آشنایی با نابرابریها

ا. بکن‌باخ، ر. بلمن
ترجمهٔ محمدحسین افقهی

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$$

(ریاضیات پیش‌دانشگاهی ـ ۳)

آشنایی با نابرابریها

(ریاضیات پیش‌دانشگاهی ـ ۳)

ا. بکن‌باخ، ر. بلمن

ترجمهٔ محمدحسین افقهی

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

An Introduction to Inequalities
New Mathematical Library (3)
Edwin Beckenbach, Richard Bellman
The Mathematical Association of America, 1961

آشنایی با نابرابریها
تألیف ا. بکن‌باخ، ر. بلمن
ترجمهٔ دکتر محمدحسین افقهی
ویراستهٔ عبدالحسین مصحفی
مرکز نشر دانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۶۸
تعداد ۵۰۰۰
حروفچینی: عبدی
لیتوگرافی: بهزاد
چاپ و صحافی: نوبهار

Beckenbach, Edwin	بکن‌باخ، ادوین
	آشنایی با نابرابریها
An introduction to inequalities	عنوان اصلی:

Bellman, Richard Ernest, ۱۹۲۰ - ۱. نامساویها. الف. بلمن، ریچارد،
-1920، نویسندهٔ همکار. ب. افقهی، محمدحسین، ، مترجم. ج. مرکز نشر
دانشگاهی. د. عنوان.

QA۱۶۱ ۵۱۲/۹۷

فهرست

بسم الله الرحمن الرحیم

سخنی با خواننده

ارتباط بین استادان برجستهٔ دانشگاهها و دانش‌آموزان دوره‌های پیش‌دانشگاهی، از مؤثرترین وسیله‌هایی‌است که به کشف و پرورش استعدادها کمك می کند و زمینه را برای‌تربیت دانشمندان‌آینده فراهم‌می‌سازد. در بین‌شخصیتهای علمی تراز اول، که پژوهندگان یك علم را در بالاترین سطح ممکن آموزش می‌دهند و راهنمایی می کنند، عدهٔ کمی این‌توانایی را دارند که درآن زمینهٔعلمی، و با رعایت همهٔ دقتها ونکته‌ها، کتابهایی تألیف کنند که برای قشر وسیعی از دانش‌آموزان دبیرستانی، وگاه برای افراد عادی، آموزنده وقابل درك باشد. این شخصیتها، که درهر کشور انگشت شمارند، از این راه، ارتباطی بین خود وجوانان برقرارمی‌سازند. دسترسی دانش‌آموزان به‌چنین کتابهایی، پشتوانه‌ای برای تأمین آیندهٔ علمی جامعه است.

جامعهٔ ریاضی آمریکا مجموعه‌ای از این‌گونه کتابها را زیر عنوان New Mathematical Library فراهم‌آورده و تاکنون بیش از سی جلد ازآنها را منتشرکرده است که بعضی از آنها مستقیماً به زبان انگلیسی تألیف شده و بعضی دیگر از زبانهای مختلف به‌انگلیسی ترجمه شده‌اند. این‌کتابها تاکنون به بسیاری از زبانهای دیگر ترجمه‌شده وهرکدام، چه درآمریکا وچه درکشورهای‌دیگر، بارها تجدیدچاپ شده است.

گروه ریاضی، آمار، و کامپیوتر مرکز نشر دانشگاهی، به حکم وظیفه‌ای که برای‌گسترش دانش‌ریاضی به‌عهده دارد، به‌ترجمهٔ این‌کتابها از انگلیسی به‌فارسی، و ویرایش‌آنها‌پرداخته‌است. مترجمان و ویراستاران ازافرادخبره برگزیده شده‌اند وکوشش لازم به‌عمل‌آمده است تا، ضمن رعایت امانت‌کامل‌درترجمه، متن فارسی روان و خالی از ابهام باشد. کتابها به‌ترتیبی که ترجمهٔ آنها آماده شود زیر عنوان **ریاضیات پیش‌دانشگاهی** منتشر می‌شوند.

این مجموعه کتابها را می‌توان‌دو دسته کرد. یك دسته شامل کتابهایی است که مباحثی از ریاضیات را به زبان ساده تشریح می کنند و می‌توانند بـرای درسهای ریاضیات عمومی دانشگاه نیز جنبهٔ کمك درسی داشته باشند. ویراستاران متن‌اصلی این کتابها در پیشگفتار خود ازجمله نوشته‌اند:

مطالب کتابهای‌این‌مجموعه در برنامهٔ ریاضیات دبیرستانی یا گنجانیده نشده یا به‌اجمال بیان شده است. میزان دشواری آنها متفاوت است و حتی دریك‌کتاب هم، مطالعهٔ بعضی از بخشها به‌تمرکز حواس بیشتری‌نیاز دارد. خواننده برای‌فهم‌مطالب اغلب این کتابها، هرچند‌به‌اطلاعات ریاضی‌چندانی نیاز ندارد، ولی باید تلاش فکری فراوانی به‌عمل آورد. کتاب ریاضی را نمی‌توان به‌سرعت خواند، و نباید توقع داشت که با یك بار مطالعه، تمام بخشهای‌آن فهمیده شود. می‌توان بدون معطل‌ماندن روی‌بخشهای پیچیده از آنها گذشت وبعد، برای مطالعهٔ عمیق به‌آنها بازگشت، زیرا بسیار پیش‌می‌آید که مطلبی در مبحث بعدی روشن می‌شود. از سوی دیگر، می‌توان بخشهایی راکه مطالب آنها کاملا آشناست خیلی سریع‌مطالعه‌کرد. بهترین‌راه فراگرفتن ریاضیات، حل مسأله‌های‌آن است. هر کتاب شامل مسأله‌هایی است که حل برخـی از آنها ممکن است مستلزم تأمل قابل‌ملاحظـه‌ای باشد. پاسخها یا راهنماییهای مربوط به حل این مسأله‌ها، غالباً در پایان کتاب آمده‌انـد. به خواننده توصیه می‌شود که‌کوشش کند هرمسأله را خودحل کند وفقط برای اطمینان از درستی راه‌حل خود به بخش پاسخها مراجعه نماید. بدین‌طریق، مطلب رفته‌رفته برایش پرمعناتر خواهد شد.

دستهٔ دیگر کتابها، شامل مجموعه‌هایی غنی از مسأله‌ها یـا پرسشهای جالب چندگزینه‌ای است که در مسابقه‌های معروف ریاضی مطرح شده‌اند. دراین کتابها، راه‌حل دقیق مسأله‌ها آمده است. درمورد پرسشها به‌ذکر پاسخ درست اکتفا نشده، بلکه حل‌کامل آنها نیز عرضه شده‌است.

نظرات وپیشنهادهای خوانندگان ما را به‌ادامهٔ‌کار وگسترش این‌گونه‌فعالیتها تشویق خواهد کرد.

گروه ریاضی، آمار، وکامپیوتر
مرکز نشر دانشگاهی

پیشگفتار

ریاضیات را علم همان‌گویی نامیده‌اند؛ یعنی ریاضیدانان متهم شده‌اند به اینکه وقت خود را برای آن صرف می‌کنند که ثابت کنند هرچیز با خودش برابر است. این گفتهٔ (فیلسوف‌مآبانه) از دو نظر تاحدی نادرست است. اولا گرچه ریاضیات زبان علم است، علم نیست، بلکه یك هنر خلاقه است. ثانیاً نتایج اساسی ریاضیات غالباً به‌صورت نابرابری‌اند نه برابری.

در این کتاب، سه جنبه از نظریهٔ نابرابریها را شرح می‌دهیم. نخست، در فصلهای ۱، ۲ و ۳ جنبهٔ اصل موضوعی آن‌را مطرح می‌کنیم. دوم آنکه درفصل ۴، از نتایج فصلهای قبلی به‌منظور به‌دست‌آوردن نابرابریهای اساسی آنالیز استفاده می‌کنیم؛ نابرابریهایی که ریاضیدانان درعمل بسیار به‌کار می‌برند. درفصل ۵ نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان این نتایج را برای به‌دست‌آوردن تعدادی از ویژگیهای جالب و مهم ماکسیمم و مینیمم در شکلهای متقارن مقدماتی هندسه: مربع، مکعب، مثلث متساوی‌الاضلاع، و مانند آن به کار برد. بالاخره در فصل ۶، برخی از ویژگیهای فاصله‌را بررسی می‌کنیم و بعضی‌از تابعهای فاصله‌ای غیرعادی را عرضه می‌داریم.

از این‌رو تقریباً برای هرسلیقه‌ای چیزهایی وجود دارد. مطالب را می‌توان پشت سرهم یا جداگانه خواند. بعضی از خوانندگان می‌خواهند با روش اصل موضوعی که اساس ریاضیات عالی است آشنا شوند. آنان از سه فصل اول لذت خواهند برد. گذشته از آن، در فصل ۳، نمودارهای توضیحی بسیاری در مورد نابرابریها آمده است. خوانندگان دیگری ترجیح می‌دهند که این قضیه‌ها را موقتاً بدون دلیل بپذیرند و بلافاصله به‌قضیه‌های تحلیلی‌تر روی آورند. اینان فصل ۴ را مناسب سلیقهٔ خود خواهند یافت. عده‌ای هم هستند که به‌روشهای کاربرد نابرابریهای

ابتدایی درحل مسائل موردبحث حساب دیفرانسیل و انتگرال علاقه دارند. فصل ۵ برای این‌افراد درنظرگرفته شده‌است. خوانندگان علاقه‌مند به‌تعمیم مفاهیم ونتایج، از تحلیل بعضی از فاصله‌های نااقلیدسی عجیب که در فصل ۶ شرح داده شده است لذت خواهند برد.

آنان‌که اشتهایشان با مطالب این‌کتاب تحریك شده باشد می‌توانند اثر عالی نابرابریها تألیف هاردی، لیتل‌وود و پولیا، را بخوانند. اثری تازه‌تر کــه نوعهای دیگری از قضیه‌ها را شامل است،کتاب نابرابریها، تألیف بکن‌باخ و بلمن است.

ادوین بکن‌باخ
ریچارد بلمن

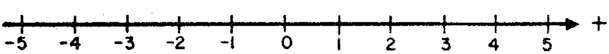
فصل اول

مبانی

۱.۱ رابطهٔ «بزرگتر از»

باید به‌یاد داشته باشید که نماد «$>$» به‌معنی «بزرگتر از» یا «بزرگتر است از» است. در این صورت می‌توانید فوری به سؤال: «آیا $2 > 3$؟» پاسخ بدهید و بگویید البته که چنین است.

اما آیا $-2 > -3$؟، مسلماً -3 «عددی منفی بزرگتر از» -2 است، ولی این حکم جواب سؤال ما نیست. اگر عددهای حقیقی (صفر و عددهای گویا و گنگ مثبت و منفی) را طبق‌معمول، به‌تعبیر هندسی، با نقطه‌هایی بریک مقیاس‌خطی افقی که جهت مثبت آن از چپ به راست است، مطابق شکل ۱.۱، نمایش دهیم، آن گاه عددها به‌ترتیب صعودی ازچپ به‌راست نموده می‌شوند. نقطهٔ‌نمایش -2،



شکل ۱.۱ مقیاس‌خطی عددهای حقیقی.

در سمت راست نقطهٔ نمایش -3 دیده می‌شود، و بنابرین $-2 > -3$. همچنین

$$4 > -4, \quad 3 > 2, \quad 0 > -2, \quad -1 > -2, \quad 1 > 0 \qquad (1.1)$$

بنابراین، برای مشخص‌کردن نابرابری، قاعدهٔ هندسی زیر را داریم: گیریم

a و b دو عدد حقیقی باشندکه با نقطه‌هایی بریك مقیاس خطی‌افقی با جهت مثبت از چپ به‌راست، نموده شده‌اند. دراین صورت $b < a$ اگر و تنها اگر نقطهٔ نمایش a در سمت راست نقطهٔ نمایش b قرار گیرد.

با این قاعدهٔ هندسی دیگر نمی‌توان گفت $-۲ > -۳$، یا $-۲ > -۳۰۰$.

در نابرابریها، غالباً مفیدتر و حتی ضروری است کـه به‌جای کارکردن بـا نمودارها، به‌روش جبری عمل کنیم؛ بنابر مفهوم اساسی عدد مثبت، قاعدهٔ جبری و سادهٔ زیر با قاعدهٔ هندسی بالا هم‌ارز است:

تعریف. گیریم a و b دو عدد حقیقی باشند. دراین صورت $b < a$ اگر و تنها اگر $a - b$ عدد مثبت باشد.

پس، اگر $a = -۲$ و $b = -۳$، آن‌گاه $a - b = -۲ - (-۳) = ۱$ مثبت است. بنابراین همان گونه که در بحث هندسی بالا اشاره‌شد، $-۲ > -۳$. درستی نابرابریهای (۱۰۱) را نیز می‌توانید با این‌روش جبری، یعنی برپایهٔ تفاضل جمله‌ها، بررسی کنید. همچنین درستی هریك از نابرابریهای زیر را، هم بـا روش جبری و هم با روش هندسی، تحقیق کنید:

$$\pi > ۳, \quad ۲ > ۰, \quad ۱ > -۹, \quad \sqrt{۲} > ۱, \quad -\frac{۱}{۲} > -۴۰.$$

۲۰۱ مجموعه‌های عددهای مثبت، عددهای منفی و صفر

در بخش پیش، نابرابری $a > b$ را برحسب مفهوم عددهای مثبت تعریف کردیم. P، مجموعهٔ عددهـای مثبت، همچنین N، مجموعهٔ عددهای منفی،و نیز O، مجموعهٔ خاصی که صفر تنها عضو آن است، در بررسی نابرابریها نقشهای اساسی دارند. درحقیقت، اگـرچه ویژگیهای جبری آشنای هیأت دستگاه عددهـای حقیقی، نظیر قانونهای تعویضپذیری، شرکتپذیری و توزیعی را آزادانه به کار خواهیم برد، یك جنبهٔ اساسی کل بحث ما ایـن است که همهٔ رابطه‌های ترتیبی در دستگاه عددهای حقیقی ــ همهٔ نابرابریهای جبری ــ را می‌توان بردو اصل موضوع سادهٔ مربوط به P، مجموعهٔ عددهـای مثبت، استوار کرد. این اصلهای موضوع در بخش آینده عرضه خواهند شد.

با استفاده از نمادها، به‌جای «a مثبت است» می‌نویسیم «$a \in P$»، که به‌تفصیل

خوانده می‌شود «a عضوی (یا عنصری) از مجموعهٔ P است». از این رو داریم $۵\in P$، $۰\in O$ و $-۳\in N$.

اکنون نگاهی اجمالی به‌مجموعه‌های فوق‌الذکر، P، N و O، و عضوهای آنها می‌اندازیم.

بدیهی است که عدد صفر، ۰، عضو یکتای مجموعهٔ O است و به‌ازای هرعدد حقیقی a درمعادلهٔ زیر صدق می‌کند

$$a+۰=a\cdot$$

درخصوص مجموعهٔ عددهای منفی، N، تمیزدادن مفهوم منفی یک عدد از مفهوم یك عدد منفی مهم است:

منفی یك عدد a بنا بر تعریف، عدد $-a$ است به‌طوری که

$$(a)+(-a)=۰$$

بنا براین اگر $a=-۳$، آن‌گاه منفی a عبارت است از $-(-۳)=۳$، زیرا $(۳)+(-۳)=۰$. همچنین، اگر $a=۰$، آن‌گاه $-a=۰$، زیرا $۰+۰=۰$.

منفی یك‌عدد مثبت‌را بنا بر تعریف عدد منفی گویند. از این رو چون ۳، ۱/۲، ۹/۵، π و $\sqrt{۲}$ را به‌عنوان عضوهایی از مجموعهٔ عددهای مثبت، P، قبول دارید، -۳، $-۱/۲$، $-۹/۵$، $-\pi$ و $-\sqrt{۲}$ عضوهای مجموعهٔ عددهای منفی، N، هستند.

در اینجا قصد نداریم مفهوم بنیادی یك عدد مثبت را تعریف کنیم، بلکه به مشخص کردن این‌عددها برپایهٔ دو اصل موضوع بنیادی می‌پردازیم.

۳.۱ اصلهای موضوع بنیادی نابرابریها

حکمهای سادهٔ زیر را روی مجموعهٔ عددهای مثبت، P، بدون برهان بیان می‌کنیم، و بنا براین اصلهای موضوع نامیده می‌شوند. نکتهٔ جالب توجه اینکه برای عرضهٔ تمام نظریهٔ نابرابریها، این اصلهای موضوع، همراه با ساختار آشنای جبری دستگاه عددهای حقیقی*، تنها حکمهای مورد نیازند.

اصل موضوع (۱). اگر a یك عدد حقیقی باشد، آن‌گاه یکی وتنها یکی از

* پانوشتی را که درپایان این فصل خواهد آمد ملاحظه کنید.

حکمهای زیر درست است: a برابر ۰ وعضو یکتای مجموعهٔ O است؛ a عضوی از مجموعهٔ P است؛ $-a$ عضوی از مجموعهٔ P است.

اصل موضوع (۲). اگر a و b عضوهای مجموعهٔ P باشند، آن‌گاه مجموع آنها، $a+b$، و همچنین حاصلضرب آنها، ab، نیز عضوهای مجموعهٔ P هستند.

سه شقی که در اصل موضوع (۱) آمده است، یک عدد حقیقی دلخواه a و منفی آن $-a$ را به‌صورت زیر به‌هم مربوط می‌کند: اگر a صفر باشد، چنان‌که قبلا اشاره شد، $-a$ نیز صفر است؛ اگر a مثبت باشد، آن‌گاه بنا بر تعریف عدد منفی، $-a$ منفی است؛ و اگر $-a$ مثبت باشد باز بنا بر تعریف عدد منفی، $a=-(-a)$ باید منفی باشد. ازاین‌رو a و $-a$ مطابق جدول زیر درمجموعه‌های P، N و O باهم جفت می‌شوند.

جدول ۱. جفت کردن عددها و منفی‌های آنها

عدد	مجموعه		
a	P	N	O
$-a$	N	P	O

درنمایش هندسی (شکل ۱.۱)، نقطه‌های نمایش a و $-a$ یا در نقطهٔ نمایش صفر برهم منطبق‌اند یا در دوطرف آن و به‌یك فاصله از آن قرار دارند.

۱.۴ بیان دیگر اصل موضوع (۱)

اصل موضوع (۱) وابسته به P، مجموعهٔ عددهای مثبت است، و نابرابری $a>b$ برحسب مجموعهٔ P تعریف‌شد. اکنون این‌اصل موضوع را برحسب رابطهٔ نابرابری بیان می‌کنیم.

اگر a و b عددهای‌حقیقی دلخواه باشند، اختلاف آنها، $a-b$، عددی‌است حقیقی، و ازاین‌رو، اصل موضوع (۱) را می‌توان درمورد آن به‌کار برد؛ بنا براین یا $(a-b)\in O$، (یعنی $a=b$)، یا $(a-b)\in P$، (یعنی $a>b$)، یا $-(a-b)=(b-a)\in P$، (یعنی $b>a$)، واین سه‌امکان‌دوبه‌دو ناسازگارند.

بنابراین حکم زیر نتیجهٔ اصل موضوع (۱) است:

اصل موضوع (′۱). اگر a و b عددهای حقیقی باشند، آن‌گاه یکی و تنها یکی از رابطه‌های زیر برقرار است:

$$a=b, \quad a>b, \quad b>a$$

به‌ویژه، درحالت خاص $b=۰$، از اصل موضوع (′۱) نتیجه می‌شود که اگر a یك عدد حقیقی باشد، دقیقاً یکی از حالتهای زیر برقرار است: یا $a=۰$ (یعنی، $a\in O$)، یا $a>۰$ (یعنی، $a\in P$)، یا $۰>a$ (یعنی، $-a\in P$). از این‌رو اصل موضوع (۱) را می‌توان از اصل موضوع (′۱) نتیجه گرفت.

اگر حکم S را بتوان از حکم T نتیجه گرفت، ــ یعنی، S نتیجه‌ای از حکم T باشد ــ گوییم «T مستلزم S است»، یا اینکه «T، S را ایجاب می‌کند». دیدیم که اصل موضوع (۱) اصل موضوع (′۱) را و همچنین اصل موضوع (′۱) اصل موضوع (۱) را ایجاب می‌کند. اگر از دو حکم هر یك دیگری را ایجاب کند، گوییم آن دو حکم هم‌ارزند. بنابراین اصلهای موضوع (۱) و (′۱) هم‌ارزند.

برای توضیح اصلهای موضوع (۱) و (′۱)، عددهای $a_۱=۳$، $a_۲=-۴$، $b_۱=۰$ و $b_۲=۳$ را درنظر می‌گیریم.

در توضیح اصل موضوع (۱)، ملاحظه می‌کنید که $a_۱\in P$، $-a_۲\in P$، $b_۱\in O$، و $b_۲\in P$؛ همچنین ملاحظه می‌کنید که $a_۱\notin O$ (بخوانید «$a_۱$ عضو مجموعهٔ O نیست»)، و $-a_۱\notin P$، و غیره.

در توضیح اصل موضوع (′۱)، دارید:

$$a_۱-b_۱=۳-۰=۳, \qquad a_۱-b_۱>۰, \quad a_۱>b_۱;$$

$$a_۱-b_۲=۳-۳=۰, \qquad a_۱-b_۲=۰, \quad a_۱=b_۲;$$

$$a_۲-b_۱=-۴-۰=-۴, \quad b_۱-a_۲>۰, \quad b_۱>a_۲;$$

$$a_۲-b_۲=-۴-۳=-۷, \quad b_۲-a_۲>۰, \quad b_۲>a_۲.$$

دراین‌حال ملاحظه می‌کنید که درهریك از این چهار مورد یکی و تنها یکی از سه رابطهٔ داده‌شده دراصل‌موضوع (′۱) برقرار است. این توضیح اصل‌موضوع (′۱)، دربخش زیر به هنگام معرفی دیگر رابطه‌های نابرابری، دنبال خواهد شد.

۵۰۱ دیگر رابطه‌های نابرابری

به‌جای نابرابری $a > b$، می‌توانید بنویسید $b < a$ و بخوانید «b کوچکتر از a است». این دو نابرابری کاملا هم‌ارزند و عموماً هیچ‌یك بر دیگری ترجیح ندارد. در توضیح اصل موضوع ($1'$)، مذکور در بالا، برای هماهنگی همه‌جا علامت «$>$» به‌کار برده شده است. اما می‌توانید درهمهٔ رابطه‌ها a را مقدم بر b بنویسید. در این صورت خواهید داشت

$$a_1 > b_1, \quad a_1 = b_2, \quad a_2 < b_1, \quad a_2 < b_2 \qquad (۲۰۱)$$

همچنین

$$-۴ < ۴, \quad ۲ < ۳, \quad -۲ < ۰, \quad -۲ < -۱, \quad ۰ < ۱,$$

$$۳ < \pi, \quad ۰ < ۲, \quad -۹ < ۱, \quad ۱ < \sqrt{۲}, \quad -۴۰ < -\frac{۱}{۲}.$$

نمادهای «$>$» و «$<$» معرف نابرابریهای اکید اند.

دو رابطهٔ دیگر که در بررسی نابرابریها ملاحظه‌می‌شوند، نابرابریهای آمیخته $a \geqslant b$ و $a \leqslant b$ هستند، که به‌ترتیب باید بخوانید «a بزرگتر از b یا برابر با b است» و «a کوچکتر از b یا برابر با b است»*. اولین آنها، $a \geqslant b$، بدین معنی است کــه یــا $a > b$ یــا $a = b$؛ مثلا $۳ \geqslant ۲$ و همچنین $۲ \geqslant ۲$. دومین آنها، $a \leqslant b$، بدین‌معنی‌است که یا $a < b$ یا $a = b$؛ بنا براین $۱ \leqslant ۲$ و همچنین $۲ \leqslant ۲$.

در (۲۰۱) بیان شد کــه در هرمورد یکی از سه رابطهٔ فهرست‌شده در اصل موضوع ($1'$) برقرار است. اما علاوه‌براین، خود ایــن اصل موضوع حکم می‌کند که تنها یکی‌از این رابطه‌ها برقرار است. بنا براین، برای کامل کردن توضیح اصل موضوع ($1'$)، درحقیقت بایستی گزاره‌های زیر را اضافه‌کنید.

$$a_1 \nleqslant b_1, \quad a_1 \ngtr b_2, \quad a_2 \ngeqslant b_1, \quad a_2 \ngeqslant b_2 \qquad (۳۰۱)$$

بخوانید «a_1 نه از b_1 کوچکتر است ونه با آن برابر است» یا اینکه «a_1 نابزرگتر از b_1 نیست»، و غیره.

---

* رابطهٔ $a \geqslant b$ به‌این معنی است‌که a از b کوچکتر نیست و ازاین‌رو می‌توان آن را «a ناکوچکتر از b است» خـواند. همچنین رابطهٔ $a \leqslant b$ را می‌توان «a نابزرگتر از b است» خواند. ـــ م.

طبیعتاً احساس می‌کنید که ایـن گزاره‌های سالب (۳.۱) زائدند، و درواقع کسی نمی‌گوید که برای تکمیل اطلاعات موجود در (۲.۱) معمولا آنها را بـاید به‌کار ببرید. این امر به‌علت این حقیقت است که اصل انحصاری ــ جنبهٔ «یك و تنها یك» ــ اصلهای موضوع (۱) یا (′۱)، مسلم گرفته شده است.

با توجه به‌اصل انحصاری، بدیهی است که رابطه‌های نظیر در (۲.۱) و (۳.۱) هم‌ارزند؛ یعنی هریك از آنها دیگری را ایجاب می‌کند. با وجود این، نقیض یك نابرابری غالباً مفهوم خیلی مفیدی است.

اگر دیدید که نمادهای «$<$» و «$>$» را باهم اشتباه می‌کنید توجه کنید که دریك نابرابری صحیح مانند ۲ $<$ ۳ یا ۳ $>$ ۲، طرف گشادگی نماد به‌سمت‌عدد بزرگتر است و حال آنکه طرف برآمدگی نماد به‌سمت عدد کوچکتر است.

۶.۱ حاصلضربهای دربردارندهٔ عددهای منفی

حاصلضرب یك عدد مثبت دریك‌عدد منفی، یا اینکه حاصلضرب دوعدد منفی، چه‌نوع عددی است؟ برای به‌دست‌آوردن پاسخهای این پرسشها، می‌توانیم اصلهای‌موضوع (۱) و (۲) و بعضی‌از نتایج آنهارا مورد استفاده قرار دهیم.

اگر $a \in P$ و $b \in N$، آن‌گاه بنابرجدول (۱) داریم $-b \in P$، وبنابراصل موضوع(۲)داریم $a(-b) \in P$. آن‌گاه‌بنابر تعریف عددمنفی، $-[a(-b)] \in N$؛ اما بنابرقوانین‌معمولی‌جبر در تعویض‌پرانتزها باعلامتهای‌منها $-[a(-b)] = ab$، زیرا:

$$-[a(-b)] = -[-(ab)] = ab.$$

بنابراین $ab \in N$، و نتیجهٔ زیر را داریم:

قضیهٔ ۱.۱ ab، حاصلضرب عدد مثبت a در عدد منفی b، عددی منفی است.

همچنین، اگـر $a \in N$ و $b \in N$، آن‌گاه بنا بـر جـدول (۱)، $-a \in P$ و $-b \in P$. پس بنابراصل‌موضوع (۲)، $(-a)(-b) \in P$. اما برطبق قوانین‌جبر، $(-a)(-b) = ab$، و بنابراین $ab \in P$. پس نتیجهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم:

قضیهٔ ۲.۱ ab، حاصلضرب عددهای منفی a و b، عددی مثبت است.

به‌ویژه، بنابرقضیهٔ اخیر و اصل‌موضوع (۲)، مربع هرعدد حقیقی غیرصفریك

عدد مثبت است. البته، $0 = 0^2$. پس یکی از ساده‌ترین ومفیدترین نتیجه‌ها در تمام نظریهٔ نابرابریها را به‌دست می‌آوریم:

قضیهٔ ۳.۱. هرعددحقیقی a در نابرابری $a^2 \geqslant 0$ صدق می‌کند. برابری برقرار است اگر و تنها اگر $a = 0$.

۷.۱ عددهای «مثبت» و «منفی»

تاکنون باید توانایی اصلهای موضوع (۱) و (۲) را تشخیص داده باشید. باید جالب باشد که بدانید حتی با استفادهٔ از آنها می‌توانید تعیین کنید کدام‌یك از عددهای حقیقی ناصفر متعلق به P، مجموعهٔ عددهای مثبت، و کدام‌یك متعلق به N، مجموعهٔ عددهای منفی، است ـــ گویی که تاکنون نمی‌دانستید!

برای این کار فعلا هرجا که مثبت و منفی بنابر اصلهای موضوع (۱) و (۲) مشخص شده باشند، آنها را داخل نشانه‌های نقل‌قول، به‌صورت «مثبت» و «منفی»، می‌نویسیم.

از عدد $a = 1$ شروع می‌کنیم. چون $a \neq 0$، از قضیهٔ ۳.۱ نتیجه می‌شود که $a^2 > 0$، بنابراین a^2 «مثبت» است. اما

$$a^2 = 1^2 = 1,$$

بنابراین ۱ «مثبت» است.

سپس $a = 2$ را امتحان می‌کنیم. نشان‌دادیم که ۱ «مثبت» است و $2 = 1 + 1$، وچون بنابر اصل موضوع (۲)، مجموع دوعدد «مثبت»، «مثبت» است، نتیجه می‌شود که ۲ «مثبت» است.

اکنون فرض کنیم $a = 1/2$؛ آن‌گاه $2a = 1$. بنابراین حاصلضرب عدد «مثبت» ۲ وعدد a، عدد «مثبت» ۱ است. اما اگر a «منفی» باشد، آن‌گاه بنابر قضیهٔ ۱.۱ حاصلضرب ۲ و a می‌بایست منفی باشد. بنابراین $a = 1/2$ باید «مثبت» باشد.

پس عددهای ۱، ۲ و ۱/۲ «مثبت» هستند و بنابراین طبق جدول (۱)، عددهای ۱ــ، ۲ــ و ۱/۲ــ «منفی» هستند.

اگر به‌همین‌ترتیب ادامه دهیم، می‌توانیم نشان دهیم که عددهای صحیح ۳ و ۴ و غیره، کسرهای ۱/۳، ۱/۴ و غیره؛ وکسرهای ۲/۳، ۴/۳، ۳/۴، ۵/۴ و غیره، «مثبت» هستند، و ازاین‌رو ۳ــ، ۴ــ و ۱/۳ــ و غیره «منفی» می‌باشند. بنابراین‌می‌توانیم تعیین کنیم که‌هرعددگویای‌مخالف‌صفر «مثبت» است یا «منفی» است.

بالاخره، با استفاده از فرایندهای حدی که در تعریف عددهای گنگ به‌کار می‌روند، همراه با آنچه درمورد «مثبت» و یا «منفی» بودن عددهای گویا می‌دانیم، می‌توانیم تعیین کنیم که یك عدد گنگ درهیأت‌مرتب و کامل* عددهای‌حقیقی، «مثبت» است یا «منفی» است. دراین کتاب، عددهای گنگ‌را به‌تفصیل‌مورد بحث قرارنخواهیم داد؛ شرح جالبی از عددهای گنگ درکتاب «اعداد: گویا و گنگ»[1] آمده است.

تمرین

۰۱ با رسم یك نمودار روی یك مقیاس خطی افقی با جهت مثبت از چپ به‌راست، نقطه‌های نمایش عددهای زیر را نشان دهید:

$$۳,\ -۱,\ ۰,\ -۱٫۵,\ \pi-۳,\ ۳-\pi,\ \sqrt{۲},\ ۲,\ -۲,\ -۳۰$$

این عددها را دوباره به‌ترتیب بزرگی بنویسید و نتیجه را به‌صورت یك نابرابری مانند $a<b<c$، وغیره ارائه دهید.

۰۲ در هریك ازگزاره‌های زیرکه دروغ (= نادرست) باشد روی نماد $\in$ یك خط

---

* دراینجا مرتب بدین معنی است که اصلهای موضوع (۱) و (۲) برقرارند و کامل اشاره به‌این‌خاصیت بنیادی است که اگر یك مجموعهٔ ناتهی از عددهای حقیقی دارای یك کران بالا باشد، آن‌گاه دارای یك‌کوچکترین‌کران بالاست. برای مثال مجموعهٔ تقریبهای گویای $\sqrt{۲}$، یعنی، $\{۱,\ ۱٫۴,\ ۱٫۴۱,\ ...\}$ دارای کران بالای ۲ یا ۱٫۵ است، و بنابراین‌دارای یك‌کوچکترین‌کران بالاست (که‌ما آن‌را با $\sqrt{۲}$ نشان‌می‌دهیم). نقطهٔ متناظر روی مقیاس خطی (نخستین صفحهٔ متن را ببینید)، مقیاس را به دو قسمت طرف راست و طرف چپ تقسیم می‌کند. چون لااقل یك عدد گویای «مثبت» ــ مانند ۱ یا ۱٫۴ ــ در قسمت طرف چپ وجود دارد، گوییم‌که $\sqrt{۲}$ «مثبت» است. در بخش ۷.۱ نشان داده‌ایم که عددهای‌گویا تنها به‌یك طریق می‌توانند مرتب شوند، و همچنین بیان کرده‌ایم‌که عددهای حقیقی تنها به‌یك‌طریق می‌توانند مرتب شوند. ویژگی مرتب کامل، یا هم‌ارز آن، درتعریف عددهای حقیقی برحسب عددهای‌گویا به‌کار می‌رود، و از این‌رو، به‌جای‌آنکه به‌عنوان یك اصل موضوع (۳) درمورد نابرابریها به‌کار رود بیشتر‌به‌عنوان یك اصل موضوع درمورد عددهای حقیقی درنظر گرفته می‌شود.

[1]. اعداد: گویا و گنگ، تألیف ایوان نیون، ترجمهٔ غلامحسین اخلاقی‌نیا (ریاضیات پیش‌دانشگاهی)، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۷.

مورب، به‌صورت $\notin$، رسم کنید.

(الف) $-۳ \in N$، (ب) $۰ \in P$،

(پ) $۵ \in O$، (ت) $\sqrt{۲} \in N$،

(ث) $(\pi - ۳) \in P$، (ج) $a^۲ \in N$،

(چ) $(a^۲ + ۱) \in P$، (ح) $-۲^۲ \in P$،

(خ) $(a^۲ + ۱) \in O$، (د) $-۳ \in P$.

۳. هرجای خالی را با P، N یا O چنان پر کنید که یك گزارهٔ راست به‌دست آید.

(الف) $\frac{۴۹}{۲۷۳} - \frac{۴۸}{۲۷۳} \in$ ـــــ،

(ب) $\frac{۷۲۱}{۸۳۸} - \frac{۷۲۱}{۸۳۷} \in$ ـــــ،

(پ) $\frac{-۲۵}{۳۲} - \frac{-۲۳}{۳۲} \in$ ـــــ،

(ت) $\frac{-۲۳}{۳۳} - \frac{-۲۳}{۳۲} \in$ ـــــ،

(ث) $\frac{۱}{-۲} - \frac{-۱}{-۲} \in$ ـــــ،

(ج) $۷^۲ - ۴(۲)(۶) \in$ ـــــ،

(چ) $۹۳\left(۷۲ + \frac{۱}{۲}\right) - ۹۳(۷۲) \in$ ـــــ،

(ح) $۹۳\left(۷۲ - \frac{۱}{۲}\right) - ۹۳(۷۲) \in$ ـــــ،

(خ) $\frac{۲+۳}{۴+۵} - \frac{۱}{۲}\left(\frac{۲}{۴} + \frac{۳}{۵}\right) \in$ ـــــ،

(د) $(-۳)^۲ - ۳^۲ \in$ ـــــ.

۴. هرجای خالی را با $>$، $<$، یا $=$ چنان پر کنید که یک گزارهٔ راست به‌دست آید.

(الف) $\frac{۴۹}{۲۷۳}$ ــــــ $\frac{۴۸}{۲۷۳}$،

(ب) $\frac{۷۲۱}{۸۳۸}$ ــــــ $\frac{۷۲۱}{۸۳۷}$،

(پ) $\frac{-۲۵}{۳۲}$ ــــــ $\frac{-۲۳}{۳۲}$،

(ت) $\frac{-۲۳}{۳۳}$ ــــــ $\frac{-۲۳}{۳۲}$،

(ث) $\frac{۱}{-۲}$ ــــــ $\frac{-۱}{-۲}$،

(ج) $۴(۲)(۶)$ ــــــ $۷^{۲}$،

(چ) $۹۳(۷۲)$ ــــــ $۹۳\left(۷۲+\frac{۱}{۲}\right)$،

(ح) $۹۳(۷۲)$ ــــــ $۹۳\left(۷۲-\frac{۱}{۲}\right)$،

(خ) $\frac{۱}{۲}\left(\frac{۲}{۴}+\frac{۳}{۵}\right)$ ــــــ $\frac{۲+۳}{۴+۵}$،

(د) $۳^{۲}$ ــــــ $(-۳)^{۲}$.

۵. اگر گزاره راست است حرف «T» و اگر گزاره دروغ است حرف «F» را در جای خالی بنویسید:

(الف) ــــــ $-۲ \geqslant -۳$ (ب) ــــــ $۰ \leqslant ۰$

(پ) ــــــ $۰ > -۱$ (ت) ــــــ $\frac{۱}{۲} < \frac{۱}{۳}$

(ث) $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}$ —— (ج) $-1 \leqslant 2$ ——

(چ) $\frac{3}{2} < \frac{3}{4}$ —— (ح) $-\frac{2}{5} \geqslant -\frac{3}{5}$ ——

(خ) $1-2^2 < -2^2$ —— (د) $1 < 0$ ——

۶. منفی هریك از عددهای زیر را بنویسید:

$$-2,\quad 3-\pi,\quad (3-\pi)^2,\quad \frac{a}{b-c},\quad 0,\quad \sqrt{b^2-4ac}\,.$$

۷. جاهای خالی‌را چنان پرکنید که رابطه‌هایی موجب وهم‌ارز با رابطه‌های سالب بیان شده به‌دست آید:

(الف) a —— b، $a \nless b$, (ب) a —— b، $a \neq b$,

(پ) a —— b، $a \ngtr b$, (ت) a —— b، $a \nleqslant b$,

(ث) a —— b، $a \ngeqslant b$, (ج) a —— b، $a \not\gtrless b$,

۸. نشان دهید که هرعدد مثبت p بزرگتر از هرعدد منفی n است.

۹. اگر برای دو عدد حقیقی a و b بتوانید نشان دهید که $a \geqslant b$ و $a \leqslant b$، چه نتیجه‌ای می‌توانید به‌دست آورید.

۱۰. اگر a_1، a_2، . . .، a_n مثبت باشند، باروش استقرای ریاضی از اصل‌موضوع (۲) نتیجه بگیرید که مجموع $a_1+a_2+\cdots+a_n$ و حاصلضرب $a_1a_2\cdots a_n$ نیز مثبت است. (تفسیرهای بخش ۶.۲ را ببینید.)

۱۱. با استفاده از اصلهای موضوع (۱) و (۲) نشان دهید که ۲/۳ یك‌عدد «مثبت» است.

فصل دوم

افزارهای کار

۱.۲ مقدمه

در مبحث نابرابریها، تنها فرضهای بنیادی کـه نهایتاً به‌کار می‌روند عبارت‌اند از دو اصل موضوعی که درفصل ۱ موردبحث قرارگرفتند، همراه بـا دستگاه عددهای حقیقی و قوانین آن، از قبیل قانون توزیعپذیری،استقرای ریاضی و غیره. اما چند قضیهٔ سادهٔ حاصل‌ازاین اصلهای موضوع درتوسعه وکاربرد این نظریه مکرر به‌کار می‌روند، که آنهارا تقریباً می‌توان «افزارهای‌کار» نامید.

این قضیه‌ها،یا قاعده‌های‌عملیاتی وبرهانهای آنها،به‌خودی‌خود جاذب‌وجالب توجه‌اند. علاوه‌براین، مثالی‌عالی از روش ریاضیدانان است که ازتعدادکمی فرض و مفهوم بنیادی و مهم، دستگاه کاملی از نتایج را می‌سازند. برهانها معمولاً کوتاه ولی باوجوداین‌کامل‌اند؛ وتنها درچندجایی ابتکارهایی به‌کار می‌روندکه ریاضیات را همان‌طورکه هست موضوعی سحرانگیز جلوه‌گر می‌سازد.

دراین فصل صورت بعضی‌از این قضیه‌ها را آورده، آنها را توضیح داده و اثبات کرده‌ایم. حروف a، b، c و غیره، که در بیان این قضیه‌ها به‌کار می‌روند به معنی‌عددهای‌حقیقی دلخواه هستند، مگر درمواردی‌که صریحاً محدودیتها ذکرشوند.

برای راحتی، قضیه‌ها، کـه گاهی‌اوقات آنها را قاعده‌ها خواهیم نامید، تنها برای حالت «$<$» بیان‌خواهندشد. درهرمورد، یك قاعدهٔ هم‌ارز برای «$>$» وجود

دارد. چنانکه متناظر بـا قاعدهٔ ترایایی «$>$» به صورت «اگر $a > b$ و $b > c$، آن گاه $a > c$»، قاعدهٔ هم‌ارز «اگـر $a < b$ و $b < c$، آن گـاه $a < c$» برای «$<$» وجود دارد.

