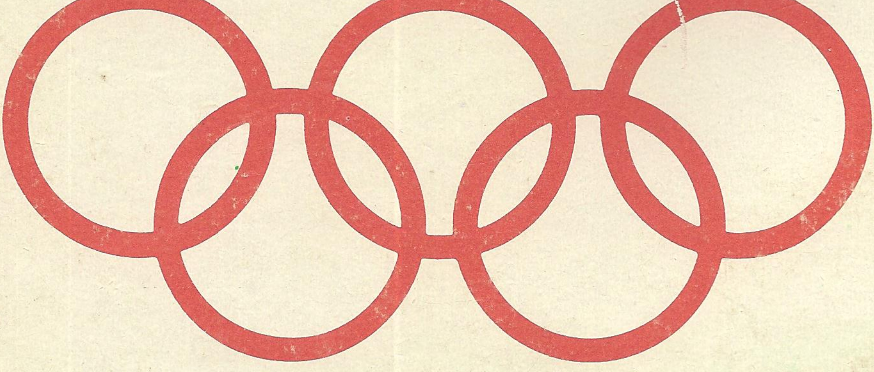
آمادگی برای

المپیادهای ریاضی

ترجمهٔ پرویز شهریاری



انتشارات فاطمی

آمادگی برای المپیادهای ریاضی برای کسانی تهیه شده است که علاقه‌مند به حل مسئله‌هایی متنوع، ساده و سرگرم کننده، و نامتعارف هستند.

مسئله‌های این کتاب از میان مسئله‌هایی برگزیده شده‌اند که استادان ریاضی اتحاد جماهیر شوروی، در سالهای گذشته، برای المپیادهای ریاضی داخلی و دانش‌آموزان سالهای آخر دبیرستان طرح و پیشنهاد کرده‌اند. مسئله‌ها در بخشهای جداگانهٔ کتاب تنظیم شده‌اند و در پایان هر بخش پاسخ یا راه‌حل آنها آمده است. راه‌حل هیچ مسئله‌ای از چارچوب برنامهٔ دبیرستانی خارج نیست.

ضمن حل مسئله‌ها، تلاش شده است تا با اشاره به مسئله‌های مشابه، بهره‌گیران از این کتاب به سمت نوعی قانونمندی کلّی راهنمایی شوند.

آمادگی برای

المپیادهای ریاضی

ترجمهٔ پرویز شهریاری

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی

انتشارات فاطمی

آمادگی برای المپیادهای ریاضی

ЗАОЧНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

مؤلفان: ن. ب. واسیلیف / (Н. Б. ВАСИЛЬЕВ) و. ل. گوتنماخر (В. Л. ГУТЕНМАХЕР)
ژ. م. رابوت (Ж. М. РАББОТ) / آ. ل. توم (А. Л. ТООМ)

مترجم: پرویز شهریاری

چاپ دوم: ۴۰۰۰ نسخه، تابستان ۱۳۷۴

چاپ و صحافی: چاپخانهٔ ستاره، قم

□
نشانی: تهران، کدپستی ۱۴۱۴۶، خیابان دکتر فاطمی، شمارهٔ ۱۵۹
تلفن: ۶۵۱۴۲۲_۶۵۴۷۷۰ ، فاکس ۸۸۶۶۲۵۸

این کتاب با استفاده از کاغذ حمایتی وزارت
فرهنگ و ارشاد اسلامی به چاپ رسیده است.

به نام خدا

سخنی از ناشر

هرجامعهٔ به‌پا خاسته‌ای، برای دست‌یافتن به‌خودکفایی و گسستن هرگونه زنجیر وابستگی سیاسی و اقتصادی، تلاش می‌کند تا علم و دانش و صنعت و فن و هنر را درمیان همگان، به‌ویژه نوجوانان و جوانـان و دانشپژوهان، گسترش دهد. هر چند یك‌بار برنامه و محتوای نظام آموزشی را دگوگون می‌کند، کتابهای درسی را از دانشهای کهنه می‌پیراید و از میان یافته‌های نوین دانش‌بشری آنچه را سازندگان‌فردای جامعه به‌آنها نیازمندند براین کتابها می‌افزاید. علم‌را با عمل و دانستن را با اندیشیدن و به‌کار بستن می‌آمیزد. چنین جامعه‌ای برای هرگونه کتابی‌که دانشهای نو و تازه‌ترین یافته‌هـای دانشمندان و پژوهشگران به‌آنها راه یافته است، پایگاهی بس ارجمند می‌شناسد. می‌داندکه بسیار نکته‌هاست که کتاب درسی فرصتی نمی‌یابد تا به‌آنها بپردازد، یا افزونتر از اشاره‌هایی در این زمینه‌ها داشته باشد. تلاش می‌کند تـا دانش‌آموختگان به‌گونه‌ای بارآیند کـه برای زندگانی امروز و فردای خود و جـامعهٔ خویش کارآمدتر و مؤثرتر باشند و از خلق‌کردن و دست یـازیدن به هنرهـا و صنعتها و اختراعها و اکتشافها و سود بردن از دانستن برای بهتر زیستن باز نمانند.

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی، با توجه به‌این نیازها، رسالتی را برعهده گرفته است و در زمینه‌های گوناگون علم و کاربردهایش و دانشها ودانستنیها کتابهایی را منتشرمی کندکه پاسخگوی ذهنهای کنجکاو وجستجوگر برای‌دستیابی به‌دانشی بیشتر در زمینه‌ای خاص باشند. این کتابها هم‌خودآموزند، هم‌یاری‌دهنده به‌فهم زودتر و بهترکتابهای درسی، هم‌آماده کنندهٔ دانش‌آموزان و دانشجویان بـرای موفقیت درآزمونهای گوناگون علمی، و هم راهنمای معلمان برای تدریس آن رشتهٔ علمی خاص.

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی برای تهیه و انتشار این‌گونه کتابها از بهترین و تازه‌ترین کتابهای علمی جهان استفاده می‌کند. درکار نوشتن و تألیف و ترجمهٔ آنها از همکاریهای زبده‌ترین کارشناسان و پژوهشگران کشورمان در زمینه‌های گوناگون علوم و راه و روش آموزش آنها بهره می‌گیرد، و تا آنجاکه میسر و ممکن است تلاش می‌کند تا اشتباه و لغزشی درآنها راه نیابد.

با انتشار این کتاب، اگر به اندکی از این رسالت در راه بازسازی جامعهٔ علمی کشورمان رسیده باشیم، خدای را سپاس می‌گوییم که خدمتی درخور جامعه‌ای بزرگ برعهده گرفته‌ایم، حتی اگر اندك باشد.

پیشگفتار

این کتاب برای کسانی تهیه شده است که علاقه‌مند به‌حل مسأله‌های نامتعارف‌اند. ضمن حل این مسأله‌ها، به‌دلیل وقت آزادی که برای کار با آن‌ها وجود دارد، نه‌تنها می‌توان نیروی خود را در پیدا کردن روش‌های گوناگون بررسی مسأله‌های نامتعارف آزمایش کرد و تکامل داد، بلکه راه برای مقایسهٔ آن‌ها با مسأله‌های خویشاوند و، همچنین، تعمیم آن‌ها بازاست و دانش‌آموز علاقه‌مند می‌تواند، بدون نگرانی از تمام شدن وقت، همهٔ جنبه‌های مختلف آن را مورد بررسی و کاوش قرار دهد. هدف کتاب هم، یاری رساندن به‌همین گونه فعالیت‌های خلاق ذهنی است.

در فصل اول کتاب، مسأله‌هایی جمع‌آوری شده‌است که از نظر مضمون متنوع و از نظر تنظیم، ساده و سرگرم‌کننده‌اند.

درهریك از پنج فصل بعدی، پس از طرح مسأله‌ها، ابتدا راه حل مقدماتی آن داده شده است، سپس در بسیاری موردها (و بعد از علامت ∇) آن را تعمیم داده‌ایم و گاهی (بعد از جملهٔ «**برای علاقه‌مندان**») زمینه‌های دشوارتری مورد بررسی قرار گرفته است که براساس اصطلاح‌های ریاضیات جدید است. درپایان هریك از این فصل‌ها، مسأله‌هایی برای کار مستقل خود دانش‌آموزان آمده است که، بعضی از آن‌ها، با مسأله‌های همان فصل خویشاوندند و بعضی دیگر تازگی دارند.

۱

مسأله‌هایی برای آشنائی اولیه

۱۰۱. آیا می‌توان در صفحهٔ کاغذی که از دفترچهٔ خود جدا کرده‌اید، سوراخی به‌وجودآوردکه بتوان‌آدم بزرگ سالی را ازآن عبورداد؟

۲۰۱. درمعادلهٔ $(x^2+\dots)(x+1)=(x^4+1)(x+2)$ یکی از عددها را پاك کرده‌اند و به‌جای‌آن «سه نقطه» گذاشته‌اند. اگربدانیم، یکی از ریشه‌های این معادله، برابرواحد است، این عدد را پیداکنید.

۳۰۱. توکا $\frac{1}{3}$ وقت خود را در مدرسه می‌گذراند، $\frac{1}{4}$ آن را والیبال بازی می‌کند، $\frac{1}{5}$ آن را نوار گوش می‌دهد، $\frac{1}{6}$ آن راتلویزیون تماشامی‌کند و $\frac{1}{7}$ آن را به حل مسأله‌های ریاضی می‌پردازد. آیا می‌توان این طور زندگی کرد؟

۴۰۱. چهار عدد را، دو به‌دو باهم جمع کرده‌ایم و شش عدد جدید

به‌دست آورده‌ایم. چهار عدد کوچکتر این شش مجموع را می‌شناسیم: ۱، ۵، ۸ و ۹. دو مجموع دیگر و خود چهار عدد اولیه را پیدا کنید.

۱۰۵. درطول یك‌سال، حداکثرچند جمعه می‌تواند وجود داشته باشد؟

۱۰۶. چهار دختر ـ کتایون، مژده، نسرین و سپیده ـ در یك کنسرت شرکت دارند. آن‌ها ترانه می‌خوانند. هر ترانه را سه دختراجرا می‌کنند. کتایون ۸ ترانه و بیش ازدیگران ونسرین ۵ ترانه وکمتر ازدیگران خواند. دراین کنسرت چند ترانه خوانده شده است؟

۱۰۷. سه‌نفر ـ سهراب، سروش و پیمان ـ چای می‌خورند. اگرسهراب ۵ فنجان چای بیشترمی‌نوشید، آن وقت به‌تعداد فنجان‌های دونفردیگرچای خورده بود؛ و اگرسروش ۹ فنجان بیشتر صرف می‌کرد، آن وقت تعداد فنجان‌های چای‌او به‌اندازهٔ دونفر دیگرمی‌شد. هریك ازاین افراد چندفنجان چای خورده‌اند و نام فامیل هرکدام ازآن‌ها چیست، به شرطی‌که بدانیم، آقای پارسا چای قندپهلو می‌خورد، تعداد فنجان‌های چای آقای تفرشی مضربی از۳ است وآقای کیوان ۱۱ فنجان چای خورده است؟

۱۰۸. شروین لوازم خودرا به‌انبارسپرد: کاناپه، چمدان، ساك‌دستی، قاب عکس، زنبیل، کارتون و سگ کوچك. وزن کاناپه، بـه اندازهٔ وزن چمدان وساك دستی‌روی هم، ویا به‌اندازهٔ وزن قاب‌عکس وکارتون روی‌هم بود. قاب عکس، زنبیل و کارتون هم وزن‌اند، درضمن، هریك از آن‌ها از سگ سنگین‌ترند. موقع تحویل لوازم، شروین مدعی شد که سگ او عوض شده است. ضمن تحقیق، معلوم شد، اگروزن ساك یا چمدان را به‌وزن سگ اضافه‌کنیم، روی هم از وزن‌کاناپه بیشترمی‌شود. ثابت‌کنید، ادعای شروین درست است.

۱۰۹. موتورسیکلت سوار و دوچرخه سواری، دریك لحظه، از نقطهٔ A به‌سمت نقطهٔ B حرکت‌کردند. دوچرخه‌سواربعد ازپیمودن یك سوم راه، متوقف شد، و تنها وقتی حرکت دوبارهٔ خود را آغازکردکه موتورسیکلت‌سوار در نقطه‌ای که به اندازهٔ یـك سوم راه به B مانده بـود، رسید.

موتورسیکلت‌سوار، راه‌خودرا ادامه‌دادو بعدازرسیدن به‌B، بلافاصله برگشت. کدام یك زودترمی‌رسند: موتورسیکلت سوار به A یا دوچرخه‌سوار به‌B؟

۰۱۰۵. طول ضلع‌های مجاوربه زاویهٔ قائمه درمثلث قائم‌الزاویه‌ای، برابر a و b است. روی وتراین مثلث و دربیرون آن، مربعی به ضلع وتر ساخته‌ایم. فاصلهٔ رأس زاویهٔ قائمهٔ مثلث را تا مرکزاین مربع پیدا کنید.

۰۱۱۰. رحمان درطول بهار ۲۵٪ لاغر، سپس، درطول تابستان ۲۰٪ چاق، درطول پائیز ۱۰٪ لاغر و درطول زمستان ۲۰٪ چاق می‌شود. رحمان درطول سال لاغرمی‌شود یا چاق، یا تغییری نمی‌کند؟

۰۱۲۰. ضمن سه‌روز، ۳۵۰۰۰ نامه به‌دفترمرکزی پست رسیده‌است. اگردر روزاول، به‌اندازهٔ دو برابر تعداد واقعی، نامه رسیده بود، آن‌وقت تعدادکل نامه‌ها در طول سه روز، برابرتوان پنجم اختلاف تعداد نامه‌های روزهای دوم و سوم می‌شد. درهرروز، چند نامه به‌دفترمرکزی پست رسیده است؟

۰۱۳۰. الف) کناردیواراطاق گردی به‌قطر۳ متر، حشره‌ای روی کف اطاق است. این حشره با پرش حرکت می‌کند وطول هرپرش او ۲ متراست. پرش را آغازمی‌کند. درچه نقطه‌هایی ازاطاق می‌تواند قرارگیرد.

ب) به‌همان پرسش پاسخ بدهید، به‌شرطی‌که اطاق، مربعی شکل به ضلع ۲ مترباشد و حشره، درآغاز، دریکی از گوشه‌های اطاق باشد.

۰۱۴۰. مهرهٔ جدیدی را برای بازی شطرنج به‌نام «زرافه» درنظر می‌گیریم که به‌صورت Γ حرکت می‌کند: چهارخانه دریك جهت و پنج‌خانه درجهت دیگر. حداکثر چند زرافه می‌توان روی صفحهٔ شطرنج به‌نحوی قرارداد که هرکدام‌ازآن‌ها، هرقدرحرکت‌کند، نتواند روی دیگری قرارگیرد.

۰۱۵۰. چهارنوجوان ـ آلبرت، بهزاد، بهروز و جمشید، مسابقهٔ دو دادند. روز بعد، وقتی نتیجهٔ مسابقه را از آن‌ها پرسیدند، این پاسخ‌ها را شنیدند:

آلبرت: من نه‌اول شدم و نه‌آخر.

بهزاد: من آخر نشدم.
بهروز: من نفراول بودم.
جمشید: من نفرآخربودم.

می‌دانیم سه تا ازاین پاسخ‌ها درست و یکی نادرست است. پاسخ چه کسی نادرست است؟ نفراول چه کسی است؟

۱۶۰۱. دو شهر A و B به‌فاصلهٔ ۱۰ کیلومتر از یکدیگر، در کنار رودخانه‌ای واقع‌اند. برای کدام حالت باید وقت بیشتری صرف کرد: حرکت با قایق از A تا B و برعکس، یا حرکت با همان قایق، ۲۰ کیلومتر روی دریاچه؟

۱۷۰۱. بهرام دراسکی سریع‌تر از آزیتا و کندتر از توکا است. آن‌ها از یك نقطه، در یك زمان و در یك جهت روی مسیر دایره‌ای حرکت می‌کنند. وتنها وقتی می‌ایستندکه هرسه نفردریك نقطه باشند. در این مدت، توکا ۱۳ بار از آزیتا جلوزده‌است. روی هم، چندبارملاقات دونفری پیش‌آمده است؟

۱۸۰۱. قالب فولادی ۱۹ × ۷۳ سانتی‌متر را روی کاغذ گذاشته‌ایم‌و به کمك‌مداد، مستطیلی باهمین طول وعرض روی کاغذ رسم کرده‌ایم. چگونه می‌توان با استفاده ازاین قالب و مداد، مرکزمستطیل را پیداکرد؟

۱۹۰۱. ثابت‌کنید، درهراجتماعی، می‌توان دونفررا پیدا کردکه، تعداد آشناهای‌آن‌ها دراین اجتماع، با هم برابرباشد. (اگر A با B آشناست، B هم با A آشناست.)

۲۰۰۱. یك دنبالهٔ عددی را بـه‌ترتیب زیرساخته‌ایم: عدد اول را ۷ گـرفته‌ایم، سپس، از عدد دوم به بعد، مجموع رقم‌هـای مجذور عدد قبلی به‌اضافهٔ واحد را قـرارداده‌ایم؛ مثلاً، عدد دوم برابر ۱۴ مـی‌شود، زیرا $۴۹ = ۷^۲$ ودرنتیجه $۱۴ = ۱ + ۹ + ۴$؛ عددسوم برابر۱۷ می‌شود وغیره. هزارمین عدد این دنباله، چند است؟

۲۱۰۱. سه برادر ـ آرش، رامین وکاوه ـ دریك‌کلاس درس می‌خوانند. معلم متوجه شد، اگریکی ازآن‌ها دوبـار ۴ یا دوبار ۳ پشت سرهم بگیرد،

درس خود را طوری ادامه می‌دهد که دفعهٔ بعد نمرهٔ ۳ بیاورد؛ اگر دوبار پشت سرهم نمرهٔ ۵ بیاورد، درس خواندن را رها می‌کند و دفعهٔ بعد نمرهٔ ۲ می‌آورد؛ اگردونمرهٔ مختلف بیاورد، دفعهٔ بعد، نمرهٔ بیشتر را ازبین دونمرهٔ قبلی می‌آورد. درابتدای نیم سال، آرش نمره‌های ۴ و ۵، رامین ۳ و ۲ و کاوه ۲ و ۴ گرفت. نتیجهٔ نمرهٔ هریك ازآن‌ها، دراین نیم‌سال چند می‌شود، به‌شرطی که در ۳۰ آزمایش شرکت کنند ونمرهٔ نتیجه، نزدیك‌ترین عدد درست به‌میانگین حسابی نمره‌های آن‌ها باشد؟*

۰۲۲۰۱ ریاضی‌دانی کنارجوی آب و درخلاف جهت حرکت آب به‌خانه می‌رفت، درحالی که کلاه‌خود ویك تکه چوب دردست داشت. سرعت حرکت او، یك برابرونیم سرعت حرکت آب بود. ضمن حرکت، کلاه‌خود را به آب انداخت (آن را با تکه‌چوب عوضی گرفته بود). ولی خیلی زود متوجه اشتباه خود شد، تکه چوب را به‌آب انداخت و با سرعت دو برابر سرعت قبلی به‌عقب برگشت، کلاه را ازآب گرفت وبلافاصله با همان سرعت اولیهٔ خود، به‌سمت خانه حرکت کرد، مثل این‌که هیچ اتفاقی نیفتاده است. ۴۰ ثانیه بعد ازآن که کلاه را از آب گرفته بود، به‌تکه چوبی برخوردکه روی آب به‌طرف اومی‌آمد. اگراشتباه نمی‌کرد و تمام وقت را به‌جلو می‌رفت، چقدر زودتربه‌خانه می‌رسید؟

۰۲۳۰۱ آیا عدد درستی وجود دارد، به نحوی که اگر رقم سمت چپ آن را حذف کنیم، عدد حاصل: الف) ۵۷ بارکوچکترشود؛ ب) ۵۸ بار کوچکترشود؟

۰۲۴۰۱ ازشرکت کنندگان دریك دورمسابقهٔ شطرنج، $\frac{1}{4}$ افراد استاد بزرگ و بقیه استاد شطرنج‌اند. هردو شرکت‌کننده، یك بار با هم بازی می‌کنند. برای برد یك امتیاز، برای تساوی نیم امتیاز داده می‌شود و به بازنده امتیازی داده‌نمی‌شود. درپایان مسابقه‌ها، استادان، درمجموع ۱/۲ برابراستادان بزرگ امتیاز آوردند. تعداد استادان و تعداد استادان بزرگ

---

* درمدارس شوروی ۵ بیشترین نمره و ۲ کمترین نمره است.ـ م.

را پیدا کنید.

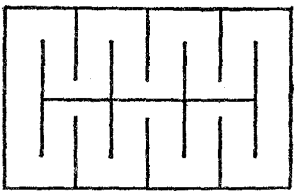
۰۲۵۰۱ آیا هرمی با قاعدهٔ چهارضلعی وجود دارد که دو وجه جانبی روبه‌رو در آن، بر صفحهٔ قاعده عمود باشند؟

پاسخ و راهنمایی

مسألهٔ ۰۱۰۱ پاسخ: می‌توان. نمونه‌ای از روش کار، در شکل ۱ داده شده است. تعداد پیچ‌ها را می‌توان، بسته به اندازهٔ کلفتی کسی که می‌خواهد از آن بیرون برود، بیشتر یا کمتر کرد.

مسألهٔ ۰۲۰۱ پاسخ: ۲. برای پیدا کردن عدد پاک شده، کافی است $x = 1$ را در معادله قرار دهیم.

مسألهٔ ۰۳۰۱ مجموع این عددها از واحد بزرگتر است. بنابراین، به‌شرطی توکا می‌تواند به‌این ترتیب عمل کند که قادر باشد بعضی کارها را در یک زمان و با هم انجام دهد.



شکل ۱

مسألهٔ ۰۴۰۱ پاسخ: دو مجموع دیگر برابر ۱۲ و ۱۶ و خود عددها (۱ −)، ۲، ۶ و ۱۰ یا $-\frac{۳}{۲}$، $\frac{۵}{۲}$، $\frac{۱۳}{۲}$ و $\frac{۱۹}{۲}$.

مسألهٔ ۰۵۰۱ پاسخ: ۵۳. بین هر هفت روز متوالی، حتماً با یک جمعه برخورد می‌کنیم. چون ۱ + ۷ × ۵۲ = ۳۶۵ و ۲ + ۷ × ۵۲ = ۳۶۶، بنابراین هر سال شامل ۵۲ هفته، به‌اضافهٔ ۱ یا ۲ روز است. هر هفته شامل یک جمعه است و در ۱ یا ۲ روز باقی مانده، ممکن است با جمعه برخورد کنیم یا برخورد نکنیم. به این ترتیب، در سال حداکثر ۵۳ جمعه وجود دارد. سالی شامل ۵۳ جمعه است که با جمعه آغاز شود. در سال‌های کبیسه، اگر سال با پنجشنبه یا جمعه آغاز شود، با ۵۳ جمعه برخورد خواهیم داشت.

مسألهٔ ۰۶۰۱ پاسخ: ۹ ترانه. اگر به‌خاطر هر ترانه‌ای که اجرا می‌شود،

هدیه‌ای به اجراکنندگان آن بدهیم، تعداد هدیه‌ها، مضربی از ۳ خواهد بود.

مسألهٔ ۱-۰۷ پاسخ: سهراب کیوان ۱۱ فنجان، سروش تفرشی ۹ فنجان، و پیمان پارسا ۷ فنجان چای نوشیده‌اند.

مسألهٔ ۱-۰۸ وزن هریك از لوازم شروین را با یکی از حرف‌های الفبا نشان می‌دهیم:

وزن کاناپه: ك؛ وزن چمدان: چ؛ وزن ساك دستی: د؛ وزن قاب عکس (وهمچنین وزن زنبیل و وزن کارتون که با هم برابرند): ق؛ وبالاخره وزن سگ کوچك: س. اگر اعتراض شروین درست نباشد، باید داشته باشیم:

و ك > د + س ، س > ق ، ق۲ = د + چ = ك

ك < چ + س

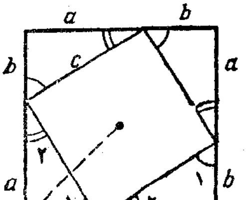
که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

ق۲ > س۲ > د + چ = ق۲ ، د > س ، چ > س

و تناقض روشن است.

مسألهٔ ۱-۰۹ پاسخ: دوچرخه‌سوار زودتر می‌رسد. از آن‌جا که دوچرخه‌سوار، یك سوم راه را وقتی تمام می‌کند که هنوز موتورسوار نتوانسته است به‌پایان دو سوم راه برسد، بنابراین سرعت دوچرخه سوار، بیشتر از نصف سرعت موتورسوار است.

مسألهٔ ۱-۱۰ پاسخ: $\frac{\sqrt{۲}}{۲}(a+b)$. روی همهٔ ضلع‌های مربع و دربیرون آن، مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای برابر مثلث قائم‌الزاویهٔ مفروض، طوری می‌سازیم که ضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ آن‌ها، درامتداد هم قرار گیرند (شکل ۲). ضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ این مثلث‌ها مربع جدیدی می‌سازند که، مرکز آن، بر مرکز مربع قبلی منطبق است. فاصلهٔ مطلوب، برابر است با نصف قطر این مربع.



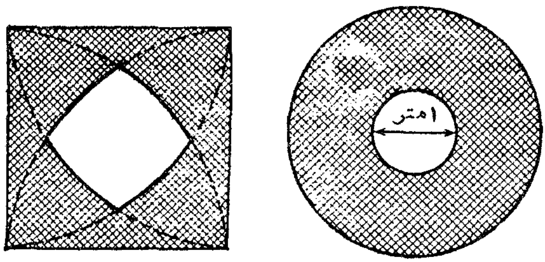
شکل ۲

مسألهٔ ۱۱۰۱. پاسخ: لاغر می‌شود. اگر وزن را در ابتدای بهار M بگیریم، مقدار وزن درانتهای سال چنین می‌شود:

$$۰/۷۵ \times ۱/۲ \times ۰/۹ \times ۱/۲ M = ۰/۹۷۲ M$$

مسألهٔ ۱۲۰۱. پاسخ: به‌ترتیب ۲۴۰۴۹، ۵۴۷۱ و ۵۴۸۰ نامه در روزهای اول، دوم و سوم به‌دفترپست‌رسیده است. تنها توان پنجم درستی که بین دوعدد ۳۵۰۰۰ و ۷۰۰۰۰ قراردارد، $۹^۵$ است.

مسألهٔ ۱۳۰۱. الف) پاسخ: همهٔ نقطه‌های حلقهٔ با قطر درونی ۱متر و قطربیرونی ۳ متر (در شکل «۳ــالف» این حلقه را هاشور زده‌ایم). روشن است‌که حشره، نمی‌تواند، به‌مرکزدایره، ازنیم‌مترنزدیک‌ترشود. برای اثبات این‌که حشره می‌تواند در هرنقطه ازاین حلقه قرار گیرد، ابتدا باید ثابت‌کرد که می‌تواند روی هرنقطهٔ کناردیوارقرارگیرد.



ب)　　　　الف)

شکل ۳

ب) پاسخ: شکل «۳ــب»، بخش هاشورخورده را ببینید. این بخش، شامل مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های داخل مربع است، به‌استثنای اشتراك چهار دایرهٔ به‌شعاع ۲ متروبه مرکزگوشه‌های اطاق.

مسألهٔ ۱۴۰۱. پاسخ: ۱۶ زرافه. روی شکل ۴ نشان داده شده است که چگونه می‌توان ۸ زرافه را چید: هر زرافه را می‌توان درخانه‌ای قرار دادکه شمارهٔ آن نوشته شده است. ۸زرافهٔ بقیه را می‌توان قرینهٔ هشت‌تای

۲	۳	۴	۵				
۳	۴	۵	۶				
۴	۵	۶	۷				
۵	۶	۷	۸				
				۱	۲	۳	۴
				۲	۳	۴	۵
				۳	۴	۵	۶
				۴	۵	۶	۷

شکل ۴

اول قرار داد.

مسألهٔ ۱۵۰۱. پاسخ: بهروز درست نگفته است؛ بهزاد به مقام اول رسیده است. اگرمثلاً فرض‌کنیم، آلبرت نادرست‌گفته است، آن وقت او باید اول یا آخرشده باشد، ولی دراین صورت باید یا بهروز ویا جمشید هم پاسخ نادرست داده باشد؛ و این، فرض مسأله را مبنی براین‌که تنها یك‌نفر نادرست‌گفته است، نقض می‌کند. همهٔ حالت‌های دیگر را هم می‌توان به‌همین‌ترتیب مورد بررسی قرارداد.

مسألهٔ ۱۶۰۱. پاسخ: در رودخانه وقت‌بیشتری صرف می‌شود. سرعت قایق را u می‌گیریم وسرعت جریان آب را v. اگر $u \leqslant v$، آن وقت قایق نمی‌تواند در جهت عکس جریان‌آب حرکت‌کند. ولی اگر $u > v > 0$، آن وقت، جواب مسأله، منجربه‌اثبات نابرابری زیرمی‌شود:

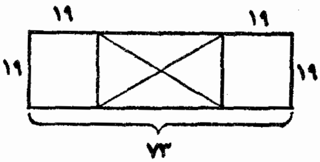
$$\frac{10}{u+v}+\frac{10}{u-v}>\frac{20}{u}$$

مسألهٔ ۱۷۰۱. پاسخ: ۲۵. این ۱۳ لحظه‌ای که توکا ازآزیتا جلو زده است، همهٔ زمان حرکت را به ۱۴ فاصلهٔ زمانی تقسیم می‌کند و درهریك از

این‌فاصله‌ها، توکا درست یک دور ازآزیتا جلوافتاده است. فرض کنید، بهرام k دور بیشتر از آزیتا حرکت‌کرده باشد (بنابر شرط مسأله $۰<k<۱۴$)؛ یعنی بهرام $k-۱$ باراز آزیتا جلو زده‌است. ولی بهرام $۱۴-k$ دورکمتر از توکا حرکت کرده است، بنابراین توکا $۱۳-k$ بار از او جلو زده است. روی‌هم به‌دست می‌آید:

$$۱۳+(k-۱)+(۱۳-k)=۲۵$$

مسألهٔ ۱۸۰۱. روی هریک ازضلع‌های بزرگترمستطیل، ازدوطرف، ۱۹ سانتی‌مترجدا می‌کنیم. مستطیلی ۱۹×۳۵ به‌دست می‌آیدکه مرکزآن، با مرکزمستطیل اصلی مشترک است. ولی درمستطیل اخیر می‌توان قطرها را رسم‌کرد ونقطهٔ برخوردآن‌ها، یعنی‌مرکزمستطیل را به‌دست‌آورد (شکل۵).



شکل ۵

مسألهٔ ۱۹۰۱. فرض کنید k نفر با هم جمع‌شده باشند. دراین صورت، تعدادآشناها برای هرفرد ازاین اجتماع ازصفرکمتر و از $k-۱$ بیشترنیست. اگرفرض‌کنیم، تعداد آشناهای هرفرد، برای افراد مختلف، متفاوت باشد، به تناقض برمی‌خوریم. در واقع، در این صورت، بایدنفراول صفرآشنا، نفردوم یک آشنا، نفر سوم دو آشنا، ...، و سرانجام نفرآخر $k-۱$ آشنا داشته باشد. ولی این به‌معنای‌آن است‌که نفر آخربا همهٔ دیگران، ومنجمله با نفراول، آشناست؛ درحالی‌که بنابرفرض، نفراول با هیچ‌کس‌آشنا نیست.

مسألهٔ ۲۰۰۱. پاسخ: ۱۱. چندجمله ازاین دنباله را محاسبه می‌کنیم:

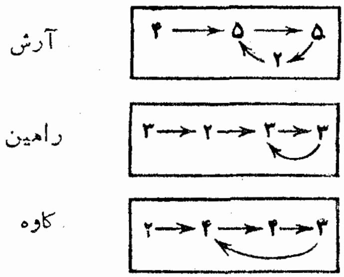
۷;۱۴;۱۷;۲۰;۵;۸;۱۱;۵;...

عدد ۵ تکرارشد، یعنی از آن به‌بعد، سه‌عدد ۵، ۸، ۱۱ به‌تناوب تکرار می‌شوند.

مسألهٔ ۲۱۰۱. پاسخ: آرش وکاوه نمرهٔ۴ و رامین نمرهٔ۳. اگرنمره‌های

هریك ازسه‌برادر را به ردیف بنویسیم، متوجه می‌شویم که، ازجایی به‌بعد، به‌صورت تناوبی، تکرار می‌شوند. طرح این نمره‌ها روی شکل ۶ داده شده است. با محاسبهٔ مقدارمتوسط نمره‌ها، جواب به‌دست می‌آید.

مسألهٔ ۰۲۲۰۱ پاسخ: دو دقیقه و نیم. فرض کنید، ریاضی‌دان، t ثانیه به‌طرف عقب بدود. دراین صورت، تکه چوب، $t+۴۰$ ثانیه را روی آب به‌عقب آمده است. سرعت جریان آب را v می‌گیریم. دراین صورت، سرعت حرکت ریاضی‌دان، درحالت عادی $۱/۵v$ و درحرکت به‌طرف عقب $۳v$ می‌شود. فاصله‌ای که او به طرف عقب دویده، برابراست با فاصله‌ای که تکه چوب تا لحظهٔ ملاقات با اوطی کرده، به‌اضافهٔ فاصله‌ای که ریاضی‌دان، همراه با کلاه خود، تا برخورد با تکه چوب پیموده است:



شکل ۶

$$۳vt = ۱/۵v \times ۴۰ + v(t+۴۰)$$

ازاین جا به‌دست می‌آید: $t=۵۰$.

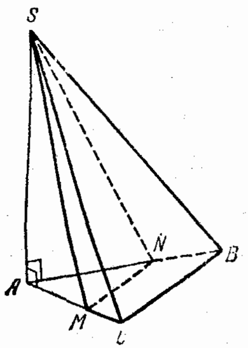
ریاضی‌دان، برای گرفتن کلاه‌خود ازآب، ۵۰ ثانیه به‌طرف عقب دویده است؛ برای برگشت، همین‌فاصله را در ۵۰×۲ ثانیه طی کرده است (زیرا در برگشت به‌طرف خانه، همان‌سرعت نخستین خود، یعنی نصف سرعت دویدن به‌طرف عقب را داشته است). ریاضی‌دان، روی هم ۱۵۰ ثانیه وقت را، به‌خاطراشتباه خود، تلف کرده است.

مسألهٔ ۰۲۳۰۱ پاسخ: الف) مثلاً عدد ۷۱۲۵؛ ب) چنین عددی وجود ندارد. رقم سمت چپ عدد را x، تعداد رقم‌های باقی مانده را k و عددی‌را که بعد ازحذف رقم سمت چپ باقی می‌ماند، y می‌گیریم. دراین صورت

$$x \times ۱۰^k + y = ۵۸y \Rightarrow x \times ۱۰^k = ۵۷y$$

سمت راست برابری اخیر مضربی از ۱۹ است، درحالی‌که سمت چپ آن نمی‌تواند بر۱۹ بخش‌پذیرباشد.

مسألهٔ ۰۲۴۰۱ پاسخ: ۹ استاد و ۳ استاد بزرگ. اگر تعداد شرکت‌کنندگان درمسابقه را n فرض‌کنیم، تعدادکل امتیازها برابر $\frac{1}{2}n(n-1)$ می‌شود.



شکل ۷

مسألهٔ ۰۲۵۰۱ پاسخ: وجود دارد. نمونهٔ چنین هرمی، در شکل ۷ داده شده است. این هرم را، می‌توان به‌صورت زیر ساخت. هرم با قاعدهٔ مثلثی $SABC$ را در نظرمی گیریم که، درآن، یال جانبی SA برصفحهٔ قاعده عمود باشد. وجه‌های جانبی SAC و SAB برقاعده عمود می‌شوند (زیرااز SA که‌عمودبرقاعده‌است، گذشته‌اند). اکنون، نقطه‌های دلخواه M و Nرا، به‌ترتیب، روی ضلع‌های AC وAB انتخاب مـی‌کنیم. هـرم $SMNBC$، هرم مطلوب است.

۲

عددهای درست و چندجمله‌ای‌ها

۱۰۲. به‌دانش‌آموزی ۲۰ مسأله داده‌اند. برای هرمسأله‌ای که درست حل کند ۸ نمره، برای هرمسأله‌ای که غلط حل کند ۵ نمرهٔ منفی و برای مسأله‌ای که حل نکند صفر نمره می‌گیرد. دانش‌آموز، درمجموع، ۱۳ نمره گرفته است. چند مسأله را، درست یا غلط، حل کرده است؟

۲۰۲. آیا می‌توان ۲۵ روبل را با اسکناس‌های یك روبلی، سه‌روبلی و پنج روبلی طوری معاوضه کرد که، روی هم، ۱۰ اسکناس داشته باشیم؟

۳۰۲. روی یك صفحهٔ کاغذ شطرنجی میلی‌متری، مستطیل ۲۷۲ × ۲۰۴ میلی‌متری را رسم کرده‌ایم (ضلع‌های مستطیل، برخط‌های راست شبکهٔ کاغذ، منطبق‌اند). قطر مستطیل را رسم کرده‌ایم وهمهٔ نقطه‌هایی را که، این قطر، با گره‌های شبکه برخورد داشته است، علامت گذاشته‌ایم. این گره‌ها، قطر را به‌چند بخش تقسیم می‌کنند؟

۴۰۲. الف) از مستطیل ۱۴۱ × ۳۲۴ میلی‌متری، چند مربع به‌ضلع ۱۴۱ میلی‌متر جدا کرده‌ایم، تا وقتی که طول یکی از ضلع‌های مستطیل

باقی‌مانده، از ۱۴۱ میلی‌متر کمترشود. سپس، ازمستطیل باقی‌مانده، مربع‌هایی به‌ضلع برابربا ضلع کوچکتر مستطیل، تا جایی که ممکن است جدا کرده‌ایم و غیره. طول ضلع آخرین مربع، چقدراست؟

ب) عددهای a و b را طوری پیدا کنید، که بتوان ازمستطیل $a\times b$، به‌ترتیبی که دربخش «الف» داشتیم، درست شش مربع با اندازه‌های مختلف جدا کرد.

۵.۲ سه ماشین تحریـر کامپیوتری، با خواندن دو عددی که روی یك کارت نوشته شده است، دوعدد دیگر را روی کارت دیگری ثبت می کنند. اگر کارتی با دوعدد $(m،n)$ به آن‌ها داده شود، اولی کارت $(m-n،n)$، دومی کارت $(m+n،n)$ وسومی کارت $(n،m)$ را به‌ما می‌دهند. فرض کنید، کارتی با دوعدد (۱۹،۸۶) داشته باشیم. آیا می‌توان با استفاده از این سه ماشین تحریر کامپیوتری، به‌هرترتیبی، کارت، الف) (۳۱،۱۳)؛ ب) (۱۲،۲۱) را به‌دست آورد؟

۶.۲ استادکاری روی‌یك نوارطولانی، ازآغازآن، هر۳۶ سانتی‌متر را با مدادآبی علامت می گذارد. استادکار دوم، روی همان نوار، و باز هم ازآغازآن، هر ۲۵ سانتی‌متر را بـا مداد قرمز علامت می گذارد. آیا ممکن است، درجایی، علامت آبی دریك سانتی‌متری علامت قرمزقرار گیرد؟

۷.۲ آیا می‌توان زاویهٔ ۱۹ درجه را، به‌کمك پرگار وخط‌کش، به ۱۹ بخش برابرتقسیم کرد؟

۸.۲ محیط دایره‌ای به وسیلهٔ ۲۰ نقطه، بـه ۲۰ بخش برابرتقسیم شده است. چند خط‌شکستهٔ بسته‌شامل ۲۰ پاره خط راست برابر، با رأس‌های دراین نقطه‌ها، می‌توان ساخت؟ (خط‌های شکسته‌ای کـه، با دوران، برهم منطبق شوند، یکی به‌حساب می‌آیند.)

۹.۲ آیا می‌توان از ۱۰۰ عدد درست دلخواه، الف) ۱۵ عدد؛ ب) ۱۶ عدد طوری انتخاب کرد کـه تفاضل هر دو عدد دلخواه از آن‌ها، بر ۷ بخش‌پذیر باشد؟

۱۰۰۲. ثابت کنید، اگرمجموع مجذورهای دوعدد درست بر۳ بخش‌پذیرباشد، هریك ازآن‌ها، بر۳ بخش‌پذیرخواهد بود.

۱۱۰۲. ثابت کنید، بی‌نهایت عدد طبیعی وجود دارد، به نحوی که نمی‌توان هرکدام از آن‌ها را، به‌صورت مجموع مکعب‌های سه عدد درست غیرمنفی نوشت.

۱۲۰۲. کلاسی۲۸دانش‌آموزداردکه روی نیمکت‌های دونفری در۱۴ ردیف نشسته‌اند. درابتدای هرماه، معلم، جای‌آن‌هارا طوری عوض می‌کند که هردو دانش‌آموزی که روی یك نیمکت قرارمی‌گیرند، قبل از آن، هرگز با هم در یك ردیف نبوده باشند. حداکثرتا چند ماه، معلم می‌تواند این‌عمل را انجام دهد؟

۱۳۰۲. سه‌عدد طبیعی متوالی طوری پیدا کنید‌که، هرکدام از آن‌ها، برمجذوریك عدد درست بزرگتراز واحد، بخش‌پذیرباشد.

۱۴۰۲. آیا می‌توان هر۱۲ عدد ۱، ۲، ...، ۱۲ را روی محیط دایره طوری قرار داد که برای هر سه عدد a، b و c که به همین ردیف در کنار یکدیگرند، عدد $b^{۲}-ac$ بر۱۳ بخش‌پذیرباشد؟

۱۵۰۲. آیا درست است که، برای هرعدد طبیعیn، عدد $n^{۲}+۵n-۱$ عددی اول است؟

۱۶۰۲. ثابت کنید، برای هرعدد درست n، عدد $n^{۵}-۵n^{۳}+۴n$ بر ۱۲۰ بخش‌پذیراست.

۱۷۰۲. آیا چند جمله‌ای $p(x)$ با ضریب‌های درست وجود دارد، به‌نحوی که

الف) $p(۰)=۱۹$ ، $p(۱)=۸۵$ ، $p(۲)=۱۹۸۵$؛

ب) $p(۱)=۱۹$ ، $p(۱۹)=۸۵$؟

۱۸۰۲. این چند جمله‌ای‌ها را تجزیه کنید (به‌عامل‌های با ضریب‌های درست):

الف) x^8+x^4+1 به‌سه‌عامل؛

ب) x^5+x+1 به‌دوعامل.

۰۱۹.۲ به‌ازای چه‌مقدار a، چند جمله‌ای‌های

$$x^4+ax^2+1 \quad , \quad x^3+ax+1$$

ریشهٔ مشترك دارند؟

۰۲۰.۲ مجموعهٔ M ازهمهٔ عددهای طبیعی به‌صورت x^2+5y^2 را درنظرمی‌گیریم (x و y، عددهای درستی هستند).

الف) ثابت کنید، حاصل ضرب هردوعدد M، خود عضوی از M است.

ب) عضوی از M را، عدد پایه می‌نامیم که از واحد بزرگتر باشد و، به‌جزخودش و واحد، برعدد دیگری ازعددهای M بخش‌پذیرنباشد. آیا عددهایی از M وجود دارندکه بتوان، هرکدام ازآن‌ها را، با دو روش مختلف به‌صورت حاصل‌ضرب عددهای پایه نوشت؟

ج) ثابت کنید، تعداد عددهای پایه بی‌نهایت است.

۰۲۱.۲ به‌سادگی می‌توان سه‌عدد درست مجذورکامل پیداکرد که به تصاعد حسابی باشند: ۱، ۲۵، ۴۹. بازهم سه عدد از این‌گونه پیداکنید (ازمجذورهای کاملی‌که مقسوم علیه مشترك نداشته باشند).

۰۲۲.۲ الف) درمجموعهٔ عددهای درست، ۷ جواب معادلهٔ زیر را پیداکنید:

$$y^2=6(x^3-x)$$

ب) ۴ جواب گویای دیگراین معادله را پیداکنید.

بحث و بررسی مسأله‌ها

مسألهٔ ۰۱.۲ پاسخ: دانش‌آموز۱۳ مسأله را حل‌کرده است.

فرض می‌کنیم، تعداد مسأله‌هایی که درست حل شده است برابر x و

تعداد مسأله‌هایی که اشتباه حل شده است برابر y باشد. دراین صورت

$$۸x - ۵y = ۱۳$$

که می‌توان، آن را، به‌این صورت نوشت:

$$۸(x+y) = ۱۳(۱+y)$$

می‌بینیم که $x+y$ باید بر ۱۳ بخش‌پذیر باشد. ازطرف دیگر، $x+y$، از ۲۰ تجاوز نمی‌کند. بنابراین $x+y=۱۳$ (درضمن $x=۶$ و $y=۷$).

▽ معادلهٔ $۸x-۵y=۱۳$ را می‌توان به‌این ترتیب حل کرد: یکی ازجواب‌ها را می‌توان، بلافاصله، حدس زد: $x_0=۱$، $y_0=-۱$. به‌ازای هرعدد درست t، دوعدد $x=۱+۵t$، $y=-۱+۸t$ هم درمعادله صدق می‌کنند. در واقع

$$۸(۱+۵t)-۵(-۱+۸t)=(۸+۵)+(۴۰t-۴۰t)=۱۳$$

درضمن $x+y=۱۳t$ و چون $x+y\leqslant ۲۰$، بنابراین

$$t=۱,\ x+y=۱۳,\ x=۶,\ y=۷$$

برای هرمعادلهٔ خطی به صورت $ax-by=c$ (a و b نسبت به‌هم اول‌اند)، صورت‌کلی‌جواب، در مجموعهٔ عددهای درست را، می‌توان با این طرح به‌دست‌آورد: یکی ازجواب‌های‌آن، (x_0, y_0) را پیدا می‌کنیم، دراین صورت $x=x_0+bt$، $y=y_0+at$ $(t\in \mathbf{Z})$، همهٔ‌جواب‌های‌درست معادله را به‌ما می‌دهد.

مسألهٔ ۲۰۲. پاسخ: نمی‌شود.

فرض‌کنیم بتوان k عدد یك روبلی، l عدد سه روبلی و m عدد پنج روبلی را طوری انتخاب کردکه داشته باشیم:

$$k+l+m=۱۰\ ,\ k+۳l+۵m=۲۵$$

اگربرابری اول را ازبرابری دوم کم‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$۲l+۴m+۱۵$$

ولی، این برابری ممکن نیست، زیرا سمت چپ آن عددی زوج و سمت راست‌آن عددی فرد است. به‌این ترتیب، فرض ما نادرست است.

▽ به‌طورکلی، معادلهٔ به‌صورت $ax-by=c$، تنها وقتی در مجموعهٔ عددهای درست، جواب داردکه c بر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دوعدد a و b بخش‌پذیرباشد. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دوعدد درست a و b را، با $(a، b)$ نشان می‌دهند.

در مسألهٔ ۲.۲، عدد $c=۱۵$، بر $(a، b)=(۲، ۴)=۲$ بخش‌پذیر نیست.

مسألهٔ ۳.۲. پاسخ: به ۶۸ بخش.

هر یك از دو ضلع مجاورمستطیل را به ۶۸ بخش برابرتقسیم و از نقطه‌های تقسیم، خطهای راستی روی خطهای شبکه رسم می‌کنیم. در این صورت، قطر مستطیل به وسیلهٔ گره‌های شبکه به‌۶۸ بخش برابرتقسیم می‌شود که، هر کدام از آن‌ها، قطر مستطیلی با بعدهای ۴ × ۳ میلی‌متر را تشکیل می‌دهد. روی قطر چنین مستطیلی، حتی یك گره از شبکه هم وجود ندارد.

▽ به‌طورکلی، قطر یك مستطیل $m\times n$، به‌وسیلهٔ گره‌های شبکه، به $(m، n)$ بخش برابرتقسیم می‌شود [$(m، n)$، به‌معنای بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دوعدد m و n است].

مسألهٔ ۴.۲. الف) پاسخ: ۳ میلی‌متر.

به‌این تقسیم‌های باقی‌مانده توجه کنید:

(۲ مربع به‌ضلع ۱۴۱ میلی‌متر) $۳۲۴=۱۴۱\times۲+۴۲$

(۳ مربع به‌ضلع ۴۲ میلی‌متر) $۱۴۱=۴۲\times۳+۱۵$

(۲ مربع به‌ضلع ۱۵ میلی‌متر) $۴۲=۱۵\times۲+۱۲$

(۱ مربع به‌ضلع ۱۲ میلی‌متر) $۱۵=۱۲\times۱+۳$

(۴ مربع به‌ضلع ۳ میلی‌متر) $۱۲=۳\times۴$

∇ برای مستطیل $a \times b$، طول ضلع کوچکترین مربع، برابراست با (a,b).

در واقع، تقسیم‌های با باقی مانده‌ای که، برای حل مسأله، انجام دادیم، همان روندی است که در روش تقسیم‌های متوالی (آلگوریتم اقلیدس) برای پیداکردن بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك بین دوعدد به‌کارمی‌رود.

آلگوریتم اقلیدس، براساس این گزاره قراردارد: اگر $a=bq+r$، آن وقت بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك a و b، برابراست با بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك b و r: $(a,b)=(b,r)$. خود آلگوریتم را می‌توان این طور شرح داد. اگردوعدد a و b داده شده باشد و، درضمن $a>b>0$، آن‌وقت، ابتدا a را بر b تقسیم می‌کنیم تا به‌باقی ماندهٔ r_1 برسیم $(0 \leqslant r_1 < b)$. بعد b را بر r_1 تقسیم می‌کنیم تا به‌باقی‌ماندهٔ r_2 برسیم $(0 \leqslant r_2 < r_1)$. سپس، r_1 را بر r_2 تقسیم می‌کنیم تا باقی ماندهٔ r_3 به‌دست‌آید $(0 \leqslant r_3 < r_2)$، وغیره، تا وقتی که، مثلاً، باقی‌ماندهٔ r_{n-1} برباقی ماندهٔ r_n بخش‌پذیرباشد، یعنی $r_{n+1}=0$. آخرین باقی‌ماندهٔ غیرصفر r_n، همان بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك a و b است. در واقع

$$r_n=(r_n,r_{n-1})=(r_{n-1},r_{n-2})=\ldots=(r_2,r_1)=(r_1,b)=(a,b)$$

درمسألهٔ ۴.۲، الف) باتعبیرهندسی آلگوریتم اقلیدس روبه‌روهستیم.

همچنین یادآوری می‌کنیم که به وسیلهٔ خارج قسمت‌های متوالی q_1، q_2، ...، q_n، که ضمن به‌کاربردن آلگوریتم اقلیدس به‌دست می‌آیند، می‌توان تبدیل کسر $\frac{a}{b}$ را به‌صورت کسرمسلسل نوشت:

$$\frac{a}{b}=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cdots+\cfrac{1}{q_n}}}$$

ب) پاسخ: به‌عنوان مثال $a = ۲۱$، $b = ۱۳$.

در واقع، اگر تقسیم‌های متوالی را انجام دهیم، داریم:

$$۲۱ = ۱ \times ۱۳ + ۸;\quad ۱۳ = ۱ \times ۸ + ۵;\quad ۸ = ۱ \times ۵ + ۳;$$

$$۵ = ۱ \times ۳ + ۲;\quad ۳ = ۱ \times ۲ + ۱;\quad ۲ = ۲ \times ۱$$

به‌این ترتیب، مربع‌هایی، به‌ترتیب با ضلع‌های ۱۳، ۸، ۵، ۳، ۲ و ۱ به‌دست می‌آیند: شش مربع با طول ضلع‌های مختلف.

∇ برای عدد طبیعی و دلخواه n، می‌توان عددهای a و b را طوری پیدا کرد که، ضمن تقسیم مستطیل $a \times b$، درست n مربع با اندازه‌های مختلف به‌دست آید.

به‌عنوان این عددها، می‌توان عددهای $F_{n+۲}$ و $F_{n+۱}$ از دنبالهٔ عددهای فیبوناچی را درنظر گرفت. این دنباله، به‌این ترتیب تعریف می‌شود:

$$F_۱ = ۱،\ F_۲ = ۱،\ F_۳ = ۲، \ldots، F_k = F_{k-۱} + F_{k-۲} (k \geqslant ۳)$$

اگر فرض کنیم $a = F_{n+۲}$ و $b = F_{n+۱}$، آن‌وقت هربار ازمستطیل $F_k \times F_{k-۱}$، تنها یک مربع به ضلع $F_{k-۱}$ جدا می‌شود و مستطیل $F_{k-۱} \times F_{k-۲}$ باقی می‌ماند.

درحل مسألهٔ ۴.۲، ب) $F_۷ = ۱۳$ و $F_۸ = ۲۱$ را درنظر گرفتیم و اندازهٔ شش مربع حاصل، برابربا شش عدد مختلف اولیه در دنبالهٔ فیبوناچی شد: ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳.

نمونهٔ مستطیل $a \times b$ که به این ترتیب ساخته شود، کوچکترین مستطیل ممکن، ازنظر اندازه‌هاست (برای n مفروض)؛ به‌زبان دیگر، اگر عددهای a و b از $F_{n+۲}$ بزرگتر نباشند، آن وقت برای پیداکردن $(a،b)$ به‌کمک آلگوریتم اقلیدس، بیش از n گام لازم نیست.

همچنین یادآوری می‌کنیم که، برای تبدیل نسبت $\frac{F_{n+۱}}{F_n}$ از دو عدد مجاور فیبوناچی، به‌کسرمسلسل، روش بسیارساده‌ای وجود دارد: این کسر، تنها از واحدها تشکیل شده است، مثلاً

$$\frac{F_۶}{F_۵}=\frac{۸}{۵}=۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱}}}}$$

مسألهٔ ۵۰۲. الف) پاسخ: می‌توان.

عمل ماشین تحریرهای کامپیوتری را، به‌ترتیب I، II و IIIمی‌نامیم. درضمن I^n یا II^n را به معنای n بارمتوالی عمل I یـا II می‌گیریم. دراین صورت، کارت (۳۱،۱۳) را مـی‌توان، به‌این ترتیب، ازکارت (۱۹،۸۶) به‌دست‌آورد:

$$(۱۹،۸۶)\xrightarrow{\mathrm{III}}(۸۶،۱۹)\xrightarrow{\mathrm{I}^۴}(۱۰،۱۹)\xrightarrow{\mathrm{III}}(۱۹،۱۰)\xrightarrow{\mathrm{I}}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I}}(۹،۱۰)\xrightarrow{\mathrm{III}}(۱۰،۹)\xrightarrow{\mathrm{I}}(۱،۹)\xrightarrow{\mathrm{III}}(۹،۱)\xrightarrow{\mathrm{I}^۷}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I}^۷}(۲،۱)\xrightarrow{\mathrm{III}}(۱،۲)\xrightarrow{\mathrm{II}}(۳،۲)\xrightarrow{\mathrm{III}}(۲،۳)\xrightarrow{\mathrm{II}}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{II}}(۵،۳)\xrightarrow{\mathrm{III}}(۳،۵)\xrightarrow{\mathrm{II}^۲}(۱۳،۵)\xrightarrow{\mathrm{III}}(۵،۱۳)\xrightarrow{\mathrm{II}^۲}(۳۱،۱۳)$$

ب) نمی‌توان.

چون عمل‌های I، II و III، بـزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دو عدد m و n را تغییرنمی‌دهند، و چون ۱۹ و ۸۶ نسبت به‌هم اول‌اند درحالی‌که ۱۲ و ۲۱ مقسوم‌علیه مشترکی برابر ۳ دارند، بنابراین ازکارت (۱۹،۸۶) نمی‌توان به‌کارت (۱۲،۲۱) رسید.

∇ شرط لازم‌وکافی برای این‌که بتوان ازکارت $(m،n)$ به‌کارت $(a،b)$ رسید، این است‌که بزرگترین‌مقسوم‌علیه مشترك دوعدد m و n بابزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دوعدد a و b برابرباشد.

لازم بـودن شرط روشن است: عمـل‌هـای I، II و III، بـزرگترین مقسوم‌علیه مشترك را تغییرنمی‌دهند.

اگراین شرط برقرارباشد، یعنی بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دوعدد

a و b، با بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دوعدد m و n یکی باشد، آن‌وقت هردو کارت را، می‌توان باعمل‌های I و III وبا توجه به آلگوریتم اقلیدس، به کارت $(d،d)$ تبدیل کرد [d، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك a و b یا m و n است].

در واقع، هر گام آلگوریتم اقلیدس، عبارت است ازتقسیم با باقی‌ماندهٔ عدد a برعدد b: $a=bq+r$ $(\circ\leqslant r<b)$. ایـن گام را می‌توان این‌طور نشان داد:

$$(a،b)\xrightarrow{\overline{\text{I}}q}(r،b)$$

سپس، بعد از عمل $(r،b)\xrightarrow{\text{III}}(b،r)$ می‌توان به همین‌ترتیب، گام بعدی را برداشت و غیره، تا وقتی‌که به کارت $(d،d)$ برسیم.

به‌این‌ترتیب، اگر زنجیرهٔ عمل‌های $(a،b)\to\ldots\to(d،d)$ را، با تبدیل‌عمل I به‌عمل II، درجهت عکس انجام دهیم، ازکارت $(d،d)$ به کارت $(a،b)$ می‌رسیم.

بنابرایـن، ابتدا از $(m،n)$ «بـه‌پایین» بـه‌طرف $(d،d)$ و، سپس، از $(d،d)$ «به‌بالا» به‌طرف $(a،b)$ می‌رویم و، به‌این‌ترتیب، ازکارت $(m،n)$، کارت $(a،b)$ را به‌دست می‌آوریم.

مسألهٔ ۶۰۲. پاسخ: می‌توان.

مثلاً نهمین علامت‌آبـی و سیزدهمین علامت قـرمز، فاصله‌ای برابر یك سانتی‌متردارند، زیرا

$$۱۳\times۲۵-۹\times۳۶=۱$$

∇ دراین مسأله، در واقع بـاید، جوابی از یکی ازدومعادلهٔ زیر را، درمجموعهٔ عددهای درست، پیداکرد:

$$۲۵x-۳۶y=۱،\ ۲۵x-۳۶y=-۱$$

ویا ثابت‌کرد، چنین جوابی وجود ندارد.

اگر a و b نسبت به‌هم اول باشند، همیشه می‌توان جواب معادلهٔ $ax+by=1$ «۱» درمجموعهٔ عددهای درست، پیداکرد. روشی را که برای پیداکردن این جواب وجود دارد، روی مسألهٔ خود نشان می‌دهیم. همهٔ گام‌های لازم را، برای تعیین بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دو عدد ۳۶ و ۲۵ برمی‌داریم:

$$۳۶=۲۵\times ۱+۱۱;\ \ ۲۵=۱۱\times ۲+۳;\ \ ۱۱=۳\times ۳+۲;$$
$$۳=۲\times ۱+۱$$

این ردیف برابری‌ها را این طورمی‌نویسیم:

$$۱۱=۳۶-۲۵\times ۱;\ \ ۳=۲۵-۱۱\times ۲;\ \ ۲=۱۱-۳\times ۳;$$
$$۱=۳-۲\times ۱$$

دراین صورت، داریم:

$$۱=۳-(۱۱-۳\times ۳)=۳\times ۴-۱۱=$$
$$=(۲۵-۱۱\times ۲)\times ۴-۱۱=۲۵\times ۴-۱۱\times ۹=۲۵\times ۴-$$
$$-(۳۶-۲۵)\times ۹=۲۵\times ۱۳-۳۶\times ۹$$

بنابراین، به‌برابری $۲۵\times ۱۳-۳۶\times ۹=۱$ می‌رسیم که معرف جواب (۱۳،۹) برای معادلهٔ $۲۵x-۳۶y=۱$ می‌باشد.

مسألهٔ ۰۷۰۲ پاسخ: می‌توان.

دایره‌ای به‌مرکزرأس زاویهٔ مفروض‌رسم‌می‌کنیم. ضلع‌های این‌زاویه، کمانی برابر ۱۹ درجه ازمحیط دایره جدا می‌کنند.

اگربه‌کمك پرگار، اندازهٔ این‌کمان را ۱۸ بارمتوالی روی محیط‌دایره منتقل‌کنیم، چون $۱۹\times ۱۹=۳۶۱$، بنابراین انتهای‌آخرین‌کمان به‌فاصلهٔ یك درجه ازابتدای نخستین‌کمان قرارمی‌گیرد. اکنون، اگر این‌کمان یك درجه را، ۱۷ باربه‌کمك پرگارپشت سرهم روی کمان اولیه منتقل‌کنیم، کمان ۱۹ درجه به ۱۹ بخش برابرتقسیم خواهد شد. با وصل این نقطه‌های

تقسیم به رأس زاویه، تقسیم زاویهٔ ۱۹ درجه به ۱۹ بخش برابر به دست می‌آید.

∇ m و n را دوعدد طبیعی می‌گیریم که نسبت به‌هم اول باشند و، درضمن، $m<n$. اکنون، اگر روی محیط دایره، به‌دنبال هم، کمان‌هایی برابر $\frac{m}{n}$ محیط دایره را جدا کنیم، می‌توان بعد از n گام، همهٔ رأس‌های n ضلعی منتظم محاط در دایره را به‌دست‌آورد (که درضمن، همهٔ گام‌ها، در m دورکامل برداشته می‌شود). دریکی از گام‌ها، ومثلاً گام xام، به رأسی می‌رسیم که درهمسایگی آغازحرکت است؛ درضمن وقتی که مثلاً y دور کامل حرکت کنیم، به‌بخش $\frac{1}{n}$ محیط دایره می‌رسیم، به‌نحوی که

$$x.\frac{m}{n}=y+\frac{1}{n}$$

ازاین جا، روش هندسی حل معادلهٔ

$$xm-yn=1$$

درمجموعهٔ عددهای درست به‌دست می‌آید. درمسأله ما داریم:

$$m=19،\ n=360،\ x=19،\ y=1$$

مسألهٔ ۸۰۴. پاسخ: ۴ خط شکسته.

با آغازازیکی ازنقطه‌های تقسیم، آن‌ها را درجهت حرکت‌عقربه‌های ساعت، شماره گذاری می‌کنیم: ۱، ۲، ۳، ...، ۲۰.

خط‌های شکسته با تعداد ضلع‌های برابر به‌این طریق به‌دست می‌آیند که، پشت‌سرهم، هرنقطه را به‌نقطهٔ kام بعدازآن وصل کنیم وآن قدر ادامه دهیم تا به‌نقطهٔ اولیهٔ ۱ برسیم.

به‌ازای $k=1$، بیست ضلعی منتظم محاط دردایره به‌دست می‌آیدکه، رأس‌های آن را، نقطه‌های ۱، ۲، ۳، ...، ۲۰ تشکیل می‌دهند.

به ازای $k=2$، یك ده ضلعی منتظم با رأس‌های ۱، ۳، ۵، ...، ۱۹

به‌دست می‌آید.

به‌ازای $k=3$، خط شکستهٔ بسته‌ای با ۲۰ رأس به‌دست می‌آید که خودش راقطع می‌کند و رأس‌های آن را، نقطه‌های ۱، ۴، ۷، ۱۰، ۱۳، ۱۶، ۱۹، ۲، ۵، ۸، ۱۱، ۱۴، ۱۷، ۲۰، ۳، ۶، ۹، ۱۲، ۱۵و ۱۸ تشکیل می‌دهند.

به‌ازای $k=4$، یك پنج ضلعی منتظم به‌دست می‌آید.

به‌ازای $k=5$، یك مربع خواهیم داشت.

به ازای $k=6$، خط شکستهٔ بسته‌ای با ۱۰ رأس به‌دست می‌آید که خودش را قطع می‌کند و رأس‌آن درنقطه‌های ۱، ۷، ۱۳، ۱۹، ۵، ۱۱، ۱۷، ۳، ۹ و ۱۵ قراردارند.

به‌ازای $k=7$، خط شکسته‌ای با ۲۰ ضلع به‌دست می‌آید.

به‌ازای $k=8$، خط شکسته‌ای با پنج ضلع (ستارهٔ پنج‌پر).

به‌ازای $k=9$، دوباره یك خط شکستهٔ ۲۰ ضلعی.

به‌ازای $k=10$، دوپاره‌خط راست منطبق برهم به‌دست می‌آید.

به‌ازای $k=11$، همان خط شکسته‌ای به دست می‌آیدکه به‌ازای $k=9$ به‌دست‌آمده بود، زیرا وصل ۱۰ نقطه درمیان درجهت حرکت عقربه‌های‌ساعت باوصل ۸ درمیان درخلاف‌جهت حرکت عقربه‌های ساعت، یکی است.

به‌همین ترتیب، به ازای $k=12, 13, \ldots, 19$، به‌همان خطهای شکسته‌ای می‌رسیم که به‌ازای $k=8, 7, \ldots, 1$ به‌دست‌آورده بودیم.

به‌این ترتیب، تعداد خطهای شکستهٔ ۲۰ ضلعی مختلف، برابر چهار است، وبه‌ازای $k=1, 3, 7, 9$ به‌دست می‌آیند.

▽ اگر n نقطه را روی محیط دایره در نظر بگیریم، آن وقت، تعداد خطهای شکستهٔ بسته‌ای‌که دارای n ضلع برابرباشند و رأس‌های آن‌ها در این n نقطه قرار گرفته باشد، برابر است با تعداد عددهای طبیعی‌کوچکتر از $\frac{n}{2}$ که نسبت به n اول باشند.

تعداد عددهای طبیعی کوچکتراز n را، که نسبت به n اول باشند، معمولاً با $\varphi(n)$ نشان می‌دهند. تابع $\varphi(n)$ را، تابع اویلر گویند. اگر p_1، p_2، ...، p_l را همهٔ عددهای اولی فرض کنیم که از تجزیهٔ عدد n به‌دست می‌آیند، آن وقت

$$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_l}\right)$$

پاسخ مسألهٔ ۸.۲، درحالت تعمیم یافتهٔ آن چنین است: تعداد خطهای شکستهٔ بسته و منتظم مختلف، برابر است با $\frac{1}{2}\varphi(n)$. در حالت خاص $n=20$ داریم:

$$\varphi(20)=20\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=8 \quad , \quad \frac{1}{2}\varphi(20)=4$$

مسألهٔ ۹.۲. الف) پاسخ: می‌توان.

تفاضل دوعدد، وقتی و تنها وقتی بر ۷ بخش‌پذیراست که هردوعدد، درتقسیم بر ۷، به‌باقی مانده‌های برابر برسند. درتقسیم بر ۷، هفت حالت ممکن برای عدد باقی مانده وجود دارد: ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶.

فرض می‌کنیم، نتوانیم ۱۵ عدد مورد نظررا ازبین ۱۰۰ عدد انتخاب کنیم. دراین صورت باید حداکثر ۱۴ عدد وجود داشته باشدکه درتقسیم بر ۷ به‌باقی ماندهٔ صفربرسند، حداکثر ۱۴ عدد وجود داشته باشدکه درتقسیم بر ۷ به‌باقی ماندهٔ واحد برسد، و به‌همین ترتیب، برای باقی مانده‌های ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶. ولی آن وقت، حداکثر 7×14، یعنی ۹۸ عدد خواهیم داشت؛ به‌این ترتیب، فرض ما درست نیست.

∇ مسألهٔ ۹.۲، الف) را می‌توان مثال خوبی از کاربرد اصل دیریکله دانست: اگر در n لانه، $nk+1$ کبوتر جا گرفته باشند، دست‌کم در یکی از لانه‌ها، $k+1$ کبوتر وجود دارد.

در واقع، اگر در هر لانه بیش از k کبوتر نباشد، آن وقت، تعداد

کبوترها از nk بیشتر نمی‌شود. اصل دیریکله را، اصل لانه‌کبوتری هم می‌گویند.

ب) پاسخ: همیشه نمی‌توان.

مثال مشخص، عددهای طبیعی از ۱ تا ۱۰۰ می‌باشد. بین این عددها، ۱۴ عدد ۷، ۱۴، ...، ۹۸ درتقسیم بر ۷ به‌باقی ماندهٔ صفرمی‌رسند، ۱۵ عدد باقی مانده‌ای برابر ۱ و ۲ می‌دهند، ۱۴ عدد باقی مانده‌ای برابر ۳، ۴، ۵، و ۶ می‌دهند. به این ترتیب، در بین این ۱۰۰ عدد نمی‌توان ۱۶ عدد پیدا کرد که درتقسیم بر ۷، به‌باقی مانده‌های برابر برسند.

مسألهٔ ۱۰۵۴. هرعدد درستی یا بر ۳ بخش‌پذیراست ویا درتقسیم بر ۳ به‌یکی از باقی مانده‌های ۱ یا ۲ می‌رسد.

اگرعدد n بر ۳ بخش‌پذیر باشد، می‌توان آن را به صورت $n=3k$ نوشت، بنابراین مجذور آن، به صورت $9k^2$ درمی‌آید که بر ۳ بخش پذیر است.

اگرعدد n، درتقسیم بر ۳، به‌باقی ماندهٔ ۱ برسد، می‌توان آن‌را به‌صورت $n=3k+1$ نوشت و، در نتیجه، مجذور آن به‌صورت

$$n^2=3(3k^2+2k)+1$$

درمی‌آید. دیده می‌شود که، دراین حالت، مجذور عدد هم، درتقسیم بر۳، به‌باقی ماندهٔ ۱ می‌رسد.

اگردرتقسیم عدد n بر۳، باقی مانده‌ای برابر۲ داشته باشیم، به‌دست می‌آید:

$$n^2=3(3k^2+4k+1)+1$$

یعنی، در این حالت هم، در تقسیم مجذور عدد n بر۳، به باقی ماندهٔ ۱ می‌رسیم.

به‌این ترتیب، درحالتی‌که تنها یکی از دوعدد بر ۳ بخش‌پذیر نباشد، آن وقت‌مجموع مجذورهای دوعدد، درتقسیم بر۳، به‌باقی‌ماندهٔ ۱ می‌رسد؛ و اگرهیچ کدام ازدوعدد بر۳ بخش‌پذیر نباشد، مجموع مجذورهای آن‌ها، در تقسیم بر۳، به‌باقی ماندهٔ ۲ می‌رسد. بنابراین، مجموع مجذورهای دوعدد،

تنها وقتی بر ۳ بخش‌پذیر است که، هر کدام از آن‌ها، بر ۳ بخش‌پذیر باشند.

∇ عبور از عـددهای درست، به باقی مانده‌های آن‌ها در تقسیم بر عدد درست مشخصی مثل m، روش اصلی حل مسأله‌های مربوط به بخش‌پذیری را تشکیل می‌دهد. درضمن، همیشه از قانون سادهٔ زیر استفاده می‌شود: برای پیداکردن باقی ماندهٔ تقسیم مجموع یا حاصل‌ضرب دو (یا چند) عدد درست بر m، کافی است همین عمل‌ها را روی بـاقی مانده‌هـا انجام دهیم، تا باقی ماندهٔ مجموع یا حاصل‌ضرب بر m به‌دست آید.

مثلاً، ثابت می‌کنیم که، حکم مسألهٔ ۱۰.۲، درحالتی هم که به‌جای عدد ۳، عدد ۷ را در نظر بـگیریم، درست است. اگر عـددهای از ۰ تا ۶ را مجذور کنیم، قانع می‌شویم که در تقسیم مجذور یـك عدد درست بر ۷، تنها باقی مانده‌های ۰، ۱، ۲ و ۴ به‌دست می‌آیـد. چون مجموع هیچ دو عددی از این چهار عدد، به‌جز ۰ و ۰، بر ۷ بخش‌پذیر نیست، بنابراین، مجموع مجذورهای دو عدد درست، تنها وقتی بر ۷ بخش‌پذیر است که خـود آن دو عدد بر ۷ بخش‌پذیر باشند.

