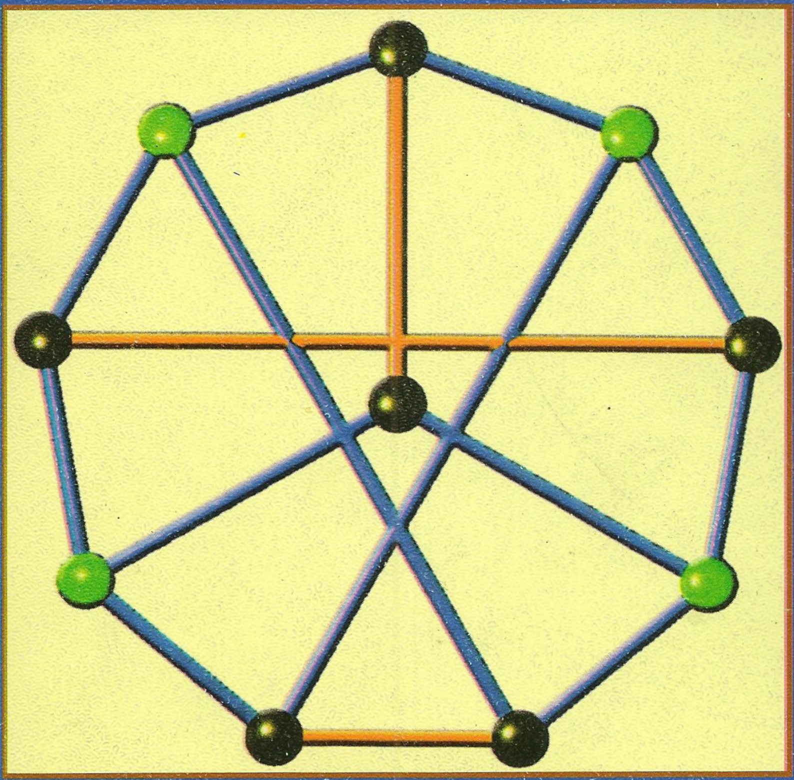
آشنایی با

نظریهٔ گراف

دوگلاس بی. وست

ترجمهٔ دکتر بیژن شمس



به نام خدا

آشنایی با

نظریهٔ گراف

ترجمهٔ

دکتر بیژن شمس

۱۳۸۱

وست، داگلاس برنت West, Douglas Brent
آشنایی با نظریه گراف/ [داگلاس برنت وست]؛
مترجم بیژن شمس.ـــ تهران: گسترش علوم پایه،
۱۳۸۱.
۳۶۰ ص.: مصور.
ISBN 964-7817-26-6: ۲۵۰۰۰ ریال
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
Introduction to graph theory. عنوان اصلی:
۱.گرافها. الف.شمس، بیژن، ۱۳۱۰ - ،
مترجم.

QA۱۶۶/ ۵آ۵و ۵۱۱/۵
۱۳۸۱

کتابخانه ملی ایران ۸۱-۲۵۵۷۸م

نام کتاب	آشنائی با نظریهٔ گراف
مؤلف	دکتر بیژن شمس
ناشر	انتشارات گسترش علوم پایه
حروفچینی	ایمانی ۰۹۱۱۲۴۰۱۹۳۹
طرح جلد	آریا گستر
چاپ	مهر
لیتوگرافی	گلشید
سال / نوبت چاپ	۱۳۸۱ / اول
تیراژ	۲۰۰۰ جلد
قیمت	

شابک: ۶ - ۲۶ - ۷۸۱۷ - ۹۶۴ ISBN: 964 - 7817 - 26 - 6

تلفن مرکز پخش: ۶۹۶۱۵۶۳ - ۶۹۶۱۵۶۵ـ ۰۹۱۱۲۳۰۱۹۰۵

تلفکس: ۶۴۶۸۲۲۰

فهرست مطالب

به نام خدا

پیشگفتار مترجم

پیشرفتهای اخیر در ریاضیات، به ویژه در کاربردهای آن موجب گسترش چشمگیر نظریهٔ گراف شده است به گونه‌ای که هم‌اکنون نظریهٔ گراف ابزار بسیار مناسبی برای تحقیق در زمینه‌های گوناگونی مانند نظریهٔ کدگذاری، شبکه‌های الکتریکی، تحقیق در عملیات، برنامه‌نویسی کامپیوتری، شیمی، زیست‌شناسی، آمار، علوم اجتماعی و سایر زمینه‌ها گردیده است.

در واقع، نظریهٔ گراف در ریاضیات شاخه‌ای از توپولوژی است، که با جبر و نظریهٔ ماتریسها پیوند مستحکم و تنگاتنگی دارد.

نظریهٔ گراف در دورهٔ پیشدانشگاهی در قالب درس ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی در سطحی مقدماتی، و در دورهٔ کارشناسی ریاضی و علوم کامپیوتر به صورت یک درس جدی تدریس می‌شود.

چون کتاب آشنایی با نظریهٔ گراف تألیف دوگلاس بی.وست به تشخیص صاحبنظران یکی از بهترین کتب موجود در این زمینه بود به ترجمهٔ درآمد تا در این راه دانشجویان را یاری دهد.

در پایان لازم است که از مدیریت ارجمند و کارکنان محترم فنی سازمان انتشارات گسترش علوم پایه که موجبات چاپ این کتاب را فراهم کرده‌اند، سپاسگزاری شود.

بیژن شمس

تهران، ۱۳۸۱

پیشگفتار

نظریهٔ گراف میدان خوشایندی برای کشف فنون اثبات در ریاضیات گسسته است، و نتایج آن دارای کاربردهای بسیاری در زمینه‌های محاسباتی، اجتماعی، و علوم تجربی می‌باشد. این کتاب طبق معمول به‌گونه‌ای طراحی شده است که بتوان آن را در یک نیمسال تحصیلی در دورهٔ کارشناسی یا آغاز کارشناسی ارشد، یا در دو نیمسال تحصیلی به‌طور مفصّل ارائه کرد. فرض بر این است که خواننده از پیش هیچ اطلاعاتی دربارهٔ نظریهٔ گراف ندارد. بسیاری از الگوریتمها و کاربردها ذکر شده‌اند، اما تأکید بر فهم ساختار گرافها و فنون به کار رفته برای تحلیل مسائل در نظریهٔ گراف می‌باشد.

کتابهای درسی فراوانی دربارهٔ نظریهٔ گراف نوشته شده‌اند. به خاطر تأکیدی که هم بر اثباتها و هم بر کاربردها وجود داشت، الگوی اولیه برای این کتاب متن ارزشمند، ***نظریهٔ گراف و کاربردهای آن*** نوشته جِی. اِی. باندی[1] ویواِس.آر. مورتی[2] بوده است. نظریهٔ گراف هنوز چیز تازه‌ای است و دربارهٔ اینکه در سطح مقدماتی چگونه باید ارائه شود اتفاق نظر وجود ندارد. انتخاب و ترتیب مباحث، انتخاب اثباتها، اهداف، و موضوعات زیربنایی جالب توجه، مطالب مورد بحث می‌باشند. چندین بار بازنگری این کتاب مرا متوجه دشواری این تصمیم‌گیریها نموده است. این کتاب سهم من در بحث و اختلاف نظر یاد شده می‌باشد.

ویژگیها

ویژگیهای گوناگون این کتاب راه دانشجویان را در فهم مطالب هموار می‌کند. من یک بحث ابتدایی دربارهٔ فنون اثبات، بیش از ۸۵۰ تمرین با دشواری متفاوت، بیش از ۳۰۰ تصویر، و بسیاری از مثالها را در آن گنجانده‌ام. تلاش کرده‌ام مطالب و مثالهایی را ذکر

---

1) J.A.Bondy 2) U.S.R.Murty (Macmillan/North-Holland [1976])

کنم که در کلاس برای تکمیل جریان بحث مورد نیاز باشند.

این کتاب از بسیاری پیش درآمدهای دیگر که بر نظریهٔ گراف نوشته شده‌اند مطالب بیشتری دارد. مطالب پیشرفته در یک فصل پایانی اختیاری گردآوری شده‌اند (مباحث اضافی) تا امکان استفاده از کتاب برای سطحهای گوناگون فراهم گردد. پیش‌درآمد برای دورهٔ کارشناسی شامل هفت فصل نخست است، و فصل ۸ به عنوان موضوع روز برای دانشجویان علاقمند در نظر گرفته شده است. پنج بند نخست فنون اثبات را خلاصه و توضیح می‌دهد، و به گسترش ویژگیهای بنیادی گرافها می‌پردازد. دانشجویان کارشناسی با کمترین معلومات پیش از اثباتها این مبحث را سودمند خواهند یافت و شروع به نوشتن اثباتهای خودشان خواهند کرد. برای دانشجویان دوره‌های بالاتر، یادآوری فنون ابتدایی را می‌توان حذف کرد. این دانشجویان همچنین ممکن است به سبب داشتن یک درس عمومی در ترکیبیات از قبل با گرافها، ساختارهای گسسته، یا الگوریتمها آشنایی داشته باشند. در دورهٔ کارشناسی ارشد می‌توان بیشتر مطالب فصلهای ۱ و ۲ را برای مطالعه شخصی توصیه کرد و به سرعت به فصل ۳ در کلاس پرداخت و در نهایت به برخی مباحث فصل ۸ رسید. فصل ۸ را همچنین می‌توان به عنوان قسمت عمده درس دومی در نظریهٔ گراف قرار داد.

بیشتر تمرینات به اثباتهای نوشتنی نیاز دارند. بسیاری از دانشجویان کارشناسی، نظریهٔ گراف را با تمرین اندکی در ارائه توضیحات آغاز می‌کنند، و این برای درک آنها از نظریهٔ گراف متفاوت از ریاضیات، مشکل ایجاد می‌کند. نظم و ترتیب عقلانی توجیه یک استدلال به‌طور مستقل از ریاضیات، ارزشمند می‌باشد؛ امیدوارم که دانشجویان در مورد این مطلب آسوده خاطر باشند. در نوشتن راه‌حلهای تمرینات، دانشجویان باید در به کارگیری زبان دقیق باشند («آنچه منظورتان است بگویید»)، و باید هوشمندانه صادق باشند («منظورتان همانی باشد که می‌گویید»)، از جمله هنگامی که از مرحله‌ای صرفنظر می‌کنند به آن اشاره کنند.

اگرچه در نظریهٔ گراف اصطلاحاتی را انتخاب می‌کنیم که معنی منظورمان را القا کند، آنگاه توده انبوه تعاریف مانعی در روانی مطالب خواهد بود. ریاضیدانان دوست دارند

مبحث را با گردایه شفافی از تعاریف آغاز کنند، اما دانشجویان اغلب می‌خواهند پیش از درک مفهومی بلافاصله بر آن مسلط شوند. به خاطر درخواست مدرسان، بسیاری از تعاریف به بعد از طرح نخستین کاربرد مهم آنها موکول گردیده‌اند. به عنوان مثال، تعریف گراف سودار قویاً همبند نخست در بند ۴.۲ زیرعنوان مدارهای اویلری[1] مطرح می‌شود، تعریف حاصل‌ضرب دکارتی در ۱.۵ همراه با مسائل رنگ‌آمیزی، و تعریف گراف یالی در ۱.۶ ظاهر می‌گردد.

بسیاری از نتایج در نظریهٔ گراف چند اثبات دارند؛ طرح آنها به افزایش انعطاف‌پذیری دانشجویان در امتحان به رهیافتهای چندگانه برای حل یک مسأله می‌انجامد. برخی از اثباتهای دیگر را به عنوان تبصره‌ها یا به عنوان تمرین گنجانده‌ام. بسیاری از تمرینات دارای راهنمایی هستند. تمرینات دارای نشان «$(-)$» یا «$(+)$» به ترتیب آسانتر یا دشوارتر از تمرینات بی‌نشان هستند. تمرینات دارای نشان «$(-)$» برای مسائل امتحانی مناسب‌اند. تمریناتی که نشان «$(!)$» دارند به‌ویژه ارزشمند، آموزنده یا سرگرم کننده هستند. تمریناتی که با چند مفهوم سر و کار دارند معمولاً هنگامی مطرح شده‌اند که آخرین مفهوم معرفی گردیده است. بسیاری از تمرینات به مفهوم یا نتیجه‌ای که در متن کتاب مطرح شده است ارجاع داده شده‌اند. تمریناتی که در بند جاری آمده‌اند تنها با شاخصی از دیگر تمرینات بند جدا شده‌اند. تمرینات پایانی برای تطبیق مطاب به‌صورت فصل . بند . فقره مشخص گردیده‌اند.

سازماندهی

در روند گسترش مطالب به‌طور عقلانی و منطقی سعی شده است که دشواری اثباتها و پیچیدگی الگوریتمی را که به تدریج (و نه به‌طور یکنواخت) روبه افزایش‌اند آشکار کنیم. اکثر نظریهٔ‌پردازان گراف اتفاق نظر دارند که قضیهٔ کونیگ - اگروری[2] شایسته اثباتی مستقل بدون شارش شبکهٔ است. همچنین دانشجویان همبندی را مفهومی انتزاعی‌تر از

1) L.Euler 2) König-Egerváry

جورسازی می‌یابند. بنابراین به جورسازی پیش از همبندی پرداخته شده است.

با افزایش تدریجی دشواری، گرافهای اویلری را زودتر و گرافهای همیلتونی[۱] و هامنی را دیرتر مطرح می‌کنیم. هنگامی که دانشجویان برای مسائل رنگ‌آمیزی و دور همیلتونی با کمبود الگوریتمهای خوب روبه‌رو می‌شوند، ممکن است دربارهٔ NP–تمامیت کنجکاو باشند. بند ۳.۶ را می‌توان برای ارضای این کنجکاوی خواند؛ نیز می‌توان آن را پس از فصل ۷ مورد بحث قرار داد. معرفی NP–تمامیت از راه زبانهای صوری می‌تواند از لحاظ فنی مجرد باشد، بنابراین بسیاری از دانشجویان شایق بحث بیشتری در زمینه جزئیات مربوط به مسائل گراف می‌باشند. همچنین، اثباتهای NP–تمامیت تنوع و سودمندی بحثهای «تبدیل گراف» را روشن می‌کنند.

قضیهٔ توران[۲] تنها از پنداره‌های ابتدایی بهره می‌گیرد و بنابراین در فصل ۱ مطرح می‌گردد. کاربردی که لم اسپرنر[۳] را موجب می‌شود متضمن معلومات پیشرفته است و از این‌رو پیش از فصل ۸ مطرح نمی‌شود. درختها و فاصله با هم ظاهر می‌شوند (فصل ۲)، زیرا نتایج گوناگونی دربارهٔ فاصله به درختها برمی‌گردند و برای اینکه درختها به الگوریتم دیجکسترا[۴] و به مدارهای اویلری مربوط می‌شوند. قضیهٔ پترسن[۵] برای ۲-عاملها (فصل ۳) از مدارهای اویلری و جورسازی دوبخشی بهره می‌گیرد. قضیهٔ منگر[۶] پیش از شارش شبکه مطرح می‌شود (فصل ۴)، و کاربردهای مجزایی برای شارش شبکه ذکر شده‌اند. $k-1$–همبندی گرافهای k–رنگ – بحرانی (فصل ۵) از جورسازی دوبخشی استفاده می‌کند. بند ۳.۵ پیش‌درآمدی مختصر بر گرافهای تام، با تأکید بر گرافهای وتری ارائه می‌کند. بحث اصلی گرافهای تام (همراه با اثبات قضیهٔ گراف تام) در فصل ۸ دیده می‌شود. سودهی‌های گراف در بسیاری از تمرینات و مثالها ظاهر می‌شود، از جمله قضیهٔ گاله– رُوی[۷] و التصاق استانلی[۸] میان چند جمله‌ای رنگی و سودهی‌های بیدور (فصل

---

1) W.R.Hamilton 2) Turán 3) Sperner 4) Dijkstra 5) Petersen
6) Menger 7) Gallai-Roy 8) Stanley

۵). اثبات ارائه شده در قضیهٔ وایزینگ[1] برای گرافهای ساده (فصل ۶) الگوریتمی و کوتاه است. اثبات قضیهٔ کوراتوفسکی[2] (فصل ۷) از روش تومیسن[3] استفاده می‌کند و به صورت یک درس جدی و مناسب خواهد بود.

فصل ۸ شامل نکات برجسته‌ای از مطالب پیشرفته است، و برای یک درس استاندارد در دورهٔ کارشناسی در نظر گرفته نشده است. فرض بر آن است که این فصل از فصلهای پیشین پیچیده‌تر است و از این لحاظ به صورت موجزتر نوشته شده است. بندها از هم مستقل هستند. هریک از آنها نتایج جذاب برگزیده از یک موضوع گسترده را که ارزش یک فصل را دارد، در برمی‌گیرند. برخی از بندها در قسمتهای پایانی دشوارتر می‌شوند؛ مدرسی ممکن است ترجیح دهد که گزیده‌ای از اوایل چندین بند را زودتر تدریس کند تا اینکه به‌طور کامل به آنها بپردازد. من در ***هنر ترکیبیات*** به نظریهٔ پیشرفته گراف به‌طور کاملتر پرداخته‌ام، مجلد اول و دوم آن به نظریهٔ گراف، مجلد سوم به ماترویدها و مجلد چهارم به گرافهای تصادفی اختصاص دارد.

طرح درس

۲۳ بند در فصلهای ۱-۷ برای تدریس با آهنگ تقریباً دو بند در هر هفته در نظر گرفته شده است، مطالب اختیاری را در صورت نیاز به متعادل کردن مباحث دربرگیرنده شروع شده، می‌توان حذف کرد. برای دانشجویان مبتدی، مدرسان ممکن است بخواهند زمان بیشتری برای فصلهای ۱ و ۲ صرف کنند. برخی از فقرها در متن صریحاً نشاندار شده‌اند (اختیاری).

برای یک درس بطئی در یک نیمسال، فقرهای زیر را می‌توان بدون لطمه زدن به پیوستگی مطالب حذف کرد. ۳.۱: شمارش زیرگرافها و گرافهای زوج. ۴.۱: قضیهٔ ۲—جابجایی. ۱.۲: مجموعهای فاصلهٔ. ۲.۲: اثبات قضیهٔ ماتریس درخت.

1) Vizing 2) Kuratowski 3) Thomassen

۳.۲: کدگذاری هافمن[1]. ۴.۲: مدارهای اویلری سودار و جاروکردن خیابان. ۲.۳: الگوریتم هوپکرافت–کارپ[2]. ۳.۳: همهٔ مطالب پس از قضیهٔ پترسن. ۱.۴: الگوریتم برای بلوکها. ۲.۴: کاربردهای قضیهٔ منگر. ۳.۴: عرضه و تقاضا. ۱.۵: اثبات قضیهٔ بروکس[3]. ۲.۵: همه مطالب پس از همبندی یالی گرافهای k–بحرانی. ۳.۵: محاسبه شمول–طرد و سودهی‌های بیدور. ۱.۶: مشخص‌سازی گرافهای یالی. ۲.۶: دورها در گرافهای سودار. ۳.۶: همه مطالب. ۱.۷: اثبات خم ژوردان[4] و گرافهای برون هامنی. ۲.۷: پلها و آزمون هامنی بودن. ۳.۷: بحث ۴–رنگ و گونا.

اگر درس با فصل ۳ آغاز شود، می‌توان از دو فصل اول موضوعاتی را چون قضیهٔ توران، دنباله‌های گرافیکی، قضیهٔ ماتریس درخت، الگوریتم کروسکال[5] و الگوریتمها برای مدارهای اویلری را تدریس کرد. اگر درس نظریهٔ گراف در طول دو دورهٔ سه ماهه ارائه شود همه هفت فصل را به‌طورکامل می‌توان تدریس کرد.

اگر درس در یک دورهٔ سه ماهه ارائه شود باید به نکات برجسته مطالب پرداخت. ۱.۱: ماتریس مجاورت و یکریختی. ۲.۱: همه مطالب بند. ۳.۱: فرمول مجموع–درجه و قضیهٔ توران. ۴.۱: زیرگرافهای دوبخشی بزرگ و آزمون هاول– حکیمی[6]. ۱.۲: سرتاسر تعریف فاصله. ۲.۲: سرتاسر گزاره قضیهٔ ماتریس درخت. ۳.۲: الگوریتم کروسکال و احتمالاً الگوریتم دیجکسترا. ۴.۲: مشخص‌سازی گراف اویلری و مسأله پستچی چینی. ۱.۳: همه مطالب بند. ۲.۳: هیچ‌کدام. ۳.۳: گزاره قضیهٔ توته[7] و اثبات نتایج پترسن. ۱.۴: سرتاسر تعریف بلوکها، به جزگرافهای هراری[8]. ۲.۴: سرتاسر تجزیه دستهٔ باز، به علاوه قضیه(های) منگر (اثبات تنها گونه یالی). ۳.۴: دوگانی میان شارشها و برشها، گزاره قضیهٔ شارش ماکسیمم = برش مینیمم. ۱.۵: سرتاسر قضیهٔ

1) Huffman 2) Hopcroft-Karp 3) Brooks 4) Jordan 5) Kruskal
6) Havel-Hakimi 7) Tutte 8) Harary

سکرش– ویلف[1]. ۲.۵: ساختار میسیلسکی[2]. ۳.۵: سرتاسر بازگشت رنگی، به علاوه در حد کمال گرافهای وتری. ۱.۶: سرتاسر قضیهٔ وایزینگ. ۲.۶: سرتاسر شرط اُور[3]، به علاوه شرط خواتل– اردوش[4]. ۳.۶: هیچ کدام. ۱.۷: ناهامنی بودن $K_۵$ و $K_{۳,۳}$، مثالهای گرافهای دوگان، و فرمول اویلر. ۲.۷: گزاره و مثالهای قضیهٔ کوراتوفسکی و قضیهٔ توته. ۳.۷: قضیهٔ ۵–رنگ، قضیهٔ تیت[5]، و قضیهٔ گرینبرگ[6].

سپاسگزاری

متن این کتاب پیش از چاپ از آزمونهای پیاپی کلاسی در بسیاری از دانشگاهها بهره برده و بهبود یافته است. مدرسانی که روی اساس این متن به‌طور آزمایشی کار کرده‌اند، تقریباً به ترتیب زمانی عبارت بوده‌اند از[7] ...

سعی کرده‌ام که اشتباهات را تصحیح کنم، اما قطعاً تعدادی از آنها باقی مانده‌اند. از هر گونه تصحیح و پیشنهادات، از جمله اظهار نظر دربارهٔ مباحث، انتساب نتایج، پیشنهادات در مورد تمرینات، تذکر اغلاط چاپی یا از قلم‌افتادگیهای فهرست توضیحات، و غیره استقبال می‌کنم. با خوانندگان و چاپهای به تعداد کافی، می‌توانیم این اثر را کاملاً اصلاح کنیم.

دوگلاس بی . وست
اوربانا، ۱۹۹۵

1) Szekeres-Wilf 2) Mycielski 3) Ore 4) Chvátal-Erdös 5) Tait 6) Grinberg

۷) این قسمت به علت کثرت اسامی مدرسان و نام دانشگاههای مربوطه، و همچنین طولانی بودن قسمت سپاسگزاری از افراد و مؤسساتی که به نوعی در آماده کردن این کتاب همکاری داشته‌اند حذف شده است.– م.

۱

مفاهیم بنیادی

۱-۱ تعاریف و مثالها

چگونه می‌توان کابلی را با حداقل هزینه نصب کرد و هر تلفن هم در دسترس باشد؟ سریعترین راه از پایتخت به مرکز هر ایالت کدام است؟ چگونه n شغل را n نفر می‌توانند اشغال کنند در صورتی که مطلوبیت کل حداکثر باشد؟ شارش ماکسیمم در واحد زمان از منبع برای ورود به یک شبکه از لوله‌ها چقدر است؟ یک تراشه کامپیوتر به چند لایه نیاز دارد برای این‌که سیم‌ها در یک لایه یکدیگر را قطع نکنند؟ چگونه می‌توان فصل یک لیگ ورزشی را برای حداقل تعداد هفته برنامه‌ریزی کرد؟ یک فروشنده دوره‌گرد به چه ترتیب باید از شهرها دیدن کند تا زمان سفر حداقل گردد؟ آیا می‌توان ناحیه‌های یک نقشه را با چهار رنگ به‌گونه‌ای رنگ‌آمیزی کرد که ناحیه‌های همسایه رنگهای متفاوت داشته باشند؟ این مسائل و بسیاری دیگر از مسائل عملی مستلزم نظریهٔ گراف است. در این کتاب، نظریهٔ گرافها را گسترش می‌دهیم، و برای چنین مسائلی به‌کار می‌بریم.

گراف چیست؟

۱.۱.۱. **تعریف.** یک ***گراف ساده*** G با n ***رأس*** و m ***یال*** متشکل از ***مجموعهٔ رأسهای*** $V(G)=\{v_1,\cdots,v_n\}$ و ***مجموعهٔ یالهای*** $E(G)=\{e_1,\cdots,e_m\}$ است، که در آن هر یال، یک جفت نامرتب از رأسهاست. به‌جای یال $\{u,v\}$ می‌نویسیم uv. اگر $uv\in E(G)$، آنگاه u و v ***مجاور*** هستند. این مطلب را با $u\leftrightarrow v$ نشان می‌دهیم، یعنی «u مجاور v است». رأسهای مشمول در یک یال e ***نقاط پایانی*** آن هستند.

گراف را روی کاغذ با تخصیص، یک نقطه به هر رأس و رسم یک خم به جای هر یال میان نقاط پایانی آن نمایش می‌دهیم. گراف رسم شده سمت چپ پایین چهار رأس و سه یال دارد. واژه‌های «رأس» و «یال» از رأسها و یالهای چند وجهیهای فضایی، مانند مکعبها و چهار وجهیها گرفته شده‌اند. اگرچه یک یال را با یک خم نمایش می‌دهیم، اما در تعریف گراف یک یال تنها یک جفت از رأسهاست. مدل دیگری در سمت راست پایین، یالها را به عنوان جفتهای مرتب مطرح می‌کند.

۲.۱.۱. **تعریف.** یک ***گراف سودار ساده*** یا ***دیگراف ساده*** G متشکل از یک ***مجموعهٔ رأسهای*** $V(G)$ و یک ***مجموعهٔ یالهای*** $E(G)$ است، که در آن هر یال یک جفت مرتب از رأسهاست. به‌جای یال (u,v) می‌نویسیم uv، که u ***دُم*** و v ***سر*** آن است. وقتی که $uv\in E(G)$، می‌نویسیم $u\to v$ ، یعنی «یالی از u به v وجود دارد».

انتخاب سر و دُم برای یک یال از یک گراف سودار، یک «سو» به آن یال نسبت می‌دهد، که آن را با کشیدن یالها به شکل پیکان نمایش می‌دهیم. این کتاب برگرافهایی که دارای

یالهای بیسو هستند تأکید دارد. گاهی اوقات مفاهیم مشابه یا کاربردهایی را که متضمن گرافهای سودار است مورد بحث قرار می‌دهیم؛ به‌ویژه این مطالب در بند ۳.۴ مهم، هستند.

برای برخی از کاربردها، مدلهای کلیتری را در نظر می‌گیریم که دارای یالهای تکراری یا یالهایی با نقاط پایانی یکسان هستند. اینها را به‌ترتیب ***یالهای چندگانه*** و ***طوقه‌ها*** می‌نامیم. به عنوان مثال، گراف با مجموعهٔ رأسهای $\{u, v\}$ و مجموعهٔ یالهای $\{uv, uv, vv\}$ هم یک یال تکراری و هم یک طوقه دارد.

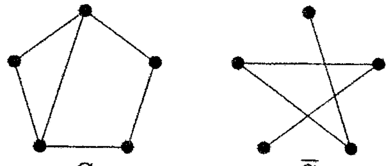
عبارت ***گراف ساده***، یالهای چندگانه و طوقه‌ها را صریحاً منع و عبارت **گراف چندگانه** آنها را تصریح می‌کند. از لحاظ فنی، «گراف» بر کلیترین مدل دلالت دارد (گراف چندگانه)، اما اغلب «گراف» را پس از ایجاد زمینه‌ای که یالهای چندگانه و طوقه‌ها در آن بی‌ارتباط باشند، به تنهایی به جای «گراف ساده» به‌کار می‌بریم.

گرافها به عنوان مدلها

گرافها در بسیاری از زمینه‌ها مطرح می‌شوند و در جریان این زمینه‌ها می‌توان اصطلاحات سودمندی را برای گرافها ارائه کرد.

۳.۱.۱. مثال. *روابط آشنایی و زیرگرافها.* یک معمای معروف از این قرار است: آیا هر مجموعه از شش نفر دارای سه آشنای دوطرفه و یا سه ناآشنای دوطرفه است (تمرین ۶)؟

چون «آشنایی» رابطه‌ای متقارن است، می‌توانیم آن را مدل یک گراف ساده قرار دهیم که یک رأس برای هر شخص و یک یال برای هر جفت آشنا باشد. رابطهٔ «ناآشنایی» در همان مجموعهٔ گراف دیگری می‌سازد. ***مکمل*** یک گراف ساده G را با $\overline{G}$ نشان می‌دهیم و آن گرافی است با همان مجموعهٔ رأسهای G، به‌طوری که u، v در $\overline{G}$ مجاوراند اگر، و فقط اگر، u، v در G مجاور نباشند. در زیر یک گراف و مکملش را رسم می‌کنیم.



یک ***زیرگراف*** از یک گراف G، یک گراف H است به‌طوری که $V(H) \subset V(G)$ و $E(H) \subset E(G)$؛ این را به‌صورت $H \subset G$ می‌نویسیم و می‌گوییم که «G شامل H است». یک ***زیرگراف القایی*** از G زیرگرافی مانند H است به‌طوری که هر یال G مشمول در $V(H)$ متعلق به $E(H)$ باشد. گراف G که در بالا رسم شده دارای شش زیرگراف با پنج یال است، اما زیرگراف القایی با پنج یال ندارد. اگر H یک زیرگراف القایی از G با مجموعهٔ رأسهای S باشد، آنگاه می‌نویسیم $H = G[S]$ و می‌گوییم که H زیرگراف G «القا شده به وسیلهٔ S» است.

یک ***گراف کامل*** یا ***خوشه***، یک گراف ساده است که در آن هر جفت از رأسها یک یال را تشکیل می‌دهند. یک گراف کامل بسیاری زیرگراف دارد که خوشه نیستند، اما هر زیرگراف القایی از یک گراف کامل یک خوشه است. مکمل یک گراف کامل هیچ یالی ندارد.

یک ***مجموعهٔ مستقل*** در یک گراف G، یک زیرمجموعهٔ رأسهای $S \subset V(G)$ است به‌طوری که زیرگراف القایی $G[S]$ هیچ یالی نداشته باشد. معمای ۶–نفره این پرسش را مطرح می‌کند که آیا هر گراف ۶–رأسی شامل یک خوشه یا یک مجموعهٔ مستقل با سه رأس می‌باشد. در گراف G که در بالا رسم شده، بزرگترین خوشه و بزرگترین مجموعهٔ مستقل به ترتیب دارای اندازه های ۳ و ۲ هستند. این مقادیر در مکمل $\overline{G}$ برعکس می‌شوند، زیرا خوشه‌ها تحت رابطهٔ مکمل‌سازی به مجموعه‌های مستقل (و برعکس) بدل می‌شوند.

اصطلاحات تعریف شده: مکمل $\overline{G}$، زیرگراف $H \subseteq G$، زیرگراف القایی $G[S]$، گراف

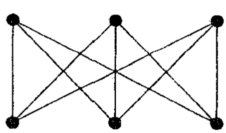
کامل (خوشه)، مجموعهٔ مستقل. □

۴.۱.۱. مثال. ***تخصیصهای شغل و گرافهای دوبخشی.*** فرض کنیم m شغل و n فرد داریم، و هر فرد می‌تواند برخی از شغلها را انجام دهد. آیا می‌توانیم شغلها را پر کنیم؟ تخصیصهای موجود را مدل گرافی قرار می‌دهیم که برای هر شغل و هر فرد یک رأس دارد. اگر فرد p شغل j را بتواند انجام دهد، p و j را مجاور هم قرار می‌دهیم.

یک گراف **دوبخشی** است اگر بتوان مجموعهٔ رأسهای آن را (حداکثر) به دو مجموعهٔ مستقل افراز کرد. گراف تخصیصهای شغل–فرد موجود، دوبخشی است. چون هر فرد تنها یک شغل را می‌تواند انجام دهد و ما یک شغل را تنها به یک نفر می‌توانیم اختصاص دهیم، از این‌رو m یال دو به دو مجزا در گراف را جستجو می‌کنیم. در فصل ۳ آزمونی برای اینکه آیا این امر امکانپذیر است ارائه می‌دهیم.

یک ***گراف دوبخشی کامل***، که در زیر نشان داده شده است، یک گراف دوبخشی است که در آن مجموعهٔ یالها متشکل از همهٔ جفتهایی است که یک رأس از هر کدام از دو مجموعهٔ مستقل در افراز رأسها دارند. گراف تخصیصهای شغل مجاز، یک گراف دوبخشی کامل است، جورسازی رأسها آسان است، بنابراین به جستجوی «بهترین» راه می‌گردیم. با در نظر گرفتن وزنهای عددی روی یالها که مقیاس ارزش آنهاست، شاید بهترین راه جورسازی رأسها، راهی است که یالهای برگزیده دارای ماکسیمم وزن کل باشند. در فصل ۳، الگوریتمی برای یافتن تخصیص با ماکسیمم وزن را گسترش می‌دهیم.

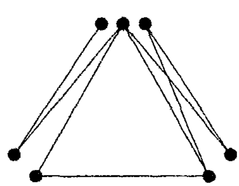
اصطلاحات تعریف شده: گراف دوبخشی، گراف دوبخشی کامل. □



۵.۱.۱. مثال. ***برنامه زمانی و رنگ‌آمیزی گراف.*** فرض کنیم می‌خواهیم دیدارهای کمیته‌های مجلس نمایندگان را زمانبندی کنیم به‌طوری که به هر کمیته یک دورهٔ زمانی در

طول هفته اختصاص دهیم. به دو کمیته اگر یک عضو مشترک داشته باشند نمی‌توانیم یک مقطع زمانی را اختصاص دهیم. چند مقطع زمانی نیاز داریم؟

این مسأله را به این صورت مدلسازی می‌کنیم، برای هر کمیته یک رأس را در نظر می‌گیریم و اگر کمیته‌های متناظر دارای یک عضو مشترک باشند، رأسها را مجاور هم می‌گذاریم. حال باید نشانهایی (مقطع‌های زمانی) به رأسها اختصاص دهیم به‌طوری که هر یال در نقاط پایانی نشانهای متفاوت دریافت کند؛ می‌خواهیم کمترین تعداد نشانها را به کار ببریم. نشانها ارزش عددی ندارند، بنابراین آنها را **رنگ** می‌نامیم، و رأسهای دریافت کننده یک نشان خاص یک **ردهٔ رنگ** را تشکیل می‌دهند. تعداد رنگهای مورد نیاز را **عدد رنگی** G می‌نامند و با $\chi(G)$ نشان می‌دهند؛ این مطلب را در فصل ۵ بررسی خواهیم کرد. چون رأسهای همرنگ باید یک مجموعهٔ مستقل تشکیل دهند، $\chi(G)$ برابر مینیمم تعداد مجموعه‌های مستقلی است که $V(G)$ را افراز می‌کنند. این امر مفهوم گرافهای دوبخشی را تعمیم می‌دهد. یک گراف G، k–**بخشی** است اگر $V(G)$ را بتوان به k یا تعداد کمتری مجموعهٔ مستقل افرازکرد. مجموعه‌های مستقل در یک افراز خاص **مجموعه‌های بخشی** (یا رده‌های رنگ) هستند. گراف رسم شده در زیر دارای عدد رنگی ۳ است و ۳–بخشی (نیز ۴–بخشی، ۵–بخشی، و غیره) می‌باشد.



معروفترین مسأله در نظریهٔ گراف به رنگ‌آمیزی مربوط است. یک **نقشه** افرازی از صفحه به ناحیه‌های همبند است. آیا می‌توان ناحیه‌های هر نقشه را با حداکثر چهار رنگ به‌گونه‌ای رنگ کرد که ناحیه‌های همسایه رنگهای متفاوت داشته باشند؟ در هر نقشه، برای هر ناحیه یک رأس و برای ناحیه‌هایی که دارای مرز مشترک هستند یک یال معرفی می‌کنیم. آنگاه می‌پرسیم آیا هر گراف هامنی عدد رنگی حداکثر ۴ دارد. یک گراف

هامنی است اگر بتوان آن را بدون تقاطع یالها در صفحه رسم کرد. گراف بالا را می‌توان بدون تقاطع یالها رسم کرد. گرافهای هامنی را در فصل ۷ بررسی می‌کنیم.

اصطلاحات تعریف شده: ردهٔ رنگ، عدد رنگی $\chi(G)$، $k-$بخشی، مجموعهٔ بخشی، هامنی. □

۶.۱.۱. مثال. ***شبکه‌های راه و التصاق.*** یک شبکهٔ راه را می‌توانیم با گرافی مدلسازی کنیم که یالهایش متناظر با قسمتهایی از راه باشند که میان تقاطعها واقع هستند. مسافت یا زمان سفر را می‌توانیم با نسبت دادن وزنها به یالها اندازه بگیریم. در چنین وضعیتی یالها معرف ارتباطات طبیعی‌اند. ممکن است بخواهیم کوتاهترین راه از x به y را بیابیم.

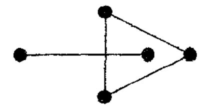
به‌طور ناصوری، یک **مسیر** را در یک گراف به‌صورت فهرست مرتبی از رأسهای متمایز $v_۱$، ...، v_n در نظر می‌گیریم به‌طوری که به‌ازای هر $۲ \leq i \leq n$، $v_{i-۱}v_i$ یک یال باشد. به‌طور مشابهی، یک **دور** را به صورت فهرست مرتبی از $v_۱$، ...، v_n در نظر می‌گیریم به‌طوری که هر $v_{i-۱}v_i$ و نیز $v_nv_۱$ یال باشند. نخستین و آخرین رأسهای یک مسیر ***نقاط پایانی*** آن هستند؛ یک $u,v-$ مسیر یک مسیر با نقاط پایانی u و v است. این مفاهیم را در بند ۲.۱ دقیقتر تعریف خواهیم کرد.

برای یافتن کوتاهترین راه از x به y، می‌خواهیم $x,y-$مسیر را با کمترین وزن کلی در میان همهٔ $x,y-$مسیرهای در G بیابیم. این مسأله را در فصل ۲ حل می‌کنیم. به‌طور مشابهی، در شبکه‌ای از n شهر، ممکن است بخواهیم از همهٔ شهرها با حداقل هزینه کل دیدن کنیم و به خانه برگردیم. با استفاده از هزینه‌ها به عنوان وزنها روی یالها گراف کامل، به جستجوی دور $n-$رأسی با مینیمم هزینه کل می‌گردیم. این مطلب «مسألهٔ فروشندهٔ دوره گرد» است که در فصل ۶ به آن پرداخته‌ایم.

در یک شبکهٔ راه یا شبکهٔ ارتباطی، هر موقعیت باید از طریق موقعیت دیگر قابل دسترس باشد. یک گراف G **همبند** است اگر برای هر جفت $u,v \in V(G)$ یک

u, v–مسیر داشته باشد. گراف رسم شده زیر همبند نیست.

اصطلاحات تعریف شده: مسیر، دور، گراف همبند. □



ماتریسها و یکریختی

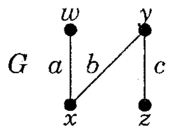
چگونه می‌توان یک گراف را مشخص کرد؟ می‌توانیم فهرستی از رأسها و یالها بنویسیم، اما راههای سودمندتری نیز برای کدی کردن این اطلاعات وجود دارد.

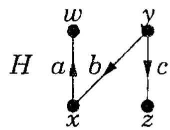
۱.۱.۷. **تعریف.** یک گراف یا گراف سودار G با رأسهای اندیسدار مانند $V(G) = \{v_1, \cdots, v_n\}$ را در نظر می‌گیریم. ***ماتریس مجاورت*** G که آن را به‌صورت $A(G)$ می‌نویسیم، ماتریسی است که در آن درایه a_{ij} تعداد نسخه‌های یالهای v_iv_j در G است، **درجهٔ** یک رأس تعداد یالهای بیطوقه‌ای که شامل آن رأس است به اضافه دو برابر تعداد طوقه‌های شامل آن رأس می‌باشد.

اگر رأس v متعلق به یال e باشد، آنگاه v و e ***متلاقی*** هستند. ***ماتریس وقوع*** یک گراف بیطوقه G، که آن را به‌صورت $M(G)$ می‌نویسیم، دارای سطرهای اندیسدار به وسیلهٔ $V(G)$ و ستونهای اندیسدار به وسیلهٔ $E(G)$ است، در حالی که اگر رأس v_i متعلق به یال e_j باشد، داریم $m_{ij} = 1$، و در غیر این صورت داریم $m_{ij} = 0$. اگر G یک گراف سودار باشد، آنگاه $m_{ij} = +1$، اگر v_i دُم e_j باشد، و -1 اگر v_i سر e_j باشد.

۱.۱.۸. **تبصره.** یک گراف می‌تواند چندین ماتریس مجاورت داشته باشد؛ هر ترتیب از رأسها یکی از ماتریسهای مجاورت را تعیین می‌کند. اگر G یک گراف (نه یک گراف سودار) باشد، آنگاه هر ماتریس مجاورت متقارن است (به‌ازای هر i، j داریم $a_{ij} = a_{ji}$). اگر G یک گراف ساده باشد، آنگاه هر درایه در $A(G)$ برابر 0 و یا 1 است، و صفرها روی قطر قرار دارند. □

۱.۱.۹. مثال. در زیر یک گراف ساده G و یک گراف سودار H را با ماتریس مجاورت و ماتریس وقوع نتیجه شده از ترتیب رأسهای w، x، y، z و ترتیب یالهای a، b، c رسم کرده‌ایم. ماتریس مجاورت برای گراف چندگانه‌ای که دارای دو نسخه از هریک از این یالهاست، با تغییر هر ۱ به یک ۲ به‌دست می‌آید. □





$$A(G)\quad \begin{array}{c|cccc} & w & x & y & z \\ \hline w & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ x & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ y & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ z & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{array} \qquad A(H)\quad \begin{array}{c|cccc} & w & x & y & z \\ \hline w & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ x & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ y & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ z & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}$$

$$M(G)\quad \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline w & ۱ & ۰ & ۰ \\ x & ۱ & ۱ & ۰ \\ y & ۰ & ۱ & ۱ \\ z & ۰ & ۰ & ۱ \end{array} \qquad M(H)\quad \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline w & -۱ & ۰ & ۰ \\ x & ۱ & -۱ & ۰ \\ y & ۰ & ۱ & ۱ \\ z & ۰ & ۰ & -۱ \end{array}$$

هنگامی که یک ماتریس مجاورت را برای گرافی ارائه می‌دهیم، به‌طور ضمنی رأسها را به ترتیب سطرها نامگذاری می‌کنیم؛ رأس iاُم متناظر با سطر و ستون iاُم است. این امکان نامگذاری رأسها را فراهم می‌کند. یک گراف را نمی‌توانیم بدون نامگذاری رأسها در کامپیوتر ذخیره کنیم. با وجود این، ما می‌خواهیم ویژگیهایی (همچون «همبندی») را که به نام رأسها بستگی ندارند بررسی کنیم. اگر بتوانیم یک تناظر یک به یک (**نگاشت**

دوسویی) میان $V(G)$ و $V(H)$ بیابیم که رابطهٔ مجاورت را حفظ کند، آنگاه G و H ویژگیهای ساختاری یکسان دارند.

۱.۱.۱۰. **تعریف.** یک **یکریختی** از G به H یک نگاشت دوسویی $f : V(G) l V(H)$ است به‌طوری که $uv \in E(G)$ اگر، و فقط اگر، $f(u)f(v) \in E(H)$. آنگاه می‌گوییم «G با H **یکریخت** است» و می‌نویسیم $G \cong H$، اگر یک یکریختی از G به H وجود داشته باشد.

۱.۱.۱۱. **تبصره. *یکریختی و ماتریسهای مجاورت.*** هنگامی که G با H یکریخت است، H نیز با G یکریخت است. بنابراین می‌گوییم «G و H یکریخت هستند» (با یکدیگر)[۱]. چون یک ماتریس مجاورت رابطهٔ مجاورت را کدی می‌کند، ما همچنین یکریختی را با استفاده از ماتریسهای مجاورت می‌توانیم توصیف کنیم. گرافهای G و H یکریخت هستند اگر، و فقط اگر، بتوانیم یک جایگشت به سطرهای $A(G)$ و همان جایگشت را به‌ستونهای $A(G)$ اعمال کنیم تا $A(H)$ را به‌دست آوریم. جایگشت $A(G)$ به‌این صورت رأسهای G را دوباره شماره‌گذاری می‌کند؛ به‌جای v_1، ...، v_n، اکنون به‌ترتیب سطرها متناظر $v_{\pi(1)}$، ...، $v_{\pi(n)}$ هستند. اگر ماتریس جدید $A(H)$ باشد که متناظر با ترتیب u_1، ...، u_n از $V(H)$ است، آنگاه نگاشت دوسویی که به‌ازای هر i، $v_{\pi(i)}$ را به u_i می‌برد یک یکریختی از G به H است. □

۱.۱.۱۲. **مثال.** گرافهای G و H که در زیر رسم شده‌اند، مسیرهای ۴−رأسی هستند. این گرافها به‌وسیلهٔ یک یکریختی که w، y، z، x را به‌ترتیب به a، b، c، d می‌نگارد یکریخت هستند. بازنویسی $A(G)$ با قرار دادن سطرها به‌ترتیب w، y، z، x و ستونها نیز به همان ترتیب، $A(H)$ را به‌دست می‌دهد. یکریختی دیگری x، z، y، w را به‌ترتیب به a، b، c، d می‌نگارد. □

۱) صفت «یکریخت» تنها برای جفتی ازگرافها به‌کار می‌رود؛ «G یکریخت است» به تنهایی بی‌معناست.

$$A(G)\quad \begin{array}{c|cccc} & w & x & y & z \\ \hline w & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ x & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ y & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ z & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{array} \qquad\qquad A(H)\quad \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ b & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ c & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ d & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \end{array}$$

۱۳.۱.۱. تعریف. یک *رابطهٔ* R روی یک مجموعهٔ S یک گردایه از جفتهای مرتب از S است. هنگامی که R یک رابطه است اغلب می‌نویسیم xRy تا نشان دهیم که $(x,y) \in R$ و می‌گوییم (x,y) در R **صدق می‌کند**. یک ***رابطهٔ هم‌ارزی***، رابطه‌ای است مانند R که بازتابی (به‌ازای هر $x \in S$، xRx)، متقارن (xRy ایجاب کند yRx)، و تراگذر (xRy و yRz ایجاب کند xRz) باشد.

مجاورت رابطه‌ای روی رأسهای یک گراف G است؛ اگر G دارای یک زیرگراف القایی به‌صورت $P_۳$ باشد، آنگاه رابطهٔ مجاورت روی $V(G)$ یک رابطه هم‌ارزی **نیست**. مجموعهٔ جفتهای (G,H) به‌طوری که G با H یکریخت باشد، ***رابطهٔ یکریختی*** روی مجموعهٔ گرافهاست.

۱۴.۱.۱. گزاره. یکریختی یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

اثبات. نگاشت همانی روی $V(G)$ یک یکریختی از G به خودش است، بنابراین $G \cong G$. اگر $f: V(G) \to V(H)$ یک یکریختی از G به H باشد، آنگاه $f^{-۱}$ یک یکریختی از H به G است، بنابراین $G \cong H$ ایجاب می‌کند که $H \cong G$. اگر $f: V(F) \to V(G)$ و $g: V(G) \to V(H)$ یکریختی‌هایی باشند، آنگاه ترکیب

gof یک نگاشت دوسویی از $V(F)$ به $V(H)$ است که رابطهٔ مجاورت را حفظ می‌کند و از این‌رو یک یکریختی از F به H است (این بدان معناست که $F \cong G$ و $G \cong H$ ایجاب می‌کند $F \cong H$). بنابراین رابطهٔ یکریختی بازتابی، متقارن، و تراگذار است. □

یک رابطهٔ هم‌ارزی اشیاء را به **رده‌های هم‌ارزی** افراز می‌کند، که در آن دو عنصر در رابطه صدق می‌کنند اگر، و فقط اگر، در یک ردهٔ هم‌ارزی قرار داشته باشند.

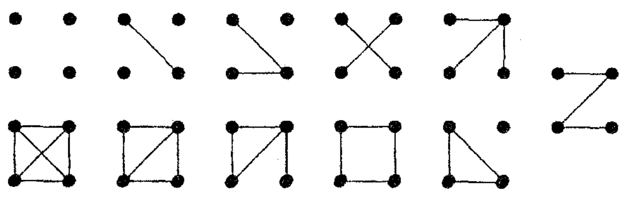
۱.۱.۱۵. تعریف. یک **ردهٔ یکریختی** ازگرافها یک ردهٔ هم‌ارزی ازگرافها تحت رابطهٔ یکریختی است.

۱.۱.۱۶. تبصره. *گرافهای «نانشاندار».* هنگام بحث ساختار یک گراف G، یک مجموعهٔ رأسهای ثابت را برای G در نظر گرفتیم، اما توضیحات ما برای هر گراف یکریخت با G نیز به‌کار می‌رود. به این دلیل، گاهی از عبارت ناصوری «گراف نانشاندار» برای در نظرگرفتن یک ردهٔ یکریختی ازگرافها استفاده می‌کنیم. هنگامی که گرافی را رسم می‌کنیم، رأسهایش با نقاط طبیعی در جایی که قرارشان داده‌ایم نامگذاری می‌شوند، حتی اگر به آنها هیچ نام دیگری ندهیم. از این‌رو تصویری از یک گراف نماینده‌ای از ردهٔ یکریختی آن است. اغلب نام «گراف» را برای تصویری از یک گراف به کار می‌بریم. هنگامی که گراف را برای نشان دادن چیزی دربارهٔ ساختار آن دوباره رسم می‌کنیم، عضو مناسبتری از ردهٔ یکریختی آن را انتخاب کرده‌ایم.

هنگامی که می‌دانیم دوگراف یکریخت هستند، اغلب آنها را با یک نام مورد بحث قرار می‌دهیم؛ این مطلب نشان می‌دهد که ما می‌خواهیم گزاره‌هایی را دربارهٔ ردهٔ یکریختی که شامل آنهاست مشخص کنیم. به‌این دلیل، معمولاً به جای $G \cong H$ می‌نویسیم $G = H$. به‌طور مشابهی، هنگامی که می‌گوییم «G یک زیرگراف از H است»، منظورمان از لحاظ فنی این است که G با یک زیرگراف از H یکریخت است، یا اینکه H شامل یک «نسخه» از G است.

بر پایه این رفتار از رده‌های یکریختی، K_n، P_n، C_n را به‌ترتیب برای نمایش هر گرافی که یک خوشه، مسیر یا دور با n رأس باشد، بدون نامیدن رأسها، به‌کار می‌بریم. پرسش اینکه آیا G، C_n «است» بدین معناست که آیا G با یک دور با n رأس یکریخت است. به‌طور مشابهی، $K_{r,s}$ را برای نمایش گراف دوبخشی کامل با مجموعه‌های بخشی به‌اندازه‌های r و s به‌کار می‌بریم. تصویر مثال ۴.۱.۱ نشان دهنده $K_{۳,۳}$ است. □

۱۷.۱.۱. مثال. ***تعداد گرافهای n-رأسی.*** فرض کنیم X مجموعه‌ای با اندازه n است؛ X شامل $\binom{n}{۲} = n(n-۱)/۲$ جفت نامرتب است[۱]. می‌توانیم هر جفت را به‌عنوان یک یال در نظر بگیریم یا حذف کنیم، بنابراین $۲^{\binom{n}{۲}}$ گراف ساده با مجموعهٔ رأسهای X وجود دارند. ۶۴ گراف ساده با مجموعهٔ ثابتی از چهار رأس وجود دارند، اما تنها به ۱۱ ردهٔ یکریختی کاهش می‌یابد. این مطالب در زیر در جفتهای مکمل دیده می‌شود؛ تنها $P_۴$ با مکملش یکریخت است. رده‌های یکریختی اندازه‌های متفاوت دارند، بنابراین نمی‌توانیم رده‌های یکریختی گرافهای ساده n-رأسی را با تقسیم $۲^{\binom{n}{۲}}$ بر اندازه یک رده بشماریم. □



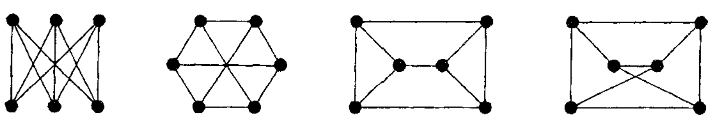
یک یکریختی از G به H رابطهٔ مجاورت را حفظ می‌کند. چون ویژگیهای ساختاری گرافها به‌وسیلهٔ رابطه‌های مجاورت آنها تعیین می‌شوند، می‌توانیم با یافتن یک ویژگی ساختاری از یکی که در دیگری درست نیست، ثابت کنیم که G و H یکریخت نیستند. اگر آنها دارای درجه‌های رأس متفاوت، یا اندازه‌های متفاوت برای بزرگترین خوشه یا کوچکترین دور، و غیره باشند، در این صورت آنها نمی‌توانند یکریخت

۱) ضریب دوجمله‌ای $\binom{n}{k}$ تعداد زیرمجموعه‌های k-عنصری از یک مجموعهٔ n-عنصری است.

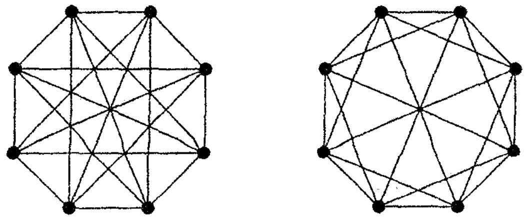
باشند، زیرا این ویژگیها در یکریختی حفظ می‌شوند. از طرف دیگر هیچ فهرست شناخته شده‌ای از ویژگیهای ساختاری مشترک ایجاب نمی‌کند که $G \cong H$؛ بنابراین باید یک نگاشت دوسویی $f : V(G) \to V(H)$ ارائه کنیم که رابطهٔ مجاورت را حفظ کند.

مثال ۱.۱.۱۸. مثال.یکریخت *یا نه؟* درگرافهای زیر، هر رأس دارای درجهٔ ۳ است، اما گرافها دو به دو یکریخت نیستند. تعدادی تصاویر $K_{3,3}$ وجود دارند که حاکی از نمایش یکریختیهاست. یکی از آنها شامل C_3 است و از این‌رو نمی‌تواند تصویری از $K_{3,3}$ باشد.

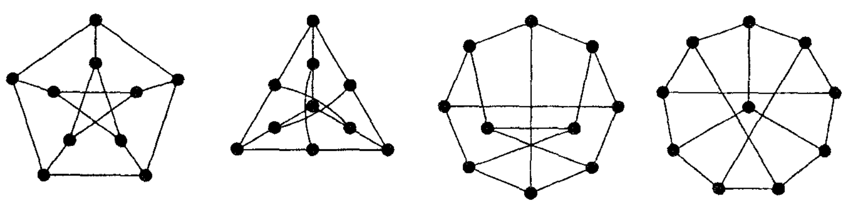
برای اثبات اینکه $G \cong H$، رأسها را نامگذاری می‌کنیم، یک نگاشت دوسویی میان مجموعه‌های رأسها به‌دست می‌آوریم و تحقیق می‌کنیم که رابطهٔ مجاورت حفظ می‌شود. در نخستین تصویر زیر، می‌توانیم سطر بالا را u، v، w و سطر پایین را x، y، z بنامیم. در تصویر دوم، رأسها را می‌توانیم به‌ترتیب گرد دور بیرونی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ بنامیم. نگاشت دوسویی که به ترتیب u، v، w، x، y، z را به ۱، ۳، ۵، ۲، ۴، ۶ می‌برد، یک یکریختی ازگراف نخست به دومی است. نگاشتی که به ترتیب u، v، w، x، y، z را به ۶، ۴، ۲، ۱، ۳، ۵، می‌نگارد یک یکریختی دیگر است.



همچنین گرافهای زیر را در نظر می‌گیریم. چون آنها یالهای زیادی دارند، ترجیح می‌دهیم که مکملهای آنها را مقایسه کنیم؛ گرافهای G و H یکریخت هستند اگر، و فقط اگر، $\overline{G}$ و $\overline{H}$ یکریخت باشند (تمرین ۱۰). مکمل یکی از این گرافها همبند است، اما مکمل دیگری ناهمبند می‌باشد، بنابراین آنها یکریخت نیستند. □



مثال ۱۹.۱.۱. **مثال. *گراف پترسن*.** *گراف پترسن* عموماً به‌صورت گراف سمت چپ پایین رسم می‌شود. این گراف آن‌قدر سودمند است که می‌توان یک کتاب کامل بدان اختصاص داد (هولتون–شیهان[1] [۱۹۹۳]). دیگر گرافهای زیر نیز تصاویری از گراف پترسن هستند. تمرین ۱۹، اثبات اینکه اینها دو به دو یکریخت هستند می‌طلبد. گراف پترسن دارای توصیف ساده‌ای با استفاده از مجموعهٔ S است که از زیرمجموعه‌های ۲–عنصری از یک مجموعهٔ ۵–عنصری تشکیل شده است. فرض کنیم G گرافی با مجموعهٔ راسهای S باشد که در آن دو جفت تشکیل یک یال می‌دهند اگر، و فقط اگر، به‌صورت مجموعه‌های مجزا باشند. گراف G با هرگراف زیر یکریخت است. این مطلب از نشاندارکردن رأسهای هرگراف با اعضای S به‌طوری که رابطهٔ مجاورت مجزا بودن باشد نتیجه می‌شود. □



۲۰.۱.۱. **تعریف.** یک **خودریختی** از G جایگشتی از $V(G)$ است که یک یکریختی از G به G باشد. یک گراف G، ***تراگذر رأسی*** است اگر برای هر جفت $u, v \in V(G)$ یک خودریختی وجود داشته باشد که u را به v بنگارد.

1) Holton-Sheehan

۲۱.۱.۱. مثال. *خودریختیها.* فرض‌کنیم G مسیری با مجموعهٔ رأسهای $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و مجموعهٔ یالهای $\{۱۲, ۲۳, ۳۴\}$ باشد. این گراف G دو خودریختی دارد: جایگشت همانی و جایگشتی که ۱ را به ۴ و ۲ را به ۳ جابجا می‌کند. تعویض رأس ۱ و رأس ۲ یک خودریختی از G نیست، اگرچه G با گراف H با مجموعهٔ رأسهای $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و مجموعهٔ یالهای $\{۱۲, ۱۳, ۳۴\}$ یکریخت است. خودریختیهای G جایگشتهایی هستند که همزمان می‌توانند برای سطرها و ستونهای $A(G)$، بدون تغییر دادن $A(G)$، به‌کار روند. در $K_{r,s}$، جایگشت رأسهای یک مجموعهٔ مستقل، ماتریس مجاورت را تغییر نمی‌دهد، بنابراین $K_{r,s}$ دارای $r!s!$ خودریختی است، اگر $r \neq s$. از طرف دیگر، $K_{t,t}$ دارای $۲(t!)^۲$ خودریختی است.

اگر $n > ۲$، آنگاه P_n، تراگذر رأسی نیست، چون هیچ خودریختی نمی‌تواند رأسی با درجهٔ ۱ را به رأسی با درجهٔ ۲ بنگارد. گراف دوبخشی کامل $K_{r,s}$، تراگذر رأسی است اگر، و فقط اگر، $r = s$. هر دور تراگذر رأسی است، و همهٔ گرافهای مثالهای ۱۸.۱.۱ و ۱۹.۱.۱، تراگذر رأسی هستند. □

می‌توانیم یک گزاره را در یک گراف تراگذر رأسی با اثبات در مورد یک رأس برای هر رأس محقق کنیم. تراگذری رأس تضمین می‌کند که گراف از هر رأس «یکسان دیده می‌شود»؛ هر رأس نقش یکسانی بازی می‌کند.

تمرینات

بیشتر این تمرینات را می‌توان با استفاده از استدلال و یا تحلیل حالت برای همان منظور خاص حل کرد. دیگر فنون اثبات به طور صریحتر در باقیمانده این فصل مطرح خواهند شد. علامت «$(-)$» معرف آن است که تمرین نسبت به دیگر تمرینات، آسانتر یا کوتاهتر است، در حالی که «$(+)$» معرف آن است که تمرین از دیگر تمرینات سختتر یا طولانیتر است، و «$(!)$» معرف آن است که تمرین به‌ویژه سودمند یا آموزنده است.

۱.۱.۱. (−) همهٔ ماتریسهای مجاورت و ماتریسهای وقوع ممکن را برای یک مسیر ۳-رأسی بنویسید. همچنین یک ماتریس مجاورت را برای مسیری با شش رأس، و برای دوری با شش رأس بنویسید.

۲.۱.۱. (−) با استفاده از بلوکهای مستطیلی که درایه‌هایشان همگی برابر هستند، یک ماتریس مجاورت برای $K_{m,n}$ بنویسید.

۳.۱.۱. (−) ثابت کنید که با بریدن مربعهای روبه‌روی گوشه یک تختهٔ شطرنجی ۸ در ۸، زیرتخته‌ای به‌دست می‌آید که نمی‌تواند به مستطیلهایی متشکل از دو مربع واحد مجاور افراز شود. این مسأله را با استفاده از گرافهای دوبخشی تعمیم دهید.

۴.۱.۱. (−) چهار خانواده گراف زیر را در نظر می‌گیریم: $A =$ {مسیرها}، $B =$ {دورها}، $C =$ {خوشه‌ها}، $D =$ {گرافهای دوبخشی}. برای هر جفت از این خانواده‌ها، همهٔ رده‌های یکریختی گرافهایی که به هر دو خانواده تعلق دارند، تعیین کنید.

۵.۱.۱. (−) ثابت یا رد کنید: اگر هر رأس از یک گراف ساده متناهی G دارای درجهٔ ۲ باشد، آنگاه G یک دور است.

۶.۱.۱. (!) ثابت کنید که در هر مهمانی با شرکت شش نفر، سه آشنای دوطرفه و یا سه ناآشنای دو طرفه وجود دارند.

۷.۱.۱. (!) فرض کنیم که G یک گراف سادهٔ همبند است که یک گراف کامل نیست. ثابت کنید که هر رأس از G متعلق به یک زیرگراف القایی ۳−رأسی یکریخت با P_3 است.

۸.۱.۱. فرض کنیم که G یک گراف ساده است که هیچ رأس درجهٔ ۰ و هیچ زیرگراف القایی با دو یال ندارد. ثابت کنید که G یک گراف کامل است.

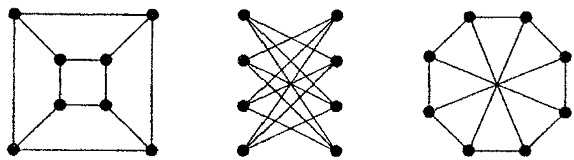
۹.۱.۱. (+) فرض کنیم که G یک گراف ساده است که هیچ رأس درجهٔ ۰ و هیچ

زیرگراف القایی با سه یال ندارد. ثابت کنید که G دارای حداکثر چهار رأس است.

۱.۱.۱۰. (–) ثابت کنید که $G \cong H$ اگر، و فقط اگر، $\overline{G} \cong \overline{H}$.

۱.۱.۱۱. (–) تعداد رده‌های یکریختی گرافهای ۷–رأسی ساده را که در آنها هر رأس دارای درجهٔ ۴ است تعیین کنید. (*راهنمایی:* مکملها را در نظر بگیرید.)

۱.۱.۱۲. در میان گرافهای زیر، کدام جفتها یکریخت هستند؟



۱.۱.۱۳. (!) در هر ردهٔ زیر، کوچکترین n را طوری تعیین کنید که گرافهای n-رأسی نایکریخت با فهرستی از درجه‌های رأسهای یکسان وجود داشته باشند.
(الف) همهٔ گرافها (ی چندگانه)، (ب) گرافهای چندگانه بیطوقه، (پ) گرافهای ساده.
(*راهنمایی:* چون هر رده شامل ردهٔ بعدی است، پاسخها یک سه‌تایی ناکاهشی می‌سازند. برای (پ) از فهرست رده‌های یکریختی مثال ۱.۱.۱۷ استفاده کنید.).

۱.۱.۱۴. فرض کنیم G یک گراف ساده با ماتریس مجاورت A و ماتریس وقوع M است. ثابت کنید که درجهٔ v_i، iاُمین درایه قطری در $A^۲$ و در MM^T است. درایه‌ها در وضعیت (i,j) از $A^۲$ و MM^T چیست، مثلاً دربارهٔ G؟

۱.۱.۱۵. یک گراف ساده یکریخت با مکملش، **خود–مکمل** است.
الف) ثابت کنید که تعداد رأسها در یک گراف خود–مکمل، همنهشت با ۰ یا ۱ به پیمانه ۴ است.
ب) یک گراف n–رأسی خود–مکمل برای هر n همنهشت با ۰ یا ۱ به پیمانه ۴ بسازید.
(*راهنمایی:* برای $n \equiv ۰$ (به پیمانه ۴)، ساختار گراف خود–مکمل $P_۴$ را با قرار دادن

رأسها در چهار گروه تعمیم دهید. برای (به پیمانه ۴) ۱ $\equiv n$، یک رأس به گراف ساخته شده برای ۱ $- \; n$ بیفزایید.)

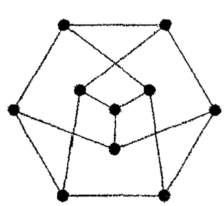
۱.۱.۱۶. جفتهای اعداد صحیح مثبت m و n را طوری مشخص کنید که $K_{m,n}$ دو زیرگراف یکریخت با هر یال از $K_{m,n}$ دقیقاً در یکی از آنها داشته باشد.

۱.۱.۱۷. ثابت کنید که K_n دارای سه زیرگراف دو به دو یکریخت است به‌طوری که هر یال از K_n دقیقاً در یکی از آنها ظاهر می‌شود اگر، و فقط اگر، n همنهشت با ۰ یا ۱ به پیمانه ۳ باشد.

۱.۱.۱۸. سه زیرگراف همبند دو به دو یکریخت از گراف پترسن بیابید به‌طوری که هر یال ازگراف پترسن دقیقاً در یکی از آنها ظاهر شود.

۱.۱.۱۹. (−) *گراف پترسن.* ثابت کنید که گرافهای رسم شده در مثال ۱.۱.۱۹، دو به دو یکریخت هستند. (*توضیح:* می‌توان از مجموعه‌های رأسهای مجزا استفاده کرد و نگاشتهای دوسویی لازم را مشخص کرد، یا به همهٔ گرافها یک مجموعهٔ رأسها اختصاص داد، به‌طوری که گرافها یک ماتریس مجاورت داشته باشند).

۱.۱.۲۰. (−) آیا گراف رسم شده زیر با گراف پترسن یکریخت است؟



۱.۱.۲۱. (!) **خودریختیهای *گراف پترسن.*** فرض کنیم S گردایه زیرمجموعه‌های ۲−عنصری از $\{۱, \cdots, ۵\}$ باشد. از ab (یا ba) برای نشان دادن عنصر $\{a, b\}$ از S استفاده کنید. فرض کنیم G گرافی با مجموعهٔ رأسهای S باشد که با $ab \leftrightarrow cd$ تعریف شده است اگر، و فقط اگر، $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \phi$.

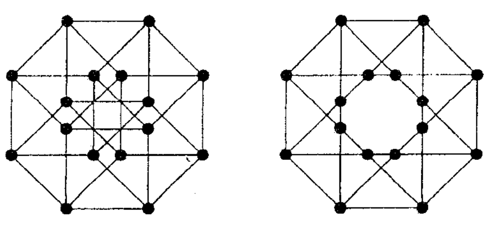
الف) ثابت کنید که گراف پترسن رسم شده در مثال ۱۹.۱.۱، با G یکریخت است. از این مطلب برای نتیجه گرفتن اینکه گراف پترسن، تراگذر رأسی است استفاده کنید.
ب) ثابت کنید که هر خودریختی از G، ۵−دور با رأسهای ۱۲، ۳۴، ۵۱، ۲۳، ۴۵ را به یک ۵−دور با رأسهای ab، cd، ea، bc، de می‌نگارد که با یک جایگشت از $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ که عناصر ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را به‌ترتیب به a، b، c، d، e می‌برد، تعیین می‌شود.
پ) ثابت کنید که هر جایگشت از $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ یک خودریختی از G را به روشی که در بالا بیان شد، مشخص می‌کند. نتیجه بگیرید که گراف پترسن دقیقاً ۱۲۰ خودریختی دارد.

۲۲.۱.۱. خودریختیهای P_n، C_n، و K_n را بشمارید.

۲۳.۱.۱. یک گراف ساده با شش رأس که تنها یک خودریختی دارد بسازید. یک گراف ساده که دقیقاً دارای سه خودریختی است بسازید.

۲۴.۱.۱. «فوق» *تقارن درگراف پترسن.* فرض کنیم که $P(u_۰, u_۱, u_۲, u_۳)$ و $Q = (v_۰, v_۱, v_۲, v_۳)$ مسیرهای ۳−یالی درگراف پترسن باشند. ثابت کنید که دقیقاً یک خودریختی از گراف پترسن وجود دارد که به‌ازای $i = ۰, ۱, ۲, ۳$، u_i را به v_i می‌نگارد. (*راهنمایی:* از توصیف مجزا بودن با توجه به تمرین ۲۱ استفاده کنید.)

۲۵.۱.۱. (!) تحقیق کنید که آیا گرافهای رسم شده زیر یکریخت هستند (گراف سمت چپ زیر روی جلد کتاب ویلسون−واتکینس[1] [۱۹۹۰] نشان داده شده است.)



1) Wilson-Watkins

۲۶.۱.۱. (+) ***تراگذری یالی.*** یک گراف G، تراگذر یالی است اگر به‌ازای هر $e, f \in E(G)$ یک خودریختی از G وجود داشته باشد که نقاط پایانی e را بر نقاط پایانی f (به هر ترتیبی) می‌نگارد. ثابت کنید که گرافهای تمرین ۲۴، تراگذر رأسی و تراگذر یالی هستند.

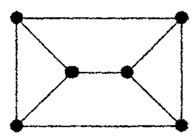
(**توضیح:** گرافهای کامل، گرافهای دوبخشی کامل، و گراف پترسن (بنابر تمرین ۲۳) تراگذر یالی هستند.)

۲۷.۱.۱. *تراگذر یالی در مقابل تراگذر رأسی.*

الف) فرض کنیم که G را از K_n با $n \geq ۳$، با جایگذاری یک مسیر به‌طول دو به جای هر یال K_n به‌دست آورده‌ایم (رأسهای جدید درجهٔ ۲ دارند). ثابت کنید که G تراگذر یالی است اما تراگذر رأسی نیست.

ب) (+) فرض کنیم که G تراگذر یالی است اما تراگذر رأسی نیست و هیچ رأسی از درجهٔ ۰ ندارد. ثابت کنید که G دوبخشی است.

پ) ثابت کنید که گراف زیرتراگذر رأسی است اما تراگذر یالی نیست.



۱-۲ مسیرها و اثباتها

در باقیمانده این فصل فنون اساسی اثبات در ریاضیات گسسته را با بسط نتایج مقدماتی دربارهٔ گرافها توضیح می‌دهیم. با تعاریف موضوعاتی شبیه مسیر مطلب را آغاز می‌کنیم. تعاریف ناصوری مسیر و دور در بند ۱.۱ برای بسیاری مقاصد مناسب‌اند، اما بهتر است به آنها به صورت حالتهای خاص از یک مفهوم کلیتر بنگریم. جهانگردی که در شهری گردش می‌کند شاید از تکرار رأسها استقبال کند اما بخواهد از تکرار یالها پرهیز کند. یک نامه‌رسان نامه‌ها را به خانه‌های هر دو سوی خیابان تحویل می‌دهد و بنابراین از هر یال دوبار می‌گذرد.

۱.۲.۱. تعریف. یک **گشت به *طول*** k یک دنبالهٔ v_0، e_1، v_1، e_1، ....، e_k، v_k از رأسها و یالهاست به‌طوری که به‌ازای هر i، $e_i = v_{i-1}v_i$. یک **گذر** گشتی است که هیچ یال تکراری نداشته باشد. یک **مسیر** گشتی است که هیچ رأس تکراری نداشته باشد. یک u,v**–گشت**، گشتی است که نخستین رأس آن u و آخرین رأس آن v باشد؛ این دو ***نقاط پایانی*** آن هستند، وگشتی **بسته** است اگر $u = v$. یک **دور** گذر بسته‌ای به‌طول حداقل یک است که در آن «نخستین-آخرین» تنها تکرار رأس باشد (یک طوقه، دوری به طول ۱ است).

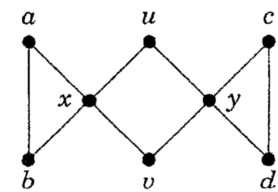
مسیرها و گذرها، گشتها هستند، و از این‌رو دارای نقاط پایانی و طولها می‌باشند. یک مسیر یا گذر ممکن است دارای طول ۰ باشد، اما یک دور نمی‌تواند چنین باشد. واژه‌های «مسیر» و «دور» را در سه زمینهٔ دقیقاً وابسته به هم به‌کار می‌بریم: به عنوان یک گراف یا زیرگراف، به عنوان حالتی خاص از یک گشت، و به عنوان مجموعه‌ای از یالها.

در یک گراف ساده یک گشت به‌وسیلهٔ دنبالهٔ رأسهایش کاملاً مشخص می‌شود؛ از این‌رو معمولاً یک مسیر یا دور (یا گشت) را در یک گراف ساده با فهرست مرتب رأسهایش بیان می‌کنیم. اگرچه ممکن است تنها رأسها را فهرست کنیم، حال آنکه گشت متشکل

از هر دوی رأسها و یالهاست.

می‌توانیم یک دور را از هر رأسی آغاز کنیم. برای تأکید بر جنبهٔ دوری بودن ترتیب، اغلب هر رأس را در نامیدن دور تنها یک بار فهرست می‌کنیم.

۲.۲.۱. مثال. ***گشتها، مسیرها، و دورها.*** گراف زیر دارای یک گشت بسته به طول ۱۲ است که به‌ترتیب از رأسهای $(a, x, a, x, u, y, c, d, y, v, x, b, a)$ می‌گذرد. حذف دوگام نخست، گذر بسته‌ای (بدون تکرار یال) را به‌دست می‌دهد. مجموعهٔ یالهای این گذر اجتماع مجموعه‌های یالهای سه دور دو به دو مجزا—یال است. u, v— گذر یعنی u، y، c، d، y، v شامل یالهای u, v— مسیر یعنی u، y، v است. □



این تعاریف و مطالب برای گرافهای سودار با هر e_i که یک جفت **مرتب** $v_{i-1}v_i$ باشد، نیز معتبراند. در یک مسیر یا دور از یک گراف سودار، یالهای متوالی از «پیکانها پیروی می‌کنند»؛ به عنوان مثال، گراف سودار شامل تنها یال xy دارای یک x, y—مسیر است، اما هیچ y, x—مسیر ندارد.

۳.۲.۱. تعریف. یک گراف G ***همبند*** است اگر به‌ازای هر جفت $u, v \in V(G)$ دارای یک u, v—مسیر باشد (در غیر این‌صورت ***ناهمبند*** است). اگر G دارای یک u, v—مسیر باشد، آنگاه u با v در G ***مرتبط*** است. ***رابطهٔ التصاق*** در یک گراف متشکل از جفتهای رأسهای (u, v) است به‌طوری که u با v مرتبط باشد.

همبندی یک ویژگی گرافهاست، اما رابطهٔ التصاق روی رأسها و عبارت «u با v مرتبط است» برای نوشتن اثباتها مناسبتراند. برای مشخص کردن شرط قویتر $uv \in E(G)$، می‌گوییم «u و v مجاوراند» یا «u و v به‌وسیلهٔ یک یال متصل شده‌اند». «مرتبط با» را

برای وجود یک u, vـمسیر و «متصل شده به» را برای وجود یک یال uv به‌کار می‌بریم.

استقرا و گشتها

فن استقرا را می‌توان برای اثبات بسیاری از گزاره‌هایی که متضمن یک پارامتر صحیح مثبت هستند به‌کار برد. این فن بر **ویژگی خوشترتیبی**، که آن را برای اعداد صحیح مثبت **فرض می‌کنیم** متکی است: هر مجموعهٔ ناتهی از اعداد صحیح مثبت دارای یک کوچکترین عنصر است.

۴.۲.۱. قضیهٔ. (اصل استقرا). اگر $P(n)$ گزاره‌ای با یک پارامتر صحیح n باشد و دو شرط زیر برقرار باشند، آنگاه $P(n)$ برای هر n مثبت درست است.

۱) $P(۱)$ درست است.

۲) به‌ازای هر $n \geq ۱$، «$P(n)$ درست است» ایجاب کند «$P(n+۱)$ درست است».

اثبات: فرض کنیم که شرایط (۱) و (۲) برقراراند. اگر $P(n)$ برای هر عدد صحیح مثبت n برقرار نباشد، آنگاه $P(n)$ برای مجموعه‌ای ناتهی از اعداد صحیح مثبت برقرار نیست. بنابر ویژگی خوشترتیبی، یک کوچکترین مقدار وجود دارد که برای آن $P(n)$ برقرار نیست. بنابر (۱)، این مقدار نمی‌تواند ۱ باشد. بنابر (۲)، این مقدار نمی‌تواند هیچ عدد صحیح بزرگتر از ۱ باشد. □

به عنوان مثال، می‌توانیم از استقرا روی n برای اثبات $\sum_{i=۱}^{n} i = \binom{n+۱}{۲} = (n+۱)n/۲$ استفاده کنیم. یک روند متداول برای اثبات $P(n)$ به روش استقرا این است که: (۱) درستی $P(n)$ را برای $n = ۱$ تحقیق کنیم، و (۲) ثابت کنیم که اگر $P(n)$ برای $n = k$ درست باشد، آنگاه $P(n)$ برای $n = k + ۱$ نیز درست است. تحقیق (۱) را *گام پایه* اثبات؛ تحقیق (۲) را *گام استقرا* می‌نامند.

روشهای بسیار دیگری نیز برای نحوهٔ بیان اثباتها به‌وسیلهٔ استقرا وجود دارند. می‌توانیم از ۰ آغاز کنیم تا گزاره‌ای را برای اعداد صحیح نامنفی ثابت کنیم. همچنین اصل هم‌ارزی وجود دارد که بعداً بیان می‌کنیم.

۵.۲.۱. قضیهٔ. (اصل استقرای قوی). اگر $P(n)$ گزاره‌ای با یک پارامتر صحیح n باشد و دو شرط زیر برقرار باشند، آنگاه $P(n)$ برای هر n مثبت درست است.

۱) $P(۱)$ درست است.

۲) به‌ازای هر $n > ۱$، «$P(k)$ برای $۱ \leq k < n$ درست است» ایجاب کند «$P(n)$ درست است».

اثبات. مانند قضیهٔ ۴.۲.۱، هنگامی که $P(n)$ درست نیست، هیچ کوچکترین مقدار وجود ندارد. □

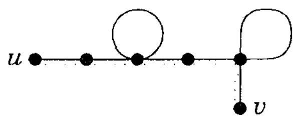
به‌ندرت میان استقرا و استقرای قوی فرق می‌گذاریم. «$P(k)$ به‌ازای هر $k < n$ درست است» را *فرض استقرا* می‌نامیم، زیرا فرض گزاره استلزامی است که در گام استقرا محقق است.

نخستین کاربردهای استقرا، لمها دربارهٔ گشتها و مسیرها هستند. اگرچه الحاق یک u, v-مسیر و یک v, w-مسیر یک u, w-گشت است، ولی لزومی ندارد که یک u, w-مسیر باشد. با وجود این آن شامل یک u, w-مسیر است، و از این‌رو می‌توان ثابت کرد که G به‌ازای هر $u, v \in V(G)$ همبند است، و G دارای یک u, v-گشت می‌باشد. گفتن اینکه یک گشت W ***شامل*** یک مسیر P است بدین معناست که رأسها و یالهای P به‌عنوان زیردنباله‌ای از رأسها و یالهای W ظاهر می‌شود؛ به‌ترتیب اما نه لزوماً متوالی.

۶.۲.۱. لم. اگر u و v رأسهای متمایزی در G باشند، آنگاه هر u, v-گشت در G شامل یک u, v-مسیر است.

اثبات. از استقرا (قوی) روی l استفاده می‌کنیم تا ثابت کنیم که به‌ازای هر l گزاره $P(l)$ که هر u,v–گشت به طول l است شامل یک u,v–مسیر می‌باشد (برای استقرای «معمولی» تمرین ۳ را ببینید). فرض کنیم W یک u,v–گشت به‌طول l باشد. اگر $l = ۱$، آنگاه تنها یال W، uv است و خود W یک u,v–مسیر است.

برای گام استقرا، فرض کنیم $l > ۱$، و فرض کنیم ادعا برای گشتهای به‌طول کمتر از l برقرار است. اگر W هیچ رأس تکراری نداشته باشد، آنگاه خود W یک u,v–مسیر است. اگر W یک رأس تکراری داشته باشد، آنگاه می‌توانیم یالها و رأسهایی از W را که میان رأس تکراری ظاهر می‌شوند حذف کنیم تا یک u,v–گشت کوتاهتری در W به‌دست آوریم. بنابر فرض استقرا، این گشت شامل یک u,v–مسیر است، که به‌ترتیب در W ظاهر می‌شود. □

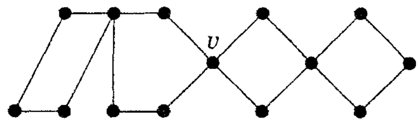


برای گزاره‌ای که با استقرا روی n ثابت شود، نمادگذاری صوری $P(n)$ را دیگر به‌کار نمی‌بریم. برای گام پایه در لم بعدی، به‌طور صریح گرافهای چندگانه را در نظر می‌گیریم (لم ۱.۲.۶ برای گرافهای چندگانه نیز برقرار است). یک طوقه دوری به‌طول یک است، و دو یال متمایز با نقاط پایانی یکسان دوری به‌طول دو را می‌سازند. یک گشت برحسب طولش که فرد یا زوج باشد، فرد یا زوج می‌باشد. یک گشت بسته یا یک دور را به عنوان یک ترتیب دوری در نظر می‌گیریم که می‌تواند از هر نقطه‌ای آغاز شود؛ لم بعدی به چنین دیدگاهی نیاز دارد.

۱.۲.۷. لم. هرگشت بستهٔ فرد شامل یک دور فرد می‌باشد.

اثبات. فرض کنیم W یک گشت بستهٔ فرد است؛ استقرا را روی طول l از W به‌کار می‌بریم. اگر $l = ۱$، آنگاه W یک‌طوقه است، که دوری به طول ۱ می‌باشد. برای گام استقرا، فرض کنیم $l > ۱$، و فرض کنیم ادعا برای گشتهای با طول کمتر از l برقرار

است. اگر W هیچ رأس تکراری نداشته باشد (به جز نخستین=آخرین)، آنگاه W خود دوری با طول فرد است. اگر رأس v در W تکرار شده باشد، آنگاه W را می‌توانیم به دو v,v–گشت افراز کنیم. چون طول کل W فرد است، یکی از این دوگشت فرد و دیگری زوج است. گشت فرد از W کوتاهتر است. بنابر فرض استقرا، آن شامل یک دور فرد می‌باشد، که به ترتیب در W ظاهر می‌شود. □



یک گشت بسته به طول زوج لزوماً شامل یک دور نیست. با وجود این، اگر یال uv *دقیقاً یک‌بار* در یک گشت بسته ظاهر شود، آنگاه لم ۶.۲.۱ ایجاب می‌کند که گشت شامل یک دور باشد، زیرا، حذف uv منجر به یک u,v–گشت می‌گردد که شامل یک u,v–مسیر است ولی شامل خود uv نیست.

هم‌ارزیها و گرافهای همبند

اگر ثابت کنیم که دو شرط هم‌ارز هستند، آنگاه در وضعیتی که یکی از آنها برقرار باشد می‌توانیم دیگری را نیز به‌کار ببریم. برای اثبات «A اگر، و فقط اگر، B» معمولاً ثابت می‌کنیم «A ایجاب می‌کند B» را و **عکس** آن «B ایجاب می‌کند A» را. گزاره «(چنین نیست که B) ایجاب می‌کند (چنین نیست که A)» **عکس نقیض** «A ایجاب می‌کند B» است و دارای همان معنی «A ایجاب می‌کند B» است. بدین سان با این جایگزینی و به‌کارگیری زنجیره‌ای از هم‌ارزیها برای اثبات «A اگر، و فقط اگر، B» هردو جهت را به طور همزمان ثابت کرده‌ایم.

۸.۲.۱. تعریف. *مؤلفه‌های* یک گراف G زیرگرافهای همبند ماکسیمال آن هستند. یک مؤلفه (یا گراف) *نابدیهی* است اگر شامل یک یال باشد. یک *یال برشی* یا

رأس برشی از یک گراف یال یا رأسی است که حذف آن تعداد مؤلفه‌ها را افزایش دهد.

نماد به کار رفته برای زیرگراف به‌دست آمده از حذف یک یال $e \in E(G)$ یا $v \in V(G)$ (و یالهای وابسته به v) به‌ترتیب عبارت است از $G - e$ یا $G - v$. حذف مجموعهٔ $S \subseteq V(G)$ زیرگراف القایی به‌وسیلهٔ رأسهای باقیمانده را به‌دست می‌دهد؛ می‌نویسیم $G - S = G[\overline{S}]$، که در آن $\overline{S} = V(G) - S$.

۹.۲.۱. تبصره. *مؤلفه‌ها و التصاق.* رابطهٔ التصاق یک رابطهٔ هم‌ارزی روی رأسهای یک گراف است (لم ۶.۲.۱ ایجاب می‌کند که رابطهٔ تراگذر باشد). رده‌های هم‌ارزی این رابطه، مجموعه‌های رأسهای مؤلفه‌ها هستند. دو مؤلفه هیچ رأس مشترکی ندارند، و هیچ یالی نقاط پایانی در مؤلفه‌های متفاوت ندارد. □

۱۰.۲.۱. لم. یک گراف همبند است اگر، و فقط اگر، برای هر افراز رأسهای آن به دو مجموعهٔ ناتهی، یالی با نقاط پایانی در هر دومجموعه وجود داشته باشد.

اثبات. فرض کنیم G همبند است. با در نظر گرفتن افرازی از $V(G)$ به مجموعه‌های ناتهی S، T، $u \in S$ و $v \in T$ را انتخاب می‌کنیم. چون G همبند است، G دارای یک $u, v-$مسیر P است. بعد از آخرین رأس آن در S، P دارای یالی از S به T است.

اگر G ناهمبند و H مؤلفه‌ای از G باشد، آنگاه هیچ یالی دقیقاً یک نقطه پایانی در H ندارد. این بدان معناست که افراز S، T در حالی که $S = V(H)$ هیچ یالی با نقاط پایانی در هر دو مجموعه ندارد. ثابت کرده‌ایم اگر G ناهمبند باشد، آنگاه شرط افراز از اعتبار می‌افتد. بنابر عکس نقیض، شرط افراز ایجاب می‌کند که G همبند باشد. □

۱۱.۲.۱. تبصره. *افزودن یا حذف یالهای برشی.* افزودن یک یال به G تعداد مؤلفه‌ها را حداکثر یکی کاهش می‌دهد، زیرا یال نمی‌تواند دارای نقاط پایانی در بیش از دو مؤلفهٔ G داشته باشد. به‌طور مشابهی، حذف یک یال برشی تعداد

مؤلفه‌ها را دقیقاً یکی افزایش می‌دهد. □

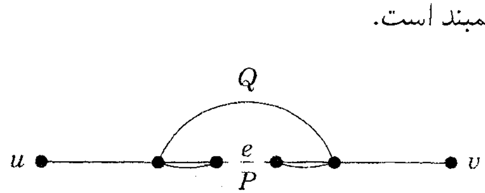
بعداً یالهای برشی را مشخص می‌کنیم.

۱۲.۲.۱. لم. یک یال $e = xy$ یک یال برشی از یک گراف G است اگر، و فقط اگر، $G - e$ هیچ x,y–مسیر نداشته باشد.

اثبات. با استفاده از عکس نقیض، گزاره هم‌ارز عبارت است از «e یک یال برشی نیست اگر، و فقط اگر، $G - e$ دارای یک x,y–مسیر باشد». حذف e هیچ مؤلفه‌ای را که شامل e نباشد تغییر نمی‌دهد، بنابراین کافی است این گزاره را برای مؤلفهٔ H از G که شامل e است ثابت کنیم. اگر e یک یال برشی از H نباشد، آنگاه $H - e$ همبند است و از این‌رو شامل یک x,y–مسیر است.

برعکس، فرض کنیم $H - e$ دارای یک x,y–مسیر Q است؛ ثابت می‌کنیم که $H - e$ همبند است. $u, v \in V(H)$ را به‌طور دلخواه انتخاب می‌کنیم. چون H همبند است، H دارای یک u,v–مسیر P است.

اگر P شامل e نباشد، آنگاه P نیز در $H - e$ وجود دارد. اگر P شامل e باشد، آنگاه یک u,v-گشت را در $H - e$ بدین ترتیب می‌سازیم که با دنبال کردن P تا آنجا که به e برسیم، و دنبال کردن Q به‌جای e تا آنجا که به‌انتهای دیگر e برسیم، و سپس باقیمانده P را ادامه می‌دهیم تا به v برسیم. بنابر لم ۶.۲.۱، این u,v–گشت در $H - e$ شامل یک u,v–مسیر می‌باشد. چون u، v به‌طور دلخواه از $V(H)$ انتخاب شده بودند، ثابت کرده‌ایم که $H - e$ همبند است. □



تصویر، کاربرد لم ۶.۲.۱ را نشان می‌دهد؛ Q از یالهای P (خط‌چین) استفاده می‌کند و u,v–گشت به‌دست آمده (یک پارچه) یک مسیر نیست. لم ۱۲.۲.۱ یک فرع سودمند

دارد. این مشخص‌سازی را با زنجیره‌ای از هم ارزیها ثابت می‌کنیم؛ هر دو استلزام به‌طور همزمان ثابت می‌شوند.

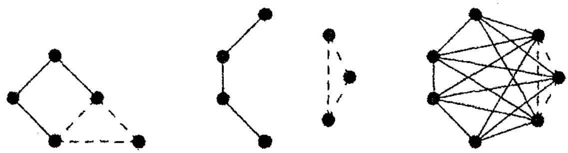
۱۳.۲.۱. فرع. یک یال از یک گراف بیسو یک یال برشی است اگر، و فقط اگر، به هیچ دوری تعلق نداشته باشد.

اثبات. با استفاده از عکس نقیض، گزاره هم‌ارز عبارت است از «یک یال به یک دور تعلق دارد اگر، و فقط اگر، یک یال برشی نباشد». ملاحظه می‌کنیم که $e = xy \in E(G)$ به یک دور تعلق دارد اگر، و فقط اگر، $G - e$ دارای یک $x, y-$مسیر باشد، که بنابر لم ۱۲.۲.۱ درست است اگر، و فقط اگر، e یک یال برشی نباشد. □

نمادی برای حذف رأسها یا یالها معرفی کرده‌ایم. اگر G و H گرافهایی همبند باشند، نماد ساده‌ای نیز برای گرافی که مؤلفه‌هایش یکریخت با G و H باشند داریم. این یک حالت خاص از عمل گراف است «اجتماع».

۱۴.۲.۱. تعریف. *اجتماع* گرافهای G و H، که به صورت $G \cup H$ می‌نویسیم، دارای مجموعهٔ رأسهای $V(G) \cup V(H)$ و مجموعهٔ یالها $E(G) \cup E(H)$ است. برای مشخص کردن *اجتماع مجزا* در حالی که $V(G) \cap V(H) = \phi$، می‌نویسیم $G + H$. به‌طور کلیتر، mG گرافی است متشکل از m نسخه دو به دو مجزا از G. **پیوند** G و H، که به‌صورت $G \vee H$ می‌نویسیم، از $G + H$ با افزودن یالهای $\{xy : x \in V(G), y \in V(H)\}$ به‌دست می‌آید.

۱۵.۲.۱. مثال. ***مجموعها و پیوندها.*** اگر G، H گرافهای همبند باشند، آنگاه $G + H$ نشانگر گراف ناهمبندی است که مؤلفه‌هایش G و H هستند. این نمادگذاری هنگامی که رأسهای G و H را نامگذاری نکرده‌ایم مناسبتر است. در تصویر زیر، $G = P_۴$ و $H = K_۳$؛ در سمت چپ، مجموعه‌های رأسها را انتخاب کرده‌ایم که در دو عنصر شریک هستند.



گراف mK_2 از m یال مجزا تشکیل می‌شود. می‌توانیم $K_{m,n}$ را به صورت $K_{m,n}=\overline{K_m+K_n}$ یا به صورت $K_{m,n}=(mK_1)\vee(nK_1)$ بیان کنیم. به‌طور کلیتر، همواره داریم $\overline{G+H}=\overline{G}\vee\overline{H}$. □

تناقض و گرافهای دوبخشی

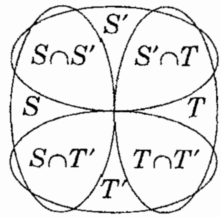
پیشتر اثبات به وسیلهٔ تناقض («اثبات غیرمستقیم») را برای اثبات درستی اصل استقرا در بحث هم‌ارزیها به‌کار برده‌ایم. گزاره *شرطی* «A ایجاب می‌کند B» نادرست است تنها اگر A درست و B نادرست باشد. روش اثباتهای تناقضی « A ایجاب می‌کند B» را با نشان دادن غیرممکن بودن «A درست و B نادرست» است اثبات می‌کند.

۱۶.۲.۱. گزاره. اگر v یک رأس برشی از یک گراف ساده G باشد، آنگاه v یک رأس برشی از $\overline{G}$ نیست.

اثبات. فرض کنیم که v یک رأس برشی از هر دوی G و $\overline{G}$ با مجموعهٔ رأسهای V باشد، و ما به یک تناقض می‌رسیم. چون v یک رأس برشی از G است، یک افراز S، T از $V-\{v\}$ به مجموعه‌های ناتهی وجود دارد به‌طوری که G هیچ یالی با نقاط پایانی در هر دوی S و T ندارد. به‌طور مشابهی، یک افراز S'، T' از $V-\{v\}$ وجود دارد به‌طوری که $\overline{G}$ هیچ یالی با نقاط پایانی در هر دوی S و T ندارد.

این مطلب مستلزم آن است که $xy\notin G$ و $xy\notin\overline{G}$ اگر $x\in S\cap S'$ و $y\in T\cap T'$؛ از این‌رو این مجموعه‌ها نمی‌توانند دارای هر دو رأس باشند. به‌طور مشابهی، $S\cap T'$ و $T\cap S'$ نیز نمی‌توانند دارای هر دو رأس باشند. اگر یکی از

مجموعه‌های $\{S\cap S' , T\cap T'\}$ و همین‌طور یکی از مجموعه‌های $\{S\cap T', T\cap S'\}$ تهی باشند، آنگاه یکی از S، T، S'، T' تهی خواهد بود، که با فرض ما دربارهٔ افرازهای $V-\{v\}$ در تناقض است. از این‌رو v نمی‌تواند یک رأس برشی از هردوی G و $\overline{G}$ باشد. □



همچنین این گزاره را بدون استفاده از تناقض نیز می‌توانستیم ثابت کنیم. اگر v یک رأس برشی از G باشد، آنگاه برای هر $x,y\in V-\{v\}$ می‌توانیم یک x,y-مسیر مشخص به‌طول حداکثر دو بسازیم (تمرین ۱۴).

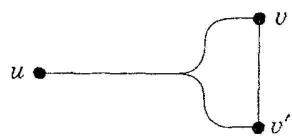
مشخص کردن یک ردهٔ $\mathbf{G}$ به‌وسیلهٔ یک شرط P مسلتزم آن است که ثابت کنیم P هم **لازم** و هم **کافی** برای عضویت در $\mathbf{G}$ است. لزوم شرط بدین معناست که عضویت در $\mathbf{G}$ مستلزم ویژگی P است، یعنی $G\in\mathbf{G}$ ***فقط اگر*** G در P صدق کند. کفایت شرط بدین معناست که صدق کردن در P عضویت در $\mathbf{G}$ را تضمین کند، یعنی $G\in\mathbf{G}$ اگر G در P صدق کند. ممکن است به‌جای «فقط اگر» و «اگر» از «لزوم» و «کفایت» شرط صحبت کنیم (هنگامی که ردهٔ نخست در نظر گرفته می‌شود و شرط دوم ذکر می‌گردد). اینک ردهٔ گرافهای دوبخشی را با اثبات اینکه فقدان دورهای فرد برای عضویت در ردهٔ لازم و کافی است مشخص می‌سازیم.

۱۷.۲.۱. قضیه. یک گراف دوبخشی است اگر، و فقط اگر، هیچ دور فرد نداشته باشد.

اثبات. *لزوم شرط.* فرض کنیم G دوبخشی است. هر گشت در G میان دو ردهٔ رنگ متناوب است، بنابراین هر بازگشت به ردهٔ اولیه (شامل رأس اولیه) پس از گامهایی

با تعداد زوج ظاهر می‌شود. از این‌رو G دارای هیچ دور فردی نیست.

کفایت شرط. فرض کنیم G دارای هیچ دور فرد نیست. با افراز رأسهای هر مؤلفه از G به دو مجموعهٔ مستقل، ثابت می‌کنیم که G دوبخشی است. فرض کنیم u رأسی در یک مؤلفهٔ H از G باشد. اگر G دارای u,v–گشتها با دو تایگی متفاوت برای یک $v \in V(H)$ باشد، آنگاه الحاق آنها یک گشت بستهٔ با طول فرد است. بنابر لم ۱.۲.۷، این گشت شامل یک دور فرد است، که با فرض فقدان دورهای فرد در تناقض است. بدین‌سان می‌توانیم $V(H)$ را به مجموعهٔ X از رأسهای قابل دسترسی از u با گشتهای زوج و مجموعهٔ Y از رأسهای قابل دسترسی از u با گشتهای فرد افرازکنیم. هرکدام از X، Y یک مجموعهٔ مستقل هستند، زیرا یک یال v، v' در X یا Y دوباره یک گشت بستهٔ فرد می‌سازد و با فقدان دورهای فرد در تناقض است. □



اگر G یک گراف دوبخشی باشد، یک افراز از $V(G)$ به دو مجموعهٔ مستقل X، Y یک ***افراز مضاعف*** از G است. اگر G یک گراف دو بخشی ناهمبند باشد، آنگاه بیش از یک راه برای افراز $V(G)$ به دو مجموعهٔ مستقل وجود دارد. گزاره «فرض کنیم G یک گراف دوبخشی با افراز مضاعف X، Y باشد»، یک چنین افرازی را مشخص می‌کند.

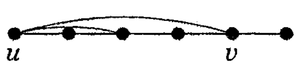
از لحاظ فنی، مجموعه‌های یک *افراز* ناتهی هستند. به این دلیل تعریف گراف k–بخشی افرازهای رأسها را با استفاده از ***حداکثر*** k مجموعهٔ مستقل امکان می‌دهد. به ویژه، K_1 یک گراف دو بخشی است (و به‌ازای هر k، k–بخشی است). اگر گرافهای k–بخشی را به‌صورت مجموعهٔ رأسشان در نظر بگیریم، می‌توان به‌وسیلهٔ k مجموعهٔ مستقل که امکان دارد تهی باشند، همان نتایج را به‌دست آورد.

اکسترمال بودن

فن اکسترمال بودن متضمن انتخاب یک مثال اکسترمال از یک ساختار و استفاده از فقدان یک مثال «اکسترمتر» برای به‌دست آوردن توانایی بیشتر برای اثبات است. این فن برای اثبات نابرابریها بسیار مناسب است. به عنوان مثال، اگر بخواهیم ثابت کنیم که یک گراف دارای مسیری با طول حداقل l است، آنگاه می‌توانیم یک مسیر طولانیتر را در نظر بگیریم، زیرا چنین مسیری در نابرابری صدق می‌کند اگر مسیری در آن صدق کند.

۱.۲.۱۸. لم. اگر G یک گراف ساده متناهی باشد که در آن هر رأس دارای درجهٔ حداقل k است، آنگاه G شامل مسیری به‌طول حداقل k است. اگر $k \geq 2$، آنگاه G نیز شامل دوری به‌طول حداقل $k+1$ می‌باشد.

اثبات. چون $V(G)$ متناهی است، می‌توانیم طولانیترین مسیر P را در G انتخاب کنیم. «طولانیترین» مستلزم آن است که P را نمی‌توان بسط داد، و از این‌رو هر همسایه یک نقطهٔ پایانی u از P نیز به P تعلق دارد، چون u دارای حداقل k همسایه است، P باید حداقل k رأس به جز u داشته باشد (زیرا G ساده است)، بنابراین P دارای طول حداقل k است. اگر $k \geq 2$، آنگاه یالی از u تا دورترین همسایه‌اش v در امتداد P یک دور به‌اندازه کافی طولانی را با u,v–تکه از P کامل می‌کند. □



۱.۲.۱۹. لم. فرض کنیم G یک گراف متناهی با حداقل یک یال باشد. اگر G هیچ دوری نداشته باشد، آنگاه G دارای یک رأس از درجهٔ ۱ است.

اثبات. چون $V(G)$ متناهی است، هر مسیر در G متناهی است. فرض کنیم e یالی در G باشد، و فرض کنیم P مسیر ماکسیمالی شامل e است («ماکسیمال» یعنی P مشمول در هیچ مسیر طولانیتر نیست). چون P را نمی‌توان بسط داد، از این‌رو هر

همسایه از یک نقطهٔ پایانی v از P متعلق به P است. برای اجتناب از ساختن یک دور، v نباید هیچ همسایه‌ای به جز همسایه‌اش در امتداد P داشته باشد. □

لم ۱۹.۲.۱ هم‌ارز است با «هر گراف متناهی با مینیمم درجهٔ رأس حداقل ۲ دارای یک دور است». متناهی بودن لازم است؛ اگر $V(G) = \mathbf{Z}$ و

$$E(G) = \{ij : |i-j| = 1\}$$

آنگاه هر رأس G دارای درجهٔ ۲ است، اما G هیچ دوری ندارد. معدودی از گرافهایی را که دارای مجموعه‌های رأسهای نامتناهی‌اند مانند $\mathbf{Z}$ یا $\mathbf{R}^2$ ذکر خواهیم کرد، اما به‌طور کلی تنها گرافهای متناهی را در این کتاب مورد بحث قرار خواهیم داد.

اکسترمال بودن در بسیاری از روشها به‌کار می‌رود. با در نظر گرفتن یک گراف همبند G و مجموعه‌های مجزای $S, T \in V(G)$، می‌توانیم مسیری از S به T را که تنها نقاط پایانی آن در $S \cup T$ است با انتخاب ***کوتاهترین*** مسیر از S به T به‌دست آوریم (تمرین ۲۶ را ببینید). مؤلفه‌های یک گراف زیرگرافهای همبند ***ماکسیمال*** هستند. می‌توانیم مسیرهای ماکسیمال یا ماکسیمم، رأسهایی با درجهٔ مینیمم یا ماکسیمم، مجموعه‌های مستقل ماکسیمال، نخستین یال در حالی که دو u, v−مسیر واگرا می‌شوند و غیره را انتخاب کنیم. بسیاری از چنین انتخابها مستلزم آن هستند که گراف متناهی باشد.

در لم ۱۸.۲.۱، یک طولانیترین مسیر را انتخاب کردیم، زیرا طول مسیر مورد بحث بود، اما یک مسیر ماکسیمال را نیز می‌توانستیم به‌کار گیریم. صفت ***ماکسیمم*** یعنی «ماکسیمم−اندازهٔ» و ***ماکسیمال*** یعنی «هیچ بزرگتری شامل این نیست». به عنوان مثال، گراف $K_{1,m}$ دارای دو مجموعهٔ مستقل ماکسیمال است. رأس درجهٔ m خود یک مجموعهٔ مستقل ***ماکسیمال*** است، اما اگر $m > 1$ باشد، یک مجموعهٔ مستقل ***ماکسیمم*** نیست. رأسهای درجهٔ ۱ تنها مجموعهٔ مستقل ماکسیمم را می‌سازند. هر مورد ماکسیمم (−اندازهٔ) یک مورد ماکسیمال است، اما عکس آن معمولاً نادرست است. در هر زمینه‌ای که متضمن تحدید و اندازه است واژه‌ها معانی متفاوتی دارند، اما هنگام

توصیف اعداد چنین نیست؛ «ماکسیمم درجهٔ رأس» و «ماکسیمال درجهٔ رأس» دارای معانی یکسانی هستند.

تمرینات

بیشتر مسائل در این کتاب نیاز به اثبات دارند. واژه‌هایی همچون «بسازید»، «نشان دهید»، «به دست آورید»، «تعیین کنید» و غیره، صریحاً بیان می‌کنند که اثبات مورد نیاز است. برای اثبات رد یک مورد با آوردن یک مثال نقض باید نشان داد که آن مثال، یک مثال نقض است.

۱.۲.۱. (−) تعیین کنید که آیا K_4 شامل هر کدام از موارد زیر است، با آوردن یک مثال یا اثبات عدم وجود.
الف) یک گشت که یک گذر نیست.
ب) یک گذر که بستهٔ نیست و یک مسیر نیست.
پ) یک گذر بستهٔ که یک دور نیست.

۲.۲.۱. (−) ثابت یا رد کنید: اگر W گشت بسته‌ای در یک گراف ساده باشد، آنگاه W شامل یک دور است.

۳.۲.۱. با استفاده از استقرای معمولی (نه قوی) ثابت کنید که هر u, v−گشت شامل یک u, v−مسیر است.

۴.۲.۱. (!) ثابت کنید که مجموعهٔ یالهای هر گذر بسته را می‌توان به دورهای دو به دو مجزا−یال افراز کرد.

۵.۲.۱. (!) گزاره‌های زیر را دربارهٔ گرافهای ساده ثابت یا رد کنید.
(توضیح: «متمایز» به معنی «مجزا» نیست.)

الف) اجتماع مجموعه‌های یالهای u,v–گشتهای متمایز باید شامل یک دور باشد.
ب) اجتماع مجموعه‌های یالهای u,v–مسیرهای متمایز باید شامل یک دور باشد.

۶.۲.۱. فرض کنیم یال e به تعداد دفعات فرد در یک گشت بستهٔ W ظاهر می‌گردد. با استفاده از e ثابت کنید که W شامل یک دور است.

۷.۲.۱. (−) فرض کنیم که T گذر ماکسیمالی در یک گراف G باشد، و T یک گذر بسته نباشد. ثابت کیند که نقاط پایانی T دارای درجهٔ فرداند.

۸.۲.۱. (−) فرض کنیم G دارای k مؤلفه و H دارای l مؤلفه است. تعداد مؤلفه‌های $G+H$ و تعداد مؤلفه‌های $G \vee H$ را تعیین کنید.