به‌طریقی مشابه می‌توانید نظیر هریك‌از قاعده‌هایی را که در این فصل برای «$>$» بیان می‌شود بـرای «$<$» بسازید، اما مواظب دامهای ریاضی‌باشید!. اگـر قاعده‌ای برای اینکه تفاضل دومقدار دلخواه مثبت باشد، متضمن مضرب مثبتی مانند $c > ۰$ باشد آن‌گاه درقاعدهٔ متناظر «$<$» بازهم $c > ۰$ (یا اگر ترجیح می‌دهید $۰ < c$) خواهد بود، نه $c < ۰$. مثلا قاعدهٔ متناظر بـا «اگر $a > b$ و $c > ۰$، آن‌گاه $ac > bc$» عبارت است از «اگر $a < b$ و $c > ۰$، آن‌گاه $ac < bc$».

صورت هرقضیه درابتدای هربخش به‌دوپاراگراف تقسیم‌می‌شود. پاراگراف اول، ساده‌تر، مربوط به‌نماد نابرابری اکید «$>$»، وحاوی قسمت‌اصلی حکم‌است. پاراگراف دوم شامل نماد نابرابری آمیخته «$\geqslant$» است، وعلاوه‌براین گاهی تعداد دلخواه n مقدار حقیقی را شامل است. بنابراین پاراگراف دوم ازحالتی‌کلیتر بحث می‌کند و برابری را هم شامل است. معمولا تنها برای پاراگراف دوم قضیه برهان می‌آوریم، ولی می‌توان به آسانی آن را برای حالت خـاص پاراگراف اول به‌کار برد.

توضیحات قضیه‌ها دراین‌فصل، گاهی متضمن قاعدهٔ بیان‌شدهٔ مربوط به «$>$»، وگاهی متضمن قاعدهٔ استنباطی مربوط به «$<$» می‌باشند.

۲۰۲ ترایایی

قضیهٔ ۲۰۱۰۱ اگر $a > b$ و $b > c$، آن‌گاه $a > c$.

به طـور کلیتر؛ اگـر $a_۱ \geqslant a_۲$، $a_۲ \geqslant a_۳$، ...، $a_{n-۱} \geqslant a_n$، آن‌گـاه $a_۱ \geqslant a_n$. اگر و تنها اگر همهٔ aها برابر باشند، آن‌گاه $a_۱ = a_n$.

مثلا اگر مخارج شخصی خود را در نظر بگیرید و ملاحظه کنیدکـه روز پنجشنبه هزینهٔ شما بیشتراز هریك از دیگر روزهای عادی هفته* است، وهزینهٔ جمعهٔ شما لااقل به‌اندازهٔ روز پنجشنبه است، آن گاه می‌توانید نتیجه بگیرید که هزینهٔشما در جمعه بیشتراز هریك از روزهای عادی هفته است.

---

* منظور از ایام عادی هفته یکی‌از روزهای غیرتعطیل هفته است (درکشور مـا از شنبه تا پنجشنبه و درکشورهایی از دوشنبه تا شنبه است). ـــ م.

جواب تمرین ۱ از فصل ۱ را دوباره درنظر می‌گیریم

$$-۳<-۲<-۱٫۵<-۱<۳-\pi<۰<\pi-۳<\sqrt{۲}<۲<۳;$$

ممکن است این نابرابریها را تنها به این معنی بگیریم که هریك از نه عضو اول مجموعه کوچکتر از عضو بلافاصله بعد از آن است، مثلا: $-۳<-۲$، $-۲<-۱٫۵$ و غیره. اگر هم‌چنین باشد، باز هم از قاعدهٔ ترایایی فوق‌الذکر نتیجه می‌شود که هریك از این عددها کوچکتر از هر عدد بعدی است، مثلا $-۳<-۱٫۵$، $-۱<۲$، $۳-\pi<\sqrt{۲}$.

برهان. قاعدهٔ ترایایی را می‌توان با روش سادهٔ استقرای ریاضی ثابت کرد (توضیحات بخش ۶.۲ را ببینید). اما این اولین قاعده را با یك برهان‌مستقیم ساده درمورد چهار عدد حقیقی ثابت می‌کنیم.

فرض کنیم $a_۱\geqslant a_۲$، $a_۲\geqslant a_۳$ و $a_۳\geqslant a_۴$. بنا بر تعریف‌جبری نابرابری، هریك‌از مقدارهای $a_۱-a_۲$، $a_۲-a_۳$، و $a_۳-a_۴$ یا درمجموعهٔ P یا درمجموعهٔ O قرار دارد. پس بنابراصل موضوع (۲)، مجموع

$$(a_۱-a_۲)+(a_۲-a_۳)+(a_۳-a_۴)=a_۱-a_۴$$

یا در P یا در O قرار دارد؛ و متعلق به O است اگر و تنها اگر $a_۱-a_۲=۰$، $a_۲-a_۳=۰$ و $a_۳-a_۴=۰$. بنابراین $a_۱\geqslant a_۴$، و برابری برقرار است اگر و تنها اگر $a_۱=a_۲$، $a_۲=a_۳$ و $a_۳=a_۴$.

برهان حالت کلی در تمرین از خواننده خواسته شده است.

۳.۲ جمع

قضیهٔ ۲.۲. اگر $a>b$ و $c>d$، آن‌گاه $a+c>b+d$. اگر $a>b$، و c هرعدد حقیقی باشد، آن‌گاه $a+c>b+c$.

به‌طور کلیتر، اگر $a_۱\geqslant b_۱$، $a_۲\geqslant b_۲$، ...، $a_n\geqslant b_n$، آن‌گاه

$$a_۱+a_۲+\dots+a_n\geqslant b_۱+b_۲+\dots+b_n \qquad (۱.۲)$$

برابری در (۱.۲) برقرار است اگر و تنها اگر $a_۱=b_۱$، $a_۲=b_۲$، ...، $a_n=b_n$.

مثلا، اگر نابرابریهای $\sqrt{۲}>۱$ و $\pi>۳$ جمع شوند نتیجه می‌شود

$\sqrt{2}+\pi < 3+1$. این نابرابری که با $1=-1$ جمع شود نتیجه می‌شود $1-\pi+\sqrt{2} < 3$. و از جمع کردن همهٔ این پنج رابطه با هم به دست می‌آید $2-(\pi+\sqrt{2})3 < 10$.

برهان. مانند حالت ترایایی، دراین حالت هم می‌توان یك برهان استقرایی به‌کار برد. اما این بار، یك اثبات مستقیم حالت کلی ارائه‌می‌شود. از آنجاکه بنا به فرض هریك از مقدارهای a_1-b_1، ...، a_n-b_n متعلق به P یا متعلق‌به O هستند، بنا برتعمیم اصل موضوع (۲) که درتمرین ۱۰ از فصل ۱ داده شد، مجموع

$$(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots+(a_n-b_n)$$
$$=(a_1+\cdots+a_n)-(b_1+\cdots+b_n)$$

متعلق به P است مگر آنکه $a_1-b_1=0$، ...، $a_n-b_n=0$ که در این حالت متعلق به O خواهد بود. بنابراین:

$$a_1+a_2+\cdots+a_n \geqslant b_1+b_2+\cdots+b_n,$$

و برابری برقرار است اگر وتنها اگر $a_1=b_1$، ...، $a_n=b_n$.

۲.۴ ضرب در یك عدد

قضیهٔ ۲.۳. اگر $a>b$ و $c>0$، آن‌گاه $ac>bc$. اگر $a>b$ و $c<0$، آن‌گاه $ac<bc$.

به‌طور کلیتر، اگر $a\geqslant b$ و $c>0$، آن‌گاه $ac\geqslant bc$، و $ac=bc$ اگر و تنها اگر $a=b$. اگر $a\geqslant b$ و $c<0$، آن‌گاه $ac\leqslant bc$، و $ac=bc$ اگر و تنها اگر $a=b$.

پس، ضرب دو طرف یك نابرابری در یك عدد مثبت، نابرابری را تغییر نمی‌دهد، اما ضرب در یك عدد منفی جهت نابرابری را وارونه می‌کند. به‌ویژه، به‌ازای $c=-1$، اگر $a\geqslant b$، آن‌گاه $-a\leqslant -b$.

مثلاً، اگر $3>2$ را به‌ترتیب در ۱ و ۱ــ ضرب کنید، به‌ترتیب به‌دست می‌آید $3>2$ و $-3<-2$.

برهان. از فرض $a\geqslant b$، نتیجه می‌شود که یا $a-b\in P$ یا $a-b\in O$.

اگر $c \in P$، آن‌گاه از اصل موضوع (۲) نتیجه می‌شود که $c(a-b)=ca-cb$ یا متعلق به P یا متعلق به O است، یعنی $ca \geqslant cb$.

اما اگر $c \in N$، آن‌گاه از قضیهٔ ۱۰۱ نتیجه می‌شود که $c(a-b)$ یا متعلق به N یا متعلق به O است، بنابراین $-[c(a-b)]=cb-ca$ یا متعلق به P یا متعلق به O است، یعنی $cb \geqslant ca$.

در هردو حالت، برابری برقرار است اگر و تنها اگر $a=b$.

۵۰۲ تفریق

قضیهٔ ۴۰۲۰ اگر $a>b$ و $c>d$، آن‌گاه $a-d>b-c$. اگر $a>b$ و c هرعدد حقیقی باشد، آن‌گاه $a-c>b-c$.

به‌طور کلیتر، اگر $a \geqslant b$ و $c \geqslant d$، آن‌گاه $a-d \geqslant b-c$، و $a-d=b-c$ اگر و تنها اگر $a=b$ و $c=d$.

توجه کنید که d از a و c از b کم شده است نه c از a یا d از b.

مثلا از کم کردن نابرابریهای ۶ > ۷ و ۳ > ۵ از هم نتیجه می‌شود ۵ − ۶ > ۳ − ۷، یعنی ۱ > ۴؛ اما نابرابری ۳ − ۶ > ۵ − ۷ درست نیست. مثال دیگر توضیح این قاعده برجسب «>»، از نابرابریهای ۱۰ > ۵ − و ۳ − > ۴ − نتیجه‌می‌شود (۴ −) − ۱۰ > (۳ −) − ۵ −، یعنی ۱۴ > ۲ −.

برهان. با به‌کاربردن قاعدهٔ ضرب یك نابرابری در یك عدد منفی (قضیهٔ ۳۰۲) درمورد $c \geqslant d$، به‌دست می‌آوریم $-c \leqslant -d$، یعنی $-d \geqslant -c$، که در آن برابری برقرار است اگر و تنها اگر $c=d$. اکنون با به‌کاربردن قاعدهٔ جمع نابرابریها در مورد $a \geqslant b$ و $-d \geqslant -c$، به دست می‌آوریم

$$a+(-d) \geqslant b+(-c) \text{ یا } a-d \geqslant b-c،$$

که درآن $a-d=b-c$ اگر و تنها اگر $a=b$ و $c=d$.

تمرین

۱. نشان دهید که اگر $a<b$، آن‌گاه $a<\frac{1}{2}(a+b)<b$.

۲. نشان دهید که به‌ازای هر a، b، c و d داریم

$$(a^۲-b^۲)(c^۲-d^۲) \leqslant (ac-bd)^۲$$

و

$$(a^۲+b^۲)(c^۲+d^۲) \geqslant (ac+bd)^۲$$

و نشان دهید که برابری برقرار است اگر و تنها اگر $ad=bc$.

۳. نشان دهید که به‌ازای هر a و b داریم،

$$(a^۲-b^۲)^۲ \geqslant ۴ab(a-b)^۲$$

و برابری برقرار است اگر و تنها اگر $a=b$.

۴. قاعدهٔ عمومی ترایایی «$>$» را با روش استقرای ریاضی ثابت کنید.

۶.۲ ضرب

قضیهٔ ۵.۲. اگر $a>b>۰$ و $c>d>۰$، آن‌گاه $ac>bd$.
به‌طورکلیتر، اگر $a_۱ \geqslant b_۱>۰$، $a_۲ \geqslant b_۲>۰$، ...، $a_n \geqslant b_n>۰$، آن‌گاه

$$a_۱a_۲\cdots a_n \geqslant b_۱b_۲\cdots b_n. \qquad (۲.۲)$$

و برابری در (۲.۲) برقرار است اگر وتنها اگر $a_۱=b_۱$، $a_۲=b_۲$، ...، $a_n=b_n$.

بنابراین از $۱>۲$ و $۳>۴$ به‌دست می‌آورید $(۳)(۱)>(۴)(۲)$، یا $۳>۸$. اما توجه کنید که $-۲>-۱$ و $-۴>-۳$، ولی $(-۴)(-۲)<(-۳)(-۱)$؛ ازاین‌رو شرط‌مثبت‌بودن‌عددها ضروری‌است.

برهان. روش اثبات با استقرای ریاضی را به‌کار می‌بریم. شیوهٔ استاندارد این‌نوع اثبات از مرحله‌های زیر تشکیل شده است: حکمی راکه قرار است به‌ازای همهٔ مقادیر صحیح مثبت n ثابت شود، ابتدا برای عدد نخست یا دو عدد نخست آزمایش می‌کنیم، سپس با فرض آنکه حکم به‌ازای همهٔ عددهای صحیح کوچکتر و یا برابر با عدد صحیح معینی مانند $k-۱$ درست است، ثابت می‌کنیم که حکم به‌ازای عددصحیح بعدی، یعنی k، نیز درست‌است. چون k می‌تواند هرعدد صحیح

بزرگتر از یك باشد (به‌ویژه $k-1$ را ۱ یا ۲ بگیرید که حکم درمورد آنها ثابت شده است)، می‌توانیم نتیجه بگیریم که حکم واقعاً به‌ازای همهٔ عددهای صحیح مثبت درست است.

به‌ازای $n=1$، نتیجهٔ $a_1 \geqslant b_1$ از قضیهٔ ۵.۲، صرفاً تکراری از فرض قضیه است. این بررسی برای اولین مرحلهٔ برهان با روش استقرای ریاضی کافی است، ولی ما اثبات را به‌ازای $n=2$ نیز ارائه خواهیم داد؛ یعنی، نشان خواهیم داد که اگر $a_1 \geqslant b_1 > 0$ و $a_2 \geqslant b_2 > 0$، آن‌گاه $a_1a_2 \geqslant b_1b_2$.

نابرابری

$$a_1a_2 \geqslant b_1a_2 \tag{۳.۲}$$

از قانون ضرب نابرابری در یك‌عدد مثبت نتیجه می‌شود؛ برابری برقرار است اگر و تنها اگر $a_1=b_1$. نابرابری

$$b_1a_2 \geqslant b_1b_2 \tag{۴.۲}$$

نیز از همین قاعده نتیجه می‌شود و برابری برقرار است اگر و تنها اگر $a_2=b_2$. اکنون بنابرقاعدهٔ ترایایی، نابرابری موردنظر

$$a_1a_2 \geqslant b_1b_2 \tag{۵.۲}$$

از (۳.۲) و (۴.۲) نتیجه می‌شود (قضیهٔ ۱.۲)؛ در (۵.۲) برابری برقرار است اگر و تنها اگر در (۳.۲) و (۴.۲) برقرار باشد، یعنی، اگر و تنها اگر $a_1=b_1$ و $a_2=b_2$.

نشان داده‌ایم که نابرابری (۲.۲) به‌ازای $n=1$ و $n=2$ برقرار است.

فرض کنیم کـه نابرابری (۲.۲) به‌ازای $n=1, 2, \dots, k-1$ درست است، یعنی فرض‌کنیم به‌ازای حاصلضرب $k-1$ عدد، داریم:

$$a_1a_2\cdots a_{k-1} \geqslant b_1b_2\cdots b_{k-1} \tag{۶.۲}$$

و برابری برقرار است اگر و تنها اگر $a_1=b_1$، ...، $a_{k-1}=b_{k-1}$. سپس بنا بر قاعدهٔ ضرب در یك عدد مثبت (قضیهٔ ۳.۲)، وقتی نابرابری (۶.۲) را در a_k ضرب کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$(a_1a_2\cdots a_{k-1})a_k \geqslant (b_1b_2\cdots b_{k-1})a_k \tag{۷.۲}$$

که برابری برقرار است اگر و تنها اگر

$$a_۱a_۲\cdots a_{k-۱}=b_۱b_۲\cdots b_{k-۱}$$

همچنین، وقتی نابرابری $a_k \geqslant b_k$ را در $b_۱b_۲\ldots b_{k-۱}$ ضرب کنیم، ازهمان قاعده نتیجه می‌شود که

$$(b_۱b_۲\cdots b_{k-۱})a_k \geqslant (b_۱b_۲\cdots b_{k-۱})b_k \qquad (۸.۲)$$

که برابری برقرار است اگر و تنها اگر $a_k=b_k$. اکنون بنابر قاعدهٔ ترایایی، از (۷.۲) و (۸.۲) نتیجه می‌شود که

$$a_۱a_۲\cdots a_{k-۱}a_k \geqslant b_۱b_۲\cdots b_{k-۱}b_k$$

و برابری برقرار است اگر و تنها اگر $a_۱=b_۱$، $a_۲=b_۲$، ...، $a_k=b_k$.

۷.۲ تقسیم

قضیهٔ ۶.۲. اگر $b>۰$ و $a>b$ و $c>d>۰$، آن‌گاه $a/d>b/c$.
به‌ویژه، به‌ازای $a=b=۱$، اگر $c>d>۰$، آن‌گاه $۱/d>۱/c$.
به‌طور کلیتر، اگر $a\geqslant b>۰$ و $c\geqslant d>۰$، آن‌گاه $a/d\geqslant b/c$ و $a/d=b/c$ اگر و تنها اگر $a=b$ و $c=d$.

توجه کنید که a بر d و b بر c تقسیم می‌شود نه a بر c یا b بر d.
مثلاً از تقسیم نابرابریهای $۶<۷$ و $۳>۵$ برهم نتیجه می‌شود $۶/۵>۷/۳$؛ اما نابرابری $۶/۳>۷/۵$ غلط است.
همچنین از دو نابرابری مفروض نتیجه می‌شود که $۱/۶>۱/۷$ و $۱/۳>۱/۵$.

برهان. داریم

$$\frac{a}{d}-\frac{b}{c}=\frac{ac-bd}{cd}.$$

بنابراصل موضوع (۲)، مخرج کسر $cd\in P$، زیرا $c\in P$ و $d\in P$. همچنین چون $a\geqslant b$ و $c\geqslant d$، از قضیهٔ ۵.۲ نتیجه‌می‌شود که $ac\geqslant bd$؛ بنابراین صورت کسر

$ac-bd$، متعلق به P یـا متعلق بـه O است، و درواقع $ac-bd \in P$ مگر آنکه $a=b$ و $c=d$. بنا برقضیهٔ ۱.۰۱، حاصلضرب یك عدد منفی و یك عدد مثبت، عددی منفی است؛ اما حاصلضرب

$$cd\left(\frac{ac-bd}{cd}\right)$$

برابر با عدد نامنفی $ac-bd$، و cd مثبت است. بنا براین

$$\frac{ac-bd}{cd}=\frac{a}{d}-\frac{b}{c}$$

نامنفی است. پس $a/d \geqslant b/c$، و $a/d=b/c$ اگر وتنها اگر $a=b$ و $c=d$.

تمرین

۱. باتوجه به‌نابرابری

$$\left(\frac{۱}{\sqrt{a}}-\frac{۱}{\sqrt{b}}\right)^{۲} \geqslant ۰$$

نشان دهیدکه به‌ازای هر a و bی مثبت،

$$\frac{۲}{\left(\frac{۱}{a}\right)+\left(\frac{۱}{b}\right)} \leqslant \sqrt{ab}$$

تحت چه شرایطی برابری برقرار است؟

۲. نشان دهیدکه مجموع یك‌عدد مثبت و معکوس آن لااقل برابر با ۲ است؛ یعنی نشان دهیدکه به‌ازای هرعدد مثبت a؛

$$a+\frac{۱}{a} \geqslant ۲\,.$$

برابری به‌ازای چه مقداری از a برقرار است؟

۳. نشان دهیدکه به‌ازای هر a، b و c؛

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca.$$

۴. نشان دهید که به‌ازای هر a و b؛

$$(a^2-b^2)(a^4-b^4) \leqslant (b^3-b^3)^2$$

و

$$(a^2+b^2)(a^4+b^4) \geqslant (a^3+b^3)^2.$$

۵. نشان دهید که به‌ازای هر a، b و cی نامنفی،

$$a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2 \geqslant 6\,abc.$$

۶. نشان دهید که به‌ازای همهٔ مقادیر a و b که در نابرابری $ab \geqslant 0$ صدق می‌کنند داریم:

$$(a^2-b^2)^2 \geqslant (a-b)^4$$

و به‌ازای همهٔ مقادیر a و b که در نابرابری $ab \leqslant 0$ صدق می‌کنند، داریم:

$$(a^2-b^2)^2 \leqslant (a-b)^4 .$$

۷. نشان دهید که به‌ازای همهٔ مقادیر a و b که در نابرابری $a+b \geqslant 0$ صدق می‌کنند، داریم:

$$a^3+b^3 \geqslant a^2b+ab^2.$$

۸. درهریك از تمرینهای ۳ تا ۷، تعیین کنید که تحت‌چه‌شرایطی برابری برقرار است.

۸.۲ توانها و ریشه‌ها

قضیهٔ ۲.۷. اگر $a > b > 0$، m و n عددهای صحیح مثبت، و $a^{1/n}$ و $b^{1/n}$ نمایانگر ریشه‌های nام مثبت باشند، آن‌گاه:

$$a^{m/n} > b^{m/n} \quad , \quad b^{-m/n} > a^{-m/n}$$

به‌طور کلیتر، اگر $a \geqslant b > 0$، m یك عدد صحیح نامنفی، n یك عدد صحیح مثبت، و $a^{1/n}$ و $b^{1/n}$ نمایانگر ریشه‌های nام مثبت باشند، آن‌گاه:

$$a^{m/n} \geqslant b^{m/n}\ ,\quad b^{-m/n} \geqslant a^{-m/n} \tag{۹.۲}$$

و $a^{m/n} = b^{m/n}$ و $b^{-m/n} = a^{-m/n}$ اگر و تنها اگر یا $a = b$ (۱)، یا $m = 0$ (۲).

به ازای $a = 9$ و $b = 4$، بعضی از مقادیر $a^{m/n}$، $b^{m/n}$، $b^{-m/n}$ و $a^{-m/n}$ در جدول (۲) نموده شده است. به‌ازای هرمقدار مثبتی از m/n مشاهده خواهید کرد که $9^{m/n} > 4^{m/n}$، درحالی که $4^{-m/n} > 9^{-m/n}$.

جدول ۲. نمونه‌هایی از توانهای عددها

$\frac{m}{n}$	$9^{m/n}$	$4^{m/n}$	$4^{-m/n}$	$9^{-m/n}$
۰	۱	۱	۱	۱
$\frac{1}{2}$	۳	۲	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
۱	۹	۴	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$
$\frac{3}{2}$	۲۷	۸	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{27}$
۲	۸۱	۱۶	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{81}$

برهان. اگر $m = 0$، آن‌گاه $1 = a^{-m/n} = b^{-m/n} = b^{m/n} = a^{m/n}$، و در این‌حالت در (۹.۲) برابری برقرار است.

اگر $m \neq 0$، آن‌گاه بنا برقاعدهٔ ضرب نابرابریها (قضیهٔ ۵.۲)؛ $a^m \geqslant b^m$، و برابری برقراراست اگر وتنها اگر $a = b$. اگر نابرابری $a^{1/n} < b^{1/n}$ درست می‌بود، آن‌گاه‌نابرابری $(a^{1/n})^n < (b^{1/n})^n$ یا $a < b$ نیز می‌بایست‌درست‌باشد، اما، بنا به فرض $a \geqslant b$، از این‌رو $a^{1/n} \geqslant b^{1/n}$. بنابراین $a^{m/n} \geqslant b^{m/n}$ و $a^{m/n} = b^{m/n}$ اگر وتنها اگر $a = b$.

برای نماهای منفی، فرض می‌کنیم

$$a^{m/n}=c, \quad b^{m/n}=d$$

آن‌گاه

$$a^{-m/n}=\frac{1}{c}, \quad b^{-m/n}=\frac{1}{d}$$

چون نشان داده‌ایم که

$$c \geqslant d,$$

از قضیهٔ ۶.۲ نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{d} \geqslant \frac{1}{c};$$

یعنی

$$b^{-m/n} \geqslant a^{-m/n},$$

و برابری برقرار است اگر و تنها اگر $c=d$، یعنی $a=b$.
این قاعده را می‌توان برای توانهای گنگ منفی و مثبت نیز تعمیم داد.

تمرین

۱. نشان دهید که به‌ازای هر a و b؛

$$\frac{a+b}{2} \leqslant \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{1/2}$$

تحت چه شرایطی برابری برقرار است؟

۲. اگر a، b، c و d مثبت باشند (و c و d گویا باشند)، آن‌گاه نشان دهید که

$$(a^c-b^c)(a^d-b^d) \geqslant 0$$

و

$$a^{c+d}+b^{c+d} \geqslant a^c b^d + a^d b^c.$$

برابریها تحت چه شرایطی برقرارند؟

۳. نابرابری دوم در تمرین ۲، در حالتهای $c=d=۱$ و $c=d=۱/۲$ به چه صورتهایی تبدیل می‌شود؟

۴. اگر $bd > ۰$، نشان دهید که $a/b \leqslant c/d$ اگر و تنها اگر $ad \leqslant bc$، و در هریك از اینها برابری برقرار است اگر وتنها اگر در دیگری برقرار باشد.

۵. نشان دهیدکه اگر $a/b \leqslant c/d$، آن‌گاه

$$\frac{a+b}{b} \leqslant \frac{c+d}{d},$$

و برابری برقرار است اگر و تنها اگر $ad=bc$.

۶. نشان دهیدکه اگر $a/b \leqslant c/d$، و a، b، c و d مثبت باشند، آن‌گاه

$$\frac{a}{a+b} \leqslant \frac{c}{c+d},$$

و برابری برقرار است اگر و تنها اگر $ad=bc$.

۷. نشان دهیدکه اگر $a/b \leqslant c/d$، و b، و d مثبت باشند، آن‌گاه

$$\frac{a}{b} \leqslant \frac{a+c}{b+d} \leqslant \frac{c}{d},$$

و برابری برقرار است اگر و تنها اگر $ad=bc$.

۸. با استفاده ازتمرین (۴)، تحقیق کنیدکه چهار نابرابری نتیجهٔ تمرینهای ۵، ۶ و ۷، به‌ازای مقادیر $a=۲$، $b=۳$، $c=۵$ و $d=۶$ برقرارند.

۹. درهریك از قاعده‌های ترایایی، جمع، ضرب در یك عدد، تفریق، ضرب، تقسیم، تـوان و ریشه، نظیر آنچه در پـاراگراف اول برای «$>$» بیان شده است، قاعدهٔ هم‌ارز مربوط به «$<$» را بنویسید.

فصل سوم

قدر مطلق

۱.۳ مقدمه

همان‌طوری که به‌یاد دارید، در فصل ۱، نابرابری $a > b$ برحسب مجموعهٔ عددهای مثبت، P، تعریف شد. همچنین به‌یاد می‌آورید که برای صحت بعضی از قضیه‌های فصل ۲، ازقبیل قضیهٔ ۵.۲ مربوط به‌ضرب نابرابریها، ذکراینکه بعضی‌از عددهایی که به‌کار می‌روند باید مثبت باشند ضروری بود. همچنین در توانهای کسری عددهایی کــه در قضیهٔ ۷.۲ به‌کار رفتند، وقتی عددها منفی باشند ممکن است توانهای آنها حقیقی نباشند؛ برای مثال $a^{1/2}$ را به‌ازای $a = -9$ درنظر بگیریــد. بسیاری از نابرابریهای‌اساسی، که درفصل ۴ به‌دست خواهند آمد شامل توانهای کسری عددها می‌باشند. پس طبیعی است که غالباً مجبور شویم توجه خودرا به عددهای مثبت، یا به‌عددهای نامنفی (عددهای مثبت و صفر)، محدود کنیم.

در مسألــه‌های کاربردی شامل نابرابریها غالباً با وزنها، حجم‌ها و غیره و با قدر مطلق بعضی اشیاء ریاضی، از قبیل عددهای حقیقی، عددهای مختلط و بردارها، سر وکار داریم. همهٔ این اندازه‌ها با عددهای نامنفی نموده می‌شوند. حتی اگر مخیر باشید که برد را با عدد مثبت و باخت را بـا عدد منفی نشان دهید، بازهم باخت ۳ تومــان دارای مقدار بیشتری از باخت ۲ تومان است؛ قدر مطلق ۳ — بزرگتر از قدرمطلق ۲ — است.

در این فصل به‌منظور کاربرد در نابرابریها درفصلهای بعد، قدرمطلق عددهای حقیقی را تعریف و بعضی از ویژگیهای آن را بررسی خواهیم کرد. همچنین نمودارهای بعضی‌از تابعهای جالب، و نسبتاً «خارج از رده»، مربوط به‌قدرمطلقها را ارائه می‌دهیم و ایده‌های جدیدی درمورد آنها معرفی می‌کنیم.

۲.۳ تعریف

قدر مطلق عدد حقیقی a که با $|a|$ نشان داده می‌شود، به‌راههای متنوع، اماهم‌ارز تعریف می‌شود. بعضی‌از این تعریفها را در اینجا بررسی می‌کنیم.

تعریف. قدر مطلق عددحقیقی a، یعنی $|a|$، برابر با a تعریف‌می‌شود هر گاه a مثبت یا صفر باشد، و برابر با $-a$ تعریف می‌شود هرگاه a منفی باشد.

مثلاً، $|۲| = ۲$، $|۰| = ۰$، و $|-۲| = -(-۲) = ۲$.

اشکال اصلی تعریف بالا آن است که برای عملیات جبری مناسب نیست. مثلا (قضیهٔ ۲.۳ راکه در این فصل می‌آید ببینید) برای اثبات اینکه به‌ازای هر a و b نابرابری زیر درست است

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|$$

می‌توانید حالتهای مختلف راکه در زیر می‌آیند یك‌یك بررسی کنید: a و b هر دو مثبت، یکی مثبت و یکی منفی، هردومنفی، یکی صفر و یکی مثبت، یکی صفر و یکی منفی، وهر دوصفر باشند.اما بهتر است که به‌شیوه‌های استانداردجبری، برهانی شامل همهٔ حالتها را ارائه دهیم؛ این برهان بعداز اینکه تعریفی دیگر از قدر مطلق اما هم‌ارز با تعریف بالا، و برحسب توانهای دوم و ریشه‌های دوم، بیان شد، در بخش ۸.۳ خواهد آمد.

تعریف بالا را به‌صورتی کمی متفاوت بیان می‌کنیم:

قدر مطلق عدد حقیقی a، یعنی $|a|$، صفر است هرگاه $a \in O$، و در غیر این صورت $|a|$ عضو مثبت مجموعهٔ $\{a, -a\}$ است.

مثلاً، اگر $a = ۲$، آن‌گاه $|a|$ عضو مثبت مجموعهٔ $\{۲, -۲\}$، یعنی ۲ است؛ اگر $a = -۲$، آن‌گاه $|a|$ عضو مثبت مجموعهٔ $\{-۲, -(-۲)\}$ یعنی ۲ است. اما این توصیف $|a|$ نیز همان اشکالهای جبری تعریف قبلی‌را دارد.

۳.۳ نمادهای خاص

دو توصیف بعدی $|a|$، به‌دو نماد کارا، $\max\{\ \}$ و $\{\ \}^{+}$ بستگی دارد که هم‌اکنون آنها را تعریف خواهیم کرد.

به ازای هر مجموعهٔ $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$ از عددهای حقیقی، نماد $\max\{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$، بزرگترین عدد آن مجموعه را مشخص می‌کند.

اگر مجموعه تنها از یك یا دو عضو تشکیل شده باشد، بازهم در این ارتباط می‌گوییم «بزرگترین»؛ و اگر بیش‌از یك عضو مجموعه بزرگترین مقدار را داشته باشد، آن‌گاه هریك از آن عضوها را بزرگترین مقدار می‌شناسیم. مثلا

$$\max\{-۳, -۱\}=-۱, \quad \max\{۴, ۴\}=۴$$

$$\max\{۳, ۷, ۰, -۲, ۵\}=۷$$

با قدری زحمت می‌توان عملیات حسابی را روی عبارتهای شامل نماد $\max\{\ \}$ انجام داد؛ مثلاً،

$$\frac{(\max\{۴, -۳\})(\max\{۰, ۵\})+\max\{-۴, ۴\}-\max\{-۹, -۸\}}{۲\max\{۱, ۴\}}$$

$$=۴ .$$

به‌ویژه، $\max\{a, -a\}$ را درنظر بگیرید؛ اگر $a=۲$، آن‌گاه

$$\max\{a, -a\}=\max\{۲, -۲\}=۲=|a|;$$

اگر $a=-۳$، آن‌گاه

$$\max\{a, -a\}=\max\{-۳, -(-۳)\}=۳=|a|;$$

اگر $a=۰$، آن‌گاه

$$\max\{a, -a\}=\max\{۰, ۰\}=۰=|a|;$$

و غیراینها. بنابراین بدازای هر a؛

$$\max\{a, -a\}=|a| \qquad (۱.۳)$$

بنابراین، (۱.۳) توصیف دیگری از $|a|$ است.

اکنون به‌بررسی دومین نماد خاص می‌پردازیم.

اگر لااقل یك عضو نامنفی درمجموعهٔ $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$ وجود داشته باشد، آن‌گاه نماد $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}^+$، بزرگترین عضو مجموعهٔ $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$ را مشخص می‌کند، اما اگر همهٔ عضوهای آن مجموعه منفی باشند، آن‌گاه آن نماد، صفر را مشخص می‌کند.

مثلاً

$$\{-۳, -۱\}^+ = ۰, \quad \{۴, ۴\}^+ = ۴, \quad \{۳, ۷, ۰, -۲, ۵\}^+ = ۷ .$$

مانند نماد $\max\{\ \}$، عملیات حسابی روی عبارتهای شامل نماد $\{\ \}^+$ ممکن ولی همراه با زحمت است؛ مثلاً،

$$\frac{(\{۴, -۳\}^+)(\{۰, ۵\}^+) + \{-۴, ۴\}^+ - \{-۹, -۸\}^+}{۲\{۱, ۴\}^+} = ۳ .$$

همان‌طور که ازمثالهای بالا برمی‌آید، نمادهای $\max\{\ \}$ و $\{\ \}^+$ هم‌ارز نیستند؛ درواقع، از تعریف این نمادها به‌آسانی می‌توانید معلوم کنید که:

$$\{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}^+ = \max\{۰, a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$$
$$= \max\{۰, \max\{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}\}.$$

بنا براین نتیجه می‌شود که

$$\{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}^+ \geqslant \max\{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\},$$

که در آن برابری برقرار است اگر و تنها اگر لااقل یك عضو نامنفی در مجموعهٔ $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$ وجود داشته باشد.

از این‌رو، چون مجموعهٔ خاص $\{a, -a\}$ بهازای هر a، دارای یك عضو نامنفی است، داریم

$$\{a, -a\}^+ = \max\{a, -a\} = |a| .$$

بنا براین، معادلهٔ

$$\{a, -a\}^+ = |a|$$

نیز می‌تواند به‌عنوان تعریف $|a|$ درنظر گرفته شود.

تمرین

۱. مقدار هریك از عبارتهای زیر را تعیین کنید.

(الف) $\max\{-۷, -۴, -۱\}$ (ب) $\max\{۳, \pi, \sqrt{۲}\}$

(پ) $\max\{-۷, ۰, -۱\}$ (ت) $\max\{۰, ۴, ۱\}$

(ث) $\max\{۳, -۳, ۳\}$ (ج) $\{-۷, -۴, -۱\}^+$

(چ) $\{۳, \pi, \sqrt{۲}\}^+$ (ح) $\{-۷, ۰, -۱\}^+$

(خ) $\{۰, ۴, ۱\}^+$ (د) $\{۳, -۳, ۳\}^+$

۲. به ازای هر مجموعهٔ $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$ از عددهای حقیقی، نماد $\min\{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$، کوچکترین عضو مجموعهٔ $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$ و نماد $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}^-$ کوچکترین عضو مجموعهٔ $\{۰, a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$ را نشان می‌دهد. مقدار هر یك از عبارتهای زیر را تعیین کنید.

(الف) $\min\{-۷, -۴, -۱\}$ (ب) $\min\{۳, \pi, \sqrt{۲}\}$

(پ) $\min\{-۷, ۰, -۱\}$ (ت) $\min\{۰, ۴, ۱\}$

(ث) $\min\{۳, -۳, ۳\}$ (ج) $\{-۷, -۴, -۱\}^-$

(چ) $\{۳, \pi, \sqrt{۲}\}^-$ (ح) $\{-۷, ۰, -۱\}^-$

(خ) $\{۰, ۴, ۱\}^-$ (د) $\{۳, -۳, ۳\}^-$

۳. مقدار عبارت زیر را معین کنید.

$$(\max\{-۱, -۲\})(\{-۱, -۲\}^+)-(\min\{۱, ۲\})(\{۱, ۲\}^-).$$

۴. نشان دهید که

$$\max\{\max\{a, b, c\}, \max\{d, e\}\}=\max\{a, b, c, d, e\}.$$

۵. با یك مثال نشان دهید که نابرابری زیر همیشه برقرار نیست.

$$\max\{a, b\}+\max\{c, d\} \geqslant \max\{a, b, c, d\}.$$

۶. نشان دهید که

$$\{a,\ b\}^+ + \{c,\ d\}^+ \geqslant \{a,\ b,\ c,\ d\}^+.$$

۷. نشان دهید که

$$\begin{aligned}\{a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n\}^+ &\geqslant \max\{a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n\}\\ &\geqslant \min\{a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n\}\\ &\geqslant \{a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n\}^-.\end{aligned}$$

آیا مجموعه‌ای وجود دارد که به‌ازای آن در هر سه مورد نابرابری اکید برقرار باشد.

۸. نشان دهید که اگر $a = \max\{a,\ b,\ c\}$، آن گاه

$$-a = \min\{-a,\ -b,\ -c\}.$$

۹. نشان دهید که $\{-a,\ -b\}^- = -\{a,\ b\}^+$.

۱۰. نشان دهید که

$$\max\{a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n\} = \max\{a_1,\ \max\{a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_n\}\}.$$

۴.۳ ملاحظات نموداری

با نمایش نموداری تصویری واضح و برجسته از رفتار تابع به‌دست می‌آید. تابع می‌تواند تغییرات روزانهٔ دما، نوسانهای بازار بورس، $|x|$، و هرچیزدیگر باشد. با یك نگاه به‌نمودار می‌توانیم بعضی از ویژگیهای کل تابع را مشاهده‌کنیم، و از راه دیگر این ویژگیها مشاهده نشوند.

برای مثال، ملاحظهٔ نمودارهای

$$y = \max\left\{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2},\quad -\frac{3}{4}x - \frac{7}{4}\right\}$$

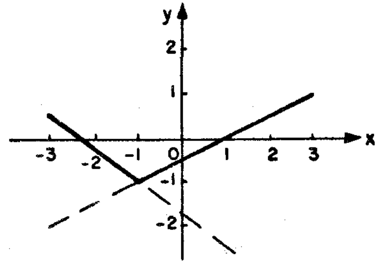
و

$$y = \left\{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2},\quad -\frac{3}{4}x - \frac{7}{4}\right\}^+,$$

که به ترتیب در شکلهای ۱.۳ و ۲.۳ با خط تیره نشان داده شده‌اند نمادهای $\max\{\ \}$ و $\{\ \}^+$ را بامعنی‌تر می‌سازد. در این شکلها، دنبالهٔ نمودارهای

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2},\quad y=-\frac{3}{4}x-\frac{7}{4}$$

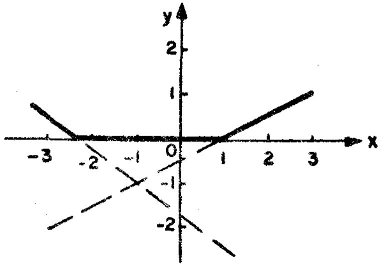
با خطهای مقطع مشخص شده‌اند.



شکل ۱۰۳

نمودار $y=\max\left\{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{4}x-\frac{7}{4}\right\}$

$-3\leqslant x\leqslant 3$



شکل ۲۰۳

نمودار $y=\left\{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{4}x-\frac{7}{4}\right\}^{+}$

$-3\leqslant x\leqslant 3$

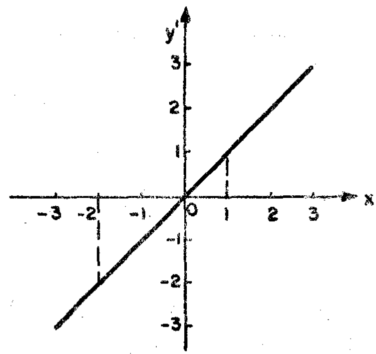
اکنون نمودار تابعی را که بامعادلهٔ $y=|x|$ تعریف شده است رسم می‌کنیم. با این نمودار، توصیفی بصری از قدر مطلق به دست می‌آید. برای مقاصد ما کافی خواهد بود که این نمودار را به‌صورت ناتمام و فقط درفاصلهٔ $-3\leqslant x\leqslant 3$ رسم کنیم.

برای ترسیم این نمودار، مفید و جالب است که ابتدا نمودار $y'=x$، یعنی نمودارمجموعهٔ زوجهای مرتب $(x\ ,\ y')$ ازعددهای حقیقی را به‌طوری که $y'=x$، و همچنین نمودار $y''=-x$ راکه به‌ترتیب در شکلهای ۳۰۳ و ۴۰۳ نشان داده شده‌اند، در نظر بگیریم.