برای علاقه‌مندان. این مسأله که، برای عدد اول ومفروض p، مجموع مجذورهای دو عدد درست x^2+y^2 بر p بخش‌پذیر است، به‌شرطی که هیچ کدام از دو عدد x و y بر p بخش‌پذیر نباشند، با مسألهٔ زیر هم‌ارز است:

آیا عددی پیدا می‌شود که درهم نهشتی مجذور آن به مدول p، برابر (-1) باشد، یعنی آیـا عدد z وجـود دارد، به نحوی کـه z^2+1 بر p بخش‌پذیر باشد؟

پاسخ این مسأله (که متعلق به اویلر است)، چنین است: برای عددهایی از p، که به‌صورت $4k+1$ باشند (۵، ۱۳، ۱۷، ۲۹، ...) ممکن است و برای $p=4k+3$ (۳، ۷، ۱۱، ۱۹، ۲۳، ...) ممکن نیست.

مسألهٔ ۱۱.۲. ثابت می‌کنیم، هرعددی که به صورت $9n+4$ $(n\in\mathbb{N})$ باشد، نمی‌تواند به‌صورت مجموع مکعب‌های سه عدد غیرمنفی نوشته شود. چون، تعداد این گونه عددها بی‌نهایت است، از این‌جا می‌توان درستی حکم مسأله را نتیجه گرفت.

اگر l عدد درستی باشد، هر عدد درست را می‌توان به‌صورت $3l$، یا $3l+1$ و یا $3l-1$ نوشت. بنابراین، مکعب هرعدد درست، یا به صورت $27l^3$ درمی‌آید و یا به‌صورت

$$27l^3 \pm 27l^2 + 9l \pm 1 = 9(3l^3 \pm 3l^2 + l) \pm 1$$

یعنی، مکعب هرعدد درست یا به‌صورت $9m$ است و یا به‌صورت $9m \pm 1$.

اگرهمهٔ ترکیب‌های ممکن را درنظربگیریم، به‌این نتیجه می‌رسیم که، مجموع مکعب‌های سه‌عدد درست، به‌یکی از صورت‌های زیردرمی‌آید:

$$9n,\ 9n \pm 1,\ 9n \pm 2,\ 9n \pm 3$$

که هیچ‌کدام برابربا عددی به‌صورت $9n+4$ (ودرضمن $9n-4$) نیستند.

▽ درسال ۱۹۰۹، این فرضیهٔ وارینگ (۱۷۷۰) ثابت شد:

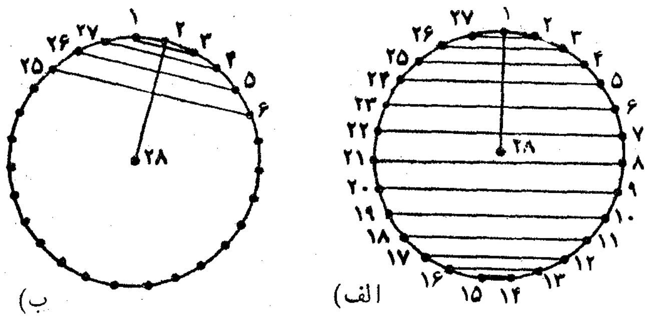
هرعدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع مکعب‌های تا حداکثر ۹ عدد طبیعی نوشت؛ برای هرعددطبیعی k، می‌توان هرعددطبیعی را به‌صورت مجموع توان‌های kام ω عدد طبیعی یا کمتر نوشت‌که، درآن، ω تنها به k بستگی دارد. فرضیهٔ اول را آ.وی فه‌ریخ وفرضیهٔ دوم را د.هیلبرت ثابت‌کرد (بعدها، یو.و.لی‌نیک، ریاضی‌دان شوروی، اثباتی مقدماتی از فرضیهٔ دوم داد). کمترین مقدار $\omega = \omega(k)$ برای $k=4$ مشخص شده است.

جالب است که، هرعدد طبیعی n را، می‌توان بـه سادگی به‌صورت مجموع پنج مکعب عدد درست درآورد. در واقـع، $n-n^3$، به‌ازای همهٔ مقدارهای طبیعی n، بر ۶ بخش‌پذیراست، بنابراین $n=n^3+6t$ (t، عددی است درست). ازآن جا

$$n = n^3 + (t+1)^3 + (t-1)^3 + (-t)^3 + (-t)^3$$

مسألهٔ ۱۲.۲. چون هردانش‌آموز نمی‌تواند با بیشتراز ۲۷ دانش‌آموز دیگرباشد، بنابراین، این جابه‌جایی را، بیش از۲۷ ماه نمی‌توان انجام داد. نشان می‌دهیم که، معلم، چگونه می‌تواند، جای دانش‌آموزان را، در طول ۲۷ ماه مشخص کند.

دانش‌آموزان را با عددهای از ۱ تا ۲۸ شماره گذاری می‌کنیم. عددهای از ۱ تا ۲۷ را، به‌ردیف، روی محیط یك دایره و در رأس‌های ۲۷ ضلعی منتظم، وعدد ۲۸ را درمرکزدایره قرارمی‌دهیم. عدد ۱ را به‌عدد ۲۸ وصل می‌کنیم. بقیهٔ عددها را، دوبه‌دو، به‌وسیلهٔ پاره خط‌های راستی عمود براین پاره خط راست، به‌هم می‌پیوندیم (شکل ۸ـالف). دانش‌آموزان را، به‌این ترتیب، جا می‌دهیم: اگر دو عدد به وسیلهٔ یك پاره‌خط راست به هم وصل شده‌اند، دانش‌آموزان متناظر آن‌ها را روی یك نیمکت می‌نشانیم.



شکل ۸

درماه بعد، عدد ۲ را به ۲۸ وصل می‌کنیم و، مثل قبل، عددهای دیگر را، با پاره‌خط‌های راست عمود بر آن، به‌هم وصل می‌کنیم؛ معلم، عمل جادادن‌دانش‌آموزان‌را روی این‌طرح انجام خواهد داد (شکل ۸ـب). سپس به ترتیب، در ماه‌های بعد، پاره خط‌های راست ۳ـ۲۸، ۴ـ۲۸، ...،۲۷ـ۲۸ را رسم می‌کنیم و پاره خط‌های راست دیگر عمود برآن‌ها را درنظرمی‌گیریم.

▽ درشکل «۸ـالف» مجموع شماره‌های هردونقطه‌ای که به‌وسیلهٔ یك پاره خط راست به‌هم وصل شده‌اند، برابر ۲۹ است که، در تقسیم بر ۲۷،

به‌باقی ماندهٔ ۲ می‌رسد، ونقطهٔ۱ به‌نقطهٔ ۲۸ درمرکز وصل شده است؛ عدد اخیردرموقعیت خاصی قرار دارد: بین عددهای از ۱ تا ۲۷، نمی‌توان جفت دیگری برای ۱ پیداکرد که مجموع آن‌ها، در تقسیم بر ۲۷، باقی مانده‌ای برابر۲ داشته باشد، مگرخود عدد ۱.

درشکل«۸ـب»، موقعیت مشابهی وجوددارد: مجموع‌هردوعددی که در دوانتهای یك پاره خط راست قراردارند، درتقسیم بر۲۷ به‌باقی ماندهٔ ۴ می‌رسد، ولی برای عدد ۲، نمی‌توان جفت مناسبی بین عددهای از ۱ تا۲۷ پیداکرد، مگرخود عدد ۲؛ این عدد ۲ را به‌مرکز ۲۸ وصل می‌کنیم.

از این مشاهده می‌توان تغییر عددی زیر را برای مسألهٔ ۱۲.۲ شرح داد.

عددی مثل r را، بین عددهای از ۱ تـا ۲۷، تثبیت می‌کنیم. سپس، عددهای از۱ تا۲۷ را طوری دوبه‌دو با هم جفت می‌کنیم که، برای هرجفت، مجموع دو عدد درتقسیم بر۲۷ بـه‌باقی ماندهٔ r برسد. درایـن میان، عددی مثل x بدون جفت می‌ماند که اگر آن را با خودش جمع کنیم، در تقسیم بر۲۷، باقی مانده‌ای بـرابـر r می‌دهد. اگر r عددی زوج باشد، آن وقت $x=\frac{r}{۲}$ و اگر r عددی فرد بـاشد، آن وقت $x=\frac{r+۲۷}{۲}$. این عدد x را با عدد ۲۸ جفت می‌کنیم.

اگر، به‌طورکلی، تعداددانش‌آموزان برابرعدد زوج n باشد، می‌توان با همین روش، آن‌ها را در $n-۱$ محل مختلف جا داد. دراین‌جا باید هردو عددی ازبین عددهای ۱ تا $n-۱$ را با هم جفت کردکه، مجموع آن‌ها، در تقسیم بر $n-۱$ به‌باقی ماندهٔ r برسد. درحالتی که r زوج باشد، عدد $\frac{r}{۲}$ و در حالتی که r فرد باشد، عدد $\frac{r+n-۱}{۲}$ بدون جفت می‌ماندکه بایدآن‌را با عدد n جفت کرد.

مسألهٔ ۱۳.۲. پاسخ: مثلاً ۴۸، ۴۹، ۵۰ ویا ۵۴۸، ۵۴۹، ۵۵۰.

∇ به‌طور کلی می‌توان ثابت کرد که، برای هرعدد طبیعی k، k عدد طبیعی متوالی وجود دارد، به‌نحوی که هر کدام از آن‌ها برمجذورعدد درستی بزرگتراز واحد بخش‌پذیر باشد.

برای این منظور، می‌توان ازقضیه‌ای استفاده کرد که به‌قضیهٔ چینی مربوط به باقی‌مانده‌ها معروف است: برای عددهای طبیعی دلخواه $a_۱$، $a_۲$،...، a_n که دوبه‌دو نسبت به هم اول‌اند، و عددهای درست و غیر منفی $r_۱$، $r_۲$،...، r_n (با شرط $r_۱<a_۱$، $r_۲<a_۲$،...، $r_n<a_n$)، عدد طبیعی m وجود دارد، به‌نحوی که درتقسیم بر $a_۱$، $a_۲$،...، a_n، به‌ترتیب، به‌باقی‌مانده‌های $r_۱$، $r_۲$،...، r_n برسد.

$p_۱^۲$، $p_۲^۲$،...، $p_n^۲$ را، مجذورهای n عدد اول مختلف می‌گیریم. در این صورت، بنابرقضیهٔ بالا، می‌توان عدد درست m را طوری پیداکرد که در تقسیم به عددهای $p_۱^۲$، $p_۲^۲$،...، $p_n^۲$، به‌ترتیب، به باقی‌مانده‌های $p_۱^۲-۱$، $p_۲^۲-۲$،...، $p_n^۲-n$ برسد. به‌این ترتیب، n عدد متوالی $m+۱$، $m+۲$،...، $m+n$، به‌ترتیب بر $p_۱^۲$، $p_۲^۲$،...، $p_n^۲$ بخش‌پذیرمی‌شوند.

مثال (۵۴۸،۵۴۹،۵۵۰) را، که درپاسخ آوردیم، به‌این صورت پیداکرده‌ایم: $p_۱=۲$، $p_۲=۳$، $p_۳=۵$ می‌گیریم و عدد m را طوری پیدا می‌کنیم که درتقسیم برعددهای ۴، ۹، ۲۵، به‌ترتیب، به‌باقی‌مانده‌های ۳، ۷، ۲۲ برسد. مثلاً می‌توان $m=۵۴۷$ را درنظر گرفت.

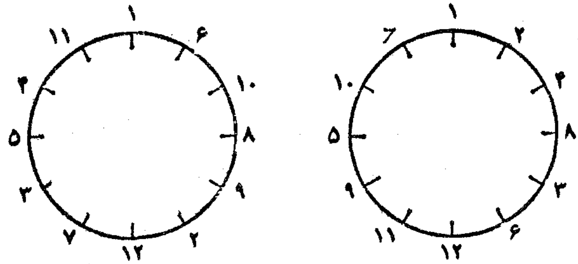
این عدد m را می‌توان به این ترتیب به‌دست آورد: باید آن را به‌صورت زیرجست وجو کنیم:

$$m=a\times ۹\times ۲۵+۴\times b\times ۲۵+۴\times ۹\times c$$

برای این که عدد $a\times ۹\times ۲۵$ درتقسیم بر ۴ به‌باقی ماندهٔ ۳، عدد $۴\times b\times ۲۵$ درتقسیم بر۹ به‌باقی ماندهٔ ۷ و عدد $۴\times ۹\times c$ درتقسیم بر ۲۵ به‌باقی ماندهٔ ۲۲ برسند، فرض می‌کنیم: $a=-۱$، $b=۷$ و $c=۲$، به‌دست می‌آید: $m=۵۴۷$.

مسألهٔ ۱۴۰۲. پاسخ: می‌توان.

روی شکل ۹، دو جواب مسأله داده شده است که می‌توانید به‌سادگی مورد تحقیق قراردهید.



ب)　　　　الف)

شکل ۹

▽ عددهایی درشکل «۹ـ الف» روی محیط دایره آمده‌اند، اگردرجهت حرکت عقربه‌های ساعت به حساب آوریم، عبارتند از باقی‌مانده‌های تقسیم عددهای ۱، ۲، 2^2، 2^3، ...، 2^{11} برعدد ۱۳؛ و اگردرجهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت به‌حساب آوریم، عبارتند ازباقی‌مانده‌های تقسیم عددهای ۱، ۷، 7^2، 7^3، ...، 7^{11} بر۱۳. طبیعی است‌که، برای هرسه عدد مجاور a، b و c (وهمچنین، برای باقی‌مانده‌های آن‌ها درتقسیم بر۱۳)، عدد $b^2 - ac$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است؛ و اگر سه عدد a، b و c به تصاعد هندسی باشند، آن‌وقت $b^2 = ac$.

به‌همین ترتیب، درشکل «۹ـ ب»، باقی‌مانده‌های تقسیم عددهای ۱، ۶، 6^2، ...، 6^{11} بر ۱۳ (درجهت حرکت عقربه‌های ساعت) و باقی ماندهٔ تقسیم عددهای ۱، ۱۱، 11^2، ...، 11^{11} بر۱۳ (درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت) نوشته شده است.

درشکل ۹، عددهای ۲، ۶، ۱۱، ۷، در کنارعدد ۱ آمده‌اند؛ این‌ها، باقی مانده‌های عددهای ۲، 2^5، 2^7، 2^{11} بر۱۳ هستند.

درحالت‌کلی، برای هر عدد اول p، عددی مثل r (به‌نام ریشهٔ اولیه)

وجود دارد، به‌نحوی‌که در تقسیم عددهای $r^{p-1}, \dots, r^2, r, 1$ بر عدد p، به‌باقی‌مانده‌های $1, 2, \dots, p-1$ برسیم. تعداد این‌گونه عددهای r، برابر است با $\varphi(p-1)$، یعنی تعداد عددهایی از ۱ تا $p-2$، که نسبت به‌عدد $p-1$، اول‌اند (حل مسألهٔ ۸.۲ را ببینید).

درمسألهٔ ۱۴.۲، داریم: $p=13$ و $\varphi(p-1)=\varphi(12)=4$، زیرا چهارعدد ۱، ۵، ۷ و ۱۱ وجود دارندکه از۱۲ کوچکتر ونسبت به‌آن اول‌اند. ریشه‌های اولیه برای تقسیم بر۱۳ (یعنی مقدارهایی که به‌جای r می‌توان درنظر گرفت)، عبارتند از ۲، 2^5، 2^7 و 2^{11}.

مسألهٔ ۱۵.۲. پاسخ: درست نیست.

مثلاً، به‌ازای $n=6$ به‌دست می‌آید: $6^3+5\times 6-1$ که‌بر 5×7^2 بخش‌پذیر است.

∇ اصولاً هیچ چند جمله‌ای $F(n)$ با ضریب‌های درست وجود ندارد (به‌جزمقدارثابت) که به‌ازای همهٔ مقدارهای طبیعی n، عددی اول باشد.

در واقع، اگر a، مقدار ثابت چند جمله‌ای $F(n)$ غیراز ۰ و ± 1 باشد، آن وقت، مقدارهای $F(ka)$ بر a بخش‌پذیر خواهند بود ودربین آن‌ها، عددهای مرکب‌وجودخواهد داشت. درحالتی‌هم که $a=\pm 1$ باشد، می‌توان چند جمله‌ای $F(n)$ را به‌چند جمله‌ای $F(n+h)=G(n)$ طوری تبدیل کرد که جملهٔ ثابت‌آن برابر ± 1 نباشد.

درمسألهٔ ۱۵.۲، می‌توان مثلاً به‌این ترتیب عمل کرد. $n=m+1$ می‌گیریم؛ درچند جمله‌ای

$$F(m+1)=(m+1)^3+5(m+1)-1$$

جملهٔ ثابت برابر۵ است و، بنابراین، $F(6)$ بر ۵ بخش‌پذیرمی‌شود.

چندی‌پیش (درسال ۱۹۷۰)، ریاضی‌دان شوروی، یو. و. ماتیاسه‌ویچ، ثابت کردکه یك چند جمله‌ای با ۲۱ متغیروجود داردکه دارای ویژگی زیر است: مجموعهٔ مقدارهای مثبت آن، به‌ازای مقدارهای درست متغیرها، بر مجموعهٔ عددهای اول منطبق است.

مسألهٔ ۱۶.۲. این عدد را تجزیه می‌کنیم:

$$n^{۵}-۵n^{۳}+۴n=n(n^{۴}-۵n^{۲}+۴)=n(n^{۲}-۱)(n^{۲}-۴)=$$
$$=(n-۲)(n-۱)n(n+۱)(n+۲)$$

به‌این‌ترتیب، به‌حاصل‌ضرب پنج عدد درست متوالی می‌رسیم. یکی از این عددها بر ۵ بخش‌پذیر است؛ یکی از سه عدد متوالی بر ۳ و از بین چهار عدد متوالی، یکی بر ۴ و یکی بر ۲ بخش‌پذیر است، یعنی عدد مفروض بر ۱۲۰ بخش‌پذیر می‌شود.

▽ در واقع، عدد

$$\frac{(n+۲)(n+۱)n(n-۱)(n-۲)}{۱\times ۲\times ۳\times ۴\times ۵}$$

چیزی جز $C^{۵}_{n+۲}$ نیست (تعداد ترکیب‌های ۵ تایی از $n+۲$ شیء)؛ و این عدد، بی‌تردید، عددی درست است.

به‌طور کلی، چندجمله‌ای $F(x)$، تنها وقتی به‌ازای‌همهٔ مقدارهای x، برابر با عددی درست است که بتوان آن را به‌صورت مجموع

$$F(x)=\sum a_k C^k_x$$

نوشت که، درآن، a_k ضریب‌هایی درست و

$$C^k_x=\frac{x(x-۱)\ldots(x-k+۱)}{k!}$$

مسألهٔ ۱۷.۲. الف) پاسخ: بله.

این چند جمله‌ای را می‌توان، به‌صورت زیرنوشت:

$$p(x)=ax(x-۱)+bx+c$$

اگر دراین چند جمله‌ای $x=۰$، $x=۱$ و $x=۲$ قراردهیم، برای پیدا کردن ضریب‌های a و b و c، به‌دستگاه معادله‌های خطی «مثلثی» زیرمی‌رسیم:

$$\begin{cases} c=۱۹ \\ b+c=۸۵ \\ ۲a+۲b+c=۱۹۸۵ \end{cases}$$

که از آن به دست می‌آید: $c=۱۹$، $b=۶۶$، $a=۹۱۷$ و پاسخ چنین می‌شود:

$$p(x)=۹۱۷x^{۲}-۸۵۱x+۱۹$$

∇ درحالت کلی هم، وقتی که مقدارهای یك چند جمله‌ای را در $n+۱$ نقطهٔ $c_{۱}$، $c_{۲}$، ...، $c_{n+۱}$ داشته‌باشیم، می‌توانیم به‌همین‌ترتیب، چندجمله‌ای $p(x)$ را، با درجه‌ای که از n تجاوز نمی‌کند، به‌دست‌آوریم. $p(x)$ را به این صورت می‌نویسیم:

$$p(x)=b_{\circ}+b_{۱}(x-c_{۱})+b_{۲}(x-c_{۱})(x-c_{۲})+\dots$$
$$\dots+b_{n}(x-c_{۱})(x-c_{۲})\dots(x-c_{n})$$

ومقدارهای $c_{۱}$، $c_{۲}$، ...، $c_{n+۱}$ را، به‌جای x، درآن قرار می‌دهیم، دستگاه «مثلثی» خطی ساده‌ای برای تعیین $n+۱$ ضریب مجهول $b_{\circ}$، $b_{۱}$، ...، b_{n} به‌دست می‌آید.

این روش پیدا کردن چند جمله‌ای را، وقتی مقدارهایی از آن معلوم باشد، روش درون‌یابی نیوتون گویند.

ب) پاسخ: نه، وجود ندارد.

برای اثبات، ازاین قضیه استفاده می‌کنیم: اگرچند جمله‌ای

$$p(x)=a_{\circ}x^{n}+a_{۱}x^{n-۱}+a_{۲}x^{n-۲}+\dots+a_{n-۱}x+a_{n}$$

با ضریب‌های درست، مفروض باشد، برای هردوعدد درست c و d، عدد درست $p(c)-p(d)$ برعدد $c-d$ بخش‌پذیر است.

با تکیه‌براین‌قضیه، عدد $p(۱۹)-p(۱)=۶۶$ باید برعدد $۱۹-۱$، یعنی ۱۸ بخش‌پذیرباشد؛ عدد ۶۶ بر ۱۸ بخش‌پذیرنیست و، ازاین جا، پاسخ مسأله به‌دست می‌آید.

قضیه‌ای راکه دراین جا آوردیم، ثابت می‌کنیم. داریم:

$$p(c)-p(d)=(a_{\circ}c^{n}+a_{۱}c^{n-۱}+\dots+a_{n-۱}c+a_{n})-$$
$$-(a_{\circ}d^{n}+a_{۱}d^{n-۱}+\dots+a_{n-۱}d+a_{n})=$$

$$=a_0(c^n-d^n)+a_1(c^{n-1}-d^{n-1})+\dots+a_{n-1}(c-d)$$

از طرف دیگر، برای هر عدد طبیعی k داریم:

$$c^k-d^k=(c-d)(c^{k-1}+c^{k-2}d+\dots+cd^{k-2}+d^{k-1})$$

(که می‌توان آن را از رابطهٔ مجموع در تصاعد هندسی با جملهٔ اول c^{k-1} و قدر نسبت $\frac{d}{c}$ به‌دست آورد.) به‌این ترتیب، همهٔ جمله‌هایی که برای $p(c)-p(d)$ به‌دست آورده‌ایم، بر $c-d$ بخش‌پذیرند، یعنی مجموع آن‌ها هم بر $c-d$ بخش‌پذیر است.

∇ به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که، برای هر چندجمله‌ای $p(x)$ و هر عدد d، چند جمله‌ای $p(x)-p(d)$ بر دو جمله‌ای $x-d$ بخش‌پذیر است، یعنی $p(x)-p(d)=(x-d)q(x)$ که، در آن، $q(x)$، یك چند جمله‌ای است. اگر این اتحاد را به‌صورت

$$p(x)=(x-d)q(x)+p(d)$$

بنویسیم، به‌قضیهٔ بِزو می‌رسیم: باقی‌ماندهٔ تقسیم چند جمله‌ای $p(x)$ بر دو جمله‌ای $x-d$، برابر است با $p(d)$.

مسألهٔ ۱۸۰۲. الف) پاسخ:

$$(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$$

در واقع داریم:

$$x^8+x^4+1=x^8+2x^4+1-x^4=(x^4+1)^2-(x^2)^2=$$

$$=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)=[(x^2+1)^2-x^2](x^4-x^2+1)=$$

$$=(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$$

ب) پاسخ:

$$(x^3-x^2+1)(x^2+x+1)$$

در واقع داریم:

$$x^5+x+1=(x^5+x^4+x^3)-(x^4+x^3+x^2)+(x^2+x+1)=$$
$$=(x^3-x^2+1)(x^2+x+1)$$

∇ چند جمله‌ای‌هایی از درجه‌های مختلف، وجود دارند که نمی‌توان آن‌ها را به صورت ضرب چند جمله‌ای‌هایی با ضریب‌های درست و درجهٔ پایین‌تر تجزیه کرد (مثل x^n-2). این گونه چندجمله‌ای‌ها را غیرقابل‌تحویل گویند.

قاعده‌ای وجود دارد که، به کمك آن، می‌توان هرچند جمله‌ای را به‌صورت ضرب چند جمله‌ای‌های غیرقابل تحویل تبدیل ویا عدم امکان تجزیهٔ آن را ثابت کرد.

مسألهٔ ۱۹.۲ پاسخ: به‌ازای $a=-2$.

فرض می‌کنیم، چند جمله‌ای‌های

$$f(x)=x^4+ax^2+1,\quad g(x)=x^3+ax+1$$

دارای ریشهٔ مشترك x_0 باشند. اگرچند جمله‌ای دوم را در x ضرب و از چند جمله‌ای اول کم کنیم، به‌چند جمله‌ای می‌رسیم که همان ریشهٔ x_0 را دارد؛ و این، یك چند جمله‌ای ساده است:

$$f(x)-xg(x)=1-x$$

تنها ریشهٔ این چند جمله‌ای، عبارت است از $x_0=1$؛ وچند جمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$، به‌ازای $a=-2$ دارای این ریشه‌اند: هم $f(1)$ و هم $g(1)$، به‌صورت $a+2$ درمی‌آیند.

∇ برای این که چند جمله‌ای‌های $f(x)$ و$g(x)$ دارای ریشهٔ مشترك x_0 باشند، باید هردوی‌آن‌ها بردوجمله‌ای $x-x_0$ بخش‌پذیر باشند (قضیهٔ بەزو، مسألهٔ ۱۷.۲ را ببینید). مقسوم علیه مشترك دوچند جمله‌ای را می‌توان به کمك آلگوریتم اقلیدس به‌دست‌آورد.* درمسألهٔ ۱۹.۲، با برداشتن

---

* کتاب روشهای جبر، جلد اول، تألیف پرویزشهریاری‌را ببینید. ـم.

یك گام از این آلگوریتم، به‌باقی‌ماندهٔ $x-1$ می‌رسیم. سپس، اگر $g(x)$ را بر $x-1$ تقسیم کنیم، باقی ماندهٔ $a+2$ به‌دست می‌آید:

$$g(x)=(x-1)(x^2+x+a+1)+(a+2)$$

برای $a=-2$، این باقی مانده برابر صفرمی‌شود و، برای $a\neq-2$، دو چند جمله‌ای مقسوم‌علیه مشترکی نخواهند داشت.

مسألهٔ ۲۰۰۲. الف) $k=a^2+5b^2$ و $l=c^2+5d^2$ می گیریم (دو عدد دلخواه ازمجموعهٔ M). دراین صورت

$$kl=(a^2+5b^2)(c^2+5d^2)=(ac-5bd)^2+5(ad+bc)^2 \quad (*)$$

بنابراین $kl=x^2+5y^2$ که، درآن، $x=ac-5bd$ و $y=ad+bc$؛ یعنی عدد kl به‌مجموعهٔ M تعلق دارد.

ب) پاسخ: وجود دارد. مثلاً $84=4\times21=6\times14$.

ثابت می کنیم، هرپنج عددی که دراین جا نوشته‌ایم، به‌مجموعهٔ M تعلق دارند. در واقع

$$4=2^2+5\times0^2,\ 6=1^2+5\times1^2,\ 14=3^2+5\times1^2,$$
$$21=4^2+5\times1^2,\ 84=2^2+5\times4^2$$

برای این که روشن کنیم، عددهای ۴، ۶، ۱۴، ۲۱، عددهای پایه هستند، همهٔ عددهای مجموعهٔ M را، که ازواحد بزرگترند واز ۲۱ تجاوزنمی‌کنند، می‌نویسیم: ۴، ۵، ۶، ۹، ۱۴، ۱۶، ۲۰، ۲۱. همهٔ این عددها، به‌جز ۱۶ و ۲۰، عددهای پایه‌اند، زیرا هیچ کدام ازآن‌ها، برعددهای قبل ازخود بخش‌پذیر نیستند.

ج) ازبرهان خلف استفاده وفرض می کنیم، تعداد عددهای پایه‌محدود باشد: b_1، b_2،...،b_n. دراین صورت، روشن است که عدد

$$1+5(b_1b_2\ldots b_n)^2$$

به M تعلق دارد و، در ضمن، بر هیچ کدام از عددهـای b_1، b_2، ...، b_n

بخش‌پذیرنیست؛ به‌این‌ترتیب، عددپایهٔ دیگری، غیرازعددهای مفروض ما، به‌دست می‌آیدکه فرض ما را نقض می‌کند.

▽ به‌شباهت بین مجموعهٔ M و مجموعهٔ همهٔ عددهای طبیعی توجه کنیم.

همان‌طور که هرعدد طبیعی را می‌توان به‌صورت ضرب عددهای اول نوشت، هر عدد مجموعهٔ M هم قابـل تبدیل بـه‌ضرب عددهای پایه است. ولی، اگرهرعدد طبیعی، بـه‌صورتی منحصر به‌فرد قابل تجزیه به عددهای اول است (قضیهٔ اصلی حساب)، در مورد عددهای مجموعهٔ M، بنابر حل مسألهٔ ۲۰.۲، ب)، این حکم درست نیست.

برای علاقه‌مندان. اتحاد(*)، ارتباط‌نزدیکی باقاعدهٔ ضرب درعددهای به صورت $x+y\sqrt{-5}$ دارد:

$$(a+b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})=(ac-5bd)+(ad+bc)\sqrt{-5}$$

مسألهٔ مربوط به‌تجزیهٔ عـددهای مجموعهٔ به ضرب عامـل‌ها، هم‌ارز است بامسألهٔ مربـوط بـه‌تجزیه بـه‌عامل‌ها، درحلقهٔ عـددهای بـه‌صورت $x+y\sqrt{-5}$ کـه در آن، x و y، عددهایی درست‌انـد. مسألهٔ مربوط به تجزیهٔ به‌عامل‌ها، درحلقه‌هایی ازاین‌گونه، شهرت زیادی درتاریخ ریاضیات دارد. ازهمین‌گونه مسأله‌ها بود که شاخهٔ تازه‌ای از ریاضیات، به‌نام نظریهٔ جبری عددها به‌وجودآمد.

مسألهٔ ۲۱.۲. پاسخ: به‌عنوان نمونه

$$(7^2, 13^2, 17^2);\ (17^2, 25^2, 31^2);\ (31^2, 41^2, 49^2)$$

سه عدد مجذور کامل p^2، q^2، r^2، تنها وقتی به‌تصاعد حسابی هستند که داشته باشیم: $p^2+r^2=2q^2$، یا

$$(r-q)(r+q)=(q-p)(q+p)$$

مثلاً، برای $p=31$، $q=41$ و $r=49$ داریم:

$$(49-41)(49+41)=(41-31)(41+31)=720$$

∇ دراین جا، دستور کلی عددهای سه‌گانهٔ ازاین گونه (که دوبه‌دو نسبت به‌هم اول باشند)، می‌آوریم:

$$p=n^۲+۲mn-m^۲,\quad q=m^۲+n^۲,\quad r=m^۲+۲mn-n^۲$$

که درآن‌ها، m و n، عددهای دلخواهی، دوبه‌دو نسبت به‌هم اول‌اند. اگر به‌ازای مقداری از m و n، عددهای p و q و r دارای مقسوم‌علیه مشترکی باشند، می‌توانیم آن‌ها را، به‌این عدد ساده‌کنیم. (این حالت وقتی پیش می‌آیدکه عددهای m و n، فرد باشند؛ دراین صورت، عددهای متناظر p و q و r، عددهایی زوج، و درنتیجه، بر۲ بخش‌پذیر می‌شوند. به سادگی می‌توان ثابت کردکه p و q و r، مقسوم علیه مشترك دیگری نمی‌توانند داشته باشند.)

برای این که قانع شوید، چنین عددهایی برای p و q و r مناسب‌اند، می‌توانیدآن‌هارا دررابطهٔ $(p-q)(p+q)=(q-r)(q+r)$ قراردهید.

باروش‌های‌مختلفی می‌توان این دستورها را پیداکردکه ما، دراین‌جا، یکی ازآن‌ها را می‌آوریم.

$p^۲+r^۲=۲q^۲$ می‌گیریم. همهٔ جمله‌های‌این معادله را به‌$q^۲$ تقسیم می‌کنیم، به دست می‌آید: $\left(\frac{p}{q}\right)^۲+\left(\frac{r}{q}\right)^۲=۲$. فرض می‌کنیم $x=\frac{p}{q}$ و $y=\frac{r}{q}$، به‌معادلهٔ $x^۲+y^۲=۲$ می‌رسیم. به‌این‌ترتیب، مسألهٔ پیداکردن p و q و r، منجربه‌حل‌معادلهٔ $x^۲+y^۲=۲$، درمجموعهٔ‌عددهای گویای x و y می‌شود.

اندیشهٔ حل این معادله را، با زبان هندسی روشن می‌کنیم. حل این معادله، به‌معنای پیداکردن همهٔ نقطه‌های بامختصات گویا، روی محیط‌دایرهٔ $x^۲+y^۲=۲$ است. یکی ازاین نقطه‌ها، ومثلاً نقطهٔ $(-۱, -۱)$ را در نظرمی‌گیریم. اگر از این نقطه و نقطهٔ دیگر (x, y) ــ‌که مختصات گویا دارد ــ خط راستی‌بگذرانیم، ضریب زاویهٔ‌این خط راست، یعنی $t=\frac{y+۱}{x+۱}$،

عددی گویا می‌شود.

عکس این حکم هم درست است: هرخط راست باضریب زاویهٔ گویای $t\neq -1$، که از نقطهٔ $(-1، -1)$ گذشته‌باشد، محیط‌دایرهٔ $x^2+y^2=2$ را درنقطهٔ دیگر $(x، y)$ با مختصات گویا قطع می‌کند. برای این‌که به‌این موضوع قانع شویم، مقدار y را ازمعادلهٔ خط راست $y=t(1+x)-1$، درمعادلهٔ دایره قرارمی‌دهیم:

$$x^2+[t(1+x)-1]^2=2;$$

$$(1+t^2)x^2-2t(1-t)x+(t^2-2t-1)=0$$

یکی از ریشه‌های این معادلهٔ درجهٔ دوم را، از قبل می‌دانیم: $x=-1$. به‌کمك قضیهٔ ویت (مربوط به‌رابطهٔ بین ریشه‌ها و ضریب‌های معادله)، ریشهٔ دوم به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{-t^2+2t+1}{t^2+1}$$

با در دست داشتن x، مقدار y هم به‌دست می‌آید:

$$y=\frac{t^2+2t-1}{t^2+1}$$

اکنون اگر $t=\frac{m}{n}$ بگیریم، از $x=\frac{p}{q}$ و $y=\frac{r}{q}$، مقدارهای p و q و r، به‌این صورت، به‌دست می‌آیند:

$$p=-m^2+2mn+n^2،\quad q=m^2+n^2،\quad r=m^2+2mn-n^2$$

ازاین روش استدلال، برای جست و جوی همهٔ نقطه‌های گویا روی‌هر منحنی درجهٔ دوم، و یا هم ارز آن، جست و جوی همهٔ جواب‌های درست درمعادلهٔ ازنوع

$$ax^2+bxy+cy^2=dz^2$$

می‌توان استفاده کرد، به شرطی که با ضریب‌های درست درمعادله‌ها سروکار داشته باشیم و دست کم، مختصات یکی از نقطه‌های با مختصات گویا معلوم باشد. برای روشن کردن این موضوع هم که، آیا چنین نقطه‌ای وجوددارد، روشی کلی پیدا شده است.

مسألهٔ ۲۲۰۲ پاسخ: الف) هفت جواب درمجموعهٔ عددهای درست:

$(0, 0)$; $(1, 0)$; $(-1, 0)$; $(2, 6)$; $(2, -6)$; $(3, 12)$; $(3, -12)$

ب) و چهارجواب گویای دیگر: $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}\right)$ ؛ $\left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{4}{3}\right)$.

∇ این مطلب را که، چگونه می‌توانیم معادله‌ای را، در مجموعهٔ عددهای گویا، با دراختیارداشتن جواب‌هایی ازآن، حل کنیم، می‌توان با زبان هندسی توضیح داد. معادلهٔ مفروض، متناظراست بایك منحنی درصفحهٔ مختصات Oxy.

فرض می‌کنیم، دو نقطه ازاین منحنی را، که مختصاتی گویا دارند، مثل (x_1, y_1) و (x_2, y_2) دراختیارداشته باشیم. چون معادلهٔ منحنی از درجهٔ سوم است، بنابراین، خط راستی که از این دو نقطه بگذرد، منحنی را درنقطهٔ سومی قطع می‌کند. مختصات (x_3, y_3) این نقطه، به صورت تابع‌های گویایی نسبت به x_1، y_1، x_2، y_2 با ضریب‌هایی درست بیان می‌شوند و، در نتیجه، این مختصات، عددهایی گویا هستند.

به این ترتیب، با در دست داشتن جواب‌های گویای (x_1, y_1) و (x_2, y_2) از معادله، می‌توانیم به جواب گویای جدید (x_3, y_3) دسترسی پیدا کنیم.

اکنون، محاسبه‌های مربوط به‌آن را انجام می‌دهیم.

معادلهٔ خط راستی که از دو نقطهٔ (x_1, y_1) و (x_2, y_2) می‌گذرد، به صورت

$$y = t(x - x_1) + y_1, \quad t = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

درمی‌آید. اگرمقدار y را درمعادلهٔ $y^2 = 6(x^3 - x)$ قراردهیم، به‌معادلهٔ درجهٔ سومی نسبت به x می‌رسیم که، دو ریشهٔ آن x_1 و x_2، از قبل برای ما معلوم است و ریشهٔ سوم را می‌توان، با توجه به قضیهٔ ویت، پیدا کرد:

$$x_3 = \frac{t^2}{6} - x_1 - x_2 \qquad (1)$$

به‌همین ترتیب، y_3 هم به‌دست می‌آید:

$$y_3 = \frac{t^3}{6} + 2y_1 - y_2 - 3tx_1 \qquad (1')$$

می‌توانستیم، مماس‌درنقطهٔ (x_1, y_1) را برمنحنی درنظربگیریم و نقطهٔ برخورد دیگرآن را با منحنی پیداکنیم، به‌دست می‌آید:

$$x_4 = \frac{t^2}{6} - 2x_1 \ , \ \ y_4 = \frac{t^3}{6} \qquad (2)$$

[در این جا، t عبارت است از ضریب زاویهٔ خط راست مماس بر منحنی، در نقطهٔ (x_1, y_1)].

به‌این‌ترتیب، دستورهایی به‌دست می‌آیدکه، به‌کمك‌آن‌ها، می‌توان‌از روی جواب‌های گویا ومعلوم معادلهٔ $y^2 = 6(x^3 - x)$، جواب‌های گویای جدیدی برای‌آن پیدا کرد.

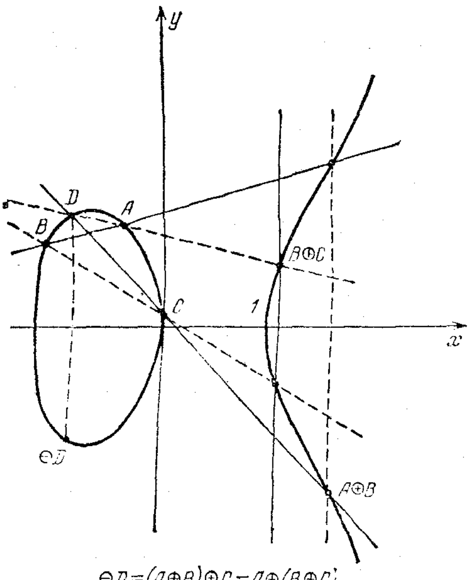
برای علاقه‌مندان. به‌طورطبیعی با این پرسش‌ها روبه‌رومی‌شویم. آیا روشی وجود داردکه، به‌کمك‌آن، بتوان (بادردست‌داشتن نقطه‌های گویایی ازخطراست)، هربارنقطه‌های گویای تازه‌ای به‌دست‌آورد؟ آیا مجموعهٔ این نقطه‌های گویا متناهی‌است یا نامتناهی؟ به چه ترتیبی، همهٔ‌آن‌ها را می‌توان شرح داد؟ دربین‌آن‌ها، چند نقطهٔ با مختصات درست وجود دارد؟

برای این که به‌این پرسش‌ها پاسخ بدهیم، بهتراست ابتدا، به عمل جمع نقطه‌ها، روی منحنی درجهٔ سوم اشاره‌کنیم که، درضمن دارای ویژگی شرکت‌پذیری هستند. این عمل را روی منحنی با معادلهٔ زیرشرح می‌دهیم:

$$y^۲ = x^۳ + ax + b \qquad (۳)$$

(هرمنحنی درجهٔ سوم دیگر $P(x, y) = ۰$ را می‌توان با تبدیل متغیرها، به این صورت درآورد؛ درضمن، اگرضریب‌های $P(x, y)$ عددهایی درست باشند، مسألهٔ جست و جوی نقطه‌های با مختصات گویا روی منحنی $P(x, y) = ۰$ را می‌توان به‌مسألهٔ مشابهی برای منحنی (۳) با ضریب‌های درست a و b منجر کرد. درمسالهٔ ما، منحنی $y^۲ = ۶(x^۳ - x)$ را می‌توان با تغییرمتغیرهای $v = ۶x$، $u = ۶y$، به‌صورت $u^۲ = v^۳ - ۳۶v$ درآورد.)

دو نقطهٔ A و B ازمنحنی (۳) را درنظرمی‌گیریم و نقطهٔ برخوردسوم خط راست AB با این منحنی را پیدا می‌کنیم. قرینهٔ این نقطهٔ برخورد سوم را نسبت به‌محور Ox با نماد $A \oplus B$ نشان می‌دهیم (شکل ۱۰). در این



شکل ۱۰

صورت، برای هرسه نقطهٔ A، B و C ازمنحنی، داریم:

$$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$$

این ویژگی شرکت‌پذیری، تعبیرهندسی جالبی دارد. اگر دو دستهٔ سه‌تایی خط راست، به‌نحوی روی صفحه رسم‌کنیم به‌طوری که هردو خط راستی‌که ازدو دستهٔ مختلف هستند، یکدیگر را قطع‌کنند، این دو دسته خط یکدیگر را در ۹ نقطه قطع می‌کنند، آن وقت منحنی درجه سومی که شامل ۸ نقطه ازاین ۹نقطه باشد، حتماً شامل نقطهٔ نهم‌هم خواهد بود. اگرنقطهٔ بی‌نهایت دور Z را به‌منحنی اضافه‌کنیم، آن وقت مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های‌آن با عمل $\oplus$، تشکیل‌یك‌گروه جابه‌جایی می‌دهند (ویژگی $A\oplus B=B\oplus A$ واضح است). نقطهٔ Z دراین‌گروه، نقش صفررا به عهده دارد، نقطهٔ $\ominus A$، نقطهٔ متقابل A، قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به Ox به‌حساب می‌آید. شرط تعلق سه‌نقطهٔ A، B و C به‌یك‌خط راست‌را می‌توان به‌صورت $A\oplus B=\ominus C$ یا $A\oplus B\oplus C=Z$ نوشت.

نقطه‌های با مختصات‌گویا روی منحنی (۳) هم، به‌شرط درست‌بودن a و b، نسبت به عمل $\oplus$، تشکیل یك گروه می‌دهند. در منحنی $y^۲=۶(x^۳-x)$، جمع‌نقطه‌ها بارابطه‌های (۱)، (۱′) و(۲)داده‌می‌شوند، یعنی

$$(x_۱, y_۱)\oplus(x_۲, y_۲)=(x_۳, -y_۳);$$

$$(x_۱, y_۱)\oplus(x_۱, y_۱)=۲(x_۱, y_۱)=(x_۴, y_۴)$$

همهٔ نقطه‌هایی راکه درپاسخ مسأله داده‌ایم، می‌توان ازسه نقطهٔ $E(۱, ۰)$، $F(-۱, ۰)$ و $G(۲, ۶)$ به‌دست‌آورد. درضمن داریم:

$$E\oplus F=(۰, ۰);\quad E\oplus G=(۳, ۱۲);\quad F\oplus G=\left(-\frac{۱}{۳}, \frac{۴}{۳}\right);$$

$$E\oplus F\oplus G=\left(-\frac{۱}{۲}, -\frac{۲}{۳}\right);\quad G\oplus G=۲G=\left(\frac{۲۵}{۲۴}, -\frac{۳۵}{۴۸}\right);$$

$$۲G\oplus F=\left(-\frac{۱}{۴۹},\ \frac{۱۲۰}{۴۹}\right);\ ۲G\oplus E=(۴۹,\ ۸۴۰)$$

وغیره (توجه کنیم که $۲E=۲F=۲(E\oplus F)=Z$).

پیدا کردن گروه کامل نقطه‌های گویا، برای منحنی مشخص(۳)، مسألهٔ بسیاردشواری است. ثابت شده است که این، گروهی با تعدادی متناهی‌مولد است (قضیهٔ موردل)، ولی به این مولدها، نمی‌توان به‌سادگی دست یافت.

نقطه‌های با مختصات درست، همان‌طور که درمثال ما دیده می‌شود، به‌ندرت در بین نقطه‌های با مختصات گویا ظاهر می‌شوند. ولی بنابر قضیهٔ توئه، برای منحنی‌های غیرخاص درجهٔ ۳ (ویا بیشتر)، تعداد آن‌ها محدود است.

همین چندی پیش، درسال ۱۹۸۳، فال‌تینگ ریاضی‌دان جوان، توانست فرضیه موردل را ثابت کند: روی منحنی غیر خاص $P(x,y)=۰$ از ردهٔ بزرگتر از ۱، تنها تعداد محدودی نقطه‌های با مختصات گویا می‌تواند وجود داشته باشد (در این جا، $P(x,y)$، یک چند جمله‌ای با ضریب‌های درست است).

ردهٔ منحنی $P(x,y)$ را، به‌طورنسبی می‌توان به سادگی و در رابطه با درجهٔ n چند جمله‌ای $P(x,y)$ محاسبه کرد. منحنی ردهٔ ۰، به دایره و سایرمنحنی‌های درجهٔ دوم مربوط می‌شود، و ردهٔ ۱، به‌منحنی‌های غیرخاص درجهٔ سوم. منحنی‌های غیرخاص $P(x,y)=۰$ با درجهٔ $n\geqslant ۴$، معمولاً رده‌ای کمتراز ۲ ندارند و، بنابراین، تنها می‌توانندتعدادی متناهی‌ازنقطه‌های بامختصات گویا داشته باشند. همین مطلب، درحالت خاص، درمورد منحنی فرما، یعنی $x^n+y^n=۱$، به‌ازای $n\geqslant ۴$ هم صادق است.

مسأله‌هایی برای‌کارمستقل دانش‌آموزان

۲۳.۴. می‌خواهیم کامیونی باظرفیت۳تن‌را، به‌طور کامل‌باصندوق‌های ۱۳۰ کیلوگرمی و ۱۶۰ کیلوگرمی پر کنیم. آیا ممکن است؟

۰۲۴۰۲ روی محیط دایره‌ای به‌شعاع ۴۰ سانتی‌متر، چرخی به شعاع ۱۸ سانتی‌متر می‌غلطد. روی چرخ، میخی کوبیده شده است که وقتی روی محیط دایره قرار گیرد، علامتی روی آن می گذارد.

الف) روی هم چند علامت روی محیط دایره زده می‌شود؟

ب) چرخ چندبار بایدمحیط دایره را دور بزندتا علامت میخ روی‌یکی ازعلامت‌های قبلی بیفتد؟

۰۲۵۰۲ روی‌یك جادهٔ دایره‌ای، مسابقهٔ امدادی موتورسیکلت‌سواران انجام می‌شود. مسابقه‌درهمان نقطه‌ای پایان می‌یابدکه‌آغازشده است. طول جادهٔ دایره‌ای ۳۳۰ کیلومترو طول هـرمرحلـه ۷۵ کیلومتراست (حرکت در جاده، یك طرفه است). در جـاده، چند نقطه بـرای تعویض وجـود دارد و فاصلهٔ بین‌آن‌ها چقدراست؟

۰۲۶۰۲ دربارهٔ شکلی که روی صفحه رسم شده است، می‌دانیم ، وقتی دور نقطهٔ O به‌اندازهٔ ۴۸ درجـه دوران کند، بـرخودش منطبق می‌شود. آیا می‌توان گفت، اگر این شکل دور نقطهٔ O به‌اندازهٔ‌الف) ۹۰درجه؛ب) ۷۲ درجه دوران‌کند، برخودش منطبق می‌شود؟

۰۲۷۰۲ یك شکل مسطحه، ضمن دوران دور نقطهٔ O به اندازهٔ زاویهٔ ۱۹ درجه، برخودش منطبق می‌شود. ثابت کنید، این شکل، در دوران به اندازهٔ ۸۶ درجه روی خودش می‌افتد.

۰۲۸۰۲ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك این عددها را پیدا کنید:

الف) $۲^{۶۳}-۱$ و $۲^{۹۱}-۱$؛ ب) $۲^{۱۹}+۱$ و $۲^{۸۶}+۱$

۰۲۹۰۲ متوازی‌الاضلاعی با زاویهٔ حادهٔ ۶۰ درجه و طول ضلع‌های a و b (a و b، عددهایی درست‌اند و $a>b$) مفروض است. خط راستی‌که از رأس این متوازی‌الاضلاع گذشته است، مثلث متساوی‌الاضلاعی را ازآن جدامی‌کند. درمورد ذوزنقه‌ای هم که باقی‌می‌ماند، همین‌عمل‌را انجام می‌دهیم و، سپس، درمورد متوازی‌الاضلاعی که ازذوزنقه باقی ماند وغیره، تا زمانی که یك لوزی به‌دست‌آید.

الف) به‌شرط $a=۱۹۸۶$ و $b=۱۸۰۰$، طول ضلع این لوزی چقدر است؟

ب) a و b را طوری پیدا کنید که، ضمن این برش‌ها، مثلث‌هایی با هشت اندازهٔ مختلف به‌دست آید.

۳۰۰۲. مستطیلی را به‌خانه‌های ۱×۱ سانتی‌متری تقسیم کرده‌ایم. در داخل هرخانه، عددی نوشته‌ایم. می‌دانیم، مجموع عددها درهرسطر افقی برابر ۱، ومجموع عددها درهرستون قائم برابر ۲ شده است. آیا ممکن است مساحت این مستطیل، برابر ۱۹۸۶ سانتی‌مترمربع باشد؟

۳۱۰۲. آیا درست است که:

الف) از ۱۰۰ عدد درست، همیشه می‌توان دوعدد طوری انتخاب کرد که، مجموع آن‌ها، بر ۷ بخش‌پذیر باشد؛

ب) از ۵ عدد درست، همیشه می‌توان دوعدد طوری انتخاب کرد که، تفاضل مجذورهای آن‌ها، بر ۷ بخش‌پذیر باشد؟

۳۲۰۲. طول هرسه ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ای، با عددهای درست بیان می‌شود. آیا ممکن است طول هریک ازدوضلع مجاوربه‌زاویهٔ قائمه، عددی فرد باشد؟

۳۳۰۲. سه عدد اول طوری پیدا کنید که حاصل‌ضرب آن‌ها، پنج برابر مجموع آن‌ها باشد.

۳۴۰۲. همهٔ عددهای اول p را پیدا کنید، به‌نحوی که:

الف) عدد $p^۲+۱۳$؛ ب) عدد $p^۲+۱۴$، اول باشد.

۳۵۰۲. مرکب بودن هریک ازاین عددها را ثابت کنید:

الف) $۲^{۳^{۱۹۸۷}}+۱$؛ ب) $۲^{۳^{۱۹۸۷}}-۱$

۳۶۰۲. هریک از این معادله‌ها را، در مجموعهٔ عددهای درست، حل کنید:

الف) $x^۲=y^۲+۲y+۱۳$؛ ب) $x^۲-۳xy+۲y^۲=۳$

۳۷۰۲. ثابت کنید، معادله‌های زیر، درمجموعهٔ عددهای درست،

جواب ندارند:

الف) $y^{۲}=۵x^{۲}+۶$؛ ب) $۲^{x}-۱=y^{۲}(x>۱)$

۳۸.۲ مجموع چند عدد درست بر ۶ بخش‌پذیر است. ثابت کنید، مجموع مکعب‌های آن‌ها هم، بر ۶ بخش‌پذیر می‌شود.

۳۹.۲ ثابت کنید، برای عددهای درست m و n، عدد $m^{۵}n-mn^{۵}$ بر ۳۰ بخش‌پذیر است.

۴۰.۲ ثابت کنید، اگر عدد $a-۱$ بر k^{m} بخش‌پذیر باشد، آن وقت عدد $a^{k}-۱$ بر $k^{m+۱}$ بخش‌پذیر است (a، k و m، عددهای طبیعی‌اند).

۴۱.۲ سه رقم آخر عدد زیر را پیدا کنید:

$$۱^{۱۰۰}+۲^{۱۰۰}+۳^{۱۰۰}+\ldots+۹۹۹۹۹۸^{۱۰۰}+۹۹۹۹۹۹^{۱۰۰}$$

۴۲.۲ چهار عدد طبیعی متوالی طوری پیدا کنید که، هر کدام از آن‌ها، بر مجذور یك عدد درست بزرگتر از واحد بخش‌پذیر باشد.

۴۳.۲ شش عدد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ را روی محیط دایره به ردیفی بنویسید که، برای هر سه عدد a، b و c، که در ردیف هم باشند، عدد $b^{۲}-ac$ بر ۷ بخش‌پذیر شود.

۴۴.۲ n را طوری پیدا کنید که، به ازای آن، عدد $(۱+n)^{۴}+n^{۴}$، عددی مرکب باشد.

۴۵.۲ ثابت کنید، هر یك از عددهای زیر، برای عدد طبیعی $n>۱$، مرکب است:

الف) $n^{۴}+۴$؛ ب) $n^{۵}+n^{۴}+۱$

۴۶.۲ چندجمله‌ای $x^{۹}+x^{۴}-x-۱$ را به‌صورت ضرب پنج عامل با ضریب‌های درست تجزیه کنید.

۴۷.۲ ثابت کنید، چند جمله‌ای $(x+۱)^{۲n}-x^{۲n}-۲x-۱$ بر چند جمله‌ای $x(x+۱)(۲x+۱)$ بخش‌پذیر است.

۴۸.۲ چند جمله‌ای $x^{n}-ax^{n-۱}+bx-۱$، به‌ازای چه‌مقدارهایی

از a و b، بر $(x-1)^2$ بخش‌پذیر است؟

۴۹۰۲. درتقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $x-1$ و $x-2$، به‌ترتیب، به‌باقی مانـده‌های ۳ و ۵ رسیده‌ایم. از تقسیم $f(x)$ بر $(x-1)(x-2)$، چه باقی مانده‌ای به‌دست می‌آید؟

۵۰۰۲. ثابت کنید، اگربرای چندجمله‌ای باضریب‌های درست $f(x)$، مقدارهای $f(0)$ و $f(1)$ عددهایی فـرد بـاشند، آن وقت $f(x)$، ریشهٔ درست ندارد.

۵۱۰۲. درمورد چند جمله‌ای با ضریب‌های درست $f(x)$ می‌دانیم:

$$|f(3)|=|f(7)|=1$$

ثابت کنید، چند جمله‌ای $f(x)$، ریشهٔ درست ندارد.

۵۲۰۲. $f(x)$، یك چند جمله‌ای است ازدرجهٔ ۷ باضریب‌های درست. ثابت کنید، اگرمقدار $f(x)$ به‌ازای پنج عدد درست مختلف x، ازلحاظ قدر مطلق برابر واحد باشد، آن وقت این چند جمله‌ای را نمی‌تـوان به ضرب دوچند جمله‌ای (از درجهٔ بالاتر ازصفر) با ضریب‌های درست تجزیه کرد.

۵۳۰۲. آیا عدد طبیعی n وجود دارد، به‌نحوی که، به‌ازای‌آن، عدد 3^n+1 بر،

الف) 5^{1000}؛ ب) 10^{1000}

بخش‌پذیر باشد؟

۵۴۰۲. تعداد زیادی کارت دراختیارداریم و روی هر کدام از آن‌ها، یکی ازعددهای ۲، ۳، ۵، ۷ را نوشته‌ایم. آیا می‌توان

الف) ۱۵ کارت؛ ب) ۱۶ کارت

را طوری به ردیف چید، به نحوی که با ضرب چند عدد مجاور هم، مجذور کاملی به‌دست نیاید؟

ج) حداکثرتعداد کارت‌هایی را پیدا کنیدکه اگر،روی هر کدام ازآن‌ها، یکی از n عدد اول نخستین را نوشته باشیم، بتوان آن‌ها را به ردیفی قرار دادکه این شرط برقرارباشد.

۰۵۵۰۲ درهر نقطهٔ با مختصات درست (x,y) از صفحهٔ مختصاتی Oxy، یك درخت روییده است. در این جنگل جاده‌ای کشیده‌ایم که هیچ درختی را قطع نمی‌کند و مرزهای آن خط‌های راستی است که با خط راست

الف) $۳y=۵x$؛ ب) $ax=by$

موازی است (a و b دوعدد طبیعی مفروض‌اند). حداکثر عرض این جاده، چقدر می‌تواند باشد؟ (از کلفتی تنهٔ درخت‌ها، صرف نظر می‌کنیم.)

۰۵۶۰۲ الف) برای معادلهٔ $x^۲+۲y^۲=z^۲$، در مجموعهٔ عددهای درست، چهارجواب (x,y,z) را، به‌نحوی پیدا کنید که، عددهای x و y و z، دوبه‌دو نسبت به هم اول باشند.

ب) ثابت کنید، تعداد این گونه جواب‌ها، بی‌نهایت است.

۰۵۷۰۲ عدد طبیعی $n\geqslant ۷$ دارای این ویژگی است: همهٔ عددهای طبیعی کوچکتر از n، که نسبت به n اول‌اند، تشکیل یك تصاعد حسابی می‌دهند. ثابت کنید، عدد n، یا عددی است اول و یا توانی از ۲.

۰۵۸۰۲ الف) عددی دورقمی پیدا کنید، به‌نحوی که دورقم آخر مجذور آن، منطبق برخود عدد باشد.

ب) ثابت کنید، برای هرعدد طبیعی n، عددی n رقمی وجود دارد که بر n رقم آخر مجذور خود منطبق است (عدد n رقمی، می‌تواند با صفر آغاز شود).

۰۵۹۰۲ الف) ده جواب (x,y,z) را، درمجموعهٔ عددهای طبیعی، برای معادلهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=۳xyz$ پیدا کنید.

ب) ثابت کنید، بی‌نهایت جواب از این گونه وجود دارد.

۰۶۰۰۲ ثابت کنید، عدد $(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{۱۹۸۷}$ را می‌توان به صورت $a\sqrt{۳}-b\sqrt{۲}$ نوشت که، در آن، a و b عددهای درستی هستند، به نحوی که $۳a^۲-۲b^۲=۱$.

۰۶۱۰۲ x و y را عددهایی درست و M را مجموعهٔ عددهای طبیعی به‌صورت $x^۲+xy+y^۲$ فرض می‌کنیم.

الف) ثابت کنید، حاصل ضرب هردو عدد از M، خود عضوی از M است.

ب) عددی را درمجموعهٔ M، عدد پایه می‌نامیم که از واحدبزرگتر باشد و، به‌جزخودش، برهیچ یك ازعددهای مجموعهٔ M بخش‌پذیر نباشد. آیا عضوی از M وجود دارد که بتوان‌آن را به‌دو طریق مختلف، به‌صورت ضرب دوعدد پایه نوشت؟

۶۲۰۳. برای معادلهٔ $x!y!=z!$، پنج جواب $(x،y،z)$ را، در مجموعهٔ عددهای طبیعی پیدا کنید. (منظوراز $n!$، حاصل ضرب همهٔ عددهای از ۱ تا n است: $n!=1\times 2\times\ldots\times n$.)

۳

ساختمان‌های هندسی در صفحه و در فضا

۱.۳. با استفاده از پرگار وخط کش و تنها با رسم ۶ خط (خط راست و دایره)، پاره خط راست مفروض AB را به‌چهار بخش برابرتقسیم کنید.

۲.۳. دو نقطهٔ A و B روی صفحه داده شده‌اند. بدون استفاده از خط کش وتنها به‌کمك پرگار، وسط پاره‌خط راست AB را پیدا کنید.

۳.۳. طول‌های دوضلع مثلث، به‌ترتیب، برابرند با a و b $(b>a)$ و می‌دانیم، زاویهٔ روبه‌رو به‌یکی ازاین ضلع‌ها، ۳ برابرزاویهٔ روبه‌روبه‌ضلع دیگراست. به‌کمك پرگار و خط کش، مثلث را رسم کنید.

۴.۳. به‌کمك پرگار و خط کش، دایره‌ای به‌شعاع مفروض، چنان رسم کنیدکه برخط راست مفروض و دایرهٔ مفروضی مماس باشد.

۵.۳. به‌کمك پرگار و خط کش، دایره‌ای رسم کنیدکه بردوخط موازی مفروض l و m و بردایرهٔ مفروض به‌شعاع r، واقـع در بین l و m، مماس باشد.

۶.۳. نقطهٔ F در درون زاویهٔ حادهٔ AOB داده شده است. نقطهٔ M را، به‌کمك پرگاروخط کش، روی ضلع OA طوری پیدا کنیدکه ازنقطهٔ Fو ضلع دیگر زاویه، OB، به‌یك فاصله باشد.

۰۷۰۳ پاره خط راستی بـه‌طول واحد، روی صفحـه داده شده است. به‌کمك پرگار و خط‌کش، پاره خط راستی به‌طول $\sqrt{۱+\sqrt{۲}}$ بسازید.

۰۸۰۳ خط‌کشی داریم‌که، روی‌آن، تقسیم‌های یك سانتی‌متری وجود دارد. تنها بـه کمك همین خط‌کش، خـط راستی رسم کنید که برخط راست مفروضی عمود باشد.

۰۹۰۳ متوازی‌الاضـلاع $OBCA$ داده شـده است. خـط راستی رسم کرده‌ایم‌که از ضلع OB یك سوم‌آن واز‌ضلع OA یك‌چهارم‌آن را، با محاسبهٔ ازنقطهٔ O، جدا کرده‌است. این‌خط راست، چه‌بخشی‌ازقطر OC را جدامی کند؟

۰۱۰۰۳ دوخط راست موازی و دونقطهٔ A و B روی یـکی از آن‌ها داده شده است. پاره خط راست AB را، تنها بـه‌کمك خط‌کش، به ۳ بخش برابرتقسیم کنید.

۰۱۱۰۳ چهارضلعی محدبی داده‌شده است. دوخط راست رسم‌کرده‌ایم که دوضلع مقابل‌آن را، به سه بخش برابرتقسیم کـرده‌اند. ثابت‌کنید، بین این دوخط راست، یك سوم مساحت چهارضلعی واقع است.

۰۱۲۰۳ A، B و C رأس‌های یك مثلث‌غیرمتساوی‌الساقین را تشکیل می‌دهند. نقطهٔ D را روی صفحهٔ مثلث بـه‌چند طریق مـی‌توان پیداکـرد، به‌نحوی‌که مجموعهٔ نقطه‌های $\{A،B،C،D\}$، محورتقارن داشته باشد؟

۰۱۳۰۳ ازنقطهٔ دلخواه M، واقع دردرون زاویهٔ‌حادهٔ A، عمودهای MP و MQ را بر ضلع‌های آن فرود آورده‌ایم. ازنقطهٔ A، عمود AK را برپاره‌خط PQ رسم‌کرده‌ایم. ثابت‌کنید، دو زاویهٔ PAK و MAQ برابرند.

۰۱۴۰۳ یك ده ضلعی منتظم، به‌کمك پرگارو خط‌کش رسم‌کنید.

۰۱۵۰۳ دایره‌ای رسم ومحیط‌آن را به‌۱۲ بخش برابرتقسیم‌کنید. یکی ازاین نقطه‌ها، A را، درنظربگیرید، ازآن جا بـه‌همهٔ نقطه‌های دیگرتقسیم وصل ومماس در A بـردایـره را رسم کنید. دسته‌ای شامـل ۱۲ خط راست به‌دست می‌آیدکه ازنقطهٔ A گذشته‌اند.

الف) ثابت کنید، این خطهای راست، صفحه را به ۲۴ زاویهٔ برابر

تقسیم می‌کنند.

ب) نقطهٔ دیگر B را، از نقطه‌های تقسیم واقع برمحیط دایره در نظر بگیرید و، شبیه قبل، دسته‌ای شامل ۱۲ خط راست بسازید. ثابت کنید، ۱۱۰ نقطه‌ای که ازبرخورد این ۲۳ خط راست به‌دست می‌آید (بدون در نظر گرفتن نقطه‌های A و B)، روی محیط ۱۱ دایره قرار دارند، هر ۱۰ نقطه روی محیط یك دایره.

۱۶۰۳. ازگوشهٔ میز بیلیارد مستطیلی با اندازه‌های $m \times n$ (m و n، عددهایی طبیعی‌اند)، توپ بیلیارد، تحت زاویهٔ ۳۰ درجه با دیوارهٔ میز، آغاز به‌حرکت می‌کند. ثابت کنید، توپ بیلیارد، هرگز به گوشهٔ دیگری از میز نمی‌رسد. (روشن است که توپ بیلیارد را، نقطه به‌حساب می‌آوریم.)

۱۷۰۳. چهار نقطه روی یك صفحه‌اند. آیا ممکن است:

الف) فاصلهٔ دوبه‌دوی آن‌ها، به‌ترتیب، برابر ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ سانتی‌متر بشود؟

ب) از این فاصله‌های دوبه‌دوی نقطه‌ها، پنج تا برابر ۱ و ششمی برابر ۱/۸ سانتی‌متر باشد؟

۱۸۰۳. چهار خط راست، صفحه را به چند بخش تقسیم می‌کنند؟

۱۹۰۳. فضا را به‌چند بخش تقسیم می‌کنند:

الف) چهار صفحه؛

ب) پنج صفحه، به‌شرطی که همهٔ صفحه‌ها از یك نقطه بگذرند (هیچ سه صفحه‌ای، دریك خط راست، مشترك نیستند)؟

۲۰۰۳. یك کُنج محدب چهاروجهی مفروض است. صفحه‌ای را پیدا کنید که، مقطع آن با این کنج، یك متوازی‌الاضلاع باشد.

۲۱۰۳. ثابت کنید، برای هر منشور با قاعدهٔ مثلثی و ارتفاع به قدر کافی بزرگ، می‌توان صفحه‌ای پیدا کرد که، دربرخورد با یال‌های جانبی منشور، مثلث متساوی‌الاضلاعی به‌وجود آورد.

۲۲۰۳. شهریار یك چند وجهی محدب مقوائی را، روی یال‌های آن

برید و وجه‌های به‌دست‌آمده را، با پست، بـرای شروین فرستاد. شروین با این وجه‌ها، یك چند وجهی محدب ساخت. آیا ممکن است چند وجهی‌های شهریار و شروین با هم فرق داشته باشند؟

۲۳.۳. آیا یك نه‌وجهی محدب وجـود دارد، به‌نحوی که هرنه وجه آن، چهارضلعی باشند؟

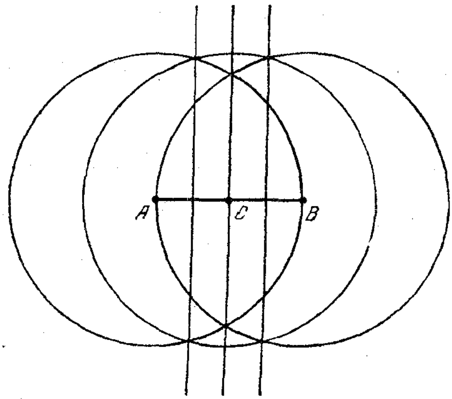
۲۴.۳. بعد از گستردن یـك هرم، مثلثی با زاویـه‌های حاده به‌دست آمده‌که، در آن، وسط سه ضلع مثلث بـه هم وصل شده است. ثابت کنید، مکعب مستطیلی وجود دارد که، چهار رأس غیرمجاور آن، بر رأس‌های این هرم منطبق‌اند.

۲۵.۳. کنجی سه‌وجهی به‌رأس O و زاویـه‌های دو وجهی برابر α، β و γ مفروض است. از رأس O، نیم خطهـای راستی عمود بر هر یك از وجه‌های آن رسم کرده‌ایم، به نحوی که به طرف بیرون امتداد داشته باشند (یعنی، هرنیم خط راست عمود وخود کنج، نسبت به‌صفحهٔ وجه، دردوطرف قرار گرفته باشند). زاویه‌های مسطحهٔ کنجی که با این سه‌نیم خط به‌دست می‌آید، پیدا کنید.

بحث و بررسی مسأله‌ها

مسألهٔ ۱.۳. دودایره به‌شعاع AB وبه‌مرکزهای A وB رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این دو دایره را، بـا خط راستی بـه‌هم وصل می‌کنیم تا پاره‌خط راست AB را در C قطع کند. اکنون دایره‌ای به‌مرکز C و شعاع AB رسم می‌کنیم. این دایره، هریك از دو دایـرهٔ قبلی را در دونقطه قطع می‌کند. اگردونقطهٔ برخورد با هـردایره را با خط راستی به‌هم وصل کنیم، پاره خط راست AB به‌چهاربخش برابرتقسیم می‌شود (شکل ۱۱).

به‌این‌ترتیب، ۶ خط رسم شده‌است: سه دایره و سه‌خط راست. ثابت می‌کنیم، این سه‌خط راست، پاره خط راست AB را به‌چهاربخش برابرتقسیم می‌کنند.



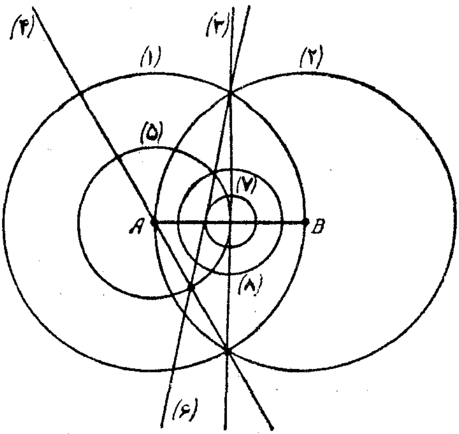
شکل ۱۱

می‌دانیم، مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه که ازدوانتهای پاره خط راست به‌یك فاصله باشند، عبارت است از خط راست عمود منصف AB. دو نقطهٔ برخورد دودایرهٔ اول، ازدوانتهای پاره‌خط راست AB به‌یك‌فاصله‌اند (به‌فاصلهٔ برابرطول AB) و، بنابراین، خطراستی که ازاین‌دونقطه می گذرد بر AB عمود است وآن را درنقطهٔ C نصف می کند.

به‌همین ترتیب، نقطه‌های برخورد دایرهٔ سوم با یکی از دو دایرهٔ قبلی، ازنقطهٔ C و یکی از دوانتهای AB به‌یك فاصله‌اند و، بنابراین، خط راستی که ازاین دونقطه بگذرد، نصف پاره خط راست AB را، به دو بخش برابرتقسیم می کند.

∇ انجام یك ساختمان‌هندسی، به‌کمك پرگاروخط کش، به‌این معناست که حل مسأله را، به‌انجام متوالی برخی ازعمل‌های زیرمنجرکنیم:

I. خط راستی از دونقطهٔ مفروض بگذرانیم؛ II. دایره‌ای با مرکز و شعاع مفروض رسم‌کنیم؛ III. نقطه‌های برخورد: الف) دوخطراست، ب) خط راست و دایره، ج) دو دایره را به‌دست‌آوریم.



