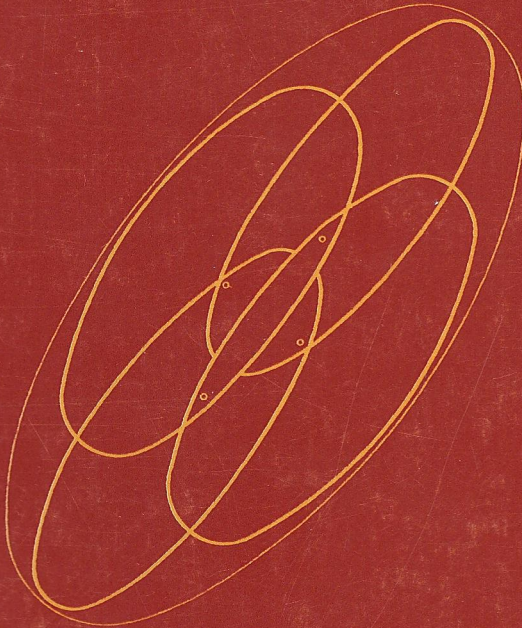




آشنایی با

مکانیک

دانیل کلپنر، روبرت جی کلنکو



ترجمہ ہوشنگ بسہری، محمد علی مقیمی، ولی اللہ ناصری

آشنایی با
مکانیک

دانیل کلپنر، روبرت جی کلنکو

ترجمه هوشنگ سپهری، محمدعلی مقیمی، ولی الله ناصری

مرکز نشر دانشگاهی، تهران



An Introduction to Mechanics
Daniel Kleppner, Robert J. Kolenkow
McGraw-Hill, 1984

آشنایی با مکانیک
تألیف دانیل کلپنر، روبرت جی کلنکو
ترجمه هوشنگ سپهری، محمدعلی مقیمی، ولی الله ناصری
ویراسته هوشنگ سپهری
نسخه پرداز: زهرا رحیمدل قادر
مرکز نشر دانشگاهی
چاپ اول ۱۳۷۶
چاپ هفتم ۱۳۸۷
تعداد ۲۰۰۰
حروفچینی: مرکز نشر دانشگاهی
لیتوگرافی: مردمک
چاپ و صحافی: خجسته
۹۸۰۰ تومان
حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

Kleppner, Danial	کلپنر، دانیل
آشنایی با مکانیک / دانیل کلپنر، روبرت جی. کلنکو؛ ترجمه محمدعلی مقیمی، ولی الله ناصری، هوشنگ سپهری، - تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۶.	
هشت، ۶۹۲ ص. : مصور، جدول، نمونه. - (مرکز نشر دانشگاهی، ۸۳۹. فیزیک؛	
	(۷۵)
ISBN 978-964-01-0839-0	
An introduction to mechanics.	فهرست‌نویسی براساس اطلاعات فیبا. عنوان اصلی: نمایه. چاپ هفتم: ۱۳۸۷.
۱. مکانیک. الف. کلنکو، رابرت J. Kolenkow، ب. مقیمی، محمدعلی، مترجم. ج. ناصری، ولی الله، مترجم. د. سپهری، هوشنگ، مترجم. ه. مرکز نشر دانشگاهی. و. عنوان.	
۵۳۱	QA۸۰۵/ک۸۱۵
	۱۳۷۶
۷۶-۱۸۴۶	کتابخانه ملی ایران

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست

صفحه	عنوان
۱	پیشگفتار
۵	خطاب به مدرسان
۹	۱. بردارها و مکانیک-مقدمات ریاضی
۹	۱-۱ مقدمه
۱۰	۲-۱ بردار
۱۸	۳-۱ مؤلفه‌های بردار
۲۲	۴-۱ بردارهای پایه
۲۴	۵-۱ بردار جابه‌جایی و بردار مکان
۲۷	۶-۱ سرعت و شتاب
۳۴	۷-۱ معادلات سینماتیکی
۳۹	۸-۱ بازهم درباره مشتق یک بردار
۴۵	۹-۱ حرکت در مختصات قطبی تخت
۷۰	مسائل
۷۵	۲. قوانین نیوتون-مبانی مکانیک نیوتونی
۷۵	۱-۲ مقدمه

۷۷	۲-۲ قوانین نیوتون
۸۸	۳-۲ استانداردها و یکاها
۹۲	۴-۲ بعضی از کاربردهای قوانین نیوتون
۱۰۷	۵-۲ نیروهای روزمره فیزیکی
۱۳۶	مسائل
۱۴۷	۳. تکانه
۱۴۷	۱-۳ مقدمه
۱۴۸	۲-۳ دینامیک سیستم ذرات
۱۶۰	۳-۳ پایستگی تکانه
۱۶۹	۴-۳ ضربه و نگاهی دوباره به رابطه تکانه
۱۷۳	۵-۳ تکانه و تغییر جرم
۱۸۰	۶-۳ انتقال تکانه
۱۹۰	مسائل
۱۹۵	۴. کار و انرژی
۱۹۵	۱-۴ مقدمه
۱۹۶	۲-۴ انتگرال‌گیری معادله حرکت در یک بعد
۲۰۰	۳-۴ قضیه کار-انرژی در یک بعد
۲۰۲	۴-۴ انتگرال‌گیری معادله حرکت در چند بعد
۲۰۵	۵-۴ قضیه کار-انرژی
۲۰۹	۶-۴ کاربرد قضیه کار-انرژی
۲۱۶	۷-۴ انرژی پتانسیل
۲۲۲	۸-۴ انرژی پتانسیل چه اطلاعاتی از نیرو به دست می‌دهد
۲۲۶	۹-۴ نمودار انرژی
۲۲۹	۱۰-۴ نوسانهای کوچک در سیستم مقید
۲۳۵	۱۱-۴ نیروهای ناپایستار

۲۳۷	۱۲-۴ قانون عام پایداری انرژی
۲۳۹	۱۳-۴ توان
۲۴۰	۱۴-۴ قوانین پایداری و برخورد ذرات
۲۵۰	مسائل
۲۶۰	۵-۵. برخی از خصوصیات ریاضی نیرو و انرژی
۲۶۰	۱-۵ مقدمه
۲۶۱	۲-۵ مشتقات جزئی
۲۶۵	۳-۵ طریقه به دست آوردن نیرو با معلوم بودن انرژی پتانسیل
۲۶۶	۴-۵ عملگر گرادیان
۲۷۰	۵-۵ معنای فیزیکی گرادیان
۲۷۶	۶-۵ چگونه به پایداری نیرو پی می بریم
۲۸۹	۷-۵ قضیه استوکس
۲۹۳	مسائل
۲۹۶	۶-۶. تکانه زاویه ای و محور دوران ثابت
۲۹۶	۱-۶ مقدمه
۲۹۸	۲-۶ تکانه زاویه ای یک ذره
۳۰۵	۳-۶ گشتاور نیرو
۳۱۹	۴-۶ تکانه زاویه ای و محور ثابت دوران
۳۲۶	۵-۶ دینامیک دوران محض حول یک محور
۳۲۹	۶-۶ آونگ فیزیکی
۳۳۶	۷-۶ حرکت توأم انتقالی و دورانی
۳۵۱	۸-۶ اتم بور
۳۵۵	یادداشت ۱-۶ قضیه شال
۳۵۹	یادداشت ۲-۶ حرکت آونگ
۳۶۲	مسائل

- ۳۷۵ ۷. حرکت جسم صلب
- ۳۷۵ ۱-۷ مقدمه
- ۳۷۶ ۲-۷ ماهیت برداری سرعت زاویه‌ای و تکانه زاویه‌ای
- ۳۸۶ ۳-۷ ژيروسکوپ
- ۳۹۲ ۴-۷ برخی از کاربردهای حرکت ژيروسکوپ
- ۴۰۰ ۵-۷ پایداری تکانه زاویه‌ای
- ۴۰۳ ۶-۷ تکانه زاویه‌ای جسم صلب دوران‌کننده
- ۴۱۴ ۷-۷ مطالب پیشرفته در دینامیک جسم صلب دوران‌کننده
- ۴۲۹ یادداشت ۱-۷ دورانهای متناهی و بینهایت کوچک
- ۴۳۱ یادداشت ۲-۷ مطالبی بیشتر درباره قطب‌نمای ژيروسکوپی
- ۴۳۹ مسائل
- ۴۴۵ ۸. سیستمهای ناخست و نیروهای مجازی
- ۴۴۵ ۱-۸ مقدمه
- ۴۴۶ ۲-۸ تبدیلات گالیله
- ۴۴۹ ۳-۸ دستگاههای با شتاب ثابت
- ۴۵۲ ۴-۸ اصل هم‌ارزی
- ۴۶۳ ۵-۸ فیزیک در دستگاه مختصات دوار
- ۴۸۳ یادداشت ۱-۸ اصل هم‌ارزی و انتقال به سرخ
- ۴۸۵ یادداشت ۲-۸ تبدیل در دستگاه دوار
- ۴۸۷ مسائل
- ۴۹۱ ۹. حرکت ناشی از نیروی مرکزی
- ۴۹۱ ۱-۹ مقدمه
- ۴۹۲ ۲-۹ حرکت ناشی از نیروی مرکزی-مسئله یک جسم
- ۴۹۴ ۳-۹ خواص عمومی حرکت‌های ناشی از نیروی مرکزی
- ۴۹۷ ۴-۹ تعیین حرکت در مسائل واقعی

۴۹۹	۵-۹ معادله انرژی و نمودارهای انرژی
۵۰۸	۶-۹ حرکت سیاره‌ای
۵۲۲	۷-۹ قوانین کپلر
۵۲۵	یادداشت ۱-۹ خواص بیضی
۵۲۹	مسائل
۵۳۲	۱۰. نوسانگر هماهنگ
۵۳۲	۱-۱۰ مقدمه و مرور
۵۳۸	۲-۱۰ نوسانگر هماهنگ میرا
۵۴۷	۳-۱۰ نوسانگر هماهنگ واداشته
۵۶۰	۴-۱۰ واکنش نسبت به زمان در مقابل واکنش نسبت به سامند
۵۶۱	یادداشت ۱-۱۰ حل معادلات حرکت برای نوسانگر میرای ناواداشته
۵۶۶	یادداشت ۲-۱۰ حل معادله حرکت برای نوسانگر واداشته
۵۶۷	مسائل
۵۷۱	۱۱. نظریه نسبیت خاص
۵۷۱	۱-۱۱ نیاز به نوعی تفکر جدید
۵۷۵	۲-۱۱ آزمایش مایکلسون-مورلی
۵۸۰	۳-۱۱ اصل موضوعهای نسبیت خاص
۵۸۲	۴-۱۱ تبدیلات گالیه
۵۸۶	۵-۱۱ تبدیلات لورنتس
۵۸۹	مسائل
۵۹۳	۱۲. سینماتیک نسبیتی
۵۹۳	۱-۱۲ مقدمه
۵۹۵	۲-۱۲ همزمانی و ترتیب رویدادها

۱۲-۳ انقباض طول لورنتسی و اتساع زمان

۵۹۸

۱۲-۴ تبدیل نسبی سرعت

۶۰۵

۱۲-۵ اثر دوپلر

۶۰۸

۱۲-۶ پارادوکس دوقلو

۶۱۵

مسائل

۶۲۰

۱۳. تکانه و انرژی نسبیتی

۶۲۵

۱-۱۳ تکانه

۶۲۵

۲-۱۳ انرژی

۶۳۰

۳-۱۳ ذرات بی جرم

۶۳۸

۱۳-۴ آیا نور با سرعت نور حرکت می‌کند؟

۶۴۷

مسائل

۶۵۱

۱۴. بردارهای چهار بعدی و ناوردایی نسبیتی

۶۵۴

۱-۱۴ مقدمه

۶۵۴

۲-۱۴ بردارها و تبدیلات

۶۵۵

۳-۱۴ فضای مینکوفسکی و چار بردارها

۶۶۲

۴-۱۴ چار بردار تکانه-انرژی

۶۶۸

۵-۱۴ ملاحظات نهایی

۶۷۷

مسائل

۶۷۸

یکاهای و ضرایب تبدیل

۶۸۱

اطلاعات فیزیکی و نجومی مفید

۶۸۲

فهرست راهنما

۶۸۳

پیشگفتار

این سنت که دانشجویان علوم پایه و مهندسی، فیزیک پایه را با مطالعه مکانیک شروع می‌کنند متکی بر این دلیل روشن است که مکانیک سنگ بنای علوم محض و کاربردی است. برای مثال، مطالعه تحول عالم، خواص ذرات بنیادی، و سازوکار واکنشهای زیست شیمیایی مستلزم شناخت مفهوم انرژی است. مفهوم انرژی همچنین در موارد متنوعی مثل طراحی تنظیم‌کننده ضربان قلب و تحلیل حدود رشد جامعه صنعتی نیز ضرورت دارد. اما ارائه یک درس مکانیک مقدماتی، ضمن اینکه کاری هیجان‌انگیز و ارضاکنده است، مشکلاتی نیز به همراه دارد. مکانیک علمی است که به حد کمال رسیده است و چنانچه بخواهیم یک بحث سطحی از آن ارائه بدهیم، نمی‌توانیم اصول این علم را به طرز رضایتبخشی مطرح کنیم. از سوی دیگر، تکیه بر مباحث پیشرفته برای "غنی ساختن" موضوع نیز می‌تواند منجر به پیچیدگیهای کاذبی شود که بیشتر بر تکنیکها تأکید خواهد داشت تا درک مطلب

این کتاب با استفاده از مطالب یک دوره مکانیک سال اول، که ما چندین سال در مؤسسه تکنولوژی ماساچوست و پیش از آن در دانشگاه هاروارد تدریس می‌کردیم تدوین شده است. تلاش ما بر این بود که مکانیک را به شکل جالبی ارائه کنیم تا پایه‌ای قوی برای کارهای آینده در علوم محض و کاربردی فراهم کرده باشیم. ما در تدوین این کتاب کمی از رهیافت سنتی منحرف شده‌ایم، اما این تفاوت که بیشتر در عمق و سبک است تا در انتخاب مطالب، در واقع موافق با نگرشی است که فیزیکدانهای قرن بیستم به مکانیک دارند.

این کتاب اساساً برای دانشجویانی نوشته شده است که حساب دیفرانسیل و انتگرال را در حد کافی برای مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از توابع ساده آموخته‌اند، ولی در مواردی که این دو درس به‌طور هم‌زمان انتخاب می‌شوند نیز با موفقیت مورد استفاده قرار گرفته است. (در این‌گونه موارد، فصل اول را باید یک فصل مرجع به‌شمار آورد و بحث تفصیلی سینماتیک برداری را برای مدتی به تعویق انداخت. سایر پیشنهادات در پیشگفتار خطاب به مدرس آمده است.) تجربه ما حاکی از آن است که یکی از مشکلات اصلی بیشتر دانشجویان، در نحوه کاربرد ریاضیات برای حل مسائل فیزیکی است، نه در خود روشهای ریاضی. مبانی ریاضیات را می‌توان نسبتاً راحت فراگرفت، اما کسب قابلیت در حل مسائل نیاز به راهنمایی دقیق دارد. به این منظور، در سراسر این کتاب تعداد زیادی مثالهای حل شده ارائه داده‌ایم. برخی از مثالها، بخصوص در فصلهای اولیه، اساساً جنبه آموزشی دارند. اما در بسیاری از مثالها، اصول و روشهای مورد نظر را با کاربردشان در مسائل واقعی فیزیکی نشان داده‌ایم.

فصل اول در واقع یک مقدمه ریاضی است که عمدتاً درباره بردارها و سینماتیک است. مفهوم آهنگ تغییر یک بردار، که احتمالاً مشکلترین مفهوم ریاضی در این کتاب است، نقش مهمی در تمام مکانیک ایفا می‌کند. در نتیجه این مطلب با دقت زیادی، هم از نظر تحلیلی و هم از نظر هندسی، مورد بحث قرار می‌گیرد. بعداً معلوم می‌شود که روش هندسی از ارزش خاصی برای "تجسم" دینامیکی تکانه زاویه‌ای برخوردار است.

فصل دوم از دستگاههای لخت، قوانین نیوتون، و بعضی نیروهای معمولی بحث می‌کند. بیشتر مطالب این بحث در اطراف استفاده از قوانین نیوتون است، زیرا در ابتدا حتی تحلیل مسائل ساده برحسب اصول کلی می‌تواند کار مشکلی باشد. تجسم یک سیستم پیچیده برحسب عناصر متشکله آن، انتخاب دستگاه مختصات لخت مناسب، و تمیز میان نیروها و شتابها، تماماً جزء مهارتهایی است که باید کسب شود. مثالهای تشریحی متعدد در این کتاب با دقت انتخاب شده‌اند تا به تحصیل چنین مهارتهایی کمک کنند.

تکانه و انرژی در دو فصل بعدی مورد بحث قرار گرفته‌اند. در فصل سوم قوانین نیوتون را برای سیستمهای گسترده (غیر نقطه‌ای) به‌کار می‌گیریم. دانشجویان غالباً در کاربرد مفهوم تکانه در مورد موشک و سایر دستگاههایی که با تغییر جرم سروکار دارند، دچار اشتباه می‌شوند. شیوه ما استفاده از روش دیفرانسیل برای سیستمی است که در بازه زمانی انتخاب شده هیچ جرمی از مرز آن عبور نمی‌کند. بدین ترتیب، مطمئن می‌شویم که هیچ مؤلفه‌ای از تکانه کل را نادیده نمی‌گیریم. این فصل با بحثی درباره شار تکانه به پایان می‌رسد. در فصل ۴ قضیه کار-انرژی و کاربرد آن را برای نیروهای پایستار و ناپایستار مورد توجه قرار می‌دهیم. قوانین پایستگی تکانه و انرژی را با بررسی مسائل برخورد مطالعه می‌کنیم. در فصل ۵ درباره جنبه‌های ریاضی نیروهای پایستار و انرژی پتانسیل صحبت می‌کنیم. این

مطالب درجای دیگری از این کتاب مورد نیاز نیست. اما برای دانشجویانی که می‌خواهند بررسی ریاضی کاملتری از موضوع داشته باشند، جالب توجه است.

دانشجویان در مورد درک خواص تکانه زاویه‌ای و حرکت جسم صلب معمولاً مشکلاتی دارند؛ تاحدودی به این علت که حرکت دورانی آنچنان از محدوده تجربه دور است که آنها نمی‌توانند به احساس مستقیم و شهودی خود متکی باشند. در نتیجه کتابهای درسی مقدماتی، با وجود اهمیت این مطالب، غالباً از کنار آنها رد می‌شوند. مابه این نتیجه رسیدیم که حرکت دورانی را با تأکید بر استدلال فیزیکی و هندسی و نیز با ارائه مثالهای حل شده متعدد بهتر می‌توان درک کرد تا با فرمولبندی صرفاً ریاضی. در فصل ۶ تکانه زاویه‌ای را معرفی کرده‌ایم و به دینامیک سیستمهایی که محور دوران آنها ثابت است پرداخته‌ایم. در فصل ۷ با کاربرد خواص برداری در مورد سیستمهایی که تکانه زاویه‌ای اسپینی بر آنها حاکم است، ویژگیهای مهم حرکت جسم صلب را بررسی کرده‌ایم. یک بحث مقدماتی درباره حرکت عمومی جسم صلب در بخشهای آخر فصل ۷ ارائه کرده‌ایم تا نشان بدهیم که چگونه می‌توان معادلات اوایلر را از استدلالهای ساده فیزیکی نتیجه‌گیری کرد. اما این نوع مطالب پیشرفته‌تر کاملاً اختیاری‌اند، و خود ما در درسی که ارائه می‌کنیم معمولاً به این مطالب نمی‌پردازیم.

فصل ۸ که درباره دستگاههای مختصات نالخت است، بحث درباره اصول مکانیک نیوتونی را کامل می‌کند. تا اینجا کتاب منحصراً از دستگاههای لخت استفاده شده است تا از اشتباه میان نیروها و شتابا پرهیز شود. ما در بحث دستگاههای نالخت، بر ارزش آنها به عنوان ابزار محاسباتی و نیز پیامدهای آنها در مبانی مکانیک تأکید می‌کنیم.

فصل ۹ به حرکت در اثر نیروی مرکزی می‌پردازد و فصل ۱۰ درباره نوسانگر هماهنگ است. اگرچه این فصلها مفاهیم تازه‌ای را در بر ندارند، ولی کاربرد اصول مکانیک را در مباحثی که عموماً در فیزیک مورد توجه‌اند و اهمیت دارند نشان می‌دهند. بانگه بر موضوع انرژی و همچنین با کاربرد تقریبهای ساده، از بسیاری پیچیدگیهای جبری نوسانگر هماهنگ کاسته‌ایم.

در فصلهای ۱۱ تا ۱۴ بحثی درباره اصول نسبیت خاص و بعضی کاربردهای آن ارائه داده‌ایم. کوشیده‌ایم که بروجود هماهنگی میان تفکر نسبیتی و کلاسیک تأکید کنیم و معتقدیم که روشن کردن وحدت قوانین پایستگی فیزیک کلاسیک و نسبیت با ارزشتر از صرف وقت زیاد درباره "پارادوکسها" است. روش کار ما دقیق است و از پیچیدگیهای ریاضی حتی الامکان اجتناب کرده‌ایم. در فصل ۱۴ نشان داده‌ایم که مفاهیم تقارن نقشی اساسی در فرمولبندی نسبیت ایفا می‌کند. اگرچه در تدوین این فصل دانشجویان مبتدی را در نظر داشته‌ایم، ولی مفاهیم مطرح شده در آن نسبت به فصلهای قبلی مستلزم دقت بیشتری است. اگر لازم باشد فصل ۱۴ را می‌توان حذف کرد؛ اما با توجه به اهمیت تقارن در اصول مکانیک، این فصل را باید یک روش تفکر جالب و یک ابزار جدید نیرومند به شمار آورد.

فیزیک را به طور انفعالی نمی‌توان آموخت؛ مطلقاً هیچ جانشینی برای دست و پنجه نرم کردن با مسائل غامض وجود ندارد. در همین جاست که دانشجویان از درگیر شدن با مسائل و درک صحیح اصول فیزیکی احساس رضایت می‌کنند. گردآوری مسائل این کتاب، طی سالها تدریس و استفاده از تجربیات کلاسی انجام گرفته است. تعدادی از مسائل کاملاً ساده‌اند و به منظور تمرین ارائه شده‌اند؛ ولی بیشتر مسائل بر اصول بنیادی استوارند و نیازمند تفکر و تلاش جدی هستند. ما کوشیده‌ایم مسائلی را انتخاب کنیم که سزاوار این تلاش باشند.

دانیل کلپنر

روبرت کلنکو

خطاب به مدرسان

هشت فصل اول این کتاب مقدمهٔ جامعی بر مکانیک کلاسیک است و هستهٔ اصلی یک درس یک ترمی را تشکیل می‌دهد. در یک ترم ۱۲ هفته‌ای، عموماً هشت فصل اول و بخشهایی از فصل ۹ و ۱۰ را تدریس می‌کنیم؛ اما معمولاً فصل ۵ و بعضی از مطالب پیشرفتهٔ فصلهای ۷ و ۸ را حذف می‌کنیم. اگرچه بعضی دانشجویان خودشان این مطالب را می‌خوانند.

فصلهای ۱۱، ۱۲، و ۱۳ مقدمهٔ کاملی بر نسبیت خاص است. فصل ۱۴ که دربارهٔ نظریهٔ تبدیل و چاربردارهاست، بینش عمیقتری از موضوع نسبیت برای دانشجویان علاقه‌مند فراهم می‌کند. ما فصلهای مربوط به نسبیت را در یک درس فشردهٔ سه هفته‌ای و نیز به عنوان بخشی از درس الکتروسیسته و مغناطیس به کار برده‌ایم.

مسائل آخر هر فصل عموماً به ترتیب مشکل بودن درجه‌بندی شده‌اند. این مسائل "جمعی" هم هستند، یعنی مفاهیم و روشهای فصلهای پیشین به طور مکرر در بخشهای بعدی این کتاب به کار گرفته می‌شوند. انتظار می‌رود که دانشجو در پایان این درس، بینش درستی برای حل مسائل جدید پیدا کند، برآوردی هوشمندانه از مسائل داشته باشد و بداند که مثلاً در یک مورد خاص باید از روش تکانه شروع کرد یا از روش انرژی، و بتواند وقتی اولین اقدام وی ناکام ماند راه حل دیگری را انتخاب کند. بسیاری از دانشجویان از کسب این‌گونه مهارتها بسیار ابراز رضایت کرده‌اند.

بیشتر این مسائل نیاز به حل نمادی دارند تا عددی. منظور از بیان این مطلب، کم اهمیت شمردن عملیات عددی نیست، بلکه تقویت عادت تجزیه و تحلیل مسائل با روش نمادی است. جوابها برای برخی از مسائل داده شده‌اند؛ در بعضی مسائل یک "جواب حالت خاص" ارائه شده است تا دانشجو بتواند نتیجه نمادی خود را واریسی کند. بعضی از این مسائل بحث‌انگیز و نیازمند تفکر و مباحثه‌اند. از آنجا که گنجاندن بیش از حد چنین مسائلی ممکن است موجب دلسردی شود، هر تکلیفی باید مخلوطی از مسائل ساده و مشکل باشد.

فصل ۱ اگرچه ما ترجیح می‌دادیم درس مکانیک را بایک بحث فیزیکی شروع کنیم تا ریاضی، ولی اختصاص چند جلسه اول به ریاضیات مربوط به حرکت، مزایای انکارناپذیری دارد. مفاهیم سینماتیک در بیشتر قسمتها بسیار ساده است، و شناخت بدون ابهام آنها برای پرداختن به مسائل بسیار ظریفتر که در دینامیک نیوتونی در فصل ۲ ارائه شده بسیار مفید است. بحث سینماتیک را با استفاده از مختصات قطبی عرضه کرده‌ایم که در واقع انحرافی از روش متداول است. این روش در ابتدا در نظر بسیاری از دانشجویان پردردسر می‌نماید و نیازمند تلاش جدی است. ولی ما احساس می‌کنیم که این تلاش، پاداش خوبی در پی خواهد داشت. اولاً وقتی بتوانیم آزادانه از مختصات قطبی استفاده کنیم، درک سینماتیک حرکت دورانی بسیار آسانتر می‌شود و پیچیدگی شتاب شعاعی از بین می‌رود. از این مهمتر، شناخت با ارزشی از ماهیت بردار وابسته به زمان بریمان فراهم می‌شود. این شناخت نه تنها دینامیک حرکت ذره را در فصل ۲ ساده می‌کند بلکه برای بحث شار تکانه در فصل ۳، تکانه زاویه‌ای در فصلهای ۶ و ۷ و کاربرد مختصات نالخت در فصل ۸ نیز بسیار مفید است. بنابراین، تلاشی که برای درک ماهیت بردارهای وابسته به زمان در فصل ۱ صورت می‌گیرد پیامدهای مفیدی برای تمام درس در بر دارد.

اگر این درس برای دانشجویانی در نظر گرفته می‌شود که ریاضیات را به طور همزمان شروع می‌کنند، پیشنهاد می‌کنیم که قسمتهایی از فصل ۱ به تعویق بیفتد. فصل ۲ را می‌توان پس از تدریس فقط شش بخش اول فصل ۱ شروع کرد. از مثال ۲-۵ به بعد، سینماتیک حرکت دورانی مورد نیاز است. در اینجا مفاهیمی که در بخش ۱-۹ ارائه شده‌اند باید معرفی شوند. بخش ۱-۷ را که درباره انتگرال بردارهاست می‌توان تا آشنا شدن دانشجویان با محاسبات انتگرالی به تعویق انداخت. مثالها و مسائل خاصی را که مربوط به انتگرال‌اند تا آن زمان باید حذف کرد. بخش ۱-۸ که مربوط به تعبیر هندسی مشتق‌گیری برداری است، در واقع تدارک اساس فصلهای ۶ و ۷ است و نیازی نیست که قبل از آن مورد بحث قرار بگیرد.

فصل ۲ مطالب فصل ۲ غالباً برای نخستین بار دانشجو را به این تلاش وامی‌دارد که اصول مجرد را در موقعیتهایی مشخص به کار بگیرد. قوانین حرکت نیوتون به خودی خود بدیهی نیست؛ بیشتر مردم به طور ناخودآگاه از تفکر ارسطویی پیروی می‌کنند. ما توجه کرده‌ایم که دانشجویان پس از یک دوره تردید

اولیه، عادت می‌کنند که مسائل را طبق اصول تحلیل کنند و از شهود مبهم خود دست بردارند. یک منبع اشکال در آغاز، درهم آمیختگی مفاهیم نیرو و شتاب است. بنابراین ما بر استفاده از دستگاههای لخت تأکید می‌کنیم و قویاً توصیه می‌کنیم که دستگاههای مختصات نالخت تا فصل ۸ که کاربرد صحیح آن مورد بحث قرار می‌گیرد به تعویق بیفتد. به‌ویژه استفاده از نیروی مرکزگیز در فصلهای اول ممکن است به سردرگمی زیادی میان دستگاههای لخت و نالخت بینجامد، که در هر حال برای تحلیل حرکت در دستگاههای مختصات چرخان کافی نیست.

فصل ۳ و ۴ راههای متعددی برای به دست آوردن معادلات حرکت موشک وجود دارد. اما مسائل مربوط به موشک تنها مسائلی نیستند که به شارش جرم مربوط می‌شوند و در آنها انتخاب روشی آسان برای تعمیم مطلب، اهمیت دارد. همچنین بسیار خوب است که این روش با قوانین پایستگی تکانه هماهنگی داشته باشد، به بیان صریحتر، هیچ ترفندی در کار نباشد. روش دیفرانسیل که در بخش ۳-۵ مورد استفاده قرار می‌گیرد برای رفع این نیاز است. این روش ممکن است روش ظریفی نباشد، اما روشی ساده و کاملاً عمومی است.

در فصل ۴، سعی ما بر این است که بر اهمیت کلی قضیه کار-انرژی و اختلاف میان نیروهای پایستار و ناپایستار تأکید کنیم. اگرچه انتگرال خطی در اینجا معرفی و توضیح داده می‌شود، ولی تنها به انتگرالهای خطی ساده نیاز است و نباید بی‌جهت به روشهای کلی پرداخت.

فصل ۵ این فصل بحث درباره انرژی را کامل می‌کند و کلیات مفیدی از نظریه پتانسیل و ریاضیات برداری ارائه می‌دهد. اما این بحث نسبتاً پیشرفته است و فقط مورد استقبال دانشجویانی قرار می‌گیرد که شَم ریاضی دارند. این نتایج در جاهای دیگری از کتاب مورد نیاز نیست، و ما پیشنهاد می‌کنیم که این فصل به عنوان یک فصل اختیاری یا مطلب ویژه در نظر گرفته شود.

فصل ۶ و ۷ بیشتر دانشجویان به این نتیجه می‌رسند که تکانه زاویه‌ای دشوارترین مفهوم فیزیکی در مکانیک مقدماتی است. مشکل اصلی در واقع تجسم خواص برداری تکانه زاویه‌ای است. بنابراین ما بر اهمیت برداری تکانه زاویه‌ای به دفعات در سراسر این فصلها تأکید خواهیم کرد. به‌ویژه، بسیاری از ویژگیهای حرکت جسم صلب را می‌توان باتکیه بر شناخت بردارهای وابسته به زمان که در فصلهای قبل بحث شد به طور شهودی درک کرد. تأکید بر خصوصیات کیفی حرکت جسم صلب بیشتر از جنبه‌های صوری، نظیر نانسور لختی، مفید است. در صورت تمایل می‌توان تا حد زیادی بر این استدلالهای کیفی پرداخت، همانطور که در تحلیل رقص محوری ژيروسکوپ در یادداشت ۷-۲ چنین کرده‌ایم. بحث مقدماتی معادلات اویلر در بخش ۷-۷ فقط برای مطالعه اختیاری در نظر گرفته شده است. اگرچه فصلهای ۶ و ۷ نیازمند کار زیاد است، ولی بسیاری از دانشجویان، با مطالعه آنها نوعی بینش فیزیکی نسبت به تکانه زاویه‌ای و حرکت جسم صلب پیدا می‌کنند که بندرت در فیزیک مقدماتی قابل حصول

است و غالباً در درسهای پیشرفته هم تحت الشعاع ریاضیات قرار می‌گیرد.

فصل ۸ موضوع دستگاههای نالخت، یک سکوی جهش طبیعی به مقولات فکری جالبی چون نظریهٔ تبدیلات و اصل هم‌ارزی است. از دیدگاه عملی‌تر، کاربرد دستگاههای نالخت روش مهمی برای حل بسیاری از مسائل فیزیکی است.

فصلهای ۹ و ۱۰ در این فصلها اصولی که قبلاً بررسی شده‌اند، در مورد دو مسئلهٔ مهم حرکت در اثر نیروی مرکزی و حرکت نوسانگر هماهنگ، به‌کار گرفته می‌شوند. اگرچه این دو موضوع کلاً به‌طور صوری مورد بحث قرار می‌گیرند، ولی ما سعی کرده‌ایم که بسط ریاضی آنها را ساده کنیم. بحث دربارهٔ حرکت ناشی از نیروی مرکزی موكداً مبتنی بر قوانین پایستگی و نمودارهای انرژی است. در بررسی نوسانگر هماهنگ، باتکیه بر نوسانگر با- میرایی کم، از بسیاری پیچیدگیهای جبری متداول اجتناب کرده‌ایم. طرح کار بردها و مثالها در این دو فصل نقش مهمی ایفا می‌کند.

فصلهای ۱۱ تا ۱۴ طرح نسبیت خاص، تغییر جالبی در مسیر درس مکانیک به‌وجود می‌آورد. روش ما در واقع تأکیدی است بر ارتباط میان نسبیت و تفکر کلاسیک. ما از آزمایش مایکلسون-مورلی به‌عنوان زمینه‌ای برای این بحث استفاده کرده‌ایم. اگرچه در تأثیر این آزمایش بر تفکر اینشتین بسیار اغراق کرده‌اند، ولی چنین روشی این مزیت را دارد که بحث را بر یک تجربهٔ واقعی متکی می‌کند. سعی کرده‌ایم که بر مفهوم رویدادها و تبدیلات آنها تکیه کنیم، بدون اینکه از راههای محاسباتی و روشهای نموداری کمک بگیریم. این روش به ما امکان می‌دهد که از تأکید بر بسیاری از "پارادوکسها" خودداری کنیم.

برای بسیاری از دانشجویان، پیچیدگی واقعی نسبیت در اصل موضوعها یا قوانین تبدیل نیست، بلکه در این است که چرا اصول تبدیل باید ناگهان تبدیل به مفهومی بنیادی برای کشف قوانین جدید فیزیکی شود. این امر ناظر بر عمیقترین و حساسترین جنبه‌های تفکر اینشتین است. فصل ۱۴ که دربارهٔ چاربردار است، مقدمه‌ای بر نظریهٔ تبدیل ارائه می‌دهد و بحثهای قبلی را به‌طور یکپارچه و خلاصه عرضه می‌دارد. ما این فصل را اختیاری در نظر گرفته‌ایم.

دانیل کلینر

روبرت کلنکو

بردارها و مکانیک - مقدمات ریاضی

۱-۱ مقدمه

هدف اصلی این کتاب این است که به دانشجویان درک عمیقی از اصول مکانیک ارائه کند. مبحث مکانیک درست در قلب فیزیک جای دارد، مفاهیم آن در درک جهان فیزیکی روزمره و پدیده‌هایی در مقیاسهای اتمی و کیهانی نقش اساسی دارند. مفاهیم مکانیک، مانند تکانه، تکانه زاویه‌ای، و انرژی، در عمل تقریباً در همهٔ مباحث فیزیکی نقش مؤثری دارند.

در بحث اصول فیزیکی اغلب از ریاضیات استفاده خواهیم کرد، زیرا به این وسیله نظرات پیچیده فیزیکی را به سرعت و به وضوح بیان خواهیم کرد، و علاوه بر آن ریاضی غالباً می‌تواند راهگشای بینشهای جدید باشد. به علاوه، تأثیر متقابل تجربه و نظریه در فیزیک بر اساس پیش‌بینی‌کننده و اندازه‌گیری استوار است. به این خاطر، فصل اول را به معرفی ابزارهای ریاضی مورد نیاز اختصاص می‌دهیم و بحث پیرامون اصول اساسی مکانیک را به فصل دوم موکول می‌کنیم.

۱-۲ بردار

مطالعه بردار، مقدمه خوبی برای درک نقش ریاضیات در فیزیک است. با استفاده از نمادگذاری برداری، قوانین فیزیکی را غالباً می‌توان به صورت ساده و مختصر نوشت. (یادآور می‌شویم که نمادگذاری برداری جدید، برای اولین بار توسط فیزیکدانی به نام ویلارد گیسیس از دانشگاه ییل، به منظور نمایش ساده‌تر معادلات ابداع شده است.) به عنوان مثال، قانون دوم نیوتون (که در فصل آینده از آن بحث خواهیم کرد.) با استفاده از نمادگذاریهای متداول در قرن نوزدهم به صورت زیر نوشته می‌شود

$$F_x = ma_x$$

$$F_y = ma_y$$

$$F_z = ma_z$$

در نمادگذاری برداری، به سادگی می‌توان نوشت

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

انگیزه اصلی ما از معرفی بردارها فقط ساده‌تر کردن شکل معادلات است. اما، همان‌طور که در فصل آخر کتاب خواهیم دید، بردار معنی عمیقتری دارد. بردار رابطه‌ای تنگاتنگ با نظرات اساسی تقارن دارد و لذا استفاده از آن می‌تواند به زمینه‌های ذهنی پرارزشی برای درک صور مختلف قوانین ناشناخته منجر شود.

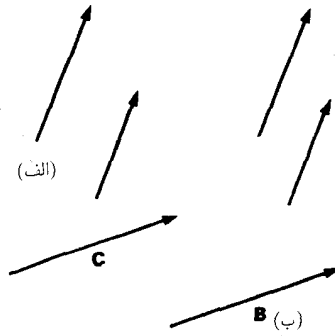
تعریف بردار

بردار را می‌توان از سه دیدگاه هندسی، تحلیلی، و اصل موضوعی مورد بررسی قرار داد. گرچه هر سه این دیدگاهها اهمیت دارند ولی ما در بحث مکانیک فقط به روشهای هندسی و تحلیلی نیاز خواهیم داشت.

از دیدگاه هندسی، بردار پاره خطی است جهت‌دار. در نوشتن می‌توان بردار را به وسیله یک پیکان مشخص کرد و با یک حرف لاتین که بر بالای آن پیکان کوچکی گذاشته شده نشان داد. در چاپ، برای نشان دادن یک بردار طبق معمول از حروف پررنگ (سیاه) استفاده می‌شود.

برای توصیف بردار باید بزرگی و جهت آن را مشخص کرد. فرض می‌کنیم که انتقال موازی باعث تغییر بردار نمی‌شود، مگر اینکه خلاف آن ذکر شود. از این روی پیکانهای شکل ۱-۱ (الف) همگی نشانگر یک بردارند.

اگر دو بردار دارای طول و جهت یکسان باشند، با هم برابرند. مثلاً بردارهای \mathbf{B} ، \mathbf{C} در



شکل ۱-۱

شکل ۱-۱ (ب) با هم برابرند:

$$B = C$$

طول هر بردار را بزرگی آن بردار می‌نامند. بزرگی یک بردار با علامت قدر مطلق مشخص می‌شود، یا برای اجتناب از هرگونه اشتباهی می‌توان از حروف ایتالیک استفاده کرد. برای مثال، بزرگی بردار A را به صورت $|A|$ و یا به طور ساده A نشان می‌دهند. اگر طول A برابر $\sqrt{2}$ باشد، آنگاه می‌نویسیم $|A| = A = \sqrt{2}$.

اگر طول برداری برابر یک واحد باشد، آن را بردار یکه می‌نامیم. بردار یکه را با یک حرف لاتین و علامت "ع" در بالای آن نشان می‌دهیم؛ \hat{A} برداری است به طول واحد موازی با بردار A . از این رو داریم

$$\hat{A} = \frac{A}{|A|}$$

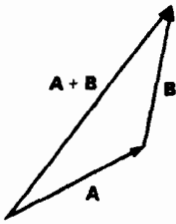
و به عبارت دیگر

$$A = |A| \hat{A}$$

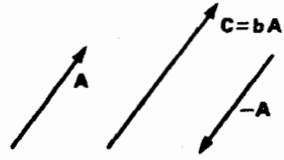
جبر برداری

ضرب بردار در یک کمیت نرده‌ای: اگر بردار A را در یک کمیت نرده‌ای مثبت b ضرب کنیم، نتیجه بردار جدیدی است مانند $C = bA$. بردار C موازی A است، و طول آن، b برابر طول A است. بنابراین $\hat{C} = \hat{A}$ و $|C| = b|A|$ است.

حاصلضرب یک بردار در -1 بردار جدیدی است در خلاف جهت بردار اولیه شکل ۲-۱. ضرب یک بردار در یک کمیت نرده‌ای منفی به وضوح می‌تواند بزرگی و جهت آن را تغییر دهد (شکل ۲-۱).



شکل ۳-۱



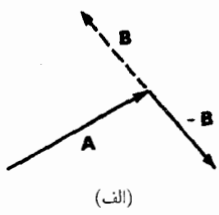
شکل ۲-۱

جمع دو بردار: جمع بردارها تعبیر هندسی ساده‌ای دارد که به طریق ترسیمی در شکل ۳-۱ نشان داده شده است.

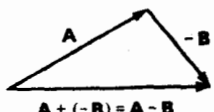
قاعده جمع بردارها: برای جمع کردن B با A ، ابتدای B را به انتهای A متصل می‌کنیم، برداری که ابتدای A را به انتهای B وصل می‌کند بردار حاصل جمع (برایند) است.

تفاضل دو بردار: از آنجا که $A - B = A + (-B)$ است، برای تفریق B از A می‌توان ابتدا B را در -1 ضرب، و سپس آن را به A اضافه کرد. شکل ۴-۱ (الف) و (ب) این عمل را نشان می‌دهند. راه دیگر ساختن $A - B$ این است که انتهای B را بر انتهای A قرار می‌دهیم. در این صورت $A - B$ برداری است از ابتدای A تا ابتدای B که در شکل ۴-۱ (ج) نشان داده شده است. اثبات قوانین زیر چندان مشکل نیستند. در اینجا قانون جابه‌جایی را به طریق هندسی اثبات می‌کنیم، و اثبات بقیه قوانین را به عهده دانشجویان واگذار می‌کنیم.

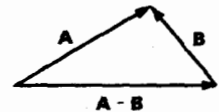
- $A + B = B + A$ قانون جابه‌جایی
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ قانون شرکت‌پذیری
- $c(dA) = (cd)A$
- $(c + d)A = cA + dA$ قانون توزیع‌پذیری
- $c(A + B) = cA + cB$



(الف)

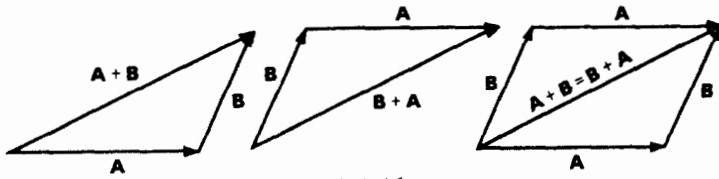


(ب) $A + (-B) = A - B$



(ج)

شکل ۴-۱



شکل ۱-۵

اثبات قانون جابه‌جایی در جمع بردارها

گرچه در جمع، تفریق، و ضرب یک بردار در یک کمیت نرده‌ای چندان ابهامی وجود ندارد، ولی نتیجه "ضرب" یک بردار در بردار دیگر، کاملاً واضح نیست. اینکه نتیجه ضرب دو بردار، یک بردار، یک کمیت نرده‌ای، و یا کمیت دیگری باشد، بستگی به انتخاب ما دارد، بنابراین ما دو نوع ضرب را که در فیزیک کاربردهای مفیدی دارند، تعریف می‌کنیم.

ضرب نرده‌ای (ضرب "نقطه‌ای") نوع اول به نام ضرب نرده‌ای معروف است، زیرا در این ضرب از ترکیب دو بردار، یک کمیت نرده‌ای تشکیل می‌شود. حاصلضرب نرده‌ای دو بردار A و B را به صورت $A \cdot B$ نشان می‌دهند و غالباً آن را ضرب نقطه‌ای می‌نامند. $A \cdot B$ به وسیله رابطه $A \cdot B \equiv |A||B| \cos \theta$ تعریف می‌شود. در اینجا θ زاویه بین A و B است زمانی که A و B را از مبدأ مشترکی رسم کنیم (شکل ۱-۶ الف).

از آنجا که $|B| \cos \theta$ تصویر B بر روی A است، حاصلضرب $A \cdot B$ را می‌توان به صورت (تصویر B روی A) $A \cdot B = |A| \times$ نوشت (شکل ۱-۶ ب). و یا به همین ترتیب

$$A \cdot B = |B| \times (\text{تصویر } A \text{ روی } B)$$

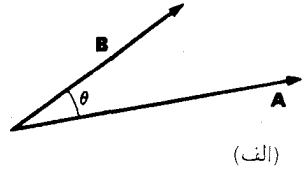
اگر $A \cdot B = 0$ باشد، آنگاه یا $|A| = 0$ یا $|B| = 0$ یا A بر B عمود است ($\cos \theta = 0$). ضرب نرده‌ای از این جهت که حاصلضرب نقطه‌ای دو بردار غیر صفر می‌تواند صفر شود، غیر عادی است.

توجه کنید که $A \cdot A = |A|^2$ است.

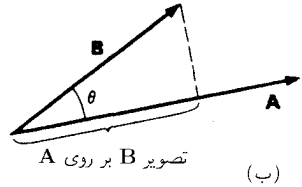
در اینجا با نمایش مفید بودن ضرب نرده‌ای به روش بسیار ساده‌ای قانون کسینوسها را تأیید می‌کنیم.

مثال ۱-۱ قانون کسینوسها:

$$C = A + B$$

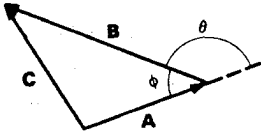


(الف)



(ب)

شکل ۶-۱



شکل ۷-۱

$$C \cdot C = (A + B) \cdot (A + B)$$

$$|C|^2 = |A|^2 + |B|^2 + 2|A||B|\cos\theta$$

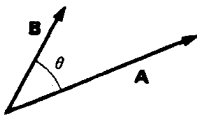
این نتیجه را معمولاً بر حسب زاویه ϕ بیان می‌کنند:

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\phi$$

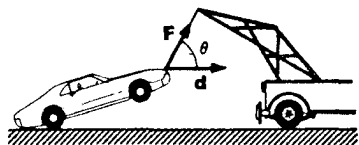
■ [در اینجا از رابطه $\cos\theta = \cos(\pi - \phi) = -\cos\phi$ استفاده شده است.]

مثال ۲-۱ کار و ضرب نرده‌ای: ضرب نقطه‌ای، مهمترین کاربرد خود را به هنگام بحث کار و انرژی (فصل ۴) نشان می‌دهد. همانطور که احتمالاً می‌دانید، کار (W) انجام شده به وسیله نیروی F بر روی یک جسم عبارت است از جابه‌جایی d جسم ضربدر مؤلفه نیروی F در امتداد جابه‌جایی d . اگر نیرو وارد شده با امتداد جابه‌جایی تشکیل زاویه θ بدهد، (شکل ۸-۱) داریم

$$W = (F \cos\theta)d$$



شکل ۹-۱



شکل ۸-۱

با فرض اینکه نیرو و جابه‌جایی هر دو بردار باشند، داریم

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$$

ضرب برداری "ضرب خارجی": دومین نوع ضربی که مورد نیاز است ضرب برداری است. در این حالت از ترکیب دو بردار \mathbf{A} و \mathbf{B} بردار سومی مانند \mathbf{C} به وجود می‌آید. برای مشخص کردن ضرب برداری از علامت ضرب (\times) استفاده می‌کنیم:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

که نام دیگر آن ضرب خارجی است.

ضرب برداری پیچیده‌تر از ضرب نرده‌ای است، زیرا در اینجا باید علاوه بر بزرگی، جهت $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ را هم مشخص کنیم. بزرگی حاصلضرب برداری دو بردار را به طریق زیر تعریف می‌کنیم: اگر

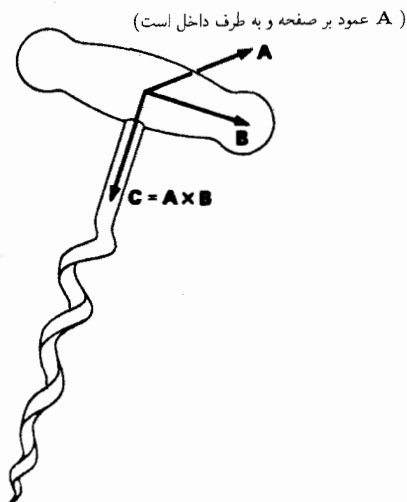
$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

باشد، آنگاه داریم

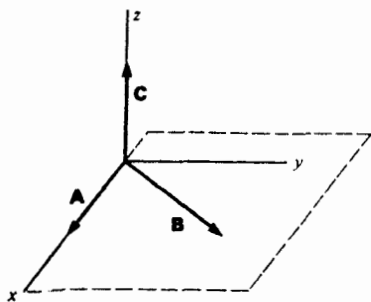
$$|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin \theta$$

که در آن θ زاویه بین \mathbf{A} و \mathbf{B} است، وقتی که هر دو از مبدأ مشترکی رسم شده باشند. (برای احتراز از هر گونه ابهام، θ را همواره کوچکتر از π می‌گیریم). توجه کنید که حاصلضرب برداری وقتی که $\theta = 0^\circ$ و یا π باشد، حتی اگر $|\mathbf{A}|$ و $|\mathbf{B}|$ هم صفر نباشند، برابر صفر است.

وقتی که بردارهای \mathbf{A} و \mathbf{B} را از یک مبدأ مشترک رسم می‌کنیم، این دو بردار یک صفحه را مشخص می‌کنند. راستای بردار \mathbf{C} را عمود بر این صفحه تعریف می‌کنیم. بدین ترتیب بردارهای \mathbf{A} ، \mathbf{B} ، و \mathbf{C} با هم یک مجموعه سه‌گانه راستگرد را تشکیل می‌دهند. یک دستگاه مختصات دکارتی راستگرد را که \mathbf{A} و \mathbf{B} مطابق شکل ۱-۱۰ در صفحه xy آن قرار دارند در نظر می‌گیریم. چنانکه مشاهده می‌شود، \mathbf{A} بر محور x منطبق و \mathbf{B} متمایل به محور y است. اگر \mathbf{A} ، \mathbf{B} ، و \mathbf{C} یک مجموعه سه‌گانه راستگرد تشکیل دهند، آنگاه \mathbf{C} در امتداد محور z واقع می‌شود. از این پس از چنین دستگاه مختصات راستگردی مطابق شکل ۱-۱۰ استفاده خواهیم کرد. در اینجا روش دیگری را برای به دست آوردن جهت حاصلضرب برداری ارائه می‌دهیم. پیچ راستگرد را که محور آن بر \mathbf{A} و \mathbf{B} عمود است در نظر بگیرید (شکل ۱-۱۱). اگر آن را در جهتی که \mathbf{A} را به \mathbf{B} می‌رساند بپیچانیم، \mathbf{C} در جهت پیشروی آن قرار می‌گیرد (توجه: مطمئن



شکل ۱۱-۱



شکل ۱۰-۱

شوید که از بیج چپگرد استفاده نمی‌کنید، اگرچه این‌گونه پیچها کمیاب هستند. برخی شیرهای آب گرم از این نظر استثنا هستند).

از تعریف ضرب برداری نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

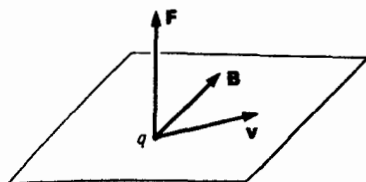
در این ضرب ترتیب عوامل مهم است. ضرب برداری جابه‌جایی پذیر نیست (در واقع چون تغییر ترتیب عوامل ضرب باعث تغییر علامت حاصلضرب می‌شود، این حاصلضرب جابه‌جایی ناپذیر است). برای هر بردار \mathbf{A} داریم

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

مثال ۱-۳ مثالهای ضرب برداری در فیزیک: ضرب برداری در فیزیک کاربرد فراوان دارد. برای مثال، اگر دربارهٔ برهم‌کنش ذرات باردار یک میدان مغناطیسی اطلاع داشته باشید می‌دانید که نیرو با بار q ، میدان مغناطیسی (\mathbf{B})، و سرعت ذره (v) متناسب است. نیرو با سینوس زاویهٔ بین \mathbf{B} و v تغییر می‌کند و بر صفحهٔ حاصل از v و \mathbf{B} عمود است، و جهت آن مطابق شکل ۱۲-۱ است. راه ساده‌ترین تمام این قواعد چنین است

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

یکی دیگر از کاربردهای ضرب برداری، تعریف گشتاور است در این مورد بعداً بیشتر بحث خواهیم



شکل ۱۲-۱

کرد. در حال حاضر فقط یادآور می‌شویم که گشتاور τ به وسیله رابطه زیر تعریف می‌شود

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

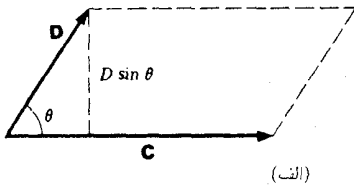
در اینجا \mathbf{r} برداری است از محوری که گشتاور را نسبت به آن حساب می‌کنیم تا نقطه اثر نیروی \mathbf{F} (شکل ۱۳-۱ الف). این تعریف با این ایده آشنا که "گشتاور معیاری است از توانایی ایجاد چرخش توسط یک نیرو"، سازگار است. توجه کنید که اگر یک نیروی بزرگ در جهت موازی با \mathbf{r} اعمال شود، هیچ گونه چرخشی ایجاد نمی‌کند بلکه صرفاً باعث کشیدن جسم می‌شود. تنها $F \sin \theta$ یعنی مؤلفه عمود بر \mathbf{r} است که تولید چرخش می‌کند (شکل ۱۳-۱ ب). با بزرگتر کردن بازوی اهرم، گشتاور نیز افزایش می‌یابد. همانطوری که در فصل ۶ خواهیم دید اختصاص دادن جهت به گشتاور بسیار مفید است. جهت طبیعی آن در امتداد محوری است که گشتاور به دور آن ایجاد دوران می‌کند. تمام این ایده‌ها در معادله $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ به طور خلاصه گنجانده شده‌اند. ■

مثال ۴-۱ نمایش برداری مساحت: برای توصیف مساحت می‌توانیم از ضرب برداری استفاده کنیم. معمولاً منظور از مساحت فقط بزرگی سطح مورد نظر است اما، موارد زیادی در فیزیک وجود دارد که در آنها سمتگیری سطح نیز ضرورت دارد. به عنوان مثال، برای محاسبه آهنگ عبور آب از میان حلقه سیمی با سطح معین که در مسیر یک رودخانه قرار دارد اگر سطح حلقه عمود یا موازی با جریان آب باشد تفاوت زیادی به وجود می‌آید (در حالت موازی، آهنگ جریان آب از حلقه صفر است). در اینجا نشان می‌دهیم که چگونه ضرب برداری این عمل را انجام می‌دهد.

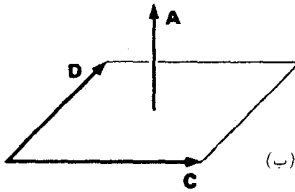
سطح یک چهار ضلعی متشکل از بردارهای \mathbf{C} و \mathbf{D} را در نظر بگیرید (شکل ۱۴-۱ الف). مساحت متوازی الاضلاع به وسیله رابطه زیر به دست می‌آید

$$A = \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} =$$

$$= CD \sin \theta$$

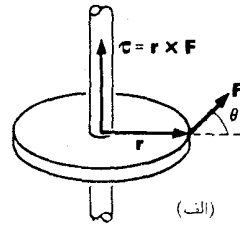


(الف)

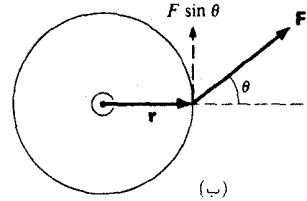


(ب)

شکل ۱۴-۱



(الف)



(ب)

نمای بالا

شکل ۱۳-۱

$$= |C \times D|$$

اگر A را به عنوان یک بردار تصور کنیم، (شکل ۱۴-۱ ب) داریم

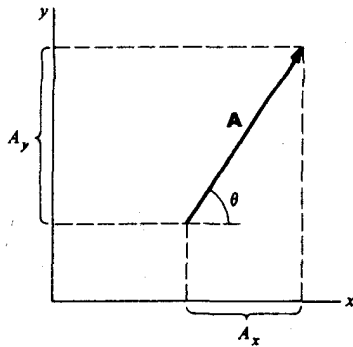
$$A = C \times D$$

قبلاً نشان دادیم که بزرگی A برابر مساحت متوازی الاضلاع است، و با استفاده از ضرب برداری می‌توان سمتگیری این مساحت را تعیین کرد. طبق تعریف، جهت بردار همان جهت عمود بر صفحه این مساحت است، یعنی سمتگیری آن با خط عمود بر این سطح موازی است. سوی این بردار تا حدودی اختیاری است یعنی می‌توانیم مساحت را به وسیله رابطه $A = D \times C$ نیز تعریف کنیم. اما وقتی که علامت انتخاب شد، دیگر قابل تغییر نیست.

۳-۱ مؤلفه‌های بردار

این واقعیت که ما می‌توانستیم بردارها را بدون معرفی یک دستگاه مختصات بخصوص مورد بحث قرار دهیم نشان می‌دهد که بردارها تا چه اندازه مفیدند. اعمال برداری بدون ارجاع به دستگاه‌های مختصات تعریف می‌شوند. اما، ناچاریم نتایج را از حالت مجرد به حالت واقعی منتقل کنیم، و در این مرحله باید دستگاه مختصات مورد نظر خود را انتخاب کنیم.

برای سهولت، خود را به یک دستگاه دوی بعدی یعنی صفحه آشنا xy مقید می‌کنیم. شکل ۱۵-۱ بردار A را در صفحه xy نشان می‌دهد. تصاویر بردار A روی محورهای مختصات، مؤلفه‌های



شکل ۱-۱۵

بردار \mathbf{A} نام دارند. مؤلفه‌های بردار \mathbf{A} روی محورهای x و y به ترتیب A_x و A_y هستند. بزرگی بردار \mathbf{A} برابر $|\mathbf{A}| = (A_x^2 + A_y^2)^{\frac{1}{2}}$ است، و جهت آن چنان است که با محور x زاویه $\theta = \arctan(A_y/A_x)$ می‌سازد.

از آنجا که مؤلفه‌های یک بردار معرف آن بردار است، هر بردار را می‌توانیم به وسیله مؤلفه‌های آن کاملاً مشخص کنیم. بنابراین

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y)$$

و یا به طور عمومی‌تر در سه بعد داریم

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

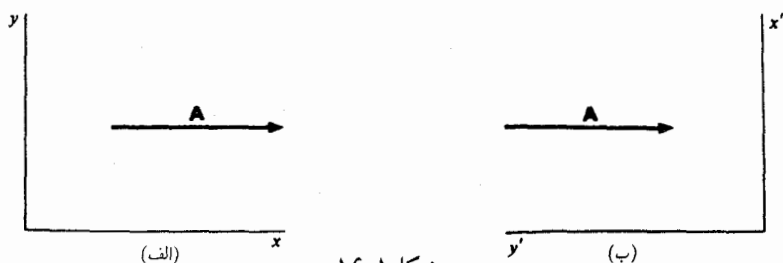
به عنوان تکلیف ثابت کنید که $|\mathbf{A}| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{\frac{1}{2}}$ است. بردار \mathbf{A} مفهومی مستقل از هر دستگاه مختصات دارد. ولی مؤلفه‌های بردار \mathbf{A} به دستگاه مختصات مرجع مورد استفاده بستگی دارند. برای نشان دادن این موضوع در شکل ۱-۱۶ بردار \mathbf{A} را در دو دستگاه مختصات مختلف رسم کرده‌ایم. در حالت اول (شکل ۱-۱۶ الف) داریم

$$\mathbf{A} = (A, 0) \text{ (دستگاه } xy \text{)}$$

در صورتی که در حالت دوم (شکل ۱-۱۶ ب) داریم

$$\mathbf{A} = (0, -A) \text{ (دستگاه } x'y' \text{)}$$

در اینجا ما خود را به دستگاه مختصات خاص مقید خواهیم کرد (مگر اینکه غیر از آن اشاره شود) به طوری که اگر



شکل ۱-۱۶

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}$$

آنگاه

$$A_x = B_x, A_y = B_y, A_z = B_z$$

معادله برداری $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ به طور نمادی بیانگر سه معادله نرده‌ای است.

همه اعمال برداری را به صورت معادلاتی از مؤلفه‌ها نیز می‌توان نوشت. برای مثال، از ضرب کمیت

نرده‌ای در یک بردار داریم

$$c\mathbf{A} = (cA_x, cA_y)$$

قانون جمع برای بردارها چنین است

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$$

با نوشتن بردارهای \mathbf{A} و \mathbf{B} به شکل مجموع بردارها در امتداد هر یک از محورهای مختصات (مؤلفه‌ها)،

می‌توان ثابت کرد

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

بررسی ضرب برداری را به بخش آینده موکول می‌کنیم.

مثال ۱-۵ جبر برداری: فرض کنید

$$\mathbf{A} = (3, 5, -7)$$

$$\mathbf{B} = (2, 7, 1)$$

کمیت‌های $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, $|\mathbf{A}|$, $|\mathbf{B}|$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ، و کسینوس زاویه بین \mathbf{A} و \mathbf{B} را پیدا کنید.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (3 + 2, 5 + 7, -7 + 1)$$

$$=(5, 12, -6)$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (3 - 2, 5 - 7, -7 - 1)$$

$$=(1, -2, -8)$$

$$|\mathbf{A}| = (3^2 + 5^2 + 7^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{83}$$

$$=9,11$$

$$|\mathbf{B}| = (2^2 + 7^2 + 1^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{54}$$

$$=7,35$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 3 \times 2 + 5 \times 7 - 7 \times 1$$

$$=34$$

$$\cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|} = \frac{34}{(9,11)(7,35)} = 0,507$$



مثال ۶-۱ رسم بردار عمود: برداریکه‌ای در صفحه xy پیدا کنید که بر بردار $\mathbf{A} = (3, 5, 1)$ عمود باشد.

بردار مطلوب را به صورت $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ نشان می‌دهیم. از آنجا که بردار \mathbf{B} در صفحه

xy قرار دارد، بنابراین $B_z = 0$ است. برای اینکه بردار \mathbf{B} بر بردار \mathbf{A} عمود باشد، باید $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ شود:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 3B_x + 5B_y = 0$$

از آنجا $B_y = -3/5B_x$ می‌شود، اما، \mathbf{B} یک برداریکه است، و برای آن $B_x^2 + B_y^2 = 1$ است.

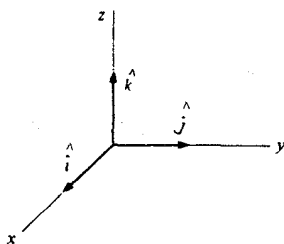
از ترکیب این دو نتیجه می‌شود: $B_x^2 + 9/25B_x^2 = 1$ و یا $B_x^2 = \pm 0,857$

$$\text{و } B_y = -3/5B_x = \pm 0,514$$

ابهام موجود در علامت B_x و B_y نشان می‌دهد که \mathbf{B} می‌تواند در امتداد خط عمود بر \mathbf{A} در هر



یک از دو جهت قرار گیرد.



شکل ۱-۱۷

۴-۱ بردارهای پایه

بردارهای پایه مجموعه‌ای از بردارهای یکه متعامد هستند که تعداد آنها با تعداد ابعاد موجود برابر است. برای مثال، چنانچه با دستگاه مختصات آشنای سه بعدی دکارتی کار کنیم، بردارهای پایه در امتداد محورهای x و y و z قرار می‌گیرند. برداریکه x با \hat{i} ، برداریکه y با \hat{j} و برداریکه z با \hat{k} نشان داده می‌شود (شکل ۱-۱۷).

بردارهای پایه دارای خواصی به شرح زیرند که به سادگی قابل تحقیق هستند:

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

هر برداری را می‌توانیم بر حسب بردارهای پایه بنویسیم

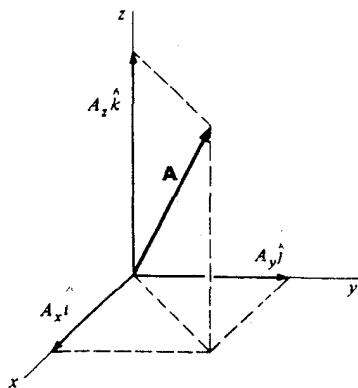
$$\mathbf{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

شکل ۱-۱۸ هر دو حالت نمایش یک بردار را نشان می‌دهد.

برای پیدا کردن مؤلفه‌ی یک بردار در یک جهت معین، حاصلضرب نقطه‌ای بردار را با برداریکه مربوط به آن جهت معین به دست می‌آوریم. به عنوان مثال:

$$A_z = \mathbf{A} \cdot \hat{k}$$

تعیین حاصلضرب برداری $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ نیز به کمک بردارهای پایه کار ساده‌ای است



شکل ۱۸-۱

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_x \hat{\mathbf{i}} + A_y \hat{\mathbf{j}} + A_z \hat{\mathbf{k}}) \times (B_x \hat{\mathbf{i}} + B_y \hat{\mathbf{j}} + B_z \hat{\mathbf{k}})$$

جمله اول را بررسی می‌کنیم

$$A_x \hat{\mathbf{i}} \times \mathbf{B} = A_x B_x (\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}}) + A_x B_y (\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}) + A_x B_z (\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}})$$

(در اینجا قانون شرکت پذیری را پذیرفته‌ایم.) از آنجا که $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{j}} \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$ است، داریم

$$A_x \hat{\mathbf{i}} \times \mathbf{B} = A_x (B_y \hat{\mathbf{k}} - B_z \hat{\mathbf{j}})$$

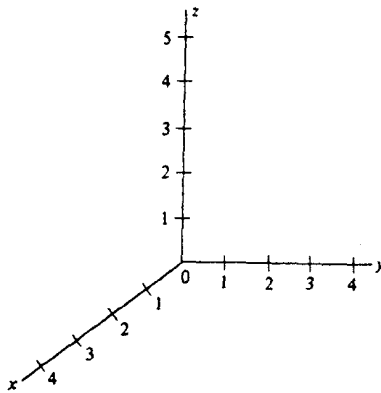
استفاده از بردارهای مشابهی برای مؤلفه‌های y و z ، چنین نتیجه می‌شود

$$A_y \hat{\mathbf{j}} \times \mathbf{B} = A_y (B_z \hat{\mathbf{i}} - B_x \hat{\mathbf{k}})$$

$$A_z \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B} = A_z (B_x \hat{\mathbf{j}} - B_y \hat{\mathbf{i}})$$

راه سریع به دست آوردن این عبارات این است که ابتدا اولین رابطه را پیدا کنیم، و سپس برای به دست آوردن بقیه از تبدیل چرخه‌ای x, y, z و $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ استفاده کنیم (یعنی: $x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x$ و $\hat{\mathbf{i}} \rightarrow \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{j}} \rightarrow \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}} \rightarrow \hat{\mathbf{i}}$). یک راه ساده برای به خاطر آوردن این نتیجه، استفاده از روش زیر است، بردارهای پایه و مؤلفه‌های بردارهای \mathbf{A} و \mathbf{B} را مانند سه سطر یک دترمینان به شکل زیر می‌نویسیم

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$



شکل ۱-۱۹

$$= \hat{i}(A_y B_z - A_z B_y) - \hat{j}(A_x B_z - A_z B_x) + \hat{k}(A_x B_y - A_y B_x)$$

به عنوان مثال، اگر $\mathbf{A} = \hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ و $\mathbf{B} = 4\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ باشد، آنگاه

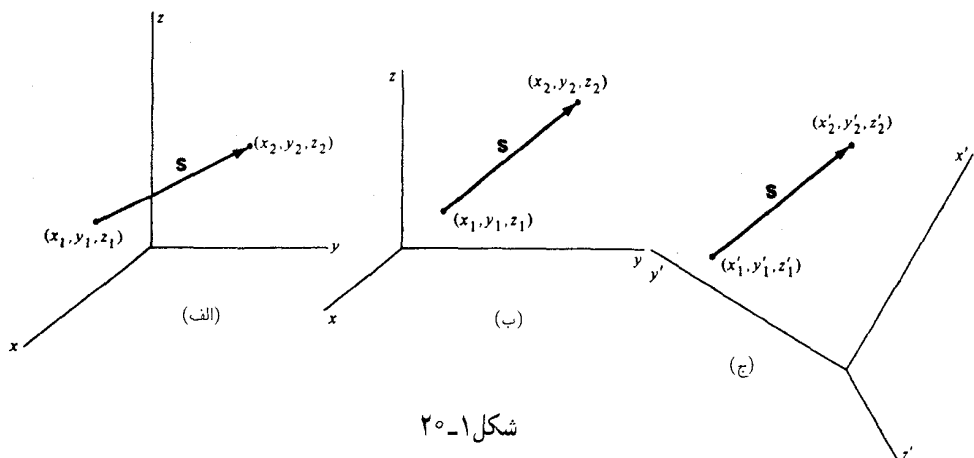
$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 10\hat{i} - 7\hat{j} - 11\hat{k} \end{aligned}$$

۵-۱ بردار جابه‌جایی و بردار مکان

تا به حال فقط دربارهٔ بردارها به‌طور مجرد بحث کرده‌ایم، اما، دلیل معرفی بردارها در اینجا کاملاً محسوس است. بردارها برای توصیف قوانین سینماتیک و قوانین حاکم بر خواص هندسی حرکت که در شروع بحث مکانیک به آنها نیاز داریم کاملاً مناسب‌اند. اولین کاربرد بردارها، توصیف مکان و حرکت در فضای سه بعدی معمولی خواهد بود. اگرچه اولین کاربرد بردارها در اینجا دربارهٔ حرکت یک نقطه در فضاست ولی این تنها کاربرد و یا مهم‌ترین کاربرد آن نیست. علاوه بر جابه‌جایی کمیتهای فیزیکی دیگری هم ماهیت برداری دارند که از آن جمله‌اند: سرعت، نیرو، تکانه و میدانهای گرانشی و الکتریکی. برای تعیین مکان یک نقطه در فضا، یک دستگاه مختصات انتخاب می‌کنیم برای آسانی کاریک دستگاه مختصات سه بعدی دکارتی با محورهای x, y, z مطابق شکل ۱-۱۹ انتخاب می‌کنیم.

برای اندازه‌گیری مکان، محورها را باید با یکای طولی مناسبی، مثلاً با متر، مدرج کنیم.

مکان یک نقطه مورد نظر با اراة مقادیر سه مختصهٔ آن یعنی x_1, y_1, z_1 تعیین می‌شود. با توجه به



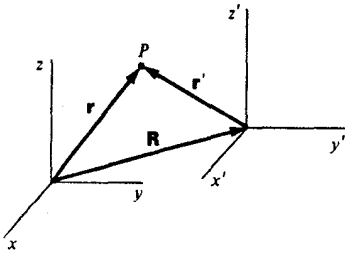
شکل ۱-۲۰

بحث قبلی، این اعداد مؤلفه‌های یک بردار را نشان نمی‌دهند (آنها فقط مکان را مشخص می‌کنند، نه بزرگی و جهت را). اما، اگر این نقطه را به مکان جدیدی مانند x_p, y_p, z_p انتقال دهیم (شکل ۱-۲۰ الف)، آنگاه این جابه‌جایی، برداری است مانند S با مختصات $S_x = x_p - x_1, S_y = y_p - y_1, S_z = z_p - z_1$.

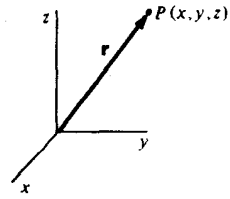
S برداری است که از مکان ابتدایی تا مکان انتهایی ممتد و معرف جابه‌جایی نقطه مورد نظر است. اما توجه کنید که S شامل هیچ‌گونه اطلاعاتی درباره مکان ابتدایی و انتهایی به‌طور جداگانه نیست، ولی در مورد مکان نسبی هر یک از آنها اطلاعات کافی در بردارد. بنابراین $z_p - z_1 = S_z$ به تقاضی بین مقادیر اولیه و نهایی مختصه‌های z بستگی دارد، نه به z_1 و z_p به‌طور جداگانه. S برداری است واقعی اگرچه مختصات نقاط ابتدایی و انتهایی آن وابسته به دستگاه مختصات اند. ولی با توجه به شکلهای ۱-۲۰ بردار S به دستگاه مختصات بستگی ندارد.

یکی از راههایی که در آن بردار جابه‌جایی فیزیکی با بردار مطرح شده در ریاضیات تفاوت دارد این است که بردارها در ریاضی معمولاً به‌صورت کمیتهای خالص با مؤلفه‌هایی از اعداد مطلق اند، درحالی‌که بردار S دارای بعد فیزیکی طول است. طبق قرارداد، بزرگی بردار دارای بعد و برداریکه آن بدون بعد است، از این قرارداد همواره استفاده خواهیم کرد. از این رو یک جابه‌جایی 8 m (۸ متر) جهت x چنین است $S = (8 \text{ m}, 0, 0)$ و $|S| = 8 \text{ m}$ و $\hat{S} = S/|S| = \hat{i}$.

اگرچه بردارها به جای مکان جابه‌جایی را تعریف می‌کنند، ولی در واقع توصیف مکان یک نقطه نسبت به مبدأ یک دستگاه مختصات معین نیز توسط بردار ویژه‌ای به نام بردار مکان امکانپذیر است و این بردار از مبدأ تا نقطه مورد نظر ممتد است. برای نشان دادن بردار مکان از نماد r استفاده خواهیم کرد (شکل ۱-۲۱). مکان یک نقطه اختیاری P به مختصات (x, y, z) چنین نشان داده می‌شود



شکل ۲۲-۱



شکل ۲۱-۱

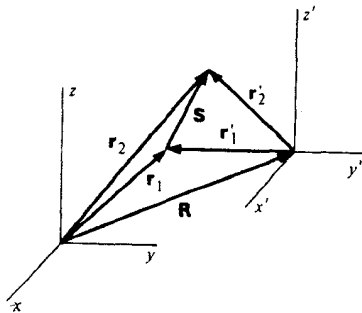
$$\mathbf{r} = (x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

برخلاف بردارهای معمولی بردار \mathbf{r} به دستگاه مختصات بستگی دارد. شکل ۲۲-۱ بردارهای مکان \mathbf{r} و \mathbf{r}' را نشان می‌دهد. این بردارها ضمن اینکه در دو دستگاه مختصات مختلف رسم شده‌اند مکان یک نقطه از فضا را نشان می‌دهند. اگر برداری از مبدأ دستگاه مختصات بدون پریم تا مبدأ دستگاه مختصات پریم دار باشد، داریم

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R}$$

برعکس، یک بردار واقعی، مانند بردار جابه‌جایی \mathbf{S} مستقل از دستگاه مختصات است. همان‌گونه که در شکل ۲۳-۱ دیده می‌شود، داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \\ &= (\mathbf{r}'_2 + \mathbf{R}) - (\mathbf{r}'_1 + \mathbf{R}) \\ &= \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1 \end{aligned}$$



شکل ۲۳-۱

۱-۶ سرعت و شتاب

حرکت یک بعدی

قبل از به کار بردن بردارها برای سرعت و شتاب در سه بعد، مروری مختصر از حالت یک بعدی یعنی حرکت در امتداد یک خط راست مفید خواهد بود.

مقدار متناظر به مختصهٔ یک ذرهٔ متحرک در امتداد یک خط را با x نشان می‌دهیم. x را با یکای مناسبی مانند متر اندازه می‌گیرند، و تغییرات مکان نسبت به زمان را به طور پیوسته ثبت می‌کنیم.

سرعت متوسط \bar{v} این نقطه بین زمانهای t_1 و t_2 توسط رابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$\bar{v} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

(برای نشان دادن متوسط یک کمیت اغلب از یک خط تیره در بالای نماد استفاده خواهیم کرد.)

سرعت لحظه‌ای v ، حد سرعت متوسط است وقتی که فاصلهٔ زمانی به سمت صفر میل

می‌کند:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

حدی را که در تعریف v به کار بردیم، دقیقاً همان چیزی است که در تعریف مشتق به کار می‌رود،

در واقع داریم^۱

$$v = \frac{dx}{dt}$$

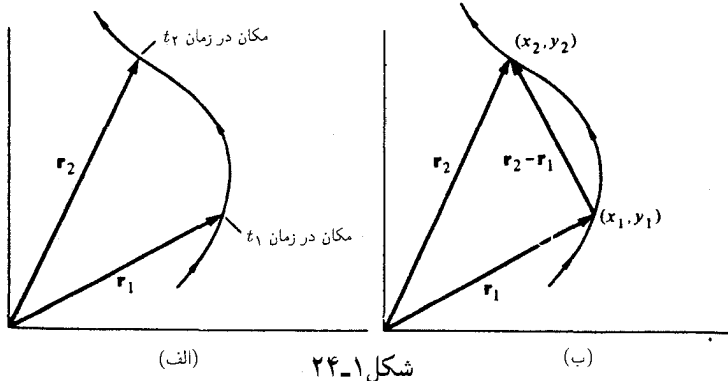
به روش مشابهی، شتاب لحظه‌ای عبارت است از

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \\ = \frac{dv}{dt}$$

مفهوم مقدار سرعت هم گاهی اوقات مفید خواهد بود، مقدار سرعت s همان بزرگی بردار سرعت است

$$s = |\mathbf{v}|$$

۱. فیزیکدانان معمولاً از نمادگذاری dx/dt لایب‌نیس استفاده می‌کنند، برای اینکه این علامت در دیفرانسیل‌گیری خیلی ساده‌اند. (به یادداشت ۱-۱ رجوع کنید) از بخش ۱-۹ به بعد از نمادگذاری نیوتونی \dot{x} ، البته فقط برای مشتق نسبت به زمان، استفاده خواهیم کرد.



شکل ۱-۲۴

حرکت چندبعدی

حال مفهوم، سرعت و شتاب را در چند بعد مورد بررسی قرار می‌دهیم. ذره‌ای را که در یک صفحه حرکت می‌کند، در نظر بگیرید. با گذشت زمان این ذره مسیر معینی را طی می‌کند و بنا به فرض مختصات این ذره به صورت تابعی از زمان معلوم است. مکان لحظه‌ای این ذره در زمان t_1 چنین است (شکل ۱-۲۴ الف)

$$\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1) \text{ یا } \mathbf{r}(t_1) = [x(t_1), y(t_1)]$$

در اینجا x_1 مقدار x در زمان $t = t_1$ است و الی‌آخر. در زمان t_2 این مکان عبارت است از

$$\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2)$$

جابه‌جایی این ذره در فاصله‌ی زمانهای t_1 و t_2 چنین است (شکل ۱-۲۴ ب)

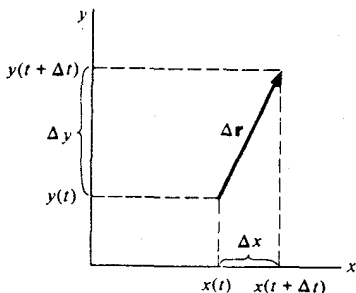
$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

با بررسی مکان ذره در زمان $t + \Delta t$ می‌توانیم این مثال را تعمیم دهیم. جابه‌جایی این ذره در فاصله‌ی بین این زمانها چنین است (شکل ۱-۲۵)

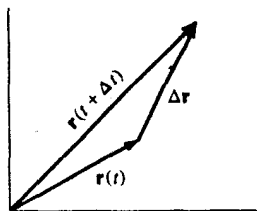
$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

این معادله برداری هم‌ارز دو معادله نرده‌ای زیر است

۱. غالباً از علامت Δ برای نشان دادن تغییر و اختلاف استفاده خواهیم کرد، نظیر $\Delta \mathbf{r}$ و Δt که در اینجا مطرح است. اما این نماد از اندازه کمیت و بزرگی و کوچکی آن هیچ اطلاعی به دست نمی‌دهد.



شکل ۲۶-۱



شکل ۲۵-۱

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$$

$$\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$$

بردار سرعت (v) این ذره، وقتی که در امتداد مسیر حرکت می‌کند، چنین تعریف می‌شود

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$$

که خود این معادله هم‌ارز است با دو معادله نرده‌ای زیر

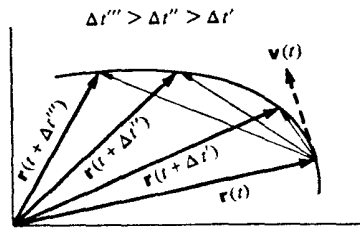
$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}$$

تعمیم این موضوع به سه بُعد هم کار ساده‌ای است. مؤلفه سوم سرعت هم چنین است

$$v_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} = \frac{dz}{dt}$$

تعریف ما از سرعت به مثابه یک بردار، تعمیم ساده‌ای است از مفهوم آشنای حرکت در یک خط راست. با نمادگذاری برداری، حرکت در سه بعد را می‌توان با یک معادله توصیف کرد، و این کار در مقایسه با سه معادله صرفه‌جویی خوبی است. معادله $v = dr/dt$ نتایجی را که هم اکنون پیدا کردیم بیان می‌کند.



شکل ۱-۲۷

به بیان دیگر، از آنجا که $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ است، با مشتق‌گیری ساده مانند گذشته پیدا می‌کنیم:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{k}}$$

فرض کنید این ذره در زمان Δt دارای جابه‌جایی $\Delta \mathbf{r}$ است. در حد که $\Delta t \rightarrow 0$ ، مطابق شکل ۱-۲۷ بردار $\Delta \mathbf{r}$ مماس بر مسیر خواهد شد. اما رابطه تقریبی زیر

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{r} &\approx \frac{d\mathbf{r}}{dt} \Delta t \\ &= \mathbf{v} \Delta t\end{aligned}$$

که در حد $\Delta t \rightarrow 0$ به شکل دقیق درمی‌آید، نشان می‌دهد که \mathbf{v} موازی $\Delta \mathbf{r}$ است و بردار سرعت لحظه‌ای یک ذره در همه جا مماس بر مسیر است.

مثال ۱-۷ تعیین \mathbf{v} با استفاده از \mathbf{r} : مکان یک ذره با رابطه زیر مشخص شده است

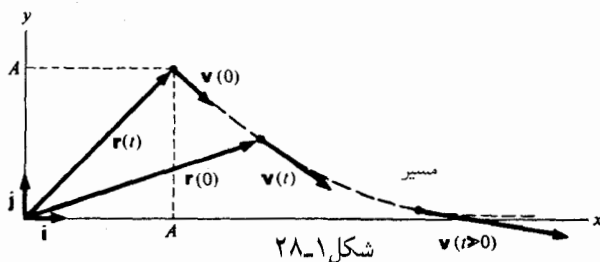
$$\mathbf{r} = A(e^{\alpha t}\hat{\mathbf{i}} + e^{-\alpha t}\hat{\mathbf{j}})$$

که در آن α مقداری ثابت است. سرعت ذره را بیابید و مسیر آن را نیز رسم کنید.

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &= A(\alpha e^{\alpha t}\hat{\mathbf{i}} - \alpha e^{-\alpha t}\hat{\mathbf{j}})\end{aligned}$$

یا

۱. توجه: در محاسبه مشتق به دلیل ثابت بودن جهت بردارهای دکارتی یک، می‌توان از مشتق آنها صرف‌نظر کرد. بعداً به بردارهای یک‌ای که می‌توانند تغییر جهت دهند برخورد خواهیم کرد که در آن حالت مشتق‌گیری باید با دقت بیشتری انجام شود.



شکل ۲۸-۱

$$v_x = A\alpha e^{\alpha t}$$

$$v_y = -A\alpha e^{-\alpha t}$$

بزرگی v عبارت است از

$$v = (v_x^2 + v_y^2)^{\frac{1}{2}} \\ = A\alpha (e^{2\alpha t} + e^{-2\alpha t})^{\frac{1}{2}}$$

در ترسیم مسیر حرکت یک نقطه، توجه به حالت‌های حدی اغلب می‌تواند مفید واقع شود (شکل

۲۸-۱). در $t = 0$ داریم

$$\mathbf{r}(0) = A(\hat{i} + \hat{j})$$

$$\mathbf{v}(0) = \alpha A(\hat{i} - \hat{j})$$

وقتی $t \rightarrow \infty$ ، $e^{\alpha t} \rightarrow \infty$ و $e^{-\alpha t} \rightarrow 0$. در این حد، $\mathbf{r} \rightarrow A e^{\alpha t} \hat{i}$ برداری است در امتداد

محور x و سرعت $\mathbf{v} \rightarrow \alpha A e^{\alpha t} \hat{i}$ میل می‌کند که نشانگر افزایش نامحدود مقدار سرعت است. ■

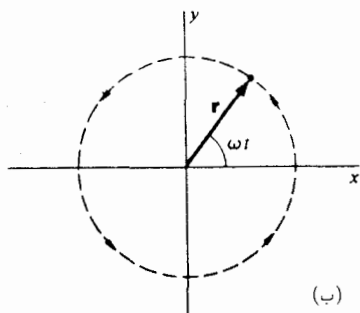
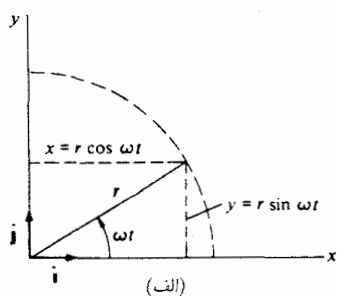
به همین ترتیب شتاب \mathbf{a} چنین تعریف می‌شود

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z}{dt} \hat{k} \\ = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$$

با ادامه مشتق‌گیری از \mathbf{r} می‌توانیم بردارهای جدیدی بسازیم، ولی در مطالعهٔ دینامیک خواهیم دید که \mathbf{r} ، \mathbf{v} ، \mathbf{a} بیش از همه مورد استفاده قرار می‌گیرند.

مثال ۸-۱ حرکت دایره‌ای یکنواخت: حرکت دایره‌ای در فیزیک نقش مهمی دارد. در اینجا ساده‌ترین و مهم‌ترین حالت یعنی حرکت دایره‌ای یکنواخت را که حرکتی دایره‌ای با سرعت ثابت است، بررسی می‌کنیم.

ذره‌ای را در صفحهٔ xy در نظر بگیرید (شکل ۲۹-۱) که طبق رابطهٔ $\mathbf{r} = r(\cos \omega t \hat{i} + \sin \omega t \hat{j})$



شکل ۱-۲۹

حرکت می‌کند و در آن r و ω ثابت‌اند. مسیر، سرعت و شتاب آن را پیدا کنید:

$$|\mathbf{r}| = [r^2 \cos^2 \omega t + r^2 \sin^2 \omega t]^{\frac{1}{2}}$$

با استفاده از اتحاد $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ داریم

$$|\mathbf{r}| = [r^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t)]^{\frac{1}{2}}$$

$$= r = \text{const.}$$

بنابراین مسیر یک دایره است.

این ذره دور این دایره در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند، و نقطه شروع آن در $t = 0$ ، $(r, 0)$ است. این ذره دایره را در زمان T می‌پیماید به طوری که $\omega T = 2\pi$ است (شکل ۱-۳۰). ω را سرعت زاویه‌ای حرکت می‌نامند که بر حسب رادیان بر ثانیه اندازه‌گیری می‌شود. T ، زمان لازم برای گردش یک دور کامل است که دوره تناوب نامیده می‌شود:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$= r\omega(-\sin \omega t \hat{i} + \cos \omega t \hat{j})$$

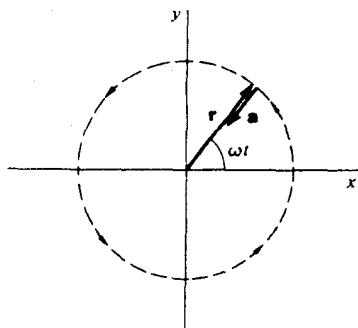
با محاسبه $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}$ می‌توان نشان داد که \mathbf{v} مماس بر مسیر است:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = r^2 \omega (-\sin \omega t \cos \omega t + \cos \omega t \sin \omega t) = 0$$

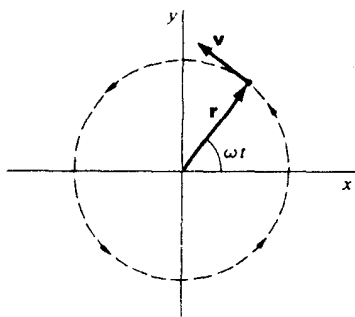
چون \mathbf{v} بر \mathbf{r} عمود است، پس بر دایره مماس می‌شود. ضمناً به سادگی می‌توان نشان داد که:

$$|\mathbf{v}| = r\omega = \text{const.}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$



شکل ۳۱-۱



شکل ۳۰-۱

$$= r\omega^2 [-\cos\omega t \hat{i} - \sin\omega t \hat{j}]$$

$$= -\omega^2 \mathbf{r}$$

شتاب در امتداد شعاع و سوی آن به طرف مرکز است که آن را شتاب مرکز گرا می نامند (شکل ۳۱-۱). به زودی در این مورد بیشتر صحبت خواهیم کرد.

سخنی در باره ابعاد و یکاها

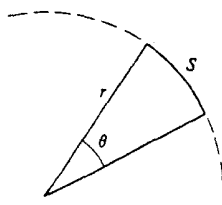
فیزیکدانان، یکای اساسی فیزیکی به کار گرفته شده در اندازه گیری یک کمیت فیزیکی را، بعد آن کمیت می نامند. مثلاً بعد سرعت، زمان/مسافت و بعد شتاب، زمان/سرعت (زمان/ $\frac{\text{مسافت}}{\text{زمان}} = (\text{زمان})^2 / \text{مسافت}$) است. همانطوری که در فصل ۲ بحث خواهیم کرد، جرم، مسافت، و زمان یکاهای اساسی فیزیکی مورد استفاده در مکانیک هستند.

برای معرفی یک دستگاه یکاها، ابتداء معیارهای اندازه گیری جرم، مسافت، و زمان را مشخص می کنیم. معمولاً مسافت را بر حسب متر و زمان را بر حسب ثانیه اندازه می گیرند. در این صورت یکای سرعت، متربرثانیه (m/s) و یکای شتاب متربرثانیه به توان دو (m/s^2) است.

یکای طبیعی اندازه گیری زاویه، رادیان (rad) است. زاویه θ بر حسب رادیان برابر S/r است، که در آن S کماتی است از دایره ای به شعاع r که به وسیله زاویه θ محصور شده باشد (شکل ۳۲-۱):

$$\theta = \frac{S}{r}$$

2π رادیان مساوی 360° درجه است. ما همواره از رادیان به عنوان یکای زاویه استفاده خواهیم کرد، مگر اینکه چیز دیگری ذکر شود. مثلاً در عبارت $\sin \omega t$ مقدار ωt بر حسب رادیان است. بنابراین بعد



شکل ۱-۳۲

ω به صورت زمان $1/\omega$ و یکای آن رادیان بر ثانیه است. (خود رادیان بدون بعد است، زیرا از نسبت دو طول به دست می‌آید.)

برای اجتناب از اشتباهات فاحش، بهتر است به این نکته توجه داشته باشید که هر دو طرف یک معادله باید دارای بعد یا یکای یکسان باشند. مثلاً، معادله $v = \alpha r e^{\alpha t}$ از نظر بعد درست است، زیرا نماها و متغیرهایشان همیشه بدون بعدند و α هم دارای یکای $1/S$ است، طرف راست هم دارای یکای صحیح متر بر ثانیه است.

۷-۱ معادلات سینماتیکی

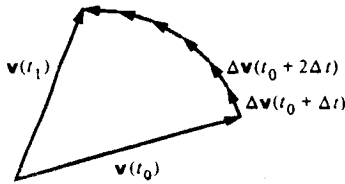
در فصل آینده دربارهٔ دینامیک بحث خواهیم کرد. به کمک قوانین دینامیک می‌توان شتاب یک جسم را به‌طور مستقیم به دست آورد. با داشتن شتاب، پیدا کردن سرعت و مکان فقط یک مسئلهٔ سادهٔ انتگرال‌گیری است. در اینجا روش کلی انتگرال‌گیری را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

اگر شتاب به صورت تابعی از زمان معلوم باشد (رابطهٔ زیر)، سرعت را می‌توان با انتگرال‌گیری از آن نسبت به زمان پیدا کرد:

$$\frac{dv(t)}{dt} = a(t)$$

فرض کنید با داشتن سرعت اولیهٔ $v(t_0)$ و شتاب $a(t)$ می‌خواهیم $v(t_1)$ را پیدا کنیم (شکل ۱-۳۳). ابتدا فاصلهٔ زمانی $t_1 - t_0$ را به n قسمت تقسیم می‌کنیم، یعنی $\Delta t = (t_1 - t_0)/n$ که در این صورت داریم

$$v(t_1) \approx v(t_0) + \Delta v(t_0 + \Delta t) \\ + \Delta v(t_0 + 2\Delta t) + \dots + \Delta v(t_1)$$



شکل ۳۳-۱

$$\approx \mathbf{v}(t_0) + \mathbf{a}(t_0 + \Delta t)\Delta t + \mathbf{a}(t_0 + 2\Delta t)\Delta t + \dots + \mathbf{a}(t_1)\Delta t$$

زیرا $\Delta \mathbf{v}(t) \approx \mathbf{a}(t)\Delta t$ است. برای مولفه سرعت آن می‌توان نوشت

$$v_x(t_1) \approx v_x(t_0) + a_x(t_0 + \Delta t)\Delta t + \dots + a_x(t_1)\Delta t$$

وقتی که $\Delta t \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)، آنگاه تقریب بالا به صورت دقیق درمی‌آید و این مجموع به یک انتگرال تبدیل می‌شود

$$v_x(t_1) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} a_x(t) dt$$

در مورد مؤلفه‌های y و z هم می‌توان از این روش استفاده کرد. از ترکیب نتایج فوق خواهیم داشت

$$\begin{aligned} v_x(t_1)\hat{i} + v_y(t_1)\hat{j} + v_z(t_1)\hat{k} &= v_x(t_0)\hat{i} + \int_{t_0}^{t_1} a_x(t) dt \hat{i} \\ &+ v_y(t_0)\hat{j} + \int_{t_0}^{t_1} a_y(t) dt \hat{j} + v_z(t_0)\hat{k} + \int_{t_0}^{t_1} a_z(t) dt \hat{k} \end{aligned}$$

و یا

$$\mathbf{v}(t_1) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{a}(t) dt$$

این نتیجه درست مانند انتگرال‌گیری معمولی از رابطه $d\mathbf{v} = \mathbf{a} dt$ است:

$$\int_{t_0}^{t_1} d\mathbf{v} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{a}(t) dt$$

$$\mathbf{v}(t_1) - \mathbf{v}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{a}(t) dt$$

گاهی برای تعیین سرعت در زمان اختیاری t نیاز به عبارتی کلی داریم

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{a}(t') dt'$$

که در آن برای اجتناب از اشتباه حد بالایی t ، منغیر انتگرال‌گیری را از t به t' تغییر داده‌ایم. برای جمع و جورتر کردن نمادگذاری سرعت اولیه $\mathbf{v}(t_0)$ را با \mathbf{v}_0 نشان داده‌ایم. وقتی $t = t_0$ است، $\mathbf{v}(t)$ طبق انتظار به \mathbf{v}_0 تبدیل می‌شود.

مثال ۹-۱ تعیین سرعت با استفاده از شتاب: یک توپ پینگ‌پنگ با سرعت $\mathbf{v}_0 = (0, 5, -3) \text{ m/s}$ در نزدیکی سطح ماه رها شده است. این توپ با شتاب $\mathbf{a} = (0, 0, -2) \text{ m/s}^2$ به طرف پایین در حرکت است. سرعت آن را بعد از ۵ ثانیه حساب کنید. معادله

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{a}(t') dt'$$

با سه معادله زیر (که مؤلفه‌های آن هستند) هم‌ارز است:

$$v_x(t) = v_{0x} + \int_{t_0}^t a_x(t') dt'$$

$$v_y(t) = v_{0y} + \int_{t_0}^t a_y(t') dt'$$

$$v_z(t) = v_{0z} + \int_{t_0}^t a_z(t') dt'$$

با داشتن مؤلفه‌های \mathbf{v}_0 و \mathbf{a} بعد از $t = 5 \text{ s}$ ، از معادلات فوق نتیجه می‌شود

$$v_x = 0 \text{ m/s}$$

$$v_y = 5 \text{ m/s}$$

$$v_z = -3 + \int_0^5 (-2) dt' = -13 \text{ m/s}$$

اگر بار دیگر انتگرال بگیریم، مکان آن به صورت زیر به دست می‌آید. از رابطه

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{v}(t)$$

شروع می‌کنیم و با برهانی مشابه حالت فوق، خواهیم داشت

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t') dt'$$

یک حالت ویژه مهم، حرکتی با شتاب یکنواخت است. اگر فرض کنیم $\mathbf{a} = \text{const.}$ و $t_0 = 0$ است، داریم

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_0^t (\mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t') dt'$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a}t^2$$

شاید قبلاً با شکل یک بعدی آن آشنا بودید. برای مثال، مؤلفه x این معادله چنین است

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

در اینجا v_{0x} مؤلفه x بردار \mathbf{v}_0 است. عبارت بالا به قدری آشناست که ممکن است آن را، بدون توجه، در حالت عمومی شتابهای متغیر نیز به کار ببرید. اما این کار را نکنید! زیرا این فرمول فقط برای شتاب یکنواخت، صادق است. در حالت عمومی، تمام اعمال توصیف شده در بالا باید به کار برده شود.

مثال ۱-۱۰ حرکت در میدان گرانشی یکنواخت: فرض کنید جسمی تحت تأثیر گرانش، آزادانه حرکت می‌کند، به طوری که این جسم در جهت پایین دارای شتاب ثابت g است. با انتخاب محور قائم z به طرف بالا، داریم

$$\mathbf{a} = -g\hat{k}$$

اگر این جسم در $t = 0$ با سرعت اولیه \mathbf{v}_0 رها شده باشد، داریم

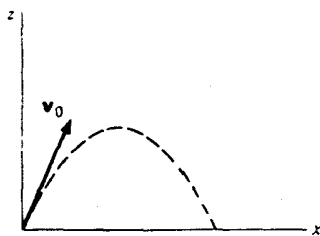
$$x = x_0 + v_{0x} t$$

$$y = y_0 + v_{0y} t$$

$$z = z_0 + v_{0z} t - \frac{1}{2} g t^2$$

با حفظ عمومیت (کلیت) مسئله می‌توان فرض کرد که $\mathbf{r}_0 = 0$ و $v_{0y} = 0$ (معنی فرض دوم این است که دستگاه مختصات را چنان انتخاب کرده‌ایم که سرعت اولیه در صفحه xz باشد). آنگاه

$$x = v_{0x} t$$



شکل ۱-۳۴

$$z = v_{0z} t - \frac{1}{2} g t^2$$

مسیر این جسم در شکل ۱-۳۴ نشان داده شده است. با حذف پارامتر زمان از دو معادله x و z می‌توان منحنی مسیر را به دست آورد:

$$z = \frac{v_{0z}}{v_{0x}} x - \frac{g}{2v_{0x}^2} x^2$$

منحنی فوق همان سهمی شناخته شده در حرکت پرتابی است، اما همانطوری که در بالا متذکر شدیم، حرکت با شتاب یکنواخت عمومی‌ترین حالت نیست.

مثال ۱-۱۱ شتاب غیر یکنواخت-اثر موج رادیویی بر الکترون یونکره: یونکره ناحیه‌ای محتوی گازهای خنثی است که از یونهای مثبت و الکترونهای منفی تشکیل شده است و دور کره زمین را تا ارتفاع حدود ۲۰۰ کیلومتر احاطه کرده است. اگر یک موج رادیویی از این ناحیه عبور کند، میدان الکتریکی این موج، ذرات باردار را شتاب می‌دهد. چون میدان الکتریکی با زمان نوسان می‌کند بنابراین ذرات باردار هم به جنبش در می‌آیند. اینک مسئله ما، پیدا کردن حرکت الکترونی است با بار $-e$ و جرم m که ابتدا در حال سکون است و ناگهان در یک میدان الکتریکی $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin \omega t$ قرار می‌گیرد (ω بسامد نوسان است که بر حسب رادیان بر ثانیه است).

قانون نیرو برای این بار در میدان الکتریکی چنین است $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$ ، طبق قانون دوم نیوتون داریم $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m = -e\mathbf{E}/m$. (اگر دلیل این امر برایتان روشن نیست، در حال حاضر از آن صرف‌نظر کنید، تا بعداً روشن شود. منظور اصلی این مثال جنبه ریاضی آن است، جنبه فیزیکی آن در واقع نقشی ثانوی دارد.) پس داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{-e\mathbf{E}}{m} \\ &= \frac{-e\mathbf{E}_0}{m} \sin \omega t \end{aligned}$$

E_0 برداری است ثابت و ما دستگاه مختصات خود را چنان انتخاب می‌کنیم که محور x ها روی آن قرار گیرد. چون در جهتهای y و z شتاب وجود ندارد، پس مجبوریم فقط حرکت در جهت محور x را بررسی کنیم. با توجه به این معلومات می‌توانیم شاخصهای پایین را حذف کنیم و به جای a_x بنویسیم a :

$$a(t) = \frac{-eE_0}{m} \sin \omega t = a_0 \sin \omega t$$

که در آن

$$a_0 = \frac{-eE_0}{m}$$

است. آنگاه داریم

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + \int_0^t a(t') dt' \\ &= v_0 + \int_0^t a_0 \sin \omega t' dt' \\ &= v_0 - \frac{a_0}{\omega} \cos \omega t' \Big|_0^t = v_0 - \frac{a_0}{\omega} (\cos \omega t - 1) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \int_0^t v(t') dt' \\ &= x_0 + \int_0^t \left[v_0 - \frac{a_0}{\omega} (\cos \omega t' - 1) \right] dt' \\ &= x_0 + \left(v_0 - \frac{a_0}{\omega} \right) t - \frac{a_0}{\omega^2} \sin \omega t \end{aligned}$$

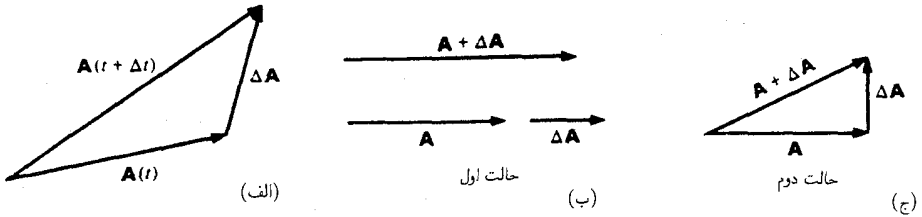
می‌دانیم $x_0 = v_0 = 0$ است، در این صورت داریم

$$x = \frac{a_0}{\omega} t - \frac{a_0}{\omega^2} \sin \omega t$$

نتیجهٔ فوق بسیار جالب توجه است: جملهٔ دوم آن نوسانی است و متناظر است با حرکت نوسانی الکترون که قبلاً پیش‌بینی کرده بودیم. اما جملهٔ اول آن مربوط به حرکت یکنواخت است. بنابراین، الکترون، علاوه بر حرکت نوسانی، شروع به دور شدن هم می‌کند. آیا می‌دانید چرا؟ ■

۸-۱ بازهم دربارهٔ مشتق یک بردار

در بخش ۱-۶، نشان دادیم که چگونه سرعت و شتاب به وسیلهٔ بردارها توصیف می‌شوند به ویژه، نشان دادیم که چگونه با مشتق‌گیری از بردار \mathbf{r} بردار جدید $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ به دست می‌آید (شکل ۱-۳۵ الف). گاهی نیاز داریم از بردارهای دیگری نیز نسبت به زمان مشتق بگیریم، از این رو بهتر است بحثمان را تعمیم دهیم.



شکل ۳۵-۱

بردار $A(t)$ را که تابعی از زمان است در نظر می‌گیریم. در فاصله زمانی t و $t + \Delta t$ تغییر بردار A عبارت است از

$$\Delta A = A(t + \Delta t) - A(t)$$

مشتق زمانی بردار A را کاملاً شبیه به روشی که در مشتق‌گیری بردار r در بخش ۱-۶ دنبال کردیم، چنین تعریف می‌کنیم

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t}$$

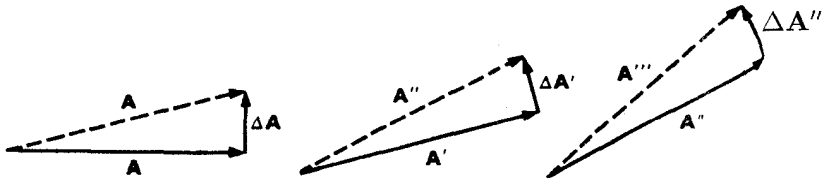
مهم است که بدانیم dA/dt بردار جدیدی است که بسته به رفتار بردار A می‌تواند بزرگ یا کوچک باشد و در هر جهتی نیز واقع شود.

ویژگی عمده dA/dt این است که با مشتق یک تابع ساده‌نرده‌ای تفاوت دارد. بردار A می‌تواند هم در بزرگی و هم در جهت تغییر کند - یک تابع نرده‌ای فقط می‌تواند از نظر بزرگی تغییر کند. این تفاوت مهم است. شکل ۳۵-۱ افزودن نم کوچک ΔA به بردار A را نشان می‌دهد. در حالت ۳۵-۱ (ب) بردار ΔA با A موازی است، و عمل جمع، جهت را تغییر نمی‌دهد ولی بزرگی را به $|A| + |\Delta A|$ تغییر می‌دهد. در حالت ۳۵-۱ (ج) بردار ΔA عمود بر A است. این عمل جهت را تغییر می‌دهد ولی بزرگی را عملاً بدون تغییر می‌گذارد.

در حالت کلی، A هم در بزرگی و هم در جهت تغییر می‌کند. در این صورت بهتر است این تغییر را به‌طور همزمان در نظر بگیریم. در شکل ۳۶-۱ نم کوچک ΔA را نشان داده‌ایم که به مؤلفه‌های برداری ΔA_{\parallel} (موازی با A) و ΔA_{\perp} (عمود بر A) تجزیه شده است. در حالت حدی که به مشتق می‌رسیم،



شکل ۳۶-۱



شکل ۳۷-۱

ΔA_{\parallel} بزرگی بردار A را تغییر می دهد، اما جهت آن را تغییر نمی دهد، درحالی که ΔA_{\perp} جهت بردار A را تغییر می دهد، ولی بزرگی آن را بدون تغییر می گذارد.

آنهاکه درک روشنی از این دو نوع تغییر در یک بردار ندارند، گاهی با چشمپوشی از یکی از آنها دچار اشتباه می شوند. برای مثال، اگر dA/dt همواره عمود بر A باشد، A باید دوران کند، زیرا بزرگی آن نمی تواند تغییر کند. بستگی زمانی آن صرفاً از تغییر جهت ناشی می شود. شکل ۳۷-۱ نشان می دهند، وقتی که ΔA همواره عمود بر A است، دوران چگونه رخ می دهد. حرکت دورانی با رسم بردارهای پی درپی از یک مبدأ مشترک بهتر مشخص می شود (شکلهای ۳۸-۱).

این حالت را با حالتی که ΔA همواره موازی A است مقایسه کنید (شکلهای ۳۹-۱).

اگر بردارها را از مبدأ مشترکی رسم کنیم، به صورت شکل ۴۰-۱ در می آید. مثالهای زیر ارتباط بردارهای دوران کننده را با حرکت دایره ای نشان می دهند.

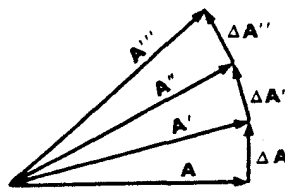
مثال ۱۲-۱ حرکت دایره ای و بردارهای دوران کننده: در مثال ۸-۱ حرکتی را که به وسیله معادله زیر داده می شود مورد بحث قرار می دهیم

$$\mathbf{r} = r(\cos \omega t \hat{i} + \sin \omega t \hat{j})$$

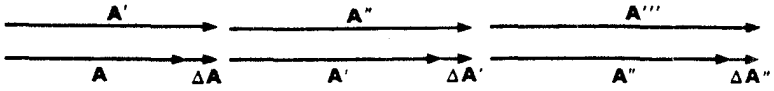
سرعت عبارت است از

$$\mathbf{v} = r\omega(-\sin \omega t \hat{i} + \cos \omega t \hat{j})$$

چون داریم



شکل ۳۸-۱



شکل ۱-۳۹

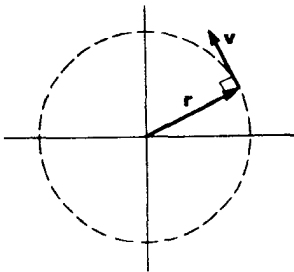
$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = r^2 \omega (-\cos \omega t \sin \omega t + \sin \omega t \cos \omega t) = 0$$

معلوم می شود که dr/dt بر \mathbf{r} عمود است. نتیجه می گیریم که بزرگی بردار \mathbf{r} ثابت است، به طوری که تنها تغییر ممکن در \mathbf{r} مربوط به دوران است (شکل ۱-۴۱). از آنجا که مسیر دایره ای است، این دقیقاً همان حالتی است که در آن بردار \mathbf{r} حول مبدأ دوران می کند.

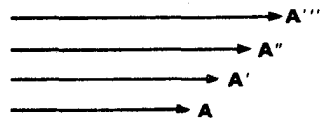
قبلاً نشان دادیم که $\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r}$. چون $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$ است، در نتیجه $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = -\omega^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$ می شود و dv/dt بر \mathbf{v} عمود است. این نتیجه بدان معنی است که بردار سرعت دارای بزرگی ثابت است و چنانچه بخواهد با زمان تغییر کند باید دوران کند.

اینکه بردار \mathbf{v} واقعاً دوران می کند، به سادگی در شکل ۱-۴۲ (الف) که \mathbf{v} را در مکانهای مختلف طول مسیر نشان می دهد، دیده می شود. در شکل ۱-۴۲ (ب) همان بردارهای سرعت از مبدأ مشترکی رسم شده اند. پیداست که هر وقت ذره یک دور کامل را می پیماید، بردار سرعت یک دایره کامل را دور می زند.

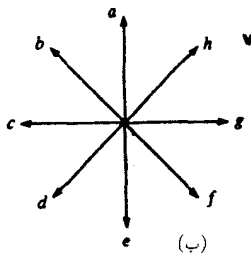
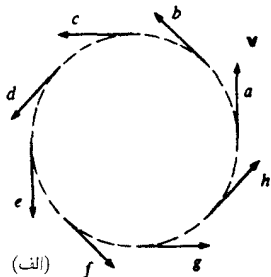
شاید خودتان بتوانید نشان دهید که بردار شتاب هم به طور یکنواخت دوران می کند. فرض کنید بردار $\mathbf{A}(t)$ دارای بزرگی ثابت A است. تنها راهی که بردار $\mathbf{A}(t)$ می تواند با زمان تغییر کند، به وسیله دوران است. اکنون یک رابطه مفید برای مشتق زمانی $d\mathbf{A}/dt$ در مورد چنین بردار دوران کننده ای به دست خواهیم آورد. جهت بردار $d\mathbf{A}/dt$ همواره بر \mathbf{A} عمود است (شکل ۱-۴۳). بزرگی $d\mathbf{A}/dt$ را می توان با استدلال هندسی زیر پیدا کرد. تغییر \mathbf{A} در فاصله زمانی t و $t + \Delta t$ چنین است



شکل ۱-۴۱



شکل ۱-۴۰



شکل ۱-۴۲

$$\Delta \mathbf{A} = \mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)$$

با استفاده از زاویه $\Delta\theta$ که در شکل نشان داده شده، داریم

$$|\Delta \mathbf{A}| = 2A \sin \frac{\Delta\theta}{2}$$

برای $\Delta\theta \ll 1$ ، همان گونه که در یادداشت ۱-۱ دیدیم $\sin \frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{\Delta\theta}{2}$ است. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} |\Delta \mathbf{A}| &\approx 2A \frac{\Delta\theta}{2} \\ &= A \Delta\theta \end{aligned}$$

و

$$\left| \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} \right| = A \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

با انجام عمل حد وقتی که $\Delta t \rightarrow 0$

$$\left| \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right| = A \frac{d\theta}{dt}$$

$d\theta/dt$ را سرعت زاویه‌ای \mathbf{A} می‌نامند.

به عنوان کاربرد ساده‌ای از این نتیجه، فرض کنید \mathbf{A} همان بردار دوران کننده \mathbf{r} باشد، که در مثالهای

۸-۱ و ۱۲-۱ بحث کردیم (شکل ۱-۴۴). آنگاه $\theta = \omega t$ و

$$v = r\omega \quad \text{یا} \quad \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = r \frac{d}{dt}(\omega t) = r\omega$$

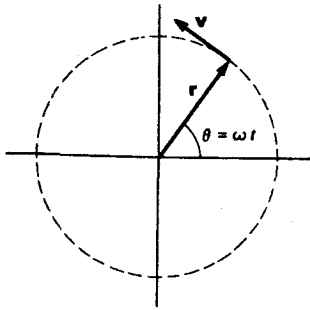
با برگشت به حالت کلی، تغییر \mathbf{A} در نتیجه یک دوران و یک تغییر مقدار صورت می‌گیرد (شکل

(۴۵-۱)

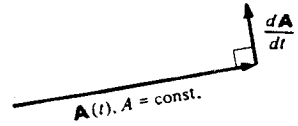
$$\Delta \mathbf{A} = \Delta \mathbf{A}_\perp + \Delta \mathbf{A}_\parallel$$

برای $\Delta\theta$ که به اندازه کافی کوچک باشد، داریم

$$|\Delta \mathbf{A}_\perp| = A \Delta\theta$$



شکل ۴۴-۱



شکل ۴۳-۱

$$|\Delta A_{\parallel}| = \Delta A$$

با تقسیم کردن بر Δt و انجام عمل حد، داریم

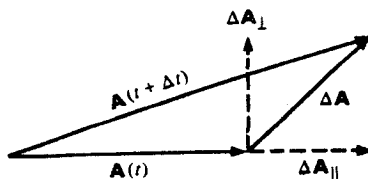
$$\left| \frac{dA_{\perp}}{dt} \right| = A \frac{d\theta}{dt}$$

$$\left| \frac{dA_{\parallel}}{dt} \right| = \frac{dA}{dt}$$

اگر A دوران نکند، dA_{\perp}/dt صفر است ($d\theta/dt = 0$)، و اگر بزرگی A ثابت باشد dA_{\parallel}/dt صفر است.

این بخش را با بیان بعضی از تساویهای متداول در مشتق‌گیری برداری به پایان می‌رسانیم. اثبات آنها را به عنوان تمرین به دانشجویان واگذار می‌کنیم. اگر c مقداری نرده‌ای و بردارهای A و B توابعی از زمان باشند، آنگاه

$$\frac{d}{dt}(cA) = \frac{dc}{dt}A + c \frac{dA}{dt}$$



شکل ۴۵-۱

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

در رابطه دوم اگر، $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ باشد، آنگاه

$$\frac{d}{dt}(A^2) = 2\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

در اینجا نیز می بینیم که اگر $d\mathbf{A}/dt$ بر \mathbf{A} عمود باشد، بزرگی \mathbf{A} مقدار ثابتی است.

۹-۱ حرکت در مختصات قطبی تخت

مختصات قطبی

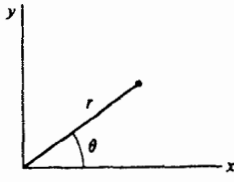
مختصات قائم یا دکارتی، برای توصیف حرکت در یک خط راست بسیار مناسب است. برای مثال، اگر دستگاه مختصات را چنان در نظر بگیریم که یکی از محورهای آن در جهت حرکت واقع شود، آنگاه با حرکت نقطه، فقط یک مختصه آن تغییر می کند. ولی مختصات دکارتی برای توصیف حرکت دایره ای، چندان مفید نیست، و از آنجا که حرکت دایره ای نقش برجسته ای در فیزیک دارد، بهتر است دستگاه مختصاتی که با آن مناسبتر باشد معرفی کنیم.

باید توجه داشت، گرچه از هر دستگاه مختصاتی که مایل باشیم می توانیم استفاده کنیم، انتخاب درست دستگاه مختصات می تواند مسئله را بسیار آسانتر سازد. بنابراین، با مطالب این بخش که در سطح فیزیک پیشرفته است روبه رو می شویم. بسیار محتمل است بعضی از این مطالب برایتان کاملاً تازهگی داشته باشد. اگر بعضی از آنها در وهله اول به نظرتان ناآشنا و حتی مشکل رسید، صبور باشید. همینکه مثالها را مورد بررسی قرار دادید و چند مسئله حل کردید، به نظرتان طبیعی تر خواهد رسید.

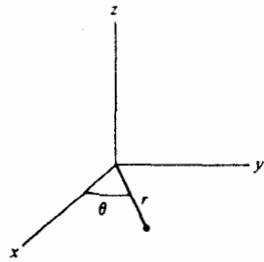
دستگاه مختصات جدیدمان بر مبنای دستگاه مختصات استوانه ای است. محور z این دستگاه استوانه ای با دستگاه دکارتی همسان است. اما، مکان در صفحه xy با فاصله r از محور z ها و θ که زاویه r با محور x هاست، مشخص می شود. این مختصات در شکل ۹-۱ نشان داده شده است. چنانکه می بینیم

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$



شکل ۴۷-۱

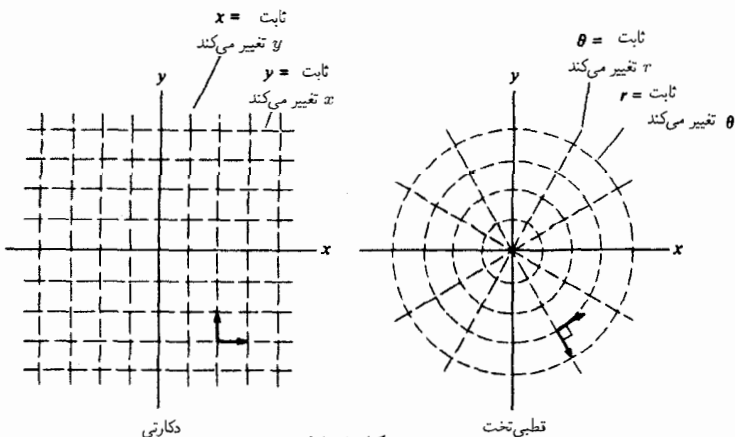


شکل ۴۶-۱

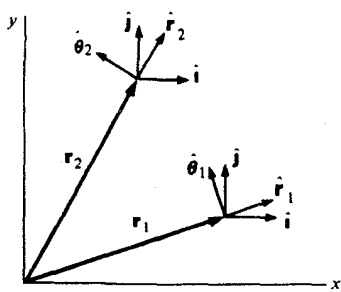
از آنجاکه ما مقدماتاً با حرکت در صفحه سروکار داریم، از محور z ها صرفنظر و بحث را به دو بعد محدود می‌کنیم. مختصات r و θ را مختصات قطبی تخت می‌نامند (شکل ۴۷-۱). در بخشهای بعدی توصیف مکان، سرعت، و شتاب را در مختصات قطبی تخت فرا می‌گیریم. تفاوت بین مختصات قطبی تخت و دکارتی به سادگی با رسم خطوط با مختصات ثابت در دو دستگاه دیده می‌شود.

خطوطی با x و y ثابت، خطوط راست عمود بر هم هستند. خطوطی با θ ثابت نیز راست هستند و به صورت شعاعی از مبدأ به طرف خارج می‌تازند (شکل‌های ۴۸-۱). برعکس، خطوط با r ثابت دایره متحدالمركز به مرکز مبدأ هستند. اما دقت داشته باشید که خطوط با θ ثابت و r ثابت در هر جا که تلاقی کنند بر هم عمودند.

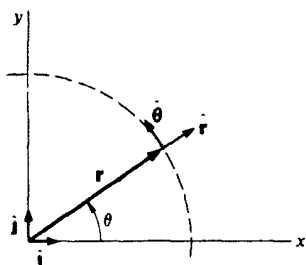
در بخش ۴-۱ بردارهای پایه \hat{i} و \hat{j} را معرفی کردیم که به ترتیب در جهت افزایش x و y قرار دارند. حال به روش مشابهی دو بردار یکه \hat{r} و $\hat{\theta}$ را معرفی می‌کنیم که در جهت افزایش r و θ قرار می‌گیرند (شکل ۴۹-۱). بین این بردارهای پایه، دکارتی یک اختلاف مهم وجود دارد. جهت‌های \hat{r} و $\hat{\theta}$ با مکان



شکل ۴۸-۱



شکل ۱-۵۰



شکل ۱-۴۹

تغییر می‌کنند، درحالی‌که \hat{i} و \hat{j} جهت‌های ثابت دارند. شکل ۱-۵۰ این موضوع را با نمایش دو دسته از بردارهای پایه در دو نقطه از فضا نشان می‌دهد. چون \hat{r} و $\hat{\theta}$ با مکان تغییر می‌کنند، فرمولهای سینماتیکی در مختصات قطبی پیچیده‌تر به نظر می‌آیند تا در دستگاه مختصات دکارتی. (منظور این نیست که مختصات قطبی پیچیده است، بلکه مختصات دکارتی از آنچه که باید باشند، ساده‌ترند. دستگاه مختصات دکارتی تنها دستگاه مختصاتی است که بردارهای پایه آن دارای جهت ثابت است.) اگر چه \hat{r} و $\hat{\theta}$ با مکان تغییر می‌کنند، ولی توجه داشته باشید که آنها فقط به θ بستگی دارند نه به r . می‌توانیم \hat{r} و $\hat{\theta}$ را به صورت تابعی وابسته به θ تصور کنیم.

شکل ۱-۵۱ بردارهای یکه \hat{i} و \hat{j} و \hat{r} و $\hat{\theta}$ را در یک نقطه از صفحه xy نشان می‌دهد. می‌بینیم که

$$\hat{r} = \hat{i} \cos \theta + \hat{j} \sin \theta$$

$$\hat{\theta} = -\hat{i} \sin \theta + \hat{j} \cos \theta$$

قبل از هرکار، با بررسی آنها در چند نقطه مخصوصاً ساده مانند $\pi/2$ و $0 = \theta$ درست بودن این عبارات را تحقیق کنید. همچنین با نشان دادن اینکه $\hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0$ است، تحقیق کنید که \hat{r} و $\hat{\theta}$ متعامد هستند. تصدیق این موضوع که در واقع با یک بردار یکسان r سروکار داریم بدون توجه به اینکه آن را در مختصات دکارتی یا قطبی توصیف کنیم ساده است. در مختصات دکارتی داریم

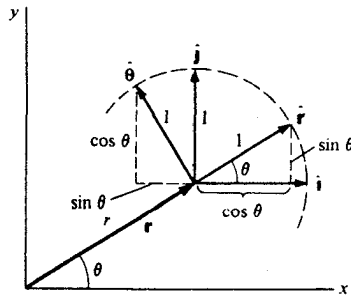
$$\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

و در مختصات قطبی داریم

$$\mathbf{r} = r\hat{r}$$

اگر به جای \hat{r} رابطه بالا را قرار دهیم، عبارت زیر به دست می‌آید

$$x\hat{i} + y\hat{j} = r(\hat{i} \cos \theta + \hat{j} \sin \theta)$$



شکل ۱-۵۱

با برابر قرار دادن ضرایب \hat{i} و \hat{j} به طور جداگانه نتیجه قابل انتظار زیر حاصل می شود

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

رابطه

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$$

گاهی گمراه کننده است، زیرا این معادله به طریقی که نوشته شده است به نظر می رسد هیچ گونه اشاره ای به زاویه θ نمی کند. می دانیم که برای تعیین مکان یک نقطه در فضای دو بعدی به دو پارامتر نیاز داریم (x و y در مختصات دکارتی)؛ اما به نظر می رسد معادله $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ فقط شامل کمیت r باشد. پاسخ این است که \mathbf{r} یک بردار ثابت نیست، و برای دانستن جهت آن باید مقدار θ را بدانیم و همچنین برای تعیین فاصله از مبدأ، مقدار r لازم است. اگرچه θ صریحاً در $r\hat{\mathbf{r}}$ ظاهر نمی شود، ولی مقدار آن برای تعیین جهت \mathbf{r} باید معلوم باشد. اگر برای تأکید بر وابستگی \mathbf{r} به θ می نوشتیم $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}(\theta)$ ، این مطلب واضح می شد. اما بر حسب قرارداد عمومی، نماد $\hat{\mathbf{r}}$ به مفهوم $\hat{\mathbf{r}}(\theta)$ است.

با استفاده از خاصیت متعامد بودن $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\theta}$ ، و خاصیت برداری که $|\hat{\mathbf{r}}| = 1$ و $|\hat{\theta}| = 1$ می توانیم ضرب نرده ای را به روش ساده ای که با آن آشنایی داریم بیان کنیم. اگر $\mathbf{A} = A_r\hat{\mathbf{r}} + A_\theta\hat{\theta}$ و $\mathbf{B} = B_r\hat{\mathbf{r}} + B_\theta\hat{\theta}$ باشد، آنگاه

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_r B_r + A_\theta B_\theta$$

البته برای برقرار بودن این قاعده ساده، $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\theta}$ ها باید به یک نقطه از فضا متعلق باشند.

سرعت در مختصات قطبی

اکنون به توصیف سرعت در مختصات قطبی می پردازیم. یادآوری می کنیم که در مختصات دکارتی

داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d}{dt}(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}) \\ &= \dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

(به خاطر داشته باشید که \dot{x} به جای dx/dt به کار می‌رود.)
همین بردار \mathbf{v} در مختصات قطبی با رابطه زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d}{dt}(r\hat{\mathbf{r}}) \\ &= \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} \end{aligned}$$

جمله اول طرف راست، محققاً مؤلفه سرعت شعاعی است که به طرف خارج ممتد است. حدس می‌زنیم که جمله دوم مؤلفه سرعت در جهت مماس ($\hat{\theta}$) باشد. در واقع همینطور هم هست. اما برای اثبات آن باید $d\hat{\mathbf{r}}/dt$ را تعیین کنیم. از آنجا که اثبات این موضوع کمی دشوار است، به سه روش مختلف آن را محاسبه خواهیم کرد. خودتان بهترین را انتخاب کنید.

محاسبه $d\hat{\mathbf{r}}/dt$

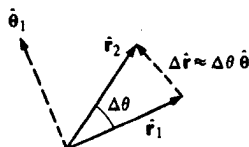
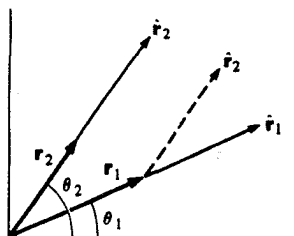
روش ۱. برای پیدا کردن $d\hat{\mathbf{r}}/dt$ می‌توانیم از مفاهیم بخش قبلی استفاده کنیم. از آنجا که $\hat{\mathbf{r}}$ بردار یکه است، بزرگی آن مقدار ثابتی است و $d\hat{\mathbf{r}}/dt$ بر \mathbf{r} عمود است. با افزایش θ ، دوران می‌کند:

$$\begin{aligned} |\Delta\hat{\mathbf{r}}| &\approx |\hat{\mathbf{r}}|\Delta\theta = \Delta\theta \\ \frac{|\Delta\hat{\mathbf{r}}|}{\Delta t} &\approx \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \end{aligned}$$

که با انجام گرفتن حد خواهیم داشت

$$\left| \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} \right| = \frac{d\theta}{dt}$$

همانطوری که شکل ۵۲-۱ نشان می‌دهد، با افزایش θ ، $\hat{\mathbf{r}}$ در جهت $\hat{\theta}$ می‌چرخد و در نتیجه



شکل ۵۲-۱

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta} \hat{\theta}$$

اگر این روش را برای درک مطلب مناسب نیافتید، ممکن است روشهای ۲ یا ۳ را جالتر بیابید.

روش ۲. $\hat{r} = \hat{i} \cos \theta + \hat{j} \sin \theta$ یادآور می شویم که \hat{i} و \hat{j} بردارهای یکه ثابتی هستند، و از این رو با زمان تغییر نمی کنند. از طرف دیگر θ با تغییر r تغییر می کند. با استفاده از

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\cos \theta) &= \left(\frac{d}{d\theta} \cos \theta \right) \frac{d\theta}{dt} \\ &= -\sin \theta \dot{\theta} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\sin \theta) &= \left(\frac{d}{d\theta} \sin \theta \right) \frac{d\theta}{dt} \\ &= \cos \theta \dot{\theta} \end{aligned}$$

به دست می آوریم

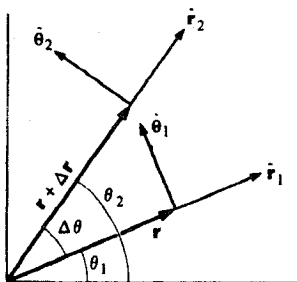
$$\begin{aligned} \frac{d\hat{r}}{dt} &= \hat{i} \frac{d}{dt}(\cos \theta) + \hat{j} \frac{d}{dt}(\sin \theta) \\ &= -\hat{i} \sin \theta \dot{\theta} + \hat{j} \cos \theta \dot{\theta} \\ &= (-\hat{i} \sin \theta + \hat{j} \cos \theta) \dot{\theta} \end{aligned}$$

اما، یادآور می شویم که $-\hat{i} \sin \theta + \hat{j} \cos \theta = \hat{\theta}$ است، بدین ترتیب خواهیم داشت

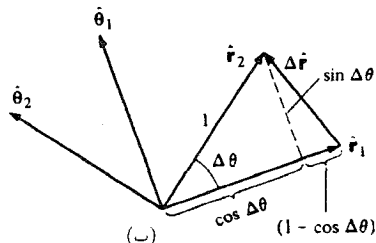
$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta} \hat{\theta}$$

روش ۳. شکل ۱-۵۳ (الف) r را در دو زمان مختلف t و $t + \Delta t$ نشان می دهد. مختصات این دو حالت به ترتیب، (r, θ) و $(r + \Delta r, \theta + \Delta \theta)$ هستند. توجه کنید که زاویه بین \hat{r}_1 و \hat{r}_2 برابر است با زاویه بین $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ ، و این زاویه عبارت است از $\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$.

تغییر \hat{r} در مدت زمان Δt در شکل ۱-۵۳ (ب) نشان داده شده است می بینیم که



(الف)



(ب)

$$\Delta \hat{r} = \hat{\theta}, \sin \Delta \theta - \hat{r}, (1 - \cos \Delta \theta)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \hat{r}}{\Delta t} &= \hat{\theta}, \frac{\sin \Delta \theta}{\Delta t} - \hat{r}, \frac{(1 - \cos \Delta \theta)}{\Delta t} \\ &= \hat{\theta}, \left(\frac{\Delta \theta - \frac{1}{6}(\Delta \theta)^3 + \dots}{\Delta t} \right) \\ &\quad - \hat{r}, \left(\frac{\frac{1}{2}(\Delta \theta)^2 - \frac{1}{24}(\Delta \theta)^4 + \dots}{\Delta t} \right) \end{aligned}$$

در اینجا از بسط سریها که در یادداشت ۱-۱ اشاره شد استفاده کردیم. لازم است حد زیر را تعیین کنیم

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{r}}{\Delta t}$$

در حد، وقتی $\Delta t \rightarrow 0$ ، $\Delta \theta$ هم به سمت صفر میل می‌کند، اما $\Delta \theta / \Delta t$ به حد $d\theta/dt$ میل می‌کند. بنابراین

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} (\Delta \theta)^n = 0 \quad n > 0$$

بدین ترتیب عبارت موجود در \hat{r} در حد به کلی از بین می‌رود و آنچه باقی می‌ماند عبارت است از

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta} \hat{\theta}$$

که همان نتیجه قبلی است. برای $d\hat{\theta}/dt$ هم عبارتی لازم داریم. می‌توانید با استفاده از هر یک از استدلالهای فوق و یا همه آنها برای خودتان ثابت کنید که

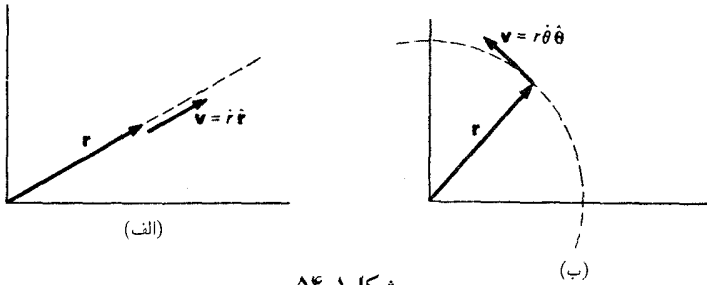
$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\dot{\theta} \hat{r}$$

از آنجا که باید با هر دو نتیجه آشنا باشید، آنها را با هم به صورت خلاصه در زیر می‌آوریم

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\hat{r}}{dt} &= \dot{\theta} \hat{\theta} \\ \frac{d\hat{\theta}}{dt} &= -\dot{\theta} \hat{r} \end{aligned}}$$

اکنون می‌توانیم به مسئله خودمان برگردیم. قبلاً نشان دادیم که

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} r \hat{r} = \dot{r} \hat{r} + r \frac{d\hat{r}}{dt}$$



شکل ۱-۵۴

با استفاده از نتایج فوق، این را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{v} = \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

همانطوری که حدس می‌زدیم، جملهٔ دوم حقیقتاً در جهت مماس ($\hat{\boldsymbol{\theta}}$) است. با بررسی حالت‌های ویژه که فقط یک مؤلفه با زمان تغییر می‌کند می‌توانیم مفهوم هر جمله را عمیقتر درک کنیم.

۱. وقتی که $\theta = \text{const.}$ باشد، سرعت شعاعی است (شکل ۱-۵۴ الف). چنانچه θ مقدار ثابتی داشته باشد، $\dot{\theta} = 0$ و $\mathbf{v} = \dot{r} \hat{\mathbf{r}}$ است و در نتیجه با حرکتی یک بعدی در جهت شعاعی ثابت سروکار داریم.

۲. $r = \text{const.}$ باشد، سرعت مماسی است (شکل ۱-۵۴ ب). در این حالت $\mathbf{v} = r \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}$ چون r ثابت است، حرکت روی کمان یک دایره انجام می‌گیرد. سرعت این نقطه روی دایره برابر $r \dot{\theta}$ است. و از آنجا $\mathbf{v} = r \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}$ می‌شود. در حالت کلی، هم r و هم θ با زمان تغییر می‌کنند. سه مثال زیر استفاده از مختصات قطبی را برای توصیف سرعت نشان می‌دهند.

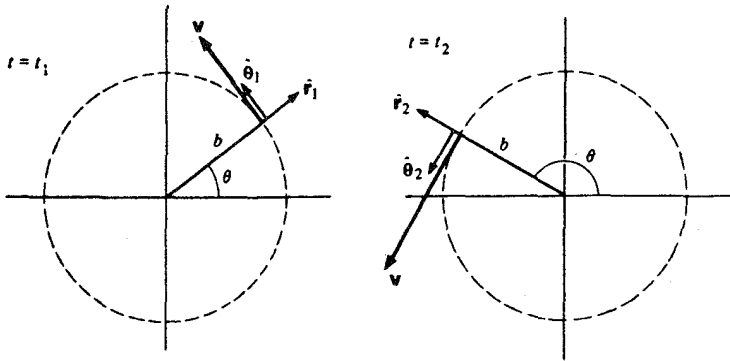
مثال ۱-۱۳ حرکت دایره‌ای و حرکت راستخط در مختصات قطبی: ذره‌ای روی دایره‌ای به شعاع b با سرعت زاویه‌ای $\theta = \alpha t$ حرکت می‌کند، که در آن α مقداری ثابت است (α دارای یکای رادیان بر مجذور ثانیه است). سرعت این ذره را در مختصات قطبی توصیف کنید.

از آنجا که $r = b = \text{const.}$ است، \mathbf{v} کاملاً مماسی و $\mathbf{v} = b \alpha t \hat{\boldsymbol{\theta}}$ می‌شود. شکل‌های ۱-۵۵ بردارهای \mathbf{r} ، $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ، و \mathbf{v} را در لحظهٔ t_1 و لحظهٔ t_2 بعد از آن، نشان می‌دهند. این ذره در مکانی قرار دارد که

$$r = b \quad \theta = \theta_0 + \int_0^t \dot{\theta} dt = \theta_0 + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

اگر این ذره در $t = 0$ و $\theta_0 = 0$ روی محور x ها قرار داشته باشد. بردار مکان آن چنین است $\mathbf{r} = b \hat{\mathbf{i}}$ اما همانطوری که شکل‌های ۱-۵۵ نشان می‌دهند، برای تعیین جهت $\hat{\mathbf{r}}$ باید θ معلوم باشد.

ذره‌ای را که با سرعت ثابت $\mathbf{v} = u \hat{\mathbf{i}}$ در امتداد خط $y = 2$ حرکت می‌کند در نظر بگیرید. \mathbf{v} را



شکل ۵۵-۱

در مختصات قطبی بنویسید:

$$\mathbf{v} = v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

از شکل ۵۶-۱ داریم

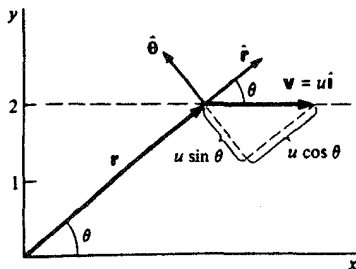
$$v_r = u \cos \theta$$

$$v_\theta = -u \sin \theta$$

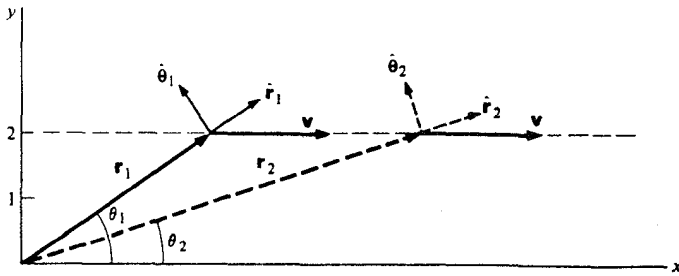
$$\mathbf{v} = u \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - u \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

هر قدر ذره به طرف راست حرکت کند، θ کاهش می‌یابد و $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ هم تغییر جهت می‌دهند (شکل ۵۷-۱). البته، ما معمولاً می‌کوشیم از مختصات استفاده کنیم که مسئله را تا حد امکان ساده‌تر سازد، در اینجا مختصات قطبی خیلی مناسب نیست.

مثال ۱-۱۴ سرعت مهره روی پره چرخ: مهره‌ای در امتداد پره یک چرخ با سرعت ثابت u متر بر ثانیه



شکل ۵۶-۱



شکل ۱-۵۷

حرکت می‌کند (شکل ۱-۵۸). این چرخ با سرعت زاویه‌ای ثابت $\theta = \omega$ رادیان بر ثانیه حول محوری ثابت در فضا دوران می‌کند. در $t = 0^\circ$ پره چرخ در امتداد محور x هاست و مهره در مبدأ قرار دارد. سرعت را در زمان t پیدا کنید:

الف) در مختصات قطبی
ب) در مختصات دکارتی

الف) داریم $r = ut$ و $\dot{r} = u$ و $\theta = \omega t$. از این رو

$$\mathbf{v} = \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} = u \hat{\mathbf{r}} + ut\omega \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

برای توصیف کامل سرعت، لازم است که جهت $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ را داشته باشیم که از رابطه $(ut, \omega t) = (r, \theta)$ به دست می‌آید.

ب) در مختصات دکارتی داریم

$$v_x = v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta$$

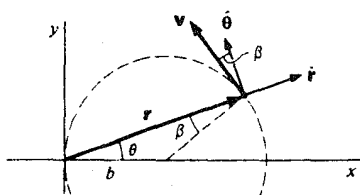
$$v_y = v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta$$

از آنجا که $v_r = u$ ، $v_\theta = r\omega = ut\omega$ ، $\theta = \omega t$ خواهیم داشت

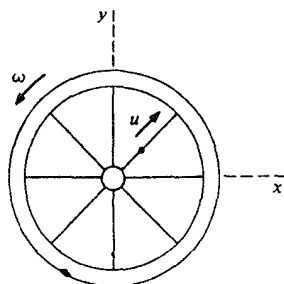
$$\mathbf{v} = (u \cos \omega t - ut\omega \sin \omega t) \hat{\mathbf{i}} + (u \sin \omega t + ut\omega \cos \omega t) \hat{\mathbf{j}}$$

دقت کنید که نتایج در مختصات قطبی تخت چقدر ساده‌تر است.

مثال ۱-۱۵ دایره‌ای که مرکز آن روی مبدأ نیست: ذره‌ای با سرعت ثابت u روی دایره‌ای به شعاع b حرکت می‌کند. بردار سرعت آن را در مختصات قطبی، با انتخاب مبدأ روی دایره، پیدا کنید. با این مبدأ، همانطوری که در شکل ۱-۵۹ دیده می‌شود، \mathbf{v} دیگر کاملاً مماسی نیست.



شکل ۱-۵۹



شکل ۱-۵۸

$$\mathbf{v} = -v \sin \beta \hat{\mathbf{r}} + v \cos \beta \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$= -v \sin \theta \hat{\mathbf{r}} + v \cos \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

مرحله آخر از آنجا نتیجه می‌شود که β و θ زوایای مجاور به قاعده یک مثلث متساوی الساقین اند و بنابراین با هم برابرند (شکل ۱-۶۰). برای کامل کردن محاسبه باید θ را به صورت تابعی از زمان پیدا کنیم. با توجه به هندسه مسئله $\theta = \omega t / 2$ یا $2\theta = \omega t$ می‌آید که در آن $\omega = v/b$ است. ■

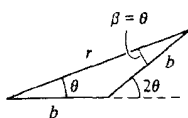
شتاب در مختصات قطبی

آخرین کار ما پیدا کردن شتاب است. از \mathbf{v} مشتق می‌گیریم

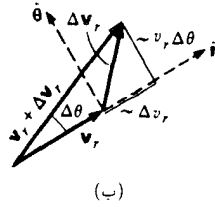
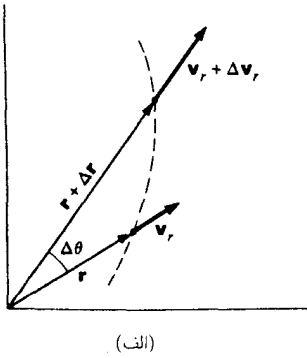
$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d}{dt} \mathbf{v} \\ &= \frac{d}{dt} (v \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= \ddot{r} \hat{\mathbf{r}} + \dot{r} \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{r}} + \dot{r} \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \ddot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \dot{\theta} \frac{d}{dt} \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

اگر نتایج صفحه ۵۱ را به جای $d\hat{\mathbf{r}}/dt$ و $d\hat{\boldsymbol{\theta}}/dt$ بگذاریم، خواهیم داشت

$$\hat{\mathbf{a}} = \ddot{r} \hat{\mathbf{r}} + \dot{r} \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{r} \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \ddot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} - r \dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{r}}$$



شکل ۱-۶۰



شکل ۱-۶۱

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

جمله $\ddot{r}\hat{r}$ شتاب خطی در جهت شعاعی است که به تغییر سرعت شعاعی مربوط می‌شود. به همین ترتیب $r\ddot{\theta}\hat{\theta}$ شتاب خطی در جهت مماسی است که به تغییر بزرگی سرعت زاویه‌ای مربوط می‌شود.

جمله $-r\dot{\theta}^2\hat{r}$ ، شتاب مرکزگراست که در مثال ۱-۸ با آن روبه‌رو شدیم. بالاخره، $2\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta}$ هم شتاب کوریولیس است. شاید در مورد نیروی کوریولیس چیزی شنیده‌اید، نیرویی مجازی است که به نظر می‌آید در دستگاه مختصات دوار عمل می‌کند، که آن را در فصل ۸ مطالعه خواهیم کرد. شتاب کوریولیس که در اینجا بحث می‌کنیم شتابی است حقیقی که با تغییر r و θ طی زمان ظاهر می‌شود.

رابطه شتاب در مختصات قطبی پیچیده به نظر می‌آید. اما، با استفاده از دیدگاه هندسی می‌توانیم تصویر روشنتری پیدا کنیم.

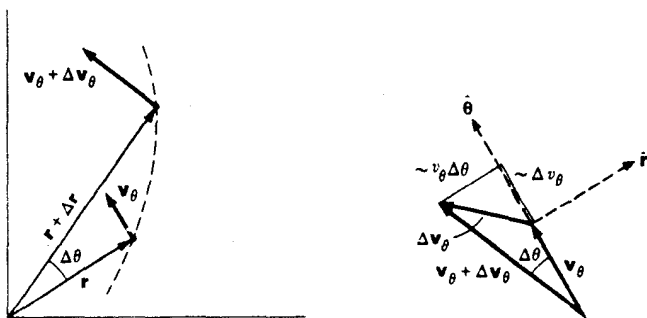
سرعت لحظه‌ای عبارت است از

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} = v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta}$$

سرعت را در دو زمان مختلف در نظر می‌گیریم، جملات شعاعی و مماسی آن را به طور جداگانه مورد بحث قرار می‌دهیم.

شکل ۱-۶۱ (الف) سرعت شعاعی $\dot{r}\hat{r} = v_r\hat{r}$ را در دو لحظه مختلف نشان می‌دهد. تغییر Δv_r دارای هر دو مؤلفه مماسی و شعاعی است. همانطوری که از شکل ۱-۶۱ (ب) (و یا از بحث پایانی بخش ۱-۸) می‌توان دید، مؤلفه شعاعی Δv_r برابر $\Delta v_r\hat{r}$ و مؤلفه مماسی آن برابر $v_r\Delta\theta\hat{\theta}$ است. مؤلفه شعاعی به اندازه

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta v_r}{\Delta t} \hat{r} \right) = \frac{dv_r}{dt} \hat{r} = \ddot{r} \hat{r}$$



شکل ۱-۶۲

در شتاب سهیم است و مؤلفه مماسی به اندازه

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(v_r \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \hat{\theta} \right) = v_r \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} = \dot{r} \dot{\theta} \hat{\theta}$$

که برابر نصف شتاب کوریولیس است. می بینیم که نصف شتاب کوریولیس از تغییر جهت سرعت شعاعی به وجود می آید.

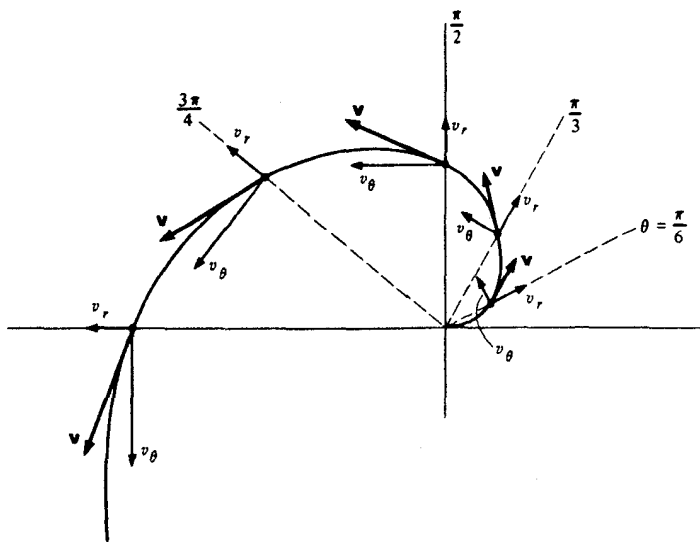
سرعت مماسی $v_\theta \hat{\theta} = r \dot{\theta} \hat{\theta}$ را هم به همین روش می توان مورد بررسی قرار داد. تغییر جهت $\hat{\theta}$ باعث می شود تا Δv_θ دارای مؤلفه شعاعی به طرف داخل شود که اندازه آن برابر $-v_\theta \Delta \theta \hat{r}$ است. این امر شتابی به اندازه زیر به وجود می آورد

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(-v_\theta \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \hat{r} \right) = -v_\theta \dot{\theta} \hat{r} = -r \dot{\theta}^2 \hat{r}$$

که ما آن را به عنوان شتاب مرکزگرا می شناسیم. بالاخره، مؤلفه مماسی Δv_θ عبارت است از $\Delta v_\theta \hat{\theta}$ (شکل‌های ۱-۶۲). از آنجاکه $v_\theta = r \dot{\theta}$ است، برای تغییر سرعت مماسی دواره وجود دارد. اولاً، اگر $\dot{\theta}$ به اندازه $\Delta \dot{\theta}$ افزایش یابد، v_θ به اندازه $r \Delta \dot{\theta}$ افزایش می یابد. ثانیاً اگر r به اندازه Δr افزایش یابد، v_θ اندازه $\Delta r \dot{\theta}$ زیاد می شود. از این رو، $\Delta v_\theta = r \Delta \dot{\theta} + \Delta r \dot{\theta}$ و سهم آن در شتاب به مقدار زیر است

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta v_\theta}{\Delta t} \hat{\theta} \right) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(r \frac{\Delta \dot{\theta}}{\Delta t} + \frac{\Delta r}{\Delta t} \dot{\theta} \right) \hat{\theta} \\ &= (r \ddot{\theta} + \dot{r} \dot{\theta}) \hat{\theta} \end{aligned}$$

جمله دوم همان نیمه باقیمانده شتاب کوریولیس است. چنانکه می بینیم، این قسمت از تغییر سرعت مماسی بر اثر تغییر مسافت شعاعی به وجود می آید.



شکل ۱-۶۳

مثال ۱-۱۶ شتاب مهره روی پره چرخ: مهره‌ای با سرعت ثابت u در امتداد پره یک چرخ به طرف خارج حرکت می‌کند. این مهره در $t = 0$ از مرکز شروع به حرکت می‌کند. موقعیت زاویه‌ای پره، به وسیله رابطه $\theta = \omega t$ داده می‌شود. که در آن ω مقداری ثابت است. سرعت و شتاب آن را پیدا کنید

$$\mathbf{v} = \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\theta} \hat{\theta}$$

می‌دانیم که $\dot{r} = u$ و $\dot{\theta} = \omega$ است. موقعیت شعاعی به وسیله رابطه $r = ut$ داده شده است. پس داریم

$$\mathbf{v} = u\hat{\mathbf{r}} + \omega r\hat{\theta}$$

و شتاب عبارت است از

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

$$= -\omega^2 r\hat{\mathbf{r}} + 2\omega u\hat{\theta}$$

در شکل ۱-۶۳، سرعت در چندین موقعیت مختلف چرخ نشان داده شده است. دقت کنید که سرعت شعاعی ثابت است، شتاب مماسی هم ثابت است- آیا می‌توانید چنین چیزی را تصور کنید؟ ■

مثال ۱-۱۷ حرکت شعاعی بدون شتاب: ذره‌ای با $\dot{\theta} = \omega = \text{const.}$ و $r = r_0 e^{\beta t}$ حرکت می‌کند، که در آن r_0 و θ مقادیر ثابتی هستند. نشان خواهیم داد که به ازای مقادیر بخصوصی از β ، این ذره با

$a_r = 0$ حرکت می‌کند

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= (\beta^2 r_0 e^{\beta t} - r_0 e^{\beta t} \omega^2)\hat{\mathbf{r}} + 2\beta r_0 \omega e^{\beta t}\hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

اگر $\beta = \pm \omega$ باشد، قسمت شعاعی \mathbf{a} حذف می‌شود.

دروهله اول خیلی عجیب به نظر می‌رسد که وقتی $r = r_0 e^{\beta t}$ است، ذره با شتاب شعاعی صفر حرکت می‌کند. این اشتباه ناشی از این تفکر است که \dot{r} تنها عضو تشکیل دهنده a_r است، درحالی‌که جمله $-r\dot{\theta}^2$ نیز قسمتی از شتاب شعاعی است که نمی‌توان از آن چشم پوشید.

در اینجا یک تناقض به نظر می‌رسد به این معنی که با وجود $a_r = 0$ ، سرعت شعاعی $v_r = \dot{r} = r_0 \omega e^{\beta t}$ سریعاً با زمان افزایش می‌یابد. جواب این است که شاید با توجه به حالت ویژه‌ای از مختصات دکارتی گمراه شده‌ایم. در مختصات قطبی داریم

$$v_r \neq \int a_r(t) dt$$

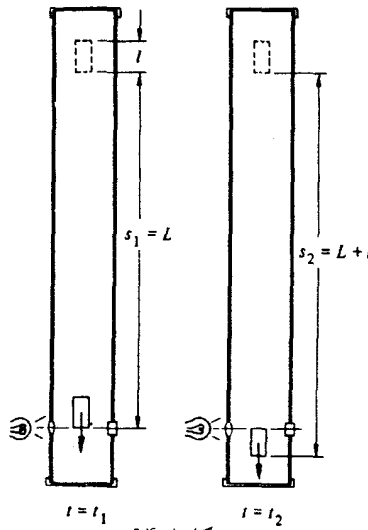
زیرا در عبارت $\int a_r(t) dt$ این حقیقت که بردارهای $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ تابعی از زمان هستند به حساب نمی‌آید. ■

یادداشت ۱-۱ روشهای تقریب ریاضی: گاهی در مراحل حل یک مسئله فیزیکی، ممکن است آنقدر خودتان را درگیر ریاضی بیابید که فیزیک مسئله به کلی پنهان شود. در چنین مواردی، بهتر است برای لحظه‌ای به عقب برگردید و ببینید که آیا از عبارات ساده‌تقریبی نمی‌توان به جای فرمولهای پیچیده و کامل استفاده کرد تا از آن نوع ریاضیات اجتناب شود. اگر تا به حال فن استفاده از تقریب را فرا نگرفته‌اید، ممکن است احساس کنید که اساساً روش جایگذاری نتایج غیردقیق به جای نتایج دقیق کار اشتباهی است، اما همانطوری که مثال زیر نشان می‌دهد حقیقت امر این نیست.

فرض کنید فیزیکدانی، سقوط آزاد جسمی را در خلأ با استفاده از یک لوله قائم بلند خالی از هوا مطالعه می‌کند (شکل ۱-۶۴). دستگاه زمان سنج وقتی شروع به کار می‌کند که این جسم هنگام سقوط خود پرتوافقی باریکی را که به اندازه L پایینتر از مکان اولیه جسم واقع شده است، قطع کند. با اندازه‌گیری زمان لازم برای عبور این جسم از مقابل شعاع نورانی، فیزیکدان امیدوار است که مقدار موضعی شتاب گرانش (g) را به دست آورد. در این آزمایش جسم سقوط کننده دارای طول l است.

برای جسمی که از حالت سکون آزادانه سقوط می‌کند، مسافت s پیموده شده در زمان t عبارت

است از



شکل ۱-۶۴

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

که نتیجه می دهد

$$t = \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{s}$$

فاصله زمانی لازم، $t_2 - t_1$ ، برای سقوط جسمی از $s_1 = L$ cm تا $s_2 = (L + l)$ cm عبارت است از

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &= \sqrt{\frac{2}{g}} (\sqrt{s_2} - \sqrt{s_1}) \\ &= \sqrt{\frac{2}{g}} (\sqrt{L+l} - \sqrt{L}) \end{aligned}$$

اگر $t_2 - t_1$ از طریق آزمایش اندازه گرفته شود، g از رابطه زیر به دست می آید

$$g = 2 \left(\frac{\sqrt{L+l} - \sqrt{L}}{t_2 - t_1} \right)^2$$

این فرمول تحت شرایط بیان شده کامل است، اما ممکن است بیان خیلی مفیدی برای مقصودمان نباشد.

عامل زیر را در نظر بگیرید

$$\sqrt{L+l} - \sqrt{L}$$

در عمل، L در مقایسه با l خیلی بزرگ خواهد بود (به عنوان نمونه، این مقادیر ممکن است به صورت $l = 1 \text{ cm}$ و $L = 10^6 \text{ cm}$ باشند). عامل مورد نظر ما، اختلاف کوچک بین این دو عدد بسیار بزرگ است و محاسبه آن به طور دقیق با استفاده از خط‌کش محاسبه و یا جدولهای ریاضی معمولی کار مشکلی است. در اینجا طریقه ساده‌ای که به روش بسط سریهای توانی معروف است ارائه می‌شود که به کمک آن می‌توان این عامل را با هر دقتی که بخواهیم محاسبه کنیم. همچنانکه بعداً در این یادداشت به طریق متداول تشریح خواهیم کرد، کمیت $\sqrt{1+x}$ را در سریها وقتی که $-1 < x < 1$ باشد، می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots$$

به علاوه، اگر سری را در نقطه‌ای قطع کنیم، اشتباهی که با این تقریب مرتکب می‌شویم، در حدود اولین جمله صرف‌نظر شده است. می‌توانیم ابتدا با فاکتورگیری \sqrt{L} ، این عامل را به صورتی مناسب برای بسط در آوریم:

$$\sqrt{L+l} - \sqrt{L} = \sqrt{L} \left(\sqrt{1 + \frac{l}{L}} - 1 \right)$$

کسر بدون بعد l/L ، نقش x را در این بسط ایفا می‌کند. با بسط $\sqrt{1+l/L}$ به صورت سری داریم

$$\begin{aligned} \sqrt{L} \left(\sqrt{1 + \frac{l}{L}} - 1 \right) &= \sqrt{L} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{l}{L} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{l}{L} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{16} \left(\frac{l}{L} \right)^3 + \dots - 1 \right] \\ &= \sqrt{L} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{l}{L} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{l}{L} \right)^2 + \frac{1}{16} \left(\frac{l}{L} \right)^3 \dots \right] \end{aligned}$$

می‌بینیم که اگر l/L خیلی کوچکتر از یک باشد، جملات متوالی به سرعت کاهش می‌یابند. جمله اول داخل کروشه، $1/2(l/L)$ ، بزرگترین جمله است، و با فاکتورگیری از آن نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \sqrt{L+l} - \sqrt{L} &= \sqrt{L} \frac{1}{2} \left(\frac{l}{L} \right) \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{l}{L} \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{l}{L} \right)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{l}{2\sqrt{L}} \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{l}{L} \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{l}{L} \right)^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

اکنون، بسط ما به آخرین صورت و مفیدترین شکل خود در آمده است. عامل اول، $l/(2\sqrt{L})$ ، نشاندهنده رفتار عمده و اولین تقریب مفید است. به علاوه، نوشتن سری به طریقی که جمله اول آن یک باشد، به وضوح نقش توانهای متوالی l/L را نشان می دهد. برای مثال، اگر $l/L = 10^{-5}$ باشد، داریم $10^{-5} \times 10^{-5} = 10^{-10}$ و فقط با نگاهداشتن جملات قبلی، خطای ما در حدود یک قسمت در 10^{-5} خواهد بود. در بسیاری از موارد، این دقت بیش از حد کفایت است. برای نمونه، اگر فاصله زمانی $t_2 - t_1$ را در آزمایش جسم سقوط کننده با دقت یک قسمت در هزار اندازه بگیریم، با محاسبه عبارت $\sqrt{L+l} - \sqrt{L}$ ، با دقتی بیشتر از این، چیزی عایدمان نخواهد شد. از طرف دیگر، اگر نیاز به دقتی بیشتر از این داشته باشیم، به سادگی می توان گفت که چند جمله از سری باید نگهداشته شود.

فیزیکدانها تقریبهای ریاضی را در عمل (هنگامی که به جا تشخیص دهند) آزادانه به کار می برند و هیچگونه تردیدی در حذف جملات قابل اغماض به خود راه نمی دهند. این عمل غالباً عبور از موانع مشکل جبر و حساب را برای رسیدن به حل موفقیت آمیز مسئله امکانپذیر می سازد.

به علاوه، محاسبه تقریبی سریها غالباً به ما امکان می دهد تا عبارات پیچیده جبری را، به منظور کشف رفتارهای اساسی فیزیکی، ساده کنیم.

در اینجا چند روش مفید تقریبگیری ریاضی ارائه می شود:

۱. سری دو جمله ای:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}x^k + \dots$$

این سری برای $-1 < x < 1$ ، و همه مقادیر n معتبر است. (وقتی n عدد صحیح باشد، سری با آخرین جمله x^n خاتمه می یابد.) این سری کامل است و تقریب وقتی وارد می شود که آن را قطع کنیم. در این مثال برای $n = 1/2$ داریم

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots \quad -1 < x < 1$$

اگر فقط به دقت $O(x^2)$ (از مرتبه x^2) نیازمند باشیم، داریم

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + O(x^3)$$

در اینجا جمله $O(x^3)$ نشانگر این است که جملات از مرتبه x^3 و بالاتر مورد نظر نیستند. بایک حساب

سرانگشتی می‌توان فهمید که در اینجا خطاً تقریباً برابر اولین جمله حذف شده است. همچنین اگر $|x| > 1$ باشد، باز هم این سری می‌تواند به طریق زیر به کار رود

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= x^n \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n \\ &= x^n \left[1 + n\frac{1}{x} + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \dots\right]\end{aligned}$$

مثال:

۱.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= (1+x)^{-1} \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad -1 < x < 1\end{aligned}$$

۲.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= (1-x)^{-1} \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad -1 < x < 1\end{aligned}$$

۳.

$$\begin{aligned}(1001)^{\frac{1}{3}} &= (1000 + 1)^{\frac{1}{3}} = 1000^{\frac{1}{3}} \left(1 + 0.001\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= 10 \left[1 + 0.001\left(\frac{1}{3}\right) + \dots\right] \\ &\approx 10(1.0003) = 10.003\end{aligned}$$

۴. مقدار $2 - 1/\sqrt{1+x} - 1/\sqrt{1-x}$ ، برای x های کوچک با اولین تقریب برابر صفر است. اما، این تقریب ممکن است کافی نباشد. با استفاده از سری دو جمله‌ای داریم

$$\begin{aligned}2 - \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} &= 2 - \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots\right) \\ &\quad - \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots\right) \\ &= -\frac{3}{4}x^2\end{aligned}$$

توجه داشته باشید که جملات خطی x نیز حذف می‌شوند. برای به دست آوردن نتیجه غیر صفر باید به مرتبه‌ای به اندازه کافی بالا برویم که در اینجا مرتبه x^2 است. بدیهی است که برای جواب صحیح باید همه جملات را تا مرتبه یکسانی بسط دهیم.

۲. سری تیلور: هر تابع اختیاری $f(x)$ را می‌توان نظیر سری دو جمله‌ای به وسیله سری توانی از x نشان داد:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

برای $x = 0$ باید داشته باشیم

$$f(0) = a_0$$

در اینجا، با فرض مجاز بودن مشتق‌گیری، داریم

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots$$

با تعیین آن در $x = 0$ به دست می‌آید

$$a_1 = f'(x) \Big|_{x=0}$$

با ادامه این کار، چنین داریم

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \Big|_{x=0}$$

که در اینجا $f^{(k)}(x)$ ، k امین مشتق $f(x)$ است. برای نمادگذاری کم در دسر، غالباً از $f^{(k)}(0)$ به جای $f^{(k)}(x) \Big|_{x=0}$ استفاده می‌کنیم؛ اما به خاطر داشته باشید که $f^{(k)}(0)$ بدین معنی است که باید از $f(x)$ ، k مرتبه مشتق بگیریم و سپس x را برابر صفر قرار دهیم.

سری توانی برای $f(x)$ ، که مشهور به سری تیلور است به طور متداول چنین بیان می‌شود

$$f(x) = f(0) - f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \dots$$

این سری اگر همگرا باشد، می‌تواند تقریب خوبی از $f(x)$ را به ازای مقادیر کوچک x (یعنی برای مقادیر x نزدیک به صفر) به دست دهد. در حالت کلی داریم

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)x + f''(a)\frac{x^2}{2!} + \dots$$

که رفتار تابع را در همسایگی نقطه a به ما می‌دهد. شکل دیگر عبارت فوق چنین است:

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t - a) + f''(a)\frac{(t - a)^2}{2!} + \dots$$

این دستکاریها وقتی مجازند که سری همگرا باشد. گستره همگرایی سری تیلور برای بعضی توابع (مانند e^x) ممکن است به صورت $-\infty < x < \infty$ باشد، اما برای توابع دیگر می‌تواند کاملاً محدود باشد. (سری دو جمله‌ای تنها وقتی همگراست که $-1 < x < 1$ باشد). پیدا کردن گستره همگرایی بدون بررسی توابع متغیرهای مختلط مشکل است. بنابراین با قبول اینکه با توابع ساده‌ای سروکار داریم که گستره همگرایی آنها یا بینهایت و یا به سادگی قابل تشخیص است، از این موضوع اجتناب خواهیم کرد. اینک به چند مثال توجه کنید.

الف) توابع مثلثاتی: اگر $f(x) = \sin x$ باشد، با بسط آن حول $x = 0$ داریم

$$f(0) = \sin(0) = 0$$

$$f'(0) = \cos(0) = 1$$

$$f''(0) = -\sin(0) = 0$$

$$f'''(0) = -\cos(0) = -1, \dots$$

آنگاه داریم

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

به همین ترتیب

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots$$

این بسط‌ها به ازای همه مقادیر x همگرا هستند، اما برای مقادیر کوچک x ، به ویژه مفیدند. با تقریب $O(x^2)$ داریم $\sin x = x$ و $\cos x = 1 - x^2/2$.

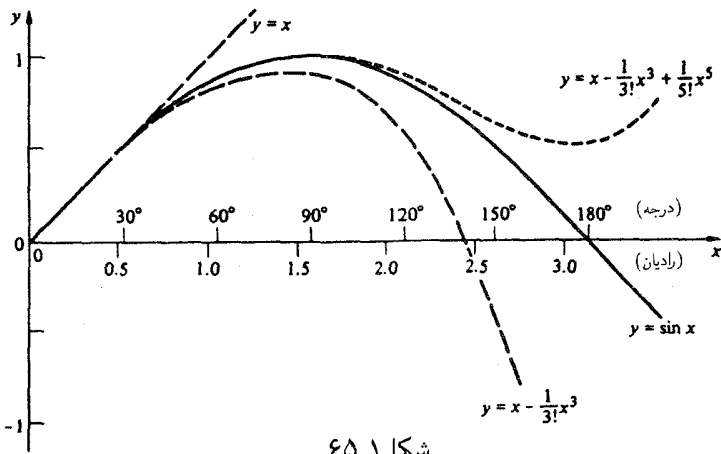
شکل ۱-۶۵ مقدار دقیق $\sin x$ را با یک سری تیلور که شامل جملات متوالی از رتبه‌های بالاتر است، مقایسه می‌کند. توجه کنید که چگونه هر جمله آن گستره دقت سری را افزایش می‌دهد. اگر تعداد این جملات بینهایت شود، سری تیلور می‌تواند در همه جا معرف این تابع باشد.

ب) سری دو جمله‌ای: سری دو جمله‌ای را که در بخش گذشته معرفی کردیم، می‌توانیم با فرض زیر

به دست آوریم

$$f(x) = (1 + x)^n$$

آنگاه



شکل ۱-۶۵

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = n(1 + 0)^{n-1} = n$$

$$f''(0) = n(n-1)$$

$$f^{(k)}(0) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$$

$$(1-x)^n = 1 + nx + \frac{1}{2!}n(n-1)x^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}x^k + \dots$$

ج) تابع نمایی: اگر فرض کنیم $f(x) = e^x$ باشد، با توجه به تعریف تابع نمایی داریم $f'(x) = f(x)$ و به همین ترتیب $f^{(k)}(x) = f(x)$ ، و از آنجا که $f(0) = e^0 = 1$ است، داریم

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

این سری به ازای همه مقادیر x همگراست.

یک نتیجه مفید از نظریه سری تیلور این است که اگر سری در همه جا همگرا باشد، این سری چنان معرف خوبی برای این تابع خواهد شد که می توان از آن هر چند بار که بخواهیم انتگرال یا دیفرانسیل بگیریم. برای مثال

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \frac{d}{dx} \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$$

$$= \cos x$$

به علاوه، سری تیلور مربوط به حاصلضرب دو تابع، برابر حاصلضرب سریهای جداگانه است

$$\sin x \cos x = \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots \right) \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots \right)$$

$$= x - \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!} \right) x^3 + \left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{3!2!} + \frac{1}{5!} \right) x^5 + \dots$$

$$= x - \frac{4x^3}{3!} + \frac{16x^5}{5!} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} \left[(2x) - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{2} [\sin(2x)]$$

سری تیلورگاهی در محاسبه انتگرالها خیلی سودمند است. در برآورد عبارت

$$\int_1^{1.1} \frac{e^z}{z} dz$$

اگر فرض کنیم $z = 1 + x$ ، آنگاه داریم

$$\int_1^{1.1} \frac{e^z}{z} dz = \int_0^{0.1} \frac{e^{(1+x)}}{1+x} dx$$

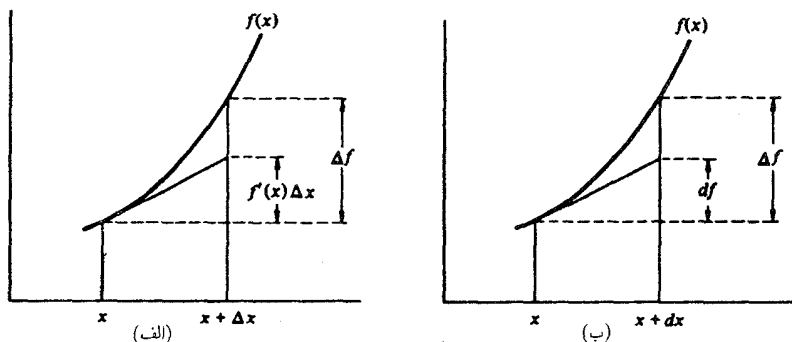
$$= (e) \int_0^{0.1} \frac{e^x}{1+x} dx$$

$$\approx (e) \int_0^{0.1} \frac{(1+x)}{(1+x)} dx$$

$$\approx 0.1e$$

برای x هایی که همواره در فاصله $0 \leq x \leq 0.1$ قرار دارند، این تقریب باید بهتر از یک قسمت درصد قسمت و یا در همین حدود باشد. در این دامنه $e^x \approx 1 + x$ تقریب خوبی با دویا سه رقم بامعنی است.

۳. دیفرانسیل: تابع $f(x)$ با متغیر مستقل x را در نظر بگیرد. وقتی که x به $x + \Delta x$ تغییر می‌کند، برای به دست آوردن تغییرات $f(x)$ غالباً احتیاج به یک تقریب ساده داریم. تغییرات $f(x)$ را به صورت $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ نشان می‌دهیم. طبیعی است که از سری تیلور استفاده می‌کنیم.



شکل ۱-۶۶

بسط سری تیلور برای $f(x)$ حول نقطه x به این صورت است

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(x)\Delta x^2 + \dots$$

در اینجا برای مثال $f'(x)$ به جای df/dx قرار گرفته است که در نقطه x محاسبه می‌شود. با حذف جملات رتبه $(\Delta x)^2$ و بالاتر، تقریبی ساده و خطی حاصل می‌شود:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

این تقریب با کوچک شدن Δx مرتب دقیقتر می‌شود. اما، برای مقادیر معین Δx ، عبارت

$$\Delta f \approx f'(x)\Delta x$$

باید به عنوان یک تقریب در نظر گرفته شود. مقایسه بین $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ و برون‌یابی خطی، $f'(x)\Delta x$ در شکل ۱-۶۶ (الف) نشان داده می‌شود. بدیهی است که Δf ، یعنی تغییر واقعی $f(x)$ وقتی که x تغییر می‌کند، در حالت کلی برای Δx معین برابر با Δf نیست.

به منظور نمادگذاری، از dx به جای Δx یعنی x نمو استفاده می‌کنیم. dx به عنوان دیفرانسیل شناخته شده است که می‌تواند به اندازه دلخواه بزرگ یا کوچک باشد. df یا دیفرانسیل f را به وسیله رابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$df \equiv f'(x)dx$$

این علامت در شکل ۱-۶۶ (ب) نشان داده شده است. دقت کنید که dx و Δx به جای یکدیگر مورد استفاده قرار می‌گیرند. از طرف دیگر df و Δf کمیتهای مختلفی هستند. df یک دیفرانسیل است که به

وسیله رابطه $df = f'(x)dx$ تعریف شده است، درحالی که Δf تغییر واقعی $f(x+dx) - f(x)$ است. با وجود این، وقتی که تقریب خطی در یک مسئله موجه دانسته شد، غالباً از df برای نشان دادن Δf استفاده می‌کنیم. غالباً این کار را می‌توان انجام داد، مشروط بر اینکه سرانجام حد بگیریم. در اینجا چند نمونه آورده می‌شود:

۱.

$$d(\sin \theta) = \cos \theta d\theta$$

۲.

$$d(xe^{x^2}) = (e^{x^2} + 2x^2e^{x^2})dx$$

۳. فرض کنید V حجم کره‌ای به شعاع r باشد، داریم

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

۴. اگر شعاع متوسط کره زمین که برابر $10^6 \times 64$ متر است به اندازه یک متر افزایش یابد، افزایش نسبی حجم آن چقدر خواهد بود؟

$$\begin{aligned} \frac{dV}{V} &= \frac{4\pi r^2 dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} \\ &= 3 \frac{dr}{r} \\ &= \frac{3}{64 \times 10^6} = 4.7 \times 10^{-7} \end{aligned}$$

یکی از کاربردهای متداول دیفرانسیلها، تغییر دادن متغیر انتگرال‌گیری است. برای نمونه، انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$\int_a^b x e^{x^2} dx$$

یک جایگذاری $t = x^2$ باعث سهولت محاسبه می‌شود. طریقه عمل این است که ابتدا x را بر حسب t به دست می‌آوریم

$$x = \sqrt{t}$$

و سپس از آن دیفرانسیل می‌گیریم

$$dx = \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

از آنجا که عملاً حد می‌گیریم، این نتیجه کامل است حال انتگرال اصلی را می‌توان بر حسب t به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \int_a^b x e^{x^2} dx &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{t} e^t \left(\frac{1}{\sqrt{t}} dt \right) = \int_{t_1}^{t_2} e^t dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} (e^{t_2} - e^{t_1}) \end{aligned}$$

که در آن $t_2 = b^2$ و $t_1 = a^2$ است.

مسائل

۱-۱ دو بردار $\mathbf{A} = (2\hat{i} - 3\hat{j} + 7\hat{k})$ و $\mathbf{B} = (5\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ مفروض‌اند، پیدا کنید
(الف) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ، (ب) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ ، (ج) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ، (د) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.
جواب: (الف) $7\hat{i} - 2\hat{j}$ ، (ج) ۲۱.

۱-۲ کسینوس زاویه بین $\mathbf{A} = (3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ و $\mathbf{B} = (-2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k})$ را به دست آورید.
جواب: 80.5° .

۱-۳ کسینوسهای هادی یک بردار، کسینوس زوایایی هستند که آن بردار با محورهای مختصات می‌سازد، کسینوس زوایای بین یک بردار و محورهای x, y, z را معمولاً با α, β, γ نشان می‌دهند. با استفاده از هندسه و یا جبر برداری ثابت کنید که $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

۱-۴ نشان دهید، اگر $|\mathbf{A} - \mathbf{B}| = |\mathbf{A} + \mathbf{B}|$ باشد، آنگاه \mathbf{A} عمود است بر \mathbf{B} .

۱-۵ ثابت کنید که قطرهای یک لوزی بر هم عمودند.

۱-۶ با استفاده از ضرب برداری، قانون سینوسها را در دوایسه سطر ثابت کنید. (راهنمایی: مساحت

مثلثی را که از سه بردار $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ تشکیل شده در نظر بگیرید که برای آن $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{0}$).

۱-۷ فرض کنید $\hat{\mathbf{a}}$ و $\hat{\mathbf{b}}$ بردارهای یکه در صفحه xy باشند، و با محورهای x, y ترتیب زوایای θ و ϕ

بسازند. نشان دهید $\hat{\mathbf{a}} = \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}$ و $\hat{\mathbf{b}} = \cos \phi \hat{\mathbf{i}} + \sin \phi \hat{\mathbf{j}}$ و با استفاده از جبر برداری

ثابت کنید

$$\cos(\theta - \phi) = \cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi$$

۸-۱ بردار یک‌ه‌ای بیابید که بر بردارهای $\mathbf{A} = (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$ و $\mathbf{B} = (2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})$ عمود باشد.

جواب: $\hat{n} = \pm(2\hat{i} - 5\hat{j} - 3\hat{k})/\sqrt{38}$.

۹-۱ نشان دهید که حجم یک متوازی السطوح به ابعاد $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ از رابطه $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ به دست می‌آید.

۱۰-۱ دو نقطه را که در \mathbf{r}_1 و \mathbf{r}_2 واقع شده و به فاصله $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ از یکدیگر واقع شده‌اند در نظر می‌گیریم. بردار \mathbf{A} را که از مبدأ به نقطه‌ای روی خط واصل \mathbf{r}_1 و \mathbf{r}_2 و به فاصله xr از \mathbf{r}_1 وصل می‌شود پیدا کنید، در صورتی که x یک عدد مشخص است.

۱۱-۱ فرض کنید \mathbf{A} برداری اختیاری و \hat{n} بردار یک‌ه‌ای در جهتی معین باشد، نشان دهید

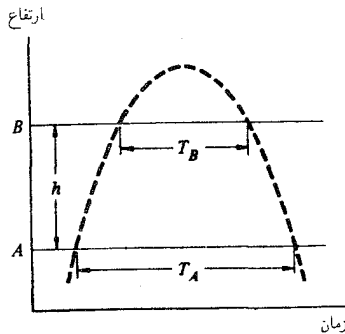
$$\mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \hat{n})\hat{n} + (\hat{n} \times \mathbf{A}) \times \hat{n}$$

۱۲-۱ شتاب گرانشی را می‌توان با پرتاب یک جسم به طرف بالا و اندازه‌گیری زمان لازم برای عبور از دو نقطه معین مسیر در هر دو جهت اندازه گرفت.

اگر زمان لازم برای عبور جسم از یک خط افقی A در هر دو جهت برابر با T_A و برای خط دیگر B برابر T_B باشد، با فرض ثابت بودن شتاب نشان دهید که اندازه این شتاب برابر است با

$$g = \frac{4h}{T_A^2 - T_B^2}$$

که در آن h ارتفاع خط B نسبت به خط A است (شکل ۶۷-۱).



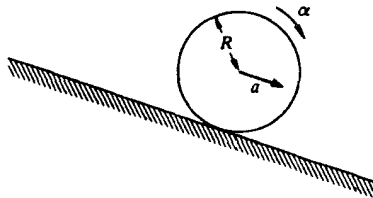
شکل ۶۷-۱

۱۳-۱ آسانسوری با سرعت یکنواخت از زمین به طرف بالا شروع به حرکت می‌کند در زمان T_1 یکی از سرنشینان سنگی را از کف آن رها می‌سازد. این سنگ با شتاب ثابت $g = 9.8 \text{ m/s}^2$

سقوط می‌کند و بعد از T_2 ثانیه به زمین می‌رسد. ارتفاع آسانسور از زمین را در لحظه T_1 پیدا کنید.

جواب: حالت خاص: اگر $T_1 = T_2 = 4$ s باشد، $h = 39.2$ m.

۱۴-۱ استوانه‌ای به شعاع R روی سطح شیب‌داری، بدون لغزش به طرف پایین می‌غلتد (شکل ۶۸-۱). محور آن دارای شتاب a موازی با سطح شیب‌دار است. α شتاب زاویه‌ای استوانه، چقدر



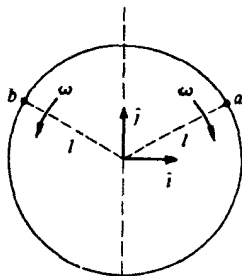
شکل ۶۸-۱

است؟

۱۵-۱ منظور از سرعت نسبی، سرعت نسبت به یک دستگاه مختصات مورد نظر است. (از زاویه سرعت، به تنهایی معنای سرعت نسبت به دستگاه مختصات ناظر استنباط می‌شود). (الف) مشاهده شده است که نقطه‌ای دارای سرعت v_A نسبت به دستگاه مختصات A است. سرعت آن نسبت به دستگاه مختصات B که به اندازه R از دستگاه A فاصله دارد، چقدر است؟ (R نسبت به زمان می‌تواند تغییر کند).

جواب: $v_B = v_A - dR/dt$.

(ب) ذرات a و b در دو جهت مخالف هم روی دایره‌ای با سرعت زاویه‌ای ω در حرکت‌اند (شکل ۶۹-۱). در $t = 0$ هر دوی آنها در نقطه \hat{j} قرار دارند، که l شعاع دایره است. سرعت a را نسبت



شکل ۶۹-۱

به b پیدا کنید.

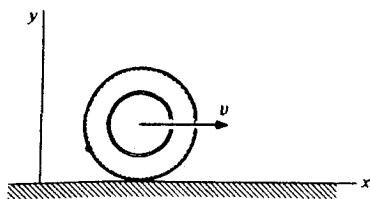
۱۶-۱ یک اتومبیل مخصوص مسابقه، در 30° ثانیه می‌تواند به‌طور یکنواخت شتاب بگیرد و به سرعت 200° کیلومتر بر ساعت برسد. بیشینه شتاب کندکننده ناشی از ترمز آن نمی‌تواند از $7g$ تجاوز کند. زمان کمینه لازم برای پیمودن نیم کیلومتر چقدر است؟ فرض می‌کنیم که اتومبیل در زمان شروع و پایان کار در حالت سکون است. (راهنمایی: نمودار سرعت بر حسب زمان می‌تواند مفید باشد.)

۱۷-۱ ذره‌ای با سرعت شعاعی ثابت $\dot{r} = 4 \text{ m/s}$ در صفحه حرکت می‌کند. سرعت زاویه‌ای آن ثابت و به مقدار $\theta = 2 \text{ rad/s}$ است. وقتی که ذره در فاصله 3 متر از مبدأ قرار دارد (الف) بزرگی سرعت و (ب) بزرگی شتاب آن را پیدا کنید.

جواب: (الف) $v = \sqrt{52} \text{ m/s}$.

۱۸-۱ آهنگ تغییر شتاب را گاهی اوقات ”جرک“ می‌گویند. اندازه و جهت جرک را برای ذره‌ای که روی دایره‌ای به شعاع R با سرعت زاویه‌ای ω حرکت می‌کند پیدا کنید. با رسم نمودار برداری، مکان، سرعت، شتاب و جرک لحظه‌ای را نشان دهید.

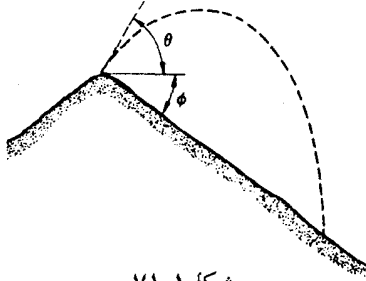
۱۹-۱ لاستیک اتومبیلی در امتداد خط راست و بدون لغزش می‌غلتد (شکل ۱-۷). مرکز آن با سرعت ثابت V حرکت می‌کند. ریگ کوچکی در شیار آن جا گرفته است که در $t = 0$ با زمین تماس پیدا می‌کند. مکان، سرعت، و شتاب ریگ را به صورت تابعی از زمان به دست آورید.



شکل ۱-۷

۲۰-۱ ذره‌ای در امتداد یک مارپیچ و به طرف خارج آن در حرکت است. مسیر آن به وسیله رابطه $r = A\theta$ مشخص شده است که در آن A مقدار ثابت و برابر است با $A = (1/\pi) \text{ m/rad}$. مقدار θ هم با زمان مطابق رابطه $\theta = \alpha t^2 / 2$ افزایش می‌یابد که در آن α مقداری ثابت است. (الف) شکل مسیر حرکت را رسم کنید، و سرعت و شتاب تقریبی را در چند نقطه نشان دهید. (ب) نشان دهید که شتاب شعاعی وقتی که $\theta = 1/\sqrt{2} \text{ rad}$ است، برابر صفر می‌شود. (ج) در چه زاویه‌ای شتاب مماسی و شعاعی با هم برابرند؟

۲۱-۱ پسر بچه‌ای در بالای تپه‌ای ایستاده است، این تپه دارای شیب یکنواخت (با زاویه ϕ) به طرف پایین است. با چه زاویه‌ای از خط افق (θ) باید سنگی را پرتاب کند تا بیشترین برد را داشته باشد (شکل ۷۱-۱)؟



شکل ۷۱-۱

جواب: حالت خاص: اگر $\phi = 60^\circ$ باشد، $\theta = 15^\circ$.

قوانین نیوتون-مبانی مکانیک نیوتونی

۱-۲ مقدمه

هدف ما در این فصل شناخت قوانین حرکت نیوتون است. از یک دیدگاه این کار نسبتاً آسانی است: قوانین نیوتون ساده‌اند و پیچیدگی ریاضی زیادی در بر ندارند. اما این سادگی فریبنده است. خواهیم دید که این قوانین، تعاریف، مشاهدات طبیعی، مفاهیم نسبتاً مشهود، و برخی فرضهای ناآزموده از خواص فضا و زمان را باهم ترکیب می‌کنند. بیان نیوتون دربارهٔ قوانین حرکت بسیاری از این نکته‌ها را روشن نشده باقی گذاشت. تا اینکه دویست سال بعد از نیوتون، مبانی مکانیک کلاسیک عمده‌تاً توسط ارنست ماخ بررسی شد، روش ما نیز بیشتر نزدیک به سبک ماخ است.^۱

قوانین حرکت نیوتون به هیچ وجه بدیهی نیستند. در نظام مکانیک ارسطویی تصور می‌شد که برای نگهداری یک جسم در حرکت یکنواخت، نیاز به اعمال نیرو است. مکانیک ارسطویی، که ظاهراً با شهود توافق داشت، هزاران سال مورد قبول بود. برای شکستن نظام ارسطویی، استدلالی دقیق بر مبنای

۱. ماخ در کتاب "علم مکانیک" (۱۸۸۳/۱۲۶۲)، به این مبحث "اصول، نیوتون شکل منطقی‌تری داده است. در فصل ۱۰ خواهیم دید که تجزیه و تحلیل ماخ از فرضهای مکانیک نیوتونی در پیشرفت نظریهٔ نسبیت خاص "ایشترین سهم به‌سزایی داشته است.

مشاهده و کوششی واقعی بر اساس اندیشه لازم بود. بسیاری از ما هنوز هم عادت نداریم به سبک نیوتونی فکر کنیم. بنابراین، برای اینکه بیاموزیم چگونه اوضاع را از دیدگاه نیوتونی تحلیل کنیم به کوشش و تمرین نیاز داریم، مقدار زیادی از این فصل را صرف نشان دادن موارد استعمال قوانین نیوتون خواهیم کرد. تنها به این طریق است که می‌توان به درک واقعی آنها نائل آمد. این نه تنها درک ما را از دینامیک عمیقتر می‌کند، بلکه پاداشی هم به دنبال دارد. و آن کسب توانایی در تحلیل کمی برخی پدیده‌های فیزیکی است که در نگاه اول ممکن است نامفهوم به نظر آیند.

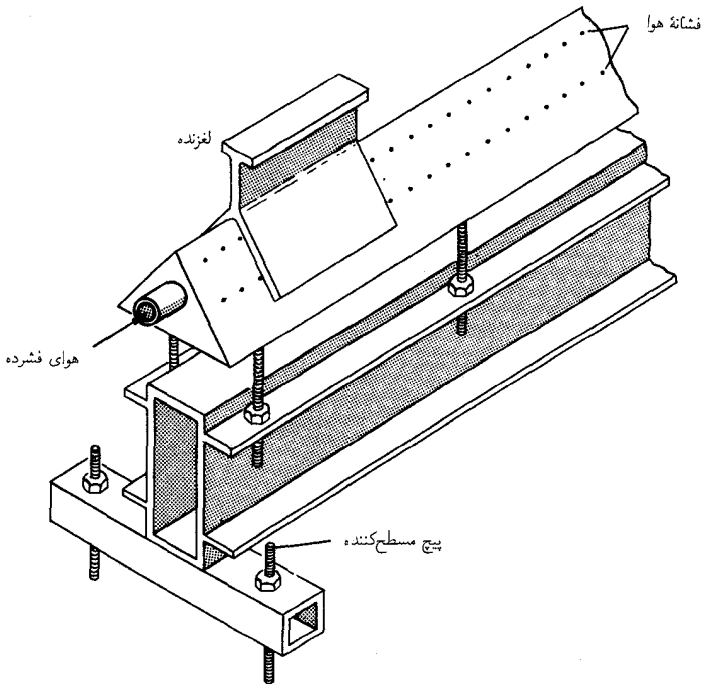
اگرچه این قوانین مدخلی مستقیم برای مکانیک کلاسیک هستند، اما روشهای دیگری نیز وجود دارد. مانند فرمولبندهای لاگرانژ و هامیلتون که انرژی را به جای نیرو به عنوان مفهوم اساسی در نظر می‌گیرند. این روشها از نظر فیزیکی با روش نیوتونی معادلند. گرچه می‌توان مکانیک را با هر یک از اینها شروع کرد، اما شناخت عمیق قوانین نیوتون سرمایه‌ای است گرانبها برای درک هرگونه بررسی سینماتیکی و مکانیک. سخنی چند درباره اعتبار مکانیک نیوتونی: شاید شما درباره فیزیک نوین یا پیدایش نسبیت و مکانیک کوانتومی در اوایل این قرن چیزهایی بدانید. اگر چنین است، حتماً اطلاع دارید که حوزه‌های مهمی در فیزیک وجود دارند که در آنها مکانیک نیوتونی ناموفق است، در حالی که نسبیت و مکانیک کوانتومی موفق‌اند. به‌طور خلاصه، مکانیک نیوتونی برای سیستمهایی که با سرعت نزدیک به سرعت نور ($3 \times 10^8 \text{ m/s}$) حرکت می‌کنند و همچنین برای سیستمهایی با ابعاد اتمی یا کوچکتر که در آن اثرات کوانتومی قابل توجه‌اند، ناکام می‌ماند. این درماندگی ناشی از وجود نارسایی در مفاهیم کلاسیک، فضا، زمان، و ماهیت اندازه‌گیری است. ممکن است یک محرک طبیعی ما را به‌کنار گذاشتن فیزیک کلاسیک و پرداختن مستقیم به فیزیک جدید وادار کند. ما این دیدگاه را به‌چند دلیل نمی‌پذیریم. پیش از همه باید بگوییم که نظریه‌های خیلی پیشرفته نه تنها محدوده ناتوانی فیزیک کلاسیک را مشخص کرده‌اند بلکه مواردی را که روشهای ساده‌تر فیزیک کلاسیک نتیجه‌های درستی به‌دست می‌دهند نیز نشان داده‌اند. به‌جای اظهار نظر ساده‌مبنی بر درست یا غلط بودن فیزیک کلاسیک، باید پذیرفت که مکانیک نیوتونی در بسیاری از حوزه‌های فیزیک فوق‌العاده مفید است و در بعضی حوزه‌ها کارایی محدودی دارد. به‌عنوان مثال، فیزیک نیوتونی پیشگویی خسوف و کسوف را قرن‌ها قبل از وقوع میسر می‌سازد. اما برای پیش‌بینی حرکت الکترونها در اتم بی‌فایده است. در ضمن باید پذیرفت که چون فیزیک کلاسیک می‌تواند تعداد بسیار زیادی از پدیده‌های روزمره را توصیف کند، ابزار اساسی همه مهندسان و محققان تجربی به‌شمار می‌رود. به‌علاوه، بسیاری از مفاهیم مهم فیزیک کلاسیک، هرچند به‌شکل تغییر یافته، در فیزیک نوین محفوظ می‌مانند.

۲-۲ قوانین نیوتون

درک اینکه چه قسمتهایی از قوانین براساس آزمایش و چه قسمتهایی از آن بر پایه تعریف استوارند مهم است. ضمن بحث درباره این قوانین باید یاد بگیریم که چگونه آنها را به کار ببریم، نه فقط بدین خاطر که محتوای آنها استخوان بندی فیزیک را تشکیل می دهد بلکه درک مفاهیم اساسی نیز ضرورت دارند. مطلب را با مراجعه مستقیم به آزمایش آغاز می کنیم. متأسفانه، آزمایشهای مکانیک از جمله مشکلترین آزمایشهای فیزیک اند، زیرا حرکت مورد مشاهده روزانه ما توسط نیروهایی چون نیروی گرانی و اصطکاک پیچیده و بغرنج می شوند. برای درک اصول فیزیکی، باید همه عوامل آشفتگی را حذف و سیستمهای خیلی ساده را مورد آزمایش قرار داد. یکی از راههای انجام این کار وارد شدن به جرگه فضانوردان است، زیرا در فضا اکثر آشفتگیهای روزمره صرف نظر کردنی است. اما فقدان امکانات لازم برای رفتن به مدار زمین باعث می شود که به سراغ دومین انتخاب برویم، و آن استفاده از وسیله ای معروف به بستر خطی هوا است. که به شرایط آرمانی حرکت یک بعدی نزدیک است. (اگرچه روشن نیست که از مطالعه حرکت یک بعدی بتوانیم همه چیز را درباره حرکت سه بعدی یاد بگیریم، ولی خوشبختانه مسئله به همین ترتیب است.)

بستر خطی هوا لوله ای میان تهی با مقطع مثلثی به طول تقریبی ۲ متر است که حفره های کوچک زیادی در آن تعبیه شده اند تا جریان هوا را به آرامی از خود عبور دهند (شکل ۱-۲). لغزنده ای روی این لوله در حالت سکون قرار دارد. وقتی که هوا در لوله به جریان می افتد، این لغزنده روی لایه نازکی از هوا شناور می شود. لغزنده به دلیل تعلیق در هوا، با اصطکاک ناچیزی حرکت می کند (علت این است یک قشر نازک هوا حدوداً دارای چسبندگی 5000 بار کمتر از قشر روغن است). اگر بستر هوا را به دقت تراز کنیم، جریانهای نامنظم هوا را از بین ببریم، لغزنده درست مثل اینکه در حرکت خود در امتداد بستر بر آن تکیه ندارد، رفتار خواهد کرد. این لغزنده در امتداد مسیر بدون تأثیر نیروی گرانی، اصطکاک، یا هر اثر قابل تشخیص دیگری به حرکت در می آید.

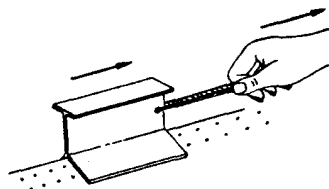
اینک به مشاهده چگونگی حرکت این لغزنده می پردازیم. (سعی کنید، در صورت امکان، خودتان این آزمایش را انجام دهید.) فرض کنید لغزنده را روی بستر هوا گذاشته ایم و آن را به دقت از حالت سکون رها کرده ایم. همان گونه که ممکن است انتظار داشته باشیم، در این صورت لغزنده در حالت سکون می ماند، مگر اینکه ضربه ای بر آن وارد آید یا کسی دستگاه را تکان دهد. (این موضوع خیلی هم عجیب نیست، چون بستر را چنان تراز کرده ایم که اگر لغزنده به حالت سکون روی آن رها شود به همان حالت باقی می ماند.) بعد از آن، ضربه کوچکی به لغزنده می زنیم تا آزادانه حرکت کند. حرکت لغزنده به نظر غیر طبیعی می آید زیرا به آرامی و به طور یکنواخت به حرکت خود ادامه داده و سرعت آن کم یا زیاد نمی شود. این موضوع برخلاف تجارب روزانه ماست، که اگر بر اجسام متحرک فشاری مداوم وارد نشود از حرکت خود



شکل ۱-۲ بستر خطی هوا.

باز می‌ایستند. علت این امر این است که در حرکت روزانه، معمولاً اصطکاک نقش مهمی دارد. به عنوان مثال وقتی که جریان هوا را قطع کنیم، اصطکاک لغزشی وارد عمل می‌شود و لغزنده را متوقف می‌سازد. ظاهراً نیروی اصطکاک حرکت را متوقف می‌کند. مثل اینکه در این مورد بیش از اندازه پیش رفتیم، بهتر است به کارکرد درست بستر هوا برگردیم و بکوشیم با استفاده از تجارب خود آن را تعمیم دهیم.

ممکن است یک میز هوای دوبعدی بسازیم که نظیر بستر هوای یک بعدی کار کند. (یک صفحه شیشه‌ای صاف با تکه‌های یخ خشک تخت بر روی آن بسیار مناسب است. از تبخیر یخ خشک لایه‌ای از گاز به وجود می‌آید.) در اینجا نیز متوجه می‌شویم که لغزنده آزاد، بدون آشفستگی و با سرعت یکنواخت حرکت می‌کند. مشاهده حرکت سه بعدی منزوی مشکل است، مگر اینکه آزمایش در فضا انجام شود. اما در حال حاضر بهتر است بپذیریم که نتایج تجارب حرکت یک بعدی و دوبعدی در حالت سه بعدی هم صادق‌اند. بنابراین به این نتیجه می‌رسیم که یک جسم در صورتی به طور یکنواخت در فضا حرکت می‌کند که هیچ عامل خارجی بر آن اثر نداشته باشد.



شکل ۲-۲

قانون اول نیوتون

در بحث آزمایشهای بستر هوا، از یک نکته مهم چشمپوشی کردیم. حرکت فقط نسبت به یک دستگاه مختصات مشخص معنا دارد، و در توصیف حرکت، تعیین دستگاه مختصات مورد استفاده ضروری است. مثلاً، در توصیف حرکت در امتداد بستر هوا، تلویحاً از یک دستگاه مختصات متصل به بستر استفاده کردیم. اما، آزادیم هر دستگاه مختصاتی که خواهیم انتخاب کنیم. حتی دستگاههایی که نسبت به بستر در حال حرکت باشند. در دستگاه مختصاتی که به طور یکنواخت نسبت به بستر در حرکت است، لغزنده آزاد با سرعت ثابت حرکت می‌کند. چنین دستگاه مختصاتی، دستگاه لخت نامیده می‌شود. همه دستگاههای مختصات لخت نیستند. لغزنده آزاد در دستگاه مختصاتی که نسبت به بستر شتابدار باشد، سرعت ثابت ندارد. اما همواره امکان دارد دستگاه مختصاتی بیابیم که اجسام منزوی نسبت به آن با سرعت یکنواخت حرکت کنند. این مطلب جوهر قانون اول نیوتون است.

قانون اول حرکت نیوتون تأکیدی بر وجود دستگاه لخت است.

قسمتی از قانون اول نیوتون برواقعیت تجربی و قسمت دیگر آن بر تعریف بنا شده است. با توجه به تعریف دستگاه لخت، اجسام منزوی در دستگاه لخت به طور یکنواخت حرکت می‌کنند. در مقابل، اینکه دستگاههای لخت، وجود دارند مطلبی است که ما در مورد جهان فیزیکی قائل شده‌ایم.

قانون اول نیوتون پرسشهایی را مطرح می‌کند، مانند اینکه منظور از "جسم منزوی" چیست، ولی ما موقتاً مطالب را معوق می‌گذاریم و به کار خود ادامه می‌دهیم.

قانون دوم نیوتون

اینک برمی‌گردیم به اینکه لغزنده روی بستر هوا وقتی که منزوی نباشد چگونه حرکت می‌کند. فرض کنید این لغزنده را با نوار لاستیکی می‌کشیم. تا زمانی که این نوار لاستیکی شل است هیچ اتفاقی نمی‌افتد، ولی به محض اینکه نوار را آنقدر بکشیم تا به صورت کشیده درآید، لغزنده شروع به حرکت می‌کند (شکل ۲-۲). اگر دستمان را بیشاپیش این لغزنده چنان حرکت دهیم که نوار لاستیکی همواره به همان طول و به صورت کشیده بماند، می‌بینیم که لغزنده به طریق ساده و جالبی حرکت می‌کند. به این ترتیب که سرعت آن به طور یکنواخت با زمان افزایش می‌یابد، یعنی با شتابی ثابت حرکت می‌کند.

اکنون فرض کنید می‌خواهیم همین آزمایش را با لغزنده دیگری، شاید با لغزنده‌ای بسیار بزرگتر از اولی انجام دهیم. دوباره، همان نوار لاستیکی کشیده شده به همان طول معین، شتاب ثابتی به وجود می‌آورد که با شتاب بار اول متفاوت است. ظاهراً شتاب نه فقط به آنچه ما بر جسم وارد می‌کنیم بستگی دارد (زیرا در دو حالت یکسان عمل می‌کنیم)، بلکه به خاصیتی دیگر که آن را جرم جسم می‌نامیم نیز بستگی دارد.

از آزمایش نوار لاستیکی می‌توان برای تعریف آنچه به عنوان جرم می‌نامیم استفاده کرد. از اینجا شروع می‌کنیم که جرم جسم اول را به‌اختیار m_1 می‌گیریم. (m_1 می‌تواند یک واحد و یا x واحد از جرم باشد، که x یک عدد اختیاری است.) آنگاه جرم جسم دوم را چنین تعریف می‌کنیم

$$m_2 = m_1 \frac{a_1}{a_2}$$

که در آن a_1 شتاب جسم اول در آزمایش نوار لاستیکی و a_2 شتاب جسم دوم است. با ادامه این روش، می‌توانیم با اندازه‌گیری شتاب اجسام دیگری که به وسیله نوار لاستیکی به یک اندازه معین کشیده شده باشند جرمهایی به آنها اختصاص دهیم. بنابراین

$$m_3 = m_1 \frac{a_1}{a_3}$$

$$m_4 = m_1 \frac{a_1}{a_4}$$

اگرچه این روش ساده است، ولی هیچ دلیل واضحی مبنی بر اهمیت خاص کمیتی که به این طریق تعریف کرده‌ایم وجود ندارد. مثلاً، چرا به جای این کمیت خاصیت دیگری مانند Z مورد بررسی قرار نگیرد، به طوری که $Z_2 = Z_1(a_1/a_2)^2$ ؟ علت آن مفید بودن مفهوم جرم است، در حالی که خاصیت Z (و یا سایر کمیتهایی که پیشنهاد می‌شوند) این چنین نیست. با انجام آزمایشهای بیشتر با بستر هوا، مثلاً با استفاده از فنر یا آهنربا به جای نوار لاستیکی و صرف نظر کردن از چگونگی ایجاد شتاب یکنواخت درمی‌یابیم که نسبت شتابها و در نتیجه نسبت جرمها در صورتی یکسان است که عمل یکسانی روی هریک از اجسام انجام دهیم. به این ترتیب، جرمی که این چنین تعریف می‌شود، مستقل از شتاب‌دهنده است و خاصیت ذاتی جسم به شمار می‌رود. البته، مقدار واقعی جرم یک جسم مشخص به انتخاب یکای جرم بستگی دارد. نکته مهم این است که نسبت جرمهای دو جسم، منحصر به فرد است.

تعریف ما از جرم مثالی است از یک تعریف عملیاتی. منظور از "عملیاتی" این است که این تعریف عمدتاً بر مبنای آزمایشهایی است که انجام می‌دهیم نه بر اساس مفاهیم مجرد نظیر "جرم معیاری است از مقاومت اجسام در برابر تغییر حرکت". البته در عملیات به ظاهر ساده، مفاهیم مجرد زیادی می‌توانند نهفته باشند. برای نمونه، وقتی شتاب را اندازه می‌گیریم، به طور ضمنی داشتن درک روشنی

از مسافت و زمان را می‌پذیریم. با اینکه نظرات شهودی ما در اینجا برای مقصود ما کفایت می‌کنند، ولی خواهیم دید زمانی که دربارهٔ نسبیت بحث می‌کنیم رفتار خط‌کشها و ساعت‌های اندازه‌گیر، خود مقوله‌ای برای آزمایش هستند.

دومین جنبهٔ پرزحمت تعاریف عملیاتی این است که این تعاریف محدود به شرایطی هستند که این عملیات حقیقتاً در آن شرایط می‌توانند انجام پذیرند. در عمل این امر معمولاً مشکلی به وجود نمی‌آورد. فیزیک با ایجاد ارتباط بین نظریه و تجربه عمل می‌کند، که این خود استفاده از روش‌های مناسب اندازه‌گیری را که نهایتاً بر پایه تعاریف عملیاتی استوارند امکان‌پذیر می‌سازد. برای نمونه، عملی‌ترین راه اندازه‌گیری جرم یک کوه، مشاهدهٔ کشش گرانشی آن روی جسم آزمونی مانند شاقول آویزان است. مطابق تعریف عملیاتی، باید نیروی معینی وارد کرد و از روی آن شتاب کوه را اندازه گرفت. باین حال، این دو روش مستقیماً به طور مفهومی باهم مرتبط‌اند.

ما جرم را با آزمایش روی اشیای آزمایشگاهی تعریف کردیم. از قبل نمی‌توانیم بگوییم که آیا این نتایج در مقیاسی خیلی بزرگتر یا کوچکتر مصداق پیدا می‌کند یا خیر؟ در حقیقت، یکی از اهداف اصلی فیزیک، پیدا کردن حدود این‌گونه تعاریف است، زیرا این حدود معمولاً به ظهور قوانین فیزیکی جدیدی منجر می‌شوند. باین حال، اگر یک تعریف عملیاتی بخواهد در همه حال مفید واقع شود، باید کاربرد بسیار گسترده‌ای داشته باشد. مثلاً، تعریف ما از جرم نه فقط برای اشیای معمولی روی کره زمین صادق است، بلکه تا حدود زیادی در مورد حرکت سیاره‌ای، یعنی حرکت در مقیاس خیلی بزرگتر نیز صادق است. اما نباید تعجب‌آور باشد اگر شرایطی بیابیم که در آن تعریف عملیاتی کاربردی نداشته باشند.

اکنون که جرم را تعریف کرده‌ایم، بهتر است توجه خود را به نیرو معطوف داریم. تأثیری را که نوار لاستیکی کشیده شده بر جرم آزمون می‌گذارد، به صورت "وارد شدن" نیرو توصیف می‌کنیم. (توجه داشته باشید که از کنار این سؤال که خود نیرو چیست به سادگی گذشتیم، و خود را به توصیف اینکه نیرو چگونه ایجاد می‌شود مثلاً با کشیدن یک نوار لاستیکی به اندازهٔ معین محدود کردیم.) وقتی که نیرو وارد می‌شود، جرم آزمون با آهنگ a شتاب می‌گیرد. اگر دو نوار لاستیکی کشیده شده مشابه را در کنار هم به کار ببریم، می‌بینیم این جسم با آهنگ $2a$ شتاب می‌گیرد. اگر نوارها در دو جهت مخالف کشیده شوند شتاب صفر می‌شود. در حالتی که حرکت روی یک خط راست انجام می‌گیرد، اثرات نوارهای لاستیکی به طریق جبری باهم جمع می‌شوند.

با تعریف یکای نیرو به صورت نیرویی که با اعمال آن بر یکای جرم، شتابی به اندازهٔ واحد ایجاد می‌شود، می‌توانیم مقیاس نیرو را بنا نهیم. با توجه به آزمایش‌ها نتیجه می‌شود که با وارد آوردن نیرویی برابر F واحد، شتابی به اندازهٔ F واحد شتاب به واحد جرم داده می‌شود که با توجه به تعریف جرم، شتابی به اندازهٔ $(1/m) \times F$ واحد شتاب در جرم m ایجاد خواهد شد. از این رو شتاب ناشی از تأثیر نیروی F

بر جرم m برابر است با $a = F/m$ ، و یا به صورت خیلی آشنا تر $F = ma$. در دستگاه بین‌المللی یکاها (SI)، یکای نیرو نیوتون (N)، یکای جرم کیلوگرم (kg)، و یکای شتاب متر بر مجذور ثانیه (m/s^2) است. در بخش ۲-۳ یکاها بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرند.

تا به حال آزمایشها را به یک بعد محدود کرده‌ایم. از آنجا که شتاب یک بردار است، و جرم تا آنجا که اطلاع داریم کمیتی نرده‌ای است، انتظار داریم که نیرو هم یک بردار باشد. طبیعی است که فکر کنیم نیرو در جهت همان شتابی باشد که خود به وجود می‌آورد. این فرض کم‌اهمیت به نظر می‌رسد اما چنین نیست، درستی آن با آزمایش اثبات می‌شود. همچنین پی می‌بریم که نیروها از اصل برهم‌نهی پیروی می‌کنند: شتاب ایجاد شده از تأثیر نیروهای متعدد بر یک جسم برابر است با جمع برداری شتابهای ایجاد شده از تأثیر هر یک از نیروها به طور جداگانه. نه تنها این امر ماهیت برداری نیرو را تأیید می‌کند، بلکه به ما امکان می‌دهد تا مسائل را با در نظر گرفتن یک نیرو در هر زمان تجزیه و تحلیل کنیم.

