چاپ دوم

آنالیز تابعی

نوشتهٔ : والتر رودین

ترجمهٔ : دکتر علی اکبر عالم زاده

آنالیز تابعی

نوشته : والتر رودین

ترجمه : دکتر علی اکبر عالم زاده

پیشگفتار مترجم

والتررودین مؤلف سه کتاب درسی به نامهای ***اصول آنالیز ریاضی*، *آنالیز حقیقی و مختلط*، و *آنالیز تابعی*** است. دو کتاب اول سالها قبل توسط اینجانب ترجمه شده و به چاپهای متعدد رسیده‌اند و اصول آنالیز ریاضی به عنوان بهترین کتاب سال ۱۳۶۲ انتخاب شده است. ترجمهٔ فارسی سومین کتاب را نیز تقدیم داشته و با افتخار اعلام می‌دارم که این سه اثر گرانقدر به ۱٤ زبان از جمله فارسی ترجمه شده‌اند.

رودین اولین کتاب را دو سال پس از دریافت درجهٔ دکتری از دانشگاه دوک (*Duke*) و در زمانی که در ام.آی.تی. مدرس سی.ال.ای. مور (*C.L.E.Moore*) بود نوشت. بعدها در دانشگاه روچستر (*Rochester*) تدریس کرد و از سال ۱۳۵۹ به بعد استاد تحقیقاتی ویلاز (*Vilas Research Professor*) در دانشگاه ویسکونزین - مادیسون (*Wisconsin-Madison*) بوده است.

والتررودین در دانشگاه ییل (*Yale*)، دانشگاه کالیفرنیا (*California*) در لاجولا (*Lajolla*)، و دانشگاه هاوایی (*Havaii*) فرصت مطالعاتی داشته است.

تحقیقات وی عمدتاً در آنالیز توافقی و متغیرهای مختلط است. او سه رسالهٔ تحقیقی در این مباحث نگاشته است که عبارتند از ***آنالیز فوریه در گروهها*، *نظریهٔ توابع در چند قرصها*، و *نظریهٔ توابع در گوی یکه در*** C^n.

دکتر علی اکبر عالم زاده

پیشگفتار مؤلف

آنالیز تابعی عبارت است از مطالعهٔ چند ساختار توپولوژیک - جبری و روشهایی که با آنها می‌توان این ساختارها را در مسائل تحلیلی به کارگرفت.

یک کتاب مناسب در این مبحث باید شامل صورت اصل موضوعی آن (یعنی نظریهٔ عمومی فضاهای برداری توپولوژیک) بوده، دست کم چند مطلب را با عمق بیشتر بررسی کرده، و چند کاربرد جالب آن در شاخه‌های دیگر ریاضیات را شامل باشد. امیدوارم این کتاب ویژگیهای مذکور را داشته باشد.

این مبحث وسیع بوده وبه سرعت در حال رشد است. (کتابنامهٔ جلد یک مرجع [٤] شامل ٩٦ صفحه است و تا سال ١٩٥٧ می‌باشد.) لذا برای نگارش یک کتاب در اندازهٔ متوسط باید بعضی از مطالب انتخاب و از مطالب دیگر صرف نظر کرد. تقریباً هر متخصص که فهرست مطالب را نگاه کند در می‌یابد که بعضی از مباحث دلخواه وی (از جمله من) غایب‌اند، ولی این امر غیرقابل اجتناب می‌باشد چرا که هدف نگارش یک دایره‌المعارف نبوده است. می‌خواستم کتابی بنویسم که راه را برای کاوشهای بیشتر باز نماید.

این امر دلیل حذف بسیاری از مطالب خاص‌تر که می‌توان آنها را در نظریهٔ عمومی فضاهای برداری توپولوژیک گنجاند بوده است. مثلاً، از فضاهای یکنواخت، همگرایی مور-اسمیت، تورها، و صافی‌ها بحث نشده است؛ تمامیت فقط در محدودهٔ فضاهای

متری مطرح شده است؛ نه فضاهای بورنولوژیک ذکر شده است نه فضاهای بشکه‌ای. البته دوگانی عنوان شده است ولی نه در کلیترین شکل خود. با انتگرالگیری از توابع‌برداری صرفاً به عنوان ابزار برخورد شده و توجه ما فقط معطوف انتگرالدههای پیوسته با مقادیر در یک فضای فرشه می‌باشد.

با اینحال، مطالب قسمت یک برای تقریباً هر کاربرد در مسائل ملموس کاملاً مناسب است، و نکتهٔ مورد تأکید در این درس آن است که ارتباط نزدیک بین تجرید و واقعیت نه فقط مفیدترین جنبهٔ تمام مبحث است بلکه جذاب‌ترین آنها نیز می‌باشد.

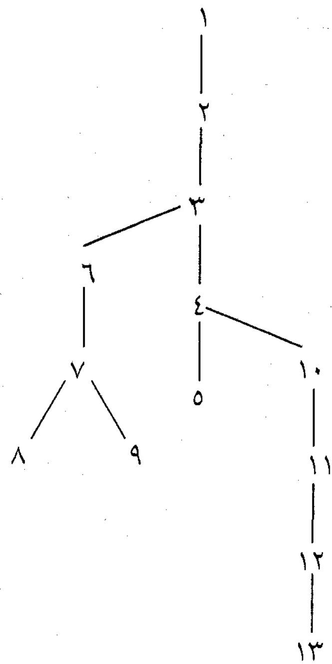
حال چند ویژگی دیگر مطالب انتخابی را ذکر می‌کنیم. بخش نسبتاً وسیعی از نظریهٔ عمومی بدون فرض تحدب موضعی مطرح شده است؛ خواص اصلی عملگرهای فشرده از نظریهٔ دوگانی در فضاهای باناخ به دست آمده است؛ قضیهٔ کرین - میلمن راجع به وجود نقاط اکستریم به چند طریق در فصل ۵ به کار رفته است؛ نظریهٔ توزیعها و تبدیلات فوریه با تفصیل مطالعه شده و (در دو فصل بسیار کوتاه) در دو مسئله از معادلات دیفرانسیل جزئی و نیز در قضیهٔ تاوبری وینر و دو کاربرد آن به کار گرفته شده است؛ قضیهٔ طیفی از نظریهٔ جبرهای باناخ (به خصوص، از ویژگی گلفاند - نیمارک B^* - جبرهای تعویضپذیر) به دست آمده است، این احتمالاً کوتاهترین راه نبوده ولی راه آسانی می‌باشد؛ حساب علامتی در جبرهای باناخ با تفصیل قابل ملاحظه‌ای مطرح شده است، همچنین برگشتها و تابعیهای مثبت.

فرض است خواننده با نظریهٔ اندازه و انتگرالگیری لبگ (به انضمام مطالبی چون فشردگی فضاهای L^P)، خواص اصلی توابع هلوریخت (نظیر شکل کلی قضیهٔ‌کشی و قضیهٔ رونگه)، و مفاهیم مقدماتی توپولوژیک که همراه این دو مطلب تحلیلی‌اند آشنا می‌باشد. در ضمیمهٔ آ چند مطلب توپولوژیک دیگر به اختصار آمده‌اند، تقریباً هیچ زمینه‌ای از جبر پیش از مفهوم همریختی لازم نیست.

ارجاعات تاریخی در ضمیمهٔ ب گرد آمده‌اند. بعضی از این ارجاعات اشاره به منابع اصلی دارند، و بعضی عبارتند از کتابها، مقالات، یا مقالات تشریحی جدیدتر که در آنها مرجعهای بیشتری را می‌توان یافت. البته بسیاری از مطالب ریشه‌یابی نشده‌اند. در

هیچ موردی عدم ذکر مرجع دلیل اصلی بودن یا تعلق داشتن به من نخواهدبود.

بسیاری از کاربردها در فصلهای ۵، ۸، و ۹ آمده‌اند. بعضی از کاربردها در فصل ۱۱ و در بیش از ۲۵۰ تمرین گنجانده شده‌اند؛ بسیاری از آنها با راهنمایی همـراه می‌باشـند. در نمودار زیر ارتباط این فصلها را مشاهده می‌کنید.



اغلب کاربردهای فصل ۵ را می‌توان پیش از اتمام چهار فصل اول مطالعه کرد. لـذا بهتر است به محض آنکه زمینهٔ نظری لازم تأمین شد، به آنها پرداخته شـود. بـا اینحـال، برای آنکه در نظریه انفصالی رخ ندهد، فصل ۵ را با زمینه‌ای کوتاه که در هر مـورد لازم است آغاز کرده‌ام. این کار مطالعهٔ کاربردها را هرچه زودتر (در صـورت تمـایل) آسـان می‌سازد.

در ویرایـش اول، بخـش زیـادی از فصـل ۱۰ بـه مشـتقگیری در جبرهـای بانـاخ اختصاص دارد. بیست سال پیش این مطالب جالب و خوش‌آتیه به نظر می‌رسـیدند، امـا ظاهراً به جایی نرسیده‌اند و لذا آنها را حذف کرده‌ام. از آن سو، چند مورد اضافـه شـده است که به راحتی می‌توان آنها را با متن موجود سازش داد؛ این موارد عبارتند از قضیـهٔ

ارگودیک میانگین فون نویمان، قضیهٔ هیل- یوزیدا راجع به زیرگروههای عملگرها، یک جفت قضیهٔ نقطهٔ ثابت، کاربرد اعجاب‌آور بونسال قضیهٔ بردبسته، و قضیهٔ زیرفضای پایای جالب لومونوسف. همچنین چند بخش برای تشریح جزئیات بازنویسی و برخی از برهانها کوتاه و ساده شده‌اند.

بسیاری از این تغییرات واکنشی است به پیشنهاداتی که از دوستان و همکاران متعدد داشته‌ام. به خصوص مایلم از جاستین پترز (*Justin Peters*) و رالف رایمی (*Ralph Raimi*) که انتقادات مشروحی به ویرایش اول داشته‌اند، و نیز مترجم روسی ویرایش اول که چند پانوشت مناسب به متن افزوده است نام ببرم. سپاس فراوان نصیب همهٔ آنها بادا!

والتر رودین

(*Walter Rudin*)

فهرست مطالب

قسمت دو توزیعها و تبدیلات فوریه

قسمت یک

نظـــریهٔ عـمومـی

فصل ۱

فضاهای برداری توپولوژیک

آشنایی

۱.۱ بسیاری از مسائل مطرح برای آنالیزدانان عمدتاً مربوط به یک شیء مانند یک تابع، یک اندازه، یا یک عملگر نبوده بلکه راجع به رده‌های وسیعی از این اشیاء می‌باشند. جالبترین رده در این باب فضاهای‌برداری با اسکالرهای حقیقی یا مختلط است. چون در هر مسئلهٔ تحلیلی فرایندهای حدی (به طور صریح یا ضمنی) نقش دارند، تجهیز این فضاهای‌برداری با متر، یا دست کم توپولوژی، که رابطه‌ای طبیعی با اشیاء سازای فضاها داشته باشد تعجبی نخواهد داشت. ساده‌ترین و مهمترین راه برای این کار معرفی **نرم** است. ساختار حاصل (که در زیر تعریف شده است) ***فضای‌برداری نرمدار***، یا ***فضای خطی نرمدار***، یا ***فضای نرمدار*** نامیده می‌شود.

در این کتاب ***فضای‌برداری*** یعنی فضای‌برداری روی میدان مختلط $\mathbb{C}$ یا میدان حقیقی R. به خاطر کامل بودن بحث، تعریفهای مشروح در بخش ۴.۱ ذکر خواهند شد.

۲.۱ فضاهای نرمدار. گوییم فضای‌برداری X یک ***فضای نرمدار*** است اگر به هر $x \in X$ عددی حقیقی و نامنفی مانند $\|x\|$، به نام **نرم** x، چنان مربوط باشد که

(آ) به ازاء هر x و y در X، $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ ؛

(ب) اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ ؛

(پ) اگر $x \neq 0$، $\|x\| > 0$.

از واژهٔ "نرم" به معنی ***تابعی*** که x را به $\|x\|$ می‌نگارد نیز استفاده خواهیم کرد.

هر فضای نرمدار را می‌توان یک فضای متری گرفت که در آن فاصلهٔ $d(x,y)$ بین x و y مساوی $\|x-y\|$ است. خواص مهم d عبارتند از :

(یک) به ازای هر x و y، $0 \leq d(x,y) < \infty$ ؛

(دو) $d(x,y) = 0$ اگر و فقط اگر $x=y$ ؛

(سه) به ازای هر x و y، $d(x,y) = d(y,x)$ ؛

(چهار) به ازای هر x، y، و z،

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) .$$

در یک فضای متری ، ***گوی باز*** به مرکز x و شعاع r عبارت است از مجموعهٔ

$$B_r(x) = \{y: d(x,y) < r\} .$$

به خصوص ، اگر X یك فضای نرمدار باشد، مجموعه‌های

$$\overline{B}_1(0) = \{x: \|x\| \leq 1\} \text{ و } B_1(0) = \{x: \|x\| < 1\}$$

به ترتیب ***گوی یکهٔ باز*** و ***گوی یکهٔ بستهٔ*** X می‌باشند.

با قبول آنکه زیرمجموعه‌ای از یک فضای متری باز است اگر و فقط اگر اجتماعی (احتمالاً تهی) از گویهای باز باشد، یک ***توپولوژی*** به‌دست می‌آید. (ر.ک.بخش ۱.۵.) به آسانی معلوم می‌شود که اگر متر طبق توضیحات فوق از نرم ناشی شده باشد، اعمال فضای برداری (جمع و ضریب اسکالر) در این توپولوژی پیوسته‌اند.

فضای باناخ *(Banach)* یک فضای نرمدار است که نسبت به متر تعریف شده به وسیلهٔ نرمش **تام** می‌باشد؛ این یعنی هر دنبالهٔ کشی *(Cauchy)* در آن باید همگرا باشد.

۳.۱ بسیاری از فضاهای تابعی معروف فضاهای باناخ‌اند؛ از آن جمله می‌توان فضاهای توابع پیوسته بر فضاهای فشرده؛ فضاهای L^p آشنا که در نظریهٔ انتگرالگیری می‌آیند؛ فضاهای هیلبرت *(Hilbert)* - نزدیکترین خویشاوندان فضاهای اقلیدسی؛ بعضی از فضاهای توابع مشتقپذیر؛ فضاهای نگاشتهای خطی پیوسته از یک فضای باناخ

به دیگری ؛ و جبرهای باناخ را نام برد. همهٔ این فضاها بعدها در این کتاب خواهند آمد.

اما فضاهای مهم دیگری نیز وجود دارند که در این چهارچوب نمی‌آیند. در زیر به چند نمونه اشاره می‌کنیم:

(آ) $C(\Omega)$: فضای تمام توابع مختلط پیوسته بر مجموعهٔ باز Ω درفضای اقلیدسی R^n ؛

(ب) $H(\Omega)$: فضای تمام توابع هلوریخت در مجموعهٔ باز Ω در صفحهٔ مختلط ؛

(پ) C_K^∞ : فضای تمام توابع مختلط بی‌نهایت بار مشتقپذیر بر R^n که خارج مجموعهٔ فشردهٔ ثابتی چون K با درون ناتهی صفرند؛

(ت) فضاهای تابعی آزمایشی به کاررفته در نظریهٔ توزیعها، و خود توزیعها.

همانطور که بعدها خواهیم دید، این فضاها دارای توپولوژیهایی طبیعی‌اند که از نرم القا نمی‌شوند. اینها، و نیز فضاهای نرمدار، نمونه‌هایی از ***فضاهای‌برداری توپولوژیک***‌اند، مفهومی که سراسر آنالیز تابعی را فراگرفته است.

حال، پس از ایجاد این انگیزهٔ مختصر، تعریفها را شرح داده و سپس (در بخش ۹.۱) چند نتیجه از فصل ۱ را مرور می‌کنیم.

۴.۱ فضاهای برداری . R و $\mathbb{C}$ همواره یعنی میدان اعداد حقیقی و میدان اعداد مختلط. فعلاً فرض می‌کنیم Φ یعنی R یا $\mathbb{C}$. یک ***اسکالر*** عضوی است از ***میدان اسکالر*** Φ . ***فضای‌برداری روی*** Φ مجموعه‌ای است مانند X که عنصرهایش را ***بردار*** نامیده ودر آن دو عمل به نامهای **جمع** و ***ضرب اسکالر*** تعریف شده‌اند که از خواص جبری آشنای زیر برخوردارند:

(آ) به هر جفت از بردارهای x و y برداری مانند $x+y$ چنان نظیر است که

$$x+y=y+x \quad \text{و} \quad x+(y+z)=(x+y)+z\,؛$$

X بردار منحصر به فردی مانند 0 (***بردار صفر*** یا ***مبدأ*** X) دارد به طوری که به ازای هر $x \in X$ ، $x+0=x$ ؛ و به ازای هر $x \in X$ بردار منحصربه فردی مانند $-x$ چنان نظیر است که $x+(-x)=0$ ؛

(ب) به هر جفت (α,x) با $\alpha\in\Phi$ و $x\in X$ یک بردار مانند αx چنان نظیر است که

$$1x=x ،\quad \alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x ،$$

و دو قانون پخشپذیری

$$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y \quad و \quad (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$$

برقرار می‌باشند.

علامت 0 برای عنصر صفر میدان اسکالر نیز به کار خواهد رفت.

یک ***فضای برداری حقیقی*** فضایی است که در آن $\Phi=R$ ؛ یک ***فضای برداری مختلط*** فضایی است که در آن $\Phi=\mathbb{C}$. هر حکم راجع به فضاهای برداری که در آن میدان اسکالر به صراحت ذکر نشده است ناظر به هر دو حالت خواهدبود.

اگر X یک فضای برداری باشد، $A\subset X$، $B\subset X$، $x\in X$، و $\lambda\in\Phi$، از نمادهای زیر استفاده خواهیم کرد:

$$x+A=\{x+a : a\in A\},$$
$$x-A=\{x-a : a\in A\},$$
$$A+B=\{a+b : a\in A ، b\in B\},$$
$$\lambda A=\{\lambda a : a\in A\}.$$

به خصوص (با فرض $\lambda=-1$)، $-A$ مجموعهٔ تمام معکوسهای جمعی اعضای A می‌باشد.

تذکار. با این قراردادها، ممکن است $2A\neq A+A$ (تمرین ۱).

مجموعهٔ $Y\subset X$ را ***زیرفضای*** X نامیم اگر Y (البته نسبت به همان اعمال) خود یک فضای برداری باشد. به آسانی معلوم می‌شود که این رخ می‌دهد اگر و فقط $0\in Y$ و به ازای جمیع اسکالرهای α و β،

$$\alpha Y+\beta Y\subset Y.$$

گوییم مجموعهٔ $C\subset X$ ***محدب*** است اگر

$$tC+(1-t)C\subset C \quad (0\le t\le 1).$$

به عبارتی دیگر، اگر $x\in C$، $y\in C$، و $0\le t\le 1$، باید C شامل $tx+(1-t)y$ باشد.

گوییم مجموعهٔ $B\subset X$ ***در حال تعادل*** است اگر به ازای هر $\alpha\in\Phi$ که $|\alpha|\le 1$، $\alpha B\subset B$.

فضای‌برداری X با **بعد** n است $(\dim X = n)$ اگر X پایه‌ای مانند $\{u_1,\ldots,u_n\}$ داشته باشد. این یعنی هر $x \in X$ نمایش منحصر به فردی به شکل

$$x = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n \quad (\alpha_i \in \Phi)$$

داشته باشد. اگر به ازای n ی داشته باشیم $\dim X = n$ ، گوییم X ***با بعد متناهی*** است. هرگاه $X = \{0\}$ ، آنگاه $\dim X = 0$.

مثال. اگر $X = \mathbb{C}$ (یک فضای برداری یک بعدی روی میدان اسکالر $\mathbb{C}$)، مجموعه‌های در حال تعادل عبارتند از $\mathbb{C}$ ، مجموعهٔ تهی $\varnothing$ ، و هر قرص مستدیر (باز یا بسته) به مرکز 0. اگر $X = R^2$ (یک فضای برداری دو بعدی روی میدان اسکالر R)، مجموعه‌های در حال تعادل بیشترند؛ هر پاره‌خط با نقطهٔ میانی $(0,0)$ چنین است. نکته آن است که $\mathbb{C}$ و R^2 ، با وجود انطباق معروف و آشکار بین آنها، تا جایی که به ساختار فضای‌برداری‌شان مربوط باشد، کاملاً با هم متفاوت‌اند.

۵.۱ فضاهای توپولوژیک . ***فضای توپولوژیک*** مجموعه‌ای است مانند S که در آن گردایه‌ای مانند τ از زیرمجموعه‌ها (به نام ***مجموعه‌های باز***) با خواص زیر معین شده است: S باز است، $\varnothing$ باز است، اشتراک هر دو مجموعهٔ باز باز است، و اجتماع هرگردایه از مجموعه‌های باز باز می‌باشد. τ را یک ***توپولوژی*** بر S می‌نامیم. وقتی تصریح بیشتری لازم باشد، فضای توپولوژیک نظیر توپولوژی τ را به جای S به صورت (S,τ) خواهیم نوشت.

اگر S و τ مانند فوق باشند، در زیر واژه‌های متعارفی که به کار خواهند رفت ذکر می‌شوند.

مجموعهٔ $E \subset S$ **بسته** است اگر و فقط اگر متممش باز باشد. **بست** $\overline{E}$ از E اشتراک تمام مجموعه‌های بستهٔ شامل $\overline{E}$ است. ***درون*** E° مجموعهٔ E اجتماع تمام مجموعه‌های باز جزء E است. ***همسایگی*** نقطهٔ $p \in S$ مجموعهٔ بازی است که شامل p می‌باشد. (S,τ) یک ***فضای هاسدورف*** *(Hausdorff)* و τ یک ***توپولوژی هاسدورف*** است اگر نقاط متمایز S همسایگیهای از هم جدایی داشته باشند. مجموعهٔ $K \subset S$ ***فشرده*** است اگر هر پوشش باز K زیرپوششی متناهی داشته باشد. گردایهٔ $\tau' \subset \tau$ یک

پایه برای τ است اگر هر عضو τ (یعنی هر مجموعهٔ باز) اجتماعی از اعضای τ' باشد . گردایهٔ γ از همسایگیهای نقطهٔ $p \in S$ یک ***پایهٔ موضعی در p*** است اگر هر همسایگی p شامل عضوی از γ باشد.

هرگاه $E \subset S$ و σ گردایهٔ تمام اشتراکهای $E \cap V$ باشد که $V \in \tau$ ، به آسانی معلوم می‌شود که σ یک تولوژی بر E است؛ گوییم E این توپولوژی را از S ***به‌ارث می‌برد.***

اگر توپولوژی τ به وسیلهٔ متر d القا شده باشد (ر.ک.بخش ۲.۱) ، گوییم d و τ با هم ***سازگار*** می‌باشند.

دنبالهٔ $\{x_n\}$ در فضای هاسدورف X ***همگرا*** به نقطهٔ $x \in X$ است (یا $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$) اگر هر همسایگی x شامل تمام نقاط x_n جز تعدادی متناهی باشد.

۶.۱ فضاهای برداری توپولوژیک . فرض کنیم τ یک توپولوژی بر فضای‌برداری X باشد به طوری که

(آ) هر نقطهٔ X یک مجموعهٔ بسته باشد ، و

(ب) اعمال فضای‌برداری نسبت به τ پیوسته باشند.

در این شرایط گوییم τ یک ***توپولوژی‌برداری*** بر X است، و X یک ***فضای‌برداری توپولوژیک*** می‌باشد.

شرط (آ) را می‌توان به طرز دقیقتری عنوان کرد : به ازای هر $x \in X$ ، مجموعهٔ $\{x\}$ که فقط x را به عنوان عضو دارد یک مجموعهٔ بسته باشد.

در بسیاری از کتابها شرط (آ) از تعریف فضای‌برداری توپولوژیک حذف شده است. چون (آ) تقریباً در تمام کاربردها برقرار است و اغلب قضایای موردنظر، (آ) را در مفروضات خود می‌آورند، بهتر است آن را در اصول موضوع بگنجانیم. [قضیهٔ ۱۲.۱ نشان می‌دهد که (آ) و (ب) با هم ایجاب می‌کنند که τ یک توپولوژی هاسدروف است.]

پیوسته بودن جمع یعنی، طبق تعریف، نگاشت

$$(x, y) \to x + y$$

از حاصل ضرب دکارتی $X \times X$ به توی X پیوسته است: اگر به ازای $i = ۱,۲$ ، $x_i \in X$

و V یک همسایگی x_1+x_2 باشد، همسایگیهایی مانند V_i از x_i وجود دارند به طوری که

$$V_1+V_2\subset V.$$

به همین نحو، فرض پیوسته بودن ضرب اسکالر یعنی نگاشت

$$(\alpha,x)\to\alpha x$$

از $\Phi\times X$ به توی X پیوسته است : هرگاه $x\in X$ ، α اسکالر بوده، و V یک همسایگی از αx باشد، آنگاه به ازای $r>0$ ی و همسایگیی مانند W از x، هروقت $|\beta-\alpha|<r$ ، خواهیم داشت $\beta W\subset V$.

گوییم زیرمجموعهٔ E از یک فضای برداری توپولوژیک ***کراندار*** است اگر به هر همسایگی V از 0 در X عددی مانند $s>0$ چنان نظیر باشد که به ازای هر $t>s$ ، $E\subset tV$.

۷.۱ پایایی. فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک باشد. به هر $a\in X$ و هر اسکالر $\lambda\neq 0$ ***عملگر انتقال*** T_a و ***عملگر ضرب*** M_λ به وسیلهٔ فرمولهای

$$T_a(x)=a+x,\, M_\lambda(x)=\lambda x(x\in X)$$

مربوط می‌شوند. قضیهٔ سادهٔ زیر بسیار مهم می‌باشد.

قضیه. *T_a و M_λ همانریختیهایی از X به روی X می‌باشند.*

برهان. اصول موضوع فضای‌برداری به تنهایی ایجاب می‌کنند که T_a و M_λ یک به یک‌اند، X را به روی X می‌نگارند، و معکوسهای آنها به ترتیب T_{-a} و $M_{1/\lambda}$ می‌باشند. فرض پیوستگی اعمال فضای‌برداری ایجاب می‌کند که این چهار نگاشت پیوسته‌اند. لذا هریک از آنها یک همانریختی (یک نگاشت پیوسته که معکوسش نیز پیوسته است) می‌باشد.

یک نتیجه از این قضیه آن است که هر توپولوژی برداری τ ***انتقال - پایا*** (یا، به اختصار، ***پایا***) است : مجموعهٔ $E\subset X$ باز است اگر و فقط اگر هر انتقال $a+E$ آن

باز باشد. لذا τ به وسیلهٔ هر پایهٔ موضعی خود کاملاً معین است.

در فضاهای برداری، اصطلاح ***پایهٔ موضعی*** همیشه به معنی یک پایهٔ موضعی در 0 است. لذا یک پایهٔ موضعی فضای‌برداری توپولوژیک X گردایه‌ای مانند $\mathscr{B}$ از همسایگیهای 0 است به طوری که هر همسایگی 0 شامل عضوی از $\mathscr{B}$ می‌باشد. در این صورت مجموعه‌های باز X درست آنهایی هستند که اجتماعی از انتقالهای اعضای $\mathscr{B}$ می‌باشند.

متر d بر فضای برداری X را ***پایا*** نامیم اگر به ازای هر x, y, z در X،

$$d(x+z, y+z) = d(x, y).$$

۸.۱ انواع مختلف فضاهای برداری توپولوژیک . در تعریفهای زیر، X همواره یک فضای برداری توپولوژیک باتوپولوژی τ است.

(آ) X ***موضعاً محدب*** است اگر یک پایهٔ موضعی مانند $\mathscr{B}$ که اعضایش محدب‌اند موجود باشد.

(ب) X ***موضعاً کراندار*** است اگر 0 یک همسایگی کراندار داشته باشد.

(پ) X ***موضعاً فشرده*** است اگر 0 همسایگیی با بست فشرده داشته باشد.

(ت) X ***مترپذیر*** است اگر τ با متری مانند d سازگار باشد.

(ث) X یک F - ***فضا*** ست اگر توپولوژی τ آن به وسیلهٔ یک متر پایای تام مانند d القا شده باشد. (قس.بخش ۲۵.۱.)

(ج) X یک ***فضای فرشه*** (*Fre'chet*) است اگر X یک F- فضای موضعاً محدب باشد.

(چ) X ***نرم‌پذیر*** است اگریک نرم بر X چنان موجود باشد که متر القا شده به وسیلهٔ آن با τ سازگار باشد.

(ح) ***فضاهای نرمدار*** و ***فضاهای باناخ*** قبلاً تعریف شده‌اند (بخش ۲.۱).

(خ) X دارای ***خاصیت‌هاینه - بورل*** (*Heine - Borel*) است اگرهرزیرمجموعهٔ بسته و کراندار از X فشرده باشد.

تعریفهای (ثـ) و (جـ) مورد قبول عام نیستند: دربعضی از کتابها، تحدب موضعی از تعریف فضای فرشه حذف شده است درحالی که کتب دیگر F- فضا را به جای آنچه ما فضای فرشه نامیده‌ایم به کار می‌برند.

۹.۱ در زیر چند رابطه بین این خواص از فضای‌برداری توپولوژیک X ذکر شده است.

(آ) هرگاه X موضعاً کراندار باشد، آنگاه X یک پایهٔ موضعی شمارشپذیر دارد [قسمت (پـ) قضیهٔ ۱۵.۱].

(بـ) X متریپذیر است اگر و فقط اگر X یک پایهٔ موضعی شمارشپذیر داشته باشد (قضیهٔ ۲٤.۱).

(پـ) X نرم‌پذیر است اگر و فقط اگر X موضعاً محدب و موضعاً کراندار باشد (قضیهٔ ۳۹.۱).

(تـ) X با بعد متناهی است اگر و فقط اگر X موضعاً فشرده باشد (قضایای ۲۱.۱ و ۲۲.۱).

(ثـ) هرگاه فضای موضعاً کراندار X دارای خاصیت هاینه - بورل باشد، آنگاه X با بعد متناهی است (قضیهٔ ۲۳.۱).

فضاهای $H(\Omega)$ و C_K^∞ مذکور در بخش ۳.۱ فضاهای فرشه با بعد نامتناهی و دارای خاصیت هاینه - بورل‌اند (بخشهای ٤٥.۱ و ٤٦.۱) . لذا موضعاً کراندار نبوده و در نتیجه نرم‌پذیر نیستند؛ اینها همچنین نشان می‌دهند که عکس قسمت (آ) نادرست است.

از آن سو، F- فضاهایی موضعاً کراندار وجود دارند که موضعاً محدب نیستند (بخش ٤۷.۱).

خواص جداسازی

۱۰.۱ قضیه. *فرض کنیم K و C زیرمجموعه‌هایی از فضای‌برداری توپولوژیک X بوده، K فشرده بوده، C بسته باشد، و $K \cap C = \varnothing$. در این صورت ∘ دارای یک همسایگی مانند V است به طوری که*

$$(K+V)\cap(C+V)=\varnothing .$$

توجه کنید که $K+V$ اجتماعی از انتقالهای $x+V$ از V $(x \in K)$ است. لذا $K+V$ مجموعهٔ بازی است که شامل K می‌باشد. لذا قضیه وجود مجموعه‌های باز از هم جدایی را ایجاب می‌کند که به ترتیب شامل K و C می‌باشند.

برهان : با قضیهٔ زیر که در جاهای دیگر نیز سودمند است آغاز می‌کنیم :

هرگاه W یک همسایگی ۰ در X باشد، آنگاه یک همسایگی مانند U از ۰ هست که متقارن بوده (بدین معنی که $U=-U$) و در $U+U \subset W$ صدق می‌کند.

برای مشاهدهٔ این امر، توجه می‌کنیم که $0+0=0$، جمع پیوسته است، و لذا ۰ همسایگیهایی چون V_1 و V_2 دارد به طوری که $V_1+V_2 \subset W$. هرگاه

$$U=V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2),$$

آنگاه U خواص مطلوب را خواهد داشت.

حال می‌توان قضیه را به جای W بر U اعمال کرد و یک همسایگی متقارن جدید مانند U از ۰ چنان به دست آورد که

$$U+U+U+U \subset W.$$

اینک ادامهٔ کار روشن خواهدبود.

هرگاه $K=\varnothing$، آنگاه $K+V=\varnothing$ و قضیه واضح است. لذا فرض می‌کنیم $K \neq \varnothing$ و نقطه‌ای مانند $x \in K$ را در نظر می‌گیریم. چون C بسته است، x در C نیست، و چون توپولوژی X تحت انتقالها پایاست، قضیهٔ قبل نشان می‌دهد که ۰ یک همسایگی متقارن مانند V_x دارد به‌طوری که $x+V_x+V_x+V_x$ مجموعهٔ C راقطع نمی‌کند؛ دراین‌صورت تقارن V_x نشان می‌دهد که

$$(x+V_x+V_x) \cap (C+V_x)=\varnothing. \tag{1}$$

چون K فشرده است، تعدادی متناهی نقطه مانند x_1،...،x_n در K هست به‌طوری‌که

$$K \subset (x_1+V_{x_1}) \cup \ldots \cup (x_n+V_{x_n}).$$

قرار می‌دهیم $V=V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_n}$. دراین‌صورت

$$K+V=\bigcup_{i=1}^{n}(x_i+V_{x_i}+V) \subset \bigcup_{i=1}^{n}(x_i+V_{x_i}+V_{x_i}),$$

و، بنابر (۱)، هیچ جمله در اجتماع اخیر $C+V$ را قطع نمی‌کند. این برهان را تمام

خواهدکرد.

چون $C+V$ باز است، حتی می‌شود گفت که **بست** $K+V$ مجموعهٔ $C+V$ را قطع نمی‌کند؛ به‌خصوص، بست $K+V$ مجموعهٔ C را قطع نخواهدکرد. حالت خاص زیر از این، که با فرض $K=\{0\}$ حاصل می‌شود، مورد توجه بسیار خواهدبود.

۱۱.۱ قضیه. ***هرگاه $\mathscr{B}$ یک پایهٔ موضعی برای فضای‌برداری توپولوژیک X باشد، آنگاه هر عضو $\mathscr{B}$ شامل بست عضوی از $\mathscr{B}$ می‌باشد.***

تابحال از این فرض که هر نقطهٔ X یک مجموعهٔ بسته است استفاده نکرده‌ایم. حال آن را به‌کار گرفته و قضیهٔ ۱۰.۱ را بر یک جفت نقطهٔ متمایز به جای K و C اعمال می‌کنیم. نتیجه آن است که این نقاط همسایگیهای از هم‌جدا دارند. به عبارت دیگر، اصل موضوع جداسازی هاسدورف برقرار است:

۱۲.۱ قضیه. ***هر فضای‌برداری توپولوژیک یک فضای هاسدورف است.***

حال چند خاصیت ساده از بستها و درونها دریک فضای‌برداری توپولوژیک را به‌دست می‌آوریم. برای نمادهای $\overline{E}$ و E°، ر.ک.بخش ۵.۱. توجه کنید که نقطهٔ p متعلق به $\overline{E}$ است اگر وفقط اگر هر همسایگی p مجموعهٔ E را قطع نماید.

۱۳.۱ قضیه. ***فرض کنیم X یک فضای‌برداری توپولوژیک باشد.***

(آ) هرگاه $A\subset X$، آنگاه $\overline{A}=\bigcap(A+V)$ که در آن V تمام همسایگیهای 0 را می‌گیرد.

(ب) هرگاه $A\subset X$ و $B\subset X$، آنگاه $\overline{A}+\overline{B}\subset\overline{A+B}$.

(پ) اگر Y زیرفضای X باشد، $\overline{Y}$ نیز چنین است.

(ت) اگر C زیرمجموعهٔ محدبی از X باشد، $\overline{C}$ و C° نیز چنین‌اند.

(ثـ) اگر B زیرمجموعهٔ در حال تعادلی از X باشد، $\overline{B}$ نیز چنین است؛ هرگاه نیز $\circ \in B^{\circ}$، آنگاه B° درحال تعادل می‌باشد.

(جـ) اگر E زیرمجموعهٔ کرانداری از X باشد، $\overline{E}$ نیز چنین است.

برهان. (آ) $x \in \overline{A}$ اگر و فقط اگر به ازای هر همسایگی V از ∘، $(x+V) \cap A \neq \varnothing$، و این رخ می‌دهد اگر وفقط اگر به ازای هر چنین V، $x \in A - V$. چون $-V$ همسایگی ∘ است اگر و فقط اگر V چنین باشد، برهان تمام خواهدبود.

(ب) $a \in \overline{A}$ و $b \in \overline{B}$ را اختیار و فرض می‌کنیم W همسایگیی از $a+b$ باشد. همسایگیهایی چون W_1 و W_2 از a و b وجود دارند به‌طوری که $W_1 + W_2 \subset W$. نقاط $x \in A \cap W_1$ و $y \in B \cap W_2$ وجود دارند زیرا $a \in \overline{A}$ و $b \in \overline{B}$. دراین‌صورت $x+y$ در $(A \cap B) \cap W$ قراردارد. لذا این اشتراک تهی نیست. درنتیجه، $a+b \in \overline{A \cap B}$.

(پ) فرض کنیم α و β اسکالر باشند. بنابر قضیهٔ مذکور در بخش ۱.۷، اگر $\alpha \neq \circ$، $\alpha\overline{Y} = \overline{\alpha Y}$؛ اگر $\alpha = \circ$، این دو مجموعه به وضوح مساویند. لذا از (ب) نتیجه می‌شود که

$$\alpha\overline{Y} + \beta\overline{Y} = \overline{\alpha Y} + \overline{\beta Y} \subset \overline{\alpha Y + \beta Y} \subset \overline{Y}\,;$$

فرض زیرفضا بودن Y در آخرین شمول به کار رفته است.

برهان اینکه مجموعه‌های محدب بستهای محدب داشته و مجموعه‌های در حال تعادل بستهای در حال تعادل دارند آنقدر شبیه این برهان (پ)اند که ما آنها را از (ت) و (ث) حذف خواهیم کرد.

(ت) چون $C^{\circ} \subset C$ و C محدب است، اگر $\circ < t < 1$،

$$tC^{\circ} + (1-t)C^{\circ} \subset C\,.$$

دو مجموعهٔ سمت چپ بازند؛ لذا مجموعشان باز است. چون هر زیرمجموعهٔ باز C زیرمجموعهٔ C° است، پس C° محدب می‌باشد.

(ث) هرگاه $\circ < |\alpha| \leq 1$، آنگاه $\alpha B^{\circ} = (\alpha B)^{\circ}$، زیرا $x \to \alpha x$ یک همانریختی است. لذا $\alpha B^{\circ} \subset \alpha B \subset B$ زیرا B در حال تعادل است. اما αB° باز است. درنتیجه $\alpha B^{\circ} \subset B^{\circ}$. هرگاه B° شامل مبدأ باشد، آنگاه حتی به ازای $\alpha = \circ$، $\alpha B^{\circ} \subset B^{\circ}$.

(جـ) فرض کنیم V یک همسایگی ∘ باشد. بنابر قضیهٔ ۱۱.۱، به ازای یک همسایگی

مانند W از ۰، $\overline{W} \subset V$. چون E کراندار است، به ازای جمیع t های به‌قدر کافی بزرگ، $E \subset tW$. به ازای این t ها داریم $\overline{E} \subset t\overline{W} \subset tV$.

۱٤.۱ قضیه. *درفضای‌برداری توپولوژیک X،*

(آ) هر همسایگی ۰ شامل یک همسایگی در حال تعادل ۰ است، و

(ب) هر همسایگی محدب ۰ شامل‌یک همسایگی‌محدب در حال تعادل ۰ می‌باشد.

برهان . (آ) فرض کنیم U یک همسایگی ۰ در X باشد. چون ضرب اسکالر پیوسته است، $\delta > 0$ای و همسایگیی مانند V از ۰ در X هست به‌طوری‌که هروقت $|\alpha| < \delta$، $\alpha V \subset U$. فرض کنیم W اجتماع تمام این αVها باشد. در این صورت W یک همسایگی ۰ است، W در حال تعادل است، و $W \subset U$.

(ب) فرض کنیم U یک همسایگی محدب ۰ در X باشد. همچنین $A = \bigcap \alpha U$ که در آن α روی اسکالرها با قدر مطلق ۱ تغییر می‌کند. W را مانند قسمت (آ) اختیار می‌کنیم. چون W در حال تعادل است، وقتی $|\alpha| = 1$، $\alpha^{-1}W = W$؛ لذا $W \subset \alpha U$. بنابراین $W \subset A$ ایجابگر آنکه درون A° از A یک همسایگی ۰ می‌باشد. واضح است که $A^\circ \subset U$. چون A اشتراک مجموعه‌هایی محدب است، پس محدب است؛ لذا A° نیز چنین است. برای اثبات اینکه A° یک همسایگی با خواص مطلوب است، باید نشان دهیم که A° در حال تعادل می‌باشد؛ برای این کارکافی است ثابت کنیم A در حال تعادل است. r و β را طوری اختیار می‌کنیم که $0 \leq r \leq 1$ و $|\beta| = 1$. در این صورت

$$r\beta A = \bigcap_{|\alpha|=1} r\beta\alpha U = \bigcap_{|\alpha|=1} r\alpha U.$$

چون αU مجموعهٔ محدبی شامل ۰ است، داریم $r\alpha U \subset \alpha U$. لذا $r\beta A \subset A$ که برهان را تمام خواهد کرد.

قضیهٔ ۱٤.۱ را می‌توان برحسب پایه‌های موضعی مجدداً بیان کرد. گوییم پایهٔ موضعی $\mathscr{B}$ ***در حال تعادل*** است اگر اعضایش مجموعه‌هایی در حال تعادل باشند، و

$\mathscr{B}$ را **محدب** نامیم اگر اعضایش مجموعه‌هایی محدب باشند.

نتیجه

(آ) هر فضای‌برداری توپولوژیک دارای یک پایهٔ موضعی در حال تعادل است.

(ب) هر فضای موضعاً محدب یک پایهٔ موضعی محدب در حال تعادل دارد.

همچنین به یادآورید که قضیهٔ ۱۱.۱ برای هریک از این پایه‌های موضعی برقرار است.

۱۵.۱ قضیه. *فرض کنیم V یک همسایگی ۰ در فضای‌برداری توپولوژیک X باشد.*

(آ) هرگاه $\dots > r_2 > r_1 > 0$ و وقتی $n \to \infty$، $r_n \to \infty$، آنگاه

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V .$$

(ب) هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ K از X کراندار است.

(پ) هرگاه $\dots > \delta_2 > \delta_1$ و وقتی $n \to \infty$، $\delta_n \to 0$، و نیز V کراندار باشد، آنگاه گردایهٔ

$$\{\delta_n V : n = 1,2,3,\dots\}$$

یک پایهٔ موضعی برای X می‌باشد.

برهان. (آ) $x \in X$ را ثابت می‌گیریم. چون $\alpha \to \alpha x$ یک نگاشت پیوسته از میدان اسکالر به توی X است، مجموعهٔ تمام αها با $\alpha x \in V$ بازو شامل ۰ می‌باشد؛ لذا حاوی $1/r_n$ به ازای هر n بزرگ خواهدبود. بنابراین، به ازای n بزرگ، $(1/r_n)x \in V$ یا $x \in r_n V$.

(ب) فرض کنیم W یک همسایگی در حال تعادل از ۰ باشد به طوری که $W \subset V$. بنا بر قسمت (آ)،

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} nW.$$

چون K فشرده است، اعداد صحیحی مانند $n_1 < \dots < n_s$ چنان وجود دارند که

$$K \subset n_1 W \cup \ldots \cup n_s W = n_s W.$$

تساوی به خاطر آنکه W در حال تعادل است برقرار می‌باشد. اگر $t > n_s$، نتیجه می‌شود که $K \subset tW \subset tV$.

(پ) فرض کنیم U یک همسایگی ۰ در X باشد. هرگاه V کراندار باشد، آنگاه $s > 0$ ی هست به‌طوری که به‌ازای هر $t > s$، $V \subset tU$. اگر n آنقدر بزرگ باشد که $s\delta_n < 1$، نتیجه می‌شود که $V \subset (1/\delta_n)U$. لذا U درواقع شامل تمام جز تعدادی متناهی از مجموعه‌های $\delta_n V$ است.

نگاشتهای خطی

۱۶.۱ چند تعریف. وقتی X و Y مجموعه باشند، علامت

$$f: X \to Y$$

بدین معنی است که f یک نگاشت از X به توی Y است. اگر $A \subset X$ و $B \subset Y$، ***نقش*** $f(A)$ از A و ***نقش معکوس*** یا ***پیش‌نقش*** $f^{-1}(B)$ از B به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f(A) = \{f(x): x \in A\} \qquad \text{و} \qquad f^{-1}(B) = \{x: f(x) \in B\}.$$

حال فرض کنیم X و Y فضاهایی‌برداری ***روی میدان اسکالر واحدی*** باشند. گوییم نگاشت $\Lambda: X \to Y$ ***خطی*** است اگر به ازای هر x و y در X و جمیع اسکالرهای α و β،

$$\Lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha \Lambda x + \beta \Lambda y.$$

توجه کنید که وقتی Λ خطی است، اغلب به‌جای $\Lambda(x)$ می‌نویسند Λx.

نگاشتهای خطی از X به توی میدان اسکالر آن را ***تابعیهای خطی*** می‌نامند. مثلاً عملگرهای ضرب M_α در بخش ۷.۱ خطی‌اند ولی عملگرهای انتقال T_a، جز وقتی $a = 0$، خطی نیستند.

در زیر چند خاصیت از نگاشتهای خطی $\Lambda: X \to Y$ را ذکر می‌کنیم که اثبات آنها به خاطر سادگی بسیار حذف شده است؛ ضمناً فرض می‌کنیم $A \subset X$ و $B \subset Y$:

(آ) $\Lambda 0 = 0$؛

(ب) اگر A یک زیرفضا (یا مجموعه‌ای محدب یا مجموعه‌ای در حال تعادل) باشد،

$\Lambda(A)$ نیز چنین است؛

(پ) اگر B یک زیرفضا (یا مجموعه‌ای محدب یا مجموعه‌ای در حال تعادل) باشد، $\Lambda^{-1}(B)$ نیز چنین است؛

(ت) به خصوص، مجموعهٔ

$$\Lambda^{-1}(\{0\}) = \{x \in X : \Lambda x = 0\} = \mathscr{N}(\Lambda)$$

زیرفضایی از X به نام ***فضای پوچ*** Λ می‌باشد.

حال به خواص پیوستگی نگاشتهای خطی رو می‌آوریم.

۱۷.۱ قضیه. *فرض کنیم X و Y دو فضای برداری توپولوژیک باشند. هرگاه $\Lambda: X \to Y$ خطی و در 0 پیوسته باشد، آنگاه Λ پیوسته است. درواقع، Λ به معنی زیر به‌طور یکنواخت پیوسته است: به هر همسایگی W از 0 در Y یک همسایگی مانند V از 0 در X چنان نظیر است که*

$y - x \in V$ تعلق $\Lambda y - \Lambda x \in W$ را ایجاب می‌کند.

برهان. با انتخاب شدن W، پیوستگی Λ در 0 نشان می‌دهد که به‌ازای همسایگیی چون V از 0، $\Lambda V \subset W$. اما اگر $y - x \in V$، خطی بودن Λ نشان می‌دهد که $\Lambda y - \Lambda x = \Lambda(y-x) \in W$. لذا Λ همسایگی $x + V$ از x را به توی همسایگی از پیش مقرر $\Lambda x + W$ از Λx می‌نگارد، که این بیانگر پیوستگی Λ در x است.

۱۸.۱ قضیه. *فرض کنیم Λ یک تابعی خطی بر فضای برداری توپولوژیک X باشد. همچنین به ازای $x \in X$ ی، $\Lambda x \neq 0$. دراین صورت، هریک از چهارخاصیت زیر سه خاصیت دیگر را ایجاب خواهدکرد:*

(آ) *Λ پیوسته است؛*

(ب) *فضای پوچ $\mathscr{N}(\Lambda)$ بسته است؛*

(پ) *$\mathscr{N}(\Lambda)$ در X چگال نیست؛*

(ت) *Λ در همسایگیی از 0 مانند V کراندار است.*

برهان. چون $\mathscr{N}(\Lambda)=\Lambda^{-1}(\{0\})$ و $\{0\}$ زیرمجموعهٔ بسته‌ای از میدان اسکالر Φ است، (آ) قسمت (ب) را ایجاب می‌کند. طبق فرض، $\mathscr{N}(\Lambda)\neq X$. لذا (ب) قسمت (پ) را ایجاب خواهدکرد.

فرض کنیم (پ) برقرار باشد؛ یعنی متمم $\mathscr{N}(\Lambda)$ درون ناتهی داشته باشد. بنابر قضیهٔ ۱.۱۴، به ازای $x\in X$ ی و همسایگی در حال تعادلی چون V از ۰،

$$(x+V)\cap\mathscr{N}(\Lambda)=\varnothing. \qquad (1)$$

در این صورت ΛV یک زیرمجموعهٔ در حال تعادل میدان Φ است. لذا یا ΛV کراندار است، که در این حالت (ت) برقرار است، یا $\Lambda V=\Phi$. در حالت دوم عضوی مانند $y\in V$ هست به‌طوری که $\Lambda y=-\Lambda x$، و درنتیجه $x+y\in\mathscr{N}(\Lambda)$ که با (۱) در تضاد می‌باشد. لذا (پ) قسمت (ت) را ایجاب خواهد کرد.

بالأخره، هرگاه (ت) برقرار باشد، آنگاه به ازای هر x در V و عددی مانند $M<\infty$، $|\Lambda x|<M$. هرگاه $r>0$ و $W=(r/M)V$، آنگاه به ازای هر x در W، $|\Lambda x|<r$. لذا Λ در مبدأ پیوسته است. بنا بر قضیهٔ ۱.۱۷، این قسمت (آ) را ایجاب می‌کند.

فضاهای با بعد متناهی

۱.۱۹ از جمله ساده‌ترین فضاهای باناخ عبارتند از R^n و $\mathscr{C}^n$، یعنی فضاهای‌برداری n بعدی روی R و $\mathscr{C}$، که با متر اقلیدسی معمولی مجهز شده‌اند: هرگاه، مثلاً،

$$z=(z_1,\ldots,z_n) \qquad (z_i\in\mathscr{C})$$

یک بردار در $\mathscr{C}^n$ باشد، آنگاه

$$\|z\|=\left(|z_1|^2+\ldots+|z_n|^2\right)^{1/2}.$$

روی $\mathscr{C}^n$ می‌توان نرمهای دیگری نیز تعریف کرد. به عنوان مثال،

$$\|z\|=|z_1|+\ldots+|z_n| \qquad \text{یا} \qquad \|z\|=\max(|z_i|:1\le i\le n).$$

البته این نرمها نظیر مترهای متفاوتی بر $\mathscr{C}^n$ (وقتی $n>1$)اند ولی به آسانی می‌توان دید که همه بر $\mathscr{C}^n$ توپولوژی واحدی را القا می‌کنند. درواقع، مطالب بیشتری در این باب قابل بیان است.

هرگاه X یک فضای‌برداری توپولوژیک روی $\mathscr{C}$ بوده و $\dim X=n$، آنگاه هر پایهٔ X یک یکریختی از X به روی $\mathscr{C}^n$ القا می‌کند. قضیهٔ ۱.۲۱ ثابت می‌کند که این **یکریختی**

باید همانریختی باشد. به عبارت دیگر، این می‌گوید که ***توپولوژی $\mathbb{C}^n$ تنها توپولوژی‌برداری است که یک فضای‌برداری توپولوژیک مختلط n بعدی می‌تواند داشته باشد.***

همچنین خواهیم دید که زیرفضاهای با بعد متناهی همواره بسته‌اند و هیچ فضای‌برداری توپولوژیک با بعد نامتناهی موضعاً فشرده نیست.

بحث قبل با اسکالرهای حقیقی به جای اسکالرهای مختلط برقرار می‌باشد.

۲۰.۱ لم. ***هرگاه X یک فضای‌برداری توپولوژیک مختلط بوده و $f:\mathbb{C}^n \to X$ خطی باشد، آنگاه f پیوسته می‌باشد.***

برهان. فرض کنیم $\{e_1,\dots,e_n\}$ پایهٔ متعارف $\mathbb{C}^n$ باشد: مختص k ام e_k مساوی ۱ است و سایر مختصات ۰ می‌باشند. به ازای $k=1,\dots,n$ قرار می‌دهیم $u_k = f(e_k)$. در این صورت، به ازای هر $z=(z_1,\dots,z_n)$ در $\mathbb{C}^n$، $f(z)=z_1u_1+\dots+z_nu_n$. هر z_k یک تابع پیوسته از z است. لذا پیوستگی f نتیجه‌ای فوری از پیوستگی جمع و ضرب اسکالر در X می‌باشد.

۲۱.۱ قضیه. ***هرگاه n یک عدد صحیح مثبت بوده و Y یک زیرفضای n بعدی فضای‌برداری توپولوژیک مختلط X باشد، آنگاه***

(آ) هر یکریختی $\mathbb{C}^n$ به روی Y یک همانریختی است، و

(ب) Y بسته است.

برهان. فرض کنیم کرهٔ S مرز گوی یکهٔ باز B از $\mathbb{C}^n$ باشد. لذا $z \in S$ اگر و فقط اگر $\sum |z_i|^2 = 1$، و $z \in B$ اگر وفقط اگر $\sum |z_i|^2 < 1$.

فرض کنیم $f:\mathbb{C}^n \to Y$ یکریختی باشد. این یعنی f خطی و یک به یک بوده و $f(\mathbb{C}^n) = Y$. قرار می‌دهیم $K = f(S)$. چون f پیوسته است (لم ۲۰.۱)، K فشرده

است. و چون $f(0)=0$ و f یک به یک است، $0 \notin K$، و لذا یک همسایگی در حال تعادل مانند V از 0 در X هست که K را قطع نمی‌کند. لذا مجموعهٔ

$$E = f^{-1}(V) = f^{-1}(V \cap Y)$$

از S جدا می‌باشد. چون f خطی است، E در حال تعادل است، و درنتیجه همبند می‌باشد. لذا $E \subset B$ زیرا $0 \in E$، و این ایجاب می‌کند که نگاشت خطی f^{-1} مجموعهٔ $V \cap Y$ را به توی B می‌برد. چون f^{-1} یک n تایی از تابعیهای خطی بر Y است، استلزام (آ) $\to$ (ت) در قضیهٔ ۱۸.۱ نشان می‌دهد که f^{-1} پیوسته می‌باشد. لذا f یک همانریختی خواهدبود.

برای اثبات (ب)، $p \in \overline{Y}$ را اختیار کرده، و فرض می‌کنیم f و V همانند فوق باشند. به ازای $t > 0$ای، $p \in tV$؛ درنتیجه P در بست

$$Y \cap (tV) \subset f(tB) \subset f(t\overline{B})$$

قراردارد. چون $f(t\overline{B})$ در X فشرده است، پس بسته است. لذا $p \in f(t\overline{B}) \subset Y$، و این تساوی $\overline{Y} = Y$ را ثابت خواهد کرد.

۲۲.۱ قضیه. ***هر فضای‌برداری توپولوژیک موضعاً فشردهٔ X با بعد متناهی است.***

برهان. مبدأ X دارای همسایگیی چون V است که بستش فشرده می‌باشد. بنا بر قضیهٔ ۱۵.۱، V کراندار است، و مجموعه‌های $2^{-n}V$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ یک پایهٔ موضعی برای X تشکیل می‌دهند.

فشردگی $\overline{V}$ نشان می‌دهد که عناصری چون $x_1, \ldots, x_m$ در X وجود دارند به طوری که

$$\overline{V} \subset (x_1 + \tfrac{1}{2}V) \cup \ldots \cup (x_m + \tfrac{1}{2}V) .$$

فرض کنیم Y فضای‌برداری پیموده شده به وسیلهٔ $x_1, \ldots, x_m$ باشد. در این صورت $\dim Y \le m$. بنابر قضیهٔ ۲۱.۱، Y یک زیرفضای **بستهٔ** X است. چون $V \subset Y + \frac{1}{2}V$ و به ازای هر اسکالر $\lambda \ne 0$، $\lambda Y = Y$، پس

$$\tfrac{1}{2}V \subset Y + \tfrac{1}{4}V$$

درنتیجه

$$V \subset Y + \frac{1}{2}V \subset Y + Y + \frac{1}{4}V = Y + \frac{1}{4}V.$$

اگر به همین نحو ادامه دهیم، معلوم می‌شود که

$$V \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(Y + 2^{-n}V\right).$$

حال چون $\{2^{-n}V\}$ یک پایهٔ موضعی است، از قسمت (آ) قضیهٔ ۱۳.۱ نتیجه می‌شود که $V \subset \overline{Y}$. اما $\overline{Y} = Y$. لذا $V \subset Y$ ایجابگر آنکه به ازای $k = 1,2,3,\ldots$، $kV \subset Y$. لذا، طبق قسمت (آ) از قضیهٔ ۱۵.۱، $Y=X$، و درنتیجه $\dim X \le m$.

۲۳.۱ قضیه. هرگاه X یک فضای‌برداری توپولوژیک موضعاً کراندار با خاصیت هاینه-بورل باشد، آنگاه X با بعد متناهی می‌باشد.

برهان. طبق فرض، مبدأ X دارای یک همسایگی کراندار V است. قسمت (ج) قضیهٔ ۱۳.۱ نشان می‌دهد که $\overline{V}$ نیز کراندار است. لذا، طبق خاصیت هاینه-بورل، $\overline{V}$ فشرده است. این می‌گوید که X موضعاً فشرده است؛ لذا، طبق قضیهٔ ۲۲.۱، با بعد متناهی می‌باشد.

متری‌سازی

یادآور شویم که توپولوژی τ بر مجموعهٔ X را ***متری‌پذیر*** گوییم اگر یک متر مانند d بر X باشد که با τ سازگار باشد. در این حالت، گویها به شعاع $1/n$ و مرکز x یک پایهٔ موضعی در x تشکیل می‌دهند. این شرط لازم برای متری‌پذیری است که برای فضاهای‌برداری توپولوژیک کافی نیز خواهدبود.

۲۴.۱ قضیه. هرگاه X یک فضای‌برداری توپولوژیک با یک پایهٔ موضعی شمارش‌پذیر باشد، آنگاه یک متر مانند d بر X هست به طوری که

(آ) d با توپولوژی X سازگار است،

(ب) گویهای باز به مرکز ۰ در حال تعادلند، و

(پ) d پایاست: به ازای $x,y,z \in X$، $d(x+z,y+z)=d(x,y)$.

هرگاه، علاوه بر این، X موضعاً محدب باشد، آنگاه d را می‌توان طوری اختیار کرد که در (آ)، (ب)، و (پ) صدق نماید، و نیز

(ت) تمام گویهای باز محدب می‌باشند.

برهان. بنابر قضیهٔ ۱.۱٤، X یک پایهٔ موضعی در حال تعادل مانند $\{V_n\}$ دارد به طوری که

$$V_{n+1}+V_{n+1}+V_{n+1}+V_{n+1} \subset V_n \quad (n=1,2,3,\ldots); \tag{1}$$

وقتی X موضعاً محدب باشد، این پایهٔ موضعی را می‌توان طوری اختیار کرد که هر V_n محدب نیز باشد.

فرض کنیم D مجموعهٔ تمام اعدادگویای r به شکل زیر باشد:

$$r=\sum_{n=1}^{\infty} c_n(r) 2^{-n}, \tag{2}$$

که در آن هریک از "ارقام" $c_i(r)$ مساوی ۰ یا ۱ بوده و فقط تعدادی متناهی ۱ می‌باشند. لذا هر $r \in D$ در نامساویهای $0 \le r < 1$ صدق خواهدکرد.

اگر $r \ge 1$، قرار می‌دهیم $A(r)=X$؛ و به ازای هر $r \in D$، تعریف می‌کنیم

$$A(r)=c_1(r)V_1+c_2(r)V_2+c_3(r)V_3+\ldots \tag{3}$$

توجه کنید که هریک از این مجموعها درواقع متناهی‌اند. تعریف می‌کنیم

$$f(x)=\inf\{r: x \in A(r)\} \quad (x \in X) \tag{4}$$

و

$$d(x,y)=f(x-y) \qquad (x \in X, y \in X). \tag{5}$$

اثبات اینکه این d واجد خواص مطلوب است به شمولهای

$$A(r)+A(s) \subset A(r+s) \quad (r \in D, s \in D) \tag{6}$$

بستگی دارد.

پیش از اثبات (٦)، ببینیم چگونه قضیه ازآن نتیجه می‌شود. چون هر $A(s)$ شامل ۰ است، رابطهٔ (٦) ایجاب می‌کند که

(۷) اگر $r<t$، $A(r) \subset A(r)+A(t-r) \subset A(t)$.

لذا $\{A(r)\}$ به وسیلهٔ شمول مجموعه‌ها کلی مرتب است. حکم می‌کنیم که

$$f(x+y) \le f(x)+f(y) \quad (x \in X, y \in X). \tag{۸}$$

البته در اثبات (۸) می‌توان فرض کرد که طرف راست از ۱ کمتر است. $\varepsilon > ۰$ را ثابت می‌گیریم. دراین‌صورت r و sی در D هستند به‌طوری‌که

$f(x) < r$، $f(y) < s$، و $r+s < f(x)+f(y)+\varepsilon$.

لذا $x \in A(r)$، $y \in A(s)$، و رابطهٔ (٦) ایجاب می‌کند که $x+y \in A(r+s)$. حال رابطهٔ (۸) نتیجه می‌شود زیرا

$$f(x+y) \le r+s < f(x)+f(y)+\varepsilon$$

و ε دلخواه بود.

چون هر $A(r)$ در حال تعادل است، $f(x) = f(-x)$. واضح است که $f(۰) = ۰$. هرگاه $x \ne ۰$، آنگاه به ازای nی $x \notin V_n = A(۲^{-n})$؛ و درنتیجه $f(x) \ge ۲^{-n} > ۰$.

این خواص f نشان می‌دهند که (۵) معرف یک متر انتقال- پایا مانند d بر X است. گویهای باز به مرکز ۰ مجموعه‌های باز زیرند:

$$B_\delta(۰) = \{x : f(x) < \delta\} = \bigcup_{r<\delta} A(r). \tag{۹}$$

هرگاه $\delta < ۲^{-n}$، آنگاه $B_\delta(۰) \subset V_n$. لذا $\{B_\delta(۰)\}$ یک پایهٔ موضعی برای توپولوژی X است. این قسمت (آ) را ثابت می‌کند. چون هر $A(r)$ در حال تعادل است، هر $B_\delta(۰)$ چنین است. اگر هر V_n محدب باشد، هر $A(r)$ چنین است، و رابطهٔ (۹) ایجاب می‌کند که همین امر برای هر $B_\delta(۰)$ درست باشد؛ لذا هر انتقال $B_\delta(۰)$ نیز چنین می‌باشد.

حال به اثبات (٦) می‌پردازیم. هرگاه $r+s \ge ۱$، آنگاه $A(r+s) = X$ و رابطهٔ (٦) واضح است. لذا فرض می‌کنیم $r+s < ۱$، و از قضیهٔ سادهٔ زیر راجع به جمع در دستگاه دویی استفاده می‌کنیم:

هرگاه r، s، و $r+s$ در D بوده و به ازای nی $c_n(r)+c_n(s) \ne c_n(r+s)$، آنگاه در کوچکترین nی که این رخ دهد داریم $c_n(r) = c_n(s) = ۰$ و $c_n(r+s) = ۱$.

قرار می‌دهیم $\alpha_n = c_n(r)$، $\beta_n = c_n(s)$، و $\gamma_n = c_n(r+s)$. هرگاه به ازای هر n، $\alpha_n + \beta_n = \gamma_n$، آنگاه رابطهٔ (۳) نشان می‌دهد که $A(r)+A(s) = A(r+s)$. در

حالت دیگر، فرض کنیم N کوچکترین عدد صحیحی باشد که به ازای آن $\alpha_N+\beta_N\neq\gamma_N$. دراین صورت، همانطور که در بالا گفته شد، $\alpha_N=\beta_N=0$ و $\gamma_N=1$. لذا

$$\begin{aligned}A(r)&\subset\alpha_1V_1+\ldots+\alpha_{N-1}V_{N-1}+V_{N+1}+V_{N+2}+\ldots\\&\subset\alpha_1V_1+\ldots+\alpha_{N-1}V_{N-1}+V_{N+1}+V_{N+1}.\end{aligned}$$

به همین نحو،

$$A(s)\subset\beta_1V_1+\ldots+\beta_{N-1}V_{N-1}+V_{N+1}+V_{N+1}.$$

چون به ازای هر $n<N$، $\alpha_n+\beta_n=\gamma_n$، از رابطهٔ (۱) داریم

$$A(r)+A(s)\subset\gamma_1V_1+\ldots+\gamma_{N-1}V_{N-1}+V_N\subset A(r+s)$$

زیرا $\gamma_N=1$.

۲۵.۱ دنباله‌های کشی. (آ) فرض کنیم d یک متر بر مجموعهٔ X باشد. دنبالهٔ $\{x_n\}$ در X یک ***دنبالهٔ کشی*** است اگر به هر $\varepsilon>0$ یک عدد صحیح مانند N چنان نظیر باشد که هروقت $m>N$ و $n>N$ ، $d(x_m,x_n)<\varepsilon$. هرگاه هر دنبالهٔ‌کشی در X به نقطه‌ای از X همگرا باشد، آنگاه گوییم d یک متر ***تام*** بر X است.

(ب) فرض کنیم τ توپولوژی فضای‌برداری توپولوژیک X باشد. مفهوم دنبالهٔ‌کشی را می‌توان در این محدوده بدون ارجاع به متر تعریف کرد: یک پایهٔ موضعی مانند $\mathscr{B}$ برای τ اختیار می‌کنیم. دراین‌صورت دنبالهٔ $\{x_n\}$ در X یک ***دنبالهٔ کشی*** نام دارد اگر به هر $V\in\mathscr{B}$ عددی مانند N چنان‌نظیر باشد که اگر $n>N$ و $m>N$، $x_n-x_m\in V$.

واضح است که پایه‌های موضعی مختلف برای τی واحد ردهٔ یکسانی از دنباله‌های‌کشی به دست می‌دهند.

(پ) حال فرض می‌کنیم X یک فضای‌برداری توپولوژیک باشد که توپولوژیش τ با متر ***پایای*** d سازگار است. ما فعلاً از اصطلاحات دنبالهٔ d-کشی و دنبالهٔ τ-کشی برای مفاهیم تعریف شده در (آ) و (ب) استفاده می‌کنیم. چون

$$d(x_n,x_m)=d(x_n-x_m,0),$$

و چون d-گویها به مرکز مبدأ یک پایهٔ موضعی برای τ تشکیل می‌دهند، نتیجه می‌گیریم که:

دنبالهٔ $\{x_n\}$ در X یک دنبالهٔ d-کشی است اگر و فقط اگر یک دنبالهٔ τ-کشی باشد.

درنتیجه، هر دو متر پایا بر X که با τ سازگار باشند دنباله‌های کشی یکسانی دارنـد. واضح است که دنباله‌های همگرای (یعنی دنباله‌های τ-همگرای) یکسـانی نـیز دارنـد. این نکات احکام زیر را به ثبوت می‌رسانند:

هرگاه d_1 و d_2 مترهای پایایی بر فضای‌برداری X باشند که توپولوژی یکسـانی بر X را القا می‌کنند، آنگاه

(آ) d_1 و d_2 دنباله‌های‌کشی یکسانی دارند، و

(ب) d_1 تام است اگر و فقط اگر d_2 تام باشد.

در فرض، پایایی لازم خواهدبود (تمرین ۱۲).

"اصل اتساع" زیر چند بار به کار خواهد آمد.

۲۶.۱ قضیه. *فرض کنیم (X,d_1) و (Y,d_2) فضاهایی متری بـوده و (X,d_1) تـام باشد. هرگاه E زیرمجموعهٔ بسته‌ای در X بوده، $f:E\to Y$ پیوسته باشد، و بـه‌ازای هر $x',x''\in E$،*

$$d_2(f(x'),f(x''))\ge d_1(x',x''),$$

آنگاه $f(E)$ بسته می‌باشد.

برهان. $y\in\overline{f(E)}$ را اختیار می‌کنیم. در این صورت نقاطی مانند $x_n\in E$ وجوددارنـد به‌طوری‌که $y=\lim f(x_n)$. لذا $\{f(x_n)\}$ در Yکشی است. بنابراین فرض مـا ایجـاب می‌کند که $\{x_n\}$ در X کشی باشد. چون E زیرمجموعهٔ بسته‌ای از یک فضای متری تـام است، پس تام می‌باشد؛ لذا $x=\lim x_n$ در E وجود دارد. چون f پیوسته است،

$$f(x)=\lim f\left(x_n\right)=y.$$

لذا $y\in f(E)$.

۲۷.۱ قضیه. *فرض کنیم Y زیرفضایی از فضـای‌برداری توپولوژیـک X بـوده، و Y یک F-فضا (در توپولوژی به ارث رسـیده از X) باشـد. در ایـن صـورت Y یـک*

زیرفضای بستهٔ X است.

برهان. متر پایای d بر Y را سازگار با توپولوژی آن اختیار می‌کنیم. فرض کنیم

$$B_{1/n} = \left\{ y \in Y : d(y,0) < \frac{1}{n} \right\},$$

U_n یک همسایگی 0 در X باشد به‌طوری که $Y \cap U_n = B_{1/n}$، و یک همسایگی متقارن مانند V_n از 0 در X را چنان اختیار می‌کنیم که $V_n + V_n \subset U_n$ و $V_{n+1} \subset V_n$.

فرض کنیم $x \in \overline{Y}$ و تعریف می‌کنیم

$$E_n = Y \cap (x + V_n) \qquad (n = 1,2,3,\ldots).$$

هرگاه $y_1 \in E_n$ و $y_2 \in E_n$، آنگاه $y_1 - y_2$ در Y و نیز در $V_n + V_n \subset U_n$ و لذا در $B_{1/n}$ قرار دارد. لذا اقطار مجموعه‌های E_n به 0 میل می‌کنند. چون هر E_n ناتهی است و Y تام است، پس Y - بستهای مجموعه‌های E_n درست یک نقطهٔ y_0 مشترک دارند.

فرض کنیم W یک همسایگی از 0 در X باشد، و تعریف می‌کنیم

$$F_n = Y \cap \left(x + W \cap V_n \right).$$

استدلال پیشگفته نشان می‌دهد که Y - بستهای مجموعه‌های F_n یک نقطهٔ مشترک مانند y_W دارند. اما $F_n \subset E_n$؛ لذا $y_W = y_0$. چون $F_n \subset x + W$، پس y_0 در X - بست $x+W$ به ازای هر W قراردارد. این ایجاب می‌کند که $y_0 = x$. لذا $x \in Y$. این ثابت می‌کند که $\overline{Y} = Y$.

نکات سادهٔ زیر گاهی مفید واقع خواهندشد.

۲۸.۱ قضیه

(آ) هرگاه d یک متر انتقال -پایا بر فضای‌برداری X باشد، آنگاه به ازای هر $x \in X$ و $n = 1,2,3,\ldots$،

$$\boldsymbol{d(nx,0) \le nd(x,0).}$$

(ب) هرگاه $\{x_n\}$ دنباله‌ای در فضای‌برداری توپولوژیک مترپذیر X بوده و وقتی $n \to \infty$، $x_n \to 0$، آنگاه اسکالرهای مثبتی مانند γ_n وجوددارند به‌طوری‌که

$\gamma_n \to \infty$ و $\gamma_n x_n \to 0$.

برهان. حکم (آ) از

$$d(nx,0) \leq \sum_{k=1}^{n} d(kx,(k-1)x) = nd(x,0)$$

نتیجه می‌شود.

برای اثبات (ب)، فرض کنیم d یک متر همانند در (آ) باشد که با توپولوژی X سازگار است. چون $d(x_n,0) \to 0$، یک دنبالهٔ صعودی از اعداد صحیح مثبت n_k وجود دارد به‌طوری‌که اگر $n \geq n_k$، $d(x_n,0) < k^{-2}$. اگر $n < n_1$، قرار می‌دهیم $\gamma_n = 1$؛ و اگر $n_k \leq n < n_{k+1}$، $\gamma_n = k$. به ازای چنین n ی،

$$d(\gamma_n x_n,0) = d(kx_n,0) \leq kd(x_n,0) < k^{-1}.$$

لذا، وقتی $n \to \infty$، $\gamma_n x_n \to 0$.

کرانداری و پیوستگی

۲۹.۱ مجموعه‌های کراندار. در بخش ۶.۱ مفهوم ***زیرمجموعهٔ کراندار از فضای برداری توپولوژیک*** X تعریف شد و از آن زمان تا بحال چندبار به آن برخورده‌ایم. وقتی X مترپذیر باشد، امکان ابهام هست زیرا مفهوم بسیار آشنای دیگری از کرانداری در فضاهای متری وجود دارد.

اگر d یک متر بر مجموعهٔ X باشد، مجموعهٔ $E \subset X$ را ***d-کراندار*** گوییم اگر عددی مانند $M < \infty$ چنان موجود باشد که به ازای هر x و y در E، $d(x,y) \leq M$.

اگر X یک فضای‌برداری توپولوژیک با مترسازگار d باشد، مجموعه‌های کراندار و d- کراندار حتی اگر d پایا باشد لزوماً یکی نیستند. به عنوان مثال، هرگاه d یک متر مانند متری باشد که در قضیهٔ ۲٤.۱ ساخته شد، آنگاه X خود d-کراندار است (با $M = 1$) ولی، همانطور که بزودی خواهیم دید، X نمی‌تواند کراندار باشد مگر آنکه $X = \{0\}$. هرگاه X یک فضای نرمدار بوده و d متر القا شده به وسیلهٔ نرم باشد، آنگاه دو مفهوم کرانداری یکی خواهندبود؛ ولی اگر d را با $d_1 = d/(1+d)$ (یک مترپایا که همان توپولوژی را القا می‌کند) عوض کنیم، این دو مفهوم یکی نخواهندبود.

هروقت زیرمجموعه‌های کرانـدار یـک فضـای‌برداری توپولوژیـک مطـرح شـوند، ***فرض است که تعریف همان تعریف ذکـر شـده در بخـش ۶.۱ اسـت***: مجموعـهٔ E کراندار است اگر به ازای هر همسـایگی V از 0 و جمیـع t هـای بـه قدرکـافی بـزرگ، $E \subset tV$.

ما قبلاً (قضیهٔ ۱۵.۱) دیدیم که ***مجموعه‌های فشرده کراندارند***. برای مشاهدهٔ مثالی از نوع دیگر، ثابت می‌کنیم ***دنباله‌های کشی کراندارند*** (لذا ***دنباله‌های همگـرا کرانـدار می‌باشند***): هرگاه $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ کشـی در X بـوده و V و W همسـایگیهایی در حـال تعادل از 0 باشند که $V+V\subset W$، آنگاه [قسمت (ب)بخش ۲۵.۱] Nی هست بـه‌طوری کـه بـه ازای هـر $n \geq N$، $x_n \in x_N + V$. $s>1$ را طـوری می‌گـیریم کـه $x_N \in sV$. دراین‌صورت

$$x_n \in sV+V \subset sV+sV \subset sW \qquad (n \geq N).$$

لذا، اگر t به قدرکافی بزرگ باشد، به ازای هر $n \geq 1$ داریم $x_n \in tW$.

همچنین بستهای مجموعه‌های کراندار کراندارند (قضیهٔ ۱۳.۱).

از سوی دیگر، هرگاه $x \neq 0$ و $E=\{nx : n=1,2,3,\ldots\}$، آنگـاه E کرانـدار نیسـت زیرا یک همسایگی مانند V از 0 هست که شامل x نیسـت؛ لـذا nx در nV نمی‌باشـد. بنابراین هیچ nV ی شامل E نخواهدبود.

درنتیجه، ***هیچ زیرفضایی از X (غیر از $\{0\}$) نمی‌تواند کراندار باشد.***

قضیهٔ زیر کرانداری را بر حسب دنباله‌ها توصیف می‌کند.

۳۰.۱ قضیه. ***دو خاصیت زیـر از مجموعـهٔ E در یـک فضـای‌برداری توپولوژیـک هم‌ارزند:***

(آ) ***E کراندار است؛***

(ب) هرگاه $\{x_n\}$ دنباله‌ای در $\mathbf{E}$ بوده و $\{\alpha_n\}$ دنباله‌ای از اسکالرها باشد بـه‌طوری که وقتی $n \to \infty$، $\alpha_n \to 0$، آنگاه وقتی $n \to \infty$، $\alpha_n x_n \to 0$.

برهان. فرض کنیم E کراندار باشد. همچنین V یک همسایگی در حـال تعـادل از 0 در X باشـد. در ایـن صـورت، بـه ازای t ای، $E \subset tV$. اگـر $x_n \in E$ و $\alpha_n \to 0$، N ی

هست به‌طوری که اگر $n > N$، $|\alpha_n| t < ۱$. چون $t^{-۱}E \subset V$ و V در حال تعادل است، به ازای هر $n > N$، $\alpha_n x_n \in V$. لذا $\alpha_n x_n \to ۰$.

به عکس، اگر E کراندار نباشد، یک همسایگی مانند V از ۰ و یک دنباله مانند $r_n \to \infty$ هست به‌طوری‌که هیچ $r_n V$ی شامل E نیست. $x_n \in E$ را طوری می‌گیریم که $x_n \notin r_n V$. در این صورت هیچ $r_n^{-۱} x_n$ی در V نیست؛ درنتیجه $\{r_n^{-۱} x_n\}$ همگرا به ۰ نمی‌باشد.

۳۱.۱ تبدیلات خطی کراندار. فرض کنیم X و Y دو فضای‌برداری توپولوژیک بوده و $\Lambda : X \to Y$ خطی باشد. گوییم Λ ***کراندار*** است اگر Λ مجموعه‌های کراندار را به توی مجموعه‌های کراندار بنگارد؛ یعنی اگر به ازای هر مجموعهٔ کراندار $E \subset X$، $\Lambda(E)$ زیرمجموعهٔ کرانداری از Y باشد.

این تعریف با مفهوم معمولی یک تابع کراندار که بردش مجموعه‌ای کراندار است برخورد دارد. در آن معنی، هیچ تابع خطی (غیر از ۰) نمی‌تواند کراندار باشد. لذا وقتی نگاشتهای خطی کراندار (یا تبدیلات) مطرح می‌شوند، فرض است که تعریف، مثل فوق، برحسب مجموعه‌های کراندار می‌باشد.

۳۲.۱ قضیه. *فرض کنیم X و Y دو فضای‌برداری توپولوژیک بوده و $\Lambda : X \to Y$ خطی باشد. استلزامهای*

$$(آ) \to (ب) \to (پ)$$

در بین چهار خاصیت زیر از Λ برقرارند. هرگاه X مترپذیرباشد، آنگاه نیز

$$(پ) \to (ت) \to (آ)$$

درنتیجه هر چهارخاصیت هم‌ارز می‌باشند:

(آ) Λ پیوسته است؛

(ب) Λ کراندار است؛

(پ) هرگاه $x_n \to ۰$، آنگاه $\{\Lambda x_n : n = ۱,۲,۳,\ldots\}$ کراندار است؛

(ت) هرگاه $x_n \to ۰$، آنگاه $\Lambda x_n \to ۰$.

تمرین ۱۳ حاوی مثالی است که در آن (ب) برقرار است ولی (آ) نیست.

برهان. فرض کنیم (آ) برقرار باشد، E مجموعهٔ کرانداری در X باشد، و W همسایگی از ۰ در Y باشد. چون Λ پیوسته است (و $\Lambda 0 = 0$)، یک همسایگی مانند V از ۰ در X هست به طوری که $\Lambda(V) \subset W$. چون E کراندار است، به ازای جمیع t های بزرگ، $E \subset tV$؛ درنتیجه

$$\Lambda(E) \subset \Lambda(tV) = t\Lambda(V) \subset tW.$$

این نشان می‌دهد که $\Lambda(E)$ یک مجموعهٔ کراندار در Y می‌باشد.

لذا (ب) ← (آ). چون دنباله‌های همگرا کراندارند، (پ) ← (ب).

حال فرض می‌کنیم X مترپذیر بوده، Λ در (پ) صدق کند، و $x_n \to 0$. بنابر قضیهٔ ۲۸.۱، اسکالرهای مثبتی مانند $\gamma_n \to \infty$ وجوددارند به طوری که $\gamma_n x_n \to 0$. لذا $\{\Lambda(\gamma_n x_n)\}$ یک مجموعهٔ کراندار در Y است، و حال قضیهٔ ۳۰.۱ ایجاب می‌کند که وقتی $n \to \infty$، $\Lambda x_n = \gamma_n^{-1}\Lambda(\gamma_n x_n) \to 0$.

بالأخره، فرض کنیم (آ) برقرار نباشد. پس همسایگیی مانند W از ۰ در Y هست به‌طوری که $\Lambda^{-1}(W)$ شامل هیچ همسایگی از ۰ در X نیست. لذا اگر X یک پایهٔ موضعی شمارش‌پذیر باشد، یک دنباله مانند $\{x_n\}$ در X هست که $x_n \to 0$ ولی $\Lambda x_n \notin W$. بنابراین (ت) برقرار نمی‌باشد.

نیم‌نرمها و تحدب موضعی

۳۳.۱ چند تعریف. یک *نیم نرم* بر فضای‌برداری X تابعی است حقیقی مانند p بر X به طوری که به ازای هر x و y در X و جمیع اسکالرهای α،

(آ) $p(x+y) \le p(x) + p(y)$ و

(ب) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.

خاصیت (آ) را ***زیرجمعپذیری*** می‌نامند. قضیهٔ ۳٤.۱ نشان می‌دهد که نیم‌نرم p در صورت صدق کردن در

(پ) اگر $x \ne 0$، $p(x) \ne 0$

یک نرم است.

گوییم خانوادهٔ $\mathscr{P}$ از نیم‌نرمها بر X ***جداساز*** است اگر به هر $x \neq \circ$ دست کم یک $p \in \mathscr{P}$ چنان نظیر باشد که $p(x) \neq \circ$.

حال مجموعهٔ محدب $A \subset X$ را در نظر می‌گیریم که ***جاذب*** باشد بدین معنی که هر $x \in X$ در tA ای به ازای $t = t(x) > \circ$ ای قرار داشته باشد. [مثلاً قسمت (آ) قضیهٔ ۱۵.۱ ایجاب می‌کند که هر همسایگی $\circ$ دریک فضای‌برداری توپولوژیک جاذب است. واضح است که هر مجموعهٔ جاذب شامل $\circ$ است.] ***تابع مینکوفسکی*** (*Minkowski*) μ_A از A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_A(x) = \inf\{t > \circ : t^{-1}x \in A\} \qquad (x \in X).$$

توجه کنید که به ازای هر $x \in X$، $\mu_A(x) < \infty$، زیرا A جاذب است. نیم‌نرمها بر X دقیقاً تابعیهای مینکوفسکی از مجموعه‌های جاذب محدب ***در حال تعادل*** می‌باشند.

نیم‌نرمها با تحدب موضعی از دو طریق رابطه‌ای نزدیک دارند: درهر فضای موضعاً محدب یک خانوادهٔ جداساز از نیم‌نرمهای ***پیوسته*** وجوددارد. به عکس، هرگاه $\mathscr{P}$ یک خانوادهٔ جداساز از نیم‌نرمها بر فضای‌برداری X باشد، آنگاه با استفاده از $\mathscr{P}$ می‌توان یک توپولوژی موضعاً محدب بر X با این خاصیت که هر $p \in \mathscr{P}$ پیوسته است تعریف کرد. این یک روش متداول در معرفی یک توپولوژی است. جزئیات در قضایای ۳٦.۱ و ۳۷.۱ ذکر شده است.

۳٤.۱ قضیه. *فرض کنیم p یک نیم‌نرم بر فضای‌برداری X باشد. در این صورت*

(آ) $p(\circ) = \circ$؛

(ب) $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$؛

(پ) $p(\circ) \geq \circ$؛

(ت) $\{x : p(x) = \circ\}$ *زیرفضای X است؛*

(ت) *مجموعهٔ $B = \{x : p(x) < 1\}$ محدب، در حال تعادل، و جاذب است و $p = \mu_B$.*

برهان. حکم (آ) از $p(\alpha x)=|\alpha|p(x)$ با $\alpha=0$ نتیجه می‌شود. زیرجمعپذیری p نشان می‌دهد که

$$p(x)=p(x-y+y)\le p(x-y)+p(y).$$

درنتیجه $p(x)-p(y)\le p(x-y)$. این در صورت تعویض x و y با هم نیز برقرار است. چون $p(x-y)=p(y-x)$، قسمت (ب) نتیجه می‌شود. به ازای $y=0$، قسمت (ب) قسمت (پ) را ایجاب می‌کند. اگر $p(x)=p(y)=0$ و α و β اسکالر باشند، قسمت (پ) ایجاب می‌کند که

$$0\le p(\alpha x+\beta y)\le|\alpha|p(x)+|\beta|p(y)=0 .$$

این قسمت (ت) را ثابت خواهد کرد.

و اما (ث)، واضح است که B در حال تعادل است. هرگاه $x\in B$، $y\in B$، و $0<t<1$، آنگاه

$$p(tx+(1-t)y)\le tp(x)+(1-t)p(y)<1 .$$

لذا B محدب است. هرگاه $x\in X$ و $s>p(x)$، آنگاه $p\left(s^{-1}x\right)=s^{-1}p(x)<1$. این نشان می‌دهد که B جاذب است و نیز $\mu_B(x)\le s$. لذا $\mu_B\le p$. ولی هرگاه $0<t\le p(x)$، آنگاه $p\left(t^{-1}x\right)\ge 1$، و درنتیجه $t^{-1}x$ در B نیست. این ایجاب می‌کند که $p(x)\le\mu_B(x)$ و برهان تمام خواهدبود.

۳۵.۱ قضیه. ***فرض کنیم A یک مجموعهٔ جاذب محدب در فضای‌برداری X باشد. در این صورت***

(آ) $\mu_A(x+y)\le\mu_A(x)+\mu_A(y)$؛

(ب) اگر $t\ge 0$، $\mu_A(tx)=t\mu_A(x)$؛

(پ) اگر A در حال تعادل باشد، μ_A نیم‌نرم است؛

(ت) هرگاه $B=\{x:\mu_A(x)<1\}$ و $C=\{x:\mu_A(x)\le 1\}$، آنگاه $B\subset A\subset C$ و $\mu_B=\mu_A=\mu_C$.

برهان. هرگاه به ازای $\varepsilon>0$ ی، $t=\mu_A(x)+\varepsilon$ و $s=\mu_A(y)+\varepsilon$، آنگاه x/t و y/s در Aاند؛ درنتیجه ترکیب محدب آنها

$$\frac{x+y}{s+t}=\frac{t}{s+t}.\frac{x}{t}+\frac{s}{s+t}.\frac{y}{s}$$

چنین است. این نشان می‌دهد که

$$\mu_A(x+y)\le s+t=\mu_A(x)+\mu_A(y)+۲\varepsilon$$

و (آ) ثابت می‌شود.

خاصیت (ب) واضح است و خاصیت (پ) از خواص (آ) و (ب) نتیجه می‌شود.

وقتی به (ت) می‌پردازیم، شمولهای $B\subset A\subset C$ نشان می‌دهند که $\mu_C\le\mu_A\le\mu_B$. برای اثبات تساوی، $x\in X$ را ثابت گرفته و s و t را طوری اختیار می‌کنیم که $\mu_C(x)<s<t$. دراین‌صورت $x/s\in C$، $\mu_A(x/s)\le ۱$، $\mu_A(x/t)\le s/t<۱$. لذا $x/t\in B$؛ درنتیجه $\mu_B(x)\le t$. این به ازای هر $t>\mu_C(x)$ برقرار است. بنابراین $\mu_B(x)\le\mu_C(x)$.

۳٦.۱ قضیه. فرض کنیم $\mathscr{B}$ یک پایهٔ موضعی در حال تعادل محدب در فضای‌برداری توپولوژیک X باشد. به هر $V\in\mathscr{B}$ تابعی مینکوفسکی μ_V را مربوط می‌کنیم. در این صورت

(آ) به ازای هر $V\in\mathscr{B}$، $V=\{x\in X:\mu_V(x)<۱\}$، و

(ب) $\{\mu_V:V\in\mathscr{B}\}$ یک خانوادهٔ جداساز از نیم‌نرمهای پیوسته بر X است.

برهان. هرگاه $x\in V$، آنگاه به ازای $t<۱$ ای، $x/t\in V$، زیرا V باز است. لذا $\mu_V(x)<۱$. هرگاه $x\notin V$، آنگاه $x/t\in V$ ایجاب می‌کند که $t\ge ۱$ زیرا V در حال تعادل است؛ بنابراین $\mu_V(x)\ge ۱$. این قسمت (آ) را ثابت می‌کند.

قضیهٔ ۳۵.۱ نشان می‌دهد که هر μ_V یک نیم‌نرم است. اگر $r>۰$، از قسمت (آ) و قضیهٔ ۳٤.۱ نتیجه می‌شود که اگر $x-y\in rV$،

$$|\mu_V(x)-\mu_V(y)|\le\mu_V(x-y)<r\,.$$

لذا μ_V پیوسته می‌باشد. هرگاه $x\in X$ و $x\neq ۰$، آنگاه به ازای $V\in\mathscr{B}$ای، $x\notin V$. به ازای این V داریم $\mu_V(x)\ge ۱$. لذا $\{\mu_V\}$ جداساز می‌باشد.

۳۷.۱ قضیه. فرض کنیم $\mathscr{P}$ یک خانوادهٔ جداساز از نیم‌نرمها بر فضای‌برداری X

باشد. به هر $p \in \mathscr{P}$ و هر عدد صحیح مثبت n مجموعهٔ

$$V(p,n) = \left\{x : p(x) < \frac{1}{n}\right\}$$

را مربوط می‌کنیم. فرض کنیم $\mathscr{B}$ گردایهٔ تمام اشتراکهای متناهی مجموعه‌های $V(p,n)$ باشد. دراین‌صورت $\mathscr{B}$ یک پایهٔ موضعی در حال تعادل محدب برای توپولوژی τ بر X است که X را به یک فضای موضعاً محدب بدل می‌کند به‌طوری‌که

(آ) هر $p \in \mathscr{P}$ پیوسته است، و

(ب) مجموعهٔ $E \subset X$ کراندار است اگر و فقط اگر هر $p \in \mathscr{P}$ بر E کراندار باشد.

برهان. گوییم مجموعهٔ $A \subset X$ باز است اگر و فقط اگر A اجتماعی (احتمالاً تهی) از انتقالهای اعضای $\mathscr{B}$ باشد. واضح است که این یک توپولوژی انتقال- پایا مانند τ بر X تعریف می‌کند؛ هر عضو $\mathscr{B}$ محدب و در حال تعادل است، و $\mathscr{B}$ یک پایهٔ موضعی برای τ می‌باشد.

فرض کنیم $x \in X$ و $x \neq \circ$. در این‌صورت، به ازای $p \in \mathscr{P}$ ای، $p(x) > \circ$. چون x در $V(p,n)$ به ازای $np(x) > ۱$ نیست، ملاحظه می‌شود که $\circ$ در همسایگی $x - V(p,n)$ از x نمی‌باشد؛ درنتیجه x در بست $\{\circ\}$ نخواهدبود. لذا $\{\circ\}$ یک مجموعهٔ بسته است، و چون τ انتقال - پایاست، هر نقطهٔ X یک مجموعهٔ بسته می‌باشد.

حال نشان می‌دهیم که جمع و ضرب اسکالر پیوسته‌اند. فرض کنیم U یک همسایگی $\circ$ در X باشد. دراین‌صورت، به ازای $p_۱, \ldots, p_m \in \mathscr{P}$ ی و اعداد صحیح مثبتی چون $n_۱$،...،n_m،

$$U \supset V(p_۱, n_۱) \cap \ldots \cap V(p_m, n_m). \tag{۱}$$

قرار می‌دهیم

$$V = V(p_۱, ۲n_۱) \cap \ldots \cap V(p_m, ۲n_m). \tag{۲}$$

چون هر $p \in \mathscr{P}$ زیرجمعپذیر است، $V + V \subset U$. این ثابت می‌کند که جمع پیوسته است.

حال فرض‌کنیم $x \in X$، α اسکالر بوده، و U و V مانند فوق باشند. در این صورت، به ازای $s > \circ$ ی، $x \in sV$. قرار می‌دهیم $t = s/(۱+|\alpha|s)$. هرگاه $y \in x + tV$

و $|\beta-\alpha|<1/s$، آنگاه

$$\beta y-\alpha x=\beta(y-x)+(\beta-a)x$$

که در

$$|\beta|tV+|\beta-\alpha|sV\subset V+V\subset U$$

قرار دارد زیرا $|\beta|t\leq 1$ و V در حال تعادل است. این ثابت می‌کند که ضرب اسکالر پیوسته می‌باشد.

لذا X یک فضای موضعاً محدب است. تعریف $V(p,n)$ نشان می‌دهد که هر $p\in\mathscr{P}$ در ۰ پیوسته است. لذا، طبق قسمت (بـ) قضیهٔ ۳٤.۱، p بر X پیوسته است.

بالأخره، فرض کنیم $E\subset X$ کراندار باشد. $p\in\mathscr{P}$ را ثابت می‌گیریم. چون $V(p,1)$ یک همسایگی ۰ است، به ازای $k<\infty$ای، $E\subset kV(p,1)$. لذا، به ازای هر $x\in E$، $p(x)<k$. پس نتیجه می‌شود که هر $p\in\mathscr{P}$ بر E کراندار است.

به‌عکس، فرض کنیم E در این شرط صدق کند، U همسایگیی از ۰ باشد، و رابطهٔ (۱) برقرار باشد. اعدادی مانند $M_i<\infty$ وجود دارند به طوری که $p_i<M_i$ بر E $(1\leq i\leq m)$. اگر به ازای $1\leq i\leq m$، $n>M_in_i$، داریم $E\subset nU$؛ درنتیجه E کراندار است.

۳۸.۱ چند تبصره. (آ) در قضیهٔ ۳۷.۱ لازم بود که اشتراکهای متناهی از مجموعه‌های $V(p,n)$ گرفته شود؛ مجموعه‌های $V(p,n)$ لازم نیست خودشان یک پایهٔ موضعی تشکیل دهند. (این مجموعه‌ها چیزی می‌سازند که معمولاً آن را یک ***زیرپایه*** برای توپولوژی ساخته شده می‌نامند.) برای مشاهدهٔ مثالی از این، $X=R^2$ را اختیار کرده و فرض می‌کنیم $\mathscr{P}$ از نیم نرمهای p_1 و p_2 تشکیل شده باشد که با $p_i(x)=|x_i|$ تعریف شده‌اند؛ در اینجا $x=(x_1,x_2)$. تمرین ۸ این نکته را بیشتر جلو می‌برد.

(بـ) قضایای ۳٦.۱ و ۳۷.۱ یک مسئلهٔ طبیعی را عنوان می‌کنند: هرگاه $\mathscr{B}$ یک پایهٔ موضعی در حال تعادل محدب برای توپولوژی τ فضای موضعاً محدب X باشد، آنگاه $\mathscr{B}$ یک خانوادهٔ جداساز مانند $\mathscr{P}$ از نیم‌نرمهای پیوسته بر X، مانند قضیهٔ ۳٦.۱، تولید می‌کند. این $\mathscr{P}$، طبق فرایند توصیف شده در قضیهٔ ۳۷.۱، خود یک توپولوژی τ_1 بر X القا می‌سازد. آیا $\tau=\tau_1$؟

جواب مثبت است. برای مشاهدهٔ این امر، توجه می‌کنیم که هر $p \in \mathscr{P}$، τ- پیوسته است؛ درنتیجه مجموعه‌های $V(p,n)$ قضیهٔ ۳۷.۱ در τ می‌باشند. لذا $\tau_۱ \subset \tau$. به عکس، هرگاه $W \in \mathscr{B}$ و $p = \mu_W$، آنگاه

$$W = \{x : \mu_W(x) < ۱\} = V(p, ۱).$$

لذا، به ازای هر $W \in \mathscr{B}$، $W \in \tau_۱$؛ این ایجاب می‌کند که $\tau \subset \tau_۱$.

(پ) اگر $\mathscr{P} = \{p_i : i = ۱,۲,۳,\ldots\}$ یک خانوادهٔ جداساز شمارشپذیر از نیم‌نرمها بر X باشد، قضیهٔ ۳۷.۱ نشان می‌دهد که $\mathscr{P}$ یک توپولوژی مانند τ با پایهٔ موضعی شمارشپذیر القا می‌کند. بنابر قضیهٔ ۲٤.۱، τ مترپذیر است. در وضع فعلی، یک متر انتقال- پایا را می‌توان با قراردادن

$$d(x,y) = \max_i \frac{c_i p_i(x-y)}{۱ + p_i(x-y)} \tag{۱}$$

مستقیماً تعریف کرد که در آن $\{c_i\}$ دنبالهٔ ثابتی از اعداد مثبت است که وقتی $i \to \infty$، همگرا به ۰ می‌باشد.

به آسانی معلوم می‌شود که d یک متر بر X است.

حکم می‌کنیم که گویهای

$$B_r = \{x : d(۰, x) < r\} \qquad (۰ < r < \infty) \tag{۲}$$

یک پایهٔ موضعی در حال تعادل محدب برای τ تشکیل می‌دهند.

r را ثابت می‌گیریم. هرگاه $c_i \le r$ (که به ازای تمام iها جز تعدادی برقرار است زیرا $c_i \to ۰$)، آنگاه $c_i p_i / (۱ + p_i) < r$. لذا B_r اشتراک تعدادی ***متناهی*** مجموعه به شکل زیر است:

$$\left\{x : p_i(x) < \frac{r}{c_i - r}\right\} \tag{۳}$$

یعنی مجموعه‌هایی که در آنها $c_i > r$. این مجموعه‌ها بازند، زیرا هر p_i پیوسته است (قضیهٔ ۳۷.۱). لذا B_r باز است و، بنابر قضیهٔ ۳٤.۱، محدب و درحال تعادل نیز می‌باشد.

حال فرض کنیم W همسایگیی از ۰ در X باشد. تعریف τ نشان می‌دهد که W شامل اشتراک مجموعه‌های مناسب اختیارشدهٔ

$$V(p_i, \delta_i) = \{x : p_i(x) < \delta_i < ۱\} \qquad (۱ \le i \le k) \tag{٤}$$

می‌باشد. هرگاه $2r < \min\{c_1\delta_1, \dots, c_k\delta_k\}$ و $x \in B_r$، آنگاه

$$\frac{c_i p_i(x)}{1 + p_i(x)} < r < \frac{c_i\delta_i}{2} \qquad (1 \le i \le k) \tag{5}$$

که $p_i(x) < \delta_i$ را ایجاب می‌کند. لذا $B_r \subset W$.

این حکم ما را ثابت کرده و نیز نشان می‌دهد که d با τ سازگار است.

۳۹.۱ قضیه. ***فضای برداری توپولوژیک X نرم‌پذیر است اگر و فقط اگر مبدأ آن همسایگی کراندار محدبی داشته باشد.***

برهان. هرگاه X نرم‌پذیر باشد و $\|.\|$ یک نرم سازگار با توپولوژی X باشد، آنگاه گوی یکهٔ باز $\{x : \|x\| < 1\}$ محدب و کراندار است.

در مورد عکس، فرض کنیم V یک همسایگی کراندار محدب 0 باشد. بنابر قضیهٔ ۱۴.۱، V شامل یک همسایگی در حال تعدل محدب مانند U از 0 است؛ البته U نیز کراندار است. تعریف می‌کنیم

$$\|x\| = \mu(x) \qquad (x \in X) \tag{1}$$

که درآن μ تابعی مینکوفسکی U می‌باشد.

بنابر قسمت (پ) قضیهٔ ۱۵.۱، مجموعه‌های $rU (r > 0)$ یک پایهٔ موضعی برای توپولوژی X تشکیل می‌دهند. هرگاه $x \ne 0$، آنگاه به‌ازای $r > 0$ی، $x \notin rU$؛ درنتیجه $\|x\| \ge r$. حال از قضیهٔ ۳۵.۱ نتیجه می‌شود که (۱) معرف یک نرم است. تعریف تابعی مینکوفسکی همراه با باز بودن U ایجاب می‌کند که به ازای هر $r > 0$،

$$\{x : \|x\| < r\} = rU. \tag{2}$$

لذا نرم توپولوژی با نرم داده شده یکی می‌باشد.

فضاهای خارج قسمتی

۴۰.۱ چند تعریف. فرض می‌کنیم N زیرفضایی از فضای‌برداری X باشد. به ازای هر $x \in X$، $\pi(x)$ را هم‌مجموعه‌ای از N می‌گیریم که شامل x باشد؛ لذا

$$\pi(x) = x + N.$$

این هم‌مجموعه‌ها عنصرهای فضای‌برداری X/Nاند به نام ***فضای خارج قسمتی X به***

پیمانهٔ N که در آن جمع و ضرب اسکالر به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\pi(x)+\pi(y)=\pi(x+y) \quad \text{و} \quad \alpha\pi(x)=\pi(\alpha x). \tag{۱}$$

[توجه کنید که وقتی $\alpha=0$، $\alpha\pi(x)=N$. این علامت با نماد متعارف معرفی شده دربخش ۴.۱ فرق دارد.] چون N یک فضای‌برداری است، اعمال (۱) خوش تعریف‌اند. این یعنی هرگاه $\pi(x)=\pi(x')$ (یعنی $x'-x\in N$) و $\pi(y)=\pi(y')$، آنگاه

$$\pi(x)+\pi(y)=\pi(x')+\pi(y') \quad \text{و} \quad \alpha\pi(x')=\alpha\pi(x). \tag{۲}$$

مبدأ X/N عبارت است از $\pi(0)=N$. بنابر (۱)، π یک نگاشت خطی از X به روی X/N است که N فضای پوچ آن است؛ π را اغلب ***نگاشت خارج قسمتی*** X به روی X/N می‌نامند.

حال فرض می‌کنیم τ یک توپولوژیِ‌برداری بر X بوده و N زیرفضای **بسته**‌ای از X باشد. همچنین τ_N گردایهٔ تمام مجموعه‌های $E\subset X/N$ باشد که $\pi^{-1}(E)\in\tau$. در این صورت τ_N یک توپولوژی بر X/N است به نام ***توپولوژی خارج قسمتی***. در قضیهٔ زیر بعضی از خواص این توپولوژی ذکر شده است. به یاد آورید که ***نگاشت باز*** نگاشتی است که مجموعه‌های باز را به مجموعه‌های باز می‌نگارد.

۴۱.۱ قضیه. *فرض کنیم N زیرفضای بسته‌ای از فضای‌برداری توپولوژیک X باشد. همچنین τ توپولوژی X بوده و τ_N را همانند فوق تعریف می‌کنیم.*

(آ) τ_N یک توپولوژی‌برداری بر X/N است؛ نگاشت خارج قسمتی $\pi: X\to X/N$ خطی، پیوسته، و باز است.

(ب) هرگاه $\mathscr{B}$ یک پایهٔ موضعی برای τ باشد، آنگاه گردایهٔ تمام مجموعه‌های $\pi(V)$ با $V\in\mathscr{B}$ یک پایهٔ موضعی برای τ_N است.

(پ) هریک از خواص زیر از X به X/N به ارث رسیده است: تحدب موضعی، کرانداری موضعی، مترپذیری، نرم‌پذیری.

(ت) اگر X یک F-فضا، یا یک فضای فرشه، یا یک فضای باناخ باشد، X/N نیز چنین است.

برهان. چون $\pi^{-1}(A\cap B)=\pi^{-1}(A)\cap\pi^{-1}(B)$ و

$$\pi^{-1}\left(\bigcup E_\lambda\right)=\bigcup\pi^{-1}\left(E_\lambda\right),$$

τ_N یک توپولوژی می‌باشد. مجموعهٔ $F\subset X/N$، τ_N- بسته است اگر و فقط اگر $\pi^{-1}(F)$، τ- بسته باشد. به‌خصوص، هر نقطه از X/N بسته است، زیرا

$$\pi^{-1}(\pi(x))=N+x$$

و N بسته فرض شده بود.

پیوستگی τ مستقیماً از تعریف τ_N نتیجه می‌شود. حال فرض کنیم $V\in\tau$. چون

$$\pi^{-1}(\pi(V))=N+V$$

و $N+V\in\tau$، پس $\pi(V)\in\tau_N$. لذا π یک نگاشت باز است.

حال اگر W همسایگیی از ۰در X/N باشد، یک همسایگی مانند V از ۰ در X هست به‌طوری که

$$V+V\subset\pi^{-1}(W).$$

لذا $\pi(V)+\pi(V)\subset W$. چون π باز است، $\pi(V)$ یک همسایگی از ۰ در X/V می‌باشد. بنابراین، جمع در X/N پیوسته خواهدبود.

پیوستگی ضرب اسکالر در X/V به همین نحو ثابت می‌شود. این امر (آ) را برقرار می‌سازد.

واضح است که (آ) قسمت (ب) را ایجاب می‌کند. به کمک قضایای ۳۲.۱، ۲۴.۱، و ۳۹.۱ به همین سادگی معلوم می‌شود که (ب) قسمت (پ) را ایجاب می‌کند.

حال فرض کنیم d یک متر پایا بر X باشد که با τ سازگار است. ρ را با

$$\rho(\pi(x),\pi(y))=\inf\{d(x-y,z):z\in N\}$$

تعریف می‌کنیم. این را می‌توان به عنوان فاصله از $x-y$ تا N تعبیر کرد. تحقیق خوش تعریف بودن ρ ومتر پایا بودن آن بر X/N را حذف می‌کنیم. چون

$$\pi(\{x:d(x,\circ)<r\})=\{u:\rho(u,\circ)<r\},$$

از قسمت (ب) معلوم می‌شود که ρ با τ_N سازگار است.

اگر X نرمدار باشد، این تعریف ρ خاص شده و ***نرم خارج قسمتی*** X/V را به ما می‌دهد:

$$\|\pi(x)\|=\inf\{\|x-z\|:z\in N\}.$$

برای اثبات (ت) باید نشان دهیم که هروقت d تام باشد، ρ نیز یک متر تام است.

فرض کنیم $\{u_n\}$ یک دنبالهٔ‌کشی در X/N نسبت به ρ باشد. یک زیردنباله مانند $\{u_{n_i}\}$ هست که $\rho\left(u_{n_i},u_{n_{i+1}}\right)<2^{-i}$. می‌توان به استقرا $x_i\in X$ را طوری اختیار کرد که $\pi(x_i)=u_{n_i}$ و $d(x_i,x_{i+1})<2^{-i}$. اگر d تام باشد، دنبالهٔ‌کشی $\{x_i\}$ به $x\in X$ ی همگراست. پیوستگی π ایجاب می‌کند که وقتی $i\to\infty$، $u_{n_i}\to\pi(x)$. ولی هرگاه یک دنبالهٔ‌کشی زیردنبالهٔ همگرا داشته باشد، آنگاه خود دنباله باید همگرا باشد. لذا ρ تام است و برهان قضیهٔ ۴۱.۱ پایان می‌یابد.

در زیر کاربرد ساده‌ای از این مفاهیم ذکر می‌شود:

۴۲.۱ قضیه. ***فرض کنیم N و F زیرفضاهایی از فضای‌برداری توپولوژیک X بوده، N بسته، و F با بعد متناهی باشد. در این صورت $N+F$ بسته است.***

برهان. فرض کنیم π نگاشت خارج قسمتی X به روی X/N باشد، و به X/N توپولوژی خارج قسمتی می‌دهیم. در این صورت $\pi(F)$ یک زیرفضای با بعد متناهی X/N است. چون X/N یک فضای‌برداری توپولوژیک است، قضیهٔ ۲۱.۱ ایجاب می‌کند که $\pi(F)$ در X/N بسته است. چون $N+F=\pi^{-1}(\pi(F))$ و π پیوسته است، نتیجه می‌گیریم که $N+F$ بسته می‌باشد. (قس. تمرین ۲۰.)

۴۳.۱ نیم نرمها و فضاهای خارج قسمتی. فرض کنیم p یک نیم نرم برفضای‌برداری X بوده و

$$N=\{x:p(x)=0\}.$$

دراین صورت N زیرفضایی از X است (قضیهٔ ۳۴.۱). فرض کنیم π نگاشت خارج قسمتی از X به روی X/N باشد، و تعریف می‌کنیم

$$\widetilde{p}(\pi(x))=p(x).$$

هرگاه $\pi(x)=\pi(y)$، آنگاه $p(x-y)=0$، و چون

$$|p(x)-p(y)|\le p(x-y),$$

پس $\widetilde{p}(\pi(x))=\widetilde{p}(\pi(y))$. لذا $\widetilde{p}$ بر X/N خوش تعریف است، و حال تحقیق ***نرم***

بودن $\widetilde{p}$ بر X/N آسان است.

یک مثال آشنا از این امر می‌آوریم. r را که $1 \le r < \infty$ ثابت می‌گیریم. فرض‌کنیم L^r فضای تمام توابع اندازه‌پذیرلبگ (*Lebesgue*) بر $[0,1]$ باشد که

$$p(f) = \|f\|_r = \left\{\int_0^1 |f(t)|^r dt\right\}^{1/r} < \infty .$$

این یک نیم نرم بر L^r تعریف می‌کند نه یک نرم، زیرا هر وقت تقریباً همه جا $f = 0$، $\|f\|_r = 0$. فرض کنیم N مجموعهٔ این "توابع پوچ" باشد. در این‌صورت L^r/N فضای باناخ است که معمولاً L^r نامیده می‌شود. نرم L^r با رفتن مذکور در فوق از p به $\widetilde{p}$ به دست می‌آید.

چند مثال

۴۴.۱ فضاهای $C(\Omega)$. هرگاه Ω یک مجموعهٔ باز ناتهی در فضایی اقلیدسی باشد، آنگاه Ω اجتماع تعدادی شمارش‌پذیر از مجموعه‌های فشردهٔ $K_n \neq \emptyset$ است که می‌توان آنها را طوری اختیار کرد که K_n درون K_{n+1} $(n = 1,2,3,\ldots)$ جای گیرد. $C(\Omega)$ فضای‌برداری تمام توابع پیوستهٔ مختلط بر Ω است که با خانوادهٔ جداساز از نیم‌نرمهای

$$p_n(f) = \sup\{|f(x)| : x \in K_n\} \tag{1}$$

طبق قضیهٔ ۳۷.۱ صاحب توپولوژی می‌شود. چون $p_1 \le p_2 \le \ldots$، مجموعه‌های

$$V_n = \left\{f \in C(\Omega) : p_n(f) < \frac{1}{n}\right\} \qquad (n = 1,2,3,\ldots) \tag{2}$$

یک پایهٔ موضعی محدب برای $C(\Omega)$ تشکیل می‌دهند. بنابر تبصرهٔ (پ) از بخش ۳۸.۱، توپولوژی $C(\Omega)$ با متر

$$d(f,g) = \max_n \frac{2^{-n} p_n(f-g)}{1 + p_n(f-g)} \tag{3}$$

سازگار است. هرگاه $\{f_i\}$ یک دنبالهٔ‌کشی نسبت به این متر باشد، آنگاه به ازای هر n وقتی $i,j \to \infty$، $p_n(f_i - f_j) \to 0$؛ درنتیجه $\{f_i\}$ بر K_n به طور یکنواخت به تابعی مانند $f \in C(\Omega)$ همگراست. در این صورت محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که $d(f,f_i) \to 0$. لذا d یک متر تام می‌باشد. پس ثابت کرده‌ایم که $C(\Omega)$ ***یک فضای***

فرشه می‌باشد.

بنا بر قسمت (ب) قضیهٔ ۳۷.۱، مجموعهٔ $E \subset C(\Omega)$ کراندار است اگر و فقط اگر اعدادی مانند $M_n < \infty$ موجود باشند به طوری که به ازای هر $f \in E$، $p_n(f) \le M_n$؛ به بیان صریح،

$$\text{اگر } f \in E \text{ و } x \in K_n\text{، } |f(x)| \le M_n. \tag{٤}$$

چون هر V_n شامل f ی است که $p_{n+1}(f)$ به قدر کافی بزرگ است، پس هیچ V_n ی کراندار نیست. ***لذا $C(\Omega)$ موضعاً همبند نیست؛ درنتیجه نرم‌پذیر نمی‌باشد.***

۴۵.۱ فضاهای $H(\Omega)$. حال فرض کنیم Ω یک زیرمجموعهٔ باز ناتهی از صفحهٔ مختلط باشد، $C(\Omega)$ را مانند بخش ۴۴.۱ تعریف کرده، و فرض می‌کنیم $H(\Omega)$ زیرفضایی از $C(\Omega)$ باشد که از توابع هلوریخت در Ω تشکیل شده است. چون دنباله‌های توابع هلوریخت که بر مجموعه‌های فشرده به‌طور یکنواخت همگرایند دارای حدود هلوریخت می‌باشند، $H(\Omega)$ یک زیرفضای بستهٔ $C(\Omega)$ می‌باشد. لذا ***$H(\Omega)$ یک فضای فرشه می‌باشد.***

حال ثابت می‌کنیم ***$H(\Omega)$ دارای خاصیت هاینه - بورل است.*** پس از قضیهٔ ۲۳.۱ نتیجه می‌شود که ***$H(\Omega)$ موضعاً کراندار نیست؛ درنتیجه نرم‌پذیر نمی‌باشد.***

فرض کنیم E زیرمجموعهٔ بسته و کرانداری از $H(\Omega)$ باشد. دراین صورت E در نامساویهایی نظیر (۴) در بخش ۴۴.۱ صدق می‌کند. لذا قضیهٔ کلاسیک مونتل *(Montel)* راجع به خانواده‌های نرمال (قضیهٔ ۶.۱۴ از مرجع [۲۳]*) ایجاب می‌کند که هر دنبالهٔ $\{f_i\} \subset E$ زیردنباله‌ای دارد که بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ Ω [درنتیجه در توپولوژی $H(\Omega)$] به $f \in H(\Omega)$ ی به طور یکنواخت همگراست. چون E بسته است، $f \in E$. این امر فشرده بودن E را ثابت می‌کند.

۴۶.۱ فضاهای $C^\infty(\Omega)$ و $\mathscr{D}_K$. این بخش را با معرفی چند اصطلاح که در کار بعدی ما با توزیعها به کار می‌روند آغاز می‌کنیم.

در هر بحثی از توابع n متغیره، اصطلاح ***اندیس چندگانه*** یعنی یک n تایی مرتب

---

* اعداد داخل کروشه اشاره به منابع مذکور در کتابنامه دارند.

مانند

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \tag{1}$$

از اعداد صحیح نامنفی α_i. به هر اندیس چندگانهٔ α عملگر دیفرانسیل

$$D^{\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \tag{2}$$

مربوط است که ***مرتبه***اش عبارت است از

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots a_n \tag{3}$$

اگر $|\alpha| = 0$، $D^{\alpha} f = f$.

گوییم تابع مختلط f تعریف شده در مجموعهٔ باز و ناتهی $\Omega \subset R^n$ متعلق به $C^{\infty}(\Omega)$ است اگر به ازای هر اندیس چندگانهٔ α، $D^{\alpha} f \in C(\Omega)$.

محافظ تابع مختلط f (بر هر فضای توپولوژیک) عبارت است از بست $\{x: f(x) \neq 0\}$.

هرگاه K مجموعهٔ فشردهای در R^n باشد، آنگاه $\mathscr{D}_K$ فضای تمام $f \in C^{\infty}(R^n)$ها است که محافظشان در K قرار دارند. [از زمان شوارتز (*Schwartz*) که تحقیقاتش را راجع به توزیعها منتشر کرد تاکنون حرف $\mathscr{D}$ برای نمایش این فضاها به کاررفته است.] هرگاه $K \subset \Omega$، آنگاه $\mathscr{D}_K$ را میتوان با زیرفضایی از $C^{\infty}(\Omega)$ یکی کرد.

حال یک توپولوژی بر $C^{\infty}(\Omega)$ تعریف میکنیم که $C^{\infty}(\Omega)$ را به یک فضای فرشه با خاصیت هاینه - بورل تبدیل میکند بهطوری که هروقت $K \subset \Omega$، $\mathscr{D}_k$ زیرفضای بستهای از $C^{\infty}(\Omega)$ میباشد.

برای این کار، مجموعههای فشردهٔ $K_i (i = 1,2,3,\ldots)$ را طوری اختیار میکنیم که K_i درون K_{i+1} قرارگرفته و $\Omega = \bigcup K_i$. نیمنرمهای p_N را بر $C^{\infty}(\Omega)$، $N = 1,2,3,\ldots$، این طور تعریف میکنیم:

$$p_N(f) = \max\left\{\left|D^{\alpha} f(x)\right| : x \in K_N, |\alpha| \leq N\right\}. \tag{4}$$

اینها معرف یک توپولوژی موضعاًمحدب متریپذیر بر $C^{\infty}(\Omega)$اند؛ ر.ک. قضیهٔ ۳۷.۱ و تبصرهٔ (پ) بخش ۳۸.۱. به ازای هر $x \in \Omega$، تابعی $f \to f(x)$ در این توپولوژی پیوسته است. چون $\mathscr{D}_K$ اشتراک فضاهای پوچ این تابعیهاست، وقتی x روی متمم K تغییر کند، نتیجه میشود که $\mathscr{D}_K$ در $C^{\infty}(\Omega)$ بسته میباشد.

یک پایهٔ موضعی توسط مجموعه‌های

$$V_N = \left\{ f \in C^\infty(\Omega) : p_N(f) < \frac{1}{N} \right\} \qquad (N = 1,2,3,\ldots) \tag{۵}$$

داده می‌شود. هرگاه $\{f_i\}$ یک دنبالهٔ‌کشی در $C^\infty(\Omega)$ بوده (ر.ک.بخش ۲۵.۱) و N ثابت باشد، آنگاه به ازای i و j به قدر کافی بزرگ، $f_i - f_j \in V_N$. لذا، اگر $|\alpha| \le N$، $|D^\alpha f_i - D^\alpha f_j| < 1/N$ بر K_N . پس هر $D^\alpha f_i$ (به طور یکنواخت بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ Ω) به تابعی چون g_α همگراست. به‌خصوص، $f_i(x) \to g_\circ(x)$. حال واضح است که $g_\circ \in C^\infty(\Omega)$، $g_\alpha = D^\alpha g_\circ$، و $f_i \to g$ در توپولوژی $C^\infty(\Omega)$.

لذا $C^\infty(\Omega)$ یک فضای فرشه است. این امر در مورد هریک از زیرفضاهای بستهٔ $\mathscr{D}_K$ آن درست است.

حال فرض کنیم $E \subset C^\infty(\Omega)$ بسته و کراندار باشد. بنابرقضیهٔ ۳۷.۱، کرانداری E هم‌ارز وجود اعدادی چون $M_N < \infty$ است به طوری که به ازای $N = 1,2,3,\ldots$ و هر $f \in E$، $p_N(f) \le M_N$. نامساویهای $|D^\alpha f| \le M_N$ که به ازای $|\alpha| \le N$ بر K_N معتبرند همپیوستگی $\{D^\beta f : f \in E\}$ را بر K_{N-1} به ازای $|\beta| \le N-1$ ایجاب می‌کنند. حال از قضیهٔ آسکولی (*Ascoli*) (که در ضمیمهٔ آ ثابت شده است) و فرایند قطری کانتور (*Cantor*) نتیجه می‌شود که هر دنباله در E شامل زیردنباله‌ای چون $\{f_i\}$ است که به ازای آن $\{D^\beta f_i\}$، به ازای هر اندیس چندگانهٔ β، بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ Ω به طوریکنواخت همگراست. لذا $\{f_i\}$ در توپولوژی $C^\infty(\Omega)$ همگرا می‌باشد. این فشرده بودن E را ثابت خواهدکرد.

لذا $C^\infty(\Omega)$ دارای خاصیت هاینه - بورل است. از قضیهٔ ۲۳.۱ معلوم می‌شود که $C^\infty(\Omega)$ ***موضعاً کراندار نیست و درنتیجه نرم‌پذیر نمی‌باشد.*** همین نتیجه وقتی K درون ناتهی دارد برای $\mathscr{D}_K$ برقرار است (در غیر این صورت $\mathscr{D}_K = \{0\}$)، زیرا در آن حالت $\dim \mathscr{D}_K = \infty$. حکم اخیر نتیجه‌ای است از قضیهٔ زیر:

هرگاه B_1 و B_2 گویهای بستهٔ متحدالمرکزی در R^n بوده و B_1 درون B_2 جای داشته باشد، آنگاه $\phi \in C^\infty(R^n)$ ای هست به‌طوری که به ازای هر $x \in B_1$، $\phi(x) = 1$، به ازای هر x خارج B_2، $\phi(x) = 0$، و بر R^n داریم $0 \le \phi \le 1$.

برای یافتن یک چنین ϕ، $g\in C^{\infty}(R^{1})$ ای را طوری می‌سازیم که به ازای $x<a$، $g(x)=0$، به ازای $x>b$، $g(x)=1$ (که در آن $0<a<b<\infty$ از پیش مقرر شده‌اند)، و قرار می‌دهیم

$$\phi(x_1,\ldots,x_n)=1-g(x_1^2+\ldots+x_n^2). \tag{٦}$$

ساختن زیر از g دارای این مزیت است که انتخابهای مناسبی از $\{\delta_i\}$ می‌توانند به توابعی با خواص مطلوب دیگر منجر گردند.

فرض کنیم $0<a<b<\infty$. اعداد مثبت δ_0، δ_1، δ_2، ... را با خاصیت $\sum\delta_i=b-a$ اختیار می‌کنیم و قرار می‌دهیم

$$m_n=\frac{2^n}{\delta_1\ldots\delta_n}\qquad (n=1,2,3,\ldots). \tag{٧}$$

فرض کنیم f_0 یک تابع یکنوای پیوسته باشد به طوری که وقتی $x<a$، $f_0(x)=0$ و وقتی $x>a+\delta_0$، $f_0(x)=1$؛ و تعریف می‌کنیم

$$f_n(x)=\frac{1}{\delta_n}\int_{x-\delta_n}^{x}f_{n-1}(t)dt\qquad (n=1,2,3,\ldots). \tag{٨}$$

با مشتقگیری از این انتگرال معلوم می‌شود (به استقرا) که f_n دارای n مشتق پیوسته است و $|D^n f_n|\le m_n$. هرگاه $n>r$، آنگاه

$$D^r f_n(x)=\frac{1}{\delta_n}\int_0^{\delta_n}(D^r f_{n-1})(x-t)dt\,; \tag{٩}$$

درنتیجه، مجدداً به استقرا بر n،

$$|D^r f_n|\le m_r\qquad (n\ge r). \tag{١٠}$$

با اعمال قضیهٔ مقدار میانگین بر (٩) معلوم می‌شود که

$$|D^r f_n-D^r f_{n-1}|\le m_{r+1}\delta_n\qquad (n\ge r+2). \tag{١١}$$

چون $\sum\delta_n<\infty$، هر $\{D^r f_n\}$ وقتی $n\to\infty$، به طور یکنواخت بر $(-\infty,\infty)$ همگراست. لذا $\{f_n\}$ همگرا به تابعی چون g است که به ازای $r=1,2,3,\ldots$، $|D^r g|\le m_r$ و به ازای $x<a$، $g(x)=0$ و به ازای $x>b$، $g(x)=1$.

٤٧.١ فضاهای L^P با $0<p<1$. در این محدوده p ای را ثابت می‌گیریم. عنصرهای L^p توابع اندازه‌پذیر لبگ f بر $[0,1]$اند که

$$\Delta(f) = \int_0^1 |f(t)|^p\,dt < \infty \qquad (1)$$

با یکی‌سازی معمولی توابعی که تقریباً همه‌جا یکسانند. چون $0 < p < 1$، نامساوی

$$(a+b)^p \le a^p + b^p \qquad (2)$$

به ازای $a \ge 0$ و $b \ge 0$ برقرار است. از این داریم

$$\Delta(f+g) \le \Delta(f) + \Delta(g)\,; \qquad (3)$$

درنتیجه

$$d(f,g) = \Delta(f-g) \qquad (4)$$

یک ***متریایا*** بر L^p تعریف می‌کند. اثبات ***تام*** بودن این d مانند حالت آشنای $p \ge 1$ ثابت می‌شود. گویهای

$$B_r = \{f \in L^p : \Delta(f) < r\} \qquad (5)$$

یک پایهٔ موضعی برای توپولوژی L^p تشکیل می‌دهند. چون به ازای هر $r > 0$، $B_1 = r^{-1/p}B_r$، B_1 کراندار می‌باشد.

لذا L^p یک F-فضای موضعاً همبند است.

حکم می‌کنیم که ***L^p شامل مجموعه‌های باز محدبی جز $\varnothing$ و L^p نیست.***

برای اثبات این امر، فرض می‌کنیم $V \ne \varnothing$ باز و محدب در L^p باشد. همچنین، بی‌آنکه به کلیت آسیبی وارد آید، فرض می‌کنیم $0 \in V$. در این صورت، به ازای $r > 0$ ای، $V \supset B_r$. $f \in L^p$ را اختیار می‌کنیم. چون $p < 1$، عدد صحیح مثبتی مانند n هست به طوری که $n^{p-1}\Delta(f) < r$. بنا بر پیوستگی انتگرال نامعین $|f|^p$، نقاطی مانند

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$$

وجود دارند به طوری که

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|^p\,dt = n^{-1}\Delta(f) \qquad (1 \le i \le n)\,. \qquad (6)$$

تعریف می‌کنیم $g_i(t) = nf(t)$ اگر $x_{i-1} < t \le x_i$، $g_i(t) = 0$ در غیراین‌صورت. در این صورت، $g_i \in V$ زیرا رابطهٔ (۶) نشان می‌دهد که

$$\Delta(g_i) = n^{p-1}\Delta(f) < r \qquad (1 \le i \le n) \qquad (7)$$

و $V \supset B_r$. چون V محدب بوده و

$$f = \frac{1}{n}(g_1 + \ldots + g_n), \qquad (8)$$

پس $f \in V$. بنابراین، $V = L^p$.

این عدم وجود مجموعه‌های باز محدب نتیجهٔ تعجب‌آوری دارد.

فرض کنیم $\Lambda: L^p \to Y$ یک نگاشت خطی پیوسته از L^p به توی فضای موضعاً محدبی مانند Y باشد. همچنین $\mathscr{B}$ یک پایهٔ موضعی محدب برای Y باشد. هرگاه $W \in \mathscr{B}$، آنگاه $\Lambda^{-1}(W)$ محدب، باز، و ناتهی است. بنابراین $\Lambda^{-1}(W) = L^p$. درنتیجه، به ازای هر $W \in \mathscr{B}$، $\Lambda\left(L^p\right) \subset W$. پس نتیجه می‌گیریم که به ازای هر $f \in L^p$، $\Lambda f = 0$.

لذا، اگر $0 < p < 1$، 0 تنها نگاشت خطی پیوسته از L^p به توی یک فضای موضعاً محدب مانند Y است. به‌خصوص، 0 تنها تابعی خطی پیوسته بر این فضاهای L^p می‌باشد.

این البته برخلاف حالت آشنای $p \geq 1$ می‌باشد.

تمرینات

۱. فرض کنید X یک فضای‌برداری باشد. تمام مجموعه‌های ما زیرمجموعه‌های X فرض شده‌اند. احکام زیر را با استفاده از اصول موضوع مذکور در بخش ۴.۱ ثابت کنید. (برخی از این احکام در متن تلویحاً به کاررفته‌اند.)

(آ) اگر $x \in X$ و $y \in X$، $z \in X$ی منحصر به فرد هست به طوری که $x + z = y$.

(بـ) اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد، $0x = 0 = \alpha 0$.

(پـ) $2A \subset A + A$؛ ممکن است $2A \neq A + A$.

(تـ) A محدب است اگر و فقط اگر به ازای جمیع اسکالرهای مثبت s و t، $(s+t)A = sA + tA$.

(ثـ) هر اجتماع (واشتراک) از مجموعه‌های در حال تعادل در حال تعادل است.

(جـ) هر اشتراک از مجموعه‌های محدب محدب است.

(چـ) هرگاه Γ گردایه‌ای از مجموعه‌های محدب باشد که به وسیلهٔ شمول مجموعه‌ها کلی مرتب شده است، آنگاه اجتماع تمام اعضای Γ محدب است.

(حـ) اگر A و B محدب باشند، $A+B$ نیز چنین است.

(خـ) اگر A و B در حال تعادل باشند، $A+B$ نیز چنین است.

(د) نشان دهید که قسمتهای (جـ)، (چـ)، و (حـ) با زیرفضاها بـه جـای مجموعـه‌های محدب برقرارند.

۲. ***غلاف محدب*** مجموعهٔ A در فضـای‌برداری X مجموعـهٔ تمـام ***ترکیبـات محـدب*** اعضای A است؛ یعنی مجموعهٔ تمام مجموعهای

$$t_1x_1+\ldots+t_nx_n$$

کـه در آن $x_i \in A$، $t_i \geq 0$، $\sum t_i = 1$؛ n دلخـواه اسـت. ثـابت کنیدغـلاف محـدب A محدب است و اشتراک تمام مجموعه‌های محدبی است که شامل A می‌باشند.

۳. فـرض کنیـد X یـک فضـای‌برداری توپولوژیـک باشـد. تمـام مجموعـه‌های مـا زیرمجموعه‌های X می‌باشند. احکام زیر را ثابت نمایید.

(آ) غلاف محدب هر مجموعهٔ باز باز است.

(بـ) هرگاه X موضعاً محدب باشد، آنگاه غلاف محدب هـر مجموعـهٔ کرانـدار کرانـدار است. (این امر بدون تحدب موضعی نادرست است؛ ر.ک.بخش ٤٧.١.)

(پـ) اگر A و B کراندار باشند، $A+B$ نیز چنین است.

(تـ) اگر A و B فشرده باشند، $A+B$ نیز چنین است.

(ثـ) اگر A فشرده و B بسته باشد، $A+B$ بسته است.

(جـ) مجموع دو مجموعهٔ بسته ممکن است بسته نباشد. [لذا درقسمت (بـ) قضیـهٔ ۱۳.۱ ممکن است شمول اکید باشد.]

٤. فرض کنید $B=\{(z_1,z_2)\in \mathbb{C}^2 : |z_1|\leq |z_2|\}$ و نشان دهید که B در حـال تعـادل اسـت ولی درون آن چنین نیست. [قس.قسمت(ثـ) قضیهٔ ۱۳.۱.]

٥. تعریف "مجموعهٔ کراندار" مذکور دربخش ٦.١ را در نظر بگیرید. اگر فقط شرط کنیم که به هر همسایگی V از ٠، $t>0$ای نظیر است که $E\subset tV$، آیا مضمون ایـن تعریـف تغییر می‌کند؟

٦. ثابت کنید مجموعهٔ E در یک فضای‌برداری توپولوژیک کراندار است اگر و فقط اگر هر زیرمجموعهٔ شمارشپذیر E کراندار باشد.

۷. فرض کنید X فضای‌برداری تمام توابع مختلط بر بازهٔ یکهٔ $[0,1]$ باشد که با خانوادهٔ

$$p_x(f) = |f(x)| \qquad (0 \le x \le 1)$$

از نیم‌نرمها توپولوژی‌دار شده است. این توپولوژی را ***توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه*** می‌نامیم. این اصطلاح را توجیه نمایید.

نشان دهید که دنباله‌ای مانند $\{f_n\}$ در X هست به‌طوری که (آ) وقتی $n \to \infty$، $\{f_n\}$ همگرا به ۰ است ولی (ب) هرگاه (γ_n) دنباله‌ای از اسکالرها باشد به‌طوری که $\gamma_n \to \infty$، آنگاه $\{\gamma_n f_n\}$ همگرا به ۰ نیست. (از این امر استفاده کنید که گردایهٔ تمام دنباله‌های مختلط همگرا به ۰ همان اصلیت $[0,1]$ را دارد.]

این نشان می‌دهد که در قسمت (ب) قضیهٔ ۲۸.۱ مترپذیری را نمی‌توان حذف کرد.

۸. (آ) فرض کنید $\mathscr{P}$ یک خانوادهٔ جداساز از نیم‌نرمها بر فضای‌برداری X باشد. همچنین $\mathscr{Q}$ کوچکترین خانواده از نیم‌نرمها بر X باشد که شامل $\mathscr{P}$ است و تحت max بسته می‌باشد. [این یعنی: هرگاه $p_1 \in \mathscr{Q}$، $p_2 \in \mathscr{Q}$، و $p = \max(p_1, p_2)$، آنگاه $p \in \mathscr{Q}$.] اگر ساختن مذکور در قضیهٔ ۳۷.۱ در مورد $\mathscr{P}$ و در مورد $\mathscr{Q}$ اعمال شود، نشان دهید که دو توپولوژی حاصل یکی می‌باشند. تفاوت اساسی این است که $\mathscr{Q}$ مستقیماً در مورد یک پایه به کار می‌رود تا یک زیرپایه. [ر.ک.تبصرهٔ (آ) بخش ۳۸.۱.]

(ب) فرض کنید $\mathscr{Q}$ مانند قسمت (آ) بوده و Λ یک تابعی خطی بر X باشد. نشان دهید که Λ پیوسته است اگر و فقط اگر $p \in \mathscr{Q}$ای باشد به طوری‌که به ازای هر $x \in X$ و ثابتی چون $M < \infty$، $|\Lambda x| \le Mp(x)$.

۹. فرض کنید

(آ) x و y دو فضای‌برداری توپولوژیک باشند،

(ب) $\Lambda: X \to Y$ خطی باشد،

(پ) N زیرفضای بسته‌ای از X باشد،

(ت) $\pi: X \to X/N$ نگاشت خارج قسمتی باشد، و

(ث) به ازای هر $x \in N$، $\Lambda x = 0$.

ثابت‌کنید $f: X/N \to Y$ منحصربه‌فردی هست‌که‌در $\Lambda = f \circ \pi$ صدق می‌کند؛ یعنی، به

ازای هر $x \in X$، $\Lambda x = f(\pi(x))$. ثابت کنید این f خطی است و Λ پیوسته است اگر و فقط اگر f پیوسته باشد. همچنین، Λ باز است اگر و فقط اگر f باز باشد.

۱۰. فرض کنید X و Y دو فضای‌برداری توپولوژیک باشند، $\dim Y < \infty$، $\Lambda: X \to Y$ خطی باشد، و $\Lambda(X) = Y$.

(آ) ثابت کنید Λ یک نگاشت باز است.

(ب) به علاوه، فرض کنید فضای پوچ Λ بسته باشد، ودر این صورت ثابت کنید Λ پیوسته است.

۱۱. اگر N زیرفضایی از فضای‌برداری X باشد، **همبعد** N در X بعد فضای خارج قسمتی X/N تعریف می‌شود.

فرض کنید $0 < p < 1$ و ثابت کنید هر زیرفضا با همبعد متناهی در L^p چگال است. (ر.ک.بخش ۴۷.۱).

۱۲. فرض کنید $d_1(x,y) = |x-y|$ و $d_2(x,y) = |\phi(x) - \phi(y)|$ که در آن $\phi(x) = x/(1+|x|)$. ثابت کنید d_1 و d_2 مترهایی بر R اند که، با وجود تام بودن d_1 و تام نبودن d_2، توپولوژی یکسانی القا می‌کنند.

۱۳. فرض کنید C فضای‌برداری تمام توابع پیوستهٔ مختلط بر $[0,1]$ باشد. تعریف کنید

$$d(f,g) = \int_0^1 \frac{|f(x) - g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}\,dx .$$

فرض کنید (C,σ) مساوی C با توپولوژی القا شده از این متر باشد. همچنین (C,τ) فضای‌برداری توپولوژیک تعریف شده به وسیلهٔ نیم‌نرمهای

$$p_x(f) = |f(x)| \qquad (0 \le x \le 1)$$

طبق قضیهٔ ۳۷.۱ باشد.

(آ) ثابت کنید هر مجموعهٔ τ–کراندار در C یک مجموعهٔ σ– کراندار است و لذا نگاشت همانی $id:(C,\tau) \to (C,\sigma)$ مجموعه‌های کراندار را به مجموعه‌های کراندار می‌برد.

(ب) ثابت کنید با این وجود $id:(C,\tau) \to (C,\sigma)$ پیوسته نیست اگر چه (بنا بر قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ) به طور دنباله‌ای پیوسته است. لذا (C,τ) متری‌پذیر نیست.

(ر.ک.ضمیمهٔ ض ٦ یا قضیهٔ ۱.۳۲.) همچنین مستقیماً نشان دهید که (C,τ) پایهٔ موضعی شمارشپذیر ندارد.

(پ) ثابت کنید هر تابعی خطی پیوسته بر (C,τ) به ازای انتخابهایی از $x_1, \ldots, x_n$ در $[0,1]$ و $c_i \in \mathbb{C}$ ی به شکل زیر است:

$$f \to \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i).$$

(ت) ثابت کنید (C,σ) شامل مجموعه‌های باز محدبی غیر از $\varnothing$ و C نیست.

(ث) ثابت کنید $id = (C,\sigma) \to (C,\tau)$ پیوسته نیست.

۱٤. قراردهید $K=[0,1]$ و $\mathscr{D}_K$ را مانند بخش ۱.٤٦ تعریف کنید. نشان دهید که اگر $D = d/dx$، سه خانوادهٔ زیر از نیم‌نرمها (که در آنها $n = 0,1,2,\ldots$) توپولوژی یکسانی بر $\mathscr{D}_K$ تعریف می‌کنند:

(آ) $\|D^n f\|_\infty = \sup\{|D^n f(x)| : -\infty < x < \infty\}$؛

(ب) $\|D^n f\|_1 = \int_0^1 |D^n f(x)|\,dx$؛

(پ) $\|D^n f\|_2 = \left\{\int_0^1 |D^n f(x)|^2\,dx\right\}^{1/2}$.

۱۵. ثابت کنید فضاهای $C(\Omega)$ (بخش۱.٤٤) دارای خاصیت هاینه - بورل نیستند.

۱٦. ثابت کنید توپولوژی $C(\Omega)$ به انتخاب خاصی از $\{K_n\}$، تا زمانی که این دنباله در شرایط مذکور در بخش ۱.٤٤ صدق کند، وابسته نیست. همین کار را برای $C^\infty(\Omega)$ انجام دهید (بخش ۱.٤٦).

۱۷. در محدودهٔ بخش ۱.٤٦ ثابت کنید به ازای هر اندیس چندگانهٔ α، $f \to D^\alpha f$ یک نگاشت پیوسته از $C^\infty(\Omega)$ به توی $C^\infty(\Omega)$ و نیز از $\mathscr{D}_K$ به توی $\mathscr{D}_K$ است.

۱۸. قضیهٔ مربوط به جمع در دستگاه دویی را که در آخر برهان قضیهٔ ۱.۲٤ به کار رفت ثابت نمایید.

۱۹. فرض کنید M یک زیرفضای چگال از فضای‌برداری توپولوژیک X، Y یک F- فضا، و $\Lambda: M \to Y$ پیوسته (نسبت به توپولوژیی که M از X به ارث می‌برد) و خطی باشد. ثابت کنید Λ دارای یک توسیع خطی پیوسته مانند $\tilde{\Lambda}: X \to Y$ است.

پیشنهاد. فرض کنید V_nها همسایگیهای در حال تعادل از ۰ در X باشند به طوری که $V_n + V_n \subset V_{n-1}$ و به ازای $x \in M \cap V_n$، $d(0, \Lambda x) < 2^{-n}$. اگر $x \in X$ و $x_n \in (x + V_n) \cap M$، نشان دهید که $\{\Lambda x_n\}$ یک دنبالهٔ‌کشی در Y است، و $\tilde{\Lambda} x$ را مساوی حد آن تعریف کنید. نشان دهید که $\tilde{\Lambda}$ خوش تعریف است، به ازای $x \in M$، $\tilde{\Lambda} x = \Lambda x$، و $\tilde{\Lambda}$ خطی وپیوسته می‌باشد.

۲۰. به ازای هر عدد حقیقی t و هر عدد صحیح n، تعریف کنید $e_n(t) = e^{int}$، و نیز تعریف کنید

$$f_n = e_{-n} + ne_n (n = 1, 2, 3, \ldots) .$$

این تابعها را اعضایی از $L^2(-\pi, \pi)$ بگیرید. فرض کنید X_1 کوچکترین زیرفضای بستهٔ L^2 باشد که شامل e_0، e_1، e_2، ... است، و X_2 کوچکترین زیرفضای بستهٔ L^2 باشد که شامل f_1، f_2، f_3، ... است. نشان دهید که $X_1 + X_2$ در L^2 چگال است ولی بسته نیست. به عنوان مثال، بردار

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} e_{-n}$$

در L^2 است ولی در $X_1 + X_2$ نیست. (قس. قضیهٔ ۱.۴۲.)

۲۱. فرض کنید V یک همسایگی از ۰ در فضای‌برداری توپولوژیک X باشد. ثابت کنید یک تابع پیوستهٔ حقیقی مانند f بر X هست به طوری که $f(0) = 0$ و خارج V، $f(x) = 1$. (لذا X یک فضای توپولوژیک ***کاملاً منتظم*** است.) ***پیشنهاد.*** فرض کنید V_n همسایگیهای در حال تعادل ۰ باشند به طوری که $V_1 + V_1 \subset V$ و $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$. f را همانند در برهان قضیهٔ ۱.۲٤ بسازید. نشان دهید f در ۰ پیوسته است و

$$|f(x) - f(y)| \le f(x - y) .$$

۲۲. اگر f یک تابع مختلط باشد که بر بازهٔ فشردهٔ $I = [0, 1] \subset R$ تعریف شده است، تعریف کنید

$$\omega_\delta(f) = \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - y| \le \delta, x \in I, y \in I\} .$$

اگر $0 < \alpha \le 1$، ***فضای لیپ شیتس*** (*Lipschitz*) $Lip\alpha$ نظیر مرکب است از تمام

fهایی که

$$\|f\| = |f(0)| + \sup\left\{\delta^{-\alpha}\omega_{\delta}(f):\delta > 0\right\}$$

متناهی است. تعریف کنید

$$lip\alpha = \left\{f \in Lip\alpha: \lim_{\delta\to 0} \delta^{-\alpha}\omega_{\delta}(f) = 0\right\}$$

و ثابت کنید $Lip\alpha$ یک فضای باناخ است و $lip\alpha$ زیرفضای بسته‌ای از $Lip\alpha$ می‌باشد.

۲۳. فرض کنید X فضای‌برداری تمام توابع پیوسته بر قطعهٔ باز $(0,1)$ باشد. به ازای $f \in X$ و $r > 0$، فرض کنید $V(f,r)$ تمام $g \in X$ هایی باشد که‌به ازای هر $x \in (0,1)$، $|g(x) - f(x)| < r$. فرض کنید τ توپولوژی تولید شده به وسیلهٔ این مجموعه‌های $V(f,r)$ بر X باشد. نشان دهید که جمع $\tau-$ پیوسته است ولی ضرب اسکالر چنین نیست.

۲۴. نشان دهید که مجموعهٔ W که در برهان قضیهٔ ١٤.١ آمده لزوماً محدب نیست، و A لزوماً در حال تعادل نیست مگر U محدب باشد.

فصل ۲

تمامیت

اعتبار بسیاری از قضایای مهم آنالیز تابع تمامیت دستگاههایی است که با آنها سروکار دارند. این امر به خاطر ناقص بودن دستگاه اعداد گویاو انتگرال ریمان (*Riemann*) (که دو مثال معروف از این نوعند) و موفقیت ناشی از تعویض آنها با اعداد حقیقی و انتگرال لبگ است. قضیهٔ بئر (*Baire*) راجع به فضاهای متری تام (که اغلب ***قضیهٔ رسته‌ای*** خوانده می‌شود) ابزار اصلی در این حیطه است. برای تأکید در نقش مفهوم رسته، بعضی از قضایای این فصل (مثلاً قضایای ۷.۲ و ۱۱.۲) با تعمیمی بیش از آنچه معمولاً لازم است بیان شده‌اند. پس از این کار، صورتهای ساده‌تری (که آسانتر به یاد می‌آیند ولی در اغلب کاربردها کافی‌اند) نیز ذکر خواهدشد.

رستهٔ بئر

۱.۲ تعریف. فرض کنیم S یک فضای توپولوژیک باشد. گوییم مجموعهٔ $E\subset S$ ***هیچ‌جاچگال*** است اگر بست $\overline{E}$ درون تهی داشته باشد. مجموعه‌های از **رستهٔ اول** در S مجموعه‌هایی هستند که اجتماعهای ***شمارش‌پذیر*** از مجموعه‌های هیچ جاچگال می‌باشند. هر زیرمجموعهٔ S که از رستهٔ اول نباشد از ***رستهٔ دوم*** در S خوانده می‌شود.

این اصطلاح (که منسوب به بئر است) نسبتاً ملایم و غیر الهام‌بخش است. در

بعضی از کتابها به جای آن از واژه‌های **نزار** و **غیرنزار** استفاده شده است. اما "استدلالهای رسته‌ای" آنقدر در ریاضیات نفوذ کرده‌اند و آنقدر معروفند که تأکید بر تغییر اصطلاح ظاهراً بی‌فایده است.

در زیر چند خاصیت آشکار از رسته که آزادانه در کتاب به کار می‌روند ذکر می‌شوند.

(آ) اگر $A \subset B$ و B از رستهٔ اول در S باشد، A نیز چنین است.

(ب) هر اجتماع شمارشپذیر از مجموعه‌ها از رستهٔ اول نیز از رستهٔ اول است.

(پ) هرمجموعهٔ بستهٔ $E \subset S$ که درونش تهی باشد از رستهٔ اول در S است.

(ت) هرگاه h یک همانریختی از S به روی S بوده و $E \subset S$، آنگاه E و $h(E)$ از رستهٔ یکسان در S اند.

۲.۲ قضیهٔ بئر. هرگاه S

(آ) یک فضای متری تام یا

(ب) یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده باشد،

آنگاه اشتراک هرگردایهٔ شمارشپذیر از زیرمجموعه‌های بازچگال S در S چگال است.

این قضیه به دلیل زیر اغلب ***قضیهٔ رسته‌ای*** نام دارد.

هرگاه $\{E_i\}$ گردایهٔ شمارشپذیری از زیرمجموعه‌های هیچ‌جاچگال از S بوده و V_i متمم $\overline{E}_i$ باشد، آنگاه هر V_i چگال است و قضیهٔ بئر می‌گویند که $\bigcap V_i \neq \varnothing$. لذا $S \neq \bigcup E_i$.

بنابراین، فضاهای متری تام، و همچنین فضاهای هاسدورف موضعاً فشرده، در خودشان از رستهٔ دوم می‌باشند.

برهان. فرض کنیم $V_1, V_2, V_3, \ldots$ زیرمجموعه‌های بازچگال S باشند. همچنین B_0 یک مجموعهٔ باز ناتهی دلخواه در S باشد. هرگاه $n \geq 1$ و یک مجموعهٔ باز $B_{n-1} \neq \varnothing$ انتخاب شده باشد، آنگاه (به خاطر چگال بودن V_n) یک مجموعهٔ باز $B_n \neq \varnothing$ هست که

$$\overline{B}_n \subset V_n \cap B_{n-1}.$$

در حالت (آ)، B_n را می‌توان یک گوی به شعاع کمتر از $1/n$ گرفت؛ در حالت (ب) انتخاب می‌تواند چنان صورت گیرد که $\overline{B}_n$ فشرده باشد. قرار می‌دهیم

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n .$$

در حالت (آ) مراکز گویهای لانه‌ای B_n یک دنبالهٔ‌کشی تشکیل می‌دهند که به نقطه‌ای از K همگرایند؛ و درنتیجه $K \neq \varnothing$. در حالت (ب)، بنابر تمامیت، $K \neq \varnothing$. طرز ساختن ما نشان می‌دهد که $K \subset B_0$ و به ازای هر n، $K \subset V_n$. لذا B_0 مجموعهٔ $\bigcap V_n$ را قطع خواهدکرد.

قضیهٔ باناخ - اشتاین‌هاوس (*Steinhaus*)

۳.۲ همپیوستگی. فرض کنیم X و Y دو فضای‌برداری توپولوژیک بوده و Γ گردایه‌های از نگاشتهای خطی از X به توی Y باشد. گوییم Γ ***همپیوسته*** است اگر به هر همسایگی W از ۰ در Y یک همسایگی مانند V از ۰ در X چنان نظیر باشد که به ازای هر $\Lambda \in \Gamma$، $\Lambda(V) \subset W$.

اگر Γ فقط شامل یک Λ باشد، البته همپیوستگی همان پیوستگی می‌باشد (قضیهٔ ۱۷.۱). ما قبلاً دیدیم (قضیهٔ ۳۲.۱) که نگاشتهای خطی پیوسته‌کراندارند. گردایه‌های همپیوسته این خاصیت کرانداری را به نحوی یکنواخت دارند (قضیهٔ ۴.۲). به این دلیل قضیهٔ باناخ- اشتاین هاوس (۵.۲) را اغلب ***اصل کرانداری یکنواخت*** می‌نامند.

۴.۲ قضیه. ***فرض کنیم X و Y دو فضای‌برداری توپولوژیک بوده، Γ یک گردایهٔ همپیوسته از نگاشتهای خطی از X به توی Y بوده، و E زیرمجموعهٔ کرانداری از X باشد. دراین‌صورت Y زیرمجموعهٔ کرانداری مانند F دارد به‌طوری که به ازای هر $\Lambda \in \Gamma$، $\Lambda(E) \subset F$.***

برهان. فرض کنیم F اجتماع مجموعه‌های $\Lambda(E)$ به ازای $\Lambda \in \Gamma$ باشد. همچنین W همسایگیی از ۰ در Y باشد. چون Γ همپیوسته است، یک همسایگی مانند V از ۰ در

X هست به طوری که به ازای هر $\Lambda \in \Gamma$، $\Lambda(V) \subset W$. چون E کراندار است، به ازای جمیع t های به قدر کافی بزرگ، $E \subset tV$، به ازای این t ها،

$$\Lambda(E) \subset \Lambda(tV) = t\Lambda(V) \subset tW;$$

درنتیجه $F \subset tW$. لذا F کراندار می‌باشد.

۵.۲ قضیه (باناخ- اشتاین هاوس). ***فرض کنیم X و Y دو فضای‌برداری توپولوژیک بوده، Γ گردایه‌ای ازنگاشتهای خطی پیوسته از X به توی Y بوده، و B مجموعهٔ تمام $x \in X$هایی باشد که مدارهایشان***

$$\Gamma(x) = \{\Lambda x : \Lambda \in \Gamma\}$$

در Y کراندارند.

هرگاه B از رستهٔ دوم در X باشد، آنگاه $B=X$ و Γ همپیوسته می‌باشد.

برهان. همسایگیهای در حال تعادل W و U از ۰ را در Y چنان اختیار می‌کنیم که $\overline{U} + \overline{U} \subset W$. قرار می‌دهیم

$$E = \bigcap_{\Lambda \in \Gamma} \Lambda^{-1}(\overline{U}).$$

هرگاه $x \in B$، آنگاه به ازای n ی داریم $\Gamma(x) \subset nU$ ؛ درنتیجه $x \in nE$. بنابراین،

$$B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} nE.$$

دست کم یکی از nEها از رستهٔ دوم در X اند، زیرا این امر در مورد B صادق است. چون $x \to nx$ یک همانریختی از X به روی X است، E خود از رستهٔ دوم در X می‌باشد. ولی E بسته است زیرا هر Λ پیوسته می‌باشد. بنابراین E دارای نقطهٔ درونی x می‌باشد. در این صورت $x - E$ شامل یک همسایگی مانند V از ۰ در X است، و به ازای هر $\Lambda \in \Gamma$،

$$\Lambda(V) \subset \Lambda x - \Lambda(E) \subset \overline{U} - \overline{U} \subset W.$$

این ثابت می‌کند که Γ همپیوسته است. بنابر قضیهٔ ۴.۲، Γ به طور یکنواخت کراندار است؛ به‌خصوص، هر $\Gamma(x)$ در Y کراندار می‌باشد. بنابراین $B=X$.

در بسیاری از کاربردها، فرض از رستهٔ دوم بودن B نتیجه‌ای از قضیهٔ بئر است. به

عنوان مثال، F- فضاها از رستهٔ دوم می‌باشند. این امر نتیجهٔ زیر از قضیهٔ باناخ-اشتاین‌هاوس را به دست می‌دهد:

۶.۲ قضیه. *هرگاه Γ گردایه‌ای از نگاشتهای خطی پیوسته از F- فضای X به توی فضای‌برداری توپولوژیک Y بوده و مجموعه‌های*

$$\Gamma(x) = \{\Lambda x : \Lambda \in \Gamma\}$$

به ازای هر $x \in X$ در Y کراندار باشند، آنگاه Γ همپیوسته است.

به طور خلاصه، کرانداری نقطه به نقطه کرانداری یکنواخت را ایجاب می‌کند(قضیهٔ ۴.۲).

به عنوان حالت خاصی از قضیهٔ ۶.۲، فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ بوده و

$$\text{به ازای هر } x \in X،\quad \sup_{\Lambda \in \Gamma} \|\Lambda x\| < \infty \tag{۱}$$

نتیجه آن است که عددی مانند $M < \infty$ وجود دارد به طوری که

$$\text{اگر } \|x\| \le ۱ \text{ و } \Lambda \in \Gamma،\quad \|\Lambda x\| \le M. \tag{۲}$$

بنابراین،

$$\text{اگر } x \in X \text{ و } \Lambda \in \Gamma،\quad \|\Lambda x\| \le M\|x\|. \tag{۳}$$

قضیهٔ زیر پیوستگی حدود دنباله‌ها از نگاشتهای خطی پیوسته را به ثبوت می‌رساند:

۷.۲ قضیه. *فرض کنیم X و Y دو فضای‌برداری توپولوژیک بوده و $\{\Lambda_n\}$ دنباله‌ای از نگاشتهای خطی پیوسته از X به توی Y باشد.*

(آ) هرگاه C مجموعهٔ تمام $x \in X$هایی باشد که $\{\Lambda_n x\}$ یک دنبالهٔ کشی در Y است و C از رستهٔ دوم در X باشد، آنگاه $C=X$.

(ب) هرگاه L مجموعهٔ تمام $x \in X$هایی باشد که در آنها

$$\Lambda x = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n x$$

موجود است و نیز L از رستهٔ دوم در X بوده و Y یک F- فضا باشد، آنگاه $L=X$ و $\Lambda: X \to Y$ پیوسته است.

برهان. (آ) چون دنباله‌های کشی کراندارند (بخش ۲۹.۱)، قضیهٔ باناخ- اشتاین‌هاوس حکم می‌کند که $\{\Lambda_n\}$ همپیوسته است.

به آسانی معلوم می‌شود که C زیرفضای X است. لذا C چگال می‌باشد. (درغیراین‌صورت، $\overline{C}$ زیرفضای حقیقی X است؛ زیرفضاهای حقیقی درون تهی دارند؛ لذا $\overline{C}$ از رستهٔ اول می‌باشد.)

$x \in X$ را ثابت می‌گیریم. فرض کنیم W یک همسایگی ۰ در Y باشد. چون $\{\Lambda_n\}$ همپیوسته است، یک همسایگی مانند V از ۰ در X هست به‌طوری که به ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$ ، $\Lambda_n(V) \subset W$. چون C چگال است، $x' \in C \cap (x+V)$ ای وجود دارد. اگر n و m آنقدر بزرگ باشند که

$$\Lambda_n x' - \Lambda_m x' \in W,$$

اتحاد

$$(\Lambda_n - \Lambda_m)x = \Lambda_n(x - x') + (\Lambda_n - \Lambda_m)x' + \Lambda_m(x' - x)$$

نشان می‌دهد که $\Lambda_n x - \Lambda_m x \in W + W + W$. درنتیجه، $\{\Lambda_n x\}$ یک دنبالهٔ‌کشی در Y است، و $x \in C$.

(ب) تمامیت Y ایجاب می‌کند که $L=C$. لذا، طبق قسمت (آ)، $L=X$. اگر V و W همانند فوق باشند، شمول $\Lambda_n(V) \subset W$، که به ازای هر n معتبر است، اینک ایجاب می‌کند که $\Lambda(V) \subset \overline{W}$. لذا Λ پیوسته می‌باشد.

مفروضات (ب) در قضیهٔ ۷.۲ را می‌توان به طرق مختلف تعدیل کرد. در زیر صورتی از آن که به آسانی به یاد می‌آید دیده می‌شود.

۸.۲ قضیه. ***هرگاه $\{\Lambda_n\}$ دنباله‌ای از نگاشتهای خطی پیوسته از F- فضای X به توی فضای‌برداری توپولوژیک Y بوده و***

$$\Lambda x = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n x$$

به ازای هر $x \in X$ موجودباشد، آنگاه Λ پیوسته می‌باشد.

برهان. قضیهٔ ۶.۲ ایجاب می‌کند که $\{\Lambda_n\}$ همپیوسته است. بنابراین، اگر W یک

همسایگی $\circ$ در Y باشد، به ازای هر n و همسایگیی مانند V از $\circ$ در X داریم $\Lambda_n(V) \subset W$. پس نتیجه می‌شود که $\Lambda(V) \subset \overline{W}$. لذا Λ (که به‌وضوح خطی است) پیوسته می‌باشد.

در روایت زیر از قضیهٔ باناخ - اشتاین‌هاوس، استدلال رسته‌ای به جای یک فضای متری تام در مورد یک مجموعهٔ فشرده به کار رفته است. در اینجا تحدب نیز به نحوی اساسی وارد کار می‌شود (تمرین ۸).

۹.۲ قضیه. ***فرض کنیم X و Y دو فضای‌برداری توپولوژیک بوده، K یک مجموعهٔ محدب فشرده در X باشد، Γ گردایه‌ای از نگاشتهای خطی پیوسته از X به توی Y باشد، و مدارهای***

$$\Gamma(x) = \{\Lambda x : \Lambda \in \Gamma\}$$

به ازای هر $x \in K$ زیرمجموعه‌های کراندار از Y باشند.

در این صورت یک مجموعهٔ کراندار مانند $B \subset Y$ هست به‌طوری که به ازای هر $\Lambda \in \Gamma$، $\Lambda(K) \subset B$.

برهان. فرض کنیم B اجتماع تمام مجموعه‌های $\Gamma(x)$ به ازای $x \in K$ باشد. همسایگیهای در حال تعادل W و U از $\circ$ در Y را طوری اختیار می‌کنیم که $\overline{U} + \overline{U} \subset W$. قرار می‌دهیم

$$E = \bigcap_{\Lambda \in \Gamma} \Lambda^{-1}(\overline{U}) . \tag{۱}$$

هرگاه $x \in K$، آنگاه به ازای n ی $\Gamma(x) \subset nU$؛ درنتیجه $x \in nE$. بنابراین

$$K = \bigcup_{n=1}^{\infty} (K \cap nE) . \tag{۲}$$

چون E بسته است، قضیهٔ بئر نشان می‌دهد که $K \cap nE$ دست کم به ازای یک n درون ناتهی (نسبت به K) دارد.

ما چنین n ی را ثابت گرفته، یک نقطهٔ درونی مانند $x_\circ$ از $K \cap nE$ را اختیار کرده، و یک همسایگی در حال تعادل مانند V از $\circ$ را در X طوری می‌گیریم که

$$K \cap \left(x_\circ + V\right) \subset nE, \tag{۳}$$

و $p > 1$ ای را طوری اختیار می‌کنیم که

$$K \subset x_\circ + pV. \tag{4}$$

چنین p وجود دارد زیرا K فشرده است.

حال اگر x نقطهٔ دلخواهی از K بوده و

$$z = (1 - p^{-1})x_\circ + p^{-1}x, \tag{5}$$

$z \in K$ زیرا K محدب است. همچنین، طبق (۴)،

$$z - x_\circ = p^{-1}(x - x_\circ) \in V. \tag{6}$$

لذا، طبق (۳)، $z \in nE$. چون به ازای هر $\Lambda \in \Gamma$، $\Lambda(nE) \subset n\bar{U}$ و نیز $x = pz - (p-1)x_\circ$، داریم

$$\Lambda x \in pn\bar{U} - (p-1)n\bar{U} \subset pn(\bar{U} + \bar{U}) \subset pnW.$$

لذا $B \subset pnW$ که کرانداری B را به ثبوت می‌رساند.

قضیهٔ نگاشت باز

۱۰.۲ نگاشتهای باز. فرض کنیم f، S را به توی T بنگارد که در آن S و T دو فضای توپولوژیک می‌باشند. گوییم ***f* در نقطهٔ $p \in S$ باز است** اگر هروقت V یک همسایگی p باشد، $f(V)$ شامل همسایگیی از $f(p)$ باشد. همچنین گوییم ***f* باز** است اگر هروقت U در S باز باشد، $f(U)$ در T باز باشد.

واضح است که f باز است اگر و فقط اگر در هر نقطه از S باز باشد. به خاطر پایایی توپولوژیهای برداری، نتیجه می‌شود که هر نگاشت خطی از یک فضای‌برداری توپولوژیک به توی دیگری باز است اگر و فقط اگر در مبدأ باز باشد.

همچنین متذکر می‌شویم که نگاشت پیوستهٔ یک به یک f از S به روی T درست وقتی همانریختی است که f باز باشد.

۱۱.۲ قضیهٔ نگاشت باز. *فرض کنیم*

(آ) X یک F- فضا باشد؛

(ب) Y یک فضای‌برداری توپولوژیک باشد؛

(پ) $\Lambda: X \to Y$ پیوسته و خطی باشد؛ و

(ت) $\Lambda(X)$ از رستهٔ دوم در Y باشد.

در این‌صورت

(یک) $\Lambda(X)=Y$؛

(دو) Λ یک نگاشت باز است؛ و

(سه) Y یک F- فضا می‌باشد.

برهان. توجه کنید که (دو) حکم (یک) را ایجاب می‌کند زیرا Y تنها زیرفضای باز Y می‌باشد. برای اثبات (دو)، فرض کنیم V یک همسایگی ۰ در X باشد. باید نشان دهیم که $\Lambda(V)$ شامل یک همسایگی ۰ در Y است.

فرض کنیم d یک متر پایا بر X باشد که با توپولوژی X سازگار است. تعریف می‌کنیم

$$V_n=\{x:d(x,0)<2^{-n}r\}\quad (n=0,1,2,\ldots) \tag{1}$$

که در آن $r>0$ آنقدر کوچک است که $V_0\subset V$. ثابت می‌کنیم همسایگیی مانند W از ۰ در Y در

$$W\subset\overline{\Lambda(V_1)}\subset\Lambda(V) \tag{2}$$

صدق می‌کند.

چون $V_1\supset V_2-V_2$، حکم (ب) قضیهٔ ۱۳.۱ ایجاب می‌کند که

$$\overline{\Lambda(V_1)}\supset\overline{\Lambda(V_2)-\Lambda(V_2)}\supset\overline{\Lambda(V_2)}-\overline{\Lambda(V_2)}. \tag{3}$$

بنابراین، اولین قسمت (۲) در صورتی ثابت می‌شود که بتوان نشان داد که $\overline{\Lambda(V_2)}$ درون ناتهی دارد. اما

$$\Lambda(X)=\bigcup_{k=1}^{\infty}k\Lambda(V_2) \tag{4}$$

زیرا V_2 یک همسایگی از ۰است. لذا دست کم یک $k\Lambda(V_2)$ از رستهٔ دوم در Y است. چون $y\to ky$ یک همانریختی از Y به روی Y است، $\Lambda(V_2)$ از رستهٔ دوم در Y می‌باشد. بنابراین، بست آن درون ناتهی خواهدداشت.

برای اثبات دومین شمول در (۲)، $y_1\in\overline{\Lambda(V_1)}$ را ثابت می‌گیریم. فرض کنیم $n\geq 1$ و y_n در $\overline{\Lambda(V_n)}$ اختیار شده باشد. آنچه هم اکنون برای V_1 ثابت شد برای V_{n+1} نیز

برقرار است؛ درنتیجه $\overline{\Lambda(V_{n+1})}$ شامل یک همسایگی ۰ می‌باشد. لذا داریم

$$\left(y_n - \overline{\Lambda(V_{n+1})}\right) \cap \Lambda(V_n) \neq \varnothing . \tag{5}$$

این می‌گوید که $x_n \in V_n$ی وجود دارد به‌طوری که

$$\Lambda x_n \in y_n - \overline{\Lambda(V_{n+1})} . \tag{6}$$

قرار می‌دهیم $y_{n+1} = y_n - \Lambda x_n$. دراین‌صورت $y_{n+1} \in \overline{\Lambda(V_{n+1})}$ و ساختن به پیش می‌رود.

چون به ازای $n = 1,2,3,\ldots$ ، $d(x_n, 0) < 2^{-n} r$، مجموعهای $x_1 + \ldots + x_n$ یک دنبالهٔ‌کشی تشکیل می‌دهند که (طبق تمامیت X) به $x \in X$ی که $d(x,0) < r$ همگراست. لذا $x \in V$. چون

$$\sum_{n=1}^{m} \Lambda x_n = \sum_{n=1}^{m} \left(y_n - y_{n+1}\right) = y_1 - y_{m+1}, \tag{7}$$

و چون (بنا بر پیوستگی Λ) وقتی $m \to \infty$، $y_{m+1} \to 0$، نتیجه می‌گیریم که $y_1 = \Lambda x \in \Lambda(V)$. این قسمت دوم (۲) را به ما می‌دهد، و قسمت (دو) ثابت خواهدشد.

قضیهٔ ۴۱.۱ نشان می‌دهد که اگر N فضای پوچ Λ باشد، X/N یک F- فضاست. لذا اگر یک یکریختی مانند f از X/N به روی Y نشان دهیم که همانریختی نیز باشد، قسمت (سه) نتیجه خواهدشد. این کار را می‌توان با تعریف

$$f(x+N) = \Lambda x \quad (x \in X) \tag{8}$$

انجام داد. بدیهی است که این f یک یکریختی است و $\Lambda x = f(\pi(x))$ که درآن π نگاشت خارج قسمتی توصیف شده در بخش ۴۰.۱ است. هرگاه V در Y باز باشد، آنگاه

$$f^{-1}(V) = \pi\left(\Lambda^{-1}(V)\right) \tag{9}$$

باز است، زیرا Λ پیوسته و π باز می‌باشد. لذا f پیوسته خواهدبود. هرگاه E در X/N باز باشد، آنگاه

$$f(E) = \Lambda\left(\pi^{-1}(E)\right) \tag{10}$$

باز است زیرا π پیوسته و Λ باز است. درنتیجه، f یک همانریختی می‌باشد.

۱۲.۲ چند نتیجه

(آ) هرگاه Λ یک نگاشت خطی پیوسته از F - فضـــای X بــه روی F- فضــای Y باشد، آنگاه Λ باز است.

(ب) هرگاه Λ در قسمت (آ) صدق کرده و یک به یک باشد، آنگـــاه $\Lambda^{-1}:Y \to X$ پیوسته می‌باشد.

(پ) هرگاه X و Y دو فضای باناخ بوده و $\Lambda:X \to Y$ پیوسته، خطی، یک بـــه یـک وبرو باشد، آنگاه اعداد حقیقی مثبتی مانند a و b وجود دارند به‌طوری کـــه بـــه ازای هر $x \in X$،

$$a\|x\| \le \|\Lambda x\| \le b\|x\| .$$

(ت) هرگـــاه $\tau_1 \subset \tau_2$ دو توپولوژی‌بـــرداری بـــر فضـــای‌برداری X بـــوده و (X,τ_1) و (X,τ_2) هر دو F- فضا باشند، آنگاه $\tau_1 = \tau_2$.

برهان. حکم (آ) از قضیهٔ ۱۱.۲ و قضیهٔ بئر نتیجه می‌شود زیرا Y اینک از رســتهٔ دوم در خودش است. حکم(ب) نتیجهٔ فوری (آ) است، و حکم (پ) از (ب) حاصل می‌شــود. دو نامساوی مذکور در(پ) مبین پیوستگی Λ^{-1} و Λاند. حکم (ت) با اعمال (ب) برنگاشـــت همانی از (X,τ_2)به روی (X,τ_1) به‌دست می‌آید.

قضیهٔ گراف بسته

۱۳.۲ گرافها. اگر X و Y مجموعه بوده و f مجموعهٔ X را به توی Y بنگـــارد، **گـــراف** f مجموعهٔ تمام نقاط $(x,f(x))$ در حـــاصل‌ضرب دکـارتی $X \times Y$ اســـت. اگـــر X و Y دو فضـــای توپولوژیـــک بـــوده، $X \times Y$ توپولـــوژی حـــاصل‌ضربی معمولـــی داشـــته باشـــد (کوچکترین توپولوژیی که شامل تمام مجموعه‌های $U \times V$است که U و V به ترتیب در Xو Y بازند)، و اگر $f:X \to Y$ پیوسته باشد، انتظار است که گراف f در $X \times Y$ بسته باشد (قضیهٔ ۱۴.۲). برای نگاشتهای خطی بین F- فضاها، این شـــرط لازم بدیهـــی بـــرای اطمینان از پیوستگی کافی نیز هست. این نکتهٔ مهم در قضیهٔ ۱۵.۲ ثابت شده است.

۱٤.۲ قضیه. ***هرگاه X یک فضای توپولوژیک، Y یک فضای هاسدورف، و $f:X\to Y$ پیوسته باشد، آنگاه گراف G ی f بسته می‌باشد.***

برهان. فرض کنیم Ω متمم G در $X\times Y$ باشد. نقطهٔ $(x_\circ,y_\circ)\in\Omega$ را ثابت می‌گیریم. در این‌صورت $y_\circ\neq f(x_\circ)$. لذا $y_\circ$ و $f(x_\circ)$ همسایگیهای از هم‌جدایی مانند V و W در Y دارند. چون f پیوسته است، x_0 همسایگیی مانند U دارد به طوری‌که $f(U)\subset W$. لذا همسایگی $U\times V$ از (x_0,y_0) در Ω قراردارد. این باز بودن Ω را ثابت می‌کند.

تذکر. فرض هاسدورف بودن Y را نمی‌توان حذف کرد. برای مشاهدهٔ این امر، فضای توپولوژیک دلخواه X را در نظرگرفته و فرض می‌کنیم $f:X\to X$ همانی باشد. گراف آن قطر

$$D=\{(x,x):x\in X\}\subset X\times X$$

می‌باشد. عبارت "D در $X\times X$ بسته است" بیان دیگری است از اصل موضوع جداسازی هاسدورف.

۱٥.۲ قضیهٔ گراف بسته. ***فرض کنیم***

(آ) X و Y دو F - فضا بوده؛

(ب) $\Lambda:X\to Y$ خطی باشد؛

(پ) $G=\{(x,\Lambda x):x\in X\}$ در $X\times Y$ بسته باشد.

در این صورت Λ پیوسته می‌باشد.

برهان. اگر جمع و ضرب اسکالر مؤلفه به مؤلفه تعریف شوند:

$$\alpha(x_1,y_1)+\beta(x_2,y_2)=(\alpha x_1+\beta x_2,\alpha y_1+\beta y_2)\ ,$$

$X\times Y$ یک فضای‌برداری خواهدشد. مترهای پایای تام d_X و d_Y به ترتیب بر X و Y وجود دارند که توپولوژیهای آنها را القا می‌کنند. هرگاه

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=d_X(x_1,x_2)+d_Y(y_1,y_2),$$

آنگاه d یک متر پایا بر $X\times Y$ است که با توپولوژی حاصل ضربی‌اش سازگار بوده و

$X \times Y$ را به یک F- فضا تبدیل می‌کند. (تحقیق ساده ولی خسته‌کنندهٔ مورد لزوم در اینجا به عنوان تمرین گذارده می‌شود.)

چون Λ خطی است، G زیرفضایی از $X \times Y$ است. زیرمجموعه‌های بستهٔ فضاهای متری تام، تام‌اند. بنابراین G یک F-فضا می‌باشد.

$\pi_1 : G \to X$ و $\pi_2 : X \times Y \to Y$ را با

$$\pi_1(x, \Lambda x) = x \quad \text{و} \quad \pi_2(x, y) = y$$

تعریف می‌کنیم. π_1 یک نگاشت یک به‌یک خطی پیوسته از F- فضای G بــه روی F- فضای X است. پس از قضیهٔ نگاشت باز نتیجه می‌شود که

$$\pi_1^{-1} : X \to G$$

پیوسته می‌باشد. ولی $\Lambda = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ و π_2 پیوسته‌اند. لذا Λ پیوسته می‌باشد.

تبصره .فرض مهم (پ) ، که G بسته است، اغلب درکاربردها با نشان دادن اینکه Λ در خاصیت (پَ) زیر صدق می‌کند تحقیق می‌شود:

(پَ) هرگاه $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد به‌طوری که حدود

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{و} \quad y = \lim_{n\to\infty} \Lambda x_n$$

موجود باشند، آنگاه $y = \Lambda x$.

حال ثابت می‌کنیم (پَ) حکم (پ) را ایجاب می‌کند. نقطهٔ حدی (x, y) را از G اختیار می‌کنیم. چون $X \times Y$ متریپذیراست، به ازای دنباله‌ای چون $\{x_n\}$،

$$(x, y) = \lim_{n\to\infty} \left(x_n, \Lambda x_n\right).$$

از تعریف توپولوژی حاصل‌ضربی نتیجه می‌شود که $x_n \to x$ و $\Lambda x_n \to y$. لذا، طبق (پَ)، $y = \Lambda x$؛ و درنتیجه $(x, y) \in G$ و G بسته است.