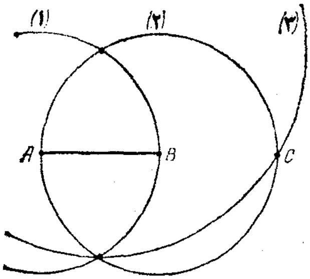
شکل ۱۲

در مسألهٔ ما، دنبالهٔ این عمل‌ها، به‌این ترتیب است: II، II، III ج)، I، III الف)، II، III ج)، III ج)، I، I، III الف)، III الف). در ضمن، شرط مسأله برقراراست: تعداد عمل‌های I و II برابراست با شش.

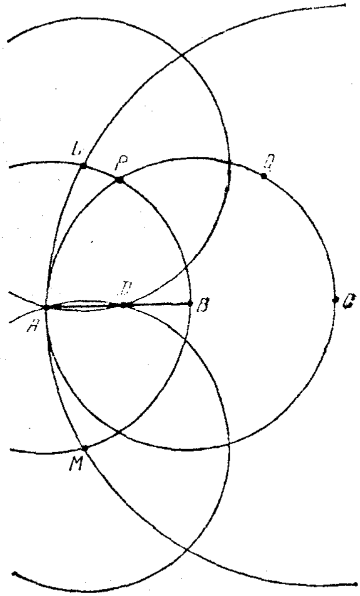
دربارهٔ این مسأله فکر کنید که، برای تقسیم یك پاره خط راست به ۳ یا ۵ بخش برابر، به‌کمترین تعداد از عمل‌های I و II نیاز باشد. درشکل ۱۲، روش تقسیم پاره‌خط راست، به ۶ بخش برابرنشان داده شده است؛ در این روش، تعداد عمل‌های I و II برابراست با ۸.

مسألهٔ ۲۰۳. ابتدا پاره‌خط راست AB را دوبرابر می‌کنیم، یعنی نقطهٔ C را روی خط راست AB طوری پیدا می‌کنیم که داشته باشیم: $AB = BC$. برای این‌منظور، دایره‌ای به‌مرکز B و شعاع $r = BA$ رسم می‌کنیم. سپس، با آغاز از نقطهٔ A، روی محیط این دایره، پشت سرهم، نقطه‌های P، Q و C را طوری علامت می‌گذاریم که داشته باشیم (شکل ۱۳):

$$AP = PQ = QC = r$$



شکل ۱۴



شکل ۱۳

مثلث‌های ABP ، PBQ و QBC متساوی‌الاضلاع‌اند و، بنابراین، زاویهٔ ABC برابر ۱۸۰ درجه می‌شود. به‌این ترتیب، نقطهٔ C روی خط راست AB واقع است وداریم: $AB=BC$.

اکنون، با توجه به نقطه‌های A، B و C، وسط پاره‌خط راست AB را پیدا می‌کنیم. دایره‌ای به‌مرکز نقطهٔ C و به‌شعاع $CA=2r$ رسم می‌کنیم (شکل ۱۳ را ببینید). L و M، نقطه‌های برخورد این دایره را با دایرهٔ به‌مرکز A وشعاع $r=AB$ علامت می‌گذاریم. سپس، دودایره به‌مرکزهای L و M وشعاع $r=AB$ رسم می‌کنیم. این‌دودایره، درنقطهٔ A و، همچنین، درنقطهٔ دیگر D یکدیگر را قطع می‌کنند. ثابت می‌کنیم، نقطهٔ D، وسط پاره خط راست AB است.

درواقع، نقطه‌های L و M، نسبت به‌خط‌راست AC قرینهٔ یکدیگرند؛ درضمن، نقطهٔ D از دو نقطهٔ L و M به‌یک فاصله است، یعنی روی خط راست AC قراردارد. اکنون، دومثلث متساوی‌الساقین ALD و CAL را درنظرمی‌گیریم. این‌دومثلث باهم متشابه‌اند، زیرا درزاویهٔ مجاور به‌قاعده،

یعنی A، مشترک‌اند. بنابراین

$$AD:AL = AL:CA \Rightarrow AD:r = r:۲r$$

که از آن جا به‌دست می‌آید: $۲AD = AB = r$.

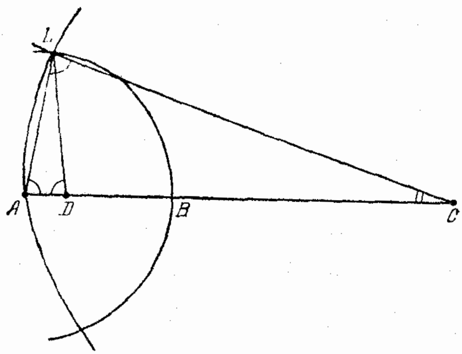
∇ درآغازحل مسألهٔ ۲.۳، با رسم چهاردایره، پاره خط راست AB را دوبرابر کردیم (ونقطهٔ C را، به‌دست‌آوردیم). این ساختمان را، می‌توان اقتصادی‌تر وتنها با رسم سه دایره انجام داد (شکل ۱۴ را ببینید).

مسألهٔ ۲.۳ را می‌توان تعمیم داد: روشی پیداکنید که، به‌کمک‌آن، بتوان پاره‌خط راست مفروض را به n بخش برابرتقسیم‌کرد.

به‌همان ترتیب، پاره خط راست $AC = nAB$ را می‌سازیم. سپس، بازهم به‌همان‌ترتیب، به‌وسیلهٔ نقطه‌های A، B و C، نقطهٔ D را پیدامی‌کنیم (شکل ۱۵). از تشابه مثلث‌های متساوی‌الساقین ALD و ACL به دست می‌آید:

$$DA.CA = r^۲$$

(دراین حالت $CA = nr$ و $DA = \frac{r}{n}$).



شکل ۱۵

این ساختمان، به تبدیلی از صفحه مربوط می‌شود که، انعکاس نسبت به‌دایرهٔ به‌مرکز A وشعاع $r=AB$ نام دارد. مبدل نقطهٔ P، دراین تبدیل، عبارت است ازنقطهٔ P' واقع برنیم خط راست AP، به نحوی‌که برای آن داشته باشیم:

$$AP'.AP=r^{2}$$

درمسألهٔ ۲.۳، درواقع، نقطهٔ D را به‌عنوان‌مبدل‌نقطهٔ C، ضمن یك‌انعکاس، به‌دست آورده‌ایم.

تبدیل به کمك انعکاس، ویژگی جالبی دارد: دراین تبدیل، خط‌راست به‌دایره و، دوباره، دایره به‌خط راست تبدیل می‌شود.

با استفاده از انعکاس، می‌توان ثابت‌کردکه، عمل‌های III الف) و III ب) را (یعنی پیدا کردن نقطه‌های برخورد دوخط راست وخط راست با دایره)، که دربارهٔ آن‌ها دربحث مسألهٔ قبل صحبت‌کردیم، می‌توان تنها با یك پرگارانجام داد. ازاین جا می‌توان نتیجه‌گرفت: هر مسألهٔ ساختمانی راکه بتوان به‌کمك پرگار وخطکش حل‌کرد، می‌توان تنها به‌کمك یك‌پرگار هم حل کرد (قضیهٔ ماسکه‌رونی). درضمن باید توجه کرد که، عمل I را (یعنی رسم خط راستی‌که از دونقطه می گذرد) نمی‌توان تنها به کمك پرگار انجام داد. درواقع، باید شرط کرد که، اگردونقطه ازخطراستی معلوم باشد، خود خط راست معین است.*

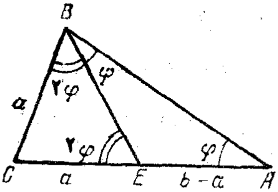
مسألهٔ ۳.۳. فرض می‌کنیم، مثلث ABC، با فرض $\hat{B}=3\hat{A}$، رسم شده باشد (شکل ۱۶). ازنقطهٔ B، پاره‌خط راست BE را تا خط راست AC طوری رسم می‌کنیم‌که داشته‌باشیم: $\widehat{ABE}=\widehat{BAC}$. مثلث ABE متساوی‌الساقین است و $BE=AE$. مثلث BCE هم متساوی‌الساقین می‌شود، زیرا در آن، دو زاویهٔ BEC و CBE برابرند (هرکدام‌دوبرابر زاویهٔ BAC)؛

---

* برای‌آگاهی بیشتر دراین زمینه وزمینه‌های مشابه‌آن‌کتاب‌های هندسهٔ‌پرگار و **نظریهٔ ساختمان‌های هندسی** ترجمهٔ پرویزشهریاری را ببینید. — م.

بنا براین

$$BC = CE = a \Rightarrow$$
$$AE = EB = b - a$$



شکل ۱۶

در مثلث BCE، طول هر سه ضلع معلوم است. بنابراین، می‌توان آن را به‌کمك پرگار و خط‌کش رسم کرد. بعد پاره خط راست CE را به‌اندازهٔ EA (که برابر $b-a$ است) ادامه می‌دهیم، مثلث ABC به‌دست می‌آید.

در واقع، درچنین مثلثی، روشن است که $BC = a$ و $AC = b$. ثابت می‌کنیم، زاویهٔ ABC، سه‌برابر زاویهٔ BAC است. مثلث BAE، متساوی‌الساقین است: $AE = EB = b - a$؛ بنابراین، دو زاویهٔ BAE و ABE برابرند. سپس، زاویهٔ BEC، به‌عنوان زاویهٔ خارجی مثلث AEB، دو برابر زاویهٔ BAC می‌شود. چون مثلث BCE متساوی‌الساقین است $(BC = CE)$، زاویهٔ CBE هم دوبرابر زاویهٔ BAC خواهد شد. و در نتیجه $\widehat{ABC} = ۳\widehat{BAC}$.

مسأله وقتی جواب دارد که بتوان به‌کمك پاره‌خط‌های راست a، a و $b-a$ یك مثلث ساخت؛ یعنی وقتی که $a < b < ۳a$. با این شرط، مسأله جوابی منحصربه‌فرد دارد.

∇ حل مسأله، که در اینجا آوردیم، شامل چهار بخش است که می‌توان، آن‌ها را، این طور نام‌گذاری کرد: ۱) تجزیه‌وتحلیل، ۲) ساختمان، ۳) اثبات، ۴) بحث و بررسی. معمولاً، همهٔ مسأله‌های ساختمانی هندسه، دارای همین چهارمرحله‌اند.

مسألهٔ ۰۴۰۳. مکان هندسی مرکزهای دایره‌های با شعاع مفروض r که برخط راست مفروضی مماس باشند، عبارت است از دو خط راست l_1 و l_2 موازی با این خط راست و به‌فاصلهٔ r از آن.

دایرهٔ مفروض را به‌شعاع R و به مرکز O می‌گیریم. مکان هندسی

مرکزهای دایره‌های با شعاع r که بر دایرهٔ مفروض مماس باشند، عبارت است از: ۱) به‌شرط $R>r$، محیط دو دایرهٔ به‌شعاع‌های $R+r$ و $R-r$ و به مرکز O؛ ۲) به‌شرط $R=r$، محیط دایرهٔ به‌شعاع $R+r$ و به‌مرکز O، و خود نقطهٔ O؛ ۳) به‌شرط $R<r$، محیط دایرهٔ به شعاع $R+r$ و به مرکز O.

مرکز دایرهٔ مجهول، درمحل برخورد این دومکان هندسی قراردارد. از آن جاکه، دو خط راست موازی با دو دایره، حداکثر ۸ نقطهٔ برخورد دارند، بنابراین، تعداد جواب‌های مسألهٔ ۴.۳، می‌تواند از ۰ تا ۸ باشد (تحقیق کنید، همهٔ این حالت‌ها، ممکن است).

∇ مسألهٔ ۴.۳ را با روش مکان‌های هندسی حل کردیم.

این روش را می‌توان این طورشرح داد. فرض کنید، نقطهٔ X، که باید آن را پیدا کنیم، بنا به‌خواست‌های مسأله، بادوشرط معین شود. ابتدا مکان هندسی نقطه‌هایی را پیدا می‌کنیم که، تنها، با شرط اول سازگارند. سپس، مکان هندسی نقطه‌هایی را جست‌وجو می‌کنیم که، تنها، با شرط دوم سازگار باشند. نقطه‌های مشترك این دو مجموعه، درهردوشرط صدق می‌کنند و، بنابراین، نقطهٔ مجهول X را به‌دست می‌دهند.*

برای حل مسألهٔ ۴.۳، باید نقطهٔ X مرکزدایره را پیدا کرد. دوشرط را ازهم جدا می‌کنیم: ۱) X به‌فاصلهٔ r ازمحیط دایرهٔ مفروض قراردارد، و ۲) X به‌فاصلهٔ r ازخط راست مفروض واقع است. با پیدا کردن مکان‌هندسی نقطه‌هایی که با این شرطها سازگارند، موضع‌های ممکن نقطهٔ X به دست می‌آید.

مسألهٔ ۵.۳. چون دایرهٔ مورد نظر، باید بر دو خط راست موازی l و m مماس باشد، بنابراین، مرکزآن K، روی خط راستی است که با l و m موازی و ازآن‌ها به‌یك فاصله باشد. شعاع R این دایره، برابراست با نصف فاصلهٔ بین دوخط راست موازی l و m. ازطرف دیگر، دایرهٔ مجهول، باید

---

* برای آگاهی بیشتر از روش مکان‌های هندسی، به‌کتاب **خلاقیت ریاضی** ترجمهٔ پرویز شهریاری مراجعه کنید. ـــ م.

بردایرهٔ مفروض مماس باشد، یعنی نقطهٔ K، مرکزآن، باید به‌فاصلهٔ $R+r$ یا $R-r$ (اگر $R\geqslant r$) ازنقطهٔ O باشد؛ بنابراین، نقطهٔ K روی محیطیکی از دو دایرهٔ به مرکز O وشعاع $R+r$ و $R-r$ قراردارد.

ساختمان را می‌توان به‌این ترتیب انجام داد. خط راستی موازی lو m و به‌یك فاصله ازآن‌ها (بین دوخط راست l و m) رسم می‌کنیم، سپس، دو دایرهٔ به‌مرکزO وشعاع‌های $R+r$و$R-r$ (اگر $R>r$) را می‌کشیم. نقطهٔ K، محل برخورد خط راست با یکی ازاین دو دایره خواهد بود.

∇ این‌مسأله، ارتباط نزدیکی با مسألهٔ مشهورآپولونیوس (حدود ۲۰۰ سال پیش ازمیلاد) دارد: سه‌دایره داده شده است، می‌خواهیم دایرهٔ چهارمی رسم کنیم که براین‌سه‌دایره مماس‌باشد. این‌مسألهٔ دشواررا، می‌توان به‌کمك تبدیل انعکاسی، به‌مسألهٔ ۵.۳ منجرکرد.

برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم سه‌دایرهٔ مفروض، دربیرون یکدیگرباشند. اگرشعاع‌های این دایره‌ها را به‌یك اندازه بزرگ‌کنیم، جای مرکز دایره‌ای‌که باید برآن‌ها مماس باشد، تغییرنمی‌کند. شعاع‌های آن‌هارا تا جایی بزرگ می‌کنیم‌که دوتا از دایره‌ها برهم مماس شوند. سپس، انعکاس تمامی صفحه را، نسبت بـه‌دایره‌ای بـه مرکزنقطهٔ تماس این دو دایره پیدا می‌کنیم (بحث مسألهٔ ۲.۳ را ببینید). دراین تبدیل، دو دایرهٔ مماس برهم، به‌دوخط راست موازی، و دایرهٔ سوم، به‌یك دایره تبدیل می‌شوند.

با حل مسألهٔ ۵.۳، برای این خطهای راست ودایره و، سپس، درنظر گرفتن یك انعکاس معکوس، می‌توانیم دایرهٔ مورد نظر آپولونیوس را پیدا کنیم.*

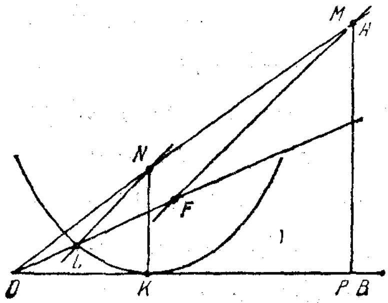
مسألهٔ ۶.۳. خط راست OF را رسم مـی‌کنیم ونقطه‌ای مانند N را روی نیم خط راست OA علامت می‌گذاریم. ازنقطهٔ N، عمود NK را بر خط راست OB فرود می‌آوریم. دایره‌ای به‌مرکز N و به‌شعاع NK رسم

---

* برای آگاهی بیشتر درمورد مسألهٔ **آپولونیوس** و راه‌حل‌های مختلف آن، کتاب «**نظریهٔ ساختمان هندسی**» را ببینید. ـــم.

می‌کنیم. L را یکی از نقطه‌های برخورد محیط این دایره با نیم خط راست OF می‌گیریم. از نقطهٔ F، خط راستی موازی با NL رسم می‌کنیم. نقطهٔ M، محل برخورد این خط راست با نیم خط راست OA، همان نقطهٔ مورد نظر است (شکل ۱۷ را ببینید).

در واقع، تجانس به‌مرکز O، که نقطهٔ L را به‌نقطهٔ F تبدیل می‌کند، با توجه به موازی بودن خط‌های راست متناظر، نقطهٔ N را به نقطهٔ M و نقطهٔ K را به‌نقطهٔ P تبدیل خواهد کرد (P، پای عمودی است که از M بر OB رسم کرده‌ایم). بنابراین، از برابری $NK = NL$، برابری $MF = MP$ نتیجه می‌شود.



شکل ۱۷

مسأله دوجواب دارد (دایرهٔ به‌مرکز N و به‌شعاع NK، خط OF را، در دونقطه قطع می‌کند).

∇ مسألهٔ ۶.۳ را، با روش تشابه حل کردیم. این روش را، می‌توان به‌این صورت، توضیح داد. ابتدا شکلی می‌سازیم که باشکل مورد نظر متشابه باشد، سپس، آن را به‌نسبت لازم، بزرگ (یا کوچک) می‌کنیم.*

درمسألهٔ ۶.۳، ابتدا خط شکستهٔ KNL را ساختیم (که برای آن،

* برای آگاهی بیشتر، دربارهٔ روش تشابه، کتاب «خلاقیت ریاضی» را ببینید.ـ م.

شرط مسأله برقراربود) و، سپس، خطشکستهٔ PMF را متشابه باآن، طوری پیدا کردیم که ازنقطهٔ F بگذرد.

روش مکان‌های هندسی را (بحث مسألهٔ ۴.۳ را ببینید)، برای حل مسألهٔ ۶.۳، آزمایش می‌کنیم. معلوم می‌شود، مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه، که ازیك نقطه ویك خط راست، به‌یك فاصله باشند، عبارت است‌از یك سهمی.

برای این که در این مورد قانع شویم، از روش مختصاتی استفاده می‌کنیم. فاصلهٔ از نقطهٔ F تاخطراست OB را h می‌گیریم. دستگاه‌مختصات Oxy را طوری انتخاب می‌کنیم که، محور Ox بر OB واقع باشد و محور Oy از F بگذرد. دراین صورت، نقطهٔ (x,y)، که ازنقطهٔ F وخط راست OB به‌یك فاصله است، باید در معادلهٔ $|y|=\sqrt{x^2+(y-h)^2}$ صدق کند

با مجذور کردن دو طرف برابری، به معادله سهمی $y=\frac{1}{2h}x^2+\frac{1}{2}h$ می‌رسیم.

بنابراین، نقطهٔ مورد نظرمسألهٔ ۶.۳، درنقطهٔ برخورد سهمی با خط راست OA قراردارد. البته، ما نمی‌توانیم سهمی را به کمك پرگار و خط کش رسم کنیم، ولی نقطه‌های برخوردآن را با یك خطراست، می‌توانیم با توجه به‌حل مسألهٔ ۶.۳، به‌دست‌آوریم.

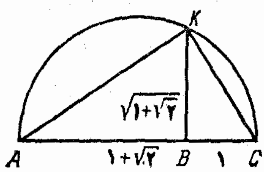
مسألهٔ ۷.۳. ۱) اگر زاویهٔ قائمه‌ای رسم وروی ضلع‌های آن، ازنقطهٔ رأس، پاره‌خط‌های راستی به‌طول واحد جداکنیم، با وصل انتهای این دوپاره خط راست به‌هم، پاره خط راستی به‌طول $\sqrt{2}$ به‌دست می‌آید.

۲) روی خط راستی، پاره‌خط راست AB را به‌طول $\sqrt{2}+1$ و، سپس، درامتداد آن، پاره خط راست BC را به‌طول واحد، جدا می‌کنیم (شکل ۱۸).

۳) دایره‌ای به‌قطرپاره خط راست AC رسم می‌کنیم.

۴) ازنقطهٔ B، عمودی برقطر AC رسم می‌کنیم.

اگر K، یکی ازنقطه‌های برخورد این عمود با محیط دایره باشد،طول



شکل ۱۸

پاره خط راست BK برابر $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ خواهد شد. در واقع، مثلث AKC، قائم‌الزاویه‌است، زیرا زاویهٔ AKC، زاویه‌ای محاطی‌و روبه‌روی نیم‌دایره است؛ و درهرمثلث قائم‌الزاویه، طول ارتفاع وارد بر وتر، واسطهٔ هندسی است بین دوقطعه‌ای که روی وتر جدا می‌کند (طول‌های این دوقطعه، به‌ترتیب، برابر $1+\sqrt{2}$ و ۱ است).

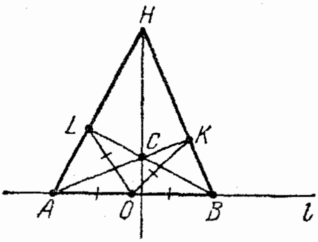
∇ دراین مسأله نشان دادیم که، چگونه می‌توان با در دست داشتن پاره‌خطهای‌راست a و b، پاره خطهای‌راست $\sqrt{a^2+b^2}$ و $\sqrt{ab}$ راساخت. با استفاده ازقضیهٔ مربوط به‌خطهای راست موازی (وقتی‌که ضلع‌های زاویه را قطع‌کرده باشند)، می‌توان با در دست داشتن پاره خطهای راست a و b و c، پاره خط راست $\frac{ab}{c}$ را هم ساخت.

با ترکیب این ساختمان‌ها، بسیاری از پاره خطهای راست دیگر هم ساخته می‌شوند. مثلاً پاره خط راست به‌طول $\sqrt{ab+cd}$ را می‌توان به این ترتیب به‌دست‌آورد: ابتدا پاره‌خطهای راست با طول‌های $m=\sqrt{ab}$ و $n=\sqrt{cd}$ را می‌سازیم و، سپس، پاره‌خط راست به‌طول $\sqrt{m^2+n^2}$ را به‌دست می‌آوریم.

ثابت می‌شود که: با دردست داشتن پاره خط راست به‌طول واحد، تنها می‌توان پاره‌خطهای راستی‌راساخت‌که، طول آن‌ها، به‌کمك انجام عمل‌های حسابی و چندبارجذر، قابل محاسبه باشند.

برای علاقه‌مندان. طول‌های همهٔ این گونه پاره خطهای راست، یك میدان را تشکیل می‌دهند. مسألهٔ ۷.۳، به‌این مناسبت قابل حل بود که‌عدد $\sqrt{1+\sqrt{2}}$، متعلق به‌این میدان است. غیر قابل حل بودن مسألهٔ مربوط به‌تضعیف مکعب، ازاین‌جاناشی‌می‌شود که‌عدد $\sqrt[3]{2}$، به‌این‌میدان‌تعلق‌ندارد.

مسألهٔ ۸.۳. روی خط راست مفروض l، پاره‌خط‌های OA و OB را به‌طول ۱ سانتی‌متر جدا می‌کنیم، سپس، ازهمین نقطهٔ O، دوپاره‌خط راست دیگر OK و OL را به‌طول ۱ سانتی‌متر رسم می‌کنیم (دو نقطهٔ K و L در یك‌طرف خط‌راست l قراردارند؛ شکل ۱۹ را ببینید). Cرا نقطهٔ برخوردخط‌های راست AK و BL، و Hرا نقطهٔ برخوردخط‌های‌راست AL و BK می‌گیریم. دراین صورت، خط راست CH، برخط راست l، عمود خواهد شد.



شکل ۱۹

برای اثبات درستی رسم، باید ازاین دو قضیه استفاده کرد: ۱) اگر درمثلثی، طول میانهٔ وارد برقاعده، برابرنصف طول قاعده باشد،آن وقت، زاویهٔ رأس این مثلث، قائمه است؛ ۲) درهرمثلث، سه‌ارتفاع، دریك نقطه به‌هم می‌رسند.

▽ درمسألهٔ ۸.۳، صحبت برسر ساختمانی است که باید با انتخاب ابزاری غیرعادی، یك خط‌کش و واحد طول، انجام گیرد. می‌توان ثابت کرد که، به‌کمك این ابزار، بسیاری ازمسأله‌های عادی ساختمانی، قابل حل‌اند: رسم خط راستی موازی یا عمود برخط راست مفروض به نحوی که از نقطهٔ مفروضی بگذرد، جداکردن پاره‌خط راست‌مفروض‌روی خط راست مفروض، جداکردن زاویهٔ مفروض درهرطرف نیم خط راست مفروض.

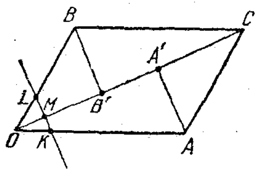
با وجود این، به‌کمك خط‌کش و واحد طول، نمی‌توان هرمسأله‌ای را که با پرگار و خط‌کش حل می‌شود، حل کرد. مثلاً، با در دست داشتن پاره‌خط راست به‌طول‌واحد، نمی‌توان پاره‌خط‌راست به‌طول $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ رارسم کرد(با مسألهٔ ۷.۳ مقایسه کنید)؛ حتی درحالت کلی، نمی‌توان مثلث‌قائم‌الزاویه‌ای را ساخت که طول وتر وضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن معلوم باشد.

معلوم شده است که، با آغاز از پاره خط راست به‌طول واحد، تنها می‌توان پاره خط‌های راستی را ساخت که طول‌آن‌ها، با عمل‌های حسابی

و همچنین جذرگرفتن از مجموع مجذورهای طول‌های پاره خط‌های مفروض، قابل بیان باشد (به‌زبان دیگر، بیان طول این پاره‌خط راست، باید به‌ازای همهٔ تغییرعلامت‌های ممکن درجلو همهٔ رادیکال‌ها، مقداری حقیقی باشد).

مسألهٔ ۰۹.۳ پاسخ: $\frac{۱}{۷}$.

نقطه‌های برخورد خط راست رسم شده را، با ضلع‌های OA، OB و با قطر OC، به ترتیب K، L و M می‌گیریم (شکل ۲۰). ساختمان‌های زیر را انجام می‌دهیم که به ما امکان می‌دهند، همهٔ نسبت‌های لازم را به صورت نسبت پاره خط راست روی قطر OC درنظر بگیریم.



شکل ۲۰

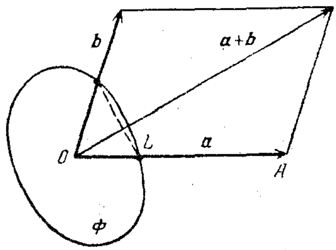
پاره خط‌های راست BB' و AA' را موازی خط راست مفروض، رسم می‌کنیم؛ درضمن B' و A'، نقطه‌هایی از قطر OC هستند. مثلث‌های OBB' و CAA' برابرند (این دو مثلث، نسبت به‌مرکزمتوازی‌الاضلاع، متقارن‌اند)، بنابراین $OB'=CA'$. ازبرابری‌های

$$۳=OB:OL=OB':OM،$$
$$۴=OA:OK=OA':OM،$$
$$OC=OB'+OA'$$

به‌دست می‌آید:

$$OC:OM=۳+۴=۷$$

∇ به‌همین ترتیب می‌توان ثابت کردکه، اگر خط راستی از دو ضلع مجاوریک متوازی‌الاضلاع، به‌ترتیب، $\frac{۱}{\lambda}$ و $\frac{۱}{\mu}$ آن‌ها را جدا کند، آن وقت $\frac{۱}{\lambda+\mu}$ قطرآن را جدا خواهدکرد.



شکل ۲۱

با تکیه براین حقیقت، می‌توان نابرابری معروف و مهم مربوط به نُرم بردارها را ثابت کرد. این نابرابری را می‌توان این طور توضیح داد (شکل ۲۱). Φ را مجموعهٔ بستهٔ محدودی با مرکزتقارن O فرض می‌کنیم. برای هربردار $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$، نماد $\|\mathbf{a}\|$ رابرابر با نسبت $\frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OL}|}$ می‌گیریم که، درآن، L، عبارت است از نقطهٔ برخورد نیم خط راست OA با محیط شکل Φ. در این صورت، اگر Φ محدب باشد، «نابرابری مثلثی» زیر برقراراست:

$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|\leqslant\|\mathbf{a}\|+\|\mathbf{b}\|$$

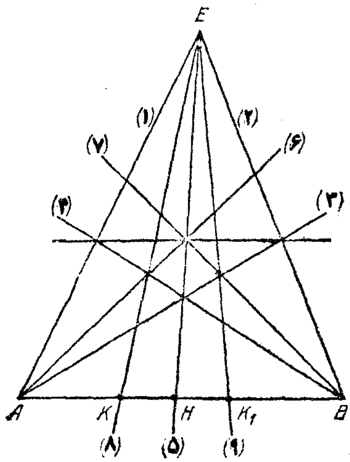
درحالت خاص، اگرΦ، دایره‌ای به‌شعاع‌واحد وبه‌مرکز O، درصفحهٔ Oxy باشد، آن وقت «نرم بردار» همان طول عادی می‌شود و «نابرابری مثلثی» برای بردارهای (x_1, y_1) و (x_2, y_2) به‌این صورت درمی‌آید:

$$\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}\leqslant\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$

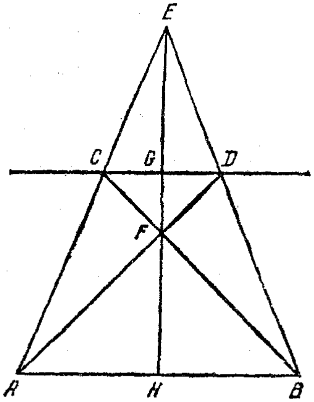
مسألهٔ ۱۰.۳. کافی است (بدون درنظر گرفتن دوخط راست مفروض)، ۹ خط راست رسم کنیم (روی شکل ۲۲، خطهای راست را، به‌ترتیب رسم آن‌ها، شماره گذاری کرده‌ایم). ثابت می‌کنیم، روی این شکل

$$AH=BH=\frac{1}{2}AB$$

پاره‌خط راست CD را می‌توان از AB با تجانس به‌مرکز E و به‌مرکز F به‌دست‌آورد؛ درهریك ازاین تجانس‌ها، نقطهٔ H به‌نقطهٔ G تبدیل می‌شود (شکل ۲۳ را ببینید). بنابراین



شکل ۲۲



شکل ۲۳

$$\frac{CG}{AH}=\frac{EC}{EA}=\frac{CD}{AB}=\frac{FC}{FB}=\frac{CG}{BH}$$

ازآن جا $AH=BH$.

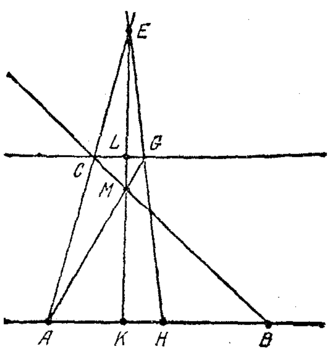
پاره خط راست CG را می‌توان از پاره خط راست AH درتجانس به مرکز E و یا ازپاره خط راست AB در تجانس به مرکز M به دست آورد (شکل ۲۴).

درهریك ازاین دوتجانس، نقطهٔ L به نقطهٔ K تبدیل می‌شود.

چون $AB=۲AH$، پس

$$\frac{CL}{AK}=\frac{EC}{EA}=\frac{CG}{AH}=\frac{۲CG}{AB}=$$

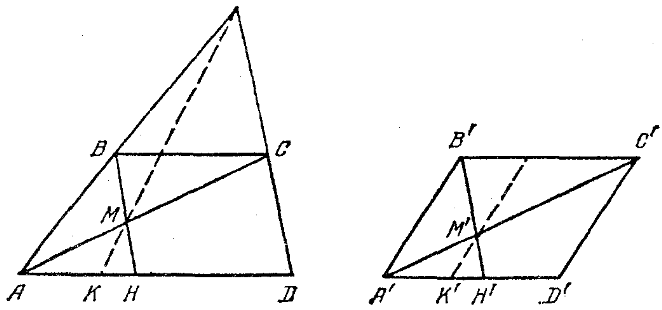
$$=\frac{۲CM}{MB}=\frac{۲CL}{BK}$$



شکل ۲۴

از آن جا $۲AK = BK$، یعنی $AK = \frac{۱}{۳}AB$. به‌همین ترتیب، ثابت‌می‌شود که، روی شکل ۲۲، $BK_۱ = \frac{۱}{۳}AB$، یعنی $AK = KK_۱ = K_۱B$.

▽ با ادامهٔ عمل‌هایی از این گونه (رسم خط راست AL و، سپس، از نقطهٔ N محل برخورد آن با CB، رسم خط راست EN که AB و CD را قطع می‌کند وغیره) می‌توان $\frac{۱}{۴}$ پاره خط راست AB، سپس $\frac{۱}{۵}$ آن و، به‌طور کلی، $\frac{۱}{n}$ آن را جدا کرد ($n \in \mathbf{N}$).



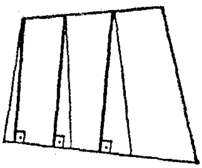
ب)　　　　　　　　الف)

شکل ۲۵

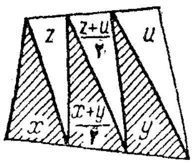
بین این مسأله که در آن، صحبت برسرنسبت پاره خط‌های راست در ذوزنقه است، بامسألهٔ قبل که درآن، نسبت پاره خط‌های راست درمتوازی‌الاضلاع مورد بررسی قرار گرفت، خویشاوندی نزدیکی وجود دارد (شکل «۲۵ـ الف»را ببینید). خط راستی که‌ازرأس B'ازمتوازی‌الاضلاع $A'B'C'D'$ به‌نقطهٔ H'، وسط ضلع $A'D'$ وصل شود، ازقطر $A'C'$، یك سوم آن را جدا می‌کند: $A'M' = \frac{۱}{۳}A'C'$. خط راستی هم که از نقطهٔ M' موازی

$A'B'$ رسم شود، ازضلع‌های $B'C'$ و $A'D'$، یك سوم آن‌ها را جدا می‌کند. همان طـور که مـی‌بینیم، شکل‌هـای «۲۵ـ الف» و «۲۵ـب» خیلی شبیه یکدیگرند. دربحث مربوط به‌مسألهٔ ۲۰.۳، دلیل این شباهت را موردبررسی قرارخواهیم داد.

مسألهٔ ۱۱.۳. برای حل‌مسأله، شکل را با ساختمانی، کامل می‌کنیم: درهمهٔ چهارضلعی‌های حاصل، قطرها را، شبیه آن چه در شکل «۲۶ـالف» می‌بینید، رسم‌می‌کنیم. مساحت‌دومثلث‌هاشورخوردهٔ دوطرف را، به‌ترتیب، x و y می‌گیریم (شکل «۲۶ـ الف»). دراین صورت، مساحت مثلث میانی، برابر $\frac{۱}{۲}(x+y)$ می‌شود. در واقع، طول قـاعده‌های ایـن سه مثلث یکی است وطول ارتفاع مثلث میانـی، بـرابـر است با نصف مجموع دو ارتفاع مثلث‌های دوطرف (اگر ارتفاع‌های سـه مثلث را رسم کنیم، ارتفاع مثلث میانی، وسط دو ساق ذوزنقه‌ای را به‌هم وصل‌کرده است که دوقاعدهٔ آن، دو ارتفاع مثلث‌های کناری هستند؛ شکل «۲۶ـ ب»).



ب)



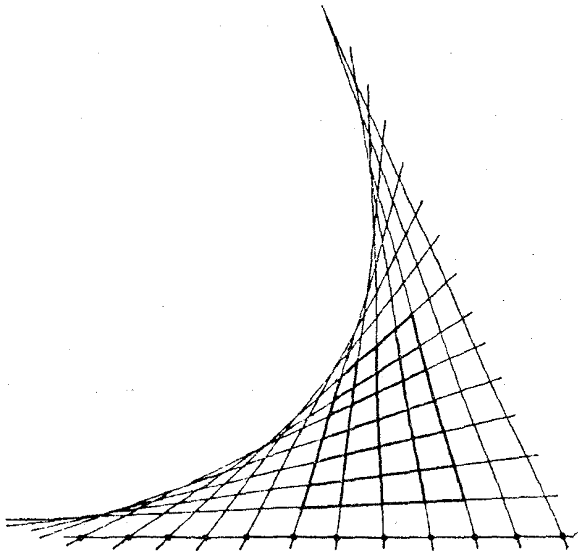
الف)

شکل ۲۶

همین‌استدلال را درمورد سه مثلثی هم‌که هاشورنخورده‌اند، می‌توان بیان‌کرد. به‌این‌ترتیب، مساحت‌تمامی چهارضلعی برابر $\frac{۳}{۲}(x+y+z+u)$ و مساحـت چهارضـلعی بین خط‌های راست، بـرابـر $\frac{۱}{۲}(x+y+z+u)$

می‌شود ، یعنی $\frac{1}{3}$ مساحت چهارضلعی اصلی.

▽ این قضیه، درحالت کلی‌ترخود هم درست است: اگرچند خط‌راست، دو ضلع روبه‌روی یك چهارضلعی رابه‌بخش‌های برابرتقسیم‌کنند، مساحت‌های چهارضلعی‌های حاصل، تشکیل یك تصاعد حسابی می‌دهند.



شکل ۲۷

اگردوضلع دیگر روبه‌رو را هم، درچهارضلعی مفروض، به بخش‌های برابرتقسیم و نقطه‌های تقسیم متناظر را بـه‌هم وصل‌کنیم، به‌نحوی که در درون چهارضلعی، شبکه‌ای از خـانه‌های کـوچك به‌دست آیـد (شکل ۲۷ را ببینید)، آن وقـت هرپاره خـط راستی کـه، دوانتهای آن، روی دوضلع روبه‌روی‌چهارضلعی‌باشد، به‌بخش‌های برابرتقسیم می‌شود و، ازاین گذشته، مساحت‌های خانه‌هایی‌که دریك ردیف قـرار گرفته‌اند، تشکیل یـك تصاعد

حسابی می‌دهند.

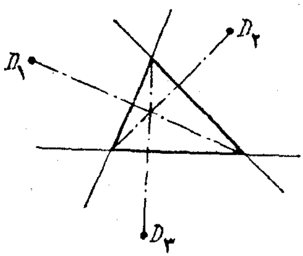
جالب است که، همهٔ خط‌های راستی که به این ترتیب رسم شده‌اند، بریک سهمی مماس‌اند (شکل ۲۷).

اگر فرض کنیم که، چهارضلعی اصلی، ازمیله‌های نازکی درست شده باشد که بتوان آن‌ها را خم کرد و چهارضلعی را به‌صورت یک چهارضلعی فضایی با ضلع‌های منحنی درآورد، آن وقت خط‌های راست متقاطع قبلی، روی یک سطح زینی‌شکل قرار می‌گیرند که، این خط‌های راست، «بافت» آن‌را تشکیل می‌دهند.

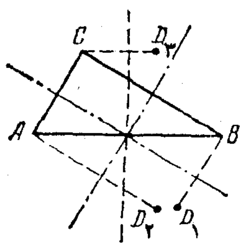
مسألهٔ ۱۲۰۳. پاسخ: اگر مثلث قائم‌الزاویه نباشد، به ۶ طریق؛ و اگر قائم‌الزاویه باشد، به ۵ طریق.

فرض کنید، مجموعهٔ نقطه‌های $\{A, B, C, D\}$ دارای محور تقارن باشد. دربیرون محور تقارن، باید تعداد زوجی ازنقطه‌ها واقع باشند، در غیر این صورت، نمی‌توان آن‌ها را، دوبه‌دو قرینهٔ هم قرارداد. ازآن جا که هرچهار نقطهٔ A، B، C و D را نمی‌توان روی محورتقارن درنظر گرفت (سه‌نقطهٔ A، B و C، روی یک خط راست نیستند)، بنابراین باید دوحالت را مورد مطالعه قرارداد.

۱) روی محورتقارن، هیچ‌کدام از نقطه‌های ما واقع نیستند. دراین صورت، محورتقارن، عمود منصف یکی ازضلع‌های مثلث ABC و نقطهٔ D



شکل ۲۹



شکل ۲۸

قرینهٔ رأس سوم نسبت به‌این‌محور است. به‌این ترتیب، دراین‌حالت، برای D سه موضع به دست می‌آید: D_1، D_2 و D_3 روی شکل ۲۸. وقتی زاویهٔ C برابر ۹۰ درجه باشد، با رسم عمود منصف‌های AC و BC، تنها یك نقطه برای D به‌دست می‌آید: $D_1 = D_2$، زیرا این دو عمود منصف، محورهای تقارن مستطیل $ABCD$ می‌شوند.

۲) دوتا ازنقطه‌ها روی محورتقارن‌اند. دراین حالت، محور تقارن، از دونقطه ازبین سه نقطهٔ A ، B و C می‌گذرد و نقطهٔ D قرینهٔ نقطهٔ‌سوم نسبت به‌محورتقارن می‌شود. به‌این‌ترتیب، سه‌موضع دیگربرای D به‌دست می‌آید (شکل ۲۹).

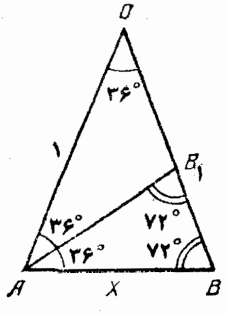
این شش موضع برای D، جز درحالتی‌که درمورد مثلث قائم‌الزاویه گفتیم، برای مثلث غیرمتساوی‌الساقین درهیچ‌حالتی برهم منطبق نمی‌شوند.

مسألهٔ ۱۳.۳. دایرهٔ به قطر AM را رسم می‌کنیم (شکل ۳۰). چون دو زاویهٔ APM و AQM قائمه‌اند، نقطه‌های P و Q بر محیط این دایره واقع‌اند و ازآن جا

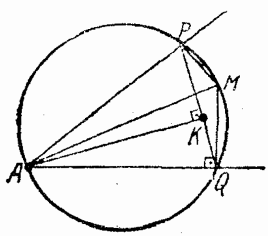
$$\widehat{MAQ} = \widehat{QPM}$$

(زاویه‌های محاطی روبه‌رو به یك کمان دایره). همچنین، توجه می‌کنیم که

$$\widehat{PAK} = \widehat{QPM}$$



شکل ۳۱



شکل ۳۰

در واقع $\widehat{APK}-{}^{\circ}۹۰=\widehat{PAK}$ (AK بر PQ عمود است) و همچنین $\widehat{APK}-{}^{\circ}۹۰=\widehat{QPM}$ (MP بر AP عمود است). بنابراین

$$\widehat{MAQ}=\widehat{PAK}$$

چیزی که اثبات آن را لازم داشتیم.

▽ د. هیلبرت، بارها از این مسأله در کتاب مشهور خود به نام «پایه‌های هندسه» استفاده کرده است. او به‌خصوص علاقه‌مند به روشن کردن این مسأله بوده است که، کدام مسأله‌های ساختمانی را می‌توان تنها به کمک خط‌کش و واحد طول حل کرد (بحث مربوط به مسألهٔ ۸.۳ را ببینید).

مسألهٔ ۱۴.۳. طول ضلع ده ضلعی منتظم را برحسب شعاع دایرهٔ محیطی آن، محاسبه می‌کنیم. برای این منظور، مثلث متساوی‌الساقین AOB را درنظر می‌گیریم که، در آن، O مرکز ده ضلعی منتظم و AB یکی از ضلع‌های آن است (شکل ۳۱). دراین صورت داریم:

$$\widehat{AOB}={}^{\circ}۳۶ \text{ ، } \widehat{OAB}={}^{\circ}۷۲$$

$AB_۱$، نیمساز زاویهٔ OAB را رسم می‌کنیم. چون مثلث‌های $OB_۱A$ و $B_۱AB$ متساوی‌الساقین‌اند، بنابراین

$$AB=AB_۱=OB_۱$$

$۱=OA$ و $AB=x$ می‌گیریم. از تشابه مثلث‌های AOB و $B_۱AB$ به‌دست می‌آید: $\frac{۱}{x}=\frac{x}{۱-x}$.

جواب مثبت این معادلهٔ درجه‌دوم $x=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ است. پاره خط راستی با این طول را می‌توانیم، به کمک پرگار و خط‌کش رسم کنیم (حل مسألهٔ ۷.۳ را ببینید). بنابراین، برای رسم ده‌ضلعی منتظم، کافی است دایره‌ای به‌شعاع واحد رسم کنیم و، با آغاز از نقطه‌ای واقع برمحیط آن، به کمک پرگاری که

به اندازهٔ $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ بازشده است، پشت سرهم رأس‌های ده ضلعی منتظم را روی محیط دایره علامت بگذاریم.

▽ دربسیاری از مسأله‌ها، با عدد $x=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ بـرخورد می کنیم. به‌عنوان مثال $\sin ۱۸^\circ=\frac{x}{۲}=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۴}$.

عدد $\tau=\frac{۱}{x}=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ را از زمان‌هـای قـدیم می‌شناخته‌اند و به «تقسیم طلائی» مربوط بوده است: اگر پاره خط راستی را به نسبت τ تقسیم کنیم، آن وقت، نسبت طول تمام پاره خط به‌بخش بزرگترآن، برابربا نسبت بخش بزرگتر به بخش کـوچکتر می‌شود. همین عـدد، در رابطه با عـددهای فیبوناچـی هم به دست می‌آید (مسأله‌های ۱۱.۶، ۱۶.۶ و ۱۷.۶ را ببینید).

برای علاقه‌مندان. امکان رسم n ضلعی منتظم بستگی به‌این دارد که، آیا عدد $\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}$ به‌میدانی ازعددها که دربحث مسألهٔ ۷.۳ شرح دادیم، تعلق دارد یا نه. کارل فردریك گوس ثابت کرد، تنها وقتی می‌توان n ضلعی منتظم را رسم‌کردکه داشته باشیم:

$$n=۲^k.n_۱.n_۲...n_m$$

که درآن، عددهای n_i، عددهای اول مختلفی به‌صورت $۲^{۲^l}+۱$ هستند.

شرط بالا برای عدد n، بـا شرط زیرهم‌ارز است: مقدار تـابع $\varphi(n)$ اویلر (بحث مسألهٔ ۸.۲ را ببینید)، برابر توانی از ۲ می‌باشد. در مسألهٔ ۱۴.۳، داریم $n=۱۰$ و $\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۴}$ ومقدار $\varphi(۱۰)$ ـ تعداد عددهای کوچکتراز ۱۰ که نسبت به ۱۰ اول‌اند ـ برابراست با $۲^۲=۴$.

شرط $\varphi(n)=۲^k$ را، بـه‌تقریب، می‌توان این طور روشن کرد. ضمن

ساختمان هندسی به‌کمك پرگار و خط‌کش، هربار کـه نقطه‌های برخورد دو دایره یا یك دایره با خط راست را پیدا می‌کنیم، تعداد نقطه‌های حاصل دو برابرمی‌شود. به‌این مناسبت، سرآخر، 2^l جواب به‌دست مـی‌آید. اکنون، فرض می‌کنیم، روشی‌کلی بـرای رسم یك n ضلعی منتظم پیدا کرده باشیم. آن وقت، طبق ایـن روش‌کلی، نه‌تنها این n ضلعی را، بلکه درضمن هرخط شکستهٔ n ضلعی منتظم و بسته («چند ضلعی‌های منتظم ستاره‌ای»؛ مسألـهٔ ۸.۲ را ببینید) را هم می‌توانیم رسم‌کنیم. تعداد این‌هابرابر $\frac{1}{2}\varphi(n)$ است. بنابراین، $\varphi(n)$ باید توانی از ۲ باشد.

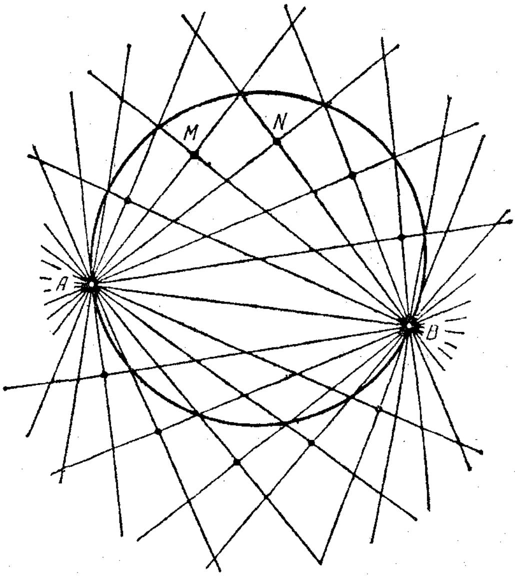
لازم و کافی بودن این شرط را، به طریق جبری ثابت می‌کنند.

مسألهٔ ۱۵.۳. الف) هردوخطراست مجاوری که ازنقطهٔ A گذشته‌اند، زاویه‌ای محاط در دایـره و روبـه‌روی به‌کمان ۳۰ درجه تشکیل می‌دهند (شکل ۳۲)؛ یعنی هرکدام ازاین زاویه‌ها برابر ۱۵ درجه است وهمین،حکم را ثابت می‌کند.

ب) نقطهٔ M، محل برخورد یکی ازخطهای راست دستهٔ اول با یکی ازخطهای راست دستهٔ دوم را درنظرمی‌گیریم. ازاین نقطه و نقطه‌های A و B، دایره‌ای مـی‌گذرانیم (درشکل ۳۲، محیط ایـن دایره را با نقطه‌های سیاه مشخص‌کرده‌ایم). اکنون به‌نقطهٔ N توجه‌می‌کنیم که‌ازبرخورد خطهای راست مجاور خطهای راست قبلی (ومثلاً درجهت حرکت عقربه‌های‌ساعت) به‌دست‌آمده است. دو زاویهٔ AMB و ANB با هم برابرند، زیرا مجموع زاویه‌هـای A و B در دو مثلث AMB و ANB برابرند (زاویـهٔ MAB به‌اندازهٔ ۱۵ درجه از زاویهٔ NAB بزرگتراست، درحالی‌که زاویهٔ NBA به‌اندازهٔ ۱۵ درجه از MBA بیشتراست).

چون زاویه‌های AMB و ANB با هم برابرند، بنابراین، نقطه‌های A، M، N و B روی محیط یك دایره‌اند.

∇ حکمی راکه درمسألهٔ ۱۵.۳،الف) ثابت‌کردیم، می‌توان به‌خوبی با زبان «حرکت» روشن‌کرد. اگر خط راستی، بـه‌طور یکنواخت با سرعت



شکل ۳۲

زاویه‌ای ω دورنقطهٔ A (نقطهٔ برخوردآن با دایره) دوران کند، آن‌وقت، نقطهٔ دیگر برخوردآن با دایره (با توجه به قضیهٔ مربوط به‌زاویهٔ محاطی)، با سرعت زاویه‌ای 2ω، روی محیط دایره حرکت می‌کند.

اگردوخط راست متقاطع l_A و l_B، باسرعت زاویه‌ای ω، دور دونقطهٔ A و B خود، درصفحه دوران کنند، آن وقت، مسیر نقطهٔ برخورد این دو خط راست، محیط یك دایره است.

C را نقطهٔ برخورد این دوخط راست در لحظه‌ای از زمان می‌گیریم و دایرهٔ γ راکه ازسه نقطهٔ A، B وC می‌گذرد، رسم می‌کنیم. ازیك طرف، نقطهٔ برخورد خط راست l_A با محیط دایرهٔ γ، به‌طوریکنواخت و با سرعت زاویه‌ای 2ω روی محیط دایرهٔ γ حرکت می‌کند؛ و از طرف دیگر، نقطهٔ

برخورد l_B با محیط همین دایره، با همان سرعت زاویه‌ای 2ω، روی محیط دایرهٔ γ حرکت می‌کند. ولی چون، در یك لحظهٔ زمانی، نقطه‌های برخورد خطهای راست l_A و l_B با دایرهٔ γ، برهم‌منطبق می‌شوند، بنابراین، درهمهٔ لحظه‌های زمانی دیگر دوران خطهای راست، نقطهٔ برخورد آن‌ها، روی همین دایره خواهد بود.

برای علاقه‌مندان. ۲۳ خط راستی‌که رسم کرده‌ایم، تشکیل یك شبکه می‌دهند. اگرخانه‌های این‌شبکه‌را شبیه خانه‌های‌صفحهٔ شطرنج رنگ‌آمیزی کنیم، آن وقت، خانوادهای از دایره‌ها را می‌بینیم که از نقطه‌های A و B گذشته‌اند و، همچنین، خانواده‌ای از هذلولی‌ها (اگر در هر نقطهٔ A و B، به جای ۱۲، دسته‌ای شامل ۲۴ خط راست رسم‌کنیم، طرح شکل بهتر خواهد شد).

این هذلولی‌ها، با توجه به‌موقعیت زیربه‌دست می‌آیند. اگر خطهای راست l_A و l_B، دورنقطه‌های خود A و B، یکی با سرعت زاویه‌ای ω و دیگری با سرعت‌زاویه‌ای $-\omega$ (یعنی درخلاف جهت یکدیگر) دوران کنند، آن‌وقت نقطهٔ برخوردآن‌ها، روی یك هذلولی حرکت خواهدکرد.

در واقع، لحظه‌ای فرامی‌رسد‌که، دوخطراست l_A و l_B، با هم موازی می‌شوند. دستگاه محورهای مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم‌که، مبداء آن در نقطهٔ وسط پاره خط راست AB و محور Ox آن موازی با l_A و l_B باشد.

مختصات نقطهٔ A را $(a،b)$ می‌گیریم، دراین صورت، مختصات‌نقطهٔ B برابر $(-a،-b)$ می‌شود. معادله‌های خطهای راست‌را، درلحظهٔ‌زمانی t، می‌توان این‌طورنوشت:

$$x \sin \omega t - y \cos \omega t = a \sin \omega t - b \cos \omega t،$$

$$x \sin \omega t + y \cos \omega t = -a \sin \omega t - b \cos \omega t$$

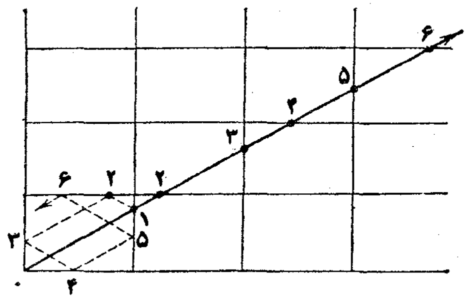
ومختصات نقطهٔ برخوردآن‌ها، چنین می‌شود:

$$x = -b \operatorname{cotg} \omega t$$

$$y = -a \operatorname{tg} \omega t$$

بنابراین $xy = ab$، یعنی نقطهٔ برخورد خطهای راست، روی یك هذلولی قراردارد.

مسألهٔ ۱۶.۳. به‌جای تـوپ بیلیارد، خـود مستطیل (میز بیلیارد) را منعکس می‌کنیم. بعد ازهمـهٔ انعکاس‌های ممکن مستطیل، نسبت به ضلع‌ها (بهتراست، همهٔ این‌ها رادریك‌صفحهٔ کاغذ شطرنجی‌انجام دهیم)، به‌شبکه‌ای ازخطهای راست می‌رسیم کـه صفحه را به‌مستطیل‌های $m \times n$ تقسیم کرده است. برای‌این‌که مسیرتوپ بیلیارد راروی میزبسازیم، می‌توان خط راستی رسم‌کرد که از مبداءِ O بگذرد و با یکی از ضلع‌ها، زاویه‌ای برابر ۳۰ درجه بسازد. باید ببینیم، این خط‌راست، چگونه بااین مستطیل‌ها برخورد می‌کند و، سپس‌آن‌ها را روی هم قرارْدهیم، تا مسیرتوپ بیلیارد روی مستطیل اصلی میزپیدا شود (شکل ۳۳).



شکل ۳۳

اکنون ثابت می‌کنیم، خط راستی‌کـه ازگرهٔ O شبکه، با زاویهٔ ۳۰ درجه نسبت به‌دیوارهٔ میزبیلیارد گذشته است، ازهیچ گرهٔ دیگری نمی‌گذرد. ازاین جا، درستی حکم مسأله ثابت می‌شود.

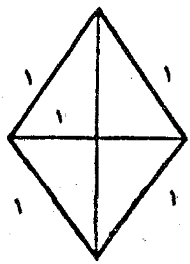
اگرتوپ‌بیلیارد از گرهٔدیگری عبورکند،آن وقت مثلث قائم‌الزاویه‌ای با زاویهٔ ۳۰ درجه به‌دست می‌آیدکـه، ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن،

عددهایی درست‌اند. ولی عدد $\operatorname{tg} ۳۰^\circ = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$ (که عددی گنگ است)، نمی‌تواند برابر با نسبت دوعدد درست باشد.

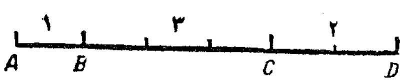
برای علاقه‌مندان. مسیرتوپ بیلیارد درمسألهٔ ۱۶.۳، همهٔ سطح میز را، به‌صورتی متراکم، «می‌پوشاند»، اگرچه همیشه، با یکی ازضلع‌های میز، زاویه‌ای برابر ۳۰ درجه می‌سازد. اگرمیزبیلیارد به‌شکل دایره یابیضی باشد، آن وقت، مسیرتوپ همه جا متراکم نیست و حوزه‌ای را تشکیل می‌دهدکه توپ ازآن جا می‌گذرد. به‌طور کلی، رفتار مسیرتوپ روی میز بیلیارد، در صفحه یا در فضای چند بعدی، ارتباط نزدیکی با شکل میزبیلیارد دارد. برای میزهایی که همهٔ کناره‌های آن‌ها، تحدبی به‌درون داشته باشد: مسیر توپ همه‌جا متراکم است وازهمسایگی هرنقطهٔدلخواه میزمی‌گذرد، درضمن، در جهت‌های مختلف. در این حالت، مسأله، به مدل ریاضی گازی که «اتم‌های» آن به‌هم برخورد می‌کنند، منجرمی‌شود. برای میزهای محدب و، به‌خصوص، وقتی که دیواره‌های مستقیم دارند، معمولاً، این ویژگی وجود ندارد وشرح مسیرتوپ، دراین حالت، تنها دربرخی موردهای خاص ممکن است.

مسألهٔ ۱۷.۳. پاسخ: الف) ممکن است. نمونهٔ آن درشکل ۳۴ داده شده است.

ب) ممکن نیست.



شکل ۳۵



شکل ۳۴

سه نقطه را درنظرمی گیریم که، همهٔ فاصله‌های دوبه‌دوی آن‌ها، برابر ۱ سانتی‌متر باشند. این سه نقطه، مثلث متساوی‌الاضلاعی را به ضلع ۱ سانتی‌مترتشکیل می‌دهند. فاصلهٔ نقطهٔ چهارم، با دو نقطه ازاین سه‌نقطه، برابر ۱ سانتی‌متراست، بنابراین، نقطهٔ چهارم هم، با این دو نقطه، یك‌مثلث متساوی‌الاضلاع می‌سازد. به‌این ترتیب، چهار نقطه، یك لوزی به ضلع ۱ سانتی‌متربه‌وجود می‌آورند(شکل ۳۵). ولی‌دراین صورت، ششمین فاصله، طولی برابر قطر بزرگتر این لوزی، یعنی $\sqrt{۳}$ سانتی‌متر خواهد داشت و $۱/۸\neq\sqrt{۳}$.

∇ این مسأله را به‌صورت زیرتعمیم می‌دهیم.

به‌ازای چه‌مقدارهایی از α، چهارنقطه: الف) درصفحه، ب) درفضاوجود دارند، به‌نحوی که فاصلهٔ بین دوبه‌دوی آن‌ها، برابر ۱، ۱، ۱، ۱، ۱ و α باشد؟

ازحل مسألهٔ ۱۷.۳ روشن است که پاسخ به‌شش الف) چنین است: تنها به ازای $\alpha=\sqrt{۳}$. از همین حل، پاسخ به شش ب) هم به دست می‌آید: به‌ازای $\sqrt{۳}\geqslant\alpha>۰$. در واقع، اگرلوزی را، در فضا، روی قطرکوچکتر آن خم کنیم، قانع می‌شویم که فاصلهٔ بین دو رأس مقابل آن، می‌تواند از $\sqrt{۳}$ تا ۰ تغییر کند.

برای علاقه‌مندان. به‌مشاهدهٔ دیگری می‌پردازیم: به‌ازای $۲\geqslant\alpha>\sqrt{۳}$ برای هرسه‌نقطه‌ازچهارنقطه، نابرابری مثلثی برقراراست (طول ضلع بزرگتر ازمجموع طول‌های دوضلع دیگر تجاوزنمی کند)؛ با وجود این، درفضا (و حتی درفضای n بعدی اقلیدسی)، نمی‌توان چهارنقطه پیداکردکه فاصله‌های دوبه‌دوی آن‌ها، این گونه باشند.

می‌توان پرسش کلی‌تری را مطرح کرد: آیا می‌توان: الف) در صفحه، ب) درفضا، چهارنقطهٔ ۱، ۲، ۳ و ۴ را طوری قرارداد که فاصله‌های دوبه‌دوی آن‌ها، به‌ترتیب، برابر عددهای مفروض $r_{۱۲}$، $r_{۱۳}$، $r_{۱۴}$، $r_{۲۳}$، $r_{۲۴}$ و $r_{۳۴}$ باشد (r_{ij}، فاصلهٔ بین دو نقطهٔ زوج ij است)؟ بی‌تردید همهٔ عددهای r_{ij} باید غیرمنفی باشند و درنابرابری مثلثی $r_{ij}+r_{jk}\geqslant r_{ik}$ صدق کنند ولی این، کافی نیست. برای پیداکردن پاسخی قانع کننده به ب)، لازم و کافی است

که، درضمن، دترمینان زیر، غیرمنفی باشد:

$$\Delta_۴ = \begin{vmatrix} ۰ & r_{۱۲}^۲ & r_{۱۳}^۲ & r_{۱۴}^۲ & ۱ \\ r_{۱۲}^۲ & ۰ & r_{۲۳}^۲ & r_{۲۴}^۲ & ۱ \\ r_{۱۳}^۲ & r_{۲۳}^۲ & ۰ & r_{۳۴}^۲ & ۱ \\ r_{۱۴}^۲ & r_{۲۴}^۲ & r_{۳۴}^۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{vmatrix}$$

و برای این‌که بتوانیم، چهارنقطه را، برصفحه قراردهیم، (پرسش «الف»)، باید دترمینان $\Delta_۴$ برابرصفرباشد.

اگرچهارنقطهٔ ۱، ۲، ۳ و ۴، درفضا مستقر شده باشند، آن‌وقت

$$\Delta_۴ = ۲^۳(۳!)^۲V^۲ = ۲۸۸V^۲$$

که درآن، V، حجم چهاروجهی با رأس‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ است. ازاین جا روشن می‌شودکه شرط $\Delta_۴ \geqslant ۰$، برای امکان استقرار نقطه‌ها درفضا، لازم است.

ببینیم، چرا شرطهای $r_{ij} \geqslant ۰$، $r_{ij}+r_{jk} \geqslant r_{ik}$ و $\Delta_۴ \geqslant ۰$ برای‌این منظورکافی هستند. اگرهمهٔ فاصله‌ها را، به‌جز $r_{۳۴}$ ثابت فرض کنیم، آن‌وقت، مثلث‌های ۱۲۳ و ۱۲۴ را می‌توان دورضلع مشترکشان، یال ۱۲، دوران داد (زاویهٔ دو وجهی φ، بین‌آن‌ها، از۰ درجه تا ۱۸۰ درجه تغییرمی‌کند). دراین صورت، $\Delta_۴$، به‌عنوان تابعی از$x = r_{۳۴}^۲$، به صورت یك سه‌جمله‌ای درجه دوم، باضریب منفی برای $x^۲$، درمی‌آید. ریشه‌های این سه‌جمله‌ای، متناظربا مقدارهایی از x هستند که، به‌ازای‌آن‌ها، مثلث‌ها برصفحه قرار می‌گیرند ($\varphi = ۰^\circ$ و $\varphi = ۱۸۰^\circ$). وقتی φ از۰ تا ۱۸۰ درجه تغییرکند، x همهٔ مقدارهای بین دو ریشه را قبول می‌کند، یعنی همهٔ مقدارهایی که، به‌ازای‌آن‌ها، داریم: $\Delta_۴(x) \geqslant ۰$.

یادآوری می‌کنیم که، با این روش و به کمك دترمینان، می‌توان دستور هرون را، برای S، مساحت مثلث با ضلع‌های $r_{۱۲}$، $r_{۱۳}$ و $r_{۲۳}$

نوشت:

$$S^{۲} = \frac{\Delta_{۳}}{۲^{۲}(۲!)^{۲}} = \frac{۱}{۱۶}\Delta_{۳}$$

که درآن داریم:

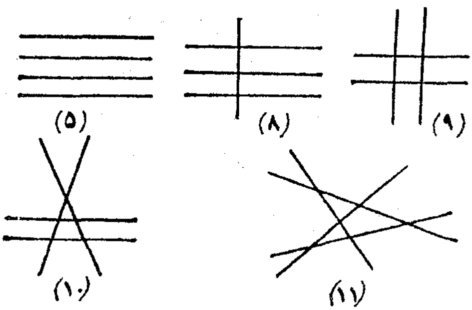
$$\Delta_{۳} = -\begin{vmatrix} ۰ & r_{۱۲}^{۲} & r_{۱۳}^{۲} & ۱ \\ r_{۱۲}^{۲} & ۰ & r_{۲۳}^{۲} & ۱ \\ r_{۱۳}^{۲} & r_{۲۳}^{۲} & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{vmatrix} =$$

$$= ۲r_{۱۳}^{۲}r_{۲۳}^{۲} + ۲r_{۱۲}^{۲}r_{۲۳}^{۲} + ۲r_{۱۲}^{۲}r_{۱۳}^{۲} - r_{۱۲}^{۴} - r_{۱۳}^{۴} - r_{۲۳}^{۴}$$

مسألهٔ ۱۸۰۳. پاسخ: ۵، ۸، ۹، ۱۰ یا ۱۱.

روی شکل ۳۶ نمونه‌های تقسیم صفحه، به ۵، ۸، ۹، ۱۰ و ۱۱ بخش نشان داده شده است. ثابت می‌کنیم، حالت دیگری وجود ندارد.

اگرهمهٔ خطهای راست با هم موازی باشند، تعداد بخش‌ها برابرپنج است. اکنون فرض می‌کنیم، همهٔ خطهای راست موازی نباشند. دو خط راست متقاطع را درنظرمی‌گیریم؛آن‌ها صفحه را به۴ زاویه تقسیم می‌کنند.



شکل ۳۶

هرخط راست تازه‌ای که رسم کنیم، دست کم دو بخش از چهار بخش قبلی را قطع و هرکدام ازاین بخش‌ها را، به‌دوبخش تقسیم می کند. بنابراین، هرخط راست بعدی، دست کم دو بخش تازه، به بخش‌های قبلی اضافه می کند. به‌خصوص، برای چهارخط راست، که بین آن‌ها خطهای راست موازی هم وجود دارد، صفحه را دست کم به ۲ × ۲ + ۴، یعنی ۸ بخش تقسیم می کنند.

اکنون ثابت می کنیم، تعداد بخش‌ها، ازیازده تجاوزنمی کند. خطهای راست را، به‌نوبت رسم می کنیم. دو خط راست اول، بیش از چهار بخش به‌وجود نمی‌آورند. خط راست سوم، نمی‌تواند بیش از دو نقطهٔ مشترك با خطهای راست قبلی داشته باشد و، بنابراین، حداکثرازسه بخش می گذرد؛ درنتیجه، تعداد بخش‌ها، نمی‌تواند بیش ازسه‌تا افزایش یابد.

خط راست‌چهارم، حداکثرهرسه خطراست قبلی‌را قطع‌می کند وازچهار بخش می گذرد؛ بنابراین، بیش‌ازچهاربخش، به‌بخش‌های قبلی اضافه نمی کند.

روی هم، بیش از ۴ + ۳ + ۴، یعنی ۱۱ بخش به دست نمی‌آید.

▽ این مسأله را می‌توان، به‌طورطبیعی، تعمیم داد: n خط راست مختلف، صفحه را به‌چند بخش می‌توانند تقسیم کنند؟

اگرشبیه بالا استدلال کنیم، به‌این نتیجه می‌رسیم که تعداد بخش‌های صفحه‌می‌تواند برابر $(n+1)$ ویا از $2n$ تا $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ (وخود این دو عدد) باشد. با وجود این، به‌نظر می‌رسدکه، همیشه نمی‌توان به‌هرتعداد از این بخش‌ها رسید. مثلاً، ۵ خط راست نمی‌توانند صفحه را به $2\times5+1$، یعنی ۱۱ بخش تقسیم کنند و، به‌طورکلی، n خط راست، به‌ازای $n\geqslant5$، نمی‌توانند صفحه را به $(2n+1)$ بخش تقسیم کنند. بنابراین، پاسخ به‌این پرسش جالب است که: به‌کدام عدد از عددهای از $2n$ تا $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ می‌توان دست یافت؟

همچنین، پاسخ به این پرسش هم جالب است که: درحالت کلی (وقتی که هیچ سه‌خط راستی ازیك نقطه نگذرند وهیچ دوخط راستی با هم موازی نباشند)، n خط راست، صفحه را به‌چگونه حوزه‌هایی تقسیم می کنند؟ برای

$n=4$، وقتی خط‌های راست بـه‌حالت کلی باشند، در شکل ۳۶ نشان داده شده است؛ درآن جا، بین سه حوزهٔ متناهی، یك حوزهٔ چهارضلعی ودوحوزهٔ سه ضلعی وجود دارد، وبین هشت حوزهٔ نامتناهی، سـه زاویه، چهارمثلث «نامتناهی» ویك چهارضلعی «نامتناهی». درحالت $n \geqslant 5$، حالت‌های مختلف دیگری هم پیدا می‌شود.

مسألهٔ مربوط به ارزیابی حداکثر تعداد مثلث‌هـا، درتقسیم صفحه به وسیلهٔ n خط راست، درماهیت خود، بامسألهٔ زیرکه متعلق به و.ای.آرنولد می‌باشد، هم‌ارزاست: فرض کنید، هر $a_n=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ حوزهٔ‌تقسیم‌را، به‌وسیلهٔ دو رنگ سیاه‌وسفید، طوری رنگ کرده باشیم که، هردوحوزهٔ‌مجاور (که دریك پاره خط یا نیم خط راست مشترك‌اند) به‌دورنگ مختلف باشند؛ درضمن، تعداد حوزه‌های به‌رنگ سیاه را b_n می‌گیریم. حداکثرمقدارنسبت $\frac{b_n}{a_n}$ چقدراست؟

می‌توان (مثلاً با استفاده از قضیـهٔ اویلر؛ مسألهٔ ۱۵.۵ را ببینید) ثابت کرد که $\frac{b_n}{a_n} \leqslant \frac{2}{3}$ (به‌ازای هرمقدار n)؛ درضمن، وقتی که‌حداکثرحوزه‌ها به‌رنگ سیاه باشند، همهٔ آن‌ها (یا تقریباً همهٔ‌آن‌ها) باید مثلثی شکل باشند.