۹.۲.۱. فرض کنیم G گرافی است که مجموعهٔ رأسهایش مجموعهٔ جایگشتهای $\{۱, \cdots, n\}$ است، در حالی که دو جایگشت $a_۱$، ....، a_n و $b_۱$، ....، b_n مجاوراند اگر آنها با تعویض یک جفت درایه‌های مجاور با هم فرق کنند. ثابت کنید که G همبند است.

۱۰.۲.۱. فرض کنیم G گرافی است که مجموعهٔ رأسهایش مجموعهٔ n–تاییهایی با مختصهای در $\{۱ , ۰\}$ باشد، در حالی که x مجاور با y است اگر x و y در دو جا فرق کنند. تعداد مؤلفه‌های G را تعیین کنید.

۱۱.۲.۱. (!) ثابت کنید که هر گراف با n رأس و k یال دارای حداقل $n-k$ مؤلفهٔ است.

۱۲.۲.۱. (−) فرض کنیم G گرافی با مجموعهٔ رأسهای $\{۲۴ , \cdots ,۱\}$ باشد که در آن i و j مجاوراند اگر، و فقط اگر، بزرگترین عامل مشترک آنها بیش از ۱ باشد. مؤلفه‌ها را بشمارید، و ماکسیمم طول مسیری را که یک زیرگراف القایی است بیابید.

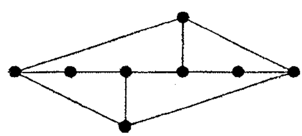
۱۳.۲.۱. (−) فرض کنیم v رأسی از یک گراف ساده همبند G باشد. ثابت کنید که v دارای یک همسایه در هر مؤلفه از $G-v$ است. نتیجه بگیرید که هیچ گرافی دارای

یک رأس برشی از درجهٔ ۱ نیست.

۱.۲.۱۴. فرض کنیم v یک رأس برشی از یک گراف G باشد. بدون استفاده از تناقض، مستقیماً ثابت کنید که $\overline{G} - v$ همبند است.

۱.۲.۱۵. فرض کنیم G گرافی با رأسهای v_1، ...، v_n باشد، و فرض کنیم به‌ازای $1 \leq i \leq n$، $H_i = G - v_i$. ثابت کنید که G همبند است اگر، و فقط اگر، حداقل دو گراف در $\{H_i\}$ همبند باشند.

۱.۲.۱۶. (−) در گراف زیر، یک زیرگراف دوبخشی با ماکسیمم تعداد یالها بیابید. ثابت کنید که هیچ زیرگراف دوبخشی دیگری دارای این تعداد یال نیست.



۱.۲.۱۷. (−) فرض کنیم G گرافی است که مجموعهٔ رأسهایش مجموعهٔ n−تاییهایی با مختصهای در $\{1, 0\}$ باشد، در حالی که x مجاور با y است اگر x و y در یک جا فرق کنند. تعیین کنید آیا G دو بخشی است.

۱.۲.۱۸. (!) فرض کنیم G گرافی است که رأسهایش جایگشتهای $\{1, \cdots, n\}$ هستند، در حالی که دو جایگشت a_1، ...، a_n و b_1، ...، b_n مجاوراند اگر آنها با تعویض یک جفت از درایه‌ها فرق کنند. ثابت کنید که G دوبخشی است. (*راهنمایی:* برای هر جایگشت a، جفتهای i، j را به‌گونه‌ای بشمارید که $i < j$ و $a_i > a_j$.)

۱.۲.۱۹. فرض کنیم G یک گراف ساده با رأسهای v_1، ...، v_n باشد. فرض کنیم A^k نشانگر kامین توان ماتریس مجاورت G تحت ضرب ماتریسی باشد. ثابت کنید که درایه i، j از A^k تعداد v_i, v_j− گشتهای به‌طول k در G است. ثابت کنید که G دوبخشی است اگر، و فقط اگر، برای یک عدد صحیح فرد $r > n$، درایه‌های قطری A^r همگی ۰ باشند.

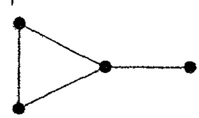
(*یادآوری:* یک گشت فهرست مرتبی از رأسها و یالهاست.)

۱.۲.۲۰. (!) ثابت کنید که G دوبخشی است اگر، و فقط اگر، هر زیرگراف H از G دارای یک مجموعهٔ مستقل متشکل از حداقل نیمی از $V(H)$ باشد.

۱.۲.۲۱. (−) ثابت کنید که یک گراف سودار متناهی شامل یک دور (سودار) است اگر هر رأس، دُم حداقل یک یال باشد. (همین نتیجه برقرار است اگر هر رأس سر حداقل یک یال باشد.)

۱.۲.۲۲. (!) ***گراف فرد.*** گراف O_k گرافی است که رأسهایش زیرمجموعه‌های k−عنصری از $\{1, 2, \cdots, 2k+1\}$ باشند، و دارای دو رأس مجاور است اگر آنها مجموعه‌های مجزا باشند. به‌عنوان مثال، O_2 گراف پترسن است. تعیین کنید که آیا O_k دوبخشی است. ثابت کنید که کوتاهترین دور در O_k دارای طول ۶ است اگر $k \geq 3$.

۱.۲.۲۳. (−) در گراف زیر، همهٔ مسیرهای ماکسیمال، خوشه‌های ماکسیمال، و مجموعه‌های مستقل ماکسیمال را پیدا کنید. همچنین همهٔ مسیرهای ماکسیمم، خوشه‌های ماکسیمم، و مجموعه‌های مستقل ماکسیمم را بیابید.



۱.۲.۲۴. (!) ثابت کنید که یک گراف متناهی که حداقل یک یال داشته باشد، شامل حداقل دو رأس است که رأسهای برشی نباشند.
(*راهنمایی:* از اکسترمال بودن استفاده کنید.)

۱.۲.۲۵. (+) فرض کنیم G دو رأس از درجهٔ ۱ با یک همسایه مشترک ندارد. ثابت کنید که G دارای دو رأس مجاور است که حذفشان G را تفکیک نمی‌کند. (*راهنمایی:* ثابت کنید که دو رأس آخر از یک طولانیترین مسیر دارای این ویژگی است.) (لُواس[1]

1) Lovász

[۱۹۷۹، صفحه ۲۶۹])

۲۶.۲.۱. (!) فرض کنیم که P و Q دو مسیر با طول ماکسیمم در یک گراف همبند G باشند. ثابت کنید که P و Q یک رأس مشترک دارند.

۲۷.۲.۱. فرض کنیم G یک گراف ساده همبند است که یک زیرگراف القایی ۴–رأسی ندارد که یک مسیر یا یک دور باشد. ثابت کنید که G رأسی مجاور با هر رأس دیگر دارد. (وَلک[1]) (*راهنمایی:* رأسی از درجهٔ ماکسیمم را در نظر بگیرید.)

۲۸.۲.۱. **کمر** G طول کوتاهترین دور در G است، در حالی که کمر یک گراف بیدور نامتناهی است. ثابت کنید که

الف) یک گراف k–منتظم با کمر چهار دارای حداقل $2k$ رأس است، و دقیقاً یک گراف k–منتظم نانشاندار با کمر چهار و با $2k$ رأس وجود دارد.

ب) یک گراف k–منتظم با کمر پنج دارای حداقل $k^2 + 1$ رأس است، و چنین گرافی با $k^2 + 1$ رأس وجود دارد اگر k برابر ۲ یا ۳ باشد. (گراف یکتاست، اما نیازی به اثبات این مطلب نیست.)

۱-۳ درجه‌های رأسها و شمارش

پارامتر یک گراف تابعی با مقدار حقیقی روی گرافهاست. پارامترهای گراف درجه‌های رأسها هستند که مانند تعداد رأسها و تعداد یالها، بنیادی است. تعریف را تکرار می‌کنیم.

۱.۳.۱. تعریف. **درجهٔ** یک رأس v در یک گراف G، که به‌صورت $d_G(v)$ یا $d(v)$ می‌نویسیم، عبارت است از تعداد یالهای بیطوقه‌ای که شامل v به اضافه دو برابر تعداد طوقه‌های شامل v است، درجهٔ ماکسیمم $\Delta(G)$؛ درجهٔ مینیمم $\delta(G)$ است. یک گراف G ***منتظم*** است اگر $\Delta(G) = \delta(G)$؛ و k–***منتظم*** است اگر

1) Wolk

$\Delta(G) = \delta(G) = k$. رأسی از درجهٔ k، k-*ظرفیتی* است. **همسایگی** v، که به صورت $N_G(v)$ یا $N(v)$ می‌نویسیم، عبارت است از $\{x \in V(G) : x \leftrightarrow v\}$؛ x یک همسایهٔ v است اگر $x \in N(v)$. یک *رأس تنها* دارای درجهٔ ۰ است.

۱.۳.۲. تعریف. **مرتبهٔ** یک گراف G، که به صورت $n(G)$ می‌نویسیم تعداد رأسها در G است. یک **گراف** n-*رأسی*، گرافی با مرتبهٔ n است. $e(G)$ نشانگر تعداد یالها در G است، اگرچه حتی e را به تنهایی نیز برای نمایش یک یال به کار می‌بریم.

مرتبهٔ یک گراف تنها هنگامی دارای معناست که گراف تعداد رأسهایش متناهی باشد. این تعریف و بسیاری گزاره‌های دیگر در این کتاب بحث را تلویحاً به گرافهای متناهی محدود می‌کند. اینک صریحاً قرار داد می‌کنیم: به جز مواردی که مشخص شده باشد، همهٔ گزاره‌ها تنها برای گرافهای متناهی بیان می‌شوند.

شمارش و نگاشتهای دوسویی

یک روش برای اثبات برابری میان دو فرمول این است که نشان دهیم آن دو یک مجموعه را به دو روش مختلف می‌شمارند. از این روش، نخست برای اثبات رابطه‌ای میان درجه‌های رأسها و یالها استفاده می‌کنیم.

۱.۳.۳. قضیه. **(فرمول مجموع-درجه).** اگر G گرافی با درجه‌های رأسهای d_1، ...، d_n باشد، آنگاه $\sum d_i = 2e(G)$.

اثبات. در جمع کردن درجه‌ها هر یال دوبار شمرده می‌شود، زیرا هر یال دو نقطهٔ پایانی دارد و برای درجهٔ هر نقطهٔ پایانی مؤثر است. مجموعه‌ای را که به دو روش می‌شماریم مجموعهٔ جفتهای (v, e) است به‌طوری که $v \in V(G)$، $e \in E(G)$، و $v \in e$؛ اینها دقیقاً ۱ های ماتریس وقوع $M(G)$ هستند که در بند ۱.۱ تعریف شد. برای هر یال دو

تا ۱ در $M(G)$ وجود دارد، بنابراین با شمارش ۱ های $M(G)$ به‌وسیلهٔ ستونها، $2e(G)$ به‌دست می‌آید.

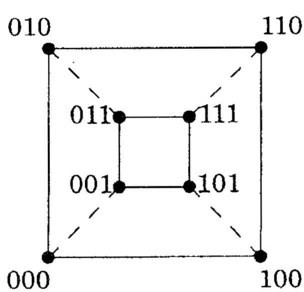
برای رأس v این ۱ ها، $d(v)$ است، بنابراین شمارش ۱ ها به‌وسیلهٔ سطرها، $\sum d(v)$ را به‌دست می‌دهد. □

بنابر فرمول مجموع−درجه، میانگین درجهٔ رأسها برابر است با $2e(G)/n(G)$، و از این‌رو $\delta(G) \leq 2e(G)/n(G) \leq \Delta(G)$. دو فرع دیگر را بیدرنگ فهرست می‌کنیم.

۴.۳.۱. فرع. هر گراف تعداد زوجی از رأسهای با درجهٔ فرد دارد. هیچ گرافی از مرتبهٔ فرد، منتظم با درجهٔ فرد نیست. □

۵.۳.۱. فرع. یک گراف k−منتظم با n رأس دارای $nk/2$ یال است. □

۶.۳.۱. مثال. ***مکعبهای k−بعدی.*** 2^k، k−تایی وجود دارند که در آنها هر وضعیت ۰ یا ۱ است؛ این را مجموعهٔ S می‌نامیم. **مکعب k−بعدی** یا ***ابر مکعب***، گراف Q_k با مجموعهٔ رأسهای S است که در آن دو k−تایی مجاوراند اگر، و فقط اگر، آنها دقیقاً در یک وضعیت فرق کنند. در زیر Q_3 را نشان می‌دهیم. ابرمکعب، ساختاری برای کار کامپیوترهای موازی است؛ واحدهای پردازش اگر متناظر با رأسهای مجاور در Q_k باشند می‌توانند مستقیماً با هم ارتباط برقرار سازند.



وزن یک ۱ ,۰−بردار تعداد ۱ هاست. هر یال از Q_k متشکل از یک بردار به وزن زوج و یک بردار به وزن فرد است. از این‌رو بردارهای با وزن زوج مجموعه‌ای مستقل

می‌سازند، و بردارهای با وزن فرد نیز به همین ترتیب، و Q_k دوبخشی است. چون هر بردار در k مکان می‌تواند تغییر کند، Q_k، $k-$منتظم است؛ بنابر فرع ۵.۳.۱، Q_k دارای $k2^{k-1}$ یال است.

حذف یالهای خط‌چین شده در تصویر منجر به $2Q_2$ می‌گردد. این مطلب یک توصیف القایی از Q_k را ارائه می‌کند. پایهٔ گراف ۱−رأسی Q_0 است (بردار دودویی یکتا به طول ۰). با در نظر گرفتن Q_{k-1}، Q_k را در دو گام می‌سازیم:

۱) دو نسخه مجزا از Q_{k-1} را در نظر می‌گیریم؛ آنها را Q^0 و Q^1 می‌نامیم.

۲) به‌ازای هر $v \in V(Q_{k-1})$، به انتهای بردار، یک ۰ برای v در Q^0 و به انتهای بردار، یک ۱ برای v در Q^1 می‌افزاییم، و یک یال متشکل از این دو رأس را اضافه می‌کنیم.
□

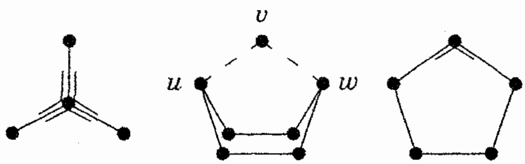
فرمول مجموع−درجه را با یک بحث شمارشی ثابت کردیم؛ پس از شمردن یالهای شامل هر رأس، آن را بر تعداد دفعاتی که هر یال شمرده شده بود تقسیم کردیم. این فن برای زیرگرافهای بزرگتر عمومیت می‌یابد. فرض کنیم می‌خواهیم زیرگرافهایی از G را که با H یکریخت هستند («نسخه‌هایی» از H در G) بشماریم. فرض کنیم J گرافی مشمول در H است. اگر نسخه‌هایی از H که شامل هر نسخه از J است بشماریم، آنگاه نسخه‌هایی از H را نیز به همان تعداد دفعات شمرده‌ایم، زیرا هر نسخه از H شامل همان تعداد نسخه از J است. فرمول مجموع - درجهٔ این مطلب را برای حالتی که $H = K_2$ است، با استفاده از $J = K_1$ انجام می‌دهد.

۷.۳.۱. گزاره. فرض کنیم J، H، G گرافهایی با قید $J \subseteq H \subseteq G$ باشند، و فرض کنیم H شامل l نسخه از J است. اگر G شامل m نسخه از J باشد، و نسخه iاُم از J در k_i نسخه از H در G ظاهر شود، آنگاه G شامل $\sum_{i=1}^{m} k_i/l$ نسخه از H می‌باشد.

اثبات: مجموع $\sum_{i=1}^{m} k_i$ هر نسخه از H را l بار می‌شمارد. □

۸.۳.۱. مثال. *گراف پترسن دارای دوازده ۵–دور است.* فرض کنیم G گراف پترسن باشد، $H = C_5$، و $J = P_3$. هر $v \in V(G)$ دارای درجهٔ ۳ است، بنابراین $3 = \binom{3}{2}$ نسخه از J با v به‌عنوان رأس مرکزی وجود دارند. هر نسخه از J دارای یک رأس مرکزی است، بنابراین $30 = 3 \cdot 10$ نسخه از J در G وجود دارند.

هر نسخه از J با رأسهای u، v، w را می‌توان در w به دو روش برای به‌دست آوردن P_4 بسط داد. هر P_4 در یک ۵–دور ظاهر می‌شود، زیرا رأسهای نامجاور دقیقاً یک همسایهٔ مشترک در G دارند. از این‌رو هر نسخه از J در دو نسخه از $H = C_5$ ظاهر می‌شود. چون هر ۵–دور شامل پنج نسخه از J است، گزاره ۷.۳.۱، دقیقاً $12 = (2 \cdot 30)/5$، ۵–دور را در G به‌دست می‌دهد. □

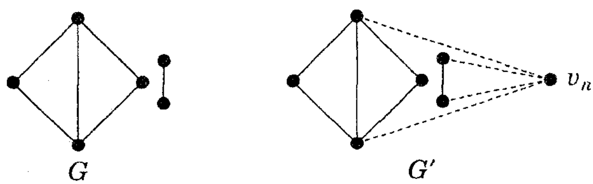


یک مجموعه را با یافتن یک تناظر یک به یک (یک **نگاشت دوسویی**) میان آن و یک مجموعه با اندازهٔ معلوم می‌شماریم. به عنوان مثال، برای رأسهای داده شده v_1، ...، v_n هر جفت می‌تواند یک یال باشد یا نباشد. این امر یک نگاشت دوسویی میان گرافهای ساده با مجموعهٔ رأسهای v_1، ...، v_n و زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $\binom{n}{2}$-عنصری برقرار می‌کند. از این‌رو $2^{\binom{n}{2}}$ گراف ساده با این مجموعهٔ رأسها وجود دارند. نتیجه بعدی از این پنداره و دو تایگی درجه‌های رأسها استفاده می‌کند.

۹.۳.۱. قضیه. برای $n \geq 1$، $2^{\binom{n-1}{2}}$ گراف ساده با مجموعهٔ رأسهای $\{v_1, \cdots, v_n\}$ وجود دارند به‌طوری که هر رأس دارای درجهٔ زوج است.

اثبات. چون $2^{\binom{n-1}{2}}$ تعداد گرافهای ساده با مجموعهٔ رأسهای $\{v_1, \cdots, v_{n-1}\}$ است، یک نگاشت دوسویی برای این مجموعه از گرافها برقرار می‌کنیم. با در نظر گرفتن یک

گراف ساده G با رأسهای v_1، ....، v_{n-1}، یک گراف جدید G' را با افزودن یک رأس v_n و مجاورکردن آن با هر رأس دارای درجهٔ فرد در G می‌سازیم، همان‌طوری که در تصویر زیر نشان داده شده است. رأسهای با درجهٔ فرد در G دارای درجهٔ زوج در G' می‌باشند. همچنین، خود v_n دارای درجهٔ زوج است، زیرا تعداد رأسهای دارای درجهٔ فرد در G زوج است. برعکس، حذف رأس v_n از هر گراف روی $\{v_1, \cdots, v_n\}$ با درجه‌های زوج گرافی روی $\{v_1, \cdots, v_{n-1}\}$ می‌سازد، و این عکس شیوهٔ نخست است. اینک یک تناظر یک به یک میان مجموعه‌ها برقرارکرده‌ایم؛ از این‌رو آنها دارای اندازهٔ یکسان‌اند. □



اصل لانهٔ کبوتر

اصل لانهٔ کبوتر مفهوم ساده‌ای است که به اثباتهای ظریفی منجر می‌گردد، و ممکن است آن را به مسأله‌ای تحویل و تحلیل کرد. این اصل اساساً می‌گوید که هر مجموعه از اعداد دارای عددی حداقل به اندازهٔ میانگین است.

۱۰.۳.۱.لم. (اصل لانهٔ کبوتر). اگر مجموعه‌ای متشکل از بیش از kn شئی به n ردهٔ افراز شود، آنگاه رده‌ای بیش از k شئ دریافت می‌کند.

اثبات. عکس نقیض می‌گوید که اگر هر ردهٔ حداکثر k شئ دریافت کند، آنگاه مجموعاً حداکثر kn شئ توزیع شده‌اند. □

۱۱.۳.۱. گزاره. هرگراف ساده با حداقل دو رأس، دارای دو رأس با درجهٔ برابر است.

اثبات. دریک گراف ساده با n رأس، درجهٔ هر رأس متعلق به مجموعهٔ $\{0, \cdots, n-1\}$ است. اگر کمتر از n مقدار وجود داشته باشد، آنگاه اصل لانهٔ کبوتر ادعا را ثابت می‌کند.

در غیر این‌صورت، هر دوی $n-۱$ و ۰ درجه‌های رأسها خواهند بود. این غیرممکن است؛ اگر یک رأس مجاور با همه رأسهای دیگر باشد، آنگاه هیچ رأس تنهایی نمی‌تواند وجود داشته باشد. □

۱۲.۳.۱. گزاره. اگر G یک گراف n-رأسی ساده با $\delta(G) \geq \frac{(n-۱)}{۲}$ باشد، آنگاه G همبند است.

اثبات. $u, v \in V(G)$ را انتخاب می‌کنیم. اگر $u \not\leftrightarrow v$، آنگاه حداقل $n-۱$ یال، $\{u,v\}$ را به رأسهای باقیمانده وصل می‌کند، زیرا $\delta(G) \geq \frac{(n-۱)}{۲}$. $n-۲$ رأس دیگر وجود دارند، بنابر اصل لانهٔ کبوتر نتیجه می‌شود که یکی از آنها دو تا از این یالها را دریافت می‌کند. چون G ساده است، این رأس یک همسایهٔ مشترک u و v است. ثابت کرده‌ایم که هر جفت از رأسها مجاوراند یا یک همسایهٔ مشترک دارند، بنابراین G همبند است.

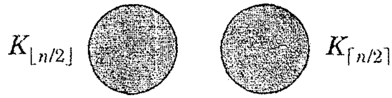
به روش دیگر، می‌توانیم از اعمال روی مجموعه‌ها برای اثبات اینکه رأسهای نامجاور یک همسایهٔ مشترک دارند استفاده کنیم. اگر $u \not\leftrightarrow v$، آنگاه $|N(u) \cup N(v)| \leq n-۲$. با محاسبه داریم

$$\begin{aligned} |N(u) \cap N(v)| &= |N(u)| + |N(v)| - |N(u) \cup N(v)| \\ &\geq \frac{n-۱}{۲} + \frac{n-۱}{۲} - (n-۲) = ۱ \end{aligned}$$ □

۱۳.۳.۱. مثال. *بهترین نتیجه ممکن.* گراف $K_{\lfloor n/۲ \rfloor} + K_{\lceil n/۲ \rceil}$ دارای دو مؤلفه است[۱]. چون این گراف دارای درجهٔ مینیمم $\lfloor n/۲ \rfloor - ۱$ است، و با وجود این ناهمبند است، و نابرابری در گزاره ۱۲.۳.۱ نمی‌تواند قابل استفاده باشد. □

---

۱) $\lfloor x \rfloor$ و $\lceil x \rceil$ را به ترتیب برای نمایش ***مقدارگرد شدهٔ نقصانی*** و ***مقدارگرد شدهٔ اضافی*** x به‌کار می‌بریم؛ $\lfloor x \rfloor$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از یا برابر با x است، و $\lceil x \rceil$ کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از یا برابر با x است.



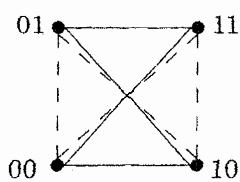
نتیجه‌ای **بهترین وضع ممکن** است اگر با تضعیف یکی از شرایط نتیجه دیگر برقرار نباشد. همچنین می‌توانیم نتایج بالا را به صورت «مقدار مینیمم $\delta(G)$ که یک گراف ساده n−رأسی G را همبند می‌کند، برابر است با $\lfloor n/۲ \rfloor$» یا «مقدار ماکسیمم $\delta(G)$ که گراف ساده n−رأسی را ناهمبند می‌کند، برابر است با $\lfloor n/۲ \rfloor - ۱$ » بیان کنیم. یک **مسأله اکسترمال**، مقدار اکسترم یک پارامتر روی رده‌ای از اشیاء را طلب می‌کند. برای اثبات اینکه $\max_{x\in S} f(x) = \beta$ لازم است نشان دهیم که ۱) به‌ازای هر $x \in S$، $f(x) \le \beta$، و ۲) به‌ازای یک $x \in S$، $f(x) = \beta$. اثبات کران بالا باید برای هر $x \in S$ صادق باشد. تحقق‌پذیری کران را می‌توانیم با ساختن یک مثال و اثبات اینکه دارای ویژگیهای مطلوب است ثابت کنیم.

۱.۳.۱۴. مثال. ***پوشش خوشه‌ها با زیرگرافهای دوبخشی.*** یک سیستم حمل و نقل هوایی را با k خط هوایی و n شهر در نظر می‌گیریم. فرض کنیم که ۱) سرویس مستقیم میان دو شهر به معنی سرویس مستقیم رفت و برگشت است، و ۲) هر جفت از شهرها دارای سرویس مستقیم با حداقل یک خط هوایی است. همچنین فرض کنیم که هیچ خط هوایی نمی‌تواند دوری برای تعداد فردی از شهرها برنامه‌ریزی کند. به‌عنوان تابعی از k، ماکسیمم تعداد شهرها در سیستم چیست؟

پاسخ ۲^k است. به زبان نظریهٔ گراف، مسأله طلب می‌کند که بزرگترین مقدار n به‌طوری که K_n را بتوان به عنوان اجتماع k گراف دوبخشی بیان کرد کدام است، یکی برای هر خط هوایی. فرض کنیم K_n اجتماع گرافهای دوبخشی $G_۱$، ...، G_k است، و با توجه به اینکه X_i، Y_i افراز مضاعف از G_i می‌باشند. می‌توانیم فرض کنیم که $X_i \cup Y_i = V(K_n)$، زیرا افرودن یک رأس تنها دور فردی را مطرح نمی‌کند. برای هر رأس v، یک k−تایی دودویی a را با قرار دادن $a_i = ۰$، اگر $v \in X_i$ و $a_i = ۱$

اگر $v \in Y_i$ تعریف می‌کنیم. اگر بیش از ۲^k رأس وجود داشته باشد، آنگاه بنابر اصل لانهٔ کبوتر جفتی دارای همان قدر k-تایی است. چون این دو k-تایی در هر مختص برابراند، این رأسها به همان مجموعهٔ بخشی در هر زیرگراف دوبخشی تعلق دارد. از این‌رو یال میان آنها به هیچ یک از زیرگرافهای دوبخشی تعلق ندارد، که با فرض $K_n = \cup G_i$ در تناقض است.

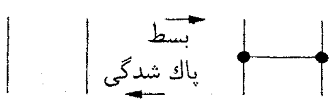
ثابت کرده‌ایم که $K_n = \cup G_i$ مستلزم آن است که $n \leq ۲^k$. اگر $n = ۲^k$، آنگاه می‌توانیم K_n را به عنوان چنین اجتماعی بیان کنیم. k-تاییهای دودویی متمایزی را به n رأس نسبت می‌دهیم و فرض کنیم $E(G_i)$ متشکل از همهٔ یالهای میان رأسهایی است که مختص iاُم‌شان ۰ و رأسهایی که مختص iاُم‌شان ۱ می‌باشد. این امر k زیرگراف دوبخشی می‌سازد. چون k-تاییهای متمایز در یک مختص با هم فرق می‌کنند، هر یال متعلق به یک G_i است، و ما G_1، ... ، G_k را طوری ساخته‌ایم که $K_n = \cup G_i$ (این مطلب برای $k = ۲$ در زیر نشان داده شده است). از این‌رو کران بالای ۲^k تحقق‌پذیر است. □

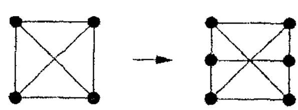


کران بالا را در مثال ۱۴.۳.۱ نمی‌توانیم با در نظر گرفتن ساختار رضایت بخشی با ۲^k رأس («بدترین حالت») ثابت کنیم، و نشان دهیم که هیچ رأس دیگری نمی‌تواند افزوده شود. این امر همهٔ راههایی راکه یک خوشه با $۲^k + ۱$ رأس می‌سازد مد نظر قرار نمی‌دهد؛ تنها آنهایی را که شامل ساختار خاصی از ۲^k رأس است در نظر می‌گیرد. برای استفاده از این رهیافت لازم است که ثابت کنیم هر توصیف از $K_{۲^k}$ به عنوان اجتماعی از k زیر گراف دوبخشی دارای صورتی است که ما ارائه کرده‌ایم.

دام مشابهی در اثباتهای استقرایی ظاهر می‌شود. اگر، در گام استقرا، یک شیئ را با مقدار جدیدی از پارامتر از شیئ کوچکتری بسازیم (در حالی که فرض استقراء برقرار باشد)، آنگاه باید ثابت کنیم که همهٔ اشیاء با اندازهٔ جدید مد نظر قرار گرفته‌اند.

۱۵.۳.۱. مثال. *دام استقرا.* مثالی را که در آن این خطا موجب نتیجه‌گیری ***نادرست*** می‌شود بررسی می‌کنیم. بنابر فرمول مجموع–درجه، هر گراف منتظم با درجهٔ فرد دارای مرتبهٔ زوج است. کوچکترین گراف ساده ۳–منتظم، $K_۴$، همبند است و دارای هیچ یال برشی نیست. فرض کنیم می‌خواهیم ثابت کنیم که هر گراف همبند ساده ۳–منتظم هیچ یال برشی ندارد. با در نظر گرفتن یک گراف ۳–منتظم ساده G با $۲k$ رأس، می‌توانیم یک گراف ۳–منتظم ساده G' را با $۲(k+۱)$ رأس (اندازهٔ بزرگتر بعدی) به‌وسیلهٔ «بسط» به‌دست آوریم: دو یال از G را در نظر می‌گیریم، آنها را با مسیرهایی به طول ۲ در میان رأسهای جدید جایگزین می‌کنیم، و یالی را که دو رأس جدید را به هم متصل می‌کند می‌افزاییم. به عنوان مثال، $K_{۳,۳}$ از $K_۴$ با بسط روی دو یال مجزا ظاهر می‌شود؛ بسط روی دو یال از $K_۴$ با یک نقطهٔ پایانی مشترک، گراف ساده ۶–رأسی ۳–منتظم دیگری را به‌دست می‌دهد.

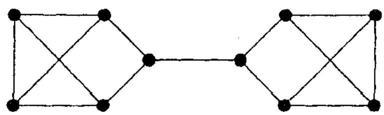




اگر G همبند باشد، آنگاه گراف G' نیز که از بسط به‌دست آمده است همبند خواهد بود: مسیری میان رأسهای پیشین که یالی از آنها می‌گذشت، اکنون با زیرتقسیم صرفاً طولانیتر شده است، و مسیری در G' را با رأسی جدید به عنوان نقطهٔ پایانی مطلوب می‌توان از مسیری در G با همسایه‌اش به‌دست آورد. همچنین، اگر G همبند باشد و دارای هیچ یال برشی نباشد، آنگاه هر یال از G در یک دور قرار می‌گیرد (فرع ۱۲.۲.۱). این مطلب در مورد G' نیز درست است، حتی برای یالهایی که از زیرتقسیم ساخته شده‌اند. یال شامل رأسهای جدید نیز در یک دور با استفاده از مسیری در G میان یالهای زیر تقسیم

شده قرار می‌گیرد. ثابت کرده‌ایم که اگر G همبند باشد و دارای هیچ یال برشی نباشد، آنگاه G' نیز همبند است و دارای هیچ یال برشی نیست.

ممکن است تصور کنیم که با استقرا روی k ثابت کرده‌ایم که هر گراف همبند ساده ۳–منتظم با $2k$ رأس دارای هیچ یال برشی نیست، اما گراف زیر مثال نقض است. دلیل بی‌اعتباری اثبات آن است که نمی‌توانیم هر گراف همبند ساده ۳–منتظم را با بسط از K_4 بسازیم. در بند ۳.۳ ثابت خواهیم کرد که هر گراف ساده ۳–منتظم با $2k$ رأس و بدون یالهای برشی دارای k یال دو به دو مجزاست، اما حتی این را نمی‌توانیم با استفاده از بسط اثبات کنیم، زیرا بسط همهٔ گرافهای همبند ۳–منتظم که یالهای برشی نداشته باشند، ایجاد نمی‌کند (تمرین ۳۱). □



بیشتر اثباتهای استقرایی در این کتاب به روش زیر از دام استقرا اجتناب می‌کنند. در گام استقرا برای اثبات $P(n)$، با نمونهٔ دلخواه G که دارای مقدار جدید (بزرگتر) n برای پارامتر استقرا است آغاز می‌کنیم. از این یک نمونهٔ کوچکتر G' را که در ***فرض استقرای P صدق می‌کند*** به دست می‌آوریم. بنابراین فرض استقرا برای G' نیز صادق است؛ از این‌رو نتیجه‌گیری از P برای G' نیز برقرار است. از این مطلب برای به‌دست آوردن نتیجه‌ای از P برای G استفاده می‌کنیم. تحقیق اینکه نمونهٔ کوچکتر در فرض P صدق می‌کند، همان نقشی را ایفا می‌کند که همهٔ نمونه‌های بزرگتر را هنگام نوشتن اثبات با آغاز کردن از شیء کوچکتر بررسی کرده‌ایم.

قضیهٔ توران

در سیاست و جنگ، به ندرت دو دشمن یک دشمن مشترک دارند؛ معمولاً دو دشمن از سه دشمن بر علیه سومی متحد می‌شوند. با در نظر گرفتن n دسته‌بندی، چند جفت از

دشمنها می‌توانند وجود داشته باشند اگر هیچ دو دشمنی، دشمن مشترک نداشته باشند؟ به زبان گرافها، به دنبال تعداد ماکسیمم یالها در یک گراف n-رأسی ساده هستیم که هیچ مثلثی نداشته باشد ($K_۳$). گرافهای دوبخشی هیچ مثلثی ندارند، و اما گرافها نادوبخشی مانند دورهای فرد طولانی و گراف پترسن نیز هیچ مثلثی ندارند. با استفاده از اکسترمال بودن (انتخاب رأسی از درجهٔ ماکسیمم)، ثابت خواهیم کرد که جواب همواره یک گراف دوبخشی کامل است. به عنوان مثال، $K_{۲,۳}$ یالهای بیشتری از $C_۵$ دارد.

۱۶.۳.۱. تعریف. یک گراف G، آزاد-H است اگر H یک زیرگراف القایی از G نباشد.

۱۷.۳.۱. مثال. ***باز هم دام استقرا.*** ممکن است سعی کنیم به وسیلهٔ استقرا ثابت کنیم که $K_{\lfloor n/۲\rfloor,\lceil n/۲\rceil}$ بزرگترین گراف ساده آزاد-مثلث با n رأس است.

در گام استقرا، ممکن است بگوییم «فرض کنیم که ادعا برای $n = k$ درست است، به‌طوری که $K_{\lfloor k/۲\rfloor,\lceil k/۲\rceil}$ بزرگترین گراف آزاد-مثلث با k رأس است. هنگامی که یک رأس به $K_{\lfloor k/۲\rfloor,\lceil k/۲\rceil}$ می‌افزاییم تا یک گراف آزاد-مثلث با $k + ۱$ رأس به‌دست آوریم، نمی‌توانیم آن را مجاور با رأسهایی از هر دو مجموعهٔ بخشی قرار دهیم. از این‌رو تعداد ماکسیمم یالها را با افزودن رأس جدید به مجموعهٔ بخشی با اندازهٔ $\lceil k/۲\rceil$ و اتصال آن به همهٔ رأسها در ردهٔ دیگر افزایش می‌دهیم. این امر ادعا را برای هنگامی که $n = k + ۱$ است ثابت می‌کند.

این‌گونه به دام استقرا می‌افتیم! ما همهٔ گرافهای آزاد-مثلث را که دارای $k + ۱$ رأس هستند در نظر نگرفتیم، بلکه تنها آنهایی را که شامل گراف اکسترمال $K_{\lfloor k/۲\rfloor,\lceil k/۲\rceil}$ روی k رأس به عنوان یک زیرگراف القایی است در نظر گرفتیم. اگرچه این درست است که هر بزرگترین نمونه‌ای با $k + ۱$ رأس شامل $K_{\lfloor k/۲\rfloor,\lceil k/۲\rceil}$ به عنوان یک زیرگراف القایی است، نمی‌توانیم این مطلب را پیش از اثبات آن به‌کار بریم. در اینجا امکان دارد که بزرگترین نمونه با $k + ۱$ رأس را به‌وسیلهٔ افزودن یک رأس جدید با درجهٔ بالا به یک نمونه

ناماکسیمال با k رأس که ظاهر می‌شود حذف نکرده باشیم. (تمرین ۳۶ اثبات درستی را با استقرا ارائه می‌دهد.) □

۱.۳.۱۸. گزاره. (مانتل[1] [۱۹۰۷]) تعداد ماکسیمم یالها در یک گراف ساده آزاد-مثلث n-رأسی برابر است با $\lfloor n^۲/۴ \rfloor$.

اثبات. فرض کنیم G یک گراف ساده آزاد-مثلث n-رأسی باشد. فرض کنیم $k = \Delta(G)$، و فرض کنیم x رأسی از درجهٔ ماکسیمم در G باشد. چون G هیچ مثلثی ندارد، بنابراین یالهایی میان همسایه‌های x موجود نیستند. از این‌رو مجموع درجه‌های x و ناهمسایه‌هایش حداقل یک نقطه پایانی از هر یال را می‌شمارد، و مجموع کل حداقل $e(G)$ است. رأسهای روی $n-k$ را جمع می‌کنیم، هر کدام دارای حداکثر درجهٔ k است؛ بنابراین $e(G) \le (n-k)k$.

ملاحظه می‌کنیم که $(n-k)k$ یالهای در $K_{n-k,k}$ را می‌شمارد. اگر مجموعه‌های بخشی اختلاف اندازه‌ای بیش از یک داشته باشند، آنگاه با حرکت دادن یک رأس از یک مجموعهٔ بزرگتر به مجموعهٔ کوچکتر یالهای بیشتری از آنچه از دست می‌رود به‌دست می‌آید. از این‌رو کران $(n-k)k$ برای عدد صحیح k هنگامی ماکسیمم می‌شود که $k = \lfloor n/۲ \rfloor$، و نتیجه می‌گیریم که $e(G) \le \lfloor n^۲/۴ \rfloor$. برای اثبات اینکه کران بهترین وضع ممکن است، یک گراف آزاد-مثلث را با $\lfloor n^۲/۴ \rfloor$ یال نشان می‌دهیم: این گراف عبارت است از $K_{\lfloor n/۲ \rfloor, \lceil n/۲ \rceil}$. □

این رهیافت برای حل مسأله کلی یافتن بزرگترین گراف n-رأسی که هیچ زیرگراف کامل با $r+۱$ رأس را شامل نباشد توسعه می‌یابد. گرافهای اکسترمال به یک خانواده خاص تعلق دارند.

۱.۳.۱۹. تعریف. یک *گراف چند بخشی کامل*، گرافی است که رأسهایش را بتوان به مجموعه‌هایی افراز کرد به‌طوری که uv یک یال باشد اگر، و فقط اگر، u و v به

---

1) Mantel

مجموعه‌های متفاوت متعلق باشند. به‌طور هم‌ارز، G یک گراف چندبخشی کامل است اگر، و فقط اگر، هر مؤلفهٔ از $\overline{G}$ یک گراف کامل باشد. هنگامی که $k \geq ۲$، برای گراف k–بخشی کامل با مجموعه‌های بخشی به اندازه‌های $n_۱$، ...، و n_k مکمل $K_{n_۱} + \cdots + K_{n_k}$ می‌نویسیم $K_{n_۱,\ldots,n_k}$.

اگرچه K_n گرافی چندبخشی کامل با یک رأس در هر ردهٔ رنگ است، از نماد K_n به‌جای $K_{۱,\ldots,۱}$ استفاده می‌کنیم. تنها گرافهای ۱-بخشی مجموعه‌های مستقل هستند؛ از این‌رو نمادگذاری برای گرافهای k–بخشی کامل تنها برای $k \geq ۲$ به کار می‌رود. اگر G یک گراف چندبخشی کامل باشد و مجموعهٔ بخشی شامل v با اندازهٔ t باشد، آنگاه $d_G(v) = n - t$. این امر شمردن یالها را آسان می‌کند (تمرین ۳۹).

۲۰.۳.۱. مثال. ***گراف توران.*** **گراف توران** $T_{n,r}$ گراف r–بخشی کامل با n رأس است که دارای b بخش به اندازهٔ $a + ۱$ و $r - b$ بخش به‌اندازهٔ a است، که در آن $a = \lfloor n/r \rfloor$ و $b = n - ra$.

توران ثابت کرد که $T_{n,r}$ بزرگترین گراف n–رأسی ساده یکتاست که هیچ $r + ۱$–خوشه ندارد. هیچ گراف r–بخشی دارای یک $r + ۱$–خوشه نیست، زیرا هر مجموعهٔ بخشی حداکثر یک رأس به یک خوشه می‌دهد. □

۲۱.۳.۱. قضیهٔ. (توران [۱۹۴۱]) در میان گرافهای ساده n–رأسی بدون هیچ $r + ۱$–خوشه، $T_{n,r}$ دارای ماکسیمم تعداد یالهاست.

اثبات. نخست ثابت می‌کنیم که $T_{n,r}$ در میان گرافهای r–بخشی دارای بیشترین یالهاست. اگر H یک گراف r–بخشی کامل باشد که بزرگترین و کوچکترین مجموعه‌های بخشی آن دارای اختلاف اندازهٔ بیش از یک داشته باشند، آنگاه می‌توانیم یالها را با حرکت دادن یک رأس v از بزرگترین ردهٔ به کوچکترین رده به‌دست آوریم. یالهایی که شامل v نیستند به همان صورت قبلی می‌باشند، اما اکنون v همسایه‌های بیشتری دارد، در حالی

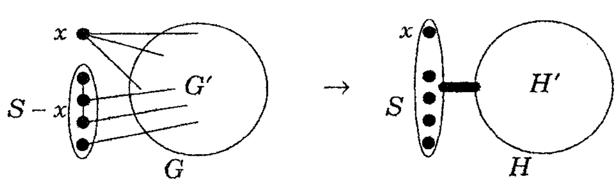
که همسایه‌های در ردهٔ قبلی را به‌دست آورده و همسایه‌های در ردهٔ جدیدش را از دست داده است. از این‌رو تعداد یال را با برابر ساختن اندازه‌ها در $T_{n,r}$ ماکسیمم می‌کنیم.

حال باقیمانده است که ثابت کنیم هنگامی که G دارای هیچ $r+1$–خوشه نیست، یک گراف r–بخشی H وجود دارد به‌طوری که $V(H)=V(G)$ و $e(H)\geq e(G)$. از استقرا روی r استفاده می‌کنیم. هنگامی که $r=1$، گرافهای G و H دارای یال نیستند. برای گام استقرا، فرض کنیم $r>1$. فرض کنیم G یک گراف n–رأسی بدون هیچ $r+1$–خوشه است، و فرض کنیم $x\in V(G)$ رأسی از درجهٔ $k=\Delta(G)$ باشد. فرض کنیم G' زیرگرافی از G باشد که به‌وسیلهٔ همسایه‌های x القا شده است. چون x مجاور با هر رأس در G' است، گراف G' هیچ r–خوشه ندارد. فرض استقرا یک گراف $r-1$–بخشی H' را با مجموعهٔ رأس $N(x)$ به‌دست می‌دهد به‌طوری که $e(H')\geq e(G')$.

فرض کنیم H گراف تشکیل شده از H' باشد که به‌وسیلهٔ وصل کردن همهٔ $N(x)$ به همهٔ $S=V(G)-N(x)$ به‌دست می‌آید. چون S یک مجموعهٔ مستقل است، H، r–بخشی است. اکنون ادعا می‌کنیم که $e(H)\geq e(G)$. بنابر ساختار، $e(H)=e(H')+k(n-k)$. همچنین داریم $e(G)\leq e(G')+\sum_{v\in S}d_G(v)$، زیرا مجموع هر یال از G را یک بار برای هر نقطه پایانی آن که بیرون $V(G')$ داشته باشد می‌شمارد. چون $\Delta(G)=k$، به‌ازای هر $v\in S$ داریم $d_G(v)\leq k$، و $|S|=n-k$. از این‌رو

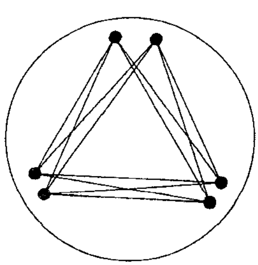
$$e(G)\leq e(G')+(n-k)k\leq e(H')+k(n-k)=e(H)$$

همچنانکه می‌خواستیم. □



تمرینات ۳۸-۴۴ به قضیهٔ توران مربوط می‌شوند، از جمله یکتایی گراف اکسترمال، اثباتهای دیگر، مقدار $(T_{n,r})$، و کاربردها. قضیهٔ توران برای مسائل اکسترمال هنگامی که شرایطی مانع خوشه‌هایی از یک مرتبهٔ داده شده می‌شوند به‌کار می‌رود؛ اینک یک کاربرد هندسی ارائه شده در کتاب باندی-مورتی را شرح می‌دهیم. [۱۹۷۶، صفحه ۱۱۳-۱۱۵].

۱.۳.۲۲.مثال. *فاصلهٔ جفتهایی از نقاط.* یک شهر دایره‌ای شکل به قطر ۱ را در نظر می‌گیریم. ممکن است که بخواهیم n ماشین پلیس را طوری قرار دهیم که تعداد جفتهایی که بسیار دور از هم هستند ماکسیمم شوند، مجزا از هم به‌وسیلهٔ فاصلهٔ حداقل $d = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$. اگر شش ماشین نقاطی با فاصلهٔ مکانی برابر از هم را روی یک دایره اشغال کنند، آنگاه تنها جفتهایی که فاصلهٔ حداقل d از هم ندارند، جفتهای متوالی دور بیرونی هستند، بنابراین نُه جفت خوب وجود دارند. اگر به‌جای این کار دو ماشین را هریک نزدیک رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ قرار دهیم، آنگاه تنها سه جفت بد خواهند برد و دوازده تا خوب خواهند بود. (این ممکن است بهترین ملاک برای چیدن ماشینهای پلیس نباشد!) به‌طورکلی، اگر $\lceil n/۳\rceil$ یا $\lfloor n/۳\rfloor$ ماشین را نزدیک هر رأس این مثلث قرار دهیم، جفتهای خوب متناظر با یالهای گراف توران سه بخشی خواهند بود. حال نشان خواهیم داد که این بهترین ساختار است. □



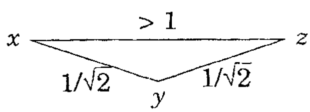
۱.۳.۲۳. قضیه. اگر S مجموعه‌ای از n نقطه در صفحه باشد در حالی‌که هیچ جفتی فاصلهٔ بیش از ۱ نداشته باشند، آنگاه ماکسیمم تعداد جفتهایی از نقاط که فاصلهٔ

بیش از $\frac{1}{\sqrt{2}}$ داشته باشند برابر است با $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$.

اثبات. یک گراف G با مجموعهٔ رأسهای S می‌سازیم که در آن رأسها هنگامی که فاصلهٔ آنها از $\frac{1}{\sqrt{2}}$ بیشتر می‌شود مجاور باشند. بنابر قضیهٔ توران و ساختار بالا، کافی است نشان دهیم که G دارای K_4 نیست.

در میان هر چهار نقطهٔ یک سه‌تایی باید یک زاویه حداقل 90° بسازند: اگر نقاط یک چهارضلعی گوژ تشکیل دهند، آنگاه مجموع زوایا داخلی به 360° می‌رسد، و یکی از آنها حداقل 90° خواهد بود. اگر یک نقطهٔ درون مثلثی باشد که سه نقطهٔ دیگر می‌سازند، آنگاه نیم‌خطهای آن به نقاط دیگر سه زاویهٔ با مجموع 360° می‌سازند، و یکی از آنها حداقل 120° خواهد بود.

فرض کنیم G دارای یک ۴-خوشه متناظر با نقاط w، x، y، z است به‌طوری که $\angle xyz \geq 90^\circ$. چون طولهای xy و yz از $\frac{1}{\sqrt{2}}$ بیشتر می‌شوند، xz طولانیتر از وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اضلاعی به‌طول $\frac{1}{\sqrt{2}}$ خواهد بود. از این‌رو فاصلهٔ میان x و z از ۱ بیشتر می‌شود، که با فرض در تناقض است. □



تمرینات

یک گزاره با یک پارامتر باید برای همهٔ مقادیر پارامتر اثبات شود؛ آن را نمی‌توان با آوردن مثالهایی ثابت کرد.

۱.۳.۱. (−) آیا درست است که یک گراف با دقیقاً دو رأس از درجهٔ فرد باید شامل مسیری از یکی از آن رأسها به دیگری باشد؟ اثبات یا یک مثال نقض به دست دهید.

۲.۳.۱. در کلاسی با نه دانشجو، هر دانشجو برای سه نفر دیگر کارت تبریک می‌فرستد. آیا ممکن است که هر دانشجو کارتهایی از همان سه دانشجویی که برایشان کارت فرستاده

است دریافت کند؟

۱.۳.۳. در یک لیگ با دو دسته که هر یک ۱۳ تیم دارند، تعیین کنید که آیا ممکن است یک فصل را طوری برنامه‌ریزی کرد که هر تیم نه مسابقه با تیمهای همدسته‌اش و چهار مسابقه در برابر تیمهایی از دستهٔ دیگر داشته باشد.

۱.۳.۴. فرض کنیم l، m، n اعداد صحیح نامنفی با قید $l+m=n$ باشند. شرایط لازم و کافی روی l، m، n را طوری بیابید که یک گراف n–رأسی ساده همبند با l رأس از درجهٔ زوج و m رأس از درجهٔ فرد وجود داشته باشد.

۱.۳.۵. فرض کنیم C یک گشت بسته در یک گراف G باشد، و فرض کنیم H زیرگرافی از G متشکل از یالهایی باشد که به تعداد دفعات فردی در C ظاهر می‌شود. ثابت کنید که $d_H(v)$ به‌ازای هر $v \in V(G)$ زوج است.

۱.۳.۶. $(-)$ فرض کنیم H گرافی است که با حذف یک رأس از یک گراف منتظم G تشکیل شده است. روشی را برای به‌دست آوردن G از H شرح دهید (و دلیل موجه‌ای بیاورید).

۱.۳.۷. به‌ازای هر $k \geq ۴$، کوچکترین n را بیابد به‌طوری که

الف) یک گراف k–منتظم ساده با n رأس وجود داشته باشد.

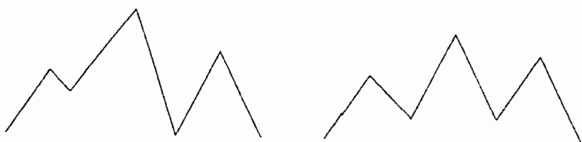
ب) گرافهای k–منتظم ساده نایکریخت با n رأس وجود داشته باشند.

۱.۳.۸. (!) فرض کنیم $k \geq ۲$ و G یک گراف دوبخشی k–منتظم با افراز مضاعف X، Y باشد. ثابت کنید که $|X| = |Y|$. همچنین ثابت کنید که G دارای هیچ یال برشی نیست.

۱.۳.۹. (!) ثابت کنید که یک گراف متناهی با هر رأس درجهٔ زوج دارای هیچ یال برشی نیست. به‌ازای هر $k \geq ۱$، یک گراف ساده $۲k+۱$–منتظم که دارای یک یال برشی

باشد بسازید.

۱۰.۳.۱. (+) یک **رشته کوه** عبارت است از یک خم چندضلعی شکل از $(a,0)$ تا $(b,0)$ در نیم‌صفحه بالایی. فرض کنیم A و B به ترتیب در $(a,0)$ و $(b,0)$ واقع باشند. ثابت کنید که A و B با سفر روی رشته کوه به‌طوری که در همهٔ زمانها ارتفاعهای آنها بالای محور افقی یکی باشد یکدیگر را ملاقات می‌کنند. (*راهنمایی:* گرافی را برای مدلسازی حرکتها تعریف کنید، و از دو تایگی زوج تعداد رأسهای با درجه فرد استفاده کنید.) (از دی.هافمن)

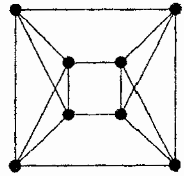


۱۱.۳.۱. (−) ثابت کنید که استقرا و تعاریف مستقیم از مکعب k−بعدی Q_k هر دو یک گراف را به‌دست می‌دهند، و با استقرا ثابت کنید که $e(Q_k) = k2^{k-1}$.

۱۲.۳.۱. (−) نسخه‌های P_3 را در Q_k بشمارید.

۱۳.۳.۱. (−) ثابت کنید که مکعب ۳−بعدی Q_3 را می‌توان به‌صورت اجتماع نسخه‌های مجزا−یال از $K_{1,3}$ و نیز به‌صورت اجتماع نسخه‌های مجزا−یال از P_4 بیان کرد.

۱۴.۳.۱. (−) ثابت کنید که گراف رسم شده زیر با $\overline{Q}_3$ یکریخت است.



۱۵.۳.۱. کوچکترین گراف دوبخشی ساده را که یک زیرگراف از هر مکعب Q_k نباشد، تعیین کنید.

۱۶.۳.۱. (+) **خودریختیهای مکعب k−بعدی** Q_k.

الف) ثابت کنید که تنها زیرگرافهای Q_k یکریخت با Q_l آنهایی هستند که به‌وسیلهٔ مجموعه‌ای از رأسهای سازگار روی یک $k-l$ مختص القاء شده باشند.
(*راهنمایی:* ثابت کنید که رأسهای مناسب رأسهای متقاطر Q_l در l مختص با هم فرق دارند.)

ب) با استفاده از قسمت (الف) خودریختیهای Q_k را بشمارید.

۱۷.۳.۱. ثابت کنید که هر دور به‌طول $2r$ در یک ابرمکعب مشمول در یک زیرمکعب با بعد حداکثر r است. ثابت کنید که این زیرمکعب هنگامی که $r=2$ یا $r=3$ باشد یکتاست، اما هنگامی که $r=4$ باشد لزوماً یکتا نیست.

۱۸.۳.۱. ***دورها در مکعب k-بعدی Q_k.***
الف) ثابت کنید که اگر (x,y,z) و (a,b,c) دو مسیر ۳-رأسی در Q_k باشند، آنگاه یک خودریختی وجود دارد که به‌ترتیب x، y، z را بر a، b، c می‌نگارد.
ب) از قسمت (الف) و گزاره ۷.۳.۱ برای شمارش ۴-دورها و ۶-دورها در Q_k استفاده کنید.

۱۹.۳.۱. با در نظر گرفتن $k \in \mathbb{N}$، فرض کنیم G زیرگراف Q_{2k+1} القاء شده به‌وسیلهٔ رأسهایی باشد که در آنها اختلاف تعداد یک‌ها و صفرها، ۱ است. ثابت کنید که G منتظم است، و $n(G)$ و $e(G)$، و طول کوتاهترین دور در G را محاسبه کنید.

۲۰.۳.۱. (!) دورهای به‌طول n در K_n، و دورهای به‌طول $2n$ را در $K_{n,n}$ بشمارید.

۲۱.۳.۱. ۶-دورها را در $K_{m,n}$ بشمارید.

۲۲.۳.۱. ثابت کنید که گراف پترسن دقیقاً دارای ده ۶-دور است.
(*راهنمایی:* یک نگاشت دوسویی میان ۶-دورها و نسخه‌های $K_{1,3}$ برقرار کنید.)

۲۳.۳.۱. (!) با استفاده از گرافها و نگاشتهای دوسویی (نه جبری!) ثابت کنید که

الف) به‌ازای $\circ \leq k \leq n$، $\binom{n}{۲} = \binom{k}{۲} + k(n-k) + \binom{n-k}{۲}$

ب) اگر $\sum n_i = n$، آنگاه $\sum \binom{n_i}{۲} \leq \binom{n}{۲}$.

۲۴.۳.۱. $(+)$ فرض کنیم که G یک گراف n−رأسی ساده آزاد−مثلث باشد به‌طوری که هرجفت از رأسهای نامجاور دقیقاً دارای دو همسایهٔ مشترک باشند.

الف) ثابت کنید که G منتظم است.

ب) با در نظر گرفتن اینکه G منتظم از درجهٔ k است، ثابت کنید که

$$n(G) = ۱ + \binom{k+۱}{۲}$$

۲۵.۳.۱. (!) ثابت یا رد کنید:

الف) حذف رأسی از درجهٔ ماکسیمم نمی‌تواند درجهٔ میانگین را افزایش دهد.

ب) حذف رأسی از درجهٔ مینیمم نمی‌تواند درجهٔ میانگین را کاهش دهد.

۲۶.۳.۱. $(+)$ فرض کنیم n، k اعداد صحیحی هستند که در $۱ < k < n - ۱$ و $n \geq ۴$ صدق می‌کنند. فرض کنیم که G یک گراف n−رأسی ساده باشد و هر زیرگراف القایی k−رأسی از G دارای m یال باشد.

الف) فرض کنیم G' یک زیرگراف القایی از G با l رأس باشد، که در آن $l > k$. ثابت کنید که

$$e(G') = m\binom{l}{k} \Big/ \binom{l-۲}{k-۲}$$

ب) با استفاده از قسمت (الف) ثابت کنید که $G = K_n$ یا $G = \overline{K}_n$.

(*راهنمایی:* از قسمت (الف) برای محاسبه درایه ماتریس مجاورت برای جفت رأس uv استفاده کنید؛ فرمول از انتخاب u و v مستقل است.)

۲۷.۳.۱. فرض کنیم G گرافی بیطوقه است، و $a = ۲e(G)/n(G)$ میانگین درجه در G است. فرض کنیم $t(v)$ نشانگر میانگین درجه‌های همسایه‌های v باشد. ثابت کنید که به‌ازای یک $v \in V(G)$، داریم $t(v) \geq a$. به‌طور ساختاری ثابت کنید که گرافهای

نامتناهیاً G وجود دارند به‌طوری که به‌ازای هر $v \in V(G)$، داریم $t(v) > a$.

۲۸.۳.۱. فرض کنیم S زیرمجموعه‌ای از رأسها در Q_k است به‌طوری که هیچ جفتی از رأسها در S مجاور نیستند یا همسایهٔ مشترکی ندارند. با استفاده از اصل لانهٔ کبوتر ثابت کنید که $|S| \leq \lfloor ۲^k/(k+۱) \rfloor$. نشان دهید که کران هنگامی که $k = ۳$ است به بهترین وجه ممکن می‌باشد. (*توضیح*: این کران هنگامی که $k = ۴$ است به بهترین وضع ممکن نیست.)

۲۹.۳.۱. (!) ***پوشش خوشه‌ها با زیرگرافهای دوبخشی*** (اثبات دیگری برای مثال ۱۴.۳.۱). با استفاده از استقرا روی k (برای هر دوی استلزامها) ثابت کنید که K_n اجتماعی از k گراف دوبخشی است اگر، و فقط اگر، $n \leq ۲^k$.

۳۰.۳.۱. ***عضویت در خوشه‌ها***

الف) فرض کنیم یک گراف n−رأسی ساده G دارای یک یال uv با قید $d(u) + d(v) = n + k$ باشد، که در آن $k \geq ۰$. ثابت کنید که uv متعلق به حداقل k نسخه از $K_۳$ در G است.

ب) فرض کنیم H یک نسخه از K_r در یک گراف n−رأسی ساده G باشد، و $\sum_{v \in H} d(v) > (r-۱)n + k$. ثابت کنید که H در بیش از k نسخه از $k_{r+۱}$ در G ظاهر می‌شود.

۳۱.۳.۱. ***بسط گرافهای ۳−منتظم*** (مثال ۱۵.۳.۱ را ببینید). برای $n = ۴k$، که در آن $k \geq ۲$، یک گراف ساده ۳−منتظم همبند با n رأس بسازید که دارای هیچ یال برشی نباشد، اما نتوان آن را از یک گراف ساده ۳−منتظم کوچکتر با بسط به‌دست آورد. (*راهنمایی*: G را می‌توان از یک گراف ساده کوچکتر با بسط به‌دست آورد اگر، و فقط اگر، G دارای یالی باشد که عمل وارون «پاک‌شدگی» را بتوان دربارهٔ آن برای به‌دست آوردن یک گراف ساده کوچکتر از G به‌کار برد.)

۳۲.۳.۱. (!) یک مهمانی را با شرکت n زوج ازدواج کرده در نظر می‌گیریم. فرض

کنیم هیچ شخصی با همسرش دست ندهد، و $۲n - ۱$ نفر به جز آقای میزبان با تعداد مختلفی از افراد دست بدهند. خانم میزبان با چند نفر دست می‌دهد؟ (*راهنمایی:* از استقرا استفاده کنید. در گام استقرا، یک نمونه کلی با n زوج را در نظر بگیرید و نمونه‌ای با $n - ۱$ زوج استخراج کنید.)

۳۳.۳.۱. (!) فرض کنیم $n \geq ۲$. گرافهای ساده n−رأسی ناهمبندی را که دارای تعداد ماکسیمم یالهاست تعیین کنید.

۳۴.۳.۱. (−) تعداد ماکسیمم یالها را در یک گراف ساده n−رأسی که دارای یک مجموعهٔ مستقل به اندازهٔ a است تعیین کنید.

۳۵.۳.۱. فرض کنیم G یک گراف ساده با $n > ۳$ رأس باشد.

الف) ثابت کنید که اگر G بیش از $\frac{n^۲}{۴}$ یال داشته باشد، آنگاه G دارای رأسی است که حذف آن منجر به گرافی با بیش از $\frac{(n-۱)^۲}{۴}$ یال می‌گردد.

ب) با استفاده از قسمت (الف) به‌وسیلهٔ استقرا ثابت کنید که G شامل یک مثلث است اگر $e(G) > \frac{n^۲}{۴}$.

۳۶.۳.۱. ثابت کنید که هر گراف ساده آزاد−مثلث n−رأسی با تعداد ماکسیمم یالها با $K_{\lfloor n/۲\rfloor , \lceil n/۲\rceil}$ یکریخت است. (*راهنمایی:* اثبات گزاره ۱۸.۳.۱ را با دقت بیشتری بررسی کنید.)

۳۷.۳.۱. ***گرافهای چندبخشی کامل.***

الف) ثابت کنید که یک گراف ساده G یک گراف چندبخشی کامل است اگر، و فقط اگر، G دارای هیچ زیرگراف القایی ۳−رأسی با یک یال نباشد. (*راهنمایی:* $\overline{G}$ را در نظر بگیرید.)

ب) با استفاده از قسمت (الف) ثابت کنید که اگر یک گراف همبند ساده G حداقل چهار رأس داشته باشد و یک گراف چند بخشی کامل نباشد، آنگاه G دارای یکی از

گرافهای زیر به‌عنوان یک زیرگراف القایی است.

۳۸.۳.۱. (!) با استفاده از استقرا روی r (بدون قضیهٔ توران) مستقیماً ثابت کنید که هر گراف ساده n–رأسی بدون هیچ ۱ + r–خوشه دارای حداکثر $(1-\frac{1}{r})n^2/2$ یال است.

۳۹.۳.۱. (!) گراف توران $T_{n,r}$ (مثال ۲۰.۳.۱) گراف r–بخشی کامل با b بخش به‌اندازهٔ $a+1$ و $r-b$ بخش به اندازهٔ a است، در حالی که $a=\lfloor n/r\rfloor$ و $b=n-ra$.

الف) ثابت کنید که $e(T_{n,r})=(1-\frac{1}{r})\frac{n^2}{2}-b(r-b)/(2r)$.

ب) چون $e(G)$ باید عددی صحیح باشد، بخش (b) ایجاب می‌کند که $e(T_{n,r})\leq\lfloor(1-\frac{1}{r})\frac{n^2}{2}\rfloor$. کوچکترین مقدار r را طوری تعیین کنید که نابرابری مؤکداً برای یک n وجود داشته باشد. برای این مقدار r، مقادیر n را طوری تعیین کنید که داشته باشیم

$$e(T_{n,r})<\lfloor(1-\frac{1}{r})\frac{n^2}{2}\rfloor$$

۴۰.۳.۱. گراف توران $T_{n,r}$ را با گراف $\overline{K}_a+K_{n-a}$ مقایسه کنید و مستقیماً ثابت کنید که

$$e(T_{n,r})=\binom{n-a}{2}+(n-1)\binom{a+1}{2}$$

۴۱.۳.۱. (!) فرض کنیم یک گراف G دارای n رأس و m یال است. از قضیهٔ توران برای به‌دست آوردن کرانهای پایین روی تعداد رأسهای بزرگترین خوشه و بزرگترین مجموعهٔ مستقل در G استفاده کنید.

۴۲.۳.۱. ثابت کنید که در میان گرافهای ساده n–رأسی بدون هیچ ۱ + r–خوشه، گراف توران $T_{n,r}$ تنها گرافی است که دارای ماکسیمم تعداد یالهاست. (*راهنمایی:* اثبات قضیهٔ ۲۱.۳.۱ را با دقت بیشتر بررسی کنید.)

۴۳.۳.۱. (!) هر بازی «بریج» شامل دو تیم است، هر تیم از دو «یار» تشکیل می‌شود. باشگاهی را در نظر می‌گیریم که در آن چهار بازیکن نمی‌توانند یک دور بازی کنند اگر هر جفتی از آنها قبلاً یار یکدیگر بوده باشند. فرض کنیم ۱۵ نفر برای بازی می‌آیند، اما یکی از آنها تصمیم می‌گیرد به‌جای بازی نظریهٔ گراف را مطالعه کند. ۱۴ نفر دیگر تا زمانی که هر نفر یار چهار نفر دیگر شده باشد بازی می‌کنند. اکنون قاعدهٔ در برابر قرار گرفتن یارهای قبلی در سر میز برنامه‌ریزی، بازیها را دشوار می‌کند؛ ۱۴ بازیکن موفق به شش بازی دیگر می‌شوند تا اینکه دیگر نمی‌توانند چهار بازیکن که هیچ جفتی از آنها یارهای قبلی هم نشده باشند پیدا کنند. ثابت کنید که اگر آنها بتوانند نظریه پردازگراف را متقاعد کنند که بریج بازی کند، آنگاه حداقل یک بازی بیشتر می‌تواند انجام شود (اقتباس از باندی—مورتی [۱۹۷۶، صفحه ۱۱۱]).

۴۴.۳.۱. هشت ایستگاه قدرت تلفن سلولی قرار است در یک شهر دایره‌ای شکل به قطر چهار میل نصب شوند. هر ایستگاه بُرد انتقال شش میل دارد. ثابت کنید که بدون آنکه محل قرارگیری ایستگاهها اهمیت داشته باشد، حداقل دو ایستگاه قادر خواهند بود مستقیماً با حداقل پنج ایستگاه دیگر ارتباط برقرار کنند. (اقتباس از باندی—مورتی [۱۹۷۶، صفحه ۱۱۵]).

۴۵.۳.۱. (+) *ماکسیمم اندازهٔ بدون هیچ P_4 القایی.*

الف) فرض کنیم که G یک گراف همبند ساده و $\overline{G}$ ناهمبند است. ثابت کنید که $e(G) \le \Delta(G)^2$، و حال آنکه برابری تنها در مورد $K_{\Delta(G),\Delta(G)}$ برقرار است.

ب) فرض کنیم که G یک گراف همبند ساده با درجهٔ ماکسیمم D است و هیچ زیرگراف القایی یکریخت با P_4 ندارد. ثابت کنید که $e(G) \le D^2$. (شانچی[1] [۱۹۷۴]، چانگ—وست[2] [۱۹۹۳])

1) Seinsche 2) Chung-West

۴۶.۳.۱. مشابه جزئی قضیهٔ توران برای $K_{2,m}$

الف) ثابت کنید که اگر G ساده باشد و $\sum_{v\in V(G)}\binom{d(v)}{2} > (m-1)\binom{n}{2}$، آنگاه G شامل $K_{2,m}$ است. (*راهنمایی:* $K_{2,m}$ را به‌عنوان دو رأس با m همسایهٔ مشترک در نظر بگیرید.)

ب) ثابت کنید که $\sum_{v\in V(G)}\binom{d(v)}{2} \geq e(\frac{2e}{n}-1)$، که در آن G دارای e یال است.

پ) با استفاده از قسمتهای (الف) و (ب) ثابت کنید که یک گراف با بیش از $\frac{1}{2}(m-1)^{1/2}n^{3/2}+\frac{n}{4}$ یال شامل $K_{2,m}$ است.

ت) کاربرد: n نقطه در صفحه داده شده است، ثابت کنید که تعداد جفتهای نقاطی به فاصلهٔ دقیقاً ۱ حداکثر برابر است با $\frac{1}{\sqrt{2}}n^{3/2}+\frac{n}{4}$. (باندی–مورتی [۱۹۷۶، صفحه ۱۱۱-۱۱۲])

۱-۴ درجه‌ها و اثبات الگوریتمی

بررسی خود را دربارهٔ درجه‌های رأسها و فنون اثبات ادامه می‌دهیم.

۱.۴.۱. تعریف. ***دنباله درجهٔ*** یک گراف فهرست درجه‌های رأسهای آن است، معمولاً این درجه‌ها را به‌ترتیب نانزولی...

اثبات ساختاری یا الگوریتمی

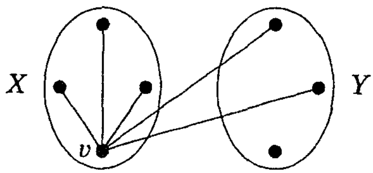
وجود یک چیز را می‌توانیم با ساختن آن ثابت کنیم. چنین اثباتهایی را می‌توان به‌عنوان الگوریتمهای کامپیوتری انجام داد. یک اثبات ساختاری به بیش از بیان یک الگوریتم نیاز دارد؛ باید همچنین ثابت کنیم که الگوریتم به پایان می‌رسد و نتیجه مطلوب را به‌دست می‌دهد. این کار ممکن است متضمن استقرا، تناقض، متناهی بودن و غیره باشد. فرض

کنیم می‌خواهیم ثابت کنیم که هر گراف دارای یک زیرگراف دوبخشی بزرگ است.

۲.۴.۱. قضیه. هر گراف بیطوقه G دارای یک زیرگراف دوبخشی با حداقل $\frac{e(G)}{۲}$ یال است.

اثبات. فرض کنیم با افرازی دلخواه از $V(G)$ به دو مجموعهٔ X، Y مطلب را آغاز کنیم. با مشمول کردن یالهای دارای یک نقطه پایانی در هر مجموعه، یک زیرگراف دوبخشی H را با افراز مضاعف X، Y به‌دست می‌آوریم. اگر H شامل کمتر از نیمی از یالهای G متصل به رأس v باشد، آنگاه v در رده‌اش همسایه‌های بیشتری از ردهٔ دیگر دارد، همچنانکه در تصویر زیر نشان داده شده است. با حرکت v به ردهٔ دیگر، یالهای بیشتری از G که از دست می‌دهیم، به‌دست می‌آوریم.

یک چنین جابجایی موضعی در افراز مضاعف را تا مادامی که زیرگراف دوبخشی جاری دارای رأسی باشد که در کمتر از نیمی از یالهایش شرکت دارد انجام می‌دهیم. هر چنین جابجایی تعداد یالهای زیرگراف را افزایش می‌دهد. بنابراین فرآیند باید پایانی داشته باشد. هنگامی که فرآیند به پایان می‌رسد، به‌ازای هر $v \in V(G)$، داریم $d_H(v) \geq d_G(v)/۲$، و از این‌رو به‌وسیلهٔ فرمول مجموع–درجه خواهیم داشت $e(H) \geq e(G)/۲$. □

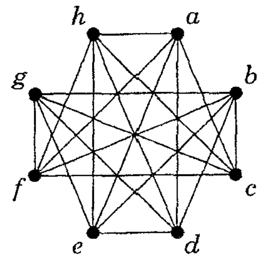


همچنین می‌توانیم از اکسترمال بودن استفاده کنیم: زیرگراف دوبخشی H با بیشترین یالها دارای حداقل نیمی از یالهای G است. در غیر این‌صورت، برای یک $v \in V(G)$ داریم $d_H(v) < d_G(v)/۲$، و آنگاه جابجاسازی v در افراز مضاعف با انتخاب H در تناقض است. برای یک نتیجه قویتر تمرین ۳ را ببینید.

۳.۴.۱. مثال.ماکسیمم موضعی. الگوریتم قضیهٔ ۲.۴.۱ لزوماً یک زیرگراف دوبخشی

یا بیشترین یالها را ایجاد نمی‌کند، بلکه صرفاً زیرگرافی را با حداقل نیمی از یالها به‌دست می‌دهد. گراف زیر ۵-منتظم با ۸ رأس است و از این‌رو دارای ۲۰ یال می‌باشد. افراز مضاعف $X = \{a,b,c,d\}$ و $Y = \{e,f,g,h\}$ یک زیرگراف دوبخشی با ۱۲ یال را به‌دست می‌دهد، که در آن هر رأس دارای درجهٔ ۳ است.

الگوریتم در اینجا به پایان می‌رسد؛ با جابجاسازی یک رأس دو یال به‌دست می‌آوریم ولی سه تا از دست می‌دهیم. با وجود این، افراز مضاعف $X = \{a,b,g,h\}$ و $Y = \{c,d,e,f\}$ یک زیرگراف دوبخشی ۴-منتظم با ۱۶ یال را ایجاد می‌کند. الگوریتمی که یک نمونهٔ ماکسیمم را به‌وسیلهٔ تغییرات موضعی جستجو می‌کند ممکن است با یک ماکسیمم موضعی درگیر گردد. □



اثبات قضیهٔ ۲.۴.۱ روشی را برای اثبات وجود یک پیکربندی مطلوب توضیح می‌دهد: دنباله‌ای از تغییرات را برای پیکربندی دلخواهی تعریف می‌کند که باید پایان داشته باشد ولی تنها هنگامی پایان می‌یابد که ویژگی مطلوب رخ داده باشد.

دنباله‌های گرافیکی

هر گراف دارای یک دنبالهٔ درجه است، اما کدام دنباله‌ها وجود دارد؟ با در نظر گرفتن اعداد صحیح نامنفی d_1، ...، d_n، آیا می‌توانیم گرافی را که این اعداد دنبالهٔ درجهٔ آن باشند تعیین کنیم؟ فرمول مجموع-درجه ایجاب می‌کند که $\sum d_i$ باید زوج باشد. این یک شرط **لازم** است، اما اگر یک گراف ساده می‌خواهیم شرط **کافی** نیست: $(2,0,0)$

دنباله درجه هیچ گراف ساده‌ای نیست. نخست نشان می‌دهیم که به‌وضوح شرط لازم هنگامی که طوقه‌ها و یالهای چندگانه مجاز باشند، کافی است.

۱.۴.۴. گزاره. اعداد صحیح نامنفی d_1، ...، d_n درجه‌های رأسهای یک گراف چندگانه‌اند اگر، و فقط اگر، $\sum d_i$ زوج باشد.

اثبات. فرمول مجموع–درجه شرط لازم را برقرار می‌کند. برعکس، فرض کنیم $\sum d_i$ زوج باشد. یک گراف چندگانه با مجموعهٔ رأسهای v_1، ...، v_n و $d(v_i) = d_i$ را به‌ازای هر i می‌سازیم. چون $\sum d_i$ زوج است، تعداد مقادیر فرد، زوج است. نخست یک جفت‌سازی دلخواه $\{v_i : d_i$ فرد است$\}$ را تشکیل می‌دهیم، و یالی برای هریک از چنین جفتی مشخص می‌کنیم. اکنون درجهٔ باقیمانده مورد نیاز در هر رأس زوج و نامنفی است؛ این نیاز برای هر i با جایگزینی $[d_i/۲]$ طوقه در v_i برآورده می‌شود. □

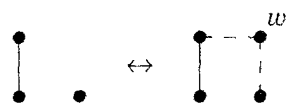
در اینجا اثبات کفایت شرط یک ساختار آشکار است. همچنین می‌توانیم وجود چنین گراف چندگانه‌ای را به‌وسیلهٔ استقرا روی $\sum d_i$ و یا به وسیلهٔ استقرا روی n اثبات کنیم (تمرین ۱۰)؛ انتخابهای عملی بسیاری برای پارامتر استقرا ممکن است وجود داشته باشد. وجود طوقه‌ها ساختار را آسان می‌کند. اگر وجود طوقه‌ها را منع کنیم، آنگاه $(۲,۰,۰)$ دیگر تحقیق‌پذیر نیست. تمرین ۱۶ یک شرط لازم و کافی برای تحقق‌پذیری به‌وسیلهٔ یک گراف چندگانه بیطوقه را به‌دست می‌دهد.

بحث ما دربارهٔ زیرگرافهای دوبخشی بزرگ ارتباطی میان اثبات الگوریتمی و اثبات با استفاده از استقرا یا اکسترمال بودن را به یاد می‌آورد. اثباتهایی را که از استقرا یا اکسترمال بودن استفاده می‌کنند اغلب می‌توان به زبان الگوریتمهای بازگشتی یا تکراری درآورد. گاهی اوقات باید نخست چنین اثباتی را جستجو کرد و سپس آن را به یک الگوریتم برگرداند.

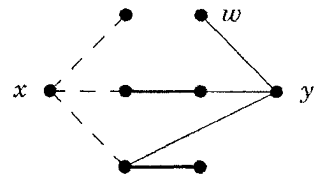
۵.۴.۱. تعریف. یک *دنبالهٔ گرافیکی* فهرستی از اعداد نامنفی است که دنبالهٔ درجه‌های یک گراف ساده می‌باشد. یک گراف ساده با دنبالهٔ درجه‌های d، d را «محقق

می‌سازد».

۱.۴.۶. مثال.یک *شرط بازگشتی*. فهرست ۲، ۰، ۰ گرافیکی نیست، اما ۲، ۲، ۱، ۱ گرافیکی است، همین‌طور ۱، ۰، ۱. گراف $K_2 + K_1$، ۱، ۰، ۱ را محقق می‌سازد؛ اگر رأس جدیدی را مجاور با رأس تنها و یک رأس درجهٔ ۱ اضافه کنیم، آنگاه یک گراف با دنبالهٔ درجه‌های ۲، ۲، ۱، ۱ به‌دست می‌آوریم (تصویر زیر). برعکس، اگر یک گراف داشته باشیم که ۲، ۲، ۱، ۱ را محقق‌ساز و در آن رأسی مانند w از درجهٔ ماکسیمم مجاور با رأسهای از درجهٔ ۲ و ۱ باشد، آنگاه می‌توانیم w را برای به‌دست آوردن یک گراف با فهرست درجه‌های ۱، ۰، ۱ حذف کنیم.



این ملاحظات یک آزمون بازگشتی را برای دنباله‌های گرافیکی ارائه می‌دهد. برای آزمون دنبالهٔ ۳۳۳۳۲۲۱، می‌توانیم تحقق‌سازی را با رأسی مانند y از درجهٔ ۳ جستجو کنیم که دارای سه همسایهٔ از درجهٔ ۳ باشد. چنین گرافی وجود دارد اگر، و فقط اگر، ۲۲۲۳۲۲۱ گرافیکی باشد (به وسیلهٔ حذف y). این را دوبارهٔ به صورت ۳۲۲۲۲۲۱ مرتب می‌کنیم و تحقق‌سازی را با رأسی مانند x از درجهٔ ۳ جستجو می‌کنیم که دارای سه همسایهٔ از درجهٔ ۲ باشد. چنین گرافی وجود دارد اگر، و فقط اگر، ۱۱۱۲۲۱ گرافیکی باشد (به‌وسیلهٔ حذف x). این را دوبارهٔ به‌صورت ۲۲۱۱۱۱ مرتب می‌کنیم و تحقق‌سازی را با رأسی مانند w از درجهٔ ۲ با همسایه‌های درجهٔ ۲ و ۱ جستجو می‌کنیم. چنین گرافی وجود دارد اگر، و فقط اگر، ۱۰۱۱۱ گرافیکی باشد. شاید بتوان تشخیص داد که این واقعاً گرافیکی است. با آغاز یک تحقق‌سازی از ۱۰۱۱۱، می‌توانیم w، x، y را با ویژگیهای مطلوب برای به‌دست آوردن یک تحقق‌سازی از دنبالهٔ اولیهٔ ۳۳۳۳۲۲۱ جایگزین کنیم. تحقق‌سازی یکتا نیست. □



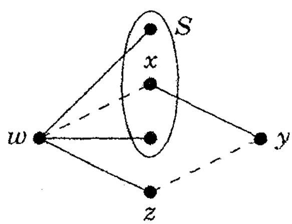
۱.۴.۷. قضیهٔ. (هاول [۱۹۵۵]، حکیمی [۱۹۶۲]) برای $n > 1$، فهرست اعداد صحیح نامنفی d با اندازهٔ n گرافیکی است اگر، و فقط اگر، d' گرافیکی باشد، در حالی که d' فهرستی با اندازهٔ $n - 1$ است که از d با حذف بزرگترین عنصر آن Δ و کم کردن ۱ از Δ بزرگترین عناصر بعدی به‌دست آمده است. تنها دنبالهٔ گرافیکی ۱‒عنصری، $d_1 = 0$ است.

اثبات. برای $n = 1$، گزاره بدیهی است. برای $n > 1$، نخست ثابت می‌کنیم که شرط کافی است. با در نظرگرفتن d با قید $d_1 \geq \cdots \geq d_n$، و همچنین با در نظرگرفتن یک گراف ساده G' با دنبالهٔ درجه‌های d'، یک رأس جدیدی مجاور با رأسهای G' که دارای درجه‌های $d_2 - 1$، ...، $d_{\Delta+1} - 1$ است می‌افزاییم. این d_iها عبارت‌اند از بزرگترین عناصر d بعد از (نسخه‌ای از) Δ و خود Δ، اما اعداد $d_2 - 1$، ...، $d_{\Delta+1} - 1$ لزومی ندارد که بزرگترین اعداد از Δ در d' باشند.

برای اثبات لزوم شرط، با یک گراف ساده G که d را محقق می‌سازد آغاز می‌کنیم و یک گراف ساده G' را ایجاد می‌کنیم که d' را محقق کند. فرض کنیم w رأسی از درجهٔ Δ در G باشد. فرض کنیم S یک مجموعه از Δ رأسهای در G باشد که دارای «درجه‌های مطلوب» d_2، ...، $d_{\Delta+1}$ است. اگر $S = N(w)$، آنگاه می‌توانیم با حذف w، G' را به‌دست آوریم. در غیر این‌صورت، رأسی از S وجود دارد که از $N(w)$ حذف شده است. در این حالت، G را برای افزایش $|N(w) \cap S|$ بدون تغییر درجهٔ هیچ رأسی تعدیل می‌کنیم. چون $|N(w) \cap S|$ حداکثر Δ بار می‌تواند افزایش یابد، تکرار این شیوه یک گراف دلخواه G که d را محقق می‌سازد به یک گراف G^* تبدیل می‌کند که d را محقق

می‌نماید و دارای $N(w) = S$ است. حال از G^* می‌توانیم w را حذف کنیم تا گراف مطلوب G' را که d' را محقق می‌کند به‌دست آوریم.

اگر $N(w) \neq S$، آنگاه می‌توانیم $x \in S$ و $z \notin S$ را طوری انتخاب کنیم که $w \leftrightarrow z$ و $w \not\leftrightarrow x$، زیرا $d(w) = \Delta = |S|$. بنابر انتخاب S، داریم $d(x) \geq d(z)$. می‌خواهیم wx را اضافه و wz را حذف کنیم، اما نباید درجه‌های رأسها را تغییر دهیم، بنابراین باید درجه‌های x و z را دوبارهٔ برقرار کنیم. کافی است رأسی مانند y را بیرون $T\{x, z, w\}$ طوری پیدا کنیم که $x \leftrightarrow y$ و $z \not\leftrightarrow y$؛ اگر چنین yای وجود داشته باشد، آنگاه همچنین می‌توانیم xy را حذف و zy را اضافه کنیم (تصویر را ببینید). فرض کنیم ε تعداد نسخه‌های یال xz (۰ یا ۱) باشد. حال x دارای $d(x) - \varepsilon$ همسایهٔ بیرون T است، و z دارای $d(z) - ۱ - \varepsilon$ همسایهٔ بیرون T می‌باشد. چون $d(x) \geq d(z)$، y مطلوب بیرون T وجود دارد، و می‌توانیم جابجایی مورد نظر را انجام دهیم. □



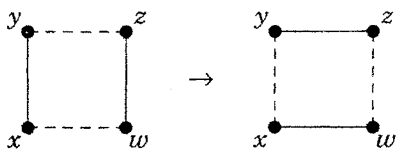
قضیهٔ ۷.۴.۱ فهرستی از n عدد را با آزمودن فهرستی از $n - ۱$ عدد آزمون می‌کند؛ از این‌رو می‌توان آن را به عنوان یک الگوریتم تکراری برای آزمون اینکه آیا d گرافیکی است انجام داد. شرط لازم ($\sum d_i$ زوج) به‌طور ضمنی در این مشخص‌سازی وجود دارد. چون $\sum d'_i = (\sum d_i) - ۲\Delta$ و d' باید دارای مجموع زوج برای تحقق‌پذیری باشد، از این‌رو شرط بازگشتی ایجاب می‌کند که d نیز باید مجموع زوج داشته باشد.

در یک اثبات الگوریتمی که از «تغییر موضعی» استفاده می‌کند، هدف را به‌طرف شرط مطلوب هدایت می‌نماید. این مطلب را می‌توان به‌صورت اثباتی استقرایی نیز بیان کرد،

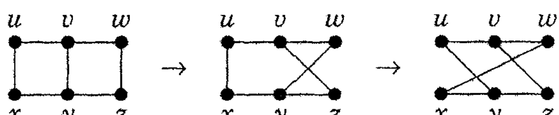
در حالی که پارامتر استقرا «فاصلهٔ» از شرط مطلوب است. در اثبات بالا، این فاصلهٔ عبارت است از تعداد رأسهای در S که از $N(w)$ حذف شده‌اند.

از جابجاییهای یالها برای تبدیل یک گراف دلخواه با دنبالهٔ درجه‌های d به گرافی که در شرط مطلوب صدق کند استفاده کردیم. به‌طور کلیتر، هر گراف ساده با دنبالهٔ درجه‌های d را می‌توان با چنین جابجاییهایی به هر گراف دیگر تبدیل کرد.

۸.۴.۱. تعریف. یک ۲–***جابجایی*** عبارت است از جایگزینی یک جفت از یالهای xy و zw در یک گراف ساده به جای یالهای yz و wx، با در نظر گرفتن اینکه yz و wx در گراف اولیهٔ ظاهر نشده باشند.



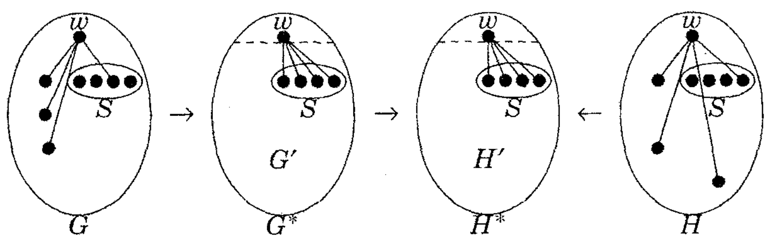
خطوط خط‌چین در این تصویر معرف یالهایی است که به گراف تعلق ندارند. اگر $z \leftrightarrow y$ یا $x \leftrightarrow w$، آنگاه ۲–جابجایی بالا را نمی‌توان انجام داد، زیرا گراف حاصل ساده نخواهد بود. یک ۲–جابجایی درجهٔ هیچ رأسی را تغییر نمی‌دهد. اگر یک ۲–جابجایی H را به H^* تبدیل کند، آنگاه یک ۲–جابجایی روی همان چهار رأس H^* را به H تبدیل می‌کند. در زیردنباله‌ای از دو تا ۲–جابجاییها که یک گراف را به گرافی دیگر با همان درجه‌های رأسها تبدیل می‌کند نشان داده شده است.



۹.۴.۱. قضیهٔ. اگر G و H دو گراف ساده با مجموعهٔ رأسهای V باشند، آنگاه به‌ازای هر $v \in V$، داریم $d_G(v) = d_H(v)$ اگر، و فقط اگر، دنباله‌ای از ۲–جابجاییها وجود داشته باشد که G را به H تبدیل کند.

اثبات. هر ۲−جابجایی درجه‌ها را تغییر نمی‌دهد، بنابراین شرط کافی است. برعکس، فرض کنیم به‌ازای هر $v \in V$، داریم $d_G(v) = d_H(v)$؛ ثابت می‌کنیم که دنبالهٔ مطلوب به‌وسیلهٔ استقرا روی تعداد رأسهای، n وجود دارد. اگر $n \leq ۳$، آنگاه برای هر بردار $d_۱$، ...، d_n حداکثر یک گراف ساده با $d(v_i) = d_i$ وجود دارد. از این‌رو $n = ۳$ را می‌توانیم به عنوان یک پایه به‌کار ببریم.

فرض کنیم $n \geq ۴$، و فرض کنیم w رأسی از درجهٔ ماکسیمم Δ باشد. فرض کنیم $S = \{v_۱, \cdots, v_\Delta\}$ مجموعه‌ای ثابت از رأسهاست که Δ بالاترین درجه‌ها به جز w است. همچنانکه در اثبات قضیهٔ هاول−حکیمی نشان دادیم، دنباله‌ای از ۲−جابجاییها G را به گراف G' تبدیل می‌کند به‌طوری که $N_{G^*}(w) = S$، و یک چنین دنباله‌ای H را به گراف H^* تبدیل می‌کند به‌طوری که $N_{H^*}(w) = S$.



چون $N_{G^*}(w) = N_{H^*}(w)$، حذف w منجر به گرافهای ساده $G' = G^* - w$ و $H' = H^* - w$ با $d_{G'}(v) = d_{H'}(v)$ برای هر رأس v می‌گردد. بنابر فرض استقرا، دنباله‌ای از ۲−جابجاییها G' را به H' تبدیل می‌کند. چون اینها متضمن w نیستند، و w دارای همان همسایه‌های در G^* و H^* است، با به‌کار بردن این دنبالهٔ برای G^* آن را به H^* تبدیل می‌کند. از این‌رو می‌توانیم تبدیل G به H را به‌وسیلهٔ دنباله‌ای که G را به G^* تبدیل می‌کند انجام دهیم، آنگاه دنباله‌ای که G^* را به H^* تبدیل می‌کند، و سپس به‌ترتیب عکس (وارونهای) ۲−جابجاییها در دنباله‌ای که H را به H^* تبدیل می‌کند. □

این مطلب را همچنین می‌توانیم به‌وسیلهٔ استقرا روی تعداد یالهای ظاهر شونده دقیقاً در یکی از G و H ثابت کنیم، و این هم ۰ است اگر، و فقط اگر، آنها از قبل یکسان باشند. در این روش، کافی است که یک ۲−جابجایی در G بیابیم که آن را به H نزدیکتر کند یا یک ۲−جابجایی در H پیدا کنیم که آن را به G نزدیکتر کند.

درجه ها و گرافهای سودار

نمادگذاری درجهٔ رأس برای گرافهای سودار وجه تمایز میان سرها و دمهای یالها را شامل می‌شود.

۱۰.۴.۱. تعریف. فرض کنیم v رأسی در یک گراف سودار باشد. **درجهٔ خروجی** $d^+(v)$ تعداد یالهای با دُم v است. **درجهٔ ورودی** $d^-(v)$ تعداد یالهای با سر v است. **همسایگی خروجی** یا **مجموعهٔ *تالی*** $N^+(v)$ عبارت است از $\{x \in V(G) : v \to x\}$. **همسایگی ورودی** یا **مجموعهٔ مقدم** $N^-(v)$ عبارت است از $\{x \in V(G) : x \to v\}$.

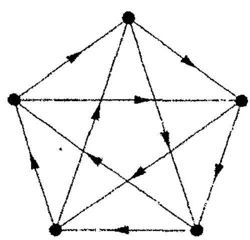
برای گرافهای سودار دنباله‌ای از «جفتهای درجه» $(d^+(v_i), d^-(v_i))$ را داریم. بسیاری از نتایج به‌دست آمده ازگرافها شبیه نتایج حاصل ازگرافهای سودار است. $2^{\binom{n}{2}}$ گراف ساده با رأسهای v_1، ...، v_n وجود دارند. به‌طور مشابهی، 2^{n^2} گراف سودار با این رأسها وجود دارند به‌طوری که هر جفت *مرتب* حداکثر یک‌بار به‌عنوان یک یال ظاهر می‌شود. اگر وجود طوقه‌ها و داشتن هر دوی $x \to y$ و $y \to x$ را منع کنیم، آنگاه تنها $3^{\binom{n}{2}}$ گراف سودار باقی می‌ماند؛ اینها با گرافهای ساده (بیسو) ارتباط نزدیکی دارند.

۱۱.۴.۱. تعریف. یک **سودهی** از یک گراف ساده G عبارت است از یک گراف سودار D که از G با انتخاب سوی ($x \to y$ یا $y \to x$) برای هر یال $xy \in E(G)$ به‌دست آمده باشد. نتیجه یک *گراف سودار* است، یعنی یک گراف سودار بدون

هیچ طوقه و فاقد دو یالی باشد که نقاط پایانی یکسان داشته باشند (یعنی، حداکثر یکی از $\{xy, yx\}$ یک یال باشد).

۱.۴.۱۲. مثال. *تورنمنتها.* در یک لیگ n–تیمی که هر تیمی با تیم دیگر دقیقاً یک بار بازی می‌کند، می‌توانیم نتایج فصل را به عنوان یک گراف سودار ثبت کنیم. برای هر جفت u، v، یال uv یا vu را بسته به اینکه کدام تیم در مسابقه میان آنها برنده شود، به حساب می‌آوریم. در پایان فصل یک سودهی از K_n داریم، زیرا هر جفت رأس را سودارکرده‌ایم. «امتیاز» یک تیم درجهٔ خروجی آن در این گراف سودار است؛ که با تعداد پیروزیها برابر است.

چون این روش مدلی برای «تورنمنتهای با گردش نوبت» است، از این‌رو یک سودهی از یک گراف کامل را یک **تورنمنت** می‌نامیم. تعداد تورنمنتهای با رأسهای v_1، ...، v_n، مانند تعداد گرافها برابر با $2^{\binom{n}{2}}$ است. جفتهای درجه‌های یک تورنمنت به‌وسیلهٔ درجه‌های خروجی (دنبالهٔ امتیازها) تعیین می‌شوند، زیرا برای هر رأس v داریم $d^+(v) + d^-(v) = n - 1$. همچنانکه در زیر نشان داده شده است، یک تورنمنت ممکن است بیش از یک رأس با درجهٔ خروجی ماکسیمم داشته باشد، در نتیجه ممکن است «برنده» مشخصی وجود نداشته باشد. □



۱.۴.۱۳. گزاره. (لاندو[1] [۱۹۵۳]) هر تورنمنت دارای یک *شاه* است، که بنابر تعریف رأسی است که از آن هر رأس دیگر با مسیری به‌طول حداکثر ۲ قابل دسترسی است.

1) Landau

اثبات. یک رأس x را در تورنمنت T در نظر می‌گیریم. اگر x یک شاه نباشد، آنگاه یک رأس y وجود دارد که از x با مسیری به‌طول حداکثر ۲ قابل دسترسی نیست. چون T یک سودهی از K_n است، هر تالی از x باید یک تالی از y باشد. همچنین $y \to x$. از این‌رو $d^+(y) > d^+(x)$. حال ببینیم که آیا y یک شاه است. چون T متناهی است، پس نمی‌توانیم برای همیشه بررسی رأسهای با درجهٔ بالاتر را به‌طور پیاپی ادامه دهیم. این شیوه باید پایان داشته باشد، و تنها هنگامی پایان می‌یابد که یک شاه پیدا کرده باشیم. □

این اثبات را همچنین می‌توانیم با استفاده از اکسترمال بودن بیان کنیم؛ بدین سان که ثابت کنیم هر رأس از درجهٔ خروجی ماکسیمم در یک تورنمنت یک شاه است. تمرینات ۲۹-۳۱ پرسشهای بیشتری را دربارهٔ شاهها در تورنمنتها مطرح می‌کنند (همچنین مورر[1] [۱۹۸۰] را ببینید).

تمرینات

۱.۴.۱. $(-)$ ماکسیمم تعداد یالها را در یک زیرگراف دوبخشی از P_n، از C_n و از K_n تعیین کنید.

۲.۴.۱. $(-)$ ثابت یا رد کنید: هنگامی که الگوریتم قضیهٔ ۲.۴.۱ را برای یک گراف دوبخشی به‌کار می‌بریم، یک زیرگراف دوبخشی با حداکثر یالها را به‌دست می‌دهد.

۳.۴.۱. با استفاده از استقرا روی n ثابت کنید که هر گراف بیطوقه G با حداقل یک یال دارای یک زیرگراف دوبخشی H است به‌طوری که H دارای **بیش** از نیمی از یالهای G است.

۴.۴.۱. یک دنبالهٔ $\{G_n\}$ از گرافها را بسازید، با قید اینکه G_n دارای $2n$ رأس باشد، به‌طوری که $\lim_{n\to\infty} f_n = \frac{1}{2}$، که در آن f_n کسری از $E(G_n)$ است که متعلق به

1) Maurer

بزرگترین زیرگراف دوبخشی از G_n می‌باشد.

۵.۴.۱. ثابت کنید که هر گراف بیطوقه G دارای یک زیرگراف k−بخشی H است به‌طوری که $e(H) \geq (۱ - \frac{۱}{k})e(G)$.

۶.۴.۱. بیشترین تعداد یالها را در یک زیرگراف دوبخشی از گراف پترسن تعیین کنید.

۷.۴.۱. ماکسیمم تعداد یالها را در یک گراف ساده n−رأسی با k مؤلفه تعیین کنید.

۸.۴.۱. (!) ***زیرگرافهای بزرگ با مینیمم درجه.*** فرض کنیم G یک گراف متناهی با میانگین درجهٔ رأسهای a باشد (یادآوری می‌کنیم که $a = ۲e(G)/n(G)$).

الف) ثابت کنید که $G - x$ دارای میانگین درجهٔ حداقل a است اگر، و فقط اگر، $d(x) \leq \frac{a}{۲}$.

ب) با استفاده از قسمت (الف) یک اثبات الگوریتمی به‌دست دهید که اگر $a > ۰$، آنگاه G دارای یک زیرگراف با مینیمم درجهٔ بزرگتر از $\frac{a}{۲}$ باشد.

پ) با استفاده از $K_{۱,n-۱}$، ثابت کنید که کران در قسمت (ب) به بهترین وضع ممکن است.

۹.۴.۱. فرض کنیم G یک گراف ساده n−رأسی با ماکسیمم درجهٔ $\lceil \frac{n}{۲} \rceil$ و مینیمم درجهٔ $\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor - ۱$ باشد. ایا این مطلب ایجاب می‌کند که G همبند باشد؟

۱۰.۴.۱. $(-)$ با استفاده از استقرا (روی n یا روی $\sum d_i$) ثابت کنید که اگر $d_۱$، ...، d_n اعداد صحیح نامنفی باشند و $\sum d_i$ زوج باشد، آنگاه یک گراف چندگانه n−رأسی وجود دارد که $d_۱$، ...، d_n به‌عنوان فهرست درجه‌های رأسهای آن می‌باشند. **(توضیح:** این طریق دیگر اثبات گزاره ۴.۴.۱ است.)

۱۱.۴.۱. $(-)$ کدام یک از دنباله‌های زیرگرافیکی هستند؟ یک ساختار یا یک اثبات برای غیرممکن بودن هریک به‌دست دهید.

الف) $(۵, ۵, ۴, ۳, ۲, ۲, ۲, ۱)$ پ) $(۵, ۵, ۵, ۳, ۲, ۲, ۱, ۱)$

ب) $(۵, ۵, ۴, ۴, ۲, ۲, ۱, ۱)$ ت) $(۵, ۵, ۵, ۴, ۲, ۱, ۱, ۱)$

۱.۴.۱۲. فرض کنیم $d = (d_۱, \cdots, d_{۲k})$ به‌وسیلهٔ $d_{۲i} = d_{۲i-۱} = i$ با قید $۱ \leq i \leq k$ تعریف شده باشد. ثابت کنید که d گرافیکی است.
(*راهنمایی:* از آزمون هاول–حکیمی استفاده نکنید.)

۱.۴.۱۳. فرض کنیم $G \cong \overline{G}$ و $n(G) \equiv ۱$ (به پیمانه ۴). ثابت کنید که G دارای حداقل یک رأس از درجهٔ $(n(G) - ۱)/۲$ است.

۱.۴.۱۴. فرض کنیم n همنهشت با ۰ یا ۱ به پیمانه ۴ است. یک گراف ساده n–رأسی G با $\frac{۱}{۲}\binom{n}{۲}$ یال بسازید به‌طوری که $\Delta(G) - \delta(G) \leq ۱$.

۱.۴.۱۵. *ساختن گرافهای ساده ۳–منتظم*

الف) ثابت کنید که یک ۲–جابجایی را می‌توان با ساختن دنباله‌ای از بسطها و پاک‌شدگیها انجام داد، درحالی‌که این اعمال در مثال ۱.۳.۱۵ تعریف شده‌اند. (**آگاهی:** پاک‌شدگی هنگامی که به ساخت یالهای چندگانه منجر گردد مجاز نیست.)

ب) با استفاده از قسمت (الف) ثابت کنید که هر گراف ساده ۳–منتظم را می‌توان از $K_۴$ به‌وسیلهٔ دنباله‌ای از بسطها و پاک‌شدگیها به‌دست آورد. (باتاگیلیجی[1] [۱۹۸۴]).

۱.۴.۱۶. (!) فرض کنیم $d = (d_۱, \cdots, d_n)$ یک n-تایی از اعداد صحیح باشد به‌طوری که $d_۱ \geq \cdots \geq d_n \geq ۰$. ثابت کنید که یک گراف چندگانه بیطوقه با دنبالهٔ درجه‌های d وجود دارد اگر، و فقط اگر، $\sum d_i$ زوج باشد و $d_۱ \leq d_۲ + \cdots + d_n$. (حکیمی [۱۹۶۲])

۱.۴.۱۷. (!) فرض کنیم $d_۱ \leq \cdots \leq d_n$ درجه‌های رأسهای یک گراف ساده G باشند. ثابت کنید که G همبند است اگر برای هر k، با قید $k \leq n - ۱ - d_n$ داشته

1) Batagelij

باشیم $d_k \geq k$. (*راهنمایی:* مؤلفه‌ای را در نظر بگیرید که یک رأس از ماکسیمم درجه را حذف می‌کند.)

۱۸.۴.۱. (!) ثابت کنید که اگر اعداد صحیح نامنفی $d_1 \geq \cdots \geq d_n$ دنبالهٔ درجه‌های یک گراف ساده باشند، آنگاه $\sum d_i$ زوج است و برای $1 \leq k \leq n$ داریم $\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\}$.
(*راهنمایی:* سعی نکنید که از استقرا استفاده کنید. **توضیح:** اردوش–گاله [۱۹۶۰] ثابت کردند که این شرط کافی نیز می‌باشد.)

۱۹.۴.۱. یک گراف ساده G یک **گراف دودستگی** است اگر $V(G)$ را بتوان به Q و S افرازکرد به‌طوری که Q یک خوشه را القا کند و S یک مجموعهٔ مستقل باشد. فرض کنیم $d_1 \geq \cdots \geq d_n$ دنبالهٔ درجه‌های یک گراف ساده G است، و فرض کنیم m بزرگترین مقدار k باشد به‌طوری که $d_k \geq k-1$. ثابت کنید که G یک گراف دودستگی است اگر، و فقط اگر، $\sum_{i=1}^{m} d_i = m(m-1) + \sum_{i=m+1}^{n} d_i$. (هامر–سایمون[1] [۱۹۷۷])

۲۰.۴.۱. (+) فرض کنیم $a_1 < \cdots < a_k$ اعداد صحیح مثبت متمایز باشند. ثابت کنید که یک گراف ساده با $a_k + 1$ رأس وجود دارد که **مجموعهٔ** درجه‌های رأسهای متمایزش a_1، ...، a_k است.
(*راهنمایی:* از استقرا روی k برای ساختن چنین گرافی استفاده کنید.) (کاپور–پولیمنی–وال[2] [۱۹۷۷])

۲۱.۴.۱. (−) ثابت کنید که جفتهای $\left\{(d_i^+, d_i^-)\right\}_{i=1}^{n}$ از اعداد صحیح نامنفی، جفتهای درجه‌های ورودی و خروجی یک گراف چندگانه سودار است (طوقه‌ها و یالهای

---

1) Hammer-Simeone 2) Kapoor-Polimeni-Wall

چندگانه مجاز هستند) اگر، و فقط اگر، $\sum d_i^+ = \sum d_i^-$.

۲۲.۴.۱. (−) برای هر $n \geq ۱$، ثابت یا رد کنید: گراف سودار n−رأسی بیطوقه یا یالهای چندگانه وجود ندارد به‌طوری که درجه‌های خروجی رأسها متمایز باشند، و همچنین درجه‌های ورودی رأسها نیز متمایز باشند.

۲۳.۴.۱. (−) ثابت کنید که یک تورنمنت n−رأسی با درجهٔ ورودی برابر با درجهٔ خروجی در هر رأس وجود دارد اگر، و فقط اگر، n فرد باشد.

۲۴.۴.۱. مینیمم n را طوری تعیین کنید که یک جفت تورنمنت n−رأسی نایکریخت با فهرست درجه‌های خروجی یکسان وجود داشته باشد.

۲۵.۴.۱. (!) فرض کنیم $p_m \geq \cdots \geq p_۱$ و $q_n \geq \cdots \geq q_۱$ دنباله‌هایی از اعداد صحیح نامنفی باشند. جفت (p,q) ***گرافیکی مضاعف*** است اگر، و فقط اگر، یک گراف دوبخشی ساده وجود داشته باشد که در آن $p_۱$، ...، p_m درجه‌های رأسهای متعلق به یک مجموعهٔ بخشی، و $q_۱$، ...، q_n درجه‌های رأسهای متعلق به مجموعهٔ بخشی دیگر باشند.

الف) ثابت کنید که (p,q) گرافیکی مضاعف است اگر، و فقط اگر، (p',q') گرافیکی مضاعف باشد، در حالی که (p',q') از (p,q) با حذف بزرگترین عنصر $p_۱$ از p و تفریق عدد یک از هر $p_۱$ بزرگترین عناصر q به‌دست می‌آید.

ب) فرض کنیم G و H دو گراف دوبخشی ساده هستند که هریک دارای افراز مضاعف رأسهای $V = X \cup Y$ می‌باشند. ثابت کنید که به‌ازای هر $v \in V$ داریم $d_G(v) = d_H(v)$ اگر، و فقط اگر، دنباله‌ای از ۲−جابجاییها وجود داشته باشد که G را به H بدون هیچ تغییر افراز مضاعف تبدیل کند (هر ۲−جابجایی دویال متصل کننده X و Y را به‌جای دو یال دیگر متصل کننده X و Y جایگزین می‌کند).