به همین سادگی می‌توان ثابت کرد که (پ) حکم (پَ) را ایجاب می‌کند.

نگاشتهای دوخطی

۱۶.۲ چند تعریف. فرض کنیم X، Y ، و Z فضاهایی برداری بوده و B، $X \times Y$ را به توی Z بنگارد. به هر $x \in X$ و هر $y \in Y$ نگاشتهای

$$B^y : X \to Z \quad \text{و} \quad B_x : Y \to Z$$

را با تعریف

$$B_x(y) = B(x, y) = B^y(x)$$

مربوط می‌سازیم. گوییم B **دوخطی** است اگر هر B_x و هر B^y خطی باشد.

هرگاه X، Y، و Z فضاهایی برداری توپولوژیک بوده و هر B_x و هر B^y پیوسته باشد، آنگاه گوییم B **جداگانه پیوسته** است. هرگاه B (نسبت به توپولوژی حاصل ضربی $X \times Y$) پیوسته باشد، آنگاه B به وضوح جداگانه پیوسته است. در بعضی حالات، عکس را می‌توان به کمک قضیهٔ باناخ - اشتاین هاوس ثابت کرد.

۱۷.۲ قضیه. ***فرض کنیم $B : X \times Y \to Z$ خطی و جداگانه پیوسته باشد، X یک F-فضا بوده، و Y و Z دو فضای‌برداری توپولوژیک باشند. در این‌صورت، هروقت $x_n \to x_\circ$ در X و $y_n \to y_\circ$ در Y،***

$$B(x_n, y_n) \to B(x_\circ, y_\circ) \text{ در } Z.$$

اگر Y متریذیر باشد، نتیجه می‌شود که B پیوسته است.

برهان. فرض کنیم U و W همسایگیهایی از ۰ در Z باشند به‌طوری که $U + U \subset W$. تعریف می‌کنیم

$$b_n(x) = B(x, y_n) \qquad (x \in X, n = ۱,۲,۳,\ldots).$$

چون B به عنوان تابعی از y پیوسته است،

$$\lim_{n\to\infty} b_n(x) = B(x, y_\circ) \qquad (x \in X).$$

لذا $\{b_n(x)\}$ به ازای هر $x \in X$ زیرمجموعهٔ کرانداری از Z است. چون هر b_n یک نگاشت خطی پیوسته از F-فضای X است، قضیهٔ باناخ - اشتاین‌هاوس ۶.۲ ایجاب می‌کند که $\{b_n\}$ همپیوسته باشد. لذا یک همسایگی مانند V از ۰ در X هست به‌طوری که

$$b_n(V) \subset U (n = ۱,۲,۳,\ldots).$$

توجه کنید که

$$B(x_n, y_n) - B(x_\circ, y_\circ) = b_n(x_n - x_\circ) + B(x_\circ, y_n - y_\circ).$$

هرگاه n به قدرکافی بزرگ باشد، آنگاه (یک) $x_n \in x_\circ + V$؛ درنتیجه $b_n(x_n - x_\circ) \in U$،

و (دو) $B(x_\circ, y_n - y_\circ) \in U$، زیرا B نسبت به y پیوسته است و $B(x_\circ, \circ) = \circ$. لذا، به ازای هر n بزرگ،

$$B(x_n, y_n) - B(x_\circ, y_\circ) \in U + U \subset W.$$

این امر رابطهٔ (۱) را به ما می‌دهد.

اگر Y مترپذیر باشد، $X \times Y$ نیز چنین است، و دراین‌صورت پیوستگی B از (۱) حاصل می‌شود. (ر.ک.ضمیمهٔ ض۶.)

تمرینات

۱. اگر X یک فضای‌برداری توپولوژیک با بعد نامتناهی باشد که اجتماع تعدادی شمارشپذیر از زیرفضاهای با بعد متناهی است، ثابت کنید X از رستهٔ اول در خودش می‌باشد. بدین ترتیب ثابت کنید هیچ F–فضای با بعد نامتناهی یک پایهٔ هامل *(Hamel)* شمارشپذیر ندارد.

(مجموعهٔ β یک ***پایهٔ هامل*** برای فضای‌برداری X است اگر β یک زیرمجموعهٔ مستقل خطی ماکزیمال X باشد. به بیان دیگر، β یک پایهٔ هامل است اگر هر $x \in X$ نمایش منحصر به فردی به صورت یک ترکیب خطی ***متناهی*** از عناصر β داشته باشد.)

۲. مجموعه‌های از رستهٔ اول و دوم به معنی توپولوژیک "کوچک" و "بزرگ"اند. این مفاهیم وقتی "کوچک" و "بزرگ" به معنی اندازه تعبیر می‌شوند، حتی وقتی اندازه رابطهٔ نزدیکی با توپولوژی دارد، متفاوتند. برای مشاهدهٔ این امر، زیرمجموعه‌ای از بازهٔ یکه بسازید که از رستهٔ اول بوده ولی اندازهٔ لبگ آن ۱ باشد.

۳. قراردهید $K = [-1, 1]$ و $\mathscr{D}_K$ را همانند بخش ۱.۴۶ (با R به جای R^n) تعریف کنید. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرالپذیر لبگ باشد به‌طوری که

$$\Lambda\phi = \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f_n(t)\phi(t)\,dt$$

به ازای هر $\phi \in \mathscr{D}_K$ موجود باشد. نشان دهید که Λ یک تابعی خطی پیوسته بر $\mathscr{D}_K$ است. همچنین نشان دهید که یک عدد صحیح مثبت مانند p و عددی مانند $M < \infty$ هست به‌طوری که به ازای هر n،

$$\left|\int_{-1}^{1} f_n(t)\phi(t)\,dt\right| \le M \|D^p\phi\|_\infty .$$

به عنوان مثال، اگر $f_n(t) = n^3 t$ بر $[-1/n, 1/n]$ و $\circ$ درجاهای دیگر باشد، نشان دهید

که این کار با $p=1$ میسر است. مثالی بزنید که این کار با $p=2$ میسر ولی با $p=1$ نامیسر باشد.

۴. فرض کنید L^1 و L^2 فضاهای لبگ معمولی بر بازهٔیکه باشند. به سه طریق ثابت کنید L^2 از رستهٔ اول در L^1 است:

(آ) نشان دهید که $\{f:\int|f|^2 \le n\}$ در L^1 بسته است ولی درون تهی دارد؛

(ب) بر $[0,n^{-3}]$ قراردهید $g_n = n$ و نشان دهید که به ازای هر $f \in L^2$ ولی نه به ازای هر $f \in L^1$،

$$\int fg_n \to 0\,;$$

(پ) توجه کنید که نگاشت شمول از L^2 به توی L^1 پیوسته است ولی برونیست.

اگر $p<q$، همین کار را برای L^p و L^q انجام دهید.

۵. نتایج شبیه نتایج مذکور در تمرین ۴ را برای فضاهای ℓ^p، که ℓ^p فضای باناخ تمام توابع مختلط x بر $\{0,1,2,\cdots\}$ است که نرمشان

$$\|x\|_p = \left\{\sum_{n=0}^{\infty}|x(n)|^p\right\}^{1/p}$$

متناهی است، ثابت نمایید.

۶. ضرایب فوریهٔ *(Fourier)* $\hat{f}(n)$ تابع $f \in L^2(T)$ که (T دایرهٔیکه است) را با

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{i\theta}\right)e^{-in\theta}d\theta$$

به ازای هر $n \in Z$ (اعداد صحیح) تعریف کنید. قرار دهید

$$\Lambda_n f = \sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)$$

و ثابت کنید $\{f \in L^2(T):\ \lim_{n\to\infty}\Lambda_n f$ موجود است$\}$ یک زیرمجموعهٔ چگال از $L^2(t)$ از رستهٔ اول است.

۷. فرض کنید $C(T)$ مجموعهٔ تمام توابع مختلط پیوسته بر دایرهٔیکهٔ T باشد. همچنین $\{\gamma_n\}$ $(n \in Z)$ یک دنبالهٔ مختلط باشد که به هر $f \in C(T)$ یک تابع مانند $\Lambda f \in C(T)$ را مربوط می‌سازد که ضرایب فوریه‌اش عبارتند از

$$(\Lambda f)^{\wedge}(n) = \gamma_n \hat{f}(n) \qquad (n \in Z).$$

(نمادگذاری مانند تمرین ۶ می‌باشد.) ثابت کنید $\{\gamma_n\}$ دارای این خاصیت مضربی است

اگر و فقط اگر یک اندازهٔ بورل مختلط مانند μ بر T باشد به‌طوری که

$$\gamma_n = \int e^{-in\theta} d\mu(\theta) \qquad (n \in Z).$$

پیشنهاد. با نرم سوپرمم، $C(T)$ یک فضای باناخ است. قضیهٔ گراف بسته را به کار گیرید. سپس تابعی

$$f \to (\Lambda f)(۱) = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n \hat{f}(n)$$

را در نظر گرفته و قضیهٔ نمایش ریس ($Riesz$) (مرجع [۲۳]، قضیهٔ ۱۹.۶) را به کار برید. (سری فوق ممکن است همگرا نباشد؛ فقط آن را برای چندجمله‌ایهای مثلثاتی به کار برید.)

۸. تابعیهای Λ_m را بر $\ell^۲$ (ر.ک.تمرین۵) با

$$\Lambda_m x = \sum_{n=۱}^{m} n^۲ x(n) \qquad (m = ۱,۲,۳,\ldots)$$

تعریف کنید. همچنین $x_n \in \ell^۲$ را با $x_n(n) = ۱/n$، $x_n(i) = ۰$ اگر $i \neq n$ تعریف کنید. فرض کنید $K \subset \ell^۲$ از ۰، $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، ... تشکیل شده باشد. ثابت کنید K فشرده است. $\Lambda_m x_n$ را حساب کنید. نشان دهید که $\{\Lambda_m x\}$ به ازای هر $x \in K$ کراندار است ولی $\{\Lambda_m x_m\}$ کراندار نیست. لذا تحدب را می‌توان از مفروضات قضیهٔ ۹.۲ حذف کرد.

فرض کنید $c_n > ۰$ چنان باشد که $\sum c_n = ۱$ و $\sum n c_n = \infty$. $x = \sum c_n x_n$ را اختیار کنید و نشان دهید x در غلاف محدب بستهٔ K (طبق تعریف، این بست غلاف محدب می‌باشد) قراردارد و $\{\Lambda_m x\}$کراندار نیست.

نشان دهید که غلاف محدب K بسته نیست.

۹. فرض کنید X، Y، و Z فضاهایی باناخ بوده و

$$B : X \times Y \to Z$$

دوخطی و پیوسته باشد. ثابت کنید $M < \infty$ ی هست به‌طوری که

$$\|B(x,y)\| \leq M\|x\|\|y\| \qquad (x \in X, y \in Y).$$

آیا در اینجا تمامیت لازم است؟

۱۰. ثابت کنید یک نگاشت دوخطی در صورت پیوسته بودن در مبدأ (۰,۰) پیوسته است.

۱۱. تعریف کنید $B(x_۱, x_۲; y) = (x_۱ y, x_۲ y)$ و نشان دهید که B یک نگاشت پیوستهٔ دو خطی از $R^۲ \times R$ به روی $R^۲$ است که در (۱,۱;۰) باز **نیست**. جمیع نقاطی را بیابید که

درآنها این B باز باشد.

۱۲. فرض کنید X فضای نرمدار تمام چندجمله‌ایهای حقیقی یک متغیره باشد با

$$\|f\| = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

قراردهید $B(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ و نشان دهید که B یک تابعی دوخطی بر $X \times X$ است که جداگانه پیوسته است ولی پیوسته نیست.

۱۳. فرض کنید X یک فضای‌برداری توپولوژیک باشد که از رستهٔ دوم در خودش است. همچنین K زیرمجموعهٔ جاذب، محدب، و بسته‌ای از X باشد. ثابت کنید K شامل همسایگیی از ۰ است.

پیشنهاد. ابتدا نشان دهید که $H = K \cap (-K)$ جاذب است. بنا بریک استدلال رسته‌ای، H دارای درون است. سپس از

$$2H = H + H = H - H$$

استفاده کنید. نشان دهید که نتیجه بدون تحدب K، حتی اگر $X = R^2$، نادرست است. نشان دهید که اگر X به وسیلهٔ نرم L^1 (مانند تمرین ٤) توپولوژی‌دار شود، نتیجه نادرست می‌باشد.

۱٤. (آ) فرض کنید X و Y دوفضای‌برداری توپولوژیک بوده، $\{\Lambda_n\}$ یک دنبالهٔ همپیوسته از نگاشتهای خطی از X به توی Y باشد، و C مجموعهٔ تمام xهایی باشد که در آنها $\{\Lambda_n(x)\}$ یک دنبالهٔکشی در Y است. ثابت کنید C زیرفضای بسته‌ای از X است.

(ب) فرض کنید، علاوه بر مفروضات (آ)، Y یک F - فضا بوده و $\{\Lambda_n(x)\}$ در زیرمجموعهٔ چگالی از X همگرا باشد. در این‌صورت ثابت کنید

$$\Lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n(x)$$

به ازای هر $x \in X$ موجود بوده و Λ پیوسته می‌باشد.

۱۵. فرض کنید X یک F - فضا بوده و Y زیرفضایی از X باشد که متممش از رستهٔ اول است. ثابت کنید $Y = X$. ***راهنمایی***. Y باید $x+Y$ را به ازای هر $x \in X$ قطع کند.

۱٦. فرض کنید X و K دو فضای‌متری بوده، K فشرده باشد، و گراف $f: X \to K$ زیرمجموعهٔ بسته‌ای از $X \times K$ باشد. ثابت کنید f پیوسته است. (این شبیه قضیهٔ ۲.۱۵ است ولی بسیار آسانتر.) نشان دهید که فشردگی K را، حتی اگر X فشرده باشد، نمی‌توان از مفروضات حذف کرد.

فصل ۳

تحدب

در این فصل عمدتاً (البته نه منحصراً) با مهمترین رده از فضاهای برداری توپولوژیک، یعنی فضاهای‌برداری توپولوژیک موضعاً محدب، سروکار خواهیم داشت. نکات مهم، از دیدگاههای نظری و عملی، عبارتند از: (آ) قضایای هان (*Hahn*)- باناخ (که منبعی از تابعیهای خطی پیوسته را که برای یک نظریهٔ دوگانی بسیار وسیع کافی است به دست می‌دهند)؛ (ب) قضیهٔ فشردگی باناخ - آلوگلو (*Alaoglu*) در فضاهای دوگان؛ و (پ) قضیهٔ کرین- میلمن (*Krein- Milman*) راجع به نقاط اکستریم. کاربردها در مسائل مختلف آنالیز را تا فصل ۵ به تعویق می‌اندازیم.

قضایای هان - باناخ

منظور از قضایا بدان خاطر است که معمولاً اصطلاح "قضیهٔ هان- باناخ" به چند نتیجه که رابطهٔ نزدیکی با هم دارند اطلاق می‌شود. از جمله این نتایج عبارتند از ***قضایای توسیع تسلطی*** ۲.۳ و ۳.۳ (که در آنها هیچ توپولوژیی در کارنیست)، ***قضیهٔ جداسازی***

٤.۳، و ***قضیهٔ توسیع پیوسته*** ٦.۳. قضیهٔ جداسازی دیگر (که ٤.۳ را ایجاب می‌کند) در تمرین ۳ عنوان شده است.

۱.۳ چند تعریف. ***فضای دوگان*** فضای‌برداری توپولوژیک X عبارت است از فضای‌برداری X^* که عنصرهایش تابعیهای خطی **پیوسته** بر X اند.

توجه کنید که جمع و ضرب اسکالر در X^* به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$(\Lambda_1 + \Lambda_2)x = \Lambda_1 x + \Lambda_2 x$ و $(\alpha\Lambda)x = \alpha . \Lambda x$.

واضح است که این اعمال X^* را به یک فضای‌برداری بدل می‌سازند.

لازم است که از این مطلب واضح که هر فضای‌برداری مختلط یک فضای‌برداری حقیقی نیز هست استفاده شود، و شایسته است که از اصطلاح (موقتی) زیر استفاده نماییم: یک تابعی جمعی Λ برفضای‌برداری مختلط X را ***حقیقی - خطی (مختلط - خطی)*** گوییم اگر به ازای هر $x \in X$ و هر اسکالر حقیقی (مختلط) α، $\Lambda(\alpha x) = \alpha\Lambda x$. این اصطلاح موقتی بر قاعدهٔ ما مبنی بر اینکه هر حکم راجع به فضاهای‌برداری که در آن میدان اسکالر ذکر نشده باشد در هر دو حالت به کار می‌رود اثری ندارد و این قاعده به قوت خود باقی است.

هرگاه u قسمت حقیقی یک تابعی مختلط - خطی f بر X باشد، آنگاه u حقیقی - خطی است و

$$f(x) = u(x) - iu(ix)(x \in X) \tag{۱}$$

زیرا به ازای هر $z \in \mathbb{C}$، $z = \operatorname{Re} z - i\operatorname{Re}(iz)$.

به عکس، اگر $u: X \to R$ حقیقی - خطی بر فضای‌برداری مختلط X بوده و f با (۱) تعریف شده باشد، یک محاسبهٔ سر راست نشان می‌دهد که f مختلط - خطی می‌باشد.

حال فرض کنیم X یک فضای‌برداری توپولوژیک مختلط باشد. نکات فوق ایجاب می‌کنند که یک تابعی مختلط - خطی بر X در X^* است اگر و فقط اگر قسمت

حقیقی‌اش پیوسته باشد، و هر $u:X\to R$ حقیقی - خطی پیوسته قسمت حقیقی یک $f\in X^*$ منحصر به فرد است.

۲.۳ قضیه. فرض کنیم

(آ) M زیرفضایی از فضای‌برداری حقیقی X بوده؛

(ب) $p:X\to R$ در روابط

$$p(x+y)\le p(x)+p(y) \quad \text{و} \quad p(tx)=p(x)$$

به ازای $x\in X$، $y\in X$، و $t\ge 0$ صدق کند؛

(پ) $f:M\to R$ خطی بوده و $f(x)\le p(x)$ بر M.

در این صورت یک $\Lambda:X\to R$ خطی هست به طوری‌که

$$\Lambda x=f(x) \qquad (x\in M)$$

و

$$-p(-x)\le \Lambda x\le p(x) \qquad (x\in X)\,.$$

برهان . اگر $M\ne X$، $x_1\in X$ که $x_1\notin M$ را اختیار می‌کنیم، و تعریف می‌کنیم

$$M_1=\{x+tx_1 : t\in R، x\in M\}\,.$$

واضح است که M_1 یک فضای‌برداری است. چون

$$f(x)+f(y)=f(x+y)\le p(x+y)\le p(x-x_1)+p(x_1+y),$$

داریم

$$f(x)-p(x-x_1)\le p(y+x_1)-f(y) \qquad (x,y\in M)\,. \tag{۱}$$

فرض کنیم α کوچکترین کران بالایی طرف چپ (۱) باشد وقتی x روی M تغییر می‌کند. در این‌صورت

$$f(x)-\alpha\le p(x-x_1) \qquad (x\in M) \tag{۲}$$

و

$$f(y)+\alpha \le p(y+x_1) \quad (y\in M). \tag{۳}$$

f_1 را بر M_1 به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_1(x+tx_1)=f(x)+t\alpha \quad (x\in M, t\in R). \tag{٤}$$

در این‌صورت $f_1=f$ بر M، و f_1 خطی بر M_1 می‌باشد.

$t>0$ را اختیار کرده، x را در (۲) با $t^{-1}x$ عوض کرده، y را در (۳) با $t^{-1}y$ عوض نموده، و نامساویهای حاصل را در t ضرب می‌کنیم. این کار در تلفیق با (٤) ثابت می‌کند که $f_1\le p$ بر M_1.

قسمت دوم برهان را می‌توان با هر روش استقرای ترانسفینی مطلوب انجام داد. می‌توان از خوش ترتیبی یا لم‌زرن (*Zorn*)، یا قضیهٔ ماکزیمالی هاسدورف استفاده کرد.

فرض کنیم $\mathscr{P}$ گردایهٔ تمام جفتهای مرتب (M',f') باشد که در آنها M' زیرفضایی از X است که شامل M بوده و f' یک تابعی خطی بر M' باشد که f را وسعت می‌دهد و در $f'\le p$ بر M' صدق می‌کند. $\mathscr{P}$ را به این نحو جزئی مرتب می‌کنیم که می‌گوییم $(M',f')\le(M'',f'')$ یعنی $M'\subset M''$ و $f''=f'$ بر M'. بنابر قضیهٔ ماکزیمالی هاسدورف یک زیرگردایهٔ کلی مرتب ماکزیمال مانند Ω از $\mathscr{P}$ وجوددارد.

فرض کنیم Φ گردایهٔ تمام M' هایی باشد که $(M',f')\in\Omega$. در این صورت Φ به وسیلهٔ شمول مجموعه‌ها کلی مرتب است، و لذا اجتماع $\widetilde{M}$ تمام اعضای Φ زیرفضایی از X است. هرگاه $x\in\widetilde{M}$، آنگاه به ازای $M'\in\Phi$ ی، $x\in M'$. تعریف می‌کنیم $\Lambda x=f'(x)$ که درآن f' تابعی است که درجفت $(M',f')\in\Omega$ آمده است.

حال اثبات خوش تعریف بودن Λ بر $\widetilde{M}$، خطی بودن Λ، و اینکه $\Lambda\le p$ آسان است. اگر $\widetilde{M}$ زیرفضای حقیقی X می‌بود، قسمت اول برهان توسیع وسیعتری از Λ را به دست می‌داد، و این ماکزیمالی Ω را نقض می‌کرد. بنابراین $\widetilde{M}=X$.

بالأخره، نامساوی $\Lambda\le p$ ایجاب می‌کند که به ازای هر $x\in X$،

$$-p(-x)\le -\Lambda(-x)=\Lambda x.$$

این برهان را کامل خواهد ساخت.

۳.۳ قضیه. *فرض کنیم M زیرفضایی از فضای‌برداری X باشد، p یک نیم نرم بر X بوده، و f یک تابعی خطی بر M باشد به‌طوری که*

$$|f(x)| \leq p(x) \qquad (x \in M).$$

در این صورت f به یک تابعی خطی مانند Λ بر X توسیع می‌یابد که در

$$|\Lambda x| \leq p(x) \;\; (x \in X)$$

صدق می‌کند.

برهان. اگر میدان اسکالر R باشد، این در قضیهٔ ۲.۳ جای دارد زیرا p در این حالت در $p(-x) = p(x)$ صدق می‌کند.

فرض کنیم میدان اسکالر $\mathbb{C}$ باشد. قرار می‌دهیم $u = \operatorname{Re} f$. بنابر قضیهٔ ۲.۳، یک Uی حقیقی - خطی بر X هست به‌طوری که $U = u$ بر M و $U \leq p$ بر X. فرض کنیم Λ تابعی مختلط - خطی بر X باشد که قسمت حقیقی‌اش U است. بحث مطرح شده در بخش ۱.۳ ایجاب می‌کند که $\Lambda = f$ بر M.

بالأخره، به هر $x \in X$ یک $\alpha \in \mathbb{C}$ که $|\alpha| = ۱$ چنان نظیر است که $\alpha \Lambda x = |\Lambda x|$. لذا

$$|\Lambda x| = \Lambda(\alpha x) = U(\alpha x) \leq p(\alpha x) = p(x).$$

نتیجه. *اگر X یک فضای نرمدار بوده و $x_\circ \in X$، $\Lambda \in X^*$ای هست به طوری‌که $\Lambda x_\circ = \|x_\circ\|$ و به ازای هر $x \in X$، $|\Lambda x| \leq \|x\|$.*

برهان. اگر $x_\circ = \circ$، $\Lambda = \circ$ را اختیار می‌کنیم. اگر $x_\circ \neq \circ$، قضیهٔ ۳.۳ را به ازای $p(x) = \|x\|$، فضای یک بعدی M تولید شده به وسیلهٔ $x_\circ$، و $f(\alpha x_\circ) = \alpha \|x_\circ\|$ بر M به کار برید.

۴.۳ قضیه. ***فرض کنیم A و B دو مجموعهٔ از هم‌جدا، ناتهی، و محدب در فضای‌برداری توپولوژیک X باشند.***

(آ) اگر A باز باشد، $\Lambda \in X^*$ای و $\gamma \in R$ای وجود دارند به‌طوری که به ازای هر $x \in A$ و هر $y \in B$،

$$\mathbf{Re}\,\Lambda x < \gamma \leq \mathbf{Re}\,\Lambda y.$$

(ب) هرگاه A فشرده، B بسته، و X موضعاً محدب باشد، آنگاه $\Lambda \in X^*$، $\gamma_1 \in R$، و $\gamma_2 \in R$ ای وجود دارند به طوری که به ازای هر $x \in A$ و هر $y \in B$،

$$\mathbf{Re}\,\Lambda x < \gamma_1 < \gamma_2 < \mathbf{Re}\,\Lambda y\ .$$

توجه کنید که این قضیه بدون تصریح میدان اسکالر ذکر شده است؛ اگر این میدان R باشد، البته داریم $\mathrm{Re}\,\Lambda = \Lambda$.

برهان. کافی است قضیه را برای اسکالرهای حقیقی ثابت کنیم. زیرا هرگاه میدان اسکالر $\mathbb{C}$ بوده و حالت حقیقی ثابت شده باشد، آنگاه یک Λ_1 حقیقی - خطی پیوسته بر X هست که جداسازی مطلوب را به دست می‌دهد؛ هرگاه Λ تابعی مختلط - خطی منحصر به فرد بر X باشد که قسمت حقیقی‌اش Λ_1 است، آنگاه $\Lambda \in X^*$. (ر.ک.بخش ۱.۳.) فرض کنیم اسکالرها حقیقی‌اند.

(آ) $a_\circ \in A$ و $b_\circ \in B$ را ثابت می‌گیریم. قرار می‌دهیم $x_\circ = b_\circ - a_\circ$ و $C = A - B + x_\circ$. در این‌صورت C یک همسایگی محدب $\circ$ در X است. فرض کنیم p تابعی مینکوفسکی C باشد. بنابرقضیهٔ ۳۵.۱، p در فرض (ب) قضیه ۳.۲ صدق می‌کند. چون $A \cap B = \varnothing$، $x_\circ \notin C$؛ و درنتیجه $p(x_\circ) \geq 1$.

روی زیرفضای M از X تولید شده به وسیلهٔ $x_\circ$ تعریف می‌کنیم $f(tx_\circ) = t$. هرگاه $t \geq \circ$، آنگاه

$$f(tx_\circ) = t \leq tp(x_\circ) = p(tx_\circ);$$

هرگاه $t<0$، آنگاه $f(tx_0)<0\le p(tx_0)$. لذا $f\le p$ بر M. بنابر قضیهٔ ۲.۳، f به یک تابعی خطی Λ بر X توسیع می‌یابد که در $\Lambda\le p$ نیز صدق می‌کند. به‌خصوص، $\Lambda\le 1$ بر C؛ درنتیجه $\Lambda\ge -1$ بر $-C$؛ لذا $|\Lambda|\le 1$ بر همسایگی $C\cap(-C)$ از 0. بنابر قضیهٔ ۱۸.۱، $\Lambda\in X^*$.

حال اگر $a\in A$ و $b\in B$، داریم

$$\Lambda a-\Lambda b+1=\Lambda(a-b+x_0)\le p(a-b+x_0)<1$$

زیرا $\Lambda x_0=1$، $a-b+x_0\in c$، و C باز است. لذا $\Lambda a<\Lambda b$.

پس نتیجه می‌شود که $\Lambda(A)$ و $\Lambda(B)$ زیرمجموعه‌های محدب از هم‌جدایی از R می‌باشند که $\Lambda(A)$ سمت چپ $\Lambda(B)$ است. همچنین، $\Lambda(A)$ یک مجموعهٔ بازاست، زیرا A باز بوده و هرتابعی خطی غیرثابت بر X یک نگاشت باز است. برای به دست آوردن قسمت (آ) فرض می‌کنیم γ نقطهٔ انتهایی راست $\Lambda(A)$ باشد.

(ب) بنابر قضیهٔ ۱۰.۱، یک همسایگی محدب مانند V از 0 در X هست به طوری‌که $(A+V)\cap B=\varnothing$. قسمت (آ) با $A+V$ به جای A نشان می‌دهد که $\Lambda\in X^*$ای هست به طوری‌که $\Lambda(A+V)$ و $\Lambda(B)$ زیرمجموعه‌های محدب ازهم‌جدایی از R اند و $\Lambda(A+V)$ باز و سمت چپ $\Lambda(B)$ می‌باشد. چون $\Lambda(A)$ زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از $\Lambda(A+V)$ است، قسمت (ب) به دست می‌آید.

نتیجه. ***هرگاه X یک فضای موضعاً محدب باشد، آنگاه X^* نقاط بر X را جدا می‌سازد.***

برهان. اگر $x_1\in X$، $x_2\in X$، و $x_1\ne x_2$، قسمت (ب) قضیهٔ ٤.۳ را به ازای $A=\{x_1\}$ و $B=\{x_2\}$ به کار برید.

۵.۳ قضیه. ***فرض کنیم M زیرفضایی از فضای موضعاً محدب X بوده و $x_0\in X$.***

هرگاه $x_\circ$ در بست M نباشد، آنگاه $\Lambda \in X^*$ای هست به‌طوری که $\Lambda x_\circ = ۱$ ولی به ازای هر $x \in M$، $\Lambda x = \circ$.

برهان. بنابرقسمت (ب) قضیهٔ ۴.۳ با $A = \{x_\circ\}$ و $B = \overline{M}$، $\Lambda \in X^*$ای هست به طوری‌که $\Lambda x_\circ$ و $\Lambda(M)$ از هم جدایند. لذا $\Lambda(M)$ زیرفضای **حقیقی** میدان اسکالر است. از این نتیجه می‌شود که $\Lambda(M) = \{\circ\}$ و $\Lambda x_\circ \neq \circ$. تابعی مطلوب با تقسیم Λ بر $\Lambda x_\circ$ به دست می‌آید.

تبصره. این قضیه مبنای روش متعارفی برای حل بعضی از مسائل تقریب است: برای اثبات اینکه $x_\circ \in X$ دربست زیرفضایی مانند M از X قرارداشته باشد کافی است (اگر X موضعاً محدب باشد) نشان دهیم که به ازای هر تابعی خطی پیوستهٔ Λ بر X که روی M صفر می‌شود، $\Lambda x_\circ = \circ$.

۶.۳ قضیه. هرگاه f یک تابعی خطی پیوسته بر زیرفضای M از فضای موضعاً محدب X باشد، آنگاه $\Lambda \in X^*$ای هست به طوری که $\Lambda = f$ بر M.

تبصره. برای فضاهای نرمدار، این نتیجهٔ فوری قضیهٔ ۳.۳ است. با ارتباط پیوستگی تابعیهای خطی به نیم‌نرمها می‌توان حالت کلی را نیز از ۳.۳ به دست آورد (ر.ک. تمرین۸ فصل ۱). برهان زیر نشان می‌دهد که قضیهٔ ۶.۳ فقط تابع خاصیت جداسازی قضیهٔ ۵.۳ است.

برهان. بی‌آنکه به کلیت خللی وارد آید، فرض می‌کنیم f بر M متحد $\circ$ نباشد. قرار می‌دهیم

$$M_\circ = \{x \in M : f(x) = \circ\}$$

و $x_\circ \in M$ را طوری می‌گیریم که $f(x_\circ)=1$. چون f پیوسته است، $x_\circ$ در M- بستِ $M_\circ$ نیست، و چون M توپولوژی‌اش را از X به ارث می‌برد، نتیجه می‌شود که $x_\circ$ در X- بستِ $M_\circ$ نیست.

لذا قضیهٔ ۵.۳ وجود $\Lambda \in X^*$ای را تضمین می‌کند که $\Lambda x_\circ = 1$ و $\Lambda = \circ$ بر $M_\circ$.
هرگاه $x \in M$، آنگاه $x - f(x)x_\circ \in M_\circ$ زیرا $f(x_\circ)=1$. بنابراین

$$\Lambda x - f(x) = \Lambda x - f(x)\Lambda x_\circ = \Lambda\big(x - f(x)x_\circ\big) = \circ .$$

لذا $f = \Lambda$ بر M.

این بحث را با نتیجهٔ مفید دیگری از قضیهٔ جداسازی به پایان می‌بریم.

۷.۳ قضیه. ***فرض کنیم B یک مجموعهٔ محدب، در حال تعادل، و بسته در فضای موضعاً محدب X بوده، $x_\circ \in X$، ولی $x_\circ \notin B$. در این‌صورت $\Lambda \in X^*$ای هست به‌طوری که به ازای هر $x \in B$، $|\Lambda x| \le 1$ اما $\Lambda x_\circ > 1$.***

برهان. چون B بسته و محدب است، می‌توان قسمت (ب) قضیهٔ ٤.۳ را به ازای $A = \{x_\circ\}$ به کاربرده و $\Lambda_1 \in X^*$ای چنان به دست آورد که $\Lambda_1 x_\circ = re^{i\theta}$ خارج بستِ K از $\Lambda_1(B)$ قرارگیرد. چون B در حال تعادل است، K نیز چنین می‌باشد. لذا sی هست که $\circ < s < r$ و به ازای هر $z \in K$، $|z| \le s$. تابعی $\Lambda = s^{-1}e^{-i\theta}\Lambda_1$ خواص مطلوب را خواهد داشت.

توپولوژیهای ضعیف

۸.۳ مقدمات توپولوژیک. هدف از این بخش توضیح و تجسم چند پدیده است که با توپولوژی بخشیدن به یک مجموعه به چند طریق رخ می‌دهند.

فرض کنیم τ_1 و τ_2 دو توپولوژی بر مجموعهٔ X باشند و $\tau_1 \subset \tau_2$ یعنی هر

مجموعهٔ τ_1- باز τ_2-باز نیز باشد. گوییم τ_1 از τ_2 **ضعیفتر** است یا τ_2 از τ_1 **قویتر** است. [توجه کنید که (همساز با معنی علامت شمول $\subset$) اصطلاحات "ضعیفتر" و "قویتر" تساوی را مستثنی نمی‌کنند.] در این وضع، نگاشت همانی بر X یک نگاشت **پیوسته** از (X,τ_2) به (X,τ_1) بوده و یک **نگاشت باز** از (X,τ_1) به (X,τ_2) می‌باشد.

به عنوان شروع، ثابت می‌کنیم توپولوژی یک فضای هاسدروف فشرده استحکام خاصی دارد به این معنی که نمی‌توان آن را بدون لغو اصل موضوع جداسازی هاسدورف ضعیف کرد و نمی‌توان آن را بدون از دست دادن فشردگی قوی ساخت:

(آ) هرگاه $\tau_1 \subset \tau_2$ دو توپولوژی بر مجموعهٔ X باشند، τ_1 یک توپولوژی هاسدورف باشد، و τ_2 فشرده باشد، آنگاه $\tau_1 = \tau_2$.

برای مشاهدهٔ این امر، فرض می‌کنیم $F \subset X$، τ_2- بسته باشد. چون X، τ_2- فشرده است، F نیز چنین می‌باشد. و چون $\tau_1 \subset \tau_2$، پس F، τ_1- فشرده می‌باشد. (هر پوشش τ_1-باز F یک پوشش τ_2-باز نیز هست.) چون τ_1 یک توپولوژی هاسدورف است، پس F، τ_1- بسته می‌باشد.

به عنوان مثالی دیگر، توپولوژی خارج قسمتی τ_N از X/N را به صورت تعریف شده در بخش ۱.۴۰ و نگاشت خارج قسمتی $\pi: X \to X/N$ را در نظر می‌گیریم. τ_N، طبق تعریف، قویترین توپولوژی بر X/N است که π را پیوسته می‌سازد و ضعیفترین توپولوژی است که π را یک نگاشت باز می‌سازد. به طور صریح، هرگاه τ' و τ'' دو توپولوژی بر X/N بوده و π نسبت به τ' پیوسته و نسبت به τ'' باز باشد، آنگاه $\tau' \subset \tau_N \subset \tau''$.

حال فرض کنیم X یک مجموعه بوده و $\mathscr{F}$ خانواده‌ای ناتهی از نگاشتهای $f: X \to Y_f$ باشد که در آنها هر Y_f یک فضای توپولوژیک است. (در بسیاری از حالات مهم، Y_f به ازای تمام $f \in \mathscr{F}$ها یکسان است.) فرض کنیم τ گردایهٔ تمام اجتماعها از اشتراکهای متناهی از مجموعه‌های $f^{-1}(V)$ باشد که $f \in \mathscr{F}$ و V در Y_f باز است. در این‌صورت τ یک توپولوژی بر X است، و درواقع **ضعیفترین** توپولوژی بر

X است که هر $f \in \mathscr{F}$ را پیوسته می‌سازد: هرگاه τ' توپولوژی دیگری با این خاصیت باشد، آنگاه $\tau \subset \tau'$. این τ را ***توپولوژی ضعیف بر X القا شده به وسیلهٔ $\mathscr{F}$***، یا به اختصار، ***$\mathscr{F}$-توپولوژی*** X می‌نامیم.

مشهورترین مثال بی‌شک توپولوژی بخشیدن به حاصل‌ضرب دکارتی X گردایه‌ای از فضاهای توپولوژیک X_α است. هرگاه $\pi_\alpha(x)$ مختص αام نقطهٔ $x \in X$ باشد، آنگاه π_α، X را به روی X_α می‌نگارد، و توپولوژی حاصل ضربی τ از X، طبق تعریف، $\{\pi_\alpha\}$- توپولوژی آن، یعنی ضعیفترین توپولوژیی که هر π_α را پیوسته می‌سازد، می‌باشد. حال فرض کنیم هر X_α یک ***فضای هاسدورف فشرده*** باشد. در این‌صورت τ [طبق قضیهٔ تیخنف (*Tychonoff*)] یک توپولوژی فشرده بر X است، و قضیهٔ (آ) ایجاب می‌کند که τ را نمی‌توان بدون ضایع‌کردن قضیهٔ تیخنف قویتر ساخت.

در آخرین جمله، حالت خاصی از قضیهٔ زیر تلویحاً به کاررفته است:

(ب) هرگاه $\mathscr{F}$ خانواده‌ای از نگاشتهای $f: X \to Y_f$ باشد که در آن X یک مجموعه بوده و هر Y_f یک فضای هاسدورف است، و $\mathscr{F}$ نقاط بر X را جدا سازد، آنگاه $\mathscr{F}$- توپولوژی X یک توپولوژی هاسدورف است.

زیرا هرگاه $p \neq q$ دو نقطه از X باشند، آنگاه به ازای $f \in \mathscr{F}$ ای، $f(p) \neq f(q)$؛ نقاط $f(p)$ و $f(q)$ همسایگیهای از هم‌جدایی در Y_f دارند که نقشهای معکوسشان تحت f (طبق تعریف) باز و از هم جدایند.

حال کاربردی ازاین ایده‌ها در یک قضیهٔ متری‌سازی را ذکر می‌کنیم.

(پ) هرگاه X یک فضای توپولوژیک فشرده بوده و دنبالهٔ $\{f_n\}$ از توابع حقیقی پیوسته نقاط بر X را جداسازد، آنگاه X مترپذیر است.

فرض کنیم τ توپولوژی داده شدهٔ X باشد. بی‌آنکه به کلیت آسیب رسانیم، فرض می‌کنیم به ازای هر n، $|f_n| \leq ۱$، و τ_d توپولوژی القا شده بر X به وسیلهٔ متر

$$d(p,q) = \sum_{n=۱}^{\infty} ۲^{-n} |f_n(p) - f_n(q)|$$

باشد. این واقعاً یک متر است زیرا $\{f_n\}$ نقاط را جدا می‌سازد. چون هر f_n،

τ– پیوسته بوده و سری فوق بر $X \times X$ به طور یکنواخت همگراست، d یک تابع τ– پیوسته بر $X \times X$ می‌باشد. لذا گویهای

$$B_r(p) = \{q \in X : d(p,q) < r\}$$

τ– باز می‌باشند. بنابراین $\tau_d \subset \tau$. چون τ_d به وسیلهٔ یک متر القا می‌شود، τ_d یک توپولوژی هاسدورف است، و حال (آ) ایجاب می‌کند که $\tau = \tau_d$.

لم زیر کاربردهایی در مطالعهٔ توپولوژیهای برداری دارد. درواقع، حالت $n = ۱$ در آخر قضیهٔ ٦.۳ لازم شد(و اثبات گردید).

۹.۳ لم . ***فرض کنیم $\Lambda_۱, \ldots, \Lambda_n$ و Λ تابعیهای خطی بر فضای‌برداری X باشند. همچنین***

$$N = \{x : \Lambda_۱ x = \ldots = \Lambda_n x = ۰\}.$$

در این‌صورت سه خاصیت زیر هم ارز می‌باشند:

(آ) اسکالرهایی چون $\alpha_۱, \ldots, \alpha_n$ وجود دارند به‌طوری که

$$\Lambda = \alpha_۱ \Lambda_۱ + \ldots + \alpha_n \Lambda_n .$$

(ب) $\gamma < \infty$ای هست به‌طوری که

$$|\Lambda x| \le \gamma \max_{۱ \le i \le n} |\Lambda_i x| \qquad (x \in X).$$

(پ) به ازای هر $x \in N$، $\Lambda x = ۰$.

برهان. واضح است که (آ) قسمت (ب) و (ب) قسمت (پ) را ایجاب می‌کند. فرض کنیم (پ) برقرار باشد. همچنین Φ میدان اسکالر باشد. $\pi : X \to \Phi^n$ را با

$$\pi(x) = (\Lambda_۱ x, \ldots, \Lambda_n x)$$

تعریف می‌کنیم. هرگاه $\pi(x) = \pi(x')$، آنگاه (پ) ایجاب می‌کند که $\Lambda x = \Lambda x'$. لذا $f(\pi(x)) = \Lambda x$ یک تابعی خطی مانند f بر $\pi(X)$ تعریف می‌کند. f را به یک تابعی خطی مانند F بر Φ^n وسعت می‌دهیم. این یعنی $\alpha_i \in \Phi$هایی وجود دارند به طوری که

$$F(u_1,\ldots,u_n)=\alpha_1 u_1+\ldots+\alpha_n u_n .$$

لذا

$$\Lambda x=F(\pi(x))=F(\Lambda_1 x,\ldots,\Lambda_n x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Lambda_i x,$$

که همان(آ) خواهدبود.

۱۰.۳ قضیه. فرض کنیم X یک فضای‌برداری بوده و X' یک فضای‌برداری جداساز از تابعیهای خطی بر X باشد. در این‌صورت X'–توپولوژی τ'فضای X را به یک فضای موضعاً محدب که فضای دوگانش X' است تبدیل می‌کند.

فرضهای روی X' به طور صریحتر یعنی X' تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است و به ازای $\Lambda\in X'$ای، هروقت x_1 و x_2 نقاط متمایزی از X باشند، $\Lambda x_1\neq\Lambda x_2$.

برهان. چون R و $\mathbb{C}$ فضاهایی هاسدورف‌اند، قسمت (ب) بخش ۸.۳ نشان می‌دهد که τ' یک توپولوژی هاسدورف است. خطی بودن اعضای X' نشان می‌دهد که τ' انتقال–پایاست. هرگاه $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n\in X'$، $r_i>0$، و

$$V=\{x:|\Lambda_i x|<r_i \text{ به ازای } 1\le i\le n\},\qquad (1)$$

آنگاه V محدب و در حال تعادل بوده و $V\in\tau'$. درواقع، گردایهٔ تمام Vها به شکل (۱) یک پایهٔ موضعی برای τ' است. لذا τ' یک توپولوژی موضعاً محدب بر X می‌باشد.

هرگاه (۱) برقرار باشد، آنگاه $\frac{1}{2}V+\frac{1}{2}V=V$. این ثابت می‌کند که جمع پیوسته است. فرض کنیم $x\in X$ و α اسکالر باشد. در این‌صورت، به ازای $s>0$ ی، $x\in sV$. هرگاه $|\beta-\alpha|<r$ و $y-x\in rV$، آنگاه

$$\beta y-\alpha x=(\beta-\alpha)y+\alpha(y-x)$$

در V واقع است مشروط بر اینکه r آنقدر کوچک باشد که

$$r(s+r)+|\alpha|r<1.$$

لذا ضرب اسکالر پیوسته می‌باشد.

پس ثابت کرده‌ایم که τ' یک توپولوژی‌برداری موضعاً محدب می‌باشد. هر $\Lambda \in X'$، τ'−پیوسته است. به عکس، فرض کنیم Λ یک تابعی خطی τ'−پیوسته بر X باشد. دراین صورت به ازای هر x در مجموعه‌ای مانند V به شکل (۱)، $|\Lambda x| < 1$. لذا شرط (ب) قضیهٔ ۹.۳ برقرار است؛ درنتیجه (آ) برقرار می‌باشد: $\Lambda = \sum \alpha_i \Lambda_i$. چون $\Lambda_i \in X'$ و X' یک فضای‌برداری است، $\Lambda \in X'$. این برهان را تمام خواهدکرد.

تذکر. قسمت اول این برهان را می‌توانستیم بر قضیهٔ ۳۷.۱ و خانوادهٔ جداساز از نیم‌نرمهای p_Λ $(\Lambda \in X')$ با تعریف $p_\Lambda(x) = |\Lambda x|$ قرار دهیم.

۱۱.۳ توپولوژی ضعیف یک فضای‌برداری توپولوژیک. فرض کنیم X یک فضای‌برداری توپولوژیک (با توپولوژی τ) باشد که دوگانش X^* نقاط بر X را جدا می‌سازد. (می‌دانیم که این در هر X موضعاً محدب رخ می‌دهد. این در بعضی از جاهای دیگر نیز رخ می‌دهد؛ ر.ک.تمرین۵.) X^*−توپولوژی X را ***توپولوژی ضعیف*** X می‌نامیم.

فرض کنیم X_w یعنی X با این توپولوژی ضعیف τ_w. قضیهٔ ۱۰.۳ ایجاب می‌کند که X_w یک فضای‌موضعاً محدب است که دوگانش نیز X^* است.

چون هر $\Lambda \in X^*$، τ−پیوسته بوده و τ_w ضعیفترین توپولوژی بر X با آن خاصیت است، داریم $\tau_w \subset \tau$. در این محدوده، توپولوژی داده شدهٔ τ را اغلب توپولوژی **اصلی** X می‌نامند.

عبارات خود توضیح مانند همسایگی اصلی، همسایگی ضعیف، بست اصلی، بست ضعیف، اصولاً کراندار، به طور ضعیف کراندار، و غیره از این رو به کار می‌روند که نسبت این اصطلاحات به توپولوژی مربوطه را روشن سازند.[1]

---

۱ . وقتی X یک فضای فرشه است (لذا، به خصوص، وقتی X یک فضای باناخ است)

به عنوان مثال، فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد. وقتی می‌گوییم اصولاً $x_n \to 0$ یعنی هر همسایگی اصلی 0 حاوی تمام x_nها با n به قدرکافی بزرگ است. وقتی گوییم به طورضعیف $x_n \to 0$ یعنی هر همسایگی ضعیف 0 شامل همهٔ x_n ها با n به قدر کافی بزرگ است. چون هر همسایگی ضعیف 0شامل یک همسایگی به شکل

$$V = \{x: |\Lambda_i x| < r_i \text{ به ازای } 1 \le i \le n\} \qquad (1)$$

است که در آن $\Lambda_i \in X^*$ و $r_i > 0$، به آسانی معلوم می‌شود که ***به طور ضعیف $x_n \to 0$ اگر و فقط اگر به ازای هر $\Lambda \in X^*$، $\Lambda x_n \to 0$.***

لذا هر دنبالهٔ اصولاً همگرا به طور ضعیف همگراست. (عکس مطلب معمولاً نادرست است؛ ر.ک.تمرینهای ۵و۶.)

به همین نحو، مجموعهٔ $E \subset X$ ***به طور ضعیف کراندار*** است (یعنی، E یک زیرمجموعهٔ کراندار X_W است) اگر و فقط اگر هر V همانند در (۱) شامل tE به ازای $t = t(V) > 0$ای باشد. این رخ می‌دهد اگر و فقط اگر نظیر هر $\Lambda \in X^*$ عددی مانند $\gamma(\Lambda) < \infty$ چنان موجود باشد که به ازای هر $x \in E$، $|\Lambda x| \le \gamma(\Lambda)$. به عبارت دیگر، ***مجموعهٔ $E \subset X$ به طور ضعیف کراندار است اگر و فقط اگر هر $\Lambda \in X^*$ یک تابع کراندار بر E باشد.***

مجدداً فرض می‌کنیم V همانند در (۱) باشد، و قرار می‌دهیم

$$N = \{x: \Lambda_1 x = \ldots = \Lambda_n x = 0\}.$$

چون $x \to (\Lambda_1 x, \ldots \Lambda_n x)$ مجموعهٔ X را به توی $\mathbb{C}$ می‌نگارد و فضای پوچش N است، می‌بینیم که $\dim X \le n + \dim N$. چون $N \subset V$، این ما را به نتیجهٔ زیرمی‌رساند.

توپولوژی اصلی X را معمولاً ***توپولوژی قوی*** نامند. در این وضع، واژه‌های "قوی" و "قویاً" به جای "اصلی" و "اصولاً" به کار می‌روند. در فضاهای موضعاً محدب درحالت کلی، اصطلاح "توپولوژی قوی" معنی تکنیکی خاصی دارد. ر.ک.مرجع [۱۵]، صفحات ۲۵۸-۲۵۶؛ همچنین مرجع [۱٤]، ص ۱٦۹. لذا دربحث کلی فعلی بهتر است از واژهٔ "اصلی" استفاده شود.

هرگاه X با بعد نامتناهی باشد، آنگاه هر همسایگی ضعیف ∘ شامل یک زیرفضا با بعدنامتناهی است؛ درنتیجه X_w موضعاً کراندار نیست.

این در بسیاری از حالات ایجاب می‌کند که توپولوژی ضعیف اکیداً ضعیفتر از توپولوژی اصلی است. البته ممکن است این دو یکی باشند: قضیهٔ۱۰.۳ ایجاب می‌کند که $(X_w)_w = X_w$. حال به نتیجهٔ جالبتری می‌رسیم.

۱۲.۳ قضیه. ***فرض کنیم E زیرمجموعهٔ محدبی از فضای موضعاً محدب X باشد. در این صورت بست ضعیف $\overline{E}_w$ از E مساوی بست اصلی آن $\overline{E}$ می‌باشد.***

برهان. $\overline{E}_w$ به طور ضعیف بسته و لذا اصولاً بسته است؛ درنتیجه $\overline{E} \subset \overline{E}_w$. برای به دست آوردن شمول درجهت دیگر، $x_\circ \in X$ که $x_\circ \notin \overline{E}$ را اختیار می‌کنیم. قسمت (ب) قضیهٔ جداسازی ۴.۳ نشان می‌دهد که $\Lambda \in X^*$ای و $\gamma \in R$ای وجود دارند به طوری که به ازای هر $x \in \overline{E}$،

$$\operatorname{Re}\Lambda x_\circ < \gamma < \operatorname{Re}\Lambda x.$$

لذا مجموعهٔ $\{x : \operatorname{Re}\Lambda x < \gamma\}$ یک همسایهٔ ضعیف $x_\circ$ است که E را قطع نمی‌کند. بنابراین $x_\circ$ در $\overline{E}_w$ نیست. این ثابت می‌کند که $\overline{E}_w \subset \overline{E}$.

چند نتیجه. ***به ازی زیرمجموعه‌های محدب یک فضای موضعاً محدب،***

(آ) اصولاً بسته مساوی به طور ضعیف بسته است، و

(ب) اصولاً چگال مساوی به طور ضعیف چگال است.

برهانها واضحند. در زیر نتیجهٔ جالب دیگر از قضیهٔ ۱۲.۳ ذکر می‌شود.

۱۳.۳ قضیه. ***فرض کنیم X یک فضای موضعاً محدب متریپذیر باشد. هرگاه $\{x_n\}$ یک دنباله در X باشد که به طور ضعیف به $x \in X$ی همگراست، آنگاه دنباله‌ای مانند $\{y_i\}$ در X وجود دارد به‌طوری که***

(آ) هر y_i ترکیب محدبی از تعدادی متناهی x_n است، و

(ب) اصولاً $y_i \to x$.

نتیجهٔ (آ) به طور صریح‌تر می‌گوید که اعـــدادی مـانند $\alpha_{in} \geq 0$ چنـان وجـود دارند که

$$y_i = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{in} x_n \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{in} = 1$$

و به ازای هر i، تنها تعدادی متناهی α_{in} مخالف ۰ اند.

برهان. فرض کنیم H غلاف محدب مجموعـهٔ تمـام x_n هـا باشـد. همچنیـن K بسـت ضعیف H باشد. در این‌صـورت $x \in K$. بنـابر قضیـهٔ ۱۲.۳، x در بسـت اصلـی H نـیز هست. چون توپولوژی اصلی X متریذیر فرض شده است، پس دنباله‌ای مـانند $\{y_i\}$ در H هست که اصولاً همگرا به x است.

برای درک آنچه در اینجا رخ می‌دهد، مثال زیر را درنظر می‌گیریم. فـرض کنیـم K یک فضای هاسدورف فشرده باشد (بازهٔ‌یکه بر خط حقیقی یک مثال به قدرکافی جالب است)، و f و f_n $(n = 1,2,3,\ldots)$ توابع مختلط پیوسته بر K باشند به طوری کـه بـه ازای هر $x \in K$، وقتی $n \to \infty$، $f_n(x) \to f(x)$ و نیز به ازای هر n و هـر $x \in K$، $|f_n(x)| \leq 1$. قضیهٔ ۱۳.۳ حکم می‌کند کـه ترکیبـاتی محـدب از f_n هـا وجـود دارنـد کـه ***بـه طـور یکنواخت*** به f همگرایند.

برای مشاهدهٔ این امر، فرض کنیم $C(K)$ فضای باناخ تمام توابع پیوستهٔ مختلط بـر K با نرم سوپرمم باشد. دراین‌صورت همگرایی قوی همان همگرایـی یکنواخـت بـر K است. اگر μ یک اندازهٔ بورل مختلط بر K باشد، قضیهٔ همگرایی تسـلطی لبـگ ایجـاب می‌کند که $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$. لذا، طبق قضیهٔ نمایش ریس که دوگان $C(K)$ را با فضـای تمام اندازه‌های بورل مختلط منتظم بر K یکی می‌کند، بـه‌طور ضعیـف $f_n \to f$. حـال می‌توان قضیهٔ ۱۳.۳ را به کار برد.

حال پس از این انحراف مختصر، به بحث اصلی باز می‌گردیم.

۱۴.۳ ضعیف* - توپولوژی یک فضای دوگان. مجدداً فرض می‌کنیم X یک فضای‌برداری توپولوژیک باشد که دوگانش X^* است. در تعریفاتی که می‌آیند، اینکه X^* نقاط بر X را جداسازد یا نه اهمیتی ندارد. نکتهٔ مهم این است که ***هر $x \in X$ یک تابعی خطی مانند f_x بر X^* القا می‌کند که با***

$$f_x \Lambda = \Lambda x$$

تعریف می‌شود و $\{f_x : x \in X\}$ نقاط بر X^* را جدا می‌سازد.

خطی بودن هر f_x واضح است؛ هرگاه به ازای هر $x \in X$، $f_x\Lambda = f_x\Lambda'$، آنگاه به ازای هر x، $\Lambda x = \Lambda' x$؛ درنتیجه، بنا بر تعریف تساوی دو تابع، $\Lambda = \Lambda'$.

حال در وضعیت قضیهٔ ۱۰.۳ هستیم که در آن X^* به جای X و X به جای X' قراردارد.

X- توپولوژی X^* را ***ضعیف* - توپولوژی*** X^* می‌نامیم (تلفظ کنید: ضعیف ستاره توپولوژی). قضیهٔ ۱۰.۳ ایجاب می‌کند که این یک توپولوژی‌برداری موضعاً محدب بر X^* است ***و هر تابعی خطی بر X^* که ضعیف* - پیوسته باشد به شکل $\Lambda \to \Lambda x$ به ازای $x \in X$ی می‌باشد.***

ضعیف* - توپولوژیها خاصیت فشردگی بسیار مهمی دارند که اینک بدان می‌پردازیم. در تمرینهای ۹ و ۱۰ مشکلات مختلف ضعیف - توپولوژیها و ضعیف* - توپولوژیها توصیف شده‌اند.

مجموعه‌های محدب فشرده

۱۵.۳ قضیهٔ باناخ - آلوگلو. *هرگاه V یک همسایگی 0 در فضای‌برداری توپولوژیک X بوده و*

$$K = \{\Lambda \in X^* : |\Lambda x| \leq 1 \text{ ، به ازای هر } x \in V\}$$

آنگاه K ضعیف* - فشرده می‌باشد.

تذکر. گاهی K را ***قطبی*** V می‌نامند. واضح است که K محدب و در حال تعادل است

زیرا این در مورد قرص‌یکه در $\mathbb{C}$ (وبازهٔ $[-1,1]$ در R) درست است. در تعریف K اضافاتی وجود دارد زیرا هرتابعی خطی بر X که بر V کراندار باشد پیوسته و درنتیجه در X^* است.

برهان. چون همسایگیهای ۰ جاذبند، به هر $x \in X$ عددی مانند $\gamma(x) < \infty$ چنان نظیر است که $x \in \gamma(x)V$. لذا

$$|\Lambda x| \le \gamma(x)\,(x \in X, \Lambda \in K). \qquad (1)$$

فرض کنیم D_x مجموعهٔ تمام اسکالرهای α باشد که $|\alpha| \le \gamma(x)$. همچنین τ توپولوژی حاصل ضربی بر P، یعنی حاصل‌ضرب دکارتی تمام D_x ها (به ازای هر $x \in X$ یکی) باشد. چون هر D_x فشرده است، بنا بر قضیهٔ تیخنف، P نیز چنین است. عنصرهای P توابعی مانند f بر X (خطی یا غیرخطی)اند که

$$|f(x)| \le \gamma(x) \qquad (x \in X). \qquad (2)$$

لذا $K \subset X^* \cap P$. پس K دو توپولوژی به ارث می‌برد: یکی از X^* (ضعیف* - توپولوژی آن که قضیه بدان اشاره دارد) و دیگری τ از P. خواهیم دید که

(آ) این دو توپولوژی بر K یکی‌اند، و

(ب) K زیرمجموعهٔ بسته‌ای از P است.

چون P فشرده است، (ب) ایجاب می‌کند که K، τ - فشرده باشد، و در این‌صورت (آ) ایجاب می‌کند که K ضعیف* - فشرده می‌باشد.

$\Lambda_0 \in K$ ی را ثابت می‌گیریم. به ازای $1 \le i \le n$ ، $x_i \in X$ را اختیار می‌کنیم. همچنین $\delta > 0$ای انتخاب می‌نماییم. قرار می‌دهیم

$$W_1 = \{\Lambda \in X^* : |\Lambda x_i - \Lambda_0 x_i| < \delta \text{ ، به ازای } 1 \le i \le n\} \qquad (3)$$

و

$$W_2 = \{f \in P : |f(x_i) - \Lambda_0 x_i| < \delta \text{ ، به ازای } 1 \le i \le n\}. \qquad (4)$$

فرض کنیم n ، x_i ، و δ روی تمام مقادیر مجاز تغییر کنند. در این‌صورت مجموعه‌های حاصل W_1 یک پایهٔ موضعی برای ضعیف* - توپولوژی X^* در Λ_0 و مجموعه‌های W_2 یک پایهٔ موضعی برای توپولوژی حاصل ضربی τ از P در Λ_0 تشکیل می‌دهند. چون $K \subset P \cap X^*$، داریم

$$W_۱ \cap K = W_۲ \cap K.$$

این قسمت (آ) را ثابت می‌کند.

حال فرض کنیم $f_\circ$ در τ - بست K باشد. $x \in X$، $y \in X$، اسکالرهای α و β، و $\varepsilon > \circ$ را اختیار می‌کنیم. مجموعهٔ تمام $f \in P$ هایی که در x، در y، و در $\alpha x + \beta y$، $|f - f_\circ| < \varepsilon$ یک τ - همسایگی $f_\circ$ است. بنابراین، K شامل یک چنین f می‌باشد. چون این f خطی است، داریم

$$f_\circ(\alpha x + \beta y) - \alpha f_\circ(x) - \beta f_\circ(y)$$
$$= (f_\circ - f)(\alpha x + \beta y) + \alpha(f - f_\circ)(x) + \beta(f - f_\circ)(y);$$

درنتیجه

$$|f_\circ(\alpha x + \beta y) - \alpha f_\circ(x) - \beta f_\circ(y)| < (۱ + |\alpha| + |\beta|)\varepsilon.$$

چون ε دلخواه بود، می‌بینیم که $f_\circ$ خطی است. بالأخره، اگر $x \in V$ و $\varepsilon > \circ$، همین استدلال نشان می‌دهد که $f \in K$ ی هست به‌طوری که $|f(x) - f_\circ(x)| < \varepsilon$. چون $|f(x)| \leq ۱$، بنابر تعریف K داریم $|f_\circ(x)| \leq ۱$. پس نتیجه می‌شود که $f_\circ \in K$. این قسمت (ب) را ثابت می‌کند و لذا قضیه به ثبوت می‌رسد.

وقتی X **جدایی‌پذیر** باشد (یعنی یک مجموعهٔ چگال شمارش‌پذیر در X موجود باشد)، قضیهٔ باناخ - آلوگلو را می‌توان به وسیلهٔ تلفیق آن با مطلب زیر قوت بخشید.

۳.۱۶ قضیه. ***هرگاه X یک فضای برداری توپولوژیک جدایی‌پذیر بوده، $K \subset X^*$، و K ضعیف * - فشرده باشد، آنگاه K در ضعیف * - توپولوژی مترپذیر است.***

تذکار . نمی‌توان نتیجه گرفت که خود X^* در ضعیف * - توپولوژی خود مترپذیر است. درواقع، اگر X یک فضای باناخ با بعد نامتناهی باشد، این مطلب نادرست است. ر.ک.تمرین ۱۵.

برهان. فرض کنیم $\{x_n\}$ یک مجموعهٔ چگال شمارش‌پذیر در X باشد. به ازای $\Lambda \in X^*$ قرار می‌دهیم $f_n(\Lambda) = \Lambda x_n$. طبق تعریف ضعیف * - توپولوژی، هر f_n ضعیف * -

پیوسته‌است. هرگاه به ازای هر n ، $f_n(\Lambda) = f_n(\Lambda')$، آنگاه به ازای هر n ، $\Lambda x_n = \Lambda' x_n$ که تساوی $\Lambda = \Lambda'$ را ایجاب می‌کند زیرا هر دو بر X پیوسته بوده و بر یک مجموعهٔ چگال یکی می‌باشند.

لذا $\{f_n\}$ یک خانوادهٔ شمارشپذیر از توابع پیوسته است که نقاط بر X^* را جدا می‌سازد. حال متریذیری K از قسمت (پ) بخش ۸.۳ نتیجه خواهدشد.

۱۷.۳ قضیه. هرگاه V یک همسایگی ۰ در فضای‌برداری توپولوژیک جدایی‌پذیر X بوده و $\{\Lambda_n\}$ دنباله‌ای در X^* باشد که

$$|\Lambda_n x| \leq 1 \qquad (x \in V, n = 1,2,3,\ldots),$$

آنگاه زیردنباله‌ای مانند $\{\Lambda_{n_i}\}$ و $\Lambda \in X^*$ ای وجود دارند به‌طوری که

$$\Lambda x = \lim_{i \to \infty} \Lambda_{n_i} x \qquad (x \in X) .$$

به عبارت دیگر، قطبی V در ضعیف* - توپولوژی به طور دنباله‌ای فشرده است.

برهان. قضایای ۱۵.۳ و ۱۶.۳ را با هم تلفیق نمایید.

کاربرد بعدی قضیهٔ باناخ - آلوگلو مستلزم قضیهٔ هان - باناخ و یک استدلال رسته‌ای می‌باشد.

۱۸.۳ قضیه. در فضای موضعاً محدب X، هر مجموعهٔ به طور ضعیف کراندار اصولاً کراندار است و بالعکس.

قسمت (ت) تمرین ۵ نشان می‌دهد که تحدب موضعی X را نمی‌توان از مفروضات زدود.

برهان . چون هر همسایگی ضعیف ۰ در X یک همسایگی اصلی ۰ است، از تعریف "کراندار" معلوم می‌شود که هر زیرمجموعهٔ اصولاً کراندار X به طور ضعیف کراندار است. عکس مطلب قسمت نابدیهی قضیه است.

فرض کنیم $E \subset X$ به طور ضعیف کراندار بوده و U یک همسایگی اصلی ۰ در X باشد.

چون X موضعاً محدب است، یک همسایگی محدب، در حال تعادل، و اصلی مانند V از ۰ در X هست به‌طوری که $\overline{V} \subset U$. فرض کنیم $K \subset X^*$ قطبی V باشد:

(۱) $$K = \{\Lambda \in X^* : |\Lambda x| \leq 1 \text{ ، به ازای هر } x \in V\}.$$

حکم می‌کنیم که

(۲) $$\overline{V} = \{x \in X : |\Lambda x| \leq 1 \text{ ، به ازای هر } \Lambda \in K\}.$$

واضح است که V زیرمجموعهٔ سمت راست (۲) است ولذا $\overline{V}$ نیز چنین است زیرا طرف راست (۲) بسته می‌باشد. فرض کنیم $x_\circ \in X$ ولی $x_\circ \notin \overline{V}$. در این‌صورت قضیهٔ ۷.۳ (با $\overline{V}$ به جای B) نشان می‌دهد که به ازای $\Lambda \in K$ای، $\Lambda x_\circ > 1$. این (۲) را ثابت خواهدکرد.

چون E به طورضعیف کراندار است، نظیر هر $\Lambda \in X^*$ عددی مانند $\gamma(\Lambda) < \infty$ هست به‌طوری که

(۳) $$|\Lambda x| \leq \gamma(\Lambda) \qquad (x \in E).$$

چون K محدب و ضعیف*- فشرده است (قضیهٔ ۱۵.۳) و چون توابع $\Lambda \to \Lambda x$ ضعیف*- پیوسته‌اند، می‌توان قضیهٔ ۹.۲ را (با X^* به جای X و میدان اسکالر به جای Y) به کاربرد و از (۳) نتیجه گرفت که عدد ثابتی چون $\gamma < \infty$ هست به‌طوری که

(٤) $$|\Lambda x| \leq \gamma \qquad (x \in E, \Lambda \in K).$$

حال روابط (۲) و (٤) نشان می‌دهند که به ازای هر $x \in E$، $\gamma^{-1} x \in \overline{V} \subset U$. چون V در حال تعادل است،

(۵) $$E \subset t\overline{V} \subset tU \qquad (t > \gamma).$$

لذا E اصولاً کراندار می‌باشد.

نتیجه. هرگاه X یک فضای نرمدار بوده، $E \subset X$، و

(٦) $$\sup_{x \in E} |\Lambda x| < \infty \qquad \left(\Lambda \in X^*\right),$$

آنگاه عددی مانند $\gamma < \infty$ هست به‌طوری که

(۷) $$\|x\| \leq \gamma \qquad (x \in E).$$

برهان. فضاهای نرمدار موضعاً محدب‌اند؛ رابطهٔ (۶) می‌گوید که E به طورضعیف کراندار است، و رابطهٔ (۷) می‌گوید که E اصولاً کراندار می‌باشد.

حال به سؤال زیر می‌پردازیم: راجع به غلاف محدب H مجموعهٔ فشردهٔ K چه می‌شود گفت؟ حتی در یک فضای هیلبرت لازم نیست H بسته باشد، و حالاتی وجود دارند که درآنها $\overline{H}$ فشرده نیست (تمرینهای ۲۰، ۲۲). در فضاهای فرشه مشکل اخیر رخ نمی‌دهد (قضیهٔ ۲۰.۳). اثبات این امر تابع آن است که یک زیرمجموعه از یک فضای متری تام فشرده است اگر و فقط اگر بسته و کلاً کراندار باشد (ضمیمهٔ ض ٤).

۱۹.۳ چند تعریف . (آ) اگر X یک فضای‌برداری بوده و $E \subset X$، ***غلاف محدب*** E با $co(E)$ نموده می‌شود. یادآور می‌شویم که $co(E)$ اشتراک تمام زیرمجموعه‌های محدب X است که شامل E می‌باشند. به بیان معادل، $co(E)$ مجموعهٔ تمام ترکیبات محدب متناهی از اعضای E می‌باشد.

(ب) اگر X یک فضای‌برداری توپولوژیک بوده و $E \subset X$، ***غلاف محدب بستهٔ*** E که به صورت $\overline{co}(E)$ نوشته می‌شود عبارت است از بست $co(E)$.

(پ) زیرمجموعهٔ E از فضای متری X را ***کلاً کراندار*** گوییم اگر E در اجتماع تعدادی متناهی گوی باز به شعاع ε به ازای هر ε قرار داشته باشد.

همین مفهوم را می‌توان در هر فضای برداری توپولوژیک مترپذیر یا غیر مترپذیر تعریف کرد:

(ت) مجموعهٔ E در فضای‌برداری توپولوژیک X را ***کلاً کراندار*** گوییم اگر به هر همسایگی V از 0 در X مجموعه‌ای ***متناهی*** مانند F که $E \subset F+V$ نظیر باشد.

هرگاه X یک فضای‌برداری توپولوژیک مترپذیر باشد، آنگاه این دو مفهوم کرانداری کل یکی‌اند مشروط بر اینکه خود را به مترهای ***پایا*** که با توپولوژی X سازگار باشند محدود نماییم. (برهان این امر همانند در بخش ۲۵.۱ می‌باشد.)

۲۰.۳ قضیه

(آ) هرگاه A_1، ...، A_n مجموعه‌های محدب فشرده‌ای در فضای برداری توپولوژیک X باشند، آنگاه $co(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ فشرده است.

(ب) هرگاه X یک فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب بوده و $E \subset X$ کلاً کراندار باشد، آنگاه $co(E)$ کلاً کراندار است.

(پ) هرگاه X یک فضای فرشه بوده و $K \subset X$ فشرده باشد، آنگاه $\overline{co}(K)$ فشرده است.

(ت) هرگاه K یک مجموعهٔ فشرده در R^n باشد، آنگاه $co(K)$ فشرده است.

برهان . (آ) فرض کنیم S یک سادک در R^n مرکب از تمام $s = (s_1, \ldots, s_n)$ با $s_i \geq 0$ و $s_1 + \ldots + s_n = 1$ باشد. قرار می‌دهیم $A = A_1 \times \ldots \times A_n$. تابع $f : S \times A \to X$ را با

$$f(s,a) = s_1 a_1 + \ldots + s_n a_n \tag{1}$$

تعریف کرده و قرار می‌دهیم $K = f(S \times A)$.

واضح است که K فشرده بوده و $K \subset co(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$. خواهیم دید که این شمول درواقع یک تساوی می‌باشد.

هرگاه (s,a) و (t,b) در $S \times A$ بوده و $\alpha \geq 0$، $\beta \geq 0$، و $\alpha + \beta = 1$، آنگاه

$$\alpha f(s,a) + \beta f(t,b) = f(u,c), \tag{2}$$

که در آن $u = \alpha s + \beta t \in S$ و $c \in A$، زیرا

$$c_i = \frac{\alpha s_i a_i + \beta t_i b_i}{a s_i + \beta t_i} \in A_i \qquad (1 \leq i \leq n) . \tag{3}$$

این نشان می‌دهد که K محدب است. چون به ازای هر i، $A_i \subset K$ [در (۱) فرض کنید $s_i = 1$ و به ازای $j \neq i$، $s_j = 0$]، تحدب K ایجاب می‌کند که $co(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \subset K$.

این قسمت (آ) را ثابت می‌کند.

(ب) فرض کنیم U یک همسایگی 0 در X باشد. همسایگی محدب V از 0 در X را چنان اختیار می‌کنیم که $V + V \subset U$. در این‌صورت به ازای مجموعه‌ای متناهی مانند $F \subset X$، $E \subset F + V$. لذا $E \subset co(F) + V$. مجموعهٔ اخیر محدب است. پس

نتیجه می‌شود که

$$co(E) \subset co(F) + V. \qquad (٤)$$

ولی $co(F)$ فشرده است [حالت خاصی از (آ)]، و لذا به ازای مجموعه‌ای متناهی چون $F_1 \subset X$، $co(F) \subset F_1 + V$. لذا

$$co(E) \subset F_1 + V + V \subset F_1 + U. \qquad (٥)$$

چون U دلخواه بود، $co(E)$ کلاً کراندار می‌باشد.

(پ) بستهای مجموعه‌های کلاً کراندار در هر فضای متری کلاً کراندارند، و لذا در هر فضای متری تام فشرده می‌باشند (ضمیمه ض ٤). لذا هرگاه K دریک فضای فرشه فشرده باشد، آنگاه K به وضوح کلاً کراندار است؛ درنتیجه $co(K)$ طبق قسمت (ب) کلاً کراندار است و لذا $\overline{co}(K)$ فشرده می‌باشد.

(ت) فرض کنیم S سادکی در R^{n+1} باشد که از تمام $t = (t_1, \ldots, t_{n+1})$ها با $t_i \geq 0$ و $\sum t_i = 1$ تشکیل شده است. همچنین K فشرده بوده و $K \subset R^n$. بنابر قضیهٔ زیر، $x \in co(K)$ اگر و فقط اگر به ازای $t \in S$ای و $x_i \in K$ی $(1 \leq i \leq n+1)$

$$x = t_1 x_1 + \ldots + t_{n+1} x_{n+1}. \qquad (٦)$$

به عبارت دیگر، $co(K)$ نقش $S \times K^{n+1}$ تحت نگاشت پیوستهٔ

$$(t, x_1, \ldots x_{n+1}) \to t_1 x_1 + \ldots + t_{n+1} x_{n+1} \qquad (٧)$$

است. بنابراین $co(K)$ فشرده می‌باشد.

قضیه. هرگاه $E \subset R^n$ و $x \in co(E)$، آنگاه x در غلاف محدب زیرمجموعه‌ای از E که شامل حداکثر $n+1$ نقطه است قراردارد.

برهان. کافی است نشان دهیم که اگر $k > n$ و $x = \sum_1^{k+1} t_i x_i$ ترکیب محدبی از $k+1$ بردار $x_i \in R^n$ باشد، x درواقع ترکیب محدبی از k تا از این بردارهاست.

بی‌آنکه خللی به کلیت وارد شود، فرض می‌کنیم به ازای $1 \leq i \leq k+1$، $t_i > 0$. فضای پوچ نگاشت خطی

$$(a_1, \ldots a_{k+1}) \to \left(\sum_1^{k+1} a_i x_i, \sum_1^{k+1} a_i \right) \qquad (٨)$$

که R^{n+1} را به توی $R^n \times R$ می‌برد با بعد مثبت است زیرا $k > n$. لذا $(a_1,\dots,a_{k+1})$ای که در آن $a_i \neq 0$ی وجود دارد به طوری که $\sum a_i x_i = 0$ و $\sum a_i = 0$. چون به ازای هر i، $t_i > 0$، ثابتی چون λ هست به طوری‌که به ازای هر i، $|\lambda a_i| \le t_i$ و به ازای دست کم یک j، $\lambda a_j = t_j$. با فرض $c_i = t_i - \lambda a_i$ نتیجه می‌گیریم که $x = \sum c_i x_i$ و دست کم یک c_j مساوی ۰ است؛ همچنین توجه کنید که $\sum c_i = \sum t_i = 1$ و به ازای هر i، $c_i \ge 0$.

در برهان قضیهٔ کرین - میلمن مشابه زیر از قسمت (ب) قضیهٔ جداسازی ۴.۳ به کار خواهد رفت.

۲۱.۳ قضیه. فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک باشد که X^* بر آن نقاط را جدا می‌سازد. همچنین A و B دو مجموعهٔ از هم جدای ناتهی فشردهٔ محدب در X باشند. در این صورت $\Lambda \in X^*$ ای هست به طوری که

$$\sup_{x\in A} \operatorname{Re} \Lambda x < \inf_{y\in B} \operatorname{Re} \Lambda y. \tag{1}$$

توجه کنید که بخشی از مفروضات از قسمت (ب) قضیهٔ ۴.۳ ضعیفتر است (زیرا تحدب موضعی X ایجاب می‌کند که X^* نقاط بر X را جدا می‌سازد)؛ برای اصلاح این امر، در اینجا فرض می‌کنیم که **هردوی** A و B فشرده باشند.

برهان. فرض کنیم X_W مساوی X با توپولوژی ضعیفش باشد. مجموعه‌های A و B به وضوح در X_W فشرده‌اند. این مجموعه‌ها در X_W بسته نیز هستند (زیرا X_W یک فضای هاسدروف است). چون X_W موضعاً محدب است، می‌توان قسمت (ب) قضیهٔ ۴.۳ را در مورد X_W به جای X به کاربرد؛ با این کار یک $\Lambda \in (X_W)^*$ به دست می‌آید که در رابطهٔ (۱) صدق می‌کند. ولی در بخش ۱۱.۳ (به عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ ۱۰.۳) دیدیم که $(X_W)^* = X^*$.

۲۲.۳ نقاط اکستریم. فرض کنیم K زیرمجموعه‌ای از فضای‌برداری X باشد. مجموعهٔ

ناتهی $S \subset K$ یک **مجموعهٔ اکستریم** K نام دارد اگر هیچ نقطه‌ای از S یک نقطهٔ درونی هیچ بازه‌ای که نقاط انتهایی‌اش در Kاند جز وقتی هر دو نقطهٔ انتهایی در Sاند نباشد. این شرط را می‌توان به طور تحلیلی به صورت زیربیان کرد: هرگاه $x \in K$، $y \in K$، $0 < t < 1$، و

$$(1-t)x + ty \in S,$$

آنگاه $x \in S$ و $y \in S$.

نقاط اکستریم K مجموعه‌های اکستریمی هستند که فقط از یک نقطه تشکیل شده‌اند. مجموعهٔ تمام نقاط اکستریم K را با $E(K)$ نشان می‌دهیم.

دو قضیهٔ زیر نشان می‌دهند که $E(K)$ تحت شرایطی یک مجموعهٔ نسبتاً بزرگ است.

۲۳.۳ قضیهٔ کرین - میلمن. ***فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک باشد که X^* بر آن نقاط را جداسازد. هرگاه K یک مجموعهٔ محدب فشردهٔ ناتهی در X باشد، آنگاه K غلاف محدب بستهٔ مجموعهٔ نقاط اکستریم خود می‌باشد. با علامات، $K = \overline{co}(E(K))$.***

برهان. فرض کنیم $\mathscr{P}$ گردایهٔ تمام مجموعه‌های اکستریم فشردهٔ K باشد. چون $K \in \mathscr{P}$، $\mathscr{P} \neq \varnothing$. ما از دو خاصیت زیر از $\mathscr{P}$ استفاده خواهیم کرد:

(آ) اشتراک S هر زیرگردایهٔ ناتهی $\mathscr{P}$ عضوی از $\mathscr{P}$ است مگر آنکه $S = \varnothing$.

(ب) هرگاه $S \in \mathscr{P}$، $\Lambda \in X^*$، μ ماکزیمم $\operatorname{Re}\Lambda$ بر S بوده، و

$$S_\Lambda = \{x \in S : \operatorname{Re}\Lambda x = \mu\},$$

آنگاه $S_\Lambda \in \mathscr{P}$.

قسمت (آ) بی‌درنگ ثابت می‌شود. برای اثبات (ب) فرض کنیم $tx + (1-t)y = z \in S_\Lambda$، $x \in K$، $y \in K$، $0 < t < 1$. چون $z \in S$ و $S \in \mathscr{P}$، داریم $x \in S$ و $y \in S$. لذا $\operatorname{Re}\Lambda x \le \mu$ و $\operatorname{Re}\Lambda y \le \mu$. چون $\operatorname{Re}\Lambda z = \mu$ و Λ خطی است، نتیجه می‌گیریم که $\operatorname{Re}\Lambda x = \mu = \operatorname{Re}\Lambda y$. لذا $x \in S_\Lambda$ و $y \in S_\Lambda$. این قسمت (ب) را

ثابت خواهد کرد.

$S \in \mathscr{P}$ی اختیار می‌کنیم. فرض کنیم $\mathscr{P}'$ گردایهٔ تمام اعضای $\mathscr{P}$ باشد که زیرمجموعه‌های S اند. چون $S \in \mathscr{P}'$ ، $\mathscr{P}'$ تهی نیست. $\mathscr{P}'$ را به وسیلهٔ شمول مجموعه‌ها جزیی مرتب کرده، فرض می‌کنیم Ω یک زیرگردایهٔ کلی مرتب ماکزیمال $\mathscr{P}'$ بوده، وM اشتراک تمام اعضای Ω باشد. چون Ω گردایه‌ای از مجموعه‌های فشرده با خاصیت اشتراک متناهی است، $M \neq \varnothing$. بنا بر (آ)، $M \in \mathscr{P}'$. ماکزیمالی Ω ایجاب می‌کند که هیچ زیرمجموعهٔ حقیقی M تعلق به $\mathscr{P}$ ندارد. حال از قسمت (ب) نتیجه می‌شود که هر $\Lambda \in X^*$ بر M ثابت است. چون X^* نقاط بر X را جدا می‌سازد، M فقط دارای یک نقطه است. بنابراین، M یک نقطهٔ اکستریم K می‌باشد.

پس ثابت کرده‌ایم که به ازای هر $S \in \mathscr{P}$،

$$E(K) \cap S \neq \varnothing . \tag{۱}$$

به عبارت دیگر، ***هر مجموعهٔ اکستریم فشردهٔ K شامل یک نقطهٔ اکستریم از K است.***

چون K فشرده و محدب است (فرض تحدب K برای اولین بار به کار برده می‌شود)، داریم

$$\overline{co}(E(K)) \subset K \tag{۲}$$

و این نشان می‌دهد که $\overline{co}(E(K))$ فشرده می‌باشد.

برای رسیدن به تناقض فرض می‌کنیم $x_\circ \in K$ی در $\overline{co}(E(K))$ نباشد. در این‌صورت، بنابر قضیهٔ ۲۱.۳، $\Lambda \in X^*$ای هست به طوری که به ازای هر $x \in \overline{co}(E(K))$، $\operatorname{Re}\Lambda x < \operatorname{Re}\Lambda x_\circ$. هرگاه K_Λ همانند در (ب) تعریف شده باشد، آنگاه $K_\Lambda \in \mathscr{P}$. انتخاب ما از Λ نشان می‌دهد که K_Λ و $\overline{co}(E(K))$ از هم جدایند، و این رابطهٔ (۱) را نقض می‌کند.

تبصره. از تحدب K فقط برای اثبات فشرده بودن $\overline{co}(E(K))$ استفاده شد. اگر X موضعاً محدب فرض شده بود، فشردگی $\overline{co}(E(K))$ لازم نبود، زیرا می‌توانستیم از قسمت (ب) قضیهٔ ۴.۳ به جای قضیهٔ ۲۱.۳ استفاده کنیم. در این صورت استدلال فوق ثابت می‌کند که $K \subset \overline{co}(E(K))$. لذا صورت زیر از قضیهٔ کرین- میلمن به دست می‌آید:

۲۴.۳ قضیه. هرگاه K زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از یک فضای موضعاً محدب باشد، آنگاه $K \subset \overline{co}(E(K))$.
به بیان معادل، $\overline{co}(K) = \overline{co}(E(K))$.

در این وضع ممکن است $\overline{co}(K)$ نقاط اکستریمی داشته باشد که در K نباشند. (ر.ک.تمرین ۳۳.) قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که این شکل در صورتی که $\overline{co}(K)$ فشرده باشد رخ نمی‌دهد. لذا، طبق قسمت (پ) قضیهٔ ۲۰.۳، در هیچ فضای فرشه‌ای رخ نخواهدداد.

۲۵.۳ قضیهٔ میلمن. هرگاه K مجموعهٔ فشرده‌ای در فضای موضعاً محدب X بوده، $\overline{co}(K)$ نیز فشرده باشد، آنگاه هر نقطهٔ اکستریم $\overline{co}(K)$ در K قرار دارد.

برهان. فرض کنیم نقطهٔ اکستریمی مانند p از $\overline{co}(K)$ در K نباشد. دراین‌صورت یک همسایگی در حال تعادل محدب مانند V از 0 در X هست به‌طوری که

$$(p+\overline{V}) \cap K = \varnothing . \qquad (۱)$$

نقاط x_1، ...، x_n را در K طوری می‌گیریم که $K \subset \bigcup_1^n (x_i + V)$. هر مجموعهٔ

$$A_i = \overline{co}\big(K \cap (x_i + V)\big) \qquad (1 \le i \le n) \qquad (۲)$$

محدب و نیز فشرده است زیرا $A_i \subset \overline{co}(K)$. همچنین $K \subset A_1 \cup \ldots \cup A_n$. لـذا قسمت (آ) قضیهٔ ۲۰.۳ نشان می‌دهد که

$$\overline{co}(K) \subset \overline{co}\big(A_1 \cup \ldots \cup A_n\big) = co\big(A_1 \cup \ldots \cup A_n\big) . \qquad (۳)$$

ولی شمول مخالف نیز برقراراست زیرا به ازای هر i، $A_i \subset \overline{co}(K)$. لذا

$$\overline{co}(K) = co\big(A_1 \cup \ldots \cup A_n\big) . \qquad (۴)$$

به‌خصوص، $p = t_1 y_1 + \ldots + t_N y_N$ که در آن هر y_j در A_i ی قراردارد، هر t_j مثبت است، و $\sum t_j = 1$. بنابر (۴)، رابطهٔ

$$p = t_1 y_1 + (1 - t_1) \frac{t_2 y_2 + \ldots + t_N y_N}{t_2 + \ldots + t_N} \qquad (۵)$$

p را به صورت یک ترکیب محدب از دو نقطهٔ $\overline{co}(K)$ نشان می‌دهد. چون p یک نقطهٔ اکستریم $\overline{co}(K)$ است، از رابطهٔ (۵) نتیجه می‌گیریم که $y_1 = p$. لذا، به ازای i ی ،

$$p \in A_i \subset x_i + \overline{V} \subset K + \overline{V}, \qquad (٦)$$

که رابطهٔ (۱) را نقض خواهد کرد. [توجه کنید که، بنابر (۲)، $A_i \subset x_i + \overline{V}$ زیرا V محدب می‌باشد.]

انتگرالگیری برداری

گاهی انتگرالگیری از توابع f تعریف شده بر یک فضای اندازهٔ Q (با اندازهٔ حقیقی یا مختلط μ) که مقادیرش در یک فضای‌برداری توپولوژیک X است مطلوب است. اولین مسئله ارتباط یک بردار در X با این داده‌ها است که بتوان آن را

$$\int_Q f d\mu$$

نامید؛ یعنی دست کم بعضی از خواص معمولی انتگرالها را داشته باشد. به عنوان مثال، معادلهٔ

$$\Lambda\left(\int_Q f d\mu\right) = \int_Q (\Lambda f) d\mu$$

باید به ازای هر $\Lambda \in X^*$ برقرار باشد زیرا برای مجموعها برقرار است و انتگرالها به نوعی حدود مجموعهایند (یا باید باشند). درواقع، تعریف ما بر این تنها شرط استوار می‌باشد.

روشهای انتگرالگیری‌برداری زیاد دیگری به تفصیل مطرح‌اند؛ در بعضی از اینها، انتگرالها به طور مستقیم‌تر به صورت حدود مجموعها تعریف می‌شوند (ر.ک.تمرین ۲۳).

۲٦.۳ تعریف. فرض کنیم μ یک اندازه بر فضای اندازهٔ Q بوده، X یک فضای‌برداری توپولوژیک باشد که X^* بر آن نقاط را جدا می‌سازد، و f یک تابع از Q به توی X باشد به طوری که توابع اسکالر Λf به ازای هر $\Lambda \in X^*$ نسبت به μ انتگرالپذیر باشند؛ توجه کنید که Λf به وسیلهٔ

$$(\Lambda f)(q) = \Lambda(f(q)) \qquad (q \in Q) \qquad (۱)$$

تعریف شده است. هرگاه برداری مانند $y \in X$ چنان موجود باشد که به ازای هر $\Lambda \in X^*$،

$$\Lambda y = \int_Q (\Lambda f) d\mu, \qquad (۲)$$

آنگاه تعریف می‌کنیم

$$\int_Q f d\mu = y . \qquad (۳)$$

چند تبصره. واضح است که حداکثر یک چنین y وجود دارد، زیرا X^* نقاط بر X را جدا می‌سازد. ***لذا مسئلهٔ یکتایی نخواهیم داشت.***

وجود فقط در حالتی نسبتاً خاص (که برای بسیاری از کاربردها کافی است) که در آن Q فشرده و f پیوسته است ثابت خواهدشد. در این حالت، $f(Q)$ فشرده است، و تنها شرط دیگری که اعمال می‌شود این است که غلاف محدب بستهٔ $f(Q)$ باید فشرده باشد. بنا بر قضیهٔ ۲۰.۳، ***وقتی X یک فضای فرشه است، این شرط اضافی خودبخود برقرار می‌باشد.***

یادآور می‌شویم که یک ***اندازهٔ بورل*** بر یک فضای هاسدورف (یا موضعاً فشردهٔ)Q یک اندازه است که بر σ-جبر تمام مجموعه‌های بورل درQ تعریف شده است؛ این کوچکترین σ-جبری است که شامل تمام زیرمجموعه‌های باز Q است. ***اندازهٔ احتمال*** یک اندازهٔ مثبت با جرم کل ۱ می‌باشد.

۲۷.۳ قضیه. *فرض کنیم*

(آ) X یک فضای‌برداری توپولوژیک باشد که X^* بر آن نقاط را جدا می‌سازد، و

(ب) μ یک اندازهٔ احتمال بورل بر فضای هاسدورف فشردهٔ Q باشد.

هرگاه $f: Q \to X$ پیوسته بوده و $\overline{co}f((Q))$ در X فشرده باشد، آنگاه انتگرال

$$y = \int_Q f d\mu \qquad (۱)$$

به معنی تعریف ۲۶.۳ وجود دارد. به علاوه، $y \in \overline{co}(f(Q))$.

تبصره. هرگاه ν یک اندازهٔ بورل مثبت برQ باشد، آنگاه مضرب اسکالری از ν یک اندازهٔ احتمال است. لذا قضیه (جز آخرین جمله‌اش) با ν به جای μ برقرار است.

دراین‌صورت می‌توان [به وسیلهٔ قضیهٔ تجزیهٔ ژردان ($Jordan$)] به اندازه‌های بورل حقیقی و (اگر میدان اسکالر X مساوی $\mathbb{C}$ باشد) به اندازه‌های بورل مختلط تعمیم داد. تمرین ۲٤ تعمیم دیگری به دست می‌دهد.

برهان. X را یک فضای‌برداری حقیقی در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $H = co(f(Q))$. باید ثابت کنیم که $y \in H$ ی هست به‌طوری که به ازای **هر** $\Lambda \in X^*$،

$$\Lambda y = \int_Q (\Lambda f)\, d\mu. \tag{۲}$$

فرض کنیم $L = \{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n\}$ زیرمجموعه‌ای متناهی از X^* باشد. همچنین E_L مجموعهٔ تمام $y \in \overline{H}$ هایی باشد که در (۲) به ازای هر $\Lambda \in L$ صدق کند. هر E_L (طبق پیوستگی Λ) بسته و لذا ***فشرده*** است زیرا $\overline{H}$ فشرده می‌باشد. اگر هیچ E_L ی تهی نباشد، گردایهٔ تمام E_L ها دارای خاصیت اشتراک متناهی است. لذا اشتراک تمام E_L ها تهی نیست، و هر y در آن در رابطهٔ (۲) به ازای هر $\Lambda \in X^*$ صدق می‌کند. لذا کافی است ثابت کنیم که $E_L \neq \varnothing$.

$L = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$ را به عنوان یک نگاشت از X به توی R^n در نظرگرفته و قرار می‌دهیم $K = L(f(Q))$. تعریف می‌کنیم

$$m_i = \int_Q (\Lambda_i f)\, d\mu \qquad (1 \le i \le n)\,. \tag{۳}$$

حکم می‌کنیم که نقطهٔ $m = (m_1, \ldots, m_n)$ در غلاف محدب K قراردارد.

هرگاه $t = (t_1, \ldots, t_n) \in R^n$ دراین غلاف نباشد، آنگاه [بنا بر قضیهٔ ۲۰.۳ و قسمت (ب) قضیهٔ ٤.۳ و شکل معلوم تابعیهای خطی بر R^n] اعدادی حقیقی مانند c_1،...،c_n وجود دارند به‌طوری که اگر $u = (u_1, \ldots, u_n) \in K$،

$$\sum_{i=1}^{n} c_i u_i < \sum_{i=1}^{n} c_i t_i. \tag{٤}$$

لذا

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \Lambda_i f(q) < \sum_{i=1}^{n} c_i t_i \quad (q \in Q). \tag{٥}$$

چون μ یک اندازهٔ احتمال است، انتگرالگیری از طرف چپ (٥) نامساوی $\sum c_i m_i < \sum c_i t_i$ را به‌دست می‌دهد. لذا $t \neq m$.

این نشان می‌دهد که m در غلاف محدب K قراردارد. چون $K = L(f(Q))$ و L

خطی است، پس به ازای yی در غلاف محدب H از $f(Q)$، $m = Ly$. بـه ازای ایـن y داریم.

$$\Lambda_i y = m_i = \int_Q (\Lambda_i f) d\mu \qquad (1 \le i \le n). \tag{٦}$$

بنابراین $y \in E_L$ و این برهان را تمام خواهد کرد.

۲۸.۳ قضیه. *فرض کنیم*

(آ) X یک فضای برداری توپولوژیک باشد که X^* بر آن نقاط را جدا می‌سازد؛

(ب) Q زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از X باشد؛ و

(پ) غلاف محدب بستهٔ $\overline{H}$ از Q فشرده باشد.

در این‌صورت $y \in \overline{H}$ اگر و فقط اگر یک اندازهٔ احتمال بورل منتظم مانند μ بر Q باشد به‌طوری که

$$y = \int_Q x d\mu(x). \tag{۱}$$

چند تبصره. انتگرال باید به معنی تعریف ۲٦.۳ با $f(x) = x$ گرفته شود.

به یادآورید که یک اندازهٔ بورل مثبـت بـر Q را **منتظـم** گوییـم اگـر بـه ازای هـر مجموعهٔ بورل $E \subset Q$،

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E\} = \inf\{\mu(G) : E \subset G\} \tag{۲}$$

که در آن K روی زیرمجموعه‌های فشـردهٔ E و G روی زیرمجموعـه‌های بـاز E تغییـر می‌کند.

انتگرال (۱) هر $y \in \overline{H}$ را به صورت یک "متوسط وزندار" Q یا بـه‌صورت "مرکـز جرم" یک جرم‌یکهٔ توزیع شده روی Q نمایش می‌دهد.

بار دیگر تأکید می‌کنیم که اگر X یک فضای‌فرشه باشد، قسمت (پ) از قسمت (ب) نتیجه خواهدشد.

برهان. مجدداً X را یک فضای‌برداری حقیقی می گیریم. فرض کنیم $C(Q)$ فضای بانـاخ تمام توابع پیوستهٔ حقیقی بر Q با نرم سوپرمم باشد. قضیهٔ نمـایش ریـس فضای‌دوگـان $C(Q^*)$ را با فضای تمام اندازه‌های بورل حقیقی بر Q کـه تفاضلهـای اندازه‌هـای بـورل

مثبت منتظم‌اند یکی می‌سازد. با توجه به این انطباق، نگاشت

$$\phi : C(Q)^{*} \to X \tag{۳}$$

را با

$$\phi(\mu) = \int_{Q} x d\mu(x) \tag{٤}$$

تعریف می‌کنیم.

فرض کنیم P مجموعهٔ تمام اندازه‌های احتمال بورل منتظم بر Q باشد. قضیه حکم می‌کند که $\phi(P) = \overline{H}$.

به ازای هر $x \in Q$، جرم‌یکهٔ δ_x متمرکز در x متعلق به P است. چون $\phi(\delta_x) = x$، می‌بینیم که $Q \subset \phi(P)$. و چون ϕ خطی و P محدب است، نتیجه می‌شود که $H \subset \phi(P)$ که درآن H غلاف محدب Q می‌باشد. بنابر قضیهٔ ۲۷.۳، $\phi(P) \subset \overline{H}$.

بنابراین آنچه باقی می‌ماند اثبات بسته بودن $\phi(P)$ در X است.

این امر نتیجه‌ای از دو مطلب زیر می‌باشد:

(یک) P در $C(Q)^{*}$ ضعیف* – فشرده است؛

(دو) اگر $C(Q)^{*}$ توپولوژی ضعیف* – فشردهٔ خود را داشته و X توپولوژی ضعیفش را داشته باشد، نگاشت ϕ تعریف شده به وسیلهٔ (٤) پیوسته می‌باشد.

به محض داشتن (یک) و (دو)، نتیجه می‌شودکه $\phi(P)$ به طور ضعیف فشرده است؛ لذا به طور ضعیف بسته است، و چون مجموعه‌های به طور ضعیف بسته به‌طور قوی بسته‌اند، نتیجهٔ مطلوب را خواهیم داشت.

برای اثبات (یک) توجه می‌کنیم که

$$P \subset \left\{ \mu : \left| \int_{Q} h d\mu \right| \le ۱ \quad \text{،} \ \|h\| < ۱ \ \text{اگر} \right\} \tag{۵}$$

و این مجموعهٔ بزرگتر طبق قضیهٔ باناخ – آلوگلو، ضعیف* – فشرده می‌باشد. لذا کافی است نشان دهیم که P ضعیف* – بسته می‌باشد.

اگر $h \in C(Q)$ و $h \ge ۰$، قرار می‌دهیم

$$E_h = \left\{ \mu : \int_{Q} h d_{\mu} \ge ۰ \right\} . \tag{٦}$$

چون $\mu \to \int h d\mu$ پیوسته است، بنابر تعریف ضعیف* – توپولوژی، هر E_h ضعیف* – بسته است. لذا مجموعهٔ

$$E = \left\{ \mu : \int_{Q} ۱ d\mu = ۱ \right\} \tag{۷}$$

نیز چنین است. چون P اشتراک E و مجموعه‌های E_h است، P ضعیف*- بسته خواهدبود.

برای اثبات (دو) کافی است ثابت کنیم ϕ درمبدأ پیوسته است، زیرا ϕ خطی می‌باشد. هر همسایگی ضعیف ۰ در X شامل مجموعه‌ای به شکل

$$W = \{y \in X : |\Lambda_i y| < r_i \quad \text{به ازای } 1 \le i \le n\} \tag{8}$$

است که در آن $\Lambda_i \in X^*$ و $r_i > 0$. تحدیدهای Λ_i به Q در $C(Q)$ قراردارند. لذا

$$V = \{\mu \in C(Q)^* : \left|\int_Q \Lambda_i d\mu\right| < r_i \text{ ، } 1 \le i \le n \quad \text{به ازای } \} \tag{9}$$

یک ضعیف*-همسایگی ۰ در $C(Q)^*$ است. ولی، طبق تعریف ۲۶.۳،

$$\int_Q \Lambda_i d\mu = \Lambda_i\left(\int_Q x d\mu(x)\right) = \Lambda_i \phi(\mu). \tag{10}$$

پس از روابط (۸)، (۹)، و (۱۰) نتیجه می‌شود که $\phi(V) \subset W$. بنابراین ϕ پیوسته می‌باشد.

نامساوی سادهٔ زیر آخرین حکم در قضیهٔ ۲۷.۳ را قویتر می‌سازد.

۲۹.۳ قضیه. *فرض کنیم Q یک فضای هاسدورف فشرده بوده، X یک فضای باناخ باشد، $f : Q \to X$ پیوسته باشد، و μ یک اندازهٔ بورل مثبت بر Q باشد. در این‌صورت*

$$\left\| \int_Q f d\mu \right\| \le \int_Q \|f\| d\mu .$$

برهان. قرار می‌دهیم $y = \int f d\mu$. بنابر نتیجهٔ قضیهٔ ۳.۳، $\Lambda \in X^*$ای هست به‌طوری که $\Lambda y = \|y\|$ و به ازای هر $x \in X$، $|\Lambda x| \le \|x\|$. به‌خصوص، به ازای هر $s \in Q$،

$$|\Lambda f(s)| \le \|f(s)\| .$$

بنا بر قضیهٔ ۲۷.۳ ، داریم

$$\|y\| = \Lambda y = \int_Q (\Lambda f) d\mu \le \int_Q \|f\| d\mu.$$

توابع هلوریخت

در مطالعهٔ جبرهای باناخ، و نیز در محدوده‌های دیگر، کشیدن مفهوم تابع هلوریخت‌ازتوابع‌مختلط به برداری‌سودمند است. (البته، بارفتن از $\mathscr{C}$ به $\mathscr{C}^n$ و حتی فراتر، می‌توان قلمروها را نیز تعمیم داد. اما این خود داستانی دیگر است.) در این محدودهٔ کلی دست کم دو تعریف بسیار طبیعی از "هلوریخت" وجود دارد که عبارتند از "ضعیف" و "قوی". اگر مقادیر در یک فضای فرشه باشند، اینها ردهٔ واحدی از توابع را تعریف خواهند کرد.

۳۰.۳ تعریف. فرض کنیم Ω یک مجموعهٔ باز در $\mathscr{C}$ بوده و X یک فضای‌برداری توپولوژیک مختلط باشد.

(آ) گوییم تابع $f:\Omega\to X$ در Ω ***به طور ضعیف هلوریخت*** است اگر Λf به ازای هر $\Lambda\in X^*$ به معنی معمولی هلوریخت باشد.

(ب) گوییم تابع $f:\Omega\to X$ در Ω ***به طور قوی هلوریخت*** است اگر

$$\lim_{w\to z}\frac{f(w)-f(z)}{w-z}$$

به ازای هر $z\in\Omega$ (در توپولوژی X) موجود باشد.

توجه کنید که خارج قسمت فوق حاصل‌ضرب اسکالر $(w-z)^{-1}$ در بردار $f(w)-f(z)$ در X است.

پیوستگی تابعیهای Λی آمده در (آ) آشکار می‌سازد که هر تابع به طور قوی هلوریخت به طورضعیف هلوریخت است. وقتی X یک فضای فرشه باشد عکس مطلب نیز درست است ولی این امر چندان واضح نیست. (به یاد آورید که دنباله‌های به طور ضعیف همگرا ممکن است اصولاً همگرا نباشند.) قضیهٔ کشی نقش مهمی در این اثبات دارد، همین طور قضیهٔ ۱۸.۳.

اندیس نقطهٔ $z\in\mathscr{C}$ نسبت به مسیر بستهٔ Γ که از z نگذرد با $\operatorname{Ind}_\Gamma(z)$ نموده می‌شود. به یاد می‌آوریم که

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{d\zeta}{\zeta-z}.$$

تمام مسیرهای موردنظر دراینجا و بعداً قطعه قطعه به طور پیوسته مشتقپذیرند یا دست کم با طول متناهی می‌باشند.

۳۱.۳ قضیه. *فرض کنیم Ω در $\mathcal{C}$ باز بوده، X یک فضای فرشهٔ مختلط باشد، و*

$$f:\Omega\to X$$

به طور ضعیف هلوریخت باشد. در این صورت نتایج زیررا خواهیم داشت:

(آ) f در Ω به طور قوی پیوسته است؛

(ب) قضیهٔ کشی و فرمول‌کشی برقرارند: هرگاه Γ یک مسیر بسته در Ω باشد به‌طوری که به ازای هر $w\notin\Omega$، $\operatorname{Ind}_{\Gamma}(w)=0$، آنگاه

$$\int_{\Gamma}f(\zeta)d\zeta=0 \tag{1}$$

و اگر $z\in\Omega$ و $\operatorname{Ind}_{\Gamma}(z)=1$،

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\zeta-z)^{-1}f(\zeta)d\zeta. \tag{2}$$

هرگاه Γ_1 و Γ_2 دو مسیر بسته در Ω باشند به‌طوری که به ازای هر $w\notin\Omega$،

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma_1}(w)=\operatorname{Ind}_{\Gamma_2}(w),$$

آنگاه

$$\int_{\Gamma_1}f(\zeta)d\zeta=\int_{\Gamma_2}f(\zeta)d\zeta. \tag{3}$$

(پ) f در Ω به طوری قوی هلوریخت است.

انتگرالهای مذکور در (ب) باید به مفهوم قضیهٔ ۲۷.۳ گرفته شوند. یا می‌توان $d\zeta$ را یک اندازهٔ مختلط بر برد Γ (یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ $\mathcal{C}$) گرفت یا می‌توان Γ را پارامتریزه کرد و نسبت به اندازهٔ لبگ بر یک بازهٔ فشرده در R انتگرالگیری نمود.

برهان. (آ) فرض کنیم $0\in\Omega$. ثابت می‌کنیم f در 0 به طوری قوی پیوسته است. تعریف می‌کنیم

$$\Delta_r=\{z\in\mathcal{C}:|z|\le r\}. \tag{4}$$

در این صورت، به ازای $r>0$ی، $\Delta_{2r}\subset\Omega$. فرض کنیم Γ مرز به طور مثبت جهتدار Δ_{2r} باشد. $\Lambda\in X^*$ را ثابت می‌گیریم. چون Λf هلوریخت است، اگر $0<|z|<2r$،

$$\frac{(\Lambda f)(z)-(\Lambda f)(0)}{z}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\Lambda f)(\zeta)}{(\zeta-z)\zeta}d\zeta. \tag{5}$$

فرض کنیم $M(\Lambda)$ ماکزیمم $|\Lambda f|$ بر Δ_{2r} باشد. اگر $0<|z|\le r$، نتیجه می‌شود که

$$\left|z^{-1}\Lambda[f(z)-f(0)]\right|\le r^{-1}M(\Lambda). \tag{6}$$

لذا مجموعهٔ تمام خارج قسمتهای

$$\left\{\frac{f(z)-f(0)}{z}:0<|z|\le r\right\} \tag{7}$$

در X به طور ضعیف کراندار است. بنابر قضیهٔ ۱۸.۳، این مجموعه به طور قوی کراندار نیز هست. لذا اگر V یک همسایگی (قوی) 0 در X باشد، عددی مانند $t<\infty$ هست به طوری که

$$f(z)-f(0)\in ztV \qquad (0<|z|\le r). \tag{8}$$

درنتیجه، وقتی $z\to 0$، به طور قوی $f(z)\to f(0)$. [جالب است توجه شود که در برهان (آ) فقط از تحدب موضعی X استفاده شد. تا اینجا نه متریذیری و نه تمامیت نقشی ایفا نکرده است.] این قسمت دشوار مسئله بود. بقیهٔ کار خودبخود واضح است.

(ب) بنا بر قسمت (آ) و قضیهٔ ۲۷.۳، انتگرالهای (۱) تا (۳) وجود دارند. این سه فرمول (طبق نظریهٔ توابع هلوریخت معمولی) در صورت تعویض f با Λf که Λ عضو دلخواهی از X^* است درست‌اند. بنابراین، طبق تعریف ۲۶.۳، فرمولها به صورت بیان شده درست می‌باشند.

(پ) فرض کنیم، همانند برهان (آ)، $\Delta_{2r}\subset\Omega$ و Γ را همانند در (آ) اختیار می‌کنیم. تعریف می‌کنیم

$$y=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \zeta^{-2}f(\zeta)d\zeta. \tag{9}$$

فرمول کشی (۲)، پس از محاسباتی کوتاه، نشان می‌دهد که اگر $0<|z|<2r$،

$$\frac{f(z)-f(0)}{z}=y+zg(z) \tag{10}$$

که درآن

$$g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[2re^{i\theta}\left(2re^{i\theta}-z\right)\right]^{-1}f\left(2re^{i\theta}\right)d\theta. \tag{11}$$

فرض کنیم V یک همسایگی در حال تعادل محدب ۰ در X باشد. قرار می‌دهیم $K = \{f(\zeta): |\zeta| = 2r\}$. در این‌صورت K فشرده است؛ درنتیجه، به ازای $t < \infty$ ای، $K \subset tV$. اگر $s = tr^{-2}$ و $|z| \le r$، نتیجه می‌شود که انتگرالده (۱۱) به ازای هر θ در sV قراردارد. لذا، اگر $|z| \le r$، $g(z) \in s\overline{V}$. بنابراین طرف چپ (۱۰) وقتی $z \to 0$ قویاً همگرا به y می‌باشد.

توسیع زیر از قضیهٔ لیوویل (*Liouville*) مربوط به توابع تمام کراندار حتی به قضیهٔ ۳۱.۳ وابسته نیست. از آن می‌توان در مطالعهٔ طیفها در جبرهای باناخ استفاده کرد. (ر.ک.تمرین ۱۰، فصل ۱۰.)

۳۲.۳ قضیه. ***فرض کنیم X یک فضای‌برداری توپولوژیک مختلط باشد که X^* بر آن نقاط را جدا می‌سازد. همچنین $f: \mathbb{C} \to X$ به طور ضعیف هلوریخت بوده و $f(\mathbb{C})$ یک زیرمجموعهٔ به طور ضعیف کراندار از X باشد. در این‌صورت f ثابت می‌باشد.***

برهان. به ازای هر $\Lambda \in X^*$، Λf یک تابع (مختلط) تمام کراندار است. اگر $z \in \mathbb{C}$، از قضیهٔ لیوویل معلوم می‌شود که

$$\Lambda f(z) = \Lambda f(0) .$$

چون X^* نقاط بر X را جدا می‌سازد، این ایجاب می‌کند که به ازای هر $z \in \mathbb{C}$، $f(z) = f(0)$.

قسمت (ت) تمرین ۵ یک مجموعهٔ به طور ضعیف کراندار در یک F- فضای X که بر آن X^* نقاط را جدا می‌سازد توصیف می‌کند که اصولاً کراندار نیست. قس. قضیهٔ ۱۸.۳.

تمرینات

۱. مجموعهٔ $H \subset R^n$ را یک ***ابرصفحه*** نامیم اگر اعدادی حقیقی مانند a_1، ...، a_n، c (که

به ازای دست کم یک i، $a_i \neq 0$) وجود داشته باشند به‌طوری که H از تمام نقاط $x = (x_1, \dots, x_n)$ صادق در $\sum a_i x_i = c$ تشکیل شده باشد.

فرض کنید E یک مجموعهٔ محدب در R^n با درون ناتهی بوده و y یک نقطهٔ مرزی E باشد. ثابت کنید یک ابرصفحه مانند H هست به‌طوری که $y \in H$ و E کاملاً در یک طرف H قرار دارد. (نتیجه را دقیقتر بیان نمایید.) ***پیشنهاد.*** فرض کنید 0 یک نقطهٔ درونی E بوده، M زیرفضای یک بعدی شامل y باشد، و قضیهٔ ۲.۳ را به کار برید.

۲. فرض کنید $L^2 = L^2([-1,1])$ نسبت به اندازهٔ لبگ باشد. به ازای هر اسکالر α، E_α مجموعهٔ تمام توابع پیوستهٔ f بر $[-1,1]$ باشد به‌طوری که $f(0) = \alpha$. نشان دهید که هر E_α محدب بوده ودر L^2 چگال می‌باشد. لذا E_α و E_β (درصورتی که $\alpha \neq \beta$) مجموعه‌های محدب از هم جدایی هستند که به وسیلهٔ هیچ تابعی خطی پیوستهٔ Λ بر L^2 جدا نمی‌شوند. ***راهنمایی.*** $\Lambda(E_\alpha)$ چیست؟

۳. فرض کنید X یک فضای‌برداری حقیقی (بدون توپولوژی) باشد. نقطهٔ $x_0 \in A \subset X$ یک نقطهٔ ***درونی*** A است اگر $A - x_0$ یک مجموعهٔ جاذب باشد.

(آ) فرض کنید A و B دو مجموعهٔ محدب از هم جدا در X بوده و A دارای یک نقطهٔ درونی باشد. ثابت کنید یک تابعی خطی غیرثابت مانند Λ بر X هست به‌طوری که $\Lambda(A) \cap \Lambda(B)$ شامل حداکثر یک نقطه است. (برهان شبیه برهان قضیهٔ ٤.٣ است.)

(ب) نشان دهید (مثلاً به ازای $X = R^2$) که تحت مفروضات (آ) ممکن نیست $\Lambda(A)$ و $\Lambda(B)$ از هم جدا باشند.

٤. فرض کنید ℓ^∞ فضای تمام توابع کراندار حقیقی x بر اعداد صحیح مثبت باشد. همچنین τ عملگر انتقال تعریف شده بر ℓ^∞ به وسیلهٔ معادلهٔ

$$(\tau x)(n) = x(n+1) \quad (n = 1,2,3,\dots)$$

باشد. ثابت کنید یک تابعی خطی مانند Λ بر ℓ^∞ (به نام ***حد باناخ***) هست به‌طوری که

(آ) $\Lambda \tau x = \Lambda x$ و

(ب) به ازای هر $x \in \ell^\infty$، $\lim_{n\to\infty} \inf x(n) \le \Lambda x \le \lim_{n\to\infty} \sup x(n)$.

پیشنهاد. تعریف کنید

$$\Lambda_n x = \frac{x(1) + \dots + x(n)}{n}$$

$$M = \{x \in \ell^{\infty} : \text{موجود است} \lim_{n\to\infty} \Lambda_n x = \Lambda x\}$$
$$p(x) = \lim_{n\to\infty} \sup \Lambda_n x$$

و قضیهٔ ۲.۳ را به کار برید.

۵. به ازای $\circ < p < \infty$، فرض کنید ℓ^p فضای تمام توابع x (حقیقی یا مختلط ، بسته به حالت) بر اعداد صحیح مثبت باشد به‌طوری که

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty.$$

به ازای $1 \le p < \infty$ تعریف کنید $\|x\|_p = \left\{\sum |x(n)|^p\right\}^{1/p}$ و $\|x\|_\infty = \sup_n |x(n)|$.

(آ) فرض کنید $1 \le p < \infty$. ثابت کنید $\|x\|_p$ و $\|x\|_\infty$ فضاهای ℓ^p و ℓ^∞ را بــه فضاهـای باناخ تبدیل می‌کنند. اگر $p^{-1} + q^{-1} = 1$، ثابت کنیــد بـه مفهـوم زیـر $\left(\ell^p\right)^* = \ell^q$: یـک تناظر یک به یک مانند $y \leftrightarrow \Lambda$ بین $\left(\ell^p\right)^*$ و ℓ^q وجود دارد که با

$$\Lambda x = \sum x(n) y(n) \qquad \left(x \in \ell^p\right)$$

داده می‌شود.

(بـ) فرض کنید $1 < p < \infty$ و ثابت کنید ℓ^p شامل دنباله‌هایی است که به طــور ضعیـف همگرایند ولی به طور قوی همگرا نیستند.

(پـ) از سوی دیگر، ثابت کنید هر دنبالهٔ بــه طـور ضعیـف همگـرا در ℓ^1 بـه طـور قـوی همگراست و این علیرغم آن است که توپولوژی ضعیف ℓ^1 با توپولوژی قوی آن (کـه از نرم القا می‌شود) متفاوت می‌باشد.

(تـ) اگر $\circ < p < 1$، ثابت کنید ℓ^p با متر

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n) - y(n)|^p$$

یک F - فضای موضعاً کراندار است که موضعاً محدب نیســت ولـی بـا اینحـال $\left(\ell^p\right)^*$ نقاط بر ℓ^p را از هــم جـدا می‌سـازد. (لـذا مجموعـه‌های بـاز محـدب بسـیاری در ℓ^p موجودند ولی کافی برای تشکیل یک پایه برای توپولوژی‌اش نمی‌باشند.) نشان دهید که به همان مفهوم مذکور در (آ) $\left(\ell^p\right)^* = \ell^\infty$. همچنین نشان دهید که مجموعهٔ تمـام x هـا با $\sum |x(n)| < 1$ به طور ضعیف کراندار است ولی اصولاً کراندار نیست.

(ثـ) به ازای $0 < p \le 1$، فرض کنید τ_p ضعیف* - توپولوژی القا شده بر ℓ^∞ به وسیلهٔ ℓ^p باشد؛ ر.ک. (آ) و (تـ) . اگر $0 < p < r \le 1$، نشان دهید که τ_p و τ_r توپولوژیهای **متفاوتی** اند (آیا یکی از دیگری ضعیفتر است؟) ولی بر هرزیرمجموعهٔ نرم - کراندار ℓ^∞ توپولوژی یکسانی القا می‌کنند. ***راهنمایی.*** گوی‌یکهٔ نرم - بستهٔ ℓ^∞ ضعیف* - فشرده است.

۶. قراردهید $f_n(t) = e^{int}\ (-\pi \le t \le \pi)$ و فرض کنید نسبت به اندازهٔ لبگ $L^p = L^p(-\pi, \pi)$. اگر $1 \le p < \infty$، ثابت کنید $f_n \to 0$ به طور ضعیف در L^p ولی نه به طور قوی.

۷. $L^\infty([0,1])$ دارای نرم توپولوژی خودش است ($\|f\|_\infty$ سوپرمم اساسی $|f|$ است) و ضعیف* -توپولوژی آن به عنوان دوگان L^1 است. نشان دهید که C (فضای تمام توابع پیوسته بر $[0,1]$) در یکی از این توپولوژیها در L^∞ چگال است ولی در دیگری چگال نیست. (قس. نتایج قضیهٔ ۳.۱۲.) همین امر را با "بسته" به جای "چگال" نشان دهید.

۸. فرض کنید C فضای باناخ تمام توابع پیوستهٔ مختلط بر $[0,1]$ با نرم سوپرمم باشد. همچنین B گوی یکهٔ بستهٔ C باشد. نشان دهید که تابعیهای خطی پیوستهٔ Λ بر C وجود دارند به طوری که $\Lambda(B)$ زیرمجموعهٔ ***بازی*** از صفحهٔ مختلط است؛ به‌خصوص، $|\Lambda|$ ماکزیمم خود را بر B نمی‌گیرد.

۹. فرض کنید $E \subset L^2(-\pi, \pi)$ مجموعهٔ تمام توابع

$$f_{m,n}(t) = e^{imt} + me^{int}$$

باشد که درآنها m و n صحیح بوده و $0 \le m < n$. همچنین E_1 مجموعهٔ تمام $g \in L^2$ هایی باشد که دنباله‌ای در E به طور ضعیف همگرا به g موجود باشد(E_1 را **بست دنباله‌ای ضعیف** E می‌نامند.)

(آ) تمام $g \in E_1$ های را بیابید.

(بـ) تمام g ها در بست ضعیف $\overline{E}_w$ ی E را بیابید.

(پـ) نشان دهید که $0 \in \overline{E}_w$ ولی، با آنکه 0 در بست دنباله‌ای ضعیف E_1 واقع است، 0 در E_1 نیست.

این مثال نشان می‌دهد که یک بست دنباله‌ای ضعیف لزوماً به طور ضعیف بستهٔ دنباله‌ای نیست. لذا عبور از یک مجموعه به بست دنباله‌ای ضعیف آن یک عمل بست

به مفهومی که این اصطلاح معمولاً در توپولوژی به کار می‌رود نیست. (همچنین ر.ک.تمرین ۲۸.)

۱۰. ℓ^1 را به صورت فضای تمام توابع حقیقی x بر $S = \{(m,n): m \geq 1, n \geq 1\}$ چنان نمایش دهید که

$$\|x\|_1 = \sum |x(m,n)| < \infty.$$

فرض کنید c_0 فضای تمام توابع حقیقی γ بر S باشد به طوری‌که وقتی $m+n \to \infty$، $\gamma(m,n) \to 0$، با نرم $\|y\|_\infty = \sup|\gamma(m,n)|$.

فرض کنید M زیرفضایی از ℓ^1 مرکب از تمام $x \in \ell^1$ هایی باشد که در معادلات زیر صدق می‌کنند:

$$mx(m,1) = \sum_{n=2}^{\infty} x(m,n) \qquad (m = 1,2,3,\ldots).$$

(آ) ثابت کنید $(c_0)^* = \ell^1$. (همچنین ر.ک.تمرین ۲۴، فصل ٤.)

(ب) ثابت کنید M یک زیرفضای نرم- بستهٔ ℓ^1 است.

(پ) ثابت کنید M در ℓ^1 [نسبت به ضعیف* - توپولوژی داده شده به وسیلهٔ (آ)] ضعیف*- چگال است.

(ت) فرض کنید B گوی یکهٔ نرم - بستهٔ ℓ^1 باشد. علی‌رغم (پ)، ثابت کنید ضعیف*- بست $M \cap B$ شامل هیچ‌گویی نیست. ***پیشنهاد***. هرگاه $\delta > 0$ و $m > 2/\delta$، آنگاه به ازای $x \in M \cap B$،

$$|x(m,1)| \leq \frac{\|x\|}{m} < \frac{\delta}{2}$$

گرچه به ازای $x \in \delta B$ ی، $x(m,1) = \delta$. لذا δB در ضعیف*- بست $M \cap B$ نیست. این امر را به گویها با مراکز دیگر بکشانید.

(ث) قراردهید $x_0(m,1) = m^{-2}$ و وقتی $n \geq 2$، $x_0(m,n) = 0$. ثابت کنید، با وجود قسمت (پ)، ***دنباله‌ای*** در M که ضعیف* - همگرا به x_0 باشد وجود ندارد. ***راهنمایی***. ضعیف*- همگرایی $\{x_j\}$ به x_0 ایجاب می‌کند که به ازای هر m,n، وقتی $j \to \infty$، $x_j(m,n) \to x_0(m,n)$، و $\{\|x_j\|_1\}$ کراندار است.

۱۱. فرض کنید X یک فضای فرشه با بعد نامتناهی باشد. ثابت کنید X^* با ضعیف*- توپولوژی‌اش از رستهٔ اول در خودش است.

۱۲. نشان دهید که گوی یکهٔ نرم- بستهٔ $c_\circ$ به طور ضعیف فشرده نیست؛ به یاد آورید که $(c_\circ)^* = \ell^1$ (تمرین ۱۰).

۱۳. قراردهید $f_N(t) = N^{-1}\sum_{n=1}^{N^2} e^{int}$ و ثابت کنید $f_N \to \circ$ به طورضعیف در $L^2(-\pi,\pi)$. بنابر قضیهٔ ۱۳.۳، دنباله‌ای از ترکیبات محدب f_N در L^2- نرم همگرا به $\circ$ است. یک چنین دنباله را یافته و نشان دهید که $g_N = N^{-1}(f_1+...+f_N)$ چنین نیست.

۱۴. (آ) فرض کنید Ω یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده باشد. به ازای هر $K \subset \Omega$ی فشرده نیم نرم p_K را بر $C(\Omega)$، یعنی فضای تمام توابع پیوستهٔ مختلط بر Ω، با

$$p_K(f) = \sup\{|f(x)|: x \in K\}$$

تعریف کنید. به $C(\Omega)$ توپولوژی القا شده به وسیلهٔ این گردایه از نیم نرمها بدهید. ثابت کنید هر $\Lambda \in C(\Omega)^*$ نظیر یک $K \subset \Omega$ی فشرده و یک اندازهٔ بورل مختلط μ بر K است به‌طوری که

$$\Lambda f = \int_K f d\mu \quad [f \in C(\Omega)] .$$

(ب) فرض کنید Ω یک مجموعهٔ باز در $\mathbb{C}$ باشد. گردایهٔ شمارشپذیر Γ از اندازه‌ها با محافظ فشرده در Ω را طوری بیابید که $H(\Omega)$ (فضای تمام توابع هلوریخت در Ω) درست از $f \in C(\Omega)$هایی تشکیل شده باشد که در $\int f d\mu = \circ$ به ازای هر $\mu \in \Gamma$ صدق می‌کنند.

۱۵. فرض کنید X یک فضای‌برداری توپولوژیک باشد که بر آن X^* نقاط را جدا می‌سازد. ثابت کنید ضعیف*-توپولوژی X^* متریذیر است اگر و فقط اگر X دارای یک پایهٔ هامل متناهی یا شمارشپذیر باشد. (برای تعریف، ر.ک.تمرین ۱، فصل ۲.)

۱٦. ثابت کنید گوی یکهٔ بستهٔ L^1 (نسبت به اندازهٔ لبگ بر بازهٔ یکه) نقاط اکستریم ندارد ولی هر نقطه بر "سطح" گوی یکه در L^p $(1 < p < \infty)$ یک نقطهٔ اکستریم گوی است.

۱۷. نقاط اکستریم گوی یکهٔ بستهٔ C (فضای تمام توابع پیوسته بر بازهٔ یکه) با نرم سوپرمم را تعیین کنید. (جواب تابع انتخاب میدان اسکالراست.)

۱۸. فرض کنید K کوچکترین مجموعهٔ محدب در R^3 باشد که شامل نقاط $(1,\circ,1)$، $(1,\circ,-1)$، و $(\cos\theta,\sin\theta,\circ)$ به ازای $\circ \le \theta \le 2\pi$ است. نشان دهید که K فشرده است. ولی مجموعهٔ تمام نقاط اکستریم K فشرده نیست. آیا یک چنین مثالی در R^2 وجود

دارد؟

۱۹. فرض کنید K مجموعهٔ محدب فشرده‌ای در R^n باشد. ثابت کنید هر $x \in K$ ترکیبی محدب از حداکثر $n+1$ نقطهٔ اکستریم K است. **پیشنهاد**. روی n استقرا کنید. از یک نقطهٔ اکستریم K خطی مار بر x بکشید تا K را ترک کند و از تمرین ۱ استفاده نمایید.

۲۰. فرض کنید $\{u_1, u_2, u_3, \ldots\}$ دنباله‌ای از بردارهای یکهٔ دو به دو متعامد در یک فضای هیلبرت باشد. همچنین K از بردارهای 0 و $n^{-1}u_n$ $(n \geq 1)$ تشکیل شده باشد. نشان دهید (آ) K فشرده است؛ (ب) $co(K)$ کراندار است؛ (پ) $co(K)$ بسته نیست. تمام نقاط اکستریم $\overline{co}(K)$ را بیابید.

۲۱. اگر $0 < p < 1$، هر $f \in L^p$ (جز $f = 0$) میانگین حسابی دو تابع است که فاصله‌شان تا 0 از فاصلهٔ f کمتر است. (ر.ک.بخش ۱.۴۷.) با استفاده از این یک مثال صریح از مجموعهٔ فشردهٔ شمارشپذیر مانند K در L^p (با 0 به عنوان تنها نقطهٔ حدی آن) بسازید که نقطهٔ اکستریم نداشته باشد.

۲۲. اگر $0 < p < 1$، نشان دهید که ℓ^p شامل یک مجموعهٔ فشرده مانند K است که غلاف محدبش بی‌کران است. این امر با وجود آنکه $\left(\ell^p\right)^*$ نقاط بر ℓ^p را جدا می‌کند رخ می‌دهد؛ ر.ک.تمرین ۵. **پیشنهاد**. $x_n \in \ell^p$ را با

$$x_n(n) = n^{p-1} \quad \text{و} \quad x_n(m) = 0 \quad \text{اگر} \quad m \neq n$$

تعریف کنید. فرض کنید K از $0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ تشکیل شده باشد. اگر

$$y_N = N^{-1}\left(x_1 + \ldots + x_N\right),$$

نشان دهید که $\{y_N\}$ در ℓ^p بی‌کران است.

۲۳. فرض کنید μ یک اندازهٔ احتمال بورل بر فضای هاسدورف فشردهٔ Q، X یک فضای فرشه، و $f: Q \to X$ پیوسته باشد. طبق تعریف، یک *افراز* Q عبارت است از گردایه‌ای متناهی از زیرمجموعه‌های بورل از هم‌جدا از Q که اجتماعشان Q است. ثابت کنید به ازای هر همسایگی V از 0 در X یک افراز مانند $\{E_i\}$ چنان نظیر است که تفاضل

$$z = \int_Q f d\mu - \sum_i \mu\left(E_i\right) f\left(s_i\right)$$

به ازای هر انتخاب $s_i \in E_i$ در V قراردارد. (این امر انتگرال را به صورت یک حد قوی

از "مجموعهای ریمان" نمایش می‌دهد. **پیشنهاد.** V را محدب و در حال تعادل بگیرید. هرگاه $\Lambda \in X^*$ و به ازای هر $x \in V$، $|\Lambda x| \leq 1$، آنگاه $|\Lambda z| \leq 1$ مشروط بر اینکه مجموعه‌های E_i طوری اختیار شوند که هروقت s و t در E_i واحدی باشند، $f(s) - f(t) \in V$.

۲۴. علاوه بر مفروضات قضیهٔ ۲۷.۳، فرض کنید T یک نگاشت خطی پیوسته از X به توی فضای‌برداری توپولوژیک Y باشد که بر آن Y^* نقاط را جدا می‌کند، و ثابت کنید

$$T \int_Q f d\mu = \int_Q (Tf) d\mu .$$

راهنمایی. به ازای هر $\Lambda \in Y^*$، $\Lambda T \in X^*$.

۲۵. فرض کنید E مجموعهٔ تمام نقاط اکستریم مجموعهٔ فشردهٔ K در فضای‌برداری توپولوژیک باشد که بر آن X^* نقاط را جدا می‌کند. ثابت کنید به هر $y \in K$ یک اندازهٔ احتمال بورل منتظم مانند μ بر $Q = \overline{E}$ چنان نظیر است که

$$y = \int_Q x d\mu(x).$$

۲۶. فرض کنید Ω یک ناحیه در $\mathbb{C}$ بوده، X یک فضای فرشه باشد، و $f: \Omega \to X$ هلوریخت باشد.

(آ) راجع به نمایش به سری توانی f، یعنی راجع به فرمول $f(z) = \sum (z-a)^n c_n$ که در آن $c_n \in X$، یک قضیه بیان و ثابت نمایید.

(ب) قضیهٔ موررا ($Morera$) را به توابع هلوریختXمقدار تعمیم دهید.

(پ) برای یک دنباله از توابع هلوریخت مختلط در Ω، همگرایی یکنواخت بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ Ω ایجاب می‌کند که حد هلوریخت باشد. آیا این امر به توابع هلوریخت X مقدار قابل تعمیم است؟

۲۷. فرض کنید $\{\alpha_i\}$ مجموعهٔ کراندار‌ی از اعداد مختلط متمایز بوده، $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$ یک تابع تمام با هر $c_n \neq 0$ باشد، و

$$g_i(z) = f(\alpha_i z).$$

ثابت کنید فضای‌برداری تولید شده به وسیلهٔ توابع g_i در فضای فرشهٔ $H(\mathbb{C})$ تعریف شده در بخش ۴۵.۱ چگال است.

پیشنهاد. فرض کنید μ یک اندازه با محافظ فشرده باشد به‌طوری که به ازای هر i،

$\int g_i d\mu = 0$. قراردهید

$$\phi(w) = \int f(wz)d\mu(z) \qquad (w \in \mathbb{C}).$$

ثابت کنید به ازای هر w، $\phi(w) = 0$. نتیجه بگیرید که به ازای $n = 1,2,3,\ldots$، $\int z^n d\mu(z) = 0$. از تمرین ۱٤ استفاده کنید.

اگر بعضی از c_nها ۰ باشند، زیرفضای بستهٔ $H(\mathbb{C})$ تولید شده به وسیلهٔ توابع g_i را توصیف نمایید.

۲۸. فرض کنید X یک فضای فرشه (یا، به طور کلیتر، یک فضای موضعاً محدب متریذیر) باشد و احکام زیر را ثابت نمایید:

(آ) X^* اجتماع مجموعه‌های ضعیف*- فشردهٔ شمارشپذیر E_n است.

(ب) اگر X جدایی‌پذیر باشد، هر E_n متریذیر است. لذا ضعیف*- توپولوژی X^* جدایی‌پذیر است، و زیرمجموعهٔ شمارشپذیری از X^* نقاط بر X را جدا می‌سازد. (قس. تمرین ۱۵.)

(پ) هرگاه K یک زیرمجموعهٔ به طورضعیف فشردهٔ X بوده و $x_0 \in K$ یک نقطهٔ حدی ضعیف مجموعهٔ شمارشپذیری مانند $E \subset K$ باشد، آنگاه دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در E هست که به طور ضعیف به x_0 همگراست.

راهنمایی. فرض کنید Y کوچکترین زیرفضای بستهٔ X باشد که شامل E است. قسمت (ب) را بر Y اعمال کرده و نتیجه بگیرید که توپولوژی ضعیف $K \cap Y$ متریذیر است.

تبصره. نکتهٔ مهم در (پ) وجود ***زیردنباله‌های*** همگرا به جای ***زیرتورها*** می‌باشد. توجه کنید که فضاهای هاسدورف فشرده‌ای وجود دارند که در آنها هیچ دنباله‌ای از نقاط متمایز همگرانیست. به عنوان مثال، ر.ک.تمرین ۱۸، فصل ۱۱.

۲۹. فرض کنید $C(K)$ فضای باناخ تمام توابع مختلط پیوسته بر فضای هاسدورف فشردهٔ K با نرم سوپرمم باشد. به ازای $p \in K$، $\Lambda p \in C(K)^*$ را با $\Lambda_p f = f(p)$ تعریف کنید. نشان دهید که $p \to \Lambda_p$ یک همانریختی از K به توی $C(K)^*$ است که با ضعیف*-توپولوژی مجهز شده است. لذا قسمت (پ) تمرین ۲۸ را نمی‌توان به مجموعه‌های ضعیف* -توپولوژی تعمیم داد.

۳۰. فرض کنید p یک نقطهٔ اکستریم مجموعهٔ محدبی مانند K بوده و $p = t_1x_1+\ldots+t_nx_n$ که در آن $\sum t_i = 1$، $t_i > 0$، و به ازای هر i، $x_i \in K$. ثابت کنید به

ازای هر i، $x_i = p$.

۳۱. فرض کنید A_1، ...، A_n مجموعه‌های محدبی در فضای‌برداری X باشند. ثابت کنید هر $x \in co(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ را می‌توان به شکل زیر نمایش داد:

$$x = t_1 a_1 + \ldots t_n a_n$$

که درآن به ازای هر i، $a_i \in A_i$ و $t_i \geq 0$، و $\sum t_i = 1$.

۳۲. فرض کنید X یک فضای باناخ با بعد نامتناهی بوده و $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ کرهٔ یکهٔ X باشد. می‌خواهیم S را با تعدادی متناهی گوی بسته که هیچیک شامل مبدأ X نباشد بپوشانیم. آیا این امر در (آ) هر X، (ب) X ی، (پ) هیچ X قابل انجام است؟

۳۳. فرض کنید $C(I)$ فضای باناخ تمام توابع مختلط پیوسته بر بازهٔ یکهٔ بستهٔ I با نرم سوپرمم باشد. همچنین $M = C(I)^*$ فضای تمام اندازه‌های بورل مختلط بر I باشد. به M ضعیف*- توپولوژی القا شده به وسیلهٔ $C(I)$ را می‌دهیم.

به ازای هر $t \in I$، فرض کنید $e_t \in M$ "تابعی ارزیاب" باشد که با $e_t f = f(t)$ تعریف می‌شود، و $\Lambda \in M$ را با $\Lambda f = \int_0^1 f(s)ds$ تعریف می‌کنیم.

(آ) نشان دهید که $t - e_t$ یک نگاشت پیوسته از I به توی M بوده و $K = \{e_t : t \in I\}$ یک مجموعهٔ فشرده در M است.

(ب) نشان دهید که $\Lambda \in \overline{co}(K)$.

(پ) جمیع $\mu \in \overline{co}(K)$ های را بیابید.

(ت) فرض کنید X زیرفضای M مرکب از تمام ترکیبات خطی متناهی

$$c_0 \Lambda + c_1 e_{t_1} + \ldots + c_n e_{t_n}$$

با ضرایب مختلط c_j باشد. توجه کنید که $co(K) \subset X$ و $X \cap \overline{co}(K)$ غلاف محدب بستهٔ K ***تحت*** X است. ثابت کنید Λ یک نقطهٔ اکستریم $X \cap \overline{co}(K)$ است حتی اگر Λ در K نباشد.

فصل ٤

دوگانی در فضاهای باناخ

دوگان نرمدار یک فضای نرمدار

آشنایی. اگر X و Y دو فضای‌برداری توپولوژیک باشند، $\mathscr{B}(X,Y)$ را گردایهٔ تمام نگاشتهای خطی کراندار (یا ***عملگرها***) از X به توی Y می‌گیریم. به خاطر سادگی، $\mathscr{B}(X,X)$ را با $\mathscr{B}(X)$ نشان می‌دهیم. هر $\mathscr{B}(X,Y)$ نسبت به تعریفهای معمولی جمع و ضرب اسکالر توابع خود یک فضای‌برداری است. (این نه به ساختار فضای‌برداری Y بستگی دارد نه به ساختار X) به طورکلی، به راههای زیادی می‌توان $\mathscr{B}(X,Y)$ را به یک فضای‌برداری ***توپولوژیک*** بدل ساخت.

ما د رفصل حاضر فقط با فضاهای نرمدار X و Y سروکار خواهیم داشت. در این وضع می‌توان خود $\mathscr{B}(X,Y)$ را به طرزی کاملاً طبیعی نرمدار ساخت. وقتی Y را میدان اسکالر بگیریم، درنتیجه $\mathscr{B}(X,Y)$ فضای دوگان X^* از X است، نرم مذکور در فوق بر $\mathscr{B}(X,Y)$ یک توپولوژی بر X^* تعریف می‌کند که از ضعیف*- توپولوژی آن قویتر است. روابط بین فضای باناخ X و ***دوگان نرمدار*** آن X^* بحث اصلی این فصل را تشکیل می‌دهند.

۱.٤ قضیه. ***فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار باشند. به هر $\Lambda \in \mathscr{B}(X,Y)$ عدد***

$$\|\Lambda\| = \sup\{\|\Lambda x\| : x \in X, \|x\| \le 1\} \tag{1}$$

را مربوط می‌کنیم. این تعریف $\|\Lambda\|$ فضای $\mathscr{B}(X,Y)$ را به یک فضای نرمدار تبدیل می‌کند. اگر Y فضای باناخ باشد، $\mathscr{B}(X,Y)$ نیز چنین است.

برهان. چون زیرمجموعه‌های فضاهای نرمدار کراندارند اگر و فقط اگر در مضربی از گوی‌یکه قرارداشته باشند، به ازای هر $\Lambda \in \mathscr{B}(X,Y)$، $\|\Lambda\| < \infty$. هرگاه α اسکالر باشد، آنگاه $(\alpha\Lambda)(x) = \alpha.\Lambda x$؛ درنتیجه

$$\|\alpha\Lambda\| = |\alpha|\|\Lambda\|. \tag{2}$$

نامساوی مثلثی در Y نشان می‌دهد که به ازای هر $x \in X$ که $\|x\| \le 1$،

$$\begin{aligned}\|(\Lambda_1 + \Lambda_2)x\| &= \|\Lambda_1 x + \Lambda_2 x\| \le \|\Lambda_1 x\| + \|\Lambda_2 x\| \le \\ &(\|\Lambda_1\| + \|\Lambda_2\|)\|x\| \le \|\Lambda_1\| + \|\Lambda_2\|.\end{aligned}$$

لذا

$$\|\Lambda_1 + \Lambda_2\| \le \|\Lambda_1\| + \|\Lambda_2\|. \tag{3}$$

هرگاه $\Lambda \neq 0$، آنگاه به ازای $x \in X$ ی، $\Lambda x \neq 0$؛ درنتیجه $\|\Lambda\| > 0$. لذا $\mathscr{B}(X,Y)$ یک فضای نرمدار می‌باشد.

حال فرض کنیم Y تام بوده و $\{\Lambda_n\}$ یک دنبالهٔ‌کشی در $\mathscr{B}(X,Y)$ باشد. چون

$$\|\Lambda_n x - \Lambda_m x\| \le \|\Lambda_n - \Lambda_m\|\|x\| \tag{4}$$

وچون فرض است که وقتی n و m به ∞ میل می‌کنند، $\|\Lambda_n - \Lambda_m\| \to 0$، $\|\Lambda_n x\|$ به ازای هر $x \in X$، یک دنبالهٔ‌کشی در Y است. لذا

$$\Lambda x = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n x \tag{5}$$

موجود است. واضح است که $\Lambda : X \to Y$ خطی است. اگر $\varepsilon > 0$، طرف راست (٤) از $\varepsilon\|x\|$ متجاوز نیست مشروط بر اینکه m و n به قدرکافی بزرگ باشند. پس، به ازای هر m بزرگ،

$$\|\Lambda x - \Lambda_m x\| \le \varepsilon\|x\|. \tag{6}$$

لـــــذا $\|\Lambda x\| \le \left(\|\Lambda_m\| + \varepsilon\right)\|x\|$؛ درنتیجـــه $\Lambda \in \mathscr{B}(X,Y)$ و $\|\Lambda - \Lambda_m\| \le \varepsilon$. لـــــذا، در نرم $\mathscr{B}(X,Y)$، $\Lambda_m \to \Lambda$. این تام بودن $\mathscr{B}(X,Y)$ را به ثبوت می‌رساند.

۲.٤ دوگانی. شایسته است که عناصر فضای دوگان X^* از X را با x^* نشان دهیم و به جای $x^*(x)$ بنویسیم

$$< x, x^* >. \tag{۱}$$

این نمادگذاری با تقارن (یادوگانی) موجود بین عمل X^* بر X از یکسو و عمل X بر X^* از سوی دیگر کاملاً سازگار است. قضیهٔ زیر چند خاصیت اصلی این دوگانی را بیان می‌دارد.

۳.٤ قضیه. *فرض کنیم B گوی یکهٔ بستهٔ فضای نرمدار X باشد. به ازای هر $x^* \in X^*$ تعریف می‌کنیم*

$$\|x^*\| = \sup\{|< x, x^* >| : x \in B\} .$$

(آ) این نرم X^* را به یک فضای باناخ تبدیل می‌کند.

(ب) فرض کنیم B^* گوی یکهٔ بستهٔ X باشد. به ازای هر $x \in X$،

$$\|x\| = \sup\{|< x, x^* >| : x^* \in B^*\} .$$

درنتیجه، $x^* \to < x, x^* >$ یک تابعی خطی کراندار بر X^* از نرم $\|x\|$ می‌باشد.

(پ) B^* ضعیف*- فشرده است.

برهان. چون $\mathscr{B}(X,Y) = X^*$، وقتی Y میدان اسکالر باشد، قسمت (آ) نتیجه‌ای از قضیهٔ ۱.٤ است.

$x \in X$ را ثابت می‌گیریم. نتیجهٔ قضیهٔ ۳.۳ نشان می‌دهد که $y^* \in B^*$ی هست به‌طوری که

$$< x, y^* >= \|x\| . \tag{۱}$$

از آن سو، به ازای هر $x^* \in B^*$،

$$\left| < x, x^* > \right| \leq \|x\| \|x^*\| \leq \|x\|. \qquad (۲)$$

قسمت (ب) از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود.

چون گوی یکهٔ باز U از X در B چگال است، تعریف $\|x^*\|$ نشان می‌دهد که $x^* \in B^*$ اگر و فقط اگر به ازای هر $x \in U$، $\left| < x, x^* > \right| \leq ۱$. حال قسمت (پ) مستقیماً از قضیهٔ ۱۵.۳ نتیجه خواهدشد.

تبصره. ضعیف*- توپولوژی X^*، طبق تعریف، ضعیفترین توپولوژیی است که تمام تابعیهای

$$x^* \to < x, x^* >$$

را پیوسته می‌سازد. لذا قسمت (ب) نشان می‌دهد که نرم توپولوژی X^* از ضعیف*- توپولوژی آن قویتر است؛ درواقع، اکیداً قویتر است مگرآنکه $\dim X < \infty$، زیرا قضیهٔ مذکور در آخر بخش ۱۱.۳ برای ضعیف*-توپولوژی نیز برقرار است.

از حالا به بعد X^* دوگان نرمدار X است (هروقت X نرمدار باشد) مگر آنکه خلافش صریحاً تصریح شود، و تمام مفاهیم توپولوژیک مربوط به X^* در رابطه با نرم توپولوژی آن می‌باشد. این بهیچوجه به معنی آن نیست که ضعیف*- توپولوژی نقش مهمی ایفا نمی‌کند.

حال عملگر نرم تعریف شده در قضیهٔ ۱.٤ را به صورتی دیگر توصیف می‌کنیم.

٤.٤ قضیه. *هرگاه X و Y فضاهای نرمدار بوده و $\Lambda \in \mathscr{B}(X,Y)$، آنگاه*

$$\|\Lambda\| = \sup\left\{ \left| < \Lambda x, y^* > \right| : \|x\| \leq ۱, \|y^*\| \leq ۱ \right\}.$$

برهان. قسمت (ب) قضیهٔ ۳.٤ را با Y به جای X به کار می‌بریم. با این کاربه ازای هر

$x \in X$ داریم

$$\|\Lambda x\| = \sup\{|< \Lambda x, y^* >| : \|y^*\| \leq ۱\}.$$

برای اتمام برهان، به یاد آورید که

$$\|\Lambda\| = \sup\{\|\Lambda x\| : \|x\| \leq ۱\}.$$

۵.٤ دوگان دوم یک فضای باناخ. دوگان نرمدار X^* فضای باناخ X خود یک فضای باناخ است و لذا برای خود یک دوگان نرمدار دارد که با X^{**} نموده می‌شود. حکم (ب) قضیهٔ ۳.٤ نشان می‌دهد که هر $x \in X$، $\phi x \in X^{**}$ منحصر به فردی را با معادلهٔ

$$(۱) \qquad < x, x^* > = < x^*, \phi x > \qquad \left(x^* \in X^*\right)$$

تعریف می‌کند، و نیز

$$(۲) \qquad \|\phi x\| = \|x\| \qquad (x \in X).$$

از رابطهٔ (۱) معلوم می‌شود که $\phi : X \to X^{**}$ خطی است؛ بنابر (۲)، ϕ یکمتری می‌باشد. حال چون X تام فرض شده است، $\phi(X)$ در X^{**} بسته می‌باشد.

لذا ϕ یک یکریختی یکمتر از X به روی یک زیرفضای بستهٔ X^{**} می‌باشد.

ما کراراً X را با $\phi(X)$ یکی می‌کنیم؛ در این صورت X زیرفضای X^{**} تلقی می‌شود. اعضای $\phi(X)$ درست آن تابعیهای خطی بر X^* اند که نسبت به ضعیف*- توپولوژی آن پیوسته می‌باشند. (ر.ک.بخش.۱٤.۳.) چون نرم توپولوژی X^* قویتر است، ممکن است $\phi(X)$ یک زیرفضای حقیقی X^{**} باشد. اما فضاهای مهم زیادی مانند X هستند (مثلاً تمام فضاهای L^p با $۱ < p < \infty$) که $\phi(X) = X^{**}$؛ این فضاها را ***منعکس*** می‌نامند. در تمرین ۱ برخی از خواص آنها داده شده است.

لازم است تأکید شود که برای منعکس بودن X وجود یک یکریختی یکمتر مانند ϕ از X به روی X^{**} کافی نیست؛ باید اتحاد (۱) به وسیلهٔ ϕ برقرار باشد.

٦.٤ فناسازها. فرض کنیم X یک فضای باناخ، M زیرفضایی از X، و N زیرفضایی از X^* باشد. ما هیچیک از M و N را بسته نمی‌گیریم. *فناسازهای* $M^\perp$ و $^\perp N$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$M^\perp = \{x^* \in X^* : < x, x^* > = \circ \text{ ، به ازای هر } x \in M\},$$

$$^\perp N = \{x \in X : < x, x^* > = \circ \text{ ، به ازای هر } x^* \in N\}.$$

لذا $M^\perp$ از تمام تابعیهای خطی کراندار بر X که روی M صفر می‌شوند تشکیل شده است، و $^\perp N$ زیرمجموعه‌ای از X است که بر آن هر عضو N صفر می‌گردد. واضح است که $M^\perp$ و $^\perp N$ فضاهایی برداری‌اند. چون $M^\perp$ اشتراک فضاهای پوچ تابعیهای ϕxاند که در آنها x روی M تغییر می‌کند (ر.ک.بخش ٥.٤)، $M^\perp$ یک زیرفضای ضعیف*- بستهٔ X^* می‌باشد. اثبات اینکه $^\perp N$ یک زیرفضای نرم- بستهٔ X است از این هم سر راست‌تر می‌باشد. قضیهٔ زیر دوگانی موجود بین این دو نوع فناساز را توصیف می‌کند.

٧.٤ قضیه. ***تحت مفروضات قبل،***

(آ) $^\perp(M^\perp)$ نرم-بست M در Xاست، و

(بـ) $(^\perp N)^\perp$ ضعیف*- بست N در X^* می‌باشد.

در رابطه با (آ)، به یاد می‌آوریم که، طبق قضیهٔ ١٢.٣، نرم-بست M مساوی بست ضعیف آن می‌باشد.

برهان. هرگاه $x \in M$، آنگاه به ازای هر $x^* \in M^\perp$، $< x, x^* > = \circ$؛ درنتیجه $x \in {}^\perp(M^\perp)$. چون $^\perp(M^\perp)$ نرم- بسته است، حاوی نرم - بست $\overline{M}$ از M می‌باشد. از آن سو، اگر $x \notin \overline{M}$، قضیهٔ هان - باناخ عنصری مانند $x^* \in M^\perp$ را به‌دست می‌دهد به‌طوری که $< x, x^* > \neq \circ$. لذا $x \notin {}^\perp(M^\perp)$، و قسمت (آ) ثابت می‌شود.

به همین نحو، هرگاه $x^* \in N$، آنگاه به ازای هر $x \in {}^\perp N$، $< x, x^* > = \circ$؛ درنتیجه

$x^* \in \left({}^{\perp}N\right)^{\perp}$. این زیرفضای ضعیف*- بستهٔ X^* حاوی ضعیف*-بست $\tilde{N}$ از N است. اگر $x^* \notin \tilde{N}$، قضیهٔ هان- باناخ (به کاررفته در فضای موضعاً محدب X^* با ضعیف*-توپولوژی) وجود عنصری مانند $x \in {}^{\perp}N$ را ایجاب می‌کند که $<x, x^*> \neq ۰$؛ لذا $x^* \notin \left({}^{\perp}N\right)^{\perp}$ که قسمت (ب) را ایجاب خواهد کرد.

به عنوان نتیجه، ملاحظه می‌کنیم که هر زیرفضای نرم- بستهٔ X فنازساز فناساز خودش است و همین امر در مورد هر زیرفضای ضعیف*-بستهٔ X^* درست می‌باشد.

۸.٤ دوگانهای زیرفضاها و فضاهای خارج قسمتی. هرگاه M یک زیرفضای بستهٔ فضای باناخ X باشد، آنگاه X/M نسبت به ***نرم خارج قسمتی*** یک فضای باناخ است. این در برهان (ت) قضیهٔ ٤١.١ تعریف شده بود. دوگانهای M و X/M را می‌توان به کمک فناساز $M^{\perp}$ از M توصیف کرد. نتیجه به طور نادقیق یعنی

$$M^* = X^*/M^{\perp} \qquad \text{و} \qquad (X/M)^* = M^{\perp}.$$

این نتیجه نادقیق است زیرا تساویها باید با یکریختیهای یکمتر عوض شود. قضیهٔ زیر این امور را به طور صریح توصیف می‌کند.

۹.٤ قضیه. *فرض کنیم M یک زیرفضای بستهٔ فضای باناخ X باشد.*

(آ) قضیهٔ هان- باناخ هر $m^* \in M^*$ را به یک تابعی $x^* \in X^*$ توسیع می‌دهد. تعریف می‌کنیم.

$$\sigma m^* = x^* + M^{\perp}.$$

در این صورت σ یک یکریختی یکمتر از M^* به روی $X^*/M^{\perp}$ است.

(ب) فرض کنیم $\pi: X \to X/M$ نگاشت خارج قسمتی باشد. قرار می‌دهیم $Y = X/M$. به ازای هر $y^* \in Y^*$، تعریف می‌کنیم

$$\tau y^* = y^* \pi.$$

در این صورت τ یک یکریختی یکمتر از Y^* به روی $M^\perp$ می‌باشد.

برهان. (آ) هرگاه x^* و x_1^* توسیعهایی از m^* باشند، آنگاه $x^* - x_1^*$ در $M^\perp$ انـد؛ لـذا $x^* + M^\perp = x_1^* + M^\perp$. بنابراین σ خوش تعریف است. به آسانی معلوم می‌شـود کـه σ خطـی اسـت. چـون تحدیـد هـر $x^* \in X^*$ بـه M عضـوی از M^* اسـت، بـرد σ تمام $X^*/M^\perp$ می‌باشد.

$m^* \in M^*$ را ثابت می‌گیریم. اگر $x^* \in X^*$، m^* را توسیع دهد، واضـح اسـت کـه $\|m^*\| \le \|x^*\|$. بنا بر تعریف نرم خارج قسمتی، بزرگترین کران پایینی اعداد $\|x^*\|$ که بـه این طریق به دست می‌آیند مساوی $\|x^* + M^\perp\|$ است. لذا

$$\|m^*\| \le \|\sigma m^*\| \le \|x^*\|.$$

ولی قضیهٔ ۳.۳ توسیعی مانند x^* از m^* را با خاصیت $\|x^*\| = \|m^*\|$ به دست می‌دهد. پس داریم $\|\sigma m^*\| = \|m^*\|$. این قسمت (آ) را تمام خواهد کرد.

(ب) هرگاه $x \in X$ و $y^* \in Y^*$، آنگاه $\pi x \in Y$؛ لذا $x \to y^* \pi x$ یک تابعی خطی پیوسـته بر X است که به ازای $x \in M$ صفـر می‌شـود. لـذا $\tau y^* \in M^\perp$. خطـی بـودن τ واضـح اسـت. $x^* \in M^\perp$ را ثـابت می‌گـیریم. فـرض کنیـم N فضـای پـوچ x^* باشـد. چـون $M \subset N$، یک تابعی خطی مانند Λ بر Y هست به طوری که $\Lambda\pi = x^*$. طبـق تعریـف توپولوژی خارج قسمتی در $Y = X/M$، فضای پوچ Λ مساوی $\pi(N)$ (یک زیرفضـای بستهٔ Y) است. بنا بر قضیهٔ ۱۸.۱، Λ پیوسته است؛ یعنی $\Lambda \in Y^*$. لـذا $\tau\Lambda = \Lambda\pi = x^*$. بنابراین، برد τ تمام $M^\perp$ می‌باشد.

کافی است نشان دهیم که τ یک یکریختی است.

فرض کنیم B گوی یکهٔ باز در X باشد. در این‌صورت πB گوی یکهٔ بـاز $Y = \pi X$ است. چون $\tau y^* = y^* \pi$، به ازای هر $y^* \in Y^*$ داریم

$$\|\tau y^*\| = \|y^* \pi\| = \sup\{|<\pi x, y^*>| : x \in B\}$$
$$= \sup\{|<y, y^*>| : y \in \pi B\} = \|y^*\|.$$

الحاقیها

حال به هر $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ ***الحاقی*** آن، که یک عملگر مانند $T^* \in \mathscr{B}\left(Y^*, X^*\right)$ است، مربوط کرده و خواهیم دید که چگونه بعضی از خواص T در رفتار T^* منعکس‌اند. اگر X و Y با بعد متناهی باشند، هر $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ را می‌توان با یک ماتریس مانند $[T]$ نمایش داد؛ در این‌صورت، $\left[T^*\right]$ ترانهادهٔ $[T]$ است مشروط بر اینکه پایه‌های مختلف فضای‌برداری مناسب اختیار شوند. در آنچه می‌آید توجه خاصی به حالت با بعد متناهی نمی‌شود، ولی از نظر تاریخی جبر خطی زمینهٔ کار و انگیزهٔ ساختن چیزی بوده است که اینک به ***نظریهٔ عملگر*** معروف است.

بسیاری از خواص غیربدیهی الحاقیها به تام بودن X و Y بستگی دارند (قضیهٔ نگاشت باز نقش مهمی ایفا خواهد کرد). به این دلیل، در سراسر بحث فرض می‌شود که X و Y فضاهایی باناخ‌اند جز در قضیهٔ ۱۰.٤ که تعریف T^* را به دست‌می‌دهد.

۱۰.٤ قضیه. ***فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار باشند. به هر $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ یک $T^* \in \mathscr{B}\left(Y^*, X^*\right)$ منحصر به فرد نظیر است که در رابطهٔ***

$$< Tx, y^* >=< x, T^* y^* > \qquad (۱)$$

به ازای هر $x \in X$ و هر $y^* \in Y^*$ صدق می‌کند. به علاوه، T^* در

$$\left\|T^*\right\| = \|T\| \qquad (۲)$$

صدق می‌نماید.

برهان. اگر $y^* \in Y^*$ و $T \in \mathscr{B}(X,Y)$، تعریف می‌کنیم

$$T^* y^* = y^* \circ T. \qquad (۳)$$

داریم $T^* y^* \in X^*$ زیرا ترکیب دونگاشت خطی پیوسته است. همچنین

$$< x, T^* y^* >= \left(T^* y^*\right)(x) = y^*(Tx) =< Tx, y^* >,$$

که همان رابطهٔ (۱) است. برقراری (۱) به ازای هر $x \in X$، $T^* y^*$ را بـه‌طور منحصر بـه

فرد معین می‌سازد.

هرگاه $y_1^* \in Y^*$ و $y_2^* \in Y^*$، آنگاه، به ازای هر $x \in X$،

$$\begin{aligned}
&< x, T^*(y_1^* + y_2^*) > = < Tx, y_1^* + y_2^* > \\
&= < Tx, y_1^* > + < Tx, y_2^* > \\
&= < x, T^*, y_1^* > + (x, T^*, y_2^* > \\
&= < x, T^* y_1^* + T^* y_2^* >
\end{aligned}$$

درنتیجه

$$T^*(y_1^* + y_2^*) = T^* y_1^* + T^* y_2^*. \tag{4}$$

به همین نحو، $T^*(\alpha y^*) = \alpha T^* y^*$. لذا $T^*: Y^* \to X^*$ خطی است. بالأخره، قسمت (ب) قضیهٔ ۳.٤ منجر به روابط زیر می‌شود:

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \sup\{|< Tx, y^* >| : \|x\| \le 1, \|y^*\| \le 1\} \\
&= \sup\{|< x, T^* y^* >| : \|x\| \le 1, \|y^*\| \le 1\} \\
&= \sup\{\|T^* y^*\| : \|y^*\| \le 1\} = \|T^*\|.
\end{aligned}$$

۱۱.٤ نمادگذاری. اگر T فضای X را به توی Y بنگارد، فضای پوچ و برد T به ترتیب با $\mathcal{N}(T)$ و $\mathcal{R}(T)$ نموده می‌شوند:

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in X : Tx = 0\},$$
$$\mathcal{R}(T) = \{y \in Y : Tx = y \text{ به ازای } x \in X \text{ ی}\}.$$

قضیهٔ زیر در رابطه با فناسازهاست؛ برای نمادگذاری ر.ک.بخش ٦.٤.

۱۲.٤ قضیه. *فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. در این‌صورت*

$$\mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^{\perp} \quad \text{و} \quad \mathcal{N}(T) = {}^{\perp}\mathcal{R}(T^*).$$

برهان. در هریک از دو ستون زیر، هر حکم با حکم بلافاصله بعد از آن و/ یا قبل از آن هم‌ارز است.

$$y^* \in \mathcal{N}(T^*). \qquad x \in \mathcal{N}(T).$$

$$T^* y^* = 0. \qquad Tx = 0.$$

به ازای هر y^* ، $< Tx, y^* >= 0$. به ازای هر x ، $< x, T^* y^* >= 0$.

به ازای هر y^* ، $< x, T^* y^* >= 0$. به ازای هر x ، $< Tx, y^* >= 0$.

$$y^* \in \mathcal{R}(T)^{\perp} \qquad x \in {}^{\perp}\mathcal{R}(T^*).$$

چند نتیجه

(آ) $\mathcal{N}(T^*)$ ضعیف*- بسته در Y^* است.

(ب) $\mathcal{R}(T)$ در Y چگال است اگر و فقط اگر T^* یک به یک باشد.

(پ) T یک به یک است اگرو فقط اگر $\mathcal{R}(T^*)$ ضعیف*- چگال در X^* باشد.

به یاد آورید که به ازای هر زیرفضای M از Y، $M^{\perp}$ ضعیف*- بسته در Y^* است. به‌خصوص، این امر در مورد $\mathcal{R}(T)^{\perp}$ درست است. لذا قسمت (آ) از قضیه نتیجه می‌شود. و اما قسمت (ب) ، $\mathcal{R}(T)$ در Y چگال است اگر و فقط اگر $\mathcal{R}(T)^{\perp} = \{0\}$؛ در این صورت، $\mathcal{N}(T^*) = \{0\}$.

به همین نحو، ${}^{\perp}\mathcal{R}(T^*) = \{0\}$ اگر و فقط اگر $\mathcal{R}(T^*)$ به وسیلهٔ هیچ $x \in X$ ی غیر از $x = 0$ فنا نشود؛ این می‌گوید که $\mathcal{R}(T^*)$ ضعیف*-چگال در X^* است.

توجه کنید که قضیهٔ هان - باناخ ۵.۳ تلویحاً د ربرهانهای (ب) و (پ) به کاررفته‌اند. مشابه مفیدی از (ب) وجود دارد؛ **یعنی** $\mathcal{R}(T)$ ***تمام*** Y است اگر و فقط اگر T^* یک به یک بوده ***و*** معکوسش [نگاشت $\mathcal{R}(T^*)$ به روی Y^*] کراندار باشد. هم ارزی (آ) و (ت) در قضیهٔ زیر این امر را با اصطلاحاتی کمی متفاوت بیان می‌دارد. قضیهٔ ۱۵.٤ با این امر ارتباط نزدیکی دارد. اجتماع سه قضیهٔ زیر را گاهی ***قضیهٔ برد بسته*** می‌نامند.

۱۳.٤ قضیه. *فرض کنیم U و V گوی یکهٔ باز در فضاهای باناخ X و Y باشند. هرگاه $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ و $\delta > ۰$ ، آنگاه استلزامهای*

$$(\text{آ}) \to (\text{ب}) \to (\text{پ}) \to (\text{ت})$$

بین احکام زیر برقرارند:

(آ) *به ازای هر* $y^* \in Y^*$، $\|T^* y^*\| \geq \delta \|y^*\|$؛

(ب) $\overline{T(U)} \supset \delta V$.

(پ) $T(U) \supset \delta V$؛

(ت) $T(X) = Y$.

به علاوه ، هرگاه (ت) برقرار باشد، آنگاه (آ) به ازای $\delta > ۰$ ای برقرار است.

برهان. فرض کنیم (آ) برقرار باشد و $y_\circ \notin \overline{T(U)}$. چون $\overline{T(U)}$ محدب، بسته، و در حال تعادل است، قضیهٔ ۷.۳ نشان می‌دهد که y^* ی هست به طوری‌که به ازای هر $y \in \overline{T(U)}$، $|< y, y^* >| \leq ۱$، ولی $|< y_\circ, y^* >| > ۱$. اگر $x \in U$، داریم

$$|< x, T^* y^* >| = |< Tx, y^* >| \leq ۱.$$

لذا $\|T^* y^*\| \leq ۱$ ، و حال از (آ) داریم

$$\delta < \delta |< y_\circ, y^* >| \leq \delta \|y_\circ\| \|y^*\| \leq \|y_\circ\| \|T^* y^*\| \leq \|y_\circ\| .$$

پس اگر $\|y\| \leq \delta$، $y \in \overline{T(U)}$. لذا (ب)$\leftarrow$(آ).

حال فرض کنیم (ب) برقرار باشد. بی‌آنکه به کلیت آسیبی برسانیم، $\delta = ۱$ را اختیار می‌کنیم. در این‌صورت $\overline{T(U)} \supset V$. لذا به هر $y \in Y$ و هر $\varepsilon > ۰$ یک $x \in X$ چنان نظیر است که $\|x\| \leq \|y\|$ و $\|y - Tx\| < \varepsilon$. $y_۱ \in V$ را اختیار می‌کنیم. $\varepsilon_n > ۰$ را طوری می‌گیریم که

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \varepsilon_n < ۱ - \|y_۱\|.$$

فرض کنیم $n \geq ۱$ و y_n را اختیار می‌کنیم. x_n ی هست به‌طوری که $\|x_n\| \leq \|y_n\|$ و

$\|y_n - Tx_n\| < \varepsilon_n$. قرار می‌دهیم

$$y_{n+1} = y_n - Tx_n .$$

بنا بر استقرا، این فرایند دو دنباله مانند $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ را تعریف می‌کند. توجه کنید که

$$\|x_{n+1}\| \le \|y_{n+1}\| = \|y_n - Tx_n\| < \varepsilon_n .$$

درنتیجه

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| \le \|x_1\| + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n \le \|y_1\| + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n < 1 .$$

پس $x = \sum x_n$ در U است (ر.ک.تمرین ۲۳) و

$$Tx = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} Tx_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(y_n - y_{n+1}\right) = y_1$$

زیرا وقتی $N \to \infty$، $y_{N+1} \to 0$. لذا $y_1 = Tx \in T(U)$ که قسمت (پ) را ثابت می‌کند.

توجه کنید که استدلال فوق صورت خاصی از بخشی از برهان قضیهٔ نگاشت باز ۱۱.۲ می‌باشد.

اینکه (پ) قسمت (ت) را ایجاب می‌کند واضح است.

فرض کنیم (ت) برقرار باشد. بنابر قضیهٔ نگاشت باز، $\delta > 0$ای هست به‌طوری که $T(U) \supset \delta V$. لذا، به ازای هر $y^* \in Y^*$،

$$\begin{aligned}\|T^* y^*\| &= \sup\{|\langle x, T^* y^*\rangle| : x \in U\} \\ &= \sup\{|\langle Tx, y^*\rangle| : x \in U\} \\ &\ge \sup\{|\langle y, y^*\rangle| : y \in \delta V\} = \delta\|y^*\|\end{aligned}$$

و این قسمت (آ) می‌باشد.

۱٤.٤ قضیه. *هرگاه X و Y دو فضای باناخ بوده و $T \in \mathscr{B}(X,Y)$، آنگاه هریک از سه شرط زیر دو شرط دیگر را ایجاب می‌کند:*

(آ) $\mathscr{R}(T)$ در Y بسته است؛

(ب) $\mathscr{R}(T^*)$ ضعیف *-بسته در X^* است؛

(پـ) $\mathscr{R}(T^*)$ نرم- بسته در X^* است.

تبصره. قضیهٔ ۱۲.۳ ایجاب می‌کند که (آ) برقرار است اگر و فقط اگر $\mathscr{R}(T)$ به طور ضعیف بسته باشد. اما زیرفضاهای نرم - بستهٔ X^* همواره ضعیف*- بسته نیستند (تمرین ۷، فصل ۳).

برهان. واضح است که (بـ) قسمت (پـ) را ایجاب می‌کند. ثابت می‌کنیم (آ) قسمت (بـ) و (پـ) قسمت (آ) را ایجاب می‌کند.

فرض کنیم (آ) برقرار باشد. بنابر قضیهٔ ۱۲.٤ و قسمت (بـ) قضیهٔ ۷.٤، $\mathscr{N}(T)^\perp$ ضعیف*- بستهٔ $\mathscr{R}(T^*)$ است. لذا برای اثبات (بـ) کافی است نشان دهیم که $\mathscr{N}(T)^\perp \subset \mathscr{R}(T^*)$.

$x^* \in \mathscr{N}(T)^\perp$ را اختیار می‌کنیم و تابعی خطی Λ را بر $\mathscr{R}(T)$ با

$$\Lambda Tx = < x, x^* > \qquad (x \in X)$$

تعریف می‌کنیم. توجه کنید که Λ خوش تعریف است، زیرا هرگاه $Tx = Tx'$، آنگاه $x - x' \in \mathscr{N}(T)$؛ لذا

$$< x - x', x^* >= 0.$$

قضیهٔ نگاشت باز ایجاب می‌کند که

$$T: X \to \mathscr{R}(T)$$

زیرا فرض کرده‌ایم $\mathscr{R}(T)$ یک زیرفضای بستهٔ فضای تام Y است و لذا تام می‌باشد. پس $K < \infty$ای هست به‌طوری که به هر $y \in \mathscr{R}(T)$ یک $x \in X$ با خاصیت $Tx = y$، $\|x\| \le K\|y\|$، و

$$|\Lambda y| = |\Lambda Tx| = \left|< x, x^* >\right| \le K\|y\|\left\|x^*\right\|$$

نظیر است. لذا Λ پیوسته می‌باشد. بنابرقضیهٔ هان- باناخ، $y^* \in Y^*$ ی Λ را توسیع می‌دهد. لذا

$$< Tx, y^* >= \Lambda Tx =< x, x^* > \qquad (x \in X).$$

این ایجاب می‌کند که $x^* = T^* y^*$. چون x^* عنصر دلخواهی از $\mathscr{N}(T)^\perp$ است، پس نشان داده‌ایم که $\mathscr{N}(T)^\perp \subset \mathscr{R}(T^*)$. لذا (ب) از قسمت (آ) نتیجه می‌شود.

حال فرض کنیم (پ) برقرار باشد. همچنین Z بست $\mathscr{R}(T)$ در Y باشد. $S \in \mathscr{B}(X,Z)$ را با $Sx = Tx$ تعریف می‌کنیم. چون $\mathscr{R}(S)$ در Z چگال است، نتیجهٔ (ب) از قضیهٔ ۱۲.٤ ایجاب می‌کند که

$$S^* : Z^* \to X^*$$

یک به یک است.

اگر $z^* \in Z^*$، قضیهٔ هان- باناخ توسیعی مانند y^* از z^* را به دست می‌دهد؛ به ازای هر $x \in X$،

$$< x, T^* y^* >=< Tx, y^* >=< Sx, z^* >=< x, S^* z^* >.$$

لذا $S^* z^* = T^* y^*$. پس S^* و T^* بردهای یکسانی دارند. چون (پ) فرض شده است، $\mathscr{R}(S^*)$ بسته و لذا تام است.

حال قضیهٔ نگاشت باز را بر

$$S^* : Z^* \to \mathscr{R}(S^*)$$

اعمال می‌کنیم. چون S^* یک به یک است، پس ثابتی مانند $c > ٠$ هست که در

$$c\|z^*\| \le \|S^* z^*\|$$

به ازای هر $z^* \in Z^*$ صدق می‌کند. لذا، طبق قضیهٔ ۱۳.٤، $S : X \to Z$ یک نگاشت باز است. به‌خصوص، $S(X) = Z$. ولی، طبق تعریف S ، $\mathscr{R}(T) = \mathscr{R}(S)$. بنابراین، $\mathscr{R}(T) = Z$ یعنی یک زیرفضای بستهٔ Y.

این برهان نتیجه شدن (آ) از (پ) را کامل می‌سازد.

نتیجهٔ زیر در کاربردها سودمند است.

۱۵.٤ قضیه. *فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ بوده و $T \in \mathscr{B}(X,Y)$.*

در این صورت

(آ) $\mathscr{R}(T)=Y$ *اگر و فقط اگر*

(ب) T^* *یک به یک و $\mathscr{R}\left(T^*\right)$ نرم - بسته باشد.*

برهان. هرگاه (آ) برقرار باشد، آنگاه بنا بر قضیهٔ ۱۲.٤، T^* یک به یک است. استلزام (آ) $\rightarrow$ (ت) در قضیهٔ ۱۳.٤ نشان می‌دهد که T^* (مضربی از) یک اتساع است؛ لذا، طبق قضیهٔ ۲٦.۱، $\mathscr{R}\left(T^*\right)$ بسته می‌باشد.

هرگاه (ب) برقرار باشد، آنگاه، مجدداً طبق قضیهٔ ۱۲.٤ ، $\mathscr{R}(T)$ در Y چگال است، و $\mathscr{R}(T)$ طبق قضیهٔ ۱٤.٤ بسته می‌باشد.

عملگرهای فشرده

۱٦.٤ تعریف. فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ و U گوی یکهٔ باز در X باشد. گوییم نگاشت خطی $T: X \rightarrow Y$ ***فشرده*** است اگر بست $T(U)$ در Y فشرده باشد. واضح است که T کراندار است. لذا $T \in \mathscr{B}(X, Y)$.

چون Y یک فضای متری تام است، زیرمجموعه‌های Y که بستشان فشرده‌اند درست آنهایی هستند که کلاً کراندارند. لذا $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ فشرده است اگر و فقط اگر $T(U)$ کلاً کراندار باشد. همچنین T فشرده است اگر و فقط اگر هردنبالهٔ کراندار $\left\{x_n\right\}$ در X شامل زیردنباله‌ای مانند $\left\{x_{n_i}\right\}$ باشد به‌طوری که $\left\{Tx_{n_i}\right\}$ به نقطه‌ای از Y همگرا باشد.

بسیاری از عملگرهایی که در مطالعهٔ معادلات انتگرال ظاهر می‌شوند فشرده‌اند و اهمیت آنها از دید کاربردی از این جهت است. آنها از جهاتی چنان شبیه عملگرهای خطی بر فضاها با بعد متناهی‌اند که از عملگرها بر فضاهای با بعد نامتناهی انتظار می‌رود. همانطور که خواهیم دید، این تشابهات به‌خصوص در خواص طیفی آنها به

طور قوی نمایان می‌شوند.