چندی پیش، یو.پ.چه‌کانوف، بااستفاده ازویژگی‌های هندسی‌منحنی‌های درجهٔ سوم (بحث مسألهٔ ۲۲.۲ را ببینید)، ثابت کرد، به ازای مقدارهای به‌قدرکافی بزرگ n، می‌توان این نسبت را تـا حد دلخواه، به $\frac{2}{3}$ نزدیـك کرد. ارزیابی دقیق حداکثرتعداد حوزه‌های سیاه رنگ ومثلث‌ها، تنها برای برخی ازمقدارهای n معلوم شده است (ومثلاً، درحالت خاص $n=2^k$).

مسألهٔ ۱۹.۳. پاسخ: ۴ صفحه، فضا را به ۱۴ بخش، و ۵ صفحه، به ۲۲ بخش تقسیم می‌کنند.

سه صفحهٔ α_1، α_2 و α_3، فضا را به ۸ بخش تقسیم می‌کنند. وقتی که صفحـهٔ چهارم α_4 را رسم کنیم، هریـك از سه صفحهٔ قبلی را در خط راستی

قطع می‌کندو، این سه خط راست، از نقطهٔ مشترك صفحه‌ها می‌گذرند. این خط‌های راست، صفحهٔ $\alpha_۴$ را به ۶ زاویه تقسیم می‌کنند. بنابراین، صفحهٔ چهارم $\alpha_۴$، ازآن ۸ بخشی‌که به وسیلهٔ صفحه‌های $\alpha_۱$، $\alpha_۲$ و $\alpha_۳$ درفضا به وجودآمده بود، ۶ بخش را قطع می‌کند و، هرکدام از آن‌ها را، به ۲ بخش تقسیم می‌کند. به این ترتیب، ۶ بخش جدید اضافه می‌شود و روی هم ۸+۶، یعنی ۱۴ بخش ایجاد می‌گردد.

درست به‌همین ترتیب، صفحهٔ پنجم، صفحه‌های قبلی را در چهار خط راست قطع و، درنتیجه، $۸ = ۲ \times ۴$ بخش به‌فضا اضافه می‌کند؛ روی هم $۲۲ = ۸ + ۱۴$ بخش به‌وجود می‌آید.

▽ درحالت‌کلی هم، وقتی که با n صفحه سروکارداشته باشیم، می‌توان به‌همین ترتیب، استدلال کرد: صفحه‌های ششم، هفتم،... وnام، به‌ترتیب، ۲×۵، ۲×۶،... و $۲(n-۱)$ بخش جدید ازفضا را اضافه می‌کنند و، بنابراین، تعدادکل بخش‌ها، چنین می‌شود (بهتراست مجموع را از نخستین جمله بنویسیم):

$$۲+۲\times۱+۲\times۲+\ldots+۲(n-۱)=۲+۲[۱+۲+\ldots+$$

$$+(n-۱)]=۲+۲\times\frac{n(n-۱)}{۲}=n^۲-n+۲$$

مسألهٔ ۱۹.۳ را، می‌توان به‌صورت زیر، به‌مسألهٔ مسطحهٔ ۱۸.۳ منجر کرد: درنزدیکی یکی از n صفحه و در دو طرف‌آن، صفحه‌ای موازی با آن رسم می‌کنیم. دراین‌صورت، هر یك ازاین دو صفحه، به‌وسیلهٔ $(n-۱)$ فصل مشترك $(n-۱)$ صفحهٔ دیگرازصفحه‌های مفروض، به

$$\frac{۱}{۲}[(n-۱)^۲+(n-۱)+۲]=\frac{۱}{۲}(n^۲-n+۲)$$

بخش تقسیم می‌شود (بحث مسألهٔ ۱۸.۳ را ببینید)، و این $n^۲-n+۲$ بخش، درست به‌یك اندازه، درحوزه‌های مختلف فضا قراردارند.

روشن است که شرح تقسیم فضا، به‌وسیلهٔ n صفحه‌ای که ازیك نقطهٔ

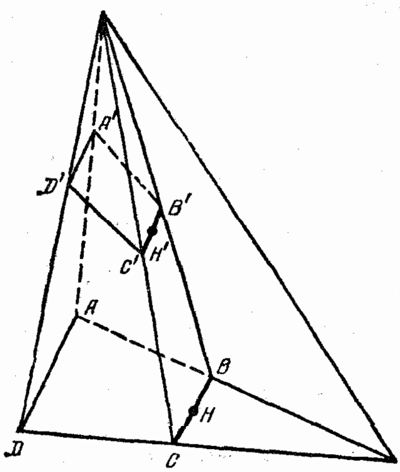
O می‌گذرند، با شرح تقسیم کرهٔ به‌مرکز O، بـه‌وسیلهٔ صفحه‌های دایره‌های عظیمه هم‌ارزاست. مثلاً، ۵ دایرهٔعظیمه، درحالت کلی، سطح کره را به ۱۰ مثلث، ۱۰ چهارضلعی و ۲ پنج ضلعی کروی تقسیم می‌کنند.

برای $n \geqslant 6$ (مثل حالـت مسألـهٔ ۱۸.۳ برای $n \geqslant 5$) ممکن است تقسیم‌های ازنوع‌های گوناگونی پدیدآید.

مسألهٔ ۲۰.۳. فصل مشترك وجه‌های روبه رو را درکنج چهار وجهی مفروض پیدا می‌کنیم. ازاین دوخط راست، صفحهٔ α را می‌گذرانیم. سپس، صفحهٔ β موازی با آن را، طوری رسم می‌کنیم که هرچهاریال کنج را قطع کند.

ثابت می‌کنیم، درمقطع، یك متوازی‌الاضلاع به‌دست می‌آید. صفحهٔ β با فصل مشترك صفحه‌های دو وجه‌روبه‌روموازی است و، بنابراین، این دو وجه را، در دوخط راست موازی قطع می‌کند. به این ترتیب، درمقطع یك چهارضلعی به‌دست می‌آید که هردوضلع روبه‌روی‌آن، با هم موازی‌اند.

∇ اکنون نشان مـی‌دهیم که، چگونه می‌توان به کمك این ساختمان،



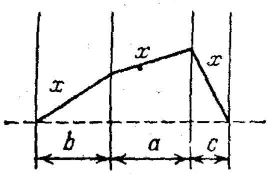
شکل ۳۷

دومسألهٔ ۹.۳ و۱۰.۳ را به‌هم ارتباط داد (شکل‌های ۲۵ و۳۷ را ببینید).

هرمی را درنظرمی گیریم که قاعدهٔ آن، یك ذوزنقه باشد. سطح جانبی هرم را با صفحه‌ای طوری قطع می‌کنیم که، در مقطع، یك متوازی‌الاضلاع به‌دست آید. دوضلع مقابل این متوازی‌الاضلاع با ذوزنقهٔ قاعده موازی است.

در تصویرمرکزی (به‌مرکز رأس‌کنج چهاروجهی)، متوازی‌الاضلاع به ذوزنقه تبدیل می‌شود و نسبت پاره‌خطهای راست روی خطهای موازی، ثابت می‌ماند.

مسألهٔ ۲۱.۳. سطح جانبی منشور را روی صفحه می‌گسترانیم (شکل ۳۸). وجود مقطع مورد نظر، هم‌ارز است با وجود خط شکسته‌ای که رأس‌های آن، روی چهار خط راست موازی این گسترده باشند و، درضمن، طول سه‌ضلع این خط شکسته با هم برابر (وبرابر x) باشند واگردوانتهای خط شکسته را به‌هم وصل کنیم، خط راستی عمود برخطهای راست موازی به‌دست‌آید. بنابراین، کافی است ثابت‌کنیم، معادلهٔ



شکل ۳۸

$$\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{x^2-b^2}=\sqrt{x^2-c^2} \qquad (1)$$

برای $a \geqslant b \geqslant c > 0$ و $a<b+c$ جواب دارد.

این تابع را درنظرمی‌گیریم:

$$y=f(x)=\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{x^2-b^2}-\sqrt{x^2-c^2}$$

این تابع، به‌ازای $x^2 \geqslant a^2$ معین وپیوسته است. توجه کنیم که

$$f(a)=\sqrt{a^2-b^2}-\sqrt{a^2-c^2} \leqslant 0$$

زیرا $b \geqslant c$؛ ولی

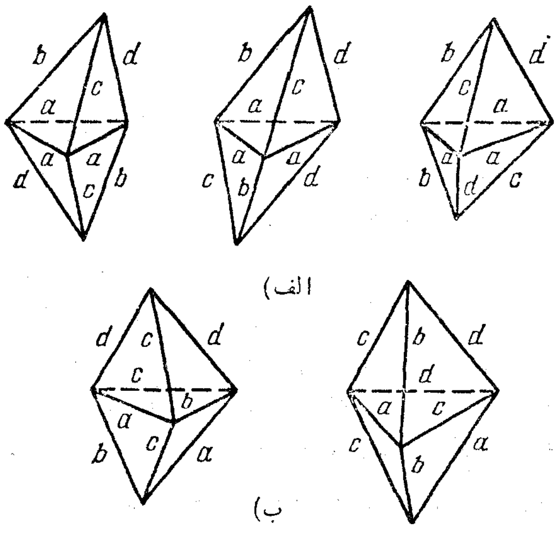
$$f(\sqrt{a^2+b^2})=b+a-\sqrt{a^2+b^2-c^2}>0$$

اگرمقدارهای تابع پیوسته، در دوانتهای یک بازه، علامت‌های مختلفی داشته باشند، آن وقت، مقدارتابع درنقطه‌ای واقع در درون این بازه برابر صفرمی‌شود. در مورد تابع ما، این وضع در بازهٔ $[a,\sqrt{a^2+b^2}]$ پیش آمده است. بنابراین، تابع $f(x)$، درنقطه‌ای مثل x_0 واقع در درون این بازه برابرصفرمی‌شود: $f(x_0)=0$ و معادلهٔ $f(x_0)=0$ دارای جواب است.

∇ جواب معادلهٔ (۱) با دستوری به‌دست می‌آید که، به کمك آن، می‌توان خط شکسته را با پرگاروخط‌کش رسم کرد.

مسألهٔ ۲۲۰۳. پاسخ: ممکن است.

مثالی می‌آوریم. هرمی را درنظرمی‌گیریم که، قاعدهٔ آن، مثلثی متساوی‌الاضلاع؛ فرجه‌های مجاوربه‌قاعده، زاویه‌هایی حاده ویال‌های جانبی آن با طول‌های مختلف باشند. به‌کمك دونمونه ازاین گونه هرم‌ها، می‌توان با قراردادن دوقاعدهٔ مساوی بریکدیگر، یک شش وجهی (هرم دوگانه) به‌سه‌طریق مختلف به‌دست‌آورد (شکل« ۳۹ ـ الف»). همهٔ آن‌ها به‌کمك یك

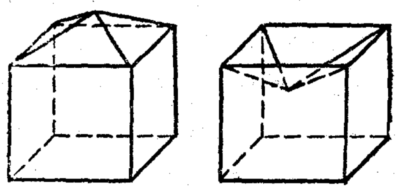


شکل ۳۹

دسته وجه به‌دست آمده‌اند، درحالی که با هم برابرنیستند. مثال دیگری را می‌توانید درشکل «۳۹ ـ ب» ببینید.

∇ اگرشهریارهمهٔ یال‌ها را شماره گذاری می‌کرد و روی هروجه مجاور به‌یال‌ها، شمارهٔ آن‌را می‌نوشت، آن‌وقت‌شروین، درست‌همان چندوجهی محدب را به‌دست می‌آورد: اگر وجه‌های یك چند وجهی محدب، به‌ترتیب، با وجه‌های متناظرخود درچند وجهی محدب دیگر، برابرباشند، آن وقت این چند وجهی‌ها برابرند (قضیهٔ کوشی).

قضیهٔ کوشی درمورد چند وجهی‌های مقعر، درستی خود را ازدست می‌دهد. مثالی ازآن را می‌توانید درشکل ۴۰ ببینید.

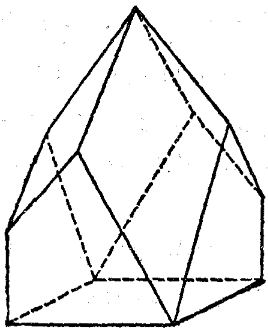


شکل ۴۰

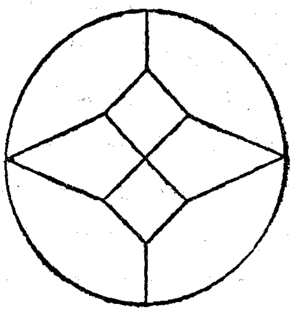
این پرسش، ازمیانهٔ سدهٔ نوزدهم دربرابر ریاضی‌دانان است: آیا چند‌وجهی ناپایداری وجود دارد که از وجه‌های پایداری که با لولا به‌هم وصل شده‌اند، درست شده‌باشد؟ تنهادرسال ۱۹۷۷، ر.کونه‌لی، ریاضی‌دان امریکایی، توانست نمونه‌ای ازاین گونه چند وجهی‌ها را بسازد.

مسألهٔ ۲۳.۳. پاسخ: بله، وجود دارد.

این گونه چندوجهی را می‌سازیم (شکل ۴۱ را ببینید). هرم $ABCDE$ را طوری می‌سازیم که قاعدهٔ آن، لوزی $ABCD$ باشد و تصویر رأس E بر قاعده، روی مرکزلوزی قرار گیرد. درصفحهٔ قاعده، مربع A_1BC_1D را به قطر BD می‌سازیم (BD، قطر کوچکترلوزی است) و، سپس، مکعبی را درنظرمی گیریم که قاعدهٔ پایین آن، این مربع باشد. برخورد مکعب با هرم



شکل ۴۱



شکل ۴۲

وبخشی از هرم راکه بالای مکعب قراردارد، انتخاب می‌کنیم. چند وجهی موردنظر، به‌دست می‌آید.

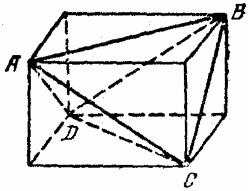
∇ به‌پرسش مسألهٔ ۲۳.۳، با اندکی هوشیاری، می‌شد خیلی ساده پاسخ داد. کافی است طرح مسطحه‌ای را که در شکل ۴۲ می‌بینید، رسم و، سپس، به‌قضیهٔ شته‌ی نیتس‌تکیه کنیم. این قضیه‌می‌گوید: به‌ازای شرطهای طبیعی درمورد طرح مسطحه، چند وجهی محدبی وجود دارد که، وجه‌ها و یال‌ها و رأس‌های آن، دوبه‌دو، همچون حوزه‌ها وخطها و گره‌های این‌طرح به‌هم مربوطاند (طرح شکل ۴۲ را با شکل ۴۱ مقایسه کنید).

مسألهٔ ۲۴.۳. مثلث $D_1D_2D_3$ با زاویه‌های حاده را باخطهای‌راست AB، AC و BC، که وسط ضلع‌ها را به‌هم وصل کرده‌اند، به‌عنوان گستردهٔ هرم $ABCD$ درنظرمی گیریم (رأس‌های D_1، D_2 و D_3، در یك نقطهٔ D، روی هم قرارمی‌گیرند؛ شکل ۴۳). اگر یالی متناظر با نصف ضلع مثلث $D_1D_2D_3$ باشد، آن وقت، یال متنافر با آن متناظربا پاره‌خط راستی موازی با آن است که وسط دوضلع مثلث را به‌هم وصل کرده است؛ و برعکس. بنابراین ، یال‌های متنافر هرم، با هم برابرند.

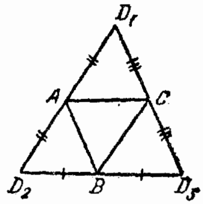
متوازی‌السطوحی می‌سازیم که چهار رأس غیرمجاورآن، بر رأس‌های هرم منطبق باشند. برای این منظور، ازهریال هرم، صفحه‌ای موازی یال

متنافر با آن رسم می‌کنیم. به این ترتیب، سه جفت صفحهٔ موازی به‌دست می‌آید که از برخورد آن‌ها یك متوازی‌السطوح ایجاد می‌شود. از آن جا که هر دو یال متنافر هرم، طولی برابر دارند، هر وجه متوازی‌السطوح، متوازی‌الاضلاعی با قطرهای برابر می‌شود، یعنی وجه‌های متوازی‌السطوح، به‌شکل مستطیل درمی‌آیند. متوازی‌السطوحی که همهٔ وجه‌های آن مستطیل باشند، یك مکعب مستطیل است.

▽ قضیهٔ عکس هم درست است: اگر رأس‌های یك هرم، چهار رأس غیرمجاور مکعب مستطیلی را تشکیل دهند، آن وقت، گستردهٔ این هرم، مثلثی با زاویه‌های حاده خواهد شد که وسط ضلع‌های آن به‌هم وصل شده



شکل ۴۴



شکل ۴۳

است. در واقع (شکل ۴۴ را ببینید)، به‌هر رأس، سه مثلث یکسان مربوط می‌شود؛ درضمن سه‌زاویه‌ای که، از این مثلث‌ها، در یك رأس به‌هم رسیده‌اند، سه‌نام مختلف دارند و می‌دانیم، مجموع زاویه‌های هر مثلث برابر ۱۸۰ درجه است، یعنی مجموع زاویه‌های مسطحه در رأس هرم، برابر ۱۸۰ درجه می‌شود.

هرمی که، همهٔ وجه‌های آن با هم برابر باشند (بدون این که لزومی به‌متساوی‌الاضلاع بودن این وجه‌ها باشد)، اغلب هرم متساوی‌الوجه نامیده می‌شود.

درچنین هرمی:

۱) یال‌های متنافر، دوبه‌دو، باهم برابرند؛

۲) مرکزکرۀ محاطی هرم برمرکزکرۀ محیطی آن منطبق است؛

۳) تصویر برهرصفحه‌ای که موازی با دویال متنافر باشد، یك مستطیل است؛

۴) مجموع زاویه‌های مسطحۀ کنجی که درهر رأس تشکیل شده، برابر ۱۸۰ درجه است؛

۵) هرپاره خط راستی که وسط دویال روبه‌رو را به‌هم‌وصل کند، براین یال‌ها عمود است. این گزاره را می‌توان به‌صورت گزارۀ زیر، که هم‌ارزآن است، بیان کرد: اگر هرم را به اندازۀ ۱۸۰ درجه دور پاره خط راستی که وسط دوضلع روبه‌رو را به‌هم وصل کرده است، دوران دهیم، هرم برخودش منطبق می‌شود (این پاره‌خط‌های راست، محورهای تقارن مکعب مستطیلی را تشکیل می‌دهند که برهرم محیط است)؛

۶) سه پاره‌خط راستی که وسط‌یال‌های روبه‌رو را به‌هم وصل می‌کنند، دوبه‌دو برهم عمودند.

جالب است که از هریك ازاین ویژگی‌ها، می‌توان‌ویژگی‌های دیگر را نتیجه گرفت.

مسألۀ ۲۵.۳. پاسخ: $\pi-\alpha$، $\pi-\beta$ و $\pi-\gamma$.

دونیم خط ازسه نیم خط راستی راکه رسم‌کرده‌ایم، درنظرمی‌گیریم. فرض می‌کنیم وجه‌های عمود بر این دونیم خط، زاویـه‌ای برابر α با هم ساخته باشند. یال این‌زاویۀ دو وجهی، برصفحه‌ای که ازدو نیم خط انتخابی گذشته، عمود است و، بنابراین، با این صفحه، زاویه‌ای برابر α می‌سازد. ضلع‌های این زاویه و نیم خط‌های انتخابی، صفحه را به‌چهار زاویه تقسیم می‌کنندکه، یکی ازآن‌ها، برابر α است، دوخط راست مجاورآن، که زاویۀ چهارم را تشکیل می‌دهند ـ زاویـۀ بین نیم خط‌های راست انتخابی ـ برابر $\pi-\alpha$ می‌شود.

∇ مسألۀ ۲۵.۳ نشان می‌دهدکه چگونه زاویه‌های مسطحۀ یك کنج

سه‌وجهی، با زاویه‌های دو وجهی یک کنج سه‌وجهی دیگرارتباط دارد. برای کنج‌های سه‌وجهی، می‌توان به‌سادگی دستورکسینوس‌ها را به‌دست‌آورد که، به کمک آن، با در دست داشتن زاویه‌های مسطحهٔ A، B و C، زاویه‌های دو وجهی کنج محاسبه می‌شود؛ مثلاً کسینوس زاویهٔ دو وجهی γ رامی‌توان، به‌این ترتیب، محاسبه کرد:

$$\cos\gamma = \frac{\cos C - \cos A \cos B}{\sin A \sin B} \qquad (1)$$

حل‌مسألهٔ‌عکس، دشوارتراست: با در دست‌داشتن زاویه‌های دووجهی α، β و γ، کسینوس زاویه‌های مسطحهٔ کنج‌را پیدا کنید. ولی اگرازساختمانی که درمسألهٔ ۲۵.۳ داشتیم، استفاده کنیم، به کمک کنج سه‌وجهی جدیدی که به‌دست می‌آید، دستور لازم، به‌خودی خود، پیدا می‌شود.

ازحل مسألهٔ ۲۵.۳ می‌دانیم که، اگر A، B و C زاویه‌های مسطحه و α، β و γ زاویه‌های دو وجهی یک کنج سه وجهی باشند، آن وقت $\alpha' = \pi - A$، $\beta' = \pi - B$، $\gamma' = \pi - C$، زاویه‌های دو وجهی و $A' = \pi - \alpha$، $B' = \pi - \beta$، $C' = \pi - \gamma$، زاویه‌های مسطحهٔ کنج سه وجهی جدید خواهند بود. دستور کسینوس‌ها را برای کنج جدید می‌نویسیم:

$$\cos\gamma' = \frac{\cos C' - \cos A' \cos B'}{\sin A' \sin B'}$$

دراین صورت

$$\cos(\pi - C) = \frac{\cos(\pi-\gamma) - \cos(\pi-\alpha)\cos(\pi-\beta)}{\sin(\pi-\alpha)\sin(\pi-\beta)}$$

که از آن جا، سرانجام به‌دست می‌آید:

$$\cos C = \frac{\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta} \qquad (2)$$

دستورهای (۱) و (۲) را، دستور کسینوس‌ها برای مثلث کروی هم

می‌نامند. کره‌ای به‌شعاع واحد را درنظرمی‌گیریم که مرکزآن، در رأس کنج سه‌وجهی باشد. کنج سه‌وجهی، روی سطح این کره، یك مثلث با ضلع‌های منحنی جدا می‌کند. ضلع‌های این مثلث، کمان‌هایی از دایره‌های عظیمهٔ به شعاع واحد وطول‌های‌آن‌ها، به‌ترتیب، برابر با مقدار زاویه‌های مسطحهٔ A، B و C (برحسب رادیان) از کنج سه وجهی می‌شوند. زاویه‌های این مثلث، همان زاویه‌های دو وجهی α، β و γ، ازکنج سه وجهی هستند. به‌کمك دستور (۱) می‌توان زاویه‌های این مثلث را از روی سه ضلع‌آن، و به‌کمك دستور (۲) ضلع‌های‌آن را از روی سه زاویه به‌دست‌آورد.

کنجی هم‌که در مسألهٔ ۲۵.۳ ساختیم، مثلث دیگری ازسطح‌کره جدا می‌کندکه قطبی مثلث اول نامیده می‌شود. در مسألهٔ ۲۵.۳ روشن شدکه چه‌رابطه‌ای بین ضلع‌ها و زاویه‌های این دومثلث وجود دارد.

مسأله‌هایی برای‌کارمستقل دانش‌آموزان

۲۶.۳. a، b، c، d و e، پاره خطهای راست مفروض‌اند. به‌کمك پرگاروخط‌کش، این پاره خطهای راست را بسازید:

۱) $\sqrt{ab}$؛ ۲) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$؛ ۳) $\frac{ab}{c}$؛

۴) $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$؛ ۵) $\frac{abc}{de}$؛ ۶) $a\sqrt[4]{2}$؛ ۷) $\sqrt{a^2+ab+ac}$؛

۸) $\sqrt[4]{abcd}$؛ ۹) $\sqrt[4]{a^3b+ab^3}$؛ ۱۰) $\sqrt{\frac{a^3}{b}+\frac{c^3}{d}}$

۲۷.۳. روی خط راستی، پاره خطهای راست a و b $(b>a)$ داده شده‌اند. تنها به‌کمك یك پرگار، پاره خط راستی بسازیدکه طول آن بایکی ازدستورهای زیرداده شده باشد:

۱) $\sqrt{b^2-a^2}$؛ ۲) $a\sqrt{3}$؛ ۳) $a\sqrt{2}$؛ ۴) $\sqrt{b^2+a^2}$

۲۸.۳. ازمثلثی، دو ضلع a و b معلوم است $(b>a)$ و می‌دانیم زاویهٔ روبه‌رو به یکی ازاین ضلع‌ها، دو برابر زاویهٔ روبه‌رو به ضلع دیگر است. مثلث را به‌کمك پرگاروخط‌کش رسم کنید.

۲۹.۳. یك دایره ونقطه‌ای دربیرون‌آن مفروض‌اند. به‌کمك پرگارو خط‌کش، قاطعی‌رسم کنیدکه ازنقطهٔ‌مفروض بگذرد و وتری در دایره به‌وجود آوردکه با پاره‌خط راست بیرون دایره، طولی برابرداشته باشد.

۳۰.۳. دوشعاع دایره‌ای را رسم‌کرده‌ایم. به‌کمك پرگار و خط‌کش، وتری در دایره رسم کنیدکه به‌وسیلهٔ این دوشعاع، به سه بخش برابرتقسیم شود.

۳۱.۳. به‌کمك پرگار وخط‌کش، درقطعه‌دایرهٔ مفروض، مربعی محاط کنید.

۳۲.۳. روی صفحهٔ مختصاتی، نیم موج سینوسوئید رسم شده است $(y=\sin x, 0\leqslant x\leqslant\pi)$. به‌کمك‌پرگاروخط‌کش، مستطیلی‌بامحیط‌مفروض P را طوری رسم کنید که دو رأس آن روی سینوسوئید و دو رأس دیگرش روی محور Ox باشد.

۳۳.۳. دوپاره خط با طول‌های ۱ و π داده شده‌اند. به‌کمك پرگارو خط‌کش، مربعی رسم کنیدکه با دایرهٔ مفروض، هم‌ارزباشد.

۳۴.۳. نمودارتابع $y=x^3$ روی صفحهٔ مختصاتی رسم شده است. با استفاده ازاین نمودار و به کمك پرگاروخط‌کش، زاویهٔ مفروض را به سه بخش برابرتقسیم کنید.

۳۵.۳. دو آئینه با هم، زاویه‌ای حاده می‌سازند. پرتو نور بریکی از ضلع‌های‌آن می‌تابد. ثابت کنید، هرقدرهم که زاویه‌کوچك باشد، پرتو نور، بعد ازچند انعکاس، ازآن خارج می‌شود.

۳۶.۳. توپ بیلیارد از یك‌گوشهٔ میزمستطیلی بیلیارد با اندازه‌های ۸۶×۱۹، بازاویهٔ ۴۵ درجه حرکت می‌کند. درکدام یك ازسوراخ‌هایی که

درگوشه‌های میز وجود دارنـد، می‌افتد و، قبل ازآن، چندبار به کناره‌های میزمی‌خورد (هم توپ وهم سوراخ را، نقطه به‌حساب می‌آوریم).

۳۷.۳. روی ضلع AB از مثلث ABC، مثلث متساوی‌الاضلاعی ساخته‌ایم. مطلوب است محاسبهٔ فاصلهٔ رأس C تا مرکزاین مثلث، به‌شرطی که طول ضلع AB برابر c واندازهٔ زاویهٔ C برابر ۱۲۰ درجه باشد.

۳۸.۳. تنها به کمك خط‌کشی کـه تقسیم‌های یك سانتی متری دارد، زاویهٔ مفروض را به‌دوبخش برابرتقسیم کنید.

۳۹.۳. یك پانزده ضلعی منتظم، به‌کمك پرگاروخط‌کش رسم‌کنید.

۴۰.۳. دونقطهٔ A و B را، روی صفحه، طوری انتخاب کرده‌ایم که فاصلهٔ بین‌آن‌ها، برابرعدد درست n باشد. همهٔ دایره‌های به‌مرکزهای A و B را، که شعاع آن‌هـا عددی درست است، رسم کـرده‌ایم. روی شبکـهٔ حاصل، دنباله‌ای از گـره‌ها (نقطه‌هـای بـرخورد دایره‌هـا) را عـلامت می‌گذاریم، به نحوی که هر دو گـرهٔ مجاور، رأس مقابـل چهار ضلعی منحنی‌الخط باشند:

الف) شکل را با انتخاب واحد ۰/۵ سانتی متری و $n=12$ رسم کنید.

ب) ثابت کنید، نقطه‌هـای این دنباله، یـا روی محیط یك بیضی واقع‌اند و یا روی یك هذلولی.

۴۱.۳. الف) شکلی ازسه پاره خط راست، روی صفحه رسم‌کنید که دارای شش محورتقارن باشد.

ب) آیاممکن‌استدراجتماع سه پاره‌خط‌راست درصفحه، بیش‌ازشش محورتقارن داشته باشیم؟

۴۲.۳. مثلـث ABC مفروض است. روی ضلـع‌هـای AB و BC، نقطه‌های K و L را طوری پیداکنیدکه:

الف) $AK=KL=LB$؛ ب) $AK=KL=LC$.

۴۳.۳. وسط پاره‌خط راست مفروضی، علامت‌گذاشته‌شده است. تنها

به‌کمك خط‌کش، خط راستی رسم کنید که از نقطهٔ مفروضی بگذرد و با این پاره خط راست، موازی باشد.

۰۴۴۰۳ دوخط راست موازی و، روی یکی ازآن‌ها، پاره خط راستی داده شده است. به‌کمك خط‌کش، پاره خط راستی بسازیدکه، طول آن، دو برابرطول پاره خط راست مفروض باشد.

۰۴۵۰۳ روی سه‌ضلع مثلثی با زاویه‌های حاده، سه‌دایره رسم کرده‌ایم، به‌نحوی که این ضلع‌ها، قطرهای دایره را تشکیل دهند. ثابت کنید، وترهای مشترك دو به‌دوی این دایره‌ها، ارتفاع‌های مثلث‌اند.

۰۴۶۰۳ مثلثی با زاویه‌های‌حاده مفروض است. روی هر ضلع مثلث، نقطه‌ای را درنظر گرفته‌ایم وبه‌رأس روبه‌روی آن ضلع وصل کرده‌ایم. روی این سه پاره خط راست، و به قطر هر یك از آن‌ها، سه‌دایره رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، وترهای‌مشترك دوبه‌دوی این‌دایره‌ها، درمحل برخورد ارتفاع‌های مثلث اصلی، به‌هم می‌رسند.

۰۴۷۰۳ بهنام چهارنقطه روی صفحه علامت گذاشت، شش فاصلهٔ بین دوبه‌دوی این نقطه‌ها را اندازه گرفت و، این شش عدد را، به‌اطلاع شیرین رسانید. شیرین، چهارنقطه روی صفحه پیدا کرد که فاصلهٔ دوبه‌دوی آن‌ها، همان شش عدد بود. آیا شکلی که شیرین به‌دست‌آورده است، باید برشکل رسم شده به‌وسیلهٔ بهنام منطبق باشد، به‌شرطی که:

الف) شیرین تنها همین شش عدد را دراختیارداشته باشد؛

ب) علاوه بر آن، شیرین بداند که هر فاصله مربوط به کدام دو نقطه است؟

۰۴۸۰۳ روی‌صفحه، n خط‌راست‌مختلف‌رسم‌شده‌است. اگر ازنقطه‌ای، k عدد ازاین خط‌های راست گذشته‌باشد، آن وقت، عدد $(k-1)$را، مضرب این نقطه‌می‌نامیم. اگرمجموع مضرب‌های‌همهٔ نقطه‌های‌برخوردخط‌های‌راست را، m بگیریم، ثابت کنید، این n خط راست، صفحه را به $(n+m+1)$

بخش تقسیم می‌کنند.

۴۹.۳. الف) جفت عدد(n_1, n_2)را $(n_1 \leqslant n_2)$، قابل اجرا می‌نامیم به‌شرطی‌که بتوان مثلث را، به‌وسیلهٔ خط راستی‌که ازنقطهٔ درونی آن می‌گذرد، به n_1 ضلعی و n_2 ضلعی تقسیم‌کرد. چند جفت عدد قابل اجرا وجود دارد؟

ب) چهارعدد(n_1, n_2, n_3, n_4) را $(n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3 \leqslant n_4)$، قابل‌اجرا می‌نامیم، وقتی‌که مثلث را بتوان با رسم دوخط راستی که ازنقطهٔ درونی آن می‌گذرند، به n_1 ضلعی، n_2 ضلعی، n_3 ضلعی و n_4 ضلعی تقسیم‌کرد. چندگروه چهارعددی قابل اجرا وجود دارد؟

۵۰.۳. چهارصفحه، فضا را، به ۱۵ بخش‌تقسیم‌کرده‌اند. درچند بخش ازاین بخش‌ها، می‌توان‌کره‌ای جا دادکه برهرچهارصفحه مماس باشد؟

۵۱.۳. هریال یك چهاروجهی را به۴ بخش برابرتقسیم و، از هرنقطهٔ تقسیم، صفحه‌هایی عمود بر همهٔ وجه‌های‌آن رسم‌کرده‌ایم. چهار وجهی به‌چند بخش تقسیم می‌شود؟

۵۲.۳. چهارکره، فضا را، حداکثربه چند بخش تقسیم می‌کنند؟

۵۳.۳. الف) اگرصفحه‌ای ازمرکزمکعب بگذرد و بریکی ازقطرهای آن عمود باشد، دربرخورد با مکعب چه‌مقطعی به‌دست می‌دهد؟

ب) قطر d ازمکعب را، به‌عنوان محور Ox انتخاب می‌کنیم (نقطهٔ O، مرکز مکعب است) و $S(x)$ را مساحت مقطع مکعب با صفحه‌ای می‌گیریم که برقطرd عمود و ازنقطهٔ x واقع برقطر گذشته است. نمودار تابع $S(x)$ را رسم‌کنید.

۵۴.۳. دریك چهاروجهی، زاویه‌های دو وجهی مربوط به هردویال روبه‌رو، برابرند. آیا درست است‌که، دراین چهاروجهی، یال‌های روبه‌رو طولی برابردارند؟

۵۵.۳. یك شش وجهی بسازیدکه در هر رأس‌آن سه‌یال به هم رسیده باشند و، درضمن، درست دو وجه‌آن، مستطیل باشند.

۵۶۰۳. کره‌ای به‌شعاع واحد وکنجی سه وجهی که رأس‌آن درمرکز کره است، مفروض‌اند. ثابت‌کنید، مساحت مثلث کروی که از برخورد کنج با سطح کره به‌دست می‌آید، برابراست با $(\alpha+\beta+\gamma)-\pi$، که درآن، α، β و γ، عبارتند از مقدار زاویه‌های دو وجهی این‌کنج سه وجهی (که در واقع، همان زاویه‌های مثلث‌کروی‌اند).

۴

نابرابری. اکسترمم. ارزیابی.

۴.۰۱ درمثلث قائم‌الزاویه، a و b ضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قائمه، c وتر و h، ارتفاع وارد بروتراست. ثابت کنید $c+h$ از $a+b$ بزرگتراست.

۴.۰۲ معادلهٔ $ax^{2}+bx+c=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد و $a+b+c<0$. عدد c چه‌علامتی دارد؟

۴.۰۳ مستطیل $ABCD$ داده‌شده‌است. نقطهٔ دلخواهی‌درآن انتخاب و ازآن جا، دوخط راست موازی با ضلع‌های مستطیل رسم‌کرده‌ایم. این خطهای راست، مستطیل را به‌چهارمستطیل کوچکترتقسیم کرده‌اند. ثابت کنید، یکی از دومستطیلی که شامل نقطه‌های A و C هستند، مساحتی دارد که از $\frac{1}{4}$ مساحت مستطیل اصلی تجاوزنمی‌کند.

۴.۰۴ ۱۰۰۰ ریال دربانك گذاشته‌ایم. در کدام حالت، بعد ازگذشت ۱۰سال، پول بیشتری نصیب ما می‌شود: وقتی که بانك ۵٪ مبلغ موجودی

را درهرسال به‌آن اضافه کند یا وقتی $\frac{5}{12}$٪ موجودی‌را هرماه به‌آن بیفزاید؟

۵.۴. اتوبوس‌را وقتی پربه‌حساب‌می‌آوریم که‌بیش از پنجاه مسافرداشته باشد. دوبازرس، ستون‌اتوبوس‌ها را متوقف‌می‌کنند. اولی درصد اتوبوس‌های پر را محاسبه می‌کند و دومی، درصد مسافرانی را که در اتوبوس‌های پر نشسته‌اند. کدام یك درصد بیشتری به‌دست می‌آورند؟

۶.۴. حداقل تعداد شرکت‌کنندگان درانجمن ریاضی چند نفرمی‌تواند باشد، به‌شرطی که بدانیم، تعداد پسرها در این انجمن: الف) کمتراز ۵۰٪، ولی بیشتراز ۴۰٪؛ ب) کمتراز ۴۴٪، ولی بیشتر از ۴۳٪ باشند؟

۷.۴. می‌دانیم لاستیك‌های جلوی یك کامیون بعد از ۱۵۰۰۰ کیلومتر و لاستیك‌های عقبی بعد از ۲۵۰۰۰ کیلومترفرسوده می‌شوند (درهرچرخ عقب، دولاستیك و درهرچرخ جلو، یك لاستیك ازهمان نوع وجود دارد). لاستیك‌های چرخ‌ها را چگونه عوض کنیم تا، با همان لاستیك‌های اولیه، حداکثرمسافت را طی کند؟ این مسافت را پیدا کنید.

۸.۴. دخترکوچك خانواده، نان شیرینی را در ۱۰ دقیقه، نان و پنیر را در ۱۳ دقیقه و یك لیوان شیر را در ۱۴ دقیقه می‌خورد؛ برادربزرگترش، همین کارها را، به‌ترتیب، در ۶، ۶ و ۷ دقیقه انجام می‌دهد. اگر صبحانهٔ این دونفر، شامل نان شیرینی، نان و پنیر ویك لیوان شیرباشد، حداقل زمان صرف صبحانه چقدراست؟

۹.۴. بهروز ومینا، معمولاً درایستگاه مترو با هم ملاقات می‌کنند. فرض می‌کنیم، قطارهای مترو، در فاصله‌های زمانی برابر از این ایستگاه بگذرند. باراول، بهروز ۱۲ دقیقه منتظر مینا ماند و، دراین مدت، ۵ قطار عبورکرد. باردوم ۲۰ دقیقه درانتظار مینا بود و، دراین مدت، ۶ قطارعبور کرد. بارسوم، ۳۰ دقیقه منتظربود. دراین فاصلهٔ زمانی، چند قطار می‌تواند عبور کند؟

۱۰.۴. چند صندوق بزرگ، روی هم ۱۰ تن وزن دارند، در ضمن،

سنگینی هیچ‌کدام از آن‌ها، از یك تن بیشتر نیست. دست‌کم، چند کامیون سه تنی، برای حمل این صندوق‌ها، کافی است؟

۴.۱۱. سه عدد پیدا کنید که، هر کدام از آن‌ها، برابر با مجذور تفاضل دو عدد دیگر باشد.

۴.۱۲. ثابت کنید، برای هر دو عدد طبیعی m و n، $(m, n > ۱)$، دست‌کم، یکی از عددهای $\sqrt[n]{m}$ و $\sqrt[m]{n}$، از $\sqrt[۳]{۳}$ تجاوز نمی‌کند.

۴.۱۳. به‌ازای کدام n، عبارت

$$\frac{\log ۲ \cdot \log ۳ \cdots \log n}{۱۰^{n}}$$

به‌حداقل مقدار خود می‌رسد؟

۴.۱۴. عددهای $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، $x_۴$ و $x_۵$ غیرمنفی‌اند و می‌دانیم:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱$$

حداکثر مقدار $x_۱x_۲ + x_۲x_۳ + x_۳x_۴ + x_۴x_۵$ را پیدا کنید.

۴.۱۵. درستی نابرابری زیر را، برای هر مقدار a، b و c پیدا کنید:

$$a^۴ + b^۴ + c^۴ \geqslant a^۲bc + b^۲ac + c^۲ab$$

۴.۱۶. ثابت کنید، برای عددهای مثبت a و b، همیشه داریم:

$$۲\sqrt{a} + ۳\sqrt[۳]{b} \geqslant ۵\sqrt[۵]{ab}$$

۴.۱۷. ثابت کنید، درهرشش ضلعی محدب، قطری پیدا می‌شود که، از آن، مثلثی را جدا می‌کند، به‌نحوی که مساحت آن از $\frac{۱}{۶}$ مساحت شش‌ضلعی تجاوز نمی‌کند.

۴.۱۸. ثابت کنید، نابرابری زیر، برای زاویه‌های دلخواه α، β و γ، که مقداری بین ۰ و π داشته باشند، برقرار است:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leqslant ۳\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{۳}$$

۱۹.۴. از بین چهارضلعی‌هایی که سه ضلع برابر واحد دارند، مساحت کدام یك حداکثر است؟

۲۰.۴. چند وجهی محدبی که پنج رأس دارد، درکره‌ای به‌شعاع واحد محاط شده است. حداکثر حجم این چند وجهی، چقدر است؟

۲۱.۴. روی یك کاغذ شطرنجی که طول ضلع هرخانهٔ آن برابر واحد است، دایره‌ای به‌شعاع ۱۰ رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، بیش از ۲۵۰ گره، از شبکه، در درون این دایره وجود دارد.

۲۲.۴. آیا می‌توان ازنقطهٔ O، ۱۵ نیم خط راست درفضا طوری رسم کرد که، زاویهٔ بین هردونیم خط دلخواه، بیش از ۶۰ درجه باشد؟

۲۳.۴. روی محیط دایرهٔ اول، از دو دایرهٔ برابر، سه‌کمان و هر یك برابر ۲۵ درجه و روی محیط دایرهٔ دوم، دوکمان و هرکدام برابر ۳۰درجه جداکرده‌ایم. ثابت کنید، می‌توان‌دایرهٔ دوم‌را روی دایرهٔ اول‌طوری قرارداد که، کمان‌های جدا شده، یکدیگر را قطع نکنند.

۲۴.۴. پنج وزنه، با وزن‌های متفاوت دراختیار داریم. ثابت کنید، با ۷ باراستفاده از ترازو، می‌توان این پنج وزنه را به ترتیب صعودی وزن‌های آن‌ها، درکنارهم چید (با هرباراستفاده ازترازو، می‌توان، وزن دو وزنه را با هم مقایسه کرد).

بحث و بررسی مسأله‌ها

مسألهٔ ۱.۴. اگرمساحت مثلث را به دو طریق محاسبه کنیم، به‌دست می‌آید: $ch=ab$؛ ازآن‌جا $h=\frac{ab}{c}$. نابرابری $c+h>a+b$ را، می‌توان این‌طور نوشت:

$$c+\frac{ab}{c}>a+b$$

اگردوطرف این نابرابری را در c ضرب کنیم ($c>\circ$)، به نابرابری زیر که هم‌ارز نابرابری فوق است، می‌رسیم:

$$c^{۲}-c(a+b)+ab>\circ$$

و یا

$$(c-a)(c-b)>\circ$$

و این نابرابری، همیشه برقرار است، زیرا وتر، ازهر ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه بزرگتراست.

∇ درحل این مسأله، در واقع، ثابت کردیم: اگرحاصل‌ضرب‌های ch و ab، ازدو زوج عدد مثبت، برابرباشند، آن‌وقت، مجموع دوعددی‌بزرگتر است که «از هم دورترند»؛ اگرعددهای مثبت a و b، بین عددهای مثبت c و h باشند، آن وقت $c+h>a+b$. این حقیقت را، ازاین‌جا هم می‌توان نتیجه گرفت که، تابع $f(x)=x+\frac{A}{x}$، به ازای $x\geqslant\sqrt{A}$، بـه‌طور یکنوا، صعودی است.

مسألهٔ ۲۰۴. پاسخ: $c<\circ$.

تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ را درنظرمی‌گیریم. بنابرشرط مسأله، این تابع نمی‌تواند برابر صفر شود، بنابراین تمامی نمودار آن، یا دربالای محور Ox ویا درپایین‌آن قراردارد.

از طرف دیـگر $f(۱)=a+b+c$، بنابرشرط، عددی منفی است، یعنی سهمی نمودارتابع $f(x)$، در زیرمحور Ox واقع‌است. به‌این ترتیب، $f(x)$، به‌ازای همهٔ مقدارهای x، منفی است‌و، درنتیجه، $f(\circ)=c<\circ$.

∇ در واقع، درحل مسألـه، ازپیوستگی تـابع f استفاده‌کردیم: اگر تابعی دریك بازهٔ معین، پیوسته باشد و برابرصفر نشود، آن وقت، مقدارتابع دراین بازه، همیشه علامت ثابتی دارد.

مسألهٔ ۳.۴. محورهای تقارن مستطیل‌را رسم می‌کنیم. این محورهای تقارن، مستطیل را به‌چهاربخش برابرتقسیم می‌کنند. اگرنقطهٔ انتخابی، در یکی از دو بخشی‌که شامل نقطه‌های A و C است، یا برمحیط این بخش‌ها قرارگیرد، آن وقت، درستی حکم مسأله، روشن است.

اکنون فرض می‌کنیم، نقطهٔ مفروض، دریکی ازدوبخش دیگرمستطیل واقع باشد. قرینهٔ هردوخط‌راستی راکه رسم‌شده‌اند، نسبت به‌مرکزمستطیل، پیدا می‌کنیم.

این چهارخط راست (دوخط راست تقسیم، ودوقرینهٔ‌آن‌ها)، مستطیل را به ۹ بخش تقسیم می‌کنند: چهاربخش به‌مساحت S_1، دوبخش به‌مساحت S_2، دوبخش به‌مساحت S_3 و یک بخش بـه‌مساحت S_0 (شکل ۴۵). باید ثابت‌کنیم که، S_1+S_2 یا S_1+S_3 از $\frac{1}{4}S$ تجاوزنمی‌کند (S را، مساحت مستطیل گرفته‌ایم). چون

$$4S_1+2S_2+2S_3=S-S_0<S$$

بنابراین

$$2S_1+S_2+S_3<\frac{1}{2}S \Rightarrow (S_1+S_2)+(S_1+S_3)<\frac{1}{2}S$$

یعنی یـکی ازعـددهـای S_1+S_2 و S_1+S_3 از $\frac{1}{4}S$ کوچکتراست (اگر هیچ‌کدام، از $\frac{1}{4}S$ کوچکتر نباشند، آن وقت مجموع‌آن‌ها، از $\frac{1}{2}S$ کـوچکتر نمی‌شود).

S_1	S_3	S_1
S_2	S_0	S_2
S_1	S_3	S_1

شکل ۴۵

∇ مسألهٔ فضایی زیر، که با مسألهٔ ۳.۴ شباهت دارد، جالب است: فرض کنید $V_1 \leqslant V_2 \leqslant \ldots \leqslant V_8$ حجم‌های هشت بخشی باشند که از یک

متوازی‌السطوح به‌حجم‌واحد، به‌وسیلهٔ سه‌صفحه‌ای که ازیك نقطهٔ آن گذشته وبا وجه‌های آن موازی‌اند، به‌دست‌آمده است؛ هریك ازمقدارهای V_i، $(i=1,2,\ldots,8)$، درچه محدوده‌ای تغییر می‌کنند؟ مثلاً معلوم شده است‌که $\frac{1}{8}\geqslant V_4\geqslant 0$، و برای هرمقدار V_4 از این فاصله، تقسیم متناظری ازمتوازی‌السطوح وجود دارد (برای اثبات نابرابری $V_4\leqslant\frac{1}{8}$، بهتراست ازاین حقیقت استفاده‌کنیم که، دوبخش‌روبه‌رو، حجم‌هایی دارندکه، حاصل‌ضرب‌آن‌ها، از $\frac{1}{64}$ تجاوزنمی‌کند). همین مسأله را، برای متوازی‌السطوح n بعدی به‌حجم واحد هم، می‌توان طرح کرد.

مسألهٔ ۴.۴. پاسخ: وقتی بانك درصد را ماه به‌ماه محاسبه‌کند.

فرض‌کنیم، درصد را سالی‌یك‌بارمحاسبه‌کنند. دراین‌صورت، موجودی درآخرسال اول، چنین است:

$$1000+1000\times\frac{5}{100}=1000\left(1+\frac{5}{100}\right)\ \text{ریال}$$

درآخرسال دوم، باز هم۵٪ این مبلغ، به‌موجودی اواضافه می‌شود و به‌این صورت درمی‌آید:

$$1000\left(1+\frac{5}{100}\right)\left(1+\frac{5}{100}\right)=1000\left(1+\frac{5}{100}\right)^2\ \text{ریال}$$

و اگراستدلال را به‌همین ترتیب ادامه دهیم، موجودی درآخر سال دهم برابرمی‌شود با

$$1000\left(1+\frac{5}{100}\right)^{10}\ \text{ریال}$$

اکنون به‌حالتی می‌پردازیم که درصدها را بعد ازگذشت هر ماه درنظر بگیرند. دراین‌حالت،مقدار موجودی، بعد از ۱۰ سال،یعنی‌بعد ازگذشت ۱۲۰

ماه، چنین می‌شود:

$$۱۰۰۰\left(۱+\frac{۵}{۱۲۰۰}\right)^{۱۲۰} \text{ ریال}$$

ثابت می‌کنیم، مبلغ دوم ازمبلغ اول بیشتر است. برای این منظور، کافی است ثابت کنیم:

$$۱+\frac{۵}{۱۰۰}<\left(۱+\frac{۵}{۱۲۰۰}\right)^{۱۲}$$

محاسبهٔ سمت راست نابرابری را آغاز مـی‌کنیم‌که برابراست با حاصل‌ضرب دوازده عامل یکسان

$$\left(۱+\frac{۵}{۱۲۰۰}\right)\left(۱+\frac{۵}{۱۲۰۰}\right)\ldots\left(۱+\frac{۵}{۱۲۰۰}\right)$$

روشن است که از ضرب جمله‌های برابر واحد درپـرانتزها، عدد ۱ به دست می‌آید. اگرعدد $\frac{۵}{۱۲۰۰}$ را دریکی ازپرانتزها درنظربگیریم و در یازده پرانتز دیگرعدد واحد را، آن وقت ازحاصل ضرب‌آن‌ها $\frac{۵}{۱۲۰۰}$ به دست می‌آید و چون ۱۲ جمله ازاین گونه داریم، روی هم برابر $۱۲\times\frac{۵}{۱۲۰۰}$، یـعـنـی $\frac{۵}{۱۰۰}$ می‌شود. بنابراین

$$\left(۱+\frac{۵}{۱۲۰۰}\right)^{۱۲}=۱+\frac{۵}{۱۰۰}+\ldots$$

و به‌روشنی از $۱+\frac{۵}{۱۰۰}$ بزرگتراست.

∇ فرض‌کنید K ریال دربانك‌گذاشته باشیم وبانك $p\%$، سالیانه‌به‌آن اضافه‌کند. اگرشبیه حل مسألهٔ ۴.۴ استدلال کنیم، معلوم می‌شود که میزان

موجودی، درپایان m سال برابراست با

$$K\left(1+\frac{p}{100}\right)^m \text{ ریال}$$

که آن را، دستورمحاسبهٔ رنج مرکب هم می‌نامند.

این مقدار را، می‌توان از طرف پایین و به‌کمك نابرابری برنولی ارزیابی کرد. نابرابری برنولی چنین است:

$$(1+x)^n > 1+nx \quad (x>0, n>1)$$

(درحل مسألهٔ ۴.۴ داشتیم: $x=\frac{5}{1200}$ و $n=12$؛ اثبات نابرابری رادر حالت کلی، می‌توان شبیه استدلال مسألهٔ ۴.۴ انجام داد.)

ازاین نابرابری معلوم می‌شودکه، اگرزمان محاسبهٔ درصد راکوتاه‌تر ومیزان درصد رابه‌همان نسبت کمتر کنیم، میزان مبلغ‌دریافتی بیشترمی‌شود. واین، به‌معنای‌آن است که دنبالهٔ

$$x_n=\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$$

به‌ازای $a>0$، دنباله‌ای صعودی است. با وجود این، معلوم شده است که، باکوتاه‌کردن زمان محاسبهٔ درصد، نمی‌توان به‌سود خیلی بالایی رسید، زیرا این دنباله، با آن‌که صعودی است، محدود است و ازمرزمعینی تجاوز نمی‌کند. درواقع، حداین دنباله، برابراست با e^a. اگرمبلغ مربوط به‌مسألهٔ ۴.۴ را، به‌کمك ماشین حساب، محاسبه‌کنیم، در حالت اول به‌مبلغ ۱۶۲۹ ریال و درحالت دوم به مبلغ ۱۶۴۷ ریال می‌رسیم؛ و درحالت حدی: $1000\times e^{0/05}\approx 1649$.

مسألهٔ ۵.۴. پاسخ: درصد مسافرانی که دراتوبوس‌های پرنشسته‌اند، بیشترازدرصد اتوبوس‌های پراست.

تعداد اتوبوس‌های پر را k و تعداد اتوبوس‌هائی راکه پرنیستند، l فرض می‌کنیم. همچنین، تعداد مسافرانی راکه در اتوبوس‌های پر نشسته‌اند

برابر A و تعداد بقیهٔ مسافران را B فرض می‌کنیم. دراین صورت داریم:

$$\begin{cases} A > ۵۰k \\ B \leqslant ۵۰l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{A}{k} > ۵۰ \\ \\ \frac{B}{l} \leqslant ۵۰ \end{cases} \Rightarrow \frac{A}{k} > \frac{B}{l}$$

ازنابرابری اخیر، نتیجه می‌شود:

$$\frac{B}{A} < \frac{l}{k} \;,\; \frac{A+B}{A} < \frac{l+k}{k}$$

ازآن جا

$$۱۰۰ \times \frac{A}{A+B} > \frac{k}{l+k} \times ۱۰۰$$

که درآن، درسمت چپ، درصد مسافرانی‌که دراتوبوس‌های پرنشسته‌اند و، درسمت راست، درصد اتوبوس‌های پرقراردارد.

مسألهٔ ۶.۴. پاسخ: الف) ۷؛ ب) ۱۶.

تعداد شرکت کنندگان در انجمن ریاضی را n و تعداد پسرها را m می‌گیریم. با توجه به‌طبیعی بودن دو عدد m و n، باید حداقل مقدار n را طوری پیداکنیم که، برای‌آن، داشته باشیم:

$$\frac{۲}{۵} < \frac{m}{n} < \frac{۱}{۲} \qquad (*)$$

اگرمقدار n را با آغاز از ۲، به‌ترتیب مورد آزمایش قرار دهیم، می‌بینیم‌که کسر $\frac{۳}{۷}$، نخستین کسری است‌که ضمن آزمایش به‌دست می‌آید و در شرط (*) صدق می‌کند. ۷، کوچکترین عددی است که برای n می‌توان درنظر گرفت.

▽ توجه کنیم که کسر $\frac{۳}{۷}$ را می‌توان ازاین‌راه به‌دست آورد: مخرج آن، مجموع مخرج‌ها وصورت‌آن، مجموع صورت‌های دو کسر $\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۱}{۲}$ است.

برای هردو کسر مثبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ $\left(\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\right)$، کسر $\frac{a+c}{b+d}$، درنابرابری زیرصدق می‌کند:

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$

ومعمولاً مقدارمیانی این کسرها نامیده می‌شود.

اگر کسرهای ساده نشدنی را، که مخرجی کوچکتریا برابر n دارند، به‌ترتیب صعودی بنویسیم، به‌این جدول می‌رسیم:

$$\frac{۰}{۱}\quad\frac{۱}{۱}$$

$$\frac{۰}{۱}\quad\frac{۱}{۲}\quad\frac{۱}{۱}$$

$$\frac{۰}{۱}\quad\frac{۱}{۳}\quad\frac{۱}{۲}\quad\frac{۲}{۳}\quad\frac{۱}{۱}$$

$$\frac{۰}{۱}\quad\frac{۱}{۴}\quad\frac{۱}{۳}\quad\frac{۱}{۲}\quad\frac{۲}{۳}\quad\frac{۳}{۴}\quad\frac{۱}{۱}$$

$$\frac{۰}{۱}\quad\frac{۱}{۵}\quad\frac{۱}{۴}\quad\frac{۱}{۳}\quad\frac{۲}{۵}\quad\frac{۱}{۲}\quad\frac{۳}{۵}\quad\frac{۲}{۳}\quad\frac{۳}{۴}\quad\frac{۴}{۵}\quad\frac{۱}{۱}$$

$$\frac{۰}{۱}\quad\frac{۱}{۶}\quad\frac{۱}{۵}\quad\frac{۱}{۴}\quad\frac{۱}{۳}\quad\frac{۲}{۵}\quad\frac{۱}{۲}\quad\frac{۳}{۵}\quad\frac{۲}{۳}\quad\frac{۳}{۴}\quad\frac{۴}{۵}\quad\frac{۵}{۶}\quad\frac{۱}{۱}$$

$$\frac{۰}{۱}\quad\frac{۱}{۷}\quad\frac{۱}{۶}\quad\frac{۱}{۵}\quad\frac{۱}{۴}\quad\frac{۲}{۷}\quad\frac{۱}{۳}\quad\frac{۲}{۵}\quad\frac{۳}{۷}\quad\frac{۱}{۲}\quad\frac{۴}{۷}\quad\frac{۳}{۵}\quad\frac{۲}{۳}\quad\frac{۵}{۷}\quad\frac{۳}{۴}\quad\frac{۴}{۵}\quad\frac{۵}{۶}\quad\frac{۶}{۷}\quad\frac{۱}{۱}$$

. . . .

دراین جا، سطرnام را (که به رشتهٔ فاره‌ی معروف است)، می‌توان به‌کمك سطر $(n-1)$ام، به‌این ترتیب پیدا کرد: درسطر $(n-1)$ام، هردو کسر مجاور $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ راکه، درآن‌ها، مجموع مخرج‌ها برابرn است پیدا می‌کنیم و بین آن‌ها، کسرمیانی $\frac{a+c}{b+d}$ را می‌نویسیم. در ضمن، همهٔ کسرهای سطر $(n-1)$ام هم، درجای خود، به‌کسرnام منتقل می‌شوند.

درمسألهٔ «الف»، درسطرهفتم $(n=۷)$، برای نخستین‌بار، به‌کسر $\frac{۳}{۷}$ برمی‌خوریم که بین $\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۱}{۲}$ قرار دارد.

ولی درمسألهٔ «ب»، این‌آزمایش، به‌قدر کافی خسته‌کننده است. به‌این ترتیب، عمل می‌کنیم. باید جواب نابرابری‌های

$$\frac{۴۳}{۱۰۰}<\frac{m}{n}<\frac{۴۴}{۱۰۰}=\frac{۱۱}{۲۵} \qquad (۱)$$

را، برای کمترین مقدارطبیعی n پیدا کنیم.

کسرها را معکوس ومقداردرست‌آن‌ها را جدا می‌کنیم:

$$۲\frac{۱۴}{۴۳}>\frac{n}{m}>۲\frac{۳}{۱۱};$$

ازآن‌جا

$$\frac{۱۴}{۴۳}>\frac{n-۲m}{m}>\frac{۳}{۱۱} \qquad (۲)$$

دوباره، کسرها را معکوس می‌کنیم:

$$۳\frac{۱}{۱۴}<\frac{m}{n-۲m}<۳\frac{۲}{۳},$$

یعنی

$$\frac{۱}{۱۴}<\frac{m-۳(n-۲m)}{n-۲m}=\frac{۷m-۳n}{n-۲m}<\frac{۲}{۳} \qquad (۳)$$

ویکبار دیگر

$$۱۴>\frac{n-۲m}{۷m-۳n}>\frac{۳}{۲} \qquad (۴)$$

برای نخستین بار، درمرزهای نابرابری‌ها، عدد درست ظاهر می‌شود. کوچکترین عدد درست بزرگتر از $\frac{۳}{۲}$، برابر است با ۲، و دستگاه معادله‌های

$$n-۲m=۲،\ \ ۷m-۳n=۱$$

درمجموعهٔ عددهای طبیعی، جواب دارد: $n=۱۶$ و $m=۷$.

ثابت می‌کنیم که، همین جواب، جواب مسأله است. ازنابرابری‌های (۲) تا (۴) نتیجه می‌شود:

$$n-۲m>۰،\ \ ۷m-۳n\geqslant ۱،\ \ n-۲m\geqslant ۲$$

بنابراین

$$n=۷(n-۲m)+۲(۷m-۳n)\geqslant ۷\times ۲+۲\times ۱=۱۶$$

∇ اگرحل مسأله را تجزیه وتحلیل کنیم، معلوم می‌شود که، درواقع، کسرهای $\frac{۴۳}{۱۰۰}$ و $\frac{۱۱}{۲۵}$ را به کسر مسلسل تبدیل کرده‌ایم:

$$\frac{۴۳}{۱۰۰}=\frac{۱}{۲+\frac{۱۴}{۴۳}}=\frac{۱}{۲+\frac{۱}{۳+\frac{۱}{۱+۱۳}}},$$

$$\frac{۱۱}{۲۵}=\frac{۱}{۲+\frac{۳}{۱۱}}=\frac{۱}{۲+\frac{۱}{۳+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۲}}}}$$

سپس، بخش مشترك این کسرها را، در گامی انتخاب می‌کنیم که، در آن جا، تجزیه‌ها با هم اختلاف پیدا کرده‌اند: دریکی به‌عدد ۱۳ و دردیگری به‌عدد $\frac{۱}{۲}$ برخورد می‌کنیم. عدد۱، کوچکترین عدد درستی است که بین $\frac{۱}{۲}$ و ۱۳ قرار دارد؛ همین عدد ۱ را به‌جای آن‌ها می گذاریم. سرانجام به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{۲+\frac{۱}{۳+\frac{۱}{۱+۱}}}=\frac{۷}{۱۶}$$

این روش کلی، می‌تواند، کسر $\frac{m}{n}$ را با کوچکترین مخرج n، برای‌ما پیدا کند، به‌نحوی که درهرفاصلهٔ دلخواه $۰<\alpha<\frac{m}{n}<\beta$ قرار گرفته باشد.

مسألهٔ ۷۰۴ پاسخ: حداکثرفاصله‌ای کـه کامیون می‌تواند حرکت کند، برابر است با $۲۰۴۵۴\frac{۶}{۱۱}$ کیلومتر. لاستیك‌ها را باید طوری جابه‌جا کرد که، هرکدام از آن‌ها، یك سوم راه را درجلو کامیون باشد.

کامیون ۶ لاستیك دارد (۲ لاستیك در جلو و ۴ لاستیك در عقب). بنابرشرط مسأله، از هرلاستیك‌جلویی $\frac{۱}{۱۵۰۰۰}$ و ازهرلاستیك عقبی $\frac{۱}{۲۵۰۰۰}$ فرسوده می‌شود. بنابراین درهرکیلومتر، روی هم به‌اندازهٔ

$$\frac{۲}{۱۵۰۰۰}+\frac{۴}{۲۵۰۰۰}=\frac{۱۱}{۳۷۵۰۰}$$

لاستیك فرسوده می‌شود (هر لاستیك را یك واحد به‌حساب می‌آوریم). فرض کنید، کامیون، x کیلومتر حرکت کرده باشد. دراین‌صورت $\frac{۱۱x}{۳۷۵۰۰}$ لاستیك خود را فرسوده کرده است. چون فقط ۶ لاستیك دارد، بنابراین باید داشته باشیم:

$$\frac{۱۱x}{۳۷۵۰۰} \leqslant ۶ \Rightarrow x \leqslant ۲۰۴۵۴\frac{۶}{۱۱}$$

برای این‌که کامیون بتواند تمامی این راه را طی کند، باید لاستیك‌ها را طوری جابه‌جا کرد که، هرکدام ازآن‌ها، یك سوم این فاصله را در جلو کامیون باشند؛ در این صورت، همهٔ آن‌ها در پایان مسیر، باهم فرسوده می‌شوند.

مسألهٔ ۸۰۴. پاسخ: ۱۲ دقیقه.

روشن است، اگراین خواهروبرادربخواهند صبحانه را درحداقل زمان ممکن بخورند، بایدآغاز وپایان صرف صبحانه، برای هردونفر، یکی باشد، در غیراین صورت، یکی ازآن‌ها می‌تواند به‌دیگری کمك کند و زمان صرف صبحانه را کوتاه‌تر کند.

بخشی ازنان شیرینی، نان و پنیر و شیر راکه خواهرصرف می‌کند، به‌ترتیب x، y و z می‌نامیم، دراین صورت، سهمی که نصیب برادرمی‌شود، به ترتیب، برابر $(۱-x)$، $(۱-y)$ و $(۱-z)$ و، در ضمن، زمان صرف صبحانه، برای هردو یکی است:

$$t = ۱۰x + ۱۳y + ۱۴z = ۶(۱-x) + ۶(۱-y) + ۷(۱-z)$$

به‌این‌ترتیب، بایدحداقل‌زمان $t = ۱۰x + ۱۳y + ۱۴z$ را، به‌شرطی پیدا کنیم که برای x و y و z داشته باشیم:

$$۰ \leqslant x \leqslant ۱,\quad ۰ \leqslant y \leqslant ۱,\quad ۰ \leqslant z \leqslant ۱,$$

$$۱۰x + ۱۳y + ۱۴z = ۶(۱-x) + ۶(۱-y) + ۷(۱-z)$$

در رابطهٔ اخیر، z را برحسب x و y محاسبه می‌کنیم:

$$z=\frac{۱}{۲۱}(۱۹-۱۶x-۱۹y)$$

که اگرآن را، در رابطه‌ای که t را می‌دهد، قراردهیم، به‌دست می‌آید:

$$t=-\frac{۲}{۳}x+\frac{۱}{۳}y+\frac{۳۸}{۳}$$

دیده می‌شودکه هرچه x بزرگتر و y کوچکتر باشد، مقدار t کمتر می‌شود. حداکثرمقدارممکن را بـرای x و حـداقل مقدارممکن را بـرای y انتخاب می‌کنیم: $x=۱$، $y=۰$. دراین صورت $t=۱۲$ و $z=\frac{۱}{۷}$ می‌شود.

بنابراین، وقتی صرف صبحانه در حداقل زمان ممکن تمام می‌شود که دخترك تمام نان شیرینی و $\frac{۱}{۷}$ لیوان شیر، و برادرش تمام نـان و پنیر و $\frac{۶}{۷}$ لیوان شیر را بخورند.

▽ مسألهٔ ۸.۴ را به‌یك مسألهٔ «برنامه‌ریزی خطی» منجرکردیم: پیدا کردن می‌نیمم یك تابع خطی، بااین‌شرط که متغیرها غیرمنفی‌اند ودردستگاهی از نامعادله‌ها و معادله‌ها صدق می‌کنند.

اگربخواهیم چنین مسأله‌ای را، برای $n>۳$ متغیر حل کنیم، روش بالامنجربه محاسبه‌های طولانی و خسته‌کننده می‌شود، ولی مـی‌توان قاعدهٔ کلی ساده‌ای‌آورد که طرح مناسب را برای بهترین توزیع متغیرها به دست دهد.

فرض می‌کنیم، دخترك، خوراکی iام را در زمان a_i و برادرش‌همین خوراکی را درزمان b_i صرف‌کند. درضمن فرض‌کنیم، خوراکی‌ها را به‌ردیف صعودی، برحسب نسبت این زمان‌ها، شماره‌گذاری‌کرده باشیم:

$$\frac{a_۱}{b_۱}\leqslant\frac{a_۲}{b_۲}\leqslant\dots\leqslant\frac{a_n}{b_n} \qquad (۱)$$

طرح مطلوب، برای این که صرف صبحانه درحداقل زمان انجام شود، به‌صورت زیراست: دختراز نخستین خوراکی آغازمی‌کند و به‌ردیف درجهت شمارهٔ خوراکی‌ها جلو می‌رود؛ برادرش از خوراکی‌آخر آغاز بـه خوردن می‌کند و درجهت عکس شمارهٔ خوراکی‌ها جلومی‌رود.

درمسألهٔ ما، این ردیف بـرای خوراکی‌ها برقـرار می‌شود: اول نان شیرینی، دوم شیر، سوم نان و پنیر. در این صورت، نسبت زمان‌ها، در نابرابری‌های

$$\frac{۱۰}{۶}\leqslant\frac{۱۴}{۷}\leqslant\frac{۱۳}{۶}$$

صدق می‌کنند. در۶ دقیقهٔ اول، پسرنان و پنیر را و دختربخشی از شیرینی را می‌خورند. در۴ دقیقهٔ بعد، دخترشیرینی را تمام می‌کند و پسر $\frac{۴}{۷}$ شـیر را می‌خورد. بالاخره، در۲ دقیقهٔ‌آخر، بقیهٔ شیر راباهم می‌خورند، که درنتیجه، $\frac{۱}{۷}$ شیرنصیب دختر و $\frac{۶}{۷}$آن، نصیب پسرمی‌شود.

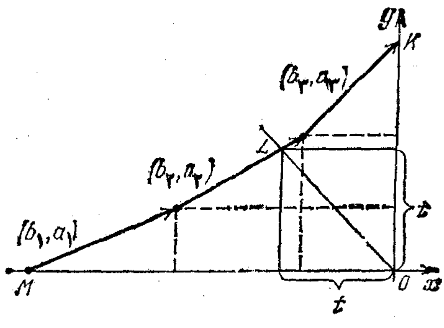
برای اثبات درستی این طرح، فرض می‌کنیم، میزان انرژی خوراکی iام برابر (a_i+b_i) کالـری باشد؛ درایـن صورت، سرعت صرف (در واحد زمان) iامین خوراکی، برای دختربرابر $\frac{a_i+b_i}{a_i}=۱+\frac{b_i}{a_i}$ و بـرای پسر برابـر $\frac{a_i+b_i}{b_i}=۱+\frac{a_i}{b_i}$ می‌شود. می‌بینیم که هرچه $\frac{a_i}{b_i}$ کمترباشد، سرعت دختربیشتر و سرعت پسرکمتراست.

به‌این ترتیب، برای این‌که، درطول زمان t، بتوان حداکثرکالری را مصرف کرد، باید دختر، در ردیف شماره‌ها و پسر در ردیف عکس شماره‌ها، به‌خوردن‌خوراکی‌ها مشغول شوند. فرض کنید، دختروپسر، در زمان t، همهٔ

$$(a_۱+b_۱)+(a_۲+b_۲)+\ldots+(a_n+b_n)$$

کالری را به‌دست‌آورده باشند؛ آن وقت، با هرطرح دیگری، در همین مدت زمان t، کالری کمتری به دست می‌آورند، یعنی نمی‌توانند همهٔ خوراکی‌ها را مصرف‌کنند.

می‌توان این فرایند را به کمك نمودار نشان داد. در ربع دوم صفحهٔ مختصاتی Oxy، خط‌شکسته‌ای‌را رسم می‌کنیم‌که حلقه‌های‌آن را، بردارهای با مختصات (b_1, a_1)، (b_2, a_2)، ...، (b_n, a_n)،به‌ردیفی‌که نابرابری‌های(۱) مشخص می‌کنند، تشکیل‌دهند؛ نقطهٔ M، ابتدای این خط‌شکسته روی محور Ox ونقطـهٔ K، انتهای آن، روی محور Oy است (در شکـل ۴۶، حالت $n=3$ نشان‌داده‌شده‌است؛ درمسألهٔ ۸.۴، سه‌برداری که‌خط‌شکسته‌را تشکیل می‌دهند، دارای مختصات (۶،۱۰)، (۷،۱۴) و(۶،۱۳) هستند). نقطهٔ L، محل برخورد ایـن خط شکسته را بـا خط راست $x+y=0$ (نیمساز ربع دوم دستگـاه مختصات) درنظرمـی‌گیریم. عـرض نقطهٔ L، یعنی t، معرف حداقل زمان است؛ درضمن، بخش ML ازخط شکسته، معرف خوراکی‌هایی است‌که دختر خورده است وبخش LK معرف خوراکی‌هایی که پسر خورده است.



شکل ۴۶

مسألهٔ ۹.۴. پاسخ: ۱۰ یا ۱۱ قطار.

فرض‌کنید قطارها، با فاصلهٔ زمانی T دقیقه به T دقیقه، عبور کنند.

در ۱۲ دقیقه، ۵قطار گذشته است که ۴ فاصلهٔ زمانی را تشکیل می‌دهند، یعنی

$$۴T\leqslant ۱۲ \Rightarrow T\leqslant ۳$$

چون زمان لازم برای رسیدن نخستین قطار (ازاین ۵ قطار) و زمان بعد از عبورآخرین قطار، بیش از T دقیقه نیست، بنابراین

$$T+۴T+T>۱۲ \Rightarrow T>۲$$

به‌این ترتیب $۲<T\leqslant ۳$.

به‌همین ترتیب، ازاین حقیقت که، در ۲۰ دقیقه ۶قطارعبور کرده است، می‌توان نتیجه گرفت: $\frac{۲۰}{۷}<T\leqslant ۴$. ازاین دونابرابری، به‌دست می‌آید:

$$۲\frac{۶}{۷}<T\leqslant ۳$$

فرض کنیم، در ۳۰ دقیقه، n قطارعبور کرده باشد، دراین صورت، با استدلالی شبیه استدلال بالا نتیجه می‌شود:

$$(n-۱)T\leqslant ۳۰<(n+۱)T \Rightarrow \frac{۳۰}{T}-۱<n\leqslant\frac{۳۰}{T}+۱$$

که اگر نابرابری‌های $۲\frac{۶}{۷}<T\leqslant ۳$ را به‌حساب‌آوریم، به‌دست می‌آید:

$$۹<n\leqslant ۱۱ \Rightarrow n=۱۰ \text{ یا } n=۱۱$$

اگر $T=۳$ باشد و نخستین قطار، بلافاصله بعد ازآمدن بهروز به‌ایستگاه عبور کند، آن‌وقت، در ۳۰ دقیقه، ۱۱ قطارمی گذرد؛ ولی اگربرای $T=۳$، نخستین قطار، یك دقیقه بعد از ورود بهروزعبور کند، آن وقت‌در ۳۰ دقیقه، تنها ۱۰ قطارعبورخواهدکرد. به‌این‌ترتیب، هریك ازدوحالت، ممکن است پیش آید.

∇ این مسأله را می‌توان حالت خاصی، ازمسألهٔ کلی‌تر زیردانست: روی یك خط راست، نقطه‌هایی را علامت گذاشته‌ایم، به نحوی که

فاصلهٔ هردو نقطهٔ مجاور، برابر T است. مطلوب است محاسبهٔ n، تعداد نقطه‌هایی که روی پاره‌خطی به‌طول b قراردارند.

پاسخ: $\frac{b}{T}-1<n\leqslant\frac{b}{T}+1$.

مسألهٔ ۱۰۵.۴ پاسخ: ۵ کامیون سه تنی.

ابتدا ثابت می‌کنیم که ۴ کامیون، ممکن است کافی نباشد. ۱۳ صندوق یکسان درنظرمی‌گیریم که وزن هرکدام ازآن‌ها، $\frac{10}{13}$ تـن بـاشد. در ایـن صورت، درهـر کامیون، بیش از ۳ صندوق و در ۴ کامیون، بیش از ۱۲ صندوق نمی‌توان قرارداد. یك صندوق باقی می‌ماند.

اکنون ثابت می‌کنیم که ۵ کامیون، همیشه کافی است. در واقع، بارهر کامیون، از ۲ تن کمترنیست (اگربار کامیون از ۲ تن کمترباشد، می‌توانیم یك صندوق دیگر، که وزنی کمتر از یـك تن دارد، بـه‌آن اضافه کنیم). بنابراین، بار ۵ کامیون، از ۱۰ تن کمترنمی‌شود.

∇ مسأله‌ای کلی‌تـر. چند صندوق، روی هم به وزن T تن داریم که وزن هیچ‌کدام ازآن‌ها ازیك تـن تجاوزنمی‌کند. حداقل چندکامیون p تنی $(p>1)$ لازم است تا بتوانیم همهٔ صندوق‌ها را، با آن‌ها حمل کنیم؟

$\gamma=\frac{p}{[p]+1}$ می‌گیریم که، درآن، $[p]$ عبارت است ازبخش درست عدد p. دراین صورت، جواب عبارت است ازکوچکترین عدد درست N، که بزرگتریا برابربا $\frac{T-\gamma}{p-\gamma}$ باشد.

با مثال می‌توان نشان دادکـه، تعدادکمتر کامیون، ممکن است کافی نباشد. برای این‌منظور، همهٔ صندوق‌ها راهم وزن (وبا وزنی اندکی بیشتر از γ) می‌گیریم.

برای اثبات کافی بودن N کامیون، بهتراست ازپیش قضیهٔ زیراستفاده کنیم: اگـر چند جعبه داشته باشیم که روی هم، بیش از p تن وزن داشته

باشند (و وزن هرکدام ازآن‌ها، بیش ازیك تن نباشد)، آن وقت می‌توان در هرکامیون p تنی، بیش از $p-\gamma$ تن بارکرد.

درمسألهٔ ۱۰.۴ داریم: $p=۳$، $T=۱۰$ و $\gamma=\frac{۳}{۴}$. از پیش قضیه نتیجه می‌شود که در هرکامیون سه‌تنی می‌توان بیش از $۲\frac{۱}{۴}$ تن قرارداد؛ همهٔ بارها ۱۰ تن وزن دارند و، همان طورکه می‌دانیم، می‌توان‌آن‌ها را با ۵ کامیون حمل‌کرد؛ و این، کوچکترین عدد درستی است که بزرگتر یابرابر باشد با

$$\frac{T-\gamma}{p-\gamma}=\frac{۳۷}{۹}$$

برای علاقه‌مندان. جالب است که این مسأله را، با «مسألهٔ سنگ‌ها»، که اغلب وبه‌صورت‌های مختلف کاربرد دارد، مقایسه کنیم. «مسألهٔ سنگ‌ها» چنین است:

چند سنگ با وزن‌های معلوم $a_۱$، $a_۲$،...،a_n وکامیونی با ظرفیت p تن دراختیارداریم ($a_۱$، $a_۲$،...،a_n و p، عددهایی طبیعی‌اند). آیا می‌توان از بین این سنگ‌ها، چند سنگ طوری انتخاب کرد که روی هم p تن وزن داشته باشند؟ به‌زبان دیگر، آیا عددهای $x_۱$، $x_۲$،...،x_n را، برابر صفر یا واحد، می‌توان پیداکرد، به‌نحوی که برابری

$$a_۱x_۱+a_۲x_۲+\dots+a_nx_n=p$$

برقرارباشد؟

این مسأله، به گروه به اصطلاح «مسأله‌های جداسازی» تعلق دارد که، هنوز، برای حل‌آن‌ها، روش عام و ساده‌ای پیدا نشده است.

مسألهٔ ۱۱.۴. پاسخ: یا هرسه عدد برابرصفرند، یا یکی ازآن‌ها برابر صفر و دوتای دیگربرابر واحدند.

توجه می‌کنیم که، هرسه عدد، غیرمنفی‌اند، زیرا هرکدام از آن‌ها،

مجذور کامل‌اند. سه عدد را x و y و z می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\circ \leqslant z \leqslant y \leqslant x$. دراین صورت

$$x-z \geqslant y-z \geqslant \circ \Rightarrow (x-z)^{۲} \geqslant (y-z)^{۲}$$

ازطرف دیگر $y=(x-z)^{۲}$ و $x=(y-z)^{۲}$. به‌این ترتیب، ازیک طرف، بنابر فرض $y \geqslant x$ وازطرف‌دیگر $x \geqslant y$؛ یعنی $y=x$. دراین‌حالت، به‌دست می‌آید: $z=\circ$ و $x^{۲}=x$، یعنی $x=\circ$ یا $x=۱$.

∇ درصورت مسأله، صحبتی ازنابرابری نبود، ولی درحل مسأله، از نابرابری‌ها استفاده کردیم. اندیشهٔ ردیف کردن مجهول‌ها (به صورت نزولی یا به‌صورت صعودی)، کارحل را، دربسیاری ازمسأله‌ها، ساده می‌کند.

مسألهٔ ۱۲.۴. بدون این که به‌کلی بودن مسأله، لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد: $m \geqslant n \geqslant ۲$. دراین صورت $\sqrt[m]{n} \leqslant \sqrt[n]{n}$. بنابراین، کافی است ثابت کنیم $\sqrt[n]{n} \leqslant \sqrt[۳]{۳}$ و یا

$$n^{\frac{۱}{n}} \leqslant ۳^{\frac{۱}{۳}} \qquad (۱)$$

نابرابری (۱) به‌ازای $n=۲$ درست است، زیرا اگردوطرف نابرابری $۲^{\frac{۱}{۲}} \leqslant ۳^{\frac{۱}{۳}}$ را به‌توان ۶ برسانیم، به‌نابرابری روشن $۸<۹$ می‌رسیم.

اکنون از دو طرف رابطهٔ (۱)، لگاریتم طبیعی می‌گیریم و ثابت می‌کنیم که، برای $n \geqslant ۳$، داریم: $\frac{\ln n}{n} \leqslant \frac{\ln ۳}{۳}$.

مشتق تابع $\frac{\ln x}{x}$، به‌ازای $x \geqslant ۳$، منفی است:

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{۱-\ln x}{x^{۲}} < \circ$$

زیرا به‌ازای $x \geqslant ۳ > e$، داریم: $\ln x > ۱$.

ازاین جا نتیجه می‌شود که، تابع $\frac{\ln x}{x}$، برای $x \geqslant ۳$ نزولی است و

بنابراین $\frac{۱}{x}\ln x \leqslant \frac{۱}{۳}\ln ۳$ $(x \geqslant ۳)$.

∇ نابرابری $n^۳ \leqslant ۳^n$ را، برای عددهای طبیعی $n \geqslant ۳$، می‌توان به کمک استقرا هم ثابت کرد. ثابت‌می‌کنیم، اگراین نابرابری، برای $n=k$ درست باشد، برای $n=k+۱$ هم‌درست است. در واقع، می‌توان نابرابری $(k+۱)^۳ \leqslant ۳^{k+۱}$ را ازنابرابری $k^۳ \leqslant ۳^k$، با ضرب‌آن درنابرابری درست $\left(۱+\frac{۱}{k}\right)^۳ \leqslant ۳$ (به‌ازای $k \geqslant ۳$) به‌دست‌آورد.

مسأله ۱۳.۴. پاسخ: حداقل‌مقدار، به‌ازای $n = ۱۰^{۱۰} - ۱$ یابه‌ازای $n = ۱۰^{۱۰}$ به‌دست می‌آید.

فرض می‌کنیم:

$$a_n = \frac{\log ۲ . \log ۳ \ldots \log n}{۱۰^n}$$

و توجه می‌کنیم که

$$a_n = \frac{\log n}{۱۰} \cdot a_{n-۱}$$

از برابری اخیر دیده می‌شود که:

اگر $\log n < ۱۰$، آن وقت $a_n < a_{n-۱}$؛

اگر $\log n = ۱۰$، آن وقت $a_n = a_{n-۱}$؛

اگر $\log n > ۱۰$، آن وقت $a_n > a_{n-۱}$.

به‌این‌ترتیب، دنبالهٔ (a_n) تا $n = ۱۰^{۱۰} - ۱$ نزولی‌است،سپس دو جملهٔ‌برابر باشماره‌های $۱۰^{۱۰} - ۱$ و $۱۰^{۱۰}$ دارد و، باآغاز ازجملهٔ‌بعد، صعودی‌می‌شود.

مسأله ۱۴.۴. پاسخ: حداکثرمقدار، برابر $\frac{۱}{۴}$ است؛ واین مقدار،مثلاً برای $x_۱ = x_۲ = \frac{۱}{۲}$ و $x_۳ = x_۴ = x_۵ = ۰$ به‌دست می‌آید.

ثابت می‌کنیم، به‌ازای‌همهٔ‌مقدارهای غیرمنفی $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، $x_۴$ و $x_۵$،

نابرابری $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5\leqslant\frac{1}{4}$ برقراراست. در واقع

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5\leqslant(x_1+x_3+x_5)(x_2+x_4)$$

زیرا، درسمت راست نـابرابری، همهٔ جملههـای سمت چپ وجود دارد و، به‌جزآن، چند جملهٔ غیرمنفی اضافی هم وارد شده است.

اکنون اگرفرض کنیم:

$$u=x_1+x_3+x_5\geqslant 0\ ,\ v=x_2+x_4\geqslant 0$$

بنا به‌فرض مسأله داریم $u+v=1$. از طرف دیـگر، با توجه به‌نابرابری واسطه‌ها، برای دوعدد غیرمنفی u و v داریم:

$$uv\leqslant\frac{(u+v)^2}{4}\quad \text{یا}\quad \sqrt{uv}\leqslant\frac{u+v}{2}$$

به‌این ترتیب

$$(x_1+x_3+x_5)(x_2+x_4)=uv\leqslant\frac{(u+v)^2}{4}=\frac{1}{4}$$

∇ به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که، برای n عدد غیرمنفی x_1، x_2،...، x_n با مجموعی برابرواحد، حداکثرمقدار عبارت

$$x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}+x_{n-1}x_n$$

برابر است با $\frac{1}{4}$.

مسألهٔ ۱۵۰۴. برای اثبات نابرابری، سمت‌چپ وسمت راست‌آن را، با عبارت $a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2$ مقایسه می‌کنیم. ثابت می‌کنیم:

$$a^4+b^4+c^4\geqslant a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\geqslant a^2bc+b^2ac+c^2ab$$

سه نابرابری روشن زیر را درنظر می‌گیریم:

$$a^4+b^4\geqslant 2a^2b^2,\ b^4+c^4\geqslant 2b^2c^2,\ c^4+a^4\geqslant 2a^2c^2$$

ازمجموع این سه‌نابرابری، به‌دست می‌آید:

$$2(a^4+b^4+c^4)\geqslant 2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)$$

اکنون، این سه‌نابرابری روشن را درنظرمی‌گیریم:

$$a^2(b^2+c^2-2bc)\geqslant 0,\quad b^2(a^2+c^2-2ac)\geqslant 0,$$
$$c^2(b^2+a^2-2ba)\geqslant 0$$

ازمجموع آن‌ها به‌دست می‌آید،

$$2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)\geqslant 2(a^2bc+b^2ac+c^2ab)$$

∇ قضیهٔ کلی زیر (که به‌قضیهٔ مورهد معروف است)، به‌نابرابری مسألهٔ ۱۵.۴ مربوط می‌شود.

جملهٔ $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$ از n متغیر x_1، x_2، ...، x_n مفروض است. چند جمله‌ای را که برابر با واسطهٔ حسابی همهٔ جمله‌های ممکن حاصل از جایگشت‌های متغیرها درجملهٔ مفروض باشد، $\Phi_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}$ می‌نامیم. مثلاً

$$\Phi_{2,2,0}(x,y,z)=\frac{1}{3}(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$$

دوانتخاب $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ و $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)$ از نماهای

$$\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\dots\geqslant\alpha_n\geqslant 0 \text{ و } \beta_1\geqslant\beta_2\geqslant\dots\geqslant\beta_n\geqslant 0$$

را درنظرمی‌گیریم. برای این‌که، به‌ازای همهٔ مقدارهای غیرمنفی x_1، x_2، ...، x_n، نابرابری

$$\Phi_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}\geqslant\Phi_{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n}$$

برقرارباشد، لازم وکافی است که انتخاب α، نسبت به‌انتخاب β، باشرطهای زیرسازگارباشد:

$$\alpha_1\geqslant\beta_1,$$
$$\alpha_1+\alpha_2\geqslant\beta_1+\beta_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{n-1}\geqslant\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_{n-1}$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n$$

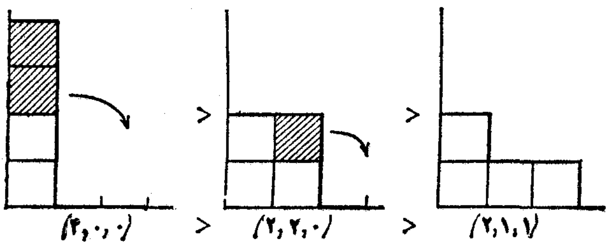
این دستگاه شرطها را، به‌طورخلاصه، این طورمی‌نویسند:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)>(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$$

این شرط را می‌توان به صورتی عینی، تعبیر کرد: اگر انتخاب نماها را به‌صورت پلکانی نشان دهیم که درآن، عرض پله برابر واحد و ارتفاع آن، عددانتخابی باشد، آن وقت درانتخاب دوم باید قطعه‌هایی ازپلهٔ اول را جدا کرد وآن‌ها را درسمت راست وپایین (روی یکی ازپله‌های بعدی) قرارداد. درمسألهٔ ۱۵.۴ (شکل ۴۷)، از انتخاب (۴،۰،۰)، انتخاب (۲،۲،۰) و سپس ازآن، انتخاب (۲،۱،۱) به‌دست‌آمده است:

$$(۴،۰،۰)>(۲،۲،۰)>(۲،۱،۱)$$

عمل «جداکردن قطعه‌هایی ازپلکان»، روش اثبات همهٔ نابرابری‌های قضیهٔ مورهد را تلقین می‌کند.



شکل ۴۷

شکل‌های شامل خانه‌ها و، به‌شکل پلکان، در بسیاری ازمسأله‌های مربوط به‌ترکیب‌ها و جبر، کار را ساده می‌کنند (مسألهٔ ۱۰.۶ را ببینید).

مسألهٔ ۱۶.۴. اگرفرض کنیم:

$$x=b^{\frac{1}{15}}\ ,\ y=a^{\frac{1}{10}}$$

آن وقت، نابرابری مفروض، به‌این صورت درمی‌آید:

$$3x^5 = 2y^5 - 5x^3y^2 \geqslant 0$$

و به این ترتیب، از وجود رادیکال‌ها آزاد می‌شویم. اگردوطرف نابرابری اخیر را بر y^5 تقسیم‌کنیم و $\frac{x}{y}$ را t بنامیم، به‌نابرابری زیرکه هم‌ارزآن است، می‌رسیم:

$$3t^5 - 5t^3 + 2 \geqslant 0$$

سمت چپ این نابرابری را می‌توان تجزیه‌کرد:

$$(t-1)^2(3t^3+6t^2+4t+2) \geqslant 0$$

با توجه به فرض مثبت بودن a و b، داریم: $t>0$ و، بنابراین، درستی نابرابری روشن است. نابرابری وقتی به برابری تبدیل می‌شودکه داشته باشیم: $t=1$، یعنی $a^3=b^2$.

▽ نابرابری را می‌توان با استفاده از «نابرابری واسطه‌ها» ثابت‌کرد. داریم:

$$\frac{1}{5}(\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}+\sqrt{a}+\sqrt{a}) \geqslant \sqrt[5]{(\sqrt[3]{b})^3.(\sqrt{a})^2} = \sqrt[5]{ab}$$

به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت‌کردکه، برای k عدد مثبت a_1، a_2، ...، a_k و kعدد طبیعی p_1، p_2، ...، p_k، با شرط $p_1+\ldots+p_k=p$، داریم:

$$p_1a_1^{\frac{1}{p_1}} + p_2a_2^{\frac{1}{p_2}} + \ldots + p_ka_k^{\frac{1}{p_k}} \geqslant p(a_1a_2\ldots a_k)^{\frac{1}{p}}$$

اثبات دیگری هم برای این نابرابری می‌آوریم. $a=y^5$ و $b=x^5$ می‌گیریم، وبه‌این نابرابری می‌رسیم:

$$\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+\frac{2}{5}\sqrt{y^5} \geqslant xy$$

واین، حالت خاصی ازنابرابری یونگ است: برای عددهای مثبت ودلخواه x، y، α و β، بـا شرط $\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}=1$، داریم:

$$\frac{x^{\alpha}}{\alpha}+\frac{y^{\beta}}{\beta}\geqslant xy$$

این نابرابری هم، به‌نوبهٔ خود، حالت خاصی ازنابرابری زیراست:

$$f(x)+g(y)\geqslant xy \qquad (*)$$

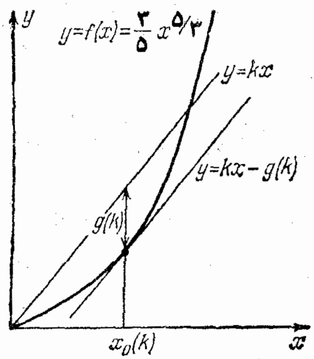
که درآن، f و g، تابـع‌هایی مشتق‌پـذیر و برای همهٔ مقدارهای غیرمنفی آوند، معین‌اند؛ در ضمن f' و g' تابـع‌های یکنوای صعودی و معکوس یکدیگرند و

$$f(0)=g(0)=f'(0)=g'(0)=0$$

(f و g را، دوقلوهای یونگ می‌گویند).

برای هر مقدار y، درست یـك مقدار x وجود داردکه، به‌ازای آن‌ها، نابرابری (*) به‌برابری‌تبدیل‌می‌شود؛ برای این مقدارها داریم: $y=f(x)$ و $x=g'(y)$. به این دلیل، تـابع g را می‌توان بـه کمك تـابع f تعریف کرد: برای هر k داریم:

$$g(k)=\max_{x}\,(kx-f(x))$$

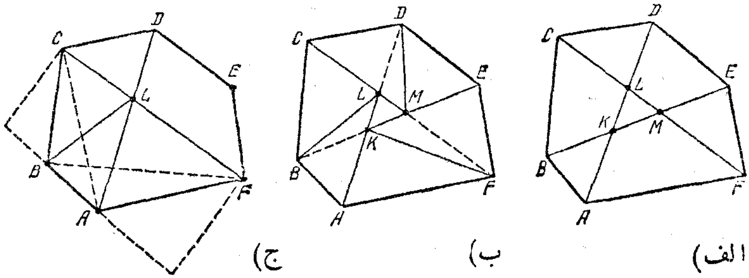


شکل ۴۸

ایـن عبور ازتـابع f بـه‌تابع g را، تبدیل لژاندرتابع f می‌نامند. درضمن، تابع f هم، یك تبدیل لژاندر ازتابع g است (شکل ۴۸ را ببینید).

مسألهٔ ۰۱۷.۴ سه قطر AD، BE و CF ازشش ضلعی $ABCDEF$ را (که هر رأس را به‌رأس مقابل وصل می‌کنند) رسم می‌کنیم. فرض می‌کنیم،

این قطرها، یکدیگر را درنقطه‌های K، L و M قطع کرده باشند (شکل «۴۹ ـ الف»)؛ درحالت‌خاص، ممکن‌است نقطه‌های K، L و M برهم منطبق باشند. شش مثلثی‌را درنظرمی‌گیریم که، همراه با مثلث KLM، شش ضلعی $ABCDEF$ را تشکیل می‌دهند. روی شکل ۴۹، این مثلث‌ها عبارتند از ABL، BCL، CDM، DEM، EFK و FAK (شکل «۴۹ـب»). اگر مساحت شش ضلعی را S بنامیم، دست‌کم مساحت یکی ازاین مثلث‌ها از



ج)　　ب)　　الف)

شکل ۴۹

$\frac{1}{6}S$ کمتراست (درغیراین صورت، مجموع مساحت‌های این شش مثلث از S بیشترمی‌شود، که ممکن نیست). مثلاً فرض کنید $S_{ABL} \leqslant \frac{1}{6}S$ (شکل «۴۹ ـ ج»). ثابت می کنیم که، دراین‌صورت، مساحت‌یکی ازمثلث‌های ABC و ABF (با قاعدهٔ مشترك AB)، از $\frac{1}{6}S$ تجاوزنمی کند. در واقع، مساحت مثلث با قاعدهٔ AB و ارتفاع h برابر است با $\frac{1}{2}AB\times h$؛ ارتفاع مثلث ABL، بین ارتفاع‌های دومثلث ABC و ABF قراردارد، یعنی از هردوی آن‌ها نمی‌تواندکوچکترباشد.

▽ دراستدلال پایان حل‌مسأله، می‌توان به‌نکته‌ای برخوردکه اغلب

با آن روبه‌رومی‌شویم: حداکثرمقدارتابع خطی $f(x)$، که در بازهٔ مفروض $[a،b]$ داده شده است، همیشه دریکی ازدوانتهای بازه ظاهر می‌شود، یعنی مقدار $f(x)$، به‌ازای‌هرمقدارx، از $f(a)$ یا $f(b)$ تجاوزنمی‌کند. درمسألهٔ ما، این‌تابع، عبارت‌است ازمساحت مثلث $f(h)=\frac{۱}{۲}AB\times h$.

مسألهٔ ۱۸۰۴. $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$ می‌گیریم. α و β را ثابت می‌گیریم، در این صورت، اگراز تفاضل سمت چپ ازسمت راست نابرابری، نسبت به γ مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$\left(۳\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{۳}-\sin\gamma\right)'=\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{۳}-\cos\gamma\geqslant ۰$$

زیرا $\pi\geqslant\gamma\geqslant\frac{\alpha+\beta+\gamma}{۳}\geqslant ۰$، وبرای $t\in[۰،\pi]$، تابع $y=\cos t$ نزولی است (مشتق مقدارهای‌ثابت $\sin\alpha$ و $\sin\beta$ برابرصفراست). اگرثابت‌کنیم، نابرابری مورد نظربه‌ازای $\gamma=\beta$ درست است، آن وقت برای $\gamma\geqslant\beta$ هم درست خواهد بود، زیرا با ترقی γ، اختلاف سمت چپ و سمت راست نابرابری ترقی می‌کند.

به‌این‌ترتیب، کافی است ثابت کنیم، برای هر α و β $(\alpha\leqslant\beta)$ داریم:

$$\sin\alpha+۲\sin\beta\leqslant ۳\sin\frac{\alpha+۲\beta}{۳}$$

با تکرارهمین استدلال، اگراز تفاضل دوطرف نسبت به β مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$۲\cos\left(\frac{\alpha+۲\beta}{۳}\right)-۲\cos\beta\geqslant ۰$$

زیرا $\pi\geqslant\beta\geqslant\frac{\alpha+۲\beta}{۳}\geqslant ۰$. ولی‌به‌ازای $\alpha=\beta$، نابرابری‌به‌برابری تبدیل می‌شود. بنابراین، برای $\alpha\geqslant\beta$ درست است.

∇ اگرشرط $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ یا $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$ را به‌مسأله‌اضافه کنیم، به‌نابرابری‌هایی می‌رسیم که با گزارهٔ زیرهم ارزند: اگرمثلث‌هایی را درنظربگیریم که دریك دایره محاط شده‌انـد، آن وقت، محیط ومساحت هر مثلثی، ازمحیط ومساحت مثلث متساوی‌الاضلاع محاط درهمان دایره، تجاوز نمی‌کند.

روشی‌که برای حل ایـن مسأله مورد استفاده قـرار گرفت، می‌تواند برای قضیهٔ کلی زیـر به‌کار رود. فـرض می‌کنیم، تابع $f(x)$ که دربازهٔ $[a,b]$ معین است، چنان باشد‌که مشتق‌آن، $f'(x)$، غیرصعودی باشد (در مورد چنین تابعی می‌گویند که تحدبی به طرف بالا دارد). در این صورت، برای هر n نقطهٔ x_1، x_2، ...، x_n ازاین‌بازه‌وهر n عدد مثبت p_1، p_2، ...، p_n، به‌شرطی‌که مجموعی برابر واحدداشته باشند، نابرابری زیر (که به‌نابرابری ین‌سن معروف است) وجود دارد:

$$f(p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n)\geqslant p_1f(x_1)+\ldots+p_nf(x_n)$$

مسألهٔ ما، حالت خاصی ازاین قضیه است و درآن

$$f(x)=\sin x,\ x\in[0,\pi],\ p_1=p_2=p_3=\frac{1}{3}$$

اگر فرض‌کنیم: $f(x)=\ln x$ و $p_1=p_2=\ldots=p_n=\frac{1}{n}$، آن وقت به‌این نابرابری می‌رسیم:

$$\ln\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geqslant\frac{\ln x_1+\ldots+\ln x_n}{n}$$

و یا

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}$$

که‌همان نابرابری معروف بین واسطهٔ عددی و واسطهٔ هندسی n عدد مثبت است.

برای تابع $f(x)=-x^2$، به‌این نابرابری می‌رسیم:

$$(p_1x_1+\ldots+p_nx_n)^2 \leqslant p_1x_1^2+\ldots+p_nx_n^2$$

که اگردرآن فرض کنیم:

$$x_k=\frac{a_k}{b_k},\ p_k=\frac{b_k^2}{b_1^2+\ldots+b_n^2}$$

آن وقت، می‌توان نابرابری کوشی - بویناکووسکی را نتیجه گرفت:

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\ .\ \sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}$$

که بنابر آن، حاصل‌ضرب داخلی دو بردار، از حاصل‌ضرب طول‌های آن‌ها، تجاوزنمی‌کند (دراثبات ما، مهم بود که همهٔ b_kها مخالف صفرباشند، ولی روشن است که نابرابری اخیر، بدون این شرط هم درست است).

مسألهٔ ۱۹۰۴. پاسخ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. (این‌مساحت متعلق به‌ذوزنقه‌ای است که طول قاعدهٔ کوچکتر وهریک ازساق‌های آن برابر ۱ و طول قاعدهٔ بزرگ آن برابر۲ باشد.)

فرض کنید درچهارضلعی $ABCD$ (که البته می‌توان‌آن را محدب در نظر گرفت) داشته باشیم: $AB=BC=CD=1$. وسط ضلع AD را K می‌نامیم (شکل ۵۰). اگر $DB'C'A$، قرینهٔ خط شکستهٔ $ABCD$ را نسبت به نقطهٔ K پیدا کنیم، یك شش ضلعی با مرکزتقارن K به‌دست می‌آید‌که، طول هریك ازضلع‌های آن، برابر واحد است. این شش ضلعی را می‌توان به سه لوزی $ABCO$، $CDB'O$ و $B'C'AO$ تقسیم کرد؛ درضمن مساحت این‌شش‌ضلعی‌برابرمی‌شود با $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$ که، درآن، α، β و γ عبارتند از زاویه‌های بین پاره‌خط‌های راست OA، OC و OB' که مجموعی برابر2πدارند. با توجه به‌مسألهٔ قبل، این‌مساحت نمی‌تواند از $3\sin\frac{2\pi}{3}$،

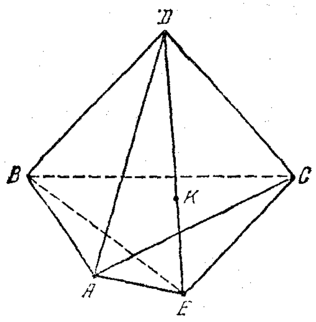
یعنی $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ تجاوز کند و تنها وقتی برابراین مقدارمی‌شود که داشته باشیم:

$$\alpha=\beta=\gamma=\frac{۲\pi}{۳}$$

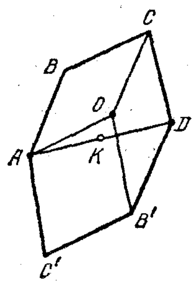
یعنی وقتی که، این شش ضلعی، منتظم باشد.

∇ می‌توان ثابت کرد، بین همهٔ n ضلعی‌هائـی که طول ضلع‌های آن، به‌ردیف، برابر $a_۱$، $a_۲$، ...، $a_{n-۱}$ باشند (بـه‌جز یکی ازضلع‌هـا، AZ، که نامعلوم است)، مساحت آن n ضلعی حداکثرمقدارممکن است که، همهٔ رأس‌های آن، روی محیط نیم‌دایره‌ای به‌قطر AZ واقع باشند. واین در واقع، حالتی از «مسألهٔ دی‌بون» است: چگونه‌می‌توان دو انتهای نخی به‌طول معلوم را روی خطراست مفروضی قرارداد تامساحت شکل محدود به‌نخ وخطراست، حداکثرمقدار ممکن بـاشد (جـواب این مسأله این است کـه، نخ را، بـاید به‌صورت یك نیم‌دایره درآورد).

اگرهم، طول همهٔ ضلع‌های یك n ضلعی معلوم باشند، حداکثرمساحت مربوط به آن n ضلعی است کـه قابل محاط دریك دایره باشد (و اگر ردیف ضلع‌های n ضلعی مشخص باشد، جواب منحصربه‌فرد است). به‌همین‌ترتیب، حداکثرمساحت دربین‌شکل‌های با محیط ثابت، متعلق به‌دایره است.



شکل ۵۱



شکل ۵۵

مسألهٔ ۲۰.۴. پاسخ: $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$.

چند وجهی محدب شامل ۵ رأس را می‌توان به‌صورت دوهرم مثلث‌القاعده (چهار وجهی) درنظر گرفت که درقاعده مشترک‌اند (شکل ۵۱). در واقع، دراین چند وجهی می‌توان رأسی را پیداکردکه، ازآن، ۴ یال به‌همهٔ رأس‌های دیگرخارج شده است (اگرفرض‌کنیم، ازهمهٔ رأس‌ها، تنها سه یال خارج شده است،آن وقت باید دوبرابرتعداد همهٔ یال‌ها برابر ۳×۵، یعنی ۱۵ باشد، که به‌دلیل فرد بودن عدد ۱۵ ممکن نیست) . فرض‌کنیم AB، AD، AC و AE، چهاریال متوالی‌کنج چهاروجهی به رأس A باشند؛ در این صورت، می‌توان دوچهاروجهی $ABCD$ و $ABCE$ را درنظرگرفت‌که درقاعدهٔ ABC مشترک‌اند و روی هم چند وجهی ما را می‌سازند. به این ترتیب، حجم چهاروجهی برابراست با

$$V = \frac{۱}{۳} S\,(h_E + h_D)$$

که درآن h_D و h_E به‌ترتیب طول عمودهای وارد از رأس‌های D و E بر قاعدهٔ ABC، و S مساحت مثلث ABC است.

K را نقطهٔ برخورد پاره‌خط راست DE باصفحهٔ ABC می‌گیریم؛ در این‌صورت

$$h_D + h_E \leqslant DK + KE = DE \leqslant ۲$$

زیرا فاصلهٔ هردونقطه ازسطح‌کره، ازطول قطرآن تجاوزنمی‌کند.

شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC را R می‌نامیم (این دایره، مقطع کره با صفحهٔ ABC است). دراین صورت (مسألهٔ ۱۸.۴ یا ۱۹.۴ را ببینید):

$$S \leqslant \frac{۳\sqrt{۳}}{۴} R^۲ \leqslant \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$$

زیرا، شعاع هرمقطعی ازکره، ازشعاع‌کره تجاوزنمی‌کند. به‌این ترتیب

$$V \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$$

درضمن $V = \frac{\sqrt{3}}{2}$، وقتی به‌دست می‌آیدکه مثلث ABC، مثلثی‌متساوی‌الاضلاع محاط دراستوا (دایرهٔ عظیمهٔ کرهٔ محیطی چند وجهی) ونقطه‌های D و E، قطب‌های کره باشند.

▽ مسألهٔ کلی: بین همهٔ چند وجهی‌های محاط درکره که دارای n رأس باشند، آن را پیداکنید که دارای حداکثر حجم باشد. واین، مسأله‌ای بسیاردشواراست.

می‌توان ثابت کردکه، این چند وجهی، برای $n = ۶$، یك هشت‌وجهی منتظم است، ولی برای $n = ۸$، چند وجهی با حجم ماکزیمم، یك مکعب نیست. مشابه مسطحهٔ این مسأله، مسأله‌ای ساده است: برای هرعدد $n \geqslant ۳$، از بین n ضلعی‌های محاط در یك دایره، مساحت n ضلعی منتظم، حداکثر مقدار ممکن است (و این نتیجهٔ ساده‌ای از مجموع سینوس‌های زاویه‌هایی بین ۰ و π است: بحث مسألهٔ ۱۸.۴ را ببینید).

مسألهٔ ۲۱.۴. مربع‌های به‌ضلع واحد را درنظر می‌گیریم که مرکزهای آن‌ها روی همهٔ گره‌هایی ازشبکه باشند که در درون دایرهٔ به‌شعاع ۱۰ قرار گرفته‌اند (ضلع‌های این مربع‌ها را موازی خط‌های راست شبکه می‌گیریم).

چون طول‌قطرهریك ازاین مربع‌ها، برابراست با $\sqrt{۲} < ۲$، بنابراین، همهٔ این مربع‌ها سطح دایرهٔ به‌شعاع ۹ وهم مرکزبا دایرهٔ مفروض را می‌پوشانند. درنتیجه، مجموع مساحت‌های آن‌ها (که از نظرعددی، باتعداد گره‌های شبکه برابراست)، از ۸۱π (مساحت دایرهٔ به‌شعاع ۹) بیشتراست. و درضمن $۸۱\pi > ۲۵۱$.

▽ می‌توان مسأله‌ای کلی‌تر را تنظیم کرد: تعداد جواب‌های x و y را در مجموعهٔ عددهای درست، برای نامعادلهٔ $x^۲ + y^۲ < n$ ارزیابی کنید (درمسألهٔ ما $n = ۱۰۰$). ازحل مسأله، می‌توان نتیجه گرفت که، این تعداد، از $\pi(\sqrt{n} - ۱)^۲$ کمتر نیست.

مسألهٔ ۲۲۰۴. پاسخ: نمی‌توان.

کره‌ای به‌مرکز نقطهٔ مفروض و به‌شعاع R رسم می‌کنیم. برای هر نیم خطی که از O می‌گذرد، یك سطح مخروطی می‌سازیم که رأس آن در O و زاویهٔ بین مولدآن با این نیم خط برابر ۳۰ درجه باشد (نیم خط، محور سطح مخروطی را تشکیل می‌دهد). «کلاهکی» را درنظرمی گیریم که بخشی ازسطح کره، بین‌این‌سطح‌مخروطی‌است. مساحت‌این«کلاهك» (قطعهٔ کروی)، برابر است با $۲\pi Rh$ که، در آن، h ارتفاع «کلاهك» است:

$$h = R(۱-\cos ۳۰^\circ) = R\left(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

به‌این ترتیب، نسبت‌مساحت «کلاهك» به‌مساحت سطح تمامی کره ($۴\pi R^۲$)، چنین می‌شود:

$$\frac{۱}{۲}\left(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) > \frac{۱}{۱۵}$$

درستی این نابرابری روشن است، زیرا می‌توان به‌ترتیب نوشت:

$$(۲-\sqrt{۳})۱۵ > ۴،\ ۲۶ > ۱۵\sqrt{۳}،\ ۲۶^۲ = ۶۷۶ > ۱۵^۲ \times ۳ = ۶۷۵$$

بنابراین، دوتا از ۱۵ «کلاهکی» که به‌کمك ۱۵ نیم خط به دست آمده‌اند، به‌ناچاریکدیگر را قطع می‌کنند، یعنی دوتا ازنیم خط‌ها، زاویه‌ای کوچکتراز ۶۰ درجه می‌سازند.

∇ می‌توان پرسش کلی‌تری مطرح کرد: اگرازنقطهٔ مفروض O، n نیم‌خط راست درفضا رسم کنیم، مقدار α_n، کوچکترین زاویهٔ بین این نیم‌خط‌ها، حداکثرچقدرمی‌تواند باشد (ویا هم‌ارزآن: اگر n «کلاهك» یکسان روی سطح کره درنظربگیریم، به‌نحوی که متقاطع باهم نباشند، حداکثر اندازهٔ هریك از «کلاهك»ها چقدراست)؟ پاسخ دقیق به‌این پرسش تنها برای $n \leqslant ۹$ و $n = ۱۲$ معلوم است؛ اگرچه برای بسیاری از مقدارهای n، ارزیابی‌های خوبی، برای مقدار α_n، به‌دست آمده است.

مسألهٔ ۲۳.۴. نقطهٔ A را روی محیط دایرهٔ اول و نقطهٔ B را روی محیط دایرهٔ دوم علامت می‌گذاریم. وقتی دو دایره را روی هم می‌گذاریم، موقعیت دایرهٔ دوم نسبت به‌دایرهٔ اول را با مقدار زاویه‌ای t از کمان AB معین می‌کنیم و روشن است که $0^\circ \leqslant t \leqslant 360^\circ$ (با محاسبهٔ درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت).

مقداری از t را «غیرقابل قبول» می‌نامیم، وقتی که، به‌ازای آن، دست‌کم دوتا ازکمان‌های مورد نظریکدیگر را قطع کرده باشند.

یکی ازکمان‌های ۲۵ درجه و یکی از کمان‌های ۳۰ درجه را در نظر می‌گیریم. آن‌ها دربخشی از t به‌اندازهٔ ۵۵ درجه، یکدیگر را قطع می‌کنند. این بخش‌های«غیرقابل‌قبول»، نمی‌توانند بیش‌از $6 = 2 \times 3$ باشند. بنابراین، مجموعهٔ مقدارهای «غیر قابل قبول» t، نمی‌توانند درمجموع، بیش از 55×6، یعنی ۳۳۰ درجه باشد و همهٔ مجموعهٔ مقدارهای t را (از ۰ درجه تا ۳۶۰ درجه) نمی‌پوشاند. به این ترتیب، مقدار «قابل قبولی» برای t وجود داردکه، به ازای آن، هیچ دو کمانی یکدیگررا قطع نمی‌کنند.

∇ به‌همین ترتیب می‌توان ثابت کردکه، اگر روی محیط یك دایرهٔ به‌شعاع واحد، کمان‌های غیر متقاطع α_1، α_2، ...، α_n و روی محیط دایرهٔ به‌شعاع واحد دوم، کمان‌های غیرمتقاطع β_1، β_2، ...، β_m را جداکنیم و درضمن

$$m(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)+n(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m)<360^\circ$$

آن وقت، می‌توان محیط دو دایره را طوری روی‌هم قراردادکه این کمان‌ها متقاطع نباشند.

«عکس» این پرسش هم، جالب است: عددهای α_1، α_2، ...، α_n و β_1، β_2، ...، β_m چه شرطهایی داشته باشند تا با هر وضعی که دو دایره روی هم قرار گیرند، بعضی‌ازکمان‌ها متقاطع باشند؟

روشی را که برای حل مسألهٔ ۲۳.۴ به‌کاربردیم، می‌توان حالت

پیوستهٔ اصل دیریکله نامید (مسألهٔ ۹.۲ را ببینید). این اصل، درهردوحالت خود، یک نارسایی دارد: نشان نمی‌دهد که، مثلاً، چگونه می‌توان دو دایره را به‌صورت مورد نظر، روی هم قرارداد.

مسألهٔ ۲۴.۴. مقایسهٔ وزنه‌ها را درسه مرحله انجام می‌دهیم.

۱. دو وزنه را انتخاب وآن‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم. فرض کنید، وزن‌آن‌ها a و b باشد و، درضمن $a<b$. دو وزنهٔ دیگر انتخاب وبا هم مقایسه می‌کنیم: $c<d$. سپس، ازبین این دو زوج وزنه، آن‌هایی را که سنگین‌ترند، مقایسه می‌کنیم. مثلاً فرض کنید: $b<d$.

۲. جای وزنهٔ پنجم(مثلاً به‌وزن e) را، بین سه وزنهٔ $a<b<d$ پیدا می‌کنیم. برای این منظور، کافی است دوبارازترازو استفاده کنیم: ابتدا e را با b مقایسه می‌کنیم. سپس، اگر $e<b$ باشد، آن را با a و اگر $e>b$ باشد، آن را با d مقایسه می‌کنیم. اکنون ردیف وزنه‌های a، b، d و e برای ما معلوم است.

۳. جای وزنهٔ c را بین سه وزنهٔ a، b و c پیدا می‌کنیم (باز هم با دو بار استفاده‌ازترازو، شبیه قبل). چون، بعدازمرحلهٔ ۱، می‌دانیم $c<d$، جای c بین هرچهار وزنهٔ دیگرمعلوم می‌شود.

درمرحلهٔ ۱، سه‌بار و درهر یک از دو مرحلهٔ ۲ و ۳، دوبار از ترازو استفاده کرده‌ایم، روی هم هفت بار.

∇ ثابت می‌کنیم، باکمترازهفت‌بار استفادهٔ ازترازو، نمی‌توان ۵ وزنه را، به ردیف صعودی وزن‌های آن‌ها، مرتب کرد. روی هم، به $۵!=۱۲۰$ طریق، می‌توان وزنه‌ها را کنارهم چید. هرمقایسه، یکی ازدونتیجه را به‌بار می‌آورد. بنابراین، بعد از p بار استفاده از ترازو، نمی‌توان به بیش از ۲^p حالت رسید (در بدترین حالت، بعد از مقایسه‌های نوبتی، تعداد حالت‌های ممکن، بیش از دو تا کم نمی‌شود). بنابراین، برای ۵ وزنه، وقتی می‌توان آن‌ها را، بعد از p بار استفاده از ترازو، مرتب کرد که داشته باشیم:

$$۲^p\geqslant ۱۲۰ \Rightarrow p\geqslant \log_۲ ۱۲۰ \Rightarrow p\geqslant ۷$$

درحالت کلی، برای مرتب کردن n وزنه، دست کم به $\log_{۲}(n!)$ بار استفاده از ترازو احتیاج داریم.

مسألهٔ کلی مربوط به حداقل تعداد $F(n)$ استفاده از ترازو، برای ردیف کردن n وزنه، هنوز به طور کامل حل نشده است و علاقهٔ بسیاری از متخصصان برنامه‌ریزی را به خود جلب کرده است.

چند روش کلی، برای مرتب کردن n وزنه، اندیشیده شده است، ولی برای n وزنه (دربسیاری موردها)، باهمهٔ این روش‌ها، عدد $[\log_{۲} n!]+۱$ به‌دست می‌آید. ساده‌ترین این روش‌ها، همان است که درحل مسألهٔ ۲۴.۴، کم وبیش از آن استفاده کردیم. با این روش، در k امین مرحله $(k=۱،...،n-۱)$، وزنهٔ تازهٔ $(k+۱)$ام را انتخاب و جای آن را در ردیف k وزنه‌ای که قبل از آن پیدا شده است، معین می‌کنند. برای این منظور، ابتدا وزن این وزنه را با وزن وزنه‌ای که دروسط ردیف قرار گرفته است مقایسه می‌کنند، سپس با وزنهٔ وسط نیمه‌ای از ردیف، که باید درآن‌جا باشد وغیره. درمرحلهٔ kام، به‌تعدادی مقایسه نیازاست که از $[\log_{۲} k]+۱$ تجاوز نمی‌کند. بنابراین، برای ردیف کردن n وزنه، حداکثر تعداد مقایسه‌ها، چنین است:

$$(۱+\log_{۲} ۲)+(۱+\log_{۲} ۳)+\dots+$$
$$+(۱+\log_{۲}(n-۱))<n(۱+\log_{۲} n)$$

به‌این ترتیب، حداقل $F(n)$، تعداد مقایسه‌ها، باید درنابرابری‌های زیرصدق کند:

$$\log_{۲}(n!)\leqslant F(n)<n(۱+\log_{۲} n)$$

ولی این روش، تنها برای $n\leqslant ۴$، مقداردرست $F(n)$ را می‌دهد:

$$F(۲)=۱،\ F(۳)=۳،\ F(۴)=۵$$

برای حالت $n=۵$، جواب $F(۵)=۸$ به‌دست می‌آید ونه $F(۵)=۷$.

اگردقیقاً همان روش حل مسألهٔ ۲۴.۴ را تعمیم دهیم، برای $n \leqslant ۱۲$ و $n = ۲۰$ و $n = ۲۱$، به‌جواب درست می‌رسیم، ولی برای همهٔ مقدارهای n، کوچکترین عدد $F(n)$ به‌دست نمی‌آید.

مسأله‌هایی برای کارمستقل دانش‌آموزان

۲۵.۴. a و b را طول ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمه و c و h را طول وتر و ارتفاع وارد بروتر، درمثلث قائم‌الزاویه‌ای می گیریم. حداکثر مقدار $\frac{c+h}{a+b}$ را پیدا کنید.

۲۶.۴. بـرای سه جملـه‌ای درجـهٔ دوم $f(x) = ax^{۲} - ax + ۱$، می‌دانیم برای $۰ \leqslant x \leqslant ۱$ داریم: $|f(x)| \leqslant ۱$. a، حداکثرچقدرمی‌تواند باشد؟

۲۷.۴. می‌دانیم، درصد موخرمایی‌ها دربین چشم آبی‌ها، بیشتراست ازدرصد موخرمایی‌ها دربین همهٔ مردم. کدام بیشتراست: درصد چشم‌آبی‌ها دربین موخرمایی‌ها، یا درصد چشم‌آبی‌ها دربین همهٔ مردم؟

۲۸.۴. مجموع ده عدد طبیعی مختلف، برابر است با ۱۹۸۶. مجموع سه‌عددکوچکتر، حداکثرچقدرمی‌تواند باشد؟

۲۹.۴. ثابت کنید، اگر زاویه‌های یـك پنج ضلعی محدب، به تصاعد حسابی باشند، هریك از زاویه‌های‌آن، از ۳۶ درجه بیشتراست.

۳۰.۴. نقطهٔ دلخواهی را، در درون مثلث بـه‌مساحت واحد انتخاب و، ازآن جا، خـط‌های راستی موازی ضلع‌های مثلث رسم کرده‌ایم. مثلث، به ۶ بخش تقسیم مـی‌شود. مساحت ایـن بخش‌ها را، بـه‌ترتیب صعودی، شماره گذاری می کنیم:

$$S_۱ \leqslant S_۲ \leqslant \dots \leqslant S_۶$$

هریك ازاین ۶ مساحت، چه‌مقدارهایی را می‌توانند قبول کنند؟

۴.۳۱. مساحت یك چهارضلعی برابر واحد است. حداقل مقدار مجموع دو قطر آن چقدر است؟

۴.۳۲. ۹ خودکار ۱۱ تومان و چند ریال و ۱۳ خودکار ۱۵ تومان و چند ریال قیمت دارند. اگر همهٔ خودکارها، به یك قیمت باشند، قیمت هر خودکار چقدر است؟

۴.۳۳. کوچکترین عدد طبیعی n را پیدا کنید که، به ازای آن، عدد طبیعی m وجود داشته باشد، به‌نحوی که

$$\frac{۲۲۵}{۱۲۷}<\frac{m}{n}<\sqrt{۳}$$

۴.۳۴. دوسازمان تولیدی، M و K، می‌توانند با یکی از سه نوع سوخت کارکنند: نفت، ذغال‌سنگ و گاز. ذخیرهٔ نفت به‌اندازه‌ای است که M می‌تواند با آن، ۱۶ ماه کارکند؛ ولی اگر K از ذخیرهٔ نفت استفاده کند، کار ۹ ماه‌آن را تأمین می‌کند. ذخیرهٔ ذغال سنگ، برای کار ۱۱ ماه M ویا ۷ ماه K کافی است؛ و با ذخیرهٔ گاز، M می‌تواند ۵ ماه و K می‌تواند ۳ ماه کارکند. هردوسازمان، با این ذخیره‌های سوخت، حداکثرچه‌زمانی می‌توانند کارکنند؟ (آغاز وپایان کاردوسازمان، هم زمان است.)

۴.۳۵. درفاصله‌های زمانی برابر، هرباریك اتوبوس، بدون توقف و با سرعت‌هایی ثابت، روی جاده وبه‌یك طرف حرکت می‌کنند. شخصی، ۴ کیلومتردرجاده پیش رفت و، در این مدت، ۶ اتوبوس از او جلو افتاد. بار دیگر ۷ کیلومترپیش رفت و ۸ اتوبوس ازاوجلوافتاد. بار سوم، ۱۷ کیلومتر پیش رفت. درفاصلهٔ این ۱۷ کیلومتر، چند اتوبوس ازاوجلو می‌افتد؟ (سرعت پیاده، درهرسه‌بار، یکی است.)

۴.۳۶. همهٔ جواب‌های این دستگاه معادله‌ها را پیدا کنید:

$$\begin{cases} x+y=۲ \\ xy-z^{۲}=۱ \end{cases}$$

۴.۳۷. ۱۱ عدد طوری پیدا کنید که، هر کدام از آن‌ها، برابر مجذور مجموع ده عدد دیگر باشد.

۴.۳۸. به‌ازای کدام عدد طبیعی n، مقدار $\frac{n^۲}{(۱/۰۰۱)^n}$ بـه حـداکثر مقدارخود می‌رسد؟

۴.۳۹. به‌ازای چه‌مقدارهایی از n، مـی‌توان n عدد طوری انتخاب کرد که، مجموع همهٔ‌حاصل ضرب‌های دوبه‌دوی آن‌ها برابر واحد، ومجموع مجذورهای همهٔ آن‌ها، کوچکتراز ۰/۰۱ باشد؟

۴.۴۰. ثابت کنید، نابرابری زیر، برای همهٔ مقدارهای مثبت a، b و c برقرار است:

$$a^۵+b^۵+c^۵ \geqslant a^۲b^۲c+a^۲c^۲b+b^۲c^۲a$$

۴.۴۱. اگر $۰<a<\frac{\pi}{۲}$ و $۰<b<۱$، ثابت کنید:

$$\int_۰^a \sin x dx+\int_۰^b \arcsin x dx \geqslant ab$$

۴.۴۲. a، b و c را طول ضلع‌ها، و P و S را، به‌ترتیب، محیط و مساحت مثلث فرض می‌کنیم. این نابرابری‌ها را ثابت کنید:

الف) $\frac{۱}{۳}P^۲ \leqslant a^۲+b^۲+c^۲<\frac{۱}{۲}P^۲$

ب) $S<\frac{۱}{۶}(ab+bc+ca)$

۴.۴۳. کدام بزرگتر است:

الف) $۳^{۵۰۰}$ یا $۷^{۳۰۰}$؛ ب) $۲^{۳^{۱۰۰}}$ یا $۳^{۲^{۱۵۰}}$؛

ج) $\log_۵ ۶$ یا $\log_۶ ۷$؛ د) $\frac{\sin ۶^\circ}{\sin ۵^\circ}$ یا $\frac{\sin ۷^\circ}{\sin ۶^\circ}$؛

ه) $\frac{tg6^\circ}{tg5^\circ}$ یا $\frac{tg7^\circ}{tg6^\circ}$؟

۴۴.۴. ثابت کنید:

الف) برای عددهای مثبت و دلخواه x و y و z

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}\geqslant\frac{9}{3+x+y+z}$$

ب) برای عددهای α، β و γ، بین ۰ و π

$$\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma\leqslant\sin^3\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

۴۵.۴. عدد ۱۰۰ را به‌صورت مجموع چند عددطبیعی طوری بنویسید که، حاصل ضرب آن‌ها، حداکثرمقدارممکن باشد.

۴۶.۴. اگرچهارضلع ازیك پنج‌ضلعی، طولی برابر واحد داشته باشند، حداکثر مساحت این پنج ضلعی چقدراست؟

۴۷.۴. آیا می‌توان در دایرهٔ به‌شعاع ۱۰، ۳۰۰ نقطه طوری قرار دادکه فاصلهٔ دوبه‌دوی آن‌ها، از واحدکمترنباشد؟

۴۸.۴. روی محیط یکی از دو دایرهٔ مساوی، ۵۰ نقطه به‌رنگ قرمز و روی محیط دایرهٔ دوم، چندکمان آبی رنگ، که مجموع طول‌های آن‌ها از $\frac{1}{50}$ محیط دایره کمتراست، علامت گذاشته‌ایم. ثابت کنید، می‌توان دایرهٔ اول را طوری روی‌دایرهٔ دوم قرار دادکه هیچ‌کدام از نقطه‌های قرمز، روی یکی ازکمان‌های‌آبی قرارنگیرد.

۴۹.۴. روی‌ضلع‌های‌مجاور به‌زاویهٔ‌قائمهٔ a و b ازمثلث قائم‌الزاویه‌ای، نقطه‌های P و Q را انتخاب و از آن‌ها، عمودهای PK و QH را بر وتر رسم کرده‌ایم. حداقل مجموع زیر را پیداکنید:

$$KP+PQ+QH$$

۵۰۴. دو رزم‌ناو، با سرعت‌های ثابت، در دریا حرکت می‌کنند. در ساعت ۸، فاصلهٔ بین آن‌ها ۲۰ میل، درساعت ۸ و ۳۵ دقیقه ۱۵ میل و در ساعت ۸ و ۵۵ دقیقه ۱۳ میل است. درچه ساعتی به‌کمترین فاصلهٔ بین خود می‌رسند؟ این فاصله چقدراست؟ (دریا را مسطح و رزم‌ناوها را، نقطه به‌حساب می‌آوریم.)

۵

مثال‌ها و ساختمان‌های غیرعادی

۵۰۱۰ قطاری دریك سمت، ۵/۵ ساعت حرکت کرده است. می‌دانیم، درهرفاصلهٔ زمانی یك ساعت، درست ۱۰۰ کیلومترجلو می‌رود.

الف) آیا حرکت قطاریکنواخت (با سرعت ثابت) است؟

ب) آیا می‌توان گفت که، سرعت متوسط قطار، ۱۰۰ کیلومتر در ساعت است؟

۵۰۲۰ شخصی، هرماه درآمد و هـزینهٔ خود را یادداشت می‌کند. آیا ممکن است وضعی پیش‌آیدکه، درهر پنج ماه متوالی، هزینهٔ او از درآمدش بیشتر، ولی درتمامی سال، درآمد او ازهزینه‌اش بیشترباشد؟

۵۰۳۰ آیا می‌تـوان عدد ۲۰۳ را بـه‌صورت مجموع چند عدد طبیعی طوری نوشت‌که، حاصل‌ضرب همهٔ‌آن‌ها، بازهم برابر۲۰۳ باشد؟

۵۰۴۰ آیا این گزاره درست است: از بین هرشش عدد طبیعی دلخواه، می‌توان یا سه عدد انتخاب‌کردکـه دوبه‌دو نسبت به‌هم اول باشند و یا سه عدد انتخاب‌کردکه مقسوم‌علیه مشترکی بزرگتراز واحد داشته باشند؟

۵۰۵. آیا این گزاره‌ها درست‌اند:

الف) از هر پنج عدد مختلفی که به‌ردیفی دلخواه نوشته‌شده‌اند، می‌توان سه عدد پیدا کرد، به‌نحوی که، در این ردیف، به ترتیب نزولی یا به ترتیب صعودی قرار گرفته باشند؛

ب) از هر نه عدد مختلفی که به‌ردیفی دلخواه نوشته‌شده باشند، می‌توان چهار عدد پیدا کرد که، در این ردیف، به‌ترتیب نزولی یا به‌ترتیب صعودی باشند؟

۶۰۵. الف) مجموع چند عدد برابر واحد است. آیا ممکن است، مجموع مکعب‌های این سه‌عدد، از واحد بیشتر باشد؟

ب) همین پرسش، برای عددهایی که درضمن، هر کدام از آن‌ها، کوچکتر از واحد باشند.

۷۰۵. $f(x)$ درهرنقطه ازبازهٔ $[\circ, ۱]$ پیوسته است و $f(۱) = f(\circ)$.
آیا درست است که، نموداراین تابع، وتری موازی با محور طول دارد:

الف) به‌طول $\frac{۱}{۵}$؛ ب) به‌طول $\frac{۲}{۵}$؟

(وتر نمودار، به پاره خط راستی گویند که، دو انتهای آن، روی نمودار باشد.)

۸۰۵. آیا این پیش‌آمد ممکن است: طول همهٔ ضلع‌های یك مثلث، از ۱ سانتی‌متر کمتر و طول همهٔ ضلع‌های مثلث دیگر از ۱۰۰ متر بیشتر باشد، ولی مساحت مثلث اول، بزرگتر ازمساحت مثلث دوم شود؟

۹۰۵. آیا ممکن است:

الف) طول هریک از ارتفاع‌های مثلث از ۱ سانتی‌متر کمتر، ولی مساحت آن، از ۱۰۰ سانتی‌مترمربع بیشتر باشد؛

ب) طول هر ارتفاع مثلث از ۲ سانتی‌متر بیشتر، ولی مساحت آن از ۲ سانتی‌مترمربع کمتر باشد؟

۱۰۰۵. آیا این گزاره درست است: برای هر نقطهٔ واقع‌در درون یك‌چهار ضلعی محدب، مجموع فاصله‌های آن از رأس‌های چهارضلعی، از محیط کمتر است؟

۱۱۰۵. آیا می‌توان مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین را، به‌چند مثلث متشابه با آن تقسیم کرد، به‌نحوی که دربین آن‌ها، مثلث‌های برابر وجود نداشته باشد؟

۱۲۰۵. آیا می‌توان به کمك سه میله و چند نخ، ساختمان فضایی پایدار و محکمی ساخت، به‌نحوی که میله‌ها با هم تماس نداشته باشند وتنها با نخ‌هایی که به‌دوانتهای آن‌ها وصل است، به‌هم مربوط باشند؟

۱۳۰۵. آیا می‌توان دریك مکعب چوبی، چنان سوراخی به وجود آورد که مکعبی با اندازه‌های مکعب اصلی، از آن عبور کند؟

۱۴۰۵. آیا یك چند وجهی وجود دارد (لازم نیست محدب باشد) که به‌اندازهٔ مکعب، رأس، یال و وجه داشته باشد، ولی هیچ کدام از وجه‌های آن چهارضلعی نباشد؟

۱۵۰۵. آیا می‌توان شش نقطه برصفحه قرار داد وآن‌ها را با پاره‌خط‌های راستی چنان به‌هم وصل کرد که هرنقطه درست

الف) به سه نقطهٔ؛ ب) به‌چهار نقطهٔ

دیگروصل شده باشد؟

۱۶۰۵. آیا خط شکستهٔ بسته‌ای وجود دارد که هرضلع خود را درست یك‌بارقطع کند و از الف) شش ضلع؛ ب) هفت ضلع تشکیل شده باشد؟

۱۷۰۵. تعداد زیادی سکه‌های گرد برابردراختیارداریم. آیا می‌توان روی صفحه

الف) ۲۴؛ ب) ۲۵

سکه‌را طوری‌قرارداد، به‌نحوی که‌هرسکه برسه‌سکهٔ دیگرمماس باشد؟

۱۸۰۵. درمورد یك اجتماع می‌دانیم، هردو نفری که باهم آشنا نیستند، درست دوآشنای مشترك دارند، و هردونفری که با هم آشنا هستند، هیچ آشنای مشترکی ندارند. آیا ممکن است، در این اجتماع، بیش از چهارنفر وجود داشته باشد؟

۱۹۰۵. سه‌نفر، چند دور شطرنج باهم بازی کردند؛ در ضمن تعداد

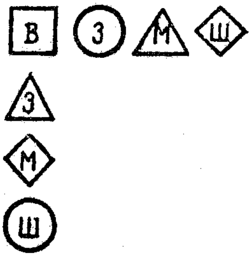
بازی‌های هردونفر باهم، با تعداد بازی‌های هردونفر دیگر، یکی‌است. بعد، با هم‌به گفت‌وگو نشستند تا معلوم کنند، چه کسی برنده است. اولی گفت: «برد من از همه بیشتر است». دومی گفت: «باخت من از همه کمتر است». سومی سکوت کرد؛ ولی وقتی امتیازها را محاسبه کردند، معلوم شد که، سومی، امتیازبیشتری کسب کرده‌است. آیا ممکن‌است، چنین‌وضعی پیش‌آمده باشد؟ (امتیازها را این‌طور محاسبه می‌کنند: برای برد ۱ امتیاز، برای مساوی $\frac{۱}{۲}$ امتیاز و برای باخت ۰ امتیاز.)

۲۰۰۵. آیا می‌توان جدول ۴ × ۴ را (شکل ۵۲) با حرف‌های B، Z، M و S طوری پرکرد که هریک از آن‌ها درچهار کادر مختلف (مربع، لوزی، مثلث و دایره) قرار گیرند، هرکدام از آن‌ها به چهار رنگ مختلف باشند و همهٔ شرط‌های زیرهم برقرارباشند:

الف) درهرسطر وهرستون، هر حرف، هر رنگ وهر کادر وجود داشته باشد؛

ب) هرحرف، تنها یک‌بار، به رنگ معینی درآمده باشد؛

ج) هرکادر، شامل همهٔ حرف‌ها و همهٔ رنگ‌ها باشد؟



شکل ۵۲

۲۱۰۵. بعد ازهردورکار، چند عضو انجمن‌ریاضی(نه‌یک نفربه‌تنهایی ونه همهٔآن‌ها باهم)، برای صرف بستنی به‌کافه می‌روند. درضمن، درانجمن ریاضی، قانون سختی وجود دارد: بعد ازهرمراجعهٔ به‌کافه، هیچ دونفری از آن‌ها، نمی‌توانند دوباره با هم‌برای صرف بستنی بروند. بعد ازآخرین دور کار، معلوم شدکه حالا، عضوهای انجمن، تنهابه‌نوبت ویکی‌یکی می‌توانند برای صرف بستنی بروند.

الف) اگراین انجمن ۴عضو داشته باشد، چند دورکارمی‌تواند وجود

داشته باشد؟ (همهٔ جواب‌های ممکن را پیدا کنید.)

ب) اگر این انجمن ۷ عضو داشته باشد، برنامه‌ای برای ۷ بار مراجعهٔ به کافه تنظیم کنید.

بحث و بررسی مسأله‌ها

مسألهٔ ۱۰۵. پاسخ «الف» و «ب»: حرکت قطار ممکن است یکنواخت نباشد؛ لزومی ندارد سرعت متوسط قطار، ۱۰۰ کیلومتردرساعت باشد.

تمام زمان حرکت قطار را به ۱۱ فاصلهٔ نیم ساعتی تقسیم می‌کنیم. این فاصله‌های زمانی نیم ساعتی را شماره‌گذاری وفرض می‌کنیم، قطار، در فاصله‌های زمانی ردیف فرد k کیلومتر ($\circ \leqslant k \leqslant ۱۰۰$) و در هر فاصلهٔ زمانی ردیف زوج ($۱۰۰-k$) کیلومترحرکت کند. به‌این ترتیب، اعم از این که قطار، درهردونیم ساعت‌متوالی، یکنواخت حرکت کند ویاغیریکنواخت، درهرحال، ساعتی ۱۰۰ کیلومترحرکت کرده است.

برای پاسخ به‌پرسش «ب»، سرعت متوسط حرکت قطار را محاسبه می‌کنیم. فاصله‌ای که قطاردر همهٔ نیم ساعت‌های ردیف فرد طی می‌کند، برابراست با $۶k$ و فاصله‌ای که درنیم ساعت‌های ردیف زوج می‌پیماید‌برابر است با $۵(۱۰۰-k)$. بنابراین، در۵/۵ ساعت، روی هم، به‌اندازهٔ

$$۶k+۵(۱۰۰-k)=۵۰۰+k$$

کیلومترحرکت کرده است؛ وسرعت متوسط قطار، برابر $\frac{۵۰۰+k}{۵/۵}$ می‌شود.

اگر $k \neq ۵۰$، آن وقت، سرعت متوسط قطار، برابر۱۰۰ کیلومتر در ساعت نمی‌شود.

∇ حرکت قطار، دراین مسأله، یک حرکت تناوبی است با تناوب $T=۱$ (ساعت). می‌توان ثابت کرد که، این تناوب سرعت حرکت، نتیجه‌ای ازشرطهای مسأله است. ازحل مسأله روشن است که، سرعت متوسط قطار،

می‌تواند هر عددی، از $\frac{1000}{11}$ (به ازای $k=0$) تا $\frac{1200}{11}$ (به ازای $k=100$) کیلومتردرساعت باشد.

مسألهٔ ۲۰۵. پاسخ: ممکن است.

نمونه‌ای می‌آوریم:

$$2, 2, 2, 2, -9, 2, 2, 2, 2, -9, 2, 2$$

دراین جا، به‌ردیف (وبا در نظرگرفتن علامت)، اختلاف درآمد و هزینهٔ شخص را درهرماه ازسال نوشته‌ایم. می‌بینیم، مجموع هرپنج عدد متوالی، دراین زنجیرهٔ عددها، عددی است منفی (برابر ۱ —)، درحالی‌که مجموع همهٔ عددها، عددی است مثبت (برابر۲).

▽ تعمیم مسأله: در یك سطر، n عدد نوشته‌ایم و می‌دانیم، مجموع هرk عدد متوالی، مقداری منفی است؛ آیا ممکن است، مجموع هرn عدد، مقداری مثبت باشد؟ پاسخ این است: اگرn مضربی ازk باشد، چنین وضعی ممکن نیست، ولی اگر n بخش‌پذیربر k نباشد، ممکن است. درمسألهٔ ما: $n=12$ و $k=5$.

این حکم را هم می‌توان، به‌نوبهٔ خود، تعمیم داد. فرض کنید، n عدد را، دریك سطرنوشته باشیم. مجموع q عدد متوالی را دراین سطر S_q می‌نامیم. دراین صورت، اگر برای عددهای طبیعی مختلف m، n و k داشته باشیم:

$$m \leqslant n+k-d-1$$

($d=(n,k)$، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك بین دو عدد n و k)، آن وقت می‌توان، m عدد را طوری دریك سطرنوشت که همهٔ S_nها را دارای یك علامت باشند و همهٔ S_kها، به‌علامت مخالف آن درآیند. به جزاین، همهٔ این مجموع‌ها را می‌توان برابرمقدارهای مفروضی که ازقبل تعیین شده‌اند، گرفت.

در واقع، می‌توان دستگاهی شامل $k+n-2d$ معادلهٔ خطی، با

$k+n-d-1$ مجهول تشکیل داد:

$$\begin{aligned}
x_1+\cdots+x_n &= a_1,\\
x_2+\cdots+x_{n+1} &= a_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
x_{k-d}+\cdots+x_{k+n-d-1} &= a_{k-d},\\
x_1+\cdots+x_k &= b_1,\\
x_2+\cdots+x_{k+1} &= b_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
x_{n-d}+\cdots+x_{k+n-d-1} &= b_{n-d}
\end{aligned}$$

می‌توان ثابت کرد که، این دستگاه، جواب دارد: ماتریس آن، حداکثر از رتبهٔ $k+n-2d$ است. اگر عددهای n و k نسبت به‌هم اول باشند $(d=1)$، آن وقت، دارای جواب منحصر به‌فرد است؛ اگر $d>1$، آن وقت، دستگاه دارای $d-1$ مجهول آزاد است.

به این ترتیب، با مفروض بودن n و k، می‌توان سطری شامل $n+k-d-1$ عدد پیدا کرد که با شرطهای مورد نظر ما سازگار باشد. اگر

$$m\leqslant n+k-d-1$$

آن وقت، سطری که از نخستین m عدد تشکیل شده باشد، بازهم با شرطهای مورد نظر ما سازگار است.

اکنون ثابت می‌کنیم، اگر $m\geqslant n+k-d$، آن وقت، نمی‌توان سطری شامل m عدد پیدا کرد که همهٔ S_nهای آن یك علامت، و همهٔ S_kها علامت دیگری داشته باشند.

برعکس، فرض می‌کنیم، چنین سطری شامل $n+k-d$ عدد باشد و، درضمن، $n>k$. k عدد نخست را جدا می‌کنیم. درسطر، $n-d$ عدد باقی می‌ماند که، همهٔ S_kهای آن، مثل قبل، دارای یك علامت‌اند و همهٔ S_{n-k}ها

علامت مخالفی دارند. چون

$$n-d=(n-k)+k-d$$

ازمسأله‌ای با پارامترهای n و k، به‌مسأله‌ای با عددهای کوچکتر k و $n-k$ می‌رسیم. اگر این روند را ادامه دهیم (شبیه‌آلگوریتم اقلیدس)، به چنین موقعیتی می‌رسیم: سطری وجود داردکه همهٔ S_dها درآن، یك علامت‌دارند، ولی‌همهٔ S_{ld}ها، علامت دیگری که، نادرستیِ‌آن، روشن‌است. (دراین روند، یعنی پایین آمدن از $(n،k)$ به $(k،n-k)$، می‌توان شبیه آلگوریتم اقلیدس ثابت‌کردکه دستگاه بالا، متوافق می‌ماند.)

سرانجام، روشن است‌که، اگرسطری شامل $n+k-d$ عدد، سازگار با شرطها، وجود ندارد، به‌طورمسلم، نمی‌توان سطری طولانی‌ترازآن هم، پیدا کرد.

مسألهٔ ۳۰۵. پاسخ: می‌توان.

در واقع داریم:

$$۲۰۳=۷+۲۹+\underbrace{۱+۱+۱+\ldots+۱}_{۱۶۷\ \text{واحد}}=$$

$$=۷\times۲۹\times\underbrace{۱\times۱\times۱\times\ldots\times۱}_{۱۶۷\ \text{واحد}}$$

▽ این پرسش را مطرح می‌کنیم: کدام عددهای طبیعی را نمی‌توان به‌صورت مجموع و حاصل ضرب یك نوع عددهای طبیعی نوشت؟

پاسخ به‌این پرسش، چنین است: عددهای اول.

این پرسش هم، که به‌مسألهٔ ۵.۳ مربوط می‌شود، جالب است: به‌ازای‌کدام عددهای طبیعی k، معادلهٔ

$$x_1+x_2+\ldots+x_k=x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_k$$

درمجموعهٔ عددهای درست، جواب غیرصفردارد؟

ثابت شده است که، این معادله، به‌ازای هرمقداری از k، جواب دارد. مثلاً

به‌ازای $k=۱$: $x_۱=۱$؛

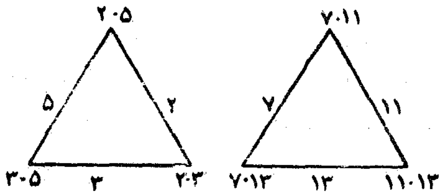
به‌ازای $k=۲$: $x_۱=x_۲=۲$؛

به‌ازای $k>۲$: $x_۱=x_۲=\ldots=x_{k-۲}=۱$،

$x_{k-۱}=۲$، $x_k=k$*

مسألهٔ ۴۰۵. پاسخ: درست نیست.

مثالی که گزاره را نقض می‌کند: ۶، ۱۰، ۱۵، ۷۷، ۹۱، ۱۴۳. از این شش عدد (۲×۳، ۲×۵، ۳×۵، ۷×۱۱، ۷×۱۳ و ۱۱×۱۳)،



شکل ۵۳

هیچ سه عددی، مقسوم علیه مشترکی بزرگتر از واحد ندارند. درضمن، در انتخاب هیچ سه عددی هم، دوبه‌دو نسبت به‌هم اول در نمی‌آیند (دوتا از آن‌ها، دارای مقسوم‌علیه مشترک‌اند).

این وضع، به‌خوبی، درطرح شکل ۵۳ دیده می‌شود. درهر رأس مثلث، یکی ازعددها و، روی هر ضلع، عامل مشترک دوعدد واقع در دوانتهای ضلع، نوشته شده است.

∇ اگرشرط مسأله را اندکی تغییردهیم، به گزاره‌ای درست می‌رسیم:

---

* ۲۵۰ مسألهٔ حساب از سرپینسکی، ترجمهٔ پرویزشهریاری، مسأله‌های ۱۸۶ تا ۱۸۹ را ببینید.ـ م.

ازهرشش عددطبیعی، می‌توان یا سه‌عدد انتخاب‌کرد که دوبه‌دونسبت به‌هم اول باشند و یا سه عددی‌که، دوبه‌دو، مقسوم علیه مشترکی بزرگترازواحد داشته باشند.

مسألهٔ اخیررامی‌توان به‌صورت جالبی، که هم‌ارزآن است، بیان‌کرد: بین شش نفر، همیشه می‌توان سه نفر انتخاب‌کردکه یا دو به‌دو با هم آشنا باشند و یا دوبه‌دویکدیگر را نشناسند.

مسألهٔ ۰۵.۵ الف) پاسخ: درست است.

a و b را بزرگترین و کوچکترین عدد، دربین این عددها می‌گیریم. اگربین این دوعدد، عدد دیگری وجود داشته باشد، درستی گزاره روشن است. اگراین دوعدد a و b، مجاورهم قرارگرفته باشند، آن وقت، یا در سمت راست ویا درسمت چپ آن‌ها، باید دوعدد وجود داشته باشد؛ واین دوعدد، یا با عدد a و یا با عدد b، ردیف مورد نظر را تشکیل می‌دهند.

برای علاقه‌مندان. به‌این بهانه، می‌توان ازقضیه‌ای کلی یادکرد: در مجموعهٔ مرتب جزئی، که شامل $mn+۱$ عضو است، همیشه می‌توان زنجیره‌ای از $m+۱$ یا $n+۱$ عضو پیدا کردکه دوبه دوباهم نسبتی نداشته باشند (این قضیه، نتیجه‌ای ازقضیهٔ معروف دیل‌وورت است: درهر مجموعهٔ مرتب جزئی، حداکثرتعداد زنجیره‌هایی‌که شامل همهٔ عضوهای مجموعه باشند، برابراست باحداکثرتعداد عضوهایی‌که دوبه‌دو باهم نسبتی ندارند).

درمورد پنج عدد، آن‌ها را می‌توان به‌این ترتیب، مرتب‌کرد. فرض می‌کنیم، برای عددهای a و b، نسبت $a<b$ برقرارباشد، به‌شرطی‌که a از b کوچکتر و عدد a درسمت چپ واقع باشد. به‌این مفهوم، عددهای c و d تنها وقتی نسبتی با هم ندارند که در ردیف نوشته شده، به ترتیب نزولی باشند.

چون $۵=۲\times۲+۱\ (m=n=۲)$، ازقضیهٔ بالانتیجه می‌شودکه، درپنج عدد، همیشه سه‌عدد پیدا می‌شودکه یا به ردیف صعودی‌اند (زنجیرهٔ به‌طول $۳=m+۱$) و یا به‌ردیف نزولی ($۳=n+۱$). اگردرقضیهٔ بالا، $m=n$ بگیریم، به‌این نتیجه می‌رسیم: ازدنباله‌ای‌متناهی‌که شامل $n^۲+۱$

عدد باشد، می‌توان دنبالهٔ یکنوا شامل $n+1$ عدد انتخاب کرد. قضیه‌ای هم که ازحالت حدی این قضیه، به‌ازای $n \to \infty$، به دست می‌آید، جالب است: ازهردنبالهٔ نامتناهی، می‌توان دنباله‌ای نامتناهی ویکنوا انتخاب کرد. اثبات قضیهٔ اخیر، از اثبات حالت متناهی n، ساده‌تراست.

ب) پاسخ: درست نیست.

مثالی که گزاره را نقض می‌کند، می‌آوریم: ده عدد

$$۳، ۲، ۱، ۶، ۵، ۴، ۹، ۸، ۷$$

ثابت می‌کنیم، دراین دنباله، نمی‌توان چهارعدد انتخاب کرد که به‌ردیف صعودی یابه‌ردیف نزولی باشند. برای این‌منظور، جمله‌های دنباله را به‌سه‌بخش، و درهربخش سه عدد، تقسیم می‌کنیم: ۳۲۱، ۶۵۴، ۹۸۷.

اگردوعدد ازاین نه‌عدد، به‌ردیف نزولی باشند، به ناچارهردوعدد، متعلق به‌یکی ازگروه‌های سه‌تایی است. یعنی نمی‌توان بیش ازسه عدد پیدا کردکه‌به‌ردیف نزولی باشند، زیراهمهٔاین‌عددها بایدمتعلق‌به‌یکی ازگروه‌های سه‌تایی باشند.

واگردوعدد ازاین نه‌عدد، به‌ترتیب صعودی‌باشند، به‌ناچاربه‌دو گروه مختلف تعلق دارند وچون بیش ازسه‌گروه نداریم، نمی‌توان بیش از سه‌عدد پیداکردکه به‌ترتیب صعودی باشند.

مسألهٔ ۶۰۵. الف) پاسخ: ممکن است.

مثال، دوعدد ۲ و ۱ –:

$$۲+(-۱)=۱، \quad ۲^۳+(-۱)^۳=۷>۱$$

ب) پاسخ: ممکن است.

مثال برای هشت عدد؛ دو عدد برابر ۰/۸ وشش عدد برابر ۰/۱ –:

$$۲\times ۰/۸+۶(-۰/۱)=۱، \quad ۲(۰/۸)^۳+۶(-۰/۱)^۳=۱/۰۱۸>۱$$

برای علاقه‌مندان. به‌مناسبت این مسأله، می‌توان این‌پرسش را مطرح کرد: آیا ممکن است رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقارب و رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ متباعد باشد؟ پاسخ

به‌این پرسش مثبت است. به‌این رشته توجه کنید:

$$\left(۱-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\right)+\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴}\right)+\ldots+\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴}\right)+$$

$$+\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۶}\right)+\ldots \qquad (*)$$

رشتهٔ $(*)$ به‌این ترتیب درست شده‌است: به دنبال مجموع $\left(۱-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\right)$،

به تعداد $۲^۳$، یعنی ۸ مجموع $\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴}\right)$، سپس به‌تعداد $۲۷=۳^۳$ بار

ازمجموع $\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۶}\right)$، ...، سپس $n^۳$ بارمجموع $\left(\frac{۱}{n}-\frac{۱}{۲n}-\frac{۱}{۲n}\right)$

آمده است (توجه‌کنید، هر عدد، یك جمله از رشته به‌حساب می‌آید: مثلاً

جملهٔ اول رشته برابر۱، جملهٔ دوم برابر $-\frac{۱}{۲}$ ، جملهٔ ششم برابر $-\frac{۱}{۴}$ ،

وجمله بیست و هشتم برابر $\frac{۱}{۳}$ است).

این رشته متقارب است، زیرا مجموع N جملهٔ اول‌آن، که درآن

$$۳(۱^۳+۲^۳+\ldots+n^۳)<N\leqslant ۳(۱^۳+۲^۳+\ldots+$$

$$+n^۳+(n+۱)^۳)$$

ازعدد $\frac{۱}{n+۱}$ تجاوزنمی‌کند (ایـن مجموع، یـا بـرابـرصفراست، یـا برابر

$\frac{۱}{n+۱}$ و یا برابر $\frac{۱}{۲(n+۱)}$).

رشته‌ای کـه از مکعب جمله‌های رشتهٔ $(*)$ به دست می‌آید، متباعد

است، زیرا مجموع $n^۳$ عبارت به‌صورت

$$\left(\frac{۱}{n}\right)^۳+\left(-\frac{۱}{۲n}\right)^۳+\left(-\frac{۱}{۲n}\right)^۳$$

برابر $\frac{۳}{۴}$ و، بنابراین، مجموع نخستین $(n^۳+\ldots+۲^۳+۱^۳)۳$ جملهٔ آن برابر $\frac{۳n}{۴}$ می‌شود، یعنی تا بی‌نهایت ترقی می‌کند.

می‌توان ثابت کرد که تنها برای تابع‌هایی که در یک همسایگی صفر به‌صورت $f(x)=kx$ هستند، از تقارب رشتهٔ $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$، می‌توان تقارب رشتهٔ $\sum_{n=۱}^{\infty} f(a_n)$ را نتیجه گرفت.

مسألهٔ ۷۰۵. الف) پاسخ: درست است.

تابع $y=F(x)=f\left(x+\frac{۱}{۵}\right)-f(x)$ را، که دربازهٔ $\left[۰\ ,\ \frac{۴}{۵}\right]$ معین و پیوسته است، درنظرمی گیریم. باید ثابت کنیم، دراین بازه، نقطهٔ $x_۰$ وجود دارد که، به ازای آن، داشته باشیم: $F(x_۰)=۰$. بنابه تعریف تابع $y=F(x)$ داریم:

$$F(۰)=f\left(\frac{۱}{۵}\right)-f(۰) \qquad (۱)$$

$$F\left(\frac{۱}{۵}\right)=f\left(\frac{۲}{۵}\right)-f\left(\frac{۱}{۵}\right) \qquad (۲)$$

$$F\left(\frac{۲}{۵}\right)=f\left(\frac{۳}{۵}\right)-f\left(\frac{۲}{۵}\right) \qquad (۳)$$

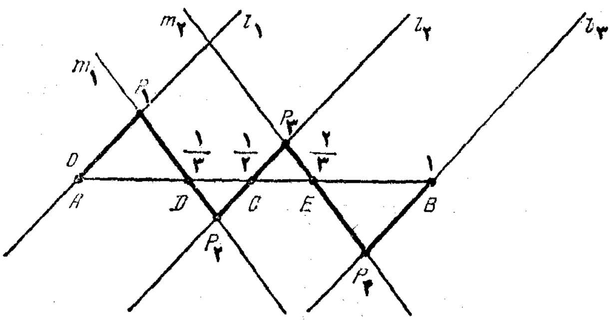
$$F\left(\frac{۳}{۵}\right)=f\left(\frac{۴}{۵}\right)-f\left(\frac{۳}{۵}\right) \qquad (۴)$$

$$F\left(\frac{۴}{۵}\right)=f(۱)-f\left(\frac{۴}{۵}\right) \qquad (۵)$$

اگر برابری‌های (۱) تا (۵) را با هم جمع کنیم، با توجه به‌شرط $f(۱)=f(۰)$، به‌دست می‌آید:

$$F(0)+F\left(\frac{1}{5}\right)+F\left(\frac{2}{5}\right)+F\left(\frac{3}{5}\right)+F\left(\frac{4}{5}\right)=0 \qquad (*)$$

برابری (*) تنها در دوحالت مـی‌تواند برقرارباشد: یا هرپنج جملهٔ سمت چپ، برابرصفرباشند (که دراین صورت مسأله حل شده است)، و یا بین ایـن پنج جمله، جمله‌هایی با علامت‌های مختلف وجود داشته باشند. فرض کنید $F(x_1)$ و $F(x_2)$، جمله‌هـایی بـا علامت‌هـای متفاوت بـاشند $\left(0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{4}{5}\right)$. دراین صورت، بـا توجه بـه‌پیوستگی تابع $f(x)$، عدد x_0، $(x_1 < x_0 < x_2)$ پیدامی‌شود که، برای آن‌داشته‌باشیم: $F(x_0)=0$؛ و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.



شکل ۵۴

ب) پاسخ: درست نیست، نمودار ممکن است، چنین وتری نداشته باشد.

درشکل ۵۴، مثال لازم داده شده است. ببینیم، ایـن نمودار چگونه ساخته شده است.

A و B را دوانتهای بازهٔ $[0,1]$، C راوسط آن و D و E رانقطه‌های یك سوم این بازه می‌گیریم.

از نقطه‌های A، C و B، خط‌های راست l_1، l_2 و l_3 را (که به‌صورت مایل محور طول را قطع کرده‌اند)، موازی با هم رسم می‌کنیم؛ و از نقطه‌های D و E، خط‌های راست و موازی m_1 و m_2 را، متقاطع با سه خط راست اول، می‌کشیم. نزدیك‌ترین نقطه‌های برخورد l_1، l_2 و l_3 را با m_1 و m_2، به‌محور طول، P_1، P_2، P_3 و P_4 می‌نامیم. به‌این ترتیب، خط شکستهٔ

$$AP_1DP_2CP_3EP_4B$$

به‌دست می‌آید. ثابت می‌کنیم، این خط شکسته، مثال مورد نظرماست.

اولاً، این نمودار، متعلق به تابعی مثل $f(x)$ است که در بازهٔ $[0,1]$ پیوسته است و درضمن، $f(0)=f(1)=0$.

ثانیاً، این نمودار، وتری به طول $\frac{2}{5}$ موازی محورطول ندارد. در واقع، اگردوانتهای وترموازی محور Ox روی ضلع‌های مجاور خط شکسته باشد، روشن است که طول آن، ازطول پاره خطراست DE، یعنی $\frac{1}{3}$ تجاوز نمی‌کند. و اگردوانتهای وترموازی محور Ox، روی دوضلع مجاور خط شکسته نباشد (دوضلع را، یك درمیان یا دو درمیان بههم وصل کند)، آن وقت، طول آن، از طول پاره خط AC، یعنی $\frac{1}{2}$ کمتر نیست. و چون $\frac{1}{3}<\frac{2}{5}<\frac{1}{2}$، بنابراین حکم مورد نظرما ثابت می‌شود.

∇ شبیه‌حل مسألهٔ ۷.۵، الف)، می‌توان ثابت کرد که برای تابع مفروض $y=f(x)$، با شرطهای مسأله، وتری به‌طول $\frac{1}{n}$ موازی با محور طول وجود دارد (n، یك عدد طبیعی دلخواه است).

برای علاقه‌مندان. گزارهٔ اخیر، حالت خاصی از قضیهٔ له‌وی است: اگردریك متصلهٔ مسطحه، وتری به طول a وجود داشته باشد، آن وقت،

وتری موازی با آن، به‌طول $a \times \frac{1}{n}$ هم درآن وجود خواهد داشت (n، عدد طبیعی دلخواهی است).

ازطرف‌دیگر، برای هرعدد α، ($\circ < \alpha < 1$)، که به‌صورت $\frac{1}{n}$ نباشد (n، عددی طبیعی است)، می‌توان شبیه حل مسألهٔ ۷.۵، ب)، نمونه‌ای از یك متصلهٔ مسطحه ساخت که وتری به‌طول واحد داشته باشد و وتری موازی با آن به‌طول α نداشته باشد.

یادآوری می‌کنیم که، برای تابع‌های پیوستهٔ نامتناوب روی خط‌راست، وضع به‌گونهٔ دیگری است: در نمودار این تابع‌ها می‌توان وتری با هرطول دلخواه پیدا کرد.

مسألهٔ ۸.۵. پاسخ: ممکن است.

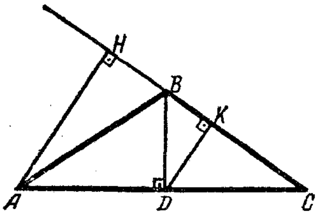
نمونه‌ای می‌آوریم. به‌عنوان مثلث اول، مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع $\frac{1}{۲}$ سانتی‌متر و به‌عنوان مثلث دوم، مثلثی متساوی‌الساقین با قاعدهٔ ۲۰۰ متر و ارتفاع $۱۰^{-۷}$ متردرنظرمی‌گیریم. هرساق مثلث اخیر از نصف قاعده، یعنی از ۱۰۰ متربیشتراست و مساحت‌آن، برابر $۱۰^{-۵}$ مترمربع می‌شود، که ازمساحت مثلث اول، که برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۱۶}$ سانتی‌متر مربع است، کمتراست.

مسألهٔ ۹.۵. الف) پاسخ: ممکن است.

مثالی می‌آوریم. مثلث متساوی‌الساقینی به‌قاعدهٔ ۸۰۰ سانتی‌متر و ارتفاع ۰/۳ سانتی‌متردرنظر می‌گیریم. مساحت این مثلث، برابر $\frac{۸۰۰ \times ۰/۳}{۲}$ و، بنابراین، بیشتراز ۱۰۰ سانتی‌مترمربع است. ثابت‌می‌کنیم، این مثلث، با شرطهای مسأله سازگاراست.

در واقع، ارتفاع AH این مثلث، که از رأس A بر ساق BC رسم

شده، دوبرابر طول عمود DK است که از نقطهٔ D (وسط قاعده) به‌ساق BC رسم شده است (شکل ۵۵)؛ درضمن، عمود DK هم به‌نوبهٔ خود، ازمایل DB کوچکتراست. از این جا معلوم می‌شود که، ارتفاع AH از ۰/۶ سانتی‌متر کمتراست. به‌این ترتیب، همهٔ ارتفاع‌های مثلث ABC، از یك سانتی‌متر کوچکترمی‌شوند.

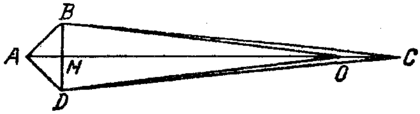


شکل ۵۵

ب) پاسخ: ممکن نیست.

چون هر ارتفاع مثلث از ۲ سانتی‌متر بیشتر است، بنابراین، طول‌هرضلع‌مثلث هم، از ۲ سانتی‌متر بیشتر می‌شودو، دراین‌صورت، مساحت‌آن از $۲ \times ۲ \times \frac{۱}{۲}$، یعنی ۲ سانتی‌مترمربع بیشتراست.

مسألهٔ ۱۰.۵. درست نیست.



شکل ۵۶

مثال نقضی درشکل ۵۶ داده شده است. رأس‌های A، B و D از چهارضلعی $ABCD$ را، خیلی نزدیك به‌هم ورأس C را دورازآن‌ها انتخاب می‌کنیم. اگرنقطهٔ درونی O را نزدیك به C و دوراز A، B و D بگیریم، آن وقت، به‌مثال مورد نظرخود می‌رسیم.

برای علاقه‌مندان. پرسش کلی‌تری طرح می‌کنیم. اگرمحیط چهارضلعی را برابر P بگیریم ونقطه‌ای دلخواه در درون آن انتخاب کنیم، به‌ازای چه مقدارهایی از k، مجموع فاصله‌های این نقطه تا چهار رأس چهارضلعی، از

kP کمتر است.

پاسخ: به‌ازای $k \geqslant \frac{۳}{۲}$. مطلب را روشن می‌کنیم.

برای هرچهار ضلعی $ABCD$، بـرای این کـه مجموع فاصله‌های یك نقطهٔ درونی‌تاچهار رأس، به‌حداکثرمقدارخود برسد، باید این نقطه، دریکی از رأس‌های چهارضلعی قرار گیرد.

در واقع، تـابع $|AM| \to M$ (روی صفحه)، که در آن، A نقطهٔ ثابتی ازصفحه باشد، تابعی است محدب (نمودار آن، یك مخروط است)، و مجموع چهارتابع محدب

$$f(M) = |AM| + |BM| + |CM| + |DM|$$

هم تابعی محدب است. بیشترین مقدارتابع محدب، روی چندضلعی، دررأس آن، به‌دست می‌آید.

اکنون ثابت می‌کنیم، این حداکثرمقدار، از $\frac{۳}{۲}P$ کوچکتراست. فرض کنید، در رأس A، به‌این حداکثر برسیم. این نابرابری‌ها را با هـم جمع می‌کنیم:

$$|AC| < |AB| + |BC|, \quad |AC| < |AD| + |DC|$$

به‌دست می‌آید: $۲|AC| < P$ وبه‌طورمسلم

$$۲|AC| < P + ۲(|BC| + |CD|)$$

که اگربه‌دوطرف‌این نابرابری، مجموع $۲|AB| + ۲|AD|$ را اضافه کنیم، به‌نابرابری مورد نظرمی‌رسیم:

$$|AB| + |AC| + |AD| < \frac{۳}{۲}p$$

برای هرمقدار $k < \frac{۳}{۲}$، با انتخاب

$$|MA| = |MB| + |MD| = |CO| = \varepsilon$$

که درآن، ε عددی به‌قدر کافی کوچك است، می‌توان‌مثال نقضی‌ساخت (شکل ۵۶).

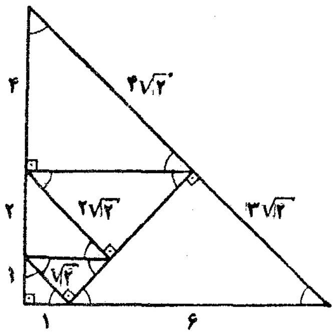
این مطلب را هم یادآوری کنیم که، جست‌وجوی نقطه‌ای در درون چهارضلعی با حداقل مجموع فاصله‌های آن از رأس‌ها، چندان دشوار نیست: این نقطه، درمحل برخورد قطرها قرار دارد.

مسألهٔ ۱۱۰۵. پاسخ: می‌توان.

درشکل ۵۷، روش تقسیم یك مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، با ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ برابر ۷ سانتی‌متر، به ۶ مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین مختلف و متشابه، نشان داده شده است.

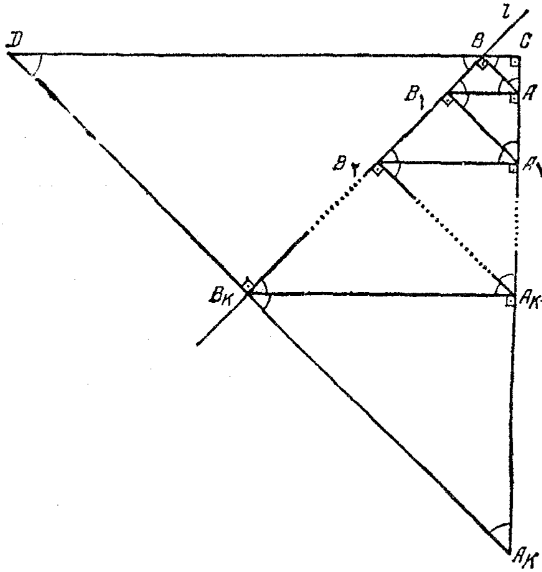
∇ این گزاره هم، درست است: هر مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین را می‌توان به $n > 10$ $(n \in \mathbf{N})$ مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین مختلف و متشابه با یکدیگر، تقسیم کرد.

ابتدا ثابت می‌کنیم، می‌توان آن را به $2k$ بخش $(k \geqslant 3$ ، $k \in \mathbf{N})$ تقسیم کرد. از مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABC $(\hat{C} = 90°)$ آغازمی‌کنیم. ضلع‌های مجاوربه‌زاویهٔ قائمهٔ آن را، CA و CB می‌گیریم و خط راست l را، از رأس B، عمود بر وتر رسم می‌کنیم (شکل ۵۸).



شکل ۵۷

خط‌شکستهٔ $AB_1A_1B_2A_2B_3\ldots B_kA_k$ رابه‌نحوی می‌سازیم که، همهٔ ضلع‌های B_iA_i ازآن موازی AB، و همهٔ ضلع‌های A_iB_{i+1} آن موازی خط راست BC باشند؛ سپس، از آخرین ضلع خط شکسته، یعنی B_kA_k، خط راستی می‌گذرانیم تا خط راست BC را در D قطع کند. به‌سادگی دیده



شکل ۵۸

می‌شود که، به‌این ترتیب، مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین DCA_k، به $2k+2$ مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، که دوبه‌دو مختلف ومتشابه‌اند، تقسیم شده است (حالت خاص این ساختمان، به‌ازای $k=2$، درحل مسألهٔ ۱۱.۵، آمده است).

در زنجیرهٔ مثلث‌های ACB، BAB_1، AB_1A_1، $A_1B_1B_2$، $B_2A_1A_2$، ...، $A_{k-1}B_kA_k$، هر مثلث با مثلث قبلی خود، با ضریب تشابهی برابر $\sqrt{2}$، متشابه است (وتـر مثلث قبلی، با ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ مثلث بعدی، برابراست). بنابرایـن، در دنبالهٔ پـاره خط‌های راست CA، AA_1، A_1A_2، ...، $A_{k-1}A_k$، هرپاره خط، طولی دو برابرطول پاره خط قبلی خود دارد. به ایـن ترتیب، روشی عملی، برای تقسیم مثلث مفروض به صورت مورد نظر، به‌دست می‌آید.

فرض کنید، بخواهیم مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین باضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ به طول a را، به $۲k+۲$ بخش تقسیم کنیم. از رأس زاویهٔ قائمه وروی ضلع مجاوربه‌زاویهٔ قائمه، به‌ترتیب پاره‌خط‌های راستی به‌طول $\frac{a}{۲^k-۱}$، $\frac{۲a}{۲^k-۱}$، $\frac{۴a}{۲^k-۱}$، ...، $\frac{۲^{k-۱}a}{۲^k-۱}$ جدامی‌کنیم (ازآن‌جاکه مجموع $۱+۲+...+۲^{k-۱}$ برابر $۲^k-۱$ است، این تقسیم، ممکن است). نقطه‌های حاصل، همان رأس‌های A، $A_۱$، $A_۲$، ...، A_k ازخط‌شکسته‌ای هستند که درساختمان قبلی، ازآن یادکردیم.

به‌این‌ترتیب، می‌توان، به‌ازای $k\geqslant۳$، مثلث رابه $۲k$ بخش، تقسیم کرد. چون کوچکترین مثلث حاصل را می‌توان، با همین روش، دوباره به ۶ بخش تقسیم کرد، می‌توانیم مثلث اصلی را به $۲k+۵l$ بخش تقسیم کنیم که، درآن، k عددی طبیعی بزرگتراز ۳، و l هرعدد درست غیرمنفی است. ولی، هرعدد درست بزرگتر از ۱۰ را می‌توان به‌این‌صورت نوشت که درستی گزارهٔ ما را، تأیید می‌کند.

تنها این می‌ماند که امکان تقسیم مثلث را، برای $n\leqslant۵$، $n=۷$ و $n=۹$ بخش، ثابت کنیم. حل این حالت‌ها را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

مسألهٔ ۱۲۰۵. پاسخ: می‌توان.

این ساختمان را، که به‌کمک ۹ نخ می‌توان انجام داد، درشکل ۵۹ مثالی داده‌ایم. برای آماده کردن آن، می‌توانید به‌جای میله، ازمداد استفاده کنید.

اگرهرکدام ازنخ‌ها طولی برابر l وهرکدام ازمیله‌ها طولی برابر d داشته باشند، برای محکم و پایداربودن ساختمانی که درشکل ۵۹ نشان داده‌ایم، باید داشته باشیم:

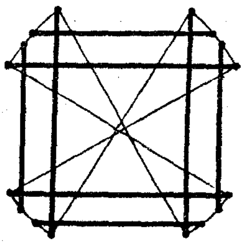
$$d=l\sqrt{۱+\frac{۲}{\sqrt{۳}}}\approx ۱/۴۷l \qquad (۱)$$

درساختمان‌ما، انتهای میله‌ها، دومثلث متساوی‌الاضلاع را می‌سازند. این مثلث‌ها، درصفحه‌های عمود برخط راستی قراردارند که مرکزهای آن‌ها

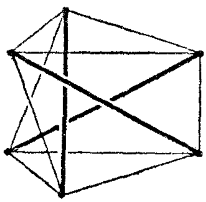
را به‌هم وصل می‌کند و، نسبت به‌هم، به اندازهٔ زاویه‌ای چرخیده‌اند. خود میله‌ها، روی خطهای راستی قراردارندکه دوبه‌دو نسبت به‌هم متنافرند.

▽ اتصال میله‌ها و نخ‌ها درشکل ۵۹، شبیه یك هشت وجهی انجام می‌شود (گراف هشت وجهی را درشکل ۶۶ ازمسألهٔ ۱۵.۵ ببینید). اثبات وجود ریاضی این ساختمان، یعنی اثبات کافی بودن شرط (۱)، دشواراست.

این ساختمان را، ب.فوبر، درسال‌های ۶۰ پیدا کرد. ولی بعد از او، مجموعه‌ای از ساختمان‌های مختلف از این گونه، درست شد. مؤلفان کتاب حاضر، ضمن تهیهٔ کتاب، این مسأله را طرح کرده‌اند: ساختمان فضایی پایداری ازمیله‌ها و نخ‌ها درست کنید، به‌نحوی که میله‌ها با هم تماس نداشته باشند و هرانتهای یك میله، درست به دو نخ متصل باشد. طرحی ازاین ساختمان، درشکل ۶۰ داده شده است.



شکل ۶۰

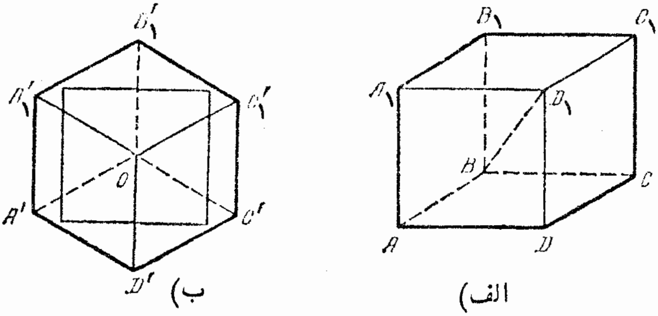


شکل ۵۹

مسألهٔ ۱۳۰۵. پاسخ: می‌توان.

مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ به‌یال برابر a (شکل «۶۱ ـ الف» را ببینید) و شش ضلعی فضایی $AA_1B_1C_1CDA$ را درنظرمی گیریم (رأس‌های این شش ضلعی، روی یك‌صفحه نیستند). ازمیان این شش ضلعی (وبنابراین، ازمیان مکعب) می‌توان مکعب به‌ضلع a را، آزادانه عبورداد.

برای روشن شدن مطلب، تصویر مکعب را روی صفحهٔ عمود برقطر BD_1 آن، در شکل ۶۱، ب) نشان داده‌ایم. به‌دلیل متقارن بودن مکعب،



شکل ۶۱

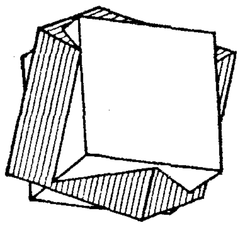
این تصویر، شش‌ضلعی منتظم $A'A'_1B'_1C'_1C'D'$ خواهد بود که، درآن، A' تصویر نقطهٔ A، A'_1 تصویر نقطهٔ A_1 است و غیره. به‌این‌ترتیب، دورهٔ این شش‌ضلعی منتظم، تصویرشش‌ضلعی فضایی $AA_1B_1C_1CD$ می‌شود وتصویر دوانتهای BD_1 ـ قطر مکعب ـ بر نقطهٔ O، مرکـز شش ضلعی منتظم قرار می گیرد.

چون سینوس زاویهٔ بین هریال مکعب با قطر آن، برابر $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ است، ضلع شش‌ضلعی منتظم، برابر $a\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ وشعاع دایرهٔ محاطی‌آن، برابر $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ (نصف قطر مربع به ضلع a) می‌شود. بنابراین می‌توان مربع به‌ضلع a را، به‌طور کامل در شش‌ضلعی جا داد، به‌نحوی که مرکز آن درنقطهٔ O باشد و، درضمن، هیچ گونه برخوردی با ضلع‌های شش ضلعی پیدا نکند، آن طورکه در شکل «۶۱ ـ ب» دیده می‌شود.

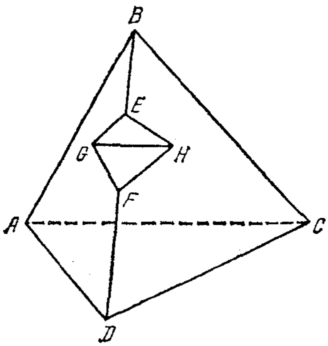
ازاین جا نتیجه می‌شود که، اگرمکعب به‌ضلع a را طوری قراردهیم که وجه پایینی‌آن، برمربع شکل «۶۱ ـ ب» منطبق، و قطرمکعب عمود بر صفحهٔ شش‌ضلعی باشد، آن‌وقت، مکعب، با ضلع شش‌ضلعی، تماسی نخواهد داشت. واین، به‌معنای آن است که می‌توان مکعب را، از درون شش‌ضلعی فضایی در طول قطر BD_1 عبور داد.

به‌این‌ترتیب، می‌توان درمکعب چوبی‌سوراخی ایجاد کرد، که‌مکعبی برابرآن، ازطریق این سوراخ، عبورکند (شکل ۶۲ را ببینید).

▽ ازاستدلال‌بالاروشن می‌شود که، حتی می‌توان، مکعبی بااندازه‌های اندکی بـزرگتراز مکعب مفروض را، از آن عبورداد. در واقـع طول یال مکعبی که باید از مکعب به یال a عبور کند، باید کمتراز a $\sqrt{۲}(\sqrt{۳}-۱)$ باشد.



شکل ۶۲



شکل ۶۳

مسألهٔ ۱۴۰۵. پاسخ: وجود دارد.

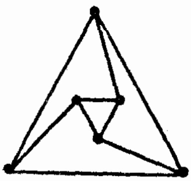
در شکل ۶۳، نمونه‌ای از ایـن چند وجهی داده شده است. این چند وجهی را، به‌ترتیب‌زیر، می‌توان به‌دست‌آورد: روی یال BD ازچهاروجهی $ABCD$ «اطاقـکی» از دومثلث GEH و GFH ایجاد می‌کنیم. این چند وجهی، دارای ۸ رأس، ۶ وجه و ۱۲ یال است.

▽ درچند وجهی شکل۶۳، دو وجه شش ضلعی وجود داردکه، دردو یال BE و FD مشترک‌انـد. چنین موقعیتی، برای چند وجهی‌های محدب وجود ندارد: درچند وجهی محدب، هر دو وجه نمی‌توانند بیش از یك یال مشترك داشته باشند.

مسألهٔ ۱۵۰۵. الف) پاسخ: می‌توان.

نمونهٔ جواب درشکل ۶۴ داده شده است.

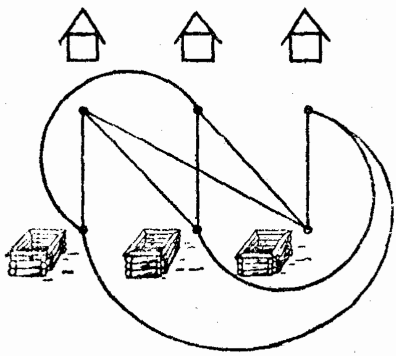
∇ این مسأله، مسألهٔ معروف «خانه‌ها وچاه‌ها» را به خاطر می‌آورد: آیا می‌توان در روی صفحه، نه‌جاده طوری کشید که یکدیگر را قطع نکنند و هریك ازسه «خانه» را، به‌هریك از سه «چاه» مربوط نمایند؟ دراین شبکهٔ جاده‌ها هم (مثل مسألهٔ ۱۵.۵) شش رأس وجود دارد و ازهر رأس، سه‌خط خارج شده است (شکل ۶۵). باوجود این، پاسخ به‌پرسش «خانه‌ها و چاه‌ها» منفی‌است: چنین‌شبکه‌ای را نمی‌توان رسم کرد.



شکل ۶۴

کلید اثبات این حکم، قضیهٔ اولر است: فرض کنید n، تعداد رأس‌ها؛ m، تعداد پاره خطهای بین برخی از این رأس‌هاو f، تعداد چند ضلعی‌هایی باشدکه درصفحه به وسیلهٔ این پاره خطها، ایجاد شده است؛ در این صورت داریم:

$$n+f=m+۱$$

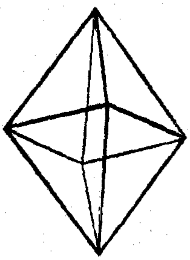


شکل ۶۵

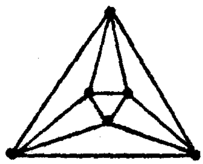
برای علاقه‌مندان. این قضیه هم درست است (واگنر، فاری، شتاین): اگر گراف را بتوان روی صفحه، بدون برخورد، نشان داد، آن‌وقت می‌توان آن‌را روی‌صفحه طوری نشان داد که‌همهٔ یال‌های آن، پاره خطهای راست باشند. شرط لازم و کافی برای مسطح بودن گراف را، قضیهٔ پون‌تریاگین‌ـ کوراتووسکی بیان می‌کند: وقتی وتنها وقتی می‌توان گراف‌را، بدون تقاطع، در صفحه نشان داد که شامل زیرگرافی همان گـراف با شش رأس از نـوع «خانه‌ها ـ چاه‌ها» ویا گراف کاملی با پنج‌رأس (پنج نقطه‌ای که دو به‌دو به‌هم وصل شده‌اند) نباشد.

ب) پاسخ: می‌توان.

مثالی درشکل ۶۶ داده شده است. می‌توان تصورکردکه، دراین جا، یك هشت وجهی ساخته شده با سیم نشان داده شده است (شکـل ۶۷) که عکس‌آن‌را ازنقطه‌ای واقع درنزدیکی مرکز یکی از وجه‌های آن، گرفته‌اند.



شکل ۶۷

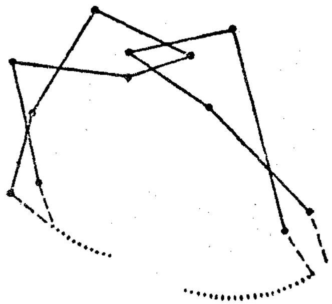


شکل ۶۶

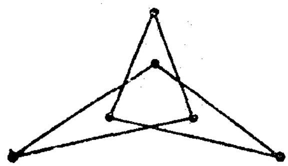
مسألهٔ ۱۶۰۵. الف) پاسخ: وجود دارد.

نمونهٔ جواب درشکل ۶۸ داده شده است.

▽ برای هر$n \geqslant ۶$، به شرط زوج بودن عدد n، می‌توان خط شکستهٔ بسته‌ای پیداکردکه شامل n ضلع باشد و هرضلع خود را درست یك‌بار قطع کرده باشد. نمونهٔ خط شکسته، برای $n = ۶$ را، قبلاً دیدیم. برای$n \geqslant ۸$، بخشی ازساختمان چنین خط شکسته‌ای، درشکـل ۶۹ نشان داده شده است



شکل ۶۹



شکل ۶۸

(قانون ساختمان بخش باقی مانده روشن است).

ب) پاسخ: وجود ندارد.

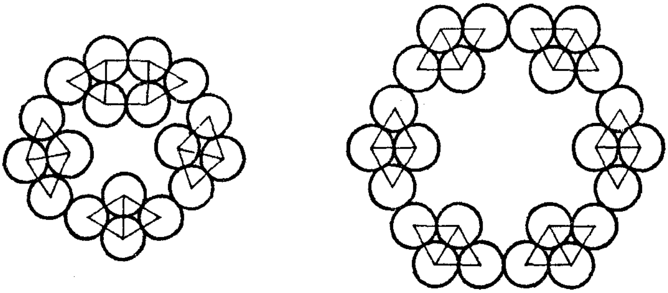
فرض می‌کنیم توانسته باشیم، چنین خط شکسته‌ای را بسازیم. یکی از نقطه‌های برخورد با خودش را در نظر مـی‌گیریم. دو ضلع دراین نقطه یکدیگر را قطع کرده‌اند و در ضمن، ایـن دوضلع، با ضلع‌های دیگری (البته به‌جز در رأس‌ها) نقطهٔ برخورد ندارند. بنابراین، همهٔ ضلع‌های خط شکسته را می‌توان به‌زوج‌هایی تقسیم کرد که متناظر با نقطه‌های برخورد با خودش باشند. به‌این ترتیب، تعداد ضلع‌هـای خط شکسته، زوج است و نمی‌تواند برابرهفت باشد.

∇ این استدلال نشان می‌دهدکه، به طورکلی، خط شکستهٔ بسته‌ای با تعداد فرد ضلع‌ها وجود ندارد که هر ضلع خود را، درست یك بار قطع کرده باشد.

مسألهٔ ۱۷۰۵. پاسخ: الف) می‌توان؛ ب) نمی‌توان.

الف) درشکل «۷۰ ـ الف» نشان داده‌ایم، به‌چه ترتیب می‌توان ۲۴ سکه را چید. شیوهٔ عمل را روشن می‌کنیم.

شعاع سکه را R مـی‌گیریم. مرکزهای هرچهارسکه را در رأس‌های یك لوزی به‌ضلع $2R$ قرارمی‌دهیم (قطرکوچکترلوزی هم، برابر $2R$ است).



الف)　　　　ب)

شکل ۷۵

سپس، این مجموعه‌های چهارسکه‌ای را، در جهت قطر بزرگترلوزی‌ها، به‌هم نزدیك می‌کنیم (شکل ۷۵ ـ الف).

ب) فرض می‌کنیم توانسته باشیم، ۲۵ سکه را طبق خواست مسأله روی صفحه چیده باشیم و، سپس، خود را به‌تناقض می‌رسانیم.

روی محیط هرسکه، سه‌نقطه‌ای را که در آن‌ها، با سه دایرهٔ دیگر مماس است، علامت می‌گذاریم. تعدادکل این نقطه‌ها را، با دو روش، محاسبه می‌کنیم. ازیك طرف، تعداد این نقطه‌ها باید زوج باشد، زیرا هردو نقطهٔ علامت‌دار، به عنوان نقطهٔ تماس دو دایره، برهم منطبق‌می‌شوند. از طرف دیگر، تعداد این نقطه‌ها فرد است، زیرا ۲۵ دایره داریم و روی هر دایره ۳ نقطه را علامت گذاشته‌ایم. تناقض حاصل، حکم مورد نظر ما را ثابت می‌کند.

∇ جالب است روشن‌کنیم، به ازای چه‌مقدارهایی از k، نمی‌توان تعداد محدود سکهٔ گرد برابر، طوری روی صفحه قرارداد که، هرسکه، بر k سکهٔ دیگرمماس باشد؟ ثابت می‌کنیم که k، نمی‌تواند از ۳ بزرگترباشد.

فرض می‌کنیم، سکه‌های گرد برابر را، روی صفحه طوری چیده‌باشیم که، هرکدام ازآن‌ها، بر k سکهٔ دیگرمماس باشد. مرکزهای همهٔ سکه‌ها را علامت می‌گذاریم و پوستهٔ محدب آن را ـ که یك چند ضلعی محدب است ـ

درنظرمی‌گیریم. اگر A و B و C را، سه‌رأس متوالی‌آن بگیریم، زاویهٔ ABC از ۱۸۰ درجه کمتر می‌شود. فرض کنید، سکهٔ به‌مرکز B، برسکه‌های به‌مرکزهای O_1، O_2، ...، O_k مماس باشد (مرکزها را به‌ردیف دوران دور نقطهٔ B و دریکی ازدوجهت ممکن، درنظربگیرید). به‌سادگی معلوم‌می‌شود که هر یك از زاویه‌های O_1BO_2، O_2BO_3، ...، $O_{k-1}BO_k$، از ۶۰ درجه کمترنیست. ازاین جا نتیجه می‌شود:

$$k.۶۰^\circ \leqslant ۱۸۰^\circ \Rightarrow k \leqslant ۳$$

اکنون ثابت می‌کنیم، به‌ازای $k=۳$، می‌توان سکه‌ها را، به‌شرطی که تعدادآن‌ها زوج و به‌قدر کافی باشد، طوری روی صفحه چید که هر سکه برسه‌سکهٔ دیگرمماس باشد. برای‌این‌منظور، بهتراست‌ازدونوع مجموعه‌های آماده استفاده‌کنیم: «لوزی» شامل چهارسکه و «فانوس» شامل شش سکه.

باچهارلوزی، زنجیره‌ای‌از۱۶ سکه‌آماده‌می‌شود. درشکل «۷۰ ـ ب» نشان داده‌شده است که، چگونه می‌توان با «لوزی‌ها» و «فانوس‌ها»، زنجیرهٔ بسته‌ای شامل ۱۸ سکه ساخت. هر عدد زوج بزرگتر از ۱۸ را می‌توان به‌صورت $۴n+۶m$ نوشت؛ یعنی با هرتعداد زوج سکه‌ها (بیشتر از ۱۸)، می‌توان به کمك ترکیبی از «لوزی‌ها» و «فانوس‌ها»، زنجیرهٔ مورد نظر را به‌دست‌آورد.

طرح پرسش‌مشابه درفضا وبرای‌کره‌های برابر، می‌تواند جالب‌باشد. درسال ۱۹۵۳ ثابت شدکه، به‌هرکره درفضا، نمی‌توان بیش از۱۲ کرهٔ برابر با آن، متصل کرد.

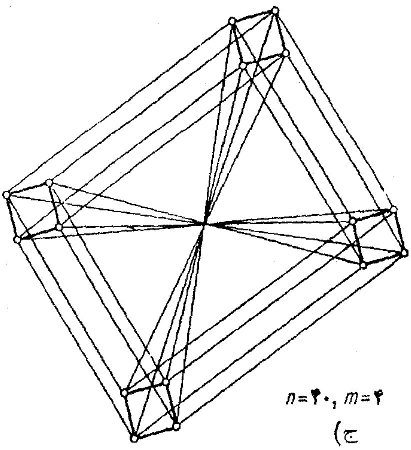
مسألهٔ ۱۸۰۵. پاسخ: ممکن است.

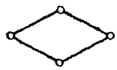
هرنفر را متناظر با یك نقطه، و افراد مختلف را متناظربا نقطه‌های مختلف می‌گیریم. اگردو نفر با هم آشنا باشند، نقطه‌های متناظرآن‌ها را، به‌وسیلهٔ یك پاره‌خط راست، به هم وصل می‌کنیم. دراین صورت، مسأله را می‌توان به‌این صورت طرح کرد: آیا طرحی وجود داردکه درآن، مثلث وجود نداشته باشد و، هردو نقطه، یا به‌وسیلهٔ پاره خط راستی به‌هم وصل

شده باشند، و یا رأس‌های روبه‌رو، تنها در یک چهارضلعی باشند؟

درشکل «۷۱ ـ الف وب»، دو نمونهٔ ساده ازاین طرح داده شده‌است. درشکل «۷۱ ـ ج»، طرحی شامل ۱۶ نفر و ۴۰ پاره خط راست داده شده است که با شرطهای مسأله سازگار است. برای این که سازگاری شرطهای مسأله را با این طرح روشن کنید، می‌توانید ازتقارن شکل استفاده‌کنید.

▽ جالب است که شرح پیکربندی مسألهٔ ۱۸.۵ را می‌توان به‌عنوان مجموعهٔ رأس ها، یال‌ها و قطرهای بزرگ مکعب چهاربعدی توضیح داد.





شکل ۷۱

می‌توان ثابت کرد که، با شرطهای مسألهٔ ۱۸.۵، دراین اجتماع، تعداد آشناهای هرفرد، باتعدادآشناهای هرفرد دیگر، برابراست. مجموعهٔ آشناهای A را، دراین اجتماع، با M_A ومجموعهٔ افرادناآشنا را با N_A نشان می‌دهیم. به‌این ترتیب، هرعضو N_A را می‌توان بـا دو عضو M_A (آن‌هایی که با او آشنا هستند) متناظرکرد. به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که، متناظربین مجموعهٔ N_A ومجموعـهٔ همهٔ زوج عضوهای ممکن M_A، تناظـری یك به‌یك است. بنابـرایـن، اگـر M_A دارای m_A عضـو بـاشد، آن وقـت، N_A، دارای

$\frac{۱}{۲}m_A(m_A-۱)$ عضو خواهد بود؛ و تعداد کل‌کسانی که دراین اجتماع شرکت کرده‌اند، چنین می‌شود:

$$n=۱+m_A+\frac{۱}{۲}m_A(m_A-۱)$$

این برابری، برای هرشخص A، برقرار است. ولی معادلهٔ

$$۱+x+\frac{۱}{۲}x(x-۱)=n$$

برای $n>۱$، تنها یك جواب مثبت دارد، یعنی تعداد m_A برای همهٔ Aها، یکی است.

پاسخ کامل به‌این پرسش راکه، به‌ازای‌چه‌مقدارهایی‌از n چنین اجتماعی وجود دارد، نمی‌دانیم. همان‌طور که ثابت کردیم

$$n=۱+m+\frac{۱}{۲}m(m-۱)$$

که درآن، m عبارت است ازتعداد آشناهای هرفرد. به‌سادگی می‌توان ثابت کردکه، چنین اجتماعی، برای $m=۳$، $m=۴$ و $m=۴k+۳$، $(k\in\mathbb{N})$ وجود ندارد. همهٔ نمونه‌هایی ازاین‌گونه اجتماع‌را، که برای ما معلوم‌بوده است، درشکل «۷۱ ـ الف وب وج» نشان داده‌ایم.

مسألهٔ ۱۹۰۵. پاسخ: ممکن است.

روی شکل ۷۲، نتیجهٔ همهٔ بازی‌های این سه شطرنج باز نشان داده شده است؛ به‌نحوی‌که با شرطهای مسأله سازگارباشند. درآن، هردونفر، ۷ دوربا هم بازی کرده‌اند و درضمن:

ـ اولی از دومی دوباربرده است؛

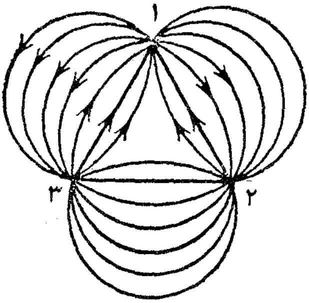
ـ دومی از اولی دوباربرده است؛

ـ اولی ازسومی سه‌باربرده است؛

ـ سومی از اولی چهارباربرده است؛

ـ بقیهٔ بازی، مساوی شده است.

دراین مسابقه، اولی ۶/۵ امتیاز، دومی ۷ امتیاز و سومی ۷/۵ امتیازآورده‌اند. درضمن، برد اولی از همه بیشتر است: ۵ دور؛ باخت دومی از همه‌کمتراست: ۲ دور؛ ولی سومی بیش ازهمه امتیازآورده است.



شکل ۷۲

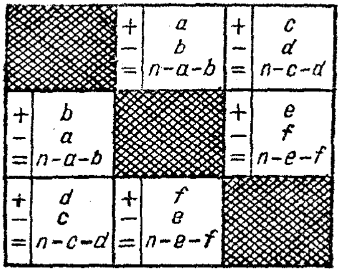
∇ می‌توان جدول مسابقه را تشکیل داد (شکل ۷۳): همهٔ بردها (+)، باخت‌ها (−) و مساوی‌ها (=) را با حرف نشان می‌دهیم و شرطهای مسأله را می‌نویسیم. دستگاهی از نامعادله‌های خطی به‌دست می‌آیدکه، در آن، تعداد مجهول‌ها ازتعداد نامعادله‌هابیشتراست. حل‌مسألهٔ ۱۹.۵ نشان می‌دهدکه، این‌دستگاه، درمجموعهٔ عددهای طبیعی، دست‌کم یک جواب دارد. البته، این جواب، منحصربه‌فرد نیست و جالب است که همهٔ جواب‌ها را پیداکنیم.

مسألهٔ ۲۰.۵. پاسخ: می‌توان.

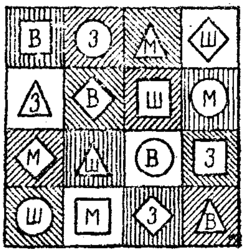
درشکل ۷۴، جواب را داده‌ایم. دراین شکل، رنگ‌های مختلف، با هاشورهای مختلف نشان داده شده است.

∇ وقتی‌که n علامت مختلف در یک جدول $n\times n$، طوری نوشته شده باشندکه هرسطر و هرستون، شامل همهٔ علامت‌های مختلف باشند، گویند، یک مربع لاتینی داده شده است. دومربع لاتینی A و B را، عمودبر هم‌گویند، وقتی که درخانه‌هایی ازمربع A که علامت iام وجود دارد، در مربع B، علامت‌های مختلف وجود داشته باشد (و به‌همین ترتیب، برای $i=1،2،...،n$).

مسألهٔ ما این است‌که، سه‌مربع لاتینی ۴ × ۴ و دوبه دوعمود برهم بسازیم (یکی‌رنگ‌ها را می‌دهد، دیگری شکل‌کادرها و سومی حرف‌ها را).



شکل ۷۳



شکل ۷۴

برای علاقه‌مندان. برای تشکیل این‌گونه جدول‌های مربعی (که در مسأله‌های عملی، و مثلاً برای برنامه‌ریزی آزمایش‌های مختلف، کاربرد فراوان دارد)، بهتر است از مفهوم صفحهٔ آفینی محدود استفاده کنیم.

F را میدانی محدود، از q عضو می‌گیریم؛ زوج (x,y) از عضوهای F را نقطه‌های صفحهٔ آفینی محدود، و مجموعه‌های به‌صورت

$$\{(x,y): ax+by+c=0\}$$

را، خط‌های راست می‌نامیم ($a,b,c\in F$؛ درضمن a و b با هم صفر نیستند).

روی هم q^2 نقطه و $q(q+1)$ خط راست به‌دست می‌آید؛ درضمن، این خط‌های راست، به $(q+1)$ خانواده طوری تقسیم می‌شوند که، در هر خانواده، درست q خط راست «موازی» باهم وجود دارد و از هر نقطه، $(q+1)$ خط راست می‌گذرد.

مثلاً، یکی ازخانواده‌ها، عبارت است ازخط‌های راست $x+c=0$، دیگری $y+c=0$، سومی $-x+y+c=0$، چهارمی $x+2y+c=0$ (به‌شرط $q>2$) و غیره.

در برابر هر یک از $q+1$ خانواده، ویژگی معینی را قرارمی‌دهیم: «شمارهٔ ستون»، «شمارهٔ سطر»، «حرف»، «شکل کادر» و غیره. به‌نقطه‌های هر یک از q خط‌راست خانوادهٔ اول شمارهٔ معینی ازسطر، به‌نقطه‌های هریک از

خانوادهٔ دوم، شمارهٔ معینی ازستون، به‌خانوادهٔ سوم، «حرف»، به چهارمی «کادرشکل» وغیره می‌دهیم. دراین‌صورت، روشی به‌دست می‌آیدکه بتوانیم بفهمیم، درچه‌خانهٔ جدول $q \times q$، هریك ازنقطه‌های (x, y) را قرار دهیم، چه‌رنگی داشته باشد،کدام حرف باشد وغیره. هردو خط راست غیرموازی، یکدیگررا درنقطه‌ای قطع‌می‌کنند، به‌نحوی‌که، برای هردوویژگی مفروض، درست یك خانه پیدا می‌شودکه دو ویژگی موردنظر را دارد.

به ازای $q=۴$، میدان محدودی از عنصرهای ۰، ۱، a و b وجود داردکه منجربه‌حل مسألهٔ ما می‌شود. جدول‌های جمع وضرب، دراین میدان را، در زیرداده‌ایم.

·	۰	۱	a	b
۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	a	b
a	۰	a	b	۱
b	۰	b	۱	a

+	۰	۱	a	b
۰	۰	۱	a	b
۱	۱	۰	b	a
a	a	b	۰	۱
b	b	a	۱	۰

مسألهٔ ۰۲۱۰۵. الف) پاسخ: ۴ یا ۶ روند.

ازشرط مسأله معلوم می‌شودکه، عضوهای‌انجمن ریاضی، یا دونفری ویا سه نفری، به‌کافه می‌روند.

اگرهربار‌دونفری به کافه بروند، باید ۶ روندکار وجود داشته باشد. در واقع، اگرافراد را، از ۱ تا ۴، شماره‌گذاری‌کنیم، تنها به‌این ترتیب می‌توانند به‌کافه مراجعه‌کنند:

$$(۱،۲);(۱،۳);(۱،۴);(۲،۳);(۲،۴);(۳،۴)$$

درحالتی‌که در مراجعهٔ اول به کافه، سه نفر با هم باشند، برای مراجعه‌های بعدی، تنها به‌این سه‌طریق می‌توانند عمل‌کنند: هربار، هر یك ازاین سه‌نفربا نفرچهارم.

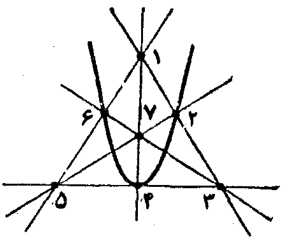
ب) پاسخ: دونوع برنامه می‌توان تنظیم کرد:

(۶،۷)؛(۵،۷)؛(۴،۷)؛(۳،۷)؛(۲،۷)؛(۱،۷)؛(۱،۲،۳،۴،۵،۶)

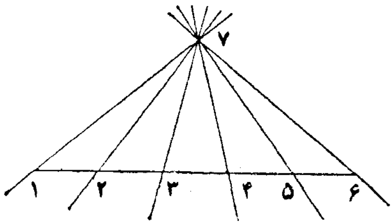
و یا

(۳،۴،۵)؛(۳،۶،۷)؛(۲،۴،۶)؛(۲،۵،۷)؛(۱،۵،۶)؛(۱،۴،۷)؛(۱،۲،۳)

این موقعیت‌ها را مـی‌توان به صورت گراف نشان داد. برنامهٔ اول، روی شکل «۷۵ ـ الف» نشان داده شده است: خـط راست افقی، متناظر با نخستین مراجعه به کافه، و خطهای راستی که نقطهٔ ۷ را به‌نقطه‌های دیگر وصل کرده است، متناظربا مراجعه‌های بعدی است.



ب)



الف)

شکل ۷۵

برنامهٔ دوم رادرشکل «۷۵ ـ ب» نشان داده‌ایم. دراین گراف، هرخط (راست یا منحنی) متناظربا یك مراجعهٔ بـه کافه است؛ هرخط، سه‌شماره را به‌هم وصل کـرده است، و نشان می‌دهد چه کسانـی با هم بـه کافه مراجعه می‌کنند.

∇ پرسش‌های کلی زیر، به‌این مسأله مربوطاند.

فرض کنید در مجموعهٔ E کـه شامل n عضو است، m زیرمجموعهٔ مختلف، به‌جزخود E، جداکرده باشیم، به‌نحوی که برای‌هردوعضو از E، درست یك زیرمجموعه پیدا شود که شامل این‌دوعضوبا هم باشد.

آیا ممکن است $m<n$؟ درچه حالتی $m=n$ پیش می‌آید؟

برای علاقه‌مندان. ثابت می‌کنیم، همیشه $n \geqslant m$. عضوهای مجموعهٔ E را a_1، a_2، a_3،...، a_n و زیـر مجموعـه‌های جدا شده از آن را، A_1، A_2،...، A_m می‌نامیم.

هرعضو a_i را، متناظر با بردار m بعدی

$$\mathbf{a}_i = (\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, \lambda_{im})$$

به ایـن ترتیب قـرار می‌دهیم که: اگر عضو a_i در مجموعهٔ A_j وارد نشده است، آن وقت $\lambda_{ij} = 0$؛ و اگر a_i عضوی از A_j است، آن وقت $\lambda_{ij} = 1$.

ازشرط نتیجه می‌شود که، حاصل‌ضرب داخلی (اسکالر) هردو بردار از این گونـه، برابر واحـد است، یعنی $(\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j) = 1$ (برای $i \neq j$)؛ ومجذور اسکالربردار، از ۲ کمتر نیست (زیرا، هرعضو، دست کم، متعلق به ۲ مجموعه است).

اکنون فرض می‌کنیم: $m < n$. چـون تعداد n بـردار $\mathbf{a}_i$ از بعدیت فضای m بیشتر است، دستگاه بـردارهای $\mathbf{a}_1$، $\mathbf{a}_2$،...، $\mathbf{a}_n$ به صورت خطی باهم بستگی دارند، یعنی معادلهٔ

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n = 0$$

دارای جواب غیرصفراست. اگردوطرف این معادله را، به‌ترتیب، دربردارهای $\mathbf{a}_1$، $\mathbf{a}_2$،...، $\mathbf{a}_n$ ضـرب اسکالـر کنیم، بـه‌این دستگاه از معادلـه‌های خطی می‌رسیم:

$$b_1x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$$

$$x_1 + b_2x_2 + \ldots + x_n = 0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + b_nx_n = 0$$

که درآن‌ها $b_i \geqslant 2$. ولی ایـن دستگاه، تنها جواب صفردارد (دترمینان آن، مخالف صفراست) که با فرض ما متناقض است. به‌این ترتیب $m \geqslant n$.

برای برابری $m=n$، لازم و کافی است، یکی از دو حالت زیر را داشته باشیم:

۱) در یکی از زیرمجموعه‌های جدا شده، همهٔ عضوهای E، به‌جز یکی، وارد شده باشند؛ و بقیهٔ زیرمجموعه‌ها، هر کدام شامل دو عضو باشد، یکی عضو باقی مانده‌ای که در زیرمجموعهٔ اول وارد نشده بود و دیگری یکی از عضوهای زیرمجموعهٔ اول؛

۲) عدد n را بتوان به صورت $l(l-۱)+۱$ نشان داد؛ هر زیر-مجموعهٔ جدا شده، شامل l عضو باشد و هرعضو مجموعهٔ E، درست به l زیرمجموعه، تعلق داشته باشد.

یادآوری می‌کنیم که هنوز این مسأله حل نشده است که چه‌زمانی، حالت۲ تحقق پیدا می‌کند. دستگاه زیرمجموعه‌های مجموعهٔ E از تعمیم ▽، به‌شرطی که با شرط۲) سازگار باشد، نام ویژه‌ای دارد: صفحهٔ تصویری محدود از مرتبهٔ $q=l-۱$.

نشان می‌دهیم که، چگونه می‌توان صفحهٔ تصویری محدود از مرتبهٔ $q=p^k$ (برای $n=p^{۲k}+p^k+۱$) را ساخت (p، عددی اول است). برای این منظور، باید از «عددهای» میدان محدود مرتبهٔ p^k استفاده کرد.

صفحهٔ خودمان را به‌وسیلهٔ «عددهای» سه گانهٔ $(x_۱, x_۲, x_۳)$، نقطه‌ای می‌نامیم و آن را، با دقت تا متناسب بودن «عددها» در نظر می‌گیریم (یعنی $(x_۱, x_۲, x_۳)$ و $(cx_۱, cx_۲, cx_۳)$، یك نقطه را معین می‌کنند). قرار می‌گذاریم که $(۰, ۰, ۰)$ را، نقطه به‌حساب نیاوریم.

خط راست، به‌وسیلهٔ «عددهای» سه گانهٔ $(a_۱, a_۲, a_۳)$ [البته، به‌جز $(۰, ۰, ۰)$] داده می‌شود که باز هم با دقت تا متناسب بودن درنظر گرفته می‌شوند. نقطهٔ $(x_۱, x_۲, x_۳)$، تنها وقتی به خط راست $(a_۱, a_۲, a_۳)$ تعلق دارد که داشته باشیم:

$$a_۱x_۱+a_۲x_۲+a_۳x_۳=۰$$

روشن است که این صفحهٔ تصویری، حالت ۲ را نتیجه می‌دهد. در ضمن، نقطه‌های صفحه، عضوهای مجموعهٔ E هستند و خط‌های راست، زیر-مجموعه‌های جدا شده. تعداد نقطه‌ها، با تعداد خط‌های راست برابر است

وهردو نقطه، تنها به یکی از خطهای راست تعلق دارند.

به‌ازای $q = 2$، همان نمونه‌ای ازصفحهٔ تصویری مرتبهٔ ۲ است که درشکل «۷۵ـ ب» نشان داده شده است.

درحالت «ب» ازمسألهٔ ۲۱.۵، دستگاه لازم مجموعه‌ها، برای حالت $l = 3$ و $n = 7$ ساخته شده بود.

برای هرعدد طبیعی q، صفحهٔ تصویری مرتبهٔ q وجودندارد (مثلاً، برای $q = 6$ و $q = 14$)؛ معلوم نشده است که، آیا صفحهٔ تصویری مرتبهٔ ۱۰ وجود دارد یا نه!

مسأله‌هایی برای‌کارمستقل دانش‌آموزان

۲۲.۵. الف) آیا مـی‌توان جدول مربعی 100×100 را طوری با عددها پرکرد که، مجموع عددهای‌هرستون، مقداری‌مثبت؛ ومجموع عددهای هرسطر، مقداری منفی باشد؟

ب) آیا می‌توان درخانه‌های جدول 5×5، ۲۵ عدد را طوری قرار دادکه مجموع چهارعددی که درهرجدول 2×2 قراردارند، مقداری منفی، ولی مجموع هر۲۵ عدد، مقداری مثبت باشد؟

۲۳.۵. چند نفر، درطـول ۷ ساعت، به‌حلزونی نگاه می‌کنند. هریك ازآن‌ها، درست ۱ ساعت حلزون را زیـرنظر گرفت و اعـلام کردکه، دراین ساعت، حلزون درست یك مترخزیده است (اگرچه حرکت حلزون یکنواخت نبوده و توقف‌هایـی هم داشته است). آیا ممکن است، حلزون، در این ۷ ساعت:

الف) بیش از۷ متر؛ ب) بیش از ۱۲ متر؛ ج) کمتراز۵ متر؛ د) کمتر از۴ متر، خزیده باشد؟

۲۴.۵. الف) آیا می‌توان عـدد ۱۲۳ را به‌صورت حاصل ضرب چند عدد طبیعی، طوری نوشت که مجموع مجذورهای این عددها، بازهم برابر ۱۲۳ باشد؟

ب) همین پرسش، دربارهٔ عدد ۴۵۶.

۲۵.۵. آیا می‌توان روی یک خط راست

الف) ۶؛ ب) ۷

پاره‌خط راست طوری قرار داد، به‌نحوی که، هرنقطه، به‌بیش از سه پاره‌خط راست متعلق نباشد، و ازهرسه پاره خط راست، دوتا متقاطع باشند؟

۲۶.۵. دراتوبوسی که بلیت فروش ندارد، ۱۵ مسافری که با هم آشنا نیستند، سوارشده‌اند. هرکدام ازآن‌ها، تنها سکه‌هایی به‌ارزش ۱۰، ۱۵ و ۲۰ کوپک دارند. قیمت بلیت ۵ کوپک است:

الف) آیا این مسافران، می‌توانند با ردوبدل کردن سکه‌ها، کرایهٔ خود را به‌طور کامل بپردازند؟

ب) ثابت کنید، اگرمسافران، روی هم کمتراز ۱۹ سکه داشته باشند، نمی‌توانند کرایه‌های خود را، درست وکامل بپردازند.

ج) ثابت کنید، اگرهمهٔ‌مسافران روی هم کمتر از ۲روبل و ۵۰ کوپک داشته باشند، نمی‌توانندکرایهٔ خود را بپردازند (هر روبل برابر ۱۰۰ کوپک است).

۲۷.۵. الف) درمغازه‌ای، لباس‌هایی ازدو رنگ ودومدل مختلف، وجود دارد. ثابت کنید، برای نمایش آن‌هادرویترین، می‌توان دولباس‌انتخاب کردکه هم ازجهت رنگ وهم ازجهت مدل باهم فرق داشته باشند.

ب) درمغازه‌ای لباس‌هایی باسه رنگ وسه‌مدل متفاوت وجود دارد. آیا می‌توان برای‌ویترین، سه‌لباس طوری انتخاب کردکه معرف هر سه رنگ وهرسه مدل باشند؟

۲۸.۵. مجموع چند عدد برابراست با واحد.آیا ممکن است، مجموع مجذورهای آن‌ها

الف) کمتراز ۰/۰۱؛ ب) بیشترازه ۱۰۰ باشد؟

۲۹.۵. آیا این گزاره‌ها درست‌اند:

الف) اگردر دومثلث ABC و $A_1B_1C_1$ داشته باشیم: $AB=A_1B_1$،

$BC=B_1C_1$ و $\hat{A}=\hat{A}_1$، آن وقت مثلث‌ها باهم برابرند؛

ب) اگرسه‌زاویه ودوضلع ازمثلثی، برابرسه زاویه و دوضلع ازمثلث دیگرباشند، آن وقت این مثلث‌ها برابرند؛

ج) اگر قاعده‌ها و ساق‌های یك ذوزنقه، بـه‌ترتیب با قاعده‌ها و ساق‌های یك ذوزنقهٔ دیگربرابرباشند، آن وقت این ذوزنقه‌ها با هم برابرند؟

۳۰۵. آیا ممکن است:

الف) طول هریك ازسه‌نیمساز مثلث کمتر از ۱ سانتی‌متر و مساحت آن بیشتراز ۱ سانتی‌مترمربع باشد؛

ب) طول هریك ازسه نیمسازمثلث بیشتراز۱۰۰ سانتی‌مترو مساحت آن، کمتراز۱ سانتی‌مترمربع باشد؟

۳۱۰۵. تعداد ضلع‌های یـك چند ضلعی واقـع بـرصفحه، چقدراست، به‌شرطی که

الف) ازاشتراك؛ ب) ازاجتماع

مثلث و چهارضلعی محدب به‌دست‌آمده باشد؟

۳۲۰۵. آیا مـی‌توان ازچهار قـالب ۱ × ۱، هشت قالب ۲ × ۲ و دوازده قالب ۳ × ۳ وشانزده قالب ۴ × ۴، یك مربع ساخت؟

۳۳۰۵. الف) آیا می‌توان مثلثی با ضلع‌های نابرابر را، به دومثلث برابرتقسیم کرد؟

ب) آیا می‌توان مربع را به‌چند مثلث با زاویهٔ منفرجه تقسیم‌کرد؟

ج) چگونه می‌توان مثلث با زاویه‌های ۱۵ درجـه، ۱۰۵ درجه و ۶۰ درجه را، به‌مثلث‌های متساوی‌الساقین تقسیم کرد؟

د) آیا هرمثلثی را می‌توان به‌مثلث‌هـای متساوی‌الساقین‌تقسیم کرد؟

۳۴۰۵. آیا می‌توان مثلث را در داخل دایره‌ای قراردادکه شعاع آن، کمترازشعاع دایرهٔ محیطی مثلث باشد؟

۳۵۰۵. چهارضلعی با محیط P_1 را، در صفحه در درون چهارضلعی با محیط P_2 قرار داده‌ایم. آیا ممکن است:

الف) $P_1 > P_2$؛ ب) $P_1 > 2P_2$؟

۳۶.۵. آیا می‌توان خط شکسته بسته‌ای را، روی صفحه طوری رسم کرد که، هریك ازضلع‌های خود را

الف) ۳بار؛ ب) nبار

قطع کند، به‌شرطی که نقطه‌های برخورد ضلع‌های خط شکسته بر رأس‌های آن منطبق نباشند، و ازیك نقطهٔ برخورد، بیش ازدوضلع عبورنکنند؟

۳۷.۵. آیا می‌توان روی صفحه

الف) ۱۲؛ ب) ۱۳

نقطه قرارداد و آن‌ها را با پاره خطهای راست غیرمتقاطع، طوری به هم وصل کرد که، هرنقطه، به‌پنج نقطهٔ دیگرمربوط باشد؟

۳۸.۵. چهار گروه‌سه‌عددی، ازعددهای درست غیرمنفی، طوری درست کنیدکه بتوان هرعدد درست از ۱ تا۸۱ را، به‌صورت مجموعی ازچهارعدد، و هرعدد ازیك گروه، نشان داد.