از این شکلها و از تعریف

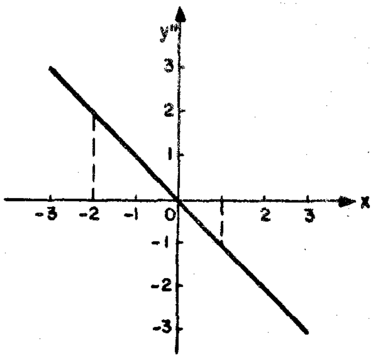
$$|x|=\max\{x,\ -x\}=\max\{y',\ y''\}$$

می‌توانید فوراً ببینید که نمودار $y=|x|$، همان‌طوری که درشکل ۵۰۳ نشان داده شده همان نمودار $y=\max\{y',\ y''\}$ است. بنابراین به ازای هرطول x، از عرضهای y' و y'' شکلهای ۳۰۳ و ۴۰۳ آنکه بزرگتر است به عنوان عرض y در



شکل ۳.۳

نمودار $y' = x$ ، $-۳ \leqslant x \leqslant ۳$



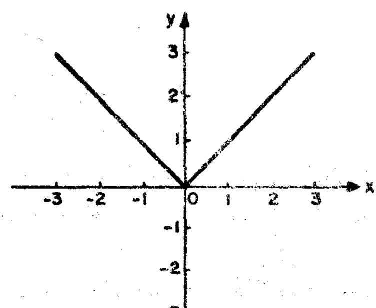
شکل ۴.۳

نمودار $y'' = -x$ ، $-۳ \leqslant x \leqslant ۳$

شکل ۵.۳ انتخاب شده است. برای مثال، وقتی $x = -۲$، عرض بزرگتر $y'' = ۲$ است؛ وقتی $x = ۱$، عرض بزرگتر $y' = ۱$ است، و غیره.

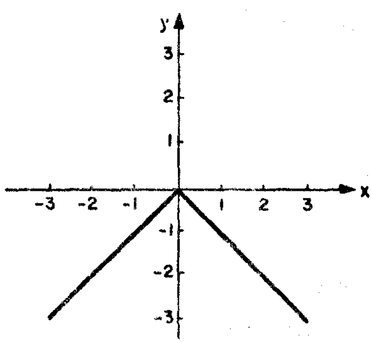
شکل ۶.۳ نمودار $y = -|x|$ را نشان می‌دهد.

با نگاه‌کردن به چهار نمودار در شکلهای از ۳.۳ تا ۶.۳، ملاحظه خواهید کرد که برای هرمقدار طول x هریك از عرضهای متناظر کمتراز $-|x|$ یا بیشتراز $|x|$ نیست. از شکلهای ۳.۳، ۵.۳ و ۶.۳ صریحاً می‌توانید نتیجهٔ زیر را ببینید، که



شکل ۵.۳

نمودار $y = |x|$ ، $-۳ \leqslant x \leqslant ۳$



شکل ۶.۳

نمودار $y = -|x|$ ، $-۳ \leqslant x \leqslant ۳$

البته شاید آن‌را بدون درنظرگرفتن نمودارها کشف و ثابت کرده باشید:

قضیهٔ ۰.۳. به‌ازای هرعدد حقیقی داریم:

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a| \cdot$$

برابری اول برقرار است اگر و تنها اگر $a \leqslant ۰$ و برابری دوم برقرار است اگر و تنها اگر $a \geqslant ۰$.

قضیهٔ ۱.۳ از اینکه $a = -|a|$ اگر $a \in N$ یا $a \in O$، و $a = |a|$ اگر $a \in P$ یا $a \in O$، و اینکه (تمرین ۸ از فصل ۱ را ببینید) هر عدد مثبت بزرگتراز هرعدد منفی است نتیجه می‌شود.

اکنون به‌عنوان تمرین، نمودارهای بعضی از تابعهای پیچیده‌تر شامل قدرمطلق را درنظر می‌گیریم.

ابتدا نمودار

$$y = \frac{۱}{۲}(x + |x|)$$

را درنظر می‌گیریم. به‌ازای $x \geqslant ۰$ داریم $x = |x|$، و بنابراین

$$y = \frac{۱}{۲}(x + x) = x\,;$$

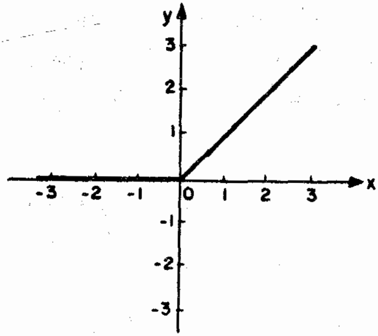
به‌ازای $x < ۰$ داریم $-x = |x|$، بنابراین

$$y = \frac{۱}{۲}(x - x) = ۰\,.$$

این نمودار در شکل ۷.۳ نشان داده شده است. می‌توانستیم از روی شکلهای ۳.۳ و ۵.۳ میانگین عرضهای y و y' را برای هرطول x ببینیم و نمودار را به‌دست آوریم.

خوب است توجه کنید که نمودار نشان داده شده در شکل ۷.۳، نمودار $y = \max\{۰, x\}$ وهمچنین‌نمودار $y = \{x\}^+$ نیز هست. بنابراین به‌ازای هر x؛

$$\{x\}^+ = \max\{۰, x\} = \frac{۱}{۲}(x + |x|)$$



شکل ۷۰۳

نمودار $y=\frac{1}{2}(x+|x|)$ ، $-3\leqslant x\leqslant 3$

اکنون نمودار

$$y=2|x+1|+|x|+|x-1|-3 \qquad (2.3)$$

در فاصلهٔ $2\geqslant x\geqslant -2$ را درنظر می‌گیریم. به‌ازای $x\geqslant 1$، جمله‌های طرف راست (۲۰۳) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$2|x+1|=2x+2,\ |x|=x,\ |x-1|=x-1,\ -3=-3,$$

بنابراین به‌ازای $x\geqslant 1$ داریم:

$$y=2x+2+x+x-1-3=4x-2.$$

به‌ازای $1>x>0$ اولین دوعضو سمت راست (۲۰۳) مانند قبل نوشته‌می‌شوند، امـا $|x-1|=1-x$، نه اینکه $|x-1|=x-1$. (می‌تـوانید دلیل آن را توضیح دهید؟) ازاین‌رو به‌ازای $1>x>0$ داریم:

$$y=2x+2+x+1-x-3=2x.$$

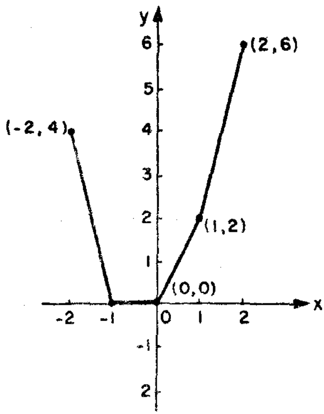
همچنین به‌ازای $0\geqslant x\geqslant -1$ داریم:

$$y=2x+2-x+1-x-3=0;$$

و به‌ازای $-1>x$ داریم:

$$y=-2x-2-x+1-x-3=-4x-4.$$

بنابراین معادلهٔ (۲.۳) در هریك از فاصله‌های فوق‌الذکر، با معادلهٔ خطی متفاوتی هم‌ارز است. از رسم پاره‌خطهای متناظر با این معادله‌ها در هریك از فاصله‌ها، نمودار پیوسته‌ای به‌دست می‌آید که درشکل ۸.۳ نشان داده شده است.



شکل ۸.۳

نمودار $y=۲|x+۱|+|x|+|x-۱|-۳$

$-۲ \leqslant x \leqslant ۲$

تمرین

۱. با ملاحظهٔ شکلهای ۴.۳، ۵.۳ و ۶.۳، مشابه با قضیهٔ ۱.۳ که برای a بیان شد نتیجهٔ مربوط به $-a$ را به‌دست آورید.

۲. نمودارهای معادله‌های زیر را به‌ازای $۳ \leqslant x \leqslant -۳$ رسم کنید.

(الف) $y=\frac{۱}{۲}(x-|x|)$، (ب) $y=\frac{۱}{۲}(|x|-x)$،

(پ) $y=-\frac{۱}{۲}(x+|x|)$.

۳. معین کنید که کدام یك از نمودارهای تمرین ۲، نمودار یکی از تابعهای زیر نیز هست.

(ت) $y=\min\{\circ,\ x\}$، (ث) $y=\max\{\circ,\ -x\}$،
(ج) $y=\min\{\circ,\ -x\}$، (چ) $y=\{x\}^-$،
(ح) $y=\{-x\}^+$، (خ) $y=\{-x\}^-$.

۴. نمودار هریك از معادله‌های زیر را در فاصلهٔ $-۳ \leqslant x \leqslant ۳$ رسم کنید.

(الف) $y=\max\{x,\ -x-۲\}$، (ب) $y=\min\{x,\ -x-۲\}$،
(پ) $y=\{x,\ -x-۲\}^+$، (ت) $y=\{x,\ -x-۲\}^-$.

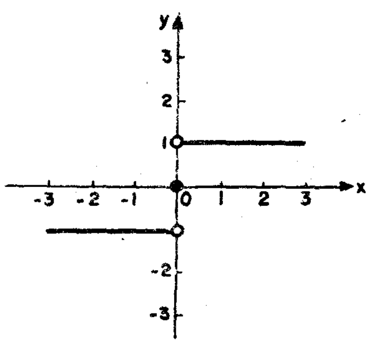
۵. نمودار معادلهٔ زیر را درفاصلهٔ $-۳ \leqslant x \leqslant ۳$ رسم کنید.

$$y=۲|x-۱|-|x|+۲|x+۱|-۵.$$

۶. تابع f که با $y=f(x)$ تعریف شده است زوج نامیده می‌شود هر گاه به‌ازای هر x داشته باشیم $f(-x)=f(x)$، وفرد نامیده می‌شود هر گاه بــه ازای هر x داشته باشیم $f(-x)=-f(x)$. بنا بر این تابعی‌که با $y=x^۲$ تعریف شده زوج است، زیرا $(-x)^۲=x^۲$، و تابعی‌کــه با $y=x^۳$ تعریف شده فرد است، زیــرا $(-x)^۳=-x^۳$، البته بعضی‌از تابعها نه زوج‌اند ونه‌فرد. تابعهایی‌که نمودارهای آنها درشکلهای از ۳.۳ تا ۶.۳ نموده شده‌است،کدامها زوج وکدامها فرد هستند؟

۵.۳ تابع «علامت»

تابع دیگری‌که با $|x|$ ارتباط نزدیك دارد درشکل ۹.۳ نموده شده است. این‌تابع با $y=\text{sgn}\ x$ (بخوانید «علامت x»، و آن را با $\sin x$ اشتباه نکنید)،مشخص، و



شکل ۹.۳ نمودار $y=\text{sgn}\ x$ در فاصلهٔ $-۳ \leqslant x \leqslant ۳$.

با معادله‌های زیر تعریف می‌شود:

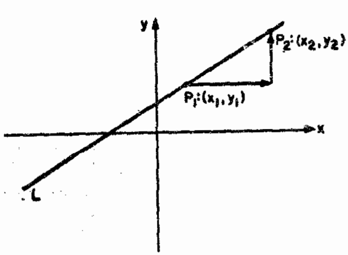
$$\operatorname{sgn} x = +1, \qquad x > 0 \text{ به‌ازای}$$
$$\operatorname{sgn} x = 0 \quad, \qquad x = 0 \text{ به‌ازای} \qquad (۳.۳)$$
$$\operatorname{sgn} x = -1, \qquad x < 0 \text{ به‌ازای}$$

برای تأکید این حقیقت که نمودار،نقطه‌های متناظر با $(1, 0)$ و $(-1, 0)$ را شامل نیست اما نقطهٔ $(0, 0)$ را شامل است، دو نقطهٔ اول با دایره‌های توخالی و نقطهٔ سوم، یعنی مبدأ، با دایرهٔ توپر نموده شده‌اند.

ارتباط تابع $y = \operatorname{sgn} x$ با تابع $y = |x|$ ازطریق مفهوم شیب، که در زیر تعریف می‌شود، صورت می‌گیرد.

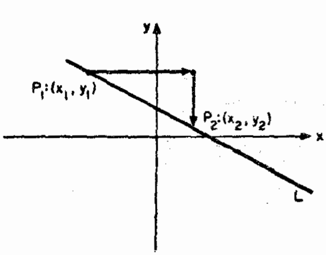
فرض‌کنیم L در صفحهٔ مختصات یك خط غیرقائم باشد و $P_1:(x_1, y_1)$ و $P_2:(x_2, y_2)$ دو نقطهٔ متمایز روی L باشند، (شکلهای ۱۰.۳ و ۱۱.۳ را ببینید). در رفتن از P_1 به P_2، حرکت قائم فاصلهٔ جهت‌دار $y_2 - y_1$ است، و حرکت افقی عبارت است از فاصلهٔ جهت‌دار $x_2 - x_1 \neq 0$. البته هریك از این دو ممکن است منفی باشند، چنان‌که در شکل ۱۱.۳، حرکت قائم $y_2 - y_1$ منفی است (درحقیقت یك سقوط است). نسبت حرکت‌قائم به‌حرکت افقی‌که به‌ازای همهٔ زوجهای نقاط متمایز P_1 و P_2 واقع بر L مقداری ثابت است، شیب خط L تعریف می‌شود، وآن را با m نشان می‌دهیم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



شکل ۱۰.۳

خط L با شیب مثبت



شکل ۱۱.۳

خط L با شیب منفی

با توجه به‌شکلهای ۳.۳ و ۴.۳، به‌سادگی می‌توانید ثابت کنید که شیبهای نمودارهای خطی $y=x$ و $y=-x$ به‌ترتیب ۱ و ۱− هستند.

اکنون شیب نمودار $y=|x|$، شکل ۵.۳، و همزمان آن، عرض نمودار $y=\operatorname{sgn} x$، شکل ۹.۳، را درنظر بگیرید.

به‌ازای $x>0$، نمودار $y=|x|$ برنمودار خطی $y=x$ منطبق و دارای شیب $m=1$، و نمودار $y=\operatorname{sgn} x$ به عرض $y=1$ است.

به‌ازای $x<0$، نمودار $y=|x|$ برنمودارخطی $y=-x$ منطبق ودارای شیب $m=-1$، و نمودار $y=\operatorname{sgn} x$ به عرض $y=-1$ است.

به ازای $x=0$، شیب نمودار $y=|x|$ تعریف نشده است، اما می‌توانید بگویید که درنقطهٔ $(0, 0)$، شیب طرف راست برابر با ۱ و شیب طرف چپ برابر با ۱− است. میانگین این دو شیب برابر $[1+(-1)]/2=0$، و نمودار $y=\operatorname{sgn} x$ نیز به‌ازای $x=0$ به عرض $y=0$ است.

بنابراین $y=|x|$ و $y=\operatorname{sgn} x$ به‌طورهندسی به‌صورت زیر باهم مربوط‌اند:

مقدار $y=\operatorname{sgn} x$، به ازای $x\neq 0$ برابر است با مقدار شیب نمودار $y=|x|$، و به‌ازای $x=0$ برابراست بامیانگین مقادیر شیبهای راست و چپ این نمودار در مبدأ.

در تجزیه و تحلیل دو تابع نسبتاً سادهٔ $y=|x|$ و $y=\operatorname{sgn} x$، باید به این نکته متوجه شده باشید که نمودار $y=|x|$ ازآن رو جالب است که شیب آن پیوسته نیست، و جالبتر آنکه نمودار $y=\operatorname{sgn} x$ خود ناپیوسته است. در این جا قصد نداریم پیوستگی و ناپیوستگی را تعریف کنیم، دراینجا این مفهومها به‌طور شهودی واضح‌اند.

ارتباط تابع $y=\operatorname{sgn} x$ با تابع $y=|x|$ را به‌روش آموزندهٔ دیگری نیز می‌توان نشان داد؛ باکمی تعمق درمی‌یابیم که به‌ازای هرعدد حقیقی a داریم:

$$a \cdot \operatorname{sgn} a=|a| ;$$

این معادله توصیف دیگری از قدرمطلق عدد a را به‌دست می‌دهد.

تمرین

۱. به‌ازای $-3 \leqslant x \leqslant 3$، خطهایی را رسم کنید که از نقطهٔ $(0, 0)$ می‌گذرند و دارای شیبهای زیر هستند.

الف) $m=0$، ب) $m=\frac{2}{3}$، پ) $m=-1$

۲. آن قسمت از نمودارهای هریك از معادله‌های زیر را رسم کنیدکه در مربع $-1 \leqslant x \leqslant 1$، $-1 \leqslant y \leqslant 1$ قرار دارند.

الف) $y=x$، ب) $y=x+1$، پ) $y=x+2$،

ت) $y=x+3$، ث) $y=x-1$، ج) $y=x-2$.

۳. نمودارهای هریك از معادله‌های زیر را به‌ازای $-3 \leqslant x \leqslant 3$ رسم کنید.

الف) $y=(x+1)\operatorname{sgn} x$، ب) $y=x\operatorname{sgn}(x+1)$.

۴. به‌ازای $-3 < x < 3$، نمودار (x, y) را رسم کنیدکه به‌ازای هر x، اگر شیب نمودار شکل ۶.۳ معین باشد، مقدار y برابر است با این شیب، و اگر شیب آن نمودار معین نباشد، مقدار y برابر است با میانگین شیبهای راست و چپ آن.

۶.۳ نمودارهای نامعادله‌ها

قبل از اینکه مبحث نمودارها راکه از راه چشم آموزش می‌دهند تـرك کنیم، چند نامعادله شامل قدرمطلق‌ها را بررسی می‌کنیم. برای مثال، معادلهٔ

$$|x|=1$$

و نامعادلهٔ

$$|x| \leqslant 1$$

را درنظر بگیرید. معادله تنها دو جواب دارد:

$$x=1, \quad x=-1;$$

اما جواب نامعادله را تمامی فاصلهٔ زیر تشکیل می‌دهد.

$$-1 \leqslant x \leqslant 1$$

همچنین، معادلهٔ

$$|x-۱|=۲$$

تنها دارای دو جواب

$$x=۳ \quad \text{و} \quad x=-۱$$

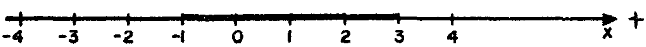
است، اما هرمقدار x که در نابرابری

$$-۱ \leqslant x \leqslant ۳$$

صدق می‌کند، جوابی از نامعادلهٔ

$$|x-۱| \leqslant ۲$$

است. شکل ۱۲.۳ را نگاه کنید.



شکل ۱۲.۳ نمودار نامعادلهٔ $|x-۱| \leqslant ۲$.

برای به‌دست‌آوردن جواب نامعادلهٔ

$$|x|+|y| \leqslant ۱, \qquad (۴.۳)$$

مقادیر را درهریك از ربعهای صفحهٔ $(x,\ y)$ جداگانه در نظر می‌گیریم؛ در ربع اول که $x \geqslant ۰$ و $y \geqslant ۰$، نامعادلهٔ (۴.۳) هم‌ارز است با

$$x+y \leqslant ۱.$$

پس قسمتی از خط $x+y=۱$ یا $y=۱-x$ راکه در ربع اول قرار دارد رسم می‌کنیم؛ و چون جواب

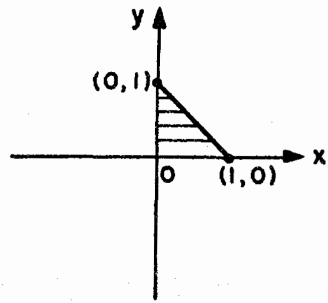
$$y \leqslant ۱-x$$

را جستجو می‌کنیم، نمودار مورد نظر از نقاطی تشکیل شده است که در این ربع زیر این خط یا واقع برآن قرار دارند.

این قسمت از نمودار در شکل ۱۳.۳ نشان داده شده است. تمامی نمودار نامعادلهٔ (۴.۳) مطابق شکل ۱۴.۳ به‌دست می‌آید.

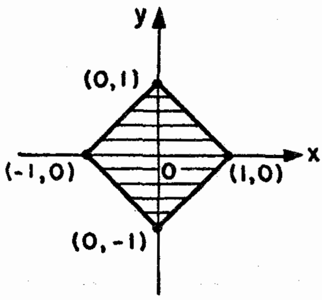
شکل ۱۳.۳ همچنین می‌تواند به عنوان نمودار جواب مجموعهٔ نامعادله‌های زیر درنظرگرفته شود

$$x+y \leqslant ۱$$
$$x \geqslant ۰ \qquad (۵.۳)$$
$$y \geqslant ۰$$



شکل ۱۳.۳

نمودار $|x|+|y| \leqslant ۱$، $x \geqslant ۰$، $y \geqslant ۰$



شکل ۱۴.۳

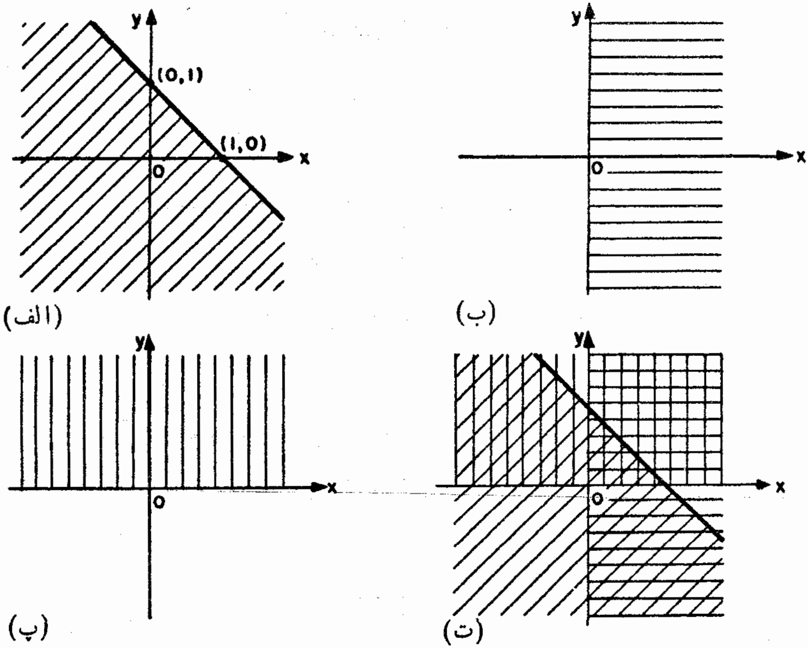
نمودار $|x|+|y| \leqslant ۱$

در شکل ۱۵.۳ ناحیه‌های هاشور خوردهٔ (الف)، (ب) و (پ)، به‌ترتیب جواب اولین، دومین و سومین نامعادلهٔ (۵.۳) می‌باشند؛ ناحیه‌ای که در (ت) سه بار هاشور زده‌شده جواب توأم همهٔ نامعادله‌های (۵.۳) است. بنا براین اگرچه هیچ‌جفت (x, y) درمجموعهٔ معادله‌های

$$x+y=۱$$
$$x=۰$$
$$y=۰$$

صدق نمی‌کند، اما تمامی یك ناحیه جواب مجموعهٔ نامعادله‌های (۵.۳) است.

به‌یاد می‌آورید که، تا اندازه‌ای مشابه با آنچه گفته شد، معادلهٔ $|x| = ۱$ تنها دو جواب دارد درصورتی‌که نامعادلهٔ $|x| \leqslant ۱$ دارای یك فاصله ازجوابهاست. بنا براین مجموعهٔ همهٔ جوابهای یك نامعادله (یا مجموعه‌ای از نابرابریها)، غالباً خیلی«غنی‌تر» از مجموعهٔ همهٔ جوابهای‌معادله (یا مجموعه معادله‌های) متناظر است.



شکل ۱۵۰۳ نمودار ناتمام (الف) $x+y \leqslant 1$، (ب) $x \geqslant 0$ و (پ) $y \geqslant 0$؛ نمودار سه‌بار هاشورخوردهٔ (ت) که اشتراك (الف)، (ب)، و (پ) است.

تمرین

۱. درشکل ۱۵۰۳ (ت)، صفحه به‌هفت ناحیهٔ مختلف هاشورخورده تقسیم شده‌است. هرناحیه، همراه بـا نقطه‌های کرانیش جواب مجموعه‌ای از سه نامعادله را تشکیل می‌دهد؛ بـرای مثال، یکی از این مجموعه‌هـا عبارت است از $x \leqslant 0$، $y \geqslant 0$، $x+y \leqslant 1$. مجموعه‌های نامعادله‌های نظیر هریك از این ناحیه‌ها را ارائه دهید.

۲. نمودار هریك از نامعادله‌های زیر را رسم کنید:

(الف) $|x|-|y| \geqslant 1$ به‌ازای $-2 \leqslant x \leqslant 2$،

(ب) $|x|+2|y| \leqslant 1$.

۰۳ نمودار دستگاه نامعادله‌های زیر را رسم کنید.

$$y \leqslant x + ۳$$

$$-۲ \leqslant x \leqslant ۲$$

$$y \geqslant ۰$$

۰۴ نمودار دستگاه نامعادله‌های زیر را رسم کنید

$$۲x + y \leqslant ۵$$

$$x - y \leqslant ۱$$

$$x + ۲y \leqslant ۷۰$$

۰۵ نمودار دستگاه نامعادله‌های زیر را رسم کنید

$$۲x + y \geqslant ۵$$

$$x - y \geqslant ۱$$

$$x + ۲y \geqslant ۷۰$$

۷۰۳ توصیف جبری

توصیف بعدی و آخر ما از $|a|$ ممکن است در نگاه اول به‌عنوان یک تعریف، نامطلوبترین به‌نظر برسد، زیرا چنین می‌نماید که گمراه‌کننده وغیرطبیعی باشد؛ ولی این توصیف دارای این‌ویژگی است که ازنظر جبری دلخواهترین است، وازاین‌رو آن‌را غالباً به‌کار خواهیم برد.

به‌آنچه در زیر می‌آید توجه کنید:

اگر $a = -۲$، آن‌گاه $a^۲ = (-۲)^۲ = ۴$، پس $|a| = ۲ = \sqrt{۴}$، یعنی $|a| = \sqrt{a^۲}$؛

اگر $a = ۰$، آن‌گاه $a^۲ = ۰^۲ = ۰$، پس $|a| = ۰ = \sqrt{۰}$، یعنی $|a| = \sqrt{a^۲}$؛

اگر $a = ۲$، آن‌گاه $a^۲ = ۲^۲ = ۴$، پس $|a| = ۲ = \sqrt{۴}$، یعنی $|a| = \sqrt{a^۲}$.

به‌طور مشابه به‌ازای هرعدد حقیقی دیگر a خواهیم داشت:

$$\sqrt{a^۲}=|a|$$

و این توصیف جبری ما از $|a|$ است.

توصیف $|a|=\sqrt{a^۲}$ درواقع حالت $b=۰$ رابطهٔ فیثاغورس

$$c=\sqrt{a^۲+b^۲},$$

است که رابطهٔ بین درازاهای ضلعهای a و b و وتر c از یك مثلث قائم‌الزاویه است. بنابراین،قدر مطلق عدد حقیقی a می‌تواند به‌عنوان درازا یا اندازهٔ پاره‌خطی تعبیر شود که روی مقیاس خطی مبدأ را به‌نقطهٔ نمایش a وصل می‌کند (شکل ۱۰۱). خواننده‌ای که مطالعهٔ ریاضیات‌را ادامه دهد یاد خواهدگرفت که این آخرین توصیف قدرمطلق (و همراه با آن مفهوم هندسی درازا) می‌تواند به‌طور خاص تعمیم داده شود که بتوان قدر مطلق را برای دیگر اشیاء ریاضی، ازقبیل بردارها و عددهای مختلط، نیز تعریف کرد.

دربارهٔ عبارت جبری بالا مربوط به $|a|$، دو نکته لازم به تذکر است: اول آنکه $a^۲$ نامنفی است‌که ریشه‌های دوم آن حقیقی هستند، و دوم آنکه بنابرتعریف، نماد $\sqrt{\ }$ به‌معنی ریشهٔ‌دوم نامنفی‌است. یقین‌داریم‌که $۴=(\pm۲)^۲$، یعنی ۴ دارای دو ریشهٔ‌دوم ۲+ و ۲−، است؛ اما درعملیات جبری،نماد $\sqrt{۴}$ تنها ۲ را نمایش می‌دهد، نه ۲− را. برای مثال، معادله‌های

$$۵+\sqrt{۴}=۷,\quad ۵-\sqrt{۴}=۳$$

و معادله‌های

$$۵-\sqrt{۴}=۷,\quad ۵+\sqrt{۴}=۳\,,$$

را درنظر بگیرید. تنها به‌این‌دلیل که نماد $\sqrt{\ }$ همیشه به‌معنی ریشهٔ دوم نامنفی‌است، دو معادلهٔ اول معتبر و دو معادلهٔ دوم نامعتبرند. همچنین به‌همین دلیل است که در فرمول آشنای جوابهای معادلهٔ درجهٔ دوم،

$$ax^۲+bx+c=۰,\quad a\neq ۰,$$

علامت $\pm$ قبل‌از نماد $\sqrt{\ }$ ظاهر می‌شود، یعنی

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}\,.$$

تمرین

۱. بنابر رابطهٔ فیثاغورس می‌توانید مشاهده کنید کــه مجموعهٔ جوابهای (یا مکان هندسی) نقطه‌های (x, y) که در معادلهٔ

$$x^۲+y^۲=r^۲$$

صدق می‌کنند، دایره‌ای به‌مرکز مبدأ و به‌شعاع r را تشکیل می‌دهد. مقادیر (x, y) مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ زیر را تعیین کنید:

$$x^۲+y^۲ \leqslant ۲۵ \; .$$

۲. قدر مطلق عدد مختلط $x+iy$ با

$$|x+iy|=\sqrt{x^۲+y^۲}$$

تعریف می‌شود. اگر $x+iy$ را با نقطه‌ای درصفحهٔ مختصات (x, y) نمایش‌دهیم، مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ زیر را معین کنید.

$$۱\leqslant|x+iy|\leqslant ۲ \; .$$

۳. مکان هندسی نقطه‌های $x+iy$ را معین کنید که در معادلهٔ زیر صدق کنند

$$|x+iy+۱|=|x+iy-۱| \, .$$

۸.۳ نابرابری «مثلث»

نابرابری (۶.۳) قضیهٔ (۲.۳) زیر، که قبلا در این فصل به‌آن اشاره کـرده‌ایم، به دلایل هندسی که درآینده در فصل ۴ موردبحث قرار خواهدگرفت، غالباً نابرابری «مثلث» نامیده می‌شود. حکم‌کامل مربوط به‌این نابرابری به‌صورت زیر است:

قضیهٔ ۲.۳. به‌ازای همهٔ عددهای حقیقی a و b؛

$$|a|+|b| \geqslant |a+b| \qquad (۶.۳)$$

برابری برقرار است اگر وتنها اگر $ab \geqslant ۰$، یعنی، اگر و تنها اگر a و b هردونامنفی یا هردو نامثبت باشند.

برای مثال، اگر $a=۵$ و $b=-۲$، آن‌گاه

$$|a+b|=|۵+(-۲)|=۳,$$

درصورتی که

$$|a|+|b|=|۵|+|-۲|=۷.$$

اما اگر $a=-۵$ و $b=-۲$، آن گاه

$$|a+b|=|(-۵)+(-۲)|=۷$$

و

$$|a|+|b|=|-۵|+|-۲|=۷.$$

درستی نابرابری (۶.۳) را به‌طور شهودی بدین‌ترتیب می‌توانید تجسم کنید که اگر a و b دارای علامتهای مخالف باشند، آن گاه در طرف راست نابرابری «علیه یکدیگر» کار می‌کنند و آنچه پس از این برخورد نتیجه می‌شود تفاوت قدرمطلقهاست درصورتی که درطرف‌چپ‌درهرحال قدرمطلقها به‌هم افزوده می‌شوند.

برهمین مبنا می‌توانید نابرابری

$$|a-b| \geqslant ||a|-|b|| \qquad (۷.۳)$$

را تجسم کنید، که درآن برابری برقراراست اگر و تنها اگر $ab \geqslant ۰$ (یعنی اینکه a و b هردو نامنفی یا هردو نامثبت هستند). دراینجا درطرف راست این‌نابرابری، همواره تفاوت قدر مطلقها حاصل می‌شود، درصورتی که درطرف چپ، اگر a و b با علامتهای مخالف باشند، آن گاه قدرمطلقها روی‌هم جمع می‌شوند.

نابرابریهای (۶.۳) و (۷.۳) را می‌توان با به کاربردن تعریف جبری $|a|=\sqrt{a^۲}$ ثابت کرد. چه، نابرابری (۶.۳) را می‌توان به‌گونهٔ دیگر اما هم‌ارز چنین بیان کرد.

$$\sqrt{a^۲}+\sqrt{b^۲} \geqslant \sqrt{(a+b)^۲}. \qquad (۸.۳)$$

اما، (۸.۳) هم‌ارز است با:

$$(\sqrt{a^۲}+\sqrt{b^۲})^۲ \geqslant (a+b)^۲. \qquad (۹.۳)$$

یعنی، درستی هر کدام از (۸.۳) یا (۹.۳) درستی دیگری را ایجاب می‌کند. مثلا (۹.۳) از (۸.۳) با به‌توان دوم رساندن به‌دست می‌آید (قضیهٔ ۵.۲ را ببینید)، و

(۸.۳) از (۹.۳) با گرفتن ریشه‌های دوم نامنفی نتیجه‌می‌شود (قضیهٔ ۷.۲ را ببینید).
ازطرف‌دیگر، (۹.۳) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت،

$$a^2+2\sqrt{a^2b^2}+b^2\geqslant a^2+2ab+b^2.$$

ازاین‌رو، بنا برقانونهای نابرابریها درمورد جمع، تفریق و ضرب دریك‌عدد مثبت، (۹.۳) با نابرابری

$$\sqrt{a^2b^2}\geqslant ab \qquad (۱۰.۳)$$

هم‌ارز است. اما

$$\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{(ab)^2}=|ab|,$$

پس (۱۰.۳) هم‌ارز است با

$$|ab|\geqslant ab. \qquad (۱۱.۳)$$

بنابراین (۶.۳) با (۱۱.۳) هم‌ارز است.

اما بنا برقضیهٔ ۱.۳، نابرابری (۱۱.۳) برقرار است، زیرا بیان می‌کند که هرعدد حقیقی از قدرمطلق خودکوچکتر یا با آن برابر است. برابری در (۱۱.۳) برقراراست اگروتنها اگر $ab\geqslant 0$. بنابراین‌نابرابری (۶.۳)که هم‌ارز با (۱۱.۳) است نیز معتبر است و درآن، برابری برقرار است اگر و تنها اگر $ab\geqslant 0$.

به‌طورمشابه، نابرابری (۷.۳) نیز بعدازآنکه به‌صورت هم‌ارز

$$\sqrt{(a-b)^2}\geqslant\sqrt{(\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2})^2}$$

نوشته شود می‌تواند ثابت شود. به‌هرحال، جالب است توجه شود که (۷.۳) را نیز می‌توان مستقیماً از (۶.۳) به‌دست آورد. چه، جایگزینی عدد حقیقی $a-b$ به‌جای عدد حقیقی دلخواه a در (۶.۳) نتیجه می‌دهدکه

$$|a-b|+|b|\geqslant|a-b+b|,$$

یا

$$|a-b|+|b|\geqslant|a|,$$

که ازآن بنا برقضیهٔ ۴.۲، قاعدهٔ تفریق، نتیجه می‌شودکه

$$|a-b|\geqslant|a|-|b| \qquad (۱۲.۳)$$

همچنین، جایگزینی $b-a$ به‌جای b در (۶.۳) نتیجه می‌دهد

$$|a|+|b-a| \geqslant |a+b-a|,$$

یا

$$|a|+|a-b| \geqslant |b|,$$

که از آن نتیجه می‌شود که

$$|a-b| \geqslant |b|-|a|. \qquad (۱۳.۳)$$

چون

$$\big||a|-|b|\big| = \max\{(|a|-|b|),\ -(|a|-|b|)\}$$
$$= \max\{(|a|-|b|),\ (|b|-|a|)\},$$

از (۱۲.۳) و (۱۳.۳) نتیجه می‌شود که

$$|a-b| \geqslant \big||a|-|b|\big|.$$

بنابراین (۷.۳) درست است و در آن برابری برقرار است اگر و تنها اگر در (۱۲.۳) و (۱۳.۳) برابری برقرار باشد.

چون در به‌دست‌آوردن (۱۲.۳)، $a-b$ را به‌جای a قرار دادیم، برابری در (۱۲.۳) برقرار است اگر و تنها اگر $(a-b)b \geqslant 0$، یعنی، $ab \geqslant b^2$. نابرابری آخری درست است اگر و تنها اگر $ab \geqslant 0$ و $|a| \geqslant |b|$. همچنین برابری در (۱۳.۳) برقرار است اگر و تنها اگر $a(b-a) \geqslant 0$، یعنی $ab \geqslant a^2$. این نابرابری درست است اگر و تنها اگر $ab \geqslant 0$ و $|b| \geqslant |a|$. چون لااقل یکی از نابرابریهای $|b| \geqslant |a|$ و $|a| \geqslant |b|$ برقرار است، نتیجه می‌شود که در (۷.۳) برابری برقرار است اگر و تنها اگر $ab \geqslant 0$.

چون b یک عدد حقیقی دلخواه ــ مثبت، صفر و یا منفی ــ را نمایش می‌دهد، ملاحظه می‌شود که اگر b با $-b$ تعویض شود، نابرابریهای (۶.۳) و (۷.۳) باز هم برقرارند. بنابراین از (۶.۳) به‌دست می‌آوریم

$$|a|+|b| \geqslant |a-b| \qquad (۱۴.۳)$$

و از (۷.۳) به‌دست می‌آوریم

$$|a+b| \geqslant \big||a|-|b|\big| \qquad (۱۵.۳)$$

که در هردو برابری برقرار است اگر و تنها اگر $a(-b)\geqslant 0$، یعنی $ab\leqslant 0$.
نابرابریهای (۶.۳)، (۷.۳)، (۱۴.۳) و (۱۵.۳) را رویهم می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$|a|+|b|\geqslant|a\pm b|\geqslant\big||a|-|b|\big|. \qquad (۱۶.۳)$$

تمرین

۱. با استفاده از توصیف جبری قدرمطلق نشان دهید که به‌ازای همهٔ عددهای حقیقی a و b داریم:

(الف) $|-a|=|a|$، (ب) $|ab|=|a|\cdot|b|$،

و اگر $b\neq 0$، آن‌گاه

(پ) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$.

۲. معین کنید که کدام یک از علامتهای $>$ یا $=$ در نابرابری آمیختهٔ $\big||a|-|b|\big|\leqslant|a-b|$ برقرار است، هرگاه

(الف) $a=\pi$، $b=۲\pi$؛ (ب) $a=-\pi$، $b=\sqrt{۲}$؛

(پ) $a=۲$، $b=۰$؛ (ت) $a=-۹$، $b=-۱۰$؛

(ث) $a=۹$، $b=-۱۰$.

۳. تعیین کنید که کدام یک از علامتهای $>$ یا $=$ در نابرابری آمیختهٔ $|a+b|\leqslant|a|+|b|$، برقرار است، هرگاه

(الف) $a=۳$، $b=-۲$؛ (ب) $a=-۳$، $b=-۲$؛

(پ) $a=۳$، $b=۲$؛ (ت) $a=۰$، $b=-۲$؛

(ث) $a=۰$، $b=۰$.

۴. تمرین ۲ را برای نابرابری $\big||a|-|b|\big|\leqslant|a+b|$ تکرار کنید.

۵. تمرین ۳ را برای نابرابری $|a-b|\leqslant|a|+|b|$ تکرار کنید.

۶. نشان دهید کـه نابرابری $||a|-|b||\geqslant|a-b|$ با نابرابری $|ab|\geqslant ab$ هم‌ارز است.

۷. نشان دهید که اگر $ab\geqslant 0$، آن‌گاه $ab\geqslant\min\{a^2, b^2\}$.

۸. نشان دهید که هریك از ویژگیهای توصیفی دیگر $|a|$، که دراین فصل داده شده است از $|a|=\sqrt{a^2}$ نتیجه می‌شود.

فصل چهارم

نابرابریهای کلاسیک

۱.۴ مقدمه

اکنون که افزارهای بنیادی خودرا ساخته‌ایم، شگفت‌انگیزی ریاضیات را بیشترشرح خواهیم داد. همان‌گونه که یك‌هنرمند با چندخط، منظره‌هایی بسیار زیبا را روی یك پارچه نقل‌می‌کند،وهمان‌گونه که یك موسیقیدان از ترکیب چند نت آهنگهای لطیفی‌را ابداع می‌کند، به‌همان‌گونه، یك‌ریاضیدان‌هم درچندمرحلهٔ کوتاه‌منطقی‌مؤثر نتیجه‌هایی با زیبایی ساده پدیدار مـی‌سازد. این نتیجه‌ها، علی‌رغم سادگی آنها، غالباً همانند محصول‌عصای‌شعبده‌باز کاملا مرموز به‌نظرمی‌رسند، مگرآنکه منشأ آنها مشاهده‌شود.

دراین‌فصل، نتیجه‌های‌بنیادی به‌دست‌آمده درفصلهای قبلی را به‌کار می‌گیریم تا بعضی از نابرابریهای خیلی‌مهم در رشتهٔ آنالیز ریاضی را به‌دست آوریم. این نابرابریها، افزارهای‌کار روزمرهٔ متخصصین این‌رشته از ریاضیات هستند.

سپس درفصل ۵، نشان خواهیم دادکه چطور این‌رابطه‌های جدید را می‌توان درحل مسأله‌های جالبی به‌کار بردکه در اولین نگاه خیلی دور ازجبر و نابرابریها به‌نظر می‌رسند. این کاربردها، در فصل ۶، جایی‌که مفهوم فاصله را شرح و توسعه می‌دهیم، نیز دنبال می‌شوند.