۱۷.٤ چند تعریف. (آ) فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. دراین‌صورت $\mathscr{B}(X)$ [که اختصاری برای $\mathscr{B}(X,X)$ است] صرفاً یک فضای باناخ نیست (ر.ک.قضیهٔ ۱.٤) بلکه یک جبر نیز هست: اگر $S \in \mathscr{B}(X)$ و $T \in \mathscr{B}(X)$، $ST \in \mathscr{B}(X)$ را با

$$(ST)(x) = S(T(x)) \qquad (x \in X)$$

تعریف می‌کنیم. نامساوی

$$\|ST\| \le \|S\|\|T\|$$

بدیهی می‌باشد.

به‌خصوص، می‌توان توانهای $T \in \mathscr{B}(X)$ را تعریف کرد: $T^{\circ} = I$ یعنی نگاشت همانی بر X که با $Ix = x$ داده می‌شود و به ازای $n = ۱,۲,۳,\ldots$، $T^n = TT^{n-۱}$.

(ب) گوییم عملگر $T \in \mathscr{B}(X)$ ***معکوسپذیر*** است اگر $S \in \mathscr{B}(X)$ی چنان موجود باشد که

$$ST = I = TS.$$

در این حالت می‌نویسیم $S = T^{-۱}$. بنابر قضیهٔ نگاشت باز، این رخ می‌دهد اگر و فقط اگر $\mathscr{N}(X) = \{\circ\}$ و $\mathscr{R}(T) = X$.

(پ) ***طیف*** $\sigma(T)$ عملگر $T \in \mathscr{B}(X)$ مجموعهٔ تمام اسکالرهای λ است به‌طوری که $T - \lambda I$ معکوسپذیر ***نیست***. لذا $\lambda \in \sigma(T)$ اگر وفقط اگر دست کم یکی از دو حکم زیر درست باشد:

(یک) برد $T - \lambda I$ تمام X نباشد؛

(دو) $T - \lambda I$ یک به یک نباشد.

اگر (دو) برقرار باشد، گوییم λ یک ***مقدار ویژهٔ*** T است؛ فضای ویژهٔ نظیر عبارت است از $\mathscr{N}(T - \lambda I)$؛ هر $x \in \mathscr{N}(T - \lambda I)$ (جز $x = \circ$) یک ***بردار ویژهٔ*** T است؛ این بردار درمعادلهٔ

$$Tx = \lambda x$$

صدق می‌کند.

ذیلاً چند نکتهٔ بسیار آسان آمده است که این مفاهیم را توضیح می‌دهند.

۱۸.٤ قضیه. ***فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند.***

(آ) هرگاه $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ و $\dim \mathscr{R}(T) < \infty$، آنگاه T فشرده است.

(ب) هرگاه $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ ، T فشرده باشد، و $\mathscr{R}(T)$ بسته باشد، آنگاه $\dim \mathscr{R}(T) < \infty$.

(پ) عملگرهای فشرده یک زیرفضای بسته از $\mathscr{B}(X,Y)$ در نرم توپولوژی آن تشکیل می‌دهند.

(ت) هرگاه $T \in \mathscr{B}(X)$، T فشرده باشد، و $\lambda \neq 0$، آنگاه $\dim \mathscr{N}(T - \lambda I) < \infty$.

(ث) هرگاه $\dim X = \infty$، $T \in \mathscr{B}(X)$، و T فشرده باشد، آنگاه $0 \in \sigma(T)$.

(ج) اگر $S \in \mathscr{B}(X)$، $T \in \mathscr{B}(X)$، و T فشرده باشد، ST و TS نیز چنین‌اند.

برهان. حکم (آ) واضح است. هرگاه $\mathscr{R}(T)$ بسته باشد، آنگاه $\mathscr{R}(T)$ تام است (زیرا Y تام است)؛ درنتیجه T یک نگاشت باز از X به روی $\mathscr{R}(T)$ می‌باشد؛ اگر T فشرده باشد، $\mathscr{R}(T)$ موضعاً فشرده است؛ لذا (ب) نتیجه‌ای از قضیهٔ ۲۲.۱ است.

در (ت) قرارمی‌دهیم $Y = \mathscr{N}(T - \lambda I)$. تحدید T به Y یک عملگر فشرده است که بردش Y می‌باشد. لذا (ت) از (ب) نتیجه می‌شود؛ و لذا (ث) چنین می‌گردد، زیرا هرگاه 0 در $\sigma(T)$ نباشد، آنگاه $\mathscr{R}(T) = X$. اثبات (ج) بدیهی است.

اگر S و T عملگرهای فشرده‌ای از X به توی Y باشند، $S+T$ نیز چنین است، زیرا مجموع هر دو زیرمجموعهٔ فشردهٔ Y فشرده است. پس عملگرهای فشرده زیرفضایی مانند Σ از $\mathscr{B}(X,Y)$ را تشکیل می‌دهند. حال برای اتمام برهان (پ) نشان می‌دهیم که Σ بسته است. فرض کنیم $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ بست Σ باشد، $r > 0$ را اختیار می‌کنیم، و

فرض کنیم U گوی یکهٔ باز در X باشد. $S\in\sum$ی هست که $\|S-T\|<r$. چون $S(U)$ کلاً کراندار است، نقاطی مانند x_1،...، x_n در U وجود دارند به‌طوری که $S(U)$ به وسیلهٔ گویها به شعاع r و مراکز در نقاط Sx_i پوشیده می‌شود. چون به ازای هر $x\in U$، $\|Sx-Tx\|<r$، $T(U)$ به وسیلهٔ گویها به شعاع ۳r و مراکز در نقاط Tx_i پوشیده می‌شود. لذا $T(U)$ کلاً کراندار است که $T\in\sum$ را ثابت می‌کند.

هدف اصلی از بقیهٔ این فصل تحلیل طیف یک $T\in\mathscr{B}(X)$ی فشرده است. قضیهٔ ۲۵.٤ حاوی نتایج اصلی می‌باشد. در این بحث الحاقیها نقش مهمی بر دوش خواهندداشت.

۱۹.٤ قضیه. ***فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ بوده و $T\in\mathscr{B}(X,Y)$. در این‌صورت T فشرده است اگر و فقط اگر T^* فشرده باشد.***

برهان. فرض کنیم T فشرده باشد. همچنین $\{y_n^*\}$ دنباله‌ای در گوی یکهٔ Y^* باشد. تعریف می‌کنیم

$$f_n(y)=<y,y_n^*> \qquad (y\in Y).$$

چون $|f_n(y)-f_n(y')|\le\|y-y'\|$، $\{f_n\}$ همپیوسته است. چون $T(U)$ دارای بست فشرده در Y است (مثل قبل، U گوی یکهٔ X است)، قضیهٔ آسکولی ایجاب می‌کند که $\{f_n\}$ دارای زیردنباله‌ای مانند $\{f_{n_i}\}$ است که به‌طور یکنواخت بر $T(U)$ همگراست. چون

$$\begin{aligned}\left\|T^*y_{n_i}^*-T^*y_{n_j}^*\right\|&=\sup\left|<Tx,y_{n_i}^*-y_{n_j}^*>\right|\\&=\sup\left|f_{n_i}(Tx)-f_{n_j}(Tx)\right|,\end{aligned}$$

سوپرمم روی $x\in U$ گرفته می‌شود، تمامیت X^* ایجاب می‌کند که $\{T^*y_{n_i}^*\}$

همگراست. لذا T^* فشرده می‌باشد.

نیمهٔ دوم را می‌توان با همین روش ثابت کرد، ولی استنتاج آن از نیمهٔ اول آموزنده‌تر است.

فرض کنیم $\phi: X \to X^{**}$ و $\psi: Y \to Y^{**}$ دو نشانندهٔ یکمترباشند که با فرمولهای

$$<x, x^*> = <x^*, \phi x> \quad \text{و} \quad <y, y^*> = <y^*, \psi y>$$

مانند بخش ۵.٤ داده شده باشند. دراین‌صورت، به ازای هر $x \in X$ و $y^* \in Y^*$،

$$<y^*, \psi Tx> = <Tx, y^*> = <x, T^* y^*> = <T^* y^*, \phi x> = <y^*, T^{**} \phi x>;$$

درنتیجه

$$\psi T = T^{**} \phi .$$

هرگاه $x \in U$، آنگاه ϕx درگوی یکهٔ U^{**} از X^{**} قراردارد. لذا

$$\psi T(U) \subset T^{**}\left(U^{**}\right).$$

حال فرض کنیم T^* فشرده باشد. نیمهٔ اول قضیه نشان می‌دهد که $T^{**}: X^{**} \to Y^{**}$ فشرده است. لذا $T^{**}\left(U^{**}\right)$ کلاً کراندار است؛ و لذا زیرمجموعهٔ $\psi T(U)$ آن چنین است. چون ψ یک یکمتری است، $T(U)$ نیز کلاً کراندار است. لذا T فشرده می‌باشد.

۲۰.٤ تعریف. فرض کنیم M زیرفضای بسته‌ای از فضای‌برداری توپولوژیک X باشد. هرگاه زیرفضای بسته‌ای مانند N از X باشد به‌طوری که

$$X = M + N \quad \text{و} \quad M \cap N = \{0\}،$$

آنگاه گوییم **M در X متمم می‌شود.** دراین‌حالت گوییم X **مجموع مستقیم** M و N است و گاهی ازنماد

$$X = M \oplus N$$

استفاده می‌شود.

ما در فصل ۵ چند نمونه از زیرفضاهای متمم نشده خواهیم دید. ما در حال حاضر فقط به چند نکتهٔ سادهٔ زیر نیاز خواهیم داشت.

۲۱.٤ لم. فرض کنیم M زیرفضای بسته‌ای از فضای برداری توپولوژیک X باشد.
(آ) هرگاه X موضعاً محدب بوده و $\dim M < \infty$، آنگاه M در X متمم می‌شود.
(ب) هرگاه $\dim(X/M) < \infty$، آنگاه M در X متمم می‌شود.

بعد X/M را **همبعد** M در X نیز می‌نامند.

برهان. (آ) فرض کنیم $\{e_1,\dots,e_n\}$ پایه‌ای برای M باشد. دراین‌صورت هر $x \in M$ دارای نمایش منحصر به فردی مانند

$$x = \alpha_1(x)e_1+\dots+\alpha_n(x)e_n$$

است. هر α_i یک تابعی خطی پیوسته بر M است (قضیهٔ ۲۱.۱ و لم ۲۰.۱) که طبق قضیهٔ هان-باناخ به عضوی از X^* توسیع می‌یابد. فرض کنیم N اشتراک فضاهای پوچ *این* توسیعها باشد. در این‌صورت $X = M \oplus N$.

(ب) فرض کنیم $\pi: X \to X/M$ نگاشت خارج قسمتی بوده، $\{e_1,\dots,e_n\}$ پایه‌ای برای X/M باشد، $x_i \in X$ را طوری می‌گیریم که $\pi x_i = e_i$ $(1 \le i \le n)$، و N فضای‌برداری پیموده شده به وسیلهٔ $\{x_1,\dots,x_n\}$ باشد. دراین‌صورت $X = M \oplus N$.

۲۲.٤ لم. هرگاه M زیرفضایی از فضای نرمدار X بوده، M در X چگال نباشد، و $r > 1$، آنگاه $x \in X$ ی هست به‌طوری که

به ازای هر $y \in M$، $\|x\| < r$ ولی $\|x - y\| \ge 1$.

برهان. $x_1 \in X$ ی هست که فاصله‌اش تا M مساوی ۱ است؛ یعنی

$$\inf\{\|x_1 - y\| : y \in M\} = 1.$$

$y_1 \in M$ را طوری می‌گیریم که $\|x_1 - y_1\| < r$، و قرار می‌دهیم $x = x_1 - y_1$.

۲۳.٤ قضیه. ***هرگاه X یک فضـــای باناخ بـوده، $T \in \mathscr{B}(X)$ ، T فشـرده باشـد، و $\lambda \neq 0$، آنگاه $T - \lambda I$ برد بسته خواهدداشت.***

برهان. بنابر قسمت (ت) قضیهٔ ۱۸.٤، $\dim \mathscr{N}(T-\lambda I) < \infty$. و بنا بـر قسـمت (آ) لـم ۲۱.٤، X مجمـوع مسـتقیم $\mathscr{N}(T-\lambda I)$ ویـک زیرفضـای بسـتهٔ M می‌باشـد. عملگـر $S \in \mathscr{B}(M,X)$ را با

$$Sx = Tx - \lambda x \tag{۱}$$

تعریــف می‌کنیـــم. دراین‌صـــورت S بـــر M یـــک بـــه یـــک اســـت. همچنیـــن، $\mathscr{R}(S) = \mathscr{R}(T-\lambda I)$. برای اثبات بســته بــودن $\mathscr{R}(S)$ طبـق قضیـهٔ ۲٦.۱ کـافی اسـت وجود $r > 0$ی را که

$$\text{به ازای هر } x \in M، \qquad r\|x\| \leq \|Sx\| \tag{۲}$$

نشان دهیم.

اگـر (۲) بـه ازای هـر $r > 0$ برقـرار نباشـد، $\{x_n\}$ی در M هسـت بـه‌طوری کـه $\|x_n\| = 1$، $Sx_n \to 0$ و(بعد از رفتن به یک زیردنبالـه) بـه ازای $x_0 \in X$ی، $Tx_n \to x_0$. (در اینجا از فشردگی T استفاده شده است.) پس داریم $\lambda x_n \to x_0$. لذا $x_0 \in M$، و

$$Sx_0 = \lim(\lambda S x_n) = 0 .$$

چون S یک به یک است، $x_0 = 0$، ولـی بـه ازای هـر n، $\|x_n\| = 1$، و $x_0 = \lim \lambda x_n$؛ و درنتیجه $0 < |\lambda| = \|x_0\|$. این تناقض (۲) را به ازای $r > 0$ی ثابت خواهدکرد.

۲٤.٤ قضیه. ***فرض کنیم X یک فضای باناخ بـوده، $T \in \mathscr{B}(X)$ ، T فشـرده باشـد، $r > 0$، و E مجموعه‌ای از مقادیر ویژهٔ λ از T باشد که $|\lambda| > r$. دراین‌صورت***

(آ) به ازای هر $\lambda \in E$، $\mathscr{R}(T-\lambda I) \neq X$، و

(ب) E یک مجموعهٔ متناهی می‌باشد.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که اگر (آ) یا (ب) نادرست باشد، زیرفضاهای بسته‌ای مانند M_n از X و اسکالرهایی چون $\lambda_n \in E$ وجود دارند به‌طوری که

$$M_۱ \subset M_۲ \subset M_۳ \subset \ldots, \qquad M_n \neq M_{n+۱}, \tag{۱}$$

$$T(M_n) \subset M_n \quad \text{به ازای } n \geq ۱ \tag{۲}$$

و

$$(T - \lambda_n I)(M_n) \subset M_{n-۱} \quad \text{به ازای } n \geq ۲. \tag{۳}$$

برهان با نشان دادن آنکه این فشردگی T را نقض می‌کند به اتمام می‌رسد.

فرض کنیم (آ) نادرست باشد. دراین‌صورت، به ازای $\lambda_۰ \in E$ ی، $\mathscr{R}(T, \lambda_۰ I) = X$. قرار می‌دهیم $S = T - \lambda_۰ I$، و M_n را فضای پوچ S^n تعریف می‌کنیم. (ر.ک.بخش ۱۷.۴). چون $\lambda_۰$ یک مقدار ویژهٔ T است، $x_۱ \in M_۱$ ی که $x_۱ \neq ۰$ وجود دارد. و چون $\mathscr{R}(S) = X$، دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در X هست به‌طوری که $Sx_{n+۱} = x_n$، $n = ۱,۲,۳,\ldots$. در این صورت،

$$S^n x_{n+۱} = x_۱ \neq ۰ \quad \text{ولی} \quad S^{n+۱} x_{n+۱} = Sx_۱ = ۰. \tag{۴}$$

لذا M_n یک زیرفضای بستهٔ حقیقی $M_{n+۱}$ است. پس روابط (۱) تا (۳) به ازای $\lambda_n = \lambda_۰$ برقرارند. [توجه کنید که (۲) به خاطر $ST = TS$ برقرار است.]

فرض کنیم (ب) نادرست باشد. در این‌صورت E شامل دنباله‌ای مانند $\{\lambda_n\}$ از مقادیر ویژهٔ متمایز T می‌باشد. بردارهای ویژهٔ نظیر e_n را اختیار کرده و فرض می‌کنیم M_n زیرفضای (با بعد متناهی، درنتیجه بسته‌ای) از X باشد که به وسیلهٔ $\{e_۱, \ldots, e_n\}$ پیموده می‌شود. چون λ_nها متمایزند، $\{e_۱, \ldots, e_n\}$ یک مجموعهٔ مستقل خطی است؛ درنتیجه $M_{n-۱}$ یک زیرفضای حقیقی M_n می‌باشد. این رابطهٔ (۱) را به دست می‌دهد. هرگاه $x \in M_n$، آنگاه

$$x = \alpha_۱ e_۱ + \ldots + \alpha_n e_n$$

نشانگر آنکه $Tx \in M_n$ و

$$(T - \lambda_n I)x = \alpha_۱(\lambda_۱ - \lambda_n)e_۱ + \ldots + \alpha_{n-۱}(\lambda_{n-۱} - \lambda_n)e_{n-۱} \in M_{n-۱},$$

لذا روابط (۲) و (۳) برقرارند.

چون زیرفضاهای بستهٔ M_n در روابط (۱) تا (۳) صدق می‌کنند، لم ۲۲.٤ بردارهایی چون $y_n \in M_n$ به ازای $n = ۲,۳,۴,\ldots$ به دست می‌دهد به‌طوری که

$$\|y_n\| \le ۲ \text{ و اگر } x \in M_{n-۱}\text{، } \|y_n - x\| \ge ۱. \qquad (۵)$$

اگر $۲ \le m < n$، تعریف می‌کنیم

$$z = Ty_m - (T - \lambda_n I)y_n. \qquad (٦)$$

بنابر (۲)و(۳)، $z \in M_{n-۱}$. لذا رابطهٔ (۵) نشان می‌دهد که

$$\|Ty_n - Ty_m\| = \|\lambda_n y_n - z\| = |\lambda_n|\|y_n - \lambda_n^{-۱}z\| \ge |\lambda_n| > r.$$

لذا، با آنکه $\{y_n\}$ کراندار است، دنبالهٔ $\{Ty_n\}$ زیردنبالهٔ همگرا ندارد و اگر T فشرده باشد، این ناممکن خواهدبود.

٢٥.٤ قضیه. *فرض کنیم X یک فضای باناخ بوده، $T \in \mathscr{B}(X)$، و T فشرده باشد.*

(آ) هرگاه $\lambda \neq ۰$، آنگاه چهار عدد

$$\alpha = \dim \mathscr{N}(T - \lambda I)$$
$$\beta = \dim X/\mathscr{R}(T - \lambda I)$$
$$\alpha^* = \dim \mathscr{N}(T^* - \lambda I)$$
$$\beta^* = \dim X^*/\mathscr{R}(T^* - \lambda I)$$

مساوی و متناهی‌اند.

(ب) هرگاه $\lambda \neq ۰$ و $\lambda \in \sigma(T)$، آنگاه λ یک مقدار ویژهٔ T و T^* است.

(پ) $\sigma(T)$ فشرده و حداکثر شمارشپذیر بوده و حداکثر یک نقطهٔ حدی یعنی ۰ دارد.

تذکر. در اینجا بعد یک فضای‌برداری یک عدد صحیح نامنفی یا ∞ گرفته می‌شود. I یعنی عملگرهای همانی بر X و X^*؛ لذا

$$(T - \lambda I)^* = T^* - \lambda I^* = T^* - \lambda I,$$

زیرا الحاقی همانی بر X همانی بر X^* است.

طیف $\sigma(T)$ از T در بخش ۱۷.۴ تعریف شد. قضیهٔ ۲۴.۴ شامل حالت خاصی از (آ) است: $\beta = 0$ تساوی $\alpha = 0$ را ایجاب می‌کند. از این در برهان نامساوی (۴) در زیر استفاده خواهدشد.

باید توجه داشت که $\sigma(T)$ حتی اگر T نباشد فشرده است (قضیهٔ ۱۳.۱۰). فشردگی T برای سایر احکام در (پ) لازم است.

برهان. برای تسهیل در نگارش قرار می‌دهیم $S = T - \lambda I$.

با یک نکتهٔ مقدماتی راجع به فضاهای خارج قسمتی شروع می‌کنیم. فرض کنیم M_0 یک زیرفضای بستهٔ فضای موضعاً محدب Y بوده و k عدد صحیح مثبتی باشد به‌طوری که $k \le \dim Y/M_0$. دراین‌صورت بردارهایی چون $y_1, \ldots, y_k$ در Y چنان وجود دارند که فضای‌برداری M_i تولید شده به وسیلهٔ M_0 و $y_1, \ldots, y_i$ شامل M_{i-1} به عنوان یک زیرفضای حقیقی است. بنابر قضیهٔ ۴۲.۱، هر M_i بسته است و بنا بر قضیهٔ ۵.۳، تابعیهای خطی پیوسته‌ای مانند $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k$ بر Y چنان وجود دارند که $\Lambda_i y_i = 1$ ولی به ازای هر $y \in M_{i-1}$، $\Lambda_i y = 0$. این تابعیها مستقل خطی می‌باشند. لذا نتیجهٔ زیرحاصل است: ***هرگاه Σ فضای تمام تابعیهای خطی پیوسته بر Y باشد که M_0 را فنا می‌سازند، آنگاه***

$$\dim Y/M_0 \le \dim \Sigma . \tag{۱}$$

این نتیجه را به ازای $Y = X$ و $M_0 = \mathscr{R}(S)$ به کار می‌بریم. بنابرقضیهٔ ۲۳.۴، $\mathscr{R}(S)$ بسته است. همچنین، طبق قضیهٔ ۱۲.۴، $\Sigma = \mathscr{R}(S)^{\perp} = \mathscr{N}(S^*)$؛ درنتیجه (۱) به صورت‌زیر در می‌آید:

$$\beta \le \alpha^*. \tag{۲}$$

حال $Y = X^*$ را با ضعیف*-توپولوژی‌اش اختیار می‌کنیم؛ فرض می‌کنیم $M_0 = \mathscr{R}(S^*)$. بنا بر قضیهٔ ۱۴.۴، $\mathscr{R}(S^*)$ ضعیف*-بسته است. چون اینک Σ از تمام تابعیهای خطی ضعیف*-پیوسته بر X^* که $\mathscr{R}(S^*)$ را فنا می‌سازند تشکیل شده است،

Σ با $\mathcal{N}(S) = {}^{\perp}\mathcal{R}(S^*)$ یکریخت است (قضیهٔ ۱۲.۴)، و رابطهٔ (۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$\beta^* \leq \alpha . \tag{۳}$$

هدف بعدی ما اثبات

$$\alpha \leq \beta \tag{۴}$$

است. به محض داشتن (۴)، نامساوی

$$\alpha^* \leq \beta^* \tag{۵}$$

نیز درست است زیرا T^* یک عملگر فشرده است (قضیهٔ ۱۹.۴). چون طبق قسمت (ت) قضیهٔ ۱۸.۴ داریم $\alpha < \infty$، قسمت (آ) نتیجهٔ روشن نامساویهای (۲) تا (۵) می‌باشد.

فرض کنیم (۴) نادرست باشد. در این‌صورت $\beta < \alpha$. چون $\beta < \alpha$، لم ۲۱.۴ نشان می‌دهد که X شامل زیرفضاهای بستهٔ E و F است به‌طوری که $\dim F = \beta$ و

$$X = \mathcal{N}(S) \oplus E = \mathcal{R}(S) \oplus F. \tag{۶}$$

هر $x \in X$ نمایش منحصر به فردی مانند $x = x_1 + x_2$ دارد که در آن $x_1 \in \mathcal{N}(S)$ و $x_2 \in E$. $\pi: X \to \mathcal{N}(S)$ را با $\pi x = x_1$ تعریف می‌کنیم. به آسانی (مثلاً، از قضیهٔ گراف بسته) معلوم می‌شود که π پیوسته است.

چون فرض می‌کنیم $\dim \mathcal{N}(S) > \dim F$، یک نگاشت خطی مانند ϕ از $\mathcal{N}(S)$ به روی F هست به‌طوری که به ازای $x_0 \neq 0$ ی، $\phi x_0 = 0$. تعریف می‌کنیم

$$\Phi x = Tx + \phi\pi x \qquad (x \in X) . \tag{۷}$$

در این‌صورت $\Phi \in \mathcal{B}(X)$. چون $\dim \mathcal{R}(\phi) < \infty$، $\phi\pi$ یک عملگر فشرده است؛ لذا Φ نیز چنین است (قضیهٔ ۱۸.۴).

ملاحظه می‌کنیم که

$$\Phi - \lambda I = S + \phi\pi. \tag{۸}$$

هرگاه $x \in E$، آنگاه $\pi x = 0$، $(\Phi - \lambda I)x = Sx$؛ درنتیجه

$$(\Phi - \lambda I)(E) = \mathcal{R}(S) . \tag{۹}$$

هرگاه $x \in \mathcal{N}(S)$، آنگاه $\pi x = x$،

$$(\Phi - \lambda I)x = \varphi x, \tag{۱۰}$$

و درنتیجه

$$(\Phi - \lambda I)(\mathscr{N}(S)) = \varphi(\mathscr{N}(S)) = F. \tag{۱۱}$$

از روابط (۹) و (۱۱) معلوم می‌شود که

$$\mathscr{R}(\Phi - \lambda I) \supset \mathscr{R}(S) + F = X. \tag{۱۲}$$

ولی اگر رابطهٔ (۱۰) رابه ازای $x = x_\circ$ به کاربریم، معلوم می‌شود که λ یک مقدار ویژهٔ Φ است. و چون Φ فشرده است، قضیهٔ ۲۴.۴ نشان می‌دهد که برد $\Phi - \lambda I$ نمی‌تواند تمام X باشد. این امر رابطهٔ (۱۲) را نقض می‌کند؛ لذا رابطهٔ (۴) درست است و قسمت (آ) ثابت می‌شود.

قسمت (ب) از قسمت (آ) نتیجه می‌شود، زیرا هرگاه λ یک مقدار ویژهٔ T نباشد، آنگاه $\alpha(T) = \circ$، وقسمت (آ) ایجاب‌می‌کند که $\beta(T) = \circ$؛ یعنی $\mathscr{R}(T - \lambda I) = X$ لذا $T - \lambda I$ معکوسپذیر است؛ درنتیجه $\lambda \notin \sigma(T)$.

حال از قسمت (ب) قضیهٔ ۲۴.۴ نتیجه می‌شود که $\circ$ تنها نقطهٔ حدی ممکن $\sigma(T)$ است، $\sigma(T)$ حداکثر شمارشپذیر است، و $\sigma(T) \cup \{\circ\}$ فشرده می‌باشد. هرگاه $\dim X < \infty$، آنگاه $\sigma(T)$ متناهی است؛ هرگاه $\dim X = \infty$، آنگاه، طبق قسمت (ث) قضیهٔ ۱۸.۴، $\circ \in \sigma(T)$. لذا $\sigma(T)$ فشرده است. این قسمت (پ) را داده و برهان قضیه را کامل خواهدکرد.

تمرینات

در این مجموعه از تمرینات، X و Y فضاهای باناخ‌اند مگر خلافش تصریح شود.

۱. فرض کنید ϕ نشاننده از X به توی X^{**} باشد که در بخش ۵.۴ توصیف شد. همچنین τ توپولوژی ضعیف X بوده و σ ضعیف*-توپولوژی X^{**} باشد که به وسیلهٔ X^* القا می‌شود.

(آ) ثابت کنید ϕ یک همانریختی از (X, τ) به روی یک زیرفضای چگال (X^{**}, σ) است.

(ب) اگر B گوی یکهٔ بستهٔ X باشد، ثابت کنید $\phi(B)$ در گوی یکهٔ بستهٔ X^{**}، σ-چگال است. (از قضیهٔ جداسازی هان-باناخ استفاده کنید.)

(پ) با استفاده از قسمتهای (آ)، (ب)، و قضیهٔ باناخ - آلوگلو، ثابت کنید X منعکس است اگر وفقط اگر B به طورضعیف فشرده باشد.

(ت) از قسمت (پ) نتیجه بگیرید که هر زیرفضای نرم-بستهٔ فضای منعکس X منعکس است.

(ث) اگر X منعکس بوده و Y زیرفضای بسته‌ای از X باشد، ثابت کنید X/Y منعکس است.

(ج) ثابت کنید X منعکس است اگر و فقط اگر X^* منعکس باشد.

پیشنهاد. نصف مطلب از قسمت (پ) نتیجه می‌شود؛ برای قسمت دیگر، قسمت (ت) را در مورد زیرفضای $\phi(X)$ از X^{**} به کار برید.

۲. از فضاهای c_0، ℓ^1، ℓ^p، ℓ^∞ کدامها منعکس‌اند؟ ثابت کنید هر فضای نرمدار با بعد متناهی منعکس است. ثابت کنید C، یعنی فضای سوپرمم- نرمدار تمام توابع پیوستهٔ مختلط، بر بازهٔیکه منعکس نیست.

۳. ثابت کنید زیرمجموعهٔ E از $\mathscr{B}(X,Y)$ همپیوسته است اگر وفقط اگر $M<\infty$ ی چنان موجود باشد که به ازای هر $\Lambda \in E$، $\|\Lambda\| \le M$.

٤. به یاد آورید که اگر $\mathbb{C}$ میدان اسکالر باشد، $X^* = \mathscr{B}(X,\mathbb{C})$. لذا، به ازای هر $\Lambda \in X^*$، $\Lambda^* \in \mathscr{B}(\mathbb{C},X^*)$. برد Λ^* را شناسایی کنید.

۵. ثابت کنید $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ یک یکمتری از X به روی Y است اگر وفقط اگر T^* یک یکمتری از Y^* به روی X^* باشد.

٦. فرض کنید σ و τ ضعیف*- توپولوژیهای X^* و Y^* باشند، و ثابت کنید S یک نگاشت خطی پیوسته از (Y^*,τ) به توی (X^*,σ) است اگر وفقط اگر به ازای $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ای، $S=T^*$.

۷. فرض کنید L^1 فضای معمولی توابع انتگرالپذیر بر بازهٔ یکهٔ بستهٔ J نسبت به اندازهٔ لبگ باشد. همچنین $T \in \mathscr{B}(L^1,Y)$؛ درنتیجه $T^* \in \mathscr{B}(Y^*,L^\infty)$. و نیز $\mathscr{R}(T^*)$ شامل هر تابع پیوسته بر J باشد. راجع به T چه چیز نتیجه می‌شود؟

۸. ثابت کنید $(ST)^* = T^*S^*$. مفروضات این حکم را بیان دارید.

۹. فرض کنید $S \in \mathscr{B}(X)$ و $T \in \mathscr{B}(X)$.

(آ) با مثال نشان دهید که $ST = I$ رابطهٔ $TS = I$ را ایجاب نمی‌کند.

(بـ) با اینحال، با فرض فشرده بودن T ، نشان دهید که

$S(I-T) = I$ اگر و فقط اگر $(I-T)S = I$،

و نشان دهید که هریک از این تساویها فشردگی $I-(I-T)^{-1}$ را ایجاب می‌کند.

۱۰. فرض کنید $T \in \mathscr{B}(X)$ فشرده بوده و $\dim X = \infty$ یا میدان اسکالر $\mathbb{C}$ باشد. ثابت کنید $\sigma(T)$ تهی نیست. با اینحال، اگر $\dim X < \infty$ و میدان اسکالر R باشد، $\sigma(T)$ ممکن است تهی باشد.

۱۱. فرض کنید $\dim X < \infty$ و نشان دهید که تساوی $\beta = \beta^*$ قضیهٔ ۲۵.٤ به این حکم تحویل می‌شود که رتبهٔ سطری یک ماتریس مربعی مساوی رتبهٔ ستونی آن است.

۱۲. فرض کنید $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ و $\mathscr{R}(T)$ در Y بسته باشد. ثابت کنید

$$\dim \mathscr{N}(T) = \dim X^*/\mathscr{R}\left(T^*\right),$$

$$\dim \mathscr{N}\left(T^*\right) = \dim Y/\mathscr{R}(T).$$

این احکام $\alpha = \beta^*$ و $\beta = \alpha^*$ در قضیهٔ ۲۵.٤ را تعمیم می‌دهد.

۱۳. (آ) فرض کنید $T \in \mathscr{B}(X,Y)$، به ازای $n = ۱,۲,۳,\ldots$، $T_n \in \mathscr{B}(X,Y)$، هر T_n دارای برد با بعد متناهی باشد، و $\lim\|T - T_n\| = ۰$. ثابت کنید T فشرده است.

(بـ) فرض کنید Y یک فضای هیلبرت باشد، و عکس قسمت (آ) را ثابت نمایید: هر $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ی فشرده را می‌توان در نرم عملگر به وسیلهٔ عملگرهایی با بردهای با بعد متناهی تقریب کرد. ***راهنمایی.*** در یک فضای هیلبرت تصویرهای خطی با نرم ۱ به روی هر زیرفضای بسته وجود دارند(ر.ک. قضایای ۱٦.٥ ، ٤.۱۲.)

۱٤. عملگر جابجایی S و عملگر ضرب M بر $\ell^۲$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$(Sx)(n) = \begin{cases} ۰ & \text{اگر } n = ۰، \\ x(n-۱) & \text{اگر } n \geq ۱، \end{cases}$$

$$(Mx)(n) = (n+۱)^{-۱}x(n) \quad \text{اگر } n \geq ۰،$$

قراردهید $T = MS$ و نشان دهید که T یک عملگر فشرده است که مقدار ویژه ندارد و طیفش درست از یک نقطه تشکیل شده است. $\|T^n\|$ را به ازای $n = ۱,۲,۳,\ldots$ و نیز $\lim\limits_{n\to\infty}\|T^n\|^{۱/n}$ را حساب کنید.

۱۵. فرض کنید μ یک اندازهٔ مثبت متناهی (یا σ–متناهی) بر فضای اندازهٔ Ω بوده، $\mu \times \mu$ اندازهٔ حاصل ضربی نظیر بر $\Omega \times \Omega$ باشد، و $K \in L^2(\mu \times \mu)$. تعریف کنید

$$(Tf)(s) = \int_\Omega K(s,t) f(t) d\mu(t) \qquad \left[f \in L^2(\mu)\right].$$

(آ) ثابت کنید $T \in \mathscr{B}\left(L^2(\mu)\right)$ و

$$\|T\|^2 \le \int_\Omega \int_\Omega |K(s,t)|^2 d\mu(s) d\mu(t).$$

(ب) فرض کنید a_i و b_i اعضای $L^2(\mu)$ به ازای $1 \le i \le n$ باشند، قرار دهید $K_1(s,t) = \sum a_i(s) b_i(t)$، و T_1 را برحسب K_1 به صورتی که T برحسب K شد تعریف نمایید. ثابت کنید $\dim \mathscr{R}(T_1) \le n$.

(پ) نتیجه بگیرید که T یک عملگر فشرده بر $L^2(\mu)$ است. ***راهنمایی.*** از تمرین ۱۳ استفاده نمایید.

(ت) فرض کنید $\lambda \in \mathbb{C}$ و $\lambda \ne 0$ و ثابت کنید معادلهٔ

$$Tf - \lambda f = g$$

جواب منحصر به فرد $f \in L^2(\mu)$ به ازای هر $g \in L^2(\mu)$ دارد یا به ازای gهای بی‌نهایت جواب و به ازای سایرین هیچ جوابی وجود ندارد. (این حکم به ***شق دیگر فردهولم*** *(Fredholm)* معروف است.)

(ث) الحاقی T را توصیف نمایید.

۱۶. تعریف کنید

$$K(s,t) = \begin{cases} (1-s)t & \text{اگر } 0 \le t \le s \\ (1-t)s & \text{اگر } s \le t \le 1 \end{cases}$$

و $T \in \mathscr{B}\left(L^2(0,1)\right)$ را با

$$(Tf)(s) = \int_0^1 K(s,t) f(t) dt \qquad (0 \le s \le 1)$$

تعریف نمایید.

(آ) نشان دهید که مقادیر ویژهٔ T عبارتند از $(n\pi)^{-2}$، $n = 1, 2, 3, \ldots$، توابع ویژهٔ نظیر عبارتند از $\sin n\pi x$، و هر فضای ویژه یک بعدی است. ***راهنمایی.*** اگر $\lambda \ne 0$، معادلهٔ $Tf = \lambda f$ ایجاب می‌کند که f بی‌نهایت بارمشتق‌پذیر است، $\lambda f'' + f = 0$، و $f(0) = f(1) = 0$. حالت $\lambda = 0$ را می‌توان جداگانه بررسی کرد.

(ب) نشان دهید که توابع ویژهٔ فوق یک پایهٔ متعامد برای $L^2(0,1)$ تشکیل می‌دهند.

(پ) فرض کنید $g(t)=\sum c_n \sin n\pi t$ و در معادلهٔ $Tf-\lambda f=g$ بحث نمایید.
(ت) نشان دهید که T یک عملگر فشرده بر C (فضای تمام توابع پیوسته بر $[0,1]$) نیز هست. **راهنمایی.** هرگاه $\{f_i\}$ به طوریکنواخت کراندار باشد، آنگاه $\{Tf_i\}$ همپیوسته است.

۱۷. اگر $L^2=L^2(0,\infty)$ نسبت به اندازهٔ لبگ بوده، و نیز

$$(Tf)(s)=\frac{1}{s}\int_0^s f(t)dt \qquad (0<s<\infty),$$

ثابت کنید $T\in\mathscr{B}(L^2)$ و T فشرده نیست. ($\|T\|\le 2$ حالت خاصی از نامساوی هاردي $(Hardy)$ است. ر.ک.ص ۷۲ مرجع [۲۳].)

۱۸. احکام زیر را ثابت کنید:
(آ) هرگاه $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ به طور ضعیف همگرا در X باشد، آنگاه $\{\|x_n\|\}$ کراندار است.
(ب) هرگاه $T\in\mathscr{B}(X,Y)$ و به طور ضعیف $x_n\to x$، آنگاه به طور ضعیف $Tx_n\to Tx$.
(پ) هرگاه $T\in\mathscr{B}(X,Y)$، به طورضعیف $x_n\to x$، و T فشرده باشد، آنگاه $\|Tx_n-Tx\|\to 0$.
(ت) به عکس، هرگاه X منعکس بوده، $T\in\mathscr{B}(X,Y)$، و $\|Tx_n-Tx\|\to 0$ هروقت به طور ضعیف $x_n\to x$ ، آنگاه T فشرده است. **راهنمایی.** از قسمت (پ) تمرین ۱ و قسمت (پ) تمرین ۲۸ در فصل ۳ استفاده کنید.
(ث) هرگاه X منعکس بوده و $T\in\mathscr{B}(X,\ell^1)$ ، آنگاه T فشرده است. لذا $\mathscr{R}(T)\neq \ell^1$.
راهنمایی. از قسمت (پ) تمرین ۵ از فصل ۳ استفاده کنید.
(ج) هرگاه T منعکس بوده و $T\in\mathscr{B}(c_0,Y)$، آنگاه T فشرده است.

۱۹. فرض کنید Y زیرفضای بستهای از X بوده و $x_0^*\in X^*$. قراردهید

$$\mu=\sup\{|<x,x_0^*>|: x\in Y,\|x\|\le 1\},$$
$$\delta=\inf\{\|x^*-x_0^*\|: x^*\in Y^{\perp}\}.$$

به عبارت دیگر، μ نرم تحدید x_0^* به Y است، و δ فاصله از x_0^* تا فناساز Y میباشد. ثابت کنید $\mu=\delta$. همچنین ثابت کنید به ازای دست کم یک $x^*\in Y^{\perp}$، $\delta=\|x^*-x_0^*\|$.

۲۰. بخشهای ٦.٤ تا ٩.٤ را به فضاهای موضعاً محدب تعمیم دهید. (البته واژهٔ "یکمتر"

باید از صورت قضیهٔ ۹.٤ حذف شود.)

۲۱. فرض کنید B و B^* گویهای یکهٔ بسته در X و X^* باشند. حکم زیر عکس قضیهٔ باناخ- آلوگلو می‌باشد: ***هرگاه E مجموعهٔ محدبی در X^* باشد به‌طوری که $E \cap (rB^*)$ به ازای هر $r > ۰$ ضعیف*- فشرده است، آنگاه E ضعیف*- بسته می‌باشد.***

(**نتیجه**. یک زیرفضا از X^* ضعیف*-بسته است اگر و فقط اگر اشتراکش با B^* ضعیف*- فشرده باشد.)

برهان موجز زیر راکامل نمایید.

(یک) E نرم - بسته است.

(دو) به هر $F \subset X$ قطب آن را مربوط کنید:

$$P(F) = \{x^* : |\langle x, x^* \rangle| \le ۱ \text{ ، به ازای هر } x \in F\}$$

اشتراک تمام مجموعه‌های $P(F)$، وقتی F در گردایهٔ تمام زیرمجموعه‌های متناهی $r^{-۱}B$ تغییر کند، درست مساوی rB^* است.

(سه) قضیه نتیجه‌ای از حکم زیر است: ***هرگاه، علاوه بر مفروضات ذکر شده، $E \cap B^* = \varnothing$، آنگاه $x \in X$ ی هست به‌طوری که به ازای هر $x^* \in E$، $\mathbf{Re}\langle x, x^* \rangle \ge ۱$.***

(چهار) برهان حکم: قراردهید $F_۰ = \{۰\}$. فرض کنید مجموعه‌های متناهی $F_۰، \ldots، F_{k-۱}$ طوری انتخاب شده‌اند که $iF_i \subset B$ و درنتیجه

$$P(F_۰) \cap \ldots \cap P(F_{k-۱}) \cap E \cap kB^* = \varnothing. \qquad (۱)$$

توجه کنید که رابطهٔ (۱) به ازای $k = ۱$ درست است. قراردهید

$$Q = P(F_۰) \cap \ldots \cap P(F_{k-۱}) \cap E \cap (k+۱)B^*.$$

اگر به ازای هر مجموعهٔ متناهی $F \subset k^{-۱}B$ داشته باشیم $P(F) \cap Q \ne \varnothing$، ضعیف*- فشردگی Q همراه با (دو) ایجاب می‌کند که $(kB^*) \cap Q \ne \varnothing$ که با (۱) در تضاد است. لذا مجموعه‌ای متناهی مانند $F_k \subset k^{-۱}B$ چنان وجود دارد که رابطهٔ (۱) با $k+۱$ به جای k برقرار است. لذا می‌توان ساختن را ادامه داد. با این کار داریم

$$E \cap \bigcap_{k=۱}^{\infty} P(F_k) = \varnothing. \qquad (۲)$$

اعضای $\bigcup F_k$ را به‌صورت دنبالهٔ $\{x_n\}$ آرایش می‌کنیم. در این‌صورت $\|x_n\| \to \circ$. $T: X^* \to c_\circ$ را با

$$Tx^* = \{< x_n, x^* >$$

تعریف کنید. دراین‌صورت $T(E)$ زیرمجموعهٔ محدبی از $c_\circ$ است. بنا بر(۲)، به ازای هر $x^* \in E$،

$$\|Tx^*\| = \sup_n |< x_n, x^* >| \geq 1.$$

لذا دنبالهٔ اسکالری مانند $\{\alpha_n\}$ با $\sum |\alpha_n| < \infty$ چنان وجود دارد که به ازای هر $x^* \in E$،

$$\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < x_n, x^* > \leq 1.$$

برای اتمام برهان قراردهید $x = \sum \alpha_n x_n$.

۲۲. فرض کنید $T \in \mathscr{B}(X)$، T فشرده باشد، $\lambda \neq \circ$، و $S = T - \lambda I$.

(آ) اگر به ازای عدد صحیح نامنفیی چون n، $\mathscr{N}(S^n) = \mathscr{N}(S^{n+1})$، ثابت کنید به ازای $k = 1,2,3,\ldots$، $\mathscr{N}(S^n) = \mathscr{N}(S^{n+k})$.

(ب) ثابت کنید قسمت (آ) باید به ازای nی رخ دهد. (***راهنمایی.*** برهان قضیهٔ ۲٤.٤ را در نظر بگیرید.)

(پ) فرض کنید n کوچکترین عد صحیح نامنفیی باشد که به ازای آن (آ) برقرار است. ثابت کنید $\dim \mathscr{N}(S^n)$ متناهی است،

$$X = \mathscr{N}(S^n) \oplus \mathscr{R}(S^n),$$

و تحدید S به $\mathscr{R}(S^n)$ یک نگاشت یک به یک از $\mathscr{R}(S^n)$ به روی $\mathscr{R}(S^n)$ است.

۲۳. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای در فضای باناخ X بوده و

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = M < \infty.$$

ثابت کنید سری $\sum x_n$ به $x \in X$ی همگراست. به طور صریح، ثابت کنید

$$\lim_{n \to \infty} \|x - (x_1 + \ldots + x_n)\| = \circ.$$

همچنین ثابت کنید $\|x\| \leq M$. (این نکات در برهان قضیهٔ ۱۳.٤ به کاررفته‌اند.)

۲٤. فرض کنید c فضای تمام دنباله‌های مختلط

$$x = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

باشد که به ازای آنها $x_\infty = \lim x_n$ (در $\mathbb{C}$) وجود دارد. قراردهید $\|x\| = \sup|x_n|$ و فرض کنید c_0 زیرفضای c مرکب از تمام xها با $x_\infty = 0$ باشد.

(آ) دو یکریختی یکمتر مانند u و v را به طور صریح توصیف کنید که u، c^* را به روی ℓ^1 و v، c_0^* را به روی ℓ^1 بنگارد.

(ب) $S: c_0 \to c$ را با $Sf = f$ تعریف کنید. عملگر vS^*u^{-1} را که ℓ^1 را به ℓ^1 می‌نگارد توصیف نمایید.

(پ) $T: c \to c_0$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$y_1 = x_\infty \text{ و اگر } n \geq 1 \text{، } y_{n+1} = x_n - x_\infty.$$

ثابت کنید T یک به یک است و $Tc = c_0$. $\|T\|$ و $\|T^{-1}\|$ را یافته و عملگر uT^*v^{-1} را که ℓ^1 را به ℓ^1 می‌نگارد توصیف نمایید.

۲۵. اگر $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ و $\mathscr{R}(T^*) = \mathscr{N}(T)^{\perp}$، ثابت کنید $\mathscr{R}(T)$ بسته است.

۲۶. فرض کنید $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ و $T(X) = Y$. نشان دهید که $\delta > 0$ای هست به‌طوری که به ازای هر $S \in \mathscr{B}(X, Y)$ که $\|S - T\| < \delta$، $S(X) = Y$.

۲۷. فرض کنید $T \in \mathscr{B}(X)$ و ثابت کنید $\lambda \in \sigma(T)$ اگر وفقط اگر دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در X با $\|x_n\| = 1$ چنان موجود باشد که

$$\lim_{n \to \infty} \|Tx_n - \lambda x_n\| = 0.$$

[لذا هر $\lambda \in \sigma(T)$ که یک مقدار ویژهٔ T نباشد یک مقدار ویژهٔ "تقریبی" است.]

فصل ۵

چند کاربرد

این فصل حاوی چند کاربرد از مطالب مجرد پیشگفته در مسائل ملموستر در آنالیز است. بسیاری از این کاربردها فقط تابع بخش کوچکی از مطالب فصلهای ۱ تا ٤ می‌باشند. درزیرلیست‌ناقصی‌ازقضایا که بیش و کم طبق پیشنیاز ذکرشده‌اند دیده می‌شود.

قضایا	پیشنیازها
۲۳.۵	توپولوژیهای‌برداری
۲۷.۵	تابعیهای مینکوفسکی (وقضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر (*Brouwer*))
۱.۵، ۲.۵	قضیهٔ گراف بسته
٤.۵	قضیهٔ هان - باناخ
۵.۵، ۷.۵ ، ۱۰.۵، ۱۱.۵	قضایای باناخ - آلوگلو و کرین ـ میلمن
۱۸.۵	قضیهٔ باناخ - اشتاین هاوس و انتگرالهای‌برداری
۹.۵،۲۱.۵	قضیهٔ بردبسته

قضیهٔ پیوستگی

یکی از قضایای بسیار قدیمی در آنالیز تابعی [هلینگر (*Hellinger*) و توپلیتس (*Toeplitz*)، ۱۹۱۰] می‌گوید که ***هرگاه T یک عملگر خطی بر فضای هیلبرت H باشد که به مفهوم زیر متقارن است: به ازای هر $x \in H$ و هر $y \in H$،***

$$(Tx, y) = (x, Ty)$$

آنگاه T پیوسته است. در اینجا (x,y) حاصل‌ضرب داخلی معمولی فضای هیلبرت است. (ر.ک.بخش ۱.۱۲.)

اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای در H باشدکه $\|x_n\| \to 0$، تقارن T ایجاب می‌کند که به طور ضعیف $Tx_n \to 0$. (این تابع آن است که بدانیم تمام تابعیهای خطی پیوسته بر H باحاصل‌ضربهای داخلی داده شده‌اند.) لذا قضیهٔ هلینگر-توپلیتس نتیجه‌ای است از قضیهٔ زیر:

۱.۵ قضیه. ***فرض کنیم X و Y دو F- فضا بوده، Y^* نقاط بر Y را جداسازد، $T: X \to Y$ خطی باشد، و به ازای هر $\Lambda \in Y^*$ هروقت $x_n \to 0$، $\Lambda T x_n \to 0$. دراین صورت T پیوسته است.***

برهان. فرض کنیم $x_n \to x$ و $Tx_n \to y$. هرگاه $\Lambda \in Y^*$، آنگاه

$$\Lambda T\left(x_n - x\right) \to 0$$

درنتیجه

$$\Lambda y = \lim \Lambda T x_n = \Lambda T x.$$

لذا $y = Tx$ و می‌توان قضیهٔ گراف بسته را به کاربرد.

در محدودهٔ فضاهای باناخ می‌توان قضیهٔ ۱.۵ را به صورت زیر بیان کرد: ***هرگاه $T: X \to Y$ خطی بوده، $\|x_n\| \to 0$ ایجاب کند که به طور ضعیف $Tx_n \to 0$، آنگاه***

$\|x_n\| \to \circ$ ***عملاً ایجاب می‌کند که*** $\|Tx_n\| \to \circ$.

برای مشاهدهٔ اهمیت تمامیت در اینجا، فرض کنیم X فضای‌برداری تمام توابع بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر مختلط بر $(-\infty,\infty)$باشد که خارج بازهٔ یکه صفر می‌شوند. قرار می‌دهیم

$$(f,g) = \int_\circ^1 f\,\bar{g} \text{ ، } \|f\| = (f,f)^{1/2}\text{،}$$

$T: X \to X$ را با $(Tf)(x) = if'(x)$ تعریف می‌کنیم. دراین صورت $(Tf,g) = (f,Tg)$ اما T پیوسته نیست.

زیرفضاهای بستهٔ فضاهای L^p

برهان قضیهٔ زیر از گروتندیک (*Grothendieck*) نیز مستلزم قضیهٔ گراف بسته است.

۲.۵ قضیه. ***فرض کنیم*** $\circ < p < \infty$ ***و***

(آ) μ ***یک اندازهٔ احتمال بر فضای اندازهٔ*** Ω ***باشد؛***

(ب) S ***یک زیرفضای بستهٔ*** $L^p(\mu)$ ***باشد؛***

(پ) $S \subset L^\infty(\mu)$.

در این صورت S ***با بعد متناهی است.***

برهان. فرض کنیم J نگاشت همانی باشد که S را به توی L^∞ می‌نگارد و به S توپولوژی L^p داده‌ایم؛ درنتیجه S تام است. اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای در S باشد به‌طوری که $f_n \to f$ در S و $f_n \to g$ در L^∞، واضح است که $f=g$ لذا f در مفروضات قضیهٔ نگاشت بسته صدق می‌کند، و نتیجه می‌گیریم که ثابتی مانند $K < \infty$ هست به‌طوریکه به ازای هر $f \in S$،

$$\|f\|_\infty \le K\|f\|_p. \qquad (1)$$

طبق معمول، $\|f\|_p$ یعنی $\left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}$ و $\|f\|_\infty$ سوپرمم اساسی $|f|$ است.

هرگاه $2 \le p$، آنگاه $\|f\|_2 \le \|f\|_p$. اگر $2 < p < \infty$، با انتگرالگیری از نامساوی

$$|f|^p \le \|f\|_\infty^{p-2} |f|^2$$

داریم $\|f\|_\infty \le K^{p/2}\|f\|_2$. در هرحالت، ثابتی مانند $M < \infty$ داریم به‌طوری که

$$\|f\|_\infty \le M\|f\|_2 \qquad (f \in S). \tag{۲}$$

تا آخربرهان با تک تک توابع سروکار داریم نه با رده‌های هم‌ارزی به پیمانهٔ مجموعه‌های پوچ.

فرض کنیم $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ یک مجموعهٔ متعامدیکه در S باشد که به عنوان زیرفضای L^2 ملحوظ شده است. همچنین Q یک زیرمجموعهٔ چگال شمارش‌پذیر از گوی‌یکهٔ اقلیدسی B از $\mathbb{C}^n$ باشد. اگر $c = (c_1, \ldots, c_n) \in B$، تعریف می‌کنیم $f_c = \sum c_i \phi_i$. در این‌صورت $\|f_c\|_2 \le 1$؛ و درنتیجه $\|f_c\|_\infty \le M$. چون Q شمارش‌پذیر است، مجموعه‌ای مانند $\Omega' \subset \Omega$ با $\mu(\Omega') = 1$ چنان وجود دارد که به ازای هر $c \in Q$ و هر $x \in \Omega'$، $|f_c(x)| \le M$. اگر x ثابت باشد، $c \to |f_c(x)|$ تابع پیوسته‌ای بر B است. لذا هروقت $c \in B$ و $x \in \Omega'$، $|f_c(x)| \le M$. پس به ازای هر $x \in \Omega'$ داریم $\sum |\phi_i(x)|^2 \le M^2$. با انتگرالگیری از این نامساوی داریم $n \le M^2$، و نتیجه می‌گیریم که $\dim S \le M^2$. این قضیه را ثابت خواهد کرد.

در این قضیه وجود L^∞ در فرض (ب) لازم است. برای توضیح این امر یک زیرفضای بسته با بعد متناهی از L^1 می‌سازیم که در L^4 قرارداشته باشد. برای اندازهٔ احتمال، اندازهٔ لبگ روی دایره بخش بر 2π را می‌گیریم.

۳.۵ قضیه. *فرض کنیم E مجموعه‌ای نامتناهی از اعداد صحیح باشد به طوری که هیچ عدد صحیح بیش از یک نمایش به صورت مجموع دو عضو از E نداشته باشد. همچنین P_E فضای‌برداری تمام مجموعهای متناهی f به شکل زیر باشد:*

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n) e^{in\theta} \tag{۱}$$

که در آن هروقت n در E نباشد، $c(n) = 0$. فرض کنیم S_E، L^1 - بست P_E باشد. در

این صورت S_E زیرفضای بسته‌ای از L^4 است.

مثالی از این نوع مجموعه عبارت است از 2^kها، $k = 1,2,3,\ldots$. همچنین می‌توان رشد بسیار کندتری را داشت.

برهان. هرگاه f همانند (۱) باشد، آنگاه

$$f^2\left(e^{i\theta}\right) = \sum_n c(n)^2 e^{2in\theta} + \sum_{n\neq m} c(n)c(m)e^{i(n+m)\theta}.$$

فرض ترکیباتی ما راجع به E ایجاب می‌کند که

$$\int|f|^4 = \int\left|f^2\right|^2 = \sum_n |c(n)|^4 + 4\sum_{m<n}|c(m)|^2|c(n)|^2;$$

درنتیجه،

$$\int|f|^4 \leq 2\left(\sum|c(n)|^2\right)^2 = 2\left(\int|f|^2\right)^2. \tag{۲}$$

نامساوی هولدر ($Hölder$)، به ازای ۳ و $\frac{3}{2}$ به عنوان نماهای مزدوج، نتیجه می‌دهد که

$$\int|f|^2 \leq \left(\int|f|^4\right)^{1/3}\left(\int|f|\right)^{2/3}. \tag{۳}$$

حال از روابط (۲) و (۳) به ازای هر $f \in P_E$ داریم

$$\|f\|_4 \leq 2^{1/4}\|f\|_2 \quad \text{و} \quad \|f\|_2 \leq 2^{1/2}\|f\|_1. \tag{٤}$$

لذا هر L^1 - دنبالهٔ‌کشی در P_E یک دنبالهٔ‌کشی در L^4 نیز هست. بنابراین $S_E \subset L^4$. دراین صورت نامساوی واضح $\|f\|_1 \leq \|f\|_4$ نشان می‌دهد که S_E در L^4 بسته است.

با اعمال یک استدلال دوگانی در نامساوی دوم (٤) نتیجهٔ جالبی به دست می‌آید. به یادآورید که ضرایب فوریهٔ $\hat{g}(n)$ به ازای هر $g \in L^\infty$ در $\sum|\hat{g}(n)|^2 < \infty$ صدق می‌کنند. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که راجع به تحدید $\hat{g}$ به E بیش از این نمی‌توان سخن گفت.

۴.۵ قضیه. هرگاه E همانند قضیهٔ ۳.۵ بوده و

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|a(n)|^2 = A^2 < \infty,$$

آنگاه $g \in L^\infty$ ای هست به طوری که به ازای هر $n \in E$، $\hat{g}(n) = a(n)$.

برهان. اگر $f \in P_E$، برهان پیشین نشان می‌دهد که

$$\left|\sum \hat{f}(n)a(n)\right| \le A\left\{\sum|\hat{f}(n)|^2\right\}^{1/2} = A\|f\|_2 \le 2^{1/2}A\|f\|_1 .$$

لذا $\sum \hat{f}(n)a(n) \to f$ یک تابعی خطی بر P_E است که نسبت به نرم L^1 پیوسته است. بنا بر قضیهٔ هان - باناخ، این تابعی یک توسیع خطی پیوسته به L^1 دارد. لذا $g \in L^\infty$ ای (با $\|g\|_\infty \le 2^{1/2}A$) هست به‌طوری که

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)a(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{-i\theta}\right)g\left(e^{i\theta}\right)d\theta \qquad \left(f \in P_E\right).$$

این رابطه به ازای $f\left(e^{i\theta}\right) = e^{in\theta}$ $(n \in E)$ نشان می‌دهد که $\hat{g}(n) = a(n)$.

برد یک اندازهٔ برداری

حال به کاربرد نسبتاً جالبی ازقضایای کرین - میلمن و باناخ - آلوگلو می‌پردازیم. فرض کنیم $\mathscr{M}$ یک σ- جبر باشد. اندازهٔ حقیقی λ بر $\mathscr{M}$ را ***غیراتمی*** گوییم اگر هر مجموعهٔ $E \in \mathscr{M}$ با $|\lambda|(E) > 0$ شامل مجموعه‌ای مانند $A \in \mathscr{M}$ با $0 < |\lambda|(A) < |\lambda|(E)$ باشد. در اینجا $|\lambda|$ اندازهٔ تغییر کل λ است؛ اصطلاحات همانند مرجع [۲۳] می‌باشند.

۵.۵ قضیه. *فرض کنیم $\mu_1, \ldots, \mu_n$ اندازه‌های غیراتمی حقیقی بر σ- جبر $\mathscr{M}$ باشند. تعریف می‌کنیم*

$$\mu(E) = \left(\mu_1(E), \ldots, \mu_n(E)\right) \qquad (E \in \mathscr{M}).$$

در این صورت μ تابع با قلمرو $\mathscr{M}$ است که بردش زیرمجموعهٔ محدب فشرده‌ای

از R^n می‌باشد.

برهان. به هر تابع حقیقی اندازه‌پذیر کراندار g بردار

$$\Lambda g = \left(\int g d\mu_1, \dots, \int g d\mu_n\right)$$

در R^n را مربوط می‌سازیم. قرارمی‌دهیم $\sigma = |\mu_1| + \dots + |\mu_n|$. هرگاه $g_1 = g_2$ تـهـ $[\sigma]$، آنگاه $\Lambda g_1 = \Lambda g_2$. لذا Λ را می‌توان یک نگاشت خطی از $L^\infty(\sigma)$ به توی R^n گرفت. هـر μ_i نسبت به σ به طور مطلق پیوسته است. لـذا قضیهٔ رادون - نیکودیم (*Radon- Nikodym*) [۲۳] نشـان می‌دهـد کـه توابعـی مـانند $h_i \in L^1(\sigma)$ وجـود دارنـد بـه طـوری کـه $d\mu_i = h_i d\sigma$ $(1 \le i \le n)$. لذا Λ یک نگاشت خطی ضعیف*- پیوسته از $L^\infty(\sigma)$ به توی R^n است؛ یادآور می‌شویم که $L^\infty(\sigma) = L^1(\sigma)^*$. قرار می‌دهیم

$$K = \left\{ g \in L^\infty(\sigma) : 0 \le g \le 1 \right\}.$$

واضح است که K محدب است. چون $g \in K$ اگر و فقط اگـر بـه ازای هـر $f \in L^1(\sigma)$ نامنفی

$$0 \le \int fg d\sigma \le \int f d\sigma,$$

K ضعیف*-بسته است. و چون K در گوی‌یکهٔ بستهٔ $L^\infty(\sigma)$ قـرار دارد، قضیـهٔ بانـاخ-آلوگلو نشان می‌دهد که K ضعیف*- فشرده می‌باشد. لذا $\Lambda(K)$ یک مجموعـهٔ محـدب فشرده در R^n می‌باشد. ثابت می‌کنیم $\mu(\mathscr{M}) = \Lambda(K)$.

هرگاه χ_E تابع مشخص مجموعهٔ $E \in \mathscr{M}$ باشـد، آنگـاه $\chi_E \in K$ و $\mu(E) = \Lambda g$. لـذا $\mu(\mathscr{M}) \subset \Lambda(K)$. برای به دسـت آوردن شـمول در جهـت دیگـر، نقطـهٔ $p \in \Lambda(K)$ را اختیار کرده و تعریف می‌کنیم

$$K_p = \{g \in K : \Lambda g = p\}.$$

باید نشان دهیم که K_p شامل χ_Eای است، زیرا در این صورت $p = \mu(E)$.

توجه کنید که K_p محدب اسـت؛ چـون Λ پیوسـته اسـت، K_p ضعیـف*-فشـرده می‌باشد. بنابر قضیهٔ کرین - میلمن، K_p دارای نقطهٔ اکستریم است.

فرض کنیم $g_0 \in K_p$ و g_0 یک تابع مشـخص در $L^\infty(\sigma)$ نباشـد. در ایـن صـورت

مجموعه‌ای مانند $E \in \mathscr{M}$ و عددی چون $r > 0$ هست به طوری که $\sigma(E) > 0$ و $r \leq g_0 \leq 1 - r$ بر E. قرار می‌دهیم $Y = \chi_E . L^\infty(\sigma)$. چون $\sigma(E) > 0$ و σ غیراتمی است، $\dim Y > n$. لذا $g \in Y$ای هست که عنصر صفر $L^\infty(\sigma)$ نیست و $\Lambda g = 0$ و $-r < g < r$. پس $g_0 + g$ و $g_0 - g$ در K_p اند. لذا g یک نقطهٔ اکستریم K_p نمی‌باشد.

لذا هر نقطهٔ اکستریم K_p یک تابع مشخص است. این برهان را کامل خواهد کرد.

تعمیمی از قضیهٔ استون - وایراشتراس (*Stone - Weierstrass*)

حال قضایای کرین - میلمن، هان - باناخ، و باناخ آلوگلو را دریک مسئلهٔ تقریب به کار می‌بریم.

۶.۵ چند تعریف. فرض کنیم $C(S)$ فضای باناخ سوپرمم - نرمدار آشنای تمام توابع مختلط پیوسته بر فضای هاسدورف فشردهٔ S باشد. زیرفضای A از $C(S)$ یک **جبر** است اگر هروقت $f \in A$ و $g \in A$، $fg \in A$. گوییم مجموعهٔ $E \subset S$ یک A- ***پادمتقارن*** است اگر هر $f \in A$ که بر E حقیقی است بر E ثابت باشد؛ به عبارت دیگر، جبر A_E که از تحدیدهای $f|_E$ توابع $f \in A$ به E تشکیل شده است شامل هیچ تابع حقیقی غیرثابت نباشد.

به عنوان مثال، هرگاه S مجموعهٔ فشرده‌ای در $\mathbb{C}$ بوده و A از تمام $f \in C(S)$ هایی تشکیل شده باشد که دردرون S هلوریخت‌اند، آنگاه هر مؤلفهٔ درون S، A- ***پادمتقارن*** است.

فرض کنیم $A \subset C(S)$، $p \in S$، $q \in S$، و می‌نویسیم $p \sim q$ مشروط بر آنکه یک مجموعهٔ A - پادمتقارن مانند E شامل هر دوی p و q موجود باشد. به آسانی معلوم می‌شود که این یک رابطهٔ هم ارزی در S تعریف می‌کند و هر ردهٔ هم‌ارزی مجموعهٔ بسته‌ای می‌باشد. این رده‌های هم‌ارزی مجموعه‌های A- پادمتقارن ***ماکزیمال*** می‌باشند.

۷.۵ قضیهٔ بیشاپ (Bishop). *فرض کنیم A زیرجبر بسته‌ای از $C(S)$ باشد. همچنین $g \in C(S)$ و به ازای هر مجموعهٔ A - پادمتقارن ماکزیمال E، $g|_E \in A_E$. در این صورت $g \in A$.*

به بیان متفاوت، فرض بر g این است که به هرمجموعهٔ A- پادمتقارن ماکزیمال مانند E یک تابع مانند $g \in A$ نظیر است که با g بر E یکی است؛ نتیجه این است که fی وجود دارد که این کار را به ازای هر E انجام می‌دهد؛ یعنی $f = g$.

حالت خاصی از قضیهٔ بیشاپ قضیهٔ استون- وایراشتراس است: *فرض کنیم*

(آ) A زیرجبر بسته‌ای از $C(S)$ باشد؛

(ب) A خود الحاق باشد (یعنی، به ازای هر $f \in A$، $\bar{f} \in A$)؛

(پ) A نقاط بر S را جدا سازد؛ و

(ت) در هر $p \in S$، به ازای $f \in A$ی، $f(p) \neq ۰$. در این صورت $A = C(S)$.

زیرا در این حالت اعضای حقیقی $f + \bar{f}$ از A نقاط بر S را جدا می‌سازند. بنابراین هیچ مجموعهٔ A - پادمتقارن بیشتر از یک نقطه را شامل نیست. پس هر $g \in C(S)$ در فرض قضیهٔ بیشاپ صدق می‌کند.

برهان. فناساز $A^{\perp}$ از A عبارت است از تمام اندازه‌های بورل مختلط منتظم μ بر S به طوری که به ازای هر $f \in A$، $\int f d\mu = ۰$. تعریف می‌کنیم

$$K = \left\{ \mu \in A^{\perp} : \|\mu\| \leq ۱ \right\},$$

که در آن $\|\mu\| = |\mu|(S)$. دراین صورت، بنابر قسمت (پ) قضیهٔ ۳.٤، K محدب، در حال تعادل، و ضعیف*- فشرده است. هرگاه $K = \{۰\}$، آنگاه $A^{\perp} = \{۰\}$. لذا $A = C(S)$ و چیزی برای اثبات وجود ندارد.

فرض کنیم $K \neq \{۰\}$، و μ یک نقطهٔ اکستریم K باشد. واضح است که $\|\mu\| = ۱$.

فرض کنیم E ***محافظ*** μ باشد؛ این یعنی E فشرده است، $|\mu|(E)=\|\mu\|$، و E کوچک‌ترین مجموعه با این دو خاصیت است.

حکم می‌کنیم که E پادمتقارن است.

یک $f\in A$ که $f|_E$ حقیقی است در نظر می‌گیریم. بی‌آنکه به کلیت زیانی وارد آید، $-1<f<1$ بر E. اندازه‌های σ و τ را با

$$d\tau=\frac{1}{2}(1-f)d\mu \quad \text{و} \quad d\sigma=\frac{1}{2}(1+f)d\mu$$

تعریف می‌کنیم. چون A یک جبر است، $\sigma\in A^{\perp}$ و $\tau\in A^{\perp}$. و چون $1+f$ و $1-f$ بر E مثبت‌اند، $\|\sigma\|>0$، $\|\tau\|>0$، و

$$\|\sigma\|+\|\tau\|=\frac{1}{2}\int_E(1+f)d|\mu|+\frac{1}{2}\int_E(1-f)d|\mu|=|\mu|(E)=1.$$

این نشان می‌دهد که μ ترکیب محدبی از اندازه‌های $\sigma_1=\sigma/\|\sigma\|$ و $\tau_1=\tau/\|\tau\|$ است. هر دوی اینها در Kاند. چون μ در K اکستریم است، $\mu=\sigma_1$. به عبارت دیگر،

$$\frac{1}{2}(1+f)d\mu=\|\sigma\|d\mu.$$

بنابراین، $f=2\|\sigma\|-1$ بر E؛ یعنی $f|_E$ ثابت است.

این امر حکم ما را ثابت می‌کند.

اگر g در مفروضات قضیه صدق کند، به ازای هر μ که در K اکستریم باشد، لذا به ازای هر μ در غلاف محدب این نقاط اکستریم، $\int g d\mu=0$. چون $\mu\to\int g d\mu$ یک تابع ضعیف[*]-پیوسته بر K است، قضیهٔ کرین - میلمن ایجاب می‌کند که به ازای هر $\mu\in K$، درنتیجه هر $\mu\in A^{\perp}$، $\int g d\mu=0$.

لذا هر تابعی خطی پیوسته بر $C(S)$ که A را فناسازد g را نیز فنا می‌سازد. لذا، طبق قضیهٔ جداسازی هان-باناخ، $g\in A$.

تذکر. هرگاه از مفروضات قضیهٔ استون - وایراشتراس (ت)را حذف کنیم، آنگاه (پ) ایجاب می‌کند که حداکثر یک $p_\circ\in S$ هست که به ازای هر $f\in A$، $f(p_\circ)=0$. هرگاه این حالت برقرار باشد، آنگاه برهان نشان می‌دهد که

$A=\{f\in C(S): f(p_\circ)=\circ\}$.

در زیر مثالی می‌آوریم که قضیهٔ بیشاپ را توضیح می‌دهد:

۸.۵ قضیه *.فرض کنیم*

(آ) K زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از $R^n\times\mathbb{C}$ بوده و

(ب) اگر $t=(t_1,\ldots,t_n)\in R^n$، مجموعهٔ

$$K_t=\{z\in\mathbb{C}:(t,z)\in K\}$$

$\mathbb{C}$ را جدا نمی‌سازد. هرگاه $g\in C(K)$، g_t را بر K_t با $g_t(z)=g(t,z)$ تعریف می‌کنیم. فرض کنیم $g\in C(K)$، هر g_t دردرون K_t هلوریخت باشد، و $\varepsilon>\circ$. در این صورت یک چندجمله‌ای مانند P از متغیرهای t_1،...، t_n، z هست به طوری که به ازای هر $(t,z)\in K$،

$$|P(t,z)-g(t,z)|<\varepsilon.$$

برهان. فرض کنیم A بست مجموعهٔ تمام چندجمله‌ایهای $P(t,z)$ در $C(K)$ باشد. چون چندجمله‌ایهای حقیقی بر R^n نقاط را جدا می‌سازند، هر مجموعهٔ A- پادمتقارن در K_tای قراردارد. لذا، طبق قضیهٔ ۷.۵، کافی است نشان دهیم که به هر $t\in R^n$ یک $f\in A$ چنان نظیر است که $f_t=g_t$.

$t\in R^n$ را ثابت می‌گیریم. بنابر قضیهٔ مرگلیان (*Mergelyan*) [۲۳]، چند جمله‌ایهای $P_i(z)$ چنان وجود دارند که

$$g_t(z)=\sum_{i=1}^{\infty}P_i(z)\ \ (z\in K_t)$$

و اگر $i>1$، $|P_i|<2^{-i}$. یک چندجمله‌ای مانند Q بر R^n هست که در t در اوج است به این معنی که $Q(t)=1$ ولی اگر $s\neq t$ و $K_s\neq\varnothing$، $|Q(s)|<1$. $i>1$ ثابتی در نظر می‌گیریم. توابع ϕ_m با تعریف

$$\phi_m(s,z) = \left|Q^m(s)\, P_i(z)\right|$$

بر K یک دنبالهٔ نزولی از توابع پیوسته تشکیل می‌دهند که حدش در هر نقطه از K از 2^{-i} کمتر است. چون K فشرده است، عدد صحیح مثبتی مانند m_i هست به طوری که در هرنقطهٔ K، $\phi_{m_i}(s,z) < 2^{-i}$. سری

$$f(s,z) = \sum_{i=1}^{\infty} Q^{m_i}(s)\, P_i(z)$$

بر K به طور یکنواخت همگراست. لذا $f \in A$ و به وضوح $f_t = g_t$.

دو قضیهٔ درونیابی

برهان اولین قضیه از این نوع مستلزم الحاقی یک عملگراست. قضیهٔ دوم کاربرد دیگری است از قضیهٔ کرین - میلمن.

اولین قضیه (که منسوب به بیشاپ است) مجدداً در رابطه با $C(S)$ است. نمادگذاری ما همانند قضیهٔ ۷.۵ می‌باشد.

۹.۵ قضیه. ***فرض کنیم Y زیرفضای بسته‌ای از $C(S)$ بوده، K زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از K باشد، و به ازای هر $\mu \in Y^\perp$، $|\mu|(K) = 0$. اگر $g \in C(K)$ و $|g| < 1$، $f \in Y$ ی هست به طوری که $f|_K = g$ و $|f| < 1$ بر S***

لذا هر تابع پیوسته بر K به عضوی از Y توسیع می‌یابد. به عبارت دیگر، نگاشت تحدید $f \to f|_K$ فضای Y را به روی $C(K)$ می‌نگارد.

این قضیه حالت خاص زیر را تعمیم می‌دهد.

فرض کنیم A ***جبر قرصی*** باشد؛ یعنی مجموعهٔ تمام توابع پیوسته بر بست قرص‌یکهٔ U در $\mathbb{C}$ که در U هلوریخت‌اند باشد. فرض کنیم $S=T$ یعنی دایرهٔیکه باشد. همچنین Y از تحدیدهای اعضای A به T تشکیل شده باشد. بنابر قضیهٔ مدول ماکزیمم، Y زیرفضای بسته‌ای از $C(T)$ است. اگر $K \subset T$ فشرده بوده، و دارای اندازهٔ لبگ ۰

باشد، قضیهٔ اف و ام. ریس [۲۳] دقیقاً می‌گوید که K در مفروضات قضیهٔ ۹.۵ صدق می‌کند. درنتیجه، **به هر** $g \in C(K)$ **یک** $f \in A$ **چنان نظیر است که** $f = g$ **بر** K.

برهان. فرض کنیم $\rho: Y \to C(K)$ نگاشت تحدید تعریف شده با $\rho f = f|_K$ باشد. باید ثابت کنیم که ρ گوی‌یکهٔ باز Y را **به روی** گوی‌یکهٔ باز $C(K)$ می‌نگارد.

الحاقی $\rho^*: M(K) \to Y^*$ را در نظر می‌گیریم که در آن $M(K) = C(K)^*$ فضای باناخ تمام اندازه‌های بورل مختلط منتظم بر K با نرم تغییر کل $\|\mu\| = |\mu|(K)$ است. به ازای هر $\mu \in M(K)$، $\rho^*\mu$ یک تابعی خطی کراندار بر Y است؛ بنا بر قضیهٔ هان-باناخ، $\rho^*\mu$ به یک تابعی خطی بر $C(S)$ با همان نرم توسیع می‌یابد. به عبارت دیگر، عنصری مانند $\sigma \in M(S)$ هست که $\|\rho^*\mu\| = \|\sigma\|$ به طوری که به ازای هر $f \in Y$،

$$\int_S f d\sigma = \langle f, \rho^*\mu \rangle = \langle \rho f, \mu \rangle = \int_K f d\mu.$$

μ را عضوی از $M(S)$ با محافظ در K می‌گیریم. در این صورت $\sigma - \mu \in Y^\perp$، و فرض ما راجع به K ایجاب می‌کند که به ازای هر مجموعهٔ بورل $E \subset K$، $\sigma(E) = \mu(E)$. لذا $\|\mu\| \le \|\sigma\|$. پس نتیجه می‌گیریم که $\|\mu\| \le \|\rho^*\mu\|$. بنابر قسمت (ب) قضیهٔ ۱۳.٤ ، این نامساوی قضیه را ثابت خواهدکرد.

تذکر. چون $\|\rho^*\| = \|\rho\| \le 1$، در برهان پیش نیز داریم $\|\sigma\| \le \|\mu\|$. پس داریم $\sigma = \mu$. لذا $\rho^*\mu$ یک توسیع نرم نگهدار **منحصر به فرد** به $C(S)$ دارد.

دومین قضیهٔ درونیابی ما راجع به ***حاصل‌ضربهای بلاشکه*** ($Blaschke$) متناهی است؛ یعنی توابع B به شکل زیر:

$$B(z) = c\prod_{k=1}^{N} \frac{z - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_k z},$$

که در آن $|c| = 1$ و به ازای $1 \le k \le N$، $|\alpha_k| < 1$. به آسانی معلوم می‌شود که حاصل‌ضربهای بلاشکهٔ متناهی درست آن اعضایی از جبر قرصی‌اند که قدر مطلقشان در

هر نقطه از قرص یکه مساوی ۱ است.

داده‌های مسئلهٔ درونیابی پیک -نوانلینا (*Pick- Nevanlina*) دو مجموعهٔ متناهی از اعداد مختلط مانند $\{z_\circ,\dots,z_n\}$ و $\{w_\circ,\dots,w_n\}$ اند که قدر مطلق همهٔ آنها از ۱ کمتر بوده و اگر $i \neq j$، $z_i \neq z_j$. ***مسئله*** یافتن یک تابع هلوریخت مانند f در قرص‌یکهٔ باز U است به طوری که به ازای هر $z \in U$، $|f(z)| < ۱$ و

$$f(z_i) = w_i \qquad (\circ \leq i \leq n).$$

داده‌ها ممکن است جوابی را نپذیرند. به عنوان مثال، اگر $\{z_\circ, z_۱\} = \left\{\circ, \frac{۱}{۲}\right\}$ و $\{w_\circ, w_۱\} = \left\{\circ, \frac{۲}{۳}\right\}$، لم شوارتز این امر را نشان می‌دهد. ولی هرگاه مسئله جواب داشته باشد، آنگاه در بین آنها باید جوابهای بسیار مناسبی یافت شود. قضیهٔ بعدی این امر را نشان می‌دهد.

۱۰.۵ قضیه. ***فرض کنیم $\{z_\circ,\dots,z_n\}$ و $\{w_\circ,\dots,w_n\}$ داده‌های پیک - نوانلینا باشند. همچنین E مجموعهٔ تمام توابع هلوریخت f در U باشد به‌طوری که $|f| < ۱$ و به ازای $\circ \leq i \leq n$، $f(z_i) = w_i$. هرگاه E تهی نباشد، آنگاه E شامل تعدادی متناهی حاصل‌ضرب بلاشکه است.***

برهان . بی‌آنکه به کلیت آسیبی رسد، فرض می‌کنیم $z_\circ = w_\circ = \circ$. نشان می‌دهیم که یک تابع هلوریخت مانند F در U هست که درروابط زیر صدق می‌کند:

$$\text{به ازای } z \in U\text{،}\ \operatorname{Re} F(z) > \circ\text{،}\ f(\circ) = ۱\text{،} \tag{۱}$$

$$\text{به ازای } ۱ \leq i \leq n\text{،}\quad F(z_i) = \beta_i = \frac{۱ + w_i}{۱ - w_i}\text{،} \tag{۲}$$

و به شکل زیر می‌باشد:

$$F(z) = \sum_{k=۱}^{N} c_k \frac{a_k + z}{a_k - z} \tag{۳}$$

که در آن $c_k > \circ$، $\sum c_k = ۱$، و $|a_k| = ۱$. به محض یافتن چنین F قرار

می‌دهیم $B=(F-1)(F+1)$. این یک حاصل‌ضرب بلاشکهٔ متناهی است که در $B(z_i)=w_i$ به ازای $0 \le i \le n$ صدق می‌کند.

فرض کنیم K مجموعهٔ تمام توابع هلوریخت F در U باشد که در (۱) صادقند. به هر $\mu \in M(T)=C(T)^*$ تابع

$$F_\mu(z)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\mu\left(e^{i\theta}\right) \qquad (z\in U) \tag{٤}$$

را مربوط می‌کنیم. هرگاه P مجموعهٔ تمام اندازه‌های *احتمال* بورل بر T باشد، آنگاه $\mu \leftrightarrow F_\mu$ یک تناظر یک به یک بین P و K است (قضایای ۹.۱۱ و ۳۰.۱۱ در مرجع [۲۳]). $\Lambda: M(T)\to \mathbb{C}^n$ را با

$$\Lambda\mu=\left(F_\mu(z_i),\dots,F_\mu(z_n)\right) \tag{۵}$$

تعریف می‌کنیم. چون E ناتهی فرض شده است، $\mu_0 \in P$ای هست به طوری که

$$\Lambda\mu_0=\beta=\left(\beta_1,\dots,\beta_n\right). \tag{٦}$$

چون P محدب و ضعیف*- فشرده است و نیز Λ خطی و ضعیف*- پیوسته است، $\Lambda(P)$ یک مجموعهٔ فشردهٔ محدب در $\mathbb{C}=R^{2n}$ می‌باشد. چون $\beta \in \Lambda(P)$، β ترکیبی محدب از $N \le 2n+1$ نقطهٔ اکستریم از $\Lambda(P)$ است (تمرین ۱۹، فصل ۳). هرگاه γ یک نقطهٔ اکستریم $\Lambda(P)$ باشد، آنگاه $\Lambda^{-1}(\gamma)$ یک مجموعهٔ اکستریم K است، و هر نقطهٔ اکستریم $\Lambda^{-1}(\gamma)$ (وجودشان ازقضیهٔ کرین- میلمن نتیجه می‌شود) یک نقطهٔ اکستریم P می‌باشد. پس نقاط اکستریم μ_1،...، μ_N از P و اعداد مثبتی مانند c_k با $\sum c_k=1$ وجود دارند به طوری که

$$\Lambda\left(c_1\mu_1+\dots+c_N\mu_N\right)=\beta. \tag{۷}$$

چون هر μ_k یک نقطهٔ اکستریم P است، هر μ_kای که در (۷) می‌آید دارای یک نقطهٔ تنها مانند $a_k\in T$ برای محافظش است؛ لذا

$$F_{\mu_k}(z)=\frac{a_k+z}{a_k-z}. \tag{۸}$$

حال اگر F با (۳) تعریف شده باشد، از روابط (۷) و (۸) نتیجه می‌شود که F در (۱) و (۲) صدق می‌کند.

قضیهٔ نقطهٔ ثابت کاکوتانی (*Kakutani*)

قضایای نقطهٔ ثابت نقش مهمی در بسیاری از بخشهای آنالیز و توپولوژی ایفا می‌کنند. قضیه‌ای که اینک ثابت می‌کنیم در اثبات وجود یک اندازهٔ هار(*Haar*) بر هر گروه فشرده به کار خواهد رفت. به جای بیان آن برای نگاشتهای خطی، آن را برحسب نگاشتهای مستوی ذکر می‌کنیم. این نگاشتها اساساً ترکیبی از نگاشتهای خطی و سپس یک انتقال می‌باشند (تمرین ۱۷) ولی در محدودهٔ فعلی لازم نیست سراسری تعریف شده باشند. تعریف زیر این امر را دقیق خواهد ساخت:

هرگاه K یک مجموعهٔ محدب و Y یک فضای‌برداری بوده و $T:K \to Y$ در رابطهٔ

$$T((1-\lambda)x+\lambda y)=(1-\lambda)Tx+\lambda Ty$$

به ازای $x \in K$، $y \in K$، و $0<\lambda<1$ صدق نماید، آنگاه گوییم T ***مستوی*** می‌باشد.

۱۱.۵ قضیه. *فرض کنیم*

(آ) K یک مجموعهٔ محدب فشردهٔ ناتهی درفضای موضعاً محدب X بوده، و

(ب) G یک گروه همپیوسته از نگاشتهای مستوی باشد که K را به توی K می‌برند.

در این صورت G یک نقطهٔ ثابت مشترک در K خواهد داشت.

به طور صریحتر، نتیجه آن است که $p \in K$ ای چنان وجود دارد که به ازای هر $T \in G$، $Tp=p$.

قسمت (ب) فرض نیاز به توضیح دارد. وقتی می‌گوییم G گروه است یعنی هر $T \in G$ یک نگاشت یک به یک از K به توی K است که معکوسش T^{-1} نیز تعلق به G دارد (لذا T، K را به ***روی*** K می‌نگارد!) و هروقت به ازای $i=1,2$، $T_i \in G$، داریم $T_1T_2 \in G$. در اینجا البته $(T_1T_2)(x)=T_1(T_2x)$؛ توجه کنید که ترکیب دو نگاشت مستوی مستوی است.

وقتی گوییم G همپیوسته است (قس. بخش۳.۲) یعنی به هر همسایگی W از 0 در

X یک همسایگی مانند V از ۰ در X چنان نظیر است که هروقت $x \in K$، $y \in K$، $x - y \in V$، و $T \in G$، داریم $Tx - Ty \in W$.

مثلاً فرض (ب) وقتی G یک گروه از یکمتریهای خطی بر فضای نرمدار X است برقرار می‌باشد.

برهان. فرض کنیم Ω گردایهٔ تمام مجموعه‌های محدب فشردهٔ ناتهی $H \subset K$ باشد به طوری‌که به ازای هر $T \in G$، $T(H) \subset H$. Ω را با شمول مجموعه‌ها جزئی مرتب می‌کنیم. توجه کنید که $\Omega \neq \varnothing$ زیرا $K \in \Omega$. بنا بر قضیهٔ ماکزیمالی هاسدورف، Ω شامل یک زیرگردایهٔ کلی مرتب ماکزیمال $\Omega_\circ$است. اشتراک Q تمام اعضای $\Omega_\circ$ یک عضو مینیمال Ω است. قضیه با نشان دادن اینکه Q فقط شامل یک نقطه است ثابت می‌شود.

به عکس، فرض کنیم عناصر $x \in Q$، $y \in Q$، $x \neq y$ موجود باشند. پس یک همسایگی مانند W از ۰ در X هست به طوری که $x - y \notin W$. فرض کنیم V مانند تعریف پیشین از همپیوستگی به W مربوط شده باشد. هرگاه $Tx - Ty$ به ازای $T \in G$ای در V می‌بود، آنگاه

$$x - y = T^{-1}(Tx) - T^{-1}(Ty)$$

در W می‌بود که یک تناقض می‌باشد. پس نتیجه می‌گیریم که

به ازای هیچ $T \in G$ای، $Tx - Ty$ در V نیست.

قرار می‌دهیم $z = \frac{1}{2}(x + y)$. در این صورت $z \in Q$. تعریف می‌کنیم $G(z) = \{Tz : T \in G\}$. این "G - مدار z" G- پایاست (یعنی هر $T \in G$ آن را به توی خود می‌نگارد)؛ لذا بستش $K_\circ = \overline{G(z)}$ نیز چنین است و درنتیجه $\overline{co}(K_\circ)$ یک زیر مجموعهٔ محدب فشردهٔ G - پایای ناتهی Q است. مینیمالی Q ایجاب می‌کند که $\overline{co}(K_\circ) = Q$.

فرض کنیم p یک نقطهٔ اکستریم Q باشد. (این نقطه طبق قضیهٔ کرین - میلمن وجود دارد.) چون Q فشرده بوده و $Q = \overline{co}(K_\circ)$، قضیهٔ ۲۵.۳ نشان می‌دهد که **p در**

بست $K_\circ$ از $G(z)$ قراردارد.

مجموعهٔ زیر را تعریف می‌کنیم:

$$E=\{(Tz,Tx,Ty):T\in G\}\subset Q\times Q\times Q.$$

چون $p\in\overline{G(z)}$ و $Q\times Q$ فشرده است، لم زیر نشان می‌دهد که نقطه‌ای مانند $(x^*,y^*)\in Q\times Q$ چنان وجود دارد که (p,x^*,y^*) در بست E قراردارد. چون به ازای هر $T\in G$، $۲Tz=Tx+Ty$، پس $۲p=x^*+y^*$؛ و این ایجاب می‌کند که $x^*=y^*$ زیرا p یک نقطهٔ اکستریم Q است.

اما به ازای هر $T\in G$، $Tx-Ty\notin V$؛ لذا $x^*-y^*\notin V$؛ درنتیجه $x^*\neq y^*$ و تناقض خواهیم داشت.

لم . فرض کنیم A و B دو فضای توپولوژیک بوده، B فشرده باشد، π تصویر طبیعی $A\times B$ به روی A باشد، و $E\subset A\times B$.

هرگاه $p\in A$ دربست $\pi(E)$ باشد، آنگاه (p,q) به ازای $q\in B$ ای دربست E قراردارد.

برهان. هرگاه نتیجه برقرار نباشد، آنگاه هر $q\in B$ یک همسایگی مانند $W_q\subset B$ دارد به طوری که به ازای همسایگیی چون V_q از p در A، $(V_q\times W_q)\cap E=\varnothing$. فشردگی B ایجاب می‌کند که به ازای مجموعه‌ای متناهی چون $\{q_۱,\dots,q_n\}$، $B\subset W_{q_۱}\cup\dots\cup W_{q_n}$. دراین صورت $V_{q_۱}\cap\dots\cap V_{q_n}$ یک همسایگی p است که $\pi(E)$ را قطع نمی‌کند، که بافرض قرارداشتن p در بست $\pi(E)$ درتضاد است.

اندازهٔ هار بر گروههای فشرده

۱۲.۵ چند تعریف. یک ***گروه توپولوژیک*** گروهی است مانند G که توپولوژی تعریف شده درآن اعمال گروه را پیوسته می‌سازد. فشرده‌ترین راه بیان این شرط قبول

پیوستگی نگاشت $\phi: G \times G \to G$ با تعریف $\phi(x,y) = xy^{-1}$ است.

به ازای هر $a \in G$، نگاشتهای $x \to ax$ و $x \to xa$ همانریختیهایی از G به روی G اند؛ لذا $x \to x^{-1}$ نیز چنین می‌باشد. بنابراین، توپولوژی G به وسیلهٔ هر پایهٔ موضعی در عنصر همانی e کاملاً معین است.

اگر شرط کنیم (از حالا به بعد خواهیم کرد) که ***هر نقطهٔ G مجموعه‌ای بسته است***، مشابه‌های قضایای ۱۰.۱ تا ۱۲.۱ (با دقیقاً همان برهانها جز تغییراتی در نمادگذاری) برقرارند؛ به خصوص، اصل موضوع جداسازی هاسدورف برقرار می‌باشد.

اگر f تابعی با قلمرو G باشد، ***انتقالهای چپ*** آن $L_s f$ و ***انتقالهای راستش*** $R_s f$ به ازای هر $s \in G$ با

$$(L_s f)(x) = f(sx) \quad \text{و} \quad (R_s f)(x) = f(xs) \qquad (x \in G)$$

تعریف می‌شوند.

گوییم تابع مختلط f بر G ***به طور یکنواخت پیوسته*** است اگر به هر $\varepsilon > 0$ یک همسایگی مانند V از e در G چنان نظیر باشد که هروقت $s \in G$، $t \in G$، و $s^{-1}t \in V$،

$$|f(t) - f(s)| < \varepsilon .$$

گروه توپولوژیک G که توپولوژی‌اش فشرده است یک ***گروه فشرده*** نام دارد؛ در این حالت، $C(G)$ طبق معمول فضای باناخ تمام توابع پیوستهٔ مختلط بر G با نرم سوپرمم می‌باشد.

۱۳.۵ قضیه. *فرض کنیم G یک گروه فشرده بوده، $f \in C(G)$، و $H_L(f)$ را غلاف محدب مجموعهٔ تمام انتقالهای چپ f تعریف می‌کنیم. در این صورت*

(آ) $s \to L_s f$ یک نگاشت پیوسته از G به توی $C(G)$ است، و

(ب) بست $H_L(f)$ در $C(G)$ فشرده است.

برهان. $\varepsilon > 0$ را ثابت می‌گیریم. چون f پیوسته است، به هر $a \in G$ یک همسایگی مانند W_a از e چنان نظیر است که اگر $xa^{-1} \in W_a$، $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. پیوستگی اعمال گروه همسایگیهای V_a از e را به دست می‌دهد که در $V_a^{-1}V_a \subset W_a$ صدق می‌کنند. چون G فشرده است، یک مجموعهٔ متناهی مانند $A \subset G$ هست به‌طوری که

$$G = \bigcup_{a \in A} V_a . a. \tag{۱}$$

قرار می‌دهیم

$$V = \bigcap_{a \in A} V_a . \tag{۲}$$

$x, y \in G$ را طوری اختیار می‌کنیم که $yx^{-1} \in V$، و $a \in A$ را طوری می‌گیریم که $ya^{-1} \in V_a$. در این صورت $|f(y) - f(a)| < \varepsilon$، و چون

$$xa^{-1} = \left(xy^{-1}\right)\left(ya^{-1}\right) \in V^{-1}V_a \subset W_a,$$

نیزخواهیم داشت $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

لذا هروقت $yx^{-1} \in V$، $|f(x) - f(y)| < 2\varepsilon$.

به ازای هر $s \in G$، $(ys)(xs)^{-1} = yx^{-1}$. لذا $yx^{-1} \in V$ ایجاب می‌کند که $|f(xs) - f(ys)| < 2\varepsilon$. این طریق دیگری است برای گفتن اینکه هروقت y درهمسایگی Vx از x باشد،

$$\left\| L_x f - L_y f \right\| < 2\varepsilon . \tag{۳}$$

این قسمت (آ) را ثابت خواهد کرد.

به عنوان نتیجه‌ای از (آ)، $\{L_x f : x \in G\}$ در فضای باناخ $C(G)$ فشرده است. لذا (ب) از قسمت (پ) قضیهٔ ۳.۲۰ نتیجه می‌شود.

۵.۱٤ قضیه. *بر هر گروه فشردهٔ G یک اندازهٔ احتمال بورل منتظم منحصر به فرد مانند m وجود دارد که به معنی زیر پایای چپ است:*

$$\int_G f dm = \int_G \left(L_s f\right) dm \qquad [s \in G, f \in C(G)]. \tag{۱}$$

این m پایای راست نیز هست:

$$\int_G f dm = \int_G (R_s f) dm \qquad [s \in G, f \in C(G)] \tag{۲}$$

و در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\int_G f(x) dm(x) = \int_G f(x^{-1}) dm(x) \qquad [f \in C(G)]. \tag{۳}$$

این m ***اندازهٔ هار*** G نام دارد.

برهان. اعمال L_s دررابطهٔ $L_s L_t = L_{ts}$ صدق می‌کنند زیرا

$$(L_s L_t f)(x) = (L_t f)(sx) = f(tsx) = (L_{ts} f)(x).$$

چون هر L_s یک یکمتری از $C(G)$ بـه روی خـودش اسـت، $\{L_s : s \in G\}$ یـک گـروه همپیوسته از عملگرهای خطی بر $C(G)$ است. اگـر $f \in C(G)$، K_f را بسـت $H_L(f)$ می‌گیریم. بنا بر قضیهٔ ۱۳.۵، K_f فشرده است. واضـح اسـت کـه بـه ازای هـر $s \in G$، $L_s(K_f) = K_f$. حال قضیهٔ نقطهٔ ثابت ۱۱.۵ ایجاب می‌کند که K_f شامل تابعی چـون ϕ باشد که به ازای هر $s \in G$، $L_s \phi = \phi$. به خصـوص، $\phi(s) = \phi(e)$؛ درنتیجـه ϕ ثـابت می‌باشد. طبق تعریف K_f، این ثابت را می‌توان بـه وسیلهٔ توابـع در $H_L(f)$ بـه طـور یکنواخت تقریب کرد.

تا بحال ثابت کرده‌ایم که به هر $f \in C(G)$ دست کم یک ثابت مانند c نظیر اسـت که می‌توان آن را بر G به وسیلهٔ ترکیبات محدب از انتقالهای چـپ f بـه طوریکنواخـت تقریب کرد. به همین نحو، ثابتی چون c' هست که همیـن رابطـه را در مـورد انتقالهـای راست f برقرار می‌سازد. حکم می‌کنیم که $c' = c$.

برای اثبات این امر، $\varepsilon > 0$ را اختیار می‌کنیم. مجموعـه‌های متنـاهی $\{a_i\}$ و $\{b_j\}$ در G وجود دارند و اعدادی مانند $\alpha_i > 0$ و $\beta_j > 0$ با خاصیت $\sum \alpha_i = 1 = \sum \beta_j$ وجـود دارند به طوری که

$$\left| c - \sum_i \alpha_i f(a_i x) \right| < \varepsilon \qquad (x \in G) \tag{٤}$$

و

$$\left|c' - \sum_{i} \beta_j f\left(xb_j\right)\right| < \varepsilon \qquad (x \in G). \tag{۵}$$

در (٤) قرار می‌دهیم $x = b_j$؛ رابطهٔ (٤) را در β_j ضرب و نسبت به j جمع می‌کنیم. نتیجه خواهدبود

$$\left|c - \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j f\left(a_i b_j\right)\right| < \varepsilon. \tag{٦}$$

در (۵) قرار می‌دهیم $x = a_i$، رابطهٔ (۵) را در α_i ضرب و نسبت به i جمع می‌کنیم تا به دست آید:

$$\left|c' - \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j f\left(a_i b_j\right)\right| < \varepsilon. \tag{۷}$$

حال روابط(٦) و (۷) ایجاب می‌کنند که $c = c'$.

درنتیجه به هر $f \in C(G)$ عدد ***منحصر به فردی*** نظیراست که آن رابه صورت Mf می‌نویسیم، که می‌توان آن را به وسیلهٔ ترکیبات محدبی از انتقالهای چپ f به طور یکنواخت تقریب کرد؛ همین Mf نیز عدد منحصر به فردی است که می‌توان آن را به وسیلهٔ ترکیبات محدبی از انتقالهای راست f به طور یکنواخت تقریب کرد. خواص زیر از M واضح می‌باشند:

(۸) اگر $f \geq ۰$، $Mf \geq ۰$؛

(۹) $M۱ = ۱.$

(۱۰) اگر α اسکالر باشد، $M(\alpha f) = \alpha Mf$؛

(۱۱) به ازای هر $s \in G$، $M\left(L_s f\right) = Mf = M\left(R_s f\right)$.

حال ثابت می‌کنیم که

$$M(f + g) = Mf + Mg. \tag{۱۲}$$

$\varepsilon > ۰$ را اختیار می‌کنیم. در این صورت به ازای مجموعه‌ای متناهی مانند $\{a_i\} \subset G$ و اعدادی چون $\alpha_i > ۰$ با $\sum \alpha_i = ۱$ داریم

$$\left|\tilde{M}f - \sum_{i} \alpha_i f\left(\alpha_i x\right)\right| < \varepsilon \qquad (x \in G). \tag{۱۳}$$

تعریف می‌کنیم

$$h(x)=\sum_i \alpha_i g(a_i x)\,. \tag{۱٤}$$

در این صورت $h\in K_g$؛ درنتیجه $K_h\subset K_g$، و چون هریک از این مجموعه‌ها شامل تابع ثابت **_منحصر به فردی_** است، داریم $Mh=Mg$. لذا مجموعه‌ای متناهی مانند $\{b_j\}\subset G$ واعدادی چون $\beta_j>0$ با خاصیت $\sum\beta_j=1$ چنان وجود دارند که

$$\left|Mg-\sum_j \beta_j h(b_j x)\right|<\varepsilon \qquad (x\in G); \tag{۱۵}$$

این نامساوی طبق رابطهٔ (۱٤) نتیجه می‌دهد که

$$\left|Mg-\sum_{i,j}\alpha_i\beta_j g(a_i b_j x)\right|<\varepsilon \qquad (x\in G). \tag{۱٦}$$

از تعویض x با $b_j x$ در(۱۳)، ضرب (۱۳) در β_j، و جمع نسبت به j داریم

$$\left|Mf-\sum_{i,j}\alpha_i\beta_j f(a_i b_j x)\right|<\varepsilon \qquad (x\in G). \tag{۱۷}$$

لذا

$$\left|Mf+Mg-\sum_{i,j}\alpha_i\beta_j (f+g)(a_i b_j x)\right|<2\varepsilon \qquad (x\in G)\,. \tag{۱۸}$$

چون $\sum\alpha_i\beta_j=1$، رابطهٔ (۱۸) رابطهٔ (۱۲) را به دست می‌دهد.

قضیهٔ نمایش ریس در تلفیق با (۸)، (۹)، (۱۰)، و (۱۲) یک اندازهٔ احتمال بورل منتظم مانند m به دست می‌دهد که در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$Mf=\int_G f\,dm \qquad (f\in C(G))\,. \tag{۱۹}$$

حال خواص (۱) و (۲) از (۱۱) نتیجه خواهدشد.

برای اثبات یکتایی، فرض کنیم μ یک اندازهٔ احتمال بورل منتظم بر G باشد که پایای چپ است. چون m پایای راست است، به ازای هر $f\in C(G)$ داریم

$$\begin{aligned}\int_G f\,d\mu &= \int_G dm(y)\int_G f(yx)\,d\mu(x)\\ &= \int_G d\mu(x)\int_G f(yx)\,dm(y)=\int_G f\,dm.\end{aligned}$$

لذا $\mu = m$.

برهان (۳) مشابه است. قرارمی‌دهیم $g(x) = f\left(x^{-1}\right)$. در این صورت

$$\int_G dm(y) \int_G g\left(xy^{-1}\right) dm(x) = \int_G dm(x) \int_G f\left(yx^{-1}\right) dmy.$$

دو انتگرال داخلی به ترتیب مستقل از y و xاند. درنتیجه $\int g dm = \int f dm$.

زیرفضاهای متمم نشده

در بخش ۲۰.٤ زیرفضاهای متمم شدهٔ یک فضای‌برداری توپولوژیک تعریف شدند؛ لـم ۲۱.٤ چند نمونه از آنها را ارائه کرد. همچنین به آسانی معلوم می‌شود که هر زیرفضـای بستهٔ یک فضای هیلبرت متمم شده است (قضیهٔ ٤.۱۲). حال نشان می‌دهیم که بعضی از زیرفضاهای بستهٔ آشنا از فضاهای باناخ دیگر عملاً متمم شده نیستند. این مثالها از یـک قضیهٔ نسبتاً کلی راجع به گروههای فشردهٔ عملگرهایی که یک زیرفضای پایا دارند ناشی می‌شوند؛ در برهان این قضیه از انتگرالگـیری بـرداری نسـبت بـه انـدازهٔ هـار اسـتفاده می‌شود.

بحث را با توجه به چند رابطهٔ موجود بین زیرفضاهای متمم شـده از یـک سـو بـا تصویرها از سوی دیگر آغاز می‌کنیم.

۱۵.۵ تصویرها. فرض کنیم X یک فضای‌برداری باشد. نگاشت خطـی $P: X \to X$ را **تصویر** در X نامیم اگر

$$P^2 = P;$$

یعنی اگر به ازای هر $x \in X$، $P(Px) = Px$.

فرض کنیم P یک تصویر در X با فضای‌پوچ $\mathscr{N}(P)$ و برد $\mathscr{R}(P)$ باشـد. نکـات زیر تقریباً واضح‌اند:

(آ) $\mathscr{R}(P) = \mathscr{N}(I - P) = \{x \in X : Px = x\}$؛

(ب) $\mathscr{N}(P) = \mathscr{R}(I - P)$؛

(پ) $\mathscr{R}(P)\cap\mathscr{N}(P)=\{0\}$ و $X=\mathscr{R}(P)+\mathscr{N}(P)$؛

(ت) هرگاه A و B زیرفضاهایی از X باشند به طوری که $A\cap B=\{0\}$ و $X=A+B$، آنگاه یک تصویر منحصر به فرد مانند P در X هست که $A=\mathscr{R}(P)$ و $B=\mathscr{N}(P)$.

چون $(I-P)P=0$، پس $\mathscr{R}(P)\subset\mathscr{N}(I-P)$. هرگاه $x\in\mathscr{N}(I-P)$، آنگاه $x-Px=0$؛ و درنتیجه $x=Px\in\mathscr{R}(P)$. این قسمت (آ) را به دست می‌دهد. قسمت (ب) با اعمال (آ) بر $I-P$ نتیجه می‌شود. هرگاه $x\in\mathscr{R}(P)\cap\mathscr{N}(P)$، آنگاه $x=Px=0$؛ هرگاه $x\in X$، آنگاه $x=Px+(x-Px)$، و $x-Px\in\mathscr{N}(P)$. این قسمت (پ) را ثابت می‌کند. اگر A و B در (ت) صدق کنند، هر $x\in X$ تجزیهٔ منحصر به فردی مانند $x=x'+x''$ دارد که در آن $x'\in A$ و $x''\in B$. تعریف می‌کنیم $Px=x'$. حال به آسانی (ت) ثابت خواهدشد.

۱۶.۵ قضیه

(آ) هرگاه P تصویرپیوسته‌ای در فضای‌برداری توپولوژیک X باشد، آنگاه

$$X=\mathscr{R}(P)\oplus\mathscr{N}(P).$$

(ب) به عکس، هرگاه X یک F- فضا بوده و $X=A\oplus B$، آنگاه تصویر P با برد A و فضای پوچ B پیوسته می‌باشد.

یادآور شویم که از نماد $X=A\oplus B$ فقط وقتی استفاده می‌کنیم که A و B زیرفضاهای ***بسته‌ای*** از X باشند به طوری که $A\cap B=\{0\}$ و $A+B=X$.

برهان. حکم (آ) جزء قسمت (پ) بخش ۱۵.۵ است جز در مورد این حکم که $\mathscr{R}(P)$ بسته‌است. برای‌مشاهدهٔ امر اخیر، توجه کنید که $\mathscr{R}(P)=\mathscr{N}(I-P)$ و $I-P$ پیوسته است.

حال فرض کنیم P تصویر با برد A و فضای پوچ B مانند قسمت (ب) باشد. برای

اثبات پیوستگی P تحقیق می‌کنیم که P در مفروضات قضیهٔ گراف بسته صدق می‌کند: فرض کنیم $x_n \to x$ و $Px_n \to y$. چون $Px_n \in A$ و A بسته است، داریم $y \in A$؛ درنتیجه $y = Py$. چون $x_n - Px_n \in B$ و B بسته است، داریم $x - y \in B$؛ درنتیجه $Py = Px$. پس $y = Px$. لذا P پیوسته می‌باشد.

نتیجه. زیرفضای بستهٔ F - فضای X متمم شده در X است اگر و فقط اگر برد تصویر پیوسته‌ای در X باشد.

۱۷.۵ گروههای عملگرهای خطی. فرض کنیم فضای‌برداری توپولوژیک X و گروه توپولوژیک G به صورت زیر به هم مربوط باشند: به هر $s \in G$ یک عملگرخطی پیوسته مانند $T_s: X \to X$ چنان نظیر شده باشد که

$$T_e = I \quad \text{و} \quad T_{st} = T_s T_t \;(s \in G, t \in G);$$

همچنین نگاشت $(s,x) \to T_s x$ از $G \times X$ به توی X پیوسته باشد.

تحت این شرایط، گوییم G به عنوان یک گروه از عملگرهای خطی پیوسته بر X عمل می‌کند.

۱۸.۵ قضیه. *فرض کنیم*

(آ) X یک فضای فرشه باشد؛

(ب) Y یک زیرفضای متمم شده از X باشد؛

(پ) G یک گروه فشرده باشد که به عنوان یک گروه از عملگرهای خطی پیوسته بر X عمل می‌کند، و

(ت) به ازای هر $s \in G$، $T_s(Y) \subset Y$.

در این صورت یک تصویر پیوسته مانند Q از X به روی Y هست که با هر T_s تعویض می‌شود.

برهان. به خاطر سادگی، به جای $T_s x$ می‌نویسیم sx. بنابر قسمت (ب) و قضیهٔ ۱٦.۵، یک تصویر پیوستهٔ P از X به روی Y وجود دارد. تصویر مطلوب Q باید در $s^{-1}Qs = Q$ به ازای هر $s \in G$ صدق نماید. ایدهٔ برهان یافتن Q به وسیلهٔ متوسط‌سازی عملگرهای $s^{-1}Ps$ نسبت به اندازهٔ هار m از G است: تعریف می‌کنیم

$$Qx = \int_G s^{-1}Psx\,dm(s) \qquad (x \in X)\,. \tag{۱}$$

برای اثبات وجود این انتگرال، سازگار با تعریف ۲٦.۳، قرار می‌دهیم

$$f_x(s) = s^{-1}Psx \qquad (s \in G)\,. \tag{۲}$$

بنابر قضیهٔ ۲۷.۳ ، کافی است نشان دهیم که $f_x : G \to X$ پیوسته است. $s_\circ \in G$ را ثابت می‌گیریم؛ فرض کنیم U یک همسایگی از $f_x(s_\circ)$ در X باشد. قرارمی‌دهیم $y = Ps_\circ x$ ؛ درنتیجه

$$s_\circ^{-1}y = f_x(s_\circ). \tag{۳}$$

چون $(s,z) \to sz$ پیوسته فرض شده است، $s_\circ$ یک همسایگی مانند V_1 و y یک همسایگی مانند W دارد به طوری که

$$\text{اگر } s \in V_1\text{،}\quad s^{-1}(W) \subset U. \tag{٤}$$

همچنین، s_0 دارای یک همسایگی مانند V_2 است به طوری که

$$\text{اگر } s \in V_2\text{ ،}\quad Psx \in W. \tag{۵}$$

در اینجا از پیوستگی P استفاده شده است. اگر $s \in V_1 \cap V_2$، از روابط (۲)، (٤)، و (۵)معلوم می‌شود که $f_x(s) \in U$. لذا f_x پیوسته می‌باشد.

چون G فشرده است، هر f_x برد فشرده‌ای در X دارد. لذا قضیهٔ باناخ-اشتاین هاوس ٦.۲ ایجاب می‌کند که $\{s^{-1}Ps : s \in G\}$ گردایه‌ای همپیوسته از عملگرهای خطی بر X است. لذا به هر همسایگی محدب U_1 از ۰ در X یک همسایگی U_2 از ۰ چنان نظیر است که $s^{-1}Ps(U_2) \subset U_1$. حال از رابطهٔ (۱) و تحدب U_1 معلوم می‌شود که $Q(U_2) \subset \overline{U}_1$. (ر.ک. قضیهٔ ۲۷.۳.) لذا Q پیوسته می‌باشد. خطی بودن Q واضح است.

هرگاه $x \in X$، آنگاه $Psx \in Y$ ؛ لذا، طبق قسمت (ت)، به ازای هر $s \in G$،

$s^{-1}Psx \in Y$. چون Y بسته است، $Qx \in Y$.

هرگاه $x \in Y$، آنگاه $sx \in Y$، $Psx = sx$؛ درنتیجه، به ازای هر $s \in G$، $s^{-1}Psx = x$. بنابراین $Qx = x$.

این دو مطلب ثابت می‌کنند که Q یک تصویر از X به روی Y است. برای اتمام برهان، باید نشان دهیم که

$$\text{به ازای هر } s_\circ \in G\text{،}\quad Qs_\circ = s_\circ Q. \tag{٦}$$

توجه کنید که $s^{-1}Pss_\circ = s_\circ(ss_\circ)^{-1}P(ss_\circ)$. حال از روابط (۱) و (۲) معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} Qs_\circ x &= \int_G s^{-1}Pss_\circ x\,dm(s) \\ &= \int_G s_\circ f_x(ss_\circ)\,dm(s) \\ &= \int_G s_\circ f_x(s)\,dm(s) \\ &= s_\circ \int_G f_x(s)\,dm(s) = s_\circ Qx. \end{aligned}$$

تساوی سوم به خاطر انتقال - پایایی m است؛ برای تساوی چهارم (حرکت s_0 به خارج علامت انتگرال)،ر.ک.تمرین ٢٤ از فصل ۳.

۱۹.۵ چند مثال. در مثال اول فرض می‌کنیم $X = L^1$ و $Y = H^1$. در اینجا L^1 فضای تمام توابع انتگرالپذیر بر دایرهٔیکه بوده و H^1 از $f \in L^1$ هایی تشکیل شده است که در $\hat{f}(n) = \circ$ به ازای هر $n < \circ$ صدق می‌کند. به یاد آورید که $\hat{f}(n)$ یعنی ضریب فوریهٔ nم f:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta \quad (n = \circ, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{۱}$$

توجه کنید که ما برای سادگی به جای $f(e^{i\theta})$ می‌نویسیم $f(\theta)$.

G را دایرهٔیکه می‌گیریم؛ یعنی گروه ضربی تمام اعداد مختلط با قدر مطلق ۱، و به هر $e^{is} \in G$ عملگرهای انتقال τ_s را مربوط می‌کنیم که به وسیلهٔ

$$\left(\tau_s f\right)(\theta) = f(s+\theta) \tag{۲}$$

تعریف می‌شود. به آسانی معلوم می‌شود که G به صورت توصیف شده در بخش ۱۷.۵ بر L^1 عمل می‌کند و

$$(\tau_s f\,\hat{)}(n) = e^{ins}\hat{f}(n). \tag{۳}$$

لذا، به ازای هر s حقیقی، $\tau_s\left(H^1\right) = H^1$. (ر.ک.تمرین ۱۲.)

اگر H^1 در L^1 متمم شده بود، قضیهٔ ۱۸.۵ ایجاب می‌کرد که یک تصویر پیوسته مانند Q از L^1 به روی H^1 چنان موجود باشد که

$$\text{به ازای هر } s\text{،}\quad \tau_s Q = Q\tau_s. \tag{٤}$$

حال می‌بینیم یک چنین Q چگونه باید باشد.

قرار می‌دهیم $e_n(\theta) = e^{in\theta}$. در این صورت $\tau_s e_n = e^{ins} e_n$، و

$$\tau_s Q e_n = Q\tau_s e_n = e^{ins} Q e_n, \tag{۵}$$

زیرا Q خطی است. اولین تساوی در

$$e^{iks}(Qe_n\hat{)}(k) = (\tau_s Qe_n\hat{)}(k) = e^{ins}(Qe_n\hat{)}(k) \tag{٦}$$

از رابطهٔ (۳) و دومین تساوی از (۵) حاصل می‌شود. لذا وقتی $k \neq n$، $(Qe_n\hat{)}(k) = 0$. چون توابع L^1 با ضرایب فوریه شان معین می‌شوند، پس ثابتهایی چون c_n وجود دارند به طوری که

$$Qe_n = c_n e_n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{۷}$$

تابحال فقط از (٤) استفاده کرده‌ایم. چون به ازای هر n، $Qe_n \in H^1$، وقتی $n < 0$، $c_n = 0$. چون به ازای هر $f \in H^1$، $Qf = f$، وقتی $n \geq 0$، $c_n = 1$. لذا Q (درصورت وجود) تصویر "طبیعی" L^1 به روی H^1 است، تصویری که وقتی $n < 0$، $\hat{f}(n)$ را با 0 تعویض می‌کند. برحسب سری فوریه داریم

$$Q\left(\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}\right) = \sum_{0}^{\infty} a_n e^{in\theta}. \tag{۸}$$

برای رسیدن به تناقض، توابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f_r(\theta)=\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in\theta} \qquad (0<r<1). \tag{۹}$$

اینها هسته‌های پواسون $(Poisson)$ معروف می‌باشند. جمعبندی صریح سری (۹) نشان می‌دهد که $f_r \ge 0$. لذا، به ازای هر r،

$$\|f_r\|_1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f_r(\theta)|d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_r(\theta)d\theta=1. \tag{۱۰}$$

اما

$$(Qf_r)(\theta)=\sum_{0}^{\infty} r^{n}e^{in\theta}=\frac{1}{1-r^{i\theta}}. \tag{۱۱}$$

لم فاتو $(Fatou)$ ایجاب می‌کند که وقتی $r\to 1$، $\|Qf_r\|_1\to\infty$ زیرا $\int|1-e^{i\theta}|^{-1}d\theta=\infty$. بنابر (۱۰)، این پیوستگی Q را نقض خواهدکرد. لذا H^1 در L^1 متمم شده نیست.

همین تحلیل را می‌توان درمورد A و C، که C فضای تمام توابع پیوسته بر دایرهٔیکه بوده و A از $f\in C$ هایی تشکیل شده است که به ازای هر $n<0$، $\hat{f}(n)=0$، انجام داد. اگر A در C متمم شده بود، عملگر Q توصیف شده به وسیلهٔ (۸) یک تصویر پیوسته از C به روی A بود. اعمال Q بر $f\in C$ حقیقی نشان می‌دهد که ثابتی چون $M<\infty$ هست که در

$$\sup_{\theta}|f(\theta)|\le M.\sup_{\theta}|\mathrm{Re}\, f(\theta)| \tag{۱۲}$$

به ازای هر $f\in A$ صدق می‌کند. برای مشاهدهٔ عدم وجود چنین M، نگاشتهای همدیس از قرص‌یکهٔ بسته به روی بیضیهای بلند و باریک رادر نظر می‌گیریم.
لذا A متمم شده در C نیست.

با اینحال، اگر $1<p<\infty$، تصویر (۸) به عنوان یک عملگر در L^p پیوسته است. لذا در این صورت H^p یک زیرفضای متمم شدهٔ L^p است. این قضیه‌ای است از ام.ریس (قضیهٔ ۱۷. ۲۶ مرجع [۲۳]).

بحث را با مشابه (ب) قضیهٔ ۱۶.۵ پایان می‌دهیم؛ این تشابه در برهان قضیهٔ ۳۱.۱۱به کار خواهد رفت.

۲۰.۵ قضیه. ***فرض کنیم X یک فضای باناخ بوده، A و B زیرفضاهای بسته‌ای از X باشند، و $X = A + B$. در این صورت ثابتی مانند $\gamma < \infty$ هست به طوری که هر $x \in X$ نمایشی به صورت $x = a + b$ داردکه در آن $a \in A$، $b \in B$، و $\|a\| + \|b\| \le \gamma\|x\|$.***

این با قسمت (ب) قضیهٔ ۱٦.۵ تا آنجا فرق دارد که $A \cap B = \{0\}$ فرض نشده است.

برهان. فرض کنیم Y فضای‌برداری تمام جفتهای مرتب (a,b) باشد که $a \in A$ و $b \in B$ و جمع و ضرب اسکالر مؤلفه به مؤلفه بوده و نرم آن به صورت زیر باشد:

$$\|(a,b)\| = \|a\| + \|b\|.$$

چون A و B تام‌اند، Y یک فضای‌باناخ است. نگاشت $\Lambda: Y \to X$ با تعریف

$$\Lambda(a,b) = a + b$$

پیوسته است، زیرا $\|a+b\| \le \|(a,b)\|$، و Y را به ***روی*** X می‌نگارد. بنابر قضیهٔ نگاشت باز، $\gamma < \infty$ای هست به طوری که هر $x \in X$ به ازای (a,b)ای که $\|(a,b)\| \le \gamma\|x\|$ مساوی $\Lambda(a,b)$ است.

مجموعهای هسته‌های پواسون

فرض کنیم U و T قرص یکهٔ باز و دایرهٔ یکه در $\mathbb{C}$ باشند. همچنین $L^1 = L^1(T)$ همانند قضیهٔ ۱۹.۵ با نرم

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|d\theta$$

باشد. به هر $z \in U$ هستهٔ پواسون $P_z \in L^1(T)$ را مربوط می‌کنیم:

$$P_z\left(e^{i\theta}\right)=\frac{1-|z|^2}{\left|e^{i\theta}-z\right|^2}.$$

به آسانی معلوم می‌شود که به ازای هر $z\in U$، $\|P_z\|_1=1$.

مجموعهٔ $E\subset U$ را **به طور غیر مماسی چگال بر** T نامیم اگر به ازای هر $e^{i\theta}\in T$ و هر $\varepsilon>0$ نقطه‌ای مانند $z\in E$ موجود باشد که

$$\left|z-e^{i\theta}\right|<\min(\varepsilon,2(1-|z|)).$$

ازاین مجموعه‌ها که نقطهٔ حدی در U ندارند موجود است. برای ساختن یکی از آنها، فرض کنیم $0<r_1<r_2<...$، $\lim r_n=1$، و m_n نقطهٔ متساوی‌الفاصله را با فرض $m_n>2/(1-r_n)$ روی دایرهٔ r_nT قرار می‌دهیم.

تعجب آنکه هر $f\in L^1(T)$ را می‌توان به صورت مجموع یک سری همگرا از مضارب هسته‌های پواسون نمایش داد. این امر به وسیلهٔ اف.اف.بونسال ($F.F.Bonsall$) به عنوان کاربردی از قضیهٔ برد بسته ثابت شده است. در زیر حکم دقیقتر وی ذکر شده است.

۲۱.۵ قضیه. ***هرگاه $\{z_1,z_2,z_3,...\}\subset U$ بر T به طور غیر مماسی چگال باشد، آنگاه به ازای هر $f\in L^1(T)$ و هر $\varepsilon>0$ اسکالرهایی چون c_n چنان نظیرند که $\sum|c_n|\le\|f\|_1+\varepsilon$ و***

$$f=\sum_1^\infty c_nP_{z_n}\ .$$

این حالت خاصی از نتیجهٔ مجرد زیر است:

۲۲.۵ قضیه. ***فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در فضای باناخ X باشد که به ازای هر n، $\|x_n\|\le 1$، و $\delta>0$ ای چنان موجود باشد که به ازای هر $x^*\in X^*$،***

$$\sup_n\left|<x_n,x^*>\right|\ge\delta\left\|x^*\right\|.$$

دراین صورت اگر $\varepsilon>0$، هر $x\in X$ را می‌توان به شکل زیر نمایش داد:

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}c_n x_n$$

که درآن $\delta\sum_1^{\infty}|c_n|\le\|x\|+\varepsilon$.

برهان. $T:\ell^1\to X$ را به ازای $c=\{c_1,c_2,c_3,\ldots\}\in\ell^1$ با $Tc=\sum_1^{\infty}c_n x_n$ تعریف می‌کنیم.

در این صورت، به ازای هر $x^*\in X^*$،

$$<c,T^*x^*>=<Tc,x^*>=\sum_1^{\infty}c_n<x_n,x^*>;$$

درنتیجه، اگر $\|c\|_1\le 1$،

$$\left|\sum_1^{\infty}c_n<x_n,x^*>\right|\le\left\|T^*x^*\right\|.$$

سوپرمم سمت چپ روی تمام این cها مساوی است با $\sup_n|<x_n,x^*>|$ که طبق فرض از $\delta\|x^*\|$ ناکمتر است. لذا قضیهٔ ۱۳.٤ حکم می‌کند که T مجموعهٔ تمام cهابا $\sum|c_n|<1/\delta$ را به روی مجموعه‌ای که شامل گوی‌یکهٔ باز X است می‌نگارد.

این امر قضیهٔ ۲۲.۵ را ثابت می‌کند.حال آن را به ازای $X=L^1(T)$ و $x_n=P_{z_n}$ که در آن $\{z_n\}$ به طورغیرمماسی چگال بر T است به کار می‌بریم. هر $g\in L^{\infty}(T)=L^1(T)^*$ دارای یک توسیع توافقی

$$G(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_z\left(e^{i\theta}\right)g\left(e^{i\theta}\right)d\theta=<P_z,g>$$

است. چون $\{z_n\}$ بر T به طور غیر مماسی چگال است، قضیهٔ فاتو مربوط به حدود غیر مماسی تابعهای توافقی کراندار ایجاب می‌کند که

$$\sup_n\left|<P_{z_n},g>\right|=\sup_n\left|G\left(z_n\right)\right|=\|g\|_{\infty}.$$

بنابراین، قضیهٔ ۲۱.۵ نتیجه‌ای از قضیهٔ ۲۲.۵ به ازای $\delta=1$ می‌باشد.

دو قضیهٔ نقطهٔ ثابت دیگر

نتیجهٔ معروفی از اصل موضوع انتخاب می‌گوید که اندازه‌ای بر خط حقیقی R وجود ندارد که بر مجموعه‌های فشرده متناهی بوده، متحد صفر نباشد، انتقال - پایا باشد، و بر σ - جبر **تمام** زیرمجموعه‌های R تعریف شده باشد. برهان معمولی وجود مجموعه‌های اندازه‌ناپذیر این امر را نشان می‌دهد. اما هرگاه جمعپذیری ***شمارشپذیر***، که خاصیتی است که طبق تعریف اندازه‌ها دارند، به جمعپذیری ***متناهی***، یعنی به ازای جمیع اجتماعهای متناهی از مجموعه‌های دو به دو از هم جدای E_i،

$$\mu(E_1\cup\ldots\cup E_n)=\mu(E_1)+\ldots+\mu(E_n)$$

ضعیف شود، آنگاه یک چنین اندازه‌های "جمعپذیر متناهی" μ وجود دارند که سایر خواص مذکور در فوق را دارا می‌باشند. به علاوه، به ازای هر $E\subset R$ می‌توان داشت $0\le\mu(E)\le 1$.

قضیهٔ ۲۵.۵ این امر را، با هر گروه آبلی G به جای R، به عنوان کاربردی از روایت "پایای" قضیهٔ هان - باناخ ثابت می‌کند. قضیهٔ اخیر از قضیهٔ نقطهٔ ثابت ۲۳.۵ که با کمال تعجب مقدماتی است و از مارکف ($Markov$) و کاکوتانی است به دست می‌آید:

۲۳.۵ قضیه. ***هرگاه K مجموعه‌ای محدب، فشرده، و ناتهی در فضای برداری توپولوژیک X بوده و $\mathscr{F}$ خانواده‌ای تعویضپذیر از نگاشتهای مستوی پیوسته باشد که K را به توی K می‌برند، آنگاه نقطه‌ای مانند $p\in K$ هست به طوری که به ازای هر $T\in\mathscr{F}$، $Tp=p$.***

برهان. به ازای $T\in\mathscr{F}$ قرارمی‌دهیم $T^1=T$ و به ازای $n=1,2,3,\ldots$، $T^{n+1}=T\circ T^n$. این امر که متوسطهای

$$T_n=\frac{1}{n}\left(I+T+T^2+\ldots+T^{n-1}\right) \tag{1}$$

نیز نگاشتهای مستوی از K به توی Kاند نتیجه می‌دهد که هر دوتای آنها (با Tها و

nهای احتمالاً متفاوت) با یکدیگر تعویض می‌شوند.

فرض کنیم $\mathscr{F}^*$ نیمگروه تولید شده به وسیلهٔ نگاشتهای (۱) باشد. لذا $\mathscr{F}^*$ گردایهٔ تمام ترکیبات تعداد متناهی از متوسطهای (۱) است. هرگاه $f, g \in \mathscr{F}^*$ و $h = f \circ g = g \circ f$، آنگاه $h \in \mathscr{F}^*$. چون $f(g(K)) \subset f(K)$ و $g(f(K)) \subset g(K)$، می‌بینیم که

$$f(K) \cap g(K) \supset h(K). \tag{۲}$$

لذا استقرا نشان می‌دهد که گردایهٔ $\{f(K): f \in \mathscr{F}^*\}$ دارای خاصیت اشتراک متناهی است. چون هر $f(K)$ فشرده است، نقطه‌ای مانند $p \in K$ هست که به ازای هر $f \in \mathscr{F}^*$ در $f(K)$ قراردارد.

حال $T \in \mathscr{F}$ را ثابت گرفته و فرض می‌کنیم V یک همسایگی از ۰ در X باشد. به ازای هر $n \geq 1$، $p \in T_n(K)$ زیرا $T_n \in \mathscr{F}^*$. این یعنی نقاطی مانند $x_n \in K$ هست به طوری که

$$p = \frac{1}{n}\left(x_n + Tx_n + \ldots + T^{n-1}x_n\right). \tag{۳}$$

اما در این صورت

$$p - Tp = \frac{1}{n}\left(x_n - T^n x_n\right) \in \frac{1}{n}(K - K), \tag{٤}$$

و به ازای nهای به قدر کافی بزرگ $K - K \subset nV$ زیرا $K - K$ فشرده و لذا کراندار است. پس، به ازای هر همسایگی V از ۰، $p - Tp \in V$. این $p - Tp$ را مساوی ۰ می‌گرداند.

٢٤.۵ قضیهٔ هان - باناخ پایا: *فرض کنیم Y زیرفضایی از فضای خطی نرمدار X بوده، $\Gamma \subset \mathscr{B}(X)$، و*

(آ) $T(Y) \subset Y$ *و به ازای هر* $S, T \in \Gamma$، $ST = TS$؛

(ب) *به ازای هر* $T \in \Gamma$، $f \circ T = f$.

در این صورت تابعی مانند $F \in X^*$ *هست به طوری که بر*

Y، $F = f$، $\|F\| = \|f\|$، و به ازای هر $T \in \Gamma$، $F \circ T = F$.

به بیان مختصر، f، Γ- پایا دارای توسیع هان- باناخ Γ- پایا می‌باشد.

برهان. بی آنکه به کلیت خللی واردآید، فرض می‌کنیم $\|f\| = ۱$. تعریف می‌کنیم

$$K = \{\Lambda \in X^* : \|\Lambda\| \le ۱ \text{ ، } \Lambda = f \text{ بر } Y\}. \qquad (۱)$$

واضح است که K محدب است. قضیهٔ هان- باناخ ایجاب می‌کند که K تهی نیست. چون K ضعیف*- بسته است، قضیهٔ باناخ- آلوگلو نشان می‌دهد که K یک زیرمجموعهٔ ضعیف*- فشردهٔ X^* است. به ازای هر $T \in \Gamma$، نگاشت

$$\Lambda \to \Lambda \circ T \qquad (۲)$$

یک نگاشت مستوی از K به توی K است که (همانطور که لحظه‌ای دیگر خواهیم دید) ضعیف*-پیوسته است. لذا قضیهٔ ۲۳.۵ نشان می‌دهد که $F \in K$ای در $F \circ T = F$ به ازای هر $T \in \Gamma$ صدق می‌کند.

برای اتمام کار، نشان می‌دهیم که به ازای هر $T \in \mathscr{B}(X)$ ***نگاشت (۲) یک نگاشت ضعیف*- پیوسته از X^* به توی X^* است.*** $\Lambda_۱ \in X^*$ را ثابت گرفته و فرض می‌کنیم

$$V = \left\{ L \in X^* : \left| Lx_i - \left(\Lambda_۱ T\right)x_i \right| < \varepsilon, ۱ \le i \le n \right\} \qquad (۳)$$

یک ضعیف* - همسایگی نوعی از $\Lambda_۱ T$ است که به وسیلهٔ $x_۱, \dots, x_n \in X$ و $\varepsilon > ۰$ معین می‌شود. در این صورت

$$W = \left\{ \Lambda \in X^* : \left| \Lambda\left(Tx_i\right) - \Lambda_۱\left(Tx_i\right) \right| < \varepsilon, ۱ \le i \le n \right\} \qquad (٤)$$

یک ضعیف*- همسایگی $\Lambda_۱$ است، و اگر $\Lambda \in W$، واضح است که $\Lambda T \in V$.

۲۵.۵ قضیه. ***هرگاه G یک گروه آبلی (با + به عنوان عمل گروه) بوده و $\mathscr{M}$ گردایهٔ تمام زیرمجموعه‌های G ("مجموعهٔ توانی" G) باشد، آنگاه تابعی مانند $\mu : \mathscr{M} \to [۰,۱]$ هست به طوری که***

(آ) اگر $E_1 \cap E_2 = \varnothing$، $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$،

(ب) به ازای هر $E \in \mathscr{M}$، $\mu(E+a) = \mu(E)$، و

(پ) $\mu(G) = 1$.

برهان. اگر G متناهی باشد قضیه بدیهی است. لذا فرض می‌کنیم G نامتناهی باشد، و $\ell^{\infty}(G)$ را فضای باناخ تمام توابع مختلط کراندار بر G با نرم سوپرمم می‌گیریم.

فرض کنیم Y فضای تمام $f \in \ell^{\infty}(G)$ هایی باشد که دارای حدند، آن را در ∞ با Λf نشان می‌دهیم. این یعنی هرگاه $f \in Y$ و $\varepsilon > 0$، آنگاه مجموعه‌ای متناهی مانند $E \subset G$ هست به طوری که به ازای هر x خارج E، $|\Lambda f - f(x)| < \varepsilon$. توجه کنید که $\Lambda \in Y^*$ و $\|\Lambda\| = 1$.

فرض کنیم Γ مجموعهٔ تمام عملگرهای انتقال τ_a به ازای $a \in G$ باشد که با

$$(\tau_a f)(x) = f(x-a) \tag{1}$$

تعریف می‌شود. چون G آبلی است، هر دو عضو Γ تعویض می‌شوند؛ هر τ_a یک یکمتری خطی $\ell^{\infty}(G)$ است؛ و واضح است که $\tau_a(Y) \subset Y$ و $\Lambda\tau_a = \Lambda$ بر Y.

لذا مفروضات قضیهٔ ۵.۲۴ به ازای $X = \ell^{\infty}(G)$ برقرارند. پس نتیجه می‌گیریم که یک توسیع مانند L از Λ، یک تابعی خطی با نرم ۱ بر $\ell^{\infty}(G)$، هست که در

$$Lf = \Lambda f \qquad \text{به ازای هر } f \in Y \tag{2}$$

و

$$L\tau_a f = Lf \qquad \text{به ازای هر } f \in \ell^{\infty}(G) \tag{3}$$

صدق می‌کند.

حال اگر تعریف کنیم $\mu(E) = L\chi_E$ (که در آن χ_E تابع مشخص $E \subset G$ است)، قسمت (آ) برقراراست چرا که اگر $E_1 \cap E_2 = \varnothing$، $\chi_{E_1} + \chi_{E_2} = \chi_{E_1 \cup E_2}$، و L خطی است، و قسمت (ب) برقرار است زیرا

$$\chi_{E+a}(x) = \chi_E(x-a) = \tau_a \chi_E(x). \tag{4}$$

باقی است نشان دهیم که به ازای هر $E \subset G$، $0 \leq \mu(E) \leq 1$. این امر با لم زیر سامان می‌یابد، زیرا Λ (و لذا نیز L) ثابتها را حفظ می‌کند: هرگاه به ازای هر $x \in G$، $f(x) = c$، آنگاه $f \in Y$ و $\Lambda f = c$.

۲٦.۵ لم. ***فرض کنیم X یک فضای خطی نرمدار از توابع کراندار با نرم سوپرمم بوده و L یک تابعی خطی بر X باشد به طوری که***

$$\|L\| = L(1) = 1 .$$

دراین صورت اگر $f \in X$ و $0 \leq f \leq 1$، $0 \leq Lf \leq 1$.

برهان. قرار می‌دهیم $Lf = \alpha + i\beta$. به ازای هر tی حقیقی،

$$L\left(f - \frac{1}{2} + it\right) = \alpha - \frac{1}{2} + i(\beta + t) .$$

چون $\left\|f - \frac{1}{2}\right\| \leq \frac{1}{2}$، نتیجه می‌شود که

$$\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + (\beta + t)^2 \leq \left\|f - \frac{1}{2} + it\right\|^2 \leq \frac{1}{4} + t^2;$$

درنتیجه، به ازای هر t ی حقیقی، $\alpha^2 - \alpha + \beta^2 + 2\beta t \leq 0$. این ایجاب می‌کند که $\beta = 0$؛ درنتیجه $\alpha^2 \leq \alpha$؛ لذا داریم $0 \leq \alpha \leq 1$.

۲۷.۵ مثال .از مفروضات سه قضیهٔ قبل نمی‌توان تعویضپذیری را حذف کرد. برای مشاهدهٔ این امر، فرض کنیم G گروه آزاد بر دومولد a و b باشد. صرف نظر از عنصر همانی، G اجتماع چهار مجموعهٔ از هم جدای I ، II ، III ، و IV مرکب از آن کلمات تحویل یافته است که به ترتیب با a، a^{-1}، b ، و b^{-1} شروع می‌شوند. هرگاه Γ یک اندازهٔ جمعی متناهی بر مجموعهٔ توانی G باشد که $0 \leq \mu \leq 1$ و به ازای هر $E \subset G$ ، $\mu(aE) = \mu(E) = \mu(bE)$، آنگاه ملاحظه می‌کنیم که $\mu(I \cup III \cup IV) = \mu(I)$ و $\mu(I \cup II \cup III) = \mu(III)$. اولین رابطه نشان می‌دهد

که $\mu(III)=\mu(IV)=\circ$، دومی نشان می‌دهد که $\mu(I)=\mu(II)=\circ$. چون مجموعه‌های یکانی باید از اندازهٔ ۰ باشند، $\mu\equiv\circ$. لذا قضیهٔ ۲۵.۵ برای این گروه برقرار نیست.

این فصل را با قضیهٔ نقطهٔ ثابت شاودر (*Schauder*) -تیخنف به پایان می‌بریم. این صورت با بعد نامتناهی قضیهٔ براوئر در رابطه با خاصیت نقطهٔ ثابت گویهای بسته در R^n است. چون غیرخطی است، برهانش واقعاً کاربردی از مطالب قبلی نیست جز آنکه مستلزم یک تابعی مینکوفسکی می‌باشد.

۲۸.۵ قضیه. هرگاه K یک مجموعهٔ محدب فشردهٔ ناتهی در فضای موضعاً محدب X بوده و $f:K\to K$ پیوسته باشد، آنگاه به ازای $p\in K$ای، $f(p)=p$.

برهان. فرض کنیم f هیچ نقطه‌ای از K را ثابت نگذارد. در این صورت گرافش

$$G=\{(x,f(x))\in X\times X: x\in K\} \tag{۱}$$

با قطر Δ از $X\times X$ از هم جداست و فشرده می‌باشد. لذا یک همسایگی در حال تعادل محدب مانند V از ۰ در X هست به طوری که $G+(V\times V)$ قطر Δ را از دست می‌دهد. به‌خصوص،

$$f(x)\notin x+V \qquad (x\in K). \tag{۲}$$

فرض کنیم μ تابعی مینکوفسکی V باشد. قضیهٔ ۳۶.۱ نشان می‌دهد که μ بر X پیوسته است و $\mu(x)<1$ اگر و فقط اگر $x\in V$. تعریف می‌کنیم

$$\alpha(x)=\max\{\circ,1-\mu(x)\} \qquad (x\in X). \tag{۳}$$

$x_1,\ldots,x_n\in K$ را طوری می‌گیریم که مجموعه‌های x_i+V $(1\le i\le n)$ K را بپوشانند، قرارمی‌دهیم $\alpha_i(x)=\alpha(x-x_i)$، و تعریف می‌کنیم

$$\beta_i(x)=\frac{\alpha_i(x)}{\alpha_1(x)+\ldots+\alpha_n(x)} \qquad (x\in K, 1\le i\le n). \tag{۴}$$

توجه کنید که مخرج (٤) به ازای هر $x \in K$ مثبت است.

فرض کنیم $H = \mathrm{co}\{x_1, \dots, x_n\}$. در این صورت g با تعریف

$$g(x) = \sum_{1}^{n} \beta_i(x) x_i \qquad (x \in K) \tag{5}$$

یک نگاشت پیوسته از K به توی سادک با بعد متناهی فشردهٔ $H \subset K$ است. همین امر برای $g \circ f$ برقرار است. لذا قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر حکم می‌کند که $x^* \in H$ی هست به طوری که

$$g(f(x^*)) = x^* . \tag{6}$$

چون خارج $x_i + V$ داریم $\beta_i(x) = 0$، ملاحظه می‌کنیم که

$$x - g(x) = \sum_{1}^{n} \beta_i(x)\left(x - x_i\right) \qquad (x \in K) \tag{7}$$

یک ترکیب محدب از بردارهای $x - x_i \in V$ است. لذا، به ازای هر $x \in K$، $x - g(x) \in V$. به‌خصوص، این امر به ازای $x = f\left(x^*\right)$ درست است. پس نتیجه می‌گیریم که

$$f(x^*) \in g(f(x^*)) + V = x^* + V \tag{8}$$

که با (۲) در تضاد است.

تمرینات

۱. اندازه‌های μ_1 و μ_2 را بر دایرهٔ یکه با

$$d\mu_2 = \sin\theta d\theta \quad \text{و} \quad d\mu_1 = \cos\theta d\theta$$

تعریف کرده و برد اندازهٔ $\mu = \left(\mu_1, \mu_2\right)$ را بیابید.

۲. دو تابع f و g را بر $[0,1]$ با خاصیت زیر بسازید: هرگاه

$$d\mu_1 = f(x)dx \text{، } d\mu_2 = g(x)dx \text{، } \mu = \left(\mu_1, \mu_2\right) \text{،}$$

آنگاه برد μ مربع به رئوس $(1,0)$، $(0,1)$، $(-1,0)$، $(0,-1)$ است.

۳. فرض کنید مفروضات قضیهٔ ۹.۵ برقرار باشند، $\phi \in C(S)$، $\phi > \circ$، $g \in C(K)$، و $|g| < \phi|_K$. ثابت کنید $f \in Y$ ی هست به طوری که $f|_K = g$ و $|f| < \phi$ بر S.

راهنمایی. قضیهٔ ۹.۵ را در مورد فضای تمام توابع f/ϕ با $f \in Y$ به کار برید.

٤. جزئیات اثبات اینکه هر نقطهٔ اکستریم P دارای محافظ در یک نقطهٔ تنهاست را بیان دارید. (این اشاره به انتهای برهان قضیهٔ ۱۰.۵ دارد.)

۵. مشابه قضایای ۱۰.۱ تا ۱۲.۱ را که دربخش ۱۲.۵ مختصراً ذکرشدند ثابت کنید (G را تعویضپذیر نگیرید.)

٦. فرض کنید G یک گروه توپولوژیک بوده و H بزرگترین زیرمجموعهٔ همبند G باشد که شامل عنصر همانی e است. ثابت کنید H یک زیرگروه نرمال G است؛ یعنی زیرگروهی که در $x^{-1}Hx = H$ به ازای هر $x \in G$ صدق می‌کند. ***راهنمایی.*** اگر A و B زیرمجموعه‌های همبندی از G باشند، AB و A^{-1} نیز چنین‌اند.

۷. ثابت کنید هر زیرگروه باز یک گروه توپولوژیک بسته است. (عکس این مطلب به وضوح درست نیست.)

۸. فرض کنید m اندازهٔ هار گروه فشردهٔ G بوده و V یک مجموعهٔ باز ناتهی در G باشد. ثابت کنید $m(V) > \circ$.

۹. قراردهید $e_n(\theta) = e^{in\theta}$ و فرض کنید L^2 اندازهٔ هار دایرهٔ یکه باشد. همچنین A کوچکترین زیرفضای بستهٔ L^2 باشد که شامل e_n به ازای $n = \circ, 1, 2, \ldots$ است و B کوچکترین زیرفضای بستهٔ L^2 باشد که شامل $e_{-n} + ne_n$ به ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$ است. احکام زیر را ثابت نمایید:

(آ) $A \cap B = \{\circ\}$.

(ب) هرگاه $X = A + B$، آنگاه X در L^2 چگال است ولی $X \neq L^2$؛

(پ) باآنکه $X = A \oplus B$، تصویر در X با برد A و فضای پوچ B پیوسته نیست. (البته توپولوژی X از L^2 به ارث گرفته شده است. قس. قضیهٔ ۱٦.۵.)

۱۰. فرض کنید X یک فضای باناخ بوده، $P \in \mathscr{B}(X)$، $Q \in \mathscr{B}(X)$، و P و Q تصویر باشند.

(آ) نشان دهید که الحاقی P^* از P یک تصویر در X^* است.

(ب) نشان دهید که اگر $PQ = QP$ و $P \neq Q$، $\|P - Q\| \geq ۱$.

۱۱. فرض کنید P و Q دو تصویر در فضای‌برداری X باشند.

(آ) ثابت کنید $P + Q$ یک تصویر است اگر و فقط اگر $PQ = QP = ۰$. در این صورت،

$$\mathscr{N}(P+Q) = \mathscr{N}(P) \cap \mathscr{N}(Q),$$

$$\mathscr{R}(P+Q) = \mathscr{R}(P) + \mathscr{R}(Q),$$

$$\mathscr{R}(P) \cap \mathscr{R}(Q) = \{۰\}.$$

(ب) اگر $PQ = QP$، ثابت کنید PQ یک تصویر است و

$$\mathscr{N}(PQ) = \mathscr{N}(P) + \mathscr{N}(Q),$$

$$\mathscr{R}(PQ) = \mathscr{R}(P) \cap \mathscr{R}(Q)\ .$$

(پ) ماتریسهای

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \qquad \text{و} \qquad \begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

راجع به قسمت (ب) چه چیز را نشان می‌دهند؟

۱۲. ثابت کنید عملگرهای انتقال τ_s به کار رفته در مثال ۱۹.۵ در خاصیت پیوستگی توصیف شده در بخش ۱۷.۵ صدق می‌کنند. به بیان صریح، ثابت کنید اگر $s \to r$ و $g \to f$ در $L^۱$،

$$\|\tau_r g - \tau_s f\|_۱ \to ۰.$$

۱۳. با استفاده از مثال زیر نشان دهید که فشردگی G را نمی‌توان از مفروضات قضیهٔ ۱۸.۵ حذف کرد. روی خط حقیقی R فرض کنید $X = L^۱$، نسبت به اندازهٔ لبگ؛ $f \in Y$ اگر و فقط اگر $\int_R f = ۰$؛ $G = R$ با توپولوژی معمولی؛ G بر $L^۱$ به وسیلهٔ انتقال

عمل کند: $(\tau_s f)(x) = f(s+x)$. خاصیت پیوستگی الحاقی برقرار است (ر.ک.تمرین ۱۲)، به ازای هر s، $\tau_s Y = Y$، و Y در X متمم شده است. ولی تصویری از X به روی Y (پیوسته یا ناپیوسته) که با هر τ_s تعویض شود وجود ندارد.

۱۴. فرض کنید S و T عملگرهای خطی پیوسته در یک فضای‌برداری توپولوژیک بوده و

$$T = TST.$$

ثابت کنید T دارای برد بسته است. (برای حالت $S=I$، ر.ک.قضیهٔ ۱۶.۵.)

۱۵. فرض کنید A ***زیرفضای*** بسته‌ای از $C(S)$ باشد که درآن S یک فضای هاسدورف فشرده است. همچنین μ یک نقطهٔ اکستریم گوی‌یکهٔ $A^{\perp}$ باشد. و نیز $f \in C(S)$ یک تابع ***حقیقی*** باشد به طوری که به ازای هر $g \in A$،

$$\int_S gfd\mu = 0.$$

ثابت کنید f بر محافظ μ ثابت است. (قس.قضیهٔ ۷.۵.) با مثال نشان دهید که اگر واژهٔ "حقیقی" از مفروضات حذف شود، نتیجه نادرست است.

۱۶. فرض کنید X یک فضای‌برداری بوده، $E \subset X$، $T: \mathrm{co}(E) \to X$ مستوی باشد، و $T(E) \subset E$. ثابت کنید $T(\mathrm{co}(E)) \subset \mathrm{co}(E)$. (از این امر تلویحاً در برهان قضیهٔ ۱۱.۵ استفاده شده است.)

۱۷. اگر X و Y دو فضای‌برداری بوده و $T: X \to Y$ مستوی باشد، ثابت کنید $T - T(0)$ خطی است.

۱۸. فرض کنید K مجموعه‌ای فشرده در فضای فرشهٔ X بوده و $f: X \to K$ پیوسته باشد. ثابت کنید f نقطه‌ای از K را ثابت می‌گذارد.

همین کار را در صورتی که Ω مجموعهٔ باز محدبی در X بوده، $\Omega \supset K$، و $f: \Omega \to K$ پیوسته باشد انجام دهید.

۱۹. ثابت کنید تابع پیوسته‌ای مانند f بر $I = [0,1]$ وجود دارد که درمعادلهٔ

$$f(x) = \int_0^1 \sin\left(x + f^2(t)\right)dt$$

به ازای هر $x \in I$ صدق می‌کند. ***راهنمایی.*** طرف راست را با $(Tf)(x)$ نمــوده و نشــان دهید که مجموعهٔ $\{Tf : f \in C(I)\}$ به طور یکنواخت کراندار و همپیوســته بــوده و لــذا بستش در $C(I)$ فشرده است. حال قضیهٔ نقطهٔ ثابت شاودر را (از طریق تمریــن ۱۸) بــه کار گیرید.

قسمت دو

توزیعهـــــا و تبـــــدیلات فـــــوریه

فصل ٦

توابع آزمون و توزیعها

آشنایی

۱.۶. نظریهٔ توزیعها حساب دیفرانسیل را از برخی مشکلات ناشی از توابع مشتق‌ناپذیر رها می‌سازد. این کار با توسیع به رده‌ای از اشیاء (به نام ***توزیعها*** یا ***توابع تعمیم یافته***) که از ردهٔ توابع مشتقپذیر که حساب دیفرانسیل و انتگرال به شکل اولیه‌اش در آن اعمال می‌شود بسیار وسیعتر است صورت می‌گیرد.

در زیر به چند ویژگی یک چنین توسیع که باید واجد آنها باشد تا مفید واقع شود اشاره می‌کنیم؛ زمینهٔ کار زیرمجموعهٔ بازی از R^n است.

(آ) هر تابع پیوسته باید یک توزیع باشد.

(ب) هر توزیع باید مشتقات جزئی داشته باشد که مجدداً توزیع باشند. در توابع مشتقپذیر مفهوم جدید مشتق باید با مفهوم قدیم یکی باشد. (لذا هر توزیع باید بی‌نهایت بار مشتقپذیر باشد.)

(پ) قواعد صوری معمولی حساب دیفرانسیل و انتگرال باید برقرار باشد.

(ت) باید تعدادی قضایای همگرایی داشته باشیم که برای پرداختن به فرایندهای حدی

معمولی کافی باشند.

برای ایجاد انگیزه جهت تعاریف، فعلاً خودرا به حالت $n=1$ محدود می‌کنیم. انتگرالهایی که می‌آیند نسبت به اندازهٔ لبگ‌اند، و روی تمام خط R می‌باشند مگر خلافش گفته شود.

گوییم تابع مختلط f ***موضعاً انتگرالپذیر*** است اگر f اندازه‌پذیر بوده و به ازای هر $K \subset R$ ی فشرده، $\int_K |f| < \infty$. ایده تعبیر مجدد f به صورتی است که به جای آنکه عدد $f(x)$ را به هر $x \in R$ منتسب کند، عدد $\int f\phi$ را به هر "تابع آزمون" ϕ که مناسب اختیار شده است نسبت دهد. (این دیدگاه به‌خصوص در مورد توابعی که در فیزیک ظاهر می‌شوند مناسب است زیرا کمیات اندازه‌گیری شده تقریباً همیشه متوسطها می‌باشند. درواقع، فیزیکدانان مدتها قبل از ساخته شدن نظریهٔ ریاضی توزیعها، از آنها استفاده می‌کرده‌اند.) البته باید ردهٔ مناسبی از توابع آزمون معین شود.

فرض کنیم $\mathscr{D} = \mathscr{D}(R)$ فضای‌برداری تمام $\phi \in C^{\infty}(R)$ هایی باشد که محافظشان فشرده است. در این صورت $\int f\phi$ به ازای هر f موضعاً انتگرالپذیر و هر $\phi \in \mathscr{D}$ موجود است. به علاوه، $\mathscr{D}$ آنقدر وسیع است که f (تـ.هـ.) به وسیلهٔ انتگرالهای $\int f\phi$ معین است. (برای مشاهدهٔ این امر، توجه می‌کنیم که بست یکنواخت $\mathscr{D}$ شامل هر تابع پیوسته با محافظ فشرده است.) هرگاه f به طور پیوسته مشتقپذیر باشد، آنگاه

$$\int f'\phi = -\int f\phi' \qquad (\phi \in \mathscr{D}). \tag{1}$$

هرگاه $f \in C^{\infty}(R)$، آنگاه

$$\int f^{(k)}\phi = (-1)^k \int f\phi^{(k)} \qquad (\phi \in \mathscr{D}, k = 1,2,3,\ldots). \tag{2}$$

در این انتگرالگیریهای جزء به جزء از فشردگی محافظ ϕ استفاده شده است.

ملاحظه می‌کنیم که انتگرالهای سمت راست (۱) و (۲) چه f مشتقپذیر باشد یا نباشد با معنی‌اند و معرف تابعیهای خطی بر $\mathscr{D}$ می‌باشند.

لذا می‌توان به هر f که موضعاً انتگرالپذیر باشد یک "مشتق k ام" منتسب کرد: $f^{(k)}$ تابعی خطی بر $\mathscr{D}$ است که ϕ را به $(-1)^k \int f\phi^{(k)}$ می‌فرستد. توجه کنید که خود

f نظیر تابعی $\phi \to \int f\phi$ می‌باشد.

توزیعها آن تابعیهای خطی بر $\mathscr{D}$ اند که نسبت بـه توپولوژیـی پیوسـته می‌باشـند. (ر.ک. تعریف ۶.۷.) بحث قبلی پیشنهاد می‌کند که به هر توزیع Λ "مشـتق" آن Λ' را بـا فرمول زیر مربوط سازیم:

$$\Lambda'(\phi) = -\Lambda(\phi') \qquad (\phi \in \mathscr{D}). \tag{۳}$$

این تعریف (وقتی به n متغیر تعمیم یابد) تمام خواص مطلوبی را که قبلاً ذکر شـد دارد. یکی از مهمترین ویژگیهـای نظریـهٔ حـاصل ایـن اسـت کـه در سـایهٔ آن می‌تـوان روشهای تبدیل فوریه را دربسیاری از مسائل معادلات دیفرانسـیل جزئـی کـه روشـهای کلاسیک‌تر قابل اجرا نیستند به کاربرد.

فضاهای تابع آزمون

۲.۶ فضای $\mathscr{D}(\Omega)$. مجموعهٔ باز و ناتهی $\Omega \subset R^n$ را در نظـر می‌گـیریم. بـه ازای هـر $K \subset \Omega$ ی فشرده، فضای فرشهٔ $\mathscr{D}_K$ در بخش ۴۶.۱ توصیف شد. اجتماع فضاهـای $\mathscr{D}_K$، وقتی K روی تمام زیرمجموعه‌های فشردهٔ Ω تغییر کند، ***فضـای تـابع آزمـون*** $\mathscr{D}(\Omega)$ است. واضح است که $\mathscr{D}(\Omega)$ نسبت به تعاریف معمولی جمع و ضـرب اسـکالر توابـع مختلط یک فضای‌برداری است. به بیان صریح، $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ اگر و فقط اگر $\phi \in C^\infty(\Omega)$ و محافظ ϕ زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از Ω است. حال نرمهای

$$\|\phi\|_N = \max\left\{\left|D^\alpha\phi(x)\right| : x \subset \Omega, |\alpha| \le N\right\} \tag{۱}$$

را معرفی می‌کنیم که در آنها $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ و $N = 0,1,2,\ldots$؛ برای نمادهای D^α و $|\alpha|$، ر.ک. بخش ۴۶.۱.

تحدیدهای این نرمها به هر $\mathscr{D}_K \subset \mathscr{D}(\Omega)$ ثابت همان توپولوژیـی بـر $\mathscr{D}_K$ القـا می‌کنند که نیم نرمهای P_N بخش ۴۶.۱ می‌نمایند. برای مشاهدهٔ این امر، توجه کنید که به هر K عدد صحیحی چون N_0 چنان نظیر است که به ازای هر $N \ge N_0$، $K \subset K_N$. به ازای این Nها، اگر $\phi \in \mathscr{D}_K$، $\|\phi\|_N = p_N(\phi)$. چون

$$\|\phi\|_N \le \|\phi\|_{N+1} \quad \text{و} \quad p_N(\phi) \le p_{N+1}(\phi) \text{ ،} \tag{۲}$$

اگر N به جای ۱ از N_0 شروع شود، توپولوژیهای القا شده به وسیلهٔ هر دنباله از نیم‌نرمها بلاتغییر است. لذا این دو توپولوژی $\mathscr{D}_K$ یکی می‌باشند؛ یک پایهٔ موضعی متشکل است از مجموعه‌های

$$V_N = \left\{\phi \in \mathscr{D}_K : \|\phi\|_N < \frac{1}{N}\right\} \qquad (N = 1,2,3,\dots) . \tag{۳}$$

از نرمهای (۱) می‌توان برای تعریف یک توپولوژی متریپذیر موضعاً محدب بر $\mathscr{D}(\Omega)$ استفاده کرد؛ ر.ک. قضیهٔ ۳۷.۱ و قسمت (ب) بخش ۳۸.۱. با اینحال، این توپولوژی دارای این نقص است که تام نیست. به عنوان مثال، فرض کنیم $n = 1$، $\Omega = R$. $p \in \mathscr{D}(R)$ را با محافظ در $[0,1]$ که $\phi > 0$ در $(0,1)$ اختیار و تعریف می‌کنیم

$$\psi_m(x) = \phi(x-1) + \frac{1}{2}\phi(x-2) + \dots + \frac{1}{m}\phi(x-m) .$$

دراین صورت $\{\psi_m\}$ یک دنبالهٔ کشی در توپولوژی پیشنهادی $\mathscr{D}(R)$ است، ولی $\lim \psi_m$ محافظ فشرده ندارد و لذا در $\mathscr{D}(R)$ نیست.

حال توپولوژی موضعاً محدب دیگر τ را بر $\mathscr{D}(\Omega)$ تعریف می‌کنیم که در آن دنباله‌های کشی همگرایند. همانطور که خواهیم دید، متریپذیر نبودن τ یک نقص جزئی است.

۳.٦ چند تعریف. فرض کنیم Ω یک مجموعهٔ باز ناتهی در R^n باشد.

(آ) به ازای هر $K \subset \Omega$ی فشرده، τ_K توپولوژی فضای فرشهٔ $\mathscr{D}_K$ به صورت توصیف شده در بخشهای ٤٦.۱ و ۲.٦ است.

(ب) β گردایهٔ تمام مجموعه‌های در حال تعادل محدب $W \subset \mathscr{D}(\Omega)$ است به طوری که به ازای هر $K \subset \Omega$ی فشرده، $\mathscr{D}_K \cap W \in \tau_K$.

(پ) τ گردایهٔ تمام اجتماعهای مجموعه‌ها به شکل $\phi + W$ است که $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ و $W \in \beta$.

در این فصل، K همواره زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از Ω است.

دو قضیهٔ زیر خواص اصلی توپولوژی τ، که با توپولوژی مطرح شده در بخش ۲.۶ متفاوت است، را به ثبوت می‌رسانند. مثلاً هرگاه $\{x_m\}$ دنباله‌ای در Ω بدون نقطهٔ حدی در Ω بوده و $\{c_m\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد، آنگاه مجموعهٔ

$$\{\varphi \in \mathscr{D}(\Omega) : |\varphi(x_m)| < c_m \text{ ، } m = 1,2,3,\ldots \text{ به ازای } \}$$

متعلق به β است؛ یعنی یک τ - همسایگی 0 در $\mathscr{D}(\Omega)$ است. این امر است (ر.ک. قضیهٔ ۵.٦) که مجموعه‌های τ - کراندار (ودرنتیجه دنباله‌های τ - کشی) را روی یک مجموعهٔ فشردهٔ مشترک $K \subset \Omega$ متمرکز می‌سازد ولذا دنباله‌های τ - کشی همگرایند.

٤.٦ قضیه

(آ) τ ***یک توپولوژی در*** $\mathscr{D}(\Omega)$ ***است و*** β ***یک پایهٔ موضعی برای*** τ ***می‌باشد.***

(ب) τ، $\mathscr{D}(\Omega)$ ***را به یک فضای‌برداری توپولوژیک موضعاً محدب بدل می‌سازد.***

برهان. فرض کنیم $V_1 \in \tau$، $V_2 \in \tau$، و $\phi \in V_1 \cap V_2$. برای اثبات (آ) کافی است نشان دهیم که به ازای $W \in \beta$ای،

$$\phi + W \subset V_1 \cap V_2 . \tag{1}$$

تعریف τ نشان می‌دهد که $\phi_i \in \mathscr{D}(\Omega)$هایی و $W_i \in \beta$هایی چنان وجود دارند که

$$\phi \in \phi_i + W_i \subset V_i \qquad (i = 1,2). \tag{2}$$

K را طوری می‌گیریم که $\mathscr{D}_K$ شامل ϕ_1، ϕ_2، و ϕ باشد. چون $\mathscr{D}_K \cap W_i$ در $\mathscr{D}_K$ باز است، به ازای $\delta_i > 0$ای داریم

$$\phi - \phi_i \in (1 - \delta_i) W_i . \tag{3}$$

لذا تحدب W_i ایجاب می‌کند که

$$\phi - \phi_i + \delta_i W_i \subset (1 - \delta_i) W_i + \delta_i W_i = W_i ; \tag{4}$$

درنتیجه

$$\phi + \delta_i W_i \subset \phi_i + W_i \subset V_i \qquad (i = 1,2). \tag{5}$$

لذا رابطهٔ (۱) به ازای $W=\left(\delta_1 W_1\right)\cap\left(\delta_2 W_2\right)$ برقرار است و قسمت (آ) ثابت خواهدشد.

حال فرض کنیم ϕ_1 و ϕ_2 عنصرهای متمایزی از $\mathscr{D}(\Omega)$ باشند، و قرار می‌دهیم

$$W=\left\{\phi\in\mathscr{D}(\Omega):\|\phi\|_0<\left\|\phi_1-\phi_2\right\|_0\right\} \tag{۶}$$

که درآن $\|\phi\|_0$ همانند (۱) در بخش ۲.۶ است. دراین صورت $W\in\beta$ و ϕ_1 در ϕ_2+W نیست. پس مجموعهٔ یکانی $\{\phi_1\}$ یک مجموعهٔ بسته نسبت به τ است.

جمع τ- پیوسته است زیرا تحدب هر $W\in\beta$ ایجاب می‌کند که به ازای هر $\psi_1\in\mathscr{D}(\Omega)$ و $\psi_2\in\mathscr{D}(\Omega)$،

$$\left(\psi_1+\frac{1}{2}W\right)+\left(\psi_2+\frac{1}{2}W\right)=\left(\psi_1+\psi_2\right)+W. \tag{۷}$$

برای پرداختن به ضرب اسکالر، یک اسکالر α_0 و یک $\phi_0\in\mathscr{D}(\Omega)$ را اختیار می‌کنیم. در این صورت

$$\alpha\phi-\alpha_0\phi_0=\alpha\left(\phi-\phi_0\right)+\left(\alpha-\alpha_0\right)\phi_0. \tag{۸}$$

اگر $W\in\beta$، $\delta>0$ ای هست به طوری که $\delta\phi_0\in\frac{1}{2}W$. c را طوری می‌گیریم که $2c\left(\left|\alpha_0\right|+\delta\right)=1$. چون W محدب و در حال تعادل است، هرگاه $\left|\alpha-\alpha_0\right|<\delta$ و $\phi-\phi_0\in cW$، داریم

$$\alpha\phi-\alpha_0\phi_0\in W. \tag{۹}$$

این برهان را به پایان می‌رساند.

تذکر. از حالا به بعد، علامت $\mathscr{D}(\Omega)$ یعنی فضای‌برداری توپولوژیک $(\mathscr{D}(\Omega),\tau)$ که هم اکنون توصیف شد. تمام مفاهیم توپولوژیک مربوط به $\mathscr{D}(\Omega)$ در رابطه با این توپولوژی τ خواهندبود.

۵.۶ قضیه

(آ) زیرمجموعهٔ درحال تعادل محدب V از $\mathscr{D}(\Omega)$ باز است اگر و فقط اگر $V\in\beta$.

(ب) توپولوژی τ_Kی هر $\mathscr{D}_K\subset\mathscr{D}(\Omega)$ با توپولوژی زیرفضایی که $\mathscr{D}_K$ از $\mathscr{D}(\Omega)$

به ارث می‌برد یکی است.

(پـ) هرگاه E زیرمجموعهٔ کرانداری از $\mathscr{D}(\Omega)$ باشد، آنگاه به ازای $K \subset \Omega$ ای داریم $E \subset \mathscr{D}_K$، و اعدادی مانند $M_N < \infty$ چنان وجود دارند که هر $\phi \in E$ در نامساویهای زیر صدق خواهد کرد:

$$\|\phi\|_N \le M_N \qquad (N = ۰,۱,۲,\ldots).$$

(تـ) $\mathscr{D}(\Omega)$ دارای خاصیت هاینه - بورل است.

(ثـ) هرگاه $\{\phi_i\}$ یک دنبالهٔ کشی در $\mathscr{D}(\Omega)$ باشد، آنگاه به ازای $K \subset \Omega$ ای فشرده داریم $\{\phi_i\} \subset \mathscr{D}_K$، و

$$\lim_{i,j\to\infty}\|\phi_i - \phi_j\|_N = ۰ \qquad (N = ۰,۱,۲,\ldots).$$

(جـ) هرگاه در توپولوژی $\mathscr{D}(\Omega)$، $\phi_i \to ۰$، آنگاه $K \subset \Omega$ ای فشرده هست که شامل محافظ هر ϕ_i است، و وقتی $i \to \infty$، به ازای هر اندیس چندگانهٔ α، به طور یکنواخت $D^\alpha \phi_i \to ۰$.

(چـ) در $\mathscr{D}(\Omega)$ هر دنبالهٔ کشی همگراست.

تبصره. در پرتو قسمت (بـ)، شرایط لازم بیان شده به وسیلهٔ (پـ)، (ثـ)،و (جـ) کافی نیز هستند. به عنوان مثال، هرگاه $E \subset \mathscr{D}_K$ و به ازای هر $\phi \in E$ داشته باشیم $\|\phi\|_N \le M_N < \infty$، آنگاه E زیرمجموعهٔ کرانداری از $\mathscr{D}_K$ است (بخش ٤٦.١)، و حال قسمت (بـ)ایجاب می‌کند که E در $\mathscr{D}(\Omega)$ نیز کراندار است.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $V \in \tau$. $\phi \in \mathscr{D}_K \cap V$ را اختیار می‌کنیم. بنابر قضیهٔ ٤.٦، به ازای $W \in \beta$ای، $\phi + W \subset V$. لذا

$$\phi + (\mathscr{D}_K \cap W) \subset \mathscr{D}_K \cap V.$$

چون $\mathscr{D}_K \cap W$ در $\mathscr{D}_K$ باز است، ثابت کرده‌ایم که

اگر $V \in \tau$ و $K \subset \Omega$، $\mathscr{D}_K \cap V \in \tau_K$. (۱)

حکم (آ) نتیجهٔ فوری (۱) است زیرا واضح است که $\beta \subset \tau$.

نصف (ب)توسط (۱)ثابت شده است. برای نیمهٔ دیگر، فرض کنیم $E \in \tau_K$. باید نشان دهیم که به ازای $V \in \tau$ای، $E = \mathscr{D}_K \cap V$. تعریف τ_K ایجاب می‌کند که به هر $\phi \in E$، N و $\delta > 0$ای چنان نظیر است که

$$\left\{\psi \in \mathscr{D}_K : \|\psi - \phi\|_N < \delta\right\} \subset E. \tag{۲}$$

قرارمی‌دهیم $W_\phi = \{\psi \in \mathscr{D}(\Omega) : \|\psi\|_N < \delta\}$. در این صورت $W_\phi \in \beta$، و

$$\mathscr{D}_K \cap \left(\phi + W_\phi\right) = \phi + \left(\mathscr{D}_K \cap W_\phi\right) \subset E. \tag{۳}$$

هرگاه V اجتماع مجموعه‌های $\phi + W_\phi$ باشد (به ازای هر $\phi \in E$ یکی)، آنگاه V دارای خاصیت مطلوب است.

برای قسمت (پ)مجموعهٔ $E \subset \mathscr{D}(\Omega)$ را در نظرمی‌گیریم که درهیچ $\mathscr{D}_K$ای نباشد. در این صورت توابعی چون $\phi_m \in E$ و نقاط متمایزی مانند $x_m \in \Omega$ بدون نقطهٔ حدی در Ω چنان وجود دارند که $\phi_m\left(x_m\right) \neq 0$ $(m = 1,2,3,\ldots)$. فرض کنیم W مجموعهٔ تمام $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$هایی باشد که در

$$\left|\phi\left(x_m\right)\right| < m^{-1}\left|\phi_m\left(x_m\right)\right| \qquad (m = 1,2,3,\ldots) \tag{٤}$$

صدق می‌کنند. چون هر K شامل فقط تعدادی متناهی x_m است، به آسانی معلوم می‌شود که $\mathscr{D}_K \cap W \in \tau_K$. لذا $W \in \beta$. چون $\phi_m \notin mW$، هیچ مضربی از W شامل E نیست. این نشان می‌دهد که E کراندار نمی‌باشد.

پس هر زیرمجموعهٔ کراندار E از $\mathscr{D}(\Omega)$ در $\mathscr{D}_K$ای قراردارد. لذا، طبق (ب)، E زیرمجموعهٔ کرانداری از $\mathscr{D}_K$ است. درنتیجه (ر.ک.بخش ٤٦.١)

$$\sup\left\{\|\phi\|_N : \phi \in E\right\} < \infty \qquad (N = 0,1,2,\ldots). \tag{۵}$$

این برهان (پ) را کامل خواهد کرد.

حکم (ت) از (پ) نتیجه می‌شود زیرا $\mathscr{D}_K$ دارای خاصیت هاینه - بورل است.

چون دنباله‌های کشی کراندارند (بخش ۲۹.۱)، قسمت (پ) ایجاب می‌کند که هر دنبالهٔ کشی $\{\phi_i\}$ در $\mathscr{D}(\Omega)$ در $\mathscr{D}_K$ای قراردارد. پس، بنابر (ب)، $\{\phi_i\}$نیز نسبت به

τ_K یک دنبالهٔکشی است. این قسمت (ث) را ثابت خواهد کرد.

حکم (ج)چیزی جز بیان مجدد (ث) نیست.

بالأخره، (چ) از (ب)،(ث)، و تمامیت $\mathscr{D}_K$ نتیجه می‌شود. (به یاد آورید که $\mathscr{D}_K$ یک فضای فرشه است.)

۶.۶ قضیه. ***فرض کنیم Λ یک نگاشت خطی از $\mathscr{D}(\Omega)$ به توی فضای موضعاً محدب Y باشد. در این صورت هریک از چهار خاصیت زیر سایرین را ایجاب خواهد کرد:***

(آ) Λ پیوسته است؛

(ب) Λ کراندار است؛

(پ) هرگاه $\phi_i \to 0$ در $\mathscr{D}(\Omega)$، آنگاه $\Lambda\phi_i \to 0$ در Y؛

(ت) تحدیدهای Λ به هر $\mathscr{D}_K \subset \mathscr{D}(\Omega)$ پیوسته است.

برهان. استلزام (ب)$\to$(آ) مشمول قضیهٔ ۳۲.۱ است.

فرض کنیم Λ کراندار بوده و $\phi_i \to 0$ در $\mathscr{D}(\Omega)$. بنابر قضیهٔ ۵.۶، در $\mathscr{D}_K$ای داریم $\phi_i \to 0$ ، و تحدید Λ به این $\mathscr{D}_K$ کراندار است. با اعمال قضیهٔ ۳۲.۱ در مورد $\Lambda:\mathscr{D}_K \to Y$ معلوم می‌شود که $\Lambda\phi_i \to 0$ در Y. لذا (ب) قسمت (پ) را ایجاب خواهدکرد.

فرض کنیم (پ) برقرار باشد، $\{\phi_i\} \subset \mathscr{D}_K$، و $\phi_i \to 0$ در $\mathscr{D}_K$. بنابرقسمت (ب) قضیهٔ ۵.۶، $\phi_i \to 0$ در $\mathscr{D}(\Omega)$. لذا (پ) ایجاب می‌کند که وقتی $i \to \infty$، $\Lambda\phi_i \to 0$ در Y. چون $\mathscr{D}_K$ مترپذیر است، (ت)نتیجه خواهدشد.

برای اثبات اینکه (ت) قسمت (آ)را ایجاب می‌کند، فرض کنیم U یک همسایگی در حال تعادل محدب 0 در Y باشد، و قرارمی‌دهیم $V = \Lambda^{-1}(U)$. در این صورت V محدب و درحال تعادل است. بنابر بر قسمت (آ)قضیهٔ ۵.۶ ، V در $\mathscr{D}(\Omega)$ باز است اگر و فقط اگر $\mathscr{D}_K \cap V$ به ازای هر $\mathscr{D}_K \subset \mathscr{D}(\Omega)$ در $\mathscr{D}_K$ باز باشد. این هم ارزی (آ) و

(تـ) را ثابت خواهدکرد.

نتیجه. *هر عملگر دیفرانسیل D^α یک نگاشت پیوسته از $\mathscr{D}(\Omega)$ به توی $\mathscr{D}(\Omega)$ است.*

برهان. چون به ازای $N = 0,1,2,\ldots$ داریم $\|D^\alpha\phi\|_N \le \|\phi\|_{N+|\alpha|}$، D^α بر هر $\mathscr{D}_K$ پیوسته است.

۷.٦ تعریف. هر تابعی خطی بر $\mathscr{D}(\Omega)$ که نسبت به توپولوژی τ توصیف شده در تعریف ۳.٦ پیوسته باشد یک ***توزیع در Ω*** نام دارد.

فضای تمام توزیعها در Ω با $\mathscr{D}'(\Omega)$ نموده می‌شود.

توجه کنید که قضیهٔ ٦.٦ در مورد تابعیهای خطی بر $\mathscr{D}(\Omega)$ قابل اعمال است. این امر ما را به توصیف مفید زیر از توزیعها می‌رساند.