۳۹.۵. آیا می‌توان یك تصاعد هندسی صعودی درست‌کردکه، ۱۰۰ جملهٔ اول‌آن، عددهایی‌درست وبقیهٔ جمله‌های‌آن، همه،عددهایی غیردرست باشند؟

۴۰.۵. آیا عددهای ۷، ۸ و ۹ می‌توانند جمله‌هایی از یك تصاعد هندسی باشند (لزومی ندارد، این عددها، جمله‌های مجاورباشند)؟

۴۱.۵. الف) می‌خواهیم لوستری با هفت لامپ را به جریان برق طوری وصل کنیم‌که بتوان هر تعدادی از لامپ‌ها را (ازیك تا هفت) روشن کرد. آیا تنها با استفاده ازسه‌کلید می‌توان به‌این نتیجه رسید؟

ب) همین پرسش دربارهٔ لوستری با هشت لامپ.

۴۲.۵. معلم ریاضیات ۲۰ مسأله برای حل درخانه، به‌دانش‌آموزان داد. درجلسهٔ بعد معلوم شد، هردانش‌آموز درست دومسأله را حل‌کرده و هرمسأله را درست دو دانش‌آموزحل‌کرده است.

الف) تعداد دانش‌آموزان چقدراست؟

ب) آیا معلم می‌تواند طوری برنامه‌ریزی کند که، هردانش‌آموز، دربارهٔ یکی ازمسأله‌هایی که خود حل کرده است، صحبت کند؟

ج) ثابت کنید، معلم‌دست کم به‌دوطریق می‌تواند این برنامه را تنظیم کند؛ نمونه‌ای برای حالتی پیدا کنیدکه این روش‌ها، درست برابر۲ باشند.

د) تعداد روش‌های این برنامه‌ریزی، چقدرمی‌تواند باشد؟

۴۳.۵. بین ۲۵ افسر، بـه تعداد مساوی، افسر پیاده، افسرتوپخانه، افسرتانك، افسر ارتباطات و خلبان و، به‌جز این، به تعداد مساوی ژنرال، سرهنگ، سرگرد، سروان و ستوان وجود دارد؛ درضمن، درهریك ازاین پنج نوع حرفهٔ جنگی، افسرانی ازهرپنج رده هستند. این افسران را، دریك صف ۵ × ۵ طوری قراردهیدکـه درهرستون و هر ردیف بـه همهٔ درجه‌ها و همهٔ حرفه‌ها برخورد کنیم.

۴۴.۵. هرمی با قاعدهٔ مثلثی را در هرم دیـگری با قاعدهٔ مثلثی قرار داده‌ایم.

الف) آیا ممکن‌است مجموع یال‌های هرم درونی، ازمجموع یال‌های هرم بیرونی، بیشتر باشد؟

ب) آیا ممکن است سطح کـل هرم درونی، از سطح کل هرم بیرونی بیشتر باشد؟

۴۵.۵. آیا می‌توان مکعبی به‌ضلع یك سانتی‌متر را در تکه کاغذ مربع شکلی به‌ضلع ۳ سانتی‌متر پیچید؟

۴۶.۵. آیا چهاروجهی غیرمنتظمی وجود داردکه پنج زاویهٔ دووجهی آن، برابر α باشد؟ اگرجـواب مثبت است، مقدار زاویـهٔ دو وجهی ششم، چقدراست؟

۴۷.۵. آیا می‌توان روی سیاره‌ای بـه شکل کره و بـه‌قطر واحد، ۸ ایستگاه طوری قرارداد که، اگر جسمی به‌ارتفاع واحد نسبت به‌سطح سیاره واقع باشد، دست کم ازدو ایستگاه دیده شود؟

۴۸.۵. الف) نمونه‌ای از یـك چند وجهی محدب پیدا کنید کـه، همهٔ وجه‌های آن، متوازی‌الاضلاع باشند، ولی چندوجهی، متوازی‌السطوح نباشد.

ب) فرض کنید، تعداد جهت‌های مختلف یال‌های این چندوجهی برابر k باشد، در این صورت، چند وجهی، چند وجه دارد؟

۴۹.۵. الف) چند جمله‌ای $P(x,y)=x+\frac{(x+y+1)(x+y)}{2}$، از دو متغیر داده شده است. جدول مقدارهای آن را، به‌ازای x و y درست و غیرمنفی تنظیم می‌کنیم. ثابت کنید، در این جدول، به هر عدد درست غیر منفی، یك بار برخورد می‌کنیم.

ب) دربارهٔ چند جمله‌ای $Q(x,y,z)$ از سه متغیر بیندیشید که، بین مقدارهای آن، به‌ازای x، y و z درست و غیرمنفی، به هر عدد درست و غیر منفی، یك بار برخورد کنیم.

۵۰.۵. آیا چندجمله‌ای $P(x,y)$ وجود دارد که، مجموعهٔ مقدارهای آن، مجموعهٔ همهٔ عددهای مثبت باشد؟

۶

دنباله‌ها و تکرارها

۱۰۶. الف) رقم صدم بعد ازممیز را در عددنویسی دهدهی $\frac{۱}{۷}$ پیدا کنید.

ب) یك عدد ۶ رقمی پیدا کنیدکه اگرآن را درعددهای ۲،۳،۴،۵،۶ ضرب کنیم، باز هم یك عدد ۶ رقمی به‌دست آید که تنها در ردیف رقم‌ها با عدد اصلی فرق داشته باشد.

۲۰۶. دسته‌ای ازغازهای سفید روی رشته‌ای ازدریاچه‌ها پروازمی کنند. به‌هردریاچه که می‌رسند، نیمی از غازها به‌اضافهٔ نصف یك غاز روی دریاچه می‌نشینند و بقیه به‌پروازخود ادامه می‌دهند. همهٔ غازها روی هفت دریاچه نشستند. تعداد غازهای این دسته را پیداکنید.

۳۰۶. دنبالهٔ (a_n) به‌این ترتیب تعریف شده است:

$$a_۱ = ۲ ، a_۲ = ۳ ، a_{k+۲} = \frac{a_{k+۱}}{a_k} (k = ۱،۲،...)$$

مطلوب است محاسبهٔ $a_{۱۹۸۶}$.

۴۰۶. درهریك ازدوظرف، A لیتر آب وجود دارد. نصف آب ظرف اول را در ظرف دوم ریخته‌ایم، بعد $\frac{۱}{۳}$ آب ظرف دوم‌را درظرف اول، سپس $\frac{۱}{۴}$ آبی راکه درظرف اول است درظرف دوم ریخته‌ایم و غیره. اگراین‌روند جابه‌جایی را ۱۰۰ بارادامه دهیم، درهر ظرف چقدرآب خواهد بود؟

۵۰۶. دوظرف دراختیار داریم. یك لیترآب دراین ظرف‌ها می‌ریزیم. نصف‌آب ظرف اول را درظرف دوم می‌ریزیم، بعد نصف‌آب موجود درظرف دوم را درظرف اول، سپس نصف آب موجود درظرف اول را در ظرف دوم می‌ریزیم وغیره. ثابت کنید، بدون ارتباط با مقدار آبی که درابتدا درهرظرف بوده است، بعد از ۱۰۰ جابه‌جایی، با دقت تا یك میلی‌لیتر، مقدار آب موجود در دوظرف، $\frac{۲}{۳}$لیتر و $\frac{۱}{۳}$لیتر خواهد بود.

۶۰۶. جملهٔ اول‌یك‌دنباله، برابراست با $۳^{۱۹۸۶}$، وازجملهٔ دوم به‌بعد، هرجمله برابراست بـا مجموع رقم‌های جملهٔ قبل. جملهٔ دهم این دنباله را پیدا کنید.

۷۰۶. دورمیدانی ۱۲ خانـه وجـود دارد کـه نمای بیرونـی آن‌ها، به‌رنگ‌های سفید و قـرمزاست و درهـرکدام از آن‌ها، خانـواده‌ای زندگی می‌کند. هریك ازاین ۱۲ خانواده، با تعداد فردی از ۱۱ خانوادهٔ دیگردوست است. درماه‌ژانویه، یکی ازخانواده‌ها تصمیم گرفت نمای ساختمان خود را به‌رنگی درآوردکـه ساختمان‌های بیشترین دوستان او به‌آن رنگ است. در ماه فوریه، خانوادهٔ همسایهٔ او (در جهت حرکت عقربه‌های ساعت)، همین تصمیم راگرفت. درماه‌مارس، خانوادهٔ سوم (همسایهٔ خانوادهٔ دوم) به‌همین عمل دست زد و غیره. ثـابت‌کنید، لحظه‌ای فـرا می‌رسدکـه، هیچ‌کدام از خانواده‌ها، نیازی به‌تغییر رنگ نمای خانهٔ خود ندارند.

۸۰۶. فرض می‌کنیم، روی یـك صفحهٔ کاغذ شطرنجی نامتناهی، چند خانه (به‌تعداد محدود) «بیمار» باشند. بعد ازهرساعت، به‌طورهم‌زمان، این تغییرها پیش می‌آید: اگرخـانه‌ای «بیمار» باشد و دو خانهٔ چپ و پایین او

«سالم» باشند، آن وقت، این خانه.هم «سالم» می‌شود؛ ولی اگر خانه‌ای «سالم» باشد و دو خانهٔ چپ و پایین او «بیمار» باشند، آن وقت، این خانه هم «بیمار» می‌شود (بقیهٔ خانه‌ها، در وضع قبلی خود باقی می‌مانند). ثابت کنید، با هرموقعیت اولیهٔ خانه‌های «بیمار»، بعد از گذشت مدتی، همهٔ خانه‌ها «سالم» می‌شوند.

۹.۶. سرجوخه‌ای دربرابرصفی از N سرباز ایستاده است و فرمان می‌دهد: «به‌چپ!». با این فرمان، بعضی ازسربازها به‌چپ، وبقیه، به‌راست برمی‌گردند. بعد از آن، در هرثانیه، هردونفری که رودررو قرار گرفته‌اند، عقب‌گرد می‌کنند. ثابت کنید، بعد از زمانی محدود، حرکت‌متوقف می‌شود. تخمین بزنید، بعد ازچند ثانیه، این وضع پیش می‌آید؟

۱۰.۶. دربرابرکارمندی، روی میز، n جلد ازفرهنگ بریتانیکا، درچند ستون قرار دارد. هر روزکه کارمند به کار می‌پردازد، از هر ستون یك جلد برمی‌دارد و از آن‌ها ستون جدیدی می‌سازد و تعداد جلدهای ستون‌ها را، به‌ترتیب غیرصعودی، در دفترخود ثبت می‌کند. مثلاً، اگردر روز اول، در دفتر (۸،۳،۱،۱) ثبت شود، آن وقت، یادداشت روزبعد (۷،۴،۲)، بعد (۶،۳،۳،۱)، (۵،۴،۲،۲) وغیره خواهد بود. بعد از یك ماه، یادداشت دفتراو، چه‌خواهد بود، به‌شرطی‌که تعدادکل nجلد برابر باشد با: الف) ۶؛ ب) ۱۰؟ (تقسیم اولیه به ستون‌ها را، می‌توان دلخواه گرفت.)

۱۱.۶. بین عددهای ده رقمی، چند عدد وجود داردکه طوری با رقم‌های ۲ و ۵ درست شده‌باشندکه، درآن‌ها، دو رقم ۲، مجاورهم نباشند؟

۱۲.۶. بچه‌ها به‌صورت دایره‌ای ایستاده‌اند و می‌خواهند رئیس گروه را انتخاب کنند. برای این‌منظور، به‌این ترتیب عمل می‌کنند: اولی در دایره می‌ماند؛ دومی (با محاسبه درجهت حرکت عقربه‌های ساعت) ازدایره خارج می‌شود؛ سومی درجای خود می‌ماند؛ چهارمی خارج می‌شود و غیره. دایره مرتباً کوچکترمی‌شود تا وقتی‌که تنها یك نفردرآن باقی بماند. چه‌کسی باقی می‌ماند (اگر ازنفراول و درجهت حرکت عقربه‌های ساعت شماره گذاری

کنیم، نفرباقی مانده، درابتدای کار، کجا ایستاده است)، به‌شرطی که درآغاز:
الف) ۶۴ نفر؛ ب) ۱۹۸۶ نفر باشند؟

۱۳۰۶. دنباله‌ای نامتناهی ازصفرها و واحدها

$$0110100110010110\ldots$$

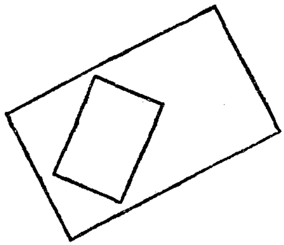
بنابرقاعدهٔ زیر درست شده است: دنباله با صفرآغاز وسپس، بی‌نهایت گام برداشته می‌شود. هرگام به‌این ترتیب است که، دربخشی ازدنباله که قبل‌از آن نوشته شده است، همهٔ صفرها را به‌واحد وهمهٔ واحدها را به‌صفرتبدیل می‌کنیم و قطعه دنبالهٔ حاصل را به‌دنبال بخش قبلی (درسمت راست آن) می‌نویسیم. الف) درمکان ۱۹۸۶، کدام رقم نوشته شده است: ۰ یا ۱ ؟
ب) آیا می‌توان این دنباله را، ازجایی به‌بعد، متناوب دانست؟

۱۴۰۶. بعدازپایان یك کلاس ریاضی، این بازی انجام گرفت. ناظری ازسالن، روی دوتکه کاغذ، دوعدد متوالی (هرعدد روی یك کاغذ) نوشت و درسبد انداخت. اداره‌کنندهٔ بازی از A و B خواست، هرکدام یکی از کاغذها را بردارند. A و B، عددی را که درکاغذ خودشان نوشته شده بود دیدند، ولی ازعدد روی کاغذ دیگری بی‌اطلاع ماندند. بین A و B، این گفت و گو انجام گرفت:

A: من نمی‌دانم چه‌عددی نزد شماست.
B: من نمی‌دانم چه‌عددی نزد شماست.
A: من نمی‌دانم چه‌عددی نزد شماست.
B: من نمی‌دانم چه‌عددی نزد شماست.
. . . .

ده‌بار A و ده‌بار B همین جمله راتکرارکردند. تماشاچیان ازتکراراین جمله خسته شده بودند، ولی ناگهان، دربار یازدهم، A اعلام کرد: «اکنون، من می‌دانم، چه عددی نزد شماست». در این جا، اداره‌کننده درگفت و گو دخالت کرد وازتماشاچیان پرسید: چه‌عددهایی ممکن است نزد A و B باشد؟ چه پاسخی باید به‌اداره‌کننده داده شود؟

۱۵۰۶. روی کارت مستطیل شکلی، کارت دیگری با همان‌موقعیت، ولی با مقیاس کوچکترقرار داده‌ایم (شکل ۷۶). ثابت‌کنید، می‌توان با سوزن، دو کارت را با هم، طوری سوراخ کرد که، نقطهٔ سوراخ، درهر دو کارت دریك موقعیت باشد.



شکل ۷۶

۱۶۰۶. ثابت کنید، دنبالهٔ

$$\sqrt{۱},\ \sqrt{۱+\sqrt{۱}},\ \sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱}}},\ \ldots$$
$$\ldots,\ \underbrace{\sqrt{۱+\sqrt{۱+\ldots+\sqrt{۱}}}}_{n\ \text{مرتبه}},\ \ldots$$

دارای حد است واین حد را پیدا کنید.

۱۷۰۶. دنبالهٔ (a_n)

$$۱,\ \frac{۲}{۱},\ \frac{۳}{۲},\ \frac{۵}{۳},\ \frac{۸}{۵},\ \ldots$$

به این ترتیب داده شده است: $a_۱=۱$ و $a_{n+۱}=۱+\frac{۱}{a_n}$ (برای هرعدد طبیعی n). عددی پیدا کنید که ازهمهٔ جمله‌های ردیف زوج دنباله ($a_۲$، $a_۴$، $a_۶$، ...) کوچکتر و از همهٔ جمله‌های ردیف فرد آن ($a_۱$، $a_۳$، $a_۵$، ...) بزرگترباشد.

۱۸۰۶. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} ۲y=۴-x^۲ \\ ۲x=۴-y^۲ \end{cases}$$

بحث و بررسی مسأله‌ها

مسألهٔ ۶.۱۰ الف) پاسخ: ۸.

اگر ۱ را بر ۷ تقسیم کنیم، می‌بینیم که، در خارج قسمت، دنباله‌ای متناوب ازرقم‌های ۱، ۴، ۲، ۸، ۵، ۷ به‌دست می‌آید (دورهٔ تناوب، عبارت است از (۱۴۲۸۵۷)). چون ۴+۱۶×۶=۱۰۰، بنابراین، رقم صدم بعد ازممیز، همان چهارمین رقم دورهٔ تناوب، یعنی ۸، قراردارد.

∇ برای هر دو عدد طبیعی p و q، کسر $\frac{p}{q}$، یا به‌صورت کسر دهدهی متناهی درمی‌آید و یا به‌صورت کسردهدهی نامتناهی و متناوب. در واقع، ضمن تقسیم برعدد طبیعی q، در باقی مانده، عددی طبیعی وکوچکتر از q به دست می‌آید. بنابراین، ضمن تقسیم، درمرحله‌ای که از q گام تجاوز نمی‌کند، یا باقی مانده برابرصفرمی‌شود و به‌کسردهدهی متناهی می‌رسیم، و یا به‌یکی ازباقی مانده‌هایی می‌رسیم که قبلاً با آن برخورد داشته‌ایم که، در نتیجه، رقم‌های خارج قسمت، به‌صورت تناوبی، تکرار می‌شوند. دراین استدلال، ازاصل دیریکله استفاده می‌شود، که دربارهٔ آن، در بحث مسألهٔ ۹.۲ صحبت کرده‌ایم.

ب) پاسخ: ۱۴۲۸۵۷.

در واقع، ازضرب این عدد در ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶، به‌ترتیب، عددهای ۲۸۵۷۱۴، ۴۲۸۵۷۱، ۵۷۱۴۲۸، ۷۱۴۲۸۵ و ۸۵۷۱۴۲ به‌دست می‌آید.

∇ عددی که درپاسخ ب) آورده‌ایم، همان دورهٔ تناوبی است که در تقسیم عدد ۱ بر ۷، درعدد نویسی دهدهی، به‌دست می‌آید. پنج عددی که نوشته‌ایم، به‌نوبهٔخود، عبارتنداز دوره‌های تناوب کسرهای دهدهی عددهای $\frac{۲}{۷}$، $\frac{۳}{۷}$، $\frac{۴}{۷}$، $\frac{۵}{۷}$ و $\frac{۶}{۷}$.

مسألهٔ ۶.۲۰ پاسخ: ۱۲۷ غاز.

فرض می‌کنیم، یك غاز خاکستری، همیشه همراه با غازهای سفید در

پروازباشد. وقتی که m غازسفید از روی دریاچه‌ای عبور کنند (همراه با غاز خاکستری)، آن وقت، بنابر فرض مسأله، به‌تعداد $\frac{m}{2}+\frac{1}{2}$، یعنی $\frac{m+1}{2}$ غاز روی دریاچه می‌نشینند واین، درست برابر نصف همهٔ غازهاست. به‌این ترتیب، بعد ازپرواز از روی هردریاچه، تعداد غازها، درست نصف‌می‌شود وبعد ازآن‌که از روی هفت دریاچه عبور کنند، به‌اندازهٔ 2^7، یعنی ۱۲۸ بارکم‌می‌شوند وتنهاغازخاکستری به‌پروازخود ادامه می‌دهد. یعنی روی‌هم ۱۲۸ غاز بوده‌است که، ازبین‌آن‌ها، ۱۲۷ تا سفیدند.

∇ غازخاکستری، به‌طورتصادفی، وارد درحل مسأله نشده است. تعداد غازهای سفید را x_k و تعداد دریاچه‌های جلوآن‌ها را k می گیریم. دراین صورت، شرط مسأله را می‌توان این‌طورنوشت:

$$x_k - x_{k-1} = \frac{x_k}{2}+\frac{1}{2}$$

ازاین جا، برای دنبالهٔ (x_k)، به‌این رابطهٔ برگشتی می‌رسیم:

$$x_k = 2x_{k-1}+1 \qquad (*)$$

با اضافه‌کردن غاز خاکستری، در واقع، متغیر x_n را با متغیر $y_n = x_n + 1$ عوض کرده‌ایم و دنبالهٔ جدید (y_n) را به‌دست‌آورده‌ایم. اگردررابطهٔ برگشتی $(*)$، قراردهیم: $x_k = y_k - 1$ و $x_{k-1} = y_{k-1} - 1$، آن وقت، به رابطه‌ای برای دنبالهٔ (y_n) می‌رسیم که ساده‌تراست: $y_k = 2y_{k-1}$. (y_k)، یك تصاعد هندسی با قدرنسبت ۲می‌شود و، بنابراین، جملهٔ‌عمومی‌آن‌به‌صورت $y_n = 2^n y_0$درمی‌آید. اگربه‌دنبالهٔ (x_n) برگردیم، دستوری برای جملهٔ عمومی‌آن پیدا می‌شود: $x_n = 2^n - 1$.

اکنون، حالت کلی‌تری از دنبالهٔ (x_n) را در نظرمی گیریم و برای‌آن فرض می کنیم:

$$x_k = qx_{k-1}+d \qquad (**)$$

اگر $q=۱$، آن وقت (x_n) یك تصاعد حسابی است و جملهٔ عمومی آن، با دستور $x_n=x_۰+d(n-۱)$ بیان می‌شود.

اگر $q\neq۱$ و $d=۰$، آن وقت (x_n) یك تصاعد هندسی است و، برای جملهٔ عمومی‌آن، داریم: $x_n=q^n.x_۰$.

اگر $q\neq۱$ و $d\neq۰$، آن وقت z را طوری پیدا می‌کنیم که دنبالهٔ $y_n=x_n+z$ یك تصاعد هندسی باشد. اگر در رابطهٔ (**) قراردهیم:

$$x_k=y_k-z \text{ و } x_{k-۱}=y_{k-۱}-z$$

به‌دست می‌آید:

$$y_k=qy_{k-۱}+z(۱-q)+d$$

اگر z را طوری انتخاب کنیم که داشته باشیم: $z(۱-q)+d=۰$، آن‌وقت $y_k=qy_{k-۱}$ و از آن جا $y_n=q^ny_۰$؛ و دستوری برای جملهٔ عمومی پیدا می‌شود:

$$x_n=q^n(x_۰+z)-z$$

که درآن $z=\frac{d}{q-۱}$. در مسألهٔ ما، $q=۲$، $x_۰=۰$، $d=۱$ و $z=۱$ (یك غازخاکستری).

مسألهٔ ۳.۶. پاسخ: $a_{۱۹۸۶}=\frac{۲}{۳}$.

نخستین جمله‌های این دنباله را می‌نویسیم:

$$۲، ۳، \frac{۳}{۲}، \frac{۱}{۲}، \frac{۱}{۳}، \frac{۲}{۳}، ۲، ۳، ...$$

$a_۷$ و $a_۸$، همان عددهای $a_۱$ و $a_۲$ هستند، بنابراین، دنبالهٔ ما متناوب است و ۶ جملهٔ اول، پشت‌سرهم تکرارمی‌شوند. چون ۱۹۸۶ بر ۶ بخش‌پذیر است، بنابراین

$$a_{۱۹۸۶}=a_{۶}=\frac{۲}{۳}$$

▽ درمسألهٔ ۲.۶، جمله‌های $a_۱$ و $a_۲$ را، هر عدد غیرصفری انتخاب کنیم، به‌دنباله‌ای متناوب بـا دورهٔ تناوب ۶ می‌رسیم، یعنی $a_{n+۶}=a_n$. برای روشن شدن موضوع، کافی است هشت جملهٔ اول دنباله را بنویسیم:

$$a_۱, a_۲, \frac{a_۲}{a_۱}, \frac{۱}{a_۱}, \frac{۱}{a_۲}, \frac{a_۱}{a_۲}, a_۱, a_۲, \ldots$$

اگر $\ln|a_n|$ را با x_n نشان دهیم، آن وقت، دنبالهٔ (x_n) ازشرط

$$x_{n+۲}=x_{n+۱}-x_n, \ (n>۱)$$

تبعیت می‌کندکه، باز هم، دنباله‌ای متناوب با دورهٔ تناوب ۶ است. گزارهٔ کلی‌تر زیرهم درست است: اگر $d=۲\cos\frac{k\pi}{m}$ که، درآن k و m $(k<m)$، عددهایی طبیعی و نسبت به‌هم اول‌اند، آن وقت، دنبالهٔ با شرط

$$x_{n+۲}=dx_{n+۱}-x_n$$

دنباله‌ای متناوب، بـا دورهٔ تناوبی بـرابـر $۲m$ است. بـه‌ازای $k=۱$ و $m=۳$، به‌دست می‌آید: $d=۲\cos\frac{\pi}{۳}=۱$، و دورهٔ تناوب دنباله برابر $۲m=۶$ می‌شود.

مسألهٔ ۴.۶. پاسخ: همان مقدار نخستین، یعنی درهرظرف A لیتر.

برای این‌که دراین مورد قانع شویم، ثابت می‌کنیم‌که، بعد ازهردو جابه‌جـایی، مقدار آب داخـل هرظرف، همان مقدارنخستین خـواهد بود. وقتی‌که به‌یکی از ظرف‌ها، به‌اندازهٔ $\frac{۱}{k}$ آب ظرف دیگر اضافه کنیم، مقدار آب آن چنین می‌شود:

$$A\left(1+\frac{1}{k}\right)=A\frac{k+1}{k}\ (\text{لیتر})$$

اکنون $\frac{1}{k+1}$ ام آب این ظرف را به‌ظرف اول برمی‌گردانیم، مقدارآبی که درآن باقی می‌ماند، چنین است:

$$A\frac{k+1}{k}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=A\frac{k+1}{k}\cdot\frac{k}{k+1}=A\ (\text{لیتر})$$

مسألهٔ ۵۰۶. یادآوری می‌کنیم که اگر در ظرف اول $\frac{2}{3}$ لیتر، و در ظرف دوم $\frac{1}{3}$ لیتر آب ریخته باشیم، بعد از نخستین جابه‌جایی، حجم آب‌ها، جای خود را عوض می‌کنند و، بعد ازجابه‌جایی دوم، مقدارآب هرظرف، همان مقدارنخستین خود خواهد بود.

اکنون، به‌حالت کلی می‌پردازیم. فرض کنید، بعد از تعداد زوجی جابه‌جایی، درظرف‌اول $\left(\frac{2}{3}+p\right)$ لیتر $\left(-\frac{2}{3}\leqslant p\leqslant\frac{1}{3}\right)$ آب وجود داشته باشد. دراین صورت، مقدارآب ظرف دوم، برابر $\left(\frac{1}{3}-p\right)$ لیتر خواهد بود. بعد از جابه‌جایی بعدی، مقدار آب، دراین دوظرف، به ترتیب چنین است:

$$\left(\frac{2}{3}-\frac{p}{2}\right)\ \text{لیتر}\ \text{و}\ \left(\frac{1}{3}+\frac{p}{2}\right)\ \text{لیتر}$$

و بعد ازجابه‌جایی بعد ازآن

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{p}{4}\right)\ \text{لیتر}\ \text{و}\ \left(\frac{2}{3}+\frac{p}{4}\right)\ \text{لیتر}$$

به‌این‌ترتیب، بعدازهردوجابه‌جایی، مقداراضافی p، به $\frac{1}{4}$ خود تقلیل

پیدا می‌کند. بنابراین، بعداز ۱۰۰ جابه‌جایی (یعنی ۵۰ بارجابه‌جایی متقابل)، مقداراضافی p، به‌اندازهٔ $\frac{۱}{۴^{۵۰}}$ خود می‌شود و مقدارآب ظرف‌ها، به‌ترتیب، برابراین عددها خواهد بود:

$$\frac{۲}{۳}+\frac{p}{۴^{۵۰}} \quad و \quad \frac{۱}{۳}-\frac{p}{۴^{۵۰}}$$

چون p باید در شرط $-\frac{۲}{۳}\leqslant p\leqslant\frac{۱}{۳}$ صدق کند، مقدار اضافی $\frac{p}{۴^{۵۰}}$، از $\frac{۱}{۱۰۰۰۰}$ کمترمی‌شود، یعنی مقدارآب ظرف‌ها، با دقت زیادی، برابر $\frac{۲}{۳}$ لیتر و $\frac{۱}{۳}$ لیترخواهد بود.

▽ اگربه‌جای نصف آب هرظرف، هربار $\frac{۱}{n}$ آب موجود درظرف را، درظرف دیگر بریزیم، بعد از ۱۰۰ جابه‌جایی، مقدارآب ظرف‌ها، با دقت زیادی، برابر با $\frac{n}{۲n-۱}$ لیترو $\frac{n-۱}{۲n-۱}$ لیترخواهد بود.

ببینیم این جواب را چگونه به دست می‌آورند. اگردرظرف اول x لیتر و در ظرف دوم y لیترآب باشد، بعد از نخستین جابه‌جایی، درظرف‌اول به اندازهٔ $\left(\frac{n-۱}{n}\right)x$ لیتر باقی می‌ماند. برای این‌که، بعدازجابه‌جایی دوم، در ظرف اول دوباره همان x لیتر آب وجود داشته باشد، بایدداشته باشیم:

$$y=\left(\frac{n-۱}{n}\right)x$$

و چون $x+y=۱$، پس $x=\frac{n}{۲n-۱}$ لیتر و $y=\frac{n-۱}{۲n-۱}$ لیتر.

مسألهٔ ۶۰۶. پاسخ: ۹.

اگر عددی بر ۹ بخش‌پذیر باشد، مجموع رقم‌های آن، بر ۹ بخش‌پذیر خواهد بود. عدد $۳^{۱۹۸۶} = ۹ \times ۳^{۱۹۸۴}$ بر ۹ بخش‌پذیر است، بنابراین همهٔ جمله‌های دنبالهٔ مفروض، عددهایی بخش‌پذیر بر ۹ هستند.

مقدارهای این جمله‌ها را تخمین می‌زنیم. از نابرابری $۳^۲ < ۱۰$ نتیجه می‌شود:

$$۳^{۱۹۸۶} < ۱۰^{۹۹۳}$$

بنابراین، در عدد $۳^{۱۹۸۶}$، بیش از ۹۹۳ رقم وجود ندارد و جملهٔ دوم دنباله، نمی‌تواند از عدد $۹ \times ۹۹۳ < ۱۰^۴$ بزرگ‌تر باشد. یعنی در جملهٔ دوم، بیش از چهار رقم وجود ندارد. در این صورت، جملهٔ سوم دنباله، از $۳۶ = ۴ \times ۹$ بزرگ‌تر نیست. به‌این ترتیب، جملهٔ چهارم دنباله از ۱۸ کوچکتر است. چون، جملهٔ چهارم هم، مثل جمله‌های قبل بر ۹ بخش‌پذیر است، باید برابر ۹ باشد. و این، به‌معنای آن است که از جملهٔ چهارم به بعد، همهٔ جمله‌ها، برابر ۹ هستند.

∇ به‌طور کلی، در هر دنبالهٔ عددهای طبیعی که، در آن، جملهٔ nام برابر است با مجموع رقم‌های جملهٔ $(n-۱)$ام، همهٔ جمله‌ها، از جایی به‌بعد، با هم برابر می‌شوند. اگر باقی ماندهٔ تقسیم جملهٔ اول بر ۹ برابر r باشد، در حالت $r \neq ۰$، این جمله‌های برابر، مساوی r و در حالت $r = ۰$، مساوی ۹ می‌شوند.

مسألهٔ ۷۰۶. زوج خانواده‌های دوستی را در نظر می‌گیریم که، رنگ نمای خانهٔ آن‌ها، مختلف باشد. در هر ماه، تعداد این زوج‌ها، افزایش پیدا نمی‌کند. در واقع، اگر خانواده‌ای که نوبت او رسیده است، رنگ خانهٔ خود را تغییر ندهد، تعداد این زوج‌ها تغییر نمی‌کند و اگر رنگ خانهٔ خود را عوض کند، تعداد این زوج‌ها، کم می‌شود. چون تعداد این زوج‌ها، عدد غیرمنفی است، نمی‌تواند تا بی‌نهایت، کوچک شود؛ یعنی زمانی فرا می‌رسد که دیگر بی‌تغییر می‌ماند. از این زمان به‌بعد، دیگر رنگ هیچ خانه‌ای عوض نمی‌شود.

▽ این شرط برای مسأله لازم است که تعداد خانواده‌های دوست، برای هرخانه، عددی فردباشد، زیرا در غیراین صورت، ممکن است نتوان اکثریت‌دوستان را پیدا کرد (موقعی‌که نیمی ازخانه‌های دوست به‌رنگ سفید و نیمی دیگربه‌رنگ‌قرمزباشند). درحل مسأله، ازاین‌روش استفاده‌کرده‌ایم: مطلوب است مقداری که (در این جا، تعداد زوج خانواده‌های دوستی‌که خانه‌هایشان رنگ‌های متفاوت دارند)، طبق عملی‌که شرط شده است، تغییر نکند ویا کاهش یابد. ازاین روش، اغلب می‌توان درمورد مجموعه‌هایی‌که، درموردآن‌ها، عملی را تکرارمی کنیم، استفاده‌کرد.

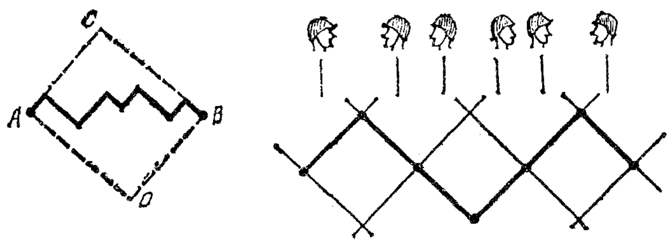
مسألهٔ ۸.۶. درامتداد ضلع بالای بالاترین خانهٔ «بیمار» خط راستی رسم می‌کنیم. روشن است، هیچ خانه‌ای دربالای این خط راست، خانهٔ «بیمار» نیست. به‌همین ترتیب، همهٔ خانه‌هایی‌که درسمت راست خانهٔ «بیمار» سمت راست‌ترین نقطهٔ جدول قراردارند، «بیمار» نیستند. به‌این ترتیب، همهٔ خانه‌های احتمالی «بیمار» دردرون‌یك زاویهٔ قائمه قراردارند. دورترین قطری نسبت به‌رأس این زاویه را درنظرمی گیریم که برنیمساز آن عمود باشد و، روی‌آن، خانه‌های «بیمار» پیدا شود. روشن است، همهٔ خانه‌های «بیمار» واقع براین قطر، بعد ازساعتی «سالم» می‌شوند. بنابراین، بعد ازهرساعت، این دورترین قطر (که شامل خانه‌های «بیمار» است)، گامی به‌سمت رأس برمی‌دارد. دراین صورت، زمانی فرا می‌رسد که، این قطر، به رأس می‌رسد و این، همان زمانی است‌که همهٔ خانه‌ها «سالم» شده‌اند.

برای علاقه‌مندان. فرض کنید، درصفحهٔ شطرنجی، هر خانه بتواند در یکی‌از دوحالت ۰ یا ۱ (ویایکی از N حالت؛ N عددی‌متناهی‌است) قرار گیرد؛ و درهرلحظهٔ زمانی t ($t = ۱، ۲، ۳، ...$)، یکی ازاین حالت‌ها را، درارتباط با وضع چند خانهٔ مجاورخود، طبق قانون معینی مثل قانون F (که برای همهٔ خانه‌های مجاور، یکسان عمل می‌کند)، اختیارکند. بررسی ومطالعهٔ این گونه دستگاه‌ها، که به آن‌ها، سلول‌های خودکار می گویند، در دهه‌های اخیر، مورد علاقهٔ فیزیك‌دانان، سازندگان کامپیوترها و ریاضی‌دانان قرار گرفته‌اند. برای‌برخی قانون‌های نسبتاً ساده، سلول خودکار، رفتاری بغرنج

وعجیب دارد. این رفتار پیچیده، نه‌تنها درسلول خودکار دوبعدی، بلکه در سلول خودکاریك بعدی(که روی یك خطراست قراردارد) نیزدیده می‌شود. بسیاری از این رفتارها را، با برنامه‌ریزی کامپیوتری، مورد مطالعه قرار داده‌اند.

نتیجه‌گیری‌های ریاضی، که تاکنون ازسلول‌های خودکاربه‌دست‌آمده است، چندان زیاد نیست. برای بعضی از مسأله‌های مربوط به‌آن‌ها، غیر-قابل حل بودن آن‌ها ثابت شده است، ولی درمورد بیشترآن‌ها، نه‌قاعده‌ای کلی برای‌حل وجود دارد ونه غیرقابل حل بودن آن‌ها ثابت شده است.

مسألهٔ ۹۰۶. صف سربازها را درتناظر بـا خط شکسته‌ای روی صفحهٔ کاغذ شطرنجی قرارمی‌دهیم، به‌نحوی کـه ضلع‌های این خط شکسته، با خط افقی، زاویهٔ ۴۵ درجه بسازند (شکل ۷۷ ـ الف). هرسرباز متناظراست با پاره خط راستی‌ازخط شکسته؛ درضمن، اگرسربازبه‌طرف راست نگاه‌می‌کند،



ب)

الف)

شکل ۷۷

پاره خط راست متناظرآن درخط شکسته، به‌سمت بالا، و اگرسربازبه‌طرف چپ نگاه می‌کند، پاره خط متناظربه‌سمت پـایین می‌رود. تغییرهایی را که بعد ازهرثـانیه، درصف پدید می‌آید، می‌توان بـه‌این ترتیب شرح داد: دو انتهای A و B از خط شکسته، تغییرجا نمی‌دهند، ولی هرگوشه‌ای‌که ازدو پاره‌خط راست مجاورتشکیل شده و«تپه‌ای»را درست‌کرده است، به‌گوشه‌ای به‌طرف پایین تبدیل می‌شود و «چاله‌ای» را درست می‌کند. به این ترتیب،

ارتفاع بلندترین «تپه»، درهر ثـانیه، کمترمی‌شود و زمانی فرا می‌رسد که، خط شکسته، حتی یك «تپه» هم ندارد، یعنی بـه‌صورت خط شکستهٔ AOB، دو ضلع مجاور از مستطیل $AOBC$، درمی‌آید (شکل ۷۷ـ ب).

بیشترین زمانی که برای حرکت‌های عقب گرد N سربازلازم است، از ۱ ــ N ثانیه تجاوزنمی‌کند. این حـداکثر زمـان، وقتی به‌دست مـی‌آیدکه وضع نخستین سربازها، متناظربـا خط شکستهٔ ACB باشد؛ در مورد هرخط شکستهٔ دیگری کـه همین دوانتها را داشته باشد، برای توقف عقب گردها، زمان کمتری لازم است.

∇ اگردریك صف نـامتناهی، تقریباً همهٔ سربـازها روبه چپ و تعداد محدودی ازآن‌ها، روبه‌راست داشته باشند، حرکتی که درمسأله به‌آن اشاره شده است، بـرای همیشه ادامه خواهد داشت و، این حرکت، درطول صف، همچون موج ظاهرمی‌شود.

مسألهٔ ۱۰۶۰. الف) پاسخ: (۱، ۲، ۳).

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
(۲, ۲, ۱, ۱) \arrow[d] & & & \\
(۴, ۱, ۱) \arrow[d] & & & \\
(۳, ۳) & (۲, ۱, ۱, ۱, ۱) \arrow[dl] & & (۲, ۲, ۲) \arrow[d] \\
& & & (۳, ۱, ۱, ۱) \arrow[d] \\
(۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱) \arrow[r] & (۶) \arrow[r] & (۵, ۱) \arrow[r] & (۴, ۲) \arrow[d] \\
& & & (۳, ۲, ۱)
\end{tikzcd}$$

شکل ۷۸

طرحی که درشکل ۷۸ داده شده است، همه چیز را روشن می کند. در آن‌جا همهٔ حـالت‌های ممکن، بـرای $n=$ ۶ نشان داده شده است. علامت پیکان نشان می‌دهدکه، بعد ازیادداشت، چـه یادداشتی باید در روز بعد در دفتر کارمندثبت‌شود. می‌بینیم، حداکثربعداز۷ روز، بایدیادداشت (۱، ۲، ۳)

در دفتر تکرار شود.

ب) پاسخ: (۱، ۲، ۳، ۴).

برای به‌دست‌آوردن این جواب هم، می‌توان شبیه شکل ۷۸، طرحی رسم کرد. چنین طرحی نشان می‌دهد که، ستون‌های اولیهٔ فرهنگ به هر گونه‌ای باشند، حداکثر بعد از ۱۳ روز، به یادداشت (۱، ۲، ۳، ۴) می‌رسد که از آن به بعد، همین عددها تکرار می‌شوند.

∇ در واقع، برای هر عدد n، می‌توان با چنین طرحی به نتیجه رسید، ولی روشن است که، برای عددهای بزرگ n، به وقت زیادی نیاز دارد. ولی، بدون انجام تمامی آزمایش، می‌توان روشن کرد که، کدام یادداشت‌ها، بعد از زمانی طولانی، تکرار می‌شوند. نتیجهٔ کلی را، می‌توان این طور تنظیم کرد. اگر n (تعداد جلدها) را بتوان به‌صورت مجموعی از عددهای طبیعی متوالی با آغاز از واحد نوشت، یعنی

$$n=۱+۲+\ldots+k=\frac{۱}{۲}k(k+۱)،\ (k\in\mathbf{Z}^+)$$

آن وقت، روزی فرا می‌رسد که، از آن به‌بعد، عددهای

$$k، k-۱، k-۲، \ldots، ۳، ۲، ۱$$

مرتباً در دفتر یادداشت تکرار می‌شوند. (در مسألهٔ ۶.۱۰، در هر دو حالت «الف» و «ب» با همین وضع روبه‌رو بودیم: $\frac{۳\times۴}{۲}=۶$ و $\frac{۴\times۵}{۲}=۱۰$).

ولی اگر عدد n را نتوان به‌صورت $\frac{۱}{۲}k(k+۱)$ نوشت، آن‌وقت، یادداشت‌های دفتر، حالت دوری به‌خود می‌گیرند: از جایی به بعد، یادداشت‌ها تکرار خود را با دورهٔ تناوبی برابر k آغاز می‌کنند که، درآن

$$\frac{۱}{۲}k(k-۱)<n<\frac{۱}{۲}k(k+۱)$$

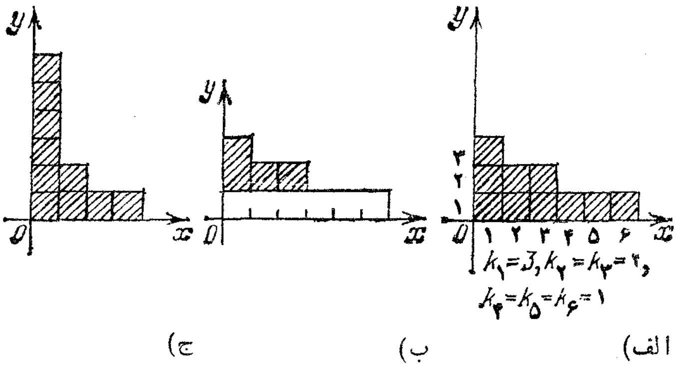
این حکم را ثابت می‌کنیم و، به‌جز آن، روشن می‌کنیم که، درحالت

($n\neq\frac{۱}{۲}k(k+۱)$، دورهٔ تناوب تکرار چیست!

ربع اول دستگاه مختصات قائم را درنظرمی‌گیریم و شبکهٔ مختصاتی را روی‌آن رسم می‌کنیم. یادداشت در دفتر را به‌صورت

$$(k_۱،k_۲،\dots،k_l)؛(k_۱\geqslant k_۲\geqslant\dots\geqslant k_l)$$

به‌این شکل، نشان می‌دهیم: روی شکل، ابتدا ستون به‌ارتفاع $k_۱$، سپس در کنارآن، ستون به ارتفاع $k_۲$، بعد ستون به ارتفاع $k_۳$ و غیره را رسم می‌کنیم تا به‌ستون با ارتفاع k_l برسیم (شکل ۷۹).



شکل ۷۹

روند عمل کارمند را، می‌توان روی این شکل، به این ترتیب نشان داد.

مرحلهٔ اول. سطر پایینی شکل را ازآن جدا می‌کنیم، آن چه را که باقی می‌ماند، یك خانه به‌سمت راست و یك خانه به‌طرف پایین می‌بریم؛ سپس بخش جدا شده‌را، به‌اندازهٔ ۹۰درجه (درجهت عکس‌حرکت عقربه‌های ساعت) دوران می‌دهیم (یعنی، سطر جدا شده را به جای ستون اول می‌گذاریم).

مرحلهٔ دوم. اگرستون‌جدید اول، بلندترین ستون نباشد (ازستون دوم،

کوتاه‌تر باشد)، آن خانه‌هایی را که در سمت چپ خود، جای آزاد دارند می‌بریم واز راست به‌چپ، به‌خانهٔ‌آزاد، منتقل می‌کنیم. بعد ازمرحلهٔ دوم، ستون‌ها، به‌ترتیب ارتفاع خود (به‌طورنزولی) قرارخواهند داشت.

برای‌هرخانه، دوعدد درست درنظر می‌گیریم که مختصات آن‌خانه را مشخص می‌کنند: شمارهٔ ستون وشمارهٔ سطری که درآن واقع‌اند.

وقتی که مرحلهٔ اول به‌پایان برسد، مجموع دو مختص هرخانه، تغییر نمی‌کند؛ ولی بعد از مرحلهٔ دوم، برای خانه‌هایی که تغییرجا داده‌اند، این مجموع کوچکترمی‌شود.

اکنون، مجموع دومختص همهٔ خانه خانه‌ها را درنظرمی‌گیریم. این مجموع، درمرحلهٔ اول بی‌تغییرمی‌ماند و درمرحلهٔ دوم، کاهش پیدا می‌کند. ازاین‌جا، به‌این نتیجه می‌رسیم که، با مرحلهٔ دوم، به‌تعداد محدودی مواجه می‌شویم (مجموع مختصات خانه‌ها، عددی‌درست ومثبت است ونمی‌تواند، به‌طورنامتناهی، کوچك شود). به این ترتیب، با آغاز ازلحظه‌ای، تنها با مرحلهٔ اول سروکارخواهیم داشت؛ یعنی، مجموع دو مختص هرخانه، ثابت می‌ماند. ازاین‌لحظه به‌بعد، هرخانهٔ $(x،y)$، در دوربستهٔ زیرحرکت می‌کند:

$$(۱،q-۱) \to (۲،q-۲) \to \dots \to (q-۱،۱) \to (۱،q-۱)$$

که ما آن را، q قطری می‌نامیم.

درضمن، تنها طولانی‌ترین قطرآخرمی‌تواندکامل نباشد. در واقع، ون دیگرمرحلهٔ دوم پیش نمی‌آید، خانه‌های جدول، درقطرqام، دوری با د ،ۀ تناوب q دارند. دورهٔ تناوب قطر qام وقطر $(q-۱)$ام، یك واحد باه اختلاف‌دارند. بنابراین، این‌وضع نمی‌تواند پیش‌آیدکه، در$(q-۱)$امین قطر، خانه‌های‌آزاد وجود داشته باشد و درقطر qام دست‌کم یك خانهٔ سیاه پیدا شد، زیرا دراین صورت، خانهٔ سیاه قطرqام، دیریا زود درسمت‌راست خانهٔ‌آزا قرارمی‌گیرد و انجام مرحلهٔ دوم لازم می‌شود.

به‌ا ، ترتیب، خانه‌های‌آزاد، تنها درآخرین قطرممکن است وجود داشته باشند درحالت $n=\frac{۱}{۲}k(k+۱)$، هر k قطرکامل‌اند؛ و روشن‌است

که درحالت $n\neq\frac{۱}{۲}k(k+۱)$، یك دوربه‌وجود می‌آید.

شکل‌های پله‌ای که شامل خانه‌های مربعی هستند و، همچنین، جدول‌های عددی این گونه شکل‌ها کـه شامل عددهای طبیعی از ۱ تا n باشند، به حل بسیاری ازمسأله‌های آنالیز ترکیبی و جبر، کـه به‌تقسیم عددهای طبیعی به جمله‌های طبیعی و بـه‌محاسبهٔ گـروه‌های تبدیـل و غیره مربوطاند، کمك می‌کنند. این شکل‌ها، نام خاصی دارند و به‌آن‌ها دیاگرام یونگ می‌گویند.

مسألهٔ ۱۱۰۶. پاسخ: ۱۴۴ عدد.

همهٔ عددهای ده رقمی را که بـا شرط مسألـه سازگارند، به‌دو گروه تقسیم می‌کنیم: گـروه اول، عددهایی که به ۵ ختم مـی‌شوند و گروه دوم، عددهایی که رقم آخرآن‌ها برابر ۲ است.

درهمهٔ عددهای گروه اول، رقم آخر ۵ را حذف می‌کنیم، همهٔ عددهای نه‌رقمی به‌دست می‌آیدکه، درآن‌ها، دو رقم برابر۲، مجاورهم نیستند.

درهمهٔ عددهای گروه دوم، دو رقم۵۲ را حذف می‌کنیم، همهٔ عددهای هشت رقمی به‌دست می‌آید که، در آن‌ها، دو رقم برابر ۲، مجاور هم قرار نگرفته‌اند.

اگرتعداد عددهای n رقمی را که از ۲ و ۵ تشکیل‌شده‌اند و دو رقم برابر ۲، در مجاورت هم قرار نگرفته‌اند، a_n بگیریم، استدلال فوق روشن می‌کندکه

$$a_{۱۰}=a_{۹}+a_{۸}$$

یادآوری می‌کنیم که، به‌طورکلی، برای $n\geqslant ۳$ داریم:

$$a_n=a_{n-۱}+a_{n-۲}$$

چون $a_۱=۲$ و $a_۲=۳$، پس طبق این دستوربه‌دست می‌آید:

$$a_۳=۵،\ a_۴=۸،\ a_۵=۱۳،\ldots،a_{۱۰}=۱۴۴$$

▽ دنبالهٔ a_n، در واقع، همان دنبالهٔ فیبوناچی (F_n) است که ازجملهٔ

سوم آن آغازشده است. دنبالهٔ فیبوناچی چنین است:

$$۱،۱،۲،۳،۵،۸،...$$

یعنی $a_n = F_{n+۲}$ (بحث مسألهٔ ۴.۲،(ب) را ببینید).

برای دنباله‌های صعودی که، درآن‌ها، جملهٔ عمومی، به‌صورت تابعی خطی ازچند جملهٔ قبلی داده شده باشد، می‌توان دستوری پیداکرد که جملهٔ عمومی رابرحسب شمارهٔ آن بیان کند. این‌مطلب را، روی دنبالهٔ فیبوناچی، روشن می‌کنیم.

تصاعد هندسی $u_k = a\lambda^k$ را طوری پیدا می‌کنیم که، برای آن، داشته باشیم: $u_{n+۱} = u_n + u_{n-۱}$. به‌این معادلهٔ درجه دوم می‌رسیم:

$$\lambda^۲ = \lambda + ۱ \Rightarrow \lambda_{۱,۲} = \frac{۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$$

بنابراین، دوتصاعد هندسی، به‌صورت

$$b\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^n ,\quad c\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^n$$

به‌دست می‌آید. برای دنباله‌ای هم‌که ازمجموع جمله‌به‌جملهٔ این دو دنباله به‌دست می‌آید، رابطهٔ $u_{n+۱} = u_n + u_{n-۱}$ برقرار است. b و c را طوری پیدا می‌کنیم که، دستور

$$u_n = b\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^n + c\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^n$$

برای دوجملهٔ اول $u_۱$ و $u_۲$ مناسب باشد.

برای دنبالهٔ فیبوناچی $u_۱ = ۱$ و $u_۲ = ۱$؛ ازآن جا $b = -c = \frac{۱}{\sqrt{۵}}$.

برای دنبالهٔ (a_n) ازمسألهٔ ۱۱.۶، به‌این دستورمی‌رسیم:

$$a_n=F_{n+2}=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}}$$

مسألهٔ ۱۲۰۶. الف) پاسخ: وقتی‌که ۳۲ نفر از دایره خارج شوند، ۳۲ نفر در دایره باقی‌می‌مانند وشمارش دوباره، ازنفراول آغاز می‌شود.

همین وضع تکرارمی‌شود: ۱۶ نفرخارج می‌شوند و، برای ۱۶ نفر باقی مانده، شمارش ازنفراول آغازمی‌شود. اگرچند باراین دور را ادامه دهیم، تنها نفراول باقی می‌ماند.

ب) پاسخ: نفر ردیف ۱۹۲۵.

ازحل بخش «الف» معلوم‌شدکه، اگرتعدادکسانی‌که‌روی محیط دایره ایستاده‌اند، 2^n باشد، درانتهای‌کار، نفراول (کسی‌که شمارش را ازاوآغاز کرده‌ایم) باقی می‌ماند. اکنون، فرض می‌کنیم، ۱۹۸۶ نفرروی محیط دایره ایستاده باشند. ازنفراول آغازمی‌کنیم، دورمی‌زنیم تا ۹۶۲ نفر از دایره خارج شوند. دراین لحظه به‌اندازهٔ

$$1986-962=1024=2^{10}$$

نفرباقی مانده است، که شمارهٔ نفراول آن، شمارهٔ ردیف

$$2\times 962+1=1925$$

در ردیف اولیه است؛ و همین شخص، تا آخربازی باقی می‌ماند.

▽ درحالت‌کلی، وقتی N نفر دور دایره ایستاده باشند، می‌توان نفر باقی مانده را، به‌سادگی، به‌کمک عدد نویسی درمبنای ۲ به‌دست‌آورد: کافی است عدد N را درمبنای ۲ بنویسیم و، سپس، نخستین رقم آن را (رقم سمت چپ‌که برابر واحد است) به‌آخرعدد ببریم. شمارهٔ نفرباقی مانده در عددنویسی به‌مبنای ۲ به‌دست می‌آید. مثلاً

$a)\ (64)_{10}=(1000000)_2\rightarrow(0000001)_2=1;$

$b)\ (1986)_{10}=(11111000010)_2\rightarrow(11110000101)_2=1925$

حل مسألهٔ کلی‌تر جالب است؛ وقتی که از دایره، نفر mام خارج شود (نفر $m-1$ام باقی می‌ماند).

مسألهٔ ۱۳۰۶. الف) پاسخ: 0.

برای سادگی کار، $1 = \bar{0}$ و $0 = \bar{1}$ می‌گیریم.

$(n+1)$ امین جملهٔ دنباله را x_n می‌نامیم: $x_0 = 0$، $x_1 = 1$، $x_2 = 1$، و غیره. باید x_{1986} را پیدا کنیم.

ضمن ساختن دنباله، درهر گام، طول آن دوبرابر می‌شود. ببینیم جملهٔ x_{1986} درکدام گام ظاهرمی‌شود؟ بعداز ۱۰ گام، به‌تعداد $1024 = 2^{10}$، جملهٔ دنباله به‌دست می‌آید، بنابراین باید ۱۱ گام برداشت. درگام یازدهم، باید همهٔ جمله‌های قبلی را نوشت، با این شرط که 0 را به 1 و 1 را به 0 تبدیل کنیم. بنابراین

$$x_{1986} = \bar{x}_{962}, (1986 - 1024 = 962)$$

اگربه‌همین ترتیب استدلال کنیم، نتیجه می‌گیریم که

$$\bar{x}_{962} = x_{450}, (962 - 2^9 = 450)$$

و غیره. سرانجام به‌این زنجیرهٔ برابری‌ها می‌رسیم:

$$x_{1986} = \bar{x}_{962} = x_{450} = \bar{x}_{194} = x_{66} = \bar{x}_2 = x_0 = 0$$

∇ برای حل این مسأله، در واقع، از این خاصیت دنباله استفاده کرده‌ایم:

$$x_n = \bar{x}_{n-2^k} , (2^k \leqslant n < 2^{k+1}) \qquad (1)$$

راه حل دیگر مسأله، این است که از ویژگی‌های زیر، برای دنبالهٔ مفروض، استفاده کنیم (و دربخش ب) مسأله هم، ازآن‌هااستفاده کرده‌ایم). برای هر n داریم:

$$x_{2n} = x_n \qquad (2)$$

$$x_{2n+1} = \bar{x}_{2n} \qquad (3)$$

ب) پاسخ: متناوب نیست.

برای اثبات، ساختمان دنباله را به طریق دیگری تعریف می‌کنیم: ابتدا زوج (۱،۰) را می‌نویسیم، سپس به‌دنبال آن، زوج (۰،۱)، بعد دو زوج (۰،۱) و (۱،۰) و غیره. درهر گام، تعداد زوج عددها برابراست با تعداد زوج‌عددهایی که قبل‌آن نوشته شده است، با این تفاوت‌که (۱،۰) را به(۰،۱)، و (۰،۱) را به (۱،۰) تبدیل می‌کنیم.

اکنون، فرض می‌کنیم، دنبالهٔ مفروض، متناوب باشد و کوچکترین دورهٔ تناوب آن را به‌طول k می‌گیریم.

ابتدا، k را عددی‌زوج‌فرض‌می‌کنیم: $k = ۲\rho$. متناوب بودن دنباله، به‌این معناست که، عدد طبیعی N وجود دارد، به‌نحوی که برای هر $n \geqslant N$ داشته باشیم: $x_n = x_{n+۲\rho}$. ولی ازتعریف جدید دنباله نتیجه می‌شودکه، اگردنباله را، به‌زوج‌های

$$(x_۰, x_۱); (x_۲, x_۳); \ldots; (x_{۲n}, x_{۲n+۱}); \ldots$$

تقسیم‌کنیم، آن وقت، جمله‌های اول همهٔ زوج‌ها، دنبالهٔ

$$x_۰, x_۲, x_۴, \ldots, x_{۲n}, \ldots$$

را تشکیل می‌دهند، که بردنبالهٔ اصلی منطبق است (ویژگی (۲)). از این جا به‌دست می‌آید:

$$x_n = x_{۲n} = x_{۲n+۲\rho} = x_{۲(n+\rho)} = x_{n+\rho}$$

یعنی ρ دورهٔ تناوب دنباله است و این، فرض ما را، مبنی براین‌که ۲ρ کوچکترین دورهٔ تناوب است، نقض می‌کند.

اکنون $k = ۲\rho + ۱$ را، عددی فرد می‌گیریم. دراین صورت، در دوری از دنباله به‌طول k، تعداد مختلفی صفر و واحد وجود دارد. فرض می‌کنیم، تعداد واحدها بیشترو، دست‌کم، برابر $\rho + ۱$ باشد (حالتی را هم که، درآن، تعداد صفرها بیشتراست، به‌همین ترتیب می‌توان بررسی‌کرد).

بخشی ازدنباله‌به‌طول $۲k$ را درنظرمی‌گیریم. دراین بخش، دست‌کم $۲\rho + ۲$ واحد وجود دارد وتعداد صفرها از ۲ρ تجاوزنمی‌کند، یعنی تعداد

واحدهـا، دست‌کم دوتـا بیشتر است. ولـی، بنابـر ویـژگی (۳) داریـم: $\bar{x}_{2n} = x_{2n+1}$. بنابراین، درتمامی این‌دور دنبالهٔ ما، باآغاز از x_{2m}، تعداد واحد ازتعداد صفرها، بیش‌ازیکی‌اختلاف‌ندارد؛ یعنی‌دنباله، نامتناوب‌است.

∇ این دنباله را، دنبالهٔ مورس می‌نامند واغلب، درشاخه‌های مختلف ریاضیات، با آن برخورد می‌کنیم (مسألهٔ ۱۸.۶ را ببینید).

جملهٔ عمومی این دنباله را، می‌توان این طور تعریف‌کرد: عدد n را درعدد نویسی به‌مبنای ۲ می‌نویسیم؛ اگرتعداد واحدها درآن، عددی زوج باشد داریم: $x_n = 0$؛ و اگرتعداد واحدها فرد باشدآن‌وقت $x_n = 1$.

دنبالهٔ مشابهی را می‌توان با سه تایی ۰۰۱ درست‌کرد:

$$001001110001001110110110001\ldots$$

این دنباله را «ردیف نامتناهی والس» گویند؛ وقتی‌که نگـاه خود را روی آن بلغزانیم، مثل این است‌که ملودی والس را می‌شنویم.

نظریهٔ ترکیب کولموگوروف در مورد این دنباله‌ها صدق می‌کند: این دو دنباله، که به‌هیچ وجـه تصادفی نیستند، ویژگی‌هایی دارندکه می‌توان آن‌ها را ازجدول عددهای تصادفی به‌دست‌آورد. مثلاً، سهم واحدها، در k جملهٔ اول هر یك از این دو دنباله، به ازای $k \to \infty$، به‌سمت $\frac{1}{2}$ میـل می‌کند.

مسألهٔ ۱۴.۶. پاسخ: یا A عدد ۲۰ و B عدد ۲۱؛ ویا A عدد ۲۱ و B عدد ۲۲.

∇ برای حل این مسأله، در واقع، چنین استدلال می‌کنیم‌که: «A فکر می‌کند $B\rho$ فکرمی‌کندکه...». این‌گونه بازتاب‌های تکراری حقیقت درذهن افراد (شبیه بازتاب‌های تکراری در آینه‌ها)، علاقهٔ بسیاری از دانشمندان را درسال‌های اخیربه‌خود جلب کرده است وآن‌ها را «برگشت‌های بازتابی» نامیده‌اند [واژهٔ لاتینی refleocus ، به‌معنای «بازتابی»].

جدول صفحهٔ بعد نشان می‌دهدکه چگونه می‌توان، ضمن گفت وگوی A و B، نتیجهٔ لازم را به‌دست‌آورد.

شمارهٔ گفت‌وگو	گفت و گو	نتیجهٔ گفت و گو	استدلال
۱_A	A: «من نمی‌دانم چه عددی نزد شماست».	عدد ۱، نزد A نیست.	درغیراین صورت A متوجه می‌شد که عدد B، برابر ۲ است.
۱_B	B: «نمی‌دانم چه عددی نزد شماست».	عدد ۱ یا عدد ۲، نزد B نیست.	اگر B عدد ۱ را داشته باشد، متوجه می‌شود که A عدد ۲ را دارد؛ و اگر B عدد ۲ را داشته باشد، با به‌حساب آوردن نتیجهٔ گفت و گوی اول، B متوجه می‌شود که A دارای عدد ۳ است.
۲_A	A: «نمی‌دانم چه عددی نزد شماست».	A، عدد ۱، یا ۲ یا ۳ را ندارد.	درغیراین صورت، A متوجه می‌شد (با به حساب آوردن آگاهی‌های قبلی) که B، به ترتیب، دارای عدد ۳ یا ۴ است.
۲_B	B: «نمی‌دانم چه عددی پیش شماست».	عددهای ۱، ۲، ۳ یا ۴ نزد B نیست.	
. .	. . . . . .	. . . .	. . . .
۱۰_A	A: «نمی‌دانم...»	عددهای ۱، ۲، ...، ۱۹ نزد A نیست.	

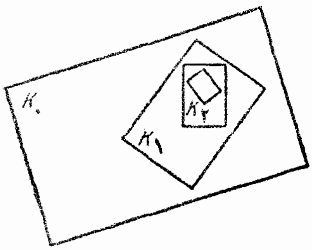
ادامهٔ جدول

10_B	B: «نمی‌دانم...»	عددهای ۱، ۲، ۲۰،... نزد B نیست.
11_A	A: «می‌دانم چه‌عددی نزد شماست».	اگر ۲۰ نزد A باشد، B عدد ۲۱ داردو اگر ۲۱ نزد A باشد، B عدد ۲۲ دارد.

مسألهٔ ۱۵۰۶. نگاشت f را درنظر می‌گیریم که، به ازای آن، کارت بزرگ K_0 را به‌کارت کوچکتر K_1 منجر می‌کند. هرنقطهٔ واقع برکارت K_0 ($K_0 \supset K_1$)، متناظربا نقطه‌ای از کارت K_1 است. تصویرکارت K_1 را، درهمین نگاشت، K_2 می‌نامیم (شکل ۸۰) و، به‌طورکلی، فرض می‌کنیم:

$$f(K_{n-1}) = K_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

مستطیل‌های K_0، K_1، K_2، ...، K_n، ...، درست یك نقطهٔ مشترك xدارند، زیرا بعدهای مستطیل‌ها، به‌سمت صفر میل می‌کنند.



شکل ۸۰

نقطهٔ x، همان نقطه‌ای است‌که باید سوراخ شود. در واقع، از این حقیقت‌که $x \in K_{n-1}$ که، برای هر n داریم: $f(x) \in K_n$. به‌جزاین، نقطهٔ $f(x)$، به‌همهٔ مستطیل‌ها تعلق دارد و چنین نقطه‌ای منحصر به‌فرد است؛ پس $x = f(x)$.

▽ به‌طور کلی، این قضیه درست است:

هر نگاشت پیوسته مستطیل روی خودش، دارای نقطه‌ای بی‌حرکت است.

ـ این ترتیب، حتی اگر یکی از کارت‌ها را مچاله کنیم و روی کارت دیگر قرار دهیم، بازهم حکم مسألهٔ ۱۵.۶ درست است.

مسألهٔ ۱۵.۶ را (وقتی که کارت مچاله نشده است)، می‌توان با روش دیگری هم حل کرد. می‌توان کارت کوچکتر را، نتیجه‌ای از ترکیب یك تجانس و یك دوران دانست. اگر صفحه‌ای را که این دو کارت روی آن واقع‌اند، به‌عنوان صفحهٔ مختلط درنظر بگیریم، آن وقت این تبدیل، به‌وسیلهٔ تابع خطی $w(z)=qz+b$ مشخص می‌شود که، درآن، q، b و z عددهایی مختلط‌اند و $q\neq ۰$ و $q\neq ۱$.

دراین صورت، نقطهٔ بی‌حرکت $z_۰$، عبارت است از جواب معادلهٔ $z=qz+b$، یعنی $z_۰=\frac{b}{۱-q}$.

مسألهٔ ۱۶.۶. پاسخ: این حد برابراست با $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$.

دنبالهٔ مفروض (a_n)، با این شرط تعریف شده است:

$$a_۱=\sqrt{۱}،\ \ a_{n+۱}=\sqrt{۱+a_n}$$

ابتدا فرض می‌کنیم، این دنباله دارای حدی برابر τ باشد. چون

$$\text{حد}\, a_{n+۱}=\text{حد}\, a_n=\tau$$

بنابراین، به برابری $a_{n+۱}=\sqrt{۱+a_n}$ می‌رسیم (البته، در حد) و به‌دست می‌آید: $\tau=\sqrt{۱+\tau}$. با مجذور کردن دو طرف این معادله، به‌معادلهٔ درجه دوم زیر می‌رسیم:

$$\tau^۲-\tau-۱=۰\ \ ،\ \ (\tau>۰)$$

این معادله، دو ریشه دارد: $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ و $\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$. بنابراین

$$\tau=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

اکنون ثابت می‌کنیم، دنبالهٔ (a_n) به‌طوریکنوا صعودی است و همهٔ جمله‌های آن، از τ تجاوز نمی‌کنند؛ از آن جا، بنابه‌قضیهٔ وایرشتراس، وجود حد برای دنباله، نتیجه می‌شود. اثبات را، با روش استقرای ریاضی می‌دهیم.

روشن است که $a_۱<a_۲<\tau$، یعنی $۱<\sqrt{۱+\sqrt{۱}}<\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$.
(با مجذور کردن دوطرف نابرابری‌ها، درستی آن‌ها روشن می‌شود.)

اکنون فرض می‌کنیم، داشته باشیم: $a_{k-۱}<a_k<\tau$ وثابت می کنیم، دراین صورت $a_k<a_{k+۱}<\tau$.

نابرابری $a_k<a_{k+۱}$ هم‌ارزاست با نابرابری $\sqrt{۱+a_{k-۱}}<\sqrt{۱+a_k}$
این نابرابری درست است، زیرا بنابرفرض استقرا $a_{k-۱}<a_k$.

نابرابری $a_{k+۱}<\tau$ یا $\sqrt{۱+a_k}<\tau$، هم‌ارزاست با نابرابری $a_k<\tau^۲-۱$. چون $\tau^۲-\tau-۱=۰$، بنابراین $\tau=\tau^۲-۱$ و در نتیجه $a_k<\tau$. اثبات با استقرای ریاضی، کامل شد.

∇ حد این دنباله را، به‌این جهت با حرف یونانی τ نشان دادیم که، معمولاً، عدد معروف $\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ را با این حرف‌نشان می‌دهند(مسألهٔ ۱۴.۳ را ببینید).

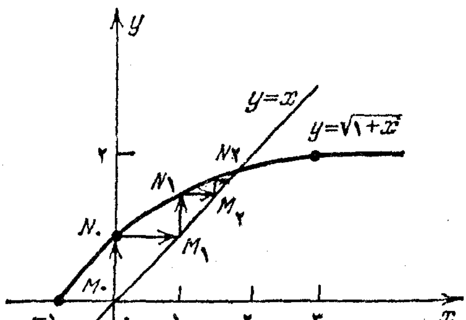
اگرتابع $f(x)=\sqrt{۱+x}$ را درنظربگیریم، آن وقت دنبالهٔ مسألهٔ ۱۶.۶ را، می‌توان این طورتعریف کرد:

$$f(۰),\ f(f(۰)),\ f(f(f(۰))),\ldots$$

رفتار دنبالهٔ به‌صورت

$$x_{\circ} \text{ ، } f(x_{\circ}) \text{ ، } f(f(x_{\circ})) \text{ ، } f(f(f(x_{\circ})))$$

را می‌توان به‌سادگی و به‌کمک نمودار، مورد مطالعه قرارداد. نمودار تابع $y=f(x)$ و خط راست $x=y$ را، روی دستگاهی از محورهای مختصات رسم می‌کنیم. دراین‌صورت، دنبالهٔ‌ما متناظراست با روندی‌هندسی‌که درشکل ۱۸ نشان داده شده است: ازنقطهٔ $M_{\circ}(x_{\circ},\circ)$ واقع برمحور Ox، خط‌راست قائمی رسم می‌کنیم تا نمودارتابع $y=f(x)$ را قطع کند. ازاین نقطه، خط راستی‌افقی‌می‌گذرانیم تاخط‌راست $x=y$ را درنقطهٔ $M_{\backslash}(f(x_{\circ}),f(x_{\circ}))$ قطع کند. دوباره از ایـن نقطه، خط راست قـائمی رسم می‌کنیم تـا نمودار تابع $y=f(x)$ را درنقطهٔ $N_{\backslash}(f(x_{\circ}),f(f(x_{\circ})))$ قطع کندوغیره. طول‌های نقطه‌های $N_{\circ}$، $N_{\backslash}$، ... (یا عرض‌های نقطه‌های $M_{\circ}$، $M_{\backslash}$، ...)، جمله‌های دنبالهٔ ما را تشکیل می‌دهند.



شکل ۸۱

درشکل ۸۱، نمودارتابع $f(x)=\sqrt{1+x}$ از مسالـهٔ ۱۶.۶ داده شده است. می‌بینیم، جمله‌های دنباله صعودی‌اند و به سمت τ میل می‌کنند که، درآن، τ برابراست باطول‌نقطهٔ‌برخورد نمودارتابع $f(x)=\sqrt{1+x}$ با خط راست $x=y$. اگرطبق دستور $x_{n+1}=\sqrt{1+x_n}$، جمله‌هـای این

دنباله را یکی پس ازدیگری محاسبه کنیم (با آغاز از $x_{\circ}=\circ$)، هربار بادقت بیشتری، ریشهٔ مثبت‌معادلهٔ $x^{۲}-x-۱=\circ$ به‌دست می‌آید. این‌مشاهده، روش زیر را، برای جواب تقریبی‌معادله روشن می‌کند. معادلهٔ $F(x)=\circ$ را به‌صورت $x=f(x)$ می‌نویسیم. عدد $x_{\circ}$ را انتخاب می‌کنیم و، پشت سرهم، جمله‌های دنبالهٔ (x_n) را، بنابر دستور $x_{n+۱}=f(x_n)$ $(n\geqslant ۱)$ به‌دست می‌آوریم. این روش پیدا کردن ریشهٔ معادله‌را، روش تکرار، یا روش تقریب‌های متوالی گویند.

مسألهٔ ۱۷.۶. پاسخ: $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۵}+۱)$.

یادآوری می‌کنیم که، همهٔ جمله‌های دنباله، عددهایی مثبت‌اند و، در ضمن ، عدد $\tau=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۵}+۱)$، ریشهٔ معادلهٔ $\tau=۱+\frac{۱}{\tau}$ است. جملهٔ kام دنباله را a_k می‌نامیم و ثابت می‌کنیم، اگر $a_k<\tau$، آن وقت $a_{k+۱}>\tau$ و $a_{k+۲}<\tau$.

ازنابرابری $a_k<\tau$، این نابرابری‌ها نتیجه می‌شود:

$$\frac{۱}{a_k}>\frac{۱}{\tau};\quad a_{k+۱}=۱+\frac{۱}{a_k}>۱+\frac{۱}{\tau}=\tau;$$

$$\frac{۱}{a_{k+۱}}<\frac{۱}{\tau};\quad a_{k+۲}=۱+\frac{۱}{a_{k+۱}}<۱+\frac{۱}{\tau}=\tau$$

∇ تابع $f(x)=x+\frac{۱}{x}$ را درنظرمی‌گیریم. دنبالهٔ مسألهٔ ۱۷.۶، عبارت است ازدنبالهٔ $f(۱)$، $f(f(۱))$،... رفتاراین دنباله را، می‌توان به‌کمك نمودار و شبیه مسألهٔ قبل روشن کرد (شکل ۸۲).

برای علاقه‌مندان. حتماً توجه کرده‌ایدکه دنبالهٔ مربوط به‌مسألهٔ ۱۷.۶ را، می‌توان به‌صورت

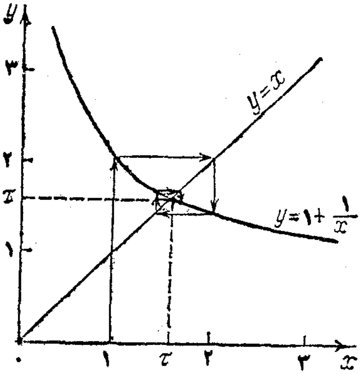
$$a_n=\frac{F_{n+k}}{F_n}$$

تعریف کرد که، در آن، F_k، همان جملهٔ kام دنبالهٔ فیبوناچی است (بررسی مسألهٔ ۱۱.۶ را ببینید). بنابراین (a_n) را می‌توان این طور تعریف کرد:

$$۱،\ ۱+\frac{۱}{۱}،\ ۱+\frac{۱}{۱+۱},$$

$$۱+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۱+۱}},\ldots$$

یعنی تبدیل عدد τ، به کسر مسلسل نامتناهی.



شکل ۸۲

مسألهٔ ۱۸.۶ پاسخ: (۰،۲)؛ (۲،۰) و

$$(-۱+\sqrt{۵}، -۱+\sqrt{۵})؛ (-۱-\sqrt{۵}، -۱-\sqrt{۵})$$

$y=\frac{۱}{۲}(۴-x^{۲})$ را از معادلهٔ اول، درمعادلهٔ دوم قرارمی‌دهیم، به این معادلهٔ درجه چهارم می‌رسیم:

$$۲x=۴-\frac{۱}{۴}(۴-x^{۲})^{۲}$$

ازآن جا $\frac{۱}{۴}x^{۴}-۲x^{۲}+۲x=۰$ ویا

$$x(x-۲)(x^{۲}+۲x-۴)=۰$$

که با حل‌آن، جواب‌ها به‌دست می‌آیند.

∇ دستگاه کلی‌تری را به‌صورت زیردرنظرمی گیریم:

$$\begin{cases} y=f(x) \\ x=f(y) \end{cases}$$

[درمسألهٔ ۱۸.۶، داریم: $f(x)=\frac{1}{2}(4-x^2)$].

اگرمقدار y را، ازمعادلهٔ اول، درمعادلهٔ‌دوم‌دستگاه قراردهیم، مسألهٔ ما منجربه‌حل معادلهٔ $x=f(f(x))$ می‌شود.

روشن است، اگر x نقطه‌ای بی‌حرکت درنگاشت f باشد، یعنی داشته باشیم: $x=f(x)$، آن وقت $f(f(x))=f(x)=x$. بنابراین، بین ریشه‌های معادلهٔ $x=f(f(x))$، همهٔ ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=x$ قرار دارند. درمسألهٔ ۱۸.۶، معادلهٔ $x=f(x)$ به صورت $x=\frac{1}{2}(4-x^2)$ است و ریشه‌های‌آن، یعنی $x=-1\pm\sqrt{5}$، دوجواب دستگاه اصلی را می‌دهند.

دو جواب دیگر آن، $x=0$ و $x=2$، «دوری» با دورهٔ تناوب ۲ تشکیل می‌دهند.

برای علاقه‌مندان. این دستگاه کلی‌تر را درنظرمی‌گیریم:

$$(*)\qquad \begin{cases} 2x_2=a-x_1^2 \\ 2x_3=a-x_2^2 \\ \cdots\cdots \\ 2x_p=a-x_{p-1}^2 \\ 2x_1=a-x_p^2 \end{cases}$$

نگاشت $x\to\frac{1}{2}(a-x^2)$ را بـا f، و n بار تکرار این نگاشت را، با f^n نشان می‌دهیم. دنبالهٔ

$$x_0,\ f(x_0),\ f(f(x_0)),\ldots,f^n(x_0),\ldots$$

را مدار نقطهٔ x_0 درنگاشت f می‌نامیم.

مدارنقطهٔ x_0 را متناوب گوییم (با دورهٔ تناوب p)، وقتی‌که به‌ازای

$1 \leqslant k < p$ داشته باشیم؛ $f_p(x_0)=x_0$ و $f_k(x_0)\neq x_0$.

دستگاه (*)، به‌معادلهٔ جبری $f^p(x)=x$ از درجهٔ 2^p منجرمی‌شود. این مطلب راکه، آیا این دستگاه دارای جواب $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ با p عدد مختلف است (به‌ازای مقدارهای مفروض پارامتر a)، می‌توان به‌این‌ترتیب تنظیم‌کرد: آیا نگاشت f، مداری بـا دورهٔ تناوب p دارد؟ این پرسش و، به‌طور کلی، مسألهٔ تکرارتـابع‌های پیوسته، درسال‌های اخیر درمرکز توجه بسیاری از ریاضی‌دانان قـرار گرفته و کارهای زیادی دربارهٔ آن‌ها انجام شده است.

روی نمونهٔ خانـوادهٔ نگاشت $f_a(x)=\frac{1}{2}(a-x^2)$ $(0\leqslant a\leqslant 8)$، می‌توان پدیده‌های جالب بسیاری پیدا کردکـه ضمن تکرارنگاشت یك بازهٔ بسته برخودش و، به خصوص، ضمن مطالعهٔ رفتار مـدار نقطه‌های مختلف به‌دست می‌آیند.

به‌سادگی دیده می‌شود که، نگاشت f_a، به ازای $0\leqslant a\leqslant 8$، بازهٔ بستهٔ $[-1-\sqrt{1+a}, -1+\sqrt{1+a}]$ را بـه‌خودش منجر می‌کند و «مـداری بـا دورهٔ تنـاوب ۱» دارد، یعنـی دارای دو نـقطهٔ بـی‌حـرکت $x=-1\pm\sqrt{1+a}$ است. بـه‌ازای $0\leqslant a\leqslant 3$، نـگاشت f_a، مـدار متناوب دیگری ندارد. مـی‌توان ثابت‌کردکه، با ترقی a، مدارهای دیگری با دورهٔ تناوب‌های دیگرظاهرمی‌شوند: به‌ازای $a>a_1=3$، با دورهٔتناوب ۲، به ازای $a>a_2=5$، با دورهٔ تناوب ۴، به‌ازای $a>a_3=5/47\ldots$ با دورهٔ تناوب ۸ و غیره. بـه‌طور کلی، دنبالـهٔ صعودی عددهای a_m وجود دارد، به‌نحوی که، به ازای $a_m<a\leqslant a_{m+1}$، نگاشت دارای مدارهایی با دوره‌های تناوب ۱، ۲، 2^2، ...، 2^m است و مداری با دورهٔ تناوب دیگری ندارد. این دنباله، به‌سمت مقداربحرانی

$$a_\infty = 5/6046\ldots$$

متقارب است (که به‌کمك کامپیوتر به‌دست‌آمده است) و، بعد ازآن، خصلت

مدارها، به‌شدت‌دچارتغییرمی‌شود. دراین میان، دنبالهٔ تفاضل‌های $a_m - a_\infty$؛ به‌تقریب، همچون یك تصاعد هندسی باقدرنسبت $\lambda = (۴/۶۶۹۲۰...)^{-۱}$ نشان می‌دهد. (دربسیاری از خانواده‌های نگاشت‌های پیوستهٔ دیگر هم، دنباله‌هایی برای مقدارهای پارامتر a_m به‌وجود می‌آید که، برای آن‌ها، دوره‌های تناوب دوبرابرمی‌شوند و به‌سمت مقدار بحرانی a_∞ میل می‌کنند؛ درضمن همیشه تفاضل $a_m - a_\infty$، مثل تصاعد $b_m = c\lambda^m$، به‌سمت صفرمیل می‌کند: یعنی نسبت $\frac{a_m - a_{m-۱}}{a_{m+۱} - a_m}$ همیشه به‌سمت حدλ میل می‌کندکه آن‌را، ثابت فی‌گن‌بااوم می‌نامند.)

برای $a < a_\infty$، رفتارمدارهای تقریباً همهٔ نقطه‌های x، به طورنسبی ساده است: اگر $a_m < a \leqslant a_{m+۱}$، آن وقت به‌مداری با دورهٔ تناوب ۲^m نزدیك‌می‌شود. به‌زبان‌دیگر، برای $p = ۲^m$ و $a < a_{m+۱}$، یکی‌ازجواب‌های دستگاه معادله‌های (*)، را می‌توان با روش تقریب‌های متوالی به دست آورد.

مثلاً، برای تابع $f_۴(x) = \frac{۱}{۲}(۴ - x^۲)$ درمسألهٔ ۱۸.۶، به‌سادگی قانع‌می‌شویم‌که مدارهرنقطهٔ $x \in [-۲، ۲]$ به‌مدارصفر (...،۲،۰،۲،۰) با دورهٔ تناوب ۲ نزدیك می‌شود.

به‌ازای $a \geqslant a_\infty$، وضع به سرعت بغرنج می‌شود: مدارهای بسیاری ازنقطه‌های x، کاملاً بی‌نظم و به‌صورتی پریشان، نسبت به‌زیرمجموعه‌ای نامتناهی ازبازه درمی‌آیند. مثلاً، به‌ازای $a = a_\infty$، مدارصفر، به‌سمت هیچ مدارمتناوبی نزدیك نمی‌شود؛ به جز آن، حتی دنبالهٔ (θ_n) علامت‌های این عددها، دارای تناوب نیست و ساختمانی بغرنج دارد (جدول را ببینید).

توجه به‌این نکته جالب است که دنبالهٔ مثبت و منفی‌های θ_n، ارتباط نزدیکی با دنبالهٔ مورس ازمسألهٔ ۱۳.۶ دارد. معلوم شده است که، اگرزیر هردوجملهٔ مجاور دنبالهٔ مورس، به‌شرط مختلف بودن دو جمله، علامت «+» و به‌شرط یکی بودن دوجمله، علامت «−» را قراردهیم، دنبالهٔ θ_n

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...
$f^n(0)$	۲/۸۰...	−۱/۱۲...	۲/۱۷...	۰/۴۴...	۲/۷۰...	−۰/۸۴...	...
θ_n	+	−	+	+	+	−	...

با دقت کامل به‌دست می‌آید:

۰ ۱ ۱ ۰ ۱ ۰ ۰ ۱ ۱ ۰ ۰ ۱ ۰ ۱ ...
+ − + + + − + − + − + + + ...

به‌ازای $a > a_\infty$، برای نگاشت f_a، مدارهای متناوبی به‌دست می‌آید که، علاوه بر ۲^p، دورهٔ تناوب‌های دیگری هم ظاهر می‌کنند. برای این‌که روشن شود، کدام یك ازدوره‌های تناوب می‌توانند برای مدارهای نگاشت مفروض درنظر گرفته شوند، ازقضیهٔ شارکووسکی استفاده می‌کنند.

همهٔ عددهای طبیعی، به‌این ترتیب منظم می‌شوند:

$$\underbrace{۳, ۵, ۷, \ldots}_{\text{فردها}} ;\ \underbrace{۳ \times ۲, ۵ \times ۲, ۷ \times ۲, \ldots}_{\text{۲} \times \text{فردها}} ;$$

$$\underbrace{۳ \times ۲^۲, ۵ \times ۲^۲, ۷ \times ۲^۲, \ldots}_{\text{۴} \times \text{فردها}} ; \ldots ; \ldots \underbrace{۲^۳, ۲^۲, ۲, ۱}_{\text{توان‌های ۲}}$$

دراین صورت، بـرای هردوعدد طبیعی، می‌توان گفت، کـدام یك درسمت چپ وکدام یك درسمت راست قرار دارد. اگرنگاشت پیوستهٔ بازه‌ای برروی خودش، مداری با دورهٔ تناوب r داشته باشد، آن وقت دارای مدارهایی با همه دورهای تناوبی است که درسمت راست r واقع‌اند.

مثلاً، عدد ۳ درسمت چپ همهٔ عددها قراردارد و، بنابراین، نگاشتی که دارای مداری با دورهٔ تناوب ۳ است، دارای مدارهایی با همهٔ دوره‌های تناوب خواهد بود.

نتیجه‌گیری‌های دیگری هم وجود دارد‌که، به‌کمك‌آن‌ها، می‌توان در

رابطه با پارامتر، ویژگی‌های تکرار را در خانواده‌های نگاشت‌های پیوستهٔ یك بازه بر روی خودش، تغییرداد. ولی بسیاری از مشاهده‌هایی که به‌کمك کامپیوتردست داده‌اند، هنوز درانتظار روشن شدن خود هستند.

مسأله‌هایی برای کارمستقل دانش‌آموزان

۱۹.۶. الف) مطلوب است ۱۹۸۶- امین رقم بعد از ممیز، در بیان دهدهی عدد $\frac{۱}{۳۱}$.

ب) به‌ازای چه‌مقداری از $m<۳۱$، دورهٔ تناوب کسردهدهی $\frac{m}{۳۱}$، ازهمان رقم‌های دورهٔ تناوب کسردهدهی $\frac{۱}{۳۱}$ تشکیل شده است؟

۲۰.۶. الف) معلم ازدانش‌آموزخواست ۱۹ را بر۷۳ تقسیم کند. صدمین رقم بعد ازممیزچند است؟

ب) n عددی‌است درست و$۰<n<۷۳$. عدد $\frac{n}{۷۳}$ را به‌کسردهدهی نامتناهی تبدیل کرده‌ایم. ثابت کنید، دراین کسر، نمی‌توان به‌دو رقم مساوی برخوردکردکه درکنارهم باشند.

ج) همهٔ عددهای اول p را پیداکنیدکه، برای آن‌ها، درتبدیل $\frac{n}{p}$ به کسردهدهی $(۰<n<p)$، هرگز دو رقم مساوی، مجاورهم نباشند.

۲۱.۶. دنبالهٔ (a_n) به‌این ترتیب داده شده است:

$$a_۱=۷،\ a_{n+۱}=(\text{مجموع رقم‌های عدد } a_n^۲)$$

$a_{۱۰۰۰}$ را پیدا کنید.

۲۲.۶. دنبالهٔ (a_n)، با این تعریف داده شده است:

$$a_۱=\text{عددی طبیعی}،\ a_{n+۱}=(\text{مجموع مجذورهای رقم‌های عدد } a_n)،\ (n\geqslant ۱)$$

ثابت کنید، در این دنباله، به‌ناچار با یکی از عددهای ۱ یا ۸۹ برخورد می‌کنیم.

۲۳.۶. دو جملهٔ اول دنبالهٔ (x_n) با دو عدد $x_1 \neq 0$ و $x_2 \neq 0$ و شرط $x_{n+1} = kx_n - x_{n-1}$ داده شده است. آیا این دنباله، دورهٔ تناوب دارد، به شرطی که: الف) $k=\sqrt{2}$؛ ب) $k=\sqrt{3}$؛ ج) $k=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$؛ د) $k=\frac{3}{2}$؟

۲۴.۶. گروه دانشجویان، یك مادهٔ درسی را، پنج‌بار امتحان می‌دهند (کسی که درامتحان موفق نشود، برای روز بعد، دوباره خود را آماده می‌کند). درهرجلسه، یك سوم دانشجویان حاضربه‌اضافهٔ $\frac{1}{3}$ دانشجو، امتحان خود را با موفقیت می‌گذرانند. حداقل تعداد دانشجویان چندنفرمی‌تواند باشد تادر پایان روزپنجم، کسی برای امتحان باقی نمانده باشد؟

۲۵.۶. ساکنان دوجزیرهٔ چونگا وچانگا؛ سالی یك‌باردرهنگام جشن، کالاهای پرقیمت را عوض‌می‌کنند. ساکنان چونگا، نصف کالاهای پرقیمت‌خود را به‌جزیرهٔ چانگا، وساکنان چانگا درهمان زمان، یك‌سوم کالاهای پرقیمت‌خود را به جزیرهٔ چونگا می‌آورند. این رسم، از زمان‌های قدیم، ادامه داشته است. چه‌بخشی از کالاهای پرقیمت، درهریك ازجزیره‌ها وجود دارد؟ (دراین مدت، هیچ کالای پرقیمت تازه‌ای پیدا نکرده‌اند و، درضمن، هیچ کالای پرقیمتی را هم، ازدست نداده‌اند.)

۲۶.۶. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - x_2^2;\\ x_2 &= 1 - x_3^2;\\ x_3 &= 1 - x_4^2;\\ &\cdots\cdots\\ x_{n-1} &= 1 - x_n^2;\\ x_n &= 1 - x_1^2 \end{aligned}$$

۶.۲۷. جملهٔ صدم x_{100} از دنبالهٔ (x_n) را بادقت تا ۰/۰۱ پیدا کنید، به‌شرطی که:

الف) $x_1 \in [0,1]$، $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$ $(n>1)$؛

ب) $x_1 \in [0/1, 0/9]$، $x_{n+1}=2x_n(1-x_n)$ $(n>1)$.

۶.۲۸. دنبالهٔ چند جمله‌ای‌های

$$P_0(x)=1,\ \ P_1(x)=x,\ \ P_2(x)=x^2-1,\ldots$$

با شرط

$$P_{n+1}(x)=xP_n(x)-P_{n-1}(x)$$

داده شده است. ثابت کنید، معادلهٔ $P_{100}(x)=0$، ۱۰۰ ریشهٔ مختلف حقیقی دارد.

۶.۲۹. مورچه روی خط شکستهٔ $H_0H_1H_2H_3\ldots$ شامل بی‌نهایت ضلع H_0H_1، H_1H_2، H_2H_3، ... حرکت می کند. طول ضلع‌های H_0H_1، H_1H_2 و H_0H_2، به‌ترتیب برابرند با ۵، ۴ و ۳ سانتی‌متر و H_nH_{n+1} عمودی است که از نقطهٔ H_n برپاره خط راست $H_{n-2}H_{n-1}$ فرودآمده است $(n=2,3,4,\ldots)$.

الف) طول مسیرمورچه چقدراست؟

ب) نقطه‌ای که مورچه روی‌آن حرکت می کند، از پاره‌خط‌های راست H_0H_2 و H_0H_1 به‌چه‌فاصله‌ای است؟

۶.۳۰. $A_0B_0C_0$ را مثلثی با ضلع‌های a، b و c می گیریم. دنباله‌ای ازمثلث‌های $A_1B_1C_1$، $A_2B_2C_2$، ... را طوری ساخته‌ایم که طول ضلع‌های هرمثلث $A_nB_nC_n$ برابربا میانه‌های مثلث قبلی‌آن $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$ باشد. مطلوب است طول ضلع‌های مثلث $A_{1000}B_{1000}C_{1000}$.

۶.۳۱. در دایره‌ای به شعاع واحد یك مربع محاط کرده‌ایم. سپس در مربع، یك دایره، دردایره، یك ۸ ضلعی منتظم، در۸ ضلعی منتظم یك دایره، در دایره، یك ۱۶ ضلعی منتظم و غیره محاط کرده‌ایم؛ در دایرهٔ nام، 2^{n+1}

ضلعی‌منتظم‌محاط شده‌است. ثابت کنید، شعاع همهٔ دایره‌ها از $\frac{۲}{\pi}$ بزرگتراست.

۳۲۰۶. دنبالهٔ (a_n) به‌این صورت تعریف شده است:

$$a_۱=۱,\ \ a_{n+۱}=a_n+\frac{۱}{a_n^۲}$$

ثابت کنید:

الف) این دنباله محدود نیست؛

ب) $a_{۹۰۰۰}>۳۰$؛

ج) حد $\frac{a_n}{\sqrt[۳]{n}}$ را، وقتی n به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند، پیدا کنید.

۳۳۰۶. دنبالهٔ (a_n)، این طورتعریف شده است:

$$a_۱=۱,\ \ a_{n+۱}=\frac{۳a_n}{۴}+\frac{۱}{a_n}$$

ثابت کنید:

الف) این دنباله محدود است؛

ب) $|a_{۱۰۰۰}-۲|<\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۱۰۰۰}$.

۳۴۰۶. مطلوب است حد دنبالهٔ (a_n)، به‌شرطی که

$$a_۱=۲,\ a_{n+۱}=\frac{a_n}{۲}+\frac{a_n^۲}{۸}$$

۳۵۰۶. ازسه‌عدد a، b و c، سه‌عدد جدید می‌سازیم:

$$|a-b|,|b-c|,|c-a|$$

سپس از سه‌عدد اخیر و با همان روش، سه‌عدد جدید می‌سازیم و غیره. آیا همیشه، دربین عددهایی که به‌این ترتیب به‌دست می‌آیند، عدد ۰ وجود دارد، به‌شرطی که a و b و c

الف) عددهایی درست باشند؛

ب) عددهایی حقیقی باشند؟

ج) به‌همین پرسش‌ها، دربارهٔ‌عمل‌مشابهی برای‌چهارعددپاسخ بدهید:

$$(a،b،c،d) \to (|a-b|،|b-c|،|c-d|،|d-a|)$$

۶.۳۶. درشهری n نفر و هرنفر درخانه‌ای زندگی می‌کنند. ساکنان شهرتصمیم گرفتند، خانه‌های خود را عوض‌کنند. بعد ازتعویض، معلوم شد که فاصله‌های بین خانه‌های هر دو نفر، از فاصله‌ای‌که قبلاً با هم داشتند، کمتر نیست. ثابت‌کنید، ضمن این جابه‌جایی، فاصلهٔ بین خانه‌های هردو نفر، تغییر نکرده است.

۶.۳۷. ردیفی ازهمهٔ عددهای مضرب ۹ نوشته شده است:

۹، ۱۸، ۲۷، ۳۶، ۴۵، ۵۴، ۶۳، ۷۲، ۸۱، ۹۰، ۹۹، ۱۰۸، ۱۱۷، ...

برای هرکدام ازاین عددها، مجموع رقم‌ها را پیدا کرده‌ایم:

۹، ۹، ۹، ۹، ۹، ۹، ۹، ۹، ۹، ۹، ۱۸، ۹، ۹، ... (*)

می‌خواهیم، قانونی پیدا کنیم‌که، طبق‌آن، بتوانیم دنبالهٔ (*) را بنویسیم. درچه ردیفی، عدد ۸۱ ظاهرمی‌شود، و عدد بعد ازآن چند است؟ قبل از آن، درکجا در این دنباله، با چهارعدد متوالی ۲۷ یا سه عدد متوالی ۳۶ برخورد می‌کنیم؟

۶.۳۸. روی محورعددی، پاره خط راست از ۰ تا ۱ را به رنگ سبز درآورده‌ایم. بعد، یك سوم وسط این پاره خط، یعنی، پاره‌خط $\left[\frac{۱}{۳}،\frac{۲}{۳}\right]$ را با قرمز رنگ کرده‌ایم؛ سپس یك سوم وسط دو پاره‌خط باقی مانده را و بعد، یك سوم وسط چهارپاره‌خط باقی‌مانده را با قرمزرنگ کرده‌ایم وغیره. این عمل را، بی‌نهایت بار ادامه داده‌ایم.

الف) مجموع طول‌های پاره‌خطهای راست قرمز را پیدا کنید.

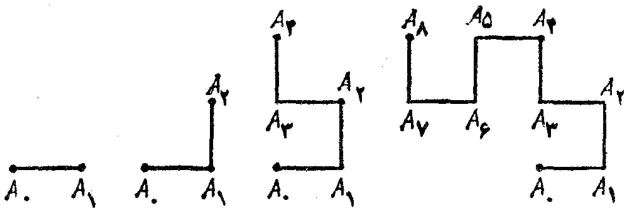
ب) ثابت کنید، نقطهٔ $\frac{۱}{۴}$، تا پایان به‌رنگ سبزباقی می‌ماند.

ج) ازمجموع $\frac{۲}{۳}+\frac{۲}{۹}+\frac{۲}{۲۷}+\frac{۲}{۸۱}+...$، به‌صورتی دلخواه، بی‌نهایت جمله را طوری حذف کنیدکه باز هم بی‌نهایت جمله باقی بماند؛

ثابت کنید، مجموع آن‌ها، عددی سبز رنگ است.

د) ثابت کنید، همهٔ بقیهٔ عددها (بین ۰ و ۱)، قرمز رنگ‌اند.

۳۹.۶. خط شکستهٔ دراکون، به‌دنباله‌ای نامتناهی از پاره خط‌های راست A_0A_1، A_1A_2، A_2A_3، ... گفته می‌شود که روی یك صفحه واقع و طبق قانون زیرساخته شده باشد. ابتدا دو نقطهٔ A_0 و A_1 را، جدا از هم، انتخاب می‌کنیم. سپس، گام به گام، نقطه‌های بعدی را به‌دست می‌آوریم. در گام kام ($k=1, 2, \ldots$)، خط شکستهٔ $A_0A_1\ldots A_{2^{k-1}}$ را، که قبل از آن ساخته شده است، دور آخرین نقطهٔ آن، $A_{2^{k-1}}$، درجهت حرکت عقربه‌های ساعت، به‌اندازهٔ ۹۰ درجه دوران می‌دهیم. ضمن این دوران، A_0 به A_{2^k} و A_1 به A_{2^k-1} و، به‌طور کلی، A_m به A_{2^k-m} منتقل می‌شود: $m\in\{0, 1, \ldots, 2^{k-1}-1\}$. به‌این ترتیب، خط‌شکستهٔ $A_0A_1\ldots A_{2^k}$ به‌دست می‌آید و، سپس، گام بعدی برداشته می‌شود (شکل ۸۳).



شکل ۸۳

الف) خط شکستهٔ $A_0A_1\ldots A_{32}$ را بسازید.

ب) دستوری کلی برای دنبالهٔ فاصله‌های A_0A_1، A_0A_2، A_0A_4، ...، $A_0A_{2^k}$، ... پیدا کنید.

ج) ثابت کنید، خط شکستهٔ دراکون، حتی از یك پاره‌خط راست، دوبار نمی‌گذرد.

د) خط شکستهٔ دراکون را می‌توان به‌سادگی، روی صفحهٔ کاغذ شطرنجی رسم کرد (هرضلع خط شکسته، ضلعی از خانه‌های صفحهٔ شطرنجی است). ثابت کنید، اگرازیك گره واقع برصفحهٔ شطرنجی، چهار خط شکستهٔ

نامتناهی دراکون را، درچهار جهت مختلف رسم کنیم، همهٔ پاره خطهای راست صفحهٔ شطرنجی نامتناهی، اشغال می‌شوند.

۴۰.۶. خانواده‌هایی که درخانه‌های با نمای سفید رنگ و قرمز رنگ زندگی می‌کنند، هرسال، نمای خانه‌های خود را رنگ می‌کنند. درضمن، تنها آن خانواده‌هایی، رنگ نمای خانهٔ خود را عوض می‌کنند که، خانه‌های بیش ازنصف خانواده‌های دوست آن‌ها، رنگ دیگری داشته‌اند. ثابت کنید، زمانی فرا می‌رسد که، با آغاز ازآن، رنگ برخی ازخانه‌ها دائماً بی‌تغییر می‌ماند و رنگ خانه‌های دیگر، هرسال عوض می‌شود.

راهنمایی برای حل مسأله‌های آخر فصل‌ها

۲۳.۲. باید روشن کرد، آیا معادلهٔ $۱۳x+۱۶y=۳۰۰$، درمجموعهٔ عددهای درست غیرمنفی، جواب دارد یا نه! (حل مسأله‌های ۱.۲ و ۶.۲ را ببینید.)

۲۴.۲. نسبت محیط دو دایره برابراست با $\frac{۲۰}{۹}=\frac{۴۰}{۱۸}$. بنابراین، میخ، هر $\frac{۹}{۲۰}$ محیط‌دایرهٔ بزرگتررا علامت‌می‌گذارد (حل‌مسألهٔ ۸.۲را ببینید).

۲۵.۲. حل مسأله‌های ۷.۲ و ۸.۲ را ببینید.

۲۶.۲. چون‌بزرگترین‌مقسوم‌علیه مشترک ۳۶۰ و ۴۸ برابراست‌با۲۴، پاسخ الف) منجربه‌این‌جا می‌شودکه: آیا شکلی وجود داردکه، ضمن دوران دور نقطهٔ O، به اندازهٔ ۲۴ درجه برخودش منطبق شود، ولی در دوران به‌اندازهٔ ۹۰ درجه برخودش قرار نگیرد؟

۲۷.۲. حل مسألهٔ ۷.۲ را ببینید.

۲۸.۲. شبیه آلگوریتم اقلیدس، با استفاده از گزاره‌های زیر، عمل کنید (حل مسألهٔ ۴.۲ را ببینید): بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دوعدد $a-b$ و b و، همچنین، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دوعدد $a+b$ و b، همان بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دوعدد a و b است؛ واگرعددهای a و

b فرد باشند، آن وقت بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دوعدد $2^k.a$ و b هم با بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دوعدد a و b برابراست.

∇ حذف توان‌های اضافی ۲، براساس اندیشهٔ «آلگوریتم دودویی» برای جست وجوی بزرگترین مقسوم علیه مشترك، درعددنویسی به مبنای ۲، راحت‌تراز آلگوریتم اقلیدس است.

۲۹.۲. حل مسألهٔ ۴.۲ را ببینید.

۳۰.۲. مجموع همهٔ عددهای خانه‌های مستطیل را، به‌دوطریق به‌دست آورید: «از روی سطرها» و «از روی ستون‌ها».

۳۱.۲. ب) حل مسألهٔ ۹.۲ و ۱۰.۲ را ببینید.

۳۳.۲. دربرابری $pq-p-q+1=6$، عبارت سمت چپ را، می‌توان به‌ضرب دوعامل تجزیه کرد.

۳۴.۲. ب) حل مسألهٔ ۱۰.۲ را ببینید.

۳۵.۲. ب) عدد n^3-1 بر $n-1$ بخش‌پذیراست.

۳۶.۲. الف) چند جمله‌ای $(y+1)^2-x^2$ را به‌ضرب دو عامل تجزیه کنید، سپس، همهٔ حالت‌های تجزیهٔ عدد ۱۲ به‌دوعدد درست را (به نحوی که هردوفرد یا هردو زوج باشند) درنظربگیرید.

۳۸.۲. حل مسأله‌های ۱۰.۲ و ۱۶.۲ را ببینید.

۳۹.۲. اگر m و n بر ۵ بخش‌پذیرنباشند، آن وقت m^4-n^4 بر ۵ بخش‌پذیرخواهد بود. اگرباقی مانده‌های یك مجذورکامل (وتوان چهارم) یك عدد درست را بر ۵ محاسبه‌کنید، به‌درستی این مطلب قانع می‌شوید.

۴۰.۲. a^k-1 را تجزیه‌کنید، ازدستورحل مسألهٔ ۱۷.۲، ب) استفاده کنید و توجه داشته باشید که، باقی ماندهٔ تقسیم a بر k، برابر واحد است.

۴۱.۲. سه رقم آخرهرعدد طبیعی بزرگتراز ۱۰۰، همان سه‌رقمی است که درآخرتوان صدم سه رقم آخرآن به دست می‌آید (وحتی توان صدم رقم آخرآن).

۴۲.۲. حل مسألهٔ ۱۳.۲ را ببینید.

۴۳.۲. حل مسألهٔ ۱۴.۲ را ببینید.

۴۴.۲. حل مسألهٔ ۱۵.۲ را ببینید.

۴۵.۲. الف) $n^۴+۴=(n^۲+۲)^۲-(۲n)^۲$ ب) حل مسألهٔ ۱۸.۲ را ببینید.

۴۷.۲. کافی است ثابت کنیم، چند جمله‌ای مفروض، برهریك ازچند جمله‌ای‌های x، $x+۱$، $۲x+۱$ بخش‌پذیراست (قضیهٔ به‌زو؛ بحث مربوط به‌مسألهٔ ۱۷.۲، ب) را ببینید).

۴۸.۲. می‌توان ابتدا روشن کرد، به‌ازای چه‌مقدارهایی از a و b بر $x-۱$ بخش‌پذیراست و، سپس، عامل $x-۱$ را از آن جداکرد (حل مسألهٔ ۱۷.۲ را هم ببینید).

∇ چندجمله‌ای $p(x)$، وقتی وتنها وقتی بر $(x-d)^۲$ بخش‌پذیراست که هم خود $p(x)$ وهم مشتق آن $p'(x)$ بر $x-d$ بخش‌پذیر باشند.

۴۹.۲. چند جمله‌ای $f(x)$ را می‌توان این طورنوشت:

$$f(x)=g(x)(x-۱)(x-۲)+ax+b$$

اکنون می‌توان a و b را با توجه به‌قضیهٔ به‌زو پیدا کرد (۱۷.۲، ب) را ببینید).

۵۰.۲. برای هرچندجمله‌ای $f(x)$ باضریب‌های درست، عدد $f(k)$، درحالت زوج بودن k ازنظر زوج وفرد بودن همان وضع $f(۰)$ را دارد و درحالت فرد بودن k، همان وضع $f(۱)$ را.

۵۱.۲. اگرچند جمله‌ای با ضریب‌های درست، دارای ریشهٔ درست c باشد، آن وقت مقدار به‌ازای عدد درست d (برای $c\neq d$)، بر $d-c$ بخش‌پذیراست (حل مسألهٔ ۱۷.۲، ب) را ببینید).

۵۲.۲. یکی ازعامل‌ها باید از درجهٔ سوم (یاکمتر باشد). این عامل نمی‌تواند مقدار ۱ را درچهارنقطه یا بیشترقبول کند (این مطلب، نتیجه‌ای

از قضیهٔ به‌زواست). ثابت کنید، چند جمله‌ای درجهٔ سوم، نمی‌تواند به‌ازای سه عدد درست برابر ۱، و به‌ازای دوعدد درست برابر ۱ — شود.

۰۵۳۰۲ الف) اگرشبیه مسألهٔ ۲ .۴۰ استدلال کنید، می‌توانید قانع شوید که، اگر $a^{5^m}+1$ بر 5^m بخش‌پذیرباشد، آن وقت $a^{5^{m+1}}+1$ بر 5^{m+1} بخش‌پذیرخواهد بود.

۰۵۴۰۲ ردیف کارت‌ها را باید با توجه به‌زوج یا فرد بودن تعداد کارت‌های هرنوع نوشت. حاصل‌ضرب k عددنخستین را x_k می‌نامیم. آن را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$x_k = 2^{\alpha_k} \cdot 3^{\beta_k} \cdot 5^{\gamma_k} \cdot 7^{\delta_k} \cdot y_k^2$$

که درآن، y_k، عددی طبیعی است و $S_k=(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k)$، انتخابی از ۰ و ۱ است. S_m و S_{m+1} تنها دریکی ازچهارمحل با هم اختلاف دارند. برای این که شرط مسأله برقرارباشد، باید هیچ کدام ازاین انتخاب‌ها، تنها شامل صفرها نباشند و هیچ دو انتخاب S_m و S_n، به‌ازای $m \neq n$، برهم منطبق نشوند. درواقع، اگرانتخاب S_k ازصفرها تشکیل شده باشد، آن‌وقت حاصل ضرب k عدد نخستین، مجذورکامل می‌شود؛ و اگردوانتخاب S_m و S_n، برای $m>n$ برهم منطبق‌باشند، آن‌وقت حاصل‌ضرب از $(n+1)$امین تا mامین عدد، مجذورکامل می‌شود.

الف) مسأله به‌این جا منجرمی‌شود: آیا می‌توان ردیفی از ۱۵ گروه غیرصفرچهارتایی از ۰ و ۱ طوری به‌دنبال هم نوشت، که هردو گروه مجاور تنها دریك محل با هم اختلاف داشته باشند و نخستین گروه شامل سه صفرو یك واحد باشد؟

ب) تعدادکل گروه‌های انتخابی را S بگیرید.

ج) این مسأله را، برای «علاقه‌مندان» می‌توان این‌طور تنظیم کرد: حداکثرتعداد یال‌ها درمکعب n بعدی را پیداکنیدکه بتوان‌آن‌ها را در زنجیره‌ای از یال‌ها قرار داد، به نحوی که هیچ دویالی ازیك رأس خارج نشده باشد.

۵۵.۲. اگر a و b نسبت به‌هم اول باشند، آن وقت روی هرخط راست $ax+by=c$ (c، عـددی درست است)، درخت رزییده است (مسأله‌های ۲.۲، ۶.۲ و ۷.۲ را ببینید).

۵۶.۲. حل مسألهٔ ۲۱.۲ را ببینید.

۵۷.۲. برای اثبات می‌توان از دستورمربوط به‌تابع اویلرکه در بحث دنبال حل مسألهٔ ۸.۲ آوردیم، استفاده کرد.

۵۸.۲. ب) اثبات را می‌توان با استقرای ریاضی و باآغاز ازعدد ۵ یا ۶ به‌دست‌آورد.

∇ دنباله‌ای ازاین گـونه رقم‌ها که ازسمت چپ نامتناهی است، مثل $x=...۳۷۶$، در معادلهٔ $x=x^۲$ صدق می‌کند. بـه چنین عـددهایی، عدد بی‌آغاز می‌گوییم. معادلـهٔ $x=x^۲$، به جز دوریشهٔ $x=۰=...۰۰۰$ و $x=۱=...۰۰۱$، دو ریشهٔ دیگرهم دارد.*

۵۹.۲. $(x_۰, y_۰, z_۰)$ را جوابی‌ازمعادله فرض‌کنید دراین صورت، هر سه‌تایی دیگری‌هم که ازتبدیل $x_۰$، $y_۰$، $z_۰$ به‌دست‌آید، جواب معادله‌است. در ضمن، اگرمعادلهٔ مفروض را، معادلـه‌ای درجه دوم نسبت به x در نظر بگیریم، می‌توان، با توجه بـه‌جواب $(x_۰, y_۰, z_۰)$، جـواب جدیدی برای معادله به‌دست‌آورد.

۶۰.۲. عدد $(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{۱۹۸۷}=a\sqrt{۳}+b\sqrt{۲}$ راهم‌درنظربگیرید.

۶۱.۲. مفید است اگرعدد $a^۲+ab+b^۲$ ازمجموعهٔ M را به‌عبارت $a+b\omega$ مربوط کنیم و ضمن ضرب دو عبارت از این‌گونـه، $\omega^۲$ را $-۱-\omega$ به‌حساب‌آوریم؛ دراین صورت، درحالت خاص، خواهیم داشت:

$$(a+b\omega)(a-b\omega^۲)=a^۲+ab+b^۲$$

دراین‌جا، حرف ω، معرف عدد مختلط $\frac{۱+\sqrt{-۳}}{۲}$ وعدد $-\omega^۲=۱-\omega$

---

* کتاب **سرگرمی‌های جبر**، تألیف **پرلمان**، ترجمهٔ **پرویز شهریاری** را ببینید.ــم.

معرف مزدوج آن، عدد مختلط $\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$ است.

۶۲.۲. می‌توان فرض کرد: $y=x!-1$.

۲۶.۳. ۱) حل و بحث مسألهٔ ۷.۳، شکل ۱۸ را ببینید.

۳) اگر $n=\frac{ab}{c}$، آن‌وقت $\frac{c}{a}=\frac{b}{n}$.

۴) $m=a\sqrt{2}=\sqrt{a^2+a^2}$ و $n=a\sqrt{3}=\sqrt{m^2+a^2}$ می‌گیریم، دراین صورت

$$\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{am}{m+n}$$

۶) $m=a\sqrt{2}$ می‌گیریم، دراین صورت $a\sqrt[4]{2}=\sqrt{m.a}$.

۲۷.۳. حل مسألهٔ ۲.۳ را ببینید. در ۱):

$$\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{(b-a)(b+a)};$$

در ۲): $a\sqrt{3}=\sqrt{3a.a}$؛ در ۳): $a\sqrt{2}=\sqrt{2a.a}$، به‌نحوی که در همهٔ این حالت‌ها، مسأله منجر به ساختن واسطهٔ هندسی $\sqrt{ab}$ از دو پاره خط راست a و b می‌شود (شکل۱۸). برای این منظور، شکل ۱۸ را تکرار کنید، شعاع OK را درآن درنظربگیرید و پاره خط راست قرینهٔ آن را نسبت به KB پیداکنید.

۴) دراین جا می‌توان ازساختمان $a\sqrt{2}$ در۳) استفاده کرد.

۲۸.۳. مسألهٔ ۳.۳ را ببینید.

۲۹.۳. در این جا، بهتر است از روش مکان‌های هندسی استفاده کنیم (مسألهٔ ۴.۳ را ببینید). مکان هندسی وسط پاره خط‌های راستی که یکی از دوانتهای آن‌ها برنقطهٔ مفروض و انتهای دیگرآن‌ها برمحیط دایرهٔ مفروض

واقع باشند، عبارت است ازمحیط یك دایره.

۳۰۰۳-۳۱۰۳. دراین دومسأله، بهتراست از روش تشابه استفاده‌کنیم (حل مسألهٔ ۶.۳ را ببینید).

۳۲۰۳. بیشرین فاصلهٔ‌رأس مستطیل‌ازمبداء مختصات، روی خط‌راست $y=\pi+\frac{p}{۲}-۲x$ قراردارد.

۳۳۰۳. $r\sqrt{\pi}=\frac{r\sqrt{\pi\times ۱}}{۱}$.

۳۴۰۳. ازاتحاد $\cos\varphi=۴\cos^{۳}\frac{\varphi}{۳}-۳\cos\frac{\varphi}{۳}$ استفاده کنید. $\cos\frac{\varphi}{۳}=x$ بگیرید، دراین صورت $۴x^{۳}=\cos\varphi+۳x$.

۳۵۰۳-۳۶۰۳. بهتراست برگشت ازدیوارهٔ‌خودشکل‌هارادرنظربگیریم: زاویه ومیزبیلیارد (مسألهٔ ۱۶.۳ را ببینید). درمسألهٔ ۳۶.۳، ابتدا میز بیلیاردی با اندازه‌های ۵ × ۳ را درنظربگیرید و شکل را رسم‌کنید.

۳۷۰۳. دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم‌کنید.

۳۸۰۳. مسألهٔ ۸.۳ را ببینید.

۳۹۰۳. ازمسألهٔ ۱۴.۳، با توجه به‌برابری $\frac{۱}{۱۵}=\frac{۱}{۱۰}-\frac{۱}{۶}$ استفاده کنید.

۴۰۰۳. بیضی مکان‌هندسی نقطه‌هایی ازصفحه‌است که‌مجموع فاصله‌های آن‌ها، ازدونقطهٔ ثابت واقع برهمین صفحه، مقداری ثابت باشد. هذلولی، مکان هندسی نقطه‌هایی ازصفحه است که تفاضل فاصله‌های‌آن‌ها از دو نقطهٔ مفروض واقع برهمین صفحه، مقداری ثابت باشد.

۴۱۰۳. ب) ثابت‌کنید، اگرپاره‌خطهای راست، روی خطهای راست مختلفی باشند، آن‌وقت، هرمحورتقارن‌اجتماع پاره خطها، محورتقارن یکی ازپاره‌خطهای راست است.

۴۲.۳. بهتراست از روش تشابه استفاده کنید (مسألهٔ ۶.۳ را ببینید).

۴۳.۳ - ۴۴.۳. حل مسألهٔ ۱۰.۳ را ببینید.

۴۶.۳. ثابت کنید، اگرسه‌دایره‌دوبه‌دومتقاطع‌باشند، وترهای مشترك دوبه‌دوی آن‌ها،ازیك‌نقطه‌می گذرندو،سپس،ازمسألهٔقبلی(۴۵.۳)استفاده کنید.

۴۷.۳. بین رأس‌های دوازده ضلعی منتظم، می‌توان با روش‌های مختلف، چهار رأس‌انتخاب کرد، به‌نحوی که‌همهٔ فاصله‌های دوبه‌دوی آن‌ها، باهم فرق داشته باشند.

۴۸.۳. مسأله را می‌توان به‌سادگی، با استقرای روی n (تعداد خطهای راست) حل کرد.

۵۰.۳. مسألهٔ ۱۹.۳ را ببینید. مکان هندسی مرکزهای کره‌هایی که بر دوصفحهٔ متقاطع‌مماس‌اند، عبارت است‌ازدوصفحهٔ عمود برهم. مکان هندسی مرکزهای کره‌هایی که برسه صفحهٔ دوبه‌دو متقاطع مماس‌اند، عبارت است از برخورد دو زوج صفحه، یعنی چهارخط راست. تعداد نقطه‌هایی که از چهار صفحهٔ دوبه‌دومتقاطع، به‌یك فاصله باشند، ازهشت تجاوزنمی کند.

۵۱.۳. همهٔ بخش‌ها، چهاروجهی نیستند؛ بعضی ازآن‌ها، هشت‌وجهی ازآب درمی‌آیند (شکل ۶۷ را ببینید).

۵۲.۳. مسألهٔ ۱۹.۳ را ببینید.

۵۳.۳. الف) صفحه‌ای که از وسط قطر مکعب بگذرد وبرآن عمود باشد، مکان هندسی نقطه‌هایی است که ازدوانتهای قطربه‌یك فاصله‌اند. روی یال‌های مکعب، چنین نقطه‌ها را پیدا کنید.

ب) قطر را به‌سه بخش برابر تقسیم و، برای $S(x)$، درهریك ازاین بخش‌ها، دستوری پیدا کنید. مساحت تصویرمقطع بروجه مکعب، برابر $S(x).\sin\varphi$ است که، درآن، φ، زاویهٔ بین قطرو وجه مکعب است.

۵۴.۳. ثابت کنید، کنج‌های سه وجهی این چهار وجهی باهم برابرند (مسأله‌های ۲۴.۳ و ۲۵.۳ را ببینید).

۵۵.۳. ابتداطرح‌مسطحهٔاین‌چندوجهی‌رارسم‌کنید(مسألهٔ۲۳.۳را ببینید).

۵۶.۳. ثابت کنید: الف) مساحت بخشی از سطح کره که به‌وسیلهٔ زاویهٔ دو وجهی این کنج جدا می‌شود، برابر است با 2α که، درآن، α، مقدار زاویهٔ دو وجهی است؛ ب) مثلث کروی عبارت است از اشتراك سه بخشی که به‌وسیلهٔ سه زاویهٔ دو وجهی کنج روی سطح کره به‌دست می‌آید.

۲۵.۴. حداکثر مقدار به‌ازای $a=b$ به‌دست می‌آید. می‌توان همهٔ مقدارهای لازم را، مثلاً، برحسب یکی از زاویه‌های حادهٔ مثلث، بیان کرد.

۲۶.۴. روشن است که $f(0)=f(1)=1$. بنابراین، حداقل مقدار $f(x)$ به ازای $x=\frac{1}{2}$ (جواب $f'(x)=0$) به‌دست می‌آید. درضمن، این حداقل، نمی‌تواند از -1 کمتر باشد.

۲۷.۴. مسألهٔ ۵.۴ و حل آن را ببینید.

۲۸.۴. مجموع سه عدد کوچکتر، نمی‌تواند ازسه برابر واسطهٔ حسابی ۱۰ عدد، بیشتر باشد.

۳۰.۴. مسألهٔ ۳.۴ را ببینید. همهٔ مساحت‌ها را، برای بعضی از حالت‌های نمونه‌ای محاسبه کنید: اگر نقطهٔ مفروض، دریکی از رأس‌ها، یا وسط یکی ازضلع‌ها ویا درمحل برخورد میانه‌ها باشد.

۳۱.۴. بهتراست، اول، حداقل مقدارحاصل‌ضرب دوقطر را پیدا کنید.

۳۲.۴. حداقل و حداکثرقیمت یك خودکارچقدراست؟

$$\left(\frac{11}{9}<x<\frac{16}{13}\right)$$

۳۳.۴. می‌توان شبیه مسألهٔ ۴.۶، ب) حل کرد. از برابری زیر استفاده کنید:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

▽ تبدیل $\sqrt{3}$ به کسر مسلسل، منجر به تناوب می‌شود. تصادفی نیست که، برای فشار شبکهٔ برق، ۲۲۰ ولت و ۱۲۷ ولت را انتخاب کرده‌اند.

۳۴.۴. مسألهٔ ۸.۴ را ببینید.

۳۵.۴. مسألهٔ ۹.۴ را ببینید. اگر p را فاصله‌ای بگیریم که پیاده می‌تواند درفاصلهٔ برخوردبا دواتوبوس‌متوالی طی‌کند، آن‌وقت داریم:

$$۵p<۴<۷p،$$

$$۷p\leqslant ۷<۹p،$$

$$(x-۱)p\leqslant ۱۷<(x+۱)p$$

(x، تعداد مجهول اتوبوس‌هاست).

۳۷.۴. S را مجموع یازده عدد بگیرید. هرعدد، ریشه‌ای ازمعادلهٔ

$$x=(S-x)^۲$$

است، که بیش از دو ریشه ندارد. بنابراین، بین این ۱۱ عدد، نمی‌تواند بیش ازدوعدد مختلف وجود داشته باشد.

۳۸.۴. مقدارمفروض را، به‌ازای $n=k+۱$ و $n=k$ بنویسید و نسبت‌آن‌ها را پیداکنید. سپس، ببینید، این نسبت، به ازای چه‌مقدارهایی از k از واحد بزرگتر و به ازای چه‌مقدارهایی از k از واحدکوچکتراست (مسألهٔ ۱۳.۴ را ببینید).

۳۹.۴. بهتر است، در ابتدا، حالتی را درنظر بگیرید که همهٔ عددها باهم‌برابرند.برای‌این‌که‌مرزبالایnرابه‌دست‌آورید، نابرابری‌های به صورت

$$a_i^۲+a_j^۲\geqslant ۲a_ia_j$$

را باهم جمع‌کنیدکه، درآن، a_kها($۱\leqslant k\leqslant n$)، عددهایی هستند که در صورت مسأله از آن‌ها صحبت شده است.

۴۰.۴. مسألهٔ ۱۵.۴ را ببینید.

۴۱.۴. انتگرال‌های سمت‌چپ رامی‌توان به‌عنوان‌مساحت مثلث‌های منحنی‌الضلع، واقع درزیروبالای نمودارتابع $y=\sin x$ نشان داد (مسألهٔ ۱۶.۴ را ببینید).

۴۲.۴. بهتراست از همان روش اثبات نابرابری‌های ۱۵.۴ استفاده کنید؛ دریکی ازحالت‌ها، باید نابرابری مثلثی را هم به‌حساب‌آورد.

۴۳.۴ الف) عددها را به‌صورت توان‌هایی با نماهای برابر درآورید و، سپس، پایه‌های این توان‌ها را، با هم مقایسه کنید.

ب) برای این که عددهای $2^{9}\times 3^{98}$ و $3^{4}\times 2^{148}$ را باهم مقایسه کنیم، کافی است 2^{9} را با 3^{4} و 3^{98} را با 2^{148} مقایسه کنیم (مقایسهٔ دوعدداخیر، به‌مقایسهٔ $\left(\frac{9}{8}\right)^{49}$ و ۲ منجرمی‌شود؛ مسألهٔ ۴.۴ را هم ببینید).

ج) عددهای $\log_{5}\left(\frac{6}{5}\right)$، $\log_{6}\left(\frac{6}{5}\right)$ و $\log_{6}\left(\frac{7}{6}\right)$ را باهم مقایسه کنید.

د) می‌توان ازاین برابری استفاده کرد:

$$2\sin 7^\circ \sin 5^\circ = \cos 2^\circ - \cos 12^\circ$$

برای حل «ج» و «د» و «ه» می‌توان ازگزارهٔ زیراستفاده کرد: اگر تابع $\log f(x)$ تحدبی به‌طرف بالا داشته باشد(حل‌مسألهٔ ۱۸.۴را ببینید)، آن وقت $\frac{f(x+1)}{f(x)} \geqslant \frac{f(x)}{f(x-1)}$.

۴۴.۴ می‌توان شبیه حل‌مسألهٔ ۱۸.۴ استدلال کرد؛ برای الف) از تابع $f(x)=\frac{1}{1+x}$ و برای ب) ازتابع $f(x)=\log\sin x$ استفاده کنید.

۴۵.۴ درمجموع مورد نظر، تنها عددهای ۲ و ۳ وجود دارند.

۴۶.۴ حل مسألهٔ ۱۹.۴ را ببینید.

۴۷.۴ تعداد گره‌های یک شبکهٔ نامتناهی، شامل مثلث متساوی‌الاضلاع به‌ضلع واحد را، در دایره‌ای به شعاع ۱۰ و مرکز یکی از گره‌های شبکه، ارزیابی کنید (کافی است، تعدادگره‌های واقع دریك شش ضلعی منتظم را محاسبه‌کنیم؛ هرضلع شش ضلعی در امتداد خطهای راست شبکه است و طولی برابر۱۰ دارد).

۴۸.۴ حل مسألهٔ ۲۳.۴ را ببینید.

۴۹.۴ قرینهٔ وتر را نسبت به‌هریك ازضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قائمه

پیدا کنید؛ K' را قرینهٔ K نسبت به ضلعی که P روی آن است و H' را قرینهٔ H نسبت به ضلعی که Q روی‌آن است، بگیرید (K' و H' روی دو خط راست موازی قراردارند). مسأله منجربه‌این می‌شودکه، حداقل طول خط شکستهٔ $K'PQH'$ راپیداکنیم (موضع نقطه‌های PوQ، دراین مسأله، منحصربه‌فرد نیست؛ مسأله بی‌نهایت جواب، برای موضع P و Q دارد).

۰۵۰۴ مجذورفاصلهٔ بین دونقطه‌ای‌که، با سرعت‌های ثابت، روی‌یك خط راست حرکت می‌کنند، بـه‌وسیلهٔ یك سه‌جمله‌ای درجـهٔ دوم نسبت به زمان، بیان می‌شود (اگردستگاه محورهای مختصاتی را، که به‌یکی از این نقطه‌ها مربوط است، در نظر بـگیریم، می‌توانیم به سادگی، این نتیجه را به‌دست‌آوریم). با دردست‌داشتن سه‌مقدارسه‌جمله‌ای درجهٔدوم، ضریب‌های آن به‌دست می‌آید و، سپس، می‌نیمم‌آن محاسبه می‌شود.

۰۲۲۰۵ ب) در خانهٔ وسط و چهارخانـه‌ای که بـا آن در یك رأس مشترك‌اند، عددهای منفی و دربقیهٔ ۲۰ خانه، عددهای مثبت را قراردهید.

۲۳۰۵ حلزون‌نمی‌توانداز۴تا۱۲مترخزیده‌باشد(حل‌مسألهٔ ۵.۱را ببینید).

۰۲۴۰۵ حل مسألهٔ ۵.۳ را ببینید.

۰۲۵۰۵ حل مسألهٔ ۵.۵ را ببینید.

۰۲۶۰۵ الف) بهتر است ابتدا، حالت‌هایـی را در نظر بگیریدکه در اتوبوس، ۲، ۳ و ۴ مسافر وجود دارد.

ب) بعد ازمبادلهٔ سکه‌ها و پرداخت کرایه‌ها، باید دست‌کم یك سکه برای هرمسافرباقی بماند.

ج) بهتراست روشن‌کنید، بین این۱۵مسافر، چندنفرتنها یك سکهٔ۱۵ کوپکی دارند.

۰۲۷۰۵ بهتراست جـدولی تشکیل دهیدکـه، درآن، سطرها متناظر با رنگ‌ها و ستون‌ها متناظربا مدل‌ها باشند.

۰۲۸۰۵ حل مسألهٔ ۵.۶ را ببینید.

۰۲۹۰۵ الف) به‌کمك پرگاروخط‌کش، مثلثی رسم‌کنیدکه، از آن، دو

ضلع و زاویهٔ روبه‌رو به‌یکی ازضلع‌ها معلوم باشد.

ب) دومثلث درنظربگیرید، یکی با ضلع‌های ۱، a و $a^۲$ و دیگری با ضلع‌های a، $a^۲$ و $a^۳$. به‌ازای چه‌مقدارهایی‌از a، این مثلث‌ها وجود دارند؟

۳۰.۵. ثابت کنید، یکی از زاویه‌های بین نیمسازهای مثلث، از ۶۰ درجه کمتر نیست (برای ایـن منظور، زاویه‌های بین نیمسازها را، بر حسب زاویه‌های مثلث بیان کنید). مساحت چهارضلعی را ارزیابی کنید که قطرهای آن، این نیمسازها باشند.

۳۲.۵. این مسأله، با برابری زیربستگی دارد:

$$۴+۴\times ۲^۳+۴\times ۳^۳+\ldots+۴k^۳=k^۲(k+۱)^۲$$

۳۳.۵. د) ابتدا کوشش کنید، تقسیم مثلث قائم‌الزاویه‌را، به‌دومثلث متساوی‌الساقین آزمایش کنید.

۳۵.۵. الف) لزومی ندارد چهارضلعی محدب باشد.

ب) طول هرپاره‌خط راست واقع در درون‌چهارضلعی، ازنصف محیط چهارضلعی تجاوزنمی‌کند.

۳۶.۵. ب) حالت‌هایی را بررسی کنیدکـه n، عددی زوج یا عددی فرد باشد (مسألهٔ ۱۶.۵ را ببینید).

۳۷.۵. الف) یك بیست‌وجهی‌سیمی را درنظربگیرید؛ مسألهٔ ۱۵.۵، ب) را ببینید.

ب) تعداد پاره‌خط‌ها را محاسبه‌کنید (مسألهٔ ۱۶.۵، ب) و ۱۷.۵، ب) را ببینید).

۳۸.۵. بهتراست هریك‌ازعددهای از۱ تا ۸۱را به‌صورت مجموعی‌از توان‌های عدد ۳، یعنی در دستگاه عدد نویسی به‌مبنای ۳، بنویسید.

۴۰.۵. اگر $\frac{۸}{۷}=q^k$ و $\frac{۹}{۸}=q^n$، آن وقت $۷^n\times ۹^k=۸^{n+k}$.

۴۱.۵. ب) هرکلید دوحالت دارد (روشن وخاموش)، بنابراین برای سه‌کلید روی هم هشت حالت مختلف وجود دارد که یکی از آن‌ها، متناظر

است با خاموش بودن همهٔ لامپ‌ها.

۴۲۰۵. مسأله را با دایره‌های سیاه و دانش‌آموزان را با دایره‌های سفید مشخص کنید و هردانش‌آموز را با پاره‌خط، به‌مسأله‌هایی که حل کرده است وصل کنید. در این صورت، پاره‌خطها، یك یا چند دور بسته تشکیل می‌دهند.

د) درهردور، می‌توان دو روش انتخاب کرد؛ تعداددورها، از ۱۰ تجاوز نمی‌کند.

۴۳۰۵. بهتراست ترتیب متناوب افسران را روی صفحهٔ Oxy که به مربع‌های ۵ × ۵ خانه‌ای تقسیم شده است بنویسید؛ درهریك ازاین مربع‌ها، ترتیب با ویژگی لازم تکرارمی‌شود. افسرهای هردرجه را می‌توان درطول خطهای راست موازی، ومثلاً باضریب زاویهٔ برابر ۱، وهرنوع تخصص را درجهت دیگری، مثلاً با ضریب زاویهٔ ۲، نوشت.

∇ این ترتیب لازم را، می‌توان به کمك میدان محدودی شامل باقی‌مانده‌های حاصل ازتقسیم بر ۵ هم به‌دست آورد. بحث مربوط به‌مسألهٔ ۲۰.۵ را ببینید.

۴۴۰۵. الف) پاره‌خطی درنظر می‌گیریم، سه رأس هرم بیرونی را، خیلی نزدیك به‌یکی از دوانتهای این پاره‌خط و رأس چهارم را، نزدیك به انتهای دیگر آن می‌گیریم. در مورد هرم داخلی، دو رأس را در نزدیکی دوانتهای پاره‌خط و دو رأس دیگر را در نزدیکی انتهای دیگر آن انتخاب می‌کنیم.

ب) این مسأله، تعمیمی از قضیهٔ زیراست: محیط چند ضلعی محدب، کوچکتراست ازمحیط هرچند ضلعی که آن را دربر گرفته است.

۴۷۰۵. ایستگاه‌ها را در رأس‌های مکعب قرارمی‌دهیم.

۴۸۰۵. دراین چند وجهی، همهٔ یال‌هایی که درجهت هم باشند، طولی برابردارند، و برای هردوجهت مختلف، درست دو وجه، متناظر با این دو جهت وجود دارد.

۴۹۰۵. ب) چندجمله‌ای بخش الف) را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$C_x^1+C_{x+y+1}^2$$

(بحث مسألهٔ ۱۶.۲ را ببینید).

۵۰۰۵. مجموعهٔ مقدارهای چندجمله‌ای $x^2+(xy-1)^2$ را پیدا کنید.

۱۹.۶. مسألهٔ ۱.۶، ب) را ببینید.

۲۰.۶. ج) ثابت کنید، اگردر تبدیل کسر $\frac{n}{p}$ $(0<n<p)$، به کسر دهدهی، درجایی به دو رقم برابر ومجاورهم a برخورد کنیم، آن وقت، عدد طبیعی m وجود دارد، به‌نحوی که داشته باشیم: $\frac{m}{p}=0{,}aa\ldots$، یعنی نابرابری زیربرقرار باشد:

$$0<\frac{m}{p}-\frac{11}{100}a<\frac{1}{100}$$

مسألهٔ مفروض، به‌مسألهٔ زیرمنجر می‌شود: عددهای اول p را طوری پیدا کنیدکه، به‌ازای هرعدد طبیعی $a\leqslant 9$، عدد دو رقمی که با دو رقم متوالی عدد $11pa$ تشکیل شده است، از $100-p$ تجاوزنکند.

۲۱.۶. دورهٔ تناوب را پیداکنید.

۲۲.۶. ثابت کنید، اگر $a_n\geqslant 163$، آن وقت $a_{n+1}<a_n$. این باقی می‌ماندکه حالت‌های $a_1\leqslant 162$ را بررسی کنیم.

۲۳.۶. مسألهٔ ۳.۶ را ببینید.

۲۴.۶. مسألهٔ ۲.۶ را ببینید.

۲۵.۶. مسألهٔ ۵.۶ را ببینید.

۲۶.۶. بحث‌های مربوط به‌مسأله‌های ۱۶.۶ و ۱۷.۶ را ببینید. اگر نمودارهای دو تابع $y=1-x^2$ و $y=x$ را رسم کنیم، باید رفتار دنبالهٔ (x_n) را، با توجه به رابطهٔ $x_{n+1}=1-x_n^2$، به‌ازای مقدارهای مختلف x_1 مورد بررسی قراردهیم. پاسخ مسأله، بستگی به‌زوج یافرد بودن n دارد.

۲۷.۶. الف) تابع $f(x)=x(1-x)$، به‌ازای $0<x<\frac{1}{2}$، صعودی است. دربازهٔ $0\leqslant x\leqslant 1$ داریم: $f(x)\leqslant\frac{1}{4}$ و $f\left(\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n+1}$. می‌توان ثابت کرد: $x_n<\frac{1}{n+2}$ به‌ازای $n>1$.

ب) بهتراست $x_n=\frac{1}{2}+h_n$ بگیریم.

۲۸.۶. با روش استقرای ریاضی می‌توان ثابت کرد که، $P_n(x)$، دارای n ریشه است. با درنظرگرفتن تناوب علامت‌های چند جمله‌ای $P_{n+1}(x)$ در نقطه‌هایی که، در آن‌ها، $P_n(x)$ برابر صفر می‌شود، می‌توان ثابت کرد که، بین هردو ریشهٔ $P_n(x)$، ریشه‌ای از $P_{n+1}(x)$ وجود دارد؛ به‌جز آن، اگر علامت $P_n(x)$ و $P_{n+1}(x)$ را، به‌ازای مقدارهایی از x که، از لحاظ قدرمطلق، به‌اندازهٔ کافی بزرگ‌اند، پیدا کنیم، می‌توان ثابت کرد که، $P_{n+1}(x)$، ریشه‌ای کوچکتر از همهٔ ریشه‌های $P_n(x)$، و ریشه‌ای بزرگتر از همهٔ ریشه‌های $P_n(x)$ دارد.

۲۹.۶. الف) مسیر مورچه از پاره‌خط‌های راستی درست شده است که، طول‌های آن‌ها، دوتصاعد هندسی نزولی نامتناهی تشکیل می‌دهند.

۳۰.۶. همهٔ مثلث‌ها، با هم متشابه‌اند.

۳۱.۶. از نابرابری $\sin x<x$، برای $x>0$، استفاده کنید.

۳۲.۶. ب) و ج). می‌توان ثابت کرد $a_n^3>3n$ و، سپس، تفاضل a_n^3-3n را ارزیابی کرد.

۳۳.۶. هردوحکم را می‌توان با روش استقرای ریاضی ثابت کرد (مسألهٔ ۱۶.۶ را ببینید): اگرنابرابری‌های

$$0<2-a_n<\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

برای $n=k$ برقرار باشند، آن‌وقت برای $n=k+1$ هم برقرار خواهند بود.

۳۴.۶. می‌توان $q<1$ را پیدا کرد، به‌نحوی که (با آغاز ازمقداری برای n)، داشته باشیم: $a_{n+1}<q\cdot a_n$.

۳۵.۶. ب) عددهای سه‌گانهٔ به‌صورت $k\tau^2$، $k\tau$، k را درنظربگیرید.

۳۶.۶. مجموع همهٔ فاصله‌های دوبه‌دو رادرنظر بگیرید. این مجموع، با جابه‌جایی افراد، تغییر نمی‌کند.

۳۸.۶. بهتراست، عددهای بین ۰ و ۱ را، همچون کسرهایی نامتناهی

درعدد نویسی بـه مبنای ۳، یعنی شامـل رقم‌های ۰، ۱، ۲ درنظربگیریم. عددهایی که در بخش «ج» دربارهٔ آن‌ها صحبت شده است، عددهایی هستند که درعدد نویسی به‌مبنای ۳، دارای بی‌نهایت رقم برابر ۰ و ۲ هستند، ولی‌حتی یك‌رقم برابر واحد ندارند.

۶.۳۹. ج) بـرای اثبات، بهتراست از روش دیـگری برای ساختن خط‌شکستهٔ دراکون استفاده کنیم (البته، باید ثابت‌کرد که، روش جدید، همان خط شکستهٔ قبلی را می‌دهد): در گام nام، هرضلع خط شکسته‌ای راکه قبل از آن ساخته شده است، به‌عنوان وتر درنظرمی‌گیریم و مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی روی آن مـی‌سازیم، درضمن، یك درمیان، درسمت راست و درسمت چپ (به‌نحوی‌که، مثلث‌های مجاور، یکی‌ازدیگری، با دوران به اندازهٔ ۹۰ درجه دور رأس مشترك‌آن‌ها، به‌دست آید). ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمه دراین مثلث‌ها، خط شکستهٔ جدیدی می‌سازند که اگرآن را به اندازهٔ ۴۵ درجه نسبت به‌نقطهٔ اولیه برگردانیم و به‌اندازهٔ $\sqrt{2}$ بارمتشابه با خودش بزرگ کنیم، می‌توانیم به‌گام $(n+1)$ام برویم.

د) راه حل‌را می‌شناسیم‌که براساس استفاده از عددهای‌مختلط درست قراردارد؛خیلی‌جالب‌خواهدبود،اگربتوانیدراه‌حل‌مقدماتی‌ساده‌ای پیدا کنید.

۶.۴۰. خانه‌های همهٔ‌خانواده‌ها را، به‌دوصورت‌بنویسید. روی‌نسخهٔ اول، خانه‌ها، طبق قاعده‌ای که در مسألـه داده شده است، در سال‌هـای ردیف فرد (سال اول، سال سوم، سال پنجم و غیره)، و روی نسخهٔ دوم، درسال‌های ردیـف زوج، رنگ می‌کنیم. هرخانـه را، به‌خانه‌هایی ازنسخهٔ دیگر وصل می‌کنیم که، درآن‌ها، دوستان‌آن زندگی می‌کنند. برای به‌دست آوردن طرح (که بـه‌آن، گراف دولپه‌ای گویند)، مـی‌توان ازهمان روشی استفاده‌کرد که درحل مسألهٔ ۶.۷ به‌کاربرده‌ایم.