با ترکیب همه این مشاهدات، نتیجه می‌گیریم که نیروی کل \mathbf{F} وارد بر جسمی به جرم m برابر با $\mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}_i$ است، که در آن \mathbf{F}_i امین نیروی وارد بر جسم است. اگر \mathbf{a} شتاب کل و \mathbf{a}_i شتاب مربوط به \mathbf{F}_i باشد، آنگاه داریم

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \Sigma \mathbf{F}_i \\ &= \Sigma m \mathbf{a}_i \\ &= m \Sigma \mathbf{a}_i \\ &= m \mathbf{a}\end{aligned}$$

یا

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}$$

این قانون دوم حرکت نیوتون است که بیشترین زمینه بحث آینده ما را تشکیل می‌دهد. مهم این است که به وضوح تشخیص دهیم که نیرو صرفاً یک مفهوم تعریف شده نیست. برای مثال، اگر لغزنده روی بستر هوا شروع به شتاب گرفتن کند، این به تنهایی دلیل بر وجود نیروی مؤثری که با رابطه $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$ تعریف می‌شود، نمی‌تواند باشد. نیروها همیشه از برهم‌کنش بین سیستمها ناشی می‌شوند، اگر ما زمانی شتابی بدون برهم‌کنش داشته باشیم، به در دسر گرفتار خواهیم شد. آنچه از نظر فیزیکی حائز اهمیت و مولد نیرو است، برهم‌کنش است. بدین علت وقتی که جسمی را به اندازه کافی از اطرافش منزوی می‌کنیم، انتظار داریم که این جسم به طور یکنواخت در یک دستگاه لخت حرکت کند. منزوی کردن به معنی حذف برهم‌کنشها است. ممکن است برسید آیا همیشه امکان منزوی سازی جسم وجود دارد یا

نه. خوشبختانه، تا آنجا که می‌دانیم، جواب مثبت است. همهٔ برهم‌کنشهای شناخته شده با افزایش فاصله کاهش می‌یابند. (نیروهایی که تا بیشترین مسافتها گسترش می‌یابند عبارت‌اند از نیروهای گرانشی و کولنی. این نیروها به نسبت $1/r^2$ کاهش می‌یابند که در آن r فاصله است اغلب نیروها خیلی تندتر کاهش می‌یابند. برای مثال، نیروی بین اتمهای جدا از هم به نسبت $1/r^7$ کاهش می‌یابند.) با دور کردن جسم مورد آزمایش به اندازهٔ کافی نسبت به چیزهای دیگر، برهم‌کنشها را می‌توان به مقدار مطلوبی کاهش داد.

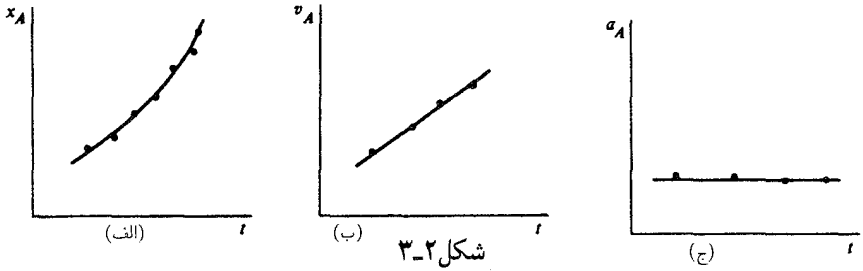
قانون سوم نیوتون

این حقیقت که نیرو، نتیجهٔ جبری برهم‌کنش بین دو سیستم است، به وسیلهٔ قانون سوم نیوتون تصریح شده است. قانون سوم می‌گوید نیروها همیشه به صورت جفت ظاهر می‌شوند یعنی اگر جسم b نیروی F_a را بر جسم a اعمال کند، آنگاه باید یک نیروی F_b وجود داشته باشد که از طرف جسم a بر جسم b وارد شود به طوری که $F_b = -F_a$. وجود یک نیروی تنهای بدون جفت معنی ندارد. همان طوری که در فصل آینده خواهیم دید، قانون سوم مستقیماً به قانون مهم پایداری تکانه منتهی می‌شود.

باتوجه به دلایل ذکر شده یک جسم را با دور کردن به اندازهٔ کافی از دیگر اجسام می‌توان منزوی کرد. اما، مشکلاتی نیز به وجود می‌آیند. فرض کنید جسم منزوی علی‌رغم قانون دوم نیوتون شتاب می‌گیرد. چه اشکالی دارد که نمی‌توانیم وجود شتاب را به کامل نبودن انزوای سیستم نسبت دهیم؟ چون در غیر این صورت، قانون دوم نیوتون بی‌معنی می‌شد. در اینجا باید گفت که روش مستقلی برای اعلام وجود یا عدم وجود برهم‌کنش فیزیکی در یک سیستم نیاز داریم. قانون سوم نیوتون چنین روشی را فراهم می‌سازد. اگر شتاب یک جسم در نتیجهٔ تأثیر یک نیروی خارجی باشد، آنگاه درجایی از جهان باید نیرویی برابر و مخالف آن وجود داشته باشد که بر جسم دیگری اثر کند. اگر چنین نیرویی را پیدا کنیم، این مسئله دیگر حل شده است؛ این جسم به طور کامل منزوی نشده است. این برهم‌کنش ممکن است جدید و جالب توجه باشد، اما تا وقتی که این نیروها برابر و مخالف یکدیگر در قوانین نیوتون صدق می‌کنند.

اگر جسم منزوی شتاب بگیرد، و ما نتوانیم یک جسم خارجی پیدا کنیم که نیروی برابر و مخالفی بر آن وارد شود، در آن صورت با اشکال مواجه می‌شویم. تا آنجا که اطلاع داریم این وضع هرگز اتفاق نیفتاده است. از این رو، قانون سوم نیوتون نه تنها ابزار دینامیکی مهمی است، بلکه وسیلهٔ معقول و مهمی در اعتبار بخشیدن به قوانین اول و دوم نیوتون نیز هست.

قانون دوم نیوتون $F = ma$ فقط در دستگاههای لخت صادق است. وجود دستگاه لخت در نظر ما تقریباً بدیهی است، زیرا برای مشاهدات روزانه، زمین، دستگاه لخت نسبتاً خوبی است. اما چنانکه در مثال زیر دیده می‌شود، هیچ بداهتی در مورد مفهوم دستگاه لخت وجود ندارد.



مثال ۲-۱ فضانوردان در فضا-دستگاههای لخت و نیروهای مجازی: دو سفینه فضایی در فضای خالی به دنبال جسم در حال حرکت ناشناخته‌ای که احتمالاً یک بشقاب پرنده است، در حرکت‌اند. فرماندهان دو سفینه A و B باید تعیین کنند که این بشقاب پرنده در حرکت یکنواخت است یا شتابدار. A و B بشقاب پرنده همگی در امتداد یک خط راست در حرکت‌اند.

فرمانده A شروع به کار می‌کند و مسافت بشقاب پرنده را به صورت تابعی از زمان اندازه می‌گیرد. اصولاً، این فرمانده دستگاه مختصاتی در امتداد خط حرکت برمی‌گزیند که سفینه‌اش در مبدأ آن است، و موقعیت مکانی بشقاب پرنده را که $x_A(t)$ می‌نامد یادداشت می‌کند. (در عمل او از رادار خود برای اندازه‌گیری فاصله بشقاب پرنده استفاده می‌کند.) او با استفاده از $x_A(t)$ سرعت $v_A = \dot{x}_A$ و شتاب $a_A = \dot{v}_A$ را محاسبه می‌کند. این نتایج در شکل‌های ۳-۲ نشان داده شده‌اند. فرمانده A درمی‌یابد که این بشقاب پرنده دارای شتاب مثبت $a_A = 1000 \text{ m/s}^2$ است. بنابراین، فرض می‌کند که موتور بشقاب پرنده روشن است و نیروی وارد بر آن برابر است با

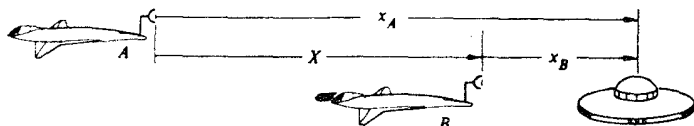
$$\begin{aligned} F_A &= a_A M \\ &= (1000 M) \text{ N} \end{aligned}$$

که در آن M جرم بشقاب پرنده بر حسب کیلوگرم است.

فرمانده B هم درست همین روش را انجام می‌دهد. این فرمانده شتاب جسم متحرک را برابر $a_B = 950 \text{ m/s}^2$ به دست می‌آورد، و نتیجه می‌گیرد که نیروی وارد بر آن برابر است با

$$\begin{aligned} F_B &= a_B M \\ &= (950 M) \text{ N} \end{aligned}$$

این امر مشکلی جدی به وجود می‌آورد. در مورد نیرو هیچ چیز اختیاری وجود ندارد. اگر ناظران مختلف مقادیر مختلفی را برای نیرو پیدا کنند، لااقل یکی از آنها باید اشتباه باشد. فرماندهان A و B اعتماد کامل به قوانین مکانیک دارند، از این رو آنها به رفع این اختلاف مبادرت می‌کنند. آنها به ویژه باور



شکل ۲-۴

دارند که قوانین نیوتون فقط در دستگاه لخت صدق می‌کنند. آنها چگونه می‌توانند دریابند که دستگاه آنها لخت است یا خیر؟

فرمانده A خاموش بودن کلیه موتورهایش را امتحان می‌کند. از آنجا که آنها خاموش‌اند، این فرمانده گمان می‌برد که در حال شتاب گرفتن نیست و از این رو سفینه‌اش معرف یک دستگاه لخت است. برای تأیید این موضوع، فرمانده آزمایشی ساده ولی خیلی حساس را به عهده می‌گیرد. این فرمانده مشاهده می‌کند مدادی که با دقت از حالت سکون رها شده، بدون حرکت شناور می‌شود. او آنگاه نتیجه می‌گیرد که شتاب این مداد ناچیز است و در نتیجه خود او در یک دستگاه لخت قرار دارد. استدلال این موضوع به شرح زیر است: تازمانی که فرمانده مداد را نگه می‌دارد، مداد باید دارای سرعت و شتاب لحظه‌ای یکسان با سفینه باشد. اما، بعد از رها کردن آن، هیچ‌گونه نیرویی وجود ندارد که بر آن اثر کند، البته با این فرض که بتوانیم از برهم‌کنشهای گرانشی یا الکترونیکی سفینه و جریان هوا و غیره صرف‌نظر کنیم. آنگاه این مداد می‌تواند به عنوان یک جسم منزوی به حساب آید. اگر خود سفینه شتابدار باشد، سفینه به مداد خواهد رسید و به نظر می‌رسد که این مداد نسبت به کابین سفینه شتاب می‌گیرد. وگرنه، این سفینه خودش باید معرف یک دستگاه لخت باشد.

تعیین نیروی وارد بر بشقاب پرنده توسط فرمانده A باید درست باشد زیرا A در یک دستگاه لخت قرار دارد. اما درباره مشاهدات فرمانده B چه می‌توان گفت؟ برای جواب دادن به این مسئله، رابطه x_A و x_B را در نظر می‌گیریم. از شکل ۲-۴ پیداست که

$$x_A(t) = x_B(t) + X(t)$$

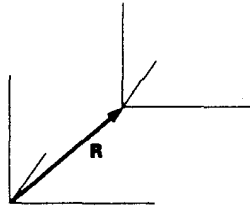
که در آن $X(t)$ مکان B نسبت به A است. با دوبار دیفرانسیل‌گیری نسبت به زمان داریم

$$\ddot{x}_A = \ddot{x}_B + \ddot{X} \quad (1)$$

چون دستگاه لخت است، قانون دوم نیوتون برای بشقاب پرنده عبارت است از

$$F_{\text{حقیقی}} = M \ddot{x}_A \quad (2)$$

که در آن $F_{\text{حقیقی}}$ ، نیروی حقیقی وارد بر بشقاب پرنده است.



شکل ۵-۲

مشاهدات فرمانده B ، چقدر است؟ نیروی ظاهری که توسط B مشاهده می‌شود عبارت است از

$$F_{B, \text{ظاهری}} = M \ddot{x}_B \quad (3)$$

با استفاده از نتایج ۱ و ۲ داریم

$$\begin{aligned} F_{B, \text{ظاهری}} &= M \ddot{x}_A - M \ddot{X} \\ &= F_{\text{حقیقی}} - M \ddot{X} \end{aligned} \quad (4)$$

B نیروی حقیقی را اندازه نخواهد گرفت، مگر اینکه $\ddot{X} = 0$ باشد. اما $\ddot{X} = 0$ فقط وقتی برقرار است که B به طور یکنواخت نسبت به A حرکت کند. همان‌گونه که گمان می‌کردیم، در اینجا چنین حالتی وجود ندارد. فرمانده B به طور اتفاقی یکی از موتورهای سفینه را روشن گذاشته است، و با آهنگ 5 m/s^2 شتاب می‌گیرد و از A دور می‌شود. بعد از خاموش کردن موتور، فرمانده مقدار نیروی وارد بر بشقاب‌پرنده را درست برابر با مقداری که توسط A محاسبه شده بود به دست می‌آورد. ■

اگرچه ما فقط حرکت در امتداد یک خط را در مثال ۱-۲ بررسی کردیم، تعمیم این نتیجه به سه بعد نیز امر ساده‌ای است. اگر برداری از مبدأ یک دستگاه لخت تا مبدأ یک دستگاه مختصات دیگر باشد، داریم (شکل ۵-۲)

$$\mathbf{F}_{\text{ظاهری}} = \mathbf{F}_{\text{حقیقی}} - M \ddot{\mathbf{R}}$$

اگر $\ddot{\mathbf{R}} = 0$ باشد، آنگاه $\mathbf{F}_{\text{ظاهری}} = \mathbf{F}_{\text{حقیقی}}$ که بدین مفهوم است که دستگاه مختصات دوم هم لخت است. درحقیقت ما صرفاً آنچه را که قبلاً با اطمینان ادعا کرده بودیم ثابت کردیم، یعنی هر دستگاهی که به طور یکنواخت نسبت به دستگاه لخت حرکت کند، خودش هم یک دستگاه لخت است.

گاهی میل داریم که اندازه‌گیرها را در یک دستگاه نالخت انجام دهیم. برای به دست آوردن معادلات صحیح چه می‌توان کرد؟ جواب این سؤال در رابطه $\mathbf{F}_{\text{ظاهری}} = \mathbf{F}_{\text{حقیقی}} - M \ddot{\mathbf{R}}$ نهفته است. جمله آخر این رابطه را می‌توانیم به مثابه یک نیروی اضافی در نظر بگیریم، که ما آن را یک نیروی مجازی می‌نامیم.

کلمه مجازی نشان می‌دهد که هیچ‌گونه برهم‌کنش حقیقی لازم نیست). آنگاه می‌نویسیم

$$\mathbf{F}_{\text{مجازی}} = \mathbf{F}_{\text{حقیقی}} + \mathbf{F}_{\text{ظاهری}}$$

که در آن $\mathbf{F} = -M \ddot{\mathbf{R}}$ است. در اینجا M جرم ذره، و $\ddot{\mathbf{R}}$ شتاب دستگاه نالخت نسبت به دستگاه لخت است.

نیروهای مجازی برای حل بعضی مسائل مفیدند، ولی باید در استفاده از آنها دقت کرد. این نیروها به‌طور کلی بیشتر باعث سردرگمی می‌شوند تا اینکه در این مرحله از مطالعه بتوانند مفید واقع شوند. بدین خاطر، فعلاً با خودداری از طرح آنها توافق می‌کنیم که از دستگاه لخت استفاده کنیم. بعداً، در فصل ۸، نیروهای مجازی را به تفصیل بررسی خواهیم کرد و می‌آموزیم که چگونه با آنها کار کنیم.

اگرچه قوانین نیوتونی می‌توانند به روشی منطقی و روشن تعریف شوند، ولی باید اذعان کرد که مشکلاتی اساسی هم وجود دارند که نمی‌توان آنها را نادیده گرفت. در فصلهای آینده بعداً اینکه این امکان را پیدا کردیم که با مفاهیم فیزیک نیوتونی بهتر آشنا شویم، دوباره به این موضوع برمی‌گردیم. به هر حال شایسته است بعضی از نکات را از هم اکنون در نظر بگیریم.

۱. شما حتماً این گفته را قبول دارید که آزمایشهای به‌کار رفته برای تعریف جرم و تحقیق قانون دوم حرکت، حقیقتاً نتایج مورد ادعا را به دست می‌دهند. ولی اگر بگوییم همیشه این‌طور نیست نباید خیلی تعجب‌آور باشد (اگرچه نخستین بار کشف این موضوع تکانه‌دهنده بود). مقیاس جرمی که برگزیدیم، وقتی که ذرات با سرعت‌های خیلی زیاد در حرکت باشند دیگر سازگار نیست، بلکه به جای جرم تعریف شده که آن را جرم سکون m_0 می‌نامیم، کمیت مناسبتری مانند $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ وجود دارد، که در آن c سرعت نور و v سرعت ذره است. در حالتی که $v \ll c$ است m و m_0 اختلاف ناچیزی دارند. علت اینکه آزمایشهای موجود در آزمایشگاهها ما را به استفاده از عبارت کلی‌تر جرم ملزم نمی‌سازند این است که حتی برای بزرگترین سرعت‌های روزمره مثلاً سرعت سفینه‌ای که به دور زمین می‌چرخد، داریم $v/c \approx 3 \times 10^{-5}$ که در این صورت m و m_0 فقط چند قسمت در 10^{10} باهم تفاوت دارند.

۲. قوانین نیوتون، حرکت اجرام نقطه‌ای را توصیف می‌کنند. در حالتی که اندازه جسم در مقایسه با فاصله برهم‌کنش کوچک باشد، هیچ‌گونه اشکالی به وجود نمی‌آید. برای مثال، کره زمین و خورشید در مقایسه با مسافت بین آنها آنقدر کوچک‌اند که در بسیاری موارد حرکت آنها را می‌توان چون حرکت جرمهای نقطه‌ای واقع در مرکز هریک از آنها توصیف کرد. اما خوشبختانه تقریبی که در جرمهای نقطه‌ای با آن سروکار داریم اساسی نیست، و چنانچه بخواهیم حرکت اجسام بزرگ را توصیف کنیم، می‌توانیم قوانین نیوتون را به‌سادگی تعمیم دهیم، و این کاری است که در فصل بعدی انجام خواهیم داد. بدین ترتیب،

نتیجه می‌گیریم که بحث درباره حرکت یک جسم صلب متشکل از 10^{24} اتم خیلی مشکلتراز حرکت یک نقطه مادی تنها نیست.

۳. قوانین نیوتون با ذرات سروکار دارند و برای توصیف سیستم پیوسته‌ای مانند یک سیال کمتر مناسب‌اند. به‌طور مستقیم نمی‌توان $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ را برای یک سیال که در آن هم نیرو و هم جرم به‌طور پیوسته توزیع شده‌اند به‌کار برد. اما، مکانیک نیوتونی را می‌توان گسترش داد و برای سیالات نیز به‌کار برد و اصول زیربنایی مکانیک سیالات را پایه‌ریزی کرد.

یکی از سیستم‌هایی که به‌ویژه در فرمولبندی کنونی ما از مکانیک نیوتونی موجب زحمت است، میدان الکترومغناطیسی است وقتی چنین میدانی وجود داشته باشد، تناقضاتی پیش می‌آید. برای مثال، دو جسم باردار که برهم‌کنش الکتریکی دارند، در واقع برهم‌کنش آنها از طریق میدانهای الکتریکی شان است. انتقال این برهم‌کنش از یک ذره به ذره دیگر آنی نیست، بلکه با سرعت نور انجام می‌گیرد. در جریان انتشار و انتقال برهم‌کنش، ظاهراً قانون سوم نیوتون نقض می‌شود؛ به این معنی که نیروی وارد بر ذرات مساوی و مختلف‌العلامت نیستند. مشکلات مشابهی در بررسی برهم‌کنشها گرانژی و دیگر برهم‌کنشها نیز به‌وجود می‌آید. اما، این مشکل بیشتر مربوط به کاربرد نابه‌جای مکانیک نیوتونی است و نه خود آن. به‌طور ساده باید گفت که، میدانها دارای خواص مکانیکی مانند تکانه و انرژی هستند که نباید از نظر دور بمانند. از این دیدگاه، چیزی به‌عنوان یک سیستم دو ذره‌ای ساده وجود ندارد. اما، در خیلی از سیستمها این میدانها را می‌توان به حساب آورد و این تناقضها را هم می‌توان در چارچوب نیوتونی برطرف کرد.

۲-۳ استانداردها و یکاها

طول، زمان، و جرم نقشی اساسی در همه رشته‌های فیزیک ایفا می‌کنند. این کمیتها برحسب بعضی استانداردهای اساسی فیزیکی تعریف شده‌اند که مورد توافق سازمانهای علمی هستند. از آنجا که یک استاندارد بخصوص عموماً دارای اندازه مناسب برای هرکار بردی نیست، چند دستگاه یکاهاى مختلف مورد استفاده قرار گرفته‌اند. مثال، سانتیمتر، آنگستروم، و یارد همه از یکاهاى طول‌اند، ولی هرکدام از آنها برحسب استاندارد متر تعریف شده‌اند. تعدادی از دستگاه یکاها وجود دارد که موارد استعمال گسترده‌ای دارند، که انتخاب آنها اساساً بر پایه عادت و راحتی استوار است. این بخش توصیف مختصری از استانداردهای رایج را ارائه می‌کند و خلاصه‌ای از یکاهاى مورد نیاز در این کتاب را به‌دست می‌دهد.

استانداردهای اساسی

استانداردهای اساسی دو نقش عمده را ایفا می‌کنند. در وهله اول وقتی که تعریف و تکثیر این استانداردها

به کار رفته است، حد نهایی دقت آزمایشها محسوب می شود. در بعضی حالتها این دقت تقریباً به طور باور نکردنی زیاد است. مثلاً زمان می تواند با دقت چند قسمت در 10^{12} قسمت اندازه گرفته شود. به علاوه، قبول یک استاندارد برای یک کمیت فیزیکی، در عین حال یک تعریف عملیاتی برای آن کمیت محسوب می شود. برای مثال، طبق نظر جدید، زمان چیزی است که به وسیله ساعت اندازه گیری می شود، و از این رو خواص زمان فقط با مشاهده خواص ساعت می تواند درک شود. این نکته زیاد هم کم اهمیت نیست، آهنگ کار همه ساعتها، از حرکت و گرانس تأثیر می پذیرد (در فصلهای ۸ و ۱۲ در این باره بحث خواهیم کرد)، و چنانچه بخواهیم واقعیت تغییر پذیری زمان را در نتیجه حرکت گرانس بپذیریم یقیناً با تناقض مواجه خواهیم شد.

وقتی یک کمیت فیزیکی به کمک یک روش اندازه گیری تعریف شده باشد، برای درک خواص آن باید به آزمایش متوسل شویم، نه به تصورات از پیش ساخته شده. برای مقایسه این دیدگاه با یک روش غیر عملیاتی، مثلاً تعریف نیوتون از زمان را در نظر بگیرید: "زمان مطلق، حقیقی و ریاضی به خودی خود، و بر اثر طبیعت خود، به طور یکنواخت و بدون واسطه ای با هر چیز خارجی جریان دارد." این تعریف ممکن است از دیدگاه فلسفی و درک شهودی جالب توجه باشد، اما مشکل است بفهمیم که چنین تعریفی چگونه می تواند عملاً به کار برده شود. این یک مفهوم متافیزیکی است که در فیزیک چندان مورد استعمالی ندارد.

همین که روی تعریف عملیاتی یک کمیت فیزیکی به توافق رسیدیم، مسئله بعدی تعیین، دقیقترین استاندارد علمی خواهد بود. تا چندی قبل، استاندارد فیزیکی مصنوعی و ساخته انسانها بودند. بدین معنی که آنها را از اجسام خاصی انتخاب می کردند که همه اندازه گیریها با مراجعه به آنها معلوم می شدند. مثلاً، یکای طول (متر) فاصله بین دو نشانه روی یک میله پلاتین تعریف شده بود. این استانداردهای ساخته انسان معایبی هم دارد. از آنجاکه این استاندارد با دقت کامل نگهداری می شوند اندازه گیریهای واقعی غالباً توسط نمونه های فرعی انجام می پذیرد که دقت را کاهش می دهد. به علاوه، دقت استاندارد ساخته انسان به طور ذاتی محدود است. در مورد متر استاندارد، این دقت به علت روشن نبودن محل حکاکی خطوطی که به وسیله آنها فاصله متر تعریف شده است، محدود می شود. وقتی که در اواخر قرن نوزدهم، تکنیکهای اپتیکی دقیقتری برای تعیین محل خطوط نشانه پیدا شد، معلوم شد که میله استاندارد متر دیگر مناسب نیست.

اکنون طول را به جای استفاده از استاندارد مصنوعی به کمک یک استاندارد طبیعی تعریف می کنند. مضرب معینی از طول موج یک خط طیفی بخصوص به عنوان متر تعریف شده است. برتری چنین یکایی این است که هرکسی با در دست داشتن وسایل اپتیکی مورد نیاز می تواند همانند آن را ایجاد کند. ضمناً، همان گونه که ابرار سازی پیشرفت می کند، دقت استاندارد هم متناظر با آن افزایش می یابد. اکثر

استانداردهای فیزیک، امروزه طبیعی‌اند.

اکنون به بیان مختصری از وضعیت کنونی استانداردهای طول، زمان، و جرم می‌پردازیم.
 طول: متر، برابر یک ده میلیونیم فاصله خط استوا تا قطب زمین در امتداد خط دانه‌کرک-بارسلون در نظر گرفته شده بود. این مقدار را نمی‌توان به دقت اندازه‌گیری کرد (درواقع این مقدار به خاطر تغییر شکل کره زمین تغییر می‌کند)، و در سال ۱۸۸۹ توافق شد که متر را به صورت فاصله بین دو علامت روی میله پلاتین-ایریدیم که در اداره بین‌المللی اوزان و مقیاسهای، سور فرانسه نگهداری می‌شود، انتخاب کنند. در تجدیدنظر ۱۹۶۰، متر معادل ۱۶۵۰۷۶۳۷۳ برابر طول موج خط نارنجی مایل به قرمز طیف کریتون ۸۶ تعریف کرده‌اند. دقت این استاندارد، چند قسمت در ۱۰^8 است.
 پیشرفتهای اخیر در تکنیک لیزری روشهایی ارائه می‌دهد که با آنها می‌توان سرعت نور را با دقتی بهتر از یک قسمت در ۱۰^8 اندازه‌گیری کرد. به نظر می‌رسد که سرعت نور به جای طول به عنوان یک کمیت اساسی جایگزین خواهد شد.^۱ در این صورت واحد طول از سرعت و زمان مشتق می‌شود.

زمان: زمان همواره به‌طور سنتی از روی دوران زمین اندازه‌گیری شده است. تا سال ۱۹۵۶ یکای اساسی زمان (ثانیه) برابر $۱/۸۶۴۰۰$ روز متوسط خورشیدی تعریف می‌شد. متأسفانه، زمان تناوب دوران زمین یکنواخت نیست. اختلافهایی تا حد یک قسمت در ۱۰^7 در روز اتفاق می‌افتد که ناشی از جزرومدهای جوی و تغییرات هسته زمین است. این اختلالات در حرکت زمین به دور خورشید تأثیر نمی‌گذارد، و تا چندی قبل هم سال متوسط خورشیدی برای تعریف ثانیه به‌کار برده می‌شد. در اینجا دقت برابر با چند قسمت در ۱۰^9 است. خوشبختانه، امروزه می‌توانیم زمان را برحسب بسامد طبیعی آنها اندازه‌گیری کنیم. در سال ۱۹۶۷، ثانیه به‌عنوان زمان لازم برای انجام ۹۱۹۲۶۳۱۷۷ نوسان درگذر فوق ریزسزیم ۱۳۳ تعریف شده است. این بسامد گذار می‌تواند با دقت چند قسمت در ۱۰^{12} اندازه‌گیری شده است، که مفهوم آن این است که زمان یکی از کمیت‌های اصلی است که تاکنون با بیشترین دقت معین شده است.

جرم: از سه یکای اصلی، فقط جرم برحسب استاندارد مصنوعی تعریف شده است. نخست، کیلوگرم به‌عنوان ۱۰۰۰ سانتیمتر مکعب آب در 4 درجه سانتیگراد تعریف شده بود. استفاده از این تعریف مشکل است، و در سال ۱۸۸۹، کیلوگرم از روی جرم استوانه‌ای از پلاتین-ایریدیم که در اداره بین‌المللی اوزان و مقیاسها نگهداری می‌شود تعریف شد. استانداردهای نمونه فرعی را نیز می‌توان با دقت یک قسمت در ۱۰^9 از روی آن تهیه کرد. شاید روزی بیاموزیم که چگونه کیلوگرم را هم برحسب یکای طبیعی، مانند جرم یک اتم، تعریف کنیم. اما، در حال حاضر هیچ‌کس نمی‌داند که چگونه می‌توان

۱. در سال ۱۳۶۲ متر معادل مسافتی تعریف شد که نور $۱/۲۹۹۷۹۲۴۵۸$ ثانیه در خلأ می‌پیماید.

تعداد بیشمار اتم مورد نیاز برای ساختن یک نمونه مفید را با اطمینان شمارش کرد. شاید شما بتوانید روشی برای این کار کشف کنید.

دستگاه یکاها

اگرچه استانداردهای جرم، طول، و زمان توسط جامعه علمی پذیرفته شده‌اند، ولی دستگاه یکاهای گوناگونی وجود دارند که به‌طور نسبی باهم متفاوت‌اند. عمومی‌ترین دستگاه یکاهای مورد استفاده، دستگاه بین‌المللی است که به SI خلاصه شده است.^۱ اصطلاح فرانسوی آن: دستگاه بین‌المللی یکاهاست. این دستگاه، دستگاه رسمی اکثر کشورهاست. یکاهای اصلی SI در مکانیک عبارت‌اند از: متر، کیلوگرم، و ثانیه؛ که جایگزین دستگاه قبلی mks شده‌اند. دستگاه دیگری که معمولاً مورد استفاده قرار می‌گیرد، بر مبنای سانتیمتر، گرم، و ثانیه است. دستگاه سوم، دستگاه یکاهای انگلیسی است، که برای اندازه‌گیری‌های غیرعلمی در انگلستان و امریکای شمالی به‌کار می‌رود، در عین حال کشور انگلستان در جریان انتقال به دستگاه متریک است. دانستن چگونگی حل مسائل در هر دستگاه یکا امری اساسی است، ما عمدتاً با یکاهای SI و گاهگاهی با دستگاه cgs کار خواهیم کرد و در مواردی هم از دستگاه انگلیسی استفاده می‌کنیم.

جدول ۱-۲ خلاصه‌ای از چند یکای مکانیکی در دستگاه‌های SI و cgs و دستگاه انگلیسی در جدول زیر آورده شده است:

دستگاه انگلیسی	CGS	SI	
۱ فوت (ft)	۱ سانتیمتر (cm)	۱ متر (m)	طول
۱ اسلاگ	۱ گرم (g)	۱ کیلوگرم (kg)	جرم
۱ ثانیه (s)	۱ ثانیه (s)	۱ ثانیه (s)	زمان
1 ft/s^2	1 cm/s^2	1 m/s^2	شتاب
۱ پوند (lb)	۱ دین	۱ نیوتون (N)	نیرو
$= 1 \text{ slugft/s}^2$	$= 1 \text{ gcm/s}^2$	$= 1 \text{ kgm/s}^2$	

بعضی از روابط مفید بین یکاهای این دستگاهها چنین‌اند:

$$\begin{array}{l|l} 1 \text{ m} = 100 \text{ cm} & 1 \text{ in} = \frac{1}{12} \text{ ft} \approx 2.54 \text{ cm} \\ 1 \text{ kg} = 1000 \text{ g} & 1 \text{ slug} \approx 14.6 \text{ kg} \\ 1 \text{ N} = 10^5 \text{ dyne} & 1 \text{ N} \approx 0.224 \text{ lb} \end{array}$$

کلمه پوند گاهی به یکای جرم هم اطلاق می‌شود که در این معنی مقدار جرمی است که در سطح زمین

تحت تأثیر نیروی گرانشی یک پوند قرار می‌گیرد. یک پوند تقریباً برابر ۴۵۴^۰ کیلوگرم است. در این کتاب، از این کاربرد ابهام‌آور استفاده نخواهیم کرد.

۲-۴ بعضی از کاربردهای قوانین نیوتون

قوانین نیوتون، بدون آگاهی از چگونگی کاربرد آن، معادلاتی بی‌معنی هستند. کاربرد این قوانین شامل رشته‌های مختلفی است که اگر فراگرفته شوند به قدری طبیعی به نظر می‌رسند که آنها را به‌طور شهودی احساس خواهیم کرد. هدف ما در این بخش تشریح روش تحلیل مسائل فیزیکی و آموزش آن به‌وسیلهٔ مثال است. یک تذکره دوباره در اینجا لازم است که مبادا این احساس به‌شما دست دهد که روش ارائه شده در اینجا بیش از حد جزئی است: راه‌های زیادی برای پرداختن به بسیاری از مسائل موجود است، و روشی که ما در اینجا پیشنهاد می‌کنیم مطمئناً منحصر به‌فرد نیست. در واقع هیچ روش ساخته و پرداخته‌ای را هرگز نمی‌توان جایگزین تفکر تحلیلی‌گراانه و هوشمندانه کرد. اما روش سیستماتیک پیشنهاد شده در اینجا برای شروع کار مفید خواهد بود، و ما اصرار داریم که شما آن را به‌خوبی فراگیرید اگرچه بعداً به راه‌های کوتاه‌تر یا متفاوتی متوسل شوید.

این مراحل عبارت‌اند از:

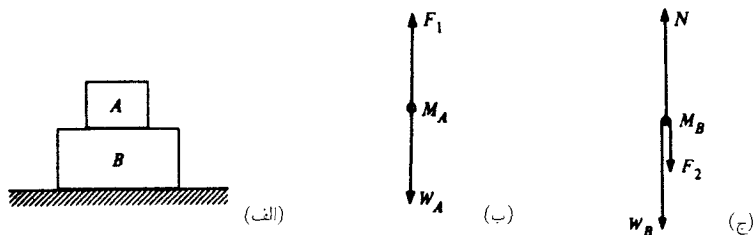
۱. در ذهن خود هر سیستم^۱ را به سیستم‌های کوچک‌تری که هرکدام از آنها را بتوان به‌صورت جرم نقطه‌ای در نظر گرفته، تقسیم کنید.

۲. نمودار نیروی هر جرم را به شرح زیر رسم کنید: (الف) جسم را به‌وسیلهٔ یک نقطه و یا یک نماد ساده نشان دهید و نام‌گذاری کنید. (ب) برای هر نیروی وارد بر جسم یک بردار نیرو روی آن رسم کنید. مورد اخیر اندکی پیچیده است. فقط نیروهای وارد بر جسم را رسم کنید نه نیروهایی که از طرف جسم اعمال می‌شوند. این جسم ممکن است به‌نخایی متصل شده باشد، توسط اجسام دیگری کشیده شود و نظیر آن. همهٔ این برهم‌کنش‌های فیزیکی با اجسام دیگر را با یک سیستم نیروها تعویض کنید. مطابق قوانین نیوتون فقط نیروهای مؤثر بر جسم در حرکت آن تأثیر می‌گذارند.

به‌عنوان مثال، اگر دو مکعب مطابق شکل ۲-۶ (الف) روی میزی به‌حالت سکون قرار گیرند، نمودار نیرو برای A طبق شکل ۲-۶ (ب) است. F_1 نیروی وارد بر مکعب A از طرف B ، W_A نیروی گرانش وارد بر A است که وزن نامیده می‌شود.

به همین طریق، نمودار نیرو برای مکعب B را نیز می‌توانیم رسم کنیم (شکل ۲-۶ ج). W_B نیروی گرانش وارد بر B ، N نیروی عمود وارد بر B از طرف سطح میز، و F_2 وارد بر B از طرف A است. هیچ برهم‌کنش فیزیکی دیگری وجود ندارد که نیرویی بر B وارد سازد.

۱. در اینجا منظور از "سیستم" مجموعه‌ای از اشیای فیزیکی است نه یک دستگاه مختصات.



شکل ۶-۲

مهم است که نیرو و شتاب را باهم اشتباه نکنید، فقط نیروهای حقیقی را رسم کنید. از آنجا که در حال حاضر فقط از دستگاههای لخت استفاده می‌کنیم، همه نیروها به برهم‌کنش فیزیکی وابسته‌اند. برای هر نیرویی شما باید بتوانید به این پرسش پاسخ دهید: “چه عاملی این نیرو را بر جسم وارد می‌کند؟” (در فصل ۸ خواهیم دید که چگونه از نیروهای به اصطلاح مجازی^۱ استفاده کنیم).

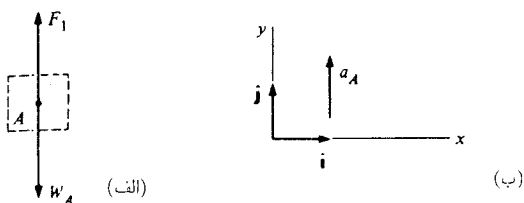
۳. دستگاه مختصاتی در نظر بگیرید. دستگاه مختصات باید لخت باشد یعنی، باید به یک چارچوب لخت متصل شده باشد. به کمک نمودار نیرو، معادله حرکت جسم را برای هر یک از مؤلفه‌ها به طور جداگانه بنویسید. منظور از معادله حرکت، معادله‌ای است به شکل $F_{1x} + F_{2x} + \dots = Ma_x$ ، که مؤلفه x هر نیروی وارد بر جسم به وسیله جمله‌ای در سمت چپ معادله مشخص شده است. علامت جبری هر مؤلفه باید با نمودار نیرو و دستگاه مختصات سازگار باشد.

به عنوان مثال اگر به نمودار نیروی مکعب A برگردید (شکل ۷-۲ الف)، قانون دوم نیوتون می‌گوید

$$\mathbf{F} + \mathbf{W}_A = m_A \mathbf{a}_A$$

از آنجا که $\mathbf{F}_1 = F_1 \hat{j}$ و $\mathbf{W}_A = -W_A \hat{j}$ داریم

$$0 = m_A (\mathbf{a}_A)_x$$



شکل ۷-۲

۱. مشهورترین نیروی مجازی، نیروی گریز از مرکز است. تجارب طولانی نشان داده‌اند که استفاده از این نیرو قبل از اینکه حقیقتاً درک کاملی از قوانین نیوتون داشته باشیم، همواره باعث سردرگمی می‌شود. به علاوه این تنها یکی از چندین نیروی مجازی است که در دستگاههای دوار نقش دارند. بنابراین دو دلیل در حال حاضر از نیروهای گریز از مرکز اکیداً دوری می‌کنیم.

$$F_1 - W_A = m_A (a_A)_y$$

در راستای x معادله حرکت صفر است که معمولاً آن را حذف می‌کنیم، و به سادگی می‌نویسیم

$$F_1 - W_A = m_A a_a$$

معادله حرکت برای B چنین است

$$N - F_2 - W_B = m_B a_B$$

۴. اگر دو جسم در یک سیستم برهم‌کنش داشته باشند، طبق قانون سوم نیوتون نیروهای بین آنها باید باهم برابر و در خلاف جهت یکدیگر باشند. این روابط باید صریحاً مشخص شوند. برای مثال، در حالت دو مکعب روی سطح میز، $F_1 = -F_2$ است و از این رو داریم

$$F_1 = F_2$$

توجه کنید که قانون نیوتون، هرگز دو نیروی مؤثر بر یک جسم واحد را به هم ربط نمی‌دهد، بلکه نیروهای وارد بر دو جسم مختلف بایستی در نظر گرفته شوند.

۵. در بسیاری از مسائل، اجسام مقیدند که در امتداد مسیرهای معینی حرکت کنند. به عنوان مثال، مسیر حرکت وزنه یک آونگ روی یک دایره است، و لغزیدن یک مکعب روی سطح میز مقید به حرکت در صفحه است. هر قیدی را به وسیله یک معادله سینماتیکی که معادله قید نامیده می‌شود می‌توان توصیف کرد. هر یک از معادلات مربوط به قید را بنویسید.

گاهی این قیدها به صورت ضمنی در مسائل قرار دارند. برای دو مکعب روی میز، شتاب عمودی وجود ندارد، و معادلات قیدی عبارت‌اند از

$$(a_A)_y = 0 \quad (a_B)_y = 0$$

۶. دقت کنید که کدام متغیرها معلوم و کدام مجهول‌اند. معادلات نیرو و معادلات قیدی باید روابط کافی برای پیدا کردن تمام مجهولات به دست دهند. اگر معادله‌ای نادیده گرفته شود، تعداد معادلات کمتر از مجهولات خواهد شد.

اگر تمام معادلات مربوط به مسئله دو مکعب روی میز را بنویسیم، داریم



شکل ۸-۲

$$\left. \begin{aligned} F_1 - W_A &= m_A a_A \\ N - F_2 - W_B &= m_B a_B \end{aligned} \right\} \text{معادله حرکت}$$

$$F_1 = F_2 \quad \text{معادله حاصل از قانون سوم نیوتون}$$

$$\left. \begin{aligned} a_A &= 0 \\ a_B &= 0 \end{aligned} \right\} \text{معادلات قید}$$

آنچه باقی می ماند، کار ریاضی برای حل این معادلات است:

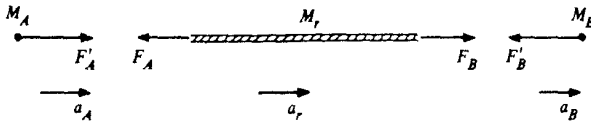
$$F_1 = F_2 = W_A$$

$$N = W_A + W_B$$

در اینجا برای نشان دادن کاربرد قوانین نیوتون، چند مثال می آوریم.

نکته اصلی در اولین مثال، کمک به تمایز بین نیروهایی است که ما بر یک جسم وارد می کنیم و نیروهایی که آن جسم بر ما اعمال می کند. از نظر فیزیولوژیکی این نیروها غالباً باهم اشتباه می شوند. اگر کتابی را از این سو به آن سوی میز فشار دهید، نیرویی که احساس می کنید نیرویی نیست که باعث حرکت آن می شود بلکه نیرویی است که کتاب به شما اعمال می کند. طبق قانون سوم نیوتون، این نیروها همیشه باهم برابر و در خلاف جهت یکدیگرند. اگر یکی از نیروها محدود باشد دیگری هم محدود می شود.

مثال ۲-۲ مسابقه طناب کشی فضانوردان: دو فضانورد، که در آغاز در حالت سکون اند، در فضای تهی دو انتهای یک طناب را می کشند. فضانوردی که نامش فرهاد است در دبیرستان فوتبال بازی می کرد و لذا قویتر از فضانورد دیگر به نام یوسف است که سرگرمی او شطرنج بود. بیشینه نیرویی که فرهاد می تواند بکشد، (F_A) ، بزرگتر است از بیشینه نیرویی که یوسف می تواند بکشد (F_B) . جرمهای آنها M_A و M_B است و M_F جرم طناب ناچیز است. اگر هر کدام از آنها تاسرحد امکان طناب را بکشند، حرکت آنها را مشخص کنید (شکل ۸-۲). نمودار سرعتها به صورت شکل ۹-۲ است که برای سهولت در آن طناب را با یک خط نشان داده ایم. توجه داشته باشید که نیروهای F_A و F_B که از طرف فضانوردان وارد می شوند، بر طناب اثر می کنند نه بر فضانوردان. نیروهای اعمال شده از طناب به فضانوردان عبارتند



شکل ۹-۲

از F'_A و F'_B نمودار ۹-۲ جهت سرعتها و دستگاه مختصات انتخاب شده را نشان می‌دهد که در آن شتاب به سمت راست مثبت است.

به موجب قانون سوم نیوتون داریم

$$\begin{aligned} F'_A &= F_A \\ F'_B &= F_B \end{aligned} \quad (۱)$$

معادله حرکت طناب چنین است

$$F_B - F_A = M_r a_r \quad (۲)$$

تنها حرکت در امتداد طناب مورد نظر است، بنابراین معادلات حرکت در دو راستای دیگر را حذف می‌کنیم. هیچ قیدی هم وجود ندارد، لذا حل مسئله را دنبال می‌کنیم.

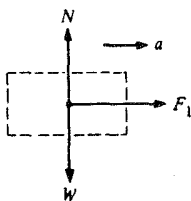
از آنجا که M_r جرم طناب ناچیز است، در معادله ۲ فرض می‌کنیم $M_r = 0$ باشد. از آنجا نتیجه می‌شود $F_B = F_A$ یا $F_B - F_A = 0$.

کل نیروهای وارد بر طناب عبارت‌اند از F_B به طرف راست و F_A طرف چپ. بزرگی این نیروها باهم برابر است، و نیروی کل وارد بر طناب صفر است. به طور کلی، نیروی کل وارد بر جسمی به جرم ناچیز عملاً باید صفر باشد، نیروی متناهی وارد بر جرم صفر تولید شتاب نامتناهی می‌کند.

چون $F_B = F_A$ است، از معادله ۱ نتیجه می‌شود $F'_A = F_A = F_B = F'_B$ ، بنابراین $F'_A = F'_B$ است. هر کدام از فضانوردان با نیروی یکسانی طناب را می‌کشند. از نظر فیزیکی، میزان استقامت یوسف در نگهداری طناب محدود است، و اگر فرهاد سعی کند طناب را خیلی سخت بکشد، طناب از میان انگشتان یوسف درمی‌رود. نیرویی که فرهاد می‌تواند وارد کند به وسیله قوت چنگ زدن یوسف به طناب محدود شده است. اگر طناب به دست یوسف بسته شده بود، فرهاد می‌توانست کشیدن خود را به پیشینه برساند.

شتاب دو فضانورد عبارت‌اند از

$$a_A = \frac{F'_A}{M_A}$$



شکل ۱۱-۲



شکل ۱۰-۲

$$a_B = \frac{-F'_B}{M_B}$$

$$= \frac{-F'_A}{M_B}$$

علامت منفی بدین معنی است که جهت a_B به طرف چپ است. در خیلی از مسائل جهت مؤلفه‌های بعضی نیروها یا شتابها در آغاز مجهول‌اند. در نوشتن معادله حرکت، هرگونه انتخابی قابل قبول است به شرطی که با قراردادهای پذیرفته شده در نمودار نیرو سازگار باشد. اگر در جواب علامت منفی حاصل شد، جهت شتاب یا نیرو مخالف جهت مفروض است.

مثال بعدی نشان می‌دهد برای اینکه یک سیستم مرکب شتاب بگیرد، باید نیروی مؤثری بر هر یک از قسمتهای آن سیستم وارد شود.

مثال ۳-۲ قطار باری: سه واگن باری به جرم M توسط لوکوموتیوی با نیروی F کشیده می‌شوند (شکل ۱۰-۲). اصطکاک قابل صرف‌نظر کردن است، نیروی وارد بر هر واگن را پیدا کنید.

قبل از رسم نمودار نیرو، بهتر است سیستم را به عنوان یک مجموعه در نظر بگیریم. چون واگنها به هم متصل‌اند، لذا باید شتاب یکسانی داشته باشند. از آنجا که جرم کل $3M$ است، شتاب برابر است با

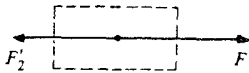
$$a = \frac{F}{3M}$$

نمودار نیرو برای آخرین واگن در شکل ۱۱-۲ نشان داده شده است. W وزن و N نیروی وارد از طرف ریل راه آهن و رو به بالاست. شتاب عمودی صفر است به طوری که $N = W$ است. F_1 نیروی اعمال شده از طرف واگن مجاور است

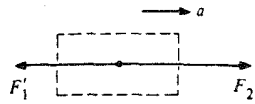
$$F_1 = Ma$$

$$= M \left(\frac{F}{3M} \right)$$

$$= \frac{F}{3}$$



شکل ۱۳-۲



شکل ۱۲-۲

اینک واگن میانی را بررسی می‌کنیم. نیروهای عمودی مثل قبل هستند که آنها را در نظر نمی‌گیریم. نیروی اعمال شده، از طرف واگن آخری، F_1' نیروی اعمال شده از طرف واگن اولی است (شکل ۱۲-۲). معادله حرکت چنین است

$$F_1' - F_2 = Ma$$

به موجب قانون سوم نیوتون داریم: $F_1' = F_2 = F/3$ ، از آنجا که $a = F/3M$ است، داریم

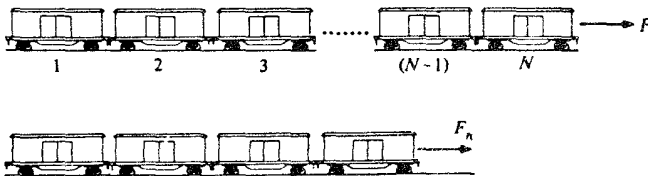
$$\begin{aligned} F_1' &= M \left(\frac{F}{3M} \right) + \frac{F}{3} \\ &= \frac{2F}{3} \end{aligned}$$

نیروهای افقی وارد بر اولین واگن عبارتند از، F به طرف راست و $F_1' = F_2 = 2F/3$ به طرف چپ (شکل ۱۳-۲). بر هر واگن یک نیروی کل $F/3$ به طرف راست وارد می‌شود.

در اینجا یک راه تقریباً عمومی برای پرداختن به مسئله وجود دارد. قطاری از N واگن را در نظر بگیرید که جرم هر کدام برابر M است و توسط نیروی کشیده F کشیده می‌شوند (شکل ۱۴-۲). شتاب برابر $a = F/(NM)$ است، برای پیدا کردن نیروی F_n که n واگن آخر را می‌کشد، واضح است که F_n باید به جرم nM شتاب $F/(NM)$ بدهد. بنابراین

$$\begin{aligned} F_n &= nM \frac{F}{NM} \\ &= \frac{n}{N} F \end{aligned}$$

این نیرو با تعداد واگنهای کشیده شده متناسب است.



شکل ۱۴-۲

در دستگاههای مرکب از چند جسم، شتابها معمولاً از طریق قیدها به هم ارتباط دارند. معادلات قیدی را گاهی می توان با بررسی ساده پیدا کرد، ولی عمومی ترین روش، استفاده از مختصات هندسی است که در مثال زیر نشان داده می شود.

مثال ۲-۴ قیدها: الف) گوه و مکعب: همان گونه که در شکل ۲-۱۵ نشان داده شده است مکعبی روی یک گوه که خود روی یک میز افقی حرکت می کند، در حرکت است؛ زاویه گوه θ است. شتابهای گوه و مکعب چه رابطه ای باهم دارند؟

تازمانی که گوه در تماس با میز است، یک قید بدهی داریم و آن این است که شتاب عمودی گوه صفر است. برای پیدا کردن قیدهایی که به آسانی دیده نمی شوند، فرض کنید مطابق شکل ۲-۱۵ الف) X مختصه افقی انتهای گوه و x و y مختصات افقی و قائم مکعب باشند، ارتفاع گوه را هم h بگیرد. با توجه به هندسه مسئله (شکل ۲-۱۵ ب) داریم

$$(x - X) = (h - y) \cot \theta$$

با دوبار دیفرانسیل گیری نسبت به زمان، معادله قید را پیدا می کنیم

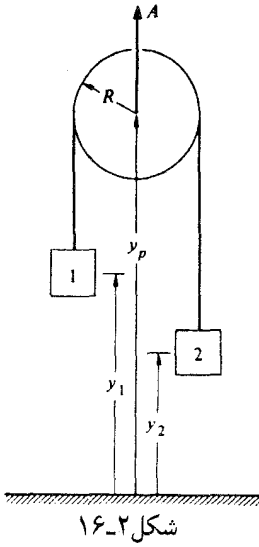
$$\ddot{x} - \ddot{X} = -\ddot{y} \cot \theta \quad (1)$$

به چند نکته باید توجه داشت. دقت کنید که اولاً از دستگاه مختصات لخت استفاده شود. اگر وضعیت مکانی مکعب را نسبت به گوه اندازه بگیریم، در استفاده از قانون دوم نیوتون با مشکل مواجه خواهیم شد. زیرا، خود این گوه دارای شتاب است و نمی تواند مشخص کننده یک دستگاه لخت باشد. دوم، وقتی که مشتق زمانی می گیریم پارامترهای غیر مهم، مانند ارتفاع گوه از بین می روند، ولی این پارامترها می توانند از نظر هندسی مفید واقع شوند. بالاخره، معادلات قیدی مستقل از نیروهای وارد شده هستند. برای مثال، حتی اگر اصطکاک بین مکعب و گوه در شتابهای آن مؤثر باشد، معادله ۱ تا آنجا که اجسام فوق در تماس باهم باشند، معتبر است.

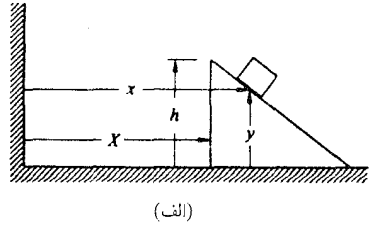
ب) قرقره و وزنه: دو وزنه مطابق شکل ۲-۱۶ توسط نخه که از روی قرقره ای می گذرد به هم متصل اند. این قرقره با آهنگ A به طرف بالا شتاب می گیرد. رابطه شتابهای اجسام را پیدا کنید. فرض کنید که هیچ گونه حرکت افقی وجود ندارد.

از مختصات نشان داده شده در شکل استفاده می کنیم. طول سیم l ، مقداری ثابت است. بنابراین اگر فاصله ها را از مرکز قرقره به شعاع R اندازه بگیریم و آن را با y_p نشان دهیم، داریم

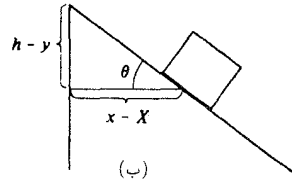
$$l = \pi R + (y_p - y_1) + (y_p - y_2) \quad (2)$$



شکل ۱۶-۲



(الف)



(ب)

شکل ۱۵-۲

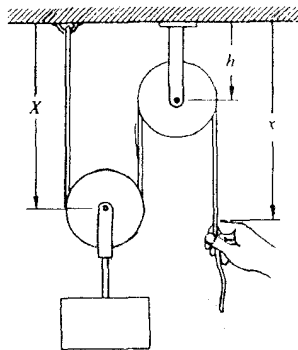
با دو بار دیفرانسیل گرفتن نسبت به زمان، شرط قیدی را پیدا می‌کنیم

$$0 = 2 \ddot{y}_p - \ddot{y}_1 - \ddot{y}_2$$

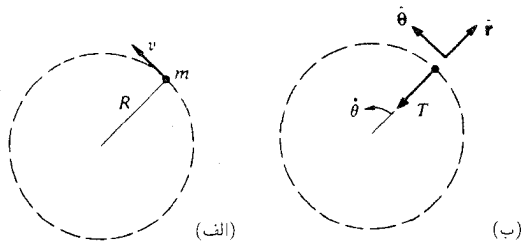
با استفاده از $A = \ddot{y}_p$ داریم

$$A = \frac{1}{2}(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2)$$

ج) قرقه مرکب: از دستگاه قرقه‌ای که در شکل ۱۷-۲ نشان داده شده برای بلند کردن مکعب استفاده می‌شود. شتاب انتهای سیم در مقایسه با شتاب مکعب چگونه است؟ با استفاده از مختصات نمایش داده شده، طول سیم به وسیله رابطه زیر معین می‌شود



شکل ۱۷-۲



شکل ۱۸-۲

$$l = X + \pi R + (X - h) + \pi R + (x - h)$$

که در آن R شعاع قرقره‌هاست. بنابراین

$$\ddot{X} = -\frac{1}{4} \ddot{x}$$

مکعب سرعتی برابر نصف سرعت دست و در جهت مخالف شتاب می‌گیرد. مثال‌های ما تا به حال فقط شامل حرکت‌های خطی بودند، اینک به دینامیک حرکت دورانی می‌پردازیم. یک ذره در حرکت دایره‌ای باید دارای شتاب شعاعی باشد. این مسئله گاهی اوقات باعث سردرگمی می‌شود، زیرا درک مستقیم ما از شتاب معمولاً به جای تغییر جهت حرکت به تغییر اندازه سرعت مربوط می‌شود. بدین خاطر با مثالی تا حد امکان ساده شروع می‌کنیم.

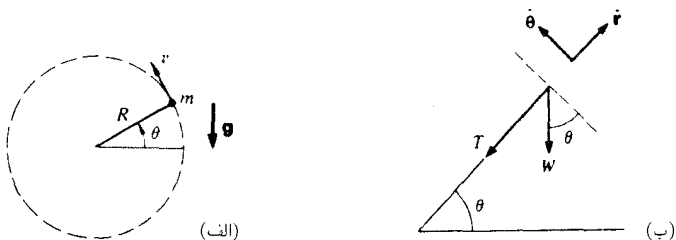
مثال ۱۸-۲ و ۵-۲ وزنه متصل به نخ ۱: جرم m با سرعت ثابت v در انتهای نخ به طول R می‌چرخد (شکل ۱۸-۲ الف). نیروی وارد بر m را در غیاب نیروی گرانی یا اصطکاک پیدا کنید.

تنها نیروی وارد بر m ، نیروی کششی نخ T است، که به طرف مرکز عمل می‌کند همان طوری که در شکل ۱۸-۲ (ب) نشان داده شده است. طبیعی است که از مختصات قطبی استفاده کنیم. توجه کنید که طبق مشتق‌گیرهای بخش ۹-۱، شتاب شعاعی برابر است با $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ که در آن $\dot{\theta}$ سرعت زاویه‌ای است. a_r وقتی که به طرف خارج باشد، مثبت است. چون جهت \mathbf{T} به طرف مبدأ است، $\mathbf{T} = -T\hat{\mathbf{r}}$ بوده و معادله حرکت شعاعی چنین است

$$\begin{aligned} -T &= ma_r \\ &= m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \end{aligned}$$

$$T = mv^2/R, a_r = -R(v/R)^2 = -v^2/R \text{ بنابراین } \dot{\theta} = v/R \text{ و } \ddot{r} = \ddot{R} = 0$$

توجه کنید که جهت T به طرف مبدأ است، هیچ نیرویی به طرف خارج بر m وارد نمی‌شود. اگر گویه



شکل ۱۹-۲

متصل به انتهای یک نخ را بچرخانید، نیرویی به طرف خارج احساس می‌کنید. اما، نیرویی که احساس می‌کنید بر گلوله وارد نمی‌شود، بلکه بر شما وارد می‌شود. این نیرو از نظر بزرگی برابر و در جهت مخالف نیرویی است که شما با آن گلوله را می‌کشید، البته در اینجا جرم نخ قابل اغماض فرض شده است. ■ در مثال زیر هر دو شتاب شعاعی و مماسی در حرکت دایره‌ای وجود دارند.

مثال ۲-۶ وزنه متصل به نخ ۲: جرم m واقع در انتهای نخ به طول R چرخانده می‌شود. حرکت در صفحه قائمی واقع در میدان گرانشی زمین است. نیروهای وارد بر m عبارتند از، وزن W به طرف پایین و نیروی کشش نخ T به طرف مرکز. سرعت لحظه‌ای آن v است، و نخ با افق زاویه θ می‌سازد. T و شتاب مماسی را در این لحظه پیدا کنید (شکل ۱۹-۲).

نمودار ۱۹-۲ (ب)، نیروها و بردارهای یکه \hat{r} و $\hat{\theta}$ را نشان می‌دهد. نیروی شعاعی عبارت است از

$$-T - W \sin \theta$$

$$-(T + W \sin \theta) = ma_r \quad (1)$$

$$= m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

نیروی مماسی برابر $W \cos \theta$ است. بنابراین

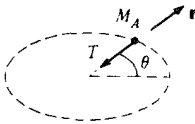
$$-W \cos \theta = ma_\theta \quad (2)$$

$$= m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

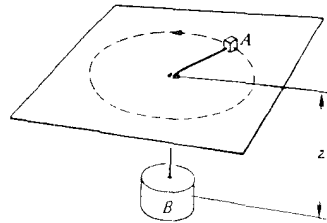
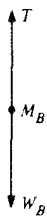
چون $r = R = \text{const.}$ است، $a_r = -R(\dot{\theta}^2) = -v^2/R$ ، و از معادله ۱ داریم

$$T = \frac{mv^2}{R} - W \sin \theta$$

این نخ را می‌توان کشید ولی نمی‌توان فشار داد، یعنی T نمی‌تواند منفی شود. برای این امر لازم



شکل ۲-۲۱



شکل ۲-۲۰

است $mv^2/R \geq W \sin \theta$. بیشینه مقدار $W \sin \theta$ وقتی اتفاق می افتد که m به صورت قائم و در بالا قرار گیرد؛ در این صورت $mv^2/R > W$ است. اگر این شرط برآورده نشود، m یک مسیر دایره‌ای را دنبال نمی‌کند، بلکه شروع به سقوط می‌کند، و \ddot{r} دیگر صفر نیست. شتاب مماسی به وسیله معادله ۲ داده می‌شود. از آنجا که $\dot{r} = 0$ است داریم

$$a_{\theta} = R \ddot{\theta} = \frac{W \cos \theta}{m}$$

این جرم با سرعت ثابت حرکت نمی‌کند؛ بلکه شتاب مماسی دارد. هنگام حرکت به طرف پایین سرعت مماسی افزایش یافته و در حرکت به طرف بالا کاهش پیدا می‌کند. ■ مثال بعدی، حرکت دورانی، حرکت انتقالی و قیدها را شامل می‌شود.

مثال ۲-۷ وزنه چرخان: در مرکز یک میز افقی بدون اصطکاک سوراخ کوچکی وجود دارد. وزنه A در روی میز متوسط نخ‌ی با جرم قابل اغماض که از سوراخ عبور می‌کند به وزنه B که در زیر میز آویزان است متصل است (شکل ۲-۲۰).

در ابتدا، B به حالت ثابت نگه داشته می‌شود و A در شعاع ثابت r_0 با سرعت زاویه‌ای ثابت ω_0 دوران می‌کند. اگر B در $t = 0$ رها شده باشد، شتابی که A بلافاصله پس از آن پیدا می‌کند چقدر است؟ نمودارهای سرعت A و B لحظه‌ای بعد از رها شدن در شکل نشان داده شده‌اند.

نیروهای عمودی وارد بر A همدیگر را خنثی می‌کنند و احتیاج به بررسی آنها نیست. تنها نیروی افقی وارد بر A نیروی کشش نخ T است. نیروهای وارد بر B عبارت‌اند از نیروی کشش T نخ و وزن W_B (شکل‌های ۲-۲۱).

همان طور که در نمودار دیده می شود، طبیعی است که از مختصات قطبی r و θ تنها برای A و مختصه z برای B استفاده شود. طبق معمول بردار یکه \hat{r} شعاعی و به طرف خارج است. معادلات حرکت عبارت اند

$$-T = M_A(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad \text{شعاعی} \quad (1)$$

$$0 = M_A(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \quad \text{مماسی} \quad (2)$$

$$W_B - T = M_B \ddot{z} \quad \text{عمودی} \quad (3)$$

چون طول نخ l مقدار ثابتی است، داریم

$$r + z = l \quad (4)$$

با دوبار دیفرانسیل گیری از معادله ۴ نسبت به زمان معادله قید به دست می آید

$$\dot{r} = -\dot{z} \quad (5)$$

علامت منفی بدین معنی است که، اگر A به طرف داخل حرکت کند، B سقوط می کند. از ترکیب معادلات ۱، ۲، ۵ و نتیجه می شود

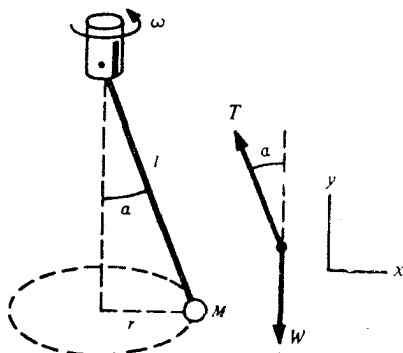
$$\ddot{z} = \frac{W_B - M_A r \dot{\theta}^2}{M_A + M_B}$$

درک این مطلب مهم است که اگرچه شتاب می تواند دقیقاً تغییر کند، ولی سرعت و مکان نمی توانند تغییرات ناگهانی داشته باشند. بنابراین بلافاصله بعد از رها شدن B ، داریم $r = r_0$ و $\dot{\theta} = \omega_0$. از این رو خواهیم داشت

$$\ddot{z}(\omega_0) = \frac{W_B - M_A r_0 \omega_0^2}{M_A + M_B} \quad (6)$$

(۶) \ddot{z} بسته به مقدار صورت کسر در معادله ۶ می تواند مثبت، منفی، یا صفر باشد، اگر ω_0 به اندازه کافی بزرگ باشد، وزنه B بعد از رها شدن شروع به بالا رفتن خواهد کرد. ■ مسئله ظاهراً ساده مثال زیر دارای برخی نکات غیرمنتظره است.

مثال ۲-۸. آونگ مخروطی: همان طوری که در شکل ۲-۲۲ نشان داده شده است، جرم M به میله بی وزنی به طول l که با بسامد زاویه ای ثابت ω دوران می کند متصل است. این جرم با سرعت پایداری در یک مسیر دایره ای با شعاع ثابت حرکت می کند. پیدا کنید α زاویه ای که میله با امتداد قائم می سازد. بانمودار سرعت شروع می کنیم. T نیروی کشش سیم و W وزن وزنه است (توجه داشته باشید که



شکل ۲-۲۲

هیچ نیروی دیگری بر وزنه وارد نمی‌شود، اگر این موضوع برایتان روشن نیست، به احتمال زیاد شتاب را با نیرو اشتباه می‌کنید که اشتباهی بزرگ است). معادله حرکت عمودی چنین است

$$T \cos \alpha - W = 0 \quad (1)$$

زیرا a_y ثابت و بنابراین $\dot{v}_y = 0$ است.

برای پیدا کردن معادله حرکت افقی، توجه داشته باشید که وزنه در جهت \hat{r} با آهنگ $a_r = -\omega^2 r$ شتاب می‌گیرد. بنابراین

$$-T \sin \alpha = -M r \omega^2 \quad (2)$$

چون $r = l \sin \alpha$ است، داریم

$$T \sin \alpha = M l \omega^2 \sin \alpha \quad (3)$$

یا

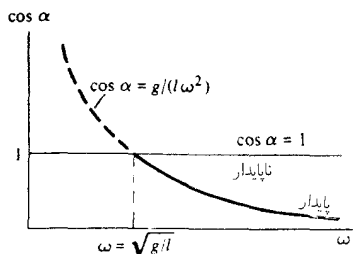
$$T = M l \omega^2 \quad (4)$$

از ترکیب معادلات ۱ و ۳ نتیجه می‌شود

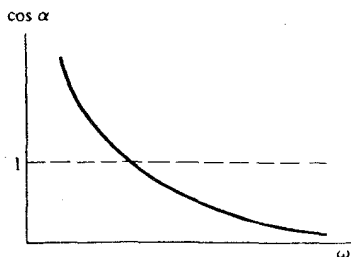
$$M l \omega^2 \cos \alpha = W$$

همان طوری که در بخش ۵-۲ بحث خواهیم کرد، $W = Mg$ است که در آن M جرم و g شتاب گرانی است. نتیجه می‌گیریم

$$\cos \alpha = \frac{g}{l \omega^2}$$



شکل ۲-۲۴



شکل ۲-۲۳

به نظر می‌رسد که این جواب مطلوب باشد. وقتی $\omega \rightarrow \infty$, $\cos \alpha \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow \pi/2$ میل می‌کند. در سرعت‌های زیاد، وزنه تقریباً نزدیک به حالت افقی گردش می‌کند. اما، در سرعت‌های کم جواب مسئله بی‌معنی می‌شود. وقتی $\omega \rightarrow 0$ میل کند، داریم $\cos \alpha \rightarrow \infty$ که نتیجه‌ای بی‌معنی است، زیرا $\cos \alpha \leq 1$ است. پس اشتباهی باید رخ داده باشد، و مشکل در همین جاست.

برای $\omega < \sqrt{g/l}$, پیش‌بینی جواب به صورت $\cos \alpha > 1$ است (شکل ۲-۲۳). وقتی $\omega = \sqrt{g/l}$ باشد، $\cos \alpha = 1$ و $\sin \alpha = 0$ است، یعنی وزنه به طور قائم‌الوتران است. برای رفتن از معادله ۲ به ۳، دو طرف معادله ۲ را بر $\sin \alpha$ تقسیم کردیم یعنی در این حالت بر صفر تقسیم کرده‌ایم که مجاز نیست. اما می‌بینیم که از دومین جواب عکس، یعنی $\sin \alpha = 0$ و $T = W$ ، که به ازای همه مقادیر ω صادق است، چشمپوشی شده است. این جواب مربوط به آونگی است که مستقیماً به سمت پایین آویزان است. اینک نمودار کامل حل مسئله را توضیح می‌دهیم (شکل ۲-۲۴).

از نظر فیزیکی، برای $\omega \leq \sqrt{g/l}$ تنها جواب قابل قبول $\alpha = 0$ و $\cos \alpha = 1$ است. برای $\omega > \sqrt{g/l}$ ، دو جواب قابل قبول داریم:

$$\cos \alpha = 1 \quad (1)$$

$$\cos \alpha = g/l\omega^2 \quad (2)$$

جواب ۱ با وزنه‌ای که به سرعت دوران می‌کند ولی به طور عمودی آویزان است متناظر است. جواب ۲ با وزنه‌ای که با زاویه‌ای نسبت به خط قائم در چرخش است مطابقت می‌کند. برای $\omega > \sqrt{g/l}$ ، جواب ۱ متناظر با یک وضع ناپایدار است. اگر سیستم در این حالت باشد و اندک اختلالی در آن به وجود آید، به بیرون خواهد پرید. آیا می‌توانید بگویید چرا این چنین است؟

نتیجه ضمنی این مثال این است که باید اطمینان حاصل کنید که ریاضیات معنی فیزیکی مناسبی

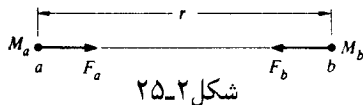
۲-۵ نیروهای روزمره فیزیکی

وقتی که یک فیزیکدان طرح ریزی یک شتابدهنده را آغاز می‌کند، از قوانین مکانیک و دانش خود درباره نیروهای الکتریکی و مغناطیسی استفاده می‌کند تا دریابد که ذرات چه مسیریایی را دنبال خواهند کرد. پیشگویی حرکت، با توجه به معلوم بودن نیروها یکی از قسمتهای مهم فیزیک به‌شمار می‌رود و بیشتر کار بردهای آن را شامل می‌شود. اما در فرایند معکوس می‌توان برهم‌کنشهای فیزیکی را با توجه به وضعیت حرکت نتیجه‌گیری کرد که این همان نحوه اکتشاف قوانین فیزیکی است. مثال کلاسیک در این مورد، نتیجه‌گیری قانون جاذبه نیوتون از قوانین حرکت سیارات کپلر است. کوششهای جاری برای درک برهم‌کنشهای بین ذرات بنیادی از طریق بررسی آزمایشهای پراکندگی در انرژیهای بالا نیز نمونه جدیدتری ارائه می‌دهد.

تلاش در مشاهدات تجربی برای پیدا کردن نیرو، کار مشکلی است. ادینگتون یک بار به شوخی گفت: نیرو عبارتی ریاضی است که اگر در سمت چپ قانون دوم نیوتون قرار گیرد نتایج را به دست می‌دهد که با حرکتهای مشاهده شده سازگارند. خوشبختانه نیرو واقعیت فیزیکی محسوستری دارد. بیشتر کوشش ما در فصلهای بعدی این خواهد بود که چگونگی رفتار سیستمها را تحت اثر نیروهایی که بر آنها وارد می‌شوند بررسی کنیم. اگر هر زوج از ذرات جهان برهم‌کنش مخصوص خودشان را داشتند، این کار غیرممکن بود خوشبختانه طبیعت مهربانتر از این است. تا آنجا که اطلاع داریم، در جهان فقط چهار نوع مختلف برهم‌کنش وجود دارد: برهم‌کنش گرانشی، برهم‌کنشهای الکترومغناطیسی برهم‌کنش به اصطلاح ضعیف، و برهم‌کنش قوی.

گرانش و برهم‌کنشهای الکترومغناطیسی می‌توانند در بردهای طولانی عمل کنند زیرا آنها فقط با عکس مجذور فاصله کاهش می‌یابند. اما، نیروی گرانشی همیشه جذب می‌کند، در صورتی که نیروهای الکتریکی می‌توانند جذب یا دفع کنند. در سیستمهای بزرگ، نیروهای جاذبه و دافعه الکتریکی به مقیاس وسیعی یکدیگر را خنثی می‌کنند و گرانش به‌تنهایی باقی می‌ماند. به این دلیل، نیروهای گرانشی در مقیاس کیهانی بر جهان تسلط دارند. برعکس، جهان بلافاصله اطراف ما تحت تسلط نیروهای الکتریکی است، زیرا آنها در مقیاس اتمی از نیروی گرانشی خیلی قویترند. نیروهای الکتریکی عامل مؤثر ساختمان اتمها، مولکولها، و شکلهای پیچیده‌تر اجسام و وجود نور هستند.

برد برهم‌کنشهای ضعیف و قوی آنچنان کوتاه است که فقط در فواصل هسته‌ای حدود 10^{-15} متر حائز اهمیت‌اند و حتی در فواصل اتمی یعنی 10^{-10} متر قابل اغماض‌اند. همان‌گونه که از اسم آنها برمی‌آید، برهم‌کنشهای قوی از نیروی الکترومغناطیسی در فواصل هسته‌ای بسیار قویترند. این نیروها به‌مثابه "چسبی" باعث انسجام هسته‌ها می‌شوند و جدا از آن اثر اندکی در جهان عادی دارند. نقش برهم‌کنش ضعیف کمتر محسوس است. این برهم‌کنش در پیدایش و نابودی نوترینو به‌عنوان واسطه عمل



می‌کند نوترینوها ذراتی بدون جرم و بدون بارند که برای درک ساختار ماده نقش اساسی دارند و فقط به وسیله آزمایش‌های بسیار دشوار قابل آشکارسازی هستند.

هدف ما در باقیمانده این فصل آشنا شدن با نیروهایی است که در مکانیک روزمره حائز اهمیت‌اند. دوتا از اینها، یعنی نیروهای گرانشی و الکتریکی اساسی هستند و نمی‌توان آنها را به نیروهای دیگری نسبت داد. نیروهای دیگری که مورد بحث قرار می‌دهیم، از جمله نیروی اصطکاک، نیروی تماس، و نیروی چسبندگی را می‌توان به عنوان نمود ماکروسکوپی نیروهای بین اتمی تلقی کرد.

گرانی، وزن، و میدان گرانشی

نیروی گرانشی، آشناترین و اساسی‌ترین نوع نیروهاست و پیوند تاریخی نزدیکی با مکانیک دارد؛ نیوتون در سال ۱۶۶۶ قانون گرانش عمومی را کشف کرد، در همین سال قوانین حرکت خود را نیز تدوین کرد. او توانست با محاسبه حرکت دو ذره تابع قانون گرانش، قانون تجربی حرکت سیاره‌ای کیپلر را به دست آورد. (نیوتون با این همه دستاورد در سن ۲۶ سالگی، سنتی را بنیاد نهاد که هنوز هم پا برجاست- و آن این است که پیشرفتهای بزرگ را غالباً فیزیکدانان جوان به ارمغان می‌آورند.)

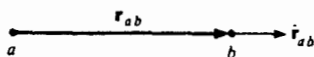
طبق قانون گرانش نیوتون، دو ذره یکدیگر را با نیرویی در راستای خط واصل بین مرکزهای آنها جذب می‌کنند. بزرگی این نیرو با حاصلضرب جرمها متناسب است و با عکس مجذور فاصله بین ذرات کاهش می‌یابد.

استفاده از این قانون در شکل توصیفی و در قالب کلمات دشوار است. اما می‌توان آن را به یک عبارت ساده ریاضی تبدیل کرد.

دو ذره a و b با جرمهای M_a و M_b را که به فاصله r از هم قرار دارند در نظر بگیرید (شکل ۲-۲۵). فرض می‌کنیم F_b نیروی وارد شده از طرف ذره a بر ذره b باشد. توصیف قبلی ما از بزرگی نیرو چنین خلاصه می‌شود

$$|F_b| = \frac{GM_a M_b}{r^2}$$

G ثابت متناسبی است که به ثابت گرانشی معروف است. مقدار آن با اندازه‌گیری نیروی بین جرمها در شرایط مشخص به دست می‌آید. اولین اندازه‌گیریها در سال ۱۷۷۱ توسط هانری کاوندیش و با استفاده از یک ترازوی پیچشی انجام گرفت. مقدار جدید G برابر است با $6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ (در بین ثابتهای بنیادی G از کمترین دقت برخوردار است. شاید شما بتوانید وسیله جدیدی برای اندازه‌گیری آن طرح کنید!) از نظر تجربی G برای همه اجسام از جمله آلومینیم، سرب، نوترون، یا هر چیز دیگری که



شکل ۲-۲۶

در دسترس دارید یکی است. به این دلیل این قانون به قانون عمومی گرانش معروف شده است. نیروی گرانشی بین دو ذره، مرکزی (یعنی در امتداد خط واصل بین مرکزها) و جاذبه است. ساده‌ترین راه توصیف این خواص استفاده از بردارهاست. طبق قرارداد، برداری مانند \mathbf{r}_{ab} معرفی می‌کنیم، که ذره واردکنندهٔ نیرو (a) را به ذره‌ای که نیرو به آن وارد می‌شود وصل می‌کند (شکل ۲-۲۶). توجه کنید که

$$|\mathbf{r}_{ab}| = r \quad \text{است. با استفاده از برداریکه } \mathbf{r}_{ab}/r \text{ داریم}$$

$$\mathbf{F}_b = -\frac{GM_a M_b}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{ab}$$

علامت منفی نشان می‌دهد که نیرو از نوع جاذبه است. نیروی وارد بر a از طرف b چنین است

$$\mathbf{F}_a = -\frac{GM_a M_b}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{ba} = +\frac{GM_a M_b}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{ab} = -\mathbf{F}_b$$

زیرا $\hat{\mathbf{r}}_{ba} = -\hat{\mathbf{r}}_{ab}$. این نیروها مساوی و مختلف‌الجهت‌اند، و قانون سوم نیوتون خودبه‌خود صادق است.

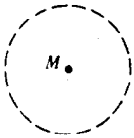
نیروی گرانشی دارای خاصیتی یگانه و مرموز است. معادلهٔ حرکت ذرهٔ b را تحت اثر نیروی جاذبهٔ گرانشی ذرهٔ a در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_b &= -\frac{GM_a M_b}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{ab} \\ &= M_b \mathbf{a}_b \end{aligned}$$

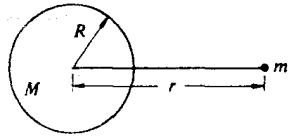
یا

$$\mathbf{a}_b = -\frac{GM_a}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{ab}$$

شتاب هر ذره تحت اثر نیروی گرانش مستقل از جرم ذره است. اما نکتهٔ ظریفی در حذف M_b وجود دارد. ”جرم“ (جرم گرانشی) در قانون گرانشی که قدرت برهم‌کنش گرانشی را تعیین می‌کند از نظر عملیاتی با ”جرمی“ (جرم لختی) که لختی را در قانون دوم نیوتون مشخص می‌سازد متمایز است. دلیل متناسب بودن جرم گرانشی با جرم لختی برای همهٔ اجسام، یکی از بزرگترین اسرار فیزیک است. اما، وجود این تناسب از راه تجربی با دقت خیلی زیاد (تقریباً یک قسمت در 10^{11}) تأیید شده است، در این باره در فصل ۸ بیشتر صحبت خواهیم کرد.



شکل ۲-۲۸



شکل ۲-۲۷

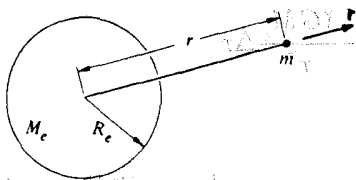
نیروی گرانشی یک کره. قانون گرانش فقط در مورد ذرات به کار می‌رود. چگونه می‌توانیم نیروی گرانشی وارد بر یک ذره از طرف جسم گسترده‌ای مانند زمین را پیدا کنیم؟ خوشبختانه، نیروی گرانشی از قانون برهم‌نهی پیروی می‌کند: نیروی مربوط به مجموعه‌ای از ذرات، مجموع برداری نیروهای اعمال شده توسط هر یک از ذرات به‌طور جداگانه است. این امر به ما امکان می‌دهد تا یک جسم را به‌طور نظری به مجموعه‌ای از عناصر کوچک‌کی که می‌توانند به‌عنوان ذرات در نظر گرفته شوند تقسیم کنیم (شکل ۲-۲۷). با استفاده از حساب انتگرال می‌توانیم نیروهای همه ذرات را جمع کنیم. این روش در یادداشت ۱ + ۲ برای محاسبه نیروی بین یک ذره به جرم m و یک پوسته نازک کروی یکنواخت به جرم M و به شعاع R به کار برده شده است. نتیجه چنین است

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad r > R$$

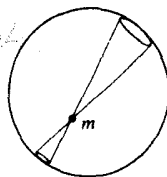
$$\mathbf{F} = 0 \quad r > R$$

که در آن r فاصله مرکز پوسته تا ذره است. اگر ذره در خارج پوسته قرار داشته باشد (شکل ۲-۲۸) نیرو برابر است با حالتی که فرض کنیم همه جرم پوسته در مرکزش متمرکز باشد.

دلیل از بین رفتن نیروی گرانشی در داخل پوسته را می‌توان از برهان ساده‌ای که نیوتون مطرح کرده است دریافت. دو عنصر جرمی کوچک را در نظر بگیرید که به وسیله یک سطح مخروطی که رأس آن روی m فرض می‌شود مشخص شده‌اند (شکل ۲-۲۹). مقدار جرم در هر عنصر با مساحت سطح آن متناسب است. مساحت با مجذور فاصله افزایش می‌یابد اما، بزرگی نیرو با (مجذور فاصله/۱) تغییر می‌کند. بنابراین، نیروهای دو عنصر جرمی مساوی و مختلف‌الجهت‌اند و یکدیگر را خنثی می‌کنند. نیروی کل وارد بر m صفر است، زیرا همه عناصر پوسته را بدین طریق می‌توانیم با یکدیگر جفت کنیم. یک کره جامد یکنواخت را می‌توان چون پوسته‌های کروی و نازکی دانست، و به این نتیجه رسید که رفتار گرانشی کره درست مانند این است که تمام جرم آن در مرکز متمرکز شده باشد. این نتیجه همچنین وقتی که چگالی کره با شعاع تغییر می‌کند نیز برقرار است، مشروط بر اینکه توزیع جرم دارای تقارن کروی باشد (شکل ۲-۳۰)، به طوری که با تقریب خوبی نیروی گرانشی زمین برای جرم m در فاصله r قرار دارد عبارت است از



شکل ۲-۳۰



شکل ۲-۲۹

$$\mathbf{F} = -\frac{GM_e m}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad r \geq R_e$$

M_e جرم زمین و R_e شعاع آن است.

در سطح زمین، نیروی گرانشی چنین است

$$\mathbf{F} = -\frac{GM_e m}{R_e^2} \hat{\mathbf{r}}$$

شتاب مربوط به گرانش برابر است با

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

$$= -\frac{GM_e}{R_e^2} \hat{\mathbf{r}}$$

همان طوری که انتظار داریم شتاب مستقل از m است. GM_e/R_e^2 را معمولاً با g نشان می دهند. گاهی

g به صورت برداری به طرف مرکز زمین کشیده می شود

$$\mathbf{g} = -\frac{GM_e}{R_e^2} \hat{\mathbf{r}}$$

از نظر عددی، $|g|$ تقریباً برابر است با $32 \text{ ft/s}^2 \approx 980 \text{ cm/s}^2 = 9.8 \text{ m/s}^2$.

طبق قرارداد، g را معمولاً برای شتاب رو به پایین یک جسم که نسبت به سطح زمین در نظر گرفته

می شود، به کار می برند. این شتاب با شتاب گرانشی حقیقی به علت دوران زمین کمی فرق می کند، و در

فصل ۸ به این نکته برمی گردیم. g تقریباً به نسبت پنج قسمت در هزار از استوا تا قطب افزایش می یابد.

تقریباً نصف این تغییر ناشی از تخت بودن زمین در حوالی قطبین است و بقیه از دوران زمین ناشی

می شود. تمرکز موضعی جرم هم بر g اثر دارد؛ تغییراتی در حده قسمت در میلیون برای g غیرعادی نیست.

شتاب گرانشی با افزایش ارتفاع کاهش می یابد. با دایفرانسیل گرفتن از رابطه $g(r) = GM_e/r^2$

این اثر را می توان تخمین زد. داریم

$$\begin{aligned}\Delta g(r) &= \frac{dg}{dr} \Delta r = -\frac{2GM_e}{r^3} \Delta r \\ &= -\frac{2g}{r} \Delta r\end{aligned}$$

تغییر نسبی g با ارتفاع چنین است

$$\frac{\Delta g}{g} = -\frac{2\Delta r}{r}$$

در سطح زمین، $r = 6 \times 10^6 \text{ m}$ است و به ازای ۳ متر افزایش ارتفاع، g به اندازه یک قسمت در میلیون کاهش می‌یابد.

وزن. وزن یک جسم را در سطح زمین برابر با نیروی گرانشی اعمال شده از سوی زمین بر آن تعریف می‌کنیم. در سطح زمین وزن جرم m چنین است

$$\begin{aligned}\mathbf{W} &= -G \frac{M_e m}{R_e^2} \hat{\mathbf{r}} \\ &= mg\end{aligned}$$

یکای وزن در (SI) نیوتون، در (cgs) دین و در دستگاه انگلیسی پوند است. از آنجا که $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ است، وزن یک کیلوگرم جرم برابر است با ۹.۸ نیوتون. اتمبیل به وزن 3200 lb ، دارای جرم زیر است

$$m = \frac{W}{g} = \frac{3200 \text{ lb}}{32 \text{ ft/s}^2} = 100 \text{ slug}$$

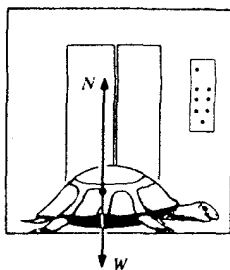
تعریف ما از وزن بدون ابهام است. طبق تعریف، وزن یک جسم تحت تأثیر آن جسم قرار نمی‌گیرد. اما، وزن غالباً به معنی دیگری استفاده می‌شود. در این معنا، بزرگی وزن برابر است با بزرگی نیرویی که از اطراف بر یک جسم وارد می‌شود تا آن را در حالت سکون نگهدارد؛ راستای آن در همان راستای جاذبه گرانشی است. مثال بعدی اختلاف بین این دو تعریف را نشان می‌دهد.

مثال ۹-۲ لاک‌پشت در آسانسور: لاک‌پشتی به جرم M مطابق شکل ۲-۳۱ در آسانسوری که با آهنگ a شتاب می‌گیرد قرار دارد. N نیروی وارد بر آن از طرف آسانسور را پیدا کنید.

نیروهای مؤثر بر لاک‌پشت عبارت‌اند از N و وزن یا نیروی گرانشی حقیقی $W = Mg$. با انتخاب جهت مثبت روبه بالا، داریم

$$N - W = Ma$$

$$N = Mg + Ma$$



شکل ۲-۳۱

$$= M(g + a)$$

این نتیجه دو معنای استفاده شده در مورد وزن را نشان می‌دهد. به این معنی که وزن نیروی گرانشی است، وزن لاک پشت Mg مستقل از حرکت آسانسور است. برعکس، اگر بزرگی وزن را برابر با بزرگی نیروی وارد بر لاک پشت از طرف آسانسور بگیریم، وزن لاک پشت دارای بزرگی $N = M(g + a)$ است. اگر لاک پشت روی یک نیروسنج ایستاده بود، این نیروسنج وزن N را نشان می‌داد. با این تعریف، وقتی که آسانسور به طرف بالا شتاب می‌گیرد وزن لاک پشت افزایش می‌یابد.

اگر آسانسور به طرف پایین شتاب بگیرد، a منفی و N کمتر از Mg است. اگر شتاب به طرف پایین برابر با g باشد، N صفر می‌شود، و لاک پشت در آسانسور به حالت "معلق" درمی‌آید که در این صورت می‌گویند لاک پشت در حالت بی‌وزنی است. ■

اگرچه هر دو تعریف وزن قابل قبول اند و مورد استفاده قرار می‌گیرند، ولی به طور کلی وزن را به معنی نیروی گرانش حقیقی در نظر خواهیم گرفت. این امر با قرارداد انتساب همه حرکتها به دستگاههای لخت سازگار است و به کمک آن می‌توانیم نیروهای حقیقی وارد بر جسم را متمایز کنیم. اگر شتاب ناشی از گرانش g باشد، نیروی گرانش حقیقی وارد بر جسمی به جرم m برابر $W = mg$ است.

این تعریف وزن یک اشکال کوچک هم دارد. همان طوری که در مثال قبلی دیدیم، نیروسنجی در یک دستگاه شتابدار مستقر شده است نمی‌تواند مقدار mg را نشان دهد. قبلاً نیز متذکر شدیم که دستگاههای در حال سکون در سطح زمین به خاطر دوران زمین، شتاب کوچکی دارند. به طوری که نیروسنج نیروی گرانش حقیقی وارد بر یک جرم را نشان نمی‌دهد. اما این اثر کوچک است و ما سطح زمین را در حال حاضر به عنوان یک دستگاه لخت در نظر می‌گیریم.

میدان گرانشی. نیروی گرانشی وارد بر ذره b از طرف ذره a چنین است

$$\mathbf{F}_b = -\frac{GM_a M_b}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{ab}$$

که در آن بردار یکه‌ای است که جهت آن از a به طرف b است. نسبت \mathbf{F}_b/M_b که مستقل از M_b است، میدان گرانشی حاصل از M_b نامیده می‌شود. اگر این میدان را با G_a نشان دهیم داریم

$$\begin{aligned} G_a &= \frac{\mathbf{F}_b}{M_b} \\ &= -G \frac{M_a}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{ab} \end{aligned}$$

به‌طورکلی، اگر میدان گرانشی در نقطه‌ای از فضا G باشد، نیروی گرانشی وارد بر جرم M در آن نقطه عبارت است از

$$\mathbf{F} = M\mathbf{G}$$

بعد میدان گرانش همان بعد شتاب است که از تقسیم نیرو بر جرم به‌دست می‌آید. شتاب جرم M برابر میدان گرانشی G با رابطه زیر داده می‌شود

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a}$$

$$= M\mathbf{G}$$

یا

$$\mathbf{a} = \mathbf{G}$$

چنانکه می‌بینیم، میدان گرانشی در هر نقطه از نظر عددی برابر است با شتاب گرانشی که جسم در آن نقطه به‌دست آورده است. برای مثال، میدان گرانشی زمین برابر g است.

درحال حاضر میدان گرانشی را می‌توانیم مفهومی ریاضی بدانیم که به‌ما امکان می‌دهد تا نظر خود را روی منبع جاذبه گرانشی متمرکز سازیم. اما، مفهوم میدان در فیزیک دارای اهمیت گسترده‌تری است. اواخر، خواص دینامیکی میدان گرانشی فقط از جنبه نظری آن جالب توجه بود، زیرا اثرات آن کوچکتر از آن بود که قابل مشاهده باشد. اما، درحال حاضر کوششهای تجربی زیادی در جستجوی ویژگیهای دینامیکی امواج گرانشی و سیاهچاله‌ها در جریان است.

نیروی الکتروستاتیکی. در اینجا تنها اشاره گذرا به نیروی الکتروستاتیکی می‌کنیم، زیرا بهتر است بررسی کامل آن را به مطالعه دقیقتر الکتروستاتیک و مغناطیس ماکول کنیم. خصلت نمایان نیروی الکتروستاتیکی بین دو ذره این است که مانند گرانش یک نیروی مرکزی متناسب با عکس مجذور فاصله است. این نیرو بستگی به یک خاصیت اساسی ذره به‌نام بار الکتریکی q دارد. دو نوع بار الکتریکی

مختلف داریم: بارهای همنام یکدیگر را دفع و بارهای ناهمنام یکدیگر را جذب می‌کنند. به خاطر سهولت تشخیص دو نوع مختلف بار الکتریکی، یک علامت جبری به q اختصاص می‌دهیم، و به این ترتیب صحبت از بارهای مثبت و منفی می‌کنیم. نیروی الکتروستاتیکی F_b وارد بر بار q_b از طرف بار q_a طبق قانون کولن تعیین می‌شود

$$\mathbf{F}_b = k \frac{q_a q_b}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{ab}$$

که در آن k ضریب تناسب و $\hat{\mathbf{r}}_{ab}$ بردار یکه‌ای در جهت خط واصل از a به طرف b است. اگر q_b و q_a هر دو منفی یا مثبت باشند، نیرو دافعه است. ولی اگر بارها دارای علامت مختلف باشند \mathbf{F}_b جاذبه است. در دستگاه بین‌المللی (SI) یکای بار کولن است که با C نشان داده می‌شود. (کولن برحسب جریان الکتریکی و نیروی مغناطیسی تعریف می‌شود.) در این دستگاه k از طریق آزمایش برابر $k = 8.99 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ تعیین شده است.

در مقایسه با میدان گرانشی، میدان الکتریکی \mathbf{E} را می‌توان نیروی الکتریکی وارد بر واحد بار جسم تعریف کرد. میدان الکتریکی ناشی از بار q مستقر در مبدأ در نقطه‌ای با بردار مکان \mathbf{r} عبارت است از

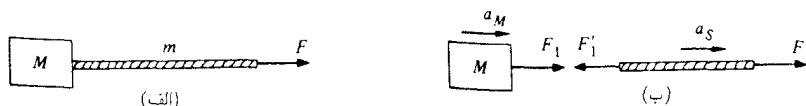
$$\mathbf{E} = k \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

نیروهای تماسی. منظور از نیروهای تماسی، نیروهایی هستند که در اثر برهم‌کنشهای برد کوتاه اتمی یا مولکولی بین اجسام مبادله می‌شوند. در این زمینه مثالهایی از قبیل کشش سیم، نیروی اصطکاک لغزشی سطح، و نیروی چسبندگی بین یک جسم متحرک و یک شاره قابل ذکرند. یکی از موفقیت‌های فیزیکدانان قرن بیستم این است که امروزه این نیروها را می‌توان برحسب خواص اساسی اجسام توصیف کرد. اما، روش ما برخواص تجربی این نیروها و فونونی که در مسائل فیزیکی آنها سروکار داریم تأکید خواهد داشت و تنها به اختصار به منشأ میکروسکوپی آنها اشاره خواهیم کرد.

نیروی کشش نخ. با توجه به احساس اولیه‌ای که از نیروی "نخ" داریم، چنین نیرویی را امری مسلم می‌دانیم. در مثال زیر این مفهوم به طور دقیقتری تشریح شده است.

مثال ۲-۱۰ نخ متصل به وزنه ۳: فرض کنیم مکعبی به جرم M در فضای تهی توسط نخ به جرم m کشیده می‌شود. مطابق شکل ۲-۳۲ (الف) نیروی F به نخ وارد شده است. نیرویی که این نخ به مکعب "منتقل می‌کند" چقدر است؟

شکل ۲-۳۲ (ب) نمودار نیرو را نشان می‌دهد. F_1 نیروی وارد بر مکعب از طرف نخ، F_1' نیروی وارد از طرف مکعب به نخ، a_M شتاب مکعب، و a_S شتاب نخ است. معادلات حرکت چنین‌اند



شکل ۲-۳۲

$$F_1 = M a_M$$

$$F - F_1' = m a_S$$

اگر طول نخ غیر قابل تغییر فرض شود، با همان آهنگ مکعب شتاب می‌گیرد و معادله قیدی $a_S = a_M$ حاصل می‌شود. به علاوه به موجب قانون سوم نیوتون داریم $F_1 = F_1'$. برای پیدا کردن شتاب، همان‌گونه که انتظار داریم، به دست می‌آید

$$a = \frac{F}{M + m}$$

و

$$F_1 = F_1'$$

$$= \frac{M}{M + m} F$$

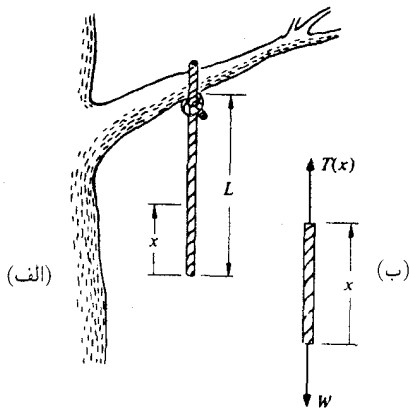
این نیروی وارد بر مکعب از F کمتر است؛ یعنی نخ تمام نیروی وارد شده را منتقل نمی‌کند. اما، اگر جرم نخ در مقایسه با جرم مکعب قابل اغماض باشد، با تقریب خوبی $F_1 = F$ می‌شود. ■

می‌توان چنین تصور کرد که نخ از قسمتهای کوچکی ساخته شده است که از طریق نیروهای تماسی باهم برهم‌کنش دارند. هر قسمت، قسمتهای دو طرف خود را می‌کشد، و به موجب قانون سوم نیوتون توسط قسمتهای مجاور نیز کشیده می‌شود. بزرگی نیروی عمل‌کننده بین قسمتهای مجاور هم را کشش می‌نامند. برای کشش هیچ جهتی وجود ندارد. مطابق شکل ۲-۳۳ (ب) کشش در A ، F و در B ، F' است.

هر چند نخ ممکن است تحت کشش قابل ملاحظه‌ای قرار گیرد (مثل تارهای یک گیتار)، ولی اگر این کشش یکنواخت باشد، نیروی وارد بر هر قسمت کوچک از نخ برابر صفر است و آن قسمت در حال سکون می‌ماند مگر اینکه نیروی خارجی بر آن وارد شود. اگر نیروهای خارجی به این قسمت وارد شود یا اگر نخ شتاب داشته باشد، به‌طور کلی کشش در امتداد آن تغییر می‌کند. این موضوع را در مثالهای



شکل ۲-۳۳



شکل ۲-۳۴

۱۱-۲ و ۱۲-۲ می بینید.

مثال ۱۱-۲ طناب آویزان: طناب یکنواختی به جرم M و به طول L از شاخه درختی آویزان است. کشش را در فاصله x از انتهای آن پیدا کنید.

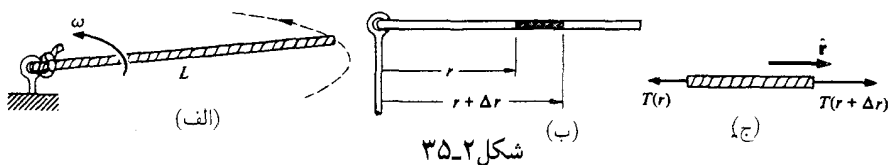
نمودار نیرو برای قسمت پایین طناب در شکل ۲-۳۴ (ب) نشان داده شده است. این قسمت به وسیله نیرویی به بزرگی $T(x)$ کشیده می شود که در آن $T(x)$ کشش در x است، نیروی روبه پایین وارد بر طناب همان وزن آن $W = Mg(x/L)$ است. نیروی کل وارد بر این قسمت صفر است، زیرا در حالت سکون قرار دارد. بنابراین

$$T(x) = \frac{Mg}{L}x$$

در پایین طناب کشش صفر است، در حالی که در بالای آن کشش برابر است با کل وزن طناب Mg . ■ مثال بعدی با استفاده مستقیم از قانون دوم نیوتون قابل حل نیست. اما با در نظر گرفتن هر قسمت کوچک از دستگاه به عنوان یک ذره، و با استفاده از حساب دیفرانسیل برای حدگیری، می توان معادله دیفرانسیلی یافت که جواب مسئله را به دست دهد. این روش به قدری مفید است که همواره در فیزیک به کار می رود.

مثال ۱۲-۲ طناب چرخان: طناب یکنواختی مطابق شکل ۲-۳۵ (الف) به جرم M و به طول L که از یک سر به گیره ای محکم شده است با سرعت زاویه ای یکنواخت ω به دور خود می چرخد. کشش طناب در فاصله r از گیره چقدر است؟ از اثرگرانش صرف نظر کنید.

قسمت کوچکی از طناب بین r و $r + \Delta r$ را در نظر بگیرید (شکل ۲-۳۵ ب). طول این قسمت Δr و جرم آن $\Delta m = M\Delta r/L$ و به دلیل حرکت دایره ای دارای شتاب شعاعی است. بنابراین،



شکل ۳۵-۲

نیروهایی که دو انتهای این قسمت را می‌کشند نمی‌توانند برابر باشند، و نتیجه می‌گیریم که این کشش باید با r تغییر کند.

نیروی وارد بر این قسمت روبه داخل و برابر $T(r)$ است (کشش در r) و نیروی روبه خارج $T(r + \Delta r)$ است (شکل ۳۵-۲ ج). این قسمت از طناب را یک ذره فرض کنید، شتاب شعاعی به طرف داخل $r\omega^2$ است [این نکته ممکن است ایجاد اشتباه کند، زیرا به همین اندازه منطقی است که شتاب را برابر $(r + \Delta r)\omega^2$ بگیریم. اما، به زودی حد $\Delta r \rightarrow 0$ را خواهیم گرفت، و با این حد هر دو عبارت به یک نتیجه خواهند رسید].

معادله حرکت این قسمت از طناب چنین است

$$\begin{aligned} T(r + \Delta r) - T(r) &= -(\Delta m)r\omega^2 \\ &= -\frac{Mr\omega^2\Delta r}{L} \end{aligned}$$

مسئله پیدا کردن $T(r)$ است، اما هنوز ما برای انجام این عمل آماده نیستیم. به هر حال، با تقسیم معادله آخری بر Δr و گرفتن حد آن وقتی که $\Delta r \rightarrow 0$ ، می‌توانیم رابطه کاملی برای dT/dr پیدا کنیم.

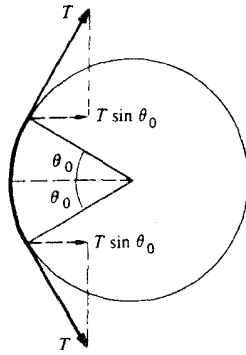
$$\begin{aligned} \frac{dT}{dr} &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{T(r + \Delta r) - T(r)}{\Delta r} \\ &= -\frac{Mr\omega^2}{L} \end{aligned}$$

برای پیدا کردن کشش، از رابطه زیر انتگرال می‌گیریم

$$\begin{aligned} dT &= -\frac{M\omega^2}{L}r dr \\ \int_{T_0}^{T(r)} dT &= -\int_0^r \frac{M\omega^2}{L}r dr \end{aligned}$$

T کشش در $r = 0$ است.

$$T(r) - T_0 = -\frac{M\omega^2}{L} \frac{r^2}{2}$$



شکل ۲-۳۶

$$T(r) = T_0 - \frac{M\omega^2}{2L}r^2$$

برای تعیین T_0 به مقداری اطلاعات اضافی نیاز داریم. چون انتهای طناب در $r = L$ آزاد است، کشش در آنجا باید صفر باشد، پس داریم

$$T(L) = 0 = T_0 - \frac{1}{2}M\omega^2L$$

از این رو $T_0 = \frac{1}{2}M\omega^2L$ است، و جواب نهایی را می‌توان به صورت زیر نوشت

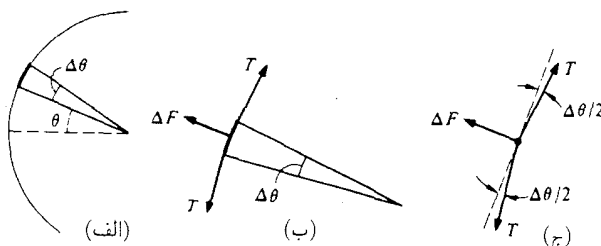
$$T(r) = \frac{M\omega^2}{2L}(L^2 - r^2)$$

وقتی که از قرقره‌ای به منظور تغییر جهت نیروی یک طناب تحت کشش استفاده می‌شود، نیروی واکنشی به قرقره وارد می‌شود. همان طوری که هر ملوانی می‌داند این نیرو به کشش و زاویه انحراف طناب بستگی دارد. حل تفصیلی این مسئله، نمایش دیگری از کاربرد حساب دیفرانسیل در مسائل فیزیکی است.

مثال ۲-۱۳ قرقره‌ها: نخ با کشش ثابت T به اندازه زاویه $2\theta_0$ توسط قرقره ثابت بدون اصطکاکی منحرف شده است (شکل ۲-۳۶). نیروی وارد بر قرقره چقدر است؟

واضح است که بزرگی این نیرو $2T \sin \theta_0$ است. برای اثبات این مطلب نیروی وارد بر هر عنصر نخ را پیدا کرده، سپس آنها را به صورت برداری جمع می‌کنیم.

قسمتی از نخ بین θ و $\theta + \Delta\theta$ را در نظر بگیرید. نمودار نیرو در شکل ۲-۳۷ (ب) نشان داده شده است. ΔF نیروی وارد از قرقره بر نخ و به طرف خارج است. کشش نخ ثابت است، اما نیروهای T در



شکل ۲-۳۷

دو طرف این عنصر موازی نیستند. از آنجا که به زودی حد $\Delta\theta \rightarrow 0$ را حساب خواهیم کرد، می‌توانیم این عنصر را به عنوان یک ذره در نظر بگیریم. در حالت تعادل، نیروی کل صفر است. پس داریم (شکل ۲-۳۷ ج)

$$\Delta F - 2T \sin \frac{\Delta\theta}{2} = 0$$

برای $\Delta\theta$ کوچک، $\sin(\Delta\theta/2) \approx \Delta\theta/2$ است و در نتیجه

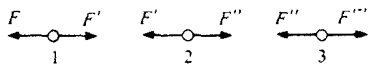
$$\Delta F = 2T \frac{\Delta\theta}{2} = T \Delta\theta$$

بنابراین، این عنصر یک نیروی شعاعی به طرف داخل و به اندازه $T \Delta\theta$ نیرو بر قرقره اعمال می‌کند. این عنصر در زاویه θ نیروی $(T \Delta\theta) \cos \theta$ را در جهت x وارد می‌کند (شکل ۲-۳۸). نیروی کل در جهت x برابر است با $\sum T \cos \theta \Delta\theta$ ، که این مجموع روی همه عناصر نخ است که با قرقره در تماس‌اند. در حد که $\Delta\theta \rightarrow 0$ ، این مجموع به صورت انتگرال درمی‌آید بنابراین نیروی کل در جهت x برابر است با

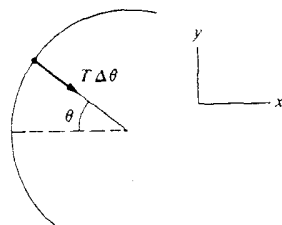
$$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} T \cos \theta d\theta = 2T \sin \theta_0.$$

کشش و نیروهای اتمی. نیروی وارد بر هر عنصر تار در حالت تعادل صفر است. با وجود این، اگر کشش خیلی بزرگ باشد، تار پاره خواهد شد. با بررسی تار از دیدگاه اتمی، این موضوع از نظر کیفی قابل درک است. شکل مطلوب این حالت را می‌توان به صورت یک نخ یا تک زنجیره‌ای طویل از مولکولها تصور کرد. فرض کنید که نیروی F بر مولکول ۱ در انتهای تار وارد شده است. نمودار نیروها برای مولکولهای ۱ و ۲ در شکل ۲-۳۹ نشان داده شده است. در حالت تعادل $F = F'$ و $F = F''$ است، پس داریم $F'' = F$ می‌بینیم که تار نیروی F را "انتقال" می‌دهد. برای درک چگونگی انجام این عمل نیاز به بررسی ماهیت نیروهای بین مولکولی داریم.

از نظر کیفی، همان طوری که در شکل ۲-۴۰ نشان داده شده است، نیروی بین مولکولها بستگی



شکل ۲-۳۹

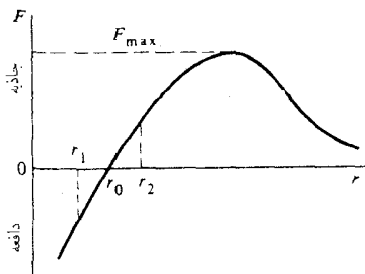


شکل ۲-۳۸

به فاصله (r) بین آنها دارد. نیروی بین مولکولی در فواصل کوتاه دافعه، در فاصله بخصوصی (r_0) صفر، و در حالت $r > r_0$ جاذبه است. برای مقادیر بزرگ r ، نیرو به سمت صفر میل می‌کند. شکل ۲-۴۰ هیچ‌گونه مقیاسی ندارد، ولی r_0 اصولاً از مرتبه چند آنگستروم $(1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m})$ است.

وقتی که هیچ‌گونه نیرویی وارد نشود، مولکولها باید به فاصله r_0 از یکدیگر قرار گیرند. در غیر این صورت نیروهای بین مولکولی تار را منقبض یا منبسط می‌کنند. وقتی تار را می‌کشیم مولکولها به آرامی از هم دور می‌شوند و مثلاً به وضع $r = r_2$ قرار می‌گیرند، یعنی جایی که نیروهای جاذبه بین مولکولی با نیروی وارد متعادل می‌شوند. و برآیند نیروهای وارد بر هر مولکول صفر می‌شود. اگر این تار مانند یک میله فلزی سخت باشد، علاوه بر کشیدن می‌توانیم بر آن فشاری نیز وارد کنیم. فشار باعث می‌شود که مولکولها به آرامی به طرف هم مثلاً تا $r = r_1$ حرکت کنند، که در این صورت نیروهای دافعه بین مولکولی با نیروی وارد شده متعادل می‌شوند. تغییر طول، بستگی به شیب، منحنی نیروی بین اتمی در r_0 دارد. هرچه شیب منحنی بیشتر باشد کش آمدن تار با یک کشش معلوم کمتر است.

همان طوری که در شکل نشان داده شده است، نیروهای جاذبه بین مولکولی دارای مقدار بیشینه F_{\max} است. اگر کشش وارد شده بزرگتر از F_{\max} باشد، نیروی بین مولکولی ضعیفتر از آن است که بتواند تعادل را دوباره برقرار سازد. در این صورت مولکولها به جدا شدن خود ادامه می‌دهند تا آنجا که تار پاره شود.



شکل ۲-۴۰

برای یک تار واقعی یا میله، نیروهای بین مولکولی به صورت شبکه‌ای از اتمهای سه بعدی عمل می‌کنند. مقاومت در برابر گسستگی برای اغلب مواد به طور قابل ملاحظه‌ای از حدی که توسط F_{\max} معین شده کمتر است. گسستگی در نقاط ضعیف یا "نقص" های شبکه در آنها ترتیب مولکولی از حالت عادی خارج می‌شود، اتفاق می‌افتد. "تازه" های فلزی میکروسکوپی تقریباً بدون نقص به نظر می‌رسند و در مقابل گسستگی مقاومتی نزدیک به مقدار بیشینه نظری از خودشان می‌دهند.

نیروی عمودی. نیروی وارد از طرف سطح به جسمی را که در تماس با آن است می‌توان به دو مؤلفه تجزیه کرد، یکی عمود بر سطح و دیگری مماس بر آن. مؤلفه عمودی را نیروی عمودی و مؤلفه مماسی را نیروی اصطکاک می‌نامند.

منشأ نیروی عمودی شبیه به منشأ کشش در تار است. وقتی که کتابی را روی میزی قرار می‌دهیم، مولکولهای کتاب نیروهایی به طرف پایین بر مولکولهای میز وارد می‌سازند. مولکولهای تشکیل دهنده لایه میز به طرف پایین حرکت می‌کنند تا اینکه دافعه مولکولهای پایین، نیروی وارد از طرف کتاب را به حالت تعادل درآورند. از دیدگاه اتمی، هیچ سطحی به طور کامل صلب نیست. گرچه تراکم همواره اتفاق می‌افتد، ولی غالباً کمتر از آن است که احساس شود، و از آن چشمپوشی خواهیم کرد و به طور کلی سطحها را به صورت صلب در نظر می‌گیریم.

نیروی عمودی وارد بر یک جسم، که به طور کلی با N نشان داده می‌شود، دارای خواص ساده زیر است: برای جسمی که روی یک سطح در حالت سکون است، N مساوی و مخالف برابند همه نیروهایی است که در جهت عمود بر سطح بر آن جسم وارد می‌شوند. برای مثال، وقتی که شما بدون حرکت ایستاده‌اید، نیروی عمودی اعمال شده از طرف زمین برابر با وزن شماست. اما، وقتی که قدم می‌زنید، نیروی عمودی با شتابگیری شما به طرف بالا و پایین، کم و زیاد می‌شود.

اصطکاک. اصطکاک را نمی‌توان به وسیله یک فرمول ساده توصیف کرد. اما درک مکانیک ماکروسکوپی، بدون آگاهی از خواص اصطکاک، مشکل خواهد بود.

اصطکاک وقتی به وجود می‌آید که سطح یک جسم در امتداد سطح جسم دیگر حرکت کرده و یا بکوشد که حرکت کند. بزرگی نیروی اصطکاک به طریق پیچیده‌ای با ماهیت سطوح و سرعت نسبی آنها تغییر می‌کند. در واقع تنها چیزی که همواره می‌توان درباره اصطکاک گفت این است که اصطکاک با حرکتی که در صورت نبود اصطکاک اتفاق می‌افتد مخالفت می‌کند. برای مثال، فرض کنید می‌خواهیم کتابی را روی یک میز بکشیم. اگر به آرامی بکشیم، کتاب به حالت سکون باقی می‌ماند و نیروی اصطکاک با نیروی مماسی که به کار می‌بریم مساوی و مختلف‌الجهت است. در این حالت، نیروی اصطکاک برابر است با نیروی لازم برای ساکن نگه داشتن کتاب. اما، نیروی اصطکاک نمی‌تواند به طور نامحدودی افزایش یابد. اگر ما نیروی کافی وارد کنیم، کتاب شروع به لغزیدن می‌کند. برای بسیاری از سطحها حداکثر

مقدار اصطکاک برابر با μN است، که در آن N نیروی عمودی و μ ضریب اصطکاک است.

وقتی که جسمی روی یک سطح می لغزد، نیروی اصطکاک در جهت مخالف سرعت لحظه‌ای و دارای سطح بزرگ μN است. به طریق تجربی معلوم شده است که نیروی اصطکاک لغزشی، وقتی که اجسام شروع به لغزیدن می‌کنند، کاهش می‌یابد. اما در بیشتر مواقع از این اثر صرف‌نظر خواهیم کرد. برای دو سطح معین نیروی اصطکاک لغزشی اساساً مستقل از بزرگی سطح تماس است.

ممکن است تعجب کنیم که اصطکاک مستقل از بزرگی سطح تماس است. علتش آن است که سطح واقعی تماس در مقیاس اتمی کسر ناچیزی از کل مساحت سطح است. اصطکاک، به خاطر نیروهای بین اتمی در نواحی تماس اتمی اتفاق می‌افتد. مساحت هندسی نسبی تماس اتمی متناسب با حاصل تقسیم نیروی عمودی بر مساحت هندسی است. اگر نیروی عمودی دو برابر شود، مساحت تماس اتمی نیز دو برابر، نیروی اصطکاک هم دو برابر بزرگ می‌شود. اما، اگر مساحت هندسی دو برابر شود، ولی نیروی عمودی ثابت بماند، مساحت نسبی در تماس اتمی نصف می‌شود و مساحت واقعی تماس اتمی (و در نتیجه نیروی اصطکاک) ثابت باقی می‌ماند. (اجسام غیر صلب، مانند لاستیک اتومبیل وضعیت پیچیده‌تری دارند. برای شتاب‌گیری و ترمز خوب، لاستیکهای پهن عموماً از لاستیکهای باریک بهترند.) به طور خلاصه، نیروی اصطکاک f را چنان در نظر می‌گیریم که خواصی به صورت زیر دارد:

۱. برای اجسامی که در حرکت نسبی نیستند:

$$0 \leq f \leq \mu N$$

f با حرکتی که در صورت نبود اصطکاک اتفاق می‌افتد، مخالفت می‌کند.

۲. برای اجسام در حال حرکت نسبی

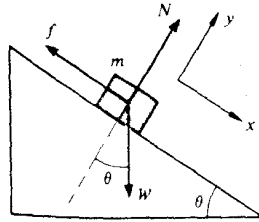
$$f = \mu N$$

f در جهت مخالف سرعت نسبی است.

مثال ۱۴-۲ جسم متکی به گوه با اصطکاک: مکعبی به وزن m بر روی گوه ثابتی با زاویه θ قرار گرفته است (شکل ۲-۴۱). ضریب اصطکاک μ است. (برای مکعبهای چوبی، μ از مرتبه ۰٫۲ تا ۰٫۵ است.) مقدار زاویه θ را که به ازای آن مکعب شروع به لغزیدن می‌کند، بیابید.

وقتی اصطکاک نباشد مکعب به طرف پایین می‌لغزد؛ از این رو نیروی اصطکاک f در جهت بالاست. با انتخاب محورهای مختصات مطابق شکل داریم

$$m \ddot{x} = W \sin \theta - f$$



شکل ۲-۴۱

$$m \ddot{y} = N - W \cos \theta$$

$$= 0$$

وقتی که لغزش شروع می شود، f حداکثر مقدار خود (μN) را دارد، و $\ddot{x} = 0$ است. آنگاه از معادلات بالا نتیجه می شود

$$W \sin \theta_{\max} = \mu N$$

$$W \cos \theta_{\max} = N$$

بنابراین

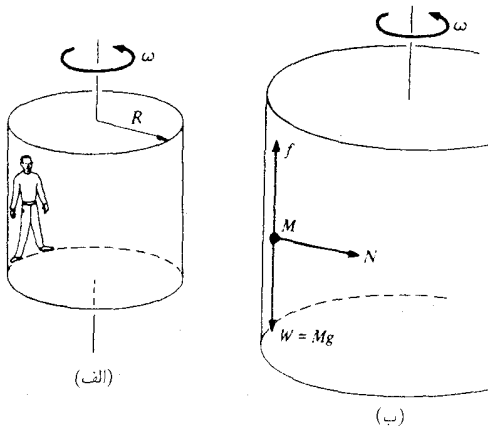
$$\tan \theta_{\max} = \mu$$

دقت کنید که وقتی زاویه گوه را به آرامی از صفر افزایش دهیم، بزرگی نیروی اصطکاک هم از صفر تا حداکثر مقدار خود μN شروع به زیاد شدن می کند، زیرا قبل از اینکه مکعب شروع به لغزیدن کند، داریم

$$f = W \sin \theta \quad \theta \leq \theta_{\max}$$

مثال ۲-۱۵ گردونه وحشت: گردونه وحشت یک وسیله سرگرمی چرخان در پارک بازیهاست که شامل استوانه بزرگ قائمی با سرعت چرخشی زیاد است که اگر شخصی در داخل آن پشت به دیواره و چسبیده به آن ایستاده باشد وقتی که کف آن جدا شود همچنان متصل به دیوار می ماند. حداقل سرعت زاویه ای یکتواخت ω چقدر باید باشد تا کف گردونه بتواند بدون خطر جدا شود (شکل ۲-۴۱).

فرض کنید شعاع استوانه R و جرم شخص M است. اگر μ ضریب اصطکاک بین استوانه و M باشد، نیروهای وارد بر M مطابق شکل ۲-۴۲ (ب) عبارت اند از W وزن، f نیروی اصطکاک، و N



شکل ۲-۴۲

قائم وارد از طرف دیوار. شتاب شعاعی به طرف محور برابر $R\omega^2$ است و معادله شعاعی حرکت چنین است

$$N = MR\omega^2$$

به موجب قانون اصطکاک ایستایی

$$f \leq \mu N = \mu MR\omega^2$$

چون باید M در تعادل قائم باشد، داریم

$$f = Mg$$

و در نتیجه

$$Mg \leq \mu MR\omega^2$$

یا

$$\omega^2 \geq \frac{g}{\mu R}$$

کمترین مقدار ω که در این عمل لازم است

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{\mu R}}$$

ضریب اصطکاک μ برای پارچه روی چوب حداقل برابر 0.3 است، و اگر استوانه دارای شعاع 2

متر باشد، $\omega_{\min} = [9.8/0.3 \times 2]^{1/2} = 2 \text{ rad/s}$ می شود. در این صورت استوانه باید با حداقل $\omega/2\pi = 0.3$ دور در ثانیه بچرخد.

چسبندگی

جسمی که از درون مایع یا گازی حرکت می کند، به دلیل تأثیر نیروی چسبندگی ناشی از شاره کند می شود. این نیروی چسبندگی، برخلاف نیروی اصطکاک بین سطوح خشک، با سرعت وابستگی ساده ای دارد یعنی متناسب با سرعت حرکت است. در سرعتهای بالا نیروهای دیگر ناشی از آشفتگی هم وجود دارند و کل نیروی کندکننده وابستگی پیچیده ای با سرعت پیدا می کند. (طراحان اتومبیلهای مسابقه ای برای محاسبه نیروهای کندکننده نیرویی متناسب با مربع سرعت را به حساب می آورند.) اما در بسیاری از موارد عملی، چسبندگی تنها نیروی مهم کندکننده است.

چسبندگی از آنجا ناشی می شود که وقتی جسمی در محیطی حرکت می کند، نیروهایی اعمال می کند که باعث حرکت شاره موجود در طول جسم می شود. بنابه قانون سوم نیوتون، شاره نزدیک نیز یک نیروی عکس العمل بر جسم وارد می کند.

نیروی بازدارنده چسبندگی را می توانیم به شکل زیر بنویسیم

$$F_v = -Cv$$

که در آن C مقداری است ثابت که بستگی به جنس شاره و شکل هندسی جسم دارد. F_v همواره در امتداد خط حرکت است، زیرا متناسب با v است. علامت منفی هم جهت مخالف F_v را نسبت به حرکت نشان می دهد. برای اجسامی با شکل ساده که از میان گاز با فشار پایین حرکت می کنند، C را می توان از اصول اولیه محاسبه کرد. C را به عنوان یک ثابت تجربی در نظر می گیریم.

وقتی تنها نیروی وارد بر جسم، نیروی بازدارنده چسبندگی باشد، معادله حرکت چنین است

$$-Cv = m \frac{dv}{dt}$$

آنچه در اینجا داریم، معادله دیفرانسیلی بر حسب v است. از آنجا که نیرو در امتداد خط حرکت است، فقط بزرگی v تغییر می کند.^۱ و معادله برداری به معادله عددی تبدیل می شود

۱. معمولاً این مسئله به طریق زیر ثابت می شود. از آنجا که $v = v\hat{v}$ آنگاه داریم $dv/dt = dv/dt\hat{v} + v d\hat{v}/dt$ معادله حرکت عبارت است از $-Cv\hat{v} = m dv/dt\hat{v} + mv d\hat{v}/dt$. چون برداریکه است، $d\hat{v}/dt$ بر \hat{v} عمود است. بقیه جملات معادله در جهت \hat{v} قرار می گیرند، به طوری که $d\hat{v}/dt$ باید صفر باشد. عین این نتیجه را می توان از یک بحث ساده فیزیکی نتیجه گرفت که بنابر آن، نیروی واقع در امتداد حرکت می تواند بزرگی سرعت را تغییر دهد ولی جهت آن را نمی تواند.

$$-Cv = m \frac{dv}{dt}$$

یا

$$m \frac{dv}{dt} + Cv = 0$$

حل چنین معادله دیفرانسیلی در فیزیک جزء کارها و وظایف عادی است. بعضی از این معادلات دیفرانسیل خیلی ساده‌اند و مداوم تکرار نیز می‌شوند در نتیجه لازم است با این نوع معادلات و راه حل‌شان آشنایی کامل داشته باشیم. معادله‌ای به شکل $m(dv/dt) + Cv = 0$ یکی از عمومی‌ترین معادلات دیفرانسیل است، مثال زیر شما را با آن کاملاً آشنا خواهد کرد.

مثال ۲-۱۶ حرکت آزاد در محیط چسبنده: جسمی به جرم m با سرعت v در شاره چسبنده‌ای با نیروی بازدارنده Cv رها می‌شود. با فرض اینکه هیچ نیروی دیگری وجود نداشته باشد، حرکت جسم را توصیف کنید.

معادله حرکت چنین است

$$m \frac{dv}{dt} + Cv = 0$$

که می‌توانیم آن را به شکل متعارف زیر بنویسیم

$$\frac{dv}{dt} + \frac{C}{m}v = 0 \quad (1)$$

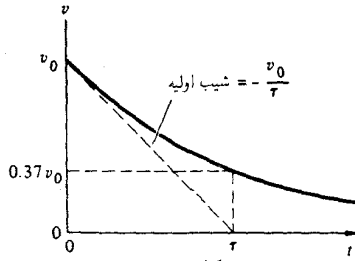
اگر با خواص تابع‌نمایی e^x آشنا باشید، می‌دانید که $(d/dx)e^{ax} = ae^{ax}$ است و یا $(d/dx)e^{ax} - ae^{ax} = 0$. شکل این مسئله نشان می‌دهد که از یک جواب آزمایشی $v = e^{at}$ می‌توان استفاده کرد که در آن a مقدار ثابتی است که باید تعیین شود. $dv/dt = ae^{at}$ که با جایگذاری آن در معادله ۱ نتیجه می‌شود

$$ae^{at} + \frac{C}{m}e^{at} = 0$$

اگر $a = -C/m$ باشد، این معادله همواره برقرار است. از این روی یک جواب چنین است

$$v = e^{-Ct/m}$$

اما، این جواب نمی‌تواند صحیح باشد، زیرا v دارای بُعد سرعت است در حالی که تابع‌نمایی بدون بُعد است. اکنون $v = Ae^{-Ct/m}$ را امتحان می‌کنیم که در آن A مقداری ثابت است. جایگذاری این مقدار در معادله ۱ نتیجه می‌دهد



شکل ۲-۴۳

$$-\frac{C}{m}Ae^{-Ct/m} + \frac{C}{m}Ae^{-Ct/m} = 0$$

که جوابی قابل قبول است. اما A می تواند هر مقدار ثابتی داشته باشد، درحالی که جواب ما باید کاملاً مشخص باشد. برای ارزیابی A باید از شرایط اولیه داده شده استفاده کنیم. شرط اولیه در اینجا، بخشی از اطلاعات معین درباره حرکت در یک زمان خاص است. این مسئله در $t = 0$ و $v = v_0$ است، بنابراین

$$v(t = 0) = Ae^0 = v_0$$

چون $e^0 = 1$ است، پس $A = v_0$ است و جواب کامل عبارت است از

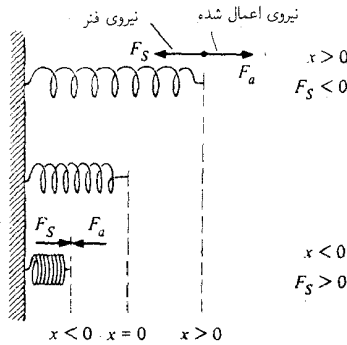
$$v = v_0 e^{-Ct/m}$$

معادله ۱ را باروشی که باید طریقه حدسی نامید حل کردیم، یعنی فقط جواب را حدس زدیم. این معادله بخصوص را همچنین می توان به وسیله انتگرال گیری مرسوم و با استفاده از "جدا کردن متغیرها" به طور معمول حل کرد

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} + \frac{C}{m}v &= 0 \\ \frac{dv}{v} &= -\frac{C}{m}dt \\ \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} &= -\int_0^t \frac{C}{m}dt \end{aligned}$$

به تناظر بین حدها توجه کنید: v سرعت در زمان t و v_0 سرعت در زمان صفر است (شکل ۲-۴۳)

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\frac{C}{m}t$$



شکل ۲-۴۴

$$\frac{v}{v_0} = e^{(-C/m)t}$$

$$v = v_0 e^{-Ct/m}$$

قبل از ترک این مسئله، جواب آن را با جزئیات بیشتری بررسی می‌کنیم. سرعت به صورت نمایی با زمان کاهش می‌یابد. اگر فرض کنیم $\tau = m/c$ باشد، آنگاه داریم $v = v_0 e^{-t/\tau}$. زمان مشخصه است، یعنی زمان لازم برای اینکه سرعت به $e^{-1} = 0.37$ سرعت اصلی خود تنزل کند. ■

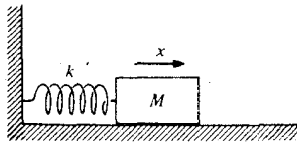
نیروی بازگرداننده خطی: قانون هوک، فنر و حرکت ساده هماهنگ
 در اواسط قرن هفدهم، رابرت هوک کشف کرد که میزان کشیدگی فنر در هر دو حالت جابه‌جایی که انبساط فنر در مثبت و منفی با نیروی وارد شده متناسب است. نیروی اعمال شده از طرف یک فنر کشیده شده به وسیله قانون هوک (F_S) با رابطه زیر داده می‌شود:

$$F_S = -kx$$

در این رابطه k مقداری است ثابت که ثابت فنر نامیده می‌شود و x جابه‌جایی انتهای فنر از وضعیت تعادل آن است. بزرگی F_S به طور خطی با جابه‌جایی افزایش می‌یابد. علامت منفی نشانگر این است که F_S نیرویی بازگرداننده است. نیروی فنر همواره در جهتی است که مایل است فنر را به طول اولیه بازگرداند. نیرویی که از قانون هوک پیروی کند، نیروی بازگرداننده خطی نامیده می‌شود.

اگر فنر توسط نیروی F_a به صورت کشیده درآمده باشد، آنگاه $x > 0$ و F_S منفی و جهت آن به طرف مبدأست (شکل ۲-۴۴).

اگر فنر توسط F_a فشرده شده باشد، آنگاه $x < 0$ و F_S مثبت است.



شکل ۲-۴۵

قانون هوک اساساً تجربی است و برای جابه‌جاییهای بزرگ صادق نیست. به‌طور کلی، از جهاتی، قانون هوک را می‌توانیم چنین بیان کنیم که ”انبساط متناسب است با نیرو، البته تا زمانی که این انبساط وجود داشته باشد“ اما، در این بیان نکته مهمی نادیده گرفته شده است: برای جابه‌جاییهای به اندازه کافی کوچک، قانون هوک نه فقط برای فنر بلکه عملاً برای هر سیستمی که نزدیک به تعادل باشد، دقیقاً برقرار است. به این ترتیب، مسئله کلی حرکت سیستمهایی که تحت اثر نیروی بازگرداننده خطی هستند، بدون تردید در مباحث مختلف فیزیک وجود دارند.

با مطالعه منحنی نیروی بین مولکولی در صفحه ۱۲۱، می‌توان فهمید چرا نیروی بازگرداننده خطی این قدر متداول است. اگر منحنی نیرو در همسایگی نقطه تعادل به صورت خطی باشد، آنگاه نیرو با جابه‌جایی از حالت تعادل متناسب است. این مطلب تقریباً همواره چنین است؛ یک قسمت کوچک هر منحنی با تقریب خوبی عموماً خطی است. فقط در حالت‌های غیرعادی است که منحنی نیرو قسمت خطی ندارد، و نیز آشکار است که تقریب خطی برای جابه‌جاییهای بزرگ صادق نیست. در فصل ۴ به بررسی این مسئله باز خواهیم گشت.

در مثال زیر، حرکت هماهنگ ساده یعنی حرکت یک جسم را تحت اثر نیروی بازگرداننده مورد بررسی قرار می‌دهیم. دوباره به یک معادله دیفرانسیل برمی‌خوریم. مانند معادله‌ای که برای نیروی کندکننده چسبندگی داشتیم، معادله دیفرانسیل مربوط به حرکت هماهنگ ساده به کرات پیش می‌آید و بهتر است خود را آماده کنیم که از همان آغاز کار آن را خوب یاد بگیریم. خوشبختانه جواب آن هم شکل ساده‌ای دارد.

مثال ۲-۱۷ فنر و وزنه-معادله حرکت هماهنگ ساده: وزنه‌ای به جرم M در حالت افقی به یک سر فنری متصل شده است، و سر دیگر فنر هم ثابت است. این وزنه روی سطح افقی بدون اصطکاک قرار دارد (شکل ۲-۴۵). چه حرکتی برای این وزنه امکان دارد؟

از آنجاکه نیروی فنر، تنها نیروی افقی مؤثر بر وزنه است، معادله حرکت چنین می‌شود

$$M \ddot{x} = -kx$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{M} x = 0$$

که در آن x فاصله از وضعیت تعادل است. برای سهولت می توان نوشت

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

این معادله به شکل استاندارد زیر درمی آید

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

باید شکل ریاضی این معادله را به خاطر بیاورید، زیرا در بسیاری از زمینه های مختلف فیزیک ظاهر می شود. این عبارت را معادله حرکت هماهنگ ساده می نامند. بدون مراجعه به نظریه معادلات دیفرانسیل، فقط جواب را می نویسیم

$$x = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

ω را بسامد زاویه ای حرکت می نامند. با جایگذاری آن به سادگی می توان نشان داد که این جواب برای مقادیر اختیاری A و B در معادله اصلی صدق می کند. نظریه معادلات دیفرانسیل می گوید هیچ گونه جواب غیر صفر دیگری وجود ندارد. اما نکته اصلی در اینجا آشنایی با شکل و جواب معادله دیفرانسیل مربوط به حرکت هماهنگ ساده است. از آنجا که فرایند ریاضی محض برای به دست آوردن جواب در اینجا مورد نظر ما نیست، در مثال ۲-۴ راه حل را ارائه خواهیم داد. ■

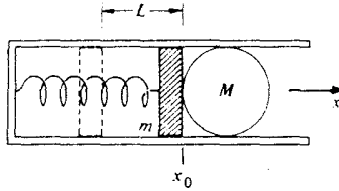
همان طوری که در مثال زیر نشان می دهیم، ثابتهای A و B باید از شرایط اولیه تعیین شوند. نشان خواهیم داد که A و B را با دانستن مکان و سرعت در یک زمان بخصوص می توان پیدا کرد.

مثال ۲-۱۸ تفنگ فتری-مثالی برای نشان دادن شرایط اولیه: پیستون یک تفنگ فتری (تفنگ بادی) به جرم m به یک سر فتری با ثابت نیروی k متصل است. پرتابه این تفنگ، ساچمه ای است به جرم M . پیستون و ساچمه به فاصله L از حالت تعادل به عقب کشیده و ناگهان رها می شوند. سرعت ساچمه را در لحظه جدا شدن از پیستون پیدا کنید. از اصطکاک صرف نظر می شود.

اگر محور x را در جهت حرکت مبدأ آن را در محل تعادل فتر بگیریم، مکان پیستون به وسیله رابطه زیر داده می شود (شکل ۲-۴۶):

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (۱)$$

که در آن $\omega = \sqrt{k/(m + M)}$ است. این معادله تا زمانی که تماس بین ساچمه و پیستون قطع نشده



شکل ۲-۴۶

باشد صادق است. سرعت آن چنین است

$$\begin{aligned} v(t) &= \dot{x}(t) \\ &= \omega A \cos \omega t - \omega B \sin \omega t \end{aligned} \quad (۲)$$

در این جواب دو مقدار ثابت اختیاری A و B وجود دارد، و برای تعیین آنها به دو دسته اطلاعات نیاز داریم. می‌دانیم در $t = 0$ ، وقتی که فنرها می‌شود، مکان و سرعت دستگاه چنین است

$$x(0) = -L$$

$$v(0) = 0$$

با قرار دادن این مقادیر در معادلات ۱ و ۲ داریم

$$\begin{aligned} -L &= x(0) \\ &= A \sin(0) + B \cos(0) \\ &= B \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} 0 &= v(0) \\ &= \omega A \cos(0) - \omega B \sin(0) \\ &= \omega A \end{aligned}$$

از این رو خواهیم داشت

$$B = -L$$

$$A = 0$$

بدین ترتیب، از زمان رها کردن تا زمانی که ساچمه از بیستون جدا می‌شود، حرکت دستگاه با معادلات

زیر مشخص می شود

$$x(t) = -L \cos \omega t \quad (3)$$

$$v(t) = \omega L \sin \omega t \quad (4)$$

تماس بین ساچمه و پیستون، چه وقتی قطع می شود؟ پیستون فقط می تواند به ساچمه فشار دهد ولی نمی تواند آن را بکشد، و زمانی که حرکت پیستون کند می شود، تماس بین آنها از بین رفته و ساچمه با سرعت ثابتی به حرکت ادامه می دهد. از معادله ۴ درمی یابیم که t_m یعنی زمانی که در آن سرعت به حداکثر خود می رسد، از رابطه زیر به دست می آید

$$\omega t_m = \frac{\pi}{4}$$

که با جایگذاری آن در معادله ۳ پیدا می کنیم:

$$\begin{aligned} x(t_m) &= -L \cos \frac{\pi}{4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

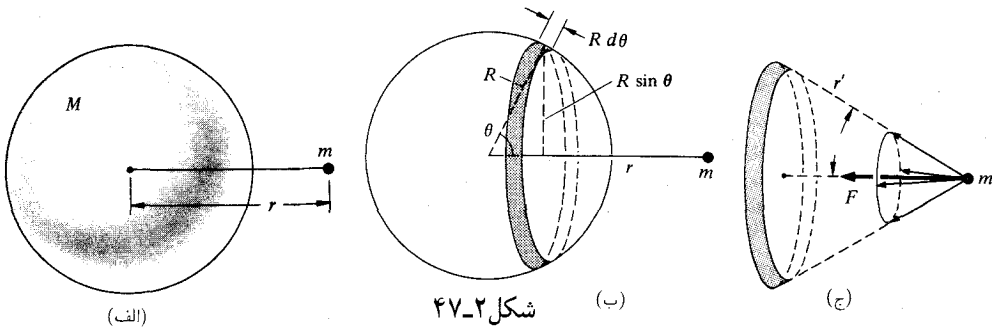
یعنی، همان گونه که انتظار داریم، به محض اینکه فنر از نقطه تعادل خود می گذرد، تماس بین ساچمه و فنر قطع می شود. زیرا نیروی فنر برای $x > 0$ ، حرکت پیستون را کند می کند. از معادله ۴ سرعت نهایی ساچمه چنین است

$$\begin{aligned} v_{\max} &= v(t_m) \\ &= \omega L \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \sqrt{\frac{k}{m+M}} L \end{aligned}$$

■ برای رسیدن به سرعتهای بالا، باید k و L بزرگ و $m + M$ کوچک باشند.

یادداشت ۱-۲: جاذبه گرانشی پوسته کروی. در این یادداشت، نیروی گرانشی بین یک پوسته نازک کروی یکنواخت به جرم M و یک ذره به جرم m واقع در فاصله r از مرکز آن را حساب می کنیم. نشان خواهیم داد که بزرگی این نیرو، اگر ذره در خارج پوسته باشد برابر GMm/r^2 ، و اگر در داخل آن باشد صفر است (شکل ۱۴۷-۲ الف).

برای حل مسئله، این پوسته را به حلقه های باریکی تقسیم می کنیم شکل ۱۴۷-۲ (ب) و با استفاده



شکل ۲-۴۷

از حساب انتگرال نیروها را باهم جمع می‌کنیم. فرض می‌کنیم R شعاع پوسته و t ضخامت آن باشد به طوری که $t \ll R$. حلقه‌ای که تحت زاویه θ ، و در مقابل $d\theta$ قرار دارد شکل ۲-۴۷ (ج). دارای محیط $2\pi R \sin \theta$ پهنای $R d\theta$ ، و ضخامت t است. حجم آن برابر است با

$$dV = 2\pi R^2 t \sin \theta d\theta$$

و جرم آن چنین است

$$\begin{aligned} \rho dV &= 2\pi R^2 t \rho \sin \theta d\theta \\ &= \frac{M}{4} \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

که در آن $\rho = M / (4\pi R^2 t)$ چگالی پوسته است.

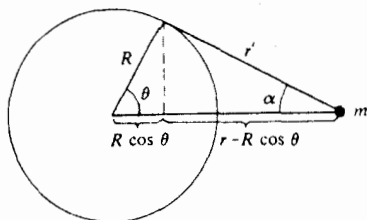
هر قسمت از حلقه به فاصله یکسان r' از m قرار دارند. نیروی وارد بر m از طرف یک قسمت کوچک از حلقه به طرف آن قسمت است. به کمک تقارن معلوم می‌شود که جمع برداری مؤلفه‌های قائم این نیروها برای کل حلقه صفر است. از آنجا که زاویه α بین بردار نیرو و خط واصل بین مراکز دو جرم برای همه قسمت‌های حلقه یکسان است. مؤلفه‌های نیرو در امتداد خط واصل بین مراکز باهم جمع می‌شوند و برای کل حلقه داریم

$$dF = \frac{Gm\rho dV}{r'^2} \cos \alpha$$

نیروی مربوط به کل پوسته چنین است

$$\begin{aligned} F &= \int dF \\ &= \int \frac{Gm\rho dV}{r'^2} \cos \alpha \end{aligned}$$

اینک باید همه کمیت‌های زیر انتگرال را بر حسب یک متغیر، مثلاً زاویه قطبی θ ، بنویسیم. مطابق



شکل ۴۸-۲

شکل ۴۸-۲ داریم $\cos \alpha = (r - R \cos \theta) / r'$ و $r' = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}$ از آنجا که $\rho dV = M \sin \theta d\theta / 2$ داریم

$$F = \left(\frac{GMm}{2} \right) \int_0^\pi \frac{(r - R \cos \theta) \sin \theta d\theta}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta)^{3/2}}$$

برای تعیین این انتگرال می‌توانیم از متغیر جدید $u = r - R \cos \theta$ و $du = R \sin \theta d\theta$ استفاده کنیم. از این رو، خواهیم داشت

$$F = \left(\frac{GMm}{2R} \right) \int_{r-R}^{r+R} \frac{u du}{(R^2 - r^2 + 2ru)^{3/2}}$$

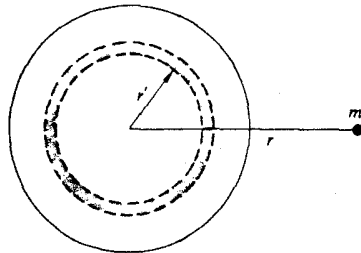
این انتگرال در جدول انتگرالهای استاندارد داده شده است. نتیجه چنین است

$$\begin{aligned} F &= \frac{GMm}{2R} \frac{1}{2r^2} \left(\sqrt{R^2 - r^2 + 2ru} - \frac{r^2 - R^2}{\sqrt{R^2 - r^2 + 2ru}} \right) \Bigg|_{r-R}^{r+R} \\ &= \frac{GMm}{4Rr^2} \left[(r+R) - (r-R) - (r^2 - R^2) \left(\frac{1}{r+R} - \frac{1}{r-R} \right) \right] \\ &= \frac{GMm}{r^2} \quad r > R \end{aligned}$$

برای $r > R$ این لایه از نظر گرانشی طوری عمل می‌کند که گویی همه جرم آن در مرکز آن متمرکز است.

نکته ظریفی که در تعیین این انتگرال باید رعایت شود، این است که جمله $\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR}$ ذاتاً مثبت است و باید $\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR} = r - R$ باشد، زیرا $r > R$ است. اگر ذره در داخل پوسته باشد، بزرگی این نیرو با هم توسط معادله ۱ داده می‌شود. اما، در این حالت $r < R$ است و باید $\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR} = R - r$ شود. نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} F &= \frac{GMm}{4Rr^2} \left[(R+r) - (R-r) - (r^2 - R^2) \left(\frac{1}{R+r} - \frac{1}{R-r} \right) \right] \\ &= 0 \quad r < R \end{aligned}$$



شکل ۲-۴۹

یک کره توپر را می توان به عنوان مجموعه ای از پوسته های کروی تصور کرد. تعمیم این نتیجه درحالتی که چگالی کره $\rho(r')$ فقط تابع شعاعی فاصله r' از مرکز کره است، کار مشکلی نیست. جرم پوسته کروی به شعاع r' و ضخامت dr' به صورت $\rho(r') 4\pi r'^2 dr'$ است. نیرویی که این پوسته بر جرم m اعمال می کند چنین است (شکل ۲-۴۹):

$$dF = \frac{GM}{r^2} \rho(r') 4\pi r'^2 dr'$$

از آنجا که نیروی اعمال شده از طرف هر لایه به طرف مرکز کره است، نیروی کل برابر است با

$$F = \frac{GM}{r^2} \int_0^R \rho(r') 4\pi r'^2 dr'$$

اما، این انتگرال همان جرم کل کره است. نتیجه می گیریم که درحالت $r > R$ نیروی بین m و کره با نیروی دو ذره ای که با فاصله r از هم جدا شده اند یکسان است.

مسائل

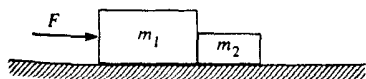
۱-۲ یک جرم ۵ کیلوگرمی تحت اثر نیروی $\mathbf{F} = (4t^2\mathbf{i} - 3t\mathbf{j})\text{N}$ حرکت می کند که در آن t زمان برحسب ثانیه است (۱ نیوتون = ۱N). این جرم در لحظه $t = 0$ از مبدأ شروع به حرکت می کند. پیدا کنید: (الف) سرعت، (ب) مکان، (ج) $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ برای این جسم در زمانهای بعد.

جواب حالت خاص: (ج) اگر $t = 1\text{s}$ باشد، $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = 6\mathbf{j} \times 10^{-2}\mathbf{k} \text{ m}^2/\text{s}$

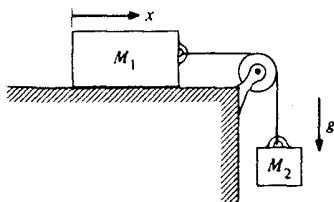
۲-۲ در مکعب مطابق شکل ۲-۵ به وسیله نخى با جرم قابل اغماض به هم متصل شده اند. اگر سیستم از حالت سکون رها شود، پیدا کنید مکعب M_1 در زمان t چقدر می لغزد. از اصطکاک صرف نظر کنید.

جواب حالت خاص: اگر $M_1 = M_2$ باشد، $x = gt^2/4$ است.

۳-۲ مطابق شکل ۲-۵ دو مکعب روی یک میز افقی در حال تماس با یکدیگرند. یک نیروی



شکل ۲-۵۱



شکل ۲-۵۰

افقی به یکی از این مکعبها وارد شده است. اگر $m_1 = 2\text{kg}$ ، $m_2 = 1\text{kg}$ و $F = 3\text{N}$ باشد، نیروی تماس بین مکعبها را پیدا کنید.

۲-۴ دو ذره به جرمهای m و M که در فاصله R از یکدیگر قرار دارند تحت اثر نیروی جاذبه F با حرکت یکنواخت دایره‌ای به دور یکدیگر در گردش‌اند. سرعت زاویه‌ای ω رادیان در ثانیه است. نشان دهید که $R = (F/\omega^2)(1/m + 1/M)$.

۲-۵ مطابق شکل ۲-۵۲ ماشین آتوود دارای قرقره‌ای با جرم قابل اغماض است. کشش طناب و شتاب M را پیدا کنید.

جواب حالت خاص: اگر $M = 2m$ باشد، $A = 1/3g$ و $T = 2/3Mg$ است.

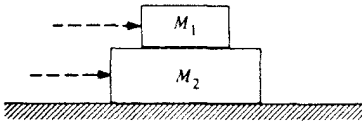
۲-۶ در یک مخلوطکن بتون، سیمان، شن، و آب از طریق غلتیدن در یک محفظه استوانه‌ای که به آرامی دوران می‌کند مخلوط شده‌اند. اگر این محفظه خیلی سریع بچرخد، ذرات شن به جای مخلوط شدن به دیواره ظرف می‌چسبند.

فرض کنید که این محفظه مخلوطکن دارای شعاع R است و برمحوری افقی سوار شده باشد. بیشترین سرعتی که این محفظه می‌تواند با آن دوران کند، بدون اینکه ذرات به دیواره آن بچسبند، چقدر است؟ فرض کنید $g = 32\text{ ft/s}^2$ است.

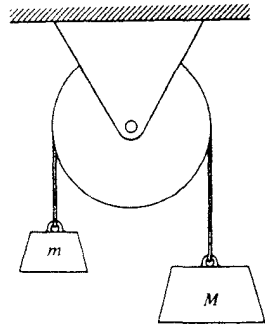
جواب حالت خاص: اگر $R = 1.1\text{m}$ باشد، آنگاه دور در دقیقه $\approx 38\text{ rad/s} = \omega_{\text{max}}$.

۲-۷ مکعبی به جرم M_1 مطابق شکل ۲-۵۳ روی مکعب دیگری به جرم M_2 واقع شده است و جرم اخیر نیز روی میز بدون اصطکاک قرار گرفته است. ضریب اصطکاک بین مکعبها μ است. نیروی افقی بیشینه که می‌توان بر مکعبها وارد کرد تا آنها بدون لغزیدن روی یکدیگر شتاب بگیرند، در حالتی که (الف) نیرو بر مکعب ۱، (ب) نیرو بر مکعب ۲ وارد آید، چقدر است؟

۲-۸ یک مکعب ۴ کیلوگرمی مطابق شکل ۲-۵۴ روی یک مکعب ۵ کیلوگرمی که روی یک میز بدون اصطکاک قرار گرفته، واقع شده است. ضریب اصطکاک بین دو مکعب چنان است که اگر نیروی افقی F برابر با ۲۷ نیوتون بر مکعب پایینی وارد شود، مکعبها شروع به لغزیدن می‌کنند. فرض کنید که این نیروی افقی اینک فقط به مکعب بالایی وارد شده است. مقدار نیروی بیشینه برای اینکه مکعبها بدون



شکل ۲-۵۳

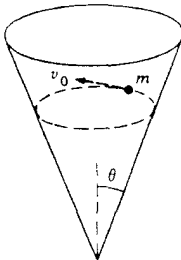


شکل ۲-۵۲

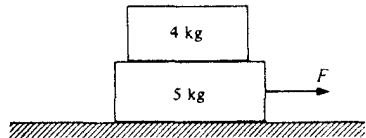
سُر خوردن نسبت به همدیگر بلغزند چقدر است.

جواب: $F = 21/6N$.

۲-۹ ذره‌ای به جرم m در درون مخروطی بدون اصطکاک می‌لغزد (شکل ۲-۵۵). محور مخروط



شکل ۲-۵۵



شکل ۲-۵۴

قائم است، جهت نیروی گرانی به طرف پایین است. نیم زاویه رأس مخروط طبق شکل θ است.

مسیر ذره به صورت دایره و در یک صفحه افقی است. سرعت ذره v است.

یک نمودار نیرو رسم کنید و شعاع مسیر دایره‌ای ذره را برحسب v ، g و θ پیدا کنید.

۲-۱۰ شعاع مدار یک ماهواره همگام با کره زمین را پیدا کنید (یک ماهواره همگام در هر ۲۴

ساعت یک بار به دور زمین می‌چرخد، به طوری که مکان آن نسبت به یک ایستگاه زمینی همواره ثابت

به نظر می‌آید). ساده‌ترین راه برای پیدا کردن جواب این است که مسافتها را برحسب شعاع زمین بیان

کنید.

جواب: $6.6R_e$.

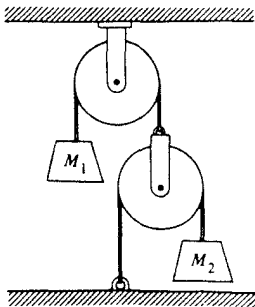
۲-۱۱ مطابق شکل ۲-۵۶، جرم m به وسیله دو نیم سیم به طول l ، به یک محور دوران کننده و

قائم متصل اند و با محور زاویه ۴۵ درجه می سازند. محور و جرم m هر دو با سرعت زاویه ای ω در حال دوران اند. جهت نیروی گرانی به طرف پایین است. (الف) یک نمودار نیروی واضح برای m بکشید. (ب) کشش سیمهای بالایی T و پایینی T_1 را پیدا کنید.

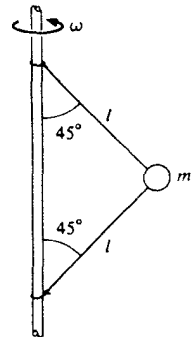
جواب حالت خاص: اگر $\omega^2 l = \sqrt{2}g$ باشد، آنگاه $T_{\text{بالا}} = \sqrt{2}mg$.

۱۲-۲ اگر قوی و باجرات باشید، می توانید یک رومیزی را از زیر ظروف واقع بر آن به طور ناگهانی بکشید و خارج سازید. طولانیترین زمانی که طی آن رومیزی می تواند بیرون کشیده شود چقدر باید باشد تا لیوانی که در ۱۵ سانتیمتری لبه میز قرار دارد قبل از سقوط از میز به حالت سکون درآید. فرض کنید ضریب اصطکاک لیوان برای لغزیدن بر روی رومیزی یا روی میز برابر با ۰.۵ باشد. (برای اینکه این عمل جالب توجه تر باشد باید پارچه چنان به سرعت کشیده شود که لیوان هیچ حرکت قابل ملاحظه ای نداشته باشد.)

۱۳-۲ جرمهای M_1 و M_2 مطابق شکل ۵۷-۲ به مجموعه ای از نخها و قرقره ها متصل شده اند.



شکل ۵۷-۲



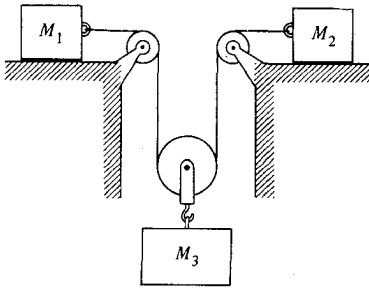
شکل ۵۶-۲

نخها بدون جرم و غیر قابل انبساط اند و قرقره ها بی جرم و بدون اصطکاک هستند. شتاب M_1 را پیدا کنید.

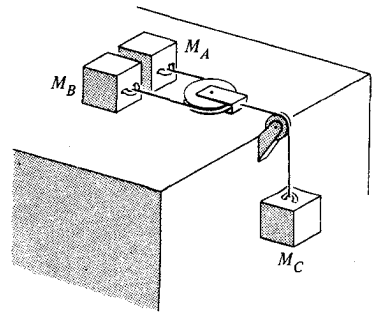
جواب حالت خاص: اگر $M_1 = M_2$ باشد، $\ddot{x} = g/5$ است.

۱۴-۲ دو جرم A و B روی یک میز بدون اصطکاک قرار دارند (شکل ۵۸-۲). جرمها به دو سر طنابی سبک به طول l که از روی قرقره ای به جرم قابل اغماض عبور می کند، متصل اند. این قرقره به طنابی که جرم C به آن آویخته است متصل است. شتاب هریک از جرمها را پیدا کنید. (می توانید صحیح بودن جواب خود را با بررسی حالت خاص امتحان کنید. برای مثال حالتی که $M_A = M_B = M_C$).

۱۵-۲ در شکل ۵۹-۲ از قرقره و طناب بی جرم استفاده می شود. ضریب اصطکاک بین جرمها



شکل ۲-۵۹



شکل ۲-۵۸

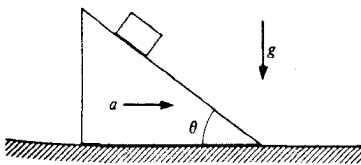
و سطوح افقی μ است. فرض کنید که M_1 و M_2 در حال لغزیدن است و جهت نیروی گرانی به طرف پایین است. (الف) بارسم یک نمودار نیرو تمام مؤلفه‌های مورد استفاده را نشان دهید. (ب) شتابها چگونه به هم مربوط اند؟ (ج) کشش طناب (T) را پیدا کنید.

جواب: $T = (\mu + 1)g / [2/M_3 + 1/(2M_1) + 1/(2M_2)]$

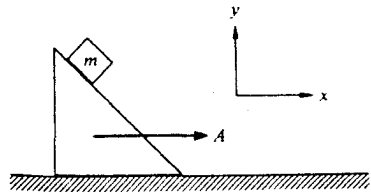
۲-۱۶ یک گوه 45° درجه‌ای در امتداد نیرو با شتاب ثابت A مطابق شکل ۲-۶۰ کشیده می‌شود. مکعبی به جرم m بدون اصطکاک روی گوه می‌لغزد. شتاب این مکعب را پیدا کنید. (جهت نیروی گرانی به طرف پایین است).

جواب حالت خاص: اگر $A = 3g$ باشد، آنگاه $\ddot{y} = g$.

۲-۱۷ مکعبی روی گوه‌ای با زاویه شیب θ قرار دارد (شکل ۲-۶۱). ضریب اصطکاک بین



شکل ۲-۶۱



شکل ۲-۶۰

مکعب و سطح μ است. (الف) پیدا کنید بیشینه مقدار θ را برای اینکه مکعب بدون حرکت روی گوه باقی بماند در صورتی که گوه درجای معینی ثابت است.

جواب: $\tan \theta = \mu$

(ب) مطابق شکل، به گوه شتاب افقی a داده می‌شود. با فرض اینکه $\tan \theta < \mu$ باشد، پیدا کنید

کمینه شتاب را برای اینکه مکعب روی گوه بتواند بدون لغزش باقی بماند.

جواب حالت خاص: اگر $\theta = \pi/4$ باشد، آنگاه $a_{\min} = g(1 - \mu)/(1 + \mu)$.

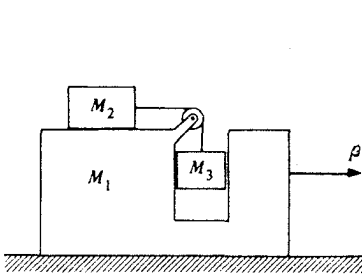
(ج) حالت ب را تکرار کنید ولی این بار بیشینه مقدار شتاب را پیدا کنید.

جواب حالت خاص: اگر $\theta = \pi/4$ باشد، آنگاه $a_{\max} = g(1 + \mu)/(1 - \mu)$.

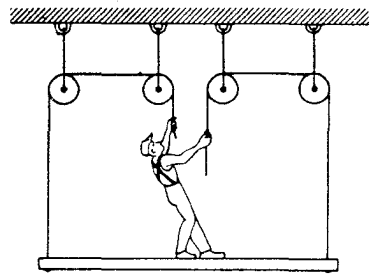
۱۸-۲ نقاشی به جرم M روی سکویی به جرم m ایستاده و خود را توسط دو طنابی که مطابق شکل ۶۲-۲ از روی قرقره‌ها می‌گذرند بالا می‌کشد. او هر دو طناب را با نیروی F می‌کشد و با شتاب ثابت a به طرف بالا شتاب می‌گیرد. شتاب a را پیدا کنید و از این واقعیت که هیچ‌کس این عمل را برای مدت طولانی نمی‌تواند انجام دهد، صرف‌نظر کنید.

جواب حالت خاص: اگر $M = m$ و $F = Mg$ باشد، آنگاه $a = g$.

۱۹-۲ در دستگاه آموزشی شکل ۶۳-۲، همه سطوح بدون اصطکاک‌اند. نیروی F وارد بر M_1



شکل ۶۳-۲



شکل ۶۲-۲

چقدر باید باشد تا مانع سقوط یا صعود M_3 شود؟

جواب حالت خاص: برای جرم‌های مساوی، داریم $F = 3Mg$.

۲۰-۲ دستگاه آموزشی شکل ۶۳-۲ را در حالتی که F صفر است در نظر بگیرید. شتاب M_1 را پیدا کنید.

جواب: $a_1 = -M_2 M_3 g / (M_1 M_2 + M_1 M_3 + 2M_2 M_3 + M_2^2)$.

۲۱-۲ طناب یکنواختی به جرم m و به طول l به مکعبی به جرم M متصل است. طناب با نیروی F کشیده می‌شود. کشش را در فاصله x از انتهای طناب پیدا کنید. از گرانش صرف‌نظر کنید.

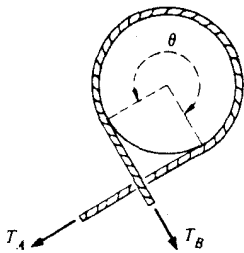
۲۲-۲ طناب یکنواختی به وزن W بین دو درخت مطابق شکل ۶۴-۲ آویخته شده است. دوسر طناب ارتفاع یکسانی دارند و هرکدام از آنها با درختها زاویه θ می‌سازند. پیدا کنید: (الف) کشش را در دو انتهای طناب. (ب) کشش را در وسط طناب.

جواب حالت خاص: اگر $\theta = 45^\circ$ باشد، آن‌گاه $T_{\text{وسط}} = W/2$ و $T_{\text{انتها}} = W/\sqrt{2}$.
 ۲۳-۲ قطعه سیمی به طول l و به جرم M به شکل حلقه دایره‌ای بسته شده است و با سرعت زاویه‌ای ثابت ω طول مرکز دایره دوران می‌کند. کشش سیم را پیدا کنید.

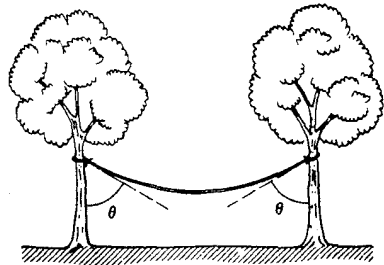
پیشنهاد: نمودار نیرو را برای قطعه کوچکی از حلقه که مقابل به زاویه $\Delta\theta$ است، رسم کنید.

جواب: $T = M\omega^2 l / (2\pi)^2$.

۲۴-۲ وسیله‌ای به نام چرخ تسمه در روی کشتی برای کنترل طناب تحت کشش زیاد به کار می‌رود. این طناب (معمولاً با چندین دور) حول استوانه ثابتی پیچیده می‌شود. (شکل ۶۵-۲ فقط سه چهارم



شکل ۶۵-۲



شکل ۶۴-۲

دور را نشان می‌دهد). بار روی طناب، آن را با نیروی T_A می‌کشد، ملوان آن را با نیروی کمتری مانند T_B نگه می‌دارد. آیا می‌توانید نشان دهید $T_B = T_A e^{-\mu\theta}$ ، که در آن μ ضریب اصطکاک و θ زاویه کل احاطه و تماس طناب و استوانه است.

۲۵-۲ کوتاهترین زمان تناوب ممکن برای دوران دو کره توپر همسان را که تحت جاذبه گرانشی در فضای تهی در مدار دایره‌ای حول نقطه‌ای در وسط خط واصل مراکز خود دوران می‌کنند، پیدا کنید. (کره‌ها را از هر جنسی که قابل دسترسی باشد می‌توانید در نظر بگیرید).

۲۶-۲ نیروی گرانشی وارد بر جسمی که به فاصله R از مرکز یک جرم کروی بکینواخت واقع است، صرفاً به خاطر جرمی است که در فاصله $r \leq R$ نسبت به مرکز کره، قرار دارد. نیرویی که این جرم وارد می‌کند درست مانند آن است که یک جرم نقطه‌ای واقع در مبدأ آن را اعمال کرده است.

با استفاده از نتیجه فوق نشان دهید که اگر حفره‌ای در زمین ایجاد کنید و سپس به داخل آن سقوط کنید، حرکت هماهنگ ساده‌ای نسبت به مرکز زمین انجام خواهید داد. پیدا کنید زمانی را که طول می‌کشد تا به نقطه شروع حرکت برگردید و نشان دهید که این مقدار برابر است با زمانی که یک ماهواره نیاز دارد تا زمین را در یک مدار سطح پایین $R_e \approx r$ دور بزند. برای رسیدن به این نتیجه، لازم است زمین را به عنوان یک کره با چگالی بکینواخت در نظر بگیرید، و نیز باید از همه اصطکاکها و اثرهای مربوط به

دوران زمین صرف نظر کنید.

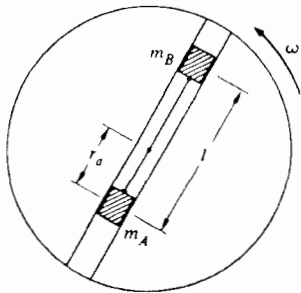
۲۷-۲ به عنوان شکل دیگری از مسئله قبل، نشان دهید که اگر این حفره خیلی دورتر از مرکز هم عبور کرده باشد، شما باز هم حرکت هماهنگ ساده‌ای با همان زمان تناوب انجام خواهید داد.

۲۸-۲ اتومبیلی مطابق شکل ۶۶-۲ وارد پیچی به شعاع R می‌شود. این جاده دارای زاویه θ است، و ضریب اصطکاک بین چرخها و جاده μ است. بیشینه و کمینه سرعتها را برای اینکه اتومبیل بدون سرخوردن به اطراف روی جاده بماند پیدا کنید.

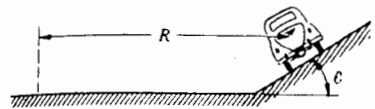
جواب حالت خاص: اگر $\mu = 1$ و $\theta = \pi/4$ باشد، هر سرعتی قابل قبول است.

۲۹-۲ اتومبیلی روی سکوی بزرگی که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دوران می‌کند، در حالت حرکت است. در $t = 0$ راننده مبدأ را ترک و در امتداد یکی از شعاعهای سکو و به طرف خارج با سرعت ثابت V_0 حرکت می‌کند. وزن کل اتومبیل W و ضریب اصطکاک بین اتومبیل و سکو μ است. (الف) با استفاده از مختصات قطبی شتاب اتومبیل را بر حسب تابعی از زمان پیدا کنید. بارسم یک نمودار برداری، مؤلفه‌های شتاب را در زمانی که $t > 0$ است نشان دهید. (ب) زمانی را که در آن اتومبیل شروع به سرخوردن می‌کند پیدا کنید. (ج) جهت نیروی اصطکاک را نسبت به بردار لحظه‌ای مکان r درست قبل از سرخوردن اتومبیل پیدا کنید. نتایج خود را در یک نمودار به طور واضح نشان دهید.

۳۰-۲ صفحه‌ای مطابق شکل ۶۷-۲ با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دوران می‌کند. دو جرم m_A



شکل ۶۷-۲



شکل ۶۶-۲

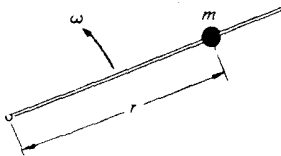
و m_B در شیاری که از مرکز صفحه می‌گذرد بدون اصطکاک می‌لغزد. در ابتدا جرمها به وسیله سیم سبکی به طول l به هم متصل اند و توسط گیره‌ای چنان قرار می‌گیرند که جرم m_A در فاصله r_A از مرکز باشد. در اینجا از گزارش صرف نظر کنید. در $t = 0$ گیره برداشته می‌شود و جرمها برای لغزیدن آماده می‌شوند.

\ddot{r}_A را بلافاصله بعد از اینکه گیره برداشته می‌شود بر حسب ω, r_A, l, m_B, m_A پیدا کنید.

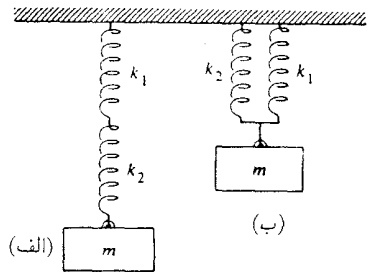
۳۱-۲ در هریک از دو وضعیت نشان داده شده (شکل ۲-۶۸)، بسامد نوسان جرم m را که توسط دو فنر با ثابتهای k_1 و k_2 آویزان شده است، پیدا کنید.

جواب حالت خاص: اگر $k_1 = k_2 = k$ باشد، $\omega_a = \sqrt{k/2m}$ ، $\omega_b = \sqrt{2k/m}$

۳۲-۲ چرخه به شعاع R با سرعت V روی زمین می‌غلتند. سنگریزه‌ای را با احتیاط در بالای چرخ طوری روی آن رها کرده‌ایم که به‌طور لحظه‌ای در حال سکون است. (الف) نشان دهید که اگر $V > \sqrt{Rg}$ باشد این سنگریزه بلافاصله از چرخ جدا می‌شود. (ب) نشان دهید در حالتی که $V < \sqrt{Rg}$ و ضریب اصطکاک $\mu = 1$ است. سنگریزه وقتی شروع به لغزش می‌کند چرخ به اندازه زاویه $\theta = \arccos[(1/\sqrt{2})(V^2/Rg)] - \pi/4$ دوران کرده باشد.



شکل ۲-۶۹



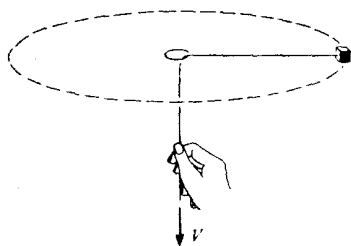
شکل ۲-۶۸

۳۳-۲ ذره‌ای به جرم m می‌تواند روی میله نازکی مطابق شکل ۲-۶۹ بلغزد. این میله حول یک انتهای خود با سرعت زاویه‌ای ثابت ω در یک صفحه دوران می‌کند. نشان دهید که حرکت به‌وسیله رابطه $r = Ae^{-\gamma t} + Be^{+\gamma t}$ معین می‌شود که در آن γ مقدار ثابتی است که باید پیدا شود و A و B ثابتهای اختیاری‌اند. از گرانس صرف‌نظر کنید.

نشان دهید با انتخاب شرایط اولیه بخصوص [یعنی، $r(t=0)$ و $v(t=0)$] امکان پیدا کردن جوابی که در آن r به‌طور پیوسته با زمان کاهش یابد وجود دارد، ولی با هر شرط دیگری r سرانجام افزایش خواهد یافت. (حالتهایی را که ذره با مبدأ برخورد می‌کند مستثنی کنید).

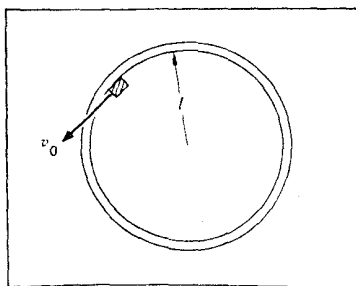
۳۴-۲ جرم m مطابق شکل ۲-۷۰ به‌وسیله تار که از میان حلقه‌ای عبور می‌کند می‌چرخد. از گرانس صرف‌نظر کنید. در ابتدا این جرم در فاصله r_0 از مرکز قرار دارد و با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کند. نخ در $t=0$ با سرعت ثابت V کشیده می‌شود به طوری که فاصله شعاعی جرم کاهش می‌یابد. نمودار نیرو را رسم کنید و معادله دیفرانسیلی برای ω بیابید. این معادله خیلی ساده است و می‌توان آن را با از راه تجسس و یا به وسیله انتگرال‌گیری معمولی حل کرد. موارد زیر را پیدا کنید. (الف) ωt .

جواب حالت خاص: برای $Vt = r_0/2$ داریم $\omega = 4\omega_0$.
 (ب) نیروی لازم برای کشیدن نخ.



شکل ۲-۷۰

۳۵-۲ این مسئله مستلزم حل یک معادله دیفرانسیل ساده‌ای است. مکعبی به جرم m بر روی میز بدون اصطکاک می‌لغزد (شکل ۲-۷۱). این مکعب مقید است که داخل حلقه‌ای به شعاع a که به



شکل ۲-۷۱

میز متصل است حرکت کند. در $t = 0$ ، مکعب در مسیر داخلی حلقه با سرعت v_0 در حرکت است. (یعنی، در امتداد مماس). ضریب اصطکاک بین مکعب و حلقه μ است. (الف) سرعت مکعب را در زمانهای بعدی پیدا کنید.

جواب: $v_0/[1 + (\mu v_0 t/l)]$.

(ب) مکان مکعب را در زمانهای بعدی پیدا کنید.

۳۶-۲ این مسئله شامل یک معادله دیفرانسیل ساده‌ای است. باید بتوانید بعد از مختصر تغییراتی از آن انتگرال بگیرید.

ذره‌ای به جرم m در امتداد خط راستی حرکت می‌کند، و نیروی بازدارنده $F = be^{av}$ بر آن وارد

می‌شود (که همواره در خلاف جهت حرکت است). b و α مقادیر ثابت و v سرعت است. در $t = 0$ ذره با سرعت v_0 حرکت می‌کند. سرعت را در زمانهای بعدی پیدا کنید.

$$\text{جواب: } v(t) = (v_0/\alpha) \ln[\alpha bt/m + e^{-\alpha v_0 t}]$$

۳۷-۲ شرکتی به منظور تبلیغات تصمیم به برگزاری مسابقهٔ سرعت هاورکرافت می‌گیرد. هاورکرافت با دمیدن هوا به طرف پایین، خود را نگه می‌دارد و دارای پروانهٔ بزرگ ثابتی در بالای بدنه است که برای حرکت به جلو است. متأسفانه هاورکرافت وسیله‌ای به عنوان فرمان ندارد، و در نتیجه خلبان در چرخش با سرعتهای زیاد دچار اشکال می‌شود. شرکت برای برطرف کردن این مشکل تصمیم گرفت یک سکوی پرواز کاسه شکلی طراحی کند به طوری که وقتی هاورکرافت با سرعت زیاد وارد آن می‌شود بدون احتیاج به فرمان بتواند در امتداد مسیری دایره‌ای قرار گیرد. برای طراحی و ساختن این سکو با مهندسی قرارداد بسته شد. مهندس مزبور پس از پایان کار با عجله کشور را ترک کرد. پس از برگزاری اولین مسابقه شرکت دریافت که دقیقاً یک زمان ثابت T برای هاورکرافت لازم است تا صرف نظر از سرعت بتواند این مسیر را دور بزند. معادله‌ای برای سطح مقطع این سکو بر حسب T پیدا کنید.

تکانه

۱-۳ مقدمه

در فصل گذشته با در نظر گرفتن اجسام طبیعی به صورت مجموعه‌ای از ذرات منفرد به جای اجسام گسترده حقیقی، ساده‌سازی قابل توجهی انجام دادیم. گاهی اوقات این ساده‌سازی بی‌مورد است. مانند مطالعه حرکت سیاره‌ای که اندازه آن در مقایسه با فواصل بسیار زیادی که مشخصه منظومه شمسی ماست، ناچیز است. یا حالتی که ذرات بنیادی در شتابدهنده‌ای حرکت می‌کنند، که در این مورد اندازه ذرات در حدود 10^{-15} متر است و در مقایسه با اندازه ماشین بسیار ناچیز است. اما این حالتها غیرعادی‌اند. بیشتر اوقات ما با اجسام بزرگی سروکار داریم که ممکن است ساختار خاصی داشته باشند. برای مثال، نشستن سفینه فضایی بر ماه را در نظر بگیرید. حتی اگر می‌توانستیم میدان گرانش یک چنین جسم بی‌قاعده و ناهمگنی مانند ماه را محاسبه کنیم، خود سفینه مطمئناً یک ذره نقطه‌ای نیست، زیرا سفینه پاهای عنکبوتی، آنتهای بی‌قواره، و بدنه‌ای حجیم دارد.

به علاوه، وقتی که می‌خواهیم سیستم‌هایی مانند موشکها را که در آن شارش جرم وجود دارد مورد تحلیل قرار دهیم، با روشهای فصل گذشته موفق نخواهیم شد. موشکها با خارج ساختن جرم به عقب

به طرف جلو شتاب می‌گیرند؛ به‌کار بردن $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$ برای چنین سیستمی نادرست به نظر می‌رسد. در این فصل برای برطرف کردن این مشکلات، قوانین حرکت را تعمیم خواهیم داد. با بیان دوباره قانون دوم نیوتون، با شکلی اصلاح شده آغاز می‌کنیم. در فصل ۲ این قانون را به شکل آشنای زیر نوشتیم

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a} \quad (۱-۳)$$

این شکل دقیقاً همان نیست که نیوتون نوشت، روش نیوتون چنین است

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}M\mathbf{v} \quad (۲-۳)$$

طبق روال گذشته، برای هر ذره در مکانیک نیوتونی، M ثابت است و داریم

$$(d/dt)(M\mathbf{v}) = M(d\mathbf{v}/dt) = M\mathbf{a}$$

کمیت $M\mathbf{v}$ که دارای نقش عمده‌ای در مکانیک است، موسوم به تکانه است. تکانه حاصلضرب بردار \mathbf{v} و کمیت نرده‌ای M است. چنانچه تکانه را با \mathbf{p} نشان دهیم، قانون دوم نیوتون چنین می‌شود

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (۳-۳)$$

این شکل بر $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$ ترجیح دارد، چون همانطوری که به‌زودی خواهیم دید، این را می‌توان به سادگی برای سیستم‌های پیچیده تعمیم داد، زیرا ثابت می‌شود که تکانه از کمیت‌های جداگانه جرم و سرعت بنیادینتر است.

۲-۳ دینامیک سیستم ذرات

سیستمی از ذرات در حال برهم‌کنش را در نظر بگیرید. مثالی از چنین سیستمی، منظومه شمسی یعنی مجموعه خورشید و سیارات است که به قدری از هم دورند که در مقایسه با قطرشان با تقریب خوبی می‌توان آنها را به‌عنوان ذرات ساده در نظر گرفت. تمام ذرات در منظومه شمسی از طریق جاذبه گرانشی برهم‌کنش می‌کنند؛ برهم‌کنش اصلی با خورشید انجام می‌گیرد، هر چند که برهم‌کنش سیارات با یکدیگر نیز بر روی حرکت آنها اثر می‌گذارد. به‌علاوه، کل منظومه شمسی تحت جاذبه اجسام دوردست است. از سوی دیگر، سیستم را می‌توان به‌صورت تویی در نظر گرفت که روی میز بیلیارد در حال سکون باشد. در اینجا ذرات، اتمها هستند (بدون در نظر گرفتن این حقیقت که اتمها ذرات نقطه‌ای نیستند بلکه خودشان از ذرات کوچکتری تشکیل شده‌اند) و سرچشمه برهم‌کنشها نیروی الکتریکی بین اتمی است.

نیروی خارجی وارد بر توپ بلیارد، شامل نیروی گرانش زمین و نیروی تماسی میز هستند.

اینک بعضی از خواص سیستمهای فیزیکی را اثبات خواهیم کرد. در انتخاب حدود سیستم تا آنجا که مایل باشیم آزادیم، اما همینکه انتخاب انجام گرفت، باید درباره ذراتی که جزء سیستم اند و آنهایی که جزء سیستم نیستند به طور سازگار عمل کنیم. فرض می‌کنیم که ذرات داخل سیستم علاوه بر خود با ذرات خارج نیز در حال برهم‌کنش باشند. برای تعمیم این بحث، سیستمی با N ذره در حال برهم‌کنش با جرمهای $m_1, m_2, m_3, \dots, m_N$ را در نظر بگیریم. مکان ذره j ام \mathbf{r}_j ، نیروی وارد بر آن \mathbf{f}_j ، و تکانه آن $\mathbf{p}_j = m_j \dot{\mathbf{r}}_j$ است. معادله حرکت ذره j ام چنین می‌شود

$$\mathbf{f}_j = \frac{d\mathbf{p}_j}{dt} \quad (4-3)$$

نیروی وارد بر ذره j می‌تواند به دو جمله تقسیم شود

$$\mathbf{f}_j = \mathbf{f}_j^{\text{داخلی}} + \mathbf{f}_j^{\text{خارجی}} \quad (5-3)$$

در اینجا، $\mathbf{f}_j^{\text{داخلی}}$ ، نیروی داخلی وارد بر ذره j نیرویی است از طرف همه ذرات دیگر سیستم، و $\mathbf{f}_j^{\text{خارجی}}$ ، نیروی خارجی وارد بر ذره j نیرویی است از طرف منابع خارج از سیستم. معادله حرکت چنین می‌شود

$$\mathbf{f}_j^{\text{داخلی}} + \mathbf{f}_j^{\text{خارجی}} = \frac{d\mathbf{p}_j}{dt} \quad (6-3)$$

اینک به منظور تمرکز روی سیستم به مثابه یک کل، با استفاده از روش زیر، تمام معادلات حرکت ذرات را با هم جمع می‌کنیم

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1^{\text{داخلی}} + \mathbf{f}_1^{\text{خارجی}} &= \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} \\ \dots\dots\dots \\ \mathbf{f}_j^{\text{داخلی}} + \mathbf{f}_j^{\text{خارجی}} &= \frac{d\mathbf{p}_j}{dt} \\ \dots\dots\dots \\ \mathbf{f}_N^{\text{داخلی}} + \mathbf{f}_N^{\text{خارجی}} &= \frac{d\mathbf{p}_N}{dt} \end{aligned} \quad (7-3)$$

حاصل جمع این معادلات را می‌توان چنین نوشت

$$\sum \mathbf{f}_j^{\text{داخلی}} + \sum \mathbf{f}_j^{\text{خارجی}} = \sum \frac{d\mathbf{p}_j}{dt} \quad (8-3)$$

عمل جمع روی همه ذرات $N, 1, \dots, z$ انجام می‌گیرد.

جمله دوم، $\sum \mathbf{f}_j^{\text{خارجی}}$ ، حاصل جمع نیروهای خارجی وارد بر همه ذرات است که برابر خارجی \mathbf{F} نیروی خارجی کل وارد بر سیستم است

$$\sum \mathbf{f}_j^{\text{خارجی}} \equiv \mathbf{F}_{\text{خارجی}}$$

جمله اول در معادله ۸-۳، $\sum \mathbf{f}_j^{\text{داخلی}}$ ، حاصل جمع نیروهای داخلی وارد بر همه ذرات است. طبق قانون سوم نیوتون، نیروهای بین هر دو ذره برابر و مخالف یکدیگرند به طوری که مجموع آنها صفر است. بدین ترتیب حاصل جمع نیروهای بین کلیه ذرات هم صفر است، یعنی نیروهای داخلی دویه دویکدیگر را حذف می‌کنند. از این رو داریم

$$\sum \mathbf{f}_j^{\text{داخلی}} = 0$$

معادله ۸-۳ به صورت ساده زیر درمی‌آید

$$\mathbf{F}_{\text{خارجی}} = \sum \frac{d\mathbf{p}_j}{dt} \quad (9-3)$$

سمت راست این رابطه را می‌توان به صورت $\Sigma (d\mathbf{p}_j/dt) = (d/dt)\Sigma \mathbf{p}_j$ نوشت، زیرا مشتق مجموع برابر است با مجموع مشتقها. $\Sigma \mathbf{p}_j$ برابر است با، تکانه کل سیستم، که آن را با \mathbf{P} نشان می‌دهیم:

$$\mathbf{P} \equiv \Sigma \mathbf{p}_j \quad (10-3)$$

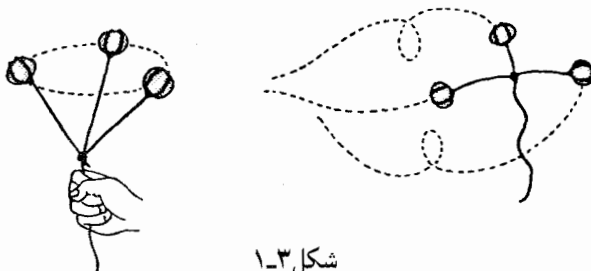
با جایگذاری این رابطه، معادله ۹-۳ به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{F}_{\text{خارجی}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad (11-3)$$

به عبارت دیگر نیروی خارجی کل وارد بر یک سیستم برابر است با آهنگ تغییرات تکانه آن سیستم. این مطلب بدون توجه به جزئیات برهم‌کنش صادق است؛ خارجی \mathbf{F} یا می‌تواند یک نیروی منفرد مؤثر بر یک ذره منفرد باشد و یا برآیند چندین برهم‌کنش کوچک مر بوط به هر ذره سیستم.

مثال ۱-۳ بولا: بولا اسلحه‌ای است توسط گوجه‌ها برای گرفتن حیوانات به کار می‌رفته است. این وسیله شامل سه گلوله سنگی یا آهنی است که توسط تسمه‌هایی به هم متصل‌اند. گوجه، بولا را در هوا می‌چرخاند و سپس آن را به طرف حیوان مورد نظر پرتاب می‌کند. درباره حرکت آنچه می‌توانیم بگوییم؟

بولایی با جرمهای m_1, m_2, m_3 را در نظر بگیرید (شکل ۱-۳). گلوله‌ها تحت تأثیر نیروهای کشش تسمه اتصال و گرانش قرار دارند. (از مقاومت هوا صرف‌نظر می‌کنیم.) از آنجا که نیروهای قیدی



شکل ۱-۳

بستگی به مکانهای لحظه‌ای هر سه گلوله دارند، نوشتن معادله حرکت یکی از گلوله‌ها هم یک مسئله حقیقی است. اما، تکانه کل از معادله ساده زیر پیروی می‌کند

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= \mathbf{F}_{\text{خارجی}} = \mathbf{f}_1^{\text{خارجی}} + \mathbf{f}_2^{\text{خارجی}} + \mathbf{f}_3^{\text{خارجی}} \\ &= m_1\mathbf{g} + m_2\mathbf{g} + m_3\mathbf{g} \end{aligned}$$

یا

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\mathbf{g}$$

که در آن M جرم کل است. این معادله اولین گام در پیدا کردن جزئیات حرکت مورد نظر است. این معادله با معادله یک ذره تنها به جرم M و تکانه \mathbf{P} یکسان است. این امر برای یک گویچه هنگام پرتاب بولا فراموش می‌کند سیستم پیچیده‌ای در دست دارد واقعی‌آشناست. یعنی او به‌طور غریزی آن را مثل یک جسم واحد نشانه‌گیری کرده است.

مرکز جرم

طبق معادله ۱۱-۳ داریم

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad (12-3)$$

در اینجا شاخص "خارجی" را با توجه به اینکه نیروی \mathbf{F} برای نیروی خارجی به‌کار می‌رود حذف کرده‌ایم. این نتیجه با معادله حرکت یک ذره تنها یکسان است، گرچه در حقیقت برای یک سیستم ذرات به‌کار برده می‌شود. شباهت بین معادله ۱۲-۳ و حرکت ذره منفرد حتی با نوشتن معادله زیر بیشتر می‌شود

$$\mathbf{F} = M\ddot{\mathbf{R}} \quad (13-3)$$

که در آن M جرم کل سیستم و \mathbf{R} برداری است که باید تعریف شود. از آنجا که $\mathbf{P} = \sum m_j \dot{\mathbf{r}}_j$ است،

از معادلات ۱۲-۳ و ۱۳-۳ نتیجه می‌شود

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum m_j \ddot{\mathbf{r}}_j$$

و این وقتی صحیح است که داشته باشیم

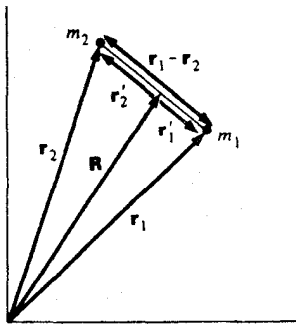
$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum m_j \mathbf{r}_j \quad (۱۴-۳)$$

\mathbf{R} برداری است از مبدأ تا نقطه‌ای که مرکز جرم نامیده می‌شود. رفتار این سیستم چنان است که گویی تمام جرم آن در مرکز جرم متمرکز است و همه نیروهای خارجی هم در آن نقطه وارد می‌شوند. ما معمولاً به حرکت اجسام نسبتاً صلب مانند توپ بیسبال یا اتومبیل علاقه مندیم. یک چنین جسمی صرفاً متشکل از سیستم ذراتی است که به خاطر نیروهای داخلی قوی نسبت به یکدیگر ثابت‌اند. معادله ۱۳-۳ نشان می‌دهد که جسم نسبت به نیروهای خارجی درست مثل یک ذره رفتار می‌کند. در فصل ۲، عملاً با هر جسمی مانند یک ذره برخورد کردیم؛ اینک می‌بینیم که این به شرطی قابل توجیه است که توجه را، به مرکز جرم معطوف کنیم.

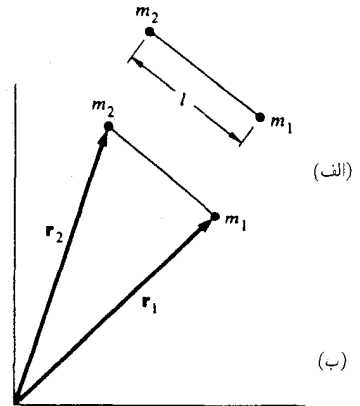
ممکن است سؤال کنید که آیا این توصیف حرکت مرکز جرم یک ساده‌سازی بیش از حد نیست. تجربه به ما می‌گوید که یک جسم گسترده مانند یک تخته ضخیم و یک جسم متراکم مانند سنگ دارای رفتارهای متفاوتی هستند، حتی اگر جرمها و نیروهای وارد بر آن نیز یکسان باشند. در حقیقت داریم ساده‌سازی بیش از حد می‌کنیم. رابطه $\mathbf{F} = M\ddot{\mathbf{R}}$ فقط انتقال جسم (حرکت مرکز جرم آن) را توصیف می‌کند، نه سمتگیری آن را در فضا. در فصلهای ۶ و ۷ دوران اجسام گسترده را مورد بررسی قرار خواهیم داد و ثابت خواهیم کرد که حرکت دورانی جسم به شکل آن و نقطه اثر نیروهای اعمال شده بستگی دارد. با این وجود، تا آنجا که انتقال مرکز جرم مورد نظر باشد، $\mathbf{F} = M\ddot{\mathbf{R}}$ کل داستان را بازگو می‌کند. این نتیجه نه فقط برای اجسام صلب، بلکه تا جایی که نیروهای بین ذرات از قانون سوم نیوتون پیروی می‌کنند برای هر سیستم ذراتی صحیح است. اینکه ذرات نسبت به یکدیگر حرکت می‌کنند یا نه و آیا ماده‌ای در مرکز جرم وجود دارد یا نه، در این مسئله مورد توجه نیست.

مثال ۲-۳ چوبدست طبالی: چوبدست رهبر طبالها، مطابق شکل ۲-۳ (الف)، از جرمهای m_1 و m_2 که توسط میله نازکی به طول l به هم متصل‌اند تشکیل شده است. این چوبدست را به هوا پرتاب می‌کنیم، و می‌خواهیم مرکز جرم آن و معادله حرکت مرکز جرم را تعیین کنیم.

فرض کنید بردارهای مکان m_1 و m_2 برترتیب \mathbf{r}_1 و \mathbf{r}_2 هستند (شکل ۲-۳ ب). بردار مکان مرکز جرم که از همان مبدأ اندازه‌گیری شده چنین است



شکل ۳-۳



شکل ۲-۳

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (۱)$$

در اینجا از جرم میله نازک صرف نظر کرده ایم. مرکز جرم روی خط واصل بین m_1 و m_2 قرار می گیرد. برای نشان دادن این موضوع، ابتدا فرض کنید که نوک \mathbf{R} روی خط قرار نمی گیرد، و بردارهای \mathbf{r}'_1 و \mathbf{r}'_2 را از نوک \mathbf{R} تا m_1 و m_2 رسم می کنیم. با توجه به شکل ۳-۳ می بینیم

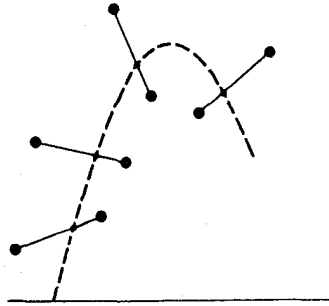
$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}$$

$$\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}$$

با استفاده از معادله ۱ داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_1 &= \mathbf{r}_1 - \frac{m_1 \mathbf{r}_1}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ \mathbf{r}'_2 &= \mathbf{r}_2 - \frac{m_1 \mathbf{r}_1}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \\ &= - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \end{aligned}$$

\mathbf{r}'_1 و \mathbf{r}'_2 متناسبند با $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ یعنی برداری از m_1 تا m_2 . از این رو \mathbf{r}'_1 و \mathbf{r}'_2 مطابق شکل در امتداد خط واصل بین m_1 و m_2 قرار می گیرند. به علاوه



شکل ۳-۴

$$r'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} |r_1 - r_2|$$

$$= \frac{m_2}{m_1 + m_2} l$$

$$r'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} |r_1 - r_2|$$

$$= \frac{m_1}{m_1 + m_2} l$$

با صرف نظر کردن از اصطکاک، نیروی خارجی وارد بر چوبدست چنین می شود

$$F = m_1 g + m_2 g$$

معادله حرکت مرکز جرم چنین است

$$(m_1 + m_2)\ddot{R} = (m_1 + m_2)g$$

یا

$$\ddot{R} = g$$

این مرکز جرم مسیر سهمی شکل جرمی منفرد را در یک میدان گرانشی یکنواخت طی می کند (شکل ۳-۴). با روشهایی که در فصل ۶ بحث شده می توانیم حرکت m_1 و m_2 را حول مرکز جرم پیدا کرده و حل مسئله را کامل کنیم.

گرچه پیدا کردن مرکز جرم یک سیستم ذرات امر ساده ای است، ولی روش تعیین مرکز جرم یک جسم گسترده چندان هم واضح نیست. اما، به کمک حساب دیفرانسیل و انتگرال کار ساده ای است. با تقسیم جسم به N عنصر جرم، کار را دنبال می کنیم. اگر r_j مکان عنصر زام m_j جرم آن باشد، آنگاه

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{r}_j$$

از آنجا که عناصر جرم حقیقتاً به صورت ذره نیستند، این جواب چندان دقیق نیست. اما وقتی که N در حد به سمت بینهایت میل می‌کند، اندازه هر عنصر به صفر میل می‌کند و تقریب به حد کمال می‌رسد:

$$\mathbf{R} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{r}_j$$

این فرایند حدگیری، تعریف انتگرال است. معمولاً داریم

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} m_j \mathbf{r}_j = \int \mathbf{r} dm$$

که dm جزء دیفرانسیل جرم است. آنگاه

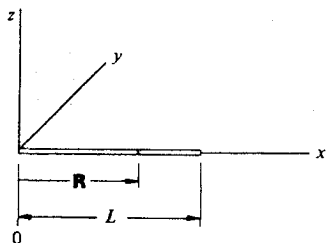
$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} dm \quad (۱۵-۳)$$

برای تجسم این انتگرال، dm را به عنوان جرم یک جزء به حجم dV واقع در مکان \mathbf{r} در نظر بگیرید (شکل ۵-۳). اگر چگالی جرم در جزء جرم ρ باشد آنگاه، $dm = \rho dV$ است و

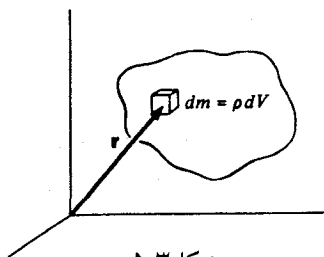
$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} \rho dV$$

این انتگرال را انتگرال حجم می‌نامند. اگرچه دانستن چگونگی پیدا کردن مرکز جرم اجسام صلب مهم است، ولی ما فقط با چند حالت ساده که در دو مثال زیر نشان داده شده سروکار خواهیم داشت. مثالهای بیشتری در یادداشت ۱-۳ آخر این فصل آورده شده‌اند.

مثال ۳-۳ مرکز جرم میله نایکنواخت: میله‌ای به طول L مطابق شکل ۶-۳ دارای چگالی نایکنواخت است. λ جرم واحد طول میله است که طبق رابطه $\lambda = \lambda_0 (s/L)$ تغییر می‌کند. در این رابطه λ_0 مقداری ثابت و s فاصله تا انتهای میله است که با علامت \circ مشخص شده است. مرکز جرم را پیدا کنید. بدیهی است که \mathbf{R} روی میله قرار می‌گیرد. فرض کنید مبدأ دستگاه مختصات بر انتهای میله که با علامت \circ مشخص شده است منطبق باشد و محور x در امتداد میله قرار داشته باشد. به طوری که $s = x$ باشد. جرم موجود در جزء طول dx عبارت است از $dm = \lambda dx = \lambda_0 x dx/L$. میله از $x = 0$ تا $x = L$ گسترده است و جرم کل برابر است با



شکل ۳-۶



شکل ۳-۵

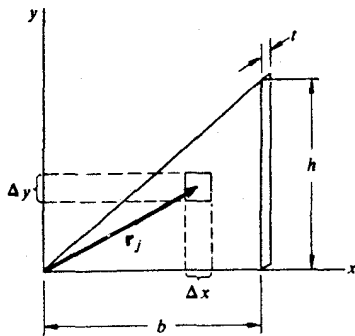
$$\begin{aligned}
 M &= \int dm \\
 &= \int_0^L \lambda dx \\
 &= \int_0^L \frac{\lambda \cdot x dx}{L} \\
 &= \frac{1}{2} \lambda \cdot L
 \end{aligned}$$

مرکز جرم آن چنین است

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} &= \frac{1}{M} \int \mathbf{r} \lambda dM \\
 &= \frac{2}{\lambda \cdot L} \int_0^L (x\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}) \frac{\lambda \cdot x dx}{L} \\
 &= \frac{2}{L^2} \hat{i} \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^L \\
 &= \frac{2}{3} L \hat{i}
 \end{aligned}$$

مثال ۳-۴ مرکز جرم ورقه مثلثی شکل: ورقه (دو بعدی) یکنواختی به شکل مثلث قائم الزاویه و به جرم M ، قاعده b ، ارتفاع h و ضخامت کم t را در نظر بگیرید. اگر مطابق شکل ۳-۷ این ورقه را به سطوح مستطیل شکل کوچکی به اضلاع Δx و Δy تقسیم کنیم، آنگاه حجم هر جزء آن برابر است با $\Delta V = t \Delta x \Delta y$

$$\mathbf{R} \approx \frac{\sum m_j \mathbf{r}_j}{M}$$



شکل ۷-۳

$$= \frac{\sum \rho_j t \Delta x \Delta y r_j}{M}$$

که در آن z شاخص یکی از جزء حجمها و ρ_j چگالی آن است. از آنجا که ورقه یکنواخت است داریم

$$\rho_j = \text{const.} = \frac{M}{V} = \frac{M}{At}$$

که در آن A مساحت ورقه است.

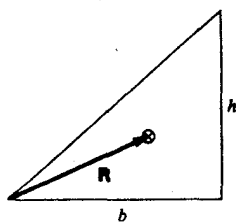
این عمل جمع را به جای اینکه تنها روی شاخص z انجام دهیم، ابتدا روی Δx و سپس روی Δy انجام می‌دهیم. نتیجه این عمل یک جمع دوگانه است که با حدگیری به طریق زیر می‌توان آن را به یک انتگرال دوگانه تبدیل کرد

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left(\frac{M}{At} \right) \left(\frac{t}{M} \right) \sum \sum r_j \Delta x \Delta y \\ &= \frac{1}{A} \iint \mathbf{r} \, dx \, dy \end{aligned}$$

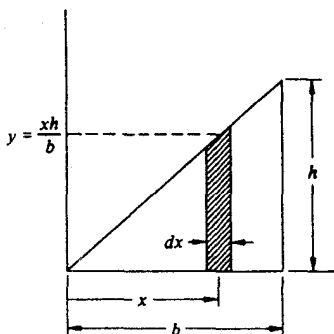
اگر $\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ بردار مکان جزء $dx \, dy$ باشد، آنگاه با نوشتن $\mathbf{R} = X\hat{i} + Y\hat{j}$ داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= X\hat{i} + Y\hat{j} \\ &= \frac{1}{A} \iint (x\hat{i} + y\hat{j}) \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{A} \left(\iint x \, dx \, dy \right) \hat{i} + \frac{1}{A} \left(\iint y \, dx \, dy \right) \hat{j} \end{aligned}$$

از این رو مختصات مرکز جرم چنین می‌شود



شکل ۹-۳



شکل ۸-۳

$$X = \frac{1}{A} \iint x \, dx \, dy$$

$$Y = \frac{1}{A} \iint y \, dx \, dy$$

انتگرالهای دوگانه ممکن است عجیب به نظر آیند، ولی به سادگی قابل ارزیابی هستند. ابتدا انتگرال دوگانه زیر را در نظر بگیرید

$$X = \frac{1}{A} \iint x \, dx \, dy$$

این انتگرال دوگانه به ما می آموزد که برای هر جزء آن می توان مساحت آن را در مختصه x آن ضرب و نتایج را با هم جمع کنیم. این عمل را می توان مرحله به مرحله، ابتدا با در نظر گرفتن اجزای نواری موازی با محور y انجام داد (شکل ۸-۳). نوار از $y = 0$ تا $y = xh/b$ را طی می کند. در این نوار هر جزء دارای مختصه یکسان x است، و سهم آن در انتگرال دوگانه چنین است

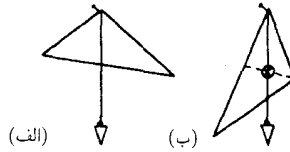
$$\frac{1}{A} x \, dx \int_0^{xh/b} dy = \frac{h}{bA} x^2 \, dx$$

و سرانجام، سهمهای همه این نوارها را از $x = 0$ تا $x = b$ جمع می کنیم

$$\begin{aligned} X &= \frac{h}{bA} \int_0^b x^2 \, dx = \frac{h}{bA} \frac{b^3}{3} \\ &= \frac{hb^2}{3A} \end{aligned}$$

از آنجا که $A = 1/2bh$ است، شکل ۹-۳، داریم

$$X = \frac{2}{3}b$$



شکل ۳-۱۰

به همین ترتیب به دست می آید

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{A} \int_0^b \left(\int_0^{xh/b} y \, dy \right) dx \\ &= \frac{h^2}{2Ab^2} \int_0^b x^2 dx = \frac{h^2 b}{6A} \\ &= \frac{1}{3} h \end{aligned}$$

بنابراین

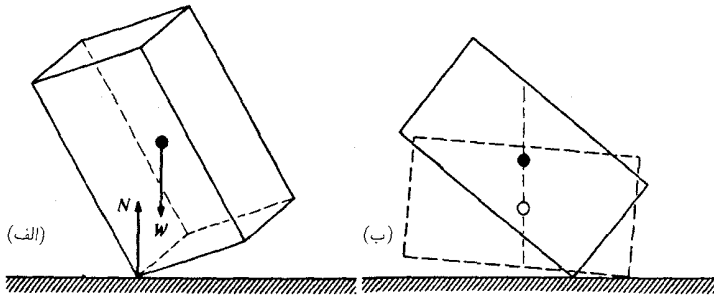
$$\mathbf{R} = \frac{2}{3} h \hat{i} + \frac{1}{3} h \hat{j}$$

اگرچه مختصات \mathbf{R} به دستگاه مختصات بخصوصی که انتخاب می کنیم بستگی دارد، ولی مکان مرکز جرم نسبت به صفحه مثلث مستقل از دستگاه مختصات است. ■

معمولاً بحثهای فیزیکی از تحلیلهای ریاضی مفیدترند. مثلاً، برای پیدا کردن مرکز جرم یک شیء مسطح نامنظم شکل ۳-۱۰ (الف)، ابتدا آن را از یک نقطه اتکا آویزان و از آن نقطه یک خط شاقول رسم می کنیم. مرکز جرم مستقیماً در زیر نقطه اتکا معلق خواهد بود. (این امر ممکن است مستقیماً بدیهی به نظر آید و می توان آن را با روشهای فصل ۶ به سهولت اثبات کرد) و در جایی روی خط شاقولی قرار می گیرد. این روش را با نقطه اتکای دیگری تکرار کنید. این دو خط یکدیگر را در مرکز جرم قطع می کنند (شکل ۳-۱۰ ب).

مثال ۳-۵ حرکت مرکز جرم: مطابق شکل ۳-۱۱ (الف) جعبه ای مکعب مستطیل شکل از یکی از گوشه های آن روی میز بدون اصطکاک نگاهی داشته شده است، و به آرامی رها می شود. این جعبه با حرکت پیچیده ای سقوط می کند، که ما هنوز برای حل آن آمادگی نداریم، زیرا این حرکت نوعی دوران است. اما، هیچ گونه مشکلی در پیدا کردن مسیر مرکز جرم وجود ندارد.

نیروهای خارجی وارد بر جعبه عبارت اند از نیروی وزن و نیروی قائم میز (شکل ۳-۱۱ ب) که هیچ کدام از اینها مؤلفه افقی ندارند، و بنابراین مرکز جرم باید به طور عمودی شتاب بگیرد. برای یک جعبه



شکل ۳-۱۱

یکنواخت، مرکز جرم در مرکز هندسی آن واقع است. اگر جعبه از حالت سکون رها شود مرکز آن مستقیماً به طرف پایین سقوط می‌کند.

۳-۳ پایستگی تکانه

در بخش گذشته پیدا کردیم که بین نیروی خارجی کل وارد بر یک سیستم، \mathbf{F} ، و تکانه کل آن \mathbf{P} رابطه زیر برقرار است

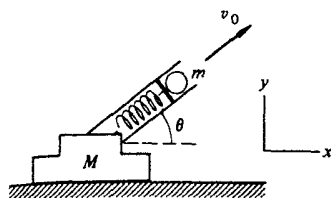
$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

حال مصداقهای این رابطه را در یک سیستم منزوی، یعنی سیستمی که با محیط اطراف خود هیچ برهم‌کنشی ندارد، مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این حالت $\mathbf{F} = 0$ و $d\mathbf{P}/dt = 0$ است. تکانه کل ثابت است، بدون توجه به اینکه برهم‌کنشهای بین ذرات سیستم منزوی چقدر قوی و حرکت آنها چقدر پیچیده باشد، تکانه کل سیستم منزوی ثابت می‌ماند. این قانون را پایستگی تکانه می‌نامند. همان طوری که نشان خواهیم داد این قانون به ظاهر ساده می‌تواند اطلاعات با اهمیتی از سیستمهای پیچیده به دست دهد.

مثال ۳-۶ پس زنی تفنگ فنی: ^۱ یک تفنگ فنی پر شده که در ابتدا روی سطح افقی بدون اصطکاک می‌باشد مطابق شکل ۳-۱۲ در حالت سکون قرار دارد، ساچمه‌ای را با زاویه θ شلیک می‌کند. جرم تفنگ M ، و جرم ساچمه m است، سرعت ساچمه در دهانه تفنگ v است. حرکت نهایی تفنگ را پیدا کنید.

تفنگ و ساچمه را به عنوان یک سیستم فیزیکی در نظر بگیرید. نیروی وزن و نیروی قائم‌میز بر این سیستم وارد می‌شوند. هر دوی این نیروها به صورت قائم‌اند. از آنجا که نیروهای خارجی افقی وجود ندارند، مؤلفه x معادله برداری $\mathbf{F} = d\mathbf{P}/dt$ به صورت زیر است

۱. همان تفنگ بادی است.



شکل ۱۲-۳

$$\circ = \frac{dP_x}{dt} \quad (1)$$

طبق معادله ۱، پایسته است

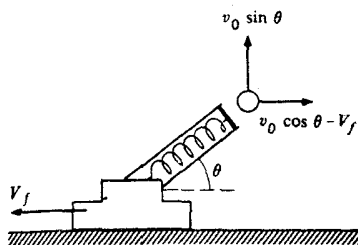
$$P_{x,i} = P_{x,f} \quad (2)$$

اگر زمان اولیه را قبل از شلیک تفنگ بگیریم، آنگاه $P_{x,i} = \circ$ می شود، زیرا سیستم در آغاز به حالت سکون است. بعد از اینکه ساچمه دهانه تفنگ را ترک کرد، تفنگ با سرعت V_f پس می زند، و تکانه افقی نهایی آن برابر MV_f و به طرف چپ است. اما، پیدا کردن سرعت نهایی ساچمه نکته ظریفی همراه دارد. از نظر فیزیکی، شتاب ساچمه ناشی از نیروی تفنگ است. و پس زنی تفنگ مربوط به نیروی واکنش ساچمه است. به محض اینکه ساچمه لوله تفنگ را ترک می کند، تفنگ دیگر شتاب ندارد، به طوری که در لحظه جدا شدن تفنگ و ساچمه، تفنگ سرعت نهایی خود (V_f) را به دست می آورد. در همان لحظه بخصوص سرعت ساچمه نسبت به تفنگ v است (شکل ۳-۱۳). از این رو سرعت افقی نهایی ساچمه نسبت به میز برابر است با $v \cos \theta - V_f$. بنابراین از روی پایستگی تکانه افقی، داریم

$$\circ = m(v \cos \theta - V_f) - MV_f$$

یا

$$V_f = \frac{mv \cos \theta}{M + m}$$



شکل ۱۳-۳

با استفاده از پابستگی تکانه، حرکت نهایی دستگاه را در چند مرحله پیدا کردیم. برای نشان دادن مزیت این روش، حل مسئله را مستقیماً با استفاده از قوانین نیوتون تکرار می‌کنیم.