۸.٦ قضیه. ***اگر Λ یک تابعی خطی بر $\mathscr{D}(\Omega)$ باشد، دو شرط زیر هم ارز می‌باشند:***

(آ) $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$؛

(بـ) به هر مجموعهٔ فشردهٔ $K \subset \Omega$ یک عدد صحیح و نامنفی N و یک ثابت مانند $C < \infty$ چنان نظیر است که نامساوی

$$|\Lambda\phi| \le C\|\phi\|_N$$

به ازای هر $\phi \in \mathscr{D}_K$ برقرار می‌باشد.

برهان. این دقیقاً هم ارز (آ) و (تـ) در قضیهٔ ٦.٦ همراه با توصیف توپولوژی $\mathscr{D}_K$ به وسیلهٔ نیم نرمهای $\|\phi\|_N$ داده شده در بخش ۲.٦ است.

تذکر. هرگاه Λ چنان باشد که یک N به ازای هر K کارساز باشد (ولی نه لزوماً بـا Cی یکسان)، آنگاه کوچکترین N از این نوع **مرتبهٔ** Λ نام دارد. هرگاه هیچ Nی به ازای هـر K کارساز نباشد، آنگاه گوییم Λ ***از مرتبهٔ نامتناهی*** است.

۹.٦ تبصره. هر $x \in \Omega$ یک تابعی خطی مانند δ_x بر $\mathscr{D}(\Omega)$ با فرمول

$$\delta_x(\phi) = \phi(x)$$

معین می‌کند. قضیهٔ ۸.٦ نشان می‌دهد که δ_x یک توزیـع از مرتبـهٔ ۰ اسـت. اگـر $x = 0$، یعنی مبدأ R^n، تابعی $\delta = \delta_0$ اغلب ***اندازهٔ دیراک*** (*Dirac*) بر R^n نامیده می‌شود.

چون $\mathscr{D}_K$ به ازای $K \subset \Omega$ اشتراک فضاهای پوچ این δ_xهاست وقتی x روی متمـم K تغییر کند، هر $\mathscr{D}_K$ یک زیرفضـای **بسـتهٔ** $\mathscr{D}(\Omega)$ اسـت. [ایـن امـراز قضیـهٔ ۲۷.۱ و قسمت (بـ)قضیهٔ ۵.٦ نتیجه می‌شود، زیرا هر $\mathscr{D}_K$ تام است.]

واضـح اسـت کـه هـر $\mathscr{D}_K$ نسـبت بـه $\mathscr{D}(\Omega)$ درون تهـی دارد. چـــون گردایـهٔ شمارشپذیری از مجموعـه‌های $K_i \subset \Omega$ وجـود دارد کـه $\mathscr{D}(\Omega) = \bigcup \mathscr{D}_{K_i}$، $\mathscr{D}(\Omega)$ در خودش از رستهٔ اول است. چون دنبالـه‌های کشـی در $\mathscr{D}(\Omega)$ همگراینـد (قضیـهٔ ۵.٦)، قضیهٔ بئر ایجاب می‌کند که $\mathscr{D}(\Omega)$ متریپذیر نیست.

حساب توزیعها

۱۰.٦ نمادهـا. مثـل قبـل، Ω یـک مجموعـهٔ بازنـاتهی در R^n اسـت. هرگـاه $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ و $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ اندیسهای چندگانه باشند (ر.ک.بخش ٤٦.١)، آنگاه

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \tag{1}$$

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \text{ که در آن } D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n} \tag{2}$$

$$\beta \le \alpha \text{ یعنی به ازای } 1 \le i \le n\text{،}\ \beta_i \le \alpha_i\text{،} \tag{3}$$

$$\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \ldots, \alpha_n \pm \beta_n). \tag{4}$$

هرگاه $x \in R^n$ و $y \in R^n$، آنگاه

$$x.y = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n, \tag{۵}$$

$$|x| = (x.x)^{1/2} = \left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)^{1/2}. \tag{۶}$$

این امر که علامت قدر مطلق در (۱) و (۶) معانی مختلفی دارد ابهامی ایجاد نمی‌کند.
اگر $x \in R^n$ و α یک اندیس چندگانه باشد، ***تکجمله‌ای*** x^α به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}. \tag{۷}$$

۱۱.۶ تابعها و اندازه‌ها به عنوان توزیع. فرض کنیم f یک تابع مختلط موضعاً انتگرالپذیر در Ω باشد. این یعنی f اندازه‌پذیر لبگ است و به ازای هر $K \subset \Omega$ ی فشرده $\int_K |f(x)| dx < \infty$؛ dx یعنی اندازهٔ لبگ. تعریف می‌کنیم

$$\Lambda_f(\phi) = \int_\Omega \phi(x) f(x) dx \qquad [\phi \in \mathscr{D}(\Omega)]. \tag{۱}$$

چون

$$\left|\Lambda_f(\phi)\right| \le \left(\int_K |f|\right) . \|\phi\|_0 \qquad \left(\phi \in \mathscr{D}_K\right), \tag{۲}$$

قضیهٔ ۸.۶ نشان می‌دهد که $\Lambda_f \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

معمولاً توزیع Λ_f را با تابع f یکی کرده و می‌گویند این نوع توزیعها تابع "می‌باشند".

به همین نحو، اگر μ یک اندازهٔ بورل مختلط بر Ω باشد یا μ یک اندازهٔ مثبت بر Ω با $\mu(K) < \infty$ به ازای هر $K \subset \Omega$ ی فشرده باشد، معادلهٔ

$$\Lambda_\mu(\phi) = \int_\Omega \phi \, d\mu \qquad [\phi \in \mathscr{D}(\Omega)] \tag{۳}$$

یک توزیع مانند Λ_μ در Ω تعریف می‌کند که معمولاً با μ یکی گرفته می‌شود.

۱۲.۶ مشتقگیری از توزیعها. اگر α یک اندیس چندگانه بوده و $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$، فرمول

$$(D^\alpha \Lambda)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha \phi) \qquad [\phi \in \mathscr{D}(\Omega)] \tag{۱}$$

(که در بخش ۱.٦ زمینه‌سازی شد) یک تابعی خطی مانند $D^\alpha \Lambda$ بر $\mathscr{D}(\Omega)$ تعریف می‌کند. هرگاه به ازای هر $\phi \in \mathscr{D}_K$،

$$|\Lambda \phi| \le C\|\phi\|_N, \tag{۲}$$

آنگاه

$$|(D^\alpha \Lambda)(\phi)| \le C\|D^\alpha \phi\|_N \le C\|\phi\|_{N+|\alpha|}. \tag{۳}$$

لذا قضیهٔ ۸.٦ نشان می‌دهد که $D^\alpha \Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

توجه کنید که فرمول

$$D^\alpha D^\beta \Lambda = D^{\alpha+\beta} \Lambda = D^\beta D^\alpha \Lambda \tag{٤}$$

به ازای هر توزیع Λ و جمیع اندیسهای چندگانهٔ α و β برقرار است و دلیلش صرفاً به این خاطر است که عملگرهای D^α و D^β بر $C^\infty(\Omega)$ تعویض می‌شوند:

$$\begin{aligned}(D^\alpha D^\beta \Lambda)(\phi) &= (-1)^{|\alpha|}(D^\beta \Lambda)(D^\alpha \phi) \\ &= (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \Lambda(D^\beta D^\alpha \phi) \\ &= (-1)^{|\alpha+\beta|} \Lambda(D^{\alpha+\beta} \phi) \\ &= (D^{\alpha+\beta} \Lambda)(\phi).\end{aligned}$$

۱۳.٦ مشتقات توزیعی توابع. مشتق توزیعی αام تابع موضعاً انتگرالپذیر f در Ω طبق تعریف عبارت است از توزیع $D^\alpha \Lambda_f$.

هرگاه $D^\alpha f$ به مفهوم کلاسیک نیز موجود بوده و موضعاً انتگرالپذیر باشد، آنگاه $D^\alpha f$ به مفهوم بخش ۱۱.٦ نیز یک توزیع است. مسئلهٔ سازگاری این است که آیا معادلهٔ

$$D^\alpha \Lambda_f = \Lambda_{D^\alpha f} \tag{۱}$$

تحت این شرایط همواره برقرار است یا خیر.

به بیان صریحتر، سؤال این است که آیا به ازای هر $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$،

$$(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega} f(x)\left(D^{\alpha}\phi\right)(x)dx=\int_{\Omega}\left(D^{\alpha}f\right)(x)\phi(x)dx\ . \qquad (۲)$$

اگر f دارای مشتقات جزئی **پیوسته** از تمام مراتب تا N باشد، چنانچه $|\alpha|\le N$، انتگرالگیری جزء به جزء رابطهٔ (۲) را بدون اشکال به ما می‌دهد.

به طورکلی، رابطهٔ (۱) ممکن است نادرست باشد. مثال زیر این امر را در حالت $n=۱$ توضیح می‌دهد.

۱٤.٦ مثال. فرض کنیم Ω یک بازهٔ باز در R بوده و f یک تابع ازچپ پیوسته با تغییر کراندار در Ω باشد. اگر $D=d/dx$، می‌دانیم که $(Df)(x)$ تـ.هـ وجود دارد و $Df\in L^1$. حکم می‌کنیم که

$$D\Lambda_f=\Lambda_{\mu} \qquad (۱)$$

که درآن μ اندازهٔ تعریف شده در Ω به وسیلهٔ

$$\mu([a,b))=f(b)-f(a) \qquad (۲)$$

است.

لذا** $D\Lambda_f=\Lambda_{Df}$ **اگر و فقط اگر** f **به طور مطلق پیوسته باشد.

برای اثبات (۱) باید نشان دهیم که به ازای هر $\phi\in\mathscr{D}(\Omega)$،

$$\left(\Lambda_{\mu}\right)(\phi)=\left(D\Lambda_f\right)(\phi)=-\Lambda_f(D\phi);$$

یعنی

$$\int_{\Omega}\phi d\mu=-\int_{\Omega}\phi'(x)f(x)dx. \qquad (۳)$$

ولی (۳) نتیجهٔ ساده‌ای از قضیهٔ فوبینی (*Fubini*) است زیرا هر طرف (۳) مساوی انتگرال $\phi'(x)$ روی مجموعهٔ

$$\{(x,y):x<y،y\in\Omega،x\in\Omega\} \qquad (٤)$$

نسبت به اندازهٔ حاصل‌ضربی dx و $d\mu$است. دراین محاسبه از اینکه ϕ دارای محافظ فشرده در Ω است استفاده شده است.

۱۵.۶ ضرب در توابع. فرض کنیم $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ و $f \in C^\infty(\Omega)$. طرف راست معادلهٔ

$$(f\Lambda)(\phi) = \Lambda(f\phi) \qquad [\phi \in \mathscr{D}(\Omega)] \tag{۱}$$

با معنی است زیرا وقتی $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$، $f\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$. لذا رابطهٔ (۱) یک تابعی خطی $f\Lambda$ بر $\mathscr{D}(\Omega)$ را تعریف می‌کند. خواهیم دید که $f\Lambda$ درواقع یک توزیع در Ω است.

با نمادها باید محتاط باشیم: هرگاه $f \in \mathscr{D}(\Omega)$، آنگاه Λf یک **عدد** است ولی $f\Lambda$ یک ***توزیع*** می‌باشد.

اثبات $f\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ تابع فرمول لایب‌نیتز (*Leibniz*) است:

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\beta \le \alpha} c_{\alpha\beta}\left(D^{\alpha-\beta}f\right)\left(D^\beta g\right), \tag{۲}$$

که به ازای هر f و g در $C^\infty(\Omega)$ و جمیع اندیسهای چندگانهٔ α برقرار است و با تکرارفرمول آشنای

$$(uv)' = u'v + uv' \tag{۳}$$

به دست می‌آید. اعداد $c_{\alpha\beta}$ اعداد صحیح مثبتی هستند که مقدار دقیقشان به آسانی محاسبه می‌شود ولی موردنیاز ما در اینجا نیست.

به هر $K \subset \Omega$ ی فشرده یک C و یک N چنان نظیر است که به ازای هر $\phi \in \mathscr{D}_K$، $|\Lambda\phi| \le C\|\phi\|_N$. بنا بر (۲)، یک ثابت مانند C' تابع f، K، و N چنان موجود است که به ازای هر $\phi \in \mathscr{D}_K$، $\|f\phi\|_N \le C'\|\phi\|_N$. لذا

$$|(f\Lambda)(\phi)| \le CC'\|\phi\|_N \qquad \left(\phi \in \mathscr{D}_K\right). \tag{٤}$$

بنابر قضیهٔ ۸.۶، $f\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

حال می‌خواهیم نشان دهیم که فرمول لایب نیتز (۲) با Λ به جای g برقرار است؛ درنتیجه

$$D^\alpha(f\Lambda) = \sum_{\beta \le \alpha} c_{\alpha\beta}\left(D^{\alpha-\beta}f\right)\left(D^\beta\Lambda\right). \tag{۵}$$

اثبات صرفاً یک محاسبهٔ صوری است. به هر $u \in R^n$ تابع h_u را با

$$h_u(x) = \exp(u.x)$$

مربوط می‌کنیم. در این صورت $D^\alpha h_u = u^\alpha h_u$. اگر (۲) را بر h_u و h_v به جای f و g

اعمال کنیم، اتحاد

$$(u+v)^{d}=\sum_{\beta\leq\alpha}c_{\alpha\beta}u^{\alpha-\beta}v^{\beta}\qquad\left(u\in R^{n},v\in R^{n}\right)\tag{٦}$$

به دست می‌آید. به خصوص،

$$\begin{aligned}u^{\alpha}&=[v+(-v+u)]^{\alpha}\\&=\sum_{\beta\leq\alpha}c_{\alpha\beta}v^{\alpha-\beta}\sum_{\gamma\leq\beta}c_{\beta\gamma}(-1)^{|\beta-\gamma|}v^{\beta-\gamma}u^{\gamma}\\&=\sum_{\gamma\leq\alpha}(-1)^{|\gamma|}v^{\alpha-\gamma}u^{\gamma}\sum_{\gamma\leq\beta\leq\alpha}(-1)^{|\beta|}c_{\alpha\beta}c_{\beta\gamma}.\end{aligned}$$

لذا

$$\sum_{\gamma\leq\beta\leq\alpha}(-1)^{|\beta|}c_{\alpha\beta}c_{\beta\gamma}=\begin{cases}(-1)^{|\alpha|}، & \gamma=\alpha \text{ اگر}\\ 0 ، & \text{در غیراین صورت}\end{cases}\tag{٧}$$

با اعمال رابطهٔ (۲) بر $D^{\beta}\left(\phi D^{\alpha-\beta}f\right)$ و استفاده از (۷)، اتحاد زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{\beta\leq\alpha}(-1)^{|\beta|}c_{\alpha\beta}D^{\beta}\left(\phi D^{\alpha-\beta}f\right)=(-1)^{|\alpha|}fD^{\alpha}\phi.\tag{٨}$$

دراین مطالب نکته آن است که (۸) رابطهٔ (۵) را به دست می‌دهد. زیرا هرگاه $\phi\in\mathscr{D}(\Omega)$، آنگاه

$$\begin{aligned}D^{\alpha}(f\Lambda)(\phi)&=(-1)^{|\alpha|}(f\Lambda)\left(D^{\alpha}\phi\right)=(-1)^{|\alpha|}\left(fD^{\alpha}\phi\right)\\&=\sum_{\beta\leq\alpha}(-1)^{|\beta|}c_{\alpha\beta}\Lambda\left(D^{\beta}\left(\phi D^{\alpha-\beta}f\right)\right)\\&=\sum_{\beta\leq\alpha}c_{\alpha\beta}\left(D^{\beta}\Lambda\right)\left(\phi D^{\alpha-\beta}f\right)\\&=\sum_{\beta\leq\alpha}c_{\alpha\beta}\left[\left(D^{\alpha-\beta}f\right)\left(D^{\beta}\Lambda\right)(\phi)\right].\end{aligned}$$

٦.١٦ دنباله‌های توزیعها. چون $\mathscr{D}'(\Omega)$ فضای تمام توابع خطی پیوسته بر $\mathscr{D}(\Omega)$ است، نکات کلی مذکور در بخش ۳.١٤ یک توپولوژی برای $\mathscr{D}'(\Omega)$ به دست می‌دهد. (ضعیف*- توپولوژی القا شده به وسیلهٔ $\mathscr{D}(\Omega)$) که $\mathscr{D}'(\Omega)$ را به یک فضای موضعاً محدب بدل می‌سازد. اگر $\{\Lambda_i\}$ دنباله‌ای از توزیعها در Ω باشد، حکم

(۱) $$\Lambda_i \to \Lambda \quad \text{در} \quad \mathscr{D}'(\Omega)$$

اشاره به این ضعیف*- توپولوژی دارد و به طور صریح یعنی

(۲) $$\lim_{i\to\infty} \Lambda_i\phi = \Lambda\phi \qquad [\phi \in \mathscr{D}(\Omega)].$$

به‌خصوص، اگر $\{f_i\}$ دنباله‌ای از توابع موضعاً انتگرالپذیر در Ω باشد، احکام "$f_i \to \Lambda$ در $\mathscr{D}'(\Omega)$" یا "$\{f_i\}$ به مفهوم توزیع به Λ همگراست" یعنی به ازای هر $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$،

(۳) $$\lim_{i\to\infty} \int_\Omega \phi(x) f_i(x)dx = \Lambda\phi.$$

سادگی قضیهٔ زیر که در رابطه با مشتقگیری جمله به جمله از یک دنباله است، تا حدودی تعجب‌آور است.

۱۷.٦ قضیه. *فرض کنیم به ازای* $i = ۱,۲,۳,\ldots$، $\Lambda_i \in \mathscr{D}'(\Omega)$، و

(۱) $$\Lambda\phi = \lim_{i\to\infty} \Lambda_i\phi$$

به ازای هر $\phi \in D(\Omega)$ *(به عنوان عددی مختلط) موجود باشد. دراین صورت* $\Lambda \in D'(\Omega)$ *و به ازای هر اندیس چندگانهٔ* α،

(۲) $$D^\alpha\Lambda_i \to D^\alpha\Lambda \quad \text{در} \quad \mathscr{D}'(\Omega).$$

برهان. فرض کنیم K یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ دلخواه از Ω باشد. چون رابطهٔ (۱) به ازای هر $\phi \in \mathscr{D}_K$ برقرار بوده و $\mathscr{D}_K$ یک فضای فرشه است، قضیهٔ باناخ - اشتاین‌هاوس ۸.۲ ایجاب می‌کند که تحدید Λ به $\mathscr{D}_K$ پیوسته است. از قضیهٔ ٦.٦ نتیجه می‌شود که Λ بر $\mathscr{D}(\Omega)$ پیوسته است؛ به عبارت دیگر، $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$. درنتیجه (۱) ایجاب می‌کند که

$$\begin{aligned}(D^\alpha\Lambda)(\phi) &= (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha\phi)\\ &= (-1)^{|\alpha|}\lim_{i\to\infty}\Lambda_i(D^\alpha\phi) = \lim_{i\to\infty}(D^\alpha\Lambda_i)(\phi).\end{aligned}$$

۱۸.٦ قضیه. *هرگاه* $\Lambda_i \to \Lambda$ *در* $\mathscr{D}'(\Omega)$ *و* $g_i \to g$ *در* $C^\infty(\Omega)$، *آنگاه* $g_i\Lambda_i \to g\Lambda$

در $\mathscr{D}'(\Omega)$.

تذکر. حکم " $g_i \to g$ در $C^{\infty}(\Omega)$" اشاره به توپولوژی فضای فرشهٔ $C^{\infty}(\Omega)$ توصیف شده در بخش ٤٦.١ دارد.

برهان. $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ را ثابت می‌گیریم و تابعی دوخطی B را بر $C^{\infty}(\Omega) \times \mathscr{D}'(\Omega)$ با

$$B(g, \Lambda) = (g\Lambda)(\phi) = \Lambda(g\phi)$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت B جداگانه پیوسته است، و قضیهٔ ۱۷.۲ ایجاب می‌کند که

$$\text{وقتی } i \to \infty\text{،} \qquad B(g_i, \Lambda_i) \to B(g, \Lambda).$$

لذا

$$(g_i \Lambda_i)(\phi) \to (g\Lambda)(\phi) .$$

موضعی‌سازی

۱۹.٦ تساوی موضعی. فرض کنیم $\Lambda_i \in \mathscr{D}'(\Omega)$ $(i = ۱,۲)$ و w زیرمجموعهٔ بازی از Ω باشد. عبارت

$$\Lambda_۱ = \Lambda_۲ \text{ در } w \qquad (۱)$$

طبق تعریف یعنی به ازای هر $\phi \in \mathscr{D}(w)$، $\Lambda_۱\phi = \Lambda_۲\phi$.

مثلاً هرگاه f یک تابع موضعاً انتگرالپذیر بوده و μ یک اندازه باشد، آنگاه $\Lambda_f = ۰$ در w اگر و فقط اگر به ازای تقریباً هر $x \in w$، $f(x) = ۰$، و $\Lambda_\mu = ۰$ در w اگر و فقط اگر به ازای هر مجموعهٔ بورل $E \subset w$، $\mu(E) = ۰$.

این تعریف بحث موضعی توزیعها را ممکن می‌سازد. از آن سو، اگر رفتار موضعی یک توزیع معلوم باشد، توصیف سراسری آن نیز ممکن خواهدبود.

این امر دقیقاً در قضیهٔ ۲۱.٦ بیان شده است. دربرهان آن از افرازهای واحد استفاده می‌شود که اینک آنها را خواهیم ساخت.

۲۰.٦ قضیه. هرگاه Γ گردایه‌ای از مجموعه‌های باز در R^n باشد که اجتماعشان Ω است، آنگاه دنباله‌ای مانند $\{\psi_i\} \subset \mathscr{D}(\Omega)$ با $\psi_i \geq ۰$ هست به طوری که

(آ) محافظ هر ψ_i عضوی از Γ است،

(ب) به ازای هر $x \in \Omega$، $\sum_{i=۱}^{\infty} \psi_i(x) = ۱$،

(پ) به هر $K \subset \Omega$ی فشرده عدد صحیحی مانند m و مجموعهٔ بازی مانند $W \supset K$ چنان نظیر است که به ازای هر $x \in W$،

$$\psi_۱(x)+\ldots+\psi_m(x) = ۱.$$

یک چنین گردایهٔ $\{\psi_i\}$ یک ***افراز واحد موضعاً متناهی در Ω*** تابع پوشش باز Γ از Ω است. توجه کنید که از قسمتهای (ب) و (پ) نتیجه می‌شود که هر نقطه از Ω همسایگیی دارد که فقط تعدادی متناهی از محافظهای ψ_i را قطع می‌کنند. به این دلیل $\{\psi_i\}$ را موضعاً متناهی می‌نامیم.

برهان. فرض کنیم S یک زیرمجموعهٔ چگال شمارش‌پذیر Ω باشد. همچنین $\{B_۱, B_۲, B_۳, \ldots\}$ دنباله‌ای باشد که شامل هرگوی بستهٔ B_i است که مرکزش p_i در S قراردارد، شعاعش r_i گویاست، و در عضوی از Γ قراردارد. فرض کنیم V_i گوی باز به مرکز p_i و شعاع $r_i/۲$ باشد. به آسانی معلوم می‌شود که $\Omega = \bigcup V_i$.

ساختمان توصیف شده در بخش ٤٦.١ نشان می‌دهد که توابعی مانند $\phi_i \in \mathscr{D}(\Omega)$ چنان وجود دارند که $۰ \leq \phi \leq ۱$، $\phi_i = ۱$ در V_i، و خارج B_i، $\phi_i = ۰$. تعریف می‌کنیم $\psi_۱ = \phi_۱$ و، به استقرا،

$$\psi_{i+۱} = (۱-\phi_۱)\ldots(۱-\phi_i)\phi_{i+۱} \qquad (i \geq ۱). \tag{۲}$$

واضح است که خارج B داریم $\psi_i = ۰$. این امر قسمت (آ) را به دست می‌دهد. رابطهٔ

$$\psi_۱+\ldots+\psi_i = ۱-(۱-\phi_۱)\ldots(۱-\phi_i) \tag{۳}$$

به ازای $i = ۱$ بدیهی است. اگر رابطهٔ (۳) به ازای iی برقرار باشد، از جمع (۲) و (۳)

رابطهٔ (۳) را به ازای $i+1$ به جای i خواهیم داشت. لذا (۳) به ازای هر i برقـرار اسـت.
چون در V_i داریم $\phi_i = 1$، پس

$$\text{اگر } x \in V_1 \cup \ldots \cup V_m ،\quad \psi_1(x) + \ldots \psi_m(x) = 1. \tag{٤}$$

این قسمت (بـ) را به ما می‌دهد. به علاوه، هرگاه K فشرده باشـد، آنگـاه بـه ازای mی داریم $K \subset V_1 \cup \ldots \cup V_m$ و قسمت (پـ) نتیجه خواهدشد.

۲۱.٦ قضیه. ***فرض کنیم Γ یـک پوشـش بـاز مجموعـهٔ بـاز $\Omega \subset R^n$ بـوده و بـه هـر $\omega \in \Gamma$ یـک توزیـع مـانند $\Lambda_\omega \in \mathscr{D}'(\omega)$ چنـان نظـیر اسـت کـه هروقـت $\omega' \cap \omega'' \neq \varnothing$،***

$$\Lambda_{\omega'} = \Lambda_{\omega''} \quad \text{در} \quad \omega' \cap \omega''.$$

در این صورت یک $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ی منحصر به فرد هست به طوری‌کـه بـه ازای هـر $\omega \in \Gamma$،

$$\Lambda = \Lambda_\omega \text{ در } \omega. \tag{۲}$$

برهان. فرض کنیم $\{\psi_i\}$ یک افراز واحد موضعاً متناهی تابع Γ مانند قضیهٔ ۲۰.٦ بـوده و به هر i مجموعه‌ای مانند $\omega_i \in \Gamma$ چنان مربوط باشد که ω_i شامل محافظ ψ_i باشد.

هرگاه $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$، آنگاه $\phi = \sum \psi_i \phi$. تنها تعدادی متناهی جملـه درایـن مجمـوع مخالف ۰اند، زیرا ϕ دارای محافظ فشرده می‌باشد. تعریف می‌کنیم

$$\Lambda\phi = \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda_{\omega i}\left(\psi_i \phi\right). \tag{۳}$$

واضح است که Λ یک تابعی خطی بر $\mathscr{D}(\Omega)$است.

برای اثبات پیوستگی Λ، فـرض کنیـم $\phi_j \to 0$ در $\mathscr{D}(\Omega)$. یـک مجموعـهٔ فشـرده مانند $K \subset \Omega$ هست که شامل محافظ هر ϕ_j می‌باشد. هرگاه m مانند قسمت (پـ) قضیـهٔ ۲۰.٦ اختیار شود، آنگاه

$$\Lambda\phi_j = \sum_{i=1}^{m} \Lambda_{\omega_i}\left(\psi_i\phi_j\right) \qquad (j = 1,2,3,\ldots). \tag{٤}$$

چون وقتی $j \to \infty$، $\psi_i\phi_j \to 0$ در $\mathscr{D}(\omega_i)$، از رابطهٔ (٤) داریم $\Lambda\phi_j \to 0$. بنا بر قضیهٔ ٦.٦، $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

برای اثبات (۲)، $\phi \in \mathscr{D}(\omega)$ را اختیار می‌کنیم. در این صورت

$$\psi_i\phi \in \mathscr{D}(\omega_i \cap \omega) \qquad (i = 1,2,3,\ldots) \tag{٥}$$

درنتیجه (۱) ایجاب می‌کند که $\Lambda_{\omega i}\left(\psi_i\phi\right) = \Lambda_{\omega}\left(\psi_i\phi\right)$. لذا

$$\Lambda\phi = \sum \Lambda_{\omega}\left(\psi_i\phi\right) = \Lambda_{\omega}\left(\sum \psi_i\phi\right) = \Lambda_{\omega}\phi \tag{٦}$$

که رابطهٔ (۲) را ثابت خواهد کرد.

این امر وجود Λ را ثابت می‌کند. یکتایی بدیهی است زیرا رابطهٔ (۲) (با ω_i به جای ω) ایجاب می‌کند که Λ باید در (۳) صدق نماید.

محافظهای توزیعها

۲۲.٦ تعریف. فرض کنیم $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$. اگر ω زیرمجموعهٔ بازی از Ω بوده و به‌ازای هر $\phi \in \mathscr{D}(\omega)$، $\Lambda\phi = 0$، گوییم Λ ***در ω صفر می‌شود.*** فرض کنیم W اجتماع تمام $\omega \subset \Omega$های باز باشد که درآنها Λ صفر می‌شود. متمم W (نسبت به Ω) ***محافظ*** Λ می‌باشد.

۲۳.٦ قضیه. *هرگاه W همانند فوق باشد، آنگاه Λ در W صفر می‌شود.*

برهان. W اجتماع مجموعه‌های باز ω است که در آنها Λ صفر می‌شود. فرض کنیم Γ گردایهٔ این ωها بوده و $\{\psi_i\}$ یک افراز واحد موضعاً متناهی در W تابع Γ مانند قضیهٔ ۲۰.٦ باشد. هرگاه $\phi \in \mathscr{D}(W)$، آنگاه $\phi = \sum \psi_i\phi$. تنها تعدادی متناهی ازجملات این مجموع مخالف 0اند. لذا

$$\Lambda\phi = \sum \Lambda(\psi_i \phi) = \circ$$

زیرا محافظ هر ψ_i در $\omega \in \Gamma$ای قراردارد.

مهمترین قسمت قضیهٔ زیر (ت) است. تمرین ۲۰ آن را تکمیل خواهدکرد.

۲٤.٦ قضیه. *فرض کنیم $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ و S_Λ محافظ Λ باشد.*

(آ) هرگاه محافظ $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ ای S_Λ را قطع نکند، آنگاه $\Lambda\phi = \circ$.

(ب) هرگاه S_Λ تهی باشد، آنگاه $\Lambda = \circ$.

(پ) هرگاه $\psi \in C^\infty(\Omega)$ و در مجموعهٔ بازی چون V شامل S_Λ داشته باشیم $\psi = ۱$، آنگاه $\psi\Lambda = \Lambda$.

(ت) هرگاه S_Λ زیرمجموعهٔ فشردهای از Ω باشد، آنگاه Λ از مرتبهٔ متناهی است؛ درواقع، ثابتی مانند $C < \infty$ و عددصحیح نامنفیی مانند N هست به طوری که به ازای هر $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$،

$$|\Lambda\phi| \le C\|\phi\|_N .$$

به علاوه، Λ به یک تابعی خطی پیوسته بر $C^\infty(\Omega)$ به نحوی منحصر به فرد توسیع می‌یابد.

برهان. قسمتهای (آ) و (ب) واضح‌اند. هرگاه ψ همانند (پ) بوده و $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$، آنگاه محافظ $\phi - \psi\phi$، S_A را قطع نمی‌کند. لذا، طبق (آ)، $\Lambda\phi = \Lambda(\psi\phi) = (\psi\Lambda)(\phi)$.

اگر S_A فشرده باشد، از قضیهٔ ۲۰.٦ معلوم می‌شود که $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ای صادق در (پ) وجود دارد. یک چنین ψ را ثابت گرفته و محافظش را K می‌نامیم. بنا برقضیهٔ ۸.٦، $c_۱$ و Nی وجود دارند به طوری که به ازای هر $\phi \in \mathscr{D}_K$، $|\Lambda\phi| \le c_۱\|\phi\|_N$. فرمول لایب‌نیتز نشان می‌دهد که ثابتی مانند $c_۲$ هست به طوری که به ازای هر $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$، $\|\psi\phi\|_N \le c_۲\|\phi\|_N$. لذا، به ازای هر $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$،

$$|\Lambda\phi| = |\Lambda(\psi\phi)| \le c_۱ \|\psi\phi\|_N \le c_۱ c_۲ \psi \|\phi\|_N .$$

چون به ازای هر $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$، $\Lambda\phi = \Lambda(\psi\phi)$، فرمول

$$\Lambda f = \Lambda(\psi f) \qquad \left[f \in C^\infty(\Omega)\right] \qquad (۱)$$

یک توسیع Λ را تعریف می‌کند. این توسیع پیوسته است زیرا هرگاه $f_i \to ۰$ در $C^\infty(\Omega)$، آنگاه هر مشتق f_i بر زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از Ω به طور یکنواخت به ۰ میل می‌کند. لذا فرمول لایب نیتز نشان می‌دهد که در $\mathscr{D}(\Omega)$، $\psi f_i \to ۰$؛ چون $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$، نتیجه می‌شود که $\Lambda f_i \to ۰$.

اگر $f \in C^\infty(\Omega)$ و $K_۰$ زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از Ω باشد، $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ای هست به طوری که $\phi = f$ بر $K_۰$. پس $\mathscr{D}(\Omega)$ در $C^\infty(\Omega)$ چگال است. بنابراین هر $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ حداکثر یک توسیع پیوسته به $C^\infty(\Omega)$ دارد.

تذکر. در قسمت (آ) فرض شد که ϕ در مجموعهٔ بازی شامل S_A (نه فقط بر S_A) صفر می‌شود.

در پرتو (ب)، ساده‌ترین حالت بعدی حالتی است که درآن S_Aاز یک نقطه تشکیل شده است. حال این توزیعها کاملاً توصیف می‌شوند.

۶.۲۵ قضیه. *فرض کنیم $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$، $p \in \Omega$، $\{p\}$محافظ Λ بوده، و Λ از مرتبهٔ N باشد. در این صورت ثابتهایی چون c_α وجود دارند به طوری که*

$$\Lambda = \sum_{|\alpha| \le N} c_\alpha D^\alpha \delta_p \qquad (۱)$$

که در آن δ_p تابعی ارزیاب تعریف شده به وسیلهٔ

$$\delta_p(\phi) = \phi(p) \qquad (۲)$$

می‌باشد.

به عکس، هر توزیع به شکل (۱) دارای محافظ $\{p\}$ است (مگر آنکه به ازای هر α، $c_\alpha = ۰$).

برهان. واضح است که به ازای هر اندیس چندگانهٔ α، $D^{\alpha}\delta p$ مساوی $\{p\}$است. این عکس مطلب را ثابت خواهد کرد.

برای اثبات نیمهٔ غیربدیهی قضیه، فرض می‌کنیم $p=0$ (مبدأ R^n)، و $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$را که

$$\left(D^{\alpha}\phi\right)(0)=0 \quad \text{به ازای هر } \alpha \text{ که } |\alpha| \le N \tag{۳}$$

در نظر می‌گیریم. اولین هدف ما اثبات آن است که رابطهٔ (۳) تساوی $\Lambda\phi=0$ را ایجاب می‌کند.

اگر $\eta>0$، یک گوی فشرده مانند $K\subset\Omega$ به مرکز 0 هست به طوری که

$$\text{اگر } |\alpha|=N\text{،} \quad \left|D^{\alpha}\phi\right|\le\eta \text{ در } K. \tag{٤}$$

حکم می‌کنیم که

$$\left|D^{\alpha}\phi(x)\right|\le\eta n^{N-|\alpha|}|x|^{N-|\alpha|} \qquad (x\in K\ ,\ |\alpha|\le N). \tag{۵}$$

وقتی $|\alpha|=N$، این همان (٤) است. فرض کنیم $1\le i\le N$، همچنین نامساوی (۵) به ازای هر α که $|\alpha|=i$ ثابت شده باشد، و قرار می‌دهیم $|\beta|=i-1$. گرادیان $D^{\beta}\phi$ بردار زیر است:

$$grad\ D^{\beta}\phi=\left(D_1D^{\beta}\phi,\dots,D_nD^{\beta}\phi\right). \tag{٦}$$

فرض استقرای ما ایجاب می‌کند که

$$\left|\left(grad\ D^{\beta}\phi\right)(x)\right|\le n.\eta n^{N-i}|x|^{N-i}\ (x\in K), \tag{۷}$$

و چون $\left(D^{\beta}\phi\right)(0)=0$، قضیهٔ مقدار میانگین نشان می‌دهد که (۵) به ازای β به جای α برقرار است. لذا رابطهٔ (۵) ثابت می‌شود.

یک تابع کمکی مانند $\psi\in\mathscr{D}\left(R^n\right)$ که در همسایگیی از 0 مساوی ۱ بوده و محافظش در گوی یکهٔ B از R^n قراردارد اختیار می‌کنیم. تعریف می‌کنیم

$$\psi_r(x)=\psi\left(\frac{x}{r}\right) \qquad \left(r>0, x\in R^n\right). \tag{۸}$$

اگر r به قدرکافی کوچک باشد، محافظ ψ_r در $rB\subset K$ قراردارد. بنابر فرمول لایب‌نیتز

$$D^{\alpha}\left(\psi_r\phi\right)(x)=\sum_{\beta\le\alpha}c_{\alpha\beta}\left(D^{\alpha-\beta}\psi\right)\left(\frac{x}{r}\right)\left(D^{\beta}\phi\right)(x)r^{|\beta|-|\alpha|}. \tag{۹}$$

حال از (۵) نتیجه می‌شود که اگر r به قدر کافی کوچک باشد،

$$\|\psi_r\phi\|_N \le \eta C\|\psi\|_N . \tag{۱۰}$$

در اینجا C تابع n و N است.

چون Λ از مرتبهٔ N است، ثابتی مانند $C_۱$ هست به طوری که به ازای هر $\psi \in \mathscr{D}_K$، $|\Lambda\psi| \le C_۱\|\psi\|_N$. چون در همسایگیی از محافظ Λ، $\psi_r = ۱$، از رابطهٔ (۱۰) و قسمت (پ)قضیهٔ ۲٤.٦ داریم

$$|\Lambda\phi| = |\Lambda(\psi_r\phi)| \le C_۱\|\psi_r\phi\|_N \le \eta C C_۱\|\psi\|_N .$$

چون η دلخواه بود، ثابت کرده‌ایم که هروقت (۳) برقرار باشد، $\Lambda\phi = ۰$.

به عبارت دیگر، Λ روی اشتراک فضاهـای پـوچ تابعیهـای $D^\alpha\delta_۰ (|\alpha| \le N)$ صفـر می‌شود، زیرا

$$\left(D^\alpha\delta_۰\right)\phi = (-۱)^{|\alpha|}\delta_۰\left(D^\alpha\phi\right) = (-۱)^{|\alpha|}\left(D^\alpha\phi\right)(۰). \tag{۱۱}$$

حال نمایش (۱) از لم ۹.۳ نتیجه خواهدشد.

توزیعها به عنوان مشتقات

در آشنایی با این فصل متذکر شدیم که یکی از اهداف نظریهٔ توزیعها تعمیم مفهوم تـابع به صورتی است که مشتقگیریهای جزیی را بتوان بدون تحدید انجام داد. توزیعها حـائز این شرطاند. به عکس، همانطور که اینک خواهیم دید، هر توزیع (دست کم موضعاً) به ازای تابع پیوسته‌ای چون f و اندیس چندگانه‌ای مانند α به صـورت $D^\alpha f$ اسـت. اگـر هر تابع پیوسته باید از هر مرتبه مشتق جزئی داشته باشد، هیچ زیررده‌ٔ حقیقـی توزیعهـا نمی‌تواند مناسب باشد. در این معنی، توسیع توزیعی مفهوم تابع حتی‌الامکـان اقتصـادی خواهدبود.

۲٦.٦ قضیه. *فرض کنیم $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ و K زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از Ω باشد. در این صورت یک تابع پیوسته مانند f در Ω و یک اندیس چندگانـه مـانند α هسـت بـه*

طوری که به ازای هر $\phi \in \mathscr{D}_K$،

$$\Lambda\phi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x)\left(D^\alpha \phi\right)(x)dx. \tag{1}$$

برهان. بی آنکه به کلیت خللی وارد آید، فرض می‌کنیم $K \subset Q$ که در آن Q مکعب یکه در R^n مرکب از تمام $x = (x_1, \ldots, x_n)$ هایی است که به ازای $i = 1, \ldots, n$، $0 \le x_i \le 1$. قضیهٔ مقدار میانگین نشان می‌دهد که به ازای $i = 1, \ldots, n$،

$$|\psi| \le \max_{x \in Q}\left|\left(D_i \psi\right)(x)\right| \qquad \left(\psi \in \mathscr{D}_Q\right). \tag{2}$$

قرار می‌دهیم $T = D_1 D_2 \ldots D_n$. به ازای $y \in Q$، فرض کنیم $Q(y)$ زیرمجموعه‌ای از Q باشد که در آن $x_i \le y_i$ ($1 \le i \le n$). در این صورت

$$\psi(y) = \int_{Q(y)} (T\psi)(x)dx \qquad \left(\psi \in \mathscr{D}_Q\right). \tag{3}$$

اگر N یک عدد صحیح نامنفی بوده و نامساوی (۲) را بر مشتقات متوالی ψ اعمال کنیم، رابطهٔ (۳) به نامساوی زیر به ازای هر $\psi \in \mathscr{D}_Q$ منجر خواهدشد:

$$\|\psi\|_N \le \max_{x \in Q}\left|\left(T^N \psi\right)(x)\right| \le \int_Q \left|\left(T^{N+1}\psi\right)(x)\right| dx. \tag{4}$$

چون $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$، اعدادی مانند N و C وجود دارند به طوری که

$$|\Lambda\phi| \le C\|\phi\|_N \qquad \left(\phi \in \mathscr{D}_K\right). \tag{5}$$

لذا رابطهٔ (٤) نشان می‌دهد که

$$|\Lambda\phi| \le \int_K \left|\left(T^{N+1}\phi\right)(x)\right| dx \qquad (\phi \in \mathscr{D}_K). \tag{6}$$

بنابر رابطهٔ (۳)، T بر $\mathscr{D}_Q$ و لذا بر $\mathscr{D}_K$ یک به یک است. درنتیجه $T^{N+1}: \mathscr{D}_K \to \mathscr{D}_K$ یک به یک است. لذا تابعی Λ_1 را می‌توان بر برد Y از T^{N+1} با قراردادن

$$\Lambda_1 T^{N+1}\phi = \Lambda\phi \qquad \left(\phi \in \mathscr{D}_K\right) \tag{7}$$

تعریف کرد، و رابطهٔ (٦) نشان می‌دهد که

$$\left|\Lambda_1 \psi\right| \le C \int_K |\psi(x)| dx \qquad (\psi \in Y). \tag{8}$$

لذا قضیهٔ هان ـ باناخ Λ_1 را به یک تابعی خطی کراندار بر $L^1(K)$ توسیع می‌دهد. به

عبارت دیگر، یک تابع بورل کراندار مانند g بر K هست به طوری که

$$\Lambda\phi = \Lambda_1 T^{N+1}\phi = \int_K g(x)\left(T^{N+1}\phi\right)(x)dx \qquad \left(\phi \in \mathscr{D}_K\right). \tag{۹}$$

خارج K تعریف می‌کنیم $g(x) = 0$ و قرار می‌دهیم

$$f(y) = \int_{-\infty}^{y_1} \cdots \int_{-\infty}^{y_n} g(x)dx_n \ldots dx_1 \qquad \left(y \in R^n\right). \tag{۱۰}$$

دراین صورت f پیوسته است، و با n بار انتگرالگیری جزء به جزء معلوم می‌شود که از رابطهٔ (۹)داریم

$$\Lambda\phi = (-1)^n \int_\Omega f(x)\left(T^{N+2}\phi\right)(x)dx \qquad \left(\phi \in \mathscr{D}_K\right). \tag{۱۱}$$

این همان رابطهٔ (۱) به ازای $\alpha = (N+2,\ldots,N+2)$ است جز احتمالاً تغییری در علامت.

وقتی Λ محافظ فشرده داشته باشد، نتیجه موضعیی را که هم اکنون ثابت شد می‌توان به یک نتیجهٔ سراسری بدل ساخت:

۲۷.٦ قضیه. *فرض کنیم K فشرده بوده، V و Ω در R^n باز باشند، و $K \subset V \subset \Omega$. همچنین $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$، K محافظ Λ بوده، و Λ از مرتبهٔ N باشد. در این صورت تعدادی متناهی تابع پیوستهٔ f_β در Ω (به ازای هر اندیس چندگانهٔ β با $\beta_i \le N+2$ به ازای $i = 1,\ldots,n$ یکی) با محافظهای در V چنان وجود دارند که*

$$\Lambda = \sum_\beta D^\beta f_\beta . \tag{۱}$$

البته این مشتقها باید به مفهوم توزیع گرفته شوند: رابطهٔ (۱) یعنی

$$\Lambda\phi = \sum_\beta (-1)^{|\beta|} \int_\Omega f_\beta(x)\left(D^\beta\phi\right)(x)dx \qquad [\phi \in \mathscr{D}(\Omega)]. \tag{۲}$$

برهان. مجموعهٔ باز W را با بست فشردهٔ $\overline{W}$ طوری می‌گیریم که $K \subset W$ و $\overline{W} \subset V$.

قضیهٔ ٢٦.٦ را با $\overline{W}$ به جای K به کار می‌بریم. قرار می‌دهیم $\alpha = (N+2,\ldots,N+2)$.
برهان قضیهٔ ٢٦.٦ نشان می‌دهد که یک تابع پیوسته مانند f در Ω چنان وجود دارد که

$$\Lambda\phi = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f(x)\big(D^\alpha\phi\big)(x)dx \qquad [\phi\in\mathscr{D}(W)]. \tag{3}$$

بدون مشوب کردن (٣) می‌توان f را در یک تابع پیوسته که بر $\overline{W}$ مساوی ١ بوده و محافظش در V باشد ضرب کرد.

$\psi\in\mathscr{D}(\Omega)$ را با محافظ در W که بر مجموعهٔ بازی شامل K، $\psi=1$ ثابت می‌گیریم. در این صورت (٣) به ازای هر $\phi\in\mathscr{D}(\Omega)$ ایجاب می‌کند که

$$\begin{aligned}\Lambda\phi = \Lambda(\psi\phi) &= (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f.D^\alpha(\psi\phi)\\ &= (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f\sum_{\beta\le\alpha} c_{\alpha\beta}D^{\alpha-\beta}\psi D^\beta\phi\,.\end{aligned}$$

این همان رابطهٔ (٢) است با

$$f_\beta = (-1)^{|\alpha-\beta|}c_{\alpha\beta}f.D^{\alpha-\beta}\psi \qquad (\beta\le\alpha).$$

قضیهٔ بعدی ما ساختار سراسری توزیعها را توصیف می‌کند.

٢٨.٦ قضیه. ***فرض کنیم $\Lambda\in\mathscr{D}'(\Omega)$. در این صورت توابع پیوسته‌ای چون g_α در Ω (به ازای هر اندیس چندگانهٔ α یکی) وجود دارد به طوری که***

(آ) هر $K\subset\Omega$ی فشرده محافظهای فقط تعدادی متناهی g_α را قطع می‌کند، و

(ب) $\Lambda = \sum_\alpha D^\alpha g_\alpha$.

هرگاه Λ از مرتبهٔ متناهی باشد، آنگاه توابع g_α را می‌توان طوری اختیار کرد که فقط تعدادی متناهی با ٠ متفاوت باشند.

برهان. مکعبهای فشردهٔ Q_i و مجموعه‌های باز V_i $(i=1,2,3,\ldots)$ چنان وجود دارند که $Q_i\subset V_i\subset\Omega$، Ω اجتماع Q_i است، و هیچ زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از Ω تعدادی نامتناهی از V_i را قطع نمی‌کند. $\phi_i\in\mathscr{D}(V_i)$ چنان وجود دارد که $\phi_i=1$ بر Q_i. با استفاده

از این دنبالهٔ $\{\phi_i\}$ افراز واحد $\{\psi_i\}$ را مانند قضیهٔ ۲۰.۶ می‌سازیم؛ محافظ هر ψ_i در V_i است.

قضیهٔ ۲۷.۶ بر هر $\psi_i\Lambda$ قابل اعمال است. این نشان می‌دهد که تعدادی متناهی تابع پیوسته مانند $f_{i,\alpha}$ با محافظهای در V_i چنان وجود دارند که

$$\psi_i\Lambda = \sum_{\alpha} D^{\alpha} f_{i,\alpha}. \tag{۱}$$

تعریف می‌کنیم

$$g_{\alpha} = \sum_{i=1}^{\infty} f_{i,\alpha}. \tag{۲}$$

این مجموعها موضعاً متناهی‌اند به این معنی که هر $K \subset \Omega$ ی فشرده محافظهای تعدادی متناهی $f_{i,\alpha}$ را قطع می‌کند. پس هر g_{α} در Ω پیوسته است و (آ) برقرار می‌باشد.

چون به ازای هر $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$، $\phi = \sum \psi_i \phi$، داریم $\Lambda = \sum \psi_i \Lambda$ و لذا از (۱) و (۲) قسمت (ب) را خواهیم داشت.

حکم نهایی از قضیهٔ ۲۷.۶ نتیجه می‌شود.

پیچشها

با پیچشهای دوتابع شروع کرده و پیچش یک توزیع و یک تابع آزمون را تعریف می‌کنیم و سپس (تحت شرایطی) پیچش دو توزیع را تعریف خواهیم کرد. این امور در کاربردهای تبدیلات فوریه در معادلات دیفرانسیل اهمیت دارند. یک خاصیت مشخصهٔ پیچشها این است که با انتقالها و مشتقگیریها تعویض می‌شوند (قضایای ۳۰.۶، ۳۳.۶، و ۳۷.۶). همچنین مشتقگیریها را می‌توان به عنوان پیچشها با مشتقات اندازهٔ دیراک در نظر گرفت (قضیهٔ ۳۷.۶).

شایسته است در نمادگذاری تغییر مختصری داده و از حروف u، v، ... برای هم توزیعها و هم توابع استفاده نماییم.

۲۹.٦ چند تعریف. تا پایان این فصل به جای $\mathscr{D}(R^n)$ و $\mathscr{D}'(R^n)$ می‌نویسیم $\mathscr{D}$ و $\mathscr{D}'$. اگر u تابعی در R^n بوده و $x \in R^n$، $\tau_x u$ و $\breve{u}$ توابعی هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(\tau_x u)(y) = u(y-x), \quad \breve{u}(y) = u(-y) \quad (y \in R^n). \tag{۱}$$

توجه کنید که

$$(\tau_x \breve{u})(y) = \breve{u}(y-x) = (x-y). \tag{۲}$$

اگر u و v توابع مختلطی در R^n باشند، پیچش آنها $u * v$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(u * v)(x) = \int_{R^n} u(y)v(x-y)dy \tag{۳}$$

مشروط بر اینکه انتگرال به ازای هر (یا دست کم تقریباً هر) $x \in R^n$ به مفهوم لبگ موجود باشد. به خاطر رابطهٔ (۲) داریم

$$(u * v)(x) = \int_{R^n} u(y)(\tau_x \breve{v})(y)dy. \tag{٤}$$

این تعریف زیر را طبیعی جلوه می‌دهد:

$$(u * \phi)(x) = u(\tau_x \breve{\phi}) \quad (u \in \mathscr{D}', \phi \in \mathscr{D}, x \in R^n) \tag{۵}$$

زیرا هرگاه u یک تابع موضعاً انتگرالپذیر باشد، رابطهٔ (۵) با (٤) توافق دارد. توجه کنید که $u * \phi$ یک تابع است.

رابطهٔ $\int(\tau_x u).v = \int u.(\tau_{-x} v)$، که برای توابع u و v معتبر است، تعریف انتقال $\tau_x u$ از $u \in \mathscr{D}'$ به وسیلهٔ

$$(\tau_x u)(\phi) = u(\tau_{-x}\phi) \quad (\phi \in \mathscr{D}, x \in R^n) \tag{٦}$$

را طبیعی جلوه می‌دهد. در این صورت، به ازای هر $x \in R^n$، $\tau_x u \in \mathscr{D}'$. تحقیق شرط پیوستگی مناسب را به عنوان تمرین می‌گذاریم

۳۰.٦ قضیه. *فرض کنیم $u \in \mathscr{D}'$، $\phi \in \mathscr{D}$، و $\psi \in \mathscr{D}$. در این صورت*

(آ) به ازای هر $x \in R^n$، $\tau_x(u*\phi) = (\tau_x u) * \phi = u * (\tau_x \phi)$ ؛

(بـ) $u * \phi \in C^\infty$ و به ازای هر اندیس چندگانه مانند α،

$$D^\alpha (u * \phi) = (D^\alpha u) * \phi = u * (D^\alpha \phi) \ ;$$

(پـ) $u * (\phi * \psi) = (u * \phi) * \psi$.

برهان. به ازای هر $y \in R^n$

$$(\tau_x(u * \phi))(y) = (u * \phi)(y-x) = u(\tau_{y-x}\check{\phi}),$$
$$((\tau_x u) * \phi)(y) = (\tau_x u)(t_y\check{\phi}) = u(\tau_{y-x}\check{\phi}),$$
$$(u * (\tau_x \phi))(y) = u(\tau_y (\tau_x \phi)^\vee) = u(\tau_{y-x}\check{\phi}),$$

که قسمت (آ) را به دست می‌دهد؛ از روابط

$$(\tau_x \phi)\check{} = \tau_{-x}\check{\phi} \qquad \text{و} \qquad \tau_y \tau_{-x} = \tau_{y-x}$$

استفاده شده است. در آینده گاهی محاسبات صرفاً صوری مانند محاسبات فوق را حذف خواهیم کرد.

اگر u در طرفین اتحاد

$$\tau_x ((D^\alpha \phi)\check{}) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (\tau_x \check{\phi}) \qquad (۱)$$

اعمال شود، قسمت (بـ) به دست می‌آید؛ یعنی

$$(u*(D^\alpha \phi))(x) = ((D^\alpha u) * \phi)(x) \ .$$

برای اثبات بقیهٔ (بـ)، فرض کنیم e یک بردار یکه در R^n باشد، و قرار می‌دهیم

$$\eta_r = r^{-1}(\tau_0 - \tau_{re}) \qquad (r > 0) \ . \qquad (۲)$$

در این صورت از (آ) داریم

$$\eta_r (u * \phi) = u * (\eta_r \phi). \qquad (۳)$$

وقتی $r \to 0$، $\eta_r \phi \to D_e \phi$ در $\mathscr{D}$ که در آن D_e مشتق جهتی در جهت e است. لذا، به ازای هر $x \in R^n$،

$$\tau_x ((\eta_r \phi)\check{}) \to \tau_x (D_e \phi)\check{} \ \text{در} \ \mathscr{D} \text{؛}$$

درنتیجه

$$\lim_{r\to 0}\left(u*\left(\eta_r\phi\right)\right)(x)=\left(u*\left(D_e\phi\right)\right)(x)\,. \tag{٤}$$

بنابر روابط (۳) و (٤) داریم

$$D_e\left(u*\phi\right)=u*\left(D_e\phi\right), \tag{٥}$$

و با تکرار (٥) قسمت (ب) به دست می‌آید.

برای اثبات (پ) با اتحاد زیر شروع می‌کنیم:

$$(\phi*\psi)\check{}(t)=\int_{R^n}\check{\psi}(s)\left(\tau_x\check{\phi}\right)(t)ds. \tag{٦}$$

فرض کنیم K_1 و K_2 محافظهای $\check{\phi}$ و $\check{\psi}$ باشند. قرار می‌دهیم $K=K_1+K_2$. دراین صورت

$$s\to\check{\psi}(s)\tau_s\check{\phi}$$

یک نگاشت پیوسته از R^n به توی $\mathscr{D}_K$ است که خارج K_2 مساوی ۰ است. بنابراین رابطهٔ (٦) را می‌توان به صورت یک انتگرال $\mathscr{D}_K$ مقدار نوشت؛ یعنی

$$(\phi*\psi)\check{}=\int_{K_2}\check{\psi}(s)\tau_s\check{\phi}ds, \tag{٧}$$

و حال قضیهٔ ۲۷.۳ نشان می‌دهد که

$$\begin{aligned}\left(u*\left(\phi*\psi\right)\right)(0)&=u\left((\phi*\psi)\check{}\right)\\&=\int_{K_2}\check{\psi}(s)u(\tau_s\check{\psi})ds=\int_{R^n}\psi(-s)\left(u*\phi\right)(s)ds\end{aligned}$$

یا

$$\left(u*\left(\phi*\psi\right)\right)(0)=\left(\left(u*\phi\right)*\psi\right)(0)\,. \tag{٨}$$

برای به دست آوردن (٨) با x به جای ۰، رابطهٔ (٨) را بر $\tau_{-x}\psi$ به جای ψ اعمال کرده و به قسمت (آ) متوسل می‌شویم. این قسمت (پ) را ثابت می‌کند.

۳۱.٦ تعریف. ***اتحاد تقریبی بر*** R^n یعنی دنباله‌ای از توابع h_j به شکل

$$h_j(x)=j^nh(jx)\qquad(j=1,2,3,\ldots),$$

که در آن $h\in\mathscr{D}\left(R^n\right)$، $h\ge 0$، و $\int_{R^n}h(x)dx=1$.

۳۲.٦ قضیه. *فرض کنیم* $\{h_j\}$ *یک اتحاد تقریبی بـر* R^n *بـوده،* $\phi \in \mathscr{D}$، *و* $u \in \mathscr{D}'$.

در این صورت

(آ) $\lim\limits_{j\to\infty} \phi * h_j = \phi$ در $\mathscr{D}$،

(بـ) $\lim\limits_{j\to\infty} u * h_j = u$ در $\mathscr{D}'$.

قسمت (بـ) ایجاب می‌کند که هر توزیع در توپولوژی $\mathscr{D}'$ حـد دنبالـه‌ای از توابـع بی‌نهایت بار مشتقپذیر است.

برهان. به آسانی معلوم می‌شود که اگر f تابع پیوسته‌ای بـر R^n باشـد، $f * h_j \to f$ بـه طور یکنواخت بر مجموعه‌های فشرده. با اعمال این بر $D^\alpha\phi$ به جای f، معلوم می‌شـود کـه بـه طـور یکنواخـت $D^\alpha(\phi * h_j) \to D^\alpha\phi$. همچنیـن محافظهـای تمـام $\phi * h_j$ در مجموعهٔ فشرده‌ای قراردارند چرا که محافظهـای h_jهـا بـه $\{0\}$ منقبـض می‌شـوند. ایـن قسمت (آ) را به ما می‌دهد.

حال قسمت (آ) و حکم (پ) قضیهٔ ۳۰.٦ قسمت (بـ) را به دست می‌دهند، زیرا

$$u(\check{\phi}) = (u * \phi)(0) = \lim\big(u * (h_j * \phi)\big)(0)$$
$$= \lim\big((u * h_j) * \phi\big)(0) = \lim(u * h_j)(\check{\phi}).$$

۳۳.٦ قضیه

(آ) *هرگاه* $u * \mathscr{D}'$ *و*

$$L\phi = u * \phi \qquad (\phi \in \mathscr{D}), \tag{1}$$

آنگاه L *یک نگاشت خطی پیوسته از* $\mathscr{D}$ *به توی* C^∞ *است که در*

$$\tau_x L = L\tau_x \qquad \left(x \in R^n\right) \tag{2}$$

صدق می‌کند.

(بـ) *به عکس، هرگاه* L *یک نگاشت خطی پیوسته از* $\mathscr{D}$ *به توی* $C(R^n)$ *بوده و* L

در (۲) صدق کند، آنگاه $u \in \mathscr{D}'$ ای منحصر به فرد هست که (۱) برقرار باشد.

توجه کنید که قسمت (ب) ایجاب می‌کند که برد L عملاً در C^{∞} قراردارد.

برهان. (آ) چون $\tau_x(u * \phi) = u * (\tau_x \phi)$، رابطهٔ (۱) رابطهٔ (۲) را ایجاب می‌کند. برای اثبات پیوستگی L باید نشان دهیم که تحدید L به هر $\mathscr{D}_K$ یک نگاشت پیوسته به توی C^{∞} است. چون اینها فضاهای فرشه‌اند، قضیهٔ گراف بسته را می‌توان به کار برد.
فرض کنیم $\phi_i \to \phi$ در $\mathscr{D}_K$ و $u * \phi_i \to f$ در C^{∞}؛ باید ثابت کنیم که $f = u * \phi$.

$x \in R^n$ را ثابت می‌گیریم. در این صورت $\tau_x \check{\phi}_i \to \tau_x \check{\phi}$ در $\mathscr{D}$؛ درنتیجه

$$f(x) = \lim (u * \phi_i)(x) = \lim u(\tau_x \check{\phi}_i) = u(\tau_x \check{\phi}) = (u * \phi)(x).$$

(ب) تعریف می‌کنیم $u(\phi) = (L\check{\phi})(\circ)$. چون $\phi \to \check{\phi}$ یک عملگر پیوسته بر $\mathscr{D}$ است، و تابع ارزیاب در $\circ$ یک تابعی خطی پیوسته بر C است، u بر $\mathscr{D}$ پیوسته می‌باشد. لذا $u \in \mathscr{D}'$. چون L در رابطهٔ (۲) صدق می‌کند،

$$\begin{aligned}(L\phi)(x) &= (\tau_{-x} L\phi)(\circ) = (L\tau_{-x}\phi)(\circ) \\ &= u((\tau_{-x}\phi)\check{}\,) = u(\tau_x \check{\phi}) = (u * \phi)(x).\end{aligned}$$

یکتایی u واضح است، زیرا هرگاه $u \in \mathscr{D}'$ و به ازای هر $\phi \in \mathscr{D}$، $u * \phi = \circ$، آنگاه به ازای هر $\phi \in \mathscr{D}$،

$$u(\check{\phi}) = (u * \phi)(\circ) = \circ;$$

درنتیجه $u = \circ$.

۳٤.٦ تعریف. حال فرض کنیم $u \in \mathscr{D}'$ و u دارای محافظ فشرده باشد. بنا برقضیهٔ ۲٤.٦، u به یک تابعی خطی پیوسته بر C^{∞} فقط به یک طریق توسیع می‌یابد. لذا می‌توان پیچش u و هر $\phi \in C^{\infty}$ را با همان فرمول قبل تعریف کرد؛ یعنی

$$(u * \phi)(x) = u(\tau_x \check{\phi}) \qquad (x \in R^n).$$

۳۵.٦ قضیه. *فرض کنیم $u \in \mathscr{D}'$ دارای محافظ فشرده بوده و $\phi \in C^\infty$. در این صورت*

(آ) *اگر* $x \in R^n$، $\tau_x(u * \phi) = (\tau_x u) * \phi = u * (\tau_x \phi)$.

(ب) $u * \phi \in C^\infty$ *و*

$$D^\alpha(u * \phi) = \left(D^\alpha u\right) * \phi = u * \left(D^\alpha \phi\right).$$

هرگاه، علاوه بر این، $\psi \in \mathscr{D}$*، آنگاه*

(پ) $u * \psi \in \mathscr{D}$ *، و*

(ت) $u * (\phi * \psi) = (u * \phi) * \psi = (u * \psi) * \phi$.

برهان. برهانهای (آ) و (ب) آنقدر به برهانهای آمده درقضیهٔ ۳۰.٦ شبیه‌اند که لازم به تکرار نیستند. برای اثبات (پ)، فرض کنیم K و H به ترتیب محافظهای u و ψ باشند. محافظ $\tau_x \check{\psi}$ مساوی $x - H$ است. بنابراین

$$(u * \psi)(x) = u(\tau_x \check{\psi}) = 0$$

مگر آنکه K مجموعهٔ $x - H$ را قطع کند؛ یعنی مگر آنکه $x \in K + H$. لذا محافظ $u * \psi$ در مجموعهٔ فشردهٔ $K + H$ قراردارد.

برای اثبات (ت)، فرض کنیم W یک مجموعهٔ بازکراندار باشد که شامل K است، و $\phi_0 \in \mathscr{D}$ را طوری می‌گیریم که $\phi_0 = \phi$ در $W + H$. در این صورت $(\phi * \psi)\check{} = (\phi_0 * \psi)\check{}$ در W؛ درنتیجه

$$\left(u(\phi * \psi)\right)(0) = \left(u * (\phi_0 * \psi)\right)(0). \tag{1}$$

هرگاه $-s \in H$، آنگاه $\tau_s \check{\phi} = \tau_s \check{\phi}_0$ در W؛ درنتیجه $u * \phi = u * \phi_0$ در $-H$. این نتیجه می‌دهد که

$$((u * \phi) * \psi)(0) = ((u * \phi_0) * \psi)(0). \tag{2}$$

چون محافظ $u * \psi$ در $K+H$ است،

$$((u * \psi) * \phi)(\circ) = ((u * \psi) * \phi_\circ(\circ)). \tag{۳}$$

بنابر قضیهٔ ۳۰.۶، طرفهای راست (۱) تا (۳) مساویند؛ لذا طرفهای چپ آنها نیز چنین‌اند. این ثابت می‌کند که سه پیچش در (ت) در مبدأ برابر می‌باشند. حالت کلی، همانند آخربرهان قضیهٔ ۳۰.۶، به وسیلهٔ انتقال نتیجه می‌شود.

۳۶.۶ تعریف. اگر $u \in \mathscr{D}'$، $v \in \mathscr{D}'$، و دست کم یکی از این دو توزیع محافظ فشرده داشته باشد، تعریف می‌کنیم

$$L\phi = u * (v * \phi) \qquad (\phi \in \mathscr{D}). \tag{۱}$$

این رابطه خوش تعریف است. چرا که اگر v محافظ فشرده داشته باشد، $v * \phi \in \mathscr{D}$ و $L\phi \in C^\infty$؛ هرگاه u محافظ فشرده داشته باشد، آنگاه مجدداً $L\phi \in C^\infty$ زیرا $v * \phi \in C^\infty$. همچنین، به ازای هر $x \in R^n$، $\tau_x L = L\tau_x$. این احکام از قضایای ۳۰.۶ و ۳۵.۶ نتیجه می‌شوند.

تابعی $\phi \to (L\check{\phi})(\circ)$ درواقع یک توزیع است. برای مشاهدهٔ این امر، فرض کنیم $\phi_i \to \circ$ در $\mathscr{D}$. بنابر قسمت (آ) قضیهٔ ۳۳.۶، $v * \check{\phi}_i \to \circ$ در C^∞؛ هرگاه، علاوه براین، v محافظ فشرده داشته باشد، آنگاه $v * \check{\phi}_i \to \circ$ در $\mathscr{D}$. در هر حالت نتیجه می‌شود که $(L\check{\phi}_i)(\circ) = \circ$.

حال برهان قسمت (ب) قضیهٔ ۳۳.۶ نشان می‌دهد که این توزیع، که با $u * v$ نموده می‌شود، با L به وسیلهٔ فرمول زیر مربوط است:

$$L\phi = (u * v) * \phi \qquad (\phi \in \mathscr{D}). \tag{۲}$$

به عبارت دیگر، $u * v \in \mathscr{D}'$ با رابطهٔ

$$(u * v) * \phi = u * (v * \phi) \qquad (\phi \in \mathscr{D}) \tag{۳}$$

توصیف می‌شود.

۳۷.۶ قضیه. *فرض کنیم* $u \in \mathscr{D}'$، $v \in \mathscr{D}'$، *و* $w \in \mathscr{D}'$.

(آ) هرگاه دست کم یکی از u و v محافظ فشرده داشته باشد، آنگاه $u * v = v * u$.

(ب) هرگاه S_u و S_v محافظهای u و v بوده و دست کم یکی از اینها فشرده باشد، آنگاه

$$S_{u*v} \subset S_u + S_v .$$

(پ) هرگاه دست کم دو تا از محافظهای S_u، S_v، و S_w فشرده باشند، آنگاه $(u * v) * w = u * (v * w)$.

(ت) هرگاه δ اندازهٔ دیراک و α یک اندیس چندگانه باشد، آنگاه

$$D^{\alpha} u = \left(D^{\alpha}\delta\right) * u.$$

به خصوص، $u = \delta * u$.

(ث)هرگاه دست کم یکی از مجموعه‌های S_u و S_v فشرده باشد، آنگاه، به ازای هر اندیس چندگانهٔ α،

$$D^{\alpha}(u * v) = \left(D^{\alpha} u\right) * v = u * \left(D^{\alpha} v\right).$$

تذکر. قانون شرکتپذیری (پ) قویاً تابع مفروضات ذکر شده است؛ ر.ک.تمرین ٢٤.

برهان. (آ) $\phi \in \mathscr{D}$ و $\psi \in \mathscr{D}$ را اختیار می‌کنیم. چون پیچش توابع تعویضپذیر است، قسمت (پ) قضیهٔ ٣٠.٦ ایجاب می‌کند که

$$\begin{aligned}(u * v) * (\phi * \psi) &= u * \left(v * (\phi * \psi)\right)\\ &= u * \left((v * \phi) * \psi\right) = u * \left(\psi * (v * \phi)\right).\end{aligned}$$

اگر S_v فشرده باشد، قسمت (پ) قضیهٔ ٣٠.٦ را بار دیگر به کار می‌بریم؛ اگر S_u فشرده باشد، قسمت (ت) قضیهٔ ٣٥.٦ را به کار می‌بریم؛ در هر حالت

$$(u * v) * (\phi * \psi) = (u * \psi) * (v * \phi) . \qquad (١)$$

چون $\phi * \psi = \psi * \phi$، همان محاسبه نتیجه می‌دهد که

$$(v * u) * (\phi * \psi) = (v * \phi) * (u * \psi). \qquad (۲)$$

دو عضو راست (۱) و (۲) پیچشهای توابع‌اند (یکی در $\mathscr{D}$ یکی در C^{∞}). لـذا بـا هم مساویند. بنابراین

$$\big((u * v) * \phi\big) * \psi = \big((v * u) * \phi\big) * \psi\,. \qquad (۳)$$

حال دو کاربرد استدلال یکتایی به کاررفته در آخر برهان قضیهٔ ۳۳.۶ نتیجه می‌دهـد کـه $u * v = v * u$.

(ب) اگر $\phi \in \mathscr{D}$، محاسبه‌ای ساده نتیجه می‌دهد که

$$(u * v)(\phi) = u\big((v * \check{\phi})\check{}\big). \qquad (٤)$$

بنابر قسمت (آ) می‌توان بدون آسیب‌زدن به کلیت فرض کرد S_v فشرده است.

برهان قسمت (پ) قضیهٔ ۳۵.٦ نشان می‌دهد که محافظ $v * \check{\phi}$ در $S_\phi - S_v$ قـراردارد. بنابر رابطهٔ (٤)، $(u * v)(\phi) = 0$ مگرآنکه S_u مجموعهٔ $S_\phi - S_v$ را قطع کنـد؛ یعنـی مگـر آنکه S_ϕ مجموعهٔ $S_u + S_v$ را قطع کند.

(پ) از قسمت (ب) نتیجه می‌گیریم که هر دو عبارت

$$(u * v) * w \qquad \text{و} \qquad u * (v * w)$$

درصورتی تعریف شده‌اند که حداکثر یکی از مجموعه‌های S_u، S_v، S_w فشـرده نباشـد. اگر $\phi \in \mathscr{D}$، مستقیماً از تعریف ٣٦.٦ نتیجه می‌شود که

$$(u * (v * w)) * \phi = u * ((v * w) * \phi) = u * (v * (w * \phi))\,. \qquad (۵)$$

هرگاه S_w فشرده باشد، آنگاه

$$((u * v) * w) * \phi = (u * v) * (w * \phi) = u * (v * (w * \phi)) \qquad (٦)$$

زیرا، بنا بر قسمت (پ) قضیهٔ ۳۵.٦ ، $w * \phi \in \mathscr{D}$. از مقایسهٔ (۵) و (٦) قسمت (پ) وقتی S_w فشرده است به دست می‌آید.

هرگاه S_w فشرده نباشد، آنگاه S_u فشرده اسـت و از تلفیـق حـالت قبـل بـا قـانون تعویضپذیری (آ) نتیجه می‌شود که

$$u * (v * w) = u * (w * v) = (w * v) * u$$

$$= w * (v * u) = w * (u * v) = (u * v) * w \,.$$

(ت) هرگاه $\phi \in \mathscr{D}$، آنگاه $\phi * \delta = \phi$ زیرا

$$(\delta * \phi)(x) = \delta(\tau_x \check{\phi}) = (\tau_x \check{\phi})(0) = \check{\phi}(-x) = \phi(x).$$

لذا قسمت (پ) فوق و قسمت (ب) قضیهٔ ۳۰.٦ نتیجه می‌دهند که

$$(D^\alpha u) * \phi = u * D^\alpha \phi = u * D^\alpha (\delta * \phi) = u * (D^\alpha \delta) * \phi.$$

بالأخره، قسمت (ث) از قسمتهای (ت)،(پ)، و (آ) نتیجه می‌شود:

$$D^\alpha (u * v) = (D^\alpha \delta) * (u * v) = ((D^\alpha \delta) * u) * v = (D^\alpha u) * v$$

و

$$((D^\alpha \delta) * u) * v = (u * D^\alpha \delta) * v = u * ((D^\alpha \delta) * v) = u * D^\alpha v \,.$$

تمرینات

۱. فرض کنید f یک تابع پیوستهٔ مختلط در R^n با محافظ فشرده باشد. ثابت کنید به ازای $\psi \in \mathscr{D}$ای و دنباله‌ای مانند $\{P_j\}$ از چندجمله‌ایها $\psi P_j \to f$ به طور یکنواخت بر R^n.

۲. نشان دهید که توپولوژی مترپذیر برای $\mathscr{D}(\Omega)$ که دربخش ۲.٦ رد شد به ازای هر Ω تام نیست.

۳. اگر E زیرمجموعهٔ بستهٔ دلخواهی از R^n باشد،نشان دهید که $f \in C^\infty(R^n)$ ی هست به طوری که به ازای هر $x \in E$، $f(x) = 0$ و به ازای هر $x \in R^n$ دیگر $f(x) > 0$.

٤. فرض کنید $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ و هروقت $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ و $\phi \ge 0$، $\Lambda\phi \ge 0$. ثابت کنید Λ یک اندازهٔ مثبت در Ω است (که بر مجموعه‌های فشرده متناهی می‌باشد).

۵. ثابت کنید اعداد $c_{\alpha\beta}$ درفرمول لایب نیتز عبارتند از

$$c_{\alpha\beta} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i!}{\beta_i!(\alpha_i - \beta_i)!}$$

٦. (آ) فرض کنید $c_m = \exp\{-(m!)!\}$، $m = 0,1,2,\ldots$. آیا سری

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m \left(D^m \phi\right)(0)$$

به ازای هر $\phi \in C^{\infty}(R)$ همگراست؟

(ب) فرض کنید Ω در R^n باز بوده و $\Lambda_i \in \mathscr{D}'(\Omega)$، و محافظهای تمام Λ_iها در $K \subset \Omega$ی فشردهٔ ثابتی قرار داشته باشند. ثابت کنید دنبالهٔ $\{\Lambda_i\}$ نمی‌توانند در $\mathscr{D}'(\Omega)$ همگرا باشد مگر آنکه مرتبه‌های Λ_iها کراندار باشند. ***راهنمایی.*** از قضیهٔ باناخ - اشتاین هاوس استفاده کنید.

(پ) آیا در (ب) می‌توان فرض راجع به محافظها را حذف کرد؟

۷. فرض کنید $\Omega = (0,\infty)$ و تعریف کنید

$$\Lambda\phi = \sum_{m=1}^{\infty} \left(D^m \phi\right)\left(\frac{1}{m}\right) \qquad [\phi \in \mathscr{D}(\Omega)].$$

ثابت کنید Λ یک توزیع از مرتبهٔ نامتناهی در Ω است. همچنین ثابت کنید Λ را نمی‌توان به یک توزیع در R توسیع داد؛ یعنی $\Lambda_0 \in \mathscr{D}'(R)$ی نیست که $\Lambda_0 = \Lambda$ در $(0,\infty)$.

۸. تمام توزیعهایی را که محافظهایشان مجموعه‌هایی متناهی‌اند توصیف نمایید.

۹. (آ) ثابت کنید مجموعهٔ $E \subset \mathscr{D}(\Omega)$ کراندار است اگر و فقط اگر به ازای هر $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$

$$\sup\{|\Lambda\phi| : \phi \in E\} < \infty .$$

(ب) فرض کنید $\{\phi_j\}$ دنباله‌ای در $\mathscr{D}(\Omega)$ باشد به طوری که $\{\Lambda\phi_j\}$ به ازای هر $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ دنباله‌ای کراندار باشد. ثابت کنید زیردنباله‌ای از $\{\phi_j\}$ در توپولوژی $\mathscr{D}(\Omega)$ همگراست.

(پ) فرض کنید $\{\Lambda_j\}$ دنباله‌ای در $\mathscr{D}'(\Omega)$ باشد به طوری که $\{\Lambda_j\phi\}$ به ازای هر $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ کراندار است. ثابت کنید زیردنباله‌ای از $\{\Lambda_j\}$ در $\mathscr{D}'(\Omega)$ همگراست و همگرایی بر هر زیرمجموعهٔ کراندار از $\mathscr{D}(\Omega)$ یکنواخت است. ***راهنمایی.*** بنابرقضیهٔ باناخ - اشتاین‌هاوس، تحدیدهای Λ_j به $\mathscr{D}_K$ همپیوسته‌اند. قضیهٔ آسکولی رابه کار برید.

۱۰. فرض کنید $\{f_i\}$ دنباله‌ای از توابع موضعاً انتگرالپذیر در Ω (یک مجموعهٔ باز در R^n) بوده و به ازای هر $K \subset \Omega$ ی فشرده

$$\lim_{i\to\infty} \int_K |f_i(x)| dx = \circ .$$

ثابت کنید وقتی $i \to \infty$، به ازای هر اندیس چندگانهٔ α، $D^\alpha f_i \to \circ$ در $\mathscr{D}'(\Omega)$.

۱۱. فرض کنید Ω در $R^۲$ باز بوده و $\{f_i\}$ دنباله‌ای از توابع توافقی در Ω باشد که به مفهوم توزیع به $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ای همگراست؛ به بیان صریح، فرض این است که

$$\Lambda\phi = \lim_{i\to\infty} \int_\Omega f_i(x)\phi(x)dx \qquad [\phi \in \mathscr{D}(\Omega)].$$

ثابت کنید $\{f_i\}$ بر هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ Ω به طور یکنواخت همگراست و Λ یک تابع توافقی است. ***راهنمایی.*** اگر f توافقی باشد، $f(x)$ متوسط f روی دوایر کوچک به مرکز x است.

۱۲. یادآور شویم که δ (اندازهٔ دیراک) توزیع تعریف شده با $\delta(\phi) = \phi(\circ)$ به ازای $\phi \in \mathscr{D}(R)$ است. به ازای چه $f \in C^\infty(R)$ ی رابطهٔ $f\delta' = \circ$ صحیح است؟ همین سؤال را برای $f\delta''$ جواب دهید. نتیجه بگیرید که تابع $f \in C^\infty(R)$ ممکن است بر محافظ توزیع $\Lambda \in \mathscr{D}'(R)$ صفر شود ولی $f\Lambda \neq \circ$.

۱۳. اگر $\phi \in \mathscr{D}(R)$ و $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$، آیا هریک از احکام

$$\Lambda\phi = \circ \quad \text{و} \quad \phi\Lambda = \circ$$

دیگری را ایجاب می‌کند؟

۱٤. فرض کنید K گوی یکهٔ بسته در R^n بوده، محافظ $\Lambda \in \mathscr{D}'(R^n)$ در K باشد، و $f \in C^\infty(R^n)$ بر K صفر شود. ثابت کنید $f\Lambda = \circ$. مجموعه‌های دیگر K را بیابید که این امر برای آنها درست باشد. (قس. تمرین ۱۲.)

۱۵. فرض کنید $K \subset V \subset \Omega$ فشرده بوده، V و Ω در R^n باز باشند، محافظ $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ در K باشد، و $\{\phi_i\} \subset \mathscr{D}(\Omega)$ دررابطهٔ

$$\lim_{i\to\infty}\left[\sup_{x\in V}\left|\left(D^\alpha\phi_i\right)(x)\right|\right] = \circ \qquad (\text{آ})$$

به ازای هر اندیس چندگانهٔ α صدق نماید. ثابت کنید

$$\lim_{i\to\infty} \Lambda(\phi_i) = 0.$$

۱۶. حکم قبل در صورت تعویض V با K در فرض (آ) نادرست است. این امر را با مثال زیر که درآن $\Omega = R$ نشان دهید. $c_1 > c_2 > \dots > 0$ را چنان اختیار کنید که $\sum c_j < \infty$؛ تعریف کنید

$$\Lambda\phi = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\phi\left(c_j\right) - \phi(0)\right) \qquad (\phi \in \mathscr{D}(R));$$

و توابع $\phi_i \in \mathscr{D}(R)$را طوری در نظر بگیرید که $\phi_i(x) = 0$ اگر $x \le c_{i+1}$، $\phi_i(x) = 1/i$ اگر $c_i \le x \le c_1$. همچنین نشان دهید که این Λ یک توزیع از مرتبهٔ ۱ است.

با اینحال، به ازای K ای، V را ***می‌توان*** در فرض (آ) تمرین ۱۵ با K عوض کرد. نشان دهیدکه وقتی K گوی‌یکهٔ بسته در R^n باشد، این امر چنین است. مجموعه‌های دیگر K را چنان بیابید که این امر درست باشد.

۱۷. اگر $\Lambda \in \mathscr{D}'(R)$ از مرتبهٔ N باشد، نشان دهید که به ازای تابع پیوسته‌ای چون f، $\Lambda = D^{N+2}f$. اگر $\Lambda = \delta$، fهای ممکن چیستند؟

۱۸. $\delta \in \mathscr{D}'\left(R^2\right)$ را به شکل داده شده در قضیهٔ ۲۷.۶ حتی‌الامکان صریح بیان دارید.

۱۹. فرض کنید $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$، $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$، و به ازای هر x در محافظ Λ وهر اندیس چندگانهٔ α، $\left(D^\alpha\phi\right)(x) = 0$. ثابت کنید $\Lambda\phi = 0$. ***پیشنهاد.*** ابتدا با روش به کار رفته در قضیهٔ ۲۵.۶ مطلب را برای توزیعها با محافظ فشرده ثابت کنید.

۲۰. ثابت‌کنید هر تابعی خطی پیوسته بر $C^\infty(\Omega)$ به‌شکل $f \to \Lambda f$ است‌که‌در آن Λ یک‌توزیع بامحافظ فشرده‌در Ωاست؛ این‌مطلب‌عکس‌قسمت(ت) قضیهٔ ۲۴.۶ می‌باشد.

۲۱. فرض کنید $C^\infty(T)$ فضای تمام توابع مختلط بی‌نهایت بار مشتقپذیر بر دایرهٔیکهٔ T در $\mathscr{C}$ باشد. $C^\infty(T)$ را می‌توان زیرفضای $C^\infty(R)$ مرکب از توابعی در نظرگرفت که دارای دورهٔ تناوب 2πاند. فرض کنید

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

در قرص یکهٔ باز U در $\mathscr{C}$ همگرا باشد. ثابت کنید هریک از سه خاصیت زیر از f دوتای

دیگر را ایجاب می‌کند:

(آ) $p<\infty$ای و $\gamma<\infty$ای چنان وجود دارند که

$$|a_n| \le \gamma . n^p \qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

(بـ) $p<\infty$ای و $\gamma<\infty$ای چنان وجود دارند که

$$|f(z)| \le \gamma .(1-|z|)^{-p} \qquad (z \in U).$$

(پـ) $\lim\limits_{r \to 1} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(re^{i\theta}\right)\phi\left(e^{i\theta}\right)d\theta$ به ازای هـر $\phi \in C^{\infty}(T)$ (بـه عنـوان عـددی مختلـط) وجود دارد.

۲۲. به ازای $u \in \mathscr{D}'(R)$ نشان دهید وقتی $x \to 0$،

$$\frac{u-\tau_x u}{x} \to Du \quad \text{در} \quad \mathscr{D}'(R).$$

(لذا مشتق u را هنوز می‌توان حد خارج قسمتها گرفت.)

۲۳. فرض کنید $\{f_i\}$ دنباله‌ای از توابع موضعاً انتگرالپذیر در R^n باشد به طوری که

$$\lim_{i \to \infty} (f_i * \phi)(x)$$

به ازای هر $\phi \in \mathscr{D}\left(R^n\right)$ و هـر $x \in R^n$ موجـود اسـت. ثـابت کنیـد $\{D^{\alpha}(f_i * \phi)\}$ بـر مجموعه‌های فشرده به ازای هر اندیس چندگانهٔ α به طور یکنواخت همگراست.

۲۴. فرض کنید H تابع هوی ساید (*Heaviside*) بر R باشد که با

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \text{ اگر}، \\ 0 & x \le 0 \text{ اگر}، \end{cases}$$

تعریف می‌شود، و δ اندازهٔ دیراک باشد.

(آ) نشان دهید که اگر $\phi \in \mathscr{D}(R)$، $(H*\phi)(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(s)ds$.

(بـ) نشان دهید که $\delta' * H = \delta$.

(پـ) نشان دهید که $1 * \delta' = 0$. (در اینجا ۱ تابع موضعاً انتگرالپذیر است که مقـدارش در هر نقطه ۱ بوده و به عنوان یک توزیع گرفته می‌شود.)

(تـ) نتیجه می‌شود که قانون شرکتپذیری برقرار نیست:

$$1*(\delta' * H) = 1*\delta = 1$$

ولی

$$(1 * \delta') * H = 0 * H = 0 .$$

۲۵. در اینجاتوصیف دیگری از پیچشها را که شبیه قضیهٔ ٦.۳۳ است بیان‌می‌داریم. فرض کنید L یک نگاشت‌خطی‌پیوسته‌از $\mathscr{D}$ به‌توی C^∞ باشدکه‌باهر D^α تعویض می‌شود؛ یعنی

$$LD^\alpha \phi = D^\alpha L\phi \qquad (\phi \in \mathscr{D}). \qquad \text{(آ)}$$

دراین صورت $u \in \mathscr{D}'$ای هست به طوری که

$$L\phi = u * \phi .$$

پیشنهاد. $\phi \in \mathscr{D}$ را ثابت گرفته و قراردهید

$$h(x) = \left(\tau_{-x} L\tau_x \phi\right)(0) = \left(L\tau_x \phi\right)(x) \qquad \left(x \in R^n\right).$$

فرض کنید D_e مشتق جهتی به کاررفته در برهان قضیهٔ ٦.۳۰ باشد، و نشان دهید که

$$(D_e h)(x) = (D_e L\tau_x \phi)(x) - (L\tau_x D_e \phi)(x)$$

که اگر(آ) برقرارباشد مساوی ۰است.لذا $h(x) = h(0)$ کـه رابطـهٔ $\tau_x L = L\tau_x$ را ایجـاب خواهدکرد.

آیا می‌توان فرض قرارداشتن برد L در C^∞ را ضعیف کرد؟

۲٦. اگر به ازای هر $\delta > 0$ داشــته باشـیم $f \in L^1((-\infty,-\delta) \cup (\delta,\infty))$، ***انتگــرال مقــدار اصلی*** آن عبارت است از

$$PV \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\delta \to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty}\right) f(x)dx$$

اگر این حد موجود باشد. به ازای $\phi \in \mathscr{D}(R)$ قراردهید

$$\Lambda\phi = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \log|x| dx,$$

و نشان دهید که

$$\Lambda'\phi = PV \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \frac{dx}{x},$$

$$\Lambda''\phi = -PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x^2} dx.$$

۲۷. تمام توزیعهای $u \in \mathscr{D}'\left(R^n\right)$ صادق در لااقل یکی از دو شرط زیر را بیابید:

(آ) به ازای هر $x \in R^n$، $\tau_x u = u$؛

(بـ) به ازای هر α با $|\alpha| = 1$، $D^\alpha u = 0$.

فصل ۷

تبدیلات فوریه

خواص اساسی

۱.۷. نمادها. (آ) ***اندازهٔ لبگ نرمال شده*** بر R^n اندازهٔ m_n است که با

$$dm_n(x) = (۲\pi)^{-n/۲} dx$$

تعریف شده است. عامل $(۲\pi)^{-n/۲}$ صورت قضیهٔ انعکاس ۷.۷ و قضیهٔ پلانشرل (*Plancherel*) را ساده می‌کند. فضاهای لبگ معمولی L^P یا $L^p\left(R^n\right)$ به وسیلهٔ m_n نرمدار می‌شود:

$$\|f\|_p = \left\{ \int_{R^n} |f|^p dm_n \right\}^{۱/p} \qquad (۱ \le p < \infty).$$

همچنین شایسته است پیچش دو تابع بر R^n را با

$$(f * g)(x) = \int_{R^n} f(x-y) g(y) dm_n(y)$$

هروقت انتگرال موجود باشد مجدداً تعریف نماییم.

(ب) به ازای هر $t \in R^n$، ***نشان*** e_t تابعی است که با

$$e_t(x) = e^{it.x} = \exp\left\{i\left(t_۱ x_۱ + \ldots + t_n x_n\right)\right\} \qquad \left(x \in R^n\right)$$

تعریف می‌کنیم. هر e_t در معادلهٔ تابعی

$$e_t(x+y) = e_t(x)e_t(y)$$

صدق می‌کند. لذا e_t یک همریختی گروه جمعی R^n به توی گروه ضربی اعداد مختلط با قدر مطلق ۱ می‌باشد.

(پ) تبدیلات فوریهٔ تابع $f \in L^1(R^n)$ تابعی است مانند $\hat{f}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{f}(t) = \int_{R^n} fe_{-t}dm_n \qquad (t \in R^n).$$

از اصطلاح "تبدیل فوریه" اغلب برای ***نگاشتی*** که f را به $\hat{f}$ می‌برد نیز استفاده می‌شود. توجه کنید که

$$\hat{f}(t) = (f * e_t)(0) .$$

(ت) هرگاه α یک اندیس چندگانه باشد، آنگاه

$$D_\alpha = (i)^{-|\alpha|} D^\alpha = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

به کار بردن D_α به جای D^α بعضی از روابط صوری را ساده می‌کند. توجه کنید که

$$D_\alpha e_1 = t^\alpha e_t$$

که، همانند قبل، $t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \dots t_n^{\alpha_n}$. هرگاه P یک چندجمله‌ای n متغیره با ضرایب مختلط باشد، مثلاً

$$P(\xi) = \sum c_\alpha \xi^\alpha = \sum c_\alpha \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n},$$

عملگرهای دیفرانسیل $P(D)$ و $P(-D)$ را با

$$P(-D) = \sum (-1)^{|\alpha|} c_\alpha D_\alpha \qquad \text{و} \qquad P(D) = \sum c_\alpha D_\alpha$$

تعریف می‌کنیم. داریم

$$P(D)e_t = P(t)e_t \qquad (t \in R^n) .$$

(ث) عملگرهای انتقال τ_n مثل قبل با

$$(\tau_x f)(y) = f(y-x) \qquad (x, y \in R^n)$$

تعریف می‌شوند.

۲.۷ قضیه. *فرض کنیم* $f,g \in L^1(R^n)$ *و* $x \in R^n$. *در این صورت*

(آ) $(\tau_x f)\hat{} = e_{-x}\hat{f}$؛

(ب) $(e_x f)\hat{} = \tau_x \hat{f}$؛

(پ) $(f * g)\hat{} = \hat{f}\hat{g}$؛

(ت) هرگاه $\lambda > 0$ و $h(x) = f(x/\lambda)$، آنگاه $\hat{h}(t) = \lambda^n \hat{f}(\lambda t)$.

برهان. از تعریفها نتیجه می‌شود که

$$(\tau_x f)\hat{}(t) = \int(\tau_x f).e_{-t} = \int f.\tau_{-x}e_{-t} = \int f.e_{-t}(x)e_{-t} = e_{-x}(t)\hat{f}(t)$$

و

$$(e_x f)\hat{}(t) = \int e_x f e_{-t} = \int f e_{-(t-x)} = (\tau_x \hat{f})(t) .$$

قست (پ) با کاربردی از قضیهٔ فوبینی به دست می‌آید. قسمت (ت) از یک تغییر خطی متغیرها در تعریف $\hat{f}$ حاصل می‌شود.

۳.۷ توابع سریعاً نزولی. این نام گاهی به $f \in C^\infty(R^n)$ هایی اطلاق می‌شود که به ازای $N = 0,1,2,\ldots$

$$\sup_{|\alpha|\le N}\ \sup_{x\in R^n} \left(1+|x|^2\right)^N \left|(D_\alpha f)(x)\right| < \infty \tag{1}$$

(به یاد آورید که $|x|^2 = \sum x_i^2$.) به عبارت دیگر، شرط این است که $P.D_\alpha f$ به ازای هر چندجمله‌ای P و هر اندیس چندگانهٔ α یک تابع کراندار بر R^n است. چون این امر به ازای $(1+|x|^2)^N P(x)$ به جای $P(x)$ درست است، پس هر $P.D_\alpha f$ در $L^1(R^n)$ قراردارد.

این تابعها یک فضای‌برداری تشکیل می‌دهند که با $\mathscr{L}_n$ نموده می‌شود و در آن گردایهٔ شمارشپذیر از نرمهای (۱) یک توپولوژی موضعاً محدب مانند توپولوژی توصیف شده درقضیهٔ ۳۷.۱ تعریف می‌کند. واضح است که $\mathscr{D}(R^n) \subset \mathscr{L}_n$.

٤.۷ قضیه

(آ) $\mathscr{L}_n$ یک فضای فرشه است.

(ب) هرگاه P یک چندجمله‌ای بوده، $g \in \mathscr{L}_n$، و α یک اندیس چندگانه باشد، آنگاه هریک از سه نگاشت

$$f \to Pf \text{ ،} f \to gf \text{ ،و } f \to D_\alpha f$$

یک نگاشت خطی پیوسته از $\mathscr{L}_n$ به توی $\mathscr{L}_n$ می‌باشد.

(پ) هرگاه $f \in \mathscr{L}_n$ و P یک چندجمله‌ای باشد، آنگاه

$$(P(D)f)\hat{} = P\hat{f} \quad \text{و} \quad (Pf)\hat{} = P(-D)\hat{f}.$$

(ت) تبدیل فوریه یک نگاشت خطی پیوسته از $\mathscr{L}_n$ به توی $\mathscr{L}_n$ است.

[قسمت (ت) در قضیهٔ ۷.۷ تقویت خواهدشد.]

برهان. (آ) فرض کنیم $\{f_i\}$ یک دنبالهٔ کشی در $\mathscr{L}_n$ باشد. به ازای هر جفت اندیس چندگانه مانند α و β، وقتی $i \to \infty$، توابع $x^\beta D^\alpha f_i(x)$ (به طور یکنواخت بر R^n) به یک تابع کراندار مانند $g_{\alpha\beta}$ همگراست. پس داریم

$$g_{\alpha\beta}(x) = x^\beta D^\alpha g_{\circ\circ}(x)$$

و درنتیجه $f_i \to g_{\circ\circ}$ در $\mathscr{L}_n$. لذا $\mathscr{L}_n$ تام می‌باشد.

(ب) اگر $f \in \mathscr{L}_n$، واضح است که $D_\alpha f \in \mathscr{L}_n$، و فرمول لایب نیتز ایجاب می‌کند که Pf و gf نیز در $\mathscr{L}_n$اند. حال پیوستگی سه نگاشت نتیجهٔ ساده‌ای از قضیهٔ گراف بسته می‌باشد.

(پ) اگر $f \in \mathscr{L}_n$، بنا بر (ب)، $P(D)f$ نیز چنین است، و

$$(P(D)f) * e_t = f * P(D)e_t = f * P(t)e_t = P(t)[f * e_t].$$

محاسبهٔ این توابع درمبدأ R^n قسمت اول (پ) را به ما می‌دهد؛ یعنی

$$(P(D)f\hat{})(t) = P(t)\hat{f}(t).$$

هرگاه $t = (t_1, \ldots, t_n)$ و $t' = (t_1 + \varepsilon, t_2, \ldots, t_n)$ و $\varepsilon \neq \circ$، آنگاه

$$\frac{\hat{f}(t')-\hat{f}(t)}{i\varepsilon}=\int_{R^n} x_1 f(x)\frac{e^{-ix_1\varepsilon}-1}{ix_1\varepsilon}e^{-ix.t}dm_n(x).$$

قضیهٔ همگرایی تسلطی را می‌توان به کاربرد، زیرا $x_1 f\in L^1$، و خواهیم داشت

$$-\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t_1}\hat{f}(t)=\int_{R^n} x_1 f(x)e^{-ix.t}dm_n(x).$$

این حالت $P(x)=x_1$ قسمت دوم (پ) است؛ حالت کلی با تکرار نتیجه می‌شود.

(ت) فرض کنیم $f\in\mathscr{L}_n$ و $g(x)=(-1)^{|\alpha|}x^\alpha f(x)$. در این صورت $g\in\mathscr{L}_n$. حال قسمت (پ) ایجاب می‌کند که $\hat{g}=D_\alpha\hat{f}$ و $P.D_\alpha\hat{f}=P.\hat{g}=(P(D)g)\hat{}$ که یک تابع کراندار است زیرا $P(D)g\in L^1(R^n)$. این ثابت می‌کند که $\hat{f}\in\mathscr{L}_n$.

هرگاه $f_i\to f$ در $\mathscr{L}_n$، آنگاه $f_i\to f$ در $L^1(R^n)$. لذا به ازای هر $t\in R^n$، $\hat{f}_i(t)\to\hat{f}(t)$. حال **پیوسته بودن** نگاشت $f\to\hat{f}$ از $\mathscr{L}_n$ به توی $\mathscr{L}_n$ از قضیهٔ نگاشت پیوسته نتیجه می‌شود.

۵.۷ قضیه. *هرگاه $f\in L^1(R^n)$، آنگاه $\hat{f}\in C_0(R^n)$ و $\|\hat{f}\|_\infty\le\|f\|_1$.*

در اینجا $C_0(R^n)$ فضای باناخ سوپرمم - نرمدار تمام توابع پیوستهٔ مختلط بر R^n است که در بی‌نهایت صفر می‌شوند.

برهان. چون $|e_t(x)|=1$، واضح است که

$$|\hat{f}(t)|\le\|f\|_1 \qquad (f\in L^1, t\in R^n). \tag{1}$$

چون $\mathscr{D}(R^n)\subset\mathscr{L}_n$، $\mathscr{L}_n$ در $L^1(R^n)$ چگال است. به هر $f\in L^1(R^n)$ توابع $f_i\in\mathscr{L}_n$ چنان نظیرند که $\|f-f_i\|_1\to 0$. چون $\hat{f}_i\in\mathscr{L}_n\subset C_0(R^n)$ و رابطهٔ (۱) ایجاب می‌کند که $\hat{f}_i\to\hat{f}$ به طور یکنواخت بر R^n، برهان تمام خواهدبود.

لم زیر در اثبات قضیهٔ انعکاس به کار خواهد رفت. این لم به نرمال‌سازی خاصی وابسته است که برای m_n انتخاب شده بود.

٦.٧ لم. *هرگاه ϕ_n بر R^n با*

$$\phi_n(x) = \exp\left\{-\frac{۱}{۲}|x|^۲\right\}$$

تعریف شده باشد، آنگاه $\phi_n \in \mathscr{L}_n$، $\hat{\phi}_n = \phi_n$، *و*

$$\phi_n(\circ) = \int_{R^n} \hat{\phi}_n dm_n \,. \qquad (۲)$$

برهان. واضح است که $\phi_n \in \mathscr{L}_n$. چون $\phi_۱$ در معادلهٔ دیفرانسیل

$$y' + xy = \circ \qquad (۳)$$

صدق می‌کند، محاسبه‌ای کوتاه یا توسل به قسمت (پ) قضیهٔ ٤.٧ نشان می‌دهد که $\breve{\phi}_۱$ نیز در (۳) صدق می‌کند. لذا $\breve{\phi}_۱/\phi_۱$ یک ثابت است. چون $\phi_۱(\circ) = ۱$ و

$$\hat{\phi}_۱(\circ) = \int_R \phi_۱ dm_۱ = (۲\pi)^{-۱/۲} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{۱}{۲}x^۲\right\}dx = ۱,$$

نتیجه می‌گیریم که $\breve{\phi}_۱ = \phi_۱$. داریم

$$\phi_n(x) = \phi_۱(x_۱)\ldots\phi_۱(x_n) \qquad \left(x \in R^n\right) \qquad (٤)$$

درنتیجه

$$\hat{\phi}_n(t) = \hat{\phi}_۱(t_۱)\ldots\hat{\phi}_۱(t_n) \qquad \left(t \in R^n\right). \qquad (٥)$$

پس به ازای هر n، $\hat{\phi}_n = \phi_n$. چون طبق تعریف $\hat{\phi}_n(\circ) = \int \phi_n dm_n$ و نیز $\hat{\phi}_n = \phi_n$، رابطهٔ (۲) به دست می‌آید.

۷.۷ قضیهٔ انعکاس

(آ) هرگاه $g \in \mathscr{L}_n$*، آنگاه*

$$g(x) = \int_{R^n} \hat{g} e_x dm_n \qquad \left(x \in R^n\right). \qquad (۱)$$

(ب) تبدیل فوریه یک نگاشت پیوسته، خطی، و یک به یک از $\mathscr{L}_n$ *به روی* $\mathscr{L}_n$ *با دورهٔ تناوب ٤ است که معکوسش نیز پیوسته می‌باشد.*

(پ) هرگاه $f \in L^۱\left(R^n\right)$، $\hat{f} \in L^۱\left(R^n\right)$، *و*

$$f_\circ(x) = \int_{R^n} \hat{f} e_x dm_n \qquad \left(x \in R^n\right), \tag{۲}$$

آنگاه به ازای تقریباً هر $x \in R^n$، $f(x) = f_\circ(x)$.

برهان. اگر f و g در $L^1\left(R^n\right)$ باشند، قضیهٔ فوبینی را می‌توان بر انتگرال مضاعف

$$\int_{R^n} \int_{R^n} f(x) g(y) e^{-ix.y} dm_n(x) dm_n y$$

اعمال کرد و اتحاد زیر را به دست آورد:

$$\int_{R^n} \hat{f} g dm_n = \int_{R^n} f \hat{g} dm_n \ . \tag{۳}$$

برای اثبات قسمت (آ)، $g \in \mathscr{L}_n$، $\phi \in \mathscr{L}_n$، و $f(x) = \phi(x/\lambda)$ را که $\lambda > \circ$ اختیار می‌کنیم. بنا بر قسمت (ت) قضیهٔ ۲.۷، رابطهٔ (۳) به صورت زیر در می‌آید:

$$\int_{R^n} g(t) \lambda^n \hat{\phi}(\lambda t) dm_n(t) = \int_{R^n} \phi\left(\frac{y}{\lambda}\right) \hat{g}(y) dm_n(y)$$

یا

$$\int_{R^n} g\left(\frac{t}{\lambda}\right) \hat{\phi}(t) dm_n(t) = \int_{R^n} \phi\left(\frac{y}{\lambda}\right) \hat{g}(y) dm_n(y). \tag{٤}$$

وقتی $\lambda \to \infty$، $g(t/\lambda) \to g(\circ)$ و $g(y/\lambda) \to \phi(\circ)$ به طور کراندار؛ درنتیجه می‌توان قضیهٔ همگرایی تسلطی را بر دو انتگرال موجود در(٤) اعمال کرد. نتیجه خواهدشد

$$g(\circ) \int_{R^n} \hat{\phi} dm_n = \phi(\circ) \int_{R^n} \hat{g} dm_n \qquad \left(g, \phi \in \mathscr{L}_n\right). \tag{۵}$$

اگر ϕ تابع ϕ_n لم ٦.۷ باشد، رابطهٔ (۵) حالت $x = \circ$ فرمول انعکاس (۱) را به دست می‌دهد. حالت کلی از این نتیجه می‌شود، زیرا از قسمت (آ) قضیهٔ ۲.۷ نتیجه می‌شود که

$$g(x) = \left(\tau_{-x} g\right)(\circ) = \int_{R^n} (\tau_{-x} g\hat{)} dm_n = \int_{R^n} \hat{g} e_x dm_n.$$

این قسمت (آ) را کامل خواهد کرد.

برای قسمت (ب)، نماد موقت $\Phi g = \hat{g}$ را معرفی می‌کنیم. فرمول انعکاس (۱) نشان می‌دهد که ϕ بر $\mathscr{L}_n$ یک به یک است، زیرا $\hat{g} = \circ$ به وضوح ایجاب می‌کند که $g = \circ$. همچنین نشان می‌دهد که

$$\Phi^2 g = \breve{g} \tag{٦}$$

که درآن یادآور می‌شویم کـه $\breve{g}(x) = g(-x)$؛ و درنتیجـه $\Phi^4 g = g$. پـس Φ، $\mathscr{L}_n$ را **بـه روی** $\mathscr{L}_n$ می‌نگارد. پیوستگی Φ قبلاً در قضیهٔ ٤.٧ ثابت شـده اسـت. حـال بـرای اثبـات پیوستگی Φ^{-1} می‌توان یا به قضیهٔ نگاشت باز یا به $\Phi^{-1} = \Phi^3$ متوسل شد.

برای اثبات (پ) به اتحاد (۳) بـه ازای $g \in \mathscr{L}_n$ بـاز می‌گردیـم. بـا گـذاردن فرمـول انعکاس (۱) در (۳) و استفاده از قضیهٔ فوبینی، داریم

$$\int_{R^n} f\,.\,\hat{g}\,dm_n = \int_{R^n} f\hat{g}\,dm_n \qquad \left(g \in \mathscr{L}_n\right). \tag{۷}$$

بنابر (ب)، توابع $\hat{g}$ تمام $\mathscr{L}_n$ را می‌پوشانند. چون $\mathscr{D}(R^n) \subset \mathscr{L}_n$، رابطهٔ (۷) ایجاب می‌کند که به ازای هر $\phi \in \mathscr{D}(R^n)$، درنتیجه (بنا بر تقریب یکنواختی که در تمرین ۱ در فصـل ٦ توصیف شد) به ازای هر ϕی پیوسته با محافظ فشرده،

$$\int_{R^n} \left(f_\circ - f\right)\phi\,dm_n = \circ. \tag{۸}$$

بنابراین $f_\circ - f = \circ$ تـ .هـ .

۸.۷ قضیه. هرگاه $f \in \mathscr{L}_n$ و $g \in \mathscr{L}_n$، آنگاه

(آ) $f * g \in \mathscr{L}_n$، و

(ب) $(fg)\hat{} = \hat{f} * \hat{g}$.

برهان. بنابر قسمت (پ) قضیهٔ ۲.۷، $(f * g)\hat{} = \hat{f}\hat{g}$، یا با نمادهای به کاررفتـه در برهـان (ب) قضیهٔ ۷.۷،

$$\Phi(f * g) = \Phi f\,.\,\Phi g. \tag{۱}$$

رابطهٔ (۱) با $\hat{f}$ و $\hat{g}$ به جای f و g به صورت زیر در می‌آید:

$$\Phi\left(\hat{f} * \hat{g}\right) = \Phi^2 f\,.\,\Phi^2 g = \breve{f}\breve{g} = (fg)^{\vee} = \Phi^2(fg). \tag{۲}$$

حال Φ^{-1} را در طرفین (۲) اعمال کرده و (ب) را به دسـت می‌آوریـم. توجـه کنیـد کـه $fg \in \mathscr{L}_n$؛ لذا (ب) ایجاب می‌کند که $\hat{f} * \hat{g} \in \mathscr{L}_n$، و این قسمت (آ) را به مـا می‌دهـد، زیرا تبدیل فوریه $\mathscr{L}_n$ را به روی $\mathscr{L}_n$ می‌نگارد.

۹.۷ قضیهٔ پلانشرل. یک یکمتری خطی مانند Ψ از $L^2(R^n)$ به روی $L^2(R^n)$ وجود دارد که با شرط زیر به طور منحصر به فرد معین می‌شود:

به ازای هر $f \in \mathscr{L}_n$، $\Psi f = \hat{f}$.

ملاحظه می‌کنیم که تساوی $\Psi f = \hat{f}$ از $\mathscr{L}_n$ به $L^1 \cap L^2$ وسعت می‌یابد، زیرا $\mathscr{L}_n$ در L^2 همانند در L^1 چگال است. این سازگاری زیر را به دست می‌دهد: قلمرو Ψ مساوی L^2 است، $\hat{f}$ در بخش ۱.۷ به ازای هر $f \in L^1$ تعریف شده بود، و $\Psi f = \hat{f}$ در صورتی که هر دو تعریف قابل انجام باشند. لذا Ψ تبدیل فوریه را از $L^1 \cap L^2$ به L^2 وسعت می‌دهد. این توسیع Ψ هنوز تبدیل فوریه نام دارد (گاهی آن را ***تبدیل فوریه - پلانشرل*** می‌نامند، و ما ادامه داده و از نماد $\hat{f}$ به جای Ψf به ازای هر $f \in L^2(R^n)$ استفاده می‌کنیم.

برهان. اگر f و g در $\mathscr{L}_n$ باشند، از قضیهٔ انعکاس داریم

$$\int_{R^n} f\bar{g}\,dm_n = \int_{R^n} \bar{g}(x)\,dm_n(x) \int_{R^n} \hat{f}(t)e^{ix.t}\,dm_n(t)$$
$$= \int_{R^n} \hat{f}(t)\,dm_n(t) \int_{R^n} \bar{g}(x)e^{ix.t}\,dm_n(x).$$

آخرین انتگرال داخلی مزدوج مختلط $\hat{g}(t)$ است. لذا ***فرمول پارسوال*** $(Parseval)$ به دست می‌آید:

$$\int_{R^n} f\bar{g}\,dm_n = \int_{R^n} \hat{f}\bar{\hat{g}}\,dm_n \qquad \left(f, g \in \mathscr{L}_n\right). \tag{۱}$$

اگر $g=f$، رابطهٔ (۱) به صورت خاص زیر در می‌آید:

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2 \qquad \left(f \in \mathscr{L}_n\right). \tag{۲}$$

توجه کنید که $\mathscr{L}_n$ در $L^2(R^n)$ چگال است به همان دلیلی که $\mathscr{L}_n$ در $L^1(R^n)$ چگال است. لذا رابطهٔ (۲) نشان می‌دهد که $f \to \hat{f}$ یک یکمتری (نسبت به متر L^2) از زیرفضای چگال $\mathscr{L}_n$ از $L^2(R^n)$ ***به روی*** $\mathscr{L}_n$ است. (این نگاشت طبق قضیهٔ انعکاس بروست.) پس بنا بر استدلالهای فضای متری مقدماتی، $f \to \hat{f}$ دارای توسیع پیوستهٔ

منحصر به فرد $\Psi: L^2(R^n) \to L^2(R^n)$ است و این Ψ یک یکمتری خطی به روی $L^2(R^n)$ می‌باشد. جزئیات این امر در تمرین ۱۳ آمده است.

بایدتوجه‌داشت‌که‌فرمول‌پارسوال (۱) به‌ازای f و g دلخواه‌در $L^2(R^n)$ صادق می‌ماند. L^2 - یکمتری بودن تبدیل فوریه یکی از مهمترین ویژگیهای کل بحث می‌باشد.

توزیعهای متعادل

پیش از تعریف این توزیعها، رابطهٔ زیر بین $\mathscr{D}(R^n)$ و $\mathscr{S}_n$ را ثابت می‌کنیم.

۷.۱۰ قضیه

(آ) $\mathscr{D}(R^n)$ در $\mathscr{S}_n$ چگال است.

(ب) نگاشت همانی از $\mathscr{D}(R^n)$ به توی $\mathscr{S}_n$ پیوسته است.

البته این احکام در رابطه با توپولوژیهای معمولی $\mathscr{D}(R^n)$ و $\mathscr{S}_n$ به صورت تعریف شده در بخشهای ۳.٦ و ۳.۷ می‌باشند.

برهان. (آ) $f \in \mathscr{S}_n$ و $\psi \in \mathscr{D}(R^n)$ را طوری می‌گیریم که $\Psi = 1$ بر گوی یکهٔ R^n، و قرار می‌دهیم

$$f_r(x) = f(x)\psi(rx) \qquad \left(x \in R^n, r > 0\right). \tag{1}$$

دراین‌صورت $f_r \in \mathscr{D}(R^n)$. هرگاه P یک‌چندجمله‌ای و α یک‌اندیس‌چندگانه‌باشد، آنگاه

$$P(x)D^{\alpha}\left(f - f_r\right)(x) = P(x)\sum_{\beta \le \alpha} c_{\alpha\beta}\left(D^{\alpha-\beta}f\right)(x)r^{|\beta|}D^{\beta}[1-\psi](rx).$$

انتخاب ما از ψ نشان می‌دهد که به ازای هر اندیس چندگانهٔ β وقتی $|x| \le 1/r$ داریم

$D^{\beta}[1-\psi](rx)=0$. چون $f\in\mathscr{L}_n$، بـه ازای هـر $\beta\leq\alpha$داریـم $P.D^{\alpha-\beta}f\in C_0\left(R^n\right)$.
پس وقتی $r\to 0$ ، مجموع فوق به طور یکنواخت بر R^n به ۰ میل می‌کند. لذا $f_r\to f$ در $\mathscr{L}_n$و قسمت (آ) ثابت می‌شود.

(ب) اگر K مجموعهٔ فشرده‌ای در R^n باشد، توپولوژی القا شده بر $\mathscr{D}_K$ به وسیلهٔ $\mathscr{L}_n$بـه وضوح همان توپولوژی معمولی آن (به صورت تعریف شده در بخش۱.۶(٤) است زیـرا هر $\left(1+|x|^2\right)^N$بر K کراندار می‌باشد. لذا نگاشت همانی $\mathscr{D}_K$به توی $\mathscr{L}_n$پیوسته (درواقـع یک همانریختی) است، و حال (ب) از قضیهٔ ٦.٦ نتیجه می‌شود.

۱۱.۷ تعریف. هرگاه $i:\mathscr{D}\left(R^n\right)\to\mathscr{L}_n$ نگاشت همانی بوده، L یک تابعی خطی پیوسته بر $\mathscr{L}_n$ باشد، و

$$u_L=L\circ i, \tag{1}$$

آنگاه پیوستگی i (قضیهٔ ۱۰.۷) نشان می‌دهد که $u_L\in\mathscr{D}'\left(R^n\right)$؛ چگال بودن $\mathscr{D}\left(R^n\right)$در $\mathscr{L}_n$نشان می‌دهد که دو L متمایز نمی‌توانند uی یکسانی به دست دهنـد. لـذا (۱) یـک یکریختی فضاهای برداری بین فضای دوگان $\mathscr{L}_n'$از $\mathscr{L}_n$از یک سو و یک فضـای توزیـع خاص از سوی دیگر را توصیف می‌کند. توزیعهایی کـه بـه ایـن نحـو ناشـی می‌شـوند ***متعادل*** نام دارند.

توزیعهای متعادل درست $u\in\mathscr{D}'\left(R^n\right)$هایی هستند که توسیعهای پیوسته به $\mathscr{L}_n$ دارند.

در پرتو نکات پیشگفته، معمول و طبیعی است که u_L را با L یکی کنیـم. ***در ایـن صورت توزیعهال متعادل بر R^n درست آنهایی هستند که اعضای $\mathscr{L}_n'$ می‌باشند.***

مثالهای زیر واژهٔ "متعادل" را در این رابطه نشان می‌دهند. این مثالها حـاکی از یـک تحدید فزاینده در بی‌نهایت‌اند. (همچنین.رک.تمرین ۳.)

۱۲.۷ چند مثال. (آ) ***هر توزیع با محافظ فشرده متعادل است.*** فرض کنیم K محافظ

فشردهٔ $u \in \mathscr{D}'(R^n)$ای باشد. $\psi \in \mathscr{D}(R^n)$ را طوری می‌گیریم که در مجموعهٔ بازی شامل K داشته باشیم $\psi = 1$، و تعریف می‌کنیم

$$\tilde{u}(f) = u(\psi f) \qquad (f \in \mathscr{L}_n). \tag{1}$$

هرگاه $f_i \to 0$ در $\mathscr{L}_n$، آنگاه هر $D^\alpha f_i \to 0$ به طور یکنواخت بر R^n؛ درنتیجه هر $D^\alpha(\psi f_i) \to 0$ به طور یکنواخت بر R^n. لذا $\psi f_i \to 0$ در $\mathscr{D}(R^n)$. پس $\tilde{u}$ بر $\mathscr{L}_n$ پیوسته می‌باشد. چون به ازای $\phi \in \mathscr{D}(R^n)$، $\tilde{u}(\phi) \to u(\phi)$، $\tilde{u}$ یک توسیع u است.

(ب) فرض کنیم μ یک اندازهٔ بورل مثبت بر R^n باشد به طوری که به ازای عدد صحیح مثبتی چون k،

$$\int_{R^n} \left(1+|x^2|\right)^{-k} d\mu(x) < \infty. \tag{2}$$

دراین صورت μ یک توزیع متعادل است. حکم به طور صریحتر یعنی فرمول

$$\Lambda f = \int_{R^n} f d\mu \tag{3}$$

یک تابعی خطی پیوسته بر $\mathscr{L}_n$ را تعریف می‌کند.

برای مشاهدهٔ این امر، فرض کنیم $f_i \to 0$ در $\mathscr{L}_n$. در این صورت

$$\varepsilon_i = \sup_{x \in R^n} \left(1+|x|^2\right)^k |f_i(x)| \to 0. \tag{4}$$

چون $|\Lambda f_i|$ حداکثر ε_i برابر انتگرال مذکور در (۲) است، $\Lambda f_i \to 0$. این پیوستگی Λ را ثابت می‌کند.

(پ) فرض کنیم $1 \le p < \infty$، $N > 0$، g یک تابع اندازه‌پذیر بر R^n باشد به طوری که

$$\int_{R^n} \left|\left(1+|x|^2\right)^{-N} g(x)\right|^p dm_n(x) = C < \infty. \tag{5}$$

در این صورت g یک توزیع متعادل می‌باشد.

همانند در (ب) تعریف می‌کنیم

$$\Lambda f = \int_{R^n} fg dm_n. \tag{6}$$

ابتدا فرض می‌کنیم $p>1$ و q نمای مزدوج باشد. در این صورت نامساوی هولدر نتیجه می‌دهد که

$$|\Lambda f| \le C^{1/p}\left\{\int_{R^n}\left|\left(1+|x|^2\right)^N f(x)\right|^q dm_n(x)\right\}^{1/q} \tag{۷}$$
$$\le C^{1/p} B^{1/q} \sup_{x\in R^n}\left|\left(1+|x|^2\right)^M f(x)\right|,$$

که درآن M آنقدر بزرگ گرفته شده است که

$$\int_{R^n}\left(1+|x|^2\right)^{(N-M)q} dm_n(x) = B < \infty .$$

نامساوی (۷) ثابت می‌کند که Λ بر $\mathscr{L}_n$ پیوسته است. حالت $p=1$ حتی آسانتر است.

(ت) از قسمت (پ) معلوم می‌شود که هر $g \in L^p\left(R^n\right)$ $(1\le p\le\infty)$ یک توزیع متعادل است. هرچندجمله‌ای و، به طورکلی، هر تابع اندازه‌پذیر که قدر مطلقش از یک چندجمله‌ای ما بیشتر باشد نیز چنین خواهدبود.

۱۳.۷ قضیه. ***هرگاه α یک اندیس چندگانه بوده، P یک چندجمله‌ای باشد، $g \in \mathscr{L}_n$، و u یک توزیع متعادل باشد، آنگاه توزیعهای $D^\alpha u$، Pu، و gu نیز متعادل‌اند.***

برهان. این امر مستقیماً از قسمت (ب) قضیهٔ ٤.٧ و تعریفهای

$$\left(D^\alpha u\right)(f) = (-1)^{|\alpha|} u\left(D^\alpha f\right),$$
$$(Px)(f) = u(Pf),$$
$$(gu)(f) = u(gf)$$

نتیجه می‌شود.

١٤.٧ تعریف. به ازای $u \in \mathscr{L}_n'$ تعریف می‌کنیم

$$\hat{u}(\phi) = u\left(\hat{\phi}\right) \qquad \left(\phi \in \mathscr{L}_n\right). \tag{۱}$$

چون $\phi \to \hat{\phi}$ یک نگاشت خطی پیوسته از $\mathscr{L}_n$ به توی $\mathscr{L}_n$ است [قسمت (ت) قضیهٔ ٤.٧]، و چون u بر $\mathscr{L}_n$ پیوسته است، پس $\hat{u} \in \mathscr{L}_n'$.

لذا به هر توزیع متعادل u ***تبدیل فوریه***اش $\hat{u}$ را مربوط کرده‌ایم که آن نیز یک

توزیع متعادل است. قضیهٔ بعدی ما نشان می‌دهد که خــواص صـوری تبدیـلات فوریـهٔ توابع سریعاً نزولی در محدودهٔ وسیعتر توزیعهای متعادل حفظ خواهند شد.

اما ابتدا مسئلهٔ سازگاری وجود دارد که باید سامان یابد. هرگاه $f \in L^1(R^n)$، آنگـاه f را نیز می‌توان یک توزیع متعادل مثلاً به صورت u_f در نظرگرفت؛ درنتیجه دو تعریف از تبدیل فوریه خواهیم داشت یعنی (پـ) در بخش ۱.۷ و تعریف ۱٤.۷. سؤال این اسـت که آیا اینها سازگارند؛ یعنی آیا توزیع $(u_f)\hat{}$ نظیر تابع f است یانـه. جـواب مثبـت اسـت زیرا به ازای هر $\phi \in \mathscr{L}_n$،

$$(u_f)\hat{}(\phi) = u_f(\hat{\phi}) = \int f\hat{\phi} = \int \hat{f}\phi = \left(u_{\hat{f}}\right)(\phi).$$

تساوی سوم اتحاد (۳) در بخش ۷.۷ است؛ سایرین تعریف می‌باشند.

چون $L^2(R^n) \subset \mathscr{L}'_n$، همین سؤال در مورد تبدیل پلانشـرل فوریـه مطـرح اسـت. جواب به وسـیلهٔ همـان برهـان مجـدداً مثبـت اسـت، زیـرا اتحـاد $\int f\hat{\phi} = \int \hat{f}\phi$ بـه ازای $f \in L^2(R^n)$ و $\phi \in \mathscr{L}_n$ پابرجا می‌باشد.

۱۵.۷ قضیه

(آ) تبدیل فوریه یک نگاشت پیوسته، خطی، یک به یک از $\mathscr{L}'_n$ به روی $\mathscr{L}'_n$ با دورهٔ تناوب ٤ است که معکوسش نیز پیوسته می‌باشد.

(بـ) هرگاه $u \in \mathscr{L}'_n$ و P چندجمله‌ای باشد، آنگاه

$$(P(D)u)\hat{} = P\hat{u} \quad \text{و} \quad (Pu)\hat{} = P(-D)\hat{u}.$$

توجه کنید که اینها مشابه‌های قسمت (بـــ) قضیـهٔ ۷.۷ و قسـمت (پـــ) قضیـهٔ ٤.۷ می‌باشند. توپولوژیی که (آ) در ارتباط با آن است ضعیـف*-توپولوژیـی اسـت کـه $\mathscr{L}_n$ بـر $\mathscr{L}'_n$ القـا می‌کنـد. همچنیـن توجـه کنیـد کـه عملگـر دیفرانســیل $P(D)$ و $P(-D)$ برحسب D_α تعریف شده‌اند نه D^α؛ ر.ک. قسمت (تـ) از بخش ۱.۷.

برهان. فرض کنیم W یک همسایگی ۰ در $\mathscr{L}_n'$ باشد. در این صورت توابعی مانند $\phi_1,\dots,\phi_k \in \mathscr{L}_n$ چنان وجود دارند که

(۱) $$\{u \in \mathscr{L}_n' : |u(\phi_i)| < 1 \text{ به ازای } 1 \le i \le k\} \subset W.$$

تعریف می‌کنیم

(۲) $$V = \{u \in \mathscr{L}_n' : |u(\hat{\phi}_i)| < 1 \text{ به ازای } 1 \le i \le k\}.$$

در این صورت V یک همسایگی ۰ در $\mathscr{L}_n'$ است، و چون

(۳) $$\hat{u}(\phi) = u(\hat{\phi}) \qquad (\phi \in \mathscr{L}_n, u \in \mathscr{L}_n'),$$

می‌بینیم که هروقت $u \in V$، $\hat{u} \in W$. این پیوستگی Φ را ثابت می‌کند، که در آن می‌نویسیم $\Phi u = \hat{u}$. چون Φ دارای دورهٔ تناوب ٤ بر $\mathscr{L}_n$ است، رابطهٔ (۳) نشان می‌دهد که Φ دارای دورهٔ تناوب ٤ بر $\mathscr{L}_n'$ است؛ یعنی به ازای هر $u \in \mathscr{L}_n'$، $\Phi^4 u = u$. لذا Φ یک به یک وبروست، و چون $\Phi^{-1} = \Phi^3$، Φ^{-1} پیوسته می‌باشد.

حکم (ب)از قسمت (پ) قضیهٔ ٤.۷ و از قضیهٔ ۱۳.۷ با محاسبات زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}(P(D)u)^{\wedge}(\phi) &= (P(D)u)(\hat{\phi}) = u(P(-D)\hat{\phi}) \\ &= u((P\phi)^{\wedge}) = \hat{u}(P\phi) = (P\hat{u})(\phi)\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}(P(-D)\hat{u})(\phi) &= \hat{u}(P(D)\phi) = u((P(D)\phi)^{\wedge}) \\ &= u(P\hat{\phi}) = (Pu)(\hat{\phi}) = (Pu)^{\wedge}(\phi),\end{aligned}$$

که در آن ϕ یک تابع دلخواه در $\mathscr{L}_n$ است.

۱٦.۷ چند مثال. در قسمت (ت) بخش ۱۲.۷ دیدیم که چندجمله‌ایها توزیعهای متعادل‌اند. تبدیلات فوریهٔ آنها به آسانی محاسبه می‌شوند. مطلب را با چندجمله‌ای ۱ آغاز می‌کنیم. به عنوان یک توزیع بر R^n، ۱ بر توابع آزمون ϕ با فرمول زیر عمل می‌کند:

(۱) $$1(\phi) = \int_{R^n} 1\phi\, dm_n = \int_{R^n} \phi\, dm_n .$$

لذا

$$\hat{1}(\phi) = 1(\hat{\phi}) = \int_{R^n} \hat{\phi}\, dm_n = \phi(0) = \delta(\phi), \tag{۲}$$

که در آن δ اندازهٔ دیراک بر R^n است. به همین نحو،

$$\hat{\delta}(\phi) = \delta(\hat{\phi}) = \hat{\phi}(0) = \int_{R^n} \phi\, dm_n = 1(\phi). \tag{۳}$$

لذا از روابط (۲) و (۳) داریم

$$\hat{1} = \delta \quad \text{و} \quad \hat{\delta} = 1. \tag{٤}$$

حال اگر P یک چندجمله‌ای دلخواه بر R^n بوده و قسمت (ب) قضیهٔ ۱۵.۷ را به ازای $u = \delta$ و $u = 1$ اعمال کنیم، نتایج در(٤) نشان می‌دهند که

$$(P(D)\delta)\hat{} = P \quad \text{و} \quad \hat{P} = P(-D)\delta. \tag{٥}$$

دو فرمول مذکور در(٤) [و نیز فرمولهای (٥)] را می‌توان از یکدیگر به وسیلهٔ قضیهٔ انعکاس، که می‌توان برای توزیعهای متعادل به صورت زیر بیان کرد، نیز به دست آورد:

هرگاه $u \in \mathscr{L}_n'$، آنگاه $\breve{u} = (\hat{u})\hat{}$ که در آن $\breve{u}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\breve{u}(\phi) = u(\breve{\phi}) \qquad (\phi \in \mathscr{L}_n). \tag{٦}$$

برهان بدیهی است؛ چون $\breve{\phi} = (\hat{\phi})\hat{}$، بنا بر قسمت (آ) قضیهٔ ۷.۷،

$$(\hat{u})\hat{}(\phi) = \hat{u}(\hat{\phi}) = u((\hat{\phi})\hat{}) = u(\breve{\phi}) = \breve{u}(\phi).$$

توجه کنید که $\breve{\delta} = \delta$.

اگر روابط (٥) را با قضیهٔ ۲٥.٦ تلفیق کنیم، درمی‌یابیم که ***یک توزیع تبدیل فوریهٔ یک چندجمله‌ای است اگر و فقط اگر محافظش مبدأ (یا مجموعهٔ تهی) باشد.***

لم زیر در برهان قضیهٔ ۱۹.۷ به کار خواهد رفت. مشابه آن، با $\mathscr{D}(R^n)$ به جای $\mathscr{L}_n$، بسیار آسانتر است و در برهان قضیهٔ ۳۰.٦ بدون توضیحات اضافی به کار رفته بود.

۱۷.۷ لم. ***هرگاه*** $w = (1, 0, \ldots, 0) \in R^n$، $\phi \in \mathscr{L}_n$، ***و***

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{\phi(x + \varepsilon w) - \phi(x)}{\varepsilon} \qquad (x \in R^n, \varepsilon > 0), \tag{۱}$$

آنگاه وقتی $\varepsilon \to 0$، در توپولوژی $\mathscr{L}_n$، $\phi_\varepsilon \to \partial\phi/\partial x_1$.

برهان. نتیجه را می‌توان با نشان دادن اینکه تبدیل فوریهٔ $\phi_\varepsilon - \partial\phi/\partial x_1$ در $\mathscr{L}_n$ به 0 میل می‌کند یعنی با نشان دادن اینکه

$$\text{وقتی } \varepsilon \to 0 \text{، } \psi_\varepsilon \hat{\phi} \to 0 \text{ در } \mathscr{L}_n \tag{۲}$$

که درآن

$$\psi_\varepsilon(y) = \frac{\exp(i\varepsilon y_1) - 1}{\varepsilon} - iy_1 \qquad (y \in R^n, \varepsilon > 0) \tag{۳}$$

به دست آورد.

هرگاه P یک چندجمله‌ای و α یک اندیس چندگانه باشد، آنگاه

$$P.D^\alpha(\psi_\varepsilon \hat{\phi}) = \sum_{\beta \le \alpha} c_{\alpha\beta} P.(D^{\alpha-\beta}\hat{\phi}).(D^\beta \psi_\varepsilon). \tag{۴}$$

محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که

$$|D^\beta \psi_\varepsilon(y)| \le \begin{cases} \varepsilon y_1^2 & \text{اگر } |\beta| = 0\text{،} \\ \varepsilon |y_1| & \text{اگر } |\beta| = 1\text{،} \\ \varepsilon^{|\beta|-1} & \text{اگر } |\beta| > 1 \end{cases} \tag{۵}$$

لذا وقتی $\varepsilon \to 0$، طرف چپ(۴) بر R^n به طور یکنواخت به 0 میل می‌کند. حال تعریف توپولوژی $\mathscr{L}_n$ (بخش ۳.۷) نشان می‌دهد که رابطهٔ (۲) برقرار است.

۱۸.۷ تعریف. هرگاه $u \in \mathscr{L}'_n$ و $\phi \in \mathscr{L}_n$، آنگاه

$$(u * \phi)(x) = u(\tau_x \check{\phi}) \qquad (x \in R^n).$$

این رابطه خوش تعریف است زیرا، به ازای هر $x \in R^n$، $\tau_x \check{\phi} \in \mathscr{L}_n$.

۱۹.۷ قضیه. ***فرض کنیم $\phi \in \mathscr{L}_n$ و u یک توزیع متعادل باشد. در این صورت***

(آ) $u * \phi \in C^\infty(R^n)$، و به ازای هر اندیس چندگانهٔ α،

$$D^{\alpha}(u*\phi)=\left(D^{\alpha}u\right)*\phi=u*\left(D^{\alpha}\phi\right).$$

(ب) $u*\phi$ دارای رشد چندجمله‌ای است؛ لذا یک توزیع متعادل است.

(پ) $(u*\phi)\hat{}=\hat{\phi}\hat{u}$.

(ت) *به ازای هر* $\psi\in\mathscr{L}_n$، $(u*\phi)*\psi=u*(\phi*\psi)$.

(ث) $\hat{u}*\hat{\phi}=(\phi u)\hat{}$.

برهان. تساوی دوم در (آ) درست مثل قضیهٔ ۳۰.۶ ثابت می‌شود زیرا پیچش هنوز به وضوح با انتقالها تعویض می‌شود. این همچنین نشان می‌دهد که

$$\left(\frac{\tau_{-\varepsilon w}-\tau_{0}}{\varepsilon}\right)(u*\phi)=u*\left(\frac{\tau_{-\varepsilon w}-\tau_{0}}{\varepsilon}\right)\phi. \tag{۱}$$

اما اگر $\alpha=(1,0,\ldots,0)$، از لم ۱۷.۷ داریم $D^{\alpha}(u*\phi)=u*\left(D^{\alpha}\phi\right)$. با تکرار این حالت خاص قسمت (آ) را خواهیم داشت.

فرض کنیم $p_N(f)$ نرم (۱) از بخش ۳.۷ به ازای $f\in\mathscr{L}_n$ باشد. نامساوی

$$1+|x+y|^{2}\leq 2\left(1+|x|^{2}\right)\left(1+|y|^{2}\right)\qquad\left(x,y\in R^{n}\right) \tag{۲}$$

نشان می‌دهد که

$$p_N(\tau_x f)\leq 2^{N}\left(1+|x|^{2}\right)^{N}P_N(f)\qquad\left(x\in R^{n},f\in\mathscr{L}_n\right). \tag{۳}$$

چون u یک تابعی خطی پیوسته بر $\mathscr{L}_n$ بوده و نرمهای p_N توپولوژی $\mathscr{L}_n$ را معین می‌سازند، اعدادی مانند N و $C<\infty$ وجود دارند به طوری که

$$|u(f)|\leq CP_N(f)\qquad\left(f\in\mathscr{L}_n\right); \tag{٤}$$

ر.ک. فصل ۱، تمرین ۸. بنابر روابط (۳) و (٤)،

$$|(u*\phi)(x)|=\left|u\left(\tau_x\check{\phi}\right)\right|\leq 2^{N}CP_N(\phi)\left(1+|x|^{2}\right)^{N} \tag{۵}$$

که قسمت (ب) را ثابت خواهد کرد.

لذا $u*\phi$ در $\mathscr{L}'_n$ تبدیل فوریه دارد. هرگاه $\psi\in\mathscr{D}\left(R^{n}\right)$ با محافظ K باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}(u*\phi)\hat{}\left(\hat{\phi}\right)&=(u*\phi)(\hat{\psi})=\int_{R^n}(u*\phi)(x)\psi(-x)\,dm_n(x)\\&=\int_K u\left[\psi(-x)\tau_x\check{\phi}\right]dm_n(x)=u\int_K\psi(-x)\tau_x\check{\phi}\,dm_n(x)\end{aligned}$$

$$= u\big((\phi * \psi)\hat{}\big) = \hat{u}\big((\phi * \psi)\hat{}\big) = \hat{u}\big(\hat{\phi}\hat{\psi}\big);$$

درنتیجه

$$(u * \phi)\hat{}(\hat{\psi}) = \big(\hat{\phi}\hat{u}\big)(\hat{\psi})\,. \tag{٦}$$

در محاسبات فوق، وقتی u از علامت انتگرال خارج می‌شد، قضیهٔ ۲۷.۳ بر یک انتگرال $\mathscr{L}_n$ مقدار اعمال شد. تا بحال رابطهٔ (٦) برای $\psi \in \mathscr{D}\left(R^n\right)$ ثابت شده است. چون $\mathscr{D}\left(R^n\right)$ در $\mathscr{L}_n$ چگال است، تبدیلات فوریهٔ اعضای $\mathscr{D}\left(R^n\right)$ نیز طبق قسمت (ب) قضیهٔ ۷.۷ در $\mathscr{L}_n$ چگالند. لذا رابطهٔ (٦) برای هر $\hat{\psi} \in \mathscr{L}_n$ برقرار است. بنابراین، توزیعهای $(u * \phi)\hat{}$ و $\hat{\phi}\hat{u}$ مساوی‌اند. این امر قسمت (پ)را ثابت خواهدکرد.

حال درمحاسبات پیش از رابطهٔ (٦) دو جملهٔ انتهایی به ازای هر $\psi \in \mathscr{L}_n$ مساوی‌اند. لذا

$$(u * \phi)(\hat{\psi}) = u\big((\phi * \psi)\check{}\big), \tag{٧}$$

که همان

$$((u * \phi) * \psi)(\circ) = (u * (\phi * \phi))(\circ) \tag{٨}$$

می‌باشد. اگر ψ را با $\tau_x\psi$ در(٨) عوض کنیم، قسمت (ت) را خواهیم داشت.

بالأخره، بنابرقسمت (پ) فوق و رابطهٔ (٦) از بخش ۱٦.۷، $(\phi u)\check{} = \check{\phi}\check{u} = (\hat{u} * \hat{\phi})\hat{}$.این قسمت (ث) را به دست می‌دهد زیرا $((\phi u))\hat{}\hat{} = (\phi u)^{\vee}$.

قضایای پالی - وینر (*Paley- Wiener*)

یکی از قضایای کلاسیک پالی و وینر تابعهای تمام از نوع نمایی (از یک متغیر مختلط) که تحدیدشان به خط حقیقی در L^2 اند را درست به عنوان تبدیلات فوریهٔ توابع L^2 با محافظ فشرده توصیف می‌کند؛ مثلاً ر.ک.قضیهٔ ۳.۱۹ درمرجع[۲۳]. ما دو مشابه از این قضیه (چند متغیره) ارائه می‌دهیم، یکی برای توابع C^∞ با محافظ فشرده و یکی برای توزیعها با محافظ فشرده.

۲۰.۷ چند تعریف. هرگاه Ω یک مجموعهٔ باز در $\mathbb{C}^n$ بوده و f یک تابع مختلط پیوسته در Ω باشد، آنگاه گوییم f در Ω ***هلوریخت*** است اگر نسبت به هر متغیر جداگانه هلوریخت باشد. این یعنی که اگر $(a_1,\dots,a_n)\in\Omega$ و

$$g_i(\lambda)=f\left(a_1,\dots,a_{i-1},a_i+\lambda,a_{i+1},\dots,a_n\right),$$

هریک از توابع g_1،...،g_n در همسایگیی از ۰ در $\mathbb{C}$ هلوریخت است. یک تابع که در تمام $\mathbb{C}^n$ هلوریخت باشد ***تمام*** نام دارد.

نقاط $\mathbb{C}^n$ را با $z=(z_1,\dots,z_n)$ که $z_k\in\mathbb{C}$ نشان می‌دهیم. هرگاه $z_k=x_k+iy_k$، $x=(x_1,\dots,x_n)$، و $y=(y_1,\dots,y_n)$، آنگاه می‌نویسیم $z=x+iy$. بردارهای

$$y=\operatorname{Im} z \qquad \text{و} \qquad x=\operatorname{Re} z$$

به ترتیب قسمتهای ***حقیقی*** و ***موهومی*** z می‌باشند. R^n را مجموعهٔ تمام $z\in\mathbb{C}^n$ های با $\operatorname{Im} z=0$ می‌انگاریم. از نمادهای

$$|z|=\left(|z_1|^2+\dots+|z_n|^2\right)^{1/2}$$

$$|\operatorname{Im} z|=\left(y_1^2+\dots+y_n^2\right)^{1/2}$$

$$z^\alpha=z_1^{\alpha_1}\dots z_n^{\alpha_n}$$

$$z.t=z_1t_1+\dots+z_nt_n$$

$$e_z(t)=\exp(iz.t)$$

به ازای هر اندیس چندگانهٔ α و هر $t\in R^n$ استفاده خواهیم کرد.

۲۱.۷ لم. هرگاه f یک تابع تمام در $\mathbb{C}^n$ باشد که بر R^n صفر می‌شود، آنگاه $f=0$.

برهان. حالت $n=1$ را دانسته می‌گیریم. فرض کنیم P_k خاصیت زیر از f باشد: هرگاه $z\in\mathbb{C}^n$ دست کم k مختص حقیقی داشته باشد، آنگاه $f(z)=0$. P_n داده شده است؛ P_0 باید ثابت شود. فرض کنیم $1\le i\le n$ و P_i درست باشد. a_1،...،a_i را حقیقی می‌گیریم. در این صورت تابع g_i ملحوظ در بخش ۲۰.۷ بر محور حقیقی ۰ است؛ در

نتیجه به ازای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ مساوی ۰ است. لذا P_{i-1} درست می‌باشد.

در دو قضیهٔ زیر،

$$rB = \{x \in R^n : |x| \le r\}.$$

۲۲.۷ قضیه

(آ) هرگاه $\phi \in \mathcal{D}(R^n)$ در rB محافظ بوده و

$$f(z) = \int_{R^n} \phi(t) e^{-iz.t} dm_n(t) \qquad (z \in \mathbb{C}^n), \tag{۱}$$

آنگاه f تمام است و ثابتهایی چون $\gamma_N < \infty$ وجود دارند به طوری که

$$|f(z)| \le \gamma_N (1+|z|)^{-N} e^{r|\mathrm{Im}\, z|} \qquad (z \in \mathbb{C}^n, N = 0,1,2,\ldots). \tag{۲}$$

(ب) به عکس، هرگاه تابع تمام f در شرایط (۲) صدق کند، آنگاه تابعی مانند $\phi \in \mathcal{D}(R^n)$ با محافظ در rB چنان وجود دارد که (۱) برقرار است.

برهان. (آ) هرگاه $t \in rB$، آنگاه

$$\left|e^{-iz.t}\right| = e^{y.t} \le e^{|y||t|} \le e^{r|\mathrm{Im}\, z|}.$$

لذا انتگرالده (۱) به ازای هر $z \in \mathbb{C}^n$ در $L^1(R^n)$ است، و f بر $\mathbb{C}^n$ خوش تعریف می‌باشد. پیوستگی f بدیهی است، و کاربردی از قضیهٔ موررا بر هرمتغیر جداگانه نشان می‌دهد که f تمام است. از انتگرالگیری جزء به جزء داریم

$$z^\alpha f(z) = \int_{R^n} (D_\alpha \phi)(t) e^{-iz.t} dm_n(t).$$

بنابراین

$$\left|z^\alpha\right| |f(z)| \le \|D_\alpha \phi\|_1 \, e^{r|\mathrm{Im}\, z|}, \tag{۳}$$

و رابطهٔ (۲) از نامساویهای (۳) نتیجه خواهدشد.

(ب) فرض کنیم f یک تابع تمام باشد که در (۲) صادق است، و تعریف می‌کنیم

$$\phi(t) = \int_{R^n} f(x) e^{it.x} dm_n(x) \qquad (t \in R^n). \tag{۴}$$

ابتدا توجه کنید که، بنا بر (۲)، $(1+|x|)^N f(x)$ به ازای هر N در $L^1(R^n)$ است. لذا، طبق استدلالی که قسمت (پ) قضیهٔ ٤.٧ را ثابت کرد، $\phi \in C^\infty(R^n)$.

حال حکم می‌کنیم که انتگرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi + i\eta, z_2, \ldots, z_n) \exp\{i[t_1(\xi + i\eta) + t_2 z_2 + \ldots + t_n z_n]\} d\xi \qquad (5)$$

به ازای $t_1, \ldots, t_n$های حقیقی و $z_2, \ldots, z_n$های مختلط دلخواه مستقل از η است. برای مشاهدهٔ این امر، فرض کنیم Γ یک مسیر مستطیلی در صفحهٔ $\xi + i\eta$ باشد که یک ضلعش روی محور حقیقی و یک ضلعش روی خط $\eta = \eta_1$ بوده و اضلاع قائمش تا بی‌نهایت ادامه دارند. بنابر قضیهٔ کشی، انتگرال انتگرالدهٔ (۵) روی Γ مساوی ۰ است. بنابر (۲)، سهم اضلاع قائم در این انتگرال به ۰ میل می‌کند. پس انتگرال (۵) به ازای $\eta = 0$ و $\eta = \eta_1$ یکی است. این امر حکم ما را سامان خواهدداد.

این کار را می‌توان برای سایر مختصات نیز انجام داد. لذا از رابطهٔ (٤) نتیجه می‌گیریم که ***به ازای هر*** $y \in R^n$،

$$\phi(t) = \int_{R^n} f(x + iy) e^{it.(x+iy)} dm_n(x) . \qquad (6)$$

به ازای $t \in R^n$ که $t \neq 0$، $y = \lambda t/|t|$ را که $\lambda > 0$ اختیار می‌کنیم. در این صورت $t.y = \lambda|t|$، $|y| = \lambda$،

$$\left|f(x + iy) e^{it.(x+iy)}\right| \leq \gamma_N (1 + |x|)^{-N} e^{(r - |t|)\lambda},$$

و درنتیجه

$$|\phi(t)| \leq \gamma_N e^{(r-|t|)\lambda} \int_{R^n} (1 + |x|)^{-N} dm_n(x), \qquad (7)$$

که در آن N آنقدر بزرگ اختیار شده است که آخرین انتگرال متناهی باشد. حال فرض کنیم $\lambda \to \infty$. اگر $|t| > r$، رابطهٔ (۷) نشان می‌دهد که $\phi(t) = 0$. لذا محافظ ϕ در rB است.

حال رابطهٔ (۱) به ازای z حقیقی از (٤) و قضیهٔ انعکاس نتیجه می‌شود. چون طرفین (۱) توابعی تمام‌اند، بنابر لم ۲۱.۷ بر $\mathbb{C}^n$ یکی می‌باشند. این برهان را به اتمام خواهد رساند.

نکات زیر انگیزه‌ای برای قضیهٔ زیر خواهند بود.

فرض کنیم u یک توزیع در R^n با محافظ **فشرده** باشد. در این صورت $\hat{u}$ به‌عنوان یک توزیع متعادل با $\hat{u}(\phi) = u(\hat{\phi})$ تعریف می‌شود. ولی تعریف $\hat{f}(x) = \int f e_{-x} dm_n$ به ازای $f \in L^1(R^n)$ پیشنهاد می‌کند که $\hat{u}$ باید یک تابع باشد؛ یعنی

$$\hat{u}(x) = u(e_{-x}) \qquad \left(x \in R^n\right)$$

زیرا $e_{-x} \in C^\infty(R^n)$ و $u(\phi)$ به ازای هر $\phi \in C^\infty(R^n)$ معنی دارد و این امر از قسمت (ت) قضیهٔ ۲۴.۶ مشهود است. به علاوه، به ازای هر $x \in \mathbb{C}^n$، $e_{-z} \in C^\infty(R^n)$، و لذا $u(e_{-z})$ شبیه یک تابع تمام است که تحدیدش به R^n مساوی $\hat{u}$ می‌باشد.

صحت این مطلب بخشی از قضیهٔ زیر است که توابع تمام حاصل به وسیلهٔ چند شرط رشد را نیز توصیف خواهدکرد.

۲۳.۷ قضیه

(آ) هرگاه محافظ $u \in \mathscr{D}'(R^n)$ در rB بوده، u از مرتبهٔ N بوده، و

$$f(z) = u(e_{-z}) \qquad \left(z \in \mathbb{C}^n\right), \tag{۱}$$

آنگاه f تمام است، تحدید f به R^n تبدیل فوریهٔ u است، و ثابتی مانند $\gamma < \infty$ هست به طوری که

$$|f(z)| \le \gamma(1+|z|)^N e^{r|\mathrm{Im}\, z|} \qquad \left(z \in \mathbb{C}^n\right). \tag{۲}$$

(ب) به عکس، هرگاه f یک تابع تمام در $\mathbb{C}^n$ باشد که در (۲) به ازای N و γ ای صدق کند، آنگاه $u \in \mathscr{D}'(R^n)$ای با محافظ در rB چنان وجود دارد که (۱) برقرار می‌باشد.

تذکر. گاهی از نماد $\hat{u}$ برای نمایش توسیع به $\mathbb{C}^n$ داده شده با(۱) استفاده می‌شود. لذا، به ازای $z \in \mathbb{C}^n$،

$$\hat{u}(z) = u(e_{-z}).$$

گاهی این توسیع را تبدیل فوریه - لاپلاس (*Laplace*) u می‌نامند.

برهان. (آ) فرض کنیم محافظ $u \in \mathscr{D}'(R^n)$ در rB باشد. $\psi \in \mathscr{D}(R^n)$ را طوری اختیار می‌کنیم که $\psi = 1$ بر $(r+1)B$. در این صورت $u = \psi u$ و قسمت (ث) قضیهٔ ۱۹.۷ نشان می‌دهد که

$$\hat{u} = (\psi u)\hat{} = \hat{u} * \hat{\psi}. \tag{۳}$$

لذا $\hat{u} \in C^\infty(R^n)$. $\phi \in \mathscr{L}_n$ را طوری می‌گیریم که $\psi = \hat{\phi}$. دراین صورت

$$\begin{aligned}(\hat{u} * \hat{\psi})(x) &= (\hat{u} * \check{\phi})(x) = \hat{u}(\tau_x \phi) = u((\tau_x \phi)\hat{}) \\ &= u(e_{-x}\hat{\phi}) = u(\psi e_{-x}) = u(e_{-x});\end{aligned}$$

درنتیجه از (۳) داریم

$$\hat{u}(x) = u(e_{-x}) \qquad (x \in R^n). \tag{٤}$$

هدف بعدی ما نشان دادن این امر است که تابع f با تعریف (۱) تمام است. $a \in \mathbb{C}^n$ و $b \in \mathbb{C}^n$ را اختیار کرده و قرار می‌دهیم

$$g(\lambda) = f(a+\lambda b) = u(e_{-a-\lambda b}) \qquad (\lambda \in \mathbb{C}). \tag{٥}$$

پیوستگی f مسئله‌ای ایجاد نمی‌کند: هرگاه $w \to z$ در $\mathbb{C}^n$، آنگاه $e_{-w} \to e_{-z}$ در $C^\infty(R^n)$، و u بر $C^\infty(R^n)$ پیوسته است. لذا برای اثبات تمام بودن f کافی است نشان دهیم که هریک از توابع g تعریف شده با (٥) تمام است.

فرض کنیم Γ یک مسیر مستطیلی در $\mathbb{C}$ باشد. چون $\lambda \to e_{-a-\lambda b}$ از $\mathbb{C}$ به $C^\infty(R^n)$ پیوسته است، انتگرال $C^\infty(R^n)$ مقدار

$$F = \int_\Gamma e_{-a-\lambda b}\, d\lambda \tag{٦}$$

خوش تعریف است. محاسبه در هر $t \in R^n$ یک تابعی خطی پیوسته بر $C^\infty(R^n)$ می‌باشد. لذا با علامت انتگرال تعویض می‌شود. بنابراین

$$F(t) = \int_\Gamma e_{-a-\lambda b}(t)\, d\lambda = \int_\Gamma e^{-ia.t} e^{-i(b.t)\lambda}\, d\lambda = 0.$$

لذا $F = 0$، و از رابطهٔ (٦) داریم

$$0 = u(F) = \int_\Gamma u(e_{-a-\lambda b})\, d\lambda = \int_\Gamma g(\lambda)\, d\lambda.$$

بنابر قضیهٔ مورِرا، g تمام می‌باشد.

برهان قسمت (آ) با اثبات (۲) کامل خواهدشد. تابع کمکی h را برخط حقیقی که بی‌نهایت بار مشتقپذیراست چنان اختیار می‌کنیم که وقتی $s < 1$، $h(s) = 1$ و وقتی $s > 2$، $h(s) = 0$، و به هر $z \in \mathcal{C}^n$ $(z \neq 0)$ تابع

$$\phi_z(t) = e^{-iz.t} h(|t||z| - r|z|) \qquad \left(t \in R^n\right) \tag{۷}$$

را مربوط می‌سازیم. در این صورت $\phi_z \in \mathscr{D}\left(R^n\right)$. چون محافظ u در rB است و اگر $|t| \leq |z|^{-1} + r$، $h(|t||z| - r|z|) = 1$، از مقایسهٔ (۱) و (۷) معلوم می‌شود که

$$f(z) = u\left(\phi_z\right). \tag{۸}$$

چون u از مرتبهٔ N است، $\gamma_0 < \infty$ ی هست به طوری که به ازای هر $\phi \in \mathscr{D}\left(R^n\right)$ که $\|\phi\|_N$ همانند در (۱) از بخش ۲.۶ است، $|u(\phi)| \leq \gamma_0 \|\phi\|_N$؛ ر.ک.قسمت (ت) قضیهٔ ۲۴.۶. لذا از رابطهٔ (۸) داریم

$$|f(z)| \leq \gamma_0 \|\phi_z\|_N . \tag{۹}$$

روی محافظ ϕ_z داریم $|t| \leq r + 2/|z|$؛ درنتیجه

$$\left|e^{-iz.t}\right| = e^{y.t} \leq e^{2 + r|\mathrm{Im}\, z|} . \tag{۱۰}$$

حال اگر فرمول لایب نیتز را در مورد حاصل ضرب (۷) به کاربرده و از رابطهٔ (۱۰) استفاده کنیم، رابطهٔ (۹) رابطهٔ (۲) را ایجاب خواهد کرد.

این برهان قسمت (آ) را کامل خواهد کرد.

(ب) حال چون f در (۲) صدق می‌کند، داریم

$$|f(x)| \leq \gamma (1 + |x|)^N \qquad \left(x \in R^n\right). \tag{۱۱}$$

لذا تحدید f به R^n در $\mathscr{L}'_n$ است و تبدیل فوریهٔ یک توزیع متعادل مانند u می‌باشد.

تابع $h \in \mathscr{D}\left(R^n\right)$ را با محافظ در B چنان اختیار می‌کنیم که $\int h = 1$، به ازای $\varepsilon > 0$ تعریف می‌کنیم $h_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-n} h(t/\varepsilon)$، و قرار می‌دهیم

$$f_\varepsilon(z) = f(z) \hat{h}_\varepsilon(z) \qquad \left(z \in \mathcal{C}^n\right), \tag{۱۲}$$

که درآن $\hat{h}_\varepsilon$ تابع تمامی است که تحدیدش به R^n تبدیل فوریهٔ h_ε است. با اعمال

حکم (آ) قضیهٔ ۲۲.۷ بر h_ε نتیجه می‌شود که f_ε در رابطهٔ (۲) قضیهٔ ۲۲.۷ به ازای $r+\varepsilon$ به جای r صدق می‌کند. بنابراین قسمت (ب) قضیهٔ ۲۲.۷ ایجاب می‌کند که به ازای $\phi_\varepsilon \in \mathscr{D}(R^n)$ی که محافظش در $(r+\varepsilon)B$ است داریم $f_e = \hat{\phi}_\varepsilon$.

$\psi \in \mathscr{L}_n$ای در نظر می‌گیریم که محافظش $\hat{\psi}$ مجموعهٔ rB را قطع نکند. در این صورت، به ازای تمام $\varepsilon > ۰$های به قدرکافی کوچک، $\hat{\psi}\phi_\varepsilon = ۰$. چون $f\phi \in L^1(R^n)$ و $\hat{h}_\varepsilon(x) = \hat{h}(\varepsilon x) \to ۱$ به طور کراندار بر R^n، نتیجه می‌گیریم که

$$u(\hat{\psi}) = \hat{u}(\psi) = \int f\psi dm_n = \lim_{\varepsilon\to 0} \int f_\varepsilon \psi dm_n$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int \hat{\phi}_\varepsilon \psi dm_n = \lim_{\varepsilon\to 0} \int \hat{\psi}\phi_\varepsilon dm_n = 0.$$

لذا محافظ u در rB می‌باشد.

حال مشاهده می‌کنیم که $z \to u(e_{-z})$ یک تابع تمام است، و چون رابطهٔ (۱) به ازای $z \in R^n$ برقرار است (با انتخاب u)، لم ۲۱.۷ برهان قسمت (ب) را کامل خواهد کرد.

لم سوبولف (*Sobolev*)

اگر Ω یک زیرمجموعهٔ باز حقیقی R^n باشد، هیچ تبدیل فوریه‌ای برای توابعی که قلمروشان در Ω است یا برای توزیعهای در Ω تعریف نشده است. با اینحال، گاهی می‌توان روشهای تبدیل فوریه را برای حمله به مسائل موضعی به کار گرفت. قضیهٔ ۲۵.۷، که به لم سوبولف معروف است، مثالی از این امر می‌باشد.

۲۴.۷ چند تعریف. گوییم تابع اندازه‌پذیر مختلط f، که در مجموعهٔ باز $\Omega \subset R^n$ تعریف شده است، در Ω ***موضعاً*** L^2 است اگر به ازای هر $K \subset \Omega$ی فشرده، $\int_K |f|^2 dm_n < \infty$.

به همین نحو، توزیع $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ موضعاً L^2 است اگر تابعی مانند g، که در Ω موضعاً L^2 است، موجود باشد به طوری که به ازای هر $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$، $u(\phi) = \int_\Omega g\phi dm_n$.

وقتی می‌گوییم تابع f دارای مشتق توزیعی $D^\alpha f$ است که موضعاً L^2 می‌باشد اشاره به

توزیع $D^\alpha f$ داریم و این به طور صریح یعنی تابعی مانند g هست که موضعاً L^2 بوده و به ازای هر $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$،

$$\int_\Omega g\phi dm_n = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega fD^\alpha \phi dm_n .$$

این، به طریق اولی، چیزی راجع به وجود $D^\alpha f$ به مفهوم کلاسیک برحسب حدود خارج قسمتها نمی‌گوید.

از آن سو، ردهٔ $C^{(p)}(\Omega)$ به ازای هر عدد صحیح نامنفی p عبارت است از توابع مختلطی مانند f در Ω که مشتقشان $D^\alpha f$ به مفهوم کلاسیک به ازای هر اندیس چندگانهٔ α که $|\alpha| \le p$ موجود بوده و در Ω توابع پیوسته‌ای می‌باشند.

ما به جای عملگر دیفرانسیل $(\partial/\partial x_i)^k$ می‌نویسیم D_i^k.

۲۵.۷ قضیه. *فرض کنیم* n، p، *و* r *صحیح بوده،* $n>0$، $p \ge 0$، *و*

$$r > p + \frac{n}{2}. \tag{1}$$

همچنین f ***تابعی در مجموعهٔ باز*** $\Omega \subset R^n$ ***باشد که مشتقات توزیعی‌شان*** $D_i^k f$ ***به ازای*** $1 \le i \le n$ ***و*** $0 \le k \le r$ ***در*** Ω ***موضعاً*** L^2 ***اند.***

در این صورت تابعی مانند $f_0 \in C^{(p)}(\Omega)$ ***هست به طوری که به ازای تقریباً هر*** $x \in \Omega$، $f_0(x) = f(x)$.

توجه کنید که فرض مستلزم مشتقات مخلوط، یعنی جملاتی مانند D_1D_2f، نیست. نتیجه آن است که f را می‌توان طوری "اصلاح کرد" (یعنی با تعریف مجدد آن برمجموعه‌ای از اندازهٔ ۰) که در $C^{(p)}(\Omega)$ قرارگیرد.

همچنین به عنوان یک نتیجه توجه کنید که اگر ***تمام*** مشتقات توزیعی f در Ω موضعاً L^2 باشند، آنگاه $f_0 \in C^\infty(\Omega)$.

برهان. طبق فرض، توابعی مانند g_{ik} وجود دارند که در Ω موضعاً L^2 بوده و در رابطهٔ

$$\int_\Omega g_{ik}\phi dm_n = (-1)^k \int_\Omega f D_i^k \phi dm_n \qquad [\phi \in \mathscr{D}(\Omega)] \tag{۲}$$

به ازای $1 \le i \le n$ و $0 \le k \le r$ صدق می‌کنند.

فرض کنیم ω مجموعهٔ بازی باشد که بستش K زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از Ω است. $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ را طوری می‌گیریم که بر K داشته باشیم $\psi = 1$، و F را بر R^n به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(x) = \begin{cases} \psi(x) f(x) & \text{اگر } x \in \Omega، \\ 0 & \text{اگر } x \notin \Omega، \end{cases}$$

در این صورت $F \in \left(L^2 \cap L^1\right)\left(R^n\right)$.

در Ω، از فرمول لایب نیتز داریم

$$D_i^r F = \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} \left(D_i^{r-s}\psi\right)\left(D_i^s f\right) = \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} \left(D_i^{r-s}\psi\right) g_{is}. \tag{۳}$$

در متمم Ω_0 محافظ ψ داریم $D_i^r f = 0$. این دو توزیع در $\Omega \cap \Omega_0$ یکی می‌شوند. لذا $D_i^r F$، که ابتدا به عنوان یک توزیع در R^n تعریف شده است، درواقع به ازای $1 \le i \le n$ در $L^2\left(R^n\right)$ است زیرا توابع $\left(D_i^{r-s}\psi\right) g_{is}$ در $L^2(\Omega)$ می‌باشند. [بنابراین $D_i^r F$ که محافظ فشرده دارد نیز در $L^1\left(R^n\right)$ می‌باشد.]

حال با اعمال قضیهٔ پلانشرل در مورد F و $D_1^r F، \dots، D_n^r F$ معلوم می‌شود که

$$\int_{R^n} |\hat{F}|^2 dm_n < \infty \tag{٤}$$

و

$$\int_{R^n} y_i^{2r} |\hat{F}(y)|^2 dm_n(y) < \infty \qquad (1 \le i \le n). \tag{۵}$$

چون

$$(1 + |y|)^{2r} < (2n+2)^r \left(1 + y_1^{2r} + \dots + y_n^{2r}\right), \tag{٦}$$

که درآن $|y| = \left(y_1^2 + \dots + y_n^2\right)^{1/2}$، روابط (٤) و (۵) ایجاب می‌کنند که

$$\int_{R^n} (1+|y|)^{2r} |\hat{F}(y)|^2 dm_n(y) < \infty. \tag{۷}$$

اگر J انتگرال (۷) بوده و σ_n حجم $(n-1)$ بعدی کرهٔ یکه در R^n باشد، از نامساوی شوارتز خواهیم داشت

$$\left\{ \int_{R^n} (1+|y|)^p |\hat{F}(y)| dm_n(y) \right\}^2 \le J \int_{R^n} (1+|y|)^{2p-2r} dm_n(y)$$
$$= J\sigma_n \int_0^\infty (1+t)^{2p-2r} t^{n-1} dt < \infty,$$

زیرا $2p - 2r + n - 1 < -1$. لذا ثابت کرده‌ایم که

$$\int_{R^n} (1+|y|)^p |\hat{F}(y)| dm_n(y) < \infty . \tag{8}$$

تعریف می‌کنیم

$$F_\omega(x) = \int_{R^n} \hat{F}(y) e^{ix\cdot y} dm_n(y) \qquad \left(x \in R^n\right). \tag{9}$$

بنابر قسمت (پ) قضیهٔ انعکاس ۷.۷، $F_\omega = F$ تـ.هـ. بر R^n. به علاوه، رابطهٔ (۸) ایجاب می‌کند که هروقت $|\alpha| \le p$، $y^\alpha \hat{F}(y)$ در L^1 است. لذا تکرار برهان قسمت (پ) قضیهٔ ۴.۷ ما را به نتیجهٔ زیر می‌رساند:

$$F_\omega \in C^{(p)}\left(R^n\right). \tag{10}$$

تابع f ما با F در ω یکی است. لذا $f = F_\omega$ تـ.هـ. در ω.

اگر ω' مجموعهٔ دیگری شبیه ω باشد، برهان پیشگفته به ما تابع $F_{\omega'} \in C^{(p)}\left(R^n\right)$ را می‌دهد که با f تـ.هـ. در ω' یکی است. لذا $F_{\omega'} = F_\omega$ در $\omega' \cap \omega$. بنابراین تابع مطلوب f_0 را می‌توان در Ω با قراردادن $f_0(x) = F_\omega(x)$ به ازای $x \in \omega$ تعریف کرد.

تمرینات

۱. فرض کنید A یک عملگر خطی معکوس‌پذیر بر R^n بوده، $f \in L^1\left(R^n\right)$، و $g(x) = f(Ax)$. $\hat{g}$ را برحسب $\hat{f}$ بیان دارید. با این کار قسمت (ت) قضیهٔ ۲.۷ تعمیم می‌یابد.

۲. آیا توپولوژی $\mathscr{L}_n$ به وسیلهٔ یک متر پایا که تبدیل فوریه را به یک یکمتری از $\mathscr{L}_n$ به روی $\mathscr{L}_n$ تبدیل می‌کند القا می‌شود؟

۳. فرض کنید $f(x) = e^x$ ، $g(x) = e^x \cos\left(e^x\right)$ بر خط حقیقی. نشان دهید g یک توزیع متعادل است ولی f چنین نیست.

٤. بنابر تمرین ۳، توزیعهایی در R^n وجود دارند که متعادل نیستند. این توزیعها تابعیهای خطی پیوسته بر $\mathscr{D}(R^n)$ اند که توسیع خطی پیوسته به $\mathscr{L}_n$ ندارند. توضیح دهید چرا این قضیهٔ هان- باناخ را نقض نمی‌کند.

۵. (آ) دنباله‌ای در $\mathscr{D}(R^n)$ بسازید که درتوپولوژی $\mathscr{L}_n$ همگرا به ۰ باشد ولی درتوپولوژی $\mathscr{D}(R^n)$ چنین نباشد.

(ب) دنباله‌ای از چند جمله‌ایها بسازید که در توپولوژی $\mathscr{D}'(R^1)$ همگرا باشد ولی در توپولوژی $\mathscr{L}'_1$ نباشد.

٦. ثابت کنید اعمال مذکور در قضیهٔ ۱۳.۷ نگاشتهایی **پیوسته** از $\mathscr{L}'_n$ به توی $\mathscr{L}'_n$ اند.

۷. اگر $u \in \mathscr{L}'_n$، ثابت کنید به ازای هر $x \in R^n$،

$$(\tau_x u)\hat{} = e_{-x}\hat{u} \qquad \text{و} \qquad (e_x u)\hat{} = \tau_x \hat{u}.$$

۸. فرض کنید $f \in L^1(R^n)$، $f \neq 0$، λ یک عدد مختلط بوده، و $\hat{f} = \lambda f$. راجع به λ چه می‌توان گفت؟

۹. قسمت (آ) قضیهٔ ۸.۷ را مستقیماً (بدون استفاده از تبدیلات فوریه) ثابت نمایید.

۱۰. تبدیل فوریهٔ اندازهٔ بورل مختلط μ بر R^n را معمولاً تابعی مانند $\hat{\mu}$ به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$\hat{\mu}(x) = \int_{R^n} e^{-ix.t} d\mu(t) \qquad \left(x \in R^n\right).$$

البته μ نیز یک توزیع متعادل است، و نیز تبدیل فوریه‌اش که در بخش ۱٤.۷ تعریف شده است. نشان دهید که این دو تعریف سازگار می‌باشند. ثابت کنید هر $\hat{\mu}$ کراندار و به طور یکنواخت پیوسته است.

۱۱. فرض کنید $\Lambda: \mathscr{L}_n \to C(R^n)$ پیوسته و خطی بوده و به ازای هر $x \in R^n$، $\tau_x \Lambda = \Lambda \tau_x$. آیا نتیجه می‌شود که $u \in \mathscr{L}'_n$ ای هست به طوری که به ازای هر $\phi \in \mathscr{L}_n$،

$$\Lambda\phi = u * \phi?$$

۱۲. اگر $\{h_j\}$ یک همانی تقریبی به صورت مذکور در تعریف ۳۱.٦ باشد و $u \in \mathscr{L}'_n$، آیا وقتی $j \to \infty$، در ضعیف*-توپولوژی $\mathscr{L}'_n$، $u * h_j \to u$؟

۱۳. فرض کنید X و Y دو فضای متری تام بوده، A در X چگال باشد، و $f: A \to Y$ به

طور یکنواخت پیوسته باشد.

(آ) ثابت کنید f دارای توسیع پیوستهٔ منحصر به فردی مانند $F: X \to Y$ است.

(ب) اگر f یک یکمتری باشد، ثابت کنید F نیز چنین بوده و $F(x)$ در Y بسته است.

(این امر در برهان قضیهٔ پلانشرل به کاررفته بود؛ همچنین ر.ک.تمرین ۱۹، فصل ۱.)

۱۴. فرض کنید F یک تابع تمام در $\mathcal{C}^n$ بوده، و به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیحی مانند $N(\varepsilon)$ و ثابتی مانند $\gamma(\varepsilon) < \infty$ چنان نظیر باشد که

$$|F(z)| \le \gamma(\varepsilon)(1+|z|)^{N(\varepsilon)} e^{\varepsilon|\operatorname{Im} z|} \qquad \left(x \in \mathcal{C}^n\right).$$

ثابت کنید F یک چندجمله‌ای است.

۱۵. فرض کنید f یک تابع تمام در $\mathcal{C}^n$ بوده، N یک عدد صحیح مثبت باشد، $r \ge 0$، و

به ازای هر $z \in \mathcal{C}^n$، $|f(z)| \le (1+|z|)^N e^{r|\operatorname{Im} z|}$؛

به ازای هر $x \in R^n$، $|f(x)| \le 1$.

ثابت کنید

به ازای هر $z \in \mathcal{C}^n$، $|f(z)| \le e^{r|\operatorname{Im} z|}$.

پیشنهاد. $z = x + iy \in \mathcal{C}^n$ را ثابت گرفته و به ازای $\lambda \in \mathcal{C}$ و $s > 0$ تعریف کنید

$$g_s(\lambda) = (1 - is\lambda)^{-N-1} e^{ir|y|\lambda} f(x + \lambda y)$$

و قضیهٔ مدول ماکزیمم را بر ناحیهٔ نیمه مستدیر بزرگ در نیم صفحهٔ بالایی به کار برده نتیجه بگیرید که $\left|g_s(i)\right| < 1$. فرض کنید $s \to 0$.

۱۶. در قسمت (ب) قضیهٔ ۲۳.۷ حکم نشده است که u از مرتبهٔ N است. مثال زیر نشان می‌دهد که این همیشه درست نیست.

فرض کنید μ اندازهٔ احتمال بورل بر R^3 باشد که بر کرهٔ یکهٔ S^2 متمرکز شده است و تحت تمام دورانهای S^2 پایاست. با استفاده از مختصات کروی حساب کنید

$$\hat{\mu}(x) = \frac{\sin|x|}{|x|} \qquad \left(x \in R^3\right).$$

قراردهید $u = D_1\mu$. در این صورت

$$|\hat{u}(x)| = \left|x_1\hat{\mu}(x)\right| \le 1 \qquad \left(x \in R^3\right).$$

از تمرین ۱۵ نتیجه بگیرید که اگر چه u یک توزیع از مرتبهٔ ۰ نیست (مرتبه‌اش ۱ است) ولی

$$|u(e_{-z})| \le \gamma e^{|\mathrm{Im}\, z|} \qquad (z \in \mathbb{C}^{۳}).$$

برای تابع تمام $u(e_{-z})$، $z \in \mathbb{C}^{۳}$، فرمول صریح بیابید.

۱۷. فرض کنید u یک توزیع در R^n با محافظ فشردهٔ K باشد که تبدیل فوریه‌اش $\hat{u}$ یک تابع ***کراندار*** بر R^n است.

(آ) فرض کنید $n=۱$ یا $n=۲$ و ثابت کنید به ازای هر $\psi \in C^{\infty}(R^n)$ که بر K صفر شود، $\psi u = ۰$.

(ب) فرض کنید $n=۲$ و یک چندجمله‌ای حقیقی مانند P از دو متغیر باشد که بر K صفر می‌شود. ثابت کنید $Pu=۰$ و لذا $\hat{u}$ در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی $P(-D)\hat{u}=۰$ صدق می‌کند. به عنوان مثال، وقتی K دایرهٔ یکه است، داریم

$$\hat{u} + \Delta \hat{u} = ۰$$

که درآن $\Delta = \partial^{۲}/\partial x_{۱}^{۲} + \partial^{۲}/\partial x_{۲}^{۲}$ لاپلاسین است.

(پ) به کمک تمرین ۱۶ و چندجمله‌ای $۱ - x_{۱}^{۲} - x_{۲}^{۲} - x_{۳}^{۲}$ نشان دهید که قسمت (ب)، و لذا (آ)، به ازای $n=۳$ به جای $n=۲$ به صورت نادرست در می‌آید.

(ت) فرض کنید $n=۱$، $f \in L^{۱}(R)$، $\hat{f}=۰$ بر K، و $\hat{f}$ در شرط لیپ شیتس از مرتبهٔ $\frac{۱}{۲}$ صدق می‌کند؛ یعنی $|\hat{f}(t) - \hat{f}(s)| \le C|t-s|^{۱/۲}$. ثابت کنید

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{u}(x)dx = ۰ .$$

پیشنهاد. به ازای هر n، فرض کنید H_{ε} مجموعهٔ تمام نقاط خارج K باشد که فاصله‌شان تا K از $\varepsilon > ۰$ کمتر است. همچنین $\{h_{\varepsilon}\}$ یک همانی تقریبی مانند برهان قسمت (ب) قضیهٔ ۲۳.۷ باشد. با استفاده از قضیهٔ پلانشرل به دست آورید

$$\|u * h_{\varepsilon}\|_{۲} \le \|\hat{u}\|_{\infty} \varepsilon^{-n/۲} \|h_{۱}\|_{۲},$$

و بدین ترتیب نشان دهید که به ازای هر $\phi \in \mathscr{D}(R^n)$ که بر K صفر می‌شود،

$$|u(\phi)| \le \|\hat{u}\|_{\infty} \|h_{۱}\|_{۲} \liminf_{\varepsilon \to ۰} \left\{ \varepsilon^{-n} \int_{H_{\varepsilon}} |\phi|^{۲} dm_n \right\}^{۱/۲} .$$

این قسمت (آ) را به دست می‌دهد. با تعدیل مختصر، قسمت (ت) به دست می‌آید؛ قسمت (ب) از (آ) حاصل می‌شود.