درحقیقت این یکی‌از افسونهای ریاضیات است ــ که با به‌کاربردن ایده‌های ساده یکی پس‌از دیگری وبا ترتیب خاص، نتیجه‌هایی به‌دست می‌آیندکه درآغاز هرگز نمی‌توانستند در ذهن مجسم شوند.

۲.۴ نابرابری میانگینهای حسابی و هندسی

الف) آزمایش ریاضی. باداشتن دوعدد نامنفی مثلا ۱ و ۲ «میانگین» آنها را به‌دوطریق زیر به‌دست‌می‌آوریم: میانگین‌حسابی (یا نصف مجموع دوعدد) که معمولا «متوسط» آنها نامیده می‌شود.

$$\frac{۱+۲}{۲}=۱٫۵$$

و میانگین هندسی (یا ریشهٔ دوم حاصلضرب دو عدد)

$$\sqrt{۱\times۲}=۱٫۴۱۰\ldots$$

مشاهده می‌کنید که $۱٫۴۱۰\ldots < ۱٫۵$. همچنین، اگر با عددهای ۳ و ۹ شروع کنیم، برای میانگین حسابی مقدار $۶=۲/(۹+۳)$، وبرای میانگین هندسی مقدار $\sqrt{۲۷}=۵٫۱۹۰\ldots$ را به‌دست می‌آوریم، و بازمشاهده می‌کنیم که $۵٫۱۹۰\ldots<۶$. اگر با جفتهای گوناگون دیگری ازعددهای نامنفی مانند ۱۱ و ۱۳، ۲/۱ و ۴/۱، وغیره، که به‌تصادف انتخاب شده‌اند، شروع کنیم، بازهم درهرحالت مشاهده‌می‌کنیم که میانگین حسابی بزرگتر از میانگین هندسی است.

آیا می‌توانیم این کشف را بـه‌صورتی مطمئن تعمیم دهیم و به نتایجی دست یابیم؟ وقتی به‌وجود قضیه‌ای پی می‌بریم، حس ریاضی ما تحریك می‌شود؛ نتیجه‌ای که به دست آورده‌ایم ممکن است برای همهٔ جفتهای عددهای نامنفی درست باشد! به‌عبارت‌دیگر، حدس‌می‌زنیم که همیشه میانگین حسابی دوعددنامنفی لااقل به‌بزرگی میانگین هندسی آنهاست. ما این حدس‌را برحسب نمادهای جبری توضیح خواهیم داد و دربند (ب) خواهیم دید که حدس ما درست است. بنابراین می‌توانیم آن‌را به‌صورت زیر بیان کنیم:

قضیهٔ ۱.۴ به‌ازای هردو عدد نامنفی a و b،

$$\frac{a+b}{۲}\geqslant\sqrt{ab} \qquad (۱.۴)$$

برابری برقرار است اگر و تنها اگر $a=b$.

توجه کنید که اگر یکی‌از دو عدد مثبت و دیگری منفی باشد، آن گاه (۱.۴)

بی‌معنی است، زیـرا طرف راست آن عددی موهومی می‌شود* و در نتیجه، قضیه معتبر نیست.

نوع آزمایشی که ما را به‌قضیهٔ ۱.۴ راهنمایی کرد، گونه‌ای از روشهای آزمون و خطاست کـه ریاضیدانان غالباً در ردیابی قضیه‌ها به‌کار می‌برند. این کار ظاهراً خیلی پرزحمت است. امروزه در آزمایشهای ریاضی که به‌کمك کامپیوتر رقمی جدید انجام می‌گیرد می‌توانیم هزارها ومیلیونها حالت‌را درچندساعت آزمون کنیم. به‌این طریق، سررشته‌های گرانبهایی از حقایق عمومی ریاضی را به‌دست می‌آوریم.

تمرین

۱. میانگین هندسی و میانگین حسابی جفتهای عددهای زیر را معین کنید:

(الف) ۸، ۲ (ب) ۱۲، ۳ (پ) ۹، ۴ (ت) ۲۰، ۰

۲. به‌فرض که p نامنفی باشد، میانگین هندسی و میانگین حسابی جفتهای عددهای حقیقی زیر را معین کنید:

(الف) p، ۹p؛ (ب) ۰، p؛ (پ) ۲، ۲$p^۲$.

ب) برهان نابرابری میانگین‌حسابی-میانگین‌هندسی برای دوعدد. چون‌ریشه‌های دوم قدری پردردسرند، با نوشتن

$$a=c^۲,\quad b=d^۲ \qquad (۲.۴)$$

آنهارا حذف می‌کنیم. این کار جایز است، زیرا در قضیهٔ ۱.۴، a و b نامنفی‌فرض شده‌اند. از ایـن‌رو رابطهٔ (۱.۴)، که می‌خواهیم آن را به ازای عددهای نامنفی و دلخواه a و b ثابت کنیم، بـه ازای عددهای حقیقی دلخواه c و d به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{c^۲+d^۲}{۲}\geqslant cd \qquad (۳.۴)$$

این رابطه درست است اگر و تنها اگر

---

* مفهوم نابرابری در عددهای موهومی مستقیماً قابل‌اجرا نیست، آن را تنها می‌توان درمورد قدرمطلق آنها به‌کار برد.

$$\frac{c^۲+d^۲}{۲}-cd\geqslant ۰, \qquad (۴.۴)$$

که بنابرقوانین مقدماتی نابرابریها هم‌ارز است با

$$c^۲+d^۲-۲cd\geqslant ۰ \qquad (۵.۴)$$

اکنون یك دوست آشنا، یعنی

$$c^۲+d^۲-۲cd=(c-d)^۲, \qquad (۶.۴)$$

را موردتوجه قرار می‌دهیم، که بنابرآن، (۵.۴) هم‌ارز است با

$$(c-d)^۲\geqslant ۰ \qquad (۷.۴)$$

چون بنابرقضیهٔ ۳.۱، مربع هرعدد حقیقی نامنفی است، مشاهده می‌کنیم کـه (۷.۴) به‌راستی درست است. پس (۵.۴) یـك نابرابری معتبر است، و بنابـراین (۴.۴)، (۳.۴) و (۱.۴) نیزمعتبرند. برابری در (۷.۴) ونیز در (۱.۴) برقراراست اگر و تنها اگر $c-d=۰$، یعنی $c=d$، یا هم‌ارز آن اگر وتنها اگر $a=b$.

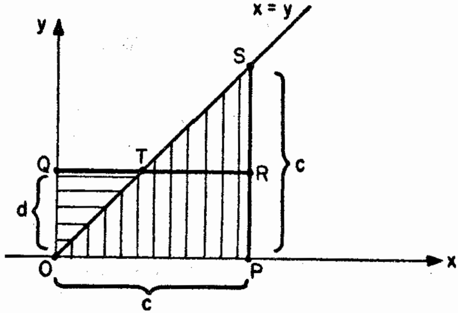
توجه‌کنید هرچندکه نابرابری (۱.۴) از قضیهٔ (۱.۴) تنها درمورد عددهای نامنفی قابل اجراست، برهان‌بالا نشان می‌دهد کـه نابرابری (۳.۴) بـه‌ازای همهٔ عددهای حقیقی c و d معتبر است، وبرابری برقرار است، اگر و تنها اگر $c=d$. مشاهده خواهیدکردکه‌حکمهای بخشهای ۴.۴ و ۶.۴، نه‌فقط به‌ازای عددهای‌نامنفی بلکه به‌ازای همهٔ عددهای حقیقی معتبرند، این واقعیت، معنی هندسی آن حکمها را بارز می‌سازد.

پ) برهان هندسی. اکنون نشان می‌دهیم که قضیهٔ ۱.۴ را به روش هندسی، از راه یك‌مقایسهٔ سادهٔمساحتها، نیز می‌توان به‌دست‌آورد. روی‌خط نمودار $y=x$، مطابق شکل ۱.۴: نقطه‌هـای S و T به ترتیب بـا مختصات (c, c) و (d, d)، و علاوه‌برآن نقطه‌های $P:(c, ۰)$، $Q:(۰, d)$ و $R:(c, d)$ را درنظر می‌گیریم. چون OP به‌طول c است، PS نیز به‌طول c و مساحت مثلث OPS برابر با $c^۲/۲$ است. همچنین مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ OQT برابر است با $d^۲/۲$.

اکنون ملاحظه می‌کنیم که سطح مستطیل $OPRQ$ را مثلثهای OPS و OQT کلا پوشانیده‌اند، به‌طوری که:

(۸.۴) مساحت $(OPRQ)\geqslant$ مساحت$(OQT)+$مساحت (OPS)

چون مساحت $OPRQ$ برابراست با cd، می‌توان(۸.۴) را با نمادهای‌جبری چنین نوشت:



شکل ۱.۴ برهان هندسی نابرابری $\frac{c^{۲}+d^{۲}}{۲}\geqslant cd$.

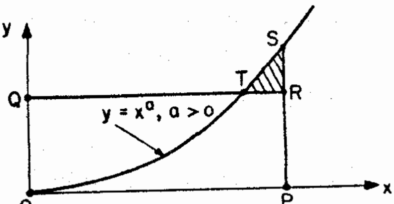
$$\frac{c^{۲}+d^{۲}}{۲}\geqslant cd\,. \qquad (۹.۴)$$

این نابرابری همان نابرابری (۳.۴) است، و بنابراین برهان هندسی، کامل است.

علاوه‌براین، مشاهده می‌کنیم کــه برابری تنها موقعی رخ می‌دهدکه مساحت مثلث TRS صفر باشد، یعنی تنها موقعی کــه S و T برهم منطبق شوند. که در این صورت $c=d$.

ت) تعمیم هندسی. باکمی فکر معلوم می‌شود حتی درحالتهایی‌که OTS خط مستقیم نیست، بخشهای فوق‌الذکر معتبرند. بنابر نمودار شکل ۲.۴، باز هم درست است که

$$(OPS)\ \text{مساحت} + (OQT)\ \text{مساحت} \geqslant (OPRQ)\ \text{مساحت}. \qquad (۱۰.۴)$$

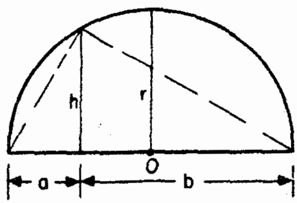


شکل ۲.۴ یك نابرابری هندسی کلیتر.

وقتی حساب دیفرانسیل و انتگرال را مطالعه کنید و یاد بگیرید که چگونه می‌توان مساحت زیر منحنیهای ساده، مانند $y=x^a$ را به ازای مثبت دلخواه a حساب کرد، درخواهید یافت که با این روند می‌توان تعدادی از نابرابریهای جالب را به‌طرزی خیلی ساده به‌دست آورد. در بخشهای بعدی این فصل، برخی از این نابرابریها را به‌روش دیگر به‌دست خواهیم آورد.

تمرین

۱. فرض کنید که a و b طولهای یك جفت پاره‌خطهای مجاور واقع بر یك خط باشند. مانند شکل ۳.۴، به‌قطر مجموع این دو پاره‌خط نیمدایره‌ای رسم کنید. نشان دهید که r، شعاع این دایره میانگین حسابی a و b، و طول قائم h میانگین هندسی آنهاست.



شکل ۳.۴

۲. مقدار متوسطی که به‌طور کاملا طبیعی در نورشناسی و در بررسی شبکه‌های الکتریکی پیش می‌آید، میانگین همساز (= میانگین توافقی) است. به‌ازای دو مقدار مثبت مفروض a و b، مقدار c که با رابطهٔ

$$\frac{۲}{c}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}$$

معین می‌شود، میانگین همساز a و b نامیده می‌شود. از حل این معادله برحسب c به‌دست می‌آوریم

$$c=\frac{۲}{۱/a+۱/b}=\frac{۲ab}{a+b}.$$

نشان دهید که برای دو عدد نامنفی، میانگین همساز نابزرگتر از میانگین حسابی،

و همچنین نابزرگتراز میانگین هندسی است و برابری رخ می‌دهد اگر و تنها اگر $a=b$؛ یعنی نشان دهید که:

$$\frac{a+b}{۲} \geqslant \sqrt{ab} \geqslant \frac{۲ab}{a+b}\cdot$$

۳. میانگینهای همساز، هندسی وحسابی جفتهای عددهای زیر را معین کنید.

(الف) ۲، ۸؛ (ب) ۳، ۱۲؛ (پ) ۴، ۹؛ (ت) ۵، ۷؛ (ث) ۶، ۶.

۴. رابطهٔ بین فاصلهٔ d، سرعت r، و زمان t عبارت‌است از $d=rt$. نشان دهید که اگر برای مسافرت ازیك شهر به‌شهر دیگر، نصف مسافت را با سرعت $r_۱$ و نصف دیگر را باسرعت $r_۲$ طی کنید، آن گاه سرعت متوسط برابر با میانگین همساز $r_۱$ و $r_۲$ است، اما اگر نصف زمان‌را باسرعت $r_۱$ و نصف دیگر زمان‌را باسرعت $r_۲$ طی کنید، آن گاه سرعت متوسط برابر میانگین حسابیِ آنهاست. اگر $r_۱\neq r_۲$، انتخاب کدام‌روش شمارا زودتر به‌مقصد می‌رساند؟

۵. با به‌کاربردن نتیجهٔ قضیهٔ ۱.۴، تمرین ۲ از بخش ۷.۲ را حل کنید.

ث) نابرابری میانگین حسابی - میانگین هندسی برای سه عدد. اکنون آزمایشهای بیشتری انجام می‌دهیم؛ سه عدد نامنفی مثلا ۱، ۲ و ۴ را در نظر می‌گیریم و میانگین حسابی آنها ـ متوسط ساده ـ را مانند قبل حساب می‌کنیم:

$$\frac{۱+۲+۴}{۳}=۲{,}۳۳۳۰\ldots$$

همچنین میانگین هندسی آنها، یعنی ریشهٔ سوم حاصلضربشان را، حساب می‌کنیم:

$$\sqrt[۳]{۱\times ۲\times ۴}=۲$$

مشاهده می‌کنیم که میانگین حسابی این سه‌عدد بزرگتر از میانگین هندسی آنهاست. اگر تعدادی ازچنین آزمایشها را با سه‌تاییها از عددهای نامنفی انجام دهیم، دائماً همان‌نتیجه‌را مشاهده می‌کنیم. گمان می‌بریم که قضیهٔ دیگری را به‌دست آورده‌ایم. آیا تعمیمی از قضیهٔ ۱.۴ وجود دارد؟ حکمی که بیان می‌کند میانگین حسابی سه‌مقدار نامنفی لااقل به‌بزرگی میانگین هندسی آنهاست؟

می‌خواهیم ثابت کنیم که:

قضیهٔ ۲.۴ به‌ازای هرسه عدد نامنفی a، b و c داریم:

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc} \qquad (۱۱.۴)$$

برابری برقرار است اگر و تنها اگر $a=b=c$.

به‌منظور حذف ریشهٔ سوم، قرار می‌دهیم

$$a=x^3, \qquad b=y^3, \qquad c=z^3 \qquad (۱۲.۴)$$

از قراردادن این مقادیر به‌جای a، b و c در (۱۱.۴)، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geqslant xyz, \qquad (۱۳.۴)$$

که هم‌ارز است با

$$x^3+y^3+z^3-3xyz \geqslant 0 \qquad (۱۴.۴)$$

با اثبات درستی (۱۴.۴) به‌ازای مقادیر نامنفی و دلخواه x، y و z، قضیهٔ ۲.۴ را ثابت خواهیم کرد.

باردیگر عبارتی داریم که می‌تواند تجزیه شود. تجزیهٔ آن به‌اندازه تجزیهٔ عبارتی که قبلا داشتیم رایج نیست، اما به‌همان‌اندازه کاربرد دارد. حکم می‌کنیم که

$$\begin{aligned} &x^3+y^3+z^3-3xyz \\ &\quad=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz) \end{aligned} \qquad (۱۵.۴)$$

و این‌همانی را می‌توانیم از راه ضرب عاملهای آن محقق کنیم.

چون $x+y+z$ نامنفی است، اولین عامل در طرف راست (۱۵.۴) مثبت است مگر آنکه $x=y=z=0$. برای اثبات (۱۴.۴)، کافی است نشان دهیم که عامل دوم نیز نامنفی است، یعنی که

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz \geqslant 0 . \qquad (۱۶.۴)$$

با مراجعه به‌نابرابری $(x-y)^2=x^2+y^2-2xy \geqslant 0$، که قبلا در برهان جبری نابرابری میانگین حسابی ـ هندسی به‌ازای دو عدد به‌کار رفت [بخش (ب) را ببینید]، مشاهده می‌کنیم که نابرابری (۱۶.۴) می‌تواند به‌طریق زیر از این

نابرابری به‌دست آید. می‌نویسیم.

$$x^2+y^2 \geqslant 2xy, \quad x^2+z^2 \geqslant 2xz, \quad y^2+z^2 \geqslant 2yz \qquad (۱۷.۴)$$

و نابرابریها را باهم جمع می‌کنیم، حاصل می‌شود:

$$2(x^2+y^2+z^2) \geqslant 2(xy+xz+yz) \qquad (۱۸.۴)$$

که با نابرابری موردنظر (۱۶.۴) هم‌ارز است. برابری برقرار است اگر و تنها اگر $x=y=z$.

چون (۱۶.۴) یك نابرابری درست است، و $x+y+z \geqslant 0$، نتیجه‌می‌شود که طرف چپ (۱۵.۴) نیز نامنفی است، یعنی نابرابری (۱۴.۴) درست است. از آنجاکه (۱۴.۴) هم‌ارز با (۱۱.۴) است، ثابت کرده‌ایم که نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین‌هندسی به‌ازای سه‌عدد نیز درست است؛ شرط $x=y=z$ که‌تحت آن برابری در (۱۴.۴) و بنابراین در (۱۱.۴) برقرار است هم‌ارز با شرط $a=b=c$ است.

ج) نابرابری میانگین‌حسابی ـ هندسی به‌ازای n عدد. باموفقیتی که نصیبمان شد جرأت کرده حدس می‌زنیم حکمهایی که برای میانگینهای دو عدد و سه عدد به‌دست آورده‌ایم صرفاً حالتهای خاص یك قضیهٔ کلی است که به‌ازای هرتعداد از مقادیر مثبت برقرار است. اگر این‌حدس درست باشد، آن گاه حکم زیر را داریم:

قضیهٔ ۳.۴ به‌ازای هر n عدد نامنفی a_1، a_2، ...، a_n، داریم:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \qquad (۱۹.۴)$$

برابری برقرار است اگر و تنها اگر $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

این نابرابری‌مشهوری است که میانگین حسابی n مقدار را با میانگین‌هندسی آنها مربوط می‌سازد، و محققاً درست است. ما به‌دلایل مختلفی روی این نابرابری تأمل کرده‌ایم. اول آنکه یك نابرابری شوق‌برانگیز است وآنکه می‌توان آن‌را به راههای جالب ومتعددثابت‌کرد. بدون‌اغراق، دوجینها برهان مختلف برپایهٔ ایده‌هایی ازمنابع گوناگون برای آن وجود دارند. دوم آنکه می‌توان آن را به‌عنوان قضیهٔ اساسی نظریهٔ نابرابریها به‌کاربرد، اساسی ازاین‌روکه حکمهای بسیارمهم دیگری برآن تکیه دارند. سوم آنکه، همان‌طورکه در فصل ۵ خواهید دید، می‌توان بعضی

از نتیجه‌های آن‌را برای‌حل تعدادی ازمسأله‌های بیشینه‌سازی و کمینه‌سازی به‌کار برد.

درکوشش برای اثبات نابرابری کلی، اولین فکر ممکن است ادامهٔ راههای قبلی باشد، بدین ترتیب که روش تجزیهٔ جبری دیگری را برای $n=۴$، دیگری را نیز برای $n=۵$، ومانند آن، به‌کار ببریم. اما این‌راه نه جالب‌توجه است ونه‌عملی. درحقیقت هیچ اثبات ساده‌ای در ادامهٔ آن‌راهها وجود ندارد.

در عوض، روش اثبات ساده‌ای را بر پایهٔ دوگونه کاربرد استقرای ریاضی ارائه خواهیم داد؛ یکی استقرای «پیشرو» که به ازای همهٔ عددهای صحیح n که توانهایی از ۲ هستند، یعنی به‌ازای $n=۲^k$، منجر به‌نتیجهٔ مطلوب می‌شود، دیگری استقرای «پسرو» (ازهرعدد صحیح مثبت به‌ماقبل آن)، که با استقرای پیشرو، روبهم مارا قادر می‌سازدکه حکم را به‌ازای همهٔ عددهای صحیح مثبت n ثابت‌کنیم.

(i) استقرای‌پیشرو. روشی‌که اکنون به‌کارمی‌بریم صورت جالب‌توجه‌دیگری از فن اساسی اثبات با استقرای ریاضی است، کــه قبلا، در بخش ۶.۲ (فصل ۲)، آن را موردبحث قرار داده‌ایم.

با $n=۲$ شروع می کنیم، یعنی

$$\frac{a+b}{۲}\geqslant\sqrt{ab} \qquad (۲۰.۴)$$

که بنابرقضیهٔ ۱.۴، به ازای همهٔ عددهای نامنفی a و b معتبر است، و قدری ابتکار ریاضی نیز به‌کارمی‌بریم. اگرچه اثباتهای‌سادهٔ بسیار زیادی برای قضیهٔ ۳.۴ وجود دارد، همهٔ آنها از ابتکار مشترکی برخوردارند.

به‌فرض

$$a=\frac{a_۱+a_۲}{۲}, \quad b=\frac{a_۳+a_۴}{۲}$$

که درآن $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$ و $a_۴$ عددهای نامنفی هستند، وبا جایگزین‌کردن این مقادیر a و b در (۲۰.۴)، نابرابری زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\frac{a_۱+a_۲}{۲}+\frac{a_۳+a_۴}{۲}}{۲}\geqslant\sqrt{\left(\frac{a_۱+a_۲}{۲}\right)\left(\frac{a_۳+a_۴}{۲}\right)},$$

یا

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geqslant \sqrt{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)} \qquad (۲۱.۴)$$

چون طرف چپ این نابرابری دارای صورت دلخواه ماست (قضیهٔ ۳.۴ را ببینید)، روی طرف راست آن تأمل می‌کنیم. با به‌کار بردن نابرابریهای معتبر

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 a_2} \qquad \frac{a_3+a_4}{2} \geqslant \sqrt{a_3 a_4} \qquad (۲۲.۴)$$

و قاعدهٔ ترایایی (قضیهٔ ۱.۲)، از (۲۱.۴) نابرابری زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geqslant \sqrt{\sqrt{a_1 a_2}\sqrt{a_3 a_4}} \geqslant (a_1 a_2 a_3 a_4)^{1/4} \qquad (۲۳.۴)$$

که دقیقاً حکم مطلوب‌ما به‌ازای چهار مقدار نامنفی است! به‌ازای $n=4$، میانگین حسابی ناکوچکتر از میانگین‌هندسی است.

برابری در (۲۱.۴) برقرار است اگر و تنها اگر

$$\frac{a_1+a_2}{2} = \frac{a_3+a_4}{2},$$

و در (۲۲.۴) برابری برقرار است اگر و تنها اگر $a_1=a_2$، $a_3=a_4$؛ در نتیجه برابری در (۲۳.۴) برقرار است اگر وتنها اگر $a_1=a_2=a_3=a_4$.

برای تکرار حیلهٔ بالا، هیچ مانعی درکار نیست. به‌فرض

$$a_1=\frac{b_1+b_2}{2}, \quad a_2=\frac{b_3+b_4}{2}, \quad a_3=\frac{b_5+b_6}{2}, \quad a_4=\frac{b_7+b_8}{2},$$

که درآن b_iها $(i=1, 2, \ldots, 8)$ مقادیر نامنفی هستند، و با جایگزین کردن در (۲۳.۴)، داریم،

$$\frac{b_1+b_2+\cdots+b_8}{8} \geqslant \left[\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)\left(\frac{b_3+b_4}{2}\right)\left(\frac{b_5+b_6}{2}\right)\left(\frac{b_7+b_8}{2}\right)\right]^{1/4}.$$

با به‌کاربردن نابرابریهای

$$\frac{b_1+b_2}{2} \geqslant \sqrt{b_1 b_2}, \ \ldots, \ \frac{b_7+b_8}{2} \geqslant \sqrt{b_7 b_8}$$

و قاعدهٔ ترایایی به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{b_1+b_2+\cdots+b_8}{8}\geqslant(\sqrt{b_1b_2}\sqrt{b_3b_4}\sqrt{b_5b_6}\sqrt{b_7b_8})^{1/4}$$
$$\geqslant(b_1b_2\cdots b_8)^{1/8}$$

که حکم دلخواه به‌ازای هشت مقدار است. برابری برقرار است اگر وتنها اگر همهٔ b_iها برابر باشند.

اگر به‌این روش ادامه دهیم، بدیهی است که می‌توانیم نابرابری را به‌ازای همهٔ مقادیر n، که توانی از دو باشند، یعنی به‌ازای $n=2, 4, 8, 16, \ldots$، ثابت کنیم. برای اثبات دقیق این‌حکم، از استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم. مرحلهٔ اصلی اثبات قضیهٔ زیر است:

نابرابری میانگین حسابی - میانگین هندسی، به ازای هر n به‌صورت 2^k، که k عدد طبیعی باشد، برقرار است.

اثبات. از قبل می‌دانیم که این حکم به ازای $n=2=2^1$، یعنی به ازای $k=1$، و درواقع به‌ازای $n=2^2$ و $n=2^3$ درست است. فرض می‌کنیم که حکم، به ازای عدد صحیح n به‌صورت 2^k درست باشد، و سپس درستی آن را به‌ازای 2^{k+1} ثابت می‌کنیم. چون $2\times 2^k=2^{k+1}$، این بدین معنی است که ثابت خواهیم کرد حکم به‌ازای $2n$ نیز درست است.

بنابراین فرض کرده‌ایم که به‌ازای هرمجموعه ازمقادیر a_1، ...، a_n، که در آن $n=2^k$، داریم

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n} \qquad (24.4)$$

هرگاه a_iها $(i=1, 2, \ldots, n)$ را طوری انتخاب کنیم که مقادیر زیر را داشته باشند:

$$a_1=\frac{b_1+b_2}{2},\quad a_2=\frac{b_3+b_4}{2},\ \ldots,\ a_n=\frac{b_{2n-1}+b_{2n}}{2},$$

که b_jها $(j=1, 2, \ldots, 2n)$ عددهای نامنفی مفروض و به تعداد $2n$ باشند، و این مقادیر را در (۲۴.۴) جایگزین ومانند قبل عمل کنیم، بالاخره به‌دست‌می‌آوریم:

$$\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{2n}}{2n}\geqslant(b_1b_2\cdots b_{2n})^{1/2n}.$$

مانند قبل، برابری برقرار است اگر و تنها اگر همهٔ b_iها برابر باشند. پس حکم مطلوب را به‌ازای $2n$ یا 2^{k+1} ثابت کرده‌ایم.

بنابراین، چون این نابرابری به‌ازای $k=1$ درست است، بنابراصل استقرای ریاضی (پیشرو) ثابت می‌شود که به‌ازای همهٔ عددهای‌صحیح مثبت k برقرار است، وازاین‌رو، نابرابری (۲۴.۴) به‌ازای همهٔ n هایی که توانی‌ازدو هستند برقراراست.

(ii) استقرای پسرو. اکنون که حکم‌را به‌ازای عددهای صحیح توان‌دو ثابت کرده‌ایم؛ آن‌را چگونه به‌ازای همهٔ عددهای مثبت ثابت‌کنیم؟

طرزعمل دیگری لازم است. حالت $n=3$ را، که حکم مربوط به‌آن را با روشی‌متفاوت ثابت‌کرده‌ایم، درنظرمی‌گیریم. بااستفاده از رابطه‌ای‌که قبلا باروش استقرای پیشرو ثابت شد به‌ازای $n=2^2=4$، به‌دست می‌آوریم،

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\geqslant(a_1a_2a_3a_4)^{1/4}, \qquad (25.4)$$

اکنون بررسی می‌کنیم که‌آیامی‌توان حکمی متناظر را به‌ازای $n=3$ به‌دست‌آورد.

برای اثبات، فن‌مهم تخصیص را به‌کار می‌بریم؛ از (۲۵.۴) شروع‌می‌کنیم، مقادیر a_1، a_2، a_3، و a_4 را به‌طریق خاص انتخاب می‌کنیم. به‌فرض

$$a_1=b_1, \qquad a_2=b_2, \qquad a_3=b_3, \qquad (26.4)$$

مقدار a_4 را طوری تعیین می‌کنیم که برابری زیر برقرار باشد.

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}=\frac{b_1+b_2+b_3}{3}.$$

با قرار دادن مقادیر (۲۶.۴) در این رابطه نتیجه می‌شود که

$$\frac{b_1+b_2+b_3+a_4}{4}=\frac{b_1+b_2+b_3}{3},$$

و از آنجا

$$a_4=\frac{4}{3}(b_1+b_2+b_3)-(b_1+b_2+b_3)=\frac{b_1+b_2+b_3}{3}.$$

با جایگزین‌کردن این‌مقادیر ویژهٔ a_iها در (۲۵.۴)، رابطهٔ زیررا به‌دست می‌آوریم

$$\frac{b_1+b_2+b_3}{3}\geqslant\sqrt[4]{b_1b_2b_3\left(\frac{b_1+b_2+b_3}{3}\right)}.$$

دوطرف راکه به‌توان چهار برسانیم به‌دست می‌آوریم:

$$\left(\frac{b_1+b_2+b_3}{3}\right)^4 \geqslant b_1b_2b_3\left(\frac{b_1+b_2+b_3}{3}\right),$$

و سرانجام از تقسیم دوطرف بر $(b_1+b_2+b_3)/3$، به‌دست می‌آوریم:

$$\left(\frac{b_1+b_2+b_3}{3}\right)^3 \geqslant b_1b_2b_3,$$

که با نتیجهٔ مطلوب زیر هم‌ارز است:

$$\frac{b_1+b_2+b_3}{3} \geqslant \sqrt[3]{b_1b_2b_3} \qquad (۲۷.۴)$$

چون در (۲۵.۴) برابری برقرار است اگر و تنها اگر $a_1=a_2=a_3=a_4$، نتیجه می‌شود که در (۲۷.۴) برابری برقرار است اگر وتنها اگر $b_1=b_2=b_3$.

برای تعمیم این روش به‌حالت کلی، یك فن استقرایی، اما ازنوع غیراستاندارد را به‌کار می‌بریم. به‌جای اثبات آنکه اگر حکم به ازای n درست باشد، آن‌گاه به‌ازای $n+1$ نیز درست است، ثابت خواهیم کرد که اگر حکم به‌ازای n درست باشد، آن‌گاه به‌ازای $n-1$ نیز درست‌است، وچون ازقبل‌می‌دانیم که حکم به‌ازای $n=2^k$ $(k=1, 2, \dots)$ برقرار است،ازاین‌روش نتیجه می‌شود که قضیه درحالت کلی برقرار است.

اکنون نشان می‌دهیم که اگر حکم به‌ازای n درست باشد، آن‌گاه به‌ازای $n-1$ نیز درست است. بدین‌منظور حیلهٔ تخصیص راکه دربالا به‌کاربردیم تکرار می‌کنیم. به‌فرض

$$a_1=b_1, \qquad a_2=b_2, \quad \dots, \quad a_{n-1}=b_{n-1}, \qquad (۲۸.۴)$$

a_n را از برابری زیر تعیین می‌کنیم

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}=\frac{b_1+b_2+\dots+b_{n-1}}{n-1};$$

با به‌کاربردن مقادیر (۲۸.۴) دراین‌معادله و حل آن برحسب a_n، به‌دست‌می‌آوریم،

$$a_n=\frac{b_1+b_2+\dots+b_{n-1}}{n-1} \qquad (۲۹.۴)$$

فرض کرده‌ایم که نابرابری

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

به‌ازای مقادیر نامنفی a_1، . . .، a_n برقرار است؛ از جایگزین کردن مقادیر (۲۸.۴) و (۲۹.۴) برای a_iها داریم

$$\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1}\geqslant\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_{n-1}\left(\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1}\right)}$$

چون دوطرف را به‌توان n برسانیم و حاصل‌را ساده کنیم، نابرابری زیررا به‌دست می‌آوریم

$$\left(\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}\geqslant b_1b_2\cdots b_{n-1},$$

که هم‌ارز است با

$$\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1}\geqslant\sqrt[n-1]{b_1b_2\cdots b_{n-1}}$$

که حکم مطلوب است. مانند قبل، برابری برقرار است اگر و تنها اگر $b_1=b_2=\cdots=b_{n-1}$، و بنابراین، اثبات قضیهٔ ۳.۴ کامل است.

۳.۴ تعمیمهایی از نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی

اکنون نشان خواهیم داد حکمهایی که دربالا به‌دست آمدند و ظاهراً تعمیمهایی از قضیهٔ اساسی‌میانگین حسابی ـ میانگین هندسی‌بودند، درواقع حالتهایی‌خاص هستند.

ابتدا نابرابری میانگین‌حسابی ـ میانگین هندسی

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant(x_1x_2\cdots x_n)^{1/n}$$

را درنظر می‌گیریم و در آن هریك از اولین m عدد x_i را برابر با عدد نامنفی x، و هریك از $n-m$ عدد باقیمانده را برابر با مقدار نامنفی y قرار می‌دهیم؛ یعنی

$$x_1=x_2=\cdots=x_m=x,\quad x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_n=y.$$

دراین‌صورت نابرابری بالا تبدیل می‌شود به

$$\frac{mx+(n-m)y}{n} \geqslant (x^m y^{n-m})^{1/n}$$

یا

$$\frac{mx}{n}+\left(1-\frac{m}{n}\right)y \geqslant x^{m/n} y^{1-m/n} .$$

دراینجا، n هرعدد صحیح‌مثبت، و m هرعدد صحیح واقع دربازهٔ $1 \leqslant m \leqslant n-1$ است. نتیجه می‌شود که m/n می‌تواند هر کسر گویای r واقع دربازهٔ $0<r<1$ باشد. پس نابرابری بالارا به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$rx+(1-r)y \geqslant x^r y^{1-r} \qquad (۳۰.۴)$$

که مهمترین نتیجه برای هدفهای بعدی ماست.

نابرابری (۳۰.۴) به‌ازای هردو مقدار نامنفی x و y، و هر کسر r مابین ۰ و ۱ معتبر است. برابری رخ می‌دهد اگر وتنها اگر $x=y$.

فرض کنیم $r=1/p$. چون $0<r<1$، مشاهده می‌کنیم که $p>1$، بنابراین

$$1-r=1-\frac{1}{p}=\frac{p-1}{p} .$$

به‌فرض $q=p/(p-1)$، که بنابرآن $1/q=1-r$، و داریم:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 .$$

پس نابرابری (۳۰.۴) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q} \geqslant x^{1/p} y^{1/q} \qquad (۳۱.۴)$$

برای حذف توانهای کسری، قرار می‌دهیم،

$$x=a^p, \qquad y=b^q \qquad (۳۲.۴)$$

بنابراین (۳۱.۴) به‌صورت

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \geqslant ab \qquad (۳۳.۴)$$

در می‌آید، که در آن a و b عددهای نامنفی، و p، q عددهای گویای با شرط $1/p+1/q=1$ می‌باشند. برابری رخ می‌دهد اگر و تنها اگر

$$a^p=b^q \tag{۳۴.۴}$$

آن گاه که معنی عددهای گنگ و تابعهای به‌صورت x^r را، که در آنها r یك عدد گنگ است تعریف کنیم، می‌توانیم مستقیماً، یا با روش حدی، باشروع از نابرابری (۳۰.۴)، نشان دهیم که درواقع، نابرابری (۳۰.۴) به‌ازای هر r مابین ۰ و ۱ برقرار است، و بنابراین، نابرابری (۳۳.۴) به‌ازای هر $p>1$ و $q>1$ باشرط $1/p+1/q=1$ معتبر است. اگر علاقه‌مندید که این نکتهٔ باریك را بیشتر دنبال کنید ابتدا باید کتاب اعداد: گویا و گنگ، (نخستین کتاب ازاین مجموعه) رابخوانید که پیش‌ازاین درفصل ۱ نیز به‌آن ارجاع کرده‌ایم.

تمرین

۱. نشان‌دهید که اگر همهٔ مقادیر y_1، y_2، ...، y_k نامنفی، و اگر m_1، m_2، ...، m_k عددهای صحیح مثبت باشند، آن گاه:

$$\frac{m_1y_1+m_2y_2+\cdots+m_ky_k}{m_1+m_2+\cdots+m_k}\geqslant(y_1^{m_1}y_2^{m_2}\cdots y_k^{m_k})^{1/(m_1+m_2+\cdots+m_k)}.$$

درنتیجه نشان‌دهید که اگر r_1، r_2، ...، r_k کسرهای کوچکتراز واحد باشند به‌طوری که

$$r_1+r_2+\cdots+r_k=1\,,$$

آن گاه:

$$r_1y_1+r_2y_2+\cdots+r_ky_k\geqslant y_1^{r_1}y_2^{r_2}\cdots y_k^{r_k}\,.$$

۲. یك متوسط مهم درآمار، ریشهٔ دوم میانگین مربعات است. برای دوعدد نامنفی a و b، ریشهٔ دوم میانگین مربعات عبارت است از

$$s=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

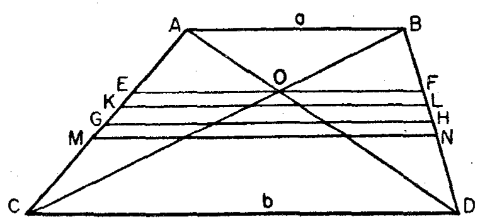
میانگین حسابی و ریشهٔ دوم میانگین مربعات را به‌ازای (۱۲ ,۵)، (۱ ,۰)، و $(p,\ p)$ محاسبه کنید.

۰۳ ثابت کنیدکه میانگین‌حسابی دوعددمثبت نابزرگتر از ریشهٔ دوم میانگین‌مربعات آنهاست، یعنی:

$$\frac{a+b}{۲} \leqslant \sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{۲}} .$$

برابری تحت چه شرایطی برقرار است؟ ریشهٔ دوم میانگین مربعات را با میانگین هندسی و میانگین همساز چگونه مقایسه می‌کنید؟

۰۴ فرض‌کنید $ABDC$ یك ذوزنقهٔ با قاعده‌های $AB=a$ و $CD=b$ باشد (شکل ۴.۴)، که قطرهای آن در O برخورد می‌کنند. نشان دهیدکه:



شکل ۴.۴ تصویر هندسی $\frac{۲ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{۲} \leqslant \sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{۲}}$.

(الف) میانگین حسابی a و b، یعنی $(a+b)/۲$، با پاره‌خط GH که موازی قاعده‌هاست واز آنها به‌یك فاصله است مشخص می‌شود.

(ب) میانگین‌هندسی a و b، یعنی $\sqrt{ab}$ با پاره‌خط KL مشخص می‌شودکه موازی با قاعده‌ها و چنان است که ذوزنقه‌های $ABLK$ و $KLDC$ متشابه‌اند.

(پ) میانگین همساز a و b با پاره‌خط EF که موازی با قاعده‌هاست و از نقطهٔ O می‌گذرد، مشخص می‌شود.

(ت) ریشهٔ دوم میانگین‌مربعات a و b با پاره‌خط MN مشخص می‌شودکه موازی با قاعده‌هاست و ذوزنقهٔ $ABDC$ را به‌دو ذوزنقهٔ با مساحتهای برابر تقسیم می‌کند.

۴.۴ نابرابری کوشی

الف) حالت‌دوبعدی: $(a^۲+b^۲)(c^۲+d^۲) \geqslant (ac+bd)^۲$. اکنون‌موضوع

جدیدی را شناسایی می‌کنیم که همانند یك آهنگ موسیقی، با موضوع اصلی درهم می‌پیچند و نتایج بیشتر و زیباتری را به‌دست می‌دهند.

با نابرابری

$$a^2+b^2 \geqslant 2ab$$

شروع می‌کنیم که همهٔ برهانهای به‌کاررفته دربخشهای‌قبلی این‌فصل برپایهٔ آن قرار داشت. این نابرابری نتیجهٔ ساده‌ای از همانی

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

است که نه‌تنها به‌ازای عددهای نامنفی a و b، بلکه به‌ازای همهٔ‌عددهای حقیقی a و b، معتبر است.

حاصلضرب

$$(a^2+b^2)\,(c^2+d^2) \qquad (۳۵.۴)$$

راکه بسط دهیم عبارت

$$a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2$$

به‌دست می‌آید. همین‌عبارت عیناً از بسط عبارت

$$(ac+bd)^2+(bc-ad)^2 \qquad (۳۶.۴)$$

نیز به‌دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2 \qquad (۳۷.۴)$$

چون $(bc-ad)^2$ نامنفی‌است، پس به‌ازای‌همهٔ‌عددهای‌حقیقی a، b، c و d داریم:

$$(a^2+b^2)\,(c^2+d^2) \geqslant (ac+bd)^2 \qquad (۳۸.۴)$$

که یك نابرابری بسیار زیبا و دارای اهمیت زیاد درقسمت عمدهٔ آنالیز و فیزیك ریاضی است. این نابرابری را نابرابری‌کوشی، یا دقیقتر، حالت دوبعدی نابرابری کوشی، می‌نامند.*

---

* تعمیمی ازاین نابرابری در جریـان عبارتهایی در حساب انتگرال پیش می‌آیدکـه بونیاکووسکی و شوارتز مستقلا آن راکشف کردند. نابرابری کوشی، وتعمیم آن را، در کتابهای درسی بعضی‌اوقات «نابرابری کوشی ـ شوارتز» می‌نامند.

علاوه‌براین، از (۳۷.۴) برمی‌آید که در (۳۸.۴) برابری برقرار است اگر و تنها اگر

$$bc-ad=0. \qquad (۳۹.۴)$$

دراین حالت، گوییم که جفتهای (a, b) و (c, d) متناسب‌اند؛ زیرا، اگر $c\neq 0$ و $d\neq 0$، شرط (۳۹.۴) را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}.$$

ب) تعبیر هندسی. کاملا طبیعی و مشروع است که خواننده در نخستین برخورد تعجب کند چطور هرگز کسی در دنیا می‌توانست دریابد کـه عبارتهای (۳۵.۴) و (۳۶.۴) یکی هستند. به‌ذهن خواننده خطور می کند که، همانند «بیرون کشیدن چیزی از درون کلاه خالی»، نوعی تردستی ریاضی در کار بوده است.

ریاضیدانان براین باورند که در ریاضیات تصادف وجود ندارد. هرحکم، با هر درجه‌ای از اهمیت، دارای توجیهی است که همینکه درك گردد، آن حکم را بدیهی می‌سازد. این توجیه ممکن است فوری به‌ذهن نیاید، و ممکن‌است برای‌مدتی نتوان به‌آن رسید. غالباً اهمیت یك قضیهٔ ریاضی تنها موقعی واضح می‌شود که از بالا، یعنی از دیدگاه نظریه‌ای پیشرفته‌تر، به‌آن نگریسته شود. اما معنی آن همواره یکی است. این یـك نکتهٔ مهم حیاتی است. اگـر چنین نمی‌بود، ریاضیات به مجموعه‌ای از فرمولهای بی‌محتوای نامرتبط و لفاظیها نزول می کرد.

ساده‌ترین تعبیر یك حکم جبری، غالباً تعیین‌وضعیتی هندسی است. فرمولهایی که به‌نظر کاملا عجیب وپیچیده می‌آیند، وقتی منشأ هندسی آنها روشن شود، واضح می‌شوند.

درمثلث شکل ۵.۴، درازاهای پاره‌خطهای* OP، OQ، PQ به‌ترتیب عبارت‌اند از:

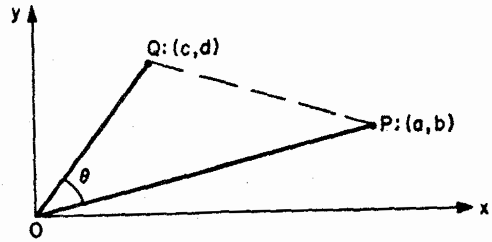
$$OP=(a^2+b^2)^{1/2}$$

$$OQ=(c^2+d^2)^{1/2}$$

و

$$PQ=[(a-c)^2+(b-d)^2]^{1/2}$$

* درازای یك پاره‌خط XY که غالباً با $\overline{XY}$ نوشته می‌شود، به‌دلایل فنی چاپی، در این کتاب با همان XY نوشته می‌شود.



شکل ۵.۴ تعبیر هندسی نابرابری کوشی.

زاویهٔ بین OP و OQ با θ نشان داده می‌شود. بنابر قاعدهٔ کسینوسها داریم:

$$(PQ)^2=(OP)^2+(OQ)^2-2(OP)(OQ)\cos\theta.$$

پس‌از جایگزین‌کردن مقادیر OP، OQ و PQ و ساده‌کردن به‌دست می‌آوریم:

$$\cos\theta=\frac{ac+bd}{(a^2+b^2)^{1/2}(c^2+d^2)^{1/2}} \qquad (۴۰.۴)$$

چون کسینوس یک زاویه همیشه باید بین ۱− و ۱+ قرار گیرد، باید داشته باشیم:

$$0\leqslant\cos^2\theta\leqslant 1 \qquad (۴۱.۴)$$

از به‌توان‌دو رساندن دوطرف (۴۰.۴) و (۴۱.۴) به‌دست می‌آوریم

$$\cos^2\theta=\frac{(ac+bd)^2}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\leqslant 1$$

و بالاخره

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$$

که همان‌حالت دوبعدی نابرابری کوشی (۳۸.۴) است، که به‌صورت جبری آنقدر شگفت‌انگیز به‌نظر می‌رسید.

به‌علاوه مشاهده می‌کنیم که برابری رخ می‌دهد اگر و تنها اگر $\cos^2\theta=1$، یعنی اگر و تنها اگر θ زاویهٔ صفر یا زاویهٔ تخت باشد ـ یعنی اگر و تنها اگر نقطه‌های O، P و Q روی یک‌خط قرار گیرند. درآن‌صورت باید شیبهای خطها برابر باشند، به‌عبارت دیگر، غیرازحالت $c=d=0$، داشته باشیم:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\cdot$$

پ) حالت سه‌بعدی نابرابری‌کوشی. یك مزیت تعبیرهای هندسی از نوع بالا این واقعیت‌است که می‌توانیم درك شهودی هندسی‌را برای به‌دست‌آوردن‌حکمهای مشابهی درهر بعدی به‌کار ببریم.

درحالت سه‌بعدی، فرض می‌کنیم $P:(a_1, a_2, a_3)$ و $Q:(b_1, b_2, b_3)$ نقطه‌هایی متمایز از مبدأ $O:(0, 0, 0)$ باشند. کسینوس زاویهٔ θ بین OP و OQ از فرمول

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{1/2}(b_1^2+b_2^2+b_3^2)^{1/2}},$$

به‌دست می‌آید*، که باتوجه به‌این‌حقیقت که $\cos^2\theta\leqslant 1$، حالت سه‌بعدی نابرابری معروف کوشی را نتیجه می‌دهد:

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \qquad (۴۲.۴)$$

برابری برقرار است اگر وتنها اگر سه‌نقطهٔ O، P و Q بریك استقامت باشند، یعنی به‌شرط آنکه همهٔ bها مخالف صفر باشند، داشته باشیم:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}\cdot$$

ت) همانی‌کوشی ـ لاگرانژ، و حالت n بعدی نابرابری‌کوشی. یك‌برهان‌صرفاً جبری حالت‌سه‌بعدی نابرابری کوشی (۴۲.۴)، باتوجه به‌همانی‌زیر انجام‌می‌گیرد.

$$\begin{aligned}
&(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\
&=(a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2)+(a_1^2b_3^2+a_3^2b_1^2)+(a_2^2b_3^2+a_3^2b_2^2)\\
&\qquad -2a_1b_1a_2b_2-2a_1b_1a_3b_3-2a_2b_2a_3b_3\\
&=(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2
\end{aligned}$$

(۴۳.۴)

---

* برای چگونگی به‌دست‌آوردن این‌فرمول به هندسهٔ تحلیلی مسطحه و فضایی تألیف W. F. Osgood و W. C. Graustein مراجعه کنید.

بدیهی است عبارت اخیر، که مجموع سه‌جملهٔ نامنفی‌است، باید نامنفی باشد. بنابراین:

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \geqslant 0,$$

و ازاین‌رو بازهم نابرابری کوشی درحالت سه‌بعدی ثابت می‌شود. همانی (۴۳.۴) هردوحالت نابرابری و برابری‌را نتیجه می‌دهد؛ آخرین عبارت در (۴۳.۴) صفر است هرگاه هریك ازسه‌جملهٔ آن صفر باشند، یعنی هرگاه aها و bها متناسب باشند.

هندسهٔ تحلیلی سه بعدی راکــه مطالعه کنید، مشاهده خواهید کردکه همانی (۴۳.۴) فقط نتیجه‌ای از

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

است که به‌طریق دیگری نوشته شده است.

همانی (۴۳.۴) می‌تواند به‌صورت زیر تعمیم داده شود: به‌ازای هرمجموعه از مقادیر حقیقی a_i و b_i $(i=1, 2, \dots, n)$، داریم:

$$\begin{aligned}(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)&(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2)\\ &-(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)^2\\ =(a_1b_2-a_2b_1)^2&+(a_1b_3-a_3b_1)^2+\dots+(a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1})^2.\end{aligned} \tag{۴۴.۴}$$

این‌همانی به همانی کوشی و لاگرانژ معروف است. و از آن حالت n بعدی نابرابری کوشی به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)&(b_1^4+b_2^2+\dots+b_n^2)\\ &\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)^2\end{aligned} \tag{۴۵.۴}$$

که به‌ازای همهٔ مقادیر a_i و b_i معتبر است.

ث) برهان‌دیگری برای حالت سه‌بعدی. برهانهایی راکه دربالا ارائه‌دادیم، هر چند برای حکمهای موجود رضایتبخش بودند، لکن آنها را نمی‌شد بــه‌طریقی تعمیم داد که حکمهای مورد نیاز بعدی را نیز نتیجه دهند. از این‌رو همه چیز را باردیگر از نو شروع می‌کنیم وطرحی جدیدرا معرفی می‌کنیم.

با نابرابری بنیادی $(x-y)^2\geqslant 0$ شروع می‌کنیم که به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{y^{۲}}{۲}\geqslant xy \qquad (۴۶.۴)$$

و به ازای همهٔ عددهای حقیقی x و y معتبر است. در این نابرابری، x و y را به توالی با مقادیر زیر جایگزین می‌کنیم

$$x=\frac{a_{۱}}{(a_{۱}^{۲}+a_{۲}^{۲}+a_{۳}^{۲})^{۱/۲}},\quad y=\frac{b_{۱}}{(b_{۱}^{۲}+b_{۲}^{۲}+b_{۳}^{۲})^{۱/۲}}$$

آن‌گاه

$$x=\frac{a_{۲}}{(a_{۱}^{۲}+a_{۲}^{۲}+a_{۳}^{۲})^{۱/۲}},\quad y=\frac{b_{۲}}{(b_{۱}^{۲}+b_{۲}^{۲}+b_{۳}^{۲})^{۱/۲}}$$

آن‌گاه

$$x=\frac{a_{۳}}{(a_{۱}^{۲}+a_{۲}^{۲}+a_{۳}^{۲})^{۱/۲}},\quad y=\frac{b_{۳}}{(b_{۱}^{۲}+b_{۲}^{۲}+b_{۳}^{۲})^{۱/۲}}$$

که درآن همهٔ a_iها و b_iها مقادیر حقیقی می‌باشند. ازجمع کردن سه‌نابرابری حاصل به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{a_{۱}^{۲}+a_{۲}^{۲}+a_{۳}^{۲}}{a_{۱}^{۲}+a_{۲}^{۲}+a_{۳}^{۲}}\right)+\frac{۱}{۲}\left(\frac{b_{۱}^{۲}+b_{۲}^{۲}+b_{۳}^{۲}}{b_{۱}^{۲}+b_{۲}^{۲}+b_{۳}^{۲}}\right)$$
$$\geqslant\frac{a_{۱}b_{۱}+a_{۲}b_{۲}+a_{۳}b_{۳}}{(a_{۱}^{۲}+a_{۲}^{۲}+a_{۳}^{۲})^{۱/۲}(b_{۱}^{۲}+b_{۲}^{۲}+b_{۳}^{۲})^{۱/۲}},$$

این نابرابری، همان‌طورکه مطلوب ماست، الزاماً نابرابری زیر را نتیجه می‌دهد

$$۱\geqslant\frac{a_{۱}b_{۱}+a_{۲}b_{۲}+a_{۳}b_{۳}}{(a_{۱}^{۲}+a_{۲}^{۲}+a_{۳}^{۲})^{۱/۲}(b_{۱}^{۲}+b_{۲}^{۲}+b_{۳}^{۲})^{۱/۲}}$$

که هم‌ارز با نابرابری کوشی(۴۲.۴) است.[بخش (پ)]. حالت n بعدی (۴۵.۴) نابرابری کوشی را می‌توان به‌روش مشابه ثابت کرد.

۵.۴ نابرابری هولدر[1]

اکنون برای ساختن یکی از مهمترین نـابرابریهای آنالیز، یعنی نابرابری هولدر،

1. Hölder

همهٔ ابزارهای لازم را دراختیار داریم. بنابراین نابرابری، به ازای هرمجموعه از مقادیر نامنفی a_i و b_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ داریم:

$$(a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p)^{1/p}(b_1^q+b_2^q+\cdots+b_n^q)^{1/q} \geqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \qquad (47.4)$$

که در آن p و q با رابطهٔ

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \qquad (48.4)$$

بههم مربوطاند و $p>1$.

حالت $p=q=2$ نابرابری‌هلدر همان نابرابری‌کوشی است که در بخشهای قبلی ثابت شد. لکن در حالت کلی باید توجه خود را به‌عددهای نامنفی a_i و b_i محدود کنیم، زیرا توانهای p و q کسری هم می‌توانند باشند.

درحقیقت (۴۷.۴) را تنها به‌ازای‌عددهای گویای p و q ثابت خواهیم کرد، ولی این حکم به‌ازای عددهای گنگ p و q نیز برقرار است.

با نابرابری

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\geqslant ab$$

که در بخش ۳.۴ ثابت گردید شروع می‌کنیم؛ نابرابری (۳۳.۴) را به‌ازای عددهای گویای p و q و عددهای نامنفی a و b درنظر می‌گیریم. آن گاه از حیله‌ای که در بخش ۴.۴ به‌کار رفت استفاده می‌کنیم. به‌فرض

$$a=\frac{a_1}{(a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p)^{1/p}}, \quad b=\frac{b_1}{(b_1^q+b_2^q+\cdots+b_n^q)^{1/q}}$$

آن گاه،

$$a=\frac{a_2}{(a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p)^{1/p}}, \quad b=\frac{b_2}{(b_1^q+b_2^q+\cdots+b_n^q)^{1/q}}$$

و غیره، و پس‌از آن با جمع کردن نابرابریهای به‌دست‌آمده به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{p}\left(\frac{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p}{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p}\right)+\frac{1}{q}\left(\frac{b_1^q+b_2^q+\cdots+b_n^q}{b_1^q+b_2^q+\cdots+b_n^q}\right)$$

$$\geqslant\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{(a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p)^{1/p}(b_1^q+b_2^q+\cdots+b_n^q)^{1/q}},\quad (۴۹.۴)$$

وسرانجام، بااستفاده از (۴۸.۴) و به‌کاربردن نابرابری (۴۷.۴)، نابرابری‌مطلوب به‌دست می‌آید. در (۴۹.۴) برابری رخ می‌دهد اگر و تنها اگر به‌ازای همهٔ‌مقادیر، همهٔ b_i^q/a_i^pها دارای یك مقدار مشترك باشند.

۶.۴ نابرابری مثلث

همهٔ ما با این قضیهٔ هندسی که بیان می‌کند در هرمثلث، مجموع درازاهای دو ضلع ناکوچکتر از درازای ضلع سوم است، آشنا هستیم. اکنون ببینیم صورت جبری این قضیه چیست؟

مثلثی را مطابق شکل ۶.۴ در نظر می‌گیریم. می‌بینیم که نابرابری هندسی

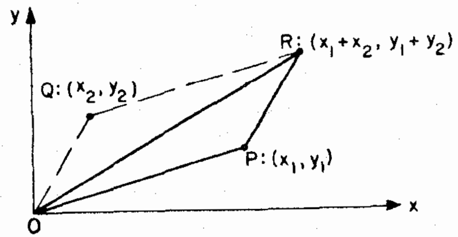
$$OP+PR\geqslant OR$$

هم‌ارز است با نابرابری جبری

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}\geqslant\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}\quad (۵۰.۴)$$

که نابرابری مثلث نامیده می‌شود.

آیا می‌توانیم نابرابری مثلث (۵۰.۴) را بدون توسل به‌هندسه ثابت کنیم؟



شکل ۶.۴ نابرابری مثلث.

این‌کار درحالت یك‌بعدی در بخش ۸.۳ (قضیهٔ ۲.۳) انجام گردید، آنجا که‌نابرابری مثلث به‌جای آنکه به‌صورت

$$|x_1|+|x_2|\geqslant |x_1+x_2|$$

نوشته شود به‌صورت نابرابری هم‌ارز آن، یعنی به‌صورت زیر، نوشته شد:

$$\sqrt{x_1^2}+\sqrt{x_2^2}\geqslant\sqrt{(x_1+x_2)^2}\ .$$

اکنون هم ساده‌ترین راه برای اثبات نابرابری مثلث در حالت دو بعدی (۵۰.۴) آن است که درستی بودن یك نابرابری هم‌ارز آن‌را ثابت‌کنیم. برای این کار دوطرف نابرابری (۵۰.۴) را به‌توان دو می‌رسانیم، و نابرابری زیر راکه هم‌ارز با آن است به‌دست می‌آوریم:

$$x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+2\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$
$$\geqslant(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2\ ,$$

که به‌آسانی دیده می‌شود این نابرابری هم‌ارز است با

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}\geqslant x_1x_2+y_1y_2 \qquad (۵۱.۴)$$

که این‌نیز نتیجهٔ ساده‌ای از نابرابری آشنای کوشی است [حالت دو بعدی، (۳۸.۴) را ببینید]

$$(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)\geqslant(x_1x_2+y_1y_2)^2 \qquad (۵۲.۴)$$

و بنابراین نابرابری مثلث ثابت می‌شود.

مانندحالت یك‌بعدی (قضیهٔ۲.۳)، بحث درشرایطی که تحت‌آنها درنابرابری مثلث، برابری برقرار باشدکمی پیچیده است. به‌یاد داریدکه در نابرابری کوشی (۵۲.۴) برابری برقراراست اگر وتنها اگر جفتهای $(x_1,\ y_1)$ و $(x_2,\ y_2)$ باهم متناسب باشند، یعنی $x_1=kx_2$ و $y_1=ky_2$. اکنون ملاحظه می‌کنیم که (۵۱.۴) از (۵۲.۴) به‌این ترتیب به‌دست می‌آیدکه از دوطرف ریشهٔ دوم بگیریم، این‌عمل درست است؛ زیرا ریشهٔ دوم نامنفی طرف چپ گرفته شده است. اما اگر $x_1x_2+y_1y_2<0$، یعنی اگر $x_1x_2+y_1y_2$ ریشهٔ‌دوم‌منفی طرف‌راست (۵۲.۴)، یعنی ریشهٔ دوم منفی $(x_1x_2+y_1y_2)^2$، باشد، آن‌گاه حتی اگر $(x_1,\ y_1)$ و

$(x_۲, y_۲)$ متناسب باشند، نابرابری (۵۱.۴) اکید خواهد بود. پس در (۵۱.۴)، و بنابراین در نابرابری مثلث (۵۰.۴)، برابری برقرار است اگر وتنها اگر بهازای k، ثابت نامنفی تناسب، داشته باشیم $x_۱ = kx_۲$ و $y_۱ = ky_۲$.*

شرط لازم وکافی بالا برای برقراری برابری درنابرابری مثلث (۵۰.۴)، از نظرهندسی دارای این تعبیر است که نقطههای O، P و Q، شکل ۵.۴، بریك استقامت قرار داشته و P، Q دریك طرف O باشند. دراینصورت مثلث OPR تباه میشود. در این حالت، نهتنها میگوییم که P و Q با O در یك استقامتاند، بلکه P و Q هردو روی یك نیمخط بهمبدأ O قرار دارند.

میتوانید بررسی کنید که بحث بالا با بحث مربوط بهشرط متناظر برایحالت یك بعدی $|a+b| \leqslant |a|+|b|$، سازگاری دارد، یعنی اینکه برابری برقرار است اگر وتنها اگر a و b دارای یك علامت باشند.

اثبات نابرابری مثلث را میتوان تعمیم داد؛با دنبالکردن مجموعه الگوهای اثبات نابرابریهولدر، نتیجه میشود که بهازای همهٔعددهای حقیقی x_i و y_i داریم:

$$\sqrt{x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_n^۲}+\sqrt{y_۱^۲+y_۲^۲+\cdots+y_n^۲}$$
$$\geqslant\sqrt{(x_۱+y_۱)^۲+(x_۲+y_۲)^۲+\cdots+(x_n+y_n)^۲},$$

و مانند قبل، برابری برقرار است اگر و تنها اگر x_iها و y_iها با یك ثابت مثبت تناسب متناسب باشند. درفصل ۶، که اهمیت هندسی این نابرابریرا در نظر داریم، دوباره بهآن برخواهیم گشت.

اثبات دیگر نابرابری مثلث، که میتوان با تعمیم آن، نتیجهٔ کلیتری بهدست آورد، بهصورت زیر است: همانی

$$(x_۱+x_۲)^۲+(y_۱+y_۲)^۲$$
$$=x_۱(x_۱+x_۲)+y_۱(y_۱+y_۲)+x_۲(x_۱+x_۲)+y_۲(y_۱+y_۲)$$

را مینویسیم ونابرابریکوشی را بهصورت ریشهٔ دوم [معادلهٔ (۵۱.۴) را ببینید]، و بهطور جداگانه، درمورد عبارتهای

$$x_۱(x_۱+x_۲)+y_۱(y_۱+y_۲)$$

و

---

* برایمثال، $(-۳, ۴)$ و $(۶, -۸)$ با یك ثابت منفی تناسب متناسباند، درصورتی که $(-۳, ۴)$ و $(-۶, ۸)$ با یك ثابت مثبت متناسباند.

$$x_2(x_1+x_2)+y_2(y_1+y_2)$$

به‌کار می‌بریم و به‌دست می‌آوریم،

$$(x_1^2+y_1^2)^{1/2}[(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2]^{1/2} \geqslant x_1(x_1+x_2)+y_1(y_1+y_2),$$

و

$$(x_2^2+y_2^2)^{1/2}[(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2]^{1/2} \geqslant x_2(x_1+x_2)+y_2(y_1+y_2).$$

از جمع کردن این‌دو نابرابری به‌دست می‌آوریم

$$[(x_1^2+y_1^2)^{1/2}+(x_2^2+y_2^2)^{1/2}][(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2]^{1/2} \geqslant (x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2.$$

از تقسیم دوطرف این نابرابری برعامل مشترك $[(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2]^{1/2}$، به‌دست می آوریم،

$$(x_1^2+y_1^2)^{1/2}+(x_2^2+y_2^2)^{1/2} \geqslant [(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2]^{1/2}$$

و باردیگر، نابرابری مثلث (۵۰.۴) را ثابت کرده‌ایم.

اگر بـه‌آنجا برگردیم کـه برابری کوشی به‌صورت ریشهٔ دوم به‌کار رفت، دوباره ملاحظه می‌کنیم کـه برابری رخ می‌دهد اگر و تنها اگر به ازای یك ثابت نامنفی تناسب k داشته باشیم؛

$$x_1 = kx_2, \qquad y_1 = ky_2$$

یعنی، اگر وتنها اگر سه‌نقطهٔ O، P و Q بریك استقامت و P و Q در یك طرف O قرار گیرند.

۷.۴ نابرابری مینکووسکی[1]

اکنون برای اثبات نابرابری معروف دیگری، که از مینکووسکی است، همهٔ ابزارها و تدابیر لازم را در اختیار داریم. بنابراین نابرابری ، به‌ازای هرمجموعه ازمقادیر

---

1. Minkowski

نامنفی* x_1، y_1، x_2، y_2، و هر $p>1$، داریم؛

$$(x_1^p+y_1^p)^{1/p}+(x_2^p+y_2^p)^{1/p}\geqslant[(x_1+x_2)^p+(y_1+y_2)^p]^{1/p}. \quad (۵۳.۴)$$

که درحالت خاص $p=2$ همان نابرابری مثلث است.

برهان نابرابری مینکووسکی شبیه به برهانی است که اندکی پیش برای نابرابری مثلث داده‌شد، با این تفاوت که به‌جای نابرابری کوشی از نابرابری کلیتر هولدر (بخش ۵.۴) استفاده می‌شود. همانی

$$(x_1+x_2)^p+(y_1+y_2)^p=[x_1(x_1+x_2)^{p-1}+y_1(y_1+y_2)^{p-1}]$$
$$+[x_2(x_1+x_2)^{p-1}+y_2(y_1+y_2)^{p-1}]$$

را می‌نویسیم و نابرابری هولدر را به‌طور جداگانه درمورد هریك‌از جمله‌ها به‌کار می‌بریم. درنتیجه داریم،

$$(x_1^p+y_1^p)^{1/p}[(x_1+x_2)^{(p-1)q}+(y_1+y_2)^{(p-1)q}]^{1/q}$$
$$\geqslant x_1(x_1+x_2)^{p-1}+y_1(y_1+y_2)^{p-1}$$

و

$$(x_2^p+y_2^p)^{1/p}[(x_1+x_2)^{(p-1)q}+(y_1+y_2)^{(p-1)q}]^{1/q}$$
$$\geqslant x_2(x_1+x_2)^{p-1}+y_2(y_1+y_2)^{p-1}$$

چون $1/p+1/q=1$، ملاحظه می‌کنیم که $(p-1)q=p$. از جمع این دو نابرابری به‌دست می‌آوریم

$$[(x_1+x_2)^p+(y_1+y_2)^p]^{1/q}[(x_1^p+y_1^p)^{1/p}+(x_2^p+y_2^p)^{1/p}]$$
$$\geqslant(x_1+x_2)^p+(y_1+y_2)^p;$$

سپس ازتقسیم دوطرف بر $[(x_1+x_2)^p+(y_1+y_2)^p]^{1/q}$، به‌دست می‌آوریم

$$(x_1^p+y_1^p)^{1/p}+(x_2^p+y_2^p)^{1/p}\geqslant[(x_1+x_2)^p+(y_1+y_2)^p]^{1-1/q}$$

که نابرابری مینکووسکی (۵۳.۴) است، زیرا $1-1/q=1/p$.

---

* محدودکردن به‌مقادیرنامنفی لازم است زیرا، درحالت کلی، توانهای p و q می‌توانند عددهای کسری نیز باشند.

در نابرابری مینکووسکی، برابری برقرار است اگر و تنها اگر در نابرابری هولدر برابری برقرار باشد [به‌همین‌جهت بود که (۵۳.۲) ثابت شد]، یعنی اگر و تنها اگر نقطه‌های (x_1, y_1) و (x_2, y_2) [که در ربع اول قرار دارند] بر یک استقامت باشند.

همان‌طور که از تعمیمهای نابرابریهای کوشی، هولدر و مثلث، ممکن است حدس بزنید، نابرابری کلی مینکووسکی به ازای مجموعه‌هایی از n عدد نامنفی x_1، x_2، ...، x_n و y_1، y_2، ...، y_n و به‌ازای $p \geqslant 1$، عبارت است از:

$$[x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p]^{1/p}+[y_1^p+y_2^p+\cdots+y_n^p]^{1/p}$$
$$\geqslant[(x_1+y_1)^p+(x_2+y_2)^p+\cdots+(x_n+y_n)^p]^{1/p}.$$

به‌ازای $p<1$، نماد نابرابری معکوس می‌شود.

۸.۴ قدرمطلقها و نابرابریهای کلاسیک

نابرابریهای میانگین حسابی ـ میانگین هندسی، کوشی، هولدر، مثلث و مینکووسکی، نابرابریهای کلاسیک آنالیز ریاضی‌هستند. برای مراجعهٔ فوری، همهٔ این‌نابرابریها یکجا درجدول (۳) جمع آوری شده‌اند.

این نابرابریها به‌ازای‌همهٔ مقادیر نامنفی a_1،a_2، ...، a_n و b_1، b_2، ...، b_n؛ عدد دلخواه $p>1$، و به‌شرط $1/p+1/q=1$ معتبرند. نابرابریهای کوشی و مثلث به ترتیب حالت خاص $p=2$، از نابرابریهای هولدر و مینکووسکی هستند. برابری درنابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی برقرار است اگر و تنها اگر همهٔ a_iها برابر باشند، در نابرابری هولدر، مجموعه مقادیر (a_i^p)، (b_i^q) متناسب باشند، و برای سایر نابرابریها، مجموعه مقادیر (a_i) و (b_i) متناسب باشند.

نابرابریهای بالا اساساً مربوط به‌مقادیر نامنفی‌اند. چون قدرمطلق هرعدد حقیقی نامنفی است، ازاین‌رو این نابرابریها به‌ویژه در مورد قدر مطلقهای عددهای حقیقی دلخواه به‌کار می‌روند. با توجه به حکم قضیهٔ ۲.۳، که بنا بر آن مجموع قدرمطلقهای چند عدد، ناکوچکتر از قدرمطلق مجموع آن عددهاست، می‌توان این کاربرد را تعمیم داد، چنانکه درمورد نابرابری مینکووسکی، داریم

$$|a_i|+|b_i|\geqslant|a_i+b_i|,$$

برابری برقراراست اگروتنها اگر a_iها و b_iها دارای یک‌علامت باشند. نابرابریهای

جدول ۳. نابرابریهای کلاسیك به‌ازای مقادیر نامنفی

نابرابری	نام
$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant (a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}$	نابرابری میانگین حسابی-میانگین‌هندسی
$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^{1/2}(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)^{1/2} \geqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$	نابرابری کوشی
$(a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p)^{1/p}(b_1^q+b_2^q+\cdots+b_n^q)^{1/q} \geqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$	نابرابری هولدر
$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^{1/2}+(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)^{1/2}$ $\geqslant [(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2]^{1/2}$	نابرابری مثلث
$(a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p)^{1/p}+(b_1^p+b_2^p+\cdots+b_n^p)^{1/p}$ $\geqslant [(a_1+b_1)^p+(a_2+b_2)^p+\cdots+(a_n+b_n)^p]^{1/p}$	نابرابری مینکووسکی

جدول ۴. نابرابریهای کلاسیک بهازای مقادیر دلخواه

نام	نابرابری
نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی	$\dfrac{\lvert a_1\rvert+\lvert a_2\rvert+\cdots+\lvert a_n\rvert}{n} \geqslant \lvert a_1 a_2 \cdots + a_n\rvert^{1/n}$
نابرابری کوشی	$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^{1/2}(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)^{1/2} \geqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$
نابرابری هولدر	$(\lvert a_1\rvert^p+\lvert a_2\rvert^p+\cdots+\lvert a_n\rvert^p)^{1/p}(\lvert b_1\rvert^q+\lvert b_2\rvert^q+\cdots+\lvert b_n\rvert^q)^{1/q}$ $\geqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$
نابرابری مثلث	$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^{1/2}+(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)^{1/2}$ $\geqslant [(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2]^{1/2}$
نابرابری مینکووسکی	$(\lvert a_1\rvert^p+\lvert a_2\rvert^p+\cdots+\lvert a_n\rvert^p)^{1/p}+(\lvert b_1\rvert^p+\lvert b_2\rvert^p+\cdots+\lvert b_n\rvert^p)^{1/p}$ $\geqslant [\lvert a_1+b_1\rvert^p+\lvert a_2+b_2\rvert^p+\cdots+\lvert a_n+b_n\rvert^p]^{1/p}$

تعمیم داده‌شده در جدول (۴) نموده شده‌اند.

در این نابرابریها، که شامل مقادیر حقیقی دلخواه a_1، a_2، ...، a_n و b_1، b_2، ...، b_n هستند، برابری برقرار است اگر و تنها اگر، در نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی همهٔ $|a_i|$ها برابر باشند، در نابرابری هولدر مجموعه مقادیر $(|a_i|^p)$ و $(|b_i|^q)$ متناسب و هریک از a_ib_iها نامنفی باشند، و در سایر نابرابریها، مجموعه مقادیر (a_i) و (b_i) با ثابت نامنفی متناسب باشند.

به‌عنوان یک کاربرد، به‌ازای مجموعه‌های مفروض ازمقادیر $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$، $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ و $(z_1, z_2, \cdots, z_n)$، فرض می‌کنیم

$$a_i = z_i - y_i, \qquad b_i = y_i - x_i$$

سپس

$$a_i + b_i = z_i - y_i + y_i - x_i = z_i - x_i$$

و بنابر تعمیم نابرابری مینکووسکی نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}(|z_1-y_1|^p + |z_2-y_2|^p + \cdots + |z_n-y_n|^p)^{1/p} \\ + (|y_1-x_1|^p + |y_2-x_2|^p + \cdots + |y_n-x_n|^p)^{1/p} \\ \geqslant (|z_1-x_1|^p + |z_2-x_2|^p + \cdots + |z_n-x_n|^p)^{1/p};\end{aligned}$$

برابری برقرار است اگر و تنها اگر مجموعه مقادیر

$(z_1-y_1, z_2-y_2, \cdots, z_n-y_n)$ و $(y_1-x_1, y_2-x_2, \cdots, y_n-x_n)$

با یک ثابت نامنفی تناسب، متناسب باشند.

۹.۴ میانگینهای متقارن

در این موقع شاید مبحث نابرابریها را خاتمه‌یافته تلقی کنید. درحقیقت عکس این درست است. همهٔ آنچه قبلا آمد تماسی کاملا سطحی با موضوع بود. نابرابریهایی که ثابت کرده‌ایم به‌راههای بیشماری می‌توانند توسعه داده شوند، و این توسعه‌ها به‌نوبهٔ خود می‌توانند تعمیم یابند. همان‌طور که دراین بخش و دربخش ۱۰.۴ نشان خواهیم داد، این حکمها را می‌توان به‌راههای زیرکانه‌ای ترکیب کرده و حکمهای بیشتری به‌دست آورد.

برای‌مثال، تعمیمی نسبتاً جالب ازنابرابری میانگین هندسی ـ میانگین‌حسابی به‌صورت زیر است: از سه میانگین

$$m_{1}=\frac{x_{1}+x_{2}+x_{3}}{3}$$

$$m_{2}=\left(\frac{x_{1}x_{2}+x_{1}x_{3}+x_{2}x_{3}}{3}\right)^{1/2}$$

$$m_{3}=(x_{1}x_{2}x_{3})^{1/3}$$

می‌توان نتیجه گرفت که به‌ازای همهٔ مقادیر نامنفی x_1، x_2 و x_3، داریم

$$m_{1}\geqslant m_{2}\geqslant m_{3}\,.$$

اثبات این نابرابری‌را به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌کنیم. این نابرابری به‌نوبهٔ خود حالت خاصی‌از حکم مشابهی است که به‌ازای هر n مقدار نامنفی معتبر است، که در آن تعداد n میانگین وجود دارد که با میانگین حسابی شروع و با میانگین هندسی خاتمه می‌یابند.

۴.۱۰ میانگین حسابی-هندسی گاوس[1]

فرض کنید a و b دو مقدار نامنفی باشند، و مقادیر a_1 و b_1 برحسب a و b چنین تعریف شوند

$$a_{1}=\frac{a+b}{2},\quad b_{1}=\sqrt{ab}\,.$$

بنابراصل موضوع بنیادی (۲) بند ۱.۳، دومقدار a_1 و b_1 نیز باید نامنفی باشند. به‌فرض $a>b$، داریم

$$a_{1}<\frac{a+a}{2}=a,\quad b_{1}>\sqrt{b^{2}}=b$$

علاوه‌براین، بنابر نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی، داریم

$$a_{1}>b_{1}$$

هرگاه این فرایند را تکرار و a_2 و b_2 را چنین معرفی کنیم

---

1. Gauss

$$a_2=\frac{a_1+b_1}{2},\quad b_2=\sqrt{a_1b_1}\,.$$

آن گاه با استدلالی مانند بالا، خواهیم داشت

$$a>a_1>a_2$$
$$b<b_1<b_2$$

و

$$a_2>b_2$$

این فرایند را که ادامه دهیم، و a_3 و b_3 را چنین تعریف کنیم

$$a_3=\frac{a_2+b_2}{2},\quad b_3=\sqrt{a_2b_2}$$

سپس a_4، b_4 و به‌طورکلی a_n و b_n را با رابطه‌های بازگشتی زیر تعریف کنیم

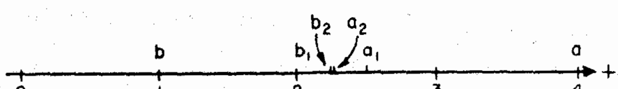
$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\quad b_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} \tag{۵۴.۴}$$

بعد از مرحلهٔ kام ایـن فرایند عددهای a_1، a_2، ...، a_k و b_1، b_2، ...، b_k را خواهیم داشت که درنابرابریهای زیر صدق می‌کنند.

$$a>a_1>a_2>\dots>a_k>b_k>b_{k-1}>\dots>b_1>b\,.$$

برای‌مثال، به‌ازای $a=4$ و $b=1$، اولین‌چند a_i و b_i روی‌خط شکل ۷.۴ نمایش داده‌شده‌اند. مشاهده می‌کنیم که کوچکترین این‌عددها b و بزرگترین آنها a است، و هر b نیز از هر a کوچکتر است.

لزومی‌ندارد که بعداز k مرحله‌متوقف شویم. فرض کنیم که‌تعریف a_iها و b_iها را با رابطه‌های(۵۴.۴) ادامه دهیم، هرجفت a_i، b_i که بدین ترتیب تعریف می‌شوند،



شکل ۷.۴ میانگین حسابی ـ هندسی گاوس.

مابین جفت قبلی a_{i-1} و b_{i-1} قرار دارند. به نظر می‌رسد که مقادیر a_n که با بزرگ‌شدن n، کاهش می‌یابند، ولی همیشه باید بزرگتر از هر b_i باقی بمانند به‌مقدار ثابتی‌مانند A میل می‌کنند؛ به‌طور مشابه، b_nها که با بزرگ‌شدن n، افزایش‌می‌یابند ولی کوچکتر از هر a_i باقی می‌مانند، به‌یک مقدار ثابت B میل می‌کنند. خواننده‌ای که بامفهوم حد آشناست، به‌آسانی خواهد دید که A حد دنبالهٔ نامتناهی $\{a_n\}$ و B حد دنبالهٔ نامتناهی $\{b_n\}$ است.

علاوه‌براین، وقتی n افزایش پیدا می‌کند، تفاضل a_n-b_n سریعاً کوچکتر می‌شود. می‌توانیم نشان دهیم که درهرمرحله، این تفاضل کوچکتر از نصف آنچه در مرحلهٔ قبل بوده، می‌باشد. با به‌کاربردن (۵۴.۴) می‌توان نوشت،

$$a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}-\sqrt{a_nb_n}=\frac{a_n-2\sqrt{a_nb_n}+b_n}{2} \qquad (۵۵.۴)$$

چون $\sqrt{b_n}<\sqrt{a_n}$، داریم

$$2b_n<2\sqrt{a_nb_n}\,;$$

با اضافه‌کردن $a_n-b_n-2\sqrt{a_nb_n}$ به‌دوطرف این نابرابری به‌دست می‌آوریم،

$$a_n-2\sqrt{a_nb_n}+b_n<a_n-b_n$$

که با استفاده از (۵۵.۴)، همان‌طوری که می‌خواستیم ثابت کنیم، نتیجه می‌دهد که

$$a_{n+1}-b_{n+1}<\frac{1}{2}(a_n-b_n)\,.$$

بدین‌طریق، aها و bها به‌همدیگر میل‌می‌کنند. پس حدهای آنها A و B باید برهم منطبق شوند. بنابراین

$$A=B\,,$$

این حدمشترك تنها به‌عددهای a و b، که با آنها شروع کردیم، بستگی دارد؛ به‌زبان ریاضی، A تابعی از a و b است. گاوس نشان داد که این تابع تنها برای ارضای حس کنجکاوی نیست، بلکه در آنالیز نسبتاً بنیادی است؛ این تابع برای بنای شاخه‌ای از ریاضیات به‌کار می‌رود که «نظریهٔ توابع بیضوی» نام دارد.

فصل پنجم

مسأله‌های بیشینه‌سازی وکمینه‌سازی

۱۰۵ مقدمه

اکنون شرح خواهیم داد که نابرابریهای به‌دست آمده در فصل قبلی را چگونه می‌توان برای بحث درمجموعه‌ای از مسأله‌های مهم وجالب به‌کار برد. این مسأله‌ها عبارت‌اند از مسأله‌های بیشینه‌سازی و کمینه‌سازی.

در مطالعهٔ جبر و مثلثات، همهٔ مسأله‌هایی که با آنها مواجه می‌شوید ماهیت عمومی زیر را دارند: با داده‌هایی مفروض و عملهایی معین که باید روی آنها اجرا شوند، نتیجه باید معین شود. یا به‌عکس، با معلوم بودن عملهایی که باید اجرا شوند و معلوم بودن نتیجه باید معین کرد که داده‌های اولیه چه باید باشند.

برای‌مثال، با سه کارگر مواجه هستید: A مشتاق و جدی، B کند، زحمت‌کش و باوجدان، و C کاملا تنبل. این سه کارگر به کار حفر گودال، ساختن استخر، یا ساختن خانه، گمارده می‌شوند. مسأله‌ای که همواره مطرح می‌شود تعیین مدت‌زمانی است که آنها باهمدیگر آن‌کار را تمام می‌کنند، به‌فرض آنکه میزان‌کارایی هر کدام معلوم باشد، یا تعیین میزان‌کارایی یك‌کارگر است به‌فرض آنکه زمان لازم برای آنکه هرسه‌نفر با همدیگرکار را انجام دهند و میزان‌کارایی دو کارگر دیگر معلوم باشد.

گاهی اوقات مثلثهایی به‌شما داده می‌شود که در آنها دوضلع و یك زاویه، یا اینکه سه‌ضلع، معلوم است و منظور مسأله معین کردن بقیهٔ ضلعها و زاویه‌هاست.

انواع مسأله‌های از گونهٔ بالا، حالتهای ساده‌ای از مسأله‌هایی هستند که توصیفی نامیده می‌شوند.

در اینجا می‌خواهیم نوع کاملا متفاوتی از مسأله‌ها را درنظر بگیریم. حالتهایی را درنظر خواهیم گرفت که در آنها راههای زیادی برای اقدام کردن وجود دارد، و موضوع مسأله معین کردن انتخابهای بهین است. پرسشهایی با این ماهیت در همهٔ شاخه‌های علوم رخ می‌دهند و یکی از مهمترین کاربردهای آنالیز ریاضی را تشکیل می‌دهند. علاوه‌براین، قسمت عمدهٔ فیزیك و مهندسی زیرتسلط اصولی است که بیان می‌کنند که فرایندهای فیزیکی آن گاه درطبیعت روی می‌دهند که یك کمیت، مانند زمان یا انرژی، ماکسیمم یا مینیمم شده باشد.

به کمك فن سحرآمیزی که فرما[1]، لایبنیتس[2] و نیوتون[3]، بنا نهادند، یعنی حساب دیفرانسیل و انتگرال، فرایندهای زیادی از این نوع می‌توانند موردبحث قرار گیرند. تصور می‌شود درقرن هفدهم، افرادی که حساب دیفرانسیل و انتگرال را می‌دانستند به‌این عنوان که یك دانش فوق‌العاده را می‌دانند، در خیابان انگشت‌نما بوده‌اند. امروزه حساب دیفرانسیل و انتگرال موضوعی است که در دبیرستان و در کالج تدریس می‌شود، و فهمیدن آن به‌داشتن استعدادی استثنایی نیاز ندارد.

در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال، به این نکته متوجه خواهید شد که بسیاری‌از مسأله‌هایی که در اینجا با روشهای جبری بحث شدند می‌توانند کاملا و به آسانی به کمك حساب دیفرانسیل وانتگرال نیز حل شوند. بنابراین آموزنده خواهد بود که این مسأله‌ها را به‌طور ذهنی به روشهای فنی ارائه‌شده در اینجا حل کنید و سپس برای آزمون راه‌حل خود، روش رسمی حساب دیفرانسیل و انتگرال را دنبال کنید.

هرفن، از جمله حساب دیفرانسیل و انتگرال، و به‌همان خوبی آن، نظریهٔ نابرابریها که در حل مسأله‌های بیشینه‌سازی وکمینه‌سازی به‌کار رود، سود و زیان خودش را دارد. این بیشتر ویژگی ریاضیات است که در آن برای حل هرمسألهٔ خاص، تکنیکهای زیادی همدوش هم وجود دارند. معمولا، مسأله‌ای که به‌یك راه می‌تواند حل شود، به‌راههای دیگری نیز می‌تواند حل شود.

۲.۵ مسألهٔ دیدو[4]

بنابرافسانه‌ای، شهر کارتاژ[5] را دیدو، شاهزاده‌خانمی از سرزمین صور[6] بنا نهاد. وی

1. Fermat 2. Leibniz 3. Newton
4. Dido 5. Carthage 6. Tyre

که درجستجوی زمینی برای اسکان جدید بود، با اصرار ازبومیهای محلی امتیازی به‌دست آورد که می‌توانست مقداری زمین به‌اندازهٔ یك پوست گاو را اشغال کند؛ با این نیت که این مقیاس لفظی می‌تواند به‌مقداری کاملا زیاد منجر شود: پوست گاو را استادانه به‌نوارهایی ظریف ببرد و سپس آنها را به‌رشته درآورد و با آن، زمینی خیلی وسیعتر ازمساحت یك پوست گاو، موردنظر بومیها را، احاطه کند.

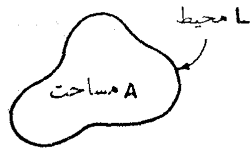
مسألهٔ ریاضی که دیدو با آن روبرو شد، یافتن منحنی بسته‌ای با محیط ثابت بود، که بزرگترین مساحت‌را احاطه کند. شکل ۱.۵ را ببینید.

این مسأله درحالت کلی خیلی پیچیده‌تر ازآن است که ما بتوانیم آن‌را مورد بحث قرار دهیم. درحقیقت درسطح تحصیلی فعلی، ما حتی نمی‌دانیم چگونه آن را به‌شکل یك‌فرمول دقیق درآوریم، زیرا برای بیان منظور خود از محیط یا مساحتی که با یك منحنی دلخواه مشخص می‌شود، هیچ وسیله‌ای دراختیار نداریم. حساب دیفرانسیل و انتگرال تعریفهایی‌را پیشنهاد می‌کند و عبارتهایی تحلیلی را برای این کمیتها فراهم‌می‌آورد، وبخشی بازهم پیشرفته‌تر از ریاضیات، به‌نام حساب تغییرات، یك راه‌حل مسأله را دراختیار می‌گذارد.

همان‌طور که ممکن است حدس زده شود، منحنی بهین مسألهٔ دیدو، یك دایره است. لیکن در اینجا روی حالتهای ساده‌ای ازاین مسأله تأمل می‌کنیم که می‌توانیم آنها را به‌آسانی به‌کمك قضیه‌های اساسی حاصل از نظریهٔ نابرابریها مورد بحث قرار دهیم. اگر علاقه‌مندید که این‌مبحث‌را بازهم بیشتر دنبال کنید، می‌توانید کتاب جالب نابرابریهای هندسی، ازهمین مجموعه کتابها را مطالعه کنید.

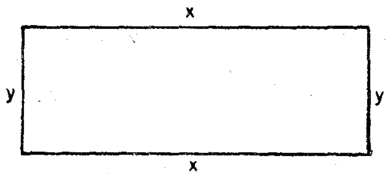
۳.۵ حالت ساده‌ای از مسألهٔ دیدو

به‌ملاحظاتی عملی و گوناگون فرض می‌کنیم که دیدو مجبور بود یك قطعه زمین به شکل مربع مستطیل مطابق شکل ۲.۵، را انتخاب کند.



شکل ۱.۵

مسألهٔ دیدو



شکل ۲.۵

حالت ساده‌ای از مسألهٔ دیدو

اگر درازای ضلعهای این مربع مستطیل را به ترتیب با x و y نشان دهیم، محیط آن با فرمول

$$L=۲x+۲y \tag{۱.۵}$$

و مساحت آن با فرمول

$$A=xy \tag{۲.۵}$$

نمایش داده می‌شود.

چون x و y درازاها را نمایش می‌دهند، لزوماً کمیتهایی نامنفی هستند، و با توجه به‌فرمول ۱.۵، نتیجه می‌شود که x و y باید در نابرابریهای زیر صدق کنند:

$$\frac{L}{۲}\geqslant x\geqslant ۰, \quad \frac{L}{۲}\geqslant y\geqslant ۰. \tag{۳.۵}$$

پس بدیهی است که مساحت، $A=xy$، نمی‌تواند به‌طور دلخواه بزرگ‌شود. درواقـع، از نابرابریهای (۳.۵) و فرمـول (۲.۵) و بنا برقضیهٔ ۵.۲ از فصل ۲، ملاحظه می‌کنیم که A نمی‌تواند ازمقدار $L^۲/۴$ تجاوز کند، یعنی داریم

$$\frac{L^۲}{۴}\geqslant xy=A \tag{۴.۵}$$

ابعاد را چگونه تعیین کنیم که مساحت ماکسیمم شود؟

با رجوع به‌نابرابری میانگین حسابی و میانگین هندسی مربوط به‌دو کمیت، ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای همهٔ عددهای نامنفی x و y داریم،

$$\frac{x+y}{۲}\geqslant\sqrt{xy} \tag{۵.۵}$$

دراین حالت داریم $x+y=L/۲$، واز نابرابری (۵.۵) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{L}{۴}\geqslant\sqrt{xy}, \quad \frac{L^۲}{۱۶}\geqslant xy=A. \tag{۶.۵}$$

درنتیجه، مشاهده می‌کنیم که اولین‌کران تقریبی مساحت، یعنی $L^۲/۴$، که در (۴.۵) به‌دست آمد به‌طورقابل‌ملاحظه‌ای قشرده‌ترشد، و ما توانستیم پیشرفت بیشتری داشته‌باشیم. به‌یاد دارید که قبلا ثابت‌کرده‌ایم در (۶.۵) برابری برقرار است اگر

و تنها اگر $y=x$. در اینجا، این بدین‌معنی است که کران بالای جدید، $L^{۲}/۱۶$، به‌دست می‌آید اگر و تنها اگر $y=x$. به‌ازای همهٔ انتخابهای نامنفی x و y که در رابطهٔ (۱.۵) صدق کنند، این مساحت کمتر از $L^{۲}/۱۶$ خواهد بود.

ازاین تجزیه و تحلیل چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آوریم؟ نتیجه می‌شود مساحت یك مستطیل بامحیط L هیچ‌گاه نمی‌تواند ازمقدار $L^{۲}/۱۶$ تجاوز کند، و درحقیقت، مساحت ماکسیمم می‌شود اگر و تنها اگر ضلعها را برابر با یکدیگر، یعنی برابر با مقدار $L/۴$، انتخاب کنیم.

بنابراین با روشهای کاملا جبری، به‌برهانی معروف، و به‌طور شهودی بدیهی، دست یافتیم مبنی براینکه ازبین همهٔ مستطیلهای با محیط ثـابت، آنکه مربع باشد دارای بیشترین مساحت است.

۴.۵ مسألهٔ عکس

اکنون این‌مسأله را درنظر می‌گیریم که ازمربع مستطیلهای بامساحت ثابت کدام‌یك کمترین محیط را دارد. این مسأله دوگان یا عکس مسألهٔ قبلی است.

بامراجعه به‌معادله‌های (۱.۵) و (۲.۵)، مشاهده‌می‌کنیم که اکنون می‌خواهیم مقادیـر نامنفی x و y را طوری تعیین کنیم کـه عبارت $۲x+۲y$ را مینیمم کند، درصورتی که مقدار ثابت A را برای حاصلضرب xy حفظ نماید.

همان‌طورکـه ممکن است انتظار برود، همان نابرابری میانگینهای حسابی و هندسی یك‌راه‌حل این مسأله را ارائه می‌دهد. بنابر رابطهٔ (۵.۵) بالا، داریم

$$\frac{(x+y)^{۲}}{۴}\geqslant xy=A.$$

بنابراین مشاهده می‌کنیم که

$$x+y\geqslant ۲\sqrt{A},$$

$$L=۲x+۲y\geqslant ۴\sqrt{A}.$$

درنتیجه، می‌توانیم ثابت‌کنیم که محیط باید لااقل به‌بزرگی $۴\sqrt{A}$ باشد، و علاوه‌براین، این مقدار مینیمم واقعاً به‌دست می‌آید اگر وتنها اگر $x=y=\sqrt{A}$. پس بازهم شکل مستطیل بهین باید مربع باشد.

این ارتباط دو طرفه بین جوابهای ایـن دومسأله تصادفی نیست. معمولا در

بررسی مسأله‌های تغییراتی از این نوع، حل یك مسأله، به‌طور خودکار، حل مسألهٔ دوگان را نیز نتیجه می‌دهد. برای ملاحظهٔ اثباتی از این اصل دوگانگی، برای‌مثال، کتاب نابرابریهای هندسی را، که قبلا اشاره شد، مطالعه کنید.

۵.۵ مسیر یك پرتو نور

فرض کنیم که می‌خواهیم مسیر پرتو نوری‌را تعیین کنیم که مطابق شکل ۳.۵، از نقطهٔ مفروض P آغاز شود، در نقطه‌ای مانند R به‌یك‌رویهٔ تخت برخورد کند، و پس از بازتاب به‌نقطهٔ مفروض Q برسد. درحقیقت، این مسأله آن‌گونه که در اینجا عنوان شده مسأله‌ای سه‌بعدی است، اما ازتجزیه وتحلیل زیر و تعمیم آن، برمی‌آید که این پرتو باید درصفحه‌ای واقع باشد که از P و Q می‌گذرد وبررویهٔ تخت عموداست.

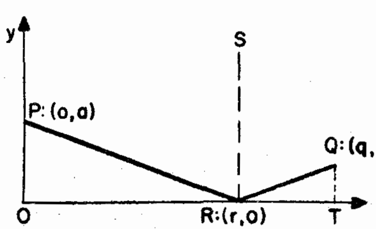
محیط را همگن فرض‌می‌کنیم، به‌طوری‌که پرتو نور باسرعت ثابت حرکت کند. نقطهٔ R و مسیرهای PR و RQ را چگونه تعیین کنیم؟ از اصل فرما کمك می‌گیریم که بنابرآن به‌ازای همهٔ انتخابهای ممکن نقطهٔ R، طول کل زمان‌لازم باید مینیمم باشد. چون محیط همگن است، این بدین‌معنی است که مسیرهای PR و RQ خطهای مستقیم‌اند و R طوری قرار گرفته است که درازای $PR+RQ$ مینیمم‌است.

مختصات P و Q را به‌ترتیب $(\circ, a)$ و (q, b)، وفاصلهٔ نامعلوم OR را r، فرض می‌کنیم. پس، مطابق شکل ۴.۵، داریم:

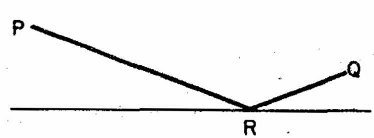
$$OP=a, \quad TQ=b, \quad OR=r, \quad RT=q-r$$

$$PR=\sqrt{a^{۲}+r^{۲}}, \quad RQ=\sqrt{b^{۲}+(q-r)^{۲}};$$

اکنون مسأله این است که r را چگونه تعیین کنیم تا $PR+RQ$، یعنی



شکل ۴.۵ تعیین نقطهٔ R.



شکل ۳.۵ مسیر پرتو نور بازتاب‌یافته.

$$\sqrt{a^2+r^2}+\sqrt{b^2+(q-r)^2}$$

مینیمم شود؟

نابرابری مثلث را به‌صورت زیر به‌کار می‌بریم:

$$\sqrt{a^2+r^2}+\sqrt{b^2+(q-r)^2}\geqslant\sqrt{(a+b)^2+(r+q-r)^2}$$
$$=\sqrt{(a+b)^2+q^2}\,.$$

بنابراین فاصلهٔ طی‌شده نمی‌تواند ازمقدار ثابت $\sqrt{(a+b)^2+q^2}$ کمتر باشد؛ و این‌مقدارمینیمم دقیقاً وقتی به‌دست‌می‌آید که جفتهای (a, r) و $(b, q-r)$ متناسب باشند و ثابت تناسب مثبت باشد، یعنی اینکه

$$\frac{a}{r}=\frac{b}{q-r}>0 \qquad (۷.۵)$$

اکنون ببینیم که شرط (۷.۵) به‌طور هندسی چه معنی می‌دهد. این شرط بدین معنی است‌که مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ORP و TRQ متشابه‌اند وچون b مثبت است، $q-r$ نیز مثبت است به‌طوری که R بین O و T قرار می‌گیرد. از تشابه این مثلثهای قائم‌الزاویه نتیجه می‌گیریم‌که زاویه‌های ORP و TRQ برابرند. بنابراین متممهای آنها یعنی زاویه‌های SRP و SRQ نیز برابرند. پس اصل‌فرما مارا به‌استنتاج‌این قضیهٔ معروف قادر ساخت‌که زاویهٔ تابش با زاویهٔ بازتاب برابر است:

$$\measuredangle SRP=\measuredangle SRQ$$

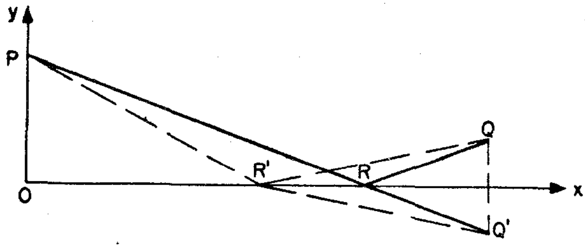
و حقیقت بدیهیتر آن است‌که R بین O و T قرار دارد.

اصل بازتاب بالا را با ملاحظات کاملا هندسی نیز می‌توان ثابت کرد. اگر مطابق شکل ۵.۵، R' نمایش نقطه‌ای غیرمشخص روی محور x و متفاوت از R، و اگر Q' نقطهٔ $(q,\ -b)$ باشد، آن‌گاه

$$PR+RQ=PR+RQ'=PQ'<PR'+R'Q'=PR'+R'Q\,.$$

بنابراین بازهم دیده می‌شودکه نقطهٔ R، فاصلهٔ $PR+RQ$ را مینیمم می‌کند.

فرض‌کنیم صفحه‌ای دو محیط همگن M_1 و M_2 با چگالیهای مختلف را از هم جدا می‌کند به‌طوری‌که پرتوهای نور در M_1 درامتداد خطهایی باسرعت v_1 و در M_2 در امتداد خطهایی باسرعت v_2 حرکت‌می‌کنند. اکنون می‌خواهیم مسیری‌را



شکل ۵.۵ تعیین هندسی نقطهٔ R.

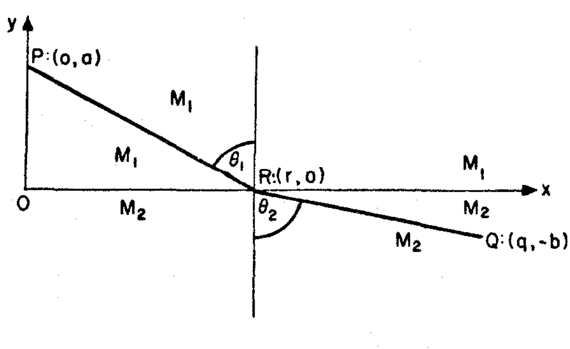
تعیین کنیم که نور طی آن در کمترین زمان از نقطهٔ P واقع در $M_۱$ به نقطهٔ Q واقع در $M_۲$ برسد؛ شکل ۶.۵ را ببینید. دوباره داریم:

$$PR=\sqrt{a^۲+r^۲}, \quad RQ=\sqrt{b^۲+(q-r)^۲}$$

می‌خواهیم که زمان (سرعت/فاصله) زیر مینیمم باشد.

$$t=\frac{\sqrt{a^۲+r^۲}}{v_۱}+\frac{\sqrt{b^۲+(q-r)^۲}}{v_۲}\cdot$$

درحالی که این یك مسألهٔ سادهٔ حساب دیفرانسیل است، به‌نظر نمی‌رسد که مقدار مینیمم را بتوان مستقیماً از نابرابریهای مقدماتی به‌دست آورد. مقدار مینیمم t آن‌گاه به‌دست می‌آید که مسیر از P به Q خط شکستهٔ PRQ (شکل ۶.۵) و



شکل ۶.۵ یك پرتو شکستهٔ نور.

به‌گونه‌ای باشد که زاویه‌های θ_1 و θ_2 (که به‌ترتیب بین قائم برصفحه با PR و RQ تشکیل می‌شوند) در رابطهٔ زیر صدق کنند:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}.$$

این رابطه به‌عنوان قانون شکست اسنل[1] معروف است.

۶.۵ حالت سه‌بعدی ساده‌شدهٔ مسألهٔ دیدو

اکنون مسألهٔ تعیین جعبهٔ مکعب مستطیلی را درنظر می‌گیریم که با مساحت کل ثابت، بزرگترین حجم را داشته باشد؛ شکل ۷.۵. اگر سه بعد مکعب مستطیل را با x، y و z نشان دهیم، حجم آن می‌شود:

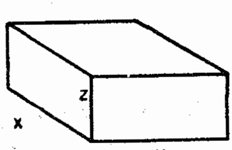
$$V=xyz$$

و مساحت کل آن می‌شود:

$$A=2xy+2xz+2yz.$$

باداشتن مقدار A، می‌خواهیم مقادیر x، y و z را چنان تعیین کنیم که V بزرگترین مقدار ممکن را اختیار کند. حل این مسأله کاربرد دیگری از نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی است.

با توجه به اینکه xy، xz و yz سه مقدار نامنفی هستند، نابرابری زیر را به‌دست می‌آوریم



شکل ۷.۵ حالت سه بعدی ساده‌شدهٔ مسألهٔ دیدو.

1. Snell

$$\frac{xy+xz+yz}{۳}\geqslant[(xy)(xz)(yz)]^{۱/۳}=(xyz)^{۲/۳}. \qquad (۸\cdot۵)$$

می‌دانیم که برابری می‌تواند رخ دهد اگر و تنها اگر

$$xy=xz=yz\,,$$

و این رابطه برقرار است اگر و تنها اگر

$$x=y=z\cdot$$

چون

$$xy+xz+yz=\frac{A}{۲}\,,$$

از نابرابری (۸.۵) نتیجه می‌شود

$$\left(\frac{A}{۶}\right)^{۳/۲}\geqslant V \quad \text{یا} \quad \frac{A}{۶}\geqslant(xyz)^{۲/۳}=V^{۲/۳}.$$

نتیجه می‌شود کــه حجم جعبهٔ مکعب مستطیل با مساحت کــل A نابزرگتر از $(A/۶)^{۳/۲}$ است واین مقدار به‌دست می‌آید اگر و تنها اگر

$$x=y=z=\left(\frac{A}{۶}\right)^{۱/۲}$$

بنابراین، جعبهٔ مکعب‌مستطیل با حجم ماکسیمم و با مساحت کل مفروض، یك مکعب است. باردیگر، رابطه‌ای دوطرفه را بین دومسأله ملاحظه می‌کنیم.

تمرین

۱. نشان دهیدکه اگر مجموع طولهای دوازده یال یك جعبهٔ مکعب مستطیل برابر با مقدار ثابت E باشد، آن‌گاه A مساحت کــل این جعبه حداکثر برابر با $E^۲/۲۴$ است، واین جعبه یك مکعب است اگر وتنها اگر $A=E^۲/۲۴$.

۲. عکس نتیجهٔ بیان‌شده درتمرین ۱ را بیان و اثبات کنید.

۳. تعیین کنیدکه ازبین همهٔ مستطیلهای باطول‌قطر برابر کدام‌یك دارای بزرگترین

محیط و کدام یك دارای بزرگترین مساحت است. (نتیجه‌های به‌دست آمده از تمرین ۳ بخش ۸.۲ یا تمرین ۳ از بخش ۳.۴ را به‌کار برید).

۷.۵ مثلثهای با مساحت ماکسیمم و محیط ثابت

اکنون مسألهٔ تعیین مثلث بامساحت ماکسیمم و بامحیط مفروض را درنظر می‌گیریم. فرض کنیم s نمایش نصف محیط مثلث شکل ۸.۵ باشد؛ یعنی

$$s=\frac{x+y+z}{۲}\cdot$$

همان‌طورکه معروف است، A مساحت مثلث را می‌توان ازفرمول زیر به‌دست آورد:

$$A=[s(s-x)(s-y)(s-z)]^{۱/۲}\cdot$$

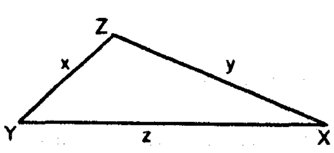
می‌خواهیم مقدار ماکسیمم مساحت را تعیین کنیم وقتی متغیرهـای x، y، و z همهٔ مقادیر مثبت صادق در رابطهٔ

$$۲s=x+y+z$$

را اختیارکنند، که در آن s مقدار ثابتی است.

باردیگر، نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی، راه‌حل ایـن مسأله را به طریق خیلی ساده‌ای ارائـه می‌دهد. به‌ازای سه مقدار نامنفی $s-x$، $s-y$، و $s-z$، داریم

$$\begin{aligned}[(s-x)(s-y)(s-z)]^{۱/۳}&\leqslant\frac{(s-x)+(s-y)+(s-z)}{۳}\\&\leqslant\frac{۳s-(x+y+z)}{۳}=\frac{۳s-۲s}{۳}=\frac{s}{۳}\cdot\end{aligned}$$



شکل ۸.۵ مسألهٔ دیدو برای مثلث.

بنابراین،

$$(s-x)(s-y)(s-z)\leqslant\left(\frac{s}{۳}\right)^{۳} \qquad (۹.۵)$$

به‌سادگی از (۹.۵) نتیجه می‌شود که:

$$A=[s(s-x)(s-y)(s-z)]^{۱/۲}\leqslant\left[s\left(\frac{s}{۳}\right)^{۳}\right]^{۱/۲}=\left(\frac{s^{۴}}{۳^{۳}}\right)^{۱/۲}=\frac{s^{۲}}{۳\sqrt{۳}}$$

برابری وجود دارد، اگر وتنها اگر

$$s-x=s-y=s-z\,,$$

یعنی اگر وتنها اگر $x=y=z$. درنتیجه می‌توانیم ثابت کنیم که:

قضیهٔ ۱۰.۵ ازبین همهٔ مثلثهای بامحیط ثابت، مثلث متساوی‌الاضلاع مساحت ماکسیمم دارد.

ملاحظه کنید که به‌نظر می‌رسد همهٔ نتیجه‌هایی که تاکنون دراین فصل به‌دست آورده‌ایم، دلالت‌براین دارند که وضع بهین وتقارن بایکدیگر درارتباط نزدیك‌اند. شاید اظهارنظر عمیق و زیبای کیتس[1] «زیبایی حقیقت است، حقیقت زیبایی است» به‌بهترین وجه حق این مطلب‌را اداکند.

تمرین

۱. به‌فرض آنکه s نمایش نصف محیط و A مساحت مثلثی با ضلعهای به‌طولهای x، y، و z باشند، یعنی

$$s=\frac{x+y+z}{۲}$$

و

$$A^{۲}=s(s-x)(s-y)(s-z)\,.$$

درحالت‌خاص که $y=z$، یعنی مثلث متساوی‌الساقین باشد، مساحت آن‌را با

---

1. Keats (شاعر انگلیسی)

I، و درحالت خاص که $x=y=z$، یعنی مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، مساحت آن را با E نشان می‌دهیم. نشان دهید که

$$I^{۲}=\frac{s}{۴}x^{۲}(s-x)$$

و

$$E^{۲}=\frac{s^{۴}}{۲۷}\cdot$$

۲. با توجه به نشانه‌هایی که در تمرین ۱ به‌کار رفت، نشان دهید که برای مثلثهایی که محیط آنها برابر با s است، داریم

$$E^{۲}-I^{۲}=\frac{s}{۲۷}(s+۳x)\left(s-\frac{۳x}{۲}\right)^{۲}$$

و

$$I^{۲}-A^{۲}=\frac{s}{۴}(s-x)(y-z)^{۲}\ ,$$

که در آن x طول قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین ویا اینکه طول یك‌ضلع مثلث درحالت کلی است.

۳. با به‌کاربردن فرمولهای تمرین ۲، نشان دهید که

$$E^{۲}-I^{۲}\geqslant ۰$$

و

$$I^{۲}-A^{۲}\geqslant ۰\ .$$

درهرکدام، تحت چه شرایطی برابری برقرار است؟

۴. با به‌کاربردن یکی‌از نابرابریهای تمرین ۳، نشان دهید که اگر محیط ویك ضلع مثلثی داده‌شده باشد، آن گاه مساحت آن ماکسیمم است وقتی که مثلث‌متساوی‌الساقین باشد.

۵. با به کاربردن یکی از نابرابریهای تمرین ۳، نشان دهید که از بین همهٔ مثلثهای متساوی‌الساقین بـا یـك محیط مفروض، مثلث متساوی‌الاضـلاع دارای مساحت ماکسیمم است.

۶. با به‌کار بـردن نابرابریهای تمرین ۳، توضیح دهید که چگونه می‌تـوان A را برحسب عبارتهای نامنفی، به‌صورت زیر نمایش داد:

$$A=\sqrt{E^{2}-(E^{2}-I^{2})-(I^{2}-A^{2})}$$

و چگونه می‌توان نتیجه‌های بیان‌شده درتمرین ۴، تمرین ۵ و قضیهٔ ۱.۵ را از این فرمول به‌دست آورد.

۷. تعیین کنید که ازبین همهٔ مثلثهای قائم‌الزاویهٔ باطول وتر برابر، کدام یك دارای بزرگترین ارتفاع وارد بر وتر است.

۸.۵ فوتبال‌بازیکن ثروتمند

اکنون مسأله‌ای مشابه لکن ازنوع قدری پیچیده‌تر را درنظر می‌گیریم.

یـك فوتبال بازیکن، دستاوردهای حاصل از لیاقتهای ورزشی خود را روی وسایل‌کباب‌پزی درمحلی درخیابان وال استریت[1] سرمایه‌گذاری‌کرد و از آن پس مرحله‌هایی طبیعی‌را در معامله‌های سهام و اوراق بهادار پشت‌سر گذاشت و درطول زمان، کاملا ثروتمند شد. وی، درهیجان ازخاطرات خود، که عادت فوتبال بازیکنهای بازنشسته است، درآخرین خواست و وصیت‌نامهٔ خود قیدکردکـه او را در مکانی گنبدی‌شکل شبیه یـك توپ فوتبال بسیار بـزرگ دفن کنند. اجراکنندگان ایـن وصیت‌نامه، ضمن‌محترم‌شمردن آخرین درخواست‌وی، درجهت اجرای‌اقتصادی‌ترین روش، با مسأله‌ای مواجه شدند.

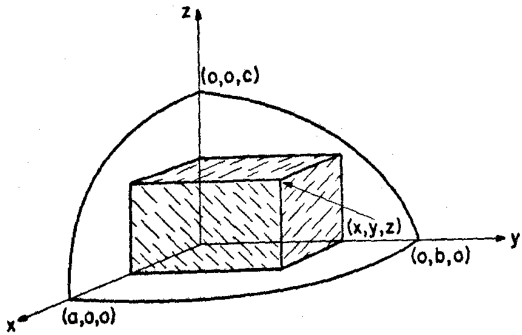
بعداز قدری اندیشه، به‌این نتیجه رسیدند کـه مسأله‌ای ریاضی این وضعیت فیزیکی را به بهترین وجه تـوجیه می‌کند، و آن عبارت از این است که جعبه‌ای مکعب‌مستطیلی با ابعاد مفروض را در بیضوی‌وار باکمترین حجم ممکن محصورکنند.

در اثر راهنماییهای موجود در مسأله‌های بـالا، آنها با مسألهٔ عکس شروع کردند، یعنی محاط‌کردن جعبهٔ مکعب مستطیلی با بزرگترین حجم در یك بیضوی‌وار مفروض.

بنا برهندسهٔ تحلیلی فضایی، معادلهٔ بیضوی‌وار به‌مرکز مبدأ که محورهای آن در امتداد محورهای مختصات و به‌طولهای $2a$، $2b$، $2c$ باشند عبارت است از:

---

1. Wall Street



شکل ۹۰۵ یك‌هشتم جعبه در بیضوی‌وار.

$$\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}+\frac{z^{۲}}{c^{۲}}=۱ \qquad (۱۰.۵)$$

به‌طور شهودی واضح است که مرکز جعبهٔ مکعب‌مستطیل محاطی درمبدأ قرار دارد و ضلعهای آن بامحورهای مختصات موازی‌اند. بنابراین، اگر یك رأس این جعبه در نقطهٔ (x, y, z) بر رویهٔ بیضوی‌وار قرار داشته باشد (مطابق شکل ۹.۵ که یك‌هشتم بیضوی‌وار را نشان‌می‌دهد) آن گاه هفت‌رأس دیگر باید به‌طور متقارن قرار داشته باشند. این بدین‌معنی است که مختصات هفت رأس دیگر جعبه به‌صورت زیر می‌باشند:

$$(-x, y, z), (x, -y, z), (x, y, -z), (-x, -y, z),$$
$$(x, -y, -z), (-x, y, -z), (-x, -y, -z).$$

چون ضلعهای جعبه دارای طولهای $۲x$، $۲y$ و $۲z$ هستند، نتیجه می‌شود که حجم جعبه عبارت است از

$$V=۸xyz \qquad (۱۱.۵)$$

مسأله‌ای که اکنون با آن مواجه هستیم، بیشینه‌کردن عبارت (۱۱.۵) با این شرط است که مقادیر x، y، و z درمعادلهٔ (۱۰.۵) صدق کنند.

باردیگر، مسأله‌ای داریم که با استفاده از نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی به‌آسانی حل می‌شود. داریم:

$$\frac{۱}{۳}\left(\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}\right)\geqslant\left(\frac{x^۲}{a^۲}\cdot\frac{y^۲}{b^۲}\cdot\frac{z^۲}{c^۲}\right)^{۱/۳} \qquad (۱۲.۵)$$

با استفاده از این حقیقت که x، y، و z درمعادلهٔ (۱۰.۵) صدق می‌کنند، و با به‌کار بردن فرمول (۱۱.۵) برای V، مشاهده می‌کنیم که ازنابرابری (۱۲.۵) نتیجه می‌شود که

$$\frac{۱}{۳}\geqslant\frac{V^{۲/۳}}{۴(a^۲b^۲c^۲)^{۱/۳}}$$

یا

$$\frac{۴}{۳}(abc)^{۲/۳}\geqslant V^{۲/۳}.$$

نتیجه می‌شود کــه حجم جعبه حداکثر $۸abc/۳\sqrt{۳}$ است، علاوه‌براین، بنا بر شرط برقراری برابری در (۱۲.۵) این مقدار حداکثر به‌دست می‌آید اگر وتنها اگر

$$\frac{x^۲}{a^۲}=\frac{y^۲}{b^۲}=\frac{z^۲}{c^۲}=\frac{۱}{۳}$$

یا

$$x=\frac{a}{\sqrt{۳}},\quad y=\frac{b}{\sqrt{۳}},\quad z=\frac{c}{\sqrt{۳}}\cdot \qquad (۱۳.۵)$$

مقادیر (۱۳.۵)، ابعاد مطلوب جعبه را، با داشتن بیضوی‌وار با نیم‌محورهای a، b، و c، به‌دست می‌دهند.

اکنون به‌مسألهٔ اصلی برمی‌گردیم. دیدیم که به‌ازای مقادیر a، b و c، مقادیر x، y و z که از (۱۳.۵) به‌دست می‌آیند، نصف طول ضلعهای جعبهٔ مکعب‌مستطیلی باحجم ماکسیمم را ارائه می‌دهند. لکن از جهت دیگر، آیا درست است که به‌ازای مقادیر x، y و z، مقادیر

$$a=\sqrt{۳}\,x,\quad b=\sqrt{۳}\,y,\quad c=\sqrt{۳}\,z \qquad (۱۴.۵)$$

حجم بیضوی‌وار شامل جعبه‌را مینیمم می‌کنند؟ اجراکنندگان وصیت‌نامه، خواه‌زیرك، یا اینکه صرفاً خوش‌شانس بودند، درتعقیب احساس ریاضی‌خود درست‌عمل کردند. برهانی از این حقیقت به‌صورت زیر است:

W، حجم بیضوی‌وار (۱۰.۵) با فرمول

$$W=\frac{۴}{۳}\pi abc$$

داده می‌شود. به‌ازای مقادیر مثبت و مفروض x، y و z، می‌خواهیم مقادیر مثبت a، b و c را که‌درمعادلهٔ (۱۰.۵) صدق‌می‌کنندطوری‌انتخاب‌کنیم که W را مینیمم کنند.

بنا بر مشاهدهٔ ارتباط دوطرفه بین این دو مسأله مناسب است کـه معکوسها را در نظر بگیریم، و چـون اکنون x، y و z داده شده‌اند و a، b و c را باید تعیین کنیم، حرفهای اول و آخر الفبا را باهم عوض می‌کنیم و قرار می‌دهیم

$$a=\frac{۱}{X}, \quad b=\frac{۱}{Y}, \quad c=\frac{۱}{Z}; \quad x=\frac{۱}{A}, \quad y=\frac{۱}{B}, \quad z=\frac{۱}{C}. \qquad (۱۵.۵)$$

پس معادلهٔ (۱۰.۵) چنین می‌شود:

$$\frac{(۱/A)^۲}{(۱/X)^۲}+\frac{(۱/B)^۲}{(۱/Y)^۲}+\frac{(۱/C)^۲}{(۱/Z)^۲}=۱$$

یا

$$\frac{X^۲}{A^۲}+\frac{Y^۲}{B^۲}+\frac{Z^۲}{C^۲}=۱ \qquad (۱۰'.۵)$$

و با این شرط می‌خواهیم X، Y و Z را چنان انتخاب کنیم که

$$W=\frac{۴}{۳}\pi abc$$

مینیمم شود.

چون ضریب $۴\pi/۳$ ثابت‌است، مینیمم کردن W هم‌ارز است با مینیمم کردن

$$abc=\frac{۱}{XYZ}$$

که به‌نوبهٔ خود، هم‌ارز است با ماکسیمم کردن

$$V'=۸XYZ \qquad (۱۱'.۵)$$

اما این درست مسأله‌ای است که ما قبلا حل کردیم، یعنی مسألهٔ تعیین جعبه‌ای با حجم ماکسیمم کـه بتواند در یك بیضوی وار مفروض محاط گـردد. اینکه بیضوی‌وار

(۱۰′.۵) و جعبهٔ با حجم (۱۱′.۵) نسبت به‌فوتبال‌بازیکن مـا هیچ وجود فیزیکی نداشته باشند، اهمیت ندارد؛ درواقع، آنچه منظورنظر ماست، تأکید وتأیید اهمیت آنالیز ریاضی محض است. مقادیر جواب (بنابرمعادلهٔ (۱۳.۵)) عبارت‌اند از

$$X=\frac{A}{\sqrt{۳}},\quad Y=\frac{B}{\sqrt{۳}},\quad Z=\frac{C}{\sqrt{۳}}. \qquad (۱۳′.۵)$$

مقادیر (۱۵.۵) راکه در (۱۳′.۵) جایگزین کنیم، برابریهای (۱۳.۵) و (۱۴.۵) را به‌دست می‌آوریم.

دریك حالت واقعی، اگر طول $۲x$ را برابر ۶ پا، عرض $۲y$ را برابر با ۲ پا، و ارتفاع $۲z$ را برابر بایك پا، درنظر بگیریم، آن‌گاه مقادیر

$$a=۲\sqrt{۳},\quad b=\sqrt{۳},\quad c=\sqrt{۳}/۲$$

را برای بیضوی‌وار باحجم مینیمم شامل جعبه به‌دست می‌آوریم.

به‌علت انحنای طاق بیضوی‌وار، فضایی‌کافی برای گنجایش چند توب فوتبال کاملا بادوام وجود خـواهد داشت تا قهرمان کباب‌پزفروش مـا را در مکان ابدیش همنشین باشند.

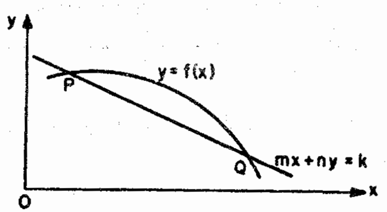
۹.۵ مماسها

اکنون نظریهٔ نابرابریهارا درمورد مسألهٔ پیداکردن یك مماس بریك منحنی مفروض به‌کار می‌بریم. البته در این موقعیت تنها به‌روش شهودی می‌توانیم این‌کار را انجام دهیم، زیرا هرتعریف دقیقی از مفهوم مماس بریك‌منحنی در یك نقطهٔ آن خارج از بحث انتخابی ما قرار دارد.

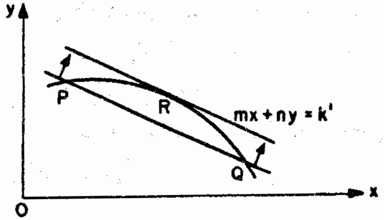
منحنی به‌معادلهٔ $y=f(x)$، که در شکل ۱۰.۵ نشان داده شده است، و خطی به معادلهٔ

$$mx+ny=k \qquad (۱۶.۵)$$

که منحنی‌را درنقطه‌های P و Q قطع می‌کند، درنظر می‌گیریم. مطابق شکل ۱۱.۵، این خط را موازی با خودش حرکت می‌دهیم [این عمل صرفاً شامل تغییر مقدار k درمعادلهٔ خط (۱۶.۵) می‌شود] تااینکه این دونقطهٔ تقاطع در R برهم منطبق‌شوند. خط $mx+ny=k'$ را می‌توان خط مماس‌برمنحنی $y=f(x)$ درنقطهٔ R نامید. باز خاطرنشان می‌کنیم که روندکار ما شهودی‌است وکوشش نداریم که مفهوم‌مماس



شکل ۱۰۰۵ یک منحنی و خطی که آن را قطع می‌کند.



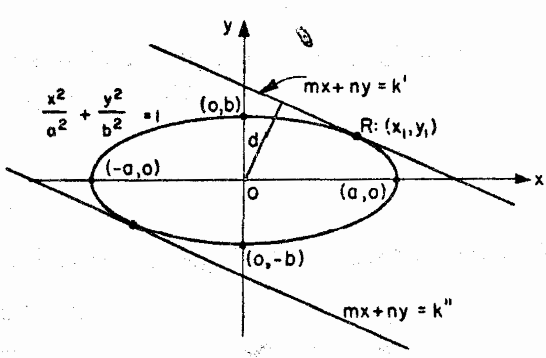
شکل ۱۱۰۵ یك منحنی و یك خط مماس.

را به طور دقیق بیان کنیم. ولی شما حداقل با مماس بردایره‌ها آشنا هستید و می‌توانید ببینیدکه این طرزعمل دراین حالت خاص به‌نتیجهٔ مطلوب منجر می‌شود.

طرز عمل بالا و نظریهٔ نابرابریها را به‌منظور مشخص کردن خطهای مماس بر یك بیضی در یك امتداد مفروض به‌کار می‌بریم. فرض کنیم که این بیضی (شکل ۱۲۰۵) با معادلهٔ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

داده شده است و فرض می‌کنیم (x_1, y_1) نقطهٔ تماس یکی از دو خط با معادلهٔ از



شکل ۱۲۰۵ یك بیضی و دوخط مماس موازی.

گونهٔ $mx+ny=k$ باشد، که در آن m و n ثابت هستند، $m^2+n^2\neq 0$، و k هر مقداری را می‌تواند اختیار کند. ملاحظه می‌کنیم که ایـن نقطهٔ تماس به‌طریق زیر می‌تواند مشخص شود:

الف) نقطهٔ (x_1, y_1) روی بیضی قرار دارد، یعنی مقادیر x_1 و y_1 درمعادلهٔ زیر صدق می‌کنند

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 . \qquad (۱۷.۵)$$

ب) نقطهٔ (x_1, y_1) روی خط قرار دارد؛ یعنی مقادیر x_1، y_1 درمعادلهٔ زیر صدق می‌کنند.

$$mx_1+ny_1=k .$$

پ) فاصلهٔ مبدأ از خط $mx+ny=k$ به ازای همهٔ نقطه‌های (x_1, y_1) که با تغییر k درشرایط (الف) و (ب)، صدق می‌کنند، ماکسیمم می‌شود.

d، فاصلهٔ مبدأ از خط $mx+ny=k$ با فرمول زیر مشخص می‌شود:

$$d=\frac{|k|}{\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{|mx_1+ny_1|}{\sqrt{m^2+n^2}} . \qquad (۱۸.۵)$$

برای مشاهدهٔ این موضوع، ملاحظه می‌کنیم که خط

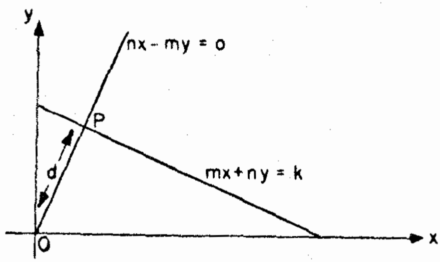
$$mx+ny=k \qquad (۱۹.۵)$$

دارای شیب $-m/n$ است (شکل ۱۳.۵) و بنابراین خط OP کـه از مبدأ برخط بالا عمود شود باید دارای معادلهٔ

$$y=\frac{n}{m}x \qquad (۲۰.۵)$$

باشد. ازحل دستگاه معادله‌های خطی (۱۹.۵) و (۲۰.۵)، مختصات P را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$x=\frac{km}{m^2+n^2} \qquad y=\frac{kn}{m^2+n^2} .$$



شکل ۱۳.۵ فرمول فاصله.

بنابراین فاصلهٔ مبدأ تا P عبارت است از:

$$d=OP=\left[\frac{k^2m^2}{(m^2+n^2)^2}+\frac{k^2n^2}{(m^2+n^2)^2}\right]^{1/2}$$

$$=\left(\frac{k^2}{m^2+n^2}\right)^{1/2}=\frac{|k|}{\sqrt{m^2+n^2}},$$

و چون بنابرشرط (ب)، داریم $k=mx_1+ny_1$، فرمول (۱۸.۵) ثابت می‌شود.
نتیجه‌می‌شود که مسألهٔ تعیین خط‌مماس عبارت می‌شود از، بیشینه‌سازی‌عبارت (۱۸.۵) به‌ازای همهٔ مقادیر x_1 و y_1 و با قید (۱۷.۵).
با استفاده از نابرابری کوشی، یعنی نابرابری (۳۸.۴) دربخش (الف) ۴.۴ از فصل ۴، نتیجه می گیریم که

$$d=\frac{|mx_1+ny_1|}{\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{|(am)(x_1/a)+(bn)(y_1/b)|}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

$$\leqslant\left(\frac{a^2m^2+b^2n^2}{m^2+n^2}\right)^{1/2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)^{1/2}$$

$$=\left(\frac{a^2m^2+b^2n^2}{m^2+n^2}\right)^{1/2} \qquad (۲۱.۵)$$

نقطه‌های تماس با دو شرط معین می‌شوند. یعنی، آنها باید روی بیضی قرار داشته باشند، به‌طوری‌که (x_1, y_1) در (۱۷.۵) صدق کند، و فاصلهٔ (۱۸.۵) باید مقدار ماکسیمم خودرا به‌دست آورد، به‌طوری‌که در (۲۱.۵)، برابری برقرارشود، که این شرط اخیر برقرار است اگر وتنها اگر

$$\frac{x_1/a}{am}=\frac{y_1/b}{bn} \qquad (۲۲.۵)$$

از حل دستگاه معادله‌های خطی (۱۷.۵) و (۲۲.۵) مقادیر زیر به‌دست می‌آیند

$$x_1=\pm\frac{a^2m}{(a^2m^2+b^2n^2)^{1/2}}, \quad y_1=\pm\frac{b^2n}{(a^2m^2+b^2n^2)^{1/2}} \qquad (۲۳.۵)$$

که درآن یا هردو علامت مثبت ویا هردو علامت‌منفی درنظر گرفته می‌شوند، وسپس این مقادیر درمعادلهٔ (۱۹.۵) جایگزین می‌شوند و دو مقدار مطلوب k' و k'' برای ثابت k به‌دست می‌آیند (شکل ۱۲.۵).

۱۰.۵ مماسها (نتیجه‌گیری)

باکمی کوشش اضافی می‌توانیم نتیجهٔ خیلی زیباتری را به‌دست آوریم، به‌این‌معنی که به‌جای مسألهٔ پیداکردن مماس بر بیضی دریك امتداد مفروض، مسألهٔ پیداکردن مماس بر بیضی دریك نقطهٔ مفروض روی آن را حل می‌کنیم.

به‌جای تعیین x_1 و y_1 برحسب m و n، تنها کافی‌است که m و n را برحسب x_1 و y_1 به‌دست آوریم. به‌همین سادگی است! از معادلهٔ (۲۲.۵) مشاهده می‌کنیم که باید داشته باشیم

$$m=\frac{rx_1}{a^2}, \quad n=\frac{ry_1}{b^2}$$

که در آن r ثابت تناسب است که هنوز معین نشده است. با به‌کاربردن این مقادیر درمعادلهٔ $mx+ny=k$، معادلهٔ خط مماس را به‌گونهٔ زیر به‌دست می‌آوریم

$$\left(\frac{rx_1}{a^2}\right)x+\left(\frac{ry_1}{b^2}\right)y=k$$

یا

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{k}{r}\cdot$$

چون نقطهٔ (x_1, y_1)، از یک‌طرف روی این خط مماس است،واز طرف‌دیگر روی بیضی نیز قرار دارد، یعنی، (x_1, y_1) درمعادلهٔ (۱۷.۵) صدق می کند، باید داشته باشیم $k/r=1$. ازاین‌رو این نتیجهٔ بسیار ساده و زیبا را به‌دست می‌آوریم که معادلهٔ مماس بر بیضی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

در نقطهٔ (x_1, y_1) واقع برآن به‌صورت زیر است:

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$$

وقتی حساب دیفرانسیل و انتگرال را مطالعه کنید، مشاهده خواهید کرد که این همان نتیجه‌ای است که با استفاده از مشتق به‌دست می‌آید.

تمرین

۱. معین کنید کدام‌یک از نقطه‌های $(5, -3)$، $(3, 5)$، و $(7, 0)$ روی بیضی به معادلهٔ زیر قرار دارند:

$$\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{18}=1$$

۲. به‌ازای $x=2$، مقادیر y را چنان تعیین کنید که نقطهٔ (x, y) روی بیضی تمرین ۱ قرار داشته باشد. همچنین به‌ازای $x=2$، مقادیر y را چنان تعیین کنید که نقطهٔ (x, y) در داخل یا روی آن بیضی قرار داشته باشد.

۳. معادلهٔ مماس بر بیضی تمرین ۱ را درنقطهٔ $(-5, 3)$ واقع برآن تعیین کنید.

۴. دستگاه معادله‌های

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$mx+ny=k$$

راکه در آن a، b، m، و n ثابت هستند، حل کنید. k را چنان انتخاب کنید که معادلهٔ درجهٔ دوم به دست آمده دارای ریشهٔ مضاعف باشد. ($k^2=a^2m^2+b^2n^2$ را به‌دست خواهید آورد). جواب را با مقادیر x_1، y_1 که در انتهای بخش ۹.۵ داده شده‌اند مقایسه کنید.

فصل شش

ویژگیهای فاصله

۱.۶ فاصلهٔ اقلیدسی

فاصلهٔ بین‌دو نقطهٔ $P:(x_1,\ y_1)$ و $Q:(x_2,\ y_2)$ واقع‌درصفحهٔ (x,y)، به‌مفهومی که با آن آشنا هستید، فاصلهٔ اقلیدسی نامیده می‌شود. این‌فاصله را که با $d_2(PQ)$ نشان می‌دهیم با فرمول زیر نموده می‌شود:

$$d_2(PQ)=[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{1/2}. \qquad (۱.۶)$$

اکنون بعضی‌از ویژگیهایی‌را برمی‌شماریم که این‌تابع فاصله‌ای را توصیف می‌کنند.

۱. فاصلهٔ بین دو نقطه تنها به وضعیت یکی نسبت به دیگری، یعنی تنها به تفاضلهای مختصات آنها، x_2-x_1 و y_2-y_1 بستگی دارد. این‌ویژگی (که‌وقتی دو نقطه به یك اندازه در یك جهت تغییرمکان دهند، فاصلهٔ بین آنها تغییر نمی‌کند) ناوردایی تحت انتقال نامیده می‌شود.

۲. فاصلهٔ نقطهٔ P تا نقطهٔ Q برابر با فاصلهٔ نقطهٔ Q تا نقطهٔ P است. برای اثبات می‌توان در (۱.۶) ثابت‌کرد که

$$d_2(PQ)=d_2(QP).$$

ویژگی (۲) معمولا، ویژگی تقارنی تابع فاصله‌ای نامیده می‌شود.

۳. تابع فاصله‌ای (۱.۶) در نابرابری مثلث

$$d_2(PR) \leqslant d_2(PQ) + d_2(QR)$$

صدق می‌کند. بخش ۶.۴ را ببینید.

۴. $d_2(PQ)$، فاصلهٔ بین هردو نقطه، به‌ازای هر P و Q نامنفی است. یعنی

$$d_2(PQ) \geqslant 0\,;$$

برابری برقرار است، اگر وتنها اگر دونقطهٔ P و Q برهم منطبق شوند. این‌ویژگی نتیجهٔ مسلم تعریف (۱.۶) است و مثبت‌بودن تابع فاصله‌ای نامیده می‌شود.

۵. اگر P به‌مختصات (x, y) و Q به‌مختصات (ax, ay) باشد، که در آن a یك ثابت نامنفی است، آن‌گاه

$$d_2(OQ) = a d_2(OP)\,;$$

در اینجا O نمایش مبدأ $(0, 0)$ است. این ویژگی که گاهی ویژگی تجانسی تابع فاصله‌ای نامیده می‌شود از آن‌رو برقرار است که

$$d_2(OQ) = [(ax)^2 + (ay)^2]^{1/2} = [a^2(x^2 + y^2)]^{1/2}$$
$$= a(x^2 + y^2)^{1/2} = a d_2(OP)\,.$$

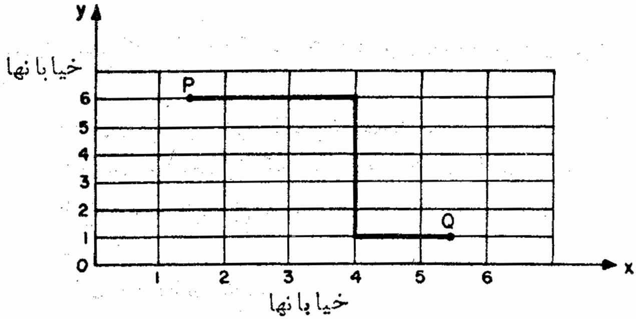
فاصلهٔ اقلیدسی بازهم دارای ویژگی دیگری است:

۶. اگر صفحهٔ (x, y) حول مبدأ و به اندازهٔ یك زاویهٔ معین دوران کند، فاصلهٔ اقلیدسی بین دونقطه تغییر نمی‌کند. این ویژگی گاهی ناوردایی تحت دوران نامیده می‌شود.

۲.۶ فاصلهٔ درون ـ شهری

بسیاری‌فاصله‌های دیگر، مفید، جالب،و «نااقلیدسی»، را می‌توان تعریف کرد. برای اینکه تابعی از P و Q، یك «فاصله» نامیده شود، باید ویژگیهای ۱ تا ۵ را، که برای فاصلهٔ آشنای (۱.۶) محقق کردیم، دارا باشد. فاصلهٔ اقلیدسی d_2 به‌تنهایی دارای همهٔ شش ویژگی است.

به‌عنوان مثال، یك «فاصلهٔ درون ـ شهری» را تعریف می‌کنیم: بدین‌ترتیب که در شهری که همهٔ خیابانها اکیداً شمالی ـ جنوبی یا شرقی ـ غربی فرض می‌شوند،و هیچ قطعه زمین خالی وجود ندارد، مسیری واقعی تعیین شود که طی‌آن ازیك محل

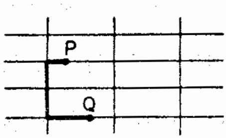


شکل ۱.۶ فاصلهٔ درون ـ شهری.

$P:(x_1, y_1)$ بتوان به‌محل دیگر $Q:(x_2, y_2)$ رسید. شکل ۱.۶ را نگاه کنید. هر مسیری از P به Q منحصراً از قطعه‌هایی قائم و افقی ساخته شده است، بنابراین فاصلهٔ $d(PQ)$ که بایستی طی کنیم، ازمجموع همهٔ فاصله‌های افقی و همهٔ فاصله‌های قائم که مسیر از P به Q را می‌سازند تشکیل شده‌است. بنابراین فاصلهٔ درون‌ـشهری d_1 را با

$$d_1(PQ) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \qquad (۲.۶)$$

تعریف می‌کنیم، اگر حسابیش را بخواهیم، این تعریف کاملا بادقت این وضعیت‌را توصیف نمی‌کند. این موضوع درموردی‌که در شکل ۲.۶ نشان داده شده است که در آن‌محلهای P و Q بین دوخیابان شمالی ـ جنوبی (یا شرقی ـ غربی) قرار دارند، درست نیست، در ایـن حالت، عابر در خلال راه‌رفتن خود مجبور است که جهت حرکتش‌را معکوس کند. باوجوداین (۲.۶) را به‌عنوان تعریف یك‌فاصلهٔ «نااقلیدسی» جدید در نظر می‌گیریم. رویهمرفته، مثال درون ـ شهری درست به‌عنوان یك انگیزه به‌کار گرفته شد. (اگر ناحیه‌ها خیلی کوچك باشند، (۲.۶) نسبتاً دقیق است. به‌طور دقیقتر، ایـن تابع‌فاصله‌ای جدید، فاصلهٔ مینیمم مورد لزوم برای رفتن از P به Q است با این شرط که تنها درچهار جهت اصلی بتوان حرکت کرد.



شکل ۲.۶ فاصلهٔ درون ـ شهری حالت استثنایی.

اکنون ببینیم که آیا $d_۱$، که با (۲.۶) تعریف شد، پنج ویژگی مورد لزوم یك فاصله را دارد؟

چون درعبارت (۲.۶) تنها تفاضل مختصات وارد می‌شود، فاصلهٔ جدید مسلماً تحت انتقال ناورداست، به‌طوری که دارای ویژگی (۱) می‌باشد.

چون $d_۱(PQ)=d_۱(QP)$، پس $d_۱$ متقارن است، وبنابراین دارای ویژگی (۲) نیز هست.

برای اثبات نابرابری مثلث

$$d_۱(PR)\leqslant d_۱(PQ)+d_۱(QR),$$

فرض کنیم P، Q و R به‌ترتیب دارای مختصات $(x_۱, y_۱)$، $(x_۲, y_۲)$ و $(x_۳, y_۳)$ باشند، و می‌نویسیم

$$\begin{aligned} d_۱(PR)&=|x_۱-x_۳|+|y_۱-y_۳| \\ &=|x_۱-x_۲+x_۲-x_۳|+|y_۱-y_۲+y_۲-y_۳|; \end{aligned}$$

چون بنابر قضیهٔ ۲.۳، بخش ۸.۳

$$|x_۱-x_۲+x_۲-x_۳|\leqslant|x_۱-x_۲|+|x_۲-x_۳|,$$

$$|y_۱-y_۲+y_۲-y_۳|\leqslant|y_۱-y_۲|+|y_۲-y_۳|,$$

داریم،

$$\begin{aligned} d_۱(PR)&\leqslant|x_۱-x_۲|+|y_۱-y_۲|+|x_۲-x_۳|+|y_۲-y_۳| \\ &=d_۱(PQ)+d_۱(QR). \end{aligned}$$

فاصلهٔ درون-شهری مسلماً در شرط چهارم نیز صدق می‌کند، زیرا قدر مطلق هرعدد حقیقی همیشه نامنفی است. $d_۱(PQ)$ مثبت است مگر آنکه P و Q برهم منطبق شوند.

ویژگی ۵ به‌آسانی محقق می‌شود زیرا به‌ازای $a\geqslant ۰$ داریم،

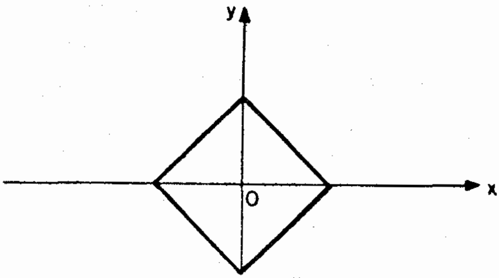
$$|ax|+|ay|=a[|x|+|y|].$$

اکنون سعی کنیم که مفهوم دایرهٔ هندسهٔ اقلیدسی را به‌هندسهٔ درون-شهری تعمیم دهیم. درهندسهٔ اقلیدسی، یك دایره مکان نقطه‌هایی است که از یك نقطهٔ ثابت

به‌یك فاصله‌اند. این تعریف را به‌هندسهٔ جدید انتقال،می‌دهیم بنابر (۲.۶)، «دایرهٔ واحد» به‌مرکز مبدأ $O:(0,\ 0)$ با معادلهٔ زیر نموده می‌شود:

$$d_1(OP)=|x|+|y|=1.$$

نمودار این معادله درصفحهٔ اقلیدسی معمولی مطابق شکل ۳.۶ است. (شکل ۱۴.۳ را نیز ببینید).



شکل ۳.۶ دایرهٔ واحد در هندسهٔ درون ـ شهری.

۳.۶ بعضی دیگر از فاصله‌های نااقلیدسی

اکنون فرض کنیم که تعریف «فاصله» بین‌مبدأ O و یك‌نقطهٔ دلخواه P به‌ازای مقدار ثابت $p \geqslant 1$، با عبارت

$$d_p(OP)=(|x|^p+|y|^p)^{1/p}. \qquad (۳.۶)$$

داده شود، و به‌طور کلی، فاصلهٔ بین هردو نقطهٔ $P:(x_1,\ y_1)$ و $Q:(x_2,\ y_2)$ با فرمول زیر تعریف شود:

$$d_p(PQ)=[|x_1-x_2|^p+|y_1-y_2|^p]^{1/p} \qquad (۴.۶)$$

باردیگر، پنج ویژگی فاصله را بررسی می کنیم. مسلماً فاصلهٔ (۴.۶) تحت انتقال ناوردا ست. علاوه بر این متقارن نیز هست، یعنی $d_p(PQ)=d_p(QP)$. ثالثاً، نابرابری مثلث از فرمول (′۵۳.۴)، که در انتهای بخش ۸.۴ از نابرابری مینکووسکی ثابت گردید، نتیجه می‌شود. فاصلهٔ (۴.۶) ویژگی مثبت‌بودن را نیز داراست؛ و بالاخره به‌ازای هردو نقطهٔ $P:(x,\ y)$ و $Q:(ax,\ ay)$، داریم،

$$d_p(OQ)=[|ax|^p+|ay|^p]^{1/p}=(a^p)^{1/p}[|x|^p+|y|^p]^{1/p}=ad_p(OP),$$

بنابراین فاصلهٔ d_p دارای ویژگی پنجم نیز هست.

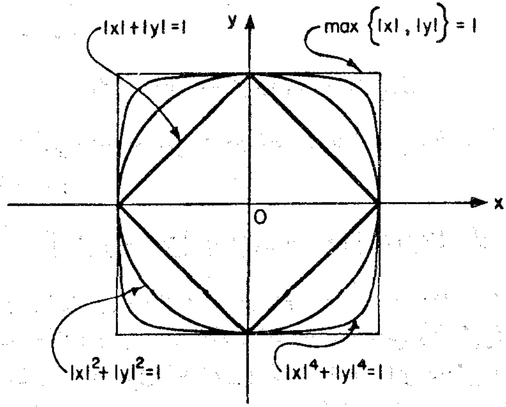
در این حالت، «دایرهٔ واحد»، یعنی مکان نقطه‌هایی که فاصلهٔ آنها از مبدأ برابر با ۱ است، با

$$|x|^p+|y|^p=1$$

مشخص می‌شود. شکل منحنیهای مکان تنها بستگی به‌مقدار ویژهٔ p دارد. برای مثال، وقتی $p=1$، دایرهٔ واحد درون ـ شهری را خواهیم داشت؛ به‌ازای $p=2$، دایرهٔ واحد اقلیدسی معمولی‌را داریم. به‌ازای $p=1, 2, 4$، نابرابریهای

$$|x|+|y|\geqslant(|x|^2+|y|^2)^{1/2}\geqslant(|x|^4+|y|^4)^{1/4}$$

را داریم که به‌آسانی با به‌توان دوم‌رساندن ثابت می‌شوند. نمودارهای اقلیدسی «دایره‌های واحد» متناظر در شکل ۴.۶ نشان داده شده‌اند؛ منحنی حالت $p=4$، منحنی حالت $p=1$ را دربردارد. آیا درحالت کلی درست است که «دایره‌های واحد» به‌ازای فاصله‌های تعریف‌شدهٔ با (۳.۶) آنچنان هستند که دایرهٔ واحد نظیر با هرمقدار ثابت p، دایره‌های واحد متناظر با مقدارهای کوچکتر p را دربردارد؟ اگر چنین‌است آیا وقتی p افزایش می‌یابد، این‌منحنیها بزرگتر و بزرگتر می‌شوند؟



شکل ۴.۶ نمودارهای اقلیدسی «دایره‌های واحد» نااقلیدسی.

برای جواب‌دادن به‌اولین سؤال، ابتدا سؤالی هم‌ارز را به‌صورت فرمول مطرح می‌کنیم: آیا نابرابری

$$[|x|^n+|y|^n]^{1/n}\geqslant[|x|^m+|y|^m]^{1/m}$$

به‌ازای $m\geqslant n\geqslant 1$، برقرار است؟ به‌راستی همین‌طور هم است. به ازای حالتهای $m=3$ و $n=2$ اثباتی را ارائه می‌دهیم، و اثبات را درحالت کلی به‌عنوان یک تمرین به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

به‌منظور اجتناب از نوشتن زیاد علامتهای قدرمطلق، چنین قرار می‌دهیم.

$$a=|x|,\quad b=|y|\cdot$$

پس باید ثابت کنیم

به‌ازای $a,\ b\geqslant 0$، $\quad (a^2+b^2)^{1/2}\geqslant(a^3+b^3)^{1/3}$

می‌نویسیم

$$a^3+b^3=aa^2+bb^2$$

و نابرابری کوشی (به‌صورت ریشهٔ دوم) را به‌کار می‌بریم، به‌دست می‌آوریم:

$$(a^2+b^2)^{1/2}(a^4+b^4)^{1/2}\geqslant a^3+b^3 \tag{5.6}$$

چون

$$a^2+b^2\geqslant(a^4+b^4)^{1/2}$$

از (۵.۶) نتیجه می‌شود که

$$(a^2+b^2)^{1/2}(a^2+b^2)\geqslant a^3+b^3,$$

یا

$$(a^2+b^2)^{3/2}\geqslant a^3+b^3,$$

ازاین‌رو

$$(a^2+b^2)^{1/2}\geqslant(a^3+b^3)^{1/3}.$$

اثبات به‌ازای عددهای گویای دلخواه $m\geqslant n\geqslant 1$، با کاربرد متشابهی از نابرابری هولدر می‌تواند به‌دست آید. از بحث بالا به‌آسانی می‌توان مشاهده کرد

که وقتی p به ۱ میل می‌کند، «دایره‌های واحد»

$$|x|^p+|y|^p=1, \qquad p>1,$$

به‌مربع $|x|+|y|=1$ میل می‌کنند، که درشکل ۳.۶ نشان داده شده است.

برای آنکه معلوم شود وقتی p بزرگتر و بزرگتر می‌شود چه‌اتفاقی می‌افتد، مشاهده می‌کنیم که

$$\max\{|x|^p, |y|^p\}\leqslant|x|^p+|y|^p\leqslant 2\max\{|x|^p, |y|^p\}. \qquad (6.6)$$

چون

$$[\max\{|x|^p, |y|^p\}]^{1/p}=\max\{|x|, |y|\},$$

از (۶.۶) نتیجه می‌شود که

$$\max\{|x|, |y|\}\leqslant[|x|^p+|y|^p]^{1/p}\leqslant 2^{1/p}\max\{|x|, |y|\}. \qquad (7.6)$$

اکنون وقتی p خیلی بزرگ می‌شود، درطرف راست (۷.۶) چه اتفاقی می‌افتد؛ p فقط به صورت $1/p$ نمای ۲ را تشکیل می‌دهد. وقتی p خیلی بزرگ شود، $1/p$ خیلی کوچك می‌شود و بنابراین $2^{1/p}$ به $1=2^0$ میل می‌کند. به عبارت دیگر از (۷.۶) برمی‌آید وقتی p «به بینهایت میل می‌کند»، فاصلهٔ

$$d_p(OP)=[|x|^p+|y|^p]^{1/p}$$

به‌فاصلهٔ

$$d_\infty(OP)=\max\{|x|, |y|\} \qquad (8.6)$$

میل می‌کند. می‌توان نشان داد که d_∞ دارای همهٔ پنج ویژگی فاصله است.

اکنون، «دایرهٔ واحد»

$$\max\{|x|, |y|\}=1$$

به‌چه‌صورتی است؟ این دایرهٔ واحد به‌صورت مربعی با ضلعهای

$$\begin{aligned} |x|=1, &\qquad 0\leqslant|y|\leqslant 1 \\ |y|=1, &\qquad 0\leqslant|x|\leqslant 1 \end{aligned} \qquad (9.6)$$

است. بنابراین مشاهده می‌کنیم که

$$d_p(PQ)=[|x_1-x_2|^p+|y_1-y_2|^p]^{1/p}$$

به‌ازای هر $p\geqslant 1$ می‌تواند به‌عنوان یك تابع فاصله‌ای به‌کار رود،و وقتی p بزرگتر می‌شود، «دایره‌های واحد»

$$|x|^p+|y|^p=1$$

نیز بزرگتر می‌شوند، و وقتی p به بینهایت میل کند، به‌مربع (۹.۶) میل می‌کنند؛ با وجود اینکه این «دایره‌های واحد» بزرگتر و بزرگتر می‌شوند، آنها هرگز از مربع (۹.۶) بیرون نمی‌روند. (شکل ۴.۶ را ببینید).

درهمهٔ این حالتها، «دایرهٔ واحد»، صفحهٔ (x, y) را به‌دوناحیه تقسیم می‌کند: داخل «دایرهٔ واحد»،متشکل ازهمهٔ نقطه‌هایی که فاصلهٔ آنها تا مبدأ کمتر از یك است، و خارج آن‌دایره، متشکل ازهمهٔ نقطه‌هایی که فاصلهٔ آنها تا مبدأ بزرگتر ازیك‌است. مجموعهٔ نقطه‌هایی که با نابرابری

$$d(OP)\leqslant 1$$

تعریف می‌شوند، گاهی،قرص واحد نامیده می‌شود، و «دایرهٔ واحد» مرز آن نام‌دارد.

ملاحظاتی کلی مطرح است. همان‌طور که قبلا خاطرنشان گردید، فاصلهٔ اقلیدسی، تحت‌انتقال (ویژگی ۱) و تحت دوران (ویژگی ۶)؛ یعنی تحت آنچه که تغییر مکان یا حرکت جسم صلب نامیده می‌شود، ناوردا ست. فاصله‌های دیگری که در بالا بحث گردید تحت انتقال تغییر نمی‌کنند، اما تحت دوران تغییر می‌کنند. درحقیقت، می‌توانیم از شکل ۴.۶ دریابیم که وقتی صفحهٔ (x, y) حول نقطهٔ (x_1, y_1) به اندازهٔ 45° دوران می‌کند، فاصلهٔ درون‌ـ شهری d_1 به فاصلهٔ $d_\infty=\max\{|x_2-x_1|, |y_2-y_1|\}$ تبدیل می‌شود (با ضریب $\sqrt{2}$ کشیده می‌شود). می‌توان ثابت کرد (در این جا اثبات را ارائه نخواهیم داد) که فاصلهٔ اقلیدسی با شش ویژگی که در بند ۱.۶ بیان شد به‌طور کامل مشخص می‌شود؛ این بدین‌معنی است که تنها فاصله‌ای که علاوه‌بر آن پنج ویژگی، ویژگی ناوردایی تحت دوران را نیز داراست، فاصلهٔ اقلیدسی است.

۴.۶ قرصهای واحد

تابعهای بسیار دیگری وجود دارند که پنج ویژگی مورد لزوم برای یك فاصله را دارا هستند، وما تنها چندتایی از آنهارا درنظر گرفته‌ایم.

ممکن است پرسش زیر را مطرح کنیم: در صفحهٔ (x, y)، با داشتن مجموعهٔ S ازنقاط (که ما از این پس آن را مجموعهٔ نقطه‌ای می‌نامیم) به‌طوری‌که مبدأ در داخل S قرار داشته‌باشد، تحت چه‌شرایطی این‌مجموعه نمایش یك‌قرص واحد متعلق به‌فاصلهٔ d را می‌دهد؟ به‌عبارت دیگر، تحت چه‌شرایطی یك تابع فاصله‌ای d وجود داردکه با آن، S دقیقاً شامل آن نقطه‌های P باشد که با نابرابری زیر مشخص می‌شوند:

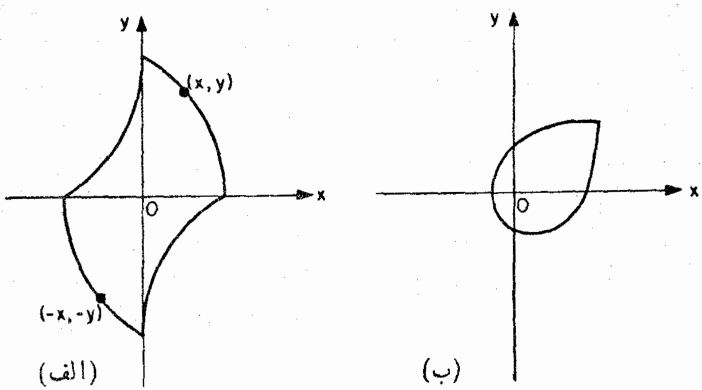
$$d(OP) \leqslant ۱$$

ادعا می‌کنیم که به‌ازای‌مجموعهٔ نقطه‌ای مفروض S که مبدأ یك نقطهٔ داخلی آن است، یك تابع فاصله‌ای d وجود دارد به‌طوری‌که S همراه با مرزش، قرص واحد برای d است اگر و تنها اگر شرطهای زیر برقرار باشند:

الف) مجموعهٔ نقطه‌ای S نسبت به‌مبدأ متقارن باشد،

ب) مجموعهٔ نقطه‌ای S محدب باشد.

مجموعهٔ نقطه‌ای S نسبت به‌مبدأ متقارن‌است، هرگاه، به‌ازای هر نقطهٔ (x, y) متعلق به S، نقطهٔ $(-x, -y)$ نیز متعلق به S باشد. همچنین مجموعهٔ S محدب است، هرگاه به‌ازای هرجفت نقطه‌های S، پاره‌خطی که آن دو نقطه را به‌هم وصل می‌کند، به‌تمامی در S قرار گیرد. شکل ۵.۶ (الف) و (ب) را ببینید.



شکل ۵.۶ مجموعه‌های نقطه‌ای در صفحه
(الف) مجموعهٔ نقطه‌ای متقارن نسبت به‌مبدأ،
(ب) مجموعهٔ نقطه‌ای محدب.

ابتدا ثابت خواهیم کرد که اگر d یك تابع فاصله‌ای باشد، آن‌گاه (الف) برقرار است: اگر d یك تابع فاصله‌ای و S قرص واحد آن باشد، آن‌گاه S نسبت به مبدأ متقارن است. به‌عبارت‌دیگر، اگر d یك‌تابع فاصله‌ای باشد و $P:(x,\ y)$ در نابرابری $d(OP)\leqslant ۱$ صدق کند، آن‌گاه نقطهٔ $Q:(-x,\ -y)$ نیز در $d(OQ)\leqslant ۱$ صدق می‌کند.

اگر d یك‌فاصله باشد، آن‌گاه تحت انتقال ناوردا ست،ازاین‌رو اگر نقطه‌های Q و O را به‌مقدار x در جهت افقی، و به‌مقدار y در جهت قائم تغییرمکان دهیم، فاصلهٔ آنها، $d(QO)$، تغییر نمی‌کند. ولی یك چنین انتقالی نقطهٔ Q را به‌مبدأ و مبدأ را به‌نقطهٔ P می‌آورد. بنابراین

$$d(QO)=d(OP)\leqslant ۱$$

و چون d متقارن نیز هست،

$$d(OQ)=d(QO)\leqslant ۱\ .$$

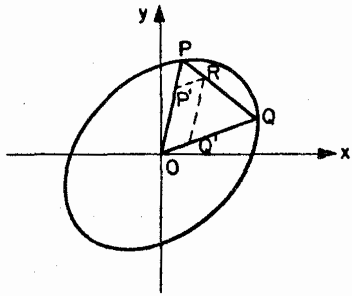
ازاین‌رو Q در قرص واحد قرار دارد.

پس‌ازآن با نشان‌دادن اینکه اگر P و Q دونقطه درقرص واحد باشند، آن‌گاه پاره‌خط PQ به‌تمامی درآن قرص‌واحد قرار دارد، ثابت می‌کنیم که اگر d یك تابع فاصله‌ای باشد،آن‌گاه ویژگی (ب) برقرار است. به‌طور نمادی‌این مسأله‌بدین‌ترتیب بیان می‌شود: اگر به ازای هر دو نقطهٔ مفروض P و Q برای تابع فاصله‌ای d داشته باشیم $d(OP)\leqslant ۱$، $d(OQ)\leqslant ۱$، آن‌گاه ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر نقطهٔ R از پاره‌خط PQ، خواهیم داشت $d(OR)\leqslant ۱$. اگر $P=Q$ یا اگر یکی از دو نقطهٔ P یا Q در مبدأ باشد، درستی این موضوع فوراً مشاهده می‌شود. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که O، P، و Q نقطه‌هایی متمایز می‌باشند.

اولین‌مرحلهٔ برهان، مبتنی براین حقیقت است که R به‌گونهٔ مناسبی روی PQ قرار دارد. فرض کنیم که $P'R$ موازی OQ و $Q'R$ موازی با OP باشد (شکل ۶.۶). آن‌گاه ادعا می‌کنیم که

$$d(OP')=a\ d(OP),\quad d(OQ')=b\ d(OQ), \qquad (۱۰.۶)$$

که در آن $a>۰$، $b>۰$، و $a+b=۱$. برای اثبات، ابتدا نظریهٔ اقلیدسی تناسبها (تشابه مثلثها) را به‌کار خواهیم گرفت. با به‌کاربردن یك‌نماد AB، هم برای یك پاره‌خط اقلیدسی وهم برای طول آن، داریم،



شکل ۶.۶ تحدب قرص واحد.

$$a=\frac{OP'}{OP}=\frac{QR}{QP}, \quad b=\frac{OQ'}{OQ}=\frac{PR}{PQ} \qquad (۱۱.۶)$$

که a و b نمایش این نسبتها هستند و بنابراین عددهایی مثبت‌اند. علاوه‌بر این، با جمع کردن این نسبتها، به‌دست می‌آوریم،

$$a+b=\frac{QR+RP}{QP}=\frac{QP}{QP}=۱.$$

چون P و P' هردو در امتداد خط مستقیمی که از O می‌گذرد قرار دارند، مختصات آنها متناسب‌اند. بنابراین می‌توانیم از ویژگی (۵) فاصلهٔ اقلیدسی استفاده کنیم واز (۱۱.۶) نتیجه بگیریم که اگر P دارای مختصات (x_1, y_1) باشد، آن‌گاه P' دارای مختصات (ax_1, ay_1) است. به‌طور مشابه چون Q و Q' هردو روی خطی که از O می‌گذرد قرار دارند، اگر Q دارای مختصات (x_2, y_2) باشد، آن‌گاه Q' دارای مختصات (bx_2, by_2) است. اکنون این حقیقت را به‌کار می‌بریم که فاصلهٔ ما دارای ویژگی (۵) است، به‌طوری که

$$d(OP')=a\,d(OP), \quad d(OQ')=b\,d(OQ). \qquad (۱۲.۶)$$

بالاخره ویژگی (۳) (نابرابری مثلث، شکل ۶.۶) را به‌کار می‌بریم؛

$$d(OR)\leqslant d(OP')+d(P'R),$$

یا، چون بنابرویژگی (۱)، $d(P'R)=d(OQ')$، داریم

$$d(OR)\leqslant d(OP')+d(OQ')\cdot$$

با جایگزین کردن مقادیر (۱۲.۶) داریم

$$d(OR)\leqslant a\,d(OP)+b\,d(OQ),$$

و چون $d(OP)\leqslant ۱$، $d(OQ)\leqslant ۱$، و $a+b=۱$، پس

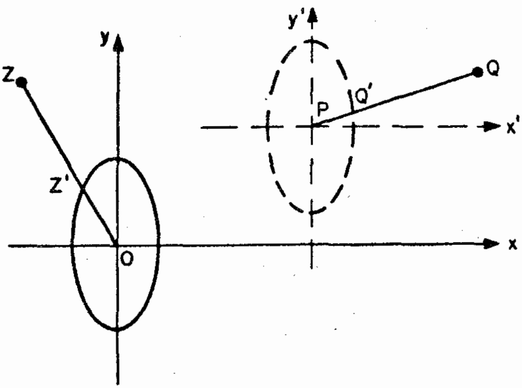
$$d(OR)\leqslant a+b=۱,$$

که بنا بر تعریف بدین معنی است که R درقرص واحد قرار دارد.

تاکنون نشان‌داده‌ایم که، اگر d یك فاصله و S قرص واحد آن باشد، آن‌گاه S محدب و نسبت به مبدأ متقارن است اما هنوز باید عکس آن را نیز ثابت کنیم: اگر S مجموعه‌ای نقطه‌ای باشدکه مبدأ در داخل آن قرار داشته، و S محدب ونسبت به‌مبدأ متقارن باشد، آن‌گاه یك تابع فاصله‌ای d وجود داردکه برای آن S قرص واحد است.

نشان خواهیم داد کـه چگونه یك چنین فاصلهٔ d می‌تواند تعریف شود، اما اثبات اینکه d دارای پنج ویژگی تعیین‌شدهٔ فاصله‌است به‌خواننده واگذارمی‌شود.

فرض کنیدکه S مجموعه‌ای نقطه‌ای ازنوع تعیین‌شده‌باشد، شکل ۷.۶. فرض کنید Z هر نقطه‌ای در صفحه غیر از O باشد. بر Z نیمخطی ابتدا از O رسم کنید و فرض کنیدکه درنقطهٔ Z' مرز S را قطع می‌کند (بنا بر تحدب S نتیجه می‌شود که



شکل ۷.۶ $d(PQ)=\dfrac{PQ}{PQ'}$ ، $d(OZ)=\dfrac{OZ}{OZ'}$.

تنها یک تقاطع برای نیمخط و مرز S وجود دارد.) سپس نسبت $r=OZ/OZ'$ از فاصله‌های اقلیدسی OZ به OZ' را حساب کنید و فاصلهٔ از O تا Z را برابر با این نسبت تعریف کنید، یعنی فرض کنید. $d(OZ)=r$

ملاحظه خواهید کرد برحسب آنکه Z یك نقطهٔ داخل S، یك نقطهٔ مرزی S، یا یك نقطهٔ خارجی S باشد، $d(OZ)$ به‌ترتیب کمتراز ۱، برابر با ۱، یا بزرگتراز ۱ است.

به‌منظور تعریف $d(PQ)$ برای هر دو نقطهٔ P و Q، دستگاه مختصات را همان‌طوری در شکل ۶.۷ نشان داده شده است، انتقال دهید و مانند قبل اقدام کنید.

دریک‌دایرهٔ اقلیدسی معمولی، نسبت محیط به‌قطر تقریباً برابر با ۳٫۱۴ است که با نماد π نشان‌داده می‌شود. درتمرینهای زیر، تکلیف آن است که r، نسبت‌طول نااقلیدسی محیط بــه قطر بعضی دایره‌هــای واحــد نااقلیدسی را پیدا کنید. چنین وضعیت را دریك حالت ویژهٔ زیر تجزیه و تحلیل می‌کنیم، و بررسی حالتهای سادهٔ دیگر را به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌کنیم.

مثال. فرض کنیدکه S مرکب از نقطه‌های مرزی وداخلی یك‌شش‌ضلعی منتظم متقارن نسبت به‌محورهای مختصات باشد؛ شکل ۶.۸.چون S محدب ونسبت به‌مبدأ متقارن است، می‌تواند قرص واحد برای یك تابع فاصله‌ای d در نظر گرفته شود. چون بنا برتعریف، شعاع نااقلیدسی قرص واحد برابر با ۱ است، قطر آن برابر بـا ۲ می‌باشد. برای‌محاسبهٔ محیط، مشاهده می‌کنیم که، به‌علت ناوردایی d تحت‌انتقال، رابطه‌های زیر برقرارند:

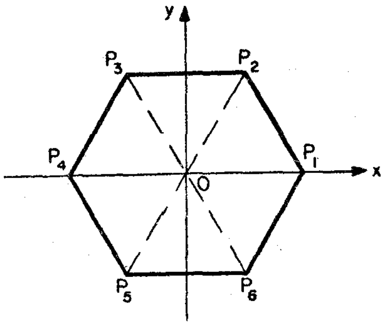
$$d(P_1P_2)=d(OP_3)=1, \qquad d(P_2P_3)=d(OP_4)=1,$$

$$d(P_3P_4)=d(OP_5)=1, \qquad d(P_4P_5)=d(OP_6)=1,$$

$$d(P_5P_6)=d(OP_1)=1, \qquad d(P_6P_1)=d(OP_2)=1$$

اگر طولهای همهٔ ایــن پاره‌خطها را بههم اضافه کنیم، محیط را برابر با ۶ به‌دست می‌آوریم. بنابراین نسبت مطلوب عبارت است از

$$r=\frac{6}{2}=3.$$



شکل ۸.۶ یك شش‌ضلعی منتظم که نسبت به‌محورهای مختصات متقارن است.

تمرین

در حالتهای زیـر، نسبت طول نااقلیدسی محیط به‌قطر را بـرای قرصهای واحد S محاسبه کنید.

۱. S قرص واحد برای فاصلهٔ درون‌ـشهری $|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$ است؛ شکل ۳.۶.

۲. S قرص واحد برای تابع فاصله‌ای زیر است

$$d(OP)=\max\{|x|,\ |y|\}.$$

۳. قرص واحد S مرکب از نقطه‌های داخلی ومرزی یك هشت‌ضلعی منتظم به‌مرکز مبدأ است.

۴. قرص واحد S مرکب از نقطه‌های داخلی و مرزی یك ده ضلعی منتظم به مرکز مبدأ است.

۵.۶ هندسه و جبر

در بخشهای قبلی ملاحظه کرده‌ایم که درك شهودی هندسی می‌تواند برای به‌دست آوردن نتایج جبری جالب به کار رود. این فن در بعدهای دو و سه به‌خوبی پیش می‌رود. به‌محض آنکه به‌بحث درهندسهٔ n بعدی، به‌ازای $n \geqslant 4$، می‌پردازیم، وضعیت معکوس می‌شود. دراین‌مورد غالباً به‌منظور ساختن تعریفهای هندسی و اثبات نتیجه‌های هندسی،

برجبر تکیه می‌کنیم.

به طور مختصر ایـن فکر را روشن می‌کنیم. مجموعه‌ای از n مقدار حقیقی x_1، . . .، x_n را به‌عنوان مشخص کنندهٔ یك نقطهٔ P در فضای n بعدی درنظر می‌گیریم. فاصلهٔ اقلیدسی بین دو نقطهٔ $P:(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ و $Q:(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود،

$$d(PQ)=[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2]^{1/2}. \quad (۱۳.۶)$$

این فرمول به‌ازای $n=2$، به‌فرمول آشنای مربوط به‌فاصلهٔ بین دونقطه (x_1, x_2) و (y_1, y_2) در صفحه، ساده می‌شود. اگر مبدأ $(0, 0, \ldots, 0)$ را با O و نقطهٔ $(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n)$ را با R نشان دهیم، آن‌گاه نابرابری‌مثلث n بعدی

$$d(OP)+d(PR)\geqslant d(OR)$$

به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$[x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2]^{1/2}+[y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2]^{1/2}$$
$$\geqslant[(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2+\cdots+(x_n+y_n)^2]^{1/2} \quad (۱۴.۶)$$

همان‌طوری که دربخش ۶.۴ ملاحظه شد، این نابرابری برقرار است.

سپس کسینوس زاویهٔ θ مابین خطهای OP و OQ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\cos\theta=\frac{x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)^{1/2}} \quad (۱۵.۶)$$

از نـابرابری کـوشی [بخش ۴.۴ (ت) و نـابرابری (۴۵.۴)] برمی‌آیـد کـه

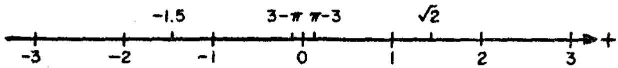
$$|\cos\theta|\leqslant 1$$

اکنون اساس یك هندسهٔ تحلیلی n بعدی را دراختیار داریم.

پاسخهای تمرینها

فصل ۱

۱.



$$-۳<-۲<-۱٫۵<-۱<۳-\pi<۰<\pi-۳<\sqrt{۲}<۲<۳$$

۲. (الف) $\in$ (ب) $\notin$ (پ) $\notin$ (ت) $\notin$ (ث) $\in$ (ج) $\notin$ (چ) $\in$
(ح) $\notin$ (خ) $\notin$ (د) $\notin$.

۳. (الف) N (ب) P (پ) P (ت) N (ث) P (ج) P (چ) P
(ح) N (خ) P (د) O.

۴. (الف) $<$ (ب) $>$ (پ) $>$ (ت) $<$ (ث) $>$ (ج) $>$
(چ) $>$ (ح) $<$ (خ) $>$ (د) $=$.

۵. (الف) T (ب) T (پ) T (ت) F (ث) T (ج) T (چ) F
(ح) T (خ) F (د) F.

۶. ۲، $\pi-۳$، $-(۳-\pi)^۲$، $a/(c-b)$، ۰، $-\sqrt{b^۲-۴ac}$.

۷. (الف) $\geqslant$ (ب) $\geqq$ (پ) $\leqslant$ (ت) $>$ (ث) $<$ (ج) $=$.

۸. $p>۰$، $-n>۰$، بنابراین $p-n>۰$، پس $p>n$.

۹. $a=b$.

۱۰. بنا به‌فرض به‌ازای $n=1$ درست است، مرحلهٔ استقرا بنا بر اصل موضوع II.

۱۱. درکتاب نشان داده شده است که ۱ و ۲ «مثبت» هستند، پس بنا بر اصل موضوع II، $3=2+1$ «مثبت» است. فرض کنید $a=1/3$؛ آن‌گاه $3a=1$، بنا بر این a «مثبت» است، چون ۳ و ۱ «مثبت» هستند. پس بنا بر اصل موضوع II، $2a=2/3$ «مثبت» است.

فصل ۲

بخش ۵.۲

۱. $b/2 > a/2$ را ابتدا به $a/2=a/2$ سپس به $b/2=b/2$ اضافه کنید.

۲. هردو نابرابری هم‌ارزند با $(ad-bc)^2 \geqslant 0$.

۳. هم‌ارز است با $(a-b)^4 \geqslant 0$.

۴. به‌ازای $n=2$، قضیه بیان می‌کند که: اگر $a_1 \geqslant a_2$، آن‌گاه $a_1 \geqslant a_2$، که درست است. فرض کنیم به‌ازای n درست باشد و $a_1 \geqslant a_2$، ...، $a_{n-1} \geqslant a_n$، $a_n \geqslant a_{n+1}$، آن‌گاه $a_1 \geqslant a_n$، $a_n \geqslant a_{n+1}$، پس $a_1 \geqslant a_{n+1}$. برابری برقرار است، اگر و تنها اگر $a_1=a_2$، ...، $a_{n-1}=a_n$ و $a_n=a_{n+1}$.

بخش ۷.۲

۱. مرحلهٔ وسط:

$$\frac{2}{\sqrt{ab}} \leqslant \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\,.$$

برابری اگر و تنها اگر $a=b$.

۲. در تمرین ۱ قرار دهید $b=1/a$. برابری اگر و تنها اگر $a=1$.

۳. نابرابریهای $a^2+b^2 \geqslant 2ab$، $b^2+c^2 \geqslant 2bc$، $c^2+a^2 \geqslant 2ca$ را به‌هم اضافه کنید، آن‌گاه حاصل را بر ۲ تقسیم کنید.

۰۴ هم‌ارز است با $a^2b^2(a-b)^2\geqslant 0$.

۰۵ نابرابری $a^2+b^2\geqslant 2ab$ را در c، نابرابری $b^2+c^2\geqslant 2bc$ را در a و نابرابری $c^2+a^2\geqslant 2ac$ را در b ضرب کنید و سپس باهم جمع کنید.

۰۶ مرحلهٔ وسط:

$$(a^2-b^2)^2-(a-b)^4=4ab(a-b)^2.$$

۰۷ مرحلهٔ وسط:

$$(a^3+b^3)-(a^2b+ab^2)=(a+b)(a-b)^2.$$

۰۸ (۳) $a=b=c$؛ (۴) $a=b$ یا لااقل یکی از آنها برابر با صفر است؛ (۵) $a=b=c$؛ (۶) $a=b$ یالااقل یکی‌ازآنها برابر باصفراست؛ (۷) $a=\pm b$.

بخش ۸۰۲

۰۱ هم‌ارز است با $(a-b)^2\geqslant 0$. برابری اگر وتنها اگر $a=b\geqslant 0$.

۰۲ بنا برقضیهٔ ۷۰۲ واین‌حقیقت که c و d دارای یك‌علامت‌اند، a^c-b^c و a^d-b^d دارای یك علامت‌اند. ضرب کنید. برابری اگر وتنها اگر $a=b$.

۰۳ $a^2+b^2\geqslant 2ab$، $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$.

۰۴ هم‌ارزی این نابرابریها را می‌توان با ضرب‌کردن اولی در $bd>0$ و دومی در $1/bd>0$ ثابت کرد؛ قضیهٔ ۳۰۲ را ببینید. هم‌ارزی معادله‌های متناظر به‌همین طریق ثابت می‌شود.

۰۵ $1=1$ را به‌نابرابری اضافه کنید. برابری $a/b=c/d$ هم‌ارز است با $ad=bc$.

۰۶ قضیهٔ ۷۰۲ را با نمای ۱ — به‌کار ببرید، ۱ = ۱ را به‌نابرابری به دست آمده اضافه کنید، سپس قضیهٔ ۷۰۲ را دوباره با نمای ۱ — به‌کار ببرید. برابری مانند تمرین ۵.

۰۷ مرحله‌های وسط:

$$\frac{a+c}{b+d}-\frac{a}{b}=\frac{bc-ad}{b(b+d)}\geqslant \circ\,,$$

$$\frac{c}{d}-\frac{a+c}{b+d}=\frac{bc-ad}{d(b+d)}\geqslant \circ\,.$$

۸. $۳۳ > ۳۰$؛ $۲۵ > ۲۲$؛ $۲۱ > ۱۸$؛ $۴۵ > ۴۲$.

۹. اگر $a<b$ و $b<c$، آن‌گاه $a<c$.

اگر $a<b$ و $c<d$، آن‌گاه $a+c<b+d$. اگر $a<b$ و c هرعددحقیقی باشد، آن‌گاه $a+c<b+c$.

اگر $a<b$ و $c>\circ$، آن‌گاه $ac<bc$. اگر $a<b$ و $c<\circ$، آن‌گاه $ac>bc$.

اگر $a<b$ و $c<d$، آن‌گاه $a-d<b-c$. اگر $a<b$ و c هرعددحقیقی باشد، آن‌گاه $a-c<b-c$.

اگر $\circ<a<b$ و $\circ<c<d$ آن‌گاه $ac<bd$

اگر $\circ<a<b$ و $\circ<c<d$، آن‌گاه $a/d<b/c$. به‌ویژه به‌ازای $a=b=۱$، اگر $\circ<c<d$، آن‌گاه $۱/d<۱/c$.

اگر $\circ<a<b$، و اگر m و n عددهای صحیح مثبت باشند، و $a^{۱/n}$ و $b^{۱/n}$ ریشه‌های n ام مثبت باشند، آن‌گاه

$$a^{m/n}<b^{m/n}\quad,\qquad b^{-m/n}<a^{-m/n}\,.$$

فصل ۳

بخش ۳.۳

۱. (الف) -۱ (ب) π (پ) $\circ$ (ت) ۴ (ث) ۳ (ج) $\circ$ (چ) π (ح) $\circ$ (خ) ۴ (د) ۳.

۲. (الف) -۷ (ب) $\sqrt{۲}$ (پ) -۷ (ت) $\circ$ (ث) -۳ (ج) -۷ (چ) $\circ$ (ح) -۷ (خ) $\circ$ (د) -۳.

۳. $(-۱)(\circ)-(۱)(\circ)=\circ$.

۴. حالتهای نموده‌شده را همراه با تعریف $\max\{\ \}$ درنظر بگیرید.

۵. $\{a, b\ c, d\}=\{-1, -1, -1, -1\}$.

۶. یکی از $\{a, b\}^+$ و $\{c, d\}^+$ برابر با $\{a, b, c, d\}^+$، ودیگری نامنفی است.

۷. اولین و سومین نـابرابری: شاید یك نامزد اضافی، یعنی ۰. نابرابری وسطی: تعـریف { } max و { } min. خیر؛ همهٔ a_1، a_2، ...، a_nها به ازای اولیـن نابرابری اکید باید منفی باشند، وهمهٔ آنها بهازای سومی مثبت هستند.

۸. نابرابریهای $a\geqslant b$ و $a\geqslant c$ را در ۱ − ضرب کنید وقضیهٔ ۳.۲ را بهکار برید.

۹.

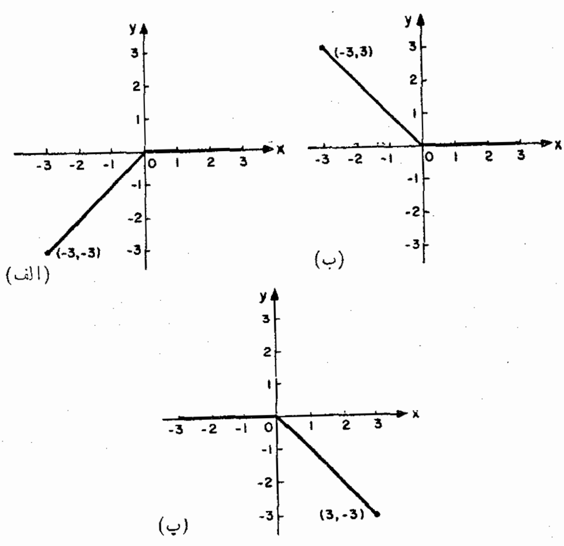
$$\{-a,-b\}^-=\min\{0,-a,-b\}=-\max\{0,a,b\}=-\{a,b\}^+.$$

۱۰. حالتهای نمودهشده را همراه با تعریف { } max درنظر بگیرید.

بخش ۴.۳

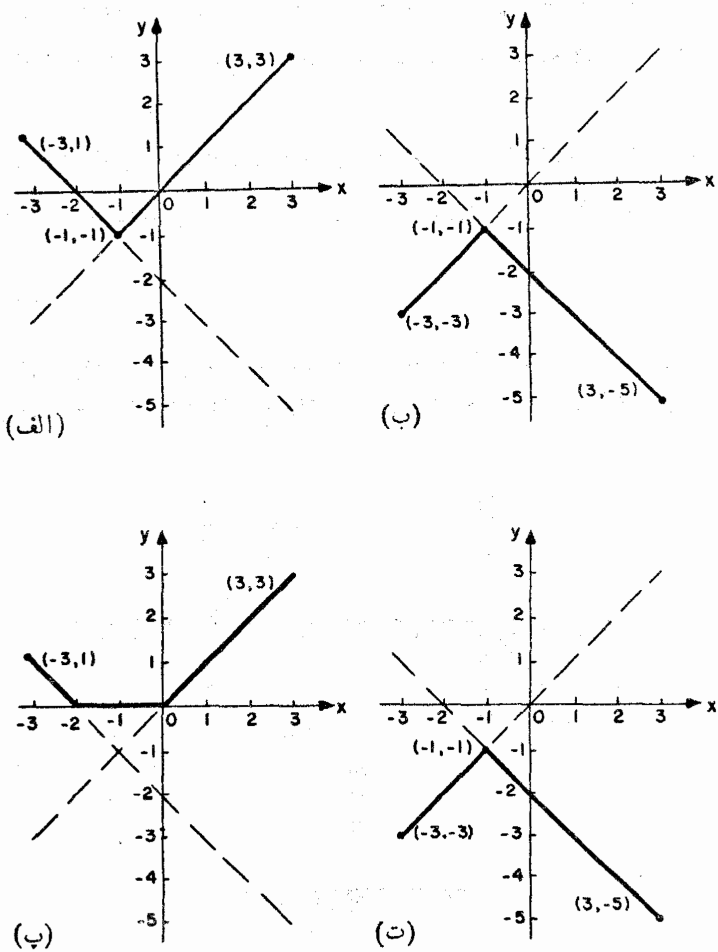
۱. بهازای هرعدد حقیقی a، $-|a|\leqslant -a\leqslant |a|$. اولین برابری برقـرار است اگر و تنها اگر $a\geqslant 0$، و دومین برابری برقرار است اگر و تنها اگر $a\leqslant 0$.

۲.

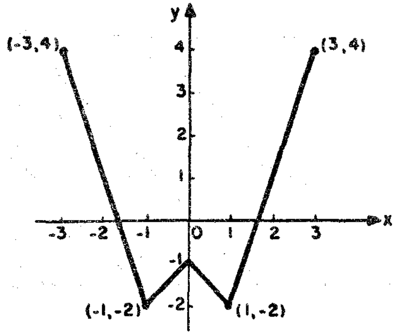


۳. (الف) نمودار (ت) و (چ) نیـز هست؛ همچنین (ب) نمودار (ث)، و همچنین (پ) نمودار (ج) و (خ) می‌باشد.

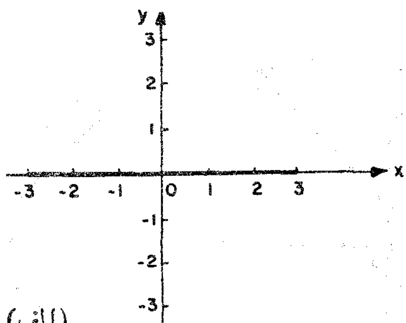
۴.



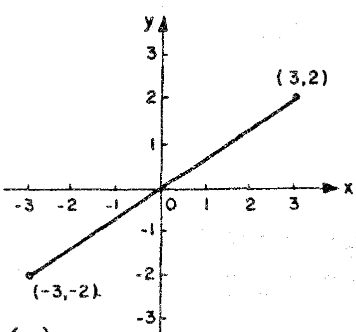
۵.



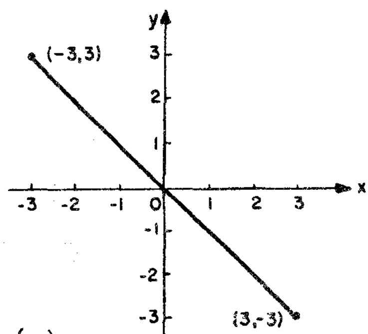
۶. شکل ۳.۳ فرد؛ شکل ۴.۳ فرد؛ شکل ۵.۳ زوج؛ شکل ۶.۳ زوج.



(الف)

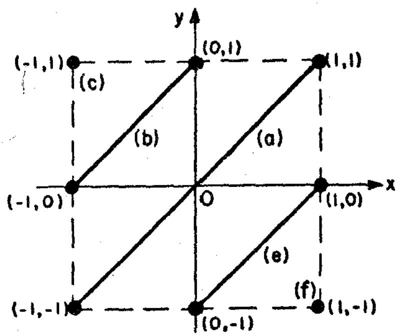


(ب)



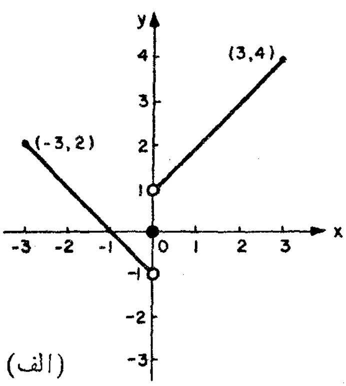
(پ)

۲.

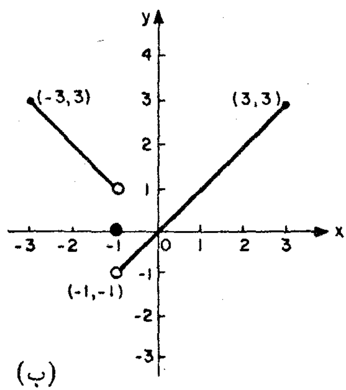


قسمت (ت) ساده است؛ کاری برای انجام‌دادن وجود ندارد.

۳.

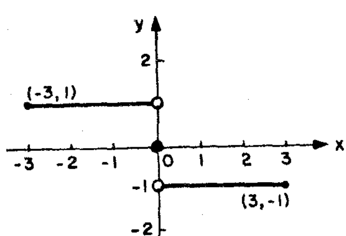


(الف)



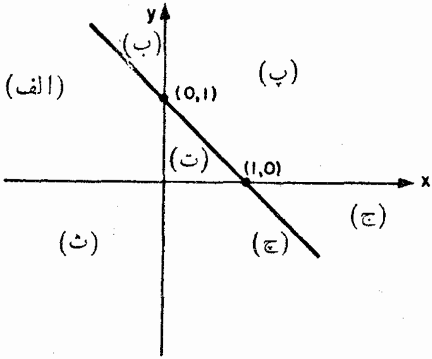
(ب)

۴.



۱.

بخش ۶.۳



(الف) $x\leqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant 1$؛

(ب) $x\leqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\geqslant 1$؛

(پ) $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\geqslant 1$؛

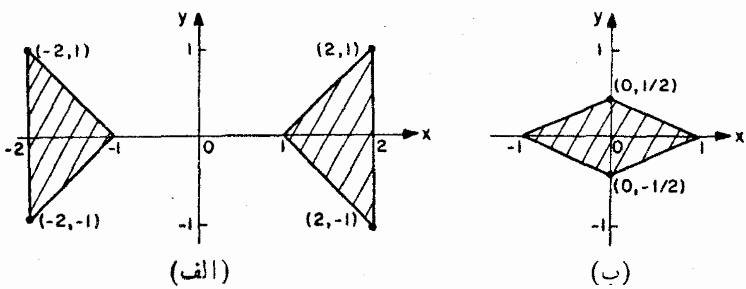
(ت) $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant 1$؛

(ث) $x\leqslant 0,\ y\leqslant 0,\ x+y\leqslant 1$؛

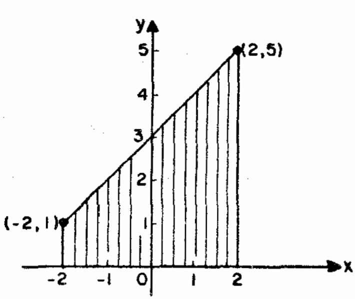
(ج) $x\geqslant 0,\ y\leqslant 0,\ x+y\leqslant 1$؛

(چ) $x\geqslant 0,\ y\leqslant 0,\ x+y\geqslant 1$.

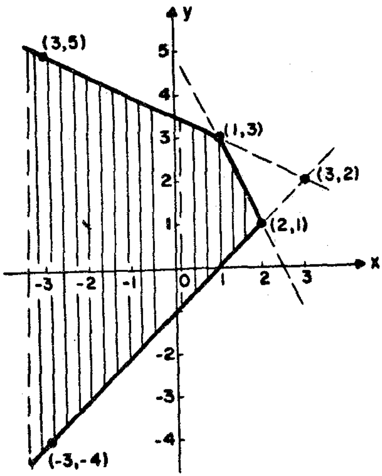
۲.



۳.

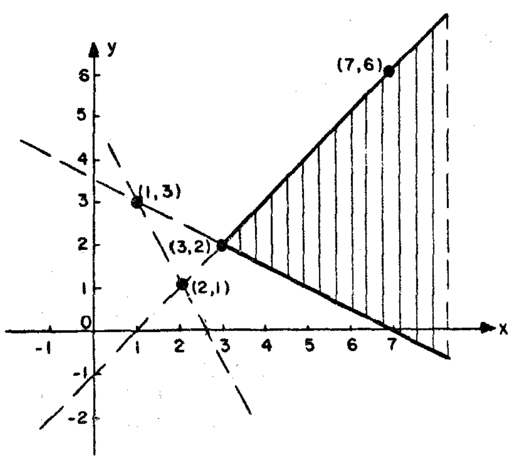


۴.



نمودار ناتمام

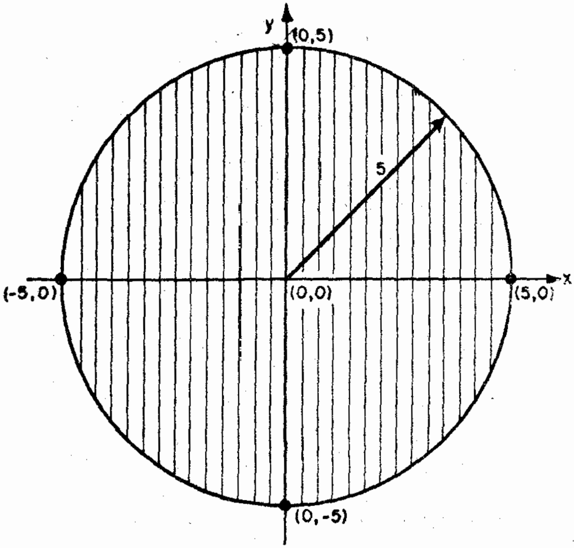
۵.



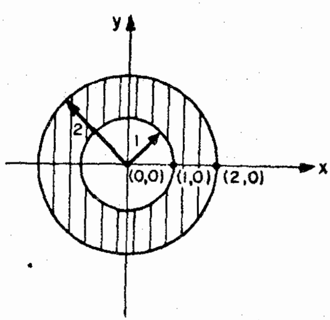
نمودار ناتمام

بخش ۷.۳

۱.



۲.



۳. محور y به‌معادلهٔ $x=۰$ است. مسأله به‌طور هندسی آن است که مکان نقطه‌هایی را معین کنیم که از $(۰ , ۱-)$ و $(۰ , ۱)$ به‌یك فاصله باشند. به‌طور تحلیلی مسأله آن است که معادلهٔ زیر را حل کنیم

$$\sqrt{(x+۱)^۲+y^۲}=\sqrt{(x-۱)^۲+y^۲}.$$

بخش ۸.۳

۱. (الف) $|-a|=\sqrt{(-a)^۲}=\sqrt{a^۲}=|a|$

(ب) $|ab|=\sqrt{(ab)^۲}=\sqrt{a^۲}\sqrt{b^۲}=|a|\cdot|b|$

(پ) $\left|\frac{a}{b}\right|=\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^۲}=\frac{\sqrt{a^۲}}{\sqrt{b^۲}}=\frac{|a|}{|b|}$.

۲. (الف) $=$، (ب) $>$، (پ) $=$، (ت) $=$، (ث) $>$.

۳. (الف) $>$، (ب) $=$، (پ) $=$، (ت) $=$، (ث) $=$.

۴. (الف) $>$، (ب) $=$، (پ) $=$، (ت) $>$، (ث) $=$.

۵. (الف) $=$، (ب) $>$، (پ) $>$، (ت) $=$، (ث) $=$.

۶.

$$\sqrt{(a-b)^۲}\geqslant\sqrt{(\sqrt{a^۲}-\sqrt{b^۲})^۲}$$

$$(a-b)^۲\geqslant(\sqrt{a^۲}-\sqrt{b^۲})^۲$$

$$a^۲-۲ab+b^۲\geqslant a^۲-۲\sqrt{a^۲b^۲}+b^۲$$

$$۲\sqrt{a^۲b^۲}\geqslant ۲ab$$

$$|ab|\geqslant ab.$$

۷. فرض کنیم $a^۲\leqslant b^۲$ و $ab\geqslant ۰$. آن‌گاه

$$\min\{a^۲,\ b^۲\}=a^۲=|a|\cdot|a|\leqslant|a|\cdot|b|=ab.$$

۸. اگر $a\geqslant ۰$، آن‌گاه $\sqrt{a^۲}=a$؛ اگر $a<۰$، آن‌گاه $\sqrt{a^۲}=-a>۰$. به‌طور مشابه $\sqrt{a^۲}$ صفر است، هرگاه $a=۰$، و در غیراین‌صورت عضو مثبت مجموعهٔ $\{a,\ -a\}$ است؛ $\sqrt{a^۲}=\max\{a,\ -a\}$؛ $\sqrt{a^۲}=\{a,\ -a\}^+$؛ نمودار $y=\sqrt{x^۲}$ درشکل ۶.۳ نشان داده شده است؛ و $\sqrt{a^۲}=a\operatorname{sgn}a$.

فصل ۴

بخش ۴.۲ (الف)

۱. (الف) ۴، ۵؛ (ب) ۶، ۵ر۷؛ (پ) ۶، ۵ر۶؛ (ت) ۰، ۱۰.

۲. (الف) $۳p$، $۵p$؛ (ب) ۰، $p/۲$؛ (پ) $۲p$، $p^۲+۱$

بخش ۴.۲ (ج)

۱. $۲r =$ قطر $= a+b$، پس $r=(a+b)/۲$؛ بنا بر مثلثهای متشابه، $a/h=h/b$، بنابراین $h=\sqrt{ab}$.

۲. برای نشان‌دادن آنکه میانگین همساز نابزرگتر ازمیانگین هندسی است، مرحلهٔ وسط آن است که $ab(a-b)^۲ \geqslant ۰$؛ یا تمرین ۱ بخش ۲.۷ را ببینید. برابری برقراراست اگر وتنها اگر $a=b$. برای نشان‌دادن آنکه میانگین همساز نابزرگتر از میانگین حسابی است، یا می‌توان نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی را به‌کاربرد، یا مستقیماً با مرحلهٔ وسط $(a-b)^۲ \geqslant ۰$ عمل کرد.

۳. (الف) ۲ر۳، ۴، ۵؛ (ب) ۸ر۴، ۶، ۵ر۷؛ (پ) $^-$۴ر۵، ۶، ۵ر۶؛ (ت) $^+$۳ر۵۸، $^+$۱ر۵۹، ۶؛ (ث) ۶، ۶، ۶.

۴. نصف فاصله در هرسرعت:

$$\frac{d}{۲}=r_۱t_۱=r_۲t_۲,\qquad t_۱=\frac{d}{۲r_۱},\quad t_۲=\frac{d}{۲r_۲}$$

$$t=t_۱+t_۲=\frac{d}{۲}\Big(\frac{۱}{r_۱}+\frac{۱}{r_۲}\Big),$$

$$d=rt=\frac{rd}{۲}\Big(\frac{۱}{r_۱}+\frac{۱}{r_۲}\Big),\qquad r=\frac{۲}{(۱/r_۱)+(۱/r_۲)}=\frac{۲r_۱r_۲}{r_۱+r_۲}$$

نصف زمان در هرسرعت:

$$d=rt=\frac{r_۱t}{۲}+\frac{r_۲t}{۲},\quad r=\frac{r_۱+r_۲}{۲}.$$

بنا برحکم تمرین ۲، نصف زمان درهرسرعتی شما را زودتر به‌مقصد می‌رساند.

۵. به‌فرض $b=۱/a$.

بخش ۳.۴

۱. درنابرابری میانگین ـ هندسی ـ میانگین حسابی (۱۹.۴) اولین $m_۱$ از عددهای a_i را برابر مقدار $y_۱$؛ $m_۲$ بعدی عددهای a_i را برابر عدد $y_۲$، و آخرین m_k از عددهای a_i را برابر با مقدار y_k، اختیار و ملاحظه کنید که

$$m_۱+m_۲+\cdots+m_k=n.$$

از اینجا اولین نابرابری نتیجه می‌شود. برای دومین نابرابری، قرار دهید،

$$\frac{m_۱}{n}=r_۱,\quad \frac{m_۲}{n}=r_۲,\quad \cdots\ ,\ \frac{m_k}{n}=r_k.$$

۲. ۵٫۸، $^+$۱٫۹؛ ۵٫۵، $^+$۷٫۵؛ p، p.

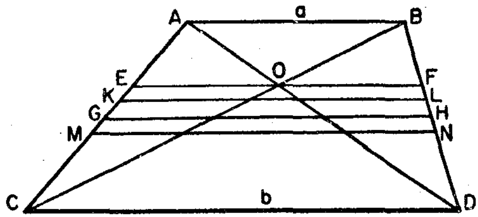
۳. مرحلهٔ وسط: $(a-b)^۲\geqslant ۰$؛ یا تمرین ۱ درصفحهٔ ۲۴ را ببینید. برابری برقرار است اگر و تنها اگر $a=b$. چون ریشهٔ دوم میانگین مربعات بزرگتر یا برابر با میانگین حسابی است، بزرگتر و یا برابر با میانگینهای هندسی و همساز نیز می‌باشد.

۴. (الف) هرقطر GH را به‌دوقطعه‌خط تقسیم می‌کند، یکی به‌طول $a/۲$، ودیگری به‌طول $b/۲$.

(ب) اگر $ABLK\sim KLDC$، آن‌گاه $AB/KL=KL/CD$ و $KL^۲=\sqrt{ab}$.

(پ) میانگین همساز برابر است با

$$\frac{۲ab}{a+b}=h.$$



به‌منظور نشان‌دادن $EF=h$، ثابت کنید که $EO=OF$ و از مثلثهای مشابه استفاده کنید:

$$\frac{EO}{CD}=\frac{AE}{AC}=\frac{AC-EC}{AC}=۱-\frac{EC}{AC}.$$

اما

$$\frac{EC}{AC}=\frac{EO}{AB}.$$

بنا براین

$$\frac{EO}{CD}=۱-\frac{EO}{AB} \quad \text{یا} \quad EO\left(\frac{۱}{AB}+\frac{۱}{CD}\right)=۱;$$

پس

$$EO=\frac{AB\cdot CD}{AB+CD}=\frac{ab}{a+b}=\frac{۱}{۲}h$$

و

$$EF=۲EO=h.$$

(ت) قرار دهید $MN=r$ ، فرض کنید x و y ارتفاعهای ذوزنقه‌های تشکیل‌شده باشند به‌طوری که $x+y$ ارتفاع $ABDC$ است. دراین‌صورت بنابه‌فرض،

$$\frac{r+a}{۲}\cdot x=\frac{۱}{۲}\frac{a+b}{۲}(x+y), \quad \frac{r+b}{۲}\cdot y=\frac{۱}{۲}\frac{a+b}{۲}(x+y).$$

این دستگاه معادله‌های خطی توأم از x و y دارای یك جواب است اگر وتنها اگر

$$r^{2}=\frac{a^{2}+b^{2}}{2};$$

بنابراین r ریشهٔ دوم میانگین مربعات a و b است.

فصل ۵

بخش ۶.۵

۱. نابرابری $ab+bc+ca\leqslant a^{2}+b^{2}+c^{2}$ از تمرین ۳ بخش ۷.۲ را با $2(ab+bc+ca)=2(ab+bc+ca)$ جمع کنید، به‌دست می آورید

$$3(ab+bc+ca)\leqslant(a+b+c)^{2}$$

از آنجا

$$A=2(ab+bc+ca)\leqslant\frac{2}{3}(a+b+c)^{2}=\frac{2}{3}\left(\frac{E}{4}\right)^{2}=\frac{E^{2}}{24}\cdot$$

برابری درهمان تمرین برقرار است اگر و تنها اگر $a=b=c$.

۲. اگر مساحت کل يك جعبهٔ مکعب مستطیلی مقدار ثابت A باشد، آن گاه مجموع طولهای دوازده یال لااقل $2\sqrt{6A}$ است، و جعبه يك مكعب است اگر و تنها اگر $E=2\sqrt{6A}$. برهان به‌سادگی از نابرابری $A\leqslant E^{2}/24$ تمرین ۱ به‌دست‌می آید.

۳. فرض کنید A مساحت، P محیط، a و b برابر با طولهای ضلعها و c طول قطر باشد. بنابر نابرابری‌میانگین‌حسابی وریشهٔ‌دوم‌میانگین‌مربعات (تمرین ۳ بخش۳.۴)

$$P=2(a+b)=4\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant4\sqrt{\frac{a^{2}+b^{2}}{2}}=2\sqrt{2}\,c\cdot$$

بنابر نابرابری میانگین هندسی و میانگین حسابی،

$$A=ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^{2}=\frac{P^{2}}{16}\cdot$$

ازاین‌رو

$$A \leqslant \frac{c^۲}{۲}\cdot$$

برابریها برقرارند اگر و تنها اگر $a=b$. بنابراین مربع دارای بزرگترین محیط $(۲\sqrt{۲}\,c)$ و بزرگترین مساحت $(c^۲/۲)$ است.

بخش ۷.۵

۱. اگر $y=z$، آن گاه $s-y=s-z=x/۲$، بنابراین

$$I^۲=s(s-x)(s-y)(s-z)=s(s-x)\frac{x}{۲}\frac{x}{۲}=\frac{s}{۴}x^۲(s-x)\cdot$$

اگر $x=y=z$، آن گاه $s-x=s-y=s-z=s/۳$، بنابراین

$$E^۲=s(s-x)(s-y)(s-z)=\frac{s^۴}{۲۷}\cdot$$

۲. $E^۲$، $I^۲$ و $A^۲$ را از تمرین ۱ جایگزین کنید، آن گاه ضرب کرده و جمله‌ها را مقایسه کنید.

۳. هرعامل طرف راست نامنفی است، زیرا یا یك توان دوم است یا ازمعنی هندسی آن نتیجه می‌شود. $E^۲=I^۲$ اگر و تنها اگر $x=۲s/۳$، یعنی، اگر و تنها اگر مثلث متساوی الساقین درواقع متساوی الاضلاع باشد. $A^۲=I^۲$ اگر و تنها اگر یا $s=x$ یا $y=z$، یعنی اگر وتنها اگر مثلث کلی درواقع متساوی الساقین باشد.

۴. نا برابری دومی. مبحث $I^۲=A^۲$ از حل تمرین ۳ را ببینید.

۵. اولین نابرابری. بحث $E^۲=I^۲$ از حل تمرین ۳ را ببینید.

۶. فرمول نشان می‌دهد که مجذور مساحت مثلث برابر است بامجذور مساحت مثلث متساوی الاضلاع با همان محیط، منهای مقدار معینی اگر مثلث تنها متساوی الساقین باشد، و منهای مقدار بیشتری هر گاه مثلث حتی متساوی الساقین هم نباشد.

۷. فرض کنید a و b برابر با طولهای ضلعها، c طول وتر و t طول ارتفاع باشد. سپس بنا برمثلثهای متشابه، $t=ab/c$. بنا برنا برابری میانگین هندسی ـ میانگین حسابی،

$$t=\frac{ab}{c}\leqslant\frac{a^۲+b^۲}{۲c}=\frac{c}{۲},$$

برابری برقرار است اگر وتنها اگر $a=b$، یعنی اگر وتنها اگر مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین باشد.

بخش ۱۰.۵

۱. $(۵, -۳)$.

۲. $\pm\frac{۳}{۵}\sqrt{۴۶};\quad -\frac{۳}{۵}\sqrt{۴۶}\leqslant y\leqslant\frac{۳}{۵}\sqrt{۴۶}$.

۳. $\frac{-x}{۱۰}+\frac{y}{۶}=۱$.

۴. اگر ازمعادلهٔ خطی y را برحسب x بنویسیم، وعبارت حاصل‌را درمعادلهٔ درجهٔ دوم جایگزین می‌کنیم، آن‌گاه مبین آن عبارت است از

$$۴a^۲b^۲n^۲(a^۲m^۲+b^۲n^۲-k^۲)$$

این عبارت صفر می‌شود هرگاه

$$k=\pm\sqrt{a^۲m^۲+b^۲n^۲}.$$

ریشه‌های مضاعف متناظر در بخش ۱۰.۵، معادله‌های ۲۳.۵ داده شده‌اند.

فصل ۶

بخش ۴.۶

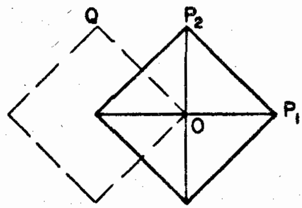
۱. طول درون‌ـشهری قطر برابر با ۲ وطول هرضلع برابر با

$$d_۱(P_۱,P_۲)=d_۱(O,Q)=۲$$

است. بنابراین طـول درون‌ـشهری محیط برابر است بـا $۸=(۲)(۴)$، و نسبت

مطلوب عبارت است از

$$r=\frac{۸}{۲}=۴ \cdot$$

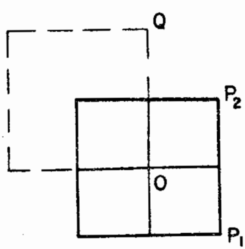


۲. طول نااقلیدسی قطر برابر ۲ و طول نااقلیدسی هرضلع برابر است با:

$$d_\infty(P_۱P_۲)=d_\infty(OQ)=۲ \cdot$$

بنابراین طول نااقلیدسی محیط برابر ۸ و نسبت مطلوب عبارت است از

$$r=\frac{۸}{۲}=۴ \cdot$$



۳. راهنمایی. هر چند ضلعی‌منتظم با تعداد زوجی از ضلعها و به مرکز مبدأ می‌تواند در دو وضعیت مختلف قرار داده شود که درهروضعیت نسبت به‌محورهای مختصات متقارن است. سعی کنید ثابت کنید که

(الف) اگر تعداد ضلعهای چند ضلعی، N، بر ۴ قابل قسمت باشد، آن‌گاه طول نااقلیدسی هرضلع برابر است با $۲\tan(۱۸۰^\circ/N)$ [و بنابراین محیط دارای طول نااقلیدسی $۲N\tan(۱۸۰^\circ/N)$ است]،

(ب) اگــر تعداد ضلعها، N، زوج باشد اما بر ۴ قابل قسمت نباشد، آن‌گاه طول هرضلع برابر است بـا $۲\sin(۱۸۰^\circ/N)$ [و بنا بــر این محیط برابر است بـا $۲N\sin(۱۸۰^\circ/N)$]،

(پ) نتیجه‌های (الف) و (ب) برای همهٔ وضعیتهای ممکن چندضلعی معتبرند.

چون $N=۸$ بر ۴ قابل‌قسمت است، قطر برابر ۲ است.

$$\text{طول نااقلیدسی محیط} = ۱۶\tan(۱۸۰^\circ/۸)$$
$$= ۱۶\tan ۲۲٫۵^\circ,$$
$$r=\frac{۱۶\tan ۲۲٫۵^\circ}{۲}=۸(\sqrt{۲}-۱)$$
$$\approx ۳٫۳۱۴۰.$$

۴. چون $N=۱۰$ بر ۴ قابل‌قسمت نیست، قطر برابر ۲ است.

$$\text{طول نااقلیدسی محیط} = ۲۰\sin(۱۸۰^\circ/۱۰),$$
$$r=\frac{۲۰\sin ۱۸^\circ}{۲}=۱۰\sin ۱۸^\circ=۳٫۰۹۰.$$

فهرست راهنما