اگر $v(t)$ سرعت ساچمه در زمان t و $V(t)$ سرعت تفنگ باشند، زمانی که ساچمه شلیک می‌شود، توسط فنر، گرانی، و نیروهای اصطکاک دیواره و دهانه تفنگ بر آن نیرو وارد می‌شود. فرض کنید برآیند نیروهای وارد بر ساچمه $f(t)$ باشد. معادله حرکت در راستای x برای ساچمه چنین است

$$m \frac{dv_x}{dt} = f_x(t) \quad (3)$$

از انتگرال‌گیری معمولی معادله ۳ نتیجه می‌شود

$$mv_x(t) = mv_x(0) + \int_0^t f_x dt \quad (4)$$

نیروهای خارجی همگی به صورت قائم‌اند، و بنابراین نیروی افقی f_x وارد بر ساچمه کاملاً مربوط به تفنگ است. با توجه به قانون سوم نیوتون، یک نیروی عکس‌العمل $-f_x$ وارد بر تفنگ از طرف گلوله وجود دارد. هیچ نیروی افقی دیگری که بر تفنگ وارد شود وجود ندارد، و بنابراین معادله حرکت افقی تفنگ چنین است

$$M \frac{dV_x}{dt} = -f_x(t)$$

که با انتگرال‌گیری نتیجه می‌دهد

$$MV_x(t) = MV_x(0) - \int_0^t f_x dt \quad (5)$$

می‌توان با ترکیب معادلات (۴) و (۵) جمله انتگرالی بالا را حذف کرد

$$MV_x(t) + mv_x(t) = MV_x(0) + mv_x(0) \quad (6)$$

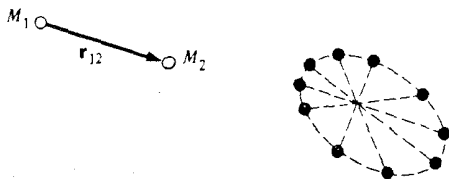
دوباره به این نتیجه رسیدیم که مؤلفه افقی تکانه پابسته است.

حرکت مرکز جرم چطور؟ سرعت افقی آن چنین است

$$\dot{R}_x(t) = \frac{MV_x(t) + mv_x(t)}{M + m}$$

با استفاده از معادله ۶ صورت کسر می‌تواند دوباره چنین نوشته شود

$$\dot{R}_x(t) = \frac{MV_x(0) + mv_x(0)}{M + m} = 0$$



شکل ۳-۱۴

زیرداستگاه در ابتدا به حالت سکون است. همانطوری که انتظار داشتیم R_x مقدار ثابتی است.

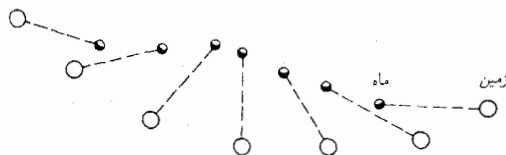
نیروی کوچک مقاومت هوا را به حساب نیاوردیم. اگر آن را به حساب می‌آوردیم، آیا مرکز جرم به حالت سکون باقی می‌ماند؟

قدم اساسی در به دست آوردن قانون پایستگی تکانه، استفاده از قانون سوم نیوتون بود. از این رو به نظر می‌رسد پایستگی تکانه نتیجه طبیعی مکانیک نیوتونی است. ولی ثابت شده است که حتی در حوزه‌هایی مانند مکانیک کوانتومی و نسبیت که مکانیک نیوتونی نارساست، پایستگی تکانه برقرار است. ضمناً، این پایستگی تکانه را می‌توان تعمیم داد یعنی در سیستم‌های الکترومغناطیسی که در آنها تکانه وجود دارد ولی جرمی در کار نیست نیز به کار برد. بنا به این دلایل پایستگی تکانه به طور کلی بیشتر از مکانیک نیوتونی مورد توجه قرار می‌گیرد. از این دیدگاه، قانون سوم نیوتون، نتیجه ساده پایستگی تکانه ذراتی است که در حال برهم‌کنش اند. برای منظور فعلی، اینکه قانون سوم نیوتون و یا پایستگی تکانه، اساسی‌تر گرفته شود دقیقاً به سلیقه شخصی بستگی دارد.

مثال ۳-۷ زمین، ماه، خورشید-سیستم سه جسمی: نیوتون اولین کسی بود که حرکت دو جسم تحت تأثیر گرانش را محاسبه کرد، همانطوری که در فصل ۹ شرح خواهیم داد، دو جسم به جرم‌های M_1 و M_2 که از طریق گرانش به یکدیگر متصل‌اند چنان حرکت می‌کنند که بردار r_{12} یک مسیر بیضی را طی می‌کند. شکل ۳-۱۴ حرکت را در چارچوبی که مرکز جرم در آن در حالت سکون است نشان می‌دهد. (توجه داشته باشید که مرکز جرم روی خط واصل بین آنها قرار می‌گیرد.)

اما هیچ حل تحلیلی کلی برای حرکت سه جسم تحت تأثیر گرانش وجود ندارد. با وجود این، می‌توانیم خیلی از جنبه‌های مهم حرکت را به کمک مفهوم مرکز جرم تشریح کنیم.

در نظر اول، حرکت سیستم زمین-ماه-خورشید خیلی پیچیده به نظر می‌رسد. در غیاب خورشید، زمین و ماه حرکتی با مسیر بیضی حول مرکز جرمشان انجام خواهند داد (شکل ۳-۱۵). می‌توان با تقریب خوبی نشان داد که این مرکز جرم مانند یک سیاره تنها خورشید را دور می‌زند. حرکت کل نتیجه



شکل ۱۵-۳

ساده‌ای است که از دو مدار بیضی همزمان حاصل می‌شود. مرکز جرم سیستم زمین-ماه-خورشید در نقطه‌ای با مشخصات زیر واقع است

$$\mathbf{R} = \frac{M_e \mathbf{R}_e + M_m \mathbf{R}_m + M_s \mathbf{R}_s}{M_e + M_m + M_s}$$

که M_e ، M_m و M_s به ترتیب جرمهای زمین، ماه، و خورشید هستند. جرم خورشید در مقایسه با جرم زمین یا ماه به قدری بزرگ است که $\mathbf{R}_s \approx \mathbf{R}_e$ و با تقریب خوبی مرکز جرم سیستم سه جسمی در مرکز خورشید واقع می‌شود (شکل ۱۶-۳). از آنجا که نیروی خارجی قابل اغماض اند، خورشید به طور مؤثر در یک چارچوب لخت در حال سکون است و استفاده از دستگاه مختصاتی که مبدأ آن در مرکز خورشید باشد، طبیعی است، به طوری که $\mathbf{R} = \mathbf{0}$.

اگر r_e و r_m را مکانهای زمین و ماه نسبت به خورشید بگیریم (شکل ۱۷-۳)، فعلاً به سیستمی متشکل از ماه و زمین توجه کنیم، مرکز جرم آنها در محل زیر واقع می‌شود

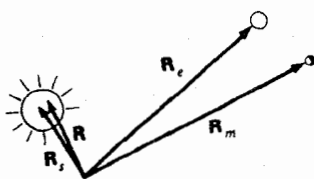
$$\mathbf{R}_{em} = \frac{M_e \mathbf{r}_e + M_m \mathbf{r}_m}{M_e + M_m}$$

نیروی خارجی وارد بر سیستم زمین-ماه کشش گرانشی خورشید است

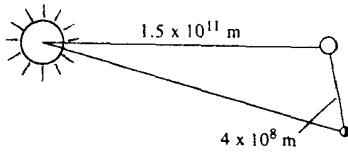
$$\mathbf{F} = -GM_s \left(\frac{M_e}{r_e^2} \hat{\mathbf{r}}_e + \frac{M_m}{r_m^2} \hat{\mathbf{r}}_m \right)$$

معادله حرکت مرکز جرم چنین است

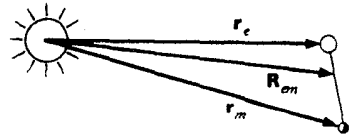
$$(M_e + M_m) \ddot{\mathbf{R}}_{cm} = \mathbf{F}$$



شکل ۱۶-۳



شکل ۱۸-۳



شکل ۱۷-۳

زمین و ماه در مقایسه با فاصله آنها تا خورشید آنقدر نزدیک‌اند، که با فرض $r_e \approx r_m \approx R_{em}$ اشتباه بزرگی مرتکب نخواهیم شد. با این تقریب داریم (شکل ۱۸-۳)

$$\begin{aligned} (M_e + M_m)\ddot{\mathbf{R}}_{em} &\approx \frac{-GM_s}{R^2}(M_e \hat{\mathbf{r}}_e + M_m \hat{\mathbf{r}}_m) \\ &= \frac{-GM_s(M_e + M_m)\hat{\mathbf{R}}_{em}}{R^2} \end{aligned}$$

مرکز جرم زمین و ماه مانند سیاره‌ای به جرم $M_e + M_m$ حول خورشید حرکت می‌کند. حرکت کل ترکیبی است از این حرکت بیضی شکل و حرکت بیضی شکل زمین و ماه حول مرکز جرم آنها، همانطور که در شکل ۱۹-۳ نشان داده شده است. (مقیاس شکلها درست نیست. مرکز جرم سیستم زمین-ماه در داخل زمین واقع می‌شود، و مدار ماه به طرف خورشید تعقر دارد. و همچنین، صفحه مدار ماه نسبت به مدار زمین حول خورشید، ۵ درجه تمایل دارد.)

دستگاه مختصات مرکز جرم

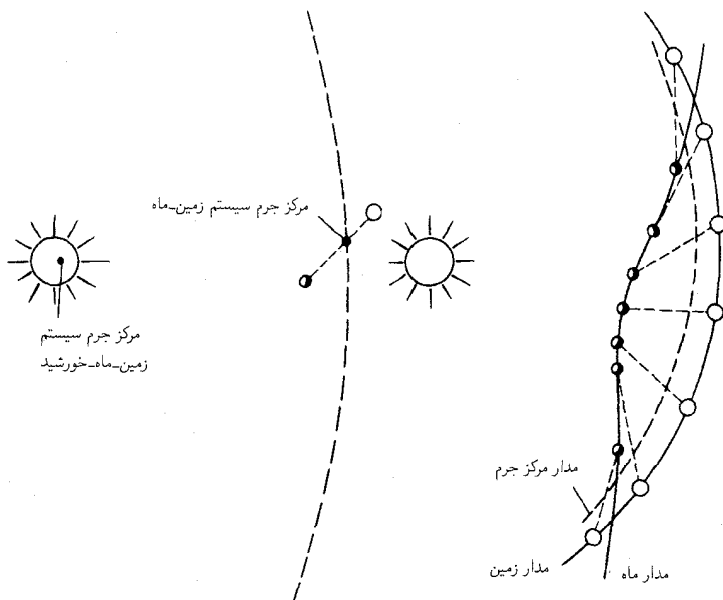
غالباً هر مسئله‌ای با انتخاب درست مختصات می‌تواند ساده‌تر شود. دستگاه مختصات مرکز جرم، که در آن مبدأ در مرکز جرم قرار دارد، به‌ویژه مفید است. شکل ۳-۲۰ (الف) حالتی از یک سیستم دو ذره‌ای با جرمهای m_1 و m_2 را نشان می‌دهد. در دستگاه مختصات اولیه، x, y, z ، ذرات در \mathbf{r}_1 و \mathbf{r}_2 واقع شده‌اند و مرکز جرم آنها در مکان زیر قرار دارد

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

اینک دستگاه مختصات مرکز جرم x', y', z' را طوری در نظر می‌گیریم که مبدأ آن روی مرکز جرم قرار گیرد (شکل ۳-۲۰ ب). مبدأهای دستگاه قدیم و جدید به اندازه بردار \mathbf{R} نسبت به هم جابه‌جا شده‌اند. مختصات مرکز جرم این دو ذره چنین‌اند

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}$$

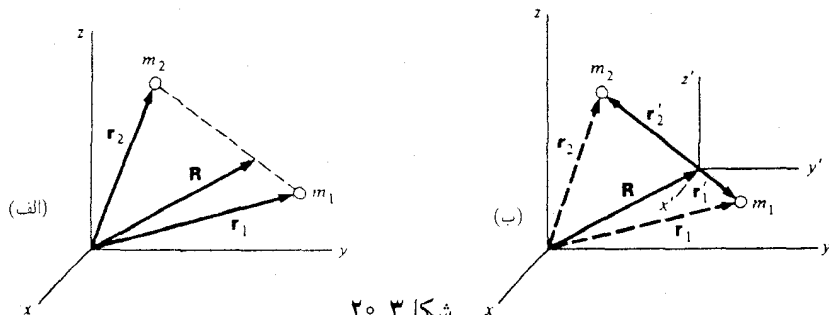
$$\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}$$



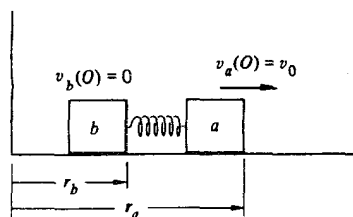
شکل ۱۹-۳

مختصات مرکز جرم، برای یک سیستم دو جسمی منزوی دستگاه مختصاتی طبیعی است. برای یک چنین سیستمی حرکت مرکز جرم خیلی ساده و بدیهی است و به طور یکنواخت حرکت می‌کند. به علاوه، طبق تعریف مرکز جرم $m_1 r'_1 + m_2 r'_2 = 0$ است، به طوری که اگر حرکت یک ذره معلوم باشد حرکت ذره دیگر نیز مستقیماً از آن نتیجه می‌شود. اینک مثالی می‌آوریم.

مثال ۸-۳ کشیدن و هل دادن: دو مکعب یکسان a و b به جرم m مطابق شکل ۲۱-۳ روی میزی بدون اصطکاک می‌لغزند و توسط فنری به طول l و ثابت فنری k به هم متصل‌اند. این دو مکعب ابتدا به حالت سکون قرار دارند. در $t = 0$ به مکعب a یک ضربه آبی وارد می‌شود که به آن سرعت لحظه‌ای



شکل ۲۰-۳



شکل ۳-۲۱

v_0 به طرف راست می دهد، سرعت دو جسم را در زمانهای بعدی پیدا کنید. (اگر ریل هوا در دسترس دارید این کار را خودتان امتحان کنید—طرز حرکت کاملاً غیرمنتظره است.)
از آنجا که سیستم بعد از برخورد به طور آزادانه می لغزد، مرکز جرم به طور یکنواخت حرکت می کند، و بنابراین بیانگر یک چارچوب لخت است.

اگر مسئله را در مختصات مرکز جرم مطرح کنیم، مرکز جرم در مکان زیر قرار می گیرد

$$R = \frac{mr_a + mr_b}{m + m}$$

$$= \frac{1}{2}(r_a + r_b)$$

همانطوری که انتظار می رود، R همواره وسط a و b است. مختصات مرکز جرم a و b چنین اند

$$r'_a = r_a - R$$

$$= \frac{1}{2}(r_a - r_b)$$

$$r'_b = r_b - R$$

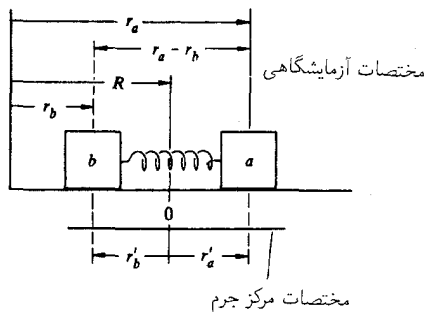
$$= -\frac{1}{2}(r_a - r_b)$$

$$= -r'_a$$

شکل ۳-۲۲ این مختصات را نشان می دهد.

طول لحظه ای فنر عبارت است از $l = r'_a - r'_b - l = r'_a - r'_b - l$ که در آن l طول فنر کشیده نشده است. بزرگی نیروی فنر چنین است $k(r'_a - r'_b - l)$. معادلات حرکت در دستگاه مرکز جرم عبارت اند از:

$$m \ddot{r}'_a = -k(r'_a - r'_b - l)$$



شکل ۲۲-۳

$$m \ddot{r}'_b = +k(r'_a - r'_b - l)$$

از شکل معادلات پیداست که اگر آنها را از هم تفریق کنیم خواهیم داشت

$$m(\ddot{r}'_a - \ddot{r}'_b) = -2k(r'_a - r'_b - l)$$

به طور طبیعی تفاوت طول فنر از طول حالت تعادلش را به عنوان متغیر معرفی می‌کنیم با فرض

$$u = r'_a - r'_b - l \quad \text{داریم}$$

$$m \ddot{u} + 2ku = 0$$

این معادله حرکت هماهنگ ساده است که در مثال ۱۴-۲ بحث کردیم. جواب چنین است

$$u = A \sin \omega t - B \cos \omega t$$

که در آن $\omega = \sqrt{2k/m}$ است. از آنجا که در لحظه $t = 0$ فنر کشیده شده است، $u(0) = 0$ است

که ایجاب می‌کند $B = 0$ شود. به علاوه، چون $u = r'_a - r'_b - l = r_a - r_b - l$ است، در لحظه $t = 0$ داریم

$$\begin{aligned} \dot{u}(0) &= v_a(0) - v_b(0) \\ &= A\omega \cos(0) \\ &= v_0 \end{aligned}$$

به طوری که

$$A = v_0 / \omega$$

$$u = (v_0/\omega) \sin \omega t$$

از آنجا که $v'_a = -v'_b$ و $v'_a - v'_b = u$ داریم

$$v'_a = -v'_b = \frac{1}{2} v_0 \cos \omega t$$

سرعت‌های آزمایشگاهی عبارت‌اند از

$$v_a = \dot{R} + v'_a$$

$$v_b = \dot{R} + v'_b$$

چون R ثابت است، پس همواره با مقدار اولیهٔ خود برابر است

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \frac{1}{2} [v_a(0) + v_b(0)] \\ &= \frac{1}{2} v_0 \end{aligned}$$

از ترکیب روابط بالا با یکدیگر داریم

$$v_a = \frac{v_0}{2} (1 + \cos \omega t)$$

$$v_b = \frac{v_0}{2} (1 - \cos \omega t)$$

مجموعهٔ این جرم‌ها به‌طور متوسط به‌طرف راست حرکت می‌کند، ولی هر یک از آنها به روش کشیدن و هل دادن متناوباً به‌حال سکون درمی‌آید.

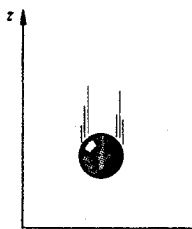
۳-۴ ضربه و نگاهی دوباره به رابطهٔ تکانه

رابطهٔ بین نیرو و تکانه چنین است

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad (۱۶-۳)$$

به موجب یک قاعدهٔ کلی، هر قانون فیزیکی که بتواند برحسب مشتق ارائه شود، به شکل انتگرال نیز می‌تواند نوشته شود. شکل انتگرالی رابطهٔ نیرو-تکانه چنین است

$$\int_0^t \mathbf{F} dt = \mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(0) \quad (۱۷-۳)$$



شکل ۳-۲۳

تغییر تکانه یک سیستم توسط انتگرال نیرو نسبت به زمان داده می شود. این شکل اساساً همان اطلاعات معادله ۳-۱۶ را در بردارد، ولی روش تازه ای برای مطالعه اثر نیرو به دست می دهد: تغییر تکانه برابر انتگرال زمانی نیرو است. برای به وجود آوردن یک تغییر معین در تکانه در فاصله زمانی t ، تنها لازم است که $\int F dt$ دارای مقدار مناسبی باشد. می توان از نیروی کوچکی که در زمان طولانی اثر می کند و یا نیروی بزرگی که فقط در زمانی کوتاه اثر می کند، استفاده کرد. انتگرال $\int F dt$ را ضربه می نامند. کلمه ضربه، شوک محکم و کوتاهی را تداعی می کند، مانند مورد مثال ۳-۸ که در آنجا از نواختن به جرم در حال سکون یک سرعت نهایی v حاصل می شد. اما تعریف فیزیکی ضربه می تواند برای نیروی ضعیفی که در زمان طولانی اثر می کند نیز به کار برده شود. تغییر تکانه مستقل از جزئیات وابستگی زمانی نیرو است و تنها به $\int F dt$ بستگی دارد.

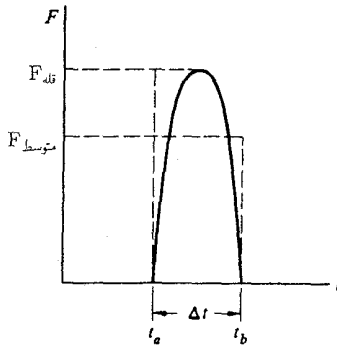
در اینجا به دو مثال در مورد ضربه می پردازیم.

مثال ۳-۹ برگشت توپ لاستیکی: یک توپ لاستیکی به جرم ۲ کیلوگرم به سمت زمین سقوط می کند (شکل ۳-۲۳). این توپ با سرعت ۸ متر بر ثانیه با زمین برخورد می کند و تقریباً با همان سرعت برمی گردد. عکسبرداریهای سریع نشان می دهد که توپ برای مدت 10^{-3} ثانیه با زمین در تماس است. در مورد نیرویی که از طرف زمین به توپ وارد می شود چه می توان گفت؟

تکانه توپ درست قبل از برخورد با زمین برابر است با $P_a = -1.6 \hat{k} \text{ kgm/s}$. بعد از 10^{-3} ثانیه برابر است با $P_b = +1.6 \hat{k} \text{ kgm/s}$. چون $\int_{t_a}^{t_b} F dt = P_b - P_a$ ، آنگاه $\int_{t_a}^{t_b} F dt = 1.6 \hat{k} - (-1.6 \hat{k}) = 3.2 \hat{k} \text{ kgm/s}$. گرچه تغییر کامل F نسبت به زمان معلوم نیست، ولی به سهولت نیروی اعمال شده متوسط از طرف زمین به توپ را می توان پیدا کرد. اگر زمان برخورد برابر با $\Delta t = t_b - t_a$ باشد، نیروی متوسط مؤثر در زمان برخورد متوسط F چنین است

$$F_{\text{متوسط}} \Delta t = \int_{t_a}^{t_a + \Delta t} F dt$$

چون $\Delta t = 10^{-3} \text{ s}$ است، داریم



شکل ۳-۲۴

$$F_{\text{متوسط}} = \frac{۳,۲\hat{k} \text{ kgm/s}}{۱۰^{-۲}\text{s}} = ۳۲۰۰\hat{k} \text{ N}$$

همان‌گونه که انتظار داریم، نیروی متوسط به طرف بالاست. برحسب واحدهای آشناتر $۳۲۰ \text{ kgf} \approx ۳۲۰۰ \text{ N}$ که نیرویی قابل توجه است. نیروی لحظه‌ای وارد بر توپ در قله منحنی همانطوری که در شکل ۳-۲۴ دیده می‌شود حتی از این هم بزرگتر است. اگر توپ با سطح قابل ارتجاعی برخورد کند، زمان برخورد طولانیتر و نیروی قله کمتر است.

درواقع ضعفی در بحث برگشت توپ لاستیکی موجود است. در محاسبه ضربه $\int \mathbf{F} dt$ ، نیروی کل است. این نیرو شامل گرانی هم می‌شود که ما از آن صرف‌نظر کردیم. اگر مسئله را با دقت بیشتر دنبال کنیم چنین خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_f + \mathbf{F}_g \\ &= \mathbf{F}_f - Mg\hat{k} \end{aligned}$$

که در آن نیروی ناشی از کف زمین و \mathbf{F}_g نیروی گرانی است. در این صورت، معادله ضربه چنین می‌شود

$$\int_0^{۱۰^{-۲}} \mathbf{F}_f dt - \int_0^{۱۰^{-۲}} Mg\hat{k} dt = ۳,۲\hat{k} \text{ kgm/s}$$

ضربه مربوط به نیروی گرانی چنین است

$$\begin{aligned} - \int_0^{۱۰^{-۲}} Mg\hat{k} dt &= -Mg\hat{k} \int_0^{۱۰^{-۲}} dt = -(۰,۲)(۹,۸)(۱۰^{-۲})\hat{k} \\ &= -۱,۹۶ \times ۱۰^{-۲}\hat{k} \text{ kgm/s} \end{aligned}$$

این مقدار از یک هزارم کل ضربه کمتر است که با اشتباهی اندک می‌توانیم از آن صرف‌نظر کنیم. در زمانهای طولانی، گرانش می‌تواند تغییر بزرگی در تکانهٔ توپ به‌وجود آورد (مثلاً، توپ همانطور که سقوط می‌کند سرعت می‌گیرد). اما در زمان کوتاه تماس، گرانش در مقایسه با نیروی خیلی زیاد وارد از طرف زمین، سهم کوچکی در تغییر تکانه دارد. نیروهای تماسی در خلال برخورد‌های کوتاه عموماً به قدری بزرگ‌اند که می‌توان از ضربهٔ مربوط به دیگر نیروهای ملایم، مانند گرانی و اصطکاک صرف‌نظر کرد. ■

مثال قبلی نشان می‌دهد، وقتی که سرعت‌های اولیه و نهایی یکسان باشند، چرا برخورد سریع خشنتر از برخورد آرام است. به این دلیل است که یک چکش می‌تواند نیروی خیلی بزرگتر از نیرویی که خود نجار تولید می‌کند به‌وجود آورد. سرچکش، در زمانی خیلی کوتاه در مقایسه با زمان تناوب چکش‌زنی برگشت می‌کند، و به این ترتیب نیروی کوبیدن چکش تقویت می‌شود. خیلی از وسایلی که برای جلوگیری از صدمه دیدن بدن در حوادث به‌کار می‌روند، بر پایهٔ چنین ملاحظاتی استوارند، ولی برعکس به‌کار برده می‌شوند. این وسایل اساساً برخورد را طولانی می‌کنند. این موضوع، اساس و پایهٔ ساخت کلاه خود بازیکان هاکی و همچنین کمر بند احتیاط اتومبیل‌هاست. مثال زیر نشان می‌دهد که حتی در برخوردهای نسبتاً ملایم، مانند وقتی که به زمین می‌پریم، چه اتفاقی می‌تواند رخ دهد.

مثال ۳-۱۰ چگونه از شکستگی مچ پا اجتناب کنیم: جانوران، از جمله انسانها به‌طور غریزی برخورد با زمین را در حال دویدن یا پریدن با خم کردن اعضا کاهش می‌دهند. ببینیم اگر شخصی با پاهای بدون انعطاف به زمین برخورد، چه اتفاقی می‌افتد.

فرض کنید شخصی به جرم M از ارتفاع h به زمین می‌پرد، و مرکز جرم شخص در طول زمان برخورد با زمین مسافت s را به طرف پایین طی می‌کند. نیروی متوسط در طول برخورد چنین است

$$F = \frac{Mv_0}{t} \quad (1)$$

که در آن t زمان برخورد و v_0 سرعتی است که با آن به زمین می‌رسد. به عنوان یک تقریب معقول می‌توانیم شتاب حاصل از نیروی برخورد را ثابت بگیریم، به طوری که این شخص به‌طور یکنواخت به حالت سکون می‌رسد. در این صورت زمان برخورد از رابطهٔ $v_0 = 2s/t$ یا $t = 2s/v_0$ به دست می‌آید. جایگذاری این عبارات در معادلهٔ ۱ نتیجه می‌دهد

$$F = \frac{Mv_0^2}{2s} \quad (2)$$

برای سقوط آزاد جسمی از ارتفاع h داریم

$$v_0^2 = 2gh$$

با جایگذاری این عبارت در معادله ۲ نتیجه می شود

$$F = Mg \frac{h}{s}$$

اگر شخصی در وضعیت قائم و به طور غیر قابل انعطاف با زمین برخورد کند، مرکز جرم آن در طول برخورد خیلی حرکت نخواهد کرد. فرض کنید مرکز جرم آن به اندازه ۱ سانتیمتر حرکت کند، و این تقریباً بدین معنی است که قدش به طور آنی تقریباً به اندازه ۲ سانتیمتر کاهش می یابد. اگر این شخص از ارتفاع ۲ متری بپرد، نیرو به اندازه ۲۰۰ برابر وزن او است.

نیروی وارد بر شخصی به جرم ۹۰ کیلوگرم را که از ارتفاع ۲ متری می پرد در نظر بگیرید. این نیرو چنین است:

$$\begin{aligned} F &= 90 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 200 \\ &= 1.8 \times 10^5 \text{ N} \end{aligned}$$

بیشترین احتمال شکستگی استخوان در کجاست؟ نیرو در پاها بیشینه است، زیرا جرم موجود در بالای هر صفحه افقی گذرنده از شخص با ارتفاع کاهش می یابد از این رو میج پاهای او خواهد شکست، نه گردن او! اگر سطح تماس استخوان در میج پا ۵ سانتیمتر مربع باشد، آنگاه نیرو در واحد سطح چنین است

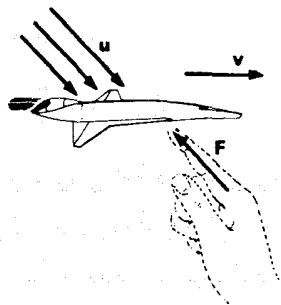
$$\begin{aligned} \frac{F}{A} &= \frac{1.8 \times 10^5 \text{ N}}{10 \text{ cm}^2} \\ &= 1.8 \times 10^4 \text{ N/cm}^2 \end{aligned}$$

این مقدار تقریباً برابر است با مقاومت تراکمی استخوان انسان، و بنابراین احتمال زیادی وجود دارد که میج پاهای او بشکند.

البته، هیچکس چنین عجله ای نخواهد داشت که به صورت بدون انعطاف پرش کند. ما به صورت غریزی با پریدن انعطاف پذیر خود در موقع برخورد با زمین، در سطح تماس حالت فنری پیدا می کنیم. اگر مرکز جرم شخص در خلال برخورد به جای ۱ سانتیمتر، ۵ سانتیمتر پایین آید، نیرو فقط به اندازه یک پنجم مقدار محاسبه شده خواهد بود و هیچ خطر شکستگی وجود ندارد. ■

۳-۵ تکانه و تغییر جرم

اگر بخواهیم قوانین نیوتون را در تحلیل نیروهای وارد بر سیستمی با جرم متغیر به طور چشم بسته به کار ببریم، با نتایجی بشدت گمراه کننده روبه رو خواهیم شد. موشکی که جرم متغیر دارد، روشترین نمونه از



شکل ۳-۲۵

چنین سیستمی است. اگرچه مسائل روزمره دیگر نیز وجود دارند، که عین این بررسیها را می توان برای آنها به کار برد. مانند مسئله محاسبه نیروی واکنش در یک لوله آب آتش نشانی، یا محاسبه شتاب یک گلوله برفی که با غلتیدن در سرازیری بزرگتر و بزرگتر می شود.

در برخورد با چنین مسائلی هیچ مشکل اساسی وجود ندارد، مشروط بر اینکه آنچه سیستم را در برمی گیرد دقیقاً در مدنظر باشد. یادآوری می کنیم که $\mathbf{F} = d\mathbf{P}/dt$ (معادله ۳-۱۲) برای سیستمی متشکل از مجموعه ای از ذرات برقرار است. وقتی که این معادله را به شکل انتگرال به کار می بریم

$$\int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F} dt = \mathbf{P}(t_b) - \mathbf{P}(t_a)$$

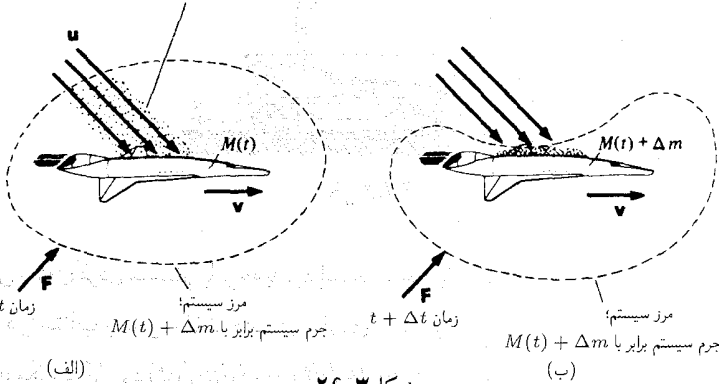
لازم است که در طول فاصله زمانی t_a تا t_b با همان مجموعه ذرات سروکار داشته باشیم؛ باید همه ذرات که از ابتدا در سیستم وجود داشتند در نظر گرفته شوند. در نتیجه جرم سیستم در طول زمان مورد بحث نمی تواند تغییر کند.

مثال ۳-۱۱ تغییر جرم و تکانه: فضاییابی با سرعت ثابت v در فضا حرکت می کند. این فضاپیما با جریانی از ذرات گرد و غبار که با آهنگ dm/dt به داخل آن نفوذ می کنند برخورد می کند. گردوغبار درست قبل از برخورد با فضاپیما دارای سرعت u است (شکل ۳-۲۵). در زمان t جرم کل فضاپیما برابر $M(t)$ است. می خواهیم نیروی خارجی لازم \mathbf{F} برای نگهداشتن فضاپیما در حرکت یکنواخت را پیدا کنیم. (در عمل، \mathbf{F} به احتمال زیاد از موتور موشک خود فضاپیما تأمین می شود. برای سادگی می توانیم تصور کنیم که منبع نیروی \mathbf{F} تماماً خارجی است، مثل یک دست نامرئی.)

اینک مسئله را در یک فاصله زمانی کوتاه بین t و $t + \Delta t$ مورد توجه قرار می دهیم. شکلهای ۳-۲۶، سیستم را در ابتدا و انتهای این فاصله زمانی نشان می دهند.

اگر Δm نشاندهنده جرم اضافه شده به فضاپیما در زمان Δt و سیستم مرکب از $M(t)$ و Δm باشد، تکانه اولیه چنین است

جرم Δm که باید در مدت زمان Δt اضافه شود.



$$\mathbf{P}(t) = M(t)\mathbf{v} + (\Delta m)\mathbf{u}$$

تکانه نهایی چنین است

$$\mathbf{P}(t + \Delta t) = M(t)\mathbf{v} + (\Delta m)\mathbf{v}$$

تغییر تکانه عبارت است از

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{P} &= \mathbf{P}(t + \Delta t) - \mathbf{P}(t) \\ &= (\mathbf{v} - \mathbf{u})\Delta m \end{aligned}$$

آهنگ تغییر تکانه تقریباً چنین است

$$\frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} = (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

در حد که $\Delta t \rightarrow 0$ ، نتیجه دقیق زیر به دست می آید

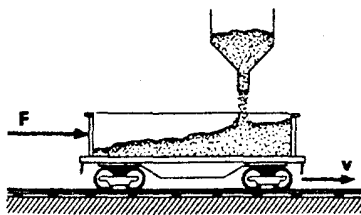
$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \frac{dm}{dt}$$

از آنجا که $\mathbf{F} = d\mathbf{P}/dt$ است، نیروی خارجی لازم چنین می شود

$$\mathbf{F} = (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \frac{dm}{dt}$$

توجه داشته باشید که \mathbf{F} بسته به جهت تغییر جرم می تواند مثبت یا منفی باشد. اگر $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ باشد، تکانه

سیستم ثابت و $\mathbf{F} = 0$ است. ■



شکل ۳-۲۷

روش منزوی کردن سیستم، با توجه به دیفرانسیلها و حدگیری ممکن است کم اهمیت به نظر رسد، اما این روش در اجتناب جستن از اشتباهات در مواردی که امکان اشتباه وجود دارد، مفید است. برای مثال، یک اشتباه مکرر در کاربرد $F = (d/dt)(mv) = m(dv/dt) + v(dm/dt)$ به وجود می آید. در مثال قبلی v ثابت است و نتیجه به جای اینکه $(v - u)(dm/dt)$ شود به صورت $F = v(dm/dt)$ درمی آید. مشکل قضیه در این است که در تکانه عوامل گوناگونی تأثیر دارند، به طوری که رابطه تکانه یک ذره تنها یعنی $p = mv$ ، دیگر مناسب نیست. روش حدگیری که در مثال گذشته به کار رفت از چنین ابهاماتی دوری می جوید.

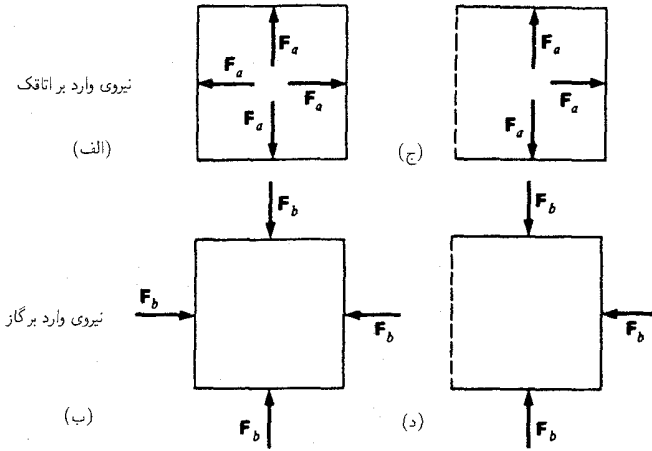
مثال ۳-۱۲ واگن باری و قیف مخصوص آن: مقداری شن مطابق شکل ۳-۲۷ از قیف ثابتی بر روی یک واگن باری که با سرعت v یکنواخت حرکت می کند پایین می ریزد. آهنگ ریزش شن dm/dt است. چه مقدار نیرو لازم است تا این واگن را در حرکت با سرعت v نگه دارد؟ در این حالت، سرعت اولیه شن صفر است، و داریم

$$\frac{dP}{dt} = (v - u) \left(\frac{dm}{dt} \right) = v \frac{dm}{dt}$$

نیروی مورد نیاز عبارت است از $F = v dm/dt$. با بررسی جزئیات مربوط به استقرار ذره شن در سطح واگن باری، می توانیم نیاز به این نیرو را درک کنیم. اگر سطح واگن باری لغزنده بود چه اتفاقی می افتاد؟

مثال ۳-۱۳ واگن باری در حال نشت: اینک حالت مشابهی را بررسی می کنیم. در همان واگن باری شن با آهنگ dm/dt در حال نشت کردن است؛ چه نیروی لازم است تا واگن باری را در حال حرکت یکنواخت با سرعت v حفظ کند؟

در این حالت جرم در حال کاهش است. اما، سرعت شن بعد از ترک واگن باری با سرعت اولیه آن یکی است، و تکانه آن تغییر نمی کند. از آنجا که $dP/dt = 0$ است، هیچ نیروی احتیاج نیست. (شن وقتی که، با زمین برخورد می کند تکانه اش تغییر می کند، و در روی زمین نیروی به وجود می آید که

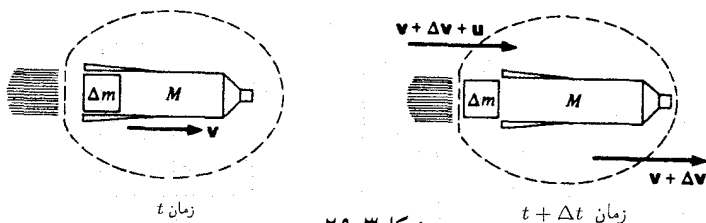


شکل ۲۸-۳

در حرکت واگن باری هیچ اثری ندارد.

مفهوم تکانه برای درک حرکت موشک با اهمیت است. هر موشکی با خارج کردن گاز با سرعت زیاد شتاب می‌گیرد؛ نیروی واکنش گاز موشک، در جهت مخالف به آن شتاب می‌دهد. مکانیسم این عمل، در شکل‌های ۲۸-۳ اتاقک مکعبی محتوی گاز با فشار زیاد، نشان داده شده است. این گاز به هر یک از دیواره‌های اتاقک شکل‌های ۲۸-۳ فشاری با نیروی F_a و به طرف خارج وارد می‌کند. (برای سهولت ما فقط چهار دیوار را نشان می‌دهیم.) جمع برداری F_a ها صفر است، که نتیجه آن نیروی خالص صفر وارد بر اتاقک است. به همین ترتیب هر یک از دیواره‌ها نیروی $F_b = -F_a$ را بر گاز اعمال می‌کند؛ نیروی خالص وارد بر گاز هم صفر است. در شکل‌های (ج) و (د) یک دیواره اتاقک برداشته شده است. نیروی خالص وارد بر اتاقک F_a است که به طرف راست متوجه است. نیروی خالص وارد بر گاز F_b است که به طرف چپ است. بنابراین گاز به طرف چپ و اتاقک به طرف راست شتاب می‌گیرد.

به منظور تحلیل حرکت موشک با جزئیات کامل آن، باید نیروی خارجی وارد بر دستگاه F را با آهنگ تغییر تکانه یعنی dP/dt برابر قرار دهیم. موشک را در زمان t در نظر بگیریم. بین t و $t + \Delta t$ جرم Δm از سوخت مصرف شده و به صورت گاز با سرعت u نسبت به موشک از آن خارج می‌شود. سرعت تخلیه u ، توسط نوع نیروی پیشران، طرز کار موتور و غیره تعیین می‌شود، ولی مستقل از سرعت موشک است. شکل‌های ۲۹-۳، سیستم را در زمان t و زمان $t + \Delta t$ را نشان می‌دهند. این سیستم تشکیل شده است از Δm به علاوه، باقیمانده جرم موشک M . بنابراین جرم کل برابر است با $M + \Delta m$.



شکل ۳-۲۹

سرعت موشک در زمان t ، $\mathbf{v}(t)$ و در زمان $t + \Delta t$ ، $\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}$ است. تکانه اولیه عبارت است از

$$\mathbf{P}(t) = (M + \Delta m)\mathbf{v}$$

و تکانه نهایی چنین است

$$\mathbf{P}(t + \Delta t) = M(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}) + \Delta m(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v} + \mathbf{u})$$

تغییر تکانه برابر است با

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{P} &= \mathbf{P}(t + \Delta t) - \mathbf{P}(t) \\ &= M\Delta \mathbf{v} + (\Delta m)\mathbf{u} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} \\ &= M \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{u} \frac{dm}{dt} \end{aligned} \quad (۱۸-۳)$$

دقت کنید، \mathbf{u} را چنان تعریف کرده‌ایم که در جهت \mathbf{v} ، مثبت باشد. در اغلب کاربردهای موشکی \mathbf{u} منفی و در جهت مخالف، \mathbf{v} است. داشتن هر دو جرم m و M در معادله غیرمستعارف است. dm/dt آهنگ افزایش جرم خارج شده است. از آنجاکه این جرم از موشک خارج می‌شود، داریم

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{dM}{dt}$$

با استفاده از این موضوع در معادله ۱۸-۳ و برابر قرار دادن نیروی خارجی با $d\mathbf{P}/dt$ معادله اساسی موشک را پیدا می‌کنیم

$$\mathbf{F} = M \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{u} \frac{dM}{dt} \quad (۱۹-۳)$$

ذکر دو نکته ظریف ممکن است در پیشرفت کار ما مفید باشد. اول اینکه سرعتها نسبت به یک چارچوب لخت بیان شده‌اند، نه چارچوبی که متصل به موشک است. دوم اینکه سرعت نهایی گاز خروجی را به جای $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ برابر با $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v} + \mathbf{u}$ گرفتیم. این صحیح است (اگر نیاز به دلیل دارید می‌توانید به مثال ۳-۶ پس‌زنی تنگ فزنی مراجعه کنید)، اما در واقع در اینجا هیچ تفاوتی نمی‌کند، زیرا هر دو رابطه وقتی حد گرفته شوند یک نتیجه واحد به دست می‌دهند. اینک به دو مثال زیر در باره موشکها توجه کنید.

مثال ۳-۱۴ موشک در فضای تهی: اگر هیچ نیروی خارجی بر موشک وارد نشود، $\mathbf{F} = 0$ و حرکت آن توسط رابطه زیر معین می‌شود

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{u} \frac{dM}{dt}$$

یا

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{u}}{M} \frac{dM}{dt}$$

به طوری کلی سرعت خروجی گاز \mathbf{u} ثابت است، در این حالت از معادله حرکت به سادگی می‌توان

انتگرال گرفت

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt &= \mathbf{u} \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{M} \frac{dM}{dt} dt \\ &= \mathbf{u} \int_{M_0}^{M_f} \frac{dM}{M} \end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_0 &= \mathbf{u} \ln \frac{M_f}{M_0} \\ &= -\mathbf{u} \ln \frac{M_0}{M_f} \end{aligned}$$

$\mathbf{v}_0 = 0$ باشد، آنگاه داریم

$$\mathbf{v}_f = -\mathbf{u} \ln \frac{M_0}{M_f}$$

سرعت نهایی مستقل از چگونگی رها شدن جرم است. سوخت بدون اثر گذاشتن بر \mathbf{v}_f می‌تواند با سرعت یا به آرامی مصرف شود. تنها کمیت‌های مهم عبارت‌اند از سرعت خروجی و نسبت جرم اولیه به جرم نهایی. همان‌گونه که در مثال زیر نشان داده می‌شود، اگر یک میدان گرانشی وجود داشته باشد، وضعیت کاملاً متفاوت است.

مثال ۳-۱۵ موشک در یک میدان گرانشی: اگر موشکی در یک میدان گرانشی ثابتی به پرواز درآید، معادله ۳-۱۹ چنین می‌شود

$$Mg = M \frac{dv}{dt} - u \frac{dM}{dt}$$

که در اینجا u و g به طرف پایین و با مقدار ثابت فرض می‌شوند:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{u}{M} \frac{dM}{dt} + g$$

با انتگرال‌گیری نسبت به زمان، به دست می‌آوریم

$$v_f - v_o = u \ln \left(\frac{M_f}{M_o} \right) + g(t_f - t_o)$$

اگر $v_o = 0$ ، $t_o = 0$ و سرعت مثبت به طرف بالا گرفته شود، داریم

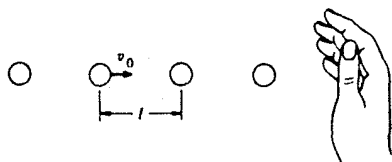
$$v_f = u \ln \left(\frac{M_o}{M_f} \right) - gt_f$$

در سوزاندن سریعتر سوخت مزیتی وجود دارد. هرچه زمان سوختن کوتاهتر باشد سرعت بیشتر است. خیزش یک موشک بزرگ بدین علت تماشایی است که برخاستن آن باید با مصرف هرچه بیشتر سوخت موشک، و با سرعتی زیاد انجام گیرد. ■

۳-۶ انتقال تکانه

تقریباً هرکسی برای یک بار هم که شده در انتهای جریان آب لوله فرار گرفته است، در این حالت احساس فشاری به انسان دست می‌دهد. اگر جریان آب مانند لوله آب آتش‌نشانی قوی باشد، میزان فشار می‌تواند قابل ملاحظه باشد. یک فواره آب با فشار زیاد می‌تواند برای شکستن دیوار یک ساختمان در حال سوختن مورد استفاده قرار گیرد.

فشار یک جریان آب، ناشی از انتقال تکانه آن به شماست. تا وقتی که از طرف نیروی خارجی دیگری تکانه‌ای برابر و در جهت مخالف به شما وارد نشود، بدن شما به حرکت درمی‌آید. چگونه ستونی از آب که از میان هوا عبور می‌کند، می‌تواند نیرویی اعمال کند که جز به جز آن نظیر نیرویی که توسط یک میله فولادی منتقل می‌شود، حقیقی است؟ دلیل این امر هنگامی قابل درک است که جریان آب را به صورت یک رشته قطره‌های کوچک یکنواخت به جرم m که با سرعت v حرکت می‌کنند در نظر بگیریم. فرض می‌کنیم که قطره‌ها به فاصله l از هم قرار دارند، و جریان آب به طرف دست در حرکت



شکل ۳-۳۰

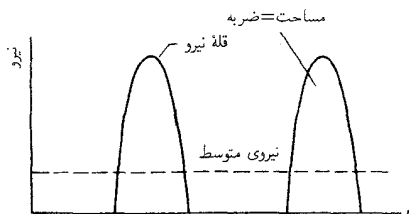
است (شکل ۳-۳۰). فرض می‌کنیم که قطرات بدون بازجهش و به‌سادگی از روی بازوسرازیر می‌شوند. نیروی وارد بر جریان را از طرف دست در نظر بگیرید. با برخورد هر قطره، نیرویی برای یک زمان کوتاه به‌وجود می‌آید. اگرچه نیروی لحظه‌ای را نمی‌دانیم، ولی می‌توانیم ضربه ناشی از دست را بر هر قطره پیدا کنیم

$$\begin{aligned} I_{\text{قطره}} &= \int_{\text{برخورد}} F dt \\ &= \Delta p \\ &= m(v_f - v_0) \\ &= -mv_0 \end{aligned}$$

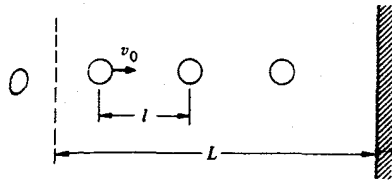
ضربه وارد بر دستتان مساوی و مخالف با آن است، یعنی

$$I_{\text{دست}} = mv_0$$

علامت مثبت به این معنی است که ضربه وارد بر دست در همان جهت سرعت قطره است. این ضربه برابر است با سطح زیر یکی از قله‌ها. در شکل ۳-۳۰ اگر در هر ثانیه برخوردهای زیادی وجود داشته باشد، ضربه وارد از طرف هر قطره را احساس نمی‌کنید. به جای آن نیروی متوسط F را احساس می‌کنید که در شکل ۳-۳۱ با خط چین نشان داده شده است. سطح زیر متوسط F در خلال یک دوره تناوب برخورد T (زمان بین برخوردها) با ضربه وارد از طرف یک قطره یکسان است.



شکل ۳-۳۱



شکل ۳-۳۲

$$F_{\text{متوسط}} T = \int_{\text{برخورد}} F dt$$

از آنجاکه $T = l/v$ و $\int F dt = mv$ است، نیروی متوسط برابر است با

$$\begin{aligned} F_{\text{متوسط}} &= \frac{mv}{T} \\ &= \frac{m}{l} v^2 \end{aligned}$$

در اینجا راه دیگری برای پیدا کردن نیروی متوسط وجود دارد. جریانی از قطره‌های آب به طول L راکه در شرف برخورد با سطح است در نظر بگیرید (شکل ۳-۳۲). تعداد قطره‌های موجود در طول L عبارت‌اند از L/l و چون هر قطره دارای تکانه mv است، تکانه کل برابر است با

$$\Delta p = \frac{L}{l} mv.$$

همه این قطره‌ها در زمان $\Delta t = L/v$ با دیوار برخورد خواهند کرد. نیروی متوسط چنین است

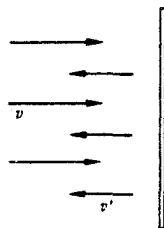
$$\begin{aligned} F_{\text{متوسط}} &= \frac{\Delta p}{\Delta t} \\ &= \frac{m}{l} v^2 \end{aligned}$$

برای به‌کار بردن این مدل در مورد شاره‌ها، جریانی راکه با سرعت v حرکت می‌کند در نظر بگیرید. اگر جرم موجود در واحد طول برابر باشد با λ $m/l \equiv \lambda$ ، تکانه در واحد طول برابر است با λv و آهنگ انتقال جریان تکانه عبارت است از

$$\frac{dp}{dt} = \lambda v^2 \quad (20-3)$$

اگر جریان در سطح به حالت سکون درآید، نیروی وارد بر سطح برابر است با

$$F = \lambda v^2 \quad (21-3)$$



شکل ۳-۳۳

مثال ۱۶-۳ انتقال تکانه به یک سطح: جریانی از ذرات به جرم m و به فاصله جدایی l با سرعت v مطابق شکل ۳۳-۳ به طور قائم با یک سطح برخورد می‌کند. این جریان ذرات در امتداد خط اصلی حرکت با سرعت v' باز می‌جهند. جرم موجود در واحد طول جریان برابر است با $\lambda = m/l$. نیروی وارد بر سطح چقدر است؟

آهنگ انتقال تکانه از طریق جریان برابر λv^2 است. اما، جریان منعکس شده، تکانه را با آهنگ $\lambda v'^2$ منتقل نمی‌کند، زیرا چگالی جریان در سطح باید تغییر کند. تعداد ذراتی که در زمان Δt با سطح برخورد می‌کنند برابر $v \Delta t / l$ است و جرم کل آنها $\Delta m = mv \Delta t / l$ است. بنابراین آهنگ رسیدن جرم به سطح چنین است

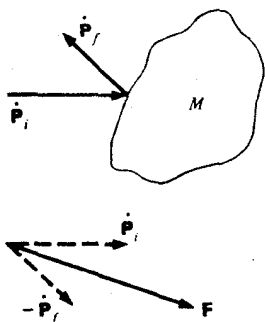
$$\frac{dm}{dt} = \frac{m}{l} v = \lambda v$$

و آهنگ دور شدن جرم از سطح $\lambda' v'$ است. از آنجا که جرم روی سطح انباشته نمی‌شود، این آهنگها باید برابر باشند. از این رو $\lambda' v' = \lambda v$ است، و نیروی وارد بر سطح چنین است

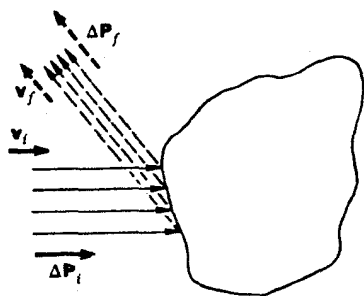
$$F = \frac{dp'}{dt} + \frac{dp}{dt} = \lambda' v'^2 + \lambda v^2 \\ = \lambda v (v' + v)$$

اگر جریان ذرات بدون بازجهش برخورد کنند، آنگاه $v' = 0$ و $F = \lambda v^2$ می‌شود، که با نتیجه قبلی ما مطابقت دارد. اگر ذرات انعکاس کامل کنند، آنگاه $v' = v$ و $F = 2\lambda v^2$ است. نیروی واقعی چیزی بین این دو حد است.

فکر انتقال تکانه را می‌توانیم به سه بعد تعمیم دهیم. جریان سیالی را در نظر بگیرید که به جسمی برخورد می‌کند و در جهتی اختیاری برمی‌گردد. برای سادگی فرض می‌کنیم جریان سیال برخوردکننده یکنواخت است و در زمان Δt تکانه ΔP_i را انتقال می‌دهد (شکل ۳-۳۴). جهت ΔP_i موازی با سرعت اولیه v_i و $\Delta P_i = \lambda_i v_i^2 \Delta t$ است. در همین فاصله زمانی Δt جریان سیال برگشتی، تکانه ΔP_f را با خود همراه می‌برد که مقدار آن $\Delta P_f = \lambda_f v_f^2 \Delta t$ است، جهت ΔP_f موازی سرعت



شکل ۳-۳۵



شکل ۳-۳۴

نهایی v_f است. بردارها در شکل نشان داده شده‌اند. کل تغییر تکانه سیال در زمان Δt چنین است

$$\Delta P_{\text{سیال}} = \Delta P_f - \Delta P_i$$

آهنگ تغییرات تکانه سیال عبارت است از

$$\left(\frac{dP}{dt} \right)_{\text{سیال}} = \left(\frac{dP}{dt} \right)_f - \left(\frac{dP}{dt} \right)_i$$

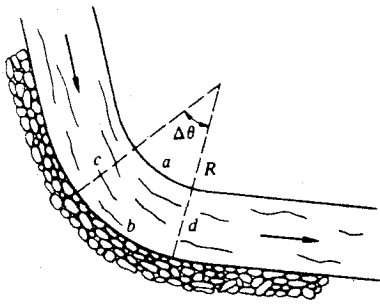
طبق قانون دوم نیوتون، $(dP/dt)_{\text{سیال}}$ برابر نیروی وارد بر سیال از طرف جسم است. از قانون سوم نیوتون، نیروی وارد بر جسم از طرف سیال چنین است

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= - \left(\frac{dP}{dt} \right)_{\text{سیال}} \\ &= \left(\frac{dP}{dt} \right)_i - \left(\frac{dP}{dt} \right)_f \\ &= \dot{\mathbf{P}}_i - \dot{\mathbf{P}}_f \end{aligned} \quad (۲۲-۳)$$

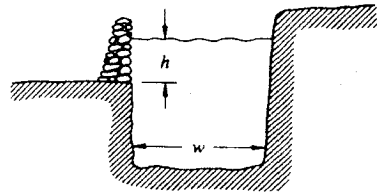
شکلهای ۳-۳۵ بیانگر این نتیجه‌اند.

چنانچه نیروی مقاومی وجود نداشته باشد، جسم شروع به شتاب گرفتن خواهد کرد. اگر $\dot{\mathbf{P}}_f = \dot{\mathbf{P}}_i$ باشد، جریان سیال هیچ تکانه‌ای را منتقل نمی‌کند و $\mathbf{F} = 0$ است.

نیروی وارد بر یک هواپیما یا کشتی متحرک را می‌توان با بررسی اثر مقدار زیادی از جریان سیال که هر کدام با سرعت مربوط به خود، به سطح برخورد می‌کنند پیدا کرد. گرچه اساس ریاضی تحلیل این موضوع ما را از مطلب، خیلی دور خواهد کرد، ولی اصول فیزیکی آن همان انتقال تکانه است.



شکل ۳-۳۷



شکل ۳-۳۶

مثال ۳-۱۷ سد در سر پیچ یک رودخانه : مسئله این است که در سر پیچ یک رودخانه برای جلوگیری از طغیان آب، سدی بسازیم. بدیهی است که این سد باید به اندازه کافی محکم باشد تا بتواند فشار استاتیک رودخانه ρgh را تحمل کند که در اینجا ρ چگالی آب و h ارتفاع سطح آب از پایه سد است (شکل ۳-۳۶). اما، به خاطر پیچ فشار اضافی دیگری نیز وجود دارد که فشار دینامیکی مربوط به جریان آب است. چگونه این فشار با فشار استاتیکی آب مقایسه می شود؟

پیچ رودخانه را مطابق شکل ۳-۳۷ با تقریب به صورت یک منحنی دایره ای به شعاع R در نظر می گیریم، و توجه خود را به طول کوچکی از منحنی که زاویه $\Delta\theta$ را در بر می گیرد متمرکز می سازیم. اینک فقط به قسمتی از رودخانه که در بالای پایه سد قرار دارد توجه می کنیم و حجمی از رودخانه را که محدود به ساحل a ، سد b ، و دو سطح فرضی c و d است مورد بررسی قرار می دهیم (شکل ۳-۳۸). تکانه از سطح c به داخل حجم منتقل و از سطح d با آهنگ $\dot{P} = \lambda v^2 = \rho A v^2$ از آن خارج می شود. اینجا A سطح مقطعی از رودخانه است که در بالای پایه سد قرار می گیرد، $A = hw$ (توجه کنید که $\lambda = \rho A$ = جرم واحد طول رودخانه است).

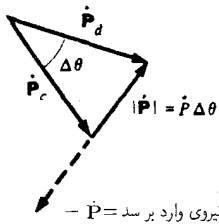
اما، سطح c و d با هم موازی نیستند. آهنگ تغییر تکانه جریان آب چنین است

$$\dot{P} = \dot{P}_d - \dot{P}_c$$

همانطوری که از رسم برداری شکل ۳-۳۹ می توانیم ببینیم، \dot{P} به صورت شعاعی روبه داخل بوده و بزرگی آن چنین است

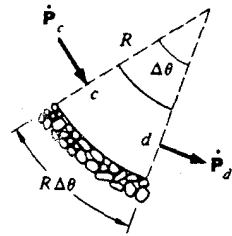
$$|\dot{P}| = \dot{P} \Delta\theta$$

نیروی دینامیکی وارد بر سد به صورت شعاعی روبه خارج است، و همان بزرگی $\dot{P} \Delta\theta$ را داراست. نیرو بر سطح $h(R\Delta\theta)$ اعمال شده است، و بنابراین فشار دینامیکی عبارت است از



نیروی وارد بر سد $P = -P$

شکل ۳-۳۹



شکل ۳-۳۸

$$\begin{aligned} \text{فشار} &= \frac{P \Delta\theta}{R \Delta\theta h} \\ &= \frac{\rho A v^2}{R h} \\ &= \frac{\rho w v^2}{R} \end{aligned}$$

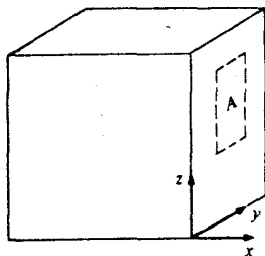
نسبت فشار دینامیک به فشار استاتیک چنین است

$$\begin{aligned} \frac{\text{فشار دینامیک}}{\text{فشار استاتیک}} &= \frac{\rho w v^2}{R} \frac{1}{\rho g h} = \frac{w}{h} \frac{v^2}{R g} \\ &= \frac{\text{پهنا}}{\text{عمق}} \times \frac{\text{شتاب مرکزگرا}}{g} \end{aligned}$$

برای رودخانه‌ای در حال طغیان با سرعت 18 km/h (تقریباً 5 متر بر ثانیه)، شعاع تقریبی 70° متر، طغیانی به ارتفاع 1 متر و پهنای 6° متر، این نسبت برابر 22° است، به طوری که فشار دینامیک به هیچ وجه قابل اغماض نیست. این نسبت در نزدیکی سطح رودخانه آنجا که فشار استاتیک کوچک است حتی از این مقدار هم بزرگتر است.

مثال ۳-۱۸ فشار یک گاز: به عنوان کاربرد دیگری از مفهوم انتقال تکانه، فشار اعمال شده توسط یک گاز را پیدا می‌کنیم. اگرچه بحث ما به گونه‌ای ساده‌انگاری است، ولی در بردارنده مفاهیم اصلی است، و همان نتیجه را می‌دهد که برهانهای دقیق و موشکافانه‌تر به دست می‌دهند.

فرض کنید که n اتم مطابق شکل ۳-۴۰ در واحد حجم گاز وجود دارد، و هر کدام دارای جرم m است که به صورت کاتوره‌ای حرکت می‌کند. اینک نیروی مربوط به حرکت آنها در جهت x را که به سطح A در صفحه yz اعمال می‌شود به دست می‌آوریم. صرف نظر کردن از حرکت در جهت z و y (که فرض موجهی است)، فقط به بررسی حرکت موازی با محور x می‌پردازیم. فرض کنید همه آنها دارای سرعت یکسان v_x باشند. اینها با آهنگ $1/2 n A v_x$ با سطح برخورد می‌کنند. عامل $1/2$ بدین جهت به میان آمده است که آنها می‌توانند در هر دو جهت با احتمال برابر حرکت کنند. تکانه منتقل شده توسط هر



شکل ۳-۴۰

اتم برابر mv_x است. ساکن شدن اتمها بعد از برخورد نامحتمل است، زیرا این حالت به معنی چسبیدن ذرات گاز به دیواره است. به طور متوسط اتمها باید با همان آهنگی که وارد می شوند خارج شوند، که این بدان معنی است که تغییر تکانه برابر $2mv_x$ است. بنابراین تکانه به واسطه برخورد با سطح A با آهنگ زیر تغییر می کند

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \left(\frac{1}{2} n A v_x \right) (2mv_x) \\ &= mnAv_x^2 \end{aligned}$$

نیرو برابر است با

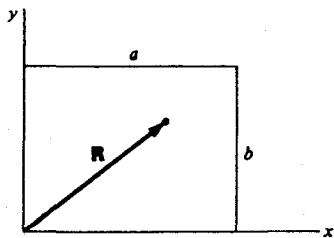
$$\begin{aligned} F &= \frac{dp}{dt} \\ &= mnAv_x^2 \end{aligned}$$

و فشار P_x وارد بر سطح x چنین است

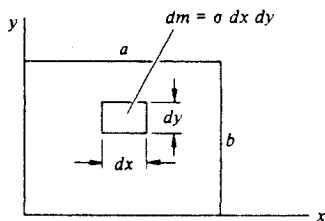
$$\begin{aligned} P_x &= \frac{F}{A} \\ &= mnv_x^2 \end{aligned}$$

فرض اینکه v_x دارای مقدار ثابتی است واقعاً غیر ضروری است. اگر اتمها سرعتهای لحظه ای متفاوتی داشته باشند، آنگاه می توان نشان داد که v_x^2 باید با مقدار متوسط خود $\overline{v_x^2}$ جایگزین شود و داریم $P_x = nm \overline{v_x^2}$. به همین ترتیب، داریم $P_y = mn \overline{v_y^2}$ و $P_z = nm \overline{v_z^2}$. اما، چون فشار گاز نباید وابسته به جهت باشد، داریم $P_x = P_y = P_z$ و در نتیجه $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$. سرعت مربعی میانگین برابر است با $\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3 \overline{v_x^2}$ و فشار چنین است

$$P = \frac{1}{3} nm \overline{v^2}$$



شکل ۳-۴۲



شکل ۳-۴۱

این نتیجه معروفی از نظریه سینتیک گازها و نقطه مهمی در ارتباط گرما و انرژی سینتیک است. ■

یادداشت ۳-۱ مرکز جرم: در این یادداشت مرکز جرم بعضی از اجسام نامتقارن را پیدا خواهیم کرد. اگر در مورد تعیین انتگرالهای دوبیسه بعدی تجربه داشته باشید این مثالها خیلی ساده جلوه خواهند کرد. در غیر این صورت اینها را مطالعه کنید.

۱. پیدا کنید مرکز جرم صفحه مستطیل شکلی به اضلاع a و b (شکل ۳-۴۱) را که جرم واحد سطح آن مطابق رابطه $\sigma = \sigma_0 (xy/ab)$ تغییر می کند. σ_0 مقداری ثابت است

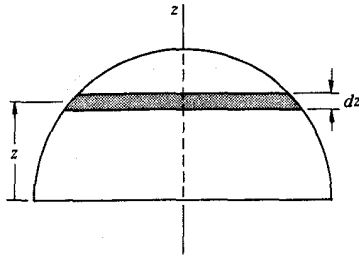
$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \iint (x\hat{i} + y\hat{j}) \sigma \, dx \, dy$$

M جرم صفحه را به شرح زیر پیدا می کنیم

$$\begin{aligned} M &= \int_0^b \int_0^a \sigma \, dx \, dy \\ &= \int_0^b \int_0^a \sigma_0 \frac{xy}{ab} \, dx \, dy \end{aligned}$$

ابتدا با ثابت گرفتن y ، بر حسب x انتگرال می گیریم

$$\begin{aligned} M &= \int_0^b \left(\int_0^a \sigma_0 \frac{xy}{ab} \, dx \right) dy \\ &= \int_0^b \left(\sigma_0 \frac{y}{b} \frac{x^2}{2a} \Big|_{x=0}^{x=a} \right) dy \\ &= \int_0^b \sigma_0 \frac{y}{b} \frac{a}{2} dy \\ &= \frac{\sigma_0 a}{2} \frac{y^2}{ab} \Big|_{y=0}^{y=b} = \frac{1}{4} \sigma_0 ab \end{aligned}$$



شکل ۳-۴۳

مؤلفه x بردار R چنین است (شکل ۳-۴۲)

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{1}{M} \iint x \sigma \, dx \, dy \\
 &= \frac{1}{M} \int_0^b \left(\int_0^a x \sigma \cdot \frac{xy}{ab} \, dx \right) dy \\
 &= \frac{1}{M} \int_0^b \left(\frac{\sigma \cdot y \, x^2}{ab} \Big|_0^a \right) dy \\
 &= \frac{1}{M} \frac{\sigma}{ab} \int_0^b \frac{y a^2}{2} dy \\
 &= \frac{1}{M} \frac{\sigma}{ab} \frac{a^2 b^2}{2} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \sigma \cdot a^2 b}{\sigma \cdot ab} \\
 &= \frac{2}{3} a
 \end{aligned}$$

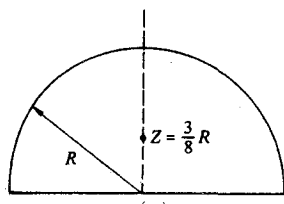
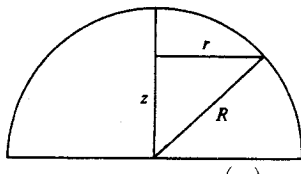
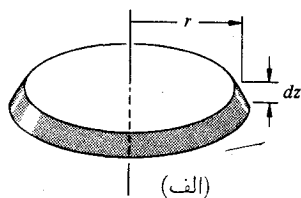
به همین ترتیب، $Y = \frac{2}{3} b$ است.

۲. مرکز جرم نیمکره جامد یکنواختی به شعاع R و جرم M را پیدا کنید.

از تقارن پیداست که مرکز جرم بر روی محور z قرار دارد، همانطوری که در شکل ۳-۴۳ می بینید، ارتفاع آن از صفحه استوا چنین است.

$$Z = \frac{1}{M} \int z \, dM$$

این انتگرال سه بعدی است، ولی تقارن به ما امکان می دهد تا آن را به عنوان یک انتگرال یک بعدی بررسی کنیم. در ذهن خود این نیمکره را به تعداد زیادی از قرصهای نازک تقسیم می کنیم (شکل ۳-۴۴ الف). دایره ای به شعاع r و ضخامت dz را در نظر بگیرید. حجم آن برابر $dV = \pi r^2 dz$ و جرم



شکل ۳-۴۴

آن برابر $dM = \rho dV = (M/V)(dV)$ است که $V = \frac{2}{3}\pi R^2 z$ است. از این رو

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{M} \int \frac{M}{V} z dV \\ &= \frac{1}{V} \int_{z=0}^R \pi r^2 z dz \end{aligned}$$

برای تعیین انتگرال باید r را برحسب z پیدا کنیم (شکل ۳-۴۴ ب). از آنجا که $r^2 = R^2 - z^2$

است، داریم

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\pi}{V} \int_0^R z(R^2 - z^2) dz \\ &= \frac{\pi}{V} \left(\frac{1}{2} z^2 R^2 - \frac{1}{4} z^4 \right) \Big|_0^R \\ &= \frac{\pi}{V} \left(\frac{1}{2} R^4 - \frac{1}{4} R^4 \right) \\ &= \frac{\frac{1}{4} \pi R^4}{\frac{2}{3} \pi R^2} \\ &= \frac{3}{8} R \end{aligned}$$

مسائل

۳-۱ چگالی میله نازکی به طول l برحسب فاصله x از یک انتهای آن طبق رابطه $\rho = \rho_0 x^2/l^2$

تغییر می‌کند. مرکز جرم آن را پیدا کنید.

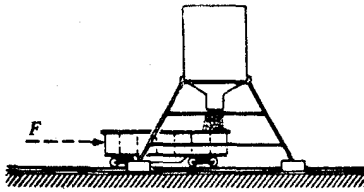
جواب: $X = 3l/4$.

۳-۲ مرکز جرم یک ورقه نازک یکنواخت به شکل مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را پیدا کنید.

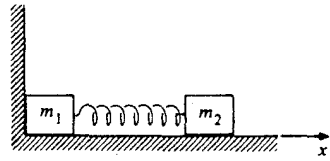
۳-۳ فرض کنید سیستمی از چندین جسم تشکیل شده است، و مرکز جرم هر کدام از اجسام معلوم

است. ثابت کنید که مرکز جرم سیستم را با در نظر گرفتن هر جسم به عنوان ذره‌ای که در مرکز جرم خود

متمرکز شده می‌توان پیدا کرد.



شکل ۳-۴۶



شکل ۳-۴۵

۳-۴ یک پرتابه حامل وسایل سنجش به طور اتفاقی در بالای مسیر خود منفجر می شود. مسافت افقی بین نقطه پرتاب و نقطه انفجار L است. پرتابه به دو تکه تقسیم می شود که به طور افقی از هم دور می شوند. تکه بزرگتر دارای جرمی به اندازه سه برابر جرم تکه کوچکتر است. در مقابل تعجب دانشمندان دست اندرکار این مسئله، تکه کوچکتر در ایستگاه پرتاب به زمین برمی گردد. تکه بزرگتر چقدر دورتر از آن به زمین می نشیند؟ از مقاومت هوا و اثر انحنای زمین صرف نظر کنید.

۳-۵ یک بازیگر آکروبات سیرک به جرم M با سرعت اولیه v از روی تور مخصوص آکروبات مستقیماً به طرف بالا پرش می کند. هنگام پریدن به طرف بالا، در ارتفاع h بالای تور میمون تربیت شده ای را از جایگاهش برمی دارد و با خود همراه می برد.

حداکثر ارتفاعی که این دو کسب می کنند چقدر است؟

۳-۶ یک هواپیمای کوچک به وزن ۱۰۰۰ کیلوگرم در یک باند کوتاه فرود اضطراری می کند، و با موتور خاموش با سرعت ۴۰ m/s روی باند می نشیند. قلبی روی این هواپیما قرار دارد که به وسیله کابلی به کیسه شنی به وزن ۱۰۰ کیلوگرم متصل است و آن را در امتداد حرکت بر روی زمین می کشد. اگر ضریب اصطکاک بین کیسه شن و باند هواپیما ۰.۴ باشد، و ترمزهای هواپیما هم نیروی کاهنده اضافی ۱۵۰ کیلوگرم نیرو ایجاد کنند. این هواپیما تا توقف کامل چقدر راه خواهد رفت؟

۳-۷ سیستمی مطابق شکل ۳-۴۵ تشکیل شده از دو مکعب به جرم m_1 و m_2 که توسط فنر بدون جرمی با ثابت فنری k به هم متصل اند. این مکعبها روی صفحه بدون اصطکاک می لغزند. طول فنر کشیده شده l است. در آغاز m_2 طوری نگهداشته شده که فنر تا طول $l/2$ فشرده می شود و m_1 مطابق شکل به مانعی تکیه دارد. m_2 در لحظه $t = 0$ رها می شود.

حرکت مرکز جرم سیستم را بر حسب تابعی از زمان پیدا کنید.

۳-۸ شخصی به جرم ۵۰ کیلوگرم به طور مستقیم به هوا می پرد، و ۸۰ متر از کف زمین بالا می رود.

برای رسیدن به این ارتفاع، این شخص از طرف زمین چه ضربه ای دریافت می کند؟

۳-۹ یک واگن باری به جرم M محتوی مقداری شن به جرم m است. در لحظه $t = 0$ نیروی ثابت افقی F در جهت غلتش بر آن وارد می شود و همزمان با آن در پیچه ای در ته آن باز می شود که شن با آهنگ ثابت dm/dt از آن خارج می شود. سرعت واگن باری را وقتی که تمام شن خارج شده است

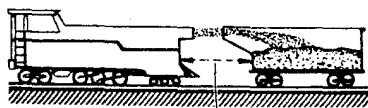
پیدا کنید. فرض کنید در لحظه $t = 0$ واگن باری در حال سکون است.

۳-۱۰ یک واگن باری خالی به جرم M از حالت سکون تحت اثر نیروی F شروع به حرکت می‌کند (شکل ۳-۴۶). در همین زمان، از قیف مخصوصی که در امتداد مسیر در حالت سکون قرار دارد، شن با آهنگ ثابت b به داخل واگن شروع به ریزش می‌کند.

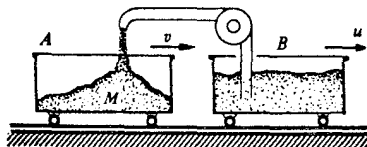
سرعت را پس از انتقال جرم m شن پیدا کنید. (راهنمایی: این مسئله را می‌توان به سادگی در یکی دو سطر حل کرد.)

جواب حالت خاص: اگر $M = 500 \text{ kg}$ ، $b = 20 \text{ kg/s}$ و $F = 100 \text{ N}$ باشد، آنگاه در زمان $t = 10 \text{ s}$ ، $v = 1.4 \text{ m/s}$ است.

۳-۱۱ از ارابه B موادی با آهنگ b کیلوگرم در ثانیه مطابق شکل ۳-۴۷ به داخل ارابه ریخته



شکل ۳-۴۸



شکل ۳-۴۷

می‌شود. این مواد دهانهٔ مسیر را به صورت قائم و به طرف پایین ترک می‌کنند، به طوری که سرعتشان همان سرعت افقی ارابه B یعنی u است. مطابق شکل، در لحظهٔ مورد نظر ارابه A دارای جرم M و سرعت v است. شتاب لحظه‌ای A یعنی dv/dt را پیدا کنید.

۳-۱۲ یک لوکوموتیو شن‌پاش، مطابق شکل ۳-۴۸ شن را به صورت افقی به داخل یک واگن باری می‌پاشد. لوکوموتیو و واگن باری به هم متصل نیستند. راننده لوکوموتیو سرعت خود را چنان نگه می‌دارد که فاصلهٔ آن تا واگن باری ثابت بماند. شن با آهنگ $dm/dt = 10 \text{ kg/s}$ و سرعت 5 m/s نسبت به لوکوموتیو انتقال می‌یابد. واگن از حالت سکون با جرم 2000 کیلوگرم شروع به کار می‌کند. سرعت واگن را بعد از 10 ثانیه پیدا کنید.

۳-۱۳ یک بالابر اسکی متشکل از یک تسمهٔ بلند است که حول دو قرقره که یکی در پایین و دیگری در بالای شیب قرار دارد می‌چرخد. قرقره‌ها توسط یک موتور الکتریکی قوی به حرکت درمی‌آیند به طوری که تسمه با سرعت ثابت 1.5 متر بر ثانیه حرکت می‌کند. قرقره‌ها به فاصلهٔ 100 متر از یکدیگر قرار دارند، و زاویهٔ شیب 20 درجه است.

اسکی‌بازها با گرفتن تسمه به بالا کشیده می‌شوند، و در آنجا بارها کردن طناب به پایین سر می‌خورند.

اگر در هر ۵ ثانیه یک بار اسکی بازی به جرم 70 کیلوگرم از بالا بر استفاده کند، نیروی متوسط مورد نیاز برای کشیدن تسمه چقدر است؟ از اصطکاک بین برف و اسکی صرف نظر می‌کنیم.

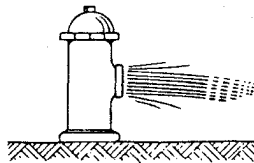
۱۴-۳ N نفر هر یک به جرم m روی واگن تخت راه آهن به جرم M ایستاده‌اند. این افراد از یک انتهای این واگن با سرعت u نسبت به واگن به خارج می‌پرند. در نتیجه، واگن بدون اصطکاک در جهت مخالف به حرکت درمی‌آید. (الف) اگر همه افراد در یک زمان به خارج بپرند، سرعت نهایی واگن چقدر است؟ (ب) اگر این افراد هر کدام به دنبال دیگری به خارج بپرند، سرعت نهایی واگن چقدر خواهد بود؟ (جواب را می‌توانید به صورت مجموع جملات بنویسید). (ج) در کدامیک از حالت‌های (الف) یا (ب)، بزرگترین سرعت نهایی برای واگن حاصل می‌شود؟ آیا می‌توانید توضیح فیزیکی ساده‌ای برای جواب خود ارائه دهید؟

۱۵-۳ طنابی به جرم M و به طول l روی میز بدون اصطکاک قرار دارد، قسمت کوچک l آن از میان سوراخی آویزان است. ابتدا طناب در حالت سکون است. (الف) جواب کلی $x(t)$ را برای طولی از طناب که از سوراخ می‌گذرد به دست آورید.

$$\text{جواب: } x = Ae^{\gamma t} + Be^{-\gamma t} \quad \text{که در آن } \gamma = g/l.$$

(ب) مقادیر ثابت A و B را طوری پیدا کنید که شرایط اولیه صادق باشد.

۱۶-۳ از یک شیر آتش‌نشانی که قطر دهانه آن D است مطابق شکل ۳-۴۹ آب با سرعت V .



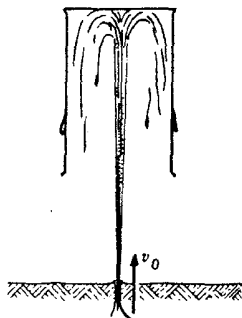
شکل ۳-۴۹

خارج می‌شود. نیروی واکنش وارد بر شیر آتش‌نشانی چقدر است؟

۱۷-۳ یک ظرف زباله وارونه به وزن W توسط آب حاصل از یک آبفشان مطابق شکل ۳-۵۰ به صورت معلق در هوا قرار دارد. آب با سرعت v از زمین با آهنگ ثابت dm/dt فوران می‌کند. حداکثر ارتفاعی که این ظرف زباله کسب می‌کند چقدر است؟ برای رسیدن به حداکثر ارتفاع چه فرضی باید پذیرفته شود؟

جواب حالت خاص: اگر $v = 20 \text{ m/s}$ و $W = 10 \text{ kg}$ و $dm/dt = 5 \text{ kg/s}$ باشد، $h_{\text{max}} \approx 17 \text{ m}$ است.

۱۸-۳ یک قطره باران به جرم اولیه M از حالت سکون تحت اثر گرانش شروع به سقوط می‌کند.



شکل ۳-۵۰

فرض می‌کنیم که جرم این قطره با آهنگی متناسب، حاصلضرب جرم لحظه‌ای و سرعت لحظه‌ای آن در برابر افزایش می‌یابد

$$\frac{dM}{dt} = kMV$$

که در آن k مقدار ثابتی است.

نشان دهید که سرعت قطره سرانجام عملاً به صورت ثابت درمی‌آید، و رابطه‌ای برای سرعت نهایی به دست آورید. از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید.

۱۹-۳ کاسه پر از آبی در معرض ریزش باران قرار دارد. مساحت سطح آن 50° سانتیمتر مربع است. باران با سرعت ۵ متر بر ثانیه با آهنگ $10^{-2} \text{ g/cm}^2 \text{ s}$ مستقیماً به طرف پایین می‌آید. اگر آبهای اضافی با سرعتی قابل اغماض از کاسه خارج شود، نیروی وارد بر کاسه را بر اثر ریزش باران پیدا کنید.

اگر کاسه با سرعت 2 متر بر ثانیه به طرف بالا حرکت کند، این نیرو چقدر است؟

۲۰-۳ موشکی در یک میدان یکنواخت گرانشی با خارج ساختن گاز با سرعت ثابت u از حالت سکون صعود می‌کند. فرض کنید آهنگ خروج جرم از موشک با رابطه $dm/dt = \gamma m$ داده می‌شود، که در آن m جرم لحظه‌ای موشک و γ مقدار ثابتی است. موشک توسط مقاومت هوا با نیروی mbv کند می‌شود که در آن b مقدار ثابتی است. سرعت موشک را بر حسب تابعی از زمان پیدا کنید.

جواب حالت خاص: سرعت نهایی عبارت است از $(\gamma u - g)/b$.

کاروانرژی

۱-۴ مقدمه

در این فصل بازهم به مسئله بنیادی فیزیک کلاسیک یعنی پیش‌بینی حرکت یک سیستم تحت اثر برهم‌کنشهای معلوم اقدام می‌کنیم. در اینجا با دو مفهوم مهم و جدید کاروانرژی سروکار داریم که در وهله اول صرفاً به عنوان کمک به محاسبه و یا ابزار ریاضی به نظر می‌آیند، ولی به زودی به اهمیت فیزیکی زیاد آنها پی می‌بریم.

با یک دید اجمالی، به نظر می‌رسد اگر نیرو معلوم باشد در پیدا کردن حرکت یک ذره هیچ مشکلی وجود ندارد. به موجب قانون دوم نیوتون، ابتدا شتاب و سپس با انتگرال‌گیری آن سرعت و مکان را پیدا می‌کنیم. به نظر ساده می‌رسد، ولی مشکلی هم وجود دارد؛ برای انجام این محاسبات احتیاج داریم نیرو را بر حسب تابعی از زمان داشته باشیم، در حالی که نیرو معمولاً بر حسب تابعی از مکان معلوم است، مانند نیروی فنری یا نیروی گرانش. مسئله جدی است زیرا فیزیکدانها عموماً به برهم‌کنشهای بین سیستمها علاقه دارند، یعنی می‌خواهند بدانند نیرو چگونه با مکان تغییر می‌کند نه با زمان.

پس مسئله ما پیدا کردن $\mathbf{v}(t)$ از معادله زیر است

$$m \frac{dv}{dt} = F(r) \quad (۱-۴)$$

که در اینجا نمادها نشان می‌دهند که F تابع معلومی از مکان است. یک فیزیکدان علاقه‌مند به فرمولبندی ریاضی ممکن است در این نقطه توقف کند و بگوید آنچه ما با آن سروکار داریم مسئله‌ای است در باب معادلات دیفرانسیل، ولی آنچه باید انجام دهیم بررسی راه‌حلهای موجود و از جمله روشهای عددی حل چنین معادلاتی است. از لحاظ محاسبه صرف حق با اوست. اما، یک چنین دستاوردی خیلی ناچیز است و درک فیزیکی بسیار اندکی را موجب می‌شود.

خوشبختانه، جواب معادله ۱-۴ برای حالت مهم حرکت یک بعدی بایک متغیر منفرد ساده است. حالت عمومی آن پیچیده‌تر است، اما در آینده خواهیم دید که انتگرال‌گیری معادله ۱-۴ برای حالت سه بعدی هم خیلی دشوار نیست به شرط آنکه به‌کمتر از جواب کامل قانع باشیم. در عوض، یک رابطه فیزیکی بسیار مفید به نام قضیه کار-انرژی پیدا خواهیم کرد، که تعمیم یافته آن به صورت قانون پایستگی انرژی در زمره یکی از مفیدترین قوانین پایستگی در فیزیک است. اکنون قبل از شروع حالت کلی، مسئله یک بعدی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲-۴ انتگرال‌گیری معادله حرکت در یک بعد

دسته بزرگی از مسائل مهم فقط دارای یک متغیر منفرد برای توصیف حرکت‌اند. نوسانگر هماهنگ یک بعدی مثال خوبی در این زمینه است. برای چنین مسائلی معادله حرکت به شکل زیر درمی‌آید

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$$

یا

$$m \frac{dv}{dt} = F(x) \quad (۲-۴)$$

با یک ابتکار ریاضی این معادله را می‌توانیم برحسب v حل کنیم. ابتدا به طور معمول از رابطه $m(dv/dt) = F(x)$ نسبت به x انتگرال می‌گیریم

$$m \int_{x_a}^{x_b} \frac{dv}{dt} dx = \int_{x_a}^{x_b} F(x) dx$$

از آنجا که $F(x)$ معلوم است، انتگرال سمت راست را می‌توان با روشهای استاندارد تعیین کرد. انتگرال سمت چپ به شکل موجود قابل حل نیست، ولی با تغییر متغیر از x به t قابل انتگرال‌گیری است. ابتکار عمل در این است که چنین بنویسیم^۱

۱. تغییر متغیر با استفاده از دیفرانسیلها، در یادداشت ۱-۱ بحث شده است.

$$dx = \left(\frac{dx}{dt} \right) dt$$

$$= v dt$$

آنگاه

$$m \int_{x_a}^{x_b} \frac{dv}{dt} dx = m \int_{t_a}^{t_b} \frac{dv}{dt} v dt$$

$$= m \int_{t_a}^{t_b} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} m v^2 \Big|_{t_a}^{t_b}$$

$$= \frac{1}{2} m v_b^2 - \frac{1}{2} m v_a^2$$

که داریم، $x_a \equiv x(t_a)$ ، $v_a \equiv v(t_a)$ ، و غیره.

از جمع‌بندی این نتایج نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{2} m v_b^2 - \frac{1}{2} m v_a^2 = \int_{x_a}^{x_b} F(x) dx \quad (3-4)$$

به عبارت دیگر، از حد بالای، نامعینی در معادله ۳-۴ می‌توانیم استفاده کنیم:

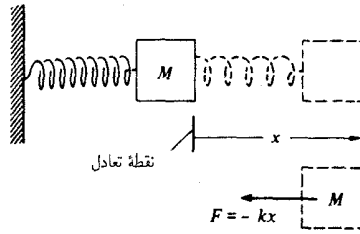
$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_a^2 = \int_{x_a}^x F(x) dx \quad (4-4)$$

که در آن v سرعت ذره است وقتی که ذره در مکان x باشد. معادله ۴-۴، v را برحسب تابعی از x به ما می‌دهد. از آنجا که $v = dx/dt$ است، معادله ۴-۴ را می‌توان برحسب dx/dt حل کرد و با انتگرال‌گیری دوباره $x(t)$ را پیدا کرد. به جای نوشتن فرمول کلی، ساده‌تر است که این روش را با مطالعه چند مثال بررسی کنیم.

مثال ۱-۴ جرم پرتاب شده به طرف بالا در یک میدان گرانشی یکنواخت: جرم m با سرعت اولیه v به طور قائم به طرف بالا پرتاب شده است. با فرض ثابت بودن نیروی گرانشی، و صرف نظر کردن از اصطکاک هوا، این جسم تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

با فرض اینکه محور z در جهت قائم و به طرف بالا باشد، داریم

$$F = -mg$$



شکل ۱-۴

معادله ۳-۴ نتیجه می دهد

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 &= \int_{z_0}^{z_1} F dz \\ &= -mg \int_{z_0}^{z_1} dz \\ &= -mg(z_1 - z_0) \end{aligned}$$

در قله $v_1 = 0$ است و جواب آن چنین است

$$z_1 = z_0 + \frac{v_0^2}{2g}$$

جالب توجه اینجاست که این جواب به هیچ وجه به زمان مربوط نمی شود. این مسئله را با به کار بردن قانون دوم نیوتون می توانستیم حل کنیم، ولی برای به دست آوردن نتیجه باید t را حذف کرد. در اینجا مثالی می آوریم که حل آن با استفاده مستقیم از قانون دوم نیوتون چندان ساده نیست.

مثال ۲-۴ حل معادله حرکت هماهنگ ساده : در مثال ۱۷-۲ معادله حرکت هماهنگ ساده را مورد بحث قرار دادیم و جواب را بدون اثبات ارائه کردیم. اینک با استفاده از معادله ۴-۴ آن را به دست خواهیم آورد.

جرم m متصل به یک فنر را در نظر بگیریم (شکل ۱-۴). با استفاده از مختصه x که از نقطه تعادل اندازه گرفته می شود، نیروی فنر $F = -kx$ است. آنگاه معادله ۴-۴ چنین می شود

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2 &= -k \int_{x_0}^x x dx \\ &= -\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 \end{aligned}$$

مختصات اولیه با شاخص زیرین صفر (0) مشخص شده اند.

برای پیدا کردن x و v ، باید مقادیر آنها را در زمان مشخص t بدانیم. از نظر فیزیکی این موضوع به این دلیل پیش می‌آید که معادله حرکت به خودی خود نمی‌تواند حرکت را به طور کامل تعیین کند. در ضمن در اینجا نیاز به مجموعه‌ای از شرایط اولیه هم داریم، که در این حالت عبارت‌اند از مکان و سرعت اولیه.^۱ در انتخاب شرایط اولیه آزاد هستیم. اینک حالتی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در $t = 0$ جرم از حالت سکون یعنی $v_0 = 0$ و به فاصله x_0 از مبدأ رها شده باشد. آنگاه داریم

$$v^2 = -\frac{k}{M} x^2 + \frac{k}{M} x_0^2$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$= \sqrt{\frac{k}{M}} \sqrt{x_0^2 - x^2}$$

با جدا کردن متغیرها نتیجه می‌شود

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{k}{M}} \int_0^t dt$$

$$= \sqrt{\frac{k}{M}} t$$

انتگرال سمت چپ برابر $\arcsin(x/x_0)$ است. (این انتگرال را در جدولهای استاندارد می‌توانید بیابید. مراجعه به جدول انتگرالها برای یک فیزیکدان به مانند مراجعه یک نویسنده به فرهنگ لغات است. البته در هر دو حالت انتظار می‌رود که تجربه کم‌کم این وابستگی را کاهش دهد.) اگر $\sqrt{k/M}$ را با ω نشان دهیم، داریم

$$\arcsin\left(\frac{x}{x_0}\right)\Big|_{x_0}^x = \omega t$$

$$\arcsin\left(\frac{x}{x_0}\right) - \arcsin 1 = \omega t$$

از آنجا که $\arcsin 1 = \pi/2$ است، خواهیم داشت

۱. به زبان معادلات دیفرانسیل، قانون دوم نیوتون، معادله "درجه دوم" بر حسب مکان است؛ بالاترین درجه مشتقی که در این معادله وجود دارد شتاب است که مشتق دوم مکان نسبت به زمان است. نظریه معادلات دیفرانسیل نشان می‌دهد که حل کامل معادله دیفرانسیل درجه m ام باید شامل n شرط اولیه باشد.

$$x = x_0 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= x_0 \cos \omega t$$

توجه کنید که جواب واقعاً در شرایط اولیه داده شده صدق می‌کند: در $t = 0$, $x = x_0 \cos 0 = x_0$. $x = x_0 \omega \sin 0 = 0$ و با این شرایط، نتیجه ما با جواب عمومی داده شده در مثال ۲-۱۴ سازگار است. ■

۳-۴ قضیه کار-انرژی در یک بعد

در بخش ۲-۴ روش معمولی انتگرال‌گیری قانون دوم نیوتون نسبت به مکان را نشان دادیم. نتیجه چنین بود

$$\frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = \int_{x_a}^{x_b} F(x)dx$$

اینک می‌خواهیم آن را به بیان فیزیکی تعبیر کنیم.

کمیت $\frac{1}{2}mv^2$ انرژی جنبشی نامیده می‌شود که با K نشان می‌دهیم، و سمت چپ را می‌توان به صورت $K_b - K_a$ نوشت. انتگرال $\int_{x_a}^{x_b} F(x)dx$ ، کار انجام شده نیروی \mathbf{F} روی ذره است وقتی که این ذره از a تا b حرکت می‌کند آن را با W_{ba} نشان می‌دهیم. رابطه ما اکنون به شکل زیر در می‌آید

$$W_{ba} = K_b - K_a \quad (5-4)$$

این نتیجه، معروف به قضیه کار-انرژی و اگر دقیقتر بگوییم، قضیه کار-انرژی در یک بعد است. (به زودی صورت کلی‌تر آن را خواهیم دید.) یکای کاروانرژی در دستگاه SI ژول (J) است:

$$1 \text{ J} = 1 \text{ kg m}^2 / \text{s}^2$$

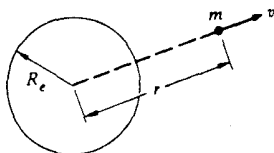
یکای کاروانرژی در دستگاه cgs ارگ است

$$1 \text{ erg} = 1 \text{ g cm}^2 / \text{s}^2$$

$$= 10^{-7} \text{ J}$$

یکای کار در دستگاه انگلیسی فوت-پوند است

$$1 \text{ ft lb} \approx 1,336 \text{ J}$$



شکل ۲-۴

مثال ۳-۴ حرکت قائم در میدان عکس مجذور فاصله: جرم m مطابق شکل ۲-۴ از سطح زمین با سرعت اولیه v_0 به طور قائم به طرف بالا شلیک می شود. با فرض اینکه گرانش تنها نیروی مؤثر باشد، پیدا کنید بیشینه ارتفاع و کمینه مقدار v را برای اینکه این جسم کاملاً از زمین فرار کند. نیروی وارد بر m چنین است

$$F = -\frac{GM_e m}{r^2}$$

این مسئله برحسب متغیر r یک بعدی است، و پیدا کردن انرژی جنبشی در فاصله r از طریق قضیه کار-انرژی امری ساده‌ای است.

فرض می‌کنیم ذره با سرعت اولیه v_0 از $r = R_e$ شروع به حرکت می‌کند

$$\begin{aligned} K(r) - K(R_e) &= \int_{R_e}^r F(r) dr \\ &= -GM_e m \int_{R_e}^r \frac{dr}{r^2} \end{aligned}$$

یا

$$\frac{1}{2} m v(r)^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = GM_e m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_e} \right)$$

بیشینه ارتفاع m را بلافاصله می‌توانیم پیدا کنیم. در بالاترین نقطه $v(r) = 0$ است و داریم

$$v_0^2 = 2GM_e \left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{r_{\max}} \right)$$

معرفی ثابتهای آشنا و معلوم فکر خوبی است. مثال، از آنجاکه $g = GM_e/R_e^2$ است، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} v_0^2 &= 2gR_e^2 \left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{r_{\max}} \right) \\ &= 2gR_e \left(1 - \frac{R_e}{r_{\max}} \right) \end{aligned}$$

یا

$$r_{\max} = \frac{R_e}{1 - \frac{v_0^2}{2gR_e}}$$

سرعت فرار از زمین، فرار عبارت از سرعت اولیه‌ای است که برای رساندن r_{\max} به بینهایت مورد نیاز است. بنابراین سرعت فرار چنین است

$$\begin{aligned} v_{\text{فرار}} &= \sqrt{2gR_e} \\ &= \sqrt{2 \times 9.8 \times 6.4 \times 10^6} \\ &= 1.1 \times 10^4 \text{ m/s} \end{aligned}$$

انرژی لازم برای پرتاب یک سفینه فضایی 5° کیلوگرمی از سطح زمین چنین است

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} M v_{\text{فرار}}^2 \\ &= \frac{1}{2} (50)(1.1 \times 10^4)^2 = 3.0 \times 10^9 \text{ J} \end{aligned}$$

■

۴-۴ انتگرال‌گیری معادله حرکت در چند بعد

با بازگشت به مسئله اصلی این فصل سعی می‌کنیم از معادله حرکت یک ذره تحت اثر نیروی وابسته به مکان انتگرال بگیریم:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (6-4)$$

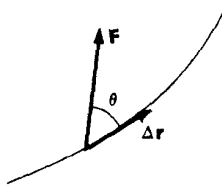
در حرکت یک‌بعدی نسبت به مکان انتگرال گرفتیم. برای تعمیم آن ببینیم وقتی که این ذره مسافت کوتاه $\Delta \mathbf{r}$ را طی می‌کند چه اتفاقی می‌افتد.

فرض کنیم $\Delta \mathbf{r}$ به اندازه‌ای کوچک باشد که \mathbf{F} در طول این جابه‌جایی ثابت بماند. اگر حاصلضرب عددی معادله ۶-۴ را با $\Delta \mathbf{r}$ به دست آوریم، خواهیم داشت

$$\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \Delta \mathbf{r} \quad (7-4)$$

شکل ۳-۴ مسیر ذره و نیرو را در نقطه‌ای از مسیر نشان می‌دهد. در این نقطه داریم

$$\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = F \Delta r \cos \theta$$



شکل ۳-۴

شاید تعجب کنید که Δr چگونه برای ما معلوم است، در حالی که شناخت Δr مستلزم دانستن مسیر است یعنی همان چیزی که به دنبال یافتن آن هستیم. این موضوع را فعلاً به کنار می گذاریم و وانمود می کنیم که مسیر برای ما معلوم است.

اینک سمت راست معادله ۷-۴ یعنی $m \left(\frac{dv}{dr} \right) \cdot \Delta r$ را در نظر بگیرید. می توانیم این جمله را با در نظر گرفتن اینکه v و Δr مستقل از هم نیستند تبدیل کنیم. برای یک مسیر به اندازه کافی کوتاه، v تقریباً ثابت است. از این رو $\Delta r = v \Delta t$ می شود، که در آن Δt زمانی است که ذره برای پیمودن Δr لازم دارد. بنابراین

$$m \frac{dv}{dt} \cdot \Delta r = m \frac{dv}{dt} \cdot v \Delta t \quad (۸-۴)$$

می توانیم معادله ۷-۴ را به اتحاد برداری^۱ زیر تبدیل می کنیم

$$v \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (v^2)$$

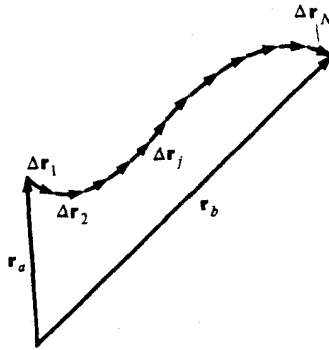
معادله ۷-۴ چنین می شود

$$F \cdot \Delta r = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (v^2) \Delta t \quad (۹-۴)$$

مرحله بعدی تقسیم کل مسیر از نقطه اولیه r_a تا نقطه انتهایی r_b به N پاره خط کوتاه به طول Δr_j مطابق شکل ۴-۴ است که شماره j شاخص پاره خطهاست. (اینکه همه پاره خطها دارای طول یکسانی باشند یا نه فرقی نمی کند.) برای هر پاره خط می توانیم معادله ای شبیه به معادله ۹-۴ بنویسیم:

۱. درستی اتحاد $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (A^2) = \mathbf{A} \cdot \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)$ به سادگی اثبات می شود:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (A^2) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{A} \right) \\ &= \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} \end{aligned}$$



شکل ۴-۴

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_j) \cdot \Delta \mathbf{r}_j = \frac{m}{\gamma} \frac{d}{dt}(v_j^2) \Delta t_j \quad (10-4)$$

که در آن \mathbf{r}_j محل قرارگرفتن پاره خط z ام، \mathbf{v}_j سرعت ذره در آن نقطه، و Δt_j زمان پیمودن پاره خط است. اگر معادلات همه این پاره خطها را باهم جمع کنیم، داریم

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{F}(\mathbf{r}_j) \cdot \Delta \mathbf{r}_j = \sum_{j=1}^N \frac{m}{\gamma} \frac{d}{dt}(v_j^2) \Delta t_j \quad (11-4)$$

سپس حد آن را وقتی که طول هر پاره خط به صفر و تعداد آنها به بینهایت میل می‌کند، می‌گیریم

$$\int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_a}^{t_b} \frac{m}{\gamma} \frac{d}{dt}(v^2) dt \quad (12-4)$$

که در آن t_a و t_b زمانهای متناظر \mathbf{r}_a و \mathbf{r}_b هستند. در تبدیل مجموع به انتگرال، شاخصهای عددی z را حذف و محل قرارگرفتن اولین پاره خط $\Delta \mathbf{r}_1$ را با \mathbf{r}_a و محل قرارگرفتن آخرین قسمت $\Delta \mathbf{r}_N$ را با \mathbf{r}_b نشان داده‌ایم.

انتگرال سمت راست معادله ۱۲-۴ چنین است:

$$\begin{aligned} \frac{m}{\gamma} \int_{t_a}^{t_b} \frac{d}{dt}(v^2) dt &= \frac{1}{\gamma} m v^2 \Big|_{t_a}^{t_b} \\ &= \frac{1}{\gamma} m v_b^2 - \frac{1}{\gamma} m v_a^2 \end{aligned}$$

این رابطه تعمیم ساده‌ای از نتیجه حاصل از حالت یک بعدی است. اما در اینجا $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ است. درحالی‌که در حالت یک بعدی داشتیم $v^2 = v_x^2$ چنان می‌شود

$$\int_{r_a}^{r_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 \quad (۱۳-۴)$$

انتگرال سمت چپ انتگرال خطی نامیده می‌شود. در دو بخش آینده خواهیم دید که انتگرال خطی چگونه تبیین می‌شود، و نیز خواهیم دید که معادله ۱۳-۴ از نظر فیزیکی چگونه تعبیر می‌شود. اما قبل از اقدام در این مورد، می‌کوشیم مطلب را خلاصه کنیم.

نقطه آغاز کار این عبارت بود $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m \, d\mathbf{v}/dt$ و ما از این معادله نسبت به مکان انتگرال‌گیری کردیم. اما چون هر مرحله را به دقت توصیف کردیم، به نظر می‌رسد که اعمال زیادی انجام دادیم. ولی در واقع چنین نیست؛ یعنی تمام بحث را می‌توان در چند سطر بیان کرد:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_a^b m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \, dt \\ &= \int_a^b \frac{m}{2} \frac{d}{dt}(v^2) \, dt \\ &= \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 \end{aligned}$$

۵-۴ قضیة کار-انرژی

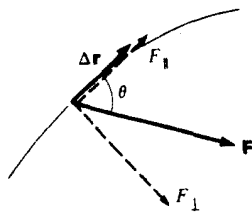
اینک می‌خواهیم معادله ۱۳-۴ را با بیان فیزیکی تعبیر کنیم. کمیت $\frac{1}{2}mv^2$ ، انرژی جنبشی نامیده می‌شود و آن را با K نشان می‌دهیم، سمت راست معادله ۱۳-۴ را می‌توانیم به صورت $K_b - K_a$ بنویسیم. انتگرال $\int_{r_a}^{r_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ، کار انجام شده نیروی \mathbf{F} روی ذره (W_{ba}) نامیده می‌شود وقتی که این ذره از a تا b حرکت می‌کند. معادله ۱۳-۴ اینک به شکل زیر درمی‌آید

$$W_{ba} = K_b - K_a \quad (۱۴-۴)$$

این نتیجه شکل کلی قضیة کار-انرژی است که آن را در وضع محدودش در بحث حرکت یک بعدی دیدیم.

کار انجام شده ΔW توسط نیروی \mathbf{F} در یک جابه‌جایی کوچک $\Delta \mathbf{r}$ چنین است (شکل ۵-۴)

$$\Delta W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = F \cos \theta \Delta r = F_{\parallel} \Delta r$$



شکل ۵-۴

که در آن مؤلفه $F_{||} = F \cos \theta$ مؤلفه F در جهت Δr است. مؤلفه F عمود بر Δr کاری انجام نمی‌دهد. برای یک جابه‌جایی معین از r_a تا r_b ، کار روی ذره یعنی $\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ برابر است با مجموع سهمهای $\Delta W = F_{||} \Delta r$ مربوط به هر یک از پاره‌خطهای مسیر؛ وقتی که در حد اندازه‌های هر یک از پاره‌خطهای مسیر به سمت صفر میل می‌کند.

در قضیه کار-انرژی، $W_{ba} = K_b - K_a$ ، مقدار کار انجام شده نیروی کل \mathbf{F} روی ذره است. اگر \mathbf{F} مجموع چند نیرو باشد $\mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}_i$ ، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} W_{ba} &= \sum_i (W_i)_{ba} \\ &= K_b - K_a \end{aligned}$$

که در آن

$$(W_i)_{ba} = \int_{r_a}^{r_b} \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}$$

کار انجام شده توسط نیروی i ام (\mathbf{F}_i) است.

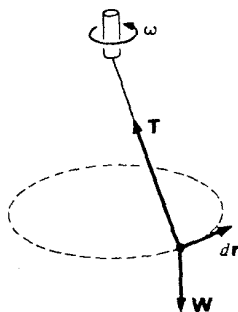
این بحث را تا به حال فقط برای یک ذره منفرد مطرح کرده‌ایم. اما، در فصل ۳ نشان دادیم که یک جسم طبق معادله زیر عمل می‌کند

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= M \ddot{\mathbf{R}} \\ &= M \frac{d\mathbf{V}}{dt} \end{aligned} \quad (۱۵-۴)$$

که در آن $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$ سرعت مرکز جسم است. با انتگرال‌گیری معادله ۱۵-۴ نسبت به مکان نتیجه می‌شود

$$\int_{\mathbf{R}_a}^{\mathbf{R}_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \frac{1}{2} M V_b^2 - \frac{1}{2} M V_a^2 \quad (۱۶-۴)$$

که در آن $d\mathbf{R} = \mathbf{V} dt$ جابه‌جایی مرکز جسم در زمان dt است. معادله ۱۶-۴ قضیه کار-انرژی برای حرکت انتقالی یک جسم است؛ در فصلهای ۶ و ۷ این نظرات را برای کار و انرژی جنبشی که شامل



شکل ۴-۶

حرکت دورانی باشد توسعه خواهیم داد. اما توجه داشته باشید که معادله ۴-۱۶ بدون توجه به حرکت دورانی یک سیستم برقرار است.

مثال ۴-۴ آونگ مخروطی: حرکت یک آونگ مخروطی را در مثال ۲-۸ مورد بحث قرار دادیم. از آنجا که این آونگ شکل ۴-۶ با سرعت زاویه‌ای ثابت ω روی دایره‌ای به شعاع ثابت R حرکت می‌کند، انرژی جنبشی جرم آن برابر $\frac{1}{2}mR\omega^2$ و مقدار ثابتی است. قضیه کارانرژی می‌گوید در اینجا هیچ کار خالصی روی جرم انجام نمی‌شود.

به علاوه در آونگ مخروطی نیروی نخ و نیروی وزن به طور جداگانه کاری انجام نمی‌دهند، زیرا هر یک از این نیروها بر مسیر ذره عمود است و عبارت زیر انتگرال کار برابر صفر می‌شود.

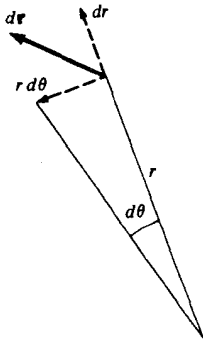
توجه به این امر که در انتگرال کار $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ بردار $d\mathbf{r}$ در امتداد مسیر ذره است امر مهمی است. از آنجا که $v = dr/dt$ است، بنابراین $dr = v dt$ می‌شود و $d\mathbf{r}$ همواره با \mathbf{v} موازی است. ■

مثال ۴-۵ سرعت فرار-حالت کلی: در مثال ۳-۴ حرکت یک بعدی جرم m را که به طور قائم از زمین به طرف بالا پرتاب شده بود مورد بررسی قرار دادیم. دریافتیم که اگر سرعت اولیه از $v_0 = \sqrt{2gR_e}$ بیشتر باشد جرم از زمین می‌تواند فرار کند. اکنون مسئله را دوباره در نظر می‌گیریم، اما این دفعه جرم را تحت زاویه α نسبت به قائم، پرتاب می‌کنیم (شکل ۴-۷).

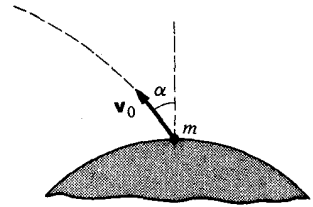
نیروی وارد بر m با صرف نظر کردن از مقاومت هوا چنین است

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\frac{GM_e m}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \\ &= -mg \frac{R_e^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

که در آن $g = GM_e/R_e^2$ شتاب مربوط به گرانش سطح زمین است. حل کامل مسئله، مسیر ذره برای ما معلوم نیست. اما، جزء $d\mathbf{r}$ از مسیر را می‌توان چنین نوشت (شکل ۴-۸)



شکل ۸-۴



شکل ۷-۴

$$d\mathbf{r} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= -mg \frac{R_e^\gamma}{r^\gamma} \hat{r} \cdot (dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta}) \\ &= -mg \frac{R_e^\gamma}{r^\gamma} dr \end{aligned}$$

و قضیه کارانرژی چنین می شود

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 &= -mgR_e^\gamma \int_{R_e}^r \frac{dr}{r^\gamma} \\ &= -mgR_e^\gamma \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_e} \right) \end{aligned}$$

سرعت فرار برابر است با مقدار v_0 وقتی که $r = \infty$ و $v = 0$ باشد. بنابراین در اینجا نیز چون

گذشته داریم

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{2gR_e} \\ &= 11.2 \times 10^3 \text{ m/s} \end{aligned}$$

سرعت فرار مستقل از جهت پرتاب است.

در این تحلیل از دوران زمین صرف نظر کرده ایم. در غیاب مقاومت هوا پرتابه باید به صورت افقی

به طرف شرق شلیک شود، زیرا سرعت دورانی زمین به سرعت پرتاب افزوده می شود. ■

۴-۶ کار برد قضیه کار-انرژی

در بخش گذشته قضیه کار-انرژی را چنین به دست آوردیم

$$W_{ba} = K_b - K_a \quad (۱۷-۴)$$

و در چند حالت ساده نیز به کار بردیم. در این بخش آن را برای حل مسائل پیچیده تر به کار خواهیم برد. اما، یادآوری چند نکته در مورد خواص این قضیه در درجه اول اهمیت قرار دارد.

در آغاز، باید تأکید کنیم که قضیه کار-انرژی پیامد ریاضی قانون دوم نیوتون است، و در آن هیچ مفهوم فیزیکی جدیدی معرفی نمی شود. قضیه کار-انرژی صرفاً بیانگر این مطلب است که تغییر انرژی جنبشی با کار خالص انجام شده برابر است. این قضیه با قانون کلی پایستگی انرژی که قانون فیزیکی مستقلی است و در بخش ۴-۱۲ تشریح خواهیم کرد نباید اشتباه شود.

احتمالاً در مسائل زیر با مشکل روبه رو خواهید شد: برای به کار بستن قضیه کار-انرژی، باید انتگرال خطی^۱ کار را تعیین کنیم:

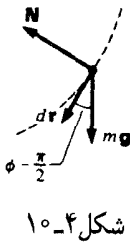
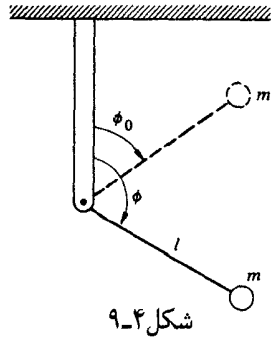
$$W_{ba} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

و تعیین این انتگرال بستگی به مسیر واقعی ذره دارد. به نظر می رسد که باید همه چیز را درباره حرکت حتی قبل از استفاده از قضیه کار-انرژی بدانیم، و بدین ترتیب معلوم نیست از این قضیه چه استفاده ای می توان کرد.

در کلی ترین حالت، انتگرال کار بستگی به مسیری طی شده دارد، و از آنجا که ما بدون حل کامل مسئله مسیر را نمی شناسیم، قضیه کار-انرژی بی استفاده است. خوشبختانه دو حالت ویژه وجود دارد که از اهمیت عملی قابل توجهی برخوردارند. برای تعداد زیادی از نیروهای مورد نظر، انتگرال کار فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی وابسته است و به مسیر بخصوصی بستگی ندارد. این چنین نیروهایی که اغلب نیروهای مهم فیزیک را در بر می گیرند به نیروهای پایستار موسوم اند. همان گونه که بعداً در این فصل بحث خواهیم کرد، وقتی که نیروها پایستار باشند، قضیه کار-انرژی را می توان به شکل ساده ای درآورد.

قضیه کار-انرژی همچنین برای حالت هایی مفید است که در آنها مسیر به علت مقید بودن حرکت معلوم باشد. منظور ما از حرکت مقید، حرکتی است که در آن اثر قیدهای خارجی طوری است که ذره را در مسیری از قبل معلوم شده نگه می دارد. راه آهن تقریبی کودکان مثال کامل در این مورد است. بجز مواردی که به حادثه منجر می شود، این وسیله مسیر خود را دنبال می کند زیرا چرخهای آن از پایین و بالا به مسیر وصل است. مثالهای متعددی از حرکت های مقید وجود دارند که به سادگی به ذهن می رسند - آونگ

۱. حرف C روی علامت انتگرال یعنی اینکه انتگرال گیری باید روی منحنی معینی انجام شود.



مخروطی یکی از آنهاست (در اینجا قید، ثابت بودن طول سیم است)؛ اما همه آنها دارای یک کیفیت عمومی هستند یعنی نیروی قیدی کار انجام نمی‌دهد. توجه کنید که اثر نیروی قیدی حصول اطمینان از این واقعیت است که جهت سرعت همواره بر مسیر (از قبل معین شده) مماس است. بنابراین، نیروهای قیدی فقط جهت \mathbf{v} را تغییر می‌دهند و کار انجام نمی‌دهند.^۱

مثال ۶-۴ آونگ وارون: آونگی تشکیل شده از یک میلهٔ سبک صلب به طول l ، که یک سر آن به نقطه‌ای اتکا دارد و به سر دیگر آن جرم m متصل شده است. مطابق شکل ۹-۴ این آونگ از حالت سکون با زاویه ϕ_0 رها می‌شود. سرعت m وقتی که میله در زاویه ϕ قرار می‌گیرد چقدر است؟ از قضیهٔ کار-انرژی نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{2}mv(\phi)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W_{\phi, \phi_0}$$

از آنجا که $v_0 = 0$ است، داریم

$$v(\phi) = \left(\frac{2W_{\phi, \phi_0}}{m} \right)^{\frac{1}{2}}$$

برای تعیین W_{ϕ, ϕ_0} ، کار انجام شده وقتی که زاویهٔ وزنهٔ انتهای آونگ از ϕ_0 تا ϕ تغییر می‌کند، نمودار نیرو را مطابق شکل ۱۰-۴ مورد بررسی قرار می‌دهیم. $d\mathbf{r}$ روی دایره‌ای به شعاع l قرار می‌گیرد. نیروهای وارد عبارت اند از: نیروی وزن به طرف پایین، و \mathbf{N} نیروی میله. از آنجا که \mathbf{N} در امتداد شعاع قرار می‌گیرد، $\mathbf{N} \cdot d\mathbf{r} = 0$ است و \mathbf{N} کاری انجام نمی‌دهد. کار انجام شده به وسیلهٔ نیروی وزن چنین است

۱. به طریق زیر می‌توانیم ثابت کنیم که نیروهای قیدی کار انجام نمی‌دهند. فرض کنید که نیروی قیدی \mathbf{F}_c سرعت را به اندازه $\Delta \mathbf{v}_c$ در زمان Δt تغییر می‌دهد. $\Delta \mathbf{v}_c$ بر سرعت لحظه‌ای \mathbf{v} عمود است. کار انجام شدهٔ نیروی \mathbf{F}_c برابر است با $\mathbf{F}_c \cdot \Delta \mathbf{r} = m(\Delta \mathbf{v}_c / \Delta t) \cdot (\mathbf{v} \Delta t) = m \Delta \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{v} = 0$

$$\begin{aligned} mg \cdot dr &= mgl \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) d\varphi \\ &= mgl \sin \varphi d\varphi \end{aligned}$$

در اینجا از رابطه $|d\mathbf{r}| = l d\phi$ استفاده کرده‌ایم

$$\begin{aligned} W_{\phi_0, \phi} &= \int_{\phi_0}^{\phi} mgl \sin \phi d\phi \\ &= -mgl \cos \phi \Big|_{\phi_0}^{\phi} \\ &= mgl (\cos \phi_0 - \cos \phi) \end{aligned}$$

سرعت در زاویه ϕ چنین است

$$v(\phi) = [2gl(\cos \phi_0 - \cos \phi)]^{\frac{1}{2}}$$

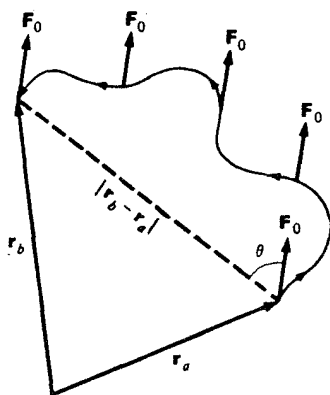
سرعت بیشینه با سقوط آونگ از بالا ($\phi_0 = 0$) تا پایین ($\phi = \pi$) به دست می‌آید:

$$v_{\max} = 2(gl)^{\frac{1}{2}}$$

این سرعت برابر است با سرعت جرمی که در سقوط آزاد همین فاصله $2l$ ، را طی می‌کند. اما، جرم روی آونگ در انتهای مسیر خود به صورت قائم حرکت نمی‌کند بلکه به صورت افقی در حرکت است. ■ اگر در سودمندی قضیه کار-انرژی تردیدی دارید، سعی کنید مثال قبلی را به کمک انتگرال‌گیری از معادله حرکت حل کنید. اما، این مثال یکی از نواقص این روش را نشان می‌دهد: ما جواب ساده‌ای برای سرعت جرم در هر نقطه از دایره پیدا کردیم ولی هیچ‌گونه اطلاعی از اینکه جرم چه وقت به آنجا می‌رسد نداریم. برای مثال، اگر آونگ در $\phi = 0$ رها شود. علی‌الاصول آونگ برای همیشه در آنجا به حالت توازن باقی می‌ماند، و هرگز به پایین نمی‌رسد. خوشبختانه، در بسیاری از مسائل، زمان برای ما مورد نظر نیست؛ حتی وقتی که زمان مهم است قضیه کار-انرژی اولین قدم با ارزش را در جهت پیدا کردن حل کامل مسئله نشان می‌دهد.

سپس برمی‌گردیم به مسئله کلی تعیین کار انجام شده توسط یک نیروی معلوم روی مسیر مشخص، که مستلزم تعیین انتگرال‌های خطی است. با مطالعه حالتی که در آن نیرو ثابت است این کار را شروع می‌کنیم.

مثال ۴-۷ کار انجام شده توسط نیروی ثابت: محاسبه کار در این حالت خیلی ساده است، در اینجا چگونگی پیدا کردن کار انجام شده توسط نیروی $\mathbf{F} = F_0 \hat{n}$ را مطابق شکل ۴-۱۱ در نظر می‌گیریم که



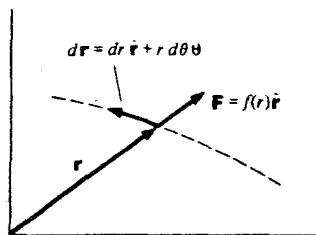
شکل ۱۱-۴

در آن F_0 مقداری است ثابت و $\hat{\mathbf{n}}$ برداری یکه در یک جهت معین در حالتی است که ذره از \mathbf{r}_a تا \mathbf{r}_b در روی مسیری اختیاری حرکت می‌کند. تمام این مراحل برای روشن ساختن طرزکار نشان داده شده‌اند، ولی این مسئله را با هر تجربه‌ای که داشته باشیم از طریق جستجو می‌توان حل کرد:

$$\begin{aligned}
 W_{ba} &= \oint_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
 &= \oint_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} F_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot d\mathbf{r} \\
 &= F_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot \oint_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} d\mathbf{r} \\
 &= F_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot \left(\hat{\mathbf{i}} \int_{x_a}^{x_b} dx + \hat{\mathbf{j}} \int_{y_a}^{y_b} dy + \hat{\mathbf{k}} \int_{z_a}^{z_b} dz \right) \\
 &= F_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot [\hat{\mathbf{i}}(x_b - x_a) + \hat{\mathbf{j}}(y_b - y_a) + \hat{\mathbf{k}}(z_b - z_a)] \\
 &= F_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a) \\
 &= F_0 \cos \theta |\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a|
 \end{aligned}$$

برای یک نیروی ثابت، کار فقط به جابه‌جایی خالص $\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a$ وابسته است نه به مسیری شده. این حالت همیشه صادق نیست، ولی برای دسته مهمی از نیروها از جمله نیروهای مرکزی مانند آنچه در مثال بعد نشان می‌دهیم این چنین است. ■

مثال ۸-۴ کار انجام شده توسط نیروی مرکزی: نیروی مرکزی یک نیروی شعاعی است که فقط به فاصله تا مبدأ بستگی دارد. فرض کنید می‌خواهیم کار انجام شده توسط نیروی مرکزی $\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$ وارد بر



شکل ۱۲-۴

ذره‌ای را که از r_a تا r_b حرکت می‌کند به دست آوریم (شکل ۱۲-۴). برای سهولت حرکت را در یک صفحه در نظر می‌گیریم که برای آن $d\mathbf{r} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta}$ است. آنگاه داریم

$$\begin{aligned} W_{ba} &= \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_a^b f(r) \hat{r} \cdot (dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta}) \\ &= \int_a^b f(r) dr \end{aligned}$$

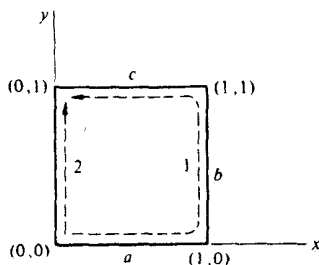
این کار به وسیله یک انتگرال ساده یک بعدی بر حسب متغیر r معین می‌شود. از آنجا که θ از مسئله حذف شده است واضح است که کار فقط به مسافت‌های شعاعی اولیه و انتهایی [و البته به شکل خاص $f(r)$] بستگی دارد و نه به مسیر ذره.

برای بعضی نیروها، کار روی مسیرهای مختلف بین نقاط اولیه و انتهایی متفاوت است. کار انجام شده توسط اصطکاک لغزشی مثال بارزی در این باره است. در اینجا نیرو همواره با حرکت مخالفت می‌کند، به طوری که کار انجام شده توسط اصطکاک در طی مسافت dS برابر $dW = -f dS$ است که f بزرگی نیروی اصطکاک است. اگر f را ثابت فرض کنیم، آنگاه کار انجام شده توسط اصطکاک در عبور از r_a تا r_b در طول یک مسیر چنین می‌شود

$$\begin{aligned} W_{ba} &= - \int_{r_a}^{r_b} f dS \\ &= -fS \end{aligned}$$

که در آن S طول کل مسیر است. کار منفی است برای اینکه نیرو همواره ذره را از حرکت باز می‌دارد. W_{ba} از نظر بزرگی هرگز کوچکتر از fS نیست، در اینجا S فاصله بین دو نقطه است؛ اما با انتخاب مسیری که به اندازه کافی کج باشد، S را می‌توان به مقدار دلخواه بزرگ کرد.

مثال ۹-۴ انتگرال خطی وابسته به مسیر: این دومین مثال از یک انتگرال خطی وابسته به مسیر است.



شکل ۴-۱۳

فرض کنید $\mathbf{F} = A(xy\hat{i} + y^2\hat{j})$ است. مطابق شکل ۴-۱۳ انتگرال را از (0°) تا (1°) و ابتدا در مسیر ۱ و سپس در مسیر ۲ در نظر بگیرید. نیروی \mathbf{F} هیچ معنای فیزیکی ندارد، ولی این مثال خواص نیروهای ناپایستار را نشان می‌دهد. از آنجا که اجزا هر مسیر در امتداد یکی از محورهای مختصات قرار می‌گیرند، بنابراین تعیین انتگرال خیلی ساده است. برای مسیر ۱ داریم

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

در قسمت a ، $d\mathbf{r} = dx\hat{i}$ است. $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx = Axy dx$. چون در امتداد خط انتگرال‌گیری $y = 0$ است، داریم $\int_a \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$. به همین ترتیب برای مسیر b داریم

$$\begin{aligned} \int_a \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= A \int_{x=1, y=0}^{x=1, y=1} y^2 dy \\ &= \frac{A}{3} \end{aligned}$$

در حالی که برای مسیر c

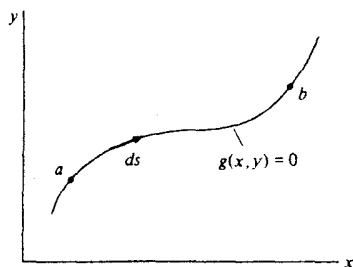
$$\begin{aligned} \int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= A \int_{x=1, y=1}^{x=0, y=1} xy dx \\ &= A \int_1^0 x dx = -\frac{A}{2} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \frac{A}{3} - \frac{A}{2} \\ &= -\frac{A}{6} \end{aligned}$$

در مسیر ۲ داریم

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = A \int_{y=0}^{y=1} y^2 dy$$



شکل ۴-۱۴

$$= \frac{A}{3}$$

$$\neq \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

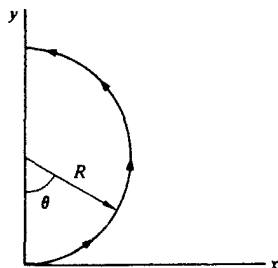
کار انجام شده توسط نیروی وارد شده برای این دو مسیر با هم متفاوت است. ■
 معمولاً مسیر انتگرال خطی به آسانی روی محورهای مختصات قرار نمی‌گیرد، بلکه روی یک منحنی
 اختیاری واقع می‌شود. روش زیر برای تعیین انتگرال خطی در چنین حالتی کاملاً عمومی است، اگر
 روشهای دیگر ناموفق بودند از این روش استفاده کنید.
 برای سهولت، دوباره حرکت را در یک صفحه در نظر می‌گیریم (شکل ۴-۱۴). تعمیم آن به سه
 بعد خیلی ساده است.

مسئله مورد نظر در اینجا تعیین $\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ در یک مسیر معین است. این مسیر را می‌توان توسط
 معادله‌ای به شکل $g(x, y) = 0$ مشخص کرد. برای مثال، اگر مسیر دایره‌ای به شعاع واحد حول مبدأ
 باشد، آنگاه همه نقاط روی مسیر از معادله $x^2 + y^2 - 1 = 0$ پیروی می‌کنند.

هر نقطه روی مسیر را می‌توان توسط یک پارامتر s مشخص کرد که در مسائل عملی ممکن است
 (برای مثال) مسافت در طول مسیر، زاویه، یا هر چیز دیگری باشد، فقط به این شرط که هر نقطه از مسیر
 متناظر با یک مقدار s شود به طوری که داشته باشیم $x = x(s)$ و $y = y(s)$. اگر در طول مسیر راه
 کوتاهی را طی کنیم، به طوری که به اندازه ds تغییر کند، آنگاه تغییر x چنین می‌شود $dx = (dx/ds)ds$
 و تغییر y هم عبارت است از $dy = (dy/ds)ds$. چون x و y هر دو به s بستگی دارند، F_x و F_y هم
 همینطورند. پس می‌توانیم بنویسیم $\mathbf{F} = F_x(s)\hat{i} + F_y(s)\hat{j}$ و داریم

$$\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b (F_x dx + F_y dy)$$

$$= \int_{s_a}^{s_b} \left[F_x(s) \frac{dx}{ds} + F_y(s) \frac{dy}{ds} \right] ds$$



شکل ۱۵-۴

یعنی اینکه این مسئله را به مسئله آشنا تر تعیین انتگرال معین یک بعدی تقلیل داده ایم. محاسبه به طور عملی از جنبه نظری خیلی ساده تر است. مثال زیر نمونه ای از آن است.

مثال ۱۰-۴ تعیین انتگرال خطی به روش پارامتری: انتگرال خطی $\mathbf{F} = A(x^2 \hat{i} + xy^2 \hat{j})$ از $(x = 0, y = 2R)$ تا $(x = 0, y = 0)$ در طول نیمدایره ای که در شکل ۱۵-۴ می بینید، تعیین کنید.

پارامتر طبیعی مورد استفاده در اینجا θ است، زیرا با تغییر θ از 0° تا π ، بردار شعاع تمام نیمدایره را جاروب می کند. داریم

$$\begin{aligned} x &= R \sin \theta & dx &= R \cos \theta d\theta & F_x &= AR^2 \sin^2 \theta \\ y &= R(1 - \cos \theta) & dy &= R \sin \theta d\theta & F_y &= AR^2 \sin \theta (1 - \cos \theta)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= A \int_0^\pi [(R \sin \theta)^2 R \cos \theta + R^2 \sin \theta (1 - \cos \theta)^2 R \sin \theta] d\theta \\ &= R^4 A \int_0^\pi [\sin^2 \theta \cos \theta + \sin^3 \theta (1 - \cos \theta)^2] d\theta \end{aligned}$$

تعیین این انتگرال کار ساده ای است. اگر علاقه مند به این کار هستید، با جایگذاری $u = \cos \theta$ امتحان کنید. ■

۷-۴ انرژی پتانسیل

مفهوم نیروی پایستار را در بخش گذشته معرفی کردیم. کار انجام شده توسط یک نیروی پایستار روی ذره ای که از یک نقطه به نقطه دیگر حرکت می کند فقط به نقاط انتهایی آن بستگی دارد نه به مسیر بین آنها. از این رو برای یک نیروی پایستار داریم

$$\int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}_b) - f(\mathbf{r}_a) \quad \text{یا}$$

$$\int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -U(\mathbf{r}_b) + U(\mathbf{r}_a) \quad (۱۸-۴)$$

که در آن $U(\mathbf{r})$ تابعی است که توسط رابطه فوق تعریف شده است، و به تابع انرژی پتانسیل معروف است. (دلیل انتخاب علامت جبری به زودی روشن خواهد شد.) توجه داشته باشید که ما ثابت نکردیم $U(\mathbf{r})$ همیشه وجود دارد. اما، قبلاً در حالت‌های متعددی دیده‌ایم که کار واقعاً مستقل از مسیر است، به طوری که می‌توانیم فرض کنیم U حداقل برای چند نیرو وجود دارد. قضیه کار-انرژی $W_{ba} = K_b - K_a$ اینک چنین می‌شود

$$\begin{aligned} W_{ba} &= -U_b + U_a \\ &= K_b - K_a \end{aligned}$$

یا با دوباره مرتب کردن آن داریم

$$K_a + U_a = K_b + U_b \quad (۱۹-۴)$$

سمت چپ این معادله، $K_a + U_a$ ، به سرعت ذره و انرژی پتانسیل آن در \mathbf{r}_a بستگی دارد و هیچ اشاره‌ای به \mathbf{r}_b نمی‌کند. به همین ترتیب سمت راست معادله نیز به سرعت و انرژی پتانسیل در \mathbf{r}_b بستگی دارد و اشاره‌ای هم به \mathbf{r}_a نمی‌کند. این معادله فقط وقتی می‌تواند درست باشد که هر طرف آن برابر با یک مقدار ثابت باشد، زیرا \mathbf{r}_a و \mathbf{r}_b اختیاری‌اند و نقاط انتخاب شده بخصوصی نیستند. اگر این مقدار ثابت را E بگیریم، داریم

$$K_a + U_a = K_b + U_b = E \quad (۲۰-۴)$$

E را انرژی مکانیکی کل ذره و یا با دقت کمتر انرژی کل می‌نامند. اگر نیرو پایستار باشد، نشان دادیم که انرژی کل مستقل از مکان ذره است یعنی انرژی ثابت باقی می‌ماند و یا به بیان فیزیکی انرژی پایسته است. اگرچه پایستگی انرژی مکانیکی یک قانون استنتاج شده است، یعنی اینکه اساساً هیچ مضمون فیزیکی جدیدی در بر ندارد، ولی نشانگر راه بررسی متفاوتی برای فرایند فیزیکی است که در مقایسه با کاربرد قوانین نیوتون، وسیله کاملاً جدید فیزیکی به حساب می‌آید. به علاوه، با وجود اینکه پایستگی انرژی مکانیکی مستقیماً از قوانین نیوتون نتیجه می‌شود، ولی خود این پایستگی انرژی مکانیکی کلید درک

قانون کلی تر پایداری انرژی است که مستقل از قوانین نیوتونی است و به طوری کلی باعث آگاهی ما از طبیعت می‌شود. وقتی که این موضوع را با جزئیات بیشتری در بخش ۴-۱۲ بررسی می‌کنیم خواهیم دید که پایداری انرژی مکانیکی نتیجه خاصی از یک قانون کلی تر است.

یک خاصیت ویژه انرژی این است که اندازه E تا حدی اختیاری است؛ و تنها تغییرات E است که معنی فیزیکی دارد. دلیل آن هم این است که معادله زیر فقط اختلاف انرژی پتانسیل بین a و b را تعریف می‌کند نه خود انرژی پتانسیل را.

$$U_b - U_a = - \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

البته می‌توانیم یک مقدار ثابت به U_b و به همان اندازه به U_a بیفزاییم تا باز هم در معادله تعریفی صدق کنند. اما، از آنجا که $E = K + U$ است، افزودن یک مقدار ثابت به U ، به همان اندازه E را افزایش می‌دهد.

نمایش انرژی پتانسیل

قبلاً دیدیم که برای یک نیروی یکنواخت یا مرکزی، کار مستقل از مسیر است. نیروهای پایستار متعددی وجود دارند ولی ما برای نمایش انرژی پتانسیل در اینجا به ذکر دو مثال اکتفا می‌کنیم.

مثال ۴-۱۱ انرژی پتانسیل یک میدان نیروی یکنواخت: در مثال ۴-۷ دیدیم که کار انجام شده توسط یک نیروی یکنواخت برابر $W_{ba} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a)$ است. برای مثال نیروی وارد بر ذره‌ای به جرم m از طرف یک میدان گرانشی یکنواخت برابر $-mg\hat{\mathbf{k}}$ است، به طوری که اگر ذره از \mathbf{r}_a تا \mathbf{r}_b حرکت کند، تغییر انرژی پتانسیل آن چنین می‌شود

$$\begin{aligned} U_b - U_a &= - \int_{z_a}^{z_b} (-mg) dz \\ &= mg(z_b - z_a) \end{aligned}$$

چنانچه این قرارداد را بپذیریم که در سطح زمین $z = 0$ ، $U = 0$ است آنگاه $U(h) = mgh$ که در آن h ارتفاع از کف زمین است. به هر حال، شکل انرژی پتانسیلی به صورت $mgh + C$ که در آن C مقدار ثابتی است که می‌تواند مناسب باشد.

در مثال ۴-۱۱ مسئله پرتاب جسمی به طرف بالا با سرعت اولیه معلومی در منطقه‌ای با گرانش ثابت مورد بررسی قرار دادیم. در اینجا می‌خواهیم ببینیم همین مسئله با استفاده از پایداری انرژی چگونه حل می‌شود.

فرض کنید جسمی با سرعت اولیه $\mathbf{v}_0 = v_{0x}\hat{\mathbf{i}} + v_{0y}\hat{\mathbf{j}} + v_{0z}\hat{\mathbf{k}}$ به طرف بالا پرتاب شده است.

سرعت آن را در ارتفاع h پیدا کنید

$$K_0 + U_0 = K(h) + U(h)$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv(h)^2 + mgh$$

یا

$$v(h) = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$$

■
از آنجا که حرکت در یک میدان نیروی یکنواخت به سادگی از رابطه $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ مشخص می‌شود، مثال ۴-۱۱ مثال واضحی است. اما، این مثال سادگی حل مسئله به روش انرژی را نشان می‌دهد. مثلاً، حرکت در سه جهت یکباره مطرح می‌شود، درحالی‌که قانون نیوتون مستلزم یک معادله برای هر یک از مؤلفه‌های حرکت است.

مثال ۴-۱۲ انرژی پتانسیل یک نیروی متناسب با عکس مجذور فاصله: غالباً ما با نیروهای مرکزی به شکل $\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$ مواجه می‌شویم که در آنها $f(r)$ تابعی از فاصله تا مبدأست. برای مثال، در مورد نیروی الکتروستاتیک کولنی داریم $\mathbf{F} \propto (q_1q_2/r^2)\hat{\mathbf{r}}$ که در آن q_1 و q_2 بارهای دو ذره در حال برهم‌کنش‌اند. نیروی گرانش بین دو ذره مثال دیگری در این زمینه است.

انرژی پتانسیل ذره‌ای که تحت تأثیر یک نیروی مرکزی $\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$ قرار داشته باشد از رابطه زیر پیروی می‌کند

$$U_b - U_a = - \int_{r_a}^{r_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

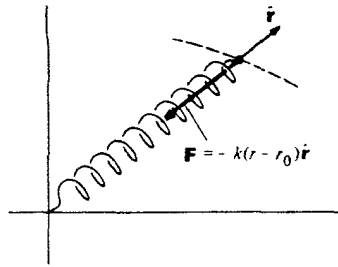
$$= - \int_{r_a}^{r_b} f(r) dr$$

برای یک نیروی متناسب با عکس مجذور فاصله، $f(r) = A/r^2$ ، داریم

$$U_b - U_a = - \int_{r_a}^{r_b} \frac{A}{r^2} dr$$

$$= \frac{A}{r_b} - \frac{A}{r_a}$$

برای به دست آوردن تابع کلی انرژی پتانسیل، r_b را با متغیر شعاعی r تعویض می‌کنیم. آنگاه داریم



شکل ۱۶-۴

$$\begin{aligned}
 U(r) &= \frac{A}{r} + \left(U_a - \frac{A}{r_a} \right) \\
 &= \frac{A}{r} + C
 \end{aligned}$$

از آنجا که فقط تغییرات U دارای اهمیت است، ثابت C دارای هیچ‌گونه معنی فیزیکی نیست. به $C = 0$ می‌توانیم هر مقدار دلخواهی نسبت دهیم. یک انتخاب مناسب در این حالت این است که $U(\infty) = 0$ باشد، که متناظر است با $C = 0$. با این قرارداد داریم

$$U(r) = \frac{A}{r}$$

یکی از مهمترین نیروهای فیزیکی، نیروی بازگرداننده خطی یعنی نیروی فنراست برای اینکه نشان دهیم نیروی فنر پایستار است، فنری با طول r_0 (در حال تعادل) را که یک سر آن متصل به مبدأست در نظر می‌گیریم (شکل ۱۶-۴). اگر این فنر در جهت \hat{r} تا طول r کشیده شود، طبق رابطه زیر نیرو و اعمال می‌کند

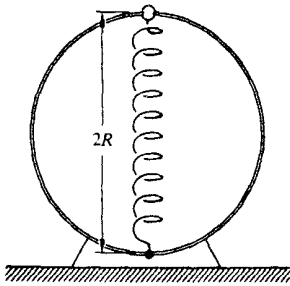
$$\mathbf{F}(r) = -k(r - r_0)\hat{r}$$

از آنجا که این نیرو مرکزی است، پس پایستار است. انرژی پتانسیل از رابطه زیر به دست می‌آید

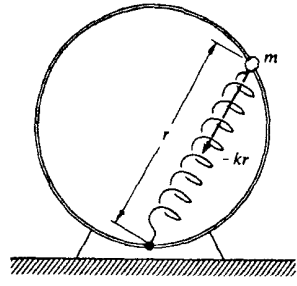
$$\begin{aligned}
 U(r) - U(a) &= - \int_a^r (-k)(r - r_0) dr \\
 &= \frac{1}{2} k(r - r_0)^2 \Big|_a^r
 \end{aligned}$$

از این رو داریم

$$U(r) = \frac{1}{2} k(r - r_0)^2 + C$$



شکل ۱۸-۴



شکل ۱۷-۴

به طور قراردادی انرژی پتانسیل را چنان انتخاب می‌کنیم که در حالت تعادل صفر باشد: $U(r_0) = 0$. از اینجا نتیجه می‌شود

$$U(r) = \frac{1}{2}k(r - r_0)^2 \quad (21-4)$$

وقتی که چند نیروی پایستار بر ذره‌ای اثر کنند، انرژی پتانسیل برابر مجموع انرژی پتانسیل‌های هر یک از نیروهاست. در مثال بعدی دو نیروی پایستار را در کنار هم در نظر می‌گیریم.

مثال ۱۳-۴ مهره، حلقه، و فنر: مهره‌ای به جرم m روی حلقه‌ی قائمی به شعاع R بدون اصطکاک می‌لغزد. این مهره تحت اثر مشترک گرانش و فنری که به پایین حلقه متصل است حرکت می‌کند. برای سهولت، فرض می‌کنیم طول در حال تعادل فنر صفر باشد، به طوری که نیروی وارد از طرف فنر $-kr$ است و r طبق شکل ۱۷-۴ طول لحظه‌ای فنر است.

این مهره با سرعت ناچیزی از بالای حلقه رها می‌شود. در پایین حلقه با چه سرعتی حرکت می‌کند؟ در بالای حلقه (شکل ۱۸-۴)، انرژی پتانسیل گرانشی مهره برابر است با $mg(2R)$ و انرژی پتانسیل مربوط به فنر برابر است با $\frac{1}{2}k(2R)^2 = 2kR^2$. از این رو انرژی پتانسیل اولیه چنین است

$$U_i = 2mgR + 2kR^2$$

انرژی پتانسیل در پایین حلقه چنین می‌شود

$$U_f = 0$$

از آنجا که همه‌ی نیروها پایستارند، انرژی مکانیکی ثابت است و داریم

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

چون انرژی جنبشی اولیه صفر است، خواهیم داشت

$$K_f = U_i - U_f$$

یا

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = 2mgR + 2kR^2$$

از آنجا

$$v_f = 2\sqrt{gR + \frac{kR^2}{m}}$$

۴-۸ انرژی پتانسیل چه اطلاعاتی از نیرو به دست می دهد

اگر نیروی پایستاری داشته باشیم، پیدا کردن انرژی پتانسیل از معادله تعریفی زیر کار ساده‌ای است

$$U_b - U_a = - \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

در اینجا انتگرال‌گیری روی هر مسیری از \mathbf{r}_a تا \mathbf{r}_b می‌تواند انجام شود؛ اما، در خیلی از حالتها مشخص کردن یک نیرو با استفاده از تابع پتانسیل آن آسانتر از تعیین هر یک از مؤلفه‌های آن است. در چنین مواردی می‌کوشیم از انرژی پتانسیل برای به دست آوردن نیروی وارد شده استفاده کنیم. روش پیدا کردن نیرو کار ساده‌ای است. در این بخش چگونگی پیدا کردن نیرو از انرژی پتانسیل را در یک سیستم یک بعدی یاد خواهیم گرفت. حالت کلی سه بعدی را می‌توان تعمیم ساده‌ای از روشی که در اینجا مطرح می‌شود تلقی کرد، اما از آنجا که این عمل شامل نمادهای جدیدی است که به صورت ساده‌تری در بخش آینده معرفی شده‌اند بنابراین حالت سه بعدی را تا بخش آینده به تعویق می‌اندازیم.

فرض کنید سیستمی یک بعدی مانند یک جرم متصل به فنر در اختیار داریم که نیروی وارد بر آن $F(x)$ و انرژی پتانسیل آن به صورت زیر است

$$U_b - U_a = \int_{x_a}^{x_b} F(x) dx$$

تغییر انرژی پتانسیل آن ΔU را وقتی که ذره از نقطه x تا $x + \Delta x$ حرکت می‌کند، در نظر بگیریم.

$$\begin{aligned} U(x + \Delta x) - U(x) &\equiv \Delta U \\ &= - \int_x^{x+\Delta x} F(x) dx \end{aligned}$$

برای Δx به اندازه کافی کوچک، $F(x)$ را می توان مقدار ثابتی در حوزه انتگرال گیری در نظر گرفت و داریم

$$\begin{aligned}\Delta U &\approx -F(x)(x + \Delta x - x) \\ &= -F(x)\Delta x\end{aligned}$$

یا

$$F(x) \approx -\frac{\Delta U}{\Delta x}$$

در حد $\Delta x \rightarrow 0$ داریم

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} \quad (22-4)$$

این نتیجه کاملاً معقول است. یعنی انرژی پتانسیل، انتگرال نیروست با علامت منفی و از آن نتیجه می شود که نیرو مشتق انرژی پتانسیل با علامت منفی است.

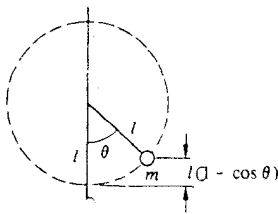
پایداری

نتیجه $F = -dU/dx$ نه فقط برای محاسبه نیرو بلکه برای تشخیص پایداری یک سیستم با استفاده از نمودار انرژی پتانسیل نیز مفید است. برای مثال یک نوسانگر هماهنگ با انرژی پتانسیل $U = kx^2/2$ توسط یک سهمی توصیف می شود (شکل ۴-۱۹).

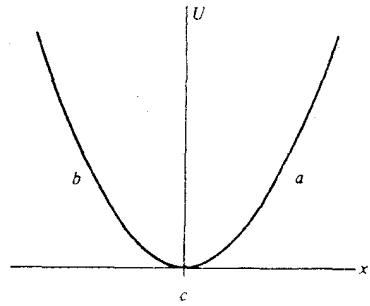
در نقطه a داریم $dU/dx > 0$ و بنابراین نیرو منفی است. در نقطه b داریم $dU/dx < 0$ یعنی نیرو مثبت است. در c داریم $dU/dx = 0$ و نیرو صفر است. جابه جایی ذره به هر طرف که باشد نیرو به طرف مبدأ متوجه است. نیرو وقتی از بین می رود که ذره، در مبدأ باشد. منحنی انرژی پتانسیل با وضعیت تعادل سیستم منطبق می شود. بدیهی است که این تعادل پایدار است، زیرا جابه جایی سیستم نیرویی ایجاد می کند که می کوشد ذره را به طرف نقطه سکون آن بکشد.

هرگاه $dU/dx = 0$ باشد، سیستم در حالت تعادل است. اما اگر این وضعیت در مقدار بیشینه U اتفاق افتد تعادل ناپایدار می شود، زیرا جابه جایی مثبت یک نیروی مثبت تولید می کند که می کوشد جابه جایی را افزایش دهد، و جابه جایی منفی یک نیروی منفی تولید می کند که باز هم باعث بزرگتر شدن جابه جایی می شود. آونگی به طول l که به جرم m متصل است مثال خوبی در این باره است. اگر انرژی پتانسیل را در پایین نوسان صفر بگیریم، خواهیم داشت (شکل ۴-۲۰)

$$\begin{aligned}U(\theta) &= mgz \\ &= mgl(1 - \cos \theta)\end{aligned}$$



شکل ۴-۲۰

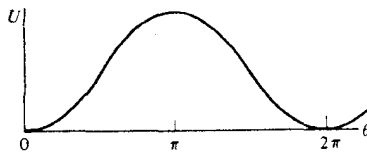


شکل ۴-۱۹

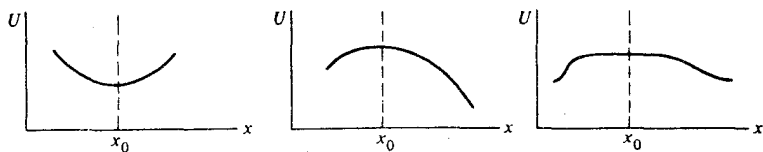
آونگ به ازای $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ در حالت تعادل است. اما، گرچه هر قدر که بخواهید آونگ به طرف پایین آویزان خواهد ماند، ولی به طرف بالا برای مدت طولانی آویزان نخواهد ماند. در $\theta = \pi$ ، $dU/dx = 0$ است، ولی U در آنجا بیشینه است و تعادل پایدار نیست.

شکل تابع انرژی پتانسیل معنی پایداری را تقریباً روشن می‌سازد. کمینه منحنی انرژی پتانسیل یک نقطه تعادل پایدار، و بیشینه آن یک نقطه تعادل ناپایدار است (شکل ۴-۲۱). به بیان توصیفی تر سیستم در پایین "دره" انرژی پتانسیل پایدار، و در بالای "قله" انرژی پتانسیل ناپایدار است.

به عبارت دیگر، به کمک یک آزمون ساده ریاضی می‌توانیم بفهمیم که یک نقطه دارای تعادل ناپایدار است یا نه. فرض می‌کنیم $U(x)$ تابع انرژی پتانسیل یک ذره باشد. همانطوری که نشان دادیم، نیروی وارد بر این ذره $F = -dU/dx$ است و وقتی که $dU/dx = 0$ باشد سیستم در حال تعادل است. فرض کنید این وضعیت در نقطه‌ای مانند x_0 اتفاق افتد. برای آزمون پایداری باید ببینیم که آیا U در آن نقطه بیشینه است یا کمینه. برای این کار باید d^2U/dx^2 را در x_0 بررسی کنیم. اگر مشتق دوم مثبت باشد، تعادل پایدار است (شکل ۴-۲۲ الف) و اگر منفی باشد، تعادل ناپایدار است (شکل ۴-۲۲ ب). اگر $d^2U/dx^2 = 0$ باشد، باید مشتقهای بالاتر را مورد بررسی قرار دهیم. اگر همه مشتقها صفر شوند به طوری که U در ناحیه‌ای در پیرامون x_0 ثابت باشد، می‌گویند سیستم در شرایط پایداری بی تفاوت است (شکل ۴-۲۲ ج) - هیچ نیرویی از جابه‌جایی حاصل نمی‌شود، یعنی ذره عملاً آزاد است.



شکل ۴-۲۱



(الف) $\frac{d^2U}{dx^2} > 0$

پایدار

(ب) $\frac{d^2U}{dx^2} < 0$

ناپایدار

(ج) $\frac{d^2U}{dx^2} = 0$

بی تفاوت

شکل ۲۲-۴

مثال ۴-۱۴ انرژی و پایداری- اسباب بازی تی تر: اسباب بازی تی تر تشکیل شده است از دو وزنه همانند که مطابق شکل ۴-۲۳ به انتهای دو بازوی معلقی که از میخی آویزان اند متصل اند. این ساختار به طور غیر قابل انتظاری پایدار است- این اسباب بازی می تواند با احتمال واژگون شدن کم به چرخش یا به نوسان درآید. با بررسی انرژی پتانسیل آن می توانیم ببینیم که چرا چنین است. برای سهولت فقط حرکت نوسانی در صفحه قائم را مورد توجه قرار می دهیم.

وقتی که این اسباب بازی مطابق شکل ۴-۲۴ در زاویه θ قرار دارد انرژی پتانسیل آن را تعیین می کنیم. اگر پتانسیل گرانشی در نقطه اتکا را صفر بگیریم، داریم

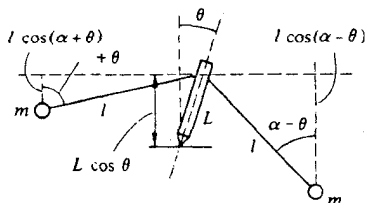
$$U(\theta) = mg[L \cos \theta - l \cos(\alpha + \theta)] + mg[L \cos \theta - l \cos(\alpha - \theta)]$$

با استفاده از اتحاد، $\cos(\alpha \pm \theta) = \cos \alpha \cos \theta \pm \sin \alpha \sin \theta$ ، پتانسیل $U(\theta)$ را می توان چنین نوشت

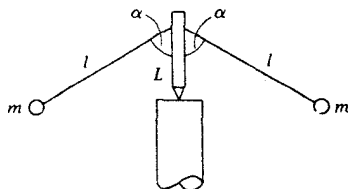
$$U(\theta) = 2mg \cos \theta (L - l \cos \alpha)$$

تعداد وقتی اتفاق می افتد که داشته باشیم

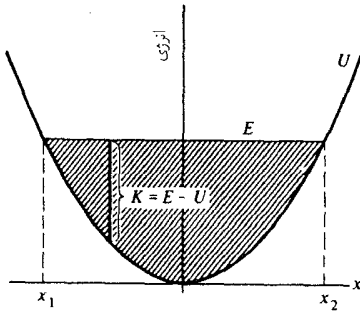
$$\frac{dU}{d\theta} = -2mg \sin \theta (L - l \cos \alpha) = 0$$



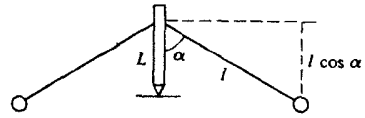
شکل ۲۴-۴



شکل ۲۳-۴



شکل ۲۶-۴



شکل ۲۵-۴

همانطوری که به موجب تقارن انتظار داشتیم، جواب $\theta = 0^\circ$ است. (جواب $\theta = \pi$ را نمی‌پذیریم بدین دلیل که θ باید به مقادیر کوچکتر از $\pi/2$ محدود باشد.) برای تحقیق در وضعیت تعادل، باید مشتق دوم انرژی پتانسیل را بررسی کنیم. داریم

$$\frac{d^2 U}{d\theta^2} = -2mg \cos \theta (L - l \cos \alpha)$$

در حالت تعادل داریم

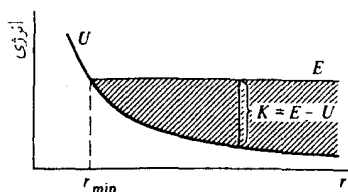
$$\left. \frac{d^2 U}{d\theta^2} \right|_{\theta=0} = -2mg(L - l \cos \alpha)$$

برای اینکه مشتق دوم مثبت باشد لازم است که $L - l \cos \alpha < 0$ یا $L < l \cos \alpha$ باشد. برای اینکه اسباب بازی تی‌تر در حالت پایدار باشد، وزنه‌های در حال آویزان باید پایینتر از نقطه اتکا قرار داشته باشند (شکل ۲۵-۴).

۹-۴ نمودار انرژی

غالباً با استفاده از نمودار انرژی که در آن انرژی کل E و انرژی پتانسیل U بر حسب تابعی از مکان رسم شده‌اند می‌توانیم جالبترین ویژگیهای حرکت یک‌بعدی یک سیستم را پیدا کنیم. انرژی جنبشی $K = E - U$ به سادگی از طریق تجسس پیدا می‌شود. از آنجاکه انرژی جنبشی هرگز نمی‌تواند منفی شود، حرکت سیستم مقید به ناحیه‌ای است که در آن $U \leq E$ است.

شکل ۲۶-۴ نمودار انرژی یک نوسانگر هماهنگ است. انرژی پتانسیل $U = kx^2/2$ سهمی به مرکز مبدأ مختصات است. از آنجاکه انرژی کل یک سیستم پایدار ثابت است، E به صورت یک خط راست افقی مشخص می‌شود. حرکت به ناحیه‌ی هاشور زده که در آن $E \geq U$ است مقید می‌شود. حدود حرکت را که در شکل x_1 و x_2 است گاهی نقاط بازگشت می‌نامند.



شکل ۴-۲۷

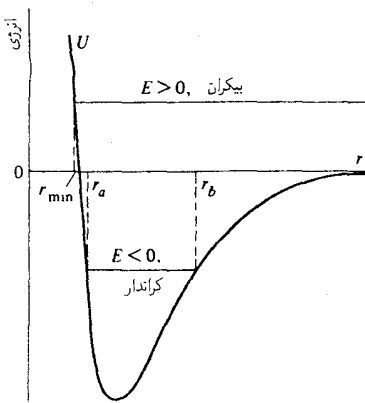
این نمودار به ما می‌گوید که انرژی جنبشی $K = E - U$ در مبدأ بزرگترین مقدار خود را دارد. وقتی که ذره در هر طرف از مبدأ دور می‌شود به وسیلهٔ فنر گند شده و در یکی از نقاط بازگشت x_1 و x_2 به حالت کاملاً سکون درمی‌آید. سپس این ذره به طرف مبدأ حرکت می‌کند در حالی که انرژی جنبشی آن زیاد می‌شود و این دور تکرار می‌شود.

نوشانگر هماهنگ مثال خوبی از حرکت کراندار است. وقتی که E افزایش می‌یابد، نقاط بازگشت بیشتر و بیشتر از هم دور می‌شوند، ولی ذره هرگز نمی‌تواند آزادانه دور شود. اگر E کاهش پیدا کند، دامنهٔ حرکت هم کاهش می‌یابد، تا اینکه سرانجام با $E = 0$ ذره در $x = 0$ به حالت سکون درآید.

اگر افزایش U بر حسب مسافت نامتناهی نباشد، وضعیت کاملاً متفاوتی اتفاق می‌افتد. برای مثال حالتی را در نظر بگیرید که ذره مقید به یک خط شعاعی است و تحت اثر نیروی دافعه $A\hat{r}/r^2$ (قانون عکس مجذور فاصله) نیز قرار دارد. در اینجا $U = A/r$ و A مثبت است. همانطوری که نمودار ۴-۲۷ نشان می‌دهد r_{min} کوچکترین فاصله است، ولی برای مقادیر بزرگ r حرکت کراندار نیست، زیرا U با افزایش فاصله کاهش می‌یابد. اگر ذره به طرف مبدأ شلیک شود بتدریج انرژی جنبشی خود را از دست می‌دهد، تا اینکه در یک لحظه در r_{min} به حالت سکون درمی‌آید. آنگاه حرکت معکوس می‌شود و ذره به طرف بینهایت حرکت می‌کند. سرعتهای اولیه و ثانویه در هر نقطه‌ای همانند یکدیگرند؛ یعنی برخورد صرفاً سرعت را معکوس می‌کند.

برای برخی از پتانسیلها، بسته به انرژی آنها، حرکتهای کراندار یا بیکران می‌تواند اتفاق بیفتد. برای مثال، برهم‌کنش بین دو اتم را در نظر بگیرید (شکل ۴-۲۸). در فاصله‌های جدایی زیاد، اتمها یکدیگر را با نیروی واندروالس ضعیفی جذب می‌کنند. که مطابق با $1/r^7$ تغییر می‌کند. وقتی که اتمها به هم نزدیک می‌شوند ابرهای الکترونی شروع به همپوشی می‌کنند که این امر منجر به تولید نیروهای قوی می‌شود. در این ناحیهٔ میانی نیرو بسته به جزئیات آرایش الکترونی از نوع جاذبه یا دافعه است. اگر نیرو جاذبه باشد، انرژی پتانسیل با کم شدن r کاهش می‌یابد. در فواصل خیلی کوتاه اتمها همواره یکدیگر را قویاً دفع می‌کنند، به طوری که U با کوچک شدن r ، سرعت افزایش می‌یابد.

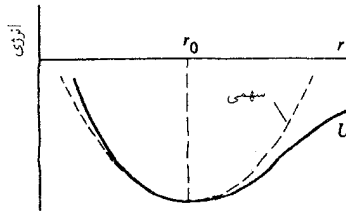
در شکل ۴-۲۸ نمودار انرژی یک سیستم دو اتمی با نیروی جاذبه نشان داده شده است. برای انرژی مثبت $E > 0$ حرکت کراندار نیست، و اتمها آزادند که از یکدیگر دور شوند. همانطوری که این نمودار



شکل ۴-۲۸

نشان می‌دهد فاصلهٔ بیشترین نزدیکی r_{\min} با افزایش E چندان تغییر نمی‌کند. شیب تند منحنی انرژی پتانسیل در مقادیر کوچک r بدین معنی است که اتمها مانند کره‌های سخت رفتار می‌کنند r_{\min} نسبت به انرژی برخورد حساس نیست.

اما اگر E منفی باشد، وضعیت کاملاً متفاوت است. آنگاه حرکت در هر دو حالت بزرگ و کوچک بودن فاصلهٔ جدایی کراندار می‌شود؛ یعنی اتمها هرگز از فاصلهٔ r_a به هم نزدیکتر یا از فاصلهٔ r_b دورتر نخواهند شد. البته یک سیستم دواتمی محدود، همان مولکول است و شکل نمودار انرژی یک مولکول دواتمی را نشان می‌دهد. اگر دواتم با انرژی مثبت باهم برخورد کنند نمی‌توانند تشکیل یک مولکول بدهند، مگر اینکه انرژیشان را به طریقی از دست بدهند تا E منفی شود. به طوری کلی جسم سومی برای انتقال انرژی اضافی لازم است. گاهی این جسم سوم یک سطح است و به همین دلیل برای تسریع در بعضی واکنشها از کاتالیزور سطحی استفاده می‌شود. برای مثال، هیدروژن اتمی در حالت گازی کاملاً پایدار است هر چند که مولکول هیدروژن از پیوند محکمی برخوردار است. اما، اگر تکه‌ای از پلاتین را در هیدروژن فرو ببریم اتمها فوراً باهم متصل می‌شوند و تشکیل مولکول می‌دهند. توضیح اینکه اتمهای هیدروژن محکم به سطح پلاتین می‌چسبند، و اگر برخوردی بین دواتم در سطح اتفاق افتد، انرژی اضافی به سطح منتقل می‌شود و مولکول که چندان پیوندی با سطح ندارد، آزاد می‌شود. انرژی داده شده به سطح به قدری زیاد است که پلاتین به روشنی می‌درخشد. اتم سومی هم می‌تواند انرژی اضافی را کسب کند. اما برای این کار دواتم باید وقتی برخورد کنند که اتم سومی در نزدیکی آنها باشد. در فشار پایین این رویداد بندرت پیش می‌آید ولی در فشارهای بالاتر اهمیت فزاینده‌ای می‌یابد. احتمال دیگر این است که دواتم با گسیل نور، انرژی از دست بدهند. اما، این عمل هم خیلی بندرت روی می‌دهد و لذا معمولاً چندان اهمیتی ندارد.



شکل ۴-۲۹

۴-۱۰ نوسانهای کوچک در سیستم مقید

پتانسیل بین اتمی که در بخش قبل بحث کردیم، شکل مهمی از همه سیستمهای مقید را نشان می دهد؛ یعنی در حالت تعادل انرژی پتانسیل دارای کمینه مقدار خود است. در نتیجه تقریباً همه سیستمهای مقید در صورتی که آشفتگی کوچکی در حالت تعادل آنها به وجود آید، مانند یک نوسانگر هماهنگ نوسان می کنند. این امر، با توجه به نمودار انرژی در نزدیکی کمینه ظاهر می شود (شکل ۴-۲۹). U_- دارای شکل سهمیوار پتانسیل یک نوسانگر هماهنگ است. اگر انرژی کل به قدری پایین باشد که حرکت مقید به ناحیه تقریباً سهمیوار منحنی باشد، مطابق شکل سیستم باید مانند یک نوسانگر هماهنگ رفتار کند. اثبات این مطلب مشکل نیست.

همانطوری که در یادداشت ۱-۱ بحث شد، هر تابع "خوش رفتار" $f(x)$ را می توان به صورت سری تیلور حول یک نقطه x_0 بسط داد. از این رو

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(x_0) + \dots$$

اگر $U(r)$ را حول r_0 یعنی مکان پتانسیل کمینه بسط دهیم داریم

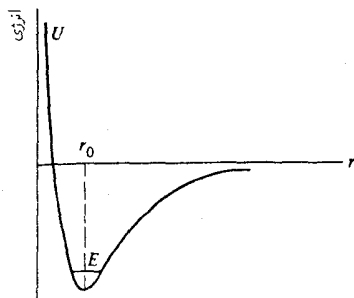
$$U(r) - U(r_0) + (r - r_0) \left. \frac{dU}{dr} \right|_{r_0} + \frac{1}{2}(r - r_0)^2 \left. \frac{d^2U}{dr^2} \right|_{r_0} + \dots$$

اما، چون U در r_0 کمینه است، $\left. \frac{dU}{dr} \right|_{r_0} = 0$ می شود. به علاوه، در جابه جاییهای به اندازه کافی کوچک می توانیم از جمله سوم به بعد در این سری صرف نظر کنیم. در این صورت داریم

$$U(r) = U(r_0) + \frac{1}{2}(r - r_0)^2 \left. \frac{d^2U}{dr^2} \right|_{r_0}$$

که این انرژی پتانسیل یک نوسانگر هماهنگ است

$$U(x) = \text{const.} + \frac{kx^2}{2}$$



شکل ۳۰-۴

که در آن ثابت مؤثر فنر را به صورت زیر می توان مشخص کرد

$$k = \left. \frac{d^2 U}{dr^2} \right|_{r_0} \quad (23-4)$$

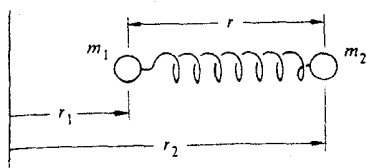
مثال ۱۵-۴ ارتعاشهای مولکولی: فرض کنید دو اتم به جرمهای m_1 و m_2 در مولکولی با انرژی خیلی پایین به هم متصل اند و فاصله جدایی آنها همواره نزدیک به مقدار تعادل r_0 است (شکل ۳۰-۴). با تقریب سهمی، ثابت مؤثر فنر برابر $k = (d^2 U / dr^2)|_{r_0}$ است. بسامد ارتعاش مولکول را چگونه می توانیم پیدا کنیم؟

فرض کنید دو اتم مطابق شکل ۳۱-۴ توسط فنری که طول در حال تعادل آن r_0 و ثابت آن k است با هم متصل اند. معادلات حرکت چنین اند

$$m_1 \ddot{r}_1 = k(r - r_0)$$

$$m_2 \ddot{r}_2 = -k(r - r_0)$$

که در آن $r = r_2 - r_1$ برابر فاصله جدایی لحظه ای اتمهاست. با تقسیم معادله اول بر m_1 و معادله دوم بر m_2 و سپس تفریق آنها از یکدیگر می توانیم معادله حرکت را برای r به دست آوریم. نتیجه چنین است



شکل ۳۱-۴

$$\ddot{r}_2 - \ddot{r}_1 = \ddot{r} = -k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) (r - r_0)$$

یا

$$\ddot{r} = -\frac{k}{\mu} (r - r_0)$$

که در آن $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ است. μ دارای بعد جرم است و جرم کاهیده نامیده می‌شود.

چنانچه رابطه بالا را با نوسانگر هماهنگ $\ddot{x} = -(k/m)(x - x_0)$ که بسامد نوسان آن برابر با

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

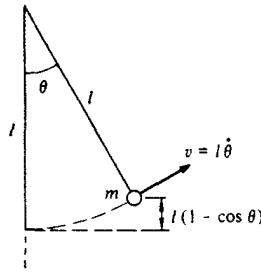
است مقایسه کنیم، بسامد ارتعاش مولکولی چنین می‌شود

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{k}{\mu}} \\ &= \sqrt{\left. \frac{d^2 U}{dr^2} \right|_{r_0} \frac{1}{\mu}} \end{aligned}$$

این حرکت ارتعاشی را که صفت مشخصه مولکولهاست می‌توان از نور تابش شده توسط مولکول مشخص کرد. بسامدهای ارتعاشی نمونه، نزدیک به فروسرخ (3×10^{13} Hz) جای دارند و با اندازه‌گیری بسامد می‌توانیم مقدار $d^2 U / dr^2$ را در انرژی پتانسیل کمینه پیدا کنیم. برای مولکول HCl ثابت فر مؤثر برابر $(31 \text{ lb/in}) = 500 \text{ n/m} = 5 \times 10^5 \text{ dyn/cm}$ است. برای دامنه بزرگ، جملات با درجه‌های بالاتر در سری تیلور شروع به ایفای نقش می‌کنند و این امر نوسانگر را از رفتار مطلوب خود منحرف می‌سازد. بدین ترتیب این "ناهماهنگیهای" کوچک جزئیات بیشتری از شکل منحنی انرژی پتانسیل را به دست می‌دهند.

از آنجا که همه سیستمهای مقید در حالت تعادل دارای انرژی پتانسیل کمینه هستند، به طور طبیعی انتظار داریم که همه سیستمهای مقید برای جابه‌جاییهای کوچک مانند نوسانگرهای هماهنگ رفتار کنند (مگر آنکه ناحیه کمینه به قدری تخت باشد که مشتق دوم هم در آنجا صفر شود). بنابراین تقریب نوسانگر هماهنگ به نحو گسترده‌ای کاربرد پیدا می‌کند به طوری که حرکت‌های داخلی هسته را هم شامل می‌شود. وقتی که انرژی جنبشی و پتانسیل یک سیستم مقید را مشخص کردیم، بسامد کوچک نوسانها را می‌توانیم با تجسس پیدا کنیم. برای حالت ساده یک فنر و جرم متصل به آن داریم

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} k x^2 \\ K &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \end{aligned}$$



شکل ۴-۳۲

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

اما در اغلب مسائل، طبیعی است که انرژیها را برحسب متغیری غیر از جابه‌جایی خطی بنویسیم. برای مثال انرژیهای یک آونگ چنین‌اند (شکل ۴-۳۲)

$$U = mgl(1 - \cos\theta) \approx \frac{1}{2}mgl\theta^2$$

$$K = \frac{1}{2}ml^2 \dot{\theta}^2$$

به‌طور کلی‌تر، انرژیها ممکن است به‌شکل زیر باشند

$$U = \frac{1}{2}Aq^2 + \text{const.}$$

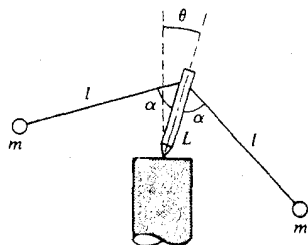
$$K = \frac{1}{2}B\dot{q}^2 \quad (24-4)$$

که در آن q نشانگر متغیر مناسب مسئله است. در مقایسه با جرم واقع روی فنر، انتظار داریم که بسامد حرکت نوسانگر چنین شود

$$\omega = \sqrt{\frac{A}{B}} \quad (25-4)$$

برای اینکه به‌وضوح نشان دهیم سیستمی که انرژی آن به‌شکل معادلات ۴-۲۴ است به‌صورت هماهنگ با بسامد $\sqrt{A/B}$ نوسان می‌کند باید توجه کنیم که انرژی کل سیستم چنین است

$$\begin{aligned} E &= K + U \\ &= \frac{1}{2}B\dot{q}^2 + \frac{1}{2}Aq^2 + \text{const.} \end{aligned}$$



شکل ۳۳-۴

چون سیستم پایستار است، E مقدار ثابتی است. با دیفرانسیل‌گیری معادله انرژی نسبت به زمان نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= B \dot{q} \ddot{q} + Aq \dot{q} \\ &= 0 \end{aligned}$$

یا

$$\ddot{q} + \frac{A}{B} q = 0$$

بنابراین q حرکت هماهنگی به بسامد $\sqrt{A/B}$ خواهد داشت.

مثال ۱۶-۴ نوسانهای کوچک: در مثال ۱۴-۴ معیار پایداری یک اسباب‌بازی تی‌تر را به دست آوردیم. در این مثال زمان تناوب نوسان اسباب‌بازی را وقتی که از یک سو به سوی دیگر در نوسان است، پیدا خواهیم کرد (شکل ۳۳-۴).

به موجب مثال ۱۴-۴، انرژی پتانسیل این اسباب‌بازی چنین است

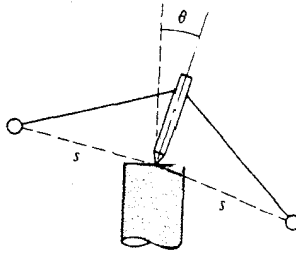
$$U(\theta) = -A \cos \theta$$

که در آن $A = 2mg(l \cos \alpha - L)$ است. برای پایداری باید $A > 0$ باشد، اگر $U(\theta)$ را حول $\theta = 0$ بسط دهیم، داریم

$$U(\theta) = -A \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \dots \right)$$

از آنجا که $\cos \theta = 1 - \theta^2/2 + \dots$ است، خواهیم داشت

$$U(\theta) = -A + \frac{1}{2} A \theta^2$$



شکل ۴-۳۴

برای پیدا کردن انرژی جنبشی، فرض کنید s مطابق شکل ۴-۳۴ فاصله هر جرم تا نقطه اتکا باشد. اگر اسباب بازی با سرعت زاویه ای θ حرکت کند، سرعت هر جرم $s\theta$ خواهد بود و انرژی جنبشی کل چنین می شود

$$K = \frac{1}{2} (2m) s^2 \theta^2$$

$$= \frac{1}{2} B \theta^2$$

که در آن $B = 2ms^2$ است.

از این رو بسامد نوسان چنین است

$$\omega = \sqrt{\frac{A}{B}}$$

$$= \sqrt{\frac{g(l \cos \alpha - L)}{s^2}}$$
(۱)

در مثال ۴-۱۴ پیدا کردیم که شرط پایداری چنین است $l \cos \alpha - L > 0$ معادله ۱ نشان می دهد که وقتی $l \cos \alpha - L$ به سمت صفر میل می کند، ω هم به سمت صفر میل می کند و زمان تناوب نوسان نامتناهی می شود. در حد $l \cos \alpha - L = 0$ دستگاه در تعادل بی تفاوت است؛ و اگر $l \cos \alpha - L < 0$ باشد، دستگاه به صورت ناپایدار درمی آید. از این رو، نوسان کم-بسامد مربوط به دستگاهی است که در نزدیکی آستانه پایداری عمل می کند. این یکی از خواص کلی دستگاههای پایدار است، زیرا یک نوسان کم-بسامد مترادف است با یک نیروی بازگرداننده ضعیف. برای مثال، یک کشتی که توسط امواج دریا به تلاطم درمی آید حول وضع تعادل خود نوسان می کند. برای راحتی زمان تناوب تلاطم باید طولانی باشد. برای این کار باید بدنه کشتی را طوری طرح کرد که گرانیگاه آن تا حد امکان بالا قرار

داشته باشد و در همان حال با پایداری آن هم سازگار شود. پایین آوردن گرانیگاه دستگاه را "مقاومتر" تلاطم و ناراحتی را بیشتر، و کشتی را به طور ذاتی پایدارتر می‌کند.

۴-۱۱ نیروهای ناپایستار

از آنجاکه نیروهای پایستار و انرژی پتانسیل در فیزیک دارای نقش مهمی هستند، در این فصل روی آنها تأکید زیادی کردیم. اما، در خیلی از فرایندهای فیزیکی نیروهای ناپایستار مانند اصطکاک وجود دارند. حال ببینیم قضیه کار-انرژی را چگونه می‌توان تعمیم داد تا شامل نیروهای ناپایستار نیز بشود.

غالباً نیروهای پایستار و ناپایستار هر دو بر یک سیستم اثر می‌کنند. برای مثال، جسمی که در هوا سقوط می‌کند تحت تأثیر نیروی پایستار گرانش و نیروی ناپایستار مقاومت هوا قرار دارد. نیروی کل \mathbf{F} را می‌توانیم چنین بنویسیم

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{پایستار}} + \mathbf{F}_{\text{ناپایستار}}$$

$\mathbf{F}_{\text{پایستار}}$ و $\mathbf{F}_{\text{ناپایستار}}$ به ترتیب نیروهای پایستار و ناپایستار هستند. از آنجا که قضیه کار-انرژی صرفنظر از پایستار بودن یا نبودن نیروها صادق است، کل کار انجام شده توسط \mathbf{F} وقتی که ذره از a تا b حرکت می‌کند چنین است

$$\begin{aligned} W_{ba}^{\text{کل}} &= \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_a^b \mathbf{F}_{\text{ناپایستار}} \cdot d\mathbf{r} \\ &= -U_b + U_a + W_{ba}^{\text{ناپایستار}} \end{aligned}$$

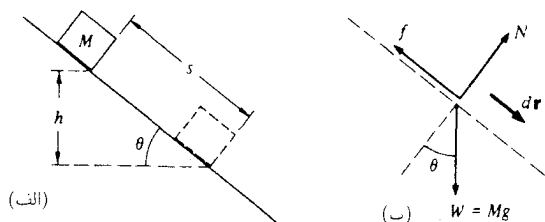
که U انرژی پتانسیل مربوط به نیروی پایستار و $W_{ba}^{\text{ناپایستار}}$ کار انجام شده توسط نیروی ناپایستار است. قضیه کار-انرژی $W_{ba}^{\text{کل}} = K_b - K_a$ اینک به شکل زیر درمی‌آید

$$-U_b + U_a + W_{ba}^{\text{ناپایستار}} = K_b - K_a$$

یا

$$K_b + U_b - (K_a + U_a) = W_{ba}^{\text{ناپایستار}} \quad (۴-۲۶)$$

اگر انرژی کل مکانیکی را به‌روال گذشته طبق رابطه $E = K + U$ تعریف کنیم، آنگاه E دیگر مقدار ثابتی نیست بلکه بستگی به حالت سیستم دارد. داریم



شکل ۳۵-۴

$$E_b - E_a = W_{ba}^{\text{ناپایستار}} \quad (۲۷-۴)$$

این نتیجه تعمیمی است از پایداری انرژی مکانیکی که در بخش ۷-۴ بحث کردیم. اگر نیروهای ناپایستار کار انجام ندهند، $E_b = E_a$ می شود و انرژی مکانیکی پایسته است. اما این یک حالت خاص است زیرا نیروهای ناپایستار اغلب وجود دارند. با وجود این روشهای انرژی بازم مفید خواهد بود، ولی باید مواظب باشیم که کار انجام شده توسط نیروهای ناپایستار $W_{ba}^{\text{ناپایستار}}$ را حذف نکنیم. در اینجا مثالی در این زمینه می آوریم.

مثال ۱۷-۴ لغزیدن یک قطعه مکعبی روی سطح شیبدار: یک قطعه مکعبی به جرم M روی سطحی با زاویه θ (نسبت به سطح افق) به پایین می لغزد (شکل ۳۵-۴ الف). می خواهیم سرعت قطعه را بعد از پایین آمدن از ارتفاع h به دست آوریم. فرض می کنیم که قطعه از حالت سکون شروع به لغزیدن می کند و ضریب اصطکاک μ مقدار ثابتی است (شکل ۳۵-۴ ب).

در ابتدا قطعه در ارتفاع h به حالت سکون قرار دارد و نهایتاً در ارتفاع 0 (صفر) با سرعت v در حرکت خواهد بود. از این رو داریم

$$\begin{aligned} U_a &= Mgh & U_b &= 0 \\ K_a &= 0 & K_b &= \frac{1}{2}Mv^2 \\ E_a &= Mgh & E_b &= \frac{1}{2}Mv^2 \end{aligned}$$

نیروی ناپایستار برابر $f = \mu N = \mu Mg \cos \theta$ است. بنابراین کار ناپایستار چنین است

$$W_{ba}^{\text{ناپایستار}} = \int_a^b \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = -fs$$

که در آن s مسافتی است که قطعه می لغزد. علامت منفی از آنجا ناشی می شود که جهت \mathbf{f} همواره مخالف جابه جایی است، به طوری که داریم $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = -f dr$. با استفاده از رابطه $s = h / \sin \theta$ داریم

$$\begin{aligned} W_{ba}^{\text{ناپایستار}} &= -\mu Mg \cos \theta \frac{h}{\sin \theta} \\ &= -\mu \cot \theta Mgh \end{aligned}$$

معادله انرژی ناپایستار $E_b - E_a = W_{ba}^{\text{ناپایستار}}$ چنین می شود

$$\frac{1}{2} Mv^2 - Mgh = -\mu \cot \theta Mgh$$

که نتیجه می شود

$$v = [2(1 - \mu \cot \theta)gh]^{\frac{1}{2}}$$

از آنجا که همه نیروهای وارد بر قطعه ثابت اند، با به کار بردن این نتایج در حرکت با شتاب ثابت به آسانی می توانیم رابطه ای برای v به دست آوریم؛ روش انرژی در اینجا چیزی بیش از یک عمل خلاصه کردن نیست. توانایی روش انرژی در تعمیم آن نهفته است. برای مثال، فرض کنید که ضریب اصطکاک روی سطح طوری تغییر کند که نیروی اصطکاک به صورت $f = \mu(x)Mg \cos \theta$ باشد. کار انجام شده توسط اصطکاک چنین است

$$W_{ba}^{\text{ناپایستار}} = -Mg \cos \theta \int_a^b \mu(x) dx$$

و سرعت نهایی به سهولت پیدا می شود. برعکس، برای پیدا کردن سرعت از راه انتگرال گیری شتاب نسبت به زمان راه چندان ساده ای وجود ندارد. ■

۱۲-۴ قانون عام پایستگی انرژی

تا آنجا که اطلاع داریم، نیروهای اساسی طبیعت مانند نیروی گرانش و نیروهای برهم کنش الکتریکی و مغناطیسی، پایستارند. این امر معمایی به وجود می آورد که اگر نیروهای بنیادی پایستار باشند، چگونه نیروهای ناپایستار می توانند به وجود آیند؟ جواب این مسئله در دیدگاهی که به وسیله آن سیستم فیزیکی را توصیف می کنیم و نیز مفهوم انرژی را گسترش می دهیم، نهفته است.

اکنون اصطکاک را که آشنا ترین نیروی ناپایستار است در نظر بگیرید. هنگام لغزیدن قطعه روی میز انرژی مکانیکی توسط اصطکاک از دست می رود، ولی اتفاق دیگری هم می افتد: قطعه و میز گرمتر می شوند. اما در گسترش مفهوم انرژی هیچ اشاره ای به دما نشده است؛ یعنی قطعه به جرم M که با سرعت v حرکت می کند انرژی جنبشی آن $\frac{1}{2}Mv^2$ است صرف نظر از اینکه این قطعه گرم یا سرد باشد. حقیقت این است که گرم شدن قطعه لغزنده روی یک میز در نتیجه گیری ما در مورد اتلاف انرژی

مکانیکی تأثیری نمی‌گذارد. با وجود این، اگر به دقت نگاه کنیم متوجه می‌شویم که گرم شدن سیستم با انرژی تلف شده رابطه معینی دارد. جیمز پرسکات ژول فیزیکدان انگلیسی اولین کسی بود که فهمید گرما خود شکلی از انرژی است. ژول با یک رشته آزمایشهای دقیق گرم کردن آب توسط چرخ پره‌داری که با سقوط یک وزنه به حرکت درمی‌آمد نشان داد که از دست رفتن انرژی در اثر اصطکاک، با ظاهر شدن مقداری گرمای معادل همراه است. ژول نتیجه گرفت که گرما باید شکلی از انرژی باشد و مجموع انرژی مکانیکی و انرژی گرمایی سیستم، پایسته خواهد ماند.

اکنون تصویری که از انرژی گرمایی داریم دقیقتر از آن چیزی است که برای ژول فراهم بود. می‌دانیم که جامدات مرکب از اتمهایی هستند که توسط نیروهای بین‌اتمی قوی به هم اتصال دارند، هراتم می‌تواند حول وضعیت تعادل خود نوسان کند و دارای انرژی مکانیکی به شکل انرژیهای جنبشی و پتانسیل باشد. با گرم کردن جسم جامد دامنه نوسان افزایش می‌یابد و انرژی متوسط هراتم بیشتر می‌شود. انرژی گرمایی یک جسم جامد همان انرژی مکانیکی ارتعاشهای کاتوره‌ای اتمهاست.

بین انرژی مکانیکی در سطح اتمی و در سطح وقایع روزانه یک اختلاف اساسی وجود دارد. ارتعاشهای اتمی در جامد به صورت کاتوره‌ای است؛ یعنی در هر لحظه اتمهایی وجود دارند که در کلیه جهتهای ممکن در حرکت‌اند، و مرکز جرم قطعه به‌طور متوسط هیچ تمایلی به حرکت ندارد. انرژی جنبشی این قطعه نشانگر یک حرکت جمعی است؛ یعنی وقتی که این قطعه با سرعت v حرکت می‌کند هراتم به‌طور متوسط دارای همان سرعت v است.

انرژی مکانیکی از طریق اصطکاک تبدیل به انرژی گرمایی می‌شود، اما فرایند معکوس آن هرگز مشاهده نشده است. کسی هرگز ندیده است که قطعه گرمی که به حالت سکون روی میز قرار دارد ناگهان سرد شود و شروع به حرکت کند، گرچه این عمل پایستگی انرژی را نقض نمی‌کند. دلیل این امر این است که حرکت جمعی از بین می‌رود و اتمها در نتیجه برخورد با شدت بیشتری به ارتعاش درمی‌آیند و انرژی جنبشی به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود. فرایند معکوس این عمل یعنی تبدیل ناگهانی حرکت کاتوره‌ای اتمها به حرکت جمعی آن چنان نامحتمل است که عملاً در هیچ موردی چنین چیزی اتفاق نمی‌افتد. به همین دلیل است که می‌توانیم بین انرژی مکانیکی و انرژی گرمایی یک جسم تمایز قائل شویم، گرچه این تمایز در مقیاس اتمی از بین می‌رود.

امروزه قبول می‌کنیم که علاوه بر انرژی مکانیکی و انرژی گرمایی بسیاری از اشکال دیگر انرژی نیز وجود دارند. که عبارت‌اند از، انرژی تابشی نور، انرژی نیروهای هسته‌ای، و همانطور که در فصل ۱۳ بحث خواهیم کرد، انرژی وابسته به جرم. بدیهی است که مفهوم انرژی از معنی ساده انرژی جنبشی و پتانسیل

یک سیستم مکانیکی خیلی گسترده تر است. ما معتقدیم که اگر همه اشکال انرژی را به حساب آوریم، انرژی کل یک سیستم پایسته است.

۴-۱۳ توان

توان آهنگ انجام کار است. اگر نیروی \mathbf{F} بر جسمی اثر کند که باعث جابه جایی $d\mathbf{r}$ جسم شود کار انجام شده برابر است با $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ و توان مصرف شده به وسیله نیرو چنین است

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

یکای توان در دستگاه SI، وات (W) است:

$$1W = 1J/s$$

در دستگاه cgs یکای توان برابر $10^{-7}W = \text{erg/s}$ است که اسم خاصی ندارد. یکای توان در دستگاه انگلیسی اسب بخار (hp) است، اسب بخار، اغلب به صورت $550 \text{ ft}\cdot\text{lb/s}$ تعریف می شود، اما گاهی به تعریفهایی که اندکی متفاوت اند نیز برمی خوریم. رابطه بین اسب بخار و وات چنین است $1 \text{ hp} \approx 746W$. این عدد برای سازندگان ماشینهای الکتریکی ناراحت کننده است، زیرا توان متوسط یک باتری اتومبیل معمولی تنها در حدود 350 وات است.

مقدار توان یک موتور، شاخص خوبی از قدرت عمل آن است. برای مثال، یک موتور کوچک با دنده های کاهنده می تواند یک جرم بزرگ M را به هر ارتفاعی بالا ببرد، اما این فرایند زمان زیادی طول می کشد؛ یعنی توان متوسط مصرف شده آن پایین است. توان لازم برابر Mgv است، که در آن v سرعت وزنه در حرکت به طرف بالاست. برای اینکه جرم را با سرعت بالا ببریم، توان موتور باید بزرگ باشد.

انسان در شرایط مناسب می تواند توانی بین $1/2$ تا 1 اسب بخار برای مدت تقریباً 30 ثانیه، مثلاً هنگام دویدن از پله ها به طرف بالا، تولید کند. اما یک مرد قوی در یک دوره 8 ساعته، می تواند فقط با آهنگ 2 اسب بخار (حدود 150 وات)، کار کند. در این صورت کل کار انجام شده در 8 ساعت برابر است با $1000 \text{ kcal} \approx 4.3 \times 10^6 \text{ J} = (3600)(8)(150)$ ، کیلوکالری تقریباً برابر است با 4200 ژول، که غالباً برای نشان دادن انرژی حاصل از مواد غذایی مورد استفاده قرار می گیرد. هر شخص فعال معمولی روزانه بین 2000 تا 3000 کیلوکالری غذا احتیاج دارد. (در امور مربوط به رژیم غذایی کیلوکالری را گاهی کالری "بزرگ" می نامند ولی غالباً فقط از کلمه کالری استفاده می کنند.)

درکشورهای پیشرفته صنعتی، تولید توان سرانه، برای هر شخص برابر چندین هزاروات است (6000)

وات در آمریکا و ۳۰۰ وات در هند). اصولاً انرژی از سوزاندن سوختهای فسیلی به دست می‌آید که در حال حاضر منبع عمده انرژی است. در اصل می‌توانیم از انرژی خورشیدی استفاده کنیم. وقتی که خورشید در بالای سر است تقریباً 1000 W/m^2 به سطح زمین انرژی می‌دهد. متأسفانه پیل‌های خورشیدی کنونی گران و بدون کارایی هستند، و هیچ راه اقتصادی برای ذخیره انرژی به منظور استفاده بعدی وجود ندارد.

۴-۱۴ قوانین پایستگی و برخورد ذرات

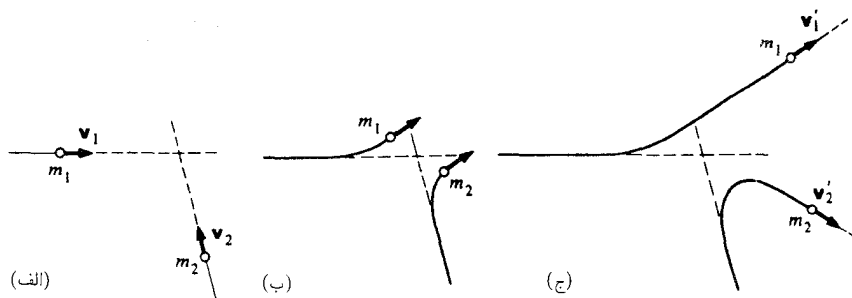
بیشتر شناخت ما از اتمها، هسته‌ها، و ذرات بنیادی از آزمایشهای پراکندگی نتیجه شده است. شاید شاخصترین آنها آزمایشی بود که در سال ۱۹۱۱ به وسیلهٔ ارنست رادرفورد انجام شد، که در آن ذرات آلفا (اتمهای هلیوم دوبار یونیده) پس از پراکندگی، از اتمهای یک ورقهٔ نازک طلا، مورد مطالعه قرار گرفت. بررسی تغییر تعداد ذرات آلفای پراکنده شده با زاویهٔ انحراف، رادرفورد را به ساختمان هسته‌ای اتم هدایت کرد. تکنیکهای فیزیکی تجربی نسبت به زمان رادرفورد پیشرفت قابل ملاحظه‌ای کرده‌اند. به نظر می‌رسد که شتابدهندهٔ ذرات با انرژی زیاد به طول چند کیلومتر با وسایل میز آزمایشگاه زمان رادرفورد چندان وجه مشترکی نداشته باشد، گویانکه هدف اصلی آنها یکی است. این هدف، همان کشف نیروهای برهم‌کنشی بین ذرات با استفاده از چگونگی پراکنده شدن آنهاست.

پیدا کردن نیروهای برهم‌کنشی با استفاده از آزمایشهای پراکندگی کار دشواری است. به علاوه، تشریح مفصل برخوردها در مقیاس اتمی عموماً ما را به استفاده از مکانیک کوانتومی وادار می‌سازد. با وجود این، قیودی در حرکت موجود است که از قوانین پایستگی تکانه و انرژی ناشی می‌شوند، و این قوانین به اندازه‌ای محکم‌اند که به تنهایی می‌توانند بسیاری از ویژگیهای پراکندگی را توجیه کنند. از آنجاکه قوانین پایستگی را می‌توان بدون اطلاع از نوع برهم‌کنشها به کار برد، این قوانین نقش مؤثری در تحلیل پدیده‌های برخورد بازی می‌کنند.

در این بخش خواهیم دید که چگونه از قوانین پایستگی تکانه و انرژی در آزمایشهای پراکندگی استفاده می‌شود. این بحث بیشتر به منظور تشریح نظراتی است که قبلاً معرفی شده‌اند، بنابراین اصول فیزیکی جدیدی در بر ندارد.

برخورد و قوانین پایستگی

شکل‌های ۴-۳۶ سه مرحله را در جریان برخورد دوزره نشان می‌دهند. (الف) در مرحلهٔ قبل از برخورد هریک از دوزره عملاً آزادند، زیرا نیروهای برهم‌کنش عموماً در فواصل خیلی کوچک اهمیت پیدا می‌کنند. با نزدیک شدن ذرات به یکدیگر، در مرحلهٔ (ب) تکانه و انرژی هریک از دوزره در نتیجهٔ نیروهای



شکل ۴-۳۶

برهم‌کنشی تغییر می‌کنند. و بالاخره مدتی پس از برخورد در مرحله (ج) ذرات دوباره آزاد می‌شوند، و در امتداد خطوط راست با جهت و سرعت جدیدی حرکت می‌کنند. هنگام آزمایش، معمولاً سرعت‌های اولیه v_1 و v_2 معلوم‌اند و غالباً یکی از ذرات به‌عنوان هدف در حالت سکون است و به‌وسیله ذرات با انرژی معلومی بمباران می‌شود، که در این‌گونه موارد آزمایش باید شامل اندازه‌گیری سرعت‌های نهایی v'_1 و v'_2 با استفاده از آشکارسازهای مناسب باشد.

از آنجا که نیروهای خارجی معمولاً ناچیزند، تکانه کل پایسته است، و داریم

$$P_i = P_f \quad (۲۸-۴)$$

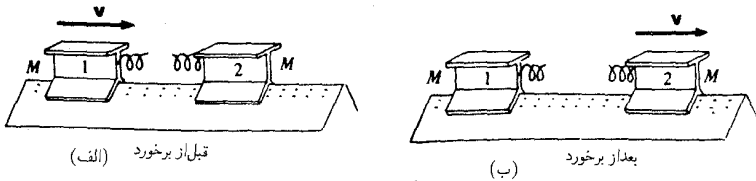
در برخورد دو جسم رابطه فوق به‌صورت زیر درمی‌آید

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (۲۹-۴)$$

معادله برداری ۲۹-۴ معادل است با سه معادله نرده‌ای. اما با توجه به مؤلفه‌های برداری v'_1 و v'_2 ، شش مجهول خواهیم داشت. معادله انرژی رابطه‌ای دیگر بین این سرعتها به‌دست می‌دهد که در ذیل نشان می‌دهیم.

برخوردهای کشسان و ناکشسان

اینک برخورد دو لغزنده با جرمهای مساوی را که به‌کمک فنرهای مارپیچ مناسب انجام می‌گیرد، در یک مسیر خط هوایی مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض می‌کنیم در آغاز لغزنده (۱) همانطوری که در شکل ۴-۳۷ (الف) نشان داده شده دارای سرعت v و لغزنده (۲) در حال سکون باشد. بعد از برخورد، لغزنده (۱) در حال سکون و لغزنده (۲) با سرعت v به طرف راست حرکت می‌کند (شکل ۴-۳۷ ب). بدیهی است که کل تکانه پایسته است و انرژی جنبشی کل $Mv^2/2$ قبل و بعد از برخورد یکسان است.



شکل ۴-۳۷

برخوردی که در آن انرژی جنبشی کل تغییر نکند، برخورد کشسان نامیده می‌شود. همچنین برخورد کشسان، برخوردی است که در آن نیروهای برهم‌کنش پایستار باشند، مانند فنر در مثال قبل. به‌عنوان آزمایش دوم، در دو لغزنده مثال قبلی قطعاتی از ماده چسبناک را جایگزین فنرها می‌کنیم. فرض می‌کنیم لغزنده ۲ در حالت سکون باشد (شکل ۴-۳۸ الف). بعد از برخورد دو لغزنده به یکدیگر می‌چسبند و با سرعت v' حرکت می‌کنند (شکل ۴-۳۸ ب). به‌موجب پایستگی تکانه داریم $Mv = 2Mv'$ ، بنابراین $v' = v/2$ است. انرژی جنبشی اولیه سیستم برابر است با $Mv^2/2$ ، ولی انرژی جنبشی نهایی آن برابر است با $Mv^2/4 = (2M)v'^2/2$. بدیهی است در این حالت انرژی جنبشی بعد از برخورد فقط برابر نصف انرژی جنبشی قبل از برخورد است. چون نیروهای برهم‌کنشی در این حالت ناپایستار بودند، انرژی جنبشی سیستم تغییر کرده است. قسمتی از انرژی حرکت مشترک دو لغزنده در طول برخورد به انرژی گرمایی کاتوره‌ای در ماده چسبناک تبدیل می‌شود. برخوردی که در آن انرژی جنبشی کل پایسته نباشد، برخورد ناکشسان نامیده می‌شود.

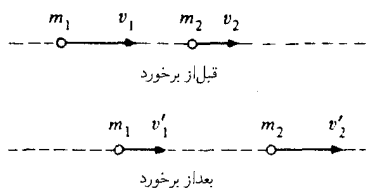
اگرچه انرژی کل یک سیستم در برخوردها همواره پایسته است، ولی قسمتی از انرژی جنبشی آن ممکن است به اشکال دیگر انرژی تبدیل شود. برای منظور کردن این مقدار، معادله پایستگی انرژی را در برخورد می‌توان چنین نوشت

$$K_i = K_f + Q \quad (۴-۳۰)$$

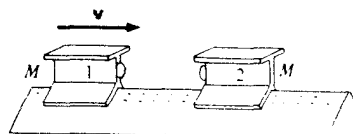
که در آن $Q = K_i - k_f$ مقدار انرژی جنبشی است که به شکل دیگر تبدیل شده است. در برخورد دو جسم، معادله ۴-۳۰ به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 + Q \quad (۴-۳۱)$$

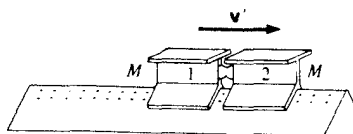
در اکثر برخوردهای روزانه انرژی جنبشی از بین می‌رود و Q مثبت است. چنانچه در برخوردی انرژی داخلی سیستم به انرژی جنبشی تبدیل شود، Q می‌تواند منفی شود. این‌گونه برخوردها را گاهی اوقات برخورد ابرکشسان می‌نامند، که در فیزیک اتمی و هسته‌ای دارای اهمیت بسزایی است. در کارهای



شکل ۴-۳۹



(الف) قبل از برخورد



(ب) بعد از برخورد

شکل ۴-۳۸

روزانه با برخوردهای ابرکشسان بندرت مواجه می‌شویم، به عنوان مثال می‌توان از برخورد دو تله‌موش آماده عمل نام برد.

برخوردهای یک‌بعدی

اگر برخوردی میان دو جسم داشته باشیم که در آن اجسام مقید به حرکت در روی یک خط راست باشند، قوانین پایستگی، یعنی معادلات ۴-۲۹ و ۴-۳۱ سرعت‌های نهایی را، صرف‌نظر از طبیعت نیروهای برهم‌کنش، به‌طور کامل معین می‌کنند. با سرعت‌هایی که در شکل ۴-۳۹ نشان داده شده، از قوانین پایستگی نتیجه می‌شود

تکانه:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (۴-۳۲ \text{ الف})$$

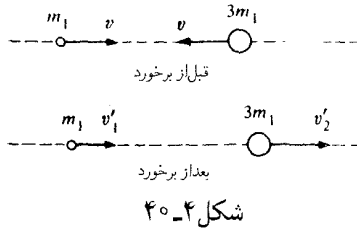
انرژی:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 + Q \quad (۴-۳۲ \text{ ب})$$

با حل این معادلات می‌توان v'_1 و v'_2 را برحسب m_1 و m_2 و v_1 و v_2 و Q به‌دست آورد. در مثال زیر نحوه عمل را نشان می‌دهیم.

مثال ۴-۱۸ برخورد کشسان دو گلوله: برخورد کشسان دو گلوله به جرم‌های m_1 و m_2 را، به‌طوری‌که $m_2 = 3m_1$ باشد مطابق شکل ۴-۴۰ در نظر بگیرید. با فرض اینکه گلوله‌ها قبل از برخورد دارای سرعت‌های مساوی و مختلف‌الجهت v باشند؛ سرعت‌های نهایی این گلوله‌ها را پیدا کنید.

از قوانین پایستگی نتیجه می‌شود



$$m_1 v - 3m_1 v = m_1 v'_1 + 3m_1 v'_2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} m_1 v^2 + \frac{1}{4} (3m_1) v^2 = \frac{1}{4} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{4} (3m_1) v'^2_2 \quad (2)$$

با استفاده از معادله ۱ می‌توان v را حذف کرد:

$$v'_1 = -2v + 3v'_2 \quad (3)$$

با جایگذاری v'_1 در معادله ۲ داریم

$$\begin{aligned} 4v^2 &= (-2v - 3v'_2)^2 + 3v'^2_2 \\ &= 4v^2 + 12vv'_2 + 12v'^2_2 \end{aligned}$$

یا

$$0 = 12vv'_2 + 12v'^2_2 \quad (4)$$

معادله ۴ دارای دو جواب است: $v'^2_2 = -v$ و $v'^2_2 = 0$. از معادله ۳ مقادیر متناظر v'_1 را می‌توان پیدا کرد

جواب ۱:

$$v'_1 = v$$

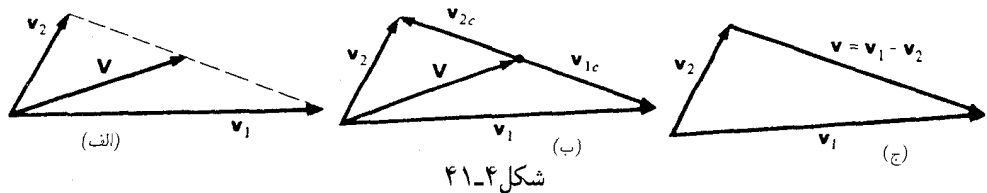
$$v'_2 = -v$$

جواب ۲:

$$v'_1 = -2v$$

$$v'_2 = 0$$

می‌بینیم که جواب ۱ بیانگر همان شرایط اولیه است. در این‌گونه مسائل همواره یک چنین جوابی به دست



می‌آوریم، زیرا سرعت‌های اولیه محققاً در معادلات قوانین پایستگی صدق می‌کنند.

جواب ۲، جالب توجه است. زیرا نشان می‌دهد که گلولهٔ m_1 بعد از برخورد، با دو برابر سرعت اولیه‌اش به طرف چپ حرکت می‌کند و گلولهٔ سنگین‌تر در حالت سکون باقی می‌ماند. ■

برخوردها و دستگاه مختصات مرکز جرم

معمولاً مسائل برخورد سه بعدی را در دستگاه مختصات مرکز جرم (C) می‌توان ساده‌تر از دستگاه مختصات آزمایشگاهی (L) بررسی کرد.

دو ذره با جرم‌های m_1 و m_2 و سرعت‌های v_1 و v_2 را در نظر بگیرید (شکل ۴-۴ الف). سرعت مرکز جرم برابر است با

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

همانطوری که در نمودار سرعت شکل ۴-۴ (ب) نشان داده شده است، V روی خط واصل v_1 و v_2 قرار می‌گیرد.

سرعت‌ها در دستگاه مختصات C عبارت است از

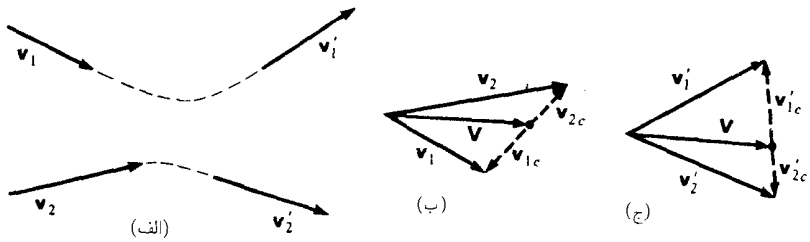
$$\begin{aligned} v_{1c} &= v_1 - V \\ &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} v_{2c} &= v_2 - V \\ &= \frac{-m_1}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2) \end{aligned}$$

v_{1c} و v_{2c} با یک مبدأ مشترک و در جهت مخالف یکدیگر روی بردار سرعت نسبی $v = v_1 - v_2$ قرار می‌گیرند (شکل ۴-۴ ج).

تکانه‌ها در دستگاه مختصات C عبارت‌اند از



شکل ۴-۴

$$\begin{aligned} p_{1c} &= m_1 v_{1c} \\ &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2) \\ &= \mu v \end{aligned}$$

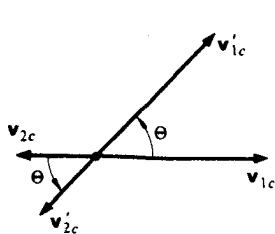
$$\begin{aligned} p_{2c} &= m_2 v_{2c} \\ &= \frac{-m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2) \\ &= -\mu v \end{aligned}$$

در اینجا $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ جرم کاهیده سیستم است که برای اولین بار در مثال ۴-۱۵ با آن برخورد کردیم. همانطوری که در فصل ۹ خواهیم دید، μ یکای طبیعی جرم برای سیستمی متشکل از دوزره است. همان گونه که انتظار می رود تکانه کل در دستگاه مختصات C برابر صفر است. تکانه کل در دستگاه L چنین است

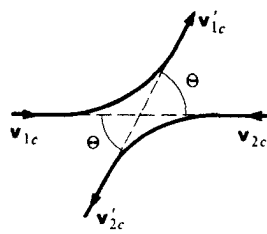
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V$$

و از آنجا که تکانه کل در هر برخوردی پایسته است، داریم $V = \text{const.}$ از این نتیجه می توانیم به منظور مشاهده بردارهای سرعت قبل و بعد از برخورد استفاده کنیم (شکلهای ۴-۴۲).

شکل ۴-۴۲ (الف) منحنیهای مسیر و سرعتهای دوزره برخوردکننده را نشان می دهد. در شکل ۴-۴۲ (ب) سرعتهای اولیه را در دستگاههای L و C نشان داده ایم. همه بردارها در یک صفحه قرار دارند. v_{1c} و v_{2c} باید در یک راستا و در جهت مخالف هم باشند زیرا تکانه کل در دستگاه C صفر است. بعد از برخورد طبق شکل ۴-۴۲ (ج) سرعتها در دستگاه C دوباره در یک راستا و در جهت مخالف هم قرار می گیرند. این شکل، سرعتهای نهایی را هم در دستگاه آزمایشگاه نشان می دهد. دقت کنید که صفحه شکل ۴-۴۲ (ج) الزاماً همان صفحه شکل ۴-۴۲ (الف) نیست. پیداست که روابط هندسی بین سرعتهای اولیه و نهایی در دستگاه L بسیار پیچیده است. خوشبختانه، در دستگاه C وضعیت



شکل ۴-۴۴



شکل ۴-۴۳

خیلی ساده تر است. سرعت‌های اولیه و نهایی در دستگاه C صفحه‌ای را مشخص می‌کنند که معروف به صفحه پراکندگی است. در این صفحه هر ذره به اندازه زاویه پراکندگی ثابت θ منحرف می‌شود. برای محاسبه θ ، نیروی برهم‌کنش باید معلوم باشد، و یا برعکس با اندازه‌گیری انحراف می‌توانیم درباره نیروی برهم‌کنش کسب اطلاع کنیم. اما، ما این بررسی را به تعویق می‌اندازیم و خیلی ساده فرض می‌کنیم که برهم‌کنش در دستگاه C باعث انحراف می‌شود.

اگر برخورد کشسان باشد، ساده‌سازی مهمی اتفاق می‌افتد. با به‌کار بردن پایستگی انرژی در دستگاه C نتیجه می‌شود که برای برخوردهای کشسان داریم (شکل ۴-۴۳)

$$\frac{1}{2}m_1v_{1c}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2c}^2 = \frac{1}{2}m_1v'_{1c}{}^2 + \frac{1}{2}m_2v'_{2c}{}^2$$

از آنجا که در دستگاه C ، تکانه برابر صفر است، داریم

$$m_1v_{1c} - m_2v_{2c} = 0$$

$$m_1v'_{1c} - m_2v'_{2c} = 0$$

با حذف v_{2c} و v'_{2c} از معادله انرژی نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2} \right) v_{1c}^2 = \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2} \right) v'_{1c}{}^2$$

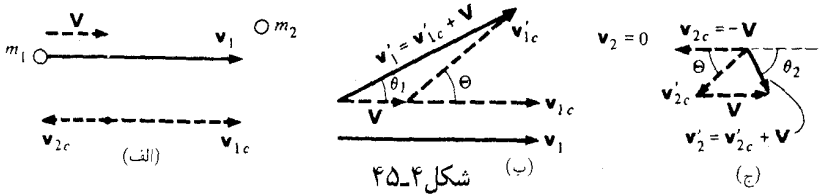
یا

$$v_{1c} = v'_{1c}$$

به همین ترتیب داریم

$$v_{2c} = v'_{2c}$$

در برخورد کشسان، سرعت هر ذره در دستگاه C قبل و بعد از برخورد یکسان است. از این رو، بردارهای



شکل ۴-۴۵ (ب)

(ج)

سرعت به سادگی در صفحه پراکندگی می چرخند.

در بسیاری از آزمایشها، یکی از ذرات، مثلاً m_2 ، در ابتدا در دستگاه آزمایشگاه در حالت سکون است (شکل ۴-۴۴). در این حالت داریم

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

و

$$v_{1c} = v_1 - V$$

$$= \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$v_{2c} = -V$$

$$= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

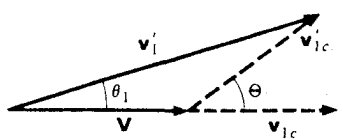
شکلهای ۴-۴۵، v_1 و v_2 را قبل و بعد از برخورد در دستگاههای C و L نشان می دهد. θ_1 و θ_2 زوایای آزمایشگاهی مسیرهای دوزره بعد از برخوردند. نمودار سرعت را می توان برای ارتباط θ_1 و θ_2 با زاویه پراکندگی Θ به کار برد.

مثال ۴-۱۹ حدود زاویه پراکندگی در دستگاه آزمایشگاه : پراکندگی کشسان ذره ای به جرم m_1 و سرعت v_1 را از ذره دومی به جرم m_2 که در حالت سکون است مورد بررسی قرار دهید (شکل ۴-۴۶). زاویه پراکندگی Θ در دستگاه C محدود نیست، ولی قوانین پایستگی همانطوری که نشان خواهیم داد، محدودیتهایی برای زوایای آزمایشگاهی ایجاد می کنند. بزرگی سرعت مرکز جرم چنین است

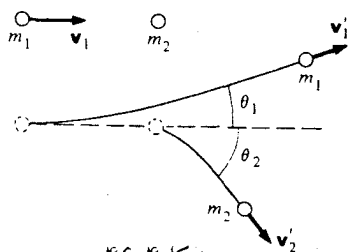
$$V = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

و جهت آن موازی با v_1 است. سرعتهای اولیه در دستگاه C نیز چنین می شوند

$$v_{1c} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_1$$



شکل ۴-۴۷



شکل ۴-۴۶

$$v_{1c} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

فرض کنید m_1 به اندازه زاویه Θ در دستگاه C منحرف شده باشد.

از نمودار سرعت شکل ۴۷-۴ مشاهده می‌شود که زاویه پراکندگی آزمایشگاهی ذره فرودی از رابطه

زیر معین می‌شود

$$\tan \theta_1 = \frac{v'_{1c} \sin \Theta}{V + v'_{1c} \cos \Theta}$$

چون پراکندگی کشسان است، $v'_{1c} = v_{1c}$ است. بنابراین

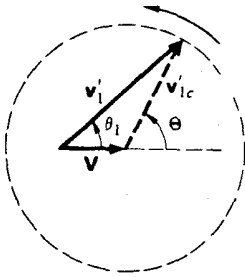
$$\begin{aligned} \tan \theta_1 &= \frac{v_{1c} \sin \Theta}{V + v_{1c} \cos \Theta} \\ &= \frac{\sin \Theta}{(V/v_{1c}) + \cos \Theta} \end{aligned}$$

از معادلات ۱ و ۲ داریم $V/v_{1c} = m_1/m_2$ ، بنابراین

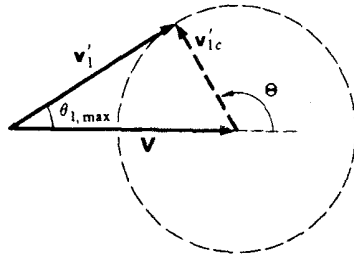
$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \Theta}{(m_1/m_2) + \cos \Theta}$$

زاویه پراکندگی Θ بستگی به جزئیات برهم‌کنش دارد، اما در حالت کلی می‌تواند هر مقدار اختیار کند (شکل ۴-۴۸). اگر $m_1 < m_2$ باشد، از معادله ۳ یا از ساختمان هندسی شکل ۴-۴۸ (الف) نتیجه می‌شود که θ_1 محدود نیست. اما، اگر $m_1 > m_2$ باشد، وضعیت کاملاً متفاوت است. در این حالت θ_1 هرگز بزرگتر از یک مقدار معین $\theta_{1,\max}$ نمی‌شود. همانظوری که شکل ۴-۴۸ (ب) نشان می‌دهد مقدار بیشینه θ_1 وقتی اتفاق می‌افتد که v'_{1c} و v'_1 برهم عمود باشند. در این حالت $\sin \theta_{1,\max} = v_{1c}/V = m_2/m_1$ است. اگر $m_1 \gg m_2$ باشد، $\theta_{1,\max} \approx m_2/m_1$ است و بیشینه زاویه پراکندگی به صفر می‌رسد.

از نظر فیزیکی، یک ذره سبک در حال سکون، یک ذره سنگین را به طور قابل توجهی نمی‌تواند

افزایش θ 

(الف) $\frac{v}{v'_{ic}} = \frac{m_1}{m_2} < 1$



(ب) $\frac{v}{v'_{ic}} = \frac{m_1}{m_2} > 1$

شکل ۴-۴۸

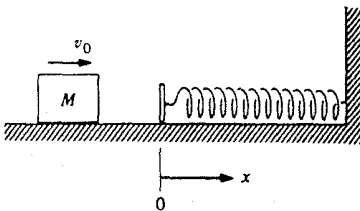
منحرف کند. ذره فرودی می‌کوشد در جهت خود به پیشروی ادامه دهد، بدون توجه به اینکه ذره سبک چگونه عمل می‌کند.

مسائل

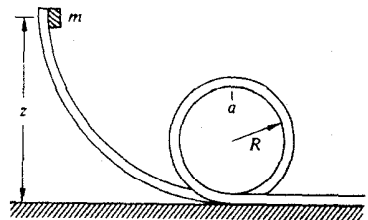
۱-۴ قطعه کوچکی به جرم m از حالت سکون روی مسیر حلقوی بدون اصطکاک مطابق شکل ۴-۴۹ شروع به لغزیدن می‌کند. ارتفاع اولیه آن (z) چقدر باید باشد تا اینکه m در بالای مسیر (در نقطه a) با نیرویی برابر با وزن خود به طرف خارج فشار وارد کند.

جواب: $z = 3R$.

۲-۴ قطعه مکعبی به جرم M روی یک میز افقی با سرعت v می‌لغزد. در $x = 0$ این قطعه با فنری که ثابت آن k است برخورد می‌کند و در این لحظه مطابق شکل ۴-۵۰ اعمال نیروی اصطکاک



شکل ۴-۵۰



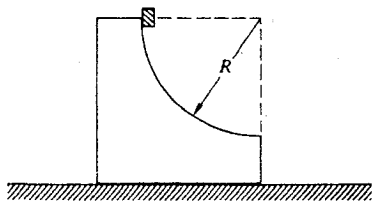
شکل ۴-۴۹

شروع می‌شود. ضریب اصطکاک متغیر است و از رابطه $\mu = bx$ به دست می‌آید، که در آن b مقدار ثابتی است. انرژی مکانیکی از دست رفته را در زمانی که قطعه برای اولین بار به طور آنی به حالت سکون می‌رسد، تعیین کنید.

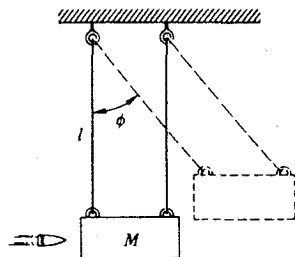
۳-۴ ساده‌ترین راه اندازه‌گیری سرعت یک گلوله، استفاده از آونگ بالیستیک است. طبق شکل ۵۱-۴، این آونگ از یک قطعه مکعب چوبی به جرم M تشکیل شده است که گلوله به داخل آن شلیک می‌شود. این قطعه توسط کابل‌هایی به طول l به صورت معلق درآمده است و برخورد گلوله باعث می‌شود که این قطعه چوب با یک زاویه بیشینه ϕ مطابق شکل به نوسان درآید. سرعت اولیه گلوله v و جرم آن m است. (الف) بلافاصله بعد از اینکه این گلوله به حالت سکون درآمد، قطعه با چه سرعتی حرکت می‌کند؟ (ب) نشان دهید که با اندازه‌گیری l ، M ، m و ϕ می‌توانیم سرعت گلوله را پیدا کنیم.

جواب حالت ب: $v = [(m + M)/m] \sqrt{2gl(1 - \cos \phi)}$

۴-۴ مکعب کوچکی به جرم m در مسیر دایره‌شکلی به شعاع R که از قطعه بزرگی به جرم M بریده شده مطابق شکل ۵۲-۴ به طرف پایین می‌لغزد. قطعه M روی میزی قرار دارد و هر دو قطعه بدون



شکل ۵۲-۴



شکل ۵۱-۴

اصطکاک حرکت می‌کنند. این قطعات ابتدا در حالت سکون‌اند و m از بالای مسیر شروع به حرکت می‌کند. سرعت v مکعب را وقتی که از قطعه جدا می‌شود پیدا کنید.

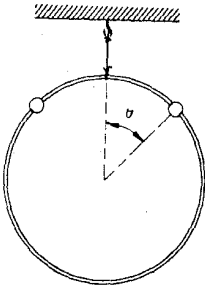
جواب حالت خاص: اگر $m = M$ باشد، آنگاه $v = \sqrt{gR}$

۵-۴ جرم m روی میز بدون اصطکاک می‌چرخد، این جرم به وسیله سیمی که از سوراخی در سطح یک میز عبور می‌کند در حال حرکت دایره‌ای نگهداشته می‌شود. سیم به آرامی از سوراخ کشیده می‌شود به طوری که شعاع دایره از l_1 به l_2 تغییر می‌کند. نشان دهید کار انجام شده در فرایند کشیدن سیم با افزایش انرژی جنبشی جرم برابر است.

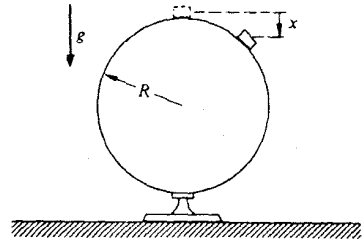
۶-۴ قطعه مکعب کوچکی از حالت سکون از بالای کره بدون اصطکاک به شعاع R مطابق شکل ۵۳-۴ به پایین می‌لغزد. باتوجه به شکل، این قطعه چقدر، x پایینتر از رأس کره، تماس خود را با کره از دست می‌دهد. فرض کنید که کره حرکت نمی‌کند.

جواب: $R/3$

۷-۴ حلقه‌ای به جرم M توسط نخ‌ی آویزان است، و دو مهره به جرم m روی آن بدون اصطکاک می‌لغزند (شکل ۵۴-۴). مهره‌ها از بالای حلقه و به طور همزمان رها شده‌اند، و به طرف پایین در دو جهت



شکل ۵۴-۴

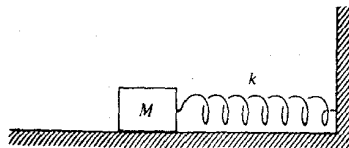


شکل ۵۳-۴

مخالف می‌لغزند. نشان دهید اگر $m > 3M/2$ باشد حلقه شروع به بالا رفتن می‌کند، و زاویه‌ای که در آن این عمل اتفاق می‌افتد چقدر است؟

جواب حالت خاص: اگر $M = 0$ ، آنگاه $\theta = \arccos 2/3$.

۸-۴ قطعه مکعبی مطابق شکل ۵۵-۴ تحت اثر فنری با ثابت k و نیروی اصطکاک ضعیفی با



شکل ۵۵-۴

ضریب ثابت f قرار دارد. این قطعه را به اندازه فاصله x_0 از حالت تعادل کشیده و سپس رها می‌کنند. قطعه چندین بار نوسان می‌کند و سرانجام به حالت سکون درمی‌آید. (الف) نشان دهید کاهش دامنه برای هر چرخه نوسان یکسان است. (ب) پیدا کنید تعداد نوسانهای کامل (n) این جرم را قبل از اینکه به حالت سکون درآید.

$$\text{جواب: } n = \frac{1}{4} [(kx_0/f) - 1] \approx kx_0/4f$$

۹-۴ یک واکنش شیمیایی ساده و خیلی سریع عبارت است از $H + H \rightarrow H_2 + 5\text{eV}$ (۱ eV = 1.6×10^{-19} J). اما، وقتی که اتمهای هیدروژن در فضای آزاد با هم برخورد می‌کنند به سادگی از هم جدا می‌شوند. دلیل این است که در یک برخورد ساده دو جسمی که انرژی آزاد می‌شود، برقراری قوانین پایستگی تکانه و انرژی ممکن نیست. آیا می‌توانید این

مسئله را ثابت کنید؟ شما می‌توانید با نوشتن عباراتی برای پایستگی تکانه و انرژی این کار را آغاز کنید. (دقت کنید که انرژی واکنش را در معادله انرژی دخالت دهید و علامت آن را هم درست انتخاب کنید.) با حذف تکانه نهایی مولکولها از دو معادله، می‌توانید نشان دهید که تکانه اولیه باید شرط غیرممکنی داشته باشد.

۴-۱۰. قطعه مکعبی به جرم M روی یک میز افقی بدون اصطکاک به فنری با ثابت k متصل است. حرکت این قطعه طوری است که حول نقطه تعادل خود با دامنه A نوسان می‌کند و دوره تناوب حرکت برابر $T_0 = 2\pi\sqrt{M/k}$ است. (الف) مقداری از بتونه چسبان به جرم m را روی قطعه می‌اندازیم، به طوری که بدون برگشت به قطعه می‌چسبد. بتونه لحظه‌ای به M برخورد می‌کند که سرعت M برابر صفر است. پیدا کنید:

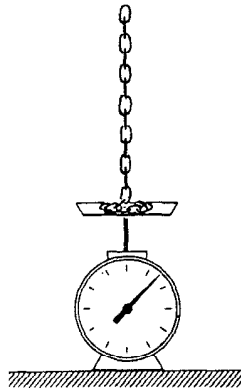
۱. دوره تناوب جدید

۲. دامنه جدید

۳. تغییر انرژی مکانیکی سیستم را.

(ب) قسمت (الف) را با این شرط تکرار کنید که بتونه چسبان در لحظه‌ای که M دارای سرعت بیشینه است با آن برخورد کند.

۴-۱۱. زنجیری به جرم M و به طول l مطابق شکل ۴-۵۶ به طور قائم معلق است به نحوی که انتهای



شکل ۴-۵۶

پایینی آن با کفه یک ترازو در تماس است. زنجیر را رها می‌کنیم تا بر روی ترازو بیفتد. وقتی که طول x زنجیر روی ترازو می‌افتد درجه ترازو چه عددی را نشان می‌دهد. (از اندازه حلقه‌های اتصال صرف‌نظر کنید.)

جواب حالت خاص: بیشینه درجه ترازو $3Mg$ است.

۱۲-۴ در جنگ جهانی دوم روسها که برای انجام عملیات هوابرد دچار کمبود چترنجات بودند، گاهگاهی سربازان را در کیسه‌ای از علف خشک از هواپیما به روی برف سقوط می‌دادند. بدن انسان به طور متوسط می‌تواند یک فشار برخورد $10^6 \text{ N/m}^2 \times 0.7$ را تحمل کند.

فرض کنید هواپیمای راهنمای یک محموله ساختگی را که از نظر وزن برابر با یک محموله واقعی است از ارتفاع ۴۵ متری رها کند. خلبان می‌بیند این محموله به اندازه ۶۰ متر در برف فرو می‌رود. اگر جرم متوسط سربازها برابر ۶۵ کیلوگرم و سطح مؤثر آنها ۰.۵ متر مربع باشد، آیا چنین سقوطی برای انسان بی‌خطر خواهد بود؟

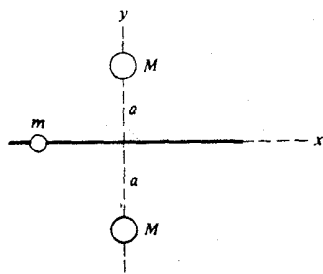
۱۳-۴ تابع انرژی پتانسیلی که معمولاً برای توصیف برهم‌کنش بین دو اتم به‌کار می‌رود عبارت است از پتانسیل ۶ و ۱۲ لِنارد-جونز (شکل ۵۷-۴)

$$U = \epsilon \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 \right]$$

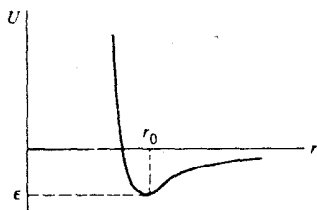
(الف) نشان دهید که شعاع مربوط به پتانسیل کمینه برابر r_0 و عمق چاه پتانسیل برابر ϵ است. (ب) بسامد نوسانهای کوچک حول نقطه تعادل دو اتم یکسان به جرمهای m را که از طریق برهم‌کنش لِنارد-جونز باهم ارتباط دارند پیدا کنید.

جواب: $\omega = 12\sqrt{\epsilon/r_0^2 m}$

۱۴-۴ مهره‌ای به جرم m بدون اصطکاک روی میله صافی در جهت x می‌لغزد. این میله بین دو کره به جرمهای M و به فاصله مساوی از آنها قرار دارد. کره‌ها مطابق شکل ۵۸-۴ در $x = 0$ و $x = \pm a$



شکل ۵۸-۴



شکل ۵۷-۴

قرار دارند و مهره را به صورت گرانشی جذب می‌کنند. (الف) انرژی پتانسیل مهره را پیدا کنید. (ب) مهره در $x = 3a$ با سرعت v_0 به طرف مبدأ رها می‌شود. سرعت آن را وقتی که از مبدأ عبور می‌کند پیدا کنید. (ج) بسامد نوسانهای کوچک مهره را حول مبدأ پیدا کنید.

۱۵-۴ ذره‌ای به جرم m در جهت مثبت x در یک بعد حرکت می‌کند. این ذره تحت تأثیر نیروی ثابتی که بزرگی آن B و جهت آن به طرف مبدأست، و یک نیروی دافعه تابع قانون عکس مجذور فاصله به بزرگی A/x^2 قرار می‌گیرد. (الف) تابع انرژی پتانسیل $U(x)$ را پیدا کنید. (ب) نمودار انرژی سیستم را وقتی که بیشینه انرژی جنبشی آن $K = 1/2 mv^2$ است رسم کنید. (ج) مکان تعادل x را پیدا کنید. (د) بسامد نوسان کوچک حول x چقدر است؟

۱۶-۴ یک ماشین مسابقه 180° پوندی در ۸ ثانیه تا 60 mile/h سرعت می‌گیرد. توان متوسطی که موتور آن در طی زمان حرکت ماشین مصرف می‌کند چقدر است؟

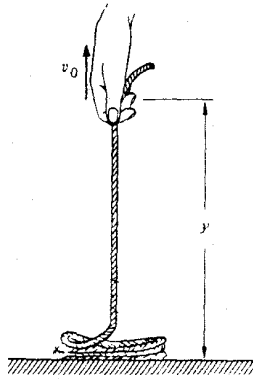
۱۷-۴ یک سورتمه برفی با سرعت 15 mile/h از تپه‌ای بالا می‌رود. این تپه دارای شیبی است که هر 40° فوت به اندازه یک فوت ارتفاع پیدا می‌کند. نیروی مقاومت مربوط به برف برابر با 5 درصد وزن سورتمه است. این سورتمه با چه سرعتی به طرف پایین حرکت می‌کند، با فرض اینکه موتور آن در این حالت هم همان قدر توان مصرف کند.
جواب: 45 mile/h .

۱۸-۴ یک مرد 160 پوندی به حالت دولا به هوا می‌پرد. گرانیگاه او قبل از اینکه زمین را ترک کند 195 ft بالاتر از سطح زمین قرار دارد. سپس این گرانیگاه در انتهای پرش تا 3 ft بالا می‌رود. با فرض اینکه مرد با نیروی ثابتی به زمین فشار وارد کند، چه توانی به وجود می‌آورد؟
جواب حالت خاص: بیشتر از 1 اسب بخار و کمتر از 10 اسب بخار.

۱۹-۴ همان شخص مسئله قبل به هوا می‌پرد، اما این دفعه نیرویی که اعمال می‌کند از یک بیشینه در آغاز پرش شروع شده و در لحظه‌ای که زمین را ترک می‌کند به صفر می‌رسد. به عنوان تقریب قابل قبول نیرو را به صورت $F = F_0 \cos \omega t$ در نظر بگیرید که در آن F_0 نیروی بیشینه است، و تماس با زمین وقتی از زمین می‌رود که $\omega t = \pi/2$ شود. بالاترین توانی را که این شخص در این پرش تولید می‌کند پیدا کنید.

۲۰-۴ از قیفی با آهنگ dm/dt روی یک تسمه انتقال افقی که توسط موتوری با سرعت ثابت V به حرکت درآمده است، شن ریخته می‌شود. (الف) توان لازم برای به حرکت درآوردن تسمه را پیدا کنید. (ب) جواب را با آهنگ تغییر انرژی جنبشی شن مقایسه کنید، آیا دلیل اختلاف را می‌توانید بیان کنید؟

۲۱-۴ طناب یکنواختی با جرم واحد طول λ روی میز افقی صافی مطابق شکل ۴-۵۹ حلقه شده است. یک سر آن را با سرعت ثابت v مستقیماً به طرف بالا می‌کشیم. (الف) نیروی وارد بر انتهای طناب بر حسب تابعی از ارتفاع y پیدا کنید. (ب) توان داده شده به طناب را با آهنگ تغییر انرژی مکانیکی کل طناب مقایسه کنید.



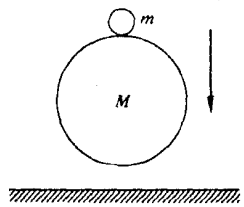
شکل ۵۹-۴

۲۲-۴ توپی را به کف اتاق می‌اندازیم این توپ پس از جهشهای متوالی سرانجام به حالت سکون درمی‌آید. برخورد بین توپ و کف اتاق ناکشسان است، سرعت پس از هر برخورد برابر است با سرعت قبل از برخورد ضربدر e ، که در آن $e < 1$ است (e را ضریب بازگشت می‌نامند). اگر سرعت لحظه‌ای قبل از اولین جهش v_0 باشد، زمان لازم برای ساکن شدن توپ را پیدا کنید.

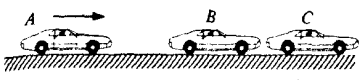
جواب حالت خاص: اگر $v_0 = 5 \text{ m/s}$ و $e = 0.5$ باشد، آنگاه $T \approx 1 \text{ s}$ است.

۲۳-۴ گلوله کوچکی به جرم m مطابق شکل ۶۰-۴ روی یک "توپ بزرگ" به جرم M قرار دارد. این دو را از ارتفاع h به کف اتاق می‌اندازیم. گلوله کوچک بعد از برخورد چقدر بالا می‌رود؟ فرض کنید برخورد توپ بزرگ کشسان، و $m \ll M$ باشد. به منظور کمک به تجسم مسئله، فرض کنید وقتی که توپ بزرگ با کف اتاق برخورد می‌کند گلوله کمی از آن فاصله دارد. (اگر از جواب خیلی تعجب می‌کنید، سعی کنید مسئله را با یک ساچمه و توپ بزرگ امتحان کنید.)

۲۴-۴ مطابق شکل ۶۱-۴ اتومبیل‌های B و C در حالت خلاص و در حال سکون هستند. اتومبیل



شکل ۶۰-۴



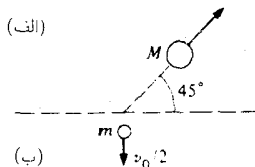
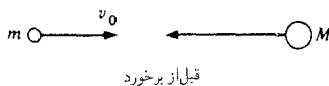
شکل ۶۱-۴

A با سرعت زیاد با اتومبیل B برخورد می‌کند و B را به طرف C می‌فشارد. اگر برخوردها کاملاً ناکشسان باشند، چه کسری از انرژی اولیه در اتومبیل C از بین می‌رود؟ در ابتدا هر سه اتومبیل مشابه یکدیگرند.

۲۵-۴ پروتونی با یک ذره مجهول در حال سکون برخورد رودررو انجام می‌دهد. پروتون با $4/9$ انرژی جنبشی اولیه خود مستقیماً به عقب برمی‌گردد.

نسبت جرم ذره مجهول به جرم پروتون را با فرض اینکه برخورد کشسان باشد، پیدا کنید.

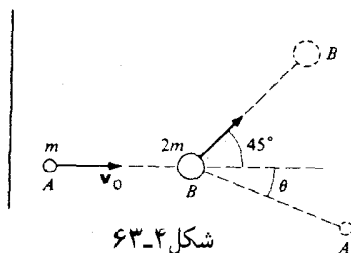
۲۶-۴ ذره‌ای به جرم m و سرعت اولیه v_0 با ذره دیگری به جرم مجهول M که از جهت مقابل، مطابق شکل ۶۲-۴ (الف) در حرکت است برخوردی کشسان انجام می‌دهد. بعد از برخورد، m با سرعت



شکل ۶۲-۴

$v_0/2$ و زاویه قائم نسبت به جهت فرودی به حرکت درمی‌آید، و M در جهت نشان داده شده در شکل ۶۲-۴ (ب) حرکت می‌کند. نسبت M/m را پیدا کنید.

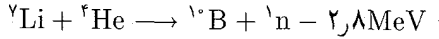
۲۷-۴ ذره A به جرم m دارای سرعت اولیه v_0 است. این ذره بعد از برخورد با ذره B به جرم $2m$ که در ابتدا در حالت سکون است، مسیری مطابق شکل ۶۳-۴ را طی می‌کند. θ را پیدا کنید.



شکل ۶۳-۴

۲۸-۴ هدف نازکی از لیتیم توسط هسته‌های هلیوم با انرژی E بمباران می‌شود. هسته‌های لیتیم در ابتدا در حالت سکون اند ولی اساساً مقید نیستند. وقتی که هسته هلیوم وارد هسته لیتیم می‌شود، یک واکنش هسته‌ای می‌تواند رخ دهد و هسته مرکب حاصل به صورت یک هسته بور و یک

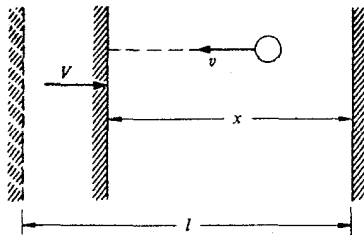
نوترون تجزیه شود. برخورد ناکشسان است، و انرژی جنبشی نهایی به اندازه 2.8MeV از E_0 کمتر است ($1\text{MeV} = 10^6\text{eV} = 1.6 \times 10^{-13}\text{J}$). جرمهای نسبی ذرات عبارتند از: جرم هلیوم ۴؛ جرم لیتیم ۷؛ جرم بور ۱۰، جرم نوترون ۱. واکنش هسته‌ای را می‌توان به طریق زیر خلاصه کرد



الف) انرژی آستانه E_0 ، یا مقدار کمینه E_0 برای اینکه نوترون تولید شود چقدر است؟ انرژی نوترون در این حالت آستانه‌ای چقدر است؟

جواب: 15MeV = انرژی نوترون.

ب) نشان دهید که اگر انرژی فرودی در فاصله $27\text{MeV} + E_0$ آستانه، $E_0 < E < E_0 + 27\text{MeV}$ باشد، نوترونهايي که روبه جلو بیرون رانده می‌شوند همگی انرژی یکسانی ندارند بلکه باید یکی از دوانرژی ممکن را دارا باشند. (با مطالعه واکنش در دستگاه مرکز جرم می‌توانید منشأ این دوگروه را درک کنید).
 ۴-۲۹ یک "توپ مخصوص" به جرم m مطابق شکل ۴-۶۴ با سرعت v بین دیوارها به جلو



شکل ۴-۶۴

و عقب می‌جهد. از گراتش صرف‌نظر می‌کنیم و برخوردها را کاملاً کشسان در نظر می‌گیریم.

الف) نیروی متوسط وارد بر هر دیواره را پیدا کنید.

جواب: $F = mv^2/l$.

ب) اگر یکی از دیوارها به آرامی و با سرعت $v \ll V$ به طرف دیگری حرکت کند، به دلیل فاصله کوتاه بین برخوردها و به علت اینکه سرعت توپ هنگام جهش از دیواره متحرک افزایش می‌یابد آهنگ جهش تندتر خواهد شد. F را بر حسب فاصله بین دیوارها، x ، پیدا کنید. (راهنمایی: آهنگ متوسط افزایش سرعت توپ را با حرکت دیواره پیدا کنید).

جواب: $F = (mv^2/l)(l/x)^2$.

ج) نشان دهید که کار لازم برای حرکت دادن دیواره از x تا x برابر است با افزایش انرژی جنبشی توپ. (این مسئله سازوکار گرم شدن گاز را بر اثر تراکم نشان می‌دهد).

۳۰-۴ ذره‌ای به جرم m و سرعت v به طور کشسان با ذره‌ای به جرم M که در ابتدا به حالت سکون است برخورد می‌کند، و با زاویه Θ در دستگاه مرکز جرم پراکنده می‌شود.

الف) سرعت نهایی m را در دستگاه آزمایشگاه پیدا کنید.

جواب: $v_f = [v_0 / (m + M)](m^2 + M^2 + 2mM \cos \Theta)^{1/2}$

ب) کسری از انرژی جنبشی m را که تلف می‌شود، پیدا کنید.

جواب حالت خاص: اگر $m = M$ باشد، آنگاه

$$(K_0 - K_f) / K_0 = (1 - \cos \Theta) / 2$$

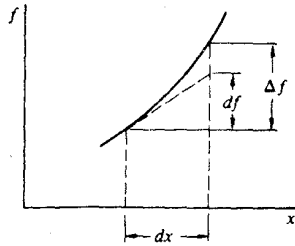
برخی از خصوصیات ریاضی نیرو و انرژی

۱-۵ مقدمه

در فصل قبل تعداد زیادی از مفاهیم جدید فیزیکی از قبیل کار، انرژی پتانسیل، انرژی جنبشی، قضیه کار-انرژی، نیروهای پایستار و ناپایستار، و پایستگی انرژی معرفی شد.

مطالب این فصل در زمینه ریاضیات است و هیچ‌گونه نظرات فیزیکی جدیدی مطرح نمی‌شود. در اینجا چندین روش ریاضی را معرفی خواهیم کرد که نظرات فصل قبل را به طریق واضحتری بیان می‌کند. منطق این کار تا حدی به خاطر ظرافت ریاضیات است که می‌تواند موجب انبساط خاطر شود، ولی اساساً نتایج به دست آمده در اینجا در مباحث دیگری از فیزیک بخصوص الکتروستاتیک و مغناطیس مفید است. در این فصل طرز تعیین پایسته بودن نیروها و همچنین چگونگی ارتباط انرژی پتانسیل به نیرو را درمی‌یابیم.

برای اطمینان خاطر یادآور می‌شویم که اگر ریاضیات در وهله اول به نظرتان مشکل رسید نگران نشوید. این روشهای جدید با مختصری تمرین، سراسر به نظر می‌رسند. در هر حال، احتمالاً با همین روشها از دیدگاه متفاوتی در ریاضیات برخورد خواهید کرد.



شکل ۱-۵

در این فصل باتوابع چندمتغیره مانند تابع انرژی پتانسیل سروکار داریم، که تابع x, y, z است. اولین مرحله کار ما این است که مشتقگیری و پیدا کردن دیفرانسیل چنین توابعی را بیاموزیم. اگر با مشتقات جزئی آشنایی قبلی نداشته باشید می توانید از مطالعه بخش بعدی صرفنظر کنید. در غیر این صورت ادامه دهید.

۲-۵ مشتقات جزئی

مطلب را با بررسی اجمالی مفهوم دیفرانسیل تابع یک متغیر $f(x)$ آغاز می کنیم. (دیفرانسیلها با تفصیل بیشتری در یادداشت بخش ۱-۱ بحث شده است.)

مقدار تابع $f(x)$ را در نقطه دلخواه x در نظر بگیرید و فرض کنید dx نمو x باشد که دیفرانسیل نامیده می شود و هر مقدار دلخواهی می تواند باشد. دیفرانسیل f یعنی df عبارت است از

$$df \equiv \left(\frac{df}{dx} \right) dx$$

توجه داشته باشید که (df/dx) نشانه مشتق است

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

مقدار واقعی تغییرات f برابر $\Delta f = f(x + dx) - f(x)$ است. همانطور که نمودار شکل ۱-۵ نشان می دهد Δf و df برابر نیستند ولی در حد که $dx \rightarrow 0$ از این اختلاف می توان صرفنظر کرد^۱ و df و Δf را به جای یکدیگر به کار گرفت.

حال تابع $f(x, y)$ را که بستگی به دو متغیر x و y دارد در نظر می گیریم. برای مثال f می تواند سطح یک مستطیل به طول x و عرض y باشد. اگر متغیر y را ثابت نگاه داریم و x را به اندازه dx تغییر دهیم، در این صورت دیفرانسیل f چنین است

۱. در واقع $(\Delta f - df)$ از مرتبه $(dx)^2$ است و داریم $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(\Delta f - df)/\Delta x] = 0$

$$df = \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \right] dx$$

کمیت داخل کروشه مانند یک مشتق است. اما f تابعی از دو متغیر است و از آنجا که ما فقط نسبت به یک متغیر دیفرانسیل گرفته‌ایم، کمیت داخل کروشه مشتق جزئی نامیده می‌شود. مشتق جزئی با علامت $\partial f / \partial x$ مشخص می‌شود. (در کتابهای ریاضی گاهی از f_x استفاده می‌شود ولی برای جلوگیری از اشتباه با مؤلفه یک بردار، از این علامت استفاده نمی‌کنیم). $\partial f / \partial x$ را اینطور می‌خوانند "مشتق جزئی f نسبت به x " و یا "جزئی f نسبت به x ". اگر بخواهیم نشان دهیم که مشتق جزئی در نقطه بخصوصی مانند x_0 و y_0 محاسبه شده می‌توانیم بنویسیم

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} \quad \text{یا} \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$$

روش محاسبه مشتقات جزئی آسان است مثلاً برای محاسبه $\partial f / \partial x$ تمام متغیرها بجز x ثابت فرض می‌شوند.

مثال ۵-۱: مشتقات جزئی: مشتق جزئی تابع زیر را حساب کنید

$$f = x^2 \sin y$$

در این صورت داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x \sin y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 \cos y \end{aligned}$$

می‌توان این اعمال را به هر تعداد متغیر تعمیم داد. برای مثال فرض کنید

$$f = y + e^{xz}$$

در این صورت داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= ze^{xz} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 1 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= xe^{xz} \end{aligned}$$

حال ببینیم اگر x و y هر دو تغییر کنند، برای $f(x, y)$ چه پیش می‌آید. فرض کنید x به اندازه dx و

y به اندازه dy تغییر کند. مقدار تغییر f چنین خواهد شد

$$\Delta f = f(x + dx, y + dy) - f(x, y)$$

طرف راست را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\begin{aligned} f(x + dx, y + dy) - f(x, y) &= [f(x + dx, y + dy) - f(x, y + dy)] \\ &+ [f(x, y + dy) - f(x, y)] \end{aligned}$$

جمله اول طرف راست تغییر f ناشی از dx است که به طور تقریبی برابر است با

$$(\Delta f)_{x \text{ ناشی از}} \approx \frac{\partial f(x, y + dy)}{\partial x} \Delta x$$

جمله دوم طرف راست نیز چنین است

$$(\Delta f)_{y \text{ ناشی از}} \approx \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y$$

تغییر کلی چنین است

$$\Delta f \approx \frac{\partial f(x, y + dy)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$$

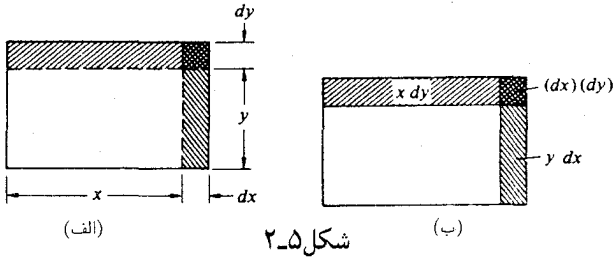
دیفرانسیل f را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$df \equiv \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy \quad (۱-۵)$$

ولی در حد که $dx \rightarrow 0$ و $dy \rightarrow 0$ مقدار Δf به سمت df میل خواهد کرد. در عمل وقتی بخواهیم حد بگیریم می‌توانیم از Δf و df به جای یکدیگر استفاده کنیم. علاوه بر این، حتی اگر نخواهیم حد بگیریم ولی dx و dy کوچک باشند، دیفرانسیل با تقریب خوبی مقدار واقعی تغییرات f را معلوم می‌کند. ■ مثال زیر این موضوع را روشن می‌سازد.

مثال ۲-۵ کاربرد مشتق جزئی: (الف) فرض کنید f مساحت مستطیلی به طول x و عرض y است. آنگاه $f = xy$ است. تغییر سطح ناشی از افزایش x به اندازه dx و y به اندازه dy برابر است با

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x + dx, y + dy) - f(x, y) \\ &= (x + dx)(y + dy) - xy \end{aligned}$$



شکل ۲-۵

$$= y dx + x dy + (dx)(dy)$$

دیفرانسیل f عبارت است از

$$df = \frac{\partial(xy)}{\partial x} dy + \frac{\partial(xy)}{\partial y} dx$$

$$= y dx + x dy$$

می بینیم که

$$\Delta f - df = (dx)(dy)$$

$(dx)(dy)$ مساحت مستطیل کوچکی است که در شکل ۲-۵ نشان داده شده است. چنانچه $dx \rightarrow 0$ و $dy \rightarrow 0$ سطح $(dx)(dy)$ در مقایسه با سطح نوارهای $x dy$ و $y dx$ قابل اغماض است و می توان df را با تقریب خوبی به جای تغییر حقیقی Δf به کار گرفت. (ب) تابع زیر را در نظر بگیرید

$$f(x, y) = y^2 e^x$$

در نقطه $x = 0$ و $y = 1$ داریم $f(0, 1) = 1$ مقدار $f(0.3, 1.0)$ چقدر است؟ اگر تغییر f را به طور تقریب df بگیریم، داریم

$$\Delta f \approx df$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

مشتقات جزئی به سادگی قابل محاسبه اند.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{0,1} = \left. y^2 e^x \right|_{0,1}$$

$$= 1$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{0,1} = \left. 2y e^x \right|_{0,1}$$

$$= ۳$$

با قرار دادن $dx = ۰٫۳$ و $dy = ۰٫۱$ به دست می آید

$$\begin{aligned} df &= (۱)(۰٫۳) + ۳(۰٫۱) \\ &= ۰٫۶ \end{aligned}$$

مقدار واقعی با چهار رقم اعشار عبارت است از

$$\Delta f = ۰٫۶۱۷$$

۳-۵ طریقه به دست آوردن نیرو با معلوم بودن انرژی پتانسیل

مسئله این است: با فرض معلوم بودن تابع انرژی پتانسیل $U(\mathbf{r})$ ، چگونه می توان نیروی $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ را به دست آورد؟ برای حرکت یک بعدی جواب مسئله در بخش ۴-۸ داده شده است که عبارت است از $F_x = -dU/dx$. تعمیم این جواب به سه بعد کار مشکلی نیست.

از تعریف انرژی پتانسیل شروع می کنیم

$$U_b - U_a = -\int_{r_a}^{r_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (۲-۵)$$

تغییر انرژی پتانسیل را وقتی که یک ذره تحت تأثیر نیروی \mathbf{F} تغییر مکانی به اندازه $\Delta \mathbf{r}$ پیدا می کند، در نظر می گیریم

$$U(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - U(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \quad (۳-۵)$$

(متغیر کمکی انتگرال را با علامت \mathbf{r}' مشخص کرده ایم تا با حدود انتگرال روی خط یعنی \mathbf{r} و $\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$ اشتباه نشود.) از طرف چپ معادله ۳-۵ اختلاف انرژی پتانسیل در دو انتهای مسیر است که آن را ΔU می نامیم. اگر $\Delta \mathbf{r}$ را آنقدر کوچک بگیریم که تغییرات \mathbf{F} روی مسیر قابل توجه نباشد، انتگرال طرف راست تقریباً برابر $\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$ می شود. بنابراین

$$\begin{aligned} \Delta U &\approx -\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} \\ &= -(F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z) \end{aligned} \quad (۴-۵)$$

با استفاده از نتایج بخش قبل، می‌توان عبارت دیگری برای ΔU به دست آورد. اگر به‌طور تقریب ΔU را برابر با دیفرانسیل U بگیریم، آنگاه از معادله ۵-۱ داریم

$$\Delta U \approx \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \Delta z \quad (5-5)$$

از ترکیب معادلات ۴-۵ و ۵-۵ خواهیم داشت

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \Delta z \approx -F_x \Delta x - F_y \Delta y - F_z \Delta z \quad (6-5)$$

اگر حد $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ را در نظر بگیریم، نتایج دیگر تقریبی نخواهند بود. چون $\Delta x, \Delta y$ ، و Δz مستقل از یکدیگرند، حتی اگر Δy و Δz را مساوی صفر بگیریم معادله ۶-۵ به قوت خود باقی خواهد ماند و این موضوع ایجاب می‌کند که ضرایب Δx در دو طرف معادله برابر باشند، بدین ترتیب نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= -F_x \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= -F_y \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= -F_z \end{aligned} \quad (7-5)$$

حال جواب مسئله مطرح شده در ابتدای این بخش، یعنی چگونه نیرو از تابع انرژی پتانسیل به دست می‌آید را در دست داریم. اما راه بهتری برای بیان معادلات ۷-۵ نیز وجود دارد که در بخش بعدی خواهیم دید.

۴-۵ عملگر گرادیان

معادله ۷-۵ در واقع یک معادله برداری است. می‌توانیم آن را به شکل ساده برداری بنویسیم

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \hat{\mathbf{i}}F_x + \hat{\mathbf{j}}F_y + \hat{\mathbf{k}}F_z \\ &= -\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial U}{\partial x} - \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial U}{\partial y} - \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \quad (8-5)$$

یک راه کوتاه‌نویسی آن شکل نمادی زیر است

$$\mathbf{F} = -\nabla U \quad (9-5)$$

که در آن

$$\nabla U \equiv \hat{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial U}{\partial z} \quad (۱۰-۵)$$

معادله ۱۰-۵ یک تعریف است، بنابراین اگر عبارت نامأنوس به نظر می آید، به خاطر این نیست که چیزی از قلم انداخته ایم. ببینیم معنی ∇U چیست.

∇U یک بردار است که گرادینان U یا $\text{grad } U$ نامیده می شود. علامت ∇ (که دل خوانده می شود) می تواند به شکل برداری زیر نوشته شود

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (۱۱-۵)$$

بدیهی است که ∇ واقعاً یک بردار نیست، بلکه یک عملگر برداری است. معنی آن این است که وقتی ∇ روی یک تابع نرده ای عمل می کند (در اینجا تابع انرژی پتانسیل)، تشکیل یک بردار می دهد. رابطه $\mathbf{F} = -\nabla U$ تعمیم یافته حالت یک بعدی است. برای مثال فرض کنید U فقط تابع x باشد، در این صورت داریم

$$\nabla U = \frac{\partial U(x)}{\partial x} \hat{i}$$

و

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

اما برای تابع تک متغیره، مشتق جزئی و مشتق معمولی که با آن آشنایی داریم، یکسان اند. داریم

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

اینجا چند مثال دیگر می آوریم.

مثال ۳-۵ جاذبه گرانشی یک ذره: اگر ذره ای به جرم M در مبدأ قرار داشته باشد، انرژی پتانسیل جرم m در فاصله r از مبدأ عبارت است از

$$U(x, y, z) = -\frac{GMm}{r}$$

پس

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\nabla U \\ &= +GMm \nabla \frac{1}{r} \end{aligned}$$

مؤلفه x بردار $\nabla(1/r)$ را در نظر بگیرید. چون $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ است، داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} &= \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \\ &= -\frac{x}{r^5}\end{aligned}$$

به واسطه تقارن، جملات مربوط به y و z به ترتیب برابر $-y/r^3$ و $-z/r^3$ خواهند بود. بنابراین

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= GMm \left(\hat{\mathbf{i}} \frac{-x}{r^3} + \hat{\mathbf{j}} \frac{-y}{r^3} + \hat{\mathbf{k}} \frac{-z}{r^3} \right) \\ &= GMm \left[\frac{-\mathbf{r}}{r^3} \right] \\ &= -GMm \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\end{aligned}$$

و این عبارت آشنای نیروی گرانشی بین دو ذره است.

مثال ۴-۵ میدان گرانشی یکنواخت: از فصل قبل می دانیم که انرژی پتانسیل جرم m در یک میدان گرانشی یکنواخت رو به پایین، برابر است با

$$U(x, y, z) = mgz$$

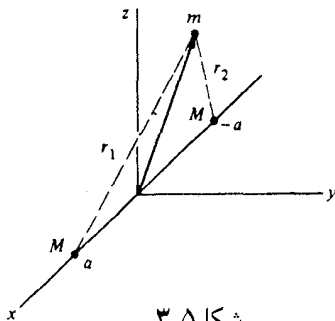
که در آن z ارتفاع از سطح زمین است. نیروی متناظر با آن برابر است با

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= -\nabla U \\ &= -mg \left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right) z \\ &= -mg\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

مثال ۵-۵ جاذبه گرانشی دو نقطه مادی: مثالهای قبل، از این نظر که نیروها مستقیماً به دست می آمدند، مثالهای ساده ای بودند. در اینجا حالت پیچیده تری ارائه می دهیم که در آن با روش انرژی می توانیم به یک راه مفید کوتاه تری دست یابیم.

دو ذره مطابق شکل ۳-۵ هر یک به جرم M روی محور x و به ترتیب در نقاط $x = -a$ و $x = a$ قرار دارند. نیروی وارد بر ذره ای به جرم m را که در نقطه \mathbf{r} قرار دارد، پیدا کنید.

مسئله را با در نظر گرفتن انرژی پتانسیل ذره m بر اثر ذره ای که در نقطه $x = a$ قرار دارد شروع می کنیم. در اینجا فاصله برابر $\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}$ و انرژی پتانسیل برابر



ناشی از ذره‌ای که در $x = -a$ واقع است برابر $-GMm/\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2} = -GMm/r_1$ است. به همین ترتیب انرژی پتانسیل

$$-GMm/\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2} = -GMm/r_2$$

می‌شود. انرژی پتانسیل کل مجموع این دو جمله است این مطلب برتری کارکردن با انرژی را نسبت به نیرو نشان می‌دهد. انرژی زده‌ای است و به سادگی جمع می‌شود، در حالی که نیروها را باید به طریق برداری با هم جمع کرد.

داریم $U = -GMm/r_1 - GMm/r_2$ یا

$$U = -GMm \left\{ \frac{1}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

مؤلفه‌های نیرو به آسانی به وسیله دیفرانسیل‌گیری به دست می‌آیند

$$\begin{aligned} F_x(x, y, z) &= -\frac{\partial U}{\partial x} \\ &= -GMm \left\{ \frac{(x-a)}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{(x+a)}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} \\ &= -GMm \left(\frac{x-a}{r_1^3} + \frac{x+a}{r_2^3} \right) \end{aligned}$$

به همین ترتیب

$$\begin{aligned} F_y(x, y, z) &= -\frac{\partial U}{\partial y} \\ &= -GMm \left(\frac{y}{r_1^3} + \frac{y}{r_2^3} \right) \end{aligned}$$

$$F_z(x, y, z) = -\frac{\partial U}{\partial z} \\ = -GMm \left(\frac{z}{r_1^3} + \frac{z}{r_2^3} \right)$$

اگر m از دو ذره دیگر دور باشد به طوری که $a \gg |x|$ شود، داریم $r_1 \approx r$ و $r_2 \approx r$. در این صورت

$$F_x \approx -\frac{2GMm}{r^2} \frac{x}{r} \\ F_y \approx -\frac{2GMm}{r^2} \frac{y}{r} \\ F_z \approx -\frac{2GMm}{r^2} \frac{z}{r}$$

در فواصل زیاد، نیروی وارد بر m شبیه نیروی $(-2GMm/r^2)\hat{\mathbf{r}}$ است که جرم $2M$ واقع در مبدأ مختصات بر آن وارد می‌کند. ■

شاید این مثالها حاکی از سادگی روش انرژی پتانسیل باشند. کارکردن با انرژی پتانسیل به مراتب ساده‌تر از کارکردن با نیرو است. نیرو را در صورت نیاز می‌توان از فرمول $\mathbf{F} = -\nabla U$ به دست آورد. اما فقط نیروهای پایستار دارای تابع انرژی پتانسیل مربوط به خود هستند. نیروهای ناپایستار را نمی‌توان به شکل گرادیان یک تابع نرده‌ای نوشت. خوشبختانه، بسیاری از نیروهای مهم در فیزیک پایستارند. در بخش ۵-۶ روش ساده‌ای را برای تشخیص پایستار بودن یا نبودن یک نیرو به دست خواهیم داد. اکنون به بررسی معنی فیزیکی گرادیان می‌پردازیم.

۵-۵ معنای فیزیکی گرادیان

ذره‌ای با انرژی پتانسیل $U(x, y, z)$ را در نظر بگیرید که تحت تأثیر نیروی پایستار حرکت می‌کند. اگر ذره از نقطه (x, y, z) به نقطه $(x + dx, y + dy, z + dz)$ حرکت کند، تغییرات انرژی پتانسیل آن به مقدار زیر است

$$U(x + dx, y + dy, z + dz) - U(x, y, z)$$

همان‌گونه که در بخش قبلی توضیح دادیم، اگر حد این عبارت هنگام $dx \rightarrow 0$ ، $dy \rightarrow 0$ ، و $dz \rightarrow 0$ مورد نظر باشد، تغییر U را می‌توان به صورت دیفرانسیل نشان داد

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

تغییر مکان برابر $d\mathbf{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$ است و می توان نوشت

$$dU = \nabla U \cdot d\mathbf{r} \quad (۱۲-۵)$$

که در آن ∇U (گرادیان U) چنین است

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}$$

معادله ۱۲-۵ خاصیت اساسی گرادیان را بیان می کند. پیدا کردن تغییر تابع که ناشی از تغییر متغیرهاست، توسط گرادیان امکانپذیر است. در واقع معادله ۱۲-۵ تعریف گرادیان است. عملکرد گرادیان هم مانند بردار، بدون مراجعه به دستگاه مختصات خاص تعریف می شود.

برای توضیح تشریح بیشتر معنی فیزیکی ∇U ، نمایش تصویری انرژی پتانسیل مفید است. برای این منظور کمی از بحث خارج می شویم.

سطوح انرژی ثابت و خطوط پر بند

معادله $U(x, y, z) = \text{const.} = C$ برای هر مقدار C سطحی را مشخص می کند که سطح انرژی ثابت نامیده می شود. ذره ای که مقید به حرکت روی چنین سطحی است دارای انرژی پتانسیل ثابتی است. برای مثال انرژی پتانسیل گرانشی ذره ای به جرم m که در فاصله $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ از ذره M قرار دارد برابر $U = -GMm/r$ است. سطوح انرژی ثابت با معادله زیر داده می شوند

$$-\frac{GMm}{r} = C$$

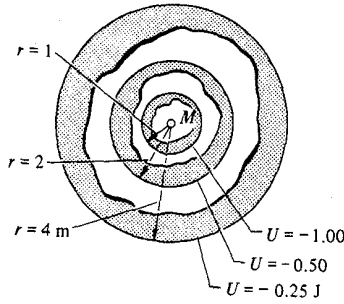
یا

$$r = -\frac{GMm}{C}$$

سطوح انرژی ثابت کره هایی به مرکز M هستند که در شکل ۴-۵ نشان داده شده اند. (برای سادگی مقدار $GMm = 1\text{N m}^2$ انتخاب شده است.)

ترسیم سطوح انرژی ثابت معمولاً مشکل است. بدین علت ساده ترین این است که U را به وسیله خطوطی که فصل مشترک سطوح انرژی با یک صفحه است، نشان دهیم. این خطوط، خطوط انرژی ثابت یا به طور ساده تر خطوط پر بند نامیده می شوند برای سطوح انرژی کروی خطوط پر بند به شکل دایره هستند (شکل های ۵-۵). مثال زیر خطوط پر بند را برای موقعیت پیچیده تری مورد بحث قرار می دهد.

مثال ۵-۶ پر بندهای انرژی برای یک دستگاه ستاره مزدوج: ماهواره ای به جرم m را در میدان گرانشی



شکل ۴-۵

یک ستاره مزدوج در نظر بگیرید. ستاره‌ها به جرمهای M_a و M_b هستند و به فاصله R از یکدیگر قرار دارند. انرژی پتانسیل ماهواره عبارت است از

$$U = -\frac{GmM_a}{r_a} - \frac{GmM_b}{r_b}$$

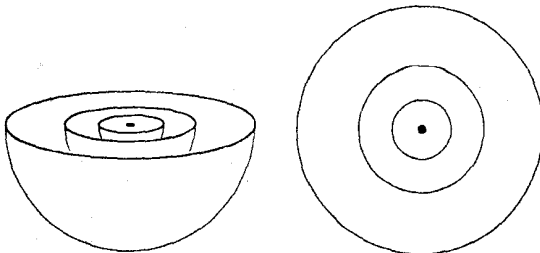
که در آن r_a و r_b فاصله‌های آن از دو ستاره‌اند (شکل ۴-۵ الف). خطوط پربند را روی صفحه که از محور ستاره‌ها می‌گذرد، در نظر بگیرید. در نزدیکی ستاره a ، که $r_a \ll r_b$ است، داریم

$$U \approx -\frac{GmM_a}{r_a}$$

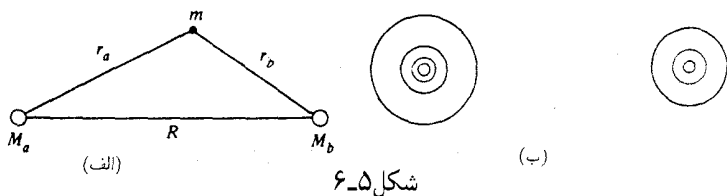
در اینجا خطوط پربند عملاً دایره‌اند. همچنین در نزدیکی ستاره b ، که $r_b \ll r_a$ است، نیز خطوط پربند عملاً دایره هستند (شکل ۴-۵ ب).

در فاصله مابین دو ستاره تأثیر هر دو جسم مهم است. خطوط پربند با مفروضات $GmM_b/R = 1$ و $M_b/M_a = 1/4$ با محاسبه عددی در شکل ۴-۵ ترسیم شده‌اند.

برای مشاهده رابطه بین ∇U و خطوط پربند، تغییرات U ناشی از جابه‌جایی $d\mathbf{r}$ در طول خط پربند را در نظر بگیرید. همواره داریم



شکل ۵-۵



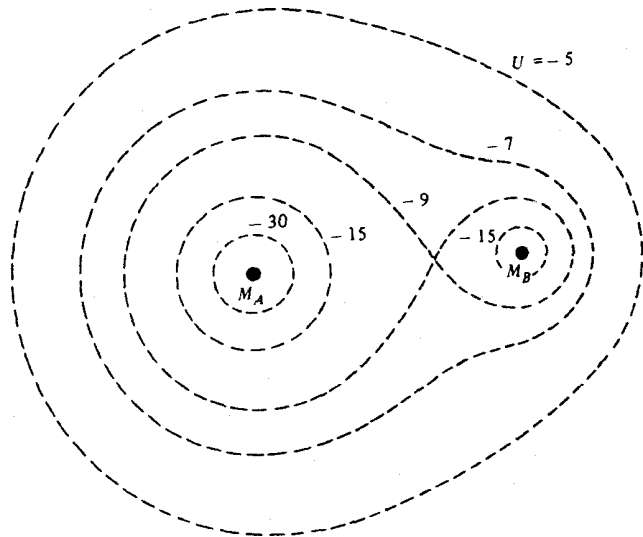
$$dU = \nabla U \cdot dr$$

اما، روی خط پربند، U ثابت و $dU = 0$ است، پس

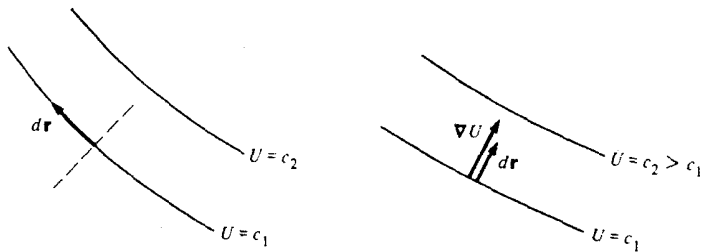
$$\nabla U \cdot dr = 0 \quad (dr \text{ در امتداد خط پربند})$$

چون ∇U و dr مساوی صفر نیستند، نتیجه می‌شود که ∇U باید عمود بر dr باشد. در حالت کلی‌تر، ∇U بر هر جابه‌جایی dr در سطح انرژی ثابت عمود است. پس در هر نقطه از فضا، ∇U عمود بر سطح انرژی ثابتی است که از آن نقطه می‌گذرد (شکلهای ۵-۸).

می‌توان بدون اشکال نشان داد که جهت ∇U از طرف انرژی پتانسیل کمتر به انرژی پتانسیل بیشتر است. جابه‌جایی dr را در امتداد افزایش انرژی پتانسیل در نظر بگیرید. برای این جابه‌جایی داریم $dU > 0$ و چون $dU = \nabla U \cdot dr > 0$ است، می‌بینیم که جهت ∇U از انرژی پتانسیل کمتر به بیشتر است. بنابراین ∇U در جهتی قرار دارد که U با آهنگ سریع‌تری افزایش می‌یابد.



شکل ۷-۵



شکل ۸-۵

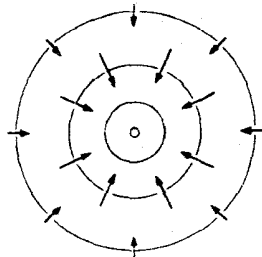
چون $\nabla U = -\mathbf{F}$ است، نتیجه می‌گیریم که \mathbf{F} در همه جا بر سطوح انرژی ثابت عمود و جهتش از انرژی پتانسیل بیشتر به کمتر است.

با داشتن خطوط پربند، ترسیم نیرو آسان است. خطوط پربند برای برهم کنش گرانشی یک ذره با جرمی که در مبدأ مختصات واقع است، به شکل دایره‌اند. همانطور که انتظار داریم، جهت نیرو به داخل و از انرژی پتانسیل بیشتر به کمتر است (شکل ۹-۵).

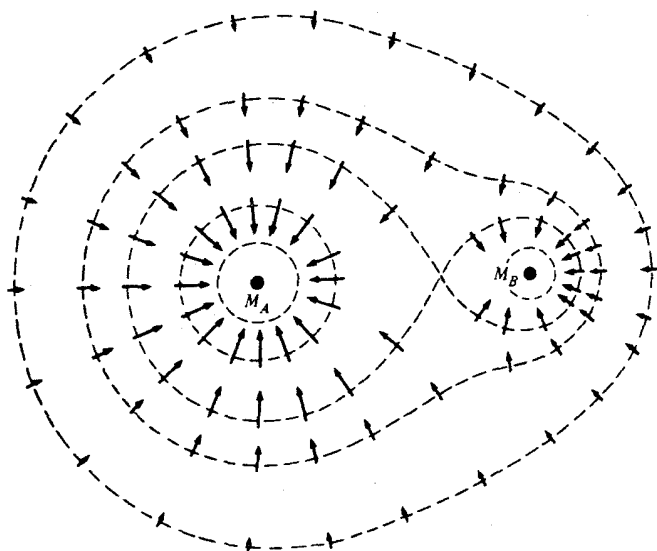
شکل ۱۰-۵ نیرو را در نقاط مختلف خطوط پربند دستگاه ستاره مزدوج مثال ۶-۵ نشان می‌دهد. با گسترش پیکانها می‌توان منحنیهایی ساخت که در همه جا با \mathbf{F} موازی باشند. این خطوط که جهت نیرو را در هر نقطه فضا نشان می‌دهند نقشه ساده‌ای از میدان نیرو را تصویر می‌کنند. توجه داشته باشید که خطوط نیرو در همه جا عمود بر خطوط پربند انرژی است (شکل ۱۱-۵). نقطه P جایی است که دو خط پربند انرژی از آن می‌گذرد. اکنون این سؤال پیش می‌آید که چگونه نیرو می‌تواند در یک نقطه و در یک زمان دو جهت داشته باشد؟ جواب این است نقطه P نقطه تعادل بین دو ستاره است یعنی جایی که نیرو صفر می‌شود.

اگر دو سطح مجاور دارای اختلاف انرژی ΔU و فاصله بین آنها ΔS باشد، داریم

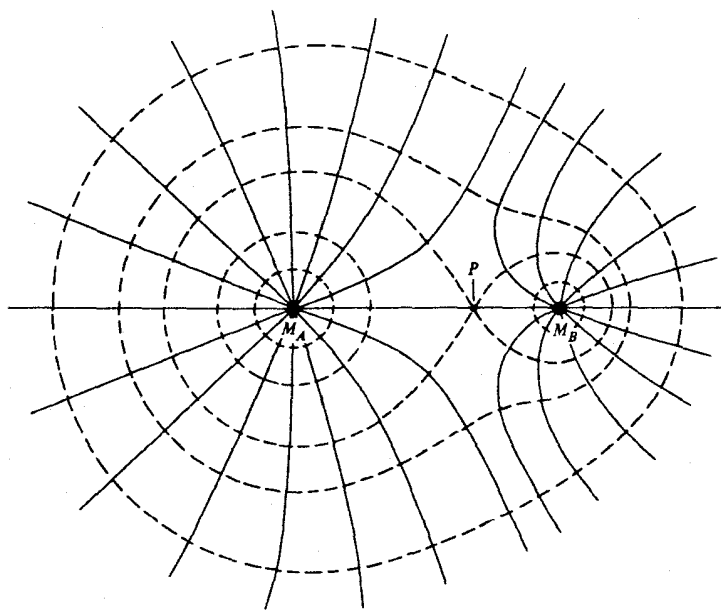
$$|\nabla U| \approx \frac{\Delta U}{\Delta S}$$



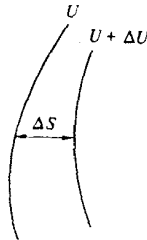
شکل ۹-۵



شکل ۱۰-۵



شکل ۱۱-۵



شکل ۵-۱۲

بنابراین هرچه سطوح نزدیکتر باشند گرادیان بیشتر است. به عبارت فیزیکی تر نیرو آنجایی که انرژی پتانسیل تغییرات سریعتری دارد بزرگتر است.

۵-۶ چگونه به پایستگی نیرویی می بریم

با وجودی که مثالهای زیادی از نیروهای پایستار ارائه کردیم، قاعده کلی برای اینکه بگوییم نیروی داده شده $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ پایستار است یا نه، در دست نداریم. حال به این مسئله می پردازیم.

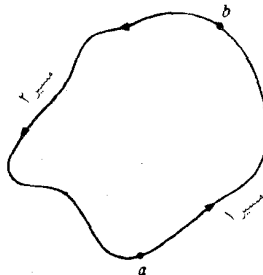
از اینجا شروع می کنیم که اگر $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ نیروی پایستار باشد، کار انجام شده به وسیله \mathbf{F} برای ذره ای که روی منحنی بسته ای از a به b حرکت می کند و سپس به a بازمی گردد چنین است

$$\oint_{\text{مسیر ۱}}^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{\text{مسیر ۲}}^a \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (-U_b + U_a) + (-U_a + U_b) = 0$$

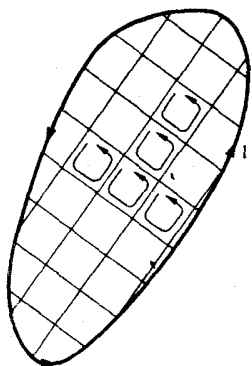
پس کار انجام شده به وسیله نیروی پایستار روی یک مسیر بسته باید صفر باشد. به طوری نمادی

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (۵-۱۳)$$

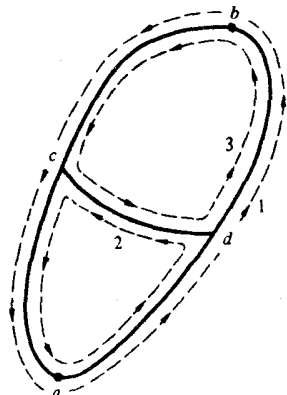
در اینجا انتگرال در اصل انتگرال خطی است که روی مسیری بسته و دلخواه گرفته شده است. (علامت



شکل ۵-۱۳



شکل ۱۵-۵



شکل ۱۴-۵

\oint مشخص کننده مسیر بسته است. برعکس اگر نیروی \mathbf{F} در معادله ۱۳-۵ برای هر مسیری (نه فقط برای مسیری مشخص) صدق کند، نیرو پایستار خواهد بود. بنابراین معادله ۱۳-۵ شرط لازم و کافی برای پایدگی یک نیرو است.

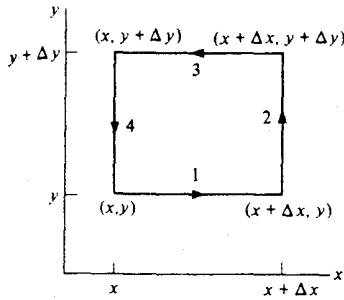
با وجود اینکه ممکن است فکر کنید مسئله از آنچه در شروع کار بوده پیچیده‌تر شده است، ولی در حقیقت قدم بزرگی به پیش برداشته‌ایم و برای اینکه بیشتر برویم باید عملیات بیشتری روی مسئله انجام دهیم.

انتگرال $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ را روی حلقه ۱ در نظر بگیرید. اگر انتگرال را، از طریق "میان بر" cd را به دو قسمت کنیم، داریم (شکل ۱۴-۵)

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \oint_2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

این اتحاد به این دلیل برقرار است که سهم cd در انتگرال $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ با سهم dc در انتگرال $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ دقیقاً یکدیگر را خنثی می‌کنند. طی کردن یک مسیر معین در دو جهت مختلف هیچ تغییری در مقدار کل کار به وجود نمی‌آورد.

می‌توانیم انتگرال خطی را مطابق شکل ۱۵-۵ به تعداد زیادی انتگرال روی منحنیهای کوچک تقسیم کنیم. وقتی کارهای روی تمام منحنیهای کوچک را با هم جمع کنیم، سهمهای متناظر به مسیرهای داخلی یکدیگر را خنثی می‌کنند و کار کل برابر کاری خواهد شد که در مسیر محیط اولیه انجام می‌شود. بنابراین داریم



شکل ۵-۱۶

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum_i \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (۱۴-۵)$$

که در آن $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ کار انجام شده در گردش روی حلقه کوچک i است.

اگر نمی‌دانید که این کار به کجا می‌انجامد، جواب این است که با تمرکز روی مسیره‌های کوچک می‌توانیم مسئله اصلی را از انتگرال‌گیری روی سطح وسیع به مسئله‌ای که مستلزم کمیت‌های متناظر به یک نقطه از فضاست بدل کنیم. برای این کار انتگرال را باید روی یک مسیر کوچک محاسبه کرد. یک حلقه مستطیلی را به اضلاع Δx و Δy مطابق شکل ۵-۱۶ روی صفحه xy در نظر بگیرد. انتگرال روی این حلقه چنین است

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \oint_2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \oint_3 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \oint_4 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

انتگرال‌های ۱ و ۳ هر دو در مسیره‌هایی هم‌جهت با x هستند. به این دلیل هر دو را با هم در نظر می‌گیریم. انتگرال ۱ چنین است

$$\oint_1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{x,y}^{x+\Delta x,y} F_x(x,y) dx \quad (۱۵-۵)$$

اگر Δx کوچک باشد، داریم

$$\oint_1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \approx F_x(x,y) \Delta x$$

به همین ترتیب، انتگرال روی مسیر ۳ چنین است

$$\oint_3 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \approx -F_x(x,y + \Delta y) \Delta x$$

انتگرال‌های روی مسیر ۱ و ۳ تقریباً یکدیگر را خنثی می‌کنند اما اختلاف اندکی که بین y ‌های دو مسیر

وجود دارد مهم است. داریم

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_2^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \approx F_x(x, y)\Delta x - F_x(x, y + \Delta y)\Delta x$$

$$= -[F_x(x, y + \Delta y) - F_x(x, y)]\Delta x \quad (۱۶-۵)$$

ممکن است تعجب کنید که چگونه از تغییرات x روی مسیرها صرف نظر شده است، در حالی که تغییرات y را در دو مسیر در نظر گرفته‌ایم. دلیل آن ساده است: تغییرات y بیشتر از درجه اول است، در حالی که در مورد x چنین نیست و خودتان هم می‌توانید دریابید. بالاخره، حد عبارت را وقتی $\Delta x \rightarrow 0$ و $\Delta y \rightarrow 0$ به دست می‌آوریم. از بحث دیفرانسیلها در بخش ۵-۲ داریم

$$F_x(x, y + \Delta y) - F_x(x, y) = \frac{\partial F_x}{\partial y} \Delta y$$

بنابراین معادله ۱۶-۵ را می‌توان چنین نوشت

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_2^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial F_x}{\partial y} \Delta x \Delta y$$

با استفاده از دلایل مشابه برای مسیرهای ۲ و ۴ چنین نتیجه می‌گیریم

$$\int_2^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \Delta x \Delta y$$

بنابراین انتگرال خطی روی حلقه مستطیلی کوچک در صفحه xy بدین ترتیب است

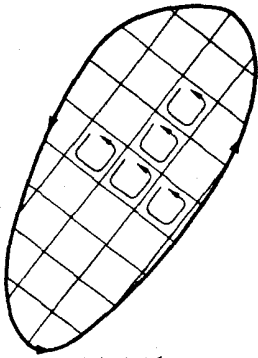
$$\oint_{\text{صفحه } xy} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \quad (\text{الف } ۱۷-۵)$$

در اینجا بدون اثبات می‌پذیریم که این نتیجه برای هر حلقه کوچکی به شکل دلخواه نیز برقرار است به شرطی که به جای $\Delta x \Delta y$ سطح حقیقی ΔA را جایگزین کنیم.

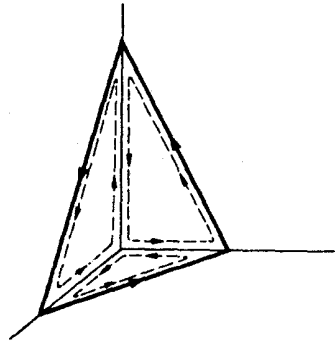
انتگرال خطی روی حلقه کوچک در صفحه yz به آسانی با تغییر چرخه‌ای $y \rightarrow x$ و $z \rightarrow y$ و $x \rightarrow z$ به دست می‌آید. داریم

$$\oint_{\text{صفحه } yz} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \Delta y \Delta z \quad (\text{ب } ۱۷-۵)$$

به همین ترتیب برای حلقه‌ای در صفحه xz :



شکل ۱۸-۵



شکل ۱۷-۵

$$\oint_{\text{صفحه } z} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \Delta x \Delta z \quad (\text{ج } ۱۷-۵)$$

انتگرال خطی روی یک حلقه کوچک در جهت اختیاری رامی توان مطابق شکل ۱۷-۵ به انتگرالهایی روی سه صفحه مختصات تجزیه کرد.

بنابراین، برای اینکه انتگرال خطی روی هر حلقه کوچک صفر شود لازم است که (مطابق شکل ۱۸-۵)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (۱۸-۵)$$

اگر معادله ۱۸-۵ در همه جا صادق باشد، انتگرال خطی روی هر حلقه کوچک صفر می شود و در نتیجه برای هر مسیر بسته ای خواهیم داشت $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$. بنابراین، نیرویی که در معادله ۱۸-۵ صدق کند پایستار است.

ما به هدفمان یعنی یافتن قاعده ای ریاضی برای تشخیص پایستگی یک نیروی مشخص رسیده ایم. اما رابطه ۱۸-۵ به شکل موجود، رابطه ای نسبتاً پردردسر است. خوشبختانه می توان آن را به شکل برداری ساده خلاصه کرد. اگر از قواعد ضرب خارجی که در بخش ۱-۴ با آن آشنا شدیم استفاده کنیم و عملگر برداری ∇ را همانند بردار در نظر بگیریم، آنگاه داریم

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\mathbf{i}} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{j}} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \hat{\mathbf{k}} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \quad (۱۹-۵)$$

$\nabla \times \mathbf{F}$ را (تاو یا کرل) \mathbf{F} می‌خوانند.

مثال ۷-۵ تاو نیروی گرانشی: می‌دانیم که نیروی گرانشی پایستار است زیرا دارای تابع انرژی پتانسیل است. اما، به منظور تشریح بیشتر، با نشان دادن اینکه تاو نیروی گرانشی صفر است پایستار بودن آن را اثبات می‌کنیم.

برای نیروی گرانشی بین دو ذره داریم

$$\mathbf{F} = \frac{A}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$$= A \frac{\mathbf{r}}{r^3} = A \frac{x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}}{r^3}$$

$$(\nabla \times \mathbf{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Az}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Ay}{r^3} \right)$$

جمله اول طرف راست چنین است

$$\frac{\partial}{\partial y} Az(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} = Az \left(-\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} (2y)$$

$$= -3A \frac{zy}{r^5}$$

به همین ترتیب

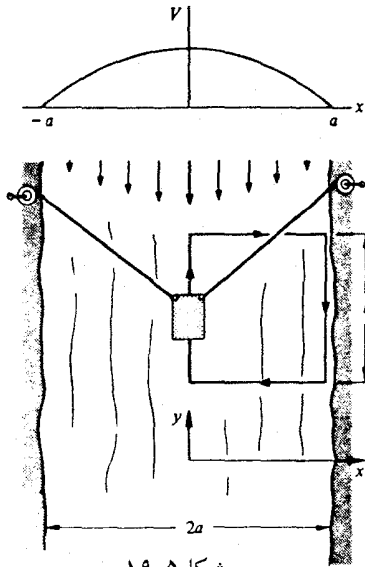
$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{Ay}{r^3} = -3A \frac{yz}{r^5}$$

بنابراین خواهیم داشت

$$(\nabla \times \mathbf{F})_x = -3A \frac{zy}{r^5} + 3A \frac{yz}{r^5} = 0$$

با گردش چرخه‌ای مختصات، می‌بینیم که مؤلفه‌های دیگر $\nabla \times \mathbf{F}$ نیز صفر می‌شوند، بنابراین

$\nabla \times \mathbf{F} = 0$ است و نیروی گرانشی پایستار است.



شکل ۱۹-۵

مثال ۸-۵ نیروی ناپایستار: حال مثالی از نیروی ناپایستار داریم. رودخانه‌ای را با جریان آبی که سرعت آن در وسط بیشینه (v) است و در دلبه رودخانه به صفر تنزل می‌یابد، در نظر بگیرید:

$$\mathbf{V} = -V_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \hat{\mathbf{j}}$$

پهنای رودخانه $2a$ است و مختصات در شکل ۱۹-۵ نشان داده شده است.

فرض کنید یک کرجی در وسط رودخانه روی مسیری که در شکل نشان داده شده است به وسیله جرثقیلهای مستقر در ساحل کشیده می‌شود. کرجی به آهستگی کشیده می‌شود و فرض می‌کنیم که نیروی وارد بر آن به وسیله جریان آب چنین باشد

$$\mathbf{F}_{\text{رودخانه}} = b\mathbf{V}$$

که در آن b مقدار ثابتی است. کرجی تقریباً در حال تعادل است به طوری که نیروی وارد بر آن از سوی جرثقیلها برابر است با

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\mathbf{F}_{\text{رودخانه}} = -b\mathbf{V} \\ &= bV_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \hat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

حال $\nabla \times \mathbf{F}$ را حساب می‌کنیم تا معلوم شود که این نیرو پایستار است یا نه. داریم

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{F})_x &= \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ &= 0 \\ (\nabla \times \mathbf{F})_y &= \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ &= 0 \\ (\nabla \times \mathbf{F})_z &= \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} bV_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \\ &= -\frac{2bV_0}{a^2} x \end{aligned}$$

از آنجا که این تاو صفر نمی‌شود، نیرو ناپایستار است و جرتقیلها باید کار انجام دهند تا کرجی را روی مسیر بسته بکشند. کار انجام‌یافته برای رفتن در خلاف جهت آب برابر با $F(x=0)l$ و در جهت حرکت آب برابر با $F(x=a)l$ است. (در این مسئله آرمانی برای به حرکت درآوردن کرجی در جهت عمود بر جریان آب، به کاری نیاز نیست.) چون $F(x) = bV_0(1 - x^2/a^2)$ است، کار کل انجام یافته به وسیله جرتقیلها برابر است با

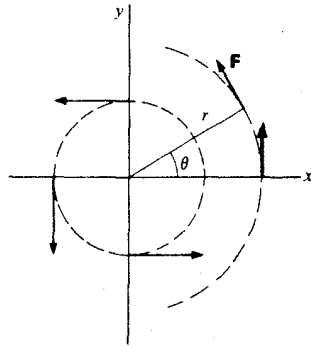
$$\begin{aligned} W &= bV_0 l - bV_0 l \left(1 - \frac{a^2}{a^2} \right) \\ &= bV_0 l \end{aligned}$$

مثال ۹-۵ یک میدان نیروی بسیار غیرعادی: میدانی که در این مثال توصیف می‌شود خواص بسیار شگفت‌انگیزی دارد.

ذره‌ای را در نظر بگیرید که در صفحه xy تحت اثر نیروی زیر حرکت می‌کند

$$\mathbf{F}(r) = \frac{A}{r} \hat{\theta}$$

که در آن A مقداری ثابت است. نیرو به نسبت $1/r$ کاهش می‌یابد و همچنانکه در شکل ۵-۲۰ دیده می‌شود به طور مماس بر مسیر حول مبدأ می‌چرخد.



شکل ۲۰-۵

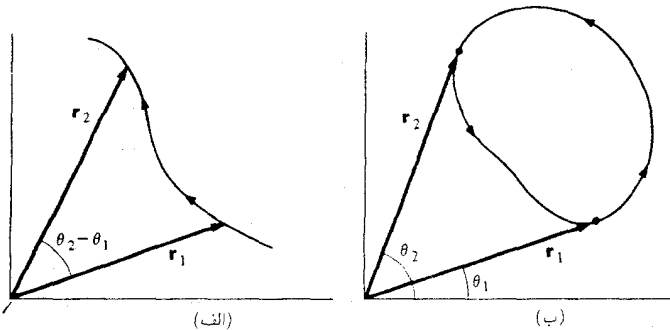
اگر ذره به اندازه $d\mathbf{r} = dr \mathbf{r} + r d\theta \hat{\theta}$ حرکت کند کار انجام شده برابر است با

$$\begin{aligned} dW &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \frac{A}{r} r d\theta \\ &= A d\theta \end{aligned}$$

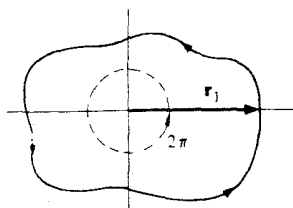
در اینجا کار انجام شده بستگی به r ندارد و فقط بستگی به زاویه دارد.

بدون دقت زیاد، ممکن است به نظر آید که \mathbf{F} پایستار است، زیرا کار انجام شده، در رفتن از r_1 به r_2 در شکل ۲۱-۵ (الف) به نظر می‌رسد که مستقل از مسیر است

$$\begin{aligned} W &= \int_{r_1}^{r_2} A d\theta \\ &= A(\theta_2 - \theta_1) \end{aligned}$$



شکل ۲۱-۵



شکل ۲۲-۵

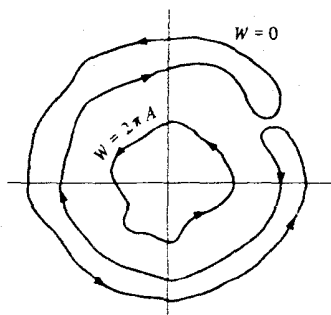
برای مثال، برای مسیر بسته شکل ۲۱-۵ (ب)، داریم

$$\begin{aligned} W &= \oint_{\theta_1}^{\theta_2} A d\theta + \oint_{\theta_2}^{\theta_1} A d\theta \\ &= A(\theta_2 - \theta_1) + A(\theta_1 - \theta_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

این نتیجه برای یک نیروی پایدار مورد انتظار است.

اما کار انجام شده را طی مسیر بسته‌ای که مطابق شکل ۲۲-۵ مبدأ را احاطه می‌کند، در نظر بگیرید. چون $\theta_1 = 0$ و $\theta_2 = 2\pi$ است کار برابر است با $W = 2\pi A$. بدیهی است که \mathbf{F} پایدار نیست. هرگاه، ذره، یک گردش کامل حول مبدأ انجام دهد نیرو به اندازه $2\pi A$ کار انجام می‌دهد. ولی برای مسیر بسته‌ای که مبدأ را دور نزند $W = 0$ است. نیرو به شرط اینکه مسیر، مبدأ را احاطه نکند به نظر پایدار می‌آید (شکل ۲۳-۵).

اگر $\nabla \times \mathbf{F}$ را در نظر بگیرید، خواهید دید که در همه جا مساوی صفر است جز در مبدأ که تکینگی دارد. همین تکینگی است که چنین خواص ویژه‌ای را به نیرو می‌دهد. برای اینکه انتگرال خطی یک نیروی مسیر بسته‌ای صفر باشد تاو باید در همه جای داخل منحنی صفر شود. در این مثال $\nabla \times \mathbf{F}$



شکل ۲۳-۵

در همه جا بجز مبدأ صفر است.

اگر نیرویی پایستار باشد، همواره می‌توان تابع انرژی پتانسیلی چون U را پیدا کرد به طوری که $\mathbf{F} = -\nabla U$ باشد. مثال زیر چگونگی این عمل را نشان می‌دهد.

مثال ۵-۱۰ ساختن تابع انرژی پتانسیل: در این مثال تابع انرژی پتانسیل مربوط به نیروی زیر را پیدا می‌کنیم:

$$\mathbf{F} = A(x^2 \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}}) \quad (1)$$

اولین قدم کسب اطمینان از برقراری $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ است، در غیر این صورت U وجود ندارد. چون شما خود به سادگی می‌توانید این موضوع را ثابت کنید، ما به پیدا کردن U می‌پردازیم. U باید در روابط زیر صدق کند

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = F_x = Ax^2 \quad (2)$$

و

$$-\frac{\partial U}{\partial y} = F_y = Ay \quad (3)$$

از انتگرال‌گیری معادله ۲ داریم

$$U(x, y) = -\frac{A}{3}x^3 + f(y) \quad (4)$$

معادله ۴ نیاز به مقداری توضیح دارد. اگر U فقط تابع x بود از انتگرال معادله ۲ باید $U(x) = (-A/3)x^3 + C$ نتیجه می‌شد (C مقداری ثابت است). اما U تابع y نیز هست. تا آنجا که دیفرانسیل جزئی نسبت به x مورد نظر است، $f(y)$ ثابت است، زیرا $\partial f(y)/\partial x = 0$ است. معادله ۴ عمومی‌ترین جواب معادله ۲ است، برای پیدا کردن جواب معادله ۳ می‌توانیم جلوتر برویم.

با جایگزین کردن معادله ۴ در معادله ۳ خواهیم داشت

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{A}{3}x^3 + f(y) \right] = Ay$$

یا

$$-\frac{\partial f(y)}{\partial y} = -\frac{df(y)}{dy}$$

$$= Ay$$

با انتگرال‌گیری از این معادله نتیجه می‌شود

$$f(y) = -\frac{A}{4}y^2 + C$$

که در آن C مقداری ثابت است. {چون $f(y)$ فقط تابعی از متغیر y است، ثابت انتگرال نمی‌تواند شامل x باشد.}

انرژی پتانسیل چنین است

$$U = -\frac{A}{4}x^2 - \frac{A}{4}y^2 + C$$

فرض کنید بخواهیم این روش را برای نیروی ناپایدار به‌کار ببریم. برای مثال نیروی زیر را در نظر

بگیرید

$$\mathbf{F} = A(xy\mathbf{i} + y^2\mathbf{j})$$

با وجودی که \mathbf{F} تاو صفر نیست می‌توانیم برای حل معادلات کوشش کنیم

$$\begin{aligned} -\frac{\partial U}{\partial x} &= F_x \\ &= Axy \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial U}{\partial y} &= F_y \\ &= Ay^2 \end{aligned} \quad (6)$$

جواب عمومی معادله ۵ چنین است

$$U = -\frac{A}{4}x^2y + f(y)$$

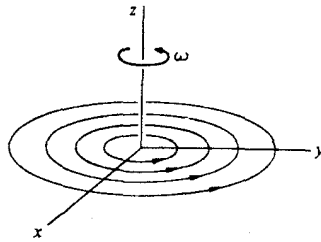
اگر این معادله را در معادله ۶ جایگزین کنیم، داریم

$$\frac{A}{4}x^2 - \frac{\partial f(y)}{\partial y} = Ay^2$$

یا

$$\frac{\partial f(y)}{\partial y} = -\frac{A}{4}x^2 - Ay^2$$

ولی $f(y)$ نمی‌تواند تابع x باشد و این معادله جوابی ندارد. از این رو یافتن تابع انرژی پتانسیل برای این



شکل ۵-۲۴

نیرو غیر ممکن است.

در پایان این بخش به مطالعهٔ اجمالی معنی فیزیکی تاو می‌پردازیم.

مثال ۵-۱۱ مبنای نامگذاری تاو (کرل): تاو یا کرل برای توضیح حرکت مایعات ابداع شده است. برای پی‌بردن به رابطهٔ بین تاو و پیچش یا چرخش، یک گرداب ایده‌آل را مطابق شکل ۵-۲۴ در نظر بگیرید که با سرعت زاویه‌ای ω حول محور z در چرخش است. سرعت مایع در فاصلهٔ r چنین است

$$\mathbf{v} = r\omega \hat{\theta}$$

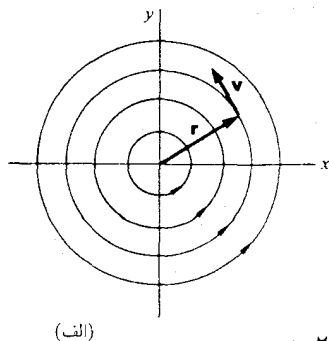
که در آن $\hat{\theta}$ بردار واحد در جهت مماسی است. در مختصات دکارتی داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= r\omega(-\sin \omega t \hat{\mathbf{i}} + \cos \omega t \hat{\mathbf{j}}) \\ &= r\omega \left(-\frac{y}{r} \hat{\mathbf{i}} + \frac{x}{r} \hat{\mathbf{j}} \right) \\ &= -\omega y \hat{\mathbf{i}} + \omega x \hat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

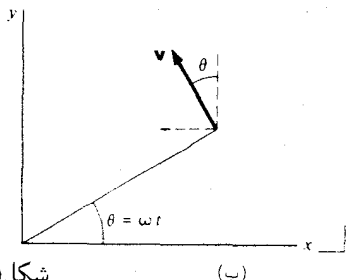
تاو \mathbf{v} چنین است (شکل ۵-۲۵):

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{k}} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\omega x) + \frac{\partial}{\partial y}(\omega y) \right] \\ &= 2\omega \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

اگر چرخ پره‌داری در مایع قرارگیرد، شروع به چرخش می‌کند. چرخش هنگامی که محور چرخ در



(الف)



(ب)

شکل ۲۵-۵

جهت محور z و موازی $\nabla \times \mathbf{v}$ باشد بیشینه است. یک میدان برداری با تاو صفر هیچ اثر چرخشی ایجاد نمی‌کند. شکلهای ۲۶-۵ گویای همین مطلب‌اند.

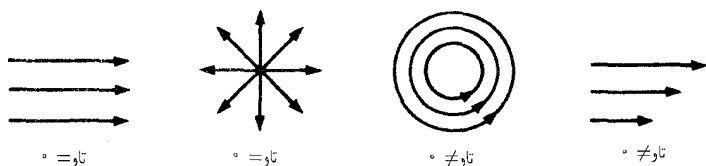
۷-۵ قضیه استوکس

در بخش ۶-۵ نتیجه‌گیری مهمی را به نام قضیه استوکس ناتمام گذاشتیم که انتگرال خطی میدان برداری روی یک منحنی بسته را با انتگرال روی سطحی که به وسیله همان منحنی محدود شده است مربوط می‌کند. اگرچه قضیه استوکس در مطالعه الکتروسیسته و مغناطیس از ضروریات است، ولی در مطالعه مکانیک هم در حد اندکی از آن استفاده خواهیم کرد. با وجود این، قبلاً بسیاری از ایده‌هایی که برای اثبات آن لازم است پیدا کردیم و فقط توضیح اضافی مختصری لازم است.

همان‌گونه که قبلاً بحث شده است، انتگرال خطی \mathbf{F} روی منحنی بسته I را مطابق شکل ۲۷-۵ می‌توان برحسب مجموع انتگرالهای خطی روی حلقه‌های کوچک نوشت

$$\oint_I \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum_i \oint_{I_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

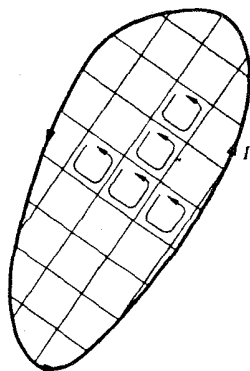
این نتیجه برای \mathbf{F} صرفنظر از پایستار بودن یا نبودن آن برقرار است. در این اثبات پایستار بودن \mathbf{F} را فرض نخواهیم کرد. قضیه استوکس هیچ نظریه فیزیکی‌ای در بر ندارد، و صرفاً نتیجه ریاضی است. از معادله ۱۷-۵ شروع می‌کنیم. برای یک حلقه مستطیلی کوچک در صفحه xy داریم (شکل



شکل ۲۶-۵



شکل ۲۸-۵



شکل ۲۷-۵

(۲۸-۵)

$$\oint_i \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) (\Delta x \Delta y)_i$$

همانطور که قبلاً اشاره کردیم، نتیجه حاصل مستقل از شکل حلقه است به شرط اینکه جمله $(\Delta x \Delta y)_i$ را با سطح ΔA_i عوض کنیم (شکل ۲۹-۵). می‌توان جزء سطح را مثل بردار بنویسیم $\Delta \mathbf{A}_i = \Delta A_i \hat{\mathbf{n}}$ که $\hat{\mathbf{n}}$ بر صفحه عمود است (استفاده از بردار برای نمایش سطح در مثال ۱-۴ بحث شده است). برای

حلقه‌ای در صفحه xy داریم $\Delta \mathbf{A} = \Delta A_z \hat{\mathbf{k}}$

$$\begin{aligned} \oint_i \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) (\Delta A_z)_i \\ &= [(\nabla \times \mathbf{F})_z \Delta A_z]_i \end{aligned} \quad (۲۰-۵)$$

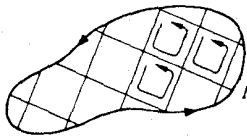
اگر حلقه کوچک را با سمتگیری اختیاری در نظر بگیریم، منطقی است که بنویسیم

$$\begin{aligned} \oint_i \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= [(\text{curl } \mathbf{F})_x \Delta A_x + (\text{curl } \mathbf{F})_y \Delta A_y + (\text{curl } \mathbf{F})_z \Delta A_z]_i \\ &= [\text{curl } \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{A}]_i \end{aligned}$$

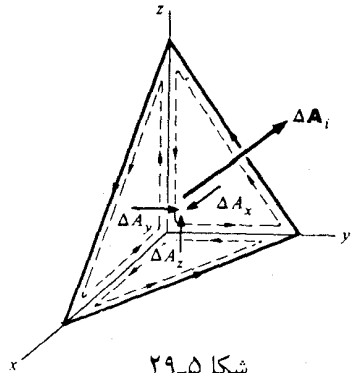
در نتیجه انتگرال خطی \mathbf{F} روی مسیری چنین است

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \sum_i \oint_i \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \sum_i (\text{curl } \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{A})_i \end{aligned} \quad (۲۱-۵)$$

به عبارت دیگر، انتگرال خطی برابر مجموع حاصلضربهای نرده‌ای هر بردار جزء سطح در تاو \mathbf{F} همان



شکل ۳۰-۵

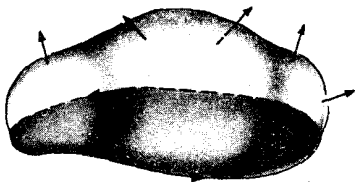


شکل ۲۹-۵

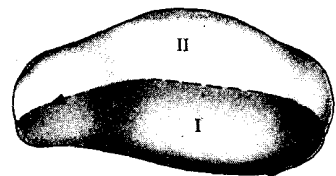
جزء است که در آن تمام جزء سطحهای درون منحنی را باید در نظر گرفت. در حد که $\Delta A_i \rightarrow 0$ ، تعداد اجزای سطح بینهایت می شود و عمل جمع در معادله ۲۱-۵ به انتگرال تبدیل می شود (شکل ۳۱-۵).
 نگاه قضیه استوکس به صورت زیر به دست می آید

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} \quad (۲۲-۵)$$

در قضیه استوکس، معادله ۲۲-۵، دو موضوع حائز اهمیت است. اول، سطحی که انتگرال طرف راست نسبت به آن گرفته می شود می تواند هر سطحی باشد که منحنی بسته آن را محدود می کند، دوم، ظاهراً در مورد جهت $d\mathbf{A}$ ابهامی وجود دارد. چون خط عمود را می توان از هر دو طرف جزء سطح خارج کرد. ولی معادله ۱۷-۵ با استفاده از گردش دور حلقه و در جهت پادساعتگرد نتیجه شد، و در تعریف بردار متناظر با جزء سطح خودبه خود این قرارداد را بنا می گذاریم که جهت $d\mathbf{A}$ توسط قاعده دست راست تعیین می شود. اگر از بالا نگاه کنیم و گردش پادساعتگرد باشد، جهت صحیح $d\mathbf{A}$ به طرف "بالا" است (شکل ۳۲-۵).



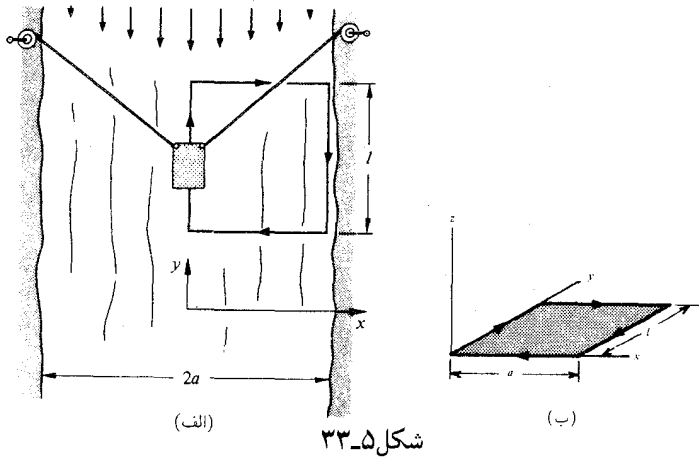
شکل ۳۲-۵



$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \int \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$$

مساحت I مساحت II

شکل ۳۱-۵



شکل ۵-۳۳

مثال ۱۲-۵ استفاده از قضیه استوکس: در مثال ۸-۵ یک کرجی را که خلاف جریان آب کشیده می‌شد مورد بحث قرار دادیم (شکل ۵-۳۳). کار انجام شده را روی مسیری که در شکل ۵-۳۳ (الف) مشخص شده است به وسیله انتگرال خطی $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = W$ پیدا کردیم. در این مثال کار را با استفاده از قضیه استوکس به دست می‌آوریم

$$W = \int (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{A}$$

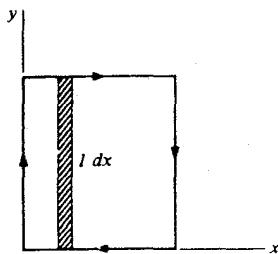
طبیعی است که انتگرال را روی سطحی، مطابق شکل ۵-۳۳ (ب)، در صفحه xy بگیریم. چون جهت گردش ساعتگرد است، $d\mathbf{A} = -dA \hat{\mathbf{k}}$ می‌شود و داریم $W = - \int (\nabla \times \mathbf{F})_z dA$. مثال ۸-۵، نیرو چنین به دست می‌آید

$$\mathbf{F} = bV \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \hat{\mathbf{j}}$$

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{F})_z &= \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \\ &= -\frac{2bV \cdot x}{a^2} \end{aligned}$$

چون تابع زیر انتگرال شامل y نمی‌شود راحت تر است که $dA = l dx$ گرفته شود (شکل ۵-۳۴). پس داریم

$$W = \int_0^a \frac{2bV \cdot l}{a^2} x dx$$



شکل ۳۴-۵

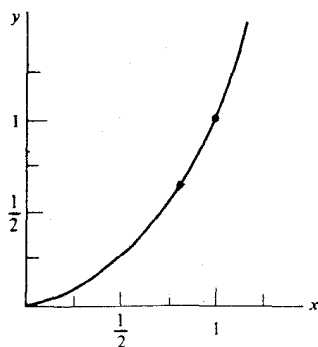
$$\begin{aligned}
 &= \frac{2bV_0 l}{a^2} \left(\frac{a^2}{2} \right) \\
 &= bV_0 l
 \end{aligned}$$

و این همان جوابی است که قبلاً با محاسبه انتگرال خطی به دست آوردیم. ■

مسائل

- ۱-۵ نیروهای مربوط به انرژی پتانسیل‌های زیر را پیدا کنید: (الف) $U = Ax^2 + By^2 + Cz^2$,
 (ب) $U = A \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ (لگاریتم طبیعی \log_e است)،
 (ج) $U = A \cos \theta / r^2$ در مختصات قطبی مسطح).

۲-۵ ذره‌ای به جرم m در صفحه‌ای افقی روی سهمی $y = x^2$ مطابق شکل ۳۵-۵ حرکت



شکل ۳۵-۵

می‌کند. این ذره در لحظه $t = 0$ در نقطه $(1, 1)$ است و در جهت نشان داده شده با سرعت v حرکت می‌کند. غیر از نیرویی که آن را روی مسیر حفظ می‌کند، نیروهای خارجی زیر بر آن وارد می‌شود

یک نیروی شعاعی به صورت $F_a = -Ar^3 \hat{r}$

نیروی مفروضی به صورت $F_b = B(y^2 \hat{i} - x^2 \hat{j})$

که در آنها A و B ثابت هستند، (الف) آیا نیروها پایستارند؟ (ب) سرعت ذره v_f هنگام رسیدن به مبدأ چیست؟

جواب: $v_f = (v_i^2 + A/2m + 3B/5m)^{1/2}$

۳-۵ پایستگی نیروهای زیر را تحقیق کنید: (الف) $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 \sin at$ که در آن \mathbf{F}_0 برداری ثابت

است؛ (ب) $F = A\theta \hat{r}$ که در آن $A = \text{const.}$ و $0 \leq \theta < 2\pi$ است (در صفحه xy قرار دارد)؛ (ج) نیرویی که بستگی به سرعت ذره دارد ولی همیشه بر سرعت عمود است.

۴-۵ معلوم کنید که کدام یک از نیروهای زیر پایستارند. تابع انرژی پتانسیل را، اگر وجود دارد، پیدا

کنید. A, α, β و مقادیر ثابت اند. (الف) $\mathbf{F} = A(3\hat{i} + z\hat{j} + y\hat{k})$ ؛ (ب) $\mathbf{F} = Axyz(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ ؛

(ج) $F_x = 3Ax^2y^{\alpha}e^{\alpha z}$ ، $F_y = 5Ax^{\alpha}y^{\beta}e^{\alpha z}$ ، $F_z = \alpha Ax^{\alpha}y^{\beta}e^{\alpha z}$ ؛ (د)

$$F_x = A \sin(\alpha y) \cos(\beta z), F_y = -A x \alpha \cos(\alpha y) \cos(\beta z),$$

$$F_z = A x \sin(\alpha y) \sin(\beta z)$$

۵-۵ تابع انرژی پتانسیل یک نیروی دو بعدی بخصوص با معادله $U = Cxe^{-y}$ داده شده است

که در آن C مقداری ثابت است. (الف) خطوط انرژی ثابت را رسم کنید. (ب) نشان دهید که اگر یک نقطه به فاصله کوتاه dx روی خط انرژی ثابت جابه‌جا شود، آنگاه مقدار کل جابه‌جایی آن باید برابر $d\mathbf{r} = dx(\hat{i} + \hat{j}/x)$ باشد؛ (ج) با استفاده از نتیجه قسمت (ب) و به‌طور مستقیم نشان دهید که ∇U عمود بر خط انرژی ثابت است.

۶-۵ اگر $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ یک تابع برداری از \mathbf{r} باشد به طوری که همه‌جا در $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ صدق کند،

نشان دهید \mathbf{A} را می‌توان به صورت $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla \phi(\mathbf{r})$ نوشت که در آن $\phi(\mathbf{r})$ یک تابع نرده‌ای است. (راهنمایی: جواب مستقیماً از استدلال فیزیکی به دست می‌آید.)

۷-۵ وقتی تخت شدگی کره زمین در قطبین به حساب بیاید، انرژی پتانسیل گرانشی جرم m که

به فاصله r از مرکز زمین قرار دارد به‌طور تقریبی چنین می‌شود

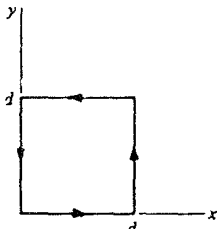
$$U = -\frac{GM_em}{r} \left[1 - 5.4 \times 10^{-4} \left(\frac{R_e}{r} \right)^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \right]$$

که در آن θ از قطب اندازه‌گیری می‌شود.

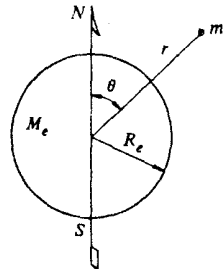
نشان دهید جز در مواردی که جسم بر فراز قطب یا استوا قرار می‌گیرد، نیروی گرانشی مماسی

کوچکی بر m وارد می شود. نسبت این نیرو را به $GM_e m/r^2$ برای زاویه $\theta = 45^\circ$ و $r = R_e$ پیدا کنید (شکل ۳۶-۵).

۸-۵ نیروی $\mathbf{F} = A(y^2\hat{i} + 2x^2\hat{j})$ روی مسیری که در شکل ۳۷-۵ نشان داده شد، چقدر کار



شکل ۳۷-۵



شکل ۳۶-۵

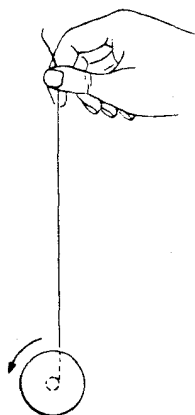
انجام می دهد؟ در اینجا A ثابت و x و y بر حسب متر هستند. به وسیله انتگرال خطی و همچنین به وسیله قضیه استوکس جواب را پیدا کنید
 جواب: $W = Ad^3$.

تکانه زاویه‌ای و محور دوران ثابت

۱-۶ مقدمه

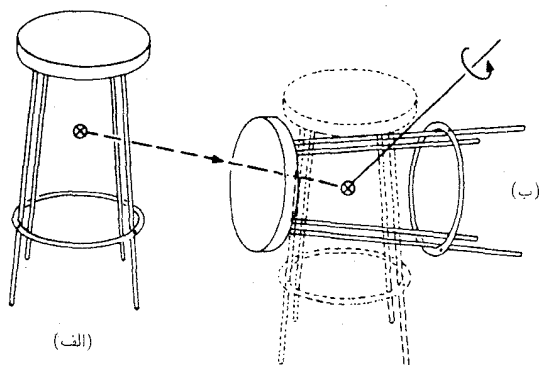
در بررسی اصول مکانیک در پنج فصل گذشته موضوع مهمی را ندیده گرفته‌ایم: روشهای بررسی دوران اجسام جامد را ارائه نداده‌ایم. برای مثال، یک یویو^۱ معمولی را در نظر بگیرید که وقتی فرقة آن می‌پیچد یا باز می‌شود، به بالا و پایین می‌رود (شکل ۱-۶). از نظر اصولی ما از قبل می‌دانیم که چگونه این حرکت را تحلیل کنیم: هر ذره یویو طبق قوانین نیوتون حرکت می‌کند. متأسفانه تحلیل مسئله دوران بر پایه بررسی تک‌تک ذرات کاری ناممکن است. آنچه نیاز داریم روش ساده‌ای برای بیان حرکت دورانی یک جسم مرکب به طوری کلی است. هدف این فصل ارائه چنین روشی است. برای پرداختن به مسئله حرکت انتقالی به مفاهیم نیرو، تکانه خطی، و مرکز جرم نیاز پیدا کردیم؛ در این فصل برای حرکت دورانی مفاهیم مشابه گشتاور نیرو، تکانه زاویه‌ای، و گشتاور لختی را به کار خواهیم برد.

البته هدف ما بسیار فراتر از فهمیدن مسئله یویو است؛ هدف ما یافتن راهی برای تجزیه و تحلیل حرکت کلی یک جسم صلب تحت اثر هرگونه ترکیبی از نیروهاست. خوشبختانه این مسئله را می‌توان



شکل ۱-۶

به دو مسئله ساده‌تر تقسیم کرد: پیدا کردن حرکت مرکز جرم که مسئله‌ای حل شده است، و یافتن حرکت دورانی حول مرکز جرم که اکنون در دست بررسی است. توجه این کار براساس قضیه حرکت جسم صلب استوار است که بیان می‌دارد: هر جابه‌جایی جسم صلب را می‌توان به دو حرکت مستقل از هم حرکت انتقالی مرکز جرم و دوران حول مرکز جرم تجزیه کرد. چند دقیقه بازی با یک جسم صلب چون کتاب یا صندلی، شما را به صحیح بودن قضیه متقاعد می‌کند (شکل ۲-۶). توجه کنید که این قضیه ادعا نمی‌کند که این تنها راه نمایش یک جابه‌جایی کلی است - بلکه این صرفاً یک راه ممکن برای انجام چنین



شکل ۲-۶ برای بردن یک جسم از وضعیت (الف) به وضعیت جدید دیگر (ب)، ابتدا آن را چنان انتقال دهید که مرکز جرم آن بر مرکز جرم جدید منطبق شود، سپس آن را حول محوری مناسب که از مرکز جرم می‌گذرد دوران دهید تا جسم در وضعیت دلخواه قرار گیرد.

کاری است. اثبات کلی این قضیه^۱ در یادداشت ۶-۱ در پایان فصل آمده است. اما، توجه به جزئیات اثبات در اینجا لازم نیست. مهم این است که هر جابه‌جایی را می‌توان ترکیبی از یک انتقال تنها و یک دوران تنها تصور کرد.

برای مدتی اجسام غیر نقطه‌ای را کنار می‌گذاریم، مطابق بهترین سنت فیزیکی با بررسی ساده‌ترین سیستم ممکن یعنی یک ذره شروع می‌کنیم. از آنجاکه ذره بعد ندارد، جهت آن در فضا هیچ اهمیتی ندارد و فقط حرکت انتقالی آن مورد نیاز است. با وجود این، حرکت ذره برای معرفی مفاهیم تکانه زاویه‌ای و گشتاور نیرو مفید است. سپس در فصل ۷ با بررسی حرکت کلی جسم صلب به سیستمهای پیچیده‌تری خواهیم پرداخت.

۶-۲ تکانه زاویه‌ای یک ذره

تعریف رسمی تکانه زاویه‌ای \mathbf{L} مربوط به یک ذره که دارای تکانه \mathbf{p} و بردار مکان \mathbf{r} نسبت به دستگاه مختصات معینی است، چنین است

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (۱-۶)$$

یکای تکانه زاویه‌ای در دستگاه SI، kgm^2/s و در دستگاه cgs، gcm^2/s است. این یکاها نام خاصی ندارند.

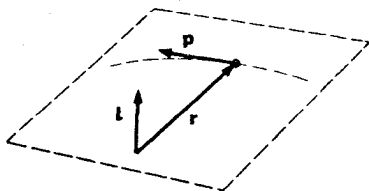
تکانه زاویه‌ای اولین کمیت فیزیکی ماست که مستلزم ضرب خارجی است. (در صورت نیاز به مرور ضرب خارجی، به بخشهای ۱-۲ و ۱-۴ مراجعه کنید.) چون تکانه زاویه‌ای با آنچه قبلاً با آن مواجه بودیم بسیار متفاوت است، ابتدا آن را با جزئیات بیشتری مورد بحث قرار می‌دهیم.

شاید نامانوس‌ترین جنبه تکانه زاویه‌ای جهت آن باشد. بردارهای \mathbf{r} و \mathbf{p} یک صفحه را مشخص می‌کنند (که گاهی آن را به نام صفحه حرکت می‌شناسند)، و طبق خواص ضرب خارجی \mathbf{L} بر این صفحه عمود است. هیچ چیز خاص "طبیعی" در مورد تعریف تکانه زاویه‌ای وجود ندارد. اما همچنانکه خواهیم دید \mathbf{L} از معادلات خیلی ساده دینامیکی تبعیت می‌کند، و مفید بودن آن نیز در همین است.

شکل ۶-۳ مسیر، مکان، و تکانه لحظه‌ای یک ذره را نشان می‌دهد. $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ عمود بر صفحه \mathbf{r} و \mathbf{p} در جهتی است که به وسیله قانون دست راست برای ضرب خارجی تعیین می‌شود. گرچه \mathbf{L} از مبدأ رسم شده است، این محل هیچ اهمیتی ندارد. فقط جهت و اندازه \mathbf{L} مهم است.

اگر \mathbf{r} و \mathbf{p} در صفحه xy قرار داشته باشند، آنگاه \mathbf{L} در راستای z خواهد بود. اگر "سوی دوران"

۱. اوپلر ثابت کرده است که جابه‌جایی کلی یک جسم صلب با یک نقطه ثابت، دورانی حول یک محور است: قضیه‌ای که در متن آمده است به نام قضیه شال است که مستقیماً از این قضیه نتیجه می‌شود.



شکل ۳-۶

حول مبدأ پادساعتگرد باشد (شکل ۴-۶ الف). در جهت مثبت z و چنانچه سوی دوران ساعتگرد باشد (شکل ۴-۶ ب) در جهت منفی z است. توجه کنید که سوی دوران بخوبی تعریف شده است حتی اگر مسیر یک خط راست باشد. تنها استثنا وقتی است که مسیر به سوی مبدأ باشد که در این حال p و r در روی یک خط و L به هر حال صفر است.

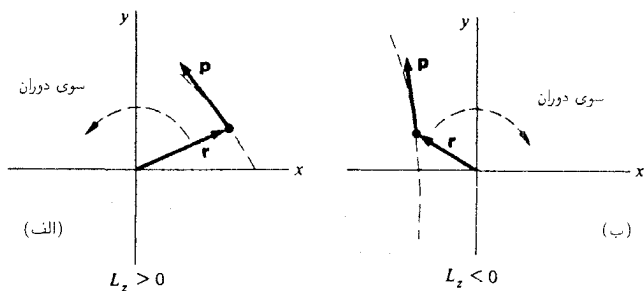
روشهای مختلفی برای نشان دادن و محاسبه تکانه زاویه‌ای وجود دارد. در اینجا به سه راه محاسبه تکانه زاویه‌ای یک ذره که در صفحه xy حرکت می‌کند اشاره می‌شود.
روش ۱:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} \\ &= rp \sin \phi \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

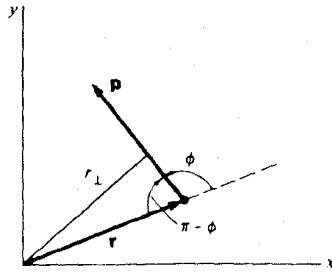
یا

$$L_z = rp \sin \phi$$

برای حرکتی در صفحه xy ، L در راستای z قرار می‌گیرد (شکل ۴-۶). بزرگی آن یک تعبیر ساده هندسی دارد: خط r_{\perp} دارای طول $r_{\perp} = r \sin(\pi - \phi) = r \sin \phi$ است. بنابراین



شکل ۴-۶



شکل ۵-۶

$$L_z = r_{\perp} p$$

که در آن r_{\perp} فاصله عمودی بین مبدأ و راستای \mathbf{p} است. این رابطه متناسب بودن تکانه زاویه‌ای را با فاصله مبدأ از خط حرکت بیان می‌کند.

به طوری که شکل‌های ۶-۶ نشان می‌دهند، روش دیگر نوشتن L_z به این صورت است

$$L_z = r p_{\perp}$$

که p_{\perp} مؤلفه \mathbf{p} عمود بر \mathbf{r} است.

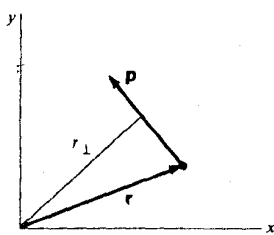
روش ۲: \mathbf{r} را به دو بردار \mathbf{r}_{\perp} و \mathbf{r}_{\parallel} تجزیه کنید

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\perp} + \mathbf{r}_{\parallel}$$

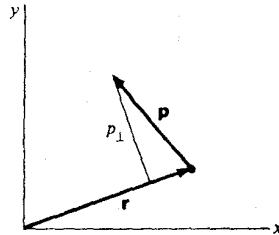
به طوری که \mathbf{r}_{\perp} عمود بر \mathbf{p} ، و \mathbf{r}_{\parallel} موازی \mathbf{p} است. (شکل ۷-۶)

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = (\mathbf{r}_{\perp} + \mathbf{r}_{\parallel}) \times \mathbf{p}$$

$$= (\mathbf{r}_{\perp} \times \mathbf{p}) + (\mathbf{r}_{\parallel} \times \mathbf{p})$$

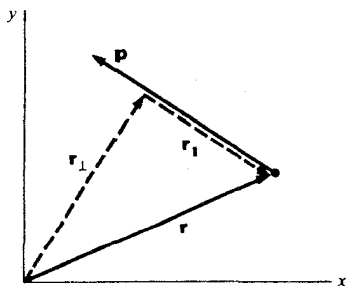


$$L_z = r_{\perp} p$$



$$L_z = r p_{\perp}$$

شکل ۶-۶



شکل ۷-۶

$$= \mathbf{r}_\perp \times \mathbf{p}$$

زیرا $\mathbf{r}_\perp \times \mathbf{p} = 0$ است. (حاصلضرب خارجی دو بردار موازی صفر است.) محاسبه حاصلضرب خارجی $\mathbf{r}_\perp \times \mathbf{p}$ ساده است چون این بردارها عمود بر هم ساخته شده‌اند. مانند گذشته داریم

$$L_z = |\mathbf{r}_\perp| |\mathbf{p}|$$

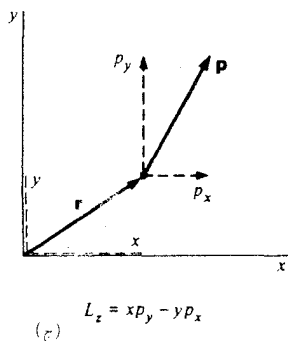
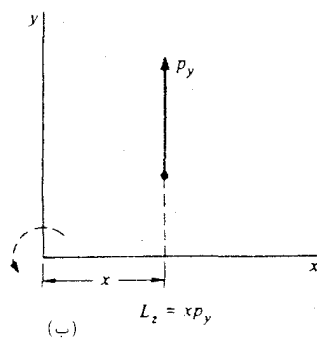
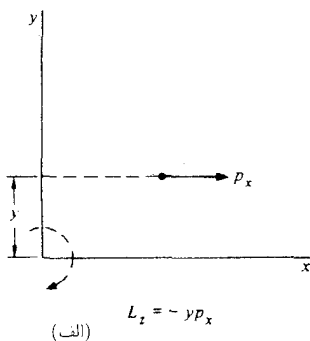
با دلیل مشابه داریم

$$L_z = |\mathbf{r}| |\mathbf{p}_\perp|$$

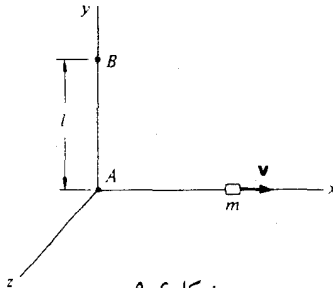
روش ۳: حرکت در صفحه xy را ابتدا در جهت x و سپس در جهت y ، مطابق شکل‌های ۸-۶ الف) و ب) در نظر بگیرید.

حالت کلی حرکت مطابق شکل ۸-۶ ج) هر دو حرکت را همزمان در بر می‌گیرد.

در این صورت $L_z = xp_y - yp_x$ است، که می‌توان درستی آن را یا با تحقیق و یا با محاسبه حاصلضرب خارجی مطابق روش زیر نشان داد. با استفاده از $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ و $\mathbf{p} = (p_x, p_y, 0)$



شکل ۸-۶



شکل ۹-۶

داریم

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & 0 \\ p_x & p_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (xp_y - yp_x)\hat{k}$$

ما بحث حرکت را به صفحه xy محدود کرده‌ایم به طوری که تکانه زاویه‌ای تماماً در امتداد محور z قرار می‌گیرد. اما به کار بردن هر یک از این روشها برای حالت کلی که \mathbf{L} روی هر سه محور مؤلفه دارد، کار مشکلی نیست.

مثال ۹-۶ تکانه زاویه‌ای یک جسم لغزنده: یک جسم به جرم m و ابعاد قابل اغماض را مطابق شکل ۹-۶ در نظر بگیرید که با سرعت $\mathbf{v} = v\hat{i}$ در جهت x مطابق شکل آزادانه می‌لغزد. تکانه زاویه‌ای آن \mathbf{L}_A حول مبدأ و تکانه زاویه‌ای آن \mathbf{L}_B حول مبدأ B چقدر است؟

همانطوری که شکل ۹-۶ (الف) نشان می‌دهد، بردار از مبدأ A تا محل جسم چنین است

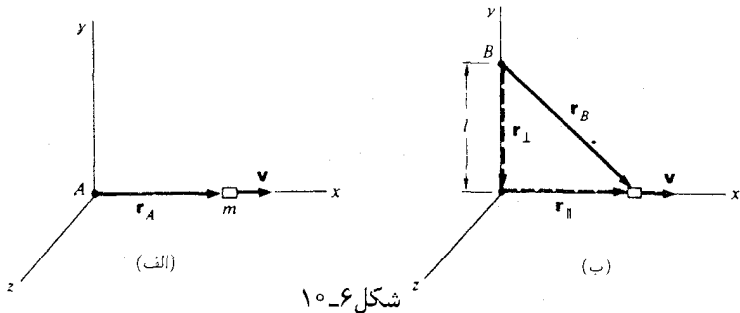
$$\mathbf{r}_A = x\hat{i}$$

چون \mathbf{r}_A موازی \mathbf{v} است، حاصلضرب خارجی آنها برابر صفر است و داریم

$$\mathbf{L}_A = m\mathbf{r}_A \times \mathbf{v}$$

$$= 0$$

اگر مبدأ B را در نظر بگیریم (شکل ۹-۶ ب)، می‌توانیم بردار مکان \mathbf{r}_B را به دو مؤلفه \mathbf{r}_{\parallel} به



شکل ۶-۱۰

موازات \mathbf{v} و \mathbf{r}_\perp عمود بر \mathbf{v} تجزیه کنیم. چون $\mathbf{r}_\perp \times \mathbf{v} = 0$ است فقط \mathbf{r}_\perp در \mathbf{L}_B مؤثر است. داریم

$$|\mathbf{r}_\perp \times \mathbf{v}| = lv$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_B &= m\mathbf{r}_B \times \mathbf{v} \\ &= mlv\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

\mathbf{L}_B در جهت مثبت z قرار می‌گیرد، زیرا جهت دوران حول محور z پادساعتگرد است. برای محاسبه \mathbf{L}_B می‌توان نوشت $\mathbf{r}_B = x\hat{\mathbf{i}} - l\hat{\mathbf{j}}$ و $\mathbf{r}_B \times \mathbf{v}$ را نیز با استفاده از دترمینان به دست آورد

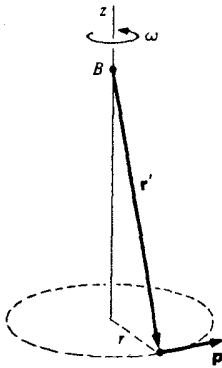
$$\begin{aligned} \mathbf{L}_B &= m\mathbf{r}_B \times \mathbf{v} \\ &= m \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ x & -l & 0 \\ v & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= mlv\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

■ که همان جواب قبلی است.

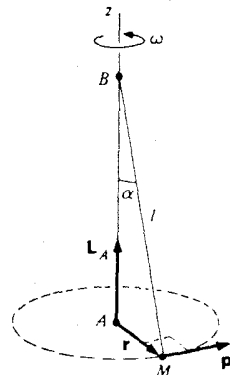
مثال زیر وابستگی \mathbf{L} را به مبدأ انتخاب شده بخوبی نشان می‌دهد.

مثال ۶-۲ تکانه زاویه‌ای آونگ مخروطی: برای نشان دادن بعضی از جنبه‌های تکانه زاویه‌ای به آونگ مخروطی که در مثال ۲-۸ داشتیم باز می‌گردیم. فرض کنید آونگ روی دایره ثابت با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حرکت می‌کند (شکل ۶-۱۱).

ابتدا \mathbf{L}_A ، تکانه زاویه‌ای حول مبدأ A را حساب می‌کنیم. از شکل پیداست که \mathbf{L}_A در جهت مثبت z قرار می‌گیرد، بزرگی آن برابر rp است $|\mathbf{r}_\perp| |\mathbf{p}| = |\mathbf{r}| |\mathbf{p}| = rp$ است که r شعاع دایره حرکت است. چون



شکل ۱۲-۶



شکل ۱۱-۶

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}| &= Mv \\ &= Mr\omega \end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$\mathbf{L}_A = Mr^2\omega\mathbf{k}$$

توجه داشته باشید که بزرگی و جهت \mathbf{L}_A هر دو ثابت‌اند.

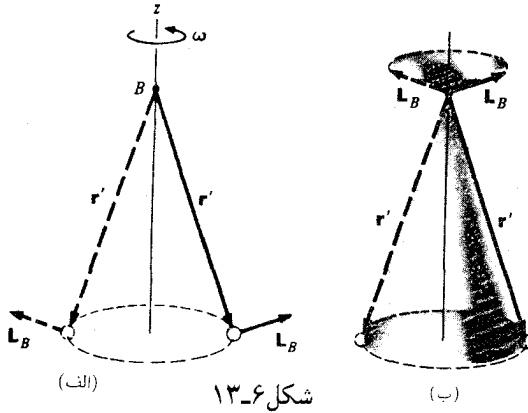
حال تکانه زاویه‌ای را حول مبدأ B که نقطه‌آویز قرار دارد حساب می‌کنیم (شکل ۱۲-۶). اندازه

\mathbf{L}_B چنین است

$$\begin{aligned} |\mathbf{L}_B| &= |\mathbf{r}' \times \mathbf{p}| \\ &= |\mathbf{r}'||\mathbf{p}| = l|\mathbf{p}| \\ &= Mlr\omega \end{aligned}$$

که در آن $|\mathbf{r}'| = l$ طول نخ است. آشکار است که بزرگی \mathbf{L} بستگی به مبدأ انتخاب شده دارد.

بر خلاف \mathbf{L}_A جهت \mathbf{L}_B ثابت نیست. \mathbf{L}_B بر هر دو بردار \mathbf{r}' و \mathbf{p} عمود است و شکل‌های زیر، \mathbf{L}_B را در زمان‌های مختلف نشان می‌دهد. دو شکل ۱۳-۶ (الف) و (ب) برای نشان دادن این واقعیت ترسیم شده‌اند که فقط بزرگی و جهت‌های \mathbf{L}_B مهم هستند و نه مکان‌هایی که برای ترسیم آن انتخاب می‌کنیم. بزرگی \mathbf{L}_B ثابت است ولی آشکار است که جهت آن ثابت نیست، همان‌گونه که گلوله‌آونگ به اطراف نوسان می‌کند، \mathbf{L}_B مخروط سایه خورده در شکل ۱۳-۶ (ب) را جاروب می‌کند. مؤلفه z مربوط به \mathbf{L}_B



شکل ۱۳-۶

ثابت است، ولی مؤلفه افقی همراه با گلوله آونگ روی دایره حرکت می‌کند. نتایج دینامیکی این بحث را در مثال ۶-۶ خواهید دید.

۳-۶ گشتاور نیرو

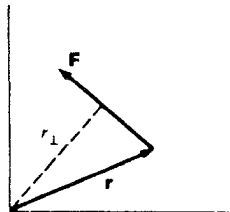
برای ادامه بحث در حرکت دورانی باید کمیت جدید گشتاور نیرو τ را معرفی کنیم. گشتاور نیرو \mathbf{F} که بر ذره‌ای در مکان \mathbf{r} اثر می‌کند، با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (2-6)$$

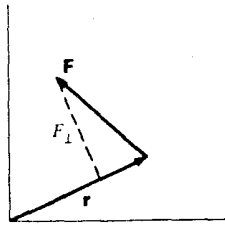
در بخش گذشته چندین راه محاسبه تکانه زاویه‌ای $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ را مورد بحث قرار دادیم. روشهای ریاضی که برای محاسبه حاصلضرب خارجی بیان کردیم را نیز می‌توانیم برای گشتاور نیرو $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ به کار ببریم. برای مثال داریم (شکل ۱۴-۶)

$$|\boldsymbol{\tau}| = |\mathbf{r}_\perp| |\mathbf{F}|$$

یا شکل ۱۵-۶



شکل ۱۴-۶



شکل ۱۵-۶

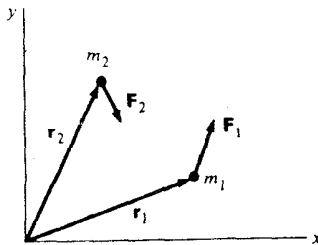
$$|\tau| = |r||F_{\perp}|$$

یا مستقیماً

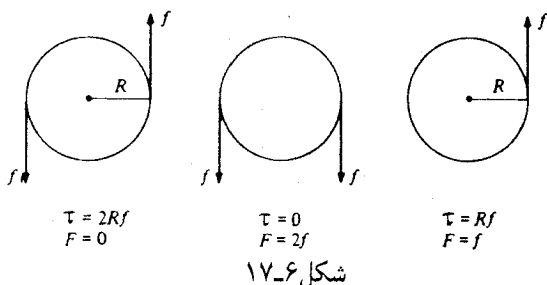
$$\tau = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

همچنین می‌توان "سوی دوران" را با استفاده از \mathbf{r} و \mathbf{F} به آن مربوط کرد. در شکل ۱۶-۶ فرض کنید تمام بردارها در صفحه xy هستند. گشتاور نیروی \mathbf{F}_1 وارد بر m_1 در امتداد مثبت محور z (خارج از صفحه کاغذ) است و گشتاور نیروی \mathbf{F}_2 وارد بر m_2 در امتداد منفی محور z (به داخل صفحه کاغذ) است. پی بردن به اینکه گشتاور نیرو و نیرو دو کمیت مختلف‌اند حائز اهمیت است. اولاً گشتاور نیرو به مبدأ انتخاب شده بستگی دارد در حالی که نیرو چنین نیست. ثانیاً از تعریف $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ دیده می‌شود که \mathbf{F} و τ همواره بر یکدیگر عمودند. در یک سیستم ممکن است گشتاور موجود باشد ولی براینده نیروها صفر باشد و برعکس نیرو می‌تواند موجود باشد ولی براینده گشتاور صفر باشد. در حالت کلی هم نیرو و هم گشتاور نیرو وجود خواهند داشت. این سه حالت در شکل‌های ۱۷-۶ نشان داده شده‌اند. (گشتاور نیروهای حول مراکز قرصهای محاسبه شده‌اند).

گشتاور نیرو از این نظر مهم است که به‌آهنگ تغییرات تکانه زاویه‌ای ارتباط نزدیک دارد



شکل ۱۶-۶



شکل ۱۷-۶

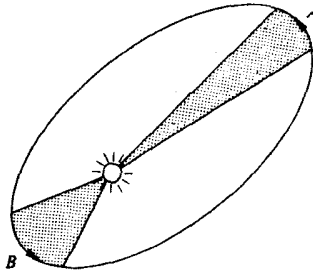
$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \\ &= \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} \right) + \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) \end{aligned}$$

ولی $(d\mathbf{r}/dt) \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0$ است، زیرا حاصلضرب خارجی دو بردار موازی صفر است. همچنین بنابر قانون دوم نیوتون $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ است. بنابراین جمله دوم $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \tau$ است و داریم

$$\tau = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (۳-۶)$$

معادله ۳-۶ نشان می‌دهد که اگر گشتاور نیرو صفر باشد، \mathbf{L} ثابت است و تکانه زاویه‌ای پایسته است. همان‌گونه که بحث و بررسی تکانه خطی و انرژی نشان می‌دهد، قوانین پایستگی ابزارهای نیرومندی هستند. اما از آنجا که فقط تکانه زاویه‌ای یک ذره تنها را در نظر داشته‌ایم، قانون پایستگی تکانه زاویه‌ای در حالت کلی نشان داده نشده است. در واقع معادله ۳-۶ مستقیماً از قانون دوم نیوتون نتیجه شده است. فقط وقتی در مورد سیستم‌های غیر نقطه‌ای صحبت می‌کنیم تکانه زاویه‌ای به‌عنوان یک مفهوم فیزیکی جدید ظاهر می‌شود. با این حال، حتی با همین زمینه، بررسی تکانه زاویه‌ای به‌ساده‌سازی شگفت‌انگیزی منجر می‌شود. دو مثال زیر این مطلب را نشان می‌دهند.

مثال ۳-۶ حرکت تحت اثر نیروی مرکزی و قانون مساحت‌های برابر: در سال ۱۶۰۹ کپلر قانون حرکت سیاره‌ای خود یعنی قانون مساحت‌های برابر را اعلام کرد: بدین مضمون که مساحت‌های جاروب شده به وسیله بردار شعاعی یک سیاره (از خورشید)، در یک زمان معین برای هر موقعیت سیاره، ثابت است. شکل ۱۸-۶ (بدون مقیاس) سطح جاروب شده به وسیله زمین در یک ماه را در دو فصل مختلف نشان می‌دهد. در B کوتاهی بردار شعاعی، وقتی که زمین نزدیک خورشید است، با زیاد شدن سرعت آن جبران می‌شود. حال نشان می‌دهیم که قانون مساحت‌های برابر مستقیماً با در نظر گرفتن تکانه زاویه‌ای نتیجه می‌شود، و فقط برای حرکت تحت اثر نیروی گرانشی نیست بلکه برای حرکت تحت اثر نیروی مرکزی نیز برقرار است.



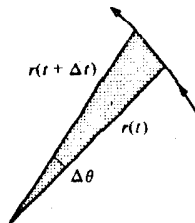
شکل ۱۸-۶

ذره‌ای را که تحت اثر نیرو مرکزی $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\hat{\mathbf{r}}$ حرکت می‌کند مطابق شکل ۱۹-۶ در نظر بگیرید، که $f(r)$ هر تابع اختیاری از r است. گشتاور نیروی وارد بر ذره، حول مبدأ برابر $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \times f(r)\hat{\mathbf{r}} = 0$ است. از این رو بزرگی و جهت تکانه زاویه‌ای ذره ($\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$) هر دو ثابت اند. یک نتیجه فوری این است که حرکت مقید به یک صفحه است، اگر چنین نبود جهت \mathbf{L} با زمان تغییر می‌کرد. حال ثابت می‌کنیم که مساحت جاروب شده ثابت است، نتیجه‌ای که مستقیماً به قانون مساحت‌های برابر منجر می‌شود.

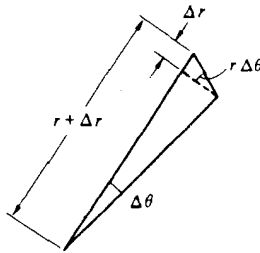
مکان ذره را در t و $t + \Delta t$ ، وقتی که مختصات قطبی آن به ترتیب (r, θ) و $(r + \Delta r, \theta + \Delta \theta)$ است در نظر بگیرید. سطح جاروب شده در شکل ۱۹-۶ سایه‌دار نشان داده شده است. همانطور که می‌بینید، برای مقادیر کوچک $\Delta \theta$ ، سطح ΔA برابر سطح مثلثی با قاعده $r + \Delta r$ و ارتفاع $r + \Delta \theta$ است

$$\begin{aligned} \Delta A &\approx \frac{1}{2}(r + \Delta r)(r \Delta \theta) \\ &= \frac{1}{2}r^2 \Delta \theta + \frac{1}{2}r \Delta r \Delta \theta \end{aligned}$$

آهنگ جاروب شدن سطح برابر است با



شکل ۱۹-۶



شکل ۲۰-۶

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(r^2 \frac{\Delta \theta}{\Delta t} + r \frac{\Delta \theta \Delta r}{\Delta t} \right) \\ &= \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

(مثلث کوچک با اضلاع $r\Delta\theta$ و Δr در حد هیچ نقشی ندارند.)

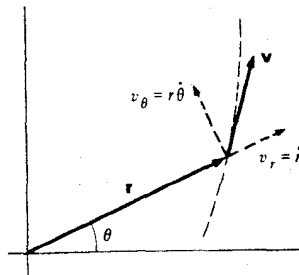
در مختصات قطبی سرعت ذره $\mathbf{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}$ است. تکانه زاویه‌ای آن چنین است. (شکل ۲۱-۶):

$$\mathbf{L} = (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = r\hat{r} \times m(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = mr^2 \dot{\theta} \hat{k}$$

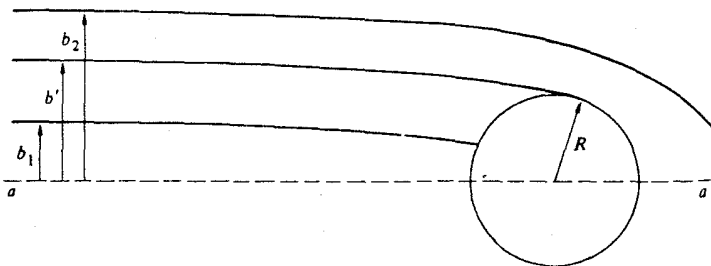
(توجه داشته باشید که $\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{k}$ است). بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \\ &= \frac{L_z}{2m} \end{aligned}$$

چون L_z برای هر نیروی مرکزی ثابت است، نتیجه می‌شود که dA/dt نیز ثابت است.



شکل ۲۱-۶



شکل ۲۲-۶

راه دیگر اثبات قانون مساحت‌های یکسان چنین است. برای یک نیروی مرکزی، $F_{\theta} = 0$ و در نتیجه $a_{\theta} = 0$ است. نتیجه آنکه $r a_{\theta} = 0$ است، ولی

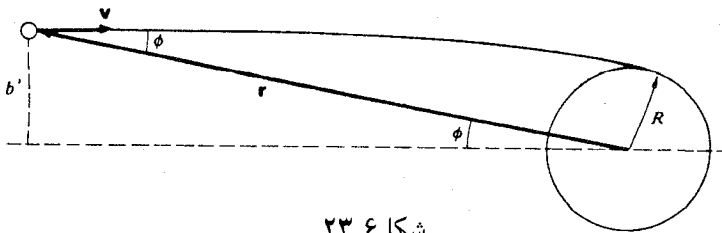
$$r a_{\theta} = r(2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) = (d/dt)(r^2 \dot{\theta}) = 2(d/dt)(dA/dt)$$

از این رو dA/dt ثابت است.

مثال ۴-۶ سطح مقطع گیراندازی یک سیاره: این مثال مسئله نشانه‌گیری یک فضای بی‌موتور را برای برخورد به یک سیاره دور دست مطرح می‌کند. اگر برای یکبار هم به وسیلهٔ تلسکوپ، سیاره‌ای را تماشا کرده باشید، می‌دانید که سیاره چون یک قرص به نظر می‌آید. مساحت قرص برابر πR^2 است، که R شعاع سیاره است. اگر نیروی گرانش نقشی نداشت، می‌بایست فضاپیما را به این سطح نشانه‌گیری کرد تا برخورد صورت گیرد. اما شرایط به علت وجود جاذبهٔ گرانشی بین سیاره و فضاپیما بیشتر مساعد است. گرانش موجب انحراف فضاپیما به سوی سیاره می‌شود، به طوری که برخی از مسیرهایی که خارج قرص سیاره را هدف قرار داده‌اند سرانجام به برخورد منتهی خواهند شد. در نتیجه سطح مقطع برای برخورد A_e بزرگتر از سطح هندسی $A_g = \pi R^2$ است. مسئله ما پیدا کردن A_e است. از اثر خورشید و سیارات دیگر در اینجا صرف‌نظر می‌کنیم، گرچه روشن است که در یک مأموریت فضایی واقعی باید به حساب آیند.

یک راه حل مسئله این است که حل کامل مدار فضاپیما را در میدان گرانشی سیاره پیدا کنیم. این امر مستلزم محاسبه طولانی است که در واقع لازم نیست؛ با استفاده از بایستگی انرژی و تکانه زاویه‌ای می‌توانیم جواب را در چند گام کوتاه پیدا کنیم.

شکل ۲۲-۶ چند مسیر ممکن فضاپیما را نشان می‌دهد. فرض شده است که فاصله بین نقطه پرتاب و سیاره هدف نسبت به R خیلی زیاد است، به طوری که مسیرهای مختلف قبل از اینکه نیروی گرانشی سیاره عمل کند، عملاً با هم موازی‌اند. خط aa موازی با مسیرهای اولیه است که از مرکز سیاره



شکل ۶-۲۳

می‌گذرد. فاصله b بین مسیر اولیه و خط aa پارامتر برخورد مسیر نامیده می‌شود. بزرگترین مقدار b که به ازای آن، مسیر فضاپیما با سیاره برخورد می‌کند در شکل با b' مشخص شده است. سطحی که مسیر برای برخورد باید از آن بگذرد $A_e = \pi(b')^2$ است. (اگر هیچ جاذبه‌ای نبود مسیرها خطوط راست بودند. در این حالت $A_e = \pi R^2 = A_g$ و $b' = R$ می‌شد.)
 برای یافتن b' توجه داریم که انرژی و تکانه زاویه‌ای فضاپیما هر دو پایسته‌اند. (تکانه خطی فضاپیما پایسته نیست. می‌دانید چرا؟)

انرژی جنبشی $\frac{1}{2}mv^2$ و انرژی پتانسیل $-mMG/r$ است. انرژی کل $E = K + V$ چنین است

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mMG\frac{1}{r}$$

تکانه زاویه‌ای حول مرکز سیاره چنین است (شکل ۶-۲۳)

$$L = -mrv \sin \phi$$

در ابتدا $r \rightarrow \infty$ و $v = v_0$ و $r \sin \phi = b'$ است. بنابراین داریم

$$L = -mb'v_0.$$

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

برخورد در نقطه‌ای که مدار نزدیکترین فاصله را دارد، یعنی $r = R$ انجام می‌گیرد. در غیر این صورت مسیر "برخورد خراشان" با سیاره نخواهد داشت. در نزدیکترین فاصله r و v بر هم عمودند. اگر $v(R)$ سرعت در این نقطه باشد، داریم

$$L = -mRv(R)$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2(R) - \frac{mMG}{R}$$

از آنجا که L و E پایسته‌اند، مقادیر آنها در $r = R$ باید با مقادیر آنها در $r = \infty$ برابر باشند. بنابراین

$$-mb'v = -mRv(R) \quad (۱)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv^2(R) - \frac{mMG}{R} \quad (۲)$$

از معادله ۱ نتیجه می‌شود $v(R) = v_b' / R$ و با جایگزین کردن آن در معادله ۲ به دست می‌آوریم

$$(b')^2 = R^2 \left(1 + \frac{mMG/R}{mv_b'^2/2} \right)$$

سطح مقطع برابر است با

$$\begin{aligned} A_e &= \pi(b')^2 \\ &= \pi R^2 \left(1 + \frac{mMG/R}{mv_b'^2/2} \right) \end{aligned}$$

همان‌گونه که انتظار داشتیم، سطح مقطع بزرگتر از سطح هندسی است. چون $mMG/R = -U(R)$ و $mv_b'^2/2 = E$ داریم

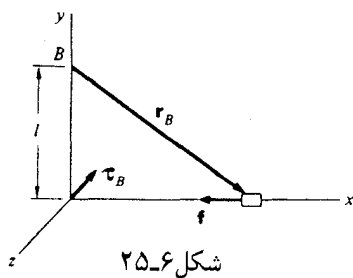
$$A_e = A_g \left(1 - \frac{U(R)}{E} \right)$$

در صورت نیاز، اگر گرانرش را "حذف" کنیم $U(R) \rightarrow 0$ و $A_g \rightarrow A_e$ میل می‌کند. به علاوه، چنانچه $E \rightarrow \infty$ ، $A_e \rightarrow A_g$ میل می‌کند که معنی آن این است که اگر از حالت سکون شروع کنید برخورد با سیاره حتمی است. برای حالت $E = 0$ فضاییما حتماً به روی سیاره خواهد افتاد. ■ اگر روی سیستمی گشتاور نیرو اعمال شود، همانطور که مثال زیر نشان می‌دهد، تکانه زاویه‌ای با رابطه $\tau = dL/dt$ تغییر می‌کند.

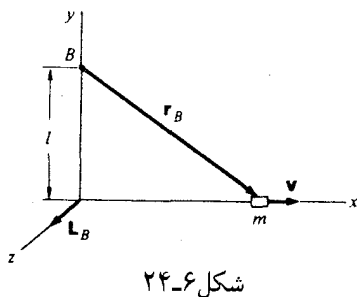
مثال ۵-۶ گشتاور نیروی وارد بر یک جسم لغزنده: برای تشریح ساده رابطه $\tau = dL/dt$ ، جسم کوچکی به جرم m را که روی محور x با سرعت $\mathbf{v} = v\hat{i}$ می‌لغزد مطابق شکل ۶-۲۴ در نظر بگیرید. تکانه زاویه‌ای جسم حول مبدأ B همانطور که در مثال ۱-۶ بحث شد چنین است

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_B &= m\mathbf{r}_B \times \mathbf{v} \\ &= mlv\hat{k} \end{aligned}$$

اگر جسم آزادانه بلغزد، \mathbf{v} تغییر نمی‌کند و برحسب انتظار \mathbf{L}_B ثابت می‌ماند زیرا هیچ گشتاور نیرویی بر



شکل ۲۵-۶



شکل ۲۴-۶

جسم وارد نمی شود.

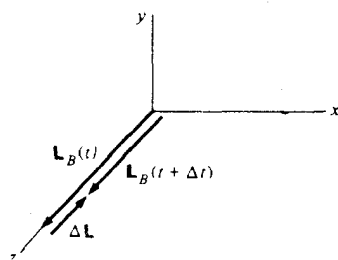
حال فرض کنید، سرعت جسم به واسطه وجود نیروی اصطکاک $f = -f\hat{i}$ کاهش می یابد (شکل ۲۵-۶). گشتاور نیروی وارد بر جسم حول مبدأ B چنین است

$$\begin{aligned}\tau_B &= \mathbf{r}_B \times \mathbf{f} \\ &= -lf\hat{k}\end{aligned}$$

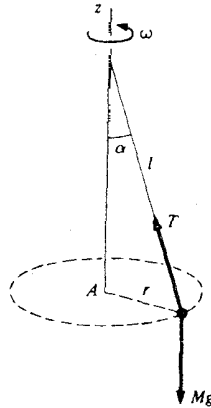
از معادله ۱ می بینیم، همانطور که سرعت جسم کم می شود، L_B در جهت مثبت z باقی می ماند ولی بزرگی آن کاهش می یابد. نتیجتاً تغییرات L_B یعنی ΔL_B همچنانکه در شکل ۲۶-۶ نشان داده شده در جهت منفی z قرار می گیرد. جهت ΔL_B همان جهت τ_B است. چون به طور کلی $\tau = dL/dt$ است، بردارهای τ و ΔL همواره موازی اند. از معادله ۱ داریم

$$\Delta L_B = ml \Delta v \hat{k} \quad (3)$$

که در آن $\Delta v < 0$ است. با تقسیم معادله ۳ به Δt و گرفتن حد وقتی $\Delta t \rightarrow 0$ ، داریم



شکل ۲۶-۶



شکل ۶-۲۷

$$\frac{d\mathbf{L}_B}{dt} = ml \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{k}} \quad (۴)$$

از قانون دوم نیوتون داریم $m \cdot dv/dt = -f$ و معادله ۴ برحسب انتظار چنین می‌شود

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_B}{dt} &= -lf\hat{\mathbf{k}} \\ &= \boldsymbol{\tau}_B \end{aligned}$$

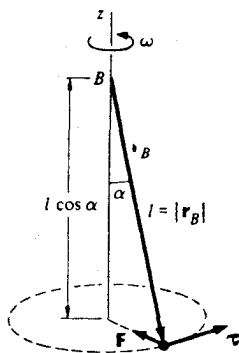
نکته مهمی که باید به خاطر داشت این است که چون $\boldsymbol{\tau}$ و \mathbf{L} به مبدأ انتخاب شده بستگی دارند، هنگام کاربرد رابطه $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$ برای هر دو از یک مبدأ مشترک باید استفاده شود، همانطور که ما در این مسئله متوجه آن بودیم.

تغییرات تکانه زاویه‌ای در این مثال، فقط در بزرگی آن بود نه در امتدادش، زیرا $\boldsymbol{\tau}$ و \mathbf{L} اتفاقاً روی یک خط بودند. در مثال زیر حالتی از آونگ مخروطی را مطالعه می‌کنیم که در آن بزرگی تکانه زاویه‌ای ثابت است ولی جهت آن به علت گشتاور نیروی وارد شده تغییر می‌کند. ■

مثال ۶-۶ گشتاور نیروی وارد بر آونگ مخروطی: در مثال ۶-۲ تکانه زاویه‌ای یک آونگ مخروطی را حول دو مبدأ مختلف حساب کردیم. حال تحلیل را با نشان دادن اینکه رابطه $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$ برقرار است، کامل می‌کنیم.

شکل ۶-۲۷ نیروهای وارد بر آونگ را نشان می‌دهد. T کشش نخ است. برای حرکت دایره‌ای یکنواخت، شتاب عمودی وجود ندارد و در نتیجه

$$T \cos \alpha - Mg = 0 \quad (۱)$$



شکل ۶-۲۸

نیروی کل \mathbf{F} روی گلولهٔ آونگ به طور شعاعی و رو به داخل است: $\mathbf{F} = -T \sin \alpha \hat{\mathbf{r}}$ ، گشتاور نیروی وارد بر M حول A چنین است

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_A &= \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

زیرا \mathbf{F} و \mathbf{r}_A هر دو در جهت $\hat{\mathbf{r}}$ است. بنابراین

$$\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = \mathbf{0}$$

و نتیجهٔ زیر را داریم

$$\mathbf{L}_A = \text{const.}$$

که همان است که قبلاً در مثال ۶-۲ دیده‌ایم.

اگر مبدأ را مطابق شکل ۶-۲۸ در نقطهٔ B انتخاب کنیم، مسئله کلاً فرق می‌کند. گشتاور نیرو $\boldsymbol{\tau}_B$ چنین است

$$\boldsymbol{\tau}_B = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\tau}_B| &= l \cos \alpha F = l \cos \alpha T \sin \alpha \\ &= Mgl \sin \alpha\end{aligned}$$

که در آن از معادلهٔ ۱ یعنی $T \cos \alpha = Mg$ استفاده کرده‌ایم. جهت $\boldsymbol{\tau}_B$ بر مسیر حرکت M مماس است

$$\tau_B = Mgl \sin \alpha \theta \quad (2)$$

که در آن θ بردار یکه مماسی در صفحه حرکت است.
مسئله ما نشان دادن صحت رابطه زیر است

$$\tau_B = \frac{d\mathbf{L}_B}{dt} \quad (3)$$

از مثال ۲-۶ می‌دانیم که \mathbf{L}_B دارای مقدار ثابت $Mlr\omega$ است. همانطور که شکل ۲۹-۶ نشان می‌دهد \mathbf{L}_B یک مؤلفه عمودی $L_z = Mlr\omega \sin \alpha$ و یک مؤلفه افقی شعاعی $L_r = Mlr\omega \cos \alpha$ دارد. با نوشتن $\mathbf{L}_B = \mathbf{L}_z + \mathbf{L}_r$ ، همان‌گونه که انتظار داریم می‌بینیم که \mathbf{L}_z ثابت است، زیرا τ_B مؤلفه عمودی ندارد. \mathbf{L}_r ثابت نیست؛ جهت آن همراه با گردش گلوله آونگ به اطراف تغییر می‌کند. اما بزرگی \mathbf{L}_r ثابت است. با چنین وضعیتی در بخش ۸-۱ مواجه بودیم. آنجا که نشان دادیم تنها راه اینکه یک بردار \mathbf{A} با بزرگی ثابت بتواند با زمان تغییر کند، این است که بچرخد، و اگر سرعت لحظه‌ای چرخش آن $d\theta/dt$ باشد، آنگاه داریم $|d\mathbf{A}/dt| = A d\theta/dt$. بابه کار بردن این رابطه می‌توانیم مستقیماً به دست آوریم

$$\left| \frac{d\mathbf{L}_r}{dt} \right| = L_r \omega$$

اما چون از این رابطه به دفعات استفاده خواهیم کرد، بگذارید باصرف اندکی وقت، آن را دوباره از طریق هندسی بدست آوریم.

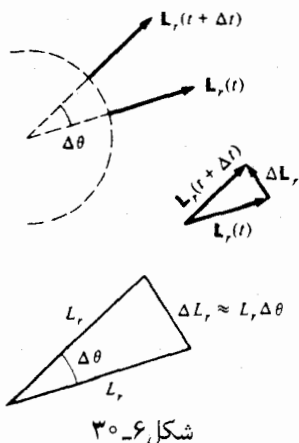
نمودارهای برداری شکل ۳۰-۶، \mathbf{L}_r را در زمانهای t و $t + \Delta t$ نشان می‌دهند. در فاصله زمانی Δt گلوله آونگ زاویه $\Delta\theta = \omega \Delta t$ را طی می‌کند و \mathbf{L}_r نیز به اندازه همان زاویه می‌چرخد. بزرگی تغییرات بردار $\Delta\mathbf{L}_r = \mathbf{L}_r(t + \Delta t) - \mathbf{L}_r(t)$ به طور تقریب با رابطه زیر داده می‌شود

$$|\Delta\mathbf{L}_r| \approx L_r \Delta\theta$$

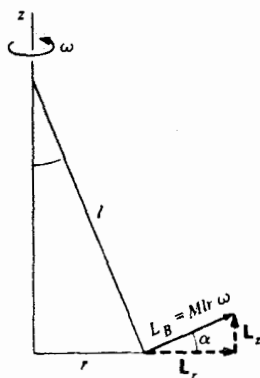
در حد $\Delta \rightarrow 0$ داریم

$$\begin{aligned} \frac{dL_r}{dt} &= L_r \frac{d\theta}{dt} \\ &= L_r \omega \end{aligned}$$

چون $L_r = Mlr\omega \cos \alpha$ است، داریم



شکل ۳۰-۶



شکل ۲۹-۶

$$\frac{dL_r}{dt} = Mlr\omega^2 \cos \alpha$$

$Mlr\omega^2$ همان نیروی شعاعی برابر با $T \sin \alpha$ است و چون $T \cos \alpha = Mg$ است، داریم

$$\frac{dL_r}{dt} = Mgl \sin \alpha$$

که با بزرگی τ_B در معادله ۲ توافق دارد. به علاوه ترسیم برداری نشان می‌دهد که dL_r/dt همانطور که انتظار داریم در جهت مماسی قرار می‌گیرد که موازی τ_B است.

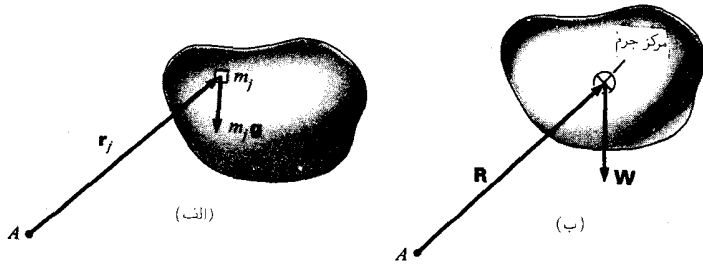
راه دیگر محاسبه dL_B/dt این است که L_B را به شکل برداری بنویسیم و از آن دیفرانسیل بگیریم

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_B &= (Mlr\omega \sin \alpha)\hat{\mathbf{k}} + (Mlr\omega \cos \alpha)\hat{\mathbf{r}} \\ \frac{d\mathbf{L}_B}{dt} &= Mlr\omega \cos \alpha \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} \\ &= Mlr\omega^2 \cos \alpha \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

که در آن از رابطه $d\hat{\mathbf{r}}/dt = \omega \hat{\boldsymbol{\theta}}$ استفاده کرده‌ایم.

تجسم تکانه زاویه‌ای به صورت بردار که می‌توان در فضا دوران کند، مهم است. این نوع استدلال اغلب در تحلیل حرکت اجسام صلب پیش می‌آید؛ در شناخت حرکت ژيروسکوپ در فصل ۷ به ویژه به مفید بودن آن پی خواهیم برد.

مثال ۷-۶ گشتاور نیروی گرانش: اغلب با سیستمهایی برخورد می‌کنیم که در آن گشتاور نیرو ناشی از گرانش وجود دارد. از جمله آونگ، فرفره بچه‌ها، و دودکش در حال سقوط قابل ذکرند. در حالات معمولی



شکل ۳۱-۶

که یک میدان گرانشی یکنواخت وجود دارد، گشتاور نیروی یک جسم حول هر نقطه برابر $\mathbf{R} \times \mathbf{W}$ است که \mathbf{R} برداری از آن نقطه به مرکز جرم و \mathbf{W} وزن آن است.

مسئله پیدا کردن گشتاور نیروی وارد بر یک جسم به جرم M حول نقطه A است وقتی نیروی اعمال شده ناشی از میدان گرانشی یکنواخت \mathbf{g} باشد (شکل ۳۱-۶ الف). می‌توان جسم را مجموعه‌ای از ذرات در نظر گرفت. گشتاور $\boldsymbol{\tau}_j$ مربوط به j امین ذره بدین قرار است

$$\boldsymbol{\tau}_j = \mathbf{r}_j \times m_j \mathbf{g}$$

که در آن \mathbf{r}_j بردار مکان j امین ذره از مبدأ A و m_j جرم آن است. گشتاور کل چنین است

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \Sigma \boldsymbol{\tau}_j \\ &= \Sigma \mathbf{r}_j \times m_j \mathbf{g} \\ &= (\Sigma m_j \mathbf{r}_j) \times \mathbf{g} \end{aligned}$$

از تعریف مرکز جرم داریم (شکل ۳۱-۶ ب)

$$\Sigma m_j \mathbf{r}_j = M\mathbf{R}$$

که \mathbf{R} بردار مکان مرکز جرم است. بنابراین

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= M\mathbf{R} \times \mathbf{g} \\ &= \mathbf{R} \times M\mathbf{g} \\ &= \mathbf{R} \times \mathbf{W} \end{aligned}$$

نتیجه حاصل از این رابطه چنین است: برای اینکه جسمی در حال تعادل قرارگیرد، نقطه آویز باید در مرکز جرم آن باشد.

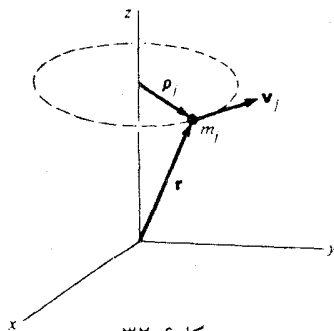
۴-۶ تکانه زاویه‌ای و محور ثابت دوران

مهمترین کاربرد تکانه زاویه‌ای در مکانیک کلاسیک استفاده از آن در تحلیل حرکت اجسام صلب است. حالت کلی حرکت جسم صلب در بردارنده دوران آزاد حول یک محور است. به عنوان مثال، حرکت یک چوگان بیس‌بال را در نظر بگیرید که به هوا پرتاب شده و در حال چرخش و معلق زدن است. تحلیل حالت کلی مستلزم تعدادی روابط پیچیده ریاضی است که آنها را به فصل دیگری موکول می‌کنیم، و در این فصل به حالت خاص ولی مهم دوران حول یک محور ثابت می‌پردازیم. منظور از محور ثابت این است که راستای محور دوران همواره در امتداد یک خط است و خود محور می‌تواند انتقال یابد. برای مثال، چرخ یک اتومبیل که بر محور آن متصل است، تا وقتی که اتومبیل روی یک خط راست حرکت می‌کند دارای محور ثابت دوران است. اگر اتومبیل دور بزند، چرخ باید حول یک محور عمودی بگردد، درحالی‌که حول محور اتومبیل نیز می‌چرخد؛ یعنی حرکت، دیگر دوران حول یک محور ثابت نیست. اگر چرخ از محور اتومبیل جدا شده و در جاده رها شود حرکت یقیناً دوران حول یک محور ثابت نیست. بدون از دست دادن کلیت مسئله، می‌توانیم محور ثابت دوران را در جهت z انتخاب کنیم. جسم دوران کننده، یک چرخ یا چوگان بیس‌بال یا هر چیز دیگر می‌تواند باشد، تنها محدودیت در صلب بودن آن است. یعنی اینکه شکل آن هنگام دوران تغییر نکند.

هنگامی که یک جسم صلب حول محوری دوران می‌کند، هر ذره جسم در فاصله ثابتی از محور باقی می‌ماند. اگر مبدأ دستگاه مختصات را روی محور بگیریم آنگاه برای هر ذره از جسم داریم $|\mathbf{r}| = \text{const.}$ تنها راه برای اینکه \mathbf{r} بتواند تغییر کند ولی $|\mathbf{r}|$ ثابت بماند این است که سرعت عمود بر \mathbf{r} باشد. بنابراین برای جسمی که حول محور z دوران می‌کند، داریم (شکل ۴-۶)

$$|\mathbf{v}_j| = |\dot{\mathbf{r}}_j| \quad (4-6)$$

$$= \omega \rho_j$$



شکل ۴-۶

که در آن ρ_j فاصله عمودی محور دوران تا ذره m_j از جسم صلب و ρ_j بردار متناظر با آن است. ω آهنگ دوران با سرعت زاویه‌ای است. چون محور دوران در جهت z است، داریم $\rho_j = (x_j^2 + y_j^2)^{1/2}$ [در این فصل و فصل بعدی علامت ρ را به نشانه فاصله عمودی محور دوران به کار خواهیم برد. توجه کنید که $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ فاصله از مبدأست.]

$L_z(j)$ ، تکانه زاویه‌ای ذره j ام جسم، چنین است

$$\mathbf{L}(j) = \mathbf{r}_j \times m_j \mathbf{v}_j$$

در این فصل فقط L_z ، مؤلفه تکانه زاویه‌ای روی محور دوران، مورد نظر است. چون \mathbf{v}_j در صفحه xy قرار دارد، داریم

$$L_z(j) = m_j v_j \times (\text{فاصله از محور } z) = m_j v_j \rho_j$$

با استفاده از رابطه ۴-۶، $v_j = \omega \rho_j$ خواهیم داشت

$$L_z(j) = m_j \rho_j^2 \omega$$

L_z مؤلفه z تکانه کل جسم، مجموع تک تک مؤلفه‌های z است. یعنی

$$\begin{aligned} L_z &= \sum_j L_z(j) \\ &= \sum m_j \rho_j^2 \omega \end{aligned} \quad (5-6)$$

که عمل جمع تمام ذرات جسم را در بر می‌گیرد. ω را برای تمام جسم ثابت گرفته‌ایم؛ می‌توانید بگویید چرا؟

معادله ۵-۶ می‌تواند چنین نوشته شود

$$L_z = I \omega \quad (6-6)$$

که در آن

$$I \equiv \sum_j m_j \rho_j^2 \quad (7-6)$$

I کمیتی هندسی است که گشتاور لختی نامیده می‌شود. I هم به توزیع جرم جسم و هم به محل محور دوران بستگی دارد. (در فصل بعد هنگام بحث در مورد حرکت جسم صلب غیر مقید تعریف کلی‌تری

از I ارائه خواهیم کرد. برای ماده‌ای با توزیع پیوسته می‌توان عمل جمع روی ذرات مادی را با انتگرال روی جزء جرمهای دیفرانسیلی تعویض کرد. در این حالت داریم

$$\sum_j m_j \rho_j^2 \rightarrow \int \rho^2 dm$$

$$\begin{aligned} I &= \int \rho^2 dm \\ &= \int (x^2 + y^2) dm \end{aligned}$$

برای محاسبه چنین انتگرالی عموماً جزء جرم dm را با عبارت چگالی (جرم واحد حجم) w (در محل dm) ضرب در حجم dV که به وسیله dm اشغال شده جایگزین می‌کنند

$$dm = w dV$$

(اغلب ρ را برای چگالی به کار می‌برند، ولی این کار در اینجا موجب اشتباه می‌شود.) می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} I &= \int \rho^2 dm \\ &= \int (x^2 + y^2) w dV \end{aligned}$$

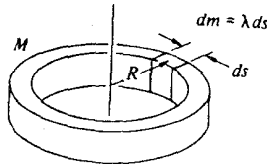
همچنانکه مثال زیر نشان می‌دهد، برای شکل‌های ساده‌ای که تقارنهایی از درجات بالا دارند، محاسبه گشتاور لختی آسان است.

مثال ۸-۶ گشتاور لختی چند جسم ساده: (الف) محاسبه گشتاور لختی حلقه نازک یکنواختی به جرم M و شعاع R حول محوری عمود بر سطح حلقه که از مرکز آن می‌گذرد. گشتاور لختی حول یک محور چنین است

$$I = \int \rho^2 dm$$

چون حلقه نازک است. مطابق شکل ۳۳-۶ داریم $dm = \lambda ds$ که در آن $\lambda = M / 2\pi R$ جرم واحد طول حلقه است. تمام نقاط روی حلقه به فاصله R از محور هستند به طوری که $\rho = R$ است و داریم

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi R} R^2 \lambda ds \\ &= R^2 \left(\frac{M}{2\pi R} \right) s \Big|_0^{2\pi R} \end{aligned}$$



شکل ۳۳-۶

$$= MR^2$$

(ب) قرصی به جرم M و شعاع R که محور آن بر صفحه قرص عمود است و از مرکز آن می‌گذرد (شکل ۳۴-۶ الف). می‌توانیم قرص را به یک سری از حلقه‌های نازک به شعاع ρ و به پهنای $d\rho$ و گشتاور

لختی dI تقسیم کنیم (شکل ۳۴-۶ ب). آنگاه داریم $I = \int dI$.

مساحت یک حلقه نازک برابر $dA = 2\pi\rho d\rho$ است و جرم آن چنین است

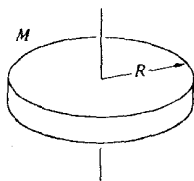
$$\begin{aligned} dm &= M \frac{dA}{A} = \frac{M 2\pi\rho d\rho}{\pi R^2} \\ &= \frac{2M\rho d\rho}{R^2} \end{aligned}$$

$$dI = \rho^2 dm = \frac{2M\rho^3 d\rho}{R^2}$$

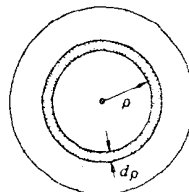
$$\begin{aligned} I &= \int_0^R \frac{2M\rho^3 d\rho}{R^2} \\ &= \frac{1}{2} MR^2 \end{aligned}$$

به منظور نشان دادن کلی‌ترین راه حل، این مسئله را همچنین به وسیله انتگرال دوگانه حل می‌کنیم

$$I = \int \rho^2 dm$$

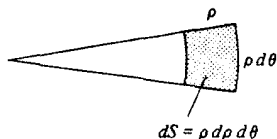


(الف)



(ب)

شکل ۳۴-۶



شکل ۳۵-۶

$$= \int \rho^2 \sigma dS$$

که σ واحد سطح است. برای قرص یکنواخت داریم $\sigma = M/\pi R^2$. واضح است که مختصات قطبی بهترین انتخاب است. در مختصات قطبی دو بعدی داریم (شکل ۳۵-۶)

$$dS = \rho d\rho d\theta$$

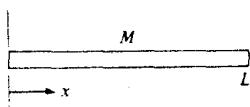
پس

$$\begin{aligned} I &= \int \rho^2 \sigma dS \\ &= \left(\frac{M}{\pi R^2} \right) \int \rho^2 dS \\ &= \left(\frac{M}{\pi R^2} \right) \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho^2 \rho d\rho d\theta \\ &= \left(\frac{2M}{R^2} \right) \int_0^R \rho^3 d\rho \\ &= \frac{1}{2} MR^2 \end{aligned}$$

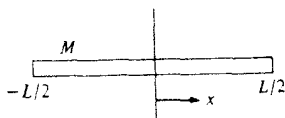
که همان نتیجه قبلی است.

ج) میله باریک یکنواخت به جرم M و طول L که محور آن عمود بر میله است و از وسط آن می‌گذرد (شکل ۳۶-۶)

$$\begin{aligned} I &= \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 dm \\ &= \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 dx \end{aligned}$$



شکل ۳۷-۶



شکل ۳۶-۶

$$= \frac{M}{L} \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-L/2}^{+L/2}$$

$$= \frac{1}{12} ML^3$$

د) میلهٔ باریک یکنواخت که محور آن عمود بر میله است و از یک انتهای آن می‌گذرد (شکل

(۳۷-۶)

$$I = \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3} ML^2$$

ه) کرهٔ یکنواخت به جرم M و شعاع R که محور آن از مرکز می‌گذرد نتیجه را بدون اثبات می‌آوریم.

شاید خودتان آن را بدست آورید.

$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

■

مثال ۹-۶ قضیهٔ محورهای موازی: قضیهٔ سادهٔ زیرگشتاور لختی (I) حول هر محوری را بدست می‌دهد، به شرط اینکه گشتاور لختی حول محور موازی را که از مرکز جرم می‌گذرد (I_0) بدانیم. اگر جرم جسم M و فاصلهٔ بین محورها l باشد. طبق این قضیه داریم

$$I = I_0 + Ml^2$$

برای اثبات، گشتاور لختی جسم را حول محوری که در راستای z انتخاب کرده‌ایم در نظر بگیرد

(شکل ۳۸-۶). بردار فاصلهٔ ذرهٔ j از محور z چنین است

$$\rho_j = x_j \hat{i} + y_j \hat{j}$$

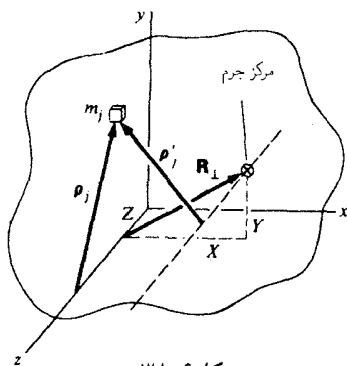
و

$$I = \sum m_j \rho_j^2$$

اگر مرکز جرم در $\mathbf{R} = X\hat{i} + Y\hat{j} + Z\hat{k}$ باشد، بردار عمود از محور z به مرکز جرم چنین

است

$$\mathbf{R}_\perp = X\hat{i} + Y\hat{j}$$



شکل ۳۸-۶

اگر بردار فاصله ذره z از محوری باشد که از مرکز جرم می‌گذرد، آنگاه گشتاور لختی حول مرکز جرم عبارت است از

$$I_0 = \sum m_j \rho'_j{}^2$$

از شکل پیدا است که

$$\rho_j = \rho'_j + \mathbf{R}_\perp$$

به طوری که

$$\begin{aligned} I &= \sum m_j \rho_j^2 \\ &= \sum m_j (\rho'_j + \mathbf{R}_\perp)^2 \\ &= \sum m_j (\rho'_j{}^2 + 2\rho'_j \cdot \mathbf{R}_\perp + R_\perp^2) \end{aligned}$$

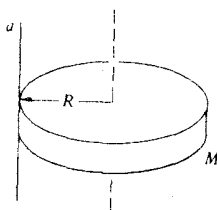
جمله وسط حذف می‌شود، زیرا

$$\begin{aligned} \sum m_j \rho'_j &= \sum m_j (\rho_j - \mathbf{R}_\perp) = M(\mathbf{R}_\perp - \mathbf{R}_\perp) \\ &= 0 \end{aligned}$$

اگر اندازه \mathbf{R}_\perp را به l نشان دهیم، آنگاه داریم

$$I = I_0 + Ml^2$$

مثلاً، در مثال ۸-۶ (ج) نشان دادیم که گشتاور لختی حول نقطه وسطش برابر $ML^2/12$ است. بنابراین



شکل ۶-۳۹

گشتاور لختی حول نقطه انتهایی آن به فاصله $L/2$ از مرکز جرم قرار دارد، چنین است

$$I_a = \frac{ML^2}{12} + M \left(\frac{L}{2} \right)^2$$

$$= \frac{ML^2}{3}$$

و این همان جوابی است که در مثال ۸-۶ (د) پیدا کردیم.

به همین ترتیب، گشتاور لختی یک قرص حول محوری مماس بر محیط و عمود بر صفحه قرص

چنین است (شکل ۶-۳۹)

$$I_a = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3MR^2}{2}$$

۵-۶ دینامیک دوران محض حول یک محور

در فصل ۳ نشان دادیم که اگر نیروی داخلی و نیروهای خارجی را که روی ذرات عمل می‌کنند از یکدیگر تفکیک کنیم، توضیح حرکت سیستم ذرات ساده می‌شود. نیروهای داخلی طبق قانون سوم نیوتون یکدیگر را خنثی می‌کنند، و تغییرات تکانه فقط در اثر نیروهای خارجی است. این موضوع به قانون پایستگی تکانه منجر می‌شود: یعنی تکانه یک سیستم منزوی ثابت است. در توصیف حرکت دورانی بهتر است همین روش را برای متمایز کردن گشتاور نیروهای خارجی و داخلی به‌کار گیریم. متأسفانه از روی قوانین نیوتون به هیچ وجه نمی‌توان اثبات کرد که مجموع گشتاور نیروی داخلی صفر است. اما، این یک واقعیت تجربی است که این گشتاورها همواره یکدیگر را خنثی می‌کنند، زیرا هرگز دیده نشده است که تکانه زاویه‌ای یک سیستم منزوی تغییر کند. این مطلب را در بخش ۷-۵ به تفصیل مورد بحث قرار

می‌دهیم و برای باقی مانده این فصل فرض می‌کنیم که فقط گشتاورهای نیروی خارجی موجب تغییر تکانه زاویه‌ای جسم صلب می‌شوند.

در این بخش محور دوران ثابت بدون حرکت انتقالی مانند حرکت یک درب حول لولاهایش یا چرخش پره یک پنکه را در نظر می‌گیریم. چنین حرکت‌هایی، وقتی محور دوران ساکن است، دوران محض نامیده می‌شود. دوران محض به دلیل سادگی آن و به دلیل اینکه به دفعات با آن مواجه می‌شویم مهم است.

فرض کنید جسمی با سرعت زاویه‌ای ω حول محور z دوران می‌کند. از معادله ۶-۶ مولفه z تکانه زاویه‌ای چنین است

$$L_z = I\omega$$

چون $\tau = dL/dt$ است، که در آن τ گشتاور نیروی خارجی است، داریم

$$\begin{aligned}\tau_z &= \frac{d}{dt}(I\omega) \\ &= I \frac{d\omega}{dt} \\ &= I\alpha\end{aligned}$$

که $\alpha = d\omega/dt$ شتاب زاویه‌ای نامیده می‌شود. که در این فصل فقط دوران حول محور z مورد نظر است، بنابراین شاخص z را حذف کرده و می‌نویسیم

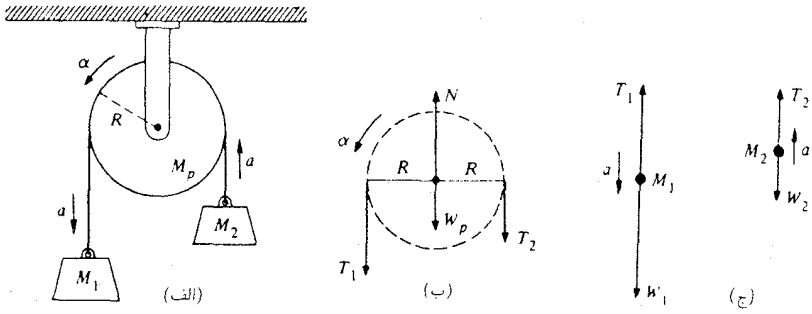
$$\tau = I\alpha \quad (۸-۶)$$

معادله ۸-۶، $F = ma$ را به خاطر می‌آورد. در حقیقت تشابه زیادی بین حرکت خطی و دورانی وجود دارد. این تشابه را می‌توان با محاسبه انرژی جنبشی یک جسم که دوران محض دارد بیشتر دریافت

$$\begin{aligned}K &= \sum \frac{1}{2} m_j v_j^2 \\ &= \sum \frac{1}{2} m_j \rho_j^2 \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} I \omega^2\end{aligned}$$

که در آن از معادلات $v_j = \rho_j \omega$ و $I = \sum m_j \rho_j^2$ استفاده کرده‌ایم.

روش حل مسائلی که حرکت دورانی تحت اثر گشتاور نیرو را در بر می‌گیرند، تعمیمی ساده از طرز حل حرکت انتقالی تحت اثر نیرو است. مثال زیر این مطلب را نشان می‌دهد.



شکل ۴۰-۶

مثال ۶-۱۰ ماشین آتوود با قرقره جرم‌دار: در اینجا می‌خواهیم شتاب a را در وضعیتی که در شکل ۴۰-۶ (الف) نشان داده شده است پیدا کنیم. اثر قرقره نیز در نظر گرفته شده است (شکل ۴۰-۶ ب). نمودار نیروها برای سه جسم مطابق شکل ۴۰-۶ (ج) است. نقطه اثر نیروها روی قرقره نشان داده شده است؛ این نمودارها هنگام محاسبه گشتاور نیروها مورد لزوم‌اند. بدیهی است که قرقره حول محورش دوران محض انجام می‌دهد. از این نظر این محور را، محور دوران در نظر می‌گیریم.

معادلات حرکت برای جرمها عبارت‌اند از

$$W_1 - T_1 = M_1 a$$

$$T_2 - W_2 = M_2 a$$

و برای قرقره‌ها چنین‌اند

$$\tau = T_1 R - T_2 R = I \alpha$$

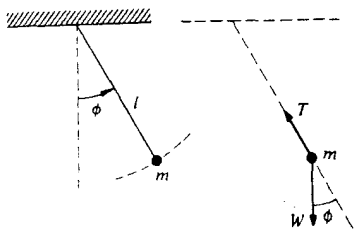
$$N - T_1 - T_2 - W_p = 0$$

توجه داشته باشید که در معادلات گشتاور نیرو، α در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت باید مثبت باشد که متناظر با این است که گشتاور نیرو مثبت به طرف خارج صفحه کاغذ است.

N نیروی وارد بر محور قرقره است، و معادله آخر به سادگی بیان می‌دارد که قرقره نمی‌افتد. چون نیاز به دانستن N نداریم، این معادله دخالتی در حل مسئله ندارد.

با فرض اینکه طناب لغزشی ندارد، ارتباط قیدی بین a و α وجود دارد. سرعت طناب برابر سرعت نقطه‌ای روی سطح چرخ است، $v = \omega R$ ، که از آن نتیجه می‌شود

$$a = \alpha R$$



شکل ۶-۴۱

اکنون می‌توانیم T_1 ، T_2 ، و α را حذف کنیم

$$W_1 - W_2 - (T_1 - T_2) = (M_1 + M_2)a$$

$$T_1 - T_2 = \frac{I\alpha}{R} = \frac{Ia}{R^2}$$

$$W_1 - W_2 - \frac{Ia}{R^2} = (M_1 + M_2)a$$

اگر قرقره، یک قرص ساده باشد، داریم

$$I = \frac{M_p R^2}{2}$$

و نتیجه چنین می‌شود

$$a = \frac{(M_1 - M_2)g}{M_1 + M_2 + M_p/2}$$

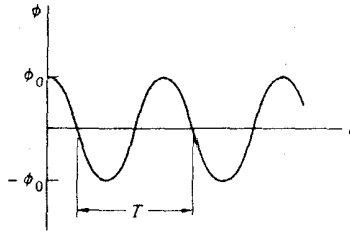
قرقره، جرم لختی کلی دستگاه را افزایش می‌دهد. ولی در مقایسه با جریمهای آویخته، جرم مؤثر قرقره فقط نصف جرم واقعی است.

۶-۶ آونگ فیزیکی

جرمی که از یک نخ آویزان می‌شود آونگی ساده است، مشروط بر آنکه ابعاد جسم قابل اغماض و جرم نخ صفر باشد. رفتار این آونگ را به عنوان مقدمه‌آشنایی با جسمی واقعیت‌ر (آونگ فیزیکی) که برای آن چنین مفروضاتی لازم نیست، بررسی می‌کنیم.

آونگ ساده

در شکل‌های ۶-۴۱، یک آونگ ساده و نمودار نیرو نشان داده شده است. نیروی مماسی برابر $-W \sin \phi$ است و داریم



شکل ۴۲-۶

$$ml \ddot{\phi} = -W \sin \phi$$

(ضمناً، با در نظر گرفتن دوران محض حول نقطهٔ آویز نتیجهٔ مشابهی به دست می‌آید: $I = ml^2$ و $\alpha = \ddot{\phi}$ و $\tau = -Wl \sin \phi$ ، بنابراین $ml^2 \ddot{\phi} = -Wl \sin \phi$). می‌توان معادلهٔ حرکت را به صورت زیر نوشت

$$l \ddot{\phi} + g \sin \phi = 0$$

این معادله برحسب توابع معمولی قابل حل نیست، اما اگر آونگ خیلی دورتر از حالت عمودی نوسان نکند، آنگاه $\phi \ll 1$ و می‌توان تقریب $\sin \phi \approx \phi$ را مورد استفاده قرار داد. پس داریم

$$l \ddot{\phi} + g\phi = 0$$

این معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده است (مثال ۲-۱۴). حل آن $\phi = A \sin \omega t + B \cos \omega t$ است که در آن $\omega = \sqrt{g/l}$ ، و A ، B مقادیر ثابت‌اند. اگر آونگ از حالت سکون با زاویهٔ ϕ_0 شروع کند، جواب چنین است

$$\phi = \phi_0 \cos \omega t$$

که یک حرکت تناوبی است، یعنی حرکت به‌طور یکسان تکرار می‌شود (شکل ۴۲-۶). زمان تناوب T ، یعنی زمانی که حرکت متوالیاً تکرار می‌شود، با رابطهٔ $\omega T = 2\pi$ داده می‌شود، یا

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\sqrt{g/l}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \end{aligned}$$

زاویهٔ بیشینهٔ ϕ_0 را دامنهٔ حرکت می‌نامند. زمان تناوب مستقل از دامنه است و به این دلیل است که آونگ برای منظم کردن آهنگ ساعت مناسب است. اما این کیفیت حرکت حاصل تقریب $\sin \phi \approx \phi$ است.

حل دقیق، که در یادداشت ۲-۶ در آخر فصل آمده است، نشان می‌دهد که زمان تناوب به مقدار کم با ازدیاد دامنه افزایش می‌یابد. مثال زیر نتیجه این محاسبه را نشان می‌دهد.

مثال ۱۱-۶ ساعت آونگی: همانطور که در معادله ۷ یادداشت ۲-۶ نشان داده شد، زمان تناوب یک آونگ برای دامنه‌های کوچک چنین داده می‌شود

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{16} \phi_0^2 + \dots \right) \quad (1)$$

که در آن

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

برای $\phi_0 \approx 0$ همان نتیجه قبلی را داریم یعنی $T = 2\pi \sqrt{l/g}$. جمله تصحیحی $1/16 \phi_0^2$ بسیار کوچک است: یک ساعت آونگی با مشخصات $T_0 = 2s$ و $l \approx 1m$ را در نظر بگیرید. اگر آونگ ۴ سانتیمتر در هر طرف نوسان کند داریم $\phi_0 = 4 \times 10^{-2} \text{ rad}$ و جمله تصحیحی برابر $10^{-4} = 1/16 \phi_0^2$ است. این خود هیچ اهمیتی ندارد، زیرا طول آونگ را می‌توان چنان تنظیم کرد که ساعت با هر آهنگ دلخواهی کار کند. اما دامنه به علت اصطکاک یا پدیده‌های دیگر ممکن است کمی تغییر کند. فرض کنید دامنه به اندازه $d\phi$ تغییر کند. با گرفتن دیفرانسیل از معادله ۱ داریم

$$dT = \frac{1}{8} T_0 \phi_0 d\phi$$

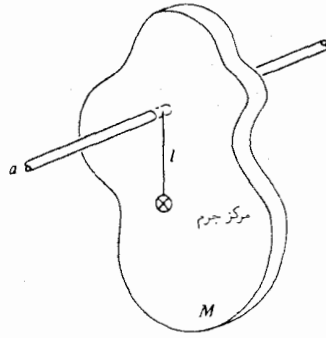
تغییرات نسبی T برابر است با

$$\frac{dT}{T_0} = \frac{1}{8} \phi_0 d\phi$$

اگر دامنه به اندازه 10° درصد تغییر کند، آنگاه $\phi_0 = 4 \times 10^{-2} \text{ rad}$ ، $d\phi = 10^{-5}$ و $dT/T_0 = 2 \times 10^{-5}$ که خطایی حدود ۲ ثانیه در روز ایجاد می‌کند.

آونگ فیزیکی

حال به آونگ فیزیکی نظیر آنچه در شکل ۳-۶ نشان داده شده می‌پردازیم. جسم نوسان کننده هر شکلی می‌تواند داشته باشد. جرم آن M و مرکز جرم آن به فاصله l از نقطه آویز است. کمیت دیگری که به آن احتیاج داریم گشتاور لختی I_a حول نقطه آویز است. حرکت این جسم دوران محض حول نقطه آویز است. با انتخاب محور دوران در نقطه آوین، متوجه می‌شویم که گشتاور نیرو منحصراً ناشی از گرانش است و داریم



شکل ۴۳-۶

$$-lW \sin \phi = I_a \ddot{\phi}$$

با اعمال تقریب مربوط به زوایای کوچک داریم (شکل ۴۴-۶)

$$I_a \ddot{\phi} + Mlg\phi = 0$$

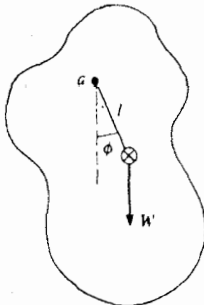
که این همان معادله حرکت هماهنگ ساده با جواب زیر است

$$\phi = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

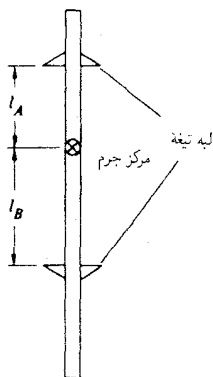
$$\omega = \sqrt{Mlg/I_a}$$

می‌توان با معرفی کمیتی به نام شعاع ژیراسیون آن را به صورت ساده‌تری نوشت. اگر گشتاور لختی جسمی حول گرانیگاه I_0 باشد، شعاع ژیراسیون k چنین تعریف می‌شود

$$I_0 = Mk^2 \quad \text{یا} \quad k = \sqrt{\frac{I_0}{M}}$$



شکل ۴۴-۶



شکل ۴۵-۶

به عنوان مثال، برای حلقه‌ای به شعاع R داریم $k = R$ و برای یک قرص $k = \sqrt{1/2}R$ و برای کره توپر $k = \sqrt{2/5}R$.

از قضیهٔ محورهای موازی داریم

$$I_a = I_o + Ml^2$$

$$= M(k^2 + l^2)$$

به طوری که

$$\omega = \sqrt{\frac{gl}{k^2 + l^2}}$$

برای آونگ ساده $k = 0$ است و مثل گذشته $\omega = \sqrt{g/l}$ به دست می‌آید.

مثال ۶-۱۲ آونگ کاتر: بین قرنهای شانزدهم و بیستم، دقیقترین اندازه‌گیری g با استفاده از آزمایشهای آونگ به دست آمد. روش کار به این دلیل جالب است که تنها کمیت‌های مورد نیاز یکی زمان تناوب است که می‌توان با دقت زیاد به طریق شمردن تعداد زیادی نوسان معلوم کرد، و دیگر ابعاد آونگ است. برای اندازه‌گیریهای بسیار دقیق، دقت در تعیین مرکز جرم آونگ و شعاع ژیراسیون آن، عامل محدودکننده است که بعد از ابداع هوشمندانهٔ هانری کاتر، مخترع، نقشه‌بردار، و فیزیکدان انگلیسی قرن نوزدهم، این مشکل حل شد.

آونگ کاتر مطابق شکل ۴۵-۶ دارای دو تیغه است: آونگ می‌تواند از هر دوی آن به حال تعلیق درآید. اگر تیغه‌ها به فواصل l_A و l_B از مرکز جرم باشند، آنگاه زمان تناوب برای نوسانهای کوچک برای هر یک بترتیب چنین است

$$T_A = 2\pi \left(\frac{k^2 + l_A^2}{gl_A} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$T_B = 2\pi \left(\frac{k^2 + l_B^2}{gl_B} \right)^{\frac{1}{2}}$$

l_A و l_B طوری تنظیم می‌شوند که زمان تناویشان یکسان شود: یعنی $T_A = T_B = T$. آنگاه می‌توان T را حذف کرد و برای k^2 جواب زیر را به دست آورد

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{l_A l_B^2 - l_B l_A^2}{l_B - l_A} \\ &= l_A l_B \end{aligned}$$

آنگاه داریم

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \left(\frac{l_A l_B + l_A^2}{gl_A} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2\pi \left(\frac{l_A + l_B}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

یا

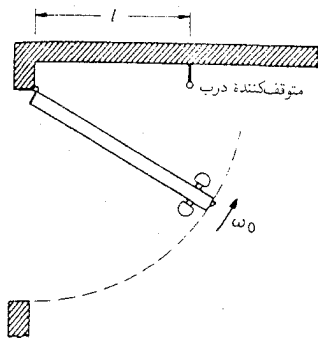
$$g = 4\pi^2 \left(\frac{l_A + l_B}{T^2} \right)$$

زیبایی ابداع کاتر در این است که تنها کمیت هندسی لازم $l_A + l_B$ ، یعنی فاصله بین تیغه‌هاست که می‌توان با دقت زیاد آن را اندازه‌گیری کرد و دانستن محل مرکز جرم لازم نیست. ■

مثال ۶-۱۳ متوقف‌کنندهٔ درب: برخورد شدید یک درب با متوقف‌کننده‌اش ممکن است موجب خراب شدن لولاهای آن شود. اما، با انتخاب مناسب l می‌توان نیروی برخورد وارد بر لولاها را از بین برد (شکل ۶-۴۶).

نیروهای وارد بر درب هنگام برخورد، مطابق شکل ۶-۴۷، عبارت‌اند از F_d ناشی از متوقف‌کننده و F' و F'' از طرف لولاها. F'' نیروی کوچک و شعاعی است که شتاب مرکزگرای درب در حال چرخش را تأمین می‌کند. F' و F_d نیروهای بزرگی هستند که موجب توقف درب هنگام خوردن آن به متوقف‌کننده می‌شوند. نیروهای وارد بر لولا برابر و مختلف‌العلامه با F' و F'' هستند. برای کمینه کردن فشار روی لولا، نیروی F' را تا آنجا که ممکن است باید کوچک کنیم.

به‌منظور نوشتن عبارتی برای F' ، تکانه زاویه‌ای درب حول لولاهای آن و تکانه خطی مرکز جرم آن را



شکل ۴۶-۶

به نوبت در نظر می‌گیریم.

چون $dL = \tau dt$ است، داریم

$$L_{\text{کل}} - L_{\text{اولیه}} = \int_{t_i}^{t_f} \tau dt$$

تکانه زاویه‌ای اولیه‌ی درب برابر $I\omega_0$ است که I گشتاور لختی بین لولاهاست. چون درب متوقف می‌شود $L_{\text{کل}} = 0$ است. گشتاور نیروی وارد بر درب هنگام برخورد برابر $\tau = -lF_d$ است، و به دست می‌آوریم

$$I\omega_0 = l \int F_d dt \quad (۱)$$

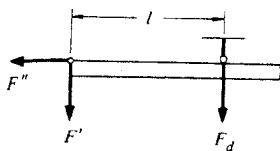
که انتگرال در زمان برخورد است.

حرکت مرکز جرم از معادله‌ی زیر پیروی می‌کند (شکل ۴۸-۶)

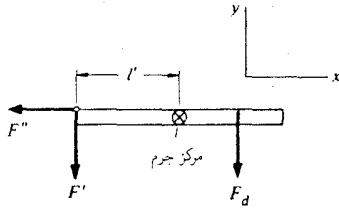
$$\mathbf{P}_{\text{کل}} - \mathbf{P}_{\text{اولیه}} = \int \mathbf{F} dt$$

که در آن \mathbf{F} نیروی کل است. تکانه در جهت y بلافاصله قبل از برخورد برابر $MV_y = Ml'\omega_0$ است. که

l' فاصله لولاتا مرکز جرم درب است. $P_{\text{کل}} = 0$ است و مؤلفه‌ی y مربوط به \mathbf{F} برابر $F_y = -(F' + F_d)$ است. بنابراین داریم



شکل ۴۷-۶



شکل ۶-۴۸

$$Ml'\omega_0 = \int (F' + F_d) dt \quad (2)$$

بنابراین معادله ۱ داریم $\int F_d dt = I\omega_0/l$ که با جایگزین کردن آن در معادله ۲ نتیجه می‌شود

$$\int F' dt = \left(Ml' - \frac{I}{l} \right) \omega_0$$

با انتخاب

$$l = \frac{I}{Ml'} \quad (3)$$

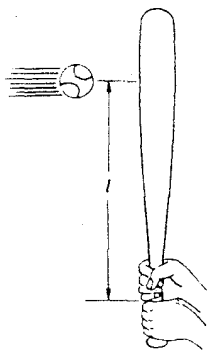
نیروی برخورد برابر صفر می‌شود. اگر درب یکنواخت و به پهنای w باشد، آنگاه $I = Mw^2/3$ و $l = w/2$ و در نتیجه $l = 2/3w$ است.

ضمناً متوقف‌کننده درب بایستی هم ارتفاع با مرکز جرم باشد، نه اینکه در کف اتاق نصب شود. در غیر این صورت نیروهای برخورد برای دولولا یکسان نیست و درب، تمایل به دوران حول محوری افقی خواهد داشت، که این پدیده را به حساب نیاورده‌ایم.

فاصله l در معادله ۳ نقطه‌ای به نام مرکز ضربه را مشخص می‌کند (شکل ۶-۴۹). هنگام ضربه زدن به توپ بیس‌بال، مهم است که ضربه را در محل مرکز ضربه وارد کرد تا از واکنش روی دست ضربه‌زننده و درد ناشی از آن جلوگیری شود. ■

۶-۷ حرکت توأم انتقالی و دورانی

اغلب حرکت انتقالی و دورانی، مانند غلتیدن یک استوانه، به طور همزمان رخ می‌دهد. برخلاف مورد دوران محض که در بخش ۶-۵ دیدیم، هیچ محور آشکاری وجود ندارد. مسئله تا زمانی که قضیه بخش ۶-۱ را به کارگیریم، یعنی حرکت کلی را ترکیبی از حرکت انتقالی مرکز جرم به علاوه دوران حول مرکز جرم توضیح دهیم، غیر قابل حل به نظر می‌آید. با استفاده از مختصات مرکز جرم، به دست آوردن عباراتی ساده برای تکانه زاویه‌ای و گشتاور نیرو و نیز پیدا کردن معادلات دینامیکی ارتباط‌دهنده آنها به آسانی



شکل ۶-۴۹

ممکن است.

چون گذشته، فقط حرکتی که محور دوران آن موازی محور z باقی می ماند در نظر خواهیم گرفت. نشان خواهیم داد که L_z یعنی مؤلفه z تکانه زاویه ای جسم را می توان به شکل مجموع دو جمله نوشت. L_z عبارت است از تکانه زاویه ای $I\omega$ ناشی از دوران جسم حول مرکز جرم، به علاوه تکانه $(\mathbf{R} \times M\mathbf{V})_z$ ناشی از حرکت مرکز جرم نسبت به مبدأ دستگاه مختصات لخت:

$$L_z = I\omega + (\mathbf{R} \times M\mathbf{V})_z$$

که در آن \mathbf{R} بردار مکان مرکز جرم و $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$ است.

برای پیدا کردن تکانه زاویه ای، جسم را به مثابه مجموعه ای از N ذره با جرمهای $m_j (j = 1, \dots, N)$ و با بردار مکانهای \mathbf{r}_j نسبت به یک دستگاه مختصات لخت در نظر می گیریم. تکانه زاویه ای جسم می تواند به شکل زیر نوشته شود

$$\mathbf{L} = \sum_{j=1}^N (\mathbf{r}_j \times m_j \dot{\mathbf{r}}_j) \quad (۹-۶)$$

بردار مکان مرکز جرم جسم \mathbf{R} به این صورت است

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_j \mathbf{r}_j}{M} \quad (۱۰-۶)$$

که در آن M جرم کل است. در مختصات مرکز جرم \mathbf{r}'_j می تواند مانند بخش ۳-۳ معرفی شود

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_j$$

حذف \mathbf{r}_j از معادله ۹-۶ به دست می دهد

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \Sigma(\mathbf{r}_j \times m_j \dot{\mathbf{r}}_j) \\ &= \Sigma(\mathbf{R} + \mathbf{r}'_j) \times m_j(\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_j) \\ &= \mathbf{R} \times \Sigma m_j \dot{\mathbf{R}} + \Sigma m_j \mathbf{r}'_j \times \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{R} \times \Sigma m_j \dot{\mathbf{r}}'_j + \Sigma m_j \mathbf{r}'_j \times \dot{\mathbf{r}}'_j \end{aligned}$$

این عبارت پردردسر به نظر می‌رسد، ولی می‌توان نشان داد که هر دو جمله وسط برابر صفرند و جمله اول و آخر دارای معنای فیزیکی ساده‌ای هستند. با شروع از جمله دوم و استفاده از معادله ۶-۱۰ داریم

$$\begin{aligned} \Sigma m_j \mathbf{r}'_j &= \Sigma m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{R}) \\ &= \Sigma m_j \mathbf{r}_j - M\mathbf{R} \\ &= 0 \end{aligned}$$

جمله سوم نیز صفر است، زیرا $\Sigma m_j \dot{\mathbf{r}}'_j$ معادله صفر است و برای مشتق زمانی آن هم داریم $\Sigma m_j \dot{\mathbf{r}}'_j = 0$.

جمله اول چنین است

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \times \Sigma m_j \dot{\mathbf{R}} &= \mathbf{R} \times M\dot{\mathbf{R}} \\ &= \mathbf{R} \times M\mathbf{V} \end{aligned}$$

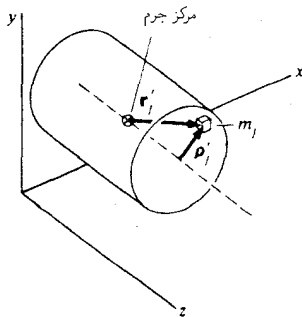
که در آن $\mathbf{V} \equiv \dot{\mathbf{R}}$ سرعت مرکز جرم نسبت به دستگاه لخت است. در این صورت عبارت مربوط به \mathbf{L} چنین می‌شود

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \Sigma \mathbf{r}'_j \times m_j \dot{\mathbf{r}}'_j \quad (۱۱-۶)$$

جمله اول معادله ۱۱-۶ بیانگر تکانه زاویه‌ای مربوط به حرکت مرکز جرم است. جمله دوم تکانه زاویه‌ای مربوط به حرکت حول مرکز جرم را بیان می‌کند. تنها راهی که ذرات یک جسم صلب می‌توانند نسبت به مرکز جرم حرکت کنند، این است که کل جسم دوران کند. بررسی جمله دوم را برای محور دوران اختیاری در فصل بعد انجام خواهیم داد. اما در این فصل خود را به محور دوران ثابت حول محور z مقید کرده‌ایم. مؤلفه z از معادله ۱۱-۶ چنین است

$$L_z = (\mathbf{R} \times M\mathbf{V})_z + (\Sigma \mathbf{r}'_j \times m_j \dot{\mathbf{r}}'_j)_z \quad (۱۲-۶)$$

برای دوران حول محور z جمله دوم $(\Sigma \mathbf{r}'_j \times m_j \dot{\mathbf{r}}'_j)_z$ ، با توجه به اینکه چنین عبارتی را قبلاً در بخش ۶-۴ داشتیم، ساده‌تر می‌شود. سرعت زاویه‌ای جسم حول مرکز جرم $\omega \hat{\mathbf{k}}$ است و چون مبدأ \mathbf{r}'_j



شکل ۶-۵

مرکز جرم است، جمله دوم با آنچه در بخش ۶-۴ در حالت دوران محض مطالعه کردیم یکسان است.

$$\begin{aligned} (\Sigma m_j \mathbf{r}'_j \times \dot{\mathbf{r}}'_j)_z &= (\Sigma m_j \rho'_j \times \dot{\rho}'_j)_z \\ &= \Sigma m_j \rho'^2_j \omega = I_0 \omega \end{aligned}$$

که در آن برداری است که از m_j گذشته و عمود بر محوری است که به موازات z از مرکز جرم می‌گذرد (شکل ۶-۵). $I_0 = \Sigma m_j \rho'^2_j$ گشتاور لختی جسم حول همین محور است.

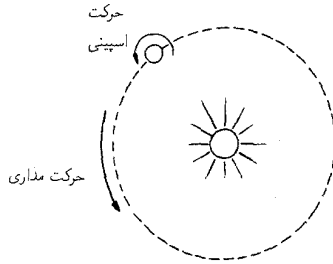
با جمع‌بندی نتایج، داریم

$$L_z = I_0 \omega + (\mathbf{R} \times M\mathbf{V})_z \quad (۶-۱۳)$$

مطلبی را که در اول بخش ذکر شد، اثبات کردیم. تکانه زاویه‌ای یک جسم صلب برابر مجموع تکانه زاویه‌ای حول مرکز جرم آن و تکانه زاویه‌ای مرکز جرم نسبت به مبدأست. این دو اصطلاح اغلب بترتیب با کلمات اسپینی و مداری مشخص می‌شوند. حرکت زمین معنی این اصطلاح را بخوبی روشن می‌سازد. دوران شبانه‌روزی زمین حول محورش تکانه زاویه‌ای اسپینی را به وجود می‌آورد و دوران سالیانه آن حول خورشید باعث ایجاد تکانه زاویه‌ای مدار زمین حول خورشید می‌شود (شکل ۶-۵۱). یک خاصیت مهم تکانه زاویه‌ای اسپینی مستقل بودن آن از دستگاه مختصات است. در این معنی، اسپین یکی از خصایص ذاتی جسم است و تغییر دستگاه مختصات نمی‌تواند آن را حذف کند. درحالی‌که اگر مبدأ روی خط حرکت باشد تکانه زاویه‌ای مداری از بین می‌رود.

باید به خاطر داشت که معادله ۶-۱۳ حتی اگر مرکز جرم دارای شتاب باشد، نیز برقرار است، زیرا \mathbf{L} نسبت به یک دستگاه لخت محاسبه شده است.

مثال ۶-۱۴ تکانه زاویه‌ای یک چرخ غلتان: در این مثال معادله ۶-۱۳ را برای محاسبه تکانه زاویه‌ای



شکل ۵۱-۶

یک چرخ یکتواخت به جرم M و شعاع b به کار می‌بریم که به طور یکتواخت و بدون لغزش می‌غلتد (شکل ۵۲-۶). گشتاور لختی چرخ حول مرکز جرم برابر $I = \frac{1}{2}Mb^2$ و تکانه زاویه‌ای آن حول مرکز جرم چنین است

$$\begin{aligned} L_o &= -I_o \omega \\ &= -\frac{1}{2}Mb^2 \omega \end{aligned}$$

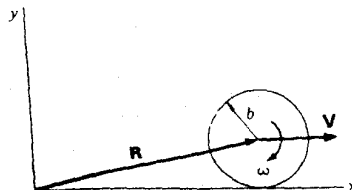
L_o موازی محور z است. علامت منفی نشان می‌دهد که L_o به طرف داخل صفحه و در جهت منفی z است.

اگر تکانه زاویه‌ای مرکز جرم چرخ را نسبت به مبدأ حساب کنیم، داریم

$$(\mathbf{R} \times M\mathbf{V})_z = -MbV$$

آنگاه تکانه زاویه‌ای حول مبدأ چنین می‌شود

$$\begin{aligned} L_z &= -\frac{1}{2}Mb^2 \omega - MbV \\ &= -\frac{1}{2}Mb^2 \omega - Mb^2 \omega \\ &= -\frac{3}{2}Mb^2 \omega \end{aligned}$$



شکل ۵۲-۶

که در آن از نتیجه $V = b\omega$ استفاده کردیم که برای چرخشی که غلتش بدون لغزش دارد برقرار است.

گشتاور نیرو نیز طبیعتاً به دو مؤلفه تقسیم می‌شود. گشتاور نیروی وارد بر جسم چنین است

$$\begin{aligned}\tau &= \sum \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_j \\ &= \sum (\mathbf{r}'_j + \mathbf{R}) \times \mathbf{f}_j \\ &= \sum (\mathbf{r}'_j \times \mathbf{f}_j) + \mathbf{R} \times \mathbf{F}\end{aligned}\quad (۱۴-۶)$$

که در آن $\mathbf{F} = \sum \mathbf{f}_j$ نیروی کل وارد شده است. جمله اول معادله ۱۴-۶ گشتاور نیروی حول مرکز جرم است که از نیروهای مختلف خارجی ناشی می‌شود، و جمله دوم گشتاور ناشی از کل نیروهای خارجی است که بر مرکز جرم عمل می‌کند. برای محور دوران ثابت داریم $\omega = \omega \hat{\mathbf{k}}$ و معادله ۱۴-۶ را می‌توان چنین نوشت

$$\tau_z = \tau_o + (\mathbf{R} \times \mathbf{F})_z \quad (۱۵-۶)$$

که در آن τ_o مؤلفه z گشتاور نیرو حول مرکز جرم است. ولی از معادله ۱۳-۶ برای L_z داریم

$$\begin{aligned}\frac{dL_z}{dt} &= I_o \frac{d\omega}{dt} + \frac{d}{dt} (\mathbf{R} \times M\mathbf{V})_z \\ &= I_o \alpha + (\mathbf{R} \times M\mathbf{a})_z\end{aligned}\quad (۱۶-۶)$$

با استفاده از $\tau_z = dL_z/dt$ و $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$ در معادلات ۱۵-۶ و ۱۶-۶، خواهیم داشت

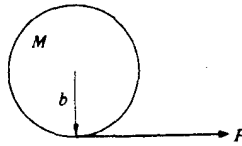
$$\begin{aligned}\tau_o + (\mathbf{R} \times \mathbf{F})_z &= I_o \alpha + (\mathbf{R} \times M\mathbf{a})_z \\ &= I_o \alpha + (\mathbf{R} \times \mathbf{F})_z\end{aligned}$$

بنابراین

$$\tau_o = I_o \alpha \quad (۱۷-۶)$$

بنابر معادله ۱۷-۶، حرکت دورانی حول مرکز فقط بستگی به گشتاور نیرو حول مرکز جرم دارد و مستقل از حرکت انتقالی است. به عبارت دیگر، معادله ۱۷-۶ حتی در حالتی که محور شتاب داشته باشد نیز صادق است.

این روابط هنگام استفاده بسیار طبیعی به نظر می‌آیند. قبل از این عمل، بحث را با امتحان انرژی



شکل ۵۳-۶

جنبشی تکمیل می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2} \sum m_j v_j^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum m_j (\dot{\rho}'_j + \mathbf{V})^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum m_j \dot{\rho}'_j{}^2 + \sum m_j \dot{\rho}'_j \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} \sum m_j V^2 \\
 &= \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} M V^2
 \end{aligned} \quad (18-6)$$

جمله اول مربوط به انرژی جنبشی اسپین است، در حالی که جمله آخر از حرکت مداری مرکز جرم ناشی می‌شود. خلاصه نتایج چنین است.

مثال ۱۵-۶ قرص روی یخ: قرصی به جرم M و شعاع b به وسیله نوار باریکی که دور آن پیچیده شده است، با نیروی ثابت F کشیده می‌شود. این قرص روی یخ بدون اصطکاک می‌لغزد (شکل ۵۳-۶). حرکت آن چگونه است؟

مسئله را با دو روش مختلف حل خواهیم کرد.

روش ۱: با تحلیل حرکت حول مرکز جرم داریم

$$\begin{aligned}
 \tau_o &= bF \\
 &= I \alpha
 \end{aligned}$$

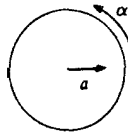
یا

$$\alpha = \frac{bF}{I}$$

شتاب مرکز جرم چنین است (شکل ۵۴-۶)

$$\alpha = \frac{F}{M}$$

روش ۲: دستگاه مختصاتی که مرکز آن، A ، در امتداد F باشد انتخاب می‌کنیم (شکل ۵۵-۶).



شکل ۶-۵۴

گشتاور نیرو حول A مطابق جدول ۶-۱ (ب) چنین است

$$\begin{aligned}\tau_z &= \tau_o + (\mathbf{R} \times \mathbf{F})_z \\ &= bF - bF = 0\end{aligned}$$

همچنانکه انتظار می‌رود، گشتاور نیرو صفر است و تکانه زاویه‌ای حول محور پایسته است. تکانه زاویه‌ای حول A مطابق جدول ۶-۱ (ب) چنین است

$$\begin{aligned}L_z &= I_o \omega + (\mathbf{R} \times m\mathbf{V})_z \\ &= I_o \omega - bMV\end{aligned}$$

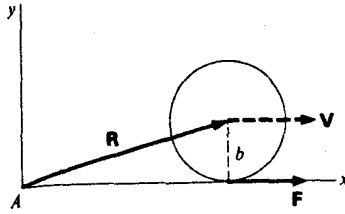
چون $dL_z/dt = 0$ است، داریم

$$0 = I_o \alpha - bMa$$

یا مثل مورد قبلی

جدول ۶-۱ خلاصه فرمولهای دینامیک حرکت با محور ثابت

الف) دوران محض حول یک محور بدون انتقال
$L = I\omega$
$\tau = I\alpha$
$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
ب) دوران و انتقال (شاخص ۰ نشانه مرکز جرم است)
$L_z = I_o \omega + (\mathbf{R} \times M\mathbf{V})_z$
$\tau_z = \tau_o + (\mathbf{R} \times \mathbf{F})_z$
$\tau_o = I_o \alpha$
$K = \frac{1}{2}I_o \omega^2 + \frac{1}{2}MV^2$



شکل ۵۵-۶

$$\alpha = \frac{bMa}{I_0} = \frac{bF}{I_0}$$

مثال ۱۶-۶ به پایین غلتیدن یک استوانه: یک استوانه یکنواخت به شعاع b و جرم M بدون لغزش روی صفحه‌ای با زاویه شیب θ می‌غلتد. شتاب آن را روی صفحه پیدا کنید. گشتاور لختی استوانه حول محور آن $I_0 = Mb^2/2$ است.

روش ۱: نیروهای وارد بر استوانه در شکل ۵۶-۶ نشان داده شده است. f نیروی اصطکاک است. تغییر مکان مرکز جرم در امتداد صفحه با رابطه

$$W \sin \theta - f = Ma$$

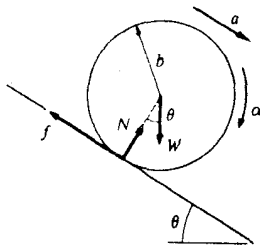
و دوران حول مرکز جرم با رابطه

$$bf = I_0 \alpha$$

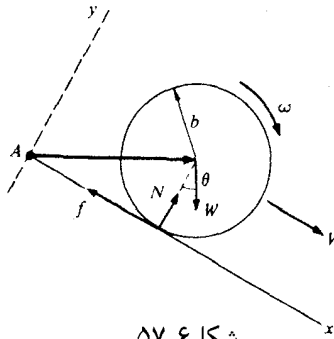
داده می‌شود. برای غلتش بدون لغزش داریم

$$a = b\alpha$$

اگر f را حذف کنیم، به دست می‌آوریم



شکل ۵۶-۶



شکل ۶-۵۷

$$W \sin \theta - I_o \frac{\alpha}{b} = Ma$$

با استفاده از $I_o = Mb^2/2$ و $\alpha = a/b$ به دست می‌آید

$$Mg \sin \theta - \frac{Ma}{2} = Ma$$

یا

$$a = \frac{2}{3}g \sin \theta$$

روش ۲: دستگاه مختصاتی که مبدأ آن A روی صفحه باشد انتخاب کنید (شکل ۶-۵۷). گشتاور

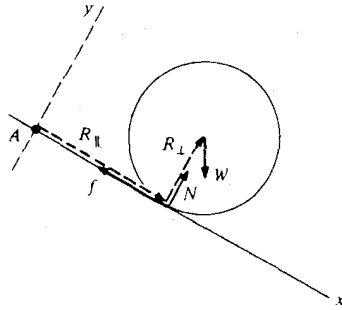
نیرو حول A چنین است

$$\begin{aligned} \tau_s &= \tau_o + (\mathbf{R} \times \mathbf{F})_z \\ &= -R_{\perp} f + R_{\perp} (f - W \sin \theta) + R_{\parallel} (N - W \cos \theta) \\ &= -bW \sin \theta \end{aligned}$$

زیرا $W \cos \theta = N$ و $R_{\perp} = b$ است. تکانه زاویه‌ای حول A چنین می‌شود

$$\begin{aligned} L_z &= -I_o \omega + (\mathbf{R} \times M\mathbf{V})_z \\ &= -\frac{1}{2}Mb^2\omega - Mb^2\omega \\ &= -\frac{3}{2}Mb^2\omega \end{aligned}$$

که در آن مطابق مثال ۶-۱۴ از رابطه $(\mathbf{R} \times M\mathbf{V})_z = -Mb^2\omega$ استفاده شد. چون $\tau_z = dL_z/dt$ است، داریم



شکل ۵۸-۶

$$bW \sin \theta = \frac{2}{3} Mb^2 \alpha$$

یا

$$\alpha = \frac{2}{3} \frac{W}{Mb} \sin \theta = \frac{2}{3} \frac{g \sin \theta}{b}$$

برای غلتش بدون لغزش $a = b\alpha$ است و داریم (شکل ۵۸-۶)

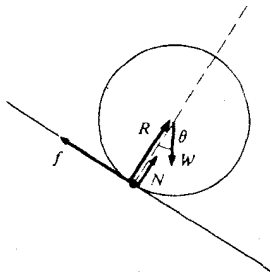
$$a = \frac{2}{3} g \sin \theta$$

توجه کنید که اگر مبدأ را در نقطه تماس اختیار می‌کردیم تحلیلها حتی از این هم بسیار ساده‌تر می‌شد. در این حالت τ_z را می‌توانیم مستقیماً از رابطه زیر محاسبه کنیم

$$\tau_z = \Sigma(\mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_j)_z$$

از آنجا که \mathbf{f} و \mathbf{N} در مبدأ عمل می‌کنند (شکل ۵۹-۶)، گشتاور نیرو فقط ناشی از W است و داریم

$$\tau_z = -bW \sin \theta$$



شکل ۵۹-۶

که همان است که در بالا به دست آوردیم. اما، با انتخاب این مبدأ، نیروهای نامعلوم \mathbf{N} و \mathbf{f} ظاهر نمی شوند.

قضیه کار-انرژی

در فصل ۴ قضیه کار-انرژی را برای یک ذره بیان کردیم

$$K_b - K_a = W_{ba}$$

که در آن داریم

$$W_{ba} = \int_{r_a}^{r_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

می توان قضیه را برای یک جسم صلب تعمیم داد و نشان داد که قضیه کار-انرژی به طور طبیعی به دو قسمت می شود، یکی به انرژی انتقالی و دیگری به انرژی دورانی مربوط می شود. برای استنتاج قسمت انتقالی، از معادله حرکت مرکز جرم شروع می کنیم

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \\ &= M \frac{d\mathbf{V}}{dt} \end{aligned}$$

کار انجام شده، وقتی که مرکز جرم به اندازه $d\mathbf{R} = \mathbf{V} dt$ جابه جایی یافته است چنین است

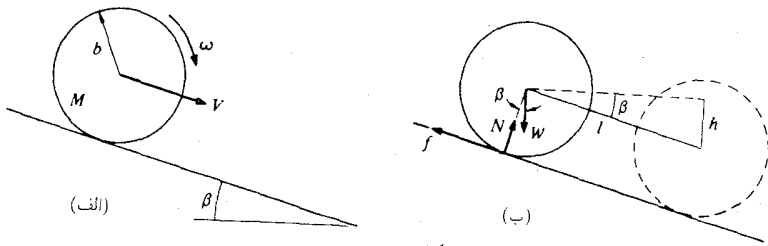
$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= M \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot \mathbf{V} dt \\ &= d\left(\frac{1}{2} MV^2\right) \end{aligned}$$

با انتگرال گیری چنین به دست می آید

$$\int_{R_a}^{R_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \frac{1}{2} MV_b^2 - \frac{1}{2} MV_a^2 \quad (19-6)$$

حال می خواهیم کار مربوط به انرژی جنبشی دورانی را تعیین کنیم. معادله حرکت برای محور دوران ثابت حول مرکز جرم چنین است

$$\begin{aligned} \tau_o &= I_o \alpha \\ &= I_o \frac{d\omega}{dt} \end{aligned}$$



شکل ۶-۶

انرژی جنبشی دورانی به شکل $\frac{1}{2}I_c \omega^2$ است، که اشاره به ضرب کردن معادله حرکت در $d\theta = \omega dt$ می‌کند

$$\begin{aligned} \tau_c d\theta &= I_c \frac{d\omega}{dt} \omega dt \\ &= d\left(\frac{1}{2}I_c \omega^2\right) \end{aligned}$$

با انتگرال‌گیری چنین به دست می‌آید

$$\int_{\theta_a}^{\theta_b} \tau_c d\theta = \frac{1}{2}I_c \omega_b^2 - \frac{1}{2}I_c \omega_a^2 \quad (6-20)$$

بدیهی است که انتگرال سمت چپ کار انجام شده به وسیله گشتاور نیروی وارد شده را نشان می‌دهد.

بنابراین قضیه عمومی کار-انرژی برای جسم صلب چنین است

$$K_b - K_a = W_{ba}$$

که در آن $K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_c \omega^2$ و W_{ba} کار کل انجام شده روی جسم برای حرکت از مکان a به مکان b است. از معادلات ۶-۱۹ و ۶-۲۰ مشاهده می‌شود که قضیه کار-انرژی ترکیب دو قضیه مستقل از یکدیگر، یکی برای انتقال و دیگری برای دوران است. در بسیاری از مسائل این قضایا می‌توانند جدا از هم به کار روند، همان‌گونه که مثال زیر نشان می‌دهد.

مثال ۶-۱۷ پایین غلتیدن یک استوانه: روش انرژی: یکبار دیگر استوانه یکنواختی به شعاع b ، جرم M و گشتاور لختی $I_c = Mb^2/2$ را روی سطحی با زاویه β در نظر بگیرید (شکل ۶-۵۶ الف). اگر استوانه در شروع حرکت ساکن باشد و بدون لغزش بغلند، سرعت مرکز جرم آن (V) را بعد از اینکه از ارتفاع h پایین آمد پیدا کنید.

نیروهای وارد بر استوانه در شکل ۶-۶ (ب) نشان داده شده‌اند. معادله انرژی برای حرکت انتقالی

چنین است

$$\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} MV_b^2 - \frac{1}{2} MV_a^2$$

یا

$$(W \sin \beta - f)l = \frac{1}{2} MV^2 \quad (۱)$$

که در آن $l = h / \sin \beta$ جابه‌جایی مرکز جرم استوانه است وقتی که استوانه از ارتفاع h پایین می‌آید. معادله انرژی برای حرکت دورانی چنین است

$$\int_a^b \tau \, d\theta = \frac{1}{2} I_o \omega_b^2 - \frac{1}{2} I_o \omega_a^2$$

یا

$$fb\theta = \frac{1}{2} I_o \omega^2$$

که در آن θ زاویه دوران حول مرکز جرم است. برای غلتش بدون لغزش داریم $b\theta = l$. از این رو

$$fl = \frac{1}{2} I_o \omega^2 \quad (۲)$$

همچنین داریم $\omega = V/b$ به دست می‌آید

$$fl = \frac{1}{2} \frac{I_o V^2}{b^2}$$

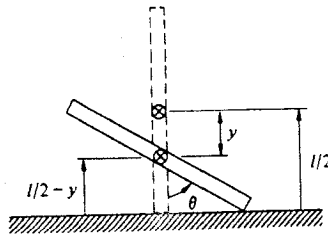
با استفاده از این رابطه و جانشانی در معادله ۱ برای حذف f ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} Wh &= \frac{1}{2} \left(\frac{I_o}{b^2} + M \right) V^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{M}{2} + M \right) V^2 \\ &= \frac{3}{4} MV^2 \end{aligned}$$

یا

$$V = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$$

نکته جالب در این مثال این است که نیروی اصطکاک اتلاف‌کننده نیست. از معادله ۱ در می‌یابیم که اصطکاک، انرژی انتقالی را به اندازه fl کاهش می‌دهد. اما طبق معادله ۲، گشتاور نیروی ناشی از اصطکاک به همان اندازه انرژی دورانی را افزایش می‌دهد. در این حرکت، اصطکاک فقط انرژی



شکل ۶-۶

مکانیکی را از شکلی به شکل دیگر تبدیل می‌کند. اگر لغزش انجام پذیرد، این حالت دیگر صادق نیست و مقداری از انرژی مکانیکی تبدیل به گرما می‌شود. ■
با مثالی که در برگیرنده قیود است و به سادگی با روش انرژی حل می‌شود، بخش را خاتمه می‌دهیم.

مثال ۶-۱۸ میله چوبی در حال سقوط: یک میله به طول l و جرم M ، که ابتدا به حالت عمودی بر روی میز بدون اصطکاکی قرار دارد، شروع به افتادن می‌کند. می‌خواهیم سرعت مرکز جرم آن را به صورت تابعی از مکان به دست آوریم.

کلید حل مسئله در این است که چون هیچ نیروی افقی وجود ندارد، مرکز جرم باید مستقیماً به پایین سقوط کند. از آنجا که باید سرعت را بر حسب تابعی از مکان پیدا کنیم، طبیعی است که از روش انرژی استفاده کنیم.

شکل ۶-۶ میله را بعد از اینکه به اندازه زاویه θ چرخیده و مرکز جرم آن به اندازه y سقوط کرده است نشان می‌دهد. انرژی اولیه چنین است

$$E = K_0 + U_0 \\ = \frac{Mgl}{2}$$

انرژی جنبشی در زمان بعدی چنین است

$$K = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}^2$$

و انرژی جنبشی متناظر چنین است

$$U = Mg \left(\frac{l}{2} - y \right)$$

چون هیچ نیروی اتلاف‌کننده‌ای وجود ندارد، انرژی مکانیکی پایسته و برابر

$$K + U = K_0 + U_0 = Mgl/2$$

است. بنابراین

$$\frac{1}{2}M \dot{y}^2 + \frac{1}{2}I \cdot \dot{\theta}^2 + Mg \left(\frac{l}{2} - y \right) = Mg \frac{l}{2}$$

با مراجعه به معادله قیدی می توان θ را حذف کرد. با استفاده از شکل می بینیم که

$$y = \frac{l}{2}(1 - \cos \theta)$$

بنابراین

$$\dot{y} = \frac{l}{2} \sin \theta \dot{\theta}$$

و

$$\dot{\theta} = \frac{2}{l \sin \theta} \dot{y}$$

چون $I = M(l^2/12)$ است، داریم

$$\frac{1}{2}M \dot{y}^2 + \frac{1}{2}M \frac{l^2}{12} \left(\frac{2}{l \sin \theta} \right)^2 \dot{y}^2 + Mg \left(\frac{l}{2} - y \right) = Mg \frac{l}{2}$$

یا

$$\dot{y}^2 = \frac{2gy}{[1 + 1/(3 \sin^2 \theta)]}$$

$$\dot{y} = \left[\frac{6gy \sin^2 \theta}{3 \sin^2 \theta + 1} \right]^{\frac{1}{2}}$$

۸-۶ اتم بور

این فصل را با بررسی تاریخی نظریه اتم هیدروژن بور به پایان می بریم. گرچه این مطلب یک کاربرد جالب از اصولی است که با آن سروکار داشتیم، ولی برای تکمیل مکانیک کلاسیک اساسی نیست.

نظریه اتم هیدروژن بور بهترین پیوند میان فیزیک کلاسیک و مکانیک کوانتومی است. در اینجا خلاصه ای از رئوس مطالب مربوط به نظریه بور را به عنوان مثالی مهیج از کاربرد مفاهیم مطالعه شده بخصوص انرژی و تکانه ارائه می دهیم. توصیف ما شبیه به نوشته بور است که در سال ۱۹۱۳ در سن ۲۶ سالگی منتشر کرد ولی دقیقاً با آن یکسان نیست. اگرچه این شرح مختصر به قدر کافی زمینه نظریه بور را توضیح نمی دهد، احتمالاً گوشه ای از یک فصل مهم فیزیک را بیان می دارد.

پیشرفت طیف سنجی نوری در قرن نوزدهم، اطلاعات تجربی زیادی در مورد ساختمان اتمی

فراهم ساخت. نوریک اتم که بر اثر تخلیه الکتریکی تحریک می‌شود، تنها در طول موجهای معین و جدا از هم که مشخصه عنصر به کار گرفته شده است، تابش می‌شود. نیمه دوم قرن نوزدهم شاهد کوشش فوق العاده‌ای برای اندازه‌گیری طول موجها، نمایشگر دستاوردهای تجربی قابل ملاحظه‌ای بود: برخی از آنها با دقتی بهتر از یک قسمت در میلیون انجام می‌شد. از طرف دیگر تفسیرها به طور ملال‌آوری ناتوان بودند و بجز قوائد تجربی معینی که هیچ کمکی به فهم قوانین اساسی فیزیک نمی‌کرد، پیشرفتی حاصل نمی‌شد.

بهترین فرمول تجربی به وسیله ژوزف بالمر استاد مدرسه هنر سویس در سال ۱۸۸۶/۱۲۶۵ کشف شد. وی دریافت که طول موج طیف نوری اتم هیدروژن با دقت آزمایشگاهی با فرمول زیر داده می‌شود

$$\frac{1}{\lambda} = Ry \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

که در آن λ طول موج یک خط طیفی بخصوص و Ry مقداری ثابت است که به یاد طیف‌شناس سوئسی ثابت ری‌دبرگ نامیده می‌شود. وی کسی بود که فرمول بالمر را برای به کار بردن بعضی طیفهای دیگر تغییر داد. مقدار عددی آن $Ry = 109700 \text{ cm}^{-1}$ است. (در این بخش سنت فیزیک اتمی را در به کار بردن واحدهای cgs رعایت خواهیم کرد.)

فرمول بالمر نه تنها وجود خطهای شناخته شده هیدروژن $n = 3$ تا $n = 6$ را توضیح می‌دهد، بلکه خطهای دیگر $n = 7, 8, \dots$ را نیز پیشگویی کرد که به سرعت پیدا شدند. علاوه بالمر اظهار نظر کرد که ممکن است خطهای دیگری هم باشند که با فرمول زیر داده می‌شوند

$$\frac{1}{\lambda} = Ry \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad m = 3, 4, 5, \dots$$

$$n = m + 1, m + 2, \dots \quad (21-6)$$

و اینها نیز پیدا شدند. (بالمر سری $m = 1$ را که در ناحیه فرابنفش قرار می‌گیرد، نادیده گرفته بود که در ۱۹۱۶ کشف شد.)

بدون شک فرمول بالمر کلید حل ساختار هیدروژن را در برداشت. هنوز کسی نتوانسته بود مدلی برای اتم بسازد که چنین طیفی را تابش کند.

بور با فرمول بالمر آشنا بود. او همچنین با نظرات ساختار اتمی جاری در آن زمان نیز که بر پایه تحقیقات ج‌ج تامسون و ارنست رادرفورد بنا شده بود، آشنایی داشت. تامسون که در آزمایشگاه فیزیک کاوندیش دانشگاه کمبریج کار می‌کرد وجود الکترون را در سال ۱۸۹۷ حدس زده بود. اولین نشانه

تجزیه پذیری اتم، انگیزه کارهای بیشتری شد و در ۱۹۱۱ آزمایشهای پراکندگی ذرات آلفای رادرفورد^۱ در دانشگاه منچستر نشان داد که اتم دارای هسته باردار است که قسمت اعظم جرم را در بردارد. هر اتم تعداد درستی الکترون و به همان تعداد بار مثبت در هسته^۲ پر جرم خود دارد.

پیشرفت دیگر فیزیک که نقش اصلی در نظریه بور داشت، نظریه اثر فوتوالکتریک اینشتین بود. در سال ۱۹۰۵/۱۲۸۴ یعنی همان سالی که اینشتین نظریه نسبیت خاص را منتشر کرد، اظهار داشت انرژی که با نور منتقل می شود از "بسته های" جدا از هم یا کوانتومها تشکیل می شود. این ذره نور فوتون نامیده شده و اینشتین همچنین بیان کرد که انرژی هر فوتون برابر $E = h\nu$ است که در آن ν بسامد نور و $h = ۶.۶۲ \times ۱۰^{-۲۷}$ ergs ثابت پلانک^۳ است.

بور اصول موضوعه زیر را ارائه داد:

۱. اتمها نمی توانند مقدار انرژی دلخواه داشته باشند، بلکه فقط در حالت های مانای خاصی باید وجود داشته باشند. تا وقتی که اتم در حالت ماناست تابش نمی کند.

۲. هر اتم می تواند با انتشار یک فوتون از یک حالت پایدار a به حالت پایتتر با انرژی $E_a - E_b$ برود. بسامد فوتون انتشار یافته چنین است

$$\nu = \frac{E_a - E_b}{h} \quad (۲۲-۶)$$

۳. تا وقتی که اتم در یک حالت ماناست، حرکت آن دقیقاً به وسیله فیزیک کلاسیک مشخص می شود.

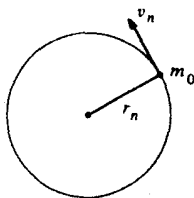
۴. تکانه زاویه ای به اتم برابر $n\hbar/2\pi$ است که در آن n عددی صحیح است.

فرضیه اول که قویترین فرض است، برای نشان دادن این واقعیت که اتم پایدار است مطلقاً لازم بود. بنابر نظریه کلاسیک، یک الکترون دوران کننده در مدار باید به طور پیوسته از طریق تابش انرژی از دست بدهد و به طور ماریج در هسته سقوط کند.

در حالی که فرضیه اول با فیزیک کلاسیک به طور کامل در تعارض است، فرضیه سوم نمی تواند موجه باشد. بور این مشکل را تشخیص داد و این فرضیه را بر این اساس که نیروهای الکتروستاتیکی مربوط به انتشار تابش در مقایسه با نیروی جاذبه الکتروستاتیک ذرات باردار ناچیز است موجه شمرد. احتمالاً، دلیل واقعی اینکه بور استفاده از فیزیک کلاسیک را در این وضعیت غیر کلاسیک ادامه داد این بود که وی احساس می کرد، دست کم تعدادی از مفاهیم اساسی فیزیک کلاسیک تا هنگامی که

۱. رادرفورد قبلاً دانشجوی ج ج تامسون بود و در سال ۱۹۱۹ ریاست آزمایشگاه کاوندیش را پس از تامسون به عهده گرفت. بور نیز زیر نظر رادرفورد کار می کرد، و در همان زمان مشغول تدوین نظریه بور بود.

۲. ماکس پلانک، ثابت h را در سال ۱۹۰۱ در نظریه تابش خود در مورد اجسام داغ معرفی کرده بود.



شکل ۶-۶۲

نادرست بودن آنها محرز نشده است باید به فیزیک نوین کشیده شود.

بور فرضیه چهارم، را که کوانتتش تکانه زاویه‌ای است در کار اصلی خود به کار نبرد، گرچه به امکان چنین عملی اشاره کرد. معمولاً این فرضیه به عنوان یک اصل موضوع به حساب می‌آورند. اینک این چهار فرضیه را در مورد هیدروژن به کار می‌بریم. اتم هیدروژن متشکل از یک تک الکترون با بار الکتریکی $-e$ و جرم m_0 و یک هسته با بار الکتریکی $+e$ و جرم M است. فرض می‌کنیم که هسته سنگین اساساً ساکن است و الکترون در مداری دایره‌ای به شعاع r و سرعت v قرار دارد. معادله حرکت شعاعی چنین است

$$-\frac{m_0 v^2}{r} = -\frac{e^2}{r^2} \quad (۲۳-۶)$$

که در آن e^2/r^2 نیروی جاذبه کولنی بین بارهای الکتریکی است. مقدار انرژی عبارت است از

$$E = K + U = \frac{1}{2} m_0 v^2 - \frac{e^2}{r} \quad (۲۴-۶)$$

از معادلات ۲۳-۶ و ۲۴-۶ نتیجه می‌شود

$$E = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{r} \quad (۲۵-۶)$$

بنابه فرضیه ۴، تکانه زاویه‌ای برابر $nh/2\pi$ است که در آن n عدد صحیح است. اگر پارامترهای مدار را با m مشخص کنیم (شکل ۶-۶۲)، داریم

$$\frac{nh}{2\pi} = m_0 r_n v_n \quad (۲۶-۶)$$

از معادلات ۲۶-۶ و ۲۲-۶ نتیجه می‌شود

$$r_n = \frac{n^2 h^2}{m_0 e^2 (2\pi)^2} \quad (۲۷-۶)$$

و از معادله ۲۵-۶ به دست می‌آید

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{(\pi)^2 m_e e^4}{n^2 h^2} \quad (28-6)$$

اگر الکترون از حالت n به حالت m منتقل شود، فوتون گسیل شده دارای بسامد زیر است

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{E_n - E_m}{h} \\ &= \frac{(\pi)^2 m_e e^4}{2 h^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \end{aligned} \quad (29-6)$$

طول موج تابش با معادله زیر داده می شود

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= \frac{\nu}{c} \\ &= \frac{\pi^2 m_e e^4}{c h^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \end{aligned} \quad (30-6)$$

این معادله به همان شکل فرمول بالمر، معادله ۶-۲۱ است، و جالبتر اینکه ضرایب عددی به نحو بسیار خوبی با هم تطبیق می کنند. بور موفق شد که ثابت ریذبرگ را برحسب ثابتهای بنیادی اتمی حساب کند.

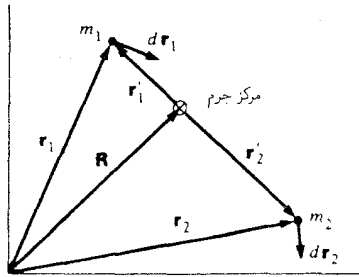
نظریه بور، با خصوصیات قوی مکانیک کلاسیک مقدماتی، پل مهمی بین فیزیک کلاسیک و نظریه اتمی زمان حاضر به وجود آورد. اگرچه نظریه بور قادر به توضیح اتمهای پیچیده نبود، تحرک ایجاد شده از کارهای بور راهگشای توسعه مکانیک کوانتومی جدید در سالهای دهه ۱۹۲۰ شد.

یادداشت ۱-۶ قضیه شال

قضیه شال بیان می کند که جابه جایی اختیاری یک جسم صلب را همواره می توان با انتقال مرکز جرم آن به علاوه یک دوران حول مرکز جرم نشان داد. در این قضیه نسبتاً به جزئیات مطلب سروکار داریم و دانستن آن برای ادامه و تکمیل درس لازم نیست. اما نتیجه جالب توجه است و اثبات آن تمرین خوبی در روشهای برداری برای علاقه مندان است.

برای پرهیز از مشکلات جبری، در اینجا جسم صلب ساده ای را، مرکب از دو جرم m_1 و m_2 که توسط میله صلبی به طول l به هم متصل شده اند، در نظر می گیریم. بردارهای مکان m_1 و m_2 بترتیب \mathbf{r}_1 و \mathbf{r}_2 هستند که در شکل ۶-۶۳ نشان داده شده است. بردار مکان مرکز جرم جسم \mathbf{R} و \mathbf{r}'_1 و \mathbf{r}'_2 بردارهای مکان m_1 و m_2 نسبت به مرکز جرم اند. بردارهای \mathbf{r}'_1 و \mathbf{r}'_2 به دنبال یکدیگر روی خط مشترکی هستند.

در یک جابه جایی اختیاری، جسم m_1 به اندازه $d\mathbf{r}_1$ و جسم m_2 به اندازه $d\mathbf{r}_2$ جابه جا می شود.



شکل ۶۳-۶

چون جسم صلب است، dr_1 و dr_2 از هم مستقل نیستند، و تحلیل خود را با پیدا کردن رابطه بین آنها آغاز می‌کنیم. فاصله m_1 از m_2 ثابت و به طول l است، بنابراین

$$|r_1 - r_2| = l$$

یا

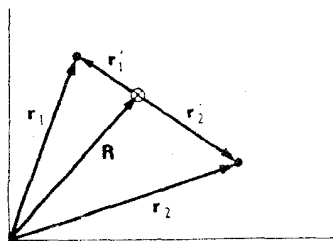
$$(r_1 - r_2) \cdot (r_1 - r_2) = l^2 \quad (۱)$$

با دیفرانسیل‌گیری از معادله ۱ داریم^۱

$$(r_1 - r_2) \cdot (dr_1 - dr_2) = 0 \quad (۲)$$

معادله ۲ "شرط صلب بودن جسم" است که به دنبال آن بودیم. بدیهی است، دو راه برای برقرار بودن معادله ۲ وجود دارد: یا $dr_1 = dr_2$ یا اینکه $(dr_1 - dr_2)$ عمود بر $(r_1 - r_2)$ باشد. حال بر می‌گردیم به حرکت انتقالی مرکز جرم. بنا به تعریف (شکل ۶۴-۶)

$$R = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$$



شکل ۶۴-۶

۱. به خاطر آورید که $d(A \cdot A) = 2A \cdot dA$ است.

بنابراین، جابه‌جایی مرکز جرم $d\mathbf{R}$ چنین است

$$d\mathbf{R} = \frac{m_1 d\mathbf{r}_1 + m_2 d\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (۳)$$

اگر این حرکت انتقالی را از $d\mathbf{r}_1$ و $d\mathbf{r}_2$ کم کنیم، جابه‌جایی باقیمانده $d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{R}$ و $d\mathbf{r}_2 - d\mathbf{R}$ باید یک دوران محض حول مرکز جرم را به دست دهد. قبل از رسیدگی به این نکته، یادآوری می‌کنیم که چون

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{R} = \mathbf{r}'_1$$

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{R} = \mathbf{r}'_2$$

جابه‌جاییهای باقیمانده عبارت‌انداز

$$d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{R} = d\mathbf{r}'_1 \quad (۴)$$

$$d\mathbf{r}_2 - d\mathbf{R} = d\mathbf{r}'_2$$

با به‌کار بردن معادله ۳ در معادله ۴ داریم

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}'_1 &= d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{R} \\ &= \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) (d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}_2) \end{aligned} \quad (۵)$$

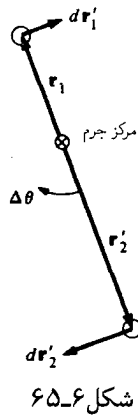
و

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}'_2 &= d\mathbf{r}_2 - d\mathbf{R} \\ &= - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) (d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}_2) \end{aligned} \quad (۶)$$

توجه کنید اگر $d\mathbf{r}_1 = d\mathbf{r}_2$ باشد، جابه‌جاییهای باقیمانده $d\mathbf{r}'_1$ و $d\mathbf{r}'_2$ صفر هستند و جسم صلب بدون دوران انتقال می‌یابد.

برای تکمیل قضیه باید نشان دهیم که جابه‌جایی باقیمانده معرف یک دوران محض حول مرکز جسم است. شکل ۶-۶۵ نشان می‌دهد که یک دوران محض چگونه است. ابتدا نشان می‌دهیم که $d\mathbf{r}'_1$ و $d\mathbf{r}'_2$ عمود بر خط $\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2$ هستند.

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}'_1 \cdot (\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2) &= d\mathbf{r}'_1 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ &= \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) (d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = 0 \end{aligned}$$



در اینجا از معادله ۵ و شرط صلب بودن جسم، معادله ۲، استفاده کرده‌ایم. به همین ترتیب

$$dr'_y \cdot (r'_x - r'_y) = 0$$

بالاخره، می‌خواهیم نشان دهیم که جابه‌جایی باقیمانده مربوط به دوران همان زاویه $\Delta\theta$ است. با مراجعه به شکل، این شرط در قالب برداری چنین است

$$\frac{dr'_x}{r'_x} = \frac{dr'_y}{r'_y}$$

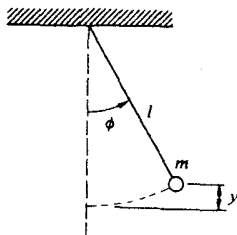
به یاد داشته باشید که بنا به تعریف مرکز جرم داریم

$$\frac{r'_x}{r'_y} = \frac{m_y}{m_x}$$

و با استفاده از معادلات ۵ و ۶ داریم

$$\begin{aligned} \frac{dr'_x}{r'_x} &= \left(\frac{m_y}{m_x + m_y} \right) \frac{(dr_x - dr_y)}{r'_x} \\ &= \left(\frac{m_x}{m_x + m_y} \right) \frac{(dr_x - dr_y)}{r'_y} \\ &= -\frac{dr'_y}{r'_y} \end{aligned}$$

و اثبات تکمیل می‌شود.



شکل ۶-۶۶

یادداشت ۲-۶ حرکت آونگ

حرکت یک جسم تحت تأثیر نیروهای پایستار را همواره می‌توان با روش متداول انرژی حل کرد، و طبیعی است که این روش را برای یافتن حرکت آونگ به‌کار ببریم. انرژی کل آونگ چنین است

$$E = K + U \\ = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}^2 + mgy$$

که در آن l طول آونگ و y فاصله عمودی از پایینترین نقطه است. از شکل ۶-۶۶ داریم

$$y = l(1 - \cos \phi)$$

در انتهای نوسان $\phi = \phi_0$ و $\dot{\phi} = 0$ است. انرژی کل چنین است

$$E = mgl(1 - \cos \phi_0)$$

معادله انرژی عبارت است از

$$\frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}^2 + mgl(1 - \cos \phi) = mgl(1 - \cos \phi_0)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \phi - \cos \phi_0)}$$

و

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \int dt \quad (1)$$

قبل از توجه به جواب کلی، جواب را برای دامنه‌های کوچک پیدا می‌کنیم. با تقریب

$$\cos \phi \approx 1 - 1/2 \phi^2$$

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\phi_0^2 - \phi^2}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \int dt$$

انتگرال را در یک چهارم نوسان، از $\phi = 0$ و $\phi = \phi_0$ تعیین می‌کنیم. زمان، از $t = 0$ تا $t = T/4$ تغییر می‌کند که T زمان تناوب است. داریم

$$\int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{1}{2}} \phi_0 \sqrt{1 - (\phi/\phi_0)^2}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \int_0^{T/4} dt$$

یا

$$\arcsin \frac{\phi}{\phi_0} \Big|_0^{\phi_0} = \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{T}{4}$$

$$\frac{\pi}{2} - 0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{T}{4}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

همانطور که در متن درس پیدا کردیم.

برای یافتن جواب دقیقتر معادله ۱، استفاده از اتحاد $\cos \phi = 1 - 2 \sin^2(\phi/2)$ مفید است.

پس داریم

$$\cos \phi - \cos \phi_0 = 2[\sin^2(\phi_0/2) - \sin^2(\phi/2)] \quad (2)$$

با قرار دادن معادله ۲ در معادله ۱ به دست می‌آید

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{2} \sqrt{\sin^2(\phi_0/2) - \sin^2(\phi/2)}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \int dt \quad (3)$$

از تغییر متغیری به صورت زیر استفاده می‌کنیم

$$\sin u = \frac{\sin(\phi/2)}{\sin(\phi_0/2)} \quad (4)$$

همانطور که آونگ یک نوسان کامل انجام می‌دهد، ϕ بین $-\phi_0$ و $+\phi_0$ و در همان زمان u بین $-\pi$

و $+\pi$ تغییر می‌کند. اگر قرار دهیم

$$K = \sin \frac{\phi_0}{2}$$

$$\sin \frac{\phi}{2} = K \sin u$$

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\phi}{2} d\phi = K \cos u du$$

و

$$d\phi = \left(\frac{1 - \sin^2 u}{1 - K^2 \sin^2 u} \right)^{\frac{1}{2}} 2K du \quad (5)$$

جایگزین کردن معادلات ۴ و ۵ در معادله ۳ به دست می‌دهد

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 u}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \int dt$$

برای یک دوره تناوب، انتگرال می‌گیریم. حدود u از 0 تا 2π است در حالی که t از 0 تا T تغییر

می‌کند. داریم

$$\int_0^{2\pi} \frac{du}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 u}} = \sqrt{\frac{g}{l}} T \quad (6)$$

انتگرال سمت چپ یک انتگرال بیضوی و بخصوص یک انتگرال بیضوی کامل از نوع اول است.

مقادیر این تابع در جدولهای محاسبه شده در دسترس است. اما، با مقصودی که داریم، بسط عبارت

زیرانتگرال راحت‌تر است

$$(1 - K^2 \sin^2 u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} K^2 \sin^2 u + \dots$$

و

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{2\pi} du \left(1 + \frac{1}{2} K^2 \sin^2 u + \dots \right)$$

$$= \sqrt{\frac{l}{g}} \left(2\pi + \frac{2\pi}{4} K^2 + \dots \right)$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\phi_0}{2} + \dots \right)$$

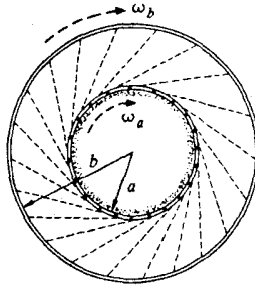
اگر $1 \ll \phi_0$ باشد، آنگاه $\phi_0^2/4 \approx \sin^2(\phi_0/2)$ است و داریم

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \phi_0^2 + \dots \right)$$

مسائل

۱-۶ (الف) نشان دهید اگر تکانه خطی کلی یک سیستم از ذرات صفر باشد، تکانه زاویه‌ای حول تمام مبدأها برابر صفر است. (ب) نشان دهید اگر نیروی کل روی یک سیستم از ذرات صفر باشد، گشتاور نیروی وارد بر سیستم حول تمام مبدأها برابر است.

۲-۶ یک استوانه به جرم M_A و شعاع a مطابق شکل ۶-۶۷ با سرعت زاویه‌ای اولیه ω_A (°)



شکل ۶-۶۷

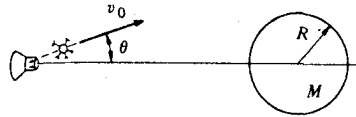
آزادانه دوران می‌کند. استوانه دیگری با جرم M_B و شعاع $b > a$ روی محور آن و در حال سکون کار گذاشته شده است و برای دوران آزاد است. لایه نازکی از شن با جرم M_S روی سطح داخلی استوانه کوچک توزیع شده است. در زمان $t = 0$ سوراخهای کوچکی در استوانه داخلی باز می‌شود. شنها با آهنگ ثابت λ شروع به بیرون پریدن می‌کنند و به استوانه بیرونی می‌چسبند. سرعت زاویه‌ای بعدی دو استوانه ω_A و ω_B را پیدا کنید. از زمان لازم برای عبور شن صرف‌نظر کنید.

جواب حالت خاص: اگر $\lambda t = M_b$ و $b = 2a$ آنگاه $\omega_B = \omega_A(0)/8$

۳-۶ حلقه‌ای به جرم M و شعاع R از یک طرف روی میزی بدون اصطکاک قرار دارد و می‌تواند حول یک محور در نقطه‌ای روی پیرامونش دوران کند. حشره‌ای به جرم m روی حلقه با سرعت v از نقطه تماس محور شروع به حرکت می‌کند. سرعت دوران حلقه وقتی که حشره (الف) نصف حلقه را پیموده و (ب) به نقطه تماس برگشته است، چقدر است؟

جواب حالت خاص: (الف) اگر $m = M$ باشد، $\omega = v/3R$ است.

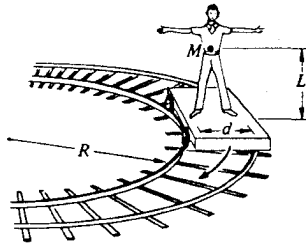
۴-۶ یک سفینه فضایی برای بررسی سیاره‌ای به جرم M و شعاع R فرستاده شده است. هنگامی که در فاصله $5R$ از مرکز سیاره، در فضا بدون حرکت معلق است، بسته‌ای از وسائلی را با سرعت v مطابق شکل ۶-۶۸ شلیک می‌کند. جرم بسته m است که به مراتب کوچکتر از جرم سفینه فضایی است. این



شکل ۶۸-۶

بسته با چه زاویه‌ای (θ) پرتاب شود تا در آستانه برخورد تماسی با سیاره قرار گیرد؟

- ۵-۶ اتومبیل به جرم 1350 kg در خیابانی با شیب 3° روبه بالا پارک شده است. مرکز جرم اتومبیل در وسط فاصله بین چرخهای جلو و عقب و به ارتفاع 60 cm از زمین قرار دارد. فاصله چرخها از یکدیگر 240 cm است. نیروی قائم ناشی از جاده را روی چرخهای جلو و عقب پیدا کنید.
- ۶-۶ شخصی به جرم M مطابق شکل ۶۹-۶ روی چهارچرخه راه آهن و بدون اتکا ایستاده است



شکل ۶۹-۶

و مسیری به شعاع R را با سرعت v دور می زند. مرکز جرم او در ارتفاع L از چهارچرخه است و پاهایش به فاصله d از یکدیگر قرار دارد. صورت این شخص روبه جهت حرکت است. چه وزنی بر هر یک از پاهایش وارد می شود؟

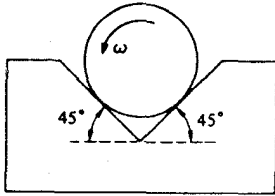
- ۷-۶ گشتاور لختی یک ورقه نازک به جرم M و به شکل مثلث متساوی الاضلاع را حول محوری که از یک رأس آن می گذرد و بر ورقه عمود است پیدا کنید. طول هر ضلع را L بگیرید.
- ۸-۶ گشتاور لختی یک کره یکنواخت به جرم M و شعاع R را حول محوری که از مرکز آن می گذرد، پیدا کنید.

جواب: $I_c = \frac{2}{5}MR^2$

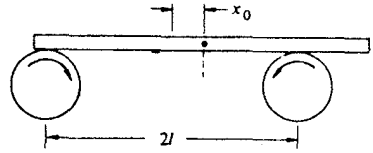
- ۹-۶ یک تیر سنگین و یکنواخت به جرم M روی دو غلتک یکسان قرار دارد و غلتکها پیوسته و بسرعت در دو جهت مخالف مطابق شکل ۶-۷ می چرخند. مرکز غلتکها به فاصله $2l$ از یکدیگرند. ضریب اصطکاک بین تیر و سطوح غلتکها μ است که مقداری ثابت و مستقل از سرعت نسبی دو سطح است.
- ابتدا تیر در حال سکون نگاه داشته می شود و مرکز آن در فاصله x_0 از وسط دو غلتک قرار دارد.

در لحظه $t = 0$ دستگاه آزاد می‌شود. حرکت بعدی تیر را پیدا کنید.

۶-۱۰ استوانه‌ای به جرم M و شعاع R در شیار یکنواخت V شکل با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد (شکل ۶-۷۱). ضریب اصطکاک بین استوانه و هر سطح برابر μ است. چه گشتاور نیرویی



شکل ۶-۷۱



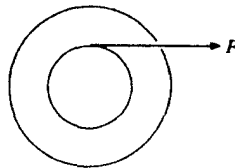
شکل ۶-۷۰

باید اعمال شود، تا استوانه در حال چرخش باقی بماند.

جواب حالت خاص: اگر $\mu = 0.5$ و $R = 0.1\text{ m}$ و $W = 100\text{ N}$ باشد، آنگاه $\tau \approx 5.7\text{ Nm}$

است.

۶-۱۱ چرخ روی یک محور ثابت نصب شده است و دستگاه مطابق شکل ۶-۷۲ برای دوران



شکل ۶-۷۲

بدون اصطکاک آزاد است. برای اندازه‌گیری گشتاور لختی دستگاه، نواری با جرم قابل اغماض که به دور میله پیچیده شده است با نیروی ثابت و معلوم F کشیده می‌شود. وقتی که طول L از نوار باز شده است، دستگاه با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. گشتاور لختی دستگاه I_0 را پیدا کنید.

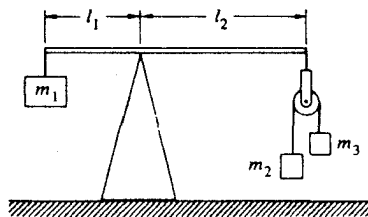
جواب حالت خاص: اگر $F = 10\text{ N}$ و $L = 5\text{ m}$ و $\omega = 0.5\text{ rad/s}$ باشد، آنگاه

$$I_0 = 40\text{ kg/m}^2$$

۶-۱۲ از یک انتهای میله‌ای که می‌تواند حول محوری دوران کند جرم M_1 و از انتهای دیگر آن ماشین آتودی آویزان است (شکل ۶-۷۳). قرقره بدون اصطکاک و دارای جرم و ابعاد قابل اغماضی

است. نیروی گرانش به سمت پایین ممتد است و داریم $M_2 > M_3$.

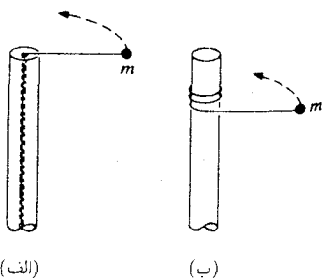
رابطه‌ای بین M_1 ، M_2 ، M_3 ، l_1 و l_2 پیدا کنید به طوری که پس از رها شدن جرمها، میله تمایلی



شکل ۶-۷۳

به چرخش نداشته باشد.

۶-۱۳ جرم m به وسیلهٔ ریسمانی به تیری به شعاع R وصل شده است (شکل‌های ۶-۷۴). این

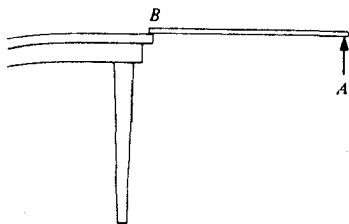


شکل ۶-۷۴

جرم ابتدا به فاصلهٔ r از مرکز تیر است و با سرعت مماسی v حرکت می‌کند. در حالت (الف) ریسمان از سوراخی در مرکز تیر و از بالای آن می‌گذرد، و بتدریج با کشیده شدن از سوراخ کوتاه می‌شود. در حالت (ب) ریسمان به دور تیر می‌پیچد.

در هر حالت چه کمیت‌هایی پایسته هستند؟ سرعت نهایی جرم m را وقتی که به تیر می‌رسد در هر دو حالت پیدا کنید.

۶-۱۴ خط‌کش یکنواختی به جرم M و طول l مطابق شکل ۶-۷۵ از انتهای B روی لبهٔ یک میز



شکل ۶-۷۵

قرار دارد و از انتهای A به وسیله دست به طور افقی نگه داشته می‌شود. نقطه A به طور ناگهانی رها می‌شود. در لحظه رها شدن: (الف) گشتاور نیرو حول B چقدر است؟ (ب) شتاب زاویه‌ای حول B چقدر است؟ (ج) شتاب قائم مرکز جرم چقدر است؟

جواب: $3g/4$.

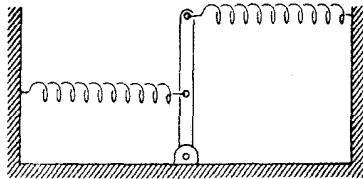
(د) با استفاده از قسمت ج نیروی عمودی را در B از راه تحقیق پیدا کنید.

جواب: $mg/4$.

۱۵-۶ یک آونگ از دو قرص تشکیل شده است که هر یک به جرم M و شعاع R است و به وسیله میله بدون جرمی از هم جدا شده‌اند. یکی از قرصها به وسیله سوزن کوچکی که در مرکز آن قرار دارد آویخته شده است. قرصها در یک صفحه قرار دارند و فاصله مراکز هایشان l است. زمان تناوب را برای نوسانهای کوچک پیدا کنید.

۱۶-۶ یک آونگ فیزیکی از قرص یکنواختی به جرم M و شعاع R ساخته شده است که از میله‌ای با جرم قابل اغماض آویزان است. فاصله نقطه آویز تا مرکز قرص l است. به ازای چه مقداری از l زمان تناوب کمینه است.

۱۷-۶ میله‌ای به طول l و جرم m که از یک انتها روی محوری قرار دارد به وسیله فنری در نقطه وسط و فتر دیگری در انتهای آن، که در جهت‌های مخالف کشیده می‌شوند، مطابق شکل ۷۶-۶ نگه

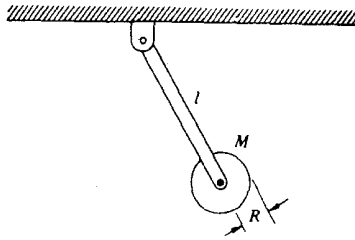


شکل ۷۶-۶

داشته شده است. فنرها دارای ثابت فنری k هستند و کشش در حال تعادل آنها عمود بر میله است. بسامد نوسانهای کوچک حول حالت تعادل را پیدا کنید.

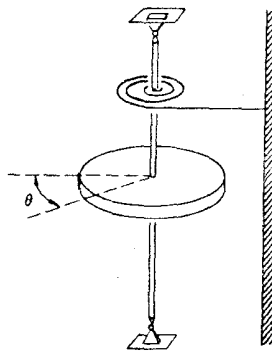
۱۸-۶ زمان تناوب آونگی را پیدا کنید که از یک قرص به جرم M و شعاع R تشکیل یافته و به انتهای میله‌ای به طول l و جرم m نصب شده است. اگر قرص به وسیله یک یاتاقان بدون اصطکاک روی میله کار گذاشته شده بود و کاملاً آزادانه می‌توانست بچرخد، زمان تناوب چه تغییری می‌کرد (شکل ۷۷-۶)؟

۱۹-۶ یک قرص توپر به جرم M و شعاع R روی محوری عمودی قرار دارد. محور به یک فنر مارپیچی که گشتاور نیروی خطی نگهدارنده‌ای به بزرگی $C\theta$ وارد می‌کند متصل است که θ زاویه انحراف



شکل ۶-۷۷

از وضعیت تعادل استاتیکی و C یک مقدار ثابت است (شکل ۶-۷۸). از جرم محور و فنر صرف نظر



شکل ۶-۷۸

کنید و فرض کنید که یا تا قانها بدون اصطکاک هستند. (الف) نشان دهید حرکت قرص می تواند حرکت هماهنگ ساده باشد و بسامد حرکت را پیدا کنید. (ب) فرض کنید قرص با معادله $\theta = \theta_0 \sin(\omega t)$ حرکت می کند که ω بسامد حاصل در قسمت (الف) است. در زمان $t_1 = \pi/\omega$ یک حلقه چسبنده به جرم M و شعاع R به طور متحدالمرکز روی قرص می افتد. پیدا کنید:

۱. بسامد جدید حرکت را

۲. دامنه جدید حرکت را.

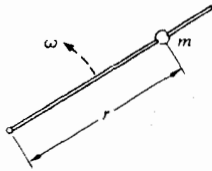
۶-۲۵ الوار باریکی به جرم M و طول l از یک سر بر یک محور قرار دارد (شکل ۶-۷۹). الوار در زاویه 60° نسبت به قائم رها می شود. وقتی که الوار افقی است، اندازه و جهت نیروی وارد بر لولا چقدر است؟

۶-۲۱ استوانه ای به شعاع R و جرم M بدون لغزش روی سطحی با زاویه شیب θ به پایین می غلتد.

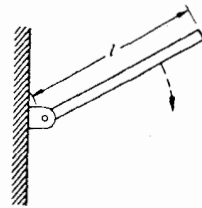
ضریب اصطکاک μ است. بیشترین مقدار θ برای اینکه استوانه بدون لغزش بغلتد چقدر است؟

جواب: $\theta = \arctan 3\mu$

۲۲-۶ مهره‌ای به جرم m مطابق شکل ۶-۸۰ بدون اصطکاک روی میله‌ای که با سرعت زاویه‌ای



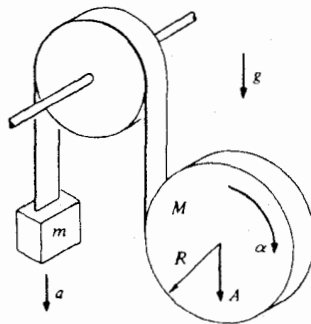
شکل ۶-۸۰



شکل ۶-۷۹

ثابت ω چرخانده می‌شود، می‌لغزد. از اثر ثقل صرف‌نظر کنید. (الف) نشان دهید که $r = r_0 e^{\omega t}$ حرکتی ممکن برای مهره است، که در آن r_0 فاصله اولیه مهره از محور دوران است. (ب) برای حرکت توصیف شده در قسمت (الف)، نیروی وارد بر مهره از سوی میله را پیدا کنید. (ج) برای حرکت توصیف شده در بالا، توان مصرف شده دستگاه چرخان را پیدا کنید و با محاسبه مستقیم نشان دهید که این توان برابر آهنگ تغییرات انرژی جنبشی مهره است.

۲۳-۶ قرصی به جرم M و شعاع R از نواری که به دور آن پیچیده شده است باز می‌شود (شکل ۶-۸۱). نوار از روی قرقره بدون اصطکاک عبور می‌کند، و جرم m ، از طرف دیگر آن آویزان است.



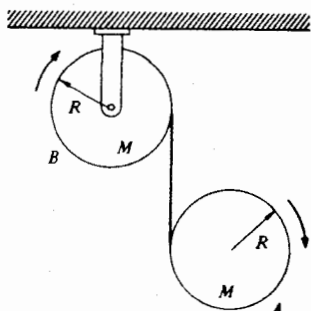
شکل ۶-۸۱

فرض کنید قرص به‌طور عمودی سقوط می‌کند. (الف) شتاب جرم m و قرص (بترتیب a و A) را با شتاب زاویه‌ای قرص ارتباط دهید.

جواب حالت خاص: اگر $A = 2a$ باشد، آنگاه $\alpha = 3A/R$ است.

(ب) a ، A ، و α را پیدا کنید.

۲۴-۶ استوانه A به جرم M و شعاع R از استوانه B به همان جرم و شعاع آویزان است و می تواند حول محور خود بگردد (شکل ۶-۸۲). وسیله آویختگی نوار فلزی بدون جرمی است که دور هر یک از



شکل ۶-۸۲

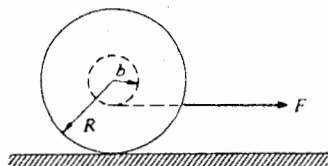
استوانه ها پیچیده می شود و برای باز شدن آزاد است. مطابق شکل، گرانش به سمت پایین مقید است و هر دو استوانه در ابتدا ساکن اند. شتاب اولیه A را، با فرض اینکه مستقیماً به سمت پایین حرکت می کند، پیدا کنید.

۲۵-۶ ساچمه ای به جرم M و شعاع R روی سطحی با زاویه θ به بالا می غلتد. اگر سرعت اولیه ساچمه v_0 باشد. فاصله l که ساچمه تا بالای می کند، قبل از اینکه شروع به غلتیدن به پایین کند چقدر است؟

جواب حالت خاص: اگر $v_0 = 3 \text{ m/s}$ و $\theta = 30^\circ$ باشد، آنگاه $l \approx 1.3 \text{ m}$ است.

۲۶-۶ یک کره یکنواخت به جرم M و شعاع R و یک استوانه یکنواخت به جرم M و شعاع R به طور همزمان از حال سکون در بالای یک سطح شیب دار رها می شوند. اگر هر دو بدون لغزش بغلتند، کدام یک ابتدا به پایین می رسد؟

۲۷-۶ یک یویو به جرم M دارای محوری به شعاع b و قرقره ای به شعاع R است. گشتاور لختی آن می تواند $\frac{1}{2}MR^2$ باشد. یویو به طور عمودی روی میز قرار دارد و نخ به وسیله نیروی افقی F مطابق شکل ۶-۸۳ کشیده می شود. ضریب اصطکاک بین یویو و میز μ است. مقدار بیشینه F که یویو بدون



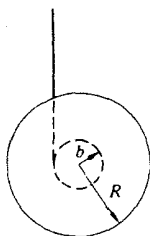
شکل ۶-۸۳

لغزیدن خواهد غلتید چقدر است؟

۲۸-۶ یویو مسئله قبل چنان کشیده می‌شود که نخ با افق زاویه θ می‌سازد. به‌ازای چه مقدار θ

یویو میل به چرخیدن ندارد؟

۲۹-۶ یک یویو به جرم M مطابق شکل ۸۴-۶ دارای محوری به شعاع b و قرقره‌ای به شعاع R



شکل ۸۴-۶

است. گشتاور لغتی را می‌توان $MR^2/2$ گرفت و از ضخامت نخ صرف‌نظر کرد. یویو از حالت سکون رها می‌شود. (الف) در حالتی که یویو بالا و پایین می‌رود کشش نخ چقدر است؟ (ب) قبل از اینکه نخ کاملاً باز شود، مرکز یویو به اندازه h سقوط می‌کند. با فرض اینکه جهت دوران با سرعت چرخش یکنواختی معکوس شود، نیروی متوسط روی نخ را هنگام برگشت یویو پیدا کنید.

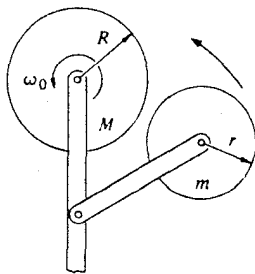
۳۰-۶ یک توپ بولینگ با سرعت v از راهروی مخصوص آن پرتاب می‌شود. ابتدا بدون غلتش می‌لغزد، اما به‌واسطه اصطکاک شروع به غلتش می‌کند. نشان دهید سرعت آن وقتی که بدون لغزش می‌غلتد، برابر $5/7v$ است.

۳۱-۶ استوانه‌ای به شعاع R با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. وقتی استوانه به آرامی روی یک سطح قرار داده می‌شود، برای زمان کوتاهی سُر می‌خورد و سرانجام بدون لغزش می‌غلتد. سرعت زاویه‌ای نهایی آن ω_f چقدر است؟

جواب حالت خاص: اگر $\omega = 3 \text{ rad/s}$ باشد، $\omega_f = 1 \text{ rad/s}$ است.

۳۲-۶ چرخ لاستیکی زبری به شعاع R و به جرم M با سرعت زاویه‌ای ω حول محوری بدون اصطکاک دوران می‌کند (شکل ۸۵-۶). چرخ لاستیکی دیگری به شعاع r و جرم m ، که آن هم روی محوری بدون اصطکاک کار گذاشته شده است، با آن تماس داده می‌شود. سرعت زاویه‌ای نهایی چرخ اول چقدر است؟

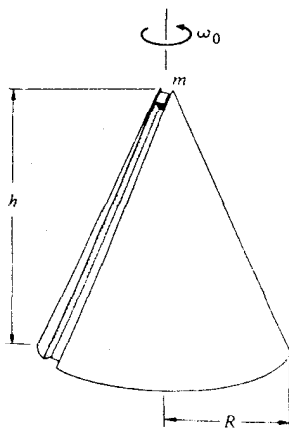
۳۳-۶ مخروطی به ارتفاع h و شعاع قاعده R مطابق شکل ۸۶-۶ می‌تواند حول محور قائم ثابتی بچرخد. شیار باریکی در سطح آن وجود دارد. مخروط با سرعت زاویه‌ای ω آزادانه به‌دوران درمی‌آید و مکعب کوچکی به جرم m در بالای شیار بدون اصطکاک رها می‌شود و تحت اثر



شکل ۸۵-۶

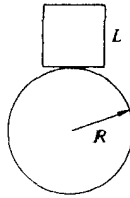
گرانش می‌تواند به پایین بلغزد. فرض کنید مکعب در شیار باقی می‌ماند. گشتاور لختی مخروط را حول محور قائم I_0 بگیرید. (الف) سرعت زاویه‌ای مخروط وقتی که مکعب به پایین رسیده است چقدر است؟ (ب) سرعت مکعب را در چارچوب لخت وقتی که به پایین رسیده است پیدا کنید.

۳۴-۶ ساچمه‌ای به شعاع b در داخل ظرف کم عمقی به شعاع R به عقب و جلو می‌غلتد. بسامد را برای نوسانهای کوچک پیدا کنید. $R \gg b$ است.
 جواب: $\omega = \sqrt{5g/7R}$.



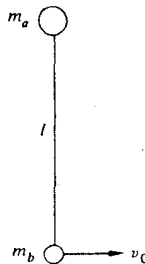
شکل ۸۶-۶

۳۵-۶ مکعبی به ضلع L روی یک بشکه استوانه‌ای ثابتی به شعاع R قرار دارد. بزرگترین مقدار L را که به ازای آن مکعب پایدار است پیدا کنید (شکل ۸۷-۶).



شکل ۶-۸۷

۳۶-۶ دو جرم m_A و m_B به وسیله نخ به طول l به هم متصل اند و روی میز بدون اصطکاک قرار دارند. دستگاه را می چرخانند و رها می کنند، به طوری که m_A در سکون لحظه‌ای است و m_B با سرعت لحظه‌ای v_0 در جهت عمود بر خط واصل مراکز آنها حرکت می کند، که در شکل ۶-۸۸ نشان

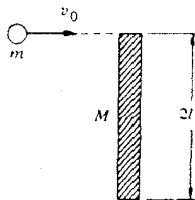


شکل ۶-۸۸

داده شده است. حرکت بعدی دستگاه و کشش نخ را پیدا کنید.

جواب حالت خاص: اگر $m_A = m_B = 2 \text{ kg}$ و $v_0 = 3 \text{ m/s}$ و $l = 0.5 \text{ m}$ باشد، آنگاه $T = 18 \text{ N}$ است.

۴۷-۶ (الف) الواری به طول $2l$ و جرم M روی سطح بدون اصطکاک قرار دارد. تویی به جرم m و سرعت v_0 همانطور که در شکل ۶-۸۹ نشان داده شده است به انتهای آن برخورد می کند. سرعت



شکل ۶-۸۹

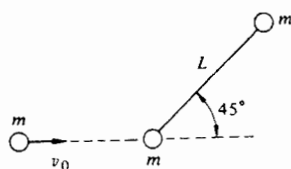
نهایی توپ v_f را با فرض اینکه انرژی مکانیکی پایسته است و v_f روی خط حرکت ابتدایی قرار دارد،

پیدا کنید. (ب) سرعت v_f را با فرض اینکه الوار در سر دیگر لولا شده باشد پیدا کنید.

جواب حالت خاص: اگر $m = M$ (الف) $v_f = 3v_0/5$ و (ب) $v_f = v_0/2$ است.

۳۸-۶ میله صلب بدون جرمی به طول L دو ذره هریک به جرم m را به یکدیگر متصل کرده است. میله روی میزی بدون اصطکاک قرار دارد، و ذره‌ای به جرم m و سرعت v_0 که مطابق شکل ۹۰-۶ حرکت می‌کند، به آن برخورد می‌کند. ذره بعد از برخورد مستقیماً به عقب برمی‌گردد. با فرض اینکه انرژی مکانیکی پایسته است، سرعت زاویه‌ای میله را بعد از برخورد حول مرکز جرم آن پیدا کنید.

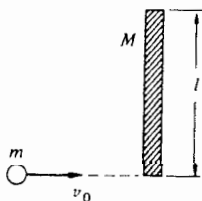
جواب: $\omega = (4\sqrt{2}/7)(v_0/L)$.



شکل ۹۰-۶

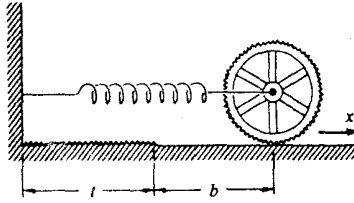
۳۹-۶ پسر بچه‌ای به جرم m با سرعت v_0 روی یخ می‌دود و در انتهای الواری به طول l و جرم M که عمود بر مسیر است می‌ایستد (شکل ۹۱-۶). (الف) حرکت دستگاه را بعد از اینکه پسر بچه روی الوار ایستاده است به طور کتبی توضیح دهید. از اصطکاک صرف‌نظر کنید. (ب) نقطه‌ای از الوار بلافاصله بعد از برخورد ساکن می‌ماند این نقطه کجا است؟

جواب: $2l/3$ از پسر بچه.



شکل ۹۱-۶

۴۰-۶ چرخ‌ی با دندان‌های ریز به انتهای فتری با ثابت k و طول باز نشده l مطابق شکل ۹۲-۶ متصل است. چرخ برای $x > l$ آزادانه روی سطح می‌لغزد، ولی برای $x < l$ دندان‌های چرخ با دندان‌های روی سطح درگیر می‌شود و چرخ نمی‌تواند بلغزد. فرض کنید تمام جرم چرخ در محیط آن



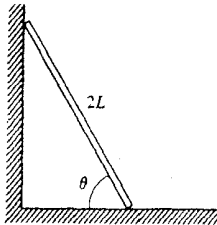
شکل ۹۲-۶

قرار دارد. (الف) چرخ به اندازه $x = l + b$ کشیده و سپس رها می‌شود. بار اول چقدر به دیوار نزدیک می‌شود؟ (ب) بعد از ترک دیوار چقدر دور خواهد شد؟ (ج) در دور بعدی حرکت چرخ روی دندانه‌های مسیر چه اتفاقی روی می‌دهد؟

۴۱-۶ بسیاری از قوانین مهمی که تا حال معرفی شده‌اند در این مسئله مورد استفاده قرار می‌گیرند و بنابراین شایسته کوشش زیادی است. این مسئله معماگونه است (ولی واقعاً مشکل نیست)، بنابراین اگر در حل آن گیج شدید نگران نشوید.

الواری به طول $2L$ مطابق شکل ۹۳-۶ که به دیوار بدون اصطکاک تکیه دارد شروع به لغزیدن به پایین می‌کند. نشان دهید سر فوقانی الوار وقتی که در ارتفاع دو سوم مقدار اولیه خود قرار می‌گیرد، از دیوار جدا می‌شود.

راهنمایی: تنها یک متغیر برای توصیف حرکت دستگاه لازم است. به حرکت مرکز جرم توجه کنید.



شکل ۹۳-۶

حرکت جسم صلب

۱-۷ مقدمه

در فصل گذشته حرکت جسم صلب را حول محور ثابت دوران تحلیل کردیم. در این فصل به تحلیل مسئلهٔ عمومی‌تر حرکت جسم صلبی که می‌تواند حول هر محوری دوران کند، می‌پردازیم. به‌جای تأکید بر جزئیات صوری ریاضی، می‌کوشیم تا در مورد اصول اساسی آگاهی پیدا کنیم. خصوصیات حرکت ژيروسکوپ و وسایل دیگری را که دارای تکانهٔ زاویه‌ای اسپینی بزرگی هستند مورد بحث قرار خواهیم داد، و همچنین نگاهی به چند نوع دستگاه دیگر خواهیم انداخت. تحلیل‌های ما روی مفهوم بسیار ساده‌ای پایه‌گذاری شده است - و آن اینکه تکانهٔ زاویه‌ای، یک بردار است. اگرچه این مطلب از تعریف آن روشن است، اما به‌طریقی اهمیت آن برای کسی که ابتدا وارد بحث حرکت جسم صلب، می‌شود، اغلب پوشیده می‌ماند. درک ماهیت برداری تکانهٔ زاویه‌ای به توضیح خیلی ساده و طبیعی پدیدهٔ پیچیده‌ای چون حرکت تقدیمی ژيروسکوپ منجر می‌شود.

دومین مطلبی که در این فصل به آن خواهیم پرداخت پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای است. این مطلب را در

فصل پیش به طور مختصر بررسی کردیم ولی هرگونه توضیح قاطع را به تعویق انداختیم. در اینجا به جای پیچیدگی ریاضی، مسئلهٔ باریک بینی فیزیکی مطرح است.

۲-۷ ماهیت برداری سرعت زاویه‌ای و تکانهٔ زاویه‌ای

برای توصیف حرکت دورانی یک جسم، به جاست که دستگاه مختصات مناسبی را معرفی کنیم. به خاطر بیاورید که در مورد حرکت انتقالی، روش ما بدین صورت بود که دستگاه مختصات مناسبی انتخاب می‌کردیم و مکان جسم را به وسیلهٔ بردار \mathbf{r} نشان می‌دادیم. آنگاه سرعت و شتاب با مشتق‌گیری پی در پی از \mathbf{r} نسبت به زمان پیدا می‌شوند.

فرض کنید بخواهیم مختصات زاویه‌ای $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ و θ را بترتیب نسبت به محورهای x, y, z معرفی کنیم. آیا می‌توانیم سمتگیری زاویه‌ای جسم را به وسیلهٔ یک بردار معین کنیم؟

$$\boldsymbol{\theta} \stackrel{?}{=} (\theta_x \hat{\mathbf{i}} + \theta_y \hat{\mathbf{j}} + \theta_z \hat{\mathbf{k}})$$

متأسفانه این روش نمی‌تواند به‌کار رود. هیچ راهی برای ساختن برداری که سمتگیری زاویه‌ای را نشان دهد وجود ندارد.

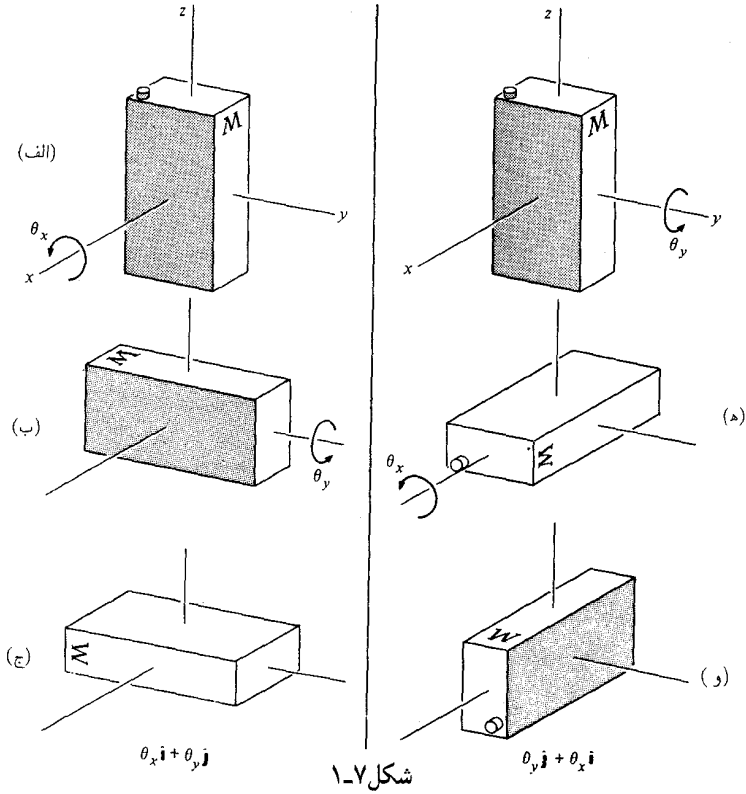
دلیل اینکه $\theta_x \hat{\mathbf{i}}$ و $\theta_y \hat{\mathbf{j}}$ نمی‌توانند بردار باشند، این است که ترتیب جمع کردن آنها در نتیجهٔ نهایی مؤثر است: یعنی $\theta_x \hat{\mathbf{i}} + \theta_y \hat{\mathbf{j}} \neq \theta_y \hat{\mathbf{j}} + \theta_x \hat{\mathbf{i}}$ است، که این مطلب را به‌وضوح در مثال ۱-۷ نشان داده‌ایم. برای بردارهای مطلقاً حقیقی چون $x\hat{\mathbf{i}}$ و $y\hat{\mathbf{j}}$ داریم $x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} = y\hat{\mathbf{j}} + x\hat{\mathbf{i}}$. جمع بردارها جابه‌جاپذیر است.

مثال ۱-۷ دوران در زوایای محدود: یک قوطی روغن را در نظر بگیرید که در جهت نشان داده شده در شکل‌های ۱-۷ قرار دارد. حال ببینیم وقتی آن را به اندازهٔ $\pi/2$ حول محور x و سپس به اندازهٔ $\pi/2$ حول محور y دوران دهیم، چه اتفاقی می‌افتد (شکل‌های الف، ب، ج). نتیجه را با دوران دادن مشابه ولی بترتیب عکس (شکل‌های د، ه، و) مقایسه کنید.

شکل به‌خودی‌خود بیان می‌دارد که

$$\theta_x \hat{\mathbf{i}} + \theta_y \hat{\mathbf{j}} \neq \theta_y \hat{\mathbf{j}} + \theta_x \hat{\mathbf{i}}$$

خوشبختانه هنوز امیدی هست: با وجودی که مکان زاویه‌ای به‌وسیلهٔ یک بردار مشخص نمی‌شود اما سرعت زاویه‌ای، آهنگ تغییرات مکان زاویه‌ای، کاملاً یک بردار است. سرعت زاویه‌ای را می‌توانیم با



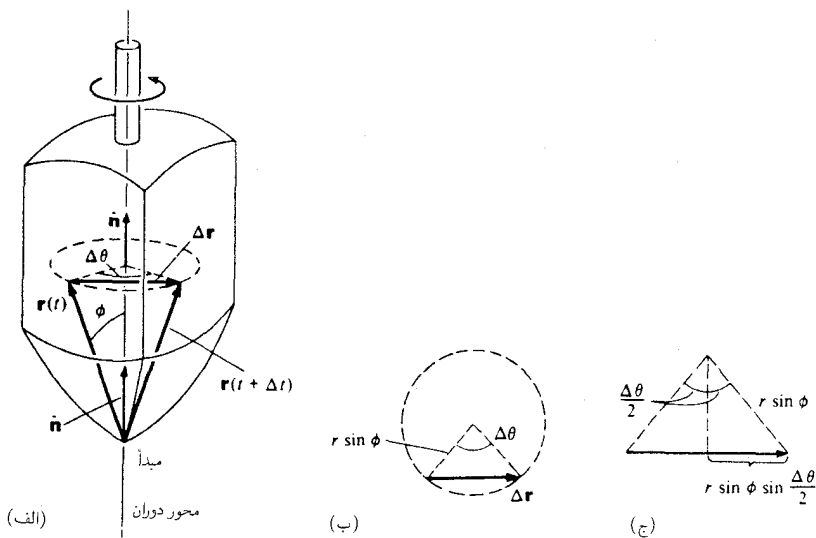
رابطه زیر تعریف کنیم

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{d\theta_x}{dt} \hat{i} + \frac{d\theta_y}{dt} \hat{j} + \frac{d\theta_z}{dt} \hat{k} \\ &= \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k} \end{aligned}$$

نکته مهم این است که اگرچه دوران در زوایای معین جابه‌جاپذیر نیست. ولی دوران بینهایت کوچک جابه‌جاپذیر است، به طوری که $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta\theta / \Delta t)$ نمایانگر یک بردار واقعی است. علت این امر در یادداشت ۱-۷ آخر فصل توضیح داده شده است. با فرض اینکه سرعت زاویه‌ای حقیقتاً بردار است،

بینیم چگونه سرعت هر ذره از جسم دوران‌کننده با سرعت زاویه‌ای جسم مربوط می‌شود.

یک جسم صلب را که حول محوری دوران می‌کند، در نظر بگیرید. جهت لحظه‌ای محور را با \hat{n} مشخص می‌کنیم و دستگاه مختصاتی که مبدأ آن روی محور قرار دارد انتخاب می‌کنیم. این دستگاه



شکل ۲-۷

مختصات در فضا ثابت و لخت است. همانطور که جسم دوران می‌کند، هر ذره آن دایره‌ای حول محور دوران ترسیم می‌کند. بردار \mathbf{r} از مبدأ تا هر یک از ذرات، سطح یک مخروط را جاروب می‌کند. شکل ۲-۷ (الف) نتیجه دوران $\Delta\theta$ حول محوری در امتداد $\hat{\mathbf{n}}$ را نشان می‌دهد. زاویه بین \mathbf{r} و $\hat{\mathbf{n}}$ ثابت است و نوک بردار \mathbf{r} روی دایره‌ای به شعاع $r \sin \phi$ حرکت می‌کند.

بزرگی جابه‌جایی $|\Delta\mathbf{r}|$ چنین است (شکل ۲-۷ ب و ج)

$$|\Delta\mathbf{r}| = 2r \sin \phi \sin \frac{\Delta\theta}{2}$$

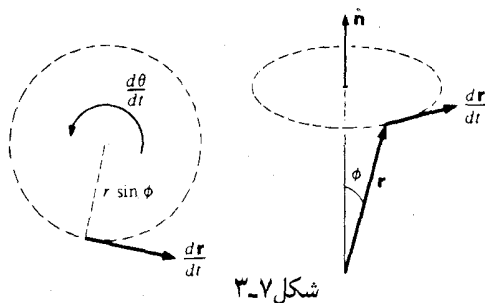
برای $\Delta\theta$ خیلی کوچک داریم

$$\sin \frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{\Delta\theta}{2} \quad \text{و} \quad |\Delta\mathbf{r}| \approx r \sin \phi \Delta\theta$$

اگر $\Delta\theta$ در زمان Δt طی شود، داریم $|\Delta\mathbf{r}|/\Delta t \approx r \sin \phi (\Delta\theta/\Delta t)$. در حد که $\Delta t \rightarrow 0$ داریم

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = r \sin \phi \frac{d\theta}{dt}$$

در حد، همان‌گونه که در شکل‌های ۲-۳ نشان داده شده $d\mathbf{r}/dt$ مماس بر دایره است. با توجه به تعریف ضرب برداری (بخش ۱-۲ ه) می‌بینیم که اندازه $d\mathbf{r}/dt$ برابر $d\mathbf{r}/dt = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r} d\theta/dt$ با رابطه $d\mathbf{r}/dt = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r} d\theta/dt$ داده بوده و جهت آنکه بر صفحه \mathbf{r} و $\hat{\mathbf{n}}$ عمود است، به طور صحیح با رابطه $d\mathbf{r}/dt = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r} d\theta/dt$ داده



شکل ۳-۷

می‌شود. چون $dr/dt = v$ و $\hat{n} d\theta/dt = \omega$ است، داریم

$$\frac{dr}{dt} = v = \omega \times r \quad (۱-۷)$$

مثال ۲-۷ دوران در صفحه xy : برای ارتباط دادن معادله ۱-۷ با حالت آسانتر-دوران در صفحه xy فرض کنید که می‌خواهیم v را برای دوران یک ذره حول محور z تعیین کنیم (شکل‌های ۴-۷).
داریم $\omega = \omega \hat{k}$ و $r = x\hat{i} + y\hat{j}$. بنابراین

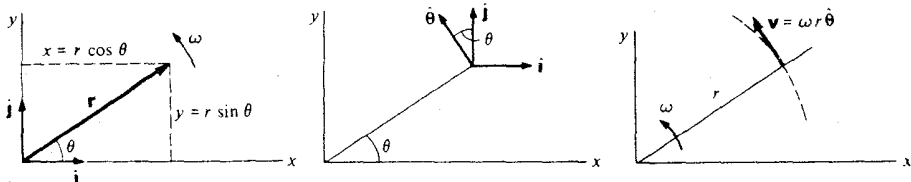
$$\begin{aligned} v &= \omega \times r \\ &= \omega \hat{k} \times (x\hat{i} + y\hat{j}) \\ &= \omega(x\hat{j} - y\hat{i}) \end{aligned}$$

در مختصات قطبی دوبعدی $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ است. بنابراین داریم

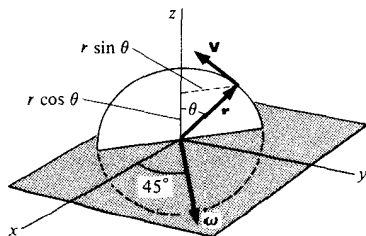
$$v = \omega r (\hat{j} \cos \theta - \hat{i} \sin \theta)$$

ولی $\hat{j} \cos \theta - \hat{i} \sin \theta$ برداریکه در جهت مماسی $\hat{\theta}$ است. بنابراین

$$v = \omega r \hat{\theta}$$



شکل ۴-۷



شکل ۵-۷

این سرعت ذره‌ای است که روی دایره‌ای به شعاع r با سرعت زاویه‌ای ω حرکت می‌کند. گاهی قبول ماهیت برداری سرعت زاویه‌ای در وهله اول مشکل است، زیرا تا به حال طبق عادت دوران را حول محوری ثابت در نظر می‌گرفتیم که تنها یک مؤلفه از سرعت زاویه‌ای را در بر می‌گیرد. عموماً خیلی کمتر با دوران همزمان حول چندین محور آشنا هستیم.

دیدهایم که می‌توان با سرعت زاویه‌ای مثل بردار در رابطه $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ رفتار کرد. مهم این است که متقاعد شویم اگر ω را چون هر برداری به مؤلفه‌هایی تجزیه کنیم، این رابطه به قوت خود باقی می‌ماند. به عبارت دیگر اگر قرار دهیم $\omega = \omega_1 + \omega_2$ ، آیا می‌توانیم بنویسیم $\mathbf{v} = (\omega_1 \times \mathbf{r}) + (\omega_2 \times \mathbf{r})$ همان‌گونه که مثال زیر نشان می‌دهد، جواب مثبت است.

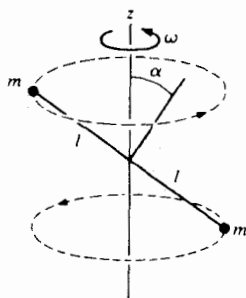
مثال ۳-۷ ماهیت برداری سرعت زاویه‌ای: ذره‌ای را در نظر بگیرید که مطابق شکل ۵-۷ روی صفحه‌ای قائم دوران می‌کند. سرعت زاویه‌ای ω در صفحه xy واقع است و با محورهای xy زاویه 45° می‌سازد. ابتدا \mathbf{v} را مستقیماً از رابطه $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ محاسبه می‌کنیم. برای یافتن \mathbf{r} ، توجه کنید که مطابق شکل داریم $z = r \cos \theta$ ، $x = -r \sin \theta / \sqrt{2}$ ، $y = r \sin \theta / \sqrt{2}$. بنابراین

$$\mathbf{r} = r \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \sin \theta \hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \hat{j} + \cos \theta \hat{k} \right)$$

و چون $r = \text{const.}$ است، با دیفرانسیل‌گیری داریم

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v} \\ &= r \left[\frac{-1}{\sqrt{2}} \cos \theta \hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \hat{j} - \sin \theta \hat{k} \right] \frac{d\theta}{dt} \\ &= \omega r \left[\frac{-1}{\sqrt{2}} \cos \theta \hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \hat{j} - \sin \theta \hat{k} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

که در اینجا از $d\theta/dt = \omega$ استفاده کرده‌ایم.



شکل ۶-۷

سپس سرعت را از رابطه $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ پیدا می‌کنیم. فرض کنید ω را به مؤلفه‌های زیر تجزیه کنیم

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{\omega}{\sqrt{2}}\hat{j}$$

در این صورت داریم

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\omega}{\sqrt{2}} & \frac{\omega}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-r \sin \theta}{\sqrt{2}} & \frac{r \sin \theta}{\sqrt{2}} & r \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= \omega r \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \cos \theta \hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \hat{j} - \sin \theta \hat{k} \right) \end{aligned}$$

که با معادله ۱ توافق دارد.

همانطور که انتظار داریم، در عملیات ریاضی ω را مثل هر بردار دیگری در نظر می‌گیریم و هیچ

مسئله‌ای پیش نمی‌آید.

در مثال زیر خواهیم دید که با تجزیه کردن ω به مؤلفه‌هایی روی محورهای مناسب، مسئله را

می‌توان فوق‌العاده آسان کرد. این مثال همچنین نشان می‌دهد که تکانه زاویه‌ای لزوماً موازی سرعت

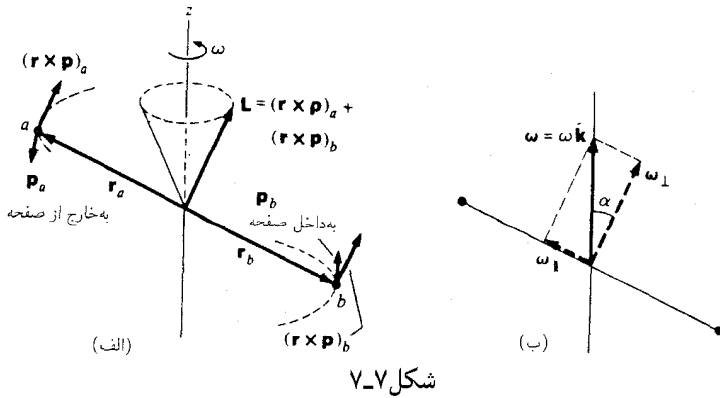
زاویه‌ای نیست.

مثال ۴-۷ تکانه زاویه‌ای میله مورب در حال دوران: جسم صلب ساده‌ای متشکل از دوزره به جرم m

را که توسط میله بدون جرمی به طول $2l$ به هم متصل‌اند، در نظر بگیرید. فقط وسط میله به یک محور

قائم که با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کند متصل است. میله همان‌گونه که در شکل ۶-۷ دیده می‌شود

به اندازه زاویه α مورب است. هدف این مسئله، پیدا کردن تکانه زاویه‌ای دستگاه است.



شکل ۷-۷

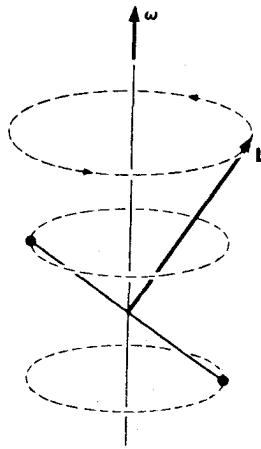
مستقیمترین روش محاسبهٔ تکانهٔ زاویه‌ای استفاده از تعریف $\mathbf{L} = \sum (\mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j)$ است. هریک از جرهما روی دایره‌ای به شعاع $l \cos \alpha$ با سرعت زاویه‌ای ω حرکت می‌کند. تکانهٔ هریک از اجرام برابر $|\mathbf{p}| = m\omega l \cos \alpha$ و مماس بر دایرهٔ مسیر است. با انتخاب نقطهٔ وسط میلهٔ مورب به مثابهٔ مبدأ، داریم $|\mathbf{r}| = l$ که در آن \mathbf{r} در امتداد میله و عمود بر \mathbf{p} است. بنابراین داریم $|\mathbf{L}| = 2m\omega l^2 \cos \alpha$. همانطور که در شکل ۷-۷ (الف) نشان داده شده، \mathbf{L} عمود بر میلهٔ مورب است و در صفحهٔ میله و محور z قرار دارد. \mathbf{L} همراه میله به گردش درمی‌آید و نوک آن دایره‌ای حول محور z ترسیم می‌کند.

حال برای محاسبهٔ \mathbf{L} به روشی متوسل می‌شویم که بر ماهیت برداری ω تأکید می‌کند. ابتدا $\hat{\omega} = \omega \hat{\mathbf{k}}$ را به مؤلفه‌های ω_{\parallel} و ω_{\perp} که به ترتیب عمود و موازی میلهٔ مورب هستند تجزیه می‌کنیم. از شکل ۷-۷ (ب) می‌بینیم که $\omega_{\parallel} = \omega \cos \alpha$ و $\omega_{\perp} = \omega \sin \alpha$.

از آنجاکه این جرهما نقاط مادی هستند، ω_{\parallel} هیچ تکانهٔ زاویه‌ای ایجاد نمی‌کند. بنابراین تکانهٔ زاویه‌ای کل ناشی از ω_{\perp} است. تکانهٔ زاویه‌ای به آسانی محاسبه می‌شود، گشتاور لختی نسبت به جهت ω_{\perp} برابر $2ml^2$ است و بزرگی تکانهٔ زاویه‌ای چنین است

$$\begin{aligned} L &= I\omega_{\perp} \\ &= 2ml^2\omega_{\perp} \\ &= 2ml^2\omega \cos \alpha \end{aligned}$$

\mathbf{L} در جهت ω_{\perp} است. بنابراین \mathbf{L} همراه با میله گردش می‌کند. نوک \mathbf{L} مطابق شکل ۸-۷ دایره‌ای حول محور z ترسیم می‌کند. (ما با وضعیت مشابهی در مثال ۶-۲ مربوط به آونگ مخروطی مواجه بودیم.) توجه کنید که \mathbf{L} موازی ω نیست. این نتیجه به طور کلی برای اجسام نامتقارن صحیح است. ■
بر دینامیک حرکت اجسام صلب رابطهٔ $\tau = d\mathbf{L}/dt$ حاکم است. قبل از اینکه این رابطه را برای

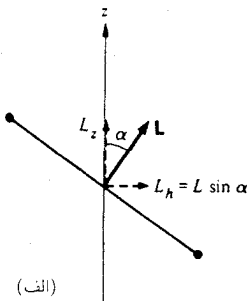


شکل ۷-۸

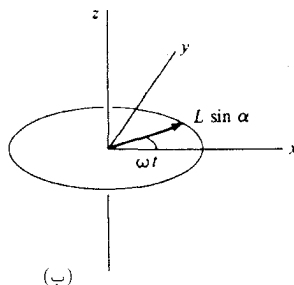
دستگاه‌های پیچیده به کار ببریم، با تحلیل گشتاور نیروی وارد بر میله مورب دوران‌کننده، آگاهی بیشتری از معنای فیزیکی آن کسب می‌کنیم.

مثال ۷-۵ گشتاور نیروی وارد بر میله مورب در حال دوران: در مثال ۷-۴ نشان دادیم که بزرگی تکانه زاویه‌ای یک میله مورب که به طور یکنواخت دوران می‌کند ثابت است ولی جهت آن تغییر می‌کند. \mathbf{L} نسبت به میله ثابت است و در فضا همراه میله دوران می‌کند.

گشتاور نیروی وارد بر میله با رابطه $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$ داده می‌شود. با تجربه کردن \mathbf{L} مطابق شکل ۷-۹ (الف)، می‌توان $d\mathbf{L}$ را خیلی آسان پیدا کرد. (روشی مشابه با مثال ۶-۶ مربوط به آونگ مخروطی را دنبال می‌کنیم.) L_z که مؤلفه موازی با محور z است برابر $L \cos \alpha$ و ثابت است. بنابراین در جهت z گشتاور نیرویی وجود ندارد. مؤلفه افقی \mathbf{L} برابر $L_h = L \sin \alpha$ است که همراه میله نوسان می‌کند. اگر محورهای xy را طوری انتخاب کنیم که L_h در لحظه $t = 0$ بر محور x منطبق باشد. آنگاه در لحظه t



(الف)



(ب)

شکل ۷-۹

داریم (شکل ۹-۷ ب)

$$\begin{aligned}L_x &= L_h \cos \omega t \\ &= L \sin \alpha \cos \omega t \\ L_y &= L_h \sin \omega t \\ &= L \sin \alpha \sin \omega t\end{aligned}$$

بنابراین

$$\mathbf{L} = L \sin \alpha (\hat{\mathbf{i}} \cos \omega t + \hat{\mathbf{j}} \sin \omega t) + L \cos \alpha \hat{\mathbf{k}}$$

گشتاور نیرو عبارت است از

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \frac{d\mathbf{L}}{dt} \\ &= L\omega \sin \alpha (-\hat{\mathbf{i}} \sin \omega t + \hat{\mathbf{j}} \cos \omega t)\end{aligned}$$

با استفاده از $L = 2ml^2\omega \cos \alpha$ داریم

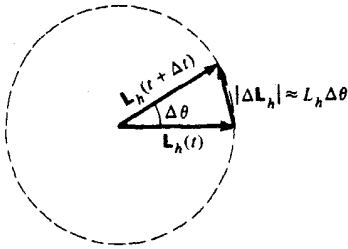
$$\begin{aligned}\tau_x &= -2ml^2\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \omega t \\ \tau_y &= 2ml^2\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \omega t\end{aligned}$$

بنابراین

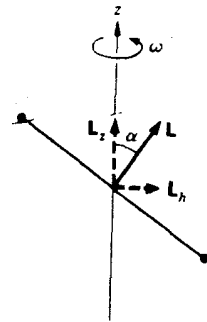
$$\begin{aligned}\tau &= \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} \\ &= 2ml^2\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \\ &= \omega L \sin \alpha\end{aligned}$$

توجه کنید که برای $\alpha = 0$ یا $\alpha = \pi/2$ داریم $\tau = 0$. می‌دانید چرا؟ همچنین آیا می‌دانید که چرا گشتاور متناسب با ω^2 است؟

این تحلیل ممکن است غیرمستقیم به نظر آید، زیرا گشتاور نیرو را می‌توان مستقیماً با یافتن نیروی وارد بر هر جرم و استفاده از $\boldsymbol{\tau} = \sum \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_j$ محاسبه کرد. اما روش استفاده شده در بالا نیز به همین اندازه سریع است. به علاوه، این تحلیل نشان می‌دهد که سرعت زاویه‌ای و تکانه زاویه‌ای بردارهای واقعی هستند که می‌توانند به مؤلفه‌هایی روی هر محور که انتخاب کنیم، تجزیه شوند. ■



شکل ۱۱-۷



شکل ۱۰-۷

مثال ۷-۶ گشتاور نیروی وارد بر میله مورب در حال دوران را با تجزیه کردن \mathbf{L} به مؤلفه‌هایی و استفاده از $\tau = d\mathbf{L}/dt$ محاسبه کردیم. در این مثال محاسبه را با برهان هندسی که تأکید آن بر ارتباط بین گشتاور نیرو و آهنگ تغییرات \mathbf{L} است، تکرار می‌کنیم. این طریقه فقط دیدگاهی را نشان می‌دهد که در تحلیل حرکت ژيروسکوپ مفید خواهد بود.

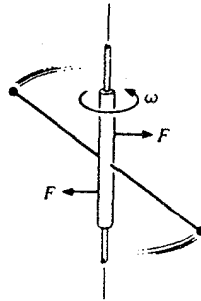
مثال ۷-۵ با تجزیه کردن \mathbf{L} به مؤلفه عمودی $L_z = L \cos \alpha$ و مؤلفه افقی $L_h = L \sin \alpha$ مطابق آنچه در شکل ۱۰-۷ نشان داده شده است شروع می‌کنیم. چون L_z ثابت است، هیچ گشتاور نیرویی حول محور z وجود ندارد. بزرگی L_h ثابت است ولی همراه با میله دوران می‌کند. آهنگ تغییرات زمانی \mathbf{L} منحصرأ مربوط به این پدیده است.

یکبار دیگر با بردار دوران کننده سروکار داریم. از بخش ۱-۸ یا مثال ۶-۶ می‌دانیم $dL_h/dt = \omega L_h$ است. اما از آنجاکه تجسم این نتیجه بسیار مهم است، یکبار دیگر آن را به دست می‌آوریم. از نمودار برداری شکل ۱۱-۷ داریم

$$\begin{aligned} |\Delta L_h| &\approx |L_h| \Delta\theta \\ \frac{dL_h}{dt} &= L_h \frac{d\theta}{dt} \\ &= L_h \omega \end{aligned}$$

گشتاور نیرو با رابطه زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{dL_h}{dt} \\ &= L_h \omega \end{aligned}$$



شکل ۷-۱۲

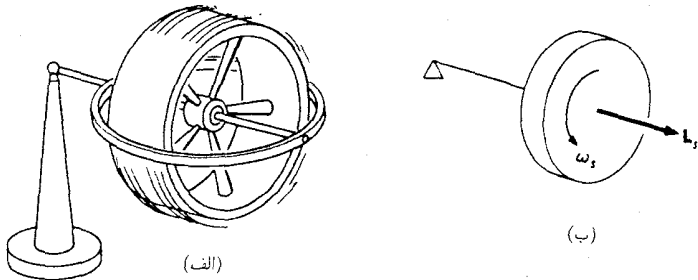
$$= \omega L \sin \alpha$$

که با نتیجه مثال قبل یکسان است. گشتاور نیروی τ در حد با ΔL موازی است. برای این میله مورب، τ در جهت مماسی و در صفحه افقی است و با میله دوران می‌کند.

ممکن است تصور کنید گشتاور نیروی وارد بر دستگاه دوران‌کننده همواره باعث تغییر سرعت دوران می‌شود. در این مسئله سرعت دوران ثابت است و گشتاور نیرو باعث تغییر جهت L می‌شود. گشتاور نیرو به وسیله نیروهای اعمال شده از سوی یاتاقان دوران دهنده میله مورب ایجاد می‌شود. برای میله حقیقی باید ساختار گسترده آن چیزی شبیه آستین حول میله باشد. گشتاور نیرو باری روی آستین ایجاد می‌کند که با زمان تغییر می‌کند و نتیجه آن لرزش و ساییدگی است. چون نیروی گرانشی یکنواخت نمی‌تواند گشتاور نیرویی به میله مورب وارد کند (شکل ۷-۱۲)، میله را با تعادل ایستا می‌گویند. اما هنگام دوران میله مورب، گشتاور نیرو به آن وارد می‌شود و این بدین معنی است که میله در تعادل دینامیکی نیست. ماشینهای دوران‌کننده را اگر بخواهند نرم و بدون لرزش کار کنند باید با تعادل دینامیکی طراحی کنند. ■

۷-۳ ژيروسکوپ

حال برمی‌گردیم به بعضی از جنبه‌های حرکت ژيروسکوپ که با استفاده از مفاهیم بنیادی تکانه زاویه‌ای، گشتاور نیرو، و مشتق زمانی یک بردار قابل درک هستند. هر قدم را با دقت مورد بحث قرار می‌دهیم، زیرا این قسمتی از فیزیک است که درک شهودی به آن کمک زیادی نمی‌کند. تجزیه و تحلیل ما از ژيروسکوپ در این بخش، به هیچ وجه کامل نیست. به جای اینکه حرکت کلی ژيروسکوپ را مستقیماً از معادلات دینامیکی پیدا کنیم، از مسائل پیچیده ریاضی می‌گذریم و روی حرکت تقدیمی یکنواخت یعنی نوع ساده و آشنای حرکت ژيروسکوپ تأکید می‌کنیم. منظور ما نشان دادن توافق حرکت تقدیمی یکنواخت با رابطه $\tau = dL/dt$ و قوانین نیوتون است. گرچه این نحوه برخورد نمی‌تواند کاملاً ارضاءکننده باشد، ولی اصول فیزیکی به کار رفته را روشن می‌سازد. اساس یک ژيروسکوپ، عبارت از یک چرخ



شکل ۷-۱۳

طیار چرخان و یک دستگاه تعلیقی است که امکان می‌دهد محور آن هر جهت فرضی را دارا شود. یک زیروسکوپ آشنای اسباب‌بازی که در شکل ۷-۱۳ (الف) نشان داده شده است برای بحث ما کفایت می‌کند. انتهای محور روی پایه‌ای قرار دارد به طوری که به محور امکان می‌دهد بدون هیچ قیدی سمت‌گیریهایی مختلفی را اختیار کند.

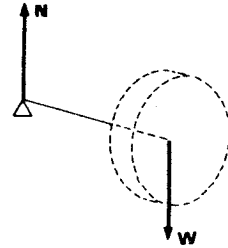
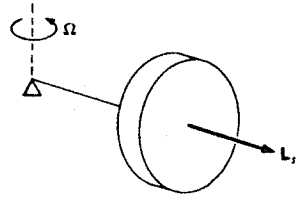
شکل ۷-۱۳ (ب) نمایش طرحواره‌ای از یک زیروسکوپ است. مثلث، یک محور آزاد را نمایش می‌دهد و چرخ طیار در جهت نشان داده شده می‌چرخد.

اگر زیروسکوپ، در حالی که یک انتهای آن به وسیله تکیه‌گاه نگهداشته شده، از وضعیت افقی رها شود، ابتدا از حالت افقی به پایین خواهد لنگید و سپس به وضعیت حرکت تقدیمی بگنجد. این به نحوی که محور به آهستگی با سرعت زاویه‌ای ثابت Ω حول محور قائم دوران می‌کند. واکنش فوری شخصی این است که چرا زیروسکوپ نمی‌افتد. یک پاسخ ممکن به وسیله نمودار نیرو داده می‌شود (شکل‌های ۷-۱۴). نیروی عمودی کل برابر $N - W$ است که N نیروی عمودی اعمال شده به وسیله تکیه‌گاه و W وزن است. اگر $N = W$ باشد، مرکز جرم نمی‌تواند بیفتد.

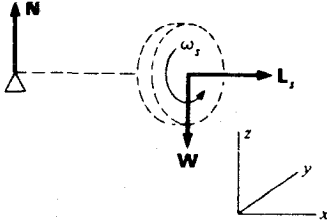
این توضیح که کاملاً درست است، راضی‌کننده نیست. ما سؤال اشتباهی را مطرح کرده‌ایم به جای اینکه تعجب کنیم چرا زیروسکوپ نمی‌افتد، یا سؤال می‌کردیم چرا مانند آونگ حول تکیه‌گاه نوسان نمی‌کند.

در واقع امر، اگر زیروسکوپ یا چرخ طیار ساکن رها شود، رفتاری مانند یک آونگ دارد. به جای حرکت تقدیمی افقی، نوسان قائم خواهد داشت. حرکت تقدیمی فقط وقتی وجود دارد که چرخ طیار پیوسته بچرخد. در این حالت تکانه زاویه‌ای اسپینی بزرگ چرخ طیار، دینامیک دستگاه را تحت تسلط دارد.

تقریباً تمام تکانه زاویه‌ای زیروسکوپ در \mathbf{L}_s یعنی تکانه زاویه‌ای اسپینی آن قرار دارد (شکل ۷-۱۵). \mathbf{L}_s در جهت محور قرار دارد و بزرگی آن $L_s = I_s \omega_s$ است که I_s گشتاور لختی چرخ طیار حول محورش است. وقتی زیروسکوپ حول محور z حرکت تقدیمی می‌کند تکانه زاویه‌ای مداری



شکل ۱۴-۷

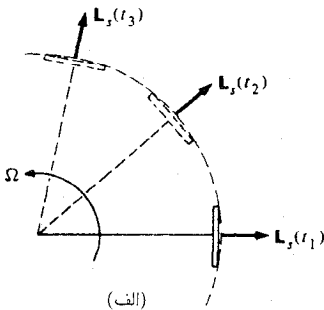


شکل ۱۵-۷

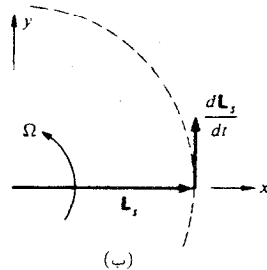
کوچکی در جهت z دارد. اما در حالت حرکت تقدیمی یکنواخت، تکانه زاویه‌ای مداری از نظر بزرگی و جهت ثابت است و نقش دینامیکی بازی نمی‌کند. بدین خاطر، در اینجا از آن صرف‌نظر خواهیم کرد. L_s همواره در جهت محور است. همچنانکه ژيروسکوپ حرکت تقدیمی می‌کند L_s همراه آن دوران می‌کند (شکل ۱۶-۷ الف). ما چندین بار و این اواخر در مثال ۷-۶ با بردارهای دورانی روبه‌رو بودیم. اگر سرعت زاویه‌ای حرکت تقدیمی Ω باشد، آهنگ تغییرات L_s چنین داده می‌شود

$$\left| \frac{dL_s}{dt} \right| = \Omega L_s$$

dL_s/dt در جهت مماس بر دایره افقی جاروب شده به وسیله L_s است. در لحظه‌ای که در شکل ۱۶-۷ (ب) نشان داده شده، L_s در جهت x و dL_s/dt در جهت y است. چون L_s تغییر می‌کند، باید روی ژيروسکوپ گشتاور نیروی اعمال شده‌ای وجود داشته باشد.



(الف)



(ب)

شکل ۱۶-۷

سرچشمه گشتاور نیرو از نمودار نیروها در شکل ۷-۱۷ پیداست. اگر تکیه‌گاه را مبدأ بگیریم، گشتاور نیرو ناشی از وزن چرخ طیار است که در انتهای محور اثر می‌کند. بزرگی گشتاور نیرو چنین است:

$$\tau = lW$$

τ در جهت y و موازی $d\mathbf{L}_s/dt$ است، که انتظار آن را داریم. آهنگ حرکت تقدیمی Ω را می‌توان از رابطه زیر پیدا کرد

$$\left| \frac{d\mathbf{L}_s}{dt} \right| = \tau$$

چون $\Omega L_s = |d\mathbf{L}_s/dt|$ و $\tau = lW$ است، داریم

$$\Omega L_s = lW$$

یا

$$\Omega = \frac{lW}{I_s \omega_s} \quad (۷-۲)$$

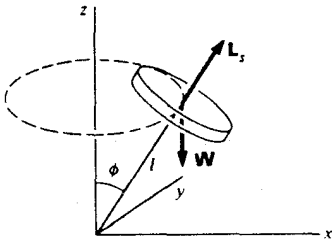
در روش دیگر، می‌توانستیم حرکت را حول مرکز جرم تحلیل کنیم. در این حالت مثل سابق گشتاور نیرو برابر $Nl = Wl = Nl$ است، زیرا $N = W$ است.

معادله ۷-۲ نشان می‌دهد که با کند شدن چرخ طیار، Ω زیاد می‌شود. این پدیده به سادگی در ژيروسکوپ اسباب بازی دیده می‌شود. بدیهی است که Ω به‌طور نامحدود نمی‌تواند زیاد شود؛ بالاخره حرکت تقدیمی یکنواخت به حرکت شدید و نایکنواخت تبدیل می‌شود. این عمل هنگامی رخ می‌دهد که Ω آن‌چنان بزرگ شود که نتوان از تغییرات کوچک تکانه زاویه‌ای حول محور عمودی بر اثر گشتاور نیروی اصطکاک صرف‌نظر کرد. اما همان‌گونه که در یادداشت ۷-۶ نشان داده شده است، حرکت تقدیمی یکنواخت معرف جوابی دقیق به معادلات دینامیکی حاکم بر ژيروسکوپ است.

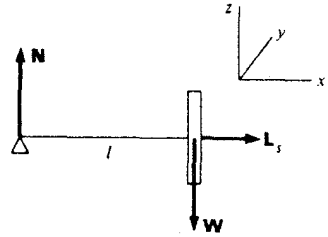
اگرچه فرض کردیم که محور ژيروسکوپ افقی است، ولی همان‌طور که مثال زیر نشان می‌دهد، آهنگ حرکت تقدیمی به اندازه زاویه محور ژيروسکوپ نسبت به قائم بستگی ندارد.

مثال ۷-۷ حرکت تقدیمی ژيروسکوپ: یک ژيروسکوپ در حال حرکت تقدیمی را مطابق شکل ۷-۱۸ در نظر بگیرید که محور آن با قائم زاویه ϕ می‌سازد. مؤلفه L_x در صفحه xy با حرکت تقدیمی ژيروسکوپ تغییر می‌کند در حالی که مؤلفه موازی با محور z ثابت باقی می‌ماند.

مؤلفه افقی L_x برابر $L_s \sin \phi$ است. بنابراین



شکل ۱۸-۷



شکل ۱۷-۷

$$|d\mathbf{L}_s/dt| = \Omega L_s \sin \phi$$

گشتاور نیروی گرانش افقی و بزرگی آن چنین است

$$\tau = l \sin \phi W$$

داریم

$$\Omega L_s \sin \phi = l \sin \phi W$$

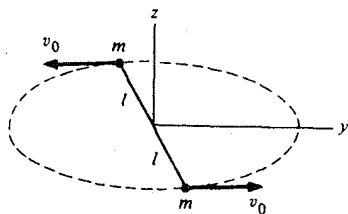
$$\Omega = \frac{lW}{I_s \omega_s}$$

سرعت حرکت تقدیمی مستقل از ϕ است.

عملیات ما نشان داد که حرکت تقدیمی ژيروسکوپ با معادله دینامیکی $\tau = d\mathbf{L}/dt$ کاملاً سازگار است. مثال زیر در مورد علت حرکت تقدیمی ژيروسکوپ توضیح بیشتری می‌دهد.

مثال ۸-۷ چرا ژيروسکوپ حرکت تقدیمی دارد: فهم حرکت تقدیمی ژيروسکوپ مشکل است زیرا تکانه زاویه‌ای برای ما خیلی کمتر از حرکت ذره آشناست. اما، دینامیک دورانی یک جسم صلب ساده مستقیماً برحسب قوانین نیوتون قابل فهم است. به جای اینکه اختصاصاً به سراغ ژيروسکوپ برویم، جسم صلبی مرکب از دو ذره با جرمهای m که در دو انتهای میله صلب بدون جرمی به طول $2l$ قرار دارند در نظر می‌گیریم. فرض کنید این میله در فضای آزاد با تکانه زاویه‌ای \mathbf{L}_s در جهت z ، دوران می‌کند. سرعت هر ذره v است (شکل ۱۹-۷). نشان خواهیم داد گشتاور نیروی اعمال شده τ باعث حرکت تقدیمی \mathbf{L}_s با سرعت زاویه‌ای $\Omega = \tau/L_s$ می‌شود.

برای ساده کردن موضوع، فرض کنید گشتاور نیرو فقط در زمان کوتاه Δt در حالی که میله به طور لحظه‌ای در امتداد محور x است اثر می‌کند. فرض می‌کنیم که گشتاور نیرو بر اثر دو نیروی مساوی و مختلف‌الجهت F ، مطابق شکل ۲۰-۷ به وجود می‌آید. (نیروی کل صفر است، و مرکز جرم به حال سکون



شکل ۱۹-۷

باقی می ماند.) تکانه هر ذره به مقدار زیر تغییر می کند

$$\Delta p = m \Delta v = F \Delta t$$

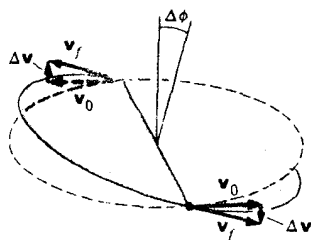
چون Δv عمود بر v_0 است، سرعت هر ذره مطابق شکل ۲۱-۷ تغییر جهت می دهد، و میله حول جهتی جدید دوران می کند.

محور دوران به اندازه زاویه زیر منحرف می شود

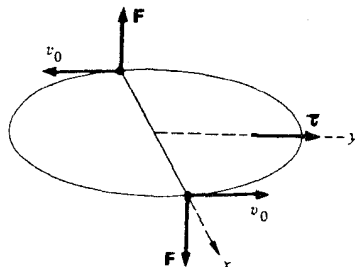
$$\begin{aligned} \Delta \phi &\approx \frac{\Delta v}{v_0} \\ &= \frac{F \Delta t}{mv_0} \end{aligned}$$

گشتاور نیروی وارد بر دستگاه برابر $\tau = 2Fl$ ، تکانه زاویه ای برابر $L_s = 2mv_0 l$ است. بنابراین

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= \frac{F \Delta t}{mv_0} \\ &= \frac{2lF \Delta t}{2lmv_0} \\ &= \frac{\tau \Delta t}{L_s} \end{aligned}$$



شکل ۲۱-۷



شکل ۲۰-۷

بدین ترتیب، سرعت حرکت تقدیمی در حالتی که گشتاور نیرو اعمال می‌شود چنین است

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \\ &= \frac{\tau}{L_s}\end{aligned}$$

که با نتیجه حرکت تقدیمی ژيروسکوپ یکسان است. همچنین تغییر تکانه زاویه‌ای ΔL_s همانطور که لازم است. در جهت y و موازی گشتاور نیرو است.

این مدل، اطلاعاتی چند در مورد اینکه چرا گشتاور نیرو باعث انحراف محور دوران یک جسم چرخان می‌شود، ارائه می‌دهد. با وجود اینکه استدلال بالا را می‌توان برای اجسام غیر نقطه‌ای نظیر ژيروسکوپ به‌کار برد، نتیجه نهایی معادل این است که از $\tau = dL/dt$ استفاده کنیم. ■

بحث این بخش برای حرکت تقدیمی یکنواخت که حالت خاصی از حرکت ژيروسکوپ است، به‌کار می‌رود. در ابتدای تحلیل فرض کردیم که ژيروسکوپ چنین حرکتی را دارد، ولی راه‌های بسیار دیگری برای حرکت ژيروسکوپ وجود دارند. به‌عنوان مثال اگر انتهای آزاد محوره به حال سکون نگهداشته شده و ناگهان رها شود، سرعت حرکت تقدیمی لحظه‌ای صفر می‌شود و مرکز جرم شروع به افتادن می‌کند. بررسی چگونگی تبدیل این حرکت سقوطی به حرکت تقدیمی یکنواخت جالب است. این کار را در یادداشت ۷-۲ در آخر فصل با کاربرد مستقیم معادله $\tau = dL/dt$ انجام می‌دهیم. اما پرداختن به این مطلب مستلزم رابطه‌ای کلی بین L و ω است که در بخش ۷-۶ به‌دست آمده است.

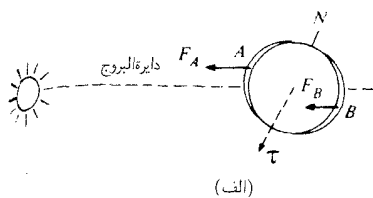
۷-۴ برخی از کاربردهای حرکت ژيروسکوپ

در این بخش چند مثال می‌آوریم که تأثیر تکانه زاویه‌ای را در حرکت جسم صلب نشان می‌دهد.

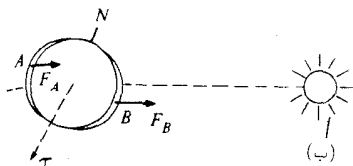
مثال ۷-۹ حرکت تقدیمی اعتدالین: در تقریب اول هیچ گشتاور نیرویی به زمین وارد نمی‌شود و تکانه زاویه‌ای آن با زمان تغییر نمی‌کند. با این تقریب سرعت دورانی زمین ثابت است و تکانه زاویه‌ای آن در فضا همواره در جهت ثابتی قرار دارد.

اگر دستگاه زمین-خورشید را با دقت بیشتری بررسی کنیم، پی می‌بریم که گشتاور کوچکی به زمین وارد شده و باعث می‌شود که محور چرخش به آهستگی تغییر جهت دهد و پدیده‌ای به نام حرکت تقدیمی اعتدالین به وجود آورد (شکل ۷-۲۲).

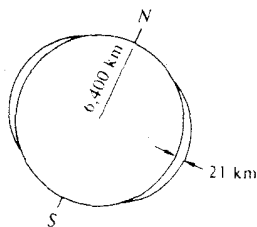
گشتاور نیرو بر اثر برهم‌کنش خورشید و ماه با شکل غیرکروی زمین حاصل می‌شود. زمین اندکی برآمده است، یعنی شعاع متوسط زمین در استوا به اندازه ۲۱ کیلومتر بیشتر از شعاع قطبی آن است. از آنجاکه محور دوران زمین نسبت به دایره البروج (صفحه مداری) شیب دارد نیروی گرانشی خورشید یک



(الف)



شکل ۲۳-۷

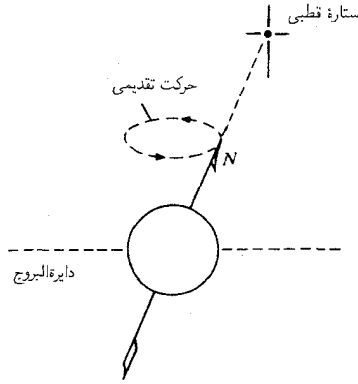


شکل ۲۲-۷

گشتاور نیرو به وجود می آورد. در زمستان، قسمت برآمده بالای دایره البروج، A در شکل ۲۳-۷ (الف)، نزدیکتر از قسمت پایینی B به خورشید است. در نتیجه، همانطوری که در شکل ۲۳-۷ (ب) نشان داده شده، جرم واقع در A با نیروی بیشتر از جرم واقع در B ، به وسیله خورشید جذب می شود. نتیجه این عمل گشتاور نیرویی است که در جهت پادساعتگرد، خارج از صفحه شکل، بر زمین وارد می شود. شش ماه بعد وقتی زمین در طرف دیگر خورشید است، B با نیروی بیشتر از A جذب می شود. اما گشتاور نیرو همان جهت سابق را در فضا دارد. در حد وسط این دو حالت فوق العاده، گشتاور نیرو صفر است. نیروی میانگین عمود بر تکانه زاویه ای اسپینی است و در صفحه دایره البروج قرار دارد. به طریق مشابهی، ماه نیز گشتاور نیروی میانگین به زمین وارد می کند، این گشتاور نیرو تقریباً دو برابر بزرگتر از خورشید است. این گشتاور نیرو باعث ایجاد حرکت تقدیمی در محور اسپین، حول محوری قائم بر دایره البروج می شود. همچنانکه محور اسپین حرکت تقدیمی می کند، گشتاور نیرو عمود بر آن باقی می ماند و دستگاه مانند زیروسکویی با محور مایل که در مثال ۷-۷ تحلیل کردیم، عمل می کند.

زمان تناوب حرکت تقدیمی 26000 سال است. 13000 سال دیگر، محور قطبی به طرف جدی، ستاره شمالی کنونی ممتد نخواهد بود؛ وانحرافی به اندازه $47^\circ = 23\frac{1}{2} \times 2$ خواهد داشت. آنگاه ستارگان جبار و سیروس (شعرای یمانی) که نشانه های آشنای زمستان هستند، در آسمان اواسط تابستان خواهند درخشید.

اعتدال بهاری (اعتدال ربیعی) در لحظه ای رخ می دهد که خورشید در حرکت ظاهری خود از جنوب به شمال درست روی استواست. به واسطه حرکت تقدیمی محور زمین، مکان خورشید در نقطه اعتدال نسبت به زمینه ستارگان ثابت به اندازه 5° ثانیه کمانی در هر سال تغییر می کند (شکل ۲۴-۷). حرکت تقدیمی اعتدالین برای قدما شناخته شده بود. این موضوع مبنای طرح تاریخ دوره ای در اختر بینی است، که دوازده عصر در آن تمیز داده می شود، و هر کدام به نام یک صورت فلکی که خورشید در هر

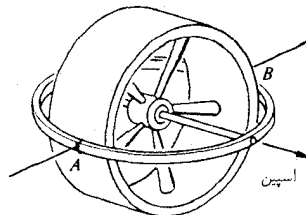


شکل ۲۴-۷

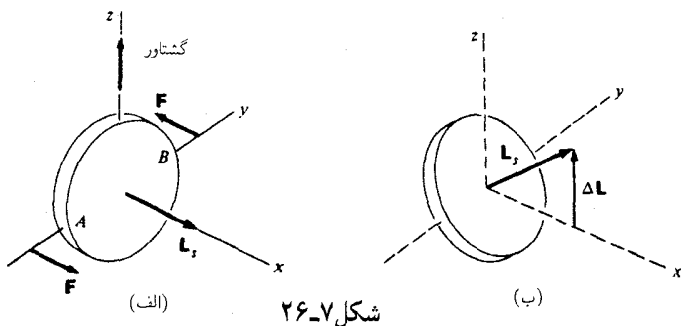
اعتدال بهاری در آن قرار می‌گیرد خوانده می‌شود. عصر کنونی حوت است و 60° سال دیگر عصر دلو خواهد بود.

مثال ۷-۱۰: قطب‌نمای ژيروسکوپ: آزمایش زیر را با یک ژيروسکوپ اسباب‌بازی انجام دهید. در نقاط A و B در دو طرف قاب ژيروسکوپ یا تاقانهای محور چرخش دو نخ گره بزنید. نخها را محکم در طول بازوان خود بگیرید به طوری که محور چرخش افقی باشد. حال به آهستگی ژيروسکوپ در حال چرخش را طوری حول محور بدنتان بگردانید که روی دایره‌ای به شعاع طول بازو حرکت کند. ژيروسکوپ به طور ناگهانی تغییر وضع می‌دهد و با محور چرخش قائم موازی با محور دوران شما، به حال سکون درمی‌آید (شکل ۷-۲۵). دوران در جهت مخالف باعث حرکت ناگهانی ژيروسکوپ به اندازه 180° می‌شود که محور چرخش را دوباره موازی با محور دوران می‌کند. (محور چرخش تمایل به نوسان حول محور قائم دارد، اما اصطکاک در محور افقی این حرکت را سرعت میرا می‌سازد.)

اساس قطب‌نمای ژيروسکوپ برای پدیده استوار است. چرخ طیار که می‌تواند آزادانه حول دو محور عمود برهم دوران کند تمایل دارد محور چرخش خود را در جهت موازی با محور دوران دستگاه قرار دهد. در مورد قطب‌نمای ژيروسکوپ این "دستگاه" زمین است؛ قطب‌نما با محوری موازی با



شکل ۲۵-۷



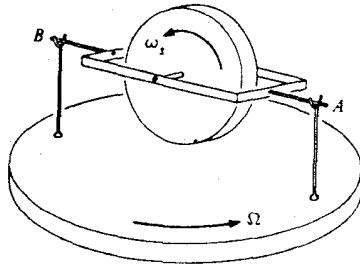
شکل ۲۶-۷

محور قطبی به حال سکون درمی آید.

حرکت را می توانیم به طور کیفی با استدلال ساده برداری درک کنیم. فرض کنید که محور دوران افقی و \mathbf{L}_z در امتداد محور x است. فرض کنید بکشیم قطب نما را حول محور z بچرخانیم. اگر نیروهای نشان داده شده را اعمال کنیم، گشتاور τ_z در جهت z به وجود می آید و L_z تکانه زاویه ای روی محور z شروع به زیاد شدن می کند. اگر \mathbf{L}_z صفر بود، L_z تماماً به واسطه دوران قطب نمای زیروسکوپی حول محور z ناشی می شد (شکل ۲۶-۷ الف)؛ $L_z = I_z \omega_z$ که I_z گشتاور لختی حول محور z است. اما، وقتی چرخ طیار در حال چرخش است، راه دیگر برای تغییر L_z قطب نمای زیروسکوپی، دوران آن حول محور AB یا گردش \mathbf{L}_z به سوی محور z است. آزمایش نشان می دهد که اگر \mathbf{L}_z بزرگ باشد، قسمت اعظم گشتاور نیرو صرف تغییر جهت تکانه اسپینی می شود، و قسمت کوچکی برای دوران قطب نمای زیروسکوپی حول محور z به کار می رود (شکل ۲۶-۷ ب).

با در نظر گرفتن تکانه زاویه ای در امتداد محور y می توانیم ببینیم که چرا پدیده ای چنین چشمگیر رخ می دهد. تکیه گاه های A و B به دستگاه امکان می دهند که آزادانه حول محور y نوسان کند، بنابراین هیچ گشتاور نیرویی در امتداد محور y وجود ندارد. از آنجا که L_y در ابتدا صفر است، باید صفر باقی بماند. همچنانکه قطب نمای زیروسکوپی شروع به دوران حول محور z می کند، L_z مؤلفه ای در جهت y پیدا می کند. در همان زمان، قطب نما و قاب آن شروع به حرکت ناگهانی و پیوسته حول محور y می کنند و تکانه زاویه ای ناشی از این حرکت، مؤلفه y بردار \mathbf{L}_z را خنثی می کند. وقتی \mathbf{L}_z سرانجام در حالت موازی با محور z به حال سکون درمی آید، حرکت قاب، دیگر جهت \mathbf{L}_z را تغییر نمی دهد و محور چرخش بدون تغییر باقی می ماند.

زمین یک دستگاه دوران کننده است، و یک قطب نمای زیروسکوپی روی سطح زمین با محور قطبی میزان خواهد شد که نشان دهنده شمال حقیقی است. اما قطب نمای زیروسکوپی واقعی تا اندازه ای پیچیده تر است، زیرا باید جهت شمال را بدون تأثیر پذیرفتن از حرکت کشتی یا هواپیمایی که هدایت آن را



شکل ۲۷-۷

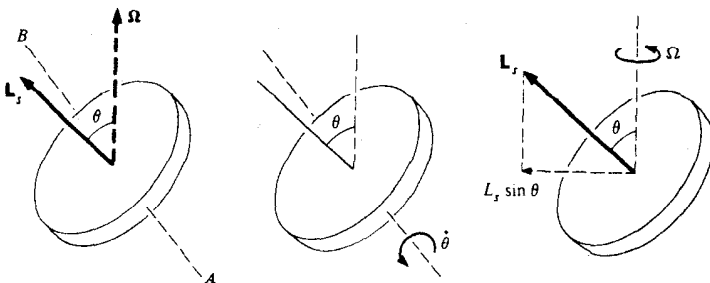
به عهده دارد، نشان دهد. در مثال بعدی، معادله دینامیکی قطب‌نمای ژيروسکوپ را حل می‌کنیم و نشان می‌دهیم که چگونه قطب‌نمای متصل به زمین، شمال حقیقی را نشان می‌دهد. ■

مثال ۱۱-۷ حرکت قطب‌نمای ژيروسکوپ: یک قطب‌نمای ژيروسکوپ را در نظر بگیرید که مطابق شکل ۲۷-۷ متشکل از یک قرص متوازن چرخان بوده و در قاب سبکی که به وسیله محوری افقی نگهداری می‌شود، جای دارد. مجموعه روی میز چرخانی است که با سرعت زاویه‌ای ثابت Ω دوران می‌کند. ژيروسکوپ دارای تکانه زاویه‌ای اسپینی $L_s = I_s \omega_s$ در امتداد محور چرخش است. به علاوه به واسطه دوران بدنه‌اش حول محور قائم با سرعت Ω و به دلیل دوران حول محور افقی، دارای تکانه زاویه‌ای است.

هیچ گشتاور نیرویی در امتداد AB به دلیل گردان بودن محور نمی‌تواند وجود داشته باشد. بنابراین تکانه زاویه‌ای L_h در جهت AB ثابت و $dL_h/dt = 0$ است.

dL_h/dt از دو قسمت تشکیل یافته است. اگر θ زاویه خط قائم از محور اسپین و I_{\perp} گشتاور لختی حول محور AB باشد. آنگاه $L_h = I_{\perp} \dot{\theta}$ است و سهم dL_h/dt از آن برابر $\dot{\theta} I_{\perp}$ است (شکل‌های ۲۸-۷).

به علاوه به علت تغییر جهت L_s همچنانکه در تحلیل حرکت تقدیمی ژيروسکوپ دریافتیم،



شکل ۲۸-۷

می‌تواند تغییر کند. مؤلفه افقی I_s برابر $L_s \sin \theta$ است و با آهنگ $\Omega L_s \sin \theta$ در جهت AB زیاد می‌شود.

دو جزء تغییرات L_h را مستقل از یکدیگر در نظر گرفته‌ایم. اگر کل تغییرات L_h را برابر مجموع دو جزء تغییرات بدانیم موجه به نظر می‌رسد. براساس بحثی که در بخش ۷-۷ آورده شد می‌توان دلیل محکمی در این مورد ارائه کرد.

از جمع کردن این دو سهم dL_h/dt چنین خواهیم داشت

$$\frac{dL_h}{dt} = I_{\perp} \ddot{\theta} + \Omega L_s \sin \theta$$

چون $dL_h/dt = 0$ است، معادله حرکت چنین می‌شود

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{L_s \Omega}{I_{\perp}} \right) \sin \theta = 0$$

این رابطه با معادله آونگ که در بخش ۶-۶ بحث شد، یکسان است. وقتی محور اسپین نزدیک به خط قائم است داریم $\sin \theta \approx \theta$ و ژيروسکوپ حرکت هماهنگ ساده بر حسب θ انجام می‌دهد.

$$\theta = \theta_0 \sin \beta t$$

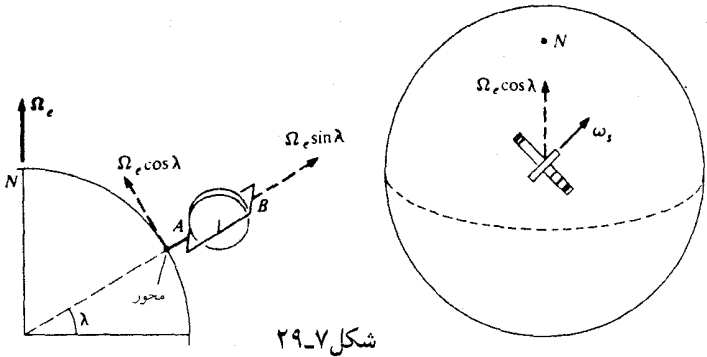
که در آن

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{\frac{L_s \Omega}{I_{\perp}}} \\ &= \sqrt{\frac{\omega_s \Omega I_s}{I_{\perp}}} \end{aligned}$$

اگر مقدار کمی اصطکاک در یاتاقانهای A و B وجود داشته باشد، دامنه نوسان θ سرانجام صفر شده و محور چرخش در حالت موازی با Ω به سکون درمی‌آید.

برای استفاده از ژيروسکوپ به عنوان قطب‌نما، آن را در حالی که محور AB قائم است و قاب آن آزادانه می‌گردد، روی زمین ثابت کنید. همان‌گونه که شکل‌های ۷-۲۹ نشان می‌دهند. اگر λ عرض جغرافیایی محل ژيروسکوپ باشد و مؤلفه سرعت زاویه‌ای زمین، Ω_e ، در امتداد عمود بر محور AB همان مؤلفه افقی $\Omega_e \cos \lambda$ باشد، محور چرخش در صفحه افقی حول قطب شمال نوسان می‌کند، و سرانجام در حالی که متوجه شمال است به سکون درمی‌آید.

زمان تناوب نوسانهای کوچک برابر $T = 2\pi / \beta = 2\pi \sqrt{I_{\perp} / (I_s \omega_s \Omega_e \cos \lambda)}$ است. برای قرص نازک $I_{\perp} / I_s = \frac{1}{2}$ و $\Omega_e = 2\pi \text{ rad/day}$ برابر 2π رادیان بر روز است. ژيروسکوپی با سرعت



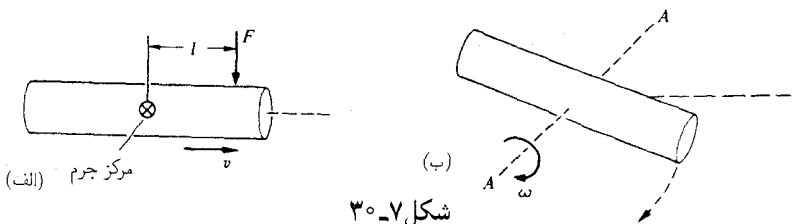
شکل ۲۹-۷

دوران ۲۰۰۰۰ دور در دقیقه، در استوا دارای زمان تناوبی برابر ۱۱ ثانیه است. نزدیک قطب شمال زمان تناوب به اندازه‌ای طولانی می‌شود که قطب‌نمای ژيروسکوپی قابل استفاده نیست.

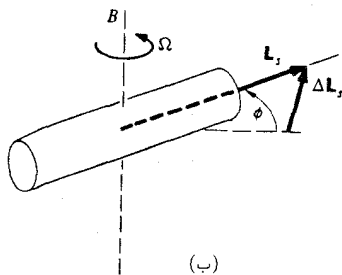
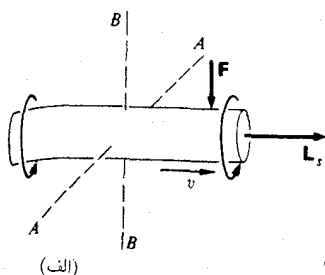
مثال ۱۲-۷ پایداری جسم دوران‌کننده: تکانه زاویه‌ای می‌تواند جسمی را که آزادانه حرکت می‌کند به نحو قابل ملاحظه‌ای پایدار سازد. برای مثال، تکانه زاویه‌ای اسپین حلقه غلتان بچه‌ها آن را حتی وقتی از یک دست انداز عبور می‌کند، سر پا نگه می‌دارد. حلقه به جای افتادن کمی تغییر جهت داده و به غلتیدن ادامه می‌دهد. اثر اسپین روی یک گلوله مثال دیگری است. شیارهای ماریچ یا خانهای داخل لوله اسلحه، به گلوله چرخشی می‌دهد که به پایداری آن کمک می‌کند.

برای تحلیل اثر چرخشی، استوانه‌ای را که به موازات محور خود حرکت می‌کند در نظر بگیرید. فرض کنید نیروی کوچک مختل‌کننده F برای لحظه کوتاه Δt روی استوانه اثر کند. F عمود بر محور است و نقطه اثر آن به فاصله l از مرکز جرم است.

ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که استوانه دارای اسپین صفر است. گشتاور نیرویی که از مرکز جرم می‌گذرد و در امتداد AA قرار دارد برابر $\tau = Fl$ است (شکل ۳۰-۷ الف). "ضربه زاویه‌ای" برابر $\tau \Delta t = Fl \Delta t$ است. تکانه زاویه‌ای حاصل حول محور AA چنین است (شکل ۳۰-۷ ب)



شکل ۳۰-۷



شکل ۷-۳۱

$$\Delta L_A = I_A(\omega - \omega_0) = Fl\Delta t$$

از آنجا که سرعت زاویه‌ای اولیه (ω_0) صفر است، سرعت زاویه‌ای نهایی با رابطه زیر داده می‌شود

$$\omega = \frac{Fl\Delta t}{I_A}$$

بر اثر ضربه، استوانه حول محور عرضی سرعت زاویه‌ای می‌گیرد و شروع به معلق زدن می‌کند.

حال وضعیت مشابهی را در نظر بگیرید، با این تفاوت که استوانه سریعاً با تکانه زاویه‌ای L_s می‌چرخد (شکل ۷-۳۱ الف). این وضعیت شبیه وضعیت زیروسکوپ است که در آن گشتاور نیرو حول AA باعث حرکت تقدیمی حول محور BB می‌شود. آهنگ حرکت تقدیمی در حالی که نیروی F عمل می‌کند برابر با $dL_s/dt = \Delta L_s$ است (شکل ۷-۳۱ ب)، یا

$$\Omega = \frac{Fl}{L_s}$$

زاویه حرکت تقدیمی استوانه چنین است

$$\begin{aligned} \phi &= \Omega \Delta t \\ &= \frac{Fl\Delta t}{L_s} \end{aligned}$$

در مدتی که این نیرو وارد می‌شود استوانه به جای اینکه شروع به معلق زدن کند، اندکی جهت خود را تغییر می‌دهد و سپس حرکت تقدیمی متوقف می‌شود. هرچه چرخش بزرگتر باشد، زاویه کوچکتر و اثر اختلالی روی جسم کمتر است.

توجه کنید که چرخش هیچ اثری روی حرکت مرکز جرم ندارد. در هر دو حالت، مرکز جرم، سرعتی برابر $\Delta v = F \Delta t / M$ کسب می‌کند.

۵-۷ پایستگی تکانه زاویه‌ای

قبل از پرداختن به مسئله کلی حرکت جسم صلب، به این سؤال که آیا تکانه زاویه‌ای یک جسم منزوی پایسته هست یا نه برمی‌گردیم. در آغاز نشان خواهیم داد که پایستگی تکانه زاویه‌ای از قوانین نیوتون ناشی نمی‌شود.

یک سیستم متشکل از N ذره با جرمهای $m_1, m_2, \dots, m_j, \dots, m_N$ را در نظر بگیرید. فرض کنید که سیستم منزوی است، به طوری که نیروها تماماً ناشی از برهم‌کنش ذرات‌اند. فرض کنید نیروی وارد بر ذره j چنین باشد

$$\mathbf{f}_j = \sum_{k=1}^N \mathbf{f}_{jk}$$

که در آن نیروی وارد بر ذره j از طرف ذره k است (در تعیین حاصل جمع، می‌توانیم از جمله‌ای که در آن $j = k$ است صرف‌نظر کنیم، چون طبق قانون سوم نیوتون $\mathbf{f}_{jj} = 0$ است). با انتخاب یک مبدأ، گشتاور نیروی $\boldsymbol{\tau}_j$ وارد بر ذره j را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_j &= \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_j \\ &= \mathbf{r}_j \times \sum_k \mathbf{f}_{jk} \end{aligned}$$

فرض کنید $\boldsymbol{\tau}_{jl}$ گشتاور نیروی وارد بر j از طرف ذره l باشد

$$\boldsymbol{\tau}_{jl} = \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{jl}$$

به همین ترتیب، گشتاور نیروی وارد بر l از طرف j چنین است

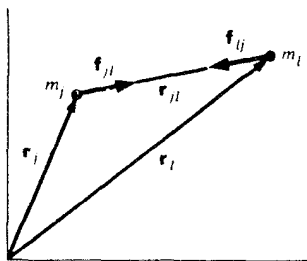
$$\boldsymbol{\tau}_{lj} = \mathbf{r}_l \times \mathbf{f}_{lj}$$

مجموع این دو گشتاور نیرو عبارت است از

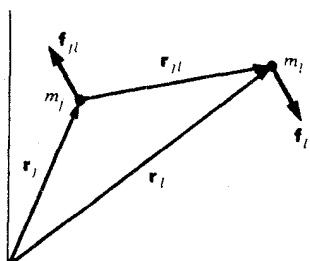
$$\boldsymbol{\tau}_{jl} + \boldsymbol{\tau}_{lj} = \mathbf{r}_l \times \mathbf{f}_{lj} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{jl}$$

چون $\mathbf{f}_{jl} = -\mathbf{f}_{lj}$ است، داریم

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{jl} + \boldsymbol{\tau}_{lj} &= (\mathbf{r}_l \times \mathbf{f}_{lj}) - (\mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{lj}) \\ &= (\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{f}_{lj} \\ &= \mathbf{r}_{jl} \times \mathbf{f}_{lj} \end{aligned}$$



(الف)



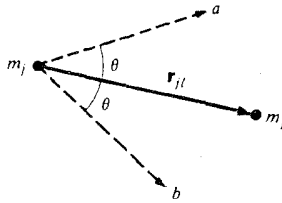
(ب)

شکل ۷-۳۲

که در آن برداری از زاویه α است. می‌خواهیم ثابت کنیم $\tau_{ji} + \tau_{ij} = 0$ است. زیرا از این مطلب نتیجه می‌شود که گشتاورهای داخلی، درست مانند نیروهای داخلی، دوه‌دویکدیگر را خنثی می‌کنند. آنگاه گشتاور نیروی کل صفر شده و بدین ترتیب ثابت می‌شود که تکانه زاویه‌ای یک سیستم منزوی پایسته است. چون f_{ij} و r_{ji} هیچیک صفر نیستند. همان‌گونه که شکل ۷-۳۲ (الف) نشان می‌دهد، برای اینکه گشتاور نیرو حذف شود، f_{ij} باید موازی با r_{ji} باشد. اما در قیاس با وضعیت شکل ۷-۳۲ (ب) گشتاور نیرو صفر نبوده، و تکانه زاویه‌ای پایسته نیست. با وجود این نیروها مساوی و مختلف‌الجهت‌اند و تکانه خطی پایسته است.

وضعیت نشان داده شده در شکل ۷-۳۲ (الف) مربوط به حالت نیروهای مرکزی است، و نتیجه می‌گیریم که پایستگی تکانه زاویه‌ای در حالت حرکت تحت اثر نیروهای مرکزی از قوانین نیوتون نتیجه می‌شود. اما قوانین نیوتون به‌طور صریح مستلزم مرکزی بودن نیروها نیستند، و این نتیجه را باید بگیریم که قوانین نیوتون هیچ توضیح صریحی در مورد پایسته بودن و یا نبودن تکانه زاویه‌ای یک سیستم منزوی نمی‌دهد. زیرا این قوانین به‌خودی‌خود وضعیت نشان داده شده، در شکل ۷-۳۲ (ب) را مستثنی نمی‌کند.

براساس بحث زیر می‌توان برای آنچه گفته شد استثنایی قائل شد: اگرچه قوانین نیوتون صریحاً مستلزم مرکزی بودن نیروها نیستند، اما به‌طور ضمنی این الزام را دارند زیرا قوانین نیوتون در ساده‌ترین شکل خود با ذرات سروکار دارند. ذرات جرمهای ایده‌آلی هستند که هیچ اندازه و ساختاری ندارند. در این حالت نیروی بین ذرات منزوی باید مرکزی باشند، زیرا تنها برداری که در یک سیستم دو ذره‌ای تعریف شده است بردار r_{ji} است که از یک ذره به ذره دیگر ممتد است. برای مثال، فرض کنید، همانطور که نمودار ۷-۳۳ نشان می‌دهد، نیرویی ابداع کنیم که نسبت به محور بین دو ذره با زاویه θ قرار بگیرد، اما هیچ راهی برای تشخیص جهت a از b وجود ندارد، هر دو با r_{ji} زاویه θ می‌سازند. یک نیروی مستقل از زاویه را نمی‌توان تنها با استفاده از یک بردار r_{ji} تعریف کرد، نیروی بین دو ذره باید مرکزی باشد



شکل ۳۳-۷

مشکل بحث تکانه زاویه‌ای در چارچوب نظرات نیوتونی این است که شناخت از طبیعت اکنون موجوداتی بسیار متفاوت با ذرات ساده را در برمی‌گیرد. به عنوان یک مثال، الکترون احتمالاً بهترین نمونه ذره از دیدگاه نیوتونی است. الکترون جرمی کاملاً معین داشته، و تا آنجا که دانش کنونی معلوم می‌دارد، دارای شعاع صفر است. با این حال، چیزی حاکی از ساختار داخلی در خود دارد، الکترون دارای تکانه زاویه‌ای اسپینی است. اینکه جسمی با ابعاد صفر دارای تکانه زاویه‌ای باشد پارادوکسی است، ولی این پارادوکس را چون یک حقیقت در طبیعت باید پذیرفت.

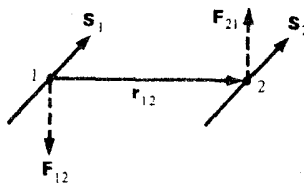
به دلیل اینکه اسپین الکترون یک جهت اضافی را در فضا تعریف می‌کند، نیروی بین دو الکترون لازم نیست مرکزی باشد به عنوان مثال، نیروی زیر می‌تواند وجود داشته باشد

$$F_{12} = Cr_{12} \times (S_1 + S_2)$$

$$F_{21} = Cr_{21} \times (S_1 + S_2)$$

که در آن C یک ثابت و S_1 برداری موازی با تکانه زاویه‌ای الکترون ۱ام است. نیروها مساوی و در خلاف جهت یکدیگرند، ولی مرکزی نیستند، و تولید گشتاور نیرو می‌کنند (شکل ۳۴-۷).

امکانات دیگری هم برای نیروهای غیر مرکزی وجود دارد. به طور تجربی، بین دو ذره باردار که نسبت به یکدیگر حرکت می‌کنند مرکزی نیست، بردار سرعت، محور دومی می‌سازد که نیرو به آن بستگی دارد. تکانه زاویه‌ای این دو ذره واقعاً تغییر می‌کند. نقص آشکار بایستگی تکانه زاویه‌ای ناشی از اغماض قسمت مهمی از سیستم، یعنی میدان الکترومغناطیسی است. اگرچه مفهوم میدان با مکانیک ذرات بیگانه است، چنین برمی‌آید که میدانها دارای خواص مکانیکی هستند. میدانها می‌توانند دارای انرژی،



شکل ۳۴-۷

تکانه، و تکانه زاویه‌ای باشند. هرگاه تکانه زاویه‌ای میدان به حساب بیاید، تکانه کل سیستم متشکل از ذره و میدان پایسته است.

به طور خلاصه وضعیت چنین است که فیزیک نیوتونی قادر به پیش‌بینی پایستگی تکانه زاویه‌ای نیست، ولی به طور تجربی هیچ سیستم منزوی مشاهده نشده است که تکانه زاویه‌ای آن پایسته نباشد. نتیجه می‌گیریم که پایستگی تکانه زاویه‌ای یک قانون فیزیکی مستقل است، و تا وقتی که خلاف آن مشاهده نشده، شناخت فیزیکی ما باید در پرتو آن هدایت شود.

۶-۷ تکانه زاویه‌ای جسم صلب دوران‌کننده

تکانه زاویه‌ای و تانسور لختی

معادله حاکم بر جسم صلب، $\tau = d\mathbf{L}/dt$ شباهتی ظاهری به معادله حرکت انتقالی $\mathbf{F} = d\mathbf{P}/dt$ دارد. اما یک اختلاف اساسی بین آنها وجود دارد. تکانه خطی و حرکت مرکز جرم به طور ساده به وسیله $\mathbf{P} = M\mathbf{V}$ به هم مرتبط‌اند. ولی ارتباط بین \mathbf{L} و ω به این سادگی نیست. برای محور دوران ثابت $L = I\omega$ است و این امر ایجاب می‌کند که رابطه کلی را به صورت $\mathbf{L} = I\omega$ فرض کنیم که در آن I یک اسکالر یعنی عددی ساده است. اما این مطلب نمی‌تواند صحیح باشد، زیرا از مطالعه دوران یک میله مورب، مثال ۷-۴، دریافتیم که \mathbf{L} و ω ضرورتاً موازی نیستند.

در این بخش رابطه کلی بین تکانه زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای را به دست خواهیم آورد، و در بخش بعدی به حل مسئله معادلات حرکت خواهیم پرداخت.

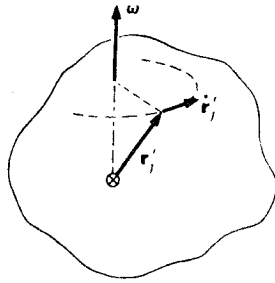
همانطور که در فصل ۶ بحث شد، یک جابه‌جایی اختیاری جسم صلب می‌تواند به جابه‌جایی مرکز جرم به علاوه دوران حول یک محور لحظه‌ای که از مرکز جرم می‌گذرد تجزیه شود. حرکت انتقالی به سادگی بحث می‌شود. از عبارت کلی تکانه زاویه‌ای و گشتاور نیروی جسم صلب، معادلات ۶-۱۱ و ۶-۱۴ شروع می‌کنیم

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \sum_j \mathbf{r}'_j \times m_j \dot{\mathbf{r}}'_j \quad (3-7)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{R} \times \mathbf{F} + \sum_j \mathbf{r}'_j \times \mathbf{f}_j \quad (4-7)$$

که در آن بردار مکان m_j نسبت به مرکز جرم است. چون $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$ است، داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \times \mathbf{F} + \sum_j \mathbf{r}'_j \times \mathbf{f}_j &= \frac{d}{dt}(\mathbf{R} \times M\mathbf{V}) + \frac{d}{dt}(\sum_j \mathbf{r}'_j \times m_j \dot{\mathbf{r}}'_j) \\ &= \mathbf{R} \times M\mathbf{A} + \frac{d}{dt}(\sum_j \mathbf{r}'_j \times m_j \dot{\mathbf{r}}'_j) \end{aligned}$$



شکل ۳۵-۷

چون $\mathbf{F} = M\mathbf{A}$ است، جملات شامل \mathbf{R} حذف می‌شود و آنچه باقی می‌ماند چنین است

$$\Sigma \mathbf{r}'_j \times \mathbf{f}_j = \frac{d}{dt} (\Sigma \mathbf{r}'_j \times m_j \dot{\mathbf{r}}'_j) \quad (۵-۷)$$

با داشتن گشتاور نیرو و تکانه زاویه‌ای حول مرکز جرم، حرکت دورانی جسم را مستقل از حرکت مرکز جرم می‌توان پیدا کرد. تکانه زاویه‌ای \mathbf{L} حول مرکز جرم چنین است

$$\mathbf{L}_c = \Sigma \mathbf{r}'_j \times m_j \dot{\mathbf{r}}'_j \quad (۶-۷)$$

کار ما اکنون این است که \mathbf{L}_c را برحسب سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای ω بیان کنیم. چون \mathbf{r}'_j یک بردار دوران‌کننده است. داریم (شکل ۳۵-۷)

$$\dot{\mathbf{r}}'_j = \omega \times \mathbf{r}'_j$$

بنابراین

$$\mathbf{L}_c = \Sigma \mathbf{r}'_j \times m_j (\omega \times \mathbf{r}'_j)$$

به منظور ساده‌سازی نمادها، \mathbf{L} را به جای \mathbf{L}_c و \mathbf{r}_j را به جای \mathbf{r}'_j خواهیم داشت. نتیجه به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{L} = \Sigma \mathbf{r}_j \times m_j (\omega \times \mathbf{r}_j) \quad (۷-۷)$$

این نتیجه پیچیده به نظر می‌آید. در واقع، پیچیده هم هست، ولی می‌توانیم شکل آن را ساده کنیم. محاسبه تفضیلی ضرب خارجی معادله ۷-۷ را با مختصات دکارتی جانشین می‌کنیم.^۱

از آنجا که $\omega = \omega_x \hat{\mathbf{i}} + \omega_y \hat{\mathbf{j}} + \omega_z \hat{\mathbf{k}}$ است، داریم

۱. راه دیگر استفاده کردن از اتحاد $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ است.

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = (z\omega_y - y\omega_z)\hat{\mathbf{i}} + (x\omega_z - z\omega_x)\hat{\mathbf{j}} + (y\omega_x - x\omega_y)\hat{\mathbf{k}} \quad (۸-۷)$$

یک مؤلفه از L مثلا L_x را محاسبه می‌کنیم. با حذف موقتی شاخص j داریم

$$[\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]_x = y(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_z - z(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_y \quad (۹-۷)$$

اگر نتایج معادله ۸-۷ را در معادله ۹-۷ جایگزین کنیم، نتیجه چنین است

$$\begin{aligned} [\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]_x &= y(y\omega_x - x\omega_y) - z(x\omega_z - z\omega_x) \\ &= (y^2 + z^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z \end{aligned} \quad (۱۰-۷)$$

بنابراین

$$L_x = \sum m_j (y_j^2 + z_j^2) \omega_x - \sum m_j x_j y_j \omega_y - \sum m_j x_j z_j \omega_z \quad (۱۱-۷)$$

نمادهای زیر را معرفی می‌کنیم

$$I_{xx} = \sum m_j (y_j^2 + z_j^2)$$

$$I_{xy} = -\sum m_j x_j y_j \quad (۱۲-۷)$$

$$I_{xz} = -\sum m_j x_j z_j$$

I_{xx} گشتاور لختی نامیده می‌شود، که با گشتاور لختی معرفی شده در فصل گذشته ρ_j^2 یکسان است، مشروط بر اینکه محور را در جهت x بگیریم به طوری که $\rho_j^2 = y_j^2 + z_j^2$ شود. کمیتهای I_{xy} و I_{xz} حاصلضربهای لختی نامیده می‌شوند و متقارن هستند؛ برای مثال داریم

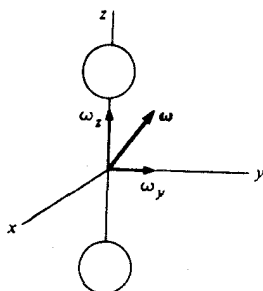
$$I_{xy} = -\sum m_j x_j y_j = -\sum m_j y_j x_j = I_{yx}$$

برای پیدا کردن L_y و L_z ، می‌توانیم همین کار را تکرار کنیم. اما روش ساده‌تر جایگزینی مختصات به شکل $y \rightarrow z, x \rightarrow y, z \rightarrow x$ است. اگر این جایگزینیها را در معادلات ۱۱-۷ و ۱۲-۷ انجام دهیم، خواهیم داشت

$$L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \quad (الف ۱۳-۷)$$

$$L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \quad (ب ۱۳-۷)$$

$$L_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \quad (ج ۱۳-۷)$$



شکل ۷-۳۶

این نوع آرایش سه معادله با هر چیز دیگری که تاکنون با آن مواجه بودیم فرق می‌کند. آنها نتایج فصل گذشته را در بردارند. برای محور دوران ثابت حول جهت z داریم $\omega = \omega \hat{k}$ و معادله ۷-۱۳ ج به صورت زیر درمی‌آید

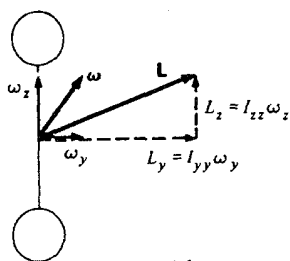
$$L_z = I_{zz}\omega$$

$$= \sum m_j(x_j^2 + y_j^2)\omega$$

اما، معادله ۷-۱۳ همچنین نشان می‌دهد که سرعت زاویه‌ای در جهت z می‌تواند تکانه زاویه‌ای حول هر یک از محورهای مختصات ایجاد کند. برای مثال اگر $\omega = \omega \hat{k}$ باشد، آنگاه $L_x = I_{xz}\omega$ و $L_y = I_{yz}\omega$ است. در حقیقت اگر به رشته معادلات L_x و L_y و L_z نگاه کنیم، می‌بینیم که در هر حالت تکانه زاویه‌ای حول یک محور سرعت زاویه‌ای حول هر سه محور بستگی دارد. هم L و هم ω بردارهای معمولی هستند و L متناسب با ω است. با این تغییر که دو برابر کردن مؤلفه‌های ω مؤلفه‌های L را دو برابر می‌کند، ولی همچنانکه قبلاً با توجه به میله مورب دوران‌کننده، مثال (۷-۱۴)، دریافته‌ایم، L لزوماً در همان جهت ω ممتد نیست.

مثال ۷-۱۳ دمبل دوران‌کننده: دمبلی را مطابق شکل ۷-۳۶ در نظر بگیرید که از دو کره به شعاع b و جرم M ساخته شده و به وسیله میله باریکی به هم متصل شده‌اند. فاصله بین مراکز آنها $2l$ است. جسم حول محوری که از مرکز جرم آن می‌گذرد در حال دوران است. در لحظه‌ای معین میله بر محور z منطبق می‌شود و ω در صفحه xy قرار می‌گیرد. به طوری که $\omega = \omega_z \hat{k} + \omega_y \hat{j}$ است. L را پیدا کنید.

برای پیدا کردن L ، به گشتاور و حاصلضربهای لختی احتیاج داریم. خوشبختانه حاصلضربهای لختی جسم متقارن نسبت به محورهای مختصات، حذف می‌شود. برای مثال $I_{xy} = -\sum m_j x_j y_j = 0$ است، زیرا در یک جسم متقارن برای هر جرم m_n در نقطه (x_n, y_n) قرار داشته باشد، جرمی مساوی در نقطه $(x_n, -y_n)$ وجود دارد، اثرات این دو جرم در I_{xy} یکدیگر را خنثی می‌کند. در این حالت



شکل ۷-۳۷

معادله ۷-۱۳ به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$L_x = I_{xx} \omega_x$$

$$L_y = I_{yy} \omega_y$$

$$L_z = I_{zz} \omega_z$$

گشتاور لختی I_{zz} درست برابر گشتاورهای لختی دو کره حول قطرهایشان است

$$I_{zz} = 2\left(\frac{2}{5}Mb^2\right) = \frac{4}{5}Mb^2$$

برای محاسبه I_{yy} ، می‌توانیم از قضیهٔ محورهای موازی برای پیدا کردن گشتاور لختی هر کره حول محور y استفاده کنیم.

$$I_{yy} = 2\left(\frac{2}{5}Mb^2 + MI^2\right) \\ = \frac{4}{5}Mb^2 + 2MI^2$$

فرض کرده‌ایم که از جرم میله می‌توان صرف‌نظر کرد.

چون $\omega = \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}$ است (شکل ۷-۳۷)، داریم

$$L_x = 0$$

$$L_y = I_{yy} \omega_y$$

$$L_z = I_{zz} \omega_z$$

I_{zz} و I_{yy} مساوی نیستند، بنابراین $\omega_y / \omega_z \neq L_y / L_z$ است و L همچنانکه شکل نشان می‌دهد، موازی ω نیست.

معادلات ۷-۱۳ پرزحمت‌اند، بدین خاطر نوشتن آنها به شکل کوتاه‌نمادی زیر راحت‌تر است

$$\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{I}} \boldsymbol{\omega} \quad (۷-۱۴)$$

این معادله برداری نماینده سه معادله است، درست مانند $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ که نماینده سه معادله است. اختلاف در این است که m یک اسکالر (عدد) ساده است، در حالی که $\tilde{\mathbf{I}}$ یک مفهوم پیچیده ریاضی به نام تانسور دارد. $\tilde{\mathbf{I}}$ تانسور لختی است.

آموخته‌ایم که مؤلفه‌های یک بردار مانند \mathbf{A} را به شکل زیر نشان دهیم

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

به همین طریق، نه مؤلفه $\tilde{\mathbf{I}}$ را می‌توان در یک آرایه 3×3 گنجاند

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (۷-۱۵)$$

از این نه مؤلفه، حداکثر فقط شش‌تای آن متفاوت‌اند زیرا $I_{yx} = I_{xy}$ ، $I_{zx} = I_{xz}$ ، و $I_{zy} = I_{yz}$ است. قاعده ضرب کردن $\boldsymbol{\omega}$ در $\tilde{\mathbf{I}}$ برای یافتن $\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{I}} \boldsymbol{\omega}$ با معادله ۷-۱۳ معین می‌شود. مثال زیر تانسور لختی را تشریح می‌کند.

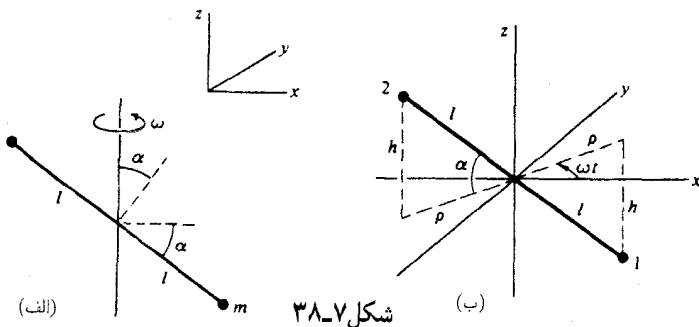
مثال ۷-۱۴ تانسور لختی میله مورب دوران‌کننده: تکانه زاویه‌ای میله مورب دوران‌کننده را در مثال ۷-۳ از اصول اولیه پیدا کردیم. حال \mathbf{L} را برای همین دستگاه با استفاده از $\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{I}} \boldsymbol{\omega}$ پیدا می‌کنیم.

میله بدون جرمی به طول $2l$ ، دو جرم مساوی m را به یکدیگر متصل کرده است. میله مورب است و زاویه α را با قائم می‌سازد، و مطابق شکل ۷-۳۸ (الف) با سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ حول محور z دوران می‌کند. در لحظه $t = 0$ این میله در صفحه xz قرار می‌گیرد. مختصات دو ذره در زمانهای دیگر (شکل ۷-۳۸ ب) چنین‌اند

ذره ۱	ذره ۲
$x_1 = \rho \cos \omega t$	$x_2 = -\rho \cos \omega t$
$y_1 = \rho \sin \omega t$	$y_2 = -\rho \sin \omega t$
$z_1 = -h$	$z_2 = h$

که در آن $h = l \sin \alpha$ و $\rho = l \cos \alpha$ است.

حال مؤلفه‌های $\tilde{\mathbf{I}}$ از تعریف آنها قابل محاسبه‌اند، برای مثال



شکل ۷-۳۸

$$I_{xx} = m_1(y_1^2 + z_1^2) + m_2(y_2^2 + z_2^2) \\ = 2m(\rho^2 \sin^2 \omega t + h^2)$$

$$I_{zy} = I_{yz} \\ = -m_1 y_1 z_1 - m_2 y_2 z_2 \\ = 2m \rho h \sin \omega t$$

بقیه جملات به‌سادگی قابل تعیین‌اند، و داریم

$$\tilde{\mathbf{I}} = 2m \begin{pmatrix} \rho^2 \sin^2 \omega t + h^2 & -\rho^2 \sin \omega t \cos \omega t & \rho h \cos \omega t \\ -\rho^2 \sin \omega t \cos \omega t & \rho^2 \cos^2 \omega t + h^2 & \rho h \sin \omega t \\ \rho h \cos \omega t & \rho h \sin \omega t & \rho^2 \end{pmatrix}$$

عامل مشترک $2m$ در هر یک از جملات ضرب می‌شود. چون $\omega = (\omega, \omega, 0)$ است، از معادلات ۷-۱۳ داریم

$$L_x = 2m \rho h \omega \cos \omega t$$

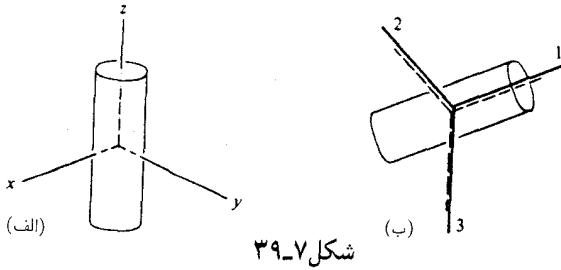
$$L_y = 2m \rho h \omega \sin \omega t$$

$$L_z = 2m \rho^2 \omega$$

برای پیدا کردن گشتاور نیروی وارد، می‌توانیم از \mathbf{L} دیفرانسیل بگیریم

$$\tau_x = -2m \rho h \omega^2 \sin \omega t$$

$$\tau_y = 2m \rho h \omega^2 \cos \omega t$$



شکل ۷-۳۹

$$\tau_z = 0$$

این نتایج با آنچه در مثال ۷-۴ داشتیم یکسان است، مشروط بر اینکه جایگذاری
 اگر محوره‌های تقارن یک جسم متقارن یکنواخت، بر محوره‌های مختصات منطبق شود، همچنانکه در
 مثال ۷-۱۳ دیدیم حاصلضربهای لختی صفر می‌شود. در این حالت تانسور لختی به شکل ساده قطری
 زیر درمی‌آید

محوره‌های اصلی

اگر محوره‌های تقارن یک جسم متقارن یکنواخت، بر محوره‌های مختصات منطبق شود، همچنانکه در
 مثال ۷-۱۳ دیدیم حاصلضربهای لختی صفر می‌شود. در این حالت تانسور لختی به شکل ساده قطری
 زیر درمی‌آید

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (7-16)$$

جالب است بدانیم که برای جسمی به هر شکل و با هر توزیع جرم، همواره می‌توان مجموعه‌ای از سه
 محور متعامد پیدا کرد، به طوری که حاصلضربهای لختی آن صفر شود. (برای اثبات، استفاده از جبر
 ماتریسی لازم است که در اغلب کتابهای دینامیک پیشرفته وجود دارد.) چنین محورهایی، محوره‌های
 اصلی نامیده می‌شود. تانسور لختی نسبت به محوره‌های اصلی شکل قطری دارد.

برای کره یکنواخت، تمام محوره‌های عمودی که از مرکز می‌گذرند، محوره‌های اصلی‌اند. برای جسمی
 با تقارن استوانه‌ای، محور دوران یک محور اصلی است (شکل ۷-۳۹ الف). دو محور اصلی دیگر
 عمود بر یکدیگر است و در صفحه‌ای که از مرکز جرم گذشته و عمود بر محور دوران است قرار دارند.

یک جسم صلب دوران‌کننده را در نظر بگیرید و فرض کنید که محوره‌های مختصات ۱، ۲، ۳
 را که به طور لحظه‌ای منطبق بر محوره‌های اصلی جسم هستند، مطابق شکل ۷-۳۹ (ب) معرفی
 کرده‌ایم. نسبت به این دستگاه مختصات، سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای دارای مؤلفه‌های $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ است

و مؤلفه‌های L به شکل ساده زیرند

$$L_1 = I_1 \omega_1$$

$$L_2 = I_2 \omega_2$$

$$L_3 = I_3 \omega_3 \quad (۱۷-۷)$$

که در اینجا I_1, I_2, I_3 گشتاورهای لختی حول محورهای اصلی هستند. در بخش ۷-۷ هنگام پرداختن به مسئله دینامیک جسم صلب از معادله ۱۷-۷ استفاده خواهیم کرد.

انرژی جنبشی دورانی

انرژی جنبشی جسم صلب بدین قرار است

$$K = \frac{1}{2} \sum m_j v_j^2$$

به منظور جدا کردن سهم حرکت انتقالی و دورانی، مختصات مرکز جرم را معرفی می‌کنیم

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_j$$

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_j$$

داریم

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum m_j (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_j)^2 \\ &= \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum m_j v_j'^2 \end{aligned}$$

زیرا جمله $\mathbf{V} \cdot \sum m_j \mathbf{v}'_j$ مساوی صفر است.

با استفاده از $\mathbf{v}'_j = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_j$ ، انرژی جنبشی دورانی بدین صورت درمی‌آید

$$\begin{aligned} K_{\text{دورانی}} &= \frac{1}{2} \sum m_j \mathbf{v}'_j^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum m_j (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_j) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_j) \end{aligned}$$

طرف راست با استفاده از اتحاد برداری $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ ساده می‌شود. فرض

کنید $\mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}$ و $\mathbf{B} = \mathbf{r}'_j$ و $\mathbf{C} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_j$ باشد. خواهیم داشت

$$K_{\text{دورانی}} = \frac{1}{2} \sum m_j \boldsymbol{\omega} \cdot [\mathbf{r}'_j \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_j)]$$

$$= \frac{1}{\rho} \omega \cdot \sum m_j \mathbf{r}'_j \times (\omega \times \mathbf{r}'_j)$$

طبق معادله ۷-۷، حاصل جمع جمله بالا برابر تکانه زاویه‌ای \mathbf{L} است. بنابراین

$$K_{\text{دورانی}} = \frac{1}{\rho} \omega \cdot \mathbf{L} \quad (۱۸-۷)$$

انرژی جنبشی دورانی وقتی \mathbf{L} و ω نسبت به محورهای اصلی معین شده‌اند، شکل ساده‌ای دارد. با استفاده از معادلات ۷-۱۷ و ۷-۱۸ داریم

$$\begin{aligned} K_{\text{دورانی}} &= \frac{1}{\rho} \omega \cdot \mathbf{L} \\ &= \frac{1}{\rho} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{\rho} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{\rho} I_3 \omega_3^2 \end{aligned} \quad (۱۹-۷)$$

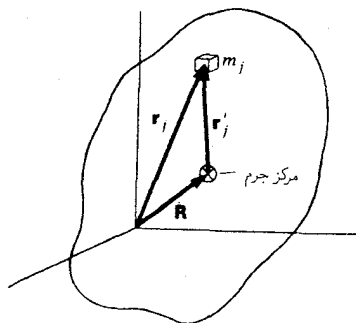
و یا به صورت دیگر

$$K_{\text{دورانی}} = \frac{L_1^2}{2I_1} + \frac{L_2^2}{2I_2} + \frac{L_3^2}{2I_3} \quad (۲۰-۷)$$

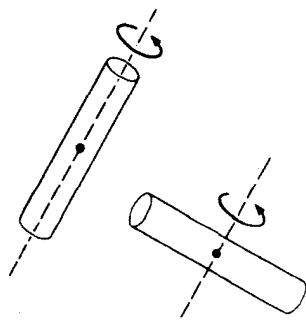
مثال ۷-۱۵ چرا ماهواره بشقابی از ماهواره استوانه‌ای، فضایی‌م‌ای بهتری است: یکی از انواع ماهواره‌های اولیه، استوانه‌ای شکل بود و در حالی که حول محور بلند خود می‌چرخید در مدار قرار می‌گرفت. برای طراحان تعجب‌آور بود که حتی وقتی به فضایی‌ماگشتاور نیرویی وارد نمی‌شد، شروع به کج شدن بیشتر و بیشتر می‌کرد تا اینکه بالاخره در حالت چرخش حول محور عرضی قرار می‌گرفت (شکل‌های ۷-۴۰).

علت آن این است که اگرچه \mathbf{L} در حرکت بدون گشتاور نیرو دقیقاً پایسته است، انرژی جنبشی آن در صورت صلب نبودن کامل جسم، می‌تواند تغییر کند. اگر ماهواره با کمی انحراف از محور تقارن خود در حال دوران باشد، هر قسمت از جسم یک شتاب گریز از مرکز متغیر را تحمل می‌کند. فضایی‌ما ضمن بیچ‌و‌تاب خوردن، تحت نیروهای متغیر منحرف می‌شود، و انرژی از طریق اصطکاک داخلی در ساختار آن تلف می‌شود. در نتیجه انرژی جنبشی دورانی باید کاهش یابد. از معادله ۷-۲۰ می‌بینیم اگر جسم در حال دوران تنها حول یک محور اصلی باشد داریم $L^2/2I = K_{\text{دورانی}}$ برای محوری که بزرگترین گشتاور لختی را دارد $K_{\text{دورانی}}$ کمینه است و حرکت حول این محور پایدار است. برای فضایی‌مای استوانه‌ای، محور اولیه دوران کمترین مقدار گشتاور را دارد و حرکت پایدار نیست.

قرص نازکی که حول محور استوانه‌ای خود می‌چرخد به‌طور ذاتی پایدار است، زیرا دوگشتاور لختی دیگر آن فقط نصف مقدار گشتاور اولی است. فضایی‌م‌ایی به‌شکل سیگار حول محور بلند خود ناپایدار



شکل ۴۱-۷



شکل ۴۰-۷

است و فقط حول محورهای عرضی تعادل بی تفاوت دارد. محوری منحصر به فرد با گشتاور لختی بیشینه وجود ندارد.

دوران حول یک نقطه ثابت

در ابتدای این بخش نشان دادیم که در تحلیل حرکت دورانی و انتقالی جسم صلب، محاسبه گشتاور نیرو و تکانه زاویه‌ای نسبت به مرکز جرم همیشه صحیح است. اما، در برخی از کاربردها، یک نقطه از جسم در فضا ثابت است، نظیر نقطه تکیه‌گاه ژيروسکوپ روی پایه. تحلیل حرکت با استفاده از نقطه ثابت به عنوان مبدأ غالباً راحت‌تر است، زیرا لازم نیست حرکت مرکز جرم صریحاً در نظر گرفته شود و نیروی قیدی در تکیه‌گاه هیچ گشتاور نیرویی تولید نمی‌کند.

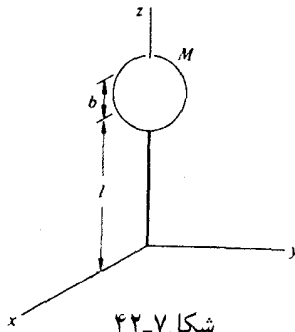
مبدأ را مطابق شکل ۴۱-۷ در نقطه ثابت اختیار کرده و فرض کنید \mathbf{r}_j بردار مکان ذره m_j و $\mathbf{R} = X\hat{i} + Y\hat{j} + Z\hat{k}$ بردار مکان مرکز جرم باشد. گشتاور نیرو نسبت به مبدأ چنین است

$$\boldsymbol{\tau} = \sum \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_j$$

که در آن \mathbf{f}_j نیروی وارد بر m_j است. اگر سرعت زاویه‌ای جسم $\boldsymbol{\omega}$ باشد، تکانه زاویه‌ای حول مبدأ چنین است

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum \mathbf{r}_j \times m_j \mathbf{r}_j \\ &= \sum \mathbf{r}_j \times m_j (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_j) \end{aligned}$$

این رابطه همان شکل معادله ۱۶-۷ را دارد که قبلاً در همین بخش تعیین شد. اگر نتیجه را به طور یکجا در نظر بگیریم خواهیم داشت



شکل ۷-۴۲

$$\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{I}} \boldsymbol{\omega}$$

که در آن

$$I_{xx} = \sum m_j (y_j^2 + z_j^2)$$

$$I_{xy} = -\sum m_j x_j y_j$$

و نظایر آن. اگرچه این نتیجه با شکل معادله ۷-۱۳ یکسان است، اینجا مؤلفه‌های $\tilde{\mathbf{I}}$ به جای مرکز جرم نسبت به نقطه تکیه‌گاه محاسبه شده‌اند.

وقتی که تانسور لختی حول مرکز جرم ($\tilde{\mathbf{I}}_0$) معلوم باشد، $\tilde{\mathbf{I}}$ را نسبت به هر محوری می‌توان از تعمیم قضیه محوره‌های موازی مثال ۶-۹، پیدا کرد (شکل ۷-۴۲). نمونه جوابهایی که اثبات آن را به عنوان مسئله مطرح کرده‌ایم چنین است

$$I_{xx} = (I_0)_{xx} + M(Y^2 + Z^2)$$

$$I_{xy} = (I_0)_{xy} - MXY \quad (۷-۲۱)$$

و نظایر آن. برای مثال، کره‌ای به جرم M و شعاع b را در نظر بگیرید که مرکز آن روی محور z و به فاصله l از مبدأ قرار دارد. داریم

$$I_{xx} = \frac{2}{5}Mb^2 + Ml^2, \quad I_{yy} = \frac{2}{5}Mb^2 + Ml^2, \quad I_{zz} = \frac{2}{5}Mb^2$$

۷-۷ مطالب پیشرفته در دینامیک جسم صلب دوران‌کننده

مقدمه

در این بخش به مسئله کلی دوران جسم صلب می‌پردازیم. اما هیچیک از نتایج در فصلهای بعدی مورد

احتیاج نخواهد بود و این بخش را بدون لطمه زدن به ادامهٔ درس می‌توان نادیده گرفت.

مسئلهٔ اساسی دینامیک جسم صلب پیدا کردن جهت جسم دوران‌کننده بر حسب تابعی از زمان با معلوم بودن گشتاور نیرو است. مسئله به لحاظ پیچیده بودن رابطهٔ بین تکانهٔ زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای $\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{I}} \boldsymbol{\omega}$ مشکل است. می‌توان با انتخاب محورهای مختصات منطبق بر محورهای اصلی جسم، صورت مسئله را ساده‌تر کرد. نسبت به محورهای اصلی، تانسور لختی $\tilde{\mathbf{I}}$ به شکل قطری است و مؤلفه‌های \mathbf{L} چنین‌اند

$$L_x = I_{xx} \omega_x$$

$$L_y = I_{yy} \omega_y$$

$$L_z = I_{zz} \omega_z$$

اما، مشکل مسئله این است که محورهای اصلی نسبت به جسم ثابت‌اند، در حالی که مؤلفه‌های \mathbf{L} را نسبت به محورهایی که در فضا جهت‌های ثابتی دارند لازم داریم. همانطور که جسم دوران می‌کند، محورهای اصلی از حالت انطباق با دستگاه ثابت در فضا خارج می‌شوند. حاصلضربهای لختی در دستگاه ثابت نسبت به فضا دیگر صفر نبوده بلکه این مؤلفه‌های $\tilde{\mathbf{I}}$ با زمان نیز تغییر می‌کنند.

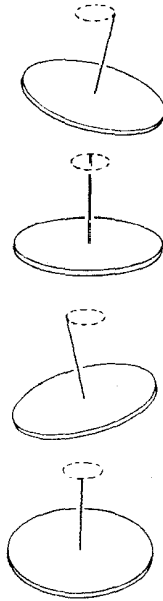
به نظر می‌رسد وضعیت بسیار درهم است، ولی اگر محورهای اصلی خیلی از دستگاه ثابت در فضا دور نباشند، با استفاده از روشهای ساده برداری می‌توانیم حرکت را مشخص کنیم. بررسی حالت کلی را به بعد موکول می‌کنیم و این طریقه را با مشخص کردن حرکت جسم صلب بدون گشتاور نیرو توضیح می‌دهیم.

حرکت تقدیمی بدون گشتاور نیرو: چرا زمین لنگ می‌زند؟

اگر یک سکهٔ چرخان را با ضربهٔ کوچکی بیندازید، با حرکت لنگشی سقوط خواهد کرد؛ محور تقارن مطابق آنچه شکل‌های ۷-۴۳ نشان می‌دهد، در فضا دوران می‌کند. چون هیچ گشتاور نیرویی وجود ندارد، حرکت را حرکت تقدیمی بدون گشتاور نیرو می‌نامند.

حرکت تقدیمی بدون گشتاور نیرو از مشخصه‌های حرکت جسم صلب است. برای مثال به واسطهٔ این پدیده محور اسپین زمین حول محور قطبی حرکت می‌کند. توضیح فیزیکی حرکت لنگشی مربوط است به مشاهدهٔ اینکه \mathbf{L} لزومی ندارد با $\boldsymbol{\omega}$ موازی باشد. اگر هیچ گشتاور نیرویی به جسم وارد نشود، نشان خواهیم داد که \mathbf{L} در فضا ثابت می‌ماند و $\boldsymbol{\omega}$ باید حرکت کند.

به منظور اجتناب از پیچیدگی ریاضی، حالت خاصی از یک جسم صلب با تقارن استوانه‌ای نظیر

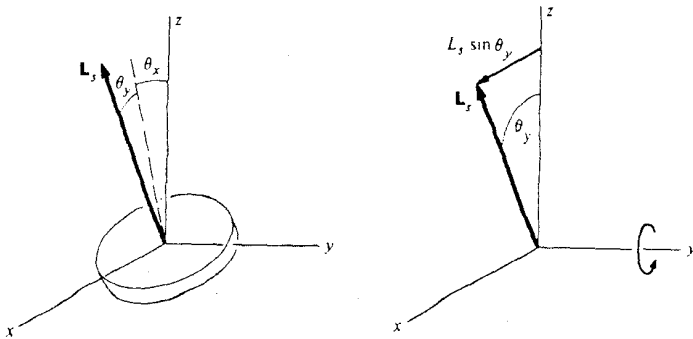


شکل ۴۳-۷

یک سکه یا یک ژيروسکوپ معلق در هوا را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم که دامنه حرکت تقدیمی کوچک است تا بتوانیم تقریب زوایای کوچک را به‌کار ببریم.

فرض کنید جسم مطابق شکل‌های ۴۴-۷ دارای تکانه زاویه‌ای اسپینی بزرگ $L = I_s \omega_s$ در امتداد محور تقارن اصلی است که I_s گشتاور لختی و ω_s سرعت زاویه‌ای حول محور تقارن است. فرض کنید جسم سرعت‌های زاویه‌ای کوچک حول محورهای عرضی دیگر داشته باشد.

فرض کنید I_x همواره نزدیک محور z است و زوایای $\theta_x \ll 1$ و $\theta_y \ll 1$ را با محورهای x و y می‌سازد. یادداشت ۱-۷ در مورد دورانهای خیلی کوچک نشان می‌دهد که با تقریب اول، دوران



شکل ۴۴-۷

حول هر محور می‌تواند به‌طور جداگانه در نظر گرفته شود. سهم L_x از دوران حول محور x برابر $L_x = d(I_{xx} \theta_x)/dt = I_{xx} d\theta_x/dt$ است. با I_{xx} مثل یک ثابت رفتار کرده‌ایم. مجوز آن این است که گشتاور لختی حول محورهای اصلی برای جابه‌جاییهای زاویه‌ای کوچک در تقریب اول ثابت‌اند. اثبات آن به‌عنوان مسئله بررسی می‌شود. دوران حول y نیز با ایجاد مؤلفه $L_s \sin \theta_y$ برای L_s در جهت x ، در L_x سهم است. با جمع کردن این دو سهم داریم

$$L_x = I_{xx} \frac{d\theta_x}{dt} + L_s \sin \theta_y$$

به همین ترتیب

$$L_y = I_{yy} \frac{d\theta_y}{dt} - L_s \sin \theta_x$$

به دلیل تقارن $I_{xx} = I_{yy} \equiv I_{\perp}$ است. برای زوایای کوچک با تقریب اول $\sin \theta = \theta$ و $\cos \theta = 1$ است. بنابراین

$$L_x = I_{\perp} \frac{d\theta_x}{dt} + L_s \theta_y \quad (۲۲-۷ \text{ الف})$$

$$L_y = I_{\perp} \frac{d\theta_y}{dt} - L_s \theta_x \quad (۲۲-۷ \text{ ب})$$

با همین مرتبه تقریب، داریم

$$\begin{aligned} L_z &= L_s \\ &= I_s \omega_s \end{aligned} \quad (۲۳-۷)$$

چون گشتاور نیرو صفر است، داریم $dL/dt = 0$. معادله ۲۳-۷ نتیجه می‌دهد که $L_s = \text{const.}$ و از معادلات ۲۲-۷ داریم $\omega_s = \text{const.}$

$$I_{\perp} \frac{d^2 \theta_x}{dt^2} + L_s \frac{d\theta_y}{dt} = 0 \quad (۲۴-۷ \text{ الف})$$

$$I_{\perp} \frac{d^2 \theta_y}{dt^2} - L_s \frac{d\theta_x}{dt} = 0 \quad (۲۴-۷ \text{ ب})$$

اگر فرض کنیم $\omega_x = d\theta_x/dt$ و $\omega_y = d\theta_y/dt$ باشند، معادلات ۲۴-۷ چنین می‌شوند

$$I_{\perp} \frac{d\omega_x}{dt} + L_s \omega_y = 0 \quad (۲۵-۷ \text{ الف})$$

$$I_{\perp} \frac{d\omega_y}{dt} - L_s \omega_x = 0 \quad (۲۵-۷ \text{ ب})$$

اگر از معادلات ۲۵-۷ (الف) دیفرانسیل گرفته و مقدار $d\omega_y/dt$ را در معادله ۲۵-۷ (ب) جایگزین کنیم، به دست می‌آوریم

$$\frac{I_{\perp}^2}{L_s} \frac{d^2 \omega_x}{dt^2} + L_s \omega_x = 0$$

یا

$$\frac{d^2 \omega_x}{dt^2} + \gamma^2 \omega_x = 0 \quad (26-7)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{L_s}{I_{\perp}} \\ &= \omega_s \frac{I_s}{I_{\perp}} \end{aligned}$$

معادله ۲۶-۷، معادله آشنای حرکت هماهنگ ساده است. حل آن چنین است

$$\omega_x = A \sin(\gamma t + \phi) \quad (27-7)$$

که در آن A و ϕ ثابتهای اختیاری هستند. از جایگزین کردن این جواب در معادله ۲۵-۷ (الف) به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \omega_y &= -\frac{I_{\perp}}{L_s} \frac{d\omega_x}{dt} \\ &= \frac{I_{\perp}}{I_s \omega_s} A \gamma \cos(\gamma t + \phi) \end{aligned}$$

یا

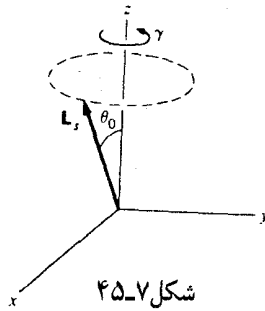
$$\omega_y = A \cos(\gamma t + \phi) \quad (28-7)$$

با انتگرال‌گیری از معادلات ۲۷-۷ و ۲۸-۷ به دست می‌آوریم

$$\theta_x = \frac{A}{\gamma} \cos(\gamma t + \phi) + \theta_{x0}$$

$$\theta_y = -\frac{A}{\gamma} \sin(\gamma t + \phi) + \theta_{y0} \quad (29-7)$$

که در آن θ_{x0} و θ_{y0} ثابتهای انتگرال‌گیری هستند. جملات اول معادله ۲۹-۷ حاکی از دوران محورها حول جهت‌های ثابت در فضا هستند. اگر جهت را در امتداد محور z بگیریم (شکل ۴۵-۷)، آنگاه



شکل ۷-۴۵

با فرض اینکه در لحظه $t = 0$ ، $\theta_x = \theta_0$ و $\theta_y = 0$ باشد، داریم

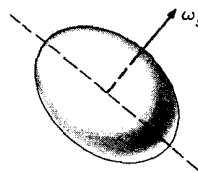
$$\theta_x = \theta_0 \cos \gamma t$$

$$\theta_y = \theta_0 \sin \gamma t \quad (۷-۳)$$

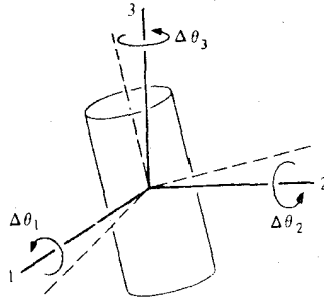
که در اینجا $\theta_y = 0$ و $A/\gamma = \theta_0$ گرفته شده اند.

معادله ۷-۳ حرکت تقدیمی بدون گشتاور نیرو را توصیف می کند. بسامد حرکت تقدیمی برابر $\gamma = \omega_s I_s / I_{\perp}$ است. برای جسمی که در امتداد محور تقارن تخت شده است، نظیر کره پخت شده شکل ۷-۴۶، $I_s > I_{\perp}$ و $\gamma_s > \omega_s$ است. برای یک سکه نازک $I_s = 2I_{\perp}$ و $\gamma_s = 2\omega_s$ است، بنابراین، سکه سقوط کننده که قبلاً از آن صحبت شد، دو برابر سریعتر از چرخیدن لنگش خواهد داشت. زمین که یک کره پخت است، حرکت تقدیمی بدون گشتاور نیرو انجام می دهد. دامنه حرکت کوچک است. محور چرخش تقریباً با ۵ متر فاصله در قطب شمال به دور محور قطبی می چرخد. چون خود زمین در چرخش است، آهنگ حرکت تقدیمی ظاهری برای ناظری در روی زمین چنین است

$$\begin{aligned} \gamma' &= \gamma - \omega_s \\ &= \omega_s \left(\frac{I_s - I_{\perp}}{I_{\perp}} \right) \end{aligned} \quad (۷-۳)$$



شکل ۷-۴۶



شکل ۷-۴۷

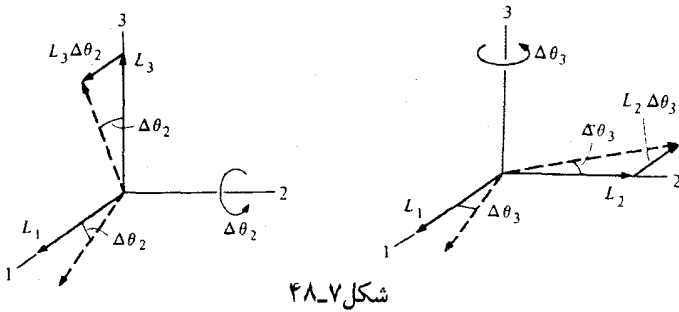
برای زمین $I_{\perp} = 1/300$ است و حرکت تقدیمی دوره تناوبی برابر 30° روز باید داشته باشد. اما حرکتی با تناوب واقعی 43° روزه بسیار بی قاعده است. این تفاوت از طبیعت کشسان زمین ناشی می شود، که برای حرکتهایی به این کوچکی، مهم است. یادداشت ۷-۲ در مورد رقص محوری ژيروسکوپ، کاربرد دیگری از تقریب زوایای کوچک را که استفاده کرده ایم، تشریح می کند.

معادلات اوایلر

اکنون معادلات دقیق حرکت برای جسم صلب را به دست می آوریم. برای پیدا کردن dL/dt ، با استفاده از تقریب زاویه کوچک، تغییرات مؤلفه های L در فاصله زمانی t تا $t + \Delta t$ را محاسبه خواهیم کرد. نتایج فقط تا تقریب مرتبه اول صحیح است، ولی با گرفتن حد وقتی $\Delta t \rightarrow 0$ به صورت کاملاً دقیق درمی آید.

یک دستگاه مختصات لخت را معرفی می کنیم که منطبق با مکان لحظه ای محورهای اصلی جسم در لحظه t است. محورهای دستگاه لخت را مطابق شکل ۷-۴۷ با ۱ و ۲ و ۳ مشخص می کنیم. فرض کنید که مؤلفه های سرعت زاویه ای ω در لحظه t نسبت به دستگاه ۱ و ۲ و ۳ برابر ω_1 و ω_2 و ω_3 باشند. در همان لحظه، مؤلفه های L برابر $L_1 = I_1 \omega_1$ ، $L_2 = I_2 \omega_2$ ، $L_3 = I_3 \omega_3$ است که در آنها I_1 و I_2 و I_3 گشتاور لختی حول سه محور اصلی هستند.

در فاصله زمانی Δt محورهای اصلی با دوران کردن از محورهای ۱ و ۲ و ۳ جدا می شوند. با تقریب مرتبه اول زاویه دوران حول محور برابر $\Delta\theta_1 = \omega_1 \Delta t$ و $\Delta\theta_2 = \omega_2 \Delta t$ و $\Delta\theta_3 = \omega_3 \Delta t$ است. تغییر متناظر در گشتاور زاویه ای $L_1(t + \Delta t) - L_1(t)$ را با مراجعه به یادداشت ۷-۱ در مورد دورانهای بینهایت کوچک می توان تا تقریب مرتبه اول با عمل کردن روی تک تک محورها پیدا کرد. L_1 از دو طریق می تواند تغییر کند. نخست آنکه ω_1 تغییر کند که در نتیجه $I_1 \omega_1$ تغییر می کند. به علاوه، دوران حول دو محور دیگر باعث تغییر جهت L_2 و L_3 می شود و این تغییر جهت در نکانه



شکل ۴۸-۷

زاویه‌ای در امتداد محور اول مؤثر است.

تأثیر اول در ΔL_1 از بابت $\Delta(I_1\omega_1)$ است، و چون گشتاور لختی در مرتبه اول برای جابه‌جاییهای زاویه‌ای کوچک حول محورهای اصلی ثابت است، بنابراین $\Delta(I_1\omega_1) = I_1\Delta\omega_1$ می‌شود. برای یافتن بقیه تأثیرات در ΔL_1 ، ابتدا دورانی به اندازه زاویه $\Delta\theta_2$ حول محور ۲ در نظر بگیرید. همان‌گونه که شکل‌های ۴۸-۷ نشان می‌دهند، این امر باعث دوران L_1 و L_3 می‌شود. دوران L_1 در مرتبه اول باعث هیچ‌گونه تغییری در امتداد محور ۱ نمی‌شود. اما دوران L_3 تأثیری به اندازه $L_3\Delta\theta_2 = I_3\omega_3\Delta\theta_2$ در امتداد محور ۱ دارد. به همین ترتیب، دوران حول محور ۳ تأثیر $-L_2\Delta\theta_3 = -I_2\omega_2\Delta\theta_3$ در ΔL_1 دارد.

از جمع زدن تمام این اثرها نتیجه می‌شود

$$\Delta L_1 = I_1\Delta\omega_1 + I_3\omega_3\Delta\theta_2 - I_2\omega_2\Delta\theta_3$$

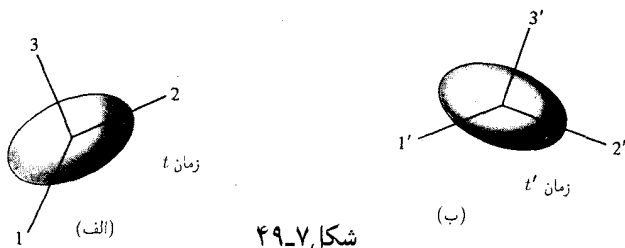
از تقسیم آن بر Δt و گرفتن حد وقتی $\Delta t \rightarrow 0$ خواهیم داشت

$$\frac{dL_1}{dt} = I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\omega_3\omega_2$$

مؤلفه‌های دیگر را می‌توان به همین ترتیب به دست آورد، یا به سادگی با تعویض شاخصهای پایین با ترتیب $2 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 3$ پیدا می‌کنیم

$$\begin{aligned} \frac{dL_2}{dt} &= I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 \\ \frac{dL_3}{dt} &= I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 \end{aligned}$$

چون $\tau = d\mathbf{L}/dt$ است



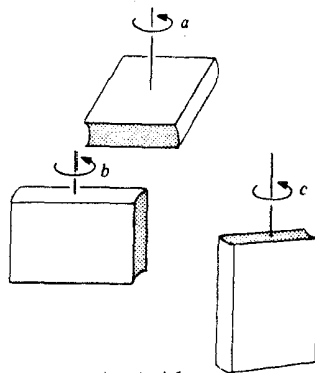
شکل ۴۹-۷

$$\begin{aligned} \tau_1 &= I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 \\ \tau_2 &= I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 \\ \tau_3 &= I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 \end{aligned} \quad (۳۲-۷)$$

که در آنها τ_1, τ_2, τ_3 مؤلفه‌های τ بر روی محورهای ۱ و ۲ و ۳ دستگاه لخت هستند. این معادلات توسط اویلر در اواسط قرن هیجدهم به دست آمده است و معروف به معادلات اویلر برای حرکت جسم صلب است.

کاربرد حالات اویلر یا دشواریهایی روبروست، بنابراین پی بردن به معنای آن اهمیت دارد. در لحظه خاص t محورهای ۱ و ۲ و ۳ دستگاه لخت را با جهت‌های لحظه‌ای محورهای اصلی جسم منطبق می‌سازیم. τ_1, τ_2, τ_3 مؤلفه‌های گشتاور نیرو در لحظه t و در امتداد محورهای ۱ و ۲ و ۳ هستند. به همین ترتیب $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ و ω مؤلفه‌های ω در لحظه t و در امتداد محورهای ۱ و ۲ و ۳ هستند (شکل ۴۹-۷ الف)، و $d\omega_1/dt, d\omega_2/dt, d\omega_3/dt$ آهنگ تغییرات لحظه‌ای این سه مؤلفه‌اند. معادلات اویلر این سه کمیت را در لحظه t به هم مربوط می‌سازد. برای به کار بردن معادلات اویلر در لحظه دیگر t' ، می‌بایستی τ و ω را روی محورهای دستگاه لخت جدید ۱' و ۲' و ۳' که با محورهای اصلی در لحظه t' منطبق است تجزیه کرد (شکل ۴۹-۷ ب).

مشکل این است که معادلات اویلر چگونگی تعیین جهت‌های این دستگاهها را در فضا نشان نمی‌دهند. در اصل ما یک مسئله را تبدیل به مسئله دیگری کرده‌ایم. در دستگاه آشنای آزمایشگاهی x و y و z ، جابه‌جا شدن محورها را می‌دانیم، ولی مؤلفه‌های تانسور لختی به طریق نامعلومی تغییر می‌کنند. در دستگاه ۱ و ۲ و ۳ مؤلفه‌های \mathbb{I} ثابت‌اند، ولی جهت محورها را نمی‌دانیم. با ترکیب معادلات اویلر نمی‌توان زوایای مشخص‌کننده امتداد جسم را مستقیماً نسبت به دستگاه آزمایشگاهی x و y و z تعیین کرد. اویلر با بیان کردن $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ برحسب زوایایی که محورهای اصلی را به محورهای x و y و z دستگاه آزمایشگاهی مربوط می‌کرد، بر این مشکل فائق آمد.



شکل ۷-۵۰

معادلات اوایلر برحسب این زوایا یک رشته معادلات دیفرانسیل دوتایی هستند. معادلات کلی نسبتاً مشکل بوده و در کتابهای پیشرفته بحث شده است. خوشبختانه در بسیاری از کاربردهای مهم می‌توان حرکت را از معادلات اوایلر با استفاده مستقیم از برهانه‌های هندسی پیدا کرد. در اینجا چند مثال می‌آوریم.

مثال ۷-۱۶ پایداری حرکت دورانی: به‌طور اصولی یک مداد می‌تواند روی نوک خود به‌طور متوازن قرار گیرد ولی در عمل تقریباً فوری می‌افتد. اگرچه یک مداد دقیقاً و کاملاً متوازن در حال تعادل است ولی این تعادل پایدار نیست. اگر مداد به‌دلیل نیروی اختلالی اندکی شروع به کج شدن کند، گشتاور نیروی گرانشی باعث کج شدن بیشتر آن می‌شود و دستگاه در جهت دور شدن بیشتر از حالت تعادل به حرکت ادامه می‌دهد. دستگاهی در حال تعادل پایدار است که جابه‌جایی آن از وضع تعادل نیروهایی به وجود آورد که آن را به وضع تعادل برگرداند. به‌طور مشابه، یک دستگاه متحرک وقتی تعادل پایدار دارد که تغییر حرکت آن در نتیجه نیروی اختلال کم باشد. برعکس، حرکت یک دستگاه ناپایدار به‌طور مؤثری به وسیلهٔ یک نیروی اختلال کوچک تغییر می‌کند و احتمالاً به‌زوال می‌انجامد.

بسته به محور دوران، جسم صلب دوران‌کننده می‌تواند حرکت پایدار یا ناپایدار داشته باشد. دوران حول محوری که گشتاور لختی نسبت به آن بیشینه یا کمینه است حرکتی پایدار است ولی دوران حول محوری با گشتاور لختی میانی ناپایدار است. نشان دادن این پدیده آسان است: یک کتاب را با نوار لاستیکی ببندید و بگذارید در حالی که به‌نوبت حول هر یک از محورهای اصلیش می‌چرخد سقوط کند (شکل‌های ۷-۵۰). حول محور a بیشینه و حول محور c کمینه است؛ حرکت کتاب با چرخش حول هر یک از این دو محور پایدار است. اما، اگر کتاب حول محور b چرخانده شود، در حین چرخش تمایل به انحراف دارد و عموماً روی سطح بزرگتر خود به زمین می‌افتد.

برای توضیح این رفتار، به معادلات اوایلر برمی‌گردیم. فرض کنید ابتدا جسم با $\omega_1 = \text{const.}$ و

$\omega_2 = 0$ و $\omega_3 = 0$ در حال چرخش است و بلافاصله بعد از یک اختلال کوچک، ω_2 و ω_3 دیگر صفر نبوده ولی در مقایسه با ω_1 کوچک هستند. به محض اینکه اختلال بر طرف می شود حرکت، بدون گشتاور نیرو است و معادلات اوایل عبارت اند از

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = 0 \quad (1)$$

$$I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = 0 \quad (2)$$

$$I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = 0 \quad (3)$$

از آنجا که ω_2 و ω_3 در ابتدا بسیار کوچک اند، در آغاز از جملات دوم در معادله ۱ صرف نظر می کنیم. بنابراین $I_1 d\omega_1/dt = 0$ و ω_1 ثابت است.

اگر از معادله ۲ دیفرانسیل گرفته و مقدار $d\omega_3/dt$ را از معادله ۳ در آن جایگزین کنیم داریم

$$I_2 \frac{d^2\omega_3}{dt^2} - \frac{(I_1 - I_2)(I_2 - I_1)}{I_3} \omega_1^2 \omega_3 = 0$$

یا

$$\frac{d^2\omega_3}{dt^2} + A\omega_3 = 0 \quad (4)$$

که در آن

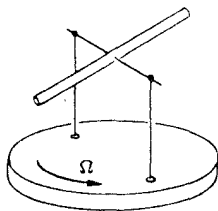
$$A = \frac{(I_1 - I_2)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3} \omega_1^2$$

اگر I_1 بزرگترین یا کوچکترین گشتاور لختی باشد $A > 0$ است و معادله ۴ معادله حرکت هماهنگ ساده است. ω_2 با بسامد \sqrt{A} با دامنه محدودی نوسان می کند. به آسانی می توان نشان داد که ω_3 نیز حرکت هماهنگ ساده دارد. از آنجا که ω_2 و ω_3 کراندار هستند حرکت پایدار است. (این موضوع با حرکت تقدیمی بدون گشتاور نیرو که قبلاً محاسبه کردیم متناظر است). ■

اگر I_1 گشتاور لختی میانی باشد، $A < 0$ است. در این حالت ω_2 و ω_3 با زمان به طور نمایی زیاد می شوند و حرکت ناپایدار است.

مثال ۷-۱۷ میله دوران کننده: یک میله یکنواخت را مطابق شکل ۷-۵۱ در نظر بگیرید که روی محوری افقی و بدون اصطکاک که از وسط آن می گذرد کار گذاشته شده است. محور روی میزگردانی که با سرعت زاویه ای ثابت Ω می چرخد تکیه دارد به طوری که مرکز میله روی محور میزگردان واقع است. فرض کنید θ زاویه ای است که در شکلهای ۷-۵۲ مشخص است. می خواهیم θ را بر حسب زمان پیدا کنیم.

برای به کار بردن معادلات اوایل، فرض کنید محور اصلی ۱ میله در امتداد محور، محور اصلی ۲ در



شکل ۷-۵۱

امتداد طول میله، و محور اصلی ۳ در صفحه قائم عمود بر میله باشد. اگر $\omega_1 = \dot{\theta}$ باشد، با تجزیه Ω در امتدادهای ۲ و ۳ درمی‌یابیم که $\omega_2 = \Omega \sin \theta$ و $\omega_3 = \Omega \cos \theta$ است. چون حول محور ۱ هیچ گشتاور نیرویی وجود ندارد، اولین معادلهٔ اوایلر چنین نتیجه می‌دهد

$$I_1 \ddot{\theta} + (I_3 - I_2) \Omega^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

یا

$$2 \ddot{\theta} + \left(\frac{I_3 - I_2}{I_1} \right) \Omega^2 \sin 2\theta = 0 \quad (1)$$

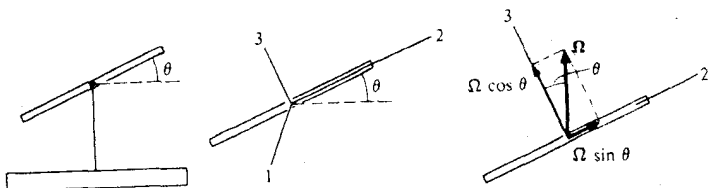
(از اتحاد $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$ استفاده کرده‌ایم.)

از آنجا که $I_3 > I_2$ است، این معادلهٔ حرکت آونگی با متغیر 2θ است. برای نوسانهای نزدیک به خط افقی $2\theta \approx \sin 2\theta$ و معادلهٔ ۱ بدین صورت درمی‌آید

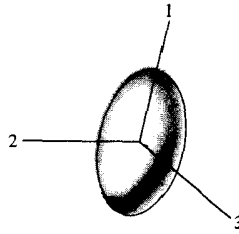
$$\ddot{\theta} + \left(\frac{I_3 - I_2}{I_1} \right) \Omega^2 \theta = 0$$

که حرکت هماهنگ ساده با بسامد $\sqrt{(I_3 - I_2)/I_1} \Omega$ است. ■

مثال ۷-۱۸ معادلات اوایلر و حرکت تقدیمی بدون گشتاور نیرو: حرکت بدون گشتاور نیروی جسمی با تقارن استوانه‌ای را با استفاده از تقریب زاویهٔ کوچک قبلاً تشریح کردیم. در این مثال جواب دقیق را با استفاده از معادلات اوایلر به دست خواهیم آورد.



شکل ۷-۵۲



شکل ۷-۵۳

محور تقارن استوانه‌ای را مطابق شکل ۷-۵۳ با گشتاور لختی I_1 در نظر بگیرید. دو محور اصلی دیگر عمود بر محور ۱ و $I_2 = I_3 = I_{\perp}$ است. از اولین معادلهٔ اویلر، یعنی

$$\tau_1 = I_1(d\omega_1/dt) + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3$$

داریم

$$0 = I_1 \frac{d\omega_1}{dt}$$

که از آن حاصل می‌شود

$$\omega_1 = \text{const.} = \omega_s$$

محورهای اصلی ۲ و ۳ با سرعت زاویه‌ای ثابت ω_s حول محور ۱ می‌گردند. بقیهٔ معادلات اویلر چنین‌اند

$$0 = I_{\perp} \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_{\perp})\omega_s\omega_3 \quad (1)$$

$$0 = I_{\perp} \frac{d\omega_3}{dt} + (I_{\perp} - I_1)\omega_s\omega_2 \quad (2)$$

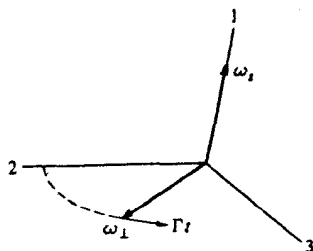
با دیفرانسیل گرفتن از معادلهٔ اول و استفاده از معادلهٔ دوم برای حذف $d\omega_3/dt$ نتیجه می‌شود

$$\frac{d^2\omega_2}{dt^2} + \left(\frac{I_1 - I_{\perp}}{I_{\perp}} \right)^2 \omega_s^2 \omega_2 = 0$$

مؤلفهٔ سرعت زاویه‌ای، ω_2 ، حرکت هماهنگ ساده‌ای با بسامد زیر انجام می‌دهد

$$\Gamma = \left| \frac{I_1 - I_{\perp}}{I_{\perp}} \right| \omega_s$$

بنابراین، ω_2 با رابطهٔ $\omega_2 = \omega_{\perp} \cos \Gamma t$ داده می‌شود که در آن ω_{\perp} با شرایط اولیه تعیین می‌شود. حال اگر $I_1 > I_{\perp}$ باشد، معادلهٔ ۱ نتیجه می‌دهد



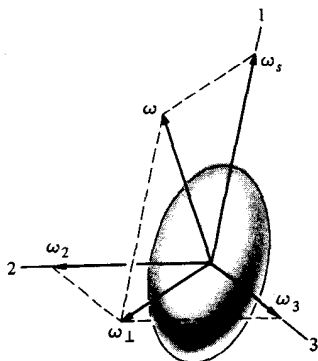
شکل ۵۴-۷

$$\begin{aligned}\omega_p &= -\frac{1}{\Gamma} \frac{d\omega_s}{dt} \\ &= \omega_{\perp} \sin \Gamma t\end{aligned}$$

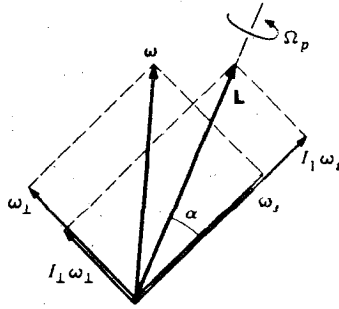
همانطور که شکل ۵۴-۷ نشان می‌دهد، ω_p و ω_s مؤلفه‌های بردار ω_{\perp} هستند که در صفحه ۲-۳ با آهنگ Γ دوران می‌کنند. بنابراین ناظر متصل به جسم مشاهده می‌کند که ω نسبت به جسم، حول محور ۱ با بسامد زاویه‌ای Γ دوران می‌کند. چون محورهای ۱ و ۲ و ۳ متصل به جسم اند و جسم نسبت به محور ۱ با آهنگ ω_s دوران می‌کند. سرعت دوران ω برای ناظر ثابت در فضا (شکل ۵۵-۷) چنین است

$$\Gamma + \omega_s = \frac{I_{\perp}}{I_s} \omega_s$$

معادلات اوایلر چگونگی حرکت بردار سرعت زاویه‌ای را نسبت به جسم نشان می‌دهند، ولی ما تاکنون حرکت واقعی جسم را در فضا پیدا نکرده‌ایم. اینجا باید مهارت خود را به کار ببریم. حرکت ω را نسبت به جسم می‌دانیم و همچنین می‌دانیم که در حرکت بدون گشتاور نیرو، \mathbf{L} ثابت است. همانطور که نشان خواهیم داد، اینها برای پیدا کردن حرکت واقعی جسم کافی هستند.



شکل ۵۵-۷



شکل ۵۶-۷

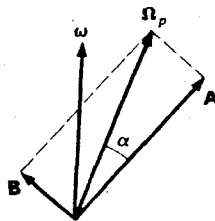
شکل ۵۶-۷، ω و L را در لحظه خاصی از زمان نشان می‌دهد. چون $L \cos \alpha = I_1 \omega_s$ است و ω_s و L ثابت‌اند، α هم باید ثابت باشد. بنابراین موقعیت نسبی تمام بردارها و نمودار هرگز تغییر نمی‌کند. تنها حرکت ممکن این است که نمودار حول L با سرعت زاویه‌ای "حرکت تقدیمی" مثلاً Ω_p دوران کند. (به خاطر داشته باشید که نمودار نسبت به جسم حرکت می‌کند؛ یعنی Ω_p بزرگتر از ω_s است.)

باقیمانده مسئله، پیدا کردن Ω_p است. نشان دادیم که ω در فضا حول ω_s با آهنگ $\Gamma + \omega_s$ حرکت تقدیمی انجام می‌دهد. برای ارتباط دادن Ω_p با این عبارت، Ω_p را مطابق شکل ۵۷-۷ به بردار A در امتداد ω_s و بردار B عمود بر ω_s تجزیه کنید. بزرگی آنها عبارت‌اند از $A = \Omega_p \cos \alpha$ و $B = \Omega_p \sin \alpha$. دوران A ، ω را حول ω_s می‌گرداند ولی دوران B این کار را نمی‌کند. بنابراین آهنگی که ω حول ω_s حرکت تقدیمی می‌کند برابر $\Omega_p \cos \alpha$ است. با برابر گرفتن این عبارت $\Gamma + \omega_s$ داریم

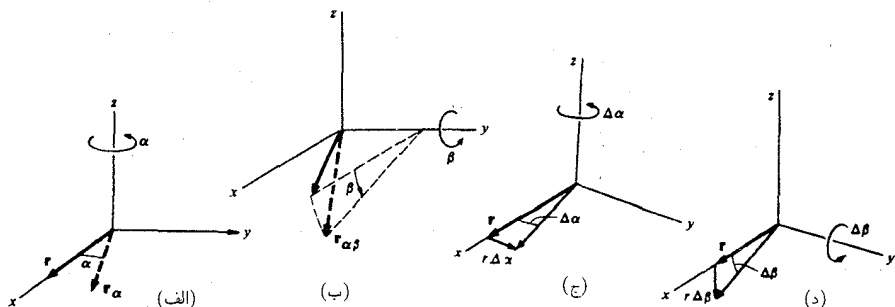
$$\begin{aligned} \Omega_p \cos \alpha &= \Gamma + \omega_s \\ &= \frac{I_1}{I_1} \omega_s \end{aligned}$$

یا

$$\Omega_p = \frac{I_1 \omega_s}{I_1 \cos \alpha}$$



شکل ۵۷-۷



شکل ۷-۵۸

سرعت زاویه‌ای حرکت تقدیمی Ω_p نشان‌دهنده آهنگی است که محور تقارن حول جهت ثابت \mathbf{I} دوران می‌کند و این بسامد لنگش سکه چرخانی است که هنگام انداختن آن مشاهده می‌کنیم. قبلاً در این بخش آهنگ دوران محور تقارن حول جهت ثابتی در فضا را با تقریب زاویه کوچک برابر $I_p \omega_s / I_s$ پیدا کردیم. این نتیجه با Ω_p در حدکه $\alpha \rightarrow 0^\circ$ مطابقت دارد.

یادداشت ۷-۱: دورانه‌های متناهی و بینهایت کوچک

در این یادداشت نشان خواهیم داد که دورانه‌های متناهی جابه‌جایی ناپذیر ولی دورانه‌های بینهایت کوچک جابه‌جایی پذیرند. منظور ما از دورانه‌های بینهایت کوچک این است که تمام توانهای بسط زاویه دوران بجز اولی قابل صرف نظرند.

دوران یک جسم به اندازه α حول محور $\hat{\mathbf{n}}_\alpha$ و به دنبال آن دورانی به اندازه $\hat{\mathbf{n}}_\beta$ حول محور β را در نظر بگیرید. غیر ممکن است که جهت جسم را توسط برداری مشخص کنیم، چون اگر دورانه‌ها بترتیب عکس انجام پذیرند، سمتگیری یکسانی به دست نخواهیم آورد. برای نشان دادن آن، اثر دورانه‌های متوالی را روی بردار \mathbf{r} بررسی می‌کنیم. فرض کنید حاصل دوران \mathbf{r} به اندازه α حول $\hat{\mathbf{n}}_\alpha$ باشد و $\mathbf{r}_{\alpha\beta}$ حاصل دوران \mathbf{r}_α به اندازه β حول $\hat{\mathbf{n}}_\beta$ باشد (شکل‌های ۷-۵۸). نشان خواهیم داد که

$$\mathbf{r}_{\alpha\beta} \neq \mathbf{r}_{\beta\alpha}$$

است. اما به این نتیجه می‌رسیم که برای $\alpha \ll 1$ و $\beta \ll 1$ با تقریب مرتبه اول $\mathbf{r}_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_{\beta\alpha}$ است و بنابراین هیچ ابهامی در سمتگیری بردار زاویه‌ای برای دورانه‌های بینهایت کوچک وجود ندارد.

اثر دورانه‌های متوالی را روی برداری که ابتدا روی محور x قرار دارد، $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{i}}$ ، اول به اندازه زاویه α حول محور z و سپس به اندازه زاویه β حول محور y در نظر بگیرید. اگرچه این حالت خاصی است، ولی جنبه‌های مهم اثبات کلی را نمایان می‌سازد.

دوران اول: به اندازه زاویه α حول محور z (شکل ۷-۵۶ الف)

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{i}}$$

$$\mathbf{r}_\alpha = r \cos \alpha \hat{\mathbf{i}} + r \sin \alpha \hat{\mathbf{j}}$$

زیرا داریم

$$|\mathbf{r}_\alpha| = |\mathbf{r}| = r$$

دوران دوم: به اندازه زاویه β حول محور y (شکل ۷-۵۶ ب). مؤلفه $r \sin \alpha \hat{\mathbf{j}}$ با این دوران تغییر نمی‌کند

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\alpha\beta} &= r \cos \alpha (\cos \beta \hat{\mathbf{i}} - \sin \beta \hat{\mathbf{k}}) + r \sin \alpha \hat{\mathbf{j}} \\ &= r \cos \alpha \cos \beta \hat{\mathbf{i}} + r \sin \alpha \hat{\mathbf{j}} - r \cos \alpha \sin \beta \hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (۱)$$

برای یافتن $\mathbf{r}_{\beta\alpha}$ همین برهان را بترتیب معکوس می‌آوریم که نتیجه چنین است

$$\mathbf{r}_{\beta\alpha} = r \cos \alpha \cos \beta \hat{\mathbf{i}} + r \cos \beta \sin \alpha \hat{\mathbf{j}} - r \sin \beta \hat{\mathbf{k}} \quad (۲)$$

در معادلات ۱ و ۲ اختلاف $\mathbf{r}_{\beta\alpha}$ و $\mathbf{r}_{\alpha\beta}$ در مؤلفه‌های y و z است. فرض کنید که زوایا را مطابق دو شکل ۷-۵۶ (ج) و ۷-۵۶ (د) با $\Delta\alpha$ و $\Delta\beta$ نشان دهیم که $\Delta\alpha \ll 1$ و $\Delta\beta \ll 1$ باشد. اگر از تمام جملات با توان دوم یا بیشتر صرف‌نظر کنیم به طوری که $\sin \Delta\theta \approx \Delta\theta$ و $\cos \Delta\theta \approx 1$ شود، معادله ۱ به صورت:

$$\mathbf{r}_{\alpha\beta} = r\hat{\mathbf{i}} + r\Delta\alpha\hat{\mathbf{j}} - r\Delta\beta\hat{\mathbf{k}} \quad (۳)$$

و معادله ۳ به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{r}_{\beta\alpha} = r\hat{\mathbf{i}} + r\Delta\alpha\hat{\mathbf{j}} - r\Delta\beta\hat{\mathbf{k}} \quad (۴)$$

بنابراین در مرتبه اول برای دورانهای کوچک $\mathbf{r}_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_{\beta\alpha}$ است و بردار زیر

$$\Delta\theta = \Delta\beta\hat{\mathbf{j}} + \Delta\alpha\hat{\mathbf{k}}$$

بخوبی تعریف شده است. بخصوص جابه‌جایی \mathbf{r} چنین است

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{r} &= \mathbf{r}_{\text{کل}} - \mathbf{r}_{\text{اولیه}} \\ &= \mathbf{r}_{\alpha\beta} - r\hat{\mathbf{i}} \end{aligned}$$

$$= r \Delta\alpha \hat{j} - r \Delta\beta \hat{k} = \Delta\theta \times r$$

اگر جابه‌جایی در زمان Δt رخ دهد، بردار سرعت عبارت است از

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta \times \mathbf{r}}{\Delta t} \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \end{aligned}$$

که در آن

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

در این مثال $\boldsymbol{\omega} = (d\beta/dt)\hat{j} + (d\alpha/dt)\hat{k}$ است.

نتیجه‌گیری ما از معادلات ۳ و ۴ نشان می‌دهد که اثر دورانه‌های بینهایت کوچک با مستقل در نظر گرفتن هریک از آنها به نوبت پیدا می‌شود. در مرتبه اول، اثر دوران $\mathbf{r} = r\hat{i}$ به اندازه $\Delta\alpha$ حول محور z ، ایجاد مؤلفه $r\Delta\alpha\hat{j}$ روی محور y است. اثر دوران \mathbf{r} به اندازه $\Delta\beta$ حول y ایجاد مؤلفه $-r\Delta\beta\hat{k}$ روی z است. تغییر کل \mathbf{r} در مرتبه اول مجموع این دو اثر است:

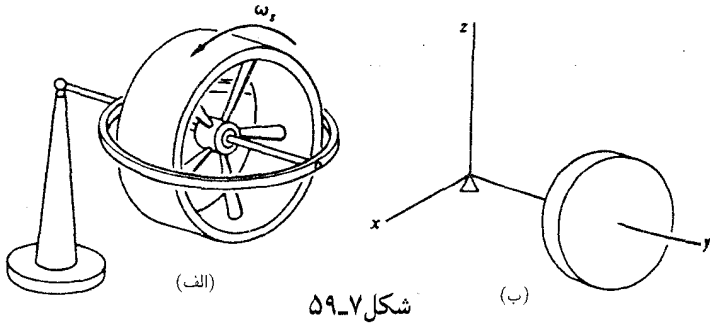
$$\Delta\mathbf{r} = r \Delta\alpha \hat{j} - r \Delta\beta \hat{k}$$

که با معادله ۳ یا ۴ توافق دارد.

یادداشت ۷-۲ مطالبی بیشتر دربارهٔ قطب‌نمای ژيروسکوپ

در بخش ۷-۳ برای بحث حرکت تقدیمی یکنواخت ژيروسکوپ از برهان ساده برداری استفاده کردیم. اما حرکت تقدیمی یکنواخت کلی‌ترین حالت حرکت ژيروسکوپ نیست. برای مثال ژيروسکوپ که محور آن در حالت افقی ساکن است اگر رها شود، در ابتدا شروع به حرکت تقدیمی نمی‌کند، بلکه مرکز جرم آن شروع به سقوط می‌کند. حرکت سقوطی سریعاً تبدیل به یک حرکت جنبشی نوسانی موسوم به رقص محوری می‌شود. اگر جنبشهای نوسانی به وسیله اصطکاک یا تاقانها میرا شود، ژيروسکوپ سرانجام به حالت حرکت تقدیمی یکنواخت درمی‌آید. هدف این یادداشت نشان دادن چگونگی انجام رقص محوری با استفاده از تقریب زوایای کوچک است. (در بخش ۷-۷ برای توضیح حرکت تقدیمی بدون گشتاور نیرو، از روش مشابهی استفاده شده است.)

ژيروسکوپ متشکل از یک چرخ طیار و محوری به طول l که انتهای آن متصل به یک تکیه‌گاه است در نظر بگیرید (شکل ۷-۵۹ الف). چرخ طیار با سرعت می‌چرخد و محور آن از وضع افقی رها



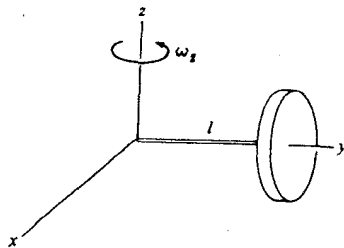
شکل ۵۹-۷

می شود. حرکت آن چگونه است؟

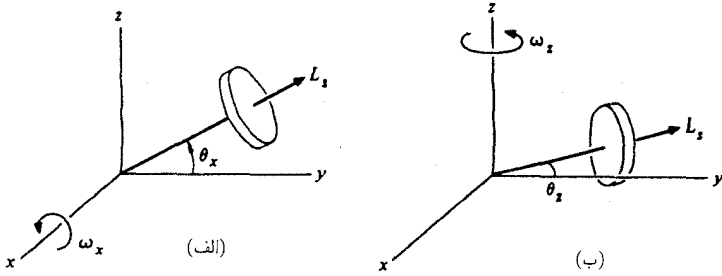
از آنجاکه بررسی حرکت برحسب دوران حول نقطه ثابت تکیه‌گاه امری طبیعی است، دستگاه مختصاتی را که مبدأ آن روی تکیه‌گاه واقع است معرفی می‌کنیم. فعلاً فرض کنید که ژيروسکوپ حرکت چرخشی ندارد (شکل ۵۹-۷ ب) ولی محور آن حول تکیه‌گاه دوران می‌کند. برای محاسبهٔ تکانهٔ زاویه‌ای حول مبدأ، به تعمیم قضیهٔ محورهای موازی مثال ۶-۹ احتیاج خواهیم داشت. تکانهٔ زاویه‌ای حاصل از دوران محور (ژيروسکوپ) حول محور z با آهنگ ω_z را در نظر بگیرید. اگر گشتاور لختی قرص حول محوری قائم که از مرکز جرم می‌گذرد I_{zz} باشد، آنگاه گشتاور لختی حول محور z که از تکیه‌گاه می‌گذرد برابر $I_{zz} + Ml^2$ است. اثبات آن بسیار ساده است و به عنوان یک مسئله آن را ادامه می‌دهیم. اگر فرض کنیم $I_{zz} + Ml^2 = I_p$ باشد، آنگاه $L_z = \omega_z I_p$ است. به دلیل تقارن گشتاور لختی حول محور x برابر $I_{xx} + Ml^2 = I_p$ است به طوری که $L_x = \omega_x I_p$.

نتایج بالا هنگامی که ژيروسکوپ مطابق شکل ۷-۶۰ روی محور y قرار دارد کاملاً دقیق است و برای زوایای کوچک حول محور y تا مرتبهٔ اول صحیح است.

حال فرض کنید چرخ طیار با آهنگ ω_s به حال چرخش درآمده باشد. اگر گشتاور لختی حول محور چرخش I_s باشد آنگاه تکانهٔ زاویه‌ای اسپین برابر $L_s = I_s \omega_s$ است (شکلهای ۷-۶۱).



شکل ۶۰-۷



شکل ۶۱-۷

تکانه زاویه‌ای متناظر با جابه‌جایی کوچک زاویه‌ای از محور y از دو قسمت تشکیل یافته است. دوران کلی دستگاه با سرعت زاویه‌ای ω به مقدار $I_p \omega$ در تکانه زاویه‌ای سهم دارد. به علاوه همچنانکه زیروسکوپ از محور y دور می‌شود، مؤلفه‌هایی از L_s در جهت‌های x و z ایجاد می‌شوند. برای جابه‌جایی زاویه‌ای کوچک θ چنین مؤلفه‌هایی به شکل $L_s \theta$ خواهند بود.

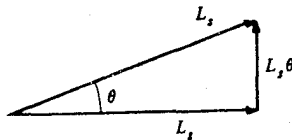
برای جابه‌جاییهای کوچک زاویه‌ای $\theta_x \ll 1$ حول محور x و $\theta_z \ll 1$ حول محور z ، دورانها را می‌توان به طور مستقل در نظر گرفت که اثر آنها با هم جمع می‌شود (شکل ۶۲-۷).

(الف) دوران حول محور x (شکل ۶۱-۷ الف). فرض کنید که محور (زیروسکوپ) حول محور x به اندازه زاویه $\theta_x \ll 1$ دوران می‌کند و دارای سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای ω_x است. آنگاه

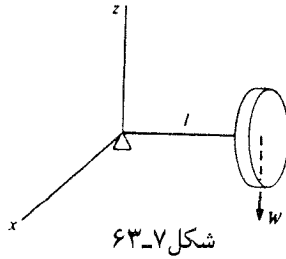
$$\begin{aligned} L_x &= I_p \omega_x \\ L_y &= L_s \cos \theta_x \approx L_s \\ L_z &= L_s \sin \theta_x \approx L_s \theta_x \end{aligned} \quad (1)$$

(ب) دوران حول محور z (شکل ۶۱-۷ ب). برای دوران $\theta_z \ll 1$ حول محور z با برهانی مشابه به دست می‌آید

$$\begin{aligned} L_x &= -L_s \sin \theta_z \approx -L_s \theta_z \\ L_y &= L_s \cos \theta_z \approx L_s \end{aligned} \quad (2)$$



شکل ۶۲-۷



شکل ۶۳-۷

$$L_z = I_p \omega_z$$

معادلات ۱ و ۲ نشان می‌دهند که دورانهای θ_x و θ_z در مرتبه اول L_y را تغییر نمی‌دهند. اما دورانها موجب تغییر مرتبه اول L_x و L_z می‌شوند. از معادلات ۱ و ۲ داریم

$$L_x = I_p \omega_x - L_s \theta_z$$

$$L_y = L_s \quad (۳)$$

$$L_z = I_p \omega_z + L_s \theta_x$$

گشتاور نیروی لحظه‌ای حول مبدأ چنین است

$$\tau_x = -lW \quad (۴)$$

که در آن l طول محور و W وزن ژيروسکوپ است (شکل ۶۳-۷). چون $\tau = d\mathbf{L}/dt$ است معادلات ۳ و ۴ نتیجه می‌دهند

$$I_p \dot{\omega}_x - L_s \dot{\omega}_z = -lW \quad (۵-الف)$$

$$\dot{L}_s = 0 \quad (۵-ب)$$

$$I_p \dot{\omega}_z + L_s \dot{\omega}_x = 0 \quad (۵-ج)$$

که در آن از برابریهای $\dot{\theta}_z = \dot{\omega}_z$ و $\dot{\theta}_x = \dot{\omega}_x$ استفاده کرده‌ایم.

معادله ۵-ب ما را از ثابت بودن اسپین مطمئن می‌سازد، که انتظار آن را برای چرخ طیار با یاتاقانهایی خوب داریم. اگر از معادله ۵-الف دیفرانسیل بگیریم، خواهیم داشت

$$I_p \dot{\omega}_x - L_s \dot{\omega}_z = 0$$

با جایگزین کردن $\dot{\omega}_z = -L_s \dot{\omega}_x / I_p$ از معادله ۵-ج به دست می‌آید

$$\ddot{\omega}_x + \frac{L_s^2}{I_p^2} \omega_x = 0$$

اگر فرض کنیم $\gamma = L_s/I_p = \omega_s I_s/I_p$ این معادله چنین می‌شود

$$\ddot{\omega}_x + \gamma^2 \omega_x = 0$$

که همان معادلهٔ آشنای حرکت هماهنگ ساده است. جواب آن چنین است

$$\omega_x = A \cos(\gamma t + \phi) \quad (۶)$$

که در آن A و ϕ ثابتهای اختیاری هستند.

برای یافتن ω_z می‌توانیم از معادلهٔ ۵-الف استفاده کنیم

$$\omega_z = \frac{IW}{L_s} + \frac{I_p}{L_s} \dot{\omega}_x$$

با جایگزین کردن رابطهٔ $\dot{\omega}_x = -A\gamma \sin(\gamma t + \phi)$ از معادلهٔ ۶ به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \omega_z &= \frac{IW}{L_s} - \frac{I_p}{L_s} A\gamma \sin(\gamma t + \phi) \\ &= \frac{IW}{L_s} - A \sin(\gamma t + \phi) \end{aligned} \quad (۷)$$

با انتگرال‌گیری از معادلات ۶ و ۷ داریم

$$\theta_x = B \sin(\gamma t + \phi) + C \quad (\text{الف-۸})$$

$$\theta_z = \frac{IW}{L_s} t + B \cos(\gamma t + \phi) + D \quad (\text{ب-۸})$$

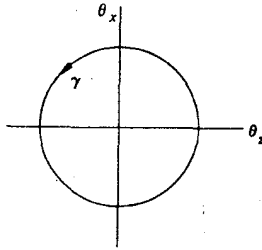
که در آن $C, B = A/\gamma$ و D ثابتهای انتگرال‌گیری هستند.

حرکت ژيروسکوپ بستگی به ثابتهای B, C, ϕ و D در معادلهٔ ۸ دارد و اینها خود به شرایط اولیه بستگی دارند. ما سه حالت جداگانه را بررسی می‌کنیم.

حالت ۱- حرکت تقدیمی یکنواخت: اگر $B = 0$ و $C = D = 0$ اختیار کنیم از معادلهٔ ۸ نتیجه

می‌شود

$$\begin{aligned} \theta_x &= 0 \\ \theta_z &= IW \frac{t}{L_s} \end{aligned} \quad (۹)$$



شکل ۷-۶۴

این مورد متناظر با حالت حرکت تقدیمی یکنواختی است که در بخش ۷-۳ بررسی کردیم. آهنگ حرکت تقدیمی همانند معادله ۷-۲ برابر $d\theta_z/dt = lW/L_s$ است. اگر ژيروسکوپ در لحظه $t = 0$ در حالت حرکت تقدیمی یکنواخت باشد، حرکت را به همان گونه ادامه خواهد داد.

حالت ۲- حرکت تقدیمی بدون گشتاور نیرو: اگر گرانرش را "خشی کنیم" به طوری که W صفر شود، آنگاه معادله ۸ با $C = D = 0$ نتیجه می دهد

$$\theta_x = B \sin(\gamma t + \phi)$$

$$\theta_z = B \cos(\gamma t + \phi) \quad (10)$$

نوک محور مطابق شکل ۷-۶۴ روی دایره ای حول محور y حرکت می کند. دامنه حرکت بستگی به شرایط اولیه دارد. این مورد با حرکت تقدیمی بدون گشتاور نیروی بحث شده در بخش ۷-۷ یکسان است.

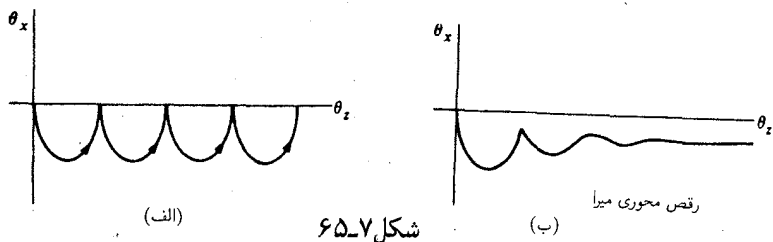
حالت ۳- رقص محوری: فرض کنید که محور ژيروسکوپ در لحظه $t = 0$ در امتداد محور y از حالت سکون رها شده است. شرایط اولیه در لحظه $t = 0$ در حرکت روی x چنین است $(d\theta_x/dt)_0 = (\theta_x)_0 = 0$. از معادله ۸-الف چنین به دست می آوریم

$$B \sin \phi + C = 0$$

$$B\gamma \cos \phi = 0$$

در حال حاضر فرض کنید B صفر نیست. داریم $\phi = \pi/2$ و $C = -B$. آنگاه معادله ۸-ب چنین می شود

$$\theta_z = \frac{lW}{L_s} t - B \sin \gamma t + D$$



شکل ۶۵-۷

از شرایط اولیه حرکت روی z یعنی $\dot{\theta}_z = 0$ ، $\theta_z = 0$ به دست می‌آوریم

$$D = 0$$

$$-B\gamma + \frac{lW}{L_s} = 0$$

یا

$$B = \frac{lW}{\gamma L_s}$$

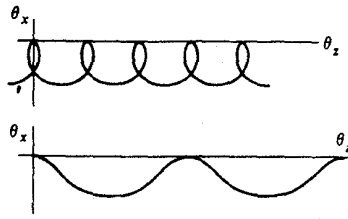
از جایگذاری این نتایج در معادله ۸ حاصل می‌شود

$$\theta_x = \frac{lW}{\gamma L_s} (\cos \gamma t - 1)$$

$$\theta_z = \frac{lW}{\gamma L_s} (\gamma t - \sin \gamma t) \quad (11)$$

حرکت توصیف شده به وسیله معادله ۱۱ در شکل ۶۵-۷ (الف) نشان داده شده است. همانطور که زمان می‌گذرد، نوک محور مسیر سیکلوئیدی را طی می‌کند. حرکت فرازو فرودی محور را رقص محوری می‌نامند. این حرکت با ژيروسکوپ که خوب ساخته شده باشد به آسانی مشاهده می‌شود. توجه کنید که حرکت اولیه محور به طور عمودی به سمت پایین است؛ ژيروسکوپ هنگام رها شدن شروع به سقوط می‌کند. سرانجام رقص محوری به دلیل اصطکاک در تکیه‌گاه میرا می‌شود، و حرکت تبدیل به حرکت تقدیمی یکنواخت می‌شود، که در شکل ۶۵-۷ (ب) نشان داده شده است. محور بعد از میرایی رقص محوری، اندکی در حالت فرازو فرود باقی می‌ماند، و این موضوع تکانه کلی را حول محور z صفر نگه می‌دارد. انرژی دورانی حرکت تقدیمی از سقوط مرکز جرم تأمین می‌شود. بسته به شرایط اولیه انواع دیگری از حرکت رقص محوری نیز امکانپذیر است؛ دو شکل ۶۶-۷ حالت‌های ممکن را نشان می‌دهند. با انتخاب مناسبی از ثابتها، این دو تماماً به وسیله معادله ۸ قابل توصیف‌اند.

ما تقریبهای $\theta_x \ll 1$ و $\theta_z \ll 1$ را به کار بردیم، ولی به علت حرکت تقدیمی، θ_z به طور خطی با زمان زیاد و تقریب بالا به ناچار منجر به شکست می‌شود. اگر حرکت را برای یک دوره رقص محوری



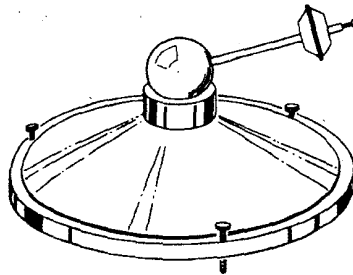
شکل ۶۶-۷

مورد بررسی قرار دهیم مسئله‌ای پیش نمی‌آید. رقص محوری وقتی $\gamma t = 2\pi$ شود تکرار می‌شود. دوره تناوب رقص محوری برابر $T = 2\pi/\gamma$ است. اگر در θ_z در طی یک تناوب کوچک باشد، آنگاه می‌توانیم مسئله را به طور ذهنی در آخر هر دوره، به کمک دستگاه مختصات جدیدی که محور θ_z آن باز هم در جهت محور ژيروسکوپ است شروع کنیم. در این صورت برای θ_z قید $1 \ll \Omega T$ برقرار می‌شود، یا

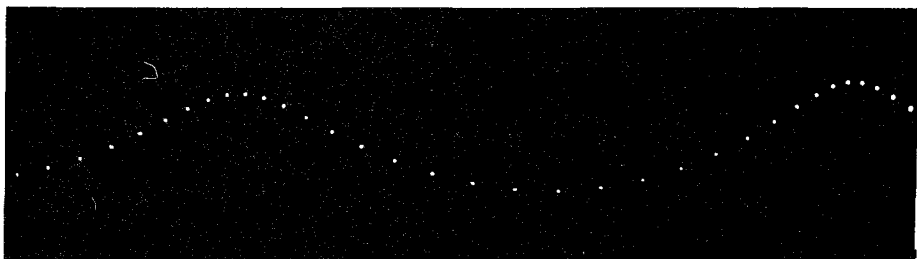
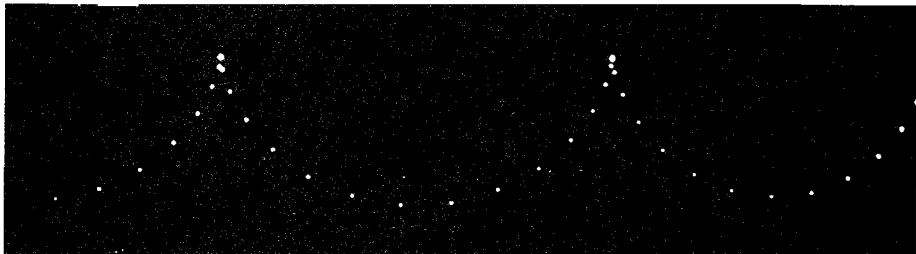
$$\frac{2\pi\Omega}{\gamma} \ll 1$$

اگر آهنگ حرکت تقدیمی با آهنگ رقص محوری قابل مقایسه شود راه حل مابقی اعتبار می‌شود. به طور واضحتر، ژيروسکوپی می‌خواهیم که در هر دور کامل حرکت تقدیمی چندین بار رقص محوری انجام دهد.

در مورد ژيروسکوپ اسباب بازی (شکل ۶۷-۷)، اصطکاک آنقدر زیاد است که عملاً مشاهده رقص محوری غیرممکن است. اما در مورد ژيروسکوپ معلق در هوا، اصطکاک به اندازه‌ای کم است که مشاهده رقص محوری آسان می‌شود. قسمت گردنده این ژيروسکوپ کره فلزی پرجرمی است که در کاسه‌ای تقریباً به همان اندازه جای دارد. این کره روی لایه‌ای از هوا که از سوراخی در ته کاسه می‌وزد معلق است. گشتاور اعمال شده ناشی از وزن جسم کوچکی است که در انتهای میله‌ای که به طور شعاعی از کره خارج شده است قرار دارد. تصاویر ۶۸-۷ عکسهای منبع نور استروسکوپی است که از مهره



شکل ۶۷-۷

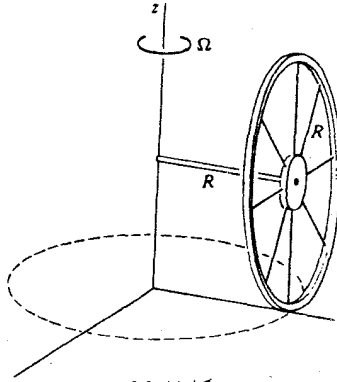


شکل ۶۸-۷

کوچکی در انتهای میله بازتابیده است. هر سه مد حرکت تقدیمی در اینجا قابل مشاهده است و با بررسی فواصل بین نقطه‌ها می‌توان به تغییرات سرعت میله در طی دوره حرکت تقدیمی پی برد.

مسائل

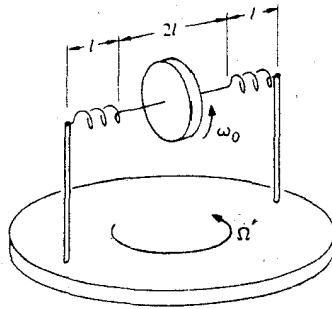
۱-۷ حلقه نازکی به جرم M و شعاع R بدون لغزش حول محور z می‌چرخد. این حلقه به وسیله محوری به طول R که از مرکز آن می‌گذرد مطابق شکل ۶۹-۷ نگهداری می‌شود. حلقه با سرعت



شکل ۶۹-۷

زاویه‌ای Ω حول محور z دور می‌زند. (الف) سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای حلقه (ω) چقدر است؟ (ب) تکانه زاویه‌ای حلقه L چیست؟ آیا L با ω موازی است؟ (تذکر: گشتاور لختی حلقه برای محوری در امتداد قطرش برابر $\frac{1}{4}MR^2$ است.)

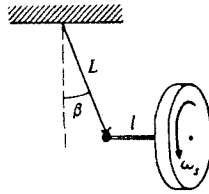
۷-۲ چرخ طیار مطابق شکل ۷-۷ با گشتاور لختی I با سرعت زاویه‌ای ω در وسط محوری



شکل ۷۰-۷

به طول $2l$ دوران می‌کند. هر دو سر محور از طریق فنری که تا طول l کشیده شده و کشش T را ایجاد می‌کند به پایه‌ای متصل است. می‌توانید فرض کنید که T برای جابه‌جاییهای کوچک محور، ثابت می‌ماند. پایه‌ها روی میزی استوار است که با سرعت زاویه‌ای Ω دوران می‌کند ($\Omega \ll \omega_0$). مرکز جرم چرخ طیار درست بالای مرکز دوران میز قرار دارد. از گرانش صرف‌نظر کرده و فرض کنید که حرکت کاملاً یکنواخت است، به طوری که اثر رقص محوری وجود ندارد. می‌خواهیم جهت محور را نسبت به خط راست واصل بین دو پایه پیدا کنیم.

۷-۳ چرخ ژيروسکوپی مطابق شکل ۷-۷۱ در یک انتهای محوری به طول l قرار دارد. انتهای



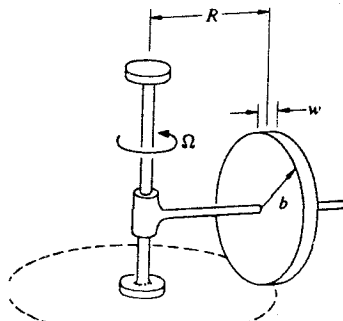
شکل ۷۱-۷

دیگر محور از نخ، به طول L آویخته است. چرخ طوری به حرکت وا داشته می‌شود که حرکت تقدیمی یکنواخت در صفحه افقی انجام می‌دهد. چرخ دارای جرم M و گشتاور لختی I حول مرکز جرم است. سرعت زاویه‌ای اسپینی ω_s است. از جرم میله و نخ صرف نظر کنید.

زاویه β را که نخ با قائم می‌سازد پیدا کنید. فرض کنید β به اندازه‌ای کوچک است که تقریبی مانند $\sin \beta \approx \beta$ موجه است.

۴-۷ در آسیاب قدیمی، غلات توسط سنگ آسیابی به شکل قرص که روی سطحی تخت به وسیله میله قائمی روی دایره‌ای می‌غلتد، آرد می‌شود. به علت وجود تکانه زاویه‌ای سنگ، نیروی تماس با سطح می‌تواند به طور قابل ملاحظه‌ای بیشتر از وزن چرخ باشد.

فرض کنید سنگ آسیاب مطابق شکل ۷۲-۷ از قرص یکنواختی به جرم M ، شعاع b و پهنای w



شکل ۷۲-۷

تشکیل شده است و بدون لغزش روی دایره‌ای به شعاع R با سرعت زاویه‌ای Ω می‌غلتد. نیروی تماس را پیدا کنید. فرض کنید که سنگ آسیاب بخوبی روی محور سوار است به طوری که نمی‌تواند کج شود، و همچنین $w \ll R$ است. از اصطکاک صرف نظر کنید.

جواب حالت خاص: اگر $\Omega^2 b = 2g$ باشد، نیرو دو برابر وزن است.

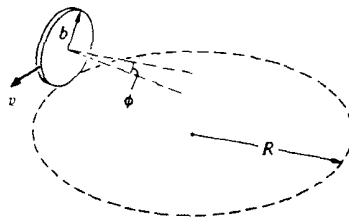
۵-۷ هنگامی که اتومبیلی با سرعت زیاد یک منحنی را می‌پیماید، بارهای (توزیع وزن) روی

چرخهای آن به طور محسوسی تغییر می‌کند. برای سرعتهایی که به اندازه کافی زیادند بار روی چرخهای داخلی صفر می‌شود، که در این زمان اتومبیل شروع به چپ شدن می‌کند. این تمایل را می‌توان با نصب یک چرخ طیار بزرگ روی اتومبیل از بین برد. (الف) محور چرخ طیار در چه جهتی باید نصب شود، و سوی دوران چه باید باشد تا به توازن بار کمک کند؟ (مطمئن شوید که روستان برای دور زدن اتومبیل در هر جهتی کارآمد باشد). (ب) نشان دهید برای چرخ طیاری به شکل قرص و به جرم m و شعاع R شرط توازن بارها این است که سرعت زاویه‌ای چرخ طیار ω با رابطه زیر سرعت اتومبیل v مربوط باشد

$$\omega = 2v \frac{ML}{mR^2}$$

که در آن M جرم کل اتومبیل و چرخ طیار و L ارتفاع مرکز جرم اتومبیل (به انضمام چرخ طیار) از سطح جاده است. فرض کنید جاده فاقد شیب عرضی است.

۶-۷ اگر سکه‌ای را با دقت روی میزی بغلتانید، می‌توانید آن را روی دایره‌ای به غلتش وادارید. همچنانکه در شکل ۷-۲۳ می‌بینید سکه با محوری مایل، "میل" به داخل دارد. شعاع سکه b و شعاع



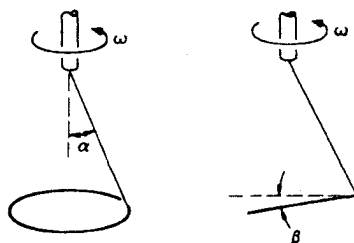
شکل ۷-۲۳

دایره‌ای که روی میز طی می‌کند R و سرعت آن v است. فرض کنید لغزش وجود ندارد. زاویه‌ای را که محور با افق می‌سازد (ϕ) پیدا کنید.

جواب: $\tan \phi = 3v^2 / 2gR$

۷-۷ حلقه نازکی به جرم M و شعاع R با نخ‌کی که از نقطه‌ای روی پیرامون حلقه می‌گذرد آویزان است. اگر نگهدارنده با سرعت زاویه‌ای زیاد ω بچرخد، حلقه مطابق شکل‌های ۷-۲۴ تقریباً در سطح افقی و حول مرکزی روی محور نگهدارنده خواهد چرخید. نخ با راستای قائم زاویه α می‌سازد. (الف) زاویه کوچک β بین صفحه حلقه و افق را به طور تقریبی پیدا کنید. (ب) شعاع دایره کوچکی را که حول محور قائم توسط مرکز جرم رسم می‌شود به طور تقریبی بیابید. (این حرکت را شما می‌توانید با مهارت با یک طناب نمایش دهید. این همان کمند مورد استفاده گاوچرانهاست.)

۸-۷ یک حلقه بازی بچه با جرم M و شعاع b روی خط راستی با سرعت v می‌غلتد. به بالای آن



شکل ۷-۷۴

به وسیله خط‌کشی در جهت عمود بر حرکت به آرامی ضربه‌ای نواخته می‌شود. مقدار ضربه نواخته شده برابر I است. (الف) نشان دهید که این امر موجب انحراف خط غلتش به اندازه زاویه $\phi = I/Mv$ می‌شود. فرض کنید که تقریب ژيروسکوپ صادق است و از اصطکاک زمین صرف‌نظر کنید. (ب) نشان دهید که تقریب ژيروسکوپ به شرط $F \ll Mv^2/b$ برقرار است؛ که در آن F مقدار نیروی اعمال شده است.

۷-۹ این مسئله مستلزم بررسی اثر تکانه زاویه‌ای چرخهای یک دوچرخه بر پایداری دوچرخه‌سوار است. فرض کنید که مرکز جرم دوچرخه و دوچرخه‌سوار در ارتفاع $2l$ از سطح زمین قرار دارد. هر چرخ دارای جرم m و شعاع l و گشتاور لختی ml^2 است. دوچرخه با سرعت V در مسیری دایره‌ای به شعاع R حرکت می‌کند. نشان دهید که دوچرخه به اندازه زاویه داده شده زیر نسبت به زمین مایل است

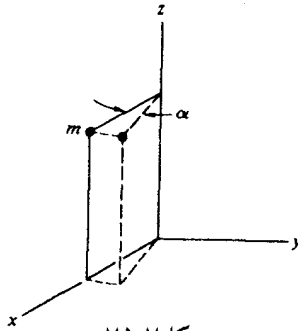
$$\tan \phi = \frac{V^2}{Rg} \left(1 + \frac{m}{M} \right)$$

که در آن M جرم کل است.

جمله آخر داخل پرانتز در صورت صرف‌نظر کردن از تکانه زاویه‌ای حذف می‌شود. آیا فکر می‌کنید که این مطلب مهم است؟ اگر دوچرخه بدون دوچرخه‌سوار باشد، اهمیت آن در چیست؟

۷-۱۰ به وسیله ژيروسکوپ که محور آن به طور افقی نصب شده و در امتداد شرق-غرب قرار دارد، عرض جغرافیایی را می‌توان اندازه گرفت. (الف) نشان دهید ژيروسکوپ هنگامی که محور اسپینی آن موازی محور قطبی بوده و زاویه عرض جغرافیایی λ را با افق می‌سازد، پایدار باقی می‌ماند. (ب) اگر ژيروسکوپ با محور چرخشی که زاویه کوچکی با محور قطبی می‌سازد رها شود، نشان دهید که محور چرخش ژيروسکوپ حول محور قطبی با بسامد $\omega = \sqrt{I_1 \omega_s \Omega_e / I_\perp}$ نوسان خواهد کرد، که در آن I_\perp گشتاور لختی ژيروسکوپ حول محور چرخش، I_1 گشتاور لختی آن حول محور افقی ثابت، و Ω_e سرعت زاویه‌ای دوران زمین است.

برای ژيروسکوپی که با سرعت 40000 rpm می چرخد، چه مقداری را برای ω انتظار دارید؟ فرض کنید ژيروسکوپ قرص نازکی است و چارچوب نگهدارنده آن هیچ سهمی در گشتاور لختی ندارد. $11-7$ ذره‌ای به جرم m مطابق شکل $75-7$ در مکان $x = 2$ ، $y = 0$ ، و $z = 3$ قرار دارد.



شکل ۷۵-۷

(الف) گشتاور لختی و حاصلضربهای لختی آن را نسبت به مبدأ پیدا کنید. (ب) این ذره دوران خالصی حول محور z به اندازه زاویه کوچک انجام می دهد. نشان دهید در تقریب مرتبه اول نسبت به α ، اگر $\alpha \ll 1$ باشد، گشتاور لختی تغییر نمی کند.

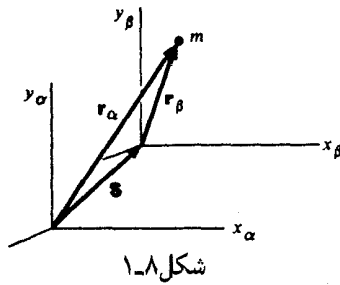


سیستم‌های نالخت و نیروهای مجازی

۸-۱ مقدمه

در بررسی اصول دینامیک در فصل ۲ تأکید کردیم که قانون دوم نیوتون $F = ma$ ، فقط در دستگاه‌های مختصات لخت صادق است. تاکنون از دستگاه‌های نالخت اجتناب کرده‌ایم تا هدف خود را که شناخت طبیعت فیزیکی نیروها و شتابهاست مبهم نکرده باشیم. چون این هدف به‌طور وسیعی درک شده است، در این فصل به استفاده از دستگاه‌های نالخت می‌پردازیم. مقصود ما دوگانه است. با معرفی دستگاه‌های نالخت بسیاری از مسائل را می‌توانیم ساده کنیم؛ از این دیدگاه استفاده از دستگاه‌های نالخت، نمایانگر ابزار محاسباتی دیگری است. به هر حال، با در نظر گرفتن دستگاه‌های نالخت می‌توان به برخی از مشکلات مفهومی مکانیک کلاسیک پی برد، و هدف دوم این فصل درک عمیق‌تر قانون دوم نیوتون، خواص فضا، و معنای لختی است.

با پیدا کردن روش مرسوم ارتباط دادن مشاهدات در دستگاه‌های لخت شروع می‌کنیم.



۲-۸ تبدیلات گالیه

در این بخش نشان خواهیم داد هر دستگاهی که با سرعت یکنواخت نسبت به یک دستگاه لخت حرکت می‌کند، خود نیز لخت است. این نتیجه به اندازه‌ای آشکار است که نمی‌توان نیاز به اثبات آن را احساس کرد. به هر حال، این برهان هنگام تحلیل دستگاههای نالخت در بخش بعدی مفید خواهد بود. فرض کنید دو فیزیکدان α و β ، به مشاهده یک رشته وقایع از قبیل موقعیت جسمی به جرم m برحسب تابعی از زمان پردازند. هر یک از آنها مجموعه‌ی مسائل اندازه‌گیری خود را دارد و در آزمایشگاه خود کار می‌کند. α با آزمایش جداگانه‌ای محرز ساخته است که قوانین نیوتون در آزمایشگاه وی درست است و در نتیجه چارچوب مرجع وی لخت است. او چگونه می‌تواند پیشگویی کند که دستگاه β لخت است یا خیر؟

برای سادگی، ناظران α و β در استفاده از دستگاه مختصات دکارتی با واحدهای یکسان برای اندازه‌گیری، توافق دارند. در حالت کلی، دستگاههای آنها برهم منطبق نیستند. مسئله‌ی دورانها را برای بعد می‌گذاریم و در حال حاضر فرض می‌کنیم که دستگاهها در حرکت نسبی اندولی محورهای متناظر موازی هستند. مکان جرم m را در دستگاه α ، \mathbf{r}_α و در دستگاه β ، \mathbf{r}_β می‌گیریم. اگر مبدأهای دو دستگاه جابه‌جایی \mathbf{S} داشته باشند، همچنانکه در شکل ۱-۸ نشان داده شده است، داریم

$$\mathbf{r}_\beta = \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{S} \quad (1-8)$$

اگر فیزیکدان α ، آهنگ سرعت جرم m را $\mathbf{a}_\alpha = \ddot{\mathbf{r}}_\alpha$ ببیند، از قانون دوم نیوتون نتیجه می‌گیرد که نیروی وارد بر m با رابطه‌ی زیر داده شده است

$$\mathbf{F}_\alpha = m\mathbf{a}_\alpha$$

فیزیکدان β آهنگ سرعت m را \mathbf{a}_β مشاهده می‌کند، درست مانند اینکه نیروی زیر به آن وارد شده باشد

چه ارتباطی بین F_β و نیروی واقعی F_α که در یک دستگاه لخت اندازه‌گیری شده است وجود دارد؟ ارتباط دادن شتابها در دو دستگاه مطلب ساده‌ای است. حاصل دیفرانسیل‌گیری پی‌درپی از معادله ۱-۸ نسبت به زمان چنین است

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\beta &= \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{V} \\ \mathbf{a}_\beta &= \mathbf{a}_\alpha - \mathbf{A} \end{aligned} \quad (2-8)$$

اگر $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{S}}$ ثابت باشد، این حرکت نسبی یکنواخت و $\mathbf{A} = 0$ است. در این حالت $\mathbf{a}_\beta = \mathbf{a}_\alpha$ است و داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\beta &= m\mathbf{a}_\beta = m\mathbf{a}_\alpha \\ &= \mathbf{F}_\alpha \end{aligned}$$

نیرو در هر دو دستگاه یکسان است. معادلات حرکت دستگاهی که به طور یکنواخت نسبت به یک دستگاه لخت در حرکت است با معادلات حرکت این دستگاه لخت یکسان است. نتیجه می‌شود که تمام دستگاههایی که نسبت به یک دستگاه لخت دارای حرکت انتقالی یکنواخت‌اند، لخت هستند. این نتیجه ساده یک معما را پیش می‌کشد. اگر مسیر یک دستگاه مختصات را مطلقاً ساکن بدانیم، هیچ راه دینامیکی برای تشخیص یک دستگاه لخت از دیگری وجود ندارد. طبیعت هیچ سرنخی از سکون مطلق به دست نمی‌دهد.

به طور ضمنی تعدادی فرضیات معقول را در برهان بالا به کار بردیم. در وهله اول فرض کردیم که هر دو ناظر برای اندازه‌گیری فاصله از مقیاس یکسان استفاده می‌کنند. برای تأمین این منظور، α و β مقیاسهای خود را با استفاده از طول معینی درجه‌بندی می‌کنند. اگر فیزیکیان α طول میله‌ای در حال سکون را در دستگاه خود L_α تعیین کند، انتظار داریم که β همان طول را اندازه بگیرد. در واقع این مطلب در صورتی صادق است که هیچ حرکتی بین دو دستگاه وجود نداشته باشد، اما در حالت کلی صحیح نیست. اگر β به موازات میله با سرعت یکنواخت v حرکت کند، طول $L_\beta = L_\alpha (1 - v^2/c^2)^{1/2}$ اندازه خواهد گرفت، که در آن c سرعت نور است. این نتیجه از نظریه نسبیت خاص به دست می‌آید. انقباض میله متحرک، مشهور به انقباض لورنتس، در بخش ۱۲-۳ مورد بحث قرار می‌گیرد.

دومین فرضی که کرده‌ایم این است که زمان در هر دو دستگاه یکسان است. یعنی اگر α زمان بین دو رویداد را T_α تعیین کند، در واقع فرض کردیم که β نیز همان زمان را مشاهده می‌کند. در اینجا دوباره این فرض در سرعتهای بالا مواجه با شکست می‌شود. مطابق بحث بخش ۱۳-۳، β متوجه می‌شود که فاصله زمانی اندازه‌گرفته شده توسط وی $T_\beta = T_\alpha / (1 - v^2/c^2)^{1/2}$ است. یکبار دیگر طبیعت

نتیجه غیر قابل انتظاری را ظاهر می‌کند.

دلیل اینکه این نتایج چنین غیر قابل انتظارند این است که شناخت ما از فضا و زمان عمدتاً حاصل تماس بلاواسطه ما با جهان اطراف است و این هرگز مستلزم سرعتی بسیار نزدیک به سرعت نور نیست. اگر ما به طور طبیعی با سرعتی نزدیک به سرعت نور در حرکت بودیم، این نتایج را جزء بدیهیات می‌پذیرفیم. مسئله این است که حتی بالاترین سرعتهای "روزمره" در مقایسه با سرعت نور پایین هستند. برای مثال، سرعت یک ماهواره در مدار زمین حدود 8 km/s است. در این حالت $v^2/c^2 \approx 10^{-10}$ و طول و زمان تنها به اندازه یک قسمت در یک میلیارد تغییر می‌کنند.

سومین فرض این است که دو ناظر در مقدار جرم توافق دارند. اما جرم با آزمایشهایی تعریف شده است که هم زمان و هم فاصله را به کار می‌گیرد، از این رو، این فرض نیز باید به محک آزمایش درآید. همچنانکه در بحث تکانه خاطر نشان کردیم، اگر جسم در حال سکونی جرم m_0 را داشته باشد، مفیدترین کمیت متناظر با جرم برای ناظری که با سرعت v حرکت می‌کند $m = m_0 / (1 - v^2/c^2)^{1/2}$ است. اکنون که از برخی پیچیدگیها آگاه شده‌ایم، دخالت نسبت خاص را تا فصول ۱۱ تا ۱۴ به تعویق انداخته و برای مدتی بحث را به وضعیتی که $v \ll c$ است، محدود می‌کنیم. در این حالت مفاهیم کلاسیک فضا، زمان، و جرم با دقت زیاد، معتبرند. در این صورت معادلات زیر، اندازه‌گیریهای α و β را به هم ارتباط می‌دهد، مشروط بر اینکه دستگاههای مختصات آنها با سرعت نسبی \mathbf{V} حرکت کنند. مبداهای دستگاههای مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم که در لحظه $t = 0$ بر هم منطبق باشند به طوری که $\mathbf{S} = \mathbf{V}t$ باشد. آنگاه از معادله ۸-۱ داریم

$$\mathbf{r}_\beta = \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{V}t$$

$$t_\beta = t_\alpha \quad (3-8)$$

عموماً رابطه زمان به طور ضمنی در نظر گرفته می‌شود.

این دسته روابط که تبدیلات نامیده می‌شوند، قواعد تبدیل مختصات یک رویداد را از دستگاه مختصاتی به دستگاه مختصات دیگر به دست می‌دهد. معادلات ۸-۳ که مختصات را بین دستگاههای لخت تبدیل می‌کند به تبدیلات گالیله معروف اند. از آنجاکه نیرو به وسیله تبدیلات گالیله تغییر نمی‌کند، ناظران دستگاههای لخت مختلف، معادلات دینامیکی مشابهی به دست می‌آورند که از آن چنین نتیجه می‌شود که شکل قوانین فیزیکی در تمام دستگاههای لخت یکسان است. در غیر این صورت، ناظران مختلف پیشگوییهای متفاوت می‌کردند، برای مثال، اگر یک ناظر، برخورد دو ذره را پیشگویی کند، ناظر دیگر ممکن است نکند. این بیان که شکل قوانین فیزیکی در تمام دستگاههای لخت مشابه اند اصل نسبیت نامیده می‌شود. اگرچه اصل نسبیت در توسعه مکانیک کلاسیک فقط نقش کوچکی به عهده داشت،

نقش آن در نظریه نسبیت اینشتین قاطع است. این مطلب در فصل ۱۱ بیشتر بحث شده است و همچنین نشان داده شده که تبدیلات گالیله به طور عمومی معتبر نیست بلکه باید با قانون تبدیلات کلی تر یعنی تبدیلات لورنتس جانشین شود. با این حال، تبدیلات گالیله برای حالت $c \ll v$ صحیح هستند و ما آنها را در این فصل دقیق به حساب می آوریم.

۳-۸ دستگاههای با شتاب ثابت

حال توجه خود را به نمود قوانین فیزیکی نسبت به ناظری که با آهنگ A نسبت به یک دستگاه لخت در حرکت است معطوف می کنیم. برای ساده سازی نمادها، شاخصهای پایین α و β را حذف و کمیت‌های دستگاه نا لخت را با پریم مشخص می کنیم. بنابراین معادله ۳-۸ یعنی $a_\beta = a_\alpha - A$ چنین می شود

$$a' = a - A$$

که در آن A شتاب دستگاه پریم دار است که نسبت به دستگاه لخت اندازه گرفته شده است. در دستگاه شتابدار نیروی ظاهری چنین است

$$\begin{aligned} F' &= ma' \\ &= ma - mA \end{aligned}$$

ma نیروی حقیقی F ناشی از برهم کنشهای فیزیکی است. بنابراین

$$F' = F - mA$$

می توان این رابطه را به شکل زیر نوشت

$$F' = F + F_f$$

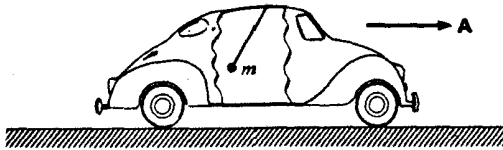
که در آن

$$F_f \equiv -mA$$

F_f نیروی مجازی^۱ نامیده می شود. نیروی مجازی وارد بر یک دستگاه با شتاب ثابت، یکنواخت و همچون نیروی گرانشی متناسب با جرم است. ولی، نیروهای مجازی، ناشی از شتاب دستگاه مختصات است و نه حاصل برهم کنش بین دو جسم.

در اینجا دو مثال می آوریم که کاربرد نیروهای مجازی را نشان می دهند.

۱. گاهی F_f نیروی لخت خوانده می شود، ولی کلمه نیروی مجازی به طور روشنتری بیان می کند که F_f از برهم کنشهای فیزیکی سرچشمه نمی گیرد.



شکل ۲-۸

مثال ۲-۸ نیروی ظاهری گرانش : وزنه کوچکی به جرم m در داخل اتومبیلی که با شتاب A حرکت می کند از نخ آویزان است (شکل ۲-۸). زاویه استاتیک نخ با قائم و کشش آن چقدر است؟ مسئله را در چارچوب لخت شکل ۳-۸ (الف) و همچنین در چارچوبی که همراه اتومبیل با شتاب در حرکت است (شکل ۳-۸ ب) تحلیل می کنیم.

$$T \cos \theta - W = 0$$

$$T \sin \theta = MA$$

$$\tan \theta = \frac{MA}{W} = \frac{A}{g}$$

$$T = M(g^2 + A^2)^{1/2}$$

$$T \cos \theta - W = 0$$

$$T \sin \theta - F_f = 0$$

$$F_f = -MA$$

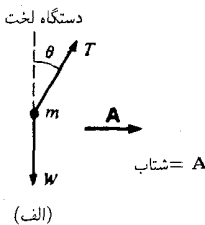
$$\tan \theta = \frac{A}{g}$$

$$T = M(g^2 + A^2)^{1/2}$$

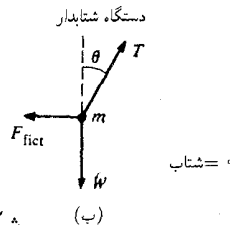
از نظر سرنشین اتومبیل شتابدار، نیروی مجازی مانند یک نیروی گرانشی افقی عمل می کند (شکل ۳-۸ ب). نیروی گرانشی مؤثر برابر جمع برداری نیروی حقیقی و مجازی است. یک بالون پر شده از هلیوم که با نخ از یک اتومبیل شتابدار آویزان است چگونه رفتار می کند؟ رفتار نیروی مجازی در دستگاه شتابدار یکنواخت کاملاً شبیه یک نیروی گرانشی ثابت است؛ نیروی مجازی، ثابت و متناسب با جرم است. بنابراین نیروی مجازی وارد بر یک جسم گسترش یافته، بر مرکز جرم آن وارد می شود.

مثال ۲-۸ استوانه روی الوار شتابدار : استوانه ای مطابق شکل ۴-۸ (الف) به جرم M و شعاع R بدون لغزش روی الواری که با شتاب A در حرکت است می غلتد.

نمودار نیروها برای نیروهای افقی وارد بر استوانه، آن گونه که در دستگاه شتابدار وابسته به الوار به نظر می آید در شکل ۴-۸ (ب) نشان داده شده است. a' شتاب استوانه است که در دستگاه متصل به الوار مشاهده می شود. f نیروی اصطکاک است، و نیروی $F_f = MA$ در جهت نشان داده شده در شکل

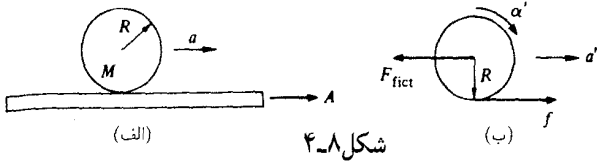


(الف)



(ب)

شکل ۳-۸



شکل ۴-۸

است.

معادلات حرکت در دستگاه متصل به الوار شتابدار چنین اند

$$f - F_f = Ma'$$

$$Rf = -I \cdot \alpha'$$

استوانه بدون لغزش روی الوار می‌غلتد، بنابراین داریم

$$\alpha' R = a'$$

از این روابط حاصل می‌شود

$$Ma' = -I \cdot \frac{a'}{R} - F_f$$

$$a' = -\frac{F_f}{M + I/R}$$

چون $I = MR^2/2$ و $F_f = MA$ است، داریم

$$a' = -\frac{2}{3}A$$

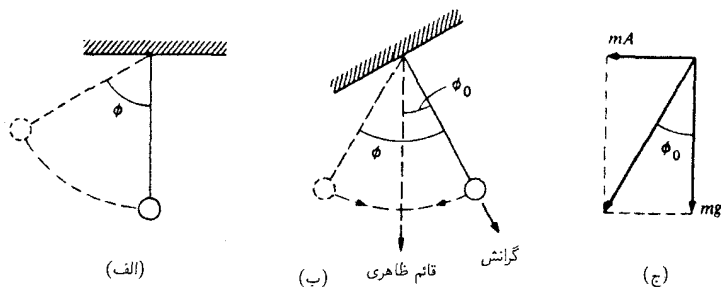
شتاب استوانه در یک دستگاه لخت عبارت است از

$$a = A + a'$$

$$= \frac{1}{3}A$$

با مثالهای ۱-۸ و ۲-۸ در یک دستگاه لخت و یا دستگاه شتابدار به همین آسانی می‌توان رفتار کرد. در اینجا مسئله‌ای را مطرح می‌کنیم که تا حدودی حل آن در دستگاه لخت مشکل است (امتحان کنید)، ولی در دستگاه شتابدار مسئله تقریباً ساده‌ای است.

مثال ۳-۸ آونگ در داخل یک اتومبیل شتابدار: دوباره اتومبیل و وزنه آویخته از نخ مثال ۱-۸ را در نظر بگیرید (شکل‌های ۵-۸)، ولی حالا فرض کنید اتومبیل در حالی که وزنه به طور قائم به آن آویزان است در حال سکون باشد (شکل ۵-۸ الف). اتومبیل ناگهان با آهنگ A شتاب می‌گیرد (شکل ۵-۸ ب).



شکل ۵-۸

می‌خواهیم زاویهٔ بیشینهٔ ϕ را که وزنه به اندازهٔ آن نوسان می‌کند پیدا کنیم. به علت کسب شتاب ناگهانی، ϕ بزرگتر از وضعیت تعادل است.

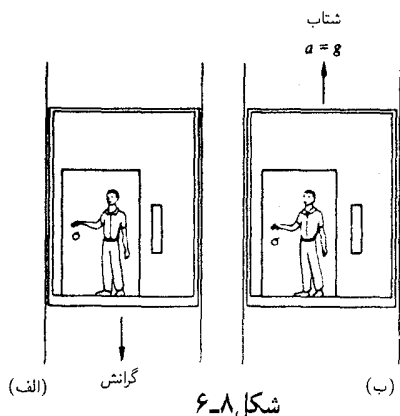
در دستگاه شتابدار همراه اتومبیل، گلوله مانند آونگی در یک میدان گرانشی عمل می‌کند که در آن وضعیت "پایین" آونگ زاویهٔ ϕ را با قائم واقعی می‌سازد (شکل ۵-۸ ج). از مثال ۱-۸ داریم $\phi = \arctan(A/g)$. آونگ ابتدا در حال سکون است. بنابراین با دامنهٔ ϕ حول امتداد قائم ظاهری به جلو و عقب نوسان می‌کند. پس $\phi = 2\phi_0 = 2\arctan(A/g)$ است. ■

۴-۸ اصل هم‌ارزی

قوانین فیزیک در یک دستگاه با شتاب ثابت با قوانین فیزیک در دستگاه لخت یکسان‌اند مشروط بر آنکه برای هر ذره نیروی مجازی $\mathbf{F}_f = -m\mathbf{A}$ را در نظر بگیریم. \mathbf{F}_f از نیروی مربوط به میدان گرانشی یکنواخت $\mathbf{g} = -\mathbf{A}$ قابل تمیز نیست. هم نیروی گرانشی و هم نیروی مجازی نیروهایی ثابت و متناسب با جرم‌اند. در یک میدان گرانشی موضعی \mathbf{g} ، ذرهٔ آزادی به جرم m نیروی $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ را تحمل می‌کند. ذرهٔ مشابهی را در یک دستگاه نالخت با شتاب $\mathbf{A} = -\mathbf{g}$ بدون وجود میدان گرانش و یا هرگونه برهم‌کنشی، در نظر بگیرید. نیروی ظاهری مانند قبل $\mathbf{F}_f = -m\mathbf{A} = m\mathbf{g}$ است. آیا هیچ راهی برای تمیز دادن فیزیکی این دو وضعیت وجود دارد؟

اهمیت این سؤال را این بار به وسیلهٔ اینشتین مورد اشاره قرار گرفت که مسئله را با آزمایش ذهنی زیر بیان کرد. (یک آزمایش ذهنی آزمایشی است که به جای عمل کردن باید روی آن فکر کرد.)

شخصی در آسانسوری که به حالت سکون در میدان گرانشی g قرار دارد، سببی را نگه داشته است (شکل‌های ۶-۸). وی سبب را رها می‌کند که با شتاب $a = g$ رو به پایین سقوط می‌کند (شکل ۶-۸ الف). حال همین شخص را در همین آسانسور در نظر بگیرید، ولی این بار آسانسور در فضای تهی با آهنگ $a = g$ رو به بالا شتاب می‌گیرد (شکل ۶-۸ ب). شخص دوباره سبب را رها می‌کند و باز هم



به نظرش می‌آید که سیب با آهنگ g رو به پایین شتاب می‌گیرد.

این نکته در حالتی که آسانسور در میدان گرانشی سقوط آزاد می‌کند حتی آشکارتر است. آسانسور و تمام محتویات آن با آهنگ g شتاب می‌گیرند. اگر شخص سیب را رها کند، سیب معلق خواهد ماند درست مانند اینکه آسانسور در فضای تهی بدون حرکت است. اینشتین دریافت که شتاب رو به پایین آسانسور دقیقاً میدان جاذبهٔ محل را از بین می‌برد. از دیدگاه ناظری در داخل آسانسور هیچ راهی برای تعیین اینکه آسانسور در فضای تهی است و یا اینکه در میدان گرانشی سقوط می‌کند وجود ندارد.

این نظر ظاهراً ساده معروف به اصل هم‌ارزی زمینهٔ نظریهٔ نسبیت عمومی اینشتین و تمام نظرات دیگر دربارهٔ گرانش است. ما اصل هم‌ارزی را به این صورت خلاصه می‌کنیم: هیچ راهی برای تمیز دادن موضعی مابین یک میدان گرانشی یکنواخت g و شتاب یک دستگاه مختصات $A = -g$ وجود ندارد. از این بیان که هیچ راهی برای تمیز دادن موضعی وجود ندارد، منظورمان این است که در داخل دستگاهی به اندازهٔ کافی محدود راهی برای تمیز دادن وجود ندارد. دلیل اینکه اینشتین ناظر خود را در آسانسور قرار داد، نیازی به تعریف چنین دستگاه بسته‌ای بود. برای مثال اگر شما داخل آسانسوری باشید و مشاهده کنید که جسم آزادی به سمت کف آسانسور حرکتی با شتاب a دارد دو گونه توضیح ممکن است ارائه دهید:

۱. میدان گرانشی $g = a$ به سمت پایین وجود دارد و آسانسور در داخل میدان در حال سکون است (یا حرکت یکنواخت دارد).

۲. میدان گرانشی وجود ندارد، ولی آسانسور به سمت بالا با شتاب a در حرکت است. برای تشخیص این دو، باید به خارج از آسانسور نگاه کنید. برای مثال فرض کنید که شما سیبی را می‌بینید که ناگهان از درختی در نزدیکی شما می‌افتد و با شتاب a به پایین سقوط می‌کند. محتملترین

توضیح آن این است که شما و درخت در میدان گرانشی که جهت آن رو به پایین و بزرگی آن $g = a$ است در حال سکون هستید. باینحال قابل تصور است که شما و درخت هر دو در داخل آسانسور بزرگی که با آهنگ a به بالا شتاب دارد در حال سکون باشید.

برای انتخاب یکی از این دو توضیح، باید دورترها را نگاه کنید. اگر مشاهده کنید که شما نسبت به ستارگان ثابت، شتاب رو به بالای a دارید، یا به عبارت دیگر ستارگان با شتاب رو به پایین a به نظر می‌رسند، تنها توضیح ممکن این است که شما در دستگاهی نا لخت هستید و آسانسور شما و درخت در واقع به بالا شتاب دارند. توضیح دیگر، به این نتیجه ناممکن منجر می‌شود که شما در یک میدان گرانشی که به طور یکنواخت در تمام فضا گسترده است در حال سکون هستید. ولی چنین میدان‌هایی وجود ندارند؛ نیروهای حقیقی از برهم‌کنشهای اجسام حقیقی ناشی می‌شوند و برای فواصل به اندازه کافی بزرگ همواره نیروها کاهش می‌یابند. بنابراین فرض وجود یک میدان گرانشی یکنواخت گسترده شده در تمام فضا، بسیار غیر فیزیکی است.

پس، تفاوت میان یک میدان گرانشی و یک دستگاه مختصات شتابدار این است. میدان‌های حقیقی به صورت موضعی هستند و در فواصل بزرگ ضعیف می‌شوند. یک دستگاه مختصات شتابدار، غیر موضعی است؛ شتاب در تمام فضا به طور یکنواخت گسترده می‌شود. فقط برای دستگاه‌های کوچک این دو غیر قابل تمیزند.

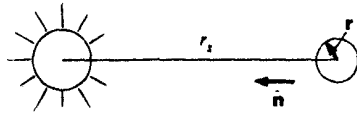
اگرچه این نظرات ممکن است تا اندازه‌ای انتزاعی به نظر آیند، دو مثال بعدی نشان می‌دهند که آنها پیامدهای فیزیکی روشنی دارند.

مثال ۸-۴ نیروی ایجادکننده جزر و مدها: زمین در حال سقوط آزاد به سوی خورشید است و بنا به اصل هم‌ارزی، مشاهده نیروی گرانشی خورشید در دستگاه متصل به زمین باید ناممکن باشد. اما اصل هم‌ارزی فقط برای دستگاه‌های موضعی کاربرد دارد. زمین آنقدر وسیع است که پدیده‌های غیر موضعی عمده‌ای همچون جزر و مدها قابل مشاهده هستند. در این مثال منشأ جزر و مدها را مورد بحث قرار می‌دهیم تا ببینیم منظور از پدیده‌های غیر موضعی چیست.

جزر و مد به دلیل تغییرات ظاهری میدان گرانشی خورشید و ماه در نقاط مختلف زمین به وقوع می‌پیوندد. اگرچه اثر ماه بیشتر از خورشید است، ما به منظور تشریح مطلب، فقط خورشید را در نظر می‌گیریم.

میدان گرانشی خورشید در مرکز زمین چنین است (شکل ۸-۷)

$$\mathbf{G}_s = GM_s \frac{\hat{\mathbf{n}}}{r_s^2}$$



شکل ۷-۸

که در آن M_s جرم خورشید، r_s فاصله بین مرکز خورشید و مرکز زمین، و \hat{n} برداریکه از مرکز زمین به طرف خورشید است. زمین با آهنگ $\mathbf{A} = \mathbf{G}_s$ به طرف خورشید شتاب دارد. اگر $\mathbf{G}(r)$ میدان گرانشی خورشید در نقطه دلخواه \mathbf{r} در روی زمین و مبدأ \mathbf{r} مرکز زمین باشد، آنگاه نیروی وارد بر جرم m در نقطه \mathbf{r} چنین است

$$\mathbf{F} = m\mathbf{G}(r)$$

نیروی ظاهری برای ناظر متصل به زمین چنین است

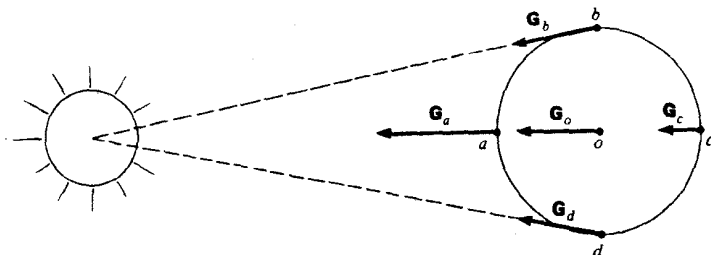
$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} - m\mathbf{A} = m[\mathbf{G}(r) - \mathbf{G}_s]$$

میدان ظاهری عبارت است از

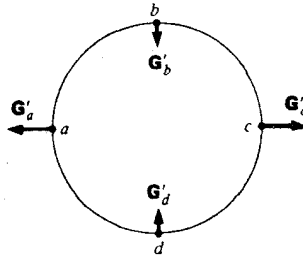
$$\begin{aligned} \mathbf{G}'(r) &= \frac{\mathbf{F}'}{m} \\ &= \mathbf{G}(r) - \mathbf{G}_s \end{aligned}$$

شکل ۸-۸ میدان واقعی $\mathbf{G}(r)$ را در نقاط مختلف سطح زمین نشان می‌دهد. (تغییرات، بیش از حد بزرگ نشان داده شده‌اند). G_a بزرگتر از G_s است زیرا a نسبت به مرکز زمین به خورشید نزدیکتر است. به همین ترتیب G_c کوچکتر از G_s است. بزرگی G_b و G_d تقریباً به بزرگی G_s است، ولی جهت‌های آنها کمی متفاوت‌اند.

میدان ظاهری $\mathbf{G}' = \mathbf{G} - \mathbf{G}_s$ در شکل ۹-۸ دیده می‌شود. اکنون \mathbf{G}' را در هر یک از نقاط



شکل ۸-۸



شکل ۹-۸

ذکرشده محاسبه می‌کنیم.

۱. G'_c و G'_a . فاصله a تا مرکز خورشید $r_s - R_e$ است که در آن شعاع زمین است. بزرگی میدان خورشید در نقطه a چنین است

$$G_a = \frac{GM_s}{(r_s - R_e)^2}$$

G_a موازی G است. بزرگی میدان ظاهری در a عبارت است از

$$\begin{aligned} G'_a &= G_a - G \\ &= \frac{GM_s}{(r_s - R_e)^2} - \frac{GM_s}{r_s^2} \\ &= \frac{GM_s}{r_s^2} \left[\frac{1}{\left[1 - (R_e/r_s)\right]^2} - 1 \right] \end{aligned}$$

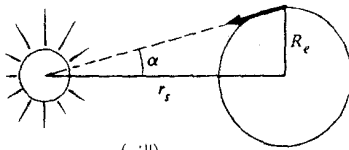
چون $1 \ll 4.3 \times 10^{-5} = 1.5 \times 10^2 \text{ km} / 6.4 \times 10^3 \text{ km} = R_e/r_s$ است، داریم

$$\begin{aligned} G'_a &= G \cdot \left[\left(1 - \frac{R_e}{r_s}\right)^{-2} - 1 \right] \\ &= G \cdot \left[1 + 2\frac{R_e}{r_s} + \dots - 1 \right] \\ &= 2G \cdot \frac{R_e}{r_s} \end{aligned}$$

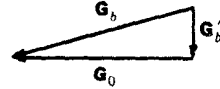
که در اینجا از جملات مرتبه $(R_e/r_s)^2$ و بالاتر صرف نظر کرده‌ایم.

تحلیل برای نقطه c مشابه است، بجز اینکه فاصله خورشید به جای $r_s - R_e$ برابر $r_s + R_e$ است.

خواهیم داشت



(الف)



(ب)

شکل ۸-۱۰

$$G'_c = -2G_0 \frac{R_e}{r_s}$$

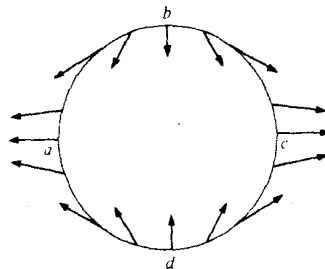
توجه کنید که G'_c و G'_a در جهت شعاعی و به طرف خارج زمین هستند.

۲. G'_d و G'_b . نقاط b و d با تقریب بسیار خوبی، به فاصله‌ای یکسان و به همان فاصله مرکز زمین از خورشید قرار دارند (شکل ۸-۱۰ الف). اما G_b موازی با G_0 نیست. زاویه بین آنها برابر (رادیان) $\alpha \approx R_e/r_s = 4.3 \times 10^{-5}$ است. با این تقریب، داریم

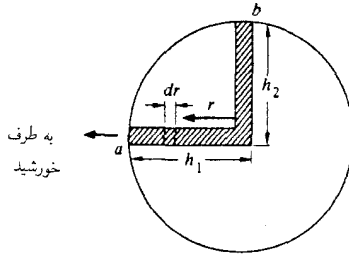
$$\begin{aligned} G'_b &= G_0 \alpha \\ &= G_0 \frac{R_e}{r_s} \end{aligned}$$

به واسطه تقارن G'_d برابر با G'_b و در جهت مخالف با آن است. جهت‌های G'_d و G'_b هر دو به سوی مرکز زمین‌اند (شکل ۸-۱۰ ب).

شکل ۸-۱۱، $G'(r)$ را در نقاط مختلف سطح زمین نشان می‌دهد. این شکل نقطه شروع تحلیل جزرو مد است. نیروهای وارد در نقاط a و c باعث بالا آمدن اقیانوسها می‌شوند، و در b و d باعث پایین رفتن آنها می‌شوند. اگر زمین به طور یکنواخت از آب پوشیده بود، مؤلفه‌های مماسی نیرو باعث لغزیدن دو برآمدگی جزرو مدی دور کره زمین همراه با خورشید می‌شد. این تصویر، بالا و پایین رفتن روزانه جزرو مد را توضیح می‌دهد، ولی حرکت‌های واقعی به طریق پیچیده‌ای به حساسیت اقیانوسها در



شکل ۸-۱۱



شکل ۸-۱۲

مقابل چرخش زمین، و عارضه‌های توپوگرافی محلی بستگی دارد.

می‌توانیم بزرگی اثرات جزرومدی را، آنطور که مثال زیر نشان می‌دهد، به آسانی برآورد کنیم. ■

مثال ۸-۵ ارتفاع تعادل در جزرومد: استدلال زیر براساس مدلی است که به وسیله نیوتون طرح شده است. فرض کنیم دو چاه پراز آب از سطح زمین تا مرکز آن کشیده شده است و در آنجا به هم می‌پیوندند. یکی در امتداد زمین-خورشید و دیگری عمود بر آن است. برای ایجاد تعادل، فشار در ته دو چاه، باید یکسان باشد (شکل ۸-۱۲).

فشار مربوط به یک ستون از آب به ارتفاع dr برابر $\rho g(r) dr$ است که در آن چگالی ρ و $g(r)$ میدان گرانشی مؤثر در r است. شرط تعادل عبارت است از

$$\int_0^{h_1} \rho g_1(r) dr = \int_0^{h_2} \rho g_2(r) dr$$

h_1 و h_2 فاصله مرکز زمین تا سطح ستون آب است. اگر فرض کنیم که آب غیر قابل تراکم است، به طوری که ρ ثابت می‌ماند، آنگاه شرط تعادل چنین می‌شود

$$\int_0^{h_1} g_1(r) dr = \int_0^{h_2} g_2(r) dr$$

می‌خواهیم اختلاف ارتفاع جزرومد $\Delta h_s = h_1 - h_2$ ناشی از خورشید را تعیین کنیم. فرض می‌کنیم زمین کروی است و از اثرات مربوط به دوران آن صرف‌نظر می‌کنیم.

میدان مؤثر به سوی مرکز زمین و در راستای ستون ۱ برابر $G'_1(r) = g(r) - g_1(r)$ است، که در آن $g(r)$ میدان گرانشی زمین و $G'_1(r)$ میدان مؤثر خورشید در راستای ستون ۱ است. (علامت منفی نشان می‌دهد که $G'_1(r)$ به طور شعاعی به خارج ممتد است.) در مثال گذشته به رابطه $G'_1(R_e) = G'_2 = 2GM_s R_e / r_s^2$ رسیدیم. میدان مؤثر در امتداد ستون ۱ با جایگزین کردن r به جای R_e به دست می‌آید. بنابراین داریم

$$G'_1(r) = \frac{2GM_s r}{r_s^2}$$

$$= 2Cr$$

که در آن $C = GM_s/r_s^2$ است.

با ترکیب اینها به دست می‌آوریم

$$g_1(r) = G(r) - 2Cr$$

به همین ترتیب به دست می‌آوریم

$$g_2(r) = g(r) + G'_2(r)$$

$$= g(r) + Cr$$

شرط تعادل چنین است

$$\int_{h_1}^{h_2} [g(r) - 2Cr] dr = \int_{h_1}^{h_2} [g(r) + Cr] dr$$

با مرتب کردن مجدد جملات داریم

$$\int_{h_1}^{h_2} g(r) dr - \int_{h_1}^{h_2} g(r) dr = \int_{h_1}^{h_2} 2Cr dr + \int_{h_1}^{h_2} Cr dr$$

می‌توانیم دو انتگرال سمت چپ را با هم جمع کنیم که نتیجه $\int_{h_1}^{h_2} g(r) dr$ است. از آنجا که h_1 و h_2 نزدیک به شعاع زمین اند، $g(r)$ می‌تواند در انتگرال به عنوان یک ثابت و برابر g ($g(R_e) = g$)، یعنی شتاب حاصل از گرانش در سطح زمین، در نظر گرفته شود. انتگرالهای سمت چپ به صورت $g(h_1 - h_2) = g\Delta h_s$ درمی‌آیند. انتگرالهای سمت راست با در نظر گرفتن $h_1 \approx h_2 \approx R_e$ می‌توانند جمع شوند که حاصل آنها برابر $\int_{h_1}^{h_2} 3Cr dr = \frac{3}{2}CR_e^2$ می‌شود. نتیجه نهایی چنین است

$$g\Delta h_s = \frac{3}{2}CR_e^2$$

با استفاده از برابریهای $C = GM_s/r_s^2$ و $g = GM_e/R_e^2$ به این نتیجه می‌رسیم

$$\Delta h_s = \frac{3}{2} \frac{M_s}{M_e} \left(\frac{R_e}{r_s} \right)^2 R_e$$

$$M_s = 1,99 \times 10^{33} \text{g} \quad r_s = 1,49 \times 10^{12} \text{cm}$$

$$M_e = 5,98 \times 10^{27} \text{g} \quad R_e = 6,37 \times 10^8 \text{cm}$$

بدست می‌آوریم

$$\Delta h_s = 24,0^\circ \text{cm}$$

استدلال‌های مشابه برای ما چنین بدست می‌دهد

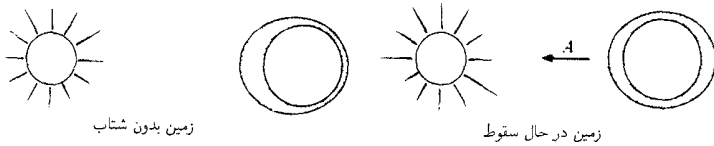
$$\Delta h_m = \frac{3}{2} \frac{M_m}{M_e} \left(\frac{R_e}{r_m} \right)^2 R_e$$

با جایگذاری $M_m = 7,34 \times 10^{25} \text{g}$ و $r_m = 3,84 \times 10^{10} \text{cm}$ به دست می‌آوریم $\Delta h_m = 53,5 \text{cm}$. با وجود اینکه میدان گرانشی خورشید در زمین تقریباً 2° برابر قویتر از میدان ماه است، می‌بینیم که تأثیر ماه تقریباً دو برابر بزرگتر از تأثیر خورشید است. دلیل آن این است که نیروی جزرومدی بستگی به گرادیان میدان گرانشی دارد. ماه آنقدر نزدیک است که میدان آن در زمین به طور قابل ملاحظه‌ای تغییر می‌کند، در حالی که میدان خورشید که در فاصله دورتر قرار دارد نسبتاً ثابت‌تر است.

قویترین جزرومد که مهکشند نامیده می‌شود در زمانی که ماه به صورت هلال یا بدر کامل است اتفاق می‌افتد و این هنگامی است که ماه و خورشید با هم عمل می‌کنند. در فاصله بین آنها، در ترتیبات ماه، ضعیفترین جزرومد که کهکشند نامیده می‌شود اتفاق می‌افتد. نسبت نیروهای کشندی این دو حالت (نسبت نیروی مهکشند به کهکشند) عبارت است از

$$\frac{\Delta h_{\text{sp}}}{\Delta h_{\text{ne}}} = \frac{\Delta h_m + \Delta h_s}{\Delta h_m - \Delta h_s} \approx 3$$

جزرومدها شواهد قانع‌کننده‌ای بر سقوط آزاد زمین به سمت خورشیدند. اگر زمین به وسیله خورشید جذب می‌شد ولی نه به حالت سقوط آزاد، در آن صورت فقط یک جزرومد وجود می‌داشت، در حالی که شکل‌های ۸-۱۳ نشان می‌دهند سقوط آزاد باعث دو جزرومد در شبانه‌روز می‌شود. این مطلب که می‌توانیم میدان گرانشی خورشید را از روی جسمی در حال سقوط آزاد درک کنیم، اصل هم‌ارزی را نقض نمی‌کند. ارتفاع جزرومد به نسبت شعاع زمین به فاصله از خورشید، R_e/r_s بستگی دارد. اما برای اینکه دستگاهی نسبت به میدان گرانشی موضعی باشد، باید تغییرات میدان ابعاد دستگاه قابل اغماض باشد. اگر R_e در مقایسه با r_s قابل اغماض بود، زمین را می‌شد یک دستگاه موضعی دانست، ولی در آن صورت جزرومدی وجود نمی‌داشت. بنابراین، جزرومد نمایانگر این مطلب است که زمین بیش از آن بزرگ است که یک دستگاه موضعی در میدان خورشید تلقی شود. ■



شکل ۸-۱۳

تحقیقات تجربی متعددی در مورد اصل هم‌ارزی انجام گرفته است که با وجود سادگی آشکار آن نتایج بسیاری از آن حاصل شده است. برای مثال، اصل هم‌ارزی اقتضا می‌کند که نیروی گرانشی دقیقاً با جرم لختی متناسب باشد. به عبارت دیگر نسبت جرم گرانشی به جرم لختی برای تمام مواد باید یکسان باشد. در اینجا جرم گرانشی جرمی است که در معادلهٔ نیروی گرانش دخالت دارد و جرم لختی جرمی است که در قانون دوم نیوتون ظاهر می‌شود. بنابراین، اگر جسمی با جرم گرانشی $M_{\text{گرانشی}}$ و جرم لختی $M_{\text{لختی}}$ با جسمی به جرم گرانشی M_0 برهم‌کنش داشته باشد، داریم

$$\mathbf{F} = -\frac{GM_0 M_{\text{گرانشی}}}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

از آنجا که شتاب برابر $\mathbf{F}/M_{\text{لختی}}$ است، به دست می‌آید

$$\mathbf{a} = -\frac{GM_0}{r^2} \left(\frac{M_{\text{گرانشی}}}{M_{\text{لختی}}} \right) \hat{\mathbf{r}} \quad (۴-۸)$$

اصل هم‌ارزی مستلزم این است که $M_{\text{گرانشی}}/M_{\text{لختی}}$ برای تمام اجسام یکسان باشد، زیرا در غیر این صورت تشخیص موضعی مابین میدان گرانشی و شتاب، امکانپذیر می‌شود. به عنوان نمونه، فرض کنید که برای جسم A ، نسبت $M_{\text{گرانشی}}/M_{\text{لختی}}$ دو برابر بزرگتر از آن جسم B است. اگر هر دو جسم را در آسانسور اینشتین رها کنیم و آنها با شتاب یکسانی سقوط کنند، تنها نتیجه‌ای که می‌توان گرفت این است که آسانسور واقعاً به بالا شتاب دارد. از طرف دیگر اگر A با شتابی دو برابر شتاب B سقوط کند، می‌فهمیم که شتاب باید مربوط به میدان گرانشی باشد. در تضاد با اصل هم‌ارزی، شتاب رو به بالای آسانسور از میدان گرانشی رو به پایین قابل تشخیص خواهد بود.

نسبت $M_{\text{گرانشی}}/M_{\text{لختی}}$ در قانون گرانشی نیوتون برابر ۱ گرفته شده است. هر انتخاب دیگری در این نسبت در مقادیر مختلف G منعکس خواهد شد، زیرا به طور تجربی تنها نیاز این است که $G(M_{\text{گرانشی}}/M_{\text{لختی}}) = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ باشد.

نیوتون، هم‌ارز بودن جرمهای لختی و گرانشی را با مطالعهٔ زمان تناوب یک آونگ با گوله‌های قابل تعویض، مورد بررسی قرار داد. معادلهٔ حرکت گوله به تقریب زاویهٔ کوچک چنین است

$$M_{\text{لختی}} \ddot{\theta} + M_{\text{گرنشی}} g \theta = 0$$

زمان تناوب آونگ عبارت است از

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \sqrt{\frac{M_{\text{لختی}}}{M_{\text{گرنشی}}}} \end{aligned}$$

آزمایش نیوتون مبتنی بر مطالعه تغییرات T در استفاده از گلوله‌هایی با ترکیبهای متفاوت بود. ولی او تغییری کشف نکرد، و از برآورد حساسیت روش نتیجه گرفت که برای مواد عادی، $M_{\text{لختی}}/M_{\text{گرنشی}}$ تا حد یک قسمت در هزار ثابت است.

معتبرترین دلیل برای اصل هم‌ارزی از آزمایشی حاصل می‌شود که به وسیله فیزیکدان مجارستانی بارون رولاند ون اتووش در ابتدای قرن حاضر ترتیب داده شد. (آزمایش در ۱۹۰۸ انجام شده بود ولی نتایج تا سال ۱۹۲۲، سه سال پس از مرگ ون اتووش چاپ نشد.) روش و تکنیک آزمایش ون اتووش به وسیله دیک و همکارانش در دانشگاه پرینستون اصلاح شد. این کار در سال ۱۹۶۳ تکمیل شد، و ما اکنون به شرح مختصر آن خواهیم پرداخت.^۱

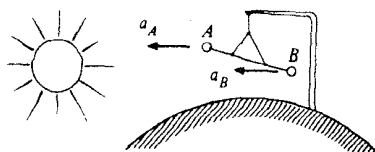
یک ترازوی پیچشی مرکب از دو جرم A و B با جنسهای متفاوت را در دو سر میله‌ای که از رشته نازکی آویخته است، در نظر بگیرید. جرمها به وسیله زمین و همچنین خورشید جذب می‌شوند. نیروی گرانشی مربوط به زمین در راستای قائم است و باعث دوران ترازو نمی‌شود. ولی همچنانکه نشان خواهیم داد، جاذبه خورشید در صورت نقض اصل هم‌ارزی، باعث دوران می‌شود.

فرض کنید خورشید، همچنانکه شکل ۸-۱۴ نشان می‌دهد در سطح افق است و میله افقی، عمود بر محور خورشید-زمین است. از روی معادله ۸-۱۴ شتابی که خورشید به این جرمها می‌دهد عبارت است از

$$\begin{aligned} a_A &= \frac{GM_s}{r_s^2} \left[\frac{M_{\text{گرنشی}}(A)}{M_{\text{لختی}}(A)} \right] \\ a_B &= \frac{GM_s}{r_s^2} \left[\frac{M_{\text{گرنشی}}(B)}{M_{\text{لختی}}(B)} \right] \end{aligned}$$

که در آن M_s جرم گرانشی خورشید، و r_s فاصله بین خورشید و زمین است. شتاب جرمها در دستگاه مختصاتی متصل به زمین عبارت‌اند از

۱. گزارشی از این آزمایش در مقاله‌ای که دیک در مجله ساینتیفیک امریکن، دسامبر ۱۹۶۱، ۲۰۵، ۸۴، نوشته آمده است.



شکل ۸-۱۴

$$a'_A = a_A - a_0$$

$$a'_B = a_B - a_0$$

که در آن a_0 شتاب زمین به سوی خورشید است. (شتاب مربوط به دوران زمین هیچ نقشی ندارد و از آن صرف نظر می‌کنیم.)

اگر اصل هم‌ارزی حاکم باشد، $a'_A = a'_B$ است و میله هیچ تمایلی به دوران حول رشته نخواهد داشت. اما اگر دو جرم A و B دارای نسبت‌های جرم گرانشی به لختی متفاوت باشند، آنگاه یکی بیشتر از دیگری شتاب خواهد گرفت. ترازو تا وقتی که گشتاور بازدارنده رشته نگهدارنده آن را به سکون درآورد، دوران خواهد کرد. همچنانکه زمین دوران می‌کند، جهت ظاهری خورشید تغییر می‌کند، وضعیت تعادل ترازو با دوره تناوب ۲۴ ساعت حرکت می‌کند.

انحرافی که با تغییر ۱ قسمت در 10^{11} قسمت از نسبت جرم گرانشی به لختی ایجاد می‌شود، به وسیله دستگاه دیک قابل تشخیص بود، ولی تا این دقت هم هیچ اثری پیدا نشد.

از اصل هم‌ارزی عموماً به عنوان یک قانون بنیادی فیزیک یاد می‌شود. ما از آن برای بحث در مورد نسبت جرم گرانشی به جرم لختی استفاده کردیم. جالبتر اینکه با استفاده از آن می‌توان نشان داد که ساعتها در میدانهای گرانشی مختلف با آهنگهای متفاوتی کار می‌کنند. استدلال ساده‌ای که نشان می‌دهد چگونه اصل هم‌ارزی ما را مجبور می‌کند تا تصویر کلاسیک زمان را کنار بگذاریم در یادداشت ۸-۱ آمده است.

۸-۵ فیزیک در دستگاه مختصات دوار

تبدیل از دستگاه مختصات لخت به دستگاه مختصات دوار اساساً با تبدیل به دستگاه مختصات انتقالی فرق دارد. دستگاه مختصاتی که به طور یکنواخت نسبت به دستگاه مختصات لخت حرکت می‌کند، خودش نیز یک دستگاه لخت است؛ تبدیل مختصات قوانین حرکت را تغییر نمی‌دهد. برعکس، یک دستگاه مختصات دوار یکنواخت ذاتاً دستگاه نالخت است. حرکت دورانی حرکتی شتابدار است و هنگامی که برای یک دستگاه مختصات دوار مطرح شود قوانین فیزیکی برای آن

دستگاه همیشه نیاز به نیروهای مجازی پیدا می‌کنند. نیروهای مجازی شکل ساده‌ی میدان یکنواخت گرانشی، همانند دستگاه با شتاب ثابت را ندارند و شامل چندین جمله‌اند که یکی از آنها بستگی به سرعت دارد. اما با وجود این پیچیدگیها دستگاه مختصات دوار می‌تواند خیلی مفید باشد. در حالت‌های بخصوصی نیروهای مجازی شکل معادلات حرکت را واقعاً ساده می‌کنند. در حالت‌های دیگری به جای اینکه حرکت را در مختصات لخت بررسی کنیم، طبیعیت خواهد بود که نیروهای مجازی را به کارگیریم. یک مثال خوب، مطالعه فیزیکی جریان هوا در سطح زمین است. توضیح حرکت دورانی هوا برحسب نیروهای مجازی ساده‌تر است تا اینکه دستگاه مختصات لختی را مورد استفاده قرار دهیم که به نوبه خود باید به دستگاه مختصاتی روی زمین در حال دوران مربوط شود.

اگر شتاب ذره‌ای به جرم m نسبت به دستگاه مختصات لخت a و نسبت به دستگاه مختصات دوار $a_{\text{دوار}}$ باشد، معادله حرکت آن در دستگاه لخت چنین است

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

می‌خواهیم معادله حرکت را در دستگاه دوار به صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{F}_{\text{دوار}} = m\mathbf{a}_{\text{دوار}}$$

اگر رابطه شتابهای ذره m در دو دستگاه به صورت زیر باشد

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{دوار}} + \mathbf{A}$$

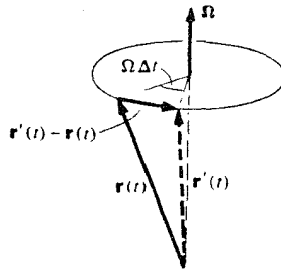
که در آن \mathbf{A} شتاب نسبی است، آنگاه داریم

$$\mathbf{F}_{\text{دوار}} = m(\mathbf{a} - \mathbf{A})$$

$$= \mathbf{F} + \mathbf{F}_f$$

که در آن $\mathbf{F}_f = -m\mathbf{A}$ است. تا اینجا بحث همانند بخش ۸-۳ است. حال باید \mathbf{A} را در یک دستگاه دوار پیدا کرد.

یک راه محاسبه \mathbf{A} این است که رابطه تبدیل بین مختصات لخت و دوار را یافته و از آن دیفرانسیل بگیریم. اما روشی خیلی ساده‌تر و کلی‌تر وجود دارد و آن قاعده تبدیل مشتق زمانی بردارها در دستگاه‌های دوار و لخت به همدیگر است. برای به دست آوردن این روابط، باید اکرادن رابطه بین سرعت اندازه‌گیری شده



شکل ۱۷-۸

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

وضعیت برای ناظری که در دستگاه مختصات دوار قرار دارد متفاوت است. اگرچه بردار مکان نهایی $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ برای او نیز یکسان است ولی او در محاسبه جابه جایی به خاطر می آورد که بردار مکان اولیه در دستگاه مختصات خودش $\mathbf{r}'(t)$ در صفحه $x'z'$ بوده است. جابه جایی که او نسبت به دستگاه مختصات خود اندازه می گیرد برابر $\Delta \mathbf{r}' = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}'(t)$ است (شکل ۱۶-۸ ب). اما مطابق شکل ۱۶-۸ ج) صفحه $x'z'$ از مکان قبلی دوران یافته و همانطور که در شکل ۱۷-۸ می بینیم $\Delta \mathbf{r}$ و $\Delta \mathbf{r}'$ یکسان نیستند

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r}' + \mathbf{r}'(t) - \mathbf{r}(t)$$

در نتیجه سرعتها، در دو دستگاه با هم فرق دارند.

چون اختلاف $\mathbf{r}'(t)$ و $\mathbf{r}(t)$ فقط در یک دوران محض است، می توان نتایج بخش ۷-۲ را به کار برد و نوشت

$$\mathbf{r}'(t) - \mathbf{r}(t) = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \Delta t$$

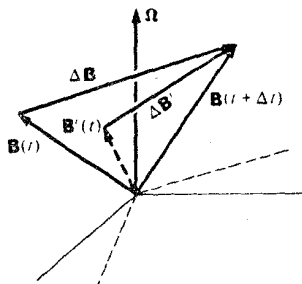
و یا

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{r}'}{\Delta t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$

اگر Δt را به سمت صفر میل دهیم خواهیم داشت

$$\mathbf{v}_{\text{لختی}} = \mathbf{v}_{\text{دوار}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (۵-۸)$$

باید یاد آور شد که معادله ۵-۸ یک رابطه کلی برداری است و اثبات آن مستقل از آرایش ویژه محورهایی است که برای به دست آوردن آن در نظر گرفتیم. راه دیگر نوشتن معادله ۵-۸ چنین است



شکل ۱۸-۸

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{\text{لختی}} = \left(\frac{dr}{dt}\right)_{\text{دوار}} + \Omega \times r \quad (۶-۸)$$

چون استدلال ما فقط خواص هندسی r را در برمی‌گیرد، می‌توان فوراً معادله ۶-۸ را به هر برداری مانند B تعمیم داد. همانطور که شکل ۱۸-۸ نشان می‌دهد

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{\text{لختی}} = \left(\frac{dB}{dt}\right)_{\text{دوار}} + \Omega \times B \quad (۷-۸)$$

هنگام به‌کار بردن معادله ۷-۸ باید به‌خاطر داشت که در هر لحظه B در هر دو دستگاه یکسان است و فقط آهنگ زمانی تغییرات آن فرق می‌کند. توجه شود که یادداشت ۲-۸ راه معادل دیگری را برای پیدا کردن معادله ۷-۸ ارائه می‌دهد.

شتاب نسبت به دستگاه مختصات دوار

می‌توان با به‌کار بردن معادله ۷-۸ شتاب در دستگاه دوار $(dv_{\text{دوار}}/dt)$ را به شتاب در دستگاه لخت $(dv_{\text{لختی}}/dt)$ ربط داد. با به‌کار بردن معادله ۷-۸ برای $v_{\text{لختی}}$ داریم

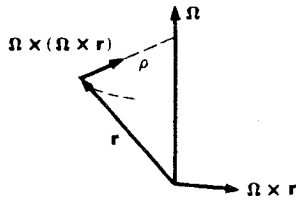
$$a_{\text{لختی}} = \left(\frac{dv_{\text{لختی}}}{dt}\right)_{\text{لختی}} = \left(\frac{dv_{\text{لختی}}}{dt}\right)_{\text{دوار}} + \Omega \times v_{\text{لختی}}$$

با استفاده از

$$v_{\text{لختی}} = v_{\text{دوار}} + \Omega \times r$$

داریم

$$a_{\text{لختی}} = \left[\frac{d}{dt}(v_{\text{دوار}} + \Omega \times r)\right]_{\text{دوار}} + \Omega \times v_{\text{دوار}} + \Omega \times (\Omega \times r)$$



شکل ۸-۱۹

فرض می‌کنیم که Ω ثابت است، زیرا این فرض عموماً در عمل مورد نیاز است. از این رو داریم

$$\mathbf{a}_{\text{لختی}} = \mathbf{a}_{\text{دوار}} + \Omega \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{\text{دوار}} + \Omega \times \mathbf{v}_{\text{دوار}} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})$$

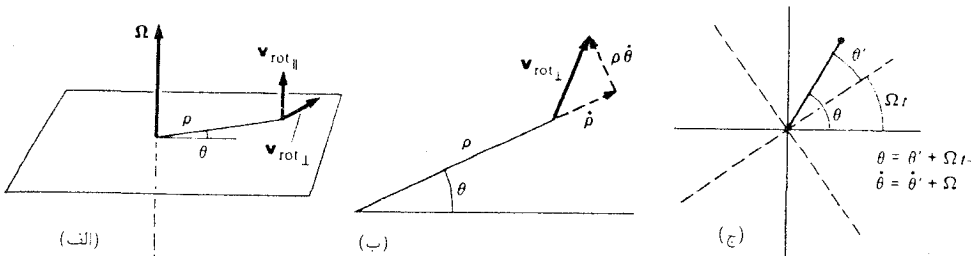
یا

$$\mathbf{a}_{\text{لختی}} = \mathbf{a}_{\text{دوار}} + 2\Omega \times \mathbf{v}_{\text{دوار}} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) \quad (8-19)$$

حال اجزای مختلف $\mathbf{a}_{\text{لختی}}$ را در معادله ۸-۱۹ مورد بررسی قرار می‌دهیم. جمله $\mathbf{a}_{\text{دوار}}$ به روشنی شتاب اندازه‌گیری شده در دستگاه مختصات دوار را نشان می‌دهد؛ چیز غامضی نیست. مثلاً اگر شتاب یک اتومبیل یا هواپیما را در دستگاه مختصات متصل به زمین که دور خود می‌چرخد اندازه بگیریم، شتاب $\mathbf{a}_{\text{دوار}}$ را اندازه گرفته‌ایم.

برای یافتن منشأ جمله $\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})$ ، ابتدا توجه کنید که $\Omega \times \mathbf{r}$ بر صفحه Ω و \mathbf{r} عمود و بزرگی آن برابر $\Omega \rho$ است (شکل ۸-۱۹). که در اینجا ρ فاصله عمودی انتهای \mathbf{r} تا محور دوران است. از این رو امتداد $\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})$ در جهت شعاعی روبه داخل و به طرف محور دوران و بزرگی آن برابر $\Omega^2 \rho$ خواهد بود (شکل‌های ۸-۲۰) که همان شتاب مرکزگراست. منشأ این بردار از آنجاست که هر نقطه ساکن در دستگاه دوار، در واقع نقطه متحرکی است که در فضای لخت روی مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند.

جمله $2\Omega \times \mathbf{v}_{\text{دوار}}$ عبارت کلی برداری شتاب کوریولیس، سه بعدی است. دوازده $\mathbf{v}_{\text{دوار}}$ مطابق



شکل ۸-۲۰

شکل ۸-۲۰ (الف) به دو مؤلفه $\mathbf{v}_{\text{دوار}\parallel}$ و $\mathbf{v}_{\text{دوار}\perp}$ به ترتیب موازی و عمود بر Ω تجزیه شود، فقط $\mathbf{v}_{\text{دوار}\perp}$ در جمله $\mathbf{v}_{\text{دوار}} \times \Omega$ مؤثر خواهد بود زیرا شتاب کوریولیس بر Ω عمود است. حال منشأ آن را بیان می‌کنیم.

مؤلفه شعاعی $\mathbf{v}_{\text{دوار}\perp}$ یعنی ρ شتابی برابر ρ در جهت مماس بر لختی \mathbf{a} ایجاد می‌کند. آشکار است که این همان مقداری است که برای جمله کوریولیس در بخش ۱-۹ برای حرکتی با سرعت زاویه‌ای Ω و سرعت شعاعی ρ در فضای لخت پیدا کردیم. مؤلفه مماسی $\mathbf{v}_{\text{دوار}\perp}$ یعنی $\rho \theta'$ شتاب $\rho \theta''$ را به سوی محور دوران ایجاد می‌کند (شکل ۸-۲۰ ب). برای فهمیدن منشأ این جمله توجه کنید که در دستگاه لخت سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای برابر $\Omega + \dot{\theta} = \dot{\theta}'$ است و شتاب مرکزگرا در جمله لختی \mathbf{a} عبارت است

$$\begin{aligned} \rho \dot{\theta}^2 &= \rho(\dot{\theta}' + \Omega)^2 \\ &= \rho \dot{\theta}'^2 + 2\Omega\rho \dot{\theta}' + \rho\Omega^2 \end{aligned}$$

سه جمله طرف راست، متناظر با سه جمله‌ای است که در طرف راست معادله ۸-۸ داشتیم. $\rho \dot{\theta}'^2$ قسمتی از دوار \mathbf{a} است و همانطور که نشان دادیم $\dot{\theta}'$ از دوار $\mathbf{v}_{\text{دوار}} \times \Omega$ نتیجه می‌شود و $\rho\Omega^2$ نیز از $(\Omega \times \mathbf{r}) \times \Omega$ حاصل می‌شود.

نیروی ظاهری در دستگاه مختصات دوار
از معادله ۸-۸ داریم

$$\mathbf{a}_{\text{دوار}} = \mathbf{a}_{\text{لختی}} - 2\Omega \times \mathbf{v}_{\text{دوار}} - \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})$$

نیرویی که در دستگاه دوار مشاهده می‌شود چنین است

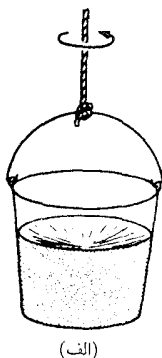
$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{دوار}} &= m\mathbf{a}_{\text{دوار}} = m\mathbf{a}_{\text{لختی}} - m[2\Omega \times \mathbf{v}_{\text{دوار}} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})] \\ &= \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{مجازی}} \end{aligned}$$

در اینجا نیروی مجازی چنین است

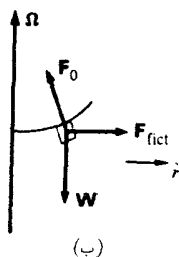
$$\mathbf{F}_{\text{مجازی}} = -2m\Omega \times \mathbf{v}_{\text{دوار}} - m\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})$$

جمله اول طرف راست نیروی کوریولیس نامیده می‌شود و جمله دوم، که به سمت خارج از محور دوران متوجه است نیروی مرکزگرا خوانده می‌شود.

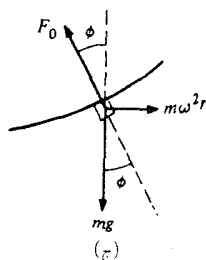
نیروهای کوریولیس و مرکزگرای غیرفیزیکی هستند که از سینماتیک ناشی می‌شوند و مربوط به



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۸-۲۱

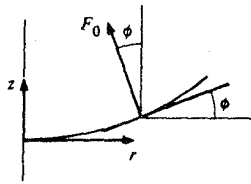
برهم‌کشهای فیزیکی هستند. برای مثال، نیروی مرکزگریز در واقع با ρ افزایش می‌یابد، در حالی که نیروهای حقیقی همواره با افزایش فاصله کاهش می‌یابند. با وجود این نیروهای کوریولیس و مرکزگریز برای ناظر چارچوب دوار کاملاً حقیقی به نظر می‌آیند. هنگامی که اتومبیلی را با سرعت بیش از حد روی مسیری منحنی می‌رانیم به سمت خارج کشیده می‌شود، درست مانند اینکه به وسیلهٔ نیروی مرکزگریز به آن فشار آمده باشد. اما از دیدگاه ناظر چارچوب لخت، آنچه اتفاق افتاده این است که نیروی عرضی اعمال شده از جاده به لاستیکها برای نگه‌داشتن اتومبیل در حال گردش روی جاده کافی نبوده است.

یک تمایل طبیعی برای انسان وجود دارد که حرکت دورانی را با دستگاه دوار توصیف کند. برای مثال، اگر سنگی را به وسیلهٔ ریسمانی بچرخانیم، به طور غریزی می‌گوییم که نیروی مرکزگریز سنگ را به خارج می‌کشد. در دستگاه مختصاتی که همراه با سنگ دوران می‌کند این مطلب صحیح است؛ سنگ ساکن است و نیروی مرکزگریز با کشش ریسمان در توازن است. در دستگاه لخت نیروی مرکزگریز وجود ندارد. سنگ بر اثر نیروی اعمال شده به وسیلهٔ ریسمان به طور شعاعی شتاب دارد. هر دو دستگاه برای تحلیل مسئله مناسب‌اند. اما، نکتهٔ اصلی این است که با استفاده از نیروهای مجازی در چارچوب لخت، دستگاهها را با هم اشتباه نکنیم.

در اینجا چند مثال برای روشن کردن موارد استفاده از مختصات دوار می‌آوریم.

مثال ۸-۶ سطح یک مایع دوار: سطحی محتوی آب با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. سطح آب چه شکلی را اختیار می‌کند (شکل ۸-۲۱ الف)؟

در دستگاه مختصات دوار همراه با آب، مسئلهٔ کاملاً استاتیکی است. نیروی وارد بر حجم کوچکی از آب به جرم m در سطح مایع را در نظر بگیرید (شکلهای ۸-۲۱ ب و ج). برای ایجاد تعادل، جمع نیروهای وارد بر m باید صفر باشد. نیروها عبارت‌اند از نیروی تماس \mathbf{F}_0 ، وزن \mathbf{W} و نیروی مجازی \mathbf{F}_f که شعاعی است.



شکل ۸-۲۲

$$F \cdot \cos \phi - W = 0$$

$$-F \cdot \sin \phi + F_f = 0$$

که در آن $F_f = m\Omega^2 r = m\omega^2 r$ است، زیرا در دستگاه مختصات که همراه با سطل دوران می‌کند، $\Omega = \omega$ است.

حل این معادلات برای ϕ چنین است

$$\phi = \arctan \frac{\omega^2 r}{g}$$

برخلاف جامدات، مایعات نمی‌توانند نیروی استاتیکی مماس بر سطح وارد کنند. بنابراین \mathbf{F} نیروی وارد بر m از طرف مایعات همجوار باید عمود بر سطح باشد. بنابراین شیب سطح در هر نقطه چنین است (شکل ۸-۲۲)

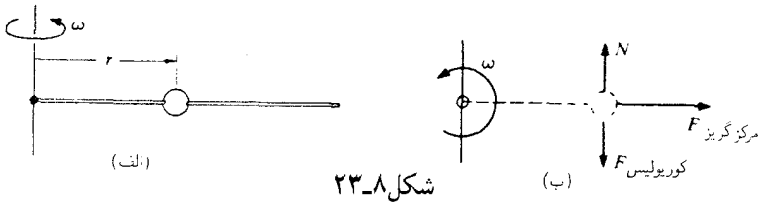
$$\begin{aligned} \frac{dz}{dr} &= \tan \phi \\ &= \frac{\omega^2 r}{g} \end{aligned}$$

برای پیدا کردن معادله سطح $z = f(r)$ ، می‌توانیم از این رابطه انتگرال بگیریم. داریم

$$\begin{aligned} \int dz &= \frac{\omega^2}{g} \int r dr \\ z &= \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} r^2 \end{aligned}$$

■ که در آن $z = 0$ را روی محور و در سطح مایع اختیار کرده‌ایم. این سطح سهمیوار دوار است.

مثال ۷-۸ نیروی کوریولیس: مهره‌ای روی سیم صلبی که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دوران می‌کند مطابق شکل ۸-۲۳ (الف)، بدون اصطکاک می‌لغزد. می‌خواهیم نیروی وارد از سیم به مهره را پیدا کنیم. در دستگاه مختصاتی که همراه با سیم دوران می‌کند، حرکت کاملاً شعاعی است. شکل ۸-۲۳ (ب)،



شکل ۸-۲۳

نمودار نیروها را در دستگاه دوار نشان می‌دهد. نیروی مرکزگریز و کوریولیس F نیروی کوریولیس است. از آنجا که سیم بدون اصطکاک است، نیروی تماسی N عمود بر سیم است (از گرانش صرف نظر می‌کنیم). در دستگاه دوار معادلات حرکت عبارت‌اند از

$$F_{\text{مرکزگریز}} = m\ddot{r}$$

$$N - F_{\text{کوریولیس}} = 0$$

با استفاده از $F_{\text{مرکزگریز}} = m\omega^2 r$ ، معادله اول می‌دهد

$$m\ddot{r} - m\omega^2 r = 0$$

که جواب آن چنین است

$$r = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

که در آن A و B ثابت‌هایی هستند که به شرایط اولیه بستگی دارند.

معادله حرکت مماسی، مبین این حقیقت است که هیچ‌گونه شتاب مماسی در دستگاه دوار وجود ندارد و در نتیجه داریم

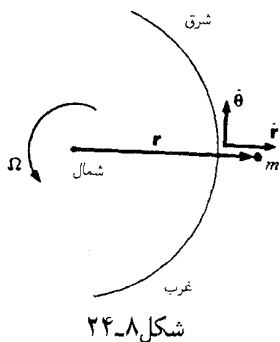
$$N = F_{\text{Cor}} = 2m\dot{r}\omega$$

$$= 2m\omega^2(Ae^{\omega t} - Be^{-\omega t})$$

■ برای تکمیل جواب، باید شرایط اولیه را برای تعیین A و B در دست داشته باشیم.

مثال ۸-۸ انحراف جرم سقوط‌کننده: بر اثر نیروی کوریولیس، جسم سقوط‌کننده روی زمین، به‌طور افقی منحرف می‌شود. برای مثال، جرم رهاشده از بالای یک برج، در شرق خط شاقولی از نقطه رهاشده به زمین می‌افتد. در این مثال انحراف جرم m را که از برجی به ارتفاع h در استوا به پایین انداخته می‌شود، محاسبه خواهیم کرد.

در دستگاه مختصات متصل به زمین r و θ (با جهت مماسی به سمت شرق) نیروی ظاهری دارد



بر m چنین است (شکل ۸-۲۴)

$$\mathbf{F} = -mg\hat{r} - 2m\Omega \times \mathbf{v}_{\text{دوار}} - m\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})$$

$$F_{\theta} = -2m \dot{r} \Omega$$

نیروهای گرانش و مرکزگریز شعاعی هستند، و اگر m از حالت سکون سقوط کند، نیروی کوریولیس در سطح استوا خواهد بود. از این رو حرکت m مقید به سطح استواست و داریم

$$\mathbf{v}_{\text{دوار}} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}$$

با استفاده از روابط $\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) = -\Omega^2 r \hat{r}$ و $\Omega \times \mathbf{v}_{\text{دوار}} = \Omega \dot{r} \hat{\theta} - r\Omega \dot{\theta} \hat{r}$ خواهیم داشت

$$F_r = -mg + 2m\Omega \dot{\theta} r + m\Omega^2 r$$

$$F_{\theta} = -2m \dot{r} \Omega$$

معادله حرکت شعاعی چنین است

$$m \ddot{r} - mr \dot{\theta}^2 = -mg + 2m\Omega \dot{\theta} r + m\Omega^2 r$$

با تقریب بسیار خوب، m به طور قائم سقوط می‌کند و $\Omega \ll \dot{\theta}$ است. بنابراین می‌توانیم جملات $mr \dot{\theta}^2$ و $2m\Omega \dot{\theta} r$ را در مقایسه با $m\Omega^2 r$ حذف کنیم. بنابراین

$$\ddot{r} = -g + \Omega^2 r \quad (1)$$

معادله حرکت مماسی چنین است

$$mr \ddot{\theta} + 2m \dot{r} \dot{\theta} = -2m \dot{r} \Omega$$

با تقریب مشابه $\Omega \ll \theta$ داریم

$$r \ddot{\theta} = -2 \dot{r} \dot{\Omega} \quad (۲)$$

در طی سقوط، r به مقدار اندکی از $R_e + h$ تا R_e تغییر می‌کند که در آن شعاع زمین است و می‌توانیم g را ثابت گرفته و $r \approx R_e$ قرار دهیم. معادلهٔ ۱ چنین می‌شود

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -g + \Omega^2 R_e \\ &= -g' \end{aligned}$$

که در آن $g' = g - \Omega^2 R_e$ شتاب ناشی از نیروی گرانش منهای جملهٔ مرکزگریز است. g' شتاب ظاهری مربوط به گرانش است و چون آن را به طور معمول با g نشان می‌دهند، ما هم از این پس نشانهٔ "پریم" را نخواهیم نوشت. حل معادلهٔ حرکت شعاعی چنین است

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -gt \\ r &= r_0 - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \quad (۳)$$

اگر $\dot{r} = -gt$ را در معادلهٔ حرکت مماسی، معادلهٔ ۲، بگذاریم، داریم

$$r \ddot{\theta} = 2gt\Omega$$

با

$$\ddot{\theta} = \frac{2g\Omega}{R_e}t$$

که در اینجا از $R_e \approx r$ استفاده کرده‌ایم. بنابراین

$$\dot{\theta} = \frac{g\Omega}{R_e}t^2$$

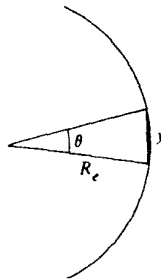
و

$$\theta = \frac{1}{3} \frac{g\Omega}{R_e} t^3 \quad (۴)$$

انحراف افقی m برابر $R_e \theta \approx y$ است (شکل ۸-۲۵) و یا

$$y = \frac{1}{3} g\Omega t^3$$

زمان T لازم برای سقوط از ارتفاع h با رابطهٔ زیر داده می‌شود



شکل ۸-۲۵

$$r - r_e = -h$$

$$= -\frac{1}{3}gT^2$$

به طوری که

$$y = \frac{1}{3}g\Omega \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{2}{3}} \text{ و } T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

برای برجی به ارتفاع ۵۰ m داریم

$$y \approx ۰.۷۷\text{cm}$$

θ مثبت و انحراف به سوی شرق است.

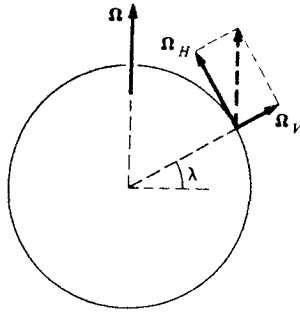
مثال ۸-۹ حرکت روی زمین دوار: یک پدیده جالب توجه در مورد نیروی کوریولیس این است که مسیر مستقیم حرکت در روی یک کره دوار را به حرکت دایره‌ای تبدیل می‌کند. همانطور که در این مثال نشان خواهیم داد، برای یک سرعت مماس بر کره v (نظیر سرعت باد روی کره زمین)، مؤلفه افقی نیروی کوریولیس عمود بر v و بزرگی آن مستقل از جهت v است.

ذره‌ای به جرم m را که با سرعت v در عرض جغرافیایی λ روی سطح یک کره حرکت می‌کند، مطابق شکل ۸-۲۶ در نظر بگیرید. این کره با سرعت زاویه‌ای Ω دوران می‌کند. اگر Ω را به یک مؤلفه عمودی Ω_V و یک مؤلفه افقی Ω_H تجزیه کنیم، نیروی کوریولیس چنین می‌شود

$$\mathbf{F} = -2m\Omega \times \mathbf{v}$$

$$= -2m(\Omega_V \times \mathbf{v} + \Omega_H \times \mathbf{v})$$

Ω_V و \mathbf{v} افقی هستند، به طوری که $\Omega_H \times \mathbf{v}$ قائم است. بنابراین نیروی کوریولیس افقی \mathbf{F}_H منحصرأ



شکل ۲۶-۸

از $\Omega_V \times v$ ناشی می‌شود. Ω_V عمود بر v بوده و $\Omega_V \times v$ دارای بزرگی $v\Omega_V$ است و همان‌گونه که می‌خواستیم ثابت کنیم، مستقل از جهت v است.

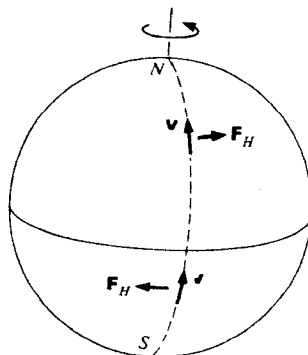
این نتایج را می‌توانیم به شکل روشنتری بنویسیم. اگر \hat{r} بردار یکه عمود بر سطح در عرض جغرافیایی λ باشد (شکل ۲۷-۸)، داریم $\Omega_V = \Omega \sin \lambda \hat{r}$ و

$$\mathbf{F}_H = -2m\Omega \sin \lambda \hat{r} \times v$$

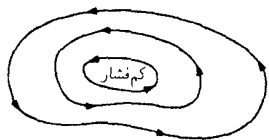
بزرگی F_H چنین است

$$F_H = 2mv\Omega \sin \lambda$$

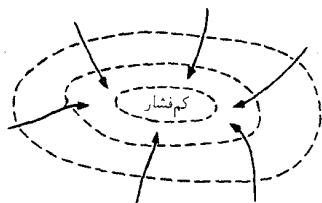
F_H همواره بر v عمود است و در غیاب دیگر نیروهای افقی، در نیمکره شمالی حرکتی دایره‌ای در جهت ساعتگرد و در نیمکره جنوبی در جهت پادساعتگرد ایجاد می‌کند. جریان هوای روی زمین شدیداً تحت تأثیر نیروی کوریولیس است و بدون آن نقشه دایره‌ای پایدار آب و هوا نمی‌توانست شکل بگیرد.



شکل ۲۷-۸



شکل ۸-۲۹



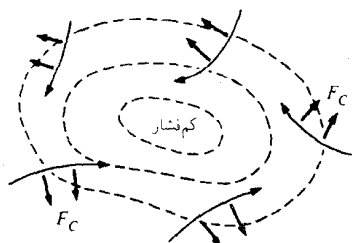
شکل ۸-۲۸

باینحال برای شناخت دینامیک جریانهای جوی، چنانکه در مثال بعدی می بینیم، نیروهای دیگری را باید به حساب آوریم.

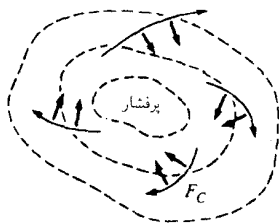
مثال ۸-۱۰: جریانهای جوی: تصور کنید که ناحیه‌ای با فشار کم در جو احتمالاً به دلیل اختلاف دمای هوا، به وجود آید. منحنیهای بسته در شکل ۸-۲۸ خطوط فشار ثابت، یا تک فشار را نشان می دهند. به هر عنصر هوا نیرویی ناشی از گرادیان فشار وارد می شود، و در غیاب نیروهای دیگر باد به داخل می وزد و سریعاً اختلاف فشار را از بین می برد.

اما الگوی باد به طور قابل ملاحظه‌ای توسط نیروی کوریولیس دگرگون می شود. همچنانکه هوا شروع به جریان یافتن به داخل می کند، توسط نیروی کوریولیس به اطراف منحرف می شود که در شکل ۸-۳۰ (الف) نشان داده شده است (شکل برای نیمکره شمالی است). در نتیجه باد در نقطه کم فشار روی منحنیهای تک فشار مطابق شکل ۸-۲۹ در جهت پادساعتگرد و همینطور در ناحیه پرفشار در جهت ساعتگرد در نیمکره شمالی می چرخد (شکل ۸-۳۰ ب). از آنجاکه نیروی کوریولیس اصولاً در نزدیکی استوا برابر صفر است جریانهای هوای چرخنده در آنجا تشکیل نمی شود و هوا در آنجا یکنواخت است.

به منظور تحلیل حرکت، نیروهای وارد بر بسته‌ای از هوا را که حول نقطه کم فشار دوران می کند، در نظر بگیرد. نیروی فشاری وارد بر وجه مجاور تک فشار P_1 برابر $P_1 S$ است که S مساحت وجه داخلی

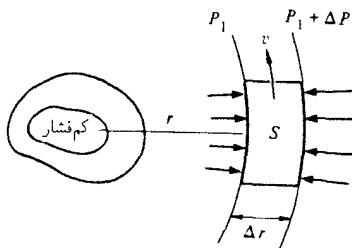


(الف)



(ب)

شکل ۸-۳۰



شکل ۸-۳۱

است که در شکل ۸-۳۱ نشان داده شده است. نیروی وارد بروجه خارجی $(P_1 + \Delta P)S$ است، و نیروی فشاری مؤثر برابر $(\Delta P)S$ و به سمت داخل است. نیروی کوریولیس برابر $2mv\Omega \sin \lambda$ است که در آن m جرم بسته و v سرعت آن است. هوا در جهت پادساعتگرد حول نقطه کم فشار دوران می‌کند، به طوری که نیروی کوریولیس به طرف خارج است. بنابراین معادله حرکت شعاعی برای جریان چرخشی پایدار چنین است

$$\frac{mv^2}{r} = (\Delta P)S - 2mv\Omega \sin \lambda$$

حجم بسته $S \Delta r$ است که Δr فاصله بین منحنیهای هم فشار است و جرم بسته برابر $S \Delta r w$ است که در آن w چگالی هوا و ثابت فرض شده است. با جایگذاری این مقادیر در معادله حرکت و گرفتن حد وقتی $\Delta r \rightarrow 0$ ، نتیجه می‌شود

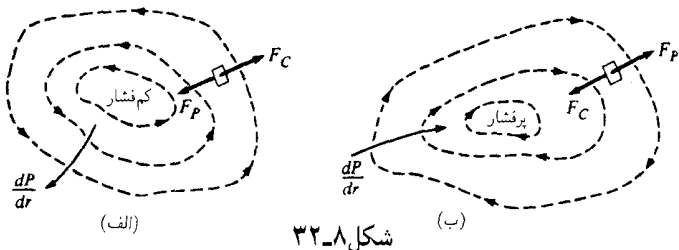
$$\frac{v^2}{r} = \frac{1}{w} \frac{dP}{dr} - 2v\Omega \sin \lambda \quad (1)$$

جرمهای هوا مانند اجسام صلب دوران نمی‌کنند. نزدیک مرکز نقطه کم فشار، آنجا که گرادیان فشار dP/dr بزرگ است، سرعت باد بیشتر است. دور از مرکز، v^2/r کوچک و قابل صرف نظر کردن است. معادله ۱ ایجاب می‌کند که در فواصل دور از مرکز باد، سرعت چنین باشد

$$v = \frac{1}{2\Omega \sin \lambda} \frac{1}{w} \frac{dP}{dr} \quad (2)$$

چگالی هوا در سطح دریا 1.3 kg/m^3 و فشار جو برابر 1.0^5 N/m^2 است. dP/dr را می‌توان با مراجعه به نقشه جریانهای هوا تخمین زد. دروازه ناحیه کم فشار یا پرفشار، یک گرادیان نمونه در حدود ۳ میلی بار در 10^5 کیلومتری یعنی $3 \times 10^3 \text{ N/m}^2$ است، در عرض جغرافیایی 45° معادله ۲ چنین می‌دهد

$$v = 22 \text{ m/s} \\ = 80 \text{ km/h}$$



شکل ۸-۳۲

نزدیک سطح زمین این سرعت به علت اصطکاک با زمین کاهش می‌یابد، ولی در ارتفاعات بالاتر معادله ۲ با دقت خوبی قابل استفاده است.

گردباد، یک جریان هوای شدید و فشرده در سطح پایین است که در آن گردبادان فشار می‌تواند به بزرگی $10 \times 30 \text{ N/m}^2$ باشد. جریانهای گردبادی به اندازه‌ای قوی هستند که از جمله v^2/r در معادله ۱ نمی‌توان صرف‌نظر کرد. با حل معادله ۱ مقدار v را به صورت زیر پیدا می‌کنیم

$$v = \sqrt{(r\Omega \sin \lambda)^2 + \frac{r}{w} \frac{dP}{dr}} - r\Omega \sin \lambda \quad (3)$$

در فاصله 10° کیلومتری از مرکز گردباد در عرض جغرافیایی 20° ، معادله ۳ برای گردبادان فشار $10^{-2} \text{ N/m}^2 \times 30$ سرعت باد را برابر $160 \text{ km/h} \approx 45 \text{ m/s}$ به دست می‌دهد. این نتیجه با مشاهدات جوی توافق دارد. در شعاعهای بیشتر، سرعت باد به دلیل تنزل گردبادان فشار کاهش می‌یابد. مابین ناحیه کم فشار و پرفشار اختلاف جالبی وجود دارد (شکل‌های ۸-۳۲). برای ناحیه کم فشار شکل ۸-۳۲(الف)، نیروی فشاری به داخل و نیروی کوریولیس به خارج است، درحالی‌که برای ناحیه پرفشار شکل ۸-۳۲(ب) جهت نیروها معکوس است. معادله حرکت شعاعی برای چرخش هوا حول ناحیه پرفشار چنین است

$$\frac{v^2}{r} = 2v\Omega \sin \lambda - \frac{1}{w} \left| \frac{dP}{dr} \right| \quad (4)$$

مقدار v از معادله ۴ چنین به دست می‌آید

$$v = r\Omega \sin \lambda - \sqrt{(r\Omega \sin \lambda)^2 - \frac{r}{w} \left| \frac{dP}{dr} \right|} \quad (5)$$

از معادله ۵ می‌بینیم که اگر $r(\Omega \sin \lambda)^2 > |dP/dr|/w$ باشد ناحیه پرفشار تشکیل نمی‌شود؛ نیروی کوریولیس ضعیفتر از آن است که شتاب مرکزگرای لازم را در مقابل نیروی بزرگ فشاری روبه خارج تأمین کند. به این دلیل گردبادهای طوفانی همیشه در سیستمهایی که شامل ناحیه کم فشار است رخ

می‌دهد. نیروی قوی فشاری رو به داخل به حفظ ناحیه کم فشار کمک می‌کند. ■
 آونگ فوکو برجسته‌ترین نمایش نالخت بودن دستگاه زمین را عرضه می‌کند. آونگ به طور ساده گلوله سنگینی است که از سیم بلندی آویخته شده و برای نوسان در هر جهتی آزاد است. همچنانکه آونگ به جلو و عقب نوسان می‌کند، صفحه حرکت به آهستگی حول محور قائم حرکت تقدیمی می‌کند که در عرضهای جغرافیایی میانی برای یک دوران کامل یک روز و نیم طول می‌کشد. حرکت تقدیمی در نتیجه دوران زمین است. صفحه حرکت، میل به ثابت ماندن در فضای لخت دارد درحالی‌که زمین زیر آن دوران می‌کند.

در دهه ۱۸۵۰ فوکو آونگی به طول ۶۷m را از گنبد معبدی در پاریس آویخت. گلوله در هر نوسان حدود یک سانتی‌متر حرکت تقدیمی کرد و برای اولین بار مستقیماً نشان داد که زمین واقعاً می‌چرخد. این آونگ هیجانی شدید در پاریس به وجود آورد.

مثال زیر استفاده از این تحلیل نیروی کوریولیس را برای محاسبه حرکت فوکو از طریق ساده‌ای نشان می‌دهد.

مثال ۸-۱۱ آونگ فوکو: آونگی به جرم m را مطابق شکل ۸-۳۳ در نظر بگیرید که با بسامد $\gamma = \sqrt{g/l}$ در نوسان است و در آن l طول آونگ است. اگر مکان گلوله آونگ را در صفحه افقی با مختصات r و θ توصیف کنیم، آنگاه داریم

$$r = r_0 \sin \gamma t$$

که در آن r_0 دامنه حرکت است. در غیاب نیروی کوریولیس، هیچ‌گونه نیروی مماسی وجود نداشته و θ ثابت است.

نیروی افقی کوریولیس کوریولیس \mathbf{F} چنین است

$$\mathbf{F}_{\text{کوریولیس}} = -2m\Omega \sin \lambda \dot{r} \hat{\theta}$$

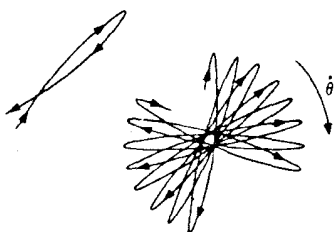
بنابراین معادله حرکت مماسی کوریولیس $ma_\theta = F_{\text{کوریولیس}}$ چنین می‌شود

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = -2m\Omega \sin \lambda \dot{r}$$

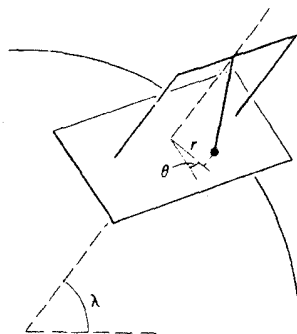
یا

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = -2\Omega \sin \lambda \dot{r}$$

ساده‌ترین جواب این معادله با انتخاب $\dot{\theta} = \text{const.}$ پیدا می‌شود. در این حالت $r\dot{\theta}$ حذف شده و داریم



شکل ۳۴-۸



شکل ۳۳-۸

$$\dot{\theta} = -\Omega \sin \lambda$$

آونگ به طور یکنواخت در جهت ساعتگرد حرکت تقدیمی انجام می‌دهد (شکل ۳۴-۸). زمان لازم برای یک دوران کامل صفحه نوسان عبارت است از

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\phi}{\dot{\theta}} \\ &= \frac{2\pi}{\Omega \sin \lambda} \\ &= \frac{24 \text{ h}}{\sin \lambda} \end{aligned}$$

پس در عرض جغرافیایی 45° ، آونگ فوکو در ۳۴ ساعت یکبار دوران می‌کند.

در قطب شمال زمان تناوب حرکت تقدیمی ۲۴ ساعت است؛ آونگ نسبت زمین در جهت ساعتگرد با همان آهنگی دوران می‌کند که زمین در جهت پادساعتگرد دوران می‌کند. نسبت به فضای لخت، صفحه حرکت ثابت می‌ماند.

آونگ فوکو علاوه بر آشکار ساختن واضح دوران زمین، راز بزرگی را مطرح می‌سازد. برای مثال آونگ فوکو را در قطب شمال در نظر بگیرید. واضح است که حرکت تقدیمی ظاهری است؛ صفحه حرکت ثابت می‌ماند در حالی که زمین در زیر آن دوران می‌کند. صفحه آونگ نسبت به ستاره‌های ثابت، ثابت می‌ماند. چرا باید این چنین باشد؟ چگونه آونگ "می‌داند" که باید در صفحه‌ای که نسبت به ستاره‌های ثابت ماناست نوسان کند تا در صفحه‌ای که مثلاً با آهنگی یکنواخت دوران می‌کند؟

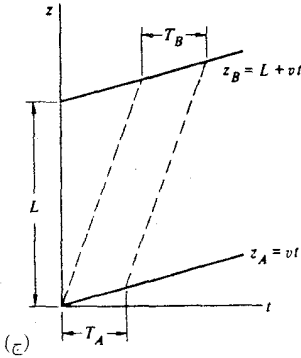
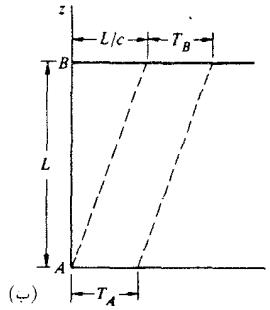
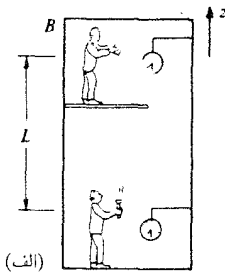
این سؤال حیرت نیوتون را برانگیخت، و او آن را با آزمایش زیر توصیف کرد: اگر سطلی در حال سکون محتوی آب باشد، سطح آب تخت است. اگر سطل با آهنگ ثابت به چرخش وادار شود، ابتدا آب عقب می‌ماند، ولی سرانجام، با افزایش سرعت دورانی، سطح آب به شکل سهمی دواری درمی‌آید

که در مثال ۸-۶ بررسی شد. اگر سطل ناگهان متوقف شود، گودی سطح آب برای مدتی حفظ می‌شود. از فرار معلوم در تعیین شکل سطح آب حرکت نسبی آن با سطل اهمیت ندارد. تازمانی که آب در دوران است سطح گود است. نیوتون نتیجه گرفت که حرکت دورانی مطلق است، زیرا با مشاهده سطح آب، بدون مراجعه به اجسام خارج، تشخیص دوران امکانپذیر است.

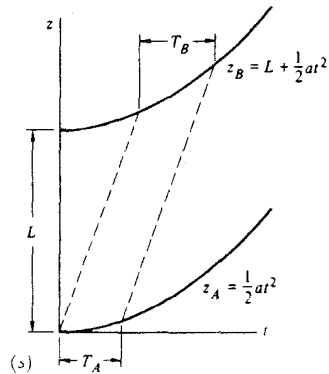
از یک دیدگاه در ماهیت مطلق بودن حرکت دورانی در واقع تناقضی وجود ندارد. اصل ناوردایی گالیله بیان می‌کند که برای تشخیص موضعی حرکت انتقالی یکنواخت یک دستگاه راهی وجود ندارد. اما این امر امکان تشخیص شتاب یک دستگاه را از ما نمی‌گیرد. یک دستگاه دورانی به طریقی بسیار نایکنواخت شتاب می‌گیرد. در هر نقطه‌ای شتاب به سمت محور دوران ممتد است، و شتاب متوجه محور است. توانایی ما برای آشکارسازی چنین شتابی به هیچ عنوان در تناقض با اصل ناوردایی گالیله نیست.

با وجود این، یک معما باقی است. سطل دوران‌کننده و آونگ فوکو هر دو حرکت‌های خود را نسبت به ستاره‌های ثابت حفظ می‌کنند. چگونه است که ستاره‌های ثابت معرف یک دستگاه لخت هستند؟ چه چیزی از دوران صفحه آونگ نسبت به ستاره‌های ثابت جلوگیری می‌کند؟ چرا سطح آب درون سطل دوار فقط هنگامی تخت است که نسبت به ستاره‌های ثابت ساکن باشد؟ ارنست ماخ که در ۱۸۸۳ اولین نقد بر فیزیک نیوتونی را نوشت، موضوع را بدین‌گونه مطرح کرد. فرض کنید که سطل آب را ثابت نگه داشته و ستاره‌ها را دوران دهیم. از نظر فیزیکی هیچ راهی برای تشخیص این حالت از حالت اصلی که سطل دوران یابد وجود ندارد، و انتظار داریم که سطح آب باز هم به شکل سهمی درآید. ظاهراً حرکت آب در داخل سطل بستگی به حرکت مواد دور دست جهان دارد. برای مشخص‌کردن مسئله فرض کنید که ستاره‌ها را یکی پس از دیگری حذف کنیم، تا وقتی که فقط سطل بماند. حال اگر سطل را دوران دهیم چه اتفاقی خواهد افتاد؟ از نظر ما هیچ راهی برای پیش‌بینی حرکت آب داخل سطل وجود ندارد. خواص لختی فضا باید کلاً متفاوت باشد. با وضعیت ویژه‌ای مواجه هستیم. خواص موضعی فضا بستگی به مواد دور دست دارد. در عین حال اگر آب را دوران دهیم، سطح بلافاصله شروع به تغییر می‌کند. سیگانها برای رفتن به ستاره‌ها و بازگشت از آنها فرصتی ندارند. از کجا آب درون سطل "می‌داند" که مابقی جهان چه می‌کنند؟

این اصل که خواص لختی فضا بستگی به وجود مواد دور دست دارد، اصل ماخ نامیده می‌شود. این اصل به وسیله بسیاری از فیزیکدانان پذیرفته شده است، ولی به نتایجی عجیب منتهی می‌شود. برای مثال، هیچ دلیلی وجود ندارد که قبول کنیم مواد جهان در اطراف زمین به‌طور یکنواخت توزیع شده باشد؛ منظومه شمسی تقریباً در خارج بدنه کیهکشان ما قرار گرفته و ماده در کیهکشان ما کلاً روی صفحه نازکی متمرکز شده است. اگر لختی ناشی از مواد دور دست باشد، آنگاه باید انتظار داشته باشیم که در



شکل ۸-۳۵



جهت‌های مختلف متفاوت باشد، به طوری که مقدار جرم موجود باید به جهت شتاب وابسته باشد. چنین پدیده‌ای هرگز مشاهده نشده است. مسئله لختی همچنان به صورت یک راز ناگشوده باقی می‌ماند.

یادداشت ۸-۱ اصل هم‌ارزی و انتقال به سرخ

اتمهای تابنده، نور را فقط در طول موجهای مشخصه معینی تابش می‌کنند. اگر نور اتمهایی که در میدان گرانشی قوی ستارگان چگال قرار دارند به وسیله طیف‌نما مطالعه شود، مشاهده خواهد شد که طول موجهای مشخصه اندکی افزایش می‌یابند و به سمت سرخ جابه‌جا می‌شوند. می‌توانیم اتمها را به ساعت‌هایی همانند سازهیم که با بسامدی مشخص "تیک" می‌کنند. انتقال به سمت طول موجهای بلندتر، معروف به انتقال سرخ‌گرانشی، متناظر با کند شدن ساعتهاست. انتقال به سرخ‌گرانشی اقتضا می‌کند که ساعتها در یک میدان گرانشی، هنگامی که از خارج میدان نظاره شوند، آهسته کار کنند. همچنانکه نشان خواهیم داد سرچشمه این پدیده در ماهیت فضا و زمان است نه ناشی از تأثیر جزئی گرانش روی ساعت‌های مکانیکی.

اینکه می‌بینیم چگونه اصل هم‌ارزی که بسیار ساده و غیر ریاضی است منجر به ارتباطی بین فضا، زمان و گرانش می‌شود تاحدی غیر منتظره است. برای نشان دادن این ارتباط باید از یک دستاورد اولیه نظریه نسبیت استفاده کنیم؛ انتقال اطلاعات با سرعتی بیش از سرعت نور $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ناممکن است. با اینحال، این نکته تنها مفهوم نسبیتی مورد نیاز است، و از این گذشته، برهان ما کاملاً

کلاسیک است.

دو دانشمند A و B را مطابق شکل ۸-۳۵ در نظر بگیرید، که به فاصله L از یکدیگر قرار دارند. A یک ساعت و یک چراغ دارد که در فواصل جدا از هم T_A فلاش می‌زند (شکل ۸-۳۵ الف). علامت B می‌رسد که فواصل بین تپها (T_B) را با ساعت خود یادداشت می‌کند. منحنی فاصله عمودی برحسب زمان برای دو تپ نوری در شکل ۸-۳۵ ب) نشان داده شده است. تپها به اندازه زمان انتقال L/c تأخیر دارند ولی فاصله زمانی T_B با T_A یکسان است. بنابراین اگر A تپها را در فواصل زمانی مثلاً ۱ ثانیه بفروستد به طوری که $T_A = 1s$ باشد، آنگاه ساعت B ، فاصله زمانی بین تپهای متوالی را یک ثانیه نشان می‌دهد.

حال وضعیتی را در نظر بگیرید که دو ناظر مطابق شکل ۸-۳۵ ج) با سرعت یکنواخت v به سمت بالا حرکت می‌کنند. اگرچه دو دانشمند در خلال این فاصله زمانی در حرکت‌اند، ولی به طور یکسان حرکت می‌کنند، و باز هم داریم $T_B = T_A$.

این وضعیت در صورتی که هر دو ناظر با آهنگ یکنواخت a ، مطابق شکل ۸-۳۵ د) به سمت بالا شتاب داشته باشند کاملاً متفاوت است. A و B از حال سکون شروع می‌کنند و منحنی تغییرات فاصله برحسب زمان یک سهمی است. از آنجا که A و B شتابی یکسان دارند، منحنیها موازی‌اند و در هر زمان به فاصله L از یکدیگر قرار دارند. از شکل آشکار است که $T_B > T_A$ است زیرا تپ دوم بیشتر از اولی در راه است و زمان انتقال طولانیتر است. این پدیده کاملاً سینماتیکی است.

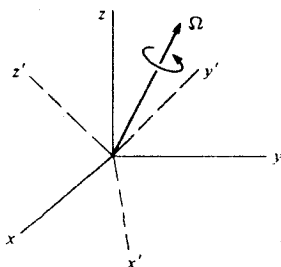
حال، بنا به اصل هم‌ارزی، A و B نمی‌توانند دستگاه خود را که به سمت بالا شتابدار است از دستگاهی در حال سکون که در میدان گرانشی رو به پایین $g = a$ قرار دارد تشخیص دهند. بنابراین اگر آزمایش در دستگاهی در حال سکون واقع در میدان گرانشی تکرار شده باشد، اصل هم‌ارزی لازم می‌شمارد که مانند حالت قبل $T_B > T_A$ باشد. اگر $T_A = 1s$ باشد، B مدتی بیشتر از ۱s را بین تپهای متوالی مشاهده خواهد کرد. B نتیجه خواهد گرفت که ساعت A آهسته‌کار می‌کند. این امر منشأ انتقال به سرخ گرانشی است.

با استفاده از این برهان به طور کمتی فوراً نتیجه تقریبی زیر را به دست می‌آوریم

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{T_B - T_A}{T_A} = \frac{gL}{c^2}$$

در اینجا فرض شده است که $\Delta T/T \ll 1$ است.

روی زمین انتقال به سرخ گرانشی برابر $L = 10^{-16}$ است که در آن L برحسب متر است. این اثر با وجود کوچکی زیاد، اندازه‌گیری و با دقت یک درصد محرز شده است. این آزمایش به وسیله



شکل ۸-۳۶

پوند، ربکا و اسنایدر در دانشگاه هاروارد انجام شده است. "ساعت" مورد نظر بسامد پرتوگاما بود و آنها با استفاده از تکنیکی به نام جذب موسباور توانستند انتقال به سرخ گرانشی متناظر با جابه جایی قائمی به اندازه ۲۵ متر را با دقت اندازه بگیرند.

یادداشت ۲-۸ تبدیل در دستگاه دوار

در این یادداشت معادله تحلیلی ۷-۸ را که رابطه‌ای است بین مشتق زمانی هر بردار \mathbf{B} در دستگاه مختصات دوار و مشتق زمانی آن بردار در دستگاه لخت به دست می‌آوریم. اگر دستگاه x', y', z' و x, y, z با آهنگ Ω نسبت به دستگاه لخت x, y, z دوران کند، ثابت خواهیم کرد که مشتق زمانی هر بردار \mathbf{B} در دو دستگاه به وسیله رابطه زیر به هم مربوط اند

$$\left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right)_{\text{لختی}} = \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right)_{\text{دوار}} + \Omega \times \mathbf{B} \quad (1)$$

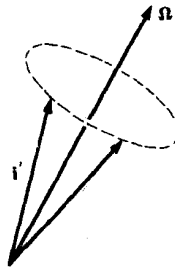
دستگاه مختصات لخت x, y, z و دستگاه مختصات x', y', z' را که نسبت به دستگاه لخت با سرعت زاویه‌ای Ω دوران می‌کند، در نظر بگیرید (شکل ۸-۳۶). مبدأها بر یکدیگر منطبق اند. می‌توانیم یک بردار اختیاری \mathbf{B} را به وسیله مؤلفه‌هایش در امتداد بردارهای یکه دستگاه مختصات توصیف کنیم بنابراین داریم

$$\mathbf{B} = B_x \hat{\mathbf{i}} + B_y \hat{\mathbf{j}} + B_z \hat{\mathbf{k}} \quad (2)$$

یا به طریق دیگر

$$\mathbf{B} = B'_x \hat{\mathbf{i}}' + B'_y \hat{\mathbf{j}}' + B'_z \hat{\mathbf{k}}' \quad (3)$$

که در آن $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ بردارهای یکه در امتداد محورهای لخت و $\hat{\mathbf{i}}', \hat{\mathbf{j}}', \hat{\mathbf{k}}'$ بردارهای یکه در امتداد محورهای دوارند.



شکل ۸-۳۷

اکنون می‌توانیم برای مشتق زمانی \mathbf{B} در هر یک از دستگاههای مختصات عبارتی بیابیم. از دیفرانسیل‌گیری معادله ۲ داریم

$$\left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}})$$

دستگاه x, y, z لخت است به طوری که $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ در فضا ثابت‌اند. داریم

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{dB_x}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dB_y}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dB_z}{dt}\hat{\mathbf{k}} \quad (۴)$$

که این عبارت آشنایی برای مشتق زمانی یک بردار در دستگاه دکارتی است. این عبارت را با $(d\mathbf{B}/dt)$ مشخص می‌کنیم.

اگر از معادله ۳ دیفرانسیل بگیریم به دست می‌آوریم

$$\left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right) = \left(\frac{dB'_x}{dt}\hat{\mathbf{i}}' + \frac{dB'_y}{dt}\hat{\mathbf{j}}' + \frac{dB'_z}{dt}\hat{\mathbf{k}}'\right) + \left(B'_x\frac{d\hat{\mathbf{i}}'}{dt} + B'_y\frac{d\hat{\mathbf{j}}'}{dt} + B'_z\frac{d\hat{\mathbf{k}}'}{dt}\right) \quad (۵)$$

جمله اول مشتق زمانی \mathbf{B} نسبت به محورهای x', y', z' است. این آهنگ تغییرات \mathbf{B} همان است که ناظری در دستگاه دورانی آن‌را اندازه می‌گیرد، در $(d\mathbf{B}/dt)$. برای ارزیابی جمله دوم، توجه کنید که چون $\hat{\mathbf{i}}'$ یک بردار یکه است، فقط از نظر جهت می‌تواند تغییر کند نه از نظر بزرگی. بنابراین $\hat{\mathbf{i}}'$ دوران محض انجام می‌دهد (شکل ۸-۳۷). در بخش ۲-۷ دریافتیم که مشتق زمانی بردار \mathbf{r} که بزرگی آن ثابت است و با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کند برابر با $\omega \times \mathbf{r}$ است. این نتیجه را می‌توانیم برای ارزیابی $d\hat{\mathbf{i}}'/dt$ به‌کار ببریم. فرض کنید \mathbf{r} در امتداد محور x' قرار گرفته و دارای بزرگی واحد یعنی $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}}'$ است. بنابراین

$$\frac{d\hat{\mathbf{i}}'}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{i}}'$$

$$\frac{d\hat{k}'}{dt} = \Omega \times \hat{k}' \quad \text{و} \quad \frac{d\hat{j}'}{dt} = \Omega \times \hat{j}'$$

جمله دوم در معادله ۵ چنین می شود

$$B'_x(\Omega \times \hat{i}') + B'_y(\Omega \times \hat{j}') + B'_z(\Omega \times \hat{k}') = \Omega \times (B'_x\hat{i}' + B'_y\hat{j}' + B'_z\hat{k}') \\ = \Omega \times \mathbf{B}$$

معادله ۵ به صورت زیر در می آید

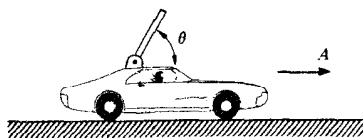
$$\left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right)_{\text{لختی}} = \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right)_{\text{دوار}} + \Omega \times \mathbf{B} \quad (۶)$$

که همان نتیجه مطلوب است.

از آنجا که \mathbf{B} برداری اختیاری است، این نتیجه بسیار کلی است و می توانیم برای هر برداری که بخواهیم به کار ببریم. مهم است که معادله ۶ کاملاً روشن باشد. خود بردار \mathbf{B} در هر دو دستگاه مختصات لخت و دوار یکسان است. (بدین دلیل هیچ شاخصی برای \mathbf{B} در عبارت $\Omega \times \mathbf{B}$ گذاشته نشده است.) فقط مشتق زمانی \mathbf{B} است که بستگی به دستگاه مختصات دارد. برای مثال برداری که در یک دستگاه، ثابت است در دستگاه دیگر با زمان تغییر می کند.

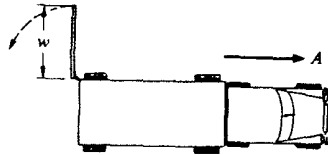
مسائل

۱-۸ میله یکنواخت نازکی به طول L و جرم M از یک انتها لولا شده است. لولا به سطح فوقانی اتومبیلی که دارای شتاب A است مطابق شکل ۸-۳۸ متصل است. (الف) مقدار زاویه تعادل θ بین میله و سطح فوقانی اتومبیل چقدر است؟ (ب) فرض کنید میله به اندازه زاویه کوچک ϕ از وضعیت تعادل خارج شده باشد. حرکت آن به ازای این زاویه چگونه است؟



شکل ۸-۳۸

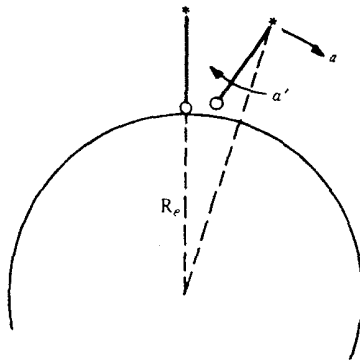
۲-۸ کامیونی، مطابق شکل ۸-۳۹، با درب کاملاً باز در حال سکون است. کامیون با آهنگ ثابت A به جلو شتاب می گیرد و درب آن در شروع حرکت در جهت بسته شدن گردش می کند. درب یکنواخت و جامد و دارای جرم کل M ، ارتفاع h و پهنای W است. از مقاومت هوا صرف نظر کنید. (الف) سرعت زاویه ای لحظه ای درب را حول لولای کامیون وقتی که به اندازه 90° چرخیده است پیدا کنید. (ب) نیروی



شکل ۳۹-۸

افقی وارد بر درب را وقتی که به اندازه 90° چرخیده است پیدا کنید.

۳-۸ آونگی که گلوله آن به طرف مرکز زمین است مطابق شکل ۴۰-۸ در حال سکون است. نقطه



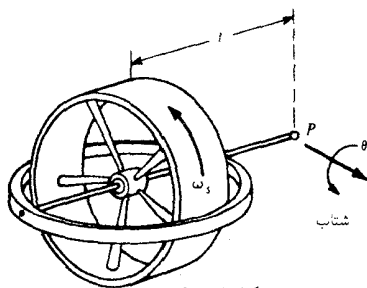
شکل ۴۰-۸

آویز آونگ به طور افقی با شتاب یکنواخت a شروع به حرکت می کند، و آونگ شروع به نوسان می کند. شتاب زاویه ای α' آونگ را پیدا کنید. زمان تناوب آونگ را که به ازای آن آونگ در امتداد شعاع زمین قرار می گیرد پیدا کنید. از دوران زمین صرف نظر کنید. (این موضوع، اصول کار وسیله ای به نام آونگ شولر است که برای نصب ژيروسکوپ در دستگاههای راهنمای لخت استفاده می شود.)

جواب: $T \approx 1 \frac{1}{3} h$

۴-۸ مرکز جرم یک اتومبیل به جرم 1600 کیلوگرم در وسط چرخها و در 60 سانتیمتری بالای سطح زمین است. فاصله چرخها از یکدیگر 2.5 متر است. (الف) مقدار کمیته شتاب A اتومبیل که به ازای آن چرخهای جلو شروع به بلند شدن از سطح زمین می کنند چقدر است؟ (ب) اگر اتومبیل با آهنگ g شتاب منفی پیدا کند، نیروی عمودی وارد بر چرخهای جلو و عقب چقدر است؟

۵-۸ برای ژيروسکوپ در دستگاههای کشتیرانی و هواپیمایی کاربردهای بسیاری پیدا شده است. برای مثال ژيروسکوپ می تواند برای اندازه گیری شتاب به کار رود. ژيروسکوپی را که با سرعت زیاد ω در حال چرخش است مطابق شکل ۴۱-۸ در نظر بگیرید. ژيروسکوپ از طریق تکیه گاه P به وسیله نقلیه



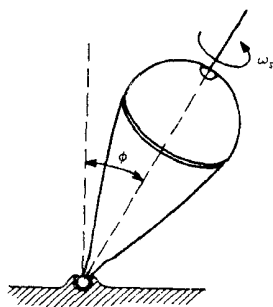
شکل ۸-۴۱

متصل است. اگر وسیله نقلیه در جهت عمود بر محور چرخش با آهنگ a شتاب بگیرد، ژيروسکوپ حول محور شتاب حرکت تقدیمی خواهد داشت که در شکل نشان داده شده است. زاویه کل حرکت تقدیمی θ اندازه گرفته می شود. نشان دهید که اگر دستگاه از حال سکون شروع به حرکت کند، سرعت نهایی وسیله نقلیه با رابطه زیر داده می شود

$$v = \frac{I_s \omega_s}{Ml} \theta$$

که در آن $I_s \omega_s$ تکانه چرخشی ژيروسکوپ، M جرم کل قسمتی از ژيروسکوپ که روی تکیه‌گاه قرار دارد، و l فاصله تکیه‌گاه تا مرکز جرم است. (چنین دستگاهی، ژيروسکوپ انتگرال گیرنده نامیده می شود، زیرا به طور خودکار از شتاب انتگرال می گیرد و سرعت را به دست می دهد.)

۸-۶ فرفره ای به جرم M با سرعت زاویه ای ω_s حول محور خود می چرخد. طبق شکل ۸-۴۲ گشتاور لختی فرفره حول محور چرخش I و مرکز جرم فرفره به فاصله l از نوک آن قرار دارد. محور به



شکل ۸-۴۲

اندازه زاویه ϕ نسبت به قائم، مایل است و فرفره حرکت تقدیمی یکنواخت انجام می دهد. گرانش به سمت پایین است. فرفره در داخل یک آسانسور است به نحوی که نوک آن توسط تکیه‌گاه بدون اصطکاکی در

کف آسانسور قرار دارد. در هر یک از حالات زیر با ذکر جهت، آهنگ حرکت تقدیمی Ω را پیدا کنید:
 (الف) آسانسور در حال سکون است (ب) آسانسور با آهنگ $2g$ به پایین شتاب دارد.

۷-۸ اختلاف ظاهری شتاب گرانش را در استوا و قطبها پیدا کنید. با فرض اینکه زمین کروی است.
 ۸-۸ با بررسی حرکت یک ذره در دستگاه مختصات دوار که در آن سرعت لحظه‌ای به صورت شعاعی است، عبارت آشنای $\dot{\mathbf{v}} = \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}$ را برای سرعت در مختصات قطبی مسطح پیدا کنید.
 ۹-۸ یک قطار 400 تنی با سرعت 90 km/h در عرض جغرافیایی 60° شمالی به طرف جنوب می‌رود. (الف) نیروی افقی وارد بر قطار چقدر است؟ (ب) این نیرو در چه جهتی است؟

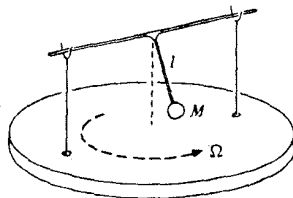
جواب: (الف): تقریباً 80 کیلوگرم نیرو.

۱۰-۸ شتاب گرانشی که در یک دستگاه مختصات متصل به زمین اندازه‌گیری شده با g نشان داده می‌شود. اما به دلیل دوران زمین g با مقدار حقیقی شتاب حاصل از گرانش، g_0 ، متفاوت است. با فرض اینکه زمین با شعاع R_e و سرعت زاویه‌ای Ω_e و کاملاً گرد باشد، g را بر حسب تابعی از عرض جغرافیایی λ پیدا کنید. (فرض گرد بودن زمین در واقع به مورد نیست. سهم مربوط به تخت‌شدگی قطبین در تغییرات g بر حسب عرض جغرافیایی با اثری که در اینجا محاسبه می‌شود قابل مقایسه است.)

جواب: $g = g_0 [1 - (2x - x^2) \cos^2 \lambda]^\dagger$ که در آن $x = R_e \Omega_e^2 / g_0$ است.

۱۱-۸ یک هیدروفویل تندرو با سرعت 20 mi/h در سطح اقیانوس در استوا حرکت می‌کند. فرض کنید شتاب گرانش برای ناظری که روی زمین در حال سکون است g باشد. پیدا کنید تغییر نسبی گرانشی $\Delta g/g$ را که به وسیلهٔ سرنشین هیدروفویل اندازه‌گرفته می‌شود، وقتی که هیدروفویل در جهت‌های زیر پیش می‌رود: (الف) شرق، (ب) غرب، (ج) جنوب، (د) شمال.

۱۲-۸ یک آونگ روی محوری که توسط دو پایه نگهداری می‌شود مطابق شکل ۸-۴۳ به طوری



شکل ۸-۴۳

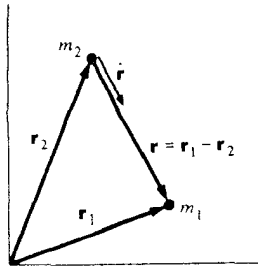
سوار است که فقط می‌تواند روی صفحه‌ای عمود بر محور نوسان کند. آونگ شامل جرم M است که به میلهٔ بدون جرمی به طول l متصل است. پایه‌ها روی سکویی نصب شده‌اند که با سرعت زاویه‌ای Ω دوران می‌کند. با فرض کوچک بودن دامنه، بسامد آونگ را پیدا کنید.

حرکت ناشی از نیروی مرکزی

۱-۹ مقدمه

توجه به حرکت سیارات، نیوتون را به سوی فرمولبندی قوانین حرکت و قانون گرانش کشاند. موفقیت او در توضیح قوانین تجربی کپلر در مورد حرکت سیارات، دلیل محکمی برای تدوین مکانیک نوین و نقطه آغازی در جهت ابداع فیزیک-ریاضی جدید بود. حرکت سیارات و مسئله کلی حرکاتی که ناشی از نیروی مرکزی هستند، نقش مهمی در بیشتر شاخه‌های فیزیک دارند و در مباحثی چون پراکندگی ذرات، ساختار اتم، و فضاوردی اثر خود را نمایان ساخته‌اند.

در این فصل فیزیک نیوتونی را برای مسئله کلی حرکت ناشی از نیروی مرکزی به کار می‌بریم. مطلب را با بررسی بعضی از ویژگی‌های یک سیستم متشکل از دو ذره در حالت کلی شروع می‌کنیم که با نیروی مرکزی $\hat{\mathbf{r}} f(r)$ برهم‌کنش دارند. در اینجا $f(r)$ تابع دلخواهی از r ، یعنی فاصله بین دو ذره و $\hat{\mathbf{r}}$ برداری که در امتداد خط واصل بین دو ذره است. با تغییر ساده‌ای در مختصات نشان خواهیم داد که چگونه با به کار بردن قوانین پایستگی تکانه زاویه‌ای و انرژی موفق به حل کامل این مسئله خواهیم شد. سرانجام، با به کار بستن این نتایج در مورد حرکت سیارات که برای آنها $f(r) \propto 1/r^2$ است، قوانین تجربی کپلر را نتیجه می‌گیریم.



شکل ۱-۹

۲-۹ حرکت ناشی از نیروی مرکزی-مسئله یک جسم

یک سیستم منزوی متشکل از دو ذره را که تحت تأثیر نیروی مرکزی $f(r)$ برهم‌کنش دارند در نظر بگیرید. جرمهای این ذرات m_1 و m_2 و بردار مکان آنها بترتیب r_1 و r_2 است. از روی شکل ۱-۹ داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \\ r &= |\mathbf{r}| \\ &= |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \end{aligned} \quad (۱-۹)$$

معادلات حرکت عبارت‌اند از

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = f(r) \hat{\mathbf{r}} \quad (۲-۹ \text{ الف})$$

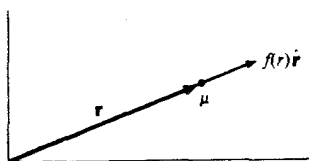
$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -f(r) \hat{\mathbf{r}} \quad (۲-۹ \text{ ب})$$

این نیرو برای $f(r) < 0$ جاذبه و برای $f(r) > 0$ دافعه است. معادلات ۲-۹ الف و ب به وسیله \mathbf{r} به هم مربوط‌اند. چگونگی حرکت \mathbf{r}_1 و \mathbf{r}_2 بستگی به $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ دارد. نشان خواهیم داد که با جانشین کردن $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ و بردار مرکز جرم $\mathbf{R} = (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) / (m_1 + m_2)$ به جای بردارهای \mathbf{r}_1 و \mathbf{r}_2 آسانتر می‌توان به حل مسئله پرداخت. معادله حرکت برای \mathbf{R} بسیار ساده است زیرا که نیروهای خارجی وجود ندارند. در مورد \mathbf{r} معادله‌ای شبیه معادله حرکت یک ذره منزوی به دست می‌آید که به آسانی قابل حل است.

معادله حرکت برای \mathbf{R} چنین است

$$\ddot{\mathbf{R}} = 0$$

که جواب آن به صورت ساده زیر است



شکل ۲-۹

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}t \quad (۳-۹)$$

بردارهای ثابت \mathbf{R}_0 و \mathbf{V} بستگی به انتخاب دستگاه مختصات و شرایط اولیه دارند. اگر باهوشمندی کافی عمل کنیم، می‌توانیم مبدأ مختصات را همان مرکز جرم انتخاب کنیم که در این صورت $\mathbf{R}_0 = 0$ و $\mathbf{V} = 0$.

برای پیدا کردن معادله حرکت \mathbf{r} طرفین معادله ۲-۹ الف را بر m_1 و معادله ۲-۹ ب را بر m_2 تقسیم و سپس از یکدیگر تفریق می‌کنیم. خواهیم داشت

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) f(r)\hat{\mathbf{r}}$$

یا

$$\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) (\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2) = f(r)\hat{\mathbf{r}}$$

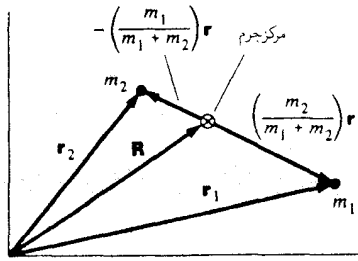
اگر مقدار $m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ را که موسوم به جرم کاهشده است با μ نشان دهیم، با استفاده از $\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \ddot{\mathbf{r}}$ داریم

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = f(r)\hat{\mathbf{r}} \quad (۴-۹)$$

معادله ۴-۹ با معادله حرکت یک ذره به جرم μ که تحت تأثیر نیروی $f(r)\hat{\mathbf{r}}$ قرارگیرد، یکسان است (شکل ۲-۹). در این معادله هیچ‌گونه اثری از مسئله دو ذره مشهود نیست. یعنی مسئله دو ذره به مسئله یک ذره تبدیل شده است. (متأسفانه این روش نمی‌تواند تعمیم یابد، زیرا هیچ راهی برای تعدیل معادلات حرکت سه جسم یا بیشتر به معادل آن در مسئله یک جسم وجود ندارد. به همین دلیل راه حل قطعی برای مسئله موجود نیست.)

اینک باید عبارتی برای \mathbf{r} که تابعی از زمان باشد از معادله ۴-۹ پیدا کرد. اگر \mathbf{r} معین شود یافتن \mathbf{r}_1 و \mathbf{r}_2 از روی روابط زیر به آسانی میسر است

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (۵-۹ \text{ الف})$$



شکل ۳-۹

$$R = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} \quad (۵-۹)$$

r_1 و r_2 از حل دو معادله بالا بدین ترتیب به دست می آیند

$$r_1 = R + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) r \quad (۶-۹ \text{ الف})$$

$$r_2 = R - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) r \quad (۶-۹ \text{ ب})$$

همانگونه که شکل ۳-۹ نشان می دهد عبارات $m_2 r / (m_1 + m_2)$ و $-m_1 r / (m_1 + m_2)$ به ترتیب بردارهای مکان ذرات m_1 و m_2 نسبت به مرکز جرم اند.

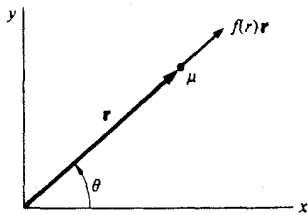
حل کامل معادله $\mu \ddot{r} = f(r) \hat{r}$ بستگی به شکل خاص $f(r)$ دارد، اما به طور کلی برخی خواص حرکت‌های ناشی از نیروی مرکزی مستقل از شکل $f(r)$ هستند که ما اینک به بررسی آنها می پردازیم.

۳-۹ خواص عمومی حرکت‌های ناشی از نیروی مرکزی

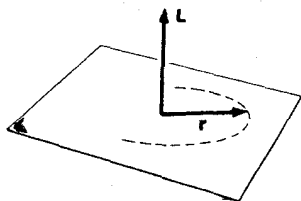
معادله $\mu \ddot{r} = f(r) \hat{r}$ یک رابطه برداری است و اگرچه فقط برای یک ذره به کار رفته، در واقع شامل معادله‌هایی برای سه مؤلفه است. در این بخش خواهیم دید که چگونه با به کار بردن قوانین پایستگی می توان به بعضی خواص عمومی جواب این مسئله دست یافت و معادله مزبور را به یک معادله اسکالریک متغیری تبدیل کرد.

حرکت در صفحه

نیروی مرکزی $f(r) \hat{r}$ در امتداد r و گشتاور نیروی مؤثر از طرف آن بر جرم کاهیده μ صفر است (شکل ۵-۹). بنابراین گشتاور زاویه‌ای L وارد بر μ ثابت است. به آسانی می توان نشان داد که حرکت μ در یک صفحه صورت می گیرد. زیرا در رابطه $L = r \times \mu v$ که در آن $v = \dot{r}$ است، به علت خواص حاصلضرب



شکل ۵-۹



شکل ۴-۹

برداری، r همواره بر L عمود است (شکل ۴-۹). اما L در فضا ثابت است بنابراین نتیجه می‌گیریم که r فقط روی یک صفحه عمود بر L که از مبدأ می‌گذرد می‌تواند حرکت کند.

از آنجا که حرکت محدود به یک صفحه است، بدون صدمه زدن به عمومیت مسئله می‌توان دستگاه مختصات را طوری انتخاب کرد که حرکت در صفحه xy صورت گیرد. چنانچه از مختصات قطبی استفاده کنیم، معادله حرکت $\mu \ddot{r} = f(r)\hat{r}$ به صورت زیر درمی‌آید

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r) \quad (الف \ ۷-۹)$$

$$\mu(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \quad (ب \ ۷-۹)$$

انرژی و تکانه زاویه‌ای ثابت‌های حرکت‌اند

باتوجه به ثابت بودن امتداد L مسئله را به صورت دو بعدی در آورده‌ایم. دو مقدار ثابت و مهم دیگر در حرکت ناشی از نیروی مرکزی وجود دارند: قدرمطلق تکانه زاویه‌ای $|L| \equiv l$ و انرژی کل E . با استفاده از E و l می‌توان این مسئله را آسانتر و با بصیرت فیزیکی بیشتر نسبت به روش معادلات ۷-۹ الف و ب حل کرد.

تکانه زاویه‌ای جرم μ دارای قدرمطلق زیر است (شکل ۶-۹)

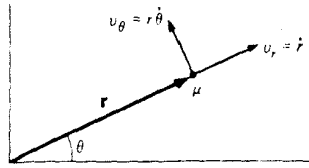
$$l = \mu r v_{\theta} = \mu r^2 \dot{\theta} \quad (الف \ ۸-۹)$$

انرژی کل جرم μ عبارت است از

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \mu v^2 + U(r) \\ &= \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + U(r) \end{aligned} \quad (ب \ ۸-۹)$$

در اینجا انرژی پتانسیل $U(r)$ با رابطه زیر داده می‌شود

$$U(r) - U(r_a) = - \int_{r_a}^r f(r) dr$$



شکل ۶-۹

مقدار ثابت $U(r_a)$ از نظر فیزیکی اهمیتی ندارد، بنابراین می‌توانیم r_a را نامشخص باقی بگذاریم و یادآور شویم که افزودن یک مقدار ثابت به انرژی در ماهیت حرکت هیچ اثری نمی‌گذارد.

حال می‌توان با استفاده از معادله ۸-۹ الف مقدار θ را از معادله ۸-۹ ب حذف کرد. نتیجه برابر است با

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + U(r) \quad (۹-۹)$$

این رابطه شبیه معادله حرکت یک ذره در حرکت یک بعدی است که هیچ اثری از θ در آن دیده نمی‌شود. می‌توان با انتخاب

$$U_{\text{مؤثر}}(r) = \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + U(r) \quad (۱۰-۹)$$

معادله فوق را به شکل زیر درآورد

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + U_{\text{مؤثر}}(r) \quad (۱۱-۹)$$

مؤثر U انرژی پتانسیل مؤثر نامیده می‌شود که اغلب به آن پتانسیل مؤثر می‌گویند و با $U_{\text{مؤثر}}$ نشان می‌دهند. اختلاف آن با پتانسیل واقعی به اندازه جمله $l^2/2\mu r^2$ است که جمله اخیر را پتانسیل مرکزگریز می‌نامند.

معادله ۱۱-۹ بدین صورت حل می‌شود

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{\text{مؤثر}})} \quad (۱۲-۹)$$

یا

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{(2/\mu)(E - U_{\text{مؤثر}})}} = t - t_0 \quad (۱۳-۹)$$

معادله ۱۳-۹ مقدار r را به صورت تابعی از t به دست می‌دهد. اگرچه در بعضی موارد مقدار انتگرال باید به صورت عددی محاسبه شود. برای پیدا کردن θ به صورت تابعی از t ، می‌توان جواب r را در معادله

۸-۹ الف قرار داد

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{\mu r^2} \quad (۱۴-۹)$$

چون r از رابطه ۹-۱۳ به صورت تابعی از t در دست است، برای پیدا کردن θ می توان از رابطه فوق انتگرال گرفت

$$\theta - \theta_0 = \int_{t_0}^t \frac{l}{\mu r^2} dt \quad (۱۵-۹)$$

معمولا مسیر ذره مورد توجه است، یعنی می خواهیم r را به صورت تابعی از θ به دست آوریم نه تابعی از زمان. تابع $r(\theta)$ را مدار حرکت ذره می نامیم. (این اصطلاح حتی برای موقعی که مسیر یک منحنی بسته هم نباشد به کار می رود.) از تقسیم معادله ۹-۱۴ بر ۹-۱۲ به دست می آید

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{l}{\mu r^2} \frac{1}{\sqrt{(2/\mu)(E - U_{مؤثر})}} \quad (۱۶-۹)$$

این عبارت، حل مسئله نیروی مرکزی را کامل می کند. اینک می توان به دلخواه مقادیر $r(t)$ ، $\theta(t)$ ، $r(\theta)$ را به دست آورد. فقط کافی است که انتگرالهای مربوط را حساب کنیم.

یقیناً متوجه شدید که این مسئله را بدون استفاده از معادلات حرکت ۹-۷ الف و ب حل کردیم. در واقع، ما از آنها نیز استفاده کرده ایم اما نه در شکل حقیقی اش. مثلا اگر از $\theta = \mu r^2 l$ نسبت به زمان مشتق بگیریم، به دست می آید $\mu r^2 \ddot{\theta} + 2r \dot{r} \dot{\theta} = 0$ و یا

$$\mu(r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) = 0$$

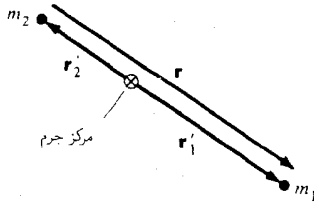
که همان معادله حرکت درامتداد مماس، یعنی معادله ۹-۷ ب است. به همین ترتیب، مشتق گرفتن از معادله انرژی نسبت به زمان، معادله حرکت درامتداد شعاع، (۹-۷ الف) را به دست می دهد.

قانون مساحتیهای برابر

قبلا در مثال ۶-۳ نشان دادیم که برای هر نیروی مرکزی، بردار r مساحتیهای مساوی را در زمانهای مساوی می پیماید. این خاصیت کلی حرکت ناشی از نیروی مرکزی، نتیجه مستقیم ثابت بودن تکانه زاویه ای است.

۹-۴ تعیین حرکت در مسائل واقعی

به منظور استفاده از روش فوق الذکر برای حرکتی که در بخش قبلی با آن سروکار داشتیم باید بردارهای مکان مربوط به m_1 و m_2 را بر حسب بردار r نوشت و مقادیر l و E را محاسبه کرد (شکل ۹-۷).



شکل ۹-۷

طبق معادلات ۹-۶ الف و ب، بردارهای مکان مربوط به m_1 و m_2 نسبت به مرکز جرم عبارت‌اند

از

$$\mathbf{r}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (۹-۱۷ \text{ الف})$$

$$\mathbf{r}'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (۹-۱۷ \text{ ب})$$

\mathbf{r}'_1 و \mathbf{r}'_2 در امتداد \mathbf{r} هستند و باراستا و مبدأ مشترک در جهت مخالف هم در صفحه حرکت قرار دارند. بنابراین m_1 و m_2 در طرفین مرکز جرم و به فاصله r از یکدیگر در یک صفحه ثابت حرکت می‌کنند.

در مسائل بسیاری، نظیر حرکت سیاره حول خورشید، جرمهای دو ذره خیلی باهم متفاوت‌اند. اگر

$m_2 \gg m_1$ باشد، معادلات ۹-۱۷ الف و ب چنین می‌شوند

$$\mathbf{r}'_1 \approx \mathbf{r}$$

$$\mathbf{r}'_2 \approx \mathbf{0}$$

جرم کاهیده μ تقریباً برابر m_1 است و مرکز جرم در m_2 واقع می‌شود. در این حالت ذره پرجرم اصولاً در مبدأ ثابت است و هیچ اختلاف مهمی ما بین یک مسئله دو جسمی واقعی و مسئله یک جسمی معادل آن وجود ندارد.

در مسئله یک جسمی تکانه زاویه‌ای چنین است

$$\mathbf{L} = \mu \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

به آسانی می‌توان نشان داد که \mathbf{L} همان تکانه زاویه‌ای m_1 و m_2 حول مرکز جرم \mathbf{L}_c است.

$$\mathbf{L}_c = m_1 \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{r}'_2 \times \mathbf{v}'_2$$

که در آن $\mathbf{v}'_1 = \dot{\mathbf{r}}'_1$ و $\mathbf{v}'_2 = \dot{\mathbf{r}}'_2$ است. با استفاده از معادلات ۹-۱۷ الف و ب داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_c &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \times \mathbf{v}'_1 - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \times \mathbf{v}'_2 \\ &= \mu \mathbf{r} \times (\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2) \\ &= \mu \mathbf{r} \times \mathbf{v} \\ &= \mathbf{L} \end{aligned}$$

به همین ترتیب، انرژی کل E برابر انرژی m_1 و m_2 نسبت به مرکز جرم E_c است.

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 (\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_1) + \frac{1}{2} m_2 (\mathbf{v}'_2 \cdot \mathbf{v}'_2) + U(r)$$

از معادلات ۹-۱۶ الف و ب داریم $m_1 \mathbf{v}'_1 = \mu \mathbf{v}$ و $m_2 \mathbf{v}'_2 = -\mu \mathbf{v}$. از این رو نتیجه می شود

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \mu \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2) + U(r) \\ &= \frac{1}{2} \mu (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + U(r) \\ &= E \end{aligned}$$

۹-۵ معادله انرژی و نمودارهای انرژی

در بخش ۹-۳ دوره معادل برای نوشتن E پیدا کردیم، یکی انرژی کل در دستگاه مرکز جرم مطابق معادله ۸-۹ ب

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2 + U(r)$$

و دیگری مطابق معادله ۹-۱۱ که خواهیم داشت

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U_{\text{میز}}(r)$$

برای تحلیل حرکت ناشی از نیروی مرکزی، عموماً نیاز به استفاده از هردوی اینها داریم. شکل اول، $U(r) + \frac{1}{2} \mu v^2$ برای تعیین E راحت تر است. آنچه بدان نیاز داریم، فقط سرعت و مکان در لحظه ای خاص است. اما رابطه $v^2 = \dot{r}^2 + (r \dot{\theta})^2$ و بستگی این رابطه به دو مختصه r و θ ، تصور حرکت را مشکل می سازد. در مقابل، شکل دوم $U_{\text{میز}}(r) + \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2$ تنها بستگی به مختصه r دارد که در واقع با معادله انرژی یک ذره به جرم μ و مقید به حرکت روی خط راستی با انرژی جنبشی $\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2$ و انرژی پتانسیل $U_{\text{میز}}(r)$ یکسان است. مختصه θ کاملاً حذف شده است. انرژی جنبشی مربوط به حرکت مماسی $\frac{1}{2} \mu (r \dot{\theta})^2$ طبق معادله زیر در پتانسیل مؤثر به حساب آمده است

$$\frac{1}{2} \mu (r \dot{\theta})^2 = \frac{l^2}{2 \mu r^2}$$

$$U_{\text{مؤثر}}(r) = \frac{l^2}{2 \mu r^2} + U(r)$$

معادله

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U_{\text{مؤثر}}(r)$$

فقط حرکت شعاعی را دربر دارد. در نتیجه، می‌توانیم روش نمودار انرژی را که در فصل ۴ بحث شده است برای پیدا کردن جنبه‌های کمیته حرکت شعاعی به‌کار ببریم. برای فهمیدن چگونگی کاربرد این روش، یک سیستم خیلی ساده متشکل از دو ذره بدون برهم‌کنش را در نظر می‌گیریم.

مثال ۹-۱ ذرات بدون برهم‌کنش: دو ذره بدون برهم‌کنش m_1 و m_2 با سرعت‌های \mathbf{v}_1 و \mathbf{v}_2 به‌سوی یکدیگر حرکت می‌کنند. مسیرهای آنها، مطابق شکل ۹-۸ به فاصله b از یکدیگر قرار دارند. حرکت یک بعدی این سیستم را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. سرعت نسبی چنین است

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &= \dot{\mathbf{r}} \\ &= \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2 \\ &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

\mathbf{v}_0 ثابت است زیرا \mathbf{v}_1 و \mathbf{v}_2 ثابت‌اند. انرژی سیستم نسبت به مرکز جرم عبارت است از

$$E = \frac{1}{2} \mu v_0^2 + U(r) = \frac{1}{2} \mu v^2$$

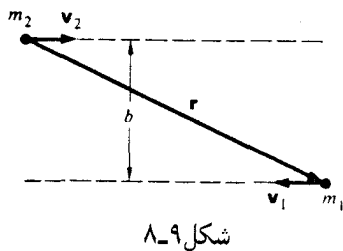
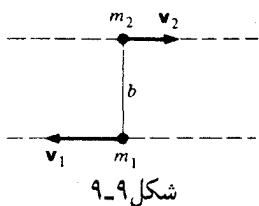
زیرا برای ذرات بدون برهم‌کنش $U(r) = 0$ است.

برای ترسیم نمودار انرژی باید پتانسیل مؤثر را پیدا کرد

$$U_{\text{مؤثر}} = \frac{l^2}{2 \mu r^2} + U(r) = \frac{l^2}{2 \mu r^2}$$

بامحاسبه مستقیم می‌توانیم l را به‌دست آوریم، ولی استفاده از رابطه زیر ساده‌تر است

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2 \mu r^2}$$



$$= \frac{1}{2} \mu v_0^2$$

وقتی m_2 و m_1 از کنار یکدیگر عبور می‌کنند، $r = b$ و $\dot{r} = 0$ است (شکل ۹-۹). بنابراین

$$\frac{l^2}{2\mu b^2} = \frac{1}{2} \mu v_0^2$$

$$l = \mu b v_0$$

$$U_{\text{مؤثر}} = \frac{1}{2} \mu v_0^2 \frac{b^2}{r^2}$$

نمودار انرژی در شکل ۹-۱۰ نشان داده شده است. انرژی جنبشی مربوط به حرکت شعاعی

عبارت است از

$$K = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2$$

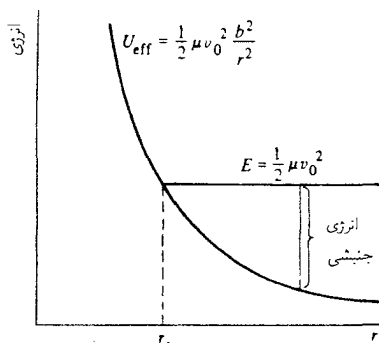
$$= E - U_{\text{مؤثر}}$$

K هیچ‌گاه منفی نیست به طوری که حرکت منحصر به ناحیه‌ای است که در آن $E - U_{\text{مؤثر}} \geq 0$ است.

ابتدا r بسیار بزرگ است. با نزدیک شدن ذرات به یکدیگر انرژی جنبشی کاهش می‌یابد، به طوری که در

نقطه برگشت یعنی r_t صفر می‌شود، در این حال سرعت شعاعی صفر و حرکت، مماسی محض است.

در نقطه برگشت $E = U_{\text{مؤثر}}(r_t)$ است که چنین نتیجه می‌دهد



$$\frac{1}{2}\mu v_t^2 = \frac{1}{2}\mu v_t^2 \frac{b^2}{r_t^2}$$

یا

$$r_t = b$$

که مطابق انتظار است، زیرا r_t کوتاهترین فاصله بین ذرات است. بلافاصله بعد از گذشتن از نقطه برگشت، افزایش می‌یابد و ذرات از هم جدا می‌شوند. در تصویر یک بعدی، ذره μ از سد پتانسیل مؤثر "منعکس" می‌شود. ■

اکنون نمودار انرژی را در مسئله اساسی حرکت سیارات به کار می‌بریم. برای نیروی جاذبه گرانشی داریم

$$f(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

$$U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

[طبق معمول برای راحتی $U(\infty) = 0$ گرفته شده است]. انرژی پتانسیل مؤثر چنین است

$$U_{\text{مؤثر}} = -\frac{Gm_1m_2}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

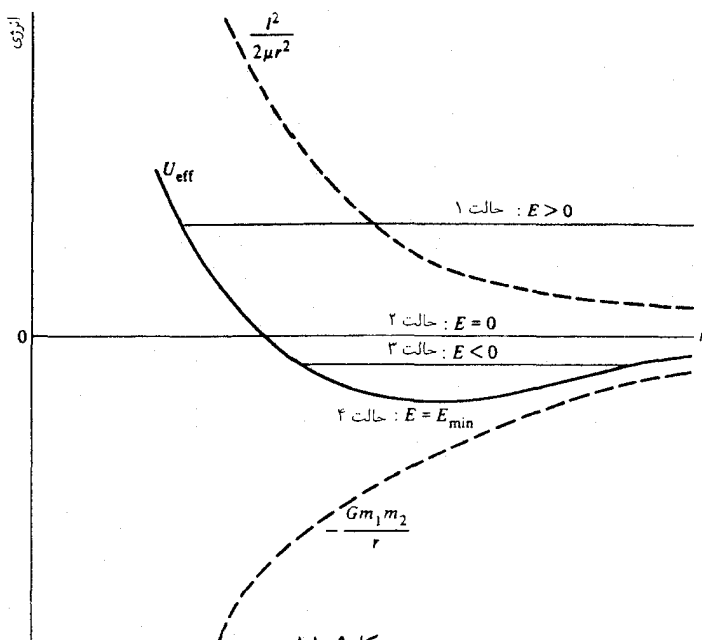
اگر $l \neq 0$ باشد در r های کوچک پتانسیل دافعه مرکزگیز $(2\mu r^2)^{-1} l^2$ حاکم است؛ درحالی که در r های بزرگ پتانسیل جاذبه گرانشی $-Gm_1m_2/r$ حاکم است. شکل ۹-۱۱ نمودار انرژی را برحسب مقادیر مختلف انرژی کل نشان می‌دهد. انرژی جنبشی حرکت شعاعی برابر $K = E - U$ و حرکت محدود به ناحیه‌ای است که برای آن $K \geq 0$. ماهیت حرکت توسط انرژی کل تعیین می‌شود. حال امکانات مختلف را ذکر می‌کنیم:

۱. $E > 0$: برای مقادیر بزرگ نامحدود است ولی اگر $l \neq 0$ باشد باید از یک مقدار کمینه بیشتر باشد. ذرات به وسیله "سد مرکزگیز" از هم جدا می‌مانند.

۲. $E = 0$: این حالت که در مرز بین حرکت مقید و نامقید قرار دارد، از نظر کیفی مانند حالت ۱ است.

۳. $E < 0$: حرکت هم برای r کوچک و هم برای r بزرگ مقید است. دو ذره تشکیل یک سیستم مقید را می‌دهند.

۴. $E = E_{\min}$: منحصر به یک مقدار است. ذرات در فاصله‌ای ثابت از یکدیگر می‌مانند. در بخش بعد خواهیم دید که حالت اول به حرکت هذلولی؛ حالت دوم به سهمی؛ حالت سوم به بیضی؛



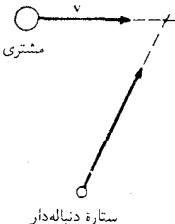
و حالت چهارم به دایره مربوط است.

یک امکان دیگر، $l = 0$ وجود دارد. در این حالت ذرات روی خط راستی حرکت می‌کنند و باهم برخورد می‌کنند، زیرا وقتی l صفر است سد مرکز‌گریز برای جدا نگهداشتن آنها وجود ندارد.

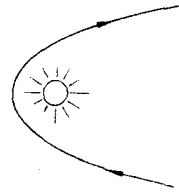
مثال ۹-۲ گیراندازی ستارگان دنباله‌دار: فرض کنید ستاره دنباله‌داری با $E > 0$ به داخل منظومه شمسی رانده شود. از بحث نمودار انرژی برای حرکت ناشی از نیروی گرانشی نتیجه می‌شود که ستاره دنباله‌دار به خورشید نزدیک و سپس از آن دور می‌شود و هرگز بازمی‌گردد (شکل ۹-۱۲). برای اینکه یک ستاره دنباله‌دار عضوی از منظومه شمسی شود، انرژی آن باید به مقداری منفی کاهش یابد. اما نیروی گرانشی پایسته است و انرژی کل ستاره دنباله‌دار نمی‌تواند تغییر کند.

اگر بیش از دو جسم در مسئله وجود داشته باشند وضعیت بسیار متفاوت است. برای مثال، اگر ستاره دنباله‌دار به وسیله سیاره وزینی مانند مشتری منحرف شود، ممکن است به سیاره انرژی منتقل کند و در منظومه شمسی اسیر شود.

فرض کنید ستاره دنباله‌دار، مطابق شکل ۹-۱۳، خورشید را دور زده و به سمت مدار مشتری برود. سرعت ستاره دنباله‌دار قبل از اینکه با مشتری برهم‌کنش قابل ملاحظه‌ای را شروع کند، v_1 و سرعت مشتری را v_2 می‌گیریم. برای سادگی فرض خواهیم کرد که مدارها در طی مدت برهم‌کنش خورشید



شکل ۹-۱۳



شکل ۹-۱۲

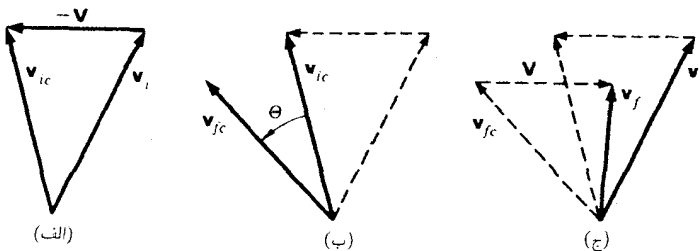
به اندازه قابل ملاحظه‌ای انحراف نمی‌یابد (شکل ۹-۱۴).

در دستگاه مرکز جرم مشتری-ستاره دنباله‌دار مشتری اصولاً در حال سکون است و سرعت مرکز جرم ستاره دنباله‌دار برابر $v_{ic} = v_i - V$ است که در شکل ۹-۱۴ (الف) نشان داده شده است. در دستگاه مرکز جرم مسیر ستاره دنباله‌دار منحرف می‌شود، ولی سرعت نهایی برابر سرعت اولیه v_{ic} است. بنابراین برهم‌کنش مطابق شکل ۹-۱۴ (ب) صرفاً v_{ic} را مثلاً به اندازه زاویه Θ در جهت جدید v_{fc} دوران می‌دهد. سرعت نهایی در دستگاه ثابت در فضا چنین است

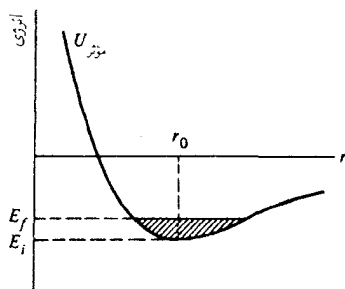
$$v_f = v_{fc} + V$$

شکل ۹-۱۴ (ج)، بردار v_f و برای مقایسه v_i را نشان می‌دهد. برای انحراف مشخص در شکل، $v_f < v_i$ است و انرژی ستاره دنباله‌دار کاهش یافته است. برعکس اگر انحراف در خلاف جهت باشد، برهم‌کنش با مشتری انرژی را افزایش خواهد داد و احتمالاً ستاره دنباله‌دار را از منظومه شمسی آزاد خواهد کرد. تعداد زیادی از ستاره‌های دنباله‌دار شناخته شده دارای انرژی نزدیک به صفرند، آنقدر نزدیک به صفر که اغلب مشکل می‌توان با مشاهده تعیین کرد که آیا مدار بیضوی ($E < 0$) است یا هذلولی ($E > 0$). بنابراین برهم‌کنش یک ستاره دنباله‌دار با مشتری اغلب برای تغییر مدار از نامقید به مقید یا بالعکس کفایت می‌کند.

سازوکار جذب انرژی از یک سیاره برای شتاب دادن به یک فضاییمای بین سیاره‌ای می‌تواند مفید



شکل ۹-۱۴



شکل ۹-۱۵

باشد. با انتخاب دقیق مدار و با صرفه جویی زیاد در سوخت فضاپیما می‌تواند از سیاره‌ای به سیارهٔ دیگر "بجهد".

فرایندی را که توصیف کردیم ممکن است با این نظر که نیروی گرانشی قویاً پایسته است، متناقض به نظر آید. فقط گرانش به ستارهٔ دنباله‌دار اثر می‌کند و با وجود این انرژی کل آن می‌تواند تغییر کند. دلیل آن این است که ستارهٔ دنباله‌دار تحت اثر نیروی گرانشی وابسته به زمان واقع می‌شود. نیروهای وابسته به زمان ذاتاً ناپایسته‌اند. با وجود این انرژی کل تمام سیستم همچنانکه انتظار داریم، پایسته است. ■

مثال ۹-۳ مدار دایره‌ای مختل شده: ماهواره‌ای به جرم m در مداری دایره‌ای به شعاع r_0 به دور زمین در گردش است. ماهواره برای حرکت به سمت زمین یکی از موتورهای خود را به طور موقت روشن می‌کند. این عمل انرژی ماهواره را تغییر می‌دهد ولی تکانهٔ زاویه‌ای را تغییر نمی‌دهد. می‌خواهیم مدار جدید ماهواره را پیدا کنیم.

نمودار انرژی شکل ۹-۱۵، انرژی اولیه E_i و انرژی نهایی E_f را نشان می‌دهد. توجه کنید روشن شدن موتور به طور شعاعی، پتانسیل مؤثر را تغییر نمی‌دهد زیرا l تغییر نکرده است. از آنجا که جرم زمین، M_e ، به مراتب بزرگتر از m است، جرم کاهیده تقریباً برابر m است و زمین عملیاً حرکت به نظر می‌رسد. اگر E_f خیلی بزرگتر از E_i نباشد. نمودار انرژی نشان می‌دهد که اختلاف r با r_0 زیاد نخواهد بود. به جای اینکه مسئلهٔ حرکت سیاره‌ای را دقیقاً حل کنیم، آنچنانکه در بخش بعد انجام خواهیم داد، با تقریب $U_{\text{مؤثر}}(r)$ در همسایگی r_0 یک پتانسیل سهمیوار می‌گیریم. همانطور که در تحلیل نوسانهای کوچک یک ذره حول نقطهٔ تعادل، بخش ۴-۱۰ دیدیم، حرکت شعاعی ماهواره با دقت خوبی یک حرکت هماهنگ ساده حول r_0 خواهد بود.

پتانسیل مؤثر، با انتخاب $C \equiv GmM_e$ چنین است

$$U_{\text{مؤثر}}(r) = -\frac{C}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$$

کمینهٔ میز U در $r = r_0$ واقع است. از آنجا که شیب در آنجا صفر است، داریم

$$\begin{aligned} \frac{dU_{\text{میز}}}{dr} \Big|_{r_0} &= 0 \\ &= \frac{C}{r_0^2} - \frac{l^2}{mr_0^3} \end{aligned}$$

که می‌دهد

$$l = \sqrt{mCr_0} \quad (۱)$$

(این نتیجه را می‌توان از کاربرد قانون دوم نیوتون برای حرکت دایره‌ای نیز پیدا کرد.) همچنانکه از بخش ۴-۱۰ به یاد داریم بسامد دستگاه نوسانی، که آن را با β نشان می‌دهیم، چنین است

$$\beta = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

که در آن

$$k = \frac{d^2 U_{\text{میز}}}{dr^2} \Big|_{r_0} \quad (۲)$$

است. از این رابطه فوراً نتیجه می‌شود

$$\beta = \sqrt{\frac{C}{mr_0^3}} = \frac{l}{mr_0^2} \quad (۳)$$

بنابراین مکان شعاعی چنین داده می‌شود

$$r = r_0 + A \sin \beta t \quad (۴)$$

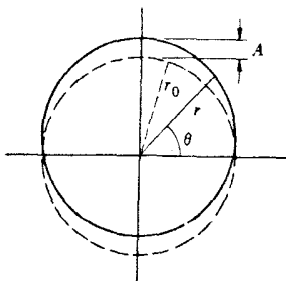
جمله $B \cos \beta t$ را حذف کرده‌ایم تا شرط اولیهٔ $r(0) = r_0$ مصداق داشته باشد. هر چند می‌توانیم دامنهٔ A را برحسب E_f محاسبه کنیم، در اینجا خود را درگیر محاسبات جبری نخواهیم کرد، جز اینکه بگوییم برای E_f تقریباً برابر با E_i ، $A \ll r_0$ است.

برای پیدا کردن مدار جدید، باید t را حذف و r را برحسب تابعی از θ بیان کنیم. برای مدار دایره‌ای داریم

$$\dot{\theta} = \frac{l}{mr_0^2} \quad (۵)$$

یا

$$\theta = \left(\frac{l}{mr_0^2} \right) t \quad (۶)$$



شکل ۹-۱۶

معادله ۵ برای منظور ما به اندازه کافی دقیق است، هر چند شعاع بعد از روشن شدن موتور به آرامی نوسان می‌کند، t فقط به عنوان جمله اصلاحی کوچکی در r در معادله ۴ ظاهر می‌شود، از جملاتی با مرتبه A و بالاتر صرف نظر می‌شود.

از معادلات ۱ و ۵ می‌بینیم که بسامد دوران ماهواره حول زمین عبارت است از

$$\frac{l}{mr_0^3} = \frac{\sqrt{mCr_0}}{mr_0^3} = \sqrt{\frac{C}{mr_0^3}}$$

و

$$\theta = \frac{l}{mr_0^3} t = \beta t \quad (7)$$

باعث تعجب است که بسامد دوران با بسامد نوسان شعاعی یکسان است. اگر معادله ۷ را در معادله ۴ جایگزین کنیم، به دست می‌آوریم

$$r = r_0 + A \sin \theta \quad (8)$$

مدار جدید با خط پر در شکل ۹-۱۶ نشان داده شده است. این مدار تقریباً شبیه دایره است. ولی مرکز آن دیگر زمین نیست.

همچنانکه در بخش ۹-۶ نشان خواهیم داد، مدار دقیق برای $E = E_f$ یک بیضی با معادله زیر است

$$r = \frac{r_0}{1 - (A/r_0) \sin \theta}$$

اگر $A/r_0 \ll 1$ باشد

$$r = \frac{r_0}{1 - (A/r_0) \sin \theta}$$

$$\begin{aligned} &\approx r_0 \left(1 + \frac{A}{r_0} \sin \theta \right) \\ &= r_0 + A \sin \theta \end{aligned}$$

در تقریب اول بر حسب A ، رابطه ۸ معادله یک بیضی است. با این حال به دست آوردن جواب دقیق مشکلتر (و غیر قابل هضم تر) از نتایج تقریبی پیدا شده از نمودار انرژی است. ■

۹-۶ حرکت سیاره‌ای

اینک به حل مسئله اصلی این فصل یعنی پیدا کردن مدار برای برهم‌کنش گرانشی می‌پردازیم

$$U(r) = -G \frac{Mm}{r} \equiv -\frac{C}{r}$$

که در آن M جرم خورشید و m جرم سیاره است. یا به طور مترادف M می‌تواند جرم سیاره و m جرم یک قمر باشد. قبل از اقدام به محاسبه، بررسی این مطلب که آیا این توصیف از برهم‌کنش خورشید و سیاره واقع‌بینانه هست یا نه مفید خواهد بود. اگر هر دو جسم کره‌هایی همگن بودند، همان‌گونه که در یادداشت ۱-۲ دیدیم، مانند دو ذره نقطه‌ای برهم‌کنش داشته و فرمولهای ما دقیق بودند. اما اکثر اعضای منظومه شمسی نه کاملاً همگن و نه کاملاً کروی هستند. برای مثال ماهواره‌های حول ماه بر اثر تمرکز جرمی در ماه مختل می‌شود، و سیاره عطارد نیز به واسطه برآمدگی استوایی خورشید اندکی مختل می‌شود. به علاوه، منظومه شمسی به هیچ عنوان یک سیستم دو جسمی نیست. هر سیاره‌ای همان‌گونه که به وسیله خورشید جذب می‌شود به وسیله تمام سیاره‌های دیگر جذب می‌شود.

خوشبختانه، هیچیک از این اثرات زیاد بزرگ نیستند. اکثر جرم منظومه شمسی در خورشید متمرکز است به طوری که جذب سیارات به وسیله یکدیگر بسیار ضعیف است. بزرگترین برهم‌کنش بین مشتری و زحل وجود دارد. اثر این اختلال عمدتاً در تغییر سرعت هر یک از سیارات است. به طوری که دیگر قانون مساحت‌های برابر به طور دقیق حاکم نیست. با این حال این اختلال هرگز باعث جابه‌جایی مشتری بیشتر از چند دقیقه‌کمانی از وضع عادی آن نمی‌شود. (یک دقیقه‌کمانی تقریباً برابر یک سی‌ام قطر ماه است که از زمین دیده می‌شود.) در عمل، ابتدا مدار سیاره بدون در نظر گرفتن سیارات دیگر محاسبه می‌شود و سپس تصحیحات کوچک در مدار به واسطه وجود آنها به عمل می‌آید. چنین طریقه‌ای، روش اختلال نامیده می‌شود. (در واقع سیارات دوردست از روی بررسی اثر اختلال آنها بر مدار سیارات شناخته شده، کشف شده‌اند.) به علاوه، اگر جسمی دقیقاً همگن یا دارای تقارن کروی نباشد، می‌توان نشان داد که میدان گرانشی آنها علاوه بر جمله اصلی $1/r^2$ دارای جملاتی وابسته به $1/r^3$ و $1/r^4$ ، و غیره هست.

این ضرایب به نسبت اندازه جسم به r بستگی دارد. در مقیاس منظومه شمسی از جملات با توان بالا می‌توان صرف‌نظر کرد، اگرچه ممکن است برای قمرهای نزدیک اهمیت پیدا کنند.

در بازگشت به مسئله آرمانی حرکت سیاره‌ای $U(r) = -C/r$ ، درمی‌یابیم که با استفاده از انتگرالهای نامعین، معادله مدار ۹-۱۶ چنین می‌شود

$$\theta - \theta_0 = l \int \frac{dr}{r(\sqrt{\mu E r^2 + 2\mu C r - l^2})^{\frac{3}{2}}}$$

که در آن θ_0 ثابت انتگرال‌گیری است. انتگرال نسبت به r در جدول انتگرالها نوشته شده است. نتیجه به‌قرار زیر است

$$\theta - \theta_0 = \arcsin \left(\frac{\mu C r - l^2}{r \sqrt{\mu^2 C^2 + 2\mu E l^2}} \right)$$

یا

$$\mu C r - l^2 = r \sqrt{\mu^2 C^2 + 2\mu E l^2} \sin(\theta - \theta_0)$$

حل آن برای r چنین است

$$r = \frac{(l^2/\mu C)}{1 - \sqrt{1 + (2El^2/\mu C^2)} \sin(\theta - \theta_0)} \quad (18-9)$$

معمولاً $\theta_0 = -\pi/2$ قرار می‌دهیم و پارامترهای زیر را معرفی می‌کنیم

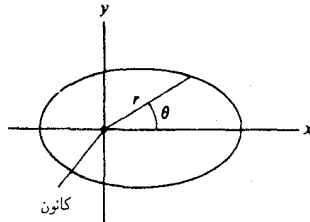
$$r_0 \equiv \frac{l^2}{\mu C} \quad (19-9)$$

$$\epsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu C^2}} \quad (20-9)$$

از نظر فیزیکی، r_0 شعاع مدار دایره‌ای متناظر با l ، μ و C داده شده است. پارامتر بدون بعد ϵ ، خروج از مرکز نامیده می‌شود و همانطور که خواهیم دید مشخص‌کننده شکل مدار است. با این پارامترها معادله ۹-۱۸ چنین می‌شود

$$r = \frac{r_0}{1 - \epsilon \cos \theta} \quad (21-9)$$

معادله ۹-۲۱ در دستگاه دکارتی که در آن $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ است آشناتر به نظر می‌رسد. با بازنویسی آن به شکل $r - \epsilon r \cos \theta = r_0$ داریم



شکل ۹-۱۷

$$\sqrt{x^2 + y^2} - \epsilon x = r.$$

یا

$$(1 - \epsilon^2)x - 2r_0 \epsilon x + y^2 = r_0^2 \quad (9-22)$$

امکانات مختلف چنین اند:

۱. حالت $\epsilon > 1$: ضرایب x^2 و y^2 نابرابر و با علامت مختلف اند؛ معادله به شکل $y^2 - Ax^2 - Bx = \text{const.}$ است، که معادله یک هذلولی است. از رابطه ۹-۲۰ نتیجه می شود که $\epsilon > 1$ است هرگاه $E > 0$ باشد.

۲. حالت $\epsilon = 1$: معادله ۹-۲۲ چنین می شود

$$x = \frac{y^2}{2r_0} - \frac{r_0}{2}$$

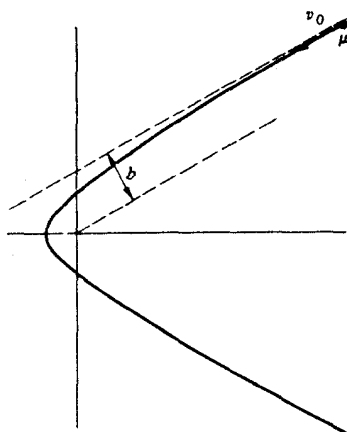
این معادله یک سهمی است $\epsilon = 1$ است، وقتی که $E = 0$ باشد.

۳. حالت $0 \leq \epsilon < 1$: ضرایب x^2 و y^2 نامساوی ولی هم علامت اند؛ معادله به شکل $y^2 + Ax^2 - Bx = \text{const.}$ است. جمله خطی از x چنین معنی می دهد که مرکز هندسی بیضی در مبدأ مختصات نیست. همان گونه که در یادداشت ۹-۱۱ اثبات شد، یکی از کانونهای بیضی در مبدأ واقع است (شکل ۹-۱۷). برای $\epsilon < 1$ مقادیر E عبارت اند از

$$-\frac{\mu C^2}{2l^2} \leq E < 0$$

وقتی $E = -\mu C^2 / 2l^2$ است $\epsilon = 0$ است و معادله مدار $x^2 + y^2 = r_0^2$ و بیضی مبدل به دایره می شود.

مثال ۹-۴ مدارهای هذلولی: برای استفاده از معادله مدار، باید بتوان مدار را برحسب پارامترهای تجربی در دسترس بیان کرد. برای مثال اگر مدار نامقید باشد، می توان انرژی و مسیر اولیه را تعیین کرد.



شکل ۱۸-۹

در این مثال نشان خواهیم داد که چگونه برخی از پارامترهای تجربی را در حالت مدار هذلولوی به مسیر ارتباط دهیم. نتیجه‌ها را می‌توان برای حرکت یک ستاره دنباله‌دار حول خورشید یا مسیر یک ذره باردار پراکنده شده به وسیله هسته اتمی به کار برد.

فرض کنید سرعت ذره μ هنگامی که دور از مبدأست v_0 باشد، و فرض کنید مطابق شکل ۱۸-۹ مسیر اولیه در فاصله b از مبدأ بگذرد. معمولاً پارامتر برخورد نامیده می‌شود. تکانه زاویه‌ای l و انرژی E چنین‌اند

$$l = \mu v_0 b$$

$$E = \frac{1}{2} \mu v_0^2$$

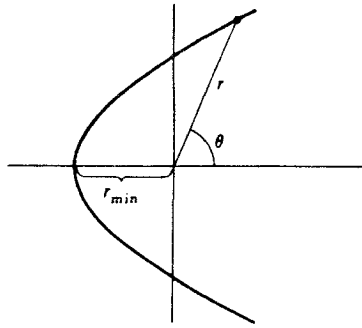
برای یک نیروی متناسب با عکس مجذور فاصله، $U(r) = -C/r$ است و معادله مدار چنین

می‌شود

$$r = \frac{r_0}{1 - \epsilon \cos \theta}$$

که در آن

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{l^2}{\mu C} = \frac{\mu v_0^2 b^2}{C} \\ &= \frac{2Eb^2}{C} \end{aligned}$$



شکل ۹-۱۹

$$\begin{aligned} \epsilon &= \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu C^2}} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{2Eb}{C}\right)^2} \end{aligned}$$

وقتی $\theta = \pi$ باشد، $r = r_{\min}$ است (شکل ۹-۱۹)

$$\begin{aligned} r_{\min} &= \frac{r_0}{1 + \epsilon} \\ &= \frac{2Eb^2/C}{1 + \sqrt{1 + (2Eb/C)^2}} \end{aligned}$$

برای $E \rightarrow \infty$ داریم $r_{\min} \rightarrow b$. بنابراین $b < r_{\min} < \infty$ است.

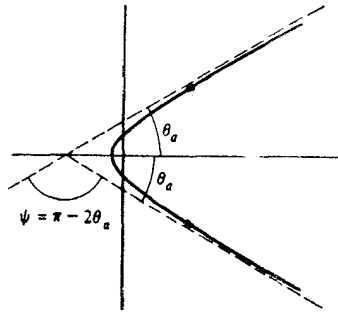
زاویهٔ مجانبها θ_a را می‌توان از معادلهٔ مدار با میل دادن $r \rightarrow \infty$ به دست آورد. در نتیجه داریم

(شکل ۹-۲۰)

$$\theta_a = \frac{1}{\epsilon}$$

در طی زمان برهم‌کنش، μ به اندازهٔ زاویهٔ $\theta_a = \pi - 2\theta_a$ منحرف می‌شود. زاویهٔ انحراف ψ اگر $1 \ll (2Eb/C)^2$ باشد به 180° نزدیک می‌شود.

آرایش کلاسیک رادفورد که مدل هسته‌ای اتم را محقق ساخت، نشان داد که ذرات سریع آلفا (هستهٔ هلیم با دوبرار الکتریکی) با اتمهای منفرد موجود در ورقهٔ نازکی از طلا مطابق با پتانسیل کولن (شکل ۹-۲۱)، حتی اگر r_{\min} بسیار کمتر از شعاع اتم باشد. این اثباتی بر این مطلب است که بار الکتریکی اتم باید در حجم کوچکی، هسته، متمرکز باشد. جالب توجه اینکه، رادفورد قادر نبود تعیین کند که آیا هسته به وسیلهٔ ذرات آلفا جذب ($C' > 0$) و یا دفع ($C' < 0$) شده‌اند. خروج از مرکز،



شکل ۹-۲۰

و از آنجا زاویه پراکندگی بستگی به $(2Eb/C')^2$ دارد، که تعیین علامت جبری پارامتر C' را ناممکن می‌سازد.

مدارهای بیضوی ($0 < \epsilon < 1$) آنقدر مهم‌اند که جا دارد خواص آن‌را با تفصیل بیشتری مطالعه کنیم. از معادله مدار یا معادله ۹-۲۱ داریم

$$r = \frac{r_0}{1 - \epsilon \cos \theta}$$

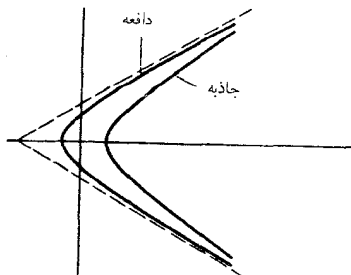
مقدار بیشینه r در $\theta = 0^\circ$ است

$$r_{\max} = \frac{r_0}{1 - \epsilon} \quad (9-23)$$

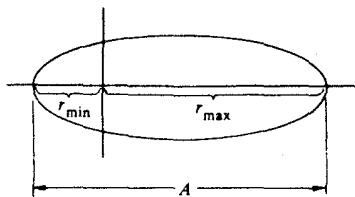
مقدار کمینه r در $\theta = \pi$ ظاهر می‌شود

$$r_{\min} = \frac{r_0}{1 + \epsilon} \quad (9-24)$$

طول قطر بزرگ برابر است با (شکل ۹-۲۲)



شکل ۹-۲۱



شکل ۲۲-۹

$$\begin{aligned}
 A &= r_{\min} + r_{\max} \\
 &= r_0 \left(\frac{1}{1+\epsilon} + \frac{1}{1-\epsilon} \right) \\
 &= \frac{2r_0}{1-\epsilon^2}
 \end{aligned} \tag{۲۵-۹}$$

نوشتن r_0 و ϵ بر حسب E, l, μ, C با استفاده از معادلات ۹-۱۹ و ۹-۲۰ به دست می‌دهد

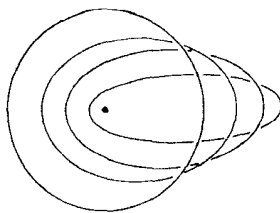
$$\begin{aligned}
 A &= \frac{2r_0}{1-\epsilon^2} \\
 &= \frac{2l^2/(\mu C)}{1 - [1 + 2El^2/(\mu C^2)]} \\
 &= \frac{C}{(-E)}
 \end{aligned} \tag{۲۶-۹}$$

طول قطر بزرگ مستقل از l است؛ مدارهایی با قطرهای بزرگ مساوی، انرژیهای مساوی دارند. برای مثال، تمام مدارهای شکل متناظر بایک مقدار انرژی E است.

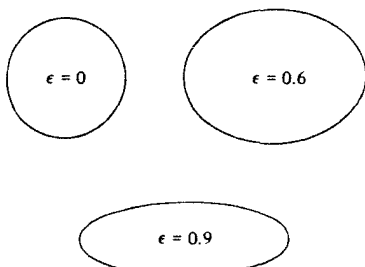
نسبت r_{\max}/r_{\min} چنین است

$$\begin{aligned}
 \frac{r_{\max}}{r_{\min}} &= \frac{r_0/(1-\epsilon)}{r_0/(1+\epsilon)} \\
 &= \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}
 \end{aligned}$$

وقتی ϵ نزدیک به صفر است $r_{\max}/r_{\min} \approx 1$ و بیضی تقریباً دایره می‌شود. وقتی ϵ نزدیک به واحد



شکل ۲۳-۹



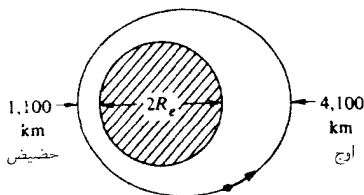
شکل ۹-۲۴

است، بیضی خیلی کشیده است. شکل بیضی تماماً به وسیله ϵ تعیین می‌شود؛ $\epsilon = 0$ فقط مقیاس را تعیین می‌کند (شکل ۹-۲۴).

خروج از مرکز مدار سیارات و ستاره دنباله دارهالی در جدول ۹-۱ درج شده است. این جدول نشان می‌دهد که چرا نظریه بطلمیوسی مبنی بر حرکت دایره‌ای سیارات، در مشاهدات اولیه به طور معقولی موفق بوده است. تمام مدارهای سیاره‌ای بجز عطارد و پلوتو، دارای خروج از مرکزی نزدیک به صفر هستند و تقریباً دایره‌اند. عطارد هرگز در فاصله دور از خورشید قرار نگرفته و دیدن آن مشکل است. پلوتو تا سال ۱۳۰۹ هجری شمسی کشف نشده بود، به طوری که هیچیک از این سیارات مانعی برای طرفداران بطلمیوس نبودند. در میان سیاراتی که به آسانی قابل مشاهده اند مریخ بیشترین خروج از مرکز را دارد. و حرکت آن موجب سستی اعتقاد نسبت به نظریه بطلمیوسی بود. کپلر قانون حرکت سیاره‌ای خود را باتلاش در تطبیق محاسبات خود با مشاهدات دقیق تیکو براهه از مدار مریخ کشف کرد.

جدول ۹-۱

سیارات	خروج از مرکز
عطارد	$0^{\circ} 206$
زهره	$0^{\circ} 007$
زمین	$0^{\circ} 17$
مریخ	$0^{\circ} 93$
مشتری	$0^{\circ} 48$
زحل	$0^{\circ} 55$
اورانوس	$0^{\circ} 51$
نپتون	$0^{\circ} 07$
پلوتو	$0^{\circ} 252$
ستاره دنباله دارهالی	$0^{\circ} 967$



شکل ۲۵-۹

در یادداشت ۱-۹ خواص هندسی مدار بیضوی به دست آمده است. اینک به چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۵-۹ مدار ماهواره: یک ماهواره به جرم $m = ۲۰۰۰ \text{ kg}$ در مداری بیضوی حول زمین در گردش است. ارتفاع حضیض (نزدیکترین فاصله از زمین) ۱۱۰۰ کیلومتر و ارتفاع اوج (دورترین فاصله از زمین) ۴۱۰۰ کیلومتر است. انرژی E و تکانه زاویه‌ای l چقدر است؟ ماهواره در حضیض و اوج با چه سرعتی حرکت می‌کند؟

از آنجاکه $m \ll M_e$ است می‌توانیم قرار دهیم $\mu \approx m$ و فرض کنیم زمین ثابت است. شعاع زمین برابر $R_e = ۶۴۰۰ \text{ km}$ است. بنابراین قطر بزرگ مدار برابر است با (شکل ۲۵-۹)

$$A = [۱۱۰۰ + ۴۱۰۰ + ۲(۶۴۰۰)] \text{ km} \\ = ۱,۸ \times ۱۰^۷ \text{ m}$$

با دانستن A ، می‌توانیم E را از معادله ۲۶-۶ پیدا کنیم

$$E = -\frac{C}{A} \quad \text{یا} \quad A = \frac{C}{(-E)}$$

$C = GmM_e = m.gR_e^2$ است، زیرا $g = GM_e/R_e^2$ است. مقدار عددی آن به قرار زیر است

$$C = (۲ \times ۱۰^۳)(۹,۸)(۶,۴ \times ۱۰^۶)^۲ = ۸,۰ \times ۱۰^{۱۷} \text{ Jm}$$

$$E = -\frac{C}{A} \\ = -۴,۵ \times ۱۰^{۱۰} \text{ J}$$

انرژی اولیه ماهواره قبل از استقرار چنین بود

$$E_i = -\frac{GmM_e}{R_e}$$

$$= -\frac{C}{R_e}$$

$$= -۱۲٫۵ \times ۱۰^{۱۰} \text{ J}$$

انرژی لازم برای قرار دادن ماهواره در مدار با صرفنظر کردن از اتلاف ناشی از اصطکاک برابر $E - E_i = ۸ \times ۱۰^{۱۰} \text{ J}$ است.

تکانه زاویه‌ای را می‌توانیم از خروج از مرکز پیدا کنیم. چون داریم

$$r_{\max} = \frac{r_0}{1 - \epsilon} \quad \text{و} \quad r_{\min} = \frac{r_0}{1 + \epsilon}$$

پس

$$(1 + \epsilon)r_{\min} = (1 - \epsilon)r_{\max}$$

و

$$\epsilon = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}}$$

$$= \frac{r_{\max} - r_{\min}}{A}$$

$$= \frac{3 \times ۱۰^۲}{۱٫۸ \times ۱۰^۴}$$

$$= \frac{۱}{۶}$$

از تعریف ϵ ، معادله ۹-۲۰ داریم

$$\epsilon^2 = 1 + \frac{2El^2}{mC^2}$$

که به دست می‌دهد

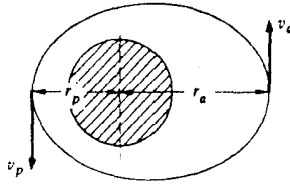
$$l = ۱٫۲ \times ۱۰^{۱۴} \text{ kg.m}^2/\text{s}$$

می‌توانیم سرعت ماهواره، v را برای هر r از معادله انرژی پیدا کنیم

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{C}{r}$$

در حضيض $r = (۱۱۰۰ + ۶۴۰۰) \text{ km} = ۷٫۵ \times ۱۰^۶ \text{ m}$ و سرعت برابر است با

$$v_p = ۷۹۰۰ \text{ m/s} \quad (۱)$$



شکل ۹-۲۶

پیدا کردن سرعت، در اوج v_a ساده تر است. توجه کنید که در حضیض و در اوج سرعت ماهواره کاملاً مماسی است بنابراین به دلیل بایستگی تکانه زاویه‌ای داریم (شکل ۹-۲۶)

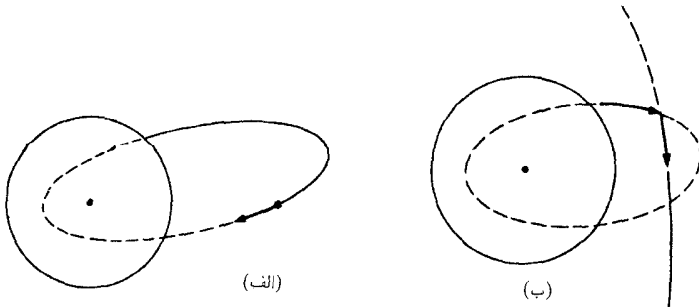
$$\mu v_p r_p = \mu v_a r_a$$

از آنجا خواهیم داشت

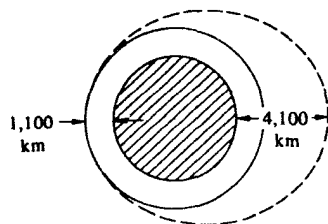
$$\begin{aligned} v_a &= \frac{v_p r_p}{r_a} \\ &= 5600 \text{ m/s} \end{aligned}$$

فرض کنید جسمی از سطح زمین با سرعت اولیه v پرتاب شود. اگر v کمتر از سرعت فراری یعنی $11.2 \times 10^4 \text{ m/s}$ باشد، انرژی کل جسم منفی است و جسم در مداری بیضوی که یک کانون آن در مرکز زمین است حرکت می‌کند (شکل‌های ۹-۲۷). همانطور که شکل ۹-۲۷ (الف) نشان می‌دهد جسم به ناچار به زمین بازمی‌گردد.

برای قرار دادن یک فضاییما در مداری حول زمین، اندازه و جهت سرعت آن در نقطه‌ای که مدارهای



شکل ۹-۲۷



شکل ۹-۲۸

جدید و قدیم باهم تلاقی می‌کنند باید تغییر کنند. مانورهای انتقال مداری در کیهان‌نوردی به دفعات مورد نیازند. برای مثال، در پرواز آپولو به ماه، سفینه ابتدا در مداری نزدیک زمین قرار داده شد و سپس به مسیری به سوی ماه منتقل شد. شکل ۹-۲۷ (ب) مثال بعدی اصول انتقالی مداری را نشان می‌دهد.

مثال ۹-۶ مانور ماهواره: یکی از رایجترین مانورهای مداری، انتقال بین مدارهای بیضوی و دایره‌ای است. این مانور برای قرار دادن فضاییما در مدارهای دور یا قرار دادن ماهواره کاوشگر سیاره‌ای در مدار نزدیک به زمین برای بررسی سطح سیاره به‌کار می‌رود.

فرض کنید برای مثال می‌خواهیم مطابق شکل ۹-۲۸، ماهواره مثال ۹-۵ را به مداری دایره‌ای در حضیض آن منتقل کنیم. همچنین فرض کنید E و l انرژی و تکانه زاویه‌ای اولیه ماهواره E' و l' پارامترهای مدار جدید باشند.

تحلیل خود را با پیدا کردن E, l, E', l' آغاز می‌کنیم. برای سادگی فرض می‌کنیم مقدار سوخت از بین رفته موشک ماهواره حین انتقال در مقایسه با جرم ماهواره $m = 2000 \text{ kg}$ ناچیز باشد.

از معادله ۹-۲۵ داریم $E = -C/A$ و چون $E = 12/5$ و $A/r_p = 18 \times 10^6 / (7.5 \times 10^6) = 12/5$ است، پس

$$E = -\frac{5}{12} \frac{C}{r_p} \quad (1)$$

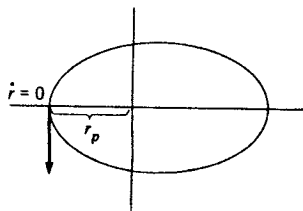
که در آن شعاع حضیض و بنابراین شعاع مدار دایره‌ای مورد نظر است.

یک راه آسان برای پیدا کردن l استفاده از معادله یک بعدی انرژی، یعنی معادله ۹-۹ است:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{C}{r} \quad (2)$$

در حضیض $r = r_p$ و $\dot{r} = 0$ است، و پیدا می‌کنیم (شکل ۹-۲۹)

$$l^2 = \frac{5}{6} m C r_p \quad (3)$$



شکل ۹-۲۹

برای مدار دایره‌ای، قطر بزرگ برابر $2r_p$ است و بنابراین

$$E' = -\frac{C}{2r_p} \quad (۴)$$

برای مدار دایره‌ای $\dot{r} = 0$ است و از معادله یک بعدی انرژی داریم

$$E' = \frac{l'^2}{2mr_p^2} - \frac{C}{r_p}$$

که به دست می‌دهد

$$l'^2 = mCr_p \quad (۵)$$

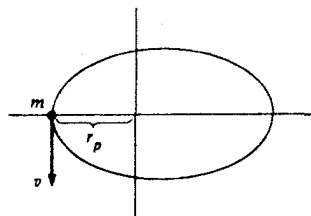
چگونه می‌توانیم ماهواره را از E و l به E' و l' منتقل کنیم؟ از آنجاکه $E' < E$ و $l' < l$ است، می‌خواهیم برای کم کردن انرژی و همچنین تکانه، پیشرانده ترمزی را به کار ببریم. پیشرانده شعاعی در حضیض انرژی را تغییر می‌دهد ولی تکانه زاویه‌ای را تغییر نمی‌دهد. درحالی‌که پیشرانده مماسی هر دو پارامتر را تغییر می‌دهد. مدارهای قدیم و جدید در محل تقاطع مماس‌اند و باید انتظار داشته باشیم که پیشرانده مماسی به تنهایی کافی خواهد بود. حال نشان می‌دهیم که این مطلب صحیح است.

در حضیض v کاملاً مماسی است و پیشرانده مماسی سرعت را از v به v' تغییر می‌دهد. از معادله انرژی داریم

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{C}{r}$$

و در حضیض با استفاده از معادله ۱ داریم

$$\begin{aligned} v^2 &= \frac{2}{m} \left(E + \frac{C}{r_p} \right) \\ &= \frac{2}{m} \frac{C}{mr_p} \end{aligned}$$



شکل ۹-۳۰

به همین ترتیب با استفاده از معادله ۴ داریم

$$\begin{aligned} v'^2 &= \frac{2}{m} \left(E' + \frac{C}{r_p} \right) \\ &= \frac{C}{mr_p} \end{aligned}$$

حال ببینیم که آیا تکانه زاویه‌ای مقدار مطلوب را دارد یا نه. در حضيض مطابق شکل ۹-۳۰، v عمود بر r است و

$$\begin{aligned} l &= mr_p v \\ &= mr_p \sqrt{\frac{\gamma}{\epsilon} \frac{C}{mr_p}} \\ &= \sqrt{\frac{\gamma}{\epsilon} mr_p C} \end{aligned}$$

همچنانکه قبلاً در معادله ۳، پیدا کرده‌ایم. به همین ترتیب خواهیم داشت

$$\begin{aligned} l' &= mr_p v' \\ &= mr_p \sqrt{\frac{C}{mr_p}} \\ &= \sqrt{mr_p C} \end{aligned}$$

که مطابق با معادله ۵، همان مقدار مطلوب است.

مانور می‌تواند با اعمال پیشرانه ترمزی مماس بر مسیر در حضيض انجام پذیرد تا سرعت ماهواره را از $v = \sqrt{\gamma C / (\epsilon mr_p)} = 7900 \text{ m/s}$ به $v' = \sqrt{C / (mr_p)} = 7300 \text{ m/s}$ تنزل دهد. مانورهای مدار عملی، عموماً طوری طرح‌ریزی می‌شوند تا در سوخت صرفه جویی شود. با مراجعه

به بحث ما در مورد موشکها در بخش ۳-۵، اگر جرم فضاپیما در حین روشن بودن موشک از M_i به $M_i - \Delta M$ تغییر کند، سرعت آن به اندازه Δv زیر تغییر می‌کند

$$\Delta v = -u \ln \left(\frac{M_i}{M_i - \Delta M} \right)$$

بنابراین هرچه تغییر سرعت برای انجام مانور کوچکتر باشد، صرفه‌جویی بیشتری در سوخت صورت خواهد گرفت.

کارایی مانور توصیف شده در این مثال، در انتقال زیر به حداکثر می‌رسد

$$\begin{aligned} E - E' &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv'^2 \\ &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m(\mathbf{v} - \Delta\mathbf{v})^2 \\ &\approx m\mathbf{v} \cdot \Delta\mathbf{v} \end{aligned}$$

$|\mathbf{v}|$ در حضيض بیشترین مقدار را دارد و چون $\Delta\mathbf{v}$ موازی با \mathbf{v} است، $|\Delta\mathbf{v}|$ درجایی که مقدار مورد نیاز $E - E'$ تأمین می‌شود کمترین مقدار را داراست. ■

۷-۹ قوانین کپلر

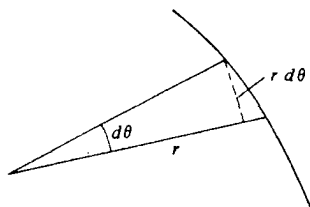
یوهان کپلر دستیار تیکو براهه ستاره‌شناس قرن شانزدهم دانمارک بود. آنها در مجموع استعداد فوق‌العاده‌ای از خود نشان دادند. براهه اندازه‌گیرهای نجومی دقیق و بی‌سابقه‌ای انجام داد و کپلر که دارای نبوغ ریاضی و شهامت بی‌همتایی بود نشان داد که داده‌های براهه می‌توانند در سه قانون تجربی زیر جمع شوند. این کار دشواری بود، به طوری که محاسبات پرزحمت کپلر برای پیدا کردن سه قانون زیر، ۱۸ سال طول کشید.

۱. هر سیاره روی یک بیضی حرکت می‌کند که خورشید در یک کانون آن قرار دارد.
۲. بردار شعاع از خورشید تا سیاره، مساحت‌های برابر را در زمانهای برابر جاروب می‌کند.
۳. زمان تناوب گردش T یک سیاره حول خورشید با قطر بزرگ بیضی A رابطه زیر را دارد

$$T^2 = kA^3$$

که در اینجا k برای تمام سیارات یکسان است.

قانون اول کپلر از نتایج بخش قبل به دست می‌آید: مدارهای بیضوی مشخصه نیروی متناسب باعکس مجذور فاصله است. قانون دوم همچنانکه در مثال ۶-۱۳ نشان دادیم، جنبه عمومی حرکت



شکل ۳۱-۹

ناشی از نیروی مرکزی است.

قانون سوم کیلر با روش زیر به سادگی اثبات شده است: با تعریف تکانه زاویه‌ای، معادله ۸-۹ الف، شروع می‌کنیم

$$l = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

که می‌تواند چنین نوشته شود

$$\frac{l}{2\mu} dt = \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad (27-9)$$

ولی $\frac{1}{2} r^2 d\theta$ جزء دیفرانسیل سطح در مختصات قطبی است (شکل ۳۱-۹). در یک دوره تناوب کامل، تمام سطح بیضی جاروب می‌شود، و انتگرال‌گیری از معادله ۲۷-۹ نتیجه می‌دهد (شکل ۳۲-۹)

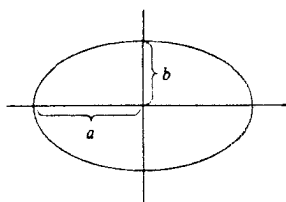
$$\frac{l}{2\mu} T = \text{سطح بیضی} = \pi ab \quad (28-9)$$

که در آن $a = A/2$ نیم محور بزرگ بیضی و b نیم محور کوچک بیضی است. از معادله ۲۶-۹

$$a = \frac{C}{(-2E)}$$

و از یادداشت ۱-۹ داریم

$$b = \frac{l}{\sqrt{-2\mu E}}$$



شکل ۳۲-۹

جدول ۹-۲*

ماهواره	ϵ	A, km	T, min	A^3/T^2
کاسموس ۳۸۵	۰٫۰۰۲	۱۳۸۲۳	۹۵٫۲	$۲٫۹۱ \times ۱۰^۸$
اکسیپلورر ۱۷	۰٫۰۴۷	۱۳۹۲۸	۹۶٫۳۹	$۲٫۹۱ \times ۱۰^۸$
کاسموس ۳۷۴	۰٫۱۰۴	۱۵۴۴۶	۱۱۲٫۳	$۲٫۹۲ \times ۱۰^۸$
کاسموس ۳۸۲	۰٫۲۶۰	۱۸۱۱۷	۱۴۳	$۲٫۹۱ \times ۱۰^۸$
ATS۲	۰٫۴۵۵	۲۴۱۲۳	۲۱۹٫۷	$۲٫۹۱ \times ۱۰^۸$
۱۵ امین مولینا I	۰٫۷۳۸	۵۲۵۳۷	۷۰۶	$۲٫۹۱ \times ۱۰^۸$
ارِس ۱۳	۰٫۸۸۷	۱۱۷۳۹۰	۲۳۵۲	$۲٫۹۲ \times ۱۰^۸$
اوگو ۳	۰٫۹۰۱	۱۳۵۲۷۰	۲۹۱۷	$۲٫۹۱ \times ۱۰^۸$
اکسیپلورر ۳۴	۰٫۹۴۰	۲۲۴۱۵۰	۶۲۲۵	$۲٫۹۱ \times ۱۰^۸$
اکسیپلورر ۲۸	۰٫۹۵۲	۲۷۳۷۴۰	۸۴۰۰	$۲٫۹۱ \times ۱۰^۸$

* داده‌ها از کاتالوگ داده‌های مرکز اطلاعات علوم فضایی ملی و مرکز اطلاعات جهانی A گرفته شده است. این کاتالوگ ارتفاع ماهواره تا سطح زمین را می‌دهد. برای محاسبه A فرض کرده‌ایم که قطر زمین برابر ۱۲٫۷۵۷ کیلومتر باشد.

معادله ۹-۲۸ چنین می‌شود

$$\begin{aligned}
 T^2 &= \frac{4\mu^2}{l^2} \pi^2 a^2 b^2 \\
 &= \frac{\pi^2 \mu C^2}{(-2E^2)} \\
 &= \frac{\pi^2 \mu}{2C} A^3 \quad (29-9)
 \end{aligned}$$

که در آن $A = C/(-E)$ اختیار شده است. از آنجا که $C = GMm$ و $\mu = Mm/(M+m)$ است، بالاخره به دست می‌آید

$$T^2 = \frac{\pi^2}{2(M+m)G} A^3 \quad (30-9)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که قانون سوم کپلر دقیق نیست. T^2/A^3 کمی به جرم سیاره بستگی دارد. با این حال، حتی برای بزرگترین سیاره (مشتری) m/M فقط در حدود $1/1000$ است، به طوری که قانون سوم کپلر با دقت خوبی در منظومه شمسی صادق است.

قوانین کپلر برای حرکت قمرها حول سیاره‌ها نیز به کار می‌رود. در جدول ۹-۲ نشان داده‌ایم که چگونه قانون سوم، قانون زمان تناوبها، برای تعدادی از ماهواره‌های زمین برقرار است. نسبت A^3/T^2 تا

یک قسمت درصد ثابت است. هرچند که زمان تناوب با ضریب 10° تغییر می‌کند. برای تطبیق دقیقتر، شکل غیرکروی زمین و اختلال ناشی از ماه نیز باید به حساب آید.

مثال ۷-۹ قانون دوره تناوبها: اینجا یک راه کلی‌تر را برای به دست آوردن قانون دوره تناوبها ارائه می‌دهیم. با شروع از معادله ۹-۱۳ و با داشتن $U(r) = -C/r$ داریم

$$\int_{t_a}^{t_b} dt = \mu \int_{r_a}^{r_b} \frac{r dr}{(\sqrt{\mu E r^2 + 2\mu C r - l^2})^{3/2}}$$

جواب انتگرال در جدولهای مرجع آمده است. برای حالت مورد نظر $E < 0$ است و پیدا می‌کنیم

$$t_b - t_a = \frac{\sqrt{2\mu E r^2 + 2\mu C r - l^2}}{2E} \Big|_{r_a}^{r_b} - \left(\frac{\mu C}{2E} \right) \frac{1}{\sqrt{-2\mu E}} \arcsin \left(\frac{-2\mu E r - \mu C}{\sqrt{\mu^2 C^2 + 2\mu E l^2}} \right) \Big|_{r_a}^{r_b}$$

خوشبختانه این نتیجه را می‌توان بسیار ساده کرد. برای یک دوره کامل $r_b = r_a$ و $t_b - t_a = T$ است. جمله اول طرف راست حذف می‌شود، و در جمله دوم آرک سینوس به 2π تبدیل می‌شود. نتیجه عبارت است از

$$T = \frac{\pi \mu C}{(-E) \sqrt{-2\mu E}}$$

یا

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{\pi^2 \mu C^2}{(-2E^2)} \\ &= \frac{\pi^2 \mu}{2C} A^2 \end{aligned}$$

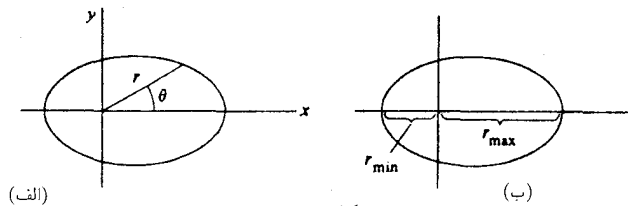
که همان معادله ۹-۲۹ است که قبلاً پیدا کردیم.

یادداشت ۹-۱ خواص بیضی

معادله هر مقطع مخروطی، در مختصات قطبی چنین است

$$r = \frac{r_0}{1 - \epsilon \cos \theta} \quad (1)$$

با تبدیل آن به مختصات دکارتی $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $x = r \cos \theta$ معادله ۱ چنین می‌شود (شکل ۹-۳۳ الف)



شکل ۹-۳۳

$$(1 - \epsilon^2)x^2 - 2r_0 x + y^2 = r_0^2 \quad (2)$$

بیضی متناظر با حالت $0 \leq \epsilon < 1$ است. بیضی توصیف شده به وسیله معادلات ۱ و ۲ نسبت به محور x ها متقارن است ولی مرکز آن در مبدأ قرار ندارد.

می توانیم از معادله ۱ برای تعیین ابعاد مهم بیضی استفاده کنیم. بیشینه مقدار r که در $\theta = 0$ ظاهر می شود عبارت است از (شکل ۹-۳۳ ب)

$$r_{\max} = \frac{r_0}{1 - \epsilon}$$

کمینه مقدار r که در $\theta = \pi$ رخ می دهد عبارت است از

$$r_{\min} = \frac{r_0}{1 + \epsilon}$$

قطر بزرگ عبارت است از

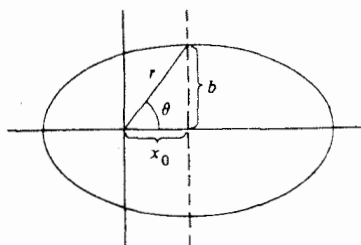
$$\begin{aligned} A &= r_{\max} + r_{\min} \\ &= r_0 \left(\frac{1}{1 - \epsilon} + \frac{1}{1 + \epsilon} \right) \\ &= \frac{2r_0}{1 - \epsilon^2} \end{aligned} \quad (3)$$

نیم محور بزرگ عبارت است از

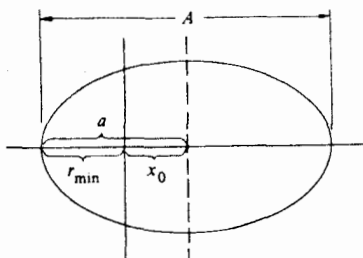
$$\begin{aligned} a &= \frac{A}{2} \\ &= \frac{r_0}{1 - \epsilon^2} \end{aligned}$$

فاصله مبدأ تا مرکز بیضی به قرار زیر است (شکل ۹-۳۴)

$$x_0 = a - r_{\min}$$



شکل ۳۵-۹



شکل ۳۴-۹

$$= r_0 \left(\frac{1}{1 - \epsilon^2} - \frac{1}{1 + \epsilon} \right)$$

$$= \frac{r_0 \epsilon}{1 - \epsilon^2} \quad (۴)$$

می بینیم که خروج از مرکز برابر نسبت x_0/a است. برای پیدا کردن نیم محور کوچک $b = \sqrt{r^2 - x_0^2}$ توجه کنید نوک نیم محور کوچک دارای مختصات زاویه ای داده شده با رابطه $\cos \theta = x_0/r$ است (شکل ۳۵-۹). داریم

$$r = \frac{r_0}{1 - \epsilon \cos \theta}$$

$$= \frac{r_0}{1 - \epsilon x_0/r}$$

یا

$$r = r_0 + \epsilon x_0 = r_0 \left(1 + \frac{\epsilon^2}{1 - \epsilon^2} \right)$$

$$= \frac{r_0}{1 - \epsilon^2}$$

بنابراین

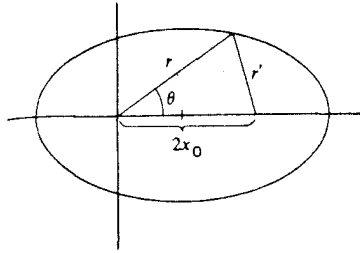
$$b = \sqrt{r^2 - x_0^2} = \left(\frac{r_0}{1 - \epsilon^2} \right) \sqrt{1 - \epsilon^2}$$

$$= \frac{r_0}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}$$

درخاتمه، نشان خواهیم داد که مبدأ در یک کانون بیضی قرار دارد. بنابر تعریف بیضی، مجموع فواصل کانونها تا نقطه ای روی بیضی مقداری ثابت است. بنابراین، برای بیضی شکل ۳۶-۹ لازم است ثابت کنیم $r + r' = \text{const.}$ طبق قانون کسینوسها داریم

$$r'^2 = r^2 + 4x_0^2 - 4rx_0 \cos \theta \quad (۵)$$

از معادله ۱ پیدا کردیم



شکل ۹-۳۶

$$r \cos \theta = \frac{r - r_0}{\epsilon}$$

معادله ۵ چنین می شود

$$r'^2 = r^2 - \frac{4x_0}{\epsilon} r + 4x_0^2 + \frac{4r_0 x_0}{\epsilon}$$

با استفاده از رابطه $x_0 = r_0 \epsilon / (1 - \epsilon^2)$ ، معادله ۴، نتیجه می شود

$$\begin{aligned} r'^2 &= r^2 - \left(\frac{4r_0}{1 - \epsilon^2} \right) r + \frac{4r_0^2 \epsilon^2}{(1 - \epsilon^2)^2} + \frac{4r_0^2}{(1 - \epsilon^2)} \\ &= r^2 - \left(\frac{4r_0}{1 - \epsilon^2} \right) r + \frac{4r_0^2}{(1 - \epsilon^2)^2} \end{aligned}$$

سمت راست مربع کامل است

$$\begin{aligned} r' &= \pm \left(r - \frac{2r_0}{1 - \epsilon^2} \right) \\ &= \pm (r - A) \end{aligned}$$

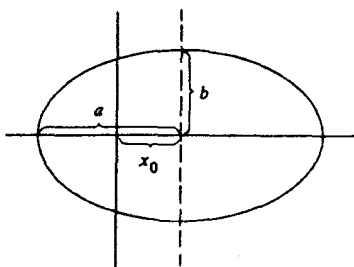
چون $A > r$ است، باید علامت منفی را انتخاب کنیم تا داشته باشیم $r' > 0$. بنابراین

$$\begin{aligned} r' + r &= A \\ &= \text{const.} \end{aligned}$$

در پایان، تعدادی از نتایج را بر حسب E, l, μ و C برای مسئله نیروی عکس مجذوری $U(r) = -C/r$ ردیف می کنیم. هنگام استفاده از این فرمولها E باید عددی منفی در نظر گرفته شود.

از معادلات ۹-۱۹ و ۹-۲۰ داریم

$$r_0 = \frac{l^2}{\mu C}$$



شکل ۹-۳۷

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu C^2}}$$

بنابراین (شکل ۹-۳۷)

$$a = \frac{r_0}{1 - \epsilon^2} = \frac{C}{-2E}$$

نیم محور بزرگ

$$b = \frac{r_0}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} = \frac{l}{\sqrt{-2\mu E}}$$

نیم محور کوچک

$$x_0 = \frac{r_0 \epsilon}{1 - \epsilon^2} = \left(\frac{C}{-2E} \right) \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu C^2}}$$

مسائل

۹-۱ بادیفرانسیل گیری از معادلات ۹-۸ الف و ب نسبت به زمان، معادلات ۹-۷ الف و ب را به دست آورید.

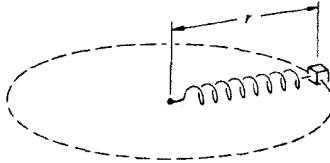
۹-۲ ذره ای به جرم 50 g تحت تأثیر نیروی جاذبه مرکزی به بزرگی $4r^3$ دین حرکت می کند. تکانه زاویه ای برابر $1000 \text{ g.cm}^2/\text{s}$ است. (الف) انرژی پتانسیل مؤثر را پیدا کنید. (ب) روی نمودار پتانسیل مؤثر، انرژی کل را برای حرکت دایره ای مشخص کنید. (ج) شعاع مدار ذره، بین r_0 و $2r_0$ متغیر است، r_0 را پیدا کنید.

جواب: (ج) $r_0 \approx 2.8 \text{ cm}$.

۹-۳ ذره ای تحت اثر نیروی متناسب با عکس مکعب فاصله روی دایره حرکت می کند. نشان دهید که ذره می تواند با سرعت شعاعی یکنواخت، به داخل یا به خارج، نیز حرکت کند. (این مثال برای حرکت ناپایدار است. هرگونه اختلالی در مدار دایره ای موجب آغاز حرکت شعاعی ذره و ادامه آن خواهد شد.) برای حرکت با سرعت شعاعی یکنواخت، θ را بر حسب r پیدا کنید.

۴-۹ به ازای چه مقادیری از m مدارهای دایره‌ای با انرژی پتانسیل $U(r) = -A/r^n$ که در آن $A > 0$ است پدیدارند.

۵-۹ یک جرم ۲ کیلوگرمی مطابق شکل ۳۸-۹ روی میز بدون اصطکاک به انتهای فنر بدون



شکل ۳۸-۹

جرمی متصل است. انتهای دیگر فنر توسط تکیه‌گاه بدون اصطکاک نگه‌داری می‌شود. فنر نیرویی به بزرگی kr (نیوتون) بر جرم وارد می‌کند که در آن r فاصله جرم از تکیه‌گاه برحسب متر است. جرم روی دایره‌ای حرکت می‌کند و دارای انرژی کل 12 J است. (الف) شعاع مدار و سرعت جرم را پیدا کنید. (ب) ضربه‌های کوتاه و ناگهانی به این جرم نواخته می‌شود که سرعت شعاعی لحظه‌ای 1 m/s به سمت خارج به آن می‌دهد. حالت دستگاه را قبل و بعد از ضربه، روی نمودار انرژی نشان دهید. (ج) برای مدار جدید، پیشینه و کمینه r را پیدا کنید.

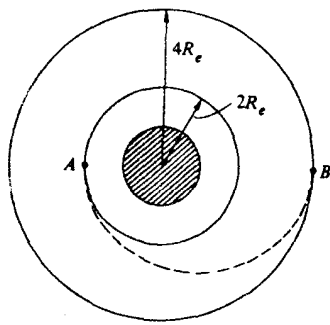
۶-۹ ذره‌ای به جرم m تحت اثر نیروی جاذبه مرکزی K/r^2 با تکانه زاویه‌ای l حرکت می‌کند. به ازای چه مقداری از انرژی، حرکت دایره‌ای خواهد بود و شعاع دایره چقدر است؟ بسامد نوسانهای شعاعی را پیدا کنید در صورتی که به ذره یک ضربه شعاعی کوچک وارد شود.

۷-۹ موشکی روی یک مدار بیضوی حول زمین در حرکت است. برای گذاشتن آن در مدار فرار، موتور آن در مدت کوتاهی روشن می‌شود، که سرعت موشک را به اندازه Δv تغییر می‌دهد. در کجای مدار و در چه جهتی موتور باید روشن شود تا با کمترین مقدار Δv فرار انجام گیرد؟

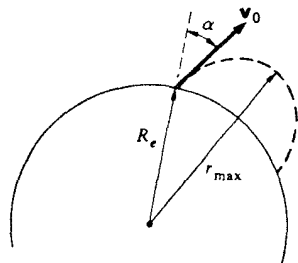
۸-۹ پرتابه‌ای به جرم m از سطح زمین با زاویه α از قائم مطابق شکل ۳۹-۹ پرتاب شده است. سرعت اولیه v_0 برابر $\sqrt{GM_e/R_e}$ است. پرتابه تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟ از مقاومت هوا و دوران زمین صرف نظر کنید. (راهنمایی: احتمالاً به کار گرفتن مستقیم قوانین پایستگی آسانتر است تا استفاده از معادلات مدار.)

جواب حالت خاص: اگر $\alpha = 60^\circ$ باشد، آنگاه $r_{\max} = 3R_e/2$ است.

۹-۹ ستاره دنباله‌دار هالی در مداری بیضوی حول خورشید قرار دارد. خروج از مرکز مدار 0.967 و تناوب آن 76 سال است. جرم خورشید $2 \times 10^{30}\text{ kg}$ و $G = 6.67 \times 10^{-11}\text{ N m}^2/\text{kg}^2$ است. (الف) با استفاده از این داده‌ها، فاصله ستاره دنباله‌دار هالی را از خورشید در حضيض و اوج



شکل ۹-۴۰



شکل ۹-۳۹

تعیین کنید. (ب) سرعت ستاره دنباله دار هالی هنگامی که در نزدیکترین فاصله از خورشید قرار دارد چقدر است؟

۹-۱۰ الف) ماهواره‌ای به جرم m در مداری دایره‌ای حول زمین است. شعاع مدار r_0 و جرم زمین M_e است. انرژی مکانیکی کل ماهواره را پیدا کنید. (ب) حال فرض کنید که ماهواره در طبقات بالای جو زمین حرکت می‌کند، جایی که به واسطه نیروی ضعیف و ثابت اصطکاک f سرعت آن کند می‌شود. ماهواره به آهستگی به صورت مارپیچ به طرف زمین حرکت می‌کند. از آنجا که نیروی اصطکاک ضعیف است، تغییر شعاع خیلی به آهستگی صورت خواهد گرفت. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که در هر لحظه ماهواره عملاً در مداری دایره‌ای به شعاع متوسط r قرار دارد. تغییر تقریبی شعاع را در هر دوره گردش ماهواره Δr پیدا کنید. (ج) تغییر تقریبی انرژی جنبشی ماهواره (ΔK) را در هر دوره پیدا کنید.

جواب: ج: $\Delta K = +2\pi r f$ (به علامت توجه کنید!).

۹-۱۱ قبل از پیاده شدن بشر در ماه، فضاییمای آپولو ۱۱ در مداری حول ماه قرار داده شد. جرم فضاییما 9979 kg دوره گردش مدار، 119 دقیقه، و بیشینه و کمینه فاصله از مرکز ماه 1861 km و 1838 km بود. با فرض اینکه ماه جسمی کروی و یکنواخت باشد. مطابق این داده‌ها جرم ماه چقدر است؟ $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.

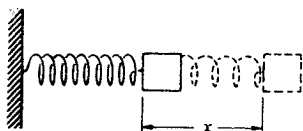
۹-۱۲ فضاییمایی در مداری دایره‌ای حول زمین در حرکت است. جرم فضاییما 3000 kg و شعاع مدار $2R_e = 12800 \text{ km}$ است. می‌خواهیم فضاییما را به مداری دایره‌ای به شعاع $4R_e$ منتقل کنیم. الف) حداقل مصرف انرژی مورد نیاز برای انتقال چقدر است؟ (ب) یک روش مؤثر برای انتقال، استفاده از مداری نیم بیضوی (معروف به مدار انتقال هومان) طبق شکل ۹-۴۰ است. چه تغییر سرعتهایی در نقاط تقاطع A و B مورد نیاز است؟

نوسانگر هماهنگ

۱-۱۰ مقدمه و مرور

حرکت یک جرم متصل به فنر (که به نام نوسانگر هماهنگ شهرت دارد) با مطالعه فصلهای ۲ و ۴ و بررسی مسائل متعدد دیگر برای ما آشناست. اما تا حال فقط حالت ایده‌آلی را که در آن اصطکاک و هیچ نیروی خارجی وجود نداشت، در نظر داشتیم. در این فصل اثر اصطکاک را روی نوسانگر بررسی می‌کنیم و سپس حرکت جسمی را مطالعه می‌کنیم که نیروی وارد بر آن تابعی متناوب از زمان است. بالاخره از نوسانگر هماهنگ برای توضیح نتیجه مهمی استفاده خواهیم کرد. این نتیجه در واقع امکان پیشگویی پاسخ یک دستگاه مکانیکی به یک نیروی محرک اعمال شده با بسامد دلخواه است که منحصراً با مطالعه دستگاه به هنگام حرکت آزاد آن حاصل می‌شود.

مطلب را با مرور خواص نوسانگر هماهنگ بدون اصطکاک که در آخر فصل ۲ مورد بحث قرار گرفت، آغاز می‌کنیم. اولین نمونه نوسانگر، جرمی است که نیروی $F_s = -kx$ به وسیله یک نفر به آن وارد می‌شود و در آن x جابه‌جایی از وضعیت تعادل است (شکل ۱-۱۰). معادله حرکت $m\ddot{x} = -kx$ است و یا



شکل ۱-۱۰

$$m \ddot{x} + kx = 0 \quad (۱-۱۰)$$

جواب این معادله به صورت زیر است

$$x = B \sin \omega_0 t + C \cos \omega_0 t \quad (۲-۱۰)$$

که در آن

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (۳-۱۰)$$

همانند فصلهای گذشته، برای نمایش بسامد طبیعی نوسانگر به جای ω از ω_0 استفاده خواهیم کرد. B و C ثابتهای اختیاری اند که به وسیله رشته شرایط اولیه معین نظیر مکان و سرعت در زمان بخصوصی تعیین می شوند.

شکل متعارف جواب

می توانیم معادله ۲-۱۰ را به شکل آسانتر زیر بنویسیم

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (۴-۱۰)$$

که در آن A و ϕ مقادیر ثابت اند. برای نشان دادن تناظر بین معادلات ۲-۱۰ و ۴-۱۰ از اتحاد مثلثاتی زیر استفاده می کنیم

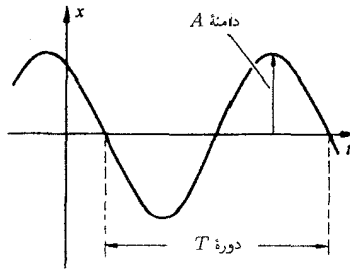
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

با به کار بستن این اتحاد در معادله ۴-۱۰ و مساوی قرار دادن معادلات ۲-۱۰ و ۴-۱۰ خواهیم داشت

$$A \cos \omega_0 t \cos \phi - A \sin \omega_0 t \sin \phi = B \sin \omega_0 t + C \cos \omega_0 t$$

برای اینکه این معادله همواره برقرار باشد، ضرایب جملات $\sin \omega_0 t$ و $\cos \omega_0 t$ به طور جداگانه باید با هم برابر باشند. بنابراین داریم

$$A \cos \phi = C$$



شکل ۲-۱۰

$$A \sin \phi = -B \quad (۵-۱۰ \text{ الف})$$

این روابط به آسانی نتیجه می‌دهند

$$A = (B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\tan \phi = -\frac{B}{C} \quad (۵-۱۰ \text{ ب})$$

این نتیجه نشان می‌دهد که دو معادله ۲-۱۰ و ۴-۱۰ برای حرکت عمومی نوسانگر هماهنگ معادل‌اند. ما عموماً از معادله ۴-۱۰ به عنوان شکل متعارف حرکت بدون اصطکاک نوسانگر هماهنگ استفاده خواهیم کرد.

فهرست اصطلاحات

با شماری از تعاریف باید آشنا شویم (شکل ۲-۱۰). رابطه زیر را در نظر بگیرید

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

x : جابه‌جایی لحظه‌ای ذره در لحظه t است. A دامنه حرکت است که از جابه‌جایی صفر تا حداکثر فاصله اندازه گرفته می‌شود.

ω_0 : بسامد (یا بسامد زاویه‌ای) حرکت است و برابر با $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ rad/s است. بسامد دایره‌ای $\nu = \omega_0 / 2\pi$ Hz است ($\nu = 1$ دور بر ثانیه است). ϕ : ضریب فاز یا زاویه فاز است. T : زمان تناوب یا زمان لازم برای یک دور گردش کامل است: $T = 2\pi / \omega_0$.

مثال ۱-۱۰ شرایط اولیه و نوسانگر هماهنگ بدون اصطکاک: فرض کنید در لحظه $t = 0$ مکان جرم $x(0)$ و سرعت آن $v(0)$ باشد. اگر حرکت را به شکل معادله ۲-۱۰ بیان کنیم داریم

$$x = B \sin \omega_0 t + C \cos \omega_0 t$$

$$v = \dot{x}$$

$$= \omega_0 B \cos \omega_0 t - \omega_0 C \sin \omega_0 t$$

از بررسی آن در $t = 0$ نتیجه می‌شود

$$C = x(0)$$

$$B = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0}$$

اگر با شکل متعارف $x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$ آغاز کنیم، جابه‌جایی و سرعت چنین‌اند

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$v = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

برای $t = 0$ داریم

$$x(0) = A \cos \phi$$

$$v(0) = -\omega_0 A \sin \phi$$

که از آن پیدا می‌کنیم

$$A = \sqrt{x(0)^2 + \left[\frac{v(0)}{\omega_0}\right]^2}$$

$$\tan \phi = \frac{-v(0)}{\omega_0 x(0)}$$

بررسی انرژی

اگر انرژی پتانسیل را در نقطه $x = 0$ برابر صفر بگیریم، داریم

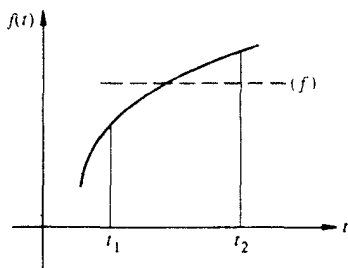
$$U = \frac{1}{2} k x^2$$

$$= \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi)$$

(۱۰-۶ الف)

انرژی جنبشی چنین است

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$



شکل ۳-۱۰

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega \cdot t + \phi) \quad (۶-۱۰)$$

که در اینجا از رابطه زیر استفاده کرده‌ایم

$$v = \dot{x} = -\omega \cdot A \sin(\omega \cdot t + \phi)$$

از آنجا که $\omega^2 = k/m$ است، معادله ۶-۱۰ ب چنین می‌شود $K = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega \cdot t + \phi)$ انرژی کل برابر است با

$$E = K + U = \frac{1}{2} k A^2 [\cos^2(\omega \cdot t + \phi) + \sin^2(\omega \cdot t + \phi)]$$

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \quad (۷-۱۰)$$

بنابراین انرژی کل ثابت است، و این شکل آشنایی است از حرکت، وقتی که تنها نیروهای پایستار عمل می‌کنند.

مقادیر میانگین زمانی

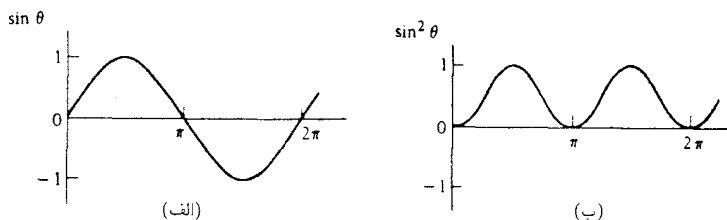
در بخشهای آینده به مفهوم مقدار میانگین زمانی $\langle f \rangle$ برای تابع $f(t)$ نیاز داریم. $f(t)$ تابعی است از زمان، و فاصله زمانی $t_1 \leq t \leq t_2$ را مطابق شکل ۳-۱۰ در نظر بگیرد. $\langle f \rangle$ میانگین زمانی $f(t)$ ، طوری تعریف شده است که مساحت مستطیل که در شکل نشان داده شد یعنی $\langle f \rangle (t_2 - t_1)$ ، برابر با مساحت حقیقی زیر منحنی بین t_1 و t_2 شود. یعنی

$$\langle f \rangle (t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

یا

$$\langle f \rangle = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

برای بهتر مشخص کردن این ایده، فرض کنید $f(t)$ نمایانگر آهنگ جریان آب به داخل یک سطل



شکل ۴-۱

برحسب لیتر در ثانیه باشد. آنگاه حجم آبی که در مدت کوتاه dt وارد سطل می‌شود $f(t)dt$ و حجم کل آب وارد شده به سطل در مدت $t_2 - t_1$ برابر $\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$ است. اگر جریان پایدار باشد، آهنگ جریان باید $\langle f \rangle$ باشد تا همان مقدار آب در زمان $t_2 - t_1$ در سطل جمع شود.

کاری که در اینجا با نوسانگر هماهنگ داریم به میانگین زمانی $\sin(\omega t)$ و $\sin^2(\omega t)$ در یک نوسان کامل نیاز است. یک طرح نموداری برای محاسبه این میانگینها در شکلهای ۴-۱ داده شده است. شکل ۴-۱ (الف) نمودار $\sin \theta$ را در فاصله $0 \leq \theta \leq 2\pi$ نشان می‌دهد که در آن $\theta = \omega t$ است. آشکار است که سطح بالای محور برابر سطح زیر محور بوده و $\langle \sin \theta \rangle = 0$ است. در شکل ۴-۱ (ب) نمودار $\sin^2 \theta$ را نشان می‌دهیم که بین 0 و 1 تغییر می‌کند و به علت وجود تقارن مقدار میانگین برابر $1/2$ است. بنابراین $\langle \sin^2 \theta \rangle = 1/2$ است. با برهانهای مشابه داریم $\langle \cos \theta \rangle = 0$ و $\langle \cos^2 \theta \rangle = 1/2$. همچنین به طور نموداری می‌توانید نشان دهید تا جایی که میانگین در یک دوره تناوب کامل نوسان گرفته می‌شود، این نتایج بدون اینکه در نقطه شروع دخالتی داشته باشد، برقرار است. این نتایج را به طریق تحلیلی نیز می‌توان اثبات کرد؛ این کار را طی حل یک مسئله انجام خواهیم داد.

میانگین انرژی

ضمن بازگشت به نوسانگر هماهنگ بدون اصطکاک، اکنون می‌توانیم مقادیر میانگین زمانی انرژیهای پتانسیل و جنبشی را در یک دوره نوسان $0 \leq t \leq T$ تعیین کنیم. از معادله ۴-۱ الف داریم

$$U = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega \cdot t + \phi)$$

$$\langle U \rangle = \frac{1}{2} k A^2 \langle \cos^2(\omega \cdot t + \phi) \rangle$$

$$= \frac{1}{2} k A^2$$

(از نتیجه $\langle \cos^2 \theta \rangle = 1/2$ برای میانگین در یک دوره تناوب استفاده کرده‌ایم.) به همین ترتیب، از

معادله ۱-۶ ب به دست می‌آید

$$\begin{aligned}\langle K \rangle &= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \langle \sin^2(\omega \cdot t + \phi) \rangle \\ &= \frac{1}{4} m \omega^2 A^2\end{aligned}$$

از آنجا که $\omega^2 = k/m$ است، داریم

$$\begin{aligned}\langle K \rangle &= \frac{1}{4} k A^2 \\ &= \langle U \rangle\end{aligned}$$

میانگین زمانی انرژیهای جنبشی و پتانسیل مساوی هستند. وقتی اصطکاک وجود داشته باشد، این مطلب دیگر دقیقاً درست نیست.

۱۰-۲ نوسانگر هماهنگ میرا

قدم بعدی در نظر گرفتن اثر اصطکاک وارد بر نوسانگر هماهنگ است. بحث خود را محدود به حالت مخصوصی از نیروی اصطکاک، یعنی نیروی چسبندگی، خواهیم کرد. چنین نیرویی وقتی ظاهر می‌شود که جسم درون یک سیال (مایع یا گاز) با سرعتی نه چندان زیاد که باعث تلاطم شود، حرکت می‌کند. در این حالت نیروی اصطکاک به شکل زیر است

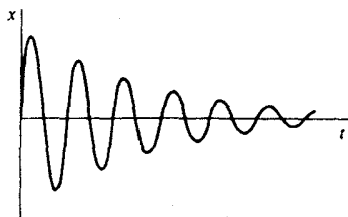
$$f = -bv$$

که در آن b ثابت تناسب است و بستگی به شکل جسم و مایعی دارد که جسم درون آن حرکت می‌کند و v سرعت لحظه‌ای است. اگر چه این نیروی اصطکاک بخصوصی است، باید بدانیم که ما غالباً با این صورت نیروی اصطکاک رو به رو هستیم و این تحلیل کاربرد فراوان دارد. اگر چه بحث ما در اینجا اختصاص به نوسانگر مکانیکی دارد، معادلاتی با همین شکل، دستگاههای نوسانگر متعدد دیگری را توصیف می‌کنند. برای مثال، جریان الکتریکی در مدارهای الکتریکی معینی می‌توانند نوسان کنند که در آن مقاومت الکتریکی مدار نقشی دقیقاً همانند با نیروی بازدارنده چسبندگی بازی می‌کند.

نیروی کل وارد بر جرم m عبارت است از

$$\begin{aligned}F &= F_s + f \\ &= -kx - bv\end{aligned}$$

معادله حرکت چنین است



شکل ۵-۱۰

$$m \ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

که می‌تواند به شکل زیر نوشته شود

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (۸-۱۰)$$

در اینجا γ به جای b/m نوشته شده و مانند قبل $\omega_0^2 = k/m$ است، یکای γ s^{-1} است. معادله ۸-۱۰ معادله دیفرانسیلی است که از هر معادله‌ای که تاکنون با آن برخورد کرده‌ایم پیچیده‌تر است. جزئیات حل آن را برای یادداشت ۱-۱۰ باقی می‌گذاریم و فقط نتیجه آن را در اینجا ذکر می‌کنیم

$$x = Ae^{-(\gamma/2)t} \cos(\omega_1 t + \phi) \quad (۹-۱۰)$$

A و ϕ در اینجا نیز ثابتهای اختیاری هستند و

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \quad (۱۰-۱۰)$$

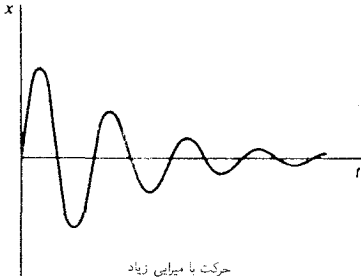
جواب وقتی معتبر است که $\omega_0^2 - \gamma^2/4 > 0$ یا $\omega_0 > \gamma/2$ باشد (حالات دیگر در یادداشت ۱-۱۰ بحث شده است). به عنوان یک تمرین خوب، حل معادله ۹-۱۰ را در معادله ۸-۱۰ قرار دهید تا درستی جواب تأیید شود.

حرکتی که با معادله ۹-۱۰ توصیف می‌شود حرکت هماهنگ میرا نامیده می‌شود. یک حالت نمونه در شکل ۵-۱۰ نشان داده شده است. این حرکت یادآور حرکت هماهنگ نامیرای توصیف شده در بخش قبل است. در واقع معادله ۹-۱۰ را می‌توان به شکل زیر نوشت

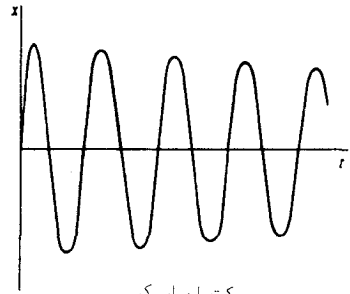
$$x = A(t) \cos(\omega_1 t + \phi)$$

که در آن داریم

$$A(t) = Ae^{-(\gamma/2)t} \quad (۱۱-۱۰)$$



حرکت با میرایی زیاد
شکل ۱۰-۷



حرکت با میرایی کم
شکل ۱۰-۶

این حرکت مشابه حالت نامیراست با این تفاوت که دامنه به طور نمایی با زمان کاهش می‌یابد و بسامد ω_1 از بسامد نامیرای ω کمتر است. ضمناً اگر چه مفهوم بسامد معین می‌تواند منحصرأً برای توابع سینوسی یا کسینوسی محض به کار رود، ω_1 به طور معمول بسامد نوسان خوانده می‌شود. نقاط صفر تابع $Ae^{-(\gamma/2)t} \cos(\omega_1 t + \phi)$ (تقاطع با محور زمان) به فواصل زمانی مساوی $T = 2\pi/\omega_1$ از یکدیگر واقع‌اند، ولی قله‌های منحنی در وسط آنها قرار نمی‌گیرند.

قبل از اینکه حرکت هماهنگ میرا را به طور کمی بررسی کنیم، مفید خواهد بود که به طور کیفی نگاهی به آن بیندازیم. کیفیتهای اصلی حرکت به نسبت γ/ω_1 بستگی دارد. اگر $\gamma/\omega_1 \ll 1$ باشد در مدتی که کسینوس به دفعات صفر می‌شود، $A(t)$ خیلی کم کاهش می‌یابد. این طرز رفتار، حرکت با میرایی کم خوانده می‌شود (شکل ۱۰-۶). اگر γ/ω_1 نسبتاً بزرگ باشد، $A(t)$ سریعاً به سمت صفر میل می‌کند. در حالی که کسینوس فقط چند نوسان انجام می‌دهد. این حرکت را نوسان با میرایی زیاد، می‌نامند (شکل ۱۰-۷). برای میرایی کم $\omega_1 \approx \omega$ است ولی برای میرایی زیاد ω_1 می‌تواند به طور قابل ملاحظه‌ای کوچکتر از ω باشد.

انرژی

با در نظر گرفتن انرژی دستگاه می‌توانیم ببینیم که چرا دامنه نوسان باید با زمان کاهش یابد. از قضیه کار-انرژی فصل ۴ داریم

$$E(t) = E(0) + W_f$$

که در آن

$$E(t) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = K(t) + U(t)$$

و

$W_f =$ کار انجام شده به وسیله اصطکاک از لحظه ۰ تا لحظه t

نیروی اصطکاک اتلافی $f = -bv$ مانع حرکت است. بنابراین

$$\begin{aligned} W_f &= \int_{x(0)}^{x(t)} f dx \\ &= \int_0^t f v dt \\ &= - \int_0^t b v^2 dt < 0 \end{aligned} \quad (۱۲-۱۰)$$

از نظر فیزیکی، $E(t)$ با زمان کاهش می‌یابد، زیرا نیروی اصطکاک به طور پیوسته انرژی را تلف می‌کند. با محاسبه انرژیهای جنبشی و پتانسیل $K(t)$ و $U(t)$ می‌توانیم چگونگی بستگی $E(t)$ را با زمان پیدا کنیم.

برای تعیین $K(t) = \frac{1}{2}mv^2$ نیاز به سرعت v داریم. مشتق معادله ۹-۱۰ نسبت به زمان چنین می‌دهد

$$\begin{aligned} v &= -Ae^{-(\gamma/2)t} \left[\omega_1 \sin(\omega_1 t + \phi) + \frac{\gamma}{2} \cos(\omega_1 t + \phi) \right] \\ &= -\omega_1 A e^{-(\gamma/2)t} \left[\sin(\omega_1 t + \phi) + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\omega_1} \right) \cos(\omega_1 t + \phi) \right] \end{aligned} \quad (۱۳-۱۰)$$

اگر حرکت فقط میرایی اندکی داشته باشد آنگاه $1 \ll \gamma/\omega_1$ و ضریب جمله دوم داخل کروشه کوچک است. فرض می‌کنیم میرایی آنقدر کوچک است که بتوانیم از جمله دوم صرف‌نظر کنیم. در این حالت داریم

$$v = -\omega_1 A e^{-(\gamma/2)t} \sin(\omega_1 t + \phi)$$

و

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m\omega_1^2 A^2 e^{-\gamma t} \sin^2(\omega_1 t + \phi) \end{aligned} \quad (\text{الف } ۱۴-۱۰)$$

انرژی پتانسیل چنین است

$$\begin{aligned} U(t) &= \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}kA^2 e^{-\gamma t} \cos^2(\omega_1 t + \phi) \end{aligned} \quad (\text{ب } ۱۴-۱۰)$$

و انرژی کل عبارت است از

$$E(t) = K(t) + U(t) \\ = \frac{1}{\gamma} A^2 e^{-\gamma t} [m\omega_1^2 \sin^2(\omega_1 t + \phi) + k \cos^2(\omega_1 t + \phi)]$$

از آنجا که با فرض میرایی کم سروکار داریم، می‌توانیم با تعویض ω_1 با ω_1^* و استفاده از رابطه $\omega_1^* = k/m$ عبارت داخل کروشه را ساده کنیم

$$E(t) = \frac{1}{\gamma} A^2 e^{-\gamma t} [k \cos^2(\omega_1 t + \phi) + k \sin^2(\omega_1 t + \phi)] \\ = \frac{1}{\gamma} k A^2 e^{-\gamma t} \quad (۱۵-۱۰)$$

در $t = 0$ انرژی دستگاه عبارت است از

$$E_0 = \frac{1}{\gamma} k A^2$$

و می‌توانیم معادله ۱۵-۱۰ را به شکل زیر بنویسیم

$$E(t) = E_0 e^{-\gamma t} \quad (۱۶-۱۰)$$

این نتیجه فوق‌العاده ساده است. انرژی به‌طور نمایی با زمان کاهش می‌یابد.

میرایی را می‌توان با زمان τ مشخص کرد. τ زمان لازم برای کاهش انرژی به میزان $e^{-1} = 0.368$ مقدار اولیه است (شکل ۸-۱۰)

$$E(\tau) = E_0 e^{-\gamma \tau} \\ = e^{-1} E_0$$

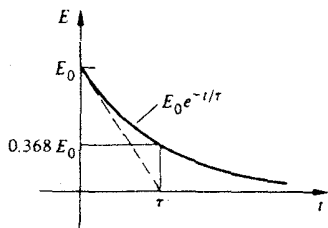
از این رو $\gamma \tau = 1$ و داریم

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{m}{b} \quad (۱۷-۱۰)$$

τ غالباً زمان میرایی (یا به‌طور مترادف ثابت زمانی یا زمان مشخصه) دستگاه نامیده می‌شود. در

* این تقریب برای $1 \ll \gamma/\omega_1$ به طریق زیر قابل توجیه است

$$\omega_1^* = \omega_1^2 + \frac{\gamma^2}{\gamma} \\ = \omega_1^2 \left[1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\gamma}{\omega_1} \right)^2 \right] \\ \approx \omega_1^2$$



شکل ۱۰-۸

حد میرایی کم $\gamma \rightarrow 0$ و $\tau \rightarrow \infty$ میل می‌کند؛ یعنی E عملاً ثابت و رفتار دستگاه همانند نوسانگر نامیراست.

مقدار Q برای یک نوسانگر

درجه میرایی یک نوسانگر غالباً با پارامتر بدون بعد Q (ضریب کیفیت) که با نسبت زیر تعریف شده مشخص می‌شود

$$Q = \frac{\text{انرژی ذخیره شده در نوسانگر}}{\text{انرژی تلف شده در هر رادیان}} \quad (18-10)$$

منظور ما از انرژی تلف شده در هر رادیان، انرژی از بین رفته در زمانی است که دستگاه به اندازه یک رادیان نوسان می‌کند. در یک دوره تناوب $T = 2\pi/\omega_1$ دستگاه به اندازه 2π رادیان نوسان می‌کند. بنابراین زمانی که نوسانگر به اندازه یک رادیان نوسان می‌کند برابر $1/\omega_1 = T/2\pi$ است.

Q برای حالت میرایی کم به آسانی محاسبه می‌شود. آهنگ تغییرات انرژی از معادله ۱۰-۱۶ چنین است

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\gamma E_0 e^{-\gamma t} \\ &= -\gamma E. \end{aligned}$$

انرژی تلف شده در زمان کوتاه Δt کمیتی مثبت و مساوی مقدار زیر است

$$\begin{aligned} \Delta E &\approx \left| \frac{dE}{dt} \right| \Delta t \\ &= \gamma E \Delta t \end{aligned}$$

نوسانی به اندازه یک رادیان در زمان $\Delta t = 1/\omega_1$ انجام می‌شود و انرژی تلف شده $\gamma E/\omega_1$ است. از این رو ضریب کیفیت عبارت است از

$$Q = \frac{E}{\gamma E / \omega_1} = \frac{\omega_1}{\gamma} \approx \frac{\omega_0}{\gamma} \quad (19-10)$$

برای یک نوسانگر با میرایی کم داریم $Q \gg 1$. در دستگاہی با میرایی زیاد انرژی به سرعت از بین رفته و مقدار Q برای آن کم است. برای یک دیپازون مقدار Q برابر هزار یا بیشتر است در حالی که برای کاواک ابررسانای میکروموج مقدار Q از 10^7 فراتر می‌رود. برای نوسانگر نامیرا مقدار Q بینهایت است.

مثال ۱۰-۲ مقدار Q برای دو نوسانگر ساده: یک دیپازون مورد استفاده موسیقیدانها نت La در گام ۳ را با بسامد 440 Hz می‌نوازد. اندازه‌گیری صوتی نشان می‌دهد که شدت صوت در هر ۴ ثانیه ۵ مرتبه کاهش می‌یابد. مقدار Q برای این دیپازون چقدر است؟

شدت صوت دیپازون متناسب با انرژی نوسان است. چون انرژی یک نوسانگر میرا به صورت $e^{-\gamma t}$ کاهش می‌یابد، می‌توانیم γ را از نسبت انرژی در $t = 0$ به انرژی در $t = 4 \text{ s}$ پیدا کنیم

$$\delta = \frac{E(0)e^{(0)}}{E(0)e^{-4\gamma}} = e^{4\gamma}$$

بنابراین

$$4\gamma = \ln \delta = 1.6$$

$$\gamma = 0.4 \text{ s}^{-1}$$

و

$$Q = \frac{\omega_1}{\gamma} = \frac{2\pi(440)}{0.4} \approx 700$$

اتلاف انرژی در ابتدا به علت گرم شدن فلز به هنگام خمیدگی است. اصطکاک هوا و اتلاف انرژی در نقطه اتصال نیز در کاهش انرژی سهیم‌اند. (طراحی متقارن دیپازون تلفات انرژی را در نقطه اتصال به حداقل می‌رساند.) در ضمن اگر شما می‌خواهید این آزمایش را انجام دهید، به خاطر داشته باشید که گوش وسیله اندازه‌گیری ضعیفی است زیرا واکنش آن به شدت صوت خطی نیست بلکه تقریباً لگاریتمی است.

یک نوار لاستیکی عمدتاً به دلیل اصطکاک داخل آن به وسیله زنجیره‌های دراز و ماریچ مولکولی ایجاد می‌شود، ضرورتاً مقدار Q پایتتری نسبت به دیپازون دارد. در یک آزمایش، دوره تناوب وزنه‌ای که از یک نوار لاستیکی قوی آویخته شده بود 1.2 s بود که دامنه نوسان آن بعد از سه نوسان کامل به نصف کاهش می‌یافت. مقدار تقریبی Q برای این دستگاه چقدر است؟

طبق معادله ۱۰-۱۱ دامنه با رابطه $Ae^{(-\gamma/2)t}$ داده شده است. نسبت دامنه‌ها در $t = 0$ به

چنین است $t = 3(1,2) = 3,6s$

$$2 = \frac{Ae^{(\cdot)}}{Ae^{-2,6\gamma/2}}$$

بنابراین

$$1,8\gamma = \ln 2 = 0,69$$

یا

$$\gamma = 0,39s^{-1}$$

و از آنجا

$$\begin{aligned} Q &\approx \frac{\omega_1}{\gamma} \\ &= \frac{2\pi/T}{0,39} \\ &= \frac{2\pi/1,2}{0,39} \\ &= 13 \end{aligned}$$

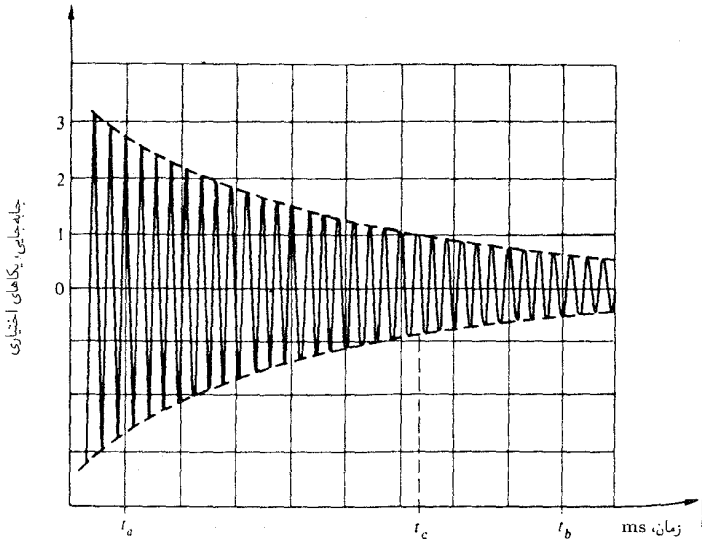
ممکن است ندانیم که استفاده از نتایج کم $Q = \omega_1/\gamma$ وقتی که Q تا به این اندازه پایین است بجاست یا نه. تقریب به کار رفته خطایی از مرتبه $1/Q = (\gamma/\omega_1)^2$ به وجود می آورد. برای $Q > 10$ خطا کمتر از یک درصد است.

قابل توجه است که ثابت میرایی برای دیپازون و نوار لاستیکی تقریباً یکسان است. اما مقدار Q برای دیپازون خیلی بیشتر است زیرا در یک زمان میرایی دوره‌های متعدد را از سر می گذراند و بدین سبب انرژی کمتری در هر دور تلف می کند.

مثال ۱۰-۳ تحلیل نموداری نوسانگر میرا: تصویر ۱۰-۹ از روی عکسی از جابه جایی یک دستگاه نوسانگر بر حسب زمان در یک نوسان نما رسم شده است. بلافاصله تشخیص می دهیم که این دستگاه نوسانگر هماهنگ میراست. بسامد ω_1 و ضریب کیفیت Q را از روی عکس می توان پیدا کرد. فاصله زمانی از t_n تا t_{n+1} برابر Δt است که معادل ۲۸,۵ دور (یا دوره تناوب کامل) می شود. (این موضوع را خودتان با داده ها مطابقت دهید.) دوره تناوب نوسان برابر

$$T = 8 \times 10^{-2}s / 28,5 = 2,81 \times 10^{-2}s$$

و بسامد زاویه ای برابر $\omega_1 = 2\pi/T = 2240 \text{ rad/s}$ است. بسامد دایره ای متناظر با آن برابر $\nu = \omega_1/2\pi = 356 \text{ Hz}$ می شود.

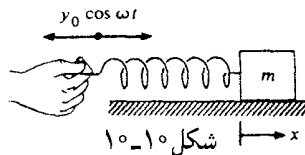


شکل ۹-۱۰

برای بدست آوردن ضریب کیفیت $Q = \omega_1 / \gamma$ ثابت میرایی باید معلوم باشد. با توجه به معادله ۱۱-۱۰ دامنه نوسان برابر $Ae^{-(\gamma/2)t}$ است. این تابع نشاندهنده پوش منحنی جابه‌جایی است. این پوش با منحنیهای خط چین روی تصویر مشخص شده است. در زمان t_a پوش مقداری برابر با $2.75 A_a =$ واحد دارد. وقتی پوش با ضریب $0.368 = e^{-1}$ کاهش می‌یابد مقدار آن 1.0 واحد می‌شود. از روی تصویر این عمل در $t_c = 5.35 \text{ ms}$ رخ می‌دهد که از t_a اندازه‌گیری می‌شود. چون $e^{-(\gamma/2)t_c} = e^{-1}$ یا $\gamma = 2/t_c = 374 \text{ s}^{-1}$ است، ضریب کیفیت برابر $Q = \omega_1 / \gamma = 60$ است.

حال چند کلمه درباره این دستگاه بگوئیم که یک نوسانگر مکانیکی نیست، حتی نوسانگر الکتریکی هم نیست. علائم به وسیله الکتردهای تابشگر اتمهای موجود در حجمی کوچک از گاز هیدروژن تولید شده‌اند و برای آشکار شدن به وسیله نوسان‌نما قویاً تقویت شده‌اند. به علاوه، اتمها در بسامد $9.2 \times 10^9 \text{ Hz}$ تابش می‌کنند. از آنجا که این بسامد بسیار بیشتر از آن است که نوسان‌نما بتواند تعقیب کند، این بسامد با وسایل الکترونیکی به مقدار پایتتری تقلیل داده شده است. این کار در شکل پوش اثری ندارد و مقدار γ اندازه‌گیری شده صحیح است. اگر از مقدار حقیقی بسامد دستگاه اتمی استفاده کنیم، درمی‌یابیم که مقدار واقعی Q چنین است

$$Q = \frac{2\pi\nu}{\gamma} = \frac{2\pi \times 9.2 \times 10^9}{374}$$



شکل ۱۰-۱

$$= ۱,۶ \times ۱۰^۸$$

در عمل این مقادیر زیاد Q با دستگاههای مکانیکی دست یافتنی نیست، گرچه در دستگاههای اتمی امری عادی است.

۱۰-۳ نوسانگر هماهنگ واداشته

نوسانگر واداشته نامیرا

حال اثر نیروی $F(t)$ را که نسبت به زمان متغیر است روی نوسانگر هماهنگ بدون اصطکاک بررسی می‌کنیم. در حالتی که یک جرم متصل به فنر است، نیرو را با کشیدن آهسته انتهای فنر می‌توان وارد ساخت. به طور مشخصتر فرض کنید که انتهای فنر، همچنانکه شکل ۱۰-۱ نشان می‌دهد، مطابق با $y = y_0 \cos \omega t$ حرکت می‌کند. تغییر طول فنر از وضع تعادل آن $x - y$ می‌شود که x مکان جرم m است. معادله حرکت صرفنظر از میرایی به صورت $m \ddot{x} = -k(x - y)$ است، چون $y = y_0 \cos \omega t$ است، بنابراین داریم

$$m \ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (۱۰-۲)$$

که در آن $F_0 = k y_0$ ، نیروی محرک نامیده می‌شود. $F_0 \cos \omega t$ دامنه نیروی محرک (توجه داشته باشید F_0 دارای بعد نیرو است) و ω بسامد محرک است که مجازیم آن را تغییر دهیم.

واضح است که ما در معادله ۱۰-۲ برای نیروی محرک شکل خیلی خاصی را انتخاب کرده‌ایم. با وجود این، جواب از کلیت زیادی برخوردار است. در نتیجه هر تابع دوره‌ای از زمان را می‌توان به صورت مجموع جملات سینوسی نمایش داد (بر اساس قضیه فوریه) به طوری که دانستن پاسخ یک نوسانگر هماهنگ به نیروی $F_0 \cos \omega t$ شالوده پیدا کردن پاسخ به هر تابع دوره‌ای است. به علاوه، بسیاری از حالت‌های مهم مستلزم نیروی سینوسی ساده‌ای است که در اینجا فرض کرده‌ایم. دو مثال ساده در این مورد واکنش یک الکترون مقید به میدان الکترومغناطیسی (مسئله‌ای که در نظریه کلاسیک پراکندگی نور پیش می‌آید) و واکنش کشندی یک دریاچه به نیروی دوره‌ای ماه و خورشید است. بنابراین، بدون اطاله بیشتر به حل معادله ۱۰-۲ می‌پردازیم.

یک راه کلی برای حل معادله $1^\circ - 2^\circ$ در یادداشت $1^\circ - 2^\circ$ داده شده است، ولی در واقع این معادله آنقدر ساده است که جواب آن را با برهان زیر می‌توانیم حدس بزنیم: سمت راست معادله به صورت تابع $\cos \omega t$ با زمان تغییر می‌کند. موجه است که سمت چپ هم بستگی مشابهی به زمان داشته باشد. جواب زیر را امتحان می‌کنیم

$$x = A \cos \omega t$$

از جایگذاری این جواب در معادله $1^\circ - 2^\circ$ نتیجه می‌شود

$$(-m\omega^2 + k)A \cos \omega t = F_0 \cos \omega t$$

این عمل در صورتی معتبر است که انتخاب زیر را بپذیریم

$$A = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{F_0}{m \omega_0^2 - \omega^2} \quad (21-1^\circ)$$

که در آن همانند بخش گذشته، $\omega_0^2 = k/m$ است. جواب بدین صورت در می‌آید

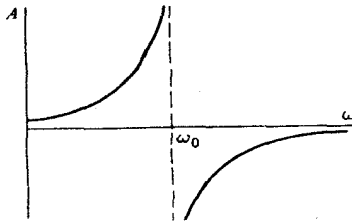
$$x = \frac{F_0}{m \omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad (22-1^\circ)$$

ماهیت جوابی که برای معادله $1^\circ - 22^\circ$ پیدا کردیم با جواب معادله $1^\circ - 4^\circ$ یا $1^\circ - 9^\circ$ بسیار متفاوت است. هیچ ثابت اختیاری در معادله $1^\circ - 22^\circ$ وجود ندارد؛ حرکت کاملاً مشخص است. از نظر فیزیکی این مطلب تعجب‌آور است، زیرا باید بتوانیم مکان و سرعت اولیه هر جسمی را که از قوانین نیوتون تبعیت می‌کند تشخیص دهیم. این مشکل از اینجا ناشی می‌شود که جواب معادله $1^\circ - 22^\circ$ اگرچه صحیح است، ولی کامل نیست. جواب کامل چنین است^۱

$$x = \frac{F_0}{m \omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t + B \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (23-1^\circ)$$

که در آن B و ϕ اختیاری هستند. همانطور که در بخش $1^\circ - 1^\circ$ دیده‌ایم جمله $B \cos(\omega_0 t + \phi)$ جواب کلی حرکت نوسانگر آزاد و نامیرای، $m \ddot{x} + kx = 0$ است. برای دستگاه میرا، دامنه B به‌طور نمایی با زمان کاهش یافته و سرانجام فقط جواب حالت پایدار باقی خواهد ماند

۱. صحت این جواب را با جایگزین کردن مستقیم می‌توان تحقیق کرد. در اصطلاح معادلات دیفرانسیل، جمله اول سمت راست معادله $1^\circ - 23^\circ$ یک جواب خاص و جمله دوم $B \cos(\omega t + \phi)$ جواب عمومی معادله همگن $m \ddot{x} + kx = 0$ است. این دو جمله با هم جواب کامل را تشکیل می‌دهند.



شکل ۱۰-۱۱

$$x = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

اثرات شرایط اولیه بعد از گذشت زمان کافی از بین می‌رود. در بقیه این فصل فقط به جواب حالت پایدار خواهیم پرداخت.

تشدید

دامنه نوسان، معادله ۱۰-۲۱، بر حسب تابعی از بسامد محرک ω ، در شکل ۱۰-۱۱ نشان داده شده است. همانطور که $\omega \rightarrow \infty$ مقدار A نیز به صفر نزدیک می‌شود و به ازای $\omega = 0$ مقداری متناهی دارد، ولی به ازای $\omega = \omega_0$ هنگامی که نوسانگر با بسامد طبیعی خود حرکت می‌کند، به طور نامحدودی افزایش می‌یابد. افزایش زیاد دامنه هنگامی که یک دستگاه در بسامد معینی به حرکت در می‌آید تشدید نامیده می‌شود. ω را غالباً بسامد تشدید یا بسامد طبیعی دستگاه می‌نامند. معادله ۱۰-۲۱ پیشگویی می‌کند که وقتی $\omega \rightarrow \omega_0$ ، $A \rightarrow \infty$ ، ولی از آنجا که هیچ دستگاه فیزیکی دامنه نامتناهی نمی‌تواند داشته باشد، آشکار است که جواب به دست آمده به هنگام تشدید صادق نیست. این مشکل به علت صرف نظر کردن از اصطکاک پیش می‌آید؛ وقتی اصطکاک را به حساب آوریم خواهیم دید که با وجود بزرگ بودن دامنه در حالت تشدید، مقدار آن متناهی باقی می‌ماند.

از معادله ۱۰-۲۱ پیداست که A برای $\omega < \omega_0$ مثبت و برای $\omega > \omega_0$ منفی است. دامنه منفی بدین معنی است که اگر تغییرات نیرو به شکل $\cos \omega t$ باشد جابه‌جایی مطابق با $-\cos \omega t$ تغییر می‌کند. از آنجا که $-\cos \omega t = \cos(\omega t + \pi)$ است، علامت معادل با تغییر فاز به اندازه π رادیان (یعنی 180°) بین نیروی محرک و جابه‌جایی است. برای $\omega < \omega_0$ جابه‌جایی هم‌فاز با نیروی محرک است. این تغییر فاز 180° ای حین تشدید، که مشخصه تمام دستگاه‌های نوسانگر است. به سادگی قابل نمایش است.

مثال ۱۰-۴ نمایش نوسانگر هماهنگ واداشته: یک نوار لاستیکی بلند را جدا کنید و از انتهای آن چیزی، مانند یک چاقوی جیبی سنگین بیاویزید. انتهای دیگر آن را در دست بگیرید. بسامد تشدید

ω با مشاهده نوسان آزاد آن به سادگی تعیین می‌شود. حال به آرامی دست خود را با بسامد $\omega < \omega$ تکان دهید! وزنه همفازا با دست شما حرکت خواهد کرد. اگر دستگاه را با بسامد $\omega > \omega$ تکان دهید، خواهید دید که وزنه همواره در خلاف جهت دست شما حرکت می‌کند. برای یک دامنه معین از حرکت دست شما، همانطور که ω به مقدار بیشتر از ω افزایش می‌یابد، وزنه با دامنه‌ای نزولی حرکت خواهد کرد. اگر بکوشید دستگاه را با بسامد $\omega = \omega$ تکان دهید، دامنه آنقدر افزایش خواهد یافت که یا وزنه در هوا به حالت پرواز در می‌آید یا با دستتان برخورد خواهد کرد. در هر دو حالت رفتار دستگاه دیگر همانند با نوسانگر هماهنگ نخواهد بود. ■

پدیده تشدید در عمل دارای هر دو جنبه مثبت و منفی است. با به کار انداختن یک دستگاه در بسامد تشدید می‌توان با نیروی محرک کوچکی به دامنه‌ای بزرگ دست یافت. در لوله‌های ارگ از این اصل به طور مؤثری استفاده می‌شود و مدارهای تشدید الکتریکی امکان میزان کردن رادیو را در بسامد مطلوب ممکن می‌سازند. از طرف دیگر، حرکت با دامنه بزرگ در فنرهای اتومبیل و یا میل لنگ موتور آن مطلوب نیست. برای کاستن از واکنش تشدید نیروی اصطکاک مستهلک کننده‌ای لازم است. حال به تحلیل نوسانگر میرای واداشته می‌پردازیم.

نوسانگر هماهنگ میرای واداشته

اگر به وسیله یک نیروی چسبندگی کندساز $-bv$ از حرکت یک جرم در حال نوسان جلوگیری کنیم، نیروی کل چنین است

$$\begin{aligned} F &= F_s + F_v + F_d \\ &= -kx - bv + F_0 \cos \omega t \end{aligned}$$

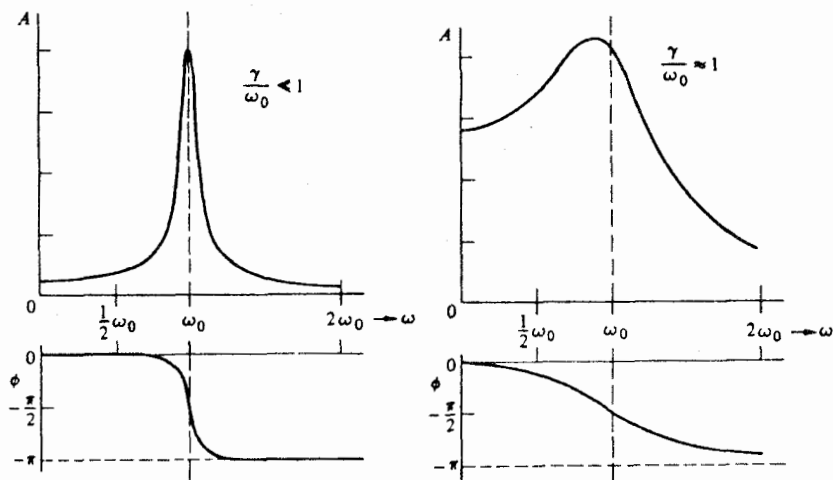
و معادله حرکت چنین نوشته می‌شود

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

با تقسیم آن به m و استفاده از $\omega_0^2 = k/m$ و $\gamma = b/m$ شکل متعارف زیر را داریم

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (۲۴-۱۰)$$

برای یافتن جواب حالت پایا می‌توان در اینجا با شگرد قبلی $x = A \cos \omega t$ را امتحان کرد. اما γ جمله‌ای از $\sin \omega t$ به دست می‌دهد که در طرف راست مشاهده نمی‌شود. بدین جهت این جواب آزمایشی کافی نیست و باید جوابی دیگر به شکل $x = B \cos \omega t + C \sin \omega t = A \cos(\omega t + \phi)$ را امتحان کنیم. اگر این جواب را در معادله $۲۴-۱۰$ جایگزین کنیم، خواهیم دید که در معادله دقیقاً صدق



شکل ۱۰-۱۲

می‌کند به شرط اینکه A و ϕ مقادیر زیر را داشته باشند

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega\gamma)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right) \quad (۱۰-۲۵)$$

روشی که برای به دست آوردن این جواب بیشتر متداول است در یادداشت ۱-۲ آمده است. طبق شکلهای ۱۰-۱۲، رفتار A و ϕ به عنوان تابعی از ω به طور بارزی به کسر γ/ω_0 بستگی دارد. برای میرایی کم، A در $\omega = \omega_0$ بزرگترین مقدار را دارد و دامنه در حالت تشدید چنین است

$$A(\omega_0) = \frac{F_0}{m\omega_0\gamma}$$

همانطور که برای نوسانگر نامیرا انتظار داریم وقتی $\gamma \rightarrow 0$ ، آنگاه $A(\omega_0) \rightarrow \infty$. همچنین توجه کنید هنگامی که $\gamma \rightarrow 0$ ، تغییر فاز به طور ناگهانی رخ می‌دهد. در حد $\gamma = 0$ ، وقتی که $\omega = \omega_0$ است فاز از 0 به $-\pi$ تغییر می‌کند.

تشدید در نوسانگر با میرایی کم: ضریب کیفیت Q

ملاحظات مربوط به انرژی بحث ما را در مورد نوسانگر میرای ناواداشته در بخش ۱-۲ ساده کرد، و به همین طریق در حالت واداشته نیز مفید خواهد بود. در حرکت حالت پایا، دامنه برحسب زمان ثابت است. با استفاده از

$$v = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad \text{و} \quad x = A \cos(\omega t + \phi)$$

داریم

$$K(t) = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$U(t) = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

و

$$E(t) = K(t) + U(t)$$

$$= \frac{1}{2} A^2 [m \omega^2 \sin^2(\omega t + \phi) + k \cos^2(\omega t + \phi)]$$

انرژی وابسته به زمان است و اگر همانند بخش ۱۰-۱ با مقادیر میانگین زمانی کار کنیم تحلیل ما ساده می‌شود. از آنجاکه برای میانگین زمانی در یک دوره کامل $\langle \cos^2(\omega t + \phi) \rangle = \langle \sin^2(\omega t + \phi) \rangle = 1/2$ ،

داریم

$$\langle K \rangle = \frac{1}{4} m \omega^2 A^2$$

$$\langle U \rangle = \frac{1}{4} k A^2$$

$$\langle E \rangle = \frac{1}{4} A^2 (m \omega^2 + k)$$

$$= \frac{1}{4} m A^2 (\omega^2 + \omega_0^2) \quad (۱۰-۲۶)$$

اینک بررسی می‌کنیم که $\langle E \rangle$ چگونه به صورت تابعی از ω تغییر می‌کند. با استفاده از معادله

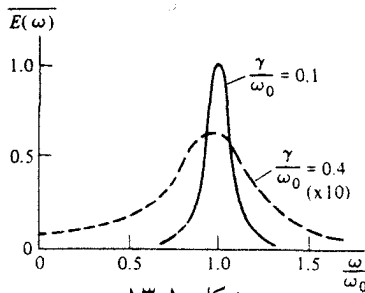
۱۰-۲۵ برای A داریم

$$\langle E(\omega) \rangle = \frac{1}{4} \frac{F_0^2}{m} \frac{(\omega^2 + \omega_0^2)}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega \gamma)^2]} \quad (۱۰-۲۷)$$

این عبارت، دقیق ولی پیچیده است. می‌توان آن را به شکل تقریبی خیلی ساده‌تری برای حالت میرایی کم که در آن $\omega \ll \gamma$ ، نوشت. برای فهم بهتر آن، منحنی تغییرات $\langle E(\omega) \rangle$ را برای $\gamma = 0$ و $\gamma/\omega_0 = 0.4$ در نظر بگیرید (شکل ۱۰-۱۳). برای مقداری از γ که به اندازه کافی کوچک باشد

$\langle E(\omega) \rangle$ بجز در نزدیکیهای تشدید عملاً صفر است. بنابراین تعویض ω با ω_0 در همه جای معادله ۱۰-۲۷ بجز در جمله $(\omega^2 - \omega_0^2)^2$ در مخرج کسر (که در نزدیکیهای تشدید سریعاً تغییر می‌کند)،

خطای زیادی به وجود نخواهد آورد. حتی این جمله نیز می‌تواند به شکل زیر ساده شود



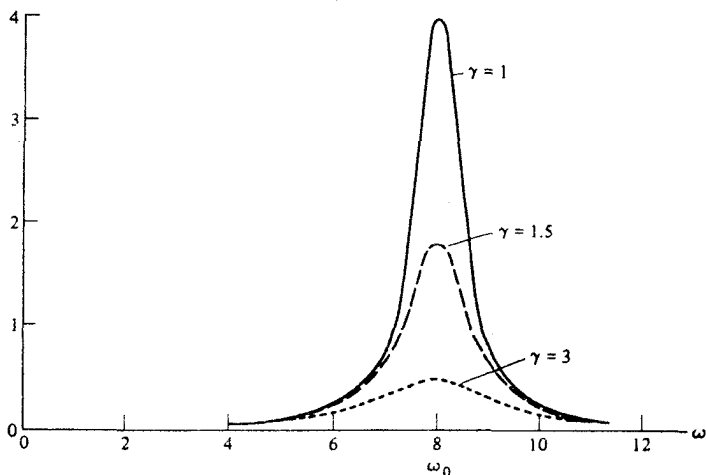
شکل ۱۰-۱۳

$$(\omega_0^2 - \omega^2) = [(\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega)] \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$$

با این تقریب $\langle E(\omega) \rangle$ شکل ساده زیر را به خود می‌گیرد

$$\begin{aligned} \langle E(\omega) \rangle &= \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{m} \frac{2\omega_0^2}{4\omega_0^2(\omega - \omega_0)^2 + \omega_0^2\gamma^2} \\ &= \frac{1}{4} \frac{F_0^2}{m} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2} \end{aligned} \quad (28-10)$$

منحنی تغییرات تابع $[(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2]^{-1}$ که بخش وابسته به بسامد $\langle E(\omega) \rangle$ را تماماً در برمی‌گیرد، منحنی تشدید یا منحنی لورنتسی نامیده می‌شود. منحنیهای تشدید برای چندین مقدار γ در شکل ۱۰-۱۴ رسم شده‌اند. برای دقت بیشتر $\omega_0 = 8 \text{ rad/s}$ در نظر گرفته شده و γ برحسب δ^{-1} داده شده است.



شکل ۱۰-۱۴

حال می‌خواهیم به‌طور دقیق‌تری به منحنی تشدید نگاه کنیم. ارتفاع بیشینه آن $\frac{4}{\gamma^2}$ است. هنگامی که $(\omega - \omega_0)^2 = (\gamma/2)^2$ یا $\omega - \omega_0 = \pm \gamma/2$ باشد، مقدار ارتفاع به نصف کاهش می‌یابد. پهنای کامل منحنی در نیمه ارتفاع بیشینه، غالباً پهنای تشدید نامیده می‌شود. اگر منحنی تشدید در ω_+ (به سمت بسامد بالا) و ω_- (به سمت بسامد پایین) به نصف مقدار بیشینه کاهش یابد، آنگاه پهنای تشدید برابر $\gamma = 2(\gamma/2) = \omega_+ - \omega_-$ است. در شکل ۱۰-۱۵ پهنای تشدید با $\Delta\omega$ نشان داده شده است. در حالت کلی داریم

$$\Delta\omega = \gamma \quad (10-29)$$

با کاهش γ ، منحنی بلندتر و باریک‌تر می‌شود، گستره بسامدهایی که دستگاه در آن واکنش نشان می‌دهد کوچک‌تر می‌شود، و نوسانگر به‌طور فزاینده‌ای بسامدگزین می‌شود.

خاصیت بسامدگزینی یک نوسانگر را به‌طور ساده‌ای می‌توان با ضریب کیفیت Q که در بخش ۱۰-۲ معرفی شد، مشخص کرد. یادآور می‌شویم که Q برابر نسبت انرژی ذخیره شده در نوسانگر به انرژی تلف شده در هر رادیان از نوسان تعریف شده است. همانطور که در معادله ۱۰-۱۹ نشان دادیم برای یک دستگاه با میرایی کم که آزادانه نوسان می‌کند، Q دارای مقدار زیر است

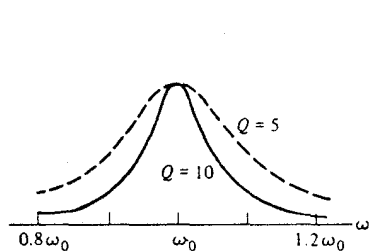
$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma}$$

همین نوسانگر وقتی که واداشته شود، دارای منحنی تشدیدی با پهنای بسامد $\Delta\omega = \gamma$ است. بنابراین نسبت فرکانس تشدید به پهنای تشدید $\omega_0/\Delta\omega$ برابر Q است. در واقع Q اغلب به‌صورت زیر تعریف می‌شود

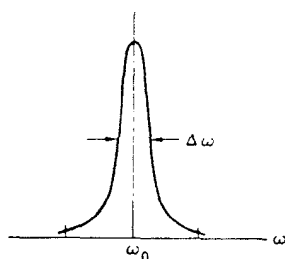
$$Q = \frac{\text{بسامد تشدید}}{\text{پهنای بسامدی منحنی تشدید}} \quad (10-30)$$

در ضمن، اگر تعریف Q را بر حسب انرژی برای نوسانگر واداشته به‌کار ببریم، نتیجه با $Q = \omega_0/\gamma$ یکسان خواهد بود. اثبات این مطلب در یکی از مسائل آمده است.

اگرچه Q اساساً بر حسب انرژی تعریف شده است، کاربرد عمده آن در عمل مشخص کردن واکنش بسامدی یک دستگاه است. شکل ۱۰-۱۶ دو منحنی واکنش با دو مقدار مختلف Q را نشان می‌دهد. برای ساده‌تر ساختن مقایسه پهنایها، ارتفاعها در تشدید برابر گرفته شده‌اند. آشکار است که دستگاهی با $Q = 10$ به‌طور قابل ملاحظه‌ای بیشتر از دستگاهی با $Q = 5$ گزیننده است. همانطور که در مثال ۱۰-۳ اشاره شد، دستگاه‌های اتمی بخصوصی می‌توانند مقدار Q بیشتر از 10^8 داشته باشند. تیزی منحنی تشدید بدین معنی است که دستگاه بجز در بسامدی خیلی نزدیک به بسامد تشدید واکنشی



شکل ۱۰-۱۶



شکل ۱۰-۱۵

نخواهد داشت. از آنجا که بسامد تشدید با ثابتهای اتمی تعیین می‌شود، بسامد نوسان ضرورتاً مستقل از تأثیرات خارجی است. بسامد چنین "ساعت‌های اتمی" چنان دقیق‌اند که جانشین معیارهای زمانی نجومی شده‌اند.

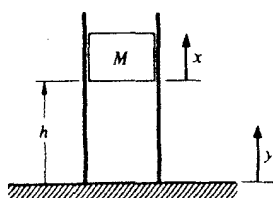
مثال ۱۰-۵ حذف‌کننده ارتعاش: گاهی نیاز به این پیدا می‌شود که اثرات ارتعاش زمین را روی وسایل حساس چون ترازوی حساس و یا دستگاه اپتیکی دقیق کم کنیم. با نصب این وسایل روی "میز هوا" با پایه‌هایی از لوله‌های توخالی که به وسیله پیستونهای متکی بر هوای فشرده می‌توان این منظور را تأمین کرد. چنین پایه‌ای به طور طرحواره در شکل ۱۰-۱۷ نشان داده شده است. سطح ستون A و جرمی که نگه می‌دارد M است.

نیروهای استاتیکی وارد بر M طبق شرط تعادل چنین رابطه‌ای دارند

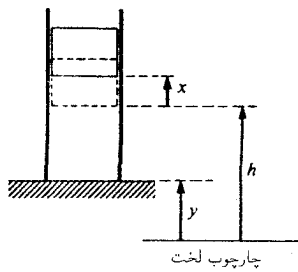
$$P_0 A = Mg + P_{at} A$$

که در آن P_0 فشارگاز داخل استوانه در حالت تعادل و P_{at} فشار جو وارد بر سطح بالایی M است. برای برخی از میزهای هوا وزن Mg بسیار بزرگتر از نیروی جو است. به طوری که از جمله $P_{at} A$ صرف‌نظر خواهیم کرد

$$P_0 A = Mg$$



شکل ۱۰-۱۷



شکل ۱۰-۱۸

ارتفاع M در حال تعادل، h است، فرض کنید جابه‌جایی M از وضع تعادل نسبت به یک چارچوب لخت برابر x است (شکل ۱۰-۱۸). هر چه مقدار x کوچکتر باشد، میز در فضای لخت بی‌حرکت‌تر خواهد بود. ارتعاشات کف زمین باعث می‌شود که انتهای زیرین میز در امتداد قائم به مقدار y جابه‌جا شود. وقتی M نسبت به کف زمین حرکت می‌کند، حجم و فشار گاز محبوس تغییر می‌کند. اگر P فشار لحظه‌ای در داخل استوانه باشد، معادله حرکت M چنین می‌شود

$$M \ddot{x} = PA - Mg$$

طبق قانون بویل، در دمای ثابت، فشار داخل استوانه به‌طور معکوس با حجم گاز تغییر می‌کند. بنابراین

$$PV = \text{const.}$$

$$= P_0 V_0$$

$$= P_0 Ah$$

حجم V عبارت است از

$$V = A(h + x - y)$$

بنابراین

$$P = \frac{P_0 V_0}{V} = P_0 \frac{h}{h + x - y}$$

$$\approx P_0 \left(1 - \frac{x}{h} + \frac{y}{h} \right)$$

در آخرین مرحله فرض کرده‌ایم که جابه‌جاییهای x و y در مقایسه با h (ارتفاع پایه میز) کوچک‌اند.

معادله حرکت به‌صورت زیر در می‌آید

$$M \ddot{x} = P_0 A \left(1 - \frac{x}{h} + \frac{y}{h} \right) - Mg$$

از آنجا که از نیروی جو چشمپوشی کرده‌ایم، $P.A = Mg$ است و معادله حرکت به سادگی چنین به دست می‌آید

$$M \ddot{x} = \frac{Mg}{h}(-x + y)$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{h}x = \frac{g}{h}y$$

اگر ارتعاش کف زمین $y = y_0 \cos \omega t$ باشد، M همانند نوسانگر واداشته نامیرا حرکت می‌کند. با استفاده از معادله ۱۰-۲۲ می‌بینیم که جواب معادله چنین است

$$x = x_0 \cos \omega t$$

که در آن

$$x_0 = y_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

و

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{h}}$$

نقش تعلیق در هوا، رساندن کسر زیر به حداقل ممکن است

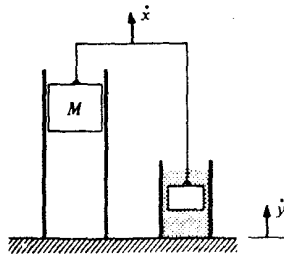
$$\frac{x_0}{y_0} = \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

برای $\omega \ll \omega_0$ داریم $x_0 = y_0$ و ارتعاش بدون کاهش منتقل می‌شود. برای $\omega \gg \omega_0$ داریم $x_0/y_0 = -\omega_0^2/\omega^2$ و دامنه ارتعاش کاهش می‌یابد. از این رو برای اینکه حذف کننده ارتعاش بتواند به طور مؤثر عمل کند، بسامد شدید در مقایسه با بسامد وادارنده باید پایین باشد. تساوی $\omega_0 = \sqrt{g/h}$ ایجاب می‌کند که پایه میز تا حد امکان بلند باشد. (توجه کنید که بسامد شدید مستقل از جرم است و جنبه شگفت‌آور این نوع پایه نیز همین است.)

این دستگاه یک نقص جدی دارد: اگر ارتعاش نزدیک به بسامد شدید صورت گیرد، حذف کننده ارتعاش تبدیل به تقویت کننده ارتعاش می‌شود. برای اجتناب از این عمل دستگاهی میراکننده باید به کار گرفته شود. غالباً این منظور به وسیله دستگاهی به نام ضربت‌گیر انجام می‌پذیرد که مطابق شکل ۱۰-۱۹ متشکل از پیستونی در داخل استوانه‌ای پر از روغن است. ضربت‌گیر نیروی چسبندگی کندکننده bv را ایجاد می‌کند که در آن v سرعت نسبی دو انتهای آن است.

$$v = \dot{x} - \dot{y}$$

معادله حرکت چنین است



شکل ۱۰-۱۹

$$M \ddot{x} = \frac{Mg}{h}(-x + y) - b(x - y)$$

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 y + \gamma \dot{y}$$

که در آن

$$\gamma = \frac{b}{M} \quad \text{و} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{h}$$

وقتی $y = y_0 \cos \omega t$ است، این معادلهٔ یک نوسانگر میرای واداشته است. اما حرکت کف زمین یک جملهٔ وادارندهٔ اضافی $\dot{y} = -\gamma y_0 \sin \omega t$ را به وجود می‌آورد. دامنهٔ حالت پایا، x_0 را می‌توان با جایگزین کردن رابطهٔ $x = x_0 \cos(\omega t + \phi)$ در معادلهٔ بالا پیدا کرد. روش ساده‌تر، همانطور که شرح آن در یادداشتهای ۱۰-۱ و ۲-۱ آمده است استفاده از متغیرهای مختلط است. فرض کنید

$$y = y_0 e^{i\omega t}$$

$$x = x_0 e^{i\omega t}$$

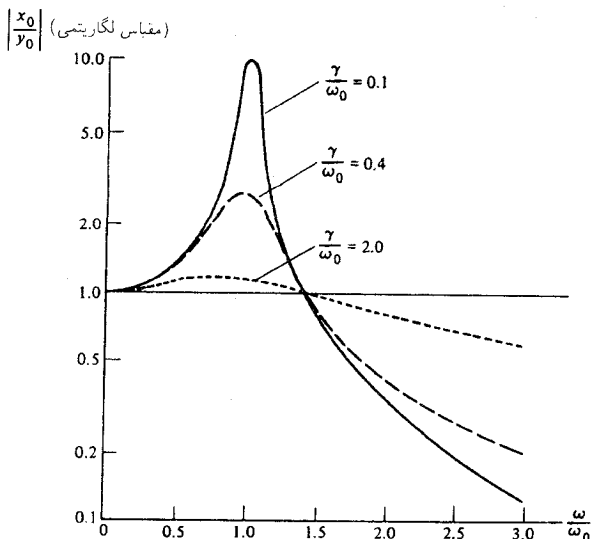
y_0 و x_0 حالا اعدادی مختلط هستند. با جایگزین کردن آنها در معادلهٔ حرکت نتیجه می‌شود

$$(-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega_0^2)x_0 e^{i\omega t} = (\omega_0^2 + i\omega\gamma)y_0 e^{i\omega t}$$

$$x_0 = \left[\frac{\omega_0^2 + i\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma} \right] y_0$$

چون نسبت دامنه‌ها $|x_0|/|y_0|$ مورد نظر ماست، بنابراین داریم

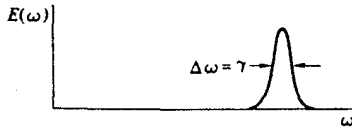
$$\begin{aligned} \frac{|x_0|}{|y_0|} &= \sqrt{\frac{x_0 x_0^*}{y_0 y_0^*}} \\ &= \left[\frac{\omega_0^2 + (\omega\gamma)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$



شکل ۱۰-۲۰

نمودار شکل ۱۰-۲۰ نسبت دامنه‌های $|x_0|/|y_0|$ را بر حسب ω/ω_0 برای مقادیر مختلف γ/ω_0 نشان می‌دهد. برای ω/ω_0 کوچکتر از ۱٫۵ داریم $|x_0|/|y_0| > 1$. در اینجا ارتعاش در واقع تقویت شده است که نشان می‌دهد حتی با وجود میرایی هم لازم است بسامد تشدید به پایینتر از بسامد وادارنده کاهش یابد. وقتی ω/ω_0 بزرگتر از ۱٫۵ باشد $|x_0|/|y_0| < 1$ می‌شود. برای چنین بسامدهای بالایی، هرچه میرایی کمتر باشد جدایی ارتعاش مؤثرتر است. اما میرایی کم خطر ارتعاشات نزدیک به تشدید را افزایش می‌دهد. میزهای هوا عملاً دارای بسامد تشدیدی برابر ۱ Hz و یا کمتر هستند.

در بسیاری از دستگاه‌های حذف‌کننده ارتعاش، به جای تعلیق هوا از فنر استفاده می‌شود. اما این مطلب شکل معادلات حرکت را تغییر نمی‌دهد. در اتومبیلها اغلب از فنرهای مارپیچ برای جدا نگهداشتن بدنه از ارتعاشات جاده استفاده می‌شود. میرایی به وسیله کمک فنرها که نوعی ضربه‌گیر هستند تأمین می‌شود. بسامد تشدید برابر $\omega = \sqrt{k/M}$ است که در آن ثابت فنر M جرم است. اگر بخواهیم یک رانندگی آرام داشته باشیم، اتومبیلی سنگین با میرایی ضعیف و فنرهای نرم مطلوب خواهد بود. اما کنترل چنین اتومبیلی در جاده‌های پر دست‌انداز که می‌تواند تشدید به وجود آورد مشکل است. بهترین نوع تعلیقها، میرایی مربع همراه با کمی سختی است. خطر رانندگی با کمک فنر معیوب این است که اگر اتومبیل با دست‌اندازهای جاده به تشدید بیفتد، ممکن است از کنترل خارج شود.



نوسانگر واداشته

شکل ۱۰-۲۱

۱۰-۴ واکنش نسبت به زمان در مقابل واکنش نسبت به بسامد

هرچه میرایی یک نوسانگر آزاد کمتر باشد، انرژی آن آهسته‌تر تلف می‌شود. همین نوسانگر در حالتی که نیروی وادارنده بر آن وارد می‌شود، با کاهش میرایی به‌طور فزاینده‌ای بسامدگزین می‌شود. همان‌گونه که نشان خواهیم داد، وابستگی به زمان در نوسانگر آزاد و وابستگی به بسامد در نوسانگر واداشته رابطه‌ای نزدیک با هم دارند.

از معادله ۱۰-۱۶ می‌دانیم که انرژی نوسانگر آزاد چنین است

$$E(t) = E_0 e^{-\gamma t}$$

زمان میرایی برابر $\tau = 1/\gamma$ است.

حال، تغییر بسامد همین نوسانگر را موقعی که به‌وسیله نیروی $F_0 \cos \omega t$ واداشته شود در نظر بگیریم از معادله ۱۰-۲۹ پهنای منحنی تشدید چنین است (شکل ۱۰-۲۲)

$$\Delta \omega = \gamma$$

زمان میرایی τ و پهنای منحنی تشدید $\Delta \omega$ از رابطه زیر تبعیت می‌کند

$$\tau \Delta \omega = 1 \quad (10-31)$$

بنابر نتیجه فوق طراحی یک نوسانگر با زمان میرایی و پهنای تشدید اختیاری ناممکن است؛ اگر یکی را انتخاب کنیم دیگری مطابق با معادله ۱۰-۳۱ به‌طور خودبه‌خود تعیین می‌شود.

معادله ۱۰-۳۱ متضمن پیامدهای بسیاری در طراحی دستگاه‌های مکانیکی و الکتریکی است. هر عنصری که از خاصیت بسامدگزینی بالایی برخوردار است اگر به‌طور اتفاقی مختل شود، برای مدتی طولانی نوسان خواهد کرد. به علاوه، وقتی که نیروی وادارنده بر آن وارد شود، برای چنین عنصری مدت زیادی طول می‌کشد تا به حالت پایا برسد. زیرا اثرات شرایط اولیه به آهستگی از بین می‌رود. خیلی عمومی‌تر صحبت کنیم، معادله ۱۰-۳۱ نقشی اساسی در مکانیک کوانتومی دارد و مشابه یکی از شکلهای اصل عدم قطعیت هایزنبرگ است.

یادداشت ۱-۱۰ حل معادلات حرکت برای نوسانگر میرای ناوا داشته

استفاده از متغیرهای مختلط. تمام معادلات حرکت این فصل را می توان به سادگی با استفاده از متغیرهای مختلط حل کرد. در اینجا خلاصه ای از جبر اعداد مختلط را می آوریم.

۱. هر عدد مختلط z را می توان در شکل دکارتی به صورت $x + iy$ نوشت که در آن $i^2 = -1$

است. x قسمت حقیقی z و y قسمت موهومی آن است. مجموع دو عدد مختلط $z_1 = x_1 + iy_1$ و

$z_2 = x_2 + iy_2$ عدد مختلط $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ است. حاصلضرب z_1 و

z_2 چنین است

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1 x_2 + ix_1 y_2 + iy_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \end{aligned}$$

اگر دو عدد مختلط مساوی باشند، قسمت‌های حقیقی و موهومی آن به ترتیب مساوی اند.

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$$

که تساویهای زیر از آن نتیجه می شوند

$$x_1 = x_2$$

$$y_1 = y_2$$

۲. عدد $z^* \equiv x - iy$ مزدوج مختلط $z = x + iy$ است و کمیت $|z| = \sqrt{zz^*}$ بزرگی z

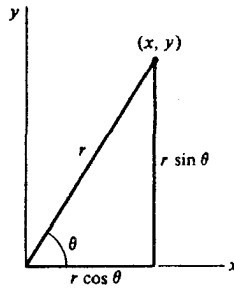
است

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{zz^*} \\ &= [(x + iy)(x - iy)]^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

۳. هر عدد مختلط z را می توان به شکل قطبی $re^{i\theta}$ نوشت که در آن r که عددی است حقیقی،

مذول و θ آرگومان نامیده می شود. برای تبدیل شکل دکارتی به شکل قطبی از قضیهٔ دوموار استفاده می کنیم

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$



شکل ۱۰-۲۲

بنابراین

$$re^{i\theta} = r \cos \theta + ir \sin \theta$$

$$= x + iy$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

و

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

می‌بینیم که $r = |z|$ است.

اعداد مختلط را می‌توان به صورت نمودار نمایش داد. فرض کنید محور افقی، محور حقیقی (x) و محور قائم، محور موهومی (y) باشد. عدد مختلط $x + iy$ به وسیله نقطه (x, y) نمایش داده می‌شود. همانطور که شکل ۱۰-۲۲ نشان می‌دهد، کاربرد شکل قطبی مشابه استفاده از مختصات قطبی تخت است.

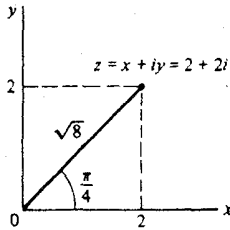
در اینجا به چند مثال می‌پردازیم:

۱. کمیت $z = (3 + 4i)/(2 + i)$ را به شکل دکارتی بیان کنید.

روش حل این مسئله ضرب کردن صورت و مخرج در مزدوج مختلط مخرج است

$$z = \frac{3 + 4i}{2 + i}$$

$$= \frac{3 + 4i}{2 + i} \times \frac{2 - i}{2 - i}$$



شکل ۱۰-۲۳

$$\begin{aligned} &= \frac{6 + 8i - 3i - 4i^2}{4 + 2i - 2i - i^2} \\ &= \frac{10 + 5i}{5} \\ &= 2 + i \end{aligned}$$

۲. عدد مختلط $z = 2 + 2i$ را به شکل قطبی بنویسید (شکل ۱۰-۲۳)

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ &= \sqrt{2^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{8} \\ \theta &= \arctan \frac{2}{2} = \frac{\pi}{4} \\ z &= \sqrt{8} e^{i\pi/4} \end{aligned}$$

نوسانگر میرا. حال برمی‌گردیم به معادله نوسانگر میرا

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1)$$

به منظور تبدیل این رابطه به شکل مختلط، معادله کمی زیر را معرفی می‌کنیم

$$\ddot{y} + \gamma \dot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad (2)$$

پس از ضرب کردن معادله ۲ در i و اضافه کردن آن به معادله ۱ حاصل می‌شود

$$\dot{z} + \gamma z + \omega_0^2 z = 0 \quad (3)$$

توجه کنید هر یک از قسمتهای حقیقی و موهومی z جواب قابل قبولی برای معادله حرکت است. از آنجا که ضرایب مشتقات z تماماً ثابت‌اند، انتخاب طبیعی برای جواب معادله ۳ چنین است

$$z = z_0 e^{\alpha t} \quad (۴)$$

که در آن z_0 و α مستقل از t اند. با این جواب آزمایشی، معادله ۳ نتیجه می‌دهد

$$\alpha^2 z_0 e^{\alpha t} + \alpha \gamma z_0 e^{\alpha t} + \omega_0^2 z_0 e^{\alpha t} = 0$$

با تقسیم بر عامل مشترک $z_0 e^{\alpha t}$ داریم

$$\alpha^2 + \alpha \gamma + \omega_0^2 = 0 \quad (۵)$$

که جواب زیر را دارد

$$\alpha = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} \quad (۶)$$

ریشه‌های دوگانه را α_1 و α_2 می‌نامیم. می‌بینیم که جواب را می‌توان چنین نوشت

$$z = z_A e^{\alpha_1 t} + z_B e^{\alpha_2 t}$$

که در آن z_A و z_B مقادیر ثابتی هستند.

بسته به اینکه α حقیقی یا مختلط باشد سه شکل ممکن برای جواب وجود دارد. این جوابها را به

نوبت بررسی می‌کنیم.

حالت اول- میرایی کم: $\gamma^2 \ll 4\omega_0^2$

در این حالت $\sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}$ موهومی است و می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{\gamma}{2} \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \\ &= -\frac{\gamma}{2} \pm i \omega_1 \end{aligned} \quad (۷)$$

که در آن

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

جواب چنین است

$$z = e^{-(\gamma/2)t} (z_1 e^{i\omega_1 t} + z_2 e^{-i\omega_1 t})$$

که در آن z_1 و z_2 ثابتهای مختلط اند. برای یافتن قسمت حقیقی z ، اعداد مختلط را به شکل دکارتی

می‌نویسیم

$$x + iy = e^{-(\gamma/2)t} [(x_1 + iy_1)(\cos \omega_1 t + i \sin \omega_1 t) + (x_2 + iy_2)(\cos \omega_1 t - i \sin \omega_1 t)]$$

قسمت حقیقی x چنین است

$$x = e^{-(\gamma/2)t} (B \cos \omega_1 t + C \sin \omega_1 t)$$

یا

$$x = Ae^{-(\gamma/2)t} \cos(\omega_1 t + \phi) \quad (A)$$

که در آن A و ϕ ثابتهای اختیاری هستند. این جوابی است که در معادله ۹-۱۰ نقل شد. در ضمن قسمت موهومی z که آن هم یک جواب قابل قبول است، دقیقاً به همین شکل است.

حالت دوم-میرایی: $\omega_1^2 > \gamma^2/4$
 در این حالت $\omega_1^2 - \gamma^2/4$ حقیقی است و معادله ۵ دارای جواب زیر است

$$\alpha = -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{\gamma}{2} \sqrt{1 - \frac{4\omega_1^2}{\gamma^2}}$$

هر دو ریشه منفی است و داریم

$$z = z_1 e^{-|\alpha_1|t} + z_2 e^{-|\alpha_2|t} \quad (9)$$

توابع نمایی حقیقی هستند، و قسمت حقیقی z چنین است

$$x = Ae^{-|\alpha_1|t} + Be^{-|\alpha_2|t} \quad (10)$$

این جواب رفتار نوسانی ندارد و حرکت فوق میرا نامیده می شود.

حالت سوم-میرایی بحرانی: $\omega_1^2 = \gamma^2/4$
 اگر $\omega_1^2 = \gamma^2/4$ باشد فقط یک ریشه داریم

$$\alpha = -\frac{\gamma}{2}$$

جواب مربوط چنین است

$$x = Ae^{-(\gamma/2)t} \quad (11)$$

اما این جواب کامل نیست. از نظر ریاضی، جواب یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم، همواره دو ثابت اختیاری دارد. از نظر فیزیکی جواب باید دو ثابت داشته باشد تا امکان مشخص کردن مکان و سرعت اولیه نوسانگر را داشته باشیم. همانطور که در متون مربوط به معادلات دیفرانسیل توصیف شده است، جواب دوم را با جواب آزمایشی "تغییر پارامترها" می توان پیدا کرد

$$x = u(t)e^{-(\gamma/2)(t)}$$

با جایگزین کردن آن در معادله ۱ و به خاطر آوردن اینکه در این حالت $\gamma = 2\omega$ است، در می یابیم که $u(t)$ باید در معادله زیر صدق کند

$$\ddot{u} = 0$$

بنابراین

$$u = a + bt$$

و جواب عمومی عبارت است از

$$x = Ae^{-(\gamma/2)t} + Bte^{-(\gamma/2)t} \quad (12)$$

یادداشت ۱-۲ حل معادله حرکت برای نوسانگر واداشته

می خواهیم معادله زیر را حل کنیم

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (1)$$

معادله کمکی زیر را در نظر بگیرید

$$\ddot{y} + \gamma \dot{y} + \omega^2 y = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \quad (2)$$

با ضرب کردن معادله ۲ در i و اضافه کردن آن به معادله ۱ نتیجه می گیریم

$$\ddot{z} + \gamma \dot{z} + \omega^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \quad (3)$$

z باید به صورت $e^{i\omega t}$ تغییر کند. بنابراین تابع زیر را امتحان می کنیم

$$z = z_0 e^{i\omega t}$$

جایگزینی این جواب در معادله ۳ نتیجه می دهد

$$(-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega^2)z_0 e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

$$z_0 = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}$$

با ضرب کردن صورت و مخرج کسر در مزدوج مختلط مخرج می‌توانیم z_0 را به شکل دکارتی درآوریم

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{F_0}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\gamma} \\ &= \frac{F_0}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2} \end{aligned}$$

در شکل قطبی $z_0 = R e^{i\phi}$ است که در آن

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{z_0 z_0^*} \\ &= \frac{F_0}{m} \left[\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (۴)$$

و

$$\phi = \arctan \left(\frac{\omega\gamma}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \quad (۵)$$

جواب کامل به صورت زیر است

$$z = R e^{i\phi} e^{i\omega t}$$

که قسمت حقیقی آن چنین است

$$x = R \cos(\omega t + \phi)$$

در حالت پایا، حرکت کاملاً به وسیله دامنه R و زاویه فاز ϕ مشخص می‌شود. R و ϕ هر دو به طور ضمنی در عدد مختلط منفرد z_0 وجود دارند.

مسائل

۱-۱۰ با محاسبه مستقیم نشان دهید $\langle \sin^2(\omega t) \rangle = 1/2$ است که در آن میانگین زمانی برای دوره تناوب کامل $t_1 \leq t \leq t_1 + 2\pi/\omega$ گرفته شده است.

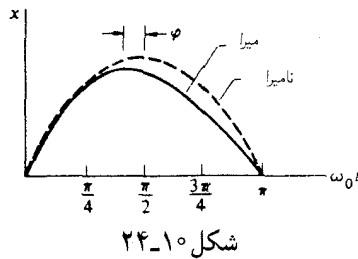
همچنین نشان دهید وقتی که میانگین برای یک دوره تناوب کامل حساب شود $\langle \sin(\omega t) \cos(\omega t) \rangle = 0$ است.

۱-۲ یک جرم ۳ کیلوگرمی به فنری متصل است و با بسامد ۲ Hz و مقدار $Q = 60$ نوسان می‌کند. ثابت فنر و ثابت میرایی را پیدا کنید.

۱-۳ حرکت یک نوسانگر هماهنگ آزاد و نامیرا با رابطه $x = A \sin \omega_0 t$ داده شده است.

جابه‌جایی دقیقاً در وسط فاصله بین نقاط تقاطع منحنی با محور افقی بیشینه است. حرکت نوسانگر میرا دیگر حرکتی سینوسی نیست نقطه بیشینه به جلوتر از نقطه وسط منحنی پیش می‌رود. نشان دهید که پیشروی نقطه بیشینه به اندازه زاویه فاز ϕ است که تقریباً با رابطه زیر داده می‌شود (شکل ۱۰-۲۴)

$$\phi = \frac{1}{2Q}$$



که در آن فرض کرده‌ایم Q بزرگ است.

۱۰-۴ کاهش لگاریتمی δ برابر لگاریتم طبیعی نسبت جابه‌جاییهای بیشینه متوالی یک نوسانگر میرای آزاد (در یک جهت) تعریف شده است. نشان دهید $\delta = \pi/Q$ است.

ثابت فنر k و ضریب میرایی b یک نوسانگر میرا را پیدا کنید که دارای جرم 5 kg و بسامد نوسان 5 Hz و کاهش لگاریتمی 2° است.

۱۰-۵ اگر ضریب میرایی یک نوسانگر آزاد $\gamma = 2\omega$ باشد، این دستگاه را میرای بحرانی می‌نامند. با حایگزین کردن مستقیم نشان دهید که در این حالت حرکت با رابطه زیر توصیف می‌شود

$$x = (A + Bt)e^{-(\gamma/2)t}$$

که در آن A و B ثابت‌اند.

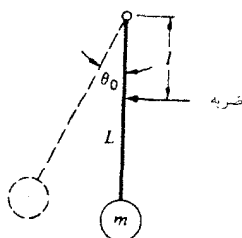
یک نوسانگر میرای بحرانی در نقطه تعادل در حال سکون است. در $t = 0$ ضربه I به آن نواخته می‌شود. منحنی حرکت را رسم کنید و زمانی را که جابه‌جایی شروع به کاهش می‌کند پیدا کنید.

۱۰-۶ (الف) یک جرم 10 کیلوگرمی از ارتفاع 50 سانتیمتری به سوی کفه یک ترازوی فنری رها می‌شود و روی آن قرار می‌گیرد. کفه سرانجام در 10 سانتیمتری پایین مکان اولیه خود به حال سکون در می‌آید. جرم کفه 2 کیلوگرم است. ثابت فنر را پیدا کنید. (ب) می‌خواهیم یک دستگاه میراکننده که

بتواند ترازو را در حداقل زمان و بدون حرکت اضافی به حالت سکون در آورد نصب کنیم. این امر بدان معنی است که نوسان ترازو بایستی به طور بحرانی میرا شود (یادداشت ۱۰-۱ را ببینید). ضریب میرایی لازم و معادله حرکت کفه را پس از برخورد این جرم پیدا کنید.

۷-۱۰ بسامد نیروی وادارنده‌ای که به ازای آن سرعت نوسانگر میرای واداشته دقیقاً با نیروی وادارنده همفاز باشد، پیدا کنید.

۸-۱۰ آونگ یک ساعت دیواری هر بار که از خط قائم می‌گذرد، یک چرخ دنگ را فعال می‌کند. چرخ دنگ (توسط وزنه‌ای که به آن آویخته است) تحت کشش قرار دارد و به آونگ در فاصله l از نقطه آویزش ضربه کوچکی وارد می‌کند (شکل ۱۰-۲۵). انرژی منتقل شده، از این ضربه، انرژی تلف



شکل ۱۰-۲۵

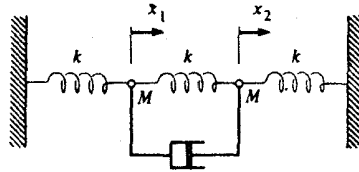
شده به وسیله اصطکاک را جبران می‌کند. به طوری که آونگ با دامنه ثابتی نوسان می‌کند. (الف) ضربه مورد نیاز برای تداوم حرکت آونگی به طول L و جرم m و دامنه نوسان θ_0 و ضریب کیفیت Q چقدر است؟ (ب) چرا فعال شدن چرخ دنگ هنگام عبور از خط قائم بر هر نقطه دیگر از مسیر ترجیح دارد؟

۹-۱۰ نشان دهید که برای نوسانگر واداشته بامیرایی کم و نزدیک به تشدید، داریم

$$\frac{\text{میانگین انرژی ذخیره شده در نوسانگر}}{\text{میانگین انرژی تلف شده در هر رادیان}} \approx \frac{\omega_0}{\gamma} = Q$$

۱۰-۱۰ یک ساعت کوچک کوکو، آونگی به طول ۲۵cm با جرم ۱g و دوره تناوب ۱s دارد. نیروی محرکه ساعت به وسیله وزنه ۲۰۰ گرمی که در فاصله بین کوک شدن روزانه اش به اندازه ۲ متر سقوط می‌کند، تأمین می‌شود. دامنه نوسان ۲° رادیان است. مقدار Q برای این ساعت چقدر است؟ اگر این ساعت توان خود را از یک باتری به ظرفیت ۱J بگیرد، چه مدتی کار خواهد کرد؟

۱۱-۱۰ دوزره هر یک به جرم M بین سه فنریکسان قرار دارند. فنرها بدون جرم فرض می‌شوند و ثابت فنر هر یک برابر k است. از گرانش صرف نظر کنید. جرمها همانطور که شکل ۱۰-۲۶ نشان می‌دهد به ضربه گیر بدون جرمی متصل اند.



شکل ۱۰-۲۶

جعبه اصطکاک نیروی bv را اعمال می‌کند، که v سرعت نسبی دو انتهای آن است. نیروی اصطکاک با حرکت مخالفت می‌کند. فرض کنید x_1 و x_2 جابه‌جاییهای دو جرم از وضع تعادل باشند. (الف) معادله حرکت هر یک از جرمها را پیدا کنید. (ب) نشان دهید که معادلات حرکت بر حسب متغیرهای وابسته جدید $y_1 = x_1 + x_2$ و $y_2 = x_1 - x_2$ قابل حل است. (ج) نشان دهید که اگر جرمها در ابتدا ساکن باشند و به جرم ۱ سرعت اولیه v داده شود، معادلات حرکت جرمها پس از مدت زمانی به اندازه کافی طولانی چنین است:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ &= \frac{v}{2\omega} \sin \omega t \end{aligned}$$

ω را تعیین کنید.

۱۲-۱۰ حرکت یک نوسانگر میرا که نیروی وادارنده $F \cos \omega t$ بر آن وارد می‌شود، با رابطه $x_a(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ داده شده است که در آن A و ϕ از معادله ۱۰-۲۵ تعیین می‌شوند. نوسانگری را در نظر بگیرید که از حالت سکون در $t = 0$ رها می‌شود. در این حرکت شرایط $x(0) = 0$ و $v(0) = 0$ باید صدق کند، ولی پس از زمانی طولانی، انتظار داریم $x(t) = x_a(t)$ باشد. برای اینکه چنین شرایطی برقرار باشد، جوابی همچون معادله زیر را اختیار می‌کنیم

$$x(t) = x_a(t) + x_b(t)$$

که در آن $x_b(t)$ جواب معادله حرکت نوسانگر میرای آزاد، معادله ۱۰-۸ است. (الف) نشان دهید که اگر $x_a(t)$ در معادله نوسانگر میرای واداشته صدق کند، آنگاه $x(t) = x_a(t) + x_b(t)$ است که در آن $x_b(t)$ در معادله حرکت نوسانگر میرای آزاد، معادله ۱۰-۲۵، صدق می‌کند. (ب) ثابتهای اختیاری $x_b(t)$ را طوری انتخاب کنید که $x(t)$ در شرایط اولیه صدق کند. $x_b(t)$ با معادله ۱۰-۹ داده شده است. توجه کنید A و ϕ در اینجا اختیاری هستند. (ج) حرکت حاصل را در حالتی که نوسانگر در تشدید واداشته باشد رسم کنید.

نظریه نسبیت خاص

۱-۱۱ نیاز به نوعی تفکر جدید

از بعضی جهات ساختار فیزیک شباهت به بنایی بزرگ دارد که نمای خارجی آن برای یک بازدیدکننده معمولی آشکار است، ولی درک زندگی داخلی آن - یعنی آداب و رسوم و دیگر تشریفات آنکه چشم اندازی ویژه به ساکنان آن می‌بخشد - مستلزم صرف وقت و تلاش است. در واقع، هدف از تلاش کنونی ما ورود به این قلمرو و آشنایی با این شناخت خاص است. در ده فصل اول، با قوانین بنیادی مکانیک کلاسیک آشنا شدیم و آنها را مورد استفاده قرار دادیم و اکنون با شناخت این قوانین، زیبایی و سادگی اساسی و قدرت آنها را درک می‌کنیم.

متأسفانه، در ارائه دینامیک به شکل مختصر و آراسته‌اش و به‌طور کلی از بحث اینکه فیزیک حقیقتاً چگونه رشد یافته است برکنار بودیم. در فصل‌های ۱۱ تا ۱۴ یکی از بزرگترین دستاوردهای فیزیک نوین، یعنی نظریه نسبیت خاص را مورد بحث قرار خواهیم داد. به جای اینکه ساختار کامل نظریه و یک رشته اصول موضوع و قواعد کاربرد آنها را بیان کنیم، از روش گذشته مان عدول می‌کنیم و به زیربنای نظریه و توضیح اصول آن نگاهی می‌اندازیم.

اگر فیزیک را چون بنایی بزرگ تلقی کنیم، یقیناً زیربنایی قدیمی دارد که بر بقایای کلبه‌ای ماقبل تاریخ، آنجا که انسان ابتدا رد کرده‌ ماه را تعقیب می‌کرد و می‌کوشید تا تصویر ساده‌ای از طبیعت بدست آورد، استوار شده است. آثار این قدمت در محل‌هایی چون فنیقیه، مصر، بابل و البته یونان پنهان است. پرگار و خط‌کش در میان آهنرباهای طبیعی، کهر باها و دیگر مصنوعات و وسایل طالع‌بینها و کیمیاگران قرار دارد. بنای این ساختمان بر ویرانه‌های اشتباهات اولیه و کوششهای پر زحمت برای فهمیدن واقعی طبیعت استوار است اما هیچیک از اینها به چشم نمی‌آید، و ما ساختمان عصر حاضر را مبنای بحث قرار می‌دهیم. قشر خارجی این ساختمان در قرن هفدهم به وسیله کپلر، گالیله، نیوتون، و کسانانی چون هویگنس، هوک، لایب‌نیتس، برنولی، و بویل ساخته شد. مشخصه مشترک معماران عمده آن این است که در حالی که ابعاد خارجی این بنا را با به‌کار بردن فیزیک در حوزه‌های جدید گسترش می‌دهند، با شناخت دقیقتر قوانین بنیادی شالوده‌های آن را نیز استحکام می‌بخشند. بزرگترین این شخصیتها نیوتون است که قوانین دینامیک و گرانش او سنگ بنای علوم نوین به‌شمار می‌رود. در عین حال وی فیزیک را در امور طبیعی مورد استفاده قرار داده است. وی آزمایشهای دقیقی در مورد جریان گرما، نورشناسی، حرکت اجسام تحت تأثیر نیروهای چسبندگی انجام داد و شکل ماه، جزر و مد در سواحل انگلستان و چگونگی ساختن پلها را مورد بررسی قرار داد.

قدرت تحرکی که با اکتشاف نیوتون به فیزیک بخشیده شد هنوز هم با قوت با ما همراه است. قرنهای هیجدهم و نوزدهم شاهد شکوفایی علم بود و فیزیکدانانی چون اوپلر، لاگرانژ، لاپلاس، فاراده، و ماکسول شناخت ما را از جهان فیزیک گسترش دادند. اما تلاش آنها در جهت گسترش بنا به سوی بالا بود. قوانین بنیادی فیزیک که به وسیله نیوتون کشف شده بود چنان مستحکم و موفق بود که تا ربع آخر قرن نوزدهم هیچ کوشش جدی برای بررسی شالوده آن به عمل نیامد.

فیزیکدان آلمانی، ارنست ماخ اولین کسی بود که تفکر نیوتونی را به‌طور موفقیت‌آمیزی به چالش گرفت. اگرچه کارهای ماخ فیزیک نیوتونی را کم و بیش دست‌نخورده باقی گذاشت، تفکر وی در تحولی که به زودی رخ داد نقش اساسی داشت. در ۱۸۸۳ ماخ کتاب درسی خود را به نام "علم مکانیک" منتشر ساخت که در بردارنده نقدهای فیزیک نیوتونی و در واقع اولین نقد دقیق بر نظریه دینامیک نیوتون بود. این رساله علاوه بر تشریح نظریه دینامیک نیوتون به‌طور واضح، متضمن نظرات بسیار مهمی در اصول مکانیک بود. ماخ با تحلیل دقیق توضیح نیوتون درباره قوانین دینامیک و با تمیز بین تعاریف، نتایج حاصل و بیان قوانین فیزیکی، دینامیک نیوتون را به روشنی بازگو کرد. رهیافت ماخ اکنون به‌نحو گسترده‌ای پذیرفته شده است و بحث ما نیز درباره قوانین نیوتون در فصل ۲ تا اندازه زیادی به همان روش بوده است.

در کتاب "علم مکانیک" تمایز بین حرکت‌های مطلق و نسبی مطرح شد. ماخ تضاد طرز تفکر نیوتون

را در این مورد خاطر نشان کرد، ولی در ادامه آن کوشید که نشان دهد این مسئله به کار برد دینامیک نیوتونی ربطی ندارد. وی در این جریان مسئله لختی را مورد بررسی قرار داد و اصلی را اعلام کرد که اکنون به نام خود او معروف است: لختی خاصیت ذاتی ماده یا فضانیست بلکه بستگی به وجود تمام مواد جهان دارد. اما در بحث نیروهای مجازی در فصل ۸ با اصل مآخ برخورد کردیم، ولی اکنون در اینجا روی این موضوع بحث نخواهیم کرد. زیرا چنین برمی آید که مسئله لختی مشکل اساسی مکانیک نیوتونی نبوده است.

ضعف اساسی دینامیک نیوتونی، همانطور که مآخ به آن اشاره کرده است، در مفهوم نیوتونی فضا و زمان نهفته است. نیوتون در پیشگفتار نظریه دینامیکی خود اعتراف می کند که از تفکرات نظری مجرد خودداری کرده و تنها به واقعیتهای قابل مشاهده می پردازد. اگرچه چنین دیدگاهی اکنون عادی است، در زمان خود جهش روشنفکرانه عظیمی محسوب می شد. قبل از نیوتون کار فلسفه طبیعی تشریح دلایل رویدادها، یافتن توضیح معقول کارکرد طبیعت بود تا توصیف کمی پدیده های طبیعی. نیوتون اساساً اولویتها را معکوس کرد. نیوتون در مقابل این انتقاد که نظریه گرانش عمومی وی صرفاً به توصیف گرانش بدون ذکر منشأ آن می پردازد، جواب داد "من فرضیه نمی سازم."

متأسفانه نیوتون کاملاً به تصمیم خود یعنی پرهیز از تفکر نظری مجرد و پرداختن به واقعیات قابل مشاهده وفادار نماند. بخصوص به توصیف زیر از زمان که در "پرنسیپیا" آمده است توجه کنید (متن خلاصه شده است).

"زمان مطلق، واقعی و ریاضی، خود به خود و بنا بر ماهیت واقعی اش به طور یکنواخت و بدون دخالت عوامل خارجی جریان دارد." "زمان نسبی و ظاهری و معمولی چیزی ملموس است و معیار خارجی، زمان مطلق است که به طور دقیق یا غیر دقیق به وسیله حرکت اجسام تخمین زده می شود و معمولاً به جای زمان حقیقی به صورت ساعت، روز، ماه و سال به کار می رود."

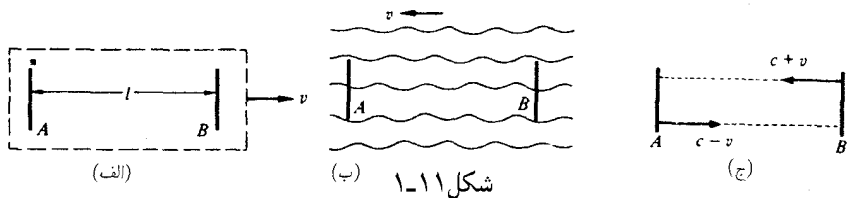
تفسیر مآخ این بود "چنین به نظر می رسد که اظهارات نیوتون در اینجا هنوز تحت تأثیر فلسفه قرون وسطی است، گویی به تصمیم خود مبنی بر توجه به حقایق واقعی وفادار نمانده است." مآخ در ادامه اظهار می دارد که چون زمان لزوماً با حرکت تکراری یک دستگاه فیزیکی مانند آونگ ساعت و یا گردش زمین دور خورشید اندازه گرفته می شود، پس خواص زمان باید با قوانین حاکم بر حرکت دستگاههای فیزیکی مرتبط باشد. به زبان ساده باید گفت که تصور نیوتون از زمان بدون ساعت متافیزیکی است. برای درک خواص زمان باید به خواص ساعت توجه کنیم. آیا واقعاً این مطلب ساده است؟ بله به راستی ساده است، ولی به این شرط که مفهوم زمان مطلق چنان طبیعی نباشد که نتایج نهایی دیدگاه مآخ (توصیف

نسبیتی زمان) یک ضربهٔ تکانه‌دهنده برای دانشجویان علوم محسوب شود.

نقاط ضعف مشابهی هم در دیدگاه نیوتونی فضا وجود دارد. ماخ استدلال کرد که چون مکان یک جسم در فضا به وسیلهٔ میله‌های اندازه‌گیری تعیین می‌شود، خواص فضا را می‌توان فقط با بررسی خواص خط‌کشها فهمید. برای شناخت فضا باید به طبیعت نگر است نه آنکه به تخیلات افلاطونی پناه برد.

سهم ویژهٔ ماخ در این بررسی، آزمودن بنیادیتترین جنبه‌های تفکر نیوتون و اعمال نظر انتقادی نسبت به موضوعاتی بود که به علت سادگی مورد بحث واقع نمی‌شدند، و بالاخره اصرار او به این نکته بود که خواص طبیعت را به تجربه به‌شناسیم و صرفاً به تجزیهات ذهنی اتکا نکنیم. از این دیدگاه، فرضیات نیوتون در مورد فضا و زمان باید منحصراً به‌عنوان اصول موضوعه تلقی شوند. مکانیک کلاسیک از این اصول پیروی می‌کند، ولی فرضیات دیگر هم امکانپذیر است که از آن قوانین دینامیکی دیگری را می‌توان نتیجه گرفت.

انتقاد ماخ اثر آنی اندکی داشت، ولی سرانجام تأثیر خود را بخشید. بخصوص اینشتین جوان در سالهای ۱۸۹۷-۱۹۰۰، هنگامی که دانشجوی انستیتوی پلی‌تکنیک زوریخ بود به نظرات ماخ در مورد اصول فیزیک نیوتونی و این اصرار ماخ که مفاهیم فیزیکی بر حسب مشاهدات تعیین می‌شوند شدیداً مجذوب شد. اما علت اصلی کنار زدن فیزیک نیوتونی انتقادات ماخ از تفکر نیوتونی نبود. مشکل اصلی در نظریهٔ الکترومغناطیسی ماکسول، این والاترین دستاورد فیزیک کلاسیک، نهفته است. این مشکل به صورت سنتی با استفاده از آزمایش مشخصی که فیزیک کلاسیک را به‌طور قطعی کنار زد (آزمایش مایکلسون-مورلی) نشان داده می‌شود، و در اکثر متون نسبیت خاص آن را به‌عنوان نقطهٔ شروع انتخاب می‌کنند. ما این سنت را دنبال خواهیم کرد، ولی باید اشاره کنیم که تاریخ به این سادگی نیست. نخست اینکه آلبرت مایکلسون که طرح و اجرای آزمایش را به‌انجام رساند هرگز بی‌اهمیت آن نبرد. به‌پندار مایکلسون آزمایش به‌خاطر عدم ارائهٔ نتیجهٔ مورد انتظار، تلاشی نافرجام بود، پنداری که وی تا مدت‌زمانی طولانی بعد از شناخت اهمیت آن حفظ کرد. به‌علاوه، اکنون آشکار شد که آزمایش مایکلسون-مورلی نقش اندکی (اگر واقعاً نقشی در کار بود) در طرز فکر اینشتین داشت. در واقع دلایل محکمی بر این باور وجود دارد که اینشتین تا هنگام انتشار نظریهٔ نسبیت خود در ۱۹۰۶ هیچ‌چیز در مورد این آزمایش نمی‌دانست. با وجود این، آزمایش مایکلسون-مورلی چنان به‌روشنی وضع دشوار نظریهٔ الکترومغناطیسی را به‌نمایش می‌گذارد که ما به سنت تن می‌دهیم و آن را نقطهٔ شروع کار خود انتخاب می‌کنیم.



۱۱-۲ آزمایش مایکلسون-مورلی

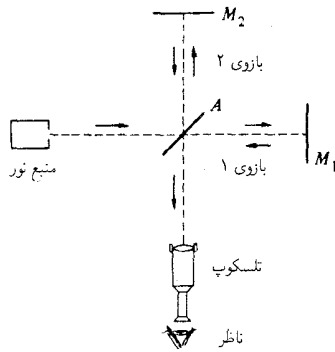
مسئله‌ای که مایکلسون خود را وقف آن کرد، تعیین اثر حرکت زمین روی سرعت نور بود. به‌طور خلاصه نظریهٔ الکترومغناطیسی ماکسول (۱۸۶۱) پیش‌بینی کرد که آشفتگیهای الکترومغناطیسی در فضای تهی با سرعت 3×10^8 متر برثانیه (سرعت نور) منتشر می‌شود. ساده‌ترین آشفتگی الکترومغناطیسی موج متناوب است و شواهدی دال براینکه نور متشکل از امواج الکترومغناطیسی است بسیار قوی بود. درعین حال مشکلات مفهومی نیز وجود داشت.

تنها امواجی که قبل از آن شناخته شده بود امواج مکانیکی بود که در جامدات، مایعات و گازها منتشر می‌شوند. برای مثال یک موج صوتی در هوا به‌صورت نواحی با فشارهای متناوب کم و زیاد است که با سرعت 330 متر برثانیه، قدری کمتر از سرعت حرکت مولکولی، منتشر می‌شود. سرعت امواج مکانیکی در فلزات بیشتر است (عموماً 5000 متر برثانیه) و برحسب بزرگی نیروهای کشسانی بین اتمهای همجوار افزایش می‌یابد.

به نظر می‌رسد انتشار امواج الکترومغناطیسی چیزی متفاوت باشد. اثر که محیطی برای انتقال آشفتگیهای الکترومغناطیسی فرض می‌شد. می‌بایست آن چنان صلب باشد که سرعت 3×10^8 متر برثانیه را ایجاد کند و درعین حال آنقدر سست باشد که در حرکت سیارات اختلال ایجاد نکند. نظریهٔ ماکسول هیچگونه اتکایی بر وجود اثر نداشت، ولی ماکسول و معاصرانش نتوانستند ایدهٔ انتشار امواج را در فضای تهی قبول کنند.

سرعت موج صوتی v_s به خواص محیط بستگی دارد. اگر یک موج صوتی را از دستگاه مختصاتی که نسبت به محیط حرکت دارد مشاهده کنیم، بسته به اینکه در جهت انتشار یا مخالف آن حرکت کنیم، سرعت صوت بیشتر یا کمتر از v_s به نظر می‌آید. به‌طریق مشابه ماکسول اظهار نظر کرد که سرعت زمین در حرکت به دور خورشید (3×10^4 m/s) باید سرعت ظاهری نور را تغییر دهد.

فرض کنید مطابق شکل ۱-۱۱ نور یک مسیر رفت و برگشت ABA را بین دو نقطه A و B که به فاصله l از یکدیگر قرار دارند، انجام دهد. همانطور که در شکل ۱-۱۱ (الف) نشان داده شد دستگاه در محیط اثر به سمت راست حرکت می‌کند. اثر نسبت به دستگاه مطابق شکل ۱-۱۱ (ب) به سمت چپ حرکت می‌کند. سرعت نور نسبت به دستگاه $c + v$ به طرف چپ و $c - v$ به طرف راست است



شکل ۲-۱۱

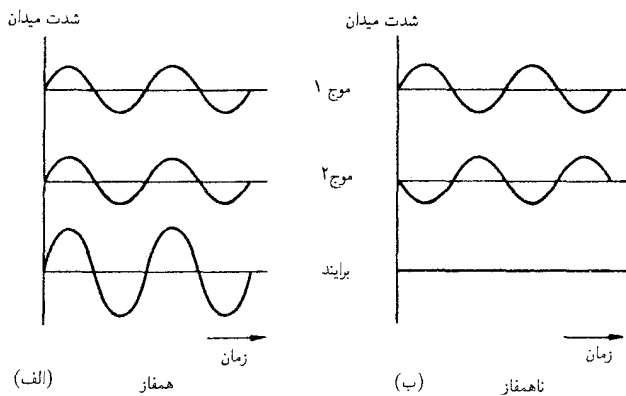
(شکل ۱-۱۱ ج).

زمان انتقال از A به B برابر $t_1 = l/c - v$ و از B به A برابر $t_2 = l/c + v$ است. اگر دستگاه بی حرکت بود t_1 و t_2 دارای مقداری برابر l/c می شد. اثر حرکت زمین ایجاد تأخیر در برگشت علامت نوری به اندازه زیر است

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_1 + t_2 - 2t \\ &= \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} - 2\frac{l}{c} \\ &= \frac{l}{c} \left(\frac{1}{1-v/c} + \frac{1}{1+v/c} - 2 \right) \\ &= 2\frac{l}{c} \left(\frac{1}{1-v^2/c^2} - 1 \right) \\ &\approx 2\frac{l}{c} \frac{v^2}{c^2} \end{aligned}$$

برای زمین در مدارش $v/c = 10^{-4}$ است و اگر طول وسیله آزمایشگاهی نمونه را $l = 1\text{m}$ در نظر بگیریم. آنگاه $10^{-17}\text{s} \approx 7 \times 10^{-8} \times 10^{-8} \times 10^8 / (3 \times 10^8)^2 = \Delta t$ خواهد بود که به دلیل کوچکی زیاد به طور مستقیم قابل اندازه گیری نیست. خوشبختانه، مایکلسون ناامید نشد و در سال ۱۸۸۱ راه حل زیر را ارائه داد.

مایکلسون به جای اندازه گیری زمان انتقال یک باریکه نور، اختلاف بین زمانهای انتقال دودسته نور را مورد مشاهده قرار داد. دستگاه او در شکل ۲-۱۱ ترسیم شده است. نور منبع به وسیله آینه A که از لایه نازک نقره پوشیده شده به دو باریکه تقسیم می شود. نصف نور از آینه A عبور کرده و به آینه M_1 می رسد و در آنجا منعکس شده به سوی آینه A و ناظر می رود. نصف دیگر نور منبع در جهت بازوی دوم به طرف

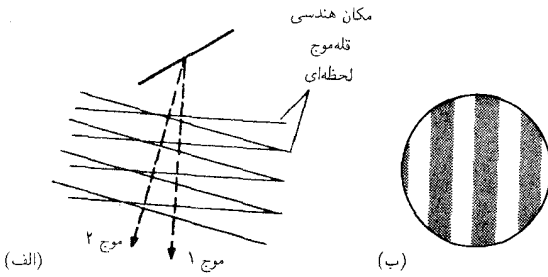


شکل ۱۱-۳

بالا منحرف شده و به آینه M_2 برخورد می‌کند و پس از انعکاس به طرف ناظر متوجه می‌شود. اگر دوبارو یکسان باشند، امواج نوری در آینه A ، درست مانند اینکه هرگز از هم جدا نشده بودند، دوباره به هم ملحق می‌شوند و ناظر یک میدان روشن می‌بیند. اگر هریک از باریکه‌های نور تأخیر داشته باشد، وضعیت شدیداً تغییر می‌کند. برای مثال، فرض کنید باریکه ۱ دقیقاً به اندازه نیم دور نوسانی تأخیر داشته باشد. در آن صورت امواج در فازهای مخالف به هم می‌رسند و کاملاً یکدیگر را خنثی می‌کنند؛ یعنی میدان دید ناظر تاریک خواهد شد.

در شکل‌های ۱۱-۳ هر دو حالت نشان داده شده است. جابه‌جایی عمودی متناظر با شدت میدان الکتریکی نور در چشمان ناظر است. میدانهای دوباریکه به طور برداری باهم جمع می‌شوند. دوره تناوب موج برای نور مرئی به طور نمونه برابر 10^{-15} تا 10^{-16} ثانیه، یعنی آنقدر سریع است که چشمان ما قادر به تعقیب آن نیست. از طرف دیگر، چشمان ما نسبت به متوسط توان موج که با مجذور برآیند میدانها متناسب است واکنش نشان می‌دهد. از این رو، باریکه‌های همفاز، شکل ۱۱-۳ (الف)، روشنایی یکنواخت و باریکه‌های همفاز، شکل ۱۱-۳ (ب)، تاریکی را به وجود می‌آورند.

معمولاً یکی از آینه‌ها کمی مورب است (شکل‌های ۱۱-۴). این امر، همانطور که در شکل ۱۱-۴ (الف) نشان داده شد، تأخیر تدریجی زمان را در سطح موج برگشته، به وجود می‌آورد، و دو موج تداخلی در طول میدان دید به طور متوالی همفاز و ناهمفاز می‌شوند. ناظر مطابق شکل ۱۱-۴ (ب) متناوباً نوارهای تاریک و روشن را می‌بیند. اگر طول یکی از بازوها تغییر کند، فریزها جابه‌جا می‌شوند؛ تغییری به اندازه یک طول موج باعث جابه‌جایی نقش تداخلی به اندازه یک فریز می‌شود. چون نور مسیر هر بازو را دوبار، هر بار در یک جهت طی می‌کند، تغییر طول به مقدار نیم طول موج در هر کدام از بازوها، جابه‌جایی به اندازه یک فریز را به وجود می‌آورد. با دقت لازم کسر کوچکی از جابه‌جایی فریزها را می‌توان اندازه‌گیری کرد. تغییر



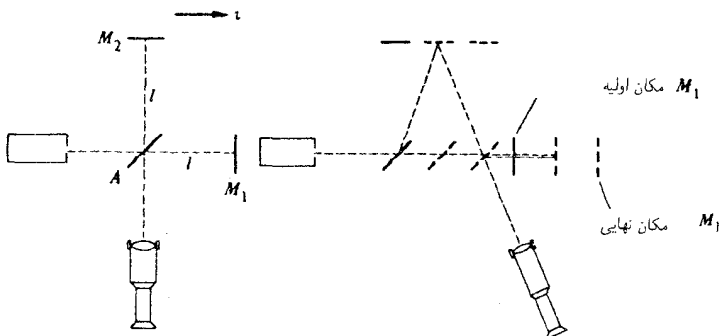
شکل ۴-۱۱

مسیری به اندازه یک صدم طول موج (تقریباً 10^{-8} متر) را می‌توان اندازه‌گیری کرد. (مایکلسون همچنین تداخل سنج خود را برای اندازه‌گیری میله متر استاندارد به کار برد، و اساساً رشته اندازه‌گیریهایی بسیار دقیقی را پایه‌گذاری کرد.)

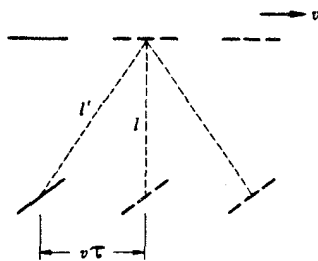
فرض کنید تداخل سنج طوری قرار بگیرد که یکی از محورهایش مطابق شکل ۵-۱۱ در جهت حرکت زمین باشد. زمانی که موج از آینه A به آینه M_1 می‌رود و بازمی‌گردد برابر است با

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v} \\ &= \frac{l}{c} \left(\frac{1}{1-v/c} + \frac{1}{1+v/c} \right) \\ &= \frac{2l}{c} \left(\frac{1}{1-v^2/c^2} \right) \approx \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \end{aligned}$$

که در آن l طول بازو است. تأخیر زمانی در طول بازوی دوم هم وجود دارد که برای این محاسبه بسیار ناچیز است. (مایکلسون از این مسئله در اولین گزارش از آزمایش خود در سال ۱۸۸۲ چشم پوشید.) باریکه نور برای برگشت به نقطه اولیه‌اش روی آینه نقره‌اندود باید یک مسیر زاویه‌دار را که در شکل ۶-۱۱



شکل ۵-۱۱



شکل ۶-۱۱

نشان داده شده است بپیماید. τ را زمان رفتن موج از آینه A به آینه M_1 در نظر می‌گیریم. مسافتی که واقعاً پیموده می‌شود برابر با $l' = (l^2 + v^2\tau^2)^{\frac{1}{2}}$ است و چون $l' = c\tau$ است، خواهیم داشت

$$\tau = \frac{(l^2 + v^2\tau^2)^{\frac{1}{2}}}{c}$$

یا

$$\tau^2 = \frac{l^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\tau^2$$

و از این نتیجه می‌شود

$$\tau = \frac{l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

زمانی که موج از آینه A به آینه M_1 می‌رود و برمی‌گردد برابر است با

$$\begin{aligned} T_1 &= 2\tau \\ &= 2 \frac{l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &\approx 2 \frac{l}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) \end{aligned}$$

اختلاف بین زمانهای حرکت باریکه‌های نوری برابر است با

$$\begin{aligned} \Delta T &= T_2 - T_1 \\ &= \frac{l v^2}{c^3} \end{aligned}$$

تاخیر زمانی ΔT نقش فریزها را از جایی که در صورت بی‌حرکت بودن زمین قرار داشتند، جابه‌جا می‌کند. اما در اینجا مسئله مهمی وجود دارد: دستگاه مقیاس فریزها "صفر" ندارد، زیرا بازوها را نمی‌توان با دقت لازم از نظر طولی یکسان ساخت. مایکلسون به فکرش رسید که فریزها را در یک چرخش 90°

درجه‌ای دستگاه تماشا کند. این دوران جای بازوهای ۱ و ۲ را با هم عوض می‌کند. تغییر در تأخیر زمانی این دو موقعیت برابر $2\Delta T$ است که جابه‌جایی متناظر با آن فوراً محاسبه می‌شود. اگر λ طول موج نور تابشی باشد، تأخیر زمانی به اندازه λ/c نقش فریزها را به اندازه یک فریز جابه‌جا می‌کند. بنابراین تأخیر زمانی $2\Delta T$ نقش را به اندازه N فریز جابه‌جا خواهد کرد به طوری که

$$N = \frac{2\Delta T}{(\lambda/c)} \\ = \frac{2lv^2}{\lambda c^2}$$

اگر بازوها دارای طولهای نامساوی l_1 و l_2 باشند، نتیجه بازهم صحیح خواهد بود، به شرطی که $l_1 + l_2$ را به جای $2l$ قرار بدهیم.

در دستگاه اولیه میکلسون طول بازوها برابر 22m یا همانطور که او بیان داشت 2×10^6 برابر طول موج نور زرد سدیم بود. چون $v/c = 10^{-4}$ انتظار داریم

$$N = 2(2 \times 10^6)(10^{-4})^2 \\ = 0.04$$

هرچند که این جابه‌جایی زیاد نیست، ولی توان تفکیک دستگاه میکلسون برای دیدن آن کافی بود. درکمال ناامیدی، وی جابه‌جایی قابل اندازه‌گیری در نقش فریزها پیدا نکرد. در سال ۱۸۸۷ مورلی با استفاده از روش بازتابهای متوالی و افزایش جابه‌جایی مورد انتظار به 4° فریز آزمایش کاملتری را انجام داد. باینکه یک جابه‌جایی به کوچکی 1° فریز را نیز می‌شد آشکار کرد، هیچ اثری دیده نشد. از آن پس این آزمایش به دفعات متعدد تکرار شد ولی پاسخ همیشه منفی بود. روشن شد که ما نمی‌توانیم حرکت خود را در اتر آشکار کنیم.

۱۱-۳ اصل موضوعهای نسبیت خاص

ماهیت اغفال‌کننده اتر، فیزیک را با معمای پردردسری روبه‌رو ساخت. ماکسول سعی کرد یک مدل مکانیکی از اتر درست کند ولی هرچه بیشتر به تکمیل نظریه نوری خود ادامه می‌داد اتر نقش کمتر و کمتری بازی می‌کرد، تا اینکه سرانجام نقش خود را از دست داد. مفهوم اتر کنار گذاشته شد و تنها نشان محوی از آن برجای ماند. بعد از آزمایش میکلسون-مورلی حتی این نشان نیز ناپدید شد. کوششهای زیادی که برای توضیح نتیجه منفی آزمایش میکلسون-مورلی اعمال شد چنان پیچیدگی به وجود آورد که اساساً نظریه الکترومغناطیسی را به خطر انداخت. موفقترین کوشش، فرضیه‌ای بود که توسط فیتز

جرالد لورنتس به طور مستقل از یکدیگر پیشنهاد شد که بنابر آن حرکت زمین در میان اثر باعث کوتاه شدن یکی از بازوها در تداخل سنج مایکلسون می شود که درست برابر مقداری است که برای از بین بردن جابه جایی فریزها لازم است. اما تصورات آنها بر اساس مدل نیروهای اتمی بود، و اگرچه آنها به فرمولهایی رسیدند که کمی بعد به وسیله اینشتین بدست آمد، استدلال آنها چندان فراگیر نبود. نظریه های دیگری همچون کشش اثر به وسیله زمین حتی از این حد هم کمتر سازنده بود.

سرعت جهانی

این نوع اینشتین بود که برای مسئله پردردسر اثر راهی، نه به سمت پیچیدگی و تطویل بلکه، به سوی ساده سازی آن نشان داد و تمام مفاهیم اساسی فیزیک را به وحدت رساند. اینشتین اشکال اثر را نه ناشی از عیب نظریه الکترومغناطیسی بلکه برخاسته از وجود یک اشتباه در اصول پایه ای دینامیک می دانست. او استدلال می کرد که چون سرعت نور (c) بنابر پیش بینی نظریه الکترومغناطیسی هیچ بستگی به محیط ندارد، باید یک ثابت جهانی باشد که برای تمام ناظران یکسان است. بنابراین اگر سرعت نور یک منبع را اندازه بگیریم، نتیجه حاصل مستقل از حرکت و همیشه برابر c خواهد بود. این مسئله مثلاً با حالت امواج صوتی در تضاد است که در آن سرعت مشاهده شده بستگی به سرعت ناظر نسبت به محیط دارد. ایده وجود یک سرعت جهانی در واقع یک فرضیه جسورانه و مخالف تمام تجربیات گذشته بود که از نظر بسیاری از معاصران اینشتین، عقل سلیم را به مبارزه می طلبید. ولی عقل سلیم اغلب راهنمای ضعیفی است. اینشتین یکبار اشاره کرد که عقل سلیم را مجموعه آموخته ها و تعصبات از سن هیجده سالگی تشکیل می دهد.

اصل نسبیت

نظریه نسبیت خاص یک اصل موضوع دیگر را نیز شامل می شود، و آن اینکه قوانین فیزیک در تمام دستگاههای لخت به یک شکل است. این اصل، که به عنوان اصل نسبیت شناخته می شود تا زگی نداشت؛ گالیه اولین بار اشاره کرد که هیچ راهی وجود ندارد که مشخص کنیم آیا جسمی به طور یکنواخت حرکت می کند یا ساکن است. و نیوتون هم، هر چند که از این نکته در زحمت بود، در قوانین دینامیک که در آن به جای سرعت، شتاب سهم عمده ای دارد بیان بسیار دقیقی از آن ارائه می دهد. اصل نسبیت تنها نقش بسیار کوچکی در تکامل مکانیک کلاسیک بازی کرد؛ اینشتین آن را به سنگ بنای دینامیک ارتقا داد. او این اصل را چنان بسط داد که نه تنها شامل قوانین مکانیک بلکه شامل قوانین برهم کنشهای الکترومغناطیسی، و با قبول فرضیهایی، در برگیرنده تمامی قوانین فیزیک می شود. به علاوه اصل نسبیت در دستهای او به صورت یک اصل عملی مهم برای کشف شکل صحیح قوانین فیزیک درآمد. ما تنها می توانیم منابع الهام او را حدس بزنیم، ولی ملاحظات زیر را باید در نظر گرفت. اگر سرعت نور یک

ثابت جهانی نبود، یعنی اگر قابل آشکارسازی بود، آنگاه اصل نسبیت شکست می خورد و می توانستیم دستگاه لخت بخصوصی که نسبت به اتر ساکن است انتخاب کنیم. اما شکل معادلات ماکسول و نیز شکست همه آزمایشهای آشکارسازی حرکت در اتر ایجاب می کند که سرعت نور مستقل از حرکت منبع و ثابت باشد. ناتوانی ما در آشکارسازی حرکت مطلق چه با نور و چه با نیروهای نیوتونی نشان می دهد که حرکت مطلق هیچ نقشی در فیزیک ندارد.

در حالی که بیشتر فیزیکدانها فقدان اتر را به عنوان یک پارادوکس در نظر می گرفتند، اینستین نبودن آن را موجب سادگی اصل نسبیت می دانست. نظرات وی اساساً محافظه کارانه بود؛ او در حفظ اصل نسبیت که فرض اتر آن را باطل می کرد اصرار داشت ظاهراً اصرار در سادگی جزء اساسی شخصیت وی بود. نظریه نسبیت خاص ساده ترین راه برای حفظ یگانگی مکانیک کلاسیک بود. در حقیقت، همانطور که در آخرین فصل خواهیم دید، نسبیت خاص واقعاً افکار نیوتونی را با ترکیب فضا و زمان در شکل طبیعی که انواع مختلف قوانین پایستگی را از یک جوهر واحد می داند، ساده می کند.^۱

اصل موضوعهای نسبیت خاص

به طور خلاصه، اصول موضوعه نسبیت خاص چنین اند:

قوانین فیزیک در تمام دستگاههای لخت شکل یکسان دارند.

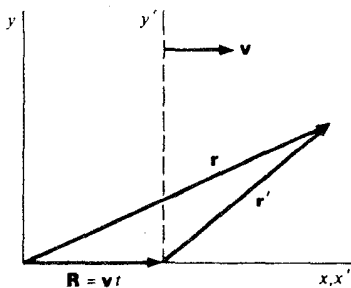
سرعت نور در فضای تهی یک ثابت جهانی است و برای تمام ناظران یکسان است.

بیان ریاضی نظریه نسبیت خاص به صورت تبدیلات لورنتس که ساده ترین دستور برای ربط دادن رویدادها در دستگاههای لخت مختلف است، عرضه می شود. برخلاف تبلیغات نادرست، ریاضیات مربوط به آن کاملاً ساده است: جبر مقدماتی در این مورد کافی خواهد بود. استدلال هم ساده است ولی سادگی فریبنده ای دارد. بررسی مسئله را بانگاهی دوباره به تبدیلات گالیله شروع می کنیم.

۱۱-۴ تبدیلات گالیله

ابتدا روش نیوتونی نگرش رویداد را در دستگاههای مختلف مورد بررسی قرار می دهیم. دستگاه لخت x, y, z را که ما در آن ساکن هستیم و دستگاه لخت دوم x', y', z' را که با سرعت v در جهت $+x$ به طور یکنواخت حرکت انتقالی دارد مطابق شکل ۱۱-۷ در نظر می گیریم. برای سهولت مبداهای را در لحظه $t = 0$ منطبق برهم و محورها را موازی در نظر می گیریم.

۱. اینستین عقایدی بسیار مشابه با نیوتون داشت. نیوتون در دومین کتابش در "پرنسیپیا" قواعدش را در مورد استدلال علمی چنین بیان می کند. قاعده اول: بناداریم که دلایل چیزهای طبیعی را بیش از آنچه حقیقی است و برای توضیح نمودهایش کافی است، نپذیریم. . . . طبیعت با سادگی قرین است. . . .



شکل ۱۱-۷

اگر نقطه بخصوصی در فضا دارای مختصات $\mathbf{r} = (x, y, z)$ در دستگاه " ساکن " باشد، مختصات متناظر در دستگاه متحرک $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ است، و رابطه‌ای این چنین دارند

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R}$$

که در آن

$$\mathbf{R} = \mathbf{v}t$$

چون v در جهت x است، داریم

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

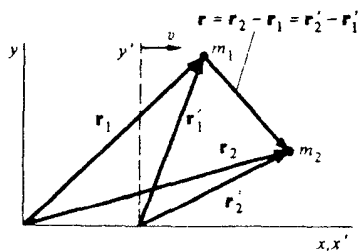
$$t' = t$$

(۱-۱۱)

آخرین معادله تنها برای تکمیل معادلات نوشته شده است. این معادله از ایده نیوتون درباره زمان " مطلق " نتیجه می‌شود و چنان مسلم انگاشته می‌شود که غالباً در بحثهای فیزیک کلاسیک آورده نمی‌شود.

معادلات ۱-۱۱ به تبدیلات گالیله‌ای معروف‌اند. از آنجا که قوانین مکانیک نیوتونی در دستگاههای لخت برقرارند تحت تأثیر این تبدیلات قرار نمی‌گیرند. اصل نسبیت کلاسیک اظهار می‌دارد که قوانین مکانیک به وسیله تبدیلات گالیله عوض نمی‌شوند. مثال زیر مبنای این گفتار را روشن می‌کند.

مثال ۱-۱۱ تبدیلات گالیله: می‌خواهیم ببینیم که چگونه می‌توان قانون نیروی بین دو جسم منزوی را با مشاهده حرکت آنها کشف کرد. برای مثال، مسئله می‌تواند کشف قانون گرانش با استفاده از اطلاعات



شکل ۸-۱۱

مربوط به مدار بیضیوار یکی از اقمار مشتری باشد. اگر m_1 و m_2 به ترتیب جرمهای قمر و مشتری و r_1 و r_2 مکانهای آنها نسبت به اخترشناس روی زمین باشد، داریم

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}(r)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\mathbf{F}(r)$$

در اینجا فرض کرده ایم که نیروی دو جسم، \mathbf{F} فقط به فاصله آنها از یکدیگر $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ بستگی دارد. (در نظر گرفتن اثر خورشید، بدون اینکه نتیجه را عوض کند، تحلیل را مشکلتر می کند.)

از اطلاعات خود درباره $\mathbf{r}_1(t)$ می توانیم $\ddot{\mathbf{r}}_1$ را بدست آوریم که مقدار \mathbf{F} (یا دقیقتر \mathbf{F}/m_1) را نتیجه می دهد. در اصل، این همان راهی است که نیوتون برای کشف قانون عمومی گرانش دنبال کرد. فرض کنید اطلاعات نشاندهنده معادله ای به شکل $\mathbf{F}(r) = -Gm_1 m_2 \hat{\mathbf{r}}/r^2$ باشد.

حال مسئله را از دیدگاه یک اخترشناس در رصدخانه ای فضایی که نزدیک زمین در حرکت است بررسی می کنیم. طبق اصل نسبیت وی باید همین قانون نیرو را بدست آورد. وضعیت در شکل ۸-۱۱ نمایان است. x و y در دستگاه متصل به زمین اند و x' و y' در دستگاه فضاپیما و v سرعت نسبی آنهاست. در دستگاه x' و y' اخترشناس نتیجه می گیرد که نیروی وارد بر m_1 چنین است

$$\mathbf{F}'(r') = m_1 \ddot{\mathbf{r}}'_1$$

اما

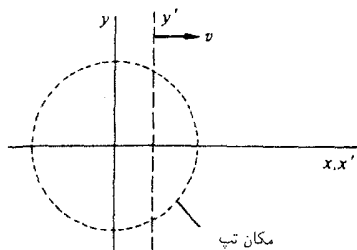
$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'_1 + \mathbf{v}t$$

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{r}}'_1 + \mathbf{v}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{\mathbf{r}}'_1$$

بنابراین

$$\mathbf{F}'(r') = m_1 \ddot{\mathbf{r}}'_1$$



شکل ۹-۱۱

$$= m_1 \ddot{r}_1$$

$$= \mathbf{F}(r)$$

از آنجاکه $r' = r$ است، در نتیجه $\mathbf{F}'(r') = \mathbf{F}(r)$ ولی هم‌اکنون نشان دادیم که $\mathbf{F}'(r') = \mathbf{F}(r)$ بنابراین

$$\mathbf{F}'(r) = \mathbf{F}(r)$$

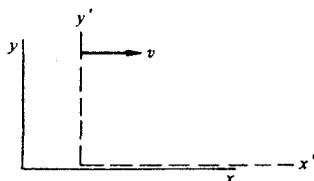
$$= -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$

قانون نیرو با آنچه روی زمین پیدا شده یکسان است. منظور ما از اینکه می‌گوییم دودستگاه لخت هم‌ارزند همین است. اگر شکل قانون یا مقدار C در دودستگاه متفاوت بودند، با بررسی قانون گرانش از یک دستگاه مختصات، در مورد سرعت آن دستگاه می‌توانستیم قضاوت کنیم. در آن صورت دستگاهها هم‌ارز نبودند.

مثال ۱-۱۱ تقریباً بدیهی است، زیرا نیرو بستگی به فاصله بین دوزره دارد و این کمیت نسبت به تبدیلات گالیه ناورداست. در فیزیک نیوتونی، تمام نیروها ناشی از برهم‌کنش بین ذرات هستند که این برهم‌کنشها به مختصات نسبی بستگی دارند. به این ترتیب، تحت تبدیلات گالیه ناوردا هستند. برای معادله یک علامت نوری در تبدیلات گالیه چه اتفاقی می‌افتد؟ مثال زیر، مشکل به وجود آمده را نشان می‌دهد.

مثال ۲-۱۱ توصیف تپ نوری در تبدیلات گالیه: در $t = 0$ یک تپ نوری به طور همسانگرد در دستگاه x و y گسیل می‌شود، و با سرعت c به طرف خارج سیر می‌کند (شکل ۹-۱۱). معادله سطح موج در امتداد محور x چنین است

$$x = ct$$



شکل ۱۱-۱۰

در دستگاه x' و y' معادله سطح موج در امتداد محور x' چنین است

$$\begin{aligned}x' &= x - vt \\ &= (c - v)t\end{aligned}$$

که در آن v سرعت نسبی دودستگاه است.

مؤلفه x' سرعت t در دستگاه x' و y' عبارت است از

$$\frac{dx'}{dt} = c - v$$

ولی این نتیجه با این اصل که سرعت نور (c) یک ثابت جهانی برای تمام ناظران است منافات دارد، و به طور واضح، تبدیلات گالیله کفایت نمی‌کند. ■

۱۱-۵ تبدیلات لورنتس

از آنجا که تبدیلات گالیله با این اصل موضوع که سرعت نور یک ثابت جهانی است سازگاری ندارد، اینستین دستور دیگری را برای توصیف یک رویداد در دو دستگاه لخت مختلف پیشنهاد کرد. یکبار دیگر به دستگاه‌های استاندارد نظری بیندازیم: دستگاه در حال سکون x, y, z و t و دستگاه x', y', z' و t' که با سرعت v در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند (شکل ۱۱-۱۰). مبدأها در $t = t' = 0$ برهم منطبق‌اند. عمومی‌ترین تبدیل که مختصات یک رویداد معین را در دو دستگاه به هم ارتباط می‌دهد به شکل زیر فرض می‌شود

$$x' = Ax + Bt \quad (۱۱-۲ الف)$$

$$y' = y \quad (۱۱-۲ ب)$$

$$z' = z \quad (۱۱-۲ ج)$$

$$t' = Cx + Dt \quad (۱۱-۲ د)$$

جدول ۱-۱۱

نتیجه	قانون تبدیل	مختصات (x' و y' و t')	مختصات (x و y و t)	رویداد
$B = -Av$	$x' = Ax + Bt$ (الف ۲-۱۱) $0 = Avt + Bt$	$x' = 0$	$x = vt$	ناظران (x و y) مبدأ (x' و y') را می بینند که در جهت x با سرعت v حرکت می کند.
$D = A$	$x' = A(x - vt)$ (الف ۲-۱۱) $t' = Cx + Dt$ (د ۲-۱۱) $A(0 - vt) = -v(0 + Dt)$	$x' = -vt'$	$x = 0$	جهت x' با سرعت $-v$ حرکت می کند
$C = -\frac{Av}{c^2}$	$x' = A(x - vt)$ (الف ۲-۱۱) $t' = Cx + At$ (د ۲-۱۱) $A(ct - vt) = c(Cct + At)$	$x' = ct'$	$x = ct$	یک تپ نوری از مبدأ در جهت x در $t = 0$ گسیل می شود. محل آن چنین داد می شود:
$*A = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$	$x' = A(x - vt)$ (الف ۲-۱۱) $y' = y$ (ب ۲-۱۱) $t' = A(-vxc^2 + t)$ (د ۲-۱۱) $A^2(0 - vt)^2 + (ct)^2$ $= c^2 A^2 [-(v/c^2)0 + t]^2$	$x'^2 + y'^2$ $= c^2 t'^2$	$x = 0$ $y = ct$	یک تپ نوری در دستگاه (x و y) در $t = 0$ در جهت y تابش می شود. در (x' و y') مؤلفه هایی در امتداد محورهای x' و y' دارد. سرعت تپ در هر دو دستگاه c است مختصات آن چنین داده می شود:

* در حالت کلی $A = \pm 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ است که ریشه مثبت را انتخاب می کنیم؛ چه در غیر این صورت در حد $v = 0$ خواهیم داشت $x' = -x$ به جای $x' = x$ که دلخواه ماست.

این تبدیلات خطی هستند. در غیر این صورت رابطه ساده یک به یک بین وقایع در دو دستگاه وجود نخواهد داشت. برای مثال یک تبدیل غیرخطی به وجود شتاب در یک دستگاه منجر می شود، حتی اگر سرعت در دستگاه دیگر ثابت باشد. واضح است که این خاصیت غیرقابل قبولی برای تبدیل بین دو دستگاه لخت است. ما فرض کرده ایم که y' و z' به دلیل تقارن در تبدیل ناوردا باقی می ماند که بحث آن را بعداً خواهیم کرد.

معادلات ۲-۱۱ شامل چهار ثابت مجهول است. برای تعیین اینها چهار حالت را که از "قبل" وضعیتشان در دو دستگاه شناخته شده است در نظر می گیریم. این موضوع در جدول ۱-۱۱ آمده است.

باقرار دادن نتایج جدول ۱-۱۱ در معادله ۲-۱۱ چنین داریم

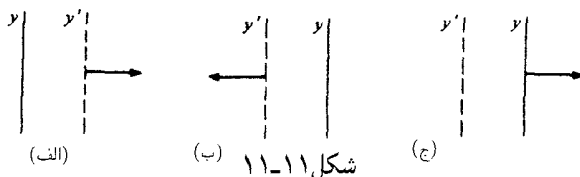
$$\begin{aligned}x' &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(x - vt) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)\end{aligned}\quad (3-11)$$

حل جبری این معادلات برای یافتن x, y, z, t بر حسب x', y', z', t' به سادگی امکان پذیر است. از سوی دیگر، می توانیم شاخصها را تعویض و علامت v را هم برعکس کنیم. زیرا تنها اختلاف بین دستگاهها در جهت سرعت نسبی آنهاست. نتیجه چنین است

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(x' + vt') \\y &= y' \\z &= z' \\t &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)\end{aligned}\quad (4-11)$$

معادلات ۳-۱۱ و ۴-۱۱ تبدیلات لورنتس، یعنی دستورالعمل برای ارتباط مختصات یک رویداد در دو دستگاه لخت است به طوری که اصل موضوعهای نسبیت خاص برقرار باشد. در فصلهای بعد اهمیت آنها را مورد بررسی قرار خواهیم داد. بحث فعلی را با توضیح برهان فرضی $y = y'$ و $z = z'$ به پایان می بریم (شکلهای ۱۱-۱۱).

قسمتی از محورهای y و y' را مطابق شکل ۱۱-۱۱ (الف) در نظر بگیرد. محور y' به طرف راست

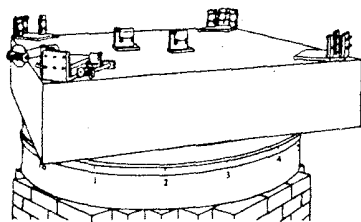


با سرعت v حرکت می‌کند.

اگر به دستگاه از پشت کاغذ نگاه کنیم، وضعیت مانند شکل ۱۱-۱۱ (ب) به نظر می‌آید. از آنجا که فقط حرکت نسبی مهم است، شکل ۱۱-۱۱ (ب) هم‌ارز با ۱۱-۱۱ (ج) است اما ۱۱-۱۱ (ج) با ۱۱-۱۱ (الف) یکسان است، بجز اینکه y' و y باهم تعویض شده‌اند. نتیجه می‌گیریم که y و y' از یکدیگر غیرقابل تمیزند و $y = y'$ است، با برهان مشابهی داریم $z = z'$.

مسائل

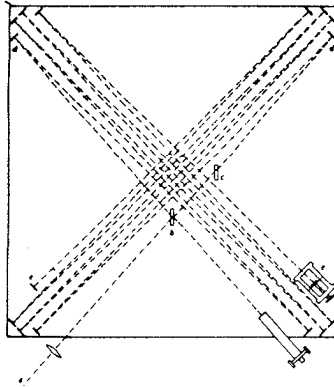
۱۱-۱۱ آزمایش مایکلسون-مورلی در مدرسه علوم کاربردی کیس (که اینک دانشگاه کیس وسترن رزرو است) در سال ۱۸۸۷ انجام گرفت. دستگاه آزمایش یک نمونه اصلاح شده از تداخل سنجی بود که به وسیله مایکلسون در تحقیقات اولیه‌اش در خلال سال ۱۸۸۱ در برلین به‌کار گرفته شده بود. تداخل سنج مطابق شکل ۱۱-۱۲ روی قطعه سنگ خاراى ۵ فوت مربعی با ۱۴ اینچ کلفتی که روی جیوه شناور



شکل ۱۱-۱۲

بود کار گذاشته شده بود. طول مؤثر بازوهای تداخل سنج با استفاده از آینه‌هایی تا ۱۱ متر افزایش یافته بود. منبع نور خط زرد سدیم $\lambda = 590 \times 10^{-9} \text{ m}$ بود. مایکلسون و مورلی با تغییر جهت دستگاه هیچ‌گونه جابه‌جایی فریز پیدا نکردند، اگرچه آنها قادر به تشخیص جابه‌جایی‌هایی به کوچکی یک صدم عرض فریز هم بودند.

بیشینه سرعت زمین نسبت به اترراکه به وسیله آزمایش تعیین می‌شود، با سرعت مداری زمین حول خورشید 30 km/s مقایسه کنید (شکل ۱۱-۱۳).



شکل ۱۱-۱۳

۱۱-۲ اگر دوبازوی تداخل سنج مایکلسون طولهای l_1 و l_2 داشته باشند، نشان دهید که جابه جایی فریز وقتی که تداخل سنج به اندازه 90° نسبت به سرعت v در داخل اتر بگردد برابر است با

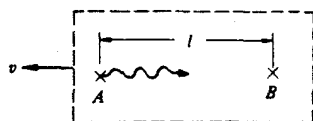
$$N = \frac{l_1 + l_2 v^2}{\lambda c^2}$$

که در آن λ طول موج نور است.

۱۱-۳ فیزیکدان ایرلندی فیتزجرالد و فیزیکدان هلندی لورنتس هر یک جداگانه کوشیدند که نتیجه منفی آزمایش مایکلسون-مورلی را با فرضیه زیر توضیح دهند. حرکت یک جسم در میان اتر تغییر شکلی در جسم ایجاد می کند که باعث انقباض جسم با ضریب $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ در امتداد خط حرکت می شود. نشان دهید که این فرضیه عدم وجود جابه جایی فریز را در آزمایش مایکلسون-مورلی توجیه می کند. (نادرستی این فرضیه در سال ۱۹۳۲ به وسیله کندی و تورندایک، که آزمایش مایکلسون-مورلی را با تداخل سنجی با طول بازوهای متفاوت تکرار کردند، اثبات شد.)

۱۱-۴ آزمایش مایکلسون-مورلی، آزمایشی از مرحله دوم خوانده می شود، زیرا اثری که مشاهده می شود مربوط به $(v/c)^2$ است. آزمایش مرتبه اول زیر را در نظر بگیرید.

در لحظه $t = 0$ ناظر A یک تپ به ناظر B که در فاصله l از او قرار دارد می فرستد. B لحظه رسیدن را یادداشت می کند. فرض کنید که دستگاه در داخل اتر با سرعت v در جهتی مطابق شکل ۱۱-۱۴ حرکت می کند. آنگاه فرض کنید که آزمایشگاه را 180° نسبت به این سرعت بچرخانیم تا جای A و B باهم عوض شود. در لحظه $t = T$ ناظر A تپ دیگری به B می فرستد. (الف) نشان دهید فاصله زمانی که ناظر B بین دو تپ مشاهده می کند برابر $T + \Delta T$ است که در آن



شکل ۱۴-۱۱

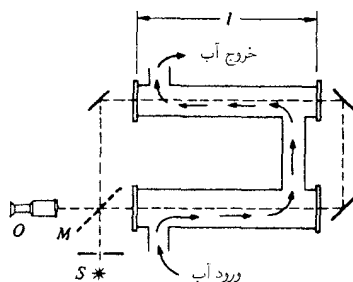
$$\Delta T = \frac{2l v}{c^2}$$

از مرتبه $(v/c)^2$ است. (ب) فرض کنید که آزمایش بین یک ساعت در سطح زمین و یک ساعت که روی ماهواره‌ای برفراز زمین مستقر است انجام شود. برای مداری با دوره ۲۴ ساعت، $l = 5.6 R_e$ خواهد بود که R_e شعاع زمین است. پایداری ساعت‌های اتمی فعلی نزدیک به یک قسمت در 10^{14} است.

کمترین مقدار v که در این آزمایش با استفاده از چنین ساعت‌هایی قابل آشکارسازی است چیست؟

۱۵-۱۱ در سال ۱۸۵۱ فیزو سرعت نور را در محیط متحرک به وسیله تداخل سنج شکل ۱۵-۱۱

مورد بررسی قرار داد. نوری با طول موج λ از منبع S به وسیله آینه M به دو شعاع تقسیم می‌شود. شعاعها



شکل ۱۵-۱۱

به دور تداخل سنج در دو جهت مختلف حرکت می‌کنند و در تلسکوپ ناظر O که شکل فریز را می‌بیند باهم ترکیب می‌شوند. دوبازوی تداخل سنج از لوله‌هایی برابر آب به طول l که به صفحاتی از شیشه مسطح منتهی می‌شوند می‌گذرند. آب در لوله‌ها جاری است، به طوری که یکی از شعاع‌های نوری در جهت جریان آب و دیگری در خلاف جهت جریان آب حرکت می‌کند. سرعت نور در آب ساکن c/n است که در آن n ضریب شکست آب است. اگر فرض کنیم که سرعت آب در جهت حرکت آب به سرعت نور اضافه و در خلاف جهت آن کم شود، نشان دهید که جابه‌جایی فریز وقتی که آب با سرعت v جریان دارد چنین است

$$N = 4n^2 \frac{l}{\lambda c} v$$

(جابه‌جایی فریز واقعی که به وسیله فیزو اندازه‌گیری شد چنین بود)

$$N = \frac{2n^2 l}{\lambda c} f v$$

که در آن $f = 1 - 1/n^2$ است. f ضریب شکست فرنل نامیده می‌شود که در سال ۱۸۱۸ کشف شده بود ولی تا زمان پیدایش نسبیت به‌طور رضایتبخشی توضیح داده نشد. در فصل بعد آن را بدست خواهیم آورد.

۱۲

سینماتیک نسبیتی

۱-۱۲ مقدمه

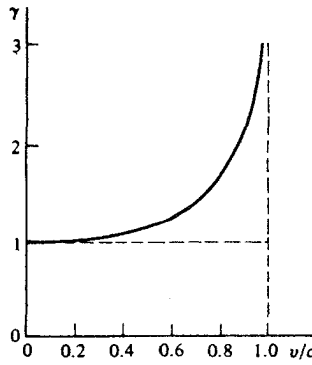
نظریه نسبیت خاص ایجاب می‌کند که نتایج آشنای فیزیک نیوتونی را مورد آزمایش و اصلاح قرار دهیم. باید با بررسی دوباره سینماتیک، یعنی بنیادترین موضوع مکانیک که موضوع ظاهراً ساده‌ای است و ما در بحث قبلی خود فقط اندکی درباره آن تأمل کردیم، آغاز به کار کنیم. همانطوری که در فصل گذشته اشاره کردیم، سینماتیک کلاسیک از تبدیلات گالیه پیروی می‌کند. اینک باید سینماتیک مناسب تبدیلات لورنتس را توسعه دهیم.

تبدیلات لورنتس با معرفی عامل زیر ساده می‌شوند

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

چون $(v/c)^2 \leq 1$ است، بنابراین γ بزرگتر از ۱ یا برابر ۱ است (شکل ۱-۱۲). آنگاه تبدیلات لورنتس، معادلات ۱-۱۱ و ۴-۱۱ به شکل زیر درمی‌آیند

$$x' = \gamma(x - vt) \quad x = \gamma(x' + vt')$$

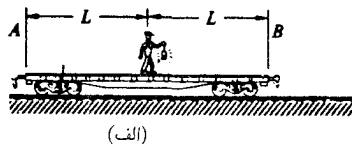


شکل ۱-۱۲

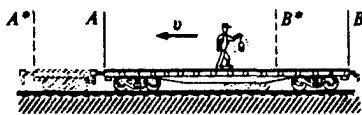
$$\begin{aligned}
 y' &= y & y &= y' \\
 z' &= z & z &= z' \\
 t' &= \gamma \left(t - \frac{xv}{c^2} \right) & t &= \gamma \left(t' + \frac{x'v}{c^2} \right)
 \end{aligned} \tag{۱-۱۲}$$

درک عملکرد تبدیلات لورنتس موضوعی بسیار حائز اهمیت است، زیرا در آموزش نسبیت به بسیاری از موارد به اصطلاح پارادوکس (که عموماً اشتباهاتی ساده‌اند) برخورد می‌کنیم که تبدیلات لورنتس در آنها به غلط به کار رفته‌اند و به نتایج متناقض منجر شده‌اند. تبدیلات لورنتس مختصات یک تک رویداد را در یک دستگاه لخت به مختصات همان رویداد در دستگاه لخت دوم ربط می‌دهد. مثالهایی از تک رویدادها چنین‌اند: یا تپ کوچک نور نقطه‌ای $x = 3\text{m}$ ، $y = 7\text{m}$ ، $z = -4\text{m}$ را در لحظه $t = 5\text{s}$ ترک می‌کند. مبدأ دستگاه x' ، y' ، z' در زمان t از مبدأ x ، y ، z می‌گذرد. یک سرخطکش در زمان t' در نقطه x' ، y' ، z' قرار دارد. آورنده خبرهای ناگوار، نیمه‌شب سرزده وارد خوابگاه سلطان می‌شود. تک رویداد ما توسط دسته‌ای از مقادیر معین برای مختصات x ، y ، z ، t مشخص می‌شوند. رویدادهای پیچیده‌تر می‌توانند توسط گروهی از تک رویدادها توصیف شوند. برای مثال، خطکشی را که در امتداد محور y ها قرار دارد در نظر بگیریم. محل قرار گرفتن خطکش توسط دو تک رویداد تعریف می‌شود مانند مختصات نقاط انتهایی آن در یک زمان بخصوص.

قبل از شروع استفاده از تبدیلات لورنتس، باید به دقت بررسی کنیم که مختصات یک رویداد را چگونه به دست می‌آورند. غالباً ما از ”یک ناظر“، صحبت می‌کنیم؛ برای مثال، ”ناظری در دستگاه x' و y' درخشش نوری را در $x' = 1$ ، $y' = 3$ ، و $t' = 0$ می‌بیند“ این یکی از راههای ساده توصیف مشاهدات است، ولی مفهوم ناظر منفرد، مشکلات ادراکی زیادی به همراه دارد. ناظری را در نظر بگیریم که تپ نوری را که در $t = 0$ خارج می‌شود مشاهده می‌کند و متوجه می‌شود که این تپ در زمان t_A در



(الف)



(ب)

شکل ۱۲-۲

برای چنین مشاهده‌ای او باید قبل از رسیدن نور به مکان $x_A = ct_A$ قرار دارد. حرکت کند-بنابراین باید از نور تندتر حرکت کند. همانطوری که خواهیم دید، این کار غیرممکن است. اما، با وجود این مختصات هر دسته از رویدادهای مورد نظر را می‌توانیم با این فرض که در فضا ناظرهای متعددی قرار داده‌ایم، ثبت کنیم. هر یک از آنها ساعت خودشان را دارند، و در محل خاص x, y, z مستقر شده‌اند. هرگاه رویدادی در محل بخصوصی اتفاق افتد، ناظر محلی زمان آن را یادداشت می‌کند. سپس، همه ناظران گزارشها را به یک اداره مرکزی می‌فرستند و در آنجا گزارش کامل زمان و مکان همه رویدادها در آن دستگاه تهیه می‌شود. وقتی که ما از "یک ناظر" صحبت می‌کنیم منظور ما کسی است که، لااقل در اصول، می‌تواند یک نسخه از این گزارش را در اختیار داشته باشد.

برای اینکه این روش خوب کار کند اساساً باید همه ساعتها با آهنگ یکسان کار کنند و همزمان باشند. در اینجا نکته ظریفی وجود دارد و آن این است که ساعت‌های همزمان باهم توافق نخواهند داشت مگر اینکه در محل‌های یکسانی قرار داده شوند. برای مثال، فرض کنید که ما از یک تلسکوپ قوی برای مشاهده ساعتی در ماه استفاده می‌کنیم. از آنجا که نور تقریباً یک ثانیه می‌کشد تا مسافت بین ماه و زمین را بپیماید، در موقعی که ساعت واقع در زمین ظهر را نشان می‌دهد، ساعت واقع در ماه یک ثانیه قبل از ظهر را نشان می‌دهد، مشروط بر اینکه هر دو ساعت به‌طور کامل همزمان باشند. به همین طریق، برای ناظری واقع در ماه ساعت زمین بایستی یک ثانیه کند به نظر رسد. با بسط این مطلب، این روش را می‌توان برای همزمان کردن همه ساعت‌های واقع در یک دستگاه لخت بخصوص مورد استفاده قرار داد.

۱۲-۲ همزمانی و ترتیب رویدادها

ما منظور از این گفته را که دو رویداد همزمان‌اند، به‌طور شهودی درک می‌کنیم. نسبت به یک دستگاه مختصات معین، دو رویداد وقتی همزمان‌اند که مختصات زمانی آنها دارای یک مقدار باشند. اما، همان‌گونه که مثال‌های زیر نشان می‌دهند، رویدادهایی که در یک دستگاه مختصات همزمان‌اند، الزاماً در دستگاه مختصات دیگر همزمان نیستند.

مثال ۱۲-۱: یک کارگر راه آهن را در نظر بگیرید که در وسط یک واگن باری به طول $2L$ ایستاده است (شکل ۱۲-۲ الف). وقتی که فانوس خود را روشن می‌کند یک تپ نور با سرعت c در همه جهات به حرکت درمی‌آید. نور پس از فاصله زمانی L/c به دوانتهای واگن می‌رسد. در این دستگاه

یعنی دستگاه در حالت سکون واگن باری، نور همزمان به A و B می‌رسد.

اینک همین وضعیت را در چارچوب دیگری که در آن شخص با سرعت v به طرف راست حرکت کند در نظر می‌گیریم (شکل ۱۲-۲ ب). در این چارچوب واگن باری با سرعت v به طرف چپ حرکت می‌کند. همانطوری که گفتیم، در این چارچوب هم نور طبق دومین اصل موضوع نسبیت خاص دارای سرعت c است. اما، در طی زمان انتقال، A به A^* و B به B^* حرکت می‌کند. چنین به نظر می‌رسد که تپ قبل از A^* به B^* می‌رسد؛ این رویدادها در این چارچوب همزمان نیستند. ■

مثال ۱۲-۱ نشان می‌دهد وقتی که اصول موضوع نسبیت را پذیرا شدیم، مجبور می‌شویم تصور مشخص همزمانی را کنار بگذاریم. تبدیلات لورنتس که اصول موضوعه نسبیت را در بردارد، به ما این امکان را می‌دهد که زمان رویدادها را در دو دستگاه متفاوت محاسبه کنیم.

مثال ۱۲-۲ کاربرد تبدیلات لورنتس: زمان ورود تپ نور به دو انتهای واگن باری مثال قبل را چگونه پیدا کنیم؟ مسئله در چارچوب ساکن چندان مهم نیست. مبدأ مختصات را در مرکز واگن می‌گیریم، و در لحظه‌ای که فانوس روشنایی می‌دهد فرض می‌کنیم $t = 0$ باشد این دو رویداد چنین‌اند
رویداد ۱:

$$\begin{cases} x_1 = -L \\ t_1 = \frac{L}{c} = T \end{cases}$$

تپ نور به انتهای A می‌رسد

رویداد ۲:

$$\begin{cases} x_2 = L \\ t_2 = \frac{L}{c} = T \end{cases}$$

تپ نور به انتهای B می‌رسد

برای پیدا کردن زمان رویدادها در دستگاه متحرک تبدیلات لورنتس را در مورد مختصات زمانی به کار می‌بریم
رویداد ۱:

$$\begin{aligned} t'_1 &= \gamma \left(t_1 - \frac{vx_1}{c^2} \right) \\ &= \gamma \left(T + \frac{vL}{c^2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(T + \frac{v}{c} T \right) \end{aligned}$$

$$= T \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}$$

رویداد ۲:

$$\begin{aligned} t'_Y &= \gamma \left(t_Y - \frac{vx_Y}{c^2} \right) \\ &= T \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \end{aligned}$$

■ طبق پیش‌بینی، در دستگاه متحرک تپ قبل از اینکه به A برسد به B (رویداد ۲) می‌رسد. همانطوری که در دو مثال قبل دیدیم، همزمانی، یک خاصیت اساسی رویدادها نیست؛ بلکه بستگی به دستگاه مختصات دارد. آیا می‌توانید دستگاه مختصاتی بیابید که هر دو رویداد در آن همزمان باشند؟ برای دو رویداد معین، یا می‌توانیم دستگاه مختصاتی بیابیم که در آن رویدادها همزمان باشند و یا اینکه رویدادها در یک نقطه هم مکان در فضا اتفاق بیفتند.

مثال ۱۲-۳ ترتیب رویدادها: فواصل زمان‌گونه و فضا‌گونه: دو رویداد A و B در دستگاه x و y دارای مختصات زیرند

رویداد A :

$$x_A, t_A$$

رویداد B :

$$x_B, t_B$$

(برای هر دو رویداد $y = 0$ است)

فاصله L و زمان T که این رویدادها را از هم جدا می‌کنند، چنین‌اند

$$L = x_B - x_A$$

$$T = t_B - t_A$$

برای واقع‌بینی فرض می‌کنیم L و T مثبت باشند. برای پیدا کردن مختصات در دستگاه x' و y' از تبدیلات لورنتس، معادله ۱۲-۱ استفاده می‌کنیم

$$x'_A = \gamma(x_A - vt_A)$$

$$t'_A = \gamma \left(t_A - \frac{vx_A}{c^2} \right)$$

$$x'_B = \gamma(x_B - vt_B)$$

$$t'_B = \gamma\left(t_B - \frac{vx_B}{c^2}\right)$$

فاصله L' بین رویدادها در دستگاه x' و y' چنین است

$$L' = x'_B - x'_A$$

$$= \gamma[x_B - x_A - v(t_B - t_A)]$$

$$L' = \gamma(L - vT)$$

به همین طریق

$$T' = \gamma\left(T - \frac{vL}{c^2}\right)$$

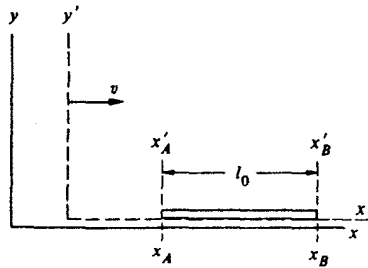
با فرض اینکه v همواره کوچکتر از c است، اگر $L > cT$ باشد، L' همواره مثبت است، درحالی که T' می تواند مثبت، منفی، یا صفر باشد. یک چنین فاصله ای را فضاگونه می نامند، چون امکان دارد دستگاهی انتخاب کنیم که در آن رویدادها همزمان باشند، یعنی دستگاهی که با سرعت $v = c^2 T/L$ حرکت کند. از طرف دیگر، اگر $L < cT$ باشد، T' همواره مثبت است، درحالی که L' می تواند مثبت، منفی، یا صفر باشد. آنگاه این فاصله را زمان گونه می گویند، زیرا ممکن است دستگاه مختصاتی پیدا کنیم که در آن رویدادها در یک نقطه هم مکان اتفاق بیفتند. ■

۱۲-۳ انقباض طول لورنتسی و اتساع زمان

دو نتیجه برجسته نظریه نسبیت خاص چنین اند که یک میله در حال حرکت از همان میله در حال سکون کوتاهتر است، و ساعت متحرک از ساعت ساکن کندتر کار می کند. این نتایج کاملاً حقیقی اند: شواهد عملی نسبیت به قدری مقاومت ناپذیرند که اکنون فیزیکدانان این چنین اثرهای سینماتیکی را خیلی جا افتاده می دانند.

انقباض طول لورنتسی

میله در حال سکونی را در دستگاه x' و y' مطابق شکل ۱۲-۳ در نظر بگیرید که در امتداد محور x' قرار داشته باشد به طوری که دو انتهای آن در x'_A و x'_B واقع باشند. طول میله برابر است با $l_0 = x'_B - x'_A$. را طول در حال "سکون" یا "ویژه طول" می نامند: و این همان چیزی است که ما در صحبت های معمولی به عنوان طول یاد می کنیم. دستگاه x' و y' را دستگاه در حال سکون یا دستگاه ویژه میله می نامند.



شکل ۱۲-۳

اکنون طول l میله را در دستگاهی که در آن ناظر در حال سکون است تعیین می‌کنیم. این دستگاه معروف به ”دستگاه آزمایشگاه“ است که دارای مختصات x و y است. در دستگاه آزمایشگاه میله با سرعت v به طرف راست حرکت می‌کند.

طول میله برابر است با فاصله بین دو انتهای آن در یک لحظهٔ زمانی. نقاط انتهایی در دستگاه آزمایشگاه باید به طور همزمان مشخص شوند؛ و همچنین باید تطابق بین x و x' را به ازای مقدار معینی از t پیدا کنیم. این امر با به کار بردن تبدیلات لورنتس $x' = \gamma(x - vt)$ به سادگی انجام پذیر است. داریم

$$x'_B = \gamma(x_B - vt)$$

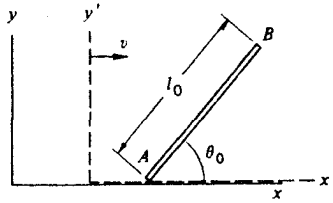
$$x'_A = \gamma(x_A - vt)$$

از کم کردن آنها به دست می‌آوریم، $l_0 = \gamma l$ ، یا

$$l = \frac{l_0}{\gamma} = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

از l_0 کوتاه‌تر است: یعنی میله منقبض شده است. وقتی که $c \rightarrow v$ ، آنگاه $l \rightarrow 0$ میل می‌کند. این کوتاه‌شدگی را انقباض طول لورنتسی می‌نامند که فقط در جهت حرکت اتفاق می‌افتد: اگر میله در امتداد محور y قرار داشته باشد، برای پیدا کردن $l = l_0$ باید از تبدیل $y' = y$ استفاده کنیم.

تذکر: بحث زیر سفسطه‌آمیز است، ولی خیلی ساده می‌توان در آن به دام افتاد. ”در دستگاه در حال سکون، انتهای میله در زمان $t' = 0$ دارای مختصات x'_A و x'_B است. برای پیدا کردن طول در دستگاه آزمایشگاه از $x = \gamma(x' + vt')$ استفاده می‌کنیم، و خواهیم داشت $l = \gamma l_0$. از این رو میله متحرک طویل‌تر به نظر می‌رسد.“ اشتباه در این است که نقاط انتهایی باید در دستگاه آزمایشگاه همزمان اندازه‌گیری شوند. این اندازه‌ها در دستگاه در حال سکون همزمان نخواهند بود، اما این مسئله مهمی نیست.



شکل ۴-۱۲

مثال ۴-۱۲ سمتگیری میله متحرک: میله‌ای به طول l_0 در دستگاه ساکنی در صفحه $x'y'$ قرار دارد و با محور x' زاویه θ_0 می‌سازد (شکل ۴-۱۲). طول و سمتگیری این میله در دستگاه آزمایشگاه x و y که در آن میله با سرعت v به طرف مبدأ حرکت می‌کند چگونه است؟
دوسر میله را با A و B نشان دهید. این نقاط در دستگاه ساکن دارای مختصات زیرند

$$A : x'_A = 0 \quad y'_A = 0$$

$$B : x'_B = l_0 \cos \theta_0 \quad y'_B = l_0 \sin \theta_0$$

مختصات A و B را در زمان t در دستگاه آزمایشگاه نیاز داریم. برای به دست آوردن روابط زیر از $y' = y$ و $x' = \gamma(x - vt)$ استفاده می‌کنیم

$$A : x'_A = 0 = \gamma(x_A - vt) \quad y'_A = 0 = y_A$$

$$B : x'_B = l_0 \cos \theta_0 = \gamma(x_B - vt) \quad y'_B = l_0 \sin \theta_0 = y_B$$

از این رو

$$x_B - x_A = \frac{l_0 \cos \theta_0}{\gamma}$$

$$y_B - y_A = l_0 \sin \theta_0$$

طول آن برابر است با

$$\begin{aligned} l &= [(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= l_0 \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= l_0 \left[1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta_0 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

زاویه‌ای که میله با محور x تشکیل می‌دهد برابر است با

$$\begin{aligned}\theta &= \arctan \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ &= \arctan \left(\gamma \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0} \right) \\ &= \arctan(\gamma \tan \theta_0)\end{aligned}$$

میلۀ هم منقبض شده و هم دوران کرده است.

اتساع زمان

اکنون اثر حرکت بر زمان را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ساعت در حال سکونی را در دستگاه x' و y' در نظر بگیرید و دو رویداد A و B را که هر دو در یک نقطه x'_0 اتفاق می‌افتند بررسی کنید

$$A : x'_0 \quad t'_A$$

$$B : x'_0 \quad t'_B$$

فاصله $\tau = t'_B - t'_A$ ، فاصله زمانی بین رویدادها در دستگاه در حال سکون است که آن را ویژه زمان می‌نامند.

برای پیدا کردن فاصله زمانی متناظر در دستگاه آزمایشگاه از $t = \gamma(t' + vx'/c^2)$ استفاده

می‌کنیم

$$t_A = \gamma \left(t'_A + \frac{vx'_0}{c^2} \right)$$

$$t_B = \gamma \left(t'_B + \frac{vx'_0}{c^2} \right)$$

با کم کردن آنها از یکدیگر برای به دست آوردن $T = t_B - t_A$ ، چنین نتیجه می‌شود

$$T = \gamma(t'_B - t'_A)$$

$$= \gamma\tau$$

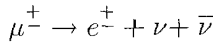
$$= \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

فاصله زمانی در دستگاه آزمایشگاه از فاصله زمانی در دستگاه در حال سکون بزرگتر است؛ ساعت متحرک از ساعت ساکن کندتر کار می‌کند. این اثر به اتساع زمان معروف است و دارای پیامدهای عملی مهمی است.

مثال ۱۲-۵ اتساع زمان و واپاشی مزون: طول عمر پرتوهای کیهانی مزون مو (موئون) به صورت نمایشی

کلاسیک از اتساع زمان درآمده است. این اثر اولین بار توسط راسی و هال مشاهده شد^۱ و نیز موضوع فیلم بسیار جالب است که توسط فریش و اسمیت تهیه شده است.^۲ این آزمایش بر این حقیقت استوار است که موئون ذره‌ای ناپایدار است و به طور خود به خود به یک الکترون و دو نوترینو واپاشیده می‌شود. مزون حامل بار مثبت یا منفی است و به الکترون مثبت (پوزیترون e^+) یا الکترون معمولی (e^-) واپاشیده می‌شود.

مطالب فوق را به صورت نمادی می‌توان چنین نوشت



ν برای نوترینو و $\bar{\nu}$ برای پادنوترینو به کار می‌رود. واپاشی مزون نمونه‌ای از فرایندهای واپاشی رادیواکتیو است: اگر در زمان $t = 0$ تعداد $N(0)$ موئون وجود داشته باشد، تعداد آنها در زمان t چنین است

$$N(t) = N(0)e^{-t/\tau}$$

که در آن τ طول عمر موئون و برابر است با 2.15×10^{-6} s. موئونها را می‌توان با متوقف کردن آنها در جذب‌کننده‌های چگال مشاهده کرد و الکترون واپاشی را که با انرژی حدود 40 MeV ($10^{-13} \text{ J} = 1.6 \times 10^{-13} \text{ J}$) میلیون الکترون ولت (1 MeV) بیرون می‌آید، آشکار ساخت.

وقتی که پروتونهای پرتوهای کیهانی با انرژی زیاد وارد جو بالایی زمین می‌شوند، موئونها به وفور تشکیل می‌شوند. پروتونها بسرعت انرژی ازدست می‌دهند، و در ارتفاعی برابر ارتفاع قله کوههای معمولی مثلا 2000 متر چندتایی باقی می‌مانند. اما، موئونها در جو زمین خوب نفوذ می‌کنند و بسیاری از آنها به سطح زمین می‌رسند.

موئونها در جو زمین با سرعتی نزدیک به c سقوط می‌کنند. در آن صورت حداقل زمان لازم برای پیمودن 2000 متر چنین می‌شود

$$\begin{aligned} T &= \frac{2 \times 10^3 \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} \\ &= 7 \times 10^{-6} \text{ s} \end{aligned}$$

که این مقدار از سه برابر طول عمر آنها نیز بیشتر است؛ $T/\tau \approx 3$.

در این آزمایش شار مزون مو در بالای کوه و سطح دریا با هم مقایسه می‌شود. از تشکیل چند مزون

1. B Rossi and D B Hall, 1941, *Physical Review*, **59**, 223.

2. "An account of the experiment demonstrated in the film is given", D H Frisch and J H Smith, 1963, *American Journal of Physics*, **31**, 342.

در جو پایین و یا ازدست رفتن مزونها به خاطر جذب در هوا به طور یقین می‌توان صرفنظر کرد. پس می‌توان چنین انتظار داشت

$$\frac{\text{شار در سطح دریا}}{\text{شار در قله کوه}} = e^{-T/\tau} = 0.45$$

اما، نتیجه عمل کاملاً برخلاف این است: این نسبت برابر ۷^۰ است، که متناظر است با ۳^۰ $T/\tau = 10$ یعنی از نسبت پیش‌بینی شده با ضریب ۱۰ کوچکتر است.

تعبیر این اختلاف این است که ما از اتساع زمان صرفنظر کرده‌ایم. طول عمر τ مربوط به واپاشی مزون در حال سکون است. موثونها در جو با سرعت زیادی نسبت به آزمایشگاه واقع در قله و پایین کوه حرکت می‌کنند. وقتی که موثون با سرعت حرکت می‌کند، طول عمری که ما مشاهده می‌کنیم τ' بر اثر اتساع زمان افزایش می‌یابد. طول عمر مشاهده شده چنین است

$$\tau' = \gamma\tau = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

برای توضیح علت مشاهده چنین آهنگ واپاشی موثون، لازم است که $\gamma = 10$ باشد. این مقدار γ با اندازه‌گیری انرژی مزونها پیدا شده است، و در محدوده اشتباه آزمایشی با پیش‌بینی نسبیت توافق دارد.

مثال ۱۲-۶ نقش اتساع زمان در ساعت اتمی: احتمالاً نور حاصل از لامپ تخلیه اتمی را در یک طیف‌سنج دیده‌اید. هر خط طیف تشکیل شده است از نور گسیل شده‌ای که از گذار یک اتم بین دو حالت انرژی داخلی آن ایجاد می‌شود. این خطوط رنگهای مختلفی دارند زیرا بسامد ν با تغییر انرژی گذار ΔE متناسب است. (طیفهای اتمی در بخش ۶-۸ با جزئیات بیشتر بحث شده است.) اگر ΔE از مرتبه الکترون ولت باشد، نور گسیل شده در ناحیه اپتیکی ($\nu \approx 10^{15}$ Hz) است. گذارهایی وجود دارند که در هر حال، تغییر انرژی در آنها به قدری کوچک است که پرتو گسیل شده در ناحیه میکروموج ($\nu \approx 10^{10}$ Hz) قرار می‌گیرند. این علامتهای میکروموج می‌توانند به صورت الکترونیکی تقویت و آشکارسازی شوند. از آنجا که بسامد نوسان تقریباً به طور کامل به ساختمان داخلی اتم وابسته است، چنین علامتهایی می‌توانند به عنوان بسامد مرجع، آهنگ کار ساعت اتمی را کنترل کنند. ساعت‌های اتمی بسیار پایدار و نسبتاً مصون از تغییرات خارجی‌اند.

هر اتمی که در بسامد طبیعی خود تابش کند، به عنوان یک ساعت ظریف به کار می‌رود. اتمها غالباً در یک گاز هستند و به صورت کاتوره‌ای با سرعت‌های گرمایی حرکت می‌کنند. به خاطر حرکت گرمایی آنها،

این ساعتها نسبت به ساعت‌های آزمایشگاه در حال سکون نیستند و بسامد مشاهده شده به علت اتساع زمان تغییر می‌کند.

اتمی را که در یک چارچوب ساکن، بسامد مشخصه‌اش ν_0 را تابش می‌کند در نظر بگیرید. حرکت هماهنگ داخلی آنها را می‌توانیم به حرکت نوسانی آونگ یک ساعت بزرگ دیواری تشبیه کنیم: هر دور متناظر است با یک نوسان کامل آونگ. اگر دوره نوسان در چارچوب ساکنی τ_0 ثانیه باشد، این دوره با دستگاه آزمایشگاه چنین می‌شود $\tau = \gamma \tau_0$. بسامد مشاهده شده در دستگاه آزمایشگاه برابر است با

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\gamma \tau_0} = \frac{\nu_0}{\gamma} \\ &= \nu_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\end{aligned}$$

اختلاف بسامد چنین می‌شود $\delta\nu = \nu - \nu_0$. اگر $v^2/c^2 \ll 1$ باشد، $\delta\nu \approx 1 - \frac{1}{2}v^2/c^2$ است، و تغییر نسبی بسامد برابر است با

$$\frac{\delta\nu}{\nu_0} = \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = -\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \quad (1)$$

یک راه ساده تعیین جمله طرف راست این است که صورت و مخرج را در M جرم اتم ضرب کنیم

$$\frac{\delta\nu}{\nu_0} = -\frac{\frac{1}{2} M v^2}{M c^2}$$

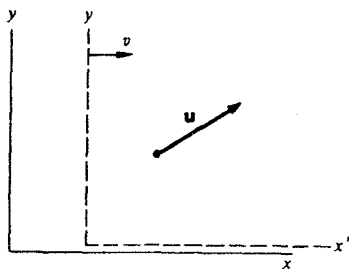
$\frac{1}{2} M v^2$ انرژی جنبشی مربوط به حرکت گرمایی اتم است. این انرژی با دمای گاز افزایش می‌یابد، و مطابق یکی از نتایج مقدماتی مکانیک آماری داریم

$$\frac{1}{2} M \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT$$

که در آن \bar{v}^2 متوسط مربع سرعت، $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/deg}$ ثابت بولتزمن، و T دمای مطلق است.

در ساعت اتمی معروف به میز هیدروژنی، بسامد مرجع از یک گذار هیدروژن اتمی سرچشمه می‌گیرد. M نزدیک به جرم پروتون یعنی $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ است، و با استفاده از $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ از معادله ۱ به دست می‌آوریم

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = -\frac{\frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23}}{1.67 \times 10^{-27} \times 9 \times 10^{16}} T$$



شکل ۵-۱۲

$$= 1.4 \times 10^{-13} T$$

در دمای اتاق که $T = 300^\circ K = 300^\circ C$ درجه در مقیاس دمای مطلق یا $27^\circ C$ (درجه سلسیوس) است، داریم

$$\frac{\delta v}{v} = -4.2 \times 10^{-11}$$

این مقدار با وجود همه کوچکی اش اثری قابل اندازه‌گیری است. به منظور تصحیح زمان اتساع با دقت یک قسمت در 10^{13} ، لازم است که دمای اتمهای تابش‌کننده را تا دقت یک درجه بدانیم. اما، اگر کسی تمایل به مقایسه بسامدها تا چند قسمت در 10^{15} داشته باشد، دمای مطلق باید با دقت هزارم درجه معلوم باشد که کاری است بس مشکلتر. ■

۴-۱۲ تبدیل نسبیتی سرعت

سفینه انترپرایز با سرعت $0.9c$ به آرامی به طرف شرق در پرواز است. در همان زمان، سفینه فلیگل با سرعت $0.9c$ به آرامی به طرف غرب پرواز می‌کند. با محاسبه کلاسیک سرعت نسبی سفینه‌ها که برابر است با $1.8c$ و سرنشینان سفینه فلیگل می‌بینند که انترپرایز با سرعتی بیشتر از سرعت نور از آنها دور می‌شود. از دید نسبیتی، این منظره کاملاً متفاوت است. برای نشان دادن این موضوع احتیاج به قانون جمع نسبیتی سرعتها داریم.

ذره‌ای با سرعت لحظه‌ای $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ را در دستگاه x, y, z و t مطابق شکل ۵-۱۲ در نظر بگیرید. هدف ما این است که مؤلفه‌های متناظر u'_x و u'_y را در دستگاه x', y', z' و t' که با سرعت v در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند، پیدا کنیم.

از تعریف سرعت در دستگاه بدون پریم، داریم

$$u_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad u_y = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

مؤلفه‌های متناظر در دستگاه پریم‌دار چنین‌اند

$$u'_x = \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \quad u'_y = \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{\Delta y'}{\Delta t'}$$

مسئله در اینجا ارتباط دادن جابه‌جاییها در فاصله‌های زمانی در دستگاههای پریم‌دار و بدون پریم است. با استفاده از روش مثال ۱۲-۲ (یا فقط با نوشتن تبدیلات لورنتس برای ديفرانسیالها)، پیدا می‌کنیم

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$

$$\Delta y' = \Delta y$$

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x'}{\Delta t'} &= \frac{\gamma(\Delta x - v\Delta t)}{\gamma[\Delta t - (v/c^2)\Delta x]} \\ &= \frac{\Delta x/\Delta t - v}{1 - (v/c^2)(\Delta x/\Delta t)} \end{aligned}$$

حال، حد این کمیت را وقتی که $\Delta t \rightarrow 0$ به دست می‌آوریم. از آنجاکه $\Delta x = u_x \Delta t$ است، وقتی که $\Delta t \rightarrow 0$ داریم $\Delta x \rightarrow 0$. تبدیلات لورنتس نشان می‌دهد که $\Delta x'$ و $\Delta t'$ هم به صفر می‌رسند. با استفاده از $u'_x = \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} (\Delta x'/\Delta t')$ به دست می‌آوریم

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} \quad (\text{الف } ۲-۱۲)$$

به همین ترتیب

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma[1 - vu_x/c^2]} \quad (\text{ب } ۲-۱۲)$$

به کمک تقارن، w'_z مانند u'_y رفتار می‌کند

$$w'_z = \frac{u_z}{\gamma[1 - vu_x/c^2]} \quad (\text{ج } ۲-۱۲)$$

این تبدیلات را با تغییر علامت v می‌توان معکوس کرد

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2} \quad (\text{الف } ۳-۱۲)$$

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma[1 + vu'_x/c^2]} \quad (\text{ب } ۳-۱۲)$$

$$u'_z = \frac{u'_z}{\gamma[1 + vu'_x/c^2]} \quad (۱۲-۳ ج)$$

در این فرمولها همچون سابق $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ است.

معادله ۱۲-۲ الف یا ۱۲-۳ الف قانون جمع نسبیته سرعتهاست. برای $v \ll c$ ، نتیجه گالیه ای $u'_x = u_x - v$ را به دست می آوریم.

برمی گردیم به مسئله دو سفینه، اگر $u_x = 0.9c$ سرعت انترپرایز نسبت به زمین و $v = 0.9c$ سرعت فلیگل نسبت به زمین باشد، سرعت انترپرایز نسبت به فلیگل از معادله ۱۲-۲ الف چنین می شود

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{0.9c - (-0.9c)}{1 - [(-0.9c)(0.9c)]} \\ &= \frac{1.8c}{1.81} \\ &= 0.99c \end{aligned}$$

سرعت نسبی از c کمتر است. تبدیل نسبیته سرعتها تضمین می کند که با تغییر چارچوهای مرجع نتوان از سرعت نور پیشی گرفت.

حالت حدی چنین است $u_x = c$. آنگاه سرعت در دستگاه متحرک برابر است با

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{c - v}{1 - vc/c^2} \\ &= c \end{aligned}$$

که مستقل از v است. این امر با اصل موضوعی که ما در ابتدای تبدیلات لورنتس بنا نهادیم سازگار است: یعنی سرعت نور برای همه ناظرها یکسان است. به علاوه، این مسئله بازگوکننده این مطلب است که سرعت نور در نظریه نسبیت نقش یک سرعت غایی را داراست.

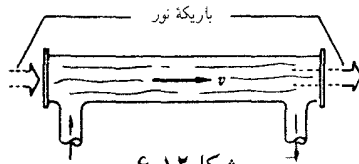
مثال ۱۲-۷ سرعت نور در محیط متحرک: به عنوان تمرینی در جمع نسبیته سرعتها، می خواهیم ببینیم که حرکت محیطی مانند آب چگونه روی سرعت نور اثر می گذارد.

سرعت نور در اجسام از c کمتر است، ضریب شکست n برای تعیین سرعت در یک محیط به کار

می رود

$$n = \frac{c}{\text{سرعت نور در محیط}}$$

$n = 1$ متناظر است با فضای خالی؛ در اجسام $n > 1$ است. برای آب $n = 1.3$ است و این کندی سرعت نور می تواند محسوس باشد.



مسئله در اینجا پیدا کردن سرعت نور در یک مایع متحرک است. برای مثال، لولهٔ پراز آبی را مطابق شکل ۱۲-۶ در نظر بگیرید. اگر آب در حال سکون باشد سرعت نور در آب نسبت به دستگاه آزمایشگاه برابر است با $u = c/n$. سرعت نور وقتی که آب با سرعت v حرکت می‌کند چقدر است؟ سرعت نور در آب را در دستگاه مختصات x' و y' که با آب حرکت می‌کند در نظر می‌گیریم. این سرعت برابر است با

$$u' = \frac{c}{n}$$

سرعت در دستگاه آزمایشگاه، با توجه به رابطهٔ ۱۲-۳ الف چنین است

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} = \frac{c/n + v}{1 + v/nc} = \frac{c}{n} \left(\frac{1 + nv/c}{1 + v/nc} \right)$$

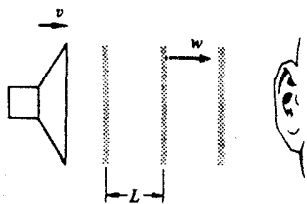
اگر جملهٔ آخر را بسط دهیم و از جملات مرتبهٔ $(v/c)^2$ و کوچکتر صرف نظر کنیم، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} u &= \frac{c}{n} \left(1 + \frac{nv}{c} - \frac{v}{nc} \right) \\ &= \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

نور به نظر می‌رسد که توسط مایع کشیده شده باشد، ولی نه به صورت کامل. فقط کسر $f = 1 - 1/n^2$ از سرعت مایع بسرعت نور یعنی c/n اضافه شده است. این اثر که در سال ۱۸۵۱ به طریق تجربی توسط فیزو مشاهده شده بود، تا ظهور نسبیت به صورت قانع‌کننده‌ای توضیح داده نشد. ■

۱۲-۵ اثر دوپلر

صدای ماشین یا موتور سیکلت پر سروصدایی در حال حرکت دارای این مشخصه است که به محض رد شدن از مقابل شما کاهشی در ارتفاع صوت آن ایجاد می‌شود. اگر در کنار جاده به آن گوش کنید این اثر کاملاً قابل تشخیص است. (این صدایی است که اغلب مردم جهت تداعی عبور سریع یک ماشین، تقلید می‌کنند.) کاهش بسامد همهٔ صداهای وسایط نقلیه وقتی که از مقابل ما عبور می‌کنند به خاطر اثر دوپلر است. به طوری کلی اثر دوپلر یک تغییر و انتقال بسامد است که به خاطر حرکت منبع یا ناظر



شکل ۱۲-۷

پیش می‌آید. انتقال دوپلر برای نور هم مانند صوت اتفاق می‌افتد. دانش ما دربارهٔ حرکت دورشوندهٔ کهکشانه‌های دور دست از مطالعهٔ انتقال دوپلر و خطوط طیفی آنها حاصل می‌شود. موارد کار برد ساده‌تر اثر دوپلر شامل ردیابی ماهواره‌ها و عملیات کنترل رادار است. ما با بررسی انتقال دوپلر در صوت کار را آغاز می‌کنیم: وضعیتی که می‌توان به طریقهٔ کلاسیک با آن رفتار کرد.

انتقال دوپلر در صوت

صوت در هر محیطی مانند هوا با سرعت w که به وسیلهٔ خواص آن محیط و مستقل از حرکت منبع تعیین می‌شود سیر می‌کند.

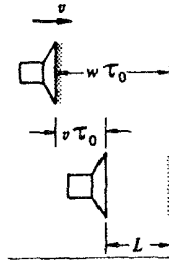
یک منبع صوتی را که با سرعت v در محیطی به طرف ناظر ساکنی حرکت می‌کند در نظر بگیرید. برای ساده‌کردن هندسهٔ مسئله، فعلاً خودمان را به حالتی که در آن ناظر در امتداد خط حرکت قرار داشته باشد مقید می‌سازیم. صوت را می‌توان به مثابه یک سری از تپهای معمولی که به فاصلهٔ $\tau_0 = 1/\nu_0$ از هم جدا شده‌اند به حساب آورد، که در آن ν_0 تعداد تپهای تولید شده در هر ثانیه توسط منبع است. (ν_0 متناظر است با بسامد صوت منبع) این وضعیت در شکل ۱۲-۷ نشان داده شده است.

در زمان T ، صوت مسافت wT را طی می‌کند، و اگر تپها با فاصلهٔ L از یکدیگر جدا شده باشند، تعداد تپهایی که به ناظر می‌رسند برابر wT/L است. آهنگ وارد شدن تپها برابر w/L است، و این همان بسامد ν_D صوتی است که توسط ناظر شنیده می‌شود

$$\nu_D = \frac{w}{L}$$

برای به دست آوردن L ، ابتدا تپ گسیل شده در $t = 0$ و سپس تپ گسیل شده در $t = \tau_0$ را مطابق شکل ۱۲-۸ در نظر بگیرید. در خلال فاصلهٔ زمانی τ_0 اولین تپ مسافت $w\tau_0$ را در محیط طی می‌کند و منبع مسافت $v\tau_0$ را می‌پیماید. بنابراین، فاصلهٔ تپها عبارت است از

$$L = w\tau_0 - v\tau_0$$



شکل ۸-۱۲

$$= (w - v) \frac{1}{v_s}$$

از این رو

$$\begin{aligned} \nu_D &= \frac{w}{L} \\ &= \nu_s \frac{w}{w - v} \end{aligned}$$

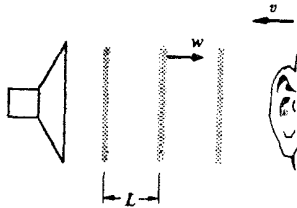
یا

$$\nu_D = \nu_s \frac{1}{1 - (v/w)} \quad (\text{منبع متحرک}) \quad (۴-۱۲)$$

برای منبع نزدیک شونده، v مثبت و $\nu_D > \nu_s$ است. برای منبع دور شونده، v منفی و $\nu_D < \nu_s$ است. از نظر کیفی، این محاسبه برای کاهش ارتفاع صدای ماشینی که از مقابل ما رد می شود به کار می رود. اگر منبع در محیط ساکن باشد و ناظر با سرعت v به طرف منبع حرکت کند، وضعیت طور دیگری است. این وضعیت در شکل ۹-۱۲ نشان داده شده است. سرعت تپها نسبت به ناظر برابر است با $w + v$. آهنگ ورود تپها چنین است

$$\nu_D = \frac{w + v}{L}$$

چون منبع در حال سکون است، $w = \nu_s L = w/v_s$ است و داریم



شکل ۹-۱۲

$$\nu_D = \nu_0 \frac{w+v}{w} = \nu_0 \left(1 + \frac{v}{w} \right) \quad (\text{ناظر متحرک}) \quad (5-12)$$

این نتیجه با معادله ۴-۱۲ مربوط به منبع متحرک تفاوت دارد، اگرچه این نتایج با مرتبه v/w با هم سازگارند. این وضعیت متقارن نیست؛ اگر ν_0, v, w معلوم باشند، با اندازه‌گیری دقیق ν_D می‌توانیم بگوییم که این ناظر است که حرکت می‌کند یا منبع. علت این است که در مورد صوت محیطی مانند هوا وجود دارد که حرکت می‌تواند به آن ارجاع داده شود.

اگر امکان داشت که این نتایج را در مورد امواج نوری در فضا به‌کار ببریم، می‌توانستیم تشخیص دهیم کدامیک از دو دستگاه لخت در حال سکون‌اند. این با اصل نسبیت خاص که بر طبق آن حرکت نسبی دستگاه‌های لخت قابل مشاهده است، تناقض دارد. برای حل این مشکل نسبیتی اثر دوپلر را به دست می‌آوریم.

اثر نسبیتی دوپلر

یک منبع نور با زمان تناوب $\tau_0 = 1/\nu_0$ در چارچوب ساکن خود در حال درخشش است (شکل ۱۲-۱۰). منبع با سرعت v به طرف یک ناظر در حرکت است. به خاطر اتساع زمان، زمان تناوب در چارچوب ساکن ناظر چنین است

$$\tau = \gamma \tau_0$$

از آنجا که سرعت نور یک ثابت عمومی است، تنها با سرعت c به ناظر می‌رسند. بدین علت است که سرعت نسبی به تنهایی در اثر دوپلر در مورد نور نقش دارد. در حالت کلاسیک، تنها با سرعتی می‌رسند که بستگی به وضعیت حرکت ناظر نسبت به محیط دارد.

بسامد تنها برابر $\nu_d = c/L$ است، که در آن L فاصله جدایی در چارچوب ناظر است (شکل ۱۲-۱۱). از آنجا که منبع به طرف ناظر حرکت می‌کند، داریم

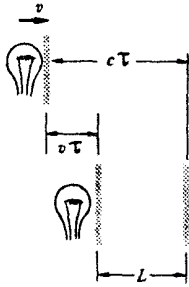
$$L = c\tau - v\tau = (c - v)\tau$$

$$\begin{aligned} \nu_D &= \frac{c}{(c - v)\tau} \\ &= \frac{1}{1 - v/c} \frac{1}{\gamma \tau_0} \end{aligned}$$

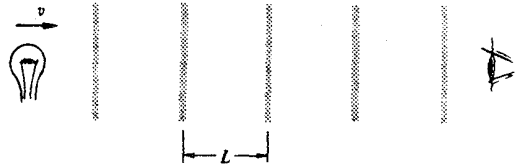
$$\nu_D = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v/c}$$

و

یا



شکل ۱۱-۱۲



شکل ۱۰-۱۲

که به صورت زیر ساده می شود

$$\nu_D = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \quad (۶-۱۲)$$

ν_D بسامد در چارچوب سکون ناظر ν سرعت نسبی منبع و ناظر است. همانطوری که انتظار می رفت، هیچ اثری از حرکت نسبت به محیط وجود ندارد. این نتیجه نسبیتی، هیچ شباهتی با نتایج کلاسیک ندارد و با هر دوی آنها مغایرت دارد، در حقیقت با واسطه هندسی کلاسیک برابر می شود.

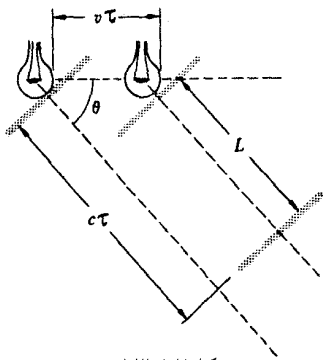
اثر دوپلر برای ناظر بیرون از خط حرکت

تا به حال به اثر دوپلر یک منبع و ناظری که در امتداد خط حرکت است مقید بودیم. اما، اینک ماهواره ای را در نظر بگیریم که علامت رادیویی را مطابق شکل ۱۲-۱۲ به یک ایستگاه کنترل زمینی که انتقال بسامدها را ردیابی می کند، ارسال می دارد. گرچه نتایج پیشین در مورد چنین حالتی به کار نمی روند، ولی به سهولت می توانیم این روش را برای پیدا کردن اثر دوپلر وقتی که ناظر در زاویه θ از خط حرکت قرار داشته باشد تعمیم دهیم. دوباره منبع را مثل چراغ در حال درخشش در نظر بگیریم (شکل ۱۲-۱۳). زمان تناوب تپهای نوری چراغ در چارچوب ناظر مانند قبل برابر $\tau = \gamma\tau_0$ است. بسامدی که به وسیله ناظر دیده می شود c/L است. از آنجا که منبع در فاصله زمانی بین تپهای متوالی مسافت $v\tau$ را می پیماید، از شکل مقابل آشکار است که

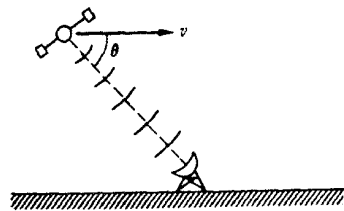
$$\begin{aligned} L &= c\tau - v\tau \cos \theta \\ &= (c - v \cos \theta)\tau \end{aligned}$$

(فرض می کنیم منبع و ناظر به قدری از هم دورند که θ بین تپها عملاً ثابت است.) بنابراین

$$\nu_D = \frac{c}{L}$$



شکل ۱۲-۱۳



شکل ۱۲-۱۴

$$= \frac{c}{(c - v \cos \theta) \tau \cdot \gamma}$$

$$\nu_D = \nu \cdot \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v/c) \cos \theta} \quad (7-12)$$

یا

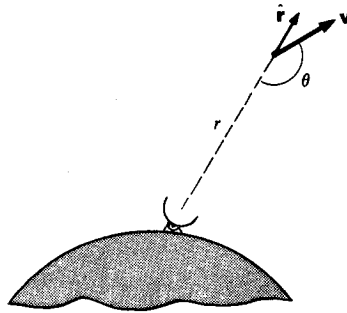
در اینجا θ زاویه اندازه‌گیری شده در چارچوب ساکن ناظر است. در امتداد خط حرکت $\theta = 0^\circ$ است و بدین ترتیب نتیجه قبلی ما یعنی معادله ۱۲-۶ کامل می‌شود. در $\theta = \pi/2$ ، سرعت نسبی بین منبع و ناظر صفر است اما، حتی در این حالت هم یک انتقال بسامد وجود دارد؛ یعنی τ_D به اندازه ضریب $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ با ν فرق می‌کند. این اثر "عرضی" دوپلر ناشی از اتساع زمان است. چراغ در حال درخشش عملاً یک نوع ساعت متحرک است.

اثر نسبیتی دوپلر با نتیجه کلاسیک از مرتبه v/c سازگار است، به طوری که اگر آزمایشی خواهد فرق بین آنها را مشخص کند باید به اثرهایی از مرتبه $(v/c)^2$ حساس باشد، که کار مشکلی است. این رابطه نسبیتی در سال ۱۹۳۸ به وسیله مشاهدات ایوز^۱ و استیل ول^۲ در طیف نوری حاصل از اتمهایی که با سرعت زیاد حرکت می‌کنند تأیید شد.

یکی از جالبترین کاربردهای عملی اثر دوپلر طبق مثال زیر در دستگاههای فضاوردی است.

مثال ۱۲-۸ اثر دوپلر در فضاوردی: اثر دوپلر می‌تواند در ردیابی جسم متحرک، مانند ماهواره از یک نقطه مرجع در روی زمین مورد استفاده قرار گیرد. این روش به طور جالب توجهی دقیق است؛ یعنی تغییرات موقعیت ماهواره را در فاصله 10^8 متری زمین تا کسری از سانتیمتر می‌توان تعیین کرد.

ماهواره‌ای را مطابق شکل ۱۲-۱۴ در نظر بگیرید که با سرعت v در فاصله r از یک ایستگاه زمینی در حرکت است. نوسانگری در این ماهواره علائمی را با بسامد ویژه ν ارسال می‌دارد. از آنجا که



شکل ۱۲-۱۴

برای L ماهواره $v \ll c$ است، می‌توانیم معادله ۱۲-۷ را با حفظ جملات فقط تا مرتبه v/c به تقریب در نظر بگیریم. آنگاه بسامد ν_D دریافت شده در ایستگاه زمینی را می‌توان چنین نوشت

$$\begin{aligned} \nu_D &\approx \frac{\nu_0}{1 - (v/c) \cos \theta} \\ &\approx \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta \right) \end{aligned}$$

در دستگاه زمینی نوسانگری وجود دارد که با نوسانگر واقع در ماهواره یکسان است، و به وسیله آن می‌توان اختلاف بسامد (بسامد "زنش") $\nu_D - \nu_0$ را با روشهای ساده الکترونیکی اندازه‌گیری کرد:

$$\nu_D - \nu_0 = \nu_0 \frac{v}{c} \cos \theta$$

سرعت شعاعی ماهواره چنین است

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} \\ &= -v \cos \theta \end{aligned}$$

از این رو

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -\frac{c}{\nu_0} (\nu_D - \nu_0) \\ &= -\lambda_0 (\nu_D - \nu_0) \end{aligned}$$

که در آن $\lambda_0 = c/\nu_0$ طول موج تابش است.

با تغییر سرعت و جهت ماهواره، ν_D با زمان تغییر می‌کند. برای پیدا کردن مسافت شعاعی پیموده شده بین زمانهای T_a و T_b از رابطه بالا نسبت به زمان انتگرال می‌گیریم

$$\int_{T_a}^{T_b} \left(\frac{dr}{dt} \right) dt = -\lambda_0 \int_{T_a}^{T_b} (\nu_D - \nu_0) dt$$

$$r_a - r_b = -\lambda_0 \int_{T_a}^{T_b} (\nu_D - \nu_0) dt$$

این انتگرال با N_{bn} تعداد دورهای بسامد زنش که در فاصله زمانی T_a و T_b اتفاق می افتد برابر است. (یک دور در زمان $\tau = 1/(\nu_D - \nu_0)$ اتفاق می افتد، بنابراین $\int dt/\tau$ برابر است با تعداد کل دورها.) بنابراین

$$r_b - r_a = -\lambda_0 N_{bn}$$

این نتیجه تفسیر ساده‌ای هم دارد. هر وقت که مسافت شعاعی به اندازه یک طول موج، افزایش یابد، فاز علامت ضربان به اندازه یک دور کاهش می‌یابد. به همین طریق، وقتی که مسافت شعاعی به اندازه یک طول موج کاهش یابد، فاز علامت زنش به اندازه یک دور افزایش می‌یابد.

دستگاههای مخابراتی ماهواره با طول موجی حدود 10° سانتیمتر کار می‌کنند، و از آنجا که علامت زنش را می‌توان کسری از یک دور اندازه‌گیری کرد، بنابراین ماهواره‌ها می‌توانند تا حدود یک سانتیمتر ردیابی شوند. اگر ماهواره و نوسانگرهای ایستگاه کنترل زمینی در بسامد یکسان ν_0 با هم مطابقت نداشته باشند، خطایی در بسامد زنش وجود خواهد داشت. برای اجتناب از این مشکل، می‌توان از یک دستگاه ردیاب دوطرفه دوپلر استفاده کرد. این دستگاه علامتی را از زمین به ماهواره ارسال می‌کند و ماهواره پس از تقویت کردن آن را دوباره به زمین می‌فرستد. این دستگاه دارای مزیت اضافی دو برابر کردن انتقال دوپلر و افزایش قدرت تفکیک با ضریب ۲ است.

اصول فضاوردی دوپلر را برای حالت کلاسیک $v \ll c$ طرح ریزی کردیم. در بعضی کاربردهای ردیابی، دقت به قدری بالا است که اثرات نسبیتی را باید به حساب آورد.

همانطوری که قبلاً نشان دادیم، یک دستگاه ردیاب دوپلر سرعت شعاعی لحظه‌ای ماهواره $v_r = -c(\nu_D - \nu_0)/\nu_0$ را هم به دست می‌دهد. از آنجا که برای بررسی مسیر ماهواره سرعت و مکان هر دو مورد نیازند، ردیابی به طور خاصی ساده می‌شود. یکی از کاربردهای روزمره این دستاورد در رادار سرعت سنج پلیس است: از برخورد یک علامت میکروموج یا اتومبیلی که از جهت مقابل در حرکت است علامت میکروموج بازتابیده‌ای پدید می‌آید که بسامد زنش این علامت سرعت اتومبیل را آشکار می‌سازد.

۱۲-۶ پارادوکس دوقلوها

اثرات سینماتیکی این فصل بستگی به سرعت نسبی دو دستگاه دارد؛ چنین پدیده‌هایی مانند انقباض

طول لورنتسی، اتساع زمان، وانتقال دوپلر هیچ نشانه‌ای از اینکه کدامیک از دو دستگاه در حالت سکون و کدام در حرکت است نمی‌دهند. در چارچوب نسبیت همه دستگاههای لخت طبق اصل موضوع هم‌ارزند، تمایز بین دستگاهها امکانپذیر نیست. یک چنین هم‌ارزیی در دستگاههای نالخت وجود ندارد. در واقع، تشخیص اینکه یک دستگاه منزوی شتابدار است یا نه مشکل عمده‌ای نیست. نادیده گرفتن این نکته موجب بروز مجادله‌ی پر سروصدایی تحت عنوان ”پارادوکس-دوقلوها“ شده است. مسئله از این جهت جالب توجه است که نمایشی از اختلاف فیزیکی بین دستگاههای لخت و نالخت را نشان می‌دهد.

پارادوکس از این قرار است: به فرض A و B دو فرد دوقلوی همسان‌اند که ساعت‌های یکسانی دارند. B یک سفر فضایی دوری را شروع می‌کند در حالی که A در خانه می‌ماند. A به‌طور دائم ساعت B را مشاهده می‌کند و می‌بیند که ساعت B به علت اتساع زمان کند کار می‌کند. بالاخره B به خانه برمی‌گردد. از آنجا که ساعت B در این سفر کند کار کرده است، A نتیجه می‌گیرد که B در پایان این سفر از او جوانتر است. ولی فرض کنید که بخواهیم این وضعیت را از نقطه نظر B مورد مطالعه قرار دهیم. از آنجا که اتساع زمان فقط به حرکت نسبی بستگی دارد، در طول این سفر B می‌بیند که ساعت A کند کار می‌کند، و وقتی که سفر به پایان می‌رسد، B نتیجه می‌گیرد که A از او جوانتر است. بدیهی است که هر دو دوقلو نباید درست گفته باشند. آیا یکی از دوقلوها حقیقتاً جوانتر است؟

توضیح این مسئله بر این حقیقت استوار است که وضعیت از نظر دوقلوها هم‌ارز نیست. دستگاه A در تمام مدت لخت است، ولی برای اینکه B به نقطه شروع خود برگردد، باید سرعت خود را در یک نقطه‌ای تغییر دهد. زمانی که سرعت در حال تغییر است، دستگاه B لخت نیست. در اینکه کدامیک از دوقلوها شتابدار است تردیدی نداریم. اگر هر یک از آنها شتاب‌سنجی، مانند جرمی آویخته بر انتهای یک فنر، همراه داشته باشند شتاب‌سنج A در صفر باقی می‌ماند، در حالی که شتاب‌سنج B در نقطه بازگشت انحراف بزرگی را نشان می‌دهد و بدیهی است که این دستگاهها هم‌ارز نیستند.

نسبیت خاص را برای به دست آوردن مختصات رویدادها در چارچوبهای نالخت نمی‌توان به کار برد. خوشبختانه، به کمک پدیده انتقال دوپلر می‌توان فهمید که B در خلال دور زدن چه چیزی را مشاهده خواهد کرد.

برای اینکه بحث را به صورت کمی در بیاوریم، فرض کنید سرعت نسبی برابر v است. A مشاهده می‌کند که B مسافت L را در زمان $T = L/v$ می‌پیماید و سپس به سرعت حرکتش را معکوس می‌کند و با همان سرعت برمی‌گردد. زمان برگشت هم همان T است. از زمان لازم برای معکوس کردن حرکت B صرف‌نظر خواهیم کرد، زیرا اگر T به قدر کافی طولانی باشد، زمان دور زدن خیلی ناچیز است. (هیچ چیز غیر عادی برای ساعت B در خلال دور زدن اتفاق نمی‌افتد؛ زمانی که سرعت در حال تغییر است،

A فقط یک ضریب اتساع متغیر را مشاهده می‌کند.

صرفنظر از این تصحیح کوچک مربوط به تغییر مسیر، A یک زمان کل سپری شده T'_B را برای ساعت متحرک B مشاهده می‌کند که با زمان ساعت A ، یعنی $T_A = 2T$ به طریق زیر در ارتباط است

$$\begin{aligned} T'_B &= \frac{T_A}{\gamma} \\ &= T_A \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned} \quad (۸-۱۲)$$

A نتیجه می‌گیرد که B جواتر است

$$\frac{B \text{ گذشت زمان برای}}{A \text{ گذشت زمان برای}} = \frac{T'_B}{T'_A} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (\text{مطابق نظر } A) \quad (۹-۱۲)$$

اینک وضعیت را از دید B مطالعه می‌کنیم. مشاهدات B بجز در مورد زمان دور زدن شبیه مشاهدات A است. B می‌بیند که A مسافت L را با سرعت v در رفت و برگشت طی می‌کند. این عمل با ساعت B به اندازه $T_B = 2T$ طول می‌کشد و B زمان سپری شده T'_A را بر روی ساعت A چنین می‌بیند

$$\begin{aligned} T'_A &= \frac{T_B}{\gamma} \\ &= T_B \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned} \quad (۱۰-۱۲)$$

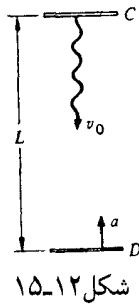
به نظر می‌رسد B نتیجه می‌گیرد که A جواتر است

$$\frac{B \text{ گذشت زمان برای}}{A \text{ گذشت زمان برای}} = \frac{T_B}{T'_A} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{مطابق نظر } B) \quad (۱۱-۱۲)$$

بارادوکس این است: A فکر می‌کند B جواتر است و B فکر می‌کند که A جواتر است.

اینک بررسی می‌کنیم که در خلال دور زدن برای B چه اتفاق می‌افتد. B درست مثل اینکه در یک میدان گرانشی قرار گرفته شتابی را تحمل می‌کند. طبق بحث اصل هم‌ارزی در فصل ۸، ساعتها در یک میدان گرانشی با آهنگهای متفاوتی کار می‌کنند. این مسئله منشأ انتقال به سرخ گرانشی است. بدین دلیل B می‌بیند که ساعت A در خلال دور زدن او تند کار می‌کند، و همانطوری که نشان خواهیم داد این عمل ساعت A را جلو می‌برد. اما، به جای استفاده از انتقال به سرخ گرانشی، نتیجه را از سینماتیک ساده به دست خواهیم آورد.

ساعت C را که در چارچوب ساکن خود دارای زمان تناوب T_C است و با بسامد $\nu_C = 1/T_C$



علامت گسیل می‌دارد، در نظر بگیرید (شکل ۱۲-۱۵). یک ناظر D در فاصله L از آن در حال سکون قرار دارد و وقتی که علامتهایی با بسامد ν از C خارج می‌شوند با آهنگ a به طرف C شتاب می‌گیرد. علامتها در زمان $t \approx L/c$ به C می‌رسند (فرض می‌کنیم D در زمان t هیچ‌گونه حرکت قابل ملاحظه‌ای نکرده است و سرعت آن به قدری پایین است که اثرات نسبیتی آن قابل صرفنظر باشد). وقتی که علامتها می‌رسند، D با سرعت $v = at$ ، به طرف C در حرکت است و بسامد مشاهده شده انتقال دوپلر پیدا کرده است. از معادله ۱۲-۶ داریم

$$\begin{aligned} \nu' &= \nu \cdot \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \\ &\approx \nu \cdot \left(1 + \frac{v}{c}\right) \\ &= \nu \cdot \left(1 + \frac{aL}{c^2}\right) \end{aligned}$$

در اینجا از جملات مرتبه $(v/c)^2$ صرفنظر کرده‌ایم. از آنجا که $\nu' > \nu$ است، به نظر می‌رسد ساعت C از حالتی که در آن شتاب وجود نداشته باشد تندتر کار می‌کند. اگر ساعت D فاصله زمانی را به شرح زیر ثبت کند

$$T_D = 1/\nu'$$

آنگاه ساعت C فاصله زمانی زیر را نشان می‌دهد

$$T_C = 1/\nu.$$

از این رو

$$\begin{aligned} T_C &= T_D \frac{\nu'}{\nu} \\ &= T_D \left(1 + \frac{aL}{c^2}\right) \end{aligned}$$

این موضوع را در مورد دوقلوا به کار می‌بریم، فرض کنید B در خلال دور زدن با آهنگ a به طور یکنواخت به طرف A شتاب می‌گیرد. B با ساعت خودش می‌بیند که زمان دور زدن برابر است با T_t و ساعت A فاصله زمانی زیر را نشان می‌دهد

$$T'_t = T_t \left(1 + \frac{aL}{c^2} \right)$$

از آنجا که سرعت در خلال دور زدن به اندازه $2v$ تغییر می‌کند، $T_t = 2v/a$ است. بنابراین

$$\begin{aligned} T'_t &= T_t + \frac{2v aL}{a c^2} \\ &= T_t + \frac{2vL}{c^2} \end{aligned}$$

طول کل سفر برابر است با $2L = vT_B$. از این رو، کل زمانی که B در خلال دور زدن بنا بر ساعت A مشاهده می‌کند چنین است

$$T'_t = T_t + \frac{v^2}{c^2} T_B$$

کل زمانی که B در خلال مسافرت بنا بر ساعت A مشاهده می‌کند چنین است

$$\begin{aligned} (T'_A)_{\text{کل}} &= T'_A + T_t + \frac{v^2}{c^2} T_B \\ &= T_B \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + T_t + \frac{v^2}{c^2} T_B \end{aligned}$$

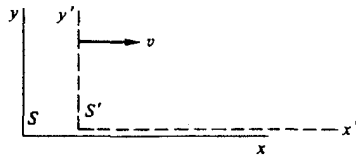
در اینجا از $T'_A = T_B/\gamma$ معادله ۱۲-۱۰ استفاده کردیم. دوباره از زمان دور زدن صرف‌نظر خواهیم کرد. تصحیح انتقال دوپلر در خلال دور زدن تا مرتبه v^2/c^2 متغیر است و با این تقریب داریم

$$\begin{aligned} (T'_A)_{\text{کل}} &= T_B \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} \right) \\ &= T_B \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) \end{aligned}$$

نتیجه این بحث از نقطه نظر B چنین است

$$\frac{\text{گذشت زمان برای } B}{\text{گذشت زمان برای } A} = \frac{T_B}{(T'_A)_{\text{کل}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} v^2/c^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

قبلا در معادله ۱۲-۹ از نقطه نظر A نشان دادیم که



شکل ۱۲-۱۶

$$\frac{\text{گذشت زمان برای } B}{\text{گذشت زمان برای } A} = \frac{T'_B}{T_A} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

این دو قلوهای همسان موافق اند که A از B مسن تر است و بدین ترتیب پارادوکس هم حل شده است.

تحلیل ما فقط تا مرتبه v^2/c^2 صادق است. تا این مرتبه، نظریه نسبیت به هیچ تضادی برخورد نمی‌کند به شرطی که چارچوب مرجع شتابدار را به صورت جداگانه در نظر بگیریم. حل کامل این مسئله به نظر می‌رسد که احتیاج به نظریه نسبیت عام دارد.

مسائل

در این مسائل S به دستگاه لخت x, y, z, t ، S' به دستگاه لخت x', y', z', t' که در امتداد محور x با سرعت v نسبت به S حرکت می‌کند، اطلاق می‌شود (شکل ۱۲-۱۶). مبدأ آنها در $t = t' = 0$ برهم منطبق‌اند. فرض می‌شود $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ باشد.

۱۲-۱ فرض کنید $v = 0.6c$ است. مختصات رویدادهای زیر را در دستگاه S' پیدا کنید:

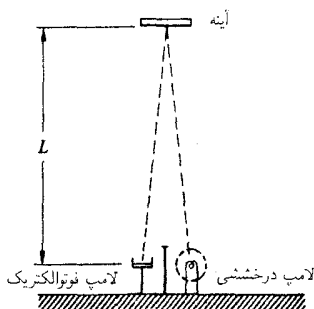
(الف) $x = 4 \text{ m}, t = 0 \text{ s}$ (ب) $x = 4 \text{ m}, t = 1 \text{ s}$ (ج) $x = 1.8 \times 10^8 \text{ m}, t = 1 \text{ s}$

(د) $x = 10^9 \text{ m}, t = 2 \text{ s}$

۱۲-۲ رویدادی در S در $x = 6 \times 10^8 \text{ m}$ ، و در S' در $x' = 6 \times 10^8 \text{ m}$ و $t' = 4 \text{ s}$ اتفاق می‌افتد. سرعت نسبی دستگاهها را پیدا کنید.

۱۲-۳ به کمک ساعت شکل ۱۲-۱۷ می‌توان فرمول اتساع زمان را بهتر درک کنید. این ساعت مطابق شکل ۱۲-۱۷ متشکل است از یک لامپ درخششی، آینه، و یک لامپ فوتوالکتریک. لامپ درخششی تپ نوری گسیل می‌کند که فاصله L تا آینه را می‌پیماید و سپس به طرف لامپ فوتوالکتریک بازتابش می‌کند. هر زمان که یک تپ به لامپ فوتوالکتریک می‌رسد، لامپ درخششی به کار می‌افتد. با صرف نظر کردن از زمان تأخیر مدار روشن‌کننده، زمان تناوب ساعت برابر است با $\tau_0 = 2L/c$.

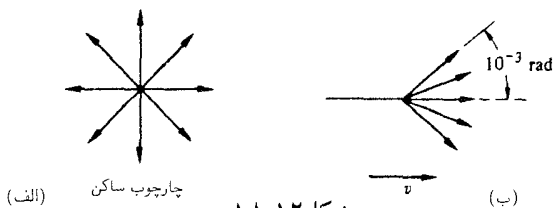
اکنون ساعت را در دستگاه مختصاتی که با سرعت v یکنواخت به طرف چپ حرکت می‌کند مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این دستگاه به نظر می‌رسد که ساعت با سرعت v به طرف راست حرکت می‌کند.



شکل ۱۲-۱۷

زمان تناوب ساعت را در دستگاه متحرک به کمک محاسبه مستقیم پیدا کنید، فقط از این فرضها استفاده کنید که c ثابت عمومی است و فاصله عمودی تا خط حرکت تحت تأثیر حرکت نیست. نتیجه باید با آنچه توسط تبدیل لورنتس $\tau = \tau_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ داده شده است یکسان باشد.

۱۲-۴ یک باریکه نور با زاویه θ نسبت به محور x' در دستگاه S' گسیل شده است. (الف) زاویه‌ای که این باریکه نور با محور x در دستگاه S می‌سازد (θ) چقدر است؟ (شکل ۱۲-۱۸ الف).



شکل ۱۲-۱۸

جواب: $\cos \theta = (\cos \theta_0 + v/c) / (1 + v/c \cos \theta_0)$

(ب) منبعی که در چارجوب ساکن در همه جهات به طور یکنواخت تابش می‌کند، در چارجوبی که با سرعت v نزدیک به c در حرکت است تابشی نایکنواخت و رو به جلو دارد (شکل ۱۲-۱۸ ب). این را اثر چراغ بالا می‌نامند؛ این اثر در سیکلوترون که در آن الکترونی‌هایی با سرعت‌های نسبی حرکت می‌کنند در مخروط باریکی به طرف جلو نورگسیل می‌کنند، بیشتر مشهود است. با استفاده از نتیجه قسمت الف، سرعت منبع را برای اینکه نیمی از تابش در مخروطی با زاویه رأس 10^{-2} رادیان گسیل شود، پیدا کنید.

جواب: $v = c(1 - 5 \times 10^{-7})$

۱۲-۵ ناظری دو سفینه فضایی در حال پرواز را که با سرعت $0.99c$ از هم دور می‌شوند مشاهده می‌کند. سرعت یکی از این سفینه‌های فضایی آن گونه که دیگری می‌بیند چقدر است؟

جواب: $0.99995c$

۱۲-۶ میله‌ای با طول l_0 در جهت موازی با محور x با سرعت u در امتداد محور x در دستگاه S در حرکت است. طول اندازه گرفته شده آن توسط ناظر دستگاه S' چقدر است؟

جواب: $l = l_0 [(c^2 - v^2)(c^2 - u^2)]^{\frac{1}{2}} / (c^2 - uv)$

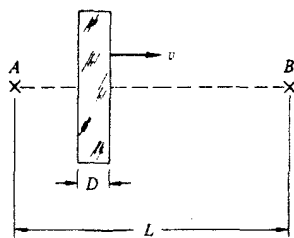
۱۲-۷ یکی از درخشانترین خطوط طیف هیدروژن، خط H_α است که خط سرخ روشنی با طول موج $10^{-9} \times 6563$ متر است. (الف) طول موج پیش‌بینی شده خط H_α ستاره‌ای که با سرعت 3000 km/s دور می‌شود چقدر است؟

جواب: $6627 \times 10^{-9} \text{ m}$

(ب) طول موج H_α اندازه گرفته شده در روی زمین در دو نقطهٔ مقابل هم در استوای خورشید به اندازه $10^{-12} \times 9$ متر با هم فرق دارند، با فرض اینکه این اختلاف به خاطر دوران خورشید باشد، زمان تناوب خورشید را پیدا کنید. قطر خورشید را $10^6 \times 1.4$ کیلومتر بگیرید.
جواب: ۲۵d

۱۲-۸ بسامد نور بازتابیده از یک آینهٔ متحرک به علت حرکت تصویر، تحت اثر یک انتقال دوپلر واقع می‌شود. انتقال دوپلر نوری را پیدا کنید که مستقیماً از آینه‌ای که با سرعت v به ناظر نزدیک می‌شود بازتابش می‌یابد، نشان دهید که مقدار آن برابر است با حالتی که تصویر با سرعت $2v/(1 + v^2/c^2)$ به طرف ناظر در حرکت است.

۱۲-۹ یک تیغهٔ شیشه‌ای مطابق شکل ۱۲-۱۹ با سرعت v به طرف راست حرکت می‌کند. درخش



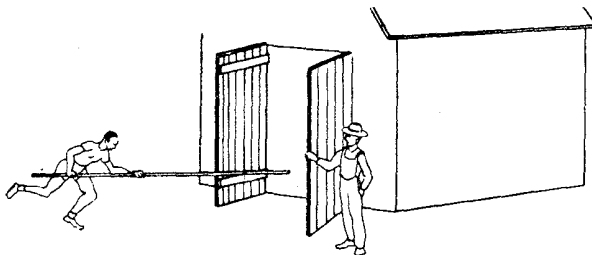
شکل ۱۲-۱۹

نوری که از A گسیل شده است پس از عبور از شیشه به B که در فاصلهٔ L از آن قرار دارد می‌رسد. شیشه در چارچوب ساکن خود دارای ضخامت D و سرعت نور در این شیشه c/n است. چقدر طول می‌کشد تا نور از A به B برسد.

جواب حالت خاص: اگر $v = 0$ باشد $T = [L + (n - 1)D]/c$ ؛ اگر $v = c$ باشد

$$T = L/c$$

۱۲-۱۰ پارادوکس قهرمان پرش بانیزه. یک قهرمان پرش بانیزه با یک کشاورز به طرق زیر شرط بندی می کند. قهرمان پرش بانیزه، نیزه‌ای به طول l_0 ، و کشاورز نیز انباری به طول $3/4 l_0$ در اختیار دارد. کشاورز شرط می کند که می تواند نیزه را کاملاً در داخل انبار قرار دهد و درب را ببندد (شکل ۱۲-۲۰). شرط بندی



شکل ۱۲-۲۰

انجام می شود و کشاورز از قهرمان پرش بانیزه می خواهد که با سرعت $v = c\sqrt{3}/2$ به داخل انبار بدود. در این حالت کشاورز مشاهده می کند که طول نیزه طبق پدیده انقباض طول لورنتس به $l = l_0/2$ رسیده است، و نیزه به سادگی در انبار جا می گیرد. او در لحظه‌ای که نیزه در انبار است درها را می بندد و مبلغ شرط را طلب می کند. قهرمان پرش بانیزه با این درخواست مخالفت می کند. از نظر قهرمان، انبار هم طبق انقباض لورنتس با ضریب ۲ منقبض شده است و بنابراین نیزه در آن جا نمی گیرد. شما این مخالفت را چگونه توجیه می کنید؟ آیا در این مسئله انقباض طول لورنتس "حقیقی" است (راهنمایی: روی داده‌ها را در دو سر نیزه از دید هر دو ناظر بررسی کنید).

۱۲-۱۱ تبدیل نسبی شتاب از دستگاه S به دستگاه S' را می توان با روش بسط بخش ۱۲-۴ به دست آورد. مفیدترین تبدیل برای حالتی است که ذره به طور لحظه‌ای در دستگاه S' در حالت سکون باشد ولی با آهنگ a در دستگاه S' موازی با محور x شتاب بگیرد.

نشان دهید که در این حالت شتاب x دستگاه S از رابطه $a_x = a_0/\gamma$ به دست می آید.

۱۲-۱۲ تبدیل نسبی شتاب که در مسئله قبلی به دست آمده است ناممکن بودن شتاب‌گیری یک دستگاه و رساندن سرعت به سرعتی بزرگتر از c را نشان می دهد. موشکی را در نظر بگیرید که با آهنگ ثابت a_0 شتاب می گیرد. این شتاب توسط شتاب‌سنجی اندازه‌گیری می شود که به وسیله موشک حمل می شود، و مثلاً به صورت جرمی است که برفری نیرو وارد می کند. (الف) سرعت را بعد از زمان t برای یک ناظر در دستگاهی که موشک ابتدا در آن ساکن بوده است پیدا کنید.

$$\text{جواب: } v = a_0 t / \gamma \text{ یا } v = a_0 t / \sqrt{1 + (a_0 t/c)^2}$$

(ب) سرعتی که به صورت کلاسیک پیش بینی می شود برابر است با $v_0 = a_0 t$. سرعت واقعی

در حالت‌های $c, 10^3 c, 10^4 c$ چقدر است؟

جواب: $v = v_0 (1 - 5 \times 10^{-7}), c/\sqrt{2}, c(1 - 5 \times 10^{-7})$.

۱۲-۱۳ مرد جوانی یک سفر فضایی را به نزدیکترین ستاره (آلفا-سنتوری) که به فاصله ۴۳ سال نوری از زمین قرار دارد شروع می‌کند. این مرد که با سفینه‌ای با سرعت $c/5$ حرکت می‌کند، وقتی که

به زمین برمی‌گردد، چقدر از برادر دوقلوی خود که در زمین ساکن بوده جوانتر است؟

۱۲-۱۴ هر کمیتی که توسط تبدیلات لورنتس بلا تغییر بماند، ناوردای لورنتس نامیده می‌شود.

نشان دهید که Δs یک ناوردای لورنتس است وقتی که داشته باشیم

$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$$

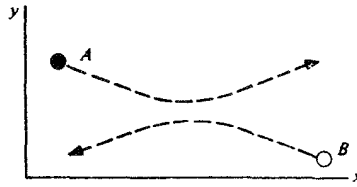
در اینجا Δt فاصله زمانی بین رویداد و $(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{\frac{1}{2}}$ فاصله مکانی بین آنها در همان دستگاه لخت است.

تکانه و انرژی نسبیتی

۱-۱۳ تکانه

در فصل گذشته دیدیم که چگونه اصول موضوع نسبیت خاص به طریق طبیعی منجر به روابطی سینماتیکی می‌شوند که در سرعت‌های پایین با روابط نیوتونی توافق دارند ولی در سرعت‌های نزدیک به c به صورت بارزی با آنها متفاوت‌اند. اینک به مسئله کاربرد نسبیت خاص در دینامیک می‌پردازیم. یکی از راه‌ها این است که روشی برای نوشتن قوانین فیزیک بیابیم به شکلی که اصول موضوع نسبیت در آن صدق کند. چنین روشی که واقعاً هم امکان‌پذیر است شامل مفاهیم چاربردار و ناوردایی نسبیتی است که آنها را در فصل بعد دنبال خواهیم کرد. اما، در اینجا راه دیگری را در پیش خواهیم گرفت، راهی که به قوت و فایده روش چاربردار نیست، ولی راهی است که از مزیت بحث‌های فیزیکی برای نشان دادن ارتباط بین مفاهیم آشنای مکانیک کلاسیک و مفاهیم مشابه نسبیتی برخوردار است.

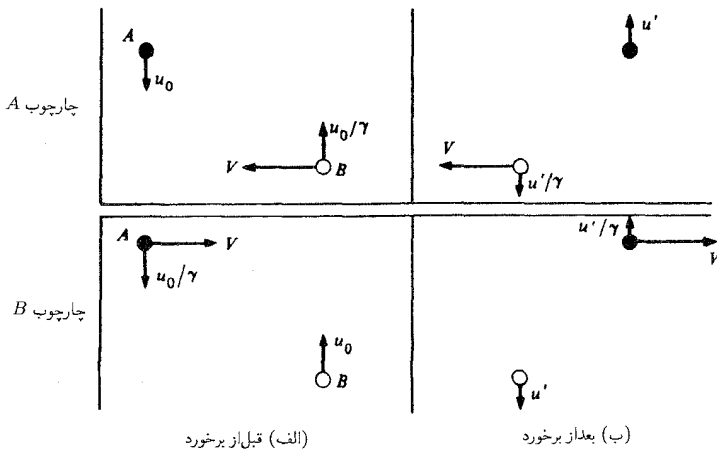
ابتدا برپایستگی تکانه تأکید خواهیم کرد و سپس پیدا می‌کنیم که برای برقراری این اصل در مکانیک نسبیتی به چه اصلاحاتی نیاز داریم. این رویه‌ای است که در بسط مرزهای فیزیک غالباً مورد استفاده واقع می‌شود: با دوباره فرمولبندی کردن قوانین پایستگی به طریقی که در وضعیت جدید هم حفظ



شکل ۱-۱۳

شوند، به طور خیلی طبیعی به تعمیم مفاهیم آشنا می پردازیم. بخصوص همان گونه که بحث زیر نشان می دهد، برای حفظ پایستگی تکانه در تبدیلات نسبیتی باید در مفهوم جرم تجدید نظر کنیم. یک برخورد آنی کشسان بین دو ذره یکسان A و B را در نظر بگیرید (شکل ۱-۱۳). این برخورد را می خواهیم در دو چارچوب بخصوص مطالعه کنیم. چارچوب A ، چارچوبی است که در امتداد محور x با A حرکت می کند، و چارچوب B چارچوبی است که در امتداد محور x با B حرکت می کند. برخوردها را کاملاً متقارن می گیریم. همانطوری که شکلهای ۱۳-۲ نشان داده شده است، هر ذره در چارچوب خود قبل از برخورد در امتداد محور y دارای سرعت یکسان u_0 است (شکل ۱۳-۲ الف). اثر این برخوردها این است که سرعتها را در راستای محور y تغییر می دهد ولی در راستای محور x بدون تغییر باقی می گذارد.

سرعت نسبی چارچوبها در راستای x برابر است با V که با توجه به قانون تبدیل سرعتها، معادله ۱۲-۲، سرعت y ذره مقابل در هر چارچوب برابر $u_0 \sqrt{1 - V^2/c^2} / \gamma = u_0 / \gamma$ می شود. بعد از برخورد، جهت سرعتهای y مطابق شکل ۱۳-۲ (ب) معکوس می شود. ولی وضعیت متقارن باقی می ماند. اگر مؤلفه y ، سرعت A و B در چارچوبهای خود u' باشد، سرعت ذره دیگر



(الف) قبل از برخورد

(ب) بعد از برخورد

شکل ۱۳-۲

برابر است با w/γ .

در اینجا می‌خواهیم کمیتی پایسته نظیر تکانه کلاسیک پیدا کنیم. فرض می‌کنیم تکانه ذره‌ای که با سرعت w حرکت می‌کند چنین است

$$\mathbf{p} = m(w)\mathbf{w}$$

که در آن $m(w)$ یک کمیت نرده‌ای است که باید آن را پیدا کرد. این کمیت شبیه جرم نیوتونی است، ولی با این تفاوت که ممکن است به سرعت w بستگی داشته باشد.

مؤلفه x تکانه در چارچوب A تماماً مربوط به ذره B است. سرعت B قبل از برخورد برابر است با $w = (V^2 + u_0^2/\gamma^2)^{1/2}$ و بعد از برخورد برابر $w' = (V^2 + u'^2/\gamma^2)^{1/2}$ می‌شود. با قبول پایستگی تکانه در جهت x حاصل می‌شود

$$m(w)V = m(w')V$$

به دنبال آن داریم $w = w'$ ، به طوری که

$$w' = u_0$$

پس از آن عبارت پایستگی تکانه در جهت y را مطابق آنچه در چارچوب A تعیین شده است می‌نویسیم. با برابر قرار دادن مؤلفه y تکانه قبل و بعد از برخورد نتیجه می‌شود

$$-m(u_0)u_0 + m(w)\frac{u_0}{\gamma} = m(u_0)u_0 - m(w)\frac{u_0}{\gamma}$$

یا

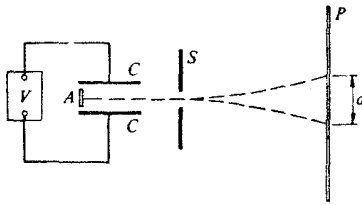
$$m(w) = \gamma m(u_0)$$

در حد $u_0 \rightarrow 0$ داریم $m(u_0) \rightarrow m(0)$ که آن را m_0 یعنی جرم نیوتونی یا "جرم سکون" ذره می‌گیریم. در این حد $w = V$ است، از این رو داریم

$$m(V) = \gamma m(0) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (1-13)$$

بدین ترتیب بستگی m به سرعت را پیدا کردیم. به طوری کلی، برای ذره‌ای که با سرعت اختیاری \mathbf{u} حرکت می‌کند، داریم

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = m\mathbf{u}$$



شکل ۱۳-۳

که در آن

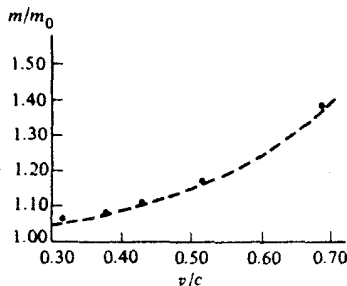
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (۲-۱۳)$$

مثال ۱۳-۱ وابستگی جرم الکترون به سرعت آن: در آغاز سده بیستم نظریه‌های متعددی وجود داشتند که تغییر جرم الکترون را با سرعت آن پیش‌بینی می‌کردند. این نظریه‌ها بر پایهٔ طرح‌های متفاوتی از ساختار الکترون استوار بودند. از مهم‌ترین این نظریه‌ها یکی متعلق به آبراهام بود که در سال ۱۹۰۲ تغییرات جرم را برای $v \ll c$ به صورت $m = m_0 [1 + \frac{1}{2}(v^2/c^2)]$ پیش‌بینی می‌کرد،^۱ و دیگری متعلق به لورنتس بود که در سال ۱۹۰۴ تغییرات جرم را به صورت $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2} \approx m_0 [1 + \frac{1}{2}(v^2/c^2)]$ به دست داد. نظریهٔ آبراهام که مفهوم رانش اتر و حرکت مطلق را حفظ می‌کرد هیچ‌گونه اثری از اتساع زمان را پیش‌بینی نکرد. نتیجهٔ لورنتس با اینکه از نظر شکل ظاهری با آنچه اینشتین در سال ۱۹۰۵ منتشر کرد یکسان است، با استفاده از انقباض طول لورنتس به دست آمده بود، و متضمن عمومیت نظریهٔ اینشتین نیست.

بررسی تجربی اثر سرعت بر جرم الکترون توسط کافمن در سال ۱۹۰۲ در گوتینگن بنیاد نهاده شد. داده‌های او نظریهٔ آبراهام را تأیید می‌کرد، و کافمن در مقالهٔ سال ۱۹۰۶ خود نتایج لورنتس-اینشتین را رد کرد. اما کارهای بعدی بستیلمایر در گوتینگن در سال ۱۹۰۷ و بوچر در برن به سال ۱۹۰۹ اشتباه کارهای کافمن را آشکار و فرمول لورنتس-اینشتین را تأیید کرد.

فیزیکدانها در مورد اینکه نیروی وارد بر یک الکترون متحرک در یک میدان الکتریکی \mathbf{E} و میدان مغناطیسی \mathbf{B} برابر است با $q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ با هم توافق داشتند (واحد‌ها در دستگاه بین‌المللی اند). در این فرمول q بار الکترون و \mathbf{v} سرعت آن است. بوچر این قانون نیرو را در دستگاه شکل ۱۳-۳ به کار برد. این دستگاه پس از تخلیه در یک میدان مغناطیسی \mathbf{B} عمود بر صفحهٔ کاغذ قرار داده شده است. منبع الکترون A چشمهٔ نقطه‌ای رادیواکتیو (معمولاً در نمکهای رادیم) است. الکترونهای گسیل شده ("پرتوهای بتا") دارای طیف انرژی گسترده‌ای است که تا ۱ MeV یا نزدیک به آن ادامه دارد. برای انتخاب یک

۱. فرمول کامل آبراهام چنین بود $\beta = v/c$ ، $m = m_0 \frac{1}{\beta^2} \left[\left(\frac{1+\beta^2}{2\beta^2} \right) \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) - 1 \right]$



شکل ۴-۱۳

سرعت خاص، الکترونها از یک "صافی سرعت" عبور می‌کنند که از یک میدان الکتریکی عرضی E (که از باتری V بین دو صفحه فلزی موازی C به وجود آمده است) همراه با میدان مغناطیسی B تشکیل شده است. در ضمن E ، B و v متقابلاً بر هم عمود هستند. نیروی عرضی وقتی که $qE = qvB$ باشد، برابر صفر است، به طوری که الکترونها با سرعت $v = E/B$ منحرف نمی‌شوند و می‌توانند از میان شکاف S عبور کنند.

در آن طرف S فقط میدان مغناطیسی اثر می‌کند. الکترونها با سرعت ثابت v حرکت می‌کنند و به وسیله نیروی مغناطیسی $qv \times B$ در یک مسیر دایره‌ای انحنای پیدا می‌کنند. شعاع این منحنی را به کمک رابطه $mv^2/R = qvB$ یا $R = mv/qB = (m/q)(E/B^2)$ به دست می‌آورند.

الکترونها سرانجام به صفحه عکاسی P برخورد می‌کنند و ردی از خود بر روی آن باقی می‌گذارند. با معکوس کردن E و B سوی انحراف هم معکوس می‌شود. R از اندازه‌گیری انحراف کامل d و مشخصات هندسی معلوم دستگاه پیدا می‌شود. E و B به کمک تکنیکهای استاندارد پیدا می‌شوند. با پیدا کردن R برای سرعتهای مختلف، وابستگی کمیت m/q به سرعت را می‌توان مورد مطالعه قرار داد. عقیده ما بر این است که بار الکتریکی با سرعت تغییر نمی‌کند (در غیر این صورت یک اتم با وجود تغییر انرژی الکترونهاي آن، به حالت خنثی باقی نمی‌ماند) به طوری که، تنها تغییر m است که در تغییر m/q مؤثر است.

شکل ۴-۱۳ داده‌های بوچرر را همراه با منحنی خط چین که با پیش‌بینی $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ اینشتین متناظر است نشان می‌دهد. انطباق آنها کاملاً چشمگیر است.

صافی سرعتی که دارای میدانهای عمود بر هم E و B است به وسیله بستیلیمیر و بوچرر مورد استفاده قرار گرفت. (بوچرر در طرح آن با تامسون کاشف الکترون همکاری داشت) از طرف دیگر، کافمن از میدانهای عرضی E و B موازی استفاده کرد و احتمالاً همین باعث شد که نتایج او نادرست درآید. در این آزمایش هیچ گزینشی برای سرعتها وجود نداشت، در عوض همه الکترونها در مسیری دوبعدی روی صفحه عکاسی پراکنده می‌شدند. الکترونها با سرعتهای مختلف، مسیرهای انحراف متفاوتی را

بین صفحات C دنبال می‌کردند، و نایک‌نواختی میدان E باعث بروز خطاهای اساسی می‌شد. ■
 در سالهای اخیر معادلات نسبیتی حرکت در طرح‌ریزی شتابدهنده‌های با انرژی زیاد الکترون و پروتون مورد استفاده قرار گرفته‌اند. برای شتابدهنده‌های پروتون، نسبت m/m_0 تا 200 می‌رسد، درحالی‌که برای الکترون‌ها این نسبت به $m/m_0 = 40000$ هم رسیده است. عملکرد موفقیت‌آمیز این ماشینها شکی در مورد درستی نتایج نسبیتی باقی نمی‌گذارند.

۱۳-۲ انرژی

با کلیت بخشیدن به مفهوم کلاسیک انرژی، می‌توانیم کمیت نسبیتی متناظری که پایسته هم باشد پیدا کنیم. از بحث فصل ۴ می‌توان انرژی جنبشی یک ذره یعنی K را چنین نوشت

$$K_b - K_a = \int_a^b \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot d\mathbf{r}$$

برای ذره کلاسیکی که با سرعت \mathbf{u} حرکت می‌کند، $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ است که در آن m مقدار ثابتی است. آنگاه داریم

$$\begin{aligned} K_b - K_a &= \int_a^b \frac{d}{dt}(m\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_a^b m \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{u} dt \\ &= \int_a^b m\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u} \end{aligned}$$

با استفاده از اتحاد $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u} = \frac{1}{2}d(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \frac{1}{2}d(u^2) = u du$ نتیجه می‌شود

$$K_b - K_a = \frac{1}{2}mu_b^2 - \frac{1}{2}mu_a^2$$

به‌کار بردن همین روش برای تکانه $\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{u} / \sqrt{1 - u^2/c^2}$ با استفاده از روابط نسبیتی امری

طبیعی به نظر می‌رسد

$$\begin{aligned} K_b - K_a &= \int_a^b \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} \left[\frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right] \cdot \mathbf{u} dt \\ &= \int_a^b \mathbf{u} \cdot d \left[\frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right] \end{aligned}$$

جمله زیر انتگرال برابر است با $d(\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p} \cdot d\mathbf{u}$ بنابراین

$$\begin{aligned} K_b - K_a &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}) \Big|_a^b - \int_a^b \mathbf{p} \cdot d\mathbf{u} \\ &= \frac{m_0 u^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \Big|_a^b - \int_a^b \frac{m_0 u du}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{aligned}$$

که در اینجا هم از اتحاد پیشین $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u} = u du$ استفاده کرده ایم، این یک انتگرال مقدماتی است که نتیجه آن چنین است

$$K_b - K_a = \frac{m_0 u^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \Big|_a^b + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \Big|_a^b$$

نقطه b را به عنوان نقطه اختیاری انتخاب می‌کنیم و با فرض اینکه ذره در نقطه a در حالت سکون باشد، داریم $u_a = 0$

$$\begin{aligned} K &= \frac{m_0 u^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} - m_0 c^2 \\ &= \frac{m_0 [u^2 + c^2(1 - u^2/c^2)]}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - m_0 c^2 \\ &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - m_0 c^2 \end{aligned}$$

یا

$$K = mc^2 - m_0 c^2 \quad (3-13)$$

که در آن $m = m_0 / \sqrt{1 - u^2/c^2}$ است.

این رابطه انرژی جنبشی شباهت اندکی با همتهای کلاسیک خود دارد. اما در حد $u \ll c$ نتیجه نسبیته باید به رابطه کلاسیک $K = \frac{1}{2} m u^2$ ختم شود. در واقع هم همینطور است، همان‌گونه که با به‌کارگیری تقریب $1/\sqrt{1 - u^2/c^2} \approx 1 + \frac{1}{2} u^2/c^2$ خواهیم دید، داریم

$$\begin{aligned} K &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - m_0 c^2 \\ &\approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} m_0 u^2 \end{aligned}$$

انرژی جنبشی از کار انجام شده روی ذره‌ای که از حالت سکون به سرعت u برسد حاصل می‌شود. فرض کنید معادلهٔ ۱۳-۳ را دوباره چنین بنویسیم

$$mc^2 = K + m_0 c^2 \quad (4-13)$$

$$= m_0 c^2 + \text{کار انجام شده روی ذره}$$

ایشترین تفسیر متهورانهٔ این نتیجه را چنین پیشنهاد کرد: mc^2 انرژی کل ذره است. جملهٔ اول از کار خارجی سرچشمه می‌گیرد، جملهٔ دوم یعنی $m_0 c^2$ نشانگر انرژی در حال "سکون" ذره است که از جرم آن ناشی می‌شود، به‌طور خلاصه داریم

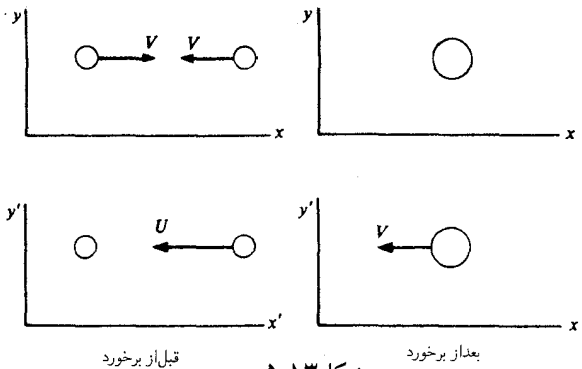
$$E = mc^2 \quad (5-13)$$

درک اینکه تعمیم اینشتین در مورد انرژی مکانیکی از قانون پایستگی کلاسیک هم فراتر می‌رود امر مهمی است. بنابراین اگر به جسمی انرژی ΔE را بیفزاییم، جرم جسم بدون توجه به شکل انرژی به اندازهٔ $\Delta m = \Delta E/c^2$ تغییر خواهد کرد. ΔE می‌تواند بیانگر کار مکانیکی، انرژی گرمایی، جذب نور، یا هر شکل دیگری از انرژی باشد. در نسبیت، تمایز کلاسیک بین انرژی مکانیکی و دیگر شکل‌های آن از بین می‌رود. برخلاف فیزیک کلاسیک که در آن هر شکل از انرژی باید در حالت خاصی بررسی شود نسبیت همهٔ اشکال انرژی را به‌طور یکسانی بررسی می‌کند. پایستگی انرژی کل $E = mc^2$ پیامدی از ساختار نسبیت است. در فصل آینده نشان خواهیم داد که قوانین پایستگی انرژی و تکانه جنبه‌های متفاوت یک قانون کلی‌تر پایستگی‌اند.

مثال زیر مفهوم نسبیتی انرژی و برقراری قوانین پایستگی را در چارچوب‌های مختلف لخت نشان می‌دهد.

مثال ۱۳-۲ انرژی و تکانهٔ نسبیتی برخورد ناگشسان: فرض کنید دو ذرهٔ یکسان با سرعت‌های برابر در جهت مخالف با هم برخورد می‌کنند و به یکدیگر می‌چسبند. از دید کلاسیک، انرژی جنبشی اولیه برابر است با $MV^2 = (1/2)MV^2$ که در آن M جرم نیوتونی است. به موجب پایستگی تکانه، جرم $2M$ در حالت سکون است و انرژی جنبشی آن برابر صفر می‌شود. به زبان فصل ۴، می‌گوییم انرژی مکانیکی MV^2 به صورت گرما درآمده است. همانطوری که خواهیم دید این تمایز بین اشکال مختلف انرژی در نسبیت اتفاق نمی‌افتد.

اینک این برخورد را از نظر نسبیتی و از دیدگاه چارچوب اصلی x, y و چارچوب x', y' که با یکی از ذره‌ها حرکت می‌کند، بررسی می‌کنیم. به موجب تبدیل نسبیتی سرعت‌ها، معادلهٔ ۱۲-۲ در جهتی که



شکل ۵-۱۳

در شکل ۵-۱۳ نشان داده شده چنین می شود

$$U = \frac{2V}{1 + V^2/c^2} \quad (1)$$

فرض کنید جرم در حال سکون هر ذره قبل از برخورد M_{0i} و بعد از برخورد M_{0f} باشد. بدیهی است که تکانه در چارچوب x, y پایسته است. انرژی کل قبل از برخورد برابر $2M_{0i}c^2/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ و بعد از برخورد برابر $2M_{0f}c^2$ است. هیچ کار خارجی روی ذرات انجام نشده است، و انرژی کل بدون تغییر می ماند. بنابراین

$$\frac{2M_{0i}c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = 2M_{0f}c^2 \quad \text{یا}$$

$$M_{0f} = \frac{M_{0i}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (2)$$

جرم در حال سکون نهایی از جرم در حال سکون اولیه بزرگتر است زیرا ذرات گرمترند. برای بررسی این موضوع، از تقریب سرعتهای پایین استفاده می کنیم

$$M_{0f} \approx M_{0i} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \right)$$

افزایش انرژی در حال سکون دو ذره چنین است: $2(\frac{1}{2}M_{0i}V^2) \approx 2(M_{0f} - M_{0i})c^2$ ، که متناظر است با انرژی جنبشی کلاسیک از دست رفته. اما در اینجا انرژی جنبشی "از دست رفته" نیست بلکه به صورت ازدیاد جرم ظاهر شده است.

به موجب اصل موضوع هم ارز بودن همه چارچوبهای لخت، قوانین پایستگی باید در چارچوب x', y' هم برقرار باشند. اگر قوانین پایستگی مفروض این خاصیت لازم را دارا باشند، در چارچوب x', y'

γ' به موجب پایستگی تکانه داریم

$$\frac{M_{\cdot i} U}{\sqrt{1 - U^2/c^2}} = \frac{2M_{\cdot f} V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (3)$$

و نیز به موجب پایستگی انرژی داریم

$$M_{\cdot i} c^2 + \frac{M_{\cdot i} c^2}{\sqrt{1 - U^2/c^2}} = \frac{2M_{\cdot f} c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (4)$$

اکنون سؤال این است که آیا معادلات ۳ و ۴ با نتایج پیشین یعنی معادلات ۱ و ۲ سازگاری دارند یا نه؟ به منظور بررسی معادله ۳ با استفاده از معادله ۱ چنین می نویسیم

$$\begin{aligned} 1 - \frac{U^2}{c^2} &= 1 - \frac{4V^2/c^2}{(1 + V^2/c^2)^2} \\ &= \frac{(1 - V^2/c^2)^2}{(1 + V^2/c^2)^2} \end{aligned} \quad (5)$$

از معادله ۱ و ۵ داریم

$$\begin{aligned} \frac{U}{\sqrt{1 - U^2/c^2}} &= \frac{2V}{(1 + V^2/c^2)(1 - V^2/c^2)} \\ &= \frac{2V}{1 - V^2/c^2} \end{aligned}$$

و طرف چپ معادله ۳ به صورت زیر درمی آید

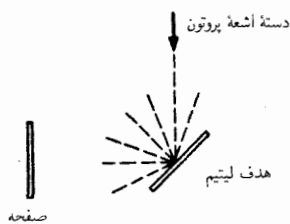
$$\frac{M_{\cdot i} U}{\sqrt{1 - U^2/c^2}} = \frac{2M_{\cdot f} V}{1 - V^2/c^2} \quad (6)$$

با استفاده از معادله ۲، $M_{\cdot i} = M_{\cdot f} \sqrt{1 - V^2/c^2}$ ، و معادله ۶ خواهیم داشت

$$\frac{M_{\cdot f} U}{\sqrt{1 - U^2/c^2}} = \frac{2M_{\cdot f} V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

که همان معادله ۳ است. به همین ترتیب، نشان دادن اینکه معادله ۴ هم با نتایج پیشین سازگار است چندان مشکل نیست.

از معادله ۶ متوجه می شویم که اگر جرم سکون را در برخورد بدون تغییر فرض کرده بودیم یعنی $M_{\cdot i} = M_{\cdot f}$ بود، در آن صورت قانون پایستگی برای تکانه (یا برای انرژی) در چارچوب لخت دوم صحیح نبود. توصیف نسبیتی انرژی در تداوم بخشیدن به برقراری قوانین پایستگی در کلیه چارچوبهای لخت نقش عمده ای دارد.

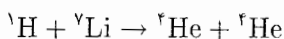


شکل ۱۳-۶

مثال ۱۳-۳ هم‌ارزی جرم و انرژی: در سال ۱۹۳۲ کوکرافت و والتون دو فیزیکدان جوان بریتانیایی، اولین شتابدهنده پروتوئهای با انرژی زیاد را به کار انداختند و موفق به ایجاد واپاشی هسته‌ای شدند. آزمایش آنها یکی از اولین تأییدیه‌های رابطه نسبیتی جرم-انرژی را فراهم ساخت.

به طور خلاصه، شتابدهنده آنها از یک منبع تغذیه ۶۰۰ کیلوولت و یک منبع پروتون (هسته‌های هیدروژن) تشکیل می‌شد. در این منبع تغذیه به ترتیب ماهرانه‌ای از خازنها و یکسوکندنه‌ها استفاده شده بود تا ولتاژ ۱۵۰ کیلوولتی داده شده را چهار برابر کنند. پروتونها از تخلیه الکتریکی هیدروژن تأمین می‌شدند و به کمک ولتاژ بالای به کار برده شده در خلأ شتاب می‌گرفتند.

کوکرافت و والتون اثر پروتونها را بر هدف ${}^7\text{Li}$ (یا لیتیم با جرم اتمی ۷) مطابق شکل ۱۳-۶ مورد مطالعه قرار دادند. یک صفحه فلوتورسان سولفیدروی که در آن نزدیکی واقع شده گاهگاهی درخشش یا جرقه‌های نورانی از خود گسیل می‌دارد. آنها به کمک آزمایشهای مختلف دریافتند که این درخششها مربوط به ذرات آلفا یا هسته‌های هلیوم ${}^4\text{He}$ هستند. تعبیر آنها از این مسئله چنین بوده که ${}^7\text{Li}$ ابتدا یک پروتون را گرمی اندازد و سپس هسته حاصل به جرم ۸ بلافاصله به دو ذره آلفا فرو می‌پاشد. این واکنش را می‌توان چنین نوشت



معادله جرم و انرژی برای واکنش فوق چنین است

$$K({}^1\text{H}) + [M({}^1\text{H}) + M({}^7\text{Li})]c^2 = 2K({}^4\text{He}) + 2M({}^4\text{He})c^2$$

که در آن $K({}^1\text{H})$ انرژی جنبشی پروتون فرودی، $K({}^4\text{He})$ انرژی جنبشی هر یک از ذرات آلفای گسیل شده و $M({}^1\text{H})$ جرم در حال سکون پروتون است. (از تکانه اولیه پروتون صرف‌نظر می‌شود، و دو ذره آلفا در جهت مخالف هم گسیل می‌شوند که به موجب پایستگی تکانه دارای انرژیهای برابرند.)

معادله جرم-انرژی را می‌توانیم چنین بازنویسی کنیم

$$K = \Delta Mc^2$$

که در آن $K = 2K(^4\text{He}) - K(^1\text{H})$ است، و ΔM برابر است با جرم سکون اولیه منهای جرم سکون نهایی.

انرژی ذرات آلفا با اندازه‌گیری برد آنها به دست می‌آید. کوکرافت و والتون مقدار K را برابر 17.2 MeV به دست آوردند ($10^{12} \text{ J} = 10^6 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-13} \text{ J}$).

جرمهای نسبی هسته‌ها از اندازه‌گیریهای طیف‌سنج جرمی معلوم شده‌اند. برحسب واحد جرم اتمی (amu) که تعریف آن از فرض $M(^{16}\text{O}) = 16$ گرفته می‌شود، مقادیری که کوکرافت و والتون به دست آوردند عبارت بودند از

$$M(^1\text{H}) = 1.0072$$

$$M(^7\text{Li}) = 7.0104 \pm 0.0030$$

$$M(^4\text{He}) = 4.0011$$

که با استفاده از آنها خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \Delta M &= (1.0072 + 7.0104) - 2(4.0011) \\ &= (0.0154 \pm 0.0030) \text{ amu} \end{aligned}$$

انرژی سکون یک واحد جرم اتمی (1 amu) برابر است با 931 MeV و بنابراین

$$\Delta M c^2 = (14.3 \pm 2.7) \text{ MeV}$$

اختلاف بین K و $\Delta M c^2$ برابر است با $2.9 \text{ MeV} = (14.3 - 17.2) \text{ MeV}$ ، که فقط اندکی، از عدم قطعیت تجربی 2.7 MeV بزرگتر است. اما عدم قطعیت تجربی همواره نشانگر یک تخمین است نه یک حد دقیق، و این نتیجه را می‌توان با رابطه زیر سازگار دانست:

$$K = \Delta M c^2$$

بدیهی است که برای مطالعه واکنشهای هسته‌ای، جرمها باید با دقت زیادی معلوم باشند. تکنیکهای جدید طیف‌سنجی به دقتی بهتر از 10^{-5} amu دست یافته‌اند، و هم‌ارزی جرم-انرژی به قدر کافی تأیید شده است. طبق جدول جدید جرمها، کاهش جرم سکون که توسط کوکرافت و والتون مورد مطالعه قرار

$$\Delta M c^2 = (17.3468 \pm 0.0012) \text{ MeV}$$

معمولاً بهتر است انرژی کل یک ذره آزاد برحسب تکانه آن نشان داده شود. از نظر کلاسیک این

رابطه چنین است

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

برای پیدا کردن عبارت نسبیتی هم‌ارز باید تکانه نسبیتی

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} = \frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = m_0 \mathbf{u} \gamma \quad (۶-۱۳)$$

را با انرژی زیر ترکیب کنیم

$$E = mc^2 = m_0 c^2 \gamma \quad (۷-۱۳)$$

با مجذور کردن معادله ۶-۱۳ نتیجه می‌شود

$$p^2 = \frac{m_0^2 u^2}{1 - u^2/c^2}$$

که آن را بر حسب γ چنین می‌نویسیم

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{p^2}{p^2 + m_0^2 c^2}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}}$$

با قرار دادن این مقدار در معادله ۷-۱۳ داریم

$$E = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}}$$

از نظر جبری مربع این معادله از جهاتی ساده تر است و دارای شکلی است که غالباً مورد استفاده قرار می‌گیرد

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2 \quad (۸-۱۳)$$

رابطه نسبیتی تکانه و انرژی را با استمداد از قوانین پایستگی به دست می‌آوریم. اما، هیچ اقدامی در مورد نقش نیرو در نسبیت نکرده‌ایم. با بررسی شکل معادلات حرکت در دستگاههای مختصات مختلف این امر امکانپذیر می‌شود. مسئله نیرو را فعلاً به تعویق می‌اندازیم، و بررسی دقیق آن را به فصل بعد موکول می‌کنیم.

برای سهولت، در اینجا خلاصه‌ای از فرمولهای مهم دینامیکی را که تا به حال پیدا کرده‌ایم می‌نویسیم

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} = m_0 \mathbf{u} \gamma \quad (۹-۱۳)$$

$$K = mc^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 (\gamma - 1) \quad (۱۰-۱۳)$$

$$E = mc^2 = m_0 c^2 \gamma \quad (۱۱-۱۳)$$

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2 \quad (۱۲-۱۳)$$

۱۳-۳ ذرات بی جرم

یکی از پیامدهای شگفت‌انگیز رابطه نسبیتی انرژی-تکانه امکان وجود ذرات "بی جرم" است یعنی ذراتی که تکانه و انرژی دارند ولی جرم سکون ندارند. اگر در رابطه زیر فرض کنیم $m_0 = 0$ است

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$$

چنین نتیجه می‌شود

$$E = pc \quad (۱۳-۱۳)$$

ریشه مثبت را با این فرض انتخاب می‌کنیم که ذراتی که انرژی آنها با افزایش تکانه کاهش می‌یابد ناپایدار خواهند بود.

برای اینکه تکانه غیر صفر داشته باشیم در حد $m_0 \rightarrow 0$ باید برای عبارت زیر یک مقدار معین داشته باشیم

$$p = m_0 u / \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

این تنها زمانی امکان دارد که در حد $m_0 \rightarrow 0$ داشته باشیم $c \rightarrow u$ ؛ یعنی ذرات بی جرم باید با سرعت نور حرکت کنند.

مهمترین ذره بی جرمی که در فیزیک شناخته شده، فوتون است که همان ذره نور محسوب می‌شود. فوتونها به طور الکترومغناطیسی با الکترونها و دیگر ذرات باردار برهم‌کنش می‌کنند، و به سادگی با فیلمهای عکاسی، لامپ الکترونی، یا چشم قابل آشکار شدن هستند. نوترینو هم که وابسته به نیروهای ضعیف در واپاشی بتاست بی جرم فرض می‌شود، اما برهم‌کنش آن با ماده به قدری ضعیف است که آشکارسازی مستقیم آن بی‌اندازه مشکل است. (خورشید منبع عظیمی از نوترینو است، ولی اکثر نوترینوهای خورشیدی که به زمین می‌رسند بدون برهم‌کنش از آن عبور می‌کنند.) آزمایش نشان می‌دهد که جرم سکون نوترینو بیشتر از $1/2000$ جرم سکون الکترون نیست، و به خوبی می‌تواند برابر صفر گرفته شود. دلایل نظری زیادی وجود دارد که حاکی از وجود گراویتون یا ذره بدون جرم گرانشی است. برهم‌کنش گراویتون با ماده آن‌چنان ضعیف است که این ذره تاکنون کشف نشده است.

مفهوم فوتون را به اینشتین مدیونیم، زیرا اینشتین آن را در مقاله اولیه خود به نام اثر فوتوالکتریک که

چند ماه قبل از کارهای نسبیت او چاپ شد، معرفی کرده بود.^۱ به طور خلاصه، اینشتین مطرح کرد که انرژی نوری تنها در اندازه‌های مجزا یا کوانتومهایی به مقدار $h\nu$ می‌تواند به ماده منتقل شود، که h ثابت پلانک و برابر است با $6.63 \times 10^{-34} \text{ J/Hz}$ و ν بسامد موج نوری برحسب هرتز است. این پیشنهاد اینشتین به موازات طرح مسائلی در نظریه الکترومغناطیس و بررسیهای فرضیه کوانتومی پلانک، یعنی نظریه‌ای که در سال ۱۹۰۰ برای رفع مشکلات مکانیک آماری کلاسیک پلانک بنا نهاده شد، مطرح شد. اگرچه در اینجا نمی‌توان زمینه‌های لازم در تأیید نظریه وجود فوتون را گسترش داد، اما شواهد تجربی زیر می‌تواند توجیهی برای این مسئله تلقی شود.

مثال ۱۳-۴ اثر فوتوالکتریک: در سال ۱۸۸۷/۱۲۶۶، هرتز کشف کرد فلزات بر اثر تابش نور فرابنفش می‌توانند الکترون بیرون بدهند. این فرایند یعنی اثر فوتوالکتریک، نشانگر تبدیل مستقیم نور به انرژی مکانیکی (در اینجا انرژی جنبشی الکترون) است. اینشتین پیش‌بینی کرد انرژی که هر الکترون از باریکه نور با بسامد ν جذب می‌کند، دقیقاً برابر است با $h\nu$. اگر الکترون برای جدا شدن از فلز مقدار معینی انرژی یعنی W را به مصرف برساند، آنگاه انرژی جنبشی الکترون گسیل شده چنین است

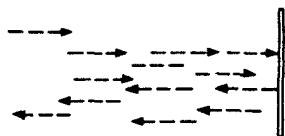
$$K = h\nu - W$$

W را تابع کار فلز می‌نامند. تابع کار در حدود چند الکترون ولت است، ولی متأسفانه تابع کار به حالت شیمیایی سطح فلز بستگی دارد که این امر بررسی اثر فوتوالکتریک را دشوار می‌کند. میلیکان در سال ۱۲۹۵/۱۹۱۶ با کار خود روی سطح فلزاتی که در یک دستگاه با خلأ زیاد آماده شده بود بر این مشکل چیره شد. انرژی جنبشی با اندازه‌گیری جریان فوتوالکتریک در یک صفحه فلزی مستقر در نزدیکی سطح مورد نظر و برقراری یک اختلاف پتانسیل ایستاننده بین آن دو صفحه تعیین می‌شود. اگر این اختلاف پتانسیل الکتریکی $-V$ باشد، آنگاه انرژی از دست رفته الکترونها در حرکت به طرف صفحه برابر است با $(-V)(-e)$ به‌ازای پتانسیل ایستاننده داریم $V - V_0$ و در نتیجه

$$eV_0 = h\nu - W$$

میلیکان برای چندین فلز قلیایی و لئانژ را برحسب تابعی از بسامد مورد مشاهده قرار داد. میلیکان طبق قانون اینشتین پیدا کرد که: V_0 تابعی است خطی برحسب ν با ضریب زاویه h/e . ضمناً V_0

۱. در خلال یک سال اینشتین چهار مقاله نوشت که هر یک از آنها به نوبه خود بهترین نمونه محسوب می‌شود. این مقالات درباره اثر فوتوالکتریک، نسبیت، حرکت براونی، و نظریه کوانتومی ظرفیت گرمایی جامدات نوشته شدند. او به خاطر کارهایش در اثر فوتوالکتریک در سال ۱۹۲۱/۱۳۰۰ موفق به دریافت جایزه نوبل فیزیک شد و نه به خاطر نسبیت. کمیته نوبل به علت مضامین فلسفی و سیاسی نسبیت از قبول آن امتناع کرد. این طرز برخورد یک رویداد نادر و تأسف بار در تاریخ جوایز نوبل است.



شکل ۷-۱۳

مستقل از شدت نور است.

اگر انرژی نور طبق تصویر کلاسیک توسط الکترون جذب می‌شد، توزیع انرژی الکترونها بسته به شدت نور می‌بایست گسترش می‌یافت که در تضاد کامل با نتایج میلیکان است. این حقیقت که نور می‌تواند با خودش تداخل کند، مانند آنچه در تداخل سنج مایکلسون اتفاق می‌افتد، دلیل بارزی بر خواص موجی نور است. با این حال، اثر فوتوالکتریک نشان می‌دهد که نور خواص ذره‌ای نیز دارد. رابطه انرژی اینشتین $E = h\nu$ با ربط دادن انرژی ذره به بسامد موج ارتباط بین توصیفهای ظاهراً متضاد نور را فراهم کرد.

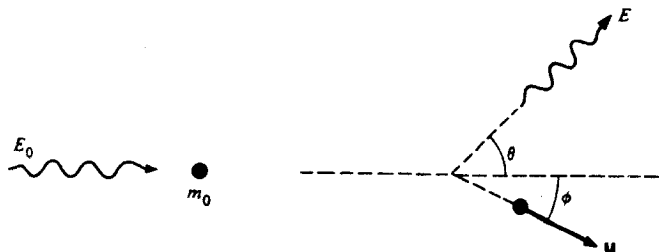
مثال ۵-۱۳ فشار تابش نور: یکی از پیامدهای نظریه الکترومغناطیس ماکسول این است که موج نور حامل تکانه است وقتی که نور بازتابیده یا جذب می‌شود، تکانه آن به سطح مورد نظر منتقل خواهد شد. مطابق آنچه از مطالعه تکانه در فصل ۳ می‌دانیم، نتیجه این عمل ایجاد فشاری است که بر آن سطح وارد می‌شود محاسبه فشار تابش با استفاده از نظریه موجی نور پیچیده است ولی با تصویر فوتونی خیلی ساده است.

دسته‌ای از فوتونها مطابق شکل ۷-۱۳ را در نظر بگیرید که به آینه کاملاً بازتابنده‌ای به صورت عمودی فرود می‌آیند. تکانه اولیه هر فوتون برابر $p = E/c$ است، و تغییر تکانه کل در بازتابش برابر $2p = 2E/c$ است. اگر در واحد سطح n فوتون فرودی در ثانیه داشته باشیم، تغییر تکانه کل در ثانیه برابر $2nE/c$ است، و این مقدار برابر است با نیروی وارد بر واحد سطح آینه از طرف نور. بنابراین فشار تابش P چنین است

$$P = \frac{2nE}{c} = \frac{2I}{c}$$

که در آن $I = nE$ شدت نور یا توان در واحد سطح است. به همین ترتیب، فشار تابش وارد بر یک سطح کاملاً جذب‌کننده برابر است با I/c .

شدت متوسط نور خورشید فرودی بر سطح زمین را ثابت خورشیدی می‌نامند که برابر است با $1000 \text{ W/m}^2 \approx I$. بنابراین فشار تابش مربوط به نور خورشید وارد بر یک آینه برابر است با $P = 2I/c = 7 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2$ که فشار خیلی کوچکی است (فشار جو 10^5 N/m^2 است). اما، در مقیاس کیهانی، فشار تابش بزرگ است و تاحدی از رمبیدگی ستارگان بر اثر نیروی گرانشی آنها



شکل ۱۳-۸

جلوگیری می‌کند.

از آنجا که فوتون ذره‌ای است کاملاً نسبیستی، با فیزیک نیوتونی نمی‌توان از خواص آن اطلاع زیادی به دست آورد. برای مثال، برخلاف ذرات کلاسیک فوتونها می‌توانند آفریده و نابود شوند. مانند جذب نور به وسیله ماده که متناظر است با نابودی فوتونها، درحالی‌که فرایند تابش متناظر است با آفرینش فوتونها. باینحال، آنطور که مثالهای زیر نشان می‌دهند، قوانین آشنای پایستگی تکانه و انرژی آن‌گونه که در نظریه نسبیت تعمیم یافته‌اند، به اندازه کافی فراگیر هستند که با استفاده از آنها بتوانیم بدون اطلاع از جزئیات برهم‌کنش، درباره فرایندهایی که فوتون در آنها شرکت دارد نتیجه‌گیری کنیم.

مثال ۱۳-۶ اثر کامپتون: نظریه نسبیت خاص تا دهه ۱۹۲۰ به صورت همه‌جانبه مورد قبول واقع نشده بود. علت این امر تا حدودی به خاطر طبیعت عمیق مفاهیم آن و همچنین به علت کم بودن شواهد آزمایشی بود. در سال ۱۹۲۲ کامپتون آزمایش دقیقی روی پراکندگی پرتو x به وسیله ماده انجام داد که تردید در اعتبار دینامیک نسبیتی را کمتر کرد.

یک فوتون نور مرئی انرژی در گستره ۱ تا ۲ الکترون ولت دارد، اما فوتونهای با انرژی خیلی زیاد را می‌توان از دستگاههای پرتو x، منابع پرتوزا، یا شتابدهنده‌های ذرات به دست آورد. فوتونهای پرتو x انرژی در گستره ۱۰ تا ۱۰۰ کیلو الکترون ولت دارند، و طول موجهای آنها را می‌توان با تکنیک پراش بلور اندازه‌گیری کرد.

وقتی که یک فوتون با یک الکترون آزاد برخورد می‌کند، قوانین پایستگی ایجاب می‌کند که فوتون قسمتی از انرژی خود را از دست بدهد. بنابراین فوتون خروجی طول موجی بلندتر از فوتون اولیه دارد، و این تغییر طول موج که برای اولین بار توسط کامپتون مشاهده شد، به اثر کامپتون معروف است.

فرض می‌کنیم فوتون انرژی اولیه E_e و تکانه E_e/c داشته باشد، و الکترون را در ابتدا در حال سکون در نظر می‌گیریم (شکل ۱۳-۸). بعد از برخورد، الکترون با سرعت \mathbf{u} در زاویه ϕ و فوتون با انرژی E در زاویه θ پراکنده می‌شوند. اگر $E_e = m_e c^2 / \sqrt{1 - u^2/c^2}$ انرژی نهایی الکترون و $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ تکانه آن باشد، آنگاه به موجب پایستگی انرژی داریم

$$E_0 + m_0 c^2 = E + E_e \quad (۱)$$

و از بایستگی تکانه داریم

$$\frac{E_0}{c} = \frac{E}{c} \cos \theta + p \cos \phi \quad (۲)$$

$$0 = \frac{E}{c} \sin \theta - p \sin \phi \quad (۳)$$

هدف ما حذف کمیت‌های مربوط به الکترون و پیدا کردن E به صورت تابعی از θ است، زیرا کامپتون تنها فوتون خروجی را در این آزمایشها آشکارسازی کرده بود. معادلات ۲ و ۳ را می‌توان چنین نوشت

$$(E_0 - E \cos \theta)^2 = (pc)^2 \cos^2 \phi$$

$$(E \sin \theta)^2 = (pc)^2 \sin^2 \phi$$

پس از جمع کردن داریم

$$E_0^2 - 2E_0 E \cos \theta + E^2 = (pc)^2 \quad (۴)$$

$$= E_e^2 - (m_0 c^2)^2$$

در اینجا از معادله ۱۳-۱۲ رابطه انرژی-تکانه استفاده کرده‌ایم. استفاده از معادله ۱ برای حذف E_e ، معادله ۴ را به صورت زیر درمی‌آورد

$$E_0^2 - 2E_0 E \cos \theta + E^2 = (E_0 + m_0 c^2 - E)^2 - (m_0 c^2)^2$$

که در آن هم به شکل زیر درمی‌آید

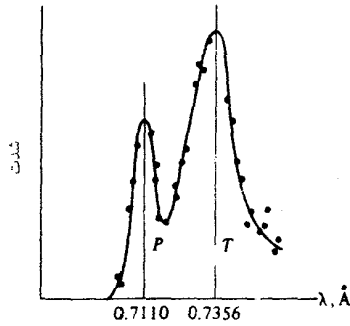
$$E = \frac{E_0}{1 + (E_0/m_0 c^2)(1 - \cos \theta)} \quad (۵)$$

توجه کنید که E همواره بزرگتر از صفر است، و این بدان معنی است که الکترون آزاد نمی‌تواند فوتون را جذب کند.

کامپتون در آزمایش خود به جای انرژی، طول موجها را اندازه‌گیری کرد. طبق شرط بسامد اینشتین داریم:

$$E = hc/\lambda \quad \text{و} \quad E_0 = h\nu_0 = hc/\lambda_0$$

که در آنها λ_0 و λ به ترتیب طول موجهای ورودی و خروجی فوتون است. معادله ۵ برحسب طول موج



شکل ۱۳-۹

به شکل ساده زیر درمی آید

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta)$$

کمیت $h/m_0 c$ معروف به طول موج کامپتون مربوط به الکترون است و دارای مقدار زیر است

$$\begin{aligned} \frac{h}{m_0 c} &= 2.426 \times 10^{-12} \text{ m} \\ &= 0.2426 \text{ \AA} \end{aligned}$$

$$1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m} \text{ است.}$$

تغییر طول موج در یک زاویه معین مستقل از انرژی فوتون است

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta)$$

شکل فوق یکی از نتایج کامپتون را برای $\lambda_0 = 0.711 \text{ \AA}$ و $\theta = 90^\circ$ نشان می دهد، قله P مربوط به فوتونهای اولیه و قله T مربوط به فوتونهای پراکنده شده کامپتون از یک قطعه گرافیت است. تغییر طول موج اندازه گیری شده تقریباً برابر 0.246 \AA رآنگستروم است، و مقدار محاسبه شده آن برابر است با 0.2426 \AA رآنگستروم. این اختلاف از خطای تخمینی ناشی از قدرت تفکیک محدود طیف سنج و دیگر محدودیتهای تجربی کمتر است.

در تحلیل خود فرض کردیم الکترون در حال سکون و به حالت آزاد است. برای فوتونهای با انرژی به اندازه کافی زیاد و الکترونهایی که در پوسته های خارجی اتمهای سبک قرار دارند این یک تقریب خوب است. اگر حرکت الکترونها را به حساب بیاوریم، قله کامپتون بهتر می شود. (پهن شدن قله در T با مقایسه آن در P این اثر را نشان می دهد.)

اگر انرژی بستگی الکترون با انرژی فوتون قابل مقایسه باشد، تکانه و انرژی تماماً می‌توانند به اتم انتقال یابند، و فوتون می‌تواند به صورت کامل جذب شود.

مثال ۱۳-۷ تولید زوج: قبلاً دیدیم که فوتون به دو طریق می‌تواند در ماده انرژی از دست بدهد، جذب فوتوالکتریکی و پراکندگی کامپتون. چنانچه انرژی فوتون به اندازه کافی زیاد باشد، فوتون همچنین می‌تواند به وسیله ساز و کار تولید زوج در ماده انرژی از دست بدهد. جرم سکون الکترون برابر است با $0.511 \text{ MeV} = m_0 c^2$ ، آیا فوتونی با این انرژی می‌تواند یک الکترون بیافریند؟ جواب منفی است، زیرا این موضوع آفرینش یک بارالکتریکی منفرد را ایجاد می‌کند. تا آنجا که ما می‌دانیم، بارالکتریکی در همه فرایندهای فیزیکی پایسته است. اما، اگر مقادیر برابر بارهای مثبت و منفی آفریده شوند، بار کل صفر باقی می‌ماند و بنابراین بار پایسته است. بدین ترتیب امکان آفرینش یک زوج الکترون-پوزیترون، دو ذره با جرمهای یکسان و بارهای مخالف وجود دارد.

فوتونی منفرد مطابق شکل ۱۳-۱۰ به انرژی $2m_0 c^2$ یا بیشتر دارای انرژی کافی برای تشکیل یک زوج (e^-, e^+) است، اما این فرایند نمی‌تواند در فضای تهی اتفاق افتد زیرا در این عمل پایستگی تکانه برقرار نخواهد شد. اگر تصور کنیم که این فرایند اتفاق می‌افتد، از پایستگی انرژی چنین نتیجه می‌شود

$$h\nu = m_+ c^2 + m_- c^2 = (\gamma_+ + \gamma_-) m_0 c^2$$

یا

$$\frac{h\nu}{c} = (\gamma_+ + \gamma_-) m_0 c$$

درحالی‌که به موجب پایستگی تکانه داریم

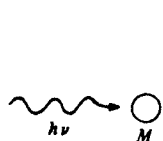
$$h\nu/c = |\gamma_+ v_+ + \gamma_- v_-| m_0$$

معادلات به طور همزمان نمی‌توانند صادق باشند، زیرا

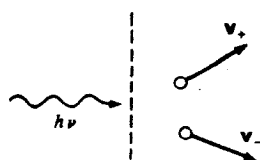
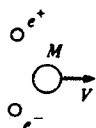
$$(\gamma_+ + \gamma_-)c > |\gamma_+ v_+ + \gamma_- v_-|$$

تولید زوج زمانی امکانپذیر است که ذره سومی برای انتقال تکانه اضافی به بیرون در دسترس باشد. برای مثال، فرض کنید فوتونی مطابق شکل ۱۳-۱۱ به هسته‌ای به جرم سکون M برخورد می‌کند و یک زوج e^-, e^+ در حال سکون می‌آفریند. داریم

$$h\nu + Mc^2 = 2m_0 c^2 + Mc^2 \gamma$$



شکل ۱۱-۱۳



شکل ۱۰-۱۳

چون جرم هسته‌ها خیلی بیشتر از الکترون‌هاست، فرض می‌کنیم $h\nu \ll Mc^2$ باشد. (در مورد هیدروژن یعنی سبکترین اتم، این مطلب بدین معنی است که $h\nu \ll 940 \text{ MeV}$ است). در این حالت اتم به سرعت‌های نسبیتی نخواهد رسید و ما می‌توانیم از تقریب کلاسیک استفاده کنیم

$$h\nu = 2m_e c^2 + Mc^2(\gamma - 1)$$

$$\approx 2m_e c^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

با این تقریب، از پایستگی تکانه چنین نتیجه می‌شود

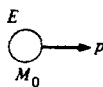
$$\frac{h\nu}{c} = MV$$

با جایگذاری این عبارت در رابطه انرژی نتیجه می‌شود

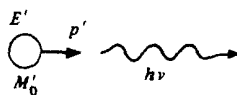
$$h\nu = 2m_e c^2 + \frac{1}{2} \frac{(h\nu)^2}{Mc^2} \approx 2m_e c^2$$

زیرا قبلاً فرض کرده‌ایم که $h\nu \ll Mc^2$ است. بنابراین آستانه تولید زوج در ماده برابر است با $2m_e c^2 = 1.02 \text{ MeV}$. هسته در اینجا نقش غیر فعالی دارد، ولی هسته با به وجود آوردن پایستگی تکانه، وقوع فرایندی را که در غیر این صورت ممنوع بود ممکن می‌سازد.

مثال ۱۳-۸ تصویر فوتونی اثر دوپلر: در فصل ۱۲ اثر دوپلر را از دیدگاه نظریه موجی مورد بحث قرار دادیم، ولی با استفاده از تصویر فوتونی نیز می‌توانیم آن را بررسی کنیم. ابتدا اتمی به جرم سکون M_0 را که در حالت پایدار قرار دارد مورد بررسی قرار می‌دهیم (شکل ۱۳-۱۲). اگر اتم فوتونی با انرژی $h\nu$ گسیل کند، جرم سکون جدید آن به وسیله رابطه $M'c^2 = M_0 c^2 - h\nu$ معین می‌شود.



شکل ۱۲-۱۳



شکل ۱۳-۱۳

اکنون فرض کنید که اتم قبل از گسیل فوتون به طور آزاد با سرعت u حرکت می‌کند. انرژی اتم برابر است با $E = M_0 c^2 / \sqrt{1 - u^2/c^2}$ و تکانه آن برابر $p = M_0 u / \sqrt{1 - u^2/c^2}$ است. بعد از گسیل یک فوتون به انرژی $h\nu$ اتم دارای سرعت، u' ، جرم سکون M'_0 انرژی E' و تکانه p' است. برای سهولت فوتون گسیل شده را در امتداد خط حرکت در نظر می‌گیریم (شکل ۱۳-۱۳). به موجب پایستگی انرژی و تکانه داریم

$$E = E' + h\nu \quad (۱)$$

$$p = p' + \frac{h\nu}{c} \quad (۲)$$

بنابراین

$$(E - h\nu)^2 = E'^2$$

$$(pc - h\nu)^2 = (p'c)^2$$

و به موجب رابطه انرژی-تکانه داریم

$$(E - h\nu)^2 - (pc - h\nu)^2 = E'^2 - (p'c)^2 = (M'_0 c^2)^2 \quad (۳)$$

با بسط سمت چپ و استفاده از رابطه $E^2 - (pc)^2 = (M_0 c^2)^2$ ، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} (M_0 c^2)^2 - 2Eh\nu + 2pch\nu &= (M'_0 c^2)^2 \\ &= (M_0 c^2 - h\nu_0)^2 \end{aligned}$$

با ساده کردن آن پیدا می‌کنیم

$$\nu = \nu_0 \frac{(2M_0 c^2 - h\nu_0)}{2(E - pc)}$$

اما

$$E - pc = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \left(1 - \frac{u}{c} \right)$$

$$= M_0 c^2 \sqrt{\frac{1 - u/c}{1 + u/c}}$$

از این رو داریم

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{h\nu_0}{2M_0 c^2} \right) \sqrt{\frac{1 + u/c}{1 - u/c}}$$

جمله $h\nu_0 / 2M_0 c^2$ نشانگر کاهش انرژی فوتون به خاطر انرژی پس‌زنی اتم است. برای یک منبع با جرم زیاد این جمله قابل صرف‌نظر است و داریم

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + u/c}{1 - u/c}}$$

که با نتیجه حاصل در فصل گذشته یعنی معادله ۱۲-۶ مطابقت می‌کند.

گرچه نتیجه‌گیری یکسان از بحث‌های متفاوت همواره قانع‌کننده است، شاید توجه اصلی در این تمرین این است که نشان دهیم چگونه دو جنبه کاملاً متفاوت موجی و ذره‌ای نور به پیش‌بینی کاملاً یکسانی برای تغییر بسامد تابش یک منبع متحرک منجر می‌شود. ■

۱۳-۴ آیا نور با سرعت نور حرکت می‌کند؟

اگرچه عنوان این بخش ممکن است به صورت بازی با کلمات به نظر برسد، ولی این سؤال بی‌محتوا نیست. بدیهی است که سرعت نور در نسبیت نقش خاصی دارد. در واقع، اینشتین نظریه نسبیت خاص را عمدتاً با تعمق در نظریه الکترومغناطیس ماکسول یعنی نظریه نور آفرید. اما درک مفهوم واقعی سرعت نور به عنوان نمونه‌ای از یک سرعت ثابت جهانی یعنی سرعتی که مقدار آن برای یک ناظر در هر دستگاه لختی یکسان است، حائز اهمیت است. همانطوری که بحث زیر نشان می‌دهد، در نظریه نسبیت فقط یک سرعت جهانی می‌تواند وجود داشته باشد.

فرض کنید یک سرعت جهانی دومی مانند c^* وجود دارد که نشانگر سرعت پدیده‌هایی غیر از نور است. مثلاً سرعت گراویتونها یا نوترینوها. این پدیده را Γ می‌نامیم. یک تپ نور و یک تپ Γ را که از مبدأ دستگاه x و y در امتداد محور x در زمان $t = 0$ گسیل شده‌اند، در نظر می‌گیریم. تنها چنین حرکت می‌کنند

$$\text{نور: } x_l = ct$$

$$\Gamma: x_\Gamma = c^*t$$

سرعت نسبی این دو تپ چنین است

$$\begin{aligned} u &= \frac{d}{dt}(x_{\Gamma} - x_l) \\ &= c^* - c \end{aligned}$$

اینک همین تپها را در دستگاه x' و y' که در امتداد محور x با سرعت V حرکت می‌کند در نظر می‌گیریم. از آنجا که c^* و c سرعتهای جهانی هستند. مکان هندسی این تپها باید به طریق زیر باشد

$$x'_l = ct'$$

$$x'_{\Gamma} = c^*t'$$

سرعت نسبی این تپها مثل گذشته چنین است

$$\begin{aligned} u' &= \frac{d}{dt'}[x'_{\Gamma} - x'_l] \\ &= c^* - c \end{aligned}$$

اما تبدیل نسبیتی سرعتها نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} c' &= \frac{c - V}{1 - cV/c^2} = c \\ (c^*)' &= \frac{c^* - V}{1 - c^*V/c^2} \end{aligned}$$

از این رو طبق پیش‌بینی تبدیلات لورنتس داریم

$$\begin{aligned} u' &= (c^*)' - c \\ &= \frac{c^* - V}{1 - c^*V/c^2} - c \end{aligned}$$

که این رابطه با نتیجه فوق یعنی $u' = c^* - c$ مطابقت ندارد مگر اینکه $c^* = c$ باشد، که در این حالت $u = 0$ و $u' = 0$ می‌شود. نتیجه می‌گیریم که فقط یک سرعت جهانی وجود دارد.

اگر این بحث خیلی رسمی به نظر می‌آید، توضیح زیر شاید بیشتر بتواند کمک کند. یعنی تمام دستگاههای لخت هم‌ارزند. این نظریه با اصل موضوع ثابت بودن سرعت نور نیز سازگار است: یعنی تمام ناظرانی که در دستگاههای لخت قرار دارند برای سرعت یک علامت نوری بخصوص نتیجه یکسانی به دست خواهند آورد. اما، نظریه نسبیت نمی‌تواند بیش از یک سرعت جهانی را پذیرا باشد. چنانچه بکشیم یک سرعت جهانی دومی را معرفی کنیم، تمام ساختمان نسبیت فرو می‌پاشد. خصوصاً اینکه

بعد از آن دیگر نمی‌توانیم برای ارتباط مختصات رویدادها در دستگاه‌های مختلف یک دستورالعمل سازگار بیابیم.

با این زمینه شاید بتوانیم عنوان این بخش را به صورت معنی‌دارتر "آیا نور با سرعت جهانی حرکت می‌کند؟" تغییر دهیم. این سؤال در واقع خیلی جالب توجه است و به عنوان موضوع تحقیق روز مورد بررسی است.

مثال ۱۳-۹ جرم سکون فوتون: اگر فوتون جرم سکون غیر صفر داشته، سرعت نور بایستی با c فرق می‌کرد. اگر m_p را نشانگر جرم سکون فوتون بگیریم، خواهیم داشت

$$E = \gamma m_p c^2$$

اگر فرض کنیم که رابطه انرژی-بسامد فوتون یعنی $E = hv$ صادق باشد، آنگاه با مجذور کردن معادله فوق نتیجه می‌شود

$$(hv)^2 = (m_p c^2)^2 \frac{1}{1 - v^2/c^2}$$

بعد از تنظیم مجدد داریم

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{\nu_0^2}{\nu^2}$$

که در آن $h\nu_0 = m_p c^2$ است. ν_0 نقش بسامد مشخصه فوتون را بازی می‌کند: یعنی $h\nu_0$ انرژی سکون فوتون است. اگر $\nu_0 = 0$ باشد داریم $v = c$ ، در غیر این صورت سرعت نور بستگی به بسامد دارد. چنین رفتاری به هنگام عبور نور از محیط‌های انکساری، مانند شیشه و آب، کاملاً آشناست و به پاشندگی معروف است. سؤالی به عنوان موضوع یک آزمایش مطرح است این است که آیا فضای خالی هم پاشندگی نشان می‌دهد یا نه؟

اخیراً کوشش‌های متعددی جهت تعیین حد جرم سکون فوتون (یا اندازه‌گیری جرم آن) انجام گرفته است (گرچه در حال حاضر هیچ دلیل خاصی مبنی بر صفر نبودن جرم سکون آن وجود ندارد).

مثال ۱۳-۱۰ نور حاصل از یک تپ اختر: تپ اخترها ستارگانی هستند که انرژی را به شکل فوران منظم در بسامدهای متناوبی از 3° تا 1° هرتز گسیل می‌کنند. این ستاره‌ها در سال ۱۹۶۸ کشف شدند و خواص غیر منتظره آنها باعث بروز هیجان‌انگیزی بین اخترشناسان و اختر فیزیکدانان شد. جالبترین آنها تپ اختری است که در سحابی خرچنگ است. این تپ اختر دارای بالاترین بسامد یعنی 3° هرتز است و تنها تپ اختری است که با تپهایی در محدوده اپتیکی و پرتو x و همچنین در ناحیه بسامدهای رادیویی مشاهده شده است. این تپها بسیار تیزند، و زمان ورود آنها را می‌توان با دقت

میکروثانیه اندازه‌گیری کرد. معلوم شده است که نور حاصل از این تپ اختر در طول موجهای اپتیکی مختلف به‌طور همزمان در محدوده زمانی قابل تفکیک آزمایشگاهی به ما می‌رسند. با استفاده از این حقایق برای جرم سکون فوتون می‌توان حدی تعیین کرد.

برای اینکه نور از سحابی خرچنگ به ما برسد، ۵۰۰۰ سال طول می‌کشد، فرض کنید علائم با دو بسامد متفاوت و اختلاف سرعت کوچک Δv حرکت می‌کنند، و در زمانهای نسبتاً متفاوت T و $T + \Delta T$ به ما می‌رسند. از آنجا که $T = L/v$ و L فاصله تا سحابی خرچنگ است، داریم

$$\Delta v = -\frac{L}{T^2} \Delta T$$

یا

$$\frac{\Delta v}{v} = -\frac{\Delta T}{T}$$

چنین اختلاف سرعتی تاکنون مشاهده نشده است، اما با تخمین حساسیت آزمایش می‌توانیم حد بالایی را برای Δv تعیین کنیم. ΔT را می‌توان با دقتی در حدود 2×10^{-2} ثانیه اندازه‌گیری کرد، و با استفاده از 1.5×10^{11} y $T = 5 \times 10^3$ داریم

$$\left| \frac{\Delta v}{c} \right| = \left| \frac{\Delta T}{T} \right| < \frac{2 \times 10^{-2}}{1.5 \times 10^{11}} \\ \approx 10^{-14}$$

که در آن فرض کرده‌ایم $v \approx c$.

اکنون این حد Δv را برحسب حد جرم سکون ممکن برای فوتون بیان می‌کنیم. از نتیجه مثال قبل داریم

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{v_0^2}{v^2}$$

حال اگر علائمی با دو بسامد متفاوت ν_1 و ν_2 را در نظر بگیریم، داریم

$$\frac{v_1^2 - v_2^2}{c^2} = v_0^2 \left(\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_2^2} \right)$$

طرف چپ را می‌توان چنین نوشت

$$\frac{(v_1 - v_2)(v_1 + v_2)}{c^2} \approx 2 \frac{\Delta v}{c}$$

با فرض اینکه $\Delta v = (v_1 - v_2)$ و $v_1 + v_2 \approx 2c$ باشند، برای مشاهداتی که در محدوده اپتیکی

آیا نور با سرعت نور حرکت می‌کند؟ ۶۵۱

انجام گرفته‌اند می‌توانیم فرض کنیم (آبی) $\nu_1 = 8 \times 10^{14} \text{ Hz}$ و (سرخ) $\nu_2 = 5 \times 10^{14} \text{ Hz}$.
 آنگاه با استفاده از حد $\Delta v/c < 2 \times 10^{-16}$ داریم

$$2 \times 2 \times 10^{-16} > \frac{\nu_2^2}{10^{28}} \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{8^2} \right) = 2,4 \times 10^{-30} \nu_2^2$$

یا

$$\nu_2 < 10^9 \text{ Hz}$$

این محاسبه حد بالای جرم سکون فوتون را به صورت زیر به دست می‌دهد

$$m_p = \frac{h\nu_2}{c^2} < 10^{-40} \text{ kg}$$

با مشاهده زمان رسیدن تپهای رادیویی سحابی خرچنگ حتی می‌توان حد پایینتری برای جرم سکون فوتون پیدا کرد. تحلیل این موضوع به خاطر اثر الکترونیهای آزاد در فضای بین ستارگان خیلی پیچیده است. نتیجه اینکه جرم سکون فوتون دارای حد بالای 10^{-47} کیلوگرم است. ■

مسائل

۱-۱۳ حداکثر انرژی پروتونهای اولیه موجود در پرتوکیهانی را بالغ بر 10^{13} MeV برآورد می‌کنند. (تقریباً 10^8 برابر بزرگتر از بالاترین انرژی به دست آمده در یک شتابدهنده). کهکشان ما قطری در حدود 10^5 سال نوری دارد. چقدر طول می‌کشد تا چنین پروتونی در چارچوب سکون خود قطر کهکشان را بپیماید؟ ($M_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$, $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$).

۲-۱۳ وقتی که با ذرات کار می‌کنیم، مهم است که بدانیم چه وقت باید اثرات نسبیتی را منظور کرد. ذره‌ای به جرم سکون m_0 با سرعت v در حرکت است. انرژی جنبشی کلاسیک آن برابر $K_{el} = m_0 v^2 / 2$ است. اگر K_{rel} / K_{el} عبارت نسبیتی انرژی جنبشی آن باشد، (الف) با بسط K_{rel} / K_{el} بر حسب توانهای v^2/c^2 ، مقدار v^2/c^2 را برای اینکه K_{rel} به مقدار 10% اختلاف داشته باشد برآورد کنید. (ب) به ازای این مقدار v^2/c^2 ، انرژی جنبشی بر حسب MeV در حالتی زیر چقدر است:

۱. یک الکترون ($m_0 c^2 = 0,51 \text{ MeV}$).

۲. یک پروتون ($m_0 c^2 = 938 \text{ MeV}$).

۳-۱۳ در مکانیک نیوتونی انرژی جنبشی یک جرم m که با سرعت v حرکت می‌کند برابر است با $K = mv^2/2 = p^2/(2m)$ که در آن $p = mv$ است. از این رو، تغییر انرژی جنبشی بر اثر تغییر کوچکی در تکانه برابر است با $dK = p \cdot dp/m = v \cdot dp$

نشان دهید رابطه $dK = v \cdot dp$ در مکانیک نسبیته هم صادق است.

۴-۱۳ دو ذره با جرم سکون m_0 و سرعت برابر v در جهات مخالف در چارچوب آزمایشگاهی به یکدیگر نزدیک می‌شوند. انرژی کل یک ذره که در چارچوب سکون ذره دیگر اندازه‌گیری می‌شود چقدر است؟

جواب حالت خاص: اگر $v^2/c^2 = 1/2$ باشد، $E = 3m_0c^2$.

۵-۱۳ ذره‌ای به جرم سکون m_0 و سرعت v با ذره ساکنی به جرم M برخورد می‌کند و به آن می‌چسبد. سرعت نهایی ذره مرکب چقدر است؟

جواب: $v_f = \gamma v m_0 / (\gamma m_0 + M)$ که در آن $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ است.

۶-۱۳ ذره‌ای با جرم سکون m_0 و انرژی جنبشی $\alpha m_0 c^2$ که در آن α یک عدد است، به ذره همسان دیگری که در حال سکون است برخورد می‌کند و به آن می‌چسبد. جرم سکون ذره حاصل چقدر است؟

جواب حالت خاص: اگر $\alpha = 6$ ، $m = 4m_0$.

۷-۱۳ در چارچوب آزمایشگاهی ذره‌ای به جرم سکون m_0 و سرعت v به طرف ذره در حال سکون دیگری به جرم m در حرکت است.

سرعت چارچوب لخت که در آن تکانه کل دستگاه صفر است چیست؟

جواب حالت خاص: اگر $v^2/c^2 = 3/4$ باشد، سرعت برابر است با $2v/3$.

۸-۱۳ طبق شکل ۱۴-۱۳ فوتونی به انرژی E_0 و طول موج λ_0 با الکترون آزادی به جرم سکون



شکل ۱۴-۱۳

m_0 و سرعت v برخورد رو در رو می‌کند. فوتون در زاویه 90° درجه پراکنده می‌شود. (الف) انرژی فوتون پراکنده شده را پیدا کنید.

جواب: $E = [E_0(1 + v/c)] / (1 + E_0/E_i)$ ، که در آن $E_i = m_0 c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ است.

است.

(ب) الکترونهای خارجی در یک اتم کربن با سرعت $v/c \approx 6 \times 10^{-2}$ حرکت می‌کنند. با استفاده از جواب قسمت (الف)، پهن‌شدگی طول موج قله پراکندگی کامپتون براثر گرافیت را برای $m = 711 \times 10^{-1} \text{ m}$ و زاویه پراکندگی 90° درجه برآورد کنید. جرم سکون الکترون برابر 51 MeV و $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ است. از بسطگی الکترونها صرف‌نظر کنید. نتیجه حاصل را با

داده‌های کامپتون در مثال ۱۳-۶ مقایسه کنید.

۱۳-۹ ثابت خورشیدی، یعنی انرژی متوسط وارد بر واحد سطح زمین در واحد زمان برابر است با $1.4 \times 10^3 \text{ W/m}^2$. نیروی کل نور خورشید را با نیروی گرانشی که از خورشید بر زمین وارد می‌شود قیاس کنید.

ذرات به اندازه کافی کوچک توسط فشار تابش نور خورشید می‌توانند از منظومه شمسی خارج شوند. با پذیرش یک چگالی نسبی ۵، شعاع بزرگترین ذره‌ای که می‌تواند خارج شود چقدر است؟
 ۱۳-۱۰ یک باریکه نوری یک کیلوواتی حاصل از یک لیزر مطابق شکل ۱۳-۱۵ برای نگاهداشتن



شکل ۱۳-۱۵

یک کره جامد آلومینیمی به حالت شناور مورد استفاده قرار می‌گیرد، و نور از پایین کره روی آن متمرکز می‌شود. با فرض اینکه این کره روی این باریکه نور به حالت آزاد شناور بماند، قطر کره را پیدا کنید. چگالی آلومینیم برابر است با 2.7 g/cm^3 .

۱۳-۱۱ فوتونی با انرژی E با ذره آزادی به جرم m_0 در حالت سکون برخورد می‌کند. اگر فوتون پراکنده شده در زاویه θ خارج شود، زاویه پراکندگی ذره، ϕ ، را پیدا کنید.

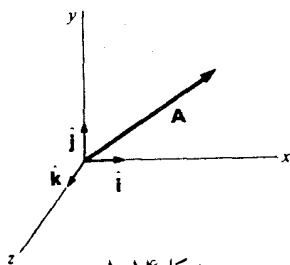
جواب: $\cot \phi = (1 + E_0/m_0 c^2) \tan(\theta/2)$.

بردارهای چهار بعدی و ناوردایی نسبیتی

۱-۱۴ مقدمه

وقتی پیشرفتهای بزرگی در فیزیک حاصل می‌شود، مفاهیم قدیمی به ناچار اهمیت خود را از دست می‌دهند و نقطه نظرهایی که قبلاً از اهمیت کمتری برخوردار بودند به میدان می‌آیند. از این رو، با پیشرفت نسبیت مفهوم اتر و همراه با آن مسئله حرکت مطلق از بین رفت. همزمان با آن خواص تبدیل قوانین فیزیکی که قبلاً از اهمیت کمتری برخوردار بود اهمیت زیادی پیدا کرد. همانطوری که در این فصل خواهیم دید، نظریه تبدیل یک ابزار قوی برای تعمیم مفاهیم غیرنسبیتی و آزمودن درستی نسبیتی قوانین فیزیکی فراهم ساخته است. به علاوه، این ابزار برای تجسس قوانین جدید هم راهنمای خوبی است. با استفاده از نظریه تبدیل، نتایج مهم نسبیت را که در فصلهای پیشین به کمک بحثهای ویژه‌ای پیدا کردیم، به روش طبیعی خود به دست خواهیم آورد. این رهیافت بر ساختار ریاضی فیزیک و طبیعت تقارن که صفت مشخصه تفکر فیزیک معاصر را نشان می‌دهد، تأکید می‌کند.

برای معرفی روشهای نظریه تبدیل، بحث نسبیت را موقتاً به تعویق می‌اندازیم و ابتدا به خواص تبدیل بردارهای معمولی در دستگاه سه بعدی می‌پردازیم.



شکل ۱-۱۴

۲-۱۴ بردارها و تبدیلات

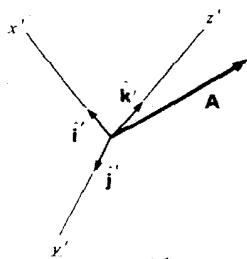
در فصل ۱ بردارها را به مثابه ”پاره خطهای جهت دار“ تعریف کردیم، به کمک نظریه تبدیل می توانیم تعریف اساسیتری از آن ارائه دهیم.

به منظور تحرک بخشیدن به بحث و نشان دادن معنی نظریه تبدیل ابتدا بر مفهوم شهودی بردارها تکیه خواهیم کرد. بردار A را که نشانگر کمیتهای فیزیکی نیرو یا سرعت است مطابق شکل ۱-۱۴ مورد بررسی قرار می دهیم. برای توصیف A برحسب مؤلفه های آن، دستگاه مختصات متعامد x, y, z را با بردارهای یکه $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ معرفی می کنیم. آنگاه A را می توان چنین نوشت

$$A = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

دستگاه مختصات یک بخش ضروری فیزیک نیست، بلکه ساختاری است که آن را برای راحتی معرفی می کنیم. در مورد استفاده از دستگاه مختصات متعامد دیگری مانند x', y', z' با بردارهای یکه $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ کاملاً آزادیم. اگر دستگاه x', y', z' دارای همان مبدأ دستگاه x, y, z باشد (شکل ۲-۱۴)، در این صورت این دو دستگاه با یک دوران به هم مرتبط می شوند. در دستگاه پریم دار داریم

$$A = A'_x \hat{i}' + A'_y \hat{j}' + A'_z \hat{k}'$$



شکل ۲-۱۴

در یک دوران کلی مختصات، مؤلفه‌های A'_x, A'_y, A'_z با مؤلفه‌های A_x, A_y, A_z رابطه معینی دارند. با برابر قرار دادن این دو رابطه برای \mathbf{A} نتیجه می‌شود

$$A'_x \hat{i}' + A'_y \hat{j}' + A'_z \hat{k}' = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

اگر ضرب نقطه‌ای \hat{i}' را با دو طرف رابطه فوق انجام دهیم داریم

$$A'_x = A_x (\hat{i}' \cdot \hat{i}) + A_y (\hat{i}' \cdot \hat{j}) + A_z (\hat{i}' \cdot \hat{k}) \quad (۱-۱۴ الف)$$

به همین طریق

$$A'_y = A_x (\hat{j}' \cdot \hat{i}) + A_y (\hat{j}' \cdot \hat{j}) + A_z (\hat{j}' \cdot \hat{k}) \quad (۱-۱۴ ب)$$

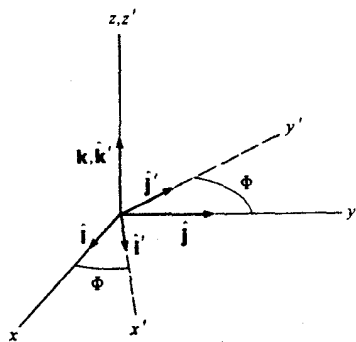
$$A'_z = A_x (\hat{k}' \cdot \hat{i}) + A_y (\hat{k}' \cdot \hat{j}) + A_z (\hat{k}' \cdot \hat{k}) \quad (۱-۱۴ ج)$$

ضرایب، $(\hat{i}' \cdot \hat{i})$ ، $(\hat{i}' \cdot \hat{j})$ ، ... عددهایی هستند که به کمک دوران معینی به دست می‌آیند، و بستگی به \mathbf{A} ندارند.

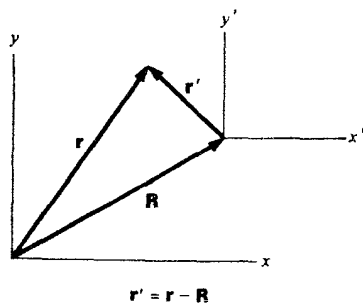
معادله ۱-۱۴ را از مفهوم بردارها که به مثابه پاره خطهای جهت دار تعریف شده‌اند به دست آوردیم، اما اکنون ترتیب را معکوس می‌کنیم و با استفاده از معادله ۱-۱۴ بردارها را تعریف خواهیم کرد. یک بردار سه بعدی مجموعه‌ای است از سه عدد که تحت یک دوران دستگاه مختصات مطابق با معادله ۱-۱۴ تبدیل می‌شوند. به سادگی می‌توان نشان داد که جبر برداری به کار رفته در فصل ۱ با تعریف جدید ما از بردار سازگار است. برای مثال، مجموع دو بردار یک بردار است و مشتق زمانی یک بردار هم بردار است. باید اشاره کنیم که جابه‌جایی کلی یک دستگاه مختصات مرکب از یک انتقال و یک دوران است. دلیل اشاره ما تنها به دورانها در تعریف یک بردار این است که انتقالها بر مؤلفه‌های یک بردار هیچ اثری ندارند. یگانه استثنا، بردار مکان \mathbf{r} است که نسبت به مبدأ معینی تعریف شده است. مؤلفه‌های \mathbf{r} تحت دورانهایی مطابق با معادله ۱-۱۴ تبدیل می‌شوند (شکل ۱۴-۳)، اما \mathbf{r} می‌تواند از بردارهای حقیقی مانند \mathbf{F} و \mathbf{v} به کمک خواص تبدیل آن در انتقال تمیز داده شود. بین بردارهای حقیقی، بردارهای مکان، و دیگر جوهرهای ریاضی، می‌توان با بررسی چگونگی رفتار آنها تحت اثر تمام تبدیلات ممکن تمایز قائل شد.

دوران حول محور z

معادله ۱-۱۴ کاملاً کلی است، اما معمولاً راحت تر است که با یک حالت خاص مانند دوران مختصات



شکل ۴-۱۴



شکل ۳-۱۴

به اندازه زاویه Φ حول محور z که در شکل ۴-۱۴ نشان داده شده است کارکنیم. داریم

$$\begin{aligned} (\hat{i}' \cdot \hat{i}) &= \cos \Phi & (\hat{j}' \cdot \hat{i}) &= -\sin \Phi & (\hat{k}' \cdot \hat{i}) &= 0 \\ (\hat{i}' \cdot \hat{j}) &= \sin \Phi & (\hat{j}' \cdot \hat{j}) &= \cos \Phi & (\hat{k}' \cdot \hat{j}) &= 0 \\ (\hat{i}' \cdot \hat{k}) &= 0 & (\hat{j}' \cdot \hat{k}) &= 0 & (\hat{k}' \cdot \hat{k}) &= 1 \end{aligned}$$

از این رو مؤلفه‌های هر بردار $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ باید طبق روابط زیر تبدیل شوند

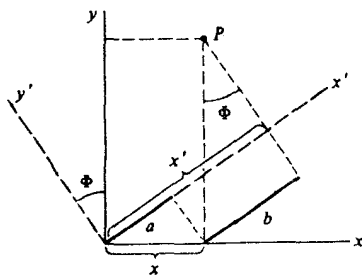
$$\begin{aligned} A'_x &= A_x \cos \Phi + A_y \sin \Phi \\ A'_y &= -A_x \sin \Phi + A_y \cos \Phi \\ A'_z &= A_z \end{aligned} \quad (۲-۱۴)$$

برای مثال، فرض کنید $\mathbf{A} = \mathbf{r} = (x, y, z)$ است، آنگاه داریم

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \Phi + y \sin \Phi \\ y' &= -x \sin \Phi + y \cos \Phi \\ z' &= z \end{aligned}$$

این روابط می‌توانند مستقلاً از طریق هندسی ثابت شوند. شکل ۵-۱۴ نشان می‌دهد که مختصه x' نقطه P چگونه با مختصات (x, y) ارتباط دارد.

مثال ۱-۱۴ خواص تبدیل حاصلضرب برداری: در فصل ۱، یک تعریف اساساً هندسی از حاصلضرب برداری ارائه دادیم. برای نمایش تعریف جدیدی از یک بردار ثابت خواهیم کرد که مؤلفه‌های حاصلضرب برداری همچون مؤلفه‌های یک بردار تبدیل می‌شوند. برای سهولت دو دستگاه مختصات x, y, z و x', y, z



شکل ۵-۱۴

z' را که با دورانی به اندازه زاویه Φ حول محور z با هم فرق دارند و دو بردار \mathbf{A} و \mathbf{B} واقع در صفحه x, y را (مطابق شکل ۶-۱۴) در نظر می‌گیریم. از تعریف حاصلضرب برداری داریم

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & 0 \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i}' & \hat{j}' & \hat{k}' \\ A'_x & A'_y & 0 \\ B'_x & B'_y & 0 \end{vmatrix}$$

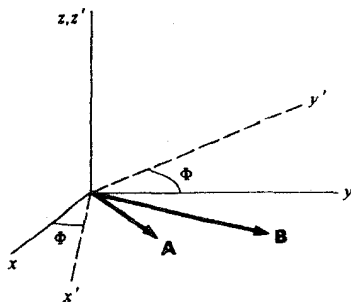
در دستگاه x, y, z مؤلفه‌های \mathbf{C} چنین‌اند

$$C_x = 0 \quad (الف-۱)$$

$$C_y = 0 \quad (ب-۱)$$

$$C_z = A_x B_y - A_y B_x \quad (ج-۱)$$

و در دستگاه x', y', z' و z' عبارت‌اند از



شکل ۶-۱۴

$$C'_x = 0 \quad (۲-الف)$$

$$C'_y = 0 \quad (۲-ب)$$

$$C'_z = A'_x B'_y - A'_y B'_x \quad (۲-ج)$$

اگر C یک بردار باشد، مؤلفه‌های آن باید از قانون تبدیل معادله ۱۴-۲ پیروی کنند، یعنی

$$C'_x = C_x \cos \Phi + C_y \sin \Phi \quad (۳-الف)$$

$$C'_y = -C_x \sin \Phi + C_y \cos \Phi \quad (۳-ب)$$

$$C'_z = C_z \quad (۳-ج)$$

معادلات ۳-الف و ۳-ب به موجب معادلات ۱ و ۲ به‌طور همسان برقرارند. برای اثبات معادله ۳-ج احتیاج داریم که $A'_x B'_y - A'_y B'_x = A_x B_y - A_y B_x$ باشد، از معادله ۱۴-۲ داریم

$$A'_x = A_x \cos \Phi + A_y \sin \Phi$$

$$A'_y = -A_x \sin \Phi + A_y \cos \Phi$$

$$B'_x = B_x \cos \Phi + B_y \sin \Phi$$

$$B'_y = -B_x \sin \Phi + B_y \cos \Phi$$

بنابراین

$$\begin{aligned} A'_x B'_y - A'_y B'_x &= (A_x \cos \Phi + A_y \sin \Phi)(-B_x \sin \Phi + B_y \cos \Phi) \\ &\quad - (-A_x \sin \Phi + A_y \cos \Phi)(B_x \cos \Phi + B_y \sin \Phi) \\ &= A_x B_y - A_y B_x \\ &= C_z \end{aligned}$$

این امر ثابت می‌کند که هر سه مؤلفه حاصلضرب برداری به‌مانند مؤلفه‌های یک بردار تبدیل می‌شوند، بنابراین حاصلضرب برداری حقیقتاً یک بردار است. ■

مثال ۱۴-۲ غیر بردار: برای اینکه مثالی دروجه مقابل حاصلضرب برداری بزنیم، فرض کنید یک نوع حاصلضرب برداری جدید حاصلضرب "بردار دوگانه" $C = A \times \times B$ را که به‌صورت زیر تعریف شده است، معرفی می‌کنیم

$$C_x = A_y B_z + A_z B_y$$

$$C_y = A_z B_x + A_x B_z$$

$$C_z = A_x B_y + A_y B_x$$

آیا C حقیقتاً یک بردار است؟

اگر دوباره حالتی را در نظر بگیریم که $A = (A_x, A_y, 0)$ و $B = (B_x, B_y, 0)$ باشند داریم

$$C_x = 0$$

$$C_y = 0$$

$$C_z = A_x B_y + A_y B_x$$

در دستگاه x', y', z' مؤلفه‌ها عبارت‌اند از

$$C'_x = A'_y B'_z + A'_z B'_y = 0$$

$$C'_y = A'_x B'_z + A'_z B'_x = 0$$

$$C'_z = A'_x B'_y + A'_y B'_x$$

دو معادلهٔ اول از قاعدهٔ تبدیل یعنی معادلات ۳-الف و ۳-ب مثال ۱۴-۱ پیروی می‌کنند. اما، با ارزیابی آخرین معادله داریم

$$\begin{aligned} C'_z &= (A_x \cos \Phi + A_y \sin \Phi)(-B_x \sin \Phi + B_y \cos \Phi) \\ &\quad + (-A_x \sin \Phi + A_y \cos \Phi)(B_x \cos \Phi + B_y \sin \Phi) \\ &= (A_x B_y + A_y B_x)(\cos^2 \Phi - \sin^2 \Phi) - 2(A_x B_x - A_y B_y) \cos \Phi \sin \Phi \end{aligned}$$

بدیهی است $C'_z \neq C_z$ است، به طوری که معادلهٔ ۳-ج مثال ۱۴-۱ برقرار نیست. عناصر تولید شده از حاصلضرب برداری دوگانه، مؤلفه‌های یک بردار نیستند و ضرب برداری دوگانه عمل بی‌فایده‌ای است.

ناوردهای یک تبدیل

هر کمیتی که به موجب یک تبدیل کلی مختصات تغییرناپذیر بماند یک ناوردای تبدیل نامیده می‌شود. ناوردها در فیزیک، نقش مهمی را ایفا می‌کنند. ناوردها تنها مفاهیم مناسب برای ساختن قوانین

فیزیکی به شمار می‌روند، زیرا اصول نسبیّت ایجاب می‌کند که نتایج نظریه‌های فیزیکی مستقل از انتخاب دستگاه مختصات باشند (البته به شرطی که دستگاه لخت باشد).

تاکنون با دو رده از ناورداها برخورد کردیم - کمیت‌های نرده‌ای و برداری. ناوردهای نرده‌ای اعداد منفردی هستند و انتخاب مختصات برای آنها بی‌اثر است. بردارها طوری ساخته شده‌اند که در دوران مختصات ناوردا باشند، قاعده تبدیل ۱۴-۱ را برای تأمین همین موضوع طرح کرده‌ایم. هر مفهوم ریاضی که در دوران مختصات ناوردا بماند، تانسور نامیده می‌شود. یک کمیت نرده‌ای، تانسوری از مرتبه صفر، و یک بردار، تانسوری از مرتبه اول است. تانسورهایی از مرتبه‌های بالاتر هم وجود دارند، مانند گشتاور لختی معرفی شده در فصل ۷ که تانسوری از مرتبه دوم است.

خواص تبدیل قوانین فیزیکی

از نماد برداری به خاطر سهولت آن هر وقت امکان داشت استفاده کرده‌ایم، کارکردن با یک معادله برداری از کارکردن با سه معادله عددی ساده‌تر است. اما، از نقطه نظر نظریه تبدیل، بردارها اهمیت عمیقتری دارند. از آنجا که باید بتوانیم رویدادهای فیزیکی را در هر دستگاه مختصاتی که انتخاب می‌کنیم، توصیف کنیم، بنابراین توانایی نوشتن قوانین فیزیکی به شکلی که مستقل از دستگاه‌های مختصات باشند امری اساسی است. از این رو اگر معادله‌ای بیانگر شرحی از یک قانون فیزیکی است، هر دو طرف معادله در یک تغییر مختصات باید به روش یکسانی تبدیل شوند. برای مثال، معادله حرکت در امتداد محوری مانند $F_j = ma_j$ را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم m یک مقدار نرده‌ای است، از آنجا که شتاب یک بردار است، ma_j باید مؤلفه یک بردار باشد. از این رو F_j مؤلفه برداری است در همان امتداد محور j ، و شکل کلی معادله باید به شکل $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ باشد. وقتی قانون به شکل برداری است حرکت را در امتداد هر مجموعه‌ای از محورها که انتخاب می‌کنیم می‌توانیم پیدا کنیم. از این نقطه نظر، طبیعت برداری نیرو از جمله قاعده برهم‌نهی نیروها، یک پیامد ریاضی برای التزام به برقراری قوانین حرکت در تمام دستگاه‌های لخت است.

سؤالی که پیش می‌آید این است که آیا قانون برهم‌نهی نیروها یک قانون فیزیکی است یا اینکه یک نتیجه ساده ریاضی؟ در واقع هر دو است. از نظر تجربی می‌دانیم که انتقال یک جسم تنها به وسیله سه معادله مستقل می‌تواند توصیف شود، یعنی هر کدام برای یک محور مختصات، و این مبین آن است که نیرو دارای سه مؤلفه مستقل است. طبق نظریه تبدیل تنها کمیت سه مؤلفه‌ای مناسب برای توصیف قوانین فیزیکی یک بردار است و بردارها هم از قانون برهم‌نهی پیروی می‌کنند.

ناوردهای نرده‌ای

از حاصلضرب اسکالر دو بردار می‌توان برای به دست آوردن یک عدد استفاده کرد. از آنجا که کمیت‌های

زده‌ای مستقل از دستگاه مختصات‌اند، حاصلضرب زده‌ای دو بردار یک ناوردای زده‌ای نامیده می‌شود.

اینک به‌وضوح نشان می‌دهیم که حاصلضرب زده‌ای $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ یک ناوردای زده‌ای تحت دوران است. برای سهولت در بررسی دورانی حول محور z ، و با استفاده از معادله ۲-۱۴ به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} A'_x B'_x + A'_y B'_y + A'_z B'_z &= \\ (A_x \cos \Phi + A_y \sin \Phi)(B_x \cos \Phi + B_y \sin \Phi) &+ \\ + (-A_x \sin \Phi + A_y \cos \Phi) & \\ (-B_x \sin \Phi + B_y \cos \Phi) + (A_z B_z) & \\ = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z & \end{aligned}$$

به‌ویژه حاصلضرب زده‌ای یک بردار در خودش، نرم بردار نامیده می‌شود که یک ناوردای زده‌ای است

$$A'^2_x + A'^2_y + A'^2_z = A^2_x + A^2_y + A^2_z$$

نرم بردار مکان \mathbf{r} در انتقال مختصات تغییر می‌کند ولی در دورانهای محض ناورداست. بنابراین از این موضوع می‌توان برای تعریف دوران مختصات استفاده کرد: دوران مختصات تبدیلی است که $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ را ناوردا نگه‌دارد.

۳-۱۴ فضای مینکوفسکی و چار بردارها

همانطوری که گفته‌ایم، ارائه قوانین فیزیک کلاسیک با استفاده از کمیتی مانند بردارها و زده‌ایها که در دوران مختصات x ، y ، و z ناوردا هستند باید امکانپذیر باشد. از نقطه نظر ریاضی تبدیلات لورنتس با دوران فضایی نقاط مشترک زیادی دارد: هر دوی آنها تبدیلاتی خطی از یک مجموعه مختصات به مجموعه دیگری هستند. هدف ما در این بخش پیدا کردن راهی برای نوشتن قوانین فیزیکی است، به طوری که این قوانین تحت تبدیلات لورنتس ناوردا باشند. این کار اولین اصل موضوع نسبیت یعنی یکسانی قوانین فیزیکی در کلیه دستگاههای لخت برای همه ناظران را تأمین می‌کند.

از نظرات مینکوفسکی ریاضیدان معروف در سال ۱۹۰۸ شروع می‌کنیم که بنا بر آن تبدیلات لورنتس با مختصر تغییراتی در نمادگذاری به صورت دوران در یک فضای چهار بعدی درمی‌آید. برای معرفی روند استدلال مینکوفسکی به دومین اصل موضوع نسبیت برمی‌گردیم. سرعت نور در کلیه چارچوبهای

تغییر مختصات در دوران	تغییر مختصات در تبدیل لورنتس
$x' = x \cos \Phi + y \sin \Phi$	$x' = \gamma x - \gamma vt$
$y' = -x \sin \Phi + y \cos \Phi$	$y' = y$
$z' = z$	$z' = z$
$(t' = t)$	$t' = -(\gamma u/c^2)x + \gamma t$

لخت برای همه ناظران یکسان است. دو دستگاه لخت x, y, z و x', y', z' را که با سرعت نسبی v در جهت x حرکت می‌کنند در نظر بگیرید. اگر مبدأ آنها در $t = 0$ برهم منطبق باشند و در آن لحظه یک تپ نوری کوتاه از مبدأ خارج شود، مکان هندسی تپ در دستگاه x, y, z و t عبارت است از $r = ct$ یا

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$$

در حالی که در دستگاه x', y', z' و t' این مکان هندسی چنین است

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2$$

با مقایسه آنها می‌بینیم کمیت $(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$ در هر دستگاه مختصاتی برابر صفر است؛ یعنی به نظر می‌رسد که این کمیت در تبدیلات لورنتس یک ناوردای نرده‌ای است. این موضوع را می‌توان با به‌کار بردن مستقیم تبدیلات لورنتس، معادله ۳-۱۱ نشان داد

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 &= \gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 - \gamma^2 c^2 \left(t - \frac{vx}{c^2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{1 - v^2/c^2} \left[x^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - c^2 t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \right] + y^2 + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 \end{aligned} \quad (3-14)$$

در فضای سه بعدی معمولی، تنها تبدیلی که $x^2 + y^2 + z^2$ را بدون تغییر باقی می‌گذارد، دوران است. مینکوفسکی یک فضای چهار بعدی را با مختصات x_1, x_2, x_3, x_4 در نظر گرفت که در آن $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict$ هستند. با این مختصات داریم

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

و معادله ۳-۱۴ را می‌توان چنین نوشت

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

بدیهی است که $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ در تبدیلات لورنتس ناورداست؛ در مقایسه با حالت سه بعدی، تبدیلات لورنتس نشانگر دوران مختصات است. این مقایسه در ضمن پیشنهاد می‌کند که x_1, x_2, x_3 و x_4 مؤلفه‌های یک بردار حقیقی چهاربعدی است.

قواعد تبدیل برای $(x, y, z, ict) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ به سادگی از تبدیلات لورنتس به دست می‌آیند

$$x_1' = \gamma(x_1 + i\beta x_4)$$

$$x_2' = x_2$$

$$x_3' = x_3$$

$$x_4' = \gamma(x_4 - i\beta x_1)$$

که در آن $\beta = v/c$ است. (طبق معمول، برای ساده‌سازی اعمال جبری به دستگانهایی مقید می‌شویم که حرکت نسبی آنها در جهت x باشد.) از اینجا نتیجه می‌شود که هر بردار حقیقی چهاربعدی باید به طریقهٔ یکسانی تبدیل شود. یک چنین بردارهایی را بردارهای چهاربعدی می‌نامند. بنابراین این قاعدهٔ

تبدیل برای یک چار بردار $\underline{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ چنین است

$$A_1' = \gamma(A_1 + i\beta A_4)$$

$$A_2' = A_2$$

$$A_3' = A_3$$

$$A_4' = \gamma(A_4 - i\beta A_1) \quad (4-14)$$

طبق انتظار، نرم \underline{A} یک ناوردای لورنتسی است

$$A_1'^2 + A_2'^2 + A_3'^2 + A_4'^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2$$

عامل c (سرعت نور) ابعادی مثل دیگر مؤلفه‌ها به A_4 می‌دهد. در معادلهٔ ۴-۱۴ می‌بینیم که اگر A_1 یک عدد حقیقی باشد، A_4 باید موهومی شود. مانند چار بردار $\underline{s} = (x, y, z, ict)$ در واقع موهومی بودن چهارمین مؤلفه از اختلاف اساسی بین فضا و زمان ناشی می‌شود.

در فرمولبندی نسبیت مینکوفسکی، رویدادی که توسط x, y, z و t معین شده است مانند یک نقطهٔ x_1, x_2, x_3, x_4 در فضا-زمان در نظر گرفته می‌شود. مینکوفسکی این بسطی فضا-زمان چهاربعدی

را "جهان" نامید، گرچه فضای مینکوفسکی هم نامیده شده است. یک نقطه از فضای مینکوفسکی را جهان نقطه می‌گویند. وقتی که ذره‌ای در فضا و زمان حرکت می‌کند، جهان-نقاط متوالی مسیر آن، جهان خط را به وجود می‌آورند.

محل قرار گرفتن جهان-نقطه به وسیله چاربردار مکان آن مشخص می‌شود

$$\underline{s} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

تبدیلات لورنتس که روابط بین مختصات یک رویداد را در دستگاه‌های مختلف به دست می‌دهد، معرف تبدیل مؤلفه‌های \underline{s} از یک دستگاه به دستگاه دیگر است.

فاصله بین دو جهان-نقطه چنین است

$$\Delta \underline{s} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z, ic \Delta t)$$

که به شکل دیفرانسیلی چنین می‌شود

$$d \underline{s} = (dx, dy, dz, ic dt)$$

از آنجا که $d \underline{s}$ یک چاربردار است، نرم آن یک نوردای لورنتسی است. این نرم برابر است با

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

نوردای لورنتسی دیگری که برای ما مفید خواهد بود چنین است $d\tau^2 = -ds^2/c^2$ و یا

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

که در آن $d\tau$ تعبیر ساده‌ای دارد. فاصله $d \underline{s}$ بین دو جهان-نقطه مربوط به یک ذره متحرک را در نظر بگیرید. در چارچوب سکون یک ذره، مختصات فضایی آن ثابت‌اند، بنابراین داریم $dx = dy = dz = 0$. این رو در چارچوب سکون $d\tau = dt$ است، یعنی جهان-نقطه‌ها تنها از نظر زمانی از هم جدا شده‌اند. $d\tau$ فاصله زمانی اندازه‌گیری شده در چارچوب سکون است و بدین دلیل τ را ویژه زمان می‌نامند.

مثال ۱۴-۳ اتساع زمان: برای نشان دادن توانایی چاربردارها، فرمول اتساع زمان اینشتین را دوباره به دست می‌آوریم.

ناظر ساکنی را در دستگاه x', y', z' و t' در نظر بگیرید. در این دستگاه، فاصله ویژه زمان بین دو جهان-نقطه برابر است با $d\tau = dt'$. فاصله بین همین نقاط در دستگاه x, y, z و t که با سرعت v نسبت به چارچوب اول در حرکت است چنین است

$$dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

از آنجا که dt^2 یک ناوردای لورنتسی است، مقدار آن برای جهان-نقطه‌های یکسان در کلیه چارچوبها یکسان است. از این رو مقدار آن در چارچوب سکون را می‌توان برابر مقدار آن در چارچوب دوم قرار داد

$$dt'^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

یا

$$\left(\frac{dt'}{dt}\right)^2 = 1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right]$$

از آنجا که $v^2 = (dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + (dz/dt)^2$ است، داریم

$$\left(\frac{dt'}{dt}\right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

یا

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma dt'$$

بر خلاف آنچه در بخش ۱۳-۳ به دست آوردیم، این نحوه عمل از آزمایشهای فرضی و بحثهای

همزمانی پرهیز می‌کند. ■

مثال ۱۴-۴ ساختن یک چاربردار: چار سرعت: در فضای سه بعدی معمولی، از تقسیم یک بردار بر

یک مقدار زده‌ای (یک ناوردای دورانی) بردار دیگری حاصل می‌شود. به همین طریق از تقسیم یک

چاربردار به یک ناوردای لورنتسی چاربردار دیگری حاصل می‌شود.

جابه‌جایی یک چاربردار را در نظر بگیرید

$$d\underline{s} = (dx, dy, dz, ic dt)$$

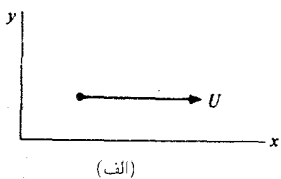
با تقسیم آن بر ناوردای لورنتسی dt' ، یک چاربردار جدید به دست می‌آوریم

$$\frac{d\underline{s}}{d\tau} = \left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}, ic \frac{dt}{d\tau} \right) \quad (1)$$

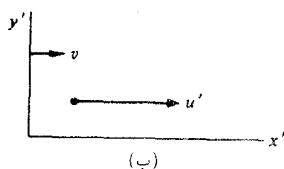
از مقایسه آن با حالت سه بعدی، $d\underline{s}/d\tau$ را چار سرعت \underline{u} می‌نامند.

در چارچوب سکون یک ذره $dx = dy = dz = 0$ و $d\tau = dt$ است. برای یک ذره در حال

سکون داریم



شکل ۱۴-۷



$$\underline{\mathbf{u}} = (0, 0, 0, ic) \quad (2)$$

نرم $\underline{\mathbf{u}}$ برابر است با $-c^2 = -(\underline{\mathbf{u}})^2$ که در کلیه چارچوبها دارای یک مقدار است. البته چار سرعت $\underline{\mathbf{u}}$ از نظر فیزیکی با \mathbf{u} سرعت معمولی سه بعدی خیلی تفاوت دارد.

اینک می خواهیم برای چار سرعت یک ذره متحرک عبارتی پیدا کنیم. وقتی که دستگاه x, y, z و t با سرعت \mathbf{u} - نسبت به چارچوب در حال سکون ذره در حرکت است. با استفاده از فرمول اتساع زمان مثال ۱۴-۳ می توانیم بنویسیم

$$dt = \gamma d\tau$$

که در آن dt اینک فاصله زمانی در چارچوب متحرک است. با به کار بردن این رابطه در معادله ۱ داریم

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{u}} &= \gamma \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, ic \right) \\ &= \gamma(\mathbf{u}, ic) \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ است.

در بخش بعدی برای به دست آوردن چار بردار نکانه-انرژی از $\underline{\mathbf{u}}$ استفاده خواهیم کرد. اما ابتدا نشان می دهیم که چگونه یک چار بردار را از یک چارچوب به چارچوب دیگر تبدیل می کنند. ■

مثال ۱۴-۵ جمع نسبیتی سرعتها: فرمول نسبیتی جمع بردارها را می توان بسادگی از تبدیل چار سرعت $\underline{\mathbf{u}} = \gamma(\mathbf{u}, ic)$ و به کمک رابطه ۱۴-۴ در چارچوبهای متوالی به دست آورد (شکلهای ۱۴-۷).

ذره ای را که در دستگاه x, y, z, t با سرعت U در امتداد x حرکت می کند در نظر بگیرید (شکل ۱۴-۷الف). در این چارچوب

$$\underline{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3, u_4) = \Gamma(U, 0, 0, ic)$$

که در آن $\Gamma = 1/\sqrt{1 - U^2/c^2}$ است. چارچوب دوم x', y', z' و t' را که با سرعت v نسبت به چارچوب اول در امتداد x حرکت می کند در نظر بگیرید (شکل ۱۴-۷ب). در این چارچوب، چار سرعت ذره برابر است با

$$\begin{aligned}\underline{u}' &= (u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) \\ &= \gamma'(\mathbf{u}', ic)\end{aligned}$$

که در آن $\gamma' = 1/\sqrt{1 - u'^2/c^2}$ است. u' سرعت ذره در چارچوب x', y', z' و t' است. از قاعده تبدیل، معادلهٔ ۴-۱۴، و با استفاده از $u_1 = \Gamma U$ ، $u_2 = 0$ ، $u_3 = 0$ و $u_4 = i\Gamma c$ داریم

$$u'_1 = \gamma(u_1 + i\beta u_4) = \gamma\Gamma(U - v)$$

$$u'_2 = u_2 = 0$$

$$u'_3 = u_3 = 0$$

$$u'_4 = \gamma(u_4 - i\beta u_1) = i\gamma\Gamma\left(c - \frac{vU}{c}\right) = ic\gamma\Gamma\left(1 - \frac{vU}{c^2}\right)$$

که در آن $\beta = v/c$ ، $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ است. از این رو داریم

$$\begin{aligned}\underline{u} &= \gamma'(\mathbf{u}', ic) \\ &= \gamma\Gamma\left[U - v, 0, 0, ic\left(1 - \frac{vU}{c^2}\right)\right]\end{aligned}$$

با برابر قرار دادن مؤلفه‌ها داریم

$$\gamma' u' = \gamma\Gamma(U - v)$$

و

$$-\gamma' = \gamma\Gamma\left(1 - \frac{vU}{c^2}\right)$$

بنابراین

$$\begin{aligned}u' &= (\gamma\Gamma/\gamma')(U - v) \\ &= \frac{U - v}{1 - vU/c^2}\end{aligned}$$

که این فرمول جمع سرعت‌های اینشتین برای حالتی است که در اینجا مورد بررسی قرار دادیم. در جمع سرعت‌های غیرموازی هم از همین روش می‌توان استفاده کرد. ■

۴-۱۴ چار بردار تکانه-انرژی

در فصل قبل عباراتی برای تکانه و انرژی نسبیتی با استدلال‌های پرزحمتی که مبتنی بر برخورد فرضی

دو جسم بود به دست آوردیم. در این بخش همان نتایج را با تشکیل یک چاربردار تکانه-انرژی به آسانی و به روش مستقیم‌تری به دست می‌آوریم. همچنین رابطه‌ای نسبی برای نیرو به دست خواهیم آورد که تعیین آن با شیوه‌های به کار رفته در فصل گذشته به دشواری صورت می‌گیرد.

از اینجا شروع می‌کنیم که تکانه کلاسیک $m \cdot \underline{u}$ از نظر نسبی ناوردا نیست زیرا بردار کلاسیک سرعت، چهاربعدی نیست. اما، شکل چار سرعت \underline{u} را در مثال ۱۴-۴ پیدا کردیم. از آنجا که جرم سکون m_0 یک ناوردای لورنتسی است لذا حاصلضرب $m_0 \cdot \underline{u}$ یک چاربردار است. طبیعی است که این جمله را باید همان تکانه نسبی بگیریم و چاربردار تکانه را به نحو زیر تعریف کنیم

$$\begin{aligned} \underline{p} &= m_0 \cdot \underline{u} \\ &= \gamma(m_0 \cdot \underline{u}, im_0 c) \\ &= (m_0 \underline{u}, im_0 c) \end{aligned}$$

و یا

$$\underline{p} = (\underline{p}, imc) \quad (5-14)$$

آیا چار تکانه از قانون پایستگی پیروی می‌کند؟ در مکانیک کلاسیک آهنگ تغییر تکانه نسبت به زمان با نیروی مؤثر برابر می‌شود، و در نتیجه تکانه یک دستگاه منزوی پایسته می‌ماند. اما، کاملاً روشن نیست که چار تکانه نیز پایسته بماند. زیرا هنوز یک رابطه نسبی برای نیرو به دست نیاورده‌ایم. به خاطر داریم که چار سرعت را با تقسیم $d\underline{s}$ بر $d\tau$ که یک ناوردای لورنتسی است به دست آوردیم. حال می‌خواهیم همان روش را برای یافتن "مشتق زمانی \underline{p} " به کار ببریم و سپس آن را به عنوان نیروی چهار بعدی معرفی کنیم.

$$\underline{F} = \frac{d\underline{p}}{d\tau} = \left(\frac{d\underline{p}}{d\tau}, i \frac{d}{d\tau} mc \right) \quad (6-14)$$

\underline{F} بنام نیروی مینکوفسکی معروف است.

اگر dt فاصله زمانی در دستگاه مختصات متصل به ناظر و متناظر با فاصله ویژه زمان $d\tau$ باشد، آنگاه $dt = \gamma d\tau$ است و داریم

$$\underline{F} = \gamma \left(\frac{d\underline{p}}{dt}, i \frac{d}{dt} mc \right)$$

در محدوده مکانیک کلاسیک $d\underline{p}/dt = \underline{F}$ است. برای پایسته کردن تکانه یک دستگاه منزوی، هویت نیرو را به عنوان آهنگ تغییر تکانه در کلیه دستگاه‌های لخت حفظ می‌کنیم و از آنجا نیروی مینکوفسکی را به این شکل به دست می‌آوریم

$$\underline{\mathbf{F}} = \gamma \left(\mathbf{F}, i \frac{d}{dt} mc \right) \quad (۷-۱۴)$$

$\underline{\mathbf{F}}$ را طوری ساختیم که وقتی چارنیرو صفر است چار تکانه هم پایسته است. \mathbf{F} مانند هر چار بردار از نظر نسبیتی ناورد است. چنانچه این بردار در یک دستگاه صفر باشد، در هر دستگاهی صفر است. این موضوع ما را مطمئن می‌سازد که اگر چار تکانه در یک دستگاه لخت پایسته باشد در تمام دستگاهها نیز پایسته است.

برای تعبیر چهارمین مؤلفه $\underline{\mathbf{p}} = (p, imc)$ یعنی مؤلفه زمانی بدین معنی توجه می‌کنیم که در مکانیک کلاسیک عبارت $\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$ نشانگر کار انجام شده روی ذره در واحد زمان است و نیز قضیه کار-انرژی عبارت $\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = dE/dt$ را به دست می‌دهد که در آن E انرژی کل است. با در دست داشتن این معلومات عبارت $\underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{u}}$ را برای یک ذره که با سرعت \mathbf{u} حرکت می‌کند، امتحان می‌کنیم. چون $\underline{\mathbf{u}} = \gamma(\mathbf{u}, ic)$ است، پس داریم

$$\underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{u}} = \gamma^2 \left(\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} - \frac{d}{dt} mc^2 \right)$$

از آنجا که حاصلضرب زردهای دو چار بردار یک ناوردای لورنتسی است بنابراین حق داریم که این حاصلضرب را در هر دستگاهی که بخواهیم محاسبه کنیم. اینک سعی می‌کنیم $\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$ را در دستگاهی که نسبت به ذره ساکن است، محاسبه کنیم. در این دستگاه $\mathbf{u} = 0$ است زیرا که $(d\mathbf{p}/dt) \cdot \mathbf{u} = 0$ است. همچنین داریم

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} mc^2 \right|_{\mathbf{u}=0} &= \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) \right|_{\mathbf{u}=0} \\ &= \left. \frac{m_0 u (du/dt)}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} \right|_{\mathbf{u}=0} = 0 \end{aligned}$$

از این رو، $\underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{u}} = 0$ می‌شود و در نتیجه

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} - \frac{d}{dt} mc^2 = 0$$

و یا

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = \frac{d}{dt} mc^2$$

این نتیجه نسبیتی شباهت نزدیکی به رابطه $\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = dE/dt$ مکانیک کلاسیک دارد. نتیجه می‌گیریم که هم‌ارز نسبیتی انرژی کل به صورت زیر است

$$E = mc^2$$

چار تکانه چنین می شود

$$\underline{\underline{p}} = (\underline{p}, imc) = \left(\underline{p}, \frac{iE}{c} \right) \quad (۸-۱۴)$$

$\underline{\underline{p}}$ را معمولاً چار بردار تکانه-انرژی می نامند.

با تعیین نرم $\underline{\underline{p}}$ می توان یک ناوردای لورنتسی تشکیل داد

$$\underline{\underline{p}} \cdot \underline{\underline{p}} = p^2 - \frac{E^2}{c^2} = m_0^2 \gamma^2 (u^2 - c^2) = -m_0^2 c^2$$

از این روداریم

$$E^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2$$

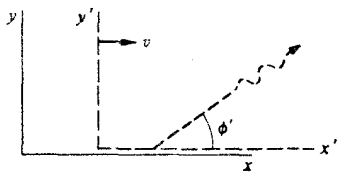
روش مینکوفسکی در تشکیل چار بردارها ما را به طور طبیعی به رابطه های درست نسبیتی در باره تکانه و انرژی سوق داده است. با این روش، قوانین پایستگی انرژی و تکانه به صورت یک قانون واحد ظاهر می شود که همان پایستگی چار تکانه است. در نسبیت، تکانه و انرژی جنبه های متفاوت یک جوهرند. این مطلب ساده سازی قابل ملاحظه ای را نسبت به فیزیک کلاسیک که در آن این مفاهیم اساساً با یکدیگر بی ارتباط اند نشان می دهد.

این بخش را با ذکر چند کاربرد چار بردار تکانه-انرژی به پایان می بریم.

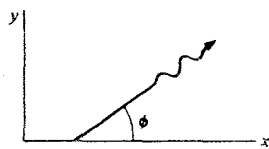
مثال ۸-۱۴ ۶-نگاهی مجدد به اثر دوپلر: قبلاً رابطه نسبیتی دوپلر را به دو طریق مختلف به دست آوردیم: ابتدا با یک استدلال هندسی در بخش ۵-۱۲ و سپس با استدلالی دینامیکی در بخش ۸-۱۳، در این مثال همان نتیجه را با روش سومی که بسیار ساده تر است یعنی ناوردا بودن چار بردار به دست می آوریم. فرض کنید فوتونی مطابق شکل ۸-۱۴ با انرژی $E = h\nu$ و تکانه $h\nu/c$ در صفحه xy و در امتدادی که با محور x زاویه ϕ می سازد در حرکت است. تکانه در دستگاه x و y عبارت است از $\underline{\underline{p}} = (h\nu/c)(\cos \phi, \sin \phi, 0)$. چار بردار تکانه-انرژی به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \underline{\underline{p}} &= \left(\underline{p}, \frac{iE}{c} \right) \\ &= \frac{h\nu}{c} (\cos \phi, \sin \phi, 0, i) \end{aligned}$$

در دستگاه x' و y' که در شکل ۹-۱۴ نشان داده شده است، چار تکانه را می توان چنین نوشت



شکل ۹-۱۴



شکل ۸-۱۴

$$\underline{p} = \frac{h\nu'}{c} (\cos \phi', \sin \phi', 0, i)$$

از معادله ۴-۱۴ داریم $p'_x = \gamma [p_x - i(v/c)p_y]$ از این رو

$$i \frac{h\nu'}{c} = \gamma \left(i \frac{h\nu}{c} - i \frac{v}{c} \frac{h\nu}{c} \cos \phi \right)$$

$$\nu' = \gamma \nu \left(1 - \frac{v}{c} \cos \phi \right)$$

و یا

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\nu'}{\gamma \left(1 - (v/c) \cos \phi \right)} \\ &= \nu' \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v/c) \cos \phi} \end{aligned}$$

با نتیجه قبلی در معادله ۷-۱۲ یکی است.

مثال ۷-۱۴ دستگاه مرکز جرم نسبیتی: دستگاه مرکز جرم را که در فصل ۴ برای بررسی مسائل مربوط به برخورد به کار بردیم دستگاه مختصاتی است که در آن تکانه فضایی صفر است. در این مثال، تبدیل نسبیتی از دستگاه مختصات آزمایشگاه به دستگاه با تکانه صفر را پیدا خواهیم کرد.

برخورد دودره به جرمهای سکون M_1 و M_2 را در نظر بگیرید. فرض کنید ذره ۱ با سرعت u در دستگاه آزمایشگاه حرکت می‌کند و ذره ۲ در حال سکون است. چاربردار انرژی-تکانه برای هر ذره به شرح زیر است

$$\underline{p}_1 = \left(p_1, 0, 0, \frac{iE_1}{c} \right)$$

$$\underline{p}_2 = \left(0, 0, 0, \frac{iE_2}{c} \right)$$

انرژی-تکانه کل چنین است

$$\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2 = \left(p_1, 0, 0, i \frac{E_1 + E_2}{c} \right) \quad (1)$$

مؤلفه‌های مکانی $\vec{\mathbf{p}}$ در دستگاهی که با سرعت V در امتداد محور x حرکت می‌کند، به موجب معادله ۱۴-۴ عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} P'_1 &= \Gamma \left(p_1 - V \frac{E_1 + E_2}{c^2} \right) \\ P'_2 &= 0 \\ P'_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن $\Gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ است.

در دستگاه مختصات مرکز جرم $\mathbf{P}' = 0$ است. از معادله ۲ می‌بینیم که سرعت این دستگاه نسبت به دستگاه آزمایشگاه به صورت زیر است

$$V = \frac{p_1 c^2}{E_1 + E_2} \quad (3)$$

انرژی موجود برای فرایندهای فیزیکی مانند تولید ذرات جدید و یا سایر برخوردهای ناکثسان، همان انرژی کل E' در دستگاه مختصات مرکز جرم است. در این دستگاه چاربردار انرژی-تکانه به صورت زیر است

$$\left(0, 0, 0, \frac{iE'}{c} \right) \quad (4)$$

E' را می‌توانیم با استفاده از ناوردایی نرم $\vec{\mathbf{p}}$ به دست آوریم. از معادلات ۱ و ۴ داریم

$$-\frac{E'^2}{c^2} = p_1^2 - \frac{(E_1 + E_2)^2}{c^2}$$

یا

$$E'^2 = (M_1 c^2)^2 + 2E_1 E_2 + E_2^2$$

که در آن از رابطه $p_1^2 c^2 = E_1^2 - (M_1 c^2)^2$ استفاده کرده‌ایم. در این مسئله $E_1 = \gamma M_1 c^2$ و $E_2 = M_2 c^2$ است که در آن $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ است. بنابراین

$$E' = (M_1^2 + M_2^2 + 2\gamma M_1 M_2)^{\frac{1}{2}} c^2 \quad (5)$$

انرژی کل در دستگاه آزمایشگاه چنین است

$$E = (\gamma M_1 + M_2)c^2 \quad (۶)$$

و کسری انرژی اولیه که در اختیار فرایندهای فیزیکی قرار می‌گیرد برابر است با

$$\frac{E'}{E} = \frac{(M_1^2 + M_2^2 + 2\gamma M_1 M_2)^{\frac{1}{2}}}{\gamma M_1 + M_2} \quad (۷)$$

یک حالت عملی مهم وقتی پیش می‌آید که جرمها با هم برابرند یعنی $M_1 = M_2$ است و معادله ۷ به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} \frac{E'}{E} &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{1+\gamma}}{1+\gamma} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\gamma}} \end{aligned} \quad (۸)$$

در محدوده سرعت‌های پایین، $\gamma = 1$ و $E'/E = 1$ است. در سرعت‌های پایین، بیشتر انرژی جرم سکون است و انرژی جنبشی چندان مهم نیست. برای بحث در محدوده سرعت‌های بالا، بهتر است معادله ۸ را بر حسب انرژی در حال حرکت $E_1 = \gamma M c^2$ بنویسیم

$$\frac{E'}{E} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + E_1/Mc^2}}$$

برای $E_1 \gg Mc^2$ داریم

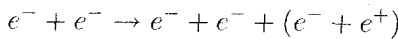
$$\frac{E'}{E} \approx \frac{\sqrt{2}Mc^2}{\sqrt{E_1}}$$

کسر قابل استفاده این انرژی مطابق $E_1^{-\frac{1}{2}}$ کاهش می‌یابد. برای مثال، سنکروترون پروتون در شتابدهنده آزمایشگاه ملی باتاویا واقع در ایالت ایلینوی پروتونها را می‌تواند تا انرژی 300 GeV ($300 \text{ GeV} = 3 \times 10^9 \text{ eV}$) شتاب دهد. از آنجا که جرم سکون پروتون در حدود 1 GeV است، می‌بینیم برای پروتونهایی که به هدف هیدروژن برخورد می‌کنند $\approx 0.1 = \sqrt{3}/\sqrt{200} \approx E'/E$ است. یعنی تنها 30 GeV از این انرژی در اختیار آزمایشهای مورد نظر است.

با استفاده از برخورد رودرو در دو دسته ذرات یکسان، چارچوب آزمایشگاه به چارچوب مرکز جرم تبدیل می‌شود، و کل انرژی در اختیار رویدادهای ناکشسان قرار می‌گیرد. این تکنیک باریکه‌های برخوردکننده به طور وسیعی در شتابدهنده‌های الکترون مورد استفاده قرار گرفته و ثابت شده است که این عمل در ماشینهای پروتونی هم عملی است.

مثال ۸-۱۴ تولید زوج در برخورد های الکترون-الکترون : در مثال ۷-۱۳ تولید زوج را به صورت فرایندی تحلیل کردیم که در آن از برخورد یک فوتون به یک الکترون یک زوج الکترون-پوزیترون تولید می شود. انرژی آستانه انجام این فرایند برابر 2MeV یا 1.02MeV $E = 2m_0c^2 =$ پیدا شده است که در آن 1.02MeV $m_0c^2 =$ انرژی سکون الکترون یا پوزیترون است.

فرایند مشابه دیگر تولید زوج الکترون-پوزیترون براثر برخورد دو الکترون است



در این فرایند پایستگی بار به وضوح برقرار است. مسئله پیدا کردن انرژی آستانه این فرایند است.

برای توصیف دینامیک این مسئله، تکانه های چهار بعدی زیر را معرفی می کنیم

\underline{p}_1 : الکترون ۱ قبل از برخورد

\underline{p}_2 : الکترون ۲ قبل از برخورد

\underline{p}_3 : الکترون ۱ بعد از برخورد

\underline{p}_4 : الکترون ۲ بعد از برخورد

\underline{p}_5 : الکترون تولید شده در زوج e^-, e^+

\underline{p}_6 : پوزیترون تولید شده در زوج e^-, e^+

از پایستگی چار تکانه نتیجه می شود

$$\underline{p}_1 + \underline{p}_2 = \underline{p}_3 + \underline{p}_4 + \underline{p}_5 + \underline{p}_6$$

با مجذور کردن آنها داریم

$$(\underline{p}_1 + \underline{p}_2)^2 = (\underline{p}_3 + \underline{p}_4 + \underline{p}_5 + \underline{p}_6)^2 \quad (1)$$

از آنجاکه طرفین این معادله ناوردای لورنتسی است، می خواهیم جملات را در چارچوب مرجعی که بیشتر مناسب است محاسبه کنیم.

اینک طرف چپ معادله ۱ را در چارچوب آزمایشگاه محاسبه می کنیم. با فرض اینکه ذره ۲ در

ابتدا در حالت سکون است، داریم

$$\underline{p}_1 = \left(p_1, i \frac{E_1}{c} \right) \quad \underline{p}_2 = (0, im_0c)$$

$$\begin{aligned} (\underline{p}_1 + \underline{p}_2)^2 &= \underline{p}_1^2 + \underline{p}_2^2 + 2 \underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2 \\ &= -2(m_0 c)^2 - 2m_0 E_1 \end{aligned} \quad (2)$$

در اینجا از رابطه $\underline{p}^2 = p^2 - E^2/c^2 = -m_0^2 c^2$ که برای هر ذره‌ای صادق است استفاده کرده‌ایم. طرف راست معادله ۱ به روش خیلی مناسبی در چارچوب مرکز جرم محاسبه شده است. در آستانه، هر چهار ذره در حالت سکون‌اند. (این عمل انرژی را حداقل می‌کند و با این خواسته که تکانه فضایی کل در چارچوب مرکز جرم صفر باشد سازگار است.) از این رو $\underline{p}_1, \underline{p}_2, \underline{p}_3, \underline{p}_4$ و \underline{p}_5 همگی به شکل $(0, 0, 0, im_0 c)$ درمی‌آیند، و طرف راست معادله ۱ به صورت زیر درمی‌آید

$$(0, 0, 0, 4im_0 c)^2 = -16(m_0 c)^2 \quad (3)$$

با جایگذاری معادلات ۲ و ۳ در معادله ۱ نتیجه می‌گیریم

$$-2(m_0 c)^2 - 2m_0 E_1 = -16(m_0 c)^2$$

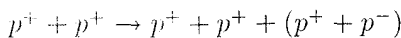
یا

$$E_1 = 7m_0 c^2$$

E_1 شامل انرژی سکون پرتابه است به طوری که انرژی جنبشی پرتابه در آستانه به شرح زیر است

$$\begin{aligned} K_1 &= E_1 - m_0 c^2 \\ &= 6m_0 c^2 \end{aligned}$$

از این بحث برای تولید دیگر ذرات نیز می‌توان استفاده کرد. برای مثال، در تولید پروتون منفی در واکنش زیر



از آنجاکه جرم سکون پروتون 938 MeV است، انرژی جنبشی آستانه تولید پروتونهای منفی $564 \text{ MeV} = 6(938 \text{ MeV})$ است. شتابدهنده بیاترون در آزمایشگاه تابش لارنس برکلی در کالیفرنیا به منظور شتاب دادن پروتونها تا 6 GeV و نشان دادن وقوع این فرایند طراحی شده است. اوون جمبرلین و امیلیو سگره در سال ۱۹۵۹ به خاطر تولید همین پروتونهای منفی یا پادپروتونها موفق به دریافت جایزه نوبل شدند.

۱۴-۵ ملاحظات نهایی

نظریه نسبیت خاص به جای آنکه جدایی کامل از فیزیک کلاسیک داشته باشد، به خاطر پافشاری آن روی هم ارزی چارچوبهای لخت، باعث تقویت مکانیک نیوتونی شده است. اصولاً، اینشتین با هماهنگ کردن مکانیک کلاسیک با خواسته‌های نظریه الکترومغناطیسی به کارهای نیوتون کلیت بخشیده است. اساساً، تأکیدهای نسبیت خاص همانند تأکیدهای فیزیک نیوتونی نیستند. رد مفاهیم غیرقابل مشاهده مانند فضا و زمان مطلق به وسیله اینشتین و پافشاری او بر تعاریف عملیاتی با مشاهده خیلی فرآگیرتر از محدوده کوششهای نیوتون در این زمینه بود. اینشتین زمینه تحلیل عوامل مشاهده پذیر را که در به وجود آمدن مکانیک کوانتومی نوین نقش اساسی داشتند پایه گذاری کرد. به علاوه، او در شناخت فلسفی ما از معارف بشری درباره جهان، سهم بسزایی دارد.

همانطوری که در این فصل دیدیم، یکی از بزرگترین کارهای اینشتین سهم وی در شناساندن قدرت نظریه تبدیل به عنوان یک اصل سازماندهنده در فیزیک است. نظریه تبدیل، مفاهیم نسبیت خاص را متحد و ساده می کند و هنگام جستجو برای قوانین جدید به مثابه راهنما به کار می رود.

اما، نسبیت خاص، با وجود توانایی و هماهنگی یک نظریه دینامیکی کاملی نیست زیرا چارچوبهای مرجع شتابدار در آن در نظر گرفته نمی شوند. برای اینشتین این مسئله یک نقص بنیادی به شمار می رفت. طبق اصل هم ارزی ماخ، تشخیص موضعی بین دستگاه لخت در یک میدان گرانشی و یک دستگاه مختصات شتابدار در فضای تهی غیر ممکن است. بنابراین، به موجب اصل نسبیت، چارچوبها برای توصیف پدیده‌های فیزیکی باید به طور یکسان معتبر باشند. از آنجاکه نسبیت خاص چارچوبهای شتابدار را در نظر نمی گیرد، بنابراین به طور ذاتی در رابطه با میدانهای گرانشی هم ناتوان است.

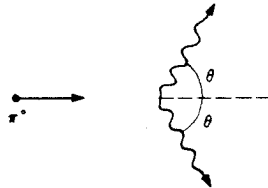
اینشتین با نظریه نسبیت عام خود که در سال ۱۹۱۶ منتشر شد، به از میان برداشتن این مشکلات نزدیک شد. نظریه عام با تبدیلات بین همه دستگاههای مختصات سروکار دارد نه فقط دستگاههای لخت. این نظریه اساساً یک نظریه گرانشی است، زیرا صرفاً با تغییر دستگاههای مختصات می توان یک میدان گرانشی "ایجاد" کرد. از این دیدگاه، اثر گرانش را می توان به عنوان اغتشاشی موضعی در هندسه فضا به شمار آورد. حتی در میدان گرانشی خورشید هم اثرات قابل استناد به نسبیت عام، کوچک و آشکارسازی آنها مشکل است. برای مثال، انحراف نور ستاره به وسیله خورشید که یکی از پیش بینیهای بارز این نظریه است فقط در حدود ۱٫۷ ثانیه قوسی است.

بزرگترین تأثیر نسبیت عام را باید در کیهانشناسی دانست، زیرا گرانش تنها نیروی مهم موجود در جهان در مقیاس بزرگ است. اما نقش آن در فیزیک مربوط به زمین، به دلیل کوچک بودن اثرات نسبیت عام و همچنین به دلیل عدم شمول آن به الکترومغناطیس، جزئی بوده است. برعکس، نسبیت خاص دارای کاربردهای متعددی است و بخشی از دانش عملی هر فیزیکدانی به شمار می رود.

ارزیابی نقش اینشتین در قرن بیستم در کلیت آن کار مشکلی است. اینشتین شناخت ما را از جهان طبیعی تصحیح کرد و توسعه داد، و از این لحاظ در زمره سرشناسترین شخصیت‌های اندیشه غرب به شمار می‌رود.

مسائل

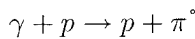
۱۴-۱ در اثر واپاشی متقارن یک مزون پی خنثی به جرم سکون 135 MeV که با سرعت زیاد در حرکت است، دو فوتون حاصل می‌شود (شکل ۱۴-۱۰). انرژی هریک از فوتونها در دستگاه آزمایشگاه



شکل ۱۴-۱۰

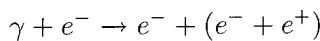
برابر 100 MeV است. (الف) سرعت V مزون را پیدا کنید. جواب را بر حسب نسبت V/c بنویسید.
 (ب) زاویه θ بین تکانه هر فوتون و خط حرکت اولیه را در دستگاه آزمایشگاه پیدا کنید.
 جواب: $\theta \approx 42^\circ$.

۱۴-۲ یک فوتون با انرژی زیاد (پرتو γ) با یک پروتون در حال سکون برخورد می‌کند. طبق واکنش زیر یک مزون پی خنثی (π^0) به وجود می‌آید



انرژی کمینه‌ای که پرتو γ باید داشته باشد تا این واکنش روی دهد چقدر است؟ جرم سکون پروتون 938 MeV و جرم سکون مزون پی 135 MeV است.
 جواب: 145 MeV .

۱۴-۳ از برخورد یک فوتون با انرژی زیاد (پرتو γ) با یک الکترون مطابق واکنش زیر یک زوج الکترون-پوزیترون تولید می‌شود



انرژی کمینه‌ای که این پرتو γ باید داشته باشد تا این واکنش روی دهد چقدر است؟
 ۱۴-۴ ذره‌ای به جرم سکون M ، در اثر واپاشی خودبه‌خودی در حالت سکون، به دو ذره به جرمهای

سکون m_1 و m_2 تبدیل می‌شود. نشان دهید انرژی این ذرات به صورت زیر است

$$E_1 = (M^2 + m_1^2 - m_2^2)c^2/2M, \quad E_2 = (M^2 - m_1^2 + m_2^2)c^2/2M$$

۵-۱۴ هسته‌ای به جرم سکون M_1 و انرژی جنبشی K_1 با سرعت زیاد در حرکت است و با هسته‌ای به جرم سکون M_2 در حالت سکون برخورد می‌کند. یک واکنش هسته‌ای به صورت زیر اتفاق می‌افتد

$$\text{هسته } ۴ + \text{هسته } ۳ \rightarrow \text{هسته } ۲ + \text{هسته } ۱$$

جرمهای سکون هسته‌های ۳ و ۴ بترتیب M_3 و M_4 است.

جرمهای سکون به صورت زیر با هم ارتباط دارند

$$(M_3 + M_4)c^2 = (M_1 + M_2)c^2 + Q$$

که در آن $Q > 0$ است. حداقل مقدار K_1 را برای تحقق این واکنش برحسب M_1, M_2, M_3 و Q پیدا کنید.

جواب حالت خاص: اگر $M_1 = M_2 = M_3 = M$ باشد، آنگاه $K_1 = 5Q/2$ است.

۶-۱۴ موشکی به جرم اولیه M_0 از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و با گسیل فوتونهایی

به عقب، خود را در امتداد محور x به جلو می‌راند. (الف) نشان دهید که تکانه چهار مؤلفه‌ای فوتونهای

خروجی موشک را در دستگاه سکون اولیه می‌توان چنین نوشت

$$\underline{p} = \gamma M_f v (-1, 0, 0, i)$$

که در آن M_f جرم نهایی موشک است. (دقت کنید که این نتیجه به طوری کلی برای فوتونهای خروجی،

حتی اگر فوتونها جابه‌جایی دوپلری هم داشته باشند صادق است.) (ب) نشان دهید سرعت موشک

نسبت به چارچوب اولیه چنین است

$$v = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} c$$

که در آن x نسبت جرم اولیه به جرمهای نهایی موشک یعنی M_0/M_f است.

۷-۱۴ یک چاربردار بسازید، که نشانگر شتاب باشد. برای سهولت، فقط حرکت راست خط در

امتداد محور x را در نظر بگیرید. و چاربردار سرعت لحظه‌ای را هم \underline{u} بگیرید.

جواب حالت خاص: $a = du/dt$ در آن نرم که $a^2/(1 - u^2/c^2)^3$ است.

۸-۱۴ تابع $f(x, t) = A \sin 2\pi[(x/\lambda) - \nu t]$ یک موج سینوسی با بسامد ν و طول موج λ

را نشان می‌دهد. این موج در امتداد محور x با سرعت = طول موج \times بسامد $\lambda\nu$ انتشار می‌یابد.

$f(x, t)$ می‌تواند نشانگر یک موج نوری باشد، در این صورت A متناظر با مؤلفه میدان مغناطیسی تشکیل دهنده این علامت نوری است و طول موج و بسامد در رابطه $\lambda\nu = c$ صدق می‌کنند.

همین موج را در دستگاه مختصات x', y', z', t' در نظر بگیرید که با سرعت v در امتداد محور x حرکت می‌کند. شکل موج در این چارچوب مرجع به شرح زیر است

$$f'(x', t') = A' \sin 2\pi \left(\frac{x'}{\lambda'} - \nu' t' \right)$$

(الف) نشان دهید سرعت نور به درستی داده شده است، به شرطی که ν' و $1/\lambda'$ مؤلفه‌های یک چاربردار k باشند که در دستگاه x, y, z, t به صورت زیر نشان داده می‌شود

$$\underline{k} = 2\pi \left(\frac{1}{\lambda}, 0, 0, \frac{i\nu}{c} \right)$$

(ب) با استفاده از نتیجه قسمت الف و با تعیین بسامد در یک دستگاه متحرک، جابه‌جایی طول دوپلر را به دست آورید. (ج) با بسط تحلیل قسمت (ب)، و بررسی انتشار یک موج در امتداد محور y رابطه‌ای برای جابه‌جایی عرضی دوپلر به دست آورید.

اطلاعات فیزیکی و نجومی مفید

$$6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

$$\left. \begin{array}{l} 9.8 \text{ m/s}^2 \\ 32 \text{ ft/s}^2 \end{array} \right\} \approx$$

$$3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$6.63 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

$$5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$$

$$6.37 \times 10^6 \text{ m}$$

$$1.49 \times 10^{11} \text{ m}$$

$$8.64 \times 10^4 \text{ s}$$

$$3.16 \times 10^7 \text{ s}$$

$$7.34 \times 10^{22} \text{ kg}$$

$$1.74 \times 10^6 \text{ m}$$

$$3.84 \times 10^8 \text{ m}$$

$$1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$$

ثابت گرانش، G

شتاب ثقل در سطح زمین، g

سرعت نور، c

جرم الکترون

جرم پروتون

بار الکترون، e

ثابت پلانک، h

جرم زمین

شعاع متوسط زمین

شعاع مدار زمین

دوره تناوب دوران زمین

دوره تناوب چرخش زمین

جرم ماه

شعاع متوسط ماه

شعاع مدار ماه

جرم خورشید

یکاهای و ضرایب تبدیل

انگلیسی	Cgs	SI	
ثانیه	ثانیه	(s) ثانیه	زمان
فوت (ft)	سانتی‌متر (cm)	(m) متر	طول
$1 \text{ ft} = 0.305 \text{ m}$	$1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$		
$1 \text{ in} = 2.54 \text{ cm}$			
$1 \text{ mi} = 5280 \text{ ft}$			
$1 \text{ mi} = 1.61 \text{ km}$			
slug	گرم (g)	کیلوگرم (kg)	جرم
$1 \text{ slug} = 14.6 \text{ kg}$	$1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$		
$1 \text{ lb}_m = 0.454 \text{ kg}$			
پوند	(dyn)	(N) نیوتون	نیرو
$1 \text{ lb} = 4.45 \text{ N}$	$1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N}$		
فوت، پوند (ftlb)	ارگ	(J) ژول	انرژی
$1 \text{ ftlb} = 1.36 \text{ J}$	$1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$		
فوت، پوند / ثانیه	ارگ بر ثانیه	(W) وات	توان
$1 \text{ ftlb/s} = 1.36 \text{ W}$			
$1 \text{ hp} = 550 \text{ ftlb/s}$	$1 \text{ erg/s} = 10^{-7} \text{ W}$		
$1 \text{ hp} = 746 \text{ W}$			

$$1 \text{ آنگستروم } (\text{\AA}) = 10^{-10} \text{ m}$$

$$1 \text{ یکای جرم اتمی } (\text{amu}) = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$= 931 \text{ MeV}$$

$$1 \text{ الکترون ولت } (\text{eV}) = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ mi/h} = 0.447 \text{ m/s}$$

$$1 \text{ lb/in}^2 = 6.90 \times 10^3 \text{ N/m}^2$$

فهرست راهنما

- آزمایش
~ سطل دوار ۴۸۲
~ کندی و تورندایک ۵۹۰
~ مایکلسون-مورلی ۵۸۰-۵۷۵
- اثر
~ مخروطی ۱۰۴
~ وارون ۲۱۰
- اتر ۵۷۵
اتساع زمان ۶۰۱ و ۶۶۵ و ۶۶۶
اتم بور ۳۵۱
اثر
~ دوپلر ۶۰۸ و ۶۰۹ و ۶۴۰ و ۶۴۶
~ درفضانوردی ۶۱۳ و ۶۱۴
~ فوتوالکتریک ۶۳۹
~ کامپتون ۶۴۱ و ۶۴۲
اختلال درسیارات ۵۰۸ و ۵۰۹
ارتعاشهای مولکولی ۲۳۰
اسپین تکانه زاویه‌ای ۳۳۹
- آونگ (ی)
~ بالیستیک ۲۵۱
~ ساده ۳۲۹
زمان تناوب ~ ۳۳۱
ساعت ~ ۳۳۱
~ شولر ۴۸۸
~ فوکو ۴۸۰
~ فیزیکی ۳۲۹ و ۳۳۱
~ کاتر ۳۳۳ و ۳۳۴

- استانداردها و یکاها ۸۸
 اسکالر ۴۰۳ و ۴۰۴ و ۶۶۱ و ۶۶۲
 اصطکاک ۱۲۲
 ضریب ~ ۱۲۳
 نیروی ~ ۱۲۲
 اصل ۴۵۳
 ~ لختی ۴۰۵
 ~ ماخ ۴۸۲
 ~ نسبت ۵۸۱
 ~ هم‌ارزی ۴۵۲ و ۴۵۳ و ۴۸۲
 الگوی ذرات نور ۶۳۸ و ۶۳۹
 انتقال ۴۸۳ و ۴۸۵
 ~ به سرخ ۴۸۳ و ۴۸۵
 ~ تکانه ۱۸۰
 ~ دوپلر ۶۰۹
 انتگرال ۲۰۵
 ~ بیضوی ۳۶۱
 ~ خطی ۲۰۵ و ۲۱۲
 انرژی ۱۹۵
 برخی خصوصیات ریاضی ~ ۲۶۰
 ~ پایستار ۲۱۷
 پایستگی ~ ۲۳۷ و ۶۳۲
 ~ پتانسیل ۲۱۶
 تابع ~ ۲۱۷
 سطوح ~ ۲۷۱
 گرادیان ~ ۲۷۱
 ~ مؤثر ۵۰۱ و ۵۰۲
 ~ نیروی دورانی ۲۲۲ و ۲۶۵ و ۲۷۴
 ~ جنبشی ۲۰۰
 ~ جسم صلب دورانی ۴۱۱
 ~ در برخورد ۲۴۱
 ~ در دستگاه دو جسم ۴۹۹
 ~ و حرکت مرکز جرم ۳۴۲
 سطوح ~ ۲۷۱
 سطوح ثابت ~ ۲۷۱
 ~ سکون ۶۲۷ و ۶۲۸
 قضیه کار ~ ۲۰۵
 ~ کل ۲۱۷
 ~ مکانیکی کل ۲۱۷
 ~ نسبیتی ۶۳۰
 نمودار ~ ۲۲۶ و ۴۹۹
 ~ و پایداری ۲۲۳
 ~ و کار ۲۰۵
 انقباض ۵۹۸
 ~ طول ۵۹۸
 ~ لورنتسی ۵۹۸
 اوج ۵۱۶ و ۵۱۹
 بازی تی تر ۲۲۵ و ۲۳۳
 برخورد ۲۴۰
 ~ حرکت نیروی مرکزی ۲۴۰
 ~ ناکشسان ۲۴۱
 برخی خصوصیات ریاضی انرژی ۲۶۰
 بردار(ی) ۱۰
 ~ پایه ۲۲ و ۴۶
 تفاضل ~ ۱۲
 جابه‌جایی ~ ۲۴
 جمع ~ ۱۲

- ~ چهار بعدی ۶۶۴ و ۶۶۵
 حاصلضرب ضرب خارجی ~ ۱۵
 حاصلضرب ضرب نرده‌ای (نقطه‌ای) ~ ۱۳
 خاصیت تبدیلات ~ ۶۵۵ و ۶۵۶
 ~ دوران‌کننده ۴۱ و ۳۸۵ و ۳۸۸
 ~ متعامد ۲۲
 ~ مشتق ۳۹
 ~ مکان ۲۴
 مؤلفه‌های ~ ۱۸
 ~ ومساحت ۱۷
 ~ یکه ۱۱ و ۲۲
 بسامد ۵۳۳
 ~ زاویه‌ای ۵۳۴
 بستر خطی هوا ۷۷
 بستر هوا ۷۷
 بعد یک کمیت فیزیکی ۳۳
 بیضی ۵۱۰ و ۵۱۸
 پادپروتونها ۶۷۵ و ۶۷۶
 پادذره ۶۴۴ و ۶۷۵ و ۶۷۶
 پارادوکس ۶۱۵
 ~ دوقلو ۶۱۵ و ۶۱۶
 ~ قهرمان پرش ۶۲۳
 پایداری ۱۷۴
 ~ جسم دوران‌کننده ۳۹۸ و ۴۲۳
 پایستگی ۲۳۷
 ~ انرژی ۲۳۷ و ۶۳۲
 ~ تکانه ۱۶۰
 ~ تکانه زاویه‌ای ۴۰۰
 ~ چار تکانه ۶۷۱
 پرتوکیهانی ۶۵۱
 پرنسیپا ۵۷۳ و ۵۸۲
 پهنای شدید ۵۵۴
 تابع ۲۱۷
 ~ انرژی پتانسیل ۲۱۷
 ~ شماره ۱۲۶
 ~ کار ۶۳۹
 ~ نمایی ۶۶
 تانسور ۶۶۱
 ~ لختی ۴۰۳ و ۴۰۸
 تبدیل ۴۸۵
 ~ دردستگاه دوار ۴۸۵
 ~ گالیه ۳۴۰ و ۴۴۶ و ۵۸۲ و ۵۸۳
 ~ لورنتس ۵۸۶ و ۵۸۷ و ۶۶۶ و ۶۶۷
 ~ نسبیتی سرعت ۶۰۵ و ۶۶۷ و ۶۶۸
 ~ و چار بردارها ۶۶۲ و ۶۶۳
 تپاختر ۶۴۹
 شدید ۵۴۹
 پهنای ~ ۵۵۴
 منحنی ~ ۵۵۴
 تعادل ۲۲۵ و ۴۲۳
 تعریف
 ~ اسلاک (یکا) ۹۱
 ~ پوند ۹۱
 ~ تکانه زاویه‌ای ۲۹۸ و ۲۹۹
 ~ ثابته ۹۰
 ~ دستگاه بین‌المللی یکاها ۹۱

- ~ و محور ثابت دوران ۳۱۹
 ~ سیستم ذرات ۱۴۸
 ~ نسیتی ۶۲۵ و ۶۲۶
 ~ و تغییر جرم ۱۷۳
 ~ تمرکز جرمی ۵۰۸
 ~ توان ۲۳۵
 ~ اسب بخار ۲۳۹
 ~ تولید زوج ۶۶۴ و ۶۴۵ و ۶۷۵ و ۶۷۶
 ثابت
 ~ پلانک ۳۵۳
 ~ حرکت ۴۹۵ و ۴۹۶
 ~ خورشیدی ۶۴۰
 ~ زمانی ۵۴۲
 ~ جابه جایی ۲۴
 ~ برداری ۱۲
 ~ دورانهای بینهایت کوچک ۴۲۳ و ۴۳۱
 ~ ناپذیر بودن دور آنها ۳۷۱ و ۳۷۳ و ۴۲۲
 ~ و ۴۲۳
 ~ جدول مدارهای سیارات ۵۱۵
 ~ جرم ۸۰
 ~ استاندارد ۹۰
 ~ سکون ۶۲۷ و ۶۲۸
 ~ فوتون ۶۵۰ و ۶۵۱
 ~ کاهیده ۲۳۱ و ۲۴۶ و ۴۹۳
 ~ گرانشی ۱۰۹ و ۴۶۰ و ۴۶۱ و ۴۶۲
 ~ لختی ۱۰۹ و ۴۶۱ و ۴۶۲ و ۴۶۴
 ~ نسیتی ۶۲۵ و ۶۲۶
 ~ دستگاہ متریک ۹۱
 ~ دستگاہ SI ۹۱
 ~ دل (عملگر) ۲۶۷
 ~ دین ۹۱
 ~ زول (یکا) ۲۰۰
 ~ سانتیمتر ۹۱
 ~ عملیاتی ۸۰
 ~ کار ۱۹۵ و ۲۰۵
 ~ کرل ۲۸۱
 ~ کیلوگرم ۹۰
 ~ گرم ۹۱
 ~ متر ۹۰
 ~ نیوتون ۹۱
 ~ وات ۱۳۹
 ~ واحد طول ۹۰
 ~ تغییرات و با ارتفاع ۱۱۱ و ۴۸۹ و ۴۹۰
 تقریب ریاضی ۵۹
 تکانه ۱۴۷
 انتقال ~ ۱۸۰
 پایستگی ~ ۱۶۰ و ۶۲۵ و ۶۲۶ و ۶۷۰
 ~ زاویه ای ۱۴۷ و ۲۹۸ و ۲۹۹
 ~ اسپین ۳۳۹
 پایستگی ~ ۴۰۰
 تعریف ~ ۲۹۸ و ۲۹۹
 ~ در ماهیت برداری ۳۷۶
 کوانتس ~ ۳۵۳
 ~ مداری ۳۳۹ و ۳۴۰
 ~ وانرژی جنبشی ۴۱۱ و ۴۱۲ و ۴۸۴
 ~ و پتانسیل مؤثر ۵۰۱ و ۵۰۲

- واحد ~ ۹۱
 جریانهای جوی ۴۷۷
 جزرومد ۴۵۴
 جهان خط ۶۶۵
 جهان نقطه ۶۶۵
 چاربردار ۶۶۴، ۶۶۶-۶۶۷
 ~ تکانه. انرژی ۶۶۸ و ۶۶۹
 چارتکانه ۶۶۸ و ۶۶۹
 چارسرعت ۶۶۶ و ۶۶۷
 چرخ تسمه ۱۴۲
 چسبندگی ۱۲۶
 نیروی ~ ۱۲۶
 حاصلضربهای لختی ۴۰۵
 حالت مانا ۳۵۳
 حرکت ۳۴
 امتداد ~ راستخط ۵۲
 قانون مربعی معکوس در ~ تخت ۵۰۶ و ۵۰۷
 ~ تقدیمی ۳۹۲
 ~ اعتدالین ۳۹۲
 ~ بدون گشتاور نیرو ۴۱۵ و ۴۱۶
 ۴۱۷ و ۴۲۵ و ۴۳۶
 ~ ژيروسکوپ ۳۸۷ و ۴۳۸
 ~ یکنواخت ۴۳۵ و ۴۸۷
 ~ تناوبی ۳۳۰
 ~ جسم صلب ۳۷۶ و ۴۰۳ و ۴۰۴
 ~ دامنه نوسانگر هماهنگ ساده ۵۳۴ و ۵۳۵
 ~ در دستگاه مختصات شتاب ۲۱۶
 ~ در قوانین نیوتون ۵۱۷-۵۸۲
 ~ در مختصات قطبی تخت ۴۵
 ~ در میدان گرانشی یکنواخت ۳۷
 ~ دورانی زمین ۴۸۲
 رابطه ~ با شتاب ۳۶
 ~ ساده هماهنگ ۱۲۹ و ۱۹۸ و ۵۳۲ و ۵۳۳
 ~ سیاره‌ای ۵۰۸
 ~ سیستمهای ناپایستار ۲۳۵
 ~ فوق میرا ۵۶۵
 قانون ~ ۷۶
 ~ نیروی مرکزی ۴۹۱
 ~ انرژی پتانسیل مرکزگیز ۴۹۶
 برخورد ~ ۲۴۰
 ~ در نتابهای حرکت ۴۹۵ و ۴۹۶
 ضریب اصطکاک در ~ ۱۲۳
 قانون مساحت‌های برابر در ~ ۴۹۷
 ~ در مسئله دو جسم ۴۹۲
 ~ در مسئله یک جسم ۴۹۲
 شتاب مرکزگرا در ~ ۵۶
 قضیه شال در ~ ۳۵۵
 ~ کشسان ۲۴۱
 ~ ناکشسان ۲۴۱
 ~ نسبیته ۶۲۵ و ۶۳۵ و ۶۷۵ و ۶۷۶
 ~ نیروی مرکزگیز ۴۶۹
 ~ و دستگاه مختصات مرکزجرم ۲۴۵
 ~ و قوانین پایستگی ۲۴۰

زمان

یکاهای دستگاه egs در ~ ۹۰

اتساع ~ ۶۶۶، ۶۶۵، ۶۶۱

حضيض ۵۱۶ و ۵۱۹

~ تناوب ۳۳۰

~ آونگ ساده ۳۳۱

خاصیت تبدیل ۶۵۵

~ مشخصه ۵۴۲

~ بردارها ۶۵۵

~ میرایی ۵۴۲

~ قوانین فیزیکی ۶۶۱

واحد ~ ۹۰

~ و چار بردارها ۶۶۳

زمین به عنوان یک سیستم چارچوب دوار ۴۷۲

خطوط پربند ۲۷۱

زمین، ماه، و سیستم خورشیدی ۱۶۳

دستگاه ۲۷۱

ژیروسکوپ ۳۸۶ و ۳۸۷

~ ستاره مزدوج ۲۷۱

رقص محوری ~ ۳۳۶

~ لخت ۷۹ و ۴۴۵، ۴۴۶، ۵۸۶ و ۵۸۷

~ معلق در هوا ۴۳۸

~ مختصات دوار ۴۶۳ و ۴۶۴

~ یکاها ۹۱

ساعت اتمی ۶۰۳

دنباله دار هالی ۵۱۲ و ۵۳۰ و ۵۳۱

ستاره‌های ثابت ۴۸۲

دوران (ی) ۴۲۳

سحابی خرچنگ ۶۵۱

~ بینهایت کوچک ۴۲۳

سد ۱۸۵

خواص تبدیل ~ ۶۵۵ و ۶۵۶

~ مرکزگریز ۵۰۲

~ در زوایای محدود ۳۷۶

سرعت ۲۷

~ دستگاه مختصات ۶۵۶

تبدیل نسبیته ~ ۶۰۵، ۶۶۷ و ۶۶۸

نیروی ~ ۴۱۱

~ جهانی ۶۴۷

~ در جسم صلب ۴۱۱

~ در مختصات قطبی ۴۵ و ۴۸

دوره تناوب حرکت ۵۳۴

~ زاویه‌ای ۳۷۶ و ۳۷۷

دیفرانسیل ۶۷ و ۲۶۴

~ شعاعی ۵۲

~ فرار ۲۰۲ و ۲۰۷

~ متوسط ۲۷

رقص محوری ۳۳۶ و ۳۳۷

~ مماسی ۵۲

~ ژيروسکوپ ۳۳۶

~ نسبی ۷۲

رویداد ۵۹۴

- ~ نور ۵۷۵ و ۵۸۱
 ~ در فضای تهی ۵۷۵
 ~ (c) در نسبیت ۵۸۵ و ۵۸۶
 ~ در یک محیط متحرک ۶۰۷ و ۶۰۸
 سری ۶۴
 ~ تیلور ۶۴
 ~ دو جمله‌ای ۶۲
 سطح مقطع گیراندازی یک سیاره ۳۱۰
 سطوح انرژی ۲۷۱
 ~ ثابت ۲۷۱
 سهمی ۵۱۰
 سیارات ۵۰۸
 اختلال در ~ ۵۰۸ و ۵۰۹
 جدول مدارهای ~ ۵۱۵
 سیستم ۱۴۸
 ~ ذرات در تکانه ۱۴۸
 ~ زمین-ماه-خورشید ۴۵۴
 ~ و جزرومد ۴۵۴
 ~ و حرکت تقدیمی اعتدالین ۳۸۷
 ~ متشکل از ذرات ۴۰۰
 تکانه‌ای زاویه‌ای ~ ۴۰۰
 شتاب ۲۷
 تبدیل نسبیتی ~ ۶۲۳ و ۶۷۵ و ۶۷۶
 ~ ثابت ۴۴۹
 ~ در مختصات دوار ۴۶۵
 ~ در مختصات قطبی ۵۵
 ~ شعاعی ۵۶
 ~ غیریکنواخت ۳۸
 ~ کوریولیس ۵۶ و ۴۶۹
 ~ مرکزگرا ۵۶ و ۴۶۸ و ۴۶۹
 ~ حرکت نیروی مرکزی ۵۶ و ۴۶۸
 ~ مماسی ۵۶
 ناوردایی ~ در مکانیک نیوتونی ۵۸۳ و
 ۵۸۴ و ۵۸۵
 شرایط اولیه ۱۳۱
 شعاع ژیراسیون ۳۳۲
 ضرب ۱۳
 ~ نرده‌ای ۱۳
 ~ نقطه‌ای ۱۳
 ضربه ۱۶۹
 ضریب شکست فرنل ۵۹۲
 طول ۹۰
 انقباض ~ ۵۹۸
 واحد ~ ۹۰
 عکس مجذور و گرانش ۱۰۸
 عملگر ۲۶۶
 ~ برداری ۲۶۶ و ۲۶۷
 ~ گرادیان ۲۶۶ و ۲۷۰
 فاز ۵۳۲ و ۵۳۳
 فاصله ۵۹۸
 ~ زمان‌گونه ۵۹۸
 ~ فضاگونه ۵۹۸
 فرمول بالمر ۳۵۲

- فشار ۶۴۰
 ~ تابش ۶۴۰ و ۶۴۱
 ~ یک گاز ۱۸۶
 فضای مینکوفسکی ۶۶۲ و ۶۶۳
 فوت (یکا) ۹۱
 فوتون ۶۳۸
 جرم سکون ~ ۶۵۰ و ۶۵۱
 قطب‌نمای ژيروسکوپی ۳۹۴
 قوانین
 ~ پایستگی ۲۴۰
 ~ و حرکت نیروی مرکزی ۲۴۰
 ~ حرکت ۷۶ و ۷۷
 ~ نیوتون ۷۹
 قانون اول ~ ۷۹
 قانون دوم ~ ۷۹
 قانون سوم ~ ۸۳
 ~ عکس مجذور ۱۱۴
 ~ الکتریکی ۱۱۴
 ~ کپلر ۳۰۷
 ~ کسینوسها ۱۳
 ~ کولن ۱۱۵
 ~ گرانش نیوتون ۱۰۸
 ~ مربعی معکوس ۵۰۶ و ۵۰۷
 ~ حرکت تخت ۵۰۶ و ۵۰۷
 ~ مساحت‌های یکسان ۳۰۷ و ۴۹۷
 ~ هوک ۱۲۹
 قرقره‌ها ۱۱۹
 قضیه ۲۸۹
 ~ استوکس ۲۸۹
 ~ اویلر ۲۹۷ و ۲۹۸
 ~ دومووار ۵۶۱ و ۵۶۲
 ~ شال ۳۵۵
 ~ در حرکت نیروی مرکزی ۳۵۵
 ~ کاربانژی ۲۰۵
 دوران در ~ ۳۴۷
 ~ محورهای موازی ۳۲۴
 قیدها ۹۵ و ۹۹
 کشش ۱۱۵
 ~ و نیروهای اتمی ۱۲۰
 کمندگا و چرناها ۴۴۲
 گرادیان انرژی پتانسیل ۲۷۱
 گرانش ۱۰۸
 ~ پوستهٔ کروی ۱۳۳
 ~ عمومی ۱۰۸
 ثابت ~ ۱۰۸
 ~ میدان گرانشی ۱۳۱
 ~ و جزرومد ۴۶۰
 ~ و وزن ۱۱۲
 گراویتون ۶۳۸
 گشتاور لختی ۳۲۰ و ۴۰۵
 ~ در قضیهٔ محورهای موازی ۳۲۴
 ~ و محورهای اصلی ۴۱۰
 گشتاور نیرو ۳۰۵
 ماشین آتود ۱۳۹ و ۳۲۸