۱۸. آیا در برهان قضیهٔ ۲۵.۷ باید تابع ψ معرفی شود؟ آیا می‌توان برهان را با قراردادن $F(x)=f(x)$ بر K و $F(x)=0$ خارج K ساده کرد؟

۱۹. نشان دهید که مفروضات قضیهٔ ۲۵.۷ ایجاب می‌کنند که $D^\alpha f$ به ازای هر اندیس چندگانهٔ α با $|\alpha|\le r$ موضعاً L^2 است.

۲۰. فرض کنید $f\in L^2(R^2)$ تابع پیوسته‌ای باشد که تبدیل فوریه‌اش به صورت زیر است.

$$\hat{f}(y)=(1+|y|)^{-4}\{\log(2+|y|)\}^{-1} \qquad \left(y\in R^2\right).$$

چون $|y|^3\hat{f}(y)$ در $L^2(R^2)$ است، قضیهٔ ۲۵.۷ ایجاب می‌کند که $f\in C^{(1)}(R^2)$. نشان دهید که نتیجهٔ قویتر $f\in C^{(2)}(R^2)$ نادرست است و این امر را با اثبات اینکه

$$\frac{f(h,0)+f(-h,0)-2f(0,0)}{h^2}\to-\infty$$ وقتی $h\to 0$، $-\infty$

محقق گردانید. این نشان می‌دهد که در رابطهٔ (۱) قضیهٔ ۲۵.۷ نمی‌توان $<$ را با $\le$ عوض کرد.

۲۱. فرض کنید u یک توزیع در R^n باشد که مشتقات اولش $D_1u,\ldots,D_nu$ توابعی در $L^2(R^n)$ اند. ثابت کنید u یک تابع نیز هست و u موضعاً L^2 می‌باشد. (نشان دهید که از نتیجه نمی‌توان "موضعاً" را حذف کرد.) ***راهنمایی.*** u درواقع مجموع یک تابع L^2 و یک تابع تمام است.

وقتی $n=1$، نشان دهید که u درواقع یک تابع پیوسته است. نشان دهید که این نتیجهٔ قویتر به ازای $n=2$ نادرست است. به عنوان مثال، گرادیان تابع

$$u\left(re^{i\theta}\right)=\log\log\left(2+\frac{1}{r}\right)$$

در $L^2(R^2)$ است. برای‌همین نتیجه تحت مفروضات‌ضعیفتر، ر.ک. تمرین ۱۱ درفصل ۸.

۲۲. توزیعهای متناوب یا توزیعها بر یک جنبرهٔ T^n دارای ***سریهای فوریه***‌ای هستند که نظریهٔ آنها از نظریهٔ تبدیلات فوریه به نوعی ساده‌تر است. این امر اصولاً به خاطر

فشردگی T^n است: هر توزیع بر T^n دارای محافظ فشرده است. به‌خصوص، توزیعهای **متعادل** چیزهای خاصی نیستند.

احکام مختلفی را که در مطالب خلاصه و اساسی زیر آمده‌اند ثابت نمایید:

$$T^n = \left\{\left(e^{ix_1},\ldots,e^{ix_n}\right) : \text{حقیقی } x_j\right\}.$$

توابع ϕ بر T^n را می‌توان با توابع $\tilde{\phi}$ بر R^n که نسبت به هر متغیر 2π- متناوب‌اند با قراردادن

$$\tilde{\phi}\left(x_1,\ldots,x_n\right) = \phi\left(e^{ix_1},\ldots e^{ix_n}\right)$$

یکی کرد. Z^n مجموعه (یا گروه جمعی) n تاییهای $k = \left(k_1,\ldots,k_n\right)$ از اعداد صحیح k_j است. به ازای $k \in Z^n$، تابع e_k بر T^n را با

$$e_k\left(e^{ix_1},\ldots,e^{ix_n}\right) = e^{ik.x} = \exp\{i(k_1x_1+\ldots+k_nx_n)\}$$

تعریف کنید. σ_n اندازهٔ هار T^n است. اگر $\phi \in L^1\left(\sigma_n\right)$، ضرایب فوریهٔ ϕ عبارتند از

$$\hat{\phi}(k) = \int_{T^n} e_{-k}\phi d\sigma_n \qquad \left(k \in Z^n\right).$$

$\mathscr{D}\left(T^n\right)$ فضای تمام توابع ϕ بر T^n است به طوری که $\tilde{\phi} \in C^\infty\left(R^n\right)$. هرگاه $\phi \in \mathscr{D}\left(T^n\right)$، آنگاه به ازای $N = 0,1,2,\ldots$،

$$\left\{\sum_{k \in Z^n}(1+k.k)^N\left|\hat{\phi}(k)\right|^2\right\}^{1/2} < \infty.$$

این نرمها یک توپولوژی فضای فرشه بر $\mathscr{D}\left(T^n\right)$ تعریف می‌کنند که با توپولوژی حاصل از نرمهای

$$\max_{|\alpha|\le N}\ \sup_{x\in R^n}\left|\left(D^\alpha\tilde{\phi}\right)(x)\right| \qquad (N = 0,1,2,\ldots)$$

یکی است. $\mathscr{D}'\left(T^n\right)$ فضای تمام تابعیهای خطی پیوسته بر $\mathscr{D}\left(T^n\right)$ است؛ اعضایش عبارتند از ***توزیعها*** بر T^n. ضرایب فوریهٔ هر $u \in \mathscr{D}'\left(T^n\right)$ با

$$\hat{u}(k) = u\left(e_{-k}\right) \qquad \left(k \in Z^n\right)$$

تعریف می‌شوند.

به هر $u \in \mathscr{D}'(T^n)$ یک N و C ای چنان نظیر است که

$$|\hat{u}(k)| \le C(1+|k|)^N \qquad \left(k \in Z^n\right).$$

به عکس، هرگاه g تابع مختلطی بر Z^n باشد که به ازای C و Nی در $|g(k)| \le C(1+|k|)^N$ صدق می‌کند، آنگاه به ازای $u \in \mathscr{D}'(T^n)$ای، $g = \hat{u}$.

لذا یک تناظر یک به یک خطی بین توزیعها بر T^n از یک سو و توابع با رشد چند جمله‌ای بر Z^n از سوی دیگر وجود دارد.

اگر $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$ مجموعه‌هایی متناهی باشند که اجتماعشان Z^n است و $u \in \mathscr{D}'(T^n)$، "مجموعهای جزئی"

$$\sum_{k \in E_j} \hat{u}(k) e_k$$

به ازای $j \to \infty$ در ضعیف*- توپولوژی $\mathscr{D}'(T^n)$ همگرا به u می‌باشد.

پیچش $u * v$ از $u \in \mathscr{D}'(T^n)$ و $v \in \mathscr{D}'(T^n)$ به ساده‌ترین وجه چنان تعریف می‌شود که دارای ضرایب فوریهٔ $\hat{u}(k)\hat{v}(k)$ باشد. مشابه‌های قضایای ۶.۳۰ و ۶.۳۷ برقرارند؛ برهانها بسیار ساده‌ترند.

۲۳. برهان قضیهٔ ۷.۲۵ را طوری تعدیل کنید که، با تعویض F به وسیلهٔ یک تابع متناوب مناسب، سریهای فوریه به جای تبدیلات فوریه به کار روند.

۲۴. قراردهید $c = (2/\pi)^{1/2}$. به ازای $j = 1,2,3,\ldots$، g_j را بر خط حقیقی به صورت زیر تعریف کنید:

$$g(t) = \begin{cases} c/t & \text{اگر } \ 1/j < |t| < j \text{،} \\ 0 & \text{در غیر این صورت ،} \end{cases}$$

ثابت کنید $\{\hat{g}_j\}$ یک دنبالهٔ به طوریکنواخت کراندار از توابع است که وقتی $j \to \infty$، نقطه به نقطه همگراست. اگر $f \in L^2(R^1)$، نتیجه می‌شود که $f * g_j$ در متر L^2 به تابعی

مانند $Hf \in L^2$ همگراست. این ***تبدیل هیلبرت*** f است؛ به طور صوری،

$$(Hf)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt.$$

(این انتگرال، به مفهوم مقدار اصلی، به ازای تقریباً هر x وجود دارد، ولی اثبات این امرچندان آسان نیست؛ اگر f مثلاً در شرط لیپ شیتس از مرتبهٔ ۱ صدق کند، برهان بدیهی خواهدبود.) ثابت کنید به ازای هر $f \in L^2(R^1)$،

$$\|Hf\|_2 = \|f\|_2 \qquad \text{و} \qquad H(Hf) = -f.$$

لذا H یک L^2 - یکمتری با دورهٔ تناوب ٤ است. آیا اگر $f \in \mathscr{L}_1$، $Hf \in \mathscr{L}_1$؟

فصل ۸

کاربردهایی در معادلات دیفرانسیل

جوابهای اصلی

۱.۸ آشنایی. توجه ما به معادلات دیفرانسیل جزئی خطی با ضرایب ثابت است. اینها معادلاتی هستند به شکل

$$P(D)u = v \tag{۱}$$

که در آن P یک چندجمله‌ای غیر ثابت از n متغییر (با ضرایب مختلط) است، $P(D)$ عملگر دیفرانسیل نظیر است (ر.ک.بخش۱.۷)، v یک تابع یا توزیع داده شده است، و تابع (یا توزیع)u یک ***جواب*** (۱) می‌باشد.

گوییم توزیع $E \in \mathscr{D}'(R^n)$ یک ***جواب اصلی***عملگر $P(D)$ است اگر در رابطهٔ (۱) به ازای (اندازهٔ دیراک) $v = \delta$ صدق نماید:

$$P(D)E = \delta\,. \tag{۲}$$

نتیجهٔ اصلی (قضیهٔ ۵.۸ منسوب به مالگرانژ (*Malgrange*) و اهرن پریس (*Ehrenpreis*)) که دراینجا ثابت خواهدشد این است که ***جوابهای اصلی همواره وجود دارند.***

فرض کنیم یک E داشته باشیم که در (۲) صدق نماید، v دارای محافظ فشرده باشد، و قرار می‌دهیم

$$u = E * v. \tag{۳}$$

در این صورت u یک جواب (۱) است زیرا، طبق قضایای ٣٥.٦ و ٣٧.٦،

$$P(D)(E * v) = (P(D)E) * v = \delta * v = v. \tag{٤}$$

لذا وجود یک جواب اصلی به یک قضیهٔ وجودی کلی برای معادلهٔ (۱) منجر می‌شود؛ همچنین توجه کنید که تفاوت هر جواب (۱) با $E * v$ یک جواب معادلهٔ همگن $P(D)u = ۰$ می‌باشد. به علاوه، رابطهٔ (۳) اطلاعات اضافی راجع به u به ما می‌دهد. به عنوان مثال، هرگاه $v \in \mathscr{D}\left(R^n\right)$، آنگاه $u \in C^\infty\left(R^n\right)$.

البته ممکن است پیچش $E * v$ به ازای vای که محافظش فشرده نیست موجود باشد. این امر مسئلهٔ یافتن E را به نحوی که رفتارش در بی‌نهایت تحت کنترل باشد مطرح می‌سازد. البته بهترین نتیجهٔ ممکن یافتن یک E با محافظ فشرده است. ولی این کار هرگز میسر نیست. اگر می‌بود، $\hat{E}$ یک تابع تمام می‌شد، و رابطهٔ (۲) ایجاب می‌کرد که $P\hat{E} = ۱$. ولی حاصل‌ضرب یک تابع تمام و یک چندجمله‌ای نمی‌تواند ۱ باشد مگر هر دو ثابت باشند.

اما گاهی می‌توان از معادلهٔ $P\hat{E} = ۱$ برای یافتن E استفاده کرد، یعنی وقتی $۱/P$ یک توزیع متعادل باشد. در این حالت تبدیل فوریهٔ $۱/P$ یک جواب اصلی به دست می‌دهد که یک توزیع متعادل می‌باشد. برای مثالهایی از این امر، ر.ک.تمرینهای ۵ تا ۹.

سؤال مربوطهٔ دیگر در رابطه با وجود جوابهای (۱) با محافظ فشرده به ازای محافظ v فشرده است. جواب (که در قضیهٔ ٤.٨ داده شده است) به‌وضوح نشان می‌دهد که بررسی P بر R^n در این مسائل کافی نیست بلکه مطالعهٔ رفتار P در فضای مختلط $\mathbb{C}^n$ بسیار مهم است.

۲.۸ نمادها. T^n چنبره است مرکب از تمام نقاط

$$w = \left(e^{i\theta_۱}, \ldots, e^{i\theta_n}\right) \tag{۱}$$

در $\mathbb{C}^n$ که درآن θ_1،...،θ_n حقیقی‌اند؛ σ_n اندازهٔ هار T^n است؛ یعنی اندازهٔ لبگ بخش بر $(2\pi)^n$.

یک چندجمله‌ای در $\mathbb{C}^n$ ***از درجهٔ*** N تابعی است مانند

$$P(z) = \sum_{|\alpha|\le N} c(\alpha) z^{\alpha} \qquad \left(z \in \mathbb{C}^n\right) \tag{۲}$$

که درآن α روی اندیسهای چندگانه تغییر می‌کنند و $c(\alpha) \in \mathbb{C}$. اگر رابطهٔ (۲) برقرار بوده و به ازای دست کم یک α با $|\alpha| = N$، $c(\alpha) \ne 0$، گوییم P از ***درجهٔ دقیق*** N است.

۳.۸ لم. هرگاه P یک چندجمله‌ای در $\mathbb{C}^n$ ازدرجهٔ دقیق N باشد، آنگاه یک ثابت مانند $A < \infty$ فقط تابع P هست به طوری که به ازای هر تابع تمام f در $\mathbb{C}^n$، هر $z \in \mathbb{C}^n$، و هر $r > 0$،

$$|f(z)| \le A r^{-N} \int_{T^n} |(fP)(z + rw)|\, d\sigma_n(w). \tag{۱}$$

برهان .ابتدا فرض می‌کنیم F یک تابع تمام از یک متغیر مختلط بوده و

$$Q(\lambda) = c\prod_{i=1}^{N}\left(\lambda + a_i\right) \qquad (\lambda \in \mathbb{C}). \tag{۲}$$

قرار می‌دهیم $Q_0(\lambda) = c\prod\left(1+\bar{a}_i\lambda\right)$. در این صورت $cF(0) = (FQ_0)(0)$. چون بر دایرهٔ یکه داریم $|Q_0| = |Q|$، پس

$$|cF(0)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|(FQ)\left(e^{i\theta}\right)\right| d\theta. \tag{۳}$$

چندجمله‌ای داده شدهٔ P را می‌توان به شکل $P = P_0 + P_1 ... + P_N$ نوشت که در آن هر P_j یک چندجمله‌ای همگن از درجهٔ jاست. A را با

$$\frac{1}{A} = \int_{T^n} |P_N|\, d\sigma_n \tag{۴}$$

تعریف می‌کنیم. این انتگرال مثبت است، زیرا P از درجهٔ **دقیق** N است. [ر.ک.قسمت (ب)تمرین ۱.] اگر $z \in \mathbb{C}^n$ و $w \in T^n$، تعریف می‌کنیم

$$F(\lambda) = f(z + r\lambda w),\quad Q(\lambda) = P(z + r\lambda w) \quad (\lambda \in \mathbb{C}). \tag{۵}$$

ضریب پیشرو Q عبارت است از $r^N P_N(w)$. لذا (۳) ایجاب می‌کند که

$$r^N |P_N(w)| |f(z)| \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|(fP)\left(z+re^{i\theta}w\right)\right| d\theta. \qquad (٦)$$

اگر از (٦) نسبت به σ_n انتگرال بگیریم، به دست می‌آوریم

$$|f(z)| \le Ar^{-N} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{T^n} \left|(fP)\left(z+re^{i\theta}w\right)\right| d\sigma_n(w). \qquad (٧)$$

اندازهٔ σ_n تحت تغییر متغیر $w \to e^{i\theta}w$ پایا می‌ماند. لذا انتگرال داخلی در(٧) از θ مستقل است. این رابطهٔ (١) را به ما می‌دهد.

۸.٤ قضیه. ***فرض کنیم P یک چندجمله‌ای از n متغیر بوده، $v \in \mathscr{D}'\left(R^n\right)$، و v محافظ فشرده داشته باشد. در این صورت معادلهٔ***

$$P(D)u = v \qquad (١)$$

جوابی با محافظ فشرده دارد اگر و فقط اگر یک تابع تمام مانند g در $\mathbb{C}^n$ چنان موجود باشد که

$$Pg = \hat{v}. \qquad (٢)$$

وقتی این شرط برقرار باشد، معادلهٔ (١) دارای جواب منحصر به فرد u با محافظ فشرده است؛ محافظ این u در غلاف محدب محافظ v قرار دارد.

برهان. اگر معادلهٔ (١) دارای جواب u با محافظ فشرده باشد، قسمت (آ) قضیهٔ ٢٣.٧ نشان می‌دهد که رابطهٔ (٢) به ازای $g = \hat{u}$ برقرار است.

به عکس، فرض کنیم (٢) به ازای gای تمام برقرار باشد. $r > 0$ را طوری می‌گیریم که محافظ v در $rB = \left\{x \in R^n : |x| \le r\right\}$ باشد. بنابر لم ٣.٨، رابطهٔ (٢) ایجاب می‌کند که

$$|g(z)| \le A \int_{T^n} |\hat{v}(z+w)| d\sigma_n(w) \qquad \left(z \in \mathbb{C}^n\right). \qquad (٣)$$

بنابر قسمت (آ) قضیهٔ ٢٣.٧، N و γای وجود دارند به طوری که

$$|\hat{v}(z+w)| \le \gamma(1+|z+w|)^N \exp\{r|\mathrm{Im}(z+w)|\}. \qquad (٤)$$

ثابتهایی مانند c_1 و c_2 وجود دارند که در نامساویهای

$$1+|z+w| \le c_1(1+|z|) \qquad (5)$$

و

$$|\mathrm{Im}(z+w)| \le c_2 + |\mathrm{Im}\, z| \qquad (6)$$

به ازای هر $z \in \mathbb{C}^n$ و هر $w \in T^n$ صدق می‌کنند. از این نامساویها داریم

$$|g(z)| \le B(1+|z|)^N \exp\{r|\mathrm{Im}\, z|\} \qquad \left(z \in \mathbb{C}^n\right), \qquad (7)$$

که در آن B ثابت دیگری (تابع γ، A، N، c_1، c_2، و r) می‌باشد. بنابر (۷) وقسمت (ب) قضیهٔ ۲۳.۷، به ازای توزیعی مانند u با محافظ در rB داریم $g=\hat{u}$. لذا رابطهٔ (۲) به صورت $P\hat{u}=\hat{v}$ در می‌آید که هم ارز (۱) می‌باشد.

یکتایی u واضح است زیرا حداکثر یک تابع تمام مانند $\hat{u}$ صادق در $P\hat{u}=\hat{v}$ وجود دارد.

استدلال فوق نشان داد که محافظ S_u از u در هر گوی بسته به مرکز مبدأ که شامل محافظ S_vی v است قراردارد. چون معادلهٔ (۱) ایجاب می‌کند که

$$P(D)(\tau_x u) = \tau_x v \qquad \left(x \in R^n\right), \qquad (8)$$

همان استدلال برای $x+S_u$ و $x+S_v$ درست است. درنتیجه، S_u در اشتراک تمام گویهای بسته (به مرکز نقطه‌ای دلخواه در R^n) که شامل S_vاند می‌باشد. چون این اشتراک غلاف محدب S_v است، برهان کامل خواهدبود.

۵.۸ قضیه. هرگاه P یک چندجمله‌ای در $\mathbb{C}$ از درجهٔ دقیق N بوده و $r>0$، آنگاه عملگر دیفرانسیل $P(D)$ دارای جواب اصلی E صادق در

$$|E(\psi)| \le Ar^{-N} \int_{T^n} d\sigma_n(w) \int_{R^n} |\hat{\psi}(t+rw)|\, dm_n(t) \qquad (1)$$

به ازای هر $\psi \in \mathscr{D}\left(R^n\right)$ می‌باشد.

در اینجا A ثابتی است که درلم ۳.۸ آمده است. نکتهٔ اصلی قضیه **وجود** جواب اصلی است تا تقریب (۱) که از برهان ناشی می‌شود.

برهان. $r>0$ را ثابت گرفته و تعریف می‌کنیم

$$\|\psi\| = \int_{T^n} d\sigma_n(w) \int_{R^n} |\hat{\psi}(t+rw)| dm_n(t). \tag{۲}$$

برای آماده شدن جهت قسمت اصلی برهان، ابتدا نشان می‌دهیم که

$$\text{اگر } \psi_j \to 0 \text{ در } \mathscr{D}\left(R^n\right)\text{، } \lim_{j\to\infty}\left\|\psi_j\right\| = 0. \tag{۳}$$

توجه کنید که اگر $t \in R^n$ و $w \in \mathbb{C}^n$، $\hat{\psi}(t+w) = (e_{-w}\psi)^\wedge(t)$. لذا

$$\|\psi\| = \int_{T^n} d\sigma_n(w) \int_{R^n} \left|(e_{-rw}\,\psi)^\wedge\right| dm_n. \tag{٤}$$

اگر در $\mathscr{D}\left(R^n\right)$، $\psi_j \to 0$، محافظ همهٔ ψ_jها در مجموعهٔ فشرده‌ای مانند K قراردارنـد. توابع $e_{rw}\left(w \in T^n\right)$ بر K به طـور یکنواخـت کراندارنـد. از فرمـول لایـب نیـتز معلـوم می‌شود که

$$\left\|D^\alpha\left(e_{-rw}\psi_j\right)\right\|_\infty \le C(K,\alpha) \max_{\beta\le\alpha}\left\|D^\beta\psi_j\right\|_\infty. \tag{٥}$$

طرف راست (٥) به ازای هر α به 0 میل می‌کند. لذا، بـه ازای $\varepsilon>0$ داده شـده، j_0ی هست به طوری که

$$\left\|(I-\Delta)^n\left(e_{-rw}\psi_j\right)\right\|_2 < \varepsilon \qquad \left(j>j_0, w\in T^n\right), \tag{٦}$$

که درآن $\Delta = D_1^2+\ldots+D_n^2$ لاپلاسین می‌باشد. بنابر قضیهٔ پلانشرل، رابطهٔ (٦) همان

$$\int_{R^n}\left(1+|t|^2\right)^n \hat{\psi}_j(t+rw)^2\, dm_n(t) < \varepsilon^2 \tag{٧}$$

است، که ازآن طبق نامساوی شوارتز و رابطهٔ (۲) نتیجه می‌شود که بـه ازای هـر $j>j_0$، $\|\psi_j\| < C\varepsilon$، که درآن

$$C^2 = \int_{R^n}\left(1+|t|^2\right)^{-2n} dm_n(t) < \infty. \tag{٨}$$

این رابطهٔ (۳) را ثابت خواهد کرد.

حال فرض کنیم $\phi \in \mathscr{D}\left(R^n\right)$ و

$$\psi = P(D)\phi. \tag{٩}$$

در این صورت $\hat{\psi} = P\hat{\phi}$، $\hat{\phi}$ و $\hat{\psi}$ تمـام‌اند؛ درنتیجـه ψ تـابع ϕ را معیـن خواهدکـرد. بـه خصوص، $\phi(0)$ یک تابعی خطی از ψ است که بربرد $P(D)$ تعریف شــده اسـت. نکتـهٔ

بسیار مهم برهان عبارت است از اثبات پیوستگی ایـن تـابعی؛ یعنـی یـک توزیـع مـانند $u \in \mathscr{D}'(R^n)$ وجود دارد که دررابطهٔ

$$u(P(D)\phi) = \phi(\circ) \qquad \left(\phi \in \mathscr{D}(R^n)\right) \tag{۱۰}$$

صدق می‌کند، زیرا در این صورت توزیع $E = \breve{u}$ در روابط

$$(P(D)E)(\phi) = E(P(-D)\phi) = u\left((P(-D)\phi)\breve{}\right)$$

$$= u\left(P(D)\breve{\phi}\right) = \breve{\phi}(\circ) = \phi(\circ) = \delta(\phi)$$

صدق می‌کند؛ درنتیجه، طبق مطلوب، $P(D)E = \delta$.

اگر لم ۳.۸ را بر $P\hat{\phi} = \hat{\psi}$ اعمال کنیم، نتیجه می‌شود که

$$\left|\hat{\phi}(t)\right| \le Ar^{-N} \int_{T^n} |\hat{\psi}(t+rw)| d\sigma_n(w) \qquad \left(t \in R^n\right). \tag{۱۱}$$

بنابر قضیهٔ انعکاس، $\phi(\circ) = \int_{R^n} \hat{\phi}\, dm_n$. لذا از روابط (۱۱)، (۲)، و (۹) داریم

$$|\phi(\circ)| \le Ar^{-N} \|P(D)\phi\| \qquad \left(\phi \in \mathscr{D}(R^n)\right). \tag{۱۲}$$

فـرض کنیـم Y زیرفضـایی از $\mathscr{D}(R^n)$ باشـد کـه از توابـع $P(D)\phi$، $\phi \in \mathscr{D}(R^n)$، تشکیل شده است. بنابر رابطهٔ (۱۲)، قضیهٔ هان- باناخ ۳.۳ نشان می‌دهد که تابعی خطی تعریف شده بر Y با $P(D)\phi \to \phi(\circ)$ به یک تـابعی خطـی مـانند u بـر $\mathscr{D}(R^n)$ توسـیع می‌یابد که دررابطهٔ (۱۰) و نیز رابطهٔ

$$|u(\psi)| \le Ar^{-N} \|\psi\| \qquad \left(\psi \in \mathscr{D}(R^n)\right) \tag{۱۳}$$

صدق می‌کند. بنابر (۳)، $u \in \mathscr{D}'(R^n)$. این برهان را تمام خواهدکرد.

معادلات بیضوی

۶.۸ آشنایی. هرگاه u یک تابع دوبار بـه طـور پیوسـته مشـتقپذیر در مجموعـهٔ بـازی چون $\Omega \subset R^2$ باشد که در معادلهٔ لاپلاس

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \circ \tag{۱}$$

صدق کند، آنگاه معلوم شده است که u عملاً در $C^\infty(\Omega)$ است صرفاً بدین خاطر که هر

تابع توافقی حقیقی در Ω (موضعاً) قسمت حقیقی یک تابع هلوریخت است. هر قضیه از این نوع (قضیه‌ای که حکم کند که هر جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل خاص دارای خواص همواری قویتر از خواصی که مقدمتاً معلوم‌اند باشد) یک ***قضیهٔ انتظام*** نام دارد.

ما برهان یک قضیهٔ انتظام نسبتاً کلی برای معادلات دیفرانسیل جزئی بیضوی را ارائه می‌دهیم. واژهٔ "بیضوی" بزودی تعریف خواهدشد. پیش از همه جالب است ببینیم که معادلهٔ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \tag{۲}$$

رفتار کاملاً متفاوتی با معادلهٔ (۱) دارد، زیرا این معادله به وسیلهٔ هر تابع u به شکل $u(x,y) = f(y)$ که درآن f تابع مشتقپذیر دلخواهی است برقرار می‌شود. درواقع، اگر معادلهٔ (۲) را به معنی

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \tag{۳}$$

بگیریم، f می‌تواند یک تابع کاملاً دلخواه باشد.

۷.۸ چند تعریف. فرض کنیم Ω در R^n باز بوده، N یک عدد صحیح مثبت باشد، به ازای هر اندیس چندگانهٔ α که $|\alpha| \le N$، $f_\alpha \in C^\infty(\Omega)$، و دست کم یک f_α با $|\alpha| = N$ متحد ۰ نباشد. این داده‌ها یک عملگر دیفرانسیل خطی مانند

$$L = \sum_{|\alpha| \le N} f_\alpha D_\alpha \tag{۱}$$

را معین می‌کنند که بر توزیع $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ به وسیلهٔ

$$Lu = \sum_{|\alpha| \le N} f_\alpha D_\alpha u \tag{۲}$$

عمل خواهدکرد.

مرتبهٔ L مساوی N است. عملگر

$$\sum_{|\alpha| = N} f_\alpha D_\alpha \tag{۳}$$

قسمت اصلی L است. ***چندجمله‌ای مشخص*** L عبارت است از

$$p(x,y)=\sum_{|\alpha|=N} f_\alpha(x)y^\alpha \qquad \left(x\in\Omega, y\in R^n\right). \tag{٤}$$

این یک چندجمله‌ای همگن از درجهٔ N از متغیرهای $y=\left(y_1,\ldots,y_n\right)$ با ضرایب در $C^\infty(\Omega)$ است.

گوییم عملگر L ***بیضوی*** است اگر به ازای هر $x\in\Omega$ و هر $y\in R^n$ جز البته $y=0$ داشته باشیم $p(x,y)\neq 0$. توجه کنید که خاصیت بیضوی برحسب قسمت اصلی L تعریف شده است؛ جملات با مرتبه‌های پایین‌تر آمده در (۱) نقشی ندارند.

به عنوان مثال، چندجمله‌ای مشخص لاپلاسین

$$\Delta\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \tag{٥}$$

عبارت است از $p(x,y)=-\left(y_1^2+\ldots+y_n^2\right)$؛ درنتیجه Δ بیضوی است.

از آن سو، هرگاه $L=\partial^2/\partial x_1\partial x_2$، آنگاه $p(x,y)=-y_1y_2$، و L بیضوی نیست.

نتیجهٔ اصلی موردنظر ما (قضیهٔ ۸ .۱۲) مستلزم چند فضای خاص از توزیعهای متعادل است که اینک به توصیف آنها می‌پردازیم.

۸ .۸ **فضاهای سوبولف.** به هر عدد حقیقی s یک اندازهٔ مثبت مانند μ_s بر R^n را به صورت زیر مربوط می‌کنیم:

$$d\mu_s(y)=\left(1+|y|^2\right)^s dm_n(y)\,. \tag{١}$$

هرگاه $f\in L^2\left(\mu_s\right)$ یعنی $\int|f|^2 d\mu_s<\infty$، آنگاه f یک توزیع متعادل است [مثال (پ) از بخش ۱۲.۷]؛ لذا f تبدیل فوریهٔ یک توزیع متعادل مانند u است. فضای‌برداری تمام uهایی که به این طریق به دست می‌آیند با H^s نموده می‌شود؛ این فضا با نرم

$$\|u\|_s=\left(\int_{R^n}|\hat{u}|^2 d\mu_s\right)^{1/2} \tag{٢}$$

مجهز است. واضح است که H^s به طور یکمتر با $L^2\left(\mu_s\right)$ یکریخت است.

فضاهای H^s را ***فضاهای سوبولف*** می‌نامند. در سراسر بحث بعد n را ثابت گرفته و در نمادگذاری اشاره‌ای به آن نخواهیم کرد. بنابر قضیهٔ پلانشرل، $H^0=L^2$.

واضح است که اگر $t < s$، $H^s \subset H^t$. لذا اجتماع X از تمام فضاهای H^s یک فضای‌برداری است. گوییم عملگر خطی $\Lambda: X \to X$ از **مرتبهٔ t** است اگر تحدید Λ به هر H^s یک نگاشت پیوسته از H^s به توی H^{s-t} باشد؛ توجه کنید که t لزوماً صحیح نیست و هر عملگر از مرتبهٔ t از مرتبهٔ t' به ازای $t' > t$ نیز هست.

در زیر خواصی از فضاهای سوبولف که مورد لزومند ذکر شده‌اند.

۸ .۹ قضیه

(آ) هرتوزیع با محافظ فشرده در H^sی قراردارد.

(بـ) اگر $-\infty < t < \infty$، نگاشت $u \to v$ با تعریف

$$\hat{v}(y) = \left(1 + |y|^2\right)^{t/2} \hat{u}(y) \qquad \left(y \in R^n\right)$$

یک یکمتری خطی از H^s به روی H^{s-t} است و لذا یک عملگر از مرتبهٔ t است که معکوسش از مرتبهٔ $-t$ می‌باشد.

(پـ) اگر $b \in L^\infty\left(R^n\right)$، نگاشت $u \to v$ با تعریف $\hat{v} = b\hat{u}$ یک عملگر از مرتبهٔ ۰ است.

(تـ) به ازای هر اندیس چندگانهٔ α، D_α یک عملگر از مرتبهٔ $|\alpha|$ است.

(ثـ) هرگاه $f \in \mathscr{L}_n$، آنگاه $u \to fu$ یک عملگر از مرتبهٔ ۰ است.

برهان. اگر $u \in \mathscr{D}'\left(R^n\right)$ محافظ فشرده داشته باشد، قسمت (آ) قضیهٔ ۷. ۲۳ نشان می‌دهد که به ازای ثابتهایی چون C و N،

$$|\hat{u}(y)| \le C(1 + |y|)^N \qquad \left(y \in R^n\right). \tag{1}$$

لذا اگر $s < -N - n/2$، $u \in H^s$. این قسمت (آ) را ثابت می‌کند؛ قسمتهای (بـ) و (پـ) واضح می‌باشند. رابطهٔ

$$\left|\left(D_\alpha u\right)^\wedge(y)\right| = \left|y^\alpha\right| |\hat{u}(y)| \le \left(1 + |y|^2\right)^{|\alpha|/2} |\hat{u}(y)|$$

ایجاب می‌کند که

$$\|D_\alpha u\|_{s-|\alpha|} \le \|u\|_s; \qquad (۲)$$

درنتیجه (ت) برقرار است

برهان (ث) تابع نامساوی

$$\left(1+|x+y|^2\right)^s \le 2^{|s|}\left(1+|x|^2\right)^s\left(1+|y|^2\right)^{|s|} \qquad (۳)$$

است که به ازای $x \in R^n$، $y \in R^n$، و $-\infty < s < \infty$ معتبر است. حالت $s=1$ در (۳) واضح است. از این حالت می‌توان حالت $s=-1$ را به وسیلهٔ تعویض x با $x-y$ و سپس y با $-y$ به دست آورد. حالت کلی (۳) از این دو حالت به وسیلهٔ رسانیدن همه چیز به توان $|s|$ به دست می‌آید. از نامساوی (۳) به ازای هر تابع اندازه‌پذیر h بر R^n داریم

$$\int_{R^n} |h(x-y)|^2 d\mu_s(x) \le 2^{|s|}\left(1+|y|^2\right)^{|s|} \int_{R^n} |h|^2 d\mu_s. \qquad (۴)$$

حال فرض کنیم $u \in H^s$، $f \in \mathscr{L}_n$، و $t > |s| + n/2$. چون $\hat{f} \in \mathscr{L}_n$، $\|f\|_t < \infty$. قرار می‌دهیم $\gamma = \mu_{|s|-t}\left(R^n\right)$. در این صورت $\gamma < \infty$. تعریف می‌کنیم $F = |\hat{u}| * |\hat{f}|$. بنا بر قضیهٔ ۱۹.۷،

$$\left|(fu)^{\wedge}\right| = \left|\hat{u} * \hat{f}\right| \le |\hat{u}| * |\hat{f}| = F. \qquad (۵)$$

بنابر نامساوی شوارتز، به ازای هر $x \in R^n$،

$$|F(x)|^2 \le \int_{R^n} \left|\hat{f}(y)\right|^2 d\mu_t(y) \int_{R^n} |\hat{u}(x-y)|^2 d\mu_{-t}(y). \qquad (۶)$$

از رابطهٔ (۶) روی R^n ونسبت به μ_s انتگرال می‌گیریم. بنابر (۴)، نتیجه خواهدبود

$$\int_{R^n} |F|^2 d\mu_s \le 2^{|s|}\gamma \|f\|_t^2 \|u\|_s^2. \qquad (۷)$$

از روابط (۵) و (۷) نتیجه می‌شود که

$$\|fu\|_s \le \left(2^{|s|}\gamma\right)^{1/2} \|f\|_t \|u\|_s . \qquad (۸)$$

این قسمت (ث) را ثابت خواهد کرد.

۸.۱۰ تعریف. فرض کنیم Ω در R^n باز باشد. گوییم توزیع $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ ***موضعاً*** H^s است اگر به هر نقطهٔ $x \in \Omega$ یک توزیع مانند $v \in H^s$ چنان نظیر باشد که در همسایگیی

از x مانند ω داشته باشیم $u=v$. (ر.ک.بخش ۱۹.۶.)

۸ .۱۱ قضیه. *اگر $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$ و $-\infty<s<\infty$، دو حکم زیر هم ارزند:*

(آ) u موضعاً H^s است؛

(ب) به ازای هر $\psi\in\mathscr{D}(\Omega)$، $\psi u\in H^s$.

به علاوه، اگر s یک عدد صحیح نامنفی باشد، احکام (آ) و (ب) با حکم زیر هم ارز می‌باشند:

(پ) به ازای هر α که $|\alpha|\le s$، $D_\alpha u$ موضعاً L^2 می‌باشد.

ممکن است حکم (ب) نیاز به توضیح داشته باشد، زیرا u فقط بر توابع آزمونی عمل می‌کند که محافظشان در Ω قراردارند. با اینحال، ψu یک تابعی است که به هر $\phi\in\mathscr{D}(R^n)$ عدد

$$(\psi u)(\phi)=u(\psi\phi)$$

را مربوط می‌سازد. توجه کنید که $\psi\phi\in\mathscr{D}(\Omega)$؛ درنتیجه $u(\psi\phi)$ تعریف شده است.

برهان. فرض کنیم u موضعاً H^s باشد. همچنین K محافظ $\psi\in\mathscr{D}(\Omega)$ی باشد. چون K فشرده است، تعدادی متناهی مجموعهٔ باز مانند $\omega_i\subset\Omega$ هست که اجتماعشان K را می‌پوشاند و در آن u با $v_i\in H^s$ی یکی می‌باشد. توابعی چون $\psi_i\in\mathscr{D}(\omega_i)$ وجود دارند به طوری که بر K، $\sum\psi_i=1$. اگر $\phi\in\mathscr{D}(R^n)$، نتیجه می‌شود که

$$u(\psi\phi)=\sum u(\psi_i\psi\phi)=\sum v_i(\psi_i\psi\phi)$$

زیرا $\psi_i\psi\phi\in\mathscr{D}(\omega_i)$. لذا $\psi u=\sum\psi_i\psi v_i$. بنابر قسمت (ث) قضیهٔ ۹.۸، به ازای هر i، $\psi_i\psi v_i\in H^s$. لذا $\psi u\in H^s$، و قسمت (آ) قسمت (ب) را ایجاب خواهد کرد.

هرگاه (ب) برقرار باشد، $x\in\Omega$، و $\psi\in\mathscr{D}(\Omega)$ در همسایگی ω از x مساوی ۱ باشد، آنگاه $u=\psi u$ در ω، و طبق فرض $\psi u\in H^s$. لذا قسمت (ب) قسمت (آ) را ایجاب

خواهد کرد.

مجدداً فرض می‌کنیم (ب) برقرار باشد. هرگاه $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$، آنگاه $\psi u \in H^s$؛ در نتیجه، طبق قسمت (ت) قضیهٔ ۸ .۹، $D_\alpha(\psi u) \in H^{s-|\alpha|}$. هرگاه $|\alpha| \le s$، آنگاه

$$H^{s-|\alpha|} \subset H^\circ = L^\text{۲}(R^n).$$

لذا $D_\alpha(\psi u) \in L^\text{۲}(R^n)$. با فرض $\psi = \text{۱}$ در همسایگیی از نقطهٔ $x \in \Omega$ معلوم می‌شود که $D_\alpha u$ در Ω موضعاً $L^\text{۲}$ است. لذا قسمت (ب) قسمت (پ) را نتیجه خواهدداد.

بالأخره، فرض کنیم $D_\alpha u$ به ازای هر α که $|\alpha| \le s$ موضعاً $L^\text{۲}$ باشد. $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ را ثابت می‌گیریم. فرمول لایب‌نیتز نشان می‌دهد که اگر $|\alpha| \le s$، $D_\alpha(\psi u) \in L^\text{۲}(R^n)$. لذا

$$\int_{R^n} |y^\alpha|^\text{۲} |(\psi u)^\wedge(y)|^\text{۲}\, dm_n(y) < \infty \qquad (|\alpha| \le s). \tag{۱}$$

اگر s یک عدد صحیح نامنفی باشد، نامساوی (۱) به ازای تکجمله‌ایهای $y_\text{۱}^s$،...،y_n^s به جای y^α برقرارند. پس، همانند برهان قضیهٔ ۷.۲۵،

$$\int_{R^n} \left(\text{۱}+|y|^\text{۲}\right)^s |(\psi u)^\wedge(y)|^\text{۲}\, dm_n(y) < \infty. \tag{۲}$$

لذا $\psi u \in H^s$؛ (پ) قسمت (ب) را ایجاب می‌کند، و برهان تمام خواهدبود.

۸ .۱۲ قضیه. *فرض کنیم Ω مجموعهٔ بازی در R^n بوده، و*

(آ) $L = \sum f_\alpha D_\alpha$ یک عملگر دیفرانسیل بیضوی خطی در Ω از مرتبهٔ $N \ge \text{۱}$ با ضرایب $f_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ باشد؛

(ب) به ازای هر α با $|\alpha| = N$، f_α ثابت باشد؛

(پ) u و v توزیعهایی در Ω باشند که در

$$Lu = v \tag{۱}$$

صدق کنند و v موضعاً H^s باشد.

در این صورت u موضعاً H^{s+N} خواهدبود.

نتیجه. ***هرگاه L در قسمتهای (آ) و (ب) صدق کرده و $v \in C^{\infty}(\Omega)$، آنگاه هر جواب uی معادلهٔ (۱) متعلق به $C^{\infty}(\Omega)$ است. به خصوص، هر جواب معادلهٔ همگن $Lu = 0$ در $C^{\infty}(\Omega)$ می‌باشد.***

زیرا هرگاه $v \in C^{\infty}(\Omega)$، آنگاه به ازای هر $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$، $\psi v \in \mathscr{D}(R^n)$. لذا v به ازای هر s، موضعاً H^s است، و قضیه ایجاب می‌کند که به ازای هر s، u موضعاً H^s می‌باشد. از قضایای ۱۱.۸ و ۲۵.۷ نتیجه می‌شود که $u \in C^{\infty}(\Omega)$.

فرض (ب) را می‌توان از قضیهٔ حذف کرد، ولی وجودش برهان را خیلی ساده خواهد کرد.

برهان. نقطهٔ $x \in \Omega$ را ثابت گرفته و فرض می‌کنیم $B_0 \subset \Omega$ یک گوی بسته به مرکز x بوده و $\phi_0 \in \mathscr{D}(\Omega)$ بر مجموعهٔ بازی شامل B_0 مساوی ۱ باشد. بنابر قسمت (آ) قضیهٔ ۹.۸، به ازای t ای $\phi_0 u \in H^t$. چون H^t با نزول t بزرگ می‌شود، می‌توان فرض کرد $t = s + N - k$ که در آن k یک عدد صحیح مثبت است. گویهای بستهٔ

$$B_0 \supset B_1 \supset \ldots \supset B_k$$

هریک به مرکز x و هریک مشمول قبلی را اختیار می‌کنیم. $\phi_1, \ldots, \phi_k \in \mathscr{D}(\Omega)$ را طوری می‌گیریم که بر مجموعهٔ بازی شامل B_i داشته باشیم $\phi_i = 1$ وخارج B_{i-1} داشته باشیم $\phi_i = 0$. چون $\phi_0 u \in H^t$، حکم زیر ایجاب می‌کند که

$$\phi_1 u \in H^{t+1}, \ldots, \phi_k u \in H^{t+k}.$$

لذا نتیجه می‌شود که u موضعا H^{s+N} است زیرا $t + k = s + N$ و $\phi_k = 1$ بر B_k.

حکم. ***هرگاه، علاوه بر مفروضات قضیهٔ ۱۲.۸، به ازای $t \le s + N - 1$ ای و $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ ای که بر مجموعهٔ بازی شامل محافظ یک تابع مانند $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ مساوی ۱ است، $\psi u \in H^t$، آنگاه $\phi u \in H^{t+1}$.***

برهان. برهان را با نشان دادن اینکه

$$L(\phi u) \in H^{t-N+1} \tag{۲}$$

آغاز می‌کنیم. توزیع

$$\Lambda = L(\phi u) - \phi L u = L(\phi u) - \phi v \tag{۳}$$

را در نظر می‌گیریم. چون محافظش در محافظ ϕ قراردارد، u را می‌توان در (۳) با ψu بدون تغییر Λ عوض کرد:

$$\Lambda = L(\phi\psi u) - \phi L(\psi u) = \sum_{|\alpha|\le N} f_\alpha\left[D_\alpha(\phi\psi u) - \phi D_a(\psi u)\right]. \tag{٤}$$

اگر فرمول لایب نیتز را درمورد $D_\alpha(\phi.\psi u)$ اعمال کنیم، معلوم می‌شود که مشتقات ψu از مرتبهٔ N در (٤) حذف می‌شوند. لذا Λ یک ترکیب خطی [با ضرایب در $\mathscr{D}(R^n)$] از مشتقات ψu از مراتب حداکثر $N-1$ است. چون $\psi u \in H^t$، قسمتهای (ت) و (ث) قضیهٔ ۹.۸ ایجاب می‌کنند که $\Lambda \in H^{t-N+1}$. بنابر قضیهٔ ۱۱.۸، $\phi v \in H^s$، و چون $t-N+1 \le s$، داریم $\phi v \in H^{t-N+1}$. حال (۲) از (۳) نتیجه خواهدشد.

چون L بیضوی است، چندجمله‌ای مشخص آن

$$p(y) = \sum_{|\alpha|=N} f_\alpha y^\alpha \qquad \left(y \in R^n\right) \tag{۵}$$

صفری در R^n جز در $y=0$ ندارد. توابع

$$r(y) = \left(1+|y|^N\right)q(y) \text{،} \; q(y) = |y|^{-N} p(y) \tag{٦}$$

را به ازای $y \in R^n$ و $y \neq 0$ تعریف کرده، و عملگرهای Q، R، و S را بر اجتماع فضاهای سوبولف با

$$(Rw)\hat{} = r\hat{w} \text{ ، } (Qw)\hat{} = q\hat{w} \tag{۷}$$

و

$$S = \sum_{|\alpha|<N} \psi f_\alpha D_\alpha \tag{۸}$$

تعریف می‌کنیم.

چون p یک چندجمله‌ای همگن از درجهٔ N است، اگر $\lambda > 0$ داریم

$q(\lambda y)=q(y)$، و چون p فقط در مبدأ صفر می‌شود، فشردگی کرهٔیکه در R^n ایجاب می‌کند که هر دوی q و $1/q$ توابعی کراندارند. پس از قسمت (پ) قضیهٔ ۹.۸ نتیجه می‌شود که ***هر دوی Q و Q^{-1} عملگرهایی از مرتبهٔ ۰ می‌باشند.***

چون هر دوی $\left(1+|y|^N\right)\left(1+|y|^2\right)^{-N/2}$ و متقابلش توابع کرانداری بر R^n اند، از بند پیش در تلفیق با قسمتهای (ب) و (پ) قضیهٔ ۹.۸ معلوم می‌شود که ***R یک عملگر از مرتبهٔ N است که معکوسش R^{-1} از مرتبهٔ $-N$ می‌باشد.***

چون $\psi f_\alpha \in \mathscr{D}\left(R^n\right)$، از قسمتهای (ت) و (ث) قضیهٔ ۹.۸ معلوم می‌شود که ***S عملگری از مرتبهٔ $N-1$ است.***

چون $p=r-q$ و p با ضرایب ثابت f_α فرض شده است، اگر w در فضای سوبولف واقع باشد،

$$\left(\sum_{|\alpha|=N} f_\alpha D_\alpha w\right)^\wedge = p\hat{w}=(r-q)\hat{w}=(Rw-Qw)\hat{}. \tag{۹}$$

لذا

$$(R-Q+S)(\phi u)=L(\phi u). \tag{۱۰}$$

بنابر (۲)، $L(\phi u)\in H^{t-N+1}$.

چون $\psi u \in H^t$ و $\phi\psi=\phi$، قسمت (ث) قضیهٔ ۹.۸ ایجاب می‌کند که $\phi u=\phi\psi u\in H^t$. لذا

$$(Q-S)(\phi u)\in H^{t-N+1}, \tag{۱۱}$$

زیرا Q از مرتبهٔ ۰ و S از مرتبهٔ $N-1\geq 0$ است. حال از (۱۰) نتیجه می‌شود که

$$R(\phi u)\in H^{t-N+1}, \tag{۱۲}$$

و چون R^{-1} از مرتبهٔ $-N$ است، بالأخره نتیجه می‌گیریم که $\phi u\in H^{t+1}$.

۱۳.۸ مثال. فرض کنیم L یک عملگر دیفرانسیل ***بیضوی*** در R^n باضرایب ***ثابت*** بوده و E یک جواب اصلی L باشد. معادلهٔ $LE=\delta$ در متمم مبدأ به صورت $LE=0$ درمی‌آید. لذا قضیهٔ ۱۲.۸ ایجاب می‌کند که E، جز در مبدأ، تابعی بی‌نهایت بار مشتقپذیر است.

البته سرشت انفرادی E در مبدأ تابع L می‌باشد.

۸ .۱٤ مثال. مبدأ در R^n تنها صفر چندجمله‌ای $p(y) = y_1 + iy_2$ است. اگر Ω در R^2 باز بوده و $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ یک جواب توزیعی معادلهٔ کشی - ریمان

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)u = 0$$

باشد، قضیهٔ ۸ .۱۲ ایجاب می‌کند که $u \in C^\infty(\Omega)$. پس u یک تابع هلوریخت از $z = x_1 + ix_2$ در Ω است. به عبارت دیگر، ***هر توزیع هلوریخت یک تابع هلوریخت است.***

تمرینات

۱. در این فصل از خواص سادهٔ زیر از توابع هلوریخت چندمتغیره تلویحاً استفاده شده است. آنها را ثابت کنید.

(آ) هرگاه f در $\mathbb{C}^n$ تمام بوده، $w \in \mathbb{C}^n$، و $\phi(\lambda) = f(\lambda w)$، آنگاه ϕ یک تابع تمام از یک متغیر مختلط است.

(ب) هرگاه P یک چندجمله‌ای در $\mathbb{C}^n$ بوده و

$$\int_{T^n} |P| d\sigma_n = 0$$

آنگاه P متحد 0 است. ***راهنمایی.*** $\int_{T^n} |P|^2 d\sigma_n$ را حساب کنید.

(پ) هرگاه P یک چندجمله‌ای (که متحد 0 نباشد) بوده و g یک تابع تمام در $\mathbb{C}^n$ باشد، آنگاه حداکثر یک تابع تمام f وجود دارد که در $Pf=g$ صدق می‌کند.

این سه خاصیت را تعمیم دهید.

۲. حکم راجع به غلافهای محدب که در آخرین جملهٔ برهان قضیهٔ ۸ .٤ ذکر شده است را ثابت نمایید.

۳. برای عملگر $\partial^2/\partial x_1 \partial x_2$ در R^2 یک جواب اصلی بیابید. (یک جواب وجود دارد که تابع مشخص زیرمجموعهٔ خاصی از R^2 است.)

٤. نشان دهید که معادلهٔ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

به وسیلهٔ هر تابع موضعاً انتگرالپذیر u به شکل

$$u(x_1, x_2) = f(x_1 - x_2) \quad \text{یا} \quad u(x_1, x_2) = f(x_1 + x_2)$$

(به مفهوم توزیع) برقرار است، و حتی جوابهای کلاسیک (یعنی توابع دوبار به طور پیوسته مشتق‌پذیر) لزوماً C^∞ نیستند. به تمایز بین این و معادلهٔ لاپلاس توجه نمایید.

۵. به ازای $x \in R^3$ تعریف کنید $f(x) = \left(1 + |x|^2\right)^{-1}$ و نشان دهید که $f \in L^2\left(R^3\right)$ و $\hat{f}$ یک جواب اصلی عملگر $I - \Delta$ در R^3 است. $\hat{f}$ را با محاسبهٔ مستقیم و نیز استدلال زیر بیابید.

(آ) چون f یک تابع شعاعی است (یعنی تابعی که فقط به فاصله تا مبدأ بستگی دارد) همین امر برای $\hat{f}$ درست است؛ ر.ک.تمرین ۱ در فصل ۷.

(ب) دور از مبدأ، $(I - \Delta)\hat{f} = 0$، و $\hat{f} \in C^\infty$.

(پ) اگر $F(|y|) = \hat{f}(y)$، قسمت (ب) ایجاب می‌کند که F در یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی در $(0,\infty)$ که به آسانی به طور صریح قابل حل است صدق می‌کند.

جواب. $\hat{f}(y) = (\pi/2)^{1/2}|y|^{-1}\exp(-|y|)$.

همین کار را با R^n به جای R^3 انجام دهید؛ به توابع بسل (*Bessel*) برخواهید خورد.

٦. به ازای $0 < \lambda < n$ و $x \in R^n$، تعریف کنید

$$K_\lambda(x) = |x|^{-\lambda}$$

و نشان دهید که

$$\hat{K}_\lambda(y) = c(n,\lambda) K_{n-\lambda}(y) \qquad (y \in R^n), \tag{آ}$$

که درآن

$$c(n,\lambda) = \frac{2^{n/2-\lambda}\Gamma[(n-\lambda)/2]}{\Gamma(\lambda/2)}.$$

پیشنهاد. اگر $2n > 2\lambda > n$، K_λ مجموع یک تابع L^1 و یک تابع L^2 است. به ازای این λها، معادلهٔ (آ) را می‌توان از شرط همگنی

$$K_\lambda(tx) = t^{-\lambda} K_\lambda(x) \qquad (x \in R^n, t > 0)$$

نتیجه گرفت. حالت $n > 2\lambda > 0$ از قضیهٔ انعکاس (برای توزیعهای متعادل) نتیجه می‌شود. با رفتن به حد حالت $2\lambda = n$ به دست می‌آید. ثابتهای $c(n,\lambda)$ را می‌توان از $\int f\hat{\phi} = \int \hat{f}\phi$ با $\phi(x) = \exp(-|x|^2/2)$ حساب کرد.

۷. در تمرین ٦ فرض کنید $n \geq 3$ و $\lambda = 2$ ونتیجه بگیرید که $-c(n,2)K_{n-2}$ یک جواب اصلی لاپلاسین Δ در R^n است. مثلاً اگر v محافظ فشرده در R^3 داشته باشد، نشان دهید که یک جواب $\Delta u = v$ عبارت است از

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_{R^3} |x-y|^{-1} v(y)\,dy.$$

۸. R^2 را با $\mathbb{C}$ یکی کرده (درنتیجه $z = x_1 + ix_2$) و قراردهید

$$\partial = \frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2} \quad \text{و} \quad \bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

نشان دهید که تبدیل فوریهٔ $1/z$ (به عنوان یک توزیع متعادل) مساوی $-i/z$ است. نشان دهید که این نتیجه هم ارز فرمول کشی

$$\phi(z) = \int_{R^2} (\bar{\partial}\phi)(w)\frac{dm_2(w)}{w-z} \qquad [\phi \in \mathscr{D}(R^2)]$$

است. چون $\partial \log|w| = 1/w$ و $\Delta = \partial\bar{\partial}$، نتیجه بگیرید که

$$\phi(z) = \int_{R^2} (\Delta\phi)(w) \log|w-z|\,dm_2(w) \qquad [\phi \in \mathscr{D}(R^2)].$$

لذا $\log|z|$ یک جواب اصلی لاپلاسین در R^2 است.

۹. با استفاده از تمرین ٦ ثابت کنید

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\varepsilon^{-1} - b - \hat{K}_{2-\varepsilon}(y)\right] = \log|y| \qquad \left(y \in R^2\right),$$

که در آن b ثابت خاصی است. نشان دهید که این امر به برهان دیگری از آخرین حکم در تمرین ۸ منجر می‌شود.

۱۰. فرض کنید $P(D) = D^2 + aD + bI$. (ما اینک در حالت $n=1$ هستیم). فرض کنید f و g جوابهای $P(D)u = 0$ باشند که در روابط

$$f(0) = g(0) \quad \text{و} \quad f'(0) - g'(0) = 1$$

صدق می‌کنند. تعریف کنید

$$G(x) = \begin{cases} f(x) & \text{اگر } x \le 0\text{،} \\ g(x) & \text{اگر } x > 0\text{،} \end{cases}$$

و قراردهید

$$\Lambda\phi = -\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) G(x)\, dx \qquad [\phi \in \mathscr{D}(R)].$$

ثابت کنید Λ یک جواب اصلی $P(D)$ است.

۱۱. فرض کنید u یک توزیع در R^n باشد که مشتقات اولش $D_1 u$،...،$D_n u$ موضعاً L^2 اند. ثابت کنید u موضعاً L^2 است. ***راهنمایی.*** هرگاه $\psi \in \mathscr{D}\left(R^n\right)$ در همسایگیی از مبدأ ۱ بوده و $\Delta E = \delta$، آنگاه $\Delta(\psi E) - \delta \in \mathscr{D}\left(R^n\right)$. لذا

$$u - \sum_{t=1}^{n} (D_i u) * D_i(\psi E)$$

در $C^\infty\left(R^n\right)$ است. هر $D_i(\psi E)$ یک تابع L^1 با محافظ فشرده می‌باشد.

۱۲. فرض کنید u یک توزیع در R^n باشد که لاپلاسین Δuی آن یک تابع پیوسته است. ثابت کنید u یک تابع پیوسته است. ***راهنمایی.*** همانند تمرین ۱۱،

$$u - (\psi E) * (\Delta u) \in C^\infty\left(R^n\right).$$

۱۳. مشابه‌های تمرینهای ۱۱و۱۲ را پس از تعویض R^n با مجموعهٔ باز دلخواه Ω ثابت

نمایید.

۱۴. نشان دهید که، تحت مفروضات تمرین ۱۲،

(آ) $\partial^2 u/\partial x_1^2$ موضعاً L^2 است، ولی

(ب) $\partial^2 u/\partial x_1^2$ لزوماً یک تابع پیوسته نیست.

خلاصهٔ قسمت (ب) برای توزیعهای متناوب در R^2 (تمرین ۲۲، فصل ۷):
هرگاه $g \in C(T^2)$ دارای ضرایب فوریهٔ $\hat{g}(m,n)$ بوده و f با

$$\hat{f}(m,n) = (1+m^2+n^2)^{-1}\hat{g}(m,n)$$

تعریف شده باشد، آنگاه $f \in C(T^2)$ و $\Delta f = f - g \in C(T^2)$ زیرا $\sum|\hat{f}(m,n)| < \infty$.
ضرایب فوریهٔ $\partial^2 f/\partial x_1^2$ عبارتند از $-m^2\hat{f}(m,n)$. هرگاه $\partial^2 f/\partial x_1^2$ به ازای هر $g \in C(T^2)$ پیوسته می‌بود، آنگاه $(\partial^2 f/\partial x_1^2)(0,0)$ یک تابعی خطی پیوسته از g می‌شد.
لذا یک اندازهٔ بورل مختلط مانند μ بر T^2 با ضرایب فوریهٔ

$$\hat{\mu}(m,n) = \frac{m^2}{1+m^2+n^2}$$

وجود دارد. تمرین بعدی نشان می‌دهد که یک چنین اندازه موجود نیست.

۱۵. اگر μ یک اندازهٔ بورل مختلط بر T^2 بوده و

$$\gamma(A,B) = \frac{1}{(2A+1)(2B+1)} \sum_{n=-A}^{A} \sum_{m=-B}^{B} \hat{\mu}(m,n),$$

ثابت کنید

$$\lim_{A\to\infty}\left[\lim_{B\to\infty}\gamma(A,B)\right] = \lim_{B\to\infty}\left[\lim_{A\to\infty}\gamma(A,B)\right].$$

پیشنهاد. هرگاه $D_A(t) = (2A+1)^{-1}\sum_{-A}^{A} e^{int}$، آنگاه $D_A(x) = 1$ اگر $x = 0$، و $D_A(x) \to 0$ در غیر این‌صورت، و

$$\gamma(A,B) = \int_{T^2} D_A(x) D_B(y)\, d\mu(x,y).$$

نتیجه بگیرید که هر دو حد مکرر وجود داشته و هر دو مساوی $\mu(\{0,0\})$ می‌باشند.

اگر μ مانند تمرین ۱٤ بود، یکی از حدود مکرر ۱ و دیگری ۰ می‌بود.

۱٦. فرض کنید L یک عملگر خطی بیضوی در مجموعهٔ‌بازی چون $\Omega \subset R^n$ بوده و مرتبهٔ L **فرد** باشد.

(آ) ثابت کنید $n=1$ یا $n=2$.

(ب) اگر $n=2$، ثابت کنید ضرایب چندجمله‌ای مشخص L نمی‌توانند حقیقی باشند. در پرتو قسمت (آ)، عملگر کشی - ریمان یک مثال چندان نوعی از یک عملگر بیضوی نیست.

فصل ۹

نظریهٔ تاوبری

قضیهٔ وینر

۱.۹. آشنایی. یک قضیهٔ تاوبری قضیه‌ای است که در آن رفتار مجانبی یک دنباله یا یک تابع از رفتار بعضی از متوسطهای آن نتیجه شود. قضایای تاوبری اغلب عکسهای نتایجی واضح‌اند. ولی معمولاً این عکسها به فرضی اضافی به نام ***شرط تاوبری*** بستگی دارند. برای مشاهدهٔ مثالی از این، سه خاصیت زیر از یک دنباله از اعداد مختلط مانند $s_n = a_\circ + \ldots + a_n$ را در نظر می‌گیریم.

(آ) $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$.

(ب) هرگاه $f(r) = \sum\limits_{\circ}^{\infty} a_n r^n$، $\circ < r < ۱$، آنگاه $\lim\limits_{r\to ۱} f(r) = s$.

(پ) $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \circ$.

چون $f(r) = (۱-r)\sum s_n r^n$ و $(۱-r)\sum r^n = ۱$، $f(r)$ به ازای هر $r \in (\circ,۱)$ یک متوسط دنبالهٔ $\{s_n\}$ است. به آسانی ثابت می‌شود که (آ) خاصیت (ب) را ایجاب می‌کند. عکس مطلب درست نیست، ولی خواص (ب) و (پ) با هم خاصیت (آ) را ایجاب می‌کنند؛

این نیز نسبتاً آسان است و توسط تاوبر ($Tauber$) ثابت شده است.

شرط تاوبری (پ) را می‌توان با این فرض ضعیفتر که $\{na_n\}$ کراندار است [لیتلوود ($Littlewood$)] تعویض کرد. جالب اینجاست که این تضعیف (پ) برهان را بسیار مشکلتر می‌سازد.

قضیهٔ تاوبری وینر با توابع اندازه‌پذیر کراندار اصولاً بر خط حقیقی سروکار دارد. هرگاه $\phi \in L^\infty(R)$ و وقتی $x \to +\infty$، $\phi(x) \to \circ$، آنگاه تقریباً بدیهی است که به ازای هر $K \in L^1(R)$، وقتی $x \to +\infty$، $(K * \phi)(x) \to \circ$. پیچشهای $K * \phi$ را می‌توان دست کم وقتی $K = 1$ [به عنوان متوسطهای ϕ در نظرگرفت. عکس وینر [قسمت (آ) قضیهٔ ۷.۹] می‌گوید که هرگاه ***به ازای یک*** $K \in L^1(R)$، $(K * \phi)(x) \to \circ$ و تبدیل فوریهٔ این K در هیچ نقطه از R صفر نشود، آنگاه به ازای **هر** $f \in L^1(R)$، $(f * \phi)(x) \to \circ$؛ نتیجهٔ قویتر $\phi(x) \to \circ$ لزوماً تحت این مفروضات برقرار نیست، ولی اگر شرطی کمی اضافی (مثلاً نوسان کند) بر ϕ اعمال شود برقرار است [قسمت (ب) قضیهٔ ۷.۹].

شرط تاوبری غیرمنتظره (صفر نشدن $\hat{K}$) به صورت زیر وارد برهان می‌شود: اگر $(K * \phi)(x) \to \circ$، اگر K با یکی از انتقالهایش عوض شود و لذا نیز اگر K با یک ترکیب خطی متناهی g از انتقالهای K عوض شود، همان امر درست است. وقتی $\hat{K}$ صفر نداشته باشد، معلوم می‌شود که مجموعهٔ این توابع g در L^1 چگال است (قضیهٔ ۵.۹). لذا به بررسی زیرفضاهای انتقال-پایای L^1 خواهیم رسید.

۲.۹ لم. ***فرض کنیم*** $f \in L^1(R^n)$، $t \in R^n$، ***و*** $\varepsilon > \circ$. ***دراین صورت تابعی مانند*** $h \in L^1(R^n)$ ***هست به طوری که*** $\|h\|_1 < \varepsilon$ ***و به ازای هر*** s ***در همسایگیی از*** t،

$$\hat{h}(s) = \hat{f}(t) - \hat{f}(s). \qquad (1)$$

این لم می‌گوید که f در نرم L^1 به تابع $f+h$ که تبدیل فوریه‌اش در همسایگیی از نقطهٔ t ثابت است تقریب می‌شود.

برهان. $g\in L^1(R^n)$ را طوری اختیار می‌کنیم که در همسایگیی از مبدأ $\hat{g}=1$. به ازای $\lambda>0$ قرار می‌دهیم

$$g_\lambda(x)=e^{it.x}\lambda^{-n}g(x/\lambda) \qquad \left(x\in R^n\right) \tag{۲}$$

و تعریف می‌کنیم

$$h_\lambda(x)=\hat{f}(t)g_\lambda(x)-(f*g_\lambda)(x). \tag{۳}$$

چون در همسایگیی از t مانند V_λ، $\hat{g}_\lambda(s)=1$، رابطهٔ (۳) نشان می‌دهد که رابطهٔ (۱) به ازای $s\in V_\lambda$ با h_λ به جای h برقرار است. واما

$$h_\lambda(x)=\int_{R^n}f(y)\left[e^{-it.y}g_\lambda(x)-g_\lambda(x-y)\right]dm_n(y). \tag{٤}$$

قدر مطلق عبارت داخل کروشه عبارت است از

$$\left|\lambda^{-n}g\left(\lambda^{-1}x\right)-\lambda^{-n}g\left(\lambda^{-1}(x-y)\right)\right|. \tag{۵}$$

پس با تغییر متغیر $x=\lambda\xi$ داریم

$$\|h_\lambda\|_1\le\int_{R^n}|f(y)|dm_n(y)\int_{R^n}\left|g(\xi)-g\left(\xi-\lambda^{-1}y\right)\right|dm_n(\xi). \tag{٦}$$

انتگرال داخلی (٦) حداکثر $2\|g\|_1$ است، و به ازای هر $y\in R^n$، وقتی $\lambda\to\infty$ به 0 میل می‌کند. لذا، طبق قضیهٔ همگرایی تسلطی، وقتی $\lambda\to\infty$، $\|h_\lambda\|_1\to 0$.

۳.۹ قضیه. *هرگاه $\phi\in L^\infty(R^n)$، Y زیرفضایی از $L^1(R^n)$ بوده، و*

$$\text{به ازای هر } f\in Y\text{، } f*\phi=0\text{،} \tag{۱}$$

آنگاه مجموعهٔ

$$Z(Y)=\bigcap_{f\in Y}\left\{s\in R^n:\hat{f}(s)=0\right\} \tag{۲}$$

شامل محافظ توزیع متعادل $\hat{\phi}$ می‌باشد.

برهان. نقطهٔ t را در متمم $Z(Y)$ ثابت می‌گیریم. در این صورت به ازای $f\in Y$ ی، $\hat{f}(t)=1$. لم ۲.۹ تابعی چون $h\in L^1(R^n)$ با $\|h\|_1<1$ به دست می‌دهد که در همسایگیی از t مانند V، $\hat{h}(s)=1-\hat{f}(s)$.

برای اثبات قضیه کافی است نشان دهیم که در V، $\hat{\phi}=\circ$ یا، معادلاً، به ازای هر $\psi\in\mathscr{L}_n$ که تبدیل فوریه‌اش $\hat{\psi}$ محافظ در V دارد، $\hat{\phi}(\hat{\psi})=\circ$. چون

$$\hat{\phi}(\hat{\psi})=\phi(\hat{\psi})=\left(\phi*\psi\right)(\circ), \tag{۳}$$

کافی است نشان دهیم که $\phi*\psi=\circ$.

یک چنین ψ را ثابت می‌گیریم. قرارمی‌دهیم $g_\circ=\psi$ و به ازای $m\geq ۱$، $g_m=h*g_{m-۱}$. در این صورت $\|g_m\|_۱\leq\|h\|_۱^m\|\psi\|_۱$، و چون $\|h\|_۱<۱$، تابع $G=\sum g_m$ در $L^۱\left(R^n\right)$ است. چون بر محافظ $\hat{\psi}$ داریم $\hat{h}(s)=۱-\hat{f}(s)$، خواهیم داشت

$$\left(۱-\hat{h}(s)\right)\hat{\psi}(s)=\hat{\psi}(s)\hat{f}(s) \qquad \left(s\in R^n\right) \tag{٤}$$

یا

$$\hat{\psi}=\sum_{m=\circ}^{\infty}\hat{h}^m\hat{\psi}\hat{f}=\hat{G}\hat{f}. \tag{۵}$$

لذا $\psi=G*f$، و رابطهٔ (۱) ایجاب می‌کند که

$$\psi*\phi=G*f*\phi=\circ. \tag{٦}$$

٤.۹ قضیهٔ وینر. ***هرگاه Y یک زیرفضای انتقال- پایای $L^۱\left(R^n\right)$ بوده و $Z(Y)$ تهی باشد، آنگاه $Y=L^۱\left(R^n\right)$.***

برهان. وقتی گوییم Y انتقال-پایا است یعنی اگر $f\in Y$ و $x\in R^n$، $\tau_x f\in Y$. اگر $\phi\in L^\infty\left(R^n\right)$ چنان باشد که به ازای هر $f\in Y$، $\int f\breve{\phi}=\circ$، انتقال-پایای Y ایجاب می‌کند که به ازای هر $f\in Y$، $f*\phi=\circ$. لذا، طبق قضیهٔ ۳.۹، محافظ توزیع $\hat{\phi}$ تهی است؛ در نتیجه $\hat{\phi}=\circ$ (قضیهٔ ٢٤.٦)، و چون تبدیل فوریه $\mathscr{L}_n'$ را به طور یک به یک به $\mathscr{L}_n'$ می‌نگارد (قضیهٔ ۱۵.۷)، پس به عنوان یک توزیع $\phi=\circ$. لهذا ϕ عنصر صفر $L^\infty\left(R^n\right)$ است.

بنابراین $Y^\perp=\{\circ\}$. بنابرقضیهٔ هان- باناخ، این ایجاب می‌کند که $Y=L^۱\left(R^n\right)$.

۵.۹ قضیه. ***فرض کنیم $K \in L^1\left(R^n\right)$ و Y کوچکترین زیرفضای انتقال-پایای $L^1\left(R^n\right)$ باشد که شامل K است. در این صورت $Y = L^1\left(R^n\right)$ اگر و فقط اگر به ازای هر $t \in R^n$، $\hat{K}(t) \neq 0$.***

برهان. توجه کنید که $Z(Y) = \left\{t \in R^n : \hat{K}(t) = 0\right\}$. لذا قضیه حکم می‌کند که $Y = L^1\left(R^n\right)$ اگر و فقط اگر $Z(Y)$ تهی باشد. نیمی از این قضیهٔ ٤.٩ است؛ نیمهٔ دیگر بدیهی خواهدبود.

٦.۹ تعریف. گوییم تابع $\phi \in L^\infty\left(R^n\right)$ ***به کندی نوسانی*** است اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ اعدادی مانند $A < \infty$ و $\delta > 0$ چنان نظیر باشد که

اگر $|x| > A$، $|y| > A$، و $|x - y| < \delta$، داشته باشیم $|\phi(x) - \phi(y)| < \varepsilon$. (۱)

اگر $n = 1$، می‌توان ***به کندی نوسانی*** در $+\infty$ را نیز تعریف کرد: شرط (۱) با شرط زیر تعویض می‌شود:

اگر $x > A$، $y > A$، و $|x - y| < \delta$، $|\phi(x) - \phi(y)| < \varepsilon$. (۲)

البته همین تعریف را می‌توان در $-\infty$ کرد.

توجه کنید که هر تابع کراندار به طور یکنواخت پیوسته به کندی نوسانی است ولی بعضی از توابع به کندی نوسانی پیوسته نیستند.

حال به قضیهٔ تاوبری وینر می‌رسیم؛ قسمت (ب) توسط پیت (*Pitt*) به آن افزوده شده است.

۷.۹ قضیه

(آ) فرض کنیم $\phi \in L^\infty\left(R^n\right)$، $K \in L^1\left(R^n\right)$، به ازای هر $t \in R^n$، $\hat{K}(t) \neq 0$، و

$$\lim_{|x| \to \infty} \left(K * \phi\right)(x) = a\hat{K}(0). \qquad (1)$$

دراین صورت، به ازای هر $f \in L^1\left(R^n\right)$،

(۲) $$\lim_{|x|\to\infty} (f * \phi)(x) = a\hat{f}(\circ).$$

(بـ) اگر ، علاوه بر این، ϕبه کندی نوسانی باشد،

(۳) $$\lim_{|x|\to\infty} \phi(x) = a.$$

برهان. قرار می‌دهیم $\psi(x) = \phi(x) - a$. فرض کنیم Y مجموعهٔ تمام $f \in L^1(R^n)$ هایی باشد که

(٤) $$\lim_{|x|\to\infty} (f * \psi)(x) = \circ.$$

واضح است که Y یک فضای‌برداری است، همچنین Y بسته است. برای مشاهدهٔ این امر، فرض کنیم $f_i \in Y$، $\|f - f_i\|_1 \to \circ$. چون

(۵) $$\|f * \psi - f_i * \psi\|_\infty \le \|f - f_i\|_1 \|\psi\|_\infty,$$

$f_i * \psi \to f * \psi$ به طور یکنواخت بر R^n؛ درنتیجه (٤) برقرار است. چون

(٦) $$((\tau_y f) * \psi)(x) = (\tau_y(f * \psi))(x) = (f * \psi)(x - y),$$

Y انتقال - پایا است. بالأخره، بنابر (۱)، $K \in Y$، زیرا $K * a = a\hat{K}(\circ)$.

حال قضیهٔ ۵.۹ به کار می‌رود و نشان می‌دهد که $Y = L^1(R^n)$. لذا هر $f \in L^1(R^n)$ در (٤) صدق می‌کند، که همان (۲) است. این امر قسمت (آ) را ثابت خواهد کرد.

اگر ϕبه کندی نوسانی بوده و $\varepsilon > \circ$، A و δرا همانند تعریف ٦.۹ اختیار کرده، و $f \in L^1(R^n)$ را طوری می‌گیریم که $f \ge \circ$، $\hat{f}(\circ) = 1$، و اگر $|x| \ge \delta$، $f(x) = \circ$. بنابر (۲)،

(۷) $$\lim_{|x|\to\infty} (f * \phi)(x) = a.$$

همچنین

(۸) $$\phi(x) - (f * \phi)(x) = \int_{|y|<\delta} [\phi(x) - \phi(x - y)] f(y)\, dm_n(y).$$

اگر $|x| > A + \delta$، انتخاب ما از A، δ، و f نشان می‌دهد که

(۹) $$|\phi(x) - (f * \phi)(x)| < \varepsilon.$$

حال رابطهٔ (۳) از (۷) و (۹) نتیجه می‌شود.

این امر برهان را تمام خواهد کرد.

۸.۹ تبصره. اگر $n=1$، قضیهٔ ۷.۹ را می‌توان با نوشتن $x \to +\infty$ به جای $|x| \to \infty$ در هر مورد و با این فرض در (ب) که ϕ به کندی در $+\infty$ نوسان می‌کند به نحوی روشن تعدیل کرد. برهان بلاتغییر خواهد ماند.

قضیهٔ اعداد اول

۹.۹ آشنایی. به ازای هر عدد مثبت x، $\pi(x)$ تعداد اعداد اول p صادق در $p \le x$ است.

قضیهٔ اعداد اول عبارت است از حکم

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1. \qquad (1)$$

ما این قضیه را به وسیلهٔ یک قضیهٔ تاوبری منسوب به اینگهام (*Ingham*) که مبتنی بر قضیهٔ وینر است ثابت می‌کنیم. ایدهٔ کار تعویض تابع نسبتاً غیرمنتظم π با تابعی چون F است که رفتار مجانبی‌اش به آسانی به دست می‌آید و استفاده از قضیهٔ تاوبری برای رسیدن به نتیجه‌ای راجع به π از معلومات راجع به F است.

۱۰.۹ آماده‌سازی. حرف p همواره یک عدد اول است؛ m و n اعداد صحیح مثبتی هستند؛ x یک عدد مثبت است؛ $[x]$ عدد صحیحی است که در $x-1<[x]\le x$ صدق می‌کند؛ علامت $d|n$ یعنی d و n/d اعداد صحیح مثبتی هستند. تعریف می‌کنیم

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{اگر } n = p, p^2, p^3, \ldots \text{،} \\ 0 & \text{در غیر این صورت،} \end{cases} \qquad (1)$$

$$\psi(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n). \qquad (2)$$

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi\left(\frac{x}{m}\right). \qquad (3)$$

خواص زیر از ψ و F به کار خواهند آمد: اگر $x > e$،

$$\frac{\psi(x)}{x} \le \frac{\pi(x)\log x}{x} < \frac{۱}{\log x} + \frac{\psi(x)\log x}{x\log\left(x/\log^{۲} x\right)} \tag{٤}$$

و

$$F(x) = x\log x - x + b(x)\log x, \tag{٥}$$

که درآن وقتی $x \to \infty$، $b(x)$ کراندار می‌ماند.

بنابر (٤)، قضیهٔ اعداد اول نتیجه‌ای از رابطهٔ

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = ۱ \tag{٦}$$

است که از (۳) و (٥) به وسیلهٔ یک قضیهٔ تاوبری ثابت می‌شود.

برهان ٤. $[\log x/\log p]$عددی از توانهای p است که از x متجاوز نیستند. لذا

$$\psi(x) = \sum_{p\le x}\left[\frac{\log x}{\log p}\right]\log p \le \sum_{p\le x}\log x = \pi(x)\log x.$$

این اولین نامساوی در (٤) را به ما می‌دهد. هرگاه $۱ < y < x$، آنگاه

$$\pi(x) - \pi(y) = \sum_{y<p\le x} ۱ \le \sum_{y<p\le x} \frac{\log p}{\log y} \le \frac{\psi(x)}{\log y}.$$

لذ $\pi(x) < y + \psi(x)/\log y$. این به ازای $y = x/\log^{۲} x$ نیمهٔ دوم (٤) را به ما خواهدداد.

برهان(٥) . هرگاه $n > ۱$، آنگاه

$$F(n) - F(n-۱) = \sum_{m=۱}^{\infty}\left\{\psi\left(\frac{n}{m}\right) - \psi\left(\frac{n-۱}{m}\right)\right\}.$$

جمعوند m م ۰ است جز وقتی n/m صحیح باشد، که در این حالت مساوی $\Lambda(n/m)$است. لذا

$$F(n) - F(n-۱) = \sum_{m|n}\Lambda\left(\frac{n}{m}\right) = \sum_{d|n}\Lambda(d) = \log n\ .$$

آخرین تساوی تابع تجزیهٔ n به حاصل ضربی از توانهای اعداد اول متمایز است.

چون $F(۱) = ۰$، داریم

$$F(n)=\sum_{m=1}^{n}\log m=\log(n!)\qquad (n=1,2,3,\ldots). \tag{۷}$$

که مقایسهٔ $F(x)$ را با انتگرال

$$J(x)=\int_1^x \log t\,dt = x\log x - x + 1 \tag{۸}$$

پیشنهاد می‌کند. هرگاه $n\le x\le n+1$، آنگاه

$$J(n)<F(n)\le F(x)\le F(n+1)<J(n+2); \tag{۹}$$

درنتیجه

$$|F(x)-J(x)|<2\log(x+2)\,. \tag{۱۰}$$

حال رابطهٔ (۵) از (۸) و (۱۰) نتیجه می‌شود.

۱۱.۹ تابع زتای ریمان. همانطور که در نظریهٔ تحلیلی اعداد رسم است، متغیرهای مختلط را به شکل $s=\sigma+it$ می‌نویسیم. درنیمصفحهٔ $\delta>1$، تابع زتا با سری

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \tag{۱}$$

تعریف می‌شود. چون $\left|n^{-s}\right|=n^{-\sigma}$، سری برهر زیرمجموعهٔ فشردهٔ این نیمصفحه به طور یکنواخت همگراست، و ζ در آنجا هلوریخت است.

با محاسبه‌ای ساده داریم

$$s\int_1^{N+1}[x]x^{-1-s}dx = s\sum_{n=1}^{N} n\int_n^{n+1} x^{-1-s}dx=\sum_{n=1}^{N} n^{-s}-N(N+1)^{-s}.$$

وقتی $\sigma>1$، به ازای $N\to\infty$ داریم $N(N+1)^{-s}\to 0$. لذا

$$\zeta(s)=s\int_1^{\infty}[x]x^{-1-s}dx\qquad (\sigma>1)\,. \tag{۲}$$

اگر $b(x)=[x]-x$، از رابطهٔ (۲) معلوم می‌شود که

$$\zeta(s)=\frac{s}{s-1}+s\int_1^{\infty} b(x)x^{-1-s}dx\qquad (\sigma>1)\,. \tag{۳}$$

چون b کراندار است، آخرین انتگرال یک تابع هلوریخت در نیمصفحهٔ $\sigma>0$ تعریف می‌کند. لذا (۳) یک تداوم تحلیلی از ζ به $\sigma>0$، که جز در قطب ساده در $s=1$

هلوریخت است، با ماندهٔ ۱ به دست می‌دهد. مهمترین خاصیتی که موردنیاز است این است که ζ بر خط $\sigma = ۱$ دارای صفر نیست:

$$\zeta(۱+it) \neq ۰ \qquad (-\infty < t < \infty). \tag{٤}$$

برهان (٤) به اتحاد زیر وابسته است:

$$\zeta(x) = \prod_p \left(۱ - p^{-s}\right)^{-۱} \qquad (\sigma > ۱)\,. \tag{٥}$$

چون $...+ \left(۱-p^{-s}\right)^{-۱} = ۱ + p^{-s} + p^{-۲s}$، این امر که حاصل‌ضرب (٥) مساوی سری (۱) است نتیجهٔ فوری آن است که هر عدد صحیح مثبت تجزیهٔ منحصر به فردی به یک حاصل ضرب از توانهای اعداد اول دارد. چون به ازای $\sigma > ۱$، $\sum p^{-\sigma} < \infty$، رابطهٔ (٥) نشان می‌دهد که اگر $\sigma > ۱$، $\zeta(s) \neq ۰$ و نیز

$$\log \zeta(s) = \sum_p \sum_{m=۱}^{\infty} m^{-۱} p^{-ms} \qquad (\sigma > ۱)\,. \tag{٦}$$

عدد حقیقی $t \neq ۰$ را ثابت می‌گیریم. اگر $\sigma > ۱$، رابطهٔ (٦) ایجاب می‌کند که

$$\log\left|\zeta^{۳}(\sigma)\zeta^{۴}(\sigma+it)\zeta(\sigma+۲it)\right| \tag{٧}$$

$$= \sum_{p,m} m^{-۱} p^{-m\sigma}\, \mathrm{Re}\left\{۳ + ۴p^{-imt} + p^{-۲imt}\right\} \geq ۰,$$

زیرا به ازای هر θی حقیقی، $\mathrm{Re}\left(\sigma + ۸e^{i\theta} + ۲e^{۲i\theta}\right) = \left(e^{i\theta/۲} + e^{-i\theta/۲}\right)^{۴} \geq ۰$. لذا

$$|(\sigma-۱)\zeta(\sigma)|^{۳}\left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-۱}\right|^{۴}|\zeta(\sigma+۲it)| \geq \frac{۱}{\sigma-۱}. \tag{٨}$$

اگر $\zeta(۱+it)$ صفر می‌بود، طرف چپ (٨) به حدی همگرا می‌شد؛ یعنی به $\left|\zeta'(۱+it)\right|^{۴}|\zeta(۱+۲it)|$ وقتی σ به ۱ نزول کند. چون طرف راست (٨) به بی‌نهایت میل می‌کند، این ممکن نیست، و رابطهٔ (٤) ثابت خواهدشد.

۱۲.۹ قضیهٔ تاوبری اینگهام. *فرض کنیم g یک تابع نانزولی حقیقی بر $(۰,\infty)$ بوده، $g(x) = ۰$ اگر $x < ۱$،* (۱) $$G(x)=\sum_{n=1}^{\infty} g\left(\frac{x}{n}\right) \qquad (0<x<\infty)$$

و

(۲) $$G(x)=ax\log x+bx+x\varepsilon(x),$$

که در آن a و b ثابت بوده و وقتی $x\to\infty$، $\varepsilon(x)\to 0$. در این صورت

(۳) $$\lim_{x\to\infty} x^{-1}g(x)=a.$$

اگر g تابع ψ تعریف شده در بخش ۱۰.۹ باشد، قضیهٔ اینگهام در پرتو معادلات (۳) و (۵) از بخش ۱۰.۹ ایجاب می‌کند که رابطهٔ (٦) از بخش ۱۰.۹ برقرار است، و این (همانطور که در آنجا دیدیم) قضیهٔ اعداد اول را به ما می‌دهد.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که $x^{-1}g(x)$ کراندار است. چون g نانزولی است،

$$g(x)-g\left(\frac{x}{2}\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}g\left(\frac{x}{n}\right)=G(x)-2G\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$=x\left\{a\log 2+\varepsilon(x)-\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right)\right\}<Ax,$$

که درآن A ثابتی می‌باشد. چون

$$g(x)=g(x)-g\left(\frac{x}{2}\right)+g\left(\frac{x}{2}\right)-g\left(\frac{x}{4}\right)+\dots,$$

پس

(٤) $$g(x)<A\left(x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\dots\right)=2Ax.$$

حال چنان تغییر متغیر می‌دهیم که بتوانیم از تبدیلات فوریه در زمینه‌ای آشنا استفاده کنیم. به ازای $-\infty<x<\infty$ تعریف می‌کنیم

(۵) $$h(x)=g\left(e^{x}\right)،\ H(x)=\sum_{n=1}^{\infty}h(x-\log n).$$

در این صورت اگر $x<0$، $h(x)=0$، $H(x)=G\left(e^{x}\right)$. لذا رابطهٔ (۲) به صورت زیر در می‌آید:

$$H(x) = e^x\left(ax + b + \varepsilon_1(x)\right) \tag{٦}$$

که در آن وقتی $x \to \infty$، $\varepsilon_1(x) \to 0$. هرگاه

$$\phi(x) = e^{-x}h(x) \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{٧}$$

آنگاه ϕ طبق (٤) کراندار است. باید ثابت کنیم که

$$\lim_{x\to\infty} \phi(x) = a. \tag{٨}$$

قرار می‌دهیم $k(x) = \left[e^x\right]e^{-x}$، فرض می‌کنیم λ یک عدد گنگ مثبت باشد، و تعریف می‌کنیم

$$K(x) = 2k(x) - k(x-1) - k(x-\lambda) \qquad \left(-\infty < x < \infty\right). \tag{٩}$$

در این صورت $K \in L^1(-\infty,\infty)$؛ درواقع، $e^x K(x)$ کراندار است. (ر.ک.تمرین ۸.)
هرگاه $s = \sigma + it$، $\sigma > 0$، آنگاه فرمول (۲) از بخش ۱۱.۹ نشان می‌دهد که

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x)e^{-xs}dx = \int_0^{\infty}\left[e^x\right]e^{-x(s+1)}dx = \int_1^{\infty}[y]y^{-2-s}dy = \frac{\zeta(1+s)}{1+s}.$$

این کار را به ازای $k(x-1)$ و $k(x-\lambda)$ به جای $k(x)$ تکرار کرده، از رابطهٔ (۹) استفاده کرده، و فرض می‌کنیم $\sigma \to 0$. نتیجه خواهدشد

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x)e^{-itx}dx = \left(2 - e^{-it} - e^{-i\lambda t}\right)\frac{\zeta(1+it)}{1+it}. \tag{١٠}$$

چون $\zeta(1+it) \neq 0$ و λ گنگ است، اگر $t \neq 0$، $\hat{K}(t) \neq 0$. و چون ζ در $s=1$ قطب با ماندهٔ ۱ دارد، طرف راست (۱۰) به ازای $t \to 0$ به $1+\lambda$ میل می‌کند. لذا داریم $\hat{K}(0) \neq 0$.

برای اعمال قضیهٔ وینر باید $K * \phi$ را تخمین بزنیم. برای این کار قرار می‌دهیم $u(x) = \left[e^x\right]$ و فرض می‌کنیم v تابع مشخص $[0,\infty)$ بوده و μ اندازه‌ای باشد که به هر نقطه از مجموعهٔ $\{\log n, : n, 1, 2, 3, \ldots\}$ جرم ۱ منتسب کرده و محافظش این مجموعه است. بنابر رابطهٔ(۵)، $H = h * \mu$. همچنین $u = v * \mu$. لذا

$$(h * u)(x) = (h * v * \mu)(x) = (H * v)(x) = \int_0^x H(y)dy. \tag{١١}$$

(توجه کنید که در اینجا پیچشها نسبت به اندازهٔ لبگ گرفته می‌شوند نه نسبت به اندازهٔ نرمدار m_1.) چون

$$(\phi * k)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{y-x}h(x-y)\left[e^y\right]e^{-y}dy = e^{-x}(h * u)(x),$$

روابط (٦) و (١١) ایجاب می‌کنند که

$$(\phi * k)(x) = e^{-x} \int_0^x H(y)dy = ax + b - a + \varepsilon_2(x), \qquad (۱۲)$$

که در آن وقتی $x \to \infty$، $\varepsilon_2(x) \to 0$. بنابر روابط (۱۲) و (۹)،

$$\lim_{x\to\infty} (K * \phi)(x) = (1+\lambda)a = a\int_{-\infty}^{\infty} K(y)dy. \qquad (۱۳)$$

بنابراین قضیهٔ وینر ۷.۹ (همچنین ر.ک.تبصرهٔ ۸.۹) ایجاب می‌کنند که به ازای هر $f \in L^1(-\infty,\infty)$،

$$\lim_{x\to\infty} (f * \phi)(x) = a\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy. \qquad (١٤)$$

فرض کنیم f_1 و f_2 دوتابع نامنفی باشند که انتگرالشان ۱ بوده و محافظهایشان به ترتیب در $[0,\varepsilon]$ و $[-\varepsilon,0]$ قرارداشته باشند. بنابر (۷)، $e^x\phi(x)$ نانزولی است. لذا، اگر $x - \varepsilon \le y \le x$، $\phi(y) \le e^{\varepsilon}\phi(x)$، و اگر $x \le y \le x + ۴$، $\phi(y) \ge e^{-\varepsilon}\phi(x)$. درنتیجه،

$$e^{-\varepsilon}(f_1 * \phi)(x) \le \phi(x) \le e^{\varepsilon}(f_2 * \phi)(x). \qquad (۱٥)$$

از روابط (١٤) و (١٥) معلوم می‌شود که حدود بالایی و پایینی $\phi(x)$ وقتی $x \to \infty$ بین $ae^{-\varepsilon}$ و ae^{ε} قراردارد. چون $\varepsilon > 0$ دلخواه بود، رابطهٔ (۸) برقرار است و برهان تمام خواهدبود.

معادلهٔ تجدید

حال به عنوان کاربرد دیگری از قضیهٔ تاوبری وینر بحث مختصری از رفتار جوابهای کراندار ϕ معادلهٔ انتگرال

$$\phi(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-t)d\mu(t) = f(x)$$

را که در نظریهٔ احتمال ظاهر می‌شود مطرح می‌کنیم. در اینجا μ یک اندازهٔ احتمال بورل مفروض، f یک تابع داده شده بوده، و ϕ یک تابع بورل کراندار است؛ درنتیجه انتگرال فوق به ازای هر $x \in R$ موجود است. معادلهٔ فوق را می‌توان به اختصار به صورت زیر نوشت:

$$\phi - \phi * \mu = f.$$

بحث را با قضیهٔ یکتایی آغاز می‌کنیم.

۱۳.۹ قضیه. *هرگاه μ یک اندازهٔ احتمال بورل بر R باشد که محافظش در هیچ زیر گروه دوری R قرارندارد، و ϕ یک تابع بورل کراندار باشد که در معادلهٔ همگن*

$$\phi(x) - (\phi * \mu)(x) = 0 \tag{1}$$

به ازای هر $x \in R$ صدق می‌کند، آنگاه ثابتی مانند A هست به طوری که $\phi(x) = A$ جز احتمالاً مجموعه‌ای از اندازهٔ لبگ ۰.

برهان. چون μ یک اندازهٔ احتمال است، $\hat{\mu}(0) = 1$. فرض کنیم به ازای $t \neq 0$ ای، $\hat{\mu}(t) = 1$. چون

$$\hat{\mu}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} d\mu(x), \tag{2}$$

μ باید بر مجموعهٔ تمام xهایی که در آنها $e^{-ixt} = 1$، یعنی مجموعهٔ تمام مضارب صحیح $2\pi/t$، متمرکز شده باشد. اما این به وسیلهٔ فرض قضیه نفی می‌شود.

هرگاه $\sigma = \delta - \mu$ که در آن δ اندازهٔ دیراک است، آنگاه $\hat{\sigma} = 1 - \hat{\mu}$. لذا $\hat{\sigma}(t) = 0$ اگر وفقط اگر $t = 0$، و رابطهٔ (۱) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\phi * \sigma = 0. \tag{3}$$

قرار می‌دهیم $g(x) = \exp(-x^2)$ و $K = g * \sigma$. در این صورت $K \in L^1$، $\hat{K}(t) = 0$ فقط اگر $t = 0$، و رابطهٔ (۳) نشان می‌دهد که $K * \phi = 0$. بنابر قضیهٔ ۳.۹ (با فضای یک بعدی تولید شده به وسیلهٔ K به جای Y)، توزیع $\hat{\phi}$ دارای محافظ $\{0\}$ است. لذا $\hat{\phi}$ یک ترکیب خطی متناهی از δ و مشتقاتش است (قضیهٔ ۲۵.۶)؛ در نتیجه ϕ به مفهوم توزیع یک چندجمله‌ای است. چون چندجمله‌ایهای غیر ثابت بر R کراندار نیستند، و چون ϕ کراندار فرض شده است، به نتیجهٔ مطلوب رسیده‌ایم.

۱۴.۹ پیچشهای اندازه‌ها. هرگاه μ و λ اندازه‌های بورل مختلطی بر R^n باشند، آنگاه

$$f \to \int_{R^n} \int_{R^n} f(x+y)d\mu(x)d\lambda(y) \qquad (۱)$$

یک تابعی خطی کراندار بر $C_\circ\left(R^n\right)$ (فضای تمام توابع پیوسته بر R^n که در بی‌نهایت صفر می‌شوند) می‌باشد. بنابر قضیهٔ نمایش ریس، یک اندازهٔ بورل منحصر به فرد مانند $\mu * \lambda$ بر R^n هست که در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\int_{R^n} fd(\mu * \lambda) = \int_{R^n} \int_{R^n} f(x+y)d\mu(x)d\lambda(y) \qquad \left[f \in C_\circ\left(R^n\right)\right]. \qquad (۲)$$

یک استدلال تقریبی متعارف نشان می‌دهد که رابطهٔ (۲) به ازای هر تابع بورل کراندار f نیز برقرار است. به‌خصوص، ملاحظه می‌کنیم که

$$(\mu * \lambda)\hat{} = \hat{\mu}\hat{\lambda}. \qquad (۳)$$

دو نتیجهٔ دیگر (۲) در قضیهٔ بعد به کار خواهند آمد. یکی از آنها نامساوی تقریباً واضح زیر است:

$$\|\mu * \lambda\| \le \|\mu\|\|\lambda\|, \qquad (٤)$$

که در آن نرم تغییر کل را نشان می‌دهد. دیگری این است که $\mu * \lambda$ (نسبت به اندازهٔ لبگ m_n) به طور مطلق پیوسته است اگر این امر برای μ درست باشد؛ زیرا در این حالت، به ازای هر $y \in R^n$، اگر f تابع مشخص یک مجموعهٔ بورل مانند E با $m_n(E) = \circ$ باشد،

$$\int_{R^n} f(x+y)d\mu(x) = \circ, \qquad (٥)$$

و رابطهٔ (۲) نشان می‌دهد که $(\mu * \lambda)(E) = \circ$.

به یاد آورید که هر اندازهٔ بورل مختلط μ دارای تجزیهٔ لبگ منحصر به فردی چون

$$\mu = \mu_a + \mu_s \qquad (٦)$$

است که درآن μ_a نسبت به m_n به طور مطلق پیوسته است و μ_s منفرد می‌باشد.

قضیهٔ بعدی منسوب به کارلین (*Karlin*) است.

۱۵.۹ قضیه. *فرض کنیم μ یک اندازهٔ احتمال بورل بر R باشد به طوری که*

$$\mu_a \neq \circ, \qquad (۱)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| d\mu(x) < \infty, \qquad (۲)$$

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} x d\mu(x) \neq 0. \qquad (۳)$$

فرض کنیم $f \in L^1(R)$، وقتی $x \to \pm\infty$، $f(x) \to 0$، و ϕ یک تابع کراندار باشد که در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\phi(x) - (\phi * \mu)(x) = f(x) \qquad (-\infty < x < \infty). \qquad (٤)$$

در این صورت حدود

$$\phi(-x) = \lim_{x \to -\infty} \phi(x) \quad \text{و} \quad \phi(\infty) = \lim_{x \to \infty} \phi(x) \qquad (٥)$$

موجودند، و

$$\phi(\infty) - \phi(-\infty) = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy. \qquad (٦)$$

برهان. همانند برهان قضیهٔ ۱۳.۹، قرار می‌دهیم $\sigma = \delta - \mu$. تعریف می‌کنیم

$$K(x) = \sigma((-\infty, x)) = \begin{cases} -\mu((-\infty, x)) & \text{اگر } x \le 0\text{،} \\ \mu([x, \infty)) & \text{اگر } x > 0\text{،} \end{cases} \qquad (٧)$$

فرض (۲) تضمین می‌کند که $K \in L^1(R)$. محاسبه‌ای سرراست، که جزئیاتش را حذف می‌کنیم، نشان می‌دهد که

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{-ixt} dx = \begin{cases} \hat{\sigma}t/it & \text{اگر } t \neq 0\text{،} \\ M & \text{اگر } t = 0\text{،} \end{cases} \qquad (٨)$$

و نیز

$$\int_r^s f(x) dx = (K * \phi)(s) - (K * \phi)(r) \qquad (-\infty < r < s < \infty), \qquad (٩)$$

زیرا $f = \phi * \sigma$.

بنا بر (۱)، μ منفرد نیست. لذا استدلال به کاررفته در ابتدای برهان قضیهٔ ۱۳.۹ نشان می‌دهد که اگر $t \neq 0$، $\hat{\sigma}(t) \neq 0$. لذا (۸) و (۳) ایجاب می‌کنند که $\hat{K}$ در R دارای صفر نیست.

چون $f \in L^1(R)$، رابطهٔ (۹) ایجاب می‌کند که $K * \phi$ در $\pm\infty$ دارای حدهایی است که تفاضلشان $\int_{-\infty}^{\infty} f$ است.

نشان می‌دهیم که ϕ به کندی نوسانی است. به محض انجام این کار، روابط (۵) و (٦) از خواص K و $K * \phi$ که هم اکنون ثابت شدند، طبق قضیهٔ پیت [قسمت (ب) قضیهٔ

۷.۹] نتیجه خواهدشد.

با جانشانی مکرر $\phi = f + \phi * \mu$ در طرف راست داریم

$$\phi = f + f * \mu + \ldots + f * \mu^{n-1} + \phi * \mu^{n} \tag{۱۰}$$

$$= f_n + g_n + h_n \qquad , (n = ۲,۳,۴,\ldots)$$

که در آن $\mu^{۱} = \mu$، $\mu^n = \mu * \mu^{n-1}$، $f_n = f + \ldots + f * \mu^{n-1}$، و

$$g_n = \phi * \left(\mu^n\right)_a \text{،} \qquad h_n = \phi * \left(\mu^n\right)_s. \tag{۱۱}$$

به ازای هر n وقتی $x \to \pm\infty$، $f_n(x) \to ۰$، و g_n به طوریکنواخت پیوسته است. لذا $f_n + g_n$ به کندی نوسانی است. چون تغییرات کل در

$$\left\|\left(\mu^n\right)_s\right\| \le \left\|\left(\mu_s\right)^n\right\| \le \left\|\mu_s\right\|^n \tag{۱۲}$$

صدق می‌کنند، داریم

$$\left|h_n(x)\right| \le \|\phi\| . \left\|\mu_s\right\|^n \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{۱۳}$$

که در آن $\|\phi\|$ سوپرمم $|\phi|$ بر R است. بنابر (۱)، $\left\|\mu_s\right\| < ۱$. لذا $h_n \to ۰$ به طور یکنواخت بر R. درنتیجه، ϕ حد یکنواخت توابع به کندی نوسانی $f_n + g_n$ است. این ایجاب می‌کند که ϕ به کندی نوسانی است، و برهان تمام خواهدبود.

تمرینات

۱. قضیهٔ تاوبر مذکور در بخش ۱.۹ را ثابت کنید.

۲. فرض کنید $\phi \in L^{\infty}\left(R^n\right)$ و محافظ توزیع $\hat{\phi}$ از k نقطهٔ متمایز $s_۱$، ...، s_k تشکیل شده باشد. توابع مناسب $\psi_۱$، ...، ψ_k را طوری بیابید که محافظ $(\phi * \psi_j)\hat{}$ مجموعهٔ یکانی $\{s_j\}$ باشد، و نتیجه بگیرید که ϕ یک چندجمله‌ای مثلثاتی است؛ یعنی

$$\phi(x) = a_۱ e^{is_۱ . x} + \ldots + a_k e^{is_k . x} \qquad (\text{تـ .هـ .})$$

(حالت $k = ۱$ در برهان قضیهٔ ۱۳.۹ انجام شده است.)

۳. فرض کنید Y یک زیرفضای انتقال- پایای بستهٔ $L^{۱}\left(R^n\right)$ باشد به طوری که $Z(Y)$ از k نقطهٔ متمایز تشکیل شده است. (نمادگذاری همانند قضیهٔ ۳.۹ است.) با استفاده از

تمرین ۲ ثابت کنید Y دارای همبعد k در $L^1\left(R^n\right)$ است، و از این نتیجه بگیرید که Y درست از $f \in L^1\left(R^n\right)$ هایی تشکیل شده است که تبدیلات فوریه‌شان در هر نقطه از $Z(Y)$ مساوی ۰ است.

٤. مشابه زیر از قسمت (آ) قضیهٔ ۷.۹ را ثابت نمایید: هرگاه $\phi \in L^\infty\left(R^n\right)$ و به هر $t \in R^n$ یک تابع مانند $K_t \in L^1\left(R^n\right)$ چنان نظیر باشد که $\hat{K}_t(t) \neq 0$ و وقتی $|x| \to \infty$، $(K_t * \phi)(x) \to 0$، آنگاه به ازای هر $f \in L^1\left(R^n\right)$، وقتی $|x| \to \infty$، $(f * \phi)(x) \to 0$.

۵. فرض کنید $K \in L^1\left(R^n\right)$ و $\hat{K}$ دست کم یک صفر در R^n داشته باشد. نشان دهید که $\phi \in L^\infty\left(R^n\right)$ای هست که در قسمت (آ) قضیهٔ ۷.۹ صدق نمی‌کند ولی به ازای هر $x \in R^n$، $(K * \phi)(x) = 0$.

٦. اگر $\phi(x) = \sin\left(x^2\right)$، $-\infty < x < \infty$، نشان دهید که با آنکه قسمت (ب) قضیهٔ ۷.۹ برقرار نیست، به ازای هر $f \in L^1(R)$،

$$\lim_{|x| \to \infty} (f * \phi)(x) = 0.$$

۷. فرض کنید f_α، به ازای $\alpha > 0$، تابع مشخص بازهٔ $[0, \alpha]$ باشد. f_β را به همین نحوتعریف کرده و قراردهید $g = f_\alpha + f_\beta$. ثابت کنید مجموعهٔ تمام ترکیبات خطی متناهی از انتقالهای g در $L^1(R)$ چگال است اگر و فقط اگر β/α گنگ باشد.

۸. اگر $\alpha > 0$ و $\alpha x = 1$، ثابت کنید

$$1 - \alpha < \alpha[x] \leq 1,$$

و ازاین نتیجه بگیرید که، همانطور که در برهان قضیهٔ ۱۲.۹ ذکر شده است، $e^x K(x)$ کراندار است.

۹. فرض کنید Q مجموعهٔ تمام اعداد گویا باشد. همچنین μ اندازهٔ احتمال بر R باشد که بر Q متمرکز شده است، و ϕ تابع مشخص Q باشد. نشان دهید که به ازای هر $x \in R$، $\phi(x) = (\phi * \mu)(x)$ اگر چه ϕ ثابت نیست. (قس. قضیهٔ ۱۳.۹.) چه مجموعه‌های دیگری را می‌توان به جای Q به کار برد و همین حاصل را به دست آورد؟

۱۰. حالات خاص نکات زیر در قضیهٔ ۱۵.۹ به کار رفته‌اند. آنها را ثابت نمایید.

(آ) هرگاه $\phi \in L^{\infty}\left(R^n\right)$ و $k \in L^1\left(R^n\right)$، آنگاه $k * \phi$ به طور یکنواخت پیوسته است.

(بـ) هرگاه $\left\{\phi_j\right\}$ دنباله‌ای از توابع به کندی نوسانی بر R^n باشد که به طور یکنواخت بـه تابع ϕ همگراست، آنگاه ϕ به کندی نوسانی می‌باشد.

(پـ) هرگاه μ و λ اندازه‌های بورل مختلطی بر R^n باشند، آنگاه

$$\|(\mu * \lambda)_s\| \leq \|\mu_s\| \|\lambda_s\| .$$

۱۱. قراردهید $\psi(x) = \cos\left(|x|^{1/3}\right)$ و تعریف کنید

$$f(x) = \psi(x) - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \psi(x-y)dy \qquad (-\infty < x < \infty) .$$

ثابت کنید $f \in \left(L^1 \cap C_0\right)(R)$ ولی هیچ جواب کراندار معادلهٔ

$$\phi(x) - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \phi(x-y)dy = f(x)$$

حدی در $+\infty$ یا $-\infty$ ندارد. (این امر اهمیت شرط $M \neq 0$ را درقضیهٔ ۱۵.۹ نشان می‌دهد.)

۱۲. فرض کنید μ یک اندازهٔ احتمال متمرکز شده بر اعداد صحیح باشد. ثابت کنیـد هـر تابع ϕ بر R که متناوب با دورهٔ تناوب ۱ باشد در $\phi - \phi * \mu = 0$ صدق می‌کند. (این مربوط به قضایای ۱۳.۹ و ۱۵.۹ است.)

۱۳. فرض کنید $\phi \in L^{\infty}(0,\infty)$،

$$\int_0^{\infty} |H(x)| \frac{dx}{x} < \infty \quad ، \quad \int_0^{\infty} |K(x)| \frac{dx}{x} < \infty$$

$$\int_0^{\infty} K(x) x^{-it} \frac{dx}{x} \neq 0 \quad ، -\infty < t < \infty \text{ به ازای}$$

و

$$\lim_{x \to \infty} \int_0^{\infty} K\left(\frac{x}{u}\right) \phi(u) \frac{du}{u} = 0.$$

ثابت کنید

$$\lim_{x \to \infty} \int_0^{\infty} H\left(\frac{x}{u}\right) \phi(u) \frac{du}{u} = 0 .$$

این شبیه قسمت (آ) قضیهٔ ۷.۹ است. چگونه باید "به کندی نوسانی" تعریـف شـود تـا مشابه نظیر (بـ) قضیهٔ ۷.۹ به دست آید؟

۱٤. برهان وینر از قضیهٔ لیتلوود به اختصار در زیر ذکرشده است. جزئیات آن را کامل نمایید. فرض کنید $|na_n| \leq 1$، $f(r) = \sum_0^\infty a_n r^n$، و وقتی $r \to 1$، $f(r) \to 0$. اگر $s_n = a_0 + \ldots + a_n$، باید ثابت شود که وقتی $n \to \infty$، $s_n \to 0$.

(آ) $\left|s_n - f\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right| < 2$. لذا $\{s_n\}$ کراندار است.

(ب) هرگاه $\phi(x) = s_n$ بر $[n, n+1)$ و $0 < x < y$، آنگاه

$$|\phi(y) - \phi(x)| \leq \frac{y+1-x}{x}.$$

(پ) وقتی $x \to 0$، $\int_0^\infty x e^{-xt} \phi(t)\, dt = f\left(e^{-x}\right) \to 0$. لذا

$$\lim_{x \to \infty} \int_0^\infty K\left(\frac{x}{u}\right) \phi(u) \frac{du}{u} = 0$$

اگر

$$K(x) = \left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x}\right).$$

(ت) اگر t حقیقی باشد، $\int_0^\infty K(x) e^{-it} \frac{dx}{x} = \Gamma(1+it) \neq 0$.

(ث) اگر $1 > x > (1+\varepsilon)^{-1}$، قرار دهید $H(x) = 1/(\varepsilon x)$ و $H(x) = 0$ در غیر این‌صورت. نتیجه بگیرید که

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\varepsilon x} \int_x^{(1+\varepsilon)x} \phi(y)\, dy = 0.$$

(ج) بنابر قسمتهای (ب) و (ث)، $\lim_{x \to \infty} \phi(x) = 0$.

تذکر. هرگاه $na_n \to 0$ برقرار باشد، آنگاه تعدیل مرحلهٔ (آ) تنها چیزی است که در برهان لازم است.

۱۵. فرض کنید Y زیرفضای بسته‌ای از $L^1\left(R^n\right)$ باشد. ثابت کنید Y انتقال -پایا است اگر و فقط اگر هروقت $f \in Y$ و $g \in L^1\left(R^n\right)$، $f * g \in Y$.

لذا زیرفضاهای انتقال -پایای بستهٔ $L^1\left(R^n\right)$ درست همان ایده‌آلهای بسته در جبر پیچشی $L^1\left(R^n\right)$ اند.

قسمت سه

جبرهای باناخ و نظریهٔ طیفی

فصل ۱۰

جبرهای باناخ

آشنایی

۱.۱۰.تعریف. ***جبر مختلط*** یک فضای‌برداری مانند A روی میدان مختلط $\mathbb{C}$ است که درآن یک ضرب تعریف شده است که در روابط

$$x(yz) = (xy)z, \tag{۱}$$

$$(x+y)z = xz + yz, \quad x(y+z) = xy + xz \tag{۲}$$

و

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y) \tag{۳}$$

به ازای هر x، y، و z در A و هر اسکالر α صدق می‌کند.

هرگاه، علاوه براین، A یک ***فضای باناخ*** نسبت به نرم صادق در ***نامساوی ضربی***

$$\|xy\| \le \|x\|\,\|y\| \qquad (x \in A, y \in A) \tag{٤}$$

بوده و A شامل ***عنصریکهٔ*** e باشد به طوری که

$$xe = ex = x \qquad (x \in A) \tag{٥}$$

و

$$\|e\| = 1, \qquad (6)$$

آنگاه A یک ***جبر باناخ*** می‌باشد.

توجه کنید که تعویضپذیری A شرط نشده است؛ یعنی شرط نکرده‌ایم که به ازای هر x و y در A، $xy=yx$، و این کار را نخواهیم کرد مگر وقتی به صراحت بیانش کنیم.

واضح است که حداکثر یک $e \in A$ صادق در(٥) وجود دارد، زیرا هرگاه e' نیز در (٥) صدق کند، آنگاه $e' = e'e = e$.

اغلب وجودیکه از تعریف جبر باناخ حذف می‌شود. با اینحال، وقتی یکه وجود دارد، سخن از معکوسها با معنی است؛ درنتیجه طیف یک عنصر از A را می‌توان طبیعی‌تر از سایر حالات تعریف کرد. این ما را به بسط شهودی‌تری از نظریهٔ اساسی می‌رساند. به علاوه، خسران کلیت حاصل کم است زیرا بسیاری از جبرهای باناخی که به طور طبیعی رخ می‌دهند دارای یکه‌اند، و جبرهای باناخ دیگر را می‌توان به شیوهٔ کانونی زیریکه‌دار کرد.

فرض کنیم A در شرایط (١) تا (٤) صدق کند ولی A عنصریکه نداشته باشد. همچنین A_1 عبارت باشد از تمام جفتهای مرتب (x,α) که در آن $x \in A$ و $\alpha \in \mathcal{C}$. اعمال فضای‌برداری در A_1 را مؤلفه به مؤلفه تعریف کرده و ضرب در A_1 را به وسیلهٔ

$$(x,\alpha)(y,\beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \alpha\beta) \qquad (7)$$

تعریف می‌کنیم، و نیز تعریف می‌کنیم

$$\|(x,\alpha)\| = \|x\| + |\alpha|, \qquad e = (0,1). \qquad (8)$$

در این صورت A_1 در خواص (١) تا (٦) صدق می‌کند، و نگاشت $x \to (x,0)$ یک یکریختی یکمتری از A به روی زیرفضایی از A_1 (درواقع به روی یک ایده‌آل دو طرفهٔ بسته‌ای از A_1) است که همبعدش ١ می‌باشد. هرگاه x با $(x,0)$ یکی شود، آنگاه A_1 چیزی جز A به علاوهٔ فضای‌برداری یک بعدی تولید شده به وسیلهٔ e نیست. ر.ک.مثالهای ۳.۱۰ (ت) و ۱۳.۱۱ (ث).

نامساوی (٤) ضرب را یک عمل **پیوسته** در A می‌سازد. این یعنی هرگاه $x_n \to x$ و $y_n \to y$، آنگاه $x_n y_n \to xy$، که از اتحاد

$$x_n y_n - xy = (x_n - x)y_n + x(y_n - y) \tag{۹}$$

نتیجه می‌شود. به خصوص، ضرب **پیوستهٔ چپ و پیوستهٔ راست** است: اگر $x_n \to x$ و $y_n \to y$،

$$x_n y \to xy \quad \text{و} \quad xy_n \to xy. \tag{۱۰}$$

جالب این است که رابطهٔ (٤) را می‌توان با شرط (ظاهراً) ضعیفتر (۱۰) عوض کرد و (٦) را می‌توان بدون وسیعتر کردن ردهٔ جبرهای موردنظر حذف نمود.

۲.۱۰ قضیه. *فرض کنیم A یک فضای باناخ و جبر مختلط با عنصریکهٔ $e \neq 0$ باشد که در آن ضرب پیوستهٔ چپ و پیوستهٔ راست است. در این صورت یک نرم بر A هست که همان توپولوژی داده شده را القا می‌کند و A را به یک جبر باناخ بدل می‌سازد.*

(فرض $e \neq 0$ حالت غیرجالب $A = \{0\}$ را از بین می‌برد.)

برهان. به هر $x \in A$ عملگر ضرب چپ M_x را که به صورت زیر تعریف می‌شود منتسب می‌سازیم:

$$M_x(z) = xz \qquad (z \in A) \tag{۱}$$

فرض کنیم $\tilde{A}$ مجموعهٔ تمام M_x ها باشد. چون ضرب راست پیوسته فرض شده است، $\tilde{A} \subset \mathscr{B}(A)$ یعنی جزء فضای باناخ تمام عملگرهای خطی کراندار بر A.

واضح است که $x \to M_x$ خطی است. قانون شرکتپذیری ایجاب می‌کند که $M_{xy} = M_x M_y$. هرگاه $x \in A$، آنگاه

$$\|x\| = \|xe\| = \|M_x e\| \le \|M_x\| \|e\|. \tag{۲}$$

این نکات را می‌توان با گفتن اینکه $x \to M_x$ یک یکریختی از A به روی جبر $\tilde{A}$ است که معکوسش پیوسته است خلاصه کرد. چون

$$\|M_x M_y\| \le \|M_x\| \|M_y\| \quad \text{و} \quad \|M_e\| = \|I\| = 1، \tag{۳}$$

$\tilde{A}$ یک جبر باناخ است **مشروط بر اینکه** تام باشد؛ یعنی مشروط بر اینکه یک زیرفضای

بستهٔ $\mathscr{B}(A)$ نسبت به توپولوژی داده شده به وسیلهٔ عملگر نرم باشد. (ر.ک.قضیهٔ ۱.٤.)
به محض انجام این کار، قضیهٔ نگاشت باز ایجاب می‌کند که $x \to M_x$ پیوسته نیز هست. لذا $\|x\|$ و $\|M_x\|$نرمهای هم ارزی بر A می‌باشند.

فرض کنیم $T \in \mathscr{B}(A)$، $T_i \in \widetilde{A}$، و $T_i \to T$ در توپولوژی $\mathscr{B}(A)$. هرگاه T_i ضرب چپ به وسیلهٔ $x_i \in A$ باشد، آنگاه

$$T_i(y) = x_i y = (x_i e) y = T_i(e) y. \tag{٤}$$

وقتی $i \to \infty$، جملهٔ اول در (٤) به $T(y)$ میل می‌کند، و $T_i(e) \to T(e)$. چون ضرب در A پیوستهٔ چپ فرض شده است، پس جملهٔ آخر در (٤) به $T(e)y$ میل می‌کند. قرار می‌دهیم $x = T(e)$. در این صورت

$$T(y) = T(e)\,y = xy = M_x(y) \qquad (y \in A); \tag{٥}$$

درنتیجه $T = M_x \in \widetilde{A}$، و $\widetilde{A}$ بسته است.

قضیه به خصوص می‌گوید که، همراه با تمامیت، پیوستگی چپ به علاوهٔ پیوستگی راست پیوستگی "متصل" را ایجاب می‌کند. تمرین ٦ نشان می‌دهد که این ممکن است در جبرهای خطی نرمدار که تام نیستند درست نباشد.

۳.۱۰ چند مثال . (آ) فرض کنیم $C(K)$ فضای باناخ تمام توابع پیوستهٔ مختلط بر فضای هاسدورف فشردهٔ ناتهی K با نرم سوپرمم باشد. ضرب را به طریق معمول تعریف می‌کنیم: $(fg)(p) = f(p)g(p)$ و این $C(K)$ را به جبر باناخ تعویضپذیر بدل می‌کند؛ تابع ثابت ۱ عنصریکه است.

هرگاه K مجموعه‌ای متناهی مرکب از مثلاً n نقطه باشد، آنگاه $C(K)$ چیزی جز $\mathbb{C}^n$ با ضرب نقطه به نقطه نیست.

به‌خصوص، وقتی $n=1$، ساده‌ترین جبر باناخ، یعنی $\mathbb{C}$، با قدر مطلق به عنوان نرم به دست می آید.

(ب) فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. در این صورت $\mathscr{B}(X)$، یعنی جبر تمام

عملگرهای خطی کراندار بر X، یک جبر باناخ نسبت به عملگر نرم معمولی است. عملگر همانی I عنصر همانی آن است. هرگاه $\dim X = n < \infty$، آنگاه $\mathscr{B}(X)$ با جبر تمام ماتریسهای n در n مختلط یکی است (یکریخت است). هرگاه $\dim X > 1$، آنگاه $\mathscr{B}(X)$ تعویضپذیر نیست (فضای بدیهی $X = \{0\}$ باید مستثنی شود.)

هر زیرجبر بستهٔ $\mathscr{B}(X)$ که شامل I باشد یک جبر باناخ نیز هست. برهان قضیهٔ ۲.۱۰ درواقع نشان می دهد که **هر** جبر باناخ با یکی از اینها یکریخت است.

(پ) هرگاه K یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ ناتهی از $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{C}^n$ بوده و A زیرجبری از $C(K)$ باشد که از $f \in C(K)$ هایی تشکیل شده است که در درون K هلوریختاند، آنگاه A (نسبت به نرم سوپرمم) تام است و لذا یک جبر باناخ می باشد.

وقتی K قرص یکهٔ بسته در $\mathbb{C}$ باشد، A را ***جبر قرصی*** می‌نامند.

(ت) $L^1(R^n)$ با **پیچش** به عنوان ضرب در تمام شرایط تعریف ۱.۱۰ صدق می‌کند جز آنکه فاقدیکه است. با روند مجرد مذکور در بخش ۱.۱۰ یا به روشی ملموس‌تر به وسیلهٔ توسیع $L^1(R^n)$ به جبر تمام اندازه‌های بورل مختلط μ بر R^n به شکل

$$d\mu = f dm_n + \lambda d\delta$$

که درآن $f \in L^1(R^n)$، δ اندازهٔ دیراک بر R^n است، و λ یک اسکالر می‌باشد می‌توان یک یکه به آن الحاق کرد.

(ث) فرض کنیم $M(R^n)$ جبر تمام اندازه‌های بورل مختلط بر R^n با پیچش به عنوان ضرب باشد که به وسیلهٔ تغییر کل نرمدار شده است. این یک جبر باناخ تعویضپذیر با یکهٔ δ است که شامل (ت) به عنوان یک زیرجبر بسته می‌باشد.

۴.۱۰ چند تبصره. ما به چند دلیل توجه خود را به جبرهای باناخ روی میدان ***مختلط*** معطوف می‌کنیم، اگر چه جبرهای باناخ حقیقی (که تعریفشان واضح است) نیز بررسی شده‌اند.

یک دلیل آن است که بعضی از نکات مقدماتی راجع به توابع هلوریخت نقش

مهمی در مبانی مبحث دارند. این امر را می توان در قضایای ۹.۱۰ و ۱۳.۱۰ دید و حتی در حساب دیفرانسیل و انتگرال علامتی واضحتر می‌شود.

دلیل دیگر (که نتایجش چندان واضح نیستند) این است که $\mathcal{C}$ دارای برگشت نابدیهی طبیعی است (ر.ک. تعریف ۱٤.۱۱) و آن تزویج است، و نیز بسیاری از خواص عمیقتر بعضی از انواع جبرهای باناخ به حضور یک برگشت وابسته‌اند. (به همین دلیل، نظریهٔ فضاهای هیلبرت مختلط از نظریهٔ فضاهای هیلبرت حقیقی پربارتر است.)

در یک نقطه (قضیهٔ ۳٤.۱۰) یک تفاوت توپولوژیک بین $\mathcal{C}$ و R نیز نقشی خواهد داشت.

از جمله نگاشتهای مهم از یک جبر باناخ به توی دیگری ***همریختیها*** می باشند. اینها نگاشتهای خطی hاند که ***ضربی*** نیز هستند:

$$h(xy) = h(x)h(y) .$$

حالتی که در آن برد ساده‌ترین جبر باناخ، یعنی خود $\mathcal{C}$ است، اهمیت خاصی دارد. بسیاری از خواص مهم نظریهٔ تعویضپذیر به منبعی کافی از همریختیها به روی $\mathcal{C}$ وابسته می‌باشند.

همریختیهای مختلط

۵.۱۰ تعریف. فرض کنیم A یک جبر مختلط و ϕ یک تابعی خطی بر A باشد که متحد ۰ نیست. هرگاه به ازای هر $x \in A$ و $y \in A$،

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \tag{۱}$$

آنگاه ϕ یک ***همریختی مختلط*** بر A نام دارد.

(البته مستثنی کردن $\phi \equiv 0$ فقط به خاطر سادگی بحث است.)

عنصر $x \in A$ را ***معکوسپذیر*** نامیم اگر ***معکوسی*** در A داشته باشد؛ یعنی اگر عنصری مانند $x^{-1} \in A$ باشد که

$$x^{-1}x = xx^{-1} = e, \tag{۲}$$

که در آن e عنصریکهٔ A است.

توجه کنید که هیچ $x \in A$ ی بیش از یک معکوس ندارد، زیرا هرگاه $yx = e = xz$، آنگاه

$$y = ye = y(xz) = (yx)z = ez = z .$$

۶.۱۰ حکم. ***هرگاه ϕ یک همریختی مختلط بر جبر مختلط A بایکهٔ e باشد، آنگاه $\phi(e) = ۱$، و به ازای هر $x \in A$ معکوسپذیر، $\phi(x) \neq ۰$.***

برهان. به ازای $y \in A$ ی، $\phi(y) \neq ۰$. چون

$$\phi(y) = \phi(ye) = \phi(y)\phi(e),$$

پس $\phi(e) = ۱$. هرگاه x معکوسپذیر باشد، آنگاه

$$\phi(x)\phi\left(x^{-۱}\right) = \phi\left(xx^{-۱}\right) = \phi(e) = ۱;$$

درنتیجه $\phi(x) \neq ۰$.

قسمتهای (آ) و (پـ) قضیهٔ زیر احتمالاً وسیعترین کاربرد را در نظریهٔ جبرهای باناخ دارند؛ بهخصوص، قسمت (پـ) ایجاب میکند که تمام همریختیهای مختلط جبرهای باناخ پیوسته میباشند.

۷.۱۰ قضیه. ***فرض کنیم A یک جبر باناخ بوده، $x \in A$، و $\|x\| < ۱$. دراین صورت***

(آ) $e - x$ معکوسپذیر است؛

(بـ) $\left\|(e-x)^{-۱} - e - x\right\| \le \dfrac{\|x\|^۲}{۱ - \|x\|}$؛

(پـ) به ازای هر همریختی مختلط ϕ بر A داریم $|\phi(x)| < ۱$.

برهان. چون $\left\|x^n\right\| \le \|x\|^n$ و $\|x\| < ۱$، عنصرهای

$$s_n = e + x + x^{۲} + \ldots + x^n \qquad (۱)$$

یک دنبالهٔ‌کشی در A تشکیل می‌دهند. و چون A تام است، عنصری مانند $s \in A$ هست به طوری که $s_n \to s$. چون $x^n \to ۰$ و

$$s_n.(e-x) = e - x^{n+۱} = (e-x).s_n \qquad (۲)$$

پیوستگی ضرب ایجاب می‌کند که s معکوس $e-x$ است. حال رابطهٔ (۱) نشان می‌دهد که

$$\|s-e-x\| = \left\|x^{۲} + x^{۳} + \ldots\right\| \le \sum_{n=۲}^{\infty} \|x\|^n = \frac{\|x\|^{۲}}{۱-\|x\|}.$$

بالأخره، فرض کنیم $\lambda \in \mathbb{C}$ و $|\lambda| \ge ۱$. بنابر قسمت (آ)، $e - \lambda^{-۱}x$ معکوس‌پذیر است. و بنابر حکم ۶.۱۰،

$$۱ - \lambda^{-۱}\phi(x) = \phi\left(e - \lambda^{-۱}x\right) \ne ۰.$$

لذا $\phi(x) \ne \lambda$. این برهان را تمام خواهد کرد.

حال محور اصلی بحث را قطع کرده و قضیه‌ای را بیان می‌کنیم که برای جبرهای باناخ نشان می‌دهد که حکم ۶.۱۰ همریختیهای مختلط را در بین تابعیهای خطی عملاً توصیف می‌کند. این نتیجهٔ مهم ظاهراً تاکنون کاربردهای جالبی نداشته است.

۸.۱۰ لم. فرض کنیم f یک تابع تمام از یک متغیر مختلط بوده، $f(۰)=۱$، $f'(۰)=۰$، و

$$۰ < |f(\lambda)| \le e^{|\lambda|} \qquad (\lambda \in \mathbb{C}). \qquad (۱)$$

در این صورت، به ازای هر $\lambda \in \mathbb{C}$، $f(\lambda)=۱$.

برهان. چون f دارای صفر نیست، یک تابع تمام مانند g هست به طوری که $f = \exp\{g\}$، $g(۰) = g'(۰) = ۰$، و $\mathrm{Re}[g(\lambda)] \le |\lambda|$. این نامساوی ایجاب می‌کند که

$$|g(\lambda)| \le |۲r - g(\lambda)| \qquad (|\lambda| \le r). \qquad (۲)$$

تابع

$$h_r(\lambda) = \frac{r^{۲} g(\lambda)}{\lambda^{۲}[۲r - g(\lambda)]} \qquad (۳)$$

در $\{\lambda : |\lambda| < ۲r\}$ هلوریخت است، و اگر $|\lambda| = r$، $|\lambda_r(\lambda)| \le ۱$. بنابر قضیهٔ مدول ماکزیمم،

$$|h_r(\lambda)| \le ۱ \qquad (|\lambda| \le r). \qquad (٤)$$

λ را ثابت گرفته و فرض می‌کنیم $r \to \infty$. در این صورت (۳) و(٤) ایجاب می‌کنند که $g(\lambda) = ۰$.

۹.۱۰ قضیه (گلسون(*Gleason*)، کاهان(*Kahane*)، زلازکو(*Zelazko*)). هرگاه ϕ ***یک تابعی خطی بر جبر باناخ A باشد به طوری که $\phi(e) = ۱$ و بـه ازای هـر $x \in A$ معکوس‌پذیر، $\phi(x) \neq ۰$، آنگاه***

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \qquad (x \in A, y \in A). \qquad (۱)$$

توجه کنید که پیوستگی ϕ بخشی از مفروضات نیست.

برهان. فرض کنیم N فضای پوچ ϕ باشد. اگـر $x \in A$ و $y \in A$، فـرض $\phi(e) = ۱$ نشـان می‌دهد که

$$x = a + \phi(x)e \quad \text{و} \quad y = b + \phi(y)e \qquad (۲)$$

که در آن $a \in N$ و $b \in N$. اگر ϕ بر حاصل‌ضرب معـادلات (۲) اعمـال شـود، خواهیـم داشت

$$\phi(xy) = \phi(ab) + \phi(x)\phi(y). \qquad (۳)$$

لذا نتیجهٔ مطلوب (۱) هم ارز آن است که

(٤) اگر $a \in N$ و $b \in N$، $ab \in N$.

فرض کنید حالت خاصی از (٤) را ثابت کرده باشیم؛ یعنی

(۵) اگر $a \in N$، $a^{۲} \in N$.

در این صورت رابطهٔ (٣) به ازای $x=y$ ایجاب می‌کند که

$$\phi\left(x^{2}\right)=[\phi(x)]^{2} \qquad (x\in A). \tag{٦}$$

از تعویض x با $x+y$ در (٦) داریم

$$\phi(xy+yx)=2\phi(x)\phi(y) \qquad (x\in A, y\in A). \tag{٧}$$

لذا

(٨) اگر $x\in N$ و $y\in A$، $xy+yx\in N$.

اتحاد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(xy-yx)^{2}+(xy+yx)^{2}=2[x(yxy)+(yxy)x]. \tag{٩}$$

اگر $x\in N$، طرف راست (٩) طبق (٨) در N است؛ و درنتیجه، طبق (٨)و (٦)، مساوی $(xy+yx)^{2}$ می‌باشد. لذا $(xy-yx)^{2}$ در N است، و کاربرد دیگری از (٦) نتیجه می‌دهد که

(١٠) اگر $x\in N$ و $y\in A$، $xy-yz\in N$.

از جمع(٨) و (١٠) رابطهٔ (٤) و درنتیجه (١) را خواهیم داشت.

لذا، به دلایلی صرفاً جبری، رابطهٔ (٥) رابطهٔ (١) را ایجاب می‌کند. در برهان (٥) از روشهای تحلیلی استفاده می‌شود.

طبق فرض، N شامل عنصر معکوسپذیر از A نیست. لذا، طبق قسمت (آ) قضیهٔ ٧.١٠، به ازای هر $x\in N$، $\|e-x\|\geq 1$. بنابراین

$$\|\lambda e-x\|\geq|\lambda|=|\phi(\lambda e-x)| \qquad (x\in N,\lambda\in\mathbb{C}). \tag{١١}$$

نتیجه می‌گیریم که ϕ یک تابعی خطی **پیوسته** بر A به نرم۱ است.

برای اثبات (٥)، $a\in N$ را ثابت گرفته و بدون آسیب‌زدن به کلیت فرض می‌کنیم $\|a\|=1$، و تعریف می‌کنیم

$$f(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi\left(a^{n}\right)}{n!}\lambda^{n} \qquad (\lambda\in\mathbb{C}). \tag{١٢}$$

چون $\left|\phi\left(a^{n}\right)\right|\leq\left\|a^{n}\right\|\leq\|a\|^{n}=1$، f تمام است و در رابطهٔ $|f(\lambda)|\leq\exp|\lambda|$ به ازای هر $\lambda\in\mathbb{C}$ صدق می‌کند. همچنین $f(0)=\phi(e)=1$ و $f'(0)=\phi(a)=0$.

اگر بتوان ثابت کرد که به ازای هر $\lambda \in \mathcal{C}$، $f(\lambda) \neq 0$، لم ۸.۱۰ ایجاب خواهدکرد که $f''(0) = 0$؛ لذا $\phi(a^2) = 0$ که رابطهٔ(۵) را ثابت می‌کند.

سری

$$E(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} a^n \qquad (۱۳)$$

به ازای هر $\lambda \in \mathcal{C}$ در نرم A همگراست. پیوستگی ϕ نشان می‌دهد که

$$f(\lambda) = \phi(E(\lambda)) \qquad (\lambda \in \mathcal{C}). \qquad (۱۴)$$

معادلهٔ تابعی $E(\lambda + \mu) = E(\lambda)E(\mu)$ از رابطهٔ(۱۳) درست مثل حالت اسکالر نتیجه می‌شود. به‌خصوص،

$$E(\lambda)E(-\lambda) = E(0) = e \qquad (\lambda \in \mathcal{C}). \qquad (۱۵)$$

لذا $E(\lambda)$، به ازای هر $\lambda \in \mathcal{C}$، یک عنصر معکوسپذیر A است. این طبق فرض ایجاب می‌کند که $\phi(E(\lambda)) \neq 0$ و لذا، طبق (۱٤)، $f(\lambda) \neq 0$. این برهان را تمام خواهد کرد.

خواص اصلی طیفها

۱۰.۱۰ چند تعریف. فرض کنیم A یک جبر باناخ بوده و $G = G(A)$ مجموعهٔ تمام عناصر معکوسپذیر A باشد. هرگاه $x \in G$ و $y \in G$، آنگاه $y^{-1}x^{-1}$ معکوس xy است. لذا $xy \in G$ و G یک ***گروه*** است.

اگر $x \in A$، ***طیف*** $\sigma(x)$ از x مجموعهٔ تمام اعداد مختلط λای است که $\lambda e - x$ معکوسپذیر ***نیست***. متمم $\sigma(x)$ ***مجموعهٔ حلال*** x است؛ این مجموعه عبارت است از تمام $\lambda \in \mathcal{C}$ هایی که $(\lambda e - x)^{-1}$ موجود است.

شعاع طیفی x عدد

$$\rho(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\} \qquad (۱)$$

است. این عدد شعاع کوچکترین قرص مستدیر بسته در $\mathcal{C}$ به مرکز 0 است که شامل $\sigma(x)$ می‌باشد. البته، اگر $\sigma(x)$ تهی باشد، رابطهٔ (۱) معنی ندارد. ولی، همانطور که خواهیم دید، این هرگز رخ نمی‌دهد.

۱۱.۱۰ قضیه. *فرض کنیم A یک جبر باناخ بوده، $x \in G(A)$، $h \in A$، و $\|h\| < \frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1}$. دراین صورت $x+h \in G(A)$، و*

$$\left\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\right\| \le 2\left\|x^{-1}\right\|^{3}\|h\|^{2}. \qquad (1)$$

برهان. چون $x+h = x\left(e+x^{-1}h\right)$ و $\left\|x^{-1}h\right\| < \frac{1}{2}$، قضیهٔ ۷.۱۰ ایجاب می‌کند که $x+h \in G(A)$ و نرم طرف راست اتحاد

$$(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1} = \left[\left(e+x^{-1}h\right)^{-1} - e + x^{-1}h\right]x^{-1}$$

حداکثر $2\left\|x^{-1}h\right\|^{2}\left\|x^{-1}\right\|$ است.

۱۲.۱۰ قضیه. *هرگاه A یک جبر باناخ باشد، آنگاه $G(A)$ یک زیرمجموعهٔ باز A است، و نگاشت $x \to x^{-1}$ یک همانریختی از $G(A)$ به روی $G(A)$ می‌باشد.*

برهان. باز بودن $G(A)$ و پیوسته بودن $x \to x^{-1}$ از قضیهٔ ۱۱.۱۰ نتیجه می‌شوند. چون $x \to x^{-1}$ مجموعهٔ $G(A)$ را به روی $G(A)$ می‌نگارد و معکوس خودش نیز هست، پس یک همانریختی می‌باشد.

۱۳.۱۰ قضیه. *هرگاه A یک جبر باناخ بوده و $x \in A$، آنگاه*

(آ) طیف $\sigma(x)$ از x فشرده و ناتهی است، و

(ب) شعاع طیفی $\rho(x)$ از x در

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty}\left\|x^{n}\right\|^{1/n} = \inf_{n\ge 1}\left\|x^{n}\right\|^{1/n} \qquad (1)$$

صدق می‌کند.

توجه کنید که وجود حد در (۱) بخشی از نتیجه است و نامساوی

$$\rho(x) \le \|x\| \qquad (۲)$$

مشمول ***فرمول شعاع طیفی*** (۱) می‌باشد.

برهان. هرگاه $\|x\| < |\lambda|$، آنگاه، طبق قضیهٔ ۷.۱۰، $e - \lambda^{-1}x$ در $G(A)$ قراردارد، و لذا $\lambda e - x$ نیز چنین است. بنابراین $\lambda \notin \sigma(x)$. این رابطهٔ (۲) را ثابت می‌کند. به‌خصوص، $\sigma(x)$ یک مجموعهٔ کراندار است.

برای اثبات بسته بودن $\sigma(x)$، تابع $g: \mathbb{C} \to A$ را با $g(\lambda) = \lambda e - x$ تعریف می‌کنیم. دراین صورت g پیوسته است، و متمم Ω از $\sigma(x)$ مساوی $g^{-1}(G(A))$ است که طبق قضیهٔ ۱۲.۱۰ باز است. لذا $\sigma(x)$ فشرده است. حال $f: \Omega \to G(A)$ را با

$$f(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1} \qquad (\lambda \in \Omega) \qquad (۳)$$

تعریف می‌کنیم. x را با $\lambda e - x$ و h را با $(\mu - \lambda)e$ در قضیهٔ ۱۱.۱۰ تعویض می‌کنیم. اگر $\lambda \in \Omega$ و μ به قدرکافی نزدیک λ باشد، حاصل این جانشانی خواهدبود

$$\left\| f(\mu) - f(\lambda) + (\mu - \lambda) f^{2}(\lambda) \right\| \le 2\|f(\lambda)\|^{3} |\mu - \lambda|^{2}; \qquad (٤)$$

درنتیجه

$$\lim_{\mu \to \lambda} \frac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda} = -f^{2}(\lambda) \qquad (\lambda \in \Omega). \qquad (٥)$$

لذا f یک تابع A - مقدار قویاً هلوریخت در Ω است.

اگر $\|x\| < |\lambda|$، استدلال به کاررفته در قضیهٔ ۷.۱۰ نشان می‌دهد که

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^{n} = \lambda^{-1} e + \lambda^{-2} x + \ldots \qquad (٦)$$

این سری بر هر دایرهٔ Γ_r به مرکز ۰ و شعاع $r > \|x\|$ به طور یکنواخت همگراست. لذا، طبق قضیهٔ ۲۹.۳، انتگرالگیری جزء به جزء مجاز است. بنابراین

$$x^{n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \lambda^{n} f(\lambda)\, d\lambda \qquad (r > \|x\|, n = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (۷)$$

اگر $\sigma(x)$ تهی می‌بود، Ω مساوی $\mathbb{C}$ می‌شد، و قضیهٔ کشی ۳۱.۳ ایجاب می‌کرد که تمام انتگرالها در (۷) مساوی ۰ اند. ولی وقتی $n = 0$، طرف چپ (۷) مساوی $e \neq 0$ است.

این تناقض نشان می‌دهد که $\sigma(x)$ تهی نیست.

چون Ω شامل هر λ با $|\lambda| > \rho(x)$ است، کاربردی از رابطهٔ (۳) قضیهٔ کشی ۳۱.۳ نشان می‌دهد که شرط $r > \|x\|$ را می‌توان در (۷) با $r > \rho(x)$ عوض کرد. اگر

$$M(r) = \max_{\theta} \left\| f\left(re^{i\theta}\right) \right\| \qquad (r > \rho(x)), \tag{۸}$$

پیوستگی f ایجاب می‌کند که $M(r) < \infty$. اما چون از (۷) داریم

$$\left\| x^n \right\| \le r^{n+1} M(r), \tag{۹}$$

به دست می‌آوریم

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left\| x^n \right\|^{1/n} \le r \qquad (r > \rho(x)); \tag{۱۰}$$

درنتیجه

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left\| x^n \right\|^{1/n} \le \rho(x). \tag{۱۱}$$

از آن سو، اگر $\lambda \in \sigma(x)$، تجزیهٔ

$$\lambda^n e - x^n = (\lambda e - x)\left(\lambda^{n-1} e + \ldots + x^{n-1}\right) \tag{۱۲}$$

نشان می‌دهد که $\lambda^n e - x^n$ معکوس‌پذیر نیست. لذا $\lambda^n \in \sigma\left(x^n\right)$. بنابر (۲)، به ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$، $\left|\lambda^n\right| \le \left\|x^n\right\|$. لذا

$$\rho(x) = \inf_{n \ge 1} \left\| x^n \right\|^{1/n}, \tag{۱۳}$$

و رابطهٔ (۱) نتیجهٔ فوری (۱۱) و (۱۳) می‌باشد.

ناتهی بودن $\sigma(x)$ به توصیف ساده‌ای از جبرهای باناخ که جبر بخشی‌اند منجر می‌شود.

۱۴.۱۰ قضیه (گلفاند (*Gelfand*) – مازور (*Mazur*)). *هرگاه A یک جبر باناخ باشد که در هر آن عنصر ناصفر معکوس‌پذیر است، آنگاه A مساوی (به طور یکمتر یکریخت) با میدان مختلط است.*

برهان. هرگاه $x \in A$ و $\lambda_1 \neq \lambda_2$، آنگاه حداکثر یکی از عناصر $\lambda_1 e - x$ و $\lambda_2 e - x$ مساوی ۰ است. لذا دست کم یکی از آنها معکوسپذیر است. چون $\sigma(x)$ تهی نیست، $\sigma(x)$ درست از یک نقطه مثلاً $\lambda(x)$ به ازای هر $x \in A$ تشکیل شده است. چون $\lambda(x)e - x$ معکوسپذیر نیست، ۰ است. پس $x = \lambda(x)e$. لذا نگاشت $x \to \lambda(x)$ یک یکریختی از A به روی $\mathcal{C}$ است که یکمتری نیز هست زیرا به ازای هر $x \in A$، $|\lambda(x)| = \|\lambda(x)e\| = \|x\|$.

قضایای ۱۳.۱۰ و ۱٤.۱۰ از جمله نتایج کلیدی این فصل‌اند. بخش اعظم مطالب فصلهای ۱۱ تا ۱۳ مستقل از باقیماندهٔ فصل ۱۰ است.

۱۵.۱۰ چند تبصره. (آ) این مسئله که یک عنصر A در A معکوسپذیر است یا خیر یک خاصیت صرفاً جبری است. لذا طیف و شعاع طیفی $x \in A$ برحسب ساختار جبری A و صرف نظر از ملاحظات متری (یا توپولوژیک) تعریف می‌شوند. ازآن سو، $\lim \|x^n\|^{1/n}$ به وضوح تابع خواص متری A است. این یکی از ویژگیهای جالب فرمول شعاع طیفی است که تساوی بعضی از کمیات را تصریح می‌کند که به طرق کاملاً متفاوت رخ می‌دهند.

(ب) جبر Aی ما ممکن است زیرجبر جبر باناخ وسیعتر B باشد و ممکن است $x \in A$ی در A معکوسپذیر نباشد ولی در B معکوسپذیر باشد. لذا طیف x تابع جبر می‌باشد. شمول $\sigma_A(x) \supset \sigma_B(x)$ برقرار است (نمادها خود توضیح‌اند). دو طیف می‌توانند متفاوت باشند. اما شعاع طیفی با رفتن از A به B بلاتأثیر است زیرا فرمول شعاع طیفی آن را برحسب خواص متری توانهای x بیان می‌دارد، و اینها مستقل از هرچیزی است که خارج A رخ می‌دهد.

قضیهٔ ۱۸.۱۰ رابطهٔ بین $\sigma_A(x)$ و $\sigma_B(x)$ را با جزئیات بیشتری توصیف می‌کند.

۱۶.۱۰ لم. ***فرض کنیم V و W مجموعه‌هایی باز در فضای توپولوژیک X بوده، $V \subset W$، و W شامل نقطهٔ مرزیی از V نباشد. در این صورت V اجتماع مؤلفه‌های W می‌باشد.***

به یاد آورید که، طبق تعریف، ***مؤلفهٔ*** W یک زیرمجموعهٔ همبند ماکزیمال W است.

برهان. فرض کنیم Ω مؤلفه‌ای از W باشد که V را قطع می‌کند. همچنین U متمم $\overline{V}$ باشد. چون W شامل نقطهٔ مرزیی از V نیست، Ω اجتماع دو مجموعهٔ باز از هم جدای $\Omega \cap V$ و $\Omega \cap U$ است. چون Ω همبند است، $\Omega \cap U$ تهی است. لذا $\Omega \subset V$.

۱۷.۱۰ لم. ***فرض کنیم A یک جبر باناخ بوده، به ازای $n = 1,2,3,\ldots$، $x_n \in G(A)$، x یک نقطهٔ مرزی $G(A)$ باشد، و وقتی $n \to \infty$، $x_n \to x$. در این صورت وقتی $n \to \infty$، $\|x_n^{-1}\| \to \infty$.***

برهان. اگر نتیجه نادرست باشد، $M < \infty$ ی هست به طوری که به ازای بی‌نهایت n، $\|x_n^{-1}\| < M$. به ازای یکی از اینها، $\|x_n - x\| < \frac{1}{M}$. به ازای این n،

$$\|e - x_n^{-1}x\| = \|x_n^{-1}(x_n - x)\| < 1;$$

درنتیجه $x_n^{-1}x \in G(A)$. چون $x = x_n(x_n^{-1}x)$ و $G(A)$ گروه است، پس $x \in G(A)$. این فرض را نقض می‌کند زیرا $G(A)$ باز است.

۱۸.۱۰ قضیه

(آ) ***هرگاه A زیرجبر بسته‌ای از جبر باناخ B بوده و A شامل عنصریکهٔ B باشد، آنگاه $G(A)$ اجتماعی از مؤلفه‌های $A \cap G(B)$ است.***

(ب) تحت این شرایط، هرگاه $x \in A$، آنگاه $\sigma_A(x)$ اجتماع $\sigma_B(x)$ و گردایه‌ای (احتمالاً تهی) از مؤلفه‌های کراندار از متمم $\sigma_B(x)$ است. به خصوص، مرز $\sigma_A(x)$ در $\sigma_B(x)$ قراردارد.

برهان. (آ). هر عضو A که در A معکوس دارد همان معکوس رادر B دارد. لذا $G(A) \subset G(B)$. هر دوی $G(A)$ و $A \cap G(B)$ زیرمجموعه‌های بازی از A اند. بنابر لم ۱۶.۱۰، کافی است ثابت کنیم $G(B)$ شامل نقطهٔ مرزیی از $G(A)$ نیست.

هر چنین y حد دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در $G(A)$ است. بنابرلم ۱۷.۱۰ ، $\|x_n^{-1}\| \to \infty$. اگر y در $G(B)$ می‌بود، پیوستگی انعکاس در $G(B)$ (قضیهٔ ۱۲.۱۰) ایجاب می‌کرد که x_n^{-1} به y^{-1} همگرا باشد. به‌خصوص، $\{\|x_n^{-1}\|\}$ کراندار است. لذا $y \notin B(G)$، و (آ) ثابت می‌شود.

(ب) فرض کنیم Ω_A و Ω_B متممهای $\sigma_A(x)$ و $\sigma_B(x)$ نسبت به $\mathbb{C}$ باشند. شمول $\Omega_A \subset \Omega_B$ واضح است، زیرا $\lambda \in \Omega_A$ اگر و فقط اگر $\lambda e - x \in G(A)$. فرض کنیم λ_0 یک نقطهٔ مرزی Ω_A باشد. در این صورت $\lambda_0 e - x$ یک نقطهٔ مرزی $G(A)$ است. بنابر (آ)، $\lambda_0 e - x \notin G(B)$. لذا $\lambda_0 \notin \Omega_B$. اما لم ۱۶.۱۰ ایجاب می‌کند که Ω_A اجتماع مؤلفه‌هایی از Ω_B است. لذا مؤلفه‌های دیگر Ω_B زیرمجموعه‌های $\sigma_A(x)$اند. این قسمت (ب) را ثابت خواهد کرد.

چند نتیجه. *فرض کنیم $x \in A \subset B$.*

(آ) هرگاه $\sigma_B(x)$ مجموعهٔ $\mathbb{C}$ را جدانسازد؛ یعنی هرگاه متممش Ω_B همبند باشد، آنگاه $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$.

(ب) هرگاه $\sigma_A(x)$ از $\sigma_B(x)$ بزرگتر باشد، آنگاه $\sigma_A(x)$ از $\sigma_B(x)$ به وسیلهٔ "پرکردن چند حفره" در $\sigma_B(x)$ به دست می‌آید.

(پ) هرگاه $\sigma_A(x)$ درون تهی داشته باشد، آنگاه $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$.

مهمترین کاربرد این نتیجه وقتی رخ می‌دهد که $\sigma_B(x)$ فقط شامل اعداد حقیقی باشد.

حال به عنوان کاربردی از لم ۱۷.۱۰ قضیه‌ای را ثابت می‌کنیم که حاصلش همان حاصل قضیهٔ گلفاند - مازور است اگر چه نتایجش خیلی مهم نیستند.

۱۹.۱۰ قضیه. ***هرگاه A یک جبر باناخ بوده و $M < \infty$ی چنان موجود باشد که***

$$\|x\|\,\|y\| \le M\|xy\| \qquad (x \in A, y \in A), \tag{۱}$$

آنگاه A مساوی (به طور یکمتر یکریخت با) $\mathbb{C}$ است.

برهان. فرض کنیم y یک نقطهٔ مرزی $G(A)$ باشد. در این صورت به ازای دنباله‌ای مانند $\{y_n\}$ در $G(A)$ داریم $y = \lim y_n$. بنابر لم ۱۷.۱۰، $\|y_n^{-1}\| \to \infty$. طبق فرض،

$$\|y_n\|\,\|y_n^{-1}\| \le M\|e\| \qquad (n = 1,2,3,\dots). \tag{۲}$$

لذا $\|y_n\| \to 0$ و درنتیجه $y = 0$.

اگر $x \in A$، هر نقطهٔ مرزی λ از $\sigma(x)$ یک نقطهٔ مرزی $\lambda e - x$ از $G(A)$ به‌دست می‌دهد. لذا $x = \lambda e$. به عبارت دیگر، $A = \{\lambda e : \lambda \in \mathbb{C}\}$.

طبیعی است بپرسیم که طیفهای دوعنصر x و y از A به مفهومی مناسب در صورتی به هم نزدیکند که x و y به یکدیگر نزدیک باشند. قضیهٔ زیر جواب بسیار ساده‌ای به این امر خواهد داد.

۲۰.۱۰ قضیه. ***فرض کنیم A یک جبر باناخ بوده، $x \in A$، Ω یک مجموعهٔ باز در $\mathbb{C}$ بوده، و $\sigma(x) \subset \Omega$. دراین صورت $\delta > 0$ای هست به طوری که به ازای هر $y \in A$ با $\|y\| < \delta$ ، $\sigma(x+y) \subset \Omega$.***

برهان. چون $\|(\lambda e - x)^{-1}\|$ یک تابع پیوسته از λ در متمم $\sigma(x)$ بوده و این نرم وقتی

$\lambda \to \infty$ به ۰ میل می‌کند، عددی مانند $M < \infty$ هست به طوری که به ازای هر λ خارج Ω،

$$\left\|(\lambda e - x)^{-1}\right\| < M.$$

اگر $y \in A$، $\|y\| < 1/M$، و $\lambda \notin \Omega$،

$$\lambda e - (x+y) = (\lambda e - x)\left[e - (\lambda e - x)^{-1} y\right]$$

در A معکوس‌پذیر است زیرا $\left\|(\lambda e - x)^{-1} y\right\| \le 1$؛ درنتیجه $\lambda \notin \sigma(x+y)$. این نتیجهٔ مطلوب را به ازای $\delta = 1/M$ به ما می‌دهد.

حساب علامتی

۲۱.۱۰ آشنایی. اگر x عنصری از جبر باناخ A بوده و $f(\lambda) = \alpha_0 + \ldots + \alpha_n \lambda^n$ یک چندجمله‌ای با ضرایب مختلط α_i باشد، راجع به معنی علامت $f(x)$ ابهامی وجود ندارد؛ این به وضوح عنصری است از A که با

$$f(x) = \alpha_0 e + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$$

تعریف می‌شود. سؤال این است که آیا $f(x)$ را می‌توان به ازای توابع دیگر f به طرزی با معنی تعریف کرد. ما قبلاً با چند مثال از این نوع برخورده‌ایم. به عنوان مثال، در برهان قضیهٔ ۹.۱۰ ما به تعریف تابع نمایی در A خیلی نزدیک شدیم. درواقع، اگر $f(\lambda) = \sum \alpha_k \lambda^k$ یک تابع تمام در $\mathbb{C}$ باشد، طبیعی است که $f(x) \in A$ را با $f(x) = \sum \alpha_k x^k$ تعریف کنیم. این سری همواره همگراست. مثال دیگر توابع خوشریخت

$$f(\lambda) = \frac{1}{\alpha - \lambda}$$

است. دراین حالت، تعریف طبیعی $f(x)$ عبارت است از

$$f(x) = (\alpha e - x)^{-1}$$

که به ازای هر x که طیفش شامل α نباشد معنی دارد.

لذا به این حدس می‌رسیم که وقتی f در بازهٔ بازی شامل $\sigma(x)$ هلوریخت است،

$f(x)$ باید در A قابل تعریف باشد. این امر صحیح است و می‌توان آن را با صورتی از فرمول‌کشی که توابع مختلط تعریف شده در زیرمجموعه‌های باز $\mathbb{C}$ را به توابع A- مقدار تعریف شده در زیرمجموعه‌های بازی از A تبدیل می‌کند ثابت کرد. (درست مثل آنالیز کلاسیک، فرمول‌کشی از نمایش به سری توانی ابزاری بسیار مناسبتر است.) به علاوه، $f(x)$ های تعریف شده به این صورت (ر.ک.تعریف ۲۶.۱۰) خواص جالبی خواهند داشت. مهمترین آنها در قضایای ۲۷.۱۰ تا ۲۹.۱۰ خلاصه شده‌اند.

در بعضی از جبرها می‌توان فراتر رفت. به عنوان مثال، اگر x یک عملگر نرمال کراندار بر فضای هیلبرت H باشد، وقتی f یک تابع مختلط پیوسته بر $\sigma(x)$ است یا حتی f یک تابع بورل کراندار مختلط بر $\sigma(x)$ است، علامت $f(x)$ را می‌توا ن به عنوان یک عملگر نرمال کراندار بر H تعبیر کرد. در فصل ۱۲ خواهیم دید که چگونه این ما را به یک برهان کارا از شکل بسیار کلی قضیهٔ طیفی می‌رساند.

۲۲.۱۰ انتگرالگیری از توابع A - مقدار. هرگاه A یک جبر باناخ بوده و f یک تابع A - مقدار پیوسته بر فضای هاسدورف فشرده‌ای چون Q باشد که بر آن اندازهٔ بورل مختلطی چون μ تعریف شده است، آنگاه $\int f d\mu$ موجود بوده و تمام خواص مطرح شده در فصل ۳ را (فقط به خاطر اینکه A یک فضای باناخ است) دارد. با اینحال، می‌توان یک خاصیت اضافی به اینها افزود و در آینده به کاربرد؛ یعنی: ***هرگاه*** $x \in A$، ***آنگاه***

$$x \int_Q f d\mu = \int_Q x f(p) x d\mu(p) \tag{۱}$$

و

$$\left(\int_Q f d\mu\right) x = \int_Q f(p) x d\mu(p) . \tag{۲}$$

برای اثبات (۱)، فرض کنیم M_x ضرب چپ در x مانند برهان قضیهٔ ۲.۱۰ بوده و Λ یک تابعی خطی کراندار بر A باشد. در این صورت ΛM_x یک تابعی خطی کراندار است. لذا تعریف ۲۶.۳ ایجاب می‌کند که به ازای هر Λ،

$$\Lambda M_x \int_Q f d\mu = \int_Q (\Lambda M_x f) d\mu = \Lambda \int_Q (M_x f) d\mu ;$$

درنتیجه

$$M_x \int_Q f d\mu = \int_Q (M_x f) d\mu,$$

که طریقه‌ای دیگر برای نوشتن (۱) است. برای اثبات (۲)، M_x را ضرب راست در x تعبیر کنید.

۲۳.۱۰ کنتورها. فرض کنیم K زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از $\Omega \subset \mathbb{C}$ باز بوده و Γ گردایه‌ای از تعدادی متناهی از بازه‌های خطی جهتدار $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ در Ω باشد که هیچیک K را قطع نمی‌کنند. در این وضع، انتگرالگیری روی Γ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_\Gamma \phi(\lambda) d\lambda = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} \phi(\lambda) d\lambda . \tag{1}$$

می‌دانیم که Γ را می‌توان چنان اختیار کرد که

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\lambda}{\lambda - \zeta} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } \zeta \in K، \\ 0 & \text{اگر } \zeta \notin \Omega، \end{cases} \tag{2}$$

و در این صورت فرمول کشی

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda - \zeta)^{-1} f(\lambda) d\lambda \tag{3}$$

به ازای هر تابع هلوریخت f در Ω و هر $\zeta \in K$ برقرار است. مثلاً ر.ک.قضیهٔ ۵.۱۳ در مرجع [۲۳].

ما وضعیت (۲) را با گفتن اینکه **کنتور** Γ ***گردایهٔ K را در Ω احاطه می‌کند*** به اختصار توصیف می‌کنیم.

توجه کنید که نه K نه Ω و نه اجتماع بازه‌های γ_i همبند فرض نشده‌اند.

۲۴.۱۰ لم. *فرض کنیم A یک جبر باناخ بوده، $x \in A$، $\alpha \in \mathbb{C}$، $\alpha \notin \sigma(x)$، Ω متمم α در $\mathbb{C}$ بوده، و Γ، $\sigma(x)$ را در Ω احاطه کرده باشد. در این صورت*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\alpha - \lambda)^n (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = (\alpha e - x)^n \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{1}$$

برهان. انتگرال را با y_n نشان می‌دهیم. وقتی $\lambda \notin \sigma(x)$، داریم

$$(\lambda e - x)^{-1} = (\alpha e - x)^{-1} + (\alpha - \lambda)(\alpha e - x)^{-1}(\lambda e - x)^{-1}.$$

لذا، طبق بخش ۲۲.۱۰، y_n مجموع

$$(\alpha e - x)^{-1}.\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\alpha - \lambda)^n d\lambda = 0, \qquad (۲)$$

زیرا $\operatorname{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0$، و

$$(\alpha e - x)^{-1}.\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\alpha - \lambda)^{n+1}(\lambda e - x)^{-1} d\lambda \qquad (۳)$$

می‌باشد. لذا

$$(\alpha e - x)y_n = y_{n+1} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad (٤)$$

این فرمول بازگشتی نشان می‌دهد که (۱) از حالت $n = 0$ نتیجه می‌شود. لذ باید ثابت کنیم که

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = e. \qquad (۵)$$

فرض کنیم Γ_r یک دایرهٔ جهتدار با جهت مثبت به مرکز ۰ وشعاع $r > \|x\|$ باشد. بر Γ_r داریم $(\lambda e - x)^{-1} = \sum \lambda^{-n-1}x^n$. با انتگرالگیری جمله به جمله از این سری رابطهٔ (۵) را با Γ_r به جای Γ خواهیم داشت. چون انتگرالده موجود در (۵) یک تابع A- مقدار هلوریخت در متمم $\sigma(x)$ است (ر.ک.برهان قضیهٔ ۱۳.۱۰)، و چون به ازای هر $\zeta \in \sigma(x)$،

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma_r}(\zeta) = 1 = \operatorname{Ind}_\Gamma(\zeta), \qquad (٦)$$

قضیهٔ کشی ۳۱.۳ نشان می‌دهد که اگر Γ با Γ_r عوض شود، انتگرال (۵) تغییر نمی‌کند. این برهان را تمام خواهد کرد.

۲۵.۱۰ قضیه. *فرض کنیم*

$$R(\lambda) = P(\lambda) + \sum_{m,k} c_{m,k}(\lambda - \alpha_m)^{-k} \qquad (۱)$$

یک تابع گویا با قطبها در نقاط α_m باشد. [P یک چندجمله‌ای است و مجموع (۱)

فقط تعدادی متناهی جمله دارد.] اگر $x \in A$ و $\sigma(x)$ شامل قطبی از R نباشد، تعریف می‌کنیم

$$R(x) = P(x) + \sum_{m,k} c_{m,k}(x - \alpha_m e)^{-k}. \tag{۲}$$

هرگاه Ω مجموعهٔ بازی در $\mathbb{C}$ باشد که شامل $\sigma(x)$ بوده و در آن R هلوریخت است و نیز Γ، $\sigma(x)$ را در Ω احاطه کرده باشد، آنگاه

$$R(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} R(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda. \tag{۳}$$

برهان. لم ۲٤.۱۰ را به کار برید.

توجه کنید که رابطهٔ (۲) مسلماً طبیعی‌ترین تعریف یک تابع گویا از $x \in A$ است. نتیجهٔ (۳) نشان می‌دهد که فرمول کشی همین نتیجه را به دست می‌دهد. این امر انگیزه‌ای است برای تعریف زیر.

۲٦.۱۰ تعریف. فرض کنیم A یک جبر باناخ بوده، Ω مجموعهٔ بازی در $\mathbb{C}$ باشد، و $H(\Omega)$ جبرتمام توابع هلوریخت مختلط در Ω باشد. بنابر قضیهٔ ۲۰.۱۰،

$$A_\Omega = \{x \in A : \sigma(x) \subset \Omega\} \tag{۱}$$

مجموعهٔ بازی از A است.

$\tilde{H}(A_\Omega)$ مجموعهٔ تمام توابع A - مقدار $\tilde{f}$ با قلمرو A_Ω است که از یک $f \in H(\Omega)$ به وسیلهٔ فرمول

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda \tag{۲}$$

که در آن Γ یک کنتور است که $\sigma(x)$ در Ω را احاطه می‌کند ناشی می‌شود.

راجع به این تعریف لازم است چندنکته ذکرشود.

(آ) چون Γ جدا از $\sigma(x)$ قراردارد و انعکاس در A پیوسته است، انتگرالده در (۲)

پیوسته است؛ درنتیجه انتگرال موجود است و $\tilde{f}(x)$ را به عنوان عنصری از A تعریف می‌کند.

(ب) انتگرالده درواقع یک تابع A- مقدار هلوریخت در متمم $\sigma(x)$ است. (این امر در برهان قضیهٔ ۱۳.۱۰ ملاحظه شد. ر.ک. تمرین ۳.) لذا قضیهٔ‌کشی ۳۱.۳ ایجاب می‌کند که $\tilde{f}(x)$ ***مستقل از انتخاب*** Γ ***است*** فقط مشروط بر اینکه Γ، $\sigma(x)$ را در Ω احاطه کرده باشد.

(پ) اگر $x=\alpha e$ و $\alpha \in \Omega$، رابطهٔ (۲) به صورت زیر در می‌آید:

$$\tilde{f}(\alpha e)=f(\alpha)e. \tag{۳}$$

توجه کنید که $\alpha e \in A_\Omega$ اگر و فقط اگر $\alpha \in \Omega$. اگر $\lambda \in \mathbb{C}$ را با $\lambda e \in A$ یکی کنیم، هر $f\in H(\Omega)$ را می‌توان به عنوان یک نگاشت از زیرمجموعه‌ای از A_Ω (یعنی اشتراک A_Ω با زیرفضای یک بعدی A ی تولید شده به وسیلهٔ e) به توی A گرفت، و دراین صورت (۳) نشان می‌دهد که $\tilde{f}$ را می‌توان یک ***توسیع*** f درنظر گرفت.

در اغلب منابعی که در آنها این مبحث ارائه شده، $f(x)$ به جای $\tilde{f}(x)$ ما نوشته شده است. در اینجا نماد $\tilde{f}$ از آنرو به کار رفته که از برخی ابهامات که ممکن است سوءتعبیرهایی را به بار آورند احتراز شود.

(ت) اگر S یک مجموعه و A یک جبر باشد، گردایهٔ تمام توابع A - مقدار بر S در صورتی یک جبر است که ضرب اسکالر، جمع، و ضرب نقطه به نقطه تعریف شده باشند. به عنوان مثال، هرگاه u و v مجموعهٔ S را به توی A بنگارند، آنگاه

$$(uv)(s)=u(s)v(s) \qquad (s\in S).$$

این در مورد توابع A - مقدار تعریف شده در A_Ω به کار خواهد رفت.

۲۷.۱۰ قضیه. ***فرض کنیم A، $H(\Omega)$، و $\tilde{H}(A_\Omega)$ همانند تعریف ۲۶.۱۰ باشند. در این صورت $\tilde{H}(A_\Omega)$ یک جبر مختلط است. نگاشت $f\to\tilde{f}$ یک یکریختی جبرها از $H(\Omega)$ به روی $\tilde{H}(A_\Omega)$ است که به مفهوم زیر پیوسته می‌باشد:***

هرگاه $f_n\in H(\Omega)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ و $f_n\to f$ به طور یکنواخت بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ Ω، آنگاه

$$\tilde{f}(x)=\lim_{n\to\infty}\tilde{f}_n(x) \qquad (x\in A_\Omega). \tag{۱}$$

هرگاه $u(\lambda)=\lambda$ *و* $v(\lambda)=1$ *در* Ω*، آنگاه بـه ازای هـر* $x\in A_\Omega$*،* $\tilde{u}(x)=x$ *و* $\tilde{v}(x)=e$.

برهان. آخرین جمله ازقضیهٔ ۲۵.۱۰ نتیجه می‌شود. نمایش انتگرالی (۲) در بخش ۲٦.۱۰ نشان می‌دهد که $f\to\tilde{f}$ خطی است. هرگاه $\tilde{f}=0$، آنگاه

$$f(\alpha)e=\tilde{f}(\alpha e)=0 \qquad (\alpha\in\Omega); \tag{۲}$$

درنتیجه $f=0$. لذا $f\to\tilde{f}$ یک به یک است.

پیوستگی حکم شده مستقیماً از انتگرال (۲) در بخش ۲٦.۱۰ نتیجه می‌شـود، زیـرا $\|(\lambda e-x)^{-1}\|$بر Γ کراندار است. (Γی یکسانی را برای همهٔ f_nها به کار برده و قضیـهٔ ۲۹.۳ را به کارگیرید.)

باقی است ثابت کنیم که $f\to\tilde{f}$ ضربی است. بـه بیـان صریـح، اگـر $f\in H(\Omega)$، $g\in H(\Omega)$، و به ازای هر $\lambda\in\Omega$ ، $h(\lambda)=f(\lambda)g(\lambda)$، باید نشان دهیم که

$$\tilde{h}(x)=\tilde{f}(x)\tilde{g}(x) \qquad \left(x\in A_\Omega\right). \tag{۳}$$

هرگـاه fو g توابـع گویـایی بـدون قطـب در Ω بـوده و $h=fg$، آنگـاه $h(x)=f(x)g(x)$، و چون قضیهٔ ۲۵.۱۰ حکم می‌کنـد کـه $R(x)=\tilde{R}(x)$، رابطـهٔ (۳) برقرار است. در حالت کلی، قضیهٔ رونگه (*Runge*) (قضیهٔ ۹.۱۳ از مرجع [۲۳]) بـه مـا اجازه می‌دهد کـه fو g را بـه وسیلهٔ توابـع گویـای f_n و g_n بـه طـور یکنواخـت بـر زیرمجموعه‌های فشردهٔ Ω تقریب نماییم. در این صورت به همین نحو f_ng_n همگرا بـه h است، و رابطهٔ (۳) از پیوستگی نگاشت $f\to\tilde{f}$ نتیجه می‌شود.

چون $H(\Omega)$ به وضوح یک جبر تعویضپذیر اسـت، قضیـهٔ ۲۷.۱۰ ایجـاب می‌کنـد که $\tilde{H}(A_\Omega)$ نیز تعویضپذیر است. این ممکن است تعجب‌آور باشد، زیرا $\tilde{f}(x)$ و $\tilde{f}(y)$ لزوماً تعویض نمی‌شوند. اما $\tilde{f}(x)$و $\tilde{g}(x)$ به ازای هر $x\in A_\Omega$ در A تعویض می‌شـوند. لذا، طبق تعریف ۲٦.۱۰ (ت)، $\tilde{f}\tilde{g}=\tilde{g}\tilde{f}$.

۲۸.۱۰ قضیه. *فرض کنیم* $x\in A_\Omega$ *و* $f\in H(\Omega)$.

(آ) $\tilde{f}(x)$ *در* A *معکوسـپذیر اسـت اگـر و فقـط اگـر بـه ازای*

هر $\lambda\in\sigma(x)$، $f(\lambda)\neq 0$.

(ب) $\sigma\big(\tilde{f}(x)\big)=f(\sigma(x))$

قسمت (ب) را ***قضیهٔ نگاشت طیفی*** می‌نامند.

برهان. (آ) هرگاه f بر $\sigma(x)$ صفر نداشته باشد، آنگاه $g=1/f$ در مجموعهٔ بازی چون Ω_1 که $\sigma(x)\subset\Omega_1\subset\Omega$ هلوریخت است. چون در Ω_1 داریم $fg=1$، قضیهٔ ۲۷.۱۰ (با Ω_1 به جای Ω) نشان می‌دهد که $\tilde{f}(x)\tilde{g}(x)=e$، و لذا $\tilde{f}(x)$ معکوس‌پذیر است. به عکس، هرگاه به ازای $\alpha\in\sigma(x)$ای، $f(\alpha)=0$، آنگاه $h\in H(\Omega)$ی هست به طوری که

$$(\lambda-\alpha)h(\lambda)=f(\lambda)\qquad(\lambda\in\Omega),\tag{1}$$

که بنا بر قضیهٔ ۲۷.۱۰ ایجاب می‌کند که

$$(x-\alpha e)\tilde{h}(x)=\tilde{f}(x)=\tilde{h}(x)(x-\alpha e)\,.\tag{2}$$

چون $x-\alpha e$ در A معکوس‌پذیر نیست، $\tilde{f}(x)$ نیز طبق (۲) نخواهدبود.

(ب) $\beta\in\mathbb{C}$ را ثابت می‌گیریم. طبق تعریف، $\beta\in\sigma\big(\tilde{f}(x)\big)$ اگر و فقط اگر $\tilde{f}(x)-\beta e$ در A معکوس‌پذیر نباشد. بنابر (آ)، که بر $f-\beta$ به جای f اعمال شده باشد، این رخ می‌دهد اگر و فقط اگر $f-\beta$ یک صفردر $\sigma(x)$ داشته باشد؛ یعنی اگر و فقط اگر $\beta\in f(\sigma(x))$.

قضیهٔ نگاشت طیفی امکان گنجاندن ترکیب توابع را در بین اعمال حساب علامتی به ما می‌دهد.

۲۹.۱۰ قضیه. *فرض کنیم $x\in A_\Omega$، $f\in H(\Omega)$، Ω_1 یک مجموعهٔ باز شامل $f(\sigma(x))$ بوده، $g\in H(\Omega_1)$، و $h(\lambda)=g(f(\lambda))$ در Ω_0 یعنی مجموعهٔ تمام $\lambda\in\Omega$هایی که $f(\lambda)\in\Omega_1$ باشد. در این صورت $\tilde{f}(x_0)\in A_{\Omega_1}$ و $\tilde{h}(x)=\tilde{g}\big(\tilde{f}(x)\big)$. به طور مختصر، هرگاه $h=g\circ f$، آنگاه $\tilde{h}=\tilde{g}\circ\tilde{f}$.*

برهان. بنابر قسمت (ب) قضیهٔ ۲۸.۱۰، $\sigma\big(\tilde{f}(x)\big)\subset\Omega_1$، و لذا $\tilde{g}\big(\tilde{f}(x)\big)$ تعریف شده است.

کنتور Γ_1 که $f(\sigma(x))$ را در Ω_1 احاطه کرده است را ثابت می‌گیریم. دراین صورت مجموعهٔ بازی مانند W هست که $\sigma(x) \subset W \subset \Omega_\circ$ و چنان کوچک که

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma_1}(f(\lambda)) = ۱ \qquad (\lambda \in W). \tag{۱}$$

کنتور $\Gamma_\circ$ که $\sigma(x)$ را در W احاطه می‌کند ثابت می‌گیریم. هرگاه $\zeta \in \Gamma_1$، آنگاه $۱/(\zeta - f) \in H(W)$. لذا قضیهٔ ۲۷.۱۰ با W به جای Ω نشان می‌دهد که

$$\left[\zeta e - \tilde{f}(x)\right]^{-۱} = \frac{۱}{۲\pi i} \int_{\Gamma_\circ} [\zeta - f(\lambda)]^{-۱} (\lambda e - x)^{-۱} d\lambda \qquad (\zeta \in \Gamma_1). \tag{۲}$$

چون Γ_1، $\sigma(\tilde{f}(x))$ را در Ω_1 احاطه می‌کند، از روابط (۱) و (۲) داریم

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{f}(x)) &= \frac{۱}{۲\pi i} \int_{\Gamma_1} g(\zeta)\left[\zeta e - \tilde{f}(x)\right]^{-۱} d\zeta \\
&= \frac{۱}{۲\pi i} \int_{\Gamma_\circ} \frac{۱}{۲\pi i} \int_{\Gamma_1} g(\zeta)[\zeta - f(\lambda)]^{-۱} d\zeta (\lambda e - x)^{-۱} d\lambda \\
&= \frac{۱}{۲\pi i} \int_{\Gamma_\circ} g(f(\lambda))(\lambda e - x)^{-۱} d\lambda = \frac{۱}{۲\pi i} \int_{\Gamma_\circ} h(\lambda)(\lambda e - x)^{-۱} d\lambda = \tilde{h}(x).
\end{aligned}$$

حال چند کاربرد از این حساب علامتی را ذکر می‌کنیم. اولی در رابطه با وجود ریشه‌ها و لگاریتمهاست. وقتی گوییم عنصر $x \in A$ دارای ***ریشهٔ n م*** در A است یعنی به ازای $y \in A$ ی، $x = y^n$. هرگاه به ازای $y \in A$ ی $x = \exp(y)$، آنگاه y یک ***لگاریتم*** x است.

توجه کنید که $\exp(y) = \sum_\circ^\infty y^n/n!$ ولی تابع نمایی می‌تواند مانند تعریف ۲۶.۱۰ با انتگرالگیری کنتوری نیز تعریف شود. حکم پیوستگی قضیهٔ ۲۷.۱۰ نشان می‌دهد که این تعریفها (همانطور که برای هر تابع تمام چنین است) یکی می‌باشند.

۳۰.۱۰ قضیه. ***فرض کنیم A یک جبر باناخ بوده، $x \in A$، و طیف $\sigma(x)$ از x، $\circ$ را از ∞ جدا نسازد. در این صورت***

(آ) x دارای ریشه‌هایی از هر مرتبه در A است؛

(ب) x در A دارای لگاریتم است، و

(پ) اگر $\varepsilon > \circ$، یک چندجمله‌ای مانند P وجود دارد به طوری که $\|x^{-۱} - P(x)\| < \varepsilon$.

به علاوه، اگر $\sigma(x)$ در محور حقیقی مثبت واقع باشد، ریشه‌ها در (آ) را می‌توان طوری گرفت که در همان شرط صدق نماید.

برهان. طبق فرض، ۰ در مؤلفهٔ بی‌کران متمم $\sigma(x)$ قراردارد. لذا تابعی مانند f هست که در مجموعهٔ باز همبند ساده‌ای چون $\Omega \supset \sigma(x)$ هلوریخت بوده و در

$$\exp(f(\lambda)) = \lambda$$

صدق می‌نماید. از قضیهٔ ۲۹.۱۰ نتیجه می‌شود که

$$\exp\left(\tilde{f}(x)\right) = x;$$

لذا $y = \tilde{f}(x)$ یک لگاریتم x است. اگر به ازای هر $\lambda \in \sigma(x)$، $0 < \lambda < \infty$، f را می‌توان طوری گرفت که بر $\sigma(x)$ حقیقی باشد؛ درنتیجه، طبق قضیهٔ نگاشت طیفی، $\sigma(y)$ در محور حقیقی قراردارد. هرگاه $z = \exp(y/n)$، آنگاه $z^n = x$، و کاربرد دیگری از قضیهٔ نگاشت طیفی نشان می‌دهد که اگر $\sigma(y) \subset (-\infty, \infty)$ ، $\sigma(\tau) \subset (0, \infty)$. این قسمتهای (آ) و (ب) را ثابت می‌کند؛ البته (آ) را می‌توان مستقیماً بدون گذشتن از (ب) ثابت کرد.

برای اثبات (پ) توجه می‌کنیم که $1/\lambda$ را می‌توان به طور یکنواخت بر مجموعهٔ بازی شامل $\sigma(x)$ به وسیلهٔ چندجمله‌ایها تقریب کرد (قضیهٔ رونگه)، و از حکم پیوستگی قضیهٔ ۲۷.۱۰ استفاده نمود.

این نتایج حتی وقتی A یک جبر با بعد متناهی باشد کاملاً بدیهی نیستند. به عنوان مثال، حالت خاصی از (ب) این است که یک ماتریس n در n مختلط مانند M نمایی ماتریسی است اگر وفقط اگر ۰ یک مقدار ویژهٔ M نباشد یعنی اگر و فقط اگر M معکوسپذیر باشد. برای نتیجه گرفتن این از (ب)، فرض کنیم A جبر تمام ماتریسهای n در n مختلط (یا جبر تمام عملگرهای خطی کراندار بر $\mathbb{C}$) باشد.

هرگاه $x \in A$ ی در یک اتحاد چندجمله‌ای صدق کند، یعنی اگر به ازای چند جمله‌ایی مانند P، $P(x) = 0$، آنگاه $\tilde{f}(x)$ را همیشه می‌توان به عنوان یک چندجمله‌ای از x بدون استفاده از انتگرال‌کشی مانند تعریف ۲۶.۱۰ حساب کرد. هرگاه A با بعد

متناهی باشد، آنگاه این نکته در مورد هر $x \in A$ به کار می‌رود. جزئیـات در زیـر آمـده است:

۳۱.۱۰ قضیه. *فرض کنیم $P(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{m_1} \ldots (\lambda - \alpha_s)^{m_s}$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ $n = m_1 + \ldots + m_s$ بوده و Ω مجموعهٔ بازی در $\mathbb{C}$ باشـد کـه شـامل صفرهـای $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ از P اند.*

هرگاه A یک جبر باناخ بوده، $x \in A$ ، و $P(x) = 0$، آنگاه

(آ) $\sigma(x) \subset \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ و

(بـ) به هر $f \in H(\Omega)$ یک چندجمله‌ای مـانند Q از درجـهٔ کمتـر از n و یـک تـابع مانند $g \in H(\Omega)$ چنان نظیر است که

$$f(\lambda) - Q(\lambda) = P(\lambda) g(\lambda) \qquad (\lambda \in \Omega) \tag{۱}$$

و

$$\tilde{f}(x) = Q(x). \tag{۲}$$

برهان. بنابر قضیهٔ نگاشت طیفی،

$$P(\sigma(x)) = \sigma(P(x)) = \sigma(0) = \{0\}. \tag{۳}$$

این قسمت (آ) را ثابت می‌کند.

اگر تمام بستاییهای m_i مساوی ۱ باشند، Q را می‌توان به کمـک فرمـول درونیـابی لاگرانژ (*Lagrange*)

$$Q(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(\alpha_i) P(\lambda)}{P'(\alpha_i)(\lambda - \alpha_i)} \tag{٤}$$

بـه دسـت آورد . از ایـن داریـــم $Q(\alpha_i) = f(\alpha_i)$ $(1 \le i \le n)$؛ لـذا $(f - Q)/P$ در Ω هلوریخت است.

در حالت کلی، سری لوران (*Laurent*) f/P حول نقـاط $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ ثابتهـای c_{ik} را به دست می‌دهد به طوری که

$$g(\lambda)=\frac{f(\lambda)}{P(\lambda)}-\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{m_i}\frac{c_{ik}}{(\lambda-\alpha_i)^k} \tag{۵}$$

در Ω هلوریخت است.

این رابطهٔ (۱) را ثابت می‌کند، و حال (۲) نتیجه‌ای از قضیهٔ ۲۷.۱۰ است زیـرا (۱) ایجاب می‌کند که

$$\tilde{f}(x)=Q(x)+P(x)\tilde{g}(x), \tag{٦}$$

و $P(x)=0$.

۳۲.۱۰ تعریف. فرض کنیم $\mathscr{B}(X)$ جبر باناخ تمام عملگرهای خطی کرانـدار برفضـای باناخ X باشد. ***طیف نقطه‌ای*** $\sigma_p(T)$ عملگر $T\in\mathscr{B}(X)$ مجموعهٔ تمـام مقـادیر ویـژهٔ T می‌باشد. لذا $\lambda\in\sigma_p(T)$ اگر و فقط اگر فضای پوچ $\mathscr{N}(T-\lambda I)$ از $T-\lambda I$ دارای بعـد مثبت باشد.

وقتی $A=\mathscr{B}(X)$، قضیهٔ نگاشت طیفی را می‌توان به صورت زیر تظریف کرد.

۳۳.۱۰ قضیـــه. *فـــرض کنیـــم* $T\in\mathscr{B}(X)$، Ω *در* $\mathbb{C}$ *بـــاز باشـــد،* $\Omega\subset\sigma(T)$، *و* $f\in H(\Omega)$.

(آ) هرگاه $x\in X$، $\alpha\in\Omega$، *و* $Tx=\alpha x$، *آنگاه* $\tilde{f}(T)x=f(\alpha)x$.

(بـ) $f\big(\sigma_p(T)\big)\subset\sigma_p\big(\tilde{f}(T)\big)$.

(پـ) هرگاه $\alpha\in\sigma_p\big(\tilde{f}(T)\big)$ *و* $f-\alpha$ *در هیچ مؤلفهٔ* Ω *متحد صفـــر نباشـد، آنگـاه* $\alpha\in f\big(\sigma_p(T)\big)$.

(تـ) هرگاه f *در هیچ مؤلفهٔ* Ω *ثابت نباشد، آنگاه* $f\big(\sigma_p(T)\big)=\sigma_p\big(\tilde{f}(T)\big)$.

قسمت (آ) می‌گوید که هر بردار ویژهٔ T با مقدار ویژهٔ α یک بردار ویـــژهٔ $\tilde{f}(T)$ بـا مقدار ویژهٔ $f(\alpha)$ نیز هست.

برهان. (آ) اگر $x=0$ چیزی برای اثبات نمی‌ماند. فرض کنیم $x\neq 0$ و $Tx=\alpha x$. در این صورت $\alpha\in\sigma(T)$، و $g\in H(\Omega)$ای هست به طوری که

$$f(\lambda)-f(\alpha)=g(\lambda)(\lambda-\alpha)\,. \quad (1)$$

بنابر قضیهٔ ۲۷.۱۰، رابطهٔ (۱) ایجاب می‌کند که

$$\tilde{f}(T)-f(\alpha)I=\tilde{g}(T)(T-\alpha I)\,. \quad (2)$$

چون $(T-\alpha I)x=0$، رابطهٔ (۲) قسمت (آ) را ثابت خواهدکرد.

لذا وقتی αیک مقدار ویژهٔ T باشد، $f(\alpha)$ یک مقدار ویژهٔ $\tilde{f}(T)$ است. پس قسمت (آ) قسمت (ب) را ایجاب خواهد کرد.

تحت مفروضات (پ)،

$$\alpha\in\sigma_p\big(\tilde{f}(T)\big)\subset\sigma\big(\tilde{f}(T)\big)=f(\sigma(T))\,; \quad (3)$$

درنتیجه

$$f^{-1}(\alpha)\cap\sigma(T)\neq\varnothing. \quad (4)$$

به علاوه، مجموعهٔ (٤) متناهی است زیرا $\sigma(T)$ زیرمجموعه‌ای فشرده از Ωاست و $f-\alpha$ در هیچ مؤلفه‌ای از Ω متحد صفر نیست. فرض کنیم ζ_1،...،ζ_nصفرهای $f-\alpha$ در $\sigma(T)$ باشند که طبق بستاییهای خود شماره می‌شوند. در این صورت

$$f(\lambda)-\alpha=g(\lambda)\big(\lambda-\zeta_1\big)\ldots\big(\lambda-\zeta_n\big); \quad (5)$$

که در آن $g\in H(\Omega)$ و g صفری روی $\sigma(T)$ ندارد؛ درنتیجه

$$\tilde{f}(T)-\alpha I=\tilde{g}(T)\big(T-\zeta_1 I\big)\ldots\big(T-\zeta_n I\big). \quad (6)$$

بنابر قسمت (آ) قضیهٔ ۲۸.۱۰، $\tilde{g}(T)$در $\mathscr{B}(X)$معکوسپذیر است. چون α یک مقدار ویژهٔ $\tilde{f}(T)$است، $\tilde{f}(T)-\alpha I$ برX یک به یک نیست. لذا رابطهٔ (٦) ایجاب می‌کند که دست کم یکی از عملگرهای $T-\zeta_i I$ باید یک به یک نباشد. ζ_i نظیر در $\sigma_p(T)$است، و چون $f\big(\zeta_i\big)=\alpha$ برهان (پ)تمام خواهدبود.

بالأخره، قسمت (ت)نتیجهٔ فوری قسمتهای (ب)و (پ) است.

گروه عنصرهای معکوسپذیر

حال نگاه نزدیکتری به ساختار $G = G(A)$، یعنی گروه ضربی تمام عناصر معکوسپذیر جبر باناخ A، می‌افکنیم.

G_1 مؤلفهٔ G است که شامل e (عنصر همانی G)می‌باشد. گاهی G_1را ***مؤلفهٔ اصلی*** G می‌نامیم. بنابر تعریف ***مؤلفه*** ، G_1 اجتماع تمام زیرمجموعه‌های همبند G است که شامل e اند.

گروه G شامل مجموعهٔ

$$\exp(A) = \{\exp(x) : x \in A\},$$

یعنی برد تابع نمایی در A، است صرفاً به این خاطر که $\exp(-x)$ معکوس $\exp(x)$ است. درواقع، تعریف سری توانیی $\exp(x)$ معادلهٔ تابعی زیر را به دست می‌دهد:

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y),$$

مشروط بر اینکه $xy = yx$؛ همچنین، $\exp(0) = e$.

و نیز توجه کنید که G یک گروه توپولوژیک است (ر.ک.بخش ۱۲.۵) زیرا ضرب و انعکاس در G پیوسته‌اند.

۳٤.۱۰ قضیه

(آ) ***G_1 یک زیرگروه نرمال باز G است.***

(ب) ***G_1 گروه تولید شده به وسیلهٔ $\exp(A)$ است.***

(پ) ***هرگاه A تعویضپذیر باشد، آنگاه $G_1 = \exp(A)$.***

(ت) ***اگر A تعویضپذیر باشد، گروه خارجی قسمتی G/G_1 شامل عنصری از مرتبهٔ متناهی (جز همانی) نیست.***

برهان. (آ) قضیهٔ ۱۱.۱۰ نشان می‌دهد که هر $x \in G_1$ مرکز گوی بازی مانند $U \subset G$ است. چون U، G_1 را قطع می‌کند و U همبند است، $U \subset G_1$. بنابراین G_1 باز می‌باشد.

هرگاه $x \in G_1$، آنگاه $x^{-1}G_1$ زیرمجموعهٔ همبندی از G است که شامل $x^{-1}x = e$

می‌باشد. لذا، به ازای هر $x \in G_1$، $x^{-1}G_1 \subset G_1$. این ثابت می‌کند که G_1 زیرگروهی از G است. همچنین، $y^{-1}G_1y$ به ازای هر $y \in G$ با G_1 همانریخت است، لذا همبند است، و شامل e می‌باشد. بنابراین $y^{-1}G_1y \subset G_1$. بنا بر تعریف، این می‌گوید که G_1 زیرگروه نرمالی از G می‌باشد.

(ب) فرض کنیم Γ گروه تولید شده به وسیلهٔ $\exp(A)$ باشد. به ازای $n = 1,2,3,\ldots$، E_n را مجموعهٔ تمام حاصل‌ضربهای n عنصر از $\exp(A)$ می‌گیریم. چون به ازای $y \in \exp(A)$، $y^{-1} \in \exp(A)$، Γ اجتماع مجموعه‌های E_n است. چون حاصل‌ضرب هر دو مجموعهٔ همبند همبند است، استقرا نشان می‌دهد که هر E_n همبند می‌باشد. هر E_n شامل e است؛ و درنتیجه $E_n \subset G_1$. لذا Γ زیرگروهی از G_1 می‌باشد.

اما $\exp(A)$ درون ناتهی نسبت به G دارد. (ر.ک.قضیهٔ ۳۰.۱۰)؛ لذا Γ نیز چنین است. چون Γ گروه بوده و ضرب در هر $x \in G$ یک همانریختی از G به روی G است، Γ باز می‌باشند.

لذا هر هم مجموعهٔ Γ در G_1 باز است؛ و هر اجتماع از این هم مجموعه‌ها چنین است. چون Γ متمم اجتماعی از هم مجموعه‌هایش است، Γ نسبت به G_1 بسته می‌باشد.

لذا Γ زیرمجموعهٔ باز و بسته‌ای از G_1 است. چون G_1 همبند است، $\Gamma = G_1$.

(پ) اگر A تعویضپذیر باشد، معادلهٔ تابعی صادق به وسیلهٔ exp نشان می‌دهد که $\exp(A)$ گروه است. لذا قسمت (ب) قسمت (پ) را ایجاب خواهد کرد.

(ت) باید حکم زیر را ثابت نماییم:

هرگاه A تعویضپذیر بوده، $x \in G$، و به ازای عدد صحیح مثبتی چون n، $x^n \in G_1$، آنگاه $x \in G_1$.

تحت این شرایط، به ازای $a \in A$ ای، طبق (پ) داریم $x^n = \exp(a)$. قرار می‌دهیم $y = \exp(n^{-1}a)$ و $z = xy^{-1}$. چون $y \in G_1$، کافی است ثابت کنیم $z \in G_1$.

تعویضپذیری A نشان می‌دهد که

$$z^n = x^n y^{-n} = \exp(a)\exp e(-a) = e .$$

بنابراین $\sigma(z)$، ۰ را از ∞ جدا نمی‌سازد (از حداکثر n نقطهٔ واقع بر دایرهٔیکه تشکیل شده است)، و این طبق قضیهٔ ۳۰.۱۰ ایجاب می‌کند که به ازای $w \in A$ ای، $z = \exp(w)$. قرار می‌دهیم

$$f(\lambda) = \exp(\lambda w).$$

در این صورت $f: \mathbb{C} \to G$ پیوسته است، $f(0) = e \in G_1$؛ درنتیجه $f(\mathbb{C}) \subset G_1$. به خصوص، $z = f(1) \in G_1$.

قضیهٔ ۳۸.۱۲ نشان می‌دهد که $\exp(A)$ همیشه گروه نیست.

قضیهٔ زیرفضای پایای لومونوسف (*Lomonosov*)

زیرفضای پایای عملگر $T \in \mathscr{B}(X)$ طبق تعریف زیرفضای بسته‌ای مانند M از X است که $M \neq \{0\}$، $M \neq X$، و به ازای هر $x \in M$، $Tx \in M$؛ یا، به اختصار، $T(M) \subset M$.

سؤالی که مطرح است (و بیش از نیم قرن قبل طرح شده است) این است که آیا به ازای هر فضای باناخ مختلط X، هر $T \in \mathscr{B}(X)$ دارای زیرفضای پایاست. درسالهای اخیر چند مثال نقض در فضاهای غیرمنعکس و حتی در ℓ^1 زده شده است. (منابع در مرجع ب ذکر شده‌اند.) برای رده‌هایی از عملگرها بر یک فضای هیلبرت (به خصوص، برای عملگرهای نرمال؛ ر.ک. فصل ۱۲) نتایج مثبتی یافت شده‌اند ولی حتی در آنجا نیز سؤال کلی هنوز برجاست.

در برهان لومونوسف قضیهٔ جالب زیر از قضیهٔ نقطهٔ ثابت شاودر برای تولید یک مقدار ویژه (یعنی، ۱) استفاده شده است. تی.ام. هیلدن (*T.M.Hilden*) ملاحظه نمود که این کار را می‌توان با توسل به فرمول شعاع طیفی انجام داد؛ برهان حاصل تعدیل مختصری است از برهان اصلی.

۳۵.۱۰ قضیه. ***فرض کنیم X یک فضای باناخ مختلط با بعد نامتناهی بوده و $T \in \mathscr{B}(X)$ فشرده بوده و $T \neq 0$. دراین صورت زیرفضای بسته‌ای مانند M از X چنان وجود دارد که $M \neq \{0\}$، $M \neq X$، و به ازای هر $S \in \mathscr{B}(X)$ که با T تعویض***

شود،

$$S(M) \subset M. \tag{۱}$$

به عنوان نتیجه، ملاحظه می‌کنیم که هر $S \in \mathscr{B}(X)$ که با عملگر فشردهٔ ناصفری تعویض شود زیرفضایی پایا دارد!

برهان. نمادهای

$$\Gamma = \{S \in \mathscr{B}(X) : ST = TS\} \tag{۲}$$

و، به ازای هر $y \in X$،

$$\Gamma(y) = \{Sy : S \in \Gamma\} \tag{۳}$$

را معرفی می‌کنیم. به آسانی معلوم می‌شود که Γ یک زیرجبر بستهٔ $\mathscr{B}(X)$ است و لذا $\Gamma(y)$ زیرفضای بسته‌ای از X است که شامل y می‌باشد. لذا، اگر $y \neq ۰$، $\Gamma(y) \neq ۰$. به علاوه، به ازای هر $y \in X$ و $S \in \Gamma$،

$$S(\Gamma(y)) \subset \Gamma(y) \tag{٤}$$

و این صرفاً به خاطر بسته بودن Γ تحت ضرب است. لذا (۱) به ازای هر $\Gamma(y)$ برقرار است.

اگر قضیه درست نباشد، ***به ازای هر*** $\boldsymbol{y \neq ۰}$، $\boldsymbol{\Gamma(y) = X}$.

این مطلب را فرض می‌کنیم.

$x_۰ \in X$ را طوری می‌گیریم که $Tx_۰ \neq ۰$. در این صورت $x_۰ \neq ۰$، و پیوستگی T نشان می‌دهد که یک گوی بازمانند B به مرکز $x_۰$ آنقدر کوچک هست که به ازای هر $x \in B$،

$$\|Tx\| \geq \frac{۱}{۲}\|Tx_۰\| \quad \text{و} \quad \|x\| \geq \frac{۱}{۲}\|x_۰\|. \tag{۵}$$

فرض ما راجع به $\Gamma(y)$ ایجاب می‌کند که هر $y \neq ۰$ همسایگیی مانند W دارد که با $S \in \Gamma$ی به توی مجموعهٔ باز B نگاشته می‌شود. چون T عملگر فشرده‌ای است، $K = \overline{T(B)}$ مجموعه‌ای فشرده است. بنابر (۵)، $۰ \notin K$. لذا مجموعه‌های بازی

چون W_1،...،W_n وجود دارند که اجتماعشان K را می‌پوشاند و به ازای $S_i \in \Gamma$ی، n، $1 \le i \le n$، $S_i(W_i) \subset B$. قرار می‌دهیم

$$\mu = \max\{\|S_1\|,\ldots,\|S_n\|\} . \tag{۶}$$

با شروع از x_0، Tx_0 در K و لذا در W_{i_1}ی قراردارد، و $S_{i_1}Tx_0 \in B$. بنابراین $TS_{i_1}Tx_0$ در K و لذا در W_{i_2} ای واقع است، و $S_{i_2}TS_{i_1}TX_0$ به B بر می‌گردد. چنانچه این بازی پینک پنکی ادامه یابد، بردارهای

$$x_N = S_{i_N}T\ldots S_{i_1}Tx_0 = S_{i_N}\ldots S_{i_1}T^N x_0 \tag{۷}$$

در B به دست می‌آیند. لذا

$$\frac{1}{2}\|x_0\| \le \|x_N\| \le \mu^N \|T^N\| \|x_0\| \qquad (N = 1,2,3,\ldots), \tag{۸}$$

و این راجع به شعاع طیفی T اطلاعاتی به دست می‌دهد؛ یعنی

$$\rho(T) = \lim_{N\to\infty} \|T^N\|^{1/N} \ge \frac{1}{\mu} > 0 . \tag{۹}$$

حال از قضیهٔ ۲۵.٤ استمداد می‌جوییم. چون $\rho(T) > 0$، T دارای یک مقدار ویژه مانند $\lambda \ne 0$ است. فضای ویژهٔ نظیر

$$M_\lambda = \{x \in X : Tx = \lambda x\} \tag{۱۰}$$

با بعد متناهی است؛ لذا $M_\lambda \ne X$. هرگاه $S \in \Gamma$ و $x \in M_\lambda$، آنگاه

$$T(Sx) = S(Tx) = S(\lambda x) = \lambda Sx ; \tag{۱۱}$$

درنتیجه $Sx \in M_\lambda$. این می‌گوید که $S(M_\lambda) \subset M_\lambda$.

لذا M_λ در قضیه صدق می‌کند اگر چه فرض شده است که قضیه برقرار نیست.

تمرینات

در این مجموعه از تمرینات، A یک جبر باناخ بوده و x، y، ... عناصر Aاند مگر خلافش تصریح شود.

۱. با استفاده از اتحاد $(xy)^n = x(yx)^{n-1}y$ ثابت کنید xy و yx همواره شعاع طیفی یکسانی دارند.

۲. (آ) اگر x و xy در A معکوسپذیر باشند، ثابت کنید y معکوسپذیر است.

(ب) اگر xy و yx در A معکوسپذیر باشند، ثابت کنید x و y معکوسپذیرند.

(حالت تعویضپذیری این در برهانهای قضایای ۱۳.۱۰ و ۲۸.۱۰ تلویحاً به کاررفته‌اند.)

(پ) نشان دهید که ممکن است $xy=e$ ولی $yx \neq e$. مثلاً جابجایهای راست و چپ S_R و S_L تعریف شده بر فضای باناخی ازتوابع f بر اعداد صحیح نامنفی به وسیلهٔ روابط زیر را در نظر بگیرید:

$$(S_R f)(n) = f(n-1)) \quad \text{اگر } n \geq 1،$$

$$(S_R f)(0) = 0,$$

$$(S_L f) = f(n+1) \quad \text{به ازای هر } n \geq 0،$$

(ت) اگر $xy = e$ و $yx = z \neq e$، نشان دهید که z یک خودتوان نابدیهی است.

(این یعنی $z^2 = z$، $z \neq 0$، $z \neq e$.)

۳. ثابت کنید هر Aی با بعد متناهی با جبری از ماتریسها یکریخت است. ***راهنمایی.*** برهان قضیهٔ ۲.۱۰ نشان می‌دهد که هر A با زیرجبری از $\mathscr{B}(A)$ یکریخت است. نتیجه بگیرید که اگر $\dim A < \infty$، $xy = e$ ایجاب می‌کندکه $yx=e$.

٤. (آ) ثابت کنید اگر $e - xy$ در A معکوسپذیر باشد، $e - yx$ نیز معکوسپذیر است. ***پیشنهاد.*** قراردهید $z = (e - xy)^{-1}$، z را به صورت یک سری هندسی بنویسید (فرض کنید $\|x\|<1$، $\|y\|<1$)، و از اتحاد مذکور درتمرین ۱ استفاد کرده یک فرمول متناهی برای $(e - yx)^{-1}$ برحسب x، y، و z به دست آورید. سپس نشان دهید که این فرمول بدون هیچ تحدیدی بر $\|x\|$یا $\|y\|$ برقراراست.

(ب) اگر $\lambda \in \mathbb{C}$، $\lambda \neq 0$، و $\lambda \in \sigma(xy)$، ثابت کنید $\lambda \in \sigma(yx)$. لذا $\sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}$. با اینحال نشان دهید که $\sigma(xy)$ همیشه مساوی $\sigma(yx)$ نیست.

۵. فرض کنید A_0 و A_1 جبرهای تمام ماتریسهای مختلط ۲ در ۲ به شکل

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

باشند. ثابت کنید هر جبر مختلط دوبعدی مانند A با یکهٔ e با یکی از اینها یکریخت است و A_0 و A_1 یکریخت نیست. ***راهنمایی.*** نشان دهید که A پایه‌ای چون $\{e,a\}$ دارد که در آن به ازای $\lambda \in \mathbb{C}$ای، $a^2 = \lambda e$. حالات $\lambda = 0$ و $\lambda \neq 0$ را متمایز بگیرید. نشان دهید که یک جبر باناخ تعویض‌ناپذیر سه بعدی وجود دارد.

۶. فرض کنید A جبر تمام توابع مختلط مانند f بر $\{1,2,3,\ldots\}$ باشد که جز در تعدادی متناهی نقطه 0اند با جمع و ضرب نقطه به نقطه و نرم

$$\|f\| = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}|f(k)|.$$

نشان دهید که ضرب پیوستهٔ چپ است (همچنین پیوستهٔ راست است زیرا A تعویضپذیر است) ولی به طور متصل پیوسته نیست. (الحاق یک عنصریکه، به صورت پیشنهاد شده در بخش ۱.۱۰، تفاوتی ایجاد نمی‌کند.) نشان دهید که درواقع دنباله‌ای مانند $\{f_n\}$ در A چنان وجود دارد که وقتی $n \to \infty$، $\|f_n\| \to 0$ ولی $\|f_n^2\| \to \infty$.

۷. فرض کنید $C^2 = C^2([0,1])$ فضای تمام توابع مختلط بر $[0,1]$ باشد که مشتق دومشان پیوسته است. $a > 0$ و $b > 0$ را اختیار کرده و تعریف کنید

$$\|f\| = \|f\|_\infty + a\|f'\|_\infty + b\|f''\|_\infty .$$

نشان دهید که این C^2 را به ازای هر a,b به یک فضای باناخ تبدیل می‌کند ولی اصول موضوع جبر باناخ برقرارند اگر و فقط اگر $2b \leq a^2$.(برای لزوم، x و x^2 رادر نظر بگیرید.)

۸. اگر الحاق یکه (توصیف شده در بخش ۱.۱۰) در مورد جبر A که قبلاً دارای یکه است اعمال شود چه رخ می‌دهد؟ واضح است که نتیجه نمی‌تواند یک جبر مانند A_1 با دویکه باشد. توضیح دهید.

۹. فرض کنید Ω در $\mathbb{C}$ باز بوده و $f:\Omega \to A$ و $\varphi:\Omega \to \mathbb{C}$ هلوریخت باشند. ثابت کنید $\varphi f:\Omega \to A$ هلوریخت است.[این دربرهان قضیهٔ ۱۳.۱۰ با $\varphi(\lambda) = \lambda^n$ به کار رفته بود.]

۱۰. برهان دیگری از $\sigma(x) \neq \varnothing$ را می‌توان بر مبنای قضیهٔ لیوویل ۳۲.۳ و اینکه وقتی

$\lambda \to \infty$، $(\lambda e - x)^{-1} \to 0$ قرارداد. جزئیات را کامل نمایید.

۱۱. $x \in A$ را یک ***مقسوم علیه توپولوژیک صفر*** نامیم اگر دنباله‌ای مانند $\{y_n\}$ در A با $\|y_n\| = 1$ چنان موجود باشد که

$$\lim_{n\to\infty} xy_n = 0 = \lim_{n\to\infty} y_n x.$$

(آ) ثابت کنید هر نقطهٔ مرزی x مجموعهٔ تمام عناصر معکوسپذیر A یک مقسوم علیه توپولوژیک صفر است. ***راهنمایی.*** $y_n = x_n^{-1}/\|x_n^{-1}\|$ را که $x_n \to x$ اختیار نمایید.

(ب) در چه جبرهای باناخی 0 تنها مقسوم علیه توپولوژیک 0 است؟

۱۲. طیف عملگر $T \in \mathscr{B}(l^2)$ داده شده با

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \ldots)$$

را بیابید.

۱۳. فرض کنید $K = \{\lambda \in \mathbb{C} : 1 \le |\lambda| \le 2\}$ و قراردهید $f(\lambda) = \lambda$. فرض کنید A کوچکترین زیرجبر بستهٔ $C(K)$ باشد که شامل ۱ و f است. همچنین B کوچکترین زیر جبر بستهٔ $C(K)$ باشد که شامل f و $1/f$ است. طیفهای $\sigma_A(f)$ و $\sigma_B(f)$ را توصیف نمایید.

۱۴. (آ) در برهان قضیهٔ ۲۹.۱۰ قضیهٔ فوبینی بر انتگرالهای برداری اعمال شده بود. این امر را توجیه نمایید.

(ب) برهانی از قضیهٔ ۲۹.۱۰ بیان دارید که در آن از انتگرالهای کنتوری استفاده نشود، به صورت زیر: ابتدا قضیه را برای چندجمله‌ایهای g سپس برای توابع گویای g که قطبی در Ω_1 ندارند ثابت کنید، و حالت کلی را از قضیهٔ رونگه به دست آورید.

۱۵. فرض کنید X یک فضای باناخ بوده، $T \in \mathscr{B}(X)$ فشرده بوده، و به ازای هر $n \ge 1$، $\|T^n\| \ge 1$. ثابت کنید طیف نقطه‌ای T تهی نیست.

۱۶. فرض کنید $X = C([0,1])$ و $T \in \mathscr{B}(X)$ را با

$$(Tx)(s) = \int_0^s x(u)du \qquad (0 \le s \le 1)$$

تعریف نمایید. نشان دهید که $\sigma_p(T) = \varnothing$. لذا، به ازای هر f، $f(\sigma_p(T)) = \varnothing$ ولی هرگاه $f \equiv 0$، آنگاه $\tilde{f}(T) = 0$؛ درنتیجه

$$\sigma_p\left(\widetilde{f}(T)\right)=\sigma_p(\circ)=\{\circ\}\neq\varnothing .$$

لذا در قسمتهای (پ) و (ت) قضیهٔ ۳۳.۱۰ فرضهای اضافی لازم خواهند بود.

۱۷. فرض کنید طیف نقطه‌ای مانند $x\in A$ همبند نباشد. ثابت کنید A شامل یک خود توان نابدیهی z است. (این در تمرین ۲ تعریف شده است.) همچنین ثابت کنید $A=A_\circ\oplus A_\backslash$ که در آن

$$A_\circ=\{x:zx=\circ\} \qquad \text{و} \qquad A_\backslash=\{x:zx=x\}.$$

۱۸. فرض کنید Ω در $\mathcal{C}$ باز بوده، α یک نقطهٔ مرزی تنهای Ω بوده، $f:\Omega\to X$ یک تابع X مقدار هلوریخت بوده (که در آن X یک فضای باناخ مختلط است)، و کوچکترین عدد صحیح نامنفی n چنان موجود باشد که وقتی $\lambda\to\alpha$،

$$|\lambda-\alpha|^n\|f(\lambda)\|$$

کراندار است. اگر $n>\circ$، گوییم f دارای قطبی ازمرتبهٔ n در α است.

(آ) فرض کنید $x\in A$ و $(\lambda e-x)^{-\backslash}$ درهر نقطه از $\sigma(x)$ دارای قطب باشد. [توجه کنید که این فقط وقتی می‌تواند رخ دهد که $\sigma(x)$ یک مجموعهٔ متناهی باشد.] ثابت کنید یک چندجمله‌ای نابدیهی مانند P هست که $P(x)=\circ$.

(ب) به عنوان حالتی خاص از (آ)، فرض کنید $\sigma(x)=\{\circ\}$ و $(\lambda e-x)^{-\backslash}$ قطبی از مرتبهٔ n در $\circ$ داشته باشد. ثابت کنید $x^n=\circ$.

۱۹. فرض کنید S_R جابجایی راست باشد که بر $l^{۲}$ مانند تمرین ۲ عمل می‌کند. همچنین $\{c_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مختلط باشد به طوری که $c_n\neq\circ$ ولی وقتی $n\to\infty$، $c_n\to\circ$. $M\in\mathscr{B}(l^{۲})$ را با

$$(Mf)(n)=c_nf(n) \qquad (n\geq\circ)$$

تعریف کرده و نیز $T\in\mathscr{B}(l^{۲})$ را با $T=MS_R$ تعریف نمایید.

(آ) $\|T^m\|$ را به ازای $m=۱,۲,۳,\ldots$ حساب کنید.

(ب) نشان دهید که $\sigma(T)=\{\circ\}$.

(پ) نشان دهید که T مقدار ویژه ندارد. (لذا طیف نقطه‌ای‌اش تهی است اگر چه طیفش ازیک نقطه تشکیل شده است!)

(تـ) نشان دهید که $(\lambda I - T)^{-1}$ قطبی در ۰ ندارد.

(ثـ) نشان دهید که T یک عملگر فشرده است.

۲۰. فرض کنید $x \in A$، $x_n \in A$، و $\lim x_n = x$. همچنین Ω مجموعهٔ بازی در $\mathbb{C}$ باشد که شامل مؤلفه‌ای از $\sigma(x)$ است. ثابت کنید $\sigma(x_n)$ مجموعهٔ Ω را به ازای تمام nهای به قدرکافی بزرگ قطع می‌کند. (این امر قضیهٔ ۲۰.۱۰ را تقویت خواهدکرد.)

راهنمایی. اگر $\sigma(x) \subset \Omega \cup \Omega_0$ که در Ω_0 مجموعهٔ بازی جدا از Ω است، تابع f را که در Ω مساوی ۱ و در Ω_0 برابر ۰ است در نظر بگیرید.

۲۱. فرض کنید C_R جبر تمام توابع پیوستهٔ ***حقیقی*** بر $[0,1]$ بانرم سوپرمم باشد. این جبر در تمام شرایط یک جبر باناخ صدق می‌کند جز آنکه در اینجا اسکالرها حقیقی‌اند.

(آ) هرگاه $\phi(f) = \int_0^1 f(t)dt$ ، آنگاه $\phi(1) = 1$، و $\phi(f) \neq 0$ اگر f در C_R معکوسپذیر باشد، ولی ϕ ضربی نیست.

(بـ) اگر G و G_1 در C_R همانند قضیهٔ ۳٤.۱۰ تعریف شده باشند، نشان دهید که G/G_1 گروهی از مرتبهٔ ۲ است.

لذا مشابه‌های قضیهٔ ۹.۱۰ و قسمت (تـ) قضیهٔ ۳٤.۱۰ برای اسکالرهای حقیقی نادرست‌اند. برهان قسمت (تـ) قضیهٔ ۳٤.۱۰ کجا فرو می‌ریزد؟

۲۲. فرض کنید $A = C(T)$ یعنی جبر تمام توابع مختلط پیوسته بردایرهٔ‌یکهٔ T با نرم سوپرمم باشد. نشان دهید که دو عضو معکوسپذیر $C(T)$ در هم مجموعهٔ یکسانی از G_1اند اگر و فقط اگر نگاشتهای همجای T به توی مجموعهٔ تمام اعداد مختلط ناصفر باشند. از این نتیجه بگیرید که G/G_1 با گروه جمعی اعداد صحیح یکریخت است. (نمادگذاری مانند قضیهٔ ۳٤.۱۰ است.)

۲۳. فرض کنید $A = M(R)$ یعنی جبر پیچشی تمام اندازه‌های بورل مختلط بر خط حقیقی باشد؛ ر.ک. قسمت (ثـ) مثال ۳.۱۰. در برهان زیر برای شمارش‌ناپذیری G/G_1 جزئیات را بیان دارید: اگر $\alpha \in R$، فرض کنید δ_α جرم‌یکه باشد که در α متمرکز شده است. فرض کنید $\delta_\alpha \in G_1$. در این صورت به ازای $\mu_\alpha \in M(R)$ای، $\delta_\alpha = \exp(\mu_\alpha)$؛ لذا، به ازای $-\infty < t < \infty$،

$$-i\alpha t = \hat{\mu}_\alpha(t) + ۲k\pi i,$$

که در آن k یک عدد صحیح است. چون $\hat{\mu}_\alpha$ یک تابع کراندار است، $\alpha = ۰$. پس $\delta_۰$ تنها δ_α در $G_۱$ است. لذا هیچ هم مجموعه‌ای از $G_۱$ در G شامل بیش از یک δ_α نیست.

۲٤. (آ) ثابت کنید A در صورتی تعویضپذیر است که ثابتی چون $M < \infty$ چنان موجود باشد که به ازای هر x و y در A، $\|xy\| \le M\|yx\|$. ***راهنمایی.*** اگر w در A معکوسپذیر باشد، $\|w^{-۱}yw\| \le M\|y\|$. w را با $\exp(\lambda x)$ که درآن $x \in A$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ عوض کرده و مانند قضیهٔ ۱٦.۱۲ ادامه دهید.

(ب) ثابت کنید A در صورتی تعویضپذیر است که به ازای هر $x \in A$، $\|x^۲\| = \|x\|^۲$. ***راهنمایی.*** نشان دهید که $\|x\| = \rho(x)$. با استفاده از تمرین ۱ نتیجه بگیرید که $\|w^{-۱}yw\| = \|y\|$ و مثل قسمت (آ) ادامه دهید.

۲۵. در رابطه با مسئلهٔ زیرفضای پایای توصیف شده در آشنایی با قضیهٔ ۳۵.۱۰، توضیح دهید چرا این مسئله

(آ) در $\mathbb{C}^n$ بدیهی است؛

(ب) در R^n متفاوت است؛

(پ) در صورت جدایی‌پذیر نبودن X غیرجالب است.

وقتی $X = \mathbb{C}^n$، قضیهٔ لومونوسف چگونه باید تنظیم شود؟

۲٦. فرض کنید S_R جابجایی راست بر $l^۲$ مانند تمرین ۲ باشد. ثابت کنید ۰ تنها $T \in \mathscr{B}(l^۲)$ ***فشرده*** است که با S_R تعویض می‌شود. ***راهنمایی.*** هرگاه $T \neq ۰$، آنگاه وقتی $N - M \to \infty$،

$$\left\|T\left(S_R^N x\right) - T\left(S_R^M x\right)\right\|$$

به ۰ میل نخواهد کرد.

فصل ۱۱

جبرهای باناخ تعویضپذیر

در این فصل عمدتاً به نظریهٔ جبرهای باناخ تعویضپذیر گلفاند می‌پردازیم، اگر چه بعضی از نتایج این نظریه در حالات تعویض‌ناپذیر نیز به کار خواهند آمد. اصطلاحات فصل پیش بدون تغییر به کار می‌روند. به خصوص، جبرهای باناخ تعویضپذیر گرفته نمی‌شوند مگر آنکه صریحاً بیان شود، ولی وجود یکه بدون قید پذیرفته می‌شود، همچنین میدان اسکالر $\mathcal{C}$ می‌باشد.

ایده‌آلها و همریختیها

۱.۱۱. تعریف. زیرمجموعهٔ J از جبر مختلط تعویضپذیر A را ***ایده‌آل*** نامیم اگر

(آ) J زیرفضایی از A (به مفهوم فضای‌برداری) بوده، و

(ب) هروقت $x \in A$ و $y \in J$، $xy \in J$.

اگر $J \neq A$، J یک ***ایده‌آل حقیقی*** است. ***ایده‌آلهای ماکزیمال*** ایده‌آلهایی حقیقی‌اند که مشمول هیچ ایده‌آل حقیقی بزرگتر نیستند.

۲.۱۱ حکم

(آ) هیچ ایده‌آل حقیقی A شامل عنصر معکوسپذیر از A نیست.

(ب) هرگاه J ایده‌آلی از جبر باناخ تعویضپذیر A باشد، آنگاه بست آن $\overline{J}$ نیز ایده‌آل است.

اثباتها آنقدر ساده‌اند که آنها را به عنوان تمرین می‌گذاریم.

۳.۱۱ قضیه

(آ) هرگاه A یک جبر مختلط تعویضپذیر با یکه باشد، آنگاه هر ایده‌آل حقیقی A مشمول یک ایده‌آل ماکزیمال A است.

(ب) هرگاه A یک جبر باناخ تعویضپذیر باشد، آنگاه هر ایده‌آل ماکزیمال A بسته است.

برهان. (آ) فرض کنیم J یک ایده‌آل حقیقی A باشد. همچنین $\mathscr{P}$ گردایهٔ تمام ایده‌آلهای حقیقی A باشد که شامل Jاند. $\mathscr{P}$ را با شمول مجموعه‌ها جزئی مرتب کرده و فرض می‌کنیم Q زیرگردایهٔ کلی مرتب ماکزیمال $\mathscr{P}$ باشد (وجود Q به وسیلهٔ قضیهٔ ماکزیمالی هاسدورف تضمین می‌شود)، و نیز M اجتماع تمام اعضای Q باشد. چون M اجتماع گردایه‌ای ***کلی*** مرتب از ایده‌آلهاست، یک ایده‌آل است. واضح است که $J \subset M$ و $M \neq A$ زیرا هیچ عضوی از $\mathscr{P}$ شامل یکهٔ A نیست. ماکزیمالی Q ایجاب می‌کند که M یک ایده‌آل ماکزیمال A باشد.

(ب) فرض کنیم M یک ایده‌آل ماکزیمال در A باشد. چون M شامل عنصر معکوسپذیری از A نیست و مجموعهٔ تمام عناصر معکوسپذیر باز است، $\overline{M}$ نیز شامل هیچ عنصر معکوسپذیر نیست. لذا $\overline{M}$ یک ایده‌ال حقیقی A است، و درنتیجه ماکزیمالی M نشان می‌دهد که $M = \overline{M}$.

۴.۱۱ همریختیها و جبرهای خارج قسمتی. هرگاه A و B جبرهای باناخ تعویضپذیر بوده و ϕ یک همریختی از A به توی B باشد (ر.ک.بخش ۴.۱۰)، آنگاه فضای پوچ یا **هستهٔ** ϕ به وضوح یک ایده‌آل در A است که در صورت پیوسته بودن ϕ بسته است.

به عکس، فرض کنیم J یک ایده‌آل **بستهٔ** حقیقی در A بوده و $\pi: A \to A/J$ همانند تعریف ۴۰.۱ یک نگاشت خارج قسمتی باشد. در این صورت A/J نسبت به نرم خارج قسمتی یک فضای باناخ است (قضیهٔ ۴۱.۱). ***نشان خواهیم داد که A/J درواقع یک جبر باناخ است و π یک همریختی می‌باشد.***

اگر $x' - x \in J$ و $y' - y \in J$، اتحاد

$$x'y' - xy = (x' - x)y' + x(y' - y) \tag{۱}$$

نشان می‌دهد که $x'y' - xy \in J$؛ درنتیجه $\pi(x'y') = \pi(xy)$. لذا ضرب در A/J را می‌توان بدون ابهام چنین تعریف کرد:

$$\pi(x)\pi(y) = \pi(xy) \qquad (x \in A, y \in A) . \tag{۲}$$

به آسانی معلوم می‌شود که A/J یک جبرباناخ است و π یک همریختی می‌باشد. چون $\|\pi(x)\| \le \|x\|$، بنا بر تعریف نرم خارج قسمتی، π پیوسته است.

فرض کنیم $x_i \in A$ $(i = ۱,۲)$ و $\delta > ۰$. در این صورت، به ازای $y_i \in J$ی، طبق تعریف نرم خارج قسمتی داریم

$$\|x_i + y_i\| \le \|\pi(x_i)\| + \delta \qquad (i = ۱,۲) . \tag{۳}$$

چون

$$(x_۱ + y_۱)(x_۲ + y_۲) \in x_۱x_۲ + J,$$

داریم

$$\|\pi(x_۱x_۲)\| \le \|(x_۱ + y_۱)(x_۲ + y_۲)\| \le \|x_۱ + y_۱\|\|x_۲ + y_۲\|; \tag{۴}$$

درنتیجه (۳) نامساوی ضربی زیر را ایجاب می‌کند:

$$\|\pi(x)\pi(x_۲)\| \le \|\pi(x_۱)\|\|\pi(x_۲)\| . \tag{۵}$$

بالأخره، هرگاه e عنصر یکهٔ A باشد، آنگاه (۲) نشان می‌دهد که $\pi(e)$ یکهٔ A/J است، و چون $\pi(e) \neq 0$، رابطهٔ (۵) نشان می‌دهد که $\|\pi(e)\| \geq 1 = \|e\|$. چون به ازای هر $x \in A$، $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$، داریم $\|\pi(e)\| = 1$. این برهان را تمام خواهد کرد.

قسمت (آ) قضیهٔ بعد یکی از نکات کلیدی تمام نظریه است. بعدها (قضیهٔ ۹.۱۱) به مجموعهٔ Δ آمده درآن یک توپولوژی هاسدورف فشرده می‌دهیم. سپس بررسی جبرهای باناخ تعویضپذیر تا حدود زیادی به مطالعهٔ اشیاء آشناتر (وخاصتر)، یعنی جبرهای توابع مختلط پیوسته بر Δ با جمع و ضرب نقطه به نقطه تحویل می‌شود. با اینحال، قضیهٔ ۵.۱۱ حتی بدون معرفی این توپولوژی نتایج ملموس جالبی دارد. بخشهای ۶.۱۱ و ۷.۱۱ این نکته را توضیح خواهندداد.

۵.۱۱ قضیه. *فرض کنیم A یک جبر باناخ تعویضپذیر بوده و Δ مجموعهٔ تمام همریختیهای مختلط A باشد.*

(آ) هر ایده‌آل ماکزیمال A هستهٔ $h \in \Delta$ ای است.

(ب) اگر $h \in \Delta$، هستهٔ h یک ایده‌آل ماکزیمال A است.

(پ) عنصر $x \in A$ در A معکوسپذیر است اگر و فقط اگر به ازای هر $h \in \Delta$، $h(x) \neq 0$.

(ت) عنصر $x \in A$ در A معکوسپذیر است اگر و فقط اگر x در هیچ ایده‌آل حقیقی A نباشد.

(ث) $\lambda \in \sigma(x)$ اگر و فقط اگر به ازای $h \in \Delta$ ای، $h(x) = \lambda$.

برهان. (آ) فرض کنیم M یک ایده‌آل ماکزیمال A باشد. در این صورت M بسته است (قضیهٔ ۳.۱۱) و لذا A/M یک جبر باناخ می‌باشد. $x \in A$ که $x \notin M$ را اختیار کرده و قرار می‌دهیم

$$J = \{ax + y:\ a \in A,\ \ y \in M\}. \tag{1}$$

در این صورت J یک ایده‌آل در A است کـه از M بزرگـتر اسـت زیـرا $x \in J$. ($a=e$ و $y=0$ را اختیـار می‌کنیـم.) لـذا $J=A$ و بـه ازای $a \in A$, $y \in M$ای، $ax+y=e$. اگـــر $\pi: A \to A/M$ نگاشت خارج قسمتی باشد، نتیجه می‌شود که $\pi(a)\pi(x)=\pi(e)$. لذا هر عنصر ناصفر $\pi(x)$ از جبر باناخ A/M در A/M معکوسپذیر است. بنا بر قضیهٔ گلفاند-مازور، یک یکریختی مانند J از A/M به روی $\mathbb{C}$ وجود دارد. قرار می‌دهیم $h=J\circ\pi$. در این صورت $h \in \Delta$، و M فضای پوچ h است.

(ب) هرگاه $h \in \Delta$ ، آنگاه $h^{-1}(0)$ یک ایده‌آل در A است که به خاطر آنکه دارای همبعد ۱ است ماکزیمال می‌باشد.

(پ) هرگاه x در A معکوسپذیر بوده و $h \in \Delta$ ، آنگاه

$$h(x)h(x^{-1})=h(xx^{-1})=h(e)=1;$$

درنتیجه $h(x)\neq 0$. هرگـاه x معکوسـپذیر نباشـد، آنگـاه مجموعـهٔ $\{ax: a\in A\}$ شـامل e نیست؛ درنتیجه یک ایده‌آل حقیقی است که در یک ایده‌آل ماکزیمال جـای دارد (قضیـهٔ ۱۱.۳) و لذا به خاطر (آ) به وسیلهٔ $h \in \Delta$ی فنا می‌شود.

(ت) هیچ عنصر معکوسپذیری در یک ایده‌آل حقیقی قرار ندارد. عکس مطلب در برهان قسمت (پ) ثابت شده است.

(ث) قسمت (پ) را بر $\lambda e - x$ به جای x اعمال نمایید.

اولین کاربرد ما در رابطه با توابعی بر R^n است که مجموعهای سریهای مثلثاتی بـه طور مطلق همگرا می‌باشند. نمادها همانند تمرین ۲۲ در فصل ۷ می‌باشند.

۶.۱۱ لم وینر. *فرض کنیم f یک تابع بر R^n بوده و*

$$f(x)=\sum a_m e^{im.x} \quad \text{و} \quad \sum |a_m| < \infty، \tag{1}$$

که در آنها هر دو مجموع روی تمام $m \in Z^n$هـا گرفتـه شـده‌اند. هرگـاه بـه ازای هر $x \in R^n$، $f(x)\neq 0$، آنگاه

$$\frac{1}{f(x)} = \sum b_m e^{im.x} \quad \text{با} \quad \sum |b_m| < \infty. \qquad (۲)$$

برهان. فرض کنیم A مجموعهٔ توابع به شکل (۱) با نرم $\|f\| = \sum |a_m|$ باشد. به آسانی معلوم می‌شود که A نسبت به ضرب نقطه به نقطه یک جبر باناخ تعویضپذیر است. یکه‌اش تابع ثابت ۱ است. به ازای هر x تابع ارزیاب $f \to f(x)$ یک همریختی مختلط A است. فرض راجع به تابع داده شدهٔ f آن است که هیچ تابع ارزیاب آن را فنا نسازد. اگر بتوان ثابت کرد که A همریختی مختلط دیگری ندارد، قسمت (پ) قضیهٔ 5.11 ایجاب می‌کند که f در A معکوسپذیر است، که درست همان نتیجهٔ مطلوب می‌باشد.

به ازای $r = 1,\ldots,n$ قرار می‌دهیم $g_r(x) = \exp(ix_r)$ که در آن x_r مختص rام x است. در این صورت g_r و $1/g_r$ در Aاند و دارای نرم ۱ می‌باشند. اگر $h \in \Delta$، از قسمت (پ) قضیهٔ 7.10 نتیجه می‌شود که

$$|h(g_r)| \le 1 \qquad \text{و} \qquad \left|\frac{1}{h(g_r)}\right| = \left|h\left(\frac{1}{g_r}\right)\right| \le 1.$$

لذا اعدادی حقیقی مانند y_r چنان وجود دارند که

$$h(g_r) = \exp(iy_r) = g_r(y) \qquad (1 \le r \le n), \qquad (۳)$$

که در آن $y = (y_1,\ldots,y_n)$. هرگاه P یک چندجمله‌ای مثلثاتی باشد (بدین معنی که P، طبق تعریف، یک ترکیب خطی متناهی از حاصلضربهای توانهای صحیح از توابع g_r و $1/g_r$ است)، آنگاه (۳) ایجاب می‌کند که

$$h(P) = P(y) \qquad (٤)$$

زیرا h خطی و ضربی می‌باشد. چون h بر A پیوسته است (قضیهٔ 7.10) و مجموعهٔ تمام چندجمله‌ایهای مثلثاتی در A چگال است (این از تعریف نرم واضح است)، رابطهٔ (٤) ایجاب می‌کند که به ازای هر $f \in A$، $h(f) = f(y)$. لذا h ارزش در y است، و برهان تمام می‌باشد.

این لم (به ازای $n=1$) دربرهان اصلی قضیهٔ تاوبری 7.9 به کار رفته است. برای مشاهدهٔ این ارتباط، لم را تعبیر مجدد می‌کنیم. Z^n را در R^n به طور واضح می‌نشانیم.

در این صورت ضرایب داده شدهٔ a_m یک اندازه مانند μ بر R^n را تعریف می‌کنند که بر Z^n متمرکز شده است و به هر $m \in Z^n$ جرم a_m را منتسب می‌سازد. حال مسئلهٔ یافتن یک اندازهٔ مختلط مانند σ را در نظر می‌گیریم که بر Z^n متمرکز شده است به طوری که پیچش $\mu * \sigma$ اندازهٔ دیراک δ باشد. لم وینر می‌گوید که این مسئله را می‌توان حل کرد اگر (و بداهتاً فقط اگر) تبدیل فوریهٔ μ صفری بر R^n نداشته باشد؛ این دقیقاً فرض تاوبری در قضیهٔ ۷.۹ می‌باشد.

برای کاربرد بعدی ما، فرض کنیم U^n مجموعهٔ تمام نقاط $z = (z_1, \ldots, z_n)$ در $\mathbb{C}^n$ باشد به طوری که به ازای $1 \le i \le n$، $|z_i| < 1$. به عبارت دیگر، این **چند قرص** U^n حاصل ضرب دکارتی n نسخه از قرص‌یکهٔ باز U در $\mathbb{C}$ است. $A(U^n)$ را مجموعهٔ تمام توابع f که در U^n هلوریخت‌اند (ر.ک. تعریف ۲۰.۷) و بربستش $\overline{U}^n$ پیوسته‌اند تعریف می‌کنیم.

۷.۱۱ قضیه. ***فرض کنیم $f_1, \ldots, f_k \in A(U^n)$ و به هر $z \in \overline{U}^n$ دست کم یک i چنان نظیر باشد که $f_i(z) \neq 0$. در این صورت توابعی چون $\phi_1, \ldots, \phi_k \in A(U^n)$ چنان وجود دارند که***

$$f_1(z)\phi_1(z) + \ldots + f_k(z)\phi_k(z) = 1 \qquad \left(z \in \overline{U}^n\right). \tag{1}$$

برهان. $A = A(U^n)$ یک جبر باناخ تعویضپذیر با ضرب نقطه به نقطه و نرم سوپرمم است. فرض کنیم J مجموعهٔ تمام مجموعهای $\sum f_i \phi_i$ با $\phi_i \in A$ باشد. در این صورت J یک ایده‌آل است. هرگاه نتیجه نادرست باشد، آنگاه $J \neq A$؛ لذا J در ایده‌آل ماکزیمالی چون A جا دارد (قضیهٔ ۳.۱۱) و، بنابر قسمت (آ) قضیهٔ ۵.۱۱، $h \in \Delta$ ی مجموعهٔ J را فنا می‌سازد.

به ازای $1 \le r \le n$ قرار می‌دهیم $g_r(z) = z_r$. در این صورت $\|g_r\| = 1$؛ در نتیجه $h(g_r) = w_r$ با $|w_r| \le 1$. قرار می‌دهیم $w = (w_1, \ldots, w_n)$. در این صورت $w \in \overline{U}^n$، و $h(g_r) = g_r(w)$. پس به ازای هر چندجمله‌ای P، $h(P) = P(w)$، زیرا h یک

همریختی می‌باشد. چند جمله‌ایها در $A(U^n)$ چگالند (تمرین ٤). لذا، اساساً طبق همان استدلال به کاررفته در برهان قضیهٔ ٦.۱۱ ، به ازای هر $f \in A$ داریم $h(f) = f(w)$.

چون h مجموعهٔ J را فنا می‌سازد، به ازای $1 \le i \le k$، $f_i(w) = 0$. این فرض را متناقض خواهد ساخت.

تبدیلات گلفاند

۸.۱۱ چند تعریف. فرض کنیم Δ مجموعهٔ تمام همریختیهای مختلط جبرباناخ تعویضپذیر A باشد. فرمول

$$\hat{x}(h) = h(x) \qquad (h \in \Delta) \tag{1}$$

به هر $x \in A$ تابعی مانند $\hat{x}: \Delta \to \mathbb{C}$ را منتسب می‌سازد؛ ما $\hat{x}$ را ***تبدیل گلفاند*** x می‌نامیم.

فرض کنیم $\hat{A}$ مجموعهٔ تمام $\hat{x}$ها به ازای $x \in A$ باشد. ***توپولوژی گلفاند*** Δ توپولوژی ضعیف القا شده به وسیلهٔ $\hat{A}$ است؛ یعنی ضعیفترین توپولوژیی که هر $\hat{x}$ را پیوسته می‌سازد. در این صورت به وضوح $\hat{A} \subset C(\Delta)$ یعنی جزء جبر تمام توابع پیوستهٔ مختلط بر Δ.

چون یک تناظر یک به یک بین ایده‌آلهای ماکزیمال A و اعضای Δ وجود دارد (قضیهٔ ٥.۱۱)، Δ همراه با توپولوژی گلفاند آن را معمولاً ***فضای ایده‌آل ماکزیمال*** A می‌نامند. اصطلاح "تبدیل گلفاند" در مورد ***نگاشت*** $x \to \hat{x}$ از A به روی $\hat{A}$ نیز اطلاق می‌شود.

رادیکال A را با $rad\, A$ نشان می‌دهیم و آن را اشتراک تمام ایده‌آلهای ماکزیمال A تعریف می‌کنیم. اگر $radA = \{0\}$ ، A ***نیمه ساده*** نام دارد.

۹.۱۱ قضیه. *فرض کنیم Δ فضای ایده‌آل ماکزیمال جبر باناخ تعویضپذیر A باشد.*

(آ) Δ یک فضای هاسدورف فشرده است.

(ب) تبدیل گلفاند یک همریختی A به روی زیرجبری از $C(\Delta)$ مانند $\hat{A}$ است که هسته‌اش $rad\ A$ می‌باشد. لذا تبدیل گلفاند یک یکریختی است اگر وفقط اگر A نیمه ساده باشد.

(پ) به ازای هر $x \in A$ ، برد $\hat{x}$ طیف $\sigma(x)$ است. لذا

$$\|\hat{x}\|_\infty = \rho(x) \le \|x\|,$$

که در آن $\|\hat{x}\|_\infty$ ماکزیمم $|\hat{x}(h)|$ بر Δ است، و $x \in radA$ اگر و فقط اگر $\rho(x) = 0$.

برهان. ابتدا قسمتهای (ب) و (پ) را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم $x \in A$، $y \in A$، $\alpha \in \mathbb{C}$، و $h \in \Delta$. در این صورت

$$(\alpha x)\hat{}(h) = h(\alpha x) = \alpha h(x) = (\alpha\hat{x})(h),$$
$$(x+y)\hat{}(h) = h(x+y) = h(x)+h(y) = \hat{x}(h)+\hat{y}(h) = (\hat{x}+\hat{y})(h),$$
$$(xy)\hat{}(h) = h(xy) = h(x)h(y) = \hat{x}(h)\hat{y}(h) = (\hat{x}\hat{y})(h).$$

لذا $\hat{x} \to x$ یک همریختی است. هسته‌اش عبارت است از $x \in A$هایی که در $h(x) = 0$ به ازای هر $h \in \Delta$ صدق می‌کنند؛ بنا بر قضیهٔ ۵.۱۱، این اشتراک تمام ایده‌آلهای ماکزیمال A ، یعنی $radA$ ، است.

وقتی می‌گوییم λ در برد $\hat{x}$ است یعنی بــه ازای $h \in \Delta$ای، $h = \hat{x}(h) = h(x)$. بنابر قسمت (ث) قضیهٔ ۵.۱۱، این رخ می‌دهد اگر و فقط اگر $\lambda \in \sigma(x)$. این قسمتهای (ب) و (پ)را ثابت خواهد کرد.

برای اثبات (آ) فرض کنیم A^* فضای دوگان A (به عنوان یک فضای باناخ) بوده و K گوی یکهٔ نرم - بستهٔ A^* باشد. بنابر قضیهٔ باناخ - آلوگلو، K ضعیف*-فشرده است. بنابر قسمت (پ) قضیهٔ ۷.۱۰، $\Delta \subset K$. توپولوژی گلفاند Δ به وضوح تحدید ضعیف*- توپولوژی A^* به Δ است. لذا کافی است نشان دهیم که Δ یک زیرمجموعهٔ ضعیف*-بستهٔ A^* می‌باشد.

فرض کنیم $\Lambda_\circ$ ضعیف*-بست Δ باشد. باید نشان دهیم که

$$\Lambda_\circ(xy) = \Lambda_\circ x \Lambda_\circ y \qquad (x \in A, y \in A) \qquad (1)$$

و

$$\Lambda_\circ e = ۱. \qquad (۲)$$

[توجه کنید که رابطهٔ (۲) لازم است؛ در غیر این صورت $\Lambda_\circ$ همریختی صفر است که در Δ نیست.]

$x \in A$، $y \in A$، و $\varepsilon > \circ$ را ثابت می‌گیریم و قرارمی‌دهیم

$$W = \{\Lambda \in A^*: |\Lambda z_i - \Lambda_\circ z_i| < \varepsilon \text{ ،به ازای } ۱ \le i \le ۴\}, \qquad (۳)$$

که در آن $z_۱ = e$، $z_۲ = x$، $z_۳ = y$، و $z_۴ = xy$. دراین صورت W یک ضعیف*-همسایگی $\Lambda_\circ$ است و لذا شامل $h \in \Delta$ی می‌باشد. به ازای این h،

$$|۱ - \Lambda_\circ e| = |h(e) - \Lambda_\circ e| < \varepsilon, \qquad (٤)$$

که رابطهٔ (۲) را به دست می‌دهد، و

$$\begin{aligned}\Lambda_\circ(xy) - \Lambda_\circ x \Lambda_\circ y &= [\Lambda_\circ(xy) - h(xy)] + [h(x)h(y) - \Lambda_\circ x \Lambda_\circ y] \\ &= [\Lambda_\circ(xy) - h(xy)] + [h(y) - \Lambda_\circ y]h(x) \\ &\quad + [h(x) - \Lambda_\circ h]\Lambda_\circ y,\end{aligned}$$

که رابطهٔ زیر را به دست می‌دهد:

$$|\Lambda_\circ(xy) - \Lambda_\circ x \Lambda_\circ y| < (۱ + \|x\| + |\Lambda_\circ y|)\varepsilon. \qquad (٥)$$

چون رابطهٔ (۵) رابطهٔ (۱) را ایجاب می‌کند، برهان تمام خواهدبود.

جبرهای نیمه ساده خاصیت مهمی دارند که قبلاً برای $\mathbb{C}$ ثابت شده است:

۱۰.۱۱ قضیه. ***هرگاه $\psi: A \to B$ یک همریختی از جبر باناخ A به توی جبر باناخ تعویضپذیر نیمه سادهٔ B باشد، آنگاه ψ پیوسته است.***

برهان. فرض کنیم $x_n \to x$ در A و $\psi(x_n) \to y$ در B. بنا بر قضیهٔ گراف بسته، کافی است نشان دهیم که $y = \psi(x)$.

یک همریختی مانند $h: B \to \mathbb{C}$ را اختیار می‌کنیم. دراین صورت $\varphi = h \circ \psi$ یک

همریختی از A به توی $\mathbb{C}$ است. قضیهٔ ۷.۱۰ نشان می‌دهد که h و φ پیوسته‌اند. لذا، به ازای هر $h \in \Delta_B$،

$$h(y) = \lim h(\psi(x_n)) = \lim \varphi(x_n) = \varphi(x) = h(\psi(x)) .$$

لذا $y - \psi(x) \in radB$. چون $radB = \{0\}$، $y = \psi(x)$.

نتیجه. هریکریختی بین دو جبر باناخ تعویضپذیر نیمه ساده یک همانریختی است.

به‌خصوص، این امر برای هر خودریختی از یک جبر باناخ تعویضپذیر نیمه ساده درست است. لذا توپولوژی یک چنین جبر کاملاً به وسیلهٔ ساختار جبری‌اش معین می‌شود.

در قضیهٔ ۹.۱۱ جبر $\hat{A}$ ممکن است نسبت به نرم سوپرمم در $C(\Delta)$ بسته باشد یا نباشد. از مقایسهٔ $\|x^2\|$ با $\|x\|^2$ به ازای هر $x \in A$ می‌توان دید که چه حالتی از اینها رخ می‌دهد. به یادآورید که $\|x^2\| \le \|x\|^2$ همواره درست است.

۱۱.۱۱ لم. ***هرگاه A یک جبر باناخ تعویضپذیر بوده و***

$$\boldsymbol{r = \inf \frac{\|x^2\|}{\|x\|^2}}, \qquad \boldsymbol{s = \inf \frac{\|\hat{x}\|_\infty}{\|x\|}} \qquad \boldsymbol{(x \in A, x \neq 0)}, \tag{1}$$

آنگاه $\boldsymbol{s^2 \le r \le s}$.

برهان. چون $\|\hat{x}\|_\infty \ge s\|x\|$، به ازای هر $x \in A$،

$$\|x^2\| \ge \|\hat{x}^2\|_\infty = \|\hat{x}\|_\infty^2 \ge s^2\|x\|^2. \tag{2}$$

لذا $s^2 \le r$.

چون به ازای هر $x \in A$، $\|x^2\| \ge r\|x\|^2$، استقرا بر n نشان می‌دهد که

$$\|x^m\| \ge r^{m-1}\|x\|^m \qquad (m = 2^n, n = 1,2,3,\ldots). \tag{3}$$

در رابطهٔ (۳) ریشهٔ mام گرفته و فرض می‌کنیم $m \to \infty$. بنابر فرمول شعاع طیفی و

قسمت (پ) قضیهٔ ۹.۱۱،

$$\|\hat{x}\|_\infty = \rho(x) \geq r\|x\| \qquad (x \in A). \tag{٤}$$

بنابراین $r \leq s$.

۱۲.۱۱ قضیه. ***فرض کنیم A یک جبر باناخ تعویضپذیر باشد.***

(آ) تبدیل گلفاند یک یکمتری است (یعنی به ازای هر $x \in A$، $\|\hat{x}\|_\infty = \|x\|$) اگر و فقط اگر به ازای هر $x \in A$، $\|x^2\| = \|x\|^2$.

(ب) A نیمه ساده و $\hat{A}$ در $C(\Delta)$ بسته است اگر وفقط اگر $K < \infty$ ای چنان وجود داشته باشد که به ازای هر $x \in A$، $\|x\|^2 \leq K\|x^2\|$.

برهان. (آ) با اصطلاحات لم ۱۱.۱۱، تبدیل گلفاند یک یکمتری است اگر وفقط اگر $s = 1$، که (بنا بر لم) رخ می‌دهد اگر و فقط اگر $r = 1$.

(ب) بنابرلم، وجود K هم ارز $r > 0$ و درنتیجه $s > 0$ است. هرگاه $s > 0$، آنگاه $x \to \hat{x}$ یک به یک بوده و دارای معکوس پیوسته است؛ درنتیجه $\hat{A}$ تام (و لذا بسته) در $C(\Delta)$ می‌باشد. به عکس، اگر $x \to \hat{x}$ یک به یک بوده و $\hat{A}$ در $C(\Delta)$ بسته باشد، قضیهٔ نگاشت باز ایجاب می‌کند که $s > 0$.

۱۳.۱۱ چند مثال. در بعضی حالات می‌توان فضای ایده‌آل ماکزیمال یک جبر باناخ تعویضپذیر داده شده را به آسانی توصیف کرد. در بعضی دیگر مشکلات زیادی خواهیم داشت. حال برای توضیح این امر چند مثال می‌زنیم.

(آ) فرض کنیم X یک فضای هاسدورف فشرده باشد. قرارمی‌دهیم $A = C(X)$ با نرم‌سوپرمم. به ازای هر $x \in X$، $f \to f(x)$ یک همریختی مختلط مانند h_x است. چون $C(X)$ نقاط X را جدا می‌سازد (لم اوریزون (*Urysohn*))، $x \neq y$ ایجاب می‌کند که $h_x \neq h_y$. لذا $x \to h_x$ فضای X را در Δ می‌نشاند.

حکم می‌کنیم که هر $h \in \Delta$ یک h_x است. اگـر ایـن درسـت نباشـد، یـک ایـده‌آل ماکزیمـال مـانند M در $C(X)$ هسـت کـه بـه ازای هـر $p \in X$ شـامل تـابعی مـانند f با $f(p) \neq 0$ می‌باشد. در این صورت فشردگی X ایجاب می‌کند کـه M شـامل تعـدادی متناهی تابع مانند f_1،...، f_n است به طوری که دست کم یکی از آنها در هـر نقطـه از X مخالف صفر است. قرار می‌دهیم

$$g = f_1\bar{f}_1 + \ldots + f_n\bar{f}_n .$$

دراین صورت $g \in M$ زیرا M یک ایده‌آل است؛ در هر نقطهٔ X داریم $g > 0$؛ لـذا g در $C(X)$ معکوسپذیر است. ولی ایده‌آلهای حقیقی شامل عناصر معکوسپذیر نیستند.

لذا $x \to h_x$ یک تناظر یک به یک بین X و Δ اسـت و از آن می‌تـوان بـرای یکـی کردن Δ با X استفاده کرد. این انطباق برحسب دو توپولوژی مربوطه نیز درسـت اسـت: توپولوژی گلفاند γ از X توپولوژی ضعیف القا شده به وسـیلهٔ $C(X)$ اسـت و لـذا از τ (توپولوژی اصلی) ضعیفتر است، ولـی γ یـک توپولـوژی هاسـدورف اسـت؛ درنتیجـه $\gamma = \tau$. [ر.ک.قسمت (آ) از بخش ۸.۳.]

جمعبندی کنیم، X فضای ایده‌آل‌ماکزیمال $C(X)$ "است"، و تبدیل گلفاند نگاشـت همانی بر $C(X)$ می‌باشد.

(ب) فرض کنیم A جبر تمام سریهای مثلثاتی به طور مطلـق همگـرا مـانند بخـش ۶.۱۱ باشد. در آنجا دیدیم که همریختیهای مختلط ارزیابها در نقاط R^n اند. چـون اعضـای A عبارتند از 2π– متناوب نسبت به هـر متغـیر، Δ چنـبرهٔ T^n حـاصل از R^n بـه وسـیلهٔ نگاشت

$$(x_1,\ldots,x_n) \to (e^{ix_1},\ldots,e^{ix_n})$$

است. این مثالی است که در آن $\hat{A}$ در $C(\Delta)$ چگال است اگر چه $\hat{A} \neq C(\Delta)$.

(پ) به همین نحو، برهان قضیهٔ ۷.۱۱ حاوی این نتیجـه اسـت کـه $\overline{U}^n$ فضـای ایـده‌آل ماکزیمال $A(U^n)$ می‌باشد. استدلال به کار رفته در آخر قسمت (آ) نشـان می‌دهـد کـه توپولوژی طبیعی $\overline{U}^n$ همان توپولوژی گلفاند القا شده به وسیلهٔ $A\left(\overline{U}^n\right)$ است؛ همیـن نکته در مورد (ب) قابل ذکر است.

(ت) مثال پیش تعمیمهای جالبی دارد. فرض کنیم A یک جبر باناخ تعویضپذیر با ***مجموعه‌ای متناهی از مولدها*** مثلاً x_1،...،x_n باشد. این یعنی $x_i \in A$ $(1 \le i \le n)$؛ و مجموعهٔ تمام چندجمله‌ایها از x_1،...،x_n در A چگال است. تعریف می‌کنیم

$$\phi(h) = \left(\hat{x}_1(h),\dots,\hat{x}_n(h)\right) \qquad (h \in \Delta). \tag{1}$$

در این صورت ϕ یک همانریختی از Δ به روی مجموعهٔ فشرده‌ای مانند $K \subset \mathbb{C}^n$ است.

درواقع، ϕ پیوسته است زیرا $\hat{A} \subset C(\Delta)$. هرگاه $\phi(h_1) = \phi(h_2)$، آنگاه به ازای هر i، $h_1(x_i) = h_2(x_i)$؛ درنتیجه، هر وقت x یک چندجمله‌ای از x_1،...،x_n باشد، $h_1(x) = h_2(x)$، و چون این چندجمله‌ایها در A چگالند، $h_1 = h_2$. لذا ϕ یک به یک می‌باشد.

حال $\hat{A}$ را از Δ به K انتقال می‌دهیم و لذا می‌توانیم K را به عنوان یک فضای ایده‌آل ماکزیمال A در نظر بگیریم. برای دقیق ساختن این، تعریف می‌کنیم

$$\psi(x) = \hat{x} \circ \phi^{-1} \qquad (x \in A). \tag{2}$$

در این صورت ψ یک همریختی (اگر A نیمه ساده باشد، یک یکریختی) از A به روی یک زیرجبر مانند $\psi(A)$ از $C(K)$ است. به آسانی تحقیق می‌شود که

$$\psi(x_i)(z) = z_i \quad \text{،} \quad \text{اگر } z = (z_1,\dots,z_n) \in K \tag{3}$$

و لذا به ازای هر چندجمله‌ای P از n متغیر،

$$\psi(P(x_1,\dots,x_n))(z) = P(z) \qquad (z \in K). \tag{4}$$

پس هر عضو $\psi(A)$ حد یکنواخت چندجمله‌ایها بر K است.

مجموعه‌های $K \subset \mathbb{C}^n$ که به این نحو به صورت فضاهای ایده‌آل ماکزیمال ظاهر می‌شوند خاصیتی دارند که به ***تحدب چندجمله‌ای*** معروف است:

اگر $w \in \mathbb{C}^n$ و $w \notin K$، یک چندجمله‌ای مانند P هست به طوری که به ازای هر $z \in K$، $|P(z)| \le 1$ ولی $|P(w)| > 1$.

برای اثبات این امر، فرض می‌کنیم این نوع چندجمله‌ای موجود نباشد. در این صورت خاصیت کاهشی نرم تبدیل گلفاند ایجاب می‌کند که به‌ازای هر چندجمله‌ای P،

$$|P(w)| \le \|P(x_1,\ldots,x_n)\|; \qquad (۵)$$

نرم همان نرم A می‌باشد. چون $\{x_1,\ldots,x_n\}$ مجموعه‌ای از مولدهای A است، از نامساوی (۵) معلوم می‌شود که $h \in \Delta$ی چنان وجود دارد که $\phi(h) = w$. اما در این صورت $w \in K$، و ما تناقض خواهیم داشت.

زیرمجموعه‌های به طور چندجمله‌ای محدب فشرده از $\mathbb{C}$ درست آنهایی هستند که متممشان همبند است؛ این نتیجهٔ ساده‌ای است ازقضیهٔ رونگه. در $\mathbb{C}^n$، ساختار مجموعه‌های به طور چندجمله‌ای محدب به هیچوجه کاملاً درک نشده است.

(ث) مثال بعدی ما نشان می‌دهد که تبدیل گلفاند، لااقل در محدودهٔ L^1، تعمیمی از تبدیل فوریه است.

فرض کنیم A مساوی $L^1(R^n)$ باشد با یکه‌ای که طبق توصیف (ت) در بخش ۳.۱۰ به آن الحاق شده است. اعضای A به شکل $f+\alpha\delta$ اند که در آن $f \in L^1(R^n)$، $\alpha \in \mathbb{C}$، و δ اندازهٔ دیراک بر R^n است؛ ضرب در A عبارت است از پیچش:

$$(f+\alpha\delta) * (g+\beta\delta) = (f*g+\beta f+\alpha g)+\alpha\beta\delta.$$

به ازای هر $t \in R^n$، فرمول

$$h_t(f+\alpha\delta) = \hat{f}(t)+\alpha \qquad (٦)$$

یک همریختی مختلط از A را تعریف می‌کند؛ در اینجا $\hat{f}$ تبدیل فوریهٔ f است. به علاوه،

$$h_\infty(f+\alpha\delta) = \alpha \qquad (۷)$$

نیز معرف یک همریختی مختلط است. همریختیهای دیگری وجود ندارد. (بزودی برهانی به اختصار ذکر خواهدشد.) لذا Δ به عنوان یک مجموعه مساوی است با $R^n \cup \{\infty\}$. به Δ توپولوژی فشرده‌سازی یک نقطه‌ای R^n را می‌دهیم. چون وقتی $|t| \to \infty$، $\hat{f}(t) \to 0$، به ازای هر $f \in L^1(R^n)$، از (٦) و (۷) نتیجه می‌شود که $\hat{A} \subset C(\Delta)$. چون $\hat{A}$ نقاط بر Δ را جدا می‌سازد، توپولوژی ضعیف القا شده بر Δ به وسیلهٔ $\hat{A}$ درست همان توپولوژیی است که هم اکنون اختیار کردیم.

باقی است ثابت کنیم که هر $h \in \Delta$ به شکل (٦) یا (۷) است. هرگاه به ازای هر

$f \in L^1(R^n)$، $h(f)=0$، آنگاه $h=h_\infty$. فرض کنیم به ازای $f \in L^1(R^n)$ ی، $h(f)\neq 0$.
در این صورت به ازای $\beta \in L^\infty(R^n)$ای، $h(f)=\int f\beta dm_n$. چون $h(f*g)=h(f)h(g)$، می‌توان ثابت کرد که β تقریباً همه جا با یک تابع پیوسته مانند b که در

$$b(x+y)=b(x)b(y) \qquad (x,y\in R^n) \tag{۸}$$

صدق می‌کند یکی است. بالأخره، هر جواب کراندار (۸) به ازای $t\in R^n$ای به شکل زیر است:

$$b(x)=e^{-ix.t} \qquad (x\in R^n). \tag{۹}$$

لذا $h(f)=\hat{f}(t)$، و h به شکل (٦) است.

به ازای $n=1$، جزئیات تکمیلی خلاصهٔ بحث پیش را می‌توان در بخش ۲۲.۹ مرجع [۲۳] یافت. حالت $n>1$ کاملاً شبیه می‌باشد.

(جـ) مثال نهایی ما $L^\infty(m)$ است. در اینجا m اندازهٔ لبگ بر بازهٔیکهٔ $[0,1]$ است، و $L^\infty(m)$ فضای باناخ معمولی رده‌های هم ارزی (به پیمانهٔ مجموعه‌ها از اندازهٔ ۰) توابع اندازه‌پذیر کراندار مختلط بر $[0,1]$ است که با سوپرمم اساسی نرمدار شده است. این فضا با ضرب نقطه به نقطه یک جبر باناخ تعویضپذیر می‌باشد.

هرگاه $f\in L^\infty(m)$ و G_f اجتماع تمام مجموعه‌های باز $G\subset \mathbb{C}$ با $m(f^{-1}(G))=0$ باشد، آنگاه به آسانی معلوم می‌شود که متمم G_f (به نام ***برد اساسی*** f) با طیف $\sigma(f)$ از f و درنتیجه با برد تبدیل گلفاند آن $\hat{f}$ یکی است. پس اگر f حقیقی باشد، $\hat{f}$ نیز حقیقی است. لذا $L^\infty(m)\hat{}$ تحت تزویج مختلط بسته است. لذا، طبق قضیهٔ استون- وایراشتراس، $L^\infty(m)\hat{}$ در $C(\Delta)$ چگال است، که در آن Δ فضای ایده‌آل ماکزیمال $L^\infty(m)$ می‌باشد. همچنین نتیجه می‌شود که $f\to\hat{f}$ یک یکمتری است؛ در نتیجه $L^\infty(m)\hat{}$ در $C(\Delta)$ بسته می‌باشد.

نتیجه می‌گیریم که $f\to\hat{f}$ یک یکمتری از $L^\infty(m)$ به روی $C(\Delta)$ است.

اما $\int fdm \to \hat{f}$ یک تابعی خطی کراندار بر $C(\Delta)$ است. لذا، بر طبق قضیهٔ نمایش ریس، یک اندازهٔ احتمال بورل منتظم مانند μ بر Δ هست که در رابطهٔ

$$\int_\Delta \hat{f} d\mu = \int_0^1 f dm \qquad (۱۰)$$

به ازای هر $f \in L^\infty(m)$ صدق می‌کند. این اندازه به طریق زیر به توپولوژی Δ مربوط است:

(یک) اگر V باز و ناتهی باشد، $\mu(V) > 0$.

(دو) به هرتابع بورل کراندار φ بر Δ عنصری مانند $\hat{f} \in C(\Delta)$ چنان نظیر است که $\hat{f} = \varphi$ تـ.هـ. $[\mu]$.

(سه) اگر V باز باشد، $\overline{V}$ نیز چنین است.

(چهار) هرگاه E یک مجموعهٔ بورل در Δ باشد، آنگاه

$$\mu(E^\circ) = \mu(E) = \mu(\overline{E}). \qquad (۱۱)$$

اگر V همانند در (یک) باشد، لم اوریزون ایجاب می‌کند که $\hat{f} \in C(\Delta)$ ی با $\hat{f} \geq 0$ چنان هست که خارج V داریم $\hat{f} = 0$ و در $p \in V$ ای خواهیم داشت $\hat{f}(p) = 1$. لذا f عنصر صفر $L^\infty(m)$ نیست، و انتگرالهای (۱۰) مثبت‌اند. این قسمت (یک) را به دست می‌دهد.

در (دو) فرض می‌کنیم $|\varphi| \leq 1$. چون $C(\Delta)$ در $L^2(\mu)$ چگال است (به یاد آورید که μ یک اندازهٔ احتمال بورل منتظم است)، توابعی چون $\hat{f}_n \in C(\Delta)$ چنان وجود دارند که $\int |\hat{f}_n - \varphi|^2 d\mu \to 0$ و چنان می‌توان آنها را تعدیل کرد که $|\hat{f}_n| \leq 1$. در این صورت $\|f_n\|_\infty \leq 1$، و رابطهٔ (۱۰) ایجاب می‌کند که $\{f_n\}$ یک دنبالهٔ‌کشی در $L^2(m)$ است. لذا $f \in L^\infty(m)$ ی هست به طوری که وقتی $n \to \infty$،

$$\int_\Delta |\hat{f}_n - \hat{f}|^2 d\mu = \int_0^1 |f_n - f|^2 dm \to 0. \qquad (۱۲)$$

لذا $\hat{f} = \varphi$ تـ.هـ. $[\mu]$.

حال فرض کنیم V باز و W متمم $\overline{V}$ باشد. بنابر (دو)، عنصری مانند $\hat{f} \in C(\Delta)$ چنان وجود داردکه خارج V داریم $\hat{f} = 1$ تـ.هـ. $[\mu]$. مجموعه‌ای که $\hat{f}$ بر آن نه ۱ هست نه ۰ باز است و دارای اندازهٔ μ ی ۰ می‌باشد؛ درنتیجه، طبق (یک)، تهی است. همین استدلال نشان می‌دهد که مجموعه‌های $V \cap \{\hat{f} \neq 1\}$ و $W \cap \{\hat{f} \neq 0\}$ تهی‌اند. لذا

بر $\overline{V}$ داریم $\hat{f}=1$ و بر W خواهیم داشت $\hat{f}=0$.

این قسمت (سه) را ثابت می‌کند، و نیز نشان می‌دهد که $\mu(\overline{V})=\mu(V)$. با گرفتن متمم معلوم می‌شود که به ازای هر $K\subset\Delta$ی فشردهٔ، $\mu(K^\circ)=\mu(K)$.

هرگاه E یک مجموعهٔ بورل در Δ بوده، و $\varepsilon>0$، آنگاه Kی فشرده و Vی بازی چنان وجود دارند که $K\subset E\subset V$ و $\mu(V)<\mu(K)+\varepsilon$. لذا

$$\mu(\overline{E})\le\mu(\overline{V})=\mu(V)<\mu(K)+\varepsilon=\mu\left(K^\circ\right)+\varepsilon\le\mu\left(E^\circ\right)+\varepsilon,$$

و این قسمت (چهار) را ثابت خواهد کرد.

از قسمت (سه) به آسانی معلوم می‌شود که مجموعه‌های باز از هم جدا بستهای از هم جدا دارند.

هرگاه دوتابع بورل کراندار φ و ψ را هم‌ارز خوانیم اگر $\mu\{\varphi\neq\psi\}=0$، آنگاه هر ردهٔ هم‌ارزی شامل یک تابع پیوسته است؛ و طبق قسمت (یک)، شامل فقط یکی می‌باشد. لذا (با تعبیری روشن) $L^\infty(\mu)=C(\Delta)$.

خاصیت (چهار) از جمله چیزهای دیگر حکم می‌کند که از دو مجموعهٔ بورل از هم جدا در Δ حداکثر یکی می‌تواند در Δ چگال باشد، حتی اگر هیچ نقطه‌ای از Δ تنها نباشد (تمرین ۱۸).

بحث را با کاربردی در نظریهٔ اندازه پایان می‌دهیم. اگر E و F مجموعه‌های اندازه‌پذیری باشند، گوییم F ***تقریباً شامل*** E است اگر F شامل E جز مجموعه‌ای از اندازهٔ ۰ باشد؛ یعنی اگر $m(E-F)=0$.

اجتماع گردایه‌ای شمارش‌ناپذیر از مجموعه‌های اندازه‌پذیر همیشه اندازه‌پذیر نیست. با اینحال، مطلب زیر صحیح خواهدبود.

اگر $\{E_\alpha\}$ گردایهٔ دلخواهی از مجموعه‌های اندازه‌پذیر در $[0,1]$ باشد، مجموعهٔ اندازه‌پذیری مانند $E\subset[0,1]$ با دو خاصیت زیر وجود دارد:

(یک) ***E تقریباً شامل هر E_α است؛***

(دو) ***هرگاه F اندازه‌پذیر بوده و F تقریباً شامل هر E_α باشد، آنگاه F تقریباً شامل E است.***

لذا E کوچکترین کران بالایی $\{E_\alpha\}$ است. وجود E ایجاب می‌کند که جبربولی مجموعه‌های اندازه‌پذیر (به پیمانهٔ مجموعه‌های از اندازهٔ ۰) ***تام*** است.

حال، با ابزارهایی که در دست است، اثبات بسیار ساده خواهدبود.

فرض کنیم f_α تابع مشخص E_α باشد. در این صورت تبدیل گلفاند $\hat{f}_\alpha$ تابع مشخص یک مجموعهٔ باز (و بسته) مانند $\Omega_\alpha \subset \Delta$ است. فرض کنیم Ω اجتماع تمام این Ω_αها باشد. در این صورت Ω باز است؛ همچنین بستش $\overline{\Omega}$ چنین است، و تابعی مانند $f \in L^\infty(m)$ هست به طوری که $\hat{f}$ تابع مشخص $\overline{\Omega}$ می‌باشد. مجموعهٔ مطلوب E مجموعهٔ تمام $x \in [۰,۱]$هایی است که در آنها $f(x) = ۱$.

برگشتها

۱۴.۱۱ تعریف. نگاشت $x \to x^*$ از جبر مختلط (نه لزوماً تعویضپذیر) A به توی A را یک ***برگشت*** بر A نامند اگر چهار خاصیت زیر را دارا باشد: به ازای هر $x \in A$، $y \in A$، و $\lambda \in \mathbb{C}$،

$$(x+y)^* = x^* + y^*; \qquad (۱)$$

$$(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*; \qquad (۲)$$

$$(xy)^* = y^* x^*; \qquad (۳)$$

$$x^{**} = x. \qquad (٤)$$

به عبارت دیگر، هر برگشت یک پادخودریختی خطی - مزدوج با دورهٔ تناوب ۲ است.

هر $x \in A$ که $x^* = x$ ***هرمیتی*** یا ***خودالحاق*** نام دارد.

به عنوان مثال، $f \to \bar{f}$ یک برگشت بر $C(X)$ است. برگشتی که بعدها بیشترین توجه را به آن داریم عبور از یک عملگر بر یک فضای هیلبرت به الحاق آن می‌باشد.

۱۵.۱۱ قضیه. *هرگاه A یک جبر باناخ با یک برگشت بوده و $x \in A$، آنگاه*

(آ) $x+x^*$، $i(x-x^*)$، و xx^* هرمیتی‌اند،

(ب) x دارای نمایش منحصر به فردی چون $x=u+iv$ است که در آن $u\in A$، $v\in A$، و هر دوی u و v هرمیتی‌اند،

(پ) یکهٔ e هرمیتی است،

(ت) x در A معکوسپذیر است اگر و فقط اگر x^* معکوسپذیر باشد، که در این صورت $(x^{-1})^* = (x^*)^{-1}$، و

(ث) $\lambda \in \sigma(x)$ اگر و فقط اگر $\bar{\lambda} \in \sigma(x^*)$.

برهان. حکم (آ) واضح است. هرگاه $2u = x+x^*$ و $2v = i(x^*-x)$، آنگاه $x=u+iv$ نمایشی مانند قسمت (ب) است. فرض کنیم $x=u'+iv'$ نمایش دیگری باشد. قرار می‌دهیم $w=v'-v$. در این صورت هردوی w و iw هرمیتی‌اند؛ درنتیجه

$$iw=(iw)^*=-iw^*=-iw^*.$$

لذا $w=0$، ویکتایی نتیجه خواهدشد.

چون $e^*=ee^*$، قسمت (آ) قسمت (پ) را ایجاب می‌کند؛ قسمت (ت) از قسمت (پ) و $(xy)^*=y^*x^*$ نتیجه می‌شود. بالأخره، اگر قسمت (ت) را بر $\lambda e-x$ به جای x اعمال کنیم، قسمت (ث) نتیجه خواهدشد.

۱۶.۱۱ قضیه. *هرگاه جبرباناخ A تعویضپذیر و نیمه ساده باشد، آنگاه هر برگشت بر A پیوسته می‌باشد.*

برهان. فرض کنیم h یک همریختی مختلط بر A باشد، و تعریف می‌کنیم $\phi(x)=\overline{h}(x^*)$. خواص (۱) تا (۳) تعریف ۱۴.۱۱ نشان می‌هد که ϕ یک همریختی مختلط است. لذا ϕ پیوسته می‌باشد. فرض کنیم $x_n \to x$ و $x^*_n \to y$ در A.

در این صورت

$$\bar{h}(x^*) = \phi(x) = \lim \phi(x_n) = \lim \bar{h}(x^*_n) = \bar{h}(y).$$

چون A نیمه ساده است، $y = x^*$. لذا، طبق قضیهٔ گراف بسته، $x \to x^*$ بسته می‌باشد.

۱۷.۱۱ تعریف. هر جبر باناخ A با یک برگشت $x \to x^*$ صادق در

$$\|xx^*\| = \|x\|^2 \qquad (1)$$

به ازای هر $x \in A$ یک B^* - جبر نام دارد.

توجه کنید که $\|x\|^2 = \|xx^*\| \le \|x\|\|x^*\|$ ایجاب می‌کند که $\|x\| \le \|x^*\|$؛ درنتیجه داریم

$$\|x^*\| \le \|x^{**}\| = \|x\|.$$

لذا، در هر B^* - جبر،

$$\|x^*\| = \|x\|. \qquad (2)$$

همچنین نتیجه می‌شود که

$$\|xx^*\| = \|x\|\|x^*\|. \qquad (3)$$

به عکس، روابط (۲) و (۳) به وضوح رابطهٔ (۱) را ایجاب می‌کنند.

قضیهٔ زیر کلید برهان قضیهٔ طیفی است که در فصل ۱۲ داده خواهدشد.

۱۸.۱۱ قضیه (گلفاند - نیمارک (*Naimark*)). *فرض کنیم A یک B^*- جبرتعویضپذیر با فضای ایده‌آل ماکزیمال باشد. در این صورت تبدیل گلفاند یک یکریختی یکمتر از A به روی $C(\Delta)$ است که خاصیت اضافی*

$$h(x^*) = \overline{h(x)} \qquad (x \in A, h \in \Delta) \qquad (1)$$

یا، معادلاً،

$$(x^*)\hat{} = \overline{\hat{x}} \qquad (x \in A) \qquad (2)$$

را دارد. به خصوص، x هرمیتی است اگر وفقط اگر $\hat{x}$ یک تابع حقیقی باشد.

تعبیر (۲) این است که تبدیل گلفاند برگشت داده شده بر A را به برگشت طبیعی بر $C(\Delta)$، که مزدوج است، می‌برد. یکریختیهایی که برگشتها را به این نحو حفظ می‌کنند اغلب * - یکریختی نامیده می‌شوند.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $u \in A$، $u = u^*$، $h \in \Delta$. باید ثابت کنیم که $h(u)$ حقیقی است. به ازای tی حقیقی قرار می‌دهیم $z = u + ite$. هرگاه $h(u) = \alpha + i\beta$ که در آن α و β حقیقی‌اند، آنگاه

$$h(z) = \alpha + i(\beta + t), \qquad z^* = u^۲ + t^۲ e\ ;$$

درنتیجه

$$\alpha^۲ + (\beta + t)^۲ = |h(z)|^۲ \leq \|z\|^۲ = \|zz^*\| \leq \|u\|^۲ + t^۲$$

یا

$$\alpha^۲ + \beta^۲ + ۲\beta t \leq \|u\|^۲ \qquad (-\infty < t < \infty). \tag{۳}$$

بنابر (۳)، $\beta = ۰$ ؛ درنتیجه $h(u)$ حقیقی می‌باشد.

هرگاه $x \in A$، آنگاه $x = u + iv$ که در آن $u = u^*$ و $v = v^*$. لذا $x^* = u - iv$. چون $\hat{u}$ و $\hat{v}$ حقیقی‌اند، رابطهٔ (۲) ثابت خواهدشد.

لذا $\hat{A}$ تحت تزویج مختلط بسته است. لذا، طبق قضیهٔ استون - وایراشتراس، $\hat{A}$ در $C(\Delta)$ چگال است.

هرگاه $x \in A$ و $y = xx^*$، آنگاه $y = y^*$؛ درنتیجه $\|y^۲\| = \|y\|^۲$. به استقرا بر n، نتیجه می‌شود که به ازای $m = ۲^n$، $\|y^m\| = \|y\|^m$. لذا ، طبق فرمول شعاع طیفی و قسمت (پ) قضیهٔ ۹.۱۱، $\|y\| = \|\hat{y}\|_\infty$. چون $y = xx^*$، رابطهٔ (۲) ایجاب می‌کند که $\hat{y} = |\hat{x}|^۲$. بنابراین،

$$\|\hat{x}\|_\infty^۲ = \|\hat{y}\|_\infty = \|y\| = \|xx^*\| = \|x\|^۲,$$

یا $\|x\| = \|\hat{x}\|_\infty$. لذا $x \to \hat{x}$ یک یکمتری است. بنابراین $\hat{A}$ در $C(\Delta)$ بسته می‌باشد. چون $\hat{A}$ نیز در $C(\Delta)$ چگال است، نتیجه می‌شود که $\hat{A} = C(\Delta)$. این برهان را تمام خواهد

کرد.

قضیهٔ زیر حالت خاصی است از قضیه‌ای که هم اکنون ثابت شد. ما آن را به شکلی بیان می‌کنیم که مستلزم **معکوس** تبدیل گلفاند باشد تا بتوان حساب علامتی را لمس نمود.

۱۹.۱۱ قضیه. *هرگاه A یک B^*-جبر تعویض‌پذیر باشد که شامل عنصری مانند x است به طوری که چندجمله‌ایهای از x و x^* در A چگال‌اند، آنگاه فرمول*

$$(\psi f)\hat{} = f \circ \hat{x} \tag{1}$$

یک یکریختی یکمتر مانند ψ از $C(\sigma(x))$ به روی A تعریف می‌کند که در رابطهٔ

$$\psi \bar{f} = (\psi f)^* \tag{2}$$

به ازای هر $f \in C(\sigma(x))$ صدق می‌کند. به علاوه، هرگاه بر $\sigma(x)$ داشته باشیم $f(\lambda) = \lambda$، آنگاه $\psi f = x$.

برهان. فرض کنیم Δ فضای ایده‌آل ماکزیمال A باشد. در این صورت $\hat{x}$ یک تابع پیوسته بر Δ است که بردش $\sigma(x)$ است. فرض کنیم $h_1 \in \Delta$، $h_2 \in \Delta$، و $\hat{x}(h_1) = \hat{x}(h_2)$؛ یعنی $h_1(x) = h_2(x)$. در این صورت قضیهٔ ۱۸.۱۱ ایجاب می‌کند که $h_1(x^*) = h_2(x^*)$. اگر P یک چندجمله‌ای دو متغیره باشد، نتیجه می‌شود که

$$h_1(P(x, x^*)) = h_2(P(x, x^*))$$

زیرا h_1 و h_2 همریختی می‌باشند. طبق فرض، عنصرها به شکل $P(x, x^*)$ در A چگالند. لذا پیوستگی h_1 و h_2 ایجاب می‌کند که به ازای هر $y \in A$، $h_1(y) = h_2(y)$. بنابراین $h_1 = h_2$. پس ثابت کرده‌ایم که $\hat{x}$ یک به یک است. چون Δ فشرده است، $\hat{x}$ یک ***همانریختی*** از Δ به روی $\sigma(x)$ می‌باشد.

لذا $f \to f \circ \hat{x}$ یک یکریختی یکمتر از $C(\sigma(x))$ به روی $C(\Delta)$ است که تزویج مختلط را نیز حفظ می‌کند.

لذا هر $f\circ\hat{x}$ (طبق قضیهٔ ۱۸.۱۱) تبدیل گلفاند عنصر منحصر به فردی از A است که آن را با ψf نشان می‌دهیم و در $\|\psi f\|=\|f\|_\infty$ صدق می‌کند. حکم (۲) از رابطهٔ (۲) قضیهٔ ۱۸.۱۱ می‌آید. هرگاه $f(\lambda)=\lambda$، آنگاه $f\circ\hat{x}=\hat{x}$؛ درنتیجه از رابطهٔ (۱) داریم $\psi f = x$.

تبصره. در وضعیت توصیف شده به وسیلهٔ قضیهٔ ۱۹.۱۱، کاملاً با معنی است که عنصری از A که تبدیل گلفاند آن $f\circ\hat{x}$ است را به صورت $f(x)$ بنویسیم. از این نماد مکرر استفاده خواهدشد. این حساب علامتی (برای این جبرهای خاص) را به توابع پیوستهٔ دلخواه بر طیف x، چه هلوریخت باشند یا نباشند، وسعت خواهدداد.

وجود ریشه‌های دوم اغلب مورد توجه خاص است،و در جبرهای با برگشت می‌توان پرسید تحت چه شرایطی عناصر هرمیتی ریشه‌های دوم هرمیتی دارند.

۲۰.۱۱ قضیه. *فرض کنیم A یک جبر باناخ تعویضپذیر با یک برگشت بوده، $x\in A$، $x=x^*$، و $\sigma(x)$ شامل λ ای حقیقی با $\lambda\le 0$ باشد. در این صورت $y\in A$ ای هست که $y=y^*$ و $y^2=x$.*

توجه کنید که برگشت داده شده پیوسته فرض نشده است. این به ما مجال استفاده از رادیکال A را می‌دهد. ما بعدها (در قضیهٔ ۲۶.۱۱) خواهیم دید که می‌توان تعویضپذیری را از مفروضات حذف کرد. از این امر در برهان قضیهٔ ۳۱.۱۱ استفاده خواهدشد.

برهان. فرض کنیم Ω متمم (در $\mathbb{C}$) مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی نامثبت باشد. $f\in H(\Omega)$ ی چنان وجود دارد که $f^2(\lambda)=\lambda$ و $f(1)=1$. چون $\sigma(x)\subset\Omega$،

می‌توانیم $y \in A$ را با

$$y = \widetilde{f}(x) \tag{۱}$$

مانند تعریف ۲۶.۱۰ تعریف کنیم. در این صورت، طبق قضیهٔ ۲۷.۱۰، $y^2 = x$. ثابت می‌کنیم $y^* = y$.

چون Ω همبند ساده است، قضیهٔ رونگه چندجمله‌ایهای P_n را به ما می‌دهد که به طوریکنواخت بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ Ω به طور یکنواخت به f همگرایند. Q_n را با

$$2Q_n(\lambda) = P_n(\lambda) + \overline{P_n(\overline{\lambda})} \tag{۲}$$

تعریف می‌کنیم. چون $f(\overline{\lambda}) = \overline{f(\lambda)}$، چندجمله‌ایهای Q_n به همان نحو به f همگرایند. تعریف می‌کنیم

$$y_n = Q_n(x) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{۳}$$

بنابر (۲)، چندجمله‌ایهای Q_n دارای ضرایب **حقیقی**اند. چون $x = x^*$، پس $y_n = y_n^*$. بنابر قضیهٔ ۲۷.۱۰،

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n, \tag{۴}$$

زیرا $Q_n \to f$؛ درنتیجه $Q_n(x) \to \widetilde{f}(x)$. اگر برگشت پیوسته فرض می‌شد، مجموعهٔ عناصر هرمیتی بسته بود، و $y^* = y$ مستقیماً از (۴) نتیجه می‌شد.

فرض کنیم R رادیکال A باشد. همچنین $\pi: A \to A/R$ نگاشت خارج قسمتی باشد. هرگاه $\pi(x) = \pi(y)$ و $z = x - y$، آنگاه $z \in R$؛ لذا $z^* \in R$ زیرا $\rho(z^*) = \rho(z) = 0$ (ر.ک.قضیهٔ ۱۵.۱۱)، و لذا $\pi(x^*) = \pi(y^*)$. این نشان می‌دهد که فرمول

$$[\pi(a)]^* = \pi(a^*) \qquad (a \in A) \tag{۵}$$

یک برگشت در A/R را تعریف می‌کند. اگر $\alpha \in A$ هرمیتی باشد، $\pi(a)$ نیز چنین است. چون π پیوسته است، $\pi(y_n) \to \pi(y)$. و چون A/R با $\hat{A}$ یکریخت است (قضیهٔ ۹.۱۱)، A/R نیمه ساده است، و لذا هر برگشت در A/R پیوسته می‌باشد (قضیهٔ ۱۶.۱۱). پس $\pi(y)$ هرمیتی می‌باشد. بنابراین $\pi(y) = \pi(y^*)$.

نتیجه می‌گیریم که $y - y^*$ در رادیکال A قرار دارد.

بنابر قضیهٔ ۱۵.۱۱، $y=u+iv$ که در آن $u=u^*$ و $v=v^*$. هم اکنون ثابت شد که $v\in R$. چون $x=y^2$، داریم

$$x=u^2-v^2+2iuv. \tag{6}$$

فرض کنیم h یک همریختی مختلط از A باشد. چون $v\in R$، $h(v)=0$. لذا $h(x)=[h(x)]^2$. طبق فرض، $0\notin\sigma(x)$. لذا $h(x)\neq 0$؛ درنتیجه $h(u)\neq 0$. بنابر قضیهٔ ۵.۱۱، u در A معکوسپذیر است. چون $x=x^*$، رابطهٔ (٦) ایجاب می‌کند که $uv=0$. چون $v=u^{-1}(uv)$، نتیجه می‌گیریم که $v=0$. این برهان را تمام خواهد کرد.

تبصره. هرگاه $\sigma(x)\subset(0,\infty)$، آنگاه نیز داریم $\sigma(y)\subset(0,\infty)$. این از رابطهٔ (۱) (تعریف y) و قضیهٔ نگاشت طیفی نتیجه می‌شود.

کاربردهایی در جبرهای تعویض‌ناپذیر

جبرهای تعوض‌ناپذیر همواره شامل جبرهای تعویضپذیرند. گاهی می‌توان از وجود آنها برای تعمیم بعضی از قضایا از وضعیت تعویضپذیری به وضعیت تعویض‌ناپذیری استفاده کرد. ما قبلاً این کار را در سطح بدیهی انجام داده‌ایم: در بحث مقدماتی از طیفها، توجه ما معمولاً به یک عنصر $x\in A$ معطوف می‌شد؛ زیرجبر (بسته) A_0ی از A که x تولید می‌کند تعویضپذیر است، و بخش اعظم بحث در A_0 صورت می‌گرفت. ساختن ساده‌ای (قضیه ۲۲.۱۱) وجود دارد که این امر را در بر می‌گیرد. وقتی A دارای برگشت باشد، طرح دیگری (قضیهٔ ۲۵.۱۱) را می‌توان به کار گرفت.

۲۱.۱۱ مرکزسازها . اگر S زیرمجموعه‌ای از جبر باناخ A باشد، ***مرکزساز*** S مجموعهٔ زیر است:

$$\Gamma(S) = \{x \in A : xs = sx، \text{به ازای هر } s \in S\}.$$

گوییم S ***تعویض می‌شود*** اگر هر دو عنصر S با یکدیگر تعویض شوند. ما ازخواص سادهٔ زیر ازمرکزسازها استفاده خواهیم کرد.

(آ) $\Gamma(S)$ یک زیرجبر بستهٔ A است.

(ب) $S \subset \Gamma(\Gamma(s))$.

(پ) هرگاه S تعویض شود، آنگاه $\Gamma(\Gamma(S))$ تعویض می‌شود.

درواقع، اگر x و y با هر $s \in S$ تعویض شود، λx، $x+y$، و xy نیز چنین می‌کنند؛ چون ضرب در A پیوسته است، $\Gamma(S)$ بسته است. این قسمت (آ) را ثابت می‌کند. چون هر $s \in S$ با هر $x \in \Gamma(S)$ تعویض می‌شود، (ب) برقرار است. هرگاه S تعویض شود، آنگاه $S \subset \Gamma(S)$؛ درنتیجه $\Gamma(S) \supset \Gamma(\Gamma(S))$ که (پ) را ثابت می‌کند زیرا هر وقت $\Gamma(E) \subset E$، $\Gamma(E)$ به وضوح تعویض می‌شود.

۲۲.۱۱ قضیه. *فرض کنیم A یک جبر باناخ بوده، $S \subset A$، S تعویض شود، و $B = \Gamma(\Gamma(S))$. در این صورت B یک جبرباناخ تعویضپذیر است، $S \subset B$، و به ازای هر $x \in B$، $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.*

برهان. چون $e \in B$، بخش ۲۱.۱۱ نشان می‌دهد که B یک جبر باناخ تعویضپذیر است که شامل S می‌باشد. فرض کنیم $x \in B$ و x در A معکوسپذیر باشد. باید نشان دهیم که $x^{-1} \in B$. چون $x \in B$، به ازای هر $y \in \Gamma(S)$، $xy = yx$؛ لذا $y = x^{-1}yx$، $yx^{-1} = x^{-1}y$. این می‌گوید که $x^{-1} \in \Gamma(\Gamma(S)) = B$.

۲۳.۱۱ قضیه. *فرض کنیم A یک جبر باناخ بوده، $x \in A$، $y \in A$، و $xy = yx$. در این صورت*

$$\sigma(x+y) \subset \sigma(x) + \sigma(y) \quad \text{و} \quad \sigma(xy) \subset \sigma(x)\sigma(y).$$

برهان. قرار می‌دهیم $S=\{x,y\}$ و $B=\Gamma(\Gamma(S))$. در این صورت $x+y\in B$، $xy\in B$، و قضیهٔ ۲۲.۱۱ نشان می‌دهد که باید ثابت کنیم که

$$\sigma_B(x+y)\subset\sigma_B(x)+\sigma_B(y) \quad \text{و} \quad \sigma_B(xy)\subset\sigma_B(x)\sigma_B(y).$$

چون B تعویضپذیر است، $\sigma_B(z)$ برد تبدیل گلفاند $\hat{z}$ به ازای هر $z\in B$ است. (در اینجا تبدیلات گلفاند توابعی برفضای ایده‌آل ماکزیمال Bاند.) چون

$$(x+y)\hat{}=\hat{x}+\hat{y} \quad \text{و} \quad (xy)\hat{}=\hat{x}\hat{y},$$

نتیجهٔ مطلوب را خواهیم داشت.

۲٤.۱۱ تعریف. فرض کنیم A یک جبر با یک برگشت باشد. هرگاه $x\in A$ و $xx^*=x^*x$، آنگاه گوییم x ***نرمال*** است. گوییم مجموعهٔ $S\subset A$ نرمال است اگر S تعویض شود و هروقت $x\in S$، $x^*\in S$.

۲۵.۱۱ قضیه. *فرض کنیم A یک جبر باناخ با یک برگشت بوده، و B زیرمجموعه‌ای نرمال از A باشد که نسبت به نرمال بودن ماکزیمال است. در این صورت،*

(آ) B یک زیرجبر تعویضپذیر بستهٔ A است، و

(ب) به ازای هر $x\in B$، $\sigma_B(x)=\sigma_A(x)$.

توجه کنید که برگشت پیوسته فرض نشده است ولی معلوم می‌شودکه B بسته است.

برهان. با محک ساده‌ای برای عضویت در B آغاز می‌کنیم: هرگاه $x\in A$، $xx^*=x^*x$، و به ازای هر $y\in B$ داشته باشیم $xy=yx$، آنگاه $x\in B$.

چرا که اگر x در این شرایط صدق کند، نیز به ازای هر $y \in B$ داریم $xy^* = y^*x$، زیرا B نرمال است، و لذا $x^*y = yx^*$. پس $B \cup \{x, x^*\}$ نرمال می‌باشد. بنابراین $x \in B$، زیرا B ماکزیمال می‌باشد.

این محک نشان می‌دهد که مجموعها و حاصل ضربهای اعضای B در Bاند. لذا B یک جبر تعویضپذیر می‌باشد.

فرض کنیم $x_n \in B$ و $x_n \to x$. چون به ازای هر $y \in B$، $x_n y = y x_n$، و ضرب پیوسته است، داریم $xy = yx$ و لذا نیز داریم

$$x^*y = (y^*x)^* = (xy^*)^* = yx^*.$$

به خصوص، به ازای هر n، $x^*x_n = x_n x^*$ که به $xx^* = xx^*$ منجر می‌شود. لذا، طبق محک فوق، $x \in B$. این ثابت می‌کند که B بسته است و قسمت (آ) کامل خواهدشد.

همچنین توجه کنید که $e \in B$. برای اثبات (ب) فرض می‌کنیم $x \in B$ و $x^{-1} \in A$. چون x نرمال است، x^{-1} نیز چنین است، وچون x با هر $y \in B$ تعویض می‌شود، x^{-1} نیز چنین می‌کند. بنابراین $x^{-1} \in B$.

اولین کاربرد ما از این تعمیمی است از قضیهٔ ۲۰.۱۱:

۲۶.۱۱ قضیه. *از مفروضات قضیهٔ ۲۰.۱۱ می‌توان کلمهٔ "تعویضپذیر" را حذف کرد.*

برهان. بنابر قضیهٔ ماکزیمالی هاسدورف، هرمیتی (لذا نرمال) دادهٔ شدهٔ $x \in A$ در مجموعهٔ نرمال ماکزیمالی چون B قراردارد. بنابر قضیهٔ ۲۵.۱۱، می‌توان قضیهٔ ۲۰.۱۱ را با B به جای A اعمال کرد.

کاربرد بعدی ما ازقضیهٔ ۲۵.۱۱ چند نتیجه از قضیهٔ ۱۸.۱۱ را به B^* - جبرهای دلخواه (نه لزوماً تعویضپذیر) تعمیم می‌دهد.

۲۷.۱۱ تعریف . در یک جبر باناخ با برگشت، عبارت "$x \geq 0$:" یعنی $x = x^*$ و

$\sigma(x) \subset [0,\infty)$.

۲۸.۱۱ قضیه. ***هر B^* - جبر مانند A دارای خواص زیر است:***

(آ) عنصرهای هرمیتی دارای طیفهای حقیقی‌اند.

(بـ) هرگاه $x \in A$ نرمال باشد، آنگاه $\rho(x) = \|x\|$.

(پـ) هرگاه $y \in A$، آنگاه $\rho(yy^*) = \|y\|^2$.

(تـ) هرگاه $u \in A$، $v \in A$، $u \geq 0$، و $v \geq 0$، آنگاه $u + v \geq 0$.

(ثـ) هرگاه $y \in A$، آنگاه $yy^* \geq 0$.

(جـ) هرگاه $y \in A$، آنگاه $e + yy^*$ در A معکوسپذیر است.

برهان. هر $x \in A$ نرمال در یک مجموعهٔ نرمال ماکزیمال مانند $B \subset A$ قراردارد. بنابر قضایای ۱۸.۱۱ و ۲۵.۱۱، B یک B^* - جبر تعویضپذیر است که با تبدیل گلفاند آن $\hat{B} = C(\Delta)$ به طور یکمتر یکریخت بوده و دارای خاصیت زیر است:

$$\sigma(z) = \hat{z}(\Delta) \qquad (z \in B). \tag{۱}$$

در اینجا $\sigma(z)$ طیف z نسبت به A است، Δ فضای ایده‌آل ماکزیمال B است، و $\hat{z}(\Delta)$ برد تبدیل گلفاند z، به عنوان عنصری از B، می‌باشد.

اگر $x = x^*$، قضیهٔ ۱۸.۱۱ نشان می‌دهد که $\hat{x}$ یک تابع حقیقی بر Δ است. لذا رابطهٔ (۱) قسمت (آ) را ایجاب می‌کند.

به ازای هر x نرمال، رابطهٔ (۱) ایجاب می‌کند که $\rho(x) = \|\hat{x}\|_\infty$. همچنین $\|x\| = \|\hat{x}\|_\infty$ زیرا B و $\hat{B}$ یکریخت‌اند. این قسمت (بـ) را ثابت می‌کند.

هرگاه $y \in A$، آنگاه yy^* هرمیتی است. لذا (پـ) از (بـ) نتیجه می‌شود زیرا $\rho(yy^*) = \|yy^*\| = \|y\|^2$.

حال فرض کنیم u و v همانند در(تـ) باشند. قرار می‌دهیم $\alpha = \|u\|$، $\beta = \|v\|$، $w = u + v$، و $\gamma = \alpha + \beta$. در این صورت $\sigma(u) \subset [0, \alpha]$؛ درنتیجه

$$\sigma(\alpha e-u)\subset[\circ,\alpha] \tag{۲}$$

و لذا (ب) ایجاب می‌کند که $\|\alpha e-u\|\le\alpha$. به همین دلیل، $\|\beta e-v\|\le\beta$. بنابراین

$$\|\gamma e-w\|\le y. \tag{۳}$$

چون $w=w^*$، قسمت (آ) ایجاب می‌کند که $\sigma(\gamma e-w)$ حقیقی است. لذا، به خاطر (۳)،

$$\sigma(\gamma e-w)\subset[-\gamma,\gamma]. \tag{٤}$$

ولی (٤) ایجاب می‌کند که $\sigma(w)\subset[\circ,\text{۲}\gamma]$. لذا $w\ge\circ$ و قسمت (ت) ثابت می‌شود.

حال به اثبات (ث) می‌پردازیم. قرار می‌دهیم $x=yy^*$. در این صورت x هرمیتی است، و هرگاه B را مانند اولین بند این برهان اختیار کنیم، آنگاه $\hat{x}$ یک تابع حقیقی بر Δ است. بنابر (۱)، باید نشان دهیم که بر Δ، $\hat{x}\ge\circ$.

چون $\hat{B}=C(\Delta)$، $z\in B$ی هست به طوری که

$$\hat{z}=|\hat{x}|-\hat{x} \quad \text{بر } \Delta. \tag{۵}$$

در این صورت $z=z^*$ زیرا $\hat{z}$ حقیقی است (قضیهٔ ۱۸.۱۱). قرار می‌دهیم

$$zy=w=u+iv, \tag{٦}$$

که در آن u و v عنصرهای هرمیتی A اند. در این صورت

$$ww^*=zyy^*z^*=zxz=z^{\text{۲}}x \tag{۷}$$

و لذا

$$ww^*=\text{۲}u^{\text{۲}}+\text{۲}v^{\text{۲}}-ww^*=\text{۲}u^{\text{۲}}+\text{۲}v^{\text{۲}}-z^{\text{۲}}x. \tag{۸}$$

چون $u=u^*$، $\sigma(u)$ طبق (آ) حقیقی است؛ درنتیجه، طبق قضیهٔ نگاشت طیفی، $u^{\text{۲}}\ge\circ$. به همین ترتیب، $v^{\text{۲}}\ge\circ$. بنابر (۵) بر Δ داریم $\hat{z}^{\text{۲}}\hat{x}\le\circ$. چون $z^{\text{۲}}x\in B$، از رابطهٔ (۱) معلوم می‌شود که $-z^{\text{۲}}x\ge\circ$. حال رابطهٔ (۸) و قسمت (ت) ایجاب می‌کنند که $w^*w\ge\circ$.

ولی $\sigma(ww^*)\subset\sigma(w^*w)\cup\{\circ\}$ (تمرین ٤، فصل ۱۰). لذا $ww^*\ge\circ$. بنابر (۷)، این یعنی $\hat{z}^{\text{۲}}\hat{x}\ge\circ$ بر Δ. بنابر (۵)، نامساوی اخیر فقط وقتی برقرار است که $\hat{x}=|\hat{x}|$. لذا $\hat{x}\ge\circ$ و قسمت (ث) ثابت می‌شود.

بالأخره، (جـ) نتیجه‌ای از (ثـ) است.

حال تساوی طیفها را می‌توان در وضعیتی دیگر که در آن تعویضپذیری نقشی ندارد ثابت کرد.

۲۹.۱۱ قضیه. ***فرض کنیم A یک B^*- جبر و B یک زیرجبر بستهٔ A بوده، $e \in B$، و به ازای هر $x \in B$، $x^* \in B$. در این صورت، به ازای هر $x \in B$، $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$.***

برهان. فرض کنیم $x \in B$ و x دارای معکوسی در A باشد. باید نشان دهیم که $x^{-1} \in B$. چون x در A معکوسپذیر است، x^* نیز چنین است؛ لذا xx^* نیز چنین است، و درنتیجه $0 \notin \sigma_A(xx^*)$. بنابر قسمت (آ) قضیهٔ ۲۸.۱۱، $\sigma_A(xx^*) \subset (-\infty, \infty)$؛ در نتیجه $\sigma_A(xx^*)$ دارای یک مؤلفهٔ همبند در $\mathbb{C}$ می‌باشد. حال قضیهٔ ۱۸.۱۰ نشان می‌دهد که $\sigma_A(xx^*) = \sigma_B(xx^*)$. لذا $(xx^*)^{-1} \in B$، و بالأخره $x^{-1} = x^*(xx^*)^{-1} \in B$.

تابعیهای مثبت

۳۰.۱۱ تعریف. هر ***تابعی مثبت*** یک تابع خطی مانند F بر یک جبر باناخ مانند A با یک برگشت است که در نامساوی

$$F(xx^*) \geq 0$$

به ازای هر $x \in A$ صدق می‌کند. توجه کنید که A تعویضپذیر فرض نشده و پیوستگی F نیز مفروض نیست. (البته معنی "مثبت" به برگشت خاص موردنظر بستگی دارد.)

۳۱.۱۱ قضیه. ***هر تابعی مثبت F بر جبر باناخ A با برگشت از خواص زیر بهره‌مند است:***

(آ) $F(x^*) = \overline{F(x)}$؛

(ب) $|F(xy^*)|^2 \leq F(xx^*)F(yy^*)$؛

(پ) $|F(x)|^2 \leq F(e)F(xx^*) \leq F(e)^2\rho(xx^*)$؛

(ت) به ازای هر نرمال $x \in A$، $|F(x)| \leq F(e)\rho(x)$؛

(ث) F یک تابعی خطی کراندار بر Δ است. به علاوه، اگر A تعویضپذیر باشد، $\|F\| = F(e)$، و اگر برگشت در $\|x^*\| \leq \beta\|x\|$ به ازای هر $x \in A$ صدق کند، $\|F\| \leq \beta^{1/2}F(e)$.

برهان. اگر $x \in A$ و $y \in A$، قرار می‌دهیم

$$s = F(yx^*) \text{،} \quad r = F(xy^*) \text{،} \quad q = F(yy^*) \text{،} \quad p = F(xx^*). \tag{1}$$

چون به ازای هر $\alpha \in \mathcal{C}$ داریم $F[(x+\alpha y)(x^*+\overline{\alpha}y^*)] \geq 0$،

$$p + \overline{\alpha}r + \alpha s + |a|^2 q \geq 0. \tag{2}$$

رابطهٔ (۲) به ازای $\alpha = 1$ و $\alpha = i$ نشان می‌دهد که $s+r$ و $i(s-r)$ حقیقی‌اند. لذا $s = \bar{r}$. این به ازای $y=e$ قسمت (آ) را به ما می‌دهد.

اگر $r = 0$، قسمت (ب) واضح است. اگر $r \neq 0$، در (۲) فرض می‌کنیم $\alpha = tr/|r|$ که در آن t حقیقی است. در این صورت (۲) به شکل زیر در می‌آید:

$$p + 2|r|t + qt^2 \geq 0 \qquad (-\infty < t < \infty)\,; \tag{3}$$

درنتیجه $|r|^2 \leq pq$. این قسمت (ب) را ثابت می‌کند.

چون $ee^* = e$، نیمهٔ اول (پ) حالت خاصی از (ب) است. برای نیمهٔ دوم $t > \rho(xx^*)$ را اختیار می‌کنیم. در این صورت $\sigma(te - xx^*)$ در نیمصفحهٔ راست باز قرار دارد. بنا بر قضیهٔ ۲۶.۱۱، $u \in A$ای هست که $u = u^*$ و $u^2 = te - xx^*$. لذا

$$rF(e) - F(xx^*) = F\left(u^2\right) \geq 0. \tag{4}$$

پس داریم

$$F(xx^*) \leq F(e)\rho(xx^*). \tag{5}$$

این قسمت (پ) را تمام می‌کند.

اگر x نرمال باشد، یعنی اگر $xx^*=x^*x$، قضیهٔ ۲۳.۱۱ ایجاب می‌کند که $\sigma(xx^*)\subset\sigma(x)\sigma(x^*)$؛ درنتیجه،

$$\rho(xx^*)\le\rho(x)\rho(x^*)=\rho(x)^{۲}. \tag{۶}$$

واضح است که (ت) از (۶) و قسمت (پ) نتیجه می‌شود.

هرگاه A تعویضپذیر باشد، آنگاه (ت) به ازای هر $x\in A$ برقرار است؛ درنتیجه $\|F\|=F(e)$. اگر $\|x^*\|\le\beta\|x\|$، قسمت (پ) ایجاب می‌کند که $|F(x)|\le F(e)\beta^{۱/۲}\|x\|$، زیرا $\rho(xx^*)\le\|x\|\|x^*\|$. این حالات خاص قسمت (ث) را سامان می‌دهد.

پیش از پرداختن به حالت کلی، ملاحظه می‌کنیم که $F(e)\ge ۰$، و اگر $F(e)=۰$، به ازای هر $x\in A$، $F(x)=۰$؛ این از قسمت (پ) نتیجه می‌شود. لذا، بی‌آنکه به کلیت آسیبی برسد، تا پایان این برهان فرض می‌کنیم

$$F(e)=۱. \tag{۷}$$

فرض کنیم $\overline{H}$ بست H، یعنی مجموعهٔ تمام عنصرهای هرمیتی A، باشد. توجه کنید که H و iH فضاهای برداری **حقیقی** بوده و، بنابر قضیهٔ ۱۵.۱۱، $A=H+iH$. بنابر (ت)، تحدید F به H یک تابعی خطی - حقیقی با نرم ۱ است و لذا به یک تابعی خطی - حقیقی Φ بر $\overline{H}$ ، نیز با نرم ۱، وسعت می‌یابد. حکم می‌کنیم که

$$\text{اگر } y\in\overline{H}\cap i\overline{H}\text{،}\qquad \Phi(y)=۰\text{،} \tag{۸}$$

چرا که اگر $y=\lim u_n=\lim(iv_n)$ که درآن $u_n\in H$ و $v_n\in H$، داریم $u_n^{۲}\to y^{۲}$ و $v_n^{۲}\to -y^{۲}$؛ درنتیجه (پ) و (ت) ایجاب می‌کنند که

$$\left|F\left(u_n\right)\right|^{۲}\le F\left(u_n^{۲}\right)\le F\left(u_n^{۲}+v_n^{۲}\right)\le\left\|u_n^{۲}+v_n^{۲}\right\|\to ۰. \tag{۹}$$

چون $\Phi(y)=\lim F\left(u_n\right)$، رابطهٔ (۸) ثابت می‌شود.

بنابر قضیهٔ ۲۰.۵، ثابتی مانند $\gamma<\infty$ چنان وجود دارد که هر $x\in A$ دارای نمایشی به صورت زیر است:

$$x=x_{۱}+ix_{۲}\text{،}\qquad x_{۱}\in\overline{H}\text{،}\quad x_{۲}\in\overline{H}\text{،}\qquad \left\|x_{۱}\right\|+\left\|x_{۲}\right\|\le\gamma\|x\|. \tag{۱۰}$$

هرگاه $x=u+iv$ که در آن $u\in H$ و $v\in H$، آنگاه $x_{۱}-u$ و $x_{۲}-v$ در $\overline{H}\cap i\overline{H}$

قراردارند. لذا از رابطهٔ (۸) داریم

$$F(x) = F(u) + iF(v) = \Phi(x_1) + i\Phi(x_2); \tag{۱۱}$$

درنتیجه

$$|F(x)| \le |\Phi(x_1)| + |\Phi(x_2)| \le \|x_1\| + \|x_2\| \le \gamma\|x\|. \tag{۱۲}$$

این برهان را تمام خواهد کرد.

تمرین ۱۳ اطلاعات بیشتری از قسمت (ث) را شامل است.

در قضیهٔ بعد مثالهایی از تابعیهای مثبت و رابطهٔ بین آنها و اندازه‌های مثبت ارائه می‌شود. این قضیه شامل قضیهٔ کلاسیک بوچنر (*Bochner*) و توابع مثبت - معین به عنوان حالتی بسیار خاص است. در تمرین ۱۴، انطباقها از یکی به دیگری ذکر شده‌اند.

۳۲.۱۱ قضیه. ***فرض کنیم A یک جبر باناخ تعویضپذیر با فضای ایده‌آل ماکزیمال Δ و با یک برگشت متقارن باشد به این معنی که***

$$h(x^*) = \overline{h(x)} \qquad (x \in A, h \in \Delta). \tag{۱}$$

فرض کنیم K مجموعهٔ تمام تابعیهای مثبت F بر A و صادق در $F(e) \le ۱$ باشد. همچنین M مجموعهٔ تمام اندازه‌های بورل منتظم مثبت μ بر Δ و صادق در $\mu(\Delta) \le ۱$ باشد. در این صورت، فرمول

$$F(x) = \int_\Delta \hat{x}\, d\mu \qquad (x \in A) \tag{۲}$$

یک تناظر یک به یک بین مجموعه‌های محدب K و M ایجاب می‌کند که نقاط اکستریم را به نقاط اکستریم می‌برد.

درنتیجه، تابعیهای خطی ضربی بر Δ درست نقاط اکستریم K می‌باشند.

برهان. هرگاه $\mu \in M$ و F با (۲) تعریف شده باشد، آنگاه F به وضوح خطی است و

$F(xx^*) = \int |\hat{x}|^2 d\mu \geq 0$ زیرا (۱) ایجاب می‌کند که $(xx^*)\hat{} = |\hat{x}|^2$.
چون $F(e) = \mu(\Delta)$، $F \in K$.

هرگاه $F \in K$، آنگاه، طبق قسمت (ت) قضیهٔ ۳۱.۱۱، F بر رادیکال A صفر می‌شود. لذا یک تابعی مانند $\hat{F}$ بر $\hat{A}$ وجود دارد که در $\hat{F}(\hat{x}) = F(x)$ به ازای هر $x \in A$ صدق می‌کند. درواقع، طبق قسمت (ت) قضیهٔ ۳۱.۱۱،

$$|\hat{F}(\hat{x})| = |F(x)| \leq F(e)\rho(x) = F(e)\|\hat{x}\|_\infty \qquad (x \in A). \tag{۳}$$

پس $\hat{F}$ یک تابعی خطی با نرم $F(e)$ بر زیرفضای $\hat{A}$ از $C(\Delta)$ است. این به یک تابعی بر $C(\Delta)$ با همان نرم توسیع می‌یابد، و حال قضیهٔ نمایش ریس یک اندازهٔ بورل منتظم مانند μ با $\|\mu\| = F(e)$ و صادق در (۲) به دست می‌دهد. چون

$$\mu(\Delta) = \int_\Delta \hat{e}\, d\mu = F(e) = \|\mu\|, \tag{۴}$$

می‌بینیم که $\mu \geq 0$. لذا $\mu \in M$.

بنابر (۱)، $\hat{A}$ در مفروضات قضیهٔ استون - وایراشتراس صدق می‌کند و لذا در $C(\Delta)$ چگال است. این ایجاب می‌کند که μ منحصراً به وسیلهٔ F تعیین می‌گردد.

یک نقطهٔ اکستریم M عبارت است از ۰؛ سایرین عبارتند از جرمهای یکهٔ متمرکز شده در نقاط $h \in \Delta$. چون هر همریختی مختلط A به شکل $x \to \hat{x}(h)$ به ازای $h \in \Delta$ی است، برهان تمام خواهدبود.

بحث را با نشان دادن اینکه نقاط اکستریم K حتی اگر (۱) برقرار نباشد ضربی‌اند پایان می‌بخشیم.

۳۳.۱۱ قضیه. فرض کنیم K مجموعهٔ تمام تابعیهای مثبت F بر جبر باناخ تعویضپذیر A با یک برگشت صادق در $F(e) \leq 1$ باشد. هرگاه $F \in K$، آنگاه هریک از سه خاصیت زیردوتای دیگر را ایجاب می‌کند:

(آ) به ازای هر $x, y \in A$، $F(xy) = F(x)F(y)$؛

(ب) به ازای هر $x \in A$، $F(xx^*) = F(x)F(x^*)$؛

(پ) F یک نقطهٔ اکستریم K است.

برهان. واضح است که (آ) قسمت (ب) را ایجاب می‌کند. فرض کنیم (ب) برقرار باشد. به ازای $x=e$، (ب) نشان می‌دهد که $F(e)=F(e)^2$؛ درنتیجه $F(e)=0$ یا $F(e)=1$. وقتی $F(e)=0$، طبق قسمت (پ) قضیهٔ ۳۱.۱۱، $F=0$؛ و درنتیجه F یک نقطهٔ اکستریم K است. فرض کنیم $F(e)=1$، و $2F=F_1+F_2$، که در آن $F_1\in K$ و $F_2\in K$. باید نشان دهیم که $F_1=F$. واضح است که $F_1(e)=1=F(e)$. هرگاه $x\in A$ چنان باشد که $F(x)=0$، آنگاه، طبق قسمت (ب) و قضیهٔ ۳۱.۱۱،

$$|F_1(x)|^2 \le F_1(xx^*) \le 2F(xx^*) = 2F(x)F(x^*) = 0. \tag{1}$$

لذا F_1 با F بر فضای پوچ F و در e یکی است. پس داریم $F_1=F$. لذا (ب) قسمت (پ) را ایجاب می‌کند.

برای نشان دادن اینکه (پ) قسمت (آ) را ایجاب می‌کند، فرض کنیم F یک نقطهٔ اکستریم K باشد. یا $F(e)=0$ که در این حالت چیزی برای اثبات نمی‌ماند، یا $F(e)=1$. ابتدا حالت خاصی از (آ) را ثابت می‌کنیم؛ یعنی

$$F(xx^*y) = F(xx^*)F(y) \qquad (x\in A, y\in A). \tag{2}$$

x را طوری می‌گیریم که $\|xx^*\|<1$. بنا بر قضیهٔ ۲۰.۱۱، $z\in Z$ی هست که $z=z^*$ و $z^2=e-xx^*$. تعریف می‌کنیم

$$\Phi(y) = F(xx^*y) \qquad (y\in A). \tag{3}$$

در این صورت

$$\Phi(yy^*) = F(xx^*yy^*) = F[(xy)(xy)^*] \ge 0, \tag{4}$$

و نیز

$$(F-\Phi)(yy^*) = F[(e-xx^*)yy^*] = F\left(z^2yy^*\right) = F[(yz)(yz)^*] \ge 0. \tag{5}$$

چون

$$0 \le \Phi(e) = F(xx^*) \le F(e)\|xx^*\| < 1, \tag{6}$$

روابط (۴) و (۵) نشان می‌دهند که هر دوی Φ و $F-\Phi$ در Kاند. هرگاه $\Phi(e)=0$،

آنگاه $\Phi = \circ$. اگر $\Phi(e) > \circ$، رابطهٔ (٦) نشان می‌دهد که

$$F = \Phi(e).\frac{\Phi}{\Phi(e)} + (F-\Phi)(e).\frac{F-\Phi}{F(e)-\Phi(e)}, \tag{۷}$$

یعنی ترکیبی محدب از اعضای K. چون F اکستریم است، نتیجه می‌گیریم که

$$\Phi = \Phi(e)F. \tag{۸}$$

حال رابطهٔ (۲) از (۸) و (۳) نتیجه می‌شود.

بالأخره، رفتن از (۲) به (آ) به وسیلهٔ هریک از اتحادهای زیر که به وسیلهٔ هر برگشت برقرارند صورت خواهد گرفت:

هرگاه $n = ۳,۴,۵,\ldots$، $\omega = \exp(۲\pi i/n)$، $x \in A$، ***و*** $z_p = e + \omega^{-p}x$، ***آنگاه***

$$x = \frac{۱}{n}\sum_{p=۱}^{n} \omega^p z_p z_p^* . \tag{۹}$$

برهان (۹) یک محاسبهٔ سرراست است که در آن از

$$\sum_{p=۱}^{n} \omega^p = \sum_{p=۱}^{n} \omega^{۲p} = \circ \tag{۱۰}$$

استفاده می‌شود.

تمرینات

۱. حکم ۲.۱۱ را ثابت کنید.

۲. مشابه لم وینر ٦.۱۱ را برای سریهای توانی که بر قرص یکهٔ بسته مطلقاً همگرایند بیان و اثبات نمایید.

۳. اگر X یک فضای هاسدورف فشرده باشد، نشان دهید که یک تناظر یک به یک طبیعی بین زیرمجموعه‌های بستهٔ X و ایده‌آلهای بستهٔ $C(X)$ وجود دارد.

٤. ثابت کنید چندجمله‌ایها در جبر چند قرصی $A(U^n)$ چگالند. (ر.ک. قضیهٔ ۷.۱۱.)

پیشنهاد. هرگاه $f \in A(U^n)$، $\circ < r < ۱$، و f_r با $f_r(z) = f(rz)$ تعریف شده باشد، آنگاه

f_r مجموع یک سری توانی چندگانهٔ به طور مطلق (درنتیجه به طور یکنواخت) همگرا بر U^{-n} است.

۵. فرض کنید A یک جبر باناخ تعویضپذیر بوده، $x \in A$، و f در مجموعهٔ بازی چون $\Omega \subset \mathcal{C}$ که شامل برد $\hat{x}$ است هلوریخث باشد. ثابت کنید $y \in A$ ی هست به طوری که $\hat{y} = f \circ \hat{x}$؛ یعنی به ازای هر h هلوریخت مختلط از A، $h(y) = f(h(x))$. ثابت کنید اگر A نیمه ساده باشد، y به طور منحصر به فرد به وسیلهٔ x و f معین است.

۶. فرض کنید A و B جبرهای باناخ تعویضپذیری بوده، B نیمه ساده باشد، $\psi: A \to B$ یک همریختی باشد که بردش در B چگال است، و $\alpha: \Delta_B \to \Delta_A$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$(\alpha h)(x) = h(\psi(x)) \qquad (x \in A, h \in \Delta_B).$$

ثابت کنید α یک همانریختی از Δ_B به روی زیرمجموعهٔ فشردهای از Δ_A است. [چگال بودن $\psi(A)$ در B ایجاب میکند که α یک به یک بوده و توپولوژی Δ_B توپولوژی ضعیف القا شده به وسیلهٔ تبدیلات گلفاند از عناصر $\psi(x)$، به ازای $x \in A$، است.]

فرض کنید A جبر قرصی بوده، $B = C(K)$ که در آن K قوسی در قرصیکه باشد، و ψ نگاشت تحدید از A به توی B باشد. این مثال نشان میدهد که $\alpha(\Delta_B)$، حتی اگر ψ یک به یک باشد، ممکن است یک زیرمجموعهٔ حقیقی Δ_A باشد.

مثالی بیابید که در آن $\psi(A) = B$ ولی $\alpha(\Delta_B) \neq \Delta_A$.

۷. در مثال ۱۳.۱۱ (ب) حکم شده است که $\hat{A} \neq C(\Delta)$. چند برهان از این را به دست آورید.

۸. در مثال ۱۳.۱۱ (ج) چه خواصی از اندازهٔ لبگ به کاررفتهاند؟ آیا میتوان اندازهٔ لبگ را با یک اندازهٔ مثبت بدون تغییر هیچ نتیجهای عوض کرد؟

جزئیات آخرین بند در مثال ۱۳.۱۱ (ج) را بیان دارید.

۹. فرض کنید C' جبر تمام توابع مختلط به طور پیوسته مشتقپذیر بر بازهٔ یکهٔ $[0,1]$ با ضرب نقطه به نقطه و نرمدار به وسیلهٔ

$$\|f\| = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$$

باشد.

(آ) نشان دهید که C' یک جبر باناخ تعویضپذیر نیمه ساده است. فضای ایده‌آل ماکزیمال آن را بیابید.

(ب) p با $0 \le p \le 1$ را ثابت گرفته و فرض کنید J مجموعهٔ تمام $f \in C'$ هایی باشد که $f(p) = f'(p) = 0$. نشان دهید J یک ایده‌آل بسته در C' است و C'/J یک جبر دوبعدی است که یک رادیکال یک بعدی دارد. (این مثالی از یک جبر نیمه ساده با یک جبر خارج قسمتی که نیمه ساده نیست به دست می‌دهد.) C'/J با کدامیک از دو جبر توصیف شده در تمرین ۵ از فصل ۱۰ یکریخت است؟

۱۰. فرض کنید A جبر قرصی باشد. به هر $f \in A$ تابعی مانند $f^* \in A$ با فرمول

$$f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$$

مربوط نمایید. در این صورت $f \to f^*$ یک برگشت بر A است.

(آ) آیا این برگشت A را به یک B^* - جبر بدل می‌کند؟

(ب) آیا $\sigma(ff^*)$ همواره در محور حقیقی است؟

(پ) چه همریختیهای مختلطی از A نسبت به این برگشت تابعیهای مثبت‌اند؟

(ت) هرگاه μ یک اندازهٔ بورل متناهی مثبت بر $[-1,1]$ باشد، آنگاه

$$f \to \int_{-1}^{1} f(t)\, d\mu(t)$$

یک تابعی مثبت بر A است. آیا تابعی مثبت دیگری هم وجود دارد؟

۱۱. نشان دهید که خود توانهای تعویض‌شو دارای فاصلهٔ ناکمتر از ۱ می‌باشند. به طور صریح، هرگاه به ازای x و y در یک فضای باناخ $x^2 = x$ ، $y^2 = y$ ، $xy = yx$ ، آنگاه $x = y$ یا $\|x - y\| \ge 1$. نشان دهید که اگر $xy \ne yx$ ، این ممکن است فرو ریزد.

۱۲. اگر به ازای x و yی در یک جبر باناخ $xy = yx$، ثابت کنید

$$\rho(xy) \le \rho(x)\rho(y) \quad \text{و} \quad \rho(x+y) \le \rho(x) + \rho(y).$$

۱۳. فرض کنید t یک عدد مثبت بزرگ باشد، و یک نرم بر $\mathbb{C}^۲$ را با

$$\|w\| = \|w_۱\| + t|w_۲| \quad \text{اگر} \quad w = (w_۱, w_۲)$$

تعریف کنید. فرض کنید A جبر تمام ماتریسهای ۲ در ۲ مختلط با نرم عملگر نظیر باشد:

$$\|y\| = \max\{\|y(w)\| : \|w\| = ۱\} \qquad (y \in A).$$

به ازای $y \in A$، فرض کنید y^* ترانهادهٔ مزدوج y باشد. $x \in A$ ثابت را در نظر بگیرید؛ یعنی

$$x = \begin{pmatrix} ۰ & t^۲ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix},$$

و احکام زیر را ثابت نمایید.

(آ) $\|x(w)\| = t\|w\|$؛ درنتیجه $\|x\| = t$.

(ب) $\sigma(x) = \{t, -t\} = \sigma(x^*)$.

(پ) $\sigma(xx^*) = \{۱, t^۴\} = \sigma(x^*x)$.

(ت) $\sigma(x + x^*) = \{۱ + t^۲, -۱ - t^۲\}$.

(ث) لذا در قضیهٔ ۲۳.۱۱ و تمرین ۱۲ تعویضپذیری لازم خواهدبود.

(ج) هرگاه $F(y)$ مجموع چهار درایه در y به ازای $y \in A$ باشد، آنگاه F یک تابعی مثبت بر A است.

(چ) تساوی $\|F\| = F(e)$ [ر.ک.قسمت (ث) قضیهٔ ۳۱.۱۱] برقرار نیست زیرا $F(e) = ۲$ و $F(x) = ۱ + t^۲$؛ درنتیجه $\|F\| > t$.

(ح) هرگاه K مجموعهٔ تمام تابعیهای مثبت f بر A باشد که در $f(e) \le ۱$ صادق باشند (مانند قضیهٔ ۳۳.۱۱)، آنگاه K ممکن است دارای نقاط اکستریم بسیار باشد اگرچه ۰ تنها تابعی خطی ضربی بر A است. لذا در استلزام (آ) $\to$ (پ) قضیهٔ ۳۳.۱۱ تعویضپذیری

لازم خواهدبود.

۱۴. تابع مختلط ϕ تعریف شده بر R^n را **مثبت- معین** نامند اگر به ازای هر انتخاب $x_1,\ldots,x_r$ در R^n و هر انتخاب از اعداد مختلط $c_1,\ldots,c_r$،

$$\sum_{i,j=1}^{r} c_i \bar{c}_j \phi\left(x_i - x_j\right) \geq 0 .$$

(آ) نشان دهیدکه به ازای هر $x \in R^n$، $|\phi(x)| \leq \phi(0)$.

(ب) نشان دهید که تبدیل فوریهٔ هر اندازهٔ بورل مثبت متناهی بر R^n مثبت - معین است.

(پ) شرح مختصر زیر از عکس (ب) را کامل نمایید. (قضیهٔ بوچنر): ***هرگاه ϕ پیوسته و مثبت - معین باشد، آنگاه ϕ تبدیل فوریهٔ یک اندازهٔ بورل مثبت متناهی است.***

فرض کنیم A جبر پیچشی $L^1\left(R^n\right)$ با الحاق یک یکه به صورت توصیف شده در قسمت (ت) بخش ۳.۱۰ و قسمت (ث) بخش ۱۳.۱۱ باشد. تعریف کنید $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$ و نشان دهید که

$$f + \alpha\delta \rightarrow \tilde{f} + \overline{\alpha}\delta$$

یک پیچش بر A است و

$$f + \alpha\delta \rightarrow \int_{R^n} f\phi dm_n + \alpha\phi(0)$$

یک تابعی مثبت بر A است. بنابر قضیهٔ ۳۲.۱۱ و قسمت (ث) بخش ۱۳.۱۱، یک اندازهٔ مثبت مانند μ بر فشرده‌سازی یک نقطه‌ای Δ از R^n چنان وجود دارد که

$$\int_{R^n} f\phi dm_n + \alpha\phi(0) = \int_{\Delta}\left(\hat{f} + \alpha\right)d\mu .$$

اگر α تحدید μ به R^n باشد، به ازای هر $f \in L^1\left(R^n\right)$ داریم

$$\int_{R^n} f\phi dm_n = \int_{R^n} \hat{f} d\sigma .$$

لذا $\phi = \hat{\sigma}$. (درواقع، μ قبلاً بر R^n متمرکز شده است؛ درنتیجه $\sigma = \mu$.)

(ت) فرض کنید P مجموعهٔ تمام توابع مثبت - معین پیوسته مانند ϕ بر R^n باشد که $\phi(0) \leq 1$. تمام نقاط اکستریم این مجموعهٔ محدب را بیابید.

۱۵. فرض کنید Δ فضای ایده‌آل ماکزیمال یک جبر باناخ تعویضپذیر مانند A باشد. مجموعهٔ بستهٔ $\beta \subset \Delta$ را یک ***A- مرز*** نامند اگر ماکزیمم $|\hat{x}|$ بر Δ مساوی ماکزیمم بر

β به ازای هر $x \in A$ باشد. (بداهتاً، Δ یک A - مرز است.)

ثابت کنید اشتراک ∂_A تمام A - مرزها یک A- مرز است.

∂_A را ***مرزشیلوف*** $(Shilov)$ A می‌نامند. این اصطلاح به وسیلهٔ خاصیت مدول ماکزیمم توابع هلوریخت پیشنهاد شده است. به عنوان مثال، وقتی A جبر قرصی است، ∂_A دایرهٔیکه است که مرز توپولوژیک Δ، یعنی قرص‌یکهٔ بسته، می‌باشد.

خلاصهٔ برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که یک A-مرز مانند $\beta_\circ$ هست که مینیمال است به این معنی که هیچ زیرمجموعهٔ حقیقی $\beta_\circ$ یک A- مرز نیست. (گردایهٔ A- مرزها را به وسیلهٔ شمول مجموعه‌ها و غیره جزئی مرتب می‌کنیم.) سپس $h_\circ \in \beta_\circ$ و $x_1,\ldots,x_n \in A$ را با $\hat{x}_i(h_\circ) = \circ$ اختیار کرده و قرار می‌دهیم

$$V = \{h \in \Delta : |\hat{x}_i(h)| < 1 \text{ ، } 1 \le i \le n \text{ به ازای}\} .$$

چون $\beta_\circ$ مینیمال است، $x \in A$ ی با $\|\hat{x}\|_\infty = 1$ و $|\hat{x}(h)| < 1$ بر $\beta_\circ - V$ وجود دارد. هرگاه $y = x^m$ و m به قدر کافی بزرگ باشد، آنگاه به ازای هر i، $|\hat{x}_i\hat{y}| < 1$ بر $\beta_\circ$. بنابراین $\|\hat{x}_i\hat{y}\|_\infty < 1$. ابتدا از این نتیجه می‌شود که فقط در V، $|\hat{y}(h)| = \|\hat{y}\|_\infty$؛ درنتیجه V هر A-مرز βرا قطع می‌کند و مآلاً $h_\circ \in \beta$. لذا $\beta_\circ \subset \beta$ و $\beta_\circ = \partial_A$.

۱٦. فرض کنید A یک جبرباناخ بوده، m صحیح باشد، $m \ge 2$، $K < \infty$، و به ازای هر $x \in A$،

$$\|x\|^m \le K\|x^m\| .$$

نشان دهید که ثابتهایی مانند $K_n < \infty$ به ازای $n = 1,2,3,\ldots$ چنان وجود دارند که

$$\|x\|^n \le K_n\|x^n\| \qquad (x \in A) .$$

(این قضیهٔ ۱۲.۱۱ را تعمیم می‌دهد.)

۱۷. فرض کنید $\{\omega_n\}$ $(-\infty < n < \infty)$ اعداد مثبتی باشند به طوری که $\omega_\circ = 1$ و به ازای هر دو عدد صحیح m و n،

$$\omega_{m+n} \le \omega_m \omega_n .$$

فرض کنید $A = A\{\omega_n\}$ مجموعهٔ تمام توابع مختلط f بر اعداد صحیح باشد که در آنها نرم

$$\|f\| = \sum_{-\infty}^{\infty} |f(n)|\omega_n$$

متناهی است. ضرب در A را با

$$(f * g)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k)$$

تعریف کنید.

(آ) نشان دهید که هر $A\{\omega_n\}$ یک جبر باناخ تعویضپذیر است.

(بـ) نشان دهید که $R_+ = \lim_{n\to\infty} (\omega_n)^{1/n}$ موجود و متناهی است و این کار را با نشان دادن اینکه $R_+ = \inf_{n\geq 0}(\omega_n)^{1/n}$ انجام دهید.

(پـ) به نحو مشابه نشان دهید که $R_- = \lim_{n\to\infty} (\omega_{-n})^{-1/n}$ موجود بوده و $R_- \leq R_+$.

(تـ) قراردهید $\Delta = \{\lambda \in \mathbb{C} : R_- \leq |\lambda| \leq R_+\}$ و نشان دهید که Δ را می‌توان با فضای ایده‌آل ماکزیمال $A\{\omega_n\}$ یکی کرد و تبدیلات گلفاند سریهای لوران مطلقاً همگرا بر Δ یند.

(ثـ) انتخابهای زیر برای $\{\omega_n\}$ را در نظر بگیرید:

(یک) $\omega_n = 1$؛

(دو) $\omega_n = 2^n$؛

(سه) اگر $n \geq 0$، $\omega_n = 2^n$؛ اگر $n < 0$، $\omega_n = 1$؛

(چهار) $\omega_n = 1 + 2n^2$؛

(پنج) اگر $n \geq 0$، $\omega_n = 1 + 2n^2$؛ اگر $n < 0$، $\omega_n = 1$.

به ازای کدامیک از اینها Δ دایره است؟ به ازای کدام انتخابها $A\{\omega_n\}$ خود الحاق است به این معنی که $\hat{A}$ تحت تزویج مختلط بسته است؟

(ج) آیا $A\{\omega_n\}$ همیشه نیمه ساده است؟

(چ) آیا یک $A\{\omega_n\}$ با Δی دایرهٔ یکه هست که $\hat{A}$ کاملاً از توابع بی‌نهایت بار مشتقپذیر تشکیل شده باشد؟

۱۸. فرض کنید Δ فضای ایده‌آل ماکزیمال $L^\infty(m)$ مانند بخش ۱۳.۱۱ باشد. نشان دهید که

(آ) Δ نقطهٔ تنها ندارد، و

(ب) Δ شامل دنبالهٔ همگرایی از نقاط متمایز نیست. ***راهنمایی.*** هرگاه $p_۱, p_۲, p_۳, \ldots$ نقاط متمایزی در Δ باشند که هیچیک نقطهٔ حدی سایرین نباشد و $\{w_i\}$ یک دنبالهٔ کراندار از اعداد باشد، آنگاه مجموعه‌های باز دو به دو از هم جدا مانند V_i در Δ چنان وجود دارند که $p_i \in V_i$، و تابعی مانند $\varphi \in C(\Delta)$ هست به طوری که $\varphi = w_i$ بر V_i.

۱۹. فرض کنید $L^\infty(m)$ همانند فوق باشد و ثابت کنید: هرگاه $f_n \in L^\infty(m)$ و در توپولوژی ضعیف $L^\infty(m)$ داشته باشیم $f_n \to ۰$، آنگاه به ازای هر $p \in (۰,\infty)$، $\int_۰^۱ |f_n|^p dm \to ۰$. با مثال نشان دهید که عکس مطلب نادرست است.

۲۰. عکس ناقص زیر از قضیهٔ ۳۱.۱۱ را ثابت کنید: هرگاه F یک تابعی خطی کراندار بر B^* - جبر A بوده و $\|F\| = F(e) = ۱$، آنگاه F مثبت است.

پیشنهاد. $x \in A$ با $\|x\| \le ۱$ را اختیار کرده و قراردهید $F(xx^*) = \alpha + \beta i$ و به ازای $-\infty < t < \infty$،

$$y_t = xx^* - \left(\frac{۱}{۲} + it\right)e.$$

با استفاده از قضیهٔ ۲۸.۱۱ نشان دهید که $\sigma(xx^*) \subset [۰,۱]$ و لذا

$$\left|F(y_t)\right| \le \|y_t\| = \rho(y_t) \le \left|\frac{۱}{۲} + it\right|.$$

و مانند لم ۲۶.۵ جلو بروید.

۲۱. در $\mathbb{C}^۲$ فرض کنید $K_۱$ از تمام نقاط $\left(e^{i\theta}, e^{-i\theta}\right)$ و $K_۲$ از

نقاط $\left(e^{i\theta}, e^{i\theta}\right)$، $\circ \le \theta \le 2\pi$، تشکیل شده باشد. نشان دهید که دایرهٔ K_1 به طور چند جمله‌ای محدب است ولی دایرهٔ K_2 چنین نیست. $K_3 = \{(\cos\theta, \sin\theta): \circ \le \theta \le \pi\}$ چطور؟

۲۲. نشان دهید که ماتریس سه در سه M با

$$\begin{bmatrix} \circ & \circ & 1 \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}$$ تعویض می‌شود اگر و فقط اگر $$M = \begin{bmatrix} a & x & y \\ \circ & z & w \\ \circ & \circ & a \end{bmatrix}.$$

از این نتیجه بگیرید که مرکزسازها (ر.ک.بخش ۲۱.۱۱) لزوماً تعویض‌پذیر نیستند.

فصل ۱۲

عملگرهای کراندار بر فضای هیلبرت

نکات اصلی

۱.۱۲. چند تعریف. فضای‌برداری مختلط H را یک ***فضای ضرب داخلی*** (یا ***فضای یکه‌ای***) نامیم اگر به هر جفت مرتب از بردارهای x و y در H یک عدد مختلط مانند (x,y) به نام ***حاصل‌ضرب داخلی*** یا ***حاصل ضرب اسکالر*** x و y چنان مربوط شده باشد که قواعد زیر برقرار باشند.

(آ) $(y,x)=\left(\overline{x,y}\right)$. (علامت بار به معنی تزویج مختلط است.)

(ب) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$.

(پ) اگر $x\in H$، $y\in H$، و $\alpha\in\mathcal{C}$، $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$.

(ت) به ازای هر $x\in H$، $(x,x)\geq 0$.

(ث) $(x,x)=0$ فقط اگر $x=0$.

بنابراین، به ازای y ثابت، (x,y) یک تابع خطی از x است. این به ازای x ثابت یک تابع خطی مزدوج y است. گاهی این نوع توابع دو متغیره را ***یک و نیم خطی*** می‌نامیم.

اگر $(x,y)=0$، گوییم x به y ***متعامد*** است و نماد $x\perp y$ را گاهی به کار می‌گیریم. چون $(x,y)=0$ ایجاب می‌کند که $(y,x)=0$، رابطهٔ $\perp$ متقارن است. اگر $E\subset H$ و $F\subset H$، نماد $E\perp F$ وقتی $x\in E$ و $y\in F$ به معنی $x\perp y$ می‌باشد. همچنین، $E^\perp$ مجموعهٔ تمام $y\in H$هایی است که به هر $x\in E$ متعامد می‌باشد. هر فضای ضرب داخلی را می‌توان با تعریف

$$\|x\|=(x,x)^{1/2}$$

نرمدار کرد. قضیهٔ ۲.۱۲ این امر را ایجاب خواهد کرد. اگر فضای نرمدار حاصل تام باشد، آن را یک ***فضای هیلبرت*** می‌نامیم.

۲.۱۲ قضیه. *هرگاه $x\in H$ و $y\in H$ که در آنها H یک فضای ضرب داخلی است، آنگاه*

$$|(x,y)|\le\|x\|\,\|y\| \tag{۱}$$

و

$$\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|\,. \tag{۲}$$

به علاوه،

$$\text{به ازای هر } \lambda\in\mathbb{C}\text{،}\quad \|y\|\le\|\lambda x+y\| \tag{۳}$$

اگر و فقط اگر $x\perp y$.

برهان. قرار می‌دهیم $\alpha=(x,y)$. با محاسبه‌ای ساده داریم

$$0\le\|\lambda x+y\|^2=|\lambda|^2\|x\|^2+2\,\mathrm{Re}(\alpha\lambda)+\|y\|^2\,. \tag{۴}$$

لذا اگر $\alpha=0$، رابطهٔ (۳) برقرار است. اگر $x=0$، روابط (۱) و (۳) واضح‌اند. اگر $x\neq 0$، $\lambda=-\bar{\alpha}/\|x\|^2$ را اختیار می‌کنیم. رابطهٔ (۴) به ازای این λ به صورت زیر در می‌آید:

$$0\le\|\lambda x+y\|^2=\|y\|^2-\frac{|\alpha|^2}{\|x\|^2}\,. \tag{۵}$$

این رابطهٔ (۱) را ثابت می‌کند و نشان می‌دهد که (۳) به ازای $\alpha\neq 0$ نادرست است. با

مجذور کردن طرفین (۲) معلوم می‌شود که (۲) نتیجه‌ای است از رابطهٔ (۱).

تذکر. از حالا به بعد، H یک فضای هیلبرت است مگر خلافش تصریح شود.

۳.۱۲ قضیه. ***هر مجموعهٔ محدب بستهٔ ناتهی $E \subset H$ شامل x منحصر به فردی با نرم مینیمال است.***

برهان. قانون متوازی الاضلاع

$$\|x+y\|^{۲}+\|x-y\|^{۲}=۲\|x\|^{۲}+۲\|y\|^{۲} \qquad (x \in H, y \in H) \tag{۱}$$

مستقیماً از تعریف $\|x\|^{۲}=(x,x)$ نتیجه می‌شود. قرار می‌دهیم

$$d=\inf\{\|x\|: x \in E\}. \tag{۲}$$

$x_n \in E$ را طوری می‌گیریم که $\|x_n\| \to d$. چون $\frac{۱}{۲}(x_n+x_m) \in E$، $\|x_n+x_m\|^{۲} \geq ۴d^{۲}$. اگر x و y در (۱) با x_n و y_m عوض شوند، طرف راست (۱) به $۴d^{۲}$ میل می‌کند. لذا (۱) ایجاب می‌کند که $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ‌کشی در H است و لذا به $x \in E$ ی با $\|x\|=d$ همگرا می‌باشد.

اگر $y \in E$ و $\|y\|=d$، همانطور که هم اینک دیدیم، دنبالهٔ $\{x,y,x,y...\}$ باید همگرا باشد. بنابراین $y=x$.

٤.۱۲ قضیه. ***هرگاه M یک زیرفضای بستهٔ H باشد، آنگاه***

$$\boldsymbol{H=M\oplus M^{\perp}}.$$

نتیجه به طور صریح یعنی M و $M^{\perp}$ زیرفضاهای بستهٔ Hاند که اشتراکشان $\{۰\}$ بوده و مجموعشان H می‌باشد. فضای $M^{\perp}$ ***متمم متعامد*** M نام دارد.

برهان. اگر $E \subset H$، خطی بودن (x,y) به عنوان تابعی از x نشان می‌دهد که $E^{\perp}$

زیرفضایی از H است، و در این صورت نامساوی شوارتز (۱) قضیهٔ ۲.۱۲ ایجاب می‌کند که $E^{\perp}$ بسته است.

هرگاه $x \in M$ و $x \in M^{\perp}$، آنگاه $(x,x)=0$؛ درنتیجه $x=0$. لذا $M \cap M^{\perp} = \{0\}$.

اگر $x \in H$، قضیهٔ ۳.۱۲ را بر مجموعهٔ $x-M$ اعمال کرده و نتیجه می‌گیریم که $x_1 \in M$ی هست که $\|x-x_1\|$ را مینیمال می‌سازد. قرار می‌دهیم $x_2 = x - x_1$. در این صورت، به ازای هر $y \in M$، $\|x_2\| \le \|x_2 + y\|$. لذا، طبق قضیهٔ ۲.۱۲، $x_2 \in M^{\perp}$. چون $x = x_1 + x_2$، نشان داده‌ایم که $M + M^{\perp} = H$.

نتیجه. هرگاه M زیرفضای بسته‌ای از H باشد، آنگاه

$$\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = M.$$

برهان. شمول $M \subset \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$ واضح است. چون

$$M \oplus M^{\perp} = H = M^{\perp} \oplus \left(M^{\perp}\right)^{\perp},$$

M نمی‌تواند زیرفضای حقیقی $\left(M^{\perp}\right)^{\perp}$باشد.

حال به توصیف فضای‌دوگان H^* از H می‌پردازیم.

۵.۱۲ قضیه. *یک یکمتری خطی مزدوج مانند $y \to \Lambda$ از H به روی H^* وجود دارد که با*

$$\Lambda x = (x, y) \qquad (x \in H) \tag{۱}$$

داده می‌شود.

برهان. اگر $y \in H$ و Λ با رابطهٔ (۱) تعریف شده باشد، نامساوی شوارتز (۱) در قضیهٔ

۲.۱۲ نشان می‌دهد که $\Lambda \in H^*$ و $\|\Lambda\| \le \|y\|$. چون

$$\|y\|^{2} = (y, y) = \Lambda y \le \|\Lambda\|\|y\|, \tag{۲}$$

پس $\|\Lambda\| = \|y\|$.

باقی است نشان دهیم که هر $\Lambda \in H^*$ به شکل (۱) است.

اگر $\Lambda = 0$، $y = 0$ را اختیار می‌کنیم. اگر $\Lambda \neq 0$، فرض کنیم $\mathscr{N}(\Lambda)$ فضای پوچ Λ باشد. بنابر قضیهٔ ٤.۱۲، $z \in \mathscr{N}(\Lambda)^{\perp}$ی هست که $z \neq 0$. چون

$$(\Lambda x)z - (\Lambda z)x \in \mathscr{N}(\Lambda) \qquad (x \in H), \tag{۳}$$

پس داریم $(\Lambda x)(z,z) - (\Lambda z)(x,z) = 0$. لذا رابطهٔ (۱) به ازای $y = (z,z)^{-1}\left(\overline{\Lambda x}\right)z$ برقرار است.

۶.۱۲ قضیه. *هرگاه $\{x_n\}$ دنباله‌ای از بردارهای دو به دو متعامد در H باشد، آنگاه هریک از سه حکم زیر دو تای دیگر را ایجاب می‌کند.*

(آ) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ در نرم توپولوژی H همگراست.

(ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^{2} < \infty$.

(پ) به ازای هر $y \in H$، $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n, y)$ همگراست.

لذا همگرایی قوی (آ) و همگرایی ضعیف (پ) برای سریهای بردارهای متعامد هم‌ارزند.

برهان. چون $(x_i, y_j) = 0$ اگر $i \neq y$، تساوی

$$\|x_n + \ldots + x_m\|^{2} = \|x_n\|^{2} + \ldots + \|x_m\|^{2} \tag{۱}$$

به ازای $n \le m$ برقرار است. لذا قسمت (ب) ایجاب می‌کند که مجموعهای جزیی $\sum x_n$ یک دنبالهٔ‌کشی در H تشکیل می‌دهند. چون H تام است، قسمت (ب) قسمت (آ) را

ایجاب می‌کند. نامساوی شوارتز نشان می‌دهد که (آ) قسمت (پـ) را ایجاب می‌کند. بالأخره، فرض می‌کنیم (پـ) برقرار باشد. $\Lambda_n \in H^*$ را با

$$\Lambda_n y = \sum_{i=1}^{n} (y, x_i) \qquad (y \in H, n = 1,2,3,\ldots) \tag{۲}$$

تعریف می‌کنیم. بنابر (پـ)، $\{\Lambda_n y\}$ به ازای هر $y \in H$ همگراست؛ لذا، طبق قضیهٔ باناخ - اشتاین هاوس، کراندار است. اما

$$\|\Lambda_n\| = \|x_1 + \ldots + x_n\| = \left\{\|x_1\|^2 + \ldots + \|x_n\|^2\right\}^{1/2}. \tag{۳}$$

لذا قسمت (پـ) قسمت (بـ) را ایجاب می‌کند.

عملگرهای کراندار

حال، برای سازگاری با نمادهای قبلی، جبر باناخ تمام عملگرهای خطی کراندار T بر فضای هیلبرت $H \neq \{0\}$ با نرم

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in H, \|x\| \le 1\}$$

را با $\mathscr{B}(H)$ نشان می‌دهیم. خواهیم دید که $\mathscr{B}(H)$ دارای یک برگشت است که آن را به یک B^* - جبر تبدیل می‌کند.

بحث را با یک قضیهٔ یکتایی ساده ولی مفید آغاز می‌کنیم.

۷.۱۲ قضیه. *هرگاه $T \in \mathscr{B}(H)$ و به ازای هر $x \in H$، $(Tx, x) = 0$، آنگاه $T = 0$.*

برهان. چون $(T(x+y), x+y) = 0$، می‌بینیم که

$$(Tx, y) + (Ty, x) = 0 \qquad (x \in H, y \in H). \tag{۱}$$

اگر y را در (۱) با iy عوض کنیم، نتیجه خواهدبود

$$-i(Tx, y) + i(Ty, x) = 0 \qquad (x \in H, y \in H). \tag{۲}$$

از ضرب (۲) در i و جمع با (۱) به دست می‌آوریم

$$(Tx, y) = 0 \qquad (x \in H, y \in H). \tag{۳}$$

رابطهٔ (۳) به ازای $y = Tx$ نتیجه می‌دهد که $\|Tx\|^2 = 0$. لذا $Tx = 0$.

نتیجه. هرگاه $S \in \mathscr{B}(H)$، $T \in \mathscr{B}(H)$، و به ازای هر $x \in H$،

$$(Sx, x) = (Tx, x),$$

آنگاه $S = T$.

برهان. قضیه را بر $S-T$ اعمال کنید.

توجه کنید که قضیهٔ ۷.۱۲ در صورتی که میدان اسکالر R باشد فرو می‌ریزد. برای مشاهدهٔ این امر، دورانها در R^2 را درنظر می‌گیریم.

۸.۱۲ قضیه. *هرگاه $f: H \times H \to \mathbb{C}$ یک و نیم خطی و کراندار باشد به این معنی که*

$$M = \sup\{|f(x, y)| : \|x\| = \|y\| = 1\} < \infty, \tag{1}$$

آنگاه $S \in \mathscr{B}(H)$ی منحصر به فرد وجود دارد که در

$$f(x, y) = (x, Sy) \qquad (x \in H, y \in H) \tag{2}$$

صدق می‌کند. به علاوه، $\|S\| = M$.

برهان. چون $|f(x, y)| \le M\|x\|\|y\|$، نگاشت

$$x \to f(x, y)$$

به ازای هر $y \in H$ یک تابعی خطی کراندار بر H با نرم حداکثر $M\|y\|$ است. حال از قضیهٔ ۵.۱۲ نتیجه می‌شود که به هر $y \in H$ عنصر منحصر به فردی مانند $Sy \in H$ چنان نظیر است که (۲) برقرار می‌باشد؛ همچنین $\|Sy\| \le M\|y\|$. واضح است که $S: H \to H$ جمعی است. هرگاه $\alpha \in \mathbb{C}$، آنگاه به ازای هر x و y در H،

$$(x, S(\alpha y)) = f(x, \alpha y) = \overline{\alpha} f(x, y) = \overline{\alpha}(x, Sy) = (x, \alpha Sy).$$

پس S خطی می‌باشد. لذا $S \in \mathscr{B}(H)$ و $\|S\| \le M$.

ولی نیز داریم

$$|f(x,y)| = |(x,Sy)| \le \|x\|\|Sy\| \le \|x\|\,\|S\|\|y\|,$$

که نامساوی عکس $M \le \|S\|$ را به ما خواهدداد.

۹.۱۲ الحاقیها. هرگاه $T \in \mathscr{B}(H)$، آنگاه (Tx, y) نسبت به x خطی، نسبت به y خطی مزدوج، و کراندار است. لذا قضیهٔ ۸.۱۲ نشان می‌دهد که $T^* \in \mathscr{B}(H)$ ی منحصر به فرد وجود دارد که

$$(Tx,y) = (x, T^*y) \qquad (x \in H, y \in H) \tag{۱}$$

و نیز

$$\|T^*\| = \|T\|. \tag{۲}$$

حکم می‌کنیم که $T \to T^*$ یک برگشت بر $\mathscr{B}(H)$ است؛ یعنی چهار خاصیت زیر برقرارند:

$$(T+S)^* = T^* + S^*. \tag{۳}$$

$$(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*. \tag{۴}$$

$$(ST)^* = T^*S^*. \tag{۵}$$

$$T^{**} = T. \tag{۶}$$

از این خواص خاصیت (۳) واضح است. محاسبات

$$(\alpha Tx, y) = \alpha(Tx,y) = \alpha(x, T^*y) = (x, \bar{\alpha}T^*y)$$

$$(STx, y) = (Tx, S^*y) = (x, T^*S^*y),$$

$$(Tx,y) = \overline{(T^*y,x)} = \overline{(y,T^{**}x)} = (T^{**}x, y)$$

خواص (۴)، (۵)، و(۶) را به ما می‌دهند. چون به ازای هر $x \in H$ داریم

$$\|Tx\|^2 = (Tx,Tx) = (T^*Tx, x) \le \|T^*T\|\|x\|^2,$$

داریم $\|T\|^2 \le \|T^*T\|$. از آن سو، از رابطهٔ (۲) داریم

$$\|T^*T\| \le \|T^*\|\,\|T\| = \|T\|^2.$$

لذا تساوی

$$\|T^*T\| = \|T\|^2 \tag{۷}$$

به ازای هر $T \in \mathscr{B}(H)$ برقرار است.

لذا ثابت کرده‌ایم که $\mathscr{B}(H)$ نسبت به برگشت $T \to T^*$ تعریف شده با (۱) یک B^* - جبر است.

تذکر. در محدودهٔ قبل، گاهی T^* را ***الحاقی فضای هیلبرت*** T نامیم تا از الحاقی فضای باناخ مطرح شده در فصل ٤ متمایز باشد. تنها تفاوت بین این دو این است که در محدودهٔ فضای هیلبرتی، $T \to T^*$ به جای خطی بودن خطی مزدوج می‌باشد. این امر به خاطر ماهیت خطی مزدوج یکمتری توصیف شده در قضیهٔ ۵.۱۲ است. اگر T^* یک عملگر بر H^* به جای بر H گرفته می‌شد، ما درست در وضعیت فصل ٤ می‌بودیم.

۱۰.۱۲ قضیه. ***هرگاه $T \in \mathscr{B}(H)$، آنگاه***

$$\mathscr{N}(T^*) = \mathscr{R}(T)^\perp \text{ و } \mathscr{N}(T) = \mathscr{R}(T^*)^\perp.$$

به یاد می‌آوریم که $\mathscr{N}(T)$ و $\mathscr{R}(T)$ به ترتیب فضای پوچ و برد T می‌باشند.

برهان. هریک از چهار حکم زیر به وضوح هم ارز حکم بعد و/ یا قبل آن است.

$$T^*y = 0. \tag{۱}$$

(۲) به ازای هر $x \in H$، $(x, T^*y) = 0$.

(۳) به ازای هر $x \in H$، $(Tx, y) = 0$.

$$y \in \mathscr{R}(T)^\perp. \tag{٤}$$

لذا $\mathscr{N}(T^*) = \mathscr{R}(T)^\perp$. چون $T^{**} = T$، حکم دوم از حکم اول در صورت تعویض T با T^* نتیجه می‌شود.

۱۱.۱۲ تعریف. گوییم عملگر $T \in \mathscr{B}(H)$

(آ) ***نرمال*** است اگر $TT^* = T^*T$،

(ب) ***خود الحاق*** (یا ***هرمیتی***) است اگر $T^* = T$،

(پ) ***یکه‌ای*** است اگر $T^*T = I = TT^*$ که درآن I عملگر همانی بر H است،

(ت) ***تصویر*** است اگر $T^2 = T$.

واضح است که عملگرهای خود الحاق و عملگرهای یکه‌ای نرمال‌اند. بسیاری از قضایای این فصل راجع به عملگرهای نرمال می‌باشند.

این شرط بعدی، یعنی اینکه T باید با الحاقی خود تعویض شود، نتایج تحلیلی و هندسی قوی و جالبی دارد.

۱۲.۱۲ قضیه. *عمگر $T \in \mathscr{B}(H)$ نرمال است اگر و فقط اگر به ازای هر $x \in H$،*

$$\|Tx\| = \|T^*x\|. \tag{۱}$$

عملگرهای نرمال T خواص زیر را خواهند داشت:

(آ) $\mathscr{N}(T) = \mathscr{N}(T^*)$.

(ب) *$\mathscr{R}(T)$ در H چگال است اگر وفقط اگر T یک به یک باشد.*

(پ) *T معکوسپذیر است اگرو فقط اگر $\delta > 0$ای چنان موجود باشد که به ازای هر $x \in H$، $\|Tx\| \geq \delta\|x\|$.*

(ت) *هرگاه به ازای $x \in H$ی و $\alpha \in \mathbb{C}$ ای داشته باشیم $Tx = \alpha x$، آنگاه $T^*x = \bar{\alpha}x$.*

(ث) *هرگاه α و β مقادیر ویژهٔ متمایزی از T باشند، آنگاه فضاهای ویژهٔ نظیر به یکدیگر متعامدند.*

برهان. تساویهای

$$\|Tx\|^{2} = (Tx, Tx) = (T^* Tx, x),$$
$$\|T^* x\|^{2} = (T^* x, T^* x) = (TT^* x, x)$$

در تلفیق با نتیجهٔ قضیهٔ ۷.۱۲ اولین حکم را ثابت می‌کنند، و (آ) یک نتیجهٔ فوری می‌باشد. چون $\mathscr{R}(T)^{\perp} = \mathscr{N}(T^*)$، قسمت (آ) قسمت (ب) را ایجاب می‌کند. هرگاه همانند در (پ) $\delta > 0$ای موجود باشد، آنگاه، طبق قضیهٔ ۲۶.۱، $\mathscr{R}(T)$ بسته است، و طبق قسمت (ب) چگال می‌باشد؛ درنتیجه $\mathscr{R}(T) = H$ و T معکوسپذیر است. عکس مطلب از قضیهٔ نگاشت باز نتیجه می‌شود. برای به دست آوردن (ت)، قسمت (آ) را بر $T - \alpha I$ به جای T به کار می‌بریم. بالأخره، هرگاه $Tx = \alpha x$ و $Ty = \beta y$، آنگاه قسمت (ت) نشان می‌دهد که

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, y) = (Tx, y) = (x, T^* y) = (x, \bar{\beta} y) = \beta(x, y) .$$

چون $\beta \neq \alpha$، نتیجه می‌گیریم که $x \perp y$.

۱۳.۱۲ قضیه. ***اگر $U \in \mathscr{B}(H)$، سه حکم زیر هم‌ارزند.***

(آ) U یکه‌ای است.

(ب) $\mathscr{R}(U) = H$ و به ازای هر $x \in H$ و $y \in H$، $(Ux, Uy) = (x, y)$.

(پ) $\mathscr{R}(U) = H$ و به ازای هر $x \in H$، $\|Ux\| = \|x\|$.

برهان. هرگاه U یکه‌ای باشد، آنگاه $\mathscr{R}(U) = H$ زیرا $UU^* = I$. همچنین $U^* U = I$؛ درنتیجه

$$(Ux, Uy) = (x, U^* Uy) = (x, y).$$

لذا (آ) قسمت (ب) را ایجاب می‌کند. واضح است که (ب) قسمت (پ) را ایجاب می‌کند. هرگاه (پ) برقرار باشد، آنگاه به ازای هر $x \in H$،

$$(U^* Ux, x) = (Ux, Ux) = \|Ux\|^{2} = \|x\|^{2} = (x, x);$$

درنتیجه $U^*U=I$. ولی (پ) نیز ایجاب می‌کند که U یک یکمتری خطی از H به روی H است؛ درنتیجه U در $\mathscr{B}(H)$ معکوسپذیر است. چون $U^*U=I$، $U^{-1}=U^*$، و لذا U یکه‌ای است.

تذکر. هم ارزی (آ) و (ب) نشان می‌دهد که عملگرهای یکه‌ای درست آن یکریختیهای خطی از H اند که ضرب داخلی را نیز حفظ می‌کنند. بنابراین آنها ***خودریختیهای فضای هیلبرت*** می‌باشند.

هم ارزی (ب) و (پ) نتیجه‌ای از تمرین ۲ نیز هست.

برهان قبلی نشان می‌دهد که عملگر $T\in\mathscr{B}(H)$ یک یکمتری است (یعنی در $\|Tx\|=\|x\|$ به ازای هر $x\in H$ صدق می‌کند) اگر و فقط اگر $T^*T=I$. این نیمی از آنچه برای یکه‌ای بودن لازم است می‌باشد، اما کافی نیست. به عنوان مثال، فرض کنیم T جابجایی راست S_R بر ℓ^2 باشد (ر.ک.تمرین ۲، فصل ۱۰) که به آسانی معلوم می‌شود که الحاقی آن S_L است.

۱۲.۱۴ قضیه. ***هریک از چهار خاصیت زیر از تصویر $P\in\mathscr{B}(H)$ سه خاصیت دیگر را ایجاب می‌کند:***

(آ) P خود الحاق است؛

(ب) P نرمال است؛

(پ) $\mathscr{R}(P)=\mathscr{N}(P)^\perp$.

(ت) به ازای هر $x\in H$، $(Px,x)=\|Px\|^2$.

به علاوه، دو تصویر خود الحاق P و Q دارای $\mathscr{R}(P)\perp\mathscr{R}(Q)$ اند اگر و فقط اگر $PQ=0$.

خاصیت (پ) معمولاً با گفتن اینکه P یک تصویر ***متعامد*** است بیان می‌شود.

برهان. واضح است که (آ) قسمت (ب) را ایجاب می‌کند. حکم (آ) قضیهٔ ۱۲.۱۲ نشان می‌دهد که اگر P نرمال باشد، $\mathcal{N}(P)=\mathcal{R}(P)^{\perp}$؛ چون P یک تصویر است، $\mathcal{R}(P)=\mathcal{N}(I-P)$؛ درنتیجه $\mathcal{R}(P)$ بسته است. حال از نتیجهٔ قضیهٔ ٤.۱۲ معلوم می‌شود که (ب) قسمت (پ) را ایجاب می‌کند.

اگر (پ) برقرار باشد، هر $x\in H$ به شکل $x=y+z$ است که در آن $y\perp z$، $Py=\circ$، و $Pz=z$. لذا $Px=z$، و $(Px,x)=(z,z)$. این قسمت (ت) را ثابت خواهد کرد.

بالأخره، فرض کنیم (ت) برقرار باشد. در این صورت

$$\|Px\|^{۲}=(Px,x)=(x,P^*x)=(P^*x,x)\ .$$

آخرین تساوی برقرار است زیرا $\|Px\|^{۲}$ حقیقی است و $(x,P^*x)=\|Px\|^{۲}$. لذا، به ازای هر $x\in H$، $(Px,x)=(P^*x,x)$؛ درنتیجه، طبق قضیهٔ ۷.۱۲، $P=P^*$. لذا (ت) قسمت (آ) را ایجاب می‌کند.

اتحاد $(Px,Qy)=(x,PQy)$آخرین حکم را به ثبوت خواهد رسانید.

۱۵.۱۲ قضیه

(آ) هرگاه U یکه‌ای بوده و $\lambda\in\sigma(U)$، آنگاه $|\lambda|=۱$.

(ب) هرگاه S خوالحاق بوده و $\lambda\in\sigma(S)$، آنگاه λ عددی حقیقی می‌باشد.

برهان. (آ) قضیهٔ ۱۳.۱۲ نشان می‌دهد که $\|U\|=۱$، و لذا اگر $\lambda\in\sigma(U)$، $|\lambda|\le ۱$. از آن سو، هرگاه $|\lambda|<۱$، آنگاه $\|\lambda U^*\|<۱$؛ لذا

$$\lambda I-U=-U(I-\lambda U^*)$$

در $\mathcal{B}(H)$ معکوسپذیر است (قضیهٔ ۷.۱۰)، و لذا $\lambda\notin\sigma(U)$.

(ب) فرض کنیم $S=S^*$ و $\lambda=\alpha+i\beta\in\sigma(S)$ و قرار می‌دهیم $S_\lambda=S-\lambda I$. با محاسبه‌ای ساده داریم

$$\|S_\lambda x\|^{۲}=\|Sx-\alpha_x\|^{۲}+\beta^{۲}\|x\|^{۲};$$

درنتیجه $\|S_\lambda x\| \ge \|\beta\|\|x\|$. اگر $\beta \neq ۰$، نتیجه می‌شود [بنا بر قسمت (پ) قضیهٔ ۱۲.۱۲] که S_λ معکوسپذیر است، و لذا $\lambda \notin \sigma(S)$.

یک قضیهٔ تعویضپذیری

فرض کنیم x و y عناصر تعویض‌شوی در یک جبر باناخ دارای برگشت باشند. واضح است که x^* و y^* تعویض می‌شوند صرفاً به این خاطر که $x^*y^* = (yx)^*$. آیا نتیجه می‌شود که x با y^* تعویض می‌شود؟ البته وقتی x نرمال نیست و $y = x$، جواب منفی است. ولی حتی وقتی هر دوی x و y نرمال‌اند نیز می‌تواند منفی باشد (تمرین ۲۸). لذا این امر که جواب در $\mathscr{B}(H)$ نسبت به برگشت ناشی از الحاقی فضای هیلبرت مثبت است (اگر x نرمال باشد) نکتهٔ جالبی خواهدبود:

هرگاه $N \in \mathscr{B}(H)$ ***نرمال بوده،*** $T \in \mathscr{B}(H)$، ***و*** $NT = TN$، ***آنگاه*** $N^*T = TN^*$.

دروافع نتیجهٔ کلیتری برقرار است:

۱۶.۱۲ قضیه (فوگلد (*Fuglede*) - پوتنام (*Putnam*) - روزن بلوم (*Rosenblum*)). ***فرض کنیم*** $M, N, T \in \mathscr{B}(H)$، M ***و*** N ***نرمال بوده، و***

$$MT = TN. \tag{۱}$$

در این صورت $M^*T = TN^*$.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $S \in \mathscr{B}(H)$. قرار می‌دهیم $V = S - S^*$، و تعریف می‌کنیم

$$Q = \exp(V) = \sum_{n=۰}^{\infty}\left(\frac{۱}{n!}\right)V^n. \tag{۲}$$

در این صورت $V^* = -V$، و لذا

$$Q^* = \exp(V^*) = \exp(-V) = Q^{-۱}. \tag{۳}$$

لذا Q یکه‌ای است. نتیجهٔ موردنیاز ما این است که

(٤) به ازای هر $S \in \mathscr{B}(H)$، $\|\exp(S - S^*)\| = ۱$.

هرگاه (۱) برقرار باشد، آنگاه به استقرا معلوم می‌شود که به ازای $k = ۱,۲,۳,\ldots$، $M^k T = TN^k$. لذا

(٥) $$\exp(M)T = T\exp(N)$$

یا

(٦) $$T = \exp(-M)T\ \exp(N) .$$

قرار می‌دهیم $U_۱ = \exp(M^* - M)$ و $U_۲ = \exp(N - N^*)$. چون M و N نرمال‌اند، از رابطهٔ (٦) معلوم می‌شود که

(۷) $$\exp(M^*)T\ \exp(-N^*) = U_۱ T U_۲.$$

بنابر(٤)، $\|U_۱\| = \|U_۲\| = ۱$؛ درنتیجه (۷) ایجاب می‌کند که

(۸) $$\|\exp(M^*)\|T\ \exp(-N^*) \le \|T\|.$$

حال تعریف می‌کنیم

(۹) $$f(\lambda) = \exp(\lambda M^*)T\ \exp(-\lambda N^*) \qquad (\lambda \in \mathcal{C}).$$

مفروضات قضیه به ازای $\bar{\lambda}M$ و $\bar{\lambda}N$ به جای M و N برقرارند. بنابراین (۸) ایجاب می‌کند که به ازای هر $\lambda \in \mathcal{C}$، $\|f(\lambda)\| \le \|T\|$. لذا f یک تابع $\mathscr{B}(H)$مقدار تمام کراندار است. بنابر قضیهٔ لیوویل ۳۲.۳، به ازای هر $\lambda \in \mathcal{C}$، $f(\lambda) = f(0) = T$. لذا رابطهٔ (۹) به صورت زیر در می‌آید:

(۱۰) $$\exp(\lambda M^*)T = T\exp(\lambda N^*) \qquad (\lambda \in \mathcal{C}) .$$

اگر ضرایب λ در (۱۰) را متحد بگیریم، رابطهٔ $M^*T = TN^*$ به دست می‌آید.

تبصره. از معاینهٔ این برهان معلوم می‌شود که در آن از خاصیتی از $\mathscr{B}(H)$ که هر B^*- جبر در آن سهیم نیست استفاده نشده است. اما، به خاطر قضیهٔ ۴۱.۱۲، این نکته به تعمیمی از قضیه منجر نخواهدشد.

توجه کنید که مفروضات قضیهٔ ١٦.١٢، حتی وقتی M و N خود الحاق بوده و T

نرمال باشد، $MT^* = T^*N$ را ایجاب نمی‌کنند: هرگاه

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

آنگاه $MT = TN$ ولی $MT^* \neq T^*N$.

تجزیه‌های همانی

۱۷.۱۲ تعریف. فرض کنیم $\mathscr{M}$ یک σ-جبر در مجموعهٔ Ω بوده و H یک فضای هیلبرت باشد. در این محدوده، یک ***تجزیهٔ همانی*** (بر $\mathscr{M}$) نگاشتی است مانند

$$E: \mathscr{M} \to \mathscr{B}(H)$$

با خواص زیر:

(آ) $E(\varnothing) = 0$ و $E(\Omega) = I$.

(ب) هر $E(\omega)$ یک تصویر خود الحاق است.

(پ) $E = (\omega' \cap \omega'') = W(\omega')E(\omega'')$.

(ت) هرگاه $\omega' \cap \omega'' = \varnothing$، آنگاه $E(\omega' \cup \omega'') = E(\omega') + E(\omega'')$.

(ث) به ازای هر $x \in H$ و $y \in H$، تابع مجموعه‌ای $E_{x,y}$ با تعریف

$$E_{x,y}(\omega)(E(\omega)x, y)$$

یک اندازهٔ مختلط بر $\mathscr{M}$ است.

وقتی $\mathscr{M}$، σ- جبر تمام مجموعه‌های بورل بر یک فضای هاسدورف فشرده یا موضعاً فشرده است، معمولاً شرط دیگری به (ث) می‌افزایند: هر $E_{x,y}$ باید یک اندازهٔ بورل ***منتظم*** باشد. (این مثلاً بر فضای متری فشرده خودبخود برقرار است. ر.ک.مرجع [۲۳].)

حال چند نتیجهٔ فوری از این خواص را ذکر می‌کنیم.

چون هر $E(\omega)$ یک تصویر خودالحاق است، داریم

$$E_{x,x}(\omega) = (E(\omega)x, x) = \|E(\omega)x\|^{2} \qquad (x \in H) \tag{1}$$

درنتیجه هر $E_{x,x}$ یک اندازهٔ مثبت بر $\mathscr{M}$ است که تغییر کلش مساوی است با

$$\|E_{x,x}\| = E_{x,x}(\Omega) = \|x\|^{2}. \tag{2}$$

بنابر (پ)، هر دو تصویر $E(\omega)$ با یکدیگر تعویض می‌شوند.

اگر $\omega' \cap \omega'' = \varnothing$، قسمتهای (آ) و (پ) نشان می‌دهند که بردهای $E(\omega')$ و $E(\omega'')$ به یکدیگر متعامدند (قضیهٔ ۱۴.۱۲).

بنابر (ت)، E به طور متناهی جمعی است. سؤال این است که آیا E به طور شمارشپذیر جمعی است یا خیر؛ یعنی، وقتی ω اجتماع مجموعه‌های از هم جدای $\omega_n \in m$ است، آیا سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(\omega_n) \tag{3}$$

در نرم توپولوژی $\mathscr{B}(H)$ به $E(\omega)$ همگراست. چون نرم هر تصویر ۰ یا دست کم ۱ است، مجموعهای جزئی سری (۳) نمی‌توانند یک دنبالهٔکشی تشکیل دهند مگر آنکه تمام جز تعدادی متناهی از $E(\omega_n)$ها ۰ باشند. لذا E به طور شمارشپذیر جمعی نیست جز در چند حالت بدیهی.

با اینحال، فرض کنیم $\{\omega_n\}$ مانند فوق بوده و $x \in H$ را ثابت می‌گیریم. چون وقتی $n \neq m$، $E(\omega_n)E(\omega_m) = 0$، بردارهای $E(\omega_n)x$ و $E(\omega_m)x$ به یکدیگر متعامدند (قضیهٔ ۱۴.۱۲). بنابر (ث)، به ازای هر $y \in H$،

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(E(\omega_n)x, y\right) = (E(\omega)x, y). \tag{4}$$

حال از قضیهٔ ۶.۱۲ نتیجه می‌شود که

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(\omega_n)x = E(\omega)x. \tag{5}$$

سری(۵) در نرم‌توپولوژی H همگراست. ما نتیجه‌ای را که هم‌اکنون ثابت شد خلاصه می‌کنیم:

۱۸.۱۲ حکم. *هرگاه E یک تجزیهٔ همانی بوده و $x \in H$، آنگاه*

$$\omega \to E(\omega)x$$

یک اندازهٔ Hمقدار به طور شمارشپذیر جمعی بر $\mathscr{M}$ است.

به علاوه، با مجموعه‌های از اندازهٔ صفر می‌توان به طریق زیر برخورد کرد:

۱۹.۱۲ حکم. *فرض کنیم E یک تجزیهٔ همانی باشد. هرگاه به ازای $n = 1,2,3,\ldots$، $\omega_n \in \mathscr{M}$ و $E(\omega_n) = 0$ و نیز $\omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n$، آنگاه $E(\omega) = 0$.*

برهان. چون $E(\omega_n) = 0$، به ازای هر $x \in H$ داریم $E_{x,x}(\omega_n) = 0$. و چون $E_{x,x}$ به طور شمارشپذیر جمعی است، پس $E_{x,x}(\omega) = 0$. ولی $E_{x,x}(\omega) = \|E(\omega)x\|^2$. بنابراین $E(\omega) = 0$.

۲۰.۱۲ جبر $L^{\infty}(E)$. فرض کنیم E مانند فوق یک تجزیهٔ همانی بر $\mathscr{M}$ باشد. همچنین f یک تابع $\mathscr{M}$- اندازهٔ‌پذیر مختلط باشد. یک گردایهٔ شمارشپذیر $\{D_i\}$ از قرصهای باز وجود دارد که یک پایه برای توپولوژی $\mathcal{C}$ تشکیل می‌دهند. فرض کنیم V اجتماع D_i هایی باشد که $E\left(f^{-1}\left(D_i\right)\right) = 0$. بنابر حکم ۱۹.۱۲، $E\left(f^{-1}(V)\right) = 0$. همچنین V وسیعترین زیرمجموعهٔ باز $\mathcal{C}$ با این خاصیت باشد.

برد اساسی f طبق تعریف متمم V است. این مجموعه کوچکترین زیرمجموعهٔ بستهٔ $\mathcal{C}$ است که شامل $f(p)$ به ازای تقریباً هر $p \in \Omega$، یعنی به ازای هر $p \in \Omega$ جز آنهایی که در مجموعه‌ای چون $\omega \in \mathscr{M}$ با $E(\omega) = 0$ قراردارند، می‌باشد.

گوییم f ***اساساً کراندار*** است اگر برد اساسی‌اش کراندار، درنتیجه فشرده، باشد. در این صورت، بزرگترین مقدار $|\lambda|$ وقتی λ برد اساسی f را می‌پیماید، ***سوپرمم اساسی*** $\|f\|_{\infty}$ از f است.

فرض کنیم B جبر تمام توابع $\mathscr{M}$- اندازه‌پذیر مختلط کراندار بر Ω باشد؛ با نرم

$$\|f\| = \sup\{|f(p)|: p \in \Omega\}.$$

به آسانی معلوم می‌شود که B یک جبر باناخ بوده و

$$N = \{f \in B: \|f\|_\infty = 0\}$$

یک ایده‌آل B است که طبق حکم ۱۹.۱۲ **بسته** می‌باشد. لذا B/N یک جبر باناخ است که آن را با $L^\infty(E)$ (به نحو معمول) نشان می‌دهیم.

در این صورت نرم هر هم مجموعهٔ $[f] = f + N$ از $L^\infty(E)$ مساوی $\|f\|_\infty$ است و طیف آن $\sigma([f])$ برد اساسی f می‌باشد. همانطور که در نظریهٔ اندازه معمول است، از تمایز بین f و ردهٔ هم‌ارزی‌اش $[f]$ صرف‌نظر می‌شود.

توجه بعدی ما به انتگرالگیری نسبت به اندازه‌های تصویر مقدار توصیف شده در بالاست. معلوم می‌شود که انتگرالهای حاصل $\int f dE$ نه تنها خطی‌اند (که همهٔ انتگرالهای مناسب باید باشند) بلکه ضربی نیز هستند!

۲۱.۱۲ قضیه. *هرگاه E یک تجزیهٔ همانی مثل فوق باشد، آنگاه یک یکمتر*[*]*–یکریختی مانند ψ از جبر باناخ $L^\infty(E)$ به روی یک زیرجبر نرمال بسته مانند A از $\mathscr{B}(H)$ هست که با E به وسیلهٔ فرمول*

$$(\psi(f)x, y) = \int_\Omega f dE_{x,y} \quad \left(x, y \in H, f \in L^\infty(E)\right) \tag{۱}$$

مربوط می‌شود. این امر نماد

$$\psi(f) = \int_\Omega f dE \tag{۲}$$

را توجیه می‌کند. به علاوه،

$$\|\psi(f)x\|^2 = \int_\Omega |f|^2 dE_{x,x} \qquad \left(x \in H, f \in L^\infty(E)\right), \tag{۳}$$

و عملگر $Q \in \mathscr{B}(H)$ با هر $E(\omega)$ تعویض می‌شود اگر و فقط اگر Q با هر $\psi(f)$ تعویض گردد.

به یاد آورید که زیرجبر ***نرمال*** A از $\mathscr{B}(H)$ یک جبر تعویضپذیر است که شامل

T^* به ازای هر $T \in A$ می‌باشد. وقتی گوییم ψ یک * - یکریختی است یعنی ψ یک به یک، خطی، و ضربی بوده و

$$\psi(\bar{f}) = \psi(f)^* \qquad \left(f \in L^\infty(E)\right). \tag{۴}$$

برهان. برای شروع فرض می‌کنیم $\{\omega_1,\dots,\omega_n\}$ افرازی از Ω با $\omega_i \in \mathscr{M}$ بوده و s یک تابع ساده باشد به طوری که $s=\alpha_i$ بر ω_i. $\psi(s) \in \mathscr{B}(H)$ را با

$$\psi(s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E(\omega_i) \tag{۵}$$

تعریف می‌کنیم. چون هر $E(\omega_i)$ خود الحاق است،

$$\psi(s)^* = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha}_i E(\omega_i) = \psi(\bar{s}). \tag{۶}$$

هرگاه $\{\omega'_1,\dots,\omega'_m\}$ افراز دیگری از این نوع بوده و $t=\beta_j$ بر ω'_j، آنگاه

$$\psi(s)\psi(t) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j E(\omega_i) E(\omega'_j) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j E(\omega_i \cap \omega'_j).$$

چون st تابع ساده‌ای است که بر $\omega_i \cap \omega'_j$ مساوی $\alpha_i\beta_j$ است، داریم

$$\psi(s)\psi(t) = \psi(st). \tag{۷}$$

استدلالی کاملاً مشابه نشان می‌دهد که

$$\psi(\alpha s + \beta t) = \alpha\psi(s) + \beta\psi(t). \tag{۸}$$

اگر $x \in H$ و $y \in H$، رابطهٔ (۵) به صورت زیر در می‌آید:

$$(\psi(s)x, y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(E(\omega_i)x, y\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_{x,y}(\omega_i) = \int_\Omega s\,dE_{x,y}. \tag{۹}$$

بنابر روابط (۶) و (۷)،

$$\psi(s)^* \psi(s) = \psi(\bar{s})\psi(s) = \psi(\bar{s}s) = \psi\left(|s|^2\right). \tag{۱۰}$$

لذا رابطهٔ (۹) نتیجه می‌دهد که

$$; \|\psi(s)x\|^2 = (\psi(s)^* \psi(s)x, x) = \left(\psi\left(|s|^2\right)x, x\right) = \int_\Omega |s|^2\, dE_{x,x} \tag{۱۱}$$

درنتیجه، طبق فرمول (۲) از بخش ۱۲.۱۷،

$$\|\psi(s)x\| \le \|s\|_\infty \|x\|. \tag{۱۲}$$

از آن سو، هرگاه $x \in \mathscr{R}\left(E\left(\omega_j\right)\right)$، آنگاه

$$\psi(s)x = \alpha_j E\left(\omega_j\right)x = \alpha_j x \tag{١٣}$$

زیرا تصویرهای $E(\omega_i)$ بردهای دوبه دو متعامدی دارند. اگر j طوری اختیار شده باشد که $\|s\|_\infty = |\alpha_j|$، از روابط (١٢) و (١٣) داریم

$$\|\psi(s)\| = \|s\|_\infty . \tag{١٤}$$

حال فرض کنیم $f \in L^\infty(E)$. دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر ساده مانند s_k هست که در نرم $L^\infty(E)$ به f همگراست. بنابر (١٤)، عملگرهای نظیر $\psi(s_k)$ یک دنبالهٔ‌کشی در $\mathscr{B}(H)$ تشکیل می‌دهند که به یک عملگر که آن را $\psi(f)$ می‌نامیم نرم- همگراست؛ به آسانی معلوم می‌شود که $\psi(f)$ به انتخاب خاصی از $\{s_k\}$ بستگی ندارد. واضح است که رابطهٔ (١٤) به

$$\|\psi(f)\| = \|f\|_\infty \qquad \left(f \in L^\infty(E)\right) \tag{١٥}$$

منجر می‌شود.

حال رابطهٔ (١) از (٩) (با s_k به جای s) نتیجه می‌شود، زیرا هر $E_{x,y}$ یک اندازهٔ متناهی است؛ روابط (٢) و (٣) از (٦) و (١١) نتیجه می‌شوند؛ اگر توابع اندازه‌پذیر کراندار f و g در نرم $L^\infty(E)$ به وسیلهٔ توابع اندازه‌پذیر سادهٔ s و t تقریب شوند، ملاحظه خواهیم کرد که (٧) و (٨) با f و g به جای s و t برقرارند.

لذا ψ یک یکریختی یکمتر از $L^\infty(E)$ به توی $\mathscr{B}(H)$ است. چون $L^\infty(E)$ تام است، بردش $A = \psi\left(L^\infty(E)\right)$ در $\mathscr{B}(H)$ به خاطر (١٥) بسته است.

بالأخره، هرگاه Q با هر $E(\omega)$ تعویض شود، آنگاه هروقت s ساده باشد، Q با $\psi(s)$ تعویض می‌شود، و لذا فرایند تقریب به کاررفته در فوق نشان می‌دهد که Q با هر عضو A تعویض می‌گردد.

شایان ذکر است که، به خاطر روابط (٣) و (١٥)،

$$\|f\|_\infty^{٢} = \sup\left\{ \int_\Omega |f|^{٢} dE_{x,x} : \|x\| \le ١\right\} \tag{١٦}$$

به ازای هر $f \in L^\infty(E)$ برقرار است.

قضیهٔ طیفی

حکم اصلی قضیهٔ طیفی این است که هر عملگر نرمال کراندار T بر یک فضای هیلبرت (به نحو کانونی) یک تجزیهٔ همانی مانند E بر زیرمجموعه‌های بورل طیفهایش $\sigma(T)$ را القا می‌کند و T را می‌توان از E به وسیلهٔ یک انتگرال از نوع مطرح شده در قضیهٔ ۲۱.۱۲ بازسازی کرد. بخش وسیعی از نظریهٔ عملگرهای نرمال به این امر بستگی دارد.

شاید بیان صریح اینکه طیف یک عملگر مانند $T \in \mathscr{B}(H)$ همواره اشاره به تمام جبر $\mathscr{B}(H)$ دارد لازم باشد. به عبارت دیگر، $\lambda \in \sigma(T)$ اگر و فقط اگر $T-\lambda I$ معکوسی در $\mathscr{B}(H)$ نداشته باشد. گاهی با زیرجبرهای بستهٔ A از $\mathscr{B}(H)$ با این خاصیت اضافی که هروقت $T \in A$، $I \in A$ و $T^* \in A$ نیز علاقمندیم (این نوع جبرها را گاهی *- جبر می‌نامند).

فرض کنیم A یک چنین جبر بوده و $T \in A$ و $T^{-1} \in \mathscr{B}(H)$. چون TT^* خود الحاق است، $\sigma(TT^*)$ زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از خط حقیقی است (قضیهٔ ۱۵.۱۲)؛ درنتیجه $\mathbb{C}$ را جدا نمی‌سازد، و لذا، طبق نتیجهٔ قضیهٔ ۱۸.۱۰ ، $\sigma_A(TT^*) = \sigma(TT^*)$. چون TT^* در $\mathscr{B}(H)$ معکوس‌پذیر است، این تساوی نشان می‌دهد که $(TT^*)^{-1} \in A$، و لذا $T^{-1} = T^*(TT^*)^{-1}$ نیز در A خواهدبود.

لذا T نسبت به تمام *- جبرهای بسته در $\mathscr{B}(H)$ که شامل T اند طیف یکسانی خواهد داشت.

قضیهٔ ۲۳.۱۲ به عنوان حالت خاصی از نتیجهٔ زیر به دست می‌آید که در رابطه با جبرهای نرمال عملگرهاست تا تک تک آنها.

۲۲.۱۲ قضیه. ***هرگاه A یک زیرجبر نرمال بستهٔ $\mathscr{B}(H)$ باشد که شامل عملگر همانی I است و Δ فضای ایده‌آل ماکزیمال A باشد، آنگاه احکام زیر برقرار می‌باشند:***

(آ) یک تجزیهٔ همانی منحصر به فرد مانند E بر زیرمجموعه‌های بورل Δ وجود

دارد که در رابطهٔ

$$T = \int_\Delta \hat{T} dE \tag{١}$$

به ازای هر $T \in A$ صدق می‌کند، که در آن $\hat{T}$ تبدیل گلفاند T می‌باشد.

(ب) معکوس تبدیل گلفاند (یعنی نگاشتی که $\hat{T}$ را به T بر می‌گرداند) به یک *- یکریختی یکمتر مانند Φ از جبر $L^\infty(E)$ به روی یک زیرجبر بستهٔ B از $\mathscr{B}(H)$ وسعت می‌یابد به طوری که $B \supset A$ و

$$\Phi f = \int_\Delta f dE \qquad \left(f \in L^\infty(E)\right). \tag{٢}$$

به طور صریح، Φ خطی و ضربی است و در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\Phi \bar{f} = (\Phi f)^*, \|\Phi f\| = \|f\|_\infty \qquad \left(f \in L^\infty(E)\right). \tag{٣}$$

(پ) B [در نرم توپولوژی $\mathscr{B}(H)$] بست مجموعهٔ تمام ترکیبات خطی متناهی از تصاویر $E(\omega)$ است.

(ت) هرگاه $\omega \subset \Delta$ باز و ناتهی باشد، آنگاه $E(\omega) \neq 0$.

(ث) عملگر $S \in \mathscr{B}(H)$ با هر $T \in A$ تعویض می‌شود اگر و فقط اگر S با هر تصویر $E(\omega)$ تعویض گردد.

برهان. به یاد آورید که (١) اختصاری است برای

$$(Tx, y) = \int_\Delta \hat{T} dE_{x,y} \qquad (x, y \in H, T \in A). \tag{٤}$$

چون $\mathscr{B}(H)$ یک B^*- جبر است (بخش ٩.١٢)، جبر Aی داده شدهٔ ما یک B^*- جبر تعویضپذیر است. لذا قضیهٔ گلفاند- نیمارک ١٨.١١ می‌گوید که $T \to \hat{T}$ یک *- یکریختی یکمتر از A به روی $C(\Delta)$ است.

این ما را به یک برهان ساده‌ای از یکتایی E می‌رساند. فرض کنیم رابطهٔ (٤) برقرار باشد. چون $\hat{T}$ روی تمام $C(\Delta)$ تغییر می‌کند، انتظام فرض شدهٔ اندازه‌های بورل مختلط $E_{x,y}$ نشان می‌دهد که هر $E_{x,y}$ به طور منحصر به فرد توسط (٤) معین می‌شود؛ این امر از حکم یکتایی که بخشی از قضیهٔ نمایش ریس است نتیجه می‌شود [مرجع [٢٣]،

قضیهٔ ۱۹.٦]. چون طبق تعریف $(E(\omega)x,y)=E_{x,y}(\omega)$، هر تصویر $E(\omega)$ نیز به طور منحصر به فرد به وسیلهٔ (٤) معین است.

این برهان یکتایی برهان زیر از وجود E را موجب می‌شود. اگر $x\in H$ و $y\in H$، قضیهٔ ۱۸.۱۱ نشان می‌دهد که $\hat{T}\to(Tx,y)$ یک تابعی خطی کراندار بر $C(\Delta)$ با نرم نابیشتر از $\|x\|\|y\|$ است زیرا $\|T\|=\|\hat{T}\|_\infty$. لذا قضیهٔ نمایش ریس به ما اندازه‌های بورل مختلط منتظم منحصر به فرد $\mu_{x,y}$ بر Δ را که

$$(Tx,y)=\int_\Delta \hat{T}d\mu_{x,y} \qquad (x,y\in H, T\in A) \tag{٥}$$

می‌دهد. به ازای Tی ثابت، طرف چپ (٥) یک تابعی یک و نیم خطی کراندار بر H است، لذا طرف راست چنین است، و اگر تابع پیوستهٔ $\hat{T}$ با یک تابع بورل کراندار دلخواه f عوض شود نیز چنین می‌ماند. لذا به هر چنین f یک عملگر $\Phi f\in\mathscr{B}(H)$ نظیر است (ر.ک.قضیهٔ ۸.۱۲) به طوری که

$$((\Phi f),y)=\int_\Delta fd\mu_{x,y} \qquad (x,y\in H). \tag{٦}$$

از مقایسهٔ (٥) و (٦) معلوم می‌شود که $\Phi\hat{T}=T$. لذا Φ یک توسیع معکوس تبدیل گلفاند است.

واضح است که Φ خطی می‌باشد.

بخشی از قضیهٔ گلفاند - نیمارک می‌گوید که T خود الحاق است اگر وفقط اگر $\hat{T}$ حقیقی باشد. به ازای چنین T،

$$\int_\Delta \hat{T}d\mu_{x,y}=(Tx,y)=(x,Ty)=\overline{(Ty,x)}=\overline{\int_\Delta \hat{T}d\mu_{y,x}}$$

و این ایجاب می‌کند که $\mu_{y,x}=\overline{\mu_{x,y}}$. لذا، به ازای هر $x,y\in H$،

$$((\Phi\bar{f})x,y)=\int_\Delta \bar{f}d\mu_{x,y}=\overline{\int_\Delta fd\mu_{y,x}}=\overline{((\Phi f)y,x)}=(x,(\Phi f)y);$$

در نتیجه

$$\Phi\bar{f}=(\Phi f)^*. \tag{٧}$$

هدف بعدی ما تساوی

$$\Phi(fg)=(\Phi f)(\Phi g) \tag{٨}$$

به ازای توابع بورل کراندار f و g بر Δ است. هرگاه $S\in A$ و $T\in A$، آنگاه

$(ST)\hat{} = \hat{S}\hat{T}$؛ لذا

$$\int_\Delta \hat{S}\hat{T}d\mu_{x,y} = (STx, y) = \int_\Delta \hat{S}d\mu_{Tx,y}\,.$$

این به ازای هر $\hat{S} \in C(\Delta)$ برقرار است؛ لذا، اگر $\hat{S}$ را با یک تابع بورل کراندار f عوض کنیم، دو انتگرال مساوی خواهند بود. بنابراین

$$\int_\Delta f\hat{T}d\mu_{x,y} = \int_\Delta fd\mu_{Tx,y} = ((\Phi f)Tx, y) = (Tx, z) = \int_\Delta \hat{T}d\mu_{x,z}$$

که در آن قرار می‌دهیم $z = (\Phi f)^* y$. مجدداً، اگر $\hat{T}$ را با g عوض کنیم، انتگرالهای اول و آخر مساوی می‌مانند. از این نتیجه می‌شود که

$$(\Phi(fg)x, y) = \int_\Delta fgd\mu_{x,y} = \int_\Delta gd\mu_{x,z}$$
$$= ((\Phi g)x, z) = ((\Phi g)x), ((\Phi f)^* y) = (\Phi(f)\Phi(g)x, y),$$

و رابطهٔ (۸) به اثبات می‌رسد.

در نهایت آماده‌ایم E را تعریف کنیم: اگر ω یک زیرمجموعهٔ بورل Δ باشد، χ_ω را تابع مشخص آن گرفته و قرارمی‌دهیم

$$E(\omega) = \Phi(\chi_\omega)\,. \qquad (۹)$$

بنابر (۸)، $E(\omega \cap \omega') = E(\omega)E(\omega')$. این به ازای $\omega = \omega'$ نشان می‌دهد که هر $E(\omega)$ یک تصویر است. چون Φf به ازای f حقیقی خود الحاق است، بنابر (۷)، هر $E(\omega)$ خود الحاق می‌باشد. واضح است که $E(\varnothing) = \Phi(0) = 0$. رابطهٔ $E(\Delta) = I$ از روابط (۵) و (٦) نتیجه می‌شود. جمعپذیری متناهی E نتیجه‌ای است از (٦)، و به ازای هر $x, y \in H$،

$$E_{x,y}(\omega) = (E(\omega)x, y) = \int_\Delta \chi_\omega d\mu_{x,y} = \mu_{x,y}(\omega).$$

لذا(٦) به صورت (۲) در می‌آید. حال رابطهٔ $\|\Phi f\| = \|f\|_\infty$ ازقضیهٔ ۲۱.۱۲ نتیجه می‌شود. این برهان (آ) و (ب) را کامل می‌کند.

حال قسمت (پ) واضح است زیرا هر $f \in L^\infty(E)$ حد یکنواختی از توابع ساده (یعنی توابعی بافقط تعدادی متناهی مقدار) است.

حال فرض کنیم ω باز بوده و $E(\omega) = 0$. هرگاه $T \in A$ و محافظ $\hat{T}$ در ω باشد، رابطهٔ (۱) ایجاب می‌کند که $T = 0$؛ درنتیجه $\hat{T} = 0$. حال چون $\hat{A} = C(\Delta)$، لم اوریزون

ایجاب می‌کند که $\omega = \varnothing$. این قسمت (ت) را ثابت خواهد کرد.

برای اثبات (ث)، $S \in \mathscr{B}(H)$، $x \in H$، و $y \in H$ را اختیار کرده و قرار می‌دهیم $z = S^*y$. در این صورت به ازای هر $T \in A$ و هر مجموعهٔ بورل $\omega \subset \Delta$ داریم

$$(STx, y) = (Tx, y) = \int_\Delta \hat{T} dE_{x,z}, \tag{۱۰}$$

$$(TSx, y) = \int_\Delta \hat{T} dE_{Sx,y}, \tag{۱۱}$$

$$(SE(\omega)x, y) = (E(\omega)x, z) = E_{x,z}(\omega), \tag{۱۲}$$

$$(E(\omega)Sx, y) = E_{Sx,y}(\omega)\,. \tag{۱۳}$$

اگر به ازای هر $T \in A$، $ST = TS$، اندازه‌های در (۱۰) و (۱۱) مساویند؛ درنتیجه $SE(\omega) = E(\omega)S$. همین استدلال عکس مطلب را ثابت می‌کند. این برهان را تمام خواهد کرد.

حال این قضیه را به عملگر منفردی خاص می‌سازیم.

۲۳.۱۲ قضیه. ***هرگاه $T \in \mathscr{B}(H)$ و T نرمال باشد، آنگاه تجزیهٔ همانی منحصر به فردی مانند E بر زیرمجموعه‌های بورل $\sigma(T)$ وجود دارد که در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:***

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda dE(\lambda). \tag{۱}$$

به علاوه، هر تصویر $E(\omega)$ با هر $S \in \mathscr{B}(H)$ که با T تعویض می‌شود تعویض خواهد شد.

ما این E را ***تجزیهٔ طیفی*** T می‌نامیم.

گاهی تصور E که به ازای هر مجموعهٔ بورل در $\mathbb{C}$ تعریف شده است مناسب است؛ برای این کار به ازای $\omega \cap \sigma(T) = \varnothing$ قرار می‌دهیم $E(\omega) = 0$.

برهان. فرض کنیم A کوچکترین زیرجبر بستهٔ $\mathscr{B}(H)$ باشد که شامل I، T، و T^*

است. چون T نرمال است، قضیهٔ ۲۲.۱۲ در مورد A به کار می‌رود. بنابر قضیهٔ ۱۹.۱۱، فضای ایده‌آل ماکزیمال A را می‌توان با $\sigma(T)$ به نحوی یکی کرد که به ازای هر $\lambda \in \sigma(T)$، $\hat{T}(\lambda) = \lambda$. حال وجود E از قضیهٔ ۲۲.۱۲ نتیجه می‌شود.

از آن سو، اگر E چنان موجود باشد که(۱) برقرار باشد، قضیهٔ ۲۱.۱۲ نشان می‌دهد که

$$p(T,T^*) = \int_{\sigma(T)} p(\lambda,\bar{\lambda})dE(\lambda), \tag{۲}$$

که در آن p یک چندجمله‌ای دو متغیره (با ضرایب مختلط) است. بنا بر قضیهٔ استون–وایراشتراس، این چندجمله‌ایها در $C(\sigma(T))$ چگالند. لذا تصاویر $E(\omega)$ به طور منحصر به فرد به وسیلهٔ انتگرالهای (۲)، و لذا به وسیلهٔ T، درست مثل برهان یکتایی در قضیهٔ ۲۲.۱۲، به طور منحصر به فرد معین می‌شود.

هرگاه $ST = TS$، آنگاه طبق قضیهٔ ۱٦.۱۲ نیز داریم $ST^* = T^*S$؛ لذا S با هر عضو A تعویض می‌شود. بنا بر قسمت (ث) قضیهٔ ۲۲.۱۲، به ازای هر مجموعهٔ بورل $\omega \subset \sigma(T)$ داریم $SE(\omega) = E(\omega)S$.

۲٤.۱۲ حساب علامتی برای عملگرهای نرمال. اگر E تجزیهٔ طیفی عملگر نرمال $T \in \mathscr{B}(H)$ بوده و f یک تابع بورل کراندار بر $\sigma(T)$ باشد، معمولاً عملگر

$$\psi(f) = \int_{\sigma(T)} f dE \tag{۱}$$

را با $f(T)$ نشان می‌دهند.

با استفاده از این نمادگذاری می‌توان بخشی از قضایای ۲۱.۱۲ تا ۲۳.۱۲ را به صورت زیر خلاصه کرد:

نگاشت $f \to f(T)$ یک همریختی از جبر تمام توابع بورل کراندار بر $\sigma(T)$ به توی $\mathscr{B}(H)$ است که تابع ۱ را به I برده و تابع همانی بر $\sigma(T)$ را به T می‌برد و در روابط

$$\bar{f}(T) = f(T)^* \tag{۲}$$

و

$$\|f(T)\| \le \sup\{|f(\lambda)|: \lambda \in \sigma(T)\} \qquad (۳)$$

صدق می‌کند.

هرگاه $f \in C(\sigma(T))$، آنگاه در (۳) تساوی برقرار است و لذا $f \to f(T)$ یک یکریختی بر $C(\sigma(T))$ است که در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\|f(T)x\|^۲ = \int_{\sigma(T)} |f|^۲ dE_{x,x} .$$

هرگاه $f_n \to f$ به طور یکنواخت، آنگاه وقتی $n \to \infty$، $\|f_n(T) - f(T)\| \to ۰$.

هرگاه $S \in \mathscr{B}(H)$ و $ST = TS$، آنگاه به ازای هر تابع بورل کراندار f، $Sf(T) = f(T)S$. چون تابع همانی را می‌توان بر $\sigma(T)$ به وسیلهٔ توابع بورل ساده به طور یکنواخت تقریب کرد، پس T در نرم توپولوژی $\mathscr{B}(H)$ حد ترکیبات خطی متناهی از تصویرهای $E(\omega)$ می‌باشد.

برهان زیر شامل اولین کاربرد ما از این حساب علامتی می‌باشد.

۲۵.۱۲ قضیه. *هرگاه $T \in \mathscr{B}(H)$ نرمال باشد، آنگاه*

$$\|T\| = \sup\{|(Tx, x)|: x \in H, \|x\| \le ۱\} .$$

برهان. $\varepsilon > ۰$ را اختیار می‌کنیم. کافی است نشان دهیم که به ازای $x_۰ \in H$ی با $\|x_۰\| = ۱$،

$$\left|(Tx_۰, x_۰)\right| > \|T\| - \varepsilon. \qquad (۱)$$

چون $\rho(T) = \|\hat{T}\|_\infty = \|T\|$(قضیهٔ ۱۸.۱۱)، $\lambda_۰ \in \sigma(T)$ی هست به طوری که $\|T\| = \|\lambda_۰\|$. فرض کنیم ωمجموعهٔ تمام $\lambda \in \sigma(T)$هایی باشد که $|\lambda - \lambda_۰| < \varepsilon$. هرگاه E تجزیهٔ طیفی T باشد، آنگاه قسمت (ت) قضیهٔ ۲۲.۱۲ ایجاب می‌کند که $E(\omega) \ne ۰$. لذا $x_۰ \in H$ی با $\|x_۰\| = ۱$ و $E(\omega)x_۰ = x_۰$ وجود دارد.

به ازای $\lambda \in \omega$ تعریف می‌کنیم $f(\lambda) = \lambda - \lambda_۰$ و به ازای هر $\lambda \in \sigma(T)$ی دیگر

قرار می‌دهیم $f(\lambda)=0$. در این صورت

$$f(T)=(T-\lambda_0 I)E(\omega);$$

درنتیجه

$$f(T)x_0 = Tx_0 - \lambda_0 x_0 .$$

لذا

$$\left|(Tx_0, x_0)-\lambda_0\right| = \left|(f(T)x_0, x_0)\right| \le \|f(T)\| \le \varepsilon,$$

زیرا به‌ازای هر $\lambda \in \sigma(T)$، $|f(\lambda)|<\varepsilon$. این به خاطر $\|T\|=|\lambda_0|$ رابطهٔ (۱) را ایجاب می‌کند.

برای مشاهدهٔ اینکه نرمال بودن در اینجا لازم است، فرض کنیم T عملگر خطی بر $\mathbb{C}^2$ (با پایهٔ $\{e_1, e_2\}$) داده شده با $Te_1=0$ و $Te_2=e_1$ باشد. داریم $\|T\|=1$ ولی اگر $\|x\|\le 1$، $|(Tx,x)|\le \frac{1}{2}$.

نتیجهٔ بعدی ما شامل عکسی از قضیهٔ ۱۵.۱۲ است.

۲۶.۱۲ قضیه. *نرمال* $T\in\mathscr{B}(H)$

(آ) خود الحاق است اگر و فقط اگر $\sigma(T)$ در محور حقیقی واقع باشد،

(ب) یکه‌ای است اگر و فقط اگر $\sigma(T)$ بردایرهٔ یکه واقع باشد.

برهان. A را همانند برهان قضیهٔ ۲۳.۱۲ اختیار می‌کنیم. در این صورت $\hat{T}(\lambda)=\lambda$ و $(T^*)^\wedge(\lambda)=\overline{\lambda}$ بر $\sigma(T)$. لذا $T=T^*$ اگر و فقط اگر $\lambda=\overline{\lambda}$ بر $\sigma(T)$، و $TT^*=I$ اگر و فقط اگر $\lambda\overline{\lambda}=1$ بر $\sigma(T)$.

۲۷.۱۲ زیرفضاهای پایا. همانند قضیهٔ ۳۵.۱۰، زیرفضای بستهٔ M از H یک ***زیرفضای پایای*** مجموعهٔ $\sum\subset\mathscr{B}(H)$ است اگرهر $T\in\sum$ فضای M را به توی M بنگارد. به عنوان مثال، هر فضای ویژهٔ T یک زیرفضای پایای T است. وقتی $\dim H<\infty$، قضیهٔ طیفی

ایجاب می‌کند که فضاهای ویژهٔ هر عملگر نرمال T فضاهای H را می‌پیماید.

[*برهان اختصاری.* تابع مشخص هر نقطه در $\sigma(T)$ نظیر یک تصویر در H است. مجموع این تصویرها مساوی است با $E(\sigma(T)) = I$.] اگر $\dim H = \infty$، ممکن است T مقدار ویژه‌ای نداشته باشد (تمرین ۲۰). ولی عملگرهای نرمال زیرفضاهای پایایی دارند که نابدیهی‌اند (یعنی مخالف $\{0\}$ و H اند).

درواقع، فرض کنیم A همانند قضیهٔ ۲۲.۱۲ یک جبر نرمال بوده و E تجزیهٔ همانی آن بر زیرمجموعه‌های بورل Δ باشد. هرگاه Δ از یک نقطه تشکیل شده باشد، آنگاه A از مضارب اسکالر I تشکیل شده است، و هر زیرفضای H تحت A پایاست. فرض کنیم $\Delta = \omega \cup \omega'$ که در آن ω و ω' مجموعه‌های بورل از هم جدای ناتهی‌اند. همچنین M و M' بردهای $E(\omega)$ و $E(\omega')$ باشند. در این صورت، به ازای هر $T \in A$، $TE(\omega) = E(\omega)T$. اگر $x \in M$، داریم

$$Tx = TE(\omega)x = E(\omega)Tx;$$

درنتیجه $Tx \in M$. همین امر برای M' برقرار است.

لذا M و M' زیرفضاهای پایایی از A می‌باشند.

به علاوه، $M' = M^{\perp}$ و $H = M \oplus M'$.

تجزیه‌های Δ به تعداد متناهی (یا حتی شمارشپذیر) مجموعهٔ بورل از هم جدا به همین نحو تجزیه‌هایی از H به زیرفضاهای پایای دو به دو متعامد از A را القا می‌کنند.

این مسئله که هر $T \in \mathscr{B}(H)$ ی (غیرنرمال) به ازای فضای هیلبرت جدایی‌پذیر با بعد نامتناهی یک زیرفضای پایای نابدیهی دارد هنوز حل نشده است.

مقادیر ویژهٔ عملگرهای نرمال

اگر $T \in \mathscr{B}(H)$ نرمال باشد، مقادیر ویژه‌اش یک رابطهٔ ساده بر تجزیهٔ طیفی آن می‌گذارد (قضیهٔ ۲۹.۱۲). این امر از کاربرد حساب علامتی زیر نتیجه می‌شود.

۲۸.۱۲ قضیه. ***فرض کنیم $T \in \mathscr{B}(H)$ نرمال بوده و E تجزیهٔ طیفی آن باشد. هرگاه***

$f \in C(\sigma(T))$ و $\omega_\circ = f^{-1}(\circ)$، آنگاه

$$\mathcal{N}(f(T)) = \mathcal{R}(E(\omega_\circ)). \qquad (۱)$$

برهان. قرار می‌دهیم ۱ $= g(\lambda)$ بر $\omega_\circ$، $g(\lambda) = \circ$ در تمام نقاط دیگر $\sigma(T)$. در این صورت $fg = \circ$؛ درنتیجه $f(T)g(T) = \circ$. چون $g(T) = E(\omega_\circ)$، پس داریم

$$\mathcal{R}(E(\omega_\circ)) \subset \mathcal{N}(f(T)). \qquad (۲)$$

فرض کنیم، به ازای هر عدد صحیح و مثبت n، ω_n مجموعهٔ تمام $\lambda \in \sigma(T)$هایی باشد که $1/n \le |f(\lambda)| < 1/(n-1)$. دراین صورت، متمم $\tilde{\omega}$ از $\omega_\circ$ نسبت به $\sigma(T)$ اجتماع مجموعه‌های بورل از هم جدای ω_n است. تعریف می‌کنیم

$$f_n(\lambda) = \begin{cases} 1/f(\lambda) & \text{بر } \omega_n\text{،} \\ \circ & \text{جای دیگر بر } \sigma(T)\text{،} \end{cases} \qquad (۳)$$

هر f_n یک تابع بورل کراندار بر $\sigma(T)$ است، و

$$f_n(T)f(T) = E(\omega_n) \qquad (n = 1,2,3,\ldots). \qquad (۴)$$

اگر $f(T)x = \circ$، نتیجه می‌شود که $E(\omega_n)x = \circ$. لذا جمعپذیری شمارشپذیر نگاشت $\omega \to E(\omega)x$ (حکم ۱۸.۱۲) نشان می‌دهد که $E(\tilde{\omega})x = \circ$. ولی $E(\tilde{\omega}) + E(\omega_\circ) = I$. لذا $E(\omega_\circ)x = x$. پس ثابت کرده‌ایم که

$$\mathcal{N}(f(T)) \subset \mathcal{R}(E(\omega_\circ)), \qquad (۵)$$

و رابطهٔ (۱) از (۲) و (۵) نتیجه می‌شود.

۲۹.۱۲ قضیه. *فرض کنیم E تجزیهٔ طیفی یک نرمال مانند $T \in \mathcal{B}(H)$ بوده، $\lambda_\circ \in \sigma(T)$، و $E_\circ = E(\{\lambda_\circ\})$. در این صورت،*

(آ) $\mathcal{N}(T - \lambda_\circ I) = \mathcal{R}(E_\circ)$،

(ب) $\lambda_\circ$ یک مقدار ویژهٔ T است اگر وفقط اگر $E_\circ \ne \circ$، و

(پ) هر نقطهٔ تنها از $\sigma(T)$ یک مقدار ویژهٔ T است.

(ت) به علاوه، هرگاه $\sigma(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\}$ یک مجموعهٔ شمارشپذیر باشد،

آنگاه هر $x \in H$ بسط منحصر به فردی به شکل زیر دارد:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i ,$$

که در آن $Tx_i = \lambda_i x_i$. همچنین، هروقت $i \neq j$، $x_i \perp x_j$.

احکام (ب) و (پ) اصطلاح ***طیف نقطه‌ای*** T را برای مجموعهٔ تمام مقادیر ویژهٔ T توضیح می‌دهند.

برهان. قسمت (آ) نتیجهٔ فوری قضیهٔ ۲۸.۱۲ با $f(\lambda) = \lambda - \lambda_0$ است. واضح است که (ب) از (آ) نتیجه می‌شود. هرگاه λ_0 یک نقطهٔ تنهای $\sigma(T)$ باشد، آنگاه $\{\lambda_0\}$ یک زیرمجموعهٔ باز ناتهی $\sigma(T)$ است؛ لذا،طبق قسمت (ت) قضیهٔ ۲۲.۱۲، $E_0 \neq 0$. بنابراین، قسمت (پ) از (ب) نتیجه خواهدشد.

برای اثبات (ت)، قرار می‌دهیم $E_i = E(\{\lambda_i\})$، $i = 1, 2, 3, \cdots$. در نقاط حدی λ_i مجموعهٔ $\sigma(T)$ ممکن است E_i مساوی 0 باشد یا نباشد. در هر حالت، تصاویر E_i دارای بردهای دو به دو متعامد می‌باشند. جمعپذیری شمارش‌پذیر $\omega \to E(\omega)x$ (حکم ۱۸.۱۲) نشان می‌دهد که

$$\sum_{i=1}^{\infty} E_i x = E(\sigma(T))x = x \quad (x \in H) .$$

این سری در نرم H همگراست. اگر $x_i = E_i x$، این نمایش مطلوب از x را به ما خواهدداد. یکتایی از تعامد بردارهای x_i نتیجه می‌شود، و $Tx_i = \lambda_i x_i$ از قسمت (آ) نتیجه خواهدشد.

۳۰.۱۲ قضیه. *عملگر نرمال $T \in \mathscr{B}(H)$ فشرده است اگر و فقط اگر در دو شرط زیر صدق کند:*

(آ) *$\sigma(T)$ نقطهٔ حدی جز احتمالاً 0 ندارد.*

(بـ) هرگاه $\lambda \neq 0$، آنگاه $\dim \mathscr{N}(T-\lambda I) < \infty$.

برهان. برای لزوم، ر.ک.قسمت (تـ) قضیهٔ ١٨.٤ و قضیهٔ ٢٥.٤ .

برای اثبات کفایت، فرض کنیم (آ) و (بـ)برقرار باشند. $\{\lambda_i\}$ را شمارشی از نقاط ناصفر $\sigma(T)$ می‌گیریم که $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$. به ازای $\lambda = \lambda_i$ و $i \leq n$ تعریف می‌کنیم $f_n(\lambda) = \lambda$، و در نقاط دیگر $\sigma(T)$ قرار می‌دهیم $f_n(\lambda) = 0$. هرگاه مانند قضیهٔ ٢٩.١٢ داشته باشیم $E_i = E(\{\lambda_i\})$، آنگاه

$$f_n(T) = \lambda_1 E_1 + \ldots + \lambda_n E_n.$$

چون $\dim \mathscr{R}(E_i) = \dim \mathscr{N}(T - \lambda_i I) < \infty$، هر $f_n(T)$ یک عملگر فشرده است. و چون به ازای هر $\lambda \in \sigma(T)$، $|\lambda - f_n(\lambda)| \leq |\lambda_n|$، داریم:

وقتی $n \to \infty$، $\|T - f_n(T)\| \leq |\lambda_n| \to 0$.

حال از قسمت (پـ)قضیهٔ ١٨.٤ نتیجه می‌شود که T فشرده است.

ما تلویحاً فرض کرده‌ایم که $\sigma(T)$ نامتناهی است. هرگاه $\sigma(T)$شامل فقط n نقطهٔ مخالف 0 باشد، آنگاه در برهان قبل $f_n(T) = T$، وقضیهٔ ١٨.٤ لازم نخواهدبود.

٣١.١٢ قضیه. فرض کنیم $T \in \mathscr{B}(H)$ نرمال و فشرده باشد. در این صورت

(آ) T دارای یک مقدار ویژه مانند λ با $|\lambda| = \|T\|$ است،

(بـ) $f(T)$ به ازای $f \in C(\sigma(T))$ و $f(0) = 0$ فشرده است، ولی

(پـ) $f(T)$ به ازای $f \in C(\sigma(T))$، $f(0) \neq 0$، و $\dim H = \infty$ فشرده نیست.

برهان. چون T نرمال است، قضیهٔ ١٨.١١ نشان می‌دهد که $\lambda \in \sigma(T)$ ای با $|\lambda| = \|T\|$ وجود دارد. اگر $\|T\| > 0$، این λ یک نقطهٔ تنهای $\sigma(T)$ (قضیهٔ ٣٠.١٢) و درنتیجه یک مقدار ویژهٔ T (قضیهٔ ٢٩.١٢) است. اگر $\|T\| = 0$، قسمت (آ) واضح می‌باشد.

برای اثبات (ب)، $\varepsilon > ۰$ را اختیار و سپس $\delta > ۰$ را طوری می‌گیریم که اگـر $|\lambda| \le \delta$، $|f(\lambda)| < \varepsilon$. فرض کنیم $\lambda_۱$،...، λ_N نقاطی در $\sigma(T)$ باشند که $|\lambda_i| > \delta$. چندجملـه‌ایهای Q_k $(۱ \le k \le N)$را طوری می‌گـیریم کـه $Q_k(\lambda_k) = ۱$ و بـه ازای $j \ne k$ کـه $۱ \le j \le N$، $Q_k(\lambda_j) = ۰$؛ و تعریف می‌کنیم

$$P(\lambda) = \sum_{k=۱}^{N} f(\lambda_k)(\lambda/\lambda_k)^M Q_k(\lambda),$$

که در آن M یک عدد صحیح مثبت است آنقدر بزرگ که اگـر $|\lambda| \le \delta$، $|P(\lambda)| < \varepsilon$. چنـد جمله‌ای P، λ را به عنوان عامل دارد. لذا، طبق قســمت (جــ) قضیـهٔ ۱۸.۴، $P(T)$ یـک عملگر فشرده است. همچنین، به ازای $۱ \le j \le N$، $P(\lambda_j) = f(\lambda_j)$. پـس بـه ازای هـر $\lambda \in \sigma(T)$، $|P(\lambda) - f(\lambda)| < ۲\varepsilon$. لذا $\|P(T) - f(T)\| < ۲\varepsilon$، و قسمت (پــ) قضیـهٔ ۱۸.۴ ایجاب می‌کند که $f(T)$ فشرده است.

در برهان قسمت (پ) بی‌آنکه به کلیت آسیبی برســد فـرض می‌کنیـم $f(۰) = ۱$. در این صورت، اگر (ب) را بر $۱ - f$ اعمال کنیم، معلوم می‌شود که عملگر $S = I - f(T)$ فشرده است. فرض کنیم B گوی یکهٔ H باشد. در این صورت

$$B \subset S(B) + f(T)(B).$$

اگر $f(T)$ فشرده می‌بود، B در مجموع دو مجموعهٔ فشرده قرار می‌گرفت؛ لذا H موضعاً فشرده و درنتیجه با بعد متناهی بود که با فرض ما در تضاد خواهدبود.

عملگرهای مثبت و ریشه‌های دوم

۳۲.۱۲ قضیه. *فرض کنیم $T \in \mathscr{B}(H)$. در این صورت*

(آ) *به ازای هر $x \in H$، $(Tx,x) \ge ۰$ اگر و فقط اگر*

(ب) $T = T^*$ و $\sigma(T) \subset [۰,\infty)$.

اگر $T \in \mathscr{B}(H)$ در (آ) صدق کند، T را یک عملگــر **مثبــت** نـامیده و می‌نویسـیم $T \ge ۰$. قضیهٔ فوق می‌گوید که این اصطلاح با تعریف ۲۷.۱۱ سازگار است.

برهان. به طورکلی، (Tx,x) و (x,Tx) مزدوجهای مختلط یکدیگرند. ولی هرگاه (آ) برقرارباشد، آنگاه (Tx,x) حقیقی است؛ درنتیجه، به ازای هر $x \in H$،

$$(x, T^* x) = (Tx, x) = (x, Tx) .$$

بنابر قضیهٔ ۷.۱۲، $T = T^*$، و لذا $\sigma(T)$ در محور حقیقی قراردارد (قضیهٔ ۱۵.۱۲). اگر $\lambda > 0$، قسمت (آ) ایجاب می‌کند که

$$\lambda\|x\|^2 = (\lambda x, x) \le ((T + \lambda I)x, x) \le \|(T + \lambda I)x\|\|x\|,$$

درنتیجه،

$$\|(T + \lambda I)x\| \ge \lambda\|x\|.$$

بنابر قضیهٔ ۱۲.۱۲ (پ)، $T+\lambda I$ در $\mathscr{B}(H)$ معکوسپذیر است، و $-\lambda$ در $\sigma(T)$ نیست. پس (آ) قسمت (ب) را ایجاب می‌کند.

حال فرض کنیم (ب) برقرار بوده و E تجزیهٔ طیفی T باشد؛ درنتیجه

$$(Tx, x) = \int_{\sigma(T)} \lambda dE_{x,x}(\lambda) \qquad (x \in H) .$$

چون هر $E_{x,x}$ یک اندازهٔ مثبت است و $\lambda \ge 0$ بر $\sigma(T)$، داریم $(Tx,x) \ge 0$. لذا (ب) قسمت (آ) را ایجاب می‌کند.

۳۳.۱۲ قضیه. ***هر $T \in \mathscr{B}(H)$ی مثبت دارای یک ریشهٔ دوم مثبت منحصر به فرد مانند $S \in \mathscr{B}(H)$ است. اگر T معکوسپذیر باشد، S نیز چنین است.***

برهان. فرض کنیم A یک زیرجبرنرمال بستهٔ $\mathscr{B}(H)$ باشد که شامل I و T است، و Δ فضای ایده‌آل ماکزیمال A باشد. بنابر قضیهٔ ۱۸.۱۱، $\hat{A} = C(\Delta)$. چون T در شرط (ب)قضیهٔ ۳۲.۱۲ صدق می‌کند و $\sigma(T) = \hat{T}(\Delta)$، می‌بینیم که $\hat{T} \ge 0$. و چون هر تابع پیوستهٔ نامنفی یک ریشهٔ دوم پیوستهٔ نامنفی منحصر به فرد دارد، پس $S \in A$ی منحصر به فرد هست که در $S^2 = T$ و $\hat{S} \ge 0$ صدق می‌کند؛ بنابر قضیهٔ ۳۲.۱۲، $\hat{S} \ge 0$ هم ارز $S \ge 0$ می‌باشد.

به خصوص، فرض کنیم A_0 کوچکترین این جبرهای A باشد. در این صورت

$S_\circ \in A_\circ$ی هست به طوری که $S_\circ^{۲} = T$ و $S_\circ \geq \circ$. فرض کنیم $S \in \mathscr{B}(H)$ یک ریشهٔ دوم مثبت T بوده و A کوچکترین زیرجبر بستهٔ $\mathscr{B}(H)$ باشدکه شامل I و S است. در این صورت $T \in A$ زیرا $T = S^{۲}$. لذا $A_\circ \subset A$؛ درنتیجه $S_\circ \in A$. حال از بند پیش معلوم می‌شود که $S = S_\circ$.

بالأخره، هرگاه T معکوسپذیر باشد، آنگاه $S^{-۱} = T^{-۱}S$ زیرا S با T تعویض $S^{۲} = T$ می‌شود.

۳۴.۱۲ قضیه. ***هرگاه $T \in \mathscr{B}(H)$، آنگاه ریشهٔ دوم مثبت T^*T تنها عملگر مثبت $P \in \mathscr{B}(H)$ است که در $\|Px\| = \|Tx\|$ به ازای هر $x \in H$ صدق می‌کند.***

برهان. ابتدا توجه می‌کنیم که

$$(T^*Tx, x) = (Tx, Tx) = \|Tx\|^{۲} \geq \circ \qquad (x \in H); \tag{۱}$$

درنتیجه $T^*T \geq \circ$. (اثبات این در محدودهٔ مجردتر قضیهٔ ۲۸.۱۱ بسیار مشکلتر است!)

حال اگر $P \in \mathscr{B}(H)$ و $P = P^*$، داریم

$$\left(P^{۲}x, x\right) = (Px, Px) = \|Px\|^{۲} \qquad (x \in H). \tag{۲}$$

بنابر قضیهٔ ۷.۱۲، به ازای هر $x \in H$ داریم $\|Px\| = \|Tx\|$ اگر و فقط اگر $P^{۲} = T^*T$. این برهان را تمام خواهد کرد.

این امر که هر عدد مختلط λ را می‌توان به شکل $\lambda = \alpha|\lambda|$ تجزیه کرد که در آن $|\alpha| = ۱$ مسئلهٔ تجزیهٔ $T \in \mathscr{B}(H)$ به شکل $T = UP$ با Uی یکه‌ای و $P \geq \circ$ را پیشنهاد می‌کند. وقتی این کار ممکن باشد، UP را یک ***تجزیهٔ قطبی*** T می‌نامیم.

توجه کنید که چون U یکه‌ای است، یک یکمتری می‌باشد. لذا قضیهٔ ۳۴.۱۲ نشان می‌دهد که P به طور منحصر به فرد به وسیلهٔ T معین است.

۳۵.۱۲ قضیه

(آ) هرگاه $T \in \mathscr{B}(H)$ معکوسپذیر باشد، آنگاه T تجزیهٔ قطبی منحصر به فردی مانند $T = UP$ دارد.

(ب) هرگاه $T \in \mathscr{B}(H)$ نرمال باشد، آنگاه T یک تجزیهٔ قطبی مانند $T=UP$ دارد که در آن U و P با یکدیگر و با T تعویض می‌شوند.

برهان. (آ) اگر T معکوسپذیر باشد، T^* و T^*T نیز چنین‌اند، و قضیهٔ ۳۳.۱۲ نشان می‌دهد که ریشهٔ دوم مثبت P از T^*T نیز معکوسپذیر است. قرار می‌دهیم $U = TP^{-1}$. در این صورت U معکوسپذیر است، و

$$U^*U = P^{-1}T^*TP^{-1} = P^{-1}P^{2}P^{-1} = I,$$

درنتیجه U یکه‌ای است. چون P معکوسپذیر است، واضح است که TP^{-1} تنها انتخاب ممکن برای U می‌باشد.

(ب) قرار می‌دهیم $p(\lambda) = |\lambda|$، $u(\lambda) = \lambda/|\lambda|$ اگر $\lambda \neq 0$، و $u(0) = 1$. در این صورت p و u توابع بورل کراندار بر $\sigma(T)$اند. قرار می‌دهیم $P = p(T)$ و $U = u(T)$. چون $p \geq 0$، قضیهٔ ۳۲.۱۲ نشان می‌دهد که $P \geq 0$. چون $u\bar{u} = 1$، داریم $UU^* = U^*U = I$. چون $\lambda = u(\lambda)p(\lambda)$، رابطهٔ $T=UP$ از حساب علامتی نتیجه می‌شود.

تبصره. این طور نیست که هر $T \in \mathscr{B}(H)$ تجزیهٔ قطبی دارد. (ر.ک. تمرین ۱۹.) با اینحال، اگر P ریشهٔ دوم مثبت T^*T باشد، آنگاه به ازای هر $x \in H$، $\|Px\| = \|Tx\|$؛ در نتیجه، اگر $Px = Py$، طبق خاصیت خطی، $Tx = Ty$. فرمول

$$VPx = Tx$$

یک یکمتری خطی مانند V از $\mathscr{R}(P)$ به روی $\mathscr{R}(T)$ تعریف می‌کند که دارای یک توسیع پیوسته به یک یکمتری خطی از بست $\mathscr{R}(P)$ به روی بست $\mathscr{R}(T)$ می‌باشد.

هرگاه یک یکمتری خطی از $\mathscr{R}(P)^{\perp}$ به روی $\mathscr{R}(T)^{\perp}$ موجود باشد، آنگاه V را

می‌توان به یک عملگر یکه‌ای بر H وسعت داد، و دراین صورت T یک تجزیهٔ قطبی خواهد داشت. وقتی $\dim H < \infty$، این همواره رخ می‌دهد زیرا در این صورت $\mathscr{R}(P)$ و $\mathscr{R}(T)$ دارای همبعد یکسان می‌باشند.

هرگاه V را با تعریف $Vy = 0$ به ازای هر $y \in \mathscr{R}(P)^{\perp}$ به عضوی از $\mathscr{B}(H)$ وسعت دهیم، آنگاه V یک **یکمتری جزئی** نام دارد.

لذا هر $T \in \mathscr{B}(H)$ دارای یک تجزیه مانند $T=VP$ است که در آن P مثبت بوده و V یک یکمتری جزئی می‌باشد.

در قسمت (آ) لازم نیست هیچ دو تا از T، U، P تعویض شوند. به عنوان مثال،

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

تجزیهٔ قطبی در ترکیب با قضیهٔ ۱۶.۱۲ به نتیجهٔ جالبی راجع به تشابه عملگرهای نرمال منجر می‌شود.

۳۶.۱۲ قضیه. *فرض کنیم $M, N, T \in \mathscr{B}(H)$، M و N نرمال باشند، T معکوس‌پذیر باشد، و*

$$M = TNT^{-1}. \qquad (1)$$

هرگاه $T = UP$ تجزیهٔ قطبی T باشد، آنگاه

$$M = UNU^{-1}. \qquad (2)$$

دو عملگر M و N صادق در (۱) را معمولاً **متشابه** می‌نامند. اگر U یکه‌ای و (۲) برقرار باشد، گوییم M و N ***به طوریکه‌ای هم‌ارز*** اند. لذا قضیهٔ فوق حکم می‌کند که عملگرهای نرمال مشابه عملاً به طوریکه‌ای هم ارزند.

برهان. بنابر (۱)، $MT = TN$. لذا، طبق قضیهٔ ۱۶.۱۲، $M^*T = TN^*$. درنتیجه،

$$T^*M = (M^*T)^* = (TN^*)^* = NT^*;$$

در نتیجه،

$$NP^{2} = NT^{*}T = T^{*}MT = T^{*}TN = P^{2}N,$$

زیرا $P^{2} = T^{*}T$. لذا N با $f\left(P^{2}\right)$ به ازای $f \in C\left(\sigma\left(P^{2}\right)\right)$ تعویض می‌شود. (ر.ک.بخش ۲۴.۱۲.) چون $P \geq 0$، $\sigma\left(P^{2}\right) \subset [0,\infty)$. اگر $f(\lambda) = \lambda^{1/2} \geq 0$ بر $\sigma\left(P^{2}\right)$، نتیجه می‌شود که $NP=PN$. لذا از رابطهٔ (۱) داریم

$$M = (UP)N(UP)^{-1} = UPNP^{-1}U^{-1} = UNU^{-1}.$$

گروه عملگرهای معکوسپذیر

در آخر فصل ۱۰ چند خاصیت از گروه تمام عناصر معکوسپذیر درجبر باناخ A توصیف شدند. دو قضیهٔ زیر حاوی اطلاعات بیشتری راجع به این گروه، در حالت خاص $A = \mathscr{B}(H)$، می‌باشند.

۳۷.۱۲ قضیه. *گروه G تمام عملگرهای معکوسپذیر $T \in \mathscr{B}(H)$ همبند است، و هر $T \in G$ حاصل‌ضرب دونمایی می‌باشد.*

البته در اینجا **نمایی** عملگری است به شکل $\exp(S)$ که $S \in \mathscr{B}(H)$.

برهان. فرض کنیم $T = UP$ تجزیهٔ قطبی $T \in G$ای باشد. به یاد آورید که Uیکه‌ای بوده و P مثبت و معکوسپذیر است. چون $\sigma(P) \subset (0,\infty)$، $\log$ یک تابع حقیقی پیوسته بر $\sigma(P)$است. پس از حساب علامتی معلوم می‌شود که یک خود الحاق مانند $S \in \mathscr{B}(H)$ چنان وجود دارد که $P = \exp(S)$. چون U یکه‌ای است، $\sigma(U)$ بر دایرهٔ یکه قراردارد؛ درنتیجه یک تابع بورل کراندار حقیقی مانند f بر $\sigma(U)$ وجود دارد که در

$$\exp\{if(\lambda)\} = \lambda \qquad [\lambda \in \sigma(U)]$$

صدق می‌کند. (توجه کنید که ممکن است تابع **پیوسته**‌ای مانند f با این خاصیت موجود

نباشد!) قرار می‌دهیم $Q = f(U)$. در این صورت $Q \in \mathscr{B}(H)$ خود الحاق است، و $U = \exp(iQ)$. لذا

$$T = UP = \exp(iQ)\exp(S).$$

از این به آسانی معلوم می‌شود که G همبند است، چرا که اگر T_r به ازای $0 \le r \le 1$ با

$$T_r = \exp(irQ)\exp(rS)$$

تعریف شده باشد، $r \to T_r$ یک نگاشت پیوسته از بازهٔ یکهٔ $[0,1]$ به توی G است، $T_0 = I$، و $T_1 = T$. این برهان را تمام خواهد کرد.

حال طبیعی است بپرسیم آیا هر $T \in G$ به جای صرفاً حاصل ضرب دو نمایی یک نمایی است یا خیر. به عبارت دیگر، آیا هر حاصل‌ضرب دونمایی یک نمایی است؟ اگر $\dim H < \infty$، جواب مثبت است، درواقع، جواب در هر جبر باناخ با بعد متناهی، به عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ ۱۰.۳۰، مثبت است. ولی، همانطور که اینک خواهیم دید، جواب در حالت کلی منفی می‌باشد.

۳۸.۱۲ قضیه. *فرض کنیم D یک مجموعهٔ بازکراندار در $\mathbb{C}$ باشد به طوری که مجموعهٔ*

$$\Omega = \left\{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha^2 \in D\right\} \tag{1}$$

همبند بوده و 0 در بست D نباشد. همچنین H فضای تمام توابع هلوریخت f در D باشد که در

$$\int_D |f|^2\, dm_2 < \infty \tag{2}$$

صدق می‌کند (که در آن m_2 اندازهٔ لبگ در صفحه است)، با ضرب داخلی

$$(f, g) = \int_D f\,\bar{g}\, dm_2 . \tag{3}$$

دراین صورت H یک فضای هیلبرت است. عملگر ضرب $M \in \mathscr{B}(H)$ را با

$$(Mf)(z) = zf(z) \qquad (f \in H, z \in D) \tag{4}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت M معکوس‌پذیر است ولی M ریشهٔ دومی در $\mathscr{B}(H)$ ندارد.

چون هر نمایی از هر مرتبه ریشه دارد، پس M یک نمایی نخواهدبود.

برهان. واضح است که (۳) یک ضرب داخلی تعریف می‌کند که H را به یک فضای یکه‌ای بدل می‌سازد. حال نشان می‌دهیم که H تام است. فرض کنیم K زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از D باشد که فاصله‌اش تا متمم D مساوی δ است. اگر $z \in K$ و Δ قرص مستدیر باز با شعاع δ و مرکز z بوده، و $f(\zeta) = \sum a_n\left(\zeta - z^n\right)$ به ازای $\zeta \in \Delta$، محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-1}\left|a_n\right|^2\delta^{2n+2} = \frac{1}{\pi}\int_{\Delta}|f|^2\,dm_2 . \tag{۵}$$

چون $f(z) = a_0$، نتیجه می‌شود که

$$|f(z)| \le \pi^{-1/2}\delta^{-1}\|f\| \qquad (z \in K, f \in H), \tag{٦}$$

که در آن $\|f\| = (f,f)^{1/2}$. لذا هر دنبالهٔکشی در H به طوریکنواخت بر زیر مجموعه‌های فشردهٔ D همگراست. از این به آسانی نتیجه می‌شود که H تام است. لذا H یک فضای هیلبرت می‌باشد.

چون D کراندار است، $M \in \mathscr{B}(H)$. و چون $1/z$ در Dکراندار است، $M^{-1} \in \mathscr{B}(H)$.

حال برای رسیدن به تناقض فرض می‌کنیم به ازای $Q \in \mathscr{B}(H)$ای، $M = Q^2$. $\alpha \in \Omega$ را ثابت می‌گیریم و قرار می‌دهیم $\lambda = \alpha^2$. در این صورت $\lambda \in D$. تعریف می‌کنیم

$$M_\lambda = M - \lambda I ،\quad S = Q - \alpha I ،\quad T = Q + \alpha I \text{ و}. \tag{۷}$$

درنتیجه،

$$ST = M_\lambda = TS . \tag{۸}$$

چون با توابع هلوریخت سروکار داریم، فرمول

$$(M_\lambda g)(z) = (z-\lambda)g(z) \qquad (z \in D, g \in H) \tag{٩}$$

نشان می‌دهد که M_λ یک به یک بوده و بردش $\mathscr{R}(M_\lambda)$ درست از $f \in H$ هایی تشکیل شده است که در $f(\lambda) = 0$ صدق می‌کنند. لذا رابطهٔ (٦) نشان می‌دهد که $\mathscr{R}(M_\lambda)$ زیرفضای **بسته**‌ای از H با **همبعد** ۱ است.

چون M_λ یک به یک است، اولین معادلهٔ (٨) نشان می‌دهد که T یک به یک است؛ دومین معادله نشان می‌دهد که S یک به یک است. چون $\mathscr{R}(M_\lambda) \neq H$، M_λ در $\mathscr{B}(H)$ معکوسپذیر نیست. لذا دست کم یکی از S و T معکوسپذیر نیست. فرض کنیم S معکوسپذیر نباشد. چون $M_\lambda = ST$، $\mathscr{R}(M_\lambda) \subset \mathscr{R}(S)$؛ درنتیجه، $\mathscr{R}(S)$ یا مساوی $\mathscr{R}(M_\lambda)$ است یا H. در حالت دوم، قضیهٔ نگاشت باز ایجاب می‌کند که S معکوسپذیر است. لذا S یک نگاشت یک به یک از H به روی $\mathscr{R}(M_\lambda)$ می‌باشد. ولی معادلهٔ $M_\lambda = ST$ نشان می‌دهد که S، $\mathscr{R}(T)$ را به روی $\mathscr{R}(M_\lambda)$ می‌نگارد. لذا $\mathscr{R}(T) = H$، و کاربرد دیگری از قضیهٔ نگاشت باز نشان می‌دهد که $T^{-1} \in \mathscr{B}(H)$.

پس ثابت کرده‌ایم که یکی و تنها یکی از عملگرهای S و T در $\mathscr{B}(H)$ معکوسپذیر است. لذا، اگر $\alpha \in \Omega$، درست یکی از اعداد α و $-\alpha$ در $\sigma(Q)$ قرار دارد. پس Ω اجتماع دومجموعهٔ همنهشت از هم جدای $\sigma(Q) \cap \Omega$ و $-\sigma(Q) \cap \Omega$ است که هر دو (نسبت به Ω) بسته‌اند زیرا $\sigma(Q)$ فشرده می‌باشد. لذا فرض $M = Q^2$ به همبند نبودن Ω منجر می‌شود که با فرض در تضاد است. این برهان را تمام خواهد کرد.

ساده‌ترین مثال ناحیهٔ D صادق در مفروضات قضیهٔ ۳۸.۱۲ یک حلقهٔ مستدیر به مرکز ۰ است. در این حالت می‌توان برهان مفهومی‌تری ارائه داد. ر.ک.تمرین ۴۰.

توصیفی از B^*- جبرها

در سراسر این فصل از این امر که هر $\mathscr{B}(H)$ یک B^*- جبر است استفاده کرده‌ایم. حال عکس مطلب را ثابت می‌کنیم. (قضیهٔ ٤١.١٢) که می‌گوید هر B^* - جبر

(تعویضپذیر یا تعویض‌ناپذیر) بـا زیرجـبر بسـته‌ای از $\mathscr{B}(H)$ی بـه طـور یکمـتر * -- یکریخت است. برهان تابع وجود منبعی به قدرکافی بزرگ از تابعیهای مثبت می‌باشد.

۳۹.۱۲ قضیه. ***هرگاه A یک B^*- جبر بوده و $z \in A$، آنگاه یک تابعی مثبت مانند F بر A هست به طوری که***

$$F(e) = ۱ \quad \text{و} \quad F(zz^*) = \|z\|^۲. \tag{۱}$$

برهان. قرار می‌دهیم $x_\circ = zz^*$. بنابر قسمت (ث) قضیـهٔ ۲۸.۱۱، $\sigma(x_\circ) \subset [\circ, \infty)$. فـرض کنیم $\Delta_\circ$ فضای ایده‌آل ماکزیمال جبر بستهٔ $A_\circ \subset A$ باشد کـه بـه وسیلهٔ e و $x_\circ$ تولیـد می‌شود. در این صــورت $\hat{A}_\circ = C(\Delta_\circ)$ و (طبـق قضیـهٔ ۱۹.۱۱) $\hat{x}_\circ$ یـک تـابع پیوسـتهٔ حقیقی نامنفی بر $\Delta_\circ$ است. این تابع ماکزیمم خود را در نقطه‌ای مانند $h \in \Delta_\circ$ می‌گـیرد. لذا

$$\hat{x}_\circ(h) = \|\hat{x}_\circ\|_\infty = \|x_\circ\| = \|z\|^۲. \tag{۲}$$

تابعی خطی f را بر $A_\circ$ با $f(x) = \hat{x}(h)$ تعریف می‌کنیم. در این صورت

$$f(e) = ۱, \quad f(zz^*) = \|z\|^۲ \tag{۳}$$

و $\|f\| = ۱$ زیرا، به ازای هر $x \in A_\circ$، $|f(x)| \le \|\hat{x}\|_\infty = \|x\|$.

قضیهٔ هان- باناخ f را به یک تابعی خطی F بر A با $\|F\| = ۱$ وسعت می‌دهـد. بـاید ثابت کنیم که به ازای هر $y \in A$، $F(yy^*) \ge \circ$.

$y \in A$ را ثابت گرفته و فرض می‌کنیـم $\Delta_۱$ فضـای ایـده‌آل ماکزیمـال جـبر بسـتهٔ $A_۱ \subset A$ باشد که به وسیلهٔ e و yy^* تولید می‌شود. در ایــن صـورت $\hat{A}_۱ = C(\Delta_۱)$. بـا استفاده از F یک تابعی خطی مانند φ بر $C(\Delta_۱)$ را با

$$\varphi(\hat{x}) = F(x) \qquad (x \in A_۱) \tag{٤}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت $\varphi(۱) = F(e) = f(e) = ۱$، $|\varphi(\hat{x})| \le \|x\| = \|\hat{x}\|_\infty$؛ درنتیجـه $\|\varphi\| = ۱$، و حـال لـم ٢٦.٥ نشـان می‌دهـد کـه بـه ازای هـر $x \in A$ کـه $\hat{x} \ge \circ$ بـــر $\Delta_۱$، $\varphi(\hat{x}) \ge \circ$. اگر $x_۱ = yy^*$، لااقـل درآغـاز ایـن برهـان می‌بینیـم کـه $\hat{x}_۱ \ge \circ$ بـر $\Delta_۱$. لـذا،

همانطور که لازم است، $F(yy^*) = F(x_1) = \varphi(\hat{x}_1) \ge 0$.

۴۰.۱۲ قضیه. ***اگر A یک B^*- جبر بوده و $u \in A$ و $u \neq 0$، یک فضای هیلبرت مانند H_u و یک همریختی مانند T_u از A به توی $\mathscr{B}(H_u)$ هست که در $T_u(e) = I$،***

$$(1) \qquad T_u(x^*) = T_u(x^*) \qquad (x \in A),$$

$$(2) \qquad \|T_u(x)\| \le \|x\| \qquad (x \in A),$$

و $\|T_u(u)\| = \|u\|$ صدق می‌کند.

برهان. u را به عنوان ثابت در نظر گرفته و زیرنویسهای u را حذف می‌کنیم. تابعی مثبت F را بر A که در روابط

$$(3) \qquad F(u^*u) = \|u\|^2 \quad \text{و} \quad F(e) = 1$$

صدق می‌کند ثابت می‌گیریم. یک چنین F طبق قضیهٔ ۳۹.۱۲ وجود دارد. تعریف می‌کنیم

$$(4) \qquad Y = \{y \in A : F(xy) = 0 \text{، به ازای هر } x \in A\}.$$

چون F پیوسته است (قضیهٔ ۳۱.۱۱)، Y زیرفضای بسته‌ای از A است. هم مجموعه‌های Y، یعنی عناصر A/Y، را با x' نشان می‌دهیم.

$$(5) \qquad x' = x + Y \qquad (x \in A).$$

حکم می‌کنیم که

$$(6) \qquad (a', b') = F(b^*a)$$

معرف یک ضرب داخلی بر A/Y است.

برای مشاهدهٔ خوش تعریف بودن (a', b') به وسیلهٔ (۶) یعنی مستقل بودن انتخاب نماینده‌های a و b، کافی است نشان دهیم که اگر دست کم یکی از a یا b در Y باشد، $F(b^*a) = 0$. اگر $a \in Y$، $F(b^*a) = 0$ از رابطهٔ (۴) نتیجه می‌شود. هرگاه $b \in Y$، آنگاه، بنا بر قسمت (آ) قضیهٔ ۳۱.۱۱ و کاربرد دیگری از (۴)،

$$F(b^*a) = F(a^*b) = 0\,. \tag{٧}$$

لذا (a',b') خوش تعریف است، نسبت به a' خطی است، و نسبت به b' خطی مزدوج است، و

$$(a',a') = F(a^*a) \geq 0\,, \tag{٨}$$

زیرا F یک تابعی مثبت است. هرگاه $(a',a')=0$، آنگاه $F(a^*a)=0$. لذا طبق قسمت (ب) قضیهٔ ۳۱.۱۱، به ازای هر $x \in A$، $F(xa)=0$؛ درنتیجه $a \in Y$ و $a'=0$.

لذا A/Y یک فضای ضرب داخلی با نرم $\|a'\| = F(a^*a)^{1/2}$ است. تتمیم آن H فضای هیلبرتی است که در پی آنیم. ما عملگرهای خطی $T(x)$ را بر A/Y با

$$T(x)a' = (xa)' \tag{٩}$$

تعریف می‌کنیم. مجدداً، به آسانی معلوم می‌شود که این تعریف مستقل از انتخاب $a \in a'$ است چرا که اگر $y \in Y$، رابطهٔ (٤) ایجاب می‌کند که $xy \in Y$. (Y یک ایده‌آل چپ در A است.) واضح است که $x \to T(x)$ خطی است و

$$T(x_1)T(x_2) = T(x_1x_2) \qquad (x_1 \in A, x_2 \in A); \tag{١٠}$$

به‌خصوص، رابطهٔ (٩) نشان می‌دهد که $T(e)$ عملگر همانی بر A/Y است. حال حکم می‌کنیم که

$$\|T(x)\| \leq \|x\| \qquad (x \in A)\,. \tag{١١}$$

پس از این کار، پیوستگی یکنواخت عملگرهای $T(x)$ به ما توان توسیع آنها به عملگرهای خطی کراندار بر H را می‌دهد. توجه کنید که

$$\|T(x)a'\|^2 = \left((xa)',(xa)'\right) = F(a^*x^*xa). \tag{١٢}$$

به ازای $a \in A$ی ثابت، تعریف می‌کنیم $G(x) = F(a^*xa)$. دراین صورت G یک تابعی مثبت بر A است؛ درنتیجه، طبق قسمت (ت) قضیهٔ ۳۱.۱۱،

$$G(x^*x) \leq G(e)\|x\|^2. \tag{١٣}$$

لذا

$$\|T(x)a'\|^2 = G(x^*x) \leq F(a^*a)\|x\|^2 = \|a'\|^2\|x\|^2, \tag{١٤}$$

که (١١) را ثابت می‌کند.

حال روابط

$$(T(x^*)a',b') = \left((x^*a)',b'\right) = F(b^*x^*a) = F((xb)^*a)$$
$$= \left(a',(xb)'\right) = (a',T(x)b') = (T(x)^*a',b')$$

نشان می‌دهد که به ازای هر $a' \in A/Y$، $T(x^*)a' = T(x)^*a'$. چون A/Y در H چگال است، این رابطهٔ (۱) را ثابت خواهد کرد.

بالأخره، روابط (۳) و (۱۲) نشان می‌دهند که

$$\|u\|^2 = F(u^*u) = \|T(u)e'\|^2 \le \|T(u)\|^2 \qquad (15)$$

زیرا $\|e'\|^2 = F(e^*e) = F(e) = 1$. رابطهٔ (۱۵) در معیت (۱۱) نتیجه می‌دهد که $\|T(u)\| = \|u\|$ و برهان تمام خواهدبود.

۴۱.۱۲ قضیه. ***اگر A یک B^*- جبر باشد، یک * - یکریختی یکمتر از A به روی زیرجبر بسته‌ای از $\mathscr{B}(H)$ وجود دارد که در آن H یک فضای هیلبرت مناسب است.***

برهان. فرض کنیم H "مجموع مستقیم" فضاهای هیلبرت H_u باشد که در قضیهٔ ۴۰.۱۲ ساخته شد. حال H را دقیقاً توصیف می‌کنیم: فرض کنیم $\pi_u(v)$، H_u- مختص عنصر v از حاصل ضرب دکارتی فضاهای H_u باشد. در این صورت، طبق تعریف، $v \in H$ اگر و فقط اگر

$$\sum_u \|\pi_u(v)\|^2 < \infty, \qquad (1)$$

که در آن $\|\pi_u(v)\|$ عبارت است از H_u- نرم $\pi_u(v)$. همگرایی (۱) ایجاب می‌کند که حداکثر تعدادی شمارشپذیر از $\pi_u(v)$ها مخالف ۰اند. ضرب داخلی در H با

$$(v',v'') = \sum_u \left(\pi_u(v'),\pi_u(v'')\right) \qquad (v',v'' \in H) \qquad (2)$$

داده می‌شود؛ درنتیجه $(v,v) = \|v\|^2$ طرف چپ (۱) می‌باشد. تحقیق اینکه تمام اصول موضوع فضای هیلبرت توسط H صادقند به عنوان تمرین گذارده می‌شود.

اگر $S_u \in \mathscr{B}(H_u)$ و به ازای هر u، $\|S_u\| \le M$ و Sv برداری تعریف شود که مختص آن در H_u مساوی

$$\pi_u(Sv) = S_u \pi_u(v) \tag{۳}$$

باشد، به آسانی معلوم می‌شود که اگر $v \in H$، $Sv \in H$، نیز $S \in \mathscr{B}(H)$، و نیز

$$\|S\| = \sup_u \|S_u\|. \tag{۴}$$

حال به هر $x \in A$ یک عملگر مانند $T(x) \in \mathscr{B}(H)$ با این شرط مربوط می‌کنیم که

$$\pi_u(T(x)v) = T_u(x)\ \left(\pi_u(v)\right), \tag{۵}$$

که در آن T_u همانند در قضیهٔ ۴۰.۱۲ است. چون طبق قضیهٔ ۴۰.۱۲

$$\|T_u x\| \le \|x\| = \|T_x(x)\|, \tag{۶}$$

از رابطهٔ (۴) معلوم می‌شود که

$$\|T(x)\| = \sup_u \|T_u(x)\| = \|x\|. \tag{۷}$$

این امر که نگاشت $x \to T(x)$ از A به توی $\mathscr{B}(H)$ خواص مطلوب دیگر را دارد از کاربرد مختص به مختص قضیهٔ ۴۰.۱۲ نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ارگودیک

۴۲.۱۲ چند تعریف. واژهٔ "ارگودیک" از مکانیک آماری می‌آید که در آن بر دستگاههایی اعمال می‌شود که در آنها "متوسط مکانی = متوسط زمانی" برای بعضی از کمیات برقرار است. برای مشاهدهٔ یک مثال ریاضی ساده، فرض کنیم μ یک اندازهٔ احتمال بر σ- جبری مانند $\mathscr{M}$ در مجموعه‌ای چون Ω بوده، ψ مجموعهٔ Ω را به توی Ω بنگارد، و تکرارهای آن را با $\psi^۱ = \psi$، $\psi^n = \psi \circ \psi^{n-۱}$ $(n = ۲,۳,۴,...)$ تعریف می‌کنیم. اگر زمان را گسسته بگیریم، "متوسط زمانی" تابع f بر Ω نسبت به تبدیل ψ عبارت است از

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n}\left(f + f\circ\psi + ... + f\circ\psi^{n-۱}\right) \tag{۱}$$

وقتی این حد به مفهومی موجود باشد.

"متوسط مکانی" تابع $f \in L^1(\mu)$ چیزی جز $\int_\Omega f d\mu$ نیست.

ما به نگاشتهای یک به یک **حافظ اندازه** مانند ψ از Ω به روی Ω علاقمندیم. این یعنی $\psi(E)$ و $\psi^{-1}(E)$ به ازای هر $E \in \mathscr{M}$ در $\mathscr{M}$اند و اندازهٔ آنها $\mu(E)$ می‌باشد. در این صورت واضح است که به ازای هر $f \in L^1(\mu)$،

$$\int_\Omega (f \circ \psi) d\mu = \int_\Omega f d\mu . \tag{2}$$

هرگاه، علاوه بر این، $\psi(E) = E \in \mathscr{M}$ فقط به ازای $\mu(E) = 0$ یا $\mu(E) = 1$ رخ دهد، آنگاه گوییم ψ **ارگودیک** است. دراین حالت واضح است که هرتابع اندازه‌پذیر g که $g \circ \psi = g$ تـهـ $[\mu]$،تـهـ $[\mu]$ ثابت است.

حال می‌توان **قضیهٔ ارگودیک میــانگین** نویمـان (*Neumann*) را بیـان کـرد؛ ایـن نامگذاری بدان خاطر است که L^2 - همگرایی به کاررفته "همگرایی در میانگین" نام دارد.

۴۳.۱۲ قضیه. *فرض کنیم $(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ همانند فوق باشد. هرگاه $\psi : \Omega \to \Omega$ یک به یک و حافظ اندازه بوده و $f \in L^2(\mu)$، آنگاه متوسطهای*

$$A_n f = \frac{1}{n}\left(f + f \circ \psi + \ldots + f \circ \psi^{n-1}\right)$$

به ازای $n \to \infty$، در متر L^2 به $g \in L^2(\mu)$ای همگرا می‌باشند.

به علاوه، $g \circ \psi = g$. لذا اگر ψ ارگودیک باشد، g مساوی مقدار ثابت $\int_\Omega f d\mu$ می‌باشد.

واضح است که حکم دوم از حکـم اول نتیجـه می‌شـود. حکـم اول بـه صراحـت می‌گوید که

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega |g - A_n f|^2 d\mu = 0 .$$

کلید برهان این است کـه نگاشـت $f \to f \circ \psi$ یـک یکمـتری از $L^2(\mu)$ بـه روی $L^2(\mu)$ است. لذا یک عملگریکه‌ای بر فضای هیلبرت $L^2(\mu)$ است. پـس تنظیـم مجـدد

زیر از قضیهٔ ٤٣.١٢ نتیجه‌ای ساده از قضیهٔ طیفی می‌باشد.

٤٤.١٢ قضیه. ***هرگاه $U \in \mathscr{B}(H)$ یکه‌ای بوده و $x \in H$، آنگاه متوسطهای***

$$A_n x = \frac{1}{n}\left(x + Ux + \ldots + U^{n-1}x\right) \qquad (1)$$

در نرم توپولوژی H به $y \in H$ ی همگراست.

برهان. فرض کنیم E تجزیهٔ طیفی U باشد. توابع a_n و b را بر دایرهٔیکه با

$$a_n(\lambda) = \frac{1}{n}\left(1 + \lambda + \ldots + \lambda^{n-1}\right), \qquad (2)$$

$b(1) = 1$، $b(\lambda) = 0$ به ازای $\lambda \neq 1$ تعریف می‌کنیم.

در این صورت $A_n x = a_n(U)x$. قرار می‌دهیم $y = b(U)x$. از این داریم

$$\|y - A_n x\|^2 = \|b(U)x - a_n(U)x\|^2 = \int_{\sigma(U)} |b - a_n|^2 dE_{x,x}\,. \qquad (3)$$

چون بر دایرهٔیکه داریم $|b - a_n| < 1$ و نقطه به نقطه $(b - a_n)(\lambda) \to 0$، قضیهٔ همگرایی تسلطی نشان می‌دهد که

$$\lim_{n\to\infty} \|y - A_n x\| = 0\,. \qquad (4)$$

تمرینات

در این تمرینات، حرف H نمایش یک فضای هیلبرت است.

١. تتمیم یک فضای ضرب داخلی فضای هیلبرت است. این حکم را صریحتر ساخته و آن را ثابت نمایید. (برای کاربردی ازآن، ر.ک.برهان قضیهٔ ٤٠.١٢.)

٢. فرض کنید N یک عدد صحیح مثبت بوده، $\alpha \in \mathbb{C}$، $\alpha^N = 1$، و $\alpha^2 \neq 1$. ثابت کنید هر ضرب داخلی فضای هیلبرت در اتحادهای

$$(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \|x + \alpha^n y\|^2 \alpha^n$$

و

$$(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|x + e^{i\theta} y\|^2 e^{i\theta} d\theta$$

صدق می‌کند. این امر را تعمیم دهید: چه توابع f و اندازه‌های μ بر مجموعهٔ Ω اتحاد زیر را به دست می‌دهند:

$$(x,y)=\int_\Omega \|x+f(p)y\|^2 d\mu(p)?$$

۳. (آ) فرض کنید x_n و y_n درگوی یکهٔ بستهٔ H بوده و وقتی $n\to\infty$، $(x_n,y_n)\to 1$. ثابت کنید $\|x_n-y_n\|\to 0$.

(ب)فرض کنید $x_n\in H$، $x_n\to x$ به طور ضعیف، و $\|x_n\|\to\|x\|$. در این صورت ثابت کنید $\|x_n-x\|\to 0$.

٤. فرض کنید H^* فضای دوگان H باشد. $\psi: H^*\to H$ را با

$$y^*(x)=(x,\psi y^*) \qquad (x\in H, y^*\in H^*)$$

تعریف کنید. (ر.ک. قضیهٔ ۵.۱۲.) و ثابت کنید H^* نسبت به ضرب داخلی

$$[x^*,y^*]=(\psi y^*,\psi x^*)$$

یک فضای هیلبرت است. اگر $\phi: H^{**}\to H^*$ در $z^{**}(y^*)=[y^*,\phi z^{**}]$ به ازای هر $y^*\in H^*$ و $z^{**}\in H^{**}$ صدق کند، ثابت کنید $\psi\phi$ یک یکریختی از H^{**} به روی H است که وجودش منعکس بودن H را ایجاب می‌کند.

۵. فرض کنید $\{u_n\}$ دنباله‌ای از بردارهای یکه درH باشد (یعنی $\|u_n\|=1$) و نیز

$$\Gamma^2=\sum_{i\neq j}\left|\left(u_i,u_j\right)^2\right|<\infty.$$

اگر $\{\alpha_i\}$ دنباله‌ای از اسکالرها باشد، ثابت کنید

$$(1-\Gamma)\sum_{i=m}^{n}|\alpha_i|^2\le\left\|\sum_{i=m}^{n}a_iu_i\right\|^2\le(1+\Gamma)\sum_{i=m}^{n}|\alpha_i|^2,$$

و نتیجه بگیرید که سه خاصیت زیر از $\{\alpha_i\}$ هم ارزیکدیگرند.

(آ) $\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2<\infty$؛

(ب) $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_iu_i$ درنرم H همگراست؛

(پ) $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i(u_i,y)$ به ازای هر $y\in H$ همگراست.

این قضیهٔ ٦.۱۲ را تعمیم می‌دهد.

٦. فرض کنید E یک تجزیهٔ همانی مانند بخش ۱۷.۱۲ باشد، وثابت کنید به ازای هر

$x \in H$، $y \in H$، و $\omega \in \mathscr{M}$،

$$\left|E_{x,y}(\omega)\right|^{2} \leq E_{x,x}(\omega)E_{y,y}(\omega) .$$

۷. فرض کنید $U \in \mathscr{B}(H)$ یکه‌ای بوده و $\varepsilon > 0$. ثابت کنید اسکالرهای α_0،...،α_n را می‌توان طوری گرفت که اگر $\sigma(U)$ زیرمجموعه‌ای حقیقی از دایرهٔ یکه باشد،

$$\left\|U^{-1} - \alpha_0 I - \alpha_1 U - \ldots - a_n U^{n}\right\| < \varepsilon,$$

ولی اگر $\sigma(U)$ تمام دایره را بپوشاند، این نرم هرگزاز ۱ کمتر نیست.

۸. قضیهٔ ۳۵.۱۲ را با PU به جای UP ثابت کنید.

۹. فرض کنید $T = UP$ تجزیهٔ قطبی یک $T \in \mathscr{B}(H)$ معکوسپذیر باشد. ثابت کنید T نرمال است اگر و فقط اگر $UP=PU$.

۱۰. ثابت کنید هر $T \in \mathscr{B}(H)$ معکوسپذیر نرمال نمایی $S \in \mathscr{B}(H)$ی نرمال است.

۱۱. فرض کنید $N \in \mathscr{B}(H)$ نرمال بوده و $T \in \mathscr{B}(H)$ معکوسپذیر باشد. ثابت کنید TNT^{-1} نرمال است اگر و فقط اگر N با T^*T تعویض شود.

۱۲. (آ)فرض کنید $S \in \mathscr{B}(H)$، $T \in \mathscr{B}(H)$، S و T نرمال باشند، و $ST=TS$. ثابت کنید $S+T$ و ST نرمال‌اند.

(ب)اگر، علاوه بر این، $S \geq 0$ و $T \geq 0$ (ر.ک.قضیهٔ ۳۲.۱۲)، ثابت کنید $S + T \geq 0$ و $ST \geq 0$.

(پ) با اینحال، نشان دهید که $S \geq 0$ی و $T \geq 0$ای وجود دارند به طوری که ST حتی نرمال نیست (البته در این صورت $ST \neq TS$) . درواقع، اگر $\dim H = 2$، چنین مثالهایی وجود دارند.

۱۳. اگر $T \in \mathscr{B}(H)$ نرمال باشد، نشان دهید که به ازای Uای یکه‌ای داریم $T^* = UT$. چه وقت U منحصر به فرد است؟

١٤. فرض کنید $T \in \mathscr{B}(H)$ و T^*T یک عملگر فشرده باشد. نشان دهید که T فشرده است.

۱۵. یک $T \in \mathscr{B}(H)$ی غیرفشرده بیابید که $T^{2} = 0$. آیا یک چنین عملگر می‌تواند نرمال باشد؟

١٦. فرض کنید $T \in \mathscr{B}(H)$ نرمال بوده و $\sigma(T)$ مجموعه‌ای متناهی باشد. راجع به T هر قدر می‌توانید اطلاعات کسب کنید.

۱۷. تحت مفروضات قسمت (ت)قضیهٔ ۲۹.۱۲ نشان دهید که معادلهٔ $Ty = x$ جوابی

چون $y \in H$ دارد اگر وفقط اگر

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^{-2} \|x_i\|^2 < \infty.$$

(هرگاه به ازای یک i ، $\lambda_i = 0$، آنگاه x_i به ازای این i باید 0 باشد.)

۱۸. طیف $\sigma(T)$ از $T \in \mathscr{B}(H)$ را می‌توان به سه قطعهٔ جدا از هم تقسیم کرد:

طیف نقطه‌ای $\sigma_p(T)$ مرکب است ازتمام $\lambda \in \mathbb{C}$هایی که $T - \lambda I$ یک به یک نیست.

طیف پیوستهٔ $\sigma_c(T)$ مرکب است از تمام $\lambda \in \mathbb{C}$هایی که $T - \lambda I$ یک نگاشت یک به یک از H به روی زیرفضای حقیقی چگالی از H است.

طیف مانده‌ای $\sigma_r(T)$ عبارت است از تمام $\lambda \in \sigma(T)$های دیگر.

(آ) ثابت کنید هر $T \in \mathscr{B}(H)$ی نرمال دارای طیف مانده‌ای تهی است.

(ب) ثابت کنید طیف نقطه‌ای یک $T \in \mathscr{B}(H)$ی نرمال به ازای H جدایی‌پذیر حداکثر شمارشپذیر است.

(پ) فرض کنید S_R و S_Lجابجاییهای راست و چپ (به صورت تعریف شده در تمرین ۲ از فصل ۱۰) باشند که بر فضای هیلبرت ℓ^2 عمل می‌کنند.

ثابت کنید $S_L = (S_R)^*$و

$$\sigma_p(S_L) = \sigma_r(S_R) = \{\lambda : |\lambda| < 1\},$$
$$\sigma_c(S_L) = \sigma_c(S_R) = \{\lambda : |\lambda| = 1\},$$
$$\sigma_r(S_L) = \sigma_p(S_R) = \varnothing .$$

۱۹. فرض کنید S_R و S_L همانند فوق باشند. ثابت کنید نه S_R و نه S_L هیچکدام تجزیهٔ قطبی UP با Uی یکه‌ای و $P \geq 0$ ندارد.

۲۰. فرض کنید μ یک اندازهٔ مثبت بر فضای اندازهٔ Ω بوده و $H = L^2(\mu)$ با ضرب داخلی معمولی

$$(f, g) = \int_{\Omega} f \bar{g} d\mu$$

باشد. به ازای $\phi \in L^{\infty}(\mu)$، عملگر ضرب را با $M_\phi(f) = \phi f$ تعریف کنید. در این صورت $M_\phi \in \mathscr{B}(H)$.

M_ϕ تحت چه شرایطی بر ϕ دارای مقدار ویژه است؟ مثالی بزنید که در آن $\sigma(M_\phi) = \sigma_c(M_\phi)$. نشان دهید که هر M_ϕ نرمال است. چه رابطه‌ای بین $\sigma(M_\phi)$ و برد اساسی ϕ وجود دارد؟ نشان دهید که $\phi \to M_\phi$ یک *- یکریختی یکمتر از $L^{\infty}(\mu)$

به روی یک زیرجبر بستهٔ A از $\mathscr{B}(H)$ است.

(برای آنکه آخرین حکم ما درست باشد باید بعضی از اندازه‌های مشکل‌ساز μ را مستثنی کنیم.) آیا A یک زیرجبر تعویض‌پذیر ماکزیمال از $\mathscr{B}(H)$ است؟

راهنمایی. اگر $\mu(\Omega) < \infty$، و نیز $T \in \mathscr{B}(H)$ و به ازای هر $\phi \in L^{\infty}(\mu)$، $TM_{\phi} = M_{\phi}T$، نشان دهید که T یک ضرب در $T(1)$ است و لذا $T \in A$.

۲۱. فرض کنید $T \in \mathscr{B}(H)$ نرمال بوده، A زیرجبر بسته‌ای از $\mathscr{B}(H)$ باشد که به وسیلهٔ I، T، و T^* تولید می‌شود، و T را می‌توان در نرم توپولوژی $\mathscr{B}(H)$ به وسیلهٔ ترکیبات خطی متناهی از تصویرهای ***متعلق*** به A تقریب کرد.

این امر تحت چه شرایط (لازم و کافی) بر $\sigma(T)$ رخ می‌دهد؟

۲۲. آیا هر $T \in \mathscr{B}(H)$ی نرمال در $\mathscr{B}(H)$ ریشهٔ دوم دارد؟ راجع به اصلیت مجموعهٔ تمام ریشه‌های دوم T چه می‌توان گفت؟ آیا ممکن است دو ریشه از یک T تعویض نشوند؟ آیا این امر می‌تواند به ازای $T=I$ رخ دهد؟

۲۳. نشان دهید که تبدیل فوریهٔ $f \to \hat{f}$ یک عملگر یکه‌ای بر $L^{2}\left(R^{n}\right)$ است. طیف آن چیست؟ ***پیشنهاد.*** وقتی $n=1$، تبدیلات فوریهٔ

$$\exp\left(\frac{1}{2}x^{2}\right)\left(\frac{d}{dx}\right)^{m}\exp\left(-x^{2}\right) \qquad (m=0,1,2,\dots)$$

را حساب کنید.

۲٤. نشان دهید که هر دو فضای هیلبرت جدایی‌پذیر با بعد نامتناهی (از طریق پایه‌های متعامد نرمال؛ ر.ک.[۲۳]) به طوریکمتر یکریخت‌اند. نشان دهید که فضای H قضیهٔ ۳۸.۱۲ جدایی‌پذیر است. نشان دهید که جواب سؤال قبل از قضیهٔ ۳۸.۱۲ برای هر H با بعدنامتناهی چه جدایی‌پذیر باشد یا نباشد منفی است.

۲۵. فرض کنید $T \in \mathscr{B}(H)$ نرمال بوده، f یک تابع بورل کراندار بر $\sigma(T)$ باشد، و $S = f(T)$. اگر E_T و E_S به ترتیب تجزیه‌های طیفی T و S باشند، ثابت کنید به ازای هر مجموعهٔ بورل $\omega \subset \sigma(S)$،

$$E_S(\omega) = E_T\left(f^{-1}(\omega)\right).$$

۲٦. اگر $S \in \mathscr{B}(H)$ و $T \in \mathscr{B}(H)$، نماد $S \geq T$ یعنی $S - T \geq 0$؛ یعنی به ازای هر $x \in H$،

$$(Sx, x) \geq (Tx, x).$$

هم ارزی چهار خاصیت زیر از یک جفت تصویر خود الحاق مانند P وQ را ثابت نمایید:

(آ) $P \geq Q$؛

(ب) $\mathscr{R}(P) \supset \mathscr{R}(Q)$؛

(پ) $PQ = Q$؛

(ت) $QP = Q$.

اگر E یک تجزیهٔ همانی باشد، نتیجه می‌شود که به ازای $\omega' \supset \omega''$، $E(\omega') \geq E(\omega'')$.

۲۷. فرض کنید * یک برگشت در جبر مختلط A بوده، q یک عنصر معکوسپذیر A باشد به طوری که $q^* = q$ و $x^\#$ به ازای هر $x \in A$ با

$$x^\# = q^{-1} x^* q$$

تعریف شده باشد. نشان دهید که # یک برگشت در A می‌باشد.

۲۸. فرض کنید A جبر تمام ماتریسهای ٤ در ٤ مختلط باشد. اگر $M = (m_{ij}) \in A$، M^* را ترانهادهٔ مزدوج M بگیرید: $m^*_{ij} = \overline{m_{ji}}$. قراردهید

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

همانند تمرین ۲۷، تعریف کنید

$$M^\# = Q^{-1} M^* Q \qquad (M \in A).$$

(آ) نشان دهید که S و T نسبت به برگشت # نرمال‌اند، $ST=TS$، ولی $ST^\# \neq T^\# S$.

(ب)نشان دهید که $S+T$، #- نرمال نیست.

(پ) $\|SS^\#\|$ را با $\|S\|^2$ مقایسه نمایید.

(ت)شعاع طیفی $\rho(S+S^\#)$ را حساب کرده و نشان دهید که با $\|S+S^\#\|$متفاوت است.

(ث)تعریف کنید $V = (v_{ij}) \in A$؛ درنتیجه $v_{12} = v_{24} = i$، $v_{31} = v_{43} = -i$، $v_{ij} = 0$ در غیر این صورت. $\sigma(VV^*)$ را حساب کنید؛ این در $[0,\infty)$ قرارندارد.

قسمت (آ) نشان می‌دهد که قضیهٔ ۱۲.۱٦ به ازای بعضی برگشتها درست نیست. قسمت (ب)همان کار قسمت (آ) تمرین ۱۲ را می‌کند. قسمتهای (پ)، (ت)، و (ث)نشان

می‌دهند که قسمتهای مختلف قضیهٔ ۲۸.۱۱ برای برگشت # برقرار نیستند.

۲۹. فرض کنید X فضای‌برداری تمام چندجمله‌ایهای مثلثاتی بر خط حقیقی باشد: اینها توابعی به شکل زیرند:

$$f(t)=c_1 e^{is_1 t}+\ldots+c_n e^{is_n t},$$

که د رآن به ازای $1\le k\le n$، $s_k\in R$ و $c_k\in\mathbb{C}$. نشان دهید که

$$(f,g)=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A} f(t)\overline{g(t)}dt$$

موجود بوده و یک ضرب داخلی بر X تعریف می‌کنند؛ همچنین

$$\|f\|^2=(f,f)=|c_1|^2+\ldots+|c_n|^2,$$

و تتمیم X یک فضای هیلبرت جدایی‌ناپذیر مانند H است. نشان دهید که H شامل تمام حدود ***یکنواخت*** از چندجمله‌ایهای مثلثاتی است؛ اینها توابع "تقریباً متناوب" بر R می‌باشند.

۳۰. فرض کنید H_w یک فضای هیلبرت با بعدنامتناهی همراه با توپولوژی ضعیف آن باشد. ثابت کنید ضرب داخلی یک تابع به طور جداگانه پیوسته بر $H_w\times H_w$ است که به طور متصل پیوسته نیست.

۳۱. فرض کنید به ازای $n=1,2,3,\ldots$، $T_n\in\mathscr{B}(H)$، و به ازای هر $x\in H$،

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n x\|=0.$$

آیا به ازای هر $x\in H$،

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n^* x\|=0?$$

۳۲. فرض کنید X یک فضای باناخ ***به طور یکنواخت محدب*** باشد. این یعنی، طبق تعریف، مفروضات

$$\|x_n\|\le 1,\ \|y_n\|\le 1,\ \|x_n+y_n\|\to 2$$

ایجاب می‌کنند که $\|x_n-y_n\|\to 0$.

به عنوان مثال، هر فضای هیلبرت به طور یکنواخت محدب است.

(آ) ثابت کنید قضیهٔ ۳.۱۲ در X برقرار است.

(ب) فرض کنید $\|x_n\|=1$، $\Lambda\in X^*$، $\|\Lambda\|=1$، و $\Lambda x_n\to 1$. ثابت کنید $\{x_n\}$ (در نرم توپولوژی X) یک دنبالهٔ‌کشی است.

راهنمایی. $\Lambda(x_n+x_m)$ را در نظر بگیرید.

(پ) ثابت کنید هر $\Lambda \in X^*$ ماکزیمم خود را بر گوی‌یکهٔ بستهٔ X می‌گیرد.

(ت) فرض کنید $x_n \to x$ به طور ضعیف و $\|x_n\| \to \|x\|$. ثابت کنید $\|x_n - x\| \to 0$.

راهنمایی. مسئله را به حالت $\|x_n\| = 1$ تقلیل دهید. $\Lambda(x_n + x)$ را بـه ازای Λای مناسـب در نظر بگیرید.

(ث)نشان دهید که چهار خاصیت پیش در بعضی از فضاهـای بانـاخ (مثـلاً در L^1 یـا C) برقرار نیستند. لذا اینها به طور یکنواخت محدب نیستند.

۳۳. حکم مذکور در تبصرهٔ بعد از قضیهٔ ۳۵.۱۲ راجع به حالت $\dim H < \infty$ را به ثبـوت رسانید.

۳۴. عملگر $T \in \mathscr{B}(H)$ با $\sigma(T) = \{1\}$ را که نه‌یکه‌ای باشد نه خود الحاق پیدا نمایید.

۳۵. اگر S خود الحاق بوده و $U = \exp(iS)$، نشان دهید که Uیکه‌ای است. از این امر و اینکه $\sigma(U)$ بردایرهٔ یکه است نتیجه بگیرید که $\sigma(S)$ بر محور حقیقی واقع است.

۳۶. نشان دهید که اگر $T \in \mathscr{B}(H)$ نرمال باشد، $\mathscr{R}(T^*) = \mathscr{R}(T)$.***راهنمایی.*** بـا اسـتفاده از قضیهٔ ۳۵.۱۲، $T = T^* U^2$.

۳۷. T را بر $H = L^2(0,1)$ با $(Tf)(x) = xf(x)$ تعریف کـرده و نشـان دهیـد کـه T خـود الحاق است و $\mathscr{R}(T)$ زیرفضای حقیقی چگالی از H می‌باشد.

۳۸. یک $T \in \mathscr{B}(H)$ی غیرنرمال چنان بیابید که

$$\|T\| = \sup\{|(Tx,x)| : x \in H, \|x\| \le 1\}.$$

(این نشان می‌دهد که قضیهٔ ۲۵.۱۲ دارای عکس نیست.)

۳۹. نشان دهید که T و T^* می‌توانند بدون نرمال بودن فضای پوچ یکسانی داشته باشند.

۴۰. فرض کنید D یـک حلقـهٔ مسـتدیر در $\mathbb{C}$ بـا مرکـز 0 باشـد. H و M در $\mathscr{B}(H)$ را همانند قضیهٔ ۳۸.۱۲ تعریف کرده و، با کامل کردن شـرح مختصـر زیـر، ثـابت کنیـد M ریشـهٔ دومـی در $\mathscr{B}(H)$ نـدارد: فـــرض کنیـــد $Q \in \mathscr{B}(H)$ و $Q^2 = M$. قـــرار دهید $u(z) = 1$، $v(z) = z$، و $h = Qu$. چون $QM = MQ$، استقرا نشان می‌دهد که به ازای جمیع nهای صحیح، $Qv^n = hv^n$. از بسط به سری لوران نتیجه می‌شود که به ازای هــر $f \in H$، $Qf = hf$. ایـن امـر بـه $h^2 = v$ یعنـی بـه ازای هـر $z \in D$، $h^2(z) = z$، منجـر می‌شود که ناممکن است.

الحاقی M^* از M را بیابید. (از سری لوران استفاده کنید.)

فصل ۱۳

عملگرهای بی‌کران

آشنایی

۱.۱۳. چند تعریف. فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باشد. منظور از یک ***عملگر در*** H یعنی یک نگاشت خطی مانند T که قلمروش $\mathscr{D}(T)$ زیرفضایی از H بوده و بردش $\mathscr{R}(T)$ در H واقع باشد.

ما T را کراندار یا پیوسته نمی‌گیریم. البته، هرگاه T [نسبت به نرم توپولوژیی که $\mathscr{D}(T)$ از H به ارث می‌برد] پیوسته باشد، آنگاه T توسیع پیوسته به بست $\mathscr{D}(T)$، لذا به H، دارد زیرا $\overline{\mathscr{D}(T)}$ در H متمم شده است. در این حالت، T تحدید عضوی از $\mathscr{B}(H)$ به $\mathscr{D}(T)$ می‌باشد.

گراف $\mathscr{G}(T)$ عملگر T در H زیرفضایی از $H \times H$ است مرکب از جفتهای مرتب $\{x, Tx\}$ که در آن x روی $\mathscr{D}(T)$ تغییر می‌کند. واضح است که S یک توسیع T است [یعنی $\mathscr{D}(T) \subset \mathscr{D}(S)$ و، به ازای $x \in \mathscr{D}(T)$، $Sx = Tx$] اگر و فقط اگر $\mathscr{G}(T) \subset \mathscr{G}(S)$. این شمول اغلب به شکل ساده‌تر زیر نوشته می‌شود:

$$T \subset S. \qquad (1)$$

یک عملگر **بسته** عملگری است که گرافش زیرفضای بسته‌ای از $H \times H$ است. بنا برقضیهٔ گراف بسته، $T \in \mathscr{B}(H)$ اگر و فقط اگر $\mathscr{D}(T) = H$ و T بسته باشد.

می‌خواهیم یک الحاقی فضای هیلبرت T^* را به T مربوط کنیم. قلمروش $\mathscr{D}(T^*)$ باید از تمام $y \in H$هایی تشکیل شده باشد که تابعی خطی

$$x \to (Tx, y) \tag{٢}$$

بر $\mathscr{D}(T)$ پیوسته است. هرگاه $y \in \mathscr{D}(T^*)$، آنگاه قضیهٔ هان- باناخ تابعی (٢) را به یک تابعی خطی پیوسته بر H وسعت می‌دهد، و لذا عنصری مانند $T^* y \in H$ هست که در رابطهٔ

$$(Tx, y) = (x, T^* y) \qquad [x \in \mathscr{D}(T)] \tag{٣}$$

صدق می‌کند. واضح است که $T^* y$ ***به طور منحصر به فرد*** به وسیلهٔ (٣) معین می‌شود اگر و فقط اگر $\mathscr{D}(T)$ در H چگال باشد؛ یعنی اگر و فقط اگر T ***به طور چگال تعریف شده باشد***. لذا تنها عملگرهای T که به آنها الحاقی T^* داده می‌شود آنهایی هستند که به طور چگال تعریف شده‌اند. در این صورت به سادگی معلوم می‌شود که T^* نیز یک عملگر در H است؛ یعنی $\mathscr{D}(T^*)$ زیرفضایی از H است و T^* خطی می‌باشد.

توجه کنید که هرگاه $T \in \mathscr{B}(H)$، آنگاه تعریف T^* داده شده در اینجا با تعریف داده شده در بخش ٩.١٢ یکی است. به‌خصوص، $\mathscr{D}(T^*) = H$ و $T^* \in \mathscr{B}(H)$.

اعمال جبری معمولی با عملگرهای بی‌کران باید با احتیاط صورت گیرد؛ باید مواظب قلمروها باشیم. تعاریف طبیعی برای قلمروهای مجموعها و حاصل‌ضربها به صورت زیر است:

$$\mathscr{D}(S+T) = \mathscr{D}(S) \cap \mathscr{D}(T), \tag{٤}$$

$$\mathscr{D}(ST) = \{x \in \mathscr{D}(T) : Tx \in \mathscr{D}(S)\}. \tag{٥}$$

در این صورت قوانین شرکتپذیری معمولی برقرارند:

$$(R+S)+T = R+(S+T)، \qquad (RS)T = R(ST). \tag{٦}$$

در رابطه با قوانین پخشپذیری، یکی از آنها یعنی $(R+S)T = RT + ST$ به شکل معمولی‌اش برقرار است ولی دیگری ممکن است به شکل

$$T(R+S) \supset TR+TS \tag{۷}$$

برقرار باشد زیرا ممکن است $(R+S)x \in \mathscr{D}(T)$ حتی اگر Rx یا Sx در $\mathscr{D}(T)$ نباشد. ضرب اسکالر به صورت زیر تعریف می‌شود: هرگاه $\alpha = 0$، آنگاه $\mathscr{D}(\alpha T) = H$ و $\alpha T = 0$. هرگاه $\alpha \neq 0$، آنگاه $\mathscr{D}(\alpha T) = \mathscr{D}(T)$ و به ازای $x \in \mathscr{D}(T)$، $(\alpha T)x = \alpha(Tx)$.

۲.۱۳ قضیه. ***فرض کنیم S، T، و ST عملگرهایی باشند که در H به طور چگال تعریف شده‌اند. در این صورت***

$$\boldsymbol{T^* S^* \subset (ST)^*.} \tag{۱}$$

هرگاه، علاوه بر این، $S \in \mathscr{B}(H)$، آنگاه

$$\boldsymbol{T^* S^* = (ST)^*.} \tag{۲}$$

توجه کنید که (۱) حکم می‌کند که $(ST)^*$ توسیعی از T^*S^* است. تساوی (۲) ایجاب می‌کند که T^*S^* و $(ST)^*$ معمولاً قلمروهای یکسانی دارند.

برهان. فرض کنیم $x \in \mathscr{D}(ST)$ و $y \in \mathscr{D}(T^*S^*)$. در این صورت

$$(Tx, S^*y) = (x, T^*S^*y), \tag{۳}$$

زیرا $x \in \mathscr{D}(T)$ و $S^*y \in \mathscr{D}(T^*)$، و

$$(STx, y) = (Tx, S^*y), \tag{۴}$$

زیرا $Tx \in \mathscr{D}(S)$ و $y \in \mathscr{D}(S^*)$. لذا

$$(STx, y) = (x, T^*S^*y). \tag{۵}$$

این رابطهٔ (۱) را ثابت می‌کند.

حال فرض کنیم $S \in \mathscr{B}(H)$ و $y \in \mathscr{D}((ST)^*)$. در این صورت $S^* \in \mathscr{B}(H)$؛ در نتیجه $\mathscr{D}(S^*) = H$، و به ازای هر $x \in \mathscr{D}(ST)$،

$$(Tx, S^*y) = (STx, y) = (x, (ST)^*y). \tag{۶}$$

لذا $S^*y \in \mathscr{D}(T^*)$ و درنتیجه $y \in \mathscr{D}(T^*S^*)$. حال‌رابطهٔ (۲) از (۱) نتیجه خواهدشد.

۳.۱۳ تعریف. گوییم عملگر T در H ***متقارن*** است اگر هروقت $x \in \mathscr{D}(T)$ و $y \in \mathscr{D}(T)$،

$$(Tx, y) = (x, Ty). \qquad (۱)$$

لذا عملگرهای متقارن به طور چگال تعریف شده درست آنهایی هستند که در رابطهٔ

$$T \subset T^* \qquad (۲)$$

صدق می‌کنند.

هرگاه $T = T^*$، آنگاه گوییم T ***خود الحاق*** است.

وقتی $T \in \mathscr{B}(H)$، این دو خاصیت به وضوح یکی‌اند. این دو خاصیت در حالت کلی یکی نیستند.

به علاوه، هرگاه $\mathscr{D}(T)$ چگال بوده و به ازای هر $x \in \mathscr{D}(T)$ و $y \in \mathscr{D}(S)$، $(Tx, y) = (x, Sy)$، آنگاه $S \subset T^*$.

۴.۱۳ مثال. فرض کنیم نسبت به اندازهٔ لبگ، $H = L^۲ = L^۲([۰,۱])$. عملگرهای $T_۱$، $T_۲$، و $T_۳$ را در $L^۲$ تعریف می‌کنیم. قلمروهایشان به قرار زیرند:

$\mathscr{D}(T_۱)$ عبارت است از تمام توابع مطلقاً پیوستهٔ f بر $[۰,۱]$ با مشتق $f' \in L^۲$.

$$\mathscr{D}(T_۲) = \mathscr{D}(T_۱) \cap \{f : f(۰) = f(۱)\}.$$
$$\mathscr{D}(T_۳) = \mathscr{D}(T_۱) \cap \{f : f(۰) = f(۱) = ۰\}.$$

اینها در $L^۲$ چگالند. تعریف می‌کنیم:

به ازای $f \in \mathscr{D}(T_k)$، $k = ۱,۲,۳$، $T_k f = if'$. (۱)

حکم می‌کنیم که

$$T_۱^* = T_۳, \qquad T_۲^* = T_۲, \qquad T_۳^* = T_۱. \qquad (۲)$$

چون $T_۳ \subset T_۲ \subset T_۱$، پس $T_۲$ یک توسیع خودالحاق عملگر متقارن (ولی نه خود الحاق) $T_۳$ است و توسیع $T_۱$ از $T_۲$ متقارن نیست.

حال رابطهٔ (۲) را ثابت می‌کنیم. توجه کنید که وقتی $f \in \mathscr{D}(T_k)$، $g \in \mathscr{D}(T_m)$، و $m+k=4$،

$$(T_k f, g) = \int_0^1 (if')\overline{g} = \int_0^1 f(\overline{ig'}) = (f, T_m g), \tag{۳}$$

زیرا در این صورت $f(1)\overline{g}(1) = f(0)\overline{g}(0)$. پس $T_m \subset T_k^*$ یا

$$T_1 \subset T_3^*،\qquad T_2 \subset T_2^*،\qquad .T_3 \subset T_1^* \tag{٤}$$

حال فرض کنیم $g \in \mathscr{D}(T_k^*)$ و $\phi = T_k^* g$. قرار می‌دهیم $\Phi(x) = \int_0^x \phi$. دراین صورت، به ازای $f \in \mathscr{D}(T_k)$،

$$\int_0^1 if'\overline{g} = (T_k f, g) = (f, \phi) = f(1)\overline{\Phi(1)} - \int_0^1 f'\,\overline{\Phi}. \tag{٥}$$

وقتی $k=$ ۱ یا ۲ ، $\mathscr{D}(T_k)$ شامل ثابتهای ناصفر است؛ درنتیجه (٥) ایجاب می‌کند که $\Phi(1) = 0$. وقتی $k=3$ ، $f(1) = 0$. پس درتمام حالات

$$ig - \Phi \in \mathscr{R}(T_k)^{\perp}. \tag{٦}$$

چون $\mathscr{R}(T_1) = L^2$، اگر $k=1$، $ig = \Phi$، و چون درآن حالت $\Phi(1) = 0$، $g \in \mathscr{D}(T_3)$. لذا $T_1^* \subset T_3$.

هرگاه $k=$ ۲ یا ۳ ، آنگاه $\mathscr{R}(T_k)$ از تمام $u \in L^2$ هایی تشکیل شده است که $\int_0^1 u = 0$. لذا

$$\mathscr{R}(T_2) = \mathscr{R}(T_3) = Y^{\perp}, \tag{٧}$$

که در آن Y زیرفضای یک بعدیی از L^2 است که شامل ثابتها می‌باشد. لذا رابطهٔ (٦) ایجاب می‌کند که $ig - \Phi$ ثابت است. بنابراین، g مطلقاً پیوسته است و $g' \in L^2$؛ یعنی $g \in \mathscr{D}(T_1)$. بنابراین $T_3^* \subset T_1$.

هرگاه $k=2$، آنگاه $\Phi(1) = 0$؛ درنتیجه $g(0) = g(1)$ و $g \in \mathscr{D}(T_2)$. لذا $T_2^* \subset T_2$.

این برهان را تمام خواهد کرد.

پیش از مطالعهٔ مشروحتر روابط بین عملگرهای متقارن و عملگرهای خود الحاق، مثالی دیگر می‌آوریم.

۵.۱۳ مثال. فرض کنیم مانند مثال ۴.۱۳، $H = L^2$، بـه ازای مثلاً $f \in \mathscr{D}(T_2)$ تعریف می‌کنیم $Df = f'$ (دراینجا قلمرو دقیق خیلی مهم نیست)، و تعریف می‌کنیم $(Mf)(t) = tf(t)$. در این صورت $(DM - MD)f = f$ یا

$$DM - MD = I, \qquad (۱)$$

که در آن I عملگر همانی بر قلمرو D است.

لذا عملگر همانی به صورت یک تعویضگر دو عملگر که فقط یکی از آنها کراندار است ظاهر می‌شود. این مسئله که همانی تعویضگر دو عملگر ***کراندار*** بر H است یا نه در مکانیک کوانتوم مطرح شده است. جواب، نه فقط در $\mathscr{B}(H)$ بلکه درهر جبر باناخ، منفی است.

۶.۱۳ قضیه. هرگاه A یک جبر باناخ با عنصریکهٔ e بوده و $x \in A$ و $y \in A$، آنگاه

$$xy - yx \neq e.$$

برهان زیر، که منسوب به ویلاند (*Wielandt*) است، حتی از تمامیت A نیز استفاده نمی‌کند.

برهان. فرض کنیم $xy - yx = e$. فرض استقرای

$$x^n y - yx^n = nx^{n-1} \neq 0 \qquad (۱)$$

را در نظر می‌گیریم که به ازای $n = 1$ برقرار است. هرگاه (۱) به ازای عدد صحیح مثبتی مانند n برقرار باشد، آنگاه $x^n \neq 0$ و

$$x^{n+1}y - yx^{n+1} = x^n(xy - yx) + \left(x^n y - yx^n\right)x$$

$$= x^n e + nx^{n-1}x = (n+1)x^n;$$

درنتیجه (۱) به ازای $n+1$ به جای n برقرار است. پس داریم

$$n\|x^{n-1}\| = \|x^n y - yx^n\| \leq 2\|x^n\|\|y\| \leq 2\|x^{n-1}\|\|x\|\|y\|,$$

یا، به ازای هر عدد صحیح مثبت n، $n \leq 2\|x\|\|y\|$. این نامساوی بـه وضوح غیرممکن

است.

گرافها و عملگرهای متقارن

۷.۱۳ گرافها. هرگاه H یک فضای هیلبرت باشد، آنگاه $H \times H$ را می‌توان با تعریف حاصل ضرب داخلی دو عنصر $\{a,b\}$ و $\{c,d\}$ از $H \times H$ به صورت

$$(\{a,b\},\{c,d\}) = (a,c) + (b,d), \qquad (۱)$$

که در آن (a,c) حاصل ضرب داخلی در H است، به یک فضای هیلبرت بدل ساخت. ما تحقیق آنکه این درتمام خواص مذکور در بخش ۱.۱۲ صدق می‌کند را به عنوان تمرین می‌گذاریم. به‌خصوص، نرم در $H \times H$ عبارت است از

$$\|\{a,b\}\|^{2} = \|a\|^{2} + \|b\|^{2}. \qquad (۲)$$

تعریف می‌کنیم

$$V\{a,b\} = \{-b,a\} \qquad (a \in H, b \in H)\,. \qquad (۳)$$

در این صورت V یک عملگر ***یکه‌ای*** بر $H \times H$ است که در $V^{2} = -I$ صدق می‌کند. لذا، اگر M زیرفضایی از $H \times H$ باشد، $V^{2}M = M$.

این عملگر T^* را به نحو جالبی بر حسب T توصیف می‌کند:

۸.۱۳ قضیه. ***هرگاه T یک عملگر در H باشد که به طور چگال تعریف شده است، آنگاه***

$$\mathscr{G}(T^*) = [V\mathscr{G}(T)]^{\perp}, \qquad (۱)$$

یعنی مساوی متمم متعامد $V\mathscr{G}(T)$ در $H \times H$.

توجه کنید که با معلوم بودن $\mathscr{G}(T^*)$، $\mathscr{D}(T^*)$ و T^* معلوم خواهند بود.

برهان. واضح است که هریک از چهار حکم زیر با حکم بعد و / یا حکم قبل از آن هم

ارز است.

$$\{y,z\} \in \mathscr{G}(T^*). \tag{۲}$$

(۳) به ازای هر $x \in \mathscr{D}(T)$، $(Tx, y) = (x, z)$.

(۴) به ازای هر $x \in \mathscr{D}(T)$، $(\{-Tx, x\}, \{y,z\}) = 0$.

$$\{y,z\} \in [V\mathscr{G}(T)]^{\perp}. \tag{۵}$$

۹.۱۳ قضیه. ***هرگاه T یک عملگر در H باشد که به طور چگال تعریف شده است، آنگاه T^* یک عملگر بسته است. به‌خصوص، عملگرهای خودالحاق بسته می‌باشند.***

برهان. $M^{\perp}$ به ازای هر $M \subset H \times H$ بسته است. لذا، طبق قضیهٔ ۸.۱۳، $\mathscr{G}(T^*)$ در $H \times H$ بسته می‌باشد.

۱۰.۱۳ قضیه. ***هرگاه T یک عملگر بستهٔ به طور چگال تعریف شده در H باشد، آنگاه***

$$\boldsymbol{H \times H = V\mathscr{G}(T) \oplus \mathscr{G}(T^*)}, \tag{۱}$$

یعنی مجموع مستقیم دو زیرفضای متعامد.

برهان. اگر $\mathscr{G}(T)$ بسته باشد، $V\mathscr{G}(T)$ نیز چنین است زیرا V یکه‌ای است، و لذا قضیهٔ ۸.۱۳ ایجاب می‌کند که $V\mathscr{G}(T) = [\mathscr{G}(T^*)]^{\perp}$؛ ر.ک.قضیهٔ ۴.۱۲.

نتیجه. ***اگر $a \in H$ و $b \in H$، دستگاه معادلات***

$$\boldsymbol{-Tx + y = a}$$

$$\boldsymbol{x + T^* y = b}$$

دارای جواب منحصر به فردی با $x \in \mathscr{D}(T)$ و $y \in \mathscr{D}(T^*)$ می‌باشد.

قضیهٔ بعدی ما چند شرط ارائه می‌دهد که یک عملگر متقارن تحت آنها خود الحاق است.

۱۱.۱۳ قضیه. *فرض کنیم T یک عملگر به طور چگال تعریف شده در H بوده و T متقارن باشد.*

(آ) هرگاه $\mathscr{D}(T)=H$، آنگاه T خودالحاق است و $T\in\mathscr{B}(H)$.

(ب) هرگاه T خودالحاق و یک به یک باشد، آنگاه $\mathscr{R}(T)$ در H چگال و T^{-1} خودالحاق است.

(پ) هرگاه $\mathscr{R}(T)$ در H چگال باشد، آنگاه T یک به یک است.

(ت) هرگاه $\mathscr{R}(T)=H$، آنگاه T خود الحاق است و $T^{-1}\in\mathscr{B}(H)$.

برهان. (آ) طبق فرض، $T\subset T^*$. اگر $\mathscr{D}(T)=H$، واضح است که $T=T^*$. لذا T بسته است (قضیهٔ ۹.۱۳) و لذا، طبق قضیهٔ گراف بسته، پیوسته می‌باشد (همچنین می‌توان به قضیهٔ ۱.۵ متوسل شد.)

(ب) فرض کنیم $y\perp\mathscr{R}(T)$. در این صورت $x\to(Tx,y)=0$ در $\mathscr{D}(T)$ پیوسته است؛ درنتیجه $y\in\mathscr{D}(T^*)=\mathscr{D}(T)$، و به ازای هر $x\in\mathscr{D}(T)$، $(x,Ty)=(Tx,y)=0$. لذا $Ty=0$. چون T یک به یک فرض شده است، پس $y=0$. این ثابت می‌کند که $\mathscr{R}(T)$ در H چگال است.

بنابراین T^{-1} به طور چگال تعریف شده است، نیز $\mathscr{D}\left(T^{-1}\right)=\mathscr{R}(T)$، و نیز $\left(T^{-1}\right)^*$ وجود دارد.

روابط

$$V\mathscr{G}\left(T^{-1}\right)=\mathscr{G}(-T) \quad \text{و} \quad \mathscr{G}\left(T^{-1}\right)=V\mathscr{G}(-T) \tag{1}$$

به آسانی تحقیق می‌شوند:

$$\{a,b\}\in\mathscr{G}\left(T^{-1}\right)\Leftrightarrow\{b,a\}\in\mathscr{G}(T)\Leftrightarrow\{b,-a\}\in\mathscr{G}(-T)$$

$$\Leftrightarrow \{a,b\} \in V\mathscr{G}(-T) .$$

چون T خود الحاق است، پس بسته است (قضیهٔ ۹.۱۳)؛ درنتیجه $-T$ بسته است، و لذا، طبق رابطهٔ (۱)، T^{-1} بسته می‌باشد. حال قضیهٔ ۱۰.۱۳ را می‌توان بر T^{-1} و بر $-T$ اعمال کرده و تجزیه‌های متعامد

$$H \times H = V\mathscr{G}\left(T^{-1}\right) \oplus \mathscr{G}\left(\left(T^{-1}\right)^*\right) \qquad (2)$$

و

$$H \times H = V\mathscr{G}(-T) \oplus \mathscr{G}(-T) = \mathscr{G}\left(T^{-1}\right) \oplus V\mathscr{G}\left(T^{-1}\right) \qquad (3)$$

را به دست آورد. درنتیجه،

$$\mathscr{G}\left(\left(T^{-1}\right)^*\right) = \left[V\mathscr{G}\left(T^{-1}\right)\right]^{\perp} = \mathscr{G}\left(T^{-1}\right), \qquad (4)$$

که نشان می‌دهد که $\left(T^{-1}\right)^* = T^{-1}$.

(پ) فرض کنیم $Tx = 0$. در این صورت، به ازای هر $y \in \mathscr{D}(T)$، $(x, Ty) = (Tx, y) = 0$. لذا $x \perp \mathscr{R}(T)$، و درنتیجه $x = 0$.

(ت) چون $\mathscr{R}(T) = H$، قسمت (پ) ایجاب می‌کند که T یک به یک است، و $\mathscr{D}\left(T^{-1}\right) = H$. هرگاه $x \in H$ و $y \in H$، آنگاه به ازای $z \in \mathscr{D}(T)$ ی و $w \in \mathscr{D}(T)$ ای، $x = Tz$ و $y = Tw$؛ درنتیجه

$$\left(T^{-1}x, y\right) = (z, Tw) = (Tz, w) = \left(x, T^{-1}y\right).$$

لذا T^{-1} متقارن است، (آ) ایجاب می‌کند که T^{-1} خود الحاق (و کراندار) است، و حال از (ب) نتیجه می‌شود که $T = \left(T^{-1}\right)^{-1}$ نیز خود الحاق می‌باشد.

۱۲.۱۳ قضیه. ***هرگاه T یک عملگر بستهٔ به طور چگال تعریف شده در H باشد، آنگاه $\mathscr{D}(T^*)$ چگال است و $T^{**} = T$.***

برهان. چون V یکه‌ای است و $V^2 = -I$، قضیهٔ ۱۰.۱۳ تجزیهٔ متعامد زیر را به ما می‌دهد:

$$H\times H=\mathscr{G}(T)\oplus V\mathscr{G}(T^*). \qquad (۱)$$

فرض کنیم $z\perp\mathscr{D}(T^*)$. در این صورت $(z,y)=\circ$ و لذا، به ازای هر $y\in\mathscr{D}(T^*)$،

$$(\{\circ,z\},\{-T^*y,y\})=\circ. \qquad (۲)$$

بنابراین $\{\circ,z\}\in[V\mathscr{G}(T^*)]^\perp=\mathscr{G}(T)$ که $z=T(\circ)=\circ$ را ایجاب می‌کند. در نتیجه، $\mathscr{D}(T^*)$ در H چگال است و T^{**} تعریف شده است.

لذا کاربرد دیگری از قضیهٔ ۱۰.۱۳ نتیجه می‌دهد که

$$H\times H=V\mathscr{G}(T^*)\oplus\mathscr{G}(T^{**}). \qquad (۳)$$

بنابر روابط (۱) و (۳)،

$$\mathscr{G}(T^{**})=[V\mathscr{G}(T^*)]^\perp=\mathscr{G}(T); \qquad (٤)$$

درنتیجه $T^{**}=T$.

حال ملاحظه می‌کنیم که عملگرها به شکل T^*T خواص جالبی دارند. به خصوص، $\mathscr{D}(T^*T)$ نمی‌تواند خیلی کوچک باشد.

۱۳.۱۳ قضیه. *فرض کنیم T یک عملگر بستهٔ به طور چگال تعریف شده در H بوده و $Q=I+T^*T$*

(آ) تحت این مفروضات، Q یک نگاشت یک به یک از

$$\mathscr{D}(Q)=\mathscr{D}(T^*T)=\{x\in\mathscr{D}(T):Tx\in\mathscr{D}(T^*)\}$$

به روی H است، و عملگرهایی مانند $B\in\mathscr{B}(H)$ و $C\in\mathscr{B}(H)$ وجود دارند که در $\|B\|\le ۱$، $\|C\|\le ۱$، $C=TB$، و

$$B(I+T^*T)\subset(I+T^*T)B=I \qquad (۱)$$

صدق می‌کنند. همچنین $B\ge\circ$ و T^*T خود الحاق است.

(ب) هرگاه T' تحدید T به $\mathscr{D}(T^*T)$ باشد، آنگاه $\mathscr{G}(T')$ در $\mathscr{G}(T)$ چگال است.

در اینجا و در آینده، حرف I یعنی عملگر همانی با قلمرو H.

برهان. هرگاه $x \in \mathscr{D}(Q)$، آنگاه $Tx \in \mathscr{D}(T^*)$؛ درنتیجه

$$(x,x)+(Tx,Tx)=(x,x)+(x,T^*Tx)=(x,Qx)\ . \tag{۲}$$

بنابراین، $\|x\|^{2} \le \|x\|\|Qx\|$ که یک به یک بودن Q را نشان می‌دهد.

بنابرقضیهٔ ۱۰.۱۳، به هر $h \in H$ بردار منحصر به فردی مانند $Bh \in \mathscr{D}(T)$ و $Ch \in \mathscr{D}(T^*)$ منحصر به فردی چنان نظیر است که

$$\{0,h\}=\{-TBh,Bh\}+\{Ch,T^*Ch\}. \tag{۳}$$

واضح است که B و C عملگرهایی خطی در H با قلمرو Hاند. دوبردار سمت راست (۳) به یکدیگر متعامدند (قضیهٔ ۱۰.۱۳). لذا تعریف نرم در $H\times H$ ایجاب می‌کند که

$$\|h\|^{2} \ge \|Bh\|^{2}+\|Ch\|^{2} \qquad (h \in H); \tag{۴}$$

درنتیجه $\|B\| \le 1$ و $\|C\| \le 1$.

با توجه به مؤلفه‌های(۳) معلوم می‌شود که $C=TB$ و، به ازای هر $h \in H$،

$$h=Bh+T^*Ch=Bh+T^*TBh=QBh\ . \tag{۵}$$

لذا $QB=I$. به‌خصوص، B یک نگاشت یک به یک از H به روی $\mathscr{D}(Q)$است. هرگاه $y \in \mathscr{D}(Q)$، آنگاه به ازای $h \in H$ی، $y=Bh$؛ درنتیجه $Qy=QBh=h$ و $BQy=Bh=y$. لذا $BQ \subset I$ و رابطهٔ (۱) ثابت می‌شود.

هرگاه $h \in H$، آنگاه به ازای $x \in \mathscr{D}(Q)$ی، $h \in Qx$؛ درنتیجه، طبق (۲)،

$$(Bh,h)=(BQx,Qx)=(x,Qx) \ge 0\ . \tag{۶}$$

لذا $B \ge 0$، B خود الحاق است (قضیهٔ ۳۲.۱۲)، و حال قسمت (ب)قضیهٔ ۱۱.۱۳ نشان می‌دهد که Q خود الحاق است؛ درنتیجه $T^*T=Q-I$ نیز چنین می‌باشد.

این امر برهان قسمت (آ) را تمام می‌کند.

چون T یک عملگر بسته است، $\mathscr{G}(T)$ زیرفضای بسته‌ای از $H\times H$ است؛ در نتیجه $\mathscr{G}(T)$یک فضای هیلبرت می‌باشد. فرض کنیم $\{x,Tz\} \in \mathscr{G}(T)$ متعامد به $\mathscr{G}(T')$ باشد. در این صورت، به ازای هر $x \in \mathscr{D}(T^*T)=\mathscr{D}(Q)$،

$$\begin{aligned} 0 &= (\{z,Tz\},\{x,Tx\})=(z,x)+(Tz,Tx)=(z,x)+(z,T^*Tx) \\ &= (z,Qx). \end{aligned}$$

اما $\mathscr{R}(Q) = H$. بنابراین $z = 0$. این امر قسمت (ب)را ثابت می‌کند.

۱۴.۱۳ تعریف. گوییم عملگر متقارن T در H ***به طور ماکزیمال متقارن*** است اگر T توسیع متقارن حقیقی نداشته باشد؛ یعنی اگر

$$T \subset S \text{ و } S \text{ متقارن} \tag{1}$$

ایجاب کند که $S=T$.

۱۵.۱۳ قضیه. *عملگرهای خود الحاق به طور ماکزیمال متقارن‌اند.*

برهان. فرض کنیم T خود الحاق بوده، S متقارن باشد (یعنـی $S \subset S^*$)، و $T \subset S$. ایـن شمول (به وسیلهٔ تعریف الحاقی) به وضوح نشان می‌دهد که $S^* \subset T^*$. لذا

$$S \subset S^* \subset T^* = T \subset S,$$

که $S=T$ را ثابت می‌کند.

باید توجه داشت که عملگرهای به طور ماکزیمال متقارن لزوماً خود الحاق نیستند؛ ر.ک.مثال ۲۱.۱۳ و تمرین ۱۰.

۱۶.۱۳ قضیه. *اگر T یک عملگر متقارن در H (نه لزوماً به طور چگال تعریف شده) باشد، احکام زیر برقرارند:*

(آ) $\|Tx + ix\|^2 = \|x\|^2 + \|Tx\|^2 \quad [x \in \mathscr{D}(T)]$.

(ب) *T یک عملگر بسته است اگر و فقط اگر $\mathscr{R}(T + iI)$ بسته باشد؛*

(پ) *$T + iI$ یک به یک است؛*

(ت) *هرگاه $\mathscr{R}(T + iI) = H$، آنگاه T به طور ماکزیمال متقارن است؛*

(ث) *احکام فوق در صورت تعویض i با $-i$ نیز درست‌اند.*

برهان. حکم (آ) از اتحاد

$$\|Tx+ix\|^2=\|x\|^2+\|Tx\|^2+(ix,Tx)+(Tx,ix)$$

در تلفیق با تقارن T نتیجه می‌شود. بنابر (آ)،

$$(T+iI)x \leftrightarrow \{x,Tx\}$$

یک تناظر یک به یک یکمتر بین برد $T+iI$ و گراف T است. این (ب)را ثابت می‌کند. قسمت (پ) نیز نتیجهٔ فوری (آ) است. هرگاه $\mathscr{R}(T+iI)=H$ و T_1 توسیع **حقیقی** T باشد [یعنی $\mathscr{D}(T)$ زیرمجموعهٔ حقیقی $\mathscr{D}(T_1)$ باشد]، آنگاه T_1+iI توسیع حقیقی $T+iI$ است که نمی‌تواند یک به یک باشد. بنابر (پ)، T_1 متقارن نیست. این قسمت (ت)را ثابت خواهد کرد.

واضح است که این برهان در تعویض i با $-i$ نیز برقرار است.

تبدیل کیلی (*Cayley*)

۱۷.۱۳ تعریف. نگاشت

$$t\to\frac{t-i}{t+i} \tag{۱}$$

یک تناظر یک به یک بین خط حقیقی و دایرهٔ یکه (منهای نقطهٔ ۱) برقرار می‌کند. لذا حساب علامتی مطرح شده در فصل ۱۲ نشان می‌دهد که هر $T\in\mathscr{B}(H)$ی خود الحاق یک عملگر یکه‌ای مانند

$$U=(T-iI)(T+iI)^{-1} \tag{۲}$$

به دست می‌دهد و هر Uی یکه‌ای که طیفش شامل نقطهٔ ۱ نباشد به این نحو حاصل می‌شود.

حال این رابطهٔ $T\leftrightarrow U$ به یک تناظر یک به یک بین عملگرهای متقارن، از یک سو و یکمتریها، از سوی دیگر، وسعت می‌یابد.

فرض کنیم T یک عملگر متقارن در H باشد. قضیهٔ ۱۶.۱۳ نشان می‌دهد که

$$\|Tx+ix\|^2=\|x\|^2+\|Tx\|^2=\|Tx-ix\|^2 \qquad (x\in\mathscr{D}(T)). \tag{۳}$$

لذا یک یکمتری مانند U با

$$\mathscr{D}(U)=\mathscr{R}(T+iI) \quad \text{و} \quad \mathscr{R}(U)=\mathscr{R}(T-iI) \tag{۴}$$

و با تعریف

$$U(Tx+ix)=Tx-ix \qquad (x\in\mathscr{D}(T)) \tag{۵}$$

وجود دارد.

چون $(T+iI)^{-1}$ مجموعهٔ $\mathscr{D}(U)$ را بــه روی $\mathscr{D}(T)$ می‌نگـارد، U را می‌تـوان بـه شکل زیر نیز نوشت:

$$U=(T-iI)(T+iI)^{-1}. \tag{۶}$$

این عملگر را ***تبدیل کیلی*** T می‌نامند. در قضیهٔ ۱۹.۱۳ ویژگیهای اصلی آن خلاصه شده است. این قضیه به برهان ساده‌ای از قضیهٔ طیفی برای عملگرهای خود الحـاق (نـه لزوماً کراندار) منجر می‌شود.

۱۸.۱۳ لم. ***فرض کنیم U عملگری در H باشد که یک یکمتری است: بـه ازای هـر $x\in\mathscr{D}(U)$، $\|Ux\|=\|x\|$.***

(آ) هرگاه $x\in\mathscr{D}(U)$ و $y\in\mathscr{D}(U)$، آنگاه $(Ux,Uy)=(x,y)$.

(ب) هرگاه $\mathscr{R}(I-U)$ در H چگال باشد، آنگاه $I-U$ یک به یک است.

(پ) اگر یکی از سه فضای $\mathscr{D}(U)$، $\mathscr{R}(U)$، و $\mathscr{G}(U)$ بسته باشد، دوتای دیگر نـیز چنین‌اند.

برهان. هریک از اتحادهای مذکور در تمرین ۲ از فصل ۱۲ قسمت (آ) را ثابت می‌کند. برای اثبات (ب)، فرض کنیم $x\in\mathscr{D}(U)$ و $(I-U)x=0$؛ یعنی $x=Ux$. در این صورت، به ازای هر $y\in\mathscr{D}(U)$،

$$(x,(I-U)y)=(x,y)-(x,Uy)=(Ux,Uy)-(x,Uy)=0.$$

لذا $x\perp\mathscr{R}(I-U)$؛ درنتیجـه، اگـر $\mathscr{R}(I-U)$ در H چگـال باشـد، $x=0$. برهـان (پـ)

نتیجه‌ای است از روابط

$$\|Ux-Uy\|=\|x-y\|=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\|\{x,Ux\}-\{y,Uy\}\|,$$

که به ازای هر $x,y\in\mathscr{D}(U)$ برقرارند.

۱۹.۱۳ قضیه. *فرض کنیم U تبدیل کیلی عملگر متقارن T در H باشد. در این صورت احکام زیر برقرارند:*

(آ) U بسته است اگر و فقط اگر T بسته باشد.

(ب) $\mathscr{R}(I-U)=\mathscr{D}(T)$، I-U یک به یک است، و T را می‌توان از U به وسیلهٔ فرمول

$$T=i(I+U)(I-U)^{-۱}$$

بازسازی کرد. (لذا تبدیلات کیلی عملگرهای متقارن متمایزند.)

(پ) U یکه‌ای است اگر و فقط اگر T خود الحاق باشد.

به عکس، هرگاه V عملگری در H باشد که یکمتری است و هرگاه $I-V$ یک به یک باشد، آنگاه V تبدیل کیلی یک عملگر متقارن در H می‌باشد.

برهان. بنا بر قضیهٔ ۱۶.۱۳، T بسته است اگر و فقط اگر $\mathscr{R}(T+iI)$ بسته باشد. بنابر لم ۱۸.۱۳، U بسته است اگر و فقط اگر $\mathscr{D}(U)$ بسته باشد. چون $\mathscr{D}(U)=\mathscr{R}(T+iI)$، طبق تعریف تبدیل کیلی، قسمت (آ) ثابت می‌شود.

تناظر یک به یک $z\to x$ بین $\mathscr{D}(T)$ و $\mathscr{D}(U)=\mathscr{R}(T+iI)$ داده شده با

$$z=Tx+ix \quad \text{و} \quad Uz=Tx-ix \qquad (۱)$$

را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$(I-U)z=۲ix,\quad (I+U)z=۲Tx. \qquad (۲)$$

این نشان می‌دهد که $I-U$ یک به یک است، $\mathscr{R}(I-U)=\mathscr{D}(T)$؛ درنتیجه $(I-U)^{-۱}$ مجموعهٔ $\mathscr{D}(T)$ را به روی $\mathscr{D}(U)$ می‌نگارد، و نیز

(۳) $$2Tx = (I+U)z = (I+U)(I-U)^{-1}(2ix) \qquad [x \in \mathscr{D}(T)].$$

این قسمت (ب) را ثابت می‌کند.

حال فرض کنیم T خود الحاق باشد. در این صورت، بنابر قضیهٔ ۱۳.۱۳،

(٤) $$\mathscr{R}\left(I+T^2\right) = H.$$

چون

(٥) $$(T+iI)(T-iI) = I+T^2 = (T-iI)(T+iI)$$

[سه عملگر (٥) دارای قلمرو $\mathscr{D}\left(T^2\right)$اند]، از (٤) نتیجه می‌شود که

(٦) $$\mathscr{D}(U) = \mathscr{R}(T+iI) = H$$

و

(٧) $$\mathscr{R}(U) = \mathscr{R}(T-iI) = H.$$

چون U یکمتری است، روابط (٦) و (٧) ایجاب می‌کنند که Uیکه‌ای است (قضیهٔ ۱۳.۱۲).

برای اتمام برهان (پ)، فرض کنیم U یکه‌ای باشد. در این صورت، طبق قسمت (ب) و نرمال بودن $I-U$ (قضیهٔ ۱۲.۱۲)،

(٨) $$[\mathscr{R}(I-U)]^{\perp} = \mathscr{N}(I-U) = \{0\};$$

درنتیجه $\mathscr{D}(T) = \mathscr{R}(I-U)$ در H چگال است. لذا T^* تعریف شده است و $T \subset T^*$.

$y \in \mathscr{D}(T^*)$ را ثابت می‌گیریم. چون $\mathscr{R}(T+iI) = \mathscr{D}(U) = H$، $y_0 \in \mathscr{D}(T)$ی چنان وجود دارد که

(٩) $$(T^*+iI)y = (T+iI)y_0 = (T^*+iI)y_0.$$

تساوی اخیر به خاطر $T \subset T^*$ برقرار است. هرگاه $y_1 = y - y_0$، آنگاه $y_1 \in \mathscr{D}(T^*)$و، به ازای هر $x \in \mathscr{D}(T)$،

(۱۰) $$\left((T-iI)x, y_1\right) = (x, (T^*+iI)y_1) = (x, 0) = 0.$$

لذا $y_1 \perp \mathscr{R}(T-iH) = \mathscr{R}(U) = H$ ؛ و درنتیجه $y_1 = 0$، و $y = y_0 \in \mathscr{D}(T)$.

بنابراین $T^* \subset T$، و (پ) ثابت می‌شود.

بالأخره، فرض کنیم V همانند در حکم عکس باشد. در این صورت یک تناظر یک به یک مانند $x \leftrightarrow z$ بین $\mathscr{D}(V)$ و $\mathscr{R}(I-V)$ هست که با

$$x = z - Vz \tag{۱۱}$$

داده می‌شود. S را بر $\mathscr{D}(S) = \mathscr{R}(I-V)$ با

$$Sx = i(z+Vz) \quad \text{اگر} \quad x = z - Vz \tag{۱۲}$$

تعریف می‌کنیم. هرگاه $x \in \mathscr{D}(S)$ و $y \in \mathscr{D}(S)$، آنگاه به ازای $z \in \mathscr{D}(V)$ ی و $u \in \mathscr{D}(V)$ ای، $x = z - V$ و $y = u - Vx$. حال چون V یک یکمتری است، از قسمت (آ) لم ۱۸.۱۳ معلوم می‌شود که

$$(Sx, y) = i(z+Vx, u-Vu) = i(Vz, u) - i(z, Vu) \tag{۱۳}$$
$$= (z - Vz, iu + iVu) = (x, Sy) \ .$$

لذا S متقارن است. چون رابطهٔ (۱۲) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$2iVz = Sx - ix \ , \quad 2iz = Sx + ix \quad [z \in \mathscr{D}(V)] \ , \tag{۱۴}$$

ملاحظه می‌کنیم که

$$V(Sx + ix) = Sx - ix \qquad [x \in \mathscr{D}(S)] \tag{۱۵}$$

و $\mathscr{D}(V) = \mathscr{R}(S+iI)$. بنابراین V تبدیل کیلی S می‌باشد.

۲۰.۱۳ اندیسهای کاستی. اگر U_1 و U_2 تبدیلات کیلی عملگرهای متقارن T_1 و T_2 باشند، واضح است که $T_1 \subset T_2$ اگر و فقط اگر $U_1 \subset U_2$. لذا مسائل توسیعهای متقارن عملگرهای متقارن به مسائل (معمولاً آسانتر) توسیعهای یکمتریها تحویل می‌شوند.

حال یک عملگر ***بسته و متقارن به طور چگال تعریف شده*** مانند T در H را با تبدیل کیلی U در نظر می‌گیریم. در این صورت $\mathscr{R}(T+iI)$ و $\mathscr{R}(T-iI)$ بسته‌اند (ر.ک. قضیهٔ ۱۶.۱۳) و U یک یکمتری است که اولی را به روی دومی می‌برد. ابعاد متممهای متعامد این دو فضا را ***اندیسهای کاستی*** T می‌نامند. (***بعد*** یک فضای هیلبرت اصلیت یکی از پایه‌های متعامد نرمال آن تعریف می‌شود.)

چون $\mathscr{R}(I-U) = \mathscr{D}(T)$ در H چگال فرض شده است، **هر** توسیع یکمتر U_1 از

U دارای $\mathscr{R}(I-U_1)$ چگال در H است؛ درنتیجه $I-U_1$ یک به یک است (لـم ۱۸.۱۳) و U_1 تبدیل کیلی یک توسیع متقارن مانند T_1 از T می‌باشد.

سه حکم زیر نتایج آسان قضیهٔ ۱۹.۱۳ و بحث پیشین‌اند؛ ما هنوز فرض می‌کنیم T بسته، متقارن، و به طور چگال تعریف شده است.

(آ) T خود الحاق است اگر و فقط اگر هر دو اندیس کاستی آن ۰ باشند.

(ب) T به طور ماکزیمال متقارن است اگر و فقط اگر دست کم یکی از اندیسهای کاستی‌اش ۰ باشد.

(پ) T دارای توسیع خود الحاق است اگر و فقط اگر دو اندیس کاستی آن مساوی باشند.

اثبات قسمتهای (آ) و (ب)واضح‌اند. برای مشاهدهٔ (پ)، از قسمت (پ)قضیهٔ ۱۹.۱۳ استفاده کرده و توجه می‌کنیم که هر توسیع یکه‌ای U باید یک یکمتری از $[\mathscr{R}(T+iI)]^{\perp}$ به روی $\mathscr{R}[(T-iI)]^{\perp}$ باشد.

۲۱.۱۳ مثال. فرض کنیم V انتقال راست بر ℓ^2 باشد. در این صورت V یک یکمتری است و $I-V$ یک به یک است (فصل ۱۲، تمرین ۱۸)؛ و درنتیجه V تبدیل کیلی یک عملگر متقارن مانند T است. چون $\mathscr{D}(V)=\ell^2$ و $\mathscr{R}(V)$ دارای همبعد ۱ است، اندیسهای کاستی T عبارتند از ۰ و ۱.

این یک مثال از عملگر بسته، به طور ماکزیمال متقارن، و به طور چگال تعریف شده مانند T به ما می‌دهد که خود الحاق نیست.

تجزیهٔ همانی

۲۲.۱۳ نمادگذاری. در اینجا $\mathscr{M}$ یک σ–جبر در مجموعهٔ Ω است، H یک فضای هیلبرت است، و $E:\mathscr{M}\to\mathscr{B}(H)$ یک تجزیهٔ همانی با تمام خواص مذکور در تعریف ۱۷.۱۲ است. قضیهٔ ۲۱.۱۲ یک حساب علامتی را توصیف می‌کند که به هر $f\in L^{\infty}(E)$

عملگری مانند $\psi(f) \in \mathscr{B}(H)$ را به وسیلهٔ فرمول

$$(\psi(f)x, y) = \int_\Omega f dE_{x,y} \qquad (x \in H, y \in H) \tag{۱}$$

مربوط می‌سازد. حال این به توابع اندازه‌پذیر بی‌کران وسعت می‌یابد (قضیهٔ ۲۴.۱۳). ما همان نمادهای تعریف ۱۷.۱۲ را به کار خواهیم برد.

۲۳.۱۳ لم. ***فرض کنیم $f:\Omega \to \mathbb{C}$ اندازه‌پذیر باشد. قرار می‌دهیم***

$$\mathscr{D}_f = \left\{x \in H: \int_\Omega |f|^2 dE_{x,x} < \infty\right\}. \tag{۱}$$

در این صورت $\mathscr{D}_f$ یک زیرفضای چگال H است. هرگاه $x \in H$ و $y \in H$، آنگاه

$$\int_\Omega |f| d|E_{x,y}| \le \|y\| \left\{\int_\Omega |f|^2 dE_{x,x}\right\}^{1/2}. \tag{۲}$$

هرگاه f کراندار بوده و $v = \psi(f)z$، آنگاه

$$dE_{x,v} = \bar{f} dEx, z \qquad (x \in H, z \in H). \tag{۳}$$

برهان. هرگاه $z = x + y$ و $\omega \in \mathscr{M}$، آنگاه

$$\|E(\omega)z\|^2 \le (\|E(\omega)x\| + \|E(\omega)y\|)^2 \le 2\|E(\omega)x\|^2 + 2\|E(\omega)y\|^2$$

یا

$$E_{z,z}(\omega) \le 2E_{x,x}(\omega) + 2W_{y,y}(\omega). \tag{۴}$$

پس $\mathscr{D}_f$ تحت جمع بسته است. ضرب اسکالر آسانتر است. لذا $\mathscr{D}_f$ زیرفضایی از H می‌باشد.

به ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$، فرض کنیم ω_n زیرمجموعه‌ای از Ω باشد که در آن $|f| < n$. هرگاه $x \in \mathscr{R}(E(\omega_n))$، آنگاه

$$E(\omega)x = E(\omega)E(\omega_n)x = E(\omega \cap \omega_n)x; \tag{۵}$$

درنتیجه

$$E_{x,x}(\omega) = E_{x,x}(\omega \cap \omega_n) \qquad (\omega \in \mathscr{M}), \tag{۶}$$

و لذا

$$\int_\Omega |f|^2 dE_{x,x} = \int_{\omega_n} |f|^2 dE_{x,x} \le n^2\|x\|^2 < \infty \,. \tag{۷}$$

پس $\mathscr{R}(E(\omega_n)) \subset \mathscr{D}_f$. چون $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n$، جمعپذیری شمارشپذیر $\omega \to E(\omega)y$ ایجاب می‌کند که به ازای هر $y \in H$، $y = \lim E(\omega_n)y$؛ درنتیجه y در بست $\mathscr{D}_f$ قراردارد. بنابراین $\mathscr{D}_f$ چگال می‌باشد.

اگر $x \in H$، $y \in H$، و f یک تابع اندازه‌پذیر کراندار بر Ω باشد، قضیهٔ رادون-نیکودیم [۲۳] نشان می‌دهد که یک تابع اندازه‌پذیر مانند u بر Ω با $|u|=1$ هست به طوری که

$$ufdE_{x,y} = |f|d|E_{x,y}| \,. \tag{۸}$$

لذا

$$\int_\Omega |f|d|E_{x,y}| = (\psi(uf)x, y) \le \|\psi(uf)x\|\|y\|. \tag{۹}$$

بنابر قضیهٔ ۱۲.۲۱،

$$\|\psi(uf)x\|^2 = \int_\Omega |uf|^2 dE_{x,x} = \int_\Omega |f|^2 dE_{x,x} \,. \tag{۱۰}$$

حال روابط (۹) و (۱۰) رابطهٔ (۲) را برای f کراندار به دست می‌دهد. حالت کلی از این نتیجه خواهدشد.

بالأخره رابطهٔ (۳) برقرار است زیرا، بنابر قضیهٔ ۱۲.۲۱، به ازای هر gی اندازه‌پذیر کراندار،

$$\begin{aligned}\int_\Omega g dE_{x,v} &= (\psi(g)x, v) = (\psi(g)x, \psi(f)z) \\ &= (\psi(\bar f)\psi(g)x, z) = (\psi(\bar f g)x, z) = \int_\Omega g \bar f dE_{x,z}.\end{aligned}$$

۱۳.۲٤ قضیه. ***فرض کنیم E یک تجزیهٔ همانی بر مجموعهٔ Ω باشد.***

(آ) به هر $f:\Omega \to \mathbb{C}$ اندازه‌پذیر یک عملگر بستهٔ به طور چگال تعریف شده مانند $\psi(f)$ در H با قلمرو $\mathscr{D}(\psi(f)) = \mathscr{D}_f$ چنان نظیر است که با

$$(\psi(f)x, y) = \int_\Omega f dE_{x,y} \qquad \left(x \in \mathscr{D}_f, y \in H\right) \tag{۱}$$

توصیف شده و دررابطهٔ

$$\|\psi(f)x\|^{2} = \int_{\Omega}|f|^{2}dE_{x,x} \qquad \left(x\in\mathscr{D}_f\right) \tag{۲}$$

صدق می‌کند.

(ب) قضیهٔ ضرب به شکل زیر برقرار است: هرگاه f و g اندازه‌پذیر باشند، آنگاه

$$\psi(f)\psi(g)\subset\psi(fg) \quad \text{و} \quad \mathscr{D}(\psi(f)\psi(g))=\mathscr{D}_g\cap\mathscr{D}_{fg} \tag{۳}$$

لذا $\psi(f)\psi(g)=\psi(fg)$ اگر و فقط اگر $\mathscr{D}_{fg}\in\mathscr{D}_g$.

(پ) به ازای هر $f:\Omega\to\mathbb{C}$ اندازه‌پذیر،

$$\psi(f)^{*}=\psi(\bar{f}) \tag{۴}$$

و

$$\psi(f)\psi(f)^{*}=\psi\left(|f|^{2}\right)=\psi(f)^{*}\psi(f). \tag{۵}$$

برهان. هرگاه $x\in\mathscr{D}_f$، آنگاه $y\to\int_{\Omega}fdE_{x,y}$ یک تابعی خطی مزدوج کراندار بر H است که نرمش بنا برقسمت (۲) لم ۲۳.۱۳ حداکثر $\left(\int|f|^{2}dE_{x,x}\right)^{1/2}$ می‌باشد. پس عنصر منحصر به فردی مانند $\psi(f)x\in H$ هست که در (۱) به ازای هر $y\in H$ صدق می‌کند و

$$\|\psi(f)x\|^{2}\le\int_{\Omega}|f|^{2}dE_{x,x} \qquad \left(x\in\mathscr{D}_f\right). \tag{۶}$$

خطی بودن $\psi(f)$ بر $\mathscr{D}_f$ از (۱) نتیجه می‌شود چرا که $E_{x,x}$ نسبت به x خطی است. به هر f ***برشهای*** آن یعنی $f_n=f\phi_n$ را که درآنها $\phi_n(p)=1$ اگر $|f(p)|\le n$ و $\phi_n(p)=0$ اگر $|f(p)|>n$ مربوط می‌سازیم.

در این صورت $\mathscr{D}_{f-f_n}=\mathscr{D}_f$ زیرا هر f_n کراندار است و لذا، طبق قضیهٔ همگرایی تسلطی، رابطهٔ (۶) نشان می‌دهد که به ازای هر $x\in\mathscr{D}_f$،

$$\|\psi(f)x-\psi(f_n)x\|^{2}\le\int_{\Omega}|f-f_n|^{2}dE_{x,x}\to 0 \text{ ،} n\to\infty \text{ وقتی} \tag{۷}$$

چون f_n کراندار است، رابطهٔ (۲) به ازای f_n به جای f برقرار است (قضیهٔ ۲۱.۱۲). لذا (۷) ایجاب می‌کند که (۲) به صورت بیان شده برقرار می‌باشد.

این قسمت (آ) را ثابت می‌کند جز این حکم که $\psi(f)$ بسته است. این حکم در

صورتی که رابطهٔ (٤) (که بزودی ثابت می‌شود) در مورد $\bar{f}$ به جای f به کار رود از قضیهٔ ۹.۱۳ نتیجه می‌شود.

حال به اثبات (ب)می‌پردازیم.

ابتدا فرض می‌کنیم f کراندار باشد. در این صورت $\mathscr{D}_{fg} \subset \mathscr{D}_g$. اگر $z \in H$ و $v = \psi(\bar{f})z$، معادلهٔ (۳) از لم ۲۳.۱۳ و قضیهٔ ۲۱.۱۲ نشان می‌دهند که

$$\begin{aligned}(\psi(f)\psi(g)x, x) &= (\psi(g)x, \psi(\bar{f})x) = (\psi(g)x, v)\\ &= \int_\Omega g dE_{x,v} = \int_\Omega fgE_{x,z} = (\psi(fg)x, z).\end{aligned}$$

لذا

$$\psi(f)\psi(g)x = \psi(fg)x \qquad \left(x \in \mathscr{D}_g, f \in L^\infty\right). \tag{۸}$$

اگر $y = \psi(g)x$، از روابط (۸) و (۲) نتیجه می‌شود که

$$\int_\Omega |f|^2 dE_{y,y} = \int_\Omega |fg|^2 dE_{x,x} \qquad \left(x \in \mathscr{D}_g, f \in L^\infty\right). \tag{۹}$$

حال فرض کنیم f دلخواه (احتمالاً بی‌کران) باشد. چون رابطهٔ (۹) به ازای هر $f \in L^\infty$ برقرار است، به ازای هر f اندازه‌پذیر چنین است. و چون $\mathscr{D}(\psi(f)\psi(g))$ از تمام $x \in \mathscr{D}_g$هایی تشکیل شده است که $y \in \mathscr{D}_f$ و نیز (۹) نشان می‌دهد که $y \in \mathscr{D}_f$ اگر و فقط اگر $x \in \mathscr{D}_{fg}$، معلوم می‌شود که

$$\mathscr{D}(\psi(f)\psi(g)) = \mathscr{D}_g \cap \mathscr{D}_{fg}. \tag{۱۰}$$

هرگاه $x \in \mathscr{D}_g \cap \mathscr{D}_{fg}$، $y = \psi(g)z$، و برشهای f_n مانند فوق تعریف شده باشند، آنگاه $f_n \to f$ در $L^2(E_{y,y})$، $f_n g \to fg$ در $L^2(E_{x,x})$، و حال (۸) (با f_n به جای f) و (۲) ایجاب می‌کنند که

$$\psi(f)\psi(g)x = \psi(f)y = \lim_{n\to\infty} \psi(f_n)y = \lim_{n\to\infty} \psi(f_n g)x = \psi(fg)x.$$

این رابطهٔ (۳) و درنتیجه (ب)را ثابت خواهد کرد.

حال فرض کنیم $x \in \mathscr{D}_f$ و $y \in \mathscr{D}_{\bar{f}} = \mathscr{D}_f$. از رابطهٔ (۷) و قضیهٔ ۲۱.۱۲ معلوم می‌شود که

$$(\psi(f)x, y) = \lim_{n\to\infty} (\psi(f_n)x, y) = \lim_{n\to\infty} \left(x, \psi(\bar{f}_n)y\right) = \left(x, \psi(\bar{f})y\right).$$

لذا $y \in \mathscr{D}(\psi(f)^*)$، و

$$\psi(\bar{f}) \subset \psi(f)^*. \tag{۱۱}$$

برای رفتن از (۱۱) به (٤) باید نشان دهیم که هر $z \in \mathscr{D}(\psi(f)^*)$ در $\mathscr{D}_f$ قراردارد. z را ثابت گرفته و قرار می‌دهیم $v = \psi(f)^* z$. چون $f_n = f\phi_n$، قضیهٔ ضرب نتیجه می‌دهد که

$$\psi(f_n) = \psi(f)\psi(\phi_n). \tag{۱۲}$$

چون $\psi(\phi_n)$ خود الحاق است، از قضایای ۲.۱۳ و ۲۱.۱۲ نتیجه می‌شود که

$$\psi(\phi_n)\psi(f)^* \subset [\psi(f)\psi(\phi_n)]^* = \psi(f_n)^* = \psi(\bar{f}_n).$$

لذا

$$\psi(\phi_n)v = \psi(\bar{f}_n)z \qquad (n = ۱,۲,۳,\ldots). \tag{۱۳}$$

چون $|\phi_n| \le ۱$، روابط (۱۳) و (۲) ایجاب می‌کنند که به ازای $n = ۱,۲,۳,\ldots$،

$$\int_\Omega |f_n|^۲ dE_{z,z} = \int_\Omega |\phi_n|^۲ dE_{v,v} \le E_{v,v}(\Omega). \tag{۱٤}$$

لذا $z \in \mathscr{D}_f$ و (٤) ثابت می‌شود.

بالأخره، رابطهٔ (٥) از (٤) با کاربرد دیگری از قضیهٔ ضرب نتیجه می‌شود زیرا $\mathscr{D}_{f\bar{f}} \subset \mathscr{D}_f$.

تبصره. هرگاه g کراندار باشد، آنگاه $\mathscr{D}_{fg} \subset \mathscr{D}_g$ (صرفاً به خاطر $\mathscr{D}_g = H$)؛ درنتیجه $\psi(f)\psi(g) = \psi(fg)$. این در رابطهٔ (۱۲) به کاررفته بود. همچنین نشان می‌دهد که، به ازای g کراندار،

$$\psi(g)\psi(f) \subset \psi(f)\psi(g), \tag{۱٥}$$

زیرا $\psi(g)\psi(f) \subset \psi(gf) = \psi(fg)$. اگر g تابع مشخص مجموعهٔ اندازه‌پذیر $\omega \subset \Omega$ باشد، رابطهٔ (۱٥) به صورت زیر در می‌آید:

$$E(\omega)\psi(f) \subset \psi(f)E(\omega). \tag{۱٦}$$

اگر $x \in \mathscr{D}_f \cap \mathscr{R}(E(\omega))$، نتیجه می‌شود که

$$E(\omega)\psi(f)x = \psi(f)E(\omega)x = \psi(f)x. \tag{۱۷}$$

لذا $\psi(f)$ مجموعهٔ $\mathscr{D}_f \cap \mathscr{R}(E(\omega))$ را به توی $\mathscr{R}(E(\omega))$ می‌نگارد.

این بحث را باید با بحث زیرفضاهای پایا در بخش ۲۷.۱۲ مقایسه کرد.

همچنین توجه کنید که، در تشابه با (۳)،

$$\psi(f)+\psi(g)\subset\psi(f+g). \tag{۱۸}$$

تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $\mathscr{D}_{f+g}=\mathscr{D}_f\cap\mathscr{D}_g$ که هروقت دست کم یکی از f و g کراندار باشد برقرار است.

۲۵.۱۳ قضیه. *در قضیهٔ ۲۴.۱۳، $\mathscr{D}_f=H$ اگر و فقط اگر $f\in L^\infty(E)$.*

برهان. فرض کنیم $\mathscr{D}_f=H$. چون $\psi(f)$ یک عملگر بسته است، قضیهٔ گراف بسته ایجاب می‌کند که $\psi(f)\in\mathscr{B}(H)$. اگر $f_n=f\phi_n$ برشی از f باشد، از قضیهٔ ضرب همراه با قضیهٔ ۲۱.۱۲ نتیجه می‌شود که

$$\|f_n\|_\infty=\|\psi(f_n)\|=\|\psi(f)\psi(\phi_n)\|\le\|\psi(f)\|,$$

زیرا $1\ge\|\phi_n\|_\infty=\|\psi(\phi_n)\|$. لذا $\|f\|_\infty\le\|\psi(f)\|$، و $f\in L^\infty(E)$. عکس قضیه در قضیهٔ ۲۱.۱۲ جا دارد.

۲۶.۱۳ تعریف. ***مجموعهٔ حلال*** عملگر خطی T در H مجموعهٔ تمام $\lambda\in\mathscr{C}$هایی است که $T-\lambda I$ یک نگاشت خطی از $\mathscr{D}(T)$ به روی H است که معکوسش متعلق به $\mathscr{B}(H)$ می‌باشد.

به عبارت دیگر، $T=\lambda I$ باید معکوسی چون $S\in\mathscr{B}(H)$ داشته باشد که در

$$S(T-\lambda I)\subset(T-\lambda I)S=I$$

صدق کند.

به عنوان مثال، قضیهٔ ۱۳.۱۳ می‌گوید که ۱- در صورتی در مجموعهٔ حلال T^*T قراردارد که T به طور چگال تعریف شده و بسته باشد.

طیف $\sigma(T)$ از T متمم مجموعهٔ حلال T است، درست مثل عملگرهای کراندار.

در تمرینهای ۱۷ تا ۲۰ چند خاصیت از $\sigma(T)$ برای Tی بی‌کران توصیف شده

است.

به خاطر قضیهٔ بعد، برای تعریف برد اساسی یک تابع نسبت به تجزیهٔ همانی داده شده به بخش ۲۰.۱۲ ارجاع می‌دهیم.

۲۷.۱۳ قضیه. *فرض کنیم E یک تجزیهٔ همانی بر مجموعهٔ Ω بوده، $f:\Omega \to \mathbb{C}$ اندازه‌پذیر باشد، و*

$$\omega_\alpha = \{p \in \Omega: f(p) = \alpha\} \qquad (\alpha \in \mathbb{C}).$$

(آ) *هرگاه α برد اساسی f بوده، و $E(\omega_\alpha) \neq 0$، آنگاه $\psi(f) - \alpha I$ یک به یک نیست.*

(ب) *هرگاه α در برداساسی f بوده ولی $E(\omega_\alpha) = 0$، آنگاه $\psi(f) - \alpha I$ یک نگاشت یک به یک از $\mathscr{D}_f$ به روی یک زیرفضای حقیقی چگال از H است، و بردارهایی مانند $x_n \in H$ با $\|x_n\| = 1$ چنان وجود دارند که*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\psi(f)x_n - \alpha x_n\right] = 0 .$$

(پ) *$\sigma(\psi(f))$ برد اساسی f می‌باشد.*

با اصلاحاتی که قبلاً برای عملگرهای کراندار به کار رفت، می‌توان گفت که α در ***طیف نقطه‌ای*** $\psi(f)$ در حالت (آ) و در ***طیف پیوستهٔ*** $\psi(f)$ در حالت (ب) قراردارد. گاهی قسمت(ب) را این طور می‌گویند که α یک ***مقدار ویژهٔ تقریبی*** $\psi(f)$ است.

برهان. بی‌آنکه به کلیت خللی وارد آید فرض می‌کنیم $\alpha = 0$.

(آ) اگر $E(\omega_0) \neq 0$، $x_0 \in \mathscr{R}(E(\omega_0))$ی با $\|x_0\| = 1$ وجود دارد. فرض کنیم ϕ_0 تابع مشخص ω_0 باشد. در این صورت $f\phi_0 = 0$؛ درنتیجه، طبق قضیهٔ ضرب، $\psi(f)\psi(\phi_0) = 0$. چون $\psi(\phi_0) = E(\omega_0)$، پس

$$\psi(f)x_0 = \psi(f)E(\omega_0)x_0 = \psi(f)\psi(\phi_0)x_0 = 0.$$

(ب) حال فرض عبارت است از $E(\omega_\circ)=\circ$ ولی به ازای $n=۱,۲,۳,\ldots$، $E(\omega_n)\neq\circ$، که در آن

$$\omega_n=\left\{p\in\Omega: |f(p)|<\frac{۱}{n}\right\}.$$

$x_n\in\mathscr{R}(E(\omega_n))$ را با $\|x_n\|=۱$ اختیار می‌کنیم. فرض کنیم ϕ_n توابع مشخص ω_n باشند. استدلال به کار رفته در (آ) به

$$\|\psi(f)x_n\|=\|\psi(f\phi_n)x_n\|\leq\|\psi(f\phi_n)\|=\|f\phi\|_\infty\leq\frac{۱}{n}$$

منجر می‌شود. لذا، با آنکه $|x_n|=۱$، $\phi(f)x_n\to\circ$.

هرگاه، به ازای $x\in\mathscr{D}_f$ ی، $\psi(f)x=\circ$، آنگاه

$$\int_\Omega|f|^۲dE_{x,x}=\|\psi(f)x\|^۲=\circ.$$

چون $|f|>\circ$ تـ‌هـ $[E_{x,x}]$، باید داشته باشیم $E_{x,x}(\Omega)=\circ$. ولی $E_{x,x}(\Omega)=\|x\|^۲$. لذا $\psi(f)$ یک به یک است.

به همین نحو، $\psi(f)^*=\psi(\bar{f})$ یک به یک است. هرگاه $y\perp\mathscr{R}(\psi(f))$، آنگاه $x\to(\psi(f)x,y)=\circ$ در $\mathscr{D}_f$ پیوسته است؛ درنتیجه $y\in\mathscr{D}(\psi(f)^*)$، و

$$(x,\psi(\bar{f})y)=(\psi(f)x,y)=\circ \qquad (x\in\mathscr{D}_f).$$

بنابراین، $\psi(\bar{f})y=\circ$، و $y=\circ$. این ثابت می‌کند که $\mathscr{R}(\psi(f))$ در H چگال است.*

چون $\psi(f)$ بسته است، $\psi(f)^{-۱}$ نیز چنین است. اگر $\mathscr{R}(\psi(f))$، H را پر کند، قضیهٔ گراف بسته ایجاب می‌کند که $\psi(f)^{-۱}\in\mathscr{B}(H)$. ولی این امر در پرتو دنبالهٔ $\{x_n\}$ ساخته شده در فوق ناممکن می‌باشد.

بنابراین (ب)ثابت می‌شود.

(پ) از قسمتهای (آ) و (ب) معلوم می‌شود که برد اساسی f زیرمجموعه‌ای از $\sigma(\psi(f))$ است. برای به دست آوردن شمول عکس، فرض کنیم $\circ$ در برد اساسی f نباشد. در این صورت $g=۱/f\in L^\infty(E)$، $fg=۱$؛ درنتیجه $\psi(f)\psi(g)=\psi(۱)=I$ که رابطهٔ $\mathscr{R}(\psi(f))=H$ را ثابت می‌کند. چون $|f|>\circ$، همانند برهان (ب)، $\psi(f)$ یک به یک است. بنابراین، طبق قضیهٔ نگاشت بسته، $\psi(f)^{-۱}\in\mathscr{B}(H)$.

این برهان را تمام خواهد کرد.

گاهی اوقات قضیهٔ زیر را ***اصل تغییر اندازه*** می‌نامند.

۱۳. ۲۸ قضیه. ***فرض کنیم***

(آ) $\mathscr{M}$ و $\mathscr{M}'$، σ- جبرهایی در مجموعه‌های Ω و Ω' باشند،

(ب) $E:\mathscr{M} \to \mathscr{B}(H)$ یک تجزیهٔ همانی بوده، و

(پ) $\phi:\Omega \to \Omega'$ دارای این خاصیت باشد که به‌ازای هر $\omega' \in \mathscr{M}'$، $\phi^{-1}(\omega') \in \mathscr{M}$.

هرگاه $E'(\omega') = E\left(\phi^{-1}(\omega')\right)$، آنگاه $E':\mathscr{M}' \to \mathscr{B}(H)$ نیز یک تجزیهٔ همانی است، و به ازای هر $f:\Omega' \to \mathbb{C}$، $\mathscr{M}'$ اندازه‌پذیر که یکی از انتگرالهای زیر موجود باشد،

$$\int_{\Omega'} f dE'_{x,y} = \int_{\Omega} (f \circ g) dE_{x,y}. \tag{۱}$$

برهان. به ازای توابع مشخص f، رابطهٔ (۱) چیزی جز تعریف E' نیست. لذا رابطهٔ (۱) برای توابع سادهٔ f برقرار است. حالت کلی از این نتیجه می‌شود. اثبات اینکه E' یک تجزیهٔ واحد است مطلبی است سر راست و لذا حذف می‌شود.

قضیهٔ طیفی

۲۹.۱۳ عملگرهای نرمال. عملگر خطی (نه لزوماً کراندار) T در H را ***نرمال*** گوییم اگر T به طور چگال تعریف شده باشد و

$$T^*T = TT^*.$$

هر $\psi(f)$ آمده در قضیهٔ ۲۴.۱۳ نرمال است؛ این امر بخشی از صورت قضیه است. حال، درست مثل حالت کراندار مطرح شده در فصل ۱۲، مشاهده می‌کنیم که تمام عملگرهای نرمال را می‌توان به وسیلهٔ تجزیه‌های همانی بر طیفهایشان به این نحو

نمایش داد (تعریف ۲۶.۱۳). این امر را می‌توان برای عملگرهای خود الحاق به سرعت از حالت‌یکه‌ای از طریق تبدیل کیلی نتیجه گرفت (قضیهٔ ۳۰.۱۳). برای عملگرهای نرمال کلی، برهان متفاوتی در قضیهٔ ۳۳.۱۳ داده خواهدشد.

۳۰.۱۳ قضیه. ***به هر عملگر خود الحاق مانند A در H یک تجزیهٔ همانی منحصر به فرد مانند E بر زیرمجموعه‌های بورل خط حقیقی چنان نظیر است که***

$$(Ax, y) = \int_{-\infty}^{\infty} t dE_{x,y}(t) \qquad (x \in \mathscr{D}(A), y \in H). \tag{1}$$

به علاوه، E بر $\sigma(A) \subset (-\infty, \infty)$ متمرکز شده است به این مفهوم که $E(\sigma(A)) = I$.

همانند قبل، این E را ***تجزیهٔ طیفی*** A می‌نامند.

برهان. فرض کنیم U تبدیل کیلی A بوده، Ω دایرهٔ یکه غیر از نقطهٔ ۱ باشد، و E' تجزیه طیفی U باشد (ر.ک. قضایای ۲۳.۱۲ و ۲۶.۱۲). چون $I-U$ یک به یک است (قضیهٔ ۱۹.۱۳)، بنا بر قسمت (ب)قضیهٔ ۲۹.۱۲، $E'(\{1\}) = 0$، و لذا

$$(Ux, y) = \int_{\Omega} \lambda dE'_{x,y}(\lambda) \qquad (x \in H, y \in H). \tag{2}$$

تعریف می‌کنیم

$$f(\lambda) = \frac{i(1+\lambda)}{1-\lambda} \qquad (\lambda \in \Omega) \tag{3}$$

و $\psi(f)$ را همانند قضیهٔ ۲٤.۱۳ با E' به جای E می‌گیریم:

$$(\psi(f)x, y) = \int_{\Omega} f dE'_{x,y} \qquad \left(x \in \mathscr{D}_f, y \in H\right). \tag{4}$$

چون f حقیقی است، $\psi(f)$ خود الحاق است (قضیهٔ ۲٤.۱۳)، و چون $f(\lambda)(1-\lambda) = i(1+\lambda)$، قضیهٔ ضرب نتیجه می‌دهد که

$$\psi(f)(I-U) = i(I+U). \tag{5}$$

به‌خصوص، رابطهٔ (۵) ایجاب می‌کند که $\mathscr{R}(I-U) \subset \mathscr{D}(\psi(f))$. بنابر قضیهٔ ۱۹.۱۳،

(٦) $$A(I-U)=i(I+U),$$

و $\mathscr{D}(A)=\mathscr{R}(I-U)\subset\mathscr{D}(\psi(f))$. حال از مقایسهٔ (۵) و (٦) معلوم می‌شود که $\psi(f)$ یک توسیع خودالحاق از عملگر خود الحاق A است. بنابر قضیهٔ ۱۵.۱۳، $A=\psi(f)$. لذا

(۷) $$(Ax,y)=\int_\Omega f dE'_{x,y} \qquad [x\in\mathscr{D}(A), y\in H].$$

بنا بر قسمت (پ) قضیهٔ ۲۷.۱۳، $\sigma(A)$ برد اساسی f است. لذا $\sigma(A)\subset(-\infty,\infty)$.
توجه کنید که f در Ω یک به یک است. اگر به ازای هر مجموعهٔ بورل $\omega\subset\Omega$ تعریف کنیم

(۸) $$E(f(\omega))=E'(\omega),$$

تجزیهٔ مطلوب E را می‌یابیم که (۷) را به (۱) بر می‌گرداند.

همانطور که (۱) از (۲) به وسیلهٔ تبدیل کیلی به دست آمد، رابطهٔ (۲) را می‌توان از (۱) با استفاده از معکوس تبدیل کیلی به دست آورد. لذا یکتایی نمایش (۲) (قضیهٔ ۲۳.۱۲) به یکتایی تجزیهٔ E صادق در (۱) منجر خواهدشد.
این امر برهان را تمام خواهد کرد.

حال می‌توان ابزارهای مطرح شده در قضیهٔ ۲٤.۱۳ را درمورد عملگرهای خود الحاق به کاربرد. قضیهٔ زیر مثالی از این وضع را به دست می‌دهد.

۳۱.۱۳ قضیه. ***فرض کنیم A یک عملگر خود الحاق در H باشد.***

(آ) *به ازای هر $x\in\mathscr{D}(A)$، $(Ax,x)\geq 0$ (به اختصار: $A\geq 0$) اگر و فقط اگر $\sigma(A)\subset[0,\infty)$.*

(ب) *اگر $A\geq 0$، یک خود الحاق منحصر به فرد مانند $B\geq 0$ هست که $B^2=A$.*

برهان. برهان (آ) آنقدر شبیه برهان قضیهٔ ۳۲.۱۲ است که آن را حذف می‌کنیم.
فرض کنیم $A\geq 0$؛ درنتیجه $\sigma(A)\subset[0,\infty)$، و

$$(Ax,y)=\int_{\circ}^{\infty} t\,dE_{x,y}(t) \qquad [x\in\mathscr{D}(A), y\in H], \tag{۱}$$

که در آن $\mathscr{D}(A)=\left\{x\in H: \int t^{۲}dE_{x,y}(t)<\infty\right\}$؛ قلمرو انتگرالگیری $[\circ,\infty)$ است. فرض کنیم $s(t)$ ریشهٔ دوم نامنفی $t\geq\circ$ باشد، و قرار می‌دهیم $B=\psi(s)$؛ به بیان صریح،

$$(Bx,y)=\int_{\circ}^{\infty} s(t)\,dE_{x,y}(t) \qquad \left(x\in\mathscr{D}_s, y\in H\right). \tag{۲}$$

قضیهٔ ضرب (ب)از قضیهٔ ۲۴.۱۳ به ازای $f=g=s$ نشان می‌دهد که $B^{۲}=A$. چون s حقیقی است، B خود الحاق است [قسمت (پ)قضیهٔ ۲۴.۱۳]، و چون $s(t)\geq\circ$، رابطهٔ (۲) به ازای $x=y$ نشان می‌دهد که $B\geq\circ$.

برای اثبات یکتایی، فرض می‌کنیم C خود الحاق بوده، $C\geq\circ$، $C^{۲}=A$، و E^{C} تجزیهٔ طیفی آن باشد:

$$(Cx,y)=\int_{\circ}^{\infty} s\,dE_{x,y}(s) \qquad (x\in\mathscr{D}(C), y\in H). \tag{۳}$$

با اعمال قضیهٔ ۲۸.۱۳ به ازای $\Omega=[\circ,\infty)$، $\phi(s)=s^{۲}$، $f(t)=t$، و

$$E'(\phi(\omega))=E^{C}(\omega) \quad \text{به ازای } \omega\subset[\circ,\infty)، \tag{۴}$$

به دست می‌آوریم

$$(Ax,y)=\left(C^{۲}x,y\right)=\int_{\circ}^{\infty} s^{۲}dE^{C}_{x,y}(s)=\int_{\circ}^{\infty} t\,dE'_{x,y}(t)\,. \tag{۵}$$

بنابر روابط (۱) و (۵)، حکم یکتایی در قضیهٔ ۳۰.۱۳ نشان می‌دهد که $E'=E$. بنابر (۴)، E، E^{C} و درنتیجه C را معین خواهد کرد.

خواص زیر از عملگرهای نرمال در برهان قضیهٔ طیفی ۳۳.۱۳ به کار خواهند رفت.

۳۲.۱۳ قضیه. ***هرگاه N یک عملگر نرمال در H باشد، آنگاه***

(آ) $\mathscr{D}(N)=\mathscr{D}(N^*)$،

(ب) ***به ازای هر*** $x\in\mathscr{D}(N)$، $\|Nx\|=\|N^*x\|$، و

(پ) N ***به طور ماکزیمال نرمال است.***

برهان. هرگاه $y \in \mathscr{D}(N^*N) = \mathscr{D}(NN^*)$، آنگاه $(Ny, Ny) = (y, N^*Ny)$ زیرا $Ny \in \mathscr{D}(N^*)$، و $(N^*y, N^*y) = (y, NN^*y)$ زیرا $N^*y \in \mathscr{D}(N)$ و $N = N^{**}$ (قضیهٔ ۱۲.۱۳). چون $N^*N = NN^*$، پس

(۱) اگر $y \in \mathscr{D}(N^*N)$، $\|Ny\| = \|N^*y\|$.

حال $x \in \mathscr{D}(N)$ را اختیار می‌کنیم. فرض کنیم N' تحدید N به $\mathscr{D}(N^*N)$ باشد. بنابر قضیهٔ ۱۳.۱۳، $\{x, Nx\}$ دربست نمودار N' قراردارد. لذا بردارهایی مانند $y_i \in \mathscr{D}(N^*N)$ چنان وجود دارند که

(۲) وقتی $i \to \infty$، $\|y_i - x\| \to 0$

و

(۳) وقتی $i \to \infty$، $\|Ny_i - Nx\| \to 0$.

بنابر (۱)، $\|N^*y_i - N^*y_j\| = \|Ny_i - Ny_j\|$؛ درنتیجه (۳) ایجاب می‌کند که $\{N^*y_i\}$ یک دنبالهٔ کشی در H است. لذا $z \in H$ی هست به طوری که

(٤) وقتی $i \to \infty$، $\|N^*y_i - z\| \to 0$.

چون N^* یک عملگر بسته است، روابط (۲) و (٤) ایجاب می‌کنند که $\{x, z\} \in \mathscr{G}(N^*)$.

از این نتیجه می‌گیریم که اولاً $x \in \mathscr{D}(N^*)$؛ درنتیجه $\mathscr{D}(N) \subset \mathscr{D}(N^*)$، و ثانیاً

(۵) $$\|N^*x\| = \|z\| = \lim\|N^*y_i\| = \lim\|Ny_i\| = \|Nx\|.$$

این (ب) و نصف (آ) را ثابت می‌کند. برای نیمهٔ دیگر توجه می‌کنیم که N^* نرمال نیز هست (زیرا $N^{**} = N$)؛ درنتیجه

(٦) $$\mathscr{D}(N^*) \subset \mathscr{D}(N^{**}) = \mathscr{D}(N).$$

بالأخره، فرض کنیم M نرمال بوده و $N \subset M$. در این صورت $M^* \subset N^*$؛ درنتیجه

(۷) $$\mathscr{D}(M) = \mathscr{D}(M^*) \subset \mathscr{D}(N^*) = \mathscr{D}(N) \subset \mathscr{D}(M),$$

که رابطهٔ $\mathscr{D}(M) = \mathscr{D}(N)$ را به ما می‌دهد؛ درنتیجه $M=N$.

۳۳.۱۳ قضیه. *هر عملگر نرمال N در H دارای تجزیهٔ طیفی منحصر به فردی مانند*

E ***است که در رابطهٔ***

$$(Nx, y) = \int_{\sigma(N)} \lambda dE_{x,y}(\lambda) \qquad (x \in \mathscr{D}(N), y \in H) \tag{۱}$$

صدق می‌کند. به علاوه، به ازای هر مجموعهٔ بورل $\omega \subset \sigma(N)$ ***و هر*** $S \in \mathscr{B}(H)$ ***که با*** N ***به معنی*** $SN \subset NS$ ***تعویض می‌شود،*** $E(\omega)S = SE(\omega)$.

همچنین از رابطهٔ (۱) و قضیهٔ ۲٤.۱۳ نتیجه می‌شود که $E(\omega)N \subset NE(\omega)$.

برهان. اولین هدف ما یافتن تصاویر خـود الحـاق P_i بـا بردهـای دو بـه دو متعـامد بـه صورتـی اسـت کـه $P_i N \subset NP_i \in \mathscr{B}(H)$، NP_i نرمـال اسـت، و بـه ازای هـر $x \in H$، $x = \sum P_i x$. سپس قضیهٔ طیفی برای عملگرهـای نرمـال کرانـدار بـر عملگرهـای NP_i اعمال می‌شود و این ما را به نتیجهٔ مطلوب می‌رساند.

بنا برقضیهٔ ۱۳.۱۳، $B \in \mathscr{B}(H)$ای و $C \in \mathscr{B}(H)$ای چنان وجود دارنـد کـه $B \geq ۰$، $\|B\| \leq ۱$، $C = NB$، و

$$B(I + N^*N) \subset I = (I + N^*N)B. \tag{۲}$$

چون $N^*N = NN^*$، رابطهٔ (۲) ایجاب می‌کند که

$$BN = BN(I + N^*N)B = B(I + N^*N)NB \subset NB = C. \tag{۱}$$

درنتیجه، $BC = B(NB) = (BN)B \subset CB$. چون B و C کراندارند، پس $BC{=}CB$ و لـذا C با هر تابع بورل کراندار B تعویض می‌شود. (ر.ک. بخش ۲٤.۱۲.)

$\{t_i\}$ را طوری اختیار می‌کنیم که $۱ = t_۰ > t_۱ > t_۲ > \dots$، $\lim t_i = ۰$. فـرض کنیـم p_i تابع مشخص $\left(t_i - t_{i-۱}\right]$ به ازای $i = ۱,۲,۳,\dots$ باشد و قرار می‌دهیم $f_i(t) = p_i(t)/t$. هـر f_i بر $[۰,۱]$ $\sigma(B) \subset$ کراندار است. فرض کنیم E^B تجزیهٔ طیفـی B باشـد. تسـاوی (۲) نشان می‌دهـد کـه B یـک بـه یـک اسـت؛ یعنـی ۰ در طیـف نقطـه‌ای B نیسـت. لـذا $E^B(\{۰\}) = ۰$، و E^B بر $(۰,۱]$ متمرکز شده است.

تعریف می‌کنیم

$$P_i = p_i(B) \qquad (i = ۱,۲,۳,\dots). \tag{٤}$$

چـون بـه ازای $i \neq j$ داریـم $p_i p_j = ۰$، تصـاویر P_i دارای بردهـای دو بـه دو متعـــامد

می‌باشند. چون $\sum p_i$ تابع مشخص $[0,1)$است، داریم

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i x = E^B((0,1])x = x \qquad (x \in H). \tag{۵}$$

و چون $p_i(t) = tf_i(t)$،

$$NP_i = NBf_i(B) = Cf_i(B) \in \mathscr{B}(H), \tag{۶}$$

و، بنابر (۳)، $P_i N = f_i(B)BN \subset f_i(B)C$؛ درنتیجه

$$P_i N \subset NP_i. \tag{۷}$$

بنابر (۶)، $\mathscr{D}(NP_i) = H$؛ درنتیجه

$$\mathscr{R}(P_i) \subset \mathscr{D}(N) \qquad (i = 1,2,3,\ldots). \tag{۸}$$

لذا، اگر $P_i x = x$، رابطهٔ (۷) ایجاب می‌کند که $P_i Nx = NP_i x = Nx$. لذا N، $\mathscr{R}(P_i)$ را به توی $\mathscr{R}(P_i)$ می‌برد یا: ***$\mathscr{R}(P_i)$ یک زیرفضای پایای N می‌باشد.***

حال می‌خواهیم ثابت کنیم که هر NP_i نرمال است. بنابر رابطهٔ (۷) و قضیهٔ ۲.۱۳،

$$(NP_i)^* \subset (P_i N)^* = N^* P_i. \tag{۹}$$

ولی $NP_i \in \mathscr{B}(H)$؛ درنتیجه $(NP_i)^*$ دارای قلمرو H است. لذا

$$(NP_i)^* = N^* P_i, \tag{۱۰}$$

و حال قضیهٔ ۳۲.۱۳، بنابر (۸) و (۱۰)، نشان می‌دهد که

$$\|NP_i x\| = \|N^* P_i x\| = \|(NP_i)^* x\| \qquad (x \in H). \tag{۱۱}$$

بنابر قضیهٔ ۱۲.۱۲، رابطهٔ (۱۱) ایجاب می‌کند که NP_i نرمال است.

لذا روابط (۵)، (۶)، و (۷) نشان می‌دهند که به اولین هدفمان رسیده‌ایم.

بنابر قضیهٔ ۲۳.۱۲، هر NP_i دارای تجزیهٔ طیفی E^i است که بر زیرمجموعه‌های بورل $\mathscr{C}$ تعریف شده است.

چون N، $\mathscr{R}(P_i)$ را به توی $\mathscr{R}(P_i)$ می‌برد، P_i با NP_i تعویض می‌شود. لذا P_i با $E^i(\omega)$ به ازای هر مجموعهٔ بورل $\omega \subset \mathscr{C}$ تعریف می‌شود؛ درنتیجه

$$E^i(\omega) P_i x = P_i E^i(\omega) x \in \mathscr{R}(P_i) \qquad (x \in H, i = 1,2,3,..) \tag{۱۲}$$

چون این بردها دو به دو متعامدند، و چون (۵) ایجاب می‌کند که

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left\|E^i(\omega)P_i x\right\|^2 \le \sum_{i=1}^{\infty}\|P_i x\|^2 = \|x\|^2, \tag{۱۳}$$

سری $\sum E^i(\omega)P_i x$ در نرم H همگراست، و تعریف

$$E(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} E^i(\omega)P_i \tag{۱٤}$$

به ازای جمیع مجموعه‌های بورل $\omega \subset \mathcal{C}$ معنی دارد.

به آسانی معلوم می‌شود که E یک تجزیهٔ همانی است. لذا یک عملگر نرمال مانند M وجود دارد که با

$$(Mx, y) = \int \lambda dE_{x,y}(\lambda) \qquad (x \in \mathcal{D}(M), y \in H) \tag{۱۵}$$

تعریف می‌شود، که در آن قلمرو انتگرالگیری $\mathcal{C}$ بوده و

$$\mathcal{D}(M) = \left\{x \in H: \int|\lambda|^2 dE_{x,x}(\lambda) < \infty\right\}. \tag{۱٦}$$

حکم (۱) با نشان دادن اینکه $M=N$ ثابت نخواهدبود.

به ازای هر $x \in H$، رابطهٔ (۱٤) نشان می‌دهد که

$$E_{x,x}(\omega) = \|E(\omega)x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\left\|E^i(\omega)P_i x\right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} E^i_{x_i,x_i}(\omega), \tag{۱۷}$$

که در آن $x_i = P_i x$. هرگاه $x \in \mathcal{D}(N)$، آنگاه $P_i N x = N P_i x$ ؛ درنتیجه

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int|\lambda|^2 dEi_{x_i,x_i}(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty}\|NP_i x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\|P_i Nx\|^2 = \|Nx\|^2. \tag{۱۸}$$

از روابط (۱۷) و (۱۸) معلوم می‌شود که انتگرال (۱٦) به ازای هر $x \in \mathcal{D}(N)$ متناهی است.

$$\mathcal{D}(N) \subset \mathcal{D}(M). \tag{۱۹}$$

هرگاه $x \in \mathcal{R}(P_i)$، آنگاه $x = P_i x$؛ و درنتیجه $E(\omega)x = E^i(\omega)x$. لذا، به ازای هر $y \in H$، $E_{x,y} = E^i_{x,y}$. لذا

$$(Nx, y) = (NP_i x, y) = \int \lambda dE^i_{x,y}(\lambda) = \int \lambda dE_{x,y}(\lambda) = (Mx, y).$$

درنتیجه،

$$P_i Nx = NP_i x = MP_i x \qquad [x \in \mathcal{D}(N), i = 1,2,3,\ldots]. \tag{۲۰}$$

اگر $Q_i = P_1+...+P_i$، نتیجه می‌شود که $Q_i Nx = MQ_i x$. لذا

$$\{Q_i x, Q_i Nx\} \in \mathscr{G}(M) \qquad [x \in \mathscr{D}(N), i = 1,2,3,...]. \tag{۲۱}$$

چون $\mathscr{G}(M)$ بسته است، از روابط (۵) و (۲۱) معلوم می‌شود که $\{x, Nx\} \in \mathscr{G}(M)$؛ یعنی، به ازای هر $x \in \mathscr{D}(N)$، $Nx = Mx$. لذا، طبق رابطهٔ (۱۹)؛ $N \subset M$، و حال ماکزیمالی N (قضیه ۳۲.۱۳) ایجاب می‌کند $N=M$.

این امر نمایش (۱) را با $\mathbb{C}$ به جای $\sigma(N)$ به ما می‌دهد. متمرکز بودن E بر $\sigma(N)$ از قسمت (پ)قضیهٔ ۲۷.۱۳ نتیجه می‌شود.

برای اثبات یکتایی E، عملگر

$$T = N\left(I + \sqrt{N^*N}\right)^{-1} \tag{۲۲}$$

را در نظر می‌گیریم که در آن $\sqrt{N^*N}$ ریشهٔ دوم مثبت منحصر به فرد N^*N است. اگر رابطهٔ (۱) برقرار باشد، از قضیهٔ ۲٤.۱۳ نتیجه می‌شود که

$$T = \int \phi dE, \tag{۲۳}$$

که در آن $\phi(\lambda) = \lambda/(1+|\lambda|)$؛ درنتیجه $T \in \mathscr{B}(H)$، و چون ϕ بر $\mathbb{C}$ یک به یک است، قضیهٔ ۲۸.۱۳ ایجاب می‌کند که تجزیهٔ طیفی E^T از T در رابطهٔ

$$E(\omega) = E^T(\phi(\omega)) \tag{۲٤}$$

به ازای هر مجموعهٔ بورل $\omega \subset \mathbb{C}$ صدق می‌کند. حال یکتایی E از یکتایی E^T نتیجه می‌شود (قضیهٔ ۲۳.۱۲).

بالأخره فرض کنیم $S \in \mathscr{B}(H)$ و $SN \subset NS$. قرار می‌دهیم $Q = Q_n = E(\tilde{\omega})$ که در آن $\tilde{\omega} = \{\lambda : |\lambda| < n\}$ و n عدد صحیح مثبتی می‌باشد. در این صورت $NQ \in \mathscr{B}(H)$ نرمال است و با رابطهٔ

$$NQ = \int f dE \tag{۲۵}$$

داده می‌شود که در آن $f(\lambda) = \lambda$ بر $\tilde{\omega}$ و $f(\lambda) = 0$ خارج $\tilde{\omega}$. قضیهٔ ۲۸.۱۳ ایجاب می‌کند که تجزیهٔ طیفی E' از NQ در $E'(\omega) = E\left(f^{-1}(\omega)\right)$ صدق می‌کند، یا

$$\begin{cases} E'(\omega) = E(\omega \cap \tilde{\omega}) = QE(\omega) & \text{اگر } 0 \notin \omega، \\ E'(\{0\}) = E(\{0\} \cup (\mathbb{C} - \tilde{\omega})) = E(\{0\}) + I - Q \end{cases} \tag{۲٦}$$

لذا

اگر $\omega \subset \tilde{\omega}$، $E(\omega) = QE(\omega) = QE'(\omega)$. (۲۷)

بنابر قضیهٔ ۲۴.۱۳، $QN \subset NQ = QNQ$؛ درنتیجه

$$(QSQ)(NQ) = QSNQ \subset QNSQ \subset (NQ)(QSQ). \tag{۲۸}$$

چون $(QSQ)(NQ) \in \mathscr{B}(H)$، شمولهای (۲۸) درواقع تساوی می‌باشند. حال قضیهٔ ۲۳.۱۲ ایجاب می‌کند که QSQ با هر $E'(\omega)$ تعویض می‌شود.

یک ωی کراندار در نظرگرفته و n را آنقدر بزرگ می‌گیریم که $\omega \subset \tilde{\omega}$. بنابر (۲۷)،

$$QSE(\omega) = QSQE'(\omega) = E'(\omega)QSQ = E(\omega)SQ.$$

درنتیجه

$$Q_n SE(\omega) = E(\omega)SQ_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{۲۹}$$

حال از حکم ۱۸.۱۲ نتیجه می‌شود که اگر ω کراندار باشد،

$$SE(\omega) = E(\omega)S \tag{۳۰}$$

[در (۲۹) فرض کنید $n \to \infty$]؛ و درنتیجه اگر ω یک مجموعهٔ بورل در $\mathbb{C}$ باشد نیز چنین خواهدبود.

نیمگروهها از عملگرها

۳۴.۱۳ چند تعریف. فرض کنیم X یک فضای باناخ بوده و به هر $t \in [0, \infty)$ یک عملگر مانند $Q(t) \in \mathscr{B}(X)$ چنان مربوط شده باشد که

(آ) $Q(0) = I$.

(ب) به ازای هر $s \geq 0$ و $t \geq 0$، $Q(s+t) = Q(s)Q(t)$، و

(پ) به ازای هر $x \in X$، $\lim\limits_{t \to 0} \|Q(t)x - x\| = 0$.

اگر (آ) و (ب) برقرار باشند، $\{Q(t)\}$ را یک ***نیمگروه*** (یا، دقیقتر، یک ***نیمگروه یک پارامتری***) می‌نامیم. این نیمگروهها دارای نمایشهای نمایی‌اند مشروط بر اینکه

نگاشت $t \to Q(t)$ در یک فرض پیوستگی صدق نماید. فرضی که در اینجا اختیار شده است، یعنی (پ)، آسان به کار خواهد رفت.

با این انگیزه که هر تابع مختلط پیوستهٔ صادق در $f(s+t) = f(s)f(t)$ به شکل $f(t) = \exp(At)$ است، و f با عدد $A = f'(0)$ معین می‌شود، به $\{Q(t)\}$ عملگرهای A_ε را به وسیلهٔ

$$A_\varepsilon x = \frac{1}{\varepsilon}[Q(\varepsilon)x - x] \qquad (x \in X, \varepsilon > 0) \tag{1}$$

مربوط کرده و به ازای هر $x \in \mathscr{D}(A)$ یعنی به ازای هر x که حد (۲) در نرم توپولوژی X موجود است تعریف می‌کنیم

$$Ax = \lim_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon x. \tag{2}$$

واضح است که $\mathscr{D}(A)$ زیرفضایی از X است و لذا A یک عملگر خطی د رX می‌باشد. این عملگر که اساساً $Q'(0)$ است ***مولد بی‌نهایت کوچک*** نیمگروه $\{Q(t)\}$ نام دارد.

۳۵.۱۳ قضیه. *هرگاه نیمگروه $\{Q(t)\}$ در فرض پیشگفته صدق کند، آنگاه*

(آ) ثابتهایی چون C و γ چنان وجود دارند که

$$\|Q(t)\| \le Ce^{\gamma t} \qquad (0 \le t < \infty);$$

(ب) به ازای هر $x \in X$، $t \to Q(t)x$ یک نگاشت پیوسته از $[0,\infty)$ به توی X است؛

(پ) $D(A)$ در X چگال و A بسته است؛

(ت) معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{d}{dt}Q(t)x = AQ(t)x = Q(t)Ax$$

به ازای هر $x \in \mathscr{D}(A)$ برقرار است؛

(ث) به ازای هر $x \in X$،

$$Q(t)x = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\exp\left(tA_\varepsilon\right)\right)x,$$

همگرایی بر هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ $[0,\infty)$ یکنواخت است؛ و

(جـ) اگر $\lambda \in \mathbb{C}$ و $\mathrm{Re}\,\lambda > \gamma$، انتگرال

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q(t)x\,dt$$

یک عملگر مانند $R(\lambda) \in \mathscr{B}(X)$ [به نام حلال $\{Q(t)\}$] تعریف می‌کند که بردش $\mathscr{D}(A)$ است و $\lambda I - A$ را بر می‌گرداند.

جالب اینجاست که (ثـ)به ازای هر $x \in X$ [نه فقط به ازای $x \in \mathscr{D}(A)$] برقرار است. حد در (ثـ) همانند حد ضمنی موجود در مشتق به کار رفته در (تـ)، نسبت به نرم توپولوژی X گرفته می‌شود. از قسمت (جـ)نتیجه می‌شود که $\sigma(A)$ در نیمصفحهٔ $\{\lambda : \mathrm{Re}\,\lambda \le \gamma\}$ قراردارد.

برهان. (آ) اگر دنباله‌ای مانند $t_n \to 0$ با $\|Q(t_n)\| \to \infty$ وجود می‌داشت، قضیهٔ باناخ-اشتاین هاوس وجود $x \in X$ی را ایجاب می‌کرد که به ازای آن $\{\|Q(t_n)x\|\}$ بی‌کران بود که با فرض

$$\|Q(t)x - x\| \to 0 \text{ وقتی } t \to 0 \tag{1}$$

در تضاد می‌باشد. لذا $\delta > 0$ای و $C < \infty$ای هست به طوری که $\|Q(t)\| \le C$ بر $[0,\delta]$. حال اگر $0 \le t < \infty$ و n عدد صحیح مثبت صادق در $(n-1)\delta \le t < n\delta$ باشد، $\|Q(t/n)\| \le C$، و معادلهٔ تابعی

$$Q(s+t) = Q(s)Q(t) \tag{2}$$

به

$$\|Q(t)\| = \left\|Q(t/n)^n\right\| \le C^n \le C^{1+t/\delta} \tag{3}$$

منجر می‌شود که (آ) را به ازای $e^\gamma = C^{1/\delta}$ ثابت می‌کند.

(بـ) هرگاه $0 \le s \le t \le T$، آنگاه (آ) و (۲) ایجاب می‌کنند که

$$\|Q(t)x - Q(s)x\| \le \|Q(s)\| . \|Q(t-s)x - x\|$$

$$\leq Ce^{\gamma T}\|Q(t-s)x-x\|,$$

که وقتی $t-s\to \circ$ به $\circ$ میل خواهدکرد.

(پ) به خاطر (ب)، انتگرالهای X مقدار

$$M_t x = \frac{1}{t}\int_{\circ}^{t} Q(s)x\,ds \qquad (x\in X, t>\circ) \tag{٤}$$

را می‌توان تعریف کرد. درواقع، بنا بر (آ)، $M_t\in\mathscr{B}(X)$ و $\|M_t\|\leq Ce^{\gamma t}$. حکم می‌کنیم که

$$A_\varepsilon M_t x = A_t M_\varepsilon x \qquad (\varepsilon>\circ, t>\circ, x\in X). \tag{٥}$$

برای اثبات (۵)، انتگرالده $Q(s)x$ را در

$$\int_{\varepsilon}^{t+\varepsilon} - \int_{\circ}^{t} = \int_{t}^{t+\varepsilon} - \int_{\circ}^{\varepsilon}$$

قرار می‌دهیم. بنابر (۲)، طرف چپ به صورت زیر در می‌آید:

$$\int_{\circ}^{t}[Q(\varepsilon+s)-Q(s)]x\,ds = [Q(\varepsilon)-I]\int_{\circ}^{t}Q(s)s\,ds$$

$$=\varepsilon A_\varepsilon t M_t x.$$

به همین نحو، طرف راست خواهدشد $tA_t\varepsilon M_\varepsilon x$. این رابطهٔ (۵) را به ما می‌دهد. وقتی $\varepsilon\to\circ$، طرف راست (۵) به $A_t x$ همگراست. لذا $M_t x\in\mathscr{D}(A)$، نشانگر آنکه $\mathscr{D}(A)$ در X چگال است زیرا وقتی $t\to\circ$، $M_t x\to x$. به علاوه،

$$AM_t x = A_t x \qquad (x\in X). \tag{٦}$$

برای اثبات بسته بودن A، فرض کنیم $x_n\in\mathscr{D}(A)$، $x_n\to x$، و $Ax_n\to y$. چون $Q(s)$ با $Q(t)$ تعویض می‌شود، پس A_ε با M_t چنین می‌شود، و لذا A با M_t بر $\mathscr{D}(A)$ تعویض خواهدشد. لذا از رابطهٔ (۶) داریم

$$A_t x_n = AM_t x_n = M_t A x_n.$$

و با فرض $n\to\infty$ داریم

$$A_t x = M_t y. \tag{٧}$$

وقتی $t\to\circ$، طرف راست (۷) همگرا به y است؛ لذا همین امر برای $A_t x$ درست است. این می‌گوید که $x\in\mathscr{D}(A)$ و $Ax=y$. لذا نمودار A بسته می‌باشد.

(ت) با ضرب (٦) در t داریم

$$A\int_{\circ}^{t}Q(s)x\,ds = Q(t)x - x. \tag{۸}$$

انتگرالده پیوسته است. لذا مشتقگیری از انتگرال، (ت) را ثابت می‌کند زیرا به ازای $x \in \mathscr{D}(A)$، $Q(t)Ax = AQ(t)x$. [توجه کنید که $Q(t)A_\varepsilon = A_\varepsilon Q(t)$.]

(ث) برای نرم

$$\begin{aligned}\exp(tA_\varepsilon) &= e^{-t/\varepsilon}\exp\left(\frac{t}{\varepsilon}Q(\varepsilon)\right)\\ &= e^{-t/\varepsilon}\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{t^n Q(n\varepsilon)}{n!\,\varepsilon^n}.\end{aligned}$$

با تعویض نرم این مجموع با مجموع نرمها، اعمال تخمین (آ)، و جمعبندی سری حاصل خواهیم داشت:

به ازای $\circ < \varepsilon < ۱$،

$$\|\exp(tA_\varepsilon)\| \le C\exp\left\{\frac{t}{\varepsilon}\left(e^{t\varepsilon y} - ۱\right)\right\} < C\exp\left(te^{\gamma t}\right). \tag{۹}$$

حال، به ازای $x \in X$ ثابت،

$$\varphi(s) = \{\exp((t-s)A_\varepsilon)\}Q(s)x \qquad (\circ \le s \le t). \tag{۱۰}$$

اگر $x \in \mathscr{D}(A)$، از قسمت (ت) داریم

$$\varphi'(s) = \left\{\exp\left((t-s)A_\varepsilon\right)\right\}Q(s)\left(Ax - A_\varepsilon x\right). \tag{۱۱}$$

لذا (آ) و (۹) نشان می‌دهند که $K(t) < \infty$ای هست به طوری که هروقت $\circ \le s \le t$، $\circ < \varepsilon \le ۱$، و $x \in \mathscr{D}(A)$،

$$\|\varphi'(s)\| \le K(t)\|A_x - A_\varepsilon x\|. \tag{۱۲}$$

چون $\varphi(t) = Q(t)x$ و $\varphi(\circ) = \left\{\exp\left(tA_\varepsilon\right)\right\}x$، رابطهٔ (۱۲) ایجاب می‌کند که به ازای $x \in \mathscr{D}(A)$ و $\circ < \varepsilon \le ۱$،

$$\left\|Q(t)x - \left\{\exp\left(tA_\varepsilon\right)\right\}x\right\| \le tK(t)\left\|Ax - A_\varepsilon x\right\|. \tag{۱۳}$$

این رابطهٔ (ث) را به ازای $x \in \mathscr{D}(A)$ به ما می‌دهد.

بهرحال، طبق (آ) و (۹)، $\|Q(t) - \exp(tA_\varepsilon)\|$ بر $\circ \le t \le T$، $\circ < \varepsilon \le ۱$ کراندار

است. لذا این عملگرها یک خانوادهٔ همپیوسته تشکیل می‌دهند (فصل ٤، تمرین ۳)؛ پس همگرایی آنها بر مجموعهٔ چگال $\mathscr{D}(A)$ همگرایی آنها بـر تمـام X را موجـب می‌شـود (فصل ۲ ، تمرین ١٤). این قسمت (ثـ) را ثابت خواهد کرد.

(جـ) ازقسمت (آ) معلوم می‌شود که اگر $\operatorname{Re}\lambda > \gamma$،

$$\|R(\lambda)\| \le C\int_0^\infty e^{(\gamma - \operatorname{Re}\lambda)t}dt = \frac{C}{\operatorname{Re}(\lambda-\gamma)} < \infty . \tag{١٤}$$

لذا $R(\lambda) \in \mathscr{B}(X)$. تعریف $\mathscr{R}(\lambda)$ نشان می‌دهد که

$$\varepsilon A_\varepsilon \mathscr{R}(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q(t+\varepsilon)x dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q(t)x dt.$$

اگر در اولین انتگرال t را با $t-\varepsilon$ عوض کنیم به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$A_\varepsilon \mathscr{R}(\lambda)x = \frac{e^{\lambda\varepsilon - 1}}{\varepsilon}\mathscr{R}(\lambda)x - \frac{1}{\varepsilon}e^{\lambda\varepsilon}\int_0^\varepsilon e^{-\lambda t}Q(t)x dt. \tag{١٥}$$

وقتی $\varepsilon \to 0$، طرف راست (١٥) همگرا به $\lambda\mathscr{R}(\lambda)x - x$ است. این نشـان می‌دهـد کـه $\mathscr{R}(\lambda)x \in \mathscr{D}(A)$ و

$$(\lambda I - A)\mathscr{R}(\lambda)x = x \qquad (x \in X) . \tag{١٦}$$

از آن سو، اگر $x \in \mathscr{D}(A)$، می‌توان قسمت (تـ) را بر

$$\mathscr{R}(\lambda) A_\varepsilon x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q(t) A_\varepsilon x dt \tag{١٧}$$

اعمال کرد و با انتگرالگیری جزء به جزء دید که

$$\mathscr{R}(\lambda) Ax = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{d}{dt}Q(t)x dt = -x + \lambda\mathscr{R}(\lambda)x . \tag{١٨}$$

لذا

$$\mathscr{R}(\lambda)(\lambda I - A)x = x \qquad (x \in \mathscr{D}(A)) . \tag{١٩}$$

به‌خصوص، $\mathscr{D}(A)$ در برد $\mathscr{R}(\lambda)$ جا دارد. این برهان را تمام خواهد کرد.

حال طبیعی است بپرسیم که آیا حد را می‌توان در (ثـ) حذف کرد؛ یعنی تحت چـه شرایطی نمایش نمایی $Q(t) = \exp(tA)$ معتبر اسـت. قضایـای ۳٦.۱۳ و ۳۸.۱۳ بـه ایـن سؤالها پاسخ می‌دهند.

۳۶.۱۳ قضیه. هرگاه $\{Q(t)\}$ همانند قضیهٔ ۳۵.۱۳ باشد، آنگاه هریک از سه شرط زیر دوتای دیگر را ایجاب می‌کنند:

(آ) $\mathscr{D}(A) = X$؛

(ب) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \|Q(\varepsilon) - I\| = 0$؛

(پ) $A \in \mathscr{B}(X)$ و $Q(t) = e^{tA}$ $(0 \le t < \infty)$.

برهان. ما از همان نمادهای برهان قضیهٔ ۳۵.۱۳ استفاده می‌کنیم.

اگر (آ) برقرار باشد، قضیهٔ باناخ - اشتاین هاوس ایجاب می‌کند که نرمهای عملگرهای A_ε به ازای هر $\varepsilon > 0$ به قدرکافی کوچک کراندارند. چون $Q(\varepsilon) - I = \varepsilon A_\varepsilon$، قسمت (ب) ازقسمت (آ) نتیجه خواهدشد.

هرگاه (ب) برقرار باشد، آنگاه وقتی $t \to 0$، $\|M_t - I\| \to 0$. $t > 0$ را آنقدر کوچک می‌گیریم که M_t در $\mathscr{B}(X)$ معکوسپذیر باشد. چون $M_t A_\varepsilon = A_t M_\varepsilon$، داریم

$$A_\varepsilon = (M_t)^{-1} A_t M_\varepsilon. \tag{۱}$$

وقتی $\varepsilon \to 0$، رابطهٔ (۱) اولاً نشان می‌دهد که $A_\varepsilon x$ به ازای هر $x \in X$ همگراست [زیرا $M_\varepsilon x \to x$ و $(M_t)^{-1} A_t \in \mathscr{B}(X)$]، ثانیاً $A = (M_t)^{-1} A_t$، و ثالثاً

$$\text{وقتی } \varepsilon \to 0\text{،}\quad \|A_\varepsilon - A\| \le \|(M_t)^{-1} A_t\| \|M_\varepsilon - I\| \to 0. \tag{۲}$$

حال فرمول $Q(t) = ex[(tA)$ از قسمت (ث) قضیهٔ ۳۵.۱۳ نتیجه می‌شود زیرا رابطهٔ (۲) ایجاب می‌کند که

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\exp(tA_\varepsilon) - \exp(tA)\| = 0 \qquad (0 \le t < \infty). \tag{۳}$$

لذا (پ) از (ب) نتیجه خواهدشد.

استلزام (آ) $\to$ (پ) بدیهی می‌باشد.

عملگرهای بی‌نهایت کوچک دارای مشخصهٔ زیرند.

۳۷.۱۳ قضیهٔ هیل - یوزیدا (*Hille- Yozida*). عملگر به طور چگال تعریف شدهٔ A در فضای باناخ X عملگر بی‌نهایت کوچک نیمگروهی مانند $\{Q(t)\}$ همانند تعریف ۳٤.۱۳ است اگر و فقط اگر ثابتهایی چون C و γ چنان موجود باشند که به ازای هر $\lambda > \gamma$ و هر عدد صحیح مثبت m،

$$\left\|(\lambda I - A)^{-m}\right\| \le C(\lambda-\gamma)^{-m}. \tag{۱}$$

برهان. اگر A مانند قضیهٔ ۳۵.۱۳ به $\{Q(t)\}$ مربوط باشد، در آنجا دیدیم که به ازای $\lambda > \gamma$، $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ که در آن

$$R(\lambda)x = \int_{0}^{x} e^{-\lambda t} Q(t)xdt \tag{۲}$$

تبدیل لاپلاس $Q(t)x$ می‌باشد. لذا $R(\lambda)^{2}x$ تبدیل پیچش

$$\int_{0}^{t} Q(t-s)Q(s)xds = tQ(t)x \tag{۳}$$

است. (وضعیت صوری همانند تبدیلات فوریه است.) اگر به این نحو ادامه دهیم در می‌یابیم که به ازای $m = 1,2,3,\ldots$،

$$R(\lambda)^{m}x = \frac{1}{(m-1)!}\int_{0}^{\infty} t^{m-1}e^{-\lambda t}Q(t)xdt. \tag{٤}$$

بنابراین، با C و γ قسمت (آ) قضیهٔ ۳۵.۱۳،

$$\left\|R(\lambda)^{m}\right\| \le \frac{C}{(m-1)!}\int_{0}^{\infty} t^{m-1}e^{-(\lambda-\gamma)t}dt = C(\lambda-\gamma)^{-m}. \tag{۵}$$

این لزوم (۱) را ثابت خواهد کرد.

برای قسمت عکس، قرار می‌دهیم $S(\varepsilon) = (I-\varepsilon A)^{-1}$؛ درنتیجه (۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$\left\|S(\varepsilon)^{m}\right\| \le C(1-\varepsilon\gamma)^{-m} \qquad \left(0<\varepsilon<\varepsilon_{0}, m = 1,2,3,\ldots\right). \tag{٦}$$

و روابط

$$(I-\varepsilon A)S(\varepsilon)x = x = S(\varepsilon)(I-\varepsilon A)x \tag{۷}$$

برقرارند، اولی به ازای هر $x \in X$ و دومی به ازای هر $x \in \mathscr{D}(A)$.

هرگاه $x \in \mathscr{D}(A)$،آنگاه $x - S(\varepsilon)x = -\varepsilon S(\varepsilon)x$؛ درنتیجه

$$\lim_{\varepsilon\to ٠} S(\varepsilon)x = x. \tag{۸}$$

ولی چون $\|S(\varepsilon)\| \le C(١-\varepsilon_٠\gamma)^{-١}$، $\{S(\varepsilon): ٠<\varepsilon<\varepsilon_٠\}$ همپیوسته است؛ و درنتیجه رابطهٔ (۸) به ازای هر $x \in X$ برقرار است.

حال قرار می‌دهیم

$$T(t,\varepsilon) = \exp(tAS(\varepsilon)) \tag{۹}$$

و حکم می‌کنیم که

$$\|T(t,\varepsilon)\| \le C\exp\left\{\frac{\gamma t}{١-\varepsilon\gamma}\right\} \qquad (٠<\varepsilon<\varepsilon_٠, t>٠). \tag{۱۰}$$

درواقع، رابطهٔ $\varepsilon AS(\varepsilon) = S(\varepsilon) - I$ [ر.ک. (۷)] نشان می‌دهد که

$$T(t,\varepsilon) = e^{-t/\varepsilon}\sum_{m=٠}^{\infty}\frac{t^m}{m!\,\varepsilon^m}S(\varepsilon)^m. \tag{۱۱}$$

حال رابطهٔ (۱۰) از (٦) و (۱۱) نتیجه می‌شود.

به ازای $x \in \mathscr{D}(A)$، روابط (۷) و (۹) نشان می‌دهند که

$$\frac{d}{dt}\left\{T(t,\varepsilon)T(t,\delta)^{-١}x\right\} = T(t,\varepsilon)T(t,\delta)^{-١}(S(\varepsilon)-S(\delta))Ax.$$

اگر از این رابطه انتگرال گرفته و $T(t,\delta)$ را بر حاصل کار اعمال کنیم، به دست می‌آوریم

$$T(t,\varepsilon)x - T(t,\delta)x = \int_٠^t T(u,\varepsilon)T(t-u,\delta)(S(\varepsilon)-S(\delta))Ax\,du. \tag{۱۲}$$

اگر از رابطهٔ (۸) با Ax به جای x استفاده کرده و به (۱۰) رجوع کنیم، می‌بینیم که طرف راست (۱۲) به ازای $\varepsilon \to ٠$ و $\delta \to ٠$ همگرا به ٠ است. لذا حد

$$Q(t)x = \lim_{\varepsilon\to ٠} T(t,\varepsilon)x \tag{۱۳}$$

به ازای هر $x \in \mathscr{D}(A)$ به طور یکنواخت بر هر زیرمجموعهٔ کراندار $[٠,\infty)$ موجود است. به علاوه، رابطهٔ (۱۰) نشان می‌دهد که $\|Q(t)\| \le Ce^{\gamma t}$. حال از همپیوستگی و فرض چگال بودن $\mathscr{D}(A)$ معلوم می‌شود که (۱۳) به ازای هر $x \in X$ برقرار است. چون $T(t,\varepsilon)$ به وسیلهٔ (۹) برقرار است، پس $\{Q(t)\}$ مانند تعریف ۳٤.۱۳ یک نیمگروه

می‌باشد.

فرض کنیم $\widetilde{A}$ عملگر بی‌نهایت کوچک از $\{Q(t)\}$ باشد. در این صورت، بنابر قسمت (جـ) قضیهٔ ۳۵.۱۳.

$$(\lambda I-\widetilde{A})^{-1}x=\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda t}Q(t)x\,dt \qquad (\lambda>\gamma). \tag{۱٤}$$

از آن سو، $AS(\varepsilon)$ مولد بی‌نهایت کوچک $\{T(t,\varepsilon)\}=\{\exp(tAS(\varepsilon))\}$ است. لذا

$$\left(\lambda I-AS(\varepsilon)^{-1}\right)x=\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda t}T(t,\varepsilon)x\,dt. \tag{۱٥}$$

این رابطه طبق (۱۳) خواهدشد

$$(\lambda I-A)^{-1}x=\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda t}Q(t)x\,dt. \tag{۱٦}$$

حال از مقایسهٔ (۱٤) با(۱٦) معلوم می‌شود که $\lambda I-A$ و $\lambda I-\widetilde{A}$ به ازای جمیع λ های به قدر کافی بزرگ معکوس یکسانی دارند، و این ایجاب می‌کند که $\widetilde{A}=A$.

برای قضیهٔ نهایی به محدودهٔ فضاهای هیلبرت باز می‌گردیم.

۳۸.۱۳ قضیه. *فرض کنیم $\{Q(t):0\le t<\infty\}$ یک نیمگروه از عملگر نرمال $Q(t)\in\mathscr{B}(H)$ باشد که در شرط پیوستگی زیر صدق کند:*

$$\lim_{t\to 0}\|Q(t)x-x\|=0 \qquad (x\in H). \tag{۱}$$

دراین صورت عملگر بی‌نهایت کوچک A از $\{Q(t)\}$ یک عملگر نرمال در H است، یک $\gamma<\infty$ هست به طوری که به ازای هر $\lambda\in\sigma(A)$، $\mathrm{Re}\,\lambda\le\gamma$، و

$$Q(t)=e^{tA} \qquad (0\le t<\infty). \tag{۲}$$

هرگاه $Q(t)$ یکه‌ای باشد، آنگاه یک عملگر خود الحاق مانند S در H هست به طوری که

$$Q(t)=e^{itS} \qquad (0\le t<\infty). \tag{۳}$$

این نمایش نیمگروههای یکه‌ای قضیه‌ای است کلاسیک از ام.اچ.استون.

تذکر. با آنکه $\mathscr{D}(A)$ ممکن است یک زیرفضای **حقیقی** H باشد، عملگرهای e^{tA} در تمام H تعریف شده و کراندارند. برای مشاهدهٔ این امر، فرض کنیم E^A تجزیهٔ طیفی A باشد. (قضیهٔ ۱۳.۳۳). چون به ازای هر $\lambda \in \sigma(A)$، $|e^{t\lambda}| \le e^{t\gamma}$، حساب علامتی توصیف شده در قضیهٔ ۱۲.۲۱ به ما اجازهٔ تعریف عملگرهای کراندار e^{tA} را با

$$e^{tA} = \int_{\sigma(A)} e^{t\lambda} dE^A(\lambda) \qquad (0 \le t < \infty) \tag{٤}$$

می‌دهد.

این قضیه دارای عکس ساده‌ای است: هرگاه A همانند در نتیجه باشد، آنگاه (۲) به وضوح یک نیمگروه از عملگرهای نرمال را تعریف می‌کند، و رابطهٔ (۱) برقرار است زیرا، طبق قضیهٔ همگرایی تسلطی، وقتی $t \to 0$،

$$\|Q(t)x - x\|^2 = \int_{\sigma(A)} |e^{t\lambda} - 1|^2 dE_{x,x}^A(\lambda) \to 0. \tag{٥}$$

برهان. چون هر $Q(s)$ با هر $Q(t)$ تعویض می‌شود، قضیهٔ ۱۲.۱٦ ایجاب می‌کند که $Q(s)$ و $Q(t)^*$ تعویض می‌شوند. لذا کوچکترین زیرجبر بستهٔ $\mathscr{B}(H)$ که شامل تمام $Q(t)$ و تمام $Q(t)^*$ باشد نرمال است. فرض کنیم Δ فضای ایده‌آل ماکزیمال آن بوده، و E تجزیهٔ همانی نظیر آن مانند قضیهٔ ۱۲.۲۲ باشد.

فرض کنیم f_t و a_ε به ترتیب تبدیلات گلفاند $Q(t)$ و A_ε باشند. در این صورت

$$a_\varepsilon = \frac{f_\varepsilon - 1}{\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0), \tag{٦}$$

و با محاسبه‌ای ساده داریم

$$a_{2\varepsilon} - a_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}(a_\varepsilon)^2, \tag{٧}$$

زیرا $f_{2\varepsilon} = (f_\varepsilon)^2$. رابطهٔ

$$b(p) = \lim_{n\to\infty} a_{2^{-n}}(p) \tag{٨}$$

را به ازای $p \in \Delta$ هایی که درآنها این حد (به عنوان یک عدد مختلط) موجود است تعریف می‌کنیم، و به ازای سایر $p \in \Delta$ های قرار می‌دهیم $b(p) = 0$. در این صورت b یک تابع بورل مختلط بر Δ است. همانند قضیهٔ ۲٤.۱۳ قرارمی‌دهیم $B = \Psi(b)$ با قلمرو

$$\mathscr{D}(B) = \left\{x \in H: \int_\Delta |b|^2 dE_{x,x} < \infty\right\}. \tag{۹}$$

در این صورت B یک عملگر نرمال در H است.

نشان خواهیم داد که $A=B$.

هرگاه $x \in \mathscr{D}(A)$، آنگاه، وقتی $\varepsilon \to 0$، $\|A_\varepsilon x\|$کراندار است. لذا $C_x < \infty$ی هست به طوری که

$$\int_\Delta |a_\varepsilon|^2 dE_{x,x} = \|A_\varepsilon x\|^2 \le C_x \qquad (0 < \varepsilon \le 1) \tag{۱۰}$$

و لذا، طبق (۷)،

$$\int_\Delta |a_{2\varepsilon} - a_\varepsilon| dE_{x,x} \le \frac{\varepsilon}{2} C_x \qquad (0 < \delta \le 1). \tag{۱۱}$$

در رابطهٔ (۱۱) قرار می‌دهیم $\varepsilon = 2^{-n}$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ و نامساویهای حاصل را به هم می‌افزاییم. پس داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_{2^{-n+1}} - a_{2^{-n}}\right| < \infty \qquad \text{تـهـ } [E_{x,x}] \tag{۱۲}$$

لذا حد (۸) تـهـ $[E_{x,x}]$ موجود است، و حال لم‌فاتو و رابطهٔ (۱۰) ایجاب می‌کنند که

$$\int_\Delta |b|^2 dE_{x,x} \le C_x. \tag{۱۳}$$

درنتیجه، $\mathscr{D}(A) \subset \mathscr{D}(B)$.

قسمت (آ) قضیهٔ ۳۵.۱۳ نشان می‌دهد که به ازای $0 < \varepsilon \le 1$، $\|\exp(A_\varepsilon)\| \le \gamma_1$ که در آن γ_1 تابع $\{Q(t)\}$ است، لذا، به ازای هر $p \in \Delta$، $|\exp a_\varepsilon(p)| \le \gamma_1$ زیرا تبدیل گلفاند یک یکمتری بر B^*-جبرها می‌باشد. حال از رابطهٔ (۸) معلوم می‌شود که به ازای هر $p \in \Delta$، $|\exp b(p)| \le \gamma_1$. لذا $\gamma < \infty$ای هست به طوری که

$$\operatorname{Re} b(p) \le \gamma \qquad (p \in \Delta). \tag{۱٤}$$

به ازای هر $x \in \mathscr{D}(A)$و هر $t \ge 0$،

$$\left\|\exp(tA_\varepsilon)x - \exp(tB)x\right\|^2 = \int_\Delta \left|\exp(ta_\varepsilon) - \exp(tb)\right|^2 dE_{x,x} \tag{۱۵}$$

وقتی از طریق دنبالهٔ $\{2^{-n}\}$ داشته باشیم $\varepsilon\to 0$، به ۰ میل می‌کند زیرا انتگرالده به وسیلهٔ $4\gamma_1^{2t}$ کراندار است. و حدش تـهـ $[E_{x,x}]$ مساوی ۰ می‌باشد. لذا قسـمت (ثـ) قضیهٔ ۳۵.۱۳ ایجاب می‌کند که

$$Q(t)x = e^{tB}x \qquad [x \in \mathscr{D}(A)]. \tag{۱۶}$$

بهرحال، e^{tb} یک تابع کراندار بر Δ است، $e^{tB} \in \mathscr{B}(H)$، و چون رابطهٔ (۱۶) نشان می‌دهد که عملگرهای پیوستهٔ $Q(t)$ و e^{tB} بر مجموعـهٔ چگـال $\mathscr{D}(A)$ یکی‌انـد، نتیجـه می‌گیریم که

$$Q(t) = e^{tB} \qquad (0 \le t < \infty)\,. \tag{۱۷}$$

از رابطهٔ (۱۷) نتیجه می‌شود که

$$A_\varepsilon x - Bx = \left(\frac{e^{\varepsilon B} - I}{\varepsilon} - B\right)x. \tag{۱۸}$$

بنابراین

$$\|A_\varepsilon x - Bx\|^2 = \int_\Delta \left|\frac{e^{\varepsilon b} - 1}{\varepsilon} - b\right|^2 dE_{x,x}. \tag{۱۹}$$

وقتی $\varepsilon \to 0$، انتگرالدهٔ (۱۹) در هر نقطه از Δ به ۰ میل می‌کند. چون $\left|(e^z - 1)/z\right|$ بر هر نیمصفحهٔ $\{z : \operatorname{Re} z \le c\}$ کراندار است، و چون انتگرالده (۱۹) را می‌توان بـه شـکل زیـر نوشت:

$$\left|\frac{e^{\varepsilon b} - 1}{\varepsilon b} - 1\right|^2 |b|^2,$$

ازرابطهٔ (۱۴) و قضیهٔ همگرایی تسلطی نتیجه می‌شود که

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|A_\varepsilon x - Bx\|^2 = 0\,. \qquad \text{اگر } x \in \mathscr{D}(B)\text{،} \tag{۲۰}$$

این ثابت می‌کند که $\mathscr{D}(B) \subset \mathscr{D}(A)$ و $A = B$.

حال کراندار بودن قسمت حقیقی $\sigma(A)$ ازبالا از رابطهٔ (۱۴) و قسمت (پـ) قضیهٔ ۲۷.۱۳ نتیجه می‌شود.

این برهان را تمام می‌کند جز حکم نهایی راجع بـه نیمگروههـای یکـه‌ای. هرگـاه

هر $Q(t)$ یکه‌ای باشد، آنگاه $|f_\varepsilon| = 1$، رابطهٔ (٦) نشان می‌دهد که وقتی $\varepsilon \to 0$، $\lim a_\varepsilon$ در هر نقطه که وجود دارد موهومی محض است، درنتیجه $b(p)$ در هر $p \in \Delta$ موهومی محض است، و هرگاه $S = -iB$، آنگاه رابطهٔ (۱۷) رابطهٔ (۳) را به دست می‌دهد، و قسمت(پ) قضیهٔ ۲٤.۱۳ نشان می‌دهد که S خودالحاق است.

تمرینات

در سراسر این تمرینات، حرف H یک فضای هیلبرت است مگر خلافش گفته شود.

۱. در این فصل قانون شرکتپذیری $(T_1T_2)T_3 = T_1(T_2T_3)$ آزادانه به کار رفته است. این قانون را ثابت نمایید. همچنین ثابت کنید که $T_1 \subset T_2$ ایجاب می‌کند که $ST_1 \subset ST_2$ و $T_1S \subset T_2S$.

۲. فرض کنید T یک عملگر به طور چگال تعریف شده در H باشد. ثابت کنید T دارای توسیع بسته است اگر و فقط اگر $\mathscr{D}(T^*)$ در H چگال باشد. در آن صورت ثابت کنید T^{**} توسیعی از T است.

۳. بنابر قضیهٔ ۸.۱۳، به ازای عملگر به طور چگال تعریف شده‌ای مانند T در H، $\mathscr{D}(T^*) = \{0\}$ اگر و فقط اگر $\mathscr{G}(T)$ در $H \times H$ چگال باشد. نشان دهید که این وضع عملاً رخ می‌دهد.

پیشنهاد. فرض کنید $\{e_n : n = 1,2,3,\ldots\}$ یک پایهٔ متعامد یکهٔ H باشد. همچنین $\{x_n\}$ زیرمجموعه‌ای چگال از H باشد. تعریف کنید $Te_n = x_n$ و T را به طور خطی به $\mathscr{D}(T)$، یعنی مجموعهٔ تمام ترکیبات خطی ***متناهی*** از بردارهای پایهٔ e_n، وسعت دهید. نشان دهید که نمودار این T در $H \times H$ چگال است.

٤. فرض کنید T یک عملگر بستهٔ به طور چگال تعریف شده در H بوده و $T^*T \subset TT^*$. آیا نرمال بودن T نتیجه می‌شود؟

۵. فرض کنید T یک عملگر به طور چگال تعریف شده در H بوده و به ازای هر $x \in \mathscr{D}(T)$، $(Tx, x) = 0$. آیا به ازای هر $x \in \mathscr{D}(T)$، $Tx = 0$؟

٦. اگر T یک عملگر در H باشد، تعریف کنید

$$\mathscr{N}(T)=\{x\in\mathscr{D}(T): Tx=0\}.$$

اگر $\mathscr{D}(T)$ چگال باشد، ثابت کنید

$$\mathscr{N}(T^*)=\mathscr{R}(T)^{\perp}\cap\mathscr{D}(T^*).$$

اگر T بسته نیز باشد، ثابت کنید

$$\mathscr{N}(T)=\mathscr{R}(T^*)^{\perp}\cap\mathscr{D}(T).$$

این قضیهٔ ۱۰.۱۲ را تعمیم می‌دهد.

۷. سه مسئله با مقدار مرزی زیر را در نظر بگیرید. معادلهٔ دیفرانسیل به صورت زیر است:

$$f''-f=g,$$

که در آن $g\in L^2([0,1])$ داده شده است. انتخابهایی از شرایط مرزی عبارتند از

(یک) $f(0)=f(1)=0$؛

(دو) $f'(0)=f'(1)=0$؛

(سه) $f(0)=f(1)$ و $f'(0)=f'(1)$.

نشان دهید که هریک از این مسائل جواب منحصر به فردی مانند f دارد به طوری که f' مطلقاً پیوسته بوده و $f''\in L^2([0,1])$. ***راهنمایی.*** مثال ۴.۱۳ را با قضیهٔ ۱۳.۱۳ تلفیق نمایید.

این تمرین را با حل صریح مسائل نیز حل نمایید.

۸. (آ) خود الحاقی عملگر T در $L^2(R)$ با تعریف $Tf=if'$ که درآن $\mathscr{D}(T)$ عبارت است از تمام $f\in L^2$ های مطلقاً پیوسته که $f'\in L^2$ را ثابت نمایید.

راهنمایی. ممکن است لازم باشد بدانید که به ازای هر $f\in\mathscr{D}(T)$، وقتی $t\to\pm\infty$، $f(t)\to 0$. این مطلب را ثابت کنید. یا بیشتر ثابت کنید یعنی ثابت کنید هر $f\in\mathscr{D}(T)$ تبدیل فوریهٔ یک L^1− تابع است.

(ب) $g\in L^2(R)$ را ثابت گرفته و با استفاده از قضیهٔ ۱۳.۱۳ ثابت کنید معادلهٔ

$$f''-f=g$$

جواب مطلقاً پیوستهٔ منحصر به فردی مانند $f \in L^۲$ دارد که دارای $f' \in L^۲$ و $f'' \in L^۲$ بوده و f' مطلقاً پیوسته می‌باشد.

همچنین با محاسبهٔ مستقیم ثابت کنید که

$$f(x) = -\frac{۱}{۲}\int_{-\infty}^{x} e^{t-x} g(t)dt - \frac{۱}{۲}\int_{x}^{\infty} e^{x-t} g(t)dt.$$

این جواب را می‌توان به وسیلهٔ تبدیلات فوریه نیز یافت.

۹. فرض کنید $H^۲$ فضای تمام توابع هلوریخت $f(z) = \sum c_n z^n$ در قرص یکهٔ باز باشد که در رابطهٔ

$$\|f\|^۲ = \sum_{n=\circ}^{\infty} |c_n|^۲ < \infty$$

صدق می‌کند. نشان دهید $H^۲$ یک فضای هیلبرت است که از طریق تناظر یک به یک $f \leftrightarrow \{c_n\}$ با $l^۲$ یکریخت می‌باشد.

$V \in \mathscr{B}(H^۲)$ را با $(Vf)(z) = zf(z)$ تعریف کرده و نشان دهید V تبدیل کیلی عملگر متقارن T در $H^۲$ است که با

$$(Tf) = (z) = i\frac{۱+z}{۱-z}f(z)$$

داده می‌شود. بردهای $T+iI$ و $T-iI$ را بیابید. نشان دهید که یکی از این بردها $H^۲$ بوده و دیگری دارای همبعد ۱ است. (قس.مثال. ۲۱.۱۳.)

۱۰. با $H^۲$ تمرین ۹، V را با

$$(Vf)(z) = zf\left(z^۲\right)$$

تعریف کرده و نشان دهید که V یک یکمتری است که تبدیل کیلی یک عملگر متقارن بسته مانند T در $H^۲$ است که اندیسهای کاستی‌اش ∘ و ∞اند.

۱۱. قسمت (پ) لم ۱۸.۱۳ را ثابت کنید.

۱۲. (آ) درقضیهٔ ۲٤.۱۳، عملگرهای $\Psi(f+g)$ و $\Psi(f)+\Psi(g)$ چگونه به هم مربوطند؟

(ب) اگر f و g اندازه‌پذیر بوده و g کراندار باشد، ثابت کنید $\Psi(g)$ مجموعهٔ $\mathscr{D}_f$ را به

توی $\mathscr{D}_f$ می‌نگارد.

(پ) ثابت کنید $\Psi(f) = \Psi(g)$ اگر و فقط اگر $f = g$ تـهـ $[E]$؛ یعنی اگر و فقط اگر

$$E(\{p: f(p) \neq g(p)\}) = \circ .$$

۱۳. آیا عملگر C آمده در برهان قضیهٔ ۳۳.۱۳ نرمال است؟

۱٤. ثابت کنید هر عملگر نرمال N در H (چه کراندار باشد یا نباشد) دارای تجزیهٔ قطبی

$$N = UP = PU$$

است که در آن U یکه‌ای است، P خود الحاق است، و $P \geq \circ$. به علاوه، $\mathscr{D}(P) = \mathscr{D}(N)$.

۱۵. تعمیم زیر از قضیهٔ ۱٦.۱۲ را ثابت کنید: هرگاه $T \in \mathscr{B}(H)$ و M و N عملگرهای نرمال در H بوده و $TM \subset NT$، آنگاه نیز $TM^* \subset N^*T$.

۱٦. فرض کنید T یک عملگر بسته در H بوده، $\mathscr{D}(T) = \mathscr{D}(T^*)$، و به ازای هر $x \in \mathscr{D}(T)$، $\|Tx\| = \|T^*x\|$. ثابت کنید T نرمال است. ***راهنمایی.*** با اثبات

$$(Tx, Ty) = (T^*x, T^*y) \qquad (x \in \mathscr{D}(T), y \in \mathscr{D}(T))$$

شروع کنید.

۱۷. ثابت کنید طیف $\sigma(T)$ عملگر T در H زیرمجموعهٔ بسته‌ای از $\mathbb{C}$ است. (ر.ک. تعریف ۲٦.۱۳) ***راهنمایی.*** هرگاه $S \in \mathscr{B}(H)$ و $ST \subset TS = I$، آنگاه $S(I - \lambda S)^{-1}$ به ازای $|\lambda|$های کوچک معکوس کرانداری از $T-M$ است.

۱۸. قراردهید $\phi(t) = \exp(-t^۲)$ و $S \in \mathscr{B}(L^۲)$ را که $L^۲ = L^۲(R)$ با

$$(Sf)(t) = \phi(t) f(t-۱) \qquad \left(f \in L^۲\right)$$

تعریف کنید؛ درنتیجه $\left(S^۲ f\right)(t) = \phi(t)\phi(t-۱) f(t-۲)$، وغیره. (توجه کنید که S با تجزیهٔ قطبی‌اش $S=PU$ نمایش داده شده است.)

S^* را بیابید. نشان دهید که

$$\left\|S^n\right\| = \exp\left\{-\frac{(n-۱)n(n+۱)}{۱۲}\right\} \qquad (n = ۱,۲,۳,\ldots)$$

و نتیجه بگیرید که S یک به یک است، $\mathscr{R}(S)$ در $L^۲$ چگال است، و $\sigma(S) = \{\circ\}$. T را با قلمرو $\mathscr{D}(T) = \mathscr{R}(S)$ به صورت

$$TSf = f \qquad \left(f \in L^{2}\right)$$

تعریف و ثابت کنید $\sigma(T)$ تهی است.

۱۹. فرض کنید T_1، T_2، و T_3 همانند مثال ۴.۱۳ باشند و قراردهید

$$\mathscr{D}\left(T_4\right) = \left\{f \in \mathscr{D}\left(T_1\right): f(0) = 0\right\}$$

و به ازای هر $f \in \mathscr{D}\left(T_4\right)$ تعریف کنید $T_4 f = if'$.

احکام زیر را ثابت کنید:

(آ) هر $\lambda \in \mathscr{C}$ در طیف نقطه‌ای T_1 است.

(ب) $\sigma(T_2)$ از اعداد $2\pi n$ که در آن n اعداد صحیح را به خود می‌گیرد تشکیل شده است؛ هر یک از اینها در طیف نقطه‌ای T_2 است.

(پ) به ازای هر $\lambda \in \mathscr{C}$، $\mathscr{R}\left(T_3 - \lambda I\right)$ دارای همبعد ۱ است. لذا $\sigma\left(T_3\right) = \mathscr{C}$. طیف نقطه‌ای T_3 تهی می‌باشد.

(ت) $\sigma\left(T_4\right)$ تهی است.

راهنمایی. معادلهٔ دیفرانسیل $if' - \lambda f = g$ را مطالعه کنید.

این نشان می‌دهد که طیف یک عملگر دیفرانسیل چگونه نسبت به قلمروش حساس است (در این حالت نسبت به شرایط مرزی اعمال شده).

۲۰. نشان دهید که هر زیرمجموعهٔ بستهٔ ناتهی $\mathscr{C}$ طیف عملگر نرمالی در H است (اگر $\dim H = \infty$).

۲۱. $Q(t) \in \mathscr{B}\left(L^{2}\right)$ را که در آن $L^{2} = L^{2}(R)$ با

$$(Q(t)f)(s) = f(s+t)$$

تعریف کنید.

(آ) ثابت کنید هر $Q(t)$ یکه‌ای است.

(ب) ثابت کنید $\{Q(t)\}$ درشرایط تعریف ۳۴.۱۳ صدق می‌کند.

(پ) اگر A مولد بی‌نهایت کوچک $\{Q(t)\}$ باشد، ثابت کنید $f \in \mathscr{D}(A)$ اگر و فقط اگر $\int\left|y\hat{f}(y)\right|^{2} dy < \infty$ (که در آن $\hat{f}$ تبدیل فوریهٔ f است) و به ازای هر $f \in \mathscr{D}(A)$، $Af = f'$.

(ت) ثابت کنید $\sigma(A)$ محور موهومی است. به طور دقیقتر، نشان دهید که $A-\lambda I$ به ازای هر $\lambda \in \mathscr{C}$ یک به یک است، λ در مجموعهٔ حلال A است اگر وفقط اگر λ موهومی محض نباشد، و اگر λ موهومی محض باشد، برد $A-\lambda I$ یک زیرفضای چگال حقیقی $L^{۲}$ است.

راهنمایی. $g \in \mathscr{R}(A-\lambda I)$ اگر وفقط اگر $g \in L^{۲}$ و نیز $\hat{g}(y)/(iy-\lambda)$ در $L^{۲}$ است.

۲۲. اگر $f \in H^{۲}$ (ر.ک.تمرین ۹) و $f(z)=\sum c_n z^n$، تعریف کنید

$$[Q(t)f](z)=\sum_{n=۰}^{\infty}(n+۱)^{-t}c_n z^n \qquad (۰\le t<\infty),$$

و نشان دهید که هر $Q(T)$ خود الحاق (و مثبت است). مولد بی‌نهایت کوچک Aی نیمگروه $\{Q(t)\}$ را بیابید. آیا A خود الحاق است؟ نشان دهید که A در نقاط $\log ۱, \log\frac{۱}{۲}, \log\frac{۱}{۳},\ldots$ دارای طیف نقطه‌ای محض است.

۲۳. به ازای $f\in L^{۲}(R)$، $x\in R$، و $۰<y<\infty$ تعریف کنید

$$[Q(y)f](x)=\frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-\xi)^{۲}+y^{۲}}f(\xi)d\xi,$$

و قرار دهید $Q(۰)f=f$. نشان دهید که $\{Q(y): ۰\le y<\infty\}$ در شرایط مذکور در تعریف ۳٤.۱۳ صدق می‌کند و نیز به ازای هر y، $\|Q(y)\|=۱$.

[انتگرال فوق یک تابع توافقی در نیمصفحهٔ بالایی با مقادیر مرزی f را نمایش می‌دهد. خاصیت نیمگروهی $\{Q(y)\}$ را می‌توان از این، و نیز توجه به تبدیلات فوریهٔ توابع $Q(y)f$، به دست آورد.]

قلمرو مولد بی‌نهایت کوچک A از $\{Q(y)\}$ را یافته و ثابت کنید

$$Af=-Hf'$$

که در آن H تبدیل هیلبرت است (فصل ۷، تمرین ٢٤).

ثابت کنید $-A$ مثبت و خود الحاق است.

٢٤. نشان دهید که هر عملگر یکمتر در H دارای توسیع یکمتر بسته است.

٢٥. از آن سو، با کامل کردن شرح مختصر زیر، نشان دهید که بعضی از عملگرهای

متقارن در H دارای توسیع متقارن بسته نیستند.

فرض کنید $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ یک پایهٔ متعامدیکهٔ H باشد. همچنین X مجموعهٔ تمام مجموعهای متناهی $\sum \alpha_i e_i$ تحت شرط $\sum \alpha_i = 0$ باشد. ثابت کنید X یک زیرفضای چگال H است. $U \in \mathscr{B}(H)$ را با

$$U\left(\sum_1^\infty \alpha_i e_i\right) = \alpha_1 e_1 - \sum_2^\infty \alpha_i e_i$$

تعریف کرده و فرض کنید V تحدید U به X باشد. در این صورت V یک یکمتری با $\mathscr{D}(V) = X$ است و $I-V$ بر X یک به یک است. لذا V تبدیل کیلی یک عملگر متقارن مانند T می‌باشد. هر توسیع متقارن بستهٔ T نظیر یک توسیع یکمتر بسته مانند V_1 از V است که $I - V_1$ یک به یک می‌باشد. ولی $\mathscr{D}(V)$ در H چگال است؛ لذا V فقط یک توسیع یکمتر بسته دارد، یعنی U ، و $I-U$ یک به یک نیست.

ضمیمهٔ آ

فشردگی و پیوستگی

ض۱ مجموعه‌های جزئی مرتب. مجموعهٔ $\mathscr{P}$ را به وسیلهٔ رابطهٔ دوتایی $\le$ **جزئی مرتب** گوییم اگر

(یک) $a \le b$ و $b \le c$ ایجاب کنند که $a \le c$؛

(دو) به ازای هر $a \in \mathscr{P}$، $a \le a$؛

(سه) $a \le b$ و $b \le a$ ایجاب کنند که $a = b$.

زیرمجموعهٔ Q از مجموعهٔ جزئی مرتب $\mathscr{P}$ را ***کلی مرتب*** گوییم اگر هر جفت $a,b \in Q$ در $a \le b$ یا $b \le a$ صدق نماید.

قضیهٔ ماکزیمالی هاسدورف می‌گوید:

هر مجموعهٔ جزئی مرتب ناتهی مانند $\mathscr{P}$ شامل یک زیرمجموعهٔ کلی مرتب مانند Q است که نسبت به خاصیت کلی مرتب ماکزیمال است.

در مرجع [۲۳] می‌توان برهانی (که در آن از اصل موضوع انتخاب استفاده شده) یافت. کاربردهای صریح این قضیه دربرهانهای قضیهٔ هان - باناخ، قضیهٔ کرین - میلمن، و این قضیه که هر ایده‌آل حقیقی در یک حلقهٔ تعویضپذیر با یکه دریک ایده‌آل ماکزیمال قراردارد رخ می‌دهد. حال این قضیه بار دیگر (ض ۲) به کار رفته و راه را برای یک برهان آسان قضیهٔ تیخنف هموار می‌سازد.

ض۲ زیرپایه‌ها. گردایهٔ $\mathscr{L}$ از زیرمجموعه‌های باز فضای توپولوژیک X را یک ***زیر پایه*** برای توپولوژی τ از X نامیم اگر گردایهٔ تمام اشتراکهای متناهی از اعضای $\mathscr{L}$ یک پایه برای τ تشکیل دهند. (ر.ک. بخش ۵.۱). هر زیرگردایه از $\mathscr{L}$ که اجتماعش X باشد یک $\mathscr{L}$- پوشش از X نام دارد. بنابر تعریف، X در صورتی فشرده است که هر پوشش باز X یک زیرپوشش متناهی داشته باشد. کافی است این خاصیت برای $\mathscr{L}$- پوششها تحقیق شود:

قضیهٔ زیرپایهٔ الکساندر (*Alexander*). ***هرگاه $\mathscr{L}$ یک زیرپایه برای توپولوژی فضای X بوده و هر $\mathscr{L}$- پوشش X زیرپوششی متناهی داشته باشد، آنگاه X فشرده می‌باشد.***

برهان. فرض کنیم X فشرده نباشد. از این نتیجه می‌گیریم که X دارای یک $\mathscr{L}$- پوشش مانند $\tilde{\Gamma}$ بدون زیرپوشش متناهی است.

فرض کنیم $\mathscr{P}$ گردایهٔ تمام پوششهای باز X باشد که زیرپوشش متناهی ندارند. طبق فرض، $\mathscr{P} \neq \varnothing$. $\mathscr{P}$ را به وسیلهٔ شمول جزئی مرتب کرده، فرض می‌کنیم Ω یک زیرگردایهٔ کلی مرتب ماکزیمال از $\mathscr{P}$ بوده، و Γ اجتماع تمام اعضای Ω باشد. در این صورت

(آ) Γ یک پوشش باز X است،

(ب) Γ زیرپوشش متناهی ندارد، ولی

(پ) به ازای هر $V \notin \Gamma$ی باز، $\Gamma \cup \{V\}$ زیرپوششی متناهی دارد.

قسمت (آ) واضح است. چون Ω کلی مرتب است، هر زیرخانوادهٔ متناهی از Γ در عضوی از Ω قراردارد، درنتیجه نمی‌تواند X را بپوشاند؛ این امر (ب)را به دست می‌دهد، و (پ) از ماکزیمال بودن Ω نتیجه می‌شود.

قرار می‌دهیم $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cap \mathscr{L}$. چون $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$، قسمت (ب) ایجاب می‌کند که $\tilde{\Gamma}$ زیرپوشش متناهی ندارد. برای اتمام برهان،نشان می‌دهیم که $\tilde{\Gamma}$ فضای X را می‌پوشاند.

اگر نپوشاند، $x \in X$ی به وسیلهٔ $\tilde{\Gamma}$ پوشیده نمی‌شود. بنابر (آ)، به ازای $W \in \Gamma$ای $x \in W$. چون $\mathscr{L}$ یک زیرپایه است، مجموعه‌هایی مانند $V_1, \ldots, V_n \in \mathscr{L}$ چنان وجود دارند که $x \in \cap V_i \subset W$. چون x توسط $\tilde{\Gamma}$ پوشیده نمی‌شود، هیچ V_iی متعلق به Γ نیست. لذا (پ) ایجاب می‌کند که مجموعه‌هایی مانند Y_1،...، Y_n وجود دارند که هریک اجتماعی متناهی از اعضای Γاند و به ازای $1 \le i \le n$، $X = V_i \cup Y_i$. لذا،

$$X = Y_1 \cup \ldots \cup Y_n \cup \bigcap_{i=1}^{n} V_i \subset Y_1 \cup \ldots \cup Y_n \cup W,$$

که (ب) را نقض خواهد کرد.

ض۳ قضیهٔ تیخنف. هرگاه X حاصل ضرب دکارتی گردایه‌ای ناتهی از فضاهای فشردهٔ X_α باشد، آنگاه X فشرده است.

برهان. هرگاه $\pi_\alpha(x)$ مختص X_α نقطه‌ای مانند $x \in X$ باشد، آنگاه، طبق تعریف، توپولوژی X ضعیفترین توپولوژیی است که هر $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ را پیوسته می‌سازد؛ ر.ک. بخش ۸.۳ . فرض کنیم $\mathscr{L}_\alpha$ گردایهٔ تمام مجموعه‌های $\pi_\pi^{-1}(V_\alpha)$ باشد که درآنها V_α زیرمجموعهٔ بازی از X_α است. اگر $\mathscr{L}$ اجتماع تمام $\mathscr{L}_\alpha$ها باشد، $\mathscr{L}$ زیرپایه‌ای برای توپولوژی X می‌باشد.

فرض کنیم Γ یک $\mathscr{L}$ - پوشش X باشد. قرار می‌دهیم $\Gamma_\alpha = \Gamma \cap \mathscr{L}_\alpha$. فرض کنیم (برای به دست آوردن تناقض) هیچ Γ_αای X را نپوشاند. در این صورت به

هر αنقطه‌ای مانند $x_\alpha \in X_\alpha$ چنان نظیر است که Γ_α هیچ نقطه‌ای از مجموعهٔ $\pi_\alpha^{-1}(x_\alpha)$ را نمی‌پوشاند،و هرگاه $x \in X$ طوری اختیار شود کــه $\pi_\alpha(x) = x_\alpha$، آنگـاه x توسـط Γ پوشیده نمی‌شود. ولی Γ یک پوشش X است.

لذا دست کم یک Γ_α فضای X را می‌پوشاند. چون X_α فشرده است، زیرگردایه‌ای متناهی از Γ_α فضای X را می‌پوشاند. و چـون $\Gamma_\alpha \subset \Gamma$، Γ زیرپوششـی متنـاهی دارد، و حال قضیهٔ الکساندر ایجاب می‌کند که X فشرده است.

ض ٤ قضیه. هرگاه K زیرمجموعهٔ بسته‌ای از فضای متری تام X باشـد، آنگـاه سـه خاصیت زیر هم ارزند:

(آ) K فشرده است؛

(بـ) هر زیرمجموعهٔ نامتناهی از K یک نقطهٔ حدی در K دارد.

(پـ) K کلاً کراندار است.

یادآور می‌شویم که (پـ)یعنی K را می‌توان با تعدادی متناهی گوی بـه شـعاع ε بـه ازای هر $\varepsilon > 0$ پوشانید.

برهان. فرض کنیم (آ) برقرارباشد. اگر $E \subset K$ نامتناهی بوده و هیچ نقطه‌ای از K نقطهٔ حدی E نباشد، یک پوشش باز مانند $\{V_\alpha\}$ از K هست بـه طـوری کـه هـر V_α شـامل حداکثر یک نقطه از E است. لذا $\{V_\alpha\}$ زیرپوشش متناهی ندارد که یـک تنـاقض اسـت. بنابراین (آ) قسمت (بـ)را ایجاب می‌کند.

قسمت (بــ) را فـرض کـرده، $\varepsilon > 0$ را ثـابت گرفتــه، و فـرض می‌کنیـم d مـتر X باشد. $x_1 \in K$را اختیار می‌کنیم. فرض کنیم x_1،...،x_n در K طوری اختیار شده باشند کـه اگر $i \neq j$ ، $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$. در صــورت امکـان، $x_{n+1} \in K$ را طـوری می‌گـیریم کـه بـه ازای $1 \leq i \leq n$، $d(x_i, x_{n+1}) \geq \varepsilon$. این فرایند بـاید بـه خـاطر (بـ)پس از چنـد مرحلـه

متوقف شود. در این صورت ε- گویها به مرکز x_1،...،x_n مجموعهٔ K را می‌پوشانند. لذا (ب) قسمت (پ) را ایجاب می‌کند.

قسمت (پ) را فرض کرده، Γ را پوشش بازی از K گرفته، و (برای رسیدن به تناقض) فرض می‌کنیم هیچ زیرگردایه‌ای متناهی از Γ، K را نپوشاند. بنابر (پ)، K اجتماع تعدادی متناهی مجموعهٔ بسته با قطر نابیشتر از ۱ است. یکی از اینها، مثلاً K_1، نمی‌تواند با تعدادی متناهی از اعضای Γ پوشیده شود. این کار را با K_1 به جای K کرده و ادامه می‌دهیم. نتیجه دنباله‌ای است از مجموعه‌های بستهٔ K_i به طوری که

(یک) $K \supset K_1 \supset K_2 \supseteq \dots$،

(دو) $diam\, K_n \leq 1/n$، و

(سه) هیچ K_nی را نمی‌توان به وسیلهٔ تعدادی متناهی از اعضای Γ پوشانید.

$x_n \in K_n$ را اختیار می‌کنیم. بنا بر (یک) و (دو)، $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ کشی است که (چون X تام بوده و هر K_n بسته است) همگرا به نقطه‌ای مانند $x \in \bigcap K_n$ می‌باشد. لذا، به ازای $V \in \Gamma$ای، $x \in V$. بنابر (دو)، وقتی n به قدر کافی بزرگ باشد، $K_n \subset V$. این قسمت (سه) را نقض خواهدکرد. لذا (پ)قسمت (آ) را ایجاب می‌کند.

توجه کنید که تمامیت X فقط برای رفتن از (پ) به (آ) به کاررفت. درواقع، (آ) و (ب) درهر فضای متری هم ارزند.

ض ۵ قضیهٔ آسکولی ($Ascoli$) . *فرض کنیم X یک فضای فشرده بوده، $C(X)$ فضای باناخ با نرم سوپرمم تمام توابع مختلط پیوسته بر X باشد، و $\Phi \subset C(X)$ نقطه به نقطه کراندار و همپیوسته باشد. به طور صریحتر،*

(آ) به ازای هر $x \in X$، $\sup\{|f(x)|: f \in \Phi\} < \infty$، و

(ب) اگر $\varepsilon > 0$، هر $x \in X$ همسایگیی چون V داشته به طوری که به ازای هر $y \in V$ و هر $f \in \Phi$، $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

دراین صورت Φ در $C(X)$ کلاً کراندار است.

نتیجه. چون $C(X)$ تام است، بست Φ فشرده است، و هر دنباله در Φ شامل یک زیردنبالهٔ به طور یکنواخت همگراست.

برهان. $\varepsilon > 0$ را ثابت می‌گیریم. چون X فشرده است، قسمت (ب) نشان می‌دهد که نقاطی مانند $x_1,\dots,x_n \in X$ با همسایگیهای V_1،...،V_n هست به طوری که $X = \bigcup V_i$ و

$$|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon \qquad (f \in \Phi, x \in V_i, 1 \le i \le n). \tag{1}$$

اگر (آ) را بر x_1،...، x_n به جای x اعمال کنیم، از (۱) معلوم می‌شود که Φ به طور یکنواخت کراندار است:

$$\sup\{|f(x)| : x \in X, f \in \Phi\} = M < \infty . \tag{2}$$

قرار می‌دهیم $D = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le M\}$، و به هر $f \in \Phi$ نقطه‌ای مانند $p(f) \in D^n \subset \mathbb{C}$ به صورت

$$p(f) = \big(f(x_1), \dots, f(x_n)\big) \tag{3}$$

مربوط می‌سازیم. چون D^n اجتماعی متناهی از مجموعه‌ها به قطر کوچکتر از ε است، $f_1,\dots,f_m \in \Phi$ ی چنان وجود دارند که هر $p(f)$ درفاصلهٔ کمتر از ε تا $p(f_k)$ ای قرار دارد. اگر $f \in \Phi$، k ای هست که $1 \le k \le m$ و

$$|f(x_i) - f_k(x_i)| < \varepsilon \qquad (1 \le i \le n). \tag{4}$$

هر $x \in X$ در V_i ی قراردارد، و به ازای این i

$$|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon \quad \text{و} \quad |f_k(x) - f_k(x_i)| < \varepsilon. \tag{5}$$

لذا، به ازای هر $x \in X$، $|f(x) - f_k(x)| < 3\varepsilon$.

بنابراین 3ε- گویها به مرکز f_1،...، f_k مجموعهٔ Φ را می‌پوشانند. چون ε دلخواه بود، Φ کلاً کراندار می‌باشد.

ض۶ پیوستگی دنباله‌ای. هرگاه X و Y فضاهایی هاسدورف بوده و f فضای X را به توی Y بنگارد، آنگاه گوییم f ***به طور دنباله‌ای پیوسته*** است مشروط بر اینکه به ازای

هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ در X که $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

قضیه

(آ) هرگاه $f: X \to Y$ پیوسته باشد، آنگاه f به طور دنباله‌ای پیوسته است.

(ب) هرگاه $f: X \to Y$ به طور دنباله‌ای پیوسته بوده و هر نقطهٔ X یک پایهٔ موضعی شمارشپذیر داشته باشد (به‌خصوص، X مترپذیر باشد)، آنگاه f پیوسته است.

برهان. (آ) فرض کنیم $x_n \to x$ در X، V یک همسایگی از $f(x)$ در Y بوده، و $U = f^{-1}(V)$. چون f پیوسته است، U یک همسایگی از x است، و لذا به ازای همه جز تعدادی متناهی n، $x_n \in U$. به ازای این n ها، $f(x_n) \in V$. لذا، وقتی $n \to \infty$، $f(x_n) \to f(x)$.

(ب) $x \in X$ را ثابت گرفته، فرض کنیم $\{U_n\}$ یک پایهٔ موضعی شمارشپذیر برای توپولوژی X در x باشد، و f در x پیوسته نباشد. در این صورت یک همسایگی مانند V از $f(x)$ در Y چنان وجود دارد که $f^{-1}(V)$ همسایگی x نیست. لذا دنباله‌ای مانند x_n چنان وجود دارد که $x_n \in U_n$ و وقتی $n \to \infty$، $x_n \to x$، و $x_n \notin f^{-1}(V)$. لذا $f(x_n) \notin V$؛ درنتیجه f به طور دنباله‌ای پیوسته نیست.

ض۷ فضاهای فشردهٔ کلاً ناهمبند. فضای توپولوژیک X را ***کلاً ناهمبند*** نامیم اگر هیچیک از زیرمجموعه‌های همبندش شامل بیش از یک نقطه نباشد.

گوییم مجموعهٔ $E \subset X$ ***همبند*** است اگر هیچ جفت از مجموعه‌های باز مانند V_1، V_2 موجود نباشد که

$$E \subset V_1 \cup V_2 ،\ E \cap V_1 \neq \varnothing ،\ E \cap V_2 \neq \varnothing$$

ولی $E \cap V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

قضیه. ***فرض کنیم $K \subset V \subset X$ که در آن X یک فضای هاسدورف فشرده است، V باز باشد، و K مؤلفه‌ای از X باشد. در این صورت یک مجموعهٔ باز فشرده مانند A هست به طوری که $K \subset A \subset V$.***

نتیجه. ***هرگاه X یک فضای هاسدورف فشردهٔ کلاً ناهمبند باشد، آنگاه زیرمجموعه‌های باز فشردهٔ X یک پایه برای توپولوژی آن تشکیل می‌دهند.***

برهان. فرض کنیم Γ گردایهٔ تمام زیرمجموعه‌های باز فشردهٔ X باشد که شامل K اند. چون $X \in \Gamma$، $\Gamma \neq \varnothing$. فرض کنیم H اشتراک تمام اعضای Γ باشد.

فرض کنیم $H \subset W$ که در آن W باز است. متممهای اعضای Γ یک پوشش باز برای متمم فشردهٔ W تشکیل می‌دهند. چون Γ تحت اشتراکهای متناهی بسته است، پس به ازای $A \in \Gamma$ ای، $A \subset W$.

حکم می‌کنیم که H همبند است. برای مشاهدهٔ این امر، فرض می‌کنیم $H = H_0 \cup H_1$ که در آن H_0 و H_1 مجموعه‌های فشردهٔ از هم جدایند. چون $K \subset H$ و K همبند است، K در یکی از اینها قرار دارد. مثلاً $K \subset H_0$. بنا بر لم اوریزون، مجموعه‌های باز از هم جدایی مانند W_0 و W_1 چنان وجود دارند که $H_0 \subset W_0$ و $H_1 \subset W_1$، و بند پیشین نشان می‌دهد که $A \in \Gamma$ ای هست که در $A \subset W_0 \cup W_1$ صدق می‌کند. قرار می‌دهیم $A_0 = A \cap W_0$. در این صورت $K \subset A_0$، A_0 باز است، و A_0 فشرده است زیرا $A \cap W_0 = A \cap \overline{W}_0$. لذا $A_0 \in \Gamma$. چون $H \subset A_0$، پس $H_1 = \varnothing$.

لذا H همبند است. چون $K \subset H$ و K یک مؤلفه است، می‌بینیم که $K = H$. استدلال پیشگفته با K و V به جای H و W نشان می‌دهد که به ازای $A \in \Gamma$ ای، $A \subset V$.

ضمیمهٔ ب

نکات و یادداشتها

تمایل مجرد درآنالیز که به آنچه امروزه ***آنالیز تابعی*** معروف است منجر شد در اوایل این قرن با کار ولترا (*Volterra*)، فردهولم (*Fredholm*)، هیلبرت، فرشه، و اف.ریس و دیگران آغاز شد. این افراد معادلات انتگرال، مسائل مقدار ویژه‌ای، بسطهای متعامد، و اعمال خطی در حالت کلی را مطالعه کردند. البته تولد انتگرال لبگ در همین زمان حادثه‌ای تصادفی نبود.

اصول موضوع فضای نرمدار در کارهای اف.ریس بر عملگرهای فشرده در $C([a,b])$ دیده می‌شود (*Acta Math.*, vol. 41,pp.71-98, 1918)، اما اولین بحث مجرد این مبحث در رسالهٔ ۱۹۲۰ باناخ است (*Fundam.Math.*,vol.3,pp.133-181,1922). کتاب وی [۲] که در سال ۱۹۳۲ منتشر شد اثر عمیقی بر همگان داشته است. این کتاب شامل نظریهٔ اصلی فضاهای باناخ است ولی با حذفیاتی چند که از دید بهره‌وری ما عجیب به نظر می‌رسند.

یکی از این حذفیات غیاب کامل اسکالرهای مختلط است، گرچه وینر دریافت (*Fundam.Math.*,vol.4,pp.136-143,1923) که اصول موضوع را می‌توان روی $\mathcal{C}$ نیز

به خوبی تنظیم کرد، و، مهمتر آنکه، سپس می‌توان یک نظریهٔ توابع هلوریخت فضای باناخ مقدار ایجاد نمود که ویژگیهای اصلی‌اش خیلی شبیه حالت کلاسیک مختلط باشد. تا سال ۱۹۳۸ در این باب کار بسیار کمی صورت گرفت. (ر.ک. یادداشتهای مربوط به فصل۳ در این ضمیمه.)

با نگاهی به گذشته می‌بینیم که بحث باناخ از همگرایی ضعیف که به تحقیق یکی از مهمترین کارهای وی در این زمینه است پرمعماتر می‌باشد. با وجود گسترش دقیق توپولوژی در دههٔ بیست، و توصیف فون‌نویمان از همسایگیهای ضعیف در فضاهای هیلبرت و درجبرهای عملگری (*Math.Ann.*,vol.102,pp.370-427,1930; see p.379)، باناخ فقط به ***دنباله‌ای*** به طور ضعیف همگرا پرداخته است. چون الحاق تمام حدود زیردنباله‌های به طور ضعیف همگرای یک مجموعه ضرورتاً به یک مجموعهٔ به طور ضعیف و به طور دنباله‌ای بسته منجر نمی‌شود (ر.ک.تمرین ۹، فصل ۳)، وی گرفتار نمادهای پیچیده‌ای مانند بستهای ترانسفینی شده است ولی هرگز از مفهوم بسیار ساده‌تر و متقاعدکننده‌تر ***توپولوژی ضعیف***[1] استفاده نکرده است.

در مرجع [۲] گهگاه مفروضات جدایی‌پذیری غیرضرور عنوان شده است. این امر در اصل موضوعی‌سازی فون‌نویمان از فضای هیلبرت نیز صورت گرفته است (*Math. Ann.*,vol.102,pp.49-131,1930)، که در آن جدایی‌پذیری در خواص معرف گنجانده شده است. او در این مقالهٔ اساسی راجع به عملگرهای بی‌کران، قضیهٔ طیفی را برای آنها ثابت کرده و بدین ترتیب آنچه را که هیلبرت برای عملگرهای کراندار بیست سال پیشتر انجام داده بود تعمیم داده است. کار اساسی دیگر در نظریهٔ عملگرها در کتاب ام.اچ.استون (مرجع [۲۸]) در ۱۹۳۲ صورت گرفته است.

با آنکه توابع پیوسته نقش مهمی در کتاب باناخ دارند، ولی وی فقط ساختار

---

۱ . باناخ به وضوح یکی از قهرمانان اصلی این داستان است. نکات پیشگفته (همانطور که بعضی از خوانندگان چاپ اول تصور کرده‌اند) به هیچوجه به قصد توهین یا تنزل اهمیت و اصالت کارهای وی بیان نشده است. تنها هدف اشاره به تفاوت ریاضیات امروز با ریاضیات زمان وی می‌باشد.

فضای‌برداری آنها را در نظر می‌گیرد؛ آنها هرگز در هم ضرب نشده‌اند. اما ضرب برای مدتی طولانی فراموش نشد. وینر در کارهایش راجع به قضیهٔ تاوبری (*Ann.Math.*,vol.33,pp.1-100,1932) این امر را که فضای باناخ سریهای فوریهٔ مطلقاً همگرا در نامساوی ضربی $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ صدق می‌کند بیان کرده و آن را به کاربرد. تعمیم ام.اچ.استون قضیهٔ تقریب وایراشتراس (*Trans.Amer. Math. Soc.*, vol.41, pp. 375-481, 1937; especially pp.453 -431) بی‌شک معروفترین مورد در به کارگیری صریح ساختار حلقه‌ای فضاهای توابع پیوسته است. علاقهٔ فون نویمان به نظریهٔ عملگرها، که از مکانیک کوانتم ناشی شده بود، وی را به بررسی اصولی جبرهای عملگری هدایت کرد. ام.ناگومو (*M.Nagumo*) (*Jap.J.Math.*,vol,13,pp.61-80,1936) مطالعهٔ مجرد حلقه‌های نرمدار را آغاز کرد. ولی آنچه این مبحث را واقعاً تکان داد کشف نقش مهم ایده‌آلهای ماکزیمال یک جبر تعویضپذیر توسط گلفاند (*Mat.Sbornik N.S.*,vol,9,pp.3-24,1941) و ساختمانی از وی است که امروزه آن را تبدیل گلفاند می‌گویند.

پیش از دههٔ چهل، توجه متخصصان آنالیز تابعی منحصراً به سوی فضاهای ***نرمدار*** بود. نخستین مقالهٔ مهم راجع به نظریهٔ عمومی فضاهای موضعاً محدب از آن ژ.دیودونه (*J.Dieudonné*) و ال.شوارتز در (*Ann.Inst. Fourier* (*Grenable*), vol,1,pp.61-101,1949) است. یکی از انگیزه‌های اصلی این مقاله ساختمان نظریهٔ توزیعها توسط شوارتز [۲۶] است. (نخستین ویرایش این کتاب در سال ۱۹۵۰ منتشر شده است). شوارتز نیز مانند باناخ و گلفاند دارای سلف بوده است. همانطور که بوچنر در مرور کتاب شوارتز قید کرده است (*Bull. Amer.Math.Soc.*,vol.58,pp.78-85,1952)، ایدهٔ "توابع تعمیم یافته" لااقل به ریمان می‌رسد. این ایده در کتاب بوچنر:

Vorlesungen über Fouriersche Integrale (Leipzig, 1932)

به کاررفته است. کتاب فوق نقش بسیار مهمی در بسط آنالیز توافقی داشته است. کارهای سوبولف نیز قبل از شوراتز بوده است. ولی این شوارتز بود که همه را در یک ساختار بسیار کلی با عملکرد بسیار هموار گردآورد که کاربردهای زیادی به خصوص

در معادلات دیفرانسیل جزئی پیدا کرد.

مقالات تشریحی زیر بخشی از تاریخچهٔ این مبحث را با توضیح بیشتر توصیف می‌کنند.

Bonsall,F.F.:"A Survey of Banach Algebra Theory," *Bull. London Math. Soc.*,vol.2,pp.257-274,1970.
Hildebrandt,T.H.:"Integration in Abstract Spaces," *Bull. Amer. Math. Soc.*,vol.59,pp.111-139,1953.
Horva'th ,J.:"An Introduction to Distributions," *Amer. Math. Monthly,* vol.77,pp.227-240,1970.
Lorch, E.R.:"The Structure of Normed Abelian Rings," *Bull. Amer . Math. Soc.*,vol.50.pp.447-463,1944.
Taylor,A.E.:"Notes on the History and Uses of Analyticity in Operator Theory," *Amer. Math. Monthly,* vol. 78,pp.331-342, 1971.
Tre`ves, F.: "Applicatoins of Distributions to PDE Theory," *Amer. Math. Monthly,* vol.77,pp.241-248,1970.

جلد یک سری *Studies in Mathematics* (که در

Mathematical Association of America, 1962, editedbly R.C.Buck

چاپ شده است) شامل مقالات زیر است:

Goffman,C.:"Preliminaries to Functional Analysis"
Lorch, E.R.: "The Spectual Theorem"
Mc Shane, E.J. : "A Theory of Limits"
Stone, M.H. : "A Generalized Weierstrass Approximation Theorm"

دو شمارهٔ خاص از *Bull . Amer. Math. Soc* هست یکی در مه ۱۹۵۸ که به کارهای جان فون نویمان اختصاص دارد و دیگری در ژانویهٔ ۱۹۶۶ که مختص کارهای نوربرت وینر است.

در کتاب دیودونه (مرجع [۳۶]) ریشه‌های آنالیز تابعی به خوبی توصیف شده است. حال برای چند موضوع مطرح شده در متن، مراجع مشروح را ذکر خواهیم کرد.

فصل ۱

برای نظریهٔ عمومی فضاهای برداری توپولوژیک، ر.ک. مرجعهای [۵]، [۱۴]، [۱۵]، [۳۱]، و [۳۲].

بخش ۸.۱ (ث). در تعریف باناخ از یک F – فضا، وی فقط پیوستگی ***جداگانهٔ*** ضرب اسکالر را اصل گرفت و ثابت کرد که پیوستگی متصل یک نتیجه است. برای یک برهان مبتنی بر قضیهٔ بئر، ر.ک. مرجع [٤]، صفحات ۵۳–۵۱. در برهان دیگر (که به اس.کاکوتانی منسوب است) تمامیت X لازم نیست ولی در آن از اندازهٔ لبگ در میدان اسکالر استفاده شده است؛ ر.ک.مرجع [۳۳]، صفحات ۳۲–۳۱.

قضیهٔ ۲٤.۱. این قضیهٔ متری‌سازی اول بار (در محدودهٔ کلیتر گروههای توپولوژیک) توسط جی.بیرکف (*G.Birkhoff, Compositio Math.*,vol.3,pp.427-430,1936) و توسط اس. کاکوتانی (*Proc.Imp.Acad.Tokyo*,vol.12, 128-142, 1936) ثابت شد. قسمت (ت) این قضیه احتمالاً جدید است.

بخش ۳۳.۱. تابعی منیکوفسکی یک مجموعهٔ محدب را گاهی ***تابع محافظ*** آن می‌نامند. قضیهٔ ۳۹.۱ منسوب است به ا.کلموگروف (*A.Kolmogorov Studia , Math.*, vol.5, pp.29-33, 1934). این اولین قضیه راجع به فضاهای موضعاً محدب می‌باشد.

بخش ٤٦.۱. ساختن تابع g به وسیلهٔ تکرار متوسط‌گیری را می‌توان در

pp.80-84 of *S.Mandelbrojt's* 1942 *Rice Institute Pamphlet "Analytic Functions and Classes of Infinitely Differentiable Functions"*

که به افتخار اچ.ای.بری (*H.E.Bray*) اختصاص یافته مشاهده کرد.

بخش ٤۷.۱. درمیان F– فضاهایی که موضعاً محدب نبوده ولی به قدر کافی تابعی خطی پیوسته که نقاط را جداسازند دارند بعضی از زیرفضاهایی از L^p، یعنی H^p – فضاها (با $0<p<1$) مورد توجه‌اند. برای مطالعهٔ مشروح اینها، ر.ک.مقالهٔ پی.ال.دورن (*P.L.Duren*)، بی.دبلیو. رومبرگ (*B.W.Romberg*) و ا.ال. شیلدز (*A.L.Shields*) در

J.Reine Angew.Math., vol,238,pp.32-60,1969

و مقالات نگاشته توسط دورن و شیلدز در

Trans. Amer. Math. Soc.,vol.141, pp.255-262,1969

و در

Pac.J.Math.,vol,32,pp.69-78,1970

و نیز مرجع [۴۰].

فصل ۲

تمام نتایج این فصل اساساً در [۲]اند.

تمرین ۱۱. چارلز هوروویتز (*Charles Horowitz*) یک نگاشت دو خطی از $R^3 \times R^3$ ***به روی*** R^4 ساخته است که در (۰,۰) باز نیست؛ ر.ک.

Proc.Amer. Math. Soc.,vol.53, pp.293-294, 1975

پی. ج. کوهن (*P.J.Cohen. J.Func. Anal.*, vol.16,pp.235-239, 1974) قبلاً مثال بسیار پیچیده‌تری، یعنی نگاشتی از $l^1 \times l^1$ به روی l^1 ، ساخته بود.

تمرین ۱۳. یک **بشکه** مجموعه‌ای است بسته، محدب، در حال تعادل، و جاذب. یک فضا را ***بشکه‌ای*** نامیم اگر هر بشکه شامل همسایه‌ای از ۰ باشد. تمرین ۱۳ می‌گوید: فضاهای برداری توپولوژیک از رستهٔ دوم بشکه‌ای‌اند. فضاهای بشکه‌ای از رستهٔ اول نیز وجود دارند، و بعضی از روایات قضیهٔ باناخ - اشتاین هاوس برای آنها معتبر است. ر.ک. مرجع [۱۴]، ص. ۱۰۴؛ همچنین ر.ک.[۱۵]. فضاهای بشکه‌ای با خاصیت هاینه - بورل را اغلب ***فضاهای مونتل*** می‌نامند؛ ر.ک. بخش ۱.۴۵.

فصل ۳

قضیهٔ ۲.۳ در مرجع [۲] است. قضیهٔ ۳.۳ ، به صورت مختلط آن، توسط اچ.اف بوهنن بلاست (*H.F.Bohnenblust*) و ا.سوبچک (*A.Sobczyk*) :

Bull . Amer. Math. Soc., vol. 44,pp.91-93, 1938

و توسط جی.ا. سوخوملینوف (*G.A.Soukhomlinoff*) :

Mat. Sbornik , vol. 3,pp.353-358, 1938

ثابت شده است. در مقالهٔ اخیر اسکالرهای چهارگانی نیز در نظر گرفته شده است. در

Proc. Amer. Math. Soc., vol. 50,pp.322-327, 1975

ج.ا.آر. هولبروک (*J.A.R.Holbrook*) برهانی را عرضه کرد که در آن اسکالرهای حقیقی

جداگانه مطرح نشده‌اند، و وی صورت ساده شده‌ای از کارهای ناچبین (*Nachbin*) در توسیعهای هان - باناخ از تبدیلات خطی (به جای تابعیهای خطی) را گنجانده است؛ ر.ک.

Trans. Amer. Math.Soc.,vol.68,pp.28-46, 1950.

قضیهٔ ٦.٣. برای عکس ناقصی از آن، ر.ک.

J.H.Shapiro, Duke Math.J., vol,37,pp.639-643,1970.

قضیهٔ ۱۵.۳. ر.ک

L.Alaoglu, Ann.Math., vol,41,pp.252-267,1940.

برای فضاهای باناخ جدایی‌پذیر، قضیه در مرجع [۲]، ص ۱۲۳ آمده است.

قضیهٔ ۱۸.۳. یک برهان کوتاهتر، که مبتنی بر نیم‌نرمهاست، در صفحهٔ ۲۲۳ مرجع [۳۲] یافت می‌شود.

بخش ۲۲.۳. در بعضی از F– فضاها مجموعه‌های محدب فشرده‌ای بدون نقطهٔ اکستریم وجود دارند. ر.ک. مرجع [٤٠].

قضیهٔ ۲۳.۳ توسط ام. کرین و دی. میلمن در

Studia Math, vol.9,pp.133-1940

برای زیرمجموعه‌های محدب ضعیف*–فشرده دوگان یک فضای باناخ ثابت شده است.

قضیهٔ ۲۵.۳ در

Dokl.Akad. Nauk SSSR, vol.57,pp.119-122,1947

ظاهر شده است.

تاریخچهٔ انتگرالگیری‌برداری توسط تی.اچ. هیلدبرانت (*T.H.Hildebrandt*) در

Bull. Amer. Math. Soc., vol. 59,pp.111-139, 1953

توصیف شده است. انتگرال "ضعیف" تعریف ٢٦.٣ توسط

*B.J.Pettis, Trans. Amer. Math.Soc.,*vol.44,pp.277-304,1938

مطرح شده است.

تاریخچهٔ توابع هلوریخت‌برداری توسط ا.ای.تیلور (*A.E.Taylor*) در

Amer. Math. Monthly, vol. 78,pp.331-342, 1971

توصیف شده است.

قضیهٔ ۳۱.۳. این امر که توابع به طور ضعیف هلوریخت (با مقادیر در یک فضای باناخ مختلط) قویاً هلوریخت‌اند توسط ان. دانفورد (*N.Dunford*) در

Trans. Amer.Math.Soc.,vol.44,pp.304-356, 1938

ثابت شده است.

قضیهٔ ۳۲.۳ توسط ا.ای. تیلور برای اثبات اینکه طیف هر عملگر خطی کراندار بر یک فضای باناخ مختلط ناتهی است به کاررفته است:

Bull. Amer. Math. Soc.,vol. 44,pp.70-74, 1938.

چون هر جبر باناخ A با زیرجبری از $\mathscr{B}(A)$ یکریخت است (ر.ک.برهان قضیه ۲.۱۰)، نتیجهٔ تیلور شامل قسمت (آ) قضیهٔ ۱۳.۱۰ می‌باشد.

تمرین ۹ از فون نویمان است:

Math.Ann.,vol.102,pp.370-427, 1930; see p.380.

تمرین ۱۰ از یک ساختار آمده در ضمیمهٔ مرجع [۲] تقلید شده است.

تمرین ۲۵. هرگاه k جدایی‌پذیر و متری باشد، آنگاه یک چنین μ حتی بر E به جای بر $\overline{E}$ موجود است. این همان قضیهٔ شوکه (*Choquet*) است. ر.ک.مرجع [۲۰]. برای مقاله‌ای جدید راجع به این، ر.ک.

R.D.Bourgin, Trans. Amer. Math. Soc.,vol. 154,pp. 323-340,1971.

تمرین ۲۸ (پ). این قسمت آسان قضیهٔ ابرلین -اشمولیان (*Eberlein- Šmulian*) است. ر.ک.مرجع [٤]، صفحات ٤۳۳-٤۳۰ و صفحهٔ ٤٦٦. توصیف دیگری از فشردگی ضعیف توسط

R.C.James, Trans. Amer. Math. Soc.,vol. 113,pp. 129-140,1964

داده شده است: مجموعهٔ به طور ضعیف بستهٔ S در فضای باناخ X به طور ضعیف فشرده است اگر و فقط اگر هر $x^* \in X^*$ سوپرمم خود را بر S بگیرد:

تمرین ۳۳. ر.ک.مرجع [١٤]، ص. ١٣٣.

فصل ٤

بخش وسیعی از این فصل در مرجع [۲] است.

عملگرهای فشردهٔ به کاررفته را باید **تماماً پیوسته** نامید. همانطور که توسط هیلبرت (در l^2) تعریف شده است، این یعنی دنباله‌های به طور ضعیف همگرا به دنباله‌های قویاً همگرا نگاشته می‌شوند. تعریف فعلی ما توسط

F.Riesz (*Acta Math.*, vol. 41,pp.71-98, 1918)

داده شده است. دو تعریف در فضاهای منعکس یکی‌اند (تمرین ۱۸).

بخش ٥.٤. آر. سی. جیمز (*R.C.James*) یک فضای باناخ **نامنعکس** مانند X را ساخته است که به طور یکمتر با X^{**} یکریخت است:

Proc. Natl. Acad. Sci. USA, vol. 37,pp.174-177,1951.

قضایای ۱۹.٤ و ۲٥.٤ توسط

J.Schauder (*Studia Math;* vol,2 ,pp.183-196,1930)

ثابت شده است. برای تعمیمهای آنها به قضایای برداری توپولوژیک، ر.ک.

J.H. Williamson, J.London Math. Soc.,vol,29,pp.149-156, 1954;

همچنین ر.ک. مرجع [٥]، فصل ۹.

تمرین ۱۳. یک مسئلهٔ تاریخی این بود که هر عملگر فشرده در هر فضای باناخ جدایی‌پذیر را می‌توان (در نرم عملگری) به وسیلهٔ عملگرهایی با بردهای با بعد متناهی تقریب کرد. اولین مثال نقض توسط پی. انفلو (*P.Enflo*) در

Acta. Math., vol. 130,pp.309-317, 1973

زده شد. (این همچنین به **مسئلهٔ پایه** جواب منفی داد.) اصلاحاتی از این مسئلهٔ تقریب در مرجع [٤۱] مطرح شده‌اند.

تمرین ۱٥. این عملگرها را معمولاً **عملگرهای هیلبرت - اشمیت** (*Schmidt*) می‌نامند. ر.ک.مرجع [٤]، فصل یازده.

تمرین ۱۷. عملگرهای ازاین نوع توسط ا.براون (*A. Brown*)، پی.آر. هالموس (*P.R.Halmos*)، و ا.ال.شیلدز در

Acta Sci. Math. Szeged.,vol.26, pp.125-137, 1965

مطرح شده‌اند.

تمرین ۱۹. این "دوگانی ماکس - مین" توسط دبلیو. دبلیو. روگوزینسکی (*W.W.Rogozinski*) و اچ.اس. شاپیرو (*H.S.Shapiro*) برای به دست آوردن اطلاعات وسیع راجع به برخی از مسائل اکسترمم برای توابع هلوریخت مورد استفاده قرار گرفته است. ر.ک.

Acta. Math., vol. 90,pp.287-318,1953.

تمرین ۲۱. این تمرین توسط ام. کرین و وی. اشمولیان در

Ann. Math., vol. 41,pp.556-583, 1940

ثابت شده است. همچنین ر.ک. مرجع [٤]، صفحات ٤٢٩-٤٢٧.

فصل ۵

قضیهٔ ۱.۵. برای صورت کلیتر، ر.ک.

R.E.Edwards, J.London Math. Soc., vol.32,pp.499-501, 1957.

قضیهٔ ۲.۵ منسوب است به:

A. Grothendieck, Can.J.Math.,vol.6,pp.158-160,1954.

برهانش از برهان داده شده در اینجا کمتر مقدماتی است.

قضیهٔ ۳.۵. برای اطلاعات بیشتر راجع به سریهای مثلثاتی بارخنه، ر.ک.

J.Math. Mech., vol.9,pp.203-228,1960;

همچنین ر.ک. بخش ۵.۷ مرجع [٢٤]، مقالهٔ ج.پی. کاهان (*J.P.Kahane*) در

Bull. Amer. Math. Soc., vol.70,pp.199-213, 1964

و مرجع [٤٢].

قضیهٔ ۵.۵ اول بار توسط ا.لیاپونف (*A.Liapounoff*) ثابت شد:

Bull. Acad. Sci. USSR, vol.4,pp.453-478, 1940.

برهان مذکور در متن منسوب است به

J. Lindenstrauss, J.Math. Mech.,vol.15,pp.971-972, 1966.

ج.ج.اول (*J.J.Uhl, Proc. Amer. Math. Soc.*,vol.23,pp.158-163, 1969) قضیه را به اندازه‌هایی که مقادیرشان در یک فضای باناخ منعکس یا یک فضای دوگان جدایی‌پذیر قراردارند تعمیم داد.

قضیه ۷.۵ . ایدهٔ استفاده ازکرین - میلمـن بـرای اثبـات اسـتون- وایراشـتراس از ال.دوبرانژ (*L.deBranges*) است:

Proc. Amer. Math. Soc., vol.10,pp.822-824, 1959.

تعمیم ای. بیشاپ (*E. Bishop*) در

Pac. J.Math., vol. 11,pp.777-783, 1961

است. برهان مذکور در اینجا ازآن

I.Glicksberg, Trans . Amer. Math. Soc., vol.105,pp.415-435, 1962

است. سی هامبورگر (*C.Hamburger*) به من خاطر نشان کـرد کـه لازم نیسـت فـرض شود که A شامل ثابتهاست. یک روش بسیار مقدماتی برای پرداختـن بـه قضیـهٔ بیشـاب توسط

Mao Chao- Lin, C.R.Acad.Sci. Paris, vol. 301,pp.349-330,1985

به دست آمده است.

قضیهٔ ۹.۵. بیشاب این قضیه را در

Proc. Amer. Math.Soc., vol.13,pp.140-143, 1962

ثابت کرد. برای حالت خاص جبر قرصی ، ر.ک.

Proc. Amer. Math.Soc.,vol.7,pp.808-811, 1956

و مقالهٔ ال.کارلسون (*L.Carleson*) در

Math Z., vol. 66, pp.447-451, 1957.

کاربردهای دیگر در فصل ٦ مرجع [۲۵] و فصل ۱۰ مرجع [٤۵] آمـده اسـت. همچنیـن ر.ک. مرجع [۲۹].

قضیهٔ ۱۰.۵. برهان از کار

M.Heins, Ann. Math. vol.52,pp.568-573, 1950

نتیجه می‌شود که در آن همان روش در ردهٔ وسیعی از مسائل درونیابی به کاررفته است.

قضیهٔ ۱۱.۵ توسط اس. کاکوتانی در

Proc. Imp. Acad. Tokyo, vol.14,pp.242-245, 1938

ثابت شده است. برهان داده شده در اینجا توسط ایزاک نامیوکـا (*Isaac Namioka*) بـه من داده شده و از آن

F- Hahn, Math. Systems Theory. vol. 1,pp 55-57, 1968

است. لم درآخر برهان از به کارگیری تورها و زیرتورها پرهیز می‌کند.

قضیه ۱٤.۵. این ساختن ساده از اندازهٔ هار یک گروه فشرده اساساً همان ساختار فون نویمان است.

Compositio Math., vol. 1,pp.106-114,1934.

ساختن وی مقدماتی‌تر و خودکفاتر ولی کمی طویلتر است زیرا او از قضیهٔ نقطهٔ ثابت استفاده نمی‌کند (در

Trans. Amer. Math. Soc., vol. 36, pp.445-492, 1934

از همان روش برای ساختن مقادیر میانگین توابع تقریباً متناوب استفاده می‌کند.) اگر فشردگی را با فشردگی موضعی عوض کنیم، ساختن اندازهٔ هار مشکلتر می‌شود. ر.ک. مرجعهای [۱۸]، [۱۱]، و [۱٦].

قضیهٔ ۱۸.۵ (برای فضاهای باناخ) در

Proc. Amer. Math. Soc., vol.13,pp.429-432, 1962

ثابت شده است. برای نتایج بیشتر راجع به زیرفضاهای متمم نشده، ر.ک.

H.P.Rosenthal's 1966 AMS Memoir Projections Onto Translation-Invariant Subspaces of $L^p(G)$

و مقاله‌اش در

Acta Math., vol. 124,pp.205-248,1970.

نتایج مثبت نیز وجود دارند. مثلاً $c_\circ$ در هرفضای باناخ جدایی‌پذیر که به عنوان یک زیر فضای بسته شامل آن (به طور یکریخت)است متمم شده است. برهان بسیار کوتاه این قضیه از ا.سوبچک توسط دبلیو.ا.ویچ (*W.A. Veech*) در

Proc. Amer. Math. Soc; vol. 28, pp.627-628, 1971

به دست آمده است.

بخش ۱۹.۵. متمم نشده بودن H^1 در L^1 ابتدا توسط

D.J.Newman, Proc. Amer. Math. Soc., vol.12,pp.98-99, 1961

ثابت شده است. برهان داده شده در اینجا در

Proc. Amer. Math. Soc., vol. 13,pp.429-432, 1962

آمده است.

قضیهٔ ۲۱.۵ . مقالهٔ اف.اف بونسال در

Quart. J.Math. Oxford, vol. 37,pp.129-136, 1986

شامل این قضیه و کاربردهای بیشتر قضیهٔ ۲۲.۵ است.

قضایای ٢٣.٥ و ٢٨.٥. تاریخچهٔ این قضایای نقطهٔ ثابت در صفحات ٤٧١-٤٧٠ مرجع [٤] آمده است. برهانی از قضیهٔ براوئر که هم مقدماتی است و هم ساده در صفحات ٤٠-٣٨ *نظریهٔ ابعاد*

Hurewicz and Wallman, Princeton University Press, Princeton, N.J.,1948

یافت می‌شود.

فصل ٦

البته مرجع متعارف [٢٦] است. همچنین ر.ک. مرجعهای [٥]، [٨]، [٢٧]، [٣١]. مرجع [١٣] شامل آشنایی بسیار مختصری از مبحث می‌باشد.

تعریف ٣.٦. دراینجا $\mathscr{D}(\Omega)$ به عنوان ***حد استقرایی*** فضاهای فرشهٔ $\mathscr{D}_k(\Omega)$ توپولوژی دار شده است. برای بحث اصولی این مفهوم در یک محدودهٔ مجرد، ر.ک. مرجع [١٥]، صفحات ٢٢٥-٢١٧.

فصل ٧

برای جنبه‌هایی از آنالیز فوریه که با توزیعها در ارتباطند، به مرجعهای [٢٦] و [١٣] ارجاع می‌دهیم. جنبه‌های نظریهٔ گروهی مبحث در مرجعهای [١١] و [٢٤] مطرح شده‌اند. کارهای متفاوت روی سریهای فوریه در مرجع [٣٤] است.

قضیهٔ ٤.٧. رابطهٔ نزدیک بین تبدیلات فوریه و مشتقگیری تصادفی نیست؛ سریهای فوریه در قرن هجده به عنوان ابزارهای معادلات دیفرانسیل اختراع شدند.

قضیهٔ ٥.٧ را گاهی لم ریمان - لبگ می‌نامند.

قضیهٔ ٩.٧ اساساً توسط ام. پلانشرل در

Rend. Palermo.,vol,30,pp.289-335,1910

ثابت شده است.

قضایای ٢٢.٧ و ٢٣.٧. این برهانها همانند در[١٣]اند ولی جزئیات بیشتری را در بر دارند.

قضیهٔ ۲۵.۷ به

S.L.Sobolev, Mat. Sbornik, vol.4,pp.471-497, 1938

منسوب است.

تمرین ۱۶. این تمرین از اولین مثال نقض از ال. شوارتز بـه ***مسئلهٔ ترکیبی طیفی*** گرفته شده است:

C.R. Acad. Sci. Paris, vol. 227,pp.424-426, 1948.

برای اطلاعات بیشتر راجع به این مسئله، ر.ک.

*C.S.Herz ,Trans. Amer. Math. Soc.,*vol,94,pp.181-232, 1960

و فصل ۷ مرجع [۲٤].

تمرین ۱۷ .ر.ک.

C.S.Herz, Ann. Math., vol.68, pp.709-712, 1958.

فصل ۸

مرجعهای کلی : [۱]، [۱۳]، [۲۷]، [۳۰].

وجود جوابهای اساسی (قضیهٔ ۸ .۵) مستقلاً توسط

L. Ehrenpreis (*Amer. J.Math.,* vol. 76,pp.883-903, 1954)

و نیز بی. مالگرانژ در رساله‌اش

(*Ann.Inst. Fourier,* vol.6,pp.271-355, 1955-1956)

ثابت شده است. لم ۳.۸ نیز منسوب به مالگرانژ است. وی آن را برای تبدیلات فوریهٔ f توابع آزمون ثابت کـرد. او روی یـک گـوی انتگـرال می‌گـیرد کـه مـا یـک چنـبره بـه کاربرده‌ایم. تا جایی که به کاربردها مربوط است، این تفـاوت چندانـی تولیـد نمی‌کنـد. نکته آن است که بزرگ‌سازی مفیدی از f به وسیلهٔ fP یعنـی تقسـیم تحـت کنـترلی بـه وسیلهٔ P به دست آید. اهـرن پریـس (*Ehrenpreis*) ایـن مسـئلهٔ تقسـیم را بـه روشـی متفاوت حل کرد و به حل مسائل تقسیم کلیتری از این نوع پرداخـت. بـرای مرجعهـای بیشتر و نتایج مشروحتر، ر.ک. [۱۳]و [۳۰].

در قضیهٔ ۸ .۵ لازم است که ضرایب عملگر دیفرانسیل تحت نظر ثابت باشند. ایـن امر از یک معادلهٔ ساخته شده به وسیلهٔ

H.Lewy (*Ann. Math.*, vol. 66,pp.155-158, 1957)

نتیجه می‌شود که دارای ضرایب C' است ولی جواب ندارد. هورمـاندر (*Hörmander*) (مرجع [۱۳]، فصل ٦) این پدیدهٔ عدم وجود را به طور بسیار کاملی بررسی کرده است.

بخش ۸. ۸ . بسیاری از انواع دیگر فضاهای سوبولف مطالعه شده‌اند. ر.ک. مرجع [۱۳]، فصل دو.

قضیهٔ ۱۲.۸. ر.ک.

K.O.Friedrichs, Comm. Pure Appl. Math., vol. 6, pp.299-325, 1953

و

P.D.Lax, Comm. Pure Appl. Math., vol.8, pp.615-633,1955.

لاکس (*Lax*) حالت متناوب را ابتدا، از طریق سریهای فوریه، بررسی کـرد و سـپس بـه حکم بندکفشی برای به دست آوردن حالت کلی پرداخت. وی ثابت بـودن جمـلات بـا بیشترین مرتبه را فرض نکرد. همچنین ر.ک. مرجع [٤]، صفحات ۱۷۰۸-۱۷۰۳.

تمرین ۱۰. G را "تابع گرین" (*Green*)" $P(D)$ می‌نامند.

تمرین ۱٦. این قضیه‌ای است راجع به مجموعه‌های صفر چندجمله‌ایهای همگـن (با ضرایب مختلط) در R^n.ر.ک. مرجع [۱]، ص. ٤٦.

فصل ۹

بخش ۱.۹. ر.ک.

A. Tauber, Monatsh. Math., vol.8, pp.273-277, 1897

و

J.E.Littlewood, Proc. London Math. Soc., vol. 9,pp.434-448, 1910.

قضیهٔ ۳.۹ . استفاده از توزیعها در ایـن برهـان همـانند اسـتفاده از آنهـا در مقالـهٔ ج.کوروار (*J.Korevaar*) در

Proc. Amer. Math. Soc., vol.16, pp.353-355, 1965

است.

قضیهٔ ٤.۹ تا قضیهٔ ۷.۹.

N.Wiener, Ann.Math., vol.33,pp.1-100, 1932

و

H.R.Pitt, Proc. London Math. Soc., vol. 44,pp.243-288 ,1938.

برهانهای بعدی تعمیمهای مختلفی را به دست داده‌اند؛ برای مرجعهای دیگر، ر.ک.

[۲۴]، ص ۱۵۹. همچنین ر.ک.

*A. Beurling, Acta Math .,*vol. 77,pp.127-136, 1945.

بخش ۹.۹. قضیهٔ اعداد اول ابتدا و مستقلاً توسط

J.Hadamard (*Bull. Soc. Math. France,* vol. 24, pp. 199-220,1896)

و

Ch. J. de lavalle'e - Poussin (*Ann. Soc. Sci. Bruxelles,* vol. 20, pp.183-256, 1896)

ثابت شد. هر دو از روشهای متغیر مختلط استفاده کرده‌اند. وینر اولین برهان تاوبری را به عنوان کاربردی از قضیهٔ کلی خود عرضه کرد. برهانهای "مقدماتی" در سال ۱۹۴۹ توسط ا.سلبرگ (*A.Selberg*) و پی.اردوش (*P.Erdös*) پیدا شدند. برای یک برهان مقدماتی‌تر، ر.ک.

N.Levinson, Amer. Math. Monthly, vol. 76, pp.225-245, 1969.

برهانهای متغیر مختلط هنوز بهترین تخمینهای خطا رابه دست می‌دهند؛ ر.ک.

W.J.Leveque, Topics in Number Theory, vol. II, p.251,Addison- Wesley Publishing Company, Reading , Mass, 1956.

قضیه ۱۲.۹.

A. E.Ingham, J. London Math. Soc., vol.20,pp.171-180, 1945.

مطالب مربوط به معادلهٔ تجدید از

S.Karlin, Pac.J. Math., vol.5, pp.229-257, 1955

است که در آن می‌توان مرجعهای مربوط به کارهای اولیه را یافت. صورتهای غیرخطی معادلهٔ تجدید توسط ج.چوور (*J.Chover*) و پی.نی (*P.Ney*) در

J.d'Analyse Math., vol.21,pp.381-413, 1968

مطرح شده است؛ همچنین ر.ک.

*B. Henry, Duke Math. J.,*vol. 36, pp.547-558, 1969.

تمرین ۷. این مسئلهٔ تقریب در L^2 ظرافت کمتری دارد. ر.ک. مرجع [۲۳]، بخش ۱۶.۹.

فصل ۱۰

مرجعهـای عمومـی: [۷]، [۱۲]، [۱٦]، [۱۹]، [۲۱]. در مرجعهـای [۱٦] و [۲۱] بخـــش زیادی از نظریهٔ اصلی بدون فرض وجود یکه گسترش یافته اســت. مرجـع [۲۱] شـامل مطالبی راجع به جبرهای حقیقی است.

مقالـهٔ گلفـاند (*Mat. Sbornik,* vol.9, pp.3-24, 1941) شـامل قضایــای ۲.۱۰، ۱۳.۱۰، و ۱٤.۱۰ ، مقداری حساب علامتی، و قضیــهٔ ۹.۱۱ هســتند. در مـورد تبدیـلات فوریهٔ اندازه‌ها، فرمول شعاع طیفی (بـ) قضیهٔ ۱۳.۱۰ قبلاً توسط

A.Beurlin (*Proc. IX Congre`s Math. Scandinaves, Helsingfors,* pp. 345-366, 1938)

به دست آمده بود. همچنین ر.ک. تذکر مربوط به قضیهٔ ۳۲.۳.

قضیهٔ ۹.۱۰. حال تعویضپذیری مستقلاً توسط

A.M.Gleason (*J.Anal. Math.,* vol. 19,pp.171-172, 1967)

و

J.P.Kahane and W.Zelazko (*Studia Math.,* vol. 29,pp.339-343, 1968)

به دست آمده است.

W.Zelazko (*Studio Math.,* vol. 30,pp.83-85, 1968)

فرض تعویضپذیری را حذف کرد. برهان ذکر شده در متن شامل چند ساده‌سازی است. همچنین ر.ک. قضیهٔ ٤.٤.۱ مرجع [۳] و

J.A. Siddiqi, Can. Math. Bull., vol.13, pp.219-220, 1970.

ام.روتمـــــــن (*M.Roitman*) و وای. اشـــــــترن فلـــــــــد (*Y.Sternfeld*) (*Trans . Amer. Math. Soc.,*vol. 267,pp.111-124, 1981) برهـان جـبری‌تری را یافتند که درآن از نظریهٔ توابع استفاده نمی‌شود. نتایج مربوطــه راجع بـه ایده‌آلهـای بـا همبعد متناهی توسط

N.V.Rao. J.Func. Anal., vol. 82, pp.237-258, 1989

به دست آمده است.

قضیهٔ ۱۹.۱۰

H.A.Seid (*Amer. Math. Monthly,* vol. 77, pp.282-283, 1970)

همان نتایج را بدون فرض یکه‌داشتن A اگر $M=1$ به دست آورد.

قضیهٔ ۲۰.۱۰ می‌گوید که $\sigma(x)$ یک تابع نیمه پیوستهٔ بالایی از x است. مثالی از کاکوتانی (مرجع [۲۱]، ص ۲۸۲) نشان می‌دهد که $\sigma(x)$ در حالت کلی یک تابع پیوسته از x نیست. همچنین ر.ک. تمرین ۲۰.

بخش ۲۱.۱۰. اصطلاحات ***حساب عملیاتی*** یا ***حساب تابعی*** نیز کراراً به کار می‌رود. مرجع [۱۲] شامل بحث جامعی از حساب علامتی در جبرهای باناخ است.

قضیهٔ ۳٤.۱۰ (ت)منسوب است به

E.R.Lorch. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 52,pp.238-248, 1942.

قضیهٔ ۳۵.۱۰. برهان لومونوسف در

Func. Anal. and Appl., vol. 7. pp. 55-56, 1973

چاپ شده است. این برهان حتی برای یک عملگر تنها از آنچه قبلاً معلوم بوده بسیار ساده‌تر و مؤثرتر است. ا.ج. مایکلز (*A.J.Michaels*) کارهای هیلدن را در

Adv. in Math., vol. 25,pp.56-58, 1977

شرح داده است.

در رابطه با کارهای قبلی، ان. آرونزان (*N.Aronszajn*) و کا.تی. اسمیت (*K.T. Smith*)

(*Ann . Math.*, vol. 60,ppp.345-350, 1954)

ثابت کردند که هر عملگر فشرده بریک فضای باناخ دارای یک زیرفضای پایای حقیقی است. ا.آر. برنشتاین (*A.R. Bernstein*) و ا.رابینسون (*A.Robinson*) (*Poc. J.Math.,* vol.16,pp.421-431, 1666) همین نتیجه را برای عملگرهای کراندار T بر یک فضای هیلبرت که دارای $P(T)$ فشرده به ازای چندجمله‌ایی مانند p است به دست آورد. در برهان آن از آنالیز غیرمتعارف استفاده می‌شود؛ پی.آر. هالموس آن را به برهانی بدل ساخت که در آن فقط از مفاهیم کلاسیک استفاده می‌شود

(*Pac. J.Math.*, vol.16, pp.433-437, 1966).

چون بعضی از عملگرها، حتی بر یک فضای هیلبرت، با هیچ عملگر فشرده‌ای تعویض نمی‌شوند (تمرین ۲۶)، قضیهٔ لومونوسف مسئلهٔ زیرفضای پایا را سامان نخواهد داد. درواقع در بعضی از فضاهای باناخ نامنعکس عملگرهایی بدون زیرفضاهای پایا

یافت شده است:

(*P.Enflo, Acta Math.*,vol. 158,pp.213-313, 1987)

و این امر حتی در l^1 و c_0 نیز صورت گرفته است:

(*C.J.Read, Proc. London Math. Soc.*, vol. 53, pp.583-607, 1989).

همچنین ر.ک. بخش ۲۷.۱۲.

تمرین ۲۲. این یکی از ساده‌ترین حالات قضیهٔ آرنز- رویدن (*Arens - Royden*) برای جبرهای باناخ تعویضپذیر است. این قضیه گروه G/G_1 را به ساختار توپولوژیک فضای ایده‌آل ماکزیمال A ربط می‌دهد. ر.ک. مقالهٔ اچ.ال. رویدن در

Bull. Amer. Math. Soc., vol. 69 , pp.281-298, 1963

و مقالهٔ آر.آرنز در

F.T.Birtel, ed., Function Algebras, pp. 164-168, *Scott, Foresman and Company, Glenview*, Ill, 1966,

و مرجهای [٦] و [۲۹].

تمرین ۲۳. برای ساختار دقیق G/G_1 در این حالت، ر.ک.

J.L.Taylor, Acta Math., vol. 126, pp.195-225, 1971.

تمرین ٢٤. ر.ک.

C.Le Page, C.R.Acad. Sci. Paris, vol. 265, pp.A 235- A 237, 1967.

تمرین ٢٦. زیرفضاهای پایای این عملگر انتقال کاملاً معلوم‌اند. این قضیهٔ برلینگ می‌باشد (*Acta Math,*. vol.81, pp.239-255, 1949) . هلسون (*Helson*) و لودن اسلاگر (*Lowdenslager*) (*Acta Math.*, vol. 99, pp. 165-202,1958) از روشهای مختلف و قضیهٔ برلینگ تعیمم یافته در زمینه‌های دیگر استفاده کرده‌اند.

فصل ۱۱

قضیه ۷.۱۱. حالت $n=1$ توسط پی. ج. کوهن در

Proc. Amer. Math. Soc., vol. 12, pp.159-163,1961

به نحوی مقدماتی ثابت شده است. به ازای $n>1$، برهان ذکر شده در متن ظاهراً تنها برهان شناخته شده می‌باشد.

قضیهٔ ۹.۱۱. وقتی A یکه ندارد، Δ موضعاً فشرده است (ولی فشرده نیست) و $\hat{A} \subset C_{\circ}(\Delta)$. در این صورت مبدأ A^* بست Δ می‌باشد. ر.ک. مرجع [۱۶]،صفحات ۵۲-۵۳.

قضیهٔ ۱۰.۱۱ را یک قضیهٔ "پیوستگی خودکار" نامیده‌اند. (قضایای ۷.۱۰ و ۳۱.۱۱ مثالهای دیگری می‌باشند.) این مفهومی است که آنالیز کلاسیک را با نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها تماس داده است. به عنوان مثال، "مسئلهٔ کاپلانسکی (*Kaplansky*) به قرار زیر است: آیا به ازای هر فضای هاسدورف فشردهٔ X و هر جبر باناخ A، هر هلوریختی از $C(X)$ به توی A پیوسته است؟ کارهای دیلز (*Dales*) استرل (*Esterle*)، سولوی (*Solovay*)، و وودین (*Woodin*) نشان داده‌اند که این مسئله در ZFC [نظریهٔ مجموعه‌های زرملو - فرانکل (*Zermelo- Frankel*) به علاوهٔ اصل انتخاب] بلاتکلیف است. برای شرح مطالب ر.ک. مرجع [۳۸].

مثال ۱۳.۱۱ (ت) دلیل وجود روابط بسیار نزدیک بین جبرهای باناخ تعویضپذیر از یک سو و توابع هلوریخت از چند متغیر مختلط از سوی دیگر را نشان می‌دهد. این مبحث بهیچوجه دراین کتاب دنبال نشده است. بحث بسیار خوب و به روز آن را می‌توان در کتابهای نوشته شده توسط برودر (*Browder*) [۳]، گاملین (*Gamelin*) [۶]، استوت (*Stout*) [۲۹]، و ورمر (*Wermer*) [۴۷] یافت. برای توابع چند عنصری از جبر باناخ می‌توان یک حساب علامتی وضع کرد. ر.ک.

R.Arens and A.P. Calderon, Ann. Math., vol.62, pp.204-216, 1955

و

J.L.Taylor, Acta Math., vol.125, pp. 1-38, 1970.

مثال ۱۳.۱۱ (ث)نشان می‌دهد که چرا بعضی قسمتهای آنالیز فوریه را می‌توان به آسانی از نظریهٔ جبرهای باناخ به دست آورد. این کار درمرجعهای [۱۶] و [۲۴] انجام شده است.

قضیهٔ ۱۸.۱۱ توسط گلفاند و نیمارک در

Mat.Sbornik, vol.12, pp.197-213, 1943

ثابت شده است. در همین مقاله نیز ثابت شده است که هر B^* - جبر A (تعویضپذیر یا

تعویض‌ناپذیر) به طور یکمتر *ـ یکریخت با جبر عملگرهای کراندار بر فضایی هیلبرت است (قضیهٔ ۴۱.۱۲) مشروط بر اینکه $e+x^*x$ به ازای هر $x\in A$ معکوس‌پذیر باشد. زاید بودن این فرض اضافی ۱۵ سال بعد توسط آی. کاپلانسکی ثابت شده است [قسمت (جـ) قضیهٔ ۲۸.۱۱]. برای مرجعهایی برای این تاریخچهٔ نسبتاً پیچیدهٔ این قضیه، ر.ک. مرجع [۲۱]، ص ۲۴۸.

B.J.Glickfeld (*Ill. J.Math.*, vol.10,pp.547-556, 1966)

نشان داده است که اگر به ازای هر $x\in A$ هرمیتی، $\|\exp(ix)\|=1$، A یک B^* - جبر می‌باشد.

قضیهٔ ۲۰.۱۱. ایدهٔ رفتن از A به A/R برای اثبات قضیه بدون فرض پیوستگی برگشت منسوب است به

J.W.M.Ford (*J.London Math. Soc.*, vol.42,pp.521-522, 1967).

قضیهٔ ۲۳.۱۱. ر.ک.

R.S.Foguel , *Ark. Mat.*, vol.3, pp. 449-461, 1957.

قضیهٔ ۲۵.۱۱. ر.ک.

P.Civin and B. Yood, Pac. J.Math., vol. 9, pp.415-436, 1959;

به‌خصوص ص ۴۲۰. همچنین ر.ک. مرجع [۲۱]، ص ۱۸۲.

قضیهٔ ۲۸.۱۱. بحث جدیدی از این مطالب توسط

V. Pta'k , *Bull. London Math. Soc.*, vol.2, pp. 327-334, 1970

مطرح شده است. همچنین ر.ک. تذکر مربوط به قضیهٔ ۱۸.۱۱.

قضیهٔ ۳۱.۱۱. ر.ک. مرجعهای [۱۹] و [۲۱]. اچ اف. بوهنن بلاست و اس. کارلین (*Ann. Math.*, vol.62,pp.217-229, 1955) روابط بین تابعیهای مثبت از یک سو و هندسهٔ گوی یکهٔ یک جبر باناخ از سوی دیگر را یافته‌اند.

قضیهٔ ۳۲.۱۱. ر.ک. مرجع [۷]. همچنین ر.ک. مرجع [۱۶]، ص ۹۷ و مرجع [۲۱]، ص ۲۳۰.

قضیهٔ ۳۳.۱۱ برای برگشتهای پیوسته در مرجع [۲۰] است.

تمرین ۱۳. قسمت (جـ)نیمهٔ دوم نتیجهٔ (۳.۵.۴) در [۲۱] را نقض می‌کنند.

همچنین بر قضیهٔ (١٦.٨.٤) در مرجع [٢١] تاثیر دارد.

تمرین ١٤. این تمرین اول بار توسط اس.بوچنر

(*Math. Ann.,* vol.108,pp.378-410,1933; especially p.407)

با استفاده از همان ابزارهای به کاررفته در قضیهٔ ٧.٧ حل شده است. برای برهان کمی متفاوت، ر.ک. مرجع [٢٤]. برهان پیشنهاد شده در اینجا نشان می‌دهد که حضور یا غیاب عنصریکه در بررسی تابعیهای مثبت تفاوتی ایجاد خواهد کرد. ر.ک. مرجع [١٦]، ص ٩٦ و مرجع [٢١]، ص ٢١٩.

فصل ١٢

مرجعهای عمومی: [٤]، [٩]، [١٠]، [١٧]، [٢٢].

قضیهٔ ١٦.١٢. بی. فوگلد در

Proc.Nath. Acad. Sci. USA, vol. 36, pp. 35-40, 1950

حالت $M=N$ را به انضمام حالت بی‌کران (فصل ١٣، تمرین ١٥) ثابت کرده است. در برهانش از قضیهٔ طیفی استفاده شده است، و توسط سی.آر. پوتنام به حالت $M \neq N$ تعمیم یافته است. (*Amer. J.Math.* , vol.73, pp. 357-362, 1951). پوتنام قضیهٔ ٣٦.١٢ را نیز به دست آورده است. برهان کوتاه مذکور در متن منسوب است به

M.Rosenblum, J. London Math. Soc., vol. 33,pp.376-377, 1958.

قضیهٔ ٢٢.١٢. فرایند توسیع که در اینجا برای رفتن از توابع پیوسته به توابع کراندار به کاررفته همانند مرجع [١٦]، صفحات ٩٤-٩٣ است.

قضیهٔ ٢٣.١٢ . برای نکات تاریخی راجع به قضیهٔ طیفی، ر.ک. مرجع [٤]، صفحات ٩٣٦-٩٢٦. همچنین برای توصیف متفاوتی از قضیهٔ طیفی، ر.ک. مقالهٔ پی.آر.هالموس در

Amer. Math.Monthly, vol. 70,pp.241-247, 1963.

قضیهٔ ٣٨.١٢ توسط پی.آر. هالموس، ج. لومر (*G. Lumer*)، و ج. شفر (*J.Schäffer*) در

*Proc.Amer. Math. Soc,*vol.4, pp. 142- 149, 1953

ثابت شده است. دی.دکارد (*D.Deckard*) و سی. پیرسی (*C. Pearcy*)

(*Acta Sci., Math. Szeged.,* vol.28, pp.1-7,1967)

پیشرفته و ثابت کردند که برد تابع نمایی درگروه عملگرهای معکوسپذیر نه باز است نه بسته. مقالهٔ آنها شامل چند مرجع برای نتایج میانی می‌باشد.

قضیهٔ ۳۹.۱۲ . ر.ک. مرجع [۲۱]، ص ۲۲۷.

قضیهٔ ۴۱.۱۲. *- زیرجبرهای بستهٔ $\mathscr{B}(H)$ را C^* - **جبر** می‌نامیم. پیش ازمعلوم شدن قضیهٔ ۴۱.۱۲ (ر.ک. تذکر مربوط به قضیهٔ ۱۸.۱۱)، B^*- جبرها جداگانه بررسی می‌شوند، ولی اکنون اصطلاح B^*- جبر چندان به کارنمی‌رود.

قضایای ۴۳.۱۲ و ۴۴.۱۲. در مرجعهای [۴] و [۴۳] چند نوع قضیهٔ ارگودیک مطرح شده است.

اگر N=۴ ، تمرین ۲ بسیار آشنا می‌باشد.

تمرین ۱۸. رابطهٔ بین عملگرهای انتقال و مسئلهٔ زیرفضای پایا توسط پی.آر. هالموس در

J.Reine Angew. Math., vol. 208, pp.102-112, 1961

مطرح شده است.

تمرین ۲۷. برای نتایج بسیار راجع به برگشتها، ر.ک.

P.Civin and B. Yood, Pac. J.Math., vol.9, pp.415-436, 1959.

تمرین ۳۲. قسمت (پ)ایجاب می‌کند که هر فضای باناخ به طور یکنواخت محدب منعکس است. ر.ک. تمرین ۱ از فصل ۴ و تذکر مربوط به تمرین ۲۸ در فصل ۳. تمام فضاهای L^p (با ($1<p<\infty$)) به طور یکنواخت محدب‌اند. ر.ک.

J.A.Clarkson, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 40,pp.396-414, 1936

یا مرجع [۱۵] صفحات ۳۵۹-۳۵۵.

فصل ۱۳

مرجعهای عمومی: [۴]، [۱۲]، [۲۲].

قضیهٔ ٦.١٣ ابتدا توسط

A.Wintner, Phys. Rev., vol.71,pp.738-739, 1947

ثابت شد. برهان جبری‌تر آمده در متن از آن اچ. ویلاند است:

Math.Ann., vol.121,p.21, 1949.

این برهان توسط دی.سی. کلینک

(*D.C.Kleinecke, Proc. Amer. Math.Soc.*,vol.8, pp.535-536, 1957)

تعمیم یافت و قضیهٔ زیر راجع به ***اشتقاقها*** را به دست داد:

هرگاه D یک عملگر خطی پیوسته در جبر باناخ A باشد به طوری که به ازای هر $x, y \in A$، $D(xy) = xDy + (Dx)y$، آنگاه شعاع طیفی Dx به ازای هر x که با Dx تعویض شود مساوی ۰ است. این قضیه توسط شیروکف

(*Shirokov, Uspehi,* vol.11,no.4,pp.167-168,1956)

و در جبرهای باناخ تعویضپذیر توسط سینگر و ورمر (*Math. Ann,*. vol,129, pp.260-264, 1955) نیز ثابت شده است. ر.ک. ص ۲۰ مقالهٔ "آنالیز تابعی" آی. کاپلانسکی:

In Some Aspects of Analysis and Probability , *John Wiley & Sons, New York*, 1958.

ا. براون و سی.پیرسی (*Ann-Math.*, vol.82, pp.112-127, 1965) برای H جدایی‌پذیر ثابت کرده‌اند که عملگر $T \in \mathscr{B}(H)$ یک تعویضگر است اگر و فقط T به شکل $M+C$ نباشد که د رآن $\lambda \neq 0$ و C فشرده است. همچنین. ر.ک.

C.Schneeberger, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 28,pp.464-472, 1971.

تبدیل کیلی، رابطه‌اش با اندیسهای کاستی، و برهان قضیهٔ ۳۰.۱۳ در مقالهٔ فون نویمان است:

Math. Ann., vol. 102,pp.49-131, 1929-1930,

و همچنین است قضیهٔ طیفی برای عملگرهای بی‌کران نرمال. مطالب راجع به گرافها از مقالهٔ وی در

Ann.Math., vol. 33,pp.294-310, 1932

اخذ شده است. برهان ما از قضیهٔ ۳۳.۱۳ شبیه برهان

F.Riesz and E.R.Lorch, Trans. Amer. Math. Soc.,vol. 39,pp. 331-340, 1936

است. همچنین ر.ک. مرجع [٤] ، فصل دوازده.

تعریف ۳٤.۱۳. شرط پیوستگی اعمال شده را می‌توان ضعیف کرد: هرگاه (آ) و (ب) برقراربوده و وقتی به ازای هر $x \in X$، $t \to \circ$، داشته باشیم $Q(t)x \to x$ به طور ضعیف، آنگاه (پ) برقرار است. ر.ک. مرجع [۳۳]، صفحات ۲۳٤-۲۳۳. دربرهان این امر بیش از آنچه کتاب حاضرشامل است از نظریهٔ انتگرالگیری‌برداری استفاده می‌شود.

قضایای ۳۵.۱۳ تا ۳۷.۱۳ در مرجعهای [٤]، [۱۲]، [۲۲]، [۳۳]، و [٤٦] ثابت شده‌اند.

قضیهٔ ۳۸.۱۳ . این قضیه منسوب است به

M.H.Stone,Ann. Math. vol. 33,pp.643-648, 1932;

همچنین ر.ک.

B.Sz.Nagy, Math. Ann. vol. 112,pp.286-296, 1936.

تمرین ۲۵ توسط شلدون آکسلر (*Sheldon Axler*) به من داده شد. با این تمرین اشتباهی که در ویرایش اول این کتاب رخ داده اصلاح می‌شود.

ضمیمه آ

بخش آ ۲

J.W.Alexander, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, vol. 25,pp. 296-298-1939.

بخش آ ۳. ا.تیخنف این را برای حاصل ضربهای دکارتی بازه‌ها ثابت کرد

(*Math. Ann.*, vol. 102,pp.544-561, 1930)

و از آن برای ساختن آنچه امروزه به فشرده‌سازی چک (یا استون - چک) یک فضای تماماً منتظم مدون است استفاده نمود. ای.چک ($E-\check{C}ech$)

(*Ann. Math.*,vol.38,pp.823-844, 1937; expecially p.830)

حالت کلی قضیه را ثابت کرده و خواص فشرده‌سازی را مطالعه نمود. لذا ظاهراً چک قضیهٔ تیخنف را ثابت کرد ولی تیخنف فشرده‌سازی چک را پیدا نمود و این توصیف مناسبی است از اعتبار تاریخی نامگذاری در ریاضیات.

کتابنامه

1. AGMON, S.: *Lecutres on Elliptic Boundary Value Problems,* D.Van Nostrand Company, Princeton, N.J., 1965.
2. BANACH, S.: *The'orie des Ope'rations Line'aires,* Monografje Matematyczne, vol. 1, Warsaw, 1932.
3. BROWDER, A. : *Introduction to Function Algebras,* W. A. Benjamin, New York , 1969.
4. DUNFORD, N., and J.T. SCHWARTZ: *Linear Operators* , Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York, pt. I, 1958; pt. II, 1963; pt.III,1971.
5. EDWARDS, R. E.: *Functional Analysis,* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1965.
6. GAMELIN, T.W.: *Uniform Algebras*, Prentice - Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.
7.GELFAND, I. M., D. RAIKOV and G. E. SHILOV: *Commutative Normed Rings,* Chelsea Publishing Company, New York, 1964. (Russian Orginal, 1960.)
8. GELFAND, I.M., and G.E.SHILOV: *Generalized Functions,* Academic Press, New York , 1964. (Russian original, 1958.)
9. HALMOS, P. R.: *Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity,* Chelsea Publishing Company, New York, 1951.
10. HALMOS, P. R.: *A Hilbert Space Problem Book,* D. Van Nostrand Company, Princeton, N.J.,1967.
11. HEWITT, E., and K. A. Ross: *Abstract Harmonic Analysis*, Springer-Verlag OHG, Berlin, vol. 1, 1963; vol.2,1970.

12. HILIE, E., and R. S. PHILLIPS: *Functional Analysis and Semigroups,* Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 31, Providence, R. I., 1957.
13. HÖRMANDER, L. :*Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag OHG, Berlin, 1963.
14. KELLEY, J.L., and I. NAMIOKA: *Linear Topological Spaces*, D. Van Nostrand Company, Princeton, N. J., 1963.
15. KÖTHE, G.: *Topological Vector Spaces*, Springer- Verlag, New York, vol. 1, 1969; vol.2, 1979.
16. LOOMIS, L. H. : *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis*, D. Van Nostrand Company, Princeton, N.J., 1953.
17. LORCH, E. R.: *Spectral Theory,* Oxford University Press, New York, 1962.
18. NACHBIN,L.: *The Haar Integral* , D Van Nostrand Company, princeton, N.J.,1965.
19. NAIMARK, M. A. : *Normed Rings,* Erven P. Noordhoff, Groningen, Netherlands, 1960. (Orginal Russian edition, 1955.)
20. PHELPS, R. R. : *Lecutres on Choquet's Theorem, D. Van Nostrand Company, Princeton, N. J., 1966.*
21. RICKART, C. E. :*General Theory of Banach Algebras*, D. Van Nostrand Company, Princeton, N.J., 1960.
22. RIESZ, F., and B. *SZ-NAGY: Functional Analysis,* Frederick Ungar Publishing Company, New York, 1955.
23. RUDIN, W.: *Real and Complex Analysis*, 3d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1987.
24. RUDIN, W. : *Fourier Analysis on Groups,* Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York, 1962.
25. RUDIN, W.: *Function Theory in Polydiscs*, W.A. Benjamin, New York, 1969.
26. SCHWARTZ, L.: *The'orie des distributions*, Hermann & Cie, Paris, 1966.
27. SHILOV, G. E.: *Generalized Functions and Partial Differential Equations*, Gordon and Breach, Science Publishers, New York, 1968. (Russian original, 1965.)
28. STONE, M.H. : *Linear Transformations in Hilbert Space and Their Applications to Analysis,* Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 15, New York, 1932.
29. STOUT, E. L. : *The Theory of Uniform Algebras,* Bogden and Quigley, Tarrytown, N.Y., 1971.
30. TRE`VES, F.: *Linear Partial Differential Equations with Constant Coefficients*, Gordon and Breach, Science Publishers, New York, 1966.
31. TRE`VES, F.: *Toplogical Vector Spaces, Distributions, and Kernels,* Academic Press, New York, 1967.

32. WILANSKY, A. : *Functional Analysis,* Blaisdell, New York, 1964.
33. YOSIDA, K.: *Functional Analysis* , Springer- Verlag, New York, 1968.
34. ZYGMUND, A.: *Trigonometric Series,* 2d ed., Cambridge University Press, New York, 1959.

کتابنامهٔ تکمیلی

35. DALES, H. G., and W. H. WOODIN: *An Introduction to Independence for Analysis, London Math. Soc. Lecture Notes,* vol. 115. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
36. DIEUDONNE′ , J. A. : *History of Functional Analysis*, North Holland, Amsterdamm 1981.
37. DIXMIER, J.: *C*- algebras,* North Holland, Amsterdam, 1977.
38. DOUGLAS, R. G.: *Banach Algebra Techniques in Operator Theory,* Academic Press, New York, 1972.
39. HELSON, H.: *Lecutres on Invariant Subspaces,* Academic Press, New York, 1964.
40. KALTON, N. J., N. T. PECK, and J.W. ROBERTS: *An F-space Sampler, London Math. Soc. Lecture Notes,* vol. 89, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
41. LINDENSTRAUSS, J. and L. TZAFRIRI: *Classical Banach Spaces*, Springer- Verlag, Berlin, vol. 1, 1977, vol. 2, 1979.
42. LOPE′Z , J. M., and K.A. ROSS: *Sidon Sets,* Marcel Dekker, New York, 1975.
43. PETERSEN, K.: *Ergodic Theory* , Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
44.RADJAVI, H., and P.ROSENTHAL: *Invariant Subspaces*, Spring - Verlag, New York, 1973.
45. RUDIN, W.: *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$, Spring- Verlag, New York, 1980.
46. TREVE`S , F. : *Basic Linear Partial Differential Equations*, Academic Press, New York, 1975.
47. WERMER, J.: *Banach Algebras and Several Complex Variables,* 2d ed., Springer- Verlag, New York, 1976.

فهرست علایم خاص

اعداد مقابل علایم بخشهایی را نشان می‌دهند که معنی علایم در آنجا توضیح داده شده است.

فضاها

E°	٥.١ درون
$f:X \to Y$	١٦.١ نماد تابع
$f(A)$	١٦.١ نقش
$f^{-1}(B)$	١٦.١ نقش معکوس
μ_A	٣٣.١ تابعی مینکوفسکی
τ_N	٤٠.١ توپولوژی خارج قسمتی
$\|\alpha\|$	٤٦.١ مرتبهٔ اندیس چندگانه
$p_N(f)$	٤٦.١ نیم نرم
$\hat{f}(n)$	تمرین ٦، فصل ٢ ضریب فوریه
$\mathrm{co}(E)$	١٩.٣ غلاف محدب
$\overline{\mathrm{co}}(E)$	١٩.٣ غلاف محدب بسته
$\mathrm{Ind}_\Gamma(z)$	٣٠.٣ اندیس
$<x,x^*>$	٢.٤ مقدار x^* در x
$\sigma(T)$	١٧.٤، ٢٦.١٣ طیف
$\oplus$	٢٠.٤ مجموع مستقیم
$\|\lambda\|$	٥.٥ تغییر کل اندازه
$f\|_E$	٦.٥ تحدید
$\\|\phi\\|_N$	٢.٦ نرم در $\mathscr{D}(\Omega)$
$x.y$	١٠.٦ حاصل ضرب اسکالر
$\|x\|$	١٠.٦ طول بردار
x^α	١٠.٦ تکجمله‌ای
S_A	٢٤.٦ محافظ
$\breve{u}$	٢٩.٦ $\breve{u}(x) = u(-x)$
$u * v$	٢٩.٦، ٣٤.٦، ٣٧.٦، ١.٧ پیچش
m_n	١.٧ اندازهٔ لبگ بر R^n
e_t	١.٧ نشان
$\hat{f}(t)$	١.٧ تبدیل فوریه
e_z	٢٠.٧ نمایی
rB	٢٢.٧ گوی به شعاع r
E	١.٨ جواب اساسی
σ_n	٢.٨ اندازهٔ هار بر T^n
μ_s	٨.٨ اندازهٔ مربوط به H^s
$Z(Y)$	٣.٩ مجموعهٔ صفر
μ_s، μ_a	١٤.٩ تجزیهٔ لبگ μ
e	١.١٠ عنصر یکه
$G(A)$	١٠.١٠ گروه عنصرهای معکوس‌پذیر
$\sigma(x)$	١٠.١٠ طیف
$\rho(x)$	١٠.١٠ شعاع طیفی
A_Ω	٢٦.١٠ اعضای A با طیف در Ω
$\tilde{f}$	٢٦.١٠ توابع هلوریخت A مقدار
Δ	٥.١١ فضای ایده‌آل ماکزیمال

واژه نامه

فارسی به انگلیسی

ابرصفحه	HYPERPLANE
اتساع	DILATION
اسکالر	SCALAR
اشتقاق	DERIVATION
اصل	PRINCIPLE
اصل موضوع	AXