رابطه زیر داده می شود

$$v_p = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v \quad (85-15)$$

یعنی ، برای یک موج ساده ، سرعت فاز v_p برابر است با سرعت موج v . در حالت کلی این درست نیست ، و سرعت فاز معمولاً تابعی است از بسامد ؛ یعنی در یک محیط معین سرعت فاز بستگی به بسامد دارد ، $v_p = v_p(k)$. چنین محیطی ، محیط پاشنده نامیده می شود . در یک محیط پاشنده سرعت فاز برابر با سرعت موج نیست . (به عنوان مثال ، برای امواج الکترومغناطیسی در یک محیط شکستمند معین ، سرعت امواج تابعی از طول موج است) . بنابراین ، در چنین موردی گرهه موج ثابت نمی ماند و تغییر می کند . اما حتی چنین گرهه ای برای ناظری که با سرعت v_g برابر با

$$v_g = \frac{d\omega(k)}{dk} \quad (86-15)$$

حرکت کند بدون تغییر به نظر می آید . v_g سرعت گروه نامیده می شود .

۱۵-۲ فرمول بندی لاگرانژ برای يك تار مرتعش : انرژی و توان

اگر انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل یک تار مرتعش را حساب کنیم ، می توانیم لاگرانژی L و معادلات لاگرانژ را بنویسیم . به دنبال آن می توانیم مدهای بهنجار یک تار

مرتعش را محاسبه کنیم. به علاوه، انرژی کل ذخیره شده در تار و آهنگ انتقال انرژی از یک قسمت تار به قسمت دیگر را می‌دانیم.

تار مرتعش نشان داده شده در شکل (۱۵-۱) را که طول آن L است و از هر دو انتها تثبیت شده است در نظر بگیریم. همان طور که در شکل (۱۵-۱-ب) نشان داده شده است، طول عنصری که در حالت تعادل dx است به هنگام ارتعاش به ds می‌رسد. وقتی تار ارتعاش می‌کند نیروی کشش برابر T است. بنابراین انرژی پتانسیل ذخیره شده در این قسمت از تار مرتعش، با این فرض که انرژی پتانسیل آن وقتی تار کشیده شده نیست صفر است، عبارت است از

$$dV = T(ds - dx) = T\left(\frac{ds}{dx} - 1\right) dx \quad (۱۵-۸۷)$$

که در آن

$$\frac{ds}{dx} = \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]^{1/2} \quad (۱۵-۸۸)$$

با قرار دادن این عبارت در معادله (۱۵-۸۷)، و با فرض $\frac{\partial u}{\partial x} \ll 1$ ، و با استفاده از قضیه بسط دو جمله‌ای، خواهیم یافت

$$dV \approx \frac{T}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \quad (۱۵-۸۹)$$

به این ترتیب انرژی پتانسیل کل ذخیره شده در تار با انتگرال گیری از معادله (۱۵-۸۹) به دست می‌آید

$$V = \frac{T}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \quad (۱۵-۹۰)$$

جرم یک عنصر به طول dx برابر با μdx است. در نتیجه انرژی جنبشی آن عبارت است از

$$dK = \frac{1}{2} \mu dx \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \quad (۱۵-۹۱)$$

برای جلوگیری از اشتباه، انرژی جنبشی را به جای T ، که برای نیروی کشش به کار خواهیم برد، با K نمایش می‌دهیم. انرژی جنبشی کل تار از انتگرال گیری معادله (۱۵-۹۱)

به دست می آید

$$K = \frac{\mu}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \quad (۹۲-۱۵)$$

برای محاسبه V و K از جواب داده شده به وسیله معادله (۱۵-۳۰)، یعنی

$$u(x, t) = \Theta_n(t) \sin \frac{\omega_n x}{v} \quad (۹۳-۱۵)$$

استفاده می کنیم، که در آن

$$\Theta_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \quad (۹۴-۱۵)$$

و از رابطه (۱۵-۲۹)، یعنی

$$\omega_n = \frac{n\pi v}{L} = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (۲۹-۱۵)$$

نیز استفاده کرده ایم. بنابراین، از معادلات (۱۵-۹۳) و (۱۵-۲۹) برای تمام جوابها خواهیم یافت

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} n \Theta_n \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (۹۵-۱۵)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\Theta}_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (۹۶-۱۵)$$

با بردن معادله (۱۵-۹۵) در معادله (۱۵-۹۰)، نتیجه می گیریم

$$V = \frac{\pi^2 T}{2L^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(nm \dot{\Theta}_n \dot{\Theta}_m \int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx \right) \quad (۹۷-۱۵)$$

در انتگرال گیری در می یابیم که تنها جملاتی غیر صفرند که برای آنها $m = n$ ، و مقدار هر کدام از این جملات برابر است با $\frac{L}{2}$. در نتیجه

$$V = \frac{\pi^2 T}{4L} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \dot{\Theta}_n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (۹۸-۱۵)$$

به همین روش، با بردن معادله (۱۵-۹۶) در (۱۵-۹۲) خواهیم یافت

$$K = \frac{\mu}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\dot{\Theta}_n \dot{\Theta}_m \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx \right) \quad (۹۹-۱۵)$$

در این جا نیز ، از انتگرال گیری در می یابیم که تنها آن جملاتی غیر صفرند که برای آنها $m = n$ ،
و نتیجه هر کدام از این جملات برابر است با $\frac{L}{2}$. بنابراین

$$K = \frac{\mu L}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\theta}_n^2 \quad (100-15)$$

و لاگرانژی سیستم را می توان به صورت زیر نوشت

$$L = K - V = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu L \dot{\theta}_n^2 - \frac{\pi^2 T}{L} n^2 \theta_n^2 \right) \quad (101-15)$$

دقت کنیم که انرژی پتانسیل مجموع کمیتهایی به شکل $A_n \theta_n^2$ ، و انرژی جنبشی مجموع کمیتهایی به شکل $B_n \dot{\theta}_n^2$ است . معادلات لاگرانژ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_n} = 0 \quad (102-15)$$

به شکل زیر در می آیند

$$\ddot{\theta}_n + \frac{\pi^2 T}{\mu L^2} n^2 \theta_n = 0 \quad (103-15)$$

که θ_n متغیر تابع t متغیر مستقل است . جوابهای این معادلات مختصات بهنجار θ_n را به دست می دهند . چون n از 1 تا ∞ تغییر می کند ، تعداد مختصات بهنجار برای هر تار مرتعش بی نهایت است . نوشتن انرژی کل E ، با استفاده از معادلات (100-15) و (98-15) اکنون کار ساده ای است

$$E = K + V = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu L \dot{\theta}_n^2 + \frac{\pi^2 T}{L} n^2 \theta_n^2 \right) \quad (104-15)$$

با توجه به $\mu L = M$ (جرم تار) ، و معادله (98-15) که از آن نتیجه می شود

$$T = \frac{\mu L^2 \omega_n^2}{n^2 \pi^2} = \frac{M L}{n^2 \pi^2} \omega_n^2 \quad (105-15)$$

و با توجه به معادله (94-15) ، می توانیم معادله (104-15) را به شکل زیر بنویسیم

$$E = \frac{M}{4} \sum_{n=1}^{\infty} [\omega_n^2 (A_n^2 + B_n^2)] \quad (106-15)$$

که در آن A_n و B_n ثابتند (رک . مسأله (۱۵-۱۶))

بالاخره ، آهنگ جریان انرژی ، یعنی ، توان P را ، که از هر نقطه x در طول تار از چپ به راست عبور می کند محاسبه کنیم . برای محاسبه توان از تعریف $P = F\dot{u}$ استفاده می کنیم ، که در آن F بزرگی نیروی رانش F است . F برابر است با بزرگی نیروی کشش T و باید در جهت مماس به تار اعمال شود . بنابراین مؤلفه F در جهت جابه جایی عرضی در نقطه x عبارت است از

$$F_y = -T \sin \theta \approx -T \tan \theta = -T \frac{\partial u}{\partial x} \quad (107-15)$$

و مؤلفه سرعت \dot{u} در نقطه x عبارت است از $\frac{\partial u}{\partial t}$. در نتیجه ،

$$P = F_y \dot{u} = \left(-T \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (108-15)$$

مقدار P را می توانیم با استفاده از مقادیر $\frac{\partial u}{\partial t}$ و $\frac{\partial u}{\partial x}$ که ، به ترتیب ، با معادلات (۱۵-۹۵) و (۱۵-۹۶) داده شده اند ، محاسبه کنیم .

اکنون P را برای موارد عمومی تر محاسبه می کنیم . موجی در نظر بگیریم که به طرف راست حرکت می کند

$$u = f(x - vt) = f(\xi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{df}{d\xi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{df}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} = -v \frac{df}{d\xi}$$

با بردن این عبارتها در معادله (۱۵-۱۰۸) نتیجه می شود

$$P = vT \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2 \quad (109-15)$$

که مثبت است و نشان می دهد که انرژی از چپ به راست جریان دارد . از سوی دیگر ، اگر انرژی از راست به چپ جریان می داشت ، P منفی می شد . فرض کنیم f تابعی سینوسی به شکل زیر باشد

$$u = f(\xi) = A \cos(kx - \omega t) \quad (110-15)$$

با محاسبه $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial t}$ و بردن آنها در معادله (۱۵-۱۰۸) خواهیم یافت

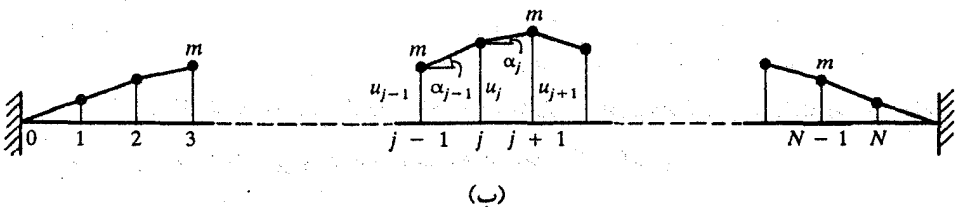
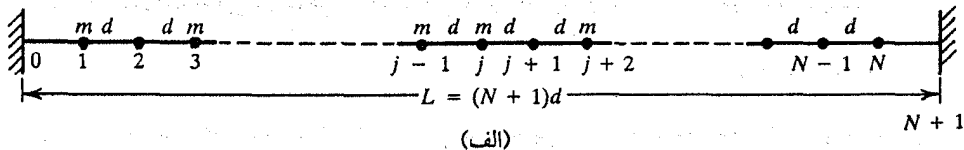
$$P = k\omega TA^2 \sin^2(kx - \omega t) \quad (15-111)$$

چون مقدار میانگین $\sin^2(kx - \omega t)$ برابر است با $\frac{1}{2}$ ، توان میانگین P که از چپ به راست عبور می کند خواهد بود

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} k\omega TA^2 \quad (15-112)$$

۱۵-۵ سیستم ذرات: تار وزنه دار

در بحثهای پیشین یک تار ایده آل در نظر گرفتیم که با چگالی جرمی خطی μ مشخص شده بود. در واقع، هر تار از تعداد معینی ذره تشکیل شده است. می توانیم تار را به عنوان تعدادی ذرات همسان به جرم m که در بازه های منظمی در روی یک تار کشسان، آن طور که در شکل (۱۵-۴-الف) نشان داده شده است، قرار گرفته اند، در نظر بگیریم. N ذره داریم که فاصله تعادلی بین ذرات مجاور d ، و نیروی جاذبه بین ذرات مجاور T است. به این ترتیب طول تار، همان طور که نشان داده شده است، $(N+1)d$ است. این تار از دو انتها تثبیت شده و در حالت تعادل افقی است. می خواهیم جابه جاییهای عرضی کوچک و در نتیجه، نوسانات ذرات را حول وضع تعادلشان بررسی کنیم.



شکل (۱۵-۴): (الف) تعداد زیادی ذرات همسان به جرم m واقع در بازه های منظم،

یک تار کشسان تشکیل می دهند. (ب) جابه جاییهای عرضی جرمهای نقطه ای

جابه جاییهای کوچک عمودی ذرات $j-1$ ، j ، $j+1$ را، هر کدام به جرم m ، یا u_{j-1} ، u_j ، u_{j+1} نمایش می دهیم. کوچک بودن جابه جاییها می گوید که زاویه های α_j و شبیها کوچکند و در نتیجه می توانیم $\tan \alpha$ را به جای $\sin \alpha$ قرار دهیم. برای یک جابه جایی کوچک مؤلفه X نیروی وارد بر ذره j ام عبارت است از

$$-T \cos \alpha_{j-1} + T \cos \alpha_j \approx \frac{1}{2} T (\alpha_{j-1}^2 - \alpha_j^2) \approx 0$$

مؤلفه Y نیروی وارد بر ذره j ام را برای جابه جاییهای کوچک می توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} F_y &= -T \sin \alpha_{j-1} + T \sin \alpha_j \\ &\approx -T \tan \alpha_{j-1} + T \tan \alpha_j \quad (113-15) \\ &= -T \frac{u_j - u_{j-1}}{d} + T \frac{u_{j+1} - u_j}{d} \end{aligned}$$

چون

$$F_j = m \ddot{u}_j = m \frac{d^2 u_j}{dt^2} \quad (114-15)$$

معادله حرکت ذره j ام عبارت است از ($F_j = F_y$)

$$m \frac{d^2 u_j}{dt^2} = T \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{d} - \frac{u_j - u_{j-1}}{d} \right) \quad (115-15)$$

اگر تعداد ذرات خیلی بزرگ فرض شوند می توانیم تار را پیوسته در نظر بگیریم و بنویسیم

$$u(jd, t) = u_j(t) = u(x, t)$$

و چگالی جرمی خطی عبارت است از $\mu = \frac{m}{d}$. به این ترتیب معادله (115-15) به شکل زیر در می آید

$$\frac{d^2 u_j}{dt^2} = \frac{T}{\mu d} \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{d} - \frac{u_j - u_{j-1}}{d} \right) \quad (116-15)$$

قبل از اقدام به حل معادله (116-15)، نشان خواهیم داد که این معادله یک معادله

موج را نمایش می دهد. برای طرف راست معادله (116-15) داریم

$$\begin{aligned} \frac{1}{d} \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{d} - \frac{u_j - u_{j-1}}{d} \right) &= \frac{1}{d} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{(j+1/2)d} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{(j-1/2)d} \right] \\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{jd} \quad (117-15) \end{aligned}$$

با بردن این عبارت در معادله (۱۵-۱۱۶) ، معادله موج آشنای زیر را به دست خواهیم آورد .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (15-12)$$

اکنون به معادله (۱۵-۱۱۶) ، که حرکت ذره z ام را توصیف می کند ، برگردیم و سعی کنیم جواب ممکن برای آن پیدا کنیم . قرار دهیم

$$\frac{T}{md} = \omega_0^2 \quad (15-118)$$

و معادله (۱۵-۱۱۶) را به صورت معادله عمومی موج بنویسیم

$$\ddot{u}_j + 2\omega_0^2 u_j - \omega_0^2 (u_{j+1} + u_{j-1}) = 0 \quad (15-119)$$

چون N ذره داریم ، می توانیم یک مجموعه N معادله دیفرانسیلی ، که هر کدام شبیه به معادله (۱۵-۱۱۹) است ، بنویسیم . توجه کنیم که فرض کرده ایم $u_0 = 0$ و $u_{j+1} = 0$.

قبل از حل معادله عمومی ، معادله (۱۵-۱۱۹) ، نخست چند مورد ساده در نظر بگیریم . فرض کنیم تنها یک ذره داریم ، یعنی $N=1$. در این صورت معادله (۱۵-۱۱۹) به شکل زیر در می آید

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + 2\omega_0^2 u_1 = 0 \quad (15-120)$$

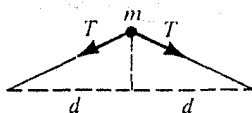
که حرکت هماهنگ عرضی یک تک ذره را ، که با بسامد زاویه ای $\sqrt{2} \omega_0$ نوسان می کند ، نمایش می دهد . این وضعیت در شکل (۱۵-۵-الف) نمایش داده شده است . اگر دو ذره می داشتیم ، یعنی $N=2$ ، معادله (۱۵-۱۱۹) به

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + 2\omega_0^2 u_1 - \omega_0^2 u_2 = 0 \quad (15-121)$$

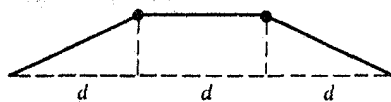
$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} + 2\omega_0^2 u_2 - \omega_0^2 u_1 = 0 \quad (15-122)$$

منجر می شد . این معادلات جفت شده شبیه به معادلات دو نوسانگر یا دو آونگ جفت شده ، که بسامد طبیعی هر کدام ω_0 است ، می باشند . بنابراین برای $N=2$ دو مد بهنجار وجود دارد . مد پایین تر دارای بسامد زاویه ای $\omega = \omega_0$ ، و مد بالاتر دارای بسامد زاویه ای $\omega = \sqrt{3} \omega_0$ است ، شکل (۱۵-۵-ب) (۱) و (۲)

(الف) $N = 1$
 $\omega = \sqrt{2}\omega_0$



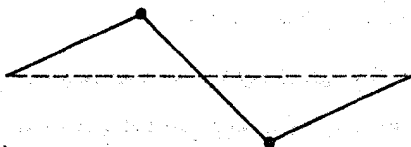
(۱) $N = 2$
 $\omega = \omega_0$



مد با بسامد پایین تر

(ب)

(۲) $N = 2$
 $\omega = \sqrt{3}\omega_0$



مد با بسامد بالاتر

شکل (۱۵-۵) : مدهای بهنجار ارتعاش برای (الف) $N = 1$ ، و (ب) $N = 2$ ذره

اکنون به معادله (۱۵-۱۱۹) برگردیم و سعی کنیم مدهای بهنجار نوسان را برای N ذره پیدا کنیم . اصولاً ، ما همان روشی را که برای دو ذره به کار بردیم به کار می گیریم . برای هر مد بهنجار ، یک جواب سینوسی جستجو می کنیم بطوری که تمام ذرات با یک بسامد نوسان کنند . فرض کنیم این جواب به صورت

$$u_j(t) = A_j \cos \omega t, \quad j = 1, 2, 3, \dots, N \quad (15-123)$$

باشد ، که A_j و ω دامنه و بسامد ذره j ام است . (می توانستیم همچنین با جوابی به شکل

$$u_j(t) = A_j e^{i\omega t} \quad (15-124)$$

شروع کنیم ، رک . مسأله (۱۵-۲۳) . بنابراین ، اگر A_j و ω را بدانیم ، مجموعه معادلات دیفرانسیل (۱۵-۱۱۹) را می توان حل شده وانمود کرد . به علاوه ، جوابی از نوع (۱۵-۱۲۳) فرض می کند که در لحظه $t = 0$ سرعت ذره صفر است . این مطلب با مشتق گیری از معادله (۱۵-۱۲۳) ، که می دهد

$$\frac{du_j}{dt} = -\omega A_j \sin \omega t, \quad j = 1, 2, 3, \dots, N \quad (125-15)$$

آشکار می شود، زیرا اگر $t=0$ باشد $\ddot{u}_j = 0$. با بردن جواب آزمایشی (۱۲۳-۱۵) در معادله (۱۱۹-۱۵) خواهیم یافت

$$(-\omega^2 + 2\omega_0^2)A_j - \omega_0^2(A_{j-1} + A_{j+1}) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, N \quad (126-15)$$

که معادل با مجموعه معادلات زیر است

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + 2\omega_0^2)A_1 - \omega_0^2(A_0 + A_2) &= 0 \\ (-\omega^2 + 2\omega_0^2)A_2 - \omega_0^2(A_1 + A_3) &= 0 \\ \vdots & \\ (-\omega^2 + 2\omega_0^2)A_j - \omega_0^2(A_{j-1} + A_{j+1}) &= 0 \\ \vdots & \\ (-\omega^2 + 2\omega_0^2)A_N - \omega_0^2(A_{N-1} + A_{N+1}) &= 0 \end{aligned} \quad (127-15)$$

برای داشتن جواب غیر صفر، دترمینان ضرایب در معادلات (۱۲۷-۱۵) باید صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} (-\omega^2 + 2\omega_0^2) & -\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\omega_0^2 & (-\omega^2 + 2\omega_0^2) & -\omega_0^2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\omega_0^2 & (-\omega^2 + 2\omega_0^2) & -\omega_0^2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\omega_0^2 & (-\omega^2 + 2\omega_0^2) & -\omega_0^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0 \quad (128-15)$$

برای $N=1$ به دست می آوریم

$$|-\omega^2 + 2\omega_0^2| = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{2}\omega_0$$

برای $N=2$ خواهیم داشت

$$\begin{vmatrix} (-\omega^2 + 2\omega_0^2) & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & (-\omega^2 + 2\omega_0^2) \end{vmatrix} = 0$$

که بسامدهای دو مد بهنجار را به صورت زیر به دست می دهد

$$\omega = \omega_0 \quad \text{یا} \quad \omega = \sqrt{3}\omega_0$$

اینها همان نتایجی هستند که پیشگویی کرده بودیم. این روش برای محاسبه بسامدهای مدهای بهنجار تا وقتی که با تعداد کمی ذره سر و کار داریم به اندازه کافی ساده است. برای تعداد ذرات خیلی زیاد، این روش پردردسر است. روش مطلوب روش زیر است.

به معادله (۱۵-۱۲۶) برگردیم. ثابت بودن هر دو سر به شرایط مرزی زیر منجر

می شود

$$A_0 = 0 \quad \text{و} \quad A_{N+1} = 0 \quad (15-129)$$

وجود مدهای بهنجار، که برای هر مد تمام ذرات با یک بسامد نوسان می کنند، محدودیت‌هایی روی نسبت‌های دامنه‌ها تحمیل می کند. معادله (۱۵-۱۲۶) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{A_{j-1} + A_{j+1}}{A_j} = \frac{-\omega^2 + 2\omega_0^2}{\omega_0^2}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, N \quad (15-130)$$

چون برای یک مدمعین ω^2 ثابت است، طرف راست ثابت است. بنابراین، اگر A_j و A_{j-1} را داده باشند، A_{j+1} را می توان محاسبه کرد. به عنوان مثال، اگر $A_0 = 0$ و A_1 معلوم باشد، A_2 را می توان محاسبه کرد.

به علاوه، معادله (۱۵-۱۳۰) ایجاب می کند که چون طرف راست ثابت است طرف چپ نیز باید ثابت باشد. فراموش نکنیم که می خواهیم مقدار ω^2 را به دست آوریم. یک روش روشن برای انجام این کار انتخاب جوابی به شکل زیر برای A_j است

$$A_j = C \sin j\theta \quad (15-131)$$

که θ یک زاویه است. با عبارات مشابهی برای A_{j+1} و A_{j-1} می توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} A_{j-1} + A_{j+1} &= C \sin(j-1)\theta + C \sin(j+1)\theta \\ &= 2C \sin j\theta \cos \theta = 2A_j \cos \theta \end{aligned} \quad (15-132)$$

که می توان آن را به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\frac{A_{j-1} + A_{j+1}}{A_j} = 2 \cos \theta \quad (15-133)$$

طرف راست مستقل از z است. بنابراین اگر بتوانیم θ را محاسبه کنیم، مقدار ثابت برای $2 \cos \theta$ را، که می توان با بردن آن در معادله (۱۵-۱۳۰) ω را محاسبه کرد، خواهیم داشت. برای انجام این کار از شرایط مرزی $A_j = 0$ برای $z = 0$ و $z = N + 1$ استفاده می کنیم. از معادله (۱۵-۱۳۱) می بینیم که A_j برای $z = N + 1$ تنها در صورتی صفر خواهد بود که $\theta (N + 1)$ مضرب درستی از π باشد، یعنی

$$(N + 1)\theta = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (15-134 \text{ الف})$$

یا

$$\theta = \frac{n\pi}{N + 1} \quad (15-134 \text{ ب})$$

با قرار دادن این عبارت در معادله (۱۵-۱۳۱) خواهیم داشت

$$A_j = C \sin\left(\frac{nj\pi}{N + 1}\right) \quad (15-135)$$

با به کارگیری معادلات (۱۵-۱۳۰)، (۱۵-۱۳۳)، و (۱۵-۱۳۴) بسامدهای مدهای بهنجار ممکن را به دست خواهیم آورد

$$\frac{A_{j-1} + A_{j+1}}{A_j} = \frac{-\omega^2 + 2\omega_0^2}{\omega_0^2} = 2 \cos\left(\frac{n\pi}{N + 1}\right) \quad (15-136)$$

بنابراین، بسامدهای مدهای بهنجار (مستقل از z) از حل معادله فوق برای ω^2 به دست

$$\begin{aligned} \omega^2 &= 2\omega_0^2 \left[1 - \cos\left(\frac{n\pi}{N + 1}\right) \right] \\ &= 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{2(N + 1)}\right) \end{aligned} \quad (15-137)$$

که نتیجه می دهد

$$\omega = 2\omega_0 \sin\left(\frac{n\pi}{2(N + 1)}\right) \quad (15-138)$$

با جایگذاری مقدار ω_0 از معادله (۱۵-۱۱۸)، و قرار دادن ω_n به جای ω ، زیرا هر مقدار n متناظر با یک مد بهنجار با بسامد مربوطه است، می توانیم بسامدهای مدهای بهنجار را

به صورت زیر بنویسیم

$$\omega_n = 2\sqrt{\frac{T}{md}} \sin\left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right) \quad (15-139)$$

همین روش را می‌توانیم برای نوسانات طولی، با قرار دادن ثابت فنری k به جای T/d ، به کار بگیریم. معادله (۱۵-۱۳۹) بعد از جایگزین کردن T/d با k ، بسامدهای دومدبهنجار دو نوسانگر جفت شده را، با قرار دادن $N=2$ و $n=1$ به دست می‌دهد.

برای تمام منظوره‌های عملی، مسأله N نوسانگر جفت شده را حل کرده ایم. اکنون باید به حرکت حاصل از این معادلات دقیقتر نگاه کنیم تا بتوانیم تعبیری فیزیکی برای مسأله پیدا کنیم. برای توصیف جابه‌جایی ذره n ام در زمانی یک مجموعه N ذره‌ای در n امین مد نوسان می‌کند، باید معادله (۱۵-۱۲۳) را به صورت زیر بنویسیم

$$u_{jn} = A_{jn} \cos \omega_n t \quad (15-140)$$

که A_{jn} از قرار دادن معادله (۱۵-۱۳۴-ب) در معادله (۱۵-۱۳۱) و گذاردن A_{jn} به جای A_j و C_n به جای C به صورت زیر به دست می‌آید

$$A_{jn} = C_n \sin\left(\frac{jn\pi}{N+1}\right) \quad (15-141)$$

A_{jn} نمایشگر دامنه ذره n ام در n امین مد نوسان سیستم و ω_n نمایشگر بسامد n امین مد است که از معادلات (۱۵-۱۳۸) یا (۱۵-۱۳۹) به دست می‌آید، یعنی

$$\omega_n = 2\omega_0 \sin\left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right) \quad (15-142)$$

جواب داده شده به وسیله معادله (۱۵-۱۴۰) فرض می‌کند که در $t=0$ ذره در حال سکون است. اما، با اضافه کردن فاکتور فاز ϕ_n می‌توان بر این مشکل پیروز شد و هر شرایط اولیه‌ای را برآورده کرد، یعنی

$$u_{jn} = A_{jn} \cos(\omega_n t - \phi_n) \quad (15-143)$$

نخست، می‌خواهیم تعداد مدهای بهنجار ممکن را بدانیم. اکنون نشان می‌دهیم که

برای N نوسانگر تنها N مد مستقل، یعنی $n = N$ ، با دامنه‌ها و بسامدهای متناظر A_{jn} و ω_n وجود دارد. برای مدهای خارج از $n = N$ ، یعنی برای $n = N + 1$ ، $n = N + 2$ ، ...، معادلات پیشین به وضعیتهای جدیدی منجر نمی‌شوند. نشان خواهیم داد که برای مقادیر بزرگتر از $n = N$ ، دامنه‌ها و بسامدهای مدهای بهنجار تکرار می‌شوند.

در شکل (۱۵-۶) نموداری از بسامد ω_n (همیشه مثبت) نسبت به عدد n [برای سادگی نسبت به $(N + 1)\pi/2$ به جای n] نشان داده شده است اگر در معادله (۱۵-۱۴۱) قرار دهیم $n = 0$ یا $n = N + 1$ ، دامنه A_{jn} صفر می‌شود. این مقادیر n مدهای صفر نامیده می‌شوند. برای $n = 1$ تا $n = N$ ، $n = N$ بسامدمشخصه متفاوت وجود دارد که، با توجه به معادله (۱۵-۱۴۲)، برای $n = N + 1$ به مقدار بیشینه $2\omega_0 = \omega_{\max}$ می‌رسند، زیرا $\sin \pi/2$ یک می‌شود. اما برای این مقدار بیشینه بسامد مشخصه، دامنه متناظر برای $n = N + 1$ ، با توجه به معادله (۱۵-۱۴۱)، صفر می‌شود. اکنون بسامد مشخصه را برای $n = N + 2$ حساب کنیم. از معادله (۱۵-۱۴۲) خواهیم یافت

$$\begin{aligned}\omega_{N+2} &= 2\omega_0 \sin\left[\frac{(N+2)\pi}{2(N+1)}\right] \\ &= 2\omega_0 \sin\left[\pi - \frac{N\pi}{2(N+1)}\right] \\ &= 2\omega_0 \sin\left[\frac{N\pi}{2(N+1)}\right] = \omega_N\end{aligned}$$

$$\omega_{N+2} = \omega_N$$

$$\omega_{N+3} = \omega_{N-1}$$

$$\omega_{N+4} = \omega_{N-2}$$

$$\vdots$$

یعنی

(۱۵-۱۴۴)

به این ترتیب فقط $n = N$ عدد مد مستقل وجود دارد، برای هر مقدار بیشتر n مدها تکرار می‌شوند.

برای دامنه‌ها نیز همین طور است، یعنی دامنه‌های نسبی ذرات در یک مد بهنجار تکرار می‌شوند. بنابراین، اگر n مقادیر $N + 3$ ، $N + 4$ ، ...، $2N + 1$ را بگیرد، دامنه‌های A_{jn} همان مقادیر مربوط به $n = 1, 2, \dots, N$ را به خود می‌گیرند، به استثنای یک تغییر علامت بی‌اهمیت که در شکل (۱۷-۵) نشان داده شده و بعداً توضیح داده خواهد شد. از معادله

(۱۴۱-۱۵) برای $n = N + 2$ داریم

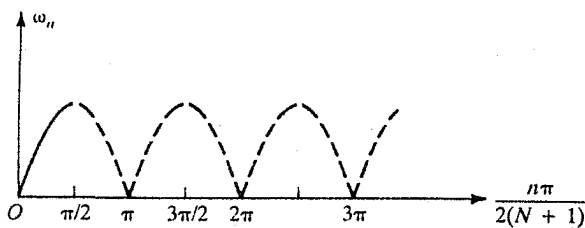
$$\begin{aligned} A_{j(N+2)} &= C_{N+2} \sin \left[\frac{j(N+2)\pi}{N+1} \right] \\ &= C_{N+2} \sin \left[2j\pi - \frac{jN\pi}{N+1} \right] \\ &= C_{N+2} \sin \left[\frac{jN\pi}{N+1} \right] = A_{jN} \end{aligned}$$

یعنی

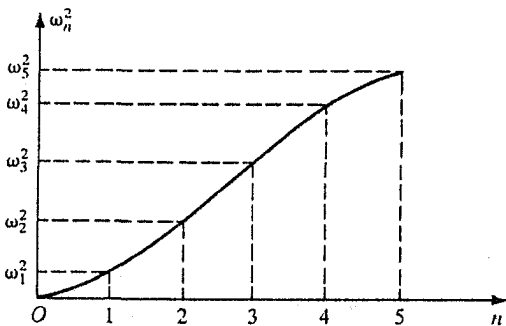
$$A_{j(N+2)} = A_{jN}$$

$$A_{j(N+3)} = A_{j(N-1)}$$

$$A_{j(N+4)} = A_{j(N-2)}$$



(الف)

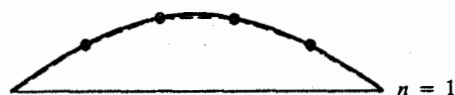
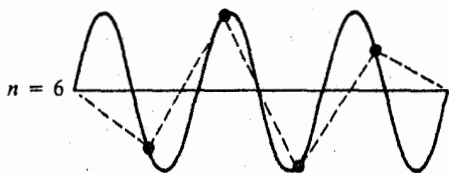
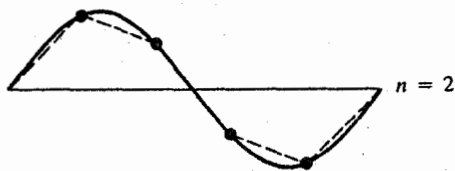
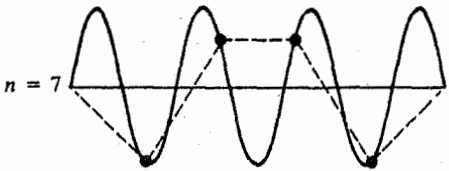
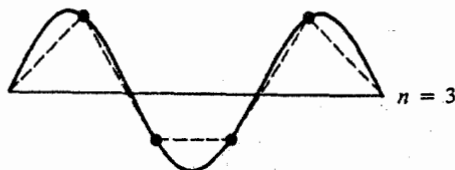
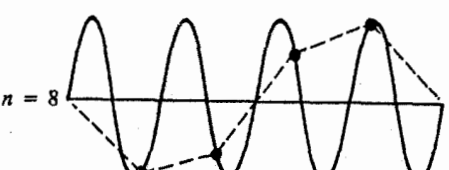
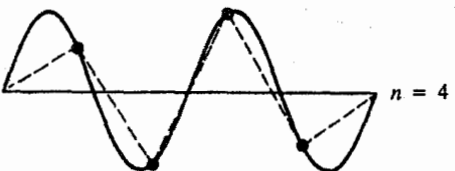
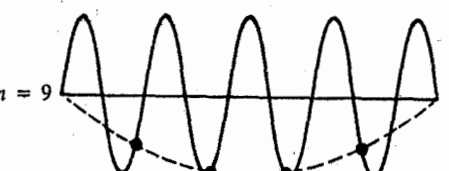
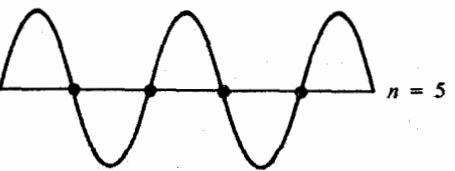


(ب)

شکل (۱۵-۶) : (الف) نمودار بسامد ω_n نسبت به عدد مد n [یا $\frac{n\pi}{2(N+1)}$]

یعنی نمودار طیف بسامدی . (ب) همان نمودار شکل (الف) برای $N = 4$ (تار وزنه دار با

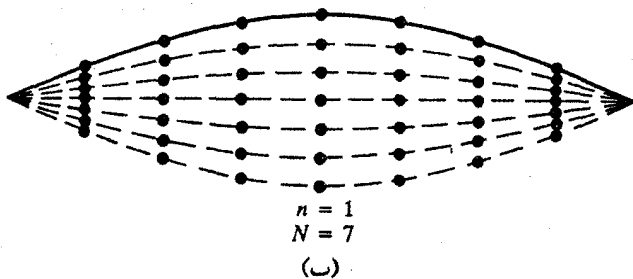
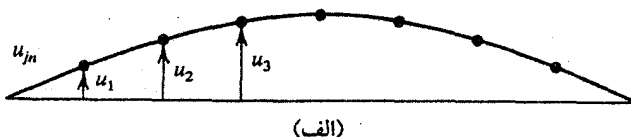
چهاروزنه) . توجه کنیم که در شکل (ب) ω_n^2 را نسبت به n رسم کرده ایم

 $n = 1$  $n = 6$  $n = 2$  $n = 7$  $n = 3$  $n = 8$  $n = 4$  $n = 9$  $n = 5$

شکل (۱۰-۷) : مدهای بهنجار تار مرتعش برای $N = 4$. مد $n = 5$ يك مد صفر

است ، درحالی که مدهای مربوط به $n = 6, 7, 8, 9$ تکرارمدهای $1, 2, 3, 4$ با علامت مخالفند

دقت کنیم که $n = 2N + 2$ مد صفر بعدی را به دست می دهد . به این ترتیب فقط N مد متمایز وجود دارد ، و اگر n به بیشتر از N افزایش یابد ، فقط مدهای بهنجار برای n های کوچکتر از N را تکرار می کند . نتیجه این بحث در شکل (۱۵-۷) ، که مدهای بهنجار یک تار مرتعش با $N = 4$ را نمایش می دهد ، آشکار است . توجه کنیم که $n = 5$ یک مد صفر است ، در حالی که مدهای مربوط به $n = 6, 7, 8, 9$ مدهای مربوط به $n = 4, 3, 2, 1$ را با علامت مخالف تکرار می کنند . منحنیهای سینوسی تغییرات دامنه A_{jn} را برای مقادیر مختلف n نمایش می دهند . باید دقیقاً توجه کرد که بسامدهای این منحنیهای سینوسی رابطه ای با بسامدهای ذرات مرتعش ندارد .



شکل (۱۵-۸) : (الف) منحنی $\sin \frac{j\pi}{N+1} z$ نسبت به z برای $z = 0$ تا $N + 1$ با

منحنی پر (پیوسته) (برای هفت ذره) نمایش داده شده است . (ب) منحنیهای خط چین مکان ذرات را که با بسامد ω نوسان می کنند ، در زمانهای متفاوت نشان می دهد

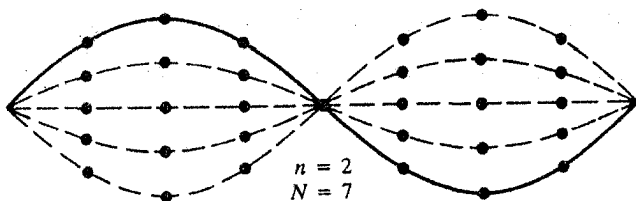
اکنون مدهای ویژه ارتعاش را ، با این فرض که تعداد ذرات N بسیار بزرگ است ، مورد بحث قرار می دهیم . جابه جاییهای ذرات متناظر با $n = 1$ ، از معادلات (۱۵-۱۴) و (۱۵-۱۴۱) ، عبارتند از

$$u_{j1} = C_1 \sin\left(\frac{j\pi}{N+1}\right) \cos \omega_1 t, \quad j = 1, 2, 3, \dots, N \quad (۱۵-۱۴۵)$$

این معادله می‌رساند که در هر لحظه فاکتور $C_1 \cos \omega_1 t$ برای تمام ذرات یکسان است ، و جابه‌جاییهای ذرات متفاوت با ضریب $\sin \frac{j\pi}{N+1}$ داده می‌شوند . منحنی پر در شکل (۵-۱۸ الف) نمودار $\sin \frac{j\pi}{N+1}$ را نسبت به $j=0$ تا $j=N+1$ نمایش می‌دهد و دامنه‌های ذرات مختلف را به دست می‌دهد . با گذشت زمان ، جابه‌جاییهای ذرات تغییر می‌کنند و ذرات با بسامد ω_1 ، مطابق شکل (۱۵-۸ ب) ، نوسان می‌کنند . منحنیهای خط چین مکانهای ذرات را در زمانهای متفاوت نشان می‌دهد . وضعیت مربوط به مد $n=2$ در شکل (۱۵-۹) نمایش داده شده است ، که دامنه‌ها با منحنی پر ، و مکانهای ذرات که با بسامد ω_2 نوسان می‌کنند ، یعنی

$$u_{j2} = C_2 \sin\left(\frac{2j\pi}{N+1}\right) \cos \omega_2 t , \quad j = 1, 2, 3, \dots, N \quad (15-146)$$

با منحنیهای خط چین نمایش داده شده‌اند

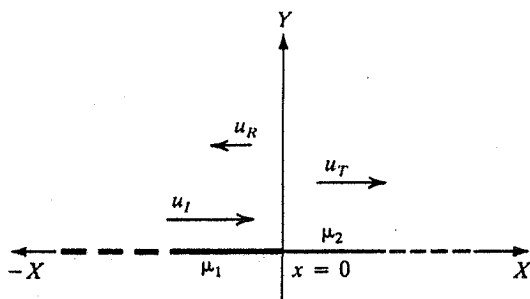


شکل (۱۵-۹) : برای مد $n=2$ ، دامنه‌ها با منحنی پر ، و مکانهای ذرات که با

بسامد ω_2 نوسان می‌کنند با منحنیهای خط‌چین نشان داده شده‌اند

۱۵-۶ رفتار موج در ناپیوستگی : جریان انرژی

به عنوان یک مثال ناپیوستگی ، دو تار نیمه بی‌نهایت با چگالیهای جرمی خطی متفاوت که در نقطه $x=0$ ، مطابق شکل (۱۵-۱۰) ، به یکدیگر بسته شده‌اند در نظر بگیریم . چگالی جرمی خطی تار $x \leq 0$ که کشیده شده است μ_1 و سرعت انتشار موج در آن v_1 است ، در حالی که چگالی جرمی خطی تار $x \geq 0$ که کشیده شده است μ_2 و سرعت انتشار موج در طول آن v_2 است . کشش تار را T بگیریم . می‌خواهیم تأثیر تغییر ناگهانی چگالی در $x=0$ را بر یک موج هماهنگ پیوسته بررسی کنیم .



شکل (۱۰-۱۵) : دو تار نیمه بی نهایت با چگالیهای جرمی خطی متفاوت که در $x = 0$ به هم بسته شده اند .

یک موج فرودی که از سمت چپ ، $x < 0$ ، حرکت می کند و با رابطه

$$u_I = A_I \cos(k_1 x - \omega t) \quad (147-15)$$

نمایش داده می شود در نظر بگیریم A_I دامنه موج فرودی ، $k_1 = \frac{\omega}{v_1}$ ، و v_1 سرعت موج است . وقتی این موج به $x = 0$ ، نقطه ای که دو تار به یکدیگر رسیده اند (نقطه ناپوستگی) برسد ، قسمتی از موج به عقب به تار اول بر می گردد ، و بقیه موج عبور می کند . موج بازگشته با

$$u_R = A_R \cos(k_1 x + \omega t) \quad (148-15)$$

نمایش داده می شود که در آن دامنه موج باز تابیده است . موج گذرنده با

$$u_T = A_T \cos(k_2 x - \omega t) \quad (149-15)$$

نمایش داده می شود که A_T دامنه آن ، $k_2 = \frac{\omega}{v_2}$ ، و v_2 سرعت موج در تار دوم واقع در طرف راست $x = 0$ است . [باید توجه کرد که می توانستیم جوابها را به شکل زیر بنویسیم

$$u_I = \text{Re } A_I e^{i(k_1 x - \omega t)} \quad (150-15)$$

که Re معرف قسمت حقیقی عبارت است] .

هدف ما محاسبه دامنه های A_T و A_R ی موجهای باز تابیده و گذرنده بر حسب دامنه موج فرودی A_I است . این کار را می توان با تحمیل شرایط مرزی ، یعنی پیوستگی جابه جایی u و مشتق آن $\frac{\partial u}{\partial x}$ در محل اتصال دو تار ($x = 0$) ، انجام داد . این شرایط ، شرایط پیوستگی

هستند و برای هر نوع حرکت موجی دیگر، مانند امواج صوتی، برقرارند. شرط اول این نکته را می‌رساند که در تار شکستگی وجود ندارد، و شرط دوم ایجاب می‌کند که نیروی حاصل از جابه‌جایی y در دو طرف اتصال یکسان است. اگر چنین نبود، نیروی معین وارد به یک عنصر جرم بی‌نهایت کوچک شتابی بی‌نهایت ایجاد می‌کرد. به این ترتیب شرایط مرزی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$(u_I + u_R)|_{x=0} = u_T|_{x=0} \quad (151-15)$$

و

$$\left(\frac{\partial u_I}{\partial x} + \frac{\partial u_R}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \left(\frac{\partial u_T}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} \quad (152-15)$$

با استفاده از معادلات (151-15)، (147-15)، (148-15)، و (149-15)، پیوستگی u ، یعنی معادله (151-15)، نتیجه می‌دهد

$$A_I + A_R = A_T \quad (153-15)$$

و پیوستگی $\frac{\partial u}{\partial x}$ ، معادله (152-15)، می‌دهد

$$k_1(A_I - A_R) = k_2 A_T \quad (154-15)$$

با حل این دو معادله برای A_T/A_I و A_R/A_I خواهیم داشت

$$\frac{A_R}{A_I} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \quad (155-15)$$

$$\frac{A_T}{A_I} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \quad (156-15)$$

چون $k = \frac{\omega}{v}$ و $v = \sqrt{T/\mu}$ ، می‌توانیم این نتایج را به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{A_R}{A_I} = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} \quad (157-15)$$

$$\frac{A_T}{A_I} = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} \quad (158-15)$$

روشن است که نسبت $\frac{A_T}{A_I}$ همیشه مثبت است؛ در نتیجه موج گذرنده با موج فرودی همیشه همفاز است. اگر محیط دوم رقیق‌تر باشد، $v_1 > v_2$ یا $\mu_2 < \mu_1$ ، نسبت A_R/A_I مثبت است؛

در نتیجه موج بازتابیده با موج فرودی همفاز است. از سوی دیگر اگر محیط دوم چگال تر از محیط اول باشد، $v_2 < v_1$ یا $\mu_2 > \mu_1$ ، نسبت A_R/A_I منفی خواهد بود. این مطلب می‌رساند که موج بازتابیده به اندازه π با موج فرودی اختلاف فاز دارد. این نوع رفتار مشخصه انواع بسیاری از حرکات موجی است.

شدت، آهنگ جریان انرژی، برای هر نوع حرکت موجی با مربع دامنه متناسب است. به این جهت، ضریب بازتاب R را به صورت کسر انرژی فرودی که بازتابیده می‌شود، تعریف می‌کنیم، یعنی

$$R \equiv \left(\frac{A_R}{A_I}\right)^2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 = \left(\frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}\right)^2 \quad (15-159)$$

و ضریب انتقال T ، کسر انرژی فرودی که منتقل شده است، باید در شرط زیر صدق کند،

$$R + T = 1 \quad (15-160)$$

یا

$$T \equiv |1 - R| \equiv \frac{4v_1v_2}{(v_1 + v_2)^2} \quad (15-161)$$

[توجه: از معادله (15-159) نتیجه می‌شود که هر چه اختلاف بین v_2 و v_1 بزرگتر باشد R بزرگتر است در حالی که T کوچکتر می‌شود].

در پایان، آهنگ جریان انرژی $\frac{dE}{dt}$ از محل اتصال در $x=0$ را محاسبه کنیم. این آهنگ برابر است با کارانجام شده توسط قسمت مجاور تار روی ذره واقع در $x=0$ ، و برابر است با حاصل ضرب نیروی بازگرداننده $-T\frac{\partial u}{\partial x}$ در سرعت ذره $\frac{\partial u}{\partial t}$ ، که هر دو در $x=0$ محاسبه شده‌اند. بنابراین

$$\frac{dE}{dt} = \left(-T \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=0} \quad (15-162)$$

اگر بخواهیم انرژی منتقل شده به طرف چپ تار را در $x=0$ محاسبه کنیم، قرار می‌دهیم

$$u = u_I + u_R \quad (15-163)$$

$$= A_I \cos(k_1x - \omega t) + A_R \cos(k_1x + \omega t)$$

با بردن این عبارت در معادله (15-162)، خواهیم یافت

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_- = \omega k_1 T(A_I^2 - A_R^2) \sin^2 \omega t \quad (15-164)$$

به همین روش اگر در معادله (۱۵-۱۶۲) قرار دهیم

$$u = u_T = A_T \cos(k_2 x - \omega t)$$

انرژی منتقل شده به طرف راست را به صورت زیر به دست می آوریم

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_+ = \omega k_2 T A_T^2 \sin^2 \omega t \quad (15-165)$$

چون مقدار میانگین $\sin^2 \omega t$ در یک دور کامل $\frac{1}{2}$ است، می توانیم معادله (۱۵-۱۶۴) را به شکل زیر بنویسیم

$$\left[\left(\frac{dE}{dt}\right)_-\right]_{\text{ave}} = \frac{1}{2} \omega k_1 T A_I^2 - \frac{1}{2} \omega k_1 T A_R^2 \quad (15-166)$$

که نخستین جمله راست آهنگ میانگینی است که با آن انرژی به محل اتصال فرود می آید، و جمله دوم آهنگ میانگینی است که با آن انرژی به طرف عقب باز تأیید می شود. به همین روش، از معادله (۱۵-۱۶۵) نتیجه می شود که آهنگ میانگینی که با آن انرژی منتقل می شود، عبارت است از

$$\left[\left(\frac{dE}{dt}\right)_+\right]_{\text{ave}} = \frac{1}{2} \omega k_2 T A_T^2 \quad (15-167)$$

این مقدار آهنگ خالصی است که با آن انرژی از سمت چپ اتصال به سمت راست منتقل می شود (رک . مسأله ۱۵-۲۸)

۱۵-۷ امواج صوتی: امواج طولی

تا این جا با امواج عرضی در جامدات سر و کار داشتیم. این امواج از قله ها و دره ها تشکیل می شوند. اکنون به بحث امواج صوتی می پردازیم که اساساً از نظر ماهیت طولی هستند و از تراکمها و انبساطها تشکیل می شوند. امواج صوتی می توانند از جامدات و سیالات (مایعات و گازها) عبور کنند، و عموماً در سه بُعد منتشر می شوند. برای سادگی، به امواج صوتی در سیالات که فقط در یک بعد، مثلاً در امتداد محور X ، حرکت می کنند می پردازیم. قبل از این که توصیف و استنتاجهای دقیقی برای این گونه امواج ارائه دهیم، با استفاده از

نتایجی که تاکنون به دست آورده ایم روشی ساده در پیش می گیریم .

نشان دادیم که نیروی رو به بالای وارد به یک عنصر طولی کوچک تار ، معادله (۱۵-۱۰۷) که در آن F را به جای F_0 قرار دهیم ، عبارت است از

$$F = -T \frac{\partial u}{\partial x} \quad (15-168)$$

و سرعت رو به بالا در یک نقطه از این عنصر عبارت است از

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (15-169)$$

دقت کنید که \dot{u} سرعت ذره است و نباید با سرعت موج v اشتباه شود . همچنین ، معادله (۱۵-۹) ، داریم

$$\mu dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \quad (15-9)$$

با به کارگیری سه معادله پیشین ، می توانیم نشان دهیم

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -T \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \quad (15-170)$$

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial F}{\partial x} \quad (15-171)$$

معادله (۱۵-۱۷۰) بیان می دارد که آهنگ زمانی تغییرات F متناسب است با $\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}$ (= اختلاف سرعت دو انتهای عنصر تقسیم بر طول عنصر) . معادله (۱۵-۱۷۱) بیان می دارد که شتاب تار متناسب است با $\frac{\partial F}{\partial x}$ (= تفاضل نیروهای وارد به دو سر عنصر تقسیم بر طول آن) . می توانیم نتیجه بگیریم که ، برای هر دامنه کوچک ، آهنگ زمانی تغییرات هر کدام از کمیت‌های F و \dot{u} متناسب با مشتق فضایی دیگری است .

با شروع از معادلات (۱۵-۱۷۰) و (۱۵-۱۷۱) ، و مشتق گیری از آنها ، خواهیم

داشت

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -T \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -T \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial t \partial x}$$

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial F}{\partial x} , \quad \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

از ترکیب این معادلات خواهیم یافت

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \quad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (15-172)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial t^2} \quad (15-173)$$

بنابراین، به جای نوشتن معادله معمولی موج، که در آن متغیر جابه جایی $u(x, t)$ است، در این جا دو معادله موج با F و \dot{u} به عنوان دو متغیر مستقل داریم

به عنوان کاربردی از معادلات (15-172) و (15-173)، امواج صوتی تخت را که در هوا در امتداد محور X حرکت می کنند در نظر بگیریم. این امواج معادل خواهند بود، به عنوان مثال، با امواج صوتی در لوله های ارگ. در معادله (15-172)، F به وسیله p ، افزایش فشار نسبت به فشار جو، μ به وسیله ρ ، چگالی هوا، و T به وسیله B ، مدول حجمی، جایگزین می شود، و \dot{u} نمایشگر سرعت عنصر حجمی هوا در هر نقطه است. به این ترتیب معادلات (15-170) و (15-171) به شکل زیر در می آیند

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -B \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \quad (15-174)$$

و

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (15-175)$$

p و \dot{u} در معادلات زیر صدق می کنند

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (15-176)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial t^2} \quad (15-177)$$

که در آنها

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (15-178)$$

توان منتقل شده در امتداد محور X از چپ به راست (با استفاده از تعریف $P = F\dot{u}$) را

می توان به صورت زیر نوشت

$$P = p\dot{u} \quad (15-179)$$

توجه کنیم که p افزایش فشار جو، و \dot{u} سرعت ذره است (و نه سرعت موج).

اکنون معادله (۱۵-۱۷۶) را از اصول بنیادی به دست بیاوریم. لوله ای به طول بی نهایت و سطح مقطع A در امتداد محور X در نظر بگیریم. وقتی هوا (یا هر سیال دیگر) آرام است، فشار در هر نقطه P_0 و چگالی ρ_0 است. حرکت کاتوره ای مولکولها را نادیده می گیریم، و حرکت آنها را در امتداد محور X با $\eta(x, t)$ نمایش می دهیم که x مکان مولکول قبل از آشفتگی است. (چشم پوشی از حرکت کاتوره ای مولکولها معنی می دهد که فشار ناشی از این حرکت صفر است). یک عنصر حجم کوچک واقع در بین صفحات x و $x + \Delta x$ ، آن طور که در شکل (۱۵-۱۱) نشان داده شده است، در نظر بگیریم. وقتی یک اختشاش از این عنصر حجم عبور می کند، مولکولهای واقع در x به اندازه $\eta(x, t)$ و مولکولهای واقع در $x + \Delta x$ به اندازه

$$\eta(x + \Delta x, t) = \eta(x, t) + \Delta\eta \quad (15-180)$$

که در آن

$$\Delta\eta = \frac{\partial\eta}{\partial x} \Delta x \quad (15-181)$$

جابه جا می شوند. چون حجم تغییر می کند ولی جرم عنصر حجم منبسط شده بدون تغییر می ماند، چگالی جدید را باید به صورت زیر نوشت

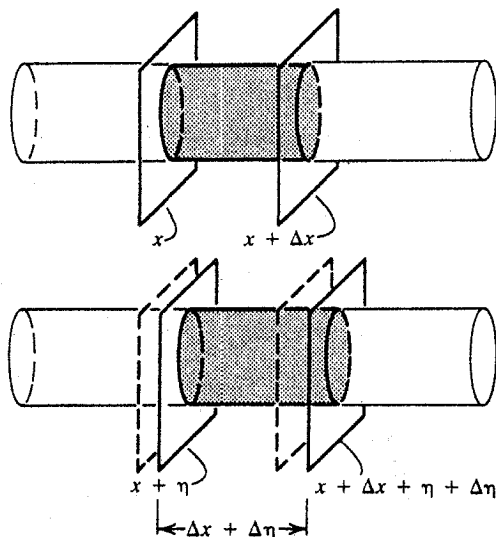
$$\frac{\rho(x, t)}{\rho_0(x, t)} = \text{Limit}_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A \Delta x}{A(\Delta x + \Delta\eta)} = \text{Limit}_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + (\Delta\eta/\Delta x)}$$

یا

$$\rho(x, t) = \rho_0 \left(1 + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^{-1} \quad (15-182)$$

تغییرات چگالی به تغییرات فشار، و در نتیجه به ایجاد گرادیان فشار در امتداد محور X منجر می شود. نیروی خالص وارد به عنصر طول Δx ، با حجم $A \Delta x$ و جرم $\rho_0 A \Delta x$ عبارت است از

$$\Delta F = -\frac{\partial(PA)}{\partial x} \Delta x = -\frac{\partial p}{\partial x} A \Delta x \quad (15-183)$$



شکل (۱۵-۱۱): جابه‌جایی یک عنصر حجمی از مولکولهای گاز در لوله‌ای واقع در x و $x + \Delta x$ به هنگام عبور یک اغتشاش

با اعمال قانون دوم نیوتن به این عنصر جرم، خواهیم یافت

$$\rho_0 A \Delta x \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial x} A \Delta x$$

یا

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{dp}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (15-184)$$

از معادله (۵-۱۸۲) داریم

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^{-1} = -\rho_0 \left(1 + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^{-2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (15-185)$$

با فرض «تقریب ملایم» یعنی

$$\left| \frac{\partial \eta}{\partial x} \right| \ll 1 \quad (15-186)$$

و ترکیب با معادلات (۱۵-۱۸۴) و (۱۵-۱۸۵) ، معادله موج زیر را به دست می آوریم

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{dp}{dp} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (15-187)$$

[دقت کنیم که $\frac{dp}{dp}$ را برابر با v^2 قرار داده ایم]. بر طبق تعریف مدول حجمی B ، می توانیم بنویسیم

$$B = \frac{\Delta p}{\Delta \rho / \rho_0} \quad \text{یا} \quad \frac{dp}{d\rho} = \frac{B}{\rho_0} = \frac{1}{K\rho_0} \quad (15-188)$$

که در آن K تراکم پذیری است . به این ترتیب معادله (۱۵-۱۸۷) معادله یک موج با سرعت انتشار زیر است

$$v = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{1}{K\rho_0}} \quad (15-189)$$

این رابطه تنها برای انتشار امواج در مایعات درست است . در گازها ، وضعیت کاملاً متفاوت است . تغییری کوچک در فشار باعث تغییر قابل ملاحظه ای در دما می شود . تراکمها و انبساطها به قدری سریع صورت می گیرند که مجالی برای جریان گرما به داخل یا خارج نیست ، در نتیجه فرآیند باید بی در رو در نظر گرفته شود . برای چنین وضعیتهایی ، با فرض یک گاز ایده آل ، رابطه زیر را داریم

$$p = B\rho^\gamma \quad (15-190)$$

که در آن γ نسبت گرمای ویژه گاز در فشار ثابت به گرمای ویژه آن در حجم ثابت است ، یعنی $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$. از ترکیب معادلات (۱۵-۱۹۰) و (۱۵-۱۸۲) و به کارگیری تقریب (۱۵-۱۸۶) ، یعنی $|\partial\eta/\partial x| \ll 1$ ، خواهیم یافت

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \quad (15-191)$$

با استفاده از معادله (۱۵-۹۱) و استفاده از معادله گاز ایده آل ،

$$p = \frac{RT}{M} \rho \quad (15-192)$$

که در آن R ثابت گازها ، M وزن مولکولی ، و T دمای مطلق است ، می توانیم سرعت انتشار

موج را ، از معادله (۱۵-۱۸۹) ، به شکل زیر بنویسیم

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad (15-193)$$

که آشکارا نشان می دهد که دمای T به تنهایی سرعت انتشار امواج صوتی را در یک گاز ایده آل تعیین می کند .

خاطر نشان کنیم که جابه جاییها باعث تغییراتی در چگالی ، و این تغییرات به نوبه خود باعث تغییراتی در فشار می شوند ، که این خود نیز باعث ایجاد شتاب در ذرات می شود . بنابراین ، وقتی امواج منتشر می شوند ، تغییرات چگالی و فشار منتشر می شوند . با فرض $|\partial\eta/\partial x| \ll 1$ در معادله (۱۵-۱۸۲) ، می توانیم بنویسیم

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^{-1} = \rho_0 \left(1 - \frac{\partial\eta}{\partial x}\right) \quad (15-194)$$

با استفاده از این معادله و معادله موج (۱۵-۱۸۷) ، خواهیم یافت

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad (15-195)$$

و

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (15-196)$$

به این ترتیب سه معادله (۱۵-۱۸۷) ، (۱۵-۱۹۵) ، و (۱۵-۱۹۶) انتشار موجها را به ترتیب برای جابه جایی η ، چگالی ρ ، و فشار p نمایش می دهند . باید توجه کرد که اینها مستقل نیستند .

اگر بحث امواج صوتی را به سه بُعد گسترش دهیم ، معادلات زیر را به دست

می آوریم

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{d\rho}{dp} \nabla^2 p \quad (15-197)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{dp}{d\rho} \nabla^2 \rho \quad (15-198)$$

که ، به عنوان مثال ، $\Psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ و $p = p(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z) \Theta(t)$ ،

۱۵-۸ ایستایی سیالات

سیال ماده‌ای است که شکل معینی ندارد. یک ماده پیوسته است و در اثر تنشهای برشی بی‌نهایت کوچک جابه‌جایی معینی در آنها صورت می‌گیرد. یک حجم کوچک سیال در صورتی می‌تواند به عنوان محیط پیوسته در نظر گرفته شود که تعداد مولکولهایش آن قدر زیاد باشد که میانگین فاصلهٔ پیموده شده توسط مولکول بین دو برخورد خیلی کوچکتر از ابعاد آن باشد. سیالات با خواص فیزیکی و مکانیکی، مانند چگالی، فشار، دما و سرعت مشخص می‌شوند. مایعات و گازها هر دو سیالند، اما بین این دو تفاوت‌های اساسی وجود دارد. مایعات باسانی متراکم نمی‌شوند و در نتیجه می‌توان چگالی و حجم آنها را ثابت در نظر گرفت، گازها چنین نیستند و می‌توانند باسانی متراکم شوند. گازها شکل معینی ندارند و به راحتی هر ظرفی را پر می‌کنند. مایعات شکل معینی ندارند. لیکن دارای حجم مشخصی هستند.

هیدروستاتیک، یا ایستایی سیالات، با سیالات در حال سکون، و هیدرودینامیک، یا دینامیک سیالات، با سیالات در حال حرکت سر و کار دارد. اگر جریان سیال مستقل از زمان باشد، این جریان پایدار نامیده می‌شود. اگر لایه‌هایی از سیال نسبت به یکدیگر حرکت داشته باشند، بدون این که مخلوط شوند، این حرکت لایه‌ای یا سیلان نامیده می‌شود. اگر بین لایه‌ها اختلاط صورت گیرد، این جریان متلاطم نامیده می‌شود.

در این بخش، بحث خود را به ایستایی سیالات محدود می‌کنیم، و دینامیک سیالات را در بخشهای بعدی مورد بررسی قرار می‌دهیم. قوانین نیوتن و قوانین پایستگی، به سیالات اعمال می‌شوند زیرا به هر حال سیالات مجموعه‌ای از تعداد زیادی ذره اند.

یک سیال در تعادل ایستا در نظر بگیریم. به این ترتیب هر عنصر حجم سیال ساکن است و سرعت هر نقطه در داخل سیال صفر است. در حال حاضر دو مشخصهٔ ایستایی سیالات را مورد بررسی قرار می‌دهیم. (۱) یک سیال در تمام جهات فشار یکسانی وارد می‌کند، و (۲) در عمقهای یکسان فشار یکسان است.

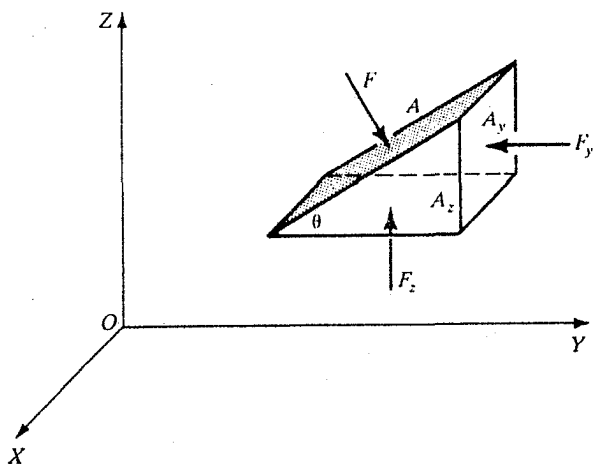
یک منشور مثلث القاعدهٔ بی‌نهایت کوچک، آن طور که در شکل (۱۵-۱۲) نشان داده شده است، در نظر بگیریم. F_x و F_y و F_z را نیروهای بگیریم که، به ترتیب، به سه سطح با مساحت‌های A_x و A_y و A_z ، مطابق شکل، وارد می‌شوند. اگر نیرویی مماس بر سطوح منشور به آن وارد شود، سیال به حرکت در می‌آید، که با فرض تعادل ایستا در تناقض است.

به این ترتیب تنها نیروهای عمل کننده نیروی عمودی و وزن W ی سیال هستند .
در حالت تعادل ، نیروهای عمل کننده در امتدادهای Y و Z صفرند (فرض کرده ایم که در امتداد
محور X نیرویی وجود ندارد) .

$$\sum F_y = F \sin \theta - F_y = 0 \quad (۱۹۹-۱۵)$$

$$\sum F_z = F_z - F \cos \theta - W = 0 \quad (۲۰۰-۱۵)$$

اگر P ، P_y و P_z فشارهای (نیروی عمودی بر واحد سطح) عمل کننده روی سه سطح باشند ، و
 $W = \rho g \frac{dx \, dy \, dz}{2}$ ، می توانیم معادلات (۱۹۹-۱۵) و (۲۰۰-۱۵) را به صورت زیر بنویسیم



شکل (۱۵-۱۲) : عنصر کوچک سیال (به شکل یک منشور کوچک مثلث القاعده) در تعادل ایستا

$$P \frac{dx \, dz}{\sin \theta} \sin \theta - P_y \, dx \, dz = 0 \quad (۲۰۱-۱۵)$$

و

$$P_z \, dx \, dy - P \frac{dx \, dz}{\sin \theta} \cos \theta - \rho g \frac{dx \, dy \, dz}{2} = 0 \quad (۲۰۲-۱۵)$$

ρ چگالی سیال و $dx \, dy \, dz/2$ حجم منشور است . وقتی dx ، dy و dz به سمت صفر میل
کنند ، جمله وزن ، جمله آخر در معادله (۲۰۲-۱۵) ، در مقایسه با جمله های فشاری صفر

می شود . لذا ، از معادلات پیشین نتیجه می گیریم

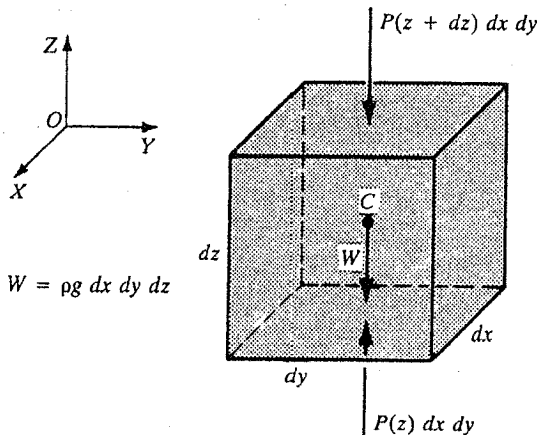
$$P = P_y = P_z \quad (۲۰۳-۱۵)$$

$$P = \frac{F}{A} = \frac{F_y}{A_y} = \frac{F_z}{A_z} \quad (۲۰۴-۱۵)$$

که بیان می دارد که فشار مستقل از جهت است ؛ یعنی فشار در تمام جهات یکسان است و یک کمیت نرده ای است . معادله (۲۰۳-۱۵) بیان قانون پاسکال است .

اکنون عبارتی برای تغییرات فشار با ارتفاع در یک سیال ایستا به دست بیاوریم . یک حجم بی نهایت کوچک $dx dy dz$ از سیال ، آن طور که در شکل (۱۳-۱۵) نشان داده شده است ، در نظر بگیریم . چون سیال در حال تعادل است ، مجموع نیروها در جهت محور Z باید صفر باشد ، یعنی

$$\sum F_z = P(z) dx dy - P(z + dz) dx dy - \rho g dx dy dz = 0 \quad (۲۰۵-۱۵)$$



شکل (۱۳-۱۵) : حجم بی نهایت کوچک $dx dy dz$ از سیال در حال تعادل

جمله دوم ، وقتی به یک سری تیلور حول z تا تقریب مرتبه اول بسط داده شود ، شکل زیر را به خود می گیرد

$$P(z + dz) = P(z) + \frac{dP}{dz} dz + \dots \quad (۲۰۶-۱۵)$$

با بردن این عبارت در معادله (۱۵-۲۰۵) خواهیم یافت

$$\frac{dP(z)}{dz} = -\rho g \quad (15-207)$$

که پس از انتگرال گیری ، با فرض تراکم ناپذیری و $P = P_0$ در $z = 0$ ، می دهد

$$P(z) = P_0 - \rho g z \quad (15-208)$$

چون z به طرف بالا مثبت در نظر گرفته شده است ، این معادله بیان می دارد که وقتی z کاهش می یابد P افزایش می یابد . همچنین ، بیان می دارد که فشار در هر عمقی از یک ستون برابر است با مجموع فشار P_0 در بالای ستون و وزن آن ستون مایع .

راه دیگر برای برخورد با این مسأله به صورت زیر است . فرض کنیم $w = \rho g$ چگالی وزنی ، وزن بر واحد حجم ، مایعی باشد که در جهت g عمل می کند . دو نقطه (۱) و (۲) در داخل سیال که فشار در آنها P_1 و P_2 است و با فاصله بی نهایت کوچک dr از یکدیگر جدا شده اند ، در نظر بگیریم . یک استوانه دوار با مقطع dA و طول dr ، آن طور که در شکل (۱۵-۱۴) نشان داده شده است ، می سازیم . تنها نیروهای عمل کننده روی این استوانه از فشار و گرانش ناشی می شوند . چون سیال در حال تعادل است ، مجموع مؤلفه های نیروها در امتداد dr باید صفر باشد ، یعنی

$$P_1 dA - P_2 dA + w \cdot dr dA = 0 \quad (15-209)$$

که $dr dA$ حجم سیال داخل استوانه است . به این ترتیب اختلاف فشار بین این دو نقطه عبارت است از

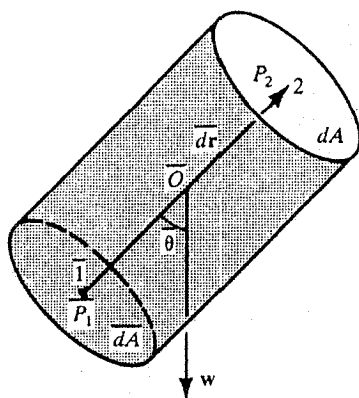
$$\Delta P = P_2 - P_1 = w \cdot dr \quad (15-210)$$

اگر دو نقطه (۱) و (۲) در فاصله های r_1 و r_2 باشند ، اختلاف فشار بین این دو نقطه با انتگرال گیری از معادله (۱۵-۲۱۰) به دست می آید ، یعنی

$$P_2 - P_1 = \int_{r_1}^{r_2} w \cdot dr \quad (15-211)$$

این انتگرال خطی می رساند که اختلاف فشار بین دو نقطه بستگی به نیروهای گرانشی و جهت گیری فضایی آن دو نقطه دارد . به علاوه ، این معادله بیان می دارد که «هر تغییری در فشار

در یک نقطه ، به نقاط دیگر منتقل می شود ، که بیان قانون پاسکال است .



شکل (۱۴-۱۵) : در داخل سیال نقطه (۱) با فشار P_1 در فاصله dr از نقطه (۲) با فشار P_2 قرار دارد

انتگرال گیری از معادله (۲۱۱-۱۵) ، با فرض $P_1 = P_0$ در $z=0$ و $P_2 = P(z)$ در نقطه z بالای نقطه (۱) ، نتیجه می دهد ($w \cdot dr = \rho g dz$)

$$P(z) = P_0 - \rho g z \quad (208-15)$$

که همانند معادله (۲۰۸-۱۵) است . بنابراین ، اگر در سطح یک دریاچه یا یک استخر فشار جو $P_0 (= 1.103 \times 10^5 \text{ Pa})$ باشد ($1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$) ، فشار در عمق ($z = -h$) خواهد بود

$$P(h) = P_a + \rho g h \quad (212-15)$$

در معادله (۲۰۸-۱۵) فرض کرده ایم که چگالی سیال ثابت است . این مطلب درست نیست ، بخصوص در مورد گازها . بنابراین اگر تغییری در فشار ایجاد شود ، به تغییر حجم می انجامد . اگر B مدول حجمی گاز باشد ، داریم

$$B = -\frac{dP}{dV/V} \quad \text{یا} \quad \frac{dV}{V} = -\frac{dP}{B} \quad (213-15)$$

علامت منفی از این واقعیت سرچشمه می گیرد که وقتی V کاهش می یابد P افزایش می یابد . اگر m جرم گازی با حجم V باشد ، چگالی آن $\rho = \frac{m}{V}$ است ؛ در نتیجه

$$d\rho = -\frac{m}{V^2} dV = \rho \left(-\frac{dV}{V} \right)$$

یا

$$\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho} \quad (214-15)$$

از ترکیب معادله (۲۱۴-۱۵) با (۲۱۳-۱۵) داریم

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{B} \quad (215-15)$$

برای یک گاز ایده آل، معادله حالت عبارت است از

$$PV = nRT \quad (216-15)$$

که n تعداد مولهاست که بارابطه $n = \frac{m}{M}$ داده می شود، M جرم مولکولی، $R = 8.314 \text{ J/mol-K}$ ، و T دمای مطلق گاز است. به این ترتیب

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{mP}{nRT} = \frac{MP}{RT} \quad (217-15)$$

اکنون در محاسبه تغییرات فشار در جو به صورت تابعی از z ، این عبارت را برای ρ به کار بگیریم. با قرار دادن مقدار ρ از معادله (۲۱۷-۱۵) در معادله (۲۰۷-۱۵) خواهیم داشت

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g = -\frac{Mg}{RT} P \quad (218-15)$$

بنابراین، اگر P_0 فشار در سطح دریا باشد، انتگرال گیری از معادله (۲۱۸-۱۵) می دهد

$$P(z) = P_0 e^{-(Mg/RT)z} \quad (219-15)$$

اگر T ثابت بماند، می توانیم برای یک جو هم دما معیار ارتفاع جوی H را به صورت زیر تعریف کنیم

$$H = \frac{RT}{Mg} \quad (220-15)$$

به این ترتیب معادله (۲۱۹-۱۵)، تغییرات فشار جو با z ، به شکل

$$P(z) = P_0 e^{-z/H} \quad (221-15)$$

و تغییرات چگالی به شکل زیر در می آید

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-z/H} \quad (222-15)$$

به این ترتیب H را می توان فاصله ای تعریف کرد که در آن چگالی یا فشار به $\frac{1}{e}$ مقدار اولیه اش کاهش می یابد. دقت کنیم که، برای یک چگالی ثابت، معادله (۲۲۱-۱۵) به عبارت معمولی و آشنایی برای $P(z)$ کاهش می یابد. اگر فرض کنیم z آن قدر کوچک است که ρ تغییری نمی کند، بسط معادله (۲۲۱-۱۵) [با استفاده از معادله (۲۱۸-۱۵)] نتیجه می دهد

$$\begin{aligned} P(z) &= P_0 \left(1 - \frac{z}{H} + \dots \right) \approx P_0 - P_0 \frac{z}{H} + \dots \\ &= P_0 - \rho_0 g H \frac{z}{H} \approx P_0 - \rho_0 g z \end{aligned}$$

اصل ارشمیدس

اکنون وزن یک سیال به حجم V را در نظر بگیریم

$$W = \int_V \int \int w \, dV = \int_V \int \int \rho g \, dV \quad (223-15)$$

چون سیال در حال سکون است، وزن (یا نیرو) به وسیله نیروهای فشاری ای که از طرف سیال احاطه کننده به سطوح این حجم وارد می شود، یعنی

$$F_b = \int_S \hat{n} P \, dA \quad (224-15)$$

خنثی می شود. برای یک سیال در حال سکون F_b باید مساوی و مختلف جهت با W باشد، یعنی

$$F_b = -W = - \int_V \int \int \rho g \, dV = -\rho_0 g V \quad (225-15)$$

به این ترتیب نیروی شناوری F_b روی یک حجم V در یک سیال برابر است با وزن سیال داخل این حجم. این اصل، اصل ارشمیدس است، که بیان می دارد: نیروی شناوری وارد به یک جسم شناور در یک سیال برابر است با وزن حجم سیال جابه جا شده.

۱۵-۹ سیالهای در حال حرکت

مطالعهٔ سیالهای در حال حرکت را می‌توان به دو بخش تقسیم کرد: سینماتیک سیالات و دینامیک سیالات. نخست سینماتیک را بررسی می‌کنیم. دوروش برای بررسی حرکت سیالات وجود دارد، که هر دو را اولر پیشنهاد کرده است. روش نخست عبارت است از اعمال قوانین نیوتن به یک سیستم ذرات. زمان t تنها متغیر مستقل در نظر گرفته می‌شود، و مختصات (x, y, z) برحسب زمان t و مختصات اولیه (x_0, y_0, z_0) در زمان t_0 بیان می‌شوند. معادلات به دست آمده معادلات لاگرانژ نامیده می‌شوند (این روش، روش لاگرانژ نیز نامیده می‌شود). معادلات حاصل به قدری زیادند که این روش ردگیری هر ذرهٔ سیال را پردردسر می‌کند. روش دوم، که آن هم متناسب به اولر است، نیز پردردسر، ولی قابل مهار است.

طبق سیستم اولری برای سیالات، خواص سیالات را، مانند چگالی $\rho(x, y, z)$ ، سرعت $v(x, y, z)$ ، و فشار P در مکانهای مختلف (x, y, z) و زمان t ، در طول مسیر سیال توصیف می‌کنیم. به این ترتیب توجه خود را، به جای این که روی خود مولکولها متمرکز کنیم، روی یک نقطه از فضا که سیال در آن جریان دارد متمرکز می‌کنیم. این روش ما را به تعریف دو آهنگ زمانی برای تغییرات هر کمیت مانند ρ ، v یا P هدایت می‌کند. مشتق زمانی جزئی $\frac{\partial}{\partial t}$ آهنگ زمانی تغییرات کمیت را در یک نقطهٔ ثابت در فضا اندازه‌گیری می‌کند. مشتق زمانی کامل، آهنگ زمانی تغییرات یک کمیت را نسبت به ذره‌ای که با سیال حرکت می‌کند اندازه‌گیری می‌کند.

به عنوان مثال، سرعت v را در نظر بگیریم

$$v = v(x, y, z) \quad (۱۵-۲۲۶)$$

تغییرات بردار سرعت با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} dv &= v(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) - v(x, y, z, t) \\ &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz + \frac{\partial v}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (۱۵-۲۲۷)$$

در حد، وقتی $dt \rightarrow 0$ ، می‌توانیم مشتق زمانی کامل v را به صورت

$$\frac{dv}{dt} = v_x \frac{\partial v}{\partial x} + v_y \frac{\partial v}{\partial y} + v_z \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (۱۵-۲۲۸)$$

بنویسیم . همچنین برای مشتق زمانی کامل فشار P می توانیم بنویسیم

$$\frac{dP}{dt} = v_x \frac{\partial P}{\partial x} + v_y \frac{\partial P}{\partial y} + v_z \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial t} \quad (۱۵-۲۲۹)$$

کمیت‌های v_x ، v_y و v_z ($\frac{dx}{dt}$ ، $\frac{dy}{dt}$ ، $\frac{dz}{dt}$) مؤلفه‌های سرعت در هر نقطه (x, y, z) و زمان t هستند . معادله (۱۵-۲۲۸) یا (۱۵-۲۲۹) برای هر کمیتی که سیال را توصیف کند برقرار است . این معادلات را می توان به شکل فشرده زیر نوشت

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (۱۵-۲۳۰)$$

و

$$\frac{dP}{dt} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) P + \frac{\partial P}{\partial t} \quad (۱۵-۲۳۱)$$

از این دو معادله می توانیم عملگر

$$\frac{d}{dt} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) + \frac{\partial}{\partial t} \quad (۱۵-۲۳۲)$$

را به نام مشتق کامل استنتاج کنیم . این عملگر هم به کمیت‌های برداری و هم به کمیت‌های نرده‌ای قابل اعمال است .

اکنون با تقسیم بحث خود به سه قسمت زیر به کاربرد این ایده‌ها می پردازیم

۱- معادله پیوستگی

۲- معادله حرکت برای جریان یک سیال ایده‌آل

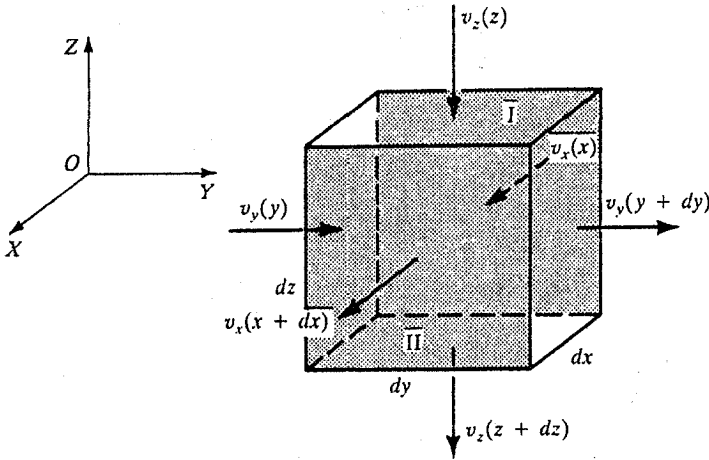
۳- معادله برنولی

معادله پیوستگی

می توانیم با اعمال قانون پایستگی جرم به یک سیستم اولری به معادله پیوستگی برسیم . عنصری از حجم دیفرانسیلی کوچک $dx dy dz$ از یک سیال که نقطه (x, y, z) را احاطه کرده است . مطابق شکل (۱۵-۵) ، در نظر بگیریم . سرعت‌های سیال در رویه‌های مختلف در شکل نشان داده شده است . جرم وارد شده از رویه I (رویه‌های هاشور زده) در زمان dt

عبارت است از

$$dm_1 = \rho(x, y, z, t) v_x(x, y, z, t) dy dz dt \quad (15-233 \text{ الف})$$



شکل (۱۵-۱۵) : جریان سیال از یک عنصر حجم دیفرانسیلی $dx dy dz$ که نقطه (x, y, z) را احاطه کرده است

که ρ چگالی جرمی و v_x مؤلفه سرعت در امتداد محور x ، عمود بر رویه $dx dz$ است. جرم خارج شده از رویه II در زمان dt عبارت است از

$$dm_{II} = \rho(x + dx, y, z, t) v_x(x + dx, y, z, t) dy dz dt \quad (15-233 \text{ ب})$$

به این ترتیب جرم خالصی از سیال که در جهت x عنصر حجم را ترک کرده است عبارت است از

$$dm_{II} - dm_1 = [\rho(x + dx, y, z, t) v_x(x + dx, y, z, t) - \rho(x, y, z, t) v_x(x, y, z, t)] dy dz dt \quad (15-234)$$

با استفاده از بسطهای

$$\rho(x + dx, y, z, t) = \rho(x, y, z, t) + \frac{\partial \rho(x, y, z, t)}{\partial x} dx + \dots$$

$$v_x(x + dx, y, z, t) = v_x(x, y, z, t) + \frac{\partial v_x(x, y, z, t)}{\partial x} dx + \dots$$

در معادله (۱۵-۲۳۴) و چشم پوشی از جمله های مرتبه های بالا ، خواهیم یافت

$$dm_{11} - dm_1 = \frac{\partial \rho}{\partial x} v_x dx dy dz dt + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dy dz dt \quad (15-235)$$

با اعمال همین روش به دیگر رویه ها ، جرم کلی خالصی که در زمان dt عنصر $dx dy dz$ را ترك کرده است به صورت زیر به دست می آید

$$dm = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} + \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dx dy dz dt \quad (15-236)$$

این جرم خالص که عنصر حجم را ترك می کند باید ، برای پایسته نگاه داشتن جرم ، برابر با کاهش جرم داخل این حجم ، یعنی

$$dm = - \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dx dy dz dt \quad (15-237)$$

باشد . از برابر قرار دادن معادلات (۱۵-۲۳۶) و (۱۵-۲۳۷) خواهیم یافت

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} + \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (15-238)$$

یا ، با نمادگذاری برداری ، می توانیم آن را به شکل زیر بنویسیم

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (15-239)$$

معادلات (۱۵-۲۳۸) و (۱۵-۲۳۹) بیانهای معادله پیوستگی هستند و بطور ساده قانون پایستگی جرم را نمایش می دهند . ماده در هیچ جا ایجاد نمی شود یا از بین نمی رود و مقدار جرم در هر عنصر حجم $dV = dx dy dz$ که با سیال حرکت می کند ثابت می ماند . کمیت ρv شار جرمی است (چگالی تکانه ای یا جریان جرمی نیز نامیده می شود) ، و جرمی از سیال را که در واحد زمان از واحد سطح عمودی عبور می کند نمایش می دهد . به این ترتیب معادله (۱۵-۲۳۹) بیان می دارد که دیورژانس شار جرمی خارج شده از یک حجم برابر است با میزان کاهش چگالی جرمی

اکنون به تفسیر بیشتری از معادله (۱۵-۲۳۹) می پردازیم . جریان جرمی را می توان با انتگرال گیری روی یک حجم ثابت V که به وسیله سطح A با قائم برون سوی \mathbf{n} احاطه شده است ، به دست آورد ، یعنی

$$\iiint_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV + \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0 \quad (15-240)$$

جمله اول را با استفاده از قضیه دیورژانس گاوس، معادله (۵-۱۳۵)، بازنویسی می‌کنیم، و جمله دوم می‌توانیم نماد مشتق گیری را از زیر نماد انتگرال خارج کنیم، زیرا V یک حجم ثابت است. به این ترتیب معادله (۱۵-۲۴۰) به شکل زیر در می‌آید

$$\int_A \hat{\mathbf{n}} \cdot (\rho \mathbf{v}) dA = - \frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV \quad (15-241)$$

این معادله بیان می‌دارد که جریان خروجی جرم از سطح برابر است با میزان کاهش جرم در داخل حجم V .

برای یک جریان پایا $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ؛ در نتیجه جرم داخل شده دقیقاً برابر است با جرم خارج شده. در این صورت معادله (۱۵-۲۴۱) به شکل زیر در می‌آید

$$\int_A \hat{\mathbf{n}} \cdot (\rho \mathbf{v}) dA = 0 \quad (15-242)$$

به علاوه، اگر علاوه بر ثابت بودن چگالی جرمی سرعت ثابت و عمود بر رویه جریان باشد، معادله (۱۵-۲۴۲) می‌دهد

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 \quad (15-243)$$

و اگر سیال تراکم ناپذیر باشد بطوری که $\rho_1 = \rho_2$ ، داریم

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 = \text{constant} \quad (15-244)$$

یعنی شار حجمی vA برای سیال تراکم ناپذیر و جریان پایا ثابت است.

اکنون یک بار دیگر مورد جریان یک سیال تراکم ناپذیر، یعنی $\rho = \text{constant}$ را در نظر

بگیریم. معادله (۱۵-۲۳۹) به شکل زیر در می‌آید

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (15-245)$$

می‌دانیم که دیورژانس کرل یک بردار صفر است. بنابراین \mathbf{v} مشتق از یک پتانسیل برداری Φ است؛ یعنی اگر

$$\mathbf{v} = \nabla \times \Phi \quad (15-246)$$

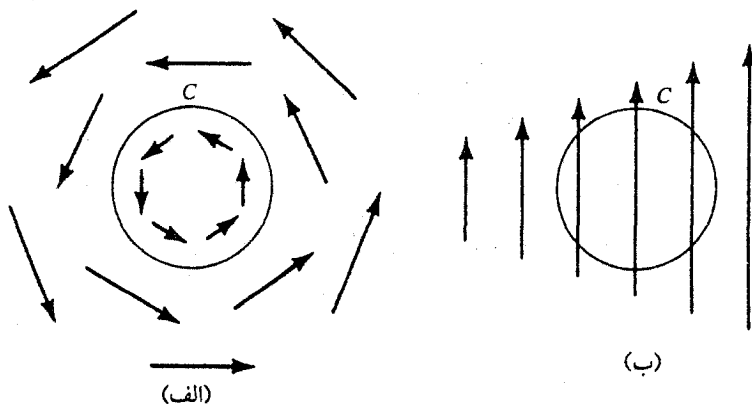
نتیجه می شود

$$\nabla \cdot (\nabla \times \Phi) = 0 \quad (۲۴۷-۱۵)$$

این معادلات شبیه به معادلات پتانسیلهای برداری وابسته به میدان مغناطیسی است .
در توصیف جریان سیال ، کرل سرعت $\nabla \times v$ ، همان طور که در زیر توضیح خواهیم داد ، مفید واقع می شود . رابطه زیر را در نظر بگیریم

$$\iint_A \hat{n} \cdot (\nabla \times v) dA = \oint v \cdot dr \quad (۲۴۸-۱۵)$$

عبارت سمت چپ نمایشگر انتگرال مؤلفه های عمودی کرل v روی سطح A است ، و طرف چپ با استفاده از قضیه استوکس [رک . معادله (۱۴۱-۵)] به دست آمده است . در شکل (۱۵-۱۶) دو مثال از جریان سیال نشان داده شده است ، یک جریان گردابی و یک جریان گرادیان عرضی سرعت . در هر دو مثال ، انتگرال خطی $\oint v \cdot dr$ غیر صفر است . در نتیجه کرل سرعت $(\nabla \times v)$ را می توان به عنوان اندازه ای از آهنگ چرخش سیال بر واحد سطح در نظر گرفت . در شکل (۱۵-۱۶ ب) با وجود این که چرخش نداریم و سیال عملاً به دور یک نقطه نمی گردد ، اما به علت گرادیان عرضی سرعت ، کرل v غیر صفر است . گفته می شود که حرکت سیال دارای خواص چرخشی است .



شکل (۱۵-۱۶) : دو مثال از جریان سیال : (الف) جریان گردابی ، و (ب) جریان با

گرادیان عرضی سرعت . در هر دو مورد $\nabla \times v$ غیر صفر است . در نتیجه در هر دو جریان چرخشی داریم

اگر کرل $\nabla \times \mathbf{v}$ در همه جای سیال صفر باشد، حرکت غیرچرخشی نامیده می شود. یعنی اگر در حدود یک نقطه معین

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad (15-249)$$

ذرات سیال سرعت زاویه ای حول آن نقطه نخواهند داشت. به علاوه، اگر کرل $\nabla \times \mathbf{v}$ صفر باشد، آن گاه \mathbf{v} مشتق از پتانسیل نرده ای Φ است. چون کرل گرادیان یک نرده ای صفر است، باید داشته باشیم

$$\mathbf{v} = -\nabla\Phi \quad (15-250)$$

با بردن این معادلات در معادله (15-249) خواهیم داشت

$$\nabla \times \nabla\Phi = 0 \quad (15-251)$$

این معادله یک جریان غیرچرخشی را نمایش می دهد.

معادله حرکت برای جریان سیال ایده آل

بار دیگر فرض کنیم که با یک سیال ایده آل سر و کار داریم؛ یعنی این سیال وقتی در حال تعادل است هیچ تنش برشی را تحمل نمی کند. اما هر سیال جاری، مقداری چسبندگی - هر چند هم کم باشد - دارد، و بنابراین مقداری تنش برشی دارد. از این رو فرض می کنیم که یک سیال ایده آل چسبندگی ندارد.

یک سیال در حال حرکت نباید فقط در معادله پیوستگی صدق کند، بلکه باید با قوانین نیوتن نیز همخوانی داشته باشد. سیالی به حجم $dx dy dz$ ، آن طور که در شکل (15-17) نشان داده شده است، که نیروی خالص وارد بر آن صفر نباشد، در نظر بگیریم. فرض کنیم که علاوه بر فشار، نیروی عمومی \mathbf{f} بر واحد حجم نیز به آن وارد می شود. لذا نیروی کلی وارد به این عنصر حجم عبارت است از $\mathbf{f} dx dy dz$. نیروی ناشی از فشار روی سطح I برابر است با $p(x, y, z) dy dz$ ، و نیروی وارد بر سطح II برابر است با $p(x + dx, y, z, t) dy dz$. بنابراین، با اعمال قانون دوم نیوتن در جهت X داریم

$$dF_x = f_x dx dy dz + p(x, y, z, t) dy dz - p(x + dx, y, z, t) dy dz$$

با بسط $p(x + dx, y, z, t)$ تا مرتبه اول بر حسب dx ، خواهیم یافت

$$dF_x = \left(f_x - \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx dy dz \quad (15-252)$$

همچنین از قانون دوم نیوتن،

$$dF_x = \frac{d(mv_x)}{dt} = \frac{d}{dt} (\rho v_x) dx dy dz \quad (15-253)$$

با برابر قرار دادن این دو معادله خواهیم داشت

$$f_x - \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{d}{dt} (\rho v_x) \quad (15-254 \text{ الف})$$

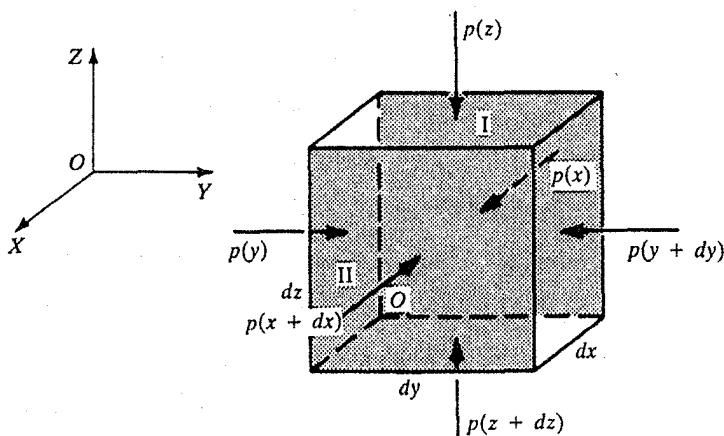
عبارات مشابه برای جهتهای دیگر عبارتند از

$$f_y - \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{d}{dt} (\rho v_y) \quad (15-254 \text{ ب})$$

$$f_z - \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{d}{dt} (\rho v_z) \quad (15-254 \text{ پ})$$

در نمادگذاری برداری، این سه معادله را می توان در یک معادله به صورت زیر ترکیب کرد

$$\mathbf{f} - \nabla p = \frac{d}{dt} (\rho \mathbf{v}) \quad (15-255)$$



شکل (۱۵-۱۷): یک سیال به حجم $dx dy dz$ که نیروی خالص وارد به آن صفر

نیست. علاوه بر نیروی فشار، نیروی جرمی بر واحد حجم \mathbf{f} نیز وجود دارد

با استفاده از معادله (۱۵-۲۳۱) ، یعنی

$$\frac{d}{dt} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) + \frac{\partial}{\partial t} \quad (۱۵-۲۳۲)$$

معادله (۱۵-۲۵۵) به شکل زیر در می آید

$$\mathbf{f} - \nabla p = (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) \quad (۱۵-۲۵۶)$$

یا

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\mathbf{f}}{\rho} \quad (۱۵-۲۵۷)$$

معادله (۱۵-۲۵۵) ، (۱۵-۲۵۶) ، یا (۱۵-۲۵۷) معادله اولر حرکت برای سیال است . کمیت $\frac{\mathbf{f}}{\rho}$ نیرو بر واحد جرم است . اگر چگالی ρ بستگی به فقط فشار p داشته باشد گفته می شود که سیال همگن است .

اگر نیروی جسمی \mathbf{f} معلوم باشد ، هنوز پنج مجهول داریم : چگالی ، فشار ، و سه مؤلفه سرعت . معادله پیوستگی و معادله اولر تنها چهار معادله نرده ای به ما می دهند . اگر چگالی (یا یکی دیگر از کمیت های مجهول) معلوم باشد ، مسأله را می توان حل کرد .

معادله برنولی

وقتی قانون پایستگی به حرکت سیال ، که با معادله اولر داده می شود ، اعمال شود به معادله برنولی منجر می شود . ضرب نرده ای معادله اولر ، معادله (۱۵-۲۵۵) ، با بردار سرعت \mathbf{v} می دهد

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \nabla p \cdot \mathbf{v} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \quad (۱۵-۲۵۸)$$

حاصل ضرب $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$ (نیرو بر واحد حجم ضرب در سرعت) توان بر واحد حجم است که توسط نیروی \mathbf{f} به سیال داده می شود . جمله دوم را می توان به صورت زیر نوشت

$$-\nabla p \cdot \mathbf{v} = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{dt} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{dt} - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{dt} = -\frac{dp}{dt} + \frac{\partial p}{\partial t} \quad (۱۵-۲۵۹)$$

و جمله آخر در معادله (۱۵-۲۵۸) به شکل زیر نوشته می شود

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) - \frac{1}{2} v^2 \frac{d\rho}{dt} \quad (15-260)$$

به این ترتیب معادله (۱۵-۲۵۸) شکل زیر را به خود می گیرد

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \frac{dp}{dt} + \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) - \frac{1}{2} v^2 \frac{d\rho}{dt} \quad (15-261)$$

چون مایع تراکم ناپذیر ($\frac{d\rho}{dt} = 0$) و جریان پایاست ($\frac{\partial p}{\partial t} = 0$)، معادله (۱۵-۲۶۱) به شکل زیر در می آید

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \frac{dp}{dt} - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = 0 \quad (15-262)$$

اینک معادله اولر به شکلی در آمده که قابل انتگرال گیری است. با ضرب دو طرف در dt و انتگرال گیری خواهیم یافت

$$\int (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) dt - p - \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constant} \quad (15-263)$$

جمله اول در طرف چپ کاری است که توسط نیروی جسمی بر واحد حجم انجام شده است. اگر نیروی جسمی \mathbf{f} مشتق از یک پتانسیل نرده ای Φ باشد، بطوری که

$$\mathbf{f} = -\nabla\Phi \quad (15-264)$$

که Φ انرژی پتانسیل بر واحد حجم است، می توانیم جمله اول معادله (۱۵-۲۶۳) را به صورت زیر بنویسیم

$$W = \int (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) dt = \int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int (-\nabla\Phi) \cdot d\mathbf{r} = -\Phi \quad (15-265)$$

به این ترتیب معادله (۱۵-۲۶۳) به شکل زیر در می آید

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \Phi = \text{constant} \quad (15-266)$$

که شکل عمومی معادله برنولی است.

اگر نیروی جسمی گرانش باشد، $\Phi = \rho g z$ ، معادله (۱۵-۲۶۶) خواهد شد

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z = \text{constant} \quad (15-267)$$

این معادله ، که بیانی از پایداری انرژی است ، به معادله برنولی مشهور است و به جریان پایای سیال تراکم ناپذیر در یک میدان گرانشی اعمال می شود . جمله اول ، فشار p ، کار انجام شده بر واحد حجم توسط سیال را نمایش می دهد ، جمله دوم $\frac{1}{2}\rho v^2$ انرژی جنبشی بر واحد حجم سیال را نشان می دهد ، و آخرین جمله ρgz انرژی پتانسیل بر واحد حجم سیال است .

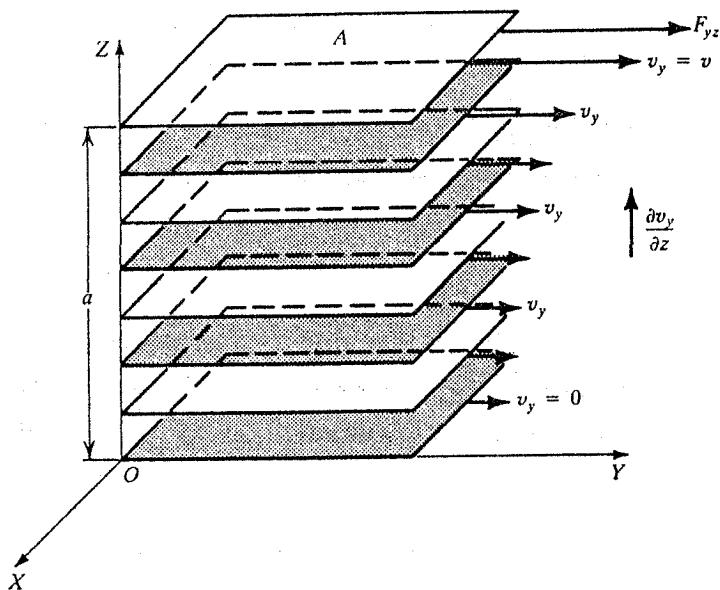
۱۵-۱۰ چسبندگی و جریان چسبناک

در بحثهای پیشین ، فرض کرده بودیم که سیال چسبناک نیست ، در نتیجه اصطکاکی بین لایه های مختلف در حال حرکت سیال وجود نداشت . وقتی لایه های مجاور یکدیگر سیال حرکت می کنند ، نیروی برشی سعی می کند که حرکت نسبی آنها را کم کند . وجود نیروی اصطکاک به صورت زیر متجلی می شود .

فرض کنیم سرعت سیال در جهت Y باشد . سیال در لایه های موازی با صفحه XY ، آن طور که در شکل (۱۵-۱۸) نشان داده شده است ، جریان دارد و سرعت v_y تابعی از تنها z است ، یعنی $v_y = f(z)$. فرض کنیم ورقه A با بالاترین لایه سیال در تماس باشد و با سرعت v در امتداد Y حرکت کند . برای ثابت نگاه داشتن سرعت ، یک نیروی F مورد نیاز است ، که حضور یک نیروی اصطکاکی در داخل سیال را نشان می دهد . لایه ای که با ورقه متحرک در تماس است با سرعت ورقه حرکت می کند ، بطوری که بین آنها سرعت نسبی وجود ندارد . به همین نحو ، لایه بعد از لایه ساکن نیز ساکن خواهد بود . یعنی بین سطوح مشترک جامد-سیال سرعت نسبی وجود ندارد ، که به شیب صفر در این سطوح مشترک منجر می شود .

همان طور که در شکل (۱۵-۱۸) نشان داده شده است ، گرادیان سرعت $\frac{\partial v_y}{\partial z}$ است و روبه بالا مثبت است . اصطکاک چسبناکی یک تنش برشی مثبت F_{yz} ایجاد می کند که از چپ به راست در سطح A و موازی با صفحه XY عمل می کند ، بطوری که قائم بر این صفحه موازی با محور Z است . ضریب چسبندگی η به صورت نسبت تنش برشی به گرادیان سرعت تعریف می شود ، یعنی

$$\eta = \frac{F_{yz}/A}{\partial v_y / \partial z} \quad (۱۵-۲۶۸)$$



شکل (۱۵-۱۸) : توزیع سرعت در مورد جریان سیال چسبناک

در واقع ، حضور گردآیان سرعت معرف حضور یک نیروی برشی است که روی لایه های مختلف سیال عمل می کند . اگر $F_{yz} = F$ و $\frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{v}{a}$ باشد معادله (۱۵-۲۶۸) شکل ساده زیر را می گیرد

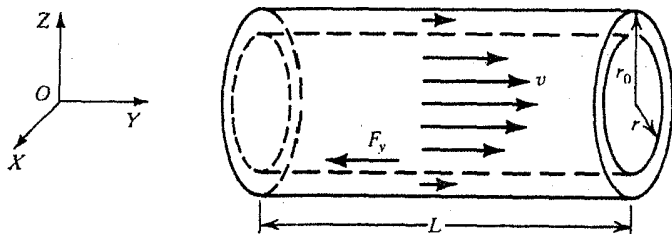
$$\eta = \frac{F/A}{v/a} \quad (۱۵-۲۶۹)$$

این تعریف نوع ساده ای از توزیع را می نمایاند که در آن تنش برشی مناسب با توان اول گردآیان سرعت است . این جریان یک جریان نیوتنی است . در بیشتر موارد ، جریان غیرنیوتنی است و چسبندگی تابع بسیار پیچیده تری است و به یک تنش برشی پیچیده منجر می شود . ما بحث خود را به جریان نیوتنی محدود می کنیم و تعریف پیشین را با اعمال آن به جریان لایه ای (جریانهای سیال در لایه ها) در لوله های دایره ای روشن می کنیم .

یک جریان پایای سیال از لوله دایره ای به سطح مقطع $A = \pi r_0^2$ ، که شعاع دایره لوله است ، در نظر بگیریم . سرعت در همه جا موازی با محور لوله است . همان طور که در شکل (۱۵-۱۹) نشان داده شده است ، محور لوله در امتداد محور Y گرفته شده و سرعت v تابعی از

فقط فاصله r از محور لوله است؛ یعنی گرادیان سرعت عبارت است از $\frac{dv_y}{dr}$. استوانه‌ای از سیال به شعاع r و طول L در نظر بگیریم بطوری که $A = (2\pi r)L$. به این ترتیب نیروی وارد شده به این استوانه از طرف سیال خارج آن عبارت است از

$$F = \eta(2\pi rL) \frac{dv_y}{dr} \quad (15-270)$$



شکل (۱۵-۱۹): جریان لایه‌ای در یک لوله استوانه‌ای

تنها نیروهای عمل کننده روی این سیال عبارتند از نیروی چسبناکی و اختلاف فشار ΔP بین دو انتها که در فاصله L از یکدیگر قرار دارند. در غیاب نیروی جسمی و در نبودن شتاب، جمع این دو نیرو باید صفر باشد، یعنی

$$\Delta P(\pi r^2) + F = 0 \quad (15-271)$$

با قرار دادن به جای F از معادله (۱۵-۲۷۰) و مرتب سازی، خواهیم یافت

$$\frac{dv_y}{dr} = -\frac{\Delta P}{2\eta L} r \quad (15-272)$$

از این معادله از محور استوانه رو به بیرون انتگرال گیری می‌کنیم، و با فرض $v = v_0$ در $r = 0$ و $v = v_y$ در $r = r$ خواهیم یافت

$$\int_{v_0}^{v_y} dv_y = -\frac{\Delta P}{2\eta L} \int_0^r r dr \quad (15-273)$$

$$v_y - v_0 = -\frac{\Delta P}{4\eta L} r^2 \quad (15-274)$$

اگر فرض کنیم که سیال در دیواره‌ها در حال سکون است. یعنی $v_y = 0$ در $r = r_0$ ، سرعت

بیشینه را به صورت زیر به دست خواهیم آورد

$$v_0 = \frac{\Delta P}{4\eta L} r_0^2 \quad (275-15)$$

بردن این عبارت در معادله (۲۷۴-۱۵) می دهد

$$v_y = \frac{\Delta P}{4\eta L} (r_0^2 - r^2) \quad (276-15)$$

چون $A = \pi r^2$ و $dA = 2\pi r dr$ ، جریان کلی سیال ، I ، یا جرم جاری شونده از لوله خواهد بود

$$I = \int_A \int \rho v_y dA = 2\pi\rho \int_0^{r_0} v_y r dr \quad (277-15)$$

با قرار دادن به جای v_y از معادله (۲۷۶-۱۵) و انتگرال گیری ، نتیجه خواهیم گرفت

$$\frac{I}{\rho} = \frac{\pi r_0^4}{8\eta L} \Delta P \quad (278-15)$$

که بیانی است از قانون پوازوی . کمیات معادله (۲۷۸-۱۵) قابل اندازه گیری است ، در نتیجه η را می توان از آن حساب کرد .

سرعت میانگین \bar{v} را می توانیم با استفاده از تعریف جریان جرمی پیدا کنیم . عبارت

$$\rho \bar{v} A = \rho \int v_y dA = \text{شار جرمی} \quad (279-15)$$

را در نظر بگیریم . با قرار دادن به جای v_y از معادله (۲۷۶-۱۵) ، $dA = 2\pi r dr$ ، و انتگرال گیری از $r=0$ تا $r=r_0$ ، به دست می آوریم

$$\bar{v} = \frac{\Delta P}{2\eta L r_0^2} \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) r dr = \frac{r_0^2}{8\eta L} \Delta P \quad (280-15)$$

که رابطه بین آفت فشار و سرعت میانگین را به ما می دهد .

حرکتهای لایه ای (جریانی) و متلاطم

اکنون به بررسی حرکت یک جسم در یک سیال و رابطه آن با نیروهای اصطکاکی

می پردازیم . فرض کنیم کره ای به شعاع r با سرعت کوچک ثابت v در مایعی با چسبناکی η

حرکت می کند . فرض می شود که سرعت آن قدر کوچک است که می توانیم نوعی حرکت

لایه ای داشته باشیم . چون کره با سرعت یکنواخت حرکت می کند ، نیروهای عمل کننده باید برابر با نیروی اصطکاکی F باشند . می توانیم نیروی F را به وسیله آنالیز ابعادی محاسبه کنیم . فرض کنیم F تابعی از r ، v ، و η است . به این ترتیب می توانیم بنویسیم

$$F = Kr^a v^b \eta^c \quad (15-281)$$

که k یک ثابت بدون بُعد است و نمی تواند از آنالیز ابعادی محاسبه شود . با قرار دادن ابعاد کمیات مختلف ، خواهیم یافت

$$[MLT^{-2}] = [L]^a [LT^{-1}]^b [ML^{-1}T^{-1}]^c \quad (15-282)$$

که می دهد

$$a = b = c = 1 \quad (15-283)$$

در نتیجه

$$F = Krv\eta \quad (15-284)$$

مقدار k را می توان بطور تجربی تعیین کرد . این کار با اندازه گیری نیروی لازم برای کشیدن کره ای با شعاع معین در داخل یک مایع با چسبناکی معین انجام می گیرد . k برابر با 6π به دست آمده است . به این ترتیب معادله (15-284) به شکل زیر در می آید

$$F = 6\pi rv\eta \quad (15-285)$$

که به قانون استوکس مشهور است .

اکنون می توانیم در حرکت یک کره کوچک که در یک سیال چسبناک با سرعت ثابت سقوط می کند بحث کنیم . طبق اصل ارشمیدس ، وزن خالص کره عبارت است از

$$F_{\text{net}} = \frac{4\pi}{3} r^3 (\rho_s - \rho_l) g \quad (15-286)$$

که ρ_s ، ρ_l ، به ترتیب ، چگالیهای ماده تشکیل دهنده کره و ماده تشکیل دهنده مایع هستند . این نیرو باید برابر با نیروی اصطکاکی (15-285) باشد ؛ یعنی

$$6\pi rv\eta = \frac{4\pi}{3} r^3 (\rho_s - \rho_l) g$$

در نتیجه

$$v = \frac{2g}{9\eta} (\rho_s - \rho_l) r^2 \quad (287-15)$$

به این ترتیب با اندازه گیری v ، چون تمام کمیات دیگر معلوم است ، می توانیم η را محاسبه کنیم . باید خاطر نشان کرد که نتایج پیشین تنها وقتی قابل اعمالند که حرکت لایه ای باشد . به عنوان مثال ، سنگی که در داخل گلیسرین سقوط می کند ممکن است حرکت لایه ای داشته باشد ، اما اگر در آب سقوط کند ممکن است حرکت لایه ای نداشته باشد .

سراسبورن رینولد به این نتیجه رسید که وقتی سرعت یک جسم در داخل مایعی افزایش می یابد ، یک سرعت بحرانی وجود دارد که در آن تغییری ناگهانی از حرکت لایه ای به حرکت متلاطم رخ می دهد . این سرعت بحرانی v_c ، بستگی به چگالی ρ ی مایع ، چسبناکی آن η ، و قطر d ی لوله استوانه ای که مایع در آن جاری است ، دارد . بنابراین می توانیم یک بار دیگر از آنالیز ابعادی استفاده کنیم و بنویسیم

$$v_c = R_e \rho^a \eta^b d^c \quad (288-15)$$

که در آن R_e یک کمیّت بدون بُعد به نام عدد رینولد است . با قرار دادن ابعاد برای کمیات مختلف خواهیم یافت

$$[LT^{-1}] = [ML^{-3}]^a [ML^{-1}T^{-1}]^b [L]^c$$

که نتیجه می دهد

$$a = -1, \quad b = 1, \quad c = -1$$

بنابراین

$$v_c = R_e \frac{\eta}{\rho d} \quad (289-15)$$

و

$$R_e = \frac{\rho d v_c}{\eta} \quad (290-15)$$

به این ترتیب ، با به کارگیری لوله های استوانه ای ، و دانستن d ، ρ و η ، می توانیم v_c و در نتیجه R_e را محاسبه کنیم . چون سرعت مایع در لوله از مقداری بیشینه در روی محور تا صفر

در کناره‌ها تغییر می‌کند، باید برای محاسبهٔ سرعت بحرانی، سرعت میانگین روی تمام سطح مقطع را به کار ببریم. رینولد از کار تجربی اش، با استفاده از جریان مایعات در لوله‌های شیشه‌ای به این نتیجه رسید که جریان مایعات برای $R_e < 2000$ لایه‌ای است، در صورتی که برای $R_e > 4000$ متلاطم است. برای مایعی که نیروهای چسبناکی غالب هر تلاطمی را میرا می‌کنند، اعداد رینولد مقادیر کمی دارند. برعکس، اگر نیروهای چسبناکی قابل ملاحظه باشند، اعداد رینولد بزرگ خواهند بود، که نشانگر وجود جریان متلاطم است.

وقتی یک جسم با سرعتی زیر سرعت بحرانی حرکت می‌کند، نوع حرکت لایه‌ای است، و نیروی اصطکاکی از چسبناکی به وجود می‌آید. به محض این که سرعت از سرعت بحرانی تجاوز کند، حرکت متلاطم می‌شود؛ و در جلو جسم متحرک گرداب به وجود می‌آید. در این حالت نیروی اصطکاکی عمدهٔ بستگی به اختلاف فشار بین جلو و عقب جسم دارد و خیلی کم به چسبناکی وابسته است. چون اختلاف فشار بستگی به سطح مقطع جسم دارد، می‌توانیم نیروی اصطکاکی را به صورت زیر بنویسیم

$$F = K v^a \rho^b A^c \quad (۱۵-۲۹۱)$$

یک بار دیگر آنالیز ابعادی نتیجه می‌دهد

$$F = K \rho A v^2 \quad (۱۵-۲۹۲)$$

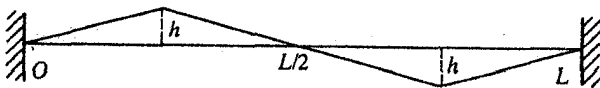
که در آن K به شکل جسم بستگی دارد و ممکن است مقداری متغیر بین ۰٫۹ تا ۰٫۱ داشته باشد.

مسائل

۱-۱۵ معادلات (۳۴-۱۵) و (۳۵-۱۵) را به دست آورید .

۲-۱۵ تازی به طول L و جرم m از دو انتها تثبیت شده است . وسط تار را به اندازه $h = \frac{L}{10}$ در جهت عمودی کشیده و رها می کنیم . عبارتی پیدا کنید که حرکت تار را توصیف کند .

۳-۱۵ یک تار یکنواخت به طول L و چگالی جرمی خطی μ ، تحت کشش T ، به صورتی که در شکل (مسأله-۱۵-۳) نشان داده شده است کشیده شده و رها می شود ($h \ll L$) . جواب عمومی معادله ای که حرکت این تار مرتعش را توصیف می کند پیدا کنید و ضرایب را با استفاده از شرایط اولیه محاسبه کنید .



شکل (مسأله-۱۵-۳)

۴-۱۵ یک تار یکنواخت به طول L ، چگالی جرمی خطی μ ، تحت کشش T ، در آغاز در وضع تعادل است ، اما سرعتی به صورت زیر دارد

$$v = ax, \quad 0 < x < \frac{L}{2}$$

$$v = a(x - L), \quad \frac{L}{2} < x < L$$

جواب عمومی معادله ای که حرکت این تار را توصیف می کند پیدا کنید و ضرایب را با استفاده از شرایط اولیه به دست آورید

۵-۱۵ یک سر تازی به طول L و جرم m در $x = 0$ تثبیت شده و سر دیگر آن به حلقه ای که می تواند بدون اصطکاک روی یک میله قائم بلغزد بسته شده است . نشان دهید که شرایط مرزی در انتهای $x = L$ ، عبارت است از $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=L} = 0$ ، و بسامدها و مدهای بهنجار ارتعاش را پیدا کنید .

۶-۱۵ جواب عمومی معادله حرکت و مدهای بهنجار ارتعاشات یک تار با شرایط اولیه زیر را پیدا کنید .

$$u(x, 0) = A \sin \frac{3\pi x}{L} \quad \text{و} \quad \dot{u}(x, 0) = 0$$

۷-۱۵ یک تار کشیده شده به طول L و جرم m به وسیله ضربه ای در طول $2a$ از مرکز به نوسان در می آید. این وضعیت با شرایط اولیه زیر توصیف می شود

$$u(x, 0) = 0$$

$$\dot{u}(x, 0) = 0, \quad x < \frac{L}{2} - a \quad \text{و} \quad x > \frac{L}{2} + a$$

حرکت این تار را توصیف کنید.

۸-۱۵ بسامدهای مشخصه و دامنه های آنها را برای مدهای مختلف در یک تار مرتعش، تحت شرایط اولیه زیر پیدا کنید

$$u(x, 0) = \frac{4x(L-x)}{L^2} \quad \text{و} \quad \dot{u}(x, 0) = 0$$

۹-۱۵ تار به طول L و جرم m ، تحت کشش T ، از دو انتها تثبیت شده است. اگر تار طوری کشیده شود که یک شکل سهموی با معادله $y = a(L-x)x$ به خود بگیرد و سپس رها شود، حرکت آن را بررسی کنید.

۱۰-۱۵ تار به طول L و جرم m در نظر بگیرید. انتهای $x=L$ بسته است و به انتهای $x=0$ نیروی سینوسی $a \sin \omega_0 t$ اعمال می شود. جوابی را پیدا کنید که تمام قسمت های تار با یک بسامد ω_0 ارتعاش کنند؛ یعنی جواب معادله را برای حرکت در حالت پایا پیدا کنید.

۱۱-۱۵ یک تار کشیده شده به طول L و جرم m که از هر دو انتها تثبیت شده است در نظر بگیرید. نیرویی وابسته با مکان، یعنی

$$F(x, t) = F_0 \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \omega t$$

که n یک عدد درست است، در سرتاسر طول تار به آن وارد می شود. حرکت حالت پایای تار را با فرض بستگی مشابهی برای $u(x, t)$ بررسی کنید.

۱۲-۱۵ مسأله (۱۱-۱۵) را با وضع عمومی تری که در آن نیروی اعمال شده به شکل $F(x, t) = F_0(x) \cos \omega t$ است و در آن $F_0(x)$ در دو انتهای تار صفر است، حل کنید. ۱۳-۱۵ نشان دهید که اگر تابع موج $u(x, t) = Ae^{(\omega t - kx)}$ طوری باشد که کمیت های ω

v مختلط باشند، ولی k حقیقی باشد، این موج با زمان میرا می شود. (فرض کنید $v = u + iw$ و $\omega = \alpha + i\beta$ ، که u ، β ، α ، w حقیقی اند).

۱۴-۱۵ مسأله (۲-۱۵) (تار کشیده شده به اندازه $\frac{L}{10}$ در وسط) را با برهم نهی امواج $f(x - ct)$ و $g(x + ct)$ حل کنید. شکل موج را در بازه های زمانی مختلف رسم کنید.

۱۵-۱۵ معادلات (۹۸-۱۵) و (۱۰-۱۵) را به دست آورید.

۱۶-۱۵ معادله (۱۰۶-۱۵) را به دست آورید.

۱۷-۱۵ P را در معادله (۱۰۸-۱۵) با استفاده از معادلات (۹۵-۱۵) و (۹۶-۱۵) به دست آورید.

۱۸-۱۵ معادله (۱۰۹-۱۵) را با، نخست محاسبه K ، V ، و L ؛ سپس به کارگیری معادله لاگرانژ، به دست آورید.

۱۹-۱۵ در یک تار مرتعش که از دو انتها تثبیت شده است، اگر p تکانه تعمیم یافته مزدوج با θ باشد، تابع هامیلتون H را پیدا کنید.

۲۰-۱۵ یک تار یکنواخت به طول L و چگالی جرمی خطی μ که از دو انتها تثبیت شده و تحت کشش T است در نظر بگیرید. نیروی $a \cos \omega t$ (با a و ω ی ثابت) در $x = \frac{L}{2}$ اعمال می شود.

در آغاز، تار در حالی که وسط آن به اندازه $\frac{L}{20}$ جابه جا شده است در حال سکون است. نیروی اصطکاکی بازدارنده متناسب با سرعت ($= -b\dot{x}$) است و در تمام طول تار عمل می کند. جواب حرکت تار مرتعش را برای مورد کندمیرا پیدا کنید.

۲۱-۱۵ در مسأله (۲۰-۱۵)، فرض کنید که تار در n امین مد ارتعاش می کند. (الف) میزان کار انجام شده توسط نیروی محرک، و (ب) آهنگ میانگین انجام این کار را محاسبه کنید.

۲۲-۱۵ تاری را که در دو انتها تثبیت شده و در یک محیط چسبناک ارتعاش می کند در نظر بگیرید. نیروی میراگر در هر قسمت تار مستقیماً متناسب با سرعت ($= -b\dot{x}$) است. نشان دهید که جواب عمومی حرکت این تار مرتعش با رابطه زیر داده می شود.

$$u(x, t) = e^{-\alpha x} \sin \omega \left(\frac{x}{v} - t \right)$$

که α یک ثابت است.

۱۵-۲۳ جواب معادله (۱۵-۱۱۹) را ، با شروع از معادله (۱۵-۱۲۴) به جای معادله (۱۵-۱۲۳) به دست آورید .

۱۵-۲۴ نشان دهید که معادلات حرکت برای ارتعاشات طولی یک تار وزنه دار دقیقاً همان شکلی را دارند که برای ارتعاشات عرضی داشتند ، به شرطی که Tld را با k ، ثابت نیروی تار ، جایگزین کنیم .

۱۵-۲۵ در باره انتشار موج در امتداد یک تار وزنه دار با دو نوع جرمهای ذره ای که یک در میان قرار گرفته اند یعنی

$$m_j = \begin{cases} m_1, & \text{برای زوج} \\ m_2, & \text{برای فرد} \end{cases}$$

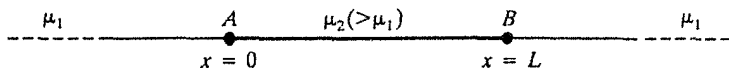
بحث کنید . نشان دهید که منحنی $\omega-k$ در این مورد دارای دو شاخه است .

۱۵-۲۶ وضعیت بحث شده در مسأله (۱۵-۵) را ، که انتهای راست تار به حلقه ای حول یک میله قائم بسته شده است در نظر بگیرید . وقتی تار به ارتعاش در آید ، بازتاب امواج از انتهای طرف راست را برای (الف) حلقه بدون جرم و بدون اصطکاک ، (ب) حلقه با جرم کوچک و اصطکاک کم ، (پ) حلقه با جرم کوچک و اصطکاک زیاد ، و (ت) حلقه خیلی سنگین ، مورد بحث قرار دهید .

۱۵-۲۷ فرض کنیم ، در بخش (۱۵-۶) ، که موج فرودی از راست می آید و به محل اتصال دو تار با چگالیهای متفاوت می رسد . دامنه های نسبی و شدتها را برای امواج بازتابیده و عبور کرده حساب کنید . همچنین انرژی منتقل شده از یک تار به تار دیگر و برعکس را حساب کنید .

۱۵-۲۸ در ارتباط با معادله (۱۵-۱۶۷) ، نشان دهید که این مقدار عبارت است از آهنگ انرژی منتقل شده از محل اتصال از چپ به راست .

۱۵-۲۹ یک تار بی نهایت بلند ، مطابق شکل (مسأله ۱۵-۲۹) ، در نظر بگیرید . برای $x < 0$ و $L < x$ ، چگالی جرمی خطی تار μ_1 ، و برای $0 < x < L$ چگالی جرمی خطی آن μ_2 ($\mu_2 > \mu_1$) است . موجی با دامنه A_0 و بسامد ω از سمت چپ می آید . شدتهای بازتابیده و عبور کرده را در A و B پیدا کنید . این مقادیر برای یک تغییر نسبی در مقادیر μ_1 و μ_2 ، چگونه تغییر می کنند .



شکل (مسأله-۱۵-۲۹)

۱۵-۳۰ یک تار بی نهایت طولی تحت کشش T است. موجی با بسامد ω و سرعت $\frac{\omega}{k}$ از سمت چپ فرود می آید. دامنه های بازتابیده و عبور کرده را وقتی جرم M (الف) در $x=0$ ، و (ب) در $x=L$ به تار چسبیده است، پیدا کنید.

۱۵-۳۱ یک خط انتقال الکتریکی دارای خودالقای یکنواخت L بر واحد طول و یک ظرفیت C بر واحد طول است. نشان دهید که جریان متناوب i در چنین خط انتقالی در معادله موج زیر صدق می کند

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}, \quad v = 1/\sqrt{LC}$$

۱۵-۳۲ معادله (۱۵-۱۹۱) را به دست آورید.

۱۵-۳۳ معادله (۱۵-۱۹۵) را به دست آورید.

۱۵-۳۴ معادله (۱۵-۱۹۶) را به دست آورید.

۱۵-۳۵ نشان دهید که موج کروی $p = \frac{f(r-vt)}{r}$ در معادله موج طولی برای امواج صوتی صدق می کند.

۱۵-۳۶ یک مخروط قائم دوار با نیم زاویه ϕ ، ارتفاع h ، و چگالی جرمی ρ در نظر بگیرید. این مخروط در یک مایع به چگالی ρ_1 شناور است. نشان دهید که مخروط تنها در صورتی در حال تعادل ایستا خواهد بود که رأس آن بطور قائم به طرف بالا باشد. بسامد نوسانات کوچک را برای این سیستم پیدا کنید.

۱۵-۳۷ می دانیم که چگالی هوا در جو با ارتفاع تغییر می کند. اگر فرض کنیم چگالی ثابت و برابر با 1.3 kg/m^3 ، یعنی چگالی در دما و فشار استاندارد در سطح دریا باشد، ضخامت جو چقدر خواهد بود.

۱۵-۳۸ اگر دو مؤلفه سرعت برای یک سیال تراکم ناپذیر داده شده باشند، چگونه مؤلفه سوم را پیدا می کنید؟ اگر $v_x = 3x^2y^2z^3$ و $v_y = x^2y^3z^3$ باشد v_z را محاسبه کنید.

۱۵-۳۹ معادلات اولر (۱۵-۲۵۵) و (۱۵-۲۵۷) را برای حرکت سیالات در مختصات قطبی

استوانه ای بازنویسی کنید .

۱۵-۴۰ معادلات اولر (۱۵-۲۵۵) و (۱۵-۲۵۷) را برای حرکت سیالات ، در مختصات قطبی r و ϕ برای یک سیال تراکم ناپذیر ایده آل که دارای یک جریان غیر چرخشی است می تواند از یک پتانسیل نرده ای که در معادله لاپلاس صدق می کند مشتق شده باشد . یعنی $v = -\nabla\phi$ که در آن $\nabla^2\phi = 0$.

۱۵-۴۱ نشان دهید که سرعت v برای یک سیال تراکم ناپذیر ایده آل که دارای یک جریان غیر چرخشی است می تواند از یک پتانسیل نرده ای که در معادله لاپلاس صدق می کند مشتق شده باشد . یعنی $v = -\nabla\phi$ که در آن $\nabla^2\phi = 0$.

۱۵-۴۲ با استفاده از قضیه دیورژانس گاوس در هر کجا که مناسب باشد ، (الف) معادله پیوستگی را در شکل عمومی آن ، و (ب) معادله اولر را در شکل انتگرالی آن بنویسید .

۱۵-۴۳ یکی از یک منبع مهر و موم شده به شکل مکعب با آب و نیم دیگر آن با هوا پر شده است . یک سوراخ کوچک در پایین آن ایجاد می شود . سرعت خروج آب را به صورت تابعی از ارتفاع آب تعیین کنید . چگونه این را با نتایج به دست آمده برای یک منبع سر باز مقایسه می کنید ؟ می توانید فرض کنید که آب تراکم ناپذیر و کل فرآیند هم دماست .

۱۵-۴۴ یک منبع به سطح مقطع A و ارتفاع H با یک سیال تراکم ناپذیر ایده آل پر شده است . سیال از سوراخ کوچکی با مقطع a بیرون می آید . مدت زمان لازم برای این که نصف سیال خارج شود چقدر است ؟

۱۵-۴۵ توزیع سرعت v برای یک سیال تراکم ناپذیر در یک جریان متلاطم از لوله دایره ای به شعاع r_0 عبارت است از

$$v = v_0 \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^{1/2}$$

که v_0 سرعت در روی محور است . آهنگ جریان حجمی را محاسبه کنید .

۱۵-۴۶ با استفاده از معادله اولر ، معادله (۱۵-۲۵۷) ، عبارتی برای پایداری تکانه زاویه ای به دست آورید .

۱۵-۴۷ تابع $\phi = \frac{c}{r}$ که در آن c یک عدد ثابت و r فاصله از یک نقطه معین است ، در معادله لاپلاس ، بجز در نقطه $r = 0$ ، صدق می کند . طبیعت جریان سیالی را که ϕ نمایشگر پتانسیل سرعت آن است مورد بحث قرار دهید .

۴۸-۱۵ یک لوله استوانه‌ای به طول l و شعاع r_0 که هر دو انتهای آن باز است بطور قائم‌نگه داشته شده است. هوا از انتهای باز بالایی دمیده می‌شود. معادله دیفرانسیل امواج صوتی را که در لوله به وجود می‌آیند بنویسید. با به کارگیری شرایط مرزی مناسب، مدهای بهنجار ارتعاشات را در طول محور لوله تعیین کنید.

۴۹-۱۵ مسأله (۴۸-۱۵) را اگر انتهای پایینی لوله بسته باشد تکرار کنید.

۵۰-۱۵ نشان دهید که نیروی F ناشی از چسبناکی سیال را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$F = \int_A \int \eta \nabla v \cdot dA$$

نیروی جسمی f ، یعنی نیرو بر واحد حجم، را حساب کنید.

۵۱-۱۵ در محاسبه v_p و $\frac{1}{\rho}$ در معادلات (۲۷۴-۱۵) و (۲۷۸-۱۵)، اگر لوله مستطیل شکل بود، چه تغییری در نتایج نهایی پیدا می‌شد؟ فرضهای مناسبی در نظر بگیرید.

۵۲-۱۵ افزایش چگالی آب را در ۳۰ متری زیر سطح یک دریاچه پیدا کنید. مدول حجمی آب 2×10^4 اتمسفر و چگالی آن 1000 kg/m^3 است. برای هر ۱۰ متر عمق، فشار به اندازه یک اتمسفر افزایش می‌یابد.

۵۳-۱۵ فرض کنیم فشار در سطح دریا P_0 و در بالای ستونی از هوا به ارتفاع H متر P باشد. دما را یکنواخت و برابر با T بگیریم. نشان دهید که $\log_{10} P_0 - \log_{10} P = C \left[\frac{H}{T} \right]$ که C یک ثابت است. فرض کنید فشار در سطح دریا $1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ و چگالی هوا در 0°C برابر با 1.29 kg/m^3 است.

۵۴-۱۵ یک جریان لایه‌ای آب در نظر بگیرید. در یک نقطه معین، سرعت آب 60 cm/s و آهنگ تغییرات سرعت با فاصله 12 cm/s/cm است. شتاب آب را در این نقطه پیدا کنید.

۵۵-۱۵ یک لوله افقی به طول 20 cm و قطر 1.0 cm در یک انتها به منبع آبی با ارتفاع ثابت 2 m وصل شده است. اگر در ۵ دقیقه 500 cm^3 آب از لوله خارج شده باشد، ضریب چسبناکی را محاسبه کنید.

۵۶-۱۵ یک لوله موئین افقی به طول L و شعاع R در نظر بگیرید که به ظرف در بسته‌ای به حجم V وصل شده است. هوا از ظرف از راه لوله موئین فرار می‌کند و در مدت زمان t فشار از P_1 به P_2 کاهش می‌یابد. اگر فشار جو P_0 باشد نشان دهید که ضریب چسبناکی با

رابطه زیر داده می شود

$$\eta = \frac{\pi R^4 P_0 t}{8LV \log_e \frac{(P_1 - P_0)(P_2 + P_0)}{(P_2 - P_0)(P_1 + P_0)}}$$

(راهنمایی : یک قسمت کوچک dx لوله موئین را که فشار در آن P است در نظر بگیرید و سپس با استفاده از قانون بویل ، روی تمام طول انتگرال بگیرید) .

۱۵-۵۷ با استفاده از عبارت به دست آمده در مسأله (۱۵-۵۶) ، ضریب چسبناکی را برای داده های زیر محاسبه کنید : $L = 1 \text{ m}$ ، $R = 0.05 \text{ m}$ ، $V = 0.5 \text{ m}^3$ ، فشار اولیه 81cm جیوه ، فشار نهایی بعد از ۳۰ ثانیه 79.5 cm جیوه ، فشار جو 76 cm جیوه ، و دما در همه جا ثابت فرض شده است .

۱۵-۵۸ با در نظر گرفتن یک عدد رینولد ۱۲۰۰ برای لوله استوانه ای به شعاع 2.5 cm ، سرعت بحرانی را برای (الف) آب ، و (ب) گلیسرین ، هر دو در 20°C ، محاسبه کنید .

منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر

- ARTHUR, W., and FENSTER, S. K., *Mechanics*, Chapter 13. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1969.
- BECKER, R. A., *Introduction to Theoretical Mechanics*, Chapter 15. New York: McGraw-Hill Book Co., 1954.
- BRILLOUIN, L., *Wave Propagation and Group Velocity*. New York: Academic Press, Inc., 1960.
- DAVIS, A. DOUGLAS, *Classical Mechanics*, Chapter 12. New York: Academic Press, Inc., 1986.
- FRENCH, A. P., *Vibrations and Waves*, Chapters 5, 6, and 7. New York: W. W. Norton and Co., Inc., 1971.
- HAUSER, W., *Introduction to the Principles of Mechanics*, Chapter 12. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1965.
- MARION, J. B., *Classical Dynamics*, 2nd ed., Chapters 14 and 15. New York: Academic Press, Inc., 1970.
- MOORE, E. N., *Theoretical Mechanics*, Chapter 7. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1983.
- MORSE, P. M., *Vibration and Sound*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Co., 1948.
- PEARSON, J. M., *A Theory of Waves*. Needham Heights, Mass.: Allyn and Bacon, Inc., 1966.
- ROSSBERG, K., *Analytical Mechanics*, Chapter 10. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1983.
- SLATER, J. C., *Mechanics*, Chapters 8-11 and 13. New York: McGraw-Hill Book Co., 1947.
- STEPHENSON, R. J., *Mechanics and Properties of Matter*, Chapters 8 and 9. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- SYMON, K. R., *Mechanics*, 3rd ed., Chapter 8. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1971.
- SYNGE, J. L., and GRIFFITH, B. A., *Principles of Mechanics*, Chapter 17. New York: McGraw-Hill Book Co., 1959.

نظریه نسبیت خاص

۱-۱۶ مقدمه

در اواخر قرن نوزدهم ، مکانیک کلاسیک ، به صورتی که توسط نیوتن فرمول بندی شده بود ، و نظریه الکترومغناطیس ، به صورتی که توسط ماکسول فرمول بندی بود ، خوب جا افتاده بودند . مکانیک نیوتنی بر پایه فرض جدایی کامل فضا و زمان ، و همچنین مفهوم مطلق بودن زمان ، پایه گذاری شده است . فروریختگی این مفاهیم بود که به فرمول بندی نظریه نسبیت خاص انجامید . سوالاتی که باید پاسخ داده می شدند عبارت بودند از :

۱- توصیف یک سیستم را چگونه از دستگاه مختصات لخت به دستگاه دیگر

تبدیل کنیم ؟

۲- وقتی چنین تبدیلی انجام شد چه اتفاقی برای معادلات توصیف کننده سیستم

رُخ می دهد ؟

۳- آیا قوانین نیوتنی حرکت ، حرکت سیستم در تمام سرعتها را توصیف می کند ؟

در بخش بعدی ، تبدیلات گالیله ای را که به نخستین سؤال پاسخ می دهد مورد بحث

قرار خواهیم داد . اما دو مشکل بر سر راه تبدیلات گالیله ای وجود دارد :

۱- معادلات الکترومغناطیسی را درست تبدیل نمی کنند ،

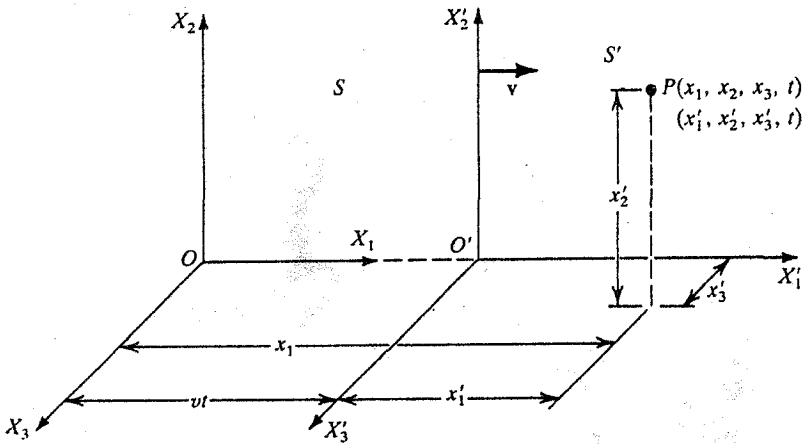
۲- این تبدیلات حتی برای مکانیک نیوتنی وقتی سیستمها با سرعتهای خیلی زیاد ،

نزدیک به سرعت نور ($3 \times 10^8 \text{ m/s}$) ، حرکت می کنند صادق نیستند .

در اواخر قرن نوزدهم ، چند نتیجه تجربی بودند که مکانیک نیوتنی نمی توانست آنها را توضیح دهد . ضربه نهایی به وسیله نتایج تجربی مایکلسون و مورلی (۱۸۸۱-۱۸۸۷) وارد شد . آنها در کوششهای خود برای اندازه گیری سرعت مطلق زمین نسبت به « اتر ساکن » با شکست مواجه شدند ، یعنی در جستجوهایشان برای یافتن یک چارچوب لخت مطلق ناکام ماندند . به علت این مشکلات ، تغییراتی اساسی در ساختار دینامیک ، توسط پوانکاره ، لورنتس ، و اینشتین به وجود آمد . ساختار ریاضی جدید به دست آمده ، آن طور که در سال ۱۹۰۵ توسط اینشتین فرمول بندی می شد ، به نظریه نسبیت خاص معروف است ، که با دستگاههای لخت که نسبت به یکدیگر با سرعت یکنواخت حرکت می کنند ، سر و کار دارد . در ۱۹۱۶ ، اینشتین ساختار ریاضی دیگری معروف به نظریه نسبیت عام ارائه کرد ، که با دستگاههای شتاب دار ، یا نالخت سر و کار دارد . ما بحث خود را به نظریه نسبیت خاص محدود می کنیم .

۱-۶ تبدیلات گالیله ای و ناوردهای گالیله ای

دو ناظر در دو دستگاه لخت متفاوت S و S' ، که به ترتیب به دستگاههای بدون پریم و پریم دار موسومند ، در نظر بگیریم . فرض کنیم X_1, X_2, X_3 و X'_1, X'_2, X'_3 ، به ترتیب ، محورهای مختصات واقع در S و S' باشند . دستگاه لخت S' با سرعت v نسبت به دستگاه S در امتداد محورهای مشترک $X_1 - X'_1$ ، آن طور که در شکل (۱-۱۶) نمایش داده شده است ، حرکت می کند (یا دستگاه S با سرعت $-v$ نسبت به دستگاه S' حرکت می کند) . برای توصیف یک واقعه (یک پدیده) در یک دستگاه لخت ، یک ناظر باید علاوه بر سه مختصه فضایی ، مختصه چهارمی را هم مشخص کند ، و آن زمان است . فرض کنیم واقعه در P با دو مجموعه مختصات (x_1, x_2, x_3, t) و (x'_1, x'_2, x'_3, t') ، متناظر با دو ناظر ، به ترتیب در دستگاههای لخت S و S' ، توصیف شود . بنابر مفهوم نیوتنی ، این مختصه چهارم ، زمان ، در تمام دستگاههای لخت یک مقدار دارد ؛ یعنی ، زمان یک کمیت مطلق مستقل از چارچوب مرجع است . این بدان معنی است که $t = t'$ ، و به ناوردایی قوانین نیوتنی در تبدیلات گالیله ای زیر منجر می شود . بعداً خواهیم دید که این مطلق بودن زمان درست نیست ، و با کنار گذاشتن این شرط ، یعنی $t = t'$ ، است که نظریه کاملاً متفاوتی به وجود می آید .



شکل (۱-۱۶) : یک دستگاه مختصات S' با سرعت v نسبت به دستگاه مختصات S در امتداد

محورهای $X_1 - X'_1$ حرکت می کند

مختصات یک واقعه در P وقتی توسط دو ناظر مشاهده می شود با معادلات زیر به هم

مربوط می شوند

$$x'_1 = x_1 - vt$$

$$x'_2 = x_2$$

$$x'_3 = x_3$$

$$t' = t$$

(۱-۱۶)

این معادلات، که مختصات فضایی و زمانی در این دو دستگاه را، که با سرعت یکنواخت نسبت به یکدیگر حرکت می کنند به هم ربط می دهند، تبدیلات گالیله ای (یا نیوتنی) نامیده می شوند. بنابراین معادلات (۱-۱۶)، عنصر طول در این دو دستگاه یکی است و با رابطه زیر داده می شود

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i'^2 = ds'^2 \quad (۲-۱۶)$$

همان طور که قبلاً بیان شد، این واقعیت که قوانین نیوتن نسبت به تبدیلات گالیله ای ناوردا هستند، اصل نسبیت نیوتنی یا ناوردایی گالیله ای نامیده می شود. اکنون به اثبات آن

می پردازیم . تبدیلات گاليله ای سرعت را می توان از مشتق گیری معادلات (۱-۱۶) و با توجه به این که $t = t'$ ، و عملگرهای d/dt و d/dt' یکسانند ، به دست آورد .

$$\frac{dx'_1}{dt'} = \frac{dx_1}{dt} - v, \quad \frac{dx'_2}{dt'} = \frac{dx_2}{dt}, \quad \frac{dx'_3}{dt'} = \frac{dx_3}{dt} \quad (۳-۱۶)$$

به همین نحو با مشتق گیری از معادلات (۳-۱۶) تبدیلات گاليله ای شتاب متناظر را به دست خواهیم آورد

$$\frac{d^2x'_1}{dt'^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2}, \quad \frac{d^2x'_2}{dt'^2} = \frac{d^2x_2}{dt^2}, \quad \frac{d^2x'_3}{dt'^2} = \frac{d^2x_3}{dt^2} \quad (۴-الف)$$

یعنی

$$\ddot{x}'_j = \ddot{x}_j \quad (۴-ب)$$

یا

$$a' = a \quad (۵-۱۶)$$

به این ترتیب ، شتابها از دید دو دستگاه مختصات لخت یکسانند . بنابراین ، معادلات نیوتنی حرکت یک ذره به جرم m تحت اثر نیروی F از دید دو دستگاه لخت عبارتند از

$$F_j = m\ddot{x}_j = m\ddot{x}'_j = F'_j \quad (۶-۱۶)$$

یا

$$F = ma = ma' = F' \quad (۷-۱۶)$$

وقتی معادلات در دستگاههای لخت متفاوت یک شکل داشته باشند ، گوییم که قانون حرکت در تبدیلات گاليله ای ناورداست . می توان نشان داد که جمله های انفرادی ناورد نیستند ، اما تمام جملات به یک شیوه تبدیل می شوند . وقتی جملات متفاوت به یک شیوه تبدیل شوند ، گوییم هموردا هستند . از نظر ریاضی ، ناوردایی گاليله ای را می توان به صورت زیر بیان کرد . فرض کنیم یک سیستم در دستگاه S توسط معادله ای به شکل

$$f(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \quad (۸-۱۶)$$

توصیف شده باشد. این توصیف در دستگاه S به شکل زیر خواهد بود

$$f(x'_1, x'_2, x'_3, t') = 0 \quad (۹-۱۶)$$

سؤال کلیدی که در این مرحله باید مطرح شود این است: آیا این تبدیلات گالیله ای برای الکترومغناطیس نیز معتبر است؟ متأسفانه قوانین الکترومغناطیس در تبدیلات گالیله ای ناوردا نیستند. به عنوان مثال، یک موج الکترومغناطیسی کروی که با سرعت c در دستگاه S منتشر می شود، با معادله زیر داده می شود

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2 = 0 \quad (۱۰-۱۶)$$

برای این که این معادله ناوردا باشد، شکل آن در دستگاه S' باید به صورت زیر باشد

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - c^2 t'^2 = 0 \quad (۱۱-۱۶)$$

با قرار دادن x_1, x_2, x_3 ، و t از معادله (۱۰-۱۶) در معادله (۱۱-۱۶) (با ثابت گرفتن c در تمام دستگاههای لخت، به عنوان واقعیتهای تجربی) خواهیم داشت

$$(x_1' + vt)^2 + x_2'^2 - x_3'^2 - c^2 t'^2 = 0 \quad (۱۲-۱۶)$$

که می رساند

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2 \neq x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - c^2 t'^2 = 0 \quad (۱۳-۱۶)$$

یا

$$\sum_{i=1}^3 x_i^2 - c^2 t^2 \neq \sum_{i=1}^3 x_i'^2 - c^2 t'^2 \quad (۱۴-۱۶)$$

بنابراین ناوردایی گالیله ای برای الکترومغناطیس برقرار نیست.

۱۶-۳ اصول موضوع اینشتین و تبدیلات لورنتسی

تمام حقایق تجربی انباشته شده در اواخر قرن نوزدهم به این نتیجه انجامید که چارچوب مرجع خاصی وجود ندارد و تمام چارچوبهای مرجعی که با سرعتهای یکنواخت نسبت به یکدیگر حرکت می کنند هم ارزند. حل این مسأله و خیلی از مسائل دیگر در فیزیک در سال ۱۹۰۵ توسط اینشتین در مقاله ای تحت عنوان الکترودینامیک اجسام متحرک ارائه شد.

فرضهائی را که او در نظر گرفته بود می توان به شکل دو اصل موضوع اساسی به نام اصول موضوع نظریه نسبیت خاص اینشتین بیان کرد .

اصل موضوع (۱) ، اصل نسبیت خاص : قوانین فیزیک ، شامل قوانین مکانیک و الکترومغناطیس ، در تمام دستگاههای لخت یکسانند ، حتی اگر این چارچوبهای لخت نسبت به یکدیگر در حرکت انتقالی یکنواخت باشند .

اصل موضوع (۲) ، اصل ثابت بودن سرعت نور : سرعت نور در فضای آزاد (خلأ) همیشه ثابت و برابر با $c (= 3 \times 10^8 \text{ m/s})$ و مستقل از دستگاه لخت و حرکت نسبی منبع و ناظر است .

اصل موضوع (۱) تعمیم این واقعیت است که تمام قوانین فیزیکی (شامل قوانین مکانیکی و الکترومغناطیسی) تحت تمام تبدیلات ناوردا هستند . این مسأله نوعی وحدت بین این دو ایجاد می کند . همچنین بیان می دارد که یک دستگاه لخت مطلق (با مرجح) وجود ندارد . اصل موضوع (۲) صرفاً بیان یک واقعیت تجربی است .

با این که این دو اصل موضوع بسیار ساده به نظر می آیند ، پیامدهای گسترده ای دارند . نخست ، معادلات تبدیل را برای دستگاههای لخت که با سرعت یکنواخت نسبت به یکدیگر حرکت می کنند ، به دست بیاوریم . در عین حال بخواهیم که این تبدیلات هم به مکانیک نیوتنی قابل اعمال باشند و هم به الکترومغناطیس . اینشتین این تبدیلات را در ۱۹۰۵ به دست آورد . این تبدیلات به تبدیلات لورنتسی موسومند ، زیرا برای نخستین بار لورنتس در ۱۹۸۰ آنها را به عنوان قسمتی از نظریه الکترومغناطیس خود ارائه کرده بود . این تبدیلات لورنتسی بعداً مورد بحث قرار خواهند گرفت .

یک بار دیگر ، دو دستگاه لخت S و S' را که با سرعت یکنواخت نسبت به یکدیگر ، آن طور که در شکل (۱۶-۱) نشان داده شده است ، حرکت می کنند و مبدأهای آنها در $t = 0$ برهم منطبقند در نظر بگیریم . فرض کنیم که در $t = 0$ یک منبع نور در مبدأ دستگاه لخت بدون پریم S یک تپ نوری گسیل می کند . یک ناظر در این دستگاه یک سطح موج کروی خواهد دید که با سرعت c منتشر می شود . معادله این سطح موج از دید ناظر واقع در S عبارت است از

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2 = 0 \quad (15-16)$$

به خاطر ناوردایی سرعت نور، از دید ناظر واقع در یک دستگاه متحرك (نسبت به منبع) S' ، نور به صورت یک موج کروی از مبدأ ناظر منتشر می شود، و معادله سطح موج عبارت است از

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - c^2 t'^2 = 0 \quad (16-16)$$

توجه کنیم که $t \neq t'$ این امکان را می رساند که در رفتن از یک دستگاه لخت به دستگاه لخت دیگر معیار زمان نیز باید تبدیل شود. به این ترتیب ناوردایی یک قانون فیزیکی ایجاب می کند که

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - c^2 t'^2 \quad (17-16)$$

یا

$$\sum_{i=1}^3 x_i^2 - c^2 t^2 = \sum_{i=1}^3 x_i'^2 - c^2 t'^2 \quad (18-16)$$

اکنون مختصه موهومی چهارم:

$$x_4 = ict \quad \text{و} \quad x_4' = ict' \quad (19-16)$$

را وارد کنیم. به این ترتیب معادله (۱۸-۱۶) به شکل زیر در می آید

$$\sum_{\mu=1}^4 x_{\mu}^2 = \sum_{\mu=1}^4 x_{\mu}'^2 \quad (20-16)$$

(یادآوری کنیم که حروف لاتین i, j, k ، و غیره، وقتی به کار می روند که گستره شاخصها از ۱ تا ۳ باشد، و حروف یونانی μ, ν, λ ، و غیره، وقتی به کار گرفته می شوند که گستره شاخصها از ۱ تا ۴ باشد) مقایسه معادله (۲۰-۱۶) با معادله (۲-۱۶) نشان می دهد که (۲۰-۱۶) شبیه به تبدیل متعامد سه بُعدی برای چرخش از یک دستگاه به دستگاه دیگر است که فاصله را ناوردانگاه می دارد. به این ترتیب معادله (۲۰-۱۶) می رساند که تبدیلی که در جستجوی آن هستیم متناظر با یک چرخش در فضای چهاربُعدی است که شامل سه بُعد برای فضای معمولی و یک بُعد موهومی چهارم متناسب با زمان (ict) است. این فضای چهاربُعدی به فضای مینکوفسکی یا فضای جهانی معروف است. بنابراین، تبدیلات لورنتسی صرفاً تبدیلات متعامد در فضای مینکوفسکی اند.

دستگاه لخت S' با سرعت یکنواخت v نسبت به دستگاه لخت S حرکت می کند. بنابراین، در جستجوی تبدیلی لورنتسی خالصی هستیم که با چرخش فضایی سر و کار نداشته

باشد. یک تبدیل لورنتسی خالص تنها با دستگامهای لخت با حرکت یکنواخت سر و کار دارد. اگر فرض کنیم که سرعت v ی S' نسبت به S در جهت یکی از محورها، مثلاً در امتداد $X_1 - X'_1$ ، است چیزی از کلیت مسأله کم نمی شود. بنابراین، اگر تبدیلات متعامد باشند، می خواهیم عناصر ماتریسی $\lambda_{\mu\nu}$ ی ماتریس تبدیل λ بین X و X' ، یعنی، در نمادگذاری ماتریسی،

$$X' = \lambda X \quad (21-16)$$

یا

$$x'_\mu = \sum_{\nu=1}^4 \lambda_{\mu\nu} x_\nu \quad (22-16)$$

را پیدا کنیم که $\lambda_{\mu\nu}$ عناصر ماتریس تبدیل لورنتسی هستند. چون سرعت در امتداد محورهای $X_1 - X'_1$ است، داریم

$$x_2 = x'_2 \quad \text{و} \quad x_3 = x'_3$$

بطوری که ماتریس تبدیل λ به شکل زیر است

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 & \lambda_{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda_{41} & 0 & 0 & \lambda_{44} \end{pmatrix} \quad (23-16)$$

عناصر ماتریسی باید در شرایط تعامد

$$\sum_{\nu=1}^4 \lambda_{\mu\nu} \lambda_{\eta\nu} = \delta_{\mu\eta} \quad (24-16)$$

صدق کنند که به سه معادله مستقل زیر منجر می شود

$$\lambda_{11}^2 + \lambda_{14}^2 = 1 \quad (25-16)$$

$$\lambda_{41}^2 + \lambda_{44}^2 = 1 \quad (26-16)$$

$$\lambda_{11} \lambda_{41} + \lambda_{14} \lambda_{44} = 0 \quad (27-16)$$

بر خلاف تبدیلات متعامد فضایی، عناصر ماتریسی در این مورد ممکن است موهومی باشند. چون مختصات x'_1 ، x'_2 و x'_3 حقیقی هستند، عناصر λ_{14} ، λ_{24} و λ_{34} باید موهومی باشند. از

طرف دیگر، x'_4 موهومی است، که ایجاب می کند λ_{41} ، λ_{42} ، و λ_{43} موهومی باشند، در حالی که λ_{44} باید حقیقی باشد.

برای پیدا کردن چهار عنصر ماتریسی مستقل، از سه معادله (۱۶-۲۵)، و (۱۶-۲۶) و (۱۶-۲۷) استفاده می کنیم، اما هنوز به یک معادله دیگر نیاز داریم. شرط چهارم از این واقعیت تأمین می شود که مبدأ دستگاه پریم دار ($x'_1 = 0$) با سرعت یکنواخت در امتداد محورهای $X_1 - X'_1$ حرکت می کند بطوری که در زمان t برای $x'_1 = 0$ داریم

$$x_1 = vt = -i \frac{v}{c} ict = -i\beta x_4, \quad x'_1 = 0 \quad (۱۶-۲۸)$$

که در آن

$$\beta \equiv \frac{v}{c} \quad (۱۶-۲۹)$$

از رابطه $X' = \lambda X$ ، معادله (۱۶-۲۱)، می توانیم بنویسیم

$$x'_1 = \lambda_{11}x_1 + \lambda_{14}x_4 \quad (۱۶-۳۰)$$

که باید در این شرط که، وقتی $x'_1 = 0$ باشد x_1 باید برابر با vt باشد، صدق کند. سپس می توانیم از معادله (۱۶-۲۸) مقدار $x_1 = -i\beta x_4$ را در معادله (۱۶-۳۰) قرار دهیم؛ یعنی

$$0 = \lambda_{11}(-i\beta x_4) + \lambda_{14}x_4$$

یا

$$\lambda_{14} = i\beta\lambda_{11} \quad (۱۶-۳۱)$$

قرار دادن این مقدار در معادله (۱۶-۲۵) می دهد

$$\lambda_{11}^2 + (i\beta\lambda_{11})^2 = 1$$

یا

$$\lambda_{11} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (۱۶-۳۲)$$

و، با استفاده از (۱۶-۳۱)، به دست می آوریم

$$\lambda_{14} = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (33-16)$$

با بردن معادلات (۱۶-۳۲) و (۱۶-۳۳) در معادله (۱۶-۲۷)، خواهیم یافت

$$\lambda_{44} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (34-16)$$

$$\lambda_{41} = \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (35-16)$$

بنابراین، با نتایج به دست آمده در چهار معادله پیشین و با به کارگیری نماد

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (36-16)$$

ماتریس تبدیل لورنتسی λ به شکل زیر در می آید

$$\lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (37-16)$$

و، با استفاده از رابطه $X' = \lambda X$ ، معادلات تبدیل لورنتسی عبارتند از

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt) = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x'_2 = x_2 \quad (38-16)$$

$$x'_3 = x_3$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x_1\right) = \frac{t - (v/c^2)x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

تبدیل وارون صرفاً با ترانهاده کردن ماتریس (یا با گذاردن v به جای v و تعویض مختصات

پریم دار و بدون پریم)، به دست می آید؛ یعنی

$$x_1 = \gamma(x'_1 + vt')$$

$$x_2 = x'_2$$

$$x_3 = x'_3$$

$$(39-16)$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'_1\right)$$

این تبدیلات لورنتسی نسبت به قوانین مکانیک و همچنین قوانین الکترومغناطیس هم وردا

هستند . به علاوه ، این معادلات برای $v \rightarrow 0$ به تبدیلات گالیله ای کاهش می یابند .

۴-۱۶ چند پیامد از تبدیلات لورنتسی

اعمال تبدیلات لورنتسی به وضعیتهای گوناگون به چند نتیجه و پارادوکس ظاهری جالب منجر می شود . ما قصد نداریم خود را در آنها درگیر کنیم ، اما صرفاً بعضی از نتایج معروف تبدیلات لورنتسی را مورد بحث قرار می دهیم .

انقباض طول : انقباض فیتز جرالد - لورنتس

انبساط زمان : کند شدن ساعتها

همزمانی

جمع سرعتها

انقباض طول : انقباض فیتز جرالد - لورنتس

بنابر فیزیک کلاسیک ، طول یک جسم ، مثلاً یک میله یک متری ، برای تمام ناظرها ، با این که این ناظرها ممکن است با یکدیگر در حرکت نسبی باشند ، یکی است . اما در نسبیت این گونه نیست ، و با به کارگیری معادلات تبدیل لورنتسی ، می توانیم نشان دهیم که طول یک جسم برای ناظرهای متفاوت مختلف است .

یک میله صلب در دستگاه بدون پریم S در امتداد محور X در نظر بگیریم بطوری که طول آن $L_0 = x_2 - x_1$ است . یک ناظر در دستگاه متحرك S' (متحرك در امتداد محورهای $X_1 - X'_1$ با سرعت v) طول میله را با تعیین مکانهای دو سر آن در زمان t' در دستگاه خودش ، یعنی x'_1 و x'_2 ، اندازه گیری می کند . از تبدیلات وارون لورنتسی ، معادله (۱۶-۳۹) ، داریم

$$x_1 = \frac{x'_1 + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (۱۶-۴۰)$$

$$x_2 = \frac{x'_2 + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (۱۶-۴۱)$$

یادآوری می کنیم که به این خاطر از تبدیلات وارون لورنتسی استفاده کرده ایم که هر دو انتهای میله به طور همزمان توسط ناظر متحرك اندازه گیری می شوند ، که می رساند $t'_1 = t'_2 = t'$ به این ترتیب

$$x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (۴۲-۱۶)$$

چون $x_2 - x_1 = L_0$ ، با قرار دادن $x'_2 - x'_1 = L$ می توانیم بنویسیم

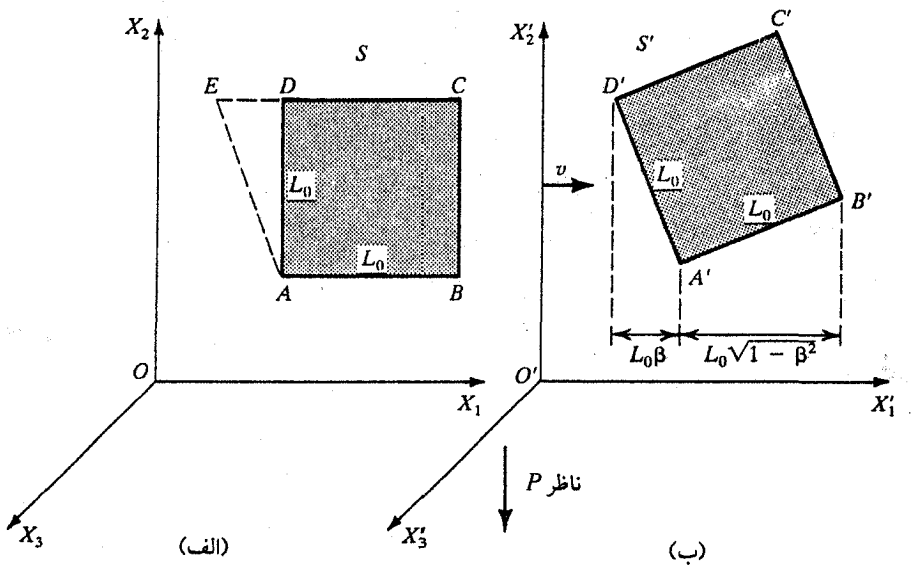
$$L = L_0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (۴۳-۱۶)$$

چون $\sqrt{1 - \beta^2}$ همیشه کوچکتر از یک است ، یک میله به طول سکون L_0 وقتی توسط یک ناظر متحرک اندازه گیری شود منقبض شده به نظر می آید . بنابراین طول مطلق نیست ، بلکه بستگی به ناظر دارد . این اثر دوطرفه است . اگر میله در S' در حال سکون بود ، وقتی توسط ناظر در S که با سرعت v - نسبت به دستگاه S حرکت می کند ، اندازه گیری می شد منقبض شده به نظر می آمد . معادله (۴۳-۱۶) نمایشگر انقباض فیترجرالد - لورنتس است .

لازم به یادآوری است که این انقباض طول فرآیندی فیزیکی نیست . در نسبیت ، این تعریف اندازه گیری طول یک جسم در حال حرکت نسبی نسبت به ناظر است که به انقباض طول منجر می شود . ممکن است فکر کنیم که به علت انقباض ، اجسام از دید دستگاههایی که نسبت به آنها در حرکتند ، واپیچیده به نظر می آیند - یک کره ممکن است به صورت یک بیضوی به نظر بیاید . اما چنین نیست . اجسام فقط چرخیده اند ، و ما ممکن است بخشی از قسمتهای نامرئی اجسام متحرک را ببینیم . این مطلب نخستین بار توسط جیمز ترل در ۱۹۵۹ نشان داده شده و در زیر توضیح داده خواهد شد .

مکعبی به ضلع L_0 در نظر بگیریم که با سرعت یکنواخت v نسبت به یک ناظر P که قدری با آن فاصله دارد ، در حرکت است . شکل (۱۶-۲ الف) تصویر مکعب و مکان ناظر را که در آن ضلع AB ی مکعب عمود بر خط دید ناظر است ، نشان می دهد . می خواهیم مکانهای نسبی گوشه های A ، B ، C ، و D ی مکعب را پیدا کنیم زیرا این مسأله تعیین می کند که ناظر مکعب را چگونه «می بیند» . دیدگاه سستی این بود که ضلعهای AB و CD به $L_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ منقبض خواهند شد ، و ارتفاعهای BC و AD بدون تغییر خواهند ماند . بنابراین مکعب واپیچیده به نظر خواهد آمد . ترل ثابت کرد که این تعبیر درست نیست . به عنوان مثال ، برای این که نور از گوشه های A و D همزمان به P برسد ، نور از D باید به اندازه L_0 بیشتر طی طریق کند ، که می رساند نور از D وقتی گسیل شده است که D در E بوده است . این مطلب به طول $DE = \frac{L_0}{c} v = L_0 \beta$ منجر می شود . به این ترتیب ناظر نه تنها ضلع AB را ، که عمود

بر خط دید است، می بیند، بلکه ضلع AD را نیز، که موازی با خط دید است، می بیند. به علاوه، طول AB طبق معمول به $L_0\sqrt{1-\beta^2}$ منقبض شده است. نتیجه کلی به صورتی است که در شکل (۱۶-۲) نمایش داده شده است و بنابراین متناظر با آن چیزی است که ناظر، اگر مکعب به اندازه زاویه $\theta = \sin^{-1}(\beta)$ چرخیده بود می دید. به همین نحو یک کره چرخیده شده به نظر می آید، نه وایچیده به یک بیضی وار.



شکل (۱۶-۲): مکعب قسمت (الف) که با سرعت v در امتداد محورهای $X_1-X'_1$ حرکت می کند، به نظر ناظر واقع در P ، آن طور که در قسمت (ب) نشان داده شده است، چرخیده به نظر می آید. ناظر نه تنها ضلع AB را که عمود بر خط دید اوست می بیند، که همچنین AD را که موازی با خط دید اوست اما، آن طور که در قسمت (ب) نشان داده شده است، کج به نظر می آید. می بیند. این خطوط متناظر با $A'D'$ و $A'B'$ هستند

انبساط زمان: کند شدن ساعتها

همانند طول، بازه زمانی نیز مطلق نیست. بازه زمانی بین دو واقعه بستگی به حرکت نسبی ناظرها دارد.

یک ساعت در دستگاه بدون پریم S واقع در نقطه x_1 در نظر بگیریم. فرض کنیم، از نظر ناظر S ، ساعت عدد t_1 را می خواند، اما ناظری که در دستگاه متحرک S' قرار دارد عدد t'_1 را برابر با

$$t'_1 = \frac{t_1 - (v/c^2)x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (۴۴-۱۶)$$

می خواند. به همین نحو، وقتی ناظر S عدد t_2 را می خواند، ناظر S' عدد

$$t'_2 = \frac{t_2 - (v/c^2)x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (۴۵-۱۶)$$

را یادداشت می کند. (یادآوری کنیم که برای هر دو مشاهده، ساعت در نقطه x_1 در S تثبیت شده است). بازه زمانی بین دو واقعه که در دستگاه S به اندازه $\Delta t = t_2 - t_1$ است، در دستگاه S' به اندازه $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ خواهد بود. با کم کردن معادله (۴۴-۱۶) از معادله (۴۵-۱۶)، خواهیم داشت

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (۴۶-۱۶)$$

به این ترتیب بازه زمانی ظاهری $\Delta t' = T$ برحسب بازه زمانی سکون $\Delta t = T_0$ عبارت است از

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (۴۷-۱۶)$$

چون $\sqrt{1 - \beta^2}$ همیشه کمتر از یک است، بازه زمانی T_0 که توسط ساعت ساکن در S خوانده می شود، در ساعت واقع در دستگاه متحرک S' به صورت بازه زمانی طولانی تر T ثبت می شود. معادله (۴۷-۱۶) نمایشگر پدیده انبساط زمان یا کند شدن ساعتهاست. به عنوان مثال، اگر $v = 0.98c$ باشد، از معادله (۴۷-۱۶) داریم $T = 5T_0$. این بدان معنی است که، از نظر ناظر واقع در دستگاه S' ، یک ساعت واقع در دستگاه S خیلی کندتر کار می کند، و ساعت S' برای همان واقعه یک بازه زمانی پنج برابر نشان می دهد. این اثر دوطرفه است؛ وقتی یک ناظر در دستگاه S به یک ساعت در دستگاه S' نگاه می کند، فکر می کند که ساعت واقع در S' کند کار می کند. به این ترتیب مطلب را این گونه به پایان می بریم:

اگر یک ناظر در یک چارچوب مرجع در حال سکون باشد، این چارچوب، چارچوب ویژه نامیده می شود. بازه زمانی اندازه گیری شده بین دو واقعه که در این چارچوب

رخ داده باشند ، بازه زمانی ویژه نامیده می شود . طول جسم واقع در این دستگاه و اندازه گیری شده در این دستگاه طول ویژه نامیده می شود . اگر ناظر نسبت به یک چارچوب لخت که جسم در آن قرار دارد و وقایع در آن رخ داده است ، حرکت کند ، طول و بازه زمانی اندازه گیری شده ، به ترتیب ، طول ناویژه و بازه زمانی ناویژه خوانده می شود . چیزی به عنوان چارچوب ویژه ، طول ویژه ، یا زمان ویژه مطلق وجود ندارد .

همزمانی

یک تفاوت اساسی بین مکانیک نیوتنی و مکانیک نسبیتی این است که در مکانیک نسبیتی مختصات فضایی و زمانی چنان به هم وابسته اند که ممکن نیست از یکی بدون دیگری حرف زد ؛ بنابراین صحبت از همزمانی مطلق به معنی کلاسیکی آن بی معنی است ؛ به عنوان مثال :

۱- دو واقعه که در دستگاه S در دو نقطه x_1 و x_2 رخ داده اند و در S همزمانند ($t_1 = t_2$) ،

در S' همزمان نخواهند بود ($t'_1 \neq t'_2$)

۲- دو واقعه که در دستگاه S در یک مکان ($x_1 = x_2$) اما در دو زمان متفاوت رخ بدهند ،

رخداد آنها برای ناظر S' نه تنها در دو زمان متفاوت ، که همچنین در دو مکان

متفاوت ($x'_1 \neq x'_2$ و $t'_1 \neq t'_2$) به نظر می آید . این نتایج بطور ریاضی از معادلات

تبدیل لورنتسی روشن می شوند .

معادلات تبدیل لورنتسی همچنین نشان می دهد که نمی توان سرعتی بزرگتر از c

داشت . اگر دستگاهی بتواند $v > c$ داشته باشد ، تبدیلات از این دستگاه به دستگاه سکون

ممکن نخواهد بود زیرا این تبدیلات به مختصاتی موهومی منجر خواهند شد ، که غیرممکن

است .

جمع سرعتها

مانند قبل ، دو دستگاه لخت S و S' با سرعت نسبی v در امتداد محورهای $X_1 - X'_1$

در نظر بگیریم . ذره P را در نظر بگیریم که از نظر ناظر دستگاه S با سرعت u (u_1, u_2, u_3) و از

نظر ناظر دستگاه S' با سرعت u' (u'_1, u'_2, u'_3) در فضا حرکت می کند . هدف ما پیدا کردن

رابطه بین مؤلفه های u و u' است

$$u_1 = \frac{dx_1}{dt}, \quad u_2 = \frac{dx_2}{dt}, \quad u_3 = \frac{dx_3}{dt}$$

$$u'_1 = \frac{dx'_1}{dt}, \quad u'_2 = \frac{dx'_2}{dt}, \quad u'_3 = \frac{dx'_3}{dt}$$

با دیفرانسیل گیری از معادلات (۱۶-۳۸) خواهیم داشت

$$dx'_1 = \gamma(dx_1 - v dt)$$

$$dx'_2 = dx_2$$

$$dx'_3 = dx_3$$

(۱۶-۴۸)

$$dt' = \gamma \left(dt - \frac{v}{c^2} dx_1 \right)$$

به این ترتیب مؤلفه های u' با روابط زیر داده می شوند

$$u'_1 = \frac{dx'_1}{dt'} = \frac{\gamma(dx_1 - v dt)}{\gamma[dt - (v dx_1/c^2)]} = \frac{(dx/dt) - v}{1 - (v/c^2)(dx_1/dt)}$$

یا

$$u'_1 = \frac{u_1 - v}{1 - (vu_1/c^2)} \quad (۱۶-۴۹ \text{ الف})$$

به همین نحو

$$u'_2 = \frac{u_2}{\gamma[1 - (vu_1/c^2)]} \quad \text{و} \quad u'_3 = \frac{u_3}{\gamma[1 - (vu_1/c^2)]} \quad (۱۶-۴۹ \text{ ب})$$

این معادلات، معادلات تبدیلات لورنتسی سرعت نامیده می شوند. تبدیلات وارون u بر حسب u' را می توانیم با قرار دادن $-v$ به جای v و تعویض مختصات پریم دار و بدون پریم به دست آوریم.

با استفاده از این تبدیلات سرعت، کاملاً روشن می شود که (۱) هیچ چیز در خلأ نمی تواند با سرعتی بزرگتر از سرعت نور حرکت کند، و (۲) سرعت نور مستقل از حرکت نسبی منبع یا ناظر است. فرض کنیم در تبدیلات وارون

$$u_1 = \frac{u'_1 + v}{1 + (vu'_1/c^2)} \quad (۱۶-۵۰)$$

u_1 و v هر دو بزرگتر از $\frac{c}{2}$ باشند. طبق نظریه کلاسیکی، سرعت نسبی u_1 بزرگتر از c خواهد

بود. اما طبق معادلات (۱۶-۵۰)، u_1 کوچکتر از c خواهد بود. به همین نحو، اگر $u'_1 = c$ و $v = c$ باشد، برابر نظریه کلاسیکی $u_1 = 2c$ ، اما بنابر معادله (۱۶-۵۰)، u_1 هنوز برابر با c است. باید توجه کرد که با این که سرعت یک علامت نوری نمی تواند بزرگتر از c باشد، وضعیتهای دیگری، از قبیل سرعت فاز، وجود دارد که در آنها v از c بیشتر است.

اکنون بحث خود را به روش زیر گسترش دهیم. سه دستگاه لخت S ، S' و S'' ، که در امتداد محورهای مشترک $X_1 - X'_1 - X''_1$ حرکت هم خط دارند در نظر بگیریم. سرعت S'' نسبت به S' را u_2 و سرعت S' نسبت به S را u_1 بگیریم. می خواهیم سرعت نسبی S'' را نسبت به S پیدا کنیم. این کار را می توان با استفاده از ماتریس تبدیل لورنتسی λ انجام داد؛

به این ترتیب

$$\begin{aligned} \lambda_{S'' \rightarrow S} &= \lambda_{S'' \rightarrow S'} \lambda_{S' \rightarrow S} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & i\beta_1 \gamma_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta_1 \gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_2 & 0 & 0 & i\beta_2 \gamma_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta_2 \gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) & 0 & 0 & i\gamma_1 \gamma_2 (\beta_1 + \beta_2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma_1 \gamma_2 (\beta_1 + \beta_2) & 0 & 0 & \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (51-16)$$

برای این که این ماتریس یک ماتریس تبدیل مستقیم از S'' به S باشد باید داشته باشیم

$$\lambda_{S'' \rightarrow S} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (52-16)$$

مقایسه معادلات (۱۶-۵۱) و (۱۶-۵۲) می دهد

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) \\ \beta\gamma &= \gamma_1 \gamma_2 (\beta_1 + \beta_2) \end{aligned} \quad (53-16)$$

که وقتی برای β حل شود می دهد

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} \quad (54-16)$$

چون $\beta = \frac{u}{c}$ ، $\beta_1 = \frac{u_1}{c}$ و $\beta_2 = \frac{u_2}{c}$ ، ضرب معادله (۱۶-۵۴) در c می دهد

$$u = \frac{u_1 + u_2}{1 + (u_1 u_2 / c^2)} \quad (55-16)$$

که شبیه به نتیجه ای است که قبلاً به دست آمده بود. توجه کنیم که، مانند قبل، اگر $u_1 < c$ و $u_2 < c$ ، نتیجه می شود $u < c$ ؛ و اگر $u_1 = u_2 = c$ ، نتیجه می شود $u = c$.

۱۶-۵ فرمول بندی هموردا و چار - بردارها

از بحثهای پیشین می توانیم نتیجه بگیریم که قوانین فیزیکی در تبدیلات لورنتسی از نظر شکل ناوردا هستند. بنابراین نخستین کار ما ایجاد اصلاحاتی در قوانین مکانیکی است به نحوی که در تمام دستگاههای لخت که نسبت به یکدیگر حرکت یکنواخت دارند یک شکل داشته باشند. اصلاح این معادلات برای فضای چهاربُعدی ساده و آسان است. به علاوه، چنین اصلاحاتی نباید محتویات فیزیکی قانون را تحت هیچ نوع چرخش خاصی از محورهای فضایی تغییر بدهد. به این ترتیب قوانین فیزیکی باید در چرخشهای صلب وار، یعنی تبدیلات متعامد فضایی، از نظر شکل ناوردا باشند. بحث ناوردایی تحت چرخش فضایی را کمی بعد دنبال خواهیم کرد.

در ساختن هر معادله ای برای نمایش یک قانون فیزیکی خواسته می شود که جملات معادله باید همه نرده ای، یا همه برداری، یا بطور کلی همه تانسورهای از یک مرتبه باشند. بنابراین اگر دو بردار A و B در رابطه

$$A = B \quad (56-16)$$

صدق کنند، لازم است که مؤلفه های آنها در رابطه

$$A_i = B_i \quad (57-16)$$

صدق کنند. وقتی چرخش فضایی انجام می گیرد مقادیر این مؤلفه ها ناوردا نیستند، اما باید طوری به مؤلفه های جدید A'_i و B'_i تبدیل شوند که داشته باشیم

$$A'_i = B'_i \quad (58-16)$$

و

$$A' = B' \quad (59-16)$$

می‌گوییم که جمله‌های معادله هموردا هستند ، و ناوردایی در معادله (۱۶-۵۹) از این واقعیت ناشی می‌شود که هر دو طرف معادله (۱۶-۵۶) مانند بردار تبدیل می‌شوند . بطور کلی ، اگر دو تانسور مرتبه دوم در نظر بگیریم که برابر باشند ،

$$C = D \quad (۱۶-۶۰)$$

این تانسورها در اثر چرخش فضایی بطور هموردا تبدیل می‌شوند ، و می‌توانیم بنویسیم

$$C' = D' \quad (۱۶-۶۱)$$

به این ترتیب نتیجه می‌گیریم :

برای این که یک قانون فیزیکی در چرخش مختصات فضایی ناوردا بماند ، لازم است که جمله‌های معادله در تبدیل متعامد سه بُعدی هموردا باشند .

تبدیلات لورنتسی تبدیلات متعامدی در فضای جهانی هستند . کمیتهای مختلف درگیر شده می‌تواند از نوع ، نرده‌ای جهانی ، بردار جهانی ، یا تانسور جهانی از هر مرتبه‌ای باشد . اگر یک قانون معین را در یک شکل چهاربُعدی هموردا بیان کنیم ، می‌توانیم با بررسی نتیجه بگیریم که در اثر تبدیلات لورنتسی ناورداست .

ما با کمیات برداری آشنا هستیم . هر بردار سه مؤلفه دارد ، و به اصطلاح یک سه-بردار داریم . در این فصل با کمیتهایی سر و کار داریم که چهار مؤلفه دارند ، مانند (x_1, x_2, x_3, ict) . کمیته A یک چار بردار است اگر شامل چهار مؤلفه باشد و هر مؤلفه طبق رابطه

$$A'_\mu = \sum_\nu \lambda_{\mu\nu} A_\nu \quad (۱۶-۶۲)$$

تبدیل شود که $\lambda_{\mu\nu}$ ها عناصر ماتریسی تبدیل لورنتسی هستند . به این ترتیب کمیته (x_1, x_2, x_3, ict) یک چار-بردار در فضای مینکوفسکی است که به صورت زیر نمایش داده می‌شود .

$$x_\mu \equiv x = (x_1, x_2, x_3, ict) = (\mathbf{x}, ict) \quad (۱۶-۶۳)$$

سه مؤلفه اول \mathbf{x} مؤلفه‌های بردار \mathbf{x} در فضای سه بُعدی معمولی هستند . به همین نحو ، عنصر دیفرانسیلی $d\mathbf{x}$ نیز یک چار-بردار است که به صورت زیر داده می‌شود

$$dx_\mu \equiv d\mathbf{x} = (d\mathbf{x}, ic dt) \quad (۱۶-۶۴)$$

عنصر طول ds در فضای مینکوفسکی چهاربُعدی تحت تبدیلات لورنتسی ناورد است و می‌تواند به شکل زیر نوشته می‌شود

$$ds = \sqrt{\sum_{\mu} dx_{\mu}^2} = \sqrt{\sum_i dx_i^2 - c^2 dt^2} = \text{ناوردا} \quad (۱۶-۶۵)$$

به علاوه، یک بازه زمانی ویژه یا بازه زمانی جهانی، $d\tau$ ، در فضای مینکوفسکی، که بعداً تعریف می‌شود، نیز ناورد است:

$$\begin{aligned} d\tau &= \sqrt{dt^2 - \frac{\sum_i dx_i^2}{c^2}} = \sqrt{dt^2 + \frac{i^2}{c^2} \sum_i dx_i^2} \\ &= \frac{i}{c} \sqrt{\sum_i dx_i^2 - c^2 dt^2} = \frac{i}{c} \sqrt{\sum_i dx_i^2 + (ic dt)^2} \end{aligned} \quad (۱۶-۶۶)$$

یعنی

$$d\tau = \frac{i}{c} \sqrt{\sum_{\mu} dx_{\mu}^2} = \frac{i}{c} ds = \text{constant} \quad (۱۶-۶۷)$$

چون ds یک ثابت یا ناورد است، همان‌طور که در معادله (۱۶-۶۵) نشان داده شده است، و $d\tau$ نیز $\frac{i}{c}$ برابر ds است، $d\tau$ نیز باید ثابت یا ناوردا باشد. از معادله (۱۶-۶۶) داریم

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \sum_i \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2} \quad (۱۶-۶۸)$$

اما

$$\sum_i \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 = v^2 \quad (۱۶-۶۹)$$

در نتیجه

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = dt \sqrt{1 - \beta^2} \quad (۱۶-۷۰)$$

پا

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (۱۶-۷۱)$$

توجه کنیم که این همان نتیجه‌ای است که ما برای انبساط زمان به دست آورده بودیم، که در آن

بازه زمانی ویژه dt بازه زمانی در روی ساعت متصل به خود ذره یا جسم ، و dt بازه زمانی اندازه گیری شده توسط یک ناظر ساکن در آزمایشگاه بود .

چون یکی از مؤلفه های چار-بردار موهومی است ، دیگر لازم نیست که مربع چار-بردار همواره مثبت باشد . اگر بزرگی مربع چار-بردار بزرگتر یا مساوی صفر باشد ، فضاگونه نامیده می شود ، و اگر بزرگی مربع چار-بردار منفی باشد ، زمان گونه نامیده می شود . این اندازه ها نرده ایهای جهانی هستند ؛ در نتیجه در تبدیلات لورنتسی بدون تغییر می مانند . بردار تفاضل بین دو نقطه جهانی می تواند یا فضاگونه باشد یا زمان گونه ؛ یعنی

$$dx_\mu = x_{1\mu} - x_{2\mu} \quad (۱۶-۷۲)$$

$$\sum_\mu dx_\mu^2 = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2 - c^2(t_1 - t_2)^2 \quad (۱۶-۷۳)$$

به این ترتیب

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2 \geq c^2(t_1 - t_2)^2, \quad \text{فضاگونه} \quad (۱۶-۷۴)$$

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2 < c^2(t_1 - t_2)^2, \quad \text{زمان گونه} \quad (۱۶-۷۵)$$

دو نقطه جهانی که بردار فاصله آنها فضاگونه است ، نمی توانند به وسیله هیچ موجی که با سرعت c حرکت می کند به یکدیگر پیوندند ، در حالی که نقاط با بردار فاصله زمان گونه می توانند با یک تپ نوری که با سرعت c حرکت می کند به یکدیگر پیوندند .

فرض کنیم دو نقطه پیشین در روی محور X_1 قرار داشته باشند این کار می تواند با تبدیل لورنتسی انجام شود . برای یک dx_μ فضاگونه داریم

$$c(t_1 - t_2) < x_1 - x_2$$

و یک نقطه در فضای جهانی متناظر با چیزی است که در نقطه مشخص x و زمان معین t اتفاق افتاده باشد ، یعنی یک واقعه را توصیف کند . می توان تبدیلاتی در نظر گرفت که dx'_4 صفر باشد ، یعنی ، در یک وضعیت فضاگونه می توان ناظری پیدا کرد که این دو واقعه برای او همزمان باشند .

با شناختن تعریف اساسی عناصر دیفرانسیلی فاصله و زمان ، می توانیم مثالهای بسیاری برای چار-بردار ارائه دهیم . به این ترتیب یک چار-بردار سرعت $\mathbf{v} \equiv u_\mu$ به صورت آهنگ

تغییرات بردار مکانی یک ذره نسبت به زمان ویژه خودش، یعنی، تقسیم عنصر dx_μ چهار-بردار بر زمان ویژه $d\tau$ ، تعریف می شود

$$u_\mu \equiv \mathbf{V} = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \left(\frac{dx_i}{d\tau}, ic \frac{dt}{d\tau} \right) \quad (76-16)$$

با قرار دادن $d\tau$ از معادله (70-16)، به دست می آوریم

$$u_\mu \equiv \mathbf{V} = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \left(\frac{dx_i}{dt\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \quad (77-16)$$

بنابراین مؤلفه های فضایی و زمانی چهار-بردار سرعت عبارتند از

$$u_i = \frac{v_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad u_4 = \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (78-16)$$

سرعت جهانی بزرگی ثابتی به صورت زیر دارد

$$\sum_{\mu=1}^4 u_\mu^2 = \sum_{i=1}^3 u_i^2 + u_4^2 = \frac{v^2}{1-\beta^2} - \frac{c^2}{1-\beta^2} = -c^2 \quad (79-16)$$

که چون منفی است، زمان گونه است.

۱۶-۶ دینامیک نسبیتی

دیدیم که معادلات نیوتنی حرکت در تبدیلات گالیله ای ناوردا هستند. قانون دوم

نیوتن

$$\frac{d}{dt} (m_0 v_i) = F_i \quad (80-16)$$

خودش ناوردای لورنتسی نیست، اما تعمیم نسبیتی آن ناوردا خواهد بود. این تعمیم به یک معادله چهار-برداری منجر خواهد شد که سه مؤلفه فضایی آن در حد $\beta \rightarrow 0$ به معادله (80-16) کاهش می یابند. تعمیم مورد نظر معادله (80-16) با استفاده از بررسی نسبیتی را می توان به صورت

$$\frac{d}{d\tau} m_0 u_\mu = F_\mu \equiv \mathbf{F} \quad (81-16)$$

نوشت که F یک چار بردار نیرو، معروف به نیروی مینکوفسکی است. شکل F باید طوری باشد که، در حد $\beta \rightarrow 0$ ، F_i به F_{μ} ، که در معادله (۱۶-۸۰) داده شده است، تبدیل شود. یک شکل مناسب F_{μ} عبارت است از

$$F_i = F_{\mu} \sqrt{1 - \beta^2} \quad (۱۶-۸۲)$$

بأبه کارگیری مقادیر dt ، F_i ، و تعریف سرعت جهانی u_{μ} ، می توانیم با استفاده از معادله (۱۶-۸۰)، آهنگ تغییرات تکانه را به صورت

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = F_{\mu} \sqrt{1 - \beta^2} \quad (۱۶-۸۳)$$

تعریف کنیم، که در مقایسه با

$$\frac{dp_i}{dt} = F_i \quad (۱۶-۸۴)$$

تکانه p_i را به صورت زیر به دست می دهد

$$p_i = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (۱۶-۸۵)$$

تا این جا تنها p_i ، سه مؤلفه فضایی یک چار-بردار، را تعریف کرده ایم. از تعریف چار-بردار سرعت، می توانیم چار-بردار $P \equiv p_{\mu}$ را به صورت

$$p_{\mu} = P = m_0 V = m_0 \left(\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \frac{ic}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, ip_4 \right) \quad (۱۶-۸۶)$$

تعریف کنیم که مؤلفه چهارم آن عبارت است از

$$p_4 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (۱۶-۸۷)$$

و سه مؤلفه فضایی اول [همانهایی که در معادله (۱۶-۸۵) تعریف شده اند] عبارتند از

$$p_i = m v_i = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (۱۶-۸۵)$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (۸۸-۱۶)$$

معادله (۸۸-۱۶) آشکار می کند که ، اگر بخواهیم تکانه را به معنی دقیق کلاسیکی آن تعبیر کنیم ، جرم دیگر ناوردان نیست . جرم تابعی از سرعت چارچوب مرجع است . یعنی ، برای این که تکانه فرمول بندی هموردایی داشته باشد ، جرم لخت باید با معادله (۸۸-۱۶) داده شود . مشتق زمانی p_i در معادله (۸۵-۱۶) سه مؤلفه فضایی چار-بردار نیرو را به ما می دهد

$$F_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$$

یا به شکل برداری

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \quad (۸۹-۱۶)$$

اکنون می توانیم معادله تعمیم یافته حرکت ذره را به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = F_\mu \quad (۹۰-۱۶)$$

با استفاده از مقدار \mathbf{F} در معادله (۸۹-۱۶) ، می توان روابط دیگری در سینماتیک نسبیتی به دست آورد . می توانیم عبارتی برای انرژی جنبشی T به دست آوریم . کار انجام شده در واحد زمان ، $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ ، در روی یک ذره برابر است با آهنگ تغییرات انرژی جنبشی ، $\frac{dT}{dt}$ ، یعنی

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \quad (۹۱-۱۶)$$

که می تواند به صورت

$$\frac{dT}{dt} = v \frac{d}{dt} (m_0 \gamma v) \quad (۹۲-۱۶)$$

نیز نوشته شود . انتگرال گیری از این عبارت می دهد

$$\int_0^T dT = \int v d(m_0 \gamma v) = m_0 \int_0^v \frac{v \, dv}{[1 - (v^2/c^2)]^{3/2}}$$

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - m_0 c^2 \quad (۹۳-۱۶)$$

یا

$$T = mc^2 - m_0 c^2 \quad (۹۴-۱۶)$$

هر جمله یک جمله انرژی است. چون جمله آخر شامل m_0 است، می توانیم $m_0 c^2$ را انرژی جرمی سکون بنامیم، و مناسب است که mc^2 را انرژی کل E بنامیم به گونه ای

$$E = T + m_0 c^2 \quad (۱۶-۹۵ الف)$$

$$\text{انرژی جرمی سکون} + \text{انرژی جنبشی} = \text{انرژی کل} \quad (۱۶-۹۵ ب)$$

که در آن

$$E = mc^2 \quad (۱۶-۹۶)$$

که همچنین می تواند به صورت

$$\Delta E = \Delta mc^2 \quad (۱۶-۹۷)$$

نوشته شود که ΔE تغییرات انرژی ناشی از تغییر جرم است.

اگر معادله (۱۶-۹۳) واقعاً عبارت انرژی جنبشی است، باید در حد $\beta \rightarrow 0$ به $\frac{1}{2} m v^2$ کاهش یابد. به این ترتیب

$$\begin{aligned} \text{Limit}_{\beta \rightarrow 0} T &= \text{limit}_{\beta \rightarrow 0} m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} - 1 \right] \\ &= \text{limit}_{\beta \rightarrow 0} m_0 c^2 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots - 1 \right] \approx \frac{1}{2} m_0 v^2 \end{aligned} \quad (۱۶-۹۸)$$

معادله (۱۶-۸۷) برای مؤلفه چهارم تکانه را می توان، با استفاده از معادله (۱۶-۹۶) به صورت

$$p_4 \equiv \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \beta^2}} = mc = \frac{E}{c} \quad (۱۶-۹۹)$$

نوشت. بنابراین، یک چار-برداری تکانه می تواند به صورت زیر نوشته شود

$$p_\mu \equiv \mathbf{p} \equiv m_0 \mathbf{v} = \left(\mathbf{p}, i \frac{E}{c} \right) \quad (۱۶-۱۰۰)$$

نسبیت ، درست همان طور که مفاهیم فضا و زمان را در یک مفهوم ترکیب می کند ، برای تکانه و انرژی نیز همان کار را می کند . می توانیم p_{μ} را به عنوان ترکیبی از سه مؤلفه تکانه p_1, p_2, p_3 و مؤلفه چهارم انرژی ، $\frac{iE}{c}$ ، به صورت یک چار-بردار در نظر بگیریم ، و تبدیلات لورنتسی را به همان نحوی که برای فضا و زمان به کار بردیم برای آن به کار ببریم . بنابراین

$$\mathbf{p}' = \lambda \mathbf{p} \quad (16-101)$$

یا ، به شکل مؤلفه ای

$$\left(p', i \frac{E'}{c} \right) = \lambda \left(p, i \frac{E}{c} \right) \quad (16-102)$$

که در آن λ ماتریس تبدیل لورنتسی است که با معادله (16-37) ، یعنی ،

$$\lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (16-37)$$

داده می شود . به این ترتیب تبدیلات تکانه - انرژی را به صورت زیر به دست می آوریم

$$p'_1 = \frac{p_1 - (v/c^2)E}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$p'_2 = p_2$$

$$p'_3 = p_3 \quad (16-103)$$

$$E' = \frac{E - vp_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

تبدیلات وارون را می توان با گذاردن $-v$ به جای v و تعویض کمیتات پریم دار با بدون پریم ، به دست آورد .

همان طور که در معادله (16-87) نشان دادیم ، مربع چار-بردار سرعت ناورداد و برابر

با $-c^2$ است : همچنین می توانیم نشان دهیم که مربع چار-بردار تکانه ناورداست ؛ یعنی

$$\mathbf{p}^2 \equiv \sum_{\mu=1}^4 p_{\mu}^2 = m_0^2 v^2 = -m_0^2 c^2 \quad (16-104)$$

اما

$$p^2 = p_\mu p_\mu = \left(\mathbf{p}, i \frac{E}{c} \right) \cdot \left(\mathbf{p}, i \frac{E}{c} \right) = p^2 - \frac{E^2}{c^2} \quad (16-105)$$

که در آن $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$. از این دو معادله مهمترین رابطه بین جرم، تکانه و انرژی را به صورت زیر به دست می آوریم

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (16-106)$$

یک نمایش هندسی مناسب برای رابطه بین p ، $m_0 c^2$ ، $T (= mc^2 - m_0 c^2)$ ، و E را می توان با نوشتن معادله (16-106) به شکل بهنجار شده، یعنی،

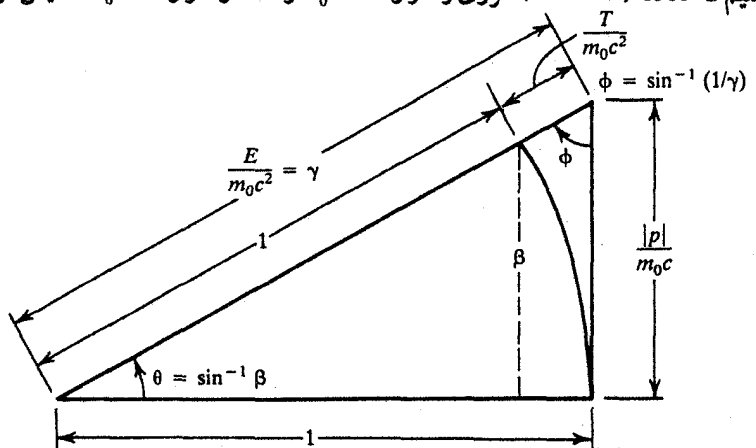
$$\left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)^2 = \left(\frac{|p|}{m_0 c} \right)^2 + 1 \quad (16-107)$$

ارائه داد. رابطه هندسی نمایش داده شده در شکل (16-3) مثلث نسبیتی نامیده می شود که زاویه های θ و ϕ (چون $E = mc^2 = m_0 \gamma c^2$) با روابط زیر تعریف شده اند

$$\sin \theta = \beta \quad (16-108)$$

$$\sin \phi = \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{1}{\gamma} \quad (16-109)$$

توجه کنیم که معادله (16-107) انرژی را در واحد $m_0 c^2$ و تکانه را در واحد $m_0 c$ نمایش می دهد.



شکل (16-3): مثلث نسبیتی فابشگر نوعی رابطه هندسی بین E و T ، p ، $m_0 c^2$

انرژی برحسب واحد $m_0 c^2$ و تکانه برحسب واحد $m_0 c$ بهنجار شده است

۱۶-۷ فرمول بندی لاگرانژی و هامیلتونی دینامیک نسبیتی

در فصل ۱۲، در حالی که دینامیک لاگرانژی و هامیلتونی را بررسی می کردیم، فرض شده بود که جرم ثابت می ماند؛ در نتیجه این گونه فرمول بندی تنها در حد غیرنسبیتی درست است. می خواهیم چنین فرمول بندی ای را به اجسامی که با سرعت های بالا، نزدیک به سرعت نور، حرکت می کنند گسترش دهیم. می توانیم به روش زیر به تابع لاگرانژ ذره ای که در یک پتانسیل مستقل از سرعت حرکت می کند برسیم.

بنابر معادله (۱۶-۸۵)، عبارت نسبیتی مؤلفه های فضایی تکانه یک ذره با جرم سکون m_0 و سرعت v_i عبارت است از $(\beta = v/c)$

$$p_i = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (16-110)$$

اگر L لاگرانژی یک ذره باشد، و پتانسیل مستقل از سرعت باشد، هنوز می توانیم تکانه بندادی را به صورت

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial v_i} \quad (16-111)$$

تعریف کنیم. از این دو معادله خواهیم داشت

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (16-112)$$

بنابراین، در عبارت لاگرانژی

$$L = T_R(v_i) - V(x_i) \quad (16-113)$$

T_R باید طوری انتخاب شود که معادله (۱۶-۱۱۲) برقرار باشد. عبارت مناسبی برای T_R عبارت است از

$$T_R = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (16-114)$$

در نتیجه لاگرانژی نسبیتی عبارت است از

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} - V \quad (16-115)$$

(توجه کنیم که قسمت وابسته به سرعت T_R دیگر انرژی جنبشی نیست، $T_R \neq T$)
 با به کارگیری معادله لاگرانژی (۱۲-۳۸) برای یک ذره، می توان نشان داد که عبارت
 L در معادله (۱۶-۱۱۵) عبارت درستی است؛ یعنی

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (۱۲-۳۸)$$

(که در آن $\dot{x} = v$ به شکل

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (۱۶-۱۱۶)$$

یا، چون $F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ و با توجه به معادله (۱۶-۱۱۰)،

$$\frac{dp_i}{dt} = F_x \quad (۱۶-۱۱۷)$$

در می آید، که همان است که برای مؤلفه های فضایی انتظار می رفت.

همچنین در فصل ۱۲ نشان دادیم که اگر L صریحاً تابع زمان نباشد، یک ثابت حرکت
 وجود دارد که هامیلتونی است

$$H = \sum \dot{q}_i p_i - L \quad (۱۶-۱۱۸)$$

این مطلب، همان طور که اکنون نشان می دهیم، هنوز درست است. باید خاطر نشان کنیم که
 $\sum \dot{q}_i p_i \neq 2T$ و $L \neq T - V$. اگر برای L از معادله (۱۶-۱۱۵) استفاده کنیم، باز هم نتیجه
 می گیریم که H یک ثابت حرکت است.

$$H \equiv \sum_i \dot{q}_i p_i - L = \sum_i \frac{m_0 v_i^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + m_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} + V \quad (۱۶-۱۱۹)$$

که تبدیل به

$$\begin{aligned} H &= \frac{m_0(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)}{\sqrt{1-\beta^2}} + m_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} + V \\ &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + V \end{aligned} \quad (۶-۱۲۰)$$

$$= mc^2 + V = m_0 c^2 + T + V = E = \text{constant}$$

می شود. (از $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ و $\beta = \frac{v}{c}$ استفاده شده است). به این ترتیب هامیلتونی نسبیتی هنوز برابر با انرژی کل است، اما باید انرژی جرمی سکون را نیز در بر بگیرد.

مثال (۱۶-۱): نشان دهید که مقدار انرژی لازم برای ایجاد یک آنتی پروتون به وسیله



در حدود 6 BeV است.

فرض کنیم تکانه اولیه سیستم p_i است. بعد از واکنش، این تکانه بطور مساوی بین چهار ذره توزیع می شود:

$$p_{1f} = \frac{p_i}{4} \quad (۱)$$

و

$$T_i = 4T_{1f} \quad (۲)$$

که به وسیله رابطه

$$T_i = 4T_{1f} + 2M_0c^2 \quad (۳)$$

به کمینه انرژی اولیه پروتون فرودی، T_i ، مربوط می شود. M_0 جرم سکون پروتون است.

اما تکانه نهایی p_{1f} ، انرژی جنبشی T_f ، و انرژی کل E_T ذره ایجاد شده، با

رابطه نسبیتی

$$E_T^2 = (T_{1f} + M_0c^2)^2 = p_{1f}^2c^2 + M_0^2c^4 \quad (۴)$$

یا

$$p_{1f}^2c^2 = (T_{1f} + M_0c^2)^2 - M_0^2c^4 \quad (۵)$$

به یکدیگر مربوط می شوند. به همین نحو

$$p_{1i}^2c^2 = (T_i + M_0c^2)^2 - M_0^2c^4 \quad (۶)$$

با قرار دادن معادلات (۵) و (۶) در معادله (۱) و مرتب سازی ، خواهیم داشت

$$(T_i + M_0c^2)^2 - M_0^2c^4 = 16[(T_{if} + M_0c^2)^2 - M_0^2c^4] \quad (۷)$$

T_i را از معادله (۳) در معادله (۷) می بریم و برای T_{if} به دست می آوریم

$$T_{if} = M_0c^2 \quad (۸)$$

بنابراین ، از معادله (۳) ، با استفاده از معادله (۸) ، نتیجه می گیریم

$$T_i = 4M_0c^2 + 2M_0c^2 = 6M_0c^2 = 6(938 \text{ MeV}) = 5628 \text{ MeV} \quad (۹)$$

یعنی ، یک پروتون برای ایجاد یک آنتی پروتون نیاز به در حدود 6 BeV انرژی دارد .

تقریب (۱۶-۱) : نشان دهید که کمینه انرژی جنبشی لازم برای ایجاد یک پوزیترون (e^+) در اثر برخورد دو الکترون ، به صورت زیر ، در حدود 3 MeV است (انرژی جرمی سکون یک الکترون یا پوزیترون 0.51 MeV است)

$$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^- + e^- + e^+$$

مسائل

۱-۱۶ یک برخورد کشسان بین دو جرم در نظر بگیرید. با به کارگیری تبدیلات گالیله ای، نشان دهید که اگر تکانه و انرژی جنبشی در یک دستگاه لخت پایسته باشند، در تمام دستگاههای لخت پایسته اند.

۲-۱۶ اگر Ψ یک تابع نرده ای از مکان و زمان باشد، نشان دهید که معادله موج (Ψ ممکن است یک مؤلفه میدان E یا B باشد)

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

در تبدیل گالیله ای ناوردان نیست، یعنی

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \neq \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t'^2}$$

۳-۱۶ اگر $\Psi(x, y, z, t)$ یک تابع نرده ای از مکان و زمان باشد، نشان دهید که معادله موج

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

در تبدیل لورنتسی ناورد است.

۴-۱۶ نشان دهید که معادلات تبدیل لورنتسی را برای دستگاههای S و S' که نسبت به یکدیگر حرکت یکنواخت دارند، می توان به صورت

$$x' = x \cosh \alpha - ct \sinh \alpha$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t \cosh \alpha - \frac{x}{c} \sinh \alpha$$

بیان کرد، که $\tanh \alpha = v/c$.

۵-۱۶ دو واقعه در دستگاه S' در P_1 به مختصات $(5 \times 10^{-7} \text{ s}, 0, 0, 200 \text{ m})$ و P_2 به مختصات $(2 \times 10^{-7} \text{ s}, 0, 0, 200 \text{ m})$ رخ می دهند. سرعت دستگاه S' نسبت به دستگاه S در امتداد محورهای $X_1 - X'_1$ برابر با $\frac{2}{3}c$ است. مختصات این دو واقعه را در دستگاه S پیدا کنید.

۶-۱۶ دستگاه S' با سرعت v نسبت به دستگاه S در امتداد محورهای $X - X_1$ حرکت می کند و دستگاه S'' نسبت به دستگاه S' با سرعت v' در امتداد محورهای $X_1 - X_1''$ حرکت می کند. مختصات (x'', y'', z'', t'') را بر حسب (x, y, z, t) بیان کنید.

۷-۱۶ یک میله یک متری در دستگاه S با محور X زاویه θ می سازد. طول آن از دید ناظر S' که نسبت به دستگاه S با سرعت $\frac{3}{4}c$ در امتداد $X_1 - X_1'$ حرکت می کند چقدر است؟ زاویه ای که میله با محور X' می سازد چقدر است؟ θ' را برای $\theta = 60^\circ$ حساب کنید.

۸-۱۶ جعبه کوچکی که حاوی یک ساعت است با سرعت v حرکت می کند. حجم جعبه وقتی توسط ناظر داخل جعبه اندازه گیری می شود dV_0 ، و وقتی توسط ناظر خارج آن در دستگاه آزمایشگاهی LCS اندازه گیری می شود dV است. بازه زمانی بین دو واقعه که در داخل جعبه رخ می دهند با ساعت داخل جعبه dt_0 است، در حالی که وقتی توسط ناظر خارج از جعبه اندازه گیری می شود dt است. نشان دهید $dV_0 dt_0 = dV dt$.

۹-۱۶ از مقاله اینشتین در ۱۹۰۵ نتیجه می گیریم که یک ساعت واقع در استوا باید، به مقدار خیلی کمی، از ساعت کاملاً مشابه خود در قطب، تحت شرایط یکسان، کندتر کار کند. نشان دهید که بعد از یک قرن، دو ساعت در حدود ۰.۰۰۳ ثانیه با یکدیگر اختلاف دارند. از این واقعیت که ساعت استوا حرکت یکنواختی ندارد صرف نظر کنید.

۱۰-۱۶ در دستگاه S دو واقعه در دو نقطه به فاصله Δx در یک زمان t رخ می دهند. نشان دهید که از دید ناظر واقع در دستگاه S' دو واقعه همزمان نیستند، بلکه با بازه زمانی $\Delta t' = -\gamma \Delta x \left(\frac{v}{c^2}\right)$ از یکدیگر جدا هستند.

۱۱-۱۶ دو واقعه $P_1(0, 0, 0, 0)$ و $P_2(x, 0, 0, t)$ در دستگاه S رخ می دهند. سرعت دستگاه S' نسبت به S را طوری پیدا کنید که برای آن این دو واقعه همزمان باشند. مربع فاصله بین دو واقعه در دستگاه S' چه چیزی را نشان می دهد؟

۱۲-۱۶ از دید ناظر روی زمین، دو کپکشان A و B در دو جهت مخالف، هر کدام با سرعت $\frac{3}{4}c$ از یکدیگر دور می شوند. سرعت دور شدن کپکشان B از دید کپکشان A چقدر است؟

۱۳-۱۶ قانون جمع دو سرعت موازی [معادله (۱۶-۵۴)] را با در نظر گرفتن دو تبدیل

لورنتسی به عنوان چرخشهای متوالی در صفحه X_3X_4 ، ثابت کنید .

۱۴-۱۶ یک باریکه نور در دستگاه S' تحت زاویه θ' با محور X' گسیل می شود . نشان دهید که از دید ناظر S زاویه θ با رابطه

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' + (v/c)}{1 + (v/c) \cos \theta'}$$

داده می شود که v سرعت دستگاه S' در امتداد محورهای $X_1 - X'_1$ است . اگر $\theta' = 90^\circ$ باشد مقدار v برای θ فقط 5° چقدر است ؟

۱۵-۱۶ یک منبع در دستگاه S' که نسبت به دستگاه S با سرعت v در امتداد محورهای $X'_1 - X_1$ حرکت می کند ، الکترونیایی با سرعت تقریباً برابر با سرعت نور ، بطور همسانگرد در همه جهات گسیل می کند . سرعت v چقدر باشد تا از دید ناظر دستگاه S نصف الکترونها در مخروطی با زاویه 4° گسیل شوند ؟

۱۶-۱۶ فرض کنید چارچوب مرجع S' با سرعت v_1 در امتداد محورهای $X - X'$ ، و S'' با سرعت v_2 نسبت به S در امتداد محورهای $X - X''$ حرکت می کنند . سرعت دستگاه S'' را نسبت به دستگاه S پیدا کنید .

۱۶-۱۷ نشان دهید که ممکن نیست بتوانیم با تبدیلات لورنتسی متوالی ، دستگاه لختی پیدا کنیم که در آن سرعت ذره بیش از سرعت نور باشد ، البته اگر سرعت ذره در هر یک از دستگاههای لخت کمتر از سرعت نور باشد .

۱۶-۱۸ یک مزون μ باری برابر با بار الکترون و جرمی 207 برابر جرم سکون الکترون دارد . مزونهای سریع قسمتی از اشعه کیهانی را تشکیل می دهند و در آزمایشگاه نیز تولید می شوند . عمر متوسط مزونهای μ ی ساکن نسبت به آزمایشگاه 2.2×10^{-6} s است ، درحالی که عمر متوسط مزونهای سریع مشاهده شده در اشعه کیهانی 1.1×10^{-6} s است . حساب کنید . (الف) سرعت مزونهای μ ی اشعه کیهانی ، (ب) مسافت پیموده شده توسط مزونهای μ ی اشعه کیهانی در جو در طول عمر متوسطشان از دید (۱) ناظر واقع در چارچوب آزمایشگاهی ، و (۲) ناظر واقع در چارچوب مرجع مزون μ .

۱۶-۱۹ مکعبی به ضلع L_0 واقع در مبدأ یک دستگاه لخت S در نظر بگیریم . جرم سکون مکعب m_0 و چگالی سکون آن $\rho_0 = \frac{m_0}{L_0^3}$ است . جرم ، حجم و چگالی را از دید یک

ناظر واقع در دستگاه لخت K که با سرعت v در امتداد محورهای $X - X'$ حرکت می کند ، پیدا کنید .

۱۶-۲۰ در مکانیک نیوتنی داریم

$$dT = p \cdot \frac{dp}{m} = v \cdot dp$$

نشان دهید که این نتیجه در مکانیک نسبیتی نیز برقرار است .

۱۶-۲۱ ذره ای به جرم سکون m_0 و سرعت v با ذره ساکنی به جرم M برخورد کاملاً ناکشسان انجام می دهد . نشان دهید که سرعت ذره مرکب $(\gamma m_0 + M)$ با سرعت $u = \gamma m_0 v$ است .

۱۶-۲۲ ذره ای به جرم m_0 با سرعت v به ذره دیگری به جرم m_0 که با سرعت v در جهت مخالف در حرکت است برخورد می کند . اگر دو جرم بعد از برخورد به هم بچسبند ، تغییر جرم نهایی چقدر است ؟ اگر $m_0 = 1$ و $v = 10 \text{ km/s}$ باشد ، Δm را حساب کنید .

۱۶-۲۳ یک مزون π به جرم m_π به یک مزون μ با جرم سکون m_μ و یک نوترینو با جرم سکون صفر تجزیه می شود . نشان دهید که انرژی جنبشی T_μ ی مزون μ عبارت است از

$$T_\mu = \frac{(m_\pi - m_\mu)^2}{2m_\pi} c^2$$

۱۶-۲۴ اگر فرض کنیم که جرم با سرعت تغییر می کند ، عبارت نیرو با

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

داده می شود . اگر v در جهت محور X_1 در نظر گرفته شود ، نشان دهید که مؤلفه های

نیرو عبارتند از $F_1 = m_l \dot{v}_1$ ، $F_2 = m_l \dot{v}_2$ ، $F_3 = m_l \dot{v}_3$ ، که

$$m_l = \frac{m_0}{(1 - \beta^2)^{3/2}} \quad \text{و} \quad m_t = \frac{m_0}{(1 - \beta^2)^{1/2}}$$

m_l و m_t به ترتیب جرم طولی و جرم عرضی نامیده می شوند .

۱۶-۲۵ میانگین انرژی خورشیدی که به سطح زمین می رسد $1.4 \times 10^3 \text{ W/m}^2$ است . در هر ثانیه چه مقدار از جرم خورشید تبدیل به انرژی می شود ؟

۱۶-۲۶ (الف) نشان دهید که ، اگر کمیت $p_0 (= \gamma m_0 c)$ در یک دستگاه لخت مثبت باشد ، در تمام دستگاههای لخت مثبت است .

(ب) نشان دهید که جرم سکون m_0 یک ذره در تبدیل لورنتسی تکانه ، از نظر بزرگی و علامت ثابت می ماند .

۱۶-۲۷ در یک آزمایش برخورد باریکه ها ، دو باریکه پروتون جداگانه ، که انرژی پروتون هر کدام 10 BeV است ، از دو جهت متقابل می آیند و به هم برخورد سر به سر می کنند .

(الف) سرعتهای پروتونها از دید ناظر واقع در دستگاه مختصات آزمایشگاهی چقدر است ؟

(ب) سرعت یک پروتون نسبت به پروتون دیگر چقدر است ؟

(پ) در مورد حدی نسبیتی ، سرعت v ی پروتونها خیلی نزدیک به سرعت نور است . اگر قرار دهیم $\delta \equiv c - v$ ، نشان دهید که انرژی E ی پروتون تقریباً برابر است با

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{2\delta/c}}$$

که $E_0 = m_0 c^2$ انرژی جرمی سکون (یا خود-انرژی) است .

۱۶-۲۸ کمینه سرعت یک ذره برای این که انرژی کل E ی آن بتواند ، بدون خطای بیش از 1% ، برابر با pc باشد چقدر است ؟ انرژی جنبشی یک الکترون و یک پروتون را در این سرعت حساب کنید .

(الف) نشان دهید که تکانه یک ذره را می توان به صورت زیر نوشت

$$p = \frac{1}{c} (T^2 + 2E_0 T)^{1/2}$$

(ب) وقتی ذره ای با بار q در داخل یک میدان مغناطیسی یکنواخت با چگالی شار B ، عمود بر میدان حرکت می کند دایره ای به شعاع

$$r = \frac{(T^2 + 2E_0 T)^{1/2}}{qcB}$$

طی می کند که T انرژی جنبشی و E_0 انرژی جرمی سکون است . این رابطه را اثبات کنید .

۱۶-۲۹ تکانه کل یک سیستم ذرات در یک چارچوب لخت Σp ، و انرژی نسبیتی کل آن ΣE است . نشان دهید که سرعت v_c ی مرکز جرم برابر است با $v_c = c^2 (\Sigma p / \Sigma E)$.

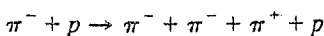
۱۶-۳۰ یک پيون با انرژی جنبشی 1600 MeV روی پروتون ساکنی فرود می آید و با واکنش $\pi + p \rightarrow p + n\pi$ تعدادی پيون ایجاد می کند . با به کارگیری دستگاه مختصات مرکز جرمی ، بیشینه تعداد n پيونهای ایجاد شده را در این واکنش محاسبه کنید . انرژی جرمی سکون برای یک پروتون 938 MeV و برای یک پيون 140 MeV است .

۱۶-۳۱ نشان دهید که معادله حرکت یک موشک نسبیتی با رابطه

$$m_0 \frac{dv}{dt} + V \frac{dm_0}{dt} (1 - \beta^2) = 0$$

داده می شود که در آن $\beta = \frac{v}{c}$ ، v سرعت موشک نسبت به یک دستگاه لخت V ، سرعت گازهای خروجی نسبت به موشک ، و m_0 جرم سکون موشک است .

۱۶-۳۲ کمینه انرژی لازم یک مزون π^- برای این که در واکنش



وارد شود چقدر است ؟ جرم سکون π^- یا π^+ برابر با 139.56 MeV است .

۱۶-۳۳ نشان دهید که حرکت نسبیتی هر ذره در میدان نیروی عکس مجذوری ، یک بیضی با حرکت تقدیمی است .

۱۶-۳۴ یک «موشک فوتونی» نسبیتی ، موشکی که برای پیش راندن خود فوتونهایی با سرعت c پرتاب می کند . در نظر بگیرید . این موشک از حال سکون شتاب می گیرد و به حرکت در می آید ، سپس شتاب منفی می گیرد و با همان فرآیند به مکان اولیه برمی گردد . اگر جرم سکون اولیه موشک m_0 باشد ، نشان دهید که جرم نهایی آن $m_0/16\sqrt{3}$ است ، که وقتی سرعت موشک بیشینه است $\gamma \gg 1$ است .

منابع پیشنهادی برای مطالعه بیشتر

- American Association of Physics Teachers, *Special Relativity Theory, Selected Reprints*. New York: American Institute of Physics, 1963.
- ARTHUR, W., and FENSTER, S. K., *Mechanics*, Chapter 10. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1969.
- BERGMANN, P. G., *Introduction to the Theory of Relativity*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1946.
- DAVIS, A. DOUGLAS, *Classical Mechanics*, Chapter 13. New York: Academic Press, Inc., 1986.
- FOWLES, G. R., *Analytical Mechanics*, Chapter 12. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1962.
- *GOLDSTEIN, H., *Classical Mechanics*, 2nd ed., Chapter 7. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1980.
- HAUSER, W., *Introduction to the Principles of Mechanics*, Chapter 15. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1965.
- KITTEL, C., KNIGHT, W. D., and RUDERMAN, M. A., *Mechanics*, Berkeley Physics Course, Volume 1, Chapters 11–14. New York: McGraw-Hill Book Co., 1965.
- KLEPPNER, D., and KOLENKOW, R. J., *An Introduction to Mechanics*, Chapters 11–14. New York: McGraw-Hill Book Co., 1973.
- MARION, J. B., *Classical Dynamics*, 2nd ed., Chapter 10. New York: Academic Press, Inc., 1970.
- *MOORE, E. N., *Theoretical Mechanics*, Chapter 9. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1983.
- NEY, E. P., *Electromagnetism and Relativity*. New York: Harper & Row, 1962.
- RESNICK, R., and HALLIDAY, D., *Basic Concepts in Relativity and Early Quantum Theory*, 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1985.
- ROSSER, W. G. V., *An Introduction to the Theory of Relativity*. London: Butterworth, 1964.
- SYMON, K. R., *Mechanics*, 3rd ed., Chapters 13 and 14. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., 1971.
- TAYLOR, E. F., *Introductory Mechanics*, Chapters 11–13. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1963.
- , and WHEELER, J. A., *Spacetime Physics*. San Francisco: W. H. Freeman, 1966.

واژه نامه (فارسی - انگلیسی)

Postulate	اصل موضوع
Decrement of motion	اُفت حرکت
Logarithmic decrement	اُفت لگاریتمی
Axiomatic	آکسیوماتیک ،
Associative	انجمنی
Exoenergetic	انرژی زا
Endoenergetic	انرژی خواه
Anti commutative	پاد جابه جایی پذیر
Dispersive	پاشنده
Configuration	پیکربندی
Transpose	ترانهاده
Gravitational Boost	تقویت گرانشی
Distributive	توزیع پذیر
Commutative	جابه جایی پذیر
Secular term	جمله سده ای
Système International	دستگاه بین المللی (SI)
Apsidal angle	زاویه اوجی
Time - like	زمان گونه
Solenoidal	سیملوله ای

Formalism	صورت بندی
Space-Like	فضاگونه
Probe	کاوشگر
Wobble	لنگش
Meta-Stable	متاپایدار
Vortex field	میدان گردابی
Invariance	ناوردایی
Commensurable	همنوا

واژه نامه (انگلیسی - فارسی)

Anticommutative	پاد جابه جای پذیر
Apsidal angle	زاویه اوجی
Associative	انجمنی
Axiomatic	آکسیوماتیک
Commensurable	همنوا
Commutative	جابه جایی پذیر
Configuration	پیکربندی
Dispersive	پاشنده
Decrement of motion	أفت حرکت
Distributive	توزیع پذیر
Formalism	صورت بندی
Endoenergetic	انرژی خواه
Exoenergetic	انرژی زا
Gravitational Boost	تقویت گرانشی
Invariance	ناوردایی
Logarithmic decrement	أفت لگاریتمی
Meta-stable	متاپایدار
Postulate	اصل موضوع
Probe	کاوشگر

Secular term	جمله سده ای
Solenoidal	سیملوله ای
Space-like	فضاگونه
Systeme International	دستگاه بین المللی (SI)
Time-like	زمان گونه
Transpose	ترانهاده
Vortex field	میدان گردابی
Wobble	لنگش