۲۶.۴.۱. فرض کنیم A و B دو ماتریس m در n با درایه‌های در $\{۰, ۱\}$ باشند.

ثابت کنید که اگر A و B دارای بردار یکسانی از مجموعهای سطر و دارای بردار یکسانی از مجموعهای ستون باشند، آنگاه A را می‌توان به‌وسیلهٔ دنباله‌ای از گامها به‌طوری که ۰ها و ۱ها در یک زیرماتریس جایگشتی ۲ در ۲ تعویض می‌شوند به B تبدیل کرد (با در نظر گرفتن دو سطر و دو ستون، زیرماتریسهای $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$ را می‌توان جایگزین یکدیگر نمود). این نتیجه‌گیری را در بافت گرافهای سودار تعبیر کنید. (رایزر[1] [۱۹۷۵])

۲۷.۴.۱. (!) فرض کنیم G و H دو تورنمنت روی یک مجموعهٔ رأسهای V باشند. ثابت کنید که به‌ازای هر $v \in V$ داریم $d_G^+(v) = d_H^+(v)$ اگر، و فقط اگر، G را بتوان با یک دنباله از سو-برگشتها روی دورهای به‌طول ۳ به H تبدیل کرد. (*راهنمایی:* از استقرار روی تعداد یالهای سودار متفاوت در G و H استفاده کنید، و رأسی را که متصل به ماکسیمم تعداد چنین یالهایی است در نظر بگیرید.) رایزر [۱۹۶۴]

۲۸.۴.۱. (+) فرض کنیم که $۰ \le p_۱ \le \cdots \le p_n$ یک دنبالهٔ ناکاهشی از اعداد صحیح باشد. ثابت کنید که تورنمنتی با درجه‌های خروجی $p_۱$، ...، p_n وجود دارد اگر، و فقط اگر، برای $۱ \le k < n$ داشته باشیم $\sum_{i=۱}^{k} p_i \ge \binom{k}{۲}$ و $\sum_{i=۱}^{n} p_i = \binom{n}{۲}$. (لاندو [۱۹۵۳])

۲۹.۴.۱. بنابر گزاره ۱۳.۴.۱، هر تورنمنت دارای یک شاه است. با استفاده از این مطلب ثابت کنید که هر تورنمنت که هیچ رأسی از درجهٔ ورودی ۰ نداشته باشد دارای حداقل دو شاه است.

۳۰.۴.۱. یک رأس x را در تورنمنت T در نظر می‌گیریم. اگر x دارای درجهٔ ورودی ۰ باشد، x را یک شاه می‌نامیم و متوقف می‌شویم. در غیر این‌صورت، x را حذف

1) Ryser

می‌کنیم و تالیهای آن را (همسایه‌های خروجی) و گام تکراری روی باقیمانده تورنمنت را تکرار می‌کنیم. ثابت کنید که این الگوریتم یک شاه می‌سازد.

۳۱.۴.۱. ثابت کنید که اگر n فرد باشد، آنگاه یک تورنمنت n–رأسی وجود دارد که در آن هر بازیکن یک شاه است. ثابت کنید هنگامی که ۴ $= n$ باشد، هیچ چنین تورنمنتی وجود ندارد.

۳۲.۴.۱. ثابت کنید که برای هر گراف سودار D یک مجموعهٔ S وجود دارد به‌طوری که $D[S]$ دارای هیچ یالی نیست، اما هر رأس از S به‌وسیلهٔ مسیری به‌طول حداکثر ۲ قابل دسترسی است (این مطلب قضیهٔ ۱۳.۴.۱ را تعمیم می‌دهد). (*راهنمایی*: از استقرای قوی روی $n(D)$ استفاده کنید.) خواتل– لواس [۱۹۷۴]).

۳۳.۴.۱. فرض کنیم G یک تورنمنت است و $L_۰$ رأسهای آن را به‌ترتیبی فهرست می‌کند. اگر y در $L_۰$ بیدرنگ بعد از x بیاید، اما در G، $y \to x$، آنگاه yx یک ***یال برگشت*** است. ما مجاز هستیم که x و y را به‌ترتیب جابجا کنیم هنگامی که yx یک یال برگشت باشد (این کار ممکن است تعداد یالهای برگشت را افزایش دهد). فرض کنیم یک دنبالهٔ $L_۰$، $L_۱$، ... از جابجاسازی به‌طور پیاپی یک یال برگشت به ترتیب جاری باشد. ثابت کنید که این فرآیند همواره به فهرستی بدون یالهای برگشت می‌انجامد. ماکسیمم تعداد گامها را تا پایان تعیین کنید. (توضیح: در حالت خاص که در آن رأسها متناظر با اعداد و هر یال دلالت بر عدد بالاتر جفت دارد، این نتیجه می‌گوید که جابجاسازی به‌طور پیاپی دو عدد مجاور که خارج از ترتیب هستند همواره در نهایت فهرست را مرتب می‌کند.) (لوکی[1] [۱۹۹۵])

۳۴.۴.۱. یک گراف سودار **تک مسیر** است اگر برای هر جفت از رأسهای x، y حداکثر یک x,y–مسیر (سودار) وجود داشته باشد. فرض کنیم T_n تورنمنت روی n رأس با

1) Locke

یال میان v_i و v_j باشد که سودار به‌طرف رأس با اندیس بزرگتر است. ماکسیمم تعداد یالها در یک زیرگراف تک مسیر T_n چیست؟ چند تا زیرگراف تک مسیر با ماکسیمم تعداد یالها وجود دارند؟ (*راهنمایی:* از قضیهٔ توران استفاده کنید.) (مورر–رابینوویچ –تروتر[1] [۱۹۸۰])

---

1) Rabinovitch-Trotter

۲

درختها و فاصله

۲-۱ ویژگیهای اساسی

واژهٔ «درخت» اشاره به بیرون آمدن شاخه از یک ریشهٔ بدون کامل کردن یک دور می‌کند. درختها به عنوان گرافها دارای کاربردهای فراوانی هستند، خصوصاً در ذخیرهٔ داده‌ها و ارتباطات (از جمله محاسبهٔ فاصله‌ها).

۲.۱.۱. تعریف. یک گراف که دارای دور نباشد **بیدور** است. یک **جنگل** یک گراف بیدور است؛ یک **درخت** یک گراف بیدور همبند است. یک **برگ** (یا *رأس آویخته*) رأسی از درجهٔ ۱ است. یک *زیرگراف* **فراگیر** از G زیرگرافی با مجموعهٔ رأسهای $V(G)$ می‌باشد. یک **درخت** *فراگیر* یک زیرگراف فراگیری است که درخت باشد.

اگر G دارای یک u,v–مسیر باشد، آنگاه ***فاصلهٔ*** u تا v، که آن را به صورت $d_G(u,v)$ و یا به سادگی $d(u,v)$ می‌نویسیم کوچکترین طول یک u,v– مسیر است. اگر G دارای چنین مسیری نباشد، آنگاه $d(u,v)=\infty$.

یک زیرگراف فراگیر از G لزومی ندارد که همبند باشد، و یک زیرگراف همبند از G الزاماً یک زیرگراف فراگیر نیست. به عنوان مثال، زیرگراف با مجموعهٔ رأسهای $V(G)$ و مجموعهٔ یالهای ϕ فراگیر است ولی همبند نیست (اگر $n(G) > 1$)، و زیرگراف متشکل از یک یال منفرد همبند است اما فراگیر نیست (اگر $n(G)$).

ویژگیهای درختها

درختها دارای مشخص‌سازیهای هم‌ارز بسیاری هستند، که هر کدام را می‌توان به عنوان تعریف در نظر گرفت. چنین مشخص سازیها سودمند هستند، زیرا ما تنها نیاز داریم که تحقیق کنیم یک گراف در یکی از آنها صدق می‌کند تا ثابت کنیم که یک درخت است، و سپس می‌توانیم از همهٔ دیگر ویژگیها استفاده کنیم.

نخست ثابت می‌کنیم که حذف یک برگ از یک درخت، درخت کوچکتری را به‌دست می‌دهد. این امر ایجاب می‌کند که هر درخت با بیش از یک رأس می‌تواند با افزودن یک رأس از درجهٔ ۱ از درختی کوچکتر بروید. این مطلب اثباتهای استقرایی را برای درختها آسان می‌کند، بدین ترتیب که با در نظر گرفتن گام استقرا یک درخت $n+1$−رأسی با افزودن یک رأس به یک درخت n−رأسی دلخواه توسعه پیدا می‌کند، بدون اینکه در دام استقرا گرفتار شویم.

۲.۱.۲. لم. هر درخت متناهی با حداقل دو رأس دارای حداقل دو برگ است. حذف یک برگ از یک درخت n−رأسی یک درخت با $n-1$ رأس ایجاد می‌کند.

اثبات. هر گراف همبند با حداقل دو رأس دارای یک یال است. در یک گراف بیدور، نقاط پایانی یک مسیر ماکسیمم دارای تنها یک همسایه روی مسیر است و بنابراین دارای درجهٔ ۱ است. از این‌رو نقاط پایانی یک مسیر ماکسیمم دو برگ مطلوب را مسیر می‌سازد.

فرض کنیم v یک برگ از یک درخت G باشد، و فرض کنیم $G' = G - v$. اگر $u, w \in V(G')$، آنگاه هیچ u,v-مسیر P در G از رأس v از درجهٔ ۱ نمی‌گذرد، بنابراین P نیز در G' موجود است. از این‌رو G' همبند است. چون حذف یک رأس نمی‌تواند یک دور بسازد، G' نیز بیدور است. از اینجا نتیجه می‌گیریم که G' یک درخت با $n - ۱$ رأس می‌باشد. □

۳.۱.۲. قضیه. برای یک گراف ساده n-رأسی G (با $n \geq ۱$)، عبارتهای زیر هم‌ارزاند (و درختهای با n رأس را مشخص می‌کنند).

الف) G همبند است و دارای هیچ دوری نیست.

ب) G همبند است و دارای $n - ۱$ یال است.

پ) G دارای $n - ۱$ یال است و هیچ دوری ندارد.

ت) برای هر جفت $u, v \in V(G)$، G دقیقاً دارای یک u, v-مسیر است.

اثبات. نخست هم‌ارزی (الف)، (ب)، (پ) را اثبات می‌کنیم، و سپس ثابت می‌کنیم که هر یک از دو {همبند، بیدور، $n - ۱$ یال} سومی را ایجاب می‌کند.

(الف) $\Rightarrow$ (ب)، (پ). از استقرا روی n استفاده می‌کنیم. برای $n = ۱$، یک گراف ۱-رأسی بیدور هیچ یالی ندارد. برای گام استقرا، فرض کنیم $n > ۱$، و فرض کنیم برای گرافهای با کمتر از n رأس استلزام برقرار است. با در نظر گرفتن G، لم ۲.۱.۲ یک برگ v را فراهم می‌کند و بیان می‌کند که $G' = G - v$ بیدور و همبند است. با به‌کار بردن فرض استقرا برای G' نتیجه می‌شود که $e(G') = n - ۲$، و از این‌رو $e(G) = n - ۱$.

(ب) $\Rightarrow$ (الف)، (پ). یالها را از دورهای G یکی یکی حذف می‌کنیم تا اینکه گراف حاصل G' بیدور باشد. چون هیچ یالی از یک دور یک یال برشی نیست (فرع ۱۳.۲.۱)، از این‌رو G' همبند است. بنابر پاراگراف بالا، G' دارای $n - ۱$ یال است. چون این تعداد برابر $e(G)$ است، هیچ یالی حذف نشده است، و G خود بیدور است.

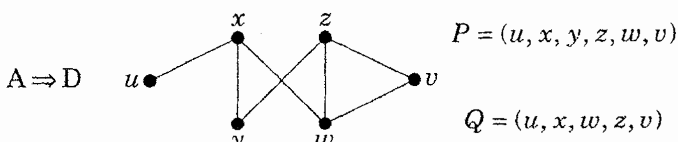
(پ) $\Rightarrow$ (الف)، (ب). فرض کنیم G دارای k مؤلفه به‌ترتیب $n_۱$، ...، n_k باشد.

چون G دارای هیچ دروی نیست، بنابراین هر مؤلفه در ویژگی (الف) صدق می‌کند، و بنابر پاراگراف نخست مؤلفهٔ iاُم دارای $n_i - ۱$ یال است. از جمع این یالها روی همه مؤلفه‌ها نتیجه می‌شود که $e(G) = \sum(n_i - ۱) = n - k$. داریم $e(G) = n - ۱$، بنابراین $k = ۱$، و G همبند است.

(الف) $\Leftarrow$ (ت). چون G همبند است، بنابراین G دارای حداقل یک u,v-مسیر برای هر جفت $u, v \in V(G)$ است.

فرض کنیم G دارای u,v-مسیرهای متمایز P و Q باشد. فرض کنیم $e = xy$ یک یال در P و نه در Q باشد. تسلسل P با وارون Q یک گشت بسته است که e در آن دقیقاً یک بار ظاهر می‌شود. از این‌رو $(P \cup Q) - e$ یک x,y-گشت است که شامل e نیست. بنابر لم ۶.۲.۱، این شامل یک x,y-مسیر است، که یک دور را با e کامل می‌کند، و با فرض بیدور بودن G در تناقض است. از این‌رو G دقیقاً دارای یک u,v-مسیر است.

(ت) $\Leftarrow$ (الف). اگر برای هر $u, v \in V(G)$ یک u,v-مسیر وجود داشته باشد، آنگاه G همبند است. اگر G دارای یک دور C باشد، آنگاه G دارای دو مسیر میان هر جفت از رأسهای روی C است. □



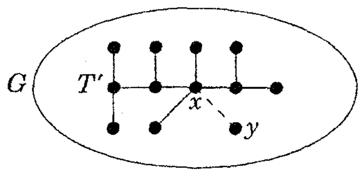
۴.۱.۲. تبصره. *هر گراف همبند شامل یک درخت فراگیر است.* مانند اثبات (ب) $\Leftarrow$ (الف)، (پ) در بالا، می‌توانیم با یک گراف همبند G آغاز کرده، و یالی از یک دور را مکرراً حذف کنیم تا زیرگرافی فراگیر که بیدور باشد به‌دست آوریم. چون یک یال از یک دور یک یال برشی نیست، گراف باقیمانده همبند است. □

نتیجهٔ بعدی حذف یک برگ را با استفاده از استقرا توضیح می‌دهد.

۵.۱.۲. گزاره. اگر T یک درخت با k یال و G یک گراف ساده با $\delta(G) \geq k$ باشد،

آنگاه T یک زیرگراف از G است.

اثبات. از استقرا روی k استفاده می‌کنیم. برای گام پایه $k = ۰$، توجه کنید که هر گراف ساده شامل $K_۱$ است. برای گام استقرا، فرض کنیم $k > ۰$، و فرض کنیم که ادعا برای درختهای با کمتر از k یال برقرار باشد. چون $k > ۰$، لم ۲.۱.۲ به ما امکان می‌دهد تا یک برگ v را با همسایه u در T انتخاب کنیم و درخت کوچکتر $T' = T - v$ را در نظر بگیریم. بنابر فرض استقرا، G شامل T' به‌عنوان یک زیرگراف است، زیرا $\delta(G) \geq k > k - ۱$. فرض کنیم x رأسی در این نسخه از T' باشد که متناظر با u است (تصویر را ببینید). چون T' تنها $k - ۱$ رأس به جز u دارد، x دارای یک همسایهٔ y در G است که در این نسخه از T' ظاهر نمی‌شود. با افزودن یال xy که متناظر با uv است، این نسخه از T' در G را به یک نسخه از T بسط می‌دهد. □



چون یک درخت دارای هیچ دوری نیست، فرع ۱۳.۲.۱ ایجاب می‌کند که هر یال از یک درخت یک یال برشی باشد. چون یک درخت دارای یک مسیر یکتاست که هر جفت از رأسها را به هم می‌پیوندد، افزودن هر یال دقیقاً یک دور می‌سازد. در مرحله بعدی این ملاحظات را به‌کار می‌بریم. از تفریق و جمع به عنوان اعمالی که متضمن مجموعه‌هاست برای نشان دادن حذف و شمول یالها استفاده می‌کنیم.

۶.۱.۲. گزاره. اگر T، T' دو درخت فراگیر از یک گراف همبند G باشند، و $e \in E(T) - E(T')$، آنگاه یک یال $e' \in E(T') - E(T)$ وجود دارد به‌طوری که $T - e + e'$ یک درخت فراگیر از G باشد.

اثبات. چون e یک یال برشی از T است، می‌توانیم فرض کنیم U، U' مجموعه‌های

رأسهای مؤلفه‌های $T - e$ باشند. چون T' همبند است، بنابراین شامل یک مسیر P میان نقاط پایانی e می‌باشد. از آنجایی که P رأسهای در U و U' را به هم می‌پیوندد، دارای حداقل یک یال با نقاط پایانی در هر دو مجموعه است. هر چنین یالی می‌تواند به عنوان e' به‌کار رود، زیرا $T - e$ را بدون مطرح کردن یک دور دوباره متصل می‌کند. □

۷.۱.۲. گزاره. اگر T، T' دو درخت فراگیر از یک گراف همبند G باشند، و $e \in E(T) - E(T')$، آنگاه یک یال $e' \in E(T') - E(T)$ وجود دارد به‌طوری که $T' + e - e'$ یک درخت فراگیر از G باشد.

اثبات. افزودن e به T' یک دور یکتای C را می‌سازد. یالهای این دور به جز e نمی‌توانند همگی به T تعلق داشته باشند، زیرا T دارای هیچ دوری نیست. اگر هر یال $e' \in E(T') - E(T)$ را از C حذف کنیم، یک گراف بیدور همبند $T' + e - e'$ به‌دست می‌آید. □

با انتخاب مناسب $e' \in E(T) - E(T')$، این دو نتیجه به‌طور همزمان برقرار خواهند بود (تمرین ۲۰).

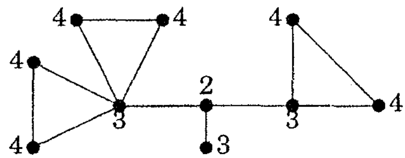
فاصله در گرافها

در یک گراف همبند، دو رأس تا چه اندازه می‌توانند دور از هم باشند؟

۸.۱.۲. تعریف. **قطر** یک گراف G عبارت است از $\max_{u,v\in V(G)} d(u,v)$. ***خروج از مرکز*** یک رأس u که آن را به‌صورت $\varepsilon(u)$ می‌نویسیم عبارت است از $\max_{v\in V(G)} d(u,v)$. **شعاع** G برابر است با $\min_{u\in V(G)} \varepsilon(u)$. **یک مرکز** از G رأسی با خروج از مرکز مینیمم می‌باشد.

در یک گراف ناهمبند، قطر و شعاع (و خروج از مرکز هر رأس) نامتناهی هستند، زیرا فاصلهٔ میان رأسها در مؤلفه‌های مختلف نامتناهی است. هرگراف همبند متناهی دارای حداقل یک

مرکز است، و بستگی میان قطر و خروج از مرکز به صورت $\operatorname{diam} G = \max_{u\in V(G)} \varepsilon(u)$ است. استفاده از «قطر» در نظریهٔ گراف از هندسه الهام گرفته شده است، که در آنجا قطر برابر است با بزرگترین فاصلهٔ میان دو رأس در یک مجموعه. درگراف زیر، هر رأس را با خروج از مرکزش نشاندار کرده‌ایم؛ این گراف تنها دارای یک مرکز است.

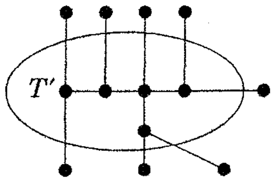


هر مسیر در یک درخت کوتاهترین (تنها!) مسیر میان نقاط پایانی آن است، بنابراین قطر یک درخت طول بلندترین مسیر آن است. در مرحلهٔ بعدی مرکزهای درختها را توضیح می‌دهیم. در اثبات از حذف همهٔ برگها برای به‌دست آوردن یک زیردرخت استفاده می‌کنیم؛ این امر بعضی اوقات اثبات استقرایی مناسبتری را از حذف یک برگ فراهم می‌کند.

۹.۱.۲. قضیهٔ. (ژوردان [۱۸۶۹]) یک درخت دقیقاً دارای یک مرکز یا دارای دو مرکز مجاور است.

اثبات. از استقرا روی تعداد رأسها استفاده می‌کنیم؛ گزاره برای درختهای با یک یا دو رأس بدیهی است. برای $n > ۲$، فرض کنیم T یک درخت n–رأسی دلخواه باشد. T' را با حذف هر برگ از T تشکیل می‌دهیم؛ توجه کنید که T' نیز یک درخت است. برای هر رأس u در یک درخت، هر رأس در فاصلهٔ ماکسیمم از u یک برگ است (مسیر میان v و دورترین رأس x را در نظر می‌گیریم؛ اگر x یک برگ نباشد، آنگاه دارای همسایهٔ دیگری است، که از v دورتر است). چون همهٔ برگها حذف شده‌اند و هیچ مسیر میان دو رأس دیگر از یک برگ استفاده نمی‌کند، برای هر $u \in V(T')$ داریم $\varepsilon_{T'}(u) = \varepsilon_T(u) - ۱$. همچنین، خروج از مرکز یک برگ در T بزرگتر از خروج از مرکز همسایه‌اش در T است.

از این‌رو رأسهایی که $\varepsilon_T(u)$ را مینیمم می‌کنند همان رأسهایی هستند که $\varepsilon_{T'}(u)$ را مینیمم می‌کنند. بنابر فرض استقرا، برای T' آنها متشکل از یک رأس منفرد یا دو رأس مجاور می‌باشند. □



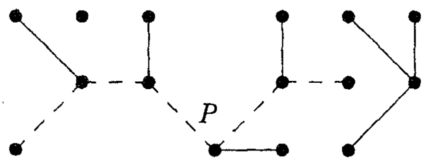
اثبات یک نتیجهٔ قویتر

اثبات اینکه یک عدد صحیح ناصفر است با ثابت کردن اینکه فرد است شاید آسانترین راه باشد. اثبات گزاره‌ای دربارهٔ درختها با ثابت کردن به صورت کلیتر برای جنگلها یا برای همهٔ گرافهای دوبخشی ممکن است آسانترین راه باشد. جنگلها گرافهای بیدوری هستند که لزومی ندارد همبند باشند؛ هر مؤلفه از یک جنگل یک درخت است. هنگامی که گزاره‌ای را دربارهٔ جنگلها به وسیلهٔ استقرا ثابت می‌کنیم، می‌توانیم یک رأس دلخواه و یا یالی را در گام استقرا حذف کنیم. در یک اثبات به‌وسیلهٔ استقرا برای درختها، اگر یک یال یا یک مسیر را از یک درخت حذف کنیم، دیگر درختی نداریم و نمی‌توانیم فرض استقرا را مستقیماً به‌کار ببریم؛ تنها می‌توانیم آن را برای هر مؤلفه از آنچه باقی می‌مانده به‌کار بریم.

۲.۱.۱۰. قضیه. اگر G درختی با $2k \geq 0$ رأس از درجهٔ فرد باشد، آنگاه $E(G)$ اجتماع k مسیر دو به دو مجزا–یال است.

اثبات. ادعا را برای هر جنگل G، با استفاده از استقرا روی k ثابت می‌کنیم. گام پایه: اگر $k = 0$، آنگاه G دارای هیچ برگی نیست و از این‌رو هیچ یالی ندارد. برای گام استقرا، فرض کنیم $k > 0$، و فرض کنیم هر جنگل با $2k - 2$ رأس از درجهٔ فرد یک تجزیه به $k - 1$ مسیر دارد. چون $k > 0$، یک مؤلفه از G یک درخت با حداقل دو رأس است. این مؤلفه دارای حداقل دو برگ است؛ فرض کنیم P مسیری باشد که دو برگ را

به هم می‌پیوندد. حذف $E(P)$ دو تایگی درجهٔ رأسها را تنها برای نقاط پایانی P تغییر می‌دهد؛ آنها را زوج می‌کند. از این‌رو $G - E(P)$ جنگلی با $2k - 2$ رأس از درجهٔ فرد است. بنابر فرض استقرا، $G - E(P)$ اجتماع $k - 1$ مسیر دو به دو مجزا–یال است؛ همراه با P، این مسیرها $E(G)$ را افراز می‌کنند. □



بعضی اوقات اثبات یک نتیجه *نیاز* به اثبات نتیجه‌ای قویتر دارد.

۱۱.۱.۲. مثال. *مجموع فاصله‌ها از برگی از یک درخت*. مجموع فاصله‌ها از برگی از مسیر P_n به همهٔ رأسهای دیگر برابر است با $\sum_{i=0}^{n-1} i = \binom{n}{2}$، و مستقیماً متوجه می‌شویم که هیچ درخت $n-$ رأسی دیگری که دارای یک برگ با مجموع فاصلهٔ بیشتر باشد وجود ندارد. فرض کنیم می‌خواهیم ثابت کنیم که مجموع فاصله‌ها به رأسهای دیگر برای هر برگ v از یک درخت n–رأسی حداکثر $\binom{n}{2}$ است. اگر بخواهیم از استقرا استفاده کنیم، فاصله‌ها از v را می‌توان برحسب فاصله‌های همسایه‌اش w در درخت $T - v$ بیان کرد، اما لزومی ندارد که w یک برگ در $T - v$ باشد. بدین سان اثبات این قضیهٔ بدون اثبات نتیجه قویتر که مسلماً برای هر رأس از یک درخت برقرار است، دشوار می‌باشد. □

۱۲.۱.۲. قضیه. اگر u رأسی از یک درخت n–رأسی G باشد، آنگاه $\sum_{v \in V(G)} d(u, v) \leq \binom{n}{2}$.

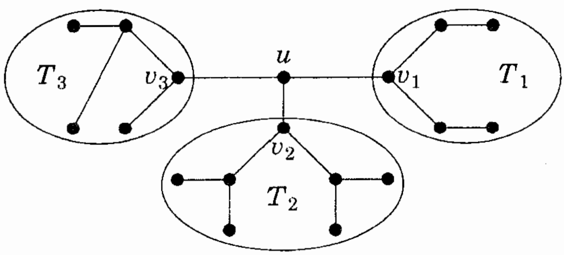
اثبات. از استقرا روی n استفاده می‌کنیم؛ نتیجه برای $n = 2$ به‌طور بدیهی برقرار است. فرض کنیم $n > 2$. گراف $T - u$ جنگلی با مؤلفه‌های T_1، ...، T_k است، که در آن $k \geq 1$. چون T همبند است، u دارای همسایه‌ای در هر T_i است؛ زیرا T دارای هیچ

دوری نیست، u دقیقاً دارای یک همسایهٔ v_i در هر T_i است. اگر $v \in V(T_i)$، آنگاه u,v–مسیر یکتا در T از v_i می‌گذرد، و داریم $d_T(u,v) = ۱ + d_{T_i}(v_i, v)$. قرار می‌دهیم $n_i = n(T_i)$، خواهیم داشت

$$\sum_{v\in V(T_i)} d_T(u,v) = n_i + \sum_{v\in V(T_i)} d_{T_i}(v_i, v)$$

بنابر فرض استقرا، $\sum_{v\in V(T_i)} d_{T_i}(v_i,v) \le \binom{n_i}{۲}$. اگر فرمول مجموع را برای فاصله‌های از u روی همهٔ مؤلفه‌های $T-u$ در نظر بگیریم، به‌دست می‌آوریم $\sum_{v\in V(T)} d_T(u,v) \le (n-۱) + \sum_i \binom{n_i}{۲}$. اینک ملاحظه می‌کنیم که هرگاه $\sum n_i = m$، داریم $\sum \binom{n_i}{۲} \le \binom{m}{۲}$ ، زیرا طرف راست یالهای K_m و طرف چپ یالهای یک زیرگراف از K_m (اجتماع مجزایی از خوشه‌ها) را می‌شمارد. از این‌رو داریم

$$\sum_{v\in V(T)} d_T(u,v) \le (n-۱) + \binom{n-۱}{۲} = \binom{n}{۲} \qquad \square$$



هنگامی که می‌خواهیم $P(n)$ را با استقرا روی n ثابت کنیم، ممکن است اطلاعات بیشتری دربارهٔ $P(n-۱)$ پیدا کنیم که تنها دربارهٔ شئ کوچکتر برای اثبات $P(n)$ به جای شئ بزرگتر مورد نیاز باشد. به عنوان مثال، در مثال ۱۱.۱.۲ نیاز به برقرار بودن گزاره‌ای برای همهٔ رأسهای درخت کوچکتر، نه فقط برگها، داشتیم. اگر این نتایج اضافی را به گزاره‌ای که می‌خواستیم ثابت کنیم بیفزاییم و یک گزارهٔ قویتر $Q(n-۱)$ را تشکیل دهیم، آنگاه گام استقرا $P(n)$ را از روی $Q(n-۱)$ ثابت می‌کند، اما باید گزارهٔ قویتر $Q(n)$ را نیز برای کامل کردن گام استقرا برای گزاره Q ثابت کرد. این یک نوع از «اثبات یک نتیجهٔ قویتر» است؛ و نام ویژهٔ «باردهی فرض استقرا» را دارد.

«تبدیل کردن به یک حالت خاص» به مفهومی فن عکس می‌باشد. می‌توانیم یک قضیه را دربارهٔ گرافهای دلخواه به حالت گرافهای همبند تبدیل کنیم بدین‌ترتیب که ثابت کنیم نتیجهٔ به‌دست آمده برای گرافهای دلخواه می‌تواند دربارهٔ گرافهای همبند نیز اعتبار داشته باشد. به‌طور مشابهی، برخی از مسائل دربارهٔ گرافهای کلی را می‌توان به مورد درختها تبدیل کرد.

۱۳.۱.۲. لم. اگر H یک زیرگراف از G باشد، آنگاه $d_G(u,v) \le d_H(u,v)$.

اثبات. هر u,v–مسیر در H در G نیز ظاهر می‌شود (G ممکن است دارای u,v–مسیرهای اضافی باشد که از هر مسیر در H کوتاهتر باشند). □

۱۴.۱.۲. فرع. اگر u رأسی از یک گراف همبند G باشد، آنگاه

$$\sum_{v\in V(G)} d(u,v) \le \binom{n(G)}{۲}$$

اثبات. فرض کنیم T یک درخت فراگیر از G باشد. بنابر لم ۱۳.۱.۲، داریم $d_T(u,v) \ge d_G(u,v)$. چون از پیش می‌دانیم که کران برای حالت خاص درختها چیست، داریم

$$\sum_{v\in V(G)} d_G(u,v) \le \sum_{v\in V(G)} d_T(u,v) \le \binom{n(G)}{۲}$$ □

مجموع فاصله‌ها روی همهٔ جفتهای رأسهای متمایز در یک گراف G، *اندیس وینر*[1] یعنی $W(G) = \sum_{u,v\in V(G)} d(u,v)$ می‌باشد. با نسبت دادن رأسها به اتمها و یالها به پیوندهای اتمی، می‌توانیم از گرافها برای مطالعهٔ مولکولها استفاده کنیم. اندیس وینر در ابتدا به‌وسیلهٔ وینر و برای مطالعهٔ نقطهٔ جوش پارافین به‌کار رفته است، اندیس وینر در مورد گرافها نشان داده شده است که با بسیاری ویژگیهای شیمیایی مولکولهای متناظر در ارتباط است. تمرین ۲۹ مقادیر اکسترم اندیس وینر را روی درختها جستجو می‌کند.

1) Wiener

درختهای فراگیر مجزا

دیدیم که هر گراف همبند دارای یک درخت فراگیر است. درختهای فراگیر مجزا–یال پروتکلهای ارتباطی متناوب را در رویدادی که درخت اولیه فاقد یالی باشد فراهم می‌کنند.

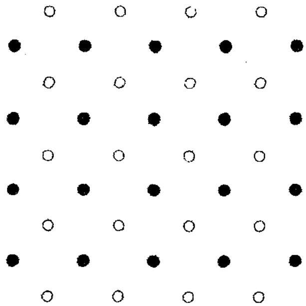
توته [۱۹۶۱] و ناش – ویلیامز[1] [۱۹۶۱] به‌طور مستقل گرافهای دارای k درخت فراگیر دو به دو مجزا-یال را مشخص کرده‌اند (تمرین ۴۰ را ببینید).

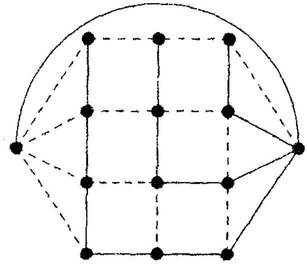
یکی از کاربردهای درختهای فراگیر مجزا–یال را شرح می‌دهیم. دیوید گیل[2] یک بازی را تحت عنوان «پل زنی»[3] ابداع و به بازار عرضه نموده است. هریک از دو بازیکن یک شبکهٔ مستطیلی از میله‌ها دارند. بازیکنان به‌طور متناوب حرکت می‌کنند، در هر حرکت یک جفت از میله‌های آماده را با پلی به‌طول واحد به هم می‌پیوندند. در شکل زیر، میله‌های بازیکن ۱ توپر، و میله‌های بازیکن ۲ توخالی هستند. هدف بازیکن ۱ ساختن پلی از چپ به راست، و هدف بازیکن ۲ ساختن پلی از بالا به پایین است.

بازیکن ۱ می‌تواند با یک حرکت دلخواه آغاز کند و سپس راهبرد بازیکن ۲ را دنبال کند، اگر راهبرد بازیکن ۲ همواره پلی را در مکان حرکت نخست ایجاب کند یک حرکت دلخواه انجام می‌دهد. اگر راهبرد بازیکن ۲ منجر به یک برد شود، بازیکن ۱ به جای او برنده می‌شود، زیرا حرکتهای اضافی ضرری ندارند. از این‌رو بازیکن ۲ نمی‌تواند یک راهبرد برد داشته باشد. با استفاده از پنداره‌های هامنی بودن، می‌توان نشان داد که نتیجه مساوی امکان ندارد؛ بنابراین بازیکن ۱ باید یک راهبرد بُرد داشته باشد. در اینجا یک راهبرد مشخصی را برای بُرد بازیکن ۱ ارائه می‌دهیم. (بحث حالت کلیتر در مبحث «ماترویدها» وجود دارد ... قضیهٔ ۴۴.۲.۸ را ببینید.)

---

1) Nash-Williams 2) Gale David 3) «Bridg-it»(Copyright 1960 by Hassenfeld Bros., Inc.-« Hasbro Toys».





۱۵.۱.۲. قضیه. بازیکن ۱ در پل زنی دارای یک راهبرد بُرد است.

اثبات. گرافی از اتصالهای پتانسیل برای بازیکن ۱ تشکیل می‌دهیم. میله‌هایی که در یک انتها قرار دارند هم‌ارزاند، بنابراین میله‌های (توپُر) را از ستونهای انتهایی به‌عنوان رأسهای منفرد جمع‌آوری می‌کنیم. یک یال کمکی میان انتهاها اضافه می‌کنیم. شکل نشان می‌دهد که در این گراف اجتماع دو درخت فراگیر مجزا-یال است؛ یک توصیف فنی را از دو درخت حذف می‌کنیم.

دو درخت با هم شامل مسیرهای مجزا-یال میان رأسهای هدف می‌باشند. چون یال کمکی در واقع وجود ندارد، می‌توانیم وانمود کنیم که بازیکن ۲ نخست حرکت کرده و آن یال را به‌دست آورده است. یک حرکت به وسیلهٔ بازیکن ۲ یک یال e را در گراف برش می‌دهد، و دیگر در دسترس نخواهد بود. این امر یکی از درختها را به دو مؤلفه بُرش می‌دهد. بنابر لم ۶.۱.۲ یک یال e'ای از درخت دیگر، درخت بریده را دوباره متصل می‌کند.

بازیکن ۱ چنین یال e'ای را انتخاب می‌کند. این امر e' را غیرقابل بریدن می‌کند، در واقع e' را در هر دو درخت فراگیر قرار می‌دهد. اگر e' را یک یال مضاعف با یک نسخه در هر درخت در نظر بگیریم، آنگاه گراف چندگانه‌ای متشکل از دو درخت فراگیر مجزا-یال به‌دست خواهیم آورد. چون بازیکن ۲ نمی‌تواند یک یال مضاعف را قطع کند، در این صورت بازیکن ۲ نمی‌تواند هر دو درخت را قطع نماید، و بازیکن ۱ همواره می‌تواند

دفاع کند. این فرآیند تنها هنگامی پایان می‌یابد که تنها یالهای مضاعف باقیمانده باشند. این یالهای مضاعف یک درخت فراگیر را که به صورت پلهای واقعی در دست بازیکن ۱ است تشکیل می‌دهند، بنابراین بازیکن ۱ مسیری میان انتهاهای مطلوب ساخته است.

تمرینات

۱.۱.۲. (−) برای هر k، رده‌های یکریختی درختهایی را با حداکثر شش رأس که درجهٔ ماکسیمم k دارند فهرست کنید. همین کار را برای قطر k انجام دهید. (دلیل موجهی که شامل هیچ ردهٔ دیگری نیستند ارائه دهید.)

۲.۱.۲. (−) *مشخص‌سازی درختها.*

الف) ثابت کنید که یک گراف G یک درخت است اگر، و فقط اگر، G همبند باشد و به‌ازای هر $e \in E(G)$، $G - e$ همبند نباشد.

ب) ثابت کنید که یک گراف ساده G یک درخت است اگر، و فقط اگر، به‌ازای هر $e \in E(\overline{G})$، افزودن یال e به G دقیقاً یک دور ایجاد کند.

۳.۱.۲. (−) ثابت کنید که یک گراف G یک درخت است اگر، و فقط اگر، G بیطوقه باشد و دقیقاً دارای یک درخت فراگیر باشد.

۴.۱.۲. (−) ثابت کنید که هر درخت با درجهٔ ماکسیمم $\Delta > ۱$ دارای حداقل Δ رأس از درجهٔ ۱ است. نشان دهید که این امر با ساختن درختی با $n-$ رأس و دقیقاً با Δ برگ، بهترین وضع ممکن برای هر انتخاب n، Δ با قید $n > \Delta \geq ۲$ است.

۵.۱.۲. (−) ثابت یا رد کنید: اگر n_i نشانگر تعداد رأسهایی از درجهٔ i در یک درخت T باشد، آنگاه $\sum in_i$ تنها به تعداد رأسهای T بستگی دارد.

۶.۱.۲. (−) یک هیدروکربن اشباع شده، مولکولی است که از k اتم کربن و l اتم هیدروژن با افزودن پیوندهایی میان اتمهای آنها به‌طوری که هر اتم کربن چهار پیوند، و هر اتم هیدورژن یک پیوند داشته باشد، تشکیل می‌شود، و هیچ دنباله‌ای از پیوندها دوری از

اتمها نمی‌سازد. ثابت کنید که $l = ۲k + ۲$. (باندی–مورتی [۱۹۷۶، صفحه ۲۷])

۷.۱.۲. (–) فرض کنیم T درختی با درجهٔ میانگین a است. $n(T)$ را تعیین کنید.

۸.۱.۲. (–) فرض کنیم T درختی با دقیقاً $k - ۱$ رأس است که برگ نیستند، در حالی که یکی به ازای هر $۲ \leq i \leq k$ دارای درجهٔ i است. $n(T)$ را تعیین کنید.

۹.۱.۲. (–) فرض کنیم T درختی است که در آن هر رأس دارای درجهٔ ۱ یا k است. مقادیر $n(T)$ را که این امر برای آنها ممکن است تعیین کنید.

۱۰.۱.۲. (–) ثابت کنید که هر درخت نابدیهی دارای حداقل دو مجموعهٔ مستقل ماکسیمال است، در حالی که برابری تنها برای ستاره‌هاست.

(*یادآوری:* ماکسیمال $\neq$ ماکسیمم)

۱۱.۱.۲. (!) فرض کنیم G یک گراف n–رأسی است به‌طوری که هر گراف به‌دست آمده با حذف یک رأس از G یک درخت باشد. تعداد یالهای G را تعیین کرده و از آن برای معین کردن خود G استفاده کنید.

۱۲.۱.۲. (!) فرض کنیم $d_۱$، ...، d_n اعداد صحیح باشند. ثابت کنید که درختی با درجه‌های رأسهای $d_۱$، ....، d_n وجود دارد اگر، و فقط اگر، $\sum d_i = ۲n - ۲$.

۱۳.۱.۲. فرض کنیم $d_۱ \geq \cdots \geq d_n$ اعداد صحیح نامنفی باشند. ثابت کنید که یک گراف چندگانه همبند (طوقه‌ها و یالهای چندگانه مجازاند) با دنبالهٔ درجه‌های $d_۱$، ...، d_n وجود دارد اگر، و فقط اگر، $\sum d_i$ زوج باشد، $d_n \geq ۱$، و $\sum d_i \geq ۲n - ۲$. (*راهنمایی:* تحقق را با تعداد مینیمم مؤلفه‌ها در نظر بگیرید.) آیا گزاره برای گرافهای ساده درست است؟

۱۴.۱.۲. فرض کنیم T درختی است که در آن هر رأس مجاور با یک برگ است که درجهٔ حداقل ۳ دارد. ثابت کنید که T دارای یک جفت از برگها با یک همسایهٔ مشترک است.

۱۵.۱.۲. ثابت کنید که یک گراف همبند ساده با دقیقاً دو رأس که رأسهای برشی نباشند

یک مسیر است.

۱۶.۱.۲. فرض کنیم e یالی در یک گراف همبند G باشد. ثابت کنید که e یک یال برشی از G است اگر، و فقط اگر، e متعلق به هر درخت فراگیر از G باشد. ثابت کنید که e یک طوقه است اگر، و فقط اگر، e به هیچ درخت فراگیر از G تعلق نداشته باشد.

۱۷.۱.۲. (!) فرض کنیم G یک گراف n–رأسی همبند باشد. ثابت کنید که G دقیقاً دارای یک دور است اگر، و فقط اگر، G دقیقاً دارای n یال باشد.

۱۸.۱.۲. فرض کنیم $k \geq ۱$، T درختی با $k + ۱$ یال، و G یک گراف ساده با درجهٔ میانگین حداقل $۲k$ باشد. با استفاده از تمرین ۸.۴.۱ ب ثابت که $T \subseteq G$.

۱۹.۱.۲. فرض کنیم T درختی با مرتبهٔ زوج باشد. ثابت کنید که T دقیقاً دارای یک زیرگراف است که در آن هر رأس درجهٔ فرد دارد.

۲۰.۱.۲. (!) فرض کنیم که T، T' دو درخت فراگیر از یک گراف همبند G باشند و $e \in E(T) - E(T')$. ثابت کنید که یک یال $e' \in E(T') - E(T)$ وجود دارد به طوری که $T' + e - e'$ و $T - e + e'$ هر دو درختهای فراگیر از G هستند.

۲۱.۱.۲. (!) یک زیرگراف H از یک گراف بیسوی G یک ***زیرگراف دوتایگی*** است اگر به ازای هر $v \in V(G)$ داشته باشیم $d_H(v) \equiv d_G(v)$ (به پیمانه ۲). ثابت کنید که هر درخت فراگیر از G شامل یک زیرگراف دوتایگی از G است. (***راهنمایی:*** از یک اثبات ساختاری یا استقرایی استفاده کنید. اگر پارامتر استقرا، هوشمندانه انتخاب شود، اثبات کاملاً کوتاه است.)

۲۲.۱.۲. (!) فرض کنیم G درختی با k برگ باشد. ثابت کنید که G اجتماع مسیرهای $P_۱$، …، $P_{\lceil k/۲ \rceil}$ است به‌طوری که به‌ازای هر $i \neq j$، داریم $P_i \cap P_j = \phi$. (آندو–کانیکو–گیرواکیو[1] [۱۹۹۰])

۲۳.۱.۲. (−) فرض کنیم G یک گراف باشد. ثابت کنید که یک زیرگراف ماکسیمال

---

1) Ando-Kaneko-Gervacio

از G که یک جنگل است متشکل از یک درخت فراگیر از هر مؤلفهٔ G است.

۲۴.۱.۲. ثابت کنید که هر ویژگی زیرجنگلهایی را مشخص می‌کند.

الف) هر زیرگراف القایی دارای یک رأس از درجهٔ حداکثر ۱ است.

ب) هر زیرگراف همبند یک زیرگراف القایی است.

۲۵.۱.۲. (−) فرض کنیم پردازنده‌ها در یک کامپیوتر موازی به وسیلهٔ k-تاییهای دودویی نشاندار شده باشند، در حالی که جفتها قادر به برقراری ارتباط به طور مستقیم هستند اگر، و فقط اگر، k-تاییها در مکعب k-بعدی Q_k مجاور باشند. فرض کنیم یک پردازنده با آدرس u می‌خواهد پیامی به پردازنده با آدرس v بفرستد. چگونه می‌تواند تعیین کند که به عنوان گام نخست پیام را از کوتاهترین مسیر به v بفرستد؟

۲۶.۱.۲. (!) فرض کنیم G یک گراف همبند است. فرض کنیم G' گراف جدیدی باشد که دارای یک رأس برای هر درخت فراگیر از G است، در حالی که دو رأس t، t' در G' یک یال تشکیل می‌دهند اگر، و فقط اگر، درختهای متناظر T، T' دقیقاً دارای $n(G) - ۲$ یال مشترک باشند. ثابت کنید که G' همبند است. فرمولی برای $d_{G'}(t, t')$ برحسب درختهای متناظر T، T' در G ارائه دهید.

۲۷.۱.۲. ***مرکزهای درختها.*** فرض کنیم T یک درخت است.

الف) یک اثبات نااستقرایی به‌دست دهید برای اینکه T دارای یک مرکز یا دو مرکز مجاور باشد.

ب) ثابت کنید که T دارای یک مرکز است اگر، و فقط اگر، قطر T دو برابر شعاع T باشد.

پ) با استفاده از قسمت (الف) ثابت کنید که اگر $n(T)$ فرد باشد، آنگاه هر خود ریختی از T یک رأس را برخود می‌نگارد.

۲۸.۱.۲. با در نظر گرفتن $x \in V(G)$، فرض کنیم $s(x) = \sum_{v \in V(G)} d(x, v)$. ثابت کنید که اگر G یک درخت باشد و $y, z \in N(x)$، آنگاه $۲s(x) < s(y) + S(z)$.

نتیجه بگیرید که $s(x)$ مقدار مینیمم خود را در یک رأس یا در دو رأس مجاور به دست می‌آورد. (*توضیح*: رأسهای مینیمم‌کنندهٔ $s(x)$ ***گرانیگاه‌های*** G نامیده می‌شوند.)

۲۹.۱.۲. با در نظر گرفتن یک درخت T، فرض کنیم $W(T)$ نشانگر مجموع $d(x,y)$ روی همهٔ $\binom{n}{۲}$ جفت از رأسهای x و y باشد (اندیس وینر). ماکسیمم و مینیمم مقادیر $W(T)$ را برای درختها روی n رأس تعیین کنید. ثابت کنید که تنها یک درخت $n-$رأسی ماکسیمم و تنها یک درخت مینیمم را به‌دست می‌دهد (تنها یک ردهٔ یکریختی.)

۳۰.۱.۲. فرض کنیم S درختی با برگهای $\{x_۱,\cdots,x_k\}$، و T درختی با برگهای $\{y_۱,\cdots,y_k\}$ باشد. همچنین فرض کنیم که به‌ازای هر جفت i، j داریم $d_S(x_i,x_j)=d_T(y_i,y_j)$. ثابت کنید که S و T یکریخت هستند.

۳۱.۱.۲. $(-)$ رده‌های یکریختی درختهای n-رأسی را با قطر ۳ بشمارید.

۳۲.۱.۲. فرض کنیم G درختی با n رأس، k برگ، و درجهٔ ماکسیمم k باشد. مقادیر ماکسیمم و مینیمم ممکن را برای قطر G تعیین کنید.

۳۳.۱.۲. $(-)$ با در نظر گرفتن یک گراف ساده G، G' را به عنوان گراف ساده روی همان مجموعهٔ رأسها به‌گونه‌ای تعیین کنید که $xy\in E(G')$ اگر، و فقط اگر، x و y در G مجاور یا دارای همسایه مشترکی در G باشند. ثابت کنید که $\lceil \frac{(G)\text{قطر}}{۲}\rceil = (G')\text{قطر}$.

۳۴.۱.۲. (!) ثابت کنید که ۳ $\geq$ قطر G ایجاب می‌کند که ۳ $\leq$ قطر $\overline{G}$. از این امر برای نتیجه گرفتن اینکه ۴ $\geq$ قطر G ایجاب می‌کند که ۲ $\leq$ قطر $\overline{G}$ استفاده کنید.

(*راهنمایی*: رأسها به‌وسیلهٔ مسیری با طول ۲ به‌هم متصل می‌شوند اگر، و فقط اگر، آنها دارای همسایه‌ای مشترک باشند.)

۳۵.۱.۲. فرض کنیم G دارای قطر d و درجهٔ ماکسیمم k باشد. ثابت کنید که $n(G)\leq ۱+[(k-۱)^d-۱]k/(k-۲)$. (*توضیح*: برابری برای گراف پترسن برقرار است.)

۳۶.۱.۲. قطر و شعاع.

الف) ثابت کنید که تابع فاصلهٔ $d(u,v)$ روی جفتهای رأسهای یک گراف در نابرابری مثلثی صدق می‌کند:

$$d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)$$

ب) با استفاده از قسمت (الف) ثابت کنید که قطر G حداکثر دو برابر شعاع G است.

پ) با در نظر گرفتن اعداد صحیح مثبت r، d با قید $r \leq d \leq ۲r$، یک گراف ساده با شعاع r و قطر d بسازید. (*راهنمایی*: گراف مناسبی با یک دور بسازید.)

۲.۱.۳۷. فرض کنیم G یک گراف همبند است که یک درخت نیست. ثابت کنید که G دارای دوری است که طولش حداکثر دو برابر قطر G به‌اضافه ۱ می‌باشد. به‌ازای هر $k \in \mathrm{N}$، نشان دهید که این امر با نمایش گرافی با قطر k و طول دور مینیمم $۲k + ۱$ بهترین وضع ممکن است.

۲.۱.۳۸. (+) فرض کنیم G یک گراف همبند از مرتبهٔ n و درجهٔ مینیمم k، با قید $k \geq ۲$ و $n - ۲ \geq ۲(k + ۱)$ باشد. ثابت کنید که $۳(n - ۲)/(k + ۱) - ۱ \geq$ قطر G، و مثالهایی بیاورید که این کران را هنگامی که $n - ۲$ مضربی از $k + ۱$ است، به‌دست دهند. (مون[1] [۱۹۶۵])

توضیح: برای اعتبار بیشتر، می‌توان برابری را با استفاده از یک گراف k-منتظم هنگامی که $k + ۱$، $n - ۲$ را عاد می‌کند برقرار کرد، اگرچه ساختارهای مجزایی برای k زوج و فرد مورد نیاز هستند.)

۲.۱.۳۹. فرض کنیم $F_۱$، ...، F_m جنگلهایی، هستند که اجتماعشان G است. ثابت کنید که $m \geq \max_{H \subseteq G} \lceil \frac{e(H)}{n(H) - ۱} \rceil$.

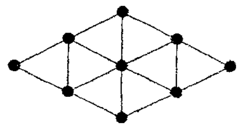
(*توضیح*: ناش - ویلیامز [۱۹۶۴] و اِدموندز[2] [۱۹۶۵ ب] ثابت کردند که این کران همواره قابل دسترس است - فرع ۸.۲.۵۶.)

۲.۱.۴۰. (!) ثابت کنید که شرط زیر برای وجود k درخت فراگیر دو به دو مجزا - یال

1) Moon 2) Edmonds

در G شرط لازم است: برای هر افراز از رأسهای G به r بخش، حداقل $k(r-۱)$ یال از G وجود دارند که نقاط پایانی‌شان در بخشهای متفاوتی از افراز هستند. (**توضیح:** فرع ۵۸.۲.۸ نشان می‌دهد که این شرط کافی نیز هست - توته [۱۹۶۱]، ناش - ویلیامز [۱۹۶۱]، ادموندز [۱۹۶۵ پ])

۴۱.۱.۲. آیا می‌توان گراف رسم شدهٔ زیرا به عنوان اجتماع درختهای فراگیر مجزا - یال توصیف کرد؟ یا به عنوان اجتماع درختهای فراگیر مجزا - یال یکریخت؟



۴۲.۱.۲. (+) ویژگی هلی[1] را برای زیردرختهای یک درخت ثابت کنید. به عبارت دیگر، ثابت کنید که اگر $G_۱$، ...، G_k زیردرختهای دو به دو متقاطع از یک درخت G باشند، آنگاه G دارای رأسی است که به همگی $G_۱$، ...، G_k تعلق دارد. (*راهنمایی:* از استقرا روی k استفاده کنید.)

۴۳.۱.۲. (+) ثابت کنید که یک گراف ساده G یک جنگل است اگر، و فقط اگر، برای هر خانواده دو به دو متقاطع از مسیرها در G، مسیرها دارای یک رأس مشترک باشند. (*راهنمایی:* برای کفایت شرط، از استقرا روی اندازهٔ خانوادهٔ مسیرها استفاده کنید.)

۴۴.۱.۲. (+) ثابت کنید که هر درخت n–رأسی به جز $K_{۱,n-۱}$ (یکریخت با) یک زیرگراف از مکملش است.

(*راهنمایی:* نتیجهٔ قویتری را دربارهٔ قرار دادن دو نسخه مجزا– یال از T در خوشه‌ای با همان مرتبهٔ ثابت کنید.)

۴۵.۱.۲. (+) فرض کنیم S مجموعه‌ای n عنصری باشد، و فرض کنیم $A=\{A_۱,\cdots,A_n\}$ یک گردایه از n زیرمجموعهٔ متمایز از S باشد. ثابت کنید که S دارای یک عنصر x است به‌طوری که مجموعه‌های $A_۱\cup\{x\}$، ...، $A_n\cup\{x\}$ متمایز هستند. (*راهنمایی:* گرافی با رأسهای $a_۱$، ...، a_n تعریف کنید به‌طوری که $a_i \leftrightarrow a_j$ اگر، و

1) Helly

فقط اگر، A_i و A_j تنها در یک عنصر فرق داشته باشند. از آن عنصر به عنوان نشانی روی یال استفاده کنید؛ اگر a_ia_j دارای نشان y باشد، آنگاه y نمی‌تواند عنصر مطلوب x باشد. ثابت کنید که جنگلی شامل همهٔ نشانها که روی یالها ظاهر می‌شوند وجود دارد، و از این مطلب برای به‌دست آوردن x مطلوب استفاده کنید.) (باندی [۱۹۷۲])

۲-۲ درختهای فراگیر و شمارش

پیشتر دیدیم که $2^{\binom{n}{2}}$ گراف ساده با مجموعهٔ رأسهای $\{1, \cdots, n\}$ وجود دارند. شمردن درختها با این مجموعهٔ رأسها کار دشواری است، ولی بازهم این امر به مباحث نگاشت دوسویی می‌انجامد. همچنین می‌توانیم درختهای فراگیر را به عنوان گرافهای دلخواه بشماریم، و جنبه‌های ساختاری درختها را بررسی کنیم.

شمارش درختها

n^{n-2} درخت که دارای یک مجموعهٔ ثابت از n رأس است وجود دارند؛ این فرمول کیلی[1] است. پروفر[2]، کیرشهوف[3]، پولیا[4]، رنی[5]، و دیگران اثباتها را پیدا کردند. جی. دبلیو. مُون [۱۹۷۰] کتابی دربارهٔ شمارش رده‌های درختها نوشت.

۱.۲.۲. مثال. *فهرست کردن درختهای کوچک.* با یک مجموعهٔ رأسها به اندازهٔ یک یا دو، تنها یک درخت می‌توان تشکیل داد. با سه رأس باز هم تنها یک ردهٔ یکریختی وجود دارد، اما ماتریس مجاورت از اینکه کدام رأس مرکز است تعیین می‌شود، و سه درخت وجود دارند. با در نظر گرفتن مجموعه‌ای از چهار رأس، چهار ستاره و دوازده مسیر وجود دارند؛ ۱۶ درخت در کل. □

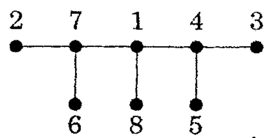
---

1) Cayley 2) Prüfer 3) Kirchhoff 4) Polya 5) Renyi

۲.۲.۲. تعریف. هنگامی که n یک عدد طبیعی است، $[n]$ مجموعهٔ اعداد طبیعی $\{۱, \cdots, n\}$ است.

۳.۲.۲. قضیه. (فرمول کیلی [۱۸۸۹]). $n^{n-۲}$ درخت با مجموعهٔ رأسهای $[n]$ وجود دارند.

اثبات. (پروفر [۱۹۱۸]). $n^{n-۲}$ دنباله به طول $n - ۲$ با درایه‌هایی از $[n]$ وجود دارند؛ یک نگاشت دوسویی میان مجموعهٔ درختها و این مجموعهٔ دنباله‌ها برقرار می‌کنیم. برای محاسبهٔ دنبالهٔ پروفر $f(T)$ برای یک درخت نشاندار T، برگ دارای کوچکترین نشان را به‌طور مکرر حذف می‌کنیم و نشان *همسایه‌*اش را به دنباله می‌افزاییم. پس از $n - ۲$ تکرار یک یال منفرد باقی می‌ماند و ما یک دنبالهٔ $f(T)$ به طول $n - ۲$ را ساخته‌ایم. دنبالهٔ متناظر به درخت زیر، ۷۴۴۱۷۱ است و یال باقیمانده $\{۱, ۸\}$ می‌باشد.



برای اثبات اینکه f یک نگاشت دوسویی است، ثابت می‌کنیم که یک دنباله تنها از یک درخت به‌دست می‌اید و اینکه هر دنباله به این طریق ظاهر می‌شود. فرض کنیم در هر گام برای محاسبه f برگ حذف شده را با علامت «تمام شد» مشخص کنیم. فرض کنیم S نشانگر مجموعهٔ برگهای درخت باقیمانده باشد؛ اینها رأسهای تمام نشده‌ای هستند که نشانهایشان در باقیمانده دنباله ظاهر نمی‌شود. برگ حذف شده بعدی دارای کمترین عدد در S است. از این‌رو می‌توانیم T را از دنبالهٔ $a = f(T)$ به‌ترتیب زیر دوباره به‌دست آوریم. با مجموعهٔ رأسهای $[n]$ و بدون هیچ یالی آغاز می‌کنیم. در گام i اَم، فرض کنیم x نشانی در وضعیت i از a باشد. فرض کنیم y کوچکترین نشانی باشد که در وضعیتهای بعد از i ظاهر نمی‌شود و دارای علامت «تمام شد» نیست. یال yx و علامت y «تمام شد» را اضافه می‌کنیم. پس از $n - ۲$ گام، دو رأس تمام نشد را با یک

یال به هم وصل می‌کنیم.

ثابت کرده‌ایم که اگر این $n-۱$ یال یک درخت T را تشکیل دهند، آنگاه $a=f(T)$، زیرا یالی را که باید در هر مرحله از T حذف شود تعیین کرده‌ایم. برای ملاحظه اینکه یالها یک درخت تشکیل می‌دهند، توجه داشته باشید که با یک گراف (گراف بدیهی) آغاز می‌کنیم که در آن هر مؤلفه یک رأس تمام نشد دارد. در هر گام یک یال وصل کنندهٔ رأسهای تمام نشد در مؤلفه‌های متمایز را می‌افزاییم و یکی را دارای علامت «تمام شد» می‌کنیم؛ این کار تعداد مؤلفه‌ها را یکی کم می‌کند و یک رأس تمام نشد در هر مؤلفه باقی می‌گذارد. آخرین یال دو مؤلفه باقیمانده را وصل می‌کند. از این‌رو گرافی با $n-۱$ یال و یک مؤلفه ساخته‌ایم: یک درخت. ثابت کرده‌ایم که شیوهٔ عکسمان $f^{-۱}$ می‌باشد.□

کیلی با این مسأله به صورت جبری برخورد کرد، و از یک تابع مولد برای شمارش درختهای نشاندار به‌وسیلهٔ درجه‌های رأسهای آنها استفاده کرد. اثبات نگاشت دوسویی با در نظر گرفتن این اطلاعات از آن پروفر است.

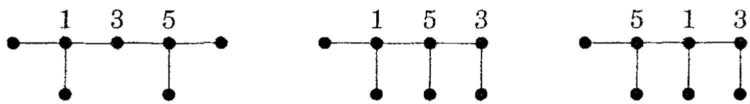
۴.۲.۲. فرع. تعداد درختهای با مجموعهٔ رأسهای $[n]$ که در آنها رأسهای ۱، ...، n به‌ترتیب دارای درجه‌های $d_۱$، ...، d_n هستند، برابر است با $\dfrac{(n-۲)!}{\Pi(d_i-۱)!}$.

اثبات. هنگامی که رأس x را از T در موقع ساختن دنبالهٔ پروفر حذف می‌کنیم، همهٔ همسایه‌های x به جز یکی از پیش حذف شده‌اند. x را یک بار برای هر چنین همسایه‌ای ثبت کردیم، و x پس از حذف شدنش هیچگاه دیگر ظاهر نمی‌شود. اگر x در پایان باقی بماند، آنگاه یک یال متصل به x نیز باقی می‌ماند. در هر حالت، x به تعداد $d(x)-۱$ بار در دنباله ظاهر می‌گردد.

بنابراین، درختها را با هر i دارای درجهٔ d_i به‌وسیلهٔ شمردن دنباله‌هایی به‌طول $n-۲$ که دارای $d_i-۱$ نسخه از i به‌ازای هر i است می‌شماریم. اگر به نسخه‌های هر i اندیسهای پایین را برای مشخص ساختن آنها نسبت دهیم، آنگاه $(n-۲)!$ دنباله وجود دارند. چون نسخه‌های هر i در واقع غیرقابل تمیز هستند، هر آرایش مطلوب را $\Pi(d_i-۱)!$

بار شمرده‌ایم. یک بار به‌ازای هر راه برای اندیسهای پایین که روی هر نوع نشان مرتب می‌شوند. □

۵.۲.۲. مثال. ***درختها با درجه‌های ثابت.*** درختها با رأسهای $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$ و به ترتیب با درجه‌های $(۱, ۱, ۳, ۱, ۲, ۱, ۳)$ را در نظر می‌گیریم. با محاسبه داریم $\frac{(n-۲)!}{\Pi(d_i - ۱)!} = ۳۰$؛ درختها در پایین نشان داده شده‌اند. شش راه برای کامل کردن نخستین درخت وجود دارد (دو رأس مجاور رأس ۱ را از چهار رأس باقیمانده برمی‌داریم) و دوازده راه برای کامل کردن هر یک از درختهای دیگر وجود دارد (همسایه رأس ۳ را از چهار رأس باقیمانده، و سپس همسایهٔ رأس مرکزی را از سه رأس باقیمانده برمی‌داریم).□



هنگامی که $\sum n_i = n$، کمیت $\frac{n!}{\Pi n_i!}$ **ضریب چندجمله‌ای** $\binom{n}{n_۱, \cdots, n_k}$ نامیده می‌شود، زیرا در بسط $\left(\sum_{i=۱}^{k} x_i\right)^n$ ضریب $\Pi(x_i^{n_i})$ است. شرکت‌کنندگان در ضریب این جمله متناظر با n–تاییهایی هستند که آرایشهای n حرف متشکل از n_i حرف از نوع i می‌باشند. هنگامی که به‌ازای هر i قرار می‌دهیم $x_i = ۱$، این مطلب بیان می‌کند که تعداد کل n–تاییهای تشکیل شده از k نوع حرف، با در نظرگرفتن همهٔ تکررهای ممکن، برابر است با k^n، که با فرمول کیلی مطابقت دارد.

درختهای فراگیر در گرافها

فرمول کیلی همچنین از قضیهٔ کلیتر ماتریس درخت بیان شده در اثری از کیرشهوف [۱۸۴۷] نتیجه می‌شود. این قضیهٔ فرمولی را به‌دست می‌دهد که زیردرختهای فراگیر هر گراف چندگانه G را می‌شمارد؛ فرمول کیلی هنگامی نتیجه می‌شود که $G = K_n$ (تمرین ۱۵). نخست یک راه بازگشتی را برای شمارش درختهای فراگیر در یک گراف بیان می‌کنیم،

که از طریق شمارش جداگانه آنهایی که یک یال خاص e را شامل می‌شوند و آنهایی که e را حذف می‌کنند صورت می‌گیرد.

۶.۲.۲. تعریف. اگر e یالی از G باشد، آنگاه با **منقبض کردن** e به معنی جایگزینی یک رأس منفرد به جای هر دو نقطهٔ پایانی e که یالهای متصل به آنها همگی یالهایی می‌باشند که متصل به نقاط پایانی e هستند، به جز خود e. گراف به‌دست آمده از منقبض کردن e را با نماد $G \cdot e$ نشان می‌دهیم.

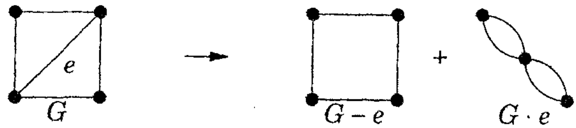
در ظاهر، منقبض کردن e را همچون فشرده کردن آن به یک نقطهٔ منفرد تصور می‌کنیم. منقبض کردن یک یال می‌تواند یالهای چندگانه بسازد. برای درست شمردن درختهای فراگیر، باید یالهای چندگانه را نگهداریم (مثال زیر این مطلب را نشان می‌دهد، چرا)، اما در دیگر کاربردها انقباض یالهای چندگانه ممکن است بی‌ربط باشد. هنگام شمارش درختهای فراگیر، ممکن است طوقه‌هایی را که در انقباض ظاهر می‌شوند کنار بگذاریم، زیرا هیچ درخت فراگیری نمی‌تواند شامل یک طوقه باشد. بازگشت برای همهٔ گرافهای چندگانه به‌کار می‌رود.

۷.۲.۲. گزاره. اگر $\tau(G)$ نشانگر تعداد درختهای فراگیر یک گراف G باشد و $e \in E(G)$، آنگاه $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$.

اثبات. درختهای فراگیر G که e را حذف می‌کنند دقیقاً درختهای فراگیر $G - e$ هستند. تعداد درختهای فراگیری که شامل e می‌باشند عبارت است از $\tau(G \cdot e)$، زیرا یک نگاشت دوسویی طبیعی میان درختهای فراگیر $G \cdot e$ و درختهای فراگیر G که شامل e هستند وجود دارد. منقبض کردن e در یک درخت فراگیر G که شامل e است یک درخت فراگیر $G \cdot e$ را به‌دست می‌دهد. دیگر یالها، تحت انقباض، یکسانی خود را حفظ می‌کنند، بنابراین هیچ دو درختی از راه این عمل به یک درخت فراگیر از $G \cdot e$ تبدیل نمی‌شوند. علاوه بر این، هر درخت فراگیر از $G \cdot e$ از این راه ظاهر می‌شود. از این‌رو

نگاشت، یک نگاشت دوسویی است. □

۸.۲.۲. مثال. ***یک گام در بازگشت.*** گرافهای سمت راست هریک چهار درخت فراگیر دارند، بنابراین بازگشت برای درختهای فراگیر ایجاب می‌کند که گراف سمت چپ دارای هشت درخت فراگیر باشد. □



محاسبه با استفاده از بازگشت مورد نیاز شرایط اولیه برای گرافهای بدون هیچ یال انجام می‌گیرد. اگر یک رأس باقیمانده باشد، یک درخت فراگیر وجود دارد. اگر بیش از یک رأس باقیمانده باشد، هیچ درخت فراگیری وجود ندارد. اگر کامپیوتر بازگشت را به وسیلهٔ حذف یا منقبض کردن هر یال نتیجه دهد، آنگاه $۲^{e(G)}$ جمله را محاسبه می‌کند. این کار را می‌توان به وسیلهٔ حذف طوقه‌ها و با تشخیص دادن گرافهای چندگانه خاص G در حالی که $\tau(G)$ را می‌شناسیم کاهش داد.

۹.۲.۲. تبصره. اگر G یک گراف چندگانه همبند بدون دور به جز یالهای تکرار شده باشد، آنگاه $\tau(G)$ حاصل‌ضرب تکررهای یال است. یک گراف چندگانه ناهمبند درختهای فراگیر ندارد. □

با وجود چنین کاهشهایی، محاسبهٔ بازگشتی برای گرافهای بزرگ غیرعملی هستند. قضیهٔ ماتریس درخت، $\tau(G)$ را با یک دترمینان محاسبه می‌کند. دترمینانهای n در n ماتریسها را می‌توان با استفاده از کمتر از $n^۳$ عمل (برای n بزرگ) محاسبه کرد، که بسیار سریعتر از محاسبه $۲^{e(G)}$ است. می‌توانیم طوقه‌ها را پیش از محاسبه حذف کنیم، زیرا آنها بر درختهای فراگیر اثری ندارند. اثبات قضیهٔ ماتریس درخت نیاز به ضرب ماتریسی (و دترمینانها) دارد.

۱۰.۲.۲. مثال. ***محاسبهٔ ماتریس درخت.*** قضیهٔ ماتریس درخت زیر به ما می‌آموزد

که ماتریسی با درجه‌های رأسها روی قطر تشکیل دهیم، ماتریس مجاورت را تفریق کنیم، یک سطر و یک ستون را حذف کنیم، و دترمینان بگیریم. برای گراف $K_۴ - e$ در مثال بالا، درجه‌های رأسها ۳، ۳، ۲، ۲ هستند، بنابراین ماتریس سمت چپ پایین را تشکیل می‌دهیم و دترمینان ماتریس وسط را به‌دست می‌آوریم. نتیجه تعداد درختهای فراگیر است! □

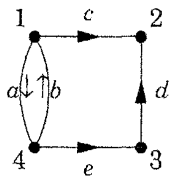
$$\begin{pmatrix} ۳ & -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & ۳ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & ۲ & ۰ \\ -۱ & -۱ & ۰ & ۲ \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} ۳ & -۱ & -۱ \\ -۱ & ۲ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۲ \end{pmatrix} \to ۸$$

۱۱.۲.۲. قضیه. (قضیهٔ ماتریس درخت). فرض کنیم A ماتریس مجاورت گراف (چندگانه) بیطوقهٔ G باشد؛ درایه (i, j) تعداد یالهای به‌صورت v_iv_j است. فرض کنیم D یک ماتریس قطری باشد که $d_{ii} = d_G(v_i)$، و فرض کنیم $Q = D - A$. به‌ازای هر s، t، $\tau(G)$ برابر است با $(-۱)^{s+t}$ ضرب در دترمینان ماتریسی که از حذف سطر s و ستون t از Q به‌دست می‌آید.

اثبات. این قضیه را تنها برای هنگامی که $s = t$ است ثابت می‌کنیم. فرض کنیم Q^* ماتریس به‌دست آمده از حذف سطر t و ستون t از Q باشد. (گزارهٔ کلی از تمرین ۱۸ نتیجه می‌شود.)

گام ۱. اگر G' یک سودهی از G، و M ماتریس وقوع G' باشد، آنگاه $Q = MM^T$.
اگر یالهای سودار $e_۱$، ...، e_m باشند، آنگاه درایه‌های M عبارت‌اند از $m_{ij} = ۱$ اگر v_i دُم e_j باشد، $m_{ij} = -۱$ اگر v_i سر e_j باشد، و $m_{ij} = ۰$ اگر v_i متعلق به e_j نباشد. چون هر درایه در ماتریس n در n، MM^T حاصل‌ضرب نقطه‌ای سطرهای M است، درایه‌های ناقطری در حاصل‌ضرب به‌ازای هر یال G میان دو رأس -۱ را می‌شمارند، و درایه‌های قطری درجه‌های رأسها را می‌شمارند.

$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$



$$Q = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

گام ۲. ***اگر B یک زیرماتریس $(n-1)\times(n-1)$ از M باشد، آنگاه $\det B = 0$ اگر $n-1$ یال متناظر شامل یک دور باشد، و $\det B = \pm 1$ اگر آنها یک درخت فراگیر از G را تشکیل دهند.*** اگر یالهای متناظر با ستونها شامل یک دور C باشد، آنگاه مجموع ستونها بردار صفر می‌شود هنگامی که با $+1$ یا -1 وزندار می‌شوند، به‌طوری که یال سودار هنگام دنبال کردن دور پیشرو یا پسرو دنبال شود. این معادلهٔ وابستگی ایجاب می‌کند که $\det B = 0$.

برای حالت دیگر، از استقرا روی n استفاده می‌کنیم. برای $n = 1$، بنابر قرارداد یک ماتریس 0×0 دارای دترمینان ۱ است. فرض کنیم $n > 1$، و فرض کنیم T درخت فراگیری باشد که یالهایش ستونهای B باشند. چون T دارای حداقل دو برگ است، B شامل یک سطر متناظر با یک برگ x از T می‌باشد. این سطر تنها دارای یک درایهٔ ناصفر در B است. هنگام محاسبه دترمینان با بسط در امتداد سطر، تنها زیر ماتریس B' دارای وزن ناصفر در بسط متناظر با زیردرخت فراگیر از $G - x$ است که با حذف x و یال متصل به آن از T به‌دست می‌آید. چون B' یک زیرماتریس $(n-2)\times(n-2)$ از ماتریس وقوع برای یک سودهی $G - x$ است، فرض استقرا ایجاب می‌کند که دترمینان B' برابر با ± 1 باشد، و ضرب آن در ± 1 همان نتیجه را برای B به‌دست می‌دهد.

گام ۳. ***محاسبهٔ $\det Q^*$.*** فرض کنیم M^* ماتریس حاصل از حذف سطر t از M باشد، بنابراین $Q^* = M^*(M^*)^T$. ممکن است فرض کنیم $m \geq n-1$، در غیر این‌صورت هر دو طرف دترمینان صفر خواهند داشت و زیردرختهای فراگیر وجود ندارند.

فرمول بینه -کوشی[1] دترمینان حاصل ضرب ماتریسها را، که لزوماً مربعی نیستند، برحسب دترمینانهای زیرماتریسهای عاملها بیان می‌کند. به ویژه، اگر $m \geq p$، A یک ماتریس $p \times m$، و B یک ماتریس $m \times p$ است، آنگاه $\det AB = \sum_S \det A_S \det B_S$، که در آن مجموعیابی روی همه $S \subseteq [m]$ متشکل از p اندیس اجرا می‌شود، A_s زیرماتریسی از A است که دارای ستونهای اندیسدار شده به وسیلهٔ S است، و B_s زیرماتریسی از B است که دارای سطرهای اندیسدار شده به وسیلهٔ S است (تمرین ۱۹). هنگامی که فرمول بینه -کوشی را برای $Q^* = M^*(M^*)^T$ به‌کار می‌بریم، زیرماتریس A_s یک زیرماتریس $(n-۱) \times (n-۱)$ از M است به‌طوری که در گام ۲ بحث شد، و $B_s = A_s^T$. از این‌رو مجموعیابی $(\pm ۱)^۲ = ۱$ را برای هر مجموعه از $n-۱$ یال متناظر با یک درخت فراگیر و ۰ را برای هر مجموعهٔ دیگر از $n-۱$ یال می‌شمارد. □

توته این قضیه را به گرافهای سودار تعمیم داد. قضیهٔ او هنگامی که گراف سودار متقارن است به قضیهٔ ماتریس درخت تبدیل می‌شود؛ یک گراف سودار **متقارن** است اگر ماتریس مجاورت آن متقارن باشد.

۱۲.۲.۲. تعریف. یک *انشعاب* یا **درخت خروجی** یک سودهی از یک درخت است که ریشه‌ای از درجهٔ ورودی ۰ داشته باشد و همهٔ دیگر رأسهایش درجهٔ ورودی ۱ داشته باشند. یک درخت ورودی یک درخت خروجی است که یالهایش وارون شده باشند. با در نظر گرفتن یک گراف سودار G، فرض کنیم $Q^- = D^- - A'$ و $Q^+ = D^+ - A'$، در حالی که D^- و D^+ ماتریسهای قطری درجه‌های ورودی و درجه‌های خروجی در G هستند، و i,j-درایه از A' تعداد یالهای از v_j به v_i می‌باشد.

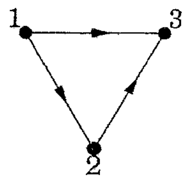
۱۳.۲.۲. قضیه. (قضیهٔ ماتریس درخت سودار—توته [۱۹۴۸]) در یک گراف سودار، که Q^- و Q^+ به‌صورت بالا تعریف شده باشند، تعداد درختهای خروجی (درختهای

1) Binet-Cauchy

ورودی) ریشه‌دار در v_i عبارت است از مقدار هر همسازه در سطر iاَم Q^- (ستون iاَم Q^+). □

۱۴.۲.۲. مثال. گراف سودار زیر دارای دو درخت خروجی ریشه‌دار در ۱ و دو درخت ورودی ریشه‌دار در ۳ است. دترمینانها به‌صورت ادعا شده رفتار می‌کنند. □

$$Q^+ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$Q^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

تجزیه و نشاندار کردنهای جذاب

یک **تجزیه** از یک گراف G افرازی از $E(G)$ به زیرگرافهای دو به دو مجزا - یال است. همواره می‌توانیم G را به یالهای منفرد تجزیه کنیم، بنابراین ممکن است بپرسیم که آیا می‌توان G را به نسخه‌های یکریخت از یک درخت بزرگتر T تجزیه کرد. این امر مستلزم آن است که $e(G)$ مضربی از $e(T)$ باشد؛ آیا این شرط کافی نیز هست؟ اگر G منتظم باشد، پاسخ این است که «شاید». هگوست[1] حدس زد که اگر G یک گراف $۲m$-منتظم، و T درختی با m یال باشد، آنگاه $E(G)$ را می‌توان به $n(G)$ نسخه از T افراز کرد. حتی «ساده‌ترین» حالت که G یک خوشه است هنوز باز و معروف است.

۱۵.۲.۲. حدس. (رینگل[2] [۱۹۶۴]) اگر T درختی ثابت با m یال باشد، آنگاه $K_{۲m+۱}$ را می‌توان به $۲m+۱$ نسخه از T تجزیه کرد. □

تلاشهایی که برای اثبات حدس رینگل صورت گرفته بر روی حدس قویتری دربارهٔ درختها متمرکز بوده‌اند، که **حدس درخت جذاب** نامیده می‌شود. این حدس، حدس

1) Häggkvist 2) Ringel

رینگل و گزارهٔ مشابهی را دربارهٔ تجزیهٔ خوشه‌های دارای مرتبهٔ زوج ایجاب می‌کند (تمرین ۲۵).

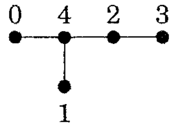
۱۶.۲.۲. حدس. (حدس درخت جذاب -کوتزیگ[1] - رینگل [۱۹۶۴]) اگر T درختی با m یال باشد، آنگاه به رأسهای T می‌توان اعداد متمایز ۰، ...، m را چنان نسبت داد که اختلافهای یالها $\{1, \cdots, m\}$ باشند. چنین عددگذاری را ***نشاندارکردن جذاب*** می‌نامند. □

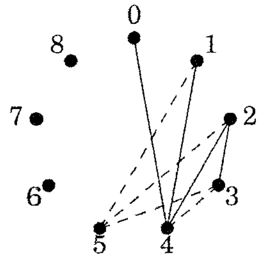
۱۷.۲.۲. قضیه. اگر T درختی با m یال باشد که دارای نشاندارکردن جذاب است، آنگاه K_{2m+1} را می‌توان به $2m + 1$ نسخه از T تجزیه کرد.

اثبات. رأسهای K_{2m+1} را به عنوان رده‌های همنهشتی به پیمانه $2m + 1$ در نظر می‌گیریم. ***تغییرمکان*** میان دو ردهٔ همنهشتی تعداد حرکتهای واحد مورد نیاز برای رسیدن از یکی به دیگری می‌باشد؛ تغییر مکان ماکسیمم میان دو ردهٔ همنهشتی به پیمانهٔ $2m + 1$ برابر m است. یالهای K_{2m+1} متشکل از m «ردهٔ تغییرمکان» است، که هریک اندازهٔ $2m + 1$ دارند.

از یک نشاندارکردن جذاب T، نسخه‌های T در K_{2m+1} را برای $0 \le k \le 2m$ تعریف می‌کنیم. در نسخهٔ kاُم، رأسهای k، ...، $k + m$ به پیمانهٔ $2m + 1$ هستند، که $k + i$ مجاور به $k + j$ است اگر، و فقط اگر، i مجاور j در نشاندارکردن جذاب باشد. نسخهٔ ۰اُم از T درست مانند نشاندارکردن جذاب به‌نظر می‌رسد و دارای یک یال با هر تغییر مکان است. حرکت به نسخهٔ بعدی هر یال را به یال بعدی در ردهٔ تغییر مکانش انتقال می‌دهد. از این‌رو $2m + 1$ نسخه از T سر تا سر دور $2m + 1$ یال از هر ردهٔ تغییر مکان، بدون هیچ تکرارهایی است، و این $2m + 1$ نسخه از T، K_{2m+1} را تجزیه می‌کند. □

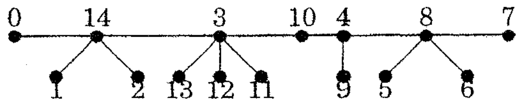
1) Kotzig

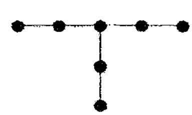




نشاندار کردنهای جذاب برای برخی از انواع درختها شناخته شده وجود دارند. از لحاظ‌هایی، ***ستاره‌های*** ($K_{۱,n-۱}$) و مسیرهای (P_n) ساده‌ترین درختها هستند؛ ستاره‌ها قطر را مینیمم می‌کنند و مسیرها درجهٔ ماکسیمم را مینیمم می‌کنند. می‌توانیم با در نظر گرفتن قطر به اندازهٔ حداکثر k، برای یک k ثابت، درختهای کلیتری از ستاره‌ها به‌دست آوریم. برای تعمیم بخشیدن به مسیرها، افزودن یالهای متصل به یک مسیر را مجاز می‌کنیم، و رده‌ای را که شامل ستاره‌ها و مسیرهاست و دارای نشاندار کردنهای جذاب می‌باشد به‌دست می‌آوریم.

۱۸.۲.۲. مثال. ***نشاندار کردن جذاب کاترپیلارها.*** یک ***کاترپیلار*** درختی است که دارای مسیری باشد که حداقل یک رأس از هر یال را شامل شود (می‌توان آن را مسیری به طول ماکسیمم در نظر گرفت). تصویر زیر کاترپیلاری را با یک نشاندار کردن جذاب و درختی را که کاترپیلار نیست نشان می‌دهد. هر کاترپیلار یک نشاندار کردن جذاب دارد (تمرین ۲۹). یک **خرچنگ** درختی است که دارای مسیری می‌باشد که از هر رأس فاصلهٔ حداکثر ۲ داشته باشد (کاترپیلار با پاهای بلندتر)؛ هنوز معلوم نیست که آیا همه خرچنگها جذاب‌اند. □





۱۹.۲.۲. قضیه. شرایط زیر روی یک درخت G هم‌ارزاند و ردهٔ ***کاترپیلارها*** را مشخص می‌کنند.

الف) G دارای یک مسیر متصل به هر یال است.

ب) هر رأس از G دارای حداکثر دو همسایهٔ غیر برگ است.

پ) G شامل درخت سمت راست تصویر بالا نیست.

اثبات. فرض کنیم G' نشانگر درخت به‌دست آمده از G به‌وسیلهٔ حذف هر برگ از G باشد. شرط (الف) بیان می‌کند که G' یک مسیر است، که هم‌ارز است با $\Delta(G') \leq ۲$. چون همسایه‌های غیر برگ از هر رأس غیر برگ در G' باقی می‌مانند، $\Delta(G') \leq ۲$ همچنین هم‌ارز شرط (ب) است، و ثابت کرده‌ایم که (ب) $\Leftrightarrow$ (الف). برای (پ) $\Leftrightarrow$ (ب)، G دارای رأسی با سه همسایهٔ غیر برگ است، اگر، و فقط اگر، G دارای زیردرخت غیرمجاز باشد. $\square$

تمرینات

۱.۲.۲. $(-)$ ثابت کنید که گراف n-رأسی $K_۱ \vee C_{n-۱}$ دارای یک درخت فراگیر با قطر k به‌ازای هر $k \in \{۲, \cdots, n-۱\}$ است.

۲.۲.۲. از تناظر پروفر برای شمردن درختهایی با مجموعهٔ رأسهای $[n]$ که دارای $n-۲$ برگ است و درختهایی که دارای ۲ برگ است استفاده کنید.

۳.۲.۲. از فرمول کیلی برای اثبات اینکه گراف به‌دست آمده از K_n با حذف یک یال، دارای $(n-۲)n^{n-۳}$ درخت فراگیر است استفاده کنید.

۴.۲.۲. فرض کنیم $S(m,r)$ نشانگر تعداد افرازهای یک مجموعهٔ m عنصری به r زیرمجموعهٔ ناتهی باشد. برحسب این تعداد، درختهای با مجموعهٔ رأسهای $\{v_۱, \cdots, v_n\}$ را که دقیقاً دارای k برگ است بشمارید. (رنی [۱۹۵۹])

۵.۲.۲. فرض کنیم G دارای m درخت فراگیر است. فرض کنیم G' گراف چندگانه به‌دست آمده به‌وسیلهٔ جایگزینی هر یال از G با k نسخه از آن یال باشد. فرض کنیم

G'' گراف به‌دست آمده به وسیلهٔ جایگزینی هر یال $uv \in E(G)$ به‌جای یک u,v-مسیر به‌طول k از $k-۱$ رأس جدید باشد. $\tau(G')$ و $\tau(G'')$ را تعیین کنید.

۶.۲.۲. $\tau(K_{۲,m})$ را محاسبه کنید. همچنین تعداد رده‌های یکریختی درختهای فراگیر $K_{۲,m}$ را حساب کنید.

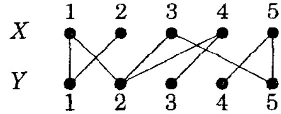
۷.۲.۲. $(+)$ $\tau(K_{۳,m})$ را تعیین کنید.

۸.۲.۲. ***درختهای فراگیر در $K_{n,n}$.*** یک نسخه از $K_{n,n}$ را با مجموعه‌های دوبخشی $x_۱$، $\cdots$، x_n و $y_۱$، $\cdots$، y_n در نظر می‌گیریم. برای هر درخت فراگیر T از $K_{n,n}$، یک دنبالهٔ $f(T)$ از جفتهای اعداد صحیح (که به‌صورت عمودی نوشته می‌شوند) به شرح زیر تشکیل می‌دهیم:

فرض کنیم u، v برگهای دارای کمترین اندیس از زیردرخت باقیمانده باشند که در X و Y ظاهر می‌شوند. جفت $\binom{a}{b}$ را به دنباله می‌افزاییم، که در آن a اندیس همسایهٔ u و b اندیس همسایهٔ v است. $\{u,v\}$ را حذف می‌کنیم و تا زمانی که $n-۲$ جفت ایجاد شوند و یک یال باقی بماند کار را تکرار می‌کنیم. قسمت (الف) نشان می‌دهد که f خوشتعریف است.

الف) ثابت کنید که هر درخت فراگیر از $K_{n,n}$ دارای یک برگ در هر مجموعهٔ بخشی است.

ب) ثابت کنید که f یک نگاشت دوسویی از مجموعهٔ درختهای فراگیر از $K_{n,n}$ به مجموعهٔ $n-۱$ دنباله‌هایی از جفتهای عناصر $[n]$ می‌باشد. نتیجه بگیرید که $K_{n,n}$ دارای $n^{۲n-۲}$ درخت فراگیر است. (پریتیکن[1] [۱۹۹۴])



$\rightarrow \quad \binom{1}{4}, \binom{2}{1}, \binom{2}{5}, \binom{5}{3}$

۹.۲.۲. $(+)$ با در نظر گرفتن K_n با مجموعهٔ رأسهای $[n]$، فرض کنیم $f(r,s)$ تعداد

1) Pritikin

درختهای فراگیر از خوشه‌ای باشد که دارای مجموعه‌های بخشی به اندازه‌های r و s است (با قید $r+s=n$). ثابت کنید که $f(r,s)=\binom{r+s}{s}s^{r-۱}r^{s-۱}$ اگر $r\neq s$. فرمول هنگامی که $r=s$ باشد چیست؟ (*راهنمایی:* نخست نشان دهید که دنبالهٔ پروفر برای چنین درختی $r-۱$ جمله‌اش را از مجموعهٔ اعداد صحیح s و $s-۱$ جمله‌اش را از مجموعهٔ اعداد صحیح r خواهد داشت.) (اسکونس[1]، گلیکسمن[2] [۱۹۶۳])

۱۰.۲.۲. فرض کنیم G_n گرافی با $۲n$ رأس و $۳n-۲$ یال به‌ازای $n\geq ۱$ باشد، که در زیررسم شده است. $\tau(G_n)$ را تعیین کنید.

۱۱.۲.۲. $(-)$ از گزارهٔ ۷.۲.۲ و تبصرهٔ ۹.۲.۲ برای شمردن درختهای فراگیر در $K_۱\vee C_۴$ استفاده کنید.

۱۲.۲.۲. فرض کنیم a_n تعداد درختهای فراگیر در $K_۱\vee P_n$ به ازای $n\geq ۱$ باشد. به‌عنوان مثال $a_۱=۱$، $a_۲=۳$، $a_۳=۸$. ثابت کنید به‌ازای $n>۱$ داریم $a_n=a_{n-۱}+۱+\sum_{i=۱}^{n-۱}a_i$.

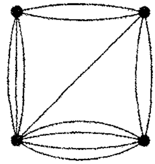
۱۳.۲.۲. یک اثبات ترکیبیاتی ارائه دهید که تعداد t_n درخت با مجموعهٔ رأسهای $[n]$، رأسها در رابطهٔ بازگشت $t_n=\sum_{k=۱}^{n-۱}k\binom{n-۲}{k-۱}t_kt_{n-k}$ صدق کند. (*راهنمایی:* در یک درخت با مجموعهٔ رأسهای $[n]$، یال متصل به رأس n روی مسیر از n تا ۱ را ببَرید. *توضیح:* چون $t_n=n^{n-۲}$، این امر یک اثبات ترکیباتی را از اتحاد $n^{n-۲}=\sum_{k=۱}^{n-۱}\binom{n-۲}{k-۱}k^{k-۱}(n-k)^{n-k-۲}$ به‌دست می‌دهد.)(دیزیوبیک[3] [۱۹۱۷]، لواس [۱۹۷۹، صفحه ۲۹۱۹])

۱۴.۲.۲. $(-)$ فرض کنیم G گراف چندگانه زیر باشد، از قضیهٔ ماتریس درخت برای

---

1) Scoins 2) Glicksman 3) Dziobek

یافتن ماتریسی که دترمینانش $\tau(G)$ باشد استفاده کنید. $\tau(G)$ را محاسبه کنید.



۱۵.۲.۲. از قضیهٔ ماتریس درخت برای اثبات فرمول کیلی استفاه کنید.

۱۶.۲.۲. از قضیهٔ ماتریس درخت برای تعیین تعداد درختهای فراگیر در $K_{r,s}$ استفاده کنید. (لُواس [۱۹۷۹، صفحه ۲۲۳])

۱۷.۲.۲. یک ماتریس *تماماً تکمدولی* است اگر هر زیر ماتریس مربعی دارای دترمینان در $\{0, 1, -1\}$ باشد. ثابت کنید که ماتریس وقوع یک گراف ساده تماماً تکمدولی است اگر، و فقط اگر، گراف دوبخشی باشد.
(*یادآوری:* ماتریس وقوع یک گراف ساده دارای دو $+1$ در هر ستون است).

۱۸.۲.۲. (+) با در نظر گرفتن یک ماتریس A، فرض کنیم b_{ij} برابر با $(-1)^{i+j}$ ضرب در ماتریس به‌دست آمده به وسیلهٔ حذف سطر i و ستون j از A باشد. فرض کنیم $Adj\,A$ ماتریسی باشد که درایه‌اش در وضعیت i، j، b_{ji} باشد. از تعریف دترمینان براساس بسط در امتداد سطرهای A نتیجه می‌شود که $A(Adj\,A) = (\det A)I$. با استفاده از این فرمول ثابت کنید که اگر ستونهای A مجموعشان بردار صفر باشد، آنگاه b_{ij} مستقل از j است. (*توضیح:* همراه با تمرین بعدی، این تمرین اثبات قضیهٔ ماتریس درخت را کامل می‌کند.)

۱۹.۲.۲. (+) فرض کنیم $C = AB$، که در آن A و B ماتریسهای $n \times m$ و $m \times n$ هستند. با در نظر گرفتن $S \subseteq [m]$، فرض کنیم A_s ماتریس $n \times n$ای باشد که ستونهایش ستونهای A هستند که به وسیلهٔ S اندیسدار شده‌اند، و فرض کنیم B_s ماتریس $n \times n$ای باشد که سطرهایش سطرهای B هستند که به‌وسیلهٔ S اندیسدار شده‌اند. فرمول کوشی–بینه را ثابت کنید: $\det C = \sum_s \det A_s \det B_s$، که در آن

مجموعیابی بسطها روی همهٔ زیرمجموعه‌های n عنصری از $[m]$ است. (*راهنمایی:* معادله ماتریسی

$$\begin{pmatrix} I_m & \circ \\ A & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I_m & B \\ A & \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_m & B \\ \circ & AB \end{pmatrix}$$

را در نظر بگیرید.)

۲۰.۲.۲. (−) ثابت کنید که یک گراف ۳-منتظم بابیش از شش رأس را نمی‌توان به سه مسیر تجزیه کرد.

۲۱.۲.۲. فرض کنیم G یک گراف ۳-منتظم است. ثابت کنید G دارای تجزیه‌ای به نسخه‌هایی از $K_{۱,۳}$ است اگر، و فقط اگر، G دوبخشی باشد.

۲۲.۲.۲. ثابت کنید که هیچ گرافی ۳-منتظم دارای تجزیه‌ای به نسخه‌هایی از $P_۵$ نیست.

۲۳.۲.۲. ثابت کنید که $K_{۲m-۱,۲m}$ دارای تجزیه‌ای به m مسیر فراگیر است.

۲۴.۲.۲. فرض کنیم G یک گراف ساده n-رأسی است که دارای تجزیه‌ای به k درخت فراگیر است. همچنین فرض کنیم که $\Delta(G) = \delta(G) + ۱$. دنبالهٔ درجه‌های G را تعیین کنید.

۲۵.۲.۲. ثابت کنید که اگر حدس درخت جذاب درست باشد و T درختی با m یال باشد، آنگاه $K_{۲m}$ را می‌توان به $۲m - ۱$ نسخه از T تجزیه کرد. (*راهنمایی:* از اثبات قضیهٔ ۱۷.۲.۲ برای درختی با $m - ۱$ یال استفاده کنید.)

۲۶.۲.۲. فرض کنیم $d_۱$، $\cdots$، d_n اعداد صحیح مثبت باشند. مستقیماً ثابت کنید که یک کاترپیلار با درجه‌های رأسهای $d_۱$، $\cdots$، d_n وجود دارد اگر، و فقط اگر، $\sum d_i = ۲n - ۲$. (*توضیح:* با در نظر گرفتن تمرین ۱۲.۱.۲، تمرین بعدی اثبات متفاوتی از این گزاره را به‌دست می‌دهد.)

۲.۲.۲۷. از مشخص‌سازی زیردرخت غیر مجاز کاترپیلارها (قضیهٔ ۲.۲.۱۹) برای اثبات اینکه هر درخت را می‌توان به‌وسیلهٔ اعمال «بریدن و چسباندن» پیاپی به یک کاترپیلار با همان دنباله درجه‌ها تبدیل کرد، استفاده کنید. چنین اعمالی متشکل از حذف یک یال از درخت و افزودن یال دیگری به منظور دوباره متصل کردن دو مؤلفه است.

۲.۲.۲۸. یک گراف دوبخشی ***کشیده شده روی یک کانال است*** اگر رأسهای یک مجموعهٔ بخشی روی یک خط در صفحه (به یک ترتیبی) قرار داشته باشند و رأسهای مجموعهٔ بخشی دیگر روی خطی موازی با آن واقع باشند و یالها به صورت قطعه‌های خط راست میان آنها کشیده شده باشند. ثابت کنید که یک گراف همبند G را می‌توان بدون تقاطع یالها روی یک کانال کشید اگر، و فقط اگر، G یک کاترپیلار باشد.

۲.۲.۲۹. یک *نشاندارکردن بالا/ پایین*، یک نشاندارکردن جذاب است که برای آن یک *مقدار بحرانی* α وجود داشته باشد به‌طوری که هر یال رأسهای با نشانهای بالا و پایین α را به هم وصل کند. ثابت کنید که هر کاترپیلار دارای یک نشاندارکردن بالا/پایین است. ثابت کنید که درخت ۷– رأسی که یک کاترپیلار نباشد هیچ نشاندارکردن بالا/پایین ندارد.

۲.۲.۳۰. (+) ثابت کنید که تعداد رده‌های یکریختی کاترپیلار n–رأسی برابر است با $۲^{n-۴} + ۲^{\lceil n/۲\rceil-۲}$ اگر $n \geq ۳$. (هراری– اسچونک[1] [۱۹۷۳]، کیمبل[2]–اسچونک [۱۹۸۱])

۲-۳ بهینه‌سازی و درختها

اینک «بهترین» درخت فراگیر را جستجو می‌کنیم. این امر ممکن است بسیار دشوار باشد، به خصوص با وزنهای نسبت داده شده به یالها، اما مسأله هنگامی که «بهترین» به معنی «مینیمم وزن کل» است به‌طور شگفت‌آوری آسان است. منظور از ***گراف وزندار***

1) Schwenk 2) Kimble

گرافی با وزنهای نسبت داده شده به یالها می‌باشد.

۲.۳.۱. تعریف. یک الگوریتم **خوب** الگوریتمی است که تعداد گامهای محاسباتی آن همواره با یک تابع چندجمله‌ای به اندازهٔ ورودی کراندار شده باشد. یک الگوریتم $O(f(n))$ («مرتبهٔ» $f(n)$) ***به موقع اجرا می‌شود*** اگر ثابتهای a و c وجود داشته باشند به‌طوری که تعداد گامهای محاسباتی استفاده شده به وسیلهٔ $c|f(n)|$ برای همهٔ ورودیهای به اندازهٔ حداقل a کراندار باشد.

برای گرافها، مرتبهٔ $n(G)$ و اندازهٔ $e(G)$ را هنگام اندازه‌گیری اندازهٔ ورودی در نظر می‌گیریم. بیشتر مسائلی که در نیمهٔ نخست این کتاب بررسی می‌کنیم الگوریتمهای خوب دارند، بنابراین مفاهیم فنی پیچیدگی (مانند «NP–تمامیت» در بند ۳.۶) لزوماً ما را گرفتار نمی‌کنند.

درخت فراگیر مینیمم

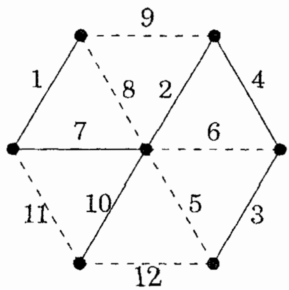
هر یال در یک گراف همبند با پیوندهای ارتباطی ممکن دارای وزنی است که طول یا ارزش آن را ثبت می‌کند. همهٔ درختهای فراگیر دارای $n-1$ یال هستند، اما ما به جستجوی یک درخت فراگیری هستیم که مجموع وزنهای یالها را مینیمم می‌کند. این مسأله نخستین‌بار از سوی بوروویکا[1] [۱۹۲۶] بررسی شده است. یک روش *آزمند* همواره زود یا بترین یال باقیمانده راکه با یالهای پیشتر انتخاب شده یک دور را کامل نکند انتخاب می‌کند (پیوندها به دلخواه قطع می‌شوند). از آنجا که هر زیرگراف بیدور با $n-1$ یال یک درخت است، این امر یک درخت فراگیر را هنگامی که ما $n-1$ یال را انتخاب کردیم ایجاد می‌کند.

این ***الگوریتم کروسکال*** است. اصطلاح «آزمند» عموماً به راه حلی که به‌طور موضعی بهین باشد اشاره می‌کند؛ می‌توانیم الگوریتمهای آزمند را در زمینه‌های گوناگون در نظر بگیریم. الگوریتمهای آزمند اندکی نتیجه بخش هستند، اما الگوریتم کروسکال

1) Borůvka

همواره زود یا بترین درخت فراگیر را ایجاد می‌کند.

۲.۳.۲. مثال. ***کاربرد الگوریتم کروسکال.*** انتخابها در الگوریتم کروسکال تنها از ترتیب وزنها استفاده می‌کند، نه بزرگی آنها. در گراف زیر، یالها را به ترتیب افزایشی وزن نشاندار کرده‌ایم تا بر ترتیب آزمون یالها تأکید کنیم.



در یک کامپیوتر، وزنها در یک ماتریس ظاهر می‌شوند، در حالی که وزنهای بسیار بزرگ روی یالها «غیرقابل دسترسی» هستند. یالهای دارای وزن برابر را می‌توان به هر ترتیبی آزمود؛ درختهای نتیجه شده ارزش یکسان دارند. الگوریتم با جنگلی دارای n رأس تنها آغاز می‌شود. هر یال انتخاب شده متوالی دو مؤلفه را ترکیب می‌کند. در این مثال، زود یا بترین چهار یال انتخاب شده‌اند، اما پس از آن نمی‌توانیم پنجمی یا ششمی را به‌دست آوریم. □

۳.۳.۲.قضیهٔ. (کروسکال [۱۹۵۶]). در یک گراف وزندار همبند G، الگوریتم کروسکال یک درخت فراگیر با وزن مینیمم می‌سازد.

اثبات. فرض کنیم T درخت ساخته شده به‌وسیلهٔ الگوریتم کروسکال است، و فرض کنیم T^* یک درخت فراگیر مینیمم باشد. اگر $T \neq T^*$، فرض می‌کنیم e نخستین یال انتخاب شده متعلق به T باشد که در T^* نیست. افزودن e به T^* یک دور می‌سازد، که شامل یک یال $e' \notin E(T)$ است، زیرا که T دوری ندارد. اینک $T^* + e - e'$ یک درخت فراگیر است. چون T^* شامل e' و همهٔ یالهای T انتخاب شده پیش از e می‌شود، هر دوی e' و e هنگامی که الگوریتم e را انتخاب می‌کند در دسترس هستند، و

از این‌رو $w(e) \leq w(e')$. بدین سان $T^* + e - e'$ یک درخت فراگیر با وزن حداکثر T^* است که شامل یک قطعهٔ اولیهٔ طولانیتر از T است. چون T متناهی است، تکرار این جابجایی به یک درخت فراگیر با وزن مینیمم می‌انجامد که شامل همهٔ T است. (اگر به‌طور اکسترمال بیان کنیم، ثابت کرده‌ایم که درخت فراگیر مینیممی که با T برای طولانیترین قطعهٔ اولیه مطابق است خود T می‌باشد.) □

۲.۳.۴. مثال. ***اجرا و تحلیل الگوریتم کروسکال.*** نخست m یال را برحسب وزن مرتب می‌کنیم، این کار را می‌توان با استفاده از $O(mlogm)$ مقایسه‌های دوبه دو در میان m عدد انجام داد. هنگام ساختن درخت، هر رأس را با مؤلفهٔ شامل آن در درخت جاری نشاندار می‌کنیم. زود یا بترین یال بعدی را می‌پذیریم اگر نقاط پایانی آن نشانهای متفاوت داشته باشند. در آن صورت، دو مؤلفه را با نسبت دادن دو نشان پایینتر به هر رأس که نشان بالاتر دارد ادغام می‌کنیم، اگر در آغاز نشان i را به مؤلفهٔ متشکل از رأس v_i نسبت دهیم، آنگاه نشان روی v_i حداکثر $i - ۱$ بار تغییر می‌کند، و رویهم رفته حداکثر $\binom{n}{۲}$ تغییر وجود دارد. اگر اندازه‌های مؤلفه‌ها را در نظر بگیریم و همواره مؤلفهٔ کوچکتر را در بزرگتر ادغام کنیم، آنگاه تعداد تغییرها $O(nlogn)$ است. در این حالت زمان لازم برای پردازش گرافهای بزرگ به‌وسیلهٔ زمان مرتب کردن m عدد تعیین می‌شود. □

هم بورووبکا [۱۹۲۶] و هم جرنیک[1] [۱۹۳۰] مسألهٔ درخت فراگیر مینیمم را مطرح و حل کردند. الگوریتم بورووبکایال بعدی را با در نظر گرفتن زود یا بترین یال باقیمانده از هر مؤلفه از جنگل جاری انتخاب می‌کند. بهبودهای صورت گرفته موجب شدند که از ساختارهای داده‌ای ماهرانه برای اجرا کارآمدتر الگوریتمها استفاده شود. گونه‌های سریع در ترجن[2] [۱۹۸۴] برای هنگامی که یالها از پیش مرتب شده‌اند و در گبوو-گلیل -اسپنسر[3]- ترجن [۱۹۸۶] برای هنگامی که آنها مرتب نشده‌اند ظاهر می‌شوند. بحث کامل و مراجع

1) Jarníck 2) Tarjan 3) Gabow-Galil-Spencer

بیشتر در آهوجا-مگننتی-اورلاین[1] [۱۹۹۳، فصل ۱۳] یافت می‌شوند. برای پیشرفتهای بیشتری که اخیراً روی داده‌اند کرجر-کلاین[2]-ترجن [۱۹۹۵] را ببینید.

کوتاهترین مسیرها

با در نظر گرفتن نقشه‌ای از راهها که فاصله‌های میان تقاطعها در آن مشخص شده‌اند، ممکن است بپرسیم «سریعترین راه از اینجا به آنجا کدام است؟» همچنین ممکن است بخواهیم بدانیم که کوتاهترین راه به هر نقطهٔ دیگر از یک موقعیت خاص، مانند خانه‌مان از مرکز شهر کدام است. این نیاز به یافتن کوتاهترین مسیرها از یک رأس معین به همهٔ رأسهای دیگر در یک گراف وزندار دارد، در حالی که وزنهای یالها متناظر با فاصله‌های نامنفی میان تقاطعهاست. با هم این مسیرها یک درخت فراگیر را تشکیل خواهند داد.

الگوریتم دیجکسترا (ابداع به وسیلهٔ دیجکسترا [۱۹۵۹] و وایتینگ[3] و هیلیر[4] [۱۹۶۰]) این مسأله را به سرعت حل می‌کند. روش به صورت زیر است: اگر P یک کوتاهترین u,z-مسیر، و P شامل v باشد، آنگاه u,v-بخش از P یک کوتاهترین u,v-مسیر است. این نشان می‌دهد که ما باید راههای بهین را از u به هر رأس دیگر z به‌ترتیب افزایشی فاصلهٔ $d(u,z)$ تعیین کنیم. یک فاصلهٔ موقتی جاری را از u به هر رأس z حفظ می‌کنیم. کوتاهترین فاصلهٔ موقتی را به عنوان یک فاصلهٔ درست تثبیت می‌کنیم و از این امر برای بهنگام در آوردن فاصله‌های موقتی باقیمانده استفاده می‌کنیم. جزئیات از ریزه‌کاری مربوط به الگوریتم کروسکال پیچیده‌تراند، بنابراین مسأله را صوریتر ارائه می‌کنیم.

۵.۳.۲. الگوریتم. ***الگوریتم دیجکسترا*** (برای محاسبهٔ فاصله‌ها از u).

ورودی: یک گراف وزندار (یا گراف سودار) و رأس آغازی u. وزن یال xy عبارت

1) Ahuja-Magnanti-Orlin 2) Karger-Klein 3) Whiting 4) Hillier

است از $w(xy)$؛ فرض کنیم $w(xy) = \infty$ اگر xy یک یال نباشد.

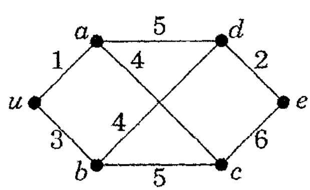
پنداره: مجموعهٔ S از رأسها را که کوتاهترین راه از u برای آن معلوم باشد حفظ می‌کنیم، S را برای آنکه همهٔ رأسها را شامل شود گسترش می‌دهیم. برای انجام این کار یک فاصلهٔ موقتی $t(z)$ را نیز از u به هر $z \notin S$ حفظ می‌کنیم؛ این طول کوتاهترین u, z-مسیری است که تاکنون یافت شده است.

ارز شدهی آغازی: برای $z \neq u$ قرار می‌دهیم $S = \{u\}$؛ $d(u, u) = \circ$؛ $t(z) = w(uz)$.

تکرار: رأس v را بیرون S چنان انتخاب می‌کنیم که $t(v) = \min_{z \notin S} t(z)$. v را به S می‌افزاییم. یالهایی از v را برای بهنگام درآوردن فاصله‌های موقتی جستجو می‌کنیم: برای هر یال vz با قید $z \notin S$، $t(z)$ را برای $\min\{t(z), d(u,v) + w(vz)\}$ بهنگام می‌کنیم.

روند تکرار تا وقتی که $S = V(G)$ یا $t(z) = \infty$ برای هر $z \notin S$ ادامه می‌یابد. در حالت اخیر، هیچ رأسی قابل انتخاب نیست؛ رأسهای باقیمانده، از u غیرقابل دسترسی هستند و فاصلهٔ نامتناهی از u دارند. □

۶.۳.۲. مثال. ***کاربرد الگوریتم دیجکسترا.*** درگراف وزندار زیر، کوتاهترین مسیرها از u به‌ترتیب به دیگر رأسهای a، b، c، d و e به ترتیب با فاصله‌های ۱، ۳، ۵، ۶، ۸ مشخص شده‌اند.



برای دوباره ساختن مسیرها، تنها نیاز داریم که یال پایانیی را که کوتاهترین مسیر، روی آن به مقصدش می‌رسد بدانیم، زیرا بخش زودرستر از یک کوتاهترین u, z-مسیر که روی یال vz به z می‌رسد یک کوتاهترین u, v-مسیر است. الگوریتم می‌تواند این اطلاعات را با

ثبت هویت «رأس انتخاب شده» هر وقت که فاصلهٔ موقتی به z بهنگام شد حفظ کند. هنگامی که z انتخاب می‌شود، رأس ثبت شده در حالی که $t(z)$ برای آخرین بار بهنگام می‌گردد روی u,z-مسیر به‌طول $d(u,z)$ مقدم بر z است. در این مثال، یالهای پایانی روی مسیرهای منتهی به a، b، c، d، e ایجاد شده به‌وسیلهٔ الگوریتم به‌ترتیب عبارت‌اند از ua، ub، ac، ad، de، و اینها یالهای درخت فراگیر به‌دست آمده، از u می‌باشند. □

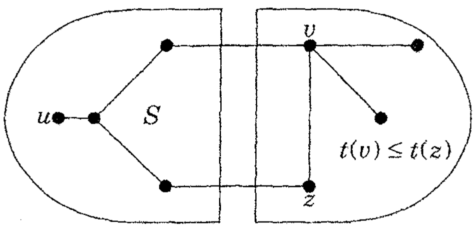
همچنانکه توضیح داده شد، الگوریتم دیجکسترا برای گرافهای سودار نیز، که یک انشعاب از u (یک درخت خروجی ریشه‌دار در u) ایجاد می‌کنند، به همان اندازه خوب عمل می‌کند که اگر هر رأس از u قابل دسترس باشد. اثبات برای گرافها و گرافهای سودار بدون تغییر است.

۷.۳.۲. قضیه. الگوریتم دیجکسترا به‌ازای هر $z \in V(G)$، $d(u,z)$ را محاسبه می‌کند.

اثبات. ما گزارهٔ قویتر را ثابت می‌کنیم که در هر گام الگوریتم، ۱) فاصله از u که به‌ازای هر $v \in S$ در نظر گرفته شده $d(u,v)$ قطعی باشد و ۲) به‌ازای $z \notin S$ هر $t(z)$ متناهی کمترین طول از یک u,z-مسیر است که مستقیماً از S به z می‌رسد. این مطلب را با استقرا روی $|S|$ ثابت می‌کنیم؛ این مسأله مثالی از «باردهی فرض استقرا» است. گام پایه از ارزشدهی آغازی نتیجه می‌شود: $k = ۱$، $S = \{u\}$، $d(u,u) = ۰$، و مسیری به‌طول متناهی که از S به z می‌رسد وجود دارد اگر، و فقط اگر، uz یک یال باشد، که در این حالت $t(z) = w(uz)$.

برای گام استقرا، فرض کنیم هنگامی که $|S| = k$، ادعاهای گوناگون دربارهٔ S درست باشند. فرض کنیم v رأسی در $z \notin S$ باشد به‌طوری که فاصلهٔ موقتی $t(z)$ کوچکترین باشد. نخست استدلال می‌کنیم که $d(u,v) = t(v)$. یک کوتاهترین u,v-مسیر باید پیش از رسیدن به v از S خارج شود. فرض استقرا بیان می‌کند که طول کوتاهترین مسیر که مستقیماً از S به v می‌رود عبارت است از $t(v)$. فرض استقرا و انتخاب v همچنین

تضمین می‌کنند مسیری که هر رأس بیرون S را ملاقات کرده، و سپس به v می‌رسد، دارای طول حداقل $t(v)$ است. از این‌رو $d(u,v) = t(v)$. پیش از بهنگام کردن، کوتاهترین u,z-مسیر که مستقیماً از S به z می‌رسد دارای طول $t(z)$ است (∞ اگر هیچ چنین مسیری پیدا نشود). هنگامی که v را به S می‌افزاییم، باید همچنین مسیرهایی را که از v به z می‌رسند در نظر بگیریم. از آنجا که اکنون $d(u,v)$ را محاسبه کرده‌ایم، کوتاهترین چنین مسیری دارای طول $d(u,v) + w(vz)$ است، و این را با مقدار پیشین $t(z)$ با بهنگام کردن $t(z)$ مقایسه می‌کنیم. اینک تحقیق کرده‌ایم که هر ادعای ثابت شده در گام استقرا برای مجموعهٔ جدید $S \cup \{v\}$ به اندازهٔ $k + r$ برقرار است. □



الگوریتم این شرط را که به‌ازای هر $x \in S$ و $z \notin S$، $d(u,x) \le t(z)$ است حفظ می‌کند؛ بنابراین رأسها را به‌ترتیب ناکاهشی فاصله از u انتخاب می‌کند. در حالت خاص، هنگامی که G بی‌وزن باشد **جستجوی پهنا - نخستین** از u است. در این حالت، هم الگوریتم و هم اثبات (تمرین ۱۱) توصیف‌های ساده‌تری دارند.

۸.۳.۲. الگوریتم. جستجوی پهنا -نخستین[1].

ورودی: یک گراف بی‌وزن (یا گراف سودار) و رأس آغازی u.

پنداره: یک مجموعهٔ R از رأسهایی که در دسترس‌اند، اما جستجو نشده‌اند و یک مجموعهٔ S از رأسهایی را که جستجو شده‌اند حفظ می‌کنیم. مجموعهٔ R به عنوان یک فهرست (صف) نخستین ورودی نخستین خروجی ابقا می‌شود به‌طوری

1) Breadth-First search (BFS)

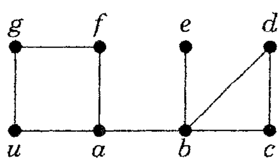
که نخستین رأسهای یافت شده نخستین رأسهای جستجو شده باشند.

ارزشدهی آغازی: $R = \{u\}$، $S = \phi$، $d(u,u) = 0$.

تکرار: تا مادامی که $R \neq \phi$، از نخستین رأس v از R جستجو می‌کنیم. همسایه‌هایی از v که در R یا S نیستند به آخر R افزوده می‌شوند و فاصلهٔ $d(u,v) + 1$ را به آنها نسبت می‌دهیم، و آنگاه v از جلوی R برداشته می‌شود و در S قرار داده می‌شود. □

طولانیترین فاصله از یک رأس u تا رأس دیگر خروج از مرکز $\varepsilon(u)$ است. بنابراین می‌توانیم قطر G را با انجام جستجوی پهنا - نخستین از هر رأس محاسبه کنیم. دیگر راهبردهای جستجو کاربردهای دیگری دارند. در جستجوی ***ژرفا-نخستین***[1]، همواره از جدیدترین رأس کشف شده که یالهای جستجو نشده دارد (این روش را همچنین پی‌جویی به عقب می‌نامند) جستجو می‌کنیم. بر خلاف آن، BFS از قدیمی‌ترین رأس جستجو می‌کند، پس تفاوت میان DFS و BFS این است که در DFS مجموعهٔ R به عنوان یک «پَشته» از آخرین ورودی نخستین خروجی و نه اینکه به عنوان یک صف حفظ می‌شود.

۹.۳.۲. مثال. *جستجوی ژرفا-نخستین.* درگراف زیر، یک جستجوی ژرفا-نخستین از u رأسها را به‌ترتیب u، a، b، c، d، e، f، g پیدا می‌کند. برای هر دوی BFS و DFS، ترتیب رأسها به‌ترتیب یالهای جستجو شونده از یک رأس جستجو شده بستگی دارد. در بند ۱.۴ یک کاربرد جستجوی ژرفا-نخستین آمده است. □



یک جستجوی پهنا-نخستین یا ژرفا - نخستین از u درختی را که در u ریشه‌دار است

1) Depth-First Search (DFS)

ایجاد می‌کند؛ هر زمان که یک رأس جدید v را کشف می‌کنیم، یال میان v و رأسی را که از آن به v رسیده‌ایم اضافه می‌کنیم. این امر درختی را می‌سازد که تبدیل به یک درخت فراگیر از مؤلفهٔ شامل u می‌شود. سودمندی جستجوی ژرفا - نخستین ناشی از یک ویژگی بنیادی درخت فراگیر حاصل است.

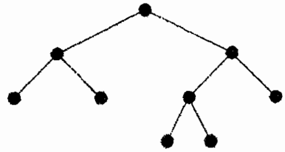
۱۰.۳.۲. لم. اگر T درختی فراگیر از یک گراف همبند G باشد که با جستجوی ژرفا-نخستین از u به‌وجود آمده باشد، آنگاه هر یال از G که در T نباشد متشکل از دو رأس v، w است به‌طوری که v روی u, w-مسیر در T قرار دارد.

اثبات. فرض کنیم uw یالی از G باشد، در حالی که در جستجوی ژرفا-نخستین اول به v و سپس به w برخورد کنیم. از آنجایی که uw یک یال است، نمی‌توانیم v را پیش از آنکه w به T افزوده شود به پایان ببریم. از این‌رو w یک جایی در زیر درخت تشکیل شده پیش از پایان یافتن v ظاهر می‌شود، و مسیر از w به u شامل v می‌شود. □

درختها در دانش کامپیوتر

بیشتر کاربردهای درختها در دانش کامپیوتر از درختهای ریشه‌دار بهره می‌گیرند.

۱۱.۳.۲. تعریف. یک ***درخت ریشه‌دار*** یک رأس r را به عنوان ریشه متمایز می‌سازد. برای هر رأس v، فرض کنیم $P(v)$، r، v- مسیر یکتا باشد. ***والد*** v همسایهٔ v روی $P(v)$ است. ***فرزندان*** v دیگر همسایه‌های آن هستند. ***نیاکان*** v رأسهای $P(v)-v$ می‌باشند. ***نواده‌های*** v رأسهای u هستند به‌طوری که $P(u)$ شامل v (از جمله فرزندان v) است. ***برگها*** رأسهای بدون فرزند هستند (رأسهای غیرریشه از درجهٔ ۱). یک ***درخت هامنی شده ریشه‌دار*** یا ***درخت کاشته شده*** درختی ریشه‌دار با ترتیبی چپ به راست است که برای فرزندان هر رأس مشخص شده باشد.



هنگام اجرای BFS یا DFS از u، معمولاً درخت حاصل T را به‌صورت ریشه‌دار در u در نظر می‌گیریم. در این زبان، لم ۹.۳.۲ بیان می‌کند که هر یال از G بیرون یک درخت فراگیر T که با یک جستجوی ژرفا-نخستین تشکیل شده باشد دو رأس را به هم می‌پیوندد به‌طوری که یکی نیای دیگری باشد.

۱۲.۳.۲. **تعریف.** یک ***درخت دوتایی*** یک درخت هامنی شده ریشه‌دار است که در آن هر رأس دارای حداکثر دو فرزند باشد، و هر فرزند با یک رأس به عنوان ***فرزند چپ*** یا ***فرزند راست*** آن مشخص شده باشد. زیردرختهای ریشه‌دار با فرزندان ریشه، ***زیردرخت چپ*** و ***زیردرخت راست*** درخت هستند. یک درخت k-تایی به هر رأس تا k فرزند می‌دهد.

در برخی کاربردهای درختهای دوتایی، غیربرگها باید دقیقاً دو فرزند داشته باشند (تمرین ۱۸.۳.۲). درختهای دوتایی ذخیره‌سازی داده‌ها را برای دستیابی کارا ممکن می‌سازند. هنگامی که هر فقرهٔ داده را به یک برگ از یک درخت دوتایی ریشه‌دار وابسته می‌کنیم، می‌توانیم با جستجو از ریشه به فقره‌ها دسترسی پیدا کنیم اگر بتوانیم در هر غیربرگ بگوییم که کدام زیردرخت برگ مطلوب را شامل می‌شود. این کار را با وابسته کردن دنبالهٔ ۰، ۱ به هر برگ که دنبالهٔ گامهای چپ یا گامهای راست روی مسیر را از ریشه به برگ کدگذاری می‌کند انجام می‌دهیم. طول جستجو طول این مسیر است. با در نظر گرفتن احتمالها برای دستیابی به n فقره، می‌خواهیم آنها را با n برگ از یک درخت دوتایی مورد انتظار با مینیمم کردن طول جستجو وابسته کنیم.

به‌طور مشابهی با توجه به فایلهای بزرگ کامپیوتری و فضای ذخیره‌سازی محدود دیسک، می‌خواهیم نویسه‌ها را به عنوان دنباله‌های بیت کدگذاری کنیم تا طول کل مینیمم

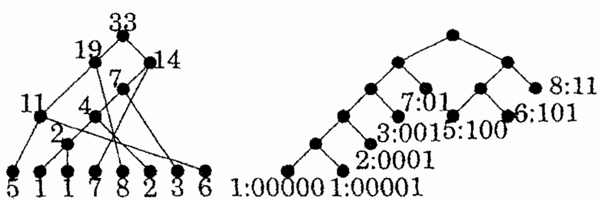
شود. با در نظر گرفتن فراوانیهای نویسه‌ها (یا پیامها)، می‌توانیم فراوانیها را بر تعداد کل نویسه‌ها تقسیم کنیم تا احتمالهای $\{p_i\}$ را به‌دست آوریم، و آنگاه این کار مسأله را به شکل نخستین تبدیل می‌کند: می‌خواهیم با نسبت دادن واژه‌های کد دودویی طول میانگین پیام را مینیمم کنیم. طول واژه‌های کد ممکن است فرق داشته باشد، بنابراین به روشی برای تشخیص انتهای واژه کد جاری نیاز داریم. اگر هیچ واژهٔ کدی پیشوندی از واژهٔ کد دیگری نباشد، آنگاه واژه جاری در نخستین (و تنها) بیتی که دنباله‌ای از انتهای واژهٔ قبلی یک واژهٔ کد باشد پایان می‌یابد.

شرط آزاد-پیشوند تضمین می‌کند که واژه‌های کد متناظر با برگهای یک درخت دوتایی هستند، در حالی که کد برای یک برگ، دنبالهٔ ۰، ۱ است که به‌وسیلهٔ مسیری از ریشه ایجاد می‌شود، با فرض اینکه ۰ نشانگر حرکت به یک فرزند چپ و ۱ نشانگر حرکت به یک فرزند راست باشد. طول مورد انتظار یک پیام $\sum p_i l_i$ است، که در آن l_i طول واژهٔ کد (مسیر از ریشه) نسبت داده شده به واژهٔ پیام iاُم است. ساختن کد بهین به‌طور شگفت‌انگیزی آسان است.

۱۳.۳.۲. الگوریتم. *هافمن [۱۹۵۲].* ورودی یک توزیع احتمال گسسته $\{p_i\}$ روی n واژهٔ پیام است؛ خروجی یک کد آزاد-پیشوند است. اگر $n = ۲$، الگوریتم واژهٔ کد ۱ را به یک واژه پیام و ۰ را به دیگری نسبت می‌دهد. اگر $n > ۲$، الگوریتم دوفقره‌ای را که کمتر از همه انتظار می‌رود با یک فقره منفرد ترکیب می‌کند که احتمال آن مجموع احتمالهای دو فقرهٔ اولیهٔ است، آنگاه بازگشته خود را فرامی‌خواند تا کُد مجموعهٔ $n - ۱$ فقرهٔ حاصل را بیابید، و واژهٔ کد حاصل را برای فقرهٔ ترکیب شده با دو بسط آن به وسیلهٔ ۱ و ۰ نسبت داده شده به دو فقره‌ای که کمتر از همه مورد انتظار بودند، جایگزین کند. □

۱۴.۳.۲. مثال. *کدگذاری هافمن.* فرض کنیم فراوانیهای هشت پیام ۵، ۱، ۱، ۷، ۸، ۲، ۳، ۶ باشند. الگوریتم فقره‌ها را طبق درخت سمت چپ شکل زیر ترکیب

می‌کند، فقره‌ها از پایین به بالا ترکیب می‌شوند. نخست دو فقره با وزن ۱ ترکیب می‌شوند که فقره‌ای با وزن ۲ تشکیل دهند. حال این فقره و فقرهٔ اولیه که وزن ۲ دارد زود یا بترین هستند، که با هم ترکیب می‌شوند تا فقره‌ای با وزن ۴ تشکیل دهند. حال ۳ و ۴ ترکیب می‌شوند، و پس از آن زود یا بترین عناصر فقره‌های اولیهٔ دارای وزن ۵ و ۶ خواهند بود. ترکیبهای باقیمانده به ترتیب عبارت خواهند بود از $۱۱ = ۶ + ۵$، $۱۴ = ۷ + ۷$، $۱۹ = ۱۱ + ۸$، $۳۳ = ۱۹ + ۱۴$. از طرح این درخت در سمت راست شکل، می‌توانیم واژه‌های کُد را انتخاب کنیم. واژه‌های کُد متناظر با ترتیب اولیهٔ فقره‌ها عبارت‌اند از ۱۰۰، ۰۰۰۰۰، ۰۰۰۰۱، ۰۱، ۱۱، ۰۰۰۱، ۰۰۱ و ۱۰۱. طول مورد انتظار برای این کُد عبارت است از $۳ > \sum p_i l_i = \frac{۹۰}{۳۳}$، در حالی که طول مورد انتظار برای یک کد استفاده کننده از تنها هشت واژه به طول ۳، ۳ خواهد بود. □

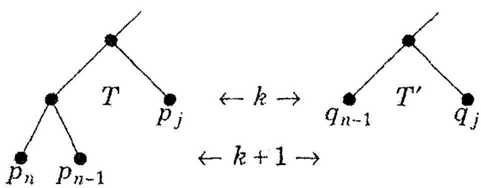


۱۵.۳.۲. قضیه. با در نظر گرفتن توزیع احتمال $\{p_i\}$ روی n واژه، الگوریتم هافمن کد آزاد-پیشوند را با مینیمم طول مورد انتظار می‌سازد.

اثبات. از استقرا روی n استفاده می‌کنیم. برای $n = ۲$، باید یک بیت را برای فرستادن یک پیام بفرستیم، و الگوریتم طول کد ۱ را می‌سازد؛ این گام پایه را کامل می‌کند. برای گام استقرا، فرض کنیم $n > ۲$، و فرض کنیم الگوریتم کد بهین را هنگامی که توزیعی برای $n - ۱$ فقره داشته باشیم محاسبه می‌کند. هر درخت دوتایی با n برگ متناظر با کدی برای n پیام است. برای هر درخت ثابت با n برگ، می‌توانیم طول مورد انتظار را با نسبت دادن آزمندانه پیامهای با احتمالهای $p_۱ \geq \cdots \geq p_n$ به برگها به ترتیب افزایشی ژرفا مینیمم کنیم. بدین سان در یک کد بهین می‌توانیم فرض کنیم دو پیامی که کمتر از همه محتمل هستند به برگهای دارای بیشترین ژرفا نسبت داده می‌شوند (هر برگ در ژرفا

ماکسیمم برگ دیگری به عنوان همنیا دارد). می‌توانیم همچنین فرض کنیم پیامهایی که کمتر از همه محتمل‌اند در بیشترین ژرفا به عنوان همنیا ظاهر می‌شوند، زیرا جایگشت فقره‌هایی که برگها به آنها نسبت داده شده‌اند در یک ژرفای معلوم طول مورد انتظار را تغییر نمی‌دهد.

فرض کنیم T درختی بهین است، در حالی که p_n و $p_{n-۱}$ کمترین چیز محتمل هستند که در بیشترین ژرفا به عنوان برگهای همنیا قرارگرفته‌اند. فرض کنیم T' درخت به‌دست آمده از T با حذف این برگها باشد. فرض کنیم $\{q_i\}$ توزیع احتمال به‌دست آمده با جایگزین کردن $q_{n-۱} = p_{n-۱} + p_n$ به‌جای $\{p_{n-۱}, p_n\}$ باشد. درخت T' کدی برای $\{q_i\}$ به‌دست می‌دهد. طول مورد انتظار برای T طول مورد انتظار برای T' به اضافه $q_{n-۱}$ است، زیرا اگر k ژرفای برگ نسبت داده شده به $q_{n-۱}$ باشد، $kq_{n-۱}$ را از دست می‌دهیم و $(k+۱)(p_{n-۱}+p_n)$ را در حرکت از T' به T به‌دست می‌آوریم. این امر برای هر انتخاب T' درست است، پس بهترین کار آن است که از درخت T'ای که برای $\{q_i\}$ بهین باشد استفاده کنیم. بنابر فرض استقرا، انتخاب بهین برای T' از به کار بردن الگوریتم هافمن در مورد $\{q_i\}$ به‌دست می‌آید. چون جایگزین کردن $q_{n-۱}$ به‌جای $\{p_{n-۱}, p_n\}$ نخستین گام الگوریتم هافمن برای $\{p_i\}$ است، نتیجه می‌گیریم که الگوریتم هافمن درخت بهین T را برای $\{p_i\}$ ایجاد می‌کند. □



الگوریتم هافمن یک کد بهین آزاد—پیشوند را محاسبه می‌کند، و طول مورد انتظار آن نزدیک به مقدار بهینه روی همه گونه‌های کدهای دودویی است. شانون[1] [۱۹۴۸] اثبات کرد که برای هر کد با ارقام دودویی، طول مورد انتظار حداقل *آنتروپی* توزیع احتمال

1) Shannon

گسسته $\{p_i\}$ است، که بنابر تعریف $-\sum p_i lg p_i$ می‌باشد (تمرین ۱۹). هنگامی که هر p_i توانی از $\frac{1}{2}$ باشد، کد هافمن دقیقاً با کران این مقدار مواجه خواهد شد (تمرین ۱۸).

تمرینات

۲.۳.۱. (−) ثابت یا رد کنید: اگر T یک درخت فراگیر با وزن مینیمم از یک گراف وزندار G باشد، آنگاه u,v-مسیر در T یک u,v-مسیر با وزن مینیمم در G است.

۲.۳.۲. (−) در شبکه‌ای پنج شهر وجود دارند. هزینهٔ ساخت جاده‌ای مستقیم میان i و j درایه a_{ij} در ماتریس زیر است. یک درایهٔ نامتناهی نشان می‌دهد که کوهی در راه وجود دارد و نمی‌تواند جاده ساخته شود. کمترین هزینهٔ قابل دسترسی همهٔ شهرها به یکدیگر را تعیین کنید.

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۳ & ۵ & ۱۱ & ۹ \\ ۳ & ۰ & ۳ & ۹ & ۸ \\ ۵ & ۳ & ۰ & \infty & ۱۰ \\ ۱۱ & ۹ & \infty & ۰ & ۷ \\ ۹ & ۸ & ۱۰ & ۷ & ۰ \end{pmatrix}$$

۲.۳.۳. درگراف $K_۱ \vee C_۴$، وزنهای $(۱,۱,۲,۲,۳,۳,۴,۴)$ را به یالها به دو روش نسبت دهید: یک روش به‌طوری که درخت فراگیر با وزن مینیمم یکتا باشد، و روش دیگر به‌طوری که درخت فراگیر با وزن مینیمم یکتا نباشد.

۲.۳.۴. فرض کنیم G گرافی وزندار است که در آن وزنهای یالها متمایزاند. بدون استفاده از الگوریتم کروسکال، ثابت کنید که G تنها دارای یک درخت فراگیر با وزن مینیمم است.

۲.۳.۵. فرض کنیم F جنگلی فراگیر از یک گراف وزندار همبند G است. در میان

همهٔ یالهای G که نقاط پایانی در مؤلفه‌های مختلف F دارند، فرض کنیم e یالی با وزن مینیمم باشد. ثابت کنید که در میان همهٔ درختهای فراگیر G که شامل F هستند، یکی با وزن مینیمم وجود دارد که شامل e می‌باشد. از این امر برای ارائه اثبات دیگری بر نتیجه‌بخش بودن الگوریتم کروسکال استفاده کنید.

۶.۳.۲. (!) الگوریتم پریم[1] درختی فراگیر از یک رأس دلخواه از یک گراف وزندار G می‌سازد، مکرراً زود یا بترین یال میان رأسی که پیشتر جذب شده و رأسی را که هنوز جذب نشده اضافه می‌کند، و هنگامی که $n-۱$ رأس دیگر G جذب شده‌اند پایان می‌یابد. (پیوندها به‌طور دلخواه قطع می‌شوند.) ثابت کنید که الگوریتم پریم یک درخت فراگیر با وزن مینیمم از G می‌سازد. (ابداع به‌طور مستقل به‌وسیلهٔ جرنیک [۱۹۳۰]، پریم [۱۹۵۷]، دیجکسترا [۱۹۵۹]).

۷.۳.۲. یک درخت فراگیر *مینیماکس* یا *تنگنا* یک درخت فراگیر است که در آن وزن ماکسیمم یالها کوچکترین مقدار ممکن باشد. ثابت کنید که هر درخت فراگیر با وزن مینیمم یک درخت فراگیر تنگناست.

۸.۳.۲. فرض کنیم T یک درخت فراگیر با وزن مینیمم در یک گراف همبند وزندار G است. ثابت کنید که T یک سنگینترین یال را از هر دور در G حذف می‌کند.

۹.۳.۲. (!) با در نظر گرفتن یک گراف وزندار همبند، مکرراً یک سنگینترین یال نابرشی را حذف می‌کنیم تا هنگامی که گراف حاصل بیدور باشد. ثابت کنید که زیرگراف باقیمانده یک درخت فراگیر با وزن مینیمم است.

۱۰.۳.۲. (!) فرض کنیم T یک درخت فراگیر با وزن مینیمم در G است، و T' درخت فراگیر دیگری در G باشد. ثابت کنید که T' را می‌توان با دنباله‌ای از گامها که یک یال از T' را با یک یال از T تعویض می‌کند به T تبدیل کرد، به‌طوری که مجموعهٔ یالها همواره

---

1) Prim

یک درخت فراگیر باشد و وزن کل هیچگاه افزایش نمی‌یابد.

۱۱.۳.۲. فرض کنیم آزمندانه به جستجوی یک مسیر فراگیر با وزن مینیمم هستیم. مکرراً یال با کمترین وزن را انتخاب می‌کنیم به‌طوری که یالهای انتخاب شده تا اینجا، اجتماع مجزایی از مسیرها را تشکیل دهند. هنگامی که $n - ۱$ یال انتخاب شد، نتیجه یک مسیر فراگیر است. ثابت کنید که این الگوریتم همواره یک مسیر فراگیر با وزن مینیمم یا یک خانواده نامتناهی از مثالهای نقض را در حالی که بی‌نتیجه‌اند ارائه می‌دهد.

۱۲.۳.۲. (−) پنج‌شهر در شبکه‌ای وجود دارند. زمان سفر برای مسافرت به‌طور مستقیم از i به j درایه a_{ij} در ماتریس زیر است. ماتریس متقارن نیست (از گرافهای سودار استفاده کنید)، و $a_{ij} = \infty$ یعنی راه مستقیمی وجود ندارد. کمترین زمان سفر و سریعترین راه را از i به j برای هر جفت i، j تعیین کنید.

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۱۰ & ۲۰ & \infty & ۱۷ \\ ۷ & ۰ & ۵ & ۲۲ & ۳۳ \\ ۱۴ & ۱۳ & ۰ & ۱۵ & ۲۷ \\ ۳۰ & \infty & ۱۷ & ۰ & ۱۰ \\ \infty & ۱۵ & ۱۲ & ۸ & ۰ \end{pmatrix}$$

۱۳.۳.۲. با در نظر گرفتن یک رأس آغازی u در یک گراف بی‌وزن یا گراف سودار G، مستقیماً ثابت کنید (بدون الگوریتم دیجکسترا) که الگوریتم BFS برای هر $z \in V(G)$، $d(u, z)$ را محاسبه می‌کند.

۱۴.۳.۲. ***درخت‌فراگیر با قطر مینیمم.*** یک $MDST$[1] یک درخت فراگیری است که در آن طول ماکسیمم یک مسیر کمترین مقدار ممکن است. آنچه بیدرنگ به‌نظر

1) Minimum Diameter Spanning Tree

می‌رسد این است که اجرای الگوریتم دیجکسترا از رأسی با خروج از مرکز مینیمم (یک مرکز) یک $MDST$ خواهد ساخت، اما این روش ممکن است بی‌نتیجه باشد.

الف) یک مثال ۶-رأسی از یک گراف بی‌وزن (همهٔ وزنهای یالها برابر است) بسازید که در آن الگوریتم دیجکسترا را بتوان از یک رأس با خروج از مرکز مینیمم اجرا کرد و یک درخت فراگیری ساخت که قطر مینیمم نداشته باشد.

(توجه: هنگامی که نامزدهای چندگانه با فاصلهٔ یکسان از ریشه، و یا راههای چندگانه برای رسیدن به رأس جدید با فاصلهٔ مینیمم وجود دارند، انتخاب در الگوریتم دیجکسترا به‌طور دلخواه است.)

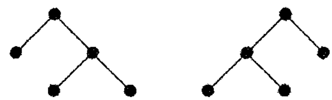
ب) یک مثال ۴-رأسی از یک گراف وزندار بسازید به‌طوری که الگوریتم دیجکسترا نتواند یک $MDST$ را هنگامی که از هر رأسی اجرا شود، بسازد.

۲.۳.۱۵. الگوریتمی کارا طراحی کنید که با دادن گرافی به عنوان ورودی، معین کند که آیا گراف دوبخشی است. گراف با ماتریس مجاورت یا فهرستهای رأسها و همسایگانشان داده می‌شود. الگوریتم نباید نیاز به جستجوی هیچ یالی بیش از دو بار داشته باشد.

۲.۳.۱۶. فرض کنیم $f(G)$ نشانگر تعداد ماکسیمم برگها در یک درخت فراگیر از G باشد. H را از یک دنبالهٔ دوری با $۳m$ خوشه، و با مجاورکردن هر رأس به هر رأس در خوشه قبل از آن و خوشهٔ بعد از آن تشکیل دهید. فرض کنیم اندازه‌های خوشهٔ $\frac{k}{۲}$، $\frac{k}{۲}$، ۱، $\frac{k}{۲}$، $\frac{k}{۲}$، ۱، $\cdots$ باشد، پس H، k-منتظم است. $f(H)$ را تعیین کنید. **(توضیح:** حدس زده می‌شود که H، f را روی همهٔ گرافهای n-رأسی با درجهٔ مینیمم حداقل k مینیمم می‌کند. حدس برای $k \leq ۵$ درست به‌شمار می‌آید.)

۲.۱۳.۱۷. فرض کنیم G یک درخت هامنی شدهٔ ریشه‌دار n-رأسی است که در آن هر رأس دارای ۰ یا k فرزند است. با داشتن k، به‌ازای چه مقادیری از n این امر امکانپذیر است؟

۱۸.۳.۲. یک رابطهٔ بازگشت برای شمارش درختهای دوتایی با $n+1$ برگ بیابید (در اینجا هر رأس غیربرگ دقیقاً دو فرزند دارد، و ترتیب چپ به‌راست فرزندان مهم است). هنگامی که $n=2$، حالتهای ممکن دو درخت زیر هستند.



۱۹.۳.۲. یک رابطهٔ بازگشت برای تعداد درختهای هامنی شدهٔ ریشه‌دار با n رأس بیابید. (مانند یک درخت دوتایی ریشه‌دار، زیردرختهای به‌دست آمده با حذف ریشه از یک درخت هامنی شدهٔ ریشه‌دار با ترتیب چپ به راست آنها مشخص می‌شوند.)

۲۰.۳.۲. (−) یک کد با طول مینیمم مورد انتظار را برای یک مجموعهٔ ده پیامی که فراوانیهای نسبی‌شان ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ هستند محاسبه کنید. طول مورد انتظار یک پیام در این کد بهین چیست؟

۲۱.۳.۲. (−) در بازی *واژه‌سازی*[۱] فراوانیهای نسبی حرفها مطابق جدول زیر هستند. این توزیع درست حرفها در انگلیسی نیست؛ به عنوان مثال، تعداد sها برای بهبود بازی کاهش داده شده‌اند. همچنین دوجای خالی وجود دارند که تعداد کل حرفها را به ۱۰۰ می‌رسانند؛ جاهای خالی را به عنوان نویسه‌ای اضافی تلقی می‌کنیم. وانمود کنیم که اینها فراوانیهای نسبی واقعی در متن انگلیسی هستند، و کد آزاد-پیشوند با طول مینیمم مورد انتظار را برای مخابره پیامها محاسبه کنید. پاسخ خود را با فهرست کردن فراوانی نسبی برای هر طول واژه کُد به‌دست دهید. طول مورد انتظار کُد (به وسیلهٔ نویسه) را محاسبه کنید. (توضیح: کدگذاری مستقیم $ASCII$ پنج بیت $ASCII$ اینکه ما کدهایی را برای نقطه‌گذاری در نظر نگرفته‌ایم نادرست است.)

برای هر حرف استفاده می‌کند، پس این کُد بر آن برتری خواهد داشت. البته، از نظر

۱) نوعی بازی که در آن واژه‌ها از حروف چاپ شده روی ژتونها یا بلوکها روی یک صفحه شطرنجی ساخته می‌شوند.—م.

AB	CD	EF	GH	IJ	KL	MN	OP	QR	ST	UV	WX	YZ	ϕ
۹۲	۲۴	۱۲۲	۳۲	۹۱	۱۴	۲۶	۸۲	۱۶	۴۶	۴۲	۲۱	۲۱	۲

۲۲.۳.۲. فرض کنیم که n پیام با احتمالهای p_1، $\cdots$، p_n وجود دارند و هر p_i توانی از $\frac{1}{2}$ است (هر $p_i \geq 0$ و $\sum p_i = 1$).

الف) ثابت کنید که دو پیام کمتر از همه محتمل دارای احتمال برابراند.

ب) ثابت کنید که طول پیام مورد انتظار از کد هافمن برای این توزیع برابر است با $-\sum p_i lg p_i$.

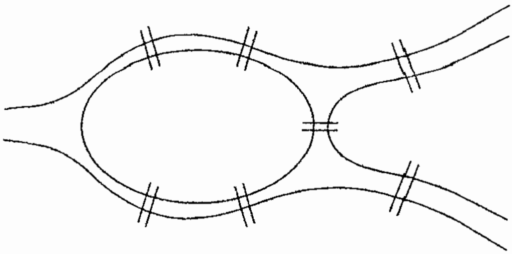
۲۳.۳.۲. (+) فرض کنیم که n پیام با احتمالهای p_1، $\cdots$، p_n وجود دارند و اینکه واژه‌ها، به واژه‌های کد دودویی متمایز نسبت داده شده‌اند. ثابت کنید که برای هر کُد، طول مورد انتظار یک واژه کد نسبت به این توزیع حداقل برابر است با $-\sum p_i lg p_i$. (شانون [۱۹۴۸]) (*راهنمایی:* از استقرا روی n استفاده کنید.)

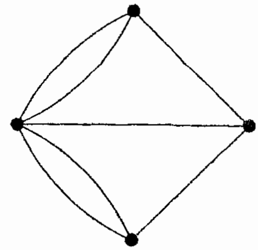
۲-۴ گرافهای اویلری و گرافهای سودار

برخی می‌گویند که نظریهٔ گراف در شهر کونیگسبرگ[1]، که در کنار رودِ پرگل[2] قرار گرفته است، متولد شد. رودخانه جزیره کنیفوف[3] را در میان می‌گرفت، و هفت پل چهار توده خشکی شهر را به‌هم وصل می‌کردند، همچنانکه در شکل سمت چپ زیر نشان داده شده است. به‌نظر می‌رسد که ساکنان شهر می‌خواستند بدانند آیا ممکن بود که بتوان گردشی را از خانه آغاز کرد، از هر پل دقیقاً یک بار عبور نمود و به خانه بازگشت. مسأله به عبور کردن از گراف چندگانه رسم شده سمت راست تبدیل می‌شود، که در آن رأسها نماینده توده‌های خشکی و یالها نماینده پلها می‌باشند. می‌خواهیم بدانیم چه هنگام یک گراف چندگانه یک گذر بسته منفرد را که از همه یالهایش بگذرد

1) Königsberg 2) Pregel 3) Kneiphof

شامل می‌شود؛ از واژهٔ *مدار* برای رساندن همان معنای «گذر بسته» استفاده می‌کنیم.





مدارهای اویلری

ریاضیدان سویسی لئونهارت اویلر (تلفظ می‌شود «اولر») در سال ۱۷۳۶ ملاحظه کرد که گردش مطلوب وجود ندارد. یک مدار دوبار در درجهٔ یک رأس برای هر ملاقات اثر می‌کند، پس یک گراف چندگانه قابل عبور با این روش باید هر درجهٔ رأسش زوج باشد (و باید همهٔ یالهایش در یک مؤلفه باشند). همهٔ درجه‌های رأسها در گراف بالا فرد هستند، بنابراین شرط لازم را برقرار نمی‌کند. اویلر بیان کرد که شرط کافی نیز هست، و به افتخار او ماگرافی را که یالهایش به مدار منفردی تعلق دارند *اویلری* می‌نامیم. مقالهٔ اویلر، که در ۱۷۴۱ منتشر شد، اثباتی برای اینکه شرط لازم آشکار، کافی هم هست ارائه نداده است. هایر هولزر[1] [۱۸۷۳] نخستین اثبات را منتشر کرد؛ نمودار سمت راست بالا برای مدل گراف چندگانه تا پیش از ۱۸۹۴ ظاهر نشد (ویلسون[2] [۱۹۸۶] را برای بحثی دربارهٔ تاریخ مسأله ببینید).

در این بند، طوقه‌ها و یالهای چندگانه را مجاز خواهیم داشت، زیرا کانون توجهٔ ما روی یالهای عبورکننده است. همچنین از *رأس فرد* یا *رأس زوج* برای نشان دادن دوتایگی یک درجهٔ رأس استفاده می‌کنیم، و می‌گوییم که یک گراف (چندگانه) زوج است اگر همهٔ رأسهایش زوج باشند. یادآوری می‌کنیم که یک گراف *نابدیهی* گرافی است که دارای حداقل یک یال باشد.

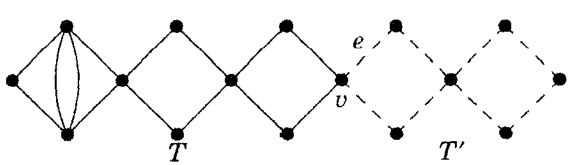
1) Hierholzer 2) Wilson

۱.۴.۲. لم. هر گذر ماکسیمال در یک گراف زوج یک گذر بسته است.

اثبات. فرض کنیم T یک گذر ماکسیمال باشد. اگر T بسته نباشد، آنگاه T دارای تعداد فردی از یالهای متصل به رأس پایانی v است، اما همچنین یال دیگری متصل به v وجود دارد که در T نیست و می‌تواند برای بسط دادن T به‌کار رود. □

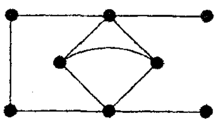
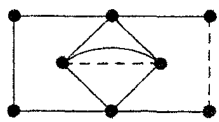
۲.۴.۲. قضیه. یک گراف متناهی G اویلری است (یالهایش قابل عبور به‌وسیلهٔ مدار منفردی باشند) اگر، و فقط اگر، همهٔ درجه‌های رأسهایش زوج باشند و همهٔ یالهایش به یک مؤلفهٔ منفرد تعلق داشته باشند.

اثبات. دیده‌ایم که شرایط لازم هستند. برعکس، فرض کنیم که G در آنها صدق می‌کند و دارای حداقل یک یال است. فرض کنیم T یک گذر ماکسیمال در G باشد. بنابر لم ۱.۴.۲، T بسته است. اگر T شامل $E(G)$ نباشد، فرض کنیم $G' = G - E(T)$. چون T در هر رأس درجهٔ زوج دارد، G' گرافی زوج است. از آنجاکه G دارای تنها یک مؤلفهٔ نابدیهی است، مسیری در G از هر یال به هر یال دیگر وجود دارد. از این‌رو یک یال e از G' به یک رأس v از T متصل است. فرض کنیم T' یک گذر ماکسیمال در G' باشد که از v آغاز می‌شود و در امتداد e است. بنابر لم ۱.۴.۲، T' بسته است. از این‌رو می‌توانیم از T در امتداد T' دور بزنیم تا هنگامی که به v برسیم (و آنگاه T را کامل کنیم) و گذر بستهٔ طولانیتری از T را به‌دست آوریم. این‌گذر را به‌جای T قرار می‌دهیم و بحث را تکرار می‌کنیم. چون $E(G)$ متناهی است، این فرآیند باید پایان یابد، و تنها با ساختن یک مدار اویلری پایان می‌پذیرد. □



یک اثبات کوتاه را با استفاده از اکسترمال بودن (استفاده ازگذرهای ماکسیمال) به‌دست می‌آوریم. تمرینات ۳ و ۷ نیاز به اثباتهای دیگری دارند.

با در نظر گرفتن شکل G برای کشیدن روی کاغذ، چند بار باید قلم (یا رسام) را بلند کنیم و حرکت دهیم تا آن را بکشیم؟ این مینیمم تعداد گذرهای دوبه‌دو مجزا–یال است که اجتماعشان $E(G)$ است. می‌توانیم مسأله را به گرافهای همبند تبدیل کنیم، زیرا تعداد گذرهای مورد نیاز برای کشیدن G مجموع تعداد مورد نیاز برای کشیدن هر مؤلفه است. یادآوری می‌کنیم که هر مدار یک گذر بسته است. گراف سمت چپ زیرچهار رأس فرد دارد و می‌تواند به دو گذر تجزیه شود. افزودن یالهای خط‌چین شده در سمت راست، آن را اویلری می‌کند.

G   G'

۳.۴.۲. قضیه. برای یک گراف نابدیهی همبند با $2k$ رأس فرد، تعداد مینیمم گذرهای دوبه‌دو مجزا-یال که یالها را می‌پوشانند برابر است با $\max\{k, 1\}$.

اثبات. یک گذر به هر رأس درجهٔ زوج می‌دهد، به‌جز آنکه گذری نابسته به نقاط پایانی‌اش درجهٔ فرد می‌دهد. بنابراین، یک افراز از یالها به گذرها باید دارای گذری باشد که در هر رأس فرد پایان یابد. چون هر گذر (حداکثر) دو انتها دارد، این مستلزم آن است که حداقل k گذر وجود داشته باشند. همچنین مستلزم آن است که حداقل یک گذر موجود باشد، زیرا $e(G) > 0$، و ثابت کرده‌ایم که یک گذر کافی است اگر $k = 0$ باشد.

برای اثبات آنکه kگذر هنگامی که $k > 0$ باشد کافی است، رأسهای فرد در G را به دلخواه جفت کنیم و G' را با افزودن یک نسخه از هر جفت به عنوان یک یال، همچنانکه در بالا نشان داده شده است، تشکیل دهیم. G' حاصل همبند، زوج، و دارای یک مدار اویلری است، زیرا قضیهٔ ۲.۴.۲ یالهای چندگانه را مجاز می‌کند. هنگامی که از مدار عبور می‌کنیم، گذر جدیدی را در G هر موقع که از یالی از $G' - E(G)$ می‌گذریم آغاز می‌کنیم. این امر k گذر مجزا-یال را که $E(G)$ را افراز می‌کنند به‌دست می‌دهد. □

همچنین می‌توانستیم قضیه را با استقرا ثابت کنیم (تمرین ۶)؛ تبدیل گراف و استفاده از قضیهٔ ۲.۴.۲ مانع از استقرا می‌شود. هنگامی که $k = ۲$، یک گذر منفرد با استفاده از همهٔ $E(G)$ به‌دست می‌آوریم؛ این یک ***گذر اویلری*** است.

اثبات قضیهٔ ۲.۴.۲ الگوریتمی را که یک مدار اویلری می‌سازد فراهم می‌کند. این الگوریتم مکرراً مدارها را در مدار جاری ادغام می‌کند تا هنگامی که همهٔ یالها جذب شوند. الگوریتم بعدی با مسألهٔ «این شکل را بکشید» برخورد مستقیم‌تری دارد، و یک مدار را در هر بار با یک یال بدون پی‌جویی به عقب می‌سازد. یک مدار اویلری از هر جا می‌تواند آغاز شود؛ یک گذر اویلری باید از یک رأس فرد آغاز شود. هیچ یک از آن دو از یالی که حذف آن گراف باقیمانده را به دو مؤلفهٔ نابدیهی برش دهد نمی‌گذرند، زیرا نمی‌توانند برای به‌دست آوردن یالهای سرگردان بازگردند. این شرط لازم، کافی است؛ اگر از چنین یالهایی اجتناب کنیم، می‌توانیم پیمایش را کامل کنیم.

۴.۴.۲. الگوریتم. (الگوریتم فلوری[1] —ساخت گذرهای اویلری).

ورودی: یک گراف G با یک مؤلفهٔ نابدیهی و حداکثر دو رأس فرد.

ارزشدهی آغازی: از رأسی که درجهٔ فرد دارد آغاز می‌کنیم مگر آنکه G زوج باشد، که در آن صورت می‌توان از هر رأسی آغاز کرد.

تکرار: از رأس جاری، از هر یال باقیمانده که حذفش از گراف باقیمانده گرافی با دو مؤلفهٔ نابدیهی به‌جا نمی‌گذارد عبور می‌کنیم. هنگامی که از همهٔ یالها عبور کرده باشیم متوقف می‌شویم. □

۵.۴.۲. قضیه. اگر G یک مؤلفهٔ نابدیهی و حداکثر دو رأس فرد داشته باشد، آنگاه الگوریتم فلوری یک گذر اویلری می‌سازد.

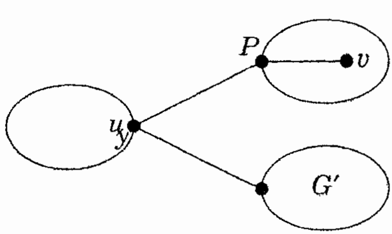
اثبات. از استقرا روی $e(G)$ استفاده می‌کنیم. ادعا برای $e(G) = ۱$ بیدرنگ ثابت می‌شود. فرض کنیم $e(G) > ۱$، و فرض کنیم ادعا برای گرافهای با $e(G) - ۱$ یال

1) Fleury

برقرار باشد، اگر G زوج باشد، آنگاه G دارای هیچ یال برشی نیست، زیرا حذف آن زیرگرافهایی با یک رأس فرد بر جای می‌گذارد (تمرین ۹.۳.۱). از این‌رو آغاز از یک رأس v در امتداد یک یال vu گرافی با دو رأس فرد بر جای می‌گذارد، و بنابر فرض استقرا الگوریتم مدار G را با کامل کردن یک u,v-گذر در $G - vu$ کامل می‌کند.

فرض کنیم G دارای دو رأس فرد u، v است. اگر $d(u) = ۱$، آنگاه عبور از ux یک مؤلفهٔ نابدیهی برجای می‌گذارد. اگر $d(u) > ۱$، فرض کنیم P یک u,v-مسیر باشد، و فرض کنیم ux یک یال متصل به u اما نه روی P باشد. چون u و v در $G - ux$ به هم مرتبط هستند، ux نمی‌تواند یک یال برشی باشد، زیرا x در آن صورت تنها رأس فرد در مؤلفهٔ آن از $G - ux$ خواهد بود (تصویر را ببینید). از این‌رو دوباره u دارای یک یال متصل ux است که عبور از آن یک گراف $G - ux$ دارای حداکثر یک مؤلفهٔ نابدیهی و حداکثر دو رأس فرد را برجای می‌گذارد.

اگر $v = x$، آنگاه $G - ux$ زوج است. اگر $v \neq x$، آنگاه رأسهای $G - ux$ زوج هستند به‌جز برای x و v (این شامل امکان $u = x$ می‌گردد). از این‌رو فرض استقرا به کار می‌آید، و الگوریتم یک u,v-گذر اویلری از G را با عبور از یک x,v-گذر اویلری از $G - ux$ کامل می‌کند. □



الگوریتم فلوری (لوکاس[1] [۱۹۲۱] را ببینید) به‌نظر می‌رسد که قدیمی‌ترین الگوریتم برای ساختن به‌طور مستقیم گذرهای اویلری باشد (تمرین ۷ یکی دیگر را شرح می‌دهد). این الگوریتم اثبات دیگری از مشخص‌سازی گرافهای اویلری را فراهم می‌کند. برای

1) Lucas

الگوریتمی کردن اثبات، باید یک یال نابرشی متصل به u را *پیدا کنیم*. می‌توانیم جستجوی BFS یا DFS را اجرا کنیم تا بیازماییم که آیا u و x در یک مؤلفه از $G - ux$ هستند. از آنجا که به بسیاری از چنین آزمونهایی نیاز داریم، اثبات قضیهٔ ۲.۴.۲ الگوریتمی سریعتر را ارائه می‌کند.

گرافهای سودار

یک مدار در یک گراف سودار از دُم به سر یالها عبور می‌کند، یک ***مدار اویلری*** از هر یال عبور می‌کند. این نیاز به‌شرطی مشابه همبندی برای گرافها دارد.

۶.۴.۲. تعریف. یک گراف سودار G ***قویاً همبند*** یا ***قوی*** است اگر برای هر جفت مرتب $u, v \in V(G)$ یک u, v-مسیر در G وجود داشته باشد.

هر ورود به یک رأس، عزیمت را باید به دنبال داشته باشد، پس برای یک گراف سودار اویلری باید همچنین به‌ازای هر $u \in V(G)$ داشته باشیم $d^+(u) = d^-(u)$. این شرط همچنین کافی است، اگر یالهای G متعلق به یک مؤلفهٔ قوی باشند. اثباتها شبیه به اثباتهای مربوط به گرافهای بیسو هستند (تمرین ۱۰). یک اثبات سازنده ارائه می‌کنیم که مشابه الگوریتم فلوری است. این اثبات تنها نیاز به یک محاسبهٔ جستجو برای ساختن درختی در آغاز دارد. پس از آن، اطلاعات مورد نیاز برای ساختن مدار در درخت موجود است.

۷.۴.۲. الگوریتم. (مدار اویلری سودار).

ورودی: یک گراف سودار G که یک سودهی از یک گراف همبند باشد و به‌ازای هر $u \in V(G)$ داشته باشیم $d^+(u) = d^-(u)$.

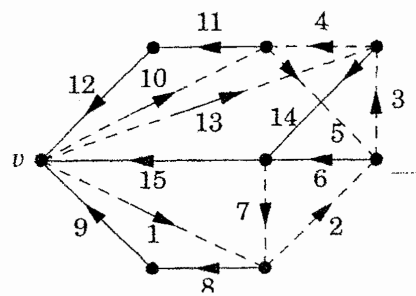
گام ۱: یک رأس $v \in V(G)$ را انتخاب می‌کنیم. فرض کنیم G' گراف سودار به‌دست آمده از G با برعکس کردن سو روی هر یال باشد. G' را برای ساختن

یک درخت T' متشکل از مسیرهایی از v به همهٔ دیگر رأسها جستجو می‌کنیم (مثلاً، از BFS یا DFS استفاده می‌کنیم).

گام ۲: فرض کنیم T وارونی از T' باشد؛ T شامل یک u,v-مسیر در G برای هر $u \in V(G)$ است. یک ترتیب دلخواه از یالهایی که هر رأس u را ترک می‌کنند مشخص می‌کنیم؛ به جز برای $u \neq v$ که یال ترک کنندهٔ u در T باید در آخر بیاید.

گام ۳: یک مدار اویلری از v را به شرح زیر می‌سازیم: هر وقت که u رأس جاری باشد، در امتداد یال استفاده نشده بعدی، مطابق ترتیب مشخص شده برای یالهای ترک کنندهٔ u، خارج می‌شویم. □

۸.۴.۲. مثال. *مدار اویلری سودار.* در گراف سودار زیر، یالهای یک پارچه یک «درخت ورودی» T از مسیرها به v را نشان می‌دهد. هنگامی که مدار اویلری را با آغازکردن از یال ۱ دنبال می‌کنیم، از یالهای T استفاده نمی‌کنیم تا زمانی که انتخاب دیگری نداشته باشیم. با فرض آنکه ترتیب در v، ۱ را پیش از ۱۰ پیش از ۱۵ قرار می‌دهد، الگوریتم از یالها به ترتیب نشان داده شده عبور می‌کند. □



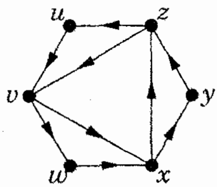
۹.۴.۲. قضیه. اگر G یک سودهی از یک گراف چندگانه با یک مؤلفهٔ نابدیهی باشد و به‌ازای هر $u \in V(G)$ داشته باشیم $d^+(u) = d^-(u)$، آنگاه الگوریتم بالا یک مدار اویلری از G را می‌سازد.

اثبات. نخست T' را می‌سازیم. جستجوی (BFS) از v به رأس جدیدی در هر گام می‌رسد. در غیر این‌صورت، همهٔ یالهای جاری در این مجموعهٔ R که به آنها رسیده‌ایم

و رأسهای باقیمانده وارد R می‌شوند. هر یال در R یک بار برای درجهٔ ورودی و یک بار برای درجهٔ خروجی رأسها در R مؤثر است؛ هر یال وارد شونده به R تنها برای درجهٔ ورودی مؤثر است. از این‌رو مجموع درجه‌های ورودی در R از مجموع درجه‌های خروجی بیشتر می‌شود، که با فرض ما، که برای هر رأس u، باید داشته باشیم $d^+(u) = d^-(u)$ در تناقض است.

حال از T برای ساختن گذری سودار آنگونه که نشان داده شده استفاده می‌کنیم. گذر تنها می‌تواند در v پایان یابد، زیرا هنگامی که وارد یک رأس $u \neq v$ می‌شویم، یال ترک کننده v در T باقی می‌ماند، زیرا $d^+(u) = d^-(u)$. می‌توانیم در v به پایان برسیم تنها اگر همهٔ یالهای ترک‌کنندهٔ v، و از این‌رو همچنین همهٔ یالهای وارد شونده به v را استفاده کرده باشیم. چون نمی‌توانیم از یالی از T استفاده کنیم مگرآنکه آن تنها یال باقیمانده ترک‌کنندهٔ دَمش باشد، نمی‌توانیم از همهٔ یالهای وارد شونده به v استفاده کنیم پیش از آنکه همهٔ دیگر رأسها را تمام کرده باشیم، زیرا T شامل یک مسیر از هر رأس به v است. $\square$

۱۰.۴.۲. مثال. ***مدار اویلری سودار.*** درگراف سودار زیر، هر درخت ورودی به v شامل یالهای uv، yz، wx، دقیقاً یکی از $\{zu, zv\}$، و دقیقاً یکی از $\{xy, xz\}$ می‌باشد. چهار درخت ورودی به v وجود دارند. برای هر درخت ورودی، تعداد مجموعه‌های مجاز ترتیبهای یالهای ترک کنندهٔ رأسها برابر است با $\Pi(d_i - ۱)! = (۰!)^۳(۱!)^۳ = ۱$. از این‌رو می‌توانیم یک مدار اویلری برای هر درخت ورودی با آغاز کردن در امتداد یال $e = vw$ از v ایجاد کنیم. چهار درخت ورودی و مدارهای متناظر در زیر نشان داده شده‌اند. $\square$



مدار:	درخت ورودی دارای:
$(v, w, x, z, v, x, y, z, u)$	zu & xy
$(v, w, x, y, z, v, x, z, u)$	zu & xz
$(v, w, x, z, u, v, x, y, z)$	zv & xy
$(v, w, x, y, z, u, v, x, z)$	zv & xz

دو مدار اویلری یکسان هستند اگر جفتهایی از یالهای متوالی یکسان باشند. از هر درخت ورودی به v، الگوریتم ۷.۴.۲ می‌تواند $\Pi_{u\in V(G)}(d^+(u)-۱)!$ مدار اویلری مختلف ایجاد کند. آخرین یال خروجی به وسیلهٔ درخت برای رأسهایی به جز v ثابت است، و از آنجایی که تنها ترتیب دوری یالها را مد نظر قرار می‌دهیم، همچنین می‌توانیم یک یال خاص e را برای آغاز ترتیب یالهای ترک کنندهٔ v انتخاب کنیم. هر تغییر در ترتیبهای خروجی در رأسها، در مرحله‌ای انتخابهای متفاوت را برای یال بعدی مشخص می‌کند، بنابراین مدارها متمایزاند. به‌طور مشابهی، مدارهای به‌دست آمده از Tهای متماین، متمایز هستند. از این‌رو $c\Pi_{u\in V(G)}(d^+(u)-۱)!$ مدار اویلری متمایز ایجاد کرده‌ایم، که در آن c تعداد درختهای ورودی به v است.

در واقع، اینها همه مدارهای اویلری هستند. این امر یک اثبات ترکیبیاتی که تعداد درختهای ورودی به هر رأس یک گراف سودار اویلری را که یکسانند به‌دست می‌دهد. چون گراف به‌دست آمده با برعکس کردن همهٔ یالها دارای همان تعداد مدارهای اویلری است، تعداد درختهای خروجی از هر رأس همچنین دارای همین مقدار c است. مقدار c را می‌توان با استفاده از قضیهٔ ماتریس درخت سودار محاسبه کرد (قضیهٔ ۱۳.۲.۲).

۱۱.۴.۲. قضیهٔ. (وان آردین - ایرنفست[1] و دوبروژن[2] [۱۹۵۱]). در یک گراف سودار اویلری با $d_i = d^+(v_i) = d^-(v_i)$ تعداد مدارهای اویلری برابر است با

1) Van Aardenne-Ehrenfest 2) de Bruijn

$c\Pi_{i=1}^{n}(d_i - 1)!$، که در آن c برابر تعداد درختهای ورودی به یا درختهای خروجی از هر گره می‌باشد.

اثبات. ملاحظه کرده‌ایم که الگوریتم ۷.۴.۲ عدهٔ زیادی مدارهای اویلری متمایز را با استفاده از درختهای ورودی به رأس v را در حالی که e نخستین یال در ترتیب خروجی در v باشد ایجاد می‌کند. تنها نیاز داریم نشان دهیم که هر مدار اویلری به این روش ظاهر می‌شود. برای ایجاد یک درخت ورودی از یک مدار اویلری، مدار را از e دنبال می‌کنیم، و یالهای ترک کنندهٔ هر رأس خاص به‌ترتیب استفاده شده را ثبت می‌کنیم. گردایه یالهایی که در این ترتیبها، آخر هستند یک درخت ورودی T را در v تشکیل می‌دهند، زیرا از هر رأس به جز v دقیقاً یک بار خارج می‌شویم. علاوه براین، این مدار، مدار به‌دست آمده از T و این ترتیبهای خروجی به‌وسیلهٔ الگوریتم ۷.۴.۲ می‌باشد. □

کاربردها

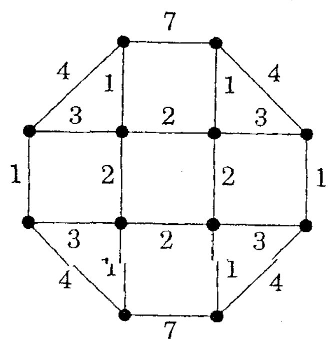
۱۲.۴.۲. کاربرد. ***مسألهٔ پستچی چینی.*** فرض کنیم یک پستچی از همهٔ یالهای یک شبکهٔ راه عبور می‌کند، و از یک رأس حرکتش را آغاز کرده، به پایان می‌برد. یالها دارای وزنهای نامنفی نمایندهٔ فاصله یا زمان هستند. ما به دنبال یک گشت بسته با مینیمم طول کل هستیم که از همهٔ یالها استفاده کند. این مسأله را به افتخار ریاضیدان چینی، گوان میگو[1] [۱۹۶۲] که آن را پیشنهاد کرد، مسألهٔ پستچی چینی می‌نامند.

اگر هر رأس زوج باشد، گراف G اویلری است و پاسخ مجموع وزنهاست. در غیر این‌صورت، باید یالها را تکرار کنیم. هر پیمایش یک مدار اویلری از یک گراف چندگانه به‌دست آمده با تکرار کردن یالهای G می‌باشد. یافتن کوتاهترین پیمایش هم‌ارز یافتن مینیمم وزن کل یالهایی است که تکرارشان همهٔ رأسها را زوج خواهد کرد. می‌گوییم «تکرار»

1) Guan Meigu

زیرا نیاز به استفاده از یک یال بیش از دوبار نداریم. اگر از یالی سه بار یا بیشتر برای زوج کردن همهٔ رأسها استفاده کنیم، آنگاه حذف دو تا از آن نسخه‌ها همهٔ رأسهای زوج را باقی خواهد گذاشت. راههای بسیاری برای انتخاب یالهای تکرار شده می‌تواند وجود داشته باشد. □

۱۳.۴.۲. مثال. در مثال زیر، هشت رأس بیرونی فرد هستند. اگر آنها را برای زوج کردن درجه‌ها دور قسمت بیرونی جور کنیم، ارزش اضافی $۱۶ = ۴ + ۴ + ۴ + ۴$ یا $۱۶ = ۱ + ۷ + ۷ + ۱$ خواهد بود. با استفاده از همهٔ یالهای عمودی، با جمع کل تنها ۱۰، می‌توانیم بهتر عمل کنیم. □



این مثال نشان می‌دهد که افزودن یک یال از یک رأس فرد به یک رأس زوج، رأس زوج را فرد می‌کند. باید به افزودن یالها تا هنگامی که یک گذر را با یک رأس فرد کامل کنیم ادامه دهیم. یالهای تکرار شده باید متشکل از گردایه‌ای از گذرها باشند که رأسهای فرد را جفت می‌کنند. می‌توانیم توجهمان را به مسیرهای جفت کننده رأسهای فرد محدود کنیم (تمرین ۱۷)، اگرچه مسیرها ممکن است نیاز به تقاطع داشته باشند.

ادموندز و جانسون[1] [۱۹۷۳] روشی را برای حل مسألهٔ پستچی چینی پیشنهاد کردند. اگر تنها دو رأس فرد وجود داشته باشند، آنگاه می‌توانیم از الگوریتم دیجکسترا (بند ۳.۲) برای یافتن کوتاهترین مسیر میان آنها استفاده کنیم و مسأله را حل نماییم. اگر $۲k$ رأس فرد وجود داشته باشند، آنگاه می‌توانیم از الگوریتم کوتاهترین مسیر برای یافتن کوتاهترین

1) Johnson

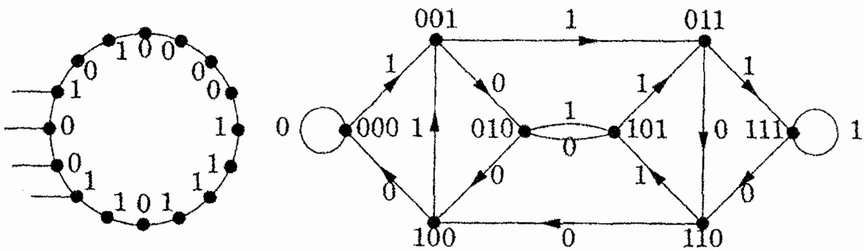
مسیرهای مرتبط کنندهٔ هر جفت از رأسهای فرد استفاده کنیم. از این طولها می‌توانیم به عنوان وزنهای روی یالهای $K_{۲k}$ استفاده کنیم، و سپس مسألهٔ ما پیدا کردن مینیمم وزن کل k یالهاست که این $۲k$ رأس را جفت می‌کنند. این یک گونه وزندار از مسأله جورسازی ماکسیمم است که در بند ۳.۳ بحث شده است. توضیحی از این مسأله در گیبونز[1] [۱۹۸۵، صفحه ۱۶۳-۱۶۵] آمده است.

۱۴.۴.۲. کاربرد. ***دورهای دوبروژن.*** ۲^n رشته دودویی به‌طول n وجود دارند. آیا یک آرایش دوری از ۲^n رقم دودویی وجود دارد به‌طوری که ۲^n رشته از n رقم پیاپی همگی متمایز باشند؟ از این امر می‌توان برای آزمون موقعیت یک استوانه گردان، همچنانکه به‌وسیله گُود[2] [۱۹۴۶] ملاحظه شده است، استفاده کرد. فرض کنیم استوانه ۲^n موقعیت گردشی دارد، و نواری به دور سطحش وجود دارد که به ۲^n بخش که می‌توانند کد ۰ یا ۱ را بگیرند، افراز شده است. خواندن ضربه‌های ملایم به n بخش پیاپی می‌توانند موقعیت استوانه را اگر آرایش دوری مشخص شده‌ای وجود داشته باشد، تعیین کنند. برای $n = ۴$ می‌توانیم از (۰۰۰۰۱۱۱۱۰۱۱۰۰۱۰۱) استفاده کنیم، که در زیر نشان داده شده است.

می‌توانیم چنین آرایشی را با استفاده از گرافهای سودار اویلری بسازیم. یک گراف سودار D_n راکه رأسهایش دنباله‌های دودویی $n - ۱$ رقمی باشند تعریف می‌کنیم. یک یال از دنبالهٔ a را در دنبالهٔ b قرار می‌دهیم اگر آخرین $n - ۲$ رقم a با نخستین $n - ۲$ رقم b مطابقت داشته باشند. یال را با آخرین رقم b نشاندار می‌کنیم. برای هر دنبالهٔ a، دو رقم وجود دارند که می‌توانیم آنها را برای به‌دست آوردن یک دنبالهٔ جدید اضافه کنیم، و از این‌رو دو یال وجود دارند که هر رأس را ترک می‌کنند. به‌طور مشابهی، چون دو رقم وجود دارند که می‌توانیم آنها را از یک دنباله برای به‌دست آوردن a حذف کنیم، بنابراین دو یال وارد شونده به رأس وجود دارند. از این‌رو D_n اویلری است و دارای ۲^n

1) Gibbons 2) Good

یال است؛ D_4 در زیر نشان داده شده است. □



۱۵.۴.۲. قضیه. نشانهای یالها در هر مدار اویلری از D_n یک آرایش دوری تشکیل می‌دهند که در آن قطعه‌های متوالی به‌طول n، 2^n بردار دودویی متمایز هستند.

اثبات. فرض کنیم ما داریم از یک مدار اویلری C در D_n عبور می‌کنیم و در رأسی که دنباله‌اش $a = a_1, \cdots, a_{n-1}$ است قرار بگیریم. نشانهای $n - 1$ یال قبلی، با نگاه پسرو، باید به ترتیب a_{n-1}، $\cdots$، a_1 بوده باشند، زیرا نشان روی یک یال وارد شونده به یک رأس با آخرین رقم دنباله در رأس مطابقت دارد. اگر C در دفعهٔ بعد از یالی با نشان a_n عبور کند، آنگاه زیردنباله‌ای که آنجا پایان می‌یابد a_1، $\cdots$، a_n است. چون 2^{n-1} نشان رأسها متمایزاند، و دو یال ترک کنندهٔ هر رأس نشانهای متمایز دارند، 2^n زیردنبالهٔ متمایز تعیین شده از C به‌این روش خواهیم داشت. □

گراف D_n *گراف دوبروژن* با مرتبهٔ n روی الفبایی به اندازهٔ ۲ است. این گراف برای هدفهای دیگر سودمند است، زیرا یالهای اندکی دارد (تنها دو برابر تعداد رأسها) و با وجود این قطرش در مقایسه با تعداد رأسهایش بسیار کوچک است. می‌توانیم با $n - 1$ گام با معرفی دنبالهٔ مطلوب، به ترتیب از هرجا که هم‌اکنون قرار گرفته‌ایم، به هر رأس مطلوب برسیم. از این‌رو قطر برابر است با $n - 1$، اگرچه 2^{n-1} رأس وجود دارند.

۱۶.۴.۲. کاربرد. *مسأله جاروکردن خیابان* (اختیاری).

در عبور از یک شبکهٔ راه، ممکن است مهم باشد که سوی حرکت در امتداد قطعه‌های راه مورد توجه قرار گیرد، مانند جاروکردن جدول کنار خیابان. از جدول

کنار خیابان باید در سوی جریان ترافیک گذشت، بنابراین یک خیابان دوطرفه یک جفت یال با سوی مخالف ایجاد می‌کند، و یک خیابان یک‌طرفه دو یال همسو دارد. گونهٔ ساده‌ای از مسألهٔ جاروکردن را در روبرتز[1] [۱۹۷۸] با بحث و جزئیات بیشتر و در پی آن نتایج توکر[2] و بودین[3] [۱۹۷۶] را ملاحظه می‌کنیم.

در شهر نیویورک، پارک کردن در طول روزهای عادی هفته کنار برخی از جدولهای خیابان ممنوع است تا امکان جارو کردن خیابان وجود د اشته باشد. این یک **زیرگراف جارو کردن** G را از گراف سودار پُر جدولهای خیابان تعریف می‌کند؛ G یالهای قابل دسترسی برای جارو کردن را همسو با جریان ترافیک، دربر می‌گیرد. پرسش این است که چگونه می‌توان G را جارو کرد در حالی که زمان ***تلف شده***، که جارو کردن صورت نمی‌گیرد، مینیمم شود. اگر در هر رأس زیرگراف درجهٔ ورودی با درجهٔ خروجی برابر باشد، آنگاه زمان تلف شده‌ای در کار نخواهد بود. در غیر این‌صورت باید یالها را تکرار کنیم یا یالهایی به گراف سودار پُر اضافه کنیم تا یک زِبرگراف سودار اویلری از گراف سودار جارو کردن به‌دست آوریم. هر یال e درگراف پُر H دارای یک زمان تلف شده $t(e)$ است.

فرض کنیم X مجموعهٔ رأسهای با درجهٔ ورودی بیش از درجهٔ خروجی باشد، و برای $x \in X$ قرار می‌دهیم $\sigma(x) = d_G^-(x) - d_G^+(x)$. فرض کنیم Y مجموعهٔ رأسهای با درجهٔ خروجی بیش از درجهٔ ورودی باشد، و برای $y \in Y$ قرار می‌دهیم $\partial(y) = d_G^-(y) - d_G^+(y)$. توجه کنید که $\sum_{x\in X} \sigma(x) = \sum_{y\in Y} \partial(y)$. به زِبرگراف سودار اویلری باید $\sigma(x)$ یال با دُمهای در $x \in X$ و $\partial(y)$ یال با سرهایی در $y \in Y$ اضافه کرد. چون باید با یک زِبرگراف سودار که دارای درجه‌های متوازن است کار را به پایان ببریم، می‌توانیم به اضافاتی مانند مسیرهای از X به Y فکر کنیم. ارزش افزودن یک مسیر از x به y فاصلهٔ از x به y در H است، که می‌توان به‌وسیلهٔ الگوریتم دیجکسترا آن را پیدا کرد.

1) Roberts 2) Tucker 3) Bodin

اکنون **مسألهٔ حمل و نقل** را داریم. با در نظر گرفتن عرضه‌های $\sigma(x)$ برای $x \in X$ و تقاضاهای $\partial(y)$ برای $y \in Y$ و هزینه‌های $c(xy)$ برای فرستادن یک واحد از x به y، در حالی که $\sum \sigma(x) = \sum \partial(y)$، مسأله این است که تقاضاها را با کمترین هزینهٔ کل برآورد کنیم. گونه‌ای از مسألهٔ حمل و نقل به‌وسیلهٔ کانتور و ویچ[1] در ۱۹۳۹ ارائه شد؛ صورت بالا (با یک راه حل سازنده) به‌وسیلهٔ هیتچکوک[2] [۱۹۴۱] (همچنین کوپمانز[3] [۱۹۴۷] را ببینید) معرفی گردید. مسأله به تفصیل در فورد-فولکرسون[4] [۱۹۶۲، صفحه ۹۳-۱۳۰] بحث شده است. در بند ۲.۳ مسألهٔ حمل و نقل را برای عرضه‌ها و تقاضاهای صحیح نامنفی حل خواهیم کرد. راه حل کلیتری در بند ۳.۴ ظاهر می‌شود. □

تمرینات

۱.۴.۲. (−) ثابت یا رد کنید: هیچ گراف سادهٔ اویلری همبند که تعداد زوجی رأس و تعداد فردی یال داشته باشد وجود ندارد.

۲.۴.۲. (−) ثابت یا رد کنید: اگر G یک گراف اویلری با یالهای e، f باشد که در رأسی شریک‌اند، آنگاه G دارای یک مدار اویلری است که در آن e، f به‌طور پیاپی ظاهر می‌شوند.

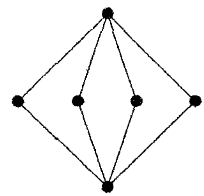
۳.۴.۲. با استفاده از استقرا روی تعداد یالها، مشخص‌سازی گرافهای اویلری را ثابت کنید.

۴.۴.۲. با استفاده از استقرای معمولی روی k یا روی $e(G)$ (یک به یک) ثابت کنید که یالهای یک گراف همبند با $2k$ رأس فرد را می‌توان به k گذر افراز کرد، اگر $k > 0$. آیا این گزاره بدون فرض همبندی نیز درست باقی می‌ماند؟

---

1) Kantorovich 2) Hitchcock 3) Koopmans 4) Ford-Fulkerson

۵.۴.۲. ($-$) دو مدار اویلری هم‌ارزاند اگر آنها دارای جفتهای یکسان از یالهای متوالی، با دیدی به‌طور دوره‌ای داشته باشند. به عنوان مثال، یک دور تنها یک ردهٔ هم‌ارزی از مدارهای اویلری دارد. چند ردهٔ هم‌ارزی از مدارهای اویلری درگرافی که در زیر رسم شده است وجود دارند؟



۶.۴.۲. ($+$) با استفاده از استقرا روی k، ثابت کنید که یالهای یک گراف ساده همبند با $2k$ یال را می‌توان به مسیرهایی با طول ۲ افرازکرد. آیا اگر فرض همبندی را حذف کنیم نتیجه درست باقی می‌ماند؟

۷.۴.۲. *الگوریتم توکر.* فرض کنیم G یک گراف زوج همبند باشد. در هر رأس، یالهای متصل را به‌طور دلخواه به جفتهایی افراز می‌کنیم (هر یال در یک جفت برای هر یک از نقاط پایانی‌اش ظاهر می‌شود). با آغاز در امتداد یک یال مفروض، گذری با ترک هر رأس بعدی در امتداد یال جفت شده با یالی که اخیراً بیشتر برای ورود به آن استفاده شده تشکیل می‌دهیم، که با نخستین بازگشت به رأس اولیه پایان یابد. این کار G را به گذرهای بسته تجزیه می‌کند. تا مادامی که بیش از یک گذر در تجزیه باشد، دو گذر با یک رأس مشترک می‌یابیم و آنها را با هم به گذری طولانیتر با تغییر جفت کردن در رأس مشترک به‌هم وصل می‌کنیم. با یک مدار اویلری کار را تمام می‌کنیم. ثابت کنید که گزاره‌های بیان شده دربارهٔ این شیوه درست هستند و فرآیند یک مدار اویلری ایجاد می‌کند. (توکر [۱۹۷۶])

۸.۴.۲. نشان دهید که یک رأس v در یک گراف G *به‌طور تصادفی اویلری* است اگر هرگذر آغاز شونده در v بتواند بسط داده شود تا یک مدار اویلری از G تشکیل دهد. (گرافهای زیر به‌ترتیب دقیقاً یک و دقیقاً دو رأس به‌طور تصادفی اویلری دارند.)

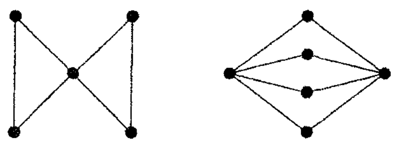
گزاره‌های زیر را دربارهٔ یک گراف اویلری G ثابت کنید.

الف) $v \in V(G)$ به‌طور تصادفی اویلری است اگر، و فقط اگر، $G - v$ یک جنگل باشد. (اُور [۱۹۵۱])

ب) اگر v به‌طور تصادفی اویلری باشد، آنگاه $d(v) = \Delta(G)$. (بابلر[1] [۱۹۵۳])

پ) هر رأس از G به‌طور تصادفی اویلری است اگر، و فقط اگر، G یک دور باشد.

ت) اگر G یک دور نباشد، آنگاه G حداکثر دو رأس به‌طور تصادفی اویلری دارد. (انتخاب شده از چارتراند-لزنیک[2] [۱۹۸۶، صفحه ۶۱])



۹.۴.۲. (+) *مشخص‌سازی اضافی گرافهای اویلری.*

الف) ثابت کنید که اگر G اویلری باشد و $G' = G - uv$، آنگاه G' دارای تعداد فردی از u,v-گذرهایی است که v را تنها در انتها ملاقات می‌کنند. همچنین ثابت کنید که تعداد گذرها در این فهرست که مسیرها نیستند زوج است. (توآدا[3] [۱۹۷۳])

ب) فرض کنیم v دارای درجهٔ فرد است و برای هر یال e متصل به v، $c(e)$ تعداد دورهای شامل e است. با استفاده از $\sum_e c(e)$ ثابت کنید که $c(e)$ برای یک eای متصل به v زوج است. (مک‌کی[4] [۱۹۸۴])

پ) با استفاده از قسمتهای (الف) و (ب) نتیجه بگیرید که یک گراف همبند نابدیهی، اویلری است اگر، و فقط اگر، هر یال به تعداد فردی از دورها تعلق داشته باشد.

۱۰.۴.۲. (−) ثابت کنید که یک گراف سودار دارای یک مدار منفرد شامل هر یال است اگر، و فقط اگر، برای هر رأس v داشته باشیم $d^-(v) = d^+(v)$، و گراف بیسوی زمینه

---

1) Bäbler 2) Chartrand-Lesniak 3) Toida 4) Mckee

تنها دارای یک مؤلفهٔ نابدیهی باشد. شرایط لازم و کافی را برای آنکه یک گراف سودار دارای یک گذر اویلری باشد تعیین کنید (با اثبات). (گود [۱۹۴۶])

۱۱.۴.۲. (−) فرض کنیم D یک گراف سودار با $d^-(v) = d^+(v)$ برای هر رأس v باشد، به‌جز آنکه $d^+(x) - d^-(x) = k = d^-(y) - d^+(y)$. با استفاده از مشخص‌سازی گرافهای سودار اویلری ثابت کنید که D شامل k، x, y-مسیر دوبه‌دو مجزا-یال می‌باشد.

۱۲.۴.۲. ثابت کنید که هر گراف بیسوی G دارای یک سودهی D است به‌طوری که برای هر رأس $v \in V(G)$، داریم $|d^+(v) - d^-(v)| \leq ۱$.

۱۳.۴.۲. ثابت یا رد کنید؛ هر گراف G دارای یک سودهی است به‌طوری که برای هر $S \subseteq V(G)$، تعداد یالهای وارد شوندهٔ S و ترک کنندهٔ S حداکثر یکی فرق دارند.

۱۴.۴.۲. ***سودهیها و P_3-تجزیه.***

الف) ثابت کنید که هر گراف همبند دارای یک سودهی است که در آن تعداد رأسهای با درجهٔ خروجی فرد حداکثر برابر ۱ است. (روتمن[1] [۱۹۹۱])

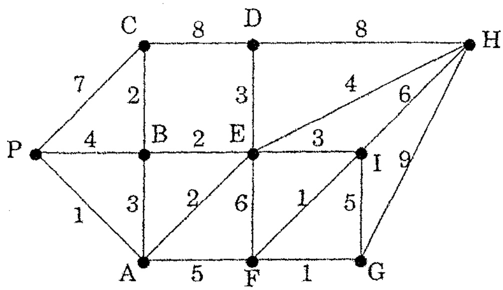
ب) با استفاده از قسمت (الف) نتیجه بگیرید که یک گراف همبند با تعداد زوجی از یالها را می‌توان به مسیرهایی با دو یال تجزیه کرد.

۱۵.۴.۲. (−) مسألهٔ پستچی چینی را در مکعب k بُعدی Q_k تحت شرطی که هر یال دارای وزن ۱ باشد حل کنید.

۱۶.۴.۲. هر روز صبح پستچی تنبل سوار اتوبوس به مقصد اداره پست می‌شود. با آغاز از آنجا، او مسیرش را چنان تنظیم می‌کند که در انتها به خانه برگردد تا هرچه سریعتر که ممکن است به رختخواب برود (و نه به اداره پست برگردد). در زیر نقشه‌ای از خیابانهایی که او در امتداد آنها باید نامه‌ها را تحویل دهد، همراه با عدد نشان دهنده دقایق لازم برای گشت در هریک از بلوکها، خواه نامه‌ای تحویل داده شود یا نه. P نشانگر ادارهٔ پست و H نشانگر خانه است. یالهایی که بیش از یک بار باید از آنها گذشت چه چیز

1) Rotman

ارضا می‌کند؟ از هر یال در راه بهین چندبار باید گذشت؟



۱۷.۴.۲. (−) توضیح دهید چرا گذرهای بهین جفت کنندهٔ رأسهای فرد در یک راه حل بهین برای مسألهٔ پستچی چینی ممکن است مسیرها فرض شوند. گرافی وزندار با چهار رأس فرد بسازید در حالی که راه‌حل بهین برای مسألهٔ پستچی چینی مستلزم آن باشد که یالهای روی دو مسیر که یک رأس مشترک دارند تکرار شوند.

۱۸.۴.۲. (−) هفت ۰ و هفت ۱ را به‌طور دوری به‌گونه‌ای آرایش دهید که ۱۴ رشته از چهار بیت پیاپی همهٔ رشته‌های دودویی ۴ رقمی به جز ۰۱۰۱ و ۱۰۱۰ باشند.

۱۹.۴.۲. (−) *دنبالهٔ دوبروژن برای هر الفبا و طول.* فرض کنیم A الفبایی به‌اندازهٔ k باشد. ثابت کنید که یک آرایش دوری از k^l نویسه انتخاب شده از A وجود دارد به‌طوری که k^l رشته به‌طول l در دنباله همگی متمایز باشند. (گود [۱۹۴۶]، ریس[1] [۱۹۴۶])

۲۰.۴.۲. (−) فرض کنیم S یک الفبا با m حرف باشد. آیا باید یک آرایش دوری C با $m^۴ - m$ حرف از S وجود داشته باشد به‌طوری که همهٔ رشته‌های چهار حرفی از حرفهای متوالی در C متفاوت باشند و حداقل دو حرف متمایز داشته باشند؟ یک شیوهٔ ساختاری یا یک مثال نقض ارائه دهید.

۲۱.۴.۲. (!) *دور دوبروژن صریح.* با استفاده از نتایج این بند ثابت کنید که الگوریتم صریح زیر یک دور دوبروژن دودویی به‌طول ۲^n ایجاد می‌کند: با n تا ۰ آغاز می‌کنیم.

1) Rees

پس از آن، یک ۱ اضافه می‌کنیم اگر این کار یک رشتهٔ قبلی به‌طول n را تکرار نکند، و در غیر این‌صورت، یک ۰ اضافه می‌کنیم. (توضیح: برای $n = ۴$، دور حاصل در تصویر همراه با کاربرد ۱۴.۴.۲ ظاهر می‌شود.)

۲۲.۴.۲. (!) الگوریتم تاری[1] (آنچنانکه به‌وسیلهٔ دی.جی. هافمن ارائه شده است). قصری را با تعداد زیاد و متناهی از اتاقها و تعداد زیاد و متناهی از راهروها در نظر می‌گیریم. هر راهرو دو انتها دارد، در حالی که در هر انتها یک در به اتاقی باز می‌شود. هر اتاق درهایی دارد که هرکدام به یک راهرو باز می‌شود. به هر اتاق می‌توان از هر اتاق دیگر با عبور از راهروها و اتاقها رسید. در آغاز، هیچ دری نشانی ندارد. یک روبات راه‌اندازی شده از اتاقی در قصر باید قصر را با استفاده از قواعد زیر جستجو کند.

۱) پس از ورود به یک راهرو، از آن عبور کن و به اتاق واقع در انتهای دیگر وارد شو.

۲) هنگام ورود به اتاقی در حالی که همهٔ درها بی‌نشان هستند، روی در ورودی نشان I بزن.

۳) در اتاقی با یک در بی‌نشان، نشان O را روی آن بزن و از آن استفاده کن.

۴) در اتاقی که همهٔ درهایش نشان دارند، از دری که نشان O ندارد، اگر وجود داشته باشد خارج شو.

۵) در اتاقی که همهٔ درها نشان O دارند، توقف کن.

ثابت کنید که روبات سرانجام پس از عبور از هر راهرو به تعداد دقیقاً دوبار، یک بار در هر سو، متوقف می‌شود. (*راهنمایی:* از استقرا روی تعداد راهروها استفاده کنید، همچنین ثابت کنید که فرآیند در اتاق شروع پایان می‌یابد. *توضیح:* همهٔ تصمیمها کاملاً موضعی‌اند؛ روبات چیز دیگری به جز اتاق یا راهروی موجود نمی‌بیند. الگوریتم تاری [۱۸۹۵] و دیگران به‌وسیلهٔ کونیگ [۱۹۳۶، صفحه ۳۵-۵۶] و به وسیلهٔ فیلزچنر[2] [۱۹۸۳، ۱۹۹۱] توضیح داده شده‌اند.)

---

1) Tarry 2) Fleischner

۲۳.۴.۲. (!) فرض کنیم که G یک گراف و D یک سودهی از G است که قویاً همبند است. ثابت کنید که اگر G یک دور فرد داشته باشد، آنگاه D دارای یک دور فرد است. (*راهنمایی:* هر جفت $\{v_i, v_{i-۱}\}$ را در یک دور فرد $(v_۱, \cdots, v_k)$ از G در نظر بگیرید.)

۲۴.۴.۲. (+) با در نظر گرفتن یک گراف سودار قوی D، فرض کنیم $f(D)$ طول کوتاهترین گشت بستهٔ ملاقات کنندهٔ هر رأس باشد. ثابت کنید که ماکسیمم مقدار $f(D)$ روی همهٔ گرافهای سودار قوی با n رأس برابر است با $\lfloor(n+۱)^۲/۴\rfloor$، اگر $n \geq ۲$. (کول[1] [۱۹۸۰])

1) Cull

۳

۳-۱ جوسازیها و عاملها

در مجموعه‌ای از افراد، هر فرد با برخی از افراد دیگر سازگار است؛ تحت چه شرایطی می‌توانیم افراد را به صورت جفت هم اتاقیهای سازگار دسته‌بندی کنیم؟ بسیاری از کاربردهای گرافها متضمن چنین جفت‌سازیهایی هستند. در بند ۱.۱ مورد شغلها و متقاضیان را در نظر گرفتیم، و پرسیدیم که آیا همه موقعیتهای شغلی خالی می‌توانند براساس صلاحیت کاملاً پُر شوند. گرافهای دوبخشی دارای یک افراز طبیعی رأسها به دو مجموعه می‌باشند، و ما می‌خواهیم بدانیم که آیا می‌توان یالها را به صورت دو مجموعه جور کرد. در مسألهٔ هم‌اتاقیها، نیازی نیست که گراف دو بخشی باشد.

۳.۱.۱. تعریف. یک *جورسازی* در یک گراف بیسوی G عبارت است از مجموعه‌ای از یالهای دوبه‌دو مجزا. رأسهای متعلق به یالهای یک جورسازی، به‌وسیلهٔ جورسازی *اشباع شده*، هستند؛ دیگر رأسها *اشباع نشده‌*اند. اگر یک جورسازی هر رأس از G را اشباع کند، آنگاه آن یک ***جورسازی تام*** یا ***جورسازی کامل*** است.

۲.۱.۳. مثال. جورسازیها در *گرافهای آشنا.* $K_{n,n}$ دارای $n!$ جورسازی کامل است. فرض کنیم $X = \{x_۱, \cdots, x_n\}$ و $Y = \{y_۱, \cdots, y_n\}$ مجموعه‌های بخشی باشند. می‌توانیم از X و Y برای اندیسگذاری سطرها و ستونهای یک ماتریس استفاده کنیم. ثبت یک ۱ در وضعیت i، j برای هر یال x_iy_j در یک جورسازی M، یک نگاشت دوسویی میان جورسازیهای کامل در $K_{n,n}$ و ماتریسهای جایگشت برقرار می‌کند.

چون $K_{۲n+۱}$ مرتبهٔ فرد دارد، دارای هیچ جورسازی تام نیست. تعداد جورسازیهای کامل f_n در $K_{۲n}$ عبارت است از تعداد راههایی که $۲n$ فرد متمایز را می‌توان جور کرد. برای شریک $v_{۲n}$، $۲n-۱$ انتخاب وجود دارند و برای هر یک از اینها، $f_{n-۱}$ راه برای کامل کردن جورسازی وجود دارد. از این‌رو برای $n \geq ۱$ داریم $f_n = (۲n-۱)f_{n-۱}$، و با در نظرگرفتن $f_۰ = ۱$ به‌وسیلهٔ استقرا می‌توانیم تحقیق کنیم که $f_n = \prod_{i=۰}^{n-۱}(۲n-۱-۲i)$.
همچنین یک اثبات دوسویی وجود دارد. با در نظرگرفتن هر ترتیبی از $۲n$ فرد، می‌توانیم دوتای نخست را با هم جور کنیم، و سپس دوتای بعدی، و غیره. از $(۲n)!$ ترتیب، هر جورسازی را $۲^nn!$ بار به‌دست می‌آوریم، پس تعداد کل جورسازیها برابر است با $f_n = (۲n)!/۲^nn!$.

طرح معمولی گراف پترسن، یک جورسازی کامل را میان رأسهای درونی و بیرونی ۵-دور به نمایش می‌گذارد. شمارش جورسازیهای کامل، مستلزم اندکی تلاش است (تمرین ۷). ساخت استقرایی ابرمکعب Q_k به آسانی جورسازیهای کامل را به‌دست می‌دهد، اما بازهم شمارش آنها دشوار است (تمرین ۸). □

جورسازیهای ماکسیمم

برای جستجوی یک جورسازی بزرگ، می‌توانیم به‌طور مکرر یالی را که از یالهای پیشتر انتخاب شده مجزا باشد، انتخاب کنیم. این روند یک جورسازی ماکسیمال را به‌دست می‌دهد، اما لزومی ندارد که یک جورسازی ماکسیمم را به‌دست دهد. یک جورسازی

ماکسیمال را نمی‌توان بزرگتر کرد، زیرا یالهایش با همه یالهای دیگر متلاقی هستند. یک جورسازی ماکسیمم، یک جورسازی با اندازهٔ ماکسیمم است.

۳.۱.۳. مثال. *ماکسیمال $\neq$ ماکسیمم.* کوچکترین گراف دارای یک جورسازی ماکسیمال که یک جورسازی ماکسیمم نباشد، P_4 است. اگر یال میانی را برداریم، آنگاه هیچ یال دیگری نمی‌توانیم بیفزاییم، اما دو رأس آویخته، یک جورسازی بزرگتری را تشکیل می‌دهند. در زیر این مطلب را برای P_6 نشان داده‌ایم. □

۴.۱.۳. تعریف. با در نظر گرفتن یک جورسازی M، یک مسیر M-**متناوب** عبارت است از مسیری که میان یالهای در M و یالهایی که در M نیستند متناوب باشد. یک مسیر M-متناوب P که آغاز و انجام رأسهایش در M-اشباع نشده باشند، یک مسیر M-**افزوده** است؛ جایگزینی $E(P) - M$ به‌جای $M \cap E(P)$ یک جورسازی جدید M' را با یک یال بیشتر از M ایجاد می‌کند.

جورسازیهای ماکسیمم آنهایی هستند که هیچ مسیر افزوده ندارند. این مطلب را با آزمودن زیرگرافهای تشکیل شده از اجتماع دو جورسازی به وسیلهٔ حذف یالهای مشترک، اثبات می‌کنیم. این عمل را می‌توانیم برای هر دو گراف با یک مجموعهٔ رأسها تعریف کنیم.

۵.۱.۳. تعریف. اگر G و H گرافهایی با مجموعهٔ رأسهای V باشند، آنگاه تفاضل متقارن $G\Delta H$، گرافی با مجموعهٔ رأسهای V است که یالهایش همه یالهایی هستند که دقیقاً در یکی از G و H ظاهر می‌شوند. همچنین ما از این نمادگذاری برای مجموعه‌های یالها استفاده می‌کنیم؛ به‌ویژه، اگر M و M' جورسازی باشند، آنگاه $M\Delta M' = (M \cup M') - (M \cap M')$.

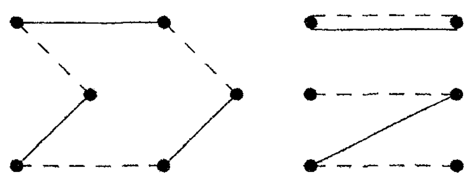
۶.۱.۳. قضیهٔ. (برژ[1] [۱۹۵۷] یک جورسازی M در یک گراف G یک جورسازی

1) Berge

ماکسیمم در G است اگر، و فقط اگر، G دارای هیچ مسیر M-افزوده نباشد.

اثبات. دیدیم که یک مسیر M-افزوده یک جورسازی بزرگتری را ایجاد می‌کند. برعکس، فرض کنیم که G دارای یک جورسازی M' بزرگتر از M باشد؛ می‌خواهیم یک مسیر M-افزوده بسازیم. فرض کنیم F زیرگراف فراگیر از G باشد به‌طوری که $E(F) = M \Delta M'$. چون M و M' جورسازی هستند، هر رأس دارای حداکثر یک یال متصل در هرکدام از آنها می‌باشد، و F دارای درجهٔ ماکسیمم حداکثر ۲ است.

چون $\Delta(F) \leq 2$، F متشکل از مسیرهای مجزا و دورهاست. علاوه بر این، هر مسیر یا دور در F متناوب میان یالهای M و یالهای M' است. این امر ایجاب می‌کند که هر دور در F دارای طول زوج باشد. چون $|M'| > |M|$، F دارای مؤلفه‌ای است با یالهایی که بیشتر آنها از M' هستند تا از M چنین مؤلفه‌ای تنها می‌تواند مسیری باشد که با یک یال از M' آغاز می‌شود و پایان می‌یابد؛ هر چنین مسیری در F یک مسیر M-افزوده در G است. □



شرط جورسازی هال

در مثال شغلها و متقاضیان، ممکن است متقاضیان بسیار بیشتر از شغلها وجود داشته باشند، پس ممکن است قادر باشیم که شغلها را بدون استفاده از همه متقاضیان پُر کنیم. بنابراین هنگامی که G یک گراف دوبخشی با افراز مضاعف X، Y باشد، ممکن است بپرسیم که آیا G دارای یک جورسازی است که X را اشباع کند؛ این را یک جورسازی از X در Y می‌نامیم.

اگر M، X را اشباع کند، آنگاه برای هر $S \subseteq X$ باید حداقل $|S|$ رأس وجود داشته

باشند که دارای همسایه‌هایی در S باشند، زیرا رأسهای جور شده در S باید از آن مجموعه انتخاب شوند. از $N_G(S)$ یا تنها از $N(S)$ برای نشان دادن مجموعهٔ رأسهایی که دارای همسایه‌ای در S هستند استفاده می‌کنیم. دیدیم که $|N(S)| \geq |S|$، یک شرط لازم است. هال ثابت کرد که این شرط لازم آشکار، کافی نیز می‌باشد.

۷.۱.۳. قضیهٔ. (پی.هال[1] [۱۹۳۵]) اگر G یک گراف دوبخشی با افراز مضاعف X، Y باشد، آنگاه G دارای یک جورسازی از X در Y است، اگر، و فقط اگر، به‌ازای هر $S \subseteq X$ داشته باشیم $|N(S)| \geq |S|$.

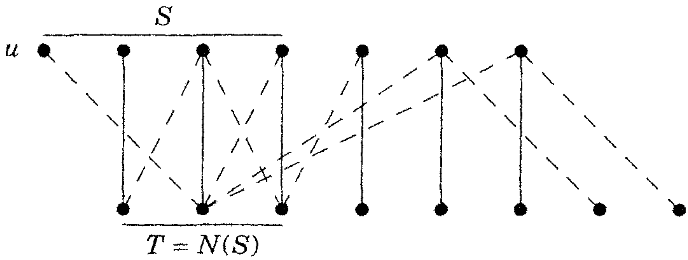
اثبات. لزوم شرط را در بالا ملاحظه کردیم. برای کفایت شرط، فرض کنیم به‌ازای هر $S \subseteq X$ داشته باشیم $|N(S)| \geq |S|$، و یک جورسازی ماکسیمم M را در نظر می‌گیریم. اگر M، X را اشباع نکند، یک مجموعهٔ S را پیدا می‌کنیم که فرض را نقض کند. فرض کنیم u یک رأس M-اشباع نشده از X باشد. فرض کنیم S و T به‌ترتیب مجموعه‌های رأسهایی در X و Y باشند که از u به‌وسیلهٔ مسیرهای M-متناوب دست یافتنی هستند.

ادعا می‌کنیم که M، T را با $S-u$ جور می‌کند. مسیرهای M-متناوب از u به‌وسیلهٔ یالهایی که در M نباشند به Y و به وسیلهٔ یالهایی که در M هستند به X می‌رسد. چون هیچ مسیر M-افزوده وجود ندارد، هر رأس از T، M-اشباع شده است، بدین معنا که یک مسیر متناوب که به $y \in T$ می‌رسد از راه M به یک رأس از S گسترش می‌یابد. علاوه بر این، هر رأس از S به جز u از راه یالی در M از رأسی در T در دسترس است. از این‌رو این یالهای M یک نگاشت دوسویی میان T و $S-u$ برقرار می‌کنند، و داریم $|T| = |S-u|$.

جورسازی میان T و $S-u$ مستلزم آن است که $T \subseteq N(S)$. درواقع، $T = N(S)$. یک یال میان S و یک رأس $y \in Y-T$ می‌توانست یالی باشد که در M نباشد؛ این

1) P.Hall

می‌توانست یک مسیر M-متناوب با y بسازد، که با $y \notin T$ در تناقض است. با در نظر گرفتن $T = N(S)$، داریم $|N(S)| = |T| = |S| - ۱ < |S|$، که با فرض قضیه در تناقض است. □



اثباتهای دیگری برای کافی بودن شرط هال وجود دارند. اثبات جدیدتری به‌وسیلهٔ ام.هال[1] [۱۹۴۸] در مورد یک کران پایین روی تعداد جورسازیها، هنگامی که شرط برقرار است، به عنوان تابعی از درجه‌های رأسها در X ارائه شده است. در بند ۲.۳ این مسأله را به‌طور الگوریتمی بررسی می‌کنیم.

هنگامی که مجموعه‌های افراز مضاعف دارای یک اندازه باشند، قضیهٔ هال، **قضیهٔ ازدواج** است، که نخستین بار به‌وسیلهٔ فروبنیوس[2] [۱۹۱۷] اثبات شد. این نام از سناریوی یک رابطهٔ سازگاری متقارن میان مجموعه‌ای از n مرد و مجموعه‌ای از n زن مطرح شده است. اگر همچنین هر مرد با k زن سازگار باشد و هر زن با k مرد سازگار باشد، آنگاه باید یک جورسازی کامل که از جفتهای سازگار استفاده کند، وجود داشته باشد.

۸.۱.۳. فرع. هر گراف چندگانه دوبخشی k-منتظم (با $k > ۰$) دارای یک جورسازی کامل است.

اثبات. فرض کنیم افراز مضاعف X، Y است. شمارش یالها به وسیلهٔ نقاط پایانی در X و نقاط پایانی در Y نشان می‌دهد که $k|X| = k|Y|$، پس منتظم بودن مستلزم آن است که $|X| = |Y|$. بنابراین کافی است نشان دهیم که شرط هال برقرار است؛

1) M.Hall 2) Frobenius

یک جورسازی اشباع کننده X یک جورسازی کامل خواهد بود. $S \subseteq X$ را در نظر می‌گیریم، و فرض کنیم m یال میان S و $N(S)$ وجود دارند. چون G، k-منتظم است، $m = k|S|$. چون این m یال متصل به $N(S)$ هستند، داریم $m \leq k|N(S)|$. بنابراین $k|S| \leq k|N(S)|$، پس $|N(S)| \geq |S|$. اگر $S \subseteq X$ را به دلخواه انتخاب کرده باشیم، آنگاه شرط هال برقرار است. □

این مطلب را می‌توان با تناقض نیز اثبات کرد، با آغاز کردن از این فرض که G دارای هیچ جورسازی تام نیست، که آن مستلزم یک مجموعهٔ $S \subseteq X$ است به‌طوری که $|N(S)| < |S|$. استدلالی که به یک تناقض می‌انجامد اساساً بیان دوباره‌ای از اثبات مستقیم بالاست.

قضایای مینیماکس

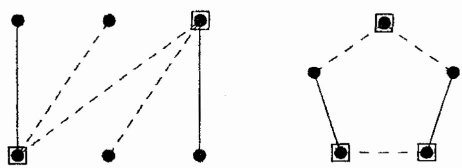
اگر G دارای یک جورسازی کامل نباشد، می‌توانیم ثابت کنیم که M یک جورسازی ماکسیمم است، بدین ترتیب که اثبات کنیم G دارای هیچ مسیر M-افزوده نیست. جستجوی همهٔ مسیرهای M-متناوب برای یافتن یک افزایش، زمان زیادی می‌گیرد. بهتر است یک ساختار صریح در G بیابیم که یک جورسازی بزرگتر از M را منع کند. یک مسألهٔ بهینه‌سازی «دوگان» ممکن است اثبات کوتاهی برای بهین بودن پاسخ فراهم سازد.

۹.۱.۳. تعریف. یک *پوشش رأسی* از G عبارت است از یک مجموعهٔ S از رأسها به‌طوری که S شامل حداقل یک نقطهٔ پایانی از هر یال G باشد. رأسها در S یالهای G را «می‌پوشانند».

اگر گراف ما نشانگر شبکه‌ای از راه (با راههای مستقیم و بدون هیچ رأسهای تنها) باشد، آنگاه می‌توانیم مسألهٔ یافتن یک پوشش رأسی مینیمم را به‌صورت مسألهٔ مستقر کردن تعداد مینیمم مأموران پلیس به منظور نظارت بر تمام شبکهٔ راه تعبیر کنیم.

چون هیچ دو یال از یک جورسازی نمی‌توانند به‌وسیلهٔ یک رأس منفرد پوشانده شوند، اندازهٔ هر پوشش رأسی حداقل به اندازهٔ هر جورسازی است. بنابراین، نمایش یک جورسازی و یک پوشش رأسی هم اندازه **اثبات می‌کند** که هر کدام بهین هستند. می‌توانیم چنین برابری‌ای برای هر گراف دوبخشی پیدا کنیم، اما نه برای هر گراف.

۱۰.۱.۳. مثال. ***جورسازیها و پوششهای رأسی.*** در زیر و در سمت چپ یک جورسازی و یک پوشش رأسی به اندازهٔ ۲ را نشان می‌دهیم. ارائهٔ یک جورسازی و یک پوشش رأسی هم‌اندازه **اثبات می‌کند** که هر دو بهین هستند، زیرا کوچکترین پوشش حداقل به اندازهٔ بزرگترین جورسازی است. همچنانکه در سمت راست نشان داده شده است، این اندازه‌ها برای یک دور فرد، یکی اختلاف دارند. اختلاف می‌تواند به دلخواه بزرگ باشد (تمرین ۵.۳.۳). □



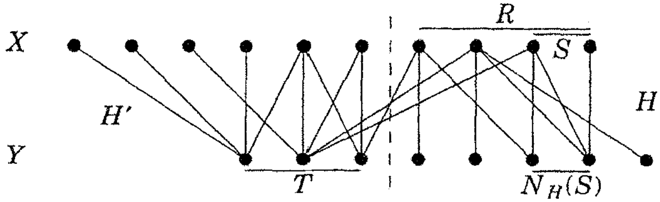
یک *رابطهٔ مینیماکس* عبارت است از قضیه‌ای که برابری میان پاسخهای یک مسألهٔ مینیمم کردن و یک مسألهٔ ماکسیمم کردن را روی رده‌ای از نمونه‌ها بیان می‌کند. قضیهٔ کونیگ- اگروری چنین رابطه‌ای برای جورسازی و پوشش رأسی در گرافهای دوبخشی است.

۱۱.۱.۳. قضیهٔ. (کونیگ [۱۹۳۱]، اگروری [۱۹۳۱]) اگر G یک گراف دوبخشی باشد، آنگاه ماکسیمم اندازهٔ یک جورسازی در G با مینیمم اندازهٔ یک پوشش رأسی از G برابر است.

اثبات. فرض کنیم G دارای افراز مضاعف X، Y است. چون رأسهای متمایز باید برای پوشاندن یالهای یک جورسازی به‌کار روند، داریم $|U| \geq |M|$ هرگاه U یک پوشش

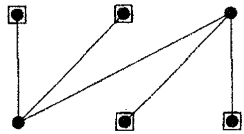
رأسی و M یک جورسازی در G باشد. با در نظرگرفتن یک پوشش رأسی مینیمم U از G، یک جورسازی به اندازهٔ $|U|$ می‌سازیم تا ثابت کنیم که برابری همواره می‌تواند تحقق یابد. فرض کنیم $R = U \cap X$ و $T = U \cap Y$. فرض کنیم H، H' زیرگرافهای G باشند که به‌وسیلهٔ $R \cup (Y - T)$ و $T \cup X - R$ القا شده‌اند. از قضیهٔ هال استفاده می‌کنیم تا نشان دهیم که H دارای یک جورسازی کامل از R در $Y - T$ است و H' دارای یک جورسازی کامل از T در $X - R$ می‌باشد. چون این زیرگرافها مجزا هستند، دو جورسازی با هم یک جورسازی به اندازهٔ $|U|$ در G تشکیل می‌دهند.

چون $R \cup T$ یک پوشش رأسی است، G دارای هیچ یالی از $Y - T$ به $X - R$ نیست. فرض کنیم $S \subseteq R$، و $N_H(S) \subseteq Y - T$ را در نظر می‌گیریم. اگر $|N_H(S)| < |S|$، آنگاه می‌توانیم $N_H(S)$ را جایگزین S در U کنیم و یک پوشش رأسی کوچکتری به‌دست آوریم، زیرا $N_H(S)$ همهٔ یالهای متصل به S را می‌پوشاند که به وسیلهٔ T پوشانده نشده‌اند. بدین سان مینیمال بودن U ایجاب می‌کند که شرط هال در H برقرار باشد، و در نتیجه H دارای یک جورسازی کامل از R در $Y - T$ است. به کار بردن همین استدلال در مورد H' باقی جورسازی را به‌دست می‌دهد. □



مجموعه‌های مستقل در گرافهای دوبخشی

اکنون از مجموعه‌های مستقل یالها، متوجهٔ مجموعه‌های مستقل رأسها می‌شویم. **عدد** ***استقلال*** یک گراف عبارت است از ماکسیمم اندازهٔ یک مجموعهٔ مستقل از رأسها. عدد استقلال یک گراف دوبخشی همواره با اندازهٔ یک مجموعهٔ بخشی برابر نیست:



درست همان‌طوری که هیچ رأسی نمی‌تواند دو یال از یک جورسازی را بپوشاند، پس هیچ یالی نیز نمی‌تواند شامل دو رأس از یک مجموعهٔ مستقل باشد. برای عدد استقلال باز هم یک مسألهٔ پوشاندن دوگان داریم:

۱۲.۱.۳. تعریف. یک ***پوشش یالی*** از G، مجموعه‌ای از یالهاست که رأسهای G را می‌پوشانند (تنها گرافهای بدون رأسهای تنها، پوششهای یالی دارند). برای استقلال و مسأله‌های پوشاندن که تعریف کرده‌ایم، از نمادگذاری زیر استفاده می‌کنیم:

ماکسیمم اندازهٔ مجموعهٔ مستقل	$\alpha(G)$
ماکسیمم اندازهٔ جورسازی	$\alpha'(G)$
مینیمم اندازهٔ پوشش رأسی	$\beta(G)$
مینیمم اندازهٔ پوشش یالی	$\beta'(G)$

این نمادگذاری پاسخهای به این مسائل بهینه‌سازی را روی گرافها به عنوان پارامترهای گراف مورد بررسی قرار می‌دهد، مانند مرتبه، اندازه، ماکسیمم درجه، قطر، و غیره. استفاده ما از $\alpha'(G)$ برای شمارش مجموعه‌ای از یالها رابطه‌ای با پارامتر $\alpha(G)$ ارائه می‌دهد که مجموعه‌ای از رأسها را می‌شمارد. این رابطه را در بند ۱.۶ مورد بحث قرار می‌دهیم.

از $\beta(G)$ برای مینیمم پوشش رأسی ناشی از عمل متقابل آن با جورسازی ماکسیمم استفاده می‌کنیم. «پریم» روی $\beta'(G)$ تا اینکه روی $\beta(G)$ قرار می‌گیرد، زیرا $\beta(G)$ مجموعه‌ای از رأسها و $\beta'(G)$ مجموعه‌ای از یالها را می‌شمارد.

در این نمادگذاری، قضیهٔ کونیگ - اگروری بیان می‌کند که برای هر گراف دوبخشی G داریم $\alpha'(G) = \beta(G)$. همچنین ثابت خواهیم کرد که برای گرافهای دوبخشی بدون

رأسهای تنها داریم $\alpha(G) = \beta'(G)$؛ پیشتر ملاحظه کرده‌ایم که $\beta'(G) \geq \alpha(G)$.

۱۳.۱.۳. لم. در یک گراف G، $S \subseteq V(G)$ یک مجموعهٔ مستقل است اگر، و فقط اگر، $\overline{S}$ یک پوشش رأسی باشد، و از این‌رو $\alpha(G) + \beta(G) = n(G)$.

اثبات. اگر S یک مجموعهٔ مستقل باشد، آنگاه هیچ یالی در S وجود ندارد، پس هر یال متصل به حداقل یک رأس از $\overline{S}$ است. برعکس، اگر $\overline{S}$ همهٔ یالها را بپوشاند، آنگاه هیچ یالی میان رأسهای S نیست. از این‌رو هر مجموعهٔ مستقل ماکسیمم، مکمل یک پوشش رأسی مینیمم است، و $\alpha(G) + \beta(G) = n(G)$. □

برای جورسازیها و پوششهای یالی، رابطه پیچیده‌تر است، زیرا یالهای G که به وسیلهٔ یک جورسازی حذف شده‌اند نیازی نیست که پوشش یالی از G تشکیل دهند. با این حال، یک فرمول مشابه برقرار است.

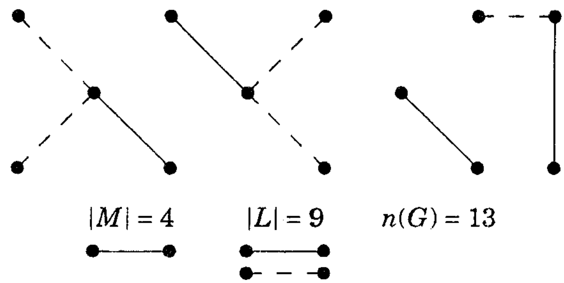
۱۴.۱.۳. قضیهٔ. (گاله [۱۹۵۹]) اگر G دارای رأسهای تنها نباشد، آنگاه

$$\alpha'(G) + \beta'(G) = n(G)$$

اثبات. اگر از یک جورسازی ماکسیمم M برای ساخت پوشش یالی به‌اندازهٔ $n(G) - |M|$ استفاده کنیم، آنگاه کوچکترین پوشش یالی از این بزرگتر نیست، و نتیجه می‌گیریم $\beta'(G) \leq n(G) - \alpha'(G)$. برعکس، اگر از یک پوشش یالی مینیمم L برای ساخت یک جورسازی به اندازهٔ $n(G) - |L|$ استفاده کنیم، آنگاه بزرگترین جورسازی از این کوچکتر نیست، و نتیجه می‌گیریم $\alpha'(G) \geq n(G) - \beta'(G)$. این دو نابرابری اثبات را کامل می‌کنند.

فرض کنیم M یک جورسازی ماکسیمم در G باشد. می‌توانیم با استفاده از M و افزودن یک یال متصل به هر رأس اشباع نشده یک پوشش یالی از G بسازیم. تعداد کل یالهای استفاده شده برابر است با $n(G) - |M|$، همچنانکه مطلوبمان بود؛ $|M|$ یال را کنار می‌گذاریم، زیرا هر یال از جورسازی، دو رأس را به جای یکی می‌پوشاند.

برای نابرابری دیگر، فرض کنیم L یک پوشش یالی مینیمم باشد. اگر نقاط پایانی یک یال e در L به یالهای دیگر در L تعلق داشته باشند، آنگاه e در پوشش مورد نیاز نیست. از این‌رو به‌ازای یک k، L متشکل از k ستاره مجزاست. چون L دارای یک یال برای هر رأس است که یک مرکز ستاره‌هایش نیست، داریم $|L| = n(G) - k$. می‌توانیم یک جورسازی M به اندازهٔ $k = n(G) - |L|$ را به‌وسیلهٔ انتخاب یک یال به‌طور دلخواه از هر ستاره در L تشکیل دهیم. □



این دو نتیجه، آنچه را که «قضیهٔ دیگر کونیگ» می‌نامیم به‌دست می‌دهند.

۱۵.۱.۳. فرع. (کونیگ [۱۹۱۶]) اگر G یک گراف دوبخشی بدون هیچ رأس تنهایی باشد، آنگاه $\alpha(G) = \beta'(G)$ (|پوشش یالی| min = | مجموعه مستقل | max).

اثبات. دو نتیجه پیشتر ایجاب می‌کنند که $\alpha(G) + \beta(G) = \alpha'(G) + \beta'(G)$، و آنگاه رابطهٔ مینیماکس کونیگ-اگروری $\alpha'(G) = \beta(G)$ را کم می‌کنیم. □

تمرینات

۱.۱.۳. (−) ثابت کنید که هر درخت دارای حداکثر یک جورسازی تام است.

۲.۱.۳. با در نظر گرفتن یک جورسازی ماکسیمال M در یک گراف G، ثابت کنید که $|M| \geq \alpha'(G)/۲$.

۳.۱.۳. (−) فرض کنیم S مجموعه‌ای از رأسها در یک گراف ساده G است که به وسیلهٔ

یک جورسازی اشباع شده است. ثابت کنید که S به‌وسیلهٔ یک جورسازی ماکسیمم اشباع شده است.

۴.۱.۳. فرض کنیم که M و M' جورسازیهایی در یک گراف دوبخشی G با افراز مضاعف X، Y باشد. فرض کنیم که $S \subseteq X$ به‌وسیلهٔ M اشباع شده است و $T \subseteq Y$ به وسیلهٔ M' اشباع شده است. ثابت کنید که G شامل یک جورسازی است که $S \cup T$ را اشباع می‌کند.

۵.۱.۳. فرض کنیم M و N جورسازیهایی در یک گراف G باشند، و $|M| > |N|$. ثابت کنید که جورسازیهای M' و N' در G وجود دارند به‌طوری که $|M'| = |M| - ۱$، $|N'| = |N| + ۱$، و M' و N' اجتماع و اشتراک همانند M و N (به عنوان مجموعه‌های یالها) دارند.

۶.۱.۳. فرمولی برای تعداد جورسازیها در $K_{n,n}$ که x_i را با y_i به‌ازای هیچ iای جور نمی‌کنند، و همچنین فرمولی برای تعداد جورسازیها در $K_{۲n}$ که $x_{۲i-۱}$ را با $x_{۲i}$ به‌ازای هیچ iای جور نمی‌کنند به‌دست آورید. از اصل شمول-طرد استفاده کنید تا یک مجموعیابی یا یک رابطه بازگشتی به‌دست آورید؛ فرمولهای بسته ساده‌ای در دسترس نیست.

۷.۱.۳. *جورسازیها درگراف پترسن.*

(الف) ثابت کنید که حذف هر جورسازی تام از گراف پترسن، زیرگراف $C_۵ + C_۵$ را باقی می‌گذارد.

(ب) از تقارن برای شمارش ۵-دورها در گراف پترسن استفاده کنید.

(پ) از قسمتهای (الف) و (ب) برای شمارش جورسازیهای تام درگراف پترسن استفاده کنید.

۸.۱.۳. *جورسازیها در مکعبهای k-بعدی.*

(الف) (−) ثابت کنید که Q_k دارای یک جورسازی تام است.

(ب) جورسازیهای تام را در $Q_۳$ بشمارید. (*راهنمایی:* نخست ثابت کنید که هر جورسازی تام در Q_k دارای تعداد زوجی از یالها در هر سو است، و بنابراین هیچ جورسازی تامی در $Q_۳$ یالی در هر سو ندارد.)

(پ) ثابت کنید که Q_k دارای حداقل $۲^{(۲^{k-۲})}$ جورسازی تام است اگر $k \geq ۲$.

۹.۱.۳. (!) دو نفر روی یک گراف G یک دور بازیی را انجام می‌دهند به این صورت که به‌طور متناوب رأسهای متمایز $v_۱$، $v_۲$، ... را که یک مسیر تشکیل می‌دهند انتخاب می‌کنند. آخرین بازیکن که بتواند یک رأس انتخاب کند برنده می‌شود. ثابت کنید که بازیکن دوم یک راهبرد بُرد دارد اگر G یک جورسازی تام داشته باشد، و بازیکن اول یک راهبرد بُرد دارد اگر G هیچ جورسازی تامی نداشته باشد. (*راهنمایی:* برای قسمت دوم، بازیکن اول باید با انتخاب رأسی که به وسیلهٔ یک جورسازی ماکسیمم حذف شده است آغاز کند.)

۱۰.۱.۳. مینیمم اندازهٔ یک جورسازی ماکسیمال را در دور C_n تعیین کنید.

۱۱.۱.۳. (!) فرض کنیم $\mathbf{A} = (A_۱, \cdots, A_m)$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ Y باشد. یک ***دستگاه از نماینده‌های متمایز***[1] (SDR) برای $\mathbf{A}$ مجموعه‌ای از عناصر متمایز $a_۱$، ...، a_m در Y است به‌طوری که $a_i \in A_i$. ثابت کنید که $\mathbf{A}$ دارای یک SDR است اگر، و فقط اگر، به‌ازای هر $S \subseteq \{۱, \cdots, m\}$ داشته باشیم $|\cup_{i\in S} A_i| \geq |S|$.

(*راهنمایی:* این مسأله را به یک مسألهٔ گراف تبدیل کنید.)

۱۲.۱.۳. ثابت کنید که یک گراف دوبخشی G دارای یک جورسازی کامل است (۱-

1) system of distinct representatives

عاملی) اگر، و فقط اگر، به‌ازای هر $S \subseteq V(G)$ داشته باشیم $|N(S)| \geq |S|$ ، و ردهٔ نامتناهیی از مثالها ارائه دهید که ثابت کند این مشخص‌سازی برای همهٔ گرافها برقرار نیست.

۱۳.۱.۳. (+) ***اثبات طریق دیگر قضیهٔ هال.*** یک گراف دوبخشی G را با افراز X، Y در نظر می‌گیریم، و فرض کنیم به‌ازای هر $S \subseteq X$ داشته باشیم $|N(S)| \geq |S|$. با استفاده از استقرا روی $|X|$ ثابت کنید که G دارای یک جوسازی است که X را اشباع می‌کند. (*راهنمایی:* نخست حالتی را که در آن به‌ازای هر زیرمجموعهٔ سره S از X داریم $|N(S)| > |S|$ در نظر بگیرید. هنگامی که این نابرابری برقرار نیست، یک $T \subseteq X$ ناتهی مینیمال را در نظر بگیرید به‌طوری که $|N(T)| = |T|$.)

۱۴.۱.۳. ***یک ماتریس جایگشت*** P یک ۱ ,۰-ماتریس است که دقیقاً یک ۱ در هر سطر و ستون داشته باشد. فرض کنیم A یک ۱ ,۰-ماتریس باشد که دقیقاً k تا ۱ در هر سطر و ستون دارد. ثابت کنید که A را می‌توان به صورت مجموع k ماتریس جایگشت بیان کرد.

۱۵.۱.۳. (!) یک ***ماتریس تصادفی دوگانه*** Q یک ماتریس حقیقی نامنفی است که در آن مجموع هر سطر و ستون ۱ است. ثابت کنید که یک ماتریس تصادفی دوگانه Q را می‌توان به‌صورت ترکیبی کوژ از ماتریسهای جایگشت بیان کرد، بدین معنا که $Q = c_۱P_۱ + \cdots + c_mP_m$، که در آن $c_۱$، ...، c_m اعداد حقیقی نامنفی هستند که مجموعشان ۱ است، و $P_۱$، ...، P_m ماتریسهای جایگشت هستند. به عنوان مثال،

$$\begin{pmatrix} ۱/۲ & ۱/۳ & ۱/۶ \\ ۰ & ۱/۶ & ۵/۶ \\ ۱/۲ & ۱/۲ & ۰ \end{pmatrix} = \frac{۱}{۲}\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix} + \frac{۱}{۳}\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

$$+\frac{۱}{۶}\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

(*راهنمایی:* فرض کنیم Q یک ماتریس حقیقی نامنفی است که در آن مجموع هر سطر و هر ستون t است. با استفاده از استقرا روی تعداد درایه‌های ناصفر در Q ثابت کنید که Q یک ترکیب خطی از ماتریسهای جایگشت است که مجموع ضرایب نامنفی آنها t است.)

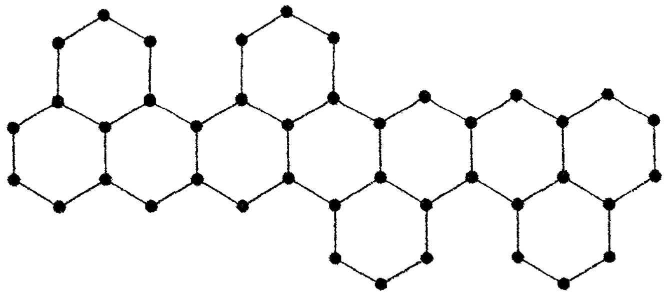
۱۶.۱.۳. (!) یک *تعمیم بازی تیک - تاک - تو*[1]. یک *بازی وضعیتی* متشکل از یک مجموعهٔ $X = x_۱, \cdots, x_n$ از وضعیتها و یک گردایه $W_۱$، ...، W_m از مجموعه‌های برنده از وضعیتهاست. (بازی تیک - تاک - تو دارای ۹ وضعیت و ۸ مجموعهٔ برنده از وضعیتهاست). دو بازیکن به‌طور متناوب وضعتیها را انتخاب می‌کنند؛ یک بازیکن با گردآوردن یک مجموعهٔ برنده بازی را می‌برد. فرض کنیم هر مجموعهٔ برنده دارای حداقل a وضعیت است و هر وضعیت در حداکثر b مجموعهٔ برنده ظاهر می‌شود. ثابت کنید که بازیکن ۲ می‌تواند یک برابری را تحمیل کند اگر $a \geq ۲b$.
(*راهنمایی:* یک گراف دوبخشی با افراز مضاعف X، Y تشکیل دهید، که در آن $Y = \{w_۱, \cdots, w_m\} \cup \{w'_۱, \cdots, w'_m\}$، و قرار دهید $x_i \leftrightarrow w_j$ و $x_i \leftrightarrow w'_j$ هرگاه $x_i \in W_j$. آیا یک جورسازی به اندازهٔ $۲m$ وجود دارد؟ اگر چنین باشد، بازیکن ۲ چگونه می‌تواند از آن استفاده کند؟ **توجه:** در نتیجه، بازیکن ۲ می‌تواند در یک تیک - تاک - تو، d-بعدی یک برابری تحمیل کند اگر ضلعها به‌اندازهٔ کافی بلند باشند.)

۱۷.۱.۳. (!) یک جورسازی تام را درگراف کشیده شده زیر نشان دهید یا اثبات کوتاهی

---

1) Tic-Tac-Toe (این بازی، به بازی ایکس او (XO) نیز معروف است.—م.)

ارائه دهید که این گراف دارای جورسازی تام نیست. (لُواس -پلومر[1] [۱۹۸۶، صفحه ۷])



۳.۱.۱۸. ($-$) ثابت کنید که هر گراف دوبخشی G دارای یک جورسازی به اندازهٔ حداقل $e(G)/\Delta(G)$ است.

۳.۱.۱۹. ($-$) فرض کنیم T درختی است با n رأس، و فرض کنیم k ماکسیمم اندازهٔ یک مجموعهٔ مستقل در T است. $\alpha'(T)$ را تعیین کنید.

۳.۱.۲۰. ($-$) ماکسیمم تعداد یالها را در یک گراف دوبخشی ساده تعیین کنید که هیچ جورسازی با k یال و هیچ ستاره‌ای با l یال نداشته باشد. (ایزاک[2])

۳.۱.۲۱. (!) با استفاده از قضیهٔ کونیگ - اگروری ثابت کنید که هر زیرگراف از $K_{n,n}$ با بیش از $n(k-۱)$ یال دارای یک جورسازی به اندازهٔ حداقل k است.

۳.۱.۲۲. از قضیهٔ کونیگ-اگروری برای اثبات قضیهٔ هال استفاده کنید.

۳.۱.۲۳. فرض کنیم G یک گراف دوبخشی با افراز مضاعف X، Y است. با استفاده از یک تبدیل گراف ثابت کنید که ماکسیمم اندازهٔ یک جورسازی در G عبارت است از $|X| - \max_{S\subseteq X}(|S| - |N(S)|)$. (*راهنمایی:* یک زیرگراف دوبخشی G' از G تشکیل دهید به‌طوری که G' دارای یک جورسازی کامل باشد اگر، و فقط اگر، G یک جورسازی به اندازهٔ مطلوب داشته باشد، و ثابت کنید که G' در شرط هال صدق می‌کند.

1) Plummer 2) Isaak

(اُور [۱۹۵۵])

۲۴.۱.۳. (+) در یک جزیرهٔ خاص با n زوج متأهل، که هر زوج متشکل از یک شکارچی و یک کشاورز است. وزارت شکار جزیره را به n ناحیه شکار با اندازهٔ برابر تقسیم می‌کند. وزارت کشاورزی به‌طور مستقل آن را به n ناحیه کشاورزی با اندازهٔ برابر تقسیم می‌کند. وزارت ازدواج تأکید می‌کند که ناحیه شکار و ناحیه کشاورزی اختصاص یافته به هر زوج باید با هم تداخل داشته باشند. در کمال شگفتی، این امکانپذیر است. وزارت مذهب آن را یک معجزه اعلام می‌کند. ثابت کنید که این یک معجزه نیست به این ترتیب که نشان دهید ناحیه‌ها را همواره می‌توان چنان جورکرد که ناحیه‌های هر زوج در مساحتی به اندازهٔ حداقل $۴/(n+۱)^۲$ مشترک باشند، در حالی که هر ناحیه مساحت ۱ داشته باشد. همچنین ثابت کنید که هیچ مساحت مشترک بزرگتری را نمی‌توان تضمین کرد. (مارکوس—ری[1] [۱۹۵۹]، فلوید[2] [۱۹۹۰])

۲۵.۱.۳. فرض کنیم G یک گراف دوبخشی با افراز مضاعف X، Y باشد. ثابت کنید که G، آزاد$-(k+۱)K_۲$ است اگر، و فقط اگر، هر $S\subseteq X$ دارای یک زیرمجموعه به اندازهٔ حداکثر k با همسایگی $N(S)$ باشد. (لیو- ژو[3] [۱۹۹۶]).

۲۶.۱.۳. فرض کنیم G زیرگرافی از $K_{m,m}$ باشد که دارای یک جورسازی کامل است. ثابت کنید که G دارای حداکثر $\binom{m}{۲}$ یال است که به هیچ جورسازی کاملی متعلق نیست. مثالهایی بسازید تا نشان دهند این مطلب برای هر m بهترین وضع ممکن است.

۲۷.۱.۳. (!) فرض کنیم G یک گراف دوبخشی با مرتبهٔ $۲m$ است. ثابت کنید که $\alpha(G)=m$ اگر، و فقط اگر، G دارای یک جورسازی تام باشد.

---

1) Marcus-Ree 2) Floyd 3) Liu-Zhou

۲۸.۱.۳. (!) فرض کنیم G منتظم است. ثابت کنید که $\alpha(G) \le n(G)/۲$.

۲۹.۱.۳. (!) فرض کنیم G یک درخت است. ثابت کنید که $\alpha(G) \ge n(G)/۲$، و برابری برقرار است اگر، و فقط اگر، G دارای یک جورسازی تام باشد.

۳۰.۱.۳. یک گراف n-رأسی همبند دقیقاً دارای یک دور است اگر، و فقط اگر، دقیقاً دارای n یال باشد (تمرین ۱۷.۱.۲). فرض کنیم G یک چنین گرافی با دور C است. ثابت کنید که $\alpha(G) \ge \lfloor n(G)/۲ \rfloor$، و برابری برقرار است اگر، و فقط اگر، $G - V(C)$ دارای یک جورسازی تام باشد. (*راهنمایی:* تمرین ۲۹ می‌تواند فرض قرار گیرد.)

۳۱.۱.۳. ثابت کنید که G دوبخشی است اگر، و فقط اگر، برای هر زیرگراف H از G بدون هیچ رأسهای تنها داشته باشیم $\alpha(H) = \beta'(H)$.

۳۲.۱.۳. (+) ***گراف ترازهای میانی.*** فرض کنیم G_k یک گراف دوبخشی باشد که رأسهایش زیرمجموعه‌های k-عنصری و $k+۱$-عنصری از $[۲k+۱]$ باشند، و دو رأس در G_k مجاور هستند اگر یکی از آنها با افزودن یا حذف تنها یک عنصر از دیگری متفاوت شود (G_k یک زیرگراف القایی از ابرمکعب $Q_{۲k+۱}$ است). با در نظر گرفتن یک رأس $X = \{x_۱, \cdots, x_k\}$ با قید $۰ = x_۰ < x_۱ < \cdots < x_k$، فرض کنیم t بزرگترین i باشد که به‌ازای آن $۲i - x_i$ ماکسیمم می‌شود. ثابت کنید که مجموعهٔ یالهای تشکیل شده با پیوستن X به $X \cup \{x_t + ۱\}$ یک جورسازی کامل از G_k است. به عنوان مثال، هنگامی که $X = \{۱, ۳, ۴, ۷\}$، داریم $t = ۳$ و X را با $\{۱, ۳, ۴, ۵, ۷\}$ جور می‌کنیم. هنگامی که $X = \{۳, ۵, ۷, ۹\}$، داریم $t = ۰$ و X را با $\{۱, ۳, ۵, ۷, ۹\}$ جور می‌کنیم. (وایت-ویلیامسون[1] [۱۹۷۷])

۳۳.۱.۳. ***نتایج قضیهٔ گاله.*** فرض کنیم M یک جورسازی ماکسیمال است و L

---

1) White-Williamson

یک پوشش یالی مینیمال درگرافی است که هیچ رأس تنهایی ندارد.

الف) ثابت کنید که M یک جورسازی ماکسیمم است اگر، و فقط اگر، M مشمول در یک پوشش یالی مینیمم باشد.

ب) ثابت کنید که L یک پوشش یالی مینیمم است اگر، و فقط اگر، L شامل یک جورسازی ماکسیمم باشد. (نورمان - رابین[1] [۱۹۵۹]، گاله [۱۹۵۹])

۳۴.۱.۳. (+) یک یال e از یک گراف G ***بحرانی*** است اگر $\alpha(G-e) > \alpha(G)$. فرض کنیم که xy و xz یالهای بحرانی در G هستند و اینکه $z \not\leftrightarrow y$. ثابت کنید که G شامل یک دور فرد به عنوان یک زیرگراف القایی است. (هارتمن[2] [۱۹۹۵ الف] (*راهنمایی:* فرض کنیم Y، Z مجموعه‌های پایدار ماکسیمم به‌ترتیب در $G-xy$ و $G-xz$ باشند. فرض کنیم $H = G[Y \Delta Z]$. با استفاده از قضیهٔ کونیگ (فرع ۱۵.۱.۳) ثابت کنید که هر مؤلفه از H تعداد رأسهای یکسان از Y و Z دارد. نتیجه بگیرید که y و z به یک مؤلفه از H تعلق دارند. *توضیح:* مارکوسیان[3] و کاراپتیان[4] [۱۹۸۴] نتیجه کلیتری را با اثباتی دشوارتر ثابت کردند.)

۳-۲ کاربردها و الگوریتمها

جورسازی دوبخشی ماکسیمم

مشخص سازی مسیر–افزوده برای جورسازیهای ماکسیمم به الگوریتمی برای یافتن جورسازیهای ماکسیمم می‌انجامد. ما به‌طور پیاپی به جستجوی مسیرهای افزوده می‌گردیم تا جورسازی جاری را هر بار به اندازهٔ یک یال بزرگتر کنیم. در یک گراف

1) Norman-Rabin 2) Hartman 3) Markossian 4) Karapetian

دوبخشی، اگر یک مسیر افزوده پیدا نکنیم، یک پوشش رأسی پیدا خواهیم کرد که اندازه‌اش همان اندازهٔ جورسازی جاری باشد، و به این ترتیب ثابت می‌کنیم که جورسازی جاری دارای ماکسیمم اندازه است. این مطلب هم الگوریتمی برای حل مسألهٔ جورسازی ماکسیمم و هم یک اثبات الگوریتمی برای قضیهٔ کونیک-اگروری به‌دست می‌دهد.

با در نظر گرفتن یک جورسازی M در یک گراف دوبخشی G، می‌توانیم از هر رأس M-اشباع نشده یک مسیر M-افزوده را جستجو کنیم. تنها نیاز داریم که رأسهای اشباع نشده را در یک مجموعهٔ بخشی در نظر بگیریم، زیرا هر مسیر افزوده یک انتها در هر مجموعهٔ بخشی دارد. با نگهداری و با دقت اطلاعاتی که در طول جستجو به‌دست آورده‌ایم، می‌توانیم از همهٔ رأسهای اشباع نشده در یک مجموعهٔ بخشی به‌طور همزمان جستجو کنیم. با آغاز از جورسازیی به اندازهٔ ۰، $\alpha'(G)$ کاربردهای الگوریتم مسیر افزودهٔ یک جورسازی ماکسیمم را ایجاد می‌کند.

۱.۲.۳. الگوریتم. (الگوریتم مسیر افزوده).

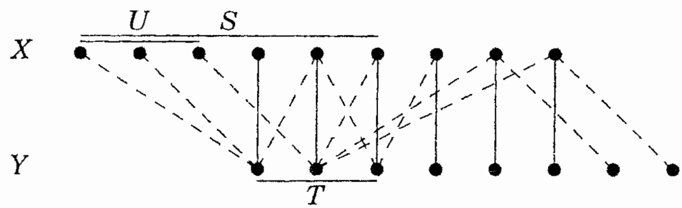
ورودی: یک گراف دوبخشی G با افراز از مضاعف X، Y، یک جورسازی M در G، و مجموعهٔ U از همهٔ رأسهای M-اشباع نشده در X.

پنداره: مسیرهای M-متناوب را از U جستجو کنید، با فرض اینکه $S \subseteq X$ و $T \subseteq Y$ مجموعه‌های رأسهایی باشند که به آنها رسیده‌اید. رأسهایی از S را که **علامت** دارند برای بسط مسیرها جستجو کنید. برای هر $x \in (S \cup T) - U$، رأس پیش از x را روی یک مسیر M-متناوب از U ثبت کنید.

ارزشدهی آغازی: $S = U$ و $T = \phi$.

تکرار: اگر S دارای هیچ رأس علامتداری نباشد، متوقف شوید و $T \cup (X - S)$ را به عنوان یک پوشش مینیمم و M را به عنوان یک جورسازی ماکسیمم گزارش دهید. در غیر این‌صورت، یک $x \in S$ علامتدار نشده را انتخاب کنید. برای جستجوی x، هر $y \in N(x)$ را طوری در نظر بگیرید که $xy \notin M$. اگر y

اشباع نشده باشد، به کار پایان دهید و از y به عقب جستجو کنید تا یک مسیر M- افزوده را از U به y گزارش نمایید. در غیر این‌صورت، y با یک $w \in X$ به وسیلهٔ M جور می‌شود. در این حالت، y را به T اضافه کنید (از x به آن رسیده‌ایم) و w را به S اضافه نمایید (از y به آن رسیده‌ایم). پس از جستجوی همهٔ چنین یالهای متصل به x، x را علامتدار کنید و تکرار نمایید. □



هنگام جستجوی x درگام تکراری، می‌توانیم y را به T و w را به S اضافه کنیم حتی اگر پیشتر چنین کرده باشیم. این کار ما را از دردسر آزمون اینکه آیا $y \in T$ است، هر باری که به y می‌رسیم، خلاص می‌کند. همچنان هنگامی که به رأسی اشباع نشده از Y می‌رسیم یک مسیر M-افزوده را پیدا می‌کنیم؛ تغییر در رأس ثبت شده برای y بر مسیری که گزارش می‌کنیم تأثیر دارد، اما بر وجود چنین مسیری بی‌تأثیر است.

۳.۲.۳. قضیه. کاربرد تکرار الگوریتم مسیر افزوده برای یک گراف دوبخشی یک جورسازی و یک پوشش رأسی با همان اندازه ایجاد می‌کند.

اثبات. تنها لازم است تحقیق کنیم که الگوریتم مسیر افزودهٔ یک مسیر M- افزوده یا یک پوشش رأسی به اندازهٔ $|M|$ ایجاد می‌کند. فرض کنیم X، Y، U، S، T مجموعه‌های استفاده شده در الگوریتم باشند، و هنگامی که الگوریتم پایان می‌پذیرد مشاهده شوند. اگر الگوریتم یک مسیر M-افزوده ایجاد کند، کار ما پایان یافته است. در غیر این‌صورت، الگوریتم با علامتگذاری همهٔ رأسهای S و ادعای اینکه $R = T \cup (X - S)$ یک پوشش رأسی به اندازهٔ $|M|$ است پایان می‌یابد. باید ثابت کنیم که R یک پوشش رأسی است و دارای اندازهٔ $|M|$ است.

یک مسیر M-متناوب از U می‌تواند تنها روی یالی از M وارد X شود؛ از این‌رو هر رأس از $S-U$ از راه M به رأسی از T جور می‌شود، و هیچ یالی متعلق به M از S به $Y-T$ وجود ندارد. هنگامی که یک مسیر M-متناوب به $x \in S$ می‌رسد، می‌تواند در امتداد هر یال اشباع نشده ادامه یابد، و جستجوکردن x و همهٔ همسایه‌های x را در امتداد یالهای اشباع نشده در T قرار می‌دهد. چون الگوریتم همه x را پیش از پایان یافتن علامتگذاری می‌کند، هیچ یال اشباع نشده‌ای از S به $Y-T$ وجود ندارد. از این‌رو هیچ یالی از S به $Y-T$ وجود ندارد، و R یک پوشش رأسی است.

چون الگوریتم بدون یافتن یک مسیر M-افزوده پایان می‌یابد، هر رأس از T اشباع می‌شود، و این یعنی هر $y \in T$ از راه M به رأسی از S جور می‌شود. چون $U \subseteq S$، همچنین هر رأس از $X-S$ اشباع می‌شود، و یالهایی از M که متصل به $X-S$ باشند نمی‌توانند متضمن T باشند. از این‌رو این یالها با یالهای اشباع کننده T متفاوت هستند، و در می‌یابیم که M دارای حداقل $|T|+|X-S|$ یال است. از آنجا که جورسازیی بزرگتر از یک پوشش رأسی نمی‌تواند وجود داشته باشد، داریم

$$|M| = |T| + |X-S| = |R| \qquad \square$$

اجرای این الگوریتم را برای جورسازی ماکسیمم، می‌توانیم با شمردن اَعمالی که می‌تواند روی یک گراف دوبخشی n-رأسی G اجرا شود، ارزیابی کنیم. چون جورسازیها حداکثر $n/۲$ یال دارند، الگوریتم مسیر افزوده را حداکثر $n/۲$ بار به کار می‌بریم. در هر تکرار، از رأسی از X حداکثر یک‌بار جستجو می‌کنیم، پیش از آنکه علامتگذاریش کنیم. از این‌رو تعداد اَعمال در هر تکرار به وسیلهٔ مضربی از $e(G)$ کراندار است. این مضرب حداکثر درجهٔ دوم برحسب n است، پس تعداد کل اَعمال به وسیلهٔ مضربی از $n^۳$ کراندار می‌باشد. در پایان این بند، الگوریتم سریعتری را با استفاده از مضربی از $n^{۲/۵}$ اَعمال شرح می‌دهیم. مشخص‌سازی مسیر افزوده دربارهٔ جورسازیهای ماکسیمم همچنین به الگوریتم خوبی برای یافتن جورسازیهای ماکسیمم درگرافهای کلی می‌انجامد؛ بحث این

مطلب را به بند ۳.۳ موکول می‌کنیم.

جورسازی دوبخشی وزندار

نتایج ما دربارهٔ جورسازی ماکسیمم به گرافهای دوبخشی وزندار تعمیم می‌یابند. با در نظر گرفتن وزنهای نامنفی یالها، به‌دنبال جورسازی با وزن کل ماکسیمم می‌گردیم. با تخصیص دادن وزن ۰ به یالهای غیرقابل دسترسی، می‌توانیم فرض کنیم که $G = K_{n,n}$. هر دو مسألهٔ ماکسیمم سازی و مسألهٔ دوگان را حل می‌کنیم.

۳.۲.۳. مثال. ***جورسازی دوبخشی وزندار و دوگان آن.*** فرض کنیم یک شرکت کشاورزی مالک n مزرعه و n کارخانه پردازش است، به‌طوری که هر مزرعه توانایی تولید ذرت را به اندازهٔ ظرفیت یک کارخانه پردازش دارا می‌باشد. سودی که از فرستادن محصول مزرعه i به کارخانه j حاصل می‌شود برابر است با w_{ij}. این مطلب یک گراف دوبخشی وزندار با مجموعه‌های بخشی $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ و $Y = \{y_1, \cdots, y_n\}$ را به‌دست می‌دهد؛ وزن روی یال x_iy_j، برابر است با w_{ij}. شرکت می‌خواهد جورسازیی با ماکسیمم وزن کل را پیدا کند.

دولت ادعا می‌کند که ذرت بیش از حد دارد تولید می‌شود، بنابراین به شرکت پول می‌پردازد تا ذرت تولید نکند. دولت u_i می‌پردازد اگر شرکت از مزرعه i استفاده نکند، و v_j اگر از کارخانه j استفاده نکند. اگر $u_i + v_j < w_{ij}$، آنگاه شرکت با استفاده از یال x_iy_j پول بیشتری از پرداخت دولت برای آن رأسها به‌دست می‌آورد. دولت برای آنکه مبلغی کافی برای توقف همهٔ تولید پیشنهاد کند، باید مبالغی پیشنهاد کند که به‌ازای هر i، j، داشته باشیم $u_i + v_j \geq w_{ij}$. دولت می‌خواهد چنین مقادیری برای $\{u_i\}$ و $\{v_i\}$ بیابد تا $\sum u_i + \sum v_j$ را مینیمم کند. □

۴.۲.۳. تعریف. یک *ترانسورسال* یک ماتریس n در n، A متشکل از n وضعیت

است: یکی در هر سطر و هر ستون. یافتن یک ترانسورسال A با مجموع ماکسیمم ***مسألهٔ تخصیص*** است. این همان فرمولبندی ماتریسی مسألهٔ ***جورسازی وزندار ماکسیمم*** است، که در آن A ماتریس A با وزنهای w_{ij} نسبت داده شده به یالهای x_iy_j از $K_{n,n}$ می‌باشد و ما به دنبال یک جورسازی کامل M با وزن کل ماکسیمم $w(M)$ هستیم. با در نظر گرفتن وزنهای $\{w_{ij}\}$، یک **پوشش** (***وزندار***) عبارت است از انتخابی از نشانهای $\{u_i\}$ و $\{v_j\}$ به‌طوری که به‌ازای هر i، j داشته باشیم $u_i + u_j \geq w_{ij}$. ***ارزش*** $c(u, v)$ از یک پوشش u، v عبارت است از $\sum u_i + \sum v_j$. مسألهٔ ***پوشش وزندار مینیمم***، مسألهٔ یافتن پوشش با ارزش مینیمم است.

این مسألهٔ مینیمم‌سازی مسألهٔ پوشش رأسی را در گرافهای دوبخشی تعمیم می‌دهد: باید نشانهایی را که به اندازهٔ کافی بزرگ باشند چنان روی رأسها قرار دهیم که وزن روی هر یال «پوشانده» شود. حالت خاصی را در نظر می‌گیریم که در آن وزن روی هر یال ۰ یا ۱ است و تنها از نشانهای با عدد صحیح استفاده می‌کنیم. روی هر رأس از نشان ۰ یا ۱ استفاده می‌کنیم، و رأسهای دریافت کننده ۱، یک پوشش رأسی از گراف تشکیل شده به‌وسیلهٔ یالهای با وزن ۱ را تشکیل می‌دهند. لم بعدی «دوگانی» مسأله‌های وزندار را بیان می‌کند.

۵.۲.۳. لم. اگر M یک جورسازی کامل در یک گراف دوبخشی وزندار G باشد، و u، v یک پوشش باشد، آنگاه $c(u, v) \geq w(M)$. علاوه بر این، $c(u, v) = w(M)$ اگر، و فقط اگر، M متشکل از یالهای x_iy_j باشد به‌طوری که $u_i + v_j = w_{ij}$. در این حالت، M یک جورسازی با وزن ماکسیمم است و u، v پوشش با وزن مینیمم می‌باشد.

اثبات. چون یالها در جورسازی M مجزا هستند، مجموع قیدهای $u_i + v_j \geq w_{ij}$ که از یالهایش پدید می‌آید برای هر پوشش u، v به‌دست می‌دهد $c(u, v) \geq w(M)$. علاوه

براین، $c(u,v)=w(M)$، آنگاه برابری باید در هریک از n جمعوند $u_i+v_j \geq w_{ij}$ برقرار باشد. سرانجام، از آنجاکه وزن به‌وسیلهٔ ارزش هر جورسازی و هر پوشش کراندار می‌شود، $c(u,v)=w(M)$ ایجاب می‌کند که هیچ جورسازی با وزن بیش از $c(u,v)$ و هیچ پوشش با ارزش کمتر از $w(M)$ وجود ندارد. □

ملاحظه اینکه برابری میان وزن و ارزش تنها هنگامی رخ می‌دهد که از یالهای پوشانده شده با برابری استفاده کنیم، ما را به سوی یک الگوریتم راهنمایی می‌کند. فرض کنیم $G_{u,v}$ نشانگر *زیرگراف برابری* برای پوشش u، v باشد؛ این زیرگراف فراگیر از $K_{n,n}$ است که شامل هر یال x_iy_j می‌باشد به‌طوری که $u_i+v_j=w_{ij}$. اگر $G_{u,v}$ دارای یک جورسازی تام باشد، آنگاه جورسازی دارای وزن $\sum u_i+\sum v_j$ است، و بنابر لم ۵.۲.۳، جورسازی بهین و پوششی داریم. در غیراین صورت، پوشش u، v را تغییر خواهیم داد.

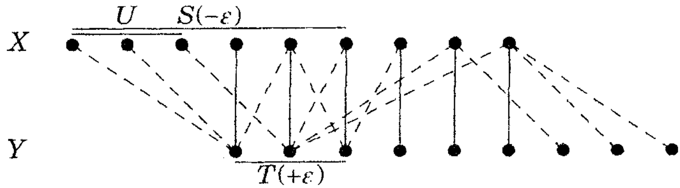
ساختار $G_{u,v}$ را هنگامی که الگوریتم مسیر افزوده پایان می‌یابد در نظر می‌گیریم؛ S و T زیرمجموعه‌های X و Y هستند که به‌وسیلهٔ مسیرهای M-متناوب از مجموعهٔ U از رأسهای اشباع نشده در X، قابل دسترسی می‌باشند. برای جستجوی یک جورسازی بزرگتر، u، v را تغییر می‌دهیم تا M و یالهای مسیرهای M-متناوب از U را در زیرگراف برابری حفظ کنیم، و نیز یالی از S به $T-Y$ را به امید ساختن یک مسیر M-افزوده معرفی می‌کنیم. u_i را به اندازهٔ یک ثابت ε برای $x_i\in S$ کاهش می‌دهیم، و v_i را به اندازهٔ یک ثابت ε برای $y_i\in T$ افزایش می‌دهیم. این‌کار $u_i+v_j=w_{ij}$ را روی یالهای مطلوب حفظ می‌کند.

برای یک پوشش باید به‌ازای هر i، j داشته باشیم $u_i+v_j-w_{ij}\geq 0$. بنابر قضیهٔ ۲.۲.۳، یالهای x_iy_j با $x_i\in S$ و $y_j\in Y-T$ در $G_{u,v}$ نیستند. از این‌رو «مازاد» برای این یالها مثبت است، و تغییر پیشنهادی ما، مازاد را به اندازهٔ ε کاهش می‌دهد.

$$\varepsilon=\min\{u_i+v_j-w_{ij} : x_i\in S\ ,\ y_j\in Y-T\}$$

را انتخاب می‌کنیم تا عملی بودن را در همهٔ قیدها حفظ کنیم و یالی را میان S و $Y-T$

معرفی می‌کنیم. سپس یک جورسازی کامل در زیرگراف برابری جدید می‌یابیم. الگوریتم حاصل را کوهن[1] *الگوریتم مجاری* نامید، تا کمکهای کونیگ و اگر وری را گرامی داشته باشد.



۶.۲.۳. الگوریتم. (الگوریتم مجاری - کوهن [۱۹۵۵]، مانکرز[2] [۱۹۵۷]).

ورودی: ماتریسی با وزنها روی یالهای $K_{n,n}$ با افراز مضاعف X، Y.

پنداره: یک پوشش u، v را با کاهش به‌طور پیاپی ارزش پوشش تا هنگامی که زیرگراف برابری $G_{u,v}$ دارای یک جورسازی تام باشد، حفظ کنید.

ارزشدهی آغازی: فرض کنید u، v یک نشاندار کردن عملی باشد، مانند $u_i = \max_j w_{ij}$ و $v_j = 0$، و یک جورسازی ماکسیمم M در $G_{u,v}$ را بیابید.

تکرار: اگر M یک جورسازی کامل باشد، متوقف شوید و M را به عنوان جورسازی با وزن ماکسیمم گزارش دهید. در غیر این‌صورت، فرض کنید U مجموعهٔ رأسهای M-اشباع نشده در X باشد. فرض کنید S مجموعهٔ رأسهای در X و T مجموعهٔ رأسهای در Y باشد که با مسیرهای M-متناوب از U قابل دسترسی هستند. فرض کنید

$$\varepsilon = \min\{u_i + v_j - w_{ij} : x_i \in S \ , \ y_j \in Y - T\}$$

u_i را به اندازهٔ ε به ازای هر $x_i \in S$ کاهش دهید، و v_j را به اندازهٔ ε به‌ازای هر $y_j \in T$ افزایش دهید. اگر زیرگراف برابری جدید G' شامل یک مسیر M-افزوده باشد، M را به جای یک جورسازی ماکسیمم در G' جایگزین کنید و تکرار نمایید.

1) Kuhn 2) Munkres

در غیر این‌صورت، بدون تغییر M تکرار کنید. □

۷.۲.۳. قضیه. الگوریتم مجاری یک جورسازی با وزن ماکسیمم و یک پوشش با ارزش مینیمم می‌یابد.

اثبات. الگوریتم با یک پوشش آغاز می‌شود. هر تکرار را الگوریتم یک پوشش ایجاد می‌کند، و تنها هنگامی پایان می‌یابد که زیرگراف برابری یک جورسازی کامل داشته باشد، و اینکه جورسازی جاری و پوشش مقدار برابر دارند را تضمین می‌کند. اگر u، v پوشش جاری باشد، فرض کنیم u'، v' نشانگر فهرست جدیدی از اعداد نسبت داده شده به رأسها باشد. چون ε مینیمم یک مجموعه از اعداد مثبت است، $\varepsilon > 0$.

نخست تحقیق می‌کنیم که u'، v' نیز یک پوشش است. چون نشانها را تنها روی رأسهای S و T تغییر داده‌ایم، داریم $u'_i + v'_j = u_i + v_j$ اگر $x_i \in S$ و $y_j \in T$، یا اگر $x_i \in X - S$ و $y_j \in Y - T$. اگر $x_i \in X - S$ و $y_j \in T$، آنگاه $u'_i + v'_j = u_i + v_j + \varepsilon$، و وزن روی چنین یالهایی پوشانده باقی می‌ماند. اگر $x_i \in S$ و $y_j \in Y - T$، آنگاه $u'_i + v'_j = u_i + v_j - \varepsilon$، اما برای چنین یالهایی داریم $u_i + v_j - w_{ij} \geq \varepsilon$، و باز هم وزن پوشانده باقی می‌ماند. با انتخاب ε، یالی از S به $Y - T$ وارد زیرگراف برابری می‌شود.

الگوریتم تنها هنگامی می‌تواند پایان یابد که زیرگراف برابری دارای یک جورسازی کامل باشد، پس کافی است نشان دهیم که الگوریتم باید در ظرف $n^2/2$ تکرار پایان یابد. چون یالهای M در G' باقی می‌مانند، اندازهٔ جورسازی جاری هیچگاه کاهش نمی‌یابد. هنگامی که این اندازهٔ بی‌تغییر باقی بماند، ادعا می‌کنیم که $|T|$ افزایش می‌یابد. از این‌رو اندازهٔ جورسازی باید در ظرف n تکرار افزایش یابد، و حداکثر $n/2$ بار افزایش می‌یابد.

برای اثبات آنکه $|T|$ افزایش می‌یابد، ملاحظه می‌کنیم که همهٔ مسیرهای M-متناوب از U در $G_{u,v}$ در $G_{u,v}[S \cup T]$ قرار می‌گیرند. چون همهٔ یالهای میان S و T در G' باقی می‌مانند، هر رأس قابل دسترسی از U، با یک مسیر M-متناوب در $G_{u,v}$، نیز

در G' قابل دسترسی است. در G' همان جورسازی و بنابراین همان مجموعهٔ رأسهای اشباع نشده را حفظ می‌کنیم. اکنون ورود یالی از S به $Y - T$ تعداد رأسهایی از Y را که با مسیرهای M-متناوب از U قابل دسترسی هستند افزایش می‌دهد. □

۸.۲.۳. تبصره. اگرچه در اثبات از ارزش پوشش استفاده نکردیم، ولی با هر تکرار الگوریتم مجاری کاهش می‌یابد. از آنجا که نشانها را روی T افزایش و روی S کاهش می‌دهیم، تغییر خالص در ارزش پوشش $\varepsilon(|T| - |S|)$ است. چون هنگام تکرار $|T| + |X - S| = |M| < n = |X|$، داریم $|S| > |T|$، و ارزشهای پوشش جدید کمتر است.

هنگامی که وزنهای w_{ij} گویا باشند، انعطافپذیری بیشتری در انتخاب S و T در هر تکرار داریم. در این حالت یک عدد صحیح d وجود دارد به‌طوری که هر وزن مضربی از $1/d$ می‌باشد. اگر نشانها در u، v مضربهایی از $1/d$ باشند، آنگاه ε و نشانهای جدید مضربهایی از $1/d$ هستند، و $c(u, v)$ به اندازهٔ مضربی از $1/d$ تغییر می‌کند. این مطلب باقیمانده که هرگاه $T \cup (X - S)$ یک پوشش رأسی از $G_{u,v}$ باشد، درست است. چون ما با یک جورسازی دارای وزن متناهی آغاز می‌کنیم، و هر تکرار $c(u, v)$ را به اندازهٔ مضربی از $1/d$ کاهش می‌دهد، تعداد به‌طور متناهی فراوانی تکرار، پیش از آنکه یک پوشش مینیمم به‌دست آوریم، وجود دارند. □

تجسم در مورد گرافهای دوبخشی توضیح می‌دهد که چرا یک الگوریتم کار می‌کند، اما محاسبهٔ تجسمی با یک تغییر $G_{u,v}$ مشکل‌ساز است. از این‌رو با ماتریسها محاسبه می‌کنیم. وزنهای اولیهٔ یک ماتریس A را با w_{ij} در وضعیت i، j تشکیل می‌دهند. رأسها (و متغیرهای u، v) را با سطرها و ستونها، که به ترتیب X و Y هستند، مرتبط می‌کنیم. w_{ij} را از $u_i + v_j$ کم می‌کنیم تا ماتریس «مازاد» $c_{ij} = u_i + v_j - w_{ij}$ به‌دست آید. یالهای زیرگراف برابری متناظر با ۰ها در ماتریس مازاد هستند. یک جورسازی در $G_{u,v}$ متناظر با مجموعه‌ای از ۰ها در ماتریس مازاد است که هیچ دوتایی

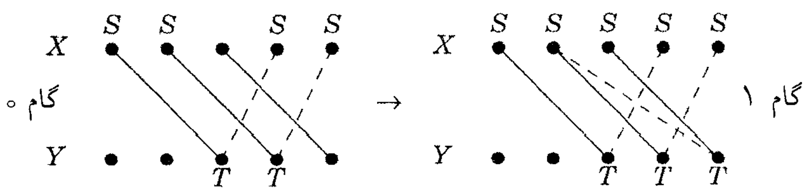
در هیچ سطر یا ستونی ندارد. می‌دانیم که یک جورسازی ماکسیمم در $G_{u,v}$ یافته‌ایم در حالی که یک پوشش رأسی به همان اندازهٔ داشته باشیم، که متناظر با یک گردایه از سطرها و ستونها باشد که با یکدیگر همه ۰ها را در ماتریس مازاد می‌پوشانند.

۹.۲.۳. مثال. ***حل مسألهٔ تخصیص.*** نخستین ماتریس زیر، ماتریسی از وزنهاست. دیگر ماتریسها یک پوشش و ماتریس مازاد متناظر را نمایش می‌دهند. زیر درایه‌ها را در ماتریس مازاد خط می‌کشیم تا یک جورسازی ماکسیمم M از $G_{u,v}$ را مشخص کنیم که به صورت یالهای یک‌پارچه در زیرگراف برابری رسم شده برای دو ماتریس مازاد اول ظاهر شود.

S و T را با جستجوی مسیرهای M-متناوب از سطرهای اشباع نشده می‌یابیم. از سطر x_i که به آن رسیده باشیم، می‌توانیم به ستونی برسیم که در آن سطر x_i، ۰ای دارد که در M نیست. از یک ستون y_j که به آن رسیده باشیم، می‌توانیم به سطری برسیم که در آن ستون y_j، ۰ای در M داشته باشد. به‌طریق دیگر اینکه، چون وزنها گویا هستند، تبصره ۸.۲.۳ به ما اجازه می‌دهد که از هر $T \subseteq Y$ و $S \subseteq X$ استفاده کنیم به‌طوری که $T \cup (X - S)$ همهٔ ۰های ماتریس مازاد را بپوشاند. یافتن سطرها و ستونهای پوشاننده ۰ها ممکن است از اینکه دقیقاً تعیین کنیم کدام سطرها و ستونها از سطرهای اشباع نشده قابل دسترسی هستند، آسانتر باشد.

در این مثال، انتخاب $T \cup S$ همان‌طور که در نخستین تکرار نشان داده شده است، S و T را بزرگ می‌کند اما جورسازی را نه. تکرار دوم یک جورسازی تام ایجاد می‌کند. اگر در تکرار نخست، از سه ستون آخر به عنوان یک پوشش رأسی از $G_{u,v}$ (یعنی $S = X$) استفاده کنیم، بیدرنگ جورسازی بزرگتری به‌دست می‌آوریم. مقدار جواب بهین یکتاست، اما خود راه حل چنین نیست. این مثال دارای عدهٔ زیادی جورسازیها با وزن ماکسیمم و نشاندارکردنهای مینیمم بسیاری است، اما همگی دارای وزن کل ۳۱ هستند. □

$$
\begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 3 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 6 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}
\rightarrow
\begin{array}{c} \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 6 \\ 8 \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c} 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 & \underline{0} & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 4 & \underline{0} & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & \underline{0} \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ T \quad T \end{array}
\begin{array}{c} \\ S \\ S \\ \\ S \\ S \\ \\ \end{array}
\quad \text{گام ۰}
$$



$$
\rightarrow \text{گام ۱}
\begin{array}{c} \\ 5 \\ 6 \\ 8 \\ 5 \\ 7 \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c} 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & \underline{0} & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 4 & \underline{0} & 0 \\ 6 & 5 & 5 & 4 & \underline{0} \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ T \quad T \quad T \end{array}
\begin{array}{c} \\ S \\ S \\ S \\ S \\ S \\ \\ \end{array}
\rightarrow
\begin{array}{c} \\ 4 \\ 5 \\ 7 \\ 4 \\ 6 \end{array}
\begin{array}{c} 0 \quad 0 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & \underline{0} & 4 & 2 \\ \underline{0} & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 5 & 4 & \underline{0} \\ 1 & \underline{0} & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & \underline{0} & 1 \end{pmatrix} \end{array}
$$

۳.۲.۱۰. مثال. ***حل مسألهٔ حمل و نقل (اختیاری).*** در پایان فصل ۲، مسألهٔ حمل و نقل را به خاطر کاربرد در مسألهٔ جارو کردن خیابان توضیح دادیم. با در نظر گرفتن عرضه‌های $\sigma(x)$ برای $x \in X$، تقاضاهای $\delta(y)$ برای $y \in Y$، و هزینه‌های $c(xy)$ برای فرستادن یک واحد از x به y، در حالی که $\sum \sigma(x) = \sum \sigma(y)$، مسألهٔ

حمل و نقل مسألهٔ ارضا کننده تقاضاها با کمترین هزینهٔ کل است. این مسأله با استفاده از مسألهٔ تخصیص هنگامی که عرضه‌ها و تقاضاها اعداد صحیح باشند به آسانی حل می‌شود.
ماتریسی را با $\sum \sigma(x)$ سطر و ستون تعریف می‌کنیم. به ازای هر $x \in X$، $\sigma(x)$ سطر داریم. به‌ازای هر $y \in Y$، $\sigma(y)$ ستون داریم. اگر سطر i به x و ستون j به y متعلق باشد، آنگاه وزن برای وضعیت (i,j) عبارت است از $M - c(xy)$، که در آن $M = \max_{x,y} c(xy)$. اکنون مسألهٔ تخصیص را حل می‌کنیم تا یک جورسازی با وزن ماکسیمم بیابیم، که متناظر با یک پاسخ با هزینه مینیمم برای مسألهٔ حمل و نقل است. برخی جزئیات برای اثبات اینکه این شیوه مؤثر است باقی می‌مانند، مانند نشان دادن اینکه هنگامی که عرضه‌ها و تقاضاها اعداد صحیح باشند محمولات در مسألهٔ حمل و نقل به انتقالهای واحد در یک پاسخ بهین تقسیم می‌شوند. □

جورسازیهای پایدار (اختیاری)

به جای بهینه ساختن وزن کل برای یک جورسازی، می‌توانیم سعی کنیم از ارجحیتها استفاده کنیم. به عنوان مثال، فرض کنیم گردایه‌ای از n مرد و n زن داریم و می‌خواهیم گردایه‌ای از ازدواجهای «پایدار» ایجاد کنیم. با در نظر گرفتن عادتهای اجتماعی، یک گردایه از ازدواجها *پایدار* است اگر، و فقط اگر، هیچ مرد x وزن a وجود نداشته باشند به‌طوری که x، a را به همسر کنونی و a، x را به همسر کنونی‌اش ترجیح دهد. در غیر این صورت جورسازی «ناپایدار» است؛ x و a همسران کنونی‌شان را ترک خواهند کرد و با یکدیگر ازدواج می‌کنند.

۱۱.۲.۳. مثال. با در نظر گرفتن مردان x، y، z، w و زنان a، b، c، d و فهرست ارجحیتهای زیر، جورسازی $\{xa, yb, zd, wc\}$ یک جورسازی پایدار است. □

$$\begin{array}{ll} \{x,y,z,w\} \text{ مردان} & \{a,b,c,d\} \text{ زنان} \\ x: a>b>c>d & a: z>x>y>w \\ y: a>c>b>d & b: y>w>x>z \\ z: c>d>a>b & c: w>x>y>z \\ w: c>b>a>d & d: x>y>z>w \end{array}$$

گیل و شاپلی[1] در مقاله‌شان «پذیرش در کالج و پایداری ازدواج»، اثبات کردند که یک جورسازی پایدار همواره وجود دارد و می‌تواند با استفاده از یک الگوریتم نسبتاً ساده پیدا شود. یک عدم تقارن در این الگوریتم وجود دارد؛ زنان به جای مردان می‌توانند پیشنهاد ازدواج دهند. دربارهٔ این اختلاف اخیر بیشتر صحبت خواهیم کرد. الگوریتم زیرجورسازی مثال ۱۱.۲.۳ را ایجاد می‌کند.

۱۲.۲.۳. الگوریتم. (الگوریتم پیشنهاد گیل–شاپلی)

ورودی: رتبه‌های ارجحیت برای هریک از n مرد و n زن.

پنداره: یک جورسازی پایدار با استفاده از پیشنهادها بسازید، اطلاعات اینکه چه کسی به چه کسی پیشنهاد داده است و چه کسی، چه کسی را رد کرده است حفظ کنید.

تکرار: هر مرد مجرد به زنی که در فهرست او بالاترین جای را دارد پیشتر او را رد نکرده و هنوز ازدواج نکرده است، پیشنهاد می‌دهد. اگر هر زن دقیقاً یک پیشنهاد دریافت کند، متوقف شوید و این حالت همان ازدواجهای قطعی شده است. در غیر این‌صورت، حداقل یک زن حداقل دو پیشنهاد دریافت می‌کند. هر زن که بیش از یک پیشنهاد دریافت کند همه را به جز آنکه در فهرستش بالاترین باشد رد می‌کند. هر زن که یک پیشنهاد دریافت کند به جذابترین پیشنهاد دریافت شده پاسخ «شاید» می‌دهد. □

1) Shapley

۱۳.۲.۳. قضیهٔ. (گیل - شاپلی [۱۹۶۲]) الگوریتم پیشنهاد یک جورسازی پایدار ایجاد می‌کند.

اثبات. الگوریتم (با یک جورسازی) پایان می‌یابد، زیرا روی هر تکرار ناپایانی، طول کل فهرستهای شامل جفتهای ممکن برای مردان کاهش می‌یابد. این تنها می‌تواند n^2 بار روی دهد. ملاحظه کلیدی آن است که دنبالهٔ پیشنهادهای داده شده از سوی هر مرد در فهرست ارجحیت اونا افزایشی است، و دنبالهٔ مردانی که یک زن به آنها «شاید» می‌گوید در فهرست ارجحیت اونا کاهشی است، و سرانجام به مرد پذیرفته شده ختم می‌شود. (مردان پیاپی به یک زن پیشنهاد می‌دهند تا هنگامی که رد یا پذیرفته شوند.)

اگر نتیجه پایدار نباشد، آنگاه xای وجود دارد که جفت b شده و yای وجود دارد که جفت a شده است به‌طوری که a، x را به y ترجیح می‌دهد و x، a را به b ترجیح می‌دهد. بنابر ملاحظهٔ کلیدی، x هرگز در طول الگوریتم به a پیشنهاد نداده است، زیرا a جفتی را دریافت کرده است که از x مطلوبیت کمتری دارد. ملاحظهٔ کلیدی همچنین ایجاب می‌کند که x هرگز نمی‌توانست به b پیشنهاد دهد بدون آنکه پیشتر به a پیشنهاد داده باشد. این تناقض پایداری نتیجه را اثبات می‌کند. □

عدم تقارن الگوریتم پیشنهاد سؤالی را مطرح می‌کند: کدام جنس با استفاده از این الگوریتم خوشحالتر است؟ هنگامی که نخستین انتخابهای مردان متمایز باشند، همگی انتخاب اولشان را می‌گیرند، و زنان از ازدواج با هر که پیشنهاد داده باشد ناگزیرند. بیان دقیق «مردان خوشحالتر هستند» این است: اگر به جای این، الگوریتم را چنان اجرا کنیم که زنان مطابق فهرستشان پیشنهاد دهند، آنگاه هر زن حداقل به اندازه‌ای که در الگوریتم اولیه خوشحال بود به پایان می‌رسد، و هر مرد حداقل به همان اندازه ناراضی است. در مثال ۱۱.۲.۳، اجرای الگوریتم با زنانی که پیشنهاد می‌دهند، جورسازی $\{xd, yb, ca, wc\}$ را بیدرنگ به‌دست می‌دهد، که در آن همهٔ زنان با انتخابهای نخست خود جفت شده‌اند. در واقع، از تمام جورسازیهای پایدار ممکن، هر مرد با الگوریتم

پیشنهاد از جانب مردان خوشحالترین وضعیت را دارد، و هر زن با الگوریتم پیشنهاد از سوی زنان دارای خوشحالترین وضعیت است (تمرین ۸). بنابراین عادتهای اجتماعی به سود مردان است.

این الگوریتم در زمینهٔ دیگری نیز به کار می‌رود. همه ساله، دانش آموختگان جدید دانشکده‌های پزشکی فهرست الویت خود را برای بیمارستانهایی که در آن می‌خواهند به عنوان رزیدنت خدمت کنند ارائه می‌دهند. بیمارستانها هم فهرست اولویتهای خود رادارند، که می‌توانیم یک بیمارستان با جاهای خالی چندگانه را همانند چند بیمارستان با یک فهرست الویت در نظر بگیریم. چه کسی از نتیجه راضیتر است؟ از آنجا که سازمانهای پزشکی این الگوریتم را اجرا می‌کنند، آنها پیشنهاد می‌دهند، و بنابراین راضیتر هستند. این تفاوت در وضعیت دیگری حتی آشکارتر است. هنگامی که دانشجویان فارغ‌التحصیل برای شغلها تقاضا می‌دهند، فهرست الویتهای خود را دارند، اما این کارفرمایان هستند که پیشنهادها را، که «پیشنهادهای شغلی» نامیده می‌شود ارائه می‌دهند. جالب است که هرج و مرج در بازار کار برای رزیدنتها (که آن زمان انترن نامیده می‌شدند) بیمارستانها را ناچار ساخت تا این الگوریتم را ده سال پیش از آنکه مقالهٔ گیل-شاپلی مسأله را مطرح و حل کند، طراحی و اجرا کنند.

ممکن است جورسازیهای پایداری به جز آنهایی که به وسیلهٔ دوگونه الگوریتم پیشنهاد یافت می‌شوند وجود داشته باشند. اگر ارزش نسبت دادن هر فرد به انتخاب iاُم آن فرد i باشد، می‌توانیم با یافتن جورسازیهای پایدارکه ارزش کل تخصیصها را مینیمم می‌سازند به دنبال یک جورسازی «رضایت بخش» بگردیم. چنین تخصیص را می‌توان به عنوان کاربردی از شبکهٔ شارشها یافت (فصل ۴). کنوت[1] [۱۹۷۶] و گوسفیلد[2] و ایروینگ[3] [۱۹۸۹] کتابهایی دربارهٔ موضوع ازدواجهای پایدار منتشر کردند، که آخری شامل همه آنچه ما ذکر کردیم و بسیاری جنبه‌های دیگر مسأله می‌باشد (از جمله مسألهٔ هم اتاقیهای

---

1) Knuth 2) Gusfield 3) Irving

پایدار-تمرین ۹).

جورسازی دوبخشی سریعتر (اختیاری)

این بند را با یک الگوریتم جورسازی ماکسیمم برای گرافهای دوبخشی آغازکردیم. زمان اجرای الگوریتم می‌تواند با جستجوی مسیرهای افزودهٔ با یک ترتیب ماهرانه بهبود یابد، هنگامی که مسیرهای افزودهٔ کوتاه در درسترس باشند، نیازی نداریم تا یالهای فراوانی را جستجوکنیم تا یکی را بیابیم. با استفاده از یک جستجوی پهنا - نخستین به طور همزمان از همهٔ رأسهای اشباع نشده X، می‌توانیم مسیرهای فراوانی را با یک طول با یک بررسی مجموعهٔ یالها بیابیم. هاپکرافت و کارپ [۱۹۷۵] ثابت کردند که افزوده‌های بعدی باید از مسیرهای طولانیتر استفاده کنند، بنابراین جستجوها را می‌توان در فازهایی که مسیرهای با طول یکسان را پیدا می‌کنند، گروه‌بندی شوند. آنها این پنداره‌ها را ترکیب کردند تا نشان دهند که فازها اندکی مورد نیاز هستند، و مسیر می‌سازند که جورسازیهای ماکسیمم در گرافهای دوبخشی در زمان $O(n^{۲/۵})$ یافت شوند.

نخست ملاحظه می‌کنیم که اگر M یک جوسازی به اندازهٔ r و M^* یک جورسازی به اندازهٔ $s > r$ باشد، آنگاه حداقل $s - r$ مسیرهای M-افزوده مجزا-رأس وجود دارد، زیرا حداقل این چنین تعداد مسیرها می‌توانند در $M \Delta M^*$ یافت شوند. از این مطلب برای اثبات لم بعدی استفاده می‌کنیم؛ این امر ایجاب می‌کند که دنبالهٔ طولهای مسیر در کوتاهترین افزوده‌های پیاپی، ناکاهشی باشد. در اینجا مسیرها را به عنوان مجموعه‌هایی از یالها تلقی می‌کنیم، و عدد اصلی، تعداد یالها را نشان می‌دهد.

۱۴.۲.۳. لم. اگر P یک کوتاهترین مسیر M-افزوده، و P'، $M \Delta P$-افزوده باشد، آنگاه $|P'| \geq |P| + |P \cap P'|$ (P را به عنوان یک مجموعهٔ یالها فرض می‌کنیم).

اثبات. توجه کنید که $M \Delta P$ جورسازی به‌دست آمده با استفاده از P برای افزودهٔ

M می‌باشد. فرض کنیم N جورسازی بعدی باشد، $N = (M\Delta P)\Delta P'$. چون $|N| = |M| + ۲$، توضیح بالا تضمین می‌کند که $M\Delta N$ شامل مسیرهای M-افزوده مجزای $P_۱$ و $P_۲$ باشد، و هریک همان اندازهٔ P را دارند، زیرا P یک کوتاهترین افزوده است.

چون N با جابجاسازی یالها در P و سپس جابجاسازی یالها در P'، از M به‌دست می‌آید، یک یال دقیقاً در یکی از M و N می‌باشد اگر، و فقط اگر، دقیقاً در یکی از P و P' باشد. از این‌رو $M\Delta N = P\Delta P'$، که به‌دست می‌دهد

$$|P\Delta P'| \geq |P_۱| + |P_۲| \geq ۲|P|$$

از ترکیب این با $|P\Delta P'| = |P| + |P'| - |P \cap P'|$، به‌دست می‌آوریم

$$|P'| \geq |P| + |P \cap P'|$$ □

۱۵.۲.۳. لم. اگر $P_۱$، $P_۲$، ... دنباله‌ای از کوتاهترین افزوده‌های پیاپی باشد، آنگاه افزوده‌ها با طول یکسان، مسیرهای مجزا - رأس هستند.

اثبات. اثبات به وسیلهٔ تناقض. فرض کنیم P_k، P_l با $l > k$ یک نزدیکترین جفت در دنبالهٔ باشد که اندازهٔ یکسان دارند اما مجزا-رأس نیستند. فرض کنیم M' جورسازی باشد که پس از افزوده‌های $P_۱$، ...، P_k پدید می‌آید. بنابر انتخاب l، مسیرهای $P_{k+۱}$، ...، P_l مجزا - رأس هستند. از این‌رو P_l یک مسیر M'-افزوده است و از لم پیش نتیجه می‌شود که $|P_l| \geq |P_k| + |P_l \cap P_k|$. چون $|P_l| = |P_k|$، هیچ یال مشترکی وجود ندارد. اگر یال مشترکی وجود نداشته باشد، هیچ رأس مشترکی وجود ندارد، زیرا هر رأس از P_k با استفاده از یالی از P_k در M' اشباع شده است، و هر رأس از یک مسیر M'-افزوده P_l که در M' اشباع شده است باید یال اشباع شده‌اش در P_l شرکت داشته باشد. □

۱۶.۲.۳. قضیهٔ. (هاپکرافت - کارپ [۱۹۷۵]) الگوریتم جورسازی ماکسیمم فازی شده پهنا-نخستین در زمان $O(n^{۲/۵})$ اجرا می‌شود.

اثبات. بنابر لمها، هنگامی که به‌طور همزمان از همهٔ رأسهای اشباع نشده X به دنبال کوتاهترین مسیرهای افزوده می‌گردیم، مجموعه‌ای از مسیرهای مجزا - رأس را می‌یابیم به‌طوری که پس از این افزوده‌ها همهٔ دیگر مسیرهای افزوده طولانیتر می‌شوند. از این‌رو همهٔ افزوده‌های با طول یکسان را می‌توان با یک آزمایش واحد از یالها پیدا کرد، در نتیجه هر چنین فازی در زمان $O(n^۲)$ اجرا می‌شود. کافی است نشان دهیم که حداکثر $۲\lfloor\sqrt{n}\rfloor + ۲$ فاز وجود دارد.

مسیرهای افزوده $P_۱$، ...، P_s را به ترتیب طول فهرست می‌کنیم. چون مسیرهای با طول یکسان مجزا - رأس هستند، هر $P_{i+۱}$ یک مسیر افزوده برای جورسازی M_i است که با استفاده از نخستین i مسیرها در دنباله تشکیل شده است. کافی است گزارهٔ کلیتر را ثابت کنیم که می‌گوید هرگاه $P_۱$، ...، P_s کوتاهترین مسیرهای افزوده پیاپی باشند که یک جورسازی ماکسیمم می‌سازند، تعداد طولهای متمایز در میان این مسیرها حداکثر $۲\lfloor\sqrt{s}\rfloor + ۲$ است.

فرض کنیم $r = \lfloor s - \sqrt{s}\rfloor$. چون $|M_r| = r$ و جورسازی ماکسیمم اندازهٔ s دارد، ملاحظه کرده‌ایم که حداقل $s - r$ مسیر M_r-افزوده مجزا- رأس وجود دارند. کوتاهترین این مسیرها حداکثر $\lfloor r/(s-r)\rfloor$ یال از M_r استفاده می‌کند. از این‌رو $|P_{r+۱}| \le ۲\lfloor r/(s-r)\rfloor + ۱$. چون

$$\lfloor r/(s-r)\rfloor = \lfloor\lfloor s-\sqrt{s}\rfloor/\lceil\sqrt{s}\,\rceil\rfloor \le \lfloor\sqrt{s}\rfloor$$

مسیرهای تا P_r همه به جز آخرین $\lceil\sqrt{s}\,\rceil$ افزوده‌ها را با استفاده از طول حداکثر $۲\lfloor\sqrt{s}\,\rfloor + ۱$ فراهم می‌کنند. حداکثر $\lfloor\sqrt{s}\,\rfloor + ۱$ اعداد صحیح فرد متمایز تا این مقدار وجود دارند، و حتی اگر آخرین $\lceil\sqrt{s}\,\rceil$ مسیر دارای طولهای متمایز باشند، حداکثر $\lfloor\sqrt{s}\rfloor + ۱$ طول اضافی فراهم می‌کنند، پس رویهمرفته حداکثر $۲\lfloor\sqrt{s}\rfloor + ۲$ طول متمایز استفاده می‌کنند. □

این روش از سوی ایون[1] و تارجان [۱۹۷۵] بهبود یافت تا در زمان $O(\sqrt{n}m)$ اجرا شود، که در آن m تعداد یالها در گراف است. الگوریتم آنها همچنین مسألهٔ کلیتری را حل می‌کند.

تمرینات

۱.۲.۳. (−) با استفاده از وزنهای نامنفی یالها، یک گراف وزندار با چهار رأس بسازید که در آن جورسازی با وزن ماکسیمم، یک جورسازی با اندازهٔ ماکسیمم نباشد.

۲.۲.۳. یک ترانسورسال با مجموع کل ماکسیمم (وزن) در ماتریسهای زیر بیابید. با ارائهٔ یک راه حل برای مسألهٔ دوگان ثابت کنید که هیچ ترانسورسالی با وزن بزرگتر وجود ندارد. توضیح دهید که چرا این کار ثابت می‌کند که هیچ ترانسورسال بزرگتری وجود ندارد.

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 2 & 8 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 7 & 8 & 9 & 8 & 7 \\ 8 & 7 & 6 & 7 & 6 \\ 9 & 6 & 5 & 4 & 6 \\ 8 & 5 & 7 & 6 & 4 \\ 7 & 6 & 5 & 5 & 5 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 4 & 4 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 9 \\ 5 & 3 & 6 & 8 & 3 \end{matrix}$$

۳.۲.۳. ترانسورسالی با وزن مینیمم در ماتریس زیر بیابید. (*راهنمایی:* از یک تبدیل این مسأله استفاده کنید.)

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 & 10 & 11 \\ 7 & 6 & 5 & 7 & 4 \\ 8 & 5 & 12 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 13 & 10 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

1) Even

۴.۲.۳. (!) ***مسألهٔ راننده اتوبوس.*** فرض کنیم رانندگان اتوبوس برای زمانی که مسیرهایشان در روز به اندازهٔ t فراتر می‌رود، اضافه کار می‌گیرند. فرض کنیم n راننده اتوبوس، n مسیر بامدادی با طولهای $x_۱$، ...، x_n، و n مسیر بعداز ظهر با طولهای $y_۱$، ...، y_n، وجود دارند، و هدف تخصیص دادن یک مسیر بامدادی و یک مسیر بعد ازظهر به هر راننده است به‌طوری که مقدارکل اضافهٔ کار مینیمم شود. این مطلب را به صورت یک مسألهٔ جورسازی وزندار بیان کنید، و اثبات کنید که بهترین راه حل این است که iامین طولانیترین مسیر بامدادی و iامین کوتاهترین مسیر بعد ازظهر را به ازای هر i به یک راننده تخصیص دهیم. (آر. بی. پوتس[1])

۵.۲.۳. فرض کنیم وزنها در ماتریس A دارای صورت $w_{ij} = a_i b_j$ باشند، که در آن $a_۱$، ...، a_n اعداد وابسته به سطرها و $b_۱$، ...، b_n وزنهای وابسته به ستونها باشند. وزن ماکسیمم یک ترانسورسال A را تعیین کنید. هنگامی که $w_{ij} = a_i + b_j$ باشد چه اتفاقی می‌افتد؟ (*راهنمایی:* در هر حالت، الگوی کلی را با آزمودن راه حل، هنگامی که $n = ۲$ باشد حدس بزنید.)

۶.۲.۳. (−) مثالی از مسألهٔ جورسازی پایدار با دو مرد و دو زن ارائه دهید که در آن بیش از یک جورسازی پایدار وجود داشته باشد.

۷.۲.۳. (−) جورسازیهای پایدار حاصل را هنگامی که الگوریتم پیشنهاد، با پیشنهاد دادن مردان و با پیشنهاد دادن زنان اجرا می‌شود تعیین کنید، با در نظر گرفتن ترتیبهای

---

1) R.B.Potts

الویت که در زیر فهرست شده‌اند.

زنان $\{a, b, c, d, e, f\}$	مردان $\{u, v, w, x, y, z\}$
$a : z > x > y > u > v > w$	$u : a > b > d > c > f > e$
$b : y > z > w > x > v > u$	$v : a > b > c > f > e > d$
$c : v > x > w > y > u > z$	$w : c > b > d > a > f > e$
$d : w > y > u > x > z > v$	$x : c > a > d > b > e > f$
$e : u > v > x > w > y > z$	$y : c > d > a > b > f > e$
$f : u > w > x > v > z > y$	$z : d > e > f > c > b > a$

۸.۲.۳. ثابت کنید که از میان همه جورسازیهای پایدار هر مرد در جورسازی ایجاد شده از الگوریتم پیشنهادی گیل-شاپلی که مردان در آن پیشنهاد می‌دهند خوشحالترین است. (***راهنمایی:*** با استفاده از استقرا روی تعداد دورها ثابت کنید که هیچ مردی از سوی زنی که در یک جوسازی پایدار به او نسبت داده شده است رد نمی‌شود.)

۹.۲.۳. در مسألهٔ هم اتاقیهای پایدار، هریک از $2n$ فرد دارای یک ترتیب الویت برای $2n - 1$ فرد دیگر است. یک جورسازی پایدار، یک جورسازی است که در آن هیچ جفتی یکدیگر را به هم اتاقیهای موجودشان ترجیح ندهند. ثابت کنید که مسألهٔ هم اتاقیهای پایدار که به ترتیب الویت زیر تعریف شده باشد هیچ جورسازی پایداری ندارد. (گیل - شاپلی [۱۹۶۲])

$$a : b > c > d$$

$$b : c > a > d$$

$$c : a > b > d$$

$$d : a > b > c$$

۳-۳ جورسازیها در گرافهای عام

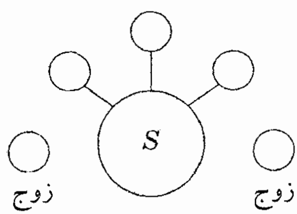
بحث خود را از جورسازیها در گرافهای دلخواه گسترش می‌دهیم تا زیرگرافهایی را که تا اندازه‌ای عامتر هستند مورد بررسی قرار دهیم.

۱.۳.۳. تعریف. یک ***عاملی*** از G یک زیرگراف فراگیر از G است. یک ***k-عاملی*** یک زیرگراف k-منتظم فراگیر است (یک جورسازی تام یک **۱-*عاملی*** است).

یک ***مؤلفهٔ فرد*** از یک گراف عبارت است از مؤلفه‌ای با مرتبهٔ فرد؛ تعداد مؤلفه‌های فرد H، عبارت است از $o(H)$.

قضیهٔ ۱-عاملی توته

توته یک شرط لازم و کافی برای اینکه یک گراف دلخواه دارای یک ۱-عاملی باشد پیدا کرد. اگر G دارای یک ۱-عاملی باشد و ما یک مجموعهٔ $S \subseteq V(G)$ را در نظر بگیریم، آنگاه هر مؤلفهٔ فرد از $G - S$ دارای رأسی است که به چیزی در بیرون آن جور شده است، که تنها می‌تواند به S متعلق باشد.



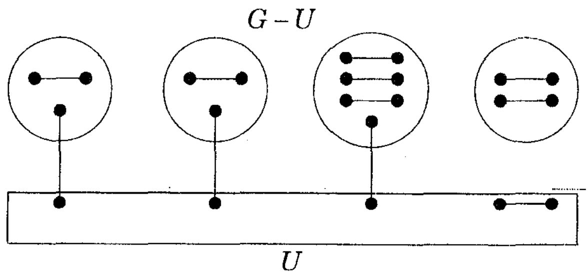
چون اینها باید رأسهای متمایز S باشند، نتیجه می‌گیریم که $o(G - S) \leq |S|$. توته اثبات کرد که این شرط لازم آشکار، کافی نیز هست. اثباتهای زیادی برای این مطلب ارائه شده‌اند؛ ما اثبات لُواس را که از پنداره‌های تفاضل متقارن و اکسترمال بودن استفاده می‌کند ارائه می‌کنیم.

۲.۳.۳. قضیهٔ. (توته [۱۹۴۷]) یک گراف G دارای یک ۱-عاملی است اگر، و فقط اگر، به‌ازای هر $S \subseteq V(G)$ داشته باشیم $o(G - S) \leq |S|$.

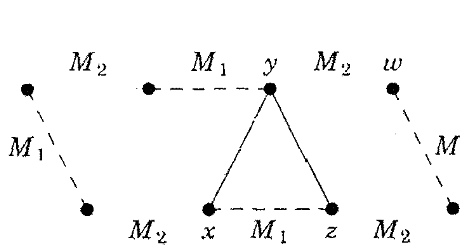
اثبات. (لَواس [۱۹۷۵]). همچنانکه در بالا دیده شد، شرط توته لازم است؛ ما کافی بودن آن را ثابت می‌کنیم. شرط توته با افزودن یالها حفظ می‌شود: اگر $G' = G + e$ و $S \subseteq V(G)$، آنگاه $o(G' - S) \leq o(G - S)$، زیرا که افزودن e دو مؤلفه از $G - S$ را به صورت یکی ترکیب می‌کند، تعداد مؤلفه‌هایی که مرتبهٔ فرد دارند افزایش نمی‌یابد. بنابراین، کافی است یک گراف ساده G را چنان در نظر بگیریم که G شرط توته را برقرار کند، G دارای ۱-عاملی نیست، و افزودن هر یال به G یک ۱-عاملی می‌سازد. در هر حالت با ساختن یک ۱-عاملی در G به یک تناقض دست می‌یابیم. این مطلب ایجاب می‌کند که هر گراف برقرارکنندهٔ شرط توته دارای یک ۱-عاملی است.

با مُلاحظهٔ $S = \phi$، می‌دانیم که $n(G)$ زوج است، زیرا گرافی با مرتبهٔ فرد باید مؤلفه‌ای با مرتبهٔ فرد داشته باشد. فرض کنیم U مجموعهٔ رأسهایی در G باشد که هیچ ناهمسایه‌هایی نداشته باشد. فرض کنیم $G - U$ متشکل از گرافهای کامل مجزا باشد. یک ۱-عاملی برای چنین Gای می‌سازیم. رأسها در هر مؤلفه از $G - U$ را می‌توان با یک رأس باقیمانده در مؤلفه‌های فرد به‌طور دلخواه جورکرد. چون $o(G - U) \leq |U|$ و هر رأس از U مجاور با همه $G - U$ است، می‌توانیم این رأسهای باقیمانده را به‌طور دلخواه با رأسهای U جور کنیم تا یک ۱-عاملی کامل بسازیم.

در اینجا حالتی که $G - U$ اجتماع مجزایی از خوشه‌ها نباشد باقی می‌ماند. در اینجا $G - U$ شامل دو رأس نامجاور x، z با یک همسایهٔ مشترک y است. علاوه بر این، $G - U$ دارای رأس دیگر w است که مجاور y نیست، زیرا $y \notin U$. بنابر ماکسیمال بودن G، افزودن هر یال به G یک ۱-عاملی ایجاد می‌کند؛ فرض کنیم M_1 و M_2، ۱-عاملیهایی در $G + xz$ و $G + yw$ باشند. کافی است نشان دهیم که در $M_1 \cup M_2$ می‌توانیم یک ۱-عاملی بیابیم که از xz و yw اجتناب می‌کند، زیرا این یک ۱-عاملی در G خواهد بود.



فرض کنیم F مجموعهٔ یالهایی باشد که دقیقاً به یکی از $M_۱$ و $M_۲$ متعلق است؛ توجه کنید که F شامل xz و yw است. چون هر رأس از G دارای درجهٔ ۱ در هریک از $M_۱$ و $M_۲$ است، هر رأس از G در F دارای درجهٔ ۰ یا ۲ می‌باشد. از این‌رو F گردایه‌ای از دورهای زوج مجزا و رأسهای تنها می‌باشد. فرض کنیم C دوری از F باشد که شامل xz است. اگر C همچنین شامل yw نباشد، آنگاه ۱-عاملی مطلوب از یالهای $M_۲$ از C و همه یالهای $M_۱$ که در C نیست تشکیل می‌شود. اگر C شامل هر دوی yw و xz باشد، همچنانکه در زیر نشان داده شده است، آنگاه از یال yx یا یال yz استفاده می‌کنیم تا یک جورسازی از $V(C)$ به‌دست آوریم که تنها از یالهای G استفاده کند (و از هر دوی xz و yw اجتناب کند). از yx استفاده می‌کنیم اگر $d_c(y,x)$ فرد باشد؛ از yz استفاده می‌کنیم اگر $d_c(y,z)$ فرد باشد (همچنانکه نشان داده شده است). رأسهای باقیمانده از C دو مسیر با مرتبهٔ زوج تشکیل می‌دهند؛ از یالهای $M_۱$ در یکی از این مسیرها و از یالهای $M_۲$ در دیگری استفاده می‌کنیم تا یک جورسازی در C ایجاد کنیم که از xz یا yw استفاده نکند. از ترکیب با $M_۱$ یا $M_۲$ در بیرون C، یک جورسازی تام از G داریم. □



ممکن است شکافی در اندازهٔ میان بزرگترین جورسازی و کوچکترین پوشش رأسی وجود داشته باشد (تمرین ۵). با وجود این، مسألهٔ مینیمم‌سازی دیگری یک رابطهٔ مینیماکس برای جورسازی ماکسیمم در گرافهای عام را به‌دست می‌دهد. اثبات این مطلب از یک بحث تبدیل گراف استفاده می‌کند.

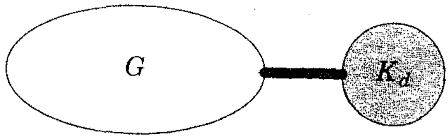
۳.۳.۳. تبصره. دوتایگی. برای هرگراف G و $S \subseteq V(G)$، تفاضل $o(G-S)-|S|$ دارای یک دوتایگی از $n(G)$ است. از این‌رو $o(G-S)$ حداقل دوتا از $|S|$ برای یک Sای بیشتر است اگر $n(G)$ زوج باشد و G دارای ۱-عاملی نباشد. □

۴.۳.۳. فرع. (برژ [۱۹۵۸]) بیشترین تعداد رأسها در یک جورسازی در G عبارت است از $\min_{S\subseteq V(G)}\{n-d(S)\}$، که در آن $d(S) = o(G-S) - |S|$.

اثبات. با در نظرگرفتن $S \subseteq V(G)$، حداکثر $|S|$ یال می‌توانند رأسهای S را با رأسهای در مؤلفه‌های فرد $G-S$ جور کنند، پس هر جورسازی دارای حداقل $o(G-S)-|S|$ رأس اشباع نشده است. می‌خواهیم این کران را ایجاد کنیم.

فرض کنیم $d = \max\{o(G-S)-|S| : S \subseteq V(G)\}$. حالت $S = \phi$ ایجاب می‌کند که $d \geq \circ$. فرض کنیم $G' = G \vee K_d$. چون $d(S)$ برای هر S دارای یک دو تایگی از $n(G)$ است، می‌دانیم که $n(G')$ زوج است. اگر G در شرط توته صدق کند، آنگاه می‌توانیم یک جورسازی به اندازهٔ مطلوب در G از یک جورسازی کامل در G' به‌دست آوریم، زیرا حذف d رأسهای اضافه شده، یالهایی را که حداکثر d رأس از G را اشباع می‌کنند حذف می‌نماید.

شرط $o(G'-S') \leq |S'|$ برای $S' = \phi$ برقرار است، زیرا $n(G')$ زوج است. اگر S' ناتهی باشد اما شامل همه K_d نباشد، آنگاه $G'-S'$ دارای تنها یک مؤلفه است، و $|S'| \geq ۱$. سرانجام، اگر $K_d \subseteq S'$، فرض کنیم $S = S' - V(K_d)$. داریم $G'-S' = G-S$، پس $o(G'-S') = o(G-S) \leq |S|+d = |S'|$، و G' مسلماً در شرط توته صدق می‌کند. □



این فرع تضمین می‌کند که یک **اثبات** برای اینکه یک جورسازی ماکسیمم باشد وجود دارد به این ترتیب که با ارائهٔ یک مجموعهٔ رأسهای S که حذفشان تعداد مطلوب از مؤلفه‌های فرد را باقی می‌گذارد ماکسیمم است. این مطلب از اثبات اینکه هیچ مسیر M-افزوده وجود ندارد، آسانتر است، اما یافتن S شاید دشوار باشد.

بیشتر کاربردهای قضیهٔ توته متضمن نشان دادن این هستند که از یک شرط دیگری، شرط توته نتیجه می‌شود و بنابراین یک ۱-عاملی را تضمین می‌کند. برخی از کاربردها پیشتر از آنکه قضیهٔ توته در دسترس باشد به راههای دیگراثبات شده بودند.

۵.۳.۳. فرع. (پترسن [۱۸۹۱]) هر گراف ۳-منتظم بدون هیچ یال برشی دارای یک ۱-عاملی است.

اثبات. فرض کنیم G، ۳-منتظم است و دارای هیچ یال برشی نیست. ثابت می‌کنیم که هر مجموعهٔ $S \subseteq V(G)$ در شرط توته صدق می‌کند. یالهای میان S و مؤلفه‌های فرد $G-S$ را می‌شماریم. چون G، ۳-منتظم است، هر رأس از S متصل به حداکثر سه تا از چنین یالهایی است. اگر هر مؤلفهٔ فرد H از $G-S$ متصل به حداقل سه تا از چنین یالهایی باشد، آنگاه $۳o(G-S) \leq ۳|S|$ و از این‌رو $o(G-S) \leq |S|$، همچنانکه می‌خواستیم. تعداد یالهای میان S و H نمی‌تواند ۱ باشد، زیرا G دارای هیچ یال برشی نیست. این تعداد زوج نیز نمی‌تواند باشد، زیرا آنگاه مجموع درجه‌های رأسها در H فرد می‌گردید. از این‌رو حداقل سه یال از H به S وجود دارند همانگونه که می‌خواستیم. □

گراف پترسن در آغاز برای این به کار رفت که نشان دهد این قضیه به بهترین وضع ممکن است؛ گراف پترسن فرض را برقرار می‌کند اما شامل دو ۱-عاملیهای مجزا-یال نمی‌باشد. پترسن همچنین یک شرط کافی برای ۲-عاملیها در گرافهای چندگانه منتظم

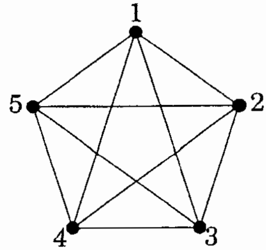
اثبات کرد. این اثبات تنها از مدارهای اویلری و یک فرع از قضیهٔ هال استفاده می‌کند. یک گراف $2k$ – منتظم همبند اویلری است و بنابراین یک گذر بسته است (قضیهٔ ۲.۴.۲) و به آسانی می‌توان نشان داد که هر گذر بسته را می‌توان به دورهای مجزا - یال افراز کرد (تمرین ۴.۲.۱). پترسن اثبات کرد هنگامی که گراف منتظم باشد، این دورها را می‌توان به صورت ۲-عاملیهایی سازمان داد.

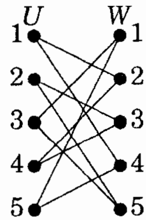
۶.۳.۳. قضیهٔ. (پترسن [۱۸۹۱]) هر گراف چندگانه منتظم از درجهٔ زوج دارای یک ۲-عاملی است.

اثبات. فرض کنیم G، $2k$–منتظم با رأسهای v_1، ... ، v_n باشد. هر مؤلفه از G اویلری است، با یک مدار اویلری C. برای هر مؤلفه، یک گراف دوبخشی H را با رأسهای u_1، ...، u_n و w_1، ...، w_n تعریف می‌کنیم به این ترتیب که قرار می‌دهیم $u_i \leftrightarrow w_j$ اگر v_j بیدرنگ در پی v_i در جایی روی C ظاهر شود. چون C، k بار به هر رأس وارد و خارج می‌شود، H، k-منتظم است.

هر گراف دوبخشی منتظم دارای یک ۱-عاملی است (فرع ۸.۱.۳). یک ۱-عاملی در H یالی را مشخص می‌کند که v_i را «ترک می‌کند» (متصل به u_i در H) و یالی را که به v_i «وارد می‌شود» (متصل به w_i در H). با یکدیگر، این یالها یک زیرگراف فراگیر ۲-منتظم از G را تشکیل می‌دهند (یک ۲-عاملی). □

۷.۳.۳. مثال. ***ساختن یک ۲-عاملی.*** مدار اویلری را در $G = K_5$ در نظر می‌گیریم که به‌طور پیاپی ۱۲۳۱۴۲۵۴۳۵ را ملاقات می‌کند. گراف دوبخشی متناظر H در سمت راست رسم شده است. برای ۱-عاملی که u,w-جفتهایشان ۱۲، ۴۳، ۲۵، ۳۱، ۵۴ باشند، ۲-عاملی حاصل دور $(1,2,5,4,3)$ می‌باشد. یالهای باقیمانده ۱-عاملی دیگری را تشکیل می‌دهند که به ۲-عاملی $(1,4,2,3,5)$ تبدیل می‌شود که در G باقی می‌ماند. □





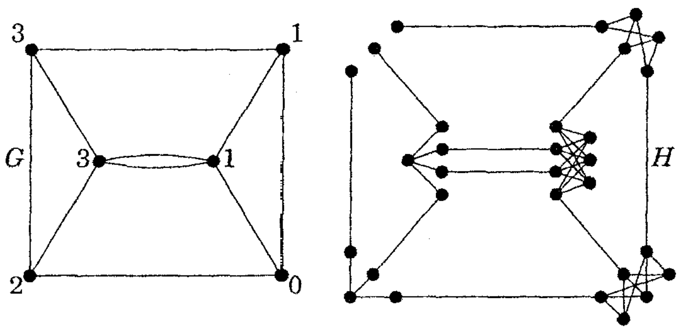
f-عاملیهای گرافها

یک عاملی یک زیرگراف فراگیر دلخواه از G است؛ ما وجود سئوالاتی را دربارهٔ عاملیها از انواع خاص طلب می‌کنیم. یک k-عاملی، یک عاملی k-منتظم است؛ ما ۱-عاملیها و ۲-عاملیها را بررسی کرده‌ایم. به‌طور کلیتر، می‌توانیم سعی کنیم که درجه را در هر رأس مشخص کنیم. یعنی، با در نظر گرفتن یک تابع $f : V(G) \to \mathbf{N}$، می‌پرسیم که آیا G دارای یک زیرگراف H است به‌طوری که به ازای هر $v \in V(G)$ داشته باشیم $d_H(v) = f(v)$. چنین زیرگراف H ای یک ***f-عاملی*** از G است.

یالهای چندگانه بر وجود ۱-عاملیها تأثیری ندارند، اما می‌توانند بر وجود f-عاملیها تأثیر داشته باشند. توته [۱۹۵۲] یک شرط لازم و کافی برای اینکه یک گراف چندگانه دارای یک f-عاملی باشد، اثبات کرد. اثبات اولیه نسبتاً دشوار بود؛ بعدها توته آن را در بررسی یک ۱-عاملی در یک گراف وابسته کاهش داد. ساخت این گراف وابسته را توضیح می‌دهیم. این یک مثال زیبا از تبدیل یک مسألهٔ گراف به یک مسألهٔ گراف ساده‌تر است.

می‌توانیم فرض کنیم که برای هر رأس w، $f(w) \leq d(w)$؛ در غیر این صورت می‌توانیم بیدرنگ بگوییم که G دارای هیچ f-عاملی نیست. با در نظر گرفتن این مطلب، یک گراف H را چنان می‌سازیم که دارای یک ۱-عاملی باشد اگر، و فقط اگر، G دارای یک f-عاملی باشد. فرض کنیم $e(w) = d(w) - f(w)$ درجهٔ «مازاد» در w باشد. برای ساختن H، هر رأس v را به جای یک گراف دوبخشی $K_{d(v),e(v)}$ جایگزین می‌کنیم، که در آن $A(v)$ مجموعهٔ بخشی به اندازهٔ $d(v)$ و $B(v)$ بخشی به اندازهٔ $e(v)$ می‌باشد.

یال vw در G، یک رأس از $A(v)$ را به رأسی از $A(w)$ می‌پیوندیم، به‌طوری که هر رأس در هر $A(v)$ دقیقاً یکی از این یالها را دریافت کند. شکل زیر (از یادداشتهای خواتل) یک گراف چندگانه نوعی G و گراف ساده متناظر H را که ساخته‌ایم نشان می‌دهد، در حالی که f تابع مشخص شده با نشانهای روی $V(G)$ می‌باشد.



۸.۳.۳. قضیه. یک گراف G دارای یک f-عاملی است اگر، و فقط اگر، گراف H ساخته شده در بالا از G و f دارای یک ۱-عاملی باشد.

اثبات. اگر G دارای یک f-عاملی باشد، یالهای متناظر در H رأسهای $e(v)$ از $A(v)$ را بدون آنکه جور شده باشند ترک می‌کنند؛ آنها را به‌طور دلخواه با رأسهای $B(v)$ جور می‌کنیم تا یک ۱-عاملی از H به‌دست آید. به‌طور مشابهی، حذف یالهای متضمن B-رأسها در یک ۱-عاملی از H یالهایی را باقی می‌گذارد در حالی که $f(v)$ رأس باقیمانده از هر $A(v)$ فروریخته می‌شوند، و به یک ۱-عاملی از G تبدیل می‌گردند. از این‌رو H دارای یک ۱-عاملی است اگر، و فقط اگر، G دارای یک f-عاملی باشد. □

شرط لازم و کافی (به ازای هر S، $o(H-S) \leq |S|$) را برای یک ۱-عاملی در گراف حاصل از H در قضیهٔ ۸.۳.۳ می‌توان به‌صورت یک شرط لازم و کافی برای یک f-عاملی در G بیان کرد. این شرط کاربردهای فراوانی دارد. سئوال اینکه آیا d_1، ...، d_n یک دنبالهٔ گرافیکی است، عبارت است از سئوال اینکه آیا K_n دارای یک f-عاملی با $f(v_i) = d_i$ به ازای هر i می‌باشد. تمرین ۱۶ را برای بحث بیشتر ببینید.

با در نظر گرفتن الگوریتمی برای بررسی ۱-عاملیها، مطابق با قضیهٔ ۸.۳.۳ یک آزمون الگوریتمی برای یک f-عاملی فراهم می‌کند. به‌طور کلیتر، می‌توانیم الگوریتمی برای یافتن جورسازیهای ماکسیمم در گرافها جستجو کنیم؛ این موضوع را در گام بعدی مورد بحث قرار می‌دهیم.

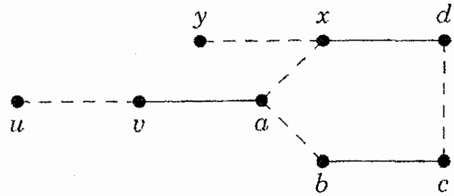
الگوریتم شکوفه ادموندز (اختیاری)

قضیهٔ برژ (قضیهٔ ۶.۱.۳) بیان می‌کند که یک جورسازی M یک جورسازی ماکسیمم است اگر، و فقط اگر، هیچ مسیر M-افزوده وجود نداشته باشد. از این‌رو می‌توانیم یک جورسازی ماکسیمم را با یافتن مکرر مسیرهای افزوده بسازیم. چون تنها $n/۲$ بار افزایش می‌دهیم، یک الگوریتم خوب می‌یابیم اگر جستجو برای یک مسیر افزوده خیلی طولانی نباشد. اِدموندز [۱۹۶۵ الف] نخستین الگوریتم از این‌گونه را در مقاله معروفش «مسیرها، درختها و گلها» ارائه کرد.

در گرافهای دوبخشی، می‌توانیم به تندی مسیرهای افزوده را جتسجو کنیم (الگوریتم ۱.۲.۳)، زیرا می‌توانیم جستجوی مسیرها را محدود کینم. هنگامی که از یک رأس خاص u مسیرهای M-افزوده را جتسجو می‌کنیم، رأسهایی که در همان مجموعهٔ بخشی هستند که u در آن است، تنها از راه یالهای در M (یالهای اشباع شده) در دسترس قرار می‌گیرند، و رأسها در مجموعهٔ بخشی متقابل تنها از راه یالهایی که در M نیستند در دسترس می‌باشند (یالهای اشباع نشده). به این دلیل، جستجویمان را از یک رأس داده شده حداکثر یک‌بار گسترش می‌دهیم. این ویژگی در گرافهای با دورهای فرد دیده نمی‌شوند، در این گرافها مسیرهای متناوب از یک رأس اشباع نشده ممکن است به یک رأس x در امتداد یالهای اشباع شده یا در امتداد یالهای اشباع نشده برسند.

۹.۳.۳. مثال. درگراف زیر با یک جورسازی M که با یالهای یک پارچه نشان داده

شده است، یک جستجو برای کوتاهترین مسیرهای M-افزوده از u، از راه یال اشباع نشده ax به x می‌رسد. اگر همچنین مسیر طولانیتری را که از راه یک یال اشباع شده به x می‌رسد در نظر بگیریم، مسیر افزوده u، v، a، b، c، d، x، y را از دست خواهیم داد. □



راه حل ادموندز را برای این مشکل توضیح می‌دهیم. اگر یک جستجوی مسیرهای M-متناوب از u، به وسیلهٔ یالی اشباع نشده در مسیری و یالی اشباع شده در مسیری دیگر، به رأس x برسد، آنگاه x به یک دور فرد تعلق دارد. مسیرهای متناوب از u را تنها هنگامی می‌توان بُرید که یال بعدی اشباع نشده باشد (ترک کننده رأس a در مثال ۹.۳.۳)؛ هنگامی که یال بعدی اشباع شده باشد تنها یک انتخاب برای آن وجود دارد. از رأسی که مسیرها در آنجا واگرا می‌شوند، مسیری که روی یک یال اشباع نشده به x می‌رسد دارای طول فرد است، و مسیری که روی یک یال اشباع شده به آن می‌رسد دارای طول زوج است. آنها با یکدیگر یک دور فرد را تشکیل می‌دهند.

۱۰.۳.۳. تعریف. فرض کنیم M یک جورسازی در یک گراف G باشد، و فرض کنیم u یک رأس M-اشباع نشده باشد. یک ***گل*** اجتماع دو مسیر M -متناوب از u است که روی گامهایی با دو تایگی متقابل (که پیشتر استفاده نشده باشند) به x می‌رسند. *ساقهٔ* گل مسیر آغازی مشترک ماکسیمال است (با طول زوج نامنفی). **شکوفهٔ** گل عبارت است از دور فرد به دست آمده از حذف ساقه.

در مثال ۹.۳.۳، گل تمام گراف به جز y است، ساقه مسیر u، v، a است، و شکوفه ۵-دور است. این اصطلاحات مربوط به باغبانی است و انگیزهٔ آن استفاده از **درخت** برای ساختارهای ایجاد شده با بیشترین فرآیندهای جستجو است.

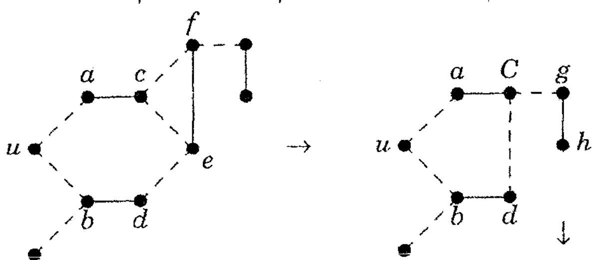
شکوفه‌ها جستجوی ما را کند نمی‌کنند. برای هر رأس z در یک شکوفه، یک u, z-مسیر M-متناوب وجود دارد که روی یک یال اشباع شده به z می‌رسد، و با عبور روی جهت درست به دور شکوفه برای رسیدن به z از ساقه پیدا می‌شود. پس جستجویمان را در امتداد هر یال اشباع نشده از شکوفه تا رأسی که هنوز به آن نرسیده‌ایم ادامه می‌دهیم. مثال ۹.۳.۳ چنین گسترشی را که بیدرنگ به یک رأس اشباع نشده می‌رسد و یک مسیر M-افزوده را کامل می‌کند، نشان می‌دهد.

برعکس، نمی‌توانیم شکوفه را در امتداد یک یال اشباع شده ترک کنیم. اثر این دو مشاهده آن است که می‌توانیم تمام شکوفه را به عنوان یک «زبر رأس» منفرد در نظر بگیریم که در امتداد یال اشباع شده سرانجام به ساقه می‌رسیم. می‌توانیم از همهٔ رأسهای زبر رأس شکوفه به‌طور همزمان در امتداد یالهای اشباع نشده جستجو کنیم.

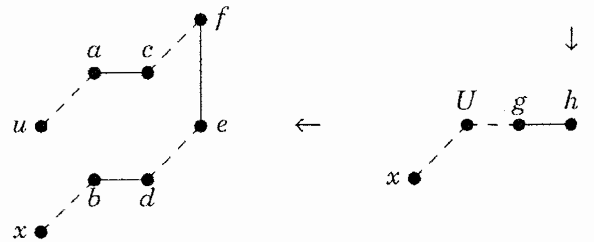
این ادغام را با منقبض کردن یالهای یک شکوفهٔ B هنگامی که آن را می‌یابیم به انجام می‌رسانیم. نتیجهٔ یک رأس جدید اشباع شده b است که متصل به آخرین یال (اشباع شده) ساقه می‌باشد. یالهای متصل دیگر آن، یالهای اشباع نشده هستند که رأسهای B را به رأسهای بیرون B می‌پیوندند. می‌توانیم از b به روش معمول جستجو کنیم تا جستجویمان را گسترش دهیم. می‌توانیم دیرتر شکوفه‌ای بیابیم که شامل b باشد؛ شکوفه‌ها می‌توانند شامل شکوفه‌های پیشین باشند. اگر یک مسیر M-متناوب را در گراف منقبض شده از u به یک رأس اشباع نشده x بیابیم، آنگاه می‌توانیم انقباضها را باز کنیم تا یک مسیر M-افزوده به x را در گراف اولیه به‌دست آوریم.

به جز در مورد رفتار با شکوفه‌ها، این روش همان روش الگوریتم ۱.۲.۳ برای جستجوی مسیرهای M-متناوب است. به بیان متناظر، T مجموعهٔ رأسهای گراف جاری است که در امتداد یالهای اشباع نشده به آنها می‌رسیم، و S مجموعهٔ رأسهایی است که در امتداد یالهای اشباع شده به آنها می‌رسیم. رأسهایی که از منقبض کردن شکوفه‌ها پدید می‌آیند به S تعلق دارند.

۱۱.۳.۳. مثال. گراف سمت چپ زیر یک جورسازی M را با یالهای یک پارچه نشان می‌دهد. از رأس اشباع نشده u برای یک مسیر M-افزوده جستجو می‌کنیم. نخست یالهای اشباع نشده متصل به u را جستجو می‌کنیم، که به a و b می‌رسند. چون a و b اشباع شده هستند، بیدرنگ مسیرها را در امتداد یالهای ac و bd گسترش می‌دهیم. اکنون $S = \{u, c, d\}$. اگر در گام بعدی جستجو از c را انتخاب کنیم، همسایه‌های آن e و f را در امتداد یالهای اشباع نشده خواهیم یافت. چون اینها اشباع شده هستند، مسیرها را در امتداد یال ef گسترش می‌دهیم، و شکوفه با مجموعهٔ رأسهای $\{c, e, f\}$ را کشف می‌کنیم. شکوفه را منقبض می‌کنیم تا رأس جدید C را به‌دست آوریم، و S را به $\{u, C, d\}$ تبدیل می‌کنیم. حال به گراف دوم زیر رسیده‌ایم.



اینک فرض کنیم از رأس $C \in S$ جستجو می‌کنیم. یالهای اشباع نشده ما را به g و به d می‌برند. چون g به‌وسیلهٔ یال gh اشباع می‌شود، h را در S قرار می‌دهیم. چون d از پیش در S است، شکوفهٔ دیگری پیدا کرده‌ایم. مسیرهایی که به d می‌رسند u، b، d و u، a، و C، d هستند. شکوفه را منقبض می‌کنیم، و رأس جدید B و گراف سمت راست زیر را، با $S = \{U, h\}$ به‌دست می‌آوریم. سپس از h جستجو می‌کنیم، و چیز جدیدی پیدا نمی‌کنیم (اگر S را تمام کنیم بدون اینکه به یک رأس اشباع نشده برسیم، آنگاه هیچ مسیر M-افزوده‌ای از u وجود ندارد). سرانجام، از U جستجو می‌کنیم، و به رأس اشباع نشدهٔ x می‌رسیم.



اگر یالی را که به هر رأس می‌رسد ثبت کنیم، آنگاه می‌توانیم یک u,x-مسیر M-افزوده را از جستجو استخراج کنیم. ما از U به x رسیدیم، پس شکوفه را به صورت $\{u,a,C,d,b\}$ گسترش می‌دهیم، و یادآوری می‌کنیم که x از U در امتداد bx در دسترس قرار می‌گیرد. مسیری در شکوفهٔ U که به b روی یک یال اشباع شده می‌رسد با C، d، b پایان می‌یابد. چون C یک شکوفه در گراف اولیهٔ است، C را به صورت $\{c,f,e\}$ گسترش می‌دهیم و یادآوری می‌کنیم که d از C در امتداد یال اشباع نشده ed در دسترس قرار می‌گیرد. حال مسیری که (از «پایه» C) در امتداد یک یال اشباع شده به e می‌رسد عبارت است از c، f، e. سرانجام، c از a و a از u در دسترس قرار گرفته بود، پس مسیر کامل M-افزوده u، a، c، f، e، d، b، x را استخراج می‌کنیم. □

گامهای الگوریتم را خلاصه می‌کنیم، و بر جزئیات اجرا نگاهی گذرا می‌اندازیم.

۱۲.۳.۳. الگوریتم. (الگوریتم شکوفه اِدموندز-چکیده).

ورودی: یک گراف G، یک جورسازی M در G، یک رأس M-اشباع نشده u .

پنداره: مسیرهای M-متناوب را از U جستجو کنید، با فرض اینکه S مجموعهٔ رأسهایی است که در امتداد یالهای M در دسترس قرار می‌گیرند و T مجموعهٔ رأسهایی باشد که در امتداد یالهایی که در M نیستند در دسترس قرار می‌گیرند. رأسهایی از S را که جستجو شده‌اند برای توسیعها علامتگذاری می‌کنیم، و برای هر رأس $S \cup T$، رأسی را که از آن به آن رسیده‌ایم، ثبت می‌کنیم. هنگامی که شکوفه‌ها پیدا می‌شوند، آنها را منقبض کنید.

ارزشدهی آغازی $S = \{u\}$ و $T = \phi$.

تکرار: اگر S دارای هیچ رأس علامتگذاری شده‌ای نباشد، متوقف شوید وگزارش دهید که هیچ مسیر M-افزوده‌ای از u وجود ندارد. در غیر این‌صورت، یک $v \in S$ علامتگذاری نشده را انتخاب کنید. برای جستجوی v، هر $y \in N(x)$ را طوری در نظر بگیرید که $xy \notin M$. اگر y اشباع نشده باشد، متوقف شوید و از y به عقب بازگردید (شکوفه‌های مورد نیاز را توسعه دهید) تا یک u, y-مسیر M-افزوده را گزارش کنید. در غیر این‌صورت، y به یک wای به وسیلهٔ M جور می‌شود. اگر $w \notin S$، y را در T قرار دهید (در دسترس از v) و w را در S قرار دهید (در دسترس از y). اگر $w \in S$ (یا اگر w همسایه‌ای از v باشد)، آنگاه یک شکوفه پیدا شده است. شکوفه را منقبض کنید، رأسهای آن را در S و T به جای یک رأس جدید منفرد در S جایگزین کنید تا جستجو را در گراف کوچکتر ادامه دهید. پس از جستجوی همهٔ چنین یالهایی که متصل به v هستند، v را علامتگذاری کنید و تکرار نمایید. □

نمی‌توانیم مانند الگوریتم ۱.۲.۳ از همهٔ رأسهای اشباع نشده به‌طور همزمان جستجو کنیم، زیرا رفتار یک شکوفه به جایی که ساقه به آن شکوفه می‌رسد بستگی دارد. با وجود این، اگر هیچ مسیر M-افزوده‌ای از u پیدا نکنیم، آنگاه می‌توانیم به هنگام جستجوی مسیرهای M-افزوده از رأسهای دیگر، u را از گراف حذف کنیم و نایده بگیریم. این مطلب به تمرین ۱۴ بستگی دارد.

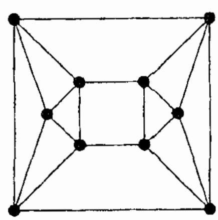
الگوریتم اولیهٔ اِدموندز در زمان $O(n^4)$ اجرا می‌شود. اجرای ارائه شده در آهوجا-ماگنانتی-اورلین [۱۹۹۳، صفحه ۴۸۳-۴۹۴] در زمان $O(n^3)$ اجرا می‌شود. این مستلزم ۱) ساختارهای داده‌های مناسب برای نشان دادن شکوفه‌ها و برای فرآیند انقباضها، و ۲) تحلیل دقیق تعداد انقباضها که می‌توانند اجرا شوند، زمان صرف شده برای جستجوی یالها، و زمان صرف شده برای منقبض و منبسط کردن شکوفه‌ها می‌باشد.

نخستین الگوریتمی که مسألهٔ جورسازی ماکسیمم را درکمتر از زمان مکعب حل می‌کند، الگوریتم $O(n^{5/2})$ در ایون-کاریوو[1] [۱۹۷۵] بود. بهترین الگوریتمی که تاکنون شناخته شده در زمان $O(n^{1/2}m)$ برای گرافی با n رأس و m یال اجرا می‌شود (این از $O(n^{5/2})$ برای گرافهای تُنُک سریعتر است). این الگوریتم نسبتاً پیچیده است و در میکالی - وازیرانی[2] [۱۹۸۰] ظاهر می‌شود، با یک اثبات کامل در وازیرانی [۱۹۹۴].

مسألهٔ جورسازی وزندار را برای گرافهای عام مورد بحث قرار نداده‌ایم. اِدموندز [۱۹۶۵ ت] الگوریتمی برای این موضوع پیدا کرد، که در زمان $O(n^3)$ به‌وسیلهٔ گابوو [۱۹۷۵] و لاولر[3] [۱۹۷۶] اجرا شد. الگوریتمهای سریعتر در گابوو [۱۹۹۰] و در گابوو-تارجان [۱۹۸۹] ظاهر می‌شوند.

تمرینات

۱.۳.۳. (−) درگراف رسم شده زیر، یک k-عاملی به ازای هر k در $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ نشان دهید.



۲.۳.۳. (−) ثابت کنید که یالهای یک گراف دوبخشی k-منتظم را می‌توان به r-عاملیها افرازکرد اگر، و فقط اگر، r بر k بخشپذیر باشد.

۳.۳.۳. (!) ثابت کنید که یک درخت T دارای یک جورسازی تام است اگر، و فقط

1) Kariov 2) Micali-Vazirani 3) Lawler

اگر، به ازای هر $v \in V(T)$ داشته باشیم $o(T-v) = ۱$. (چونگفزان[1])

۴.۳.۳. به‌ازای هر $k > ۱$، یک گراف ساده k-منتظم ارائه کنید که دارای هیچ ۱-عاملی نباشد، و ثابت کنید که دارای هیچ ۱-عاملی نیست.

۵.۳.۳. (!) فرض کنیم اندازهٔ ماکسیمم یک جورسازی در یک گراف ساده G، برابر k است (یعنی، $\alpha'(G) = k$). با اثبات، ماکسیمم مقدار ممکن تعداد پوشش رأسی $\beta(G)$ را به عنوان تابعی از k تعیین کنید. (این نیازمند به دست دادن یک کران بالا روی $\beta(G)$ و مثالی برای رسیدن به آن، به‌ازای هر k می‌باشد.)

۶.۳.۳. یک گراف ۳-منتظم همبند رسم کنید که دارای یک ۱-عاملی و دارای یک رأس برشی باشد. ثابت کنید که اگر یالهای G را بتوان به ۱-عاملیها افراز کرد، آنگاه G دارای هیچ رأس برشی نیست.

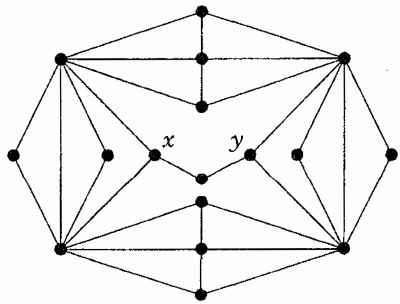
۷.۳.۳. ثابت کنید که یالهای یک گراف ۳-منتظم را که هیچ یال برشی ندارد می‌توان به نسخه‌هایی از $P_۴$ افراز کرد.

۸.۳.۳. (!) *تعمیم قضیهٔ پترسن.* فرض کنیم G یک گراف k-منتظم همبند با مرتبهٔ زوج باشد، و فرض کنیم که G هرگاه هر مجموعه‌ای با کمتر از $k-۱$ یال حذف شود، همبند باقی می‌ماند. ثابت کنید که G دارای یک ۱ -عاملی است.

۹.۳.۳. (!) فرض کنیم G گراف زیر باشد. یک جورسازی ماکسیمم در G و در $G+xy$ بیابید، و برای هر کدام از یک مسألهٔ دوگان استفاده کنید تا اثبات کوتاهی برای اینکه دارای هیچ جورسازی بزرگتری نیست، به‌دست دهید. (*راهنمایی:* پوشش رأسی مینیمم در $G+xy$ دارای اندازهٔ هشت است.)

---

1) Chungphaisan



۱۰.۳.۳. (!) فرض کنیم G یک گراف دوبخشی با افراز مضاعف X، Y است. فرض کنیم H گرافی باشد که از G، با افزودن رأسی به Y اگر $n(G)$ فرد باشد و آنگاه با افزودن یالهایی به یک خوشه روی رأسهای Y به‌دست می‌آید.

الف) ثابت کنید که G دارای یک جوسازی به اندازهٔ $|X|$ است اگر و فقط اگر، H دارای یک ۱-عاملی باشد.

ب) ثابت کنید که اگر G در شرط هال صدق کند (به ازای هر $S \subseteq X$، $|N(S)| \geq |S|$)، آنگاه H در شرط توته صدق می‌کند (به‌ازای هر $T \subseteq V(H)$، $o(H-T) \leq |T|$).

پ) از قسمتهای (الف) و (ب) برای به دست آوردن قضیهٔ هال از قضیهٔ توته استفاده کنید.

۱۱.۳.۳. فرض کنیم G یک گراف همبند آزاد—$K_{۱,۳}$ با مرتبهٔ زوج باشد. ثابت کنید که G دارای یک ۱-عاملی است. (*راهنمایی:* نتیجهٔ قویتری را اثبات کنید که آخرین یال در یک طولانیترین مسیر به یک ۱-عاملی در G تعلق داشته باشد.) (سومنر[1] [۱۹۷۴ الف]، لاس ورگناس[2] [۱۹۷۵])

۱۲.۳.۳. (+) فرض کنیم n زوج باشد. ماکسیمم تعداد یالها را در یک گراف n-رأسی بدون هیچ ۱-عاملی تعیین کنید. (اردوش - گاله [۱۹۶۱]) (*راهنمایی:* ساختار گرافهای ماکسیمال بدون ۱-عاملی را توضیح دهید. یالها را با یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم بشمارید

1) Sumner 2) Las Vergnas

که شناسه آن یک پارامتر ساختار باشد.)

۱۳.۳.۳. ثابت کنید که G، آزاد-$(k+۱)K_۲$ است اگر، و فقط اگر، برای هر زیرگراف القایی دوبخشی از G با مجموعه‌های بخشی X، Y، مجموعهٔ X زیرمجموعه‌ای به اندازهٔ حداکثر k داشته باشد که همسایگی آن شامل $N(X)\cap Y$ باشد. (لیو-ژو [۱۹۹۶])

۱۴.۳.۳. فرض کنیم M یک جورسازی در یک گراف G، و u یک رأس M-اشباع نشده باشد. ثابت کنید که اگر G دارای هیچ مسیر M-افزوده نباشد که از u آغاز شود، آنگاه u در یک جورسازی ماکسیمم در G اشباع نشده است.

۱۵.۳.۳. *f-حلپذیری.* فرض کنیم $S=\mathbf{N}\cup\{۰\}$. با در نظر گرفتن $f: V(G)\to S$، یک گراف G، f-حلپذیر است اگر دارای یک یال-وزندار $w: E(G)\to S$ باشد به‌طوری که به‌ازای هر $v\in V(G)$ داشته باشیم $\sum_{u\in N(v)} w(uv)=f(v)$.

الف) ثابت کنید که G دارای یک f-عاملی است اگر، و فقط اگر، گراف H به‌دست آمده از G با دوبار زیر تقسیم هر یال و تعریف f برابر ۱ روی رأسهای جدید $f-$ حلپذیر باشد. (این مطلب آزمونی برای یک $f-$عاملی را به آزمون $f-$حلپذیر کاهش می‌دهد.)

ب) با در نظر گرفتن G و یک $f: E(G)\to S$، یک گراف H را (با اثبات) طوری بسازید که G، $f-$حلپذیر باشد اگر، و فقط اگر، H دارای یک ۱-عاملی باشد.

۱۶.۳.۳. (+) *شرط $f-$عاملی توته و دنباله‌های گرافیکی.* فرض کنیم f اعداد صحیح نامنفی را به رأسهای G نسبت می‌دهد. اگر S، T زیرمجموعه‌های مجزا از $V(G)$ باشند، فرض کنیم $q(S,T)$ نشانگر تعداد مولفه‌های Q از $G-S-T$ باشد به‌طوری که $e(Q,T)+\sum_{v\in V(Q)} f(v)$ فرد باشد، که در آن $e(Q,T)$ تعداد یالها از Q به T است. توته [۱۹۵۲، ۱۹۵۴] ثابت کرد که G دارای یک $f-$عاملی است اگر، و فقط اگر، برای همه انتخابهای زیرمجموعه‌های مجزای $S,T\subset V$ داشته باشیم

$$q(S,T)+\sum_{v\in T}(f(v)-d_{G-S}(v))\le \sum_{v\in S} f(v)$$

الف) **لم دوتایگی.** فرض کنیم

$$\delta(S,T) = f(S) - f(T) + \sum_{v\in T} d_{G-S}(v) - q(S,T)$$

کاستی S، T نسبت به f باشد. ثابت کنید که $\delta(S,T)$ برای هریک از مجموعه‌های مجزای $S,T \subseteq V(G)$ دارای یک دوتایگی از $f(V)$ است.

ب) با استفاده از قضیهٔ f–عاملی و لم دوتایگی ثابت کنید که اعداد صحیح نامنفی $d_۱ \geq \cdots \geq d_n$ دنبالهٔ درجه‌های یک گراف ساده هستند اگر، و فقط اگر، $\sum d_i$ زوج باشد، و به ازای $۱ \leq k \leq n$ داشته باشیم

$$\sum_{i=۱}^{k} d_i \leq k(k-۱) + \sum_{i=k+۱}^{n} \min\{k, d_i\}$$

(اردوش - گاله [۱۹۶۰])

۴

همبندی و مسیرها

۴-۱ برشها و همبندی

یک شبکهٔ ارتباطی خوب به دشواری دچار اختلال می‌گردد. می‌خواهیم خدمات شبکه را حفظ کنیم با تضمین اینکه گراف (یا گراف سودار) انتقالات ممکن، حتی هنگامی که برخی از رأسها و یا یالها دچار نقص شوند، همبند باقی بماند. هنگامی که پیوندهای ارتباطی پرهزینه باشند، می‌خواهیم این اهداف را با یالهای اندک محقق سازیم. طوقه‌ها در مورد التصاق بی‌ارتباط هستند، بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که گرافها و گرافهای سودار این فصل دارای طوقه نیستند، به‌خصوص هنگامی که شرایط درجه را در نظر می‌گیریم.

همبندی

حذف رأسها از گرافها را در نظر می‌گیریم.

۴.۱.۱. تعریف. یک مجموعهٔ *جداساز* یا *برش رأسی* از یک گراف G عبارت است از مجموعهٔ $S \subseteq V(G)$ به‌طوری که $G - S$ دارای بیش از یک مؤلفه باشد.

یک گراف G، k-**همبند** است اگر هر برش رأسی دارای حداقل k رأس باشد. **همبندی** G، که به صورت $k(G)$ نوشته می‌شود، مینیمم اندازهٔ یک برش رأسی است (به‌طور هم‌ارز $k(G)$ عبارت است از ماکسیمم k به‌طوری که G، k-همبند باشد).

۲.۱.۴. مثال. همبندی K_n و $K_{m,n}$. یک خوشه دارای مجموعهٔ جداساز نیست. قرارداد می‌کنیم که $k(K_n) = n - 1$ به‌طوری که نتایجمان دربارهٔ همبندی به خوشه‌ها توسعه یابند.

$K_{m,n}$ را با افراز مضاعف X، Y در نظر می‌گیریم. هر زیرگراف القایی از $K_{m,n}$ که دارای حداقل یک رأس از X و از Y باشد همبند است. از این‌رو هر مجموعهٔ جداساز از $K_{m,n}$ شامل X یا Y است. چون X و Y خودشان مجموعه‌های جداساز هستند (مگر آنکه حذف آنها K_1 را باقی گذارد)، داریم $k(K_{m,n}) = \min\{m, n\}$. همبندی $K_{3,3}$، ۳ است، و $K_{3,3}$، ۱-همبند، ۲-همبند، و ۳-همبند است، اما ۴- همبند نیست. □

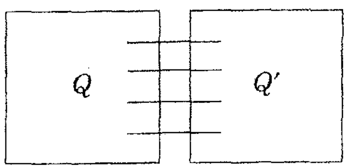
یک گراف دارای همبندی ۰ است اگر، و فقط اگر، ناهمبند باشد. به‌طور کلی، شرط همبندی k دارای مشخص‌سازی خوبی نیست، اما در بند ۲.۴ مشخص‌سازیهای خوبی از شرط k -همبندی خواهیم دید.

۳.۱.۴. مثال. همبندی مکعب k-بعدی Q_k. مکعب Q_k ، k-منتظم است. ما می‌توانیم Q_k را با حذف همسایه‌های یک رأس ببریم، پس $k(Q_k) \leq k$. برای اثبات آنکه $k(Q_k) = k$، نشان می‌دهیم که هر برش رأسی از Q_k دارای حداقل k رأس است.

از استقرا روی k استفاده می‌کنیم. به‌ازای $k = 0, 1$، Q_k خوشه‌ای است با همبندی k؛ این پایه را کامل می‌کند. برای گام استقرا، فرض کنیم $k \geq 2$، و فرض کنیم $k(Q_{k-1}) = k - 1$. می‌دانیم که Q_k از دو نسخه Q، Q' از Q_{k-1}، با افزودن یک جورسازی که رأسهای متناظر در Q و Q' را به هم می‌پیوندد، به‌دست می‌آید. فرض

کنیم S یک برش رأسی دلخواه در Q_k باشد.

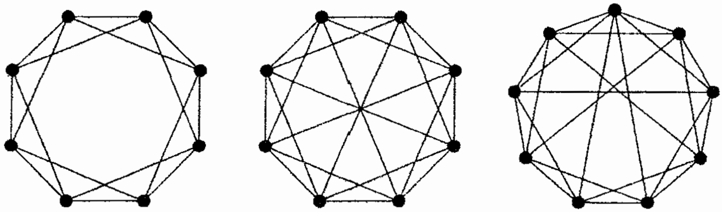
اگر $Q - S$ و $Q' - S$ همبند باشند، آنگاه $Q_k - S$ نیز همبند است مگر آنکه S حداقل یک نقطه پایانی از هر جفت جورشده را حذف کند. این مستلزم آن است که $|S| \geq ۲^{k-۱}$، اما برای $k \geq ۲$، داریم $۲^{k-۱} \geq k$. از این‌رو می‌توانیم فرض کنیم که $Q - S$ ناهمبند است، که این بدان معناست که S دارای حداقل $k - ۱$ رأس در Q است، بنابر فرض استقرا. اگر S شامل رأسهایی از Q' نباشد، آنگاه $Q' - S$ همبند است و همهٔ رأسهای $Q - S$ دارای همسایه‌هایی در $Q' - S$ است، پس $Q_k - S$ همبند است. از این‌رو S باید همچنین شامل یک رأس از Q' باشد، که به‌دست می‌دهد $|S| \geq k$، همچنانکه مطلوبمان بود. □



هنگامی که G یک خوشه نیست، حذف همسایه‌های یک رأس، G را جدا می‌کند، پس $k(G) \leq \delta(G)$. برابری نیازی نیست که برقرار باشد؛ $۲K_m$ دارای مینیمم درجهٔ $m - ۱$ است، اما همبندی ۰ دارد. چون همبندی k مستلزم آن است که $\delta(G) \geq k$، همچنین مستلزم حداقل $\lceil \frac{kn}{۲} \rceil$ یال است. این دست‌یافتنی است.

۴.۱.۴. مثال. *گراف k-همبند هراری $H_{k,n}$*. n رأس را به ترتیب دایره‌ای قرار می‌دهیم، و فرض کنیم $k < n$. اگر $k = ۲r$، $H_{k,n}$ را به این صورت تشکیل می‌دهیم که هر رأس را مجاور نزدیکترین r رأس در هر جهت به دور دایره قرار می‌دهیم. اگر $k = ۲r + ۱$ و n زوج باشد، $H_{k,n}$ را به این صورت تشکیل می‌دهیم که هر رأس را مجاور نزدیکترین r رأس در هر جهت و رأس روبه‌روی آن را روی دایره قرار می‌دهیم. در هر حالت، $H_{k,n}$، k-منتظم است.

اگر $k = ۲r + ۱$ و n فرد باشد، رأسها را با اعداد صحیح به پیمانه n اندیسگذاری می‌کنیم. $H_{k,n}$ را از $H_{۲r,n}$ با افزودن یالهای $i \leftrightarrow i + (n+۱)/۲$ به‌ازای $۰ \leq i \leq (n-۱)/۲$ می‌سازیم. گرافهای $H_{۴,۸}$، $H_{۵,۸}$، و $H_{۵,۹}$ در زیر ظاهر می‌شوند. □



۵.۱.۴. قضیهٔ. (هراری [۱۹۶۲ الف]) $k(H_{k,n}) = k$، و از این‌رو مینیمم تعداد یالها در یک گراف k-همبند روی n رأس برابر است با $\lceil \frac{kn}{۲} \rceil$.

اثبات. تنها حالت زوج $k = ۲r$ را اثبات می‌کنیم، و حالت فرد را به تمرین ۶ واگذار می‌نماییم. فرض کنیم $G = H_{۲r,n}$. چون $\delta(G) = ۲r$، کافی است ثابت کنیم $k(G) \geq ۲r$. هر $S \subseteq V(G)$ را با قید $|S| < ۲r$ انتخاب می‌نماییم؛ ثابت می‌کنیم که $G - S$ همبند است. هر جفت $u, v \in V(G) - S$ را انتخاب می‌کنیم. حذف u، v از آرایش دایره‌ای اولیهٔ رأسها دو قطعه ماکسیمال A، B از رأسهای پیاپی را باقی می‌گذارد. در $G - S$، پتانسیل را برای عبور از u به v در یک جهت موافق یا مخالف حرکت عقربه‌های ساعت داریم، از A یا B. چون $|S| < ۲r$، اصل لانه‌کبوتر ایجاب می‌کند که S کمتر از r رأس در A یا B دارد. چون هر رأس یالهایی به r رأس بعدی در یک جهت خاص دارد، می‌توانیم یک u, v-مسیر در $G - S$ از طریق زیرمجموعهٔ A یا B بیابیم که در آن S دارای کمتر از r رأس است. □

ساختار هراری شرایط درجه را که یک گراف را **مجاز** به k-همبند بودن می‌نماید تعیین می‌کند. تمرین ۱۵ شرایط درجه را برای تعیین اینکه یک گراف ساده همبند باشد تحمیل می‌کند. از آنجا که حذفهای رأسها در نظر گرفته می‌شود، همبندی یک گراف چندگانه همانند همبندی گراف ساده است که از حذف نسخه‌های اضافی یالهای چندگانه (و حذف

طوقه‌ها) به‌دست می‌آید. از این‌رو شرایط درجه را مورد بحث قرار می‌دهیم که مستلزم k-همبندی تنها برای ردهٔ گرافهای ساده است.

در اثباتهای مستقیم $k(G) = k$ یک برش رأسی S را در نظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم که $|S| \geq k$ یا یک مجموعهٔ S را با کمتر از k رأس در نظر گرفته و ثابت می‌کنیم که $G - S$ همبند است. در روش غیرمستقیم، یک برش به اندازهٔ کمتر از k را فرض قرار می‌دهیم و یک تناقض به‌دست می‌آوریم. اثبات غیرمستقیم ممکن است آسانتر به‌دست آید، اما اثبات مستقیم را می‌توان روشنتر بیان کرد. ملاحظه اینکه اگر $k < n(G)$ و G دارای یک برش رأسی با اندازهٔ کوچکتر از k باشد، آنگاه G دارای یک برش رأسی به‌اندازهٔ $k - ۱$ است (نخست برش را حذف می‌کنیم، آنگاه به حذف رأسها ادامه می‌دهیم تا هنگامی که $k - ۱$ تا حذف شده باشند، همواره یک رأس را در هریک از دو مؤلفه باقی می‌گذاریم). سرانجام، اثبات $k(G) = k$ نیز مستلزم ارائه یک برش رأسی به اندازهٔ k است؛ این معمولاً بخش آسان کار است.

همبندی یالی

شاید فرستنده‌های ما مطمئن باشند و هرگز دچار نقص نشوند، اما پیوندهای ارتباطی در معرض صداهای نامطلوب یا دیگر اختلالها باشند. در این وضعیت، می‌خواهیم ناهمبند ساختن گرافمان را با حذف یالها، دشوار سازیم.

۴.۱.۶. تعریف. یک ***مجموعهٔ ناهمبندساز*** از یالها یک مجموعهٔ $F \subseteq E(G)$ است به‌طوری‌که $G - F$ دارای بیش از یک مؤلفه باشد. با درنظرگرفتن $S, T \subseteq V(G)$، نماد $[S, T]$ مجموعهٔ یالهایی را که یک نقطه پایانی در S و یک نقطه پایانی دیگر در T دارند مشخص می‌کند. یک ***برش یالی*** یک مجموعهٔ یالها به‌صورت $[S, \bar{S}]$ است، که در آن S یک زیرمجموعهٔ ناتهی سره از $V(G)$ است. یک گراف k-***یال-همبند*** است اگر هر مجموعهٔ ناهمبندساز دارای حداقل k یال باشد.

همبندی یالی G، که به صورت $k'(G)$ نشان داده می‌شود، مینیمم اندازهٔ یک مجموعهٔ ناهمبندساز است (و به‌طور هم‌ارز $k'(G)$ ماکسیمم k است به‌طوری که G، k-یال-همبند باشد).

نمادگذاری همبندی یالی قرار داد ما را برای استفاده از یک «پریم» برای پارامتر یالی مشابه با پارامتر رأسی ادامه می‌دهد. استفاده از همان حرف پایه بر تشابه تأکید می‌گذارد و از سردرگمی حاصل از به‌کار بردن چندین حرف گوناگون - و تمام کردن آنها اجتناب می‌کند.

۷.۱.۴. تبصره. *مجموعهٔ ناهمبندساز* vs. *برش یالی.* هر برش یالی یک مجموعهٔ ناهمبندساز است، زیرا $G - [S, \bar{S}]$ دارای مسیری از S به $\bar{S}$ نیست. عکس آن نادرست است. در $K_۳$، مجموعهٔ سه یال یک مجموعهٔ ناهمبندساز است، اما یک برش یالی نیست. در $K_{۳,۳}$، هر مجموعه از هفت یال یک مجموعهٔ ناهمبندساز است، اما هیچکدام یک برش یالی نیست (تمرین ۷).

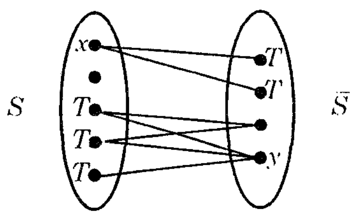
اگر $n(G) > ۱$، آنگاه هر مجموعهٔ ناهمبندساز مینیمال از یالها یک برش یالی است. اگر $G - F$ دارای بیش از یک مؤلفه برای یک $F \subseteq E(G)$ باشد، آنگاه همه یالهایی را که یک نقطه پایانی در یک مؤلفهٔ H از $G - F$ دارند، حذف کرده‌ایم. از این‌رو F شامل برش یالی $[V(H), \overline{V(H)}]$ است، و F یک مجموعهٔ ناهمبندساز مینیمال نیست مگر آنکه $F = [V(H), \overline{V(H)}]$. □

حذف یک نقطه پایانی از هر یال در یک برش یالی F، هر یال از F را حذف می‌کند. از این‌رو انتظار داریم که $k(G) \le k'(G)$ همواره برقرار باشد. برای اثبات این مطلب، باید دقت داشته باشیم که تنها رأس یک مؤلفه از $G - F$ را حذف نکنیم و در نتیجه یک زیرگراف همبند ایجاد کنیم. نابرابری $k(K_n) \le k'(K_n)$ بنابر قرارداد $k(K_n) = n - ۱$ برقرار است.

۸.۱.۴. قضیه. $k(G) \le k'(G) \le \delta(G)$.

اثبات. یالهای متصل به یک رأس v با مینیمم درجهٔ یک مجموعهٔ ناهمبندساز تشکیل می‌دهند؛ از این‌رو $k'(G) \leq \delta(G)$. تنها کاری که باقیمانده این است که نشان دهیم $k(G) \leq k'(G)$. چون تعریف کردیم که $k(K_n) = n - 1$، از آنجا برای هر G داریم $k(G) \leq n(G) - 1$. فرض کنیم $n(G) > 1$ و $[S, \bar{S}]$ یک برش یالی مینیمم باشد که دارای اندازهٔ $k = k'(G)$ است. اگر هر رأس از S مجاور با هر رأس از $\bar{S}$ باشد، آنگاه $k = |S||\overline{S}| \geq n(G) - 1$، و نابرابری برقرار است.

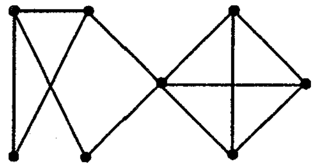
از این‌رو می‌توانیم فرض کنیم که $x \in S$ و $y \in \overline{S}$ با قید $x \not\leftrightarrow y$ وجود دارند. حال، فرض کنیم T مجموعهٔ رأسهای متشکل از همهٔ همسایه‌های x در $\overline{S}$ و همهٔ رأسهای $S - \{x\}$ باشد که همسایه‌هایی در $\overline{S}$ دارند (در زیر نشان داده شده است). چون x و y به مؤلفه‌های مختلفی از $G - T$ تعلق دارند، T یک مجموعهٔ جداساز است. چون T شامل نقاط پایانی در $\overline{S}$ از یالهای متمایز متضمن x است و نقاط پایانی در S از یالهای متمایز متضمن x نیست، داریم $|T| \leq |[S, \overline{S}]| = k$. از این‌رو $k(G) \leq k'(G)$. $\square$



از آنجاکه همبندی با مینیمم درجه برای خوشه‌ها، گرافهای دوبخشی کامل، ابرمکعبها، و گرافهای هراری برابر است، نابرابری قضیهٔ ۸.۲.۴ همچنین نتیجه می‌دهد که همبندی یالی با مینیمم درجه برای این گرافها برابر است. اگرچه مجموعهٔ یالهای متصل به یک رأس با مینیمم درجه همواره یک برش یالی است، اما نیازی نیست که یک برش یالی مینیمم باشد. وضعیت $k'(G) < \delta(G)$ دقیقاً وضعیتی است که هیچ برش یالی مینیمم یک رأس منفرد را از باقی گراف مجزا نمی‌کند.

۹.۱.۴. مثال. *امکانپذیری* $k < k' < \delta$. برای گراف G زیر، $k(G) = 1$،

$k'(G) = ۲$، و $\delta(G) = ۳$. هیچ برش یالی مینیمم یک رأس را تنها نمی‌کند. □



هنگامی که $k' < \delta$، یک برش یالی مینیمم $[S, \overline{S}]$ یک رأس را تنها نمی‌کند، و در واقع مجموعهٔ S باید بسیار بزرگتر از یک عنصر منفرد باشد. این مطلب از یک رابطهٔ ساده میان اندازهٔ یک برش یالی و اندازهٔ گراف القا شده به‌وسیلهٔ یک طرف برش نتیجه می‌شود.

۱۰.۱.۴. گزاره. اگر S یک زیرمجموعهٔ ناتهی سره از رأسهای یک گراف G باشد، آنگاه

$$|[S, \overline{S}]| = [\sum_{v\in S} d(v)] - ۲e(G[S])$$

اثبات. هر یال در $G[S]$ دوبار در $\sum_{v\in S} d(v)$ شرکت می‌کند، و هر یال در $[S, \overline{S}]$ یک بار شرکت می‌نماید. بدین‌سان همه شرکت کننده‌ها شمرده می‌شوند، پس

$$|[S, \overline{S}]| + ۲e(G[S]) = \sum_{v\in s} d(v)$$ □

۱۱.۱.۴. فرع. اگر S یک زیرمجموعهٔ ناتهی سره از رأسهای یک گراف G باشد به‌طوری که $|[S, \overline{S}]| < \delta(G)$، آنگاه $|S| > \delta(G)$.

اثبات. اگر $|S| = ۱$، آنگاه $|[S, \overline{S}]| \geq \delta(G)$، پس می‌توانیم فرض کنیم $|S| > ۱$. بنابر گزاره ۱۰.۱.۴، داریم $\delta(G) > \sum_{v\in s} d(v) - ۲e(G[S])$. چون $d(v) \geq \delta(G)$ و $۲e(G[S]) \leq |S|(|S| - ۱)$، از آنجا $\delta(G) > |S|\delta(G) - |S|(|S| - ۱)$. چون $|S| > ۱$، می‌توانیم عبارتهای متضمن $\delta(G)$ را ترکیب کنیم و $|S| - ۱$ را حذف نماییم تا به‌دست آوریم $|S| > \delta(G)$. □

یک برش یالی مجموعه‌ای از یالهاست. یک برش یالی می‌تواند شامل برش یالی دیگری به عنوان یک زیرمجموعهٔ باشد. به عنوان مثال، $K_{۱,۲}$ دارای سه‌برش یالی است،

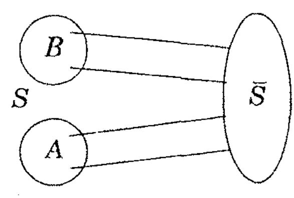
اما یکی از آنها شامل دوتای دیگر است. برشهای یالی ناتهی مینیمال از یک گراف دارای ویژگیهای ساختاری سودمند است، و یک نام خاص دارند.

۱۲.۱.۴. تعریف. یک **بند** یک برش یالی ناتهی مینیمال است؛ یک مجموعهٔ مینیمال از یالهایی که حذف آنها تعداد مؤلفه‌ها را افزایش می‌دهد.

در اینجا «مینیمال» بدین معناست که هیچ زیرمجموعهٔ ناتهی سره از این یالها نیست که همچنین یک برش یالی باشد. بندها در گرافهای همبند با شرطی روی مجموعه‌هایی از افراز رأسها که برش یالی را تعریف می‌کند، مشخص می‌شوند.

۱۳.۱.۴. گزاره. اگر G یک گراف همبند و S یک زیرمجموعهٔ ناتهی سره از $V(G)$ باشد، آنگاه برش یالی $F = [S, \overline{S}]$ یک بند است اگر، و فقط اگر، زیرگرافهای القایی $G[S]$ و $G[\overline{S}]$ همبند باشند.

اثبات. اگر $G[S]$ و $G[\overline{S}]$ همبند باشند، آنگاه F یک بند است، زیرا حذف $F' \subset F$ دو مؤلفه از $G - F$ به علاوه حداقل یک یال میان آنها را باقی می‌گذارد، که در نتیجه آن $G - F'$ همبند می‌شود. برعکس، فرض کنیم (بنابر تقارن) که $G[S]$ دارای بیش از یک مؤلفه است، پس S دارای یک افراز به A، B بدون هیچ یالهایی میان A و B است. اکنون برشهای یالی $[A, \overline{A}]$ و $[B, \overline{B}]$ مشمول در F هستند، پس F یک بند نیست.□



در فصل ۱، عبارتهای «رأس برشی» و «یال برشی» را برای برشهای رأسی و برشهای یالی به اندازهٔ ۱ که حذف آنها تعداد مؤلفه‌ها را افزایش می‌دهد مطرح کردیم. برخی از مؤلفان برای رأس برشی از ***نقطهٔ مفصلی***، و برخی از مؤلفان برای یال برشی از ***گذرگاه*** یا ***پل*** استفاده کرده‌اند. یک گراف ناهمبند می‌تواند یک رأس برشی یا یک یال برشی داشته

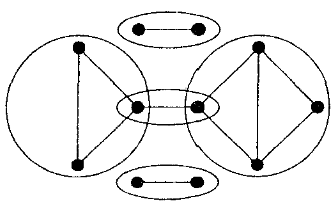
باشد. هر گراف با همبندی ۱ به جز K_2 دارای یک رأس برشی است؛ این گرافها را گاه *گرافهای جدایی‌پذیر* می‌نامند.

بلوکها

یک گراف همبند بدون هیچ رأس برشی نیازی نیست ۲-همبند باشد، زیرا می‌تواند K_1 یا K_2 باشد. مفهوم یک گراف همبند بدون هیچ رأس برشی، تجزیه سودمندی در مورد گرافها را فراهم می‌کند.

۱۴.۱.۴. تعریف. یک *بلوک* از یک گراف G عبارت است از یک زیرگراف همبند ماکسیمال از G که دارای رأس برشی نباشد. اگر G خودش همبند باشد و دارای رأس برشی نباشد، آنگاه G یک بلوک است.

۱۵.۱.۴. مثال. *بلوکها.* اگر H یک بلوک از G باشد، آنگاه H به‌عنوان یک گراف است که دارای رأس برشی نیست، اما H می‌تواند شامل رأسهایی باشد که رأسهای برشی G هستند. به‌عنوان مثال، گراف رسم شده زیر دارای پنج بلوک است؛ سه نسخه از K_2، یکی از K_3، و یک زیرگراف که نه یک دور است و نه یک خوشه.



۱۶.۱.۴. تبصره. *ویژگیهای بلوکها.* یک یال از یک دور نمی‌تواند خودش یک بلوک باشد، زیرا به زیرگراف بزرگتری که هیچ رأس برشی ندارد متعلق است. از این‌رو یک یال یک بلوک از G است اگر، و فقط اگر، یک یال برشی از G باشد؛ بلوکهای یک درخت یالهای آن هستند. اگر یک بلوک دارای بیش از دو رأس باشد، آنگاه

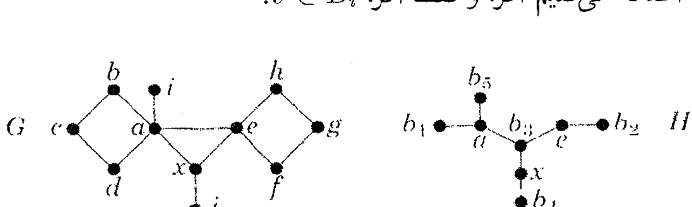
۲-همبند است. بلوکهای یک گراف رأسهای تنهای آن هستند، یالهای برشی آن، و زیرگرافهای ۲-همبند ماکسیمال آن می‌باشند. □

۱۷.۱.۴. گزاره. دو بلوک در یک گراف حداکثر در یک رأس شریک‌اند.

اثبات. حذف یک رأس منفرد نمی‌تواند هیچکدام از دو بلوک را ناهمبند کند. اگر بلوکهای B_1 و B_2 در دو رأس شریک باشند، آنگاه پس از حذف هر رأس منفرد x مسیری در B_i از هر رأس باقیمانده در B_i به هر رأس از $(B_1 \cap B_2) - x$ باقی می‌ماند. از این‌رو $B_1 \cup B_2$ زیرگرافی بدون هیچ رأس برشی است، که با ماکسیمال بودن بلوکهای اولیه در تناقض است. □

از این‌رو بلوکهای یک گراف، مجموعهٔ یالها آن را افراز می‌کنند. هنگامی که دو بلوک از G در یک رأس شریک باشند، آن رأس باید یک رأس برشی از G باشد. روابط متقابل میان بلوکها و رأسهای برشی به‌وسیلهٔ یک گراف خاص توضیح داده می‌شود.

۱۸.۱.۴. تعریف. گراف نقطهٔ برشی-بلوک از یک گراف G یک گراف دوبخشی H است که در آن یک مجموعهٔ بخشی متشکل از رأسهای برشی G است، و دیگر آنکه دارای یک رأس b_i برای هر بلوک B_i از G است. vb_i را به عنوان یالی از H اضافه می‌کنیم اگر، و فقط اگر، $v \in B_i$.



اگر G همبند باشد، آنگاه H یک درخت است (تمرین ۲۸) که برگهایش بلوکهای G هستند. از این‌رو یک گراف G با همبندی ۱ دارای حداقل دو بلوک است (که ***بلوکهای برگی*** نامیده می‌شوند) که دقیقاً شامل یک رأس برشی از G است. بلوکها را می‌توان با جستجوی ژرفا - نخستین پیدا کرد. بنابر لم ۱۰.۳.۲، هر یال بیرون یک درخت که

به‌وسیلهٔ DFS پیدا شود دو رأس را به هم می‌پیوندد به طوری که یکی از آن دو نیای دیگری باشد.

۱۹.۱.۴. الگوریتم. *محاسبه بلوکهای G.*

ورودی: یک گراف همبند G. (بلوکهای یک گراف بلوکهای مؤلفه‌های آن هستند، که می‌توانند به‌وسیلهٔ جستجوی ژرفا - نخستین پیدا شوند، پس می‌توانیم فرض کنیم G همبند است.)

پنداره: یک درخت T از G را با جستجوی ژرفا - نخستین بسازید، همچنانکه بلوکها مشخص می‌شوند قسمتهای T را کنار بگذارید. یک رأس را به نام **فعال** نگهدارید.

ارزشدهی آغازی: یک ریشه $x \in V(H)$ را بردارید؛ x را **فعال** کنید؛ قرار دهید $T = \{x\}$.

تکرار: فرض کنید v نشانگر رأس فعال جاری باشد.

۱) اگر v دارای یک یال متصل کشف نشده vw باشد، آنگاه

۱ الف) اگر $w \notin V(T)$، vw را به T بیفزایید، vw را کشف شده اعلام کنید، w را **فعال** سازید.

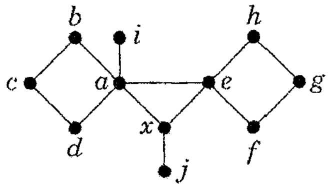
۱ ب) اگر $w \in V(T)$، آنگاه w یک نیای v است، vw را کشف شده اعلام کنید.

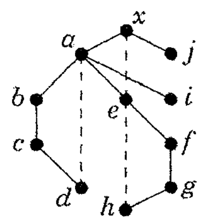
۲) اگر v دارای یالهای متصل کشف نشده بیشتری باشد، آنگاه

۲ الف) اگر $v \neq x$، و w والد v باشد، w را **فعال** کنید. اگر هیچ رأسی در زیردرخت جاری T' که ریشه‌دار در v است، دارای یک یال کشف شده‌ای با نیای w نباشد، آنگاه $V(T') \cup \{w\}$ مجموعهٔ رأسهای یک بلوک است؛ این اطلاعات را ثبت کنید و $V(T')$ را از T حذف کنید.

۲ ب) اگر $v = x$، فرآیند را خاتمه دهید. □

۲۰.۱.۴. مثال. ***یافتن بلوکها.*** برای گراف زیر، یک پیمایش ژرفا - نخستین از x رأسهای دیگر را به ترتیب a، b، c، d، e، f، g ، h، i، j ملاقات می‌کند. ما بلوکها را به‌ترتیب $\{a,b,c,d\}$، $\{e,f,g,h\}$، $\{a,i\}$، $\{x,a,e\}$، $\{x,j\}$ پیدا می‌کنیم. پس از یافتن هر بلوک، رأسها را به جز آنهایی که بالاترین باشند حذف می‌کنیم. تمرین ۳۰ اثباتی برای درستی این فرآیند می‌خواهد. □





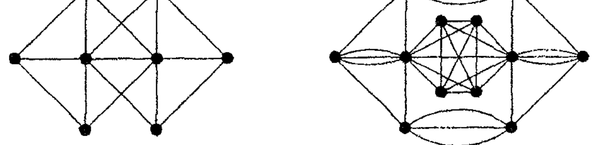
یادآوری می‌کنیم که یک گراف سودار **قویاً همبند** (یا **قوی**) است اگر یک مسیر از هر رأس به هر رأس دیگر (در سوی پیکانها) داشته باشد.

۲۱.۱.۴. تعریف. ***مؤلفه‌های قوی*** یک گراف سودار D، زیرگرافهای قویاً همبند ماکسیمال D هستند.

یک گراف سودار D قویاً همبند است اگر، و فقط اگر، دارای تنها یک مؤلفهٔ قوی باشد. مؤلفه‌های قوی یک گراف سودار بسیار شبیه بلوکهای یک گراف رفتار می‌کنند، همچنانکه در تمرینات ۳۱-۳۳ بحث شده است.

تمرینات

۱.۱.۴. $(-)$ $\kappa(G)$، $\kappa'(G)$ و $\delta(G)$ را برای هر گراف G رسم شده زیر تعیین کنید. به‌ازای هر k، کدام گرافها k-همبند هستند؟ کدام k- یال - همبند هستند؟



۲.۱.۴. (−) ثابت کنید که یک گراف G، k-همبند است اگر، و فقط اگر، $G \vee K_r$، $k+r$-همبند باشد.

۳.۱.۴. (−) با در نظر گرفتن یک گراف همبند ساده G، گراف G' را که با افزودن یک یال متصل به هر جفت از رأسها که فاصله‌شان در G برابر ۲ است به‌دست آورید. ثابت کنید که G'، ۲-همبند است.

۴.۱.۴. (−) یک مثال نقض برای گزاره زیر ارائه دهید، فرضی به آن بیفزایید تا تصحیح شود، و گزاره تصحیح شده را اثبات کنید: اگر e یک یال برشی از G باشد، آنگاه حداقل یک رأس e یک رأس برشی از G است.

۵.۱.۴. (−) فرض کنیم k، l، m اعداد صحیحی با قید $0 \leq k \leq l \leq m$ باشند. یک گراف $G_{k,l,m}$ را بسازید به‌طوری که $\kappa(G_{k,l,m}) = k$، $\kappa'(G_{k,l,m}) = l$، و $\delta(G_{k,l,m}) = m$. (چارتراند - هراری [۱۹۶۸])

۶.۱.۴. فرض کنیم n زوج k فرد باشد. فرض کنیم G گراف ساده k-منتظم باشد که به این صورت تشکیل شده است، با قرار دادن n رأس روی یک دایره و مجاور ساختن هر رأس با رأس روبه‌رو و برای $(k-1)/2$ نزدیکترین رأسها در هر سو. ثابت کنید که $\kappa(G) = k$. (هراری [۱۹۶۲ الف])

۷.۱.۴. $K_{m,n}$ را با افراز مضاعف X، Y در نظر می‌گیریم. فرض کنیم S متشکل از a عضو از X و b عضو از Y باشد.

الف) $|[S,\overline{S}]|$ را برحسب a، b، m، n محاسبه کنید.

ب) با استفاده از قسمت (الف) به‌طور عددی ثابت کنید که $\kappa'(K_{m,n}) = \min\{m,n\}$.

پ) ثابت کنید که هر مجموعه از هفت یال در $K_{3,3}$ یک مجموعهٔ ناهمبند ساز است، اما هیچ مجموعه‌ای از هفت یال، یک برش یالی نیست.

۸.۱.۴. (!) ثابت کنید که $\kappa'(G) = \kappa(G)$ اگر G یک گراف ساده ۳-منتظم باشد.

کوچکترین گراف ساده ۳-منتظم را که دارای همبندی ۱ است بیابید (با اثبات).

۹.۱.۴. (!) با استفاده از گزاره ۱۰.۱.۴ و تمرین ۸ ثابت کنید که گراف پترسن، ۳-همبند است.

۱۰.۱.۴. با استفاده از گزاره ۱۰.۱.۴ ثابت کنید که گراف پترسن دارای یک برش یالی به اندازهٔ m است اگر، و فقط اگر، $۳ \leq m \leq ۱۲$. (*راهنمایی:* $|[S,\overline{S}]|$ را برای $۱ \leq |S| \leq ۵$ در نظر بگیرید.)

۱۱.۱.۴. فرض کنیم G یک گراف ۳-منتظم با حداکثر ۱۰ رأس باشد. با استفاده از فرع ۱۱.۱.۴ ثابت کنید که اگر G، ۳-یال- همبند نباشد، آنگاه G دارای یک مثلث است. نشان دهید که این نتیجه بهترین وضع ممکن است، به این ترتیب یک گراف دوبخشی ۳-منتظم با ۱۲ رأس ارائه کنید که ۳-یال- همبند نباشد.

۱۲.۱.۴. ثابت کنید که $\kappa(G) = \delta(G)$، اگر G ساده باشد و $\delta(G) \geq n(G) - ۲$. ثابت کنید که این بهازای هر $n \geq ۴$ بهترین وضع ممکن است به این ترتیب که یک گراف n-رأسی با مینیمم درجهٔ $n - ۳$ و همبندی کمتر از $n - ۳$ بسازید.

۱۳.۱.۴. (!) فرض کنیم G یک گراف n-رأسی ساده با قید $\delta(G) \geq \frac{n}{۲} - ۱$ باشد. ثابت کنید که G به ازای هر k با قید $k \leq ۲\delta(G) + ۲ - n$، k-همبند است. ثابت کنید که این بهازای هر $\delta \geq \frac{n}{۲} - ۱$ بهترین وضع ممکن است، بهاین ترتیب که یک گراف n-رأسی با مینیمم درجهٔ δ بسازید که برای $k = ۲\delta + ۳ - n$، k-همبند نباشد. (*توضیح:* گزاره ۵.۳.۱ حالت خاص این مطلب است هنگامی که $\delta(G) = \frac{n-۱}{۲}$.)

۱۴.۱.۴. (+) فرض کنیم G یک گراف n-رأسی ساده با قید $n \geq k + l$ و $\delta(G) \geq \frac{n+l(k-۲)}{l+۱}$ باشد. ثابت کنید که اگر $G - S$ دارای بیش از l مؤلفه باشد، آنگاه $|S| \geq k$. ثابت کنید که فرض روی $\delta(G)$ بهترین وضع ممکن است هرگاه $n \geq k + l$، بهاین ترتیب که یک گراف n-رأسی مناسب با مینیمم درجهٔ $\lfloor \frac{n+l(k-۲)-۱}{l+۱} \rfloor$

بسازید. (توضیح: این مسأله، مسأله پیشین را تعمیم می‌دهد.)

۱۵.۱.۴. (!) ***شرط کافی برای گرافهای*** $k+1$***-همبند.*** (باندی [۱۹۶۹])

الف) فرض کنیم G یک گراف n-رأسی ساده با درجه‌های رأسهای $d_1 \leq \cdots \leq d_n$ باشد. ثابت کنید که اگر $d_j \geq j+k$ هرگاه $j \leq n-1-d_{n-k}$، آنگاه G، $k+1$-همبند است. (توضیح: تمرین ۱۳.۴.۱ حالت خاص این مطلب است هنگامی که $k=0$.)

ب) فرض کنیم $0 \leq j,k \leq n$. یک گراف n-رأسی G بسازید به‌طوری که $\kappa(G) \leq k$ و G دارای j رأس از درجهٔ $j+k-1$، و دارای $n-j-k$ رأس از درجهٔ $n-j-1$، و دارای k رأس از درجهٔ $n-1$ باشد. توضیح دهید که چگونه این مطلب نشان می‌دهد که قسمت (الف) بهترین وضع ممکن است.

۱۶.۱.۴. (!) فرض کنیم که G یک گراف r-همبند از مرتبهٔ زوج است که دارای $K_{1,r+1}$ای به عنوان یک زیرگراف القایی نیست. ثابت کنید که G دارای یک ۱-عاملی است. (سومنر [۱۹۷۴ ب])

۱۷.۱.۴. (!) ***شرایط درجه برای*** $k'=\delta$. فرض کنیم که G یک گراف n-رأسی ساده است. با استفاده از فرع ۱۱.۱.۴ گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

الف) اگر $\delta(G) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$، آنگاه $\kappa'(G)=\delta(G)$. ثابت کنید این بهترین وضع ممکن است به این ترتیب که به‌ازای هر $n \geq 3$ یک گراف n-رأسی ساده بسازید به‌طوری که $\delta(G)=\lfloor n/2 \rfloor -1$ و $\kappa'(G)<\delta(G)$.

ب) اگر $d(x)+d(y) \geq n-1$ هرگاه $x \nleftrightarrow y$، آنگاه $\kappa'(G)=\delta(G)$. ثابت کنید این بهترین وضع ممکن است، به این ترتیب که به ازای هر $n \geq 4$ و $\delta(G)=m \leq n/2-1$ یک گراف n-رأسی G بسازید به‌طوری که $\kappa'(G)<\delta(G)=m$ که در آن $d(x)+d(y) \geq n-2$ هرگاه $x \nleftrightarrow y$.

۱۸.۱.۴. (!) $\kappa'(G)=\delta(G)$ ***برای قطر ۲.*** فرض کنیم که G یک گراف ساده با

قطر ۲ است و $[S,\overline{S}]$ یک برش یالی مینیمم است به‌طوری که $|S| \leq |\overline{S}|$.

الف) ثابت کنید که هر رأس از S دارای یک همسایه در $\overline{S}$ است.

ب) با استفاده از قسمت (الف) و فرع ۱۱.۱.۴ ثابت کنید که $\kappa'(G) = \delta(G)$. (پلزنیک[1] [۱۹۷۵])

۱۹.۱.۴. (!) فرض کنیم $F \subseteq E(G)$. ثابت کنید که F یک برش یالی است اگر، و فقط اگر، F شامل تعداد زوجی از یالها از هر دور در G باشد. (*راهنمایی:* برای کفایت شرط، مؤلفه‌های $G - F$ را در نظر بگیرید.)

۲۰.۱.۴. (!) فرض کنیم که $[S,\overline{S}]$ یک برش یالی در یک گراف بیسوی G باشد. ثابت کنید که مجموعه‌ای از بندهای دوبه‌دو مجزا - یال که اجتماعشان (به عنوان مجموعه‌های یالها) $[S,\overline{S}]$ است، وجود دارد. (این به‌طور بدیهی برقرار است اگر $[S,\overline{S}]$ خود یک بند باشد.)

۲۱.۱.۴. (!) ثابت کنید که تفاضل متقارن دو برش یالی، یک برش یالی است. (*توضیح:* بنابراین تمرین و تمرین ۲۰، تفاضل متقارن دو بند یک اجتماع مجزا - یال از بندهاست. این ویژگی برای دورها نیز برقرار است. برای یک زمینهٔ کلیتر بند ۲.۸ را ببینید.)

۲۲.۱.۴. (!) فرض کنیم H یک زیرگراف فراگیر از گراف همبند G است. ثابت کنید که H یک درخت فراگیر از G است اگر، و فقط اگر، زیرگراف $H^* = G - E(H)$ یک زیرگراف ماکسیمال باشد که شامل هیچ بندی از G نیست. (*توضیح:* از پیش می‌دانیم که H یک درخت فراگیر از G است اگر، و فقط اگر، H یک زیرگراف ماکسیمال باشد که شامل هیچ دوری نیست. برای یک زمینهٔ کلیتر بند ۲.۸ را ببینید.)

۲۳.۱.۴. (−) فرض کنیم G گرافی با مجموعهٔ رأسهای $\{۱, \cdots, ۱۱\}$ باشد که در

1) Plesník

آن $i \leftrightarrow j$ اگر، و فقط اگر، i و j دارای یک عامل مشترک بزرگتر از ۱ داشته باشند. بلوکهای G را تعیین کنید.

۲۴.۱.۴. $(-)$ فرمولی برای تعداد درختهای فراگیر یک گراف برحسب تعداد درختهای فراگیر هریک از بلوکهای آن ارائه کنید.

۲۵.۱.۴. یک ***کاکتوس*** گرافی همبند است که در آن هر بلوک، یک یال یا یک دور باشد. ثابت کنید که ماکسیمم تعداد یالها در یک کاکتوس n-رأسی ساده برابر است با $\lfloor ۳(n-۱)/۲ \rfloor$. (*راهنمایی:* $\lfloor x+y \rfloor \le \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.)

۲۶.۱.۴. ثابت کنید که هر رأس از G دارای درجهٔ زوج است اگر، و فقط اگر، هر بلوک از G اویلری باشد.

۲۷.۱.۴. ثابت کنید که یک گراف همبند، k- یال - همبند است اگر، و فقط اگر، هر کدام از بلوکهایش، k-یال - همبند باشد.

۲۸.۱.۴. (!) ***گراف نقطهٔ برشی - بلوک*** (تعریف ۱۸.۱.۴ را ببینید). فرض کنیم H گراف نقطهٔ برشی-بلوک از یک گراف G باشد که دارای یک رأس برشی است. (هراری - پرینس[1] [۱۹۶۶])

الف) ثابت کنید که H یک جنگل است.

ب) ثابت کنید که G دارای حداقل دو بلوک است که شامل یک رأس برشی از G است.

پ) ثابت کنید که G دقیقاً دارای $k + \sum_{v\in V(G)}(b(v)-۱)$ بلوک است، که در آن k تعداد مؤلفه‌های G است و $b(v)$ تعداد بلوکهای شامل v است.

ت) ثابت کنید که هر گراف دارای رأسهای برشی کمتری از بلوکهاست.

۲۹.۱.۴. فرض کنیم که H و H' زیرگرافهای k-هبمند ماکسیمال متمایز از یک گراف

1) Prins

G باشند. ثابت کنید که H و H' حداکثر $k-1$ رأس مشترک دارند. (هراری - کوداما[1] [۱۹۶۴])

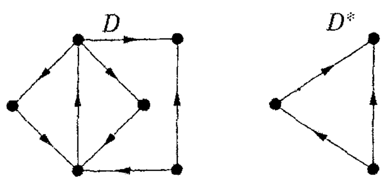
۳۰.۱.۴. ثابت کنید که الگوریتم ۱۹.۱.۴ به درستی بلوکهای گرافها را محاسبه می‌کند.

۳۱.۱.۴. (−) فرض کنیم R رابطه‌ای روی مجموعهٔ رأسهای یک گراف سودار D باشد، که به این صورت تعریف شده است، $u, v \in R$ اگر u متصل به v و v متصل به u در D باشد. ثابت کنید که R یک رابطه هم‌ارزی است. ثابت کنید که رده‌های هم‌ارزی R، مجموعه‌های رأسهای مؤلفه‌های قوی G هستند.

۳۲.۱.۴. *مؤلفه‌های قوی.*

الف) ثابت کنید که دو زیرگراف قویاً همبند ماکسیمال از یک گراف سودار نمی‌توانند در هیچ رأسی مشترک باشند.

ب) فرض کنیم D_1، ...، D_k مؤلفه‌های قوی یک گراف سودار D باشند. ***تراکم*** D عبارت است از گراف سودار D^* با رأسهای v_1، ...، v_k به‌طوری که $v_i \to v_j$ اگر، و فقط اگر، D دارای یالی از D_i به D_j باشد. ثابت کنید که تراکم D هیچ دوری ندارد.



۳۳.۱.۴. الگوریتمی طراحی کنید که مؤلفه‌های قوی یک گراف سودار را محاسبه کند. ثابت کنید که این الگوریتم درست کار می‌کند. (*راهنمایی:* الگوریتم را روی الگوریتم ۱۹.۱.۴ مدلسازی کنید.)

---

1) Kodama

۲-۴ گرافهای k-همبند

یک شبکهٔ ارتباطی در برابر نقص دارای قدرت تحمل است اگر دارای مسیرهای دیگری میان رأسها باشد؛ هرچه مسیرهای مجزا بیشتر باشند، بهتر است. در این بند، ثابت می‌کنیم که این مقیاس تناوبی ارتباط اساساً همانند k-همبندی است. در بند ۲.۱، ثابت کردیم که یک گراف G همبند است اگر، و فقط اگر، هر افراز از $V(G)$ به دو مجموعهٔ ناتهی، یالی با یک نقطهٔ پایانی در هریک از مجموعه‌ها به‌دست دهد. به عبارت دیگر، ثابت کردیم که هر جفت از رأسها به وسیلهٔ یک مسیر به هم متصل می‌شوند اگر، و فقط اگر، G، ۱- یال - همبند باشد. در اینجا این مشخص‌سازی را به گرافهای k- یال - همبند و گرافهای k - همبند تعمیم می‌دهیم.

گرافهای ۲-همبند

با مشخص ساختن گرافهای ۲-همبند آغاز می‌کنیم. دو مسیر ***درونی-مجزا*** هستند اگر هیچکدام شامل نقطهٔ پایانی رأسی از دیگری نباشد.

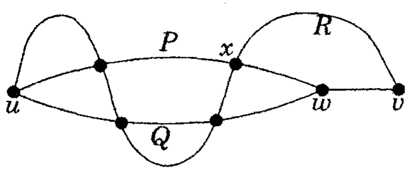
۴.۲.۱. قضیهٔ. (ویتنی[1] [۱۹۳۲]) یک گراف بیسوی G که دارای حداقل سه رأس باشد، ۲-همبند است اگر، و فقط اگر، هر جفت $u,v \in V(G)$ به وسیلهٔ یک جفت u,v-مسیر درونی - مجزا در G به هم وصل شوند.

اثبات. هنگامی که G دارای u,v-مسیرهای درونی - مجزا باشد، حذف یک رأس نمی‌تواند u را از v جدا کند. چون این مطلب برای هر جفت u، v در نظر گرفته شده است، از این رو شرط کافی است. برعکس، فرض کنیم که G، ۲-همبند است. با استقرا روی $d(u,v)$، ثابت می‌کنیم که G دارای دو u,v-مسیر درونی - مجزا می‌باشد. هنگامی که $d(u,v)=۱$، گراف $G-uv$ همبند است، زیرا $\kappa'(G) \geq k(G) = ۲$.

1) Whitney

یک u, v-مسیر در $G - uv$ درونی - مجزا در G است که از u, v-مسیر متشکل از خود یال uv باشد.

برای گام استقرا، $d(u, v) = k > ۱$ را در نظر می‌گیریم و فرض کنیم که G دارای x, y -مسیرهای درونی - مجزا می‌باشد، هرگاه $۱ \leq d(x, y) < k$. فرض کنیم w رأس پیش از v روی یک کوتاهترین u, v-مسیر باشد. داریم $d(u, w) = k - ۱$، و از این‌رو بنابر فرض استقرا G دارای u, w-مسیرهای درونی - مجزا P و Q است. چون $G - w$ همبند است، $G - w$ شامل یک u, v- مسیر مانند R است. اگر این مسیر از P یا Q اجتناب کند، به پایان کار رسیده‌ایم، اما R ممکن است در رأسهای درونی با هر دوی P و Q شریک باشد. فرض کنیم x آخرین رأس از R باشد که به $P \cup Q$ متعلق است. بنابر تقارن، می‌توانیم فرض کنیم $x \in P$. u, x-زیر مسیر از P را با x, v - زیرمسیر از R ترکیب می‌کنیم تا یک u, v-مسیر درونی - مجزا از $Q \cup wv$ به‌دست آوریم. □



۲.۲.۴. لم. (بسط لم) اگر G یک گراف k-همبند باشد، و G' از G با افزودن یک رأس جدید y، مجاور حداقل k رأس از G، به‌دست آید، آنگاه G'، k-همبند است.

اثبات. فرض کنیم S یک مجموعهٔ جداساز از G' است. اگر $y \in S$، آنگاه $S - \{y\}$، G را جدا می‌کند، پس $|S| \geq k + ۱$. اگر $y \notin S$ و $N(y) \subseteq S$، آنگاه $|S| \geq k$. در غیر این‌صورت، S باید G را جدا کند، و باز هم $|S| \geq k$. □

۳.۲.۴. قضیه. اگر $n(G) \geq ۳$، آنگاه شرایط زیر هم‌ارزند (و گرافهای ۲-همبند را مشخص می‌کنند).

الف) G همبند است و دارای هیچ رأس برشی نیست.

ب) به‌ازای هر $x, y \in V(G)$، x, y-مسیرهای درونی - مجزا وجود دارند.

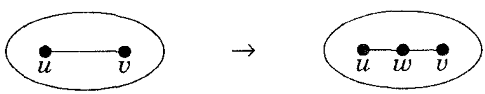
پ) به‌ازای هر $x, y \in V(G)$، یک دور میان x و y وجود دارد.

ت) $\delta(G) \geq 1$، و هر جفت از یالها در G، روی یک دور مشترک قرار می‌گیرند.

اثبات. قضیهٔ ۱.۲.۴ هم‌ارز (الف) و (ب) است. دورهای شامل x و y متناظر با جفتهای x, y-مسیرهای درونی - مجزا هستند، پس (ب) $\Leftrightarrow$ (پ). برای (ت) $\Leftarrow$ (پ)، (ت) را برای یالهای متصل به x و y مطلوب به کار می‌بریم.

برای (الف)، (پ) $\Leftarrow$ (ت)، فرض کنیم G، ۲-همبند است و $uv, xy \in E(G)$. رأسهای w را با همسایگی $\{u, v\}$ و z را با همسایگی $\{x, y\}$ به G می‌افزاییم. بنابر بسط لم، گراف G' حاصل ۲-همبند است، و از این‌رو w، z روی یک دور مشترک C در G' قرار دارند. چون w، z هریک دارای درجهٔ ۲ هستند، این دور باید شامل مسیرهای u، w، v و x، z، y باشد، اما نه مسیرهای uv یا xy. مسیرهای u، w، v و x، z، y را در C به‌جای یالهای uv و xy جایگزین می‌کنیم تا دور مطلوب در G به‌دست آید. □

۴.۲.۴. تعریف. *زیرتقسیم یک یال* uv از یک گراف بیسوی G عبارت است از عمل حذف uv و افزودن یک مسیر u، w، v میان یک رأس جدید w.



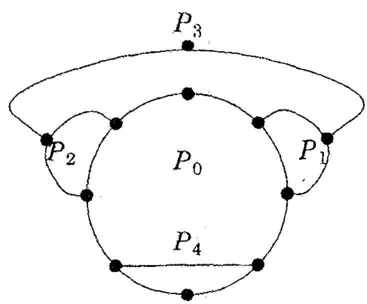
۵.۲.۴. فرع. اگر G، ۲-همبند باشد، آنگاه گراف G' به‌دست آمده از زیر تقسیم یک یال G، ۲-همبند است.

اثبات. فرض کنیم G' با افزودن w به زیرتقسیم uv به‌دست می‌آید. ثابت می‌کنیم که هر دو یال از G' روی یک دور قرار دارند. برای هر جفتی که شامل uw یا vw نباشد، از دور تضمین شده در G استفاده می‌کنیم، مگر آنکه آن از uv استفاده کند، که در این حالت آن را تعدیل می‌کنیم تا از w میان u و v بگذرد. برای یک جفت متشکل از xy

و یکی از $\{uw, wv\}$، دور حاصل از uv و xy را در G تعدیل می‌کنیم؛ این مطلب در مورد $\{uw, wv\}$ نیز انجام می‌گیرد. □

مشخص‌سازیهای ساختاری یا شیوه‌های تجزیه می‌توانند به الگوریتمهایی برای یک ردهٔ از گرافها بیانجامند. ردهٔ گرافهای ۲-همبند دارای یک مشخص‌سازی هستند که ساخت چنین گرافهایی را از یک دور بیان می‌کند.

۶.۲.۴. تعریف. یک **مسیر افزودن** به G، افزودن مسیری است به G با طول $l \geq ۱$ میان دو رأس از G، که $l-۱$ رأس جدید را ارائه می‌کند؛ مسیر افزوده شده یک **دسته** می‌باشد. یک **تجزیه دسته** عبارت است از یک افراز $E(G)$ به مجموعه‌های $P_۰$، $P_۱$، ...، P_k به‌طوری که $C = P_۰$ یک دور باشد، و P_i به‌ازای $i \geq ۱$ یک مسیر افزودن به گراف تشکیل شده به‌وسیلهٔ $P_۰$، ...، $P_{i-۱}$ باشد.



۷.۲.۴. قضیهٔ. (ویتنی [۱۹۳۲]). یک گراف ۲-همبند است اگر، و فقط اگر، دارای یک تجزیه دسته باشد. علاوه بر این، هر دور در یک گراف ۲-همبند، دور آغازی در یک تجزیه دسته است.

اثبات. *کفایت شرط.* چون دورها ۲-همبند هستند، کافی است نشان دهیم که افزودن مسیر، حافظ ۲-همبندی است. فرض کنیم u، v نقاط پایانی یک دسته P باشند که باید به گراف ۲-همبند G افزوده شوند. افزودن یک یال نمی‌تواند همبندی را تحویل کند، پس $G+uv$، ۲- هبمند است. تسلسلی از زیرتقسیمهای یال، $G+uv$ را به $G \cup P$

تبدیل می‌کند؛ بنابر فرع ۵.۲.۴ هر زیرتقسیم حافظ ۲-همبندی است.

لزوم شرط. با در نظر گرفتن یک گراف ۲-همبند G، یک تجزیه دسته از G را از یک دور C در G می‌سازیم. فرض کنیم $G_\circ = C$. فرض کنیم یک زیرگراف G_i را با افزودن دسته‌ها ساخته‌ایم. اگر $G_i \neq G$، آنگاه می‌توانیم یک یال uv را از $G - E(G_i)$ و یک یال $xy \in E(G_i)$ را انتخاب کنیم. چون G، ۲-همبند است، uv و xy روی یک دور مشترک C' قرار دارند. فرض کنیم P مسیری در C' باشد که شامل uv و دقیقاً دو رأس از G_i می‌باشد، هر کدام در یک انتهای P. حال P دسته‌ای است که می‌تواند به G_i افزوده شود تا یک زیرگراف بزرگتر G_{i+1} به‌دست آید. این فرآیند هنگامی پایان می‌یابد که همه G جذب شده باشد. □

هر گراف ۲-همبند، ۲-یال - همبند نیز می‌باشد، اما عکس آن برقرار نیست، پس تجزیه گرافهای ۲- یال - همبند نیاز به عمل کلیتری دارد. اثبات آن ساده‌تر است.

۸.۲.۴. تعریف. یک **تجزیه دسته - بسته** از G عبارت است از یک افراز $E(G)$ به مجموعه‌های $P_\circ$، P_1، ...، P_k به‌طوری که $P_\circ$ یک دور باشد و P_i به‌ازای $i \geq 1$ یا یک دسته باز (یک مسیر افزودن به $P_\circ \cup \cdots \cup P_{i-1}$) و یا یک دسته بسته (یک دور با دقیقاً یک رأس در $P_\circ \cup \cdots \cup P_{i-1}$) باشد.

۹.۲.۴. قضیه. یک گراف ۲- یال - همبند است اگر، و فقط اگر، دارای یک تجزیه دسته - بسته باشد و هر دور در یک گراف ۲- یال - همبند، دور آغازی در یک تجزیه دسته باشد.

اثبات. *کفایت شرط.* یالهای برشی، یالهایی هستند که روی دورها نیستند. پس یک گراف همبند، ۲- یال - همبند است اگر، و فقط اگر، هر یال روی یک دور قرار داشته باشد. با آغاز کردن از یک دور، کافی است نشان دهیم که افزودن یک دسته P به یک G، که ۲- یال - همبند است، ۲ - یال - همبندی را حفظ می‌کند. یالها در G از پیش در دورها قرار دارند. چون G همبند است، بنابراین شامل یک مسیر میان نقاط پایانی

P است (که ممکن است یک نقطهٔ باشد). اجتماع این مسیر با P، دوری در $G \cup P$ است که شامل همه یالهای P است.

لزوم شرط. فرض کنیم G، ۲ - یال - همبند و P_0 یک دور در G باشد. فرض کنیم یک تجزیه دسته - بستهٔ $G_i = P_0 \cup \cdots \cup P_i$، از یک گراف G ساخته‌ایم. اگر $G_i \neq G$، آنگاه G دارای یک یال $uv \notin G_i$ است به‌طوری که $u \in V(G_i)$، زیرا G همبند است. چون G، ۲- یال - همبند است، uv روی یک دور C قرار دارد. C را دنبال می‌کنیم تا آنجاکه به $V(G_i)$ بازگردیم؛ از این به عنوان یک دسته باز یا بستهٔ P_{i+1} استفاده می‌کنیم تا زیرگراف را بزرگ کنیم. این فرآیند تنها با جذب همه G پایان می‌یابد.□

همبندی گرافهای سودار

نتایج ما دربارهٔ گرافهای k-همبند و k- یال - همبند، همچنین دربارهٔ گرافهای سودار به کار می‌رود، به این علت اکنون مفاهیم متناظر را برای گرافهای سودار مطرح می‌کنیم.

۱۰.۲.۴. تعریف. یک **مجموعهٔ *جداساز*** یا ***برش رأسی*** از یک گراف سودار D، یک مجموعهٔ $S \subseteq V(D)$ است به‌طوری که $D - S$ قویاً همبند نباشد. یک گراف سودار k-**همبند** است اگر هر برش رأسی دارای حداقل k رأس باشد. مینیمم اندازهٔ یک برش رأسی عبارت است از **همبندی** $k(D)$.

برای $S, T \subseteq V(D)$، فرض کنیم $[S,T]$ مجموعهٔ یالهایی از S به T باشد. یک ***برش یالی*** عبارت است از مجموعهٔ $[S,\overline{S}]$ برای یک $\phi \neq S \subset V(D)$. یک گراف سودار k - ***یال*** - **همبند** است اگر هر برش یالی دارای حداقل k یال باشد. مینیمم اندازهٔ یک برش یالی عبارت است از **همبندی *یالی*** $k'(D)$.

۱۱.۲.۴. تبصره. چون $|[S,\overline{S}]|$ تعداد یالهایی است که S را ترک می‌کنند، می‌توانیم تعریف یال - همبندی را به این صورت دوبارهٔ بیان کنیم: یک گراف یا گراف سودار

G، k - یال - همبند است اگر، و فقط اگر، برای هر زیرمجموعهٔ ناتهی سره S رأسها حداقل k یال در G موجود باشند که S را ترک کنند. □

گرافهای سودار قوی مشابه با گرافهای ۲- یال - همبند هستند.

۱۲.۲.۴. لم. افزودن یک دسته (سودار) به یک گراف سودار قوی، یک گراف سودار قوی بزرگتری را ایجاد می‌کند.

اثبات. همچنانکه در بالا توضیح دادیم، یک گراف سودار قوی است اگر، و فقط اگر، دارای یالی باشد که هر زیرمجموعهٔ ناتهی رأسها را ترک کند. اگر یک دسته باز یا دسته بستهٔ P را به یک گراف سودار قوی D بیفزاییم، آنگاه برای هر مجموعهٔ S به‌طوری که $\phi \subset S \subset V(D)$ از پیش یک یال داریم که S را ترک می‌کند و به $V(D) - S$ می‌رود. ما تنها نیاز به درنظرگرفتن مجموعه‌هایی داریم که با $V(D)$ اشتراک ندارند و مجموعه‌هایی که شامل همه $V(D)$ هستند اما نه همه $V(P)$. برای هرچنین مجموعه‌ای، یک یال وجود دارد که آن را در امتداد P ترک می‌کند. □

۱۳.۲.۴. مثال. *مسأله خیابان یک‌طرفه.* چه هنگام خیابانها در یک شبکهٔ راه می‌توانند همگی یک طرفه شوند بدون آنکه هیچ مکانی غیرقابل دسترس از دیگر مکانها نشود؟ این مسأله یعنی یک گراف چه هنگام دارای یک سودهی قوی است. روبینس[1] [۱۹۳۹] ثابت کرد G دارای یک سودهی قوی است اگر، و فقط اگر، ۲- یال - همبند باشد.

اگر G ناهمبند باشد، برخی از رأسها نمی‌توانند در هیچ‌سویی به دیگران برسند. اگر G دارای یک یال برشی باشد که از x به y در یک سو از G سودار شده باشد، آنگاه y نمی‌تواند در این‌سو به x برسد. از این‌رو شرط لازم است. برای کفایت شرط، از یک تجزیه دسته بسته از G استفاده می‌کنیم. دور آغازی را به‌طور سازگار سودار می‌کنیم تا یک گراف سودار قوی به‌دست آوریم. هنگامی که هر دسته جدید را می‌افزاییم و آن را

1) Robbins

به‌طور سازگار سودار می‌کنیم، لم ۱۲.۲.۴ تضمین می‌کند که هنوز یک گراف سودار قوی داریم. □

گرافهای k-همبند و k- یال - همبند

تاکنون دو مقیاس برای گرافهایی که خوب همبند باشند مطرح کرده‌ایم: آسیب‌ناپذیری در برابر حذفها و چندگانگی مسیرهای ارتباطی متناوب. با تعمیم دادن قضیهٔ ویتنی، نشان می‌دهیم که دو مفهوم گرافهای k-همبند یکسان هستند (به‌طور مشابهی برای k- یال - همبند). نخست موقعیت «موضعی» را با در نظر گرفتن x,y-مسیرها برای یک جفت ثابت $x,y \in V(G)$ مورد بحث قرار می‌دهیم. این تعاریف هم برای گرافها و هم برای گرافهای سودار برقرار هستند.

۱۴.۲.۴. تعریف. با در نظر گرفتن $x,y \in V(G)$، یک مجموعهٔ $S \subseteq V(G) - \{x,y\}$ یک x,y- **مجموعهٔ جداساز** است اگر $G - S$ هیچ x,y-مسیری نداشته باشد. اگر $xy \notin E(G)$، آنگاه **همبندی موضعی** $\kappa(x,y)$ مینیمم اندازهٔ یک x,y-مجموعهٔ جداساز است. **چندگانگی - مسیر موضعی** $\lambda(x,y)$ عبارت است از ماکسیمم تعداد x,y-مسیرهای دو به دو درونی - مجزا. **چندگانگی - مسیر** $\lambda(G)$ عبارت است از ماکسیمم k به‌طوری که G دارای k، x,y-مسیرهای دوبه‌دو درونی - مجزا به ازای هر $x,y \in V(G)$ باشد.

تفکیک G یک رأس را از دیگری غیرقابل دسترس می‌کند، پس،

$$\kappa(G) = \min\{k(x,y) : x,y \notin E(G)\}$$

به‌طور مشابهی، $\lambda(G) = \min_{x,y\in V(G)} \lambda(x,y)$. نخستین قضیهٔ منگر بیان می‌کند که $k(x,y) = \lambda(x,y)$؛ برابری کلی $\kappa(G) = \lambda(G)$ و نتایج مشابه برای همبندی یالی به‌وسیلهٔ دیگران نیز ملاحظه شده است، اما همگی به عنوان صورتهای قضیهٔ منگر در

نظر گرفته می‌شوند. حداقل ۱۵ اثبات برای نخستین قضیهٔ منگر منتشر شده است که بسیاری از آنها نتایج قویتری را اثبات می‌کند.[1]

با گونه یال موضعی آغاز می‌کنیم. استدلال چکیده‌ای است از آنچه برای قضیهٔ فورد - فولکرسون در بند ۳.۴ به‌کار می‌رود. باز هم تعاریف هم برای گرافها و هم برای گرافهای سودار برقرارند.

۱۵.۲.۴. تعریف. با در نظر گرفتن $x,y \in V(G)$، یک مجموعهٔ $F \subseteq E(G)$ یک x,y-***برشی*** است اگر $G-F$ هیچ x,y-مسیری نداشته باشد. ***همبندی - یال موضعی*** $\kappa'(x,y)$ عبارت است از مینیمم اندازهٔ یک x,y- برشی. ***چندگانگی - مسیر - یال موضعی*** $\lambda'(x,y)$ عبارت است از ماکسیمم تعداد x,y-مسیرهای دوبه‌دو مجزا - یال. ***چندگانگی - مسیر - یال*** $\lambda'(G)$ عبارت است از ماکسیمم κ به‌طوری که G دارای k، x,y-مسیرهای دوبه‌دو مجزا - یال به ازای هر $x,y \in V(G)$ باشد.

۱۶.۲.۴. قضیه. (قضیهٔ منگر یال - موضعی - الیاس - فاینشتاین[2] - شانون [۱۹۵۶]، فورد - فولگرسون [۱۹۵۶]) اگر x و y رأسهای متمایز در یک گراف یا گراف سودار G باشند، آنگاه $\lambda'(x,y) = k'(x,y)$.

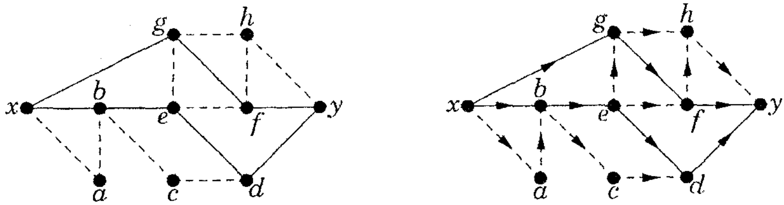
اثبات. فرض کنیم $\lambda'(x,y) = k$، و فرض کنیم $\{P_1, \cdots, p_k\}$ یک مجموعه از κ، x,y-مسیرهای دوبه‌دو مجزا - یال باشد. هر x,y-برشی دارای یک یال از هر P_i است، پس $\kappa'(x,y) \geq \lambda'(x,y)$. برای اثبات آنکه برابری برقرار است، یک مجموعهٔ S را که شامل x اما نه y است تعریف می‌کنیم، و ثابت می‌کنیم که تنها k یال S را ترک می‌کنند. حذف این یالها y را غیرقابل دسترس از S می‌سازد و ثابت می‌کند $\kappa'(x,y) = k$.

---

۱) استدلال نخستین منگر دارای شکافی بود که بعدها به‌وسیلهٔ کونیگ ترمیم شد.

2) Elias-Feinstein

فرض کنیم $\mathbf{P} = \bigcup_{i=1}^{k} E(P_i)$، و فرض کنیم $G' = G - \mathbf{P}$؛ یالهای خط چین شده در هر تصویر $E(G')$ هستند. فرض کنیم S مجموعهٔ رأسهایی باشد که می‌توان از x با یک **دنباله مجاز** از گامها به آنها رسید، که هرگام مجاز در امتداد یالی از G' یا پسرو در امتداد یالی از یک P_i (به رأس قبل از P_i) حرکت می‌کند.



یال uvای از G'، S را ترک نمی‌کند، زیرا یک دنباله مجاز از u به v بسط می‌یابد و v را در S قرار می‌دهد. هیچ مسیر P_iای نیست که S را ترک کند و بعد در امتداد یک یال uv به S بازگردد، زیرا یک دنبالهٔ مجاز از v به u با پسگرد در امتداد P_i از v به u، بسط می‌یابد، و u را در S قرار می‌دهد. از این رو حداکثر k یال S را در G ترک می‌کنند؛ روی هر P_i حداکثر تا یک یال.

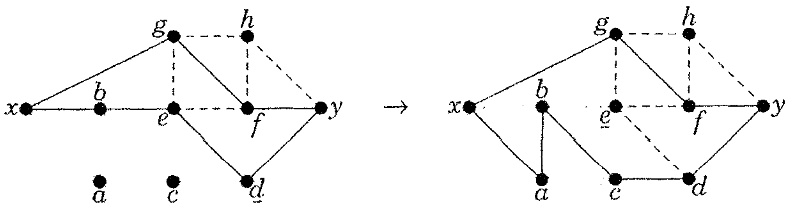
برای نشان دادن آنکه $y \notin S$، خلاف مطلب را فرض می‌کنیم. فرض کنیم Q مجموعهٔ یالها در یک دنبالهٔ مجاز باشد که به y می‌رسد (در تصویر، $k = 2$ و x، a، b، c، d، e، f، g، h، y یک دنباله مجاز است که به y می‌رسد). ادعا می‌کنیم که $\mathbf{P}' = \mathbf{P} \Delta Q$ شامل $\kappa + 1$ مسیر دو به دو مجزا - یال در G است. برای اثبات این مطلب، هر بار یک گام در دنباله مجاز به پیش می‌رویم، و $\kappa + 1$ مسیر دو به دو مجزا - یال را در G نگه می‌داریم، κ تا از آنها از x به y و یکی هم یک مسیر ناتمام که از x آغاز می‌شود. فرض کنیم ادعا از طریق گام جاری Q درست باشد، و فرض کنیم گام بعدی از u به v باشد.

حالت ۱ : $vu \notin \mathbf{P}$. مسیر ناتمام را بسط می‌دهیم.

حالت ۲: $vu \in \mathbf{P}$ و vu به یک x,y-مسیر جاری P متعلق است. به‌جای P مسیر P' متشکل از مسیر ناتمام جاری از x به v را جایگزین می‌کنیم که در پی آن v,y-قسمت از P می‌آید. x,u-قسمت از P، مسیر ناتمام جاری می‌شود.

حالت ۳: $vu \in \mathbf{P}$ اما vu روی یک x,y-مسیر جاری نیست. در این حالت، گام در امتداد مسیر ناتمام جاری به عقب می‌رود. v,v-قسمت پیش آمده از مسیر ناتمام را کنار می‌گذاریم، و x,v-قسمت آغازی را به عنوان مسیر ناتمام جاری نگه می‌داریم.

هنگامی که آخرین گام Q به y می‌رسد، مسیر ناتمام را به‌صورت یک x,y-مسیر اضافی کامل می‌کند، که با $\lambda'(x,y) = k$ در تناقض است. □

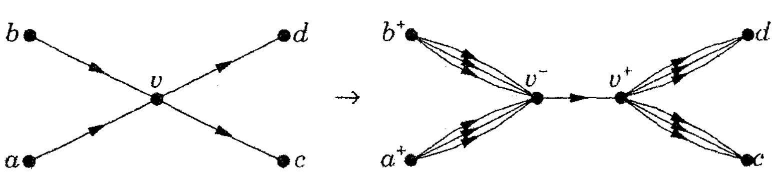


این بحث برای گرافها و گرافهای سودار به یک اندازهٔ معتبر است، تا مادامی که سو در امتداد P_i به هنگام دنبال کردن Q حفظ شود. رفتار رأس b در تصویر نشان می‌دهد که این بحث اثبات نمی‌کند که $\kappa(x,y) = \lambda(x,y)$. با وجود این، ما می‌توانیم برابریهای موضعی باقیمانده را از قضیهٔ منگر یال - موضعی برای گرافهای سودار به‌دست آوریم.

۱۷.۲.۴. قضیه. (قضیهٔ موضعی منگر برای گرافهای سودار) در یک گراف سودار D با $x \not\leftrightarrow y$، ماکسیمم تعداد $\lambda(x,y)$ از x,y-مسیرهای دو به دو درونی - مجزا برابر است با مینیمم تعداد $\kappa(x,y)$ از راسهایی که حذفشان همه x,y-مسیرها را گسسته می‌کنند.

اثبات. هر x,y-مجموعهٔ جداساز دارای یک رأس از هر مسیر در یک مجموعهٔ مینیمم از مسیرهای دوبه دو درونی - مجزا می‌باشد، پس $k(x,y) \geq \lambda(x,y)$. برای اثبات آنکه برابری برقرار است، گراف سودار D را طوری تبدیل می‌کنیم که x,y -مسیرهای درونی

- مجزا در D، x,y-مسیرهای مجزا - یال در گراف سودار جدید D' شوند، و آنگاه قضیهٔ ۱۶.۲.۴ را برای D' به‌کار می‌بریم. D' را با تقسیم کردن هر $v \in V(D) - \{x,y\}$ به دو رأس v^+ و v^- همراه با یک یال درونی منفرد v^-v^+، از D تشکیل می‌دهیم. فرض کنیم R مجموعهٔ یالهای درونی باشد. برای هر یال $uv \in E(D)$، $n(D)$ نسخه‌هایی از یال u^+v^- در D' را اضافه می‌کنیم.



چون x,y-مسیرها، در میان یالهای درونی و نسخه‌های یالهای اولیهٔ تناوبی است، x,y-مسیرهای مجزا - یال در D' نمی‌توانند دو نسخه از یک یال اولیهٔ را به کار برند. علاوه بر این، چون یال درونی از هر رأس D را می‌توان تنها یک بار به‌کار برد، x,y-مسیرهای مجزا - یال در D' هنگامی که هر یال درونی v^-v^+ به صورت همان رأس اولیهٔ v منقبض می‌شود، x,y-مسیرهای درونی - مجزا در D می‌شوند. با به کارگیری این مطلب در مورد یک مجموعهٔ ماکسیمم از x,y-مسیرهای دوبه دو مجزا - یال در D'، نتیجه می‌شود $\lambda_D(x,y) \geq \lambda'_{D'}(x,y)$.

نسخه‌های اضافی یالهای اولیه در D اطمینان می‌دهند که مینیمم x,y-برشها در D' تنها یالهای درونی را به کار می‌برند. یک x,y-برش مینیمم F که یک نسخه از یک یال uv را به کار می‌برد، همه نسخه‌های uv را استفاده می‌کند، در غیر این‌صورت جایگزینی آن نسخه یک x,y- مسیر به‌دست می‌دهد که می‌تواند با استفاده از یک نسخه از uv که در F نباشد برای به‌دست آوردن یک x,y-مسیر در $D' - F$، دوبارهٔ راهیابی شود. این مطلب ایجاب می‌کند که هر x,y-برش مینیمال که شامل یک یال بیرون R باشد دارای حداقل $n(D)$ یال است. تمام مجموعهٔ R، از طرف دیگر، دارای تنها $n(D) - ۲$ یال است و همه x,y-مسیرها را می‌برد، بنابراین R شامل هر x,y-برش مینیمم می‌شود. فرض کنیم

F یک x,y-برش مینیمم در D' باشد. چون هر x,y-مسیر در D به یک x,y-مسیر در D' گسترش می‌یابد، مجموعهٔ $S=\{v : v^-v^+\in F\}$ یک x,y-مجموعهٔ جداساز به اندازهٔ $\kappa'_{D'}(x,y)$ در D است. از این‌رو $k_D(x,y)\le k'_{D'}(x,y)$.

ثابت کرده‌ایم که $\lambda'_{D'}(x,y)\le\lambda_D(x,y)\le k_D(x,y)\le k'_{D'}(x,y)$. بنابر قضیهٔ ۱۶.۲.۴، دوکمیت بیرونی برابر هستند، و از این‌رو دوکمیت درونی نیز برابر می‌شوند.□

ملاحظه کردیم که اثبات قضیهٔ ۱۶.۲.۴ هم برای گرافها و هم برای گرافهای سودار برقرار است. تنها یک گونه موضعی از قضیهٔ منگر باقی می‌ماند که دربارهٔ همبندی موضعی در گرافهاست، و از قضیهٔ ۱۷.۲.۴ با یک تبدیل اضافی ساده نتیجه می‌شود.

۱۸.۲.۴. فرع. (قضیهٔ موضعی منگر - منگر [۱۹۲۷]) اگر $x,y\in V(G)$ و $x\leftrightarrow y$، آنگاه $\lambda(x,y)=\kappa(x,y)$.

اثبات. فرض کنیم D گراف سوداری باشد که از G به‌وسیلهٔ جایگزینی هر یال uv از G به‌جای یک جفت از یالهای uv و vu در D به‌دست آمده است. دو دنبالهٔ رأسها، x,y-مسیرهای درونی - مجزا در G تشکیل می‌دهند اگر، و فقط اگر، x,y-مسیرهای درونی - مجزا در D تشکیل دهند، و یک مجموعهٔ S یک x,y- مجموعهٔ جداساز در G است اگر، و فقط اگر، یک x,y-مجموعهٔ جداساز در D باشد. از این‌رو $\kappa_G(x,y)=k_D(x,y)$ (اگر $xy\notin E(G)$) و $\lambda_G(x,y)=\lambda_D(x,y)$، و قضیهٔ ۱۷.۲.۴ را به کار می‌بریم. □

گونه‌کلی برای گرافهای k-همبند، که نخستین بار به وسیلهٔ ویتنی [۱۹۳۲] مورد ملاحظه قرار گرفت، معمولاً به عنوان قضیهٔ منگر شناخته می‌شود. گونه‌های کلی برای یالها و گرافهای سودار به وسیلهٔ فورد و فولکرسون [۱۹۵۶] مورد ملاحظه قرار گرفتند.

۱۹.۲.۴. فرع. («قضیهٔ منگر») همبندی G برابر است با ماکسیمم κ به‌طوری که به‌ازای هر $x,y\in V(G)$ داشته باشیم $\lambda(x,y)\ge\kappa$. همبندی یالی G برابر است با ماکسیمم κ به‌طوری که به‌ازای هر $x,y\in V(G)$ داشته باشیم $\lambda'(x,y)\ge\kappa$.

هر دو گزاره هم برای گرافها و هم برای گرافهای سودار برقرارند.

اثبات. قضیهٔ ۱۶.۲.۴ بیدرنگ به‌دست می‌دهد که $\kappa'(G) = \lambda'(G)$. برای $\kappa(G)$، داریم $k(x,y) = \lambda(x,y)$ هنگامی که $x,y \notin E(G)$، و $\kappa(G)$ مینیمم این مقادیر است. تنها نیاز داریم که نشان دهیم $\lambda(x,y)$ نمی‌تواند کوچکتر از $\kappa(G)$ باشد هنگامی که $xy \in E(G)$. با به کار بردن قضیهٔ منگر برای $G - xy$ و اثر حذف یال روی $\kappa(G)$، داریم

$$\lambda_G(x,y) = ۱ + \lambda_{G-xy}(x,y) = ۱ + \kappa_{G-xy}(x,y) \geq ۱ + \kappa(G - xy) \geq \kappa(G)$$
□

کاربردهای قضیهٔ منگر

دیراک[1] قضیهٔ منگر را به دیگر خانواده‌های مسیرها بسط داد. یک x,U-فَن[2] عبارت است از مجموعه‌ای از x,U-مسیرها به‌طوری که هر دوتای آنها تنها در رأس x شریک باشند. اگر $x \in U$، آنگاه یک x,U- فَن[2] می‌تواند شامل مسیری به طول ۰ باشد.

۲۰.۲.۴. قضیهٔ. (لم فَن، دیراک [۱۹۶۰]). یک گراف κ-همبند است اگر، و فقط اگر، دارای حداقل $\kappa + ۱$ رأس باشد، و برای هر انتخاب x، U با قید $|U| \geq \kappa$، یک x,U-فَن به اندازهٔ κ داشته باشد.

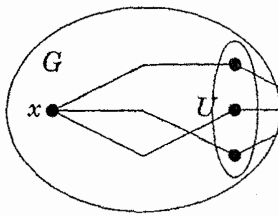
اثبات. فرض کنیم G، κ-همبند است، و G' را با افزودن یک رأس جدید y که مجاور با همه U باشد از G بسازیم. بسط لم (۲.۲.۴) ایجاب می‌کند که G' نیز κ-همبند است، و آنگاه قضیهٔ منگر k، x,y-مسیر دو به دو درونی - مجزا را در G' به‌دست می‌دهد. حذف y از این مسیرها یک x,U-فَن به اندازهٔ κ در G ایجاد می‌کند.

---

1) Dirac

۲) x,U-فَن عبارت است از مسیرهای دوبه‌دو درونی - مجزا از x به رأسهای متمایز U.—م.

برعکس، فرض کنیم G در شرط فَن صدق می‌کند. برای هر $v \in V(G)$، یک v, U-فَن به اندازهٔ κ با قید $U = V(G) - v$ وجود دارد، پس $\delta(G) \geq \kappa$. با در نظر گرفتن $x, y \in V(G)$، فرض کنیم $U = N(y)$. می‌توانیم κ مسیر از یک x, U-فَن را به‌وسیلهٔ یالهایی از U به y بسط دهیم تا به‌دست آوریم $\lambda(x, y) \geq \kappa$. از این‌رو، G، κ-همبند است. □



فرض کنیم G، κ-همبند است. با استفاده از لم فَن، می‌توان نشان داد که هر κ رأس در G روی یک دور قرار دارد (تمرین ۲۰). لم فَن به‌طور قابل ملاحظه‌ای تعمیم می‌یابد؛ اگر X، Y مجموعه‌های مجزا از رأسها در G باشند، آنگاه می‌توانیم عرضه‌ها را با عدد صحیح روی X و تقاضاها را روی Y مشخص کنیم (که مجموع آنها به κ در هر مجموعه بالغ شود) و κ، X, Y-مسیرهای دو به دو درونی - مجزا با چندگانگی‌های مشخص شده در نقاط پایانی به‌دست آوریم (تمرین ۲۳).

کاربردهای قضیهٔ منگر متضمن مدلسازی یک مسأله می‌شود به‌طوری که اشیای مطلوب متناظر با مسیرهایی در یک گراف یا گراف سودار شوند، که اغلب به‌وسیلهٔ بحثهای تبدیل گراف حاصل می‌شود. به عنوان مثال، با در نظر گرفتن یک گردایه از مجموعه‌های $\mathbf{A} = A_1, \cdots, A_m$ با اجتماع X، یک ***دستگاه از نماینده‌های متمایز*** [1] (SDR) عبارت است از یک مجموعهٔ $\{x_1, \cdots, x_m\}$ از عناصر متمایز به‌طوری که $x_i \in A_i$. یک شرط لازم و کافی برای وجود یک SDR آن است که به‌ازای هر $I \subseteq [m]$ داشته باشیم $|\bigcup_{i \in I} A_i| \geq |I|$. اثبات این مطلب به آسانی با مدلسازی $\mathbf{A}$ با یک گراف

1) System of distinct representatives

دوبخشی مناسب و به‌کار بردن قضیهٔ هال (تمرین ۹.۱.۳) انجام می‌گیرد. قضیهٔ هال در ابتدا در زبان SDRها اثبات شده است و هم‌ارز قضیهٔ منگر می‌باشد (تمرین ۱۸).

فورد و فولکرسون مسأله دشوارتری را مورد ملاحظه قرار دادند. فرض کنیم $\mathbf{A} = A_1, \cdots, A_m$ و $\mathbf{B} = B_1, \cdots, B_m$ دو دستگاه از مجموعه‌ها باشند. ممکن است بپرسیم چه هنگام یک دستگاه **مشترک** از نماینده‌های متمایز[1] وجود دارد $(CSDR)$، یعنی یک مجموعهٔ از m عنصر که یک SDR برای $\mathbf{A}$ و همچنین برای $\mathbf{B}$ باشد. آنها یک شرط لازم و کافی یافتند.

۲۱.۲.۴. قضیهٔ. (فورد - فولکرسون [۱۹۵۸]) خانواده‌های $\mathbf{A} = \{A_1, \cdots, A_m\}$ و $\mathbf{B} = \{B_1, \cdots, B_m\}$ دارای یک دستگاه مشترک از نماینده‌های متمایز $(CSDR)$ هستند اگر، و فقط اگر، برای هر جفت $I, J \subseteq [m]$ داشته باشیم

$$|(\cup_{i\in I} A_i) \cap (\cup_{j\in J} B_j)| \geq |I| + |J| - m$$

اثبات. یک گراف سودار G را با رأسهای متمایز s و t و رأسهای a_i برای $A_i \in \mathbf{A}$، b_j برای $B_j \in \mathbf{B}$، و x برای هر عنصر x در مجموعه‌ها می‌سازیم. یالها عبارت‌اند از

$$\{sa_i : A_i \in \mathbf{A}\} \qquad \{a_i x : x \in A_i\}$$

$$\{b_j t : B_j \in \mathbf{B}\} \qquad \{x b_j : x \in B_j\}$$

هر s,t-مسیر عضوی از اشتراک یک A_i و یک B_j برمی‌گزیند. یک $CSDR$ وجود دارد اگر، و فقط اگر، یک مجموعه از m، s,t-مسیرهای دو به دو درونی - مجزا وجود داشته باشد. بنابر قضیهٔ منگر، کافی است نشان دهیم که شرط بیان شده، هم‌ارز با نداشتن s,t-برش به اندازهٔ کمتر از m می‌باشد. فرض کنیم $R \subseteq V(G) - \{s,t\}$، و فرض کنیم $I = \{a_i\} - R$ و $J = \{b_j\} - R$. نتیجه می‌گیریم که R یک s,t-برش است اگر، و فقط اگر، $(\cup_{i\in I} A_i) \cap (\cup_{j\in J} B_j) \subseteq R$. از این‌رو برای یک s,t-برش

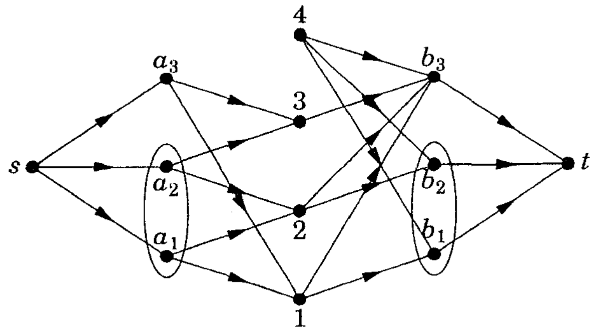
1) Common system of distinct representatives

خواهیم داشت

$$|R| \geq |(\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{j\in J} B_j)| + (m-|I|) + (m-|J|)$$

این کران پایین برای هر s,t-برش حداقل m است اگر، و فقط اگر، شرط بیان شده برقرار باشد. □

۲۲.۲.۴. مثال. *گراف سودار برای $CSDR$.* در مثال زیر، عناصر عبارت‌اند از $\{۱,۲,۳,۴\}$، $\mathbf{A} = \{۱۲, ۲۳, ۳۱\}$، و $\mathbf{B} = \{۱۴, ۲۴, ۱۲۳۴\}$. فرض کنیم $R \cap \{a_i\} = \{a_۱, a_۲\}$ و $R \cap \{b_j\} = \{b_۱, b_۲\}$. در این استدلال، قرار می‌دهیم $I = \{a_۳\}$ و $J = \{b_۳\}$، و ملاحظه می‌کنیم که R یک s,t-برش است اگر، و فقط اگر، ۱ و ۳ را نیز شامل شود. □



مفهوم همبندی یال موضعی، نقش عمیقی در تعمیم بخشیدن به قضیهٔ روبینس برای مثال ۱۳.۲.۴ دارد. هنگامی که G دارای یک سودهی k- یال - همبندی است، تبصره ۱۱.۲.۴ ایجاب می‌کند که G باید $۲k$ - یال - همبند باشد. ناش - ویلیامز [۱۹۶۰] ثابت کردند که این شرط آشکارا کافی نیز هست. این مطلب هنگامی که G اویلری است (تمرین ۱۶) آسان است، اما در حالت کلی کاملاً دشوار می‌باشد. مادر[1] [۱۹۷۸] اثبات دیگری برای این مطلب با استفاده از قضیهٔ زیر ارائه کرد (تمرینات ۳۰-۳۳ را ببینید). بحث جامعی از این مطلب و دیگر قضایای مربوط به سودهی در فرانک[2] [۱۹۹۳] ظاهر

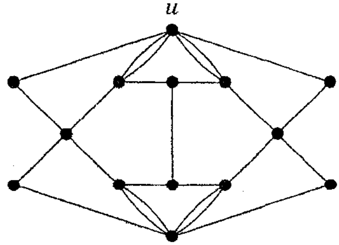
1) Mader 2) Frank

می‌شود.

۲۳.۲.۴. قضیهٔ. (مادر [۱۹۷۸]) اگر z یک رأس از یک گراف G باشد به‌طوری که $d_G(z) \notin \{۰, ۱, ۳\}$ و z متصل به هیچ یال برشی نباشد، آنگاه z دارای همسایه‌های x و y است به‌طوری که به ازای هر $u, v \in V(G) - \{z\}$ داشته باشیم $\kappa_{G-xz-yz+xy}(u,v) = \kappa_G(u,v)$.

تمرینات

۱.۲.۴. (−) $\kappa(u,v)$ و $\kappa'(u,v)$ را در گراف رسم شده زیر تعیین کنید.



۲.۲.۴. (−) فرض کنیم G گراف سودار با مجموعهٔ رأسهای [۱۲] باشد که در آن $i \to j$ اگر و فقط اگر i بر j بخشپذیر باشد. $\kappa(۱, ۱۲)$ و $\kappa'(۱, ۱۲)$ را تعیین کنید.

۳.۲.۴. (−) ثابت یا رد کنید: اگر P یک u, v-مسیر در یک گراف ۲-همبند G باشد، آنگاه یک u, v-مسیر Q وجود دارد که درونی - مجزا در مقابل P است.

۴.۲.۴. (−) فرض کنیم G یک گراف ساده باشد، و فرض کنیم $H(G)$ گرافی با مجموعهٔ رأسهای $V(G)$ است به‌طوری که $uv \in E(H)$ اگر، و فقط اگر، u، v روی یک دور مشترک در G ظاهر شوند. گرافهای G را طوری مشخص کنید که H یک خوشه باشد.

۵.۲.۴. ثابت کنید که یک گراف ساده G، ۲-همبند است اگر، و فقط اگر، برای هر سه‌تایی مرتب (x, y, z) از رأسها، G دارای یک x, z-مسیر از طریق y باشد. (چاین[1]

1) Chein

[۱۹۶۸])

۶.۲.۴. ثابت کنید که یک گراف G با حداقل چهار رأس ۲-همبند است اگر، و فقط اگر، برای هر جفت X، Y از زیرمجموعه‌های رأسهای متمایز با قید $|X|, |Y| \geq ۲$، دو مسیر کاملاً متمایز $P_۱$ و $P_۲$ در G وجود داشته باشند به‌طوری که هر کدام یک نقطه پایانی در X و یک نقطه پایانی در Y داشته باشند و رأس درونی در X یا Y نباشد.

۷.۲.۴. ثابت کنید که یک گراف ساده G، ۲-همبند است اگر، و فقط اگر، G را بتوان از $C_۳$ به‌وسیلهٔ یک دنباله از افزایشهای یالها و زیرتقسیمهای یال به دست آورد.

۸.۲.۴. (+) فرض کنیم v یک رأس ازگراف ۲-همبند G باشد. ثابت کنید که v دارای یک همسایه u است به‌طوری که $G - u - v$ همبند باشد. (چارتراند - لزنیک [۱۹۸۶، صفحه ۵۱])

۹.۲.۴. فرض کنیم G یک گراف ۲-همبند باشد. ثابت کنید که اگر $T_۱$، $T_۲$ دو درخت فراگیر از G باشند، آنگاه $T_۱$ را می‌توان به $T_۲$ به‌وسیلهٔ دنباله‌ای از اعمالی که در آنها یک برگ را حذف کرده و با استفاده از یال دیگری از G دوبارهٔ متصل کرد تبدیل نمود.

۱۰.۲.۴. (!) **عضویت در دورهای مشترک.**

الف) ثابت کنید که دو یال متمایز در یک بلوک از یک گراف قرار می‌گیرند اگر، و فقط اگر، آنها به یک دور مشترک متعلق باشند.

ب) فرض کنیم $e, f, g \in E(G)$، و فرض کنیم G دارای دوری از e و f و دوری از f و g باشد. ثابت کنید که G همچنین دارای دوری از e و g است. (توضیح: این مسأله ایجاب می‌کند که «عضویت در یک دور مشترک» یک رابطهٔ هم‌ارزی است که رده‌های هم‌ارزی آن بلوکهای G را تعریف می‌کنند.)

۱۱.۲.۴. (!) برای یک گراف همبند G با حداقل سه رأس، ثابت کنید که گزاره‌های زیر هم‌ارزند.

الف) G، ۲- یال - همبند است.

ب) هر یال از G در یک دور ظاهر می‌شود.

پ) G دارای یک گذر بستهٔ است که شامل هر جفت مشخص از یالهاست.

ت) G دارای یک گذر بستهٔ است که شامل هر جفت مشخص از رأسهاست.

۱۲.۲.۴. (!) فرض کنیم G یک گراف ۲-یال - همبند است. یک رابطهٔ R را روی $E(G)$ به‌وسیلهٔ $(e,f) \in R$ اگر $e = f$ یا اگر $G - e - f$ ناهمبند باشد تعریف می‌کنیم. (لَواس [۱۹۷۹، صفحه ۲۷۷])

الف) ثابت کنید که $(e,f) \in R$ اگر، و فقط اگر، e، f به دورهای یکسان متعلق باشند.

ب) ثابت کنید که R یک رابطه هم‌ارزی روی $E(G)$ است.

پ) برای هر ردهٔ هم‌ارزی F، ثابت کنید که F مشمول در یک دور است.

ت) برای هر ردهٔ هم‌ارزی F، ثابت کنید که $G - F$ دارای یال برشی نیست.

۱۳.۲.۴. (!) یک u,v-**گردنبند** دنباله ای از دورهای C_1، ...، C_k است به‌طوری که $u \in C_1$، $v \in C_k$، دورهای پیاپی در دنباله در یک رأس شریک‌اند، و دورهایی که در فهرست پیاپی نباشند در هیچ رأسی شریک نیستند (تصویر را ببینید). با استفاده از استقرا روی $d(u,v)$ ثابت کنید که یک گراف G، ۲- یال - همبند است اگر، و فقط اگر، برای هر جفت $u,v \in V(G)$ یک u,v-**گردنبند** در G وجود داشته باشد. (**توضیح:** تضمین کردن یک u,v-گردنبند از تضمین کردن u,v- مسیرهای مجزا - یال قویتر است.)

۱۴.۲.۴. کوچکترین گراف را با همبندی ۳ که دارای یک جفت رأس نامجاور است که به وسیلهٔ چهار مسیر دو به دو درونی - مجزا به هم متصل شده‌اند تعیین کنید.

۱۵.۲.۴. (!) فرض کنیم G دارای رأسهای تنها نیست. ثابت کنید که اگر G دارای دورهای زوج نباشد، آنگاه هر بلوک از G یک یال یا یک دور فرد است.

۱۶.۲.۴. فرض کنیم G، $2k$- یال - همبند است و دارای یک گذر اویلری است. ثابت کنید که G دارای یک سودهی k - یال - همبند است. (ناش - ویلیامز [۱۹۶۰])

۱۷.۲.۴. (!) ثابت کنید که هر گراف k-همبند با قطر d دارای حداقل $\kappa(d-1)+2$ رأس است. ثابت کنید که این نابرابری به‌ازای هر κ بهترین وضع ممکن است هنگامی که $d \geq 2$.

۱۸.۲.۴. (!) با استفاده از قضیهٔ منگر ($(\kappa(x,y)=\lambda(x,y))$) قضیهٔ کونیگ - اگروری را ($(\alpha'(G)=\beta(G))$ هنگامی که G دوبخشی باشد) ثابت کنید.

۱۹.۲.۴. (!) فرض کنیم که G یک گراف k-همبند است و S، T زیرمجموعه‌های مجزا از $V(G)$ با اندازهٔ حداقل k هستند. ثابت کنید که G دارای k، S,T -مسیرهای دوبه‌دو مجزاست.

۲۰.۲.۴. (!) ثابت کنید که اگر S مجموعه‌ای از k رأس در یک گراف k -همبند G با قید $k \geq 2$ باشد، آنگاه G دارای یک دور شامل S است. (دیراک [۱۹۶۰]) (*راهنمایی:* از استقرا و لم فَن استفاده کنید.)

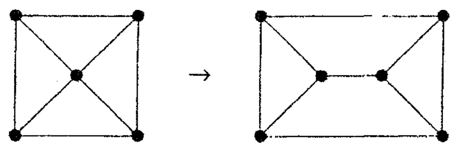
۲۱.۲.۴. برای $k \geq 2$، ثابت کنید که یک گراف با حداقل $k+1$ رأس، k -همبند است اگر، و فقط اگر، برای هر $T \subseteq S \subseteq V(G)$ با قید $|S|=k$ و $|T|=2$، یک دور در G وجود داشته باشد که شامل T بوده از $S-T$ اجتناب کند. (لایک[1] [۱۹۷۳])

۲۲.۲.۴. یک k-**دودستگی** ***رأسی*** از یک گراف G عبارت است از یک گراف H که از G به‌وسیلهٔ جایگزینی یک رأس $x \in V(G)$ به جای دو رأس مجاور x_1 و x_2 به‌دست می‌آید به‌طوری که $d_H(x_i) \geq k$ و $N_H(x_1) \cup N_H(x_2) = N_G(x) \cup \{x_1, x_2\}$.

الف) ثابت کنید که اگر G، گراف k-همبند و H یک k-دودستگی رأسی از G باشد، آنگاه H، k-همبند است.

1) Lick

ب) نتیجه بگیرید که هر گراف به‌دست آمدنی از یک «چرخ» $W_n = K_1 \vee C_{n-1}$ به وسیلهٔ یک دنباله از افزایشهای یالها و ۳-دودستگیهای رأسی روی رأسهای از درجهٔ حداقل ۴، ۳-همبند است. (توضیح: توته همچنین ثابت کرد که هر گراف ۳-همبند می‌تواند به این روش ساخته شود، اما این از اثبات کفایت شرط در این مسأله بسیار دشوارتر است. این مشخص‌سازی به آسانی برای $\kappa > 3$ تعمیم نمی‌یابد.)



۲۳.۲.۴. (!) فرض کنیم X، Y مجموعه‌های مجزا از رأسها در G باشند، و فرض کنیم به‌ازای هر $x \in X$، $y \in Y$ داشته باشیم $\kappa(x,y) \geq k$. فرض کنیم w به هر $v \in X \cup Y$ یک وزن که عدد صحیح نامنفی است نسبت می‌دهد به‌طوری که $\sum_{x\in X} w(x) = \sum_{y\in Y} w(y) = k$. ثابت کنید که یک گردایه از k، X,Y-مسیرها که دو به دو تنها در نقاط پایانی اشتراک دارند وجود دارد به‌طوری که تعداد مسیرهایی که در هر رأس پایان می‌یابند با وزن نسبت داده شده به آن رأس برابر است. (*راهنمایی:* از قسمت (الف) مسأله پیش و قضیه منگر استفاده کنید.)

۲۴.۲.۴. به‌طور مستقیم ثابت کنید که $\kappa'(x,y) = \lambda'(x,y)$ برای گرافهای سودار، برای گرافها نیز ایجاب می‌کند که $\kappa'(x,y) = \lambda'(x,y)$. (*راهنمایی:* از بحث تبدیل یک گراف استفاده کنید.)

۲۵.۲.۴. (!) فرض کنیم که P و Q مسیرهایی به‌طول ماکسیمم در یک گراف همبند G باشند. ثابت کنید که P و Q دارای یک رأس مشترک هستند.

۲۶.۲.۴. یک گراف ممکن است دارای بیش از یک طولانیترین دور باشد؛ به عنوان مثال، $K_{2,4}$ دارای چندین ۴-دور است، اما هیچ دوری به‌طول بیش از ۴ ندارد. برای $k = 2$ و $k = 3$، ثابت کنید که دو دور به‌طول ماکسیمم در یک گراف k-همبند باید

حداقل در k رأس شریک باشند. (*راهنمایی:* اگر چنین نباشد، یک دور طولانیتری بسازید.) برای هر $k \geq ۲$، یک گراف k-همبند بسازید به‌طوری که طولانیترین دورهای متمایز در بیش از k رأس اشتراک نداشته باشند.

۲۷.۲.۴. ***اتصالهای گراف.*** فرض کنیم $G_۱$ و $G_۲$ گرافهای k-همبند مجزا با $k \geq ۲$ هستند. $v_۱ \in V(G_۱)$ و $v_۲ \in V(G_۲)$ را انتخاب می‌کنیم. فرض کنیم B یک گراف دوبخشی با مجموعه‌های بخشی $N_{G_۱}(v_۱)$ و $N_{G_۲}(v_۲)$ باشد که دارای رأس تنها نیست و دارای یک جورسازی به اندازهٔ حداقل k است. ثابت کنید که $(G_۱ - v_۱) \cup (G_۲ - v_۲) \cup B$، k-همبند است.

۲۸.۲.۴. یک گراف ۲-همبند G، **۲-همبند به‌طور بحرانی** است اگر برای هر $xy \in E(G)$، گراف $G - xy$، ۲-همبند نباشد. ثابت کنید که اگر G، ۲-همبند باشد، آنگاه $G - xy$، ۲-همبند است اگر، و فقط اگر، x و y روی یک دور در $G - xy$ قرار داشته باشند. نتیجه بگیرید که یک گراف ۲-همبند، ۲-همبند به‌طور بحرانی است اگر، و فقط اگر، هیچ دوری دارای یک وتر نباشد. (دیراک [۱۹۶۷]، پلومر [۱۹۶۸])

۲۹.۲.۴. ***مطالب بیشتری دربارهٔ گرافهای ۲-همبند به‌طور بحرانی.***

الف) ثابت کنید که یک گراف ۲-همبند به‌طور مینیمال شامل یک رأس از درجهٔ ۲ است. (*راهنمایی:* از تجزیه دسته استفاده کنید.) (*یادآوری:* هالین[1] [۱۹۶۹] اثبات کرد که هر گراف k-همبند به طور مینیمال دارای یک رأس از درجهٔ k است.)

ب) ثابت کنید که یک گراف ۲-همبند به‌طور مینیمال روی $n \geq ۴$ رأس دارای حداکثر $۲n - ۴$ یال است، و برابری تنها برای $K_{۲,n-۲}$ برقرار است. (دیراک [۱۹۶۷]).

۳۰.۲.۴. با در نظر گرفتن یک گراف G و مجموعه ناتهی $S \subseteq V(G)$، فرض کنیم $d(S) = |[S, \overline{S}]|$. فرض کنیم که X و Y زیرمجموعه‌های ناتهی سره رأسهای G

1) Halin

هستند. ثابت کنید که $d(X \cap Y) + d(X \cup Y) \leq d(X) + d(Y)$.

۳۱.۲.۴. (+) یک گراف k- یال - همبند G، ***k-یال - همبند به‌طور بحرانی*** است اگر برای هر $xy \in E(G)$ گراف $G - xy$، ۲- یال - همبند نباشد. ثابت کنید که هر گراف k - یال - همبند به‌طور بحرانی دارای یک رأس از درجهٔ k است. (***راهنمایی:*** یک مجموعهٔ رأسهای مینیمال X را در نظر بگیرید به‌طوری که $|[X]| = k$. اگر $|X| \neq ۱$، از $G - xx'$ برای یک $xx' \in E(G[x])$ای استفاده کنید تا مجموعهٔ دیگر Yای به‌دست آورید به‌طوری که $|[Y]| = k$، و همچنین به‌گونه‌ای که X، Y با تمرین ۳۰ در تناقض باشد. (ما در [۱۹۷۱]، همچنین لَواس [۱۹۷۹، صفحه ۲۸۵] را ببینید.)

۳۲.۲.۴. (−) توضیح دهید چرا قضیهٔ مادر (۲۳.۲.۴) رأسهایی از درجهٔ ۳ را شامل نمی‌شود.

۳۳.۲.۴. (+) با استفاده از قضیهٔ مادر (۲۳.۲.۴) و تمرین ۳۱، قضیهٔ سودهی ناش - ویلیامز را ثابت کنید: هر گراف ۲k-یال - همبند دارای یک سودهی k- یال - همبند است. (*توضیح:* گونه ضعیفتری از قضیهٔ مادر، که در لَواس [۱۹۷۹، صفحه ۲۸۶-۲۸۸] ارائه شده است، نیز قضیهٔ ناش - ویلیامز را به همین روش به‌دست می‌دهد.)

۴-۳ مسأله‌های شارش شبکه

شبکه‌ای از لوله‌ها را در نظر می‌گیریم که دریچه‌هایی دارند که تنها در یک سو شارش را ممکن می‌سازند. هر لوله دارای ظرفیتی در واحد زمان است. می‌توانیم این مطلب را با رأسی برای هر پیوندگاه و یک یال (سودار) برای هر لوله که بر طبق ظرفیت وزندار شده است مدلسازی کنیم. همچنین فرض می‌کنیم که شارش نمی‌تواند در یک رأس میانی انباشته شود. با در نظر گرفتن دو موضع s، t در شبکه، ممکن است بپرسیم «شارش ماکسیمم (در واحد زمان) از s به t چقدر است.؟»

این پرسش با هرگونه انتقالی پیش می‌آید. شبکه می‌تواند نماینده جاده‌هایی با ظرفیتهای ترافیک، یا اتصالها در یک شبکهٔ کامپیوتری با ظرفیتهای انتقال داده‌ها، یا جریانهایی در یک شبکهٔ الکتریکی باشد. این مسأله دارای کاربرهایی در زمینه‌های صنعتی و برای قضایای مینیماکس ترکیبیاتی است. کتاب تأثیرگذار دربارهٔ این موضوع فورد - فولکرسون [۱۹۶۲] است. اخیراً پس از آن، آهوجا - ماگنانتی - اورلین [۱۹۹۳]. بحث جامعی از بسیاری جنبه‌های مسأله‌های شارش شبکهٔ ارائه می‌کند.

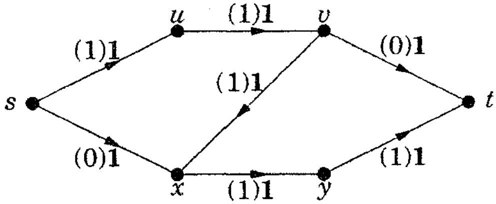
ماکسیمم شارش شبکه

۱.۳.۴. **تعریف.** یک ***شبکهٔ*** یک گراف سودار با یک ***ظرفیت*** نامنفی $c(e)$ روی هر یال e و یک ***رأس منبع*** مشخص s و ***رأس چاهک*** t است. رأسها همچنین گره‌ها نامیده می‌شوند. یک ***شارش*** f یک مقدار $f(e)$ را به هر یال e نسبت می‌دهد. برای شارش کل روی یالهای خارج شوند از یک گره v یا مجموعهٔ گره‌های S می‌نویسیم $f^+(v)$ یا $f^+(S)$؛ شارش کل روی یالهای وارد شونده $f^-(v)$ یا $f^-(S)$ است. یک ***شارش امکانپذیر قیدهای ظرفیت*** $0 \leq f(e) \leq c(e)$ را برای هر یال و ***قیدهای بقا*** $f^+(v) = f^-(v)$ را برای هر گره $v \notin \{s, t\}$ برقرار می‌کند. ***مقدار*** $val(f)$ از یک شارش f عبارت است از شارش خالص $f^-(t) - f^+(t)$ به درون چاهک. یک ***شارش ماکسیمم***، یک شارش امکانپذیر با مقدار ماکسیمم است.

۲.۳.۴. **مثال.** *یک شارش امکانپذیر.* *شارش صفر* به هر یال شارش ۰ را نسبت می‌دهد؛ این امکانپذیر است. در شبکهٔ زیر که هر یال دارای ظرفیت ۱ است، فرض کنیم $f(sx) = f(vt) = 0$ و برای هر یال دیگر e، $f(e) = 1$. (مقادیر شارش را در پرانتز می‌نویسیم.) این یک شارش امکانپذیر با مقدار ۱ است.

روش «آزمند» با شارش افزوده در امتداد مسیرهای منبع - چاهک با ظرفیت اضافی،

یک شارش ماکسیمم را جستجو می‌کند. در این مثال، هیچ مسیری با ظرفیت اضافی باقی نمی‌ماند، اما شارش f' با $f'(vx) = ۰$ و $f'(e) = ۱$ برای $e \neq vx$ دارای مقدار ۲ است. شارش f «ماکسیمال» است و هیچ شارش امکانپذیر دیگری نمی‌تواند با افزایش شارش روی برخی از یالها یافت شود، اما f یک شارش ماکسیمم نیست. □



مفهوم کلیتری از مسیر افزوده به ما اجازه می‌دهد که شارشهای ماکسیمم را پیدا کنیم. فرض کنیم P ما را از s به t می‌برد اگر سوهای روی یالها را نادیده بگیریم. دنبال کردن P ممکن است از یالهایی در سوی پیشرو (با پیکانها) و یالهایی در سوی پسرو (خلاف پیکانها) عبور کند. فرض کنیم f یک شارش امکانپذیر باشد. اگر هر یال پیشرو در P ظرفیت اضافی داشته باشد (یعنی $f(e) < c(e)$) و هر یال پسرو در P شارش ناصفر داشته باشد (یعنی $f(e) > ۰$)، آنگاه P را یک **مسیر f-*افزوده*** می‌نامند (اگرچه حتی ممکن است در واقع یک مسیر نباشد)، زیرا می‌توانیم مقادیر f را در امتداد P تغییر دهیم تا شارش امکانپذیر دیگری با مقدار بیشتر به‌دست آوریم. در مثال ۲.۳.۴، s، x، v، t یک مسیر f -افزوده است.

فرض کنیم *آزادی عمل*[1] P، مینیمم ظرفیت اضافی $c(e) - f(e)$ روی همه یالهای پیشرو P و شارش ناصفر $f(e)$ روی همه یالهای پسرو P باشد. بنابر تعریف مسیر f-افزوده، آزادی عمل چنین مسیری اکیداً مثبت است.

۳.۳.۴. لم. اگر P یک مسیر f-افزوده با آزادی عمل ε باشد، آنگاه افزایش شارش به

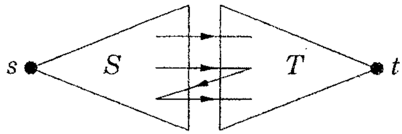
۱) «آزادی عمل» یک واژه استاندارد نیست. ما در اینجا آن را به کار می‌بریم، زیرا اختلاف میان دو طرف یک نابرابری **منفرد** مقید یک «ناپایا» نامیده می‌شود، اما ما در اینجا دربارهٔ ناپایای مینیمم روی مجموعه‌ای از قیدها صحبت می‌کنیم.

اندازهٔ ε در امتداد یالهای پیشرو P و کاهش شارش به اندازهٔ ε در امتداد یالهای پسرو P، یک شارش امکانپذیر f' را با $val(f') = val(f) + \varepsilon$ ایجاد می‌کند.

اثبات. بنابر تعریف آزادی عمل، برای هر یال e، داریم $\circ \le f'(e) \le c(e)$، پس قیدهای ظرفیت برقرار هستند. برای بقای قیدها نیاز داریم که تنها رأسهای P را مورد ملاحظه قرار دهیم؛ شارش در جاهای دیگر تغییر نکرده است. دو یال تشکیل دهنده یک ملاقات به وسیلهٔ P با یک رأس درونی v ، می‌توانند به یکی از چهار طریق نشان داده شده در زیر مرتب شوند. در هر حالت، تغییر شارش به بیرون از v همانند تغییر شارش به درون v است، پس شارش خالص به بیرون v صفر می‌ماند. سرانجام، شارش خالص به درون t در f' به اندازهٔ ε بزرگتر از f است. □

شارش روی یالهای پسرو ناپدید نشده‌اند، بلکه دوباره سودار شده است. افزایش در مثال ۲.۳.۴ عملاً مسیر شارش را قطع می‌کند و هر نیمه را بسط می‌دهد تا خود یک مسیر شارش شود. الگوریتمی را برای یافتن مسیرهای افزوده شرح خواهیم داد. نخست آنکه، چگونه تعیین می‌کنیم که آیا آنچه یافته‌ایم یک شارش ماکسیمم است؟ می‌خواهیم چیزی در شبکه بیابیم که **ثابت کند** مقدار شارش نمی‌تواند بزرگتر باشد.

۴.۳.۴. تعریف. یک **برش منبع / چاهک** گره‌های یک شبکه را به یک **مجموعهٔ منبع** S شامل s و یک **مجموعهٔ چاهک** T شامل t افراز می‌کند. همانند تعرف ۶.۱.۴ عناصر برش $[S,T]$ یالهای از S به T هستند؛ هر $s,t-$مسیر از حداقل یک یال $[S,T]$ استفاده می‌کند. **ظرفیت** برش $[S,T]$ که به صورت $\mathrm{cap}(S,T)$ نوشته می‌شود، کل ظرفیتهای روی یالهای $[S,T]$ است.



با در نظرگرفتن یک برش $[S,T]$، درک می‌کنیم که هر شارش از s به t باید از S به T بگذرد. پس ظرفیت یالهایی از S به T باید مقدار یک شارش امکانپذیر را محدود کند. این بر پایه درک ناخودآگاه ماست که شارش خالص به بیرون منبع باید به چاهک برسد. به‌ویژه، این شارش از هر برش منبع / چاهک عبور می‌کند.

۵.۳.۴. لم. اگر U مجموعه‌ای از گره‌ها در یک شبکهٔ باشد، آنگاه شارش خالص به بیرون U مجموع شارش خالص به بیرون گره‌های در U است. به‌ویژه، اگر f یک شارش امکانپذیر باشد و S، T یک برش منبع / چاهک باشد، آنگاه شارش خالص به بیرون S و شارش خالص به درون T برابر است با $val(f)$.

اثبات. سهم شارش $f(xy)$ را روی یک یال xy با $\alpha = f^+(U) - f^-(U)$ و با $\beta = \sum_{v\in U} f^+(v) - f^-(v)$ در نظر می‌گیریم. اگر $x,y \in U$، آنگاه $f(xy)$ سهمی از 0 تا α دارد، و سهم آن به‌طور مثبت ($(f^+(x))$) و به‌طور منفی ($(f^-(y))$) تا β می‌باشد. اگر $x,y \notin U$ ، آنگاه $f(xy)$ در هیچکدام از مجموعها سهمی ندارد. اگر $xy \in [U,\overline{U}]$، آنگاه آن در هر مجموع سهمی به‌طور مثبت خواهد داشت. اگر $xy \in [\overline{U},U]$، آنگاه آن در هر مجموع سهمی به طور منفی دارد. با جمع کردن روی همه یالها، به‌دست می‌آوریم $\alpha = \beta$.

اگر S، T یک برش منبع / چاهک و f یک شارش امکانپذیر باشد، آنگاه جمع کردن شارش خالص به بیرون گره‌های S به‌دست می‌دهد $f^+(s) - f^-(s)$، و جمع کردن شارش خالص به بیرون گره‌های T به‌دست می‌دهد $f^+(t) - f^-(t)$، که برابر است با $-val(f)$. از این‌رو شارش خالص روی هر برش منبع / چاهک با هردوی شارش خالص به بیرون s و شارش خالص به درون t برابر است. □

۶.۳.۴. فرع. (دوگانی ضعیف) اگر f یک شارش امکانپذیر و $[S,T]$ یک برش منبع / چاهک باشد، آنگاه $val(f) \leq cap(S,T)$.

اثبات. بنابر لم، مقدار f با شارش خالص به بیرون S برابر است. بدین سان $val(f) = f^+(S) - f^-(S) \leq f^+(S)$، زیرا شارش به درون S کمتر از ۰ نیست. چون قیدهای ظرفیت مستلزم آن است که $f^+(S) \leq cap(S,T)$، به‌دست می‌آوریم $val(f) \leq cap(S,T)$. □

برش منبع / چاهک با ظرفیت مینیمم بهترین کران را روی مقدار ماکسیمم یک شارش به‌دست می‌دهد. این مسأله بهینه‌سازی **برش مینیمم** را تعریف می‌کند. مسأله‌های شارش ماکسیمم و برش مینیمم روی یک شبکه، مسأله‌های بهینه‌سازی دوگان هستند.[۱] دوگانی ضعیف راه آسانی برای *اثبات* اینکه یک جواب بهین است فراهم می‌کند. اگر شارشی با مقدار α داشته باشیم، و برشی با مقدار α ارائه کنیم، آنگاه بنابر نابرابری دوگانی ضعیف، برش یک برش مینمم و شارش یک شارش ماکسیمم است.

اگر جوابهای مسأله‌های ماکسیمم و مسأله‌های مینیمم که دارای یک مقدار هستند، همواره وجود داشته باشند («دوگانی قوی»)، آنگاه اثبات کوتاهی برای بهینگی همواره وجود دارد. این مطلب برای همه مسأله‌ها با دوگانی ضعیف وجود ندارد (جورسازی و پوشش را در گرافهای کلی یادآوری می‌کنیم)، اما برای مسأله‌های شارش ماکسیمم و برش مینیمم وجود دارد. الگوریتم فورد - فولکرسون یک مسیر افزوده را جستجو می‌کند تا مقدار شارش را افزایش دهد. اگر چنین مسیری نیابد، آنگاه برشی با همان مقدار این شارش پیدا می‌کند؛ بنابر نابرابری دوگان ضعیف، هر دو بهین هستند. اگر هیچ دنباله نامتناهی از افزایشها ممکن نباشد، آنگاه تکرار به برابری میان مقدار شارش ماکسیمم و ظرفیت برش

۱) مفهوم دقیق «مسأله دوگان» از برنامه‌ریزی خطی منتج می‌شود. خواننده می‌تواند یک جفت دوگان مسأله‌های بهینه‌سازی را مانند یک مسأله ماکسیمم و یک مسأله مینیمم به‌طوری که $a \leq b$ هرگاه a و b مقادیر جوابهای امکانپذیر به ترتیب برای مسأله ماکسیمم و مسأله مینیمم باشند تلقی کند. بحث بیشتری را در مورد این مطلب در بند ۱.۸ ببینید.

مینیمم می‌انجامد.

۷.۳.۴. الگوریتم. *الگوریتم نشاندارکردن فورد - فولکرسون.*

ورودی: یک شارش امکانپذیر f در یک شبکه.

پنداره: یک مسیر f-افزوده یا یک برش با ظرفیت $val(f)$ را بازگردانید. با بزرگ کردن یک مجموعهٔ R ازگره‌های قابل دسترسی s از طریق مسیرهای دارای آزادی عمل مثبت، یک مسیر افزوده را جستجو کنید. رسیدن به t یک مسیر f -افزوده را کامل می‌کند. در طول جستجو، R مجموعهٔ گره‌هایی است که به آنها رسیده‌ایم، و S زیرمجموعه‌ای از این گره‌هاست، که از آنها برای بسط دادن R جستجو کرده‌ایم.

ارزشدهی آغازی: $R = \{s\}$ و $S = \phi$.

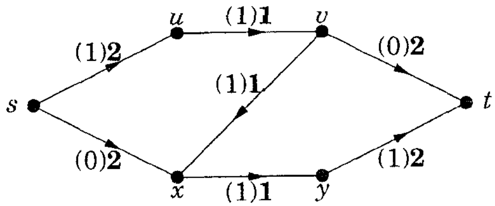
تکرار: $v \in R - S$ را انتخاب کنید. هر یال vw را که v را ترک می‌کند و هر یال uv را که به v وارد می‌شود در نظر بگیرید. اگر vw دارای ظرفیت اضافی باشد ($f(vw) < c(vw)$)، w را به R اضافه کنید. اگر uv دارای شارش ناصفر باشد ($f(uv) > ۰$)، آنگاه u را به R اضافه کنید. v را به عنوان رأسی که از آن به رأس جدید از R رسیدیم ثبت کنید. پس ازکشف همه یالهای متضمن v، v را به S بیفزایید.

اگر چاهک t در R گذاشته شده باشد، مسیر شمولها را روبه عقب به‌سوی $t \in R$ دنبال کنید تا یک مسیر f-افزوده را بازگردانید. اگر $R = S$، آنگاه به کار پایان دهید و برش $[S, \overline{S}]$ را بازگردانید. در غیر این‌صورت، تکرار کنید.

۸.۳.۴. مثال. *الگوریتم نشاندارکردن فورد - فولکرسون.* شبکهٔ زیر را با ظرفیتهایی که به صورت پررنگ چاپ شده‌اند در نظر می‌گیریم. فرض کنیم که $f(sx) = f(vt) = ۰$ و برای یالهای دیگر $f(e) = ۱$. هنگامی که الگوریتم نشاندار کردن را اجرا می‌کنیم (علت این نامگذاری آن است که رأسهای R را به عنوان «رسیده

شده»، «نشاندار» می‌کنیم)، نخست از s جستجو می‌کنیم و ظرفیت اضافی را به سوی u و x پیدا می‌کنیم، و آنها را نشاندار می‌نماییم. آنگاه ظرفیت اضافی روی uv یا xy وجود ندارد، اما شارش ناصفر روی vx وجود دارد. این مطلب ما را قادر می‌سازد که v را از x نشاندارکنیم. اکنون v تنها عنصر $R - S$ است، و از v جستجو می‌کنیم تا t را نشاندارکنیم. t را از v، v را از x، و x را از s نشاندارکردیم، پس مسیر افزوده s، x، v، t را یافته‌ایم.

پس از افزایش (آزادی عمل $\varepsilon = ۱$)، هر یال دارای شارش واحد است به جز $f'(vx) = ۰$. اگر الگوریتم نشاندار کردن را دوبارهٔ اجرا کنیم، ظرفیت اضافی روی $\{su, sx\}$ داریم و می‌توانیم $\{u, x\}$ را نشاندار کنیم، اما از این گره‌ها هیچ رأس دیگری را نمی‌توان نشاندار کرد. هنگامی که $R = S = \{s, u, x\}$ به کار پایان می‌دهیم. ظرفیت برش حاصل $[S, \overline{S}]$ برابر ۲ است، که با $val(f')$ برابر است و ثابت می‌کند که f' یک شارش ماکسیمم است. □



۹.۳.۴. قضیهٔ. (شارش ماکسیمم - برش مینیمم، فورد - فولکرسون [۱۹۵۶]). در هر شبکه، مقدار ماکسیمم یک شارش امکانپذیر با ظرفیت مینیمم یک برش منبع / چاهک برابر است.

اثبات. درمسأله شارش ماکسیمم، $f(e) = ۰$ به‌ازای هر e یک شارش امکانپذیر است. با در نظرگرفتن یک شارش امکانپذیر، الگوریتم نشاندارکردن را به کار می‌بریم. الگوریتم نشاندار کردن به‌طور مکرر رأسهایی به S (حداکثر $n(D)$ بار) می‌افزاید و با $t \in R$ («پیشرفت») یا $R = S$ پایان می‌یابد.

در حالت پیشرفت، یک مسیر افزوده داریم و مقدار شارش را افزایش می‌دهیم. آنگاه الگوریتم نشاندارکردن را تکرار می‌کنیم. هنگامی که ظرفیتها گویا باشند، هر افزایش شارش را با مضربی از $\frac{1}{a}$ افزایش می‌دهد، که در آن a کوچکترین مضرب مشترک مخرجهاست، بنابراین بعد از تعداد متناهی از افزایشها، ظرفیت یک برش در دسترس است و باید با $S = R$ به‌کار پایان دهیم.

در این حالت، ادعا می‌کنیم که $[S,T]$ یک برش با ظرفیت $val(f)$ است، که در آن $T = \overline{S}$ و f نشانگر شارش است. نخست، $[S,T]$ یک برش منبع / چاهک است، زیرا $s \in S$ و $t \notin R = S$. از آنجایی که هیچ گره‌ای از T در الگوریتم نشاندارکردن وارد R نشده، هیچ یالی از S به T دارای ظرفیت اضافی نیست، و هیچ یالی از T به S دارای شارش ناصفر در f نمی‌باشد. از این‌رو $f^-(S) = ۰$ و ظرفیت کل روی همه یالها از S به T برابر است با $f^+(S) - f^-(S)$. چون شارش خالص به بیرون هر مجموعهٔ که شامل منبع باشد، اما شامل چاهک نباشد، برابر است با $val(f)$، ثابت کرده‌ایم که $val(f) = cap(S,T)$. □

اثبات $\kappa'(x,y) = \lambda'(x,y)$ در قضیهٔ ۱۶.۲.۴ حالت خاصی از این استدلال بدون اصطلاحات شارشها، برشها، و نشاندارکردن است. «دنباله مجاز» یک افزایش یا برش با مقدار مطلوب ایجاد می‌کند. مسأله شارش ماکسیمم به‌طور کلی تنها یک گونه وزندار از مسأله مسیر مجزا - یال می‌باشد.

تا حال تنها ظرفیتهای گویا را بررسی کردیم. هنگامی که ظرفیتها گنگ باشند، الگوریتم نباید پایان پذیرد! فورد و فولکرسون مثالی از این مسأله را با تنها ده رأس فراهم کردند؛ که در پاپادیمتریو - اشتایگلیتز[1] [۱۹۸۲، صفحه ۱۲۶-۱۲۸] ظاهر می‌شود. اِدموندز و کارپ [۱۹۷۲] الگوریتم نشاندارکردن را به صورت استفاده از حداکثر $(n^۳ - n)/۴$ تکرار افزایش در یک شبکهٔ n-رأسی و کار برای ظرفیتهای حقیقی دلخواه، تعدیل کردند. همان‌طور

1) Papadimitriou-Steiglitz

که در مسألهٔ جورسازی دوبخشی، انجامشی است که همواره کوتاهترین مسیرهای افزوده را جستجو می‌کند، و این مطلب را به اتمام می‌رساند. امروزه الگوریتمهای سریعتری شناخته شده‌اند؛ بازهم آهوجا - ماگنانتی - اورلین [۱۹۹۳] را برای یک بحث جامع معرفی می‌کنیم.

شارشهای صحیح

در کاربردهای ترکیبیاتی، ما به‌طور نوعی ظرفیتهایی با عدد صحیح داریم و جوابی می‌خواهیم که در آن شارش روی هر یال یک عدد صحیح باشد.

۱۰.۳.۴. فرع. (قضیهٔ صحیح بودن). اگر همه ظرفیتها در یک شبکهٔ اعداد صحیح باشند، آنگاه شارش ماکسیممی وجود دارد که به هر یال شارش صحیح نسبت می‌دهد. علاوه بر این، یک شارش ماکسیمم می‌تواند به شارشهایی با مقدار واحد در امتداد مسیرهای از منبع به چاهک افراز شود.

اثبات. در الگوریتم نشاندارکردن فورد و فولکرسون، مقداری که مقادیر شارش به اندازهٔ آن به هنگام پیدا شدن یک مسیر افزوده تغییر می‌کند همواره یک مقدار شارش یا اختلاف میان یک مقدار شارش و یک ظرفیت است. اگر مقادیر شارش و ظرفیتهای حاضر اعداد صحیح باشند، آنگاه این اختلاف یک عدد صحیح است. با آغاز از شارش صفر، به این نحو که زمان اولی وجود ندارد یک شارش که عدد صحیح نیست ظاهر می‌شود.

بنابراین الگوریتم یک شارش ماکسیمم ایجاد می‌کند که در آن همه یالها شارشی با عدد صحیح دارند. در هر گره درونی، واحدهای شارش وارد شونده را با واحدهای شارش خارج شونده جور می‌کنیم. این کار s,t-مسیرها و شاید دورهای سوداری ایجاد می‌کند (شرایط بقا تضمین می‌کنند که مسیرها تنها در s یا t پایان می‌یابند). اگر دوری ایجاد شود، آنگاه می‌توانیم شارش را به درون آن ۱ واحد کاهش دهیم و آن را بدون تغییر مقدار

شارش حذف کنیم. این کار دقیقاً $val(f)$ مسیر از s به t باقی می‌گذارد، که هر کدام متناظر یک واحد از شارش هستند. □

قضیهٔ صحیح بودن مسیرهایی با شارش واحد را به‌دست می‌دهد. درکاربردها، به این واحدهای شارش معنا می‌دهیم. به عنوان مثال، می‌توانیم گونه‌های گوناگونی از قضیهٔ منگر را به عنوان فرعها (تمرینات ۶ و ۷) به‌دست آوریم.

۱۱.۳.۴. کاربرد. یک کمیته *خوش-متوازن* (هال [۱۹۵۶] را ببینید). سازمان اداری در یک دانشگاه بزرگ در حال ایجاد یک کمیته مهم است. یک استاد به نمایندگی از هر گروه انتخاب خواهد شد. بسیاری از استادان در دوگروه یا بیشتر مشغول به کار هستند، اما هیچیک نمی‌توانند به عنوان نماینده بیش از یک گروه انتخاب شوند. سازمان اداری همچنین می‌خواهد که کمیته تعداد برابری از استادیاران، دانشیاران، و استادان کامل باشد. چگونه می‌توانیم چنین کمیته‌ای فراهم کنیم؟

یک مسأله شارش ماکسیمم طرح می‌کنیم تا پاسخ را پیدا کنیم. گره‌های درونی نشانگر گروه‌ها، اعضای هیأت علمی جداگانه، و سه ردهٔ یاد شده هستند. یالهای دارای ظرفیت تنها ***یالهای واحد*** هستند. گره منبع s یک یال واحد را به هرگروه می‌فرستد. هر گروه یک یال واحد به هر کدام از استادانش می‌فرستد. هر استاد تنها به یک ردهٔ تعلق دارد و یک یال واحد به آن می‌فرستد. سرانجام، یک یال با ظرفیت k از هر رده به چاهک t وجود دارد، با در نظر گرفتن اینکه دانشگاه دارای $3k$ گروه است.

واحدهای شارش در این شبکهٔ متناظر با استادان کمیته هستند. یالها از منبع به گروه‌ها تضمین می‌کنند که هرگروه حداکثر یک نماینده دارد. چون ظرفیت یک برای هر استاد باقی می‌ماند، آن استاد تنها می‌تواند نماینده یک گروه باشد. سرانجام، ظرفیت روی یالها به چاهک تعادل مطلوب میان رده‌ها را تضمین می‌کند. کمیته مطلوب وجود دارد اگر، و فقط اگر، این شبکه یک شارش با مقدار $3k$ داشته باشد. □

قضیهٔ منگر آزمون مشابهی را به‌دست می‌دهد. یک گراف سودار D را با جایگزینی هر یال دارای ظرفیت k در شبکهٔ مثال ۱۱.۳.۴ با k نسخه موازی یک یال، تشکیل می‌دهیم. کمیته وجود دارد اگر، و فقط اگر، در D، $\lambda'(s,t) = ۳k$.

به‌طور کلیتر، از قضیهٔ منگر مستقیماً نتیجه می‌شود که در هر شبکه دارای اعداد گویا به عنوان ظرفیتها شارش ماکسیمم = برش مینیمم. پس از تبدیل ظرفیتها به اعداد صحیح، یک گراف سودار D را با تقسیم هر یال دارای ظرفیت j به j یال موازی، به‌دست می‌آوریم. $\lambda'_D(s,t)$، s,t-مسیر دو به دو مجزا - یال در D به واحدهای شارش در شبکهٔ متناظر N نگاشته می‌شوند. در مورد برشها، در اثبات قضیهٔ ۱۷.۲.۴ دیدیم که یک s,t-مجموعهٔ ناهمبندساز مینیمال شامل یک یال از یک مجموعه از یالهای موازی، همه آنها را شامل می‌شود؛ از این‌رو $\kappa'_D(s,t)$ ظرفیتهای کامل یالهای در N را می‌شمارد و ظرفیت مینیمم یک منبع / برش چاهک در N است.

هنگامی که کانون توجه روی کاربردهای ترکیبیاتی با ظرفیتهای واحد است، قضیهٔ منگر می‌تواند اثبات ساده‌تری از یک کاربرد از شارش شبکه را ارائه دهد (به عنوان مثال، قضیهٔ ۲۱.۲.۴ و تمرین ۱۱ را مقایسه کنید). برای محاسبه یا برای کاربردهایی با ظرفیتهای غیرواحد، شارش شبکهٔ و الگوریتم نشاندارکردن فورد - فولکرسون مناسبتر هستند.

۱۲.۳.۴. کاربرد. ***مسأله حذف بیسبال*** (شوارتس[1] [۱۹۶۶]) پس از برگزاری چندین مسابقه فصل، ممکن است فکر کنیم که آیا تیم T هنوز می‌تواند قهرمان شود. به عبارت دیگر، آیا می‌توان برنده‌های بازیهای باقیمانده را چنان تعیین کرد که هیچ تیمی با پیروزیهای بیش از تیم T فصل را به پایان نبرد؟ اگر چنین تخصیصی وجود داشته باشد، یک تخصیصی خواهد بود که در آن T همه بازیهای باقیمانده‌اش را می‌برد، و به W بُرد می‌رسد. می‌خواهیم بدانیم آیا می‌توان برندگان مسابقه‌ها را در میان دیگر تیمها چنان انتخاب کرد که هیچ تیمی بیش از W بَرد نداشته باشد.

1) Schwartz

فرض کنیم T_1، ...، T_n دیگر تیمها باشند. فرض کنیم w_i تعداد کنونی بردهای T_i باشد. فرض کنیم a_{ij} تعداد بازیهای باقیمانده میان T_i و T_j باشد. شبکه‌ای با n گره x_1، ...، x_n متناظر با تیمها و گره‌های y_{ij} متناظر با $\binom{n}{2}$ جفت از تیمها تشکیل می‌دهیم. یک منبع s و چاهک t را اضافه می‌کنیم، به‌طوری که یک یال از s به هرگره تیم و یک یال از هر جفت گره به t داشته باشیم. به هر جفت گره y_{ij} یالهایی از x_i و x_j وارد می‌شوند.

ظرفیتها، قیدها را مدلسازی می‌کنند. ظرفیت روی یال $y_{ij}t$ عبارت است از a_{ij} ، یعنی تعداد بازیهای باقیمانده میان T_i و T_j. ظرفیت روی یال sx_i عبارت است از $W - w_i$، یعنی ماکسیمم تعداد بُردهای اضافی که برای T_i مجاز می‌دانیم تا بتوانیم T را دارای بخت قهرمانی نگه داریم. ظرفیت روی یالهای x_iy_{ij} یا x_jy_{ij} عبارت است از ∞.

بنابر قضیهٔ صحیح بودن، یک شارش ماکسیمم به واحدهای شارش شکسته می‌شود. هر واحد متناظر با یک بازی است؛ نخستین یال برنده را مشخص می‌کند، و آخرین یال، جفت را معین می‌کنـــد. شبکه دارای یک شارش با مقدار $\sum_{ij} a_{ij}$ است اگر، و فقط اگر، همه بازیهای باقیمانده را بتوان بدون آنکه تیمی بیش از W بُرد داشته باشد انجام داد، که هم ارز با بخت قهرمانی برای T است. □

این کاربردهای ترکیبیاتی یک روح مشترک دارند: یک شبکه را طوری می‌سازیم که پیکربندی مطلوب وجود داشته باشد اگر، و فقط اگر، شبکهٔ دارای یک شارش به ا ندازهٔ کافی بزرگ باشد. اغلب قضیهٔ شارش ماکسیمم - برش مینیمم یک شرط لازم و کافی برای پیکربندی مطلوب به‌دست می‌دهد. تمرین ۱۷ این کار را برای مسأله حذف بیسبال انجام می‌دهد. دیگر مثالها شامل تمرینات ۶، ۷، ۹، ۱۱، ۱۶ و قضایای ۱۳.۳.۴ و ۱۴.۳.۴ و غیره می‌شوند.

عرضه‌ها و تقاضاها (اختیاری)

اینک مدل شبکه‌ای کلیتر را، که منبعهای چندگانه $X = \{x_i\}$ و چاهکهای چندگانه $Y = \{y_j\}$ را مجاز می‌شماریم در نظر می‌گیریم. همچنین به هر منبع x_i یک **عرضه** $\sigma(x_i)$ و به هر چاهک y_j یک ***تقاضای*** $\partial(y_j)$ را وابسته می‌کنیم. به قیدهای ظرفیت برای یالها و قیدهای بقا برای گره‌های درونی، ***قیدهای حمل و نقل*** را برای منبعها و چاهکها می‌افزاییم:

$$f^+(x_i) - f^-(x_i) \le \sigma(x_i) \qquad \text{برای } x_i \in X$$

$$f^-(y_j) - f^+(y_j) \ge \partial(y_j) \qquad \text{برای } y_j \in Y$$

با مقادیر مثبت برای $\{\partial(y_j)\}$، صفر امکانپذیر نیست؛ باید یک شارش امکانپذیر بیابیم که این قیدهای اضافی را در صورت وجود برقرار کند. اصطلاحات «عرضه / تقاضا» قیدها را پیش می‌آورد، باید تقاضاها را در چاهکها بدون تجاوز کردن از عرضه موجود در هر منبع برآورده کنیم. این مدل برای شرکتی با مرکزهای پخش چندگانه (منبعها) و خروجیهای خرده فروش (چاهکها) به کار می‌رود.

برای کل عرضه یا تقاضا در یک مجموعهٔ A از منبعها یا یک مجموعهٔ B از چاهکها می‌نویسیم $\sigma(A) = \sum_{v\in A}\sigma(v)$ و $\partial(B) = \sum_{v\in B}\partial(v)$، و برای $\sum_{e\in F}c(e)$ می‌نویسیم $c(F)$. با در نظر گرفتن یک مجموعهٔ T از رأسها، یک ***تقاضای خالص*** $\partial(Y\cap T) - \sigma(X\cap T)$ وجود دارد که باید به وسیلهٔ شارش از رأسهای باقیمانده برآورده شود. بنابراین لازم است که $c([\overline{T}, T])$ حداقل به این بزرگی باشد. برآورده کردن این برای هر مجموعهٔ T، همچنین برای یک شارش امکانپذیر کافی است.

۱۳.۳.۴. قضیهٔ. (گیل [۱۹۵۷]) در یک شبکهٔ N با منبعهای X، چاهکهای Y، و قیدهای حمل و نقل، یک شارش امکانپذیر وجود دارد اگر، و فقط اگر، برای هر افراز از رأسهای N در مجموعه‌های S و T داشته باشیم

$$c([S,T]) \ge \partial(Y\cap T) - \sigma(X\cap T)$$

اثبات. از پیش لزوم شرط را دیده‌ایم. برای کفایت شرط، یک شبکهٔ جدید N' را با افزودن یک زِبر منبع s و یک زِبر چاهک t، با یک یال با ظرفیت $\sigma(x_i)$ از s به هر $x_i \in X$ و یالی با ظرفیت $\partial(y_j)$ از هر $y_j \in Y$ به t، می‌سازیم. آنگاه N دارای یک شارش امکانپذیر است اگر، و فقط اگر، N' دارای یک شارش اشباع کننده هر یال به t باشد؛ یعنی، اگر، و فقط اگر، N' دارای یک شارش با مقدار $\partial(Y)$ باشد.

بنابر قضیهٔ فورد - فولکرسون، می‌دانیم که N' دارای شارشی به این مقدار است اگر، و فقط اگر، به‌ازای هر افراز S، T از $V(N)$، داشته باشیم $cap(S \cup s, T \cup t) \geq \partial(Y)$. برش $[S \cup s, T \cup t]$ در N' متشکل از $[S, T]$ از N، به علاوه یالهایی از s به T و یالهایی از S به t در N' می‌باشد. از این‌رو

$$cap(S \cup s, T \cup t) = c(S, T) + \sigma(T \cap X) + \partial(S \cap Y)$$

اکنون داریم $cap(S \cup s, T \cup t) \geq \partial(Y)$ اگر، و فقط اگر،

$$c(S, T) + \sigma(X \cap T) \geq \partial(Y) - \partial(Y \cap S) = \partial(Y \cap T)$$

که شرط فرض شده است. □

برای نمونه‌های خاص، ساخت N' نکته کلیدی است، زیرا یک شارش امکانپذیر در N (یا اثبات عدم امکان) را با اجرای الگوریتم فورد - فولکرسون روی شبکهٔ N' ایجاد می‌کنیم. هنگامی که هزینه‌ها (با واحد شارش) به یالها وابسته شوند، تعمیمی از مسأله حمل و نقل داریم (مثالهای ۱۶.۴.۲ و ۱۰.۲.۳ را ببینید). مسأله شارش با هزینه مینیمم را به بررسی بعدی واگذار می‌کنیم.

شرط گیل برای کاربردهای نظری سودمند است. فرض کنیم می‌خواهیم آزمون کنیم که آیا $p = (p_1, \cdots, p_m)$ و $q = (q_1, \cdots, q_n)$ به عنوان درجه‌های رأسهای یک گراف دوبخشی ساده G با افراز مضاعف X، Y در حالی که به‌ازای هر $x_i \in X$، $d(x_i) = p_i$ و به‌ازای هر $y_j \in Y$، $d(y_j) = q_i$ تحقق‌پذیر است. آشکارا $\sum p_i = \sum q_j$ لازم است، اما کافی نیست. می‌توانیم هر یال را در گراف مطلوب مانند یک واحد از شارش در نظر

بگیریم. تحقق‌پذیری را می‌توانیم به این ترتیب بیازماییم که یک شبکهٔ N از $K_{m,n}$ را به وسیلهٔ سودار کردن هر یال از X به Y بسازیم، به آن ظرفیت ۱ دهیم (برای پیشگیری از یالهای چندگانه)، و فرض کنیم $\sigma(x_i) = p_i$ و $\partial(y_j) = q_j$. در این صورت (p, q) تحقق‌پذیر است اگر، و فقط اگر، این شبکهٔ با قیدهای حمل و نقل دارای یک شارش امکانپذیر باشد.

۱۴.۳.۴. قضیهٔ. (گیل [۱۹۵۷]، رایزر [۱۹۵۷]) فرض کنیم $p_1 \geq \cdots \geq p_m$ و $q_1 \geq \cdots \geq q_n$. آنگاه (p, q) به‌عنوان دنباله‌های درجه‌های یک گراف دوبخشی ساده تحقق‌پذیر است اگر، و فقط اگر، برای $1 \leq k \leq n$، $\sum_{i=1}^{m} \min\{p_i, k\} \geq \sum_{j=1}^{k} q_j$.

اثبات. *لزوم شرط.* فرض کنیم (p, q) به‌وسیلهٔ G تحقق یافته، و دیگر نقاط پایانی یالهای متصل به یک مجموعه از k رأس را در Y در نظر می‌گیریم. چون G ساده است، هر $x_i \in X$ متصل به حداکثر k تا از این یالهاست، و همچنین x_i متصل به حداکثر p_i تا از این یالهاست. از این‌رو $\sum_{i=1}^{m} \min\{p_i, k\}$ یک کران بالا روی تعداد یالهای متصل به هر k رأس از X است، مانند آنهایی که درجه‌های q_1، ...، q_k دارند.

کفایت شرط. شبکهٔ N را که در بالا شرح داده شد تشکیل می‌دهیم. کافی است نشان دهیم که از شرط بیان شده در اینجا شرط گیل برای N نتیجه می‌شود. با در نظر گرفتن یک مجموعهٔ $S \subseteq V(N)$، تعریف می‌کنیم $I(S) = \{i : x_i \in S\}$ و $J(S) = \{j : y_j \in S\}$. برای هر افراز S، T از $V(N)$، داریم $\sigma(X \cap T) = \sum_{i \in I(T)} p_i$ و $\partial(Y \cap T) = \sum_{j \in J(T)} q_j$ و داریم $c([S, T]) = |I(S)| \cdot |J(T)|$.

با فرض $\kappa = |J(T)|$، این آخرین کمیت خواهد شد

$$c([S, T]) = |I(S)|k = \sum_{i \in I(S)} \kappa \geq \sum_{i \in I(S)} \min\{p_i, k\}$$

همچنین $\sum_{i \in I(T)} p_i \geq \sum_{i \in I(T)} \min\{p_i, k\}$، و $\sum_{j \in J(T)} q_j \leq \sum_{j=1}^{k} q_j$. هنگامی که همه اینها را با هم در نظر بگیریم، شرط $\sum_{i=1}^{m} \min\{p_i, k\} \geq \sum_{j=1}^{k} q_j$

ایجاب می‌کند که $c([S,T]) \geq \partial(Y \cap T) - \sigma(X \cap T)$. چون یک افراز دلخواه S، T رادر نظر گرفته‌ایم، شبکه دارای یک شارش امکانپذیر است که به گراف دوبخشی مطلوب تبدیل می‌شود. □

قضیهٔ ۱۴.۳.۴ مشابه دوبخشی طبیعی برای شرط اردوش - گاله برای دنباله‌های گرافیکی است (تمرین ۱۶.۳.۳). کمیت $\sum_{i=1}^{m} \min\{p_i, k\}$ دارای یک تعبیر ساده با استفاده از افرازهای اعداد صحیح است، که به وسیلهٔ رایزر [۱۹۵۷] مشاهده شد. با اندیسگذاری $\{p_i\}$ به ترتیب ناافزایشی، ماتریسی از نقاط با p_i نقطهٔ در سطر iاُم تشکیل می‌دهیم، که هر بار از ستون نخست آغاز شود. این نمودار فریرز[1] از افراز $t = \sum p_i$ به اعداد p_1، ...، p_m نامیده می‌شود. *افراز مزدوج* p^* با شمردن نقاط در هر ستون تشکیل می‌شود، در حالی که p_j^* تعداد نقاط در ستون jاُم است. کمیت $\sum_{i=1}^{m} \min\{p_i, k\}$ نقاط را در نخستین k ستون می‌شمارد. از این‌رو شرط موجود برای تحقق‌پذیری را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

برای $1 \leq k \leq n$ $\qquad \sum_{j=1}^{k} p_j^* \geq \sum_{j=1}^{k} q_j$

یک توسیع طبیعی مسأله شارش ماکسیمم، کرانهای پایین را یکی می‌کند. به‌جای آنکه صرفاً ظرفیتی روی هر یال تحمیل شود، می‌توانیم یک کران بالا و همچنین یک کران پایین نامنفی روی شارش مجاز در هر یال داشته باشیم، مانند $l(e) \leq f(e) \leq u(e)$. قیدهای بقا را همچنان روی گره‌های درونی تحمیل می‌کنیم. با در نظر گرفتن یک شارش امکانپذیر، می‌توانیم به آسانی الگوریتم نشاندار کردن فورد - فولکرسون را تعدیل کنیم تا یک شارش امکانپذیر ماکسیمم (یا مینیمم) را جستجو نماییم (تمرین ۴). مسأله پیدا کردن یک شارش امکانپذیر آغازی است. نخست یک کاربرد ارائه می‌کنیم.

۱۵.۳.۴. کاربرد. گرد کردن *ماتریس* (باچاراچ[2] [۱۹۶۶]) ممکن است بخواهیم درایه‌های یک ماتریس از داده‌ها را به اعداد صحیح بالاتر یا پاینتر گرد کنیم. اگر

1) Ferrers 2) Bacharach

همچنین مجموعهای سطر و مجموعهای ستون را ارائه کنیم، باید آنها را نیز به اعداد صحیح بالاتر یا پایینتر گرد کنیم تا مجموعهای سطر و مجموعهای ستون ماتریس گرد شده باشند. این یک *گرد کردن سازگار* است.

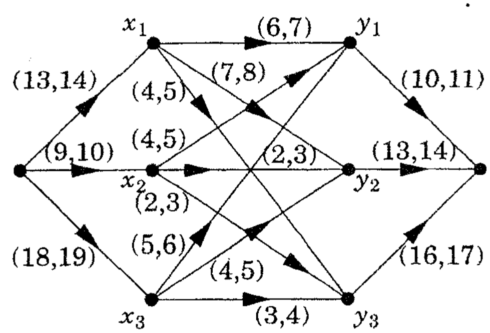
می‌توانیم مسأله گردکردن سازگار را به عنوان یک مسأله شارش امکانپذیر ارائه کنیم. رأسهای x_1، ...، x_n را برای سطرها و رأسهای y_1، ...، y_n را برای ستونهای ماتریس در نظر می‌گیریم. یک منبع s و یک چاهک t را اضافه می‌کنیم. به‌ازای همه مقادیر i و j یالهای sx_i، x_iy_j، y_jt را اضافه می‌کنیم. اگر ماتریس دارای درایه‌های a_{ij} با مجموعهای سطر r_1، ...، r_n و مجموعهای ستون s_1، ...، s_n باشد، قرار می‌دهیم

$$l(sx_i) = \lfloor r_i \rfloor \qquad l(x_iy_j) = \lfloor a_{ij} \rfloor \qquad l(y_jt) = \lfloor c_j \rfloor$$

$$u(sx_i)\lceil r_i \rceil \qquad u(x_iy_j) = \lceil a_{ij} \rceil \qquad u(y_jt) = \lceil c_j \rceil$$

مسأله شارش ماکسیمم را که برای آزمون یک شارش امکانپذیر در یک شبکه با کرانهای بالا و پایین مشخص می‌کنیم، دارای ظرفیتهای عدد صحیح است اگر همه $l(e)$ها و $u(e)$ ها اعداد صحیح باشند. از این‌رو قضیهٔ صحیح بودن به‌کار می‌آید، و ماتریس دارای یک گردکردن سازگار است اگر، و فقط اگر، شبکه‌ای که از آن ساختیم یک شارش امکانپذیر داشته باشد. □

$$\begin{pmatrix} 6.3 & 7.6 & 4.6 \\ 4.7 & 2.3 & 2.8 \\ 5.5 & 4.5 & 3.5 \end{pmatrix}$$



۱۶.۳.۴. کاربرد. *گردشها و شارشها با کرانهای پایین.* نخستین گام در حل یک مسأله شارش با کرانهای بالا و پایین، افزودن یالی است با ظرفیت نامتناهی از

چاهک به منبع. شبکهٔ حاصل دارای یک شارش امکانپذیر با بقا در هرگره است (که یک **گردش** نامیده می‌شود) اگر، و فقط اگر، شبکهٔ اولیهٔ دارای یک شارش امکانپذیر باشد.

می‌توانیم یک مسأله گردش امکانپذیر C را به یک مسأله شارش ماکسیمم N تبدیل کنیم، به این ترتیب که عرضه‌ها یا تقاضاها را در گره‌ها، و آنگاه یک زِبر منبع جدید s' و یک زِبر چاهک جدید t' را برای برآورده کردن آنها ارائه می‌کنیم. با در نظر گرفتن قیدهای شارش $l(e) \leq f(e) \leq u(e)$، فرض کنیم برای هر یال e، $c(e) = u(e) - l(e)$. همچنین، فرض کنیم برای هر رأس v، $b(v) = l^-(v) - l^+(v)$، که در آن $l^+(v) = \sum_{e\in[v,V(C)-v]} l(e)$ و $l^-(v) = \sum_{e\in[V(C)-v,v]} l(e)$. چون هر $l(uv)$ به یک اندازهٔ در $l^+(u)$ و $l^-(v)$ سهم دارد، داریم $\sum b(v) = 0$. یک شارش f یک گردش امکانپذیر در C است اگر، و فقط اگر، شارش f' که به صورت $f'(e) = f(e) - l(e)$ تعریف شده است در $0 \leq f'(e) \leq c(e)$ و $f'^+(v) - f'^-(v) = b(v)$ صدق کند.

اگر $b(v) \geq 0$، آنگاه v شارش $|b(v)|$ را برای شبکه عرضه می‌کند؛ در غیر این‌صورت v، $|b(v)|$ را تقاضا می‌کند. برای دوباره برقرار کردن قیدهای بقا، منبع s را با یالی به ظرفیت $b(v)$ به هر v با قید $b(v) \geq 0$ و یک چاهک t با یک یال به ظرفیت $-b(v)$ از هر v با قید $b(v) < 0$ اضافه می‌کنیم. این ساخت N را کامل می‌کند. فرض کنیم α کل ظرفیت روی یالها ترک کننده s باشد؛ چون $\sum b(v) = 0$، یالهای وارد شونده به t همچنین دارای کل ظرفیت α هستند. اکنون C دارای یک گردش امکانپذیر f است اگر، و فقط اگر، N دارای یک شارش به مقدار α باشد، که همه یالهای ترک کننده s یا وارد شوند به t را اشباع می‌کند. □

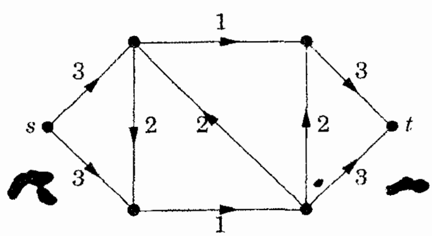
۱۷.۳.۴. فرع. یک شبکهٔ D با قیدهای بقا در هرگره دارای یک گردش امکانپذیر است اگر، و فقط اگر، به‌ازای هر $S \subseteq V(D)$، داشته باشیم

$$\sum_{e\in[S,\overline{S}]} l(e) \leq \sum_{e\in[\overline{S},S]} u(e)$$

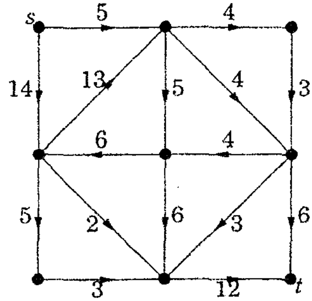
اثبات. می‌توانیم پیش از آخرین گام در بحث کاربرد ۱۶.۳.۴ متوقف شویم، و مسأله‌مان را با عرضه‌ها و تقاضاها در مدل قضیهٔ ۱۳.۳.۴ تعبیرکنیم. چون $\sum b(v) = 0$، تنها راه برآورده کردن همه تقاضاها اتمام همه عرضه است. از این‌رو یک گردش وجود دارد اگر، و فقط اگر، مسأله عرضه / تقاضا با عرضه‌های $\sigma(v) = b(v)$ برای $\{v \in V(D) : b(v) \geq 0\}$ و تقاضاهای $\partial(v) = -b(v)$ برای $\{v \in V(D) : b(v) < 0\}$ دارای یک جواب باشد. قضیهٔ ۱۳.۳.۴ می‌گوید که این مسأله چه هنگام دارای یک جواب است. با برگشت به کرانهای پایین و بالا روی شارش در مسأله اولیهٔ (تمرین ۲۱)، ملاک قضیهٔ ۱۳.۳.۴ تبدیل می‌شود به، به‌ازای هر $S \subseteq V(D)$، $\sum_{e\in[S,\overline{S}]} l(e) \leq \sum_{e\in[\overline{S},S]} u(e)$. □

تمرینات

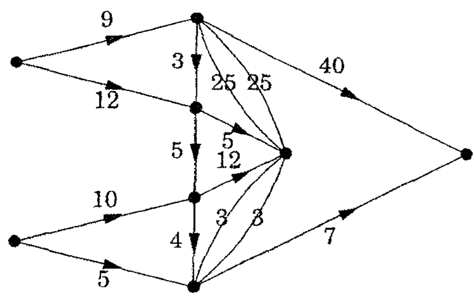
۱.۳.۴. (−) برای شبکهٔ زیر، همه شارشهای امکانپذیر با مقدار عدد صحیح را فهرست کنید (مراقب باشید هیچکدام را نادیده نگیرید). از روی فهرست، شارشی با مقدار ماکسیمم انتخاب کنید. این توان دوگانی را در مقایسه با تحلیل دقیق و کامل نشان می‌دهد. ثابت کنید که شارش انتخاب شده یک شارش ماکسیمم است به این ترتیب که برشی با همان مقدار را نشان می‌دهد. تعداد برشهای منبع / چاهک را تعیین کنید.



۲.۳.۴. (−) در زیرشبکه‌ای داریم با ظرفیتهای یالها همچنانکه نشان داده شده است. مقدار ماکسیمم شارشی از s به t را بیابید. ثابت کنید که پاسخ‌تان بهین است، به این ترتیب که از مسأله دوگان استفاده کنید، و توضیح دهید چرا این یک اثبات بهینگی است.



۳.۳.۴. (−) چاهک آشپزخانه آب را از دو مخزن مطابق با شبکهٔ لوله‌ها و با ظرفیتهای در واحد زمان که در زیر نشان داده شده است، می‌کشد. شارش ماکسیمم را در واحد زمان بیابید. ثابت کنید که پاسختان بهین است به این ترتیب که از مسأله دوگان استفاده کنید، و توضیح دهید چرا این یک اثبات بهینگی است.



۴.۳.۴. (−) فرض کنیم N یک شبکه با ظرفیت یال و قیدهای بقای گره، به علاوه قیدهای کران پایین $l(e)$ روی شارش یالهاست، بدین معنا که $f(e) \geq l(e)$ ضروری است. اگر یک شارش امکانپذیر آغازی داده شده باشد، چگونه الگوریتم نشاندارکردن فورد - فولکرسون را می‌توان برای یک شارش امکانپذیر ماکسیمم در این شبکهٔ تعدیل کرد؟

۵.۳.۴. (−) فرض کنیم G یک گراف سودار باشد و $x, y \in V(G)$. به جای ظرفیتهای روی یالهای G، فرض کنیم ظرفیتهای روی رأسها (به جز x و y) مشخص شده‌اند؛ این بدین معناست که برای هر رأس حد ثابتی روی شارش کل به درون (یا بیرون) وجود دارد. هیچ تحدیدی روی شارشها در یالها نیست. نشان دهید چگونه نظریهٔ

شارش شبکه را می‌توان برای تعیین مقدار ماکسیمم یک شارش امکانپذیر از x به y به‌کار برد.

۶.۳.۴. (!) از قضیهٔ فورد - فولکرسون برای اثبات قضیهٔ منگر برای یالها در گرافهای سودار استفاده کنید: $\kappa'(x, y) = \lambda'(x, y)$.

۷.۳.۴. (!) از قضیهٔ فورد - فولکرسون برای اثبات قضیهٔ منگر برای رأسهای نامجاور در گرافهای سودار استفاده کنید: $\kappa(x, y) = \lambda(x, y)$.

۸.۳.۴. با استفاده از شارشهای شبکهٔ ثابت کنید که گراف بیسوی G همبند است اگر، و فقط اگر، برای هر افراز از $V(G)$ به دو مجموعهٔ ناتهی S، T، یالی با یک نقطهٔ پایانی در S و یک نقطهٔ پایانی در T وجود دارد. (**توضیح:** فصل ۱ شامل اثبات مستقیم ساده‌ای از این نتیجه است، پس این مثالی از «استفاده از یک پتک برای له کردن یک حشره است».)

۹.۳.۴. (!) از شارشهای شبکه برای اثبات قضیهٔ کونیگ - اگروری استفاده کنید ($\alpha'(G) = \beta(G)$ اگر G دوبخشی باشد).

۱۰.۳.۴. نشان دهید که الگوریتم مسیر افزوده برای گرافهای دوبخشی (الگوریتم ۱.۲.۳) حالت خاصی از الگوریتم نشاندارکردن فورد - فولکرسون است.

۱۱.۳.۴. (!) فرض کنیم خانواده‌های $\mathbf{A} = \{A_۱, \cdots, A_m\}$ و $\mathbf{B} = \{B_۱, \cdots, B_m\}$ گردایه‌هایی از زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عنصری S است. ***یک دستگاه مشترک از نماینده‌های متمایز*** $(CSDR)$ برای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ یک مجموعهٔ U با m عنصر از S است که دستگاهی از نماینده‌های متمایز (SDR) برای $\mathbf{A}$ و برای $\mathbf{B}$ باشد. به عنوان مثال، اگر $\mathbf{A} = \{۱۲۳, ۱۲۴, ۳۴, ۱۵\}$ و $\mathbf{B} = \{۴۵, ۲۳, ۲۴, ۳۴\}$، آنگاه $\{۲, ۳, ۴, ۵\}$ یک $CSDR$ است. از قضیهٔ فورد - فولکرسون برای اثبات این مطلب استفاده کنید که $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دارای یک $CSDR$ هستند

اگر، و فقط اگر، برای هر جفت I، J از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ اندیسگذار $[m]$ داشته باشیم

$$|(\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{j\in J} B_j)| \geq |I| + |J| - m$$

(*راهنمایی:* برای کفایت شرط، از $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ برای ساخت یک شبکه استفاده کنید که دارای شارشی به مقدار m است اگر، و فقط اگر، $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ یک $CSDR$ داشته باشند، و ثابت کنید که شرط داده شده در بالا ایجاب می‌کند که هر برش منبع / چاهک در شبکه دارای ظرفیت حداقل m است.)

۱۲.۳.۴. ثابت کنید که اگر $[S,\overline{S}]$ و $[T,\overline{T}]$ برشهای منبع / چاهک مینیمم در یک شبکهٔ N باشند، آنگاه $[S\cup T,\overline{S\cup T}]$ و $[S\cap T,\overline{S\cap T}]$ نیز برشهای مینیمم در N هستند. (*راهنمایی:* انواع گوناگون سهمها در برشها را در نظر بگیرید؛ یک شکل می‌تواند بحث را هدایت کند.)

۱۳.۳.۴. ثابت کنید که اگر $[S,\overline{S}]$ و $[T,\overline{T}]$ برشهای منبع / چاهک در یک شبکهٔ N باشند، آنگاه

$$cap(S\cup T,\overline{S\cup T}) + cap(S\cap T,\overline{S\cap T}) \leq$$

$$cap([S,\overline{S}]) + cap(T,\overline{T}) + [S\cap T,\overline{S\cap T}]$$

۱۴.۳.۴. (−) ثابت کنید که گراف دوبخشی ساده‌ای که برای آن رأسها در یک مجموعهٔ بخشی دارای درجه‌های $(۵,۴,۴,۲,۱)$ و همچنین رأسها در مجموعهٔ بخشی دیگر دارای درجه‌های $(۵,۴,۴,۲,۱)$ باشد، وجود ندارد.

۱۵.۳.۴. (−) دو دنباله $r=(r_۱,\cdots,r_n)$ و $s=(s_۱,\cdots,s_n)$ داده شده است، شرایط لازم و کافی را برای وجود یک گراف سودار D با رأسهای $v_۱$، ...، v_n به‌دست آورید به‌طوری که هر جفت مرتب حداقل یک‌بار به عنوان یک یال ظاهر شود و به ازای هر i، $d^+(v_i)=r_i$ و $d^-(v_i)=s_i$.

۱۶.۳.۴. چندین شرکت نمایندگانی به یک همایش می‌فرستند؛ iاُمین شرکت m_i نماینده می‌فرستد. سازماندهندگان همایش گروه‌های شبکهٔ‌ساز را همزمان هدایت می‌کنند؛ گروه jاُم می‌تواند از n_j شرکت کننده پذیرایی کند. سازماندهندگان می‌خواهند همه شرکت‌کنندگان را به صورت گروه‌هایی زمانبندی کنند، اما هیچ دو شرکت‌کننده از یک شرکت نباید در یک گروه باشند. گروه‌ها لزومی ندارد همه اشغال شوند؛ شرط $\sum n_j \geq \sum m_i$ لازم است. شرایط لازم و کافی را روی $\{m_i\}$ و $\{n_j\}$ به‌دست آورید که مشخص می‌کنند چه هنگام یک تخصیص از شرکت‌کنندگان در گروه‌ها، که همه قیدها را برقرار کند وجود دارد.

۱۷.۳.۴. در مسألهٔ حذف بیسبال (کاربرد ۱۲.۳.۴)، ثابت کنید که تیم T در مسابقه باقی می‌ماند، اگر و فقط اگر، برای هر مجموعهٔ $Z \subseteq [n]$، نابرابری $\sum_{i\in z}(W - w_i) \geq \sum_{i,j\notin T} a_{ij}$ برقرار باشد. (*راهنمایی*: از قضیهٔ شارش ماکسیمم-برش مینیمم استفاده کنید.) (شوارتس [۱۹۶۶])

۱۸.۳.۴. (−) یک گردکردن سازگار از داده‌ها را در ماتریس زیر بیابید.

$$\begin{pmatrix} ۰/۵۵ & ۰/۶ & ۰/۶ \\ ۰/۵۵ & ۰/۶۵ & ۰/۷ \\ ۰/۶ & ۰/۶۵ & ۰/۷ \end{pmatrix}$$

۱۹.۳.۴. ثابت کنید که هر ماتریس دو در دو را می‌توان به‌طور سازگار گرد کرد.

۲۰.۳.۴. فرض کنیم که هر درایه در یک ماتریس n در n اکیداً میان $\frac{۱}{n}$ و $\frac{۱}{n-۱}$ است. همه گردکردنهای سازگار را شرح دهید.

۲۱.۳.۴. جزئیات اثبات فرع ۱۷.۳.۴ را کامل کنید، شرط لازم و کافی برای یک گردش در یک شبکه با کرانهای پایین و بالا را به‌دست آورید.

۲۲.۳.۴. *قضیهٔ مینیماکس روی درختهای فراگیر وزندار.* ظرفیت یک درخت

فراگیر در یک گراف (بیسو) وزندار G عبارت است از مینیمم وزن یالهای آن. *اندازهٔ* از یک برش $[S,\overline{S}]$ ماکسیمم وزن یالهای آن است. ثابت کنید که ماکسیمم ظرفیت در میان درختهای فراگیر G با مینیمم اندازهٔ در میان برشهای در G برابر است. (آهوجا - ماگنانتی - اورلین [۱۹۹۳، صفحه ۵۳۸]

۲۳.۳.۴. یک گراف $(m+n)$- منتظم G، (m,n)-**سوپذیر** است اگر آن را بتوان به‌گونه‌ای سودار کرد که هر درجهٔ ورودی m یا n باشد.

الف) (+) ثابت کنید که G، (m,n)-سوپذیر است اگر، و فقط اگر، یک افراز X، Y از $V(G)$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $S \subseteq V(G)$ داشته باشیم

$$|(m-n)|X\cap S| - |Y\cap S|| \le |[S|$$

ب) نتیجه بگیرید که اگر G، (m,n)-سوپذیر و $m > n$ باشد، آنگاه G نیز $(m-1, n+1)$-سوپذیر است. (باندی - مورتی [۱۹۷۶، صفحه ۲۱۰-۲۱۱])

۵

رنگ‌آمیزی گرافها

مسأله‌های رنگ‌آمیزی در بسیاری از زمینه‌ها ظاهر می‌شوند. مثلاً برنامهٔ زمانی کمیته در بند ۱.۱ دارای زمینه‌های دیگری نیز می‌باشد: اگر $V(G)$ مجموعه‌ای از درسهای دانشگاهی، با یالهایی میان درسها با دانشجویان مشترک باشد، آنگاه عدد رنگی عبارت است از مینیمم تعداد دوره‌های زمانی مورد نیاز برای برنامهٔ زمانی امتحانات بدون آنکه تعارض داشته باشند. مسألهٔ ۴-رنگ آمیزی ناحیه‌های یک نقشه به‌طوری که ناحیه‌های دارای مرزهای مشترک رنگهای متفاوت دریافت کنند. مثال دیگری است که در فصل ۷ به آن باز می‌گردیم.

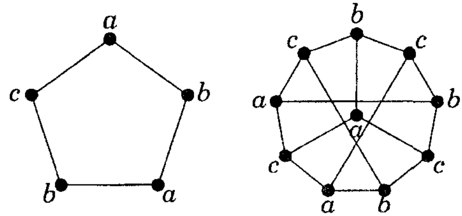
۵-۱ تعاریف و مثالها

۵.۱.۱. تعریف. یک k-*رنگ آمیزی* از G یک نشاندار کردن $f : V(G) \to \{1, \cdots, k\}$ است. این رنگ‌آمیزی یک k-**رنگ‌آمیزی سره** است اگر $x \leftrightarrow y$ ایجاب کند $f(x) \neq f(y)$. یک گراف G، k-**رنگپذیر** است اگر دارای یک k-رنگ‌آمیزی سره باشد. **عدد رنگی** $\chi(G)$ عبارت است از حداقل k به طوری که G، k -رنگپذیر باشد. اگر $\chi(G) = k$، آنگاه G، k-**رنگی** است. اگر

$\chi(G) = k$، اما برای هر زیرگراف سره H از G، داشته باشیم $\chi(H) < k$، آنگاه G، *رنگ - بحرانی* یا *k-بحرانی* است.

۲.۱.۵. **تبصره.** رأسهای دارای یک رنگ داده شده در یک رنگ‌آمیزی سره باید یک مجموعهٔ مستقل بسازند، پس $\chi(G)$ با مینیمم تعداد مجموعه‌های مستقل مورد نیاز برای پوشش $V(G)$ برابر است. از این‌رو G، k-رنگپذیر است اگر، و فقط اگر، G، k-بخشی باشد. یالهای چندگانه بر عدد رنگی تأثیری ندارند، پس در این فصل تنها گرافهای ساده را در نظر می‌گیریم. اگرچه k-رنگ‌آمیزی را با استفاده از اعدادی به صورت $\{1, \cdots, k\}$ به عنوان نشانه‌ها تعریف می‌کنیم، مقادیر عددی معمولاً اهمیتی ندارند، و می‌توانیم از هر مجموعهٔ با اندازهٔ k به عنوان نشانه‌ها استفاده کنیم. □

۳.۱.۵. **مثال.** *مثالهای مقدماتی*. $\chi(K_n) = n$. هر گراف دوبخشی ۲-رنگپذیر است، زیرا می‌توانیم رنگ i را روی iاُمین مجموعهٔ بخشی به کار بریم. در زیررنگ آمیزیهای بهین ۵-دور و گراف پترسن، که دارای عدد رنگی ۳ هستند را نشان داده‌ایم. □

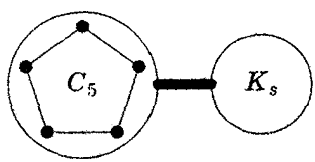


۴.۱.۵. **مثال.** *گرافهای k-بحرانی برای k کوچک*. گرافهای k-رنگپذیر گرافهای k-بخشی هستند. از این‌رو K_1 و K_2 تنها گرافهای ۱-بحرانی و ۲- بحرانی هستند. چون گرافهای دوبخشی گرافهای بدون دورهای فرد هستند، گرافهای ۳-بحرانی دورهای فرد می‌باشند. سادگی عدد رنگی در اینجا پایان می‌یابد؛ ما برای گرافهای ۴- بحرانی هیچ مشخص‌سازی و برای آزمون ۳-رنگپذیری هیچ الگوریتم خوبی نداریم (بند ۳.۶ را ببینید). می‌توانیم ۲- رنگپذیری را با استفاده از جستجوی پهنا - نخستین برای محاسبهٔ

فاصله‌هایی از رأس x (در هر مؤلفه) آزمون کنیم، زیرا یک گراف همبند G دوبخشی است اگر، و فقط اگر، $G[X]$ و $G[Y]$ مجموعه‌های مستقل باشند، که در آنها $X = \{u \in V(G) :$ زوج است $d(u,x)\}$ و $Y = \{u \in V(G) :$ فرد است $d(u,x)\}$.
□

یادآوری می‌کنیم که $\alpha(G)$ نمایشگر اندازهٔ بزرگترین مجموعهٔ مستقل در G است؛ از $\omega(G)$ برای نمایش اندازهٔ بزرگترین مجموعهٔ القا کننده یک خوشه استفاده می‌کنیم.[1] چون رأسهای یک خوشه باید رنگهای متفاوت داشته باشند، $\chi(G) \ge \omega(G)$. از آنجا که هر نشان تنها روی یک مجموعهٔ مستقل ظاهر می‌شود، $\chi(G) \ge n(G)/\alpha(G)$.

۵.۱.۵. مثال. $\chi(G)$ ***ممکن است از*** $\omega(G)$ **تجاوز کند.** فرض کنیم $G = C_{2r+1} \vee K_s$ اتصال یک خوشه و یک دور فرد باشد. چون C_{2r+1} دارای مثلث نیست، $\omega(G) = s + 2$. برای رنگ کردن رأسهای $2r + 1$ - دور القایی C، حداقل به سه رنگ نیاز داریم. رأسهای باقیمانده یک خوشه را القا می‌کنند و نیاز به s رنگ دارند. چون هر رأس که روی C نباشد مجاور هر رأس C است، این s رنگ باید از سه‌تای نخستین متفاوت باشند، و یک رنگ‌آمیزی سره از G حداقل $s + 3$ رنگ نیاز دارد. نتیجه می‌گیریم که $\chi(G) > \omega(G)$.
□



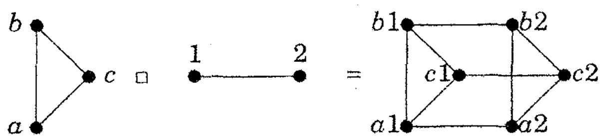
عدد رنگی برای بسیاری خانواده‌های خاص گرافها شناخته شده است (به عنوان مثال، تمرینات ۳-۸). همچنین رفتار عدد رنگی (یا پارامترهای دیگر) را تحت اَعمال گوناگون بررسی می‌کنیم. به عنوان مثال، $\chi(G + H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$ و

۱) عیناً مانند خوشه‌ها و مجموعه‌های مستقل که «متقابل» هستند، همچو α و ω انتهاهای متقابل الفبای یونانی‌اند. می‌توانیم مجموعه‌های مستقل و خوشه‌ها را به عنوان آغاز و پایان «تحول» یک گراف در نظر بگیریم (بند ۵.۸ را ببینید).

$\chi(G \vee H) = \chi(G) + \chi(H)$. همچنین یک حاصل‌ضرب طبیعی گراف را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۶.۱.۵. تعریف. *حاصل‌ضرب دکارتی* گرافهای G و H، را که به‌صورت $G \square H$ می‌نویسند، گراف با مجموعهٔ رأسهای $V(G) \times V(H)$، مشخص شده به‌وسیلهٔ قرار دادن (u,v) مجاور با (u',v') است اگر، و فقط اگر، (۱) $u = u'$ و $vv' \in E(H)$، یا (۲) $v = v'$ و $uu' \in E(G)$.

۷.۱.۵. مثال. *حاصل‌ضربهای دکارتی.* این عمل متقارن است؛ $G \square H \cong H \square G$. به عنوان مثال، $C_۳ \square K_۲$ در زیر ظاهر می‌شود، و $Q_k = Q_{k-۱} \square K_۲$ اگر $k \geq ۱$. به‌طور کلی، یالهای $G \square H$ را می‌توان به یک نسخه از H برای هر رأس G و یک نسخه از G برای هر رأس H افرازکرد (تمرین ۱۰). از $\square$ به‌جای $\times$ استفاده می‌کنیم تا از اشتباه شدن با دیگر اَعمال حاصل‌ضرب اجتناب کنیم، و $\times$ را برای حاصل‌ضرب دکارتی مجموعه‌های رأسها نگه می‌داریم. نماد $\square$ ظاهراً حاکی از بینش این مطلب است که $K_۲ \square K_۲ = C_۴$.



حاصل‌ضرب دکارتی به ما این امکان را می‌دهد که عدد رنگی G را با محاسبه عدد استقلال یک گراف حاصل‌ضرب، محاسبه‌کنیم. یک‌گراف G، m-رنگپذیر است اگر، و فقط اگر، حاصل‌ضرب دکارتی گراف $G \square K_m$ دارای یک مجموعهٔ مستقل به اندازهٔ $n(G)$ باشد (تمرین ۱۱). یک اظهارنظر مقدماتیتر آن است که $\chi(G \square H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$ (تمرین ۱۰).

کرانهای بالا

کرانهای آسان روی $\chi(G)$ شامل $\chi(G) \le n(G)$، $\chi(G) \ge \omega(G)$، و $\chi(G) \ge n(G)/\alpha(G)$ است. اینها بهترین وضع ممکن هستند، زیرا همه برای خوشه‌ها در حالت برابری برقرارند. ما تظریفهای کرانهایی که بهترین وضع ممکن را برای بیشتر گرافها دارند جستجو می‌کنیم. گرافهای بسیاری با $\chi(G) = \omega(G)$ وجود دارند، اما خوشه‌ها تنها گرافهایی هستند که برای آنها داریم $\chi(G) = n(G)$، پس کران بالا را تظریف می‌کنیم.

بیشترین کرانهای بالا روی $\chi(G)$ از الگوریتمهای رنگ‌آمیزی به‌دست می‌آیند. کران $\chi(G) \le n(G)$ هیچ چیز دربارهٔ ساختار G را به‌کار نمی‌برد. می‌توانیم کران را به‌وسیلهٔ رنگ‌آمیزی به‌طور پیاپی رأسها با استفاده از رنگی که «کمتر» قابل دسترسی است، بهبود بخشیم.

۸.۱.۵. الگوریتم. (رنگ‌آمیزی آزمند). ***رنگ‌آمیزی آزمند*** نسبت به یک ترتیب رأسهای v_1، ...، v_n از $V(G)$ به‌وسیلهٔ رنگ‌آمیزی رأسها به ترتیب v_1، ...، v_n به‌دست می‌آید به‌طوری که به v_i رنگی که دارای کوچکترین اندیس باشد و پیش از آن روی همسایه‌های با اندیس کوچکتر به کار نرفته باشد، تخصیص داده می‌شود.

۹.۱.۵. گزاره. $\chi(G) \le \Delta(G) + 1$

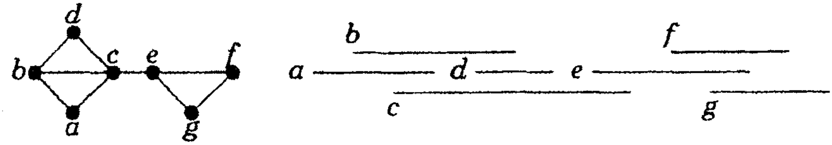
اثبات. چون هر رأس دارای حداکثر $\Delta(G)$ همسایه است، یک رنگ‌آمیزی آزمند را هرگز نمی‌توان اجبار به استفاده از بیش از $\Delta(G) + 1$ رنگ کرد (برای هر ترتیبی). این به‌طور ساختمانی اثبات می‌کند که $\chi(G) \le \Delta(G) + 1$. □

در اثبات $\chi(G) \le \Delta(G) + 1$ به وسیلهٔ رنگ‌آمیزی آزمند، می‌توانیم از هر ترتیب رأسها استفاده کنیم؛ انتخاب با دقت یک ترتیب ممکن است کران را بهبود بخشد. در واقع، هر گراف G دارای یک ترتیب رأسهاست که روی آنها الگوریتم آزمند تنها از $\chi(G)$ رنگ استفاده می‌کند (تمرین ۱۳ الف). معمولاً یافتن این ترتیب دشوار است، اما در

برخی رده‌های خاص آسان می‌باشد.

۱۰.۱.۵. مثال. ***تخصیص ثبات و گرافهای بازه‌ای.*** یک برنامه کامپیوتری مقادیر متغیرهایش را در حافظه ذخیره می‌کند. برای محاسبات حسابی، مقادیر باید در «ثباتها» وارد شوند. ثباتها گران قیمت هستند، پس می‌خواهیم از آنها بهتر استفاده کنیم. اگر دو متغیر در یک زمان به کار نروند، می‌توانیم آنها را به یک ثبات تخصیص دهیم. برای هر متغیر، نخستین و آخرین باری را که از آن استفاده می‌شود محاسبه می‌کنیم. یک متغیر در طول بازه میان این زمانها ***فعال*** است. یک گراف را با متغیرها به عنوان رأسها تعریف می‌کنیم، که در آن دو رأس مجاور باشند اگر در یک زمان مشترک فعال باشند. تعداد ثباتهای مورد نیاز، عدد رنگی این گراف است.

با در نظر گرفتن هر خانواده از بازه‌ها، می‌توانیم گرافی را تعریف کنیم که رأسهایش بازه‌ها باشند، با رأسهای مجاور هنگامی که بازه‌ها اشتراک داشته باشند. گرافی که به این روش تشکیل شده باشد یک ***گراف بازه‌ای***، و خانواده بازه‌ها یک ***نمایش بازه‌ای*** گراف است. در تصویر زیر، اگر رأسها را به ترتیب a ، b، c، d، e، f، g رنگ کنیم، آنگاه الگوریتم آزمند به آنها به ترتیب رنگهای ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۱ ، ۱ ، ۲ ، ۳ را تخصیص می‌دهد، که بهین است. □



۱۱.۱.۵. گزاره. اگر G یک گراف بازه‌ای باشد، آنگاه $\chi(G) = \omega(G)$.

اثبات. رأسها را به وسیلهٔ نقاط پایانی سمت چپشان به ترتیب افزایشی قرار می‌دهیم و رنگ‌آمیزی آزمند را به کار می‌بریم. فرض کنیم x رنگ k با اندیس ماکسیمم را دریافت می‌کند. چون x نمی‌تواند رنگ کوچکتری دریافت کند، نقطهٔ پایانی سمت چپ a از بازه‌اش، به بازه‌هایی که از پیش دارای رنگهای ۱ تا $k - 1$ می‌باشند، نیز متعلق است. این بازه‌ها همگی در نقطهٔ a شریک‌اند، پس یک k-خوشه داریم که از x و همسایه‌های

x با رنگهای ۱ تا $k - ۱$ تشکیل شده است. از این‌رو $\omega(G) \geq k \geq \chi(G)$. چون همواره $\chi(G) \geq \omega(G)$، این رنگ‌آمیزی بهین است. □

می‌توانیم $\chi(G) \leq ۱ + \Delta(G)$ را به‌وسیلهٔ جایگزینی $\Delta(G)$ با چیزی که هرگز از $\Delta(G)$ تجاوز نکند، بیشتر تقویت کنیم. نخست رنگ‌آمیزی آزمند را به ترتیب رأسهایی که به دقت انتخاب شده‌اند در نظر می‌گیریم. رأسهایی با درجهٔ بالا مشکل ایجاد می‌کنند؛ می‌توانیم نخست با قرار دادن رأسها به ترتیب کاهشی برحسب درجه آنها را مرتب کنیم. (تمرین ۱۵ ترتیب دیگری را در نظر می‌گیرد.)

۱۲.۱.۵. گزاره. (ولش - پوول[1] [۱۹۶۷]) اگر یک گراف G دارای دنبالهٔ درجه‌های $d_۱ \geq \cdots \geq d_n$ باشد، آنگاه

$$\chi(G) \leq ۱ + \max_i \min\{d_i, i - ۱\}$$

اثبات. رنگ‌آمیزی آزمند را با رأسهایی به ترتیب درجهٔ ناافزایشی به کار می‌بریم. هنگامی که رأس iام را رنگ می‌کنیم، حداکثر $\min\{d_i, i - ۱\}$ تا از همسایه‌هایش از پیش رنگ شده‌اند، پس رنگ آن حداکثر $۱ + \min\{d_i, i - ۱\}$ است. ماکسیمم کردن این‌روی i یک کران بالا را برای $\chi(G)$ به‌دست می‌دهد. □

الگوریتم رنگ‌آمیزی آزمند به سرعت اجرا می‌شود. این الگوریتم درون خطی است به این مفهوم که یک رنگ‌آمیزی سره ایجاد می‌کند حتی اگر تنها یک رأس جدید در هر گام ببیند و باید آن را بدون هیچ حق انتخابی برای تغییر رنگهای قبلی رنگ کند. برای یک رأس تصادفی به ترتیب در یک گراف تصادفی (بند ۵.۸ را ببینید)، در واقع رنگ‌آمیزی آزمند همواره تنها تقریباً دو برابر رنگهای مینیمم را استفاده می‌کند، اگرچه با یک ترتیب نامساعد ممکن است رنگهای بسیاری را روی یک درخت به کاربرد (تمرین ۱۳ ب).

دیگر کرانها بعد از ویژگیهای گرافهای k-بحرانی می‌آیند، اما زیرگرافهای k -بحرانی رنگ‌آمیزی سره را فراهم نمی‌کنند: اگرچه هرگراف k-رنگی *دارای* یک زیرگراف k-بحرانی

1) Welsh-Powell

است، اما هیچ الگوریتم خوبی برای ***یافتن*** آن نداریم. ما رنگ‌آمیزی آزمند را نخست برای تأکید بر طبیعت الگوریتمی کرانهای بالا برای عدد رنگی ارائه کردیم.

۱۳.۱.۵. لم. اگر H یک گراف k-بحرانی باشد، آنگاه $\delta(H) \geq k - ۱$.

اثبات. فرض کنیم x یک رأس از H باشد. چون H، k-بحرانی است، $H - x$، $k - ۱$-رنگپذیر است. اگر $d_H(x) < k - ۱$، آنگاه $k - ۱$ رنگ به کار رفته روی $H - x$ همگی روی $N(x)$ ظاهر نمی‌شوند، و می‌توانیم یکی از رنگهای ناپیدا را به x نسبت دهیم تا رنگ‌آمیزی را به H بسط دهیم. این با فرض ما مبنی بر اینکه H دارای $k - ۱$-رنگ‌آمیزی سره نیست در تناقض است. از این‌رو هر رأس از H دارای درجهٔ حداقل $k - ۱$ است. □

۱۴.۱.۵. فرع. (سکرش - ویلف [۱۹۶۸]). اگر G یک گراف باشد، آنگاه

$$\chi(G) \leq ۱ + \max_{H \subseteq G} \delta(H)$$

اثبات. فرض کنیم $k = \chi(G)$، و فرض کنیم H' یک زیرگراف k-بحرانی از G باشد. بنابر لم ۱۳.۱.۵، داریم $\chi(G) - ۱ \leq \delta(H') \leq \max_{H \subseteq G} \delta(H)$، همان‌طور که مطلوب بود. □

کران بعدی متضمن سودهیهاست (همچنین تمرینات ۲۳-۲۶ را ببینید).

۱۵.۱.۵. قضیهٔ. (گالای [۱۹۶۸]، رُوی [۱۹۶۷]، ویتاور[1] [۱۹۶۲]) اگر D یک سودهی از G با طولانیترین طول مسیر $l(D)$ باشد، آنگاه $\chi(G) \leq ۱ + l(D)$. علاوه بر این، برابری برای یک سودهی از G برقرار است.

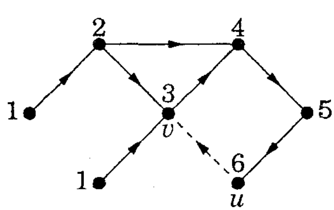
اثبات. فرض کنیم D یک سودهی از G باشد. فرض کنیم D' یک زیرگراف بیدور ماکسیمال از D است؛ D' یک سودهی از یک زیرگراف فراگیر H از G است. $V(G)$ را رنگ می‌کنیم با فرض اینکه $f(v)$ از طول درازترین مسیر در D' که در v پایان می‌یابد،

1) Vitaver

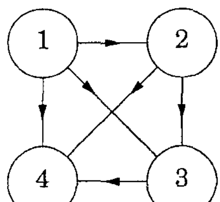
یکی بیشتر باشد. چون D' دارای دوری نیست، هر مسیر راکه در یک رأس از یک مسیر در D' پایان می‌یابد، می‌توان در امتداد آن مسیر گسترش داد. بنابراین، f در امتداد هر مسیر در D' اکیداً افزایشی است.

رنگ‌آمیزی f رنگهای ۱ تا $l(D') + ۱$ را روی $V(D) = V(G)$ به کار می‌برد. ادعا می‌کنیم که f یک رنگ‌آمیزی سره از G است. برای هر $uv \in E(D)$، یک مسیر در D' میان نقاط پایانی آن وجود دارد (زیرا uv یک یال از D' است یا افزودن آن به D' یک دور ایجاد می‌کند). این ایجاب می‌کند که $f(u) \neq f(v)$، زیرا f در امتداد مسیرهای D' افزایش می‌یابد.

برای اثبات گزاره دوم، یک سودهی D^* می‌سازیم به‌طوری که $l(D^*) \leq \chi(G) - ۱$. فرض کنیم f یک رنگ‌آمیزی بهین از G باشد. برای هر یال uv در G، یال را در D^* به صورت $u \to v$ سودار می‌کنیم اگر، و فقط اگر $f(u) < f(v)$. چون f یک رنگ‌آمیزی سره است، این یک سودهی را تعریف می‌کند. چون نشانهای استفاده شده به‌وسیلهٔ f در امتداد هر مسیر در D^* افزایش می‌یابد، و تنها $\chi(G)$ نشانه در f وجود دارند، داریم $l(D^*) \leq \chi(G) - ۱$. □



D و D'



D^*

قضیهٔ بروکس

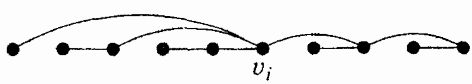
کران $\chi(G) \leq ۱ + \Delta(G)$ برای خوشه‌ها و دورهای فرد استوار است. با انتخاب ترتیب رأسها با دقت بیشتر، می‌توانیم نشان دهیم که اینها اساساً تنها گرافهایی هستند که برای آنها $\chi(G) > \Delta(G)$. این ایجاب می‌کند که، به عنوان مثال، گراف پترسن ۳-رنگپذیر است. برای اجتناب از پیچیدگیهای بی‌اهیمت، این گزاره را تنها برای گرافهای همبند بیان

می‌کنیم. این گزاره به همهٔ گرافها تعمیم می‌یابد، زیرا عدد رنگی یک گراف، ماکسیمم عدد رنگی مؤلفه‌های آن است. اثباتهای بسیاری در این‌باره شناخته شده‌اند؛ ما یک نسخه تعدیل شده از اثبات لوواژ [۱۹۷۵] را ارائه می‌کنیم.

۱۶.۱.۵. قضیهٔ. (بروکس [۱۹۴۱]) اگر G یک گراف همبند به جز یک خوشه یا یک دور فرد باشد، آنگاه $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

اثبات. فرض کنیم G همبند است اما یک خوشه یا یک دور فرد نیست، و فرض کنیم $k = \Delta(G)$. می‌توانیم فرض کنیم که $k \geq ۳$، زیرا G هنگامی که $k = ۱$، یک خوشه است، و هنگامی که $k = ۲$، یک دور فرد یا دو بخشی است.

اگر G، k-منتظم نباشد، v_n را طوری انتخاب می‌کنیم که $d(v_n) < k$. چون G همبند است، می‌توانیم یک درخت فراگیر در G از v_n به‌وجود آوریم، به این ترتیب که، همچنانکه به رأسها می‌رسیم اندیسها را به ترتیب کاهشی تخصیص دهیم. هر رأس به جز v_n در ترتیب حاصل $v_۱$، ...، v_n دارای یک همسایه با اندیس بالاتر در امتداد مسیر به v_n، در درخت است. از این‌رو هر رأس دارای حداکثر $k - ۱$ همسایه با اندیس پایینتر است، و رنگ‌آمیزی آزمند حداکثر k رنگ را به کار می‌برد.

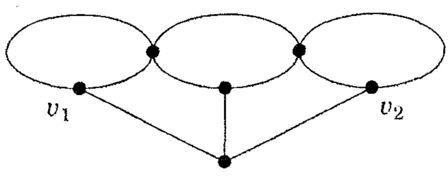


در حالت باقیمانده، G، k-منتظم است. اگر G دارای یک رأس برشی x باشد، فرض می‌کنیم G' یک مؤلفه از $G - x$ همراه با یالها به x باشد. درجهٔ x در G' کمتر از k است، و یک k-رنگ‌آمیزی سره از G' مانند بالا به دست می‌آوریم. با جابجایی نامهای رنگها در هر چنین زیرگرافی، می‌توانیم رنگ‌آمیزیهای سازگار روی x را برای کامل کردن یک k-رنگ‌آمیزی سره از G به‌دست آوریم.

اگر G دارای رأسی با دو همسایه باشد که حذف آنها یک زیرگراف همبند باقی گذارد، آنگاه آنها را به‌صورت $v_۱$ و $v_۲$ شماره‌گذاری می‌کنیم و فرض می‌کنیم همسایه مشترکشان

v_n باشد. چون $G - \{v_۱, v_۲\}$ همبند است، یک درخت فراگیر دارد، و این درخت را با استفاده از ۳، ...، n به‌گونه‌ای شماره‌گذاری می‌کنیم که نشانها در امتداد مسیرها به ریشه v_n افزایش یابند. مانند قبل، هر رأس پیش از n دارای حداکثر $k - ۱$ همسایه با اندیس پایینتر است. رنگ‌آمیزی آزمند همچنین دارای حداکثر $k - ۱$ رنگ روی همسایه‌های v_n است، زیرا $v_۱$ و $v_۲$ یک رنگ دریافت می‌کنند.

از این‌رو کافی است که نشان دهیم هر گراف k-منتظم ۲-همبند با قید $k \geq ۳$ دارای چنین رأسهایی است. یک رأس x را انتخاب می‌کنیم. اگر $\kappa(G - x) \geq ۲$، فرض کنیم $v_۱$، x باشد و فرض کنیم $v_۲$ رأسی با فاصلهٔ دو از x است، که وجود دارد، زیرا G، منتظم است و یک خوشه نیست. اگر $\kappa(G - x) = ۱$، آنگاه x دارای همسایه‌ای در هر بلوک برگ از $G - x$ است (چون G دارای رأس برشی نیست). همسایه‌های $v_۱$ و $v_۲$ از x در دو چنین بلوکی نامجاور هستند. علاوه بر این، $G - \{x, v_۱, v_۲\}$ همبند است، زیرا بلوکها دارای رأسهای برشی نیستند. حال $k \geq ۳$ ایجاب می‌کند که $G - \{v_۱, v_۲\}$ نیز همبند باشد. □



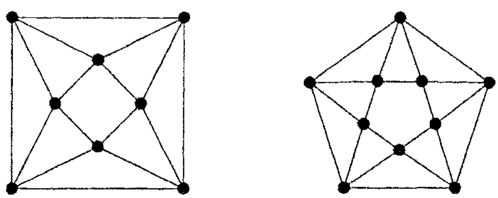
قضیهٔ بروکس ایجاب می‌کند که خوشه‌ها و دورهای فرد تنها گرافهای k-بحرانی $k - ۱$-منتظم هستند (تمرین ۲۷). کران $\chi(G) \leq \Delta(G)$ می‌تواند بهبود یابد اگر G دارای خوشه بزرگی نباشد (تمرین ۲۸). همچنین می‌توانیم قضیهٔ بروکس را با در نظر گرفتن *پارامترهای رنگ‌آمیزی تعمیم یافته* گسترش دهیم. با در نظر گرفتن ویژگی P، می‌خواهیم $V(G)$ را به کوچکترین تعداد رده‌های رنگ افرازکنیم به‌طوری که زیرگراف القا شده به وسیلهٔ هر ردهٔ رنگ ویژگی P را داشته باشد. هنگامی که P ویژگی «مجموعهٔ مستقل» باشد، مینیمم تعداد رده‌ها عدد رنگی معمولی است. قضیهٔ زیر هنگامی

که $j = ۱$ باشد به قضیهٔ بروکس تبدیل می‌شود، زیرا یک گراف بدون هیچ زیرگراف ۱-یال-همبند یک مجموعهٔ مستقل است.

۱۷.۱.۵. قضیهٔ. (ماتولا[1] [۱۹۷۳]) اگر G یک گراف همبند باشد، آنگاه G دارای یک $\lceil \Delta(G)/j \rceil$-رنگ‌آمیزی است به‌طوری که زیرگراف القا شده به وسیلهٔ هر ردهٔ رنگ دارای زیرگراف j- یال - همبند نیست، مگر آنکه G (۱) یک گراف j-یال-همبند j - منتظم باشد، (۲) یک n- خوشه با n همنهشت ۱ به پیمانه j باشد، یا (۳) یک دور فرد هنگامی که $j = ۱$ باشد. در این حالتها، $\lceil (\Delta(G) + ۱)/j \rceil$ رنگ لازم و کافی هستند. □

تمرینات

۱.۱.۵. (−) برای هر G زیر، $\chi(G)$ را محاسبه کنید و یک زیرگراف $\chi(G)$-بحرانی را به دست دهید.

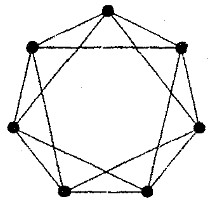


۲.۱.۵. (−) فرض کنیم بلوکهای G عبارت‌اند از $G_۱$، ...، G_k. ثابت کنید که $\chi(G) = \max_i \chi(G_i)$.

۳.۱.۵. (!) n نقطه را روی یک دایره قرار می‌دهیم، در حالی که $n \geq k(k+۱)$. فرض کنیم $G_{n,k}$ گراف $۲k$-منتظم به‌دست آمده از وصل کردن هر نقطه به نزدیکترین k نقطهٔ روی دایره در هر سو باشد. به عنوان مثال، $G_{n,۱} = C_n$، و $G_{۷,۲}$ در زیر آمده‌اند. ثابت کنید که $\chi(G_{n,k}) = k+۱$ اگر $k+۱$ بر n بخشپذیر باشد و $\chi(G_{n,k}) = k+۲$

1) Matula

اگر $k + ۱$ بر n بخشپذیر نباشد. ثابت کنید که کران پایین روی n نمی‌تواند تضعیف شود، به وسیلهٔ اثبات اینکه $\chi(G_{k(k+۱)-۱,k}) > k + ۲$ اگر $k \geq ۲$.



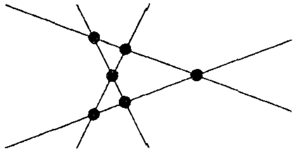
۴.۱.۵. (!) فرض کنیم دورهای فرد در G دو به دو متقاطع هستند، به این معنی که هر دو دور فرد در G یک رأس مشترک دارند، ثابت کنید که $\chi(G) \leq ۵$.

۵.۱.۵. فرض کنیم که هر یال از G در حداکثر یک دور ظاهر می‌شود. ثابت کنید که هر بلوک از G یک یال یا یک دور است، و با استفاده از این مطلب ثابت کنید که $\chi(G) \leq ۳$.

۶.۱.۵. (!) فرض کنیم G گرافی با ***فاصلهٔ واحد*** در صفحه باشد؛ رأسهایش همگی نقاطی در صفحه هستند، و با یک یال به هم وصل شده‌اند اگر فاصلهٔ اقلیدسی میان آنها دقیقاً ۱ باشد. ثابت کنید که G، ۷-رنگپذیر است اما ۳-رنگپذیر نیست. (***راهنمایی:*** برای کران بالا، یک رنگ‌آمیزی صریح را به وسیلهٔ ناحیه‌ها ارائه دهید، با توجه به مرزهای آنها.)

۷.۱.۵. (!) با در نظر گرفتن مجموعه‌ای از خطوط در صفحه بدون آنکه هیچ سه خطی در یک نقطهٔ متلاقی باشند، یک گراف G را تشکیل دهید که رأسهایش نقاط برخورد خطوط باشند به‌طوری که دو رأس مجاور باشند اگر متوالیاً روی یکی از خطوط ظاهر شوند. ثابت کنید که $\chi(G) \leq ۳$. (***توضیح:*** این مطلب هنگامی که سه خط در یک نقطه تلاقی کنند می‌تواند برقرار نباشد.) (اچ. ساچز[1])

1) H.Sachs



۸.۱.۵. (+) فرض کنیم $S = \binom{[n]}{۲}$ نمایشگر گردایه‌ای از ۲-مجموعه‌هایی از مجموعهٔ n عنصری $[n]$ باشد. گراف G_n را با $V(G_n) = S$ و $E(G_n) = \{(ij, jk) : i < j < k\}$ تعریف می‌کنیم (جفتهای مجزا، به عنوان مثال، نامجاور باشند). ثابت کنید که $\chi(G_n) = \lceil lgn \rceil$. (*راهنمایی:* ثابت کنید که G_n، k-رنگپذیر است اگر، و فقط اگر، $[k]$ دارای حداقل n زیرمجموعهٔ متمایز باشد. (*توضیح:* G_n گراف ***تغییر جای*** K_n نامیده می‌شود.) (به ای.هاجنال[1] نسبت داده شده است)

۹.۱.۵. (−) $K_{۱,۳} \square P_۳$ را رسم کنید و یک رنگ‌آمیزی بهین از این گراف را نشان دهید.

۱۰.۱.۵. ثابت کنید که حاصل‌ضرب دکارتی $G \square H$ را می‌توان به صورت $aH \cup bG$ بیان کرد که در آن G دارای a رأس و H دارای b رأس است. ثابت کنید که $\chi(G \square H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$.

۱۱.۱.۵. (!) ثابت کنید که G، m-رنگپذیر است اگر، و فقط اگر، حاصل‌ضرب دکارتی $G \square K_m$ دارای یک مجموعهٔ مستقل به اندازهٔ $n(G)$ باشد. (برز [۱۹۷۳، صفحه ۳۷۹-۳۸۰])

۱۲.۱.۵. (−) ثابت یا رد کنید: همواره $\chi(G) \le ۱ + a(G)$، که در آن $a(G) = ۲e(G)/n(G)$ میانگین درجهٔ رأسهاست.

۱۳.۱.۵. (!) *رنگ‌آمیزی آزمند.*

الف) ثابت کنید که هر گراف G دارای یک ترتیب رأسهاست که رنگ‌آمیزی آزمند نسبت به آن از $\chi(G)$ رنگ استفاده می‌کند.

ب) به ازای هر $k \in \mathbf{N}$، به طور استقرایی یک درخت T_k با درجهٔ ماکسیمم k، و یک

1) A.Hajnal

ترتیب σ از $V(T_k)$ بسازید، به‌طوری که رنگ‌آمیزی آزمند نسبت به σ از $k+1$ رنگ استفاده کند. (**توضیح:** این مطلب نشان می‌دهد که نسبت اجرای رنگ‌آمیزی آزمند می‌تواند به نامساعدی $(\Delta(G)+1)/2$ باشد). (بین[1] [۱۹۷۶])

۱۴.۱.۵. فرض کنیم G دارای زیرگراف القا شده یکریخت با P_4 نباشد. ثابت کنید که برای هر ترتیب رأسها، رنگ‌آمیزی آزمند یک رنگ‌آمیزی بهین از G ایجاد می‌کند. (*راهنمایی:* فرض کنیم الگوریتم k رنگ را برای ترتیب v_1، ... ، v_n به‌کار می‌برد، و فرض کنیم i کوچکترین عدد صحیح باشد به‌طوری که G دارای یک خوشه باشد که شامل رأسهایی گردد که رنگهای i تا k را در این رنگ‌آمیزی دریافت کرده‌اند.)

۱۵.۱.۵. با درنظرگرفتن یک ترتیب σ از $V(G)$، فرض‌کنیم $G_i = G[\{v_1, \cdots, v_i\}]$، و فرض کنیم $f(\sigma) = 1 + \max_i d_{G_i}(x_i)$. رنگ‌آمیزی آزمند نسبت به σ مشخص می‌کند که $\chi(G) \le f(\sigma)$. σ^* را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: فرض کنیم v_n یک رأس با درجهٔ مینیمم در G باشد، و برای $i < n$ فرض کنیم v_i رأسی با درجهٔ مینیمم در $G - \{v_{i+1}, \cdots, v_n\}$ باشد. ثابت کنید که σ^*، $f(\sigma)$ را مینیمم می‌کند و دیگر اینکه $f(\sigma^*) = 1 + \max_{H\subseteq G} \delta(H)$. (هالین [۱۹۶۷]، ماتولا [۱۹۶۸]، فانک[2] - ساچز [۱۹۶۹]، لایک-وایت [۱۹۷۰])

۱۶.۱.۵. ثابت کنید که $V(G)$ را می‌توان به $1 + \max_{H\subseteq G} \delta(H)/r$ رده افراز کرد به‌طوری که زیرگراف القا شده به وسیلهٔ هر ردهٔ، دارای یک رأس با درجهٔ کمتر از r باشد. (*راهنمایی:* ترتیب σ^* از تمرین ۱۵ رادر نظر بگیرید. **توضیح:** این مطلب تعمیم قضیهٔ سکرش - ویلف است (فرع ۱۴.۱.۵).)

۱۷.۱.۵. (!) ثابت کنید هنگامی که H دوبخشی است و دارای رأسهای تنها نیست داریم $\chi(\overline{H}) = \omega(\overline{H})$. (*راهنمایی:* نتیجه را برحسب H بیان کنید و نتایج مربوط به گرافهای دوبخشی را به کار ببرید.)

---

1) Bean 2) Finck

۱۸.۱.۵. (!) ثابت کنید که هر گراف k-رنگی دارای حداقل $\binom{k}{2}$ یال است. با استفاده از این مطلب ثابت کنید که اگر G اجتماع m خوشه از مرتبهٔ m باشد، آنگاه $\chi(G) < 1 + m\sqrt{m-1}$. (*راهنمایی:* $\sqrt{x+1} < \sqrt{x} + 1$ اگر $x > 0$.
توضیح: این کران استوار است، اما حدس اردیش - فابر[1] - لوواژ (اردیش [۱۹۸۱] را ببینید) حکم می‌کند که $\chi(G) = m$ هنگامی که G خوشه‌های دو به دو یال - مجزا باشند.)

۱۹.۱.۵. فرض کنیم G یک گراف n-رأسی ساده باشد. با استفاده از قضیهٔ توران (قضیهٔ ۲۰.۳.۱) ثابت کنید که اگر $\omega(G) \le r$، آنگاه $e(G) \le (1 - \frac{1}{r})\frac{n^2}{2}$. با استفاده از این مطلب ثابت کنید که $\chi(G) \ge n^2/(n^2 - 2e(G))$ (مایرز[2] - لیو [۱۹۷۲])

۲۰.۱.۵. **عدد رنگی** G و $\overline{G}$. ثابت کنید که $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \ge n(G)$، با استفاده از این مطلب ثابت کنید که $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \ge 2\sqrt{n(G)}$، و ساختمانی را بیابید هرگاه $\sqrt{n(G)}$ یک عدد صحیح باشد این کرانها را ایجاد کند. (نوردهاوس - گادوم[3] [۱۹۵۶]، فانک [۱۹۶۸])

۲۱.۱.۵. (!) ثابت کنید که $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \le n(G) + 1$. (*راهنمایی:* از استقرا روی $n(G)$ استفاده کنید.) (نوردهاوس - گادوم [۱۹۵۶])

۲۲.۱.۵. (!) **بیدوامی** $\chi(G) \ge n(G)/\alpha(G)$. فرض کنیم G دارای n رأس باشد، و فرض کنیم $b = (n+1)/\alpha(G)$. با استفاده از تمرین ۲۰ ثابت کنید که $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \le (n+1)^2/4$، و با استفاده از این مطلب ثابت کنید که $\chi(G) \le b(n+1)/4$. برای هر عدد فرد n، گرافی بسازید به‌طوری که $\chi(G) = b(n+1)/4$. (نوردهاوس - گادوم [۱۹۵۶]، فانک [۱۹۶۸])

۲۳.۱.۵. (−) با استفاده از قضیهٔ گالای - رُوی ثابت کنید که هر تورنمنت دارای یک

---

1) Faber 2) Myers 3) Nordhaus-Gaddum

مسیر فراگیر است.

۲۴.۱.۵. (!) **مسیرها و عدد رنگی در گرافهای سودار.**

الف) فرض کنیم $G = F \cup H$. ثابت کنید که $\chi(G) \le \chi(F)\chi(H)$.

ب) فرض کنیم D یک سودهی از G باشد و $\chi(G) > rs$. فرض کنیم هر $v \in V(D)$ به یک عدد حقیقی $f(v)$ تخصیص داده شده است. از قسمت (الف) و با استفاده از قضیهٔ گالای - رُوی ثابت کنید که D دارای یک مسیر $u_\circ \to \cdots \to u_r$ با $f(u_\circ) \le \cdots \le f(u_r)$ و یا یک مسیر $v_\circ \to \cdots \to v_s$ با $f(v_\circ) > \cdots > f(v_s)$ است.

پ) با استفاده از قسمت (ب) ثابت کنید که هر دنباله از $rs + ۱$ عدد حقیقی متمایز دارای یک زیردنبالهٔ افزایشی به اندازهٔ $r + ۱$ یا یک زیردنبالهٔ کاهشی به اندازهٔ $s + ۱$ است. (اردیش - سکرش [۱۹۳۵])

۲۵.۱.۵. (الف) ثابت کنید که $\chi(G \cup H) \le \chi(G)\chi(H)$.

(ب) یک دنباله $a_\circ$، ...، a_k از نقاط در صفحه ε-**خطی** است اگر زاویه میان قطعه‌های $a_{i-۱}a_i$ و $a_ia_{i+۱}$ به ازای هر i میان $(۱ - \varepsilon)\pi$ و π باشد. ثابت کنید که هر مجموعه از $k^n + ۱$ نقطه در صفحه شامل یک دنبالهٔ $\frac{۱}{n}$- خطی از $k + ۱$ نقطه است. (*راهنمایی:* قسمت (الف) را برای یک افراز مناسب از یالهای یک گراف سودار تعریف شده روی نقاط به‌کار ببرید.)

۲۶.۱.۵. قضیهٔ گالای - رُوی را با استفاده از قضیهٔ مینتی[1] [۱۹۶۲] اثبات کنید، که بیان می‌کند که G، k-رنگپذیر است اگر، و فقط اگر، G دارای یک سودهی باشد که روی هر دور C، حداقل $n(C)/k$ یال را در هر سو نشان می‌دهد.

۲۷.۱.۵. (!) ثابت کنید که قضیهٔ بروکس هم‌ارزگزاره زیر است: هر گراف k-بحرانی $(k-۱)$-منتظم یک خوشه یا یک دور فرد است.

---

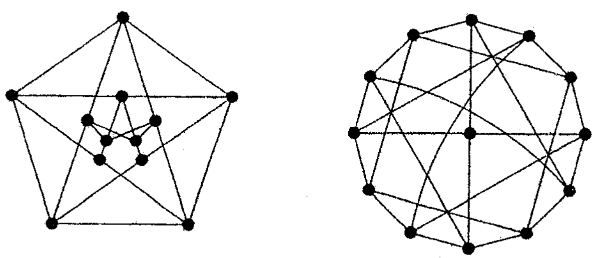
1) Minty

۲۸.۱.۵.بهبود قضیهٔ بروکس.

(+) الف) با در نظرگرفتن مقادیر $\Delta_۱$، ...، Δ_t به‌طوری که $\sum \Delta_i \geq \Delta(G) - t + ۱$، ثابت کنید که $V(G)$ را می‌توان به مجموعه‌های $V_۱$، ...، V_t که القا کنندهٔ زیرگرافهای $G_۱$، ...، G_t هستند افراز کرد به‌طوری که به ازای هر i داشته باشیم $\Delta(G_i) \leq \Delta_i$. (*راهنمایی:* از استقرا روی t استفاده کنید.) (لوواز [۱۹۶۶])

ب) با در نظر گرفتن $۴ \leq r \leq \Delta(G) + ۱$، و با استفاده از قسمت (الف) ثابت کنید که $K_r \not\subseteq G$ ایجاب می‌کند که $\chi(G) \leq \lceil \frac{r-۱}{r}(\Delta(G) + ۱) \rceil$. (بورودین - کوستوکا [۱۹۷۷]، کاتلین [۱۹۷۸]، لاورنس[۱] [۱۹۷۸])

۲۹.۱.۵. (+) ثابت کنید که گرافهای آزاد - مثلث ۴ - منتظم زیر، ۴-رنگی هستند. (*راهنمایی:* مجموعه‌های مستقل ماکسیمم را در نظر بگیرید. *توضیح:* گراف سمت چپ کوچکترین گراف ۴-رنگی ۴- منتظم آزاد - مثلث است. خواتل [۱۹۷۰])



۳۰.۱.۵. فرض کنیم G یک گراف ساده است و $t = \lceil (\Delta(G) + ۱)/j \rceil$. ثابت کنید که G می‌تواند t-رنگ شده باشد به‌طوری که برای هر i زیرگراف G_i القا شده به وسیلهٔ ردهٔ رنگ iاُم دارای هیچ زیرگراف j-یال - همبند نباشد. ثابت کنید که هیچ تعداد کمتری از رده‌ها کافی نیست اگر G یک گراف j- یال - همبند j- منتظم یا یک n-خوشه با n همنهشت ۱ به پیمانه j باشد (و یا یک دور فرد هنگامی که $j = ۱$). (ماتولا [۱۹۷۳])

۳۱.۱.۵. (+) *عدد رنگی به اضافهٔ یک طول دور فرد طولانیتر کراندار است.*

1) Borodin-Kostochka-Catlin-Lawrence

الف) فرض کنیم G یک گراف نادو بخشی ۲-همبند است که شامل یک دور زوج است. ثابت کنید که رأسهای x و y روی C و یک x,y-مسیر P که درونی- مجزا از C است وجود دارند به‌طوری که $d_c(x,y) \neq d_P(x,y) \mod ۲$.

ب) فرض کنیم $\delta(G) \geq ۲k$ و G دارای دور فرد طولانیتر از $۲k - ۱$ نیست. ثابت کنید که G دارای یک دور به طول حداقل $۴k$ است. (*راهنمایی:* همسایه‌های یک نقطهٔ پایانی از یک مسیر ماکسیمال را در نظر بگیرید.)

پ) فرض کنیم G، ۲ - همنبد است و دارای دور فرد طولانیتر از $۲k - ۱$ نیست. با استفاده از قسمت (الف) و قسمت (ب) ثابت کنید که $\chi(G) \leq ۲k$. (اردیش - هاجنال [۱۹۶۶])

۵-۲ ساختار گرافهای k-رنگی

برای هر H دیدیم که $\chi(H) \geq \omega(H)$. اگر حالت برابری در این کران برای G و همهٔ زیرگرافهای القایی برقرار باشد، آنگاه می‌گوییم G *تام* است. برخی مثالها از گرافهای تام را در بند ۳.۵ ارائه خواهیم کرد و گرافهای تام را با جزئیات بیشتر در بند ۱.۸ مورد بررسی قرار خواهیم داد. نگرانی ما با کران $\chi(G) \geq \omega(G)$ در این بند این است که تا چه اندازه می‌تواند **بد** باشد. تقریباً همواره $\chi(G)$ بسیار بزرگتر از $\omega(G)$ است[۱].

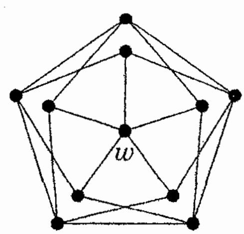
گرافهای با عدد رنگی بزرگ

کران $\chi(G) \geq \omega(G)$ می‌تواند استوار باشد، اما همچنین می‌تواند به دلخواه بد باشد. ساختمانهای بسیاری از گرافها وجود دارند که به دلخواه دارای عدد رنگی هستند اگر چه

۱) مقادیر میانگین $\omega(G)$، $\alpha(G)$، و $\chi(G)$ روی همه گرافهای n-رأسی نشاندار بسیار به $۲lgn$، $۲lgn$، و $n/(۲lgn)$ نزدیک هستند (بند ۵.۸ را ببینید). از این‌رو $\omega(G)$ معمولاً یک کران پایین بد روی $\chi(G)$ می‌باشد، در حالی که $n/\alpha(G)$ معمولاً یک کران پایین خوب روی $\chi(G)$ است.

شامل K_3 نیستند. به علاوه ساختمان زیر، ما دو ساختمان قدیمیتر را در تمرینات ۵ و ۶ ارائه می‌دهیم.

۲.۵. مثال. *ساختمان میسیلسکی.* میسیلسکی [۱۹۵۵] ساختمانی پیدا کرد که از هر گراف آزاد–مثلث k-رنگی G یک زیرگراف آزاد–مثلث $k+1$-رنگی G' می‌سازد. با در نظر گرفتن G با مجموعهٔ رأسهای $V = \{v_1, \cdots, v_n\}$، رأسهای $U = \{u_1, \cdots, u_n\}$، یک رأس دیگر w را می‌افزاییم. با آغازکردن از $G'[V] = G$، یالهایی اضافه می‌کنیم تا u_i را مجاور همه $N_G(v_i)$ کند، و آنگاه به $N(w) = U$ می‌رسیم. توجه کیند که U یک مجموعهٔ مستقل در G' است. از گراف ۲- رنگی K_2، یک تکرار ساختمان میسیلسکی، C_5، ۳- رنگی به‌دست می‌آید، و تکرار دوم **گراف گروتس**[1] ۴-رنگی را به دست می‌دهد که در زیر رسم شده است. این گرافها، گرافهای k-رنگی آزاد–مثلث با کمترین رأسها به ازای $k = 2, 3, 4$ می‌باشند. □



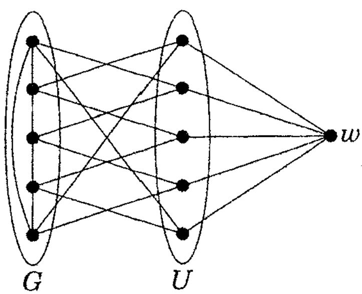
۲.۲.۵. قضیه. ساختمان میسیلسکی یک گراف آزاد-مثلث $k+1$-رنگی را از یک گراف آزاد-مثلث k-رنگی ایجاد می‌کند.

اثبات. فرض کنیم $V(G) = \{v_1, \cdots, v_n\}$ و $V(G') = \{v_i\} \cup \{u_i\} \cup \{w\}$، همانهایی باشند که در بالا توضیح داده شد. چون $\{u_i\}$ در G' مستقل است، رأسهای دیگر هر مثلث شامل u_i متعلق به $V(G)$ و همسایه‌های v_i هستند، که یک مثلث را در G کامل می‌کند. بنابراین، اگر G آزاد-مثلث باشد، آنگاه G' نیز آزاد-مثلث است.

یک k-رنگ‌آمیزی سره f از G با قرار دادن $f(u_i) = f(v_i)$ و $f(w) = k+1$

1) Grötzsch

به یک $k+1$-رنگ‌آمیزی سره از G' گسترش می‌یابد. حال فرض کنیم G' دارای یک k-رنگ‌آمیزی سره g باشد. می‌توانیم فرض کنیم $g(w) = k$، که g را به $[k-1]$ روی $\{u_i\}$ محدود می‌کند. فرض کنیم $A = \{v_i : g(v_i) = k\}$. رنگ‌آمیزی را روی A تغییر می دهیم تا یک $k-1$-رنگ‌آمیزی سره از G به‌دست آوریم و در نتیجه اثبات کنیم که $\chi(G) < \chi(G')$. برای هر $v_i \in A$، رنگ v_i را به $g(u_i)$ تغییر می‌دهیم. چون g به‌طور سره G' را رنگ می‌کند، A یک مجموعهٔ مستقل در G است، پس تنها نیاز داریم که یالهای به صورت v_iv' با $v' \in V(G) - A$ را بررسی کنیم. اگر $v_i \leftrightarrow v'$، آنگاه G' را طوری ساخته‌ایم که $u_i \leftrightarrow v'$، که ایجاب می‌کند $g(u_i) \neq g(v')$. از این‌رو تغییر ما یالهای در G را برهم نمی‌زند. برخوردهای احتمالی میان v_i و u_j را نادیده می‌گیریم، زیرا اکنون $U \cup \{w\}$ را حذف می‌کنیم و یک $k-1$-رنگ‌آمیزی سره از G داریم. □



اگر G رنگ - بحرانی باشد، آنگاه گراف جدید G' که به وسیلهٔ ساختمان میسیلسکی ایجاد شده نیز رنگ - بحرانی است (تمرین ۴). اگرچه گرافهای ایجاد شده به وسیلهٔ ساختمان میسیلسکی آغاز با $G_2 = K_2$ کوچکترین گرافهای k-رنگی آزاد - مثلث برای $k = 2, 3, 4$ هستند، گرافهایی می‌باشند که به سرعت بزرگ می‌شوند: $n(G_k) = 2n(G_{k-1}) + 1$. با $n(G_2) = 2$، از این مطلب داریم $n(G_k) = 3 \cdot 2^{k-2} - 1$ (رشد نمایی). با استفاده از روشهای احتمالی (غیرساختمانی)، اردیش ثابت کرد که یک گراف k-رنگی آزاد-مثلث با حداکثر $ck^{2+\varepsilon}$ رأس وجود دارد که در آن ε هر ثابت مثبت است و c به ε بستگی دارد اما به k بستگی ندارد.

بلانش دکارت[1] [۱۹۴۷، ۱۹۵۴] گرافهای رنگ - بحرانی‌ای ساخت که هیچ ۳-دور، ۴-دور یا ۵-دور ندارند (تمرین ۶). **کمر** یک گراف عبارت است از طول کوتاهترین دور آن، یا اینکه نامتناهی است اگر دوری وجود نداشته باشد. جستجو برای یافتن گرافهای با عدد رنگی بزرگ و کمر بزرگ به ترغیب بررسی گرافهای تصادفی کمک کرد. اردیش [۱۹۵۹] نشان داد که تقریباً هر گراف دارای یک زیرگراف با عدد رنگی حداقل k و کمر حداقل g است (قضیهٔ ۹.۵.۸). با ملاحظه یک مسألهٔ کلیتر، لوواز [۱۹۶۸] یک ساختمان صریح یافت، که بعدها به وسیلهٔ نستریل[2] و رودل[3] [۱۹۷۹] ساده شد.

گرافهای بحرانی

هر گراف k-رنگی دارای یک زیرگراف k-بحرانی است. توصیف گرافهای k-بحرانی می‌تواند بـه الگوریتمی برای عدد رنگی بیانجامـد. از پیش می‌دانیم (لم ۱۳.۱.۵) که $\delta(G) \geq k - ۱$ اگر G گراف k-بحرانی باشد. این استدلال همچنین در مورد گرافهای *رأس - رنگ - بحرانی* کاربرد دارد که گرافهایی هستند که حذف هر رأسی در آنها عدد رنگی را کاهش می‌دهد. هر گراف رنگ - بحرانی، رأس - رنگ - بحرانی است، اما عکس این مطلب هنگامی که $\chi(G) > ۳$ باشد درست نیست (تمرینات ۱۰ و ۱۱). ما توجهمان را به گرافهای رنگ - بحرانی محدود می‌کنیم.

۳.۲.۵. تبصره. یک گراف H رنگ - بحرانی است اگر، و فقط اگر، ۱) H دارای رأس تنها نباشد و ۲) برای هر $e \in E(H)$ داشته باشیم $\chi(H - e) < \chi(H)$. از این‌رو وقتی اثبات می‌کنیم که یک گراف همبند رنگ بحرانی است، تنها نیاز داریم که زیرگرافهای به‌دست آمده به وسیلهٔ حذف یک یال منفرد را در نظر بگیریم. □

---

۱) (Blanches Descartes)، این یک نام مستعار است که دبلیو. تی. تیوت به کار می‌برد.

2) Nešetřil 3) Rödl

۴.۲.۵. گزاره. اگر $v \in V(G)$ و $\chi(G-v) < \chi(G) = k$، آنگاه G دارای یک k-رنگ‌آمیزی سره است که در آن $k-1$ رنگ روی $N(v)$ ظاهر می‌شوند و رنگ روی v هیچ جای دیگر ظاهر نمی‌شود. اگر $e \in E(G)$ و $\chi(G-e) < \chi(G) = k$، آنگاه در هر $k-1$-رنگ‌آمیزی سره از $G-e$، نقاط پایانی e دارای رنگ یکسان است.

اثبات. چون $G-v$، $k-1$-رنگپذیر است، می‌توانیم یک k-رنگ‌آمیزی از G را با استفاده از رنگ k روی تنها v کامل کنیم. رنگهای دیگر باید همگی روی $N(v)$ ظاهر شوند، وگرنه یک $k-1$-رنگ‌آمیزی از G خواهیم داشت. اگر یک $k-1$ -رنگ‌آمیزی سره از $G-e$ به نقاط پایانی e رنگهای متمایز بدهد، آنگاه می‌توانیم e را اضافه کنیم تا یک $k-1$-رنگ‌آمیزی از G به‌دست آوریم. □

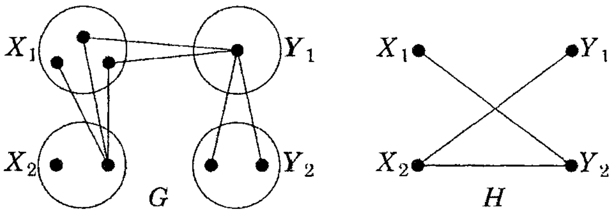
برای گرافهای k-بحرانی، می‌توانیم لزوم $\delta(G) \geq k-1$ را به $\kappa'(G) \geq k-1$ به وسیلهٔ استفاده از قضیهٔ کونیگ - اگروری بهبود بخشیم.

۵.۲.۵. لم. (کنین[1]) فرض کنیم G یک گراف با $\chi(G) > k$ است، و X، Y یک افراز از $V(G)$ است. اگر $G[X]$ و $G[Y]$، k-رنگپذیر باشند، آنگاه برش یالی $[X, Y]$ دارای حداقل k یال است.

اثبات. فرض کنیم X_1، ...، X_k و Y_1، ...، Y_k افرازهای X و Y باشند که به وسیلهٔ رده‌های رنگ در k-رنگ‌آمیزیهای $G[X]$ و $G[Y]$ تشکیل شده‌اند. یک گراف دوبخشی H را با رأسهای X_1، ...، X_k و Y_1، ...، Y_k تشکیل می‌دهیم، قرار می‌دهیم $X_iY_j \in E(H)$ اگر در G **هیچ یالی** میان مجموعهٔ X_i و مجموعهٔ Y_j نباشد. اگر کمتر از k یال میان مجموعه‌های X و Y در G باشند، آنگاه H دارای بیش از $k(k-1)$ یال است. چون m رأس می‌توانند حداکثر km **یال** را در یک زیرگراف از $K_{k,k}$ بپوشانند، $E(H)$ نمی‌تواند به وسیلهٔ کمتر از k رأس پوشانده شود. بنابر قضیهٔ کونیگ - اگروری،

1) Kainen

H دارای یک جورسازی به اندازهٔ k است، که یک جورسازی کامل است. اگر در این جورسازی $X_i \leftrightarrow Y_j$، رنگ i را به رأسهای X_i و Y_j در G می‌دهیم. این کار یک k-رنگ‌آمیزی از G را کامل می‌کند. این با فرض ما که $\chi(G) > k$ در تناقض است، پس $|[X, Y]| \geq k$. □

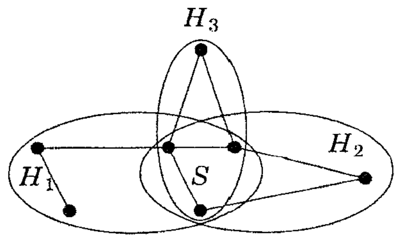


۶.۲.۵. قضیهٔ. (دیراک [۱۹۵۳]) هر گراف k-بحرانی، $k-1$- یال - همبند است.

اثبات. فرض کنیم G، k-بحرانی است، و فرض کنیم $[X, Y]$ یک برش یالی مینیمم باشد. چون G، k-بحرانی است، $G[X]$ و $G[Y]$، $k-1$-رنگپذیرند. با استفاده از $k-1$ به‌عنوان پارامتر، لم ۵.۲.۵ بیان می‌کند که $|[X, Y]| \geq k-1$. □

یال - همبندی بالا مانع برشهای رأسی کوچک نمی‌شود، اما می‌توانیم رفتار مجموعه‌های برش رأسی کوچک را در گرافهای k-بحرانی محدود کنیم.

۷.۲.۵. تعریف. فرض کنیم S یک مجموعه از رأسها در گراف G باشد. یک S**—مؤلفه** از G یک زیرگراف القایی از G است که مجموعهٔ رأسهایش شامل S و رأسهای یک مؤلفه $G - S$ می‌باشد.



۸.۲.۵. گزاره. اگر G، k- بحرانی باشد، آنگاه G دارای مجموعهٔ برشی از رأسهای القاکننده یک خوشه نیست. به ویژه، اگر G دارای یک مجموعهٔ برشی $S = \{x, y\}$ باشد،

آنگاه $x \not\leftrightarrow y$ و G دارای یک S-مؤلفه H است به‌طوری که $\chi(H+xy) \geq k$.

اثبات. فرض کنیم G، k-بحرانی است و S یک برش رأسی می‌باشد. فرض کنیم H_1، ...، H_t، S-مولفه‌های G باشند. چون هر H_i یک زیرگراف سره از G است و G، k-بحرانی است، هر H_i، $k-1$-رنگپذیر است. اگر هر H_i دارای یک $k-1$-رنگ‌آمیزی باشد که رنگهای متمایز به رأسهای S تخصیص می‌دهد، آنگاه نامهای رنگها را در $k-1$-رنگ‌آمیزیهای G_1، ...، G_t می‌توان جابجا کرد تا روی S سازگار باشند. در این حالت، رنگ‌آمیزیها را می‌توان ترکیب کرد تا یک $k-1$-رنگ‌آمیزی از G به‌دست آورد، که غیرممکن است.

از این‌رو برای یک S-مؤلفه H هر $k-1$-رنگ‌آمیزی یک رنگ واحد را به یک جفت از رأسها در S تخصیص می‌دهد. به ویژه، S یک خوشه نیست. اگر $|S| = \{x, y\}$، آنگاه هر $k-1$-رنگ‌آمیزی از H یک رنگ واحد را به x و y تخصیص می‌دهد، که بدان معناست که $H+xy$، $k-1$-رنگپذیر نیست. □

تمرین ۱۸ این مطلب را برای $|S| = 2$ تقویت می‌کند. همچنین دربارهٔ ساختار کلی گرافهای k-بحرانی بیشتر آشنا می‌شویم. قضیهٔ بروکس ایجاب می‌کند که تنها گرافهای k-بحرانی $k-1$-منتظم، خوشه‌ها و دورهای فرد هستند (تمرین ۲۷.۱.۵). گالای [۱۹۶۳] این مطلب را با اثبات به این صورت تقویت کرد که در زیرگراف یک گراف k-بحرانی القا شده به وسیلهٔ رأسهای با درجهٔ $k-1$، هر بلوک یک خوشه یا یک دور فرد است (تمرین ۲۵).

زیرتقسیمای واداشته (اختیاری)

برای داشتن عدد رنگی k لزومی ندارد که یک k-خوشه داشته باشیم، اما چه بسا باید یک صورت تضعیف شده از یک k-خوشه داشته باشیم. هیوش[1] [۱۹۶۱] حدس زد که

1) Hajós

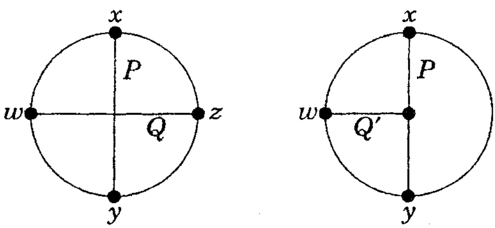
هر گراف k-رنگی شامل یک زیرتقسیم از K_k (یک گراف به‌دست آمده از K_k به‌وسیلهٔ دنباله‌ای از زیرتقسیمهای یالی) است. این مطلب برای $k \leq ۳$ آشکار است، زیرا برای $k = ۳$ بیان می‌کند که هر گراف ۳-رنگی شامل یک دور است. دیراک [۱۹۵۲ الف] این حدس را برای $k = ۴$ اثبات کرد. اگر F یک زیرتقسیم از H باشد، آنگاه F را یک H-**زیرتقسیم** می‌نامیم.

۹.۲.۵. قضیهٔ. (دیراک [۱۹۵۲ الف]) هر گراف با عدد رنگی حداقل ۴ شامل یک $K_۴$-زیرتقسیم است.

اثبات. از استقرا روی $n(G)$ استفاده می‌کنیم. هنگامی که $n(G) = ۴$، گراف G خود $K_۴$ است. فرض کنیم $\chi(G) \geq ۴$ و $n(G) > ۴$، و فرض کنیم H یک زیرگراف ۴-بحرانی از G باشد. بنابرگزاره ۸.۲.۵، H دارای رأس برشی نیست. اگر $\kappa(H) = ۲$ و $S = \{x, y\}$ یک ۲- برش باشد، آنگاه $x \not\leftrightarrow y$ وگزاره ۸.۲.۵ یک S-مؤلفهٔ H' از H را به‌دست می‌دهد به‌طوری که $\chi(H' + xy) \geq ۴$. چون $n(H') < n(G)$، می‌توانیم فرض استقرا را به کار بریم تا یک $K_۴$-زیرتقسیم در H' به‌دست آوریم. این زیرگراف F همچنین در G ظاهر می‌شود مگر آنکه شامل xy باشد. در آن حالت، F را تعدیل می‌کنیم تا یک $K_۴$-زیرتقسیم در G را به وسیلهٔ جایگزینی یال xy با یک x, y-مسیر دیگر از یک S-مؤلفه از H، به‌دست آوریم. چنین مسیری وجود دارد، زیرا هنگامی که S یک مجموعهٔ برشی مینیمال است، هر رأس از S دارای یک همسایه در هر مؤلفه از $H - S$ است.

از این‌رو می‌توانیم فرض کنیم که H، ۳-همبند است که ایجاب می‌کند $\delta(H) \geq ۳$. درجهٔ مینیمم حداقل ۳ یک دور به‌طول حداقل ۴ را تحمیل می‌کند (لم ۱۸.۲.۱)؛ فرض کنیم C یک چنین دوری در H باشد. اگر C یک خوشه القا کند، به پایان رسیده‌ایم، پس فرض کنیم u، v رأسهای نامجاور روی C باشند. چون $H - u - v$ همبند است، یک کوتاهترین مسیر P میان دو قسمت C در $H - u - v$ وجود دارد. فرض کنیم

x، y نقاط پایانی P باشند. باز هم $H-x-y$ همبند است، و یک کوتاهترین مسیر Q میان دو قسمت C در $H-x-y$ وجود دارد. فرض کنیم z و w نقاط پایانی Q باشند؛ نقاط پایانی P و Q اطراف C به‌ترتیب x، z، y، w ظاهر می‌شوند. اگر P و Q متقاطع نباشند، آنگاه $C \cup P \cup Q$ یک K_4–زیرتقسیم است. اگر P و Q متقاطع باشند، فرض کنیم Q' قسمتی از Q از w تا نخستین تقاطع آن با P باشد. حال $C \cup P \cup Q'$ یک K_4–زیرتقسیم است. □



کاتلین[1] [۱۹۷۹] اثبات کرد که حدس هیوش برای $k \geq ۷$ (تمرین ۲۳ را برای $k = ۷$ و $k = ۸$ ببینید). هادویگر[2] [۱۹۴۳] حدس ضعیفتری ارائه کرد، که هر گراف k–رنگی شامل یک زیرگراف انقباض‌پذیر به K_k است، یعنی یک زیرگراف که پس از دنباله‌ای از انقباضهای یالی به K_k تبدیل می‌شود. این یک حدس ضعیفتر است، زیرا یک K_k–زیرتقسیم یک نوع خاصی از زیرگراف انقباض‌پذیر به K_k است. حدس هادویگر همچنان باز است. برای $k = ۴$، درستی حدس هیوش نتیجه می‌شود. برای $k = ۵$، هم‌ارز مسأله مشهور چهاررنگ است (فصل ۷ را ببینید). برای $k = ۶$، با استفاده از قضیهٔ چهاررنگ به‌وسیلهٔ روبرتسون[3]، سایمور[4]، و توماس[5] [۱۹۹۳] اثبات شد.

برخی نتایج دربارهٔ گرافهای k-بحرانی به گرافهای با $\delta(G) \geq k-۱$ گسترش می‌یابند. در قضیهٔ ۹.۲.۵، ثابت کردیم که هر گراف ۴-بحرانی شامل یک K_4-زیرتقسیم است؛ همچنین هر گراف با $\delta(G) \geq ۳$ شامل یک K_4-زیرتقسیم است (تمرین ۱۹). دیراک

1) Catlin 2) Hadwiger 3) Robertson 4) Seymour 5) Thomas

[۱۹۶۵] و یونگ[1] [۱۹۶۵] یک صورت تضعیف شده از حدس هیوش را اثبات کرده‌اند: G باید شامل یک K_k-زیرتقسیم باشد اگر، و فقط اگر، $\chi(G)$ به اندازهٔ کافی بزرگ باشد. این مطلب به دو روش گسترش می‌یابد: برای هر گراف F، $\delta(G) \geq ۲^{e(F)}$ به اندازهٔ کافی بزرگ یک F-زیرتقسیم را تحمیل می‌کند.

۱۰.۲.۵. لم. (مادر [۱۹۶۷]، تومیسن [۱۹۸۸] را ببینید) اگر $\delta(G) \geq ۲k$، آنگاه G شامل زیرگرافهای مجزای G' و H است به‌طوری که ۱) $\delta(G') \geq k$، ۲) هر رأس از G دارای یک همسایه در H است، و ۳) H همبند است.

اثبات. می‌توانیم فرض کنیم که G همبند است. هنگامی که یالهای یک زیرگراف همبند H' را منقبض می‌کنیم، مجموعهٔ $V(H')$ یک رأس منفرد می‌شود، و ما گراف حاصل را $G \cdot H'$ می‌نامیم. همه زیرگرافهای همبند H' از G را در نظر می‌گیریم به‌طوری که $G \cdot H'$ دارای حداقل $k(n(G) - n(H') + ۱)$ یال باشد. چون $\delta(G) \geq ۲k$، هر زیرگراف ۱-راسی H' از G دارای این ویژگی است. H را به عنوان یک زیرگراف ماکسیمال که دارای این ویژگی است انتخاب می‌کنیم. فرض کنیم G' زیرگراف القا شده به‌وسیلهٔ رأسهای $G - V(H)$ باشد که همسایه‌هایی در H دارند.

ادعا می‌کنیم که $\delta(G') \geq k$. فرض کنیم برای یک $x \in V(G')$ داشته باشیم $d_{G'}(x) < k$. $y \in N(x) \cap V(H)$ را انتخاب می‌کنیم. در $G \cdot H$، $d_{G'}(x)$ یال از x در $V(G')$ وجود دارند. در $G \cdot (H \cup xy)$ این یالها به یالهایی از $V(G')$ به H که در $G \cdot H$ ظاهر می‌شوند مضمحل می‌گردند. یال xy همچنین منقبض می‌شود، اما همه یالهای دیگر $G \cdot H$ در $G \cdot (H \cup xy)$ باقی می‌مانند. از این‌رو

$$e(G \cdot (H \cup xy)) = e(G \cdot H) - d_{G'}(x) - ۱ \geq e(G \cdot H) - k$$

که با ماکسیمال بودن H در تناقض است. □

1) Jung

۱۱.۲.۵. قضیهٔ. (مادر [۱۹۶۷]، تومیسن [۱۹۸۸] را ببینید) اگر $e(F) = m$ و $\delta(F) \geq ۱$، آنگاه $\delta(G) \geq ۲^m$ ایجاب می‌کند که G دارای یک زیرتقسیم از F باشد.

اثبات. اثبات به وسیلهٔ استقرا روی m؛ این گزاره برای $m \leq ۱$ آشکار است. $m \geq ۲$ را در نظر می‌گیریم. بنابر لم، می‌توانیم H و G' را در G طوری در نظر بگیریم که H ،$\delta(G') \geq ۲^{m-۱}$ همبند است، و هر رأس از G' دارای یک همسایه در H است. اگر e یک یال از F باشد به‌طوری که $F - e$ دارای رأسهای تنها نباشد، آنگاه بنابر استقرا G' دارای یک زیرتقسیم J از $F - e$ است، و یک مسیر از H را می‌توان میان رأسهای J که نمایندهٔ نقاط پایانی e هستند، اضافه کرد تا به عنوان زیرتقسیمی از e عمل کند. اگر هر یال از F متصل به رأسی با درجهٔ ۱ باشد، آنگاه F یک جنگل از ستاره‌هاست، و کران درجهٔ مینیمم به ما اجازه می‌دهد که خود F را در G بیابیم. □

فرض کنیم $f(k)$ کوچکترین مقدار $\delta(G)$ باشد که یک K_k-زیرتقسیم را در G تحمیل می‌کند. چون هنگامی که $m = k(k+۱)/۲$، $K_{m,m-۱}$ دارای $K_{۲k}$-زیرتقسیم نمی‌باشد (تمرین ۲۲)، داریم $f(k) > k^۲/۸$. سیمردی[1] اثبات کرد که برای یک ثابت c داریم $f(k) < ck^۲ \log k$، که کران $f(k) \leq ۲^{\binom{k}{۲}}$ را از قضیهٔ ۱۱.۲.۵ بسیار بهبود می‌بخشد. دیراک اثبات کرد $f(۴) = ۳$، و تومیسن [۱۹۷۴] ثابت کرد $f(۵) \leq ۸$. چون گراف بیست وجهی، ۵-منتظم است و دارای $K_۵$-زیرتقسیم نمی‌باشد، $f(۵) \geq ۶$. می‌توانیم از یک اثبات برای حدس جالب دیراک [۱۹۶۴]، مبنی بر اینکه هر گراف n-رأسی با حداقل $۳n - ۵$ یال شامل یک زیرتقسیم از $K_۵$ است، نتیجه بگیریم $f(۵) = ۶$.

1) Szemerédi

تمرینات

۵.۲.۱. مینیمم تعداد یالها را در یک گراف n-رأسی همبند با عدد رنگی k تعیین کنید. (ارشوو - کوزوهین[1] [۱۹۶۲]- باسکر - ساماد-وست[2] [۱۹۹۴] را برای همبندی بیشتر ببینید.)

۵.۲.۲. فرض کنیم f یک k-رنگ‌آمیزی سره از یک گراف k-رنگی G باشد. ثابت کنید که برای هر رنگ یک رأس که دارای رنگی برطبق f است وجود دارد که مجاور همه رأسهای دارای رنگهای دیگر است.

۵.۲.۳. از ویژگیهای گرافهای رنگ - بحرانی برای اثبات دوبارهٔ گزاره ۵.۱.۱۲ استفاده کنید: $\chi(G) \leq ۱ + \max_i \min\{d_i, i-۱\}$، که در آن $d_۱ \geq \cdots \geq d_n$ درجه‌های رأسها در G هستند.

۵.۲.۴. (!) ثابت کنید که اگر G یک گراف رنگ - بحرانی باشد، آنگاه گراف G' که از آن با به‌کار بردن ساختمان میسیلسکی ایجاد شده نیز رنگ - بحرانی است.

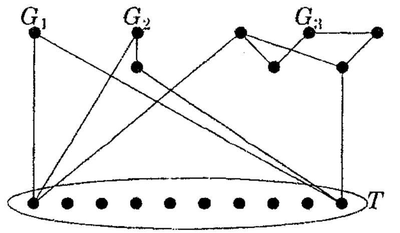
۵.۲.۵. فرض کنیم $G_۱ = K_۱$. برای $k > ۱$، G_k را از $G_۱$، ...، $G_{k-۱}$ با افزودن به اجتماع مجزای $G_۱ + \cdots + G_{k-۱}$ یک مجموعهٔ T از $\prod_{i=۱}^{k-۱} n(G_i)$ رأس اضافی بسازید. برای هر $(v_۱, \cdots, v_{k-۱}) \in V(G_۱) \times \cdots \times V(G_{k-۱})$، یک رأس با همسایگی $v_۱$، ...، $v_{k-۱}$ بیفزایید. ساختمان $G_۴$ در زیر ترسیم شده است.

الف) ثابت کنید که $\omega(G_k) = ۲$ و $\chi(G_k) = k$. (زیکوو[3] [۱۹۴۹])

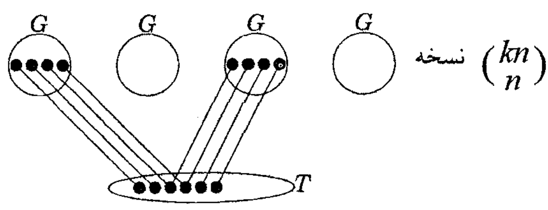
ب) ثابت کنید که G_k، k-بحرانی است. (شوبل[4] [۱۹۶۹])

---

1) Eršov-Kožuhin 2) Bhasker-Samad-West 3) Zykov 4) Schäuble



۶.۲.۵. (+)*ساختمان گراف k-رنگی G_k با کمرشش.* با $G_۲ = C_۶$ آغاز می‌کنیم. فرض کنیم گراف G_k، k-رنگی با n رأس داده شده است. برای ساختن $G_{k+۱}$، فرض کنیم T یک مجموعهٔ مستقل از kn رأس جدید باشد. $\binom{kn}{n}$ نسخه دو به دو مجزا از G_k را در نظر می‌گیریم، یک نسخه برای هر راه، برای انتخاب یک n-مجموعهٔ $S \subset T$. یک جورسازی میان هر نسخه از G_k و n-مجموعهٔ S وابسته به آن را اضافه می‌کنیم. ثابت کنید که گراف $G_{k+۱}$ حاصل دارای عدد رنگی $k + ۱$ و کمر ۶ است (بلانش دکارت [۱۹۴۷]، [۱۹۵۴])



۷.۲.۵. *گراف بحرانی مضاعف.* فرض کنیم که به‌ازای هر جفت x، y از رأسهای متمایز، داشته باشیم $\chi(G-x-y) = \chi(G) - ۲$. ثابت کنید که G یک خوشه است. (*توضیح:* لوواژ حدس می‌زد که همین نتیجه هنگامی که $\chi(G-x-y) = \chi(G) - ۲$ باشد، تنها برای جفتهایی از رأسهای مجاور الزامی است، برقرار می‌باشد.)

۸.۲.۵. ثابت کنید که اگر G دارای $۲K_۲$ القایی نباشد، آنگاه $\chi(G) \leq \binom{\omega(G)+۱}{۲}$. (*راهنمایی:* از یک خوشه ماکسیمم برای تعریف یک گردایه از $\omega(G) + \binom{\omega(G)}{۲}$ مجموعهٔ مستقل که رأسها را می‌پوشانند استفاده کنید. *توضیح:* ساختمان میسیلسکی نشان

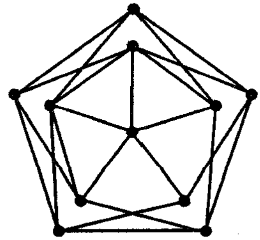
می‌دهد که منع کردن یک خوشهٔ ثابت نمی‌تواند یک کران روی $\chi(G)$ برحسب $\omega(G)$ قرار دهد؛ اما منع کردن یک $2K_2$ القایی می‌تواند.) (وگون[1] [۱۹۸۰])

۹.۲.۵. (+) ثابت کنید که هر k-رنگ‌آمیزی سره از یک گراف k-رنگی، شامل هر درخت k-رأسی نشاندار به عنوان یک زیرگراف نشاندار است. به‌ویژه، فرض کنیم $V(T) = \{w_1, \cdots, w_k\}$، و ثابت کنید که یک نگاشت حافظ مجاورت $\phi : V(T) \to V(G)$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر i داریم $f(\phi(w_i)) = i$. (**توضیح:** ϕ نیازی به حفظ کردن نامجاورت ندارد؛ به عنوان مثال، این نتیجه برای $G = K_k$ آشکار است).

۱۰.۲.۵. (+) ثابت کنید که اگر G دارای یک رنگ‌آمیزی سره g باشد که در آن هر ردهٔ رنگ دارای حداقل دو رأس باشد، آنگاه G دارای یک رنگ‌آمیزی بهین f (مینیمم تعداد رنگها) است که در آن هر ردهٔ رنگ دارای حداقل دو رأس است. (*راهنمایی:* اگر f دارای یک ردهٔ رنگ با تنها یک رأس باشد، از g برای ایجاد تغییری در f استفاده کنید. اثبات می‌تواند به‌صورت الگوریتمی یا با استقرا روی $\chi(G)$ ارائه شود.) (گالای [۱۹۶۴])

۱۱.۲.۵. ثابت کیند که گرافهای رنگ - بحرانی با عدد رنگی ۳ همان گرافهای رأس - رنگ - بحرانی با عدد رنگی ۳ هستند.

۱۲.۲.۵. ثابت کنید که گراف زیر رأس - رنگ - بحرانی است اما رنگ - بحرانی نیست.



۱۳.۲.۵. (−) *کوچکترین گرافهای k-بحرانی.*

1) Wagon

الف) فرض کنیم x، y رأسهایی در یک گراف k-بحرانی G باشند. ثابت کنید که $N(x) \subseteq N(y)$ غیرممکن است. نتیجه بگیرید که هیچ گراف k-بحرانی دارای $k+1$ رأس نمی‌باشد.

ب) ثابت کنید که $\chi(G \vee H) = \chi(G) + \chi(H)$، و اینکه $G \vee H$ رنگ - بحرانی است اگر، و فقط اگر، هر دوی G و H رنگ - بحرانی باشند. نتیجه بگیرید که $C_5 \vee K_{k-3}$ با $k+2$ رأس، k-بحرانی است.

۱۴.۲.۵. ***ساختمان هیوش.*** فرض کنیم G، H گرافهای k-بحرانی باشند که تنها در رأس v شریک‌اند، با قید $vu \in E(G)$ و $vw \in E(H)$. ثابت کنید که $(G - vu) \cup (H - vw) \cup uw$، k-بحرانی است. از این مطلب استفاده کنید تا گرافهای ۴-بحرانی با n رأس به‌ازای هر $n \geq 7$ فرد بسازید. یک ساختمان جدا برای گرافهای ۴-بحرانی با n رأس به‌ازای هر $n \geq 7$ زوج بسازید. (هیوش [۱۹۶۱])

۱۵.۲.۵. (+)***اثبات دیگر اینکه گرافهای k-بحرانی، $k-1$ -یال - همبند هستند.***

الف) فرض کنیم G، k-بحرانی با قید $k \geq 3$ است. ثابت کنید که برای هر $e, f \in E(G)$، یک زیرگراف $k-1$-بحرانی وجود دارد که شامل e است اما شامل f نیست. (توفت[1] [۱۹۷۴])

ب) با استفاده از قسمت (الف) و استقرا روی k قضیهٔ دیراک را که هر گراف k- بحرانی، $k-1$- یال - همبند است اثبات کنید. (توفت [۱۹۷۴])

۱۶.۲.۵. (+) ثابت کنید که اگر G، k-بحرانی و هر زیرگراف $k-1$ -بحرانی از G با K_{k-1} یکریخت باشد، آنگاه $G = K_k$ (اگر $k \geq 4$) (*راهنمایی:* از لم گراف بحرانی توفت قسمت (الف) تمرین ۱۵ استفاده کنید.) (اشتاییبیتز[2] [۱۹۸۵])

۱۷.۲.۵. (−) یک زیرتقسیم از K_4 در گراف گروتس بیابید (مثال ۱.۲.۵).

۱۸.۲.۵. فرض کنیم G، k-بحرانی و دارای یک مجموعهٔ جداساز $S = \{x, y\}$ است.

1) Toft 2) Stiebitz

ثابت کنید که ۱) $y \not\leftrightarrow x$، ۲) $G-S$ دارای دقیقاً دو S-مؤلفه است، و ۳) S-مؤلفه‌های G را می‌توان به‌صورت G_1 و G_2 نامگذاری کرد به‌طوری که G_1+xy یک گراف k-بحرانی و $G_2 \cdot xy$ (xy را بیفزایید و آنگاه منقبض کنید) نیز یک گراف k-بحرانی است. از این واقعیتها برای کوتاه کردن اثبات اینکه هر گراف ۴-رنگی شامل یک زیرتقسیم از K_4 است، استفاده کنید.

۱۹.۲.۵. (!) ثابت کنید که هر گراف ساده با مینیمم درجهٔ حداقل ۳ شامل یک K_4-زیرتقسیم است (*راهنمایی:* نتیجه قویتر را اثبات کنید که هر گراف نابدیهی با حداکثر یک رأس از درجهٔ کمتر از ۳ شامل یک K_4- زیرتقسیم است. از نتیجه حاصل از اثبات قضیهٔ ۹.۲.۵ استفاده کنید مبنی بر اینکه هر گراف ۳-همبند شامل یک K_4- زیرتقسیم است.) (دیراک ۱۹۵۲ الف)

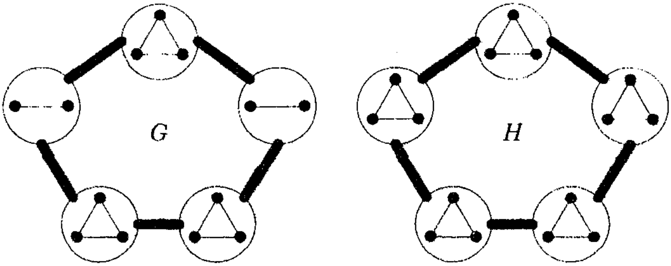
۲۰.۲.۵. (!) با در نظر گرفتن اینکه $\delta(G) \geq 3$ یک K_4-زیرتقسیم را تحمیل می‌کند، ثابت کنید که ماکسیمم تعداد یالها در یک گراف n-رأسی ساده بدون K_4-زیرتقسیم برابر است با $2n-3$.

۲۱.۲.۵. فرض کنیم $\chi(G)=k$ و G دارای کمر حداقل ۵ است. ثابت کنید که G شامل هر درخت k-رأسی به عنوان یک زیرگراف القایی است. (گیارفس - سیمردی - توزا[1] [۱۹۸۰])

۲۲.۲.۵. فرض کنیم $m=k(k+1)/2$. ثابت کنید که $K_{m,m-1}$ دارای K_{2k}-زیرتقسیم نیست.

۲۳.۲.۵. یالهای سنگین زیر نشان می‌دهند که هر رأس در یک دایره مجاور هر رأس دیگری است. ثابت کنید که $\chi(G)=7$ اما G دارای K_7–زیرتقسیم نمی‌باشد. ثابت کنید که $\chi(H)=8$ اما H دارای K_8–زیرتقسیم نیست (کاتلین [۱۹۷۹])

1) Gyárfás-Szemerdi-Tuza



۲۴.۲.۵. فرض کنیم G همبند و k-رنگی است و یک گراف کامل و یا یک دور با طول همنهشت با ۳ به پیمانه ۶ نمی‌باشد. ثابت کنید که هر k-رنگ‌آمیزی سره از G دارای دو رأس همرنگ با یک همسایه مشترک است. (تومیسکو[1])

۲۵.۲.۵. (+)***رأسهای با درجهٔ مینیمم در گرافهای k -بحرانی.***

الف) ثابت کنید که اگر هر رأس از هر دور زوج از یک گراف متصل به یک وتر از آن دور زوج باشد، آنگاه هر بلوک از گراف یک خوشه یا یک دور فرد است.

ب) فرض کنیم G، k-بحرانی است، v رأسی از درجهٔ $k-1$ در G است، و f یک k-رنگ‌آمیزی سره از G است که رنگ k را تنها روی v به‌کار می‌برد. ثابت کنید که دو رنگ روی هر یال متصل به v را می‌توان با هم جابجا کرد تا یک k -رنگ‌آمیزی سره دیگر از G به‌دست آورد.

پ) فرض کنیم G، k-بحرانی است و H زیرگرافی از G است که به‌وسیلهٔ رأسهایی از درجهٔ $k-1$ القا شده است. ثابت کنید که هر بلوک از H یک خوشه یا یک دور فرد است. (*راهنمایی:* با استفاده از قسمت (الف)، یک دور زوج در H بیابید که یک رأس v متصل به وتر نداشته باشد، و یک k-رنگ‌آمیزی از G را در نظر می‌گیریم که در آن v تنها رأس دارای رنگ k باشد. با استفاده پیاپی از قسمت (ب)، یک k-رنگ‌آمیزی از G ایجاد کنید که یک رنگ پایینتر را از همسایگی تنها رأس دارای رنگ k حذف کند.) (گالای [۱۹۶۳])

1) Tomescu

۵-۳ جنبه‌های شمارشی

گاهی می‌توانیم با در نظر گرفتن یک مسألهٔ کلیتر یک مسألهٔ دشوار را روشن کنیم. ما برای محاسبه مینیمم k به‌طوری که G دارای یک k-رنگ‌آمیزی سره باشد الگوریتم خوبی نمی‌دانیم (بند ۳.۶ را ببینید)، اما می‌توانیم $\chi(G;k)$ را به عنوان k-رنگ‌آمیزیهای سره G تعریف کنیم. دانستن $\chi(G;k)$ برای هر k، ممکن است یافتن k مینیمم را جایز بشمارد در حالی که مقدار مثبت باشد، که تعداد $\chi(G)$ است. بیرکهوف [۱۹۱۲] این تابع را به عنوان یک راه ممکن برای یورش به مسألهٔ چهاررنگ معرفی کرد.

در این بند، ما ویژگیهای این تابع شمارشی را تحقیق خواهیم کرد، هنگامی که محاسبه رده‌ها آسان باشد. این مطلب ما را از یک سو به بررسی گرافهای تام و از سوی دیگر به رابطه‌ای میان رنگ‌آمیزیها و سودهیهای بیدور هدایت می‌کند.

شمارش رنگ‌آمیزیهای سره

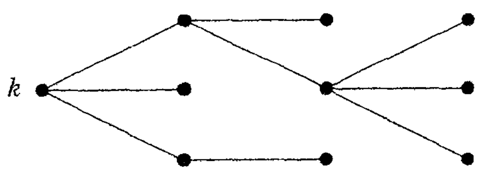
۱.۳.۵. تعریف. تابع $\chi(G;k)$ نگاشتهای $f : V(G) \to [k]$ را که رنگ‌آمیزی به‌طور سره G از مجموعهٔ $[k] = \{۱, \cdots, k\}$ است می‌شمارد. در این تعریف لزومی ندارد که همه k رنگ استفاده شوند، و جابجایی رنگهای استفاده شده یک رنگ‌آمیزی متفاوت ایجاد می‌کند.

۲.۳.۵. مثال. *مثالهای مقدماتی.* هنگام رنگ‌آمیزی رأسهای یک مجموعهٔ مستقل، می‌توانیم به‌طور مستقل یکی از k رنگ را در هر رأس انتخاب کنیم. هریک از k^n تابع با $[k]$ یک رنگ‌آمیزی سره است، و از این‌رو $\chi(\overline{K}_n;k) = k^n$.

اگرچه $K_۳$ دارای تنها یک افراز به سه مجموعهٔ مستقل است و هیچ افرازی به چهار مجموعه ندارد، داریم $\chi(K_۳;۳) = ۶$ و $\chi(K_۳;۴) = ۲۴$. اگر $V(K_n)$ را به یک ترتیبی رنگ کنیم، رنگهایی که پیشتر انتخاب شده‌اند نمی‌توانند روی رأس i اُم استفاده شوند،

اما $k-i+1$ انتخاب در دسترس برای رأس iاُم باقی می‌ماند، بدون اینکه چگونگی انتخاب رنگهای پیشین اهمیتی داشته باشد. ازاین‌رو $\chi(K_n;k) = k(k-1)\cdots(k-n+1)$. با انتخاب n رنگ متمایز و آنگاه ضرب آنها در $n!$ به‌منظور محاسبه راههایی که هریک از این انتخابها می‌تواند به رأسها تخصیص یابد، همین شمارش را به‌دست می‌آوریم. مقدار این فرمول ۰ است اگر $k < n$، و باید همچنین باشد زیرا K_n، k-رنگی است.

اگر یک رأس را از یک درخت به عنوان ریشه انتخاب کنیم، می‌توانیم آن را به k راه رنگ‌آمیزی کنیم. اگر درخت را از ریشه، در امتداد یک رنگ‌آمیزی رشد دهیم، در هر مرحله تنها رنگ والد ممنوع است، و $k-1$ انتخاب برای رنگ رأس جدید داریم. علاوه بر این، با حذف یک برگ، می‌توانیم بیدرنگ ملاحظه کنیم که هر k-رنگ‌آمیزی سره به این روش ظاهر می‌شود. از این‌رو برای هر درخت n-رأسی داریم $\chi(T;k) = k(k-1)^{n-1}$.



پاسخها چندجمله‌ایهایی برحسب k از درجهٔ $n(G)$ هستند. این برای هر گراف برقرار است، و از این‌رو $\chi(G;k)$ **چندجمله‌ای رنگی** G نامیده می‌شود.

۳.۳.۵. گزاره. فرض کنیم $x_{(r)} = x(x-1)\cdots(x-r+1)$. اگر $p_r(G)$ نشانگر تعداد افرازهای $V(G)$ دقیقاً به r مجموعهٔ مستقل باشد، آنگاه

$$\chi(G;k) = \sum_{r=1}^{n(G)} p_r(G)k_{(r)}$$

که یک چندجمله‌ای از درجهٔ $n(G)$ است.

اثبات. هنگامی که r رنگ عملاً در یک رنگ‌آمیزی سره استفاده می‌شوند، $V(G)$ را دقیقاً به r مجموعهٔ مستقل افراز می‌کنند. با در دسترس داشتن k رنگ، تعداد راههای تخصیص رنگها به یک افراز، هنگامی که دقیقاً r رنگ به کار می‌رود عبارت است از

$k_{(r)}$. این برای همه رنگ آمیزیها معتبر است، پس فرمول مربوط به $\chi(G;k)$ برقرار است. چون $k_{(r)}$ یک چندجمله‌ای برحسب k و $p_r(G)$ یک ثابت برای هر r است، این فرمول ایجاب می‌کند که $\chi(G;k)$ یک تابع چندجمله‌ای از k باشد. فرض کنیم G دارای n رأس باشد. دقیقاً یک افراز از G به n مجموعهٔ مستقل وجود دارد و هیچ افرازی نیست که مجموعه‌های بیشتری را به کار برد، بنابراین جمله مقدم k^n است. □

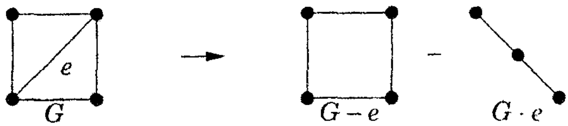
فهرست کردن افرازها به مجموعه‌های مستقل از یافتن کوچکترین چنین افرازی (عدد رنگی) آسانتر نیست، بنابراین محاسبه چندجمله‌ای رنگی به این روش عملی نیست. همچنین یک بازگشت وجود دارد، که بسیار شبیه مورد استفاده واقع شده در فصل ۲ برای شمارش درختهای فراگیر به‌نظر می‌رسد. بازهم $G \cdot e$ نشانگر گراف به‌دست آمده به وسیلهٔ منقبض کردن یال e در G می‌باشد، اما چون داریم رنگ‌آمیزیها را می‌شماریم نسخه‌های چندگانه از یالها را که از انقباض به‌وجود می‌آیند، کنار می‌گذاریم.

۴.۳.۵. قضیهٔ. (بازگشت رنگی) اگر G یک گراف ساده باشد و $e \in E(G)$، آنگاه

$$\chi(G;k) = \chi(G-e;k) - \chi(G \cdot e;k)$$

اثبات. هر k-رنگ‌آمیزی سره از G یک k-رنگ‌آمیزی سره از $G-e$ است. یک k-رنگ‌آمیزی سره از $G-e$ یک k-رنگ‌آمیزی سره از G است اگر، و فقط اگر، به نقاط پایانی u و v از e رنگهای متمایز بدهد. از این‌رو می‌توانیم با تفریق k-رنگ آمیزیهای سره از $G-e$ که به u و v یک رنگ را تخصیص می‌دهند از $\chi(G-e;k)$، k-رنگ‌آمیزیهای سره از G را بشماریم. ادعا می‌کنیم که تعداد این رنگ‌آمیزیها برابر است با $\chi(G \cdot e;k)$. این از ایجاد یک نگاشت دوسویی که از k-رنگ‌آمیزیهای سره از $G \cdot e$ به k-رنگ‌آمیزیهای سره از $G-e$ که به u و v یک رنگ را اختصاص می‌دهند نتیجه می‌شود. با در نظر گرفتن یک k-رنگ‌آمیزی سره از $G \cdot e$، آن رنگ‌آمیزی را برای $G-e$ نسخه می‌کنیم، به جز آنکه u و v هر دو رنگی را دریافت می‌کنند که به رأس منقبض شده تخصیص داده شده بود. نگاشت وارون به رأس منقبض شده، رنگ تخصیص داده شده به هر دوی u

و v را می‌دهد. □



۵.۳.۵. مثال. *رنگ‌آمیزیهای سره* از $C_۴$. حذف یک یال از $C_۴$، $P_۴$ را ایجاد می‌کند، در حالی که منقبض کردن یک یال $K_۳$ را می‌سازد. چون $P_۴$ یک درخت و $K_۳$ یک خوشه است، داریم $\chi(P_۴; k) = k(k-۱)^۳$ و $\chi(K_۳; k) = k(k-۱)(k-۲)$. با استفاده از بازگشت رنگی، به‌دست می‌آوریم

$$\chi(C_۴ \cdot k) = \chi(P_۴; k) - \chi(K_۳; k) = k(k-۱)(k^۲ - ۳k + ۳) \quad \square$$

چون هردوی $G - e$ و $G \cdot e$ یالهای کمتری از G دارند، می‌توانیم بازگشت رنگی را به‌طور استقرایی برای محاسبه $\chi(G; k)$ به‌کار بریم. به شرایط آغازی برای گرافهای بدون یال احتیاج داریم، که پیشتر محاسبه کرده‌ایم: $\chi(\overline{K}_n; k) = k^n$.

۶.۳.۵. قضیه. $\chi(G; k)$ یک چندجمله‌ای برحسب k از درجهٔ $n(G)$ است، در حالی که ضرایب عدد صحیح و متناوباً تغییر علامت می‌دهند و با ۱، $-e(G)$، ....، آغاز می‌گردد.

اثبات. اثبات به وسیلهٔ استقرا روی $e(G)$. این ادعاها هنگامی که $e(G) = ۰$ باشد آشکارا برقرارند، در حالی که $\chi(\overline{K}_n; k) = k^n$. فرض کنیم G یک گراف n-رأسی با $e(G) \geq ۱$ است. هریک از $G - e$ و $G \cdot e$ دارای یالهای کمتری از G هستند، و $G \cdot e$ دارای $n - ۱$ رأس است. بنابر فرض استقرا، اعداد صحیح نامنفی $\{a_i\}$ و $\{b_i\}$ وجود دارند به‌طوری که $\chi(G - e; k) = \sum_{i=۰}^{n} (-۱)^i a_i k^{n-i}$ و $\chi(G \cdot e; k) = \sum_{i=۰}^{n-۱} (-۱)^i b_i k^{n-۱-i}$. بنابر بازگشت رنگی داریم،

$$\begin{array}{lll}
\chi(G-e;k): & k^n - [e(G)-1]k^{n-1} + a_2k^{n-2} - \cdots & +(-1)^i a_i k^{n-i} \cdots \\
-\chi(G\cdot e;k): & -(\qquad\qquad k^{n-1} - b_1k^{n-2} + \cdots & +(-1)^{i-1}b_{i-1}k^{n-i}) \cdots \\
\hline
=\chi(G;k): & k^n - e(G)k^{n-1} + (a_2+b_1)k^{n-2} - \cdots & +(-1)^i(a_i+b_{i-1})k^{n-i} \cdots
\end{array}$$

از این‌رو $\chi(G;k)$ یک چندجمله‌ای با ضریب مقدم $a_0 = 1$ است و ضریب پس از آن $-(a_1+b_0) = -e(G)$ می‌باشد، و ضرایب آنها متناوباً تغییر علامت می‌دهند. □

۷.۳.۵. مثال. *گرافهای تقریباً کامل.* اگر یک گراف دارای یالهای بسیار باشد، ممکن است بخواهیم به‌جای مکملهایشان به‌طرف خوشه‌ها حرکت کنیم. به جای $\chi(G;k) = \chi(G-e;k) - \chi(G\cdot e;k)$، می‌توانیم بنویسیم $\chi(G-e;k) = \chi(G;k) + \chi(G\cdot e;k)$. به عنوان مثال، برای محاسبه $\chi(K_n-e;k)$، می‌توانیم فرض کنیم G در این فرمول متناوب K_n باشد تا به‌دست آوریم

$$\chi(K_n-e;k) = \chi(K_n;k) + \chi(K_{n-1};k) = (k-n+2)^2\prod_{i=0}^{n-3}(k-i) \quad \square$$

نتیجهٔ تکرار بازگشت رنگی تا آخرین مرحله می‌تواند مستقیماً توضیح داده شود. این فرمول از لحاظ نظری جالب است ولی از لحاظ عملی خیر، زیرا مجموعیابی دارای جمله‌های توانی بسیاری است. فرمول بیدرنگ $\chi(G;k)$ را به عنوان یک چند جمله‌ای با جمله‌های مقدم $k^{n(G)} - e(G)k^{n(G)-1}\cdots$ بیان می‌کند، اما ضرایب متناوب را مستقیماً تضمین نمی‌کند.

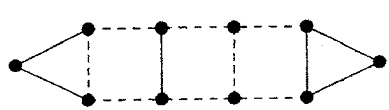
خوانندگان ناآشنا با اصل شمول - طرد باید از این قضیه بگذرند. این اصل بیان می‌کند که تعداد فقره‌ها در یک جهان U که بیرون مجموعه‌های A_1، ...، A_n قرار دارند عبارت است از $\sum_S(-1)^{|S|}|\bigcap_{i\in S}A_i|$. اثبات این مطلب عبارت است از اینکه این مجموع برای هر گردایه زوج از مجموعه‌ها عنصری را به‌طور مثبت و برای هر گردایه فرد به‌طور منفی می‌شمارد، پس مجموع خالص برای عناصر متعلق به هر مجموعه ۰ است و برای عناصری که به هیچ یک متعلق نیستند ۱ است.

۸.۳.۵. قضیه. فرض کنیم $c(G)$ نشانگر تعداد مؤلفه‌های یک گراف G باشد. با در نظر گرفتن یک مجموعهٔ $S \subseteq E(G)$ از یالها در G، فرض کنیم $G(S)$ نشانگر زیرگراف فراگیر از G با مجموعهٔ یالهای S باشد. آنگاه تعداد $\chi(G;k)$ از k-رنگ‌آمیزیهای G به‌وسیلهٔ رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$\chi(G;k) = \sum_{S \subseteq E(G)} (-۱)^{|S|} k^{C(G(S))}$$

اثبات. از جهان دارای $k^{n(G)}$ رنگ‌آمیزیها، تنها آنهایی را می‌خواهیم که به نقاط پایانی هیچ یالی رنگ یکسان تخصیص ندهند. از این‌رو مجموعه‌های $e(G)$ را تعریف می‌کنیم؛ A_i مجموعهٔ k-رنگ‌آمیزیهای $V(G)$ است که با تخصیص دادن یک رنگ به نقاط پایانی یال e_i آن را مختل می‌کند. بنابر اصل شمول - طرد، تعداد رنگ‌آمیزیهای سره عبارت است از $\sum_S (-۱)^{|S|} |\bigcap_{i \in S} A_i|$، که در آن مجموعیابی روی همه زیرمجموعه‌های دارای اندیسهای روی مجموعه‌های A_i عمل می‌کند. این اندیسها با یالهای G در تناظرند.

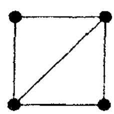
مجموعهٔ $\bigcap_{i \in S} A_i$ شامل k-رنگ‌آمیزیهایی است که هر یال از S را مختل می‌کنند. در چنین رنگ‌آمیزیی می‌توانیم از x با استفاده از یالهایی در S که همرنگ x هستند به هر رأس برسیم. از این‌رو رأسهایی که در یک مؤلفه از $G(S)$ قرار دارند باید یک رنگ داشته باشند، که می‌توانیم این رنگ را به k طریق انتخاب کنیم. انتخاب یک مؤلفه بر انتخابهای ما برای هیچ مؤلفه دیگری تأثیر ندارد، پس $k^{C(G(S))} = |\bigcap_{i \in S} A_i|$ راه برای انتخاب کردن همه رأسهای G برای مختل کردن زیرگراف فراگیر $G(S)$ وجود دارد (یالهای بیشتر نیز می‌توانند مختل شوند). در تصویر زیر، G دارای ۱۴ یال است، یالهای یک پارچه یک مجموعهٔ S با اندازهٔ ۶ را تشکیل می‌دهند و $c(G(S)) = ۵$ (دو رأس تنها را می‌شمارد)؛ $k^۵$ راه برای انتخاب یک نگاشت از $V(G)$ به $[k]$ وجود دارند که این مجموعهٔ با ۱۴ یال را مختل کنند. □



۹.۳.۵. مثال. *یک چندجمله‌ای رنگی.* هنگامی که $G = K_۴ - e$، هر زیرگراف فراگیر با یک یال، دارای سه مؤلفه است، و هر زیرگراف فراگیر با دویال دارای دو مؤلفه است. هنگامی که $|S| = ۳$، تعداد مؤلفه‌ها ۲ است اگر، و فقط اگر، سه یال یک مثلث تشکیل دهند. از چنین مجموعه‌هایی از سه یال دو تا وجود دارد، و دیگر $\binom{۵}{۳} - ۲$ مجموعهٔ از سه یال، که زیرگرافهای فراگیری با یک مؤلفه را به دست می‌دهند. همه زیرگرافهای فراگیر با چهار یا پنج یال تنها یک مؤلفه دارند. از این‌رو محاسبه شمول - طرد عبارت است از

$$\chi(G;k) = k^۴ - ۵k^۳ + ۱۰k^۲ - (۲k^۲ + ۸k^۱) + ۵k - k = k^۴ - ۵k^۳ + ۸k^۲ - ۴k$$

این را می‌توانیم مستقیماً با محاسبه $\chi(G;k) = k(k-۱)(k-۲)(k-۲)$ تحقیق کنیم، اما چنین محاسبه مستقیمی بندرت امکانپذیر است. □

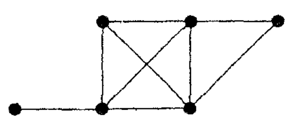


گرافهای وتری

شمردن رنگ‌آمیزیها برای خوشه‌ها و درختها آسان است، زیرا هر چنین گرافی را می‌توان با افزودن پیاپی یک رأس متصل به یک خوشه، از $K_۱$ رشد داد. چند جمله‌ای رنگی چنین گرافی، حاصل ضربی از عاملهای خطی است. ما در مرحله بعد گرافهایی را بررسی می‌کنیم که این پدیده برایشان برقرار است.

۱۰.۳.۵. تعریف. یک رأس G ***سادکی*** است اگر همسایگی آن در G یک خوشه القا کند. یک ***ترتیب حذف سادکی*** عبارت است از یک ترتیب v_n، ...، $v_۱$ که در آن رأسها می‌توانند طوری حذف شوند که v_i یک رأس سادکی از گراف باقیمانده القا شده به‌وسیلهٔ $\{v_۱, \cdots, v_i\}$ باشد. (به‌طور تاریخی آنها را ***ترتیبهای حذف تام*** نامیده‌اند.)

۵.۳.۱۱. مثال. چندجمله‌ایهای رنگی از ترتیبهای حذف سادکی. در یک درخت، یک ترتیب حذف سادکی عبارت است از یک حذف پیاپی برگها. ملاحظه کرده‌ایم که وقتی G یک درخت n-رأسی است، داریم $\chi(G;k) = k(k-1)^{n-1}$. به‌طور کلی، هنگامی که v_n، ...، v_1 یک ترتیب حذف سادکی برای G است، می‌توانیم قاعده حاصل‌ضرب ترکیبیات مقدماتی را به ترتیب وارون v_1، ...، v_n به‌کار ببریم تا k-رنگ‌آمیزیهای سره G را بشماریم. هنگامی که v_i را در این ترتیب وارون به‌کار می‌بریم، $k-d(i)$ راه برای رنگ کردن v_i وجود دارد، که در آن $d(i) = |N(v_i)\cap\{v_1,\cdots,v_{i-1}\}|$. عامل $k-d(i)$ همان است قطع نظر از اینکه رنگهای قبلی چگونه انتخاب شده باشند، زیرا همسایه‌های v_i که رنگ شده‌اند خوشه‌ای به اندازهٔ $d(i)$ تشکیل می‌دهند و رنگهای متمایز دارند. علاوه بر این، با حذف رأس سادکی که ترتیب حذف سادکی را آغاز می‌کند، به‌طور استقرایی ملاحظه می‌کنیم که هر k-رنگ‌آمیزی سره از G در این روش ظاهر می‌شود. فرمول حاصل عاملهای چندجمله‌ای رنگی است و نشان می‌دهد که چندجمله‌ای رنگی چنین گرافی تنها دارای ریشه‌های عدد صحیح نامنفی است. به عنوان مثال، چندجمله‌ای رنگی گراف زیر عبارت است از $k(k-1)^2(k-2)^2(k-3)$. □



درختها، خوشه‌ها، گرافهای تقریباً کامل $(K_n - e)$، و گرافهای بازه‌ای (تمرین ۱۹) همگی ترتیبهای حذف سادکی دارند. اگر G یک دور به‌طول بیش از ۳ باشد، آنگاه G نمی‌تواند دارای یک ترتیب حذف سادکی باشد، زیرا یک دور هیچ رأس سادکی برای آغاز حذف ندارد. مانند مثال ۵.۳.۵، چندجمله‌ای رنگی یک گراف با یک دور القایی به‌طول حداقل ۴ نمی‌تواند به صورت حاصل‌ضربی از عاملهای خطی بیان شود. ما می‌توانیم از دورهای القایی برای مشخص کردن گرافهای دارای ترتیبهای حذف سادکی استفاده کنیم. هم‌ارزی را از راه یک ویژگی سوم مناسب اثبات می‌کنیم.

۱۲.۳.۵. تعریف. یک *دور بی‌وتر* در G یک زیرگراف القایی از G است که یکریخت با C_t به‌ازای یک $t \geq ۴$ می‌باشد. یک گراف G **وتری** است اگر دارای دور بی‌وتر نباشد (هر دور به طول حداقل ۴ دارای یک «وتر» است). اگر $x \not\leftrightarrow y$، آنگاه یک x,y-***جداکنندهٔ*** عبارت است از یک مجموعهٔ $S \subseteq V(G)$ به‌طوری که x و y در مؤلفه‌های متمایز $G - S$ واقع باشند. یک ***جداکنندهٔ رأس مینیمال*** عبارت است از یک x,y-جداکنندهٔ مینیمال برای یک جفت نامجاور x، y.

اگرچه هر مجموعهٔ جداساز مینیمال از G یک جداکنندهٔ رأس مینیمال است، یک جداکنندهٔ رأس مینیمال لزومی ندارد که یک مجموعهٔ جداساز مینیمال از G باشد (تمرین ۱۵).

۱۳.۳.۵. قضیه. برای یک گراف ساده G، ویژگیهای زیر هم‌ارزند (و گرافهای وتری را مشخص می‌کنند).

الف) G دارای یک ترتیب حذف سادکی است.

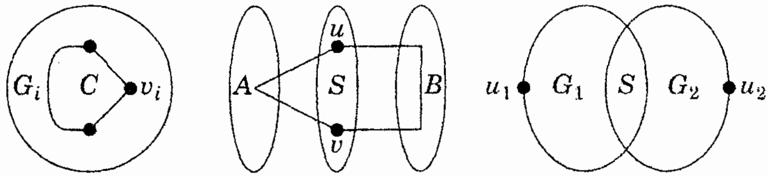
ب) G دارای دور بی‌وتری نیست.

پ) هر رأس جداکنندهٔ مینیمال از G یک خوشه را القا می‌کند.

اثبات. الف $\Leftarrow$ ب. فرض کنیم C یک دور در G به طول حداقل ۴ باشد. هنگامی که ترتیب حذف سادکی نخست یک رأس از C را حذف می‌کند، همسایه‌های باقیمانده آن باید یک خوشه را القا کنند. چون این شامل همسایه‌های آن روی C است، یک وتر از C به‌دست می‌آوریم.

ب $\Leftarrow$ پ. فرض کنیم S یک x,y-جداکنندهٔ مینیمال در G باشد، و فرض کنیم u, v رأسهای متمایز از S هستند. بنابر مینیمال بودن جداکنندهٔ، هرکدام از u ، v دارای یک یال در مؤلفه‌های A، B از $G - S$ است که شامل x و y هستند. اجتماع کوتاهترین u, v-مسیرها از میان A و از میان B یک دور به‌طول حداقل ۴ است. بنابر انتخاب

مسیرها و نبود یالهایی از A به B، این دور دارای وتری به جز uv نیست. چون G هیچ دور بی‌وتری ندارد، نتیجه می‌گیریم که $u \leftrightarrow v$. چون $u, v \in S$ به‌طور دلخواه انتخاب شده بودند، S یک خوشه القا می‌کند.



$A \Rightarrow B$ $\qquad$ $B \Rightarrow C$ $\qquad$ $C \Rightarrow A$

پ $\Leftarrow$ الف. نخست نشان می‌دهیم که اگر H یک زیرگراف القایی از G باشد، آنگاه هر x, y-جداکنندهٔ مینیمال از H مشمول در یک x, y-جداکنندهٔ از G است؛ این ایجاب می‌کند که C برای هر زیرگراف القایی از G برقرار است. اگر S یک x, y-جداکنندهٔ مینیمال در H باشد، آنگاه $S \cup (V(G) - V(H))$، x و y را در G جدا می‌کند. از این‌رو $S \cup (V(G) - V(H))$ شامل یک x, y-جداکنندهٔ مینیمال از G است. یک چنین مجموعهٔ T باید شامل S باشد، چون در غیر این‌صورت $G - T$ شامل یک x, y-مسیر در H است.

با برقرار بودن شرط (پ) برای هر زیرگراف القایی از G، کافی است ثابت کنیم که خود G دارای یک رأس سادکی برای آغاز ترتیب حذف است. با استفاده از استقرا روی $n(G)$، نتیجهٔ قویتر را اثبات می‌کنیم که اگر G در شرط (پ) صدق کند و یک خوشه نباشد، آنگاه G دارای یک جفت از رأسهای نامجاور سادکی است. هنگامی که G یک خوشه باشد، هر رأس سادکی است. هنگامی که G یک خوشه نباشد، فرض کنیم x_1، x_2 یک جفت رأس نامجاور در G باشند، فرض کنیم S یک x_1, x_2- جداکنندهٔ مینیمال باشد، و فرض کنیم G_i، S-مؤلفه‌ای از G باشد که شامل x_i است (تعریف ۷.۲.۵ را ببینید). چون شرط (پ) برای زیرگرافهای القایی برقرار است، برای G_i برقرار می‌باشد. بنابر فرض استقرا، G_i دارای یک رأس سادکی $u_i \notin S$ است (خواه G_i یک خوشه باشد

یا نباشد). چون هیچ یالی میان $V(X)$ و $V(Y)$ وجود ندارد، این رأسهای u_1، u_2 نیز در G سادکی هستند، و در G نامجاورند. □

تذکری دربارهٔ گرافهای تام

برای گرافهای دوبخشی و گرافهای بازه‌ای، $\chi(G) = \omega(G)$. این همچنین برای هر زیرگراف القایی از چنین گرافهایی برقرار است.

۱۴.۳.۵. تعریف. یک گراف G *تام* است اگر برای هر زیرگراف القایی $H \subseteq G$ داشته باشیم $\chi(H) = \omega(H)$. به‌طور هم‌ارز، به‌ازای هر $A \subseteq V(G)$، $\chi(G[A]) = \omega(G[A])$. یک خانواده از گرافهای $\mathbf{G}$ **موروثی** است اگر هر زیرگراف القایی از یک گراف در $\mathbf{G}$، همچنین گرافی در G باشد. **عدد پوشانه خوشه** $\theta(G)$ برای یک گراف G عبارت است از مینیمم تعداد خوشه‌های مورد نیاز در G برای پوشاندن $V(G)$؛ توجه کنید که $\theta(G) = \chi(\overline{G})$.

چون خوشه‌ها و مجموعه‌های مستقل تحت مکمل‌گیری نقشهای خود را عوض می‌کنند، گزاره تامیت برای $\overline{G}$ عبارت است از «$\alpha(H) = \theta(H)$ برای همه زیرگرافهای القایی H از G». لوواز *قضیهٔ گراف تام* [1] (PGT) را اثبات کرد: G تام است اگر، و فقط اگر، مکمل آن $\overline{G}$ تام باشد. این را در بند ۱.۸ اثبات خواهیم کرد. در اینجا تنها گرافهای تام را با جستجوی نتایجی که پیشتر دربارهٔ گرافهای بازه‌ای و گرافهای دوبخشی به دست آوردیم توضیح می‌دهیم. برای تحقیق اینکه هر گراف در یک ردهٔ موروثی تام است، کافی است تحقیق کنیم که برای هر گراف G در رده داریم $\chi(G) = \omega(G)$ (زیرا همین استدلال برای زیرگرافهای القایی آن به‌کار می‌رود).

۱۵.۳.۵. مثال. ***گرافهای دوبخشی و گرافهای خطی آنها.*** گرافهای دو

1) Perfect Graph Theorem

بخشی یک ردهٔ موروثی تشکیل می‌دهند، و برای هر گراف دوبخشی دارای یک یال داریم $\omega(G) = ۲ = \chi(G)$؛ از این‌رو گرافهای دوبخشی تام هستند. اگر H دوبخشی باشد، آنگاه گزاره تامیت برای $\overline{H}$ تمرین ۱۸.۱.۵ است و از $\alpha(H) = \beta'(H)$ نتیجه می‌شود (فرع ۱۵.۱.۳). می‌توانستیم از رابطهٔ آشکار $\chi(G) = \omega(G)$ به‌وسیلهٔ PGT بیدرنگ $\alpha(G) = \theta(G) = \beta'(G)$ را به‌دست آوریم.

در بند ۱.۶، گرافهای خطی را بررسی خواهیم کرد؛ در اینجا آنها را برای مصور کردن به‌طور اختصار معرفی می‌کنیم. **گراف خطی** $L(G)$ از یک گراف G دارای یک رأس برای هر یال از G است، در حالی که رأسهای $L(G)$ مجاورند اگر به عنوان یالهایی در G یک نقطهٔ پایانی مشترک داشته باشند. هر مجموعهٔ مستقل در $L(G)$ با یک جورسازی در G متناظر است، و یک خوشه در $L(G)$ شامل یالهایی در G است که در یک رأس منفرد شریک‌اند و یا یک مثلث تشکیل می‌دهند. از این‌رو گزاره اینکه $\alpha(L(G)) = \theta(L(G))$ هنگامی که G دوبخشی باشد، قضیهٔ کونیگ - اگروری [۱۹۳۱] $(\alpha'(G) = \beta(G))$ دربارهٔ جورسازیها در گرافهای دوبخشی است.

چون مکملهای گرافهای خطی ازگرافهای دوبخشی یک ردهٔ موروثی را تشکیل می‌دهند، نتیجه می‌گیریم که آنها تام هستند. از اینجا PGT به‌دست می‌دهد $\chi(L(G)) = \omega(L(G))$. یک رنگ‌آمیزی سره از $L(G)$ افرازی از $E(G)$ به جورسازیهاست، و هنگامی که G دوبخشی باشد داریم $\omega(L(G)) = \Delta(G)$. از این‌رو $\chi(L(G)) = \omega(L(G))$ می‌گوید که $E(G)$ می‌تواند به $\Delta(G)$ جورسازیها افراز شود هنگامی که G دوبخشی باشد (کونیگ [۱۹۱۶]). ما این را به‌طور مستقیم در بند ۱.۶ اثبات خواهیم کرد. □

تامیت گرافهای بازه‌ای حالت خاصی از تامیت گرافهای وتری است، زیرا هر گراف بازه‌ای یک گراف وتری است (تمرین ۱۹). دیگر مشخص‌سازیهای گرافهای بازه‌ای و گرافهای وتری را در بند ۱.۸ بررسی خواهیم کرد.

۱۶.۳.۵. قضیهٔ. (برز [۱۹۶۰]) گرافهای وتری تام هستند.

اثبات. حذف رأسها نمی‌تواند دورهای بی‌وتر بسازد، پس گرافهای وتری یک خانوادهٔ موروثی تشکیل می‌دهند، و ما تنها نیاز داریم که ثابت کنیم $\chi(G) = \omega(G)$. از استقرا روی $n(G)$ استفاده می‌کنیم. هنگامی که $n(G) = ۱$، تنها مثال $K_۱$ است.

برای گام استقرا، فرض کنیم $n(G) > ۱$. در قضیهٔ ۱۱.۳.۵، ثابت کردیم که هر گراف وتری دارای یک ترتیب حذف سادکی است، که با یک رأس سادکی x آغاز می‌شود. چون $N(x)$ یک خوشه القا می‌کند، داریم $d_G(x) \le \omega(G-x)$. چون $G-x$ وتری است، فرض استقرا به‌دست می‌دهد $\chi(G-x) = \omega(G-x) = k$. می‌توانیم x را از میان این k رنگ، رنگ کنیم مگر آنکه $d_G(x) = \omega(G-x)$، که در این حالت $\omega(G) = k+۱$ و رنگ جدیدی برای x معرفی می‌کنیم تا یک $\omega(G)$-رنگ‌آمیزی سره را کامل کنیم. این استدلال نشان می‌دهد که یک گراف وتری به وسیلهٔ رنگ‌آمیزی آزمند نسبت به وارون یک ترتیب حذف سادکی به‌طور بهین رنگ می‌شود. □

ردهٔ بنیادی دیگری از گرافهای تام، خانواده گرافهای دوبخشی را تعمیم می‌دهد.

۱۷.۳.۵. مثال. ***گرافهای مقایسه‌پذیری*** (برز [۱۹۶۰]). یک گراف ساده G یک ***گراف مقایسه‌پذیری*** است اگر دارای یک ***سودهی تراگذر*** باشد، که یک سودهی است به‌طوری که اگر $x \to y$ و $y \to z$، آنگاه همچنین $x \to z$. اگر G دوبخشی با افراز مضاعف X، Y باشد، آنگاه سودهی به‌دست آمده از هدایت هر یال از X به Y تراگذر است، پس هر گراف دوبخشی یک گراف مقایسه‌پذیری است. نام «مقایسه‌پذیری» از روابط ترتیب نتیجه می‌شود؛ $x \to y$ می‌تواند به معنی «x باید پیش از y رخ دهد» باشد.

هر زیرگراف سودار القایی از یک گراف سودار تراگذر است، پس ردهٔ گرافهای مقایسه‌پذیری، موروثی است، و تنها لازم است که $\omega(G)$-رنگپذیری را برای هر گراف مقایسه‌پذیری G نشان دهیم. فرض کنیم Q یک خوشه ماکسیمال در G باشد، و فرض کنیم F یک سودهی تراگذر از G باشد. روی Q، F یک تورنمنت است. چون یک سودهی تراگذر

بیدور است، یک رأس v از Q دارای هیچ مقدمی در Q نیست. اگر v یک مقدم u بیرون Q داشته باشد، آنگاه تراگذری یالهایی از u به باقی Q به‌دست می‌دهد، که با ماکسیمال بودن Q در G در تناقض است. از این‌رو هر خوشه ماکسیمال از G شامل یک رأس با درجهٔ ورودی ۰ در F است. اینها یک مجموعهٔ مستقل تشکیل می‌دهند، و ما از آنها به‌عنوان یک ردهٔ رنگ استفاده می‌کنیم. حذف آنها هر خوشه ماکسیمال را کاهش می‌دهد؛ از این‌رو اندازهٔ خوشه کاهش می‌یابد و می‌توانیم با استقرا پیش برویم. مجموعه‌های به‌دست آمده از تهی کردن به‌طور مکرر مجموعهٔ رأسها با درجهٔ ورودی ۰، یک رنگ‌آمیزی بهین تشکیل می‌دهند. رنگ تخصیص داده شده به x عبارت است از ۱ به اضافه طول طولانیترین مسیر ختم‌شونده در x، مانند استدلال قضیهٔ ۱۵.۱.۵. □

شمارش سودهی‌های بیدور (اختیاری)

در کمال شگفتی $\chi(G;k)$ هنگامی که با اعداد صحیح منفی محاسبه می‌شود دارای معناست. به‌ویژه، با قرار دادن $k=-۱$ ما را قادر می‌کند که سودهی‌های بیدور G را بشماریم.

۱۸.۳.۵. مثال. چون $C_۴$ دارای ۴ یال است، دارای ۱۶ سودهی است. از میان اینها، ۱۴ تا بیدور هستند. در مثال ۵.۳.۵، ثابت کردیم که $\chi(C_۴;k)=k(k-۱)(k^۲-۳k+۳)$. با محاسبه به‌ازای $k=-۱$، این برابر است با $۱۴=(۷)(-۲)(-۱)$. □

۱۹.۳.۵. قضیهٔ. (استانلی [۱۹۷۳]) مقدار $\chi(G;k)$ به‌ازای $k=-۱$ عبارت است از $(-۱)^{n(G)}$ برابر تعداد سودهی‌های بیدور G.

اثبات. فرض کنیم $a(G)$ تعداد سودهی های بیدور G باشد. هنگامی که G دارای یال نباشد، $a(G)=۱$ و $\chi(G;-۱)=(-۱)^{n(G)}$، و ادعا برقرار است. برای $\chi(G;-۱)$ یک بازگشت داریم؛ اگر یک بازگشت مشابه برای $a(G)$ فراهم کنیم، این ادعا را می‌توانیم

با استقرا روی $e(G)$ ثابت کنیم. ثابت خواهیم کرد که $a(G) = a(G-e) + a(G \cdot e)$.
اگر این برای $e(G) > ۰$ برقرار باشد، آنگاه فرض استقرا به‌دست می‌دهد

$$a(G) = a(G-e) + a(G \cdot e) = (-۱)^{n(G)}\chi(G-e; -۱)$$
$$+(-۱)^{n(G)-۱}\chi(G \cdot e; -۱) = (-۱)^{n(G)}\chi(G; -۱)$$

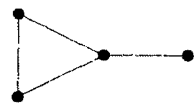
حال ثابت می‌کنیم که برای $e(G) > ۰$ داریم $a(G) = a(G-e) + a(G \cdot e)$.
هر سودهی بیدور G شامل یک سودهی بیدور $G-e$ است. چه تعداد سودهی‌های بیدور G از یک سودهی بیدور داده شده از $G-e$ ظاهر می‌شود؟ فرض کنیم D یک سودهی بیدور از $G-e$ باشد، که در آن $e = uv$. اگر D دارای u, v-مسیر نباشد، آنگاه می‌توانیم e را از v به u سودهی کنیم تا یک سودهی بیدور از G را کامل کند. اگر D دارای u, v-مسیر نباشد، آنگاه می‌توانیم e را از u به v سودهی کنیم تا یک سودهی بیدور از G را کامل کند. چون D بیدور است، D نمی‌تواند هم دارای یک u, v-مسیر و هم یک v, u-مسیر باشد، بنابراین هر دو احتمال نمی‌توانند غیرمقدور باشند. از این‌رو هر چنین Dای حداقل به یک راه به G بسط می‌یابد، و $a(G)$ برابر است با $a(G-e)$ به اضافه تعداد سودهی‌هایی که دارای u, v -مسیر و v, u-مسیر نیستند. این تعداد اخیر عبارت است از $a(G \cdot e)$، زیرا یک u, v–مسیر یا یک v, u–مسیر در یک سودهی $G-e$ در $G \cdot e$ یک دور می‌شود. □

این مطلب نمونه‌ای از پدیده «تقابل ترکیبیاتی» است. به‌عنوان مثال، تعداد انتخابهای n عنصر از k نوع عنصر بدون تکرار عبارت است از $\binom{k}{n}$، که یک چندجمله‌ای برحسب k از درجهٔ n است. اگر تکرار را مجاز کنیم، پاسخ $\binom{k+n-۱}{n}$ است، که تبدیل می‌شود به $(-۱)^n$ برابر مقدار نخستین چندجمله‌ای برحسب k-به‌جای k. استانلی [۱۹۷۴] این مطلب را عمیقتر بررسی می‌کند، همچنین تمرین ۲۳ را ببینید.

تمرینات

یادآوری می‌کنیم که برای هر عدد صحیح نامنفی k، $\chi(G;k)$ برابر است با تعداد k-رنگ‌آمیزیهای سره G.

۵.۳.۱. (−) چندجمله‌ای رنگی گراف رسم شده در زیر را محاسبه کنید.



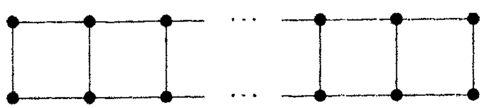
۵.۳.۲. (−) از بازگشت رنگی برای به‌دست آوردن چندجمله‌ای رنگی یک درخت با n رأس استفاده کنید.

۵.۳.۳. الف) اگر G دوری با n نقطه باشد، ثابت کنید که

$$\chi(G;k) = (k-۱)^n + (-۱)^n(k-۱)$$

ب) اگر $H = G \vee K_۱$، ثابت کنید که $\chi(H;k) = k\chi(G;k-۱)$. از این مطلب و قسمت (الف)، چندجمله‌ای رنگی چرخ $C_n \vee K_۱$ را به‌دست آورید.

۵.۳.۴. فرض کنیم G_n گرافی با $۲n$ رأس و $۳n-۲$ یال رسم شده در زیر به‌ازای $n \geq ۱$ باشد. ثابت کنید که چندجمله‌ای رنگی G عبارت است از $(k^۲-۳k+۳)^{n-۱}k(k-۱)$.



۵.۳.۵. (−) ثابت کنید که چندجمله‌ای رنگی یک گراف n-رأسی دارای ریشه حقیقی بزرگتر از $n-۱$ نیست. (*راهنمایی:* از گزاره ۵.۳.۳ استفاده کنید.)

۵.۳.۶. با استفاده از گزاره ۵.۳.۳ یک اثبات غیراستقرایی به‌دست دهید که ضریب $k^{n(G)-۱}$ در $\chi(G;k)$ برابر $-e(G)$ باشد.

۵.۳.۷. (!) ثابت کنید که آخرین جملهٔ ناصفر در چندجمله‌ای رنگی G جمله‌ای است که نمای آن تعداد مؤلفه‌های G است. نتیجه بگیرید که اگر $p(k) = k^n - ak^{n-۱} +$

$\pm ck^r \cdots$ و $a > \binom{n-r+1}{2}$، آنگاه p یک چندجمله‌ای رنگی نیست. (به‌عنوان مثال، $k^4 - 4k^3 + 3k^2$ یک چندجمله‌ای رنگی نیست.)

۸.۳.۵. (!) ثابت کنید که مجموع ضرایب $\chi(G;k)$ برابر ۰ است مگر آنکه G دارای یال نباشد. (*راهنمایی:* چه چیزی مجموع ضرایب چندجمله‌ای را محاسبه می‌کند؟)

۹.۳.۵. (!) ثابت کنید که تعداد k-رنگ‌آمیزیهای سره یک گراف همبند G کمتر از $k(k-1)^{n-1}$ است اگر $k \geq 3$، و G یک درخت نیست. اگر $k = 2$ باشد چه رخ می‌دهد؟

۱۰.۳.۵. چندجمله‌ای رنگی را به صورت $\chi(G;k) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i a_i k^{n-i}$ بنویسید. اگر G یک گراف همبند باشد، ثابت کنید که به‌ازای $1 \leq i \leq n$ داریم $a_i \geq \binom{n-1}{i}$. (*راهنمایی:* از بازگشت رنگی استفاده کنید.)

۱۱.۳.۵. فرض کنیم که $F = G \cup H$ و اینکه $G \cap H$ یک خوشه است. ثابت کنید که $\chi(F;k) = \dfrac{\chi(G;k)\chi(H;k)}{\chi(G \cap H;k)}$. اگر $G \cap H$ یک خوشه نباشد چه چیزی رخ می‌دهد؟

۱۲.۳.۵. (!) فرض کنیم P گراف پترسن باشد. بنابر قضیهٔ بروکس، گراف پترسن، ۳-رنگپذیر است، و از این‌رو بنابر اصل لانه کبوتر دارای یک مجموعهٔ مستقل S به اندازهٔ چهار است.

الف) ثابت کنید که $P - S = 3K_2$.

ب) با استفاده از قسمت (الف) و تقارن، تعداد افرازهای رأسی از P را به سه مجموعهٔ مستقل تعیین کنید.

پ) به‌طور کلی، چگونه می‌توان تعداد افرازها با مینیمم تعداد مجموعه‌های مستقل را از چند جمله‌ای رنگی G به‌دست آورد؟

۱۳.۳.۵. ثابت کنید که یک گراف با عدد رنگی k دارای حداکثر k^{n-k} افراز رأس به k مجموعهٔ مستقل است، و برابری تنها با $K_k + (n-k)K_1$ امکانپذیر است (یک k-خوشه

و $n-k$ رأس تنها. (*راهنمایی:* از استقرا روی n استفاده کنید و حذف یک رأس منفرد را در نظر بگیرید.) (تومیسکو [۱۹۷۱])

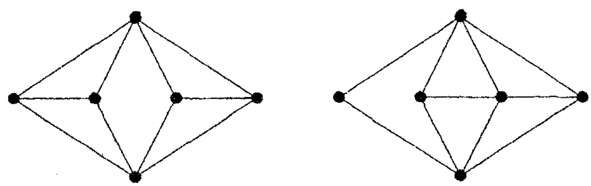
۱۴.۳.۵. (!) ثابت کنید که

$$\chi(G; x+y) = \sum_{U \subseteq V(G)} \chi(G[U]; x)\chi(G[\overline{U}]; y)$$

۱۵.۳.۵. (−) مثالی از یک گراف وتری همبند G به‌دست دهید که دارای یک جداکننده رأس مینیمال باشد که یک مجموعهٔ جداساز مینیمال از G نباشد.

۱۶.۳.۵. (!) الف) بدون محاسبه چندجمله‌ایهای رنگی، اثبات کوتاهی ارائه دهید مبنی بر اینکه دو گراف زیر دارای یک چندجمله‌ای رنگی هستند.

ب) این چندجمله‌ای رنگی را به عنوان مجموع چندجمله‌ایهای رنگی دو گراف وتری بیان کنید، و از این مطلب برای ارائه محاسبه کوتاهی برای آن استفاده کنید.



۱۷.۳.۵. در میان گزاره‌های زیر، ب $\Rightarrow$ پ که در قضیهٔ ۶.۳.۵ اثبات شد، و پ $\Rightarrow$ الف برقرار است، زیرا هر مجموعهٔ جداساز مینیمال یک جداکننده رأس مینیمال است. مستقیماً ثابت کنید الف $\Rightarrow$ ب.

الف) هر مجموعهٔ جداساز مینیمال از G یک خوشه را القا می‌کند.

ب) G دارای دور بی‌وتری نیست.

پ) هر جداکنندهٔ رأس مینیمال از G یک خوشه را القا می‌کند.

۱۸.۳.۵. فرض کنیم G یک گراف وتری باشد. از یک ترتیب حذف سادکی از G برای اثبات گزاره‌های زیر استفاده کنید:

الف) G دارای حداکثر n خوشه ماکسیمال است، و برابری برقرار است اگر، و فقط

اگر، G دارای یال نباشد. (فولکرسون - گروس[1] [۱۹۶۵])

ب) هر خوشه ماکسیمال از G که شامل رأس سادکی از G نباشد یک مجموعهٔ جداساز از G است.

۱۹.۳.۵. (!) فرض کنیم G یک گراف بازه‌ای باشد. ثابت کنید که $\overline{G}$ یک گراف مقایسه‌پذیری است و G یک گراف وتری است. (*راهنمایی:* یک ترتیب حذف سادکی ایجاد کنید.)

۲۰.۳.۵. کوچکترین گراف غیرتام G را طوری تعیین کنید که $\chi(G) = \omega(G)$.

۲۱.۳.۵. تعداد $a(G)$ از سودهی‌های بیدور G در بازگشت

$$a(G) = a(G - e) + a(G \cdot e)$$

صدق می‌کند (قضیهٔ ۱۹.۳.۵). تعداد درختهای فراگیر G به‌نظر می‌رسد که در همین بازگشت صدق کند؛ آیا تعداد سودهی‌های بیدور G همواره با تعداد درختهای فراگیر برابر است؟ چرا؟

۲۲.۳.۵. در یک سودهی بیدور از G، یک یال *وابسته* است اگر وارون کردن آن یک دور ایجاد کند. با استفاده از فن قضیهٔ گالای - رُوی (قضیهٔ ۱۴.۱.۵) ثابت کنید که اگر $\chi(G)$ کمتر از طول کوتاهترین دور در G باشد، آنگاه G دارای یک سودهی بدون یالهای وابسته است.

۲۳.۳.۵. فرض کنیم D یک سودهی بیدور G و f یک رنگ‌آمیزی از $V(G)$ از مجموعهٔ $[k]$ باشد. می‌گوییم که (D, f) یک ***جفت‌سازگار*** است اگر $u \to v$ در D ایجاب کند که $f(u) \le f(v)$. فرض کنیم $\eta(G; k)$ تعداد جفتهای سازگار باشد. ثابت کنید که $\eta(G; k) = (-۱)^{n(G)}\chi(G; k)$. (استانلی [۱۹۷۳])

1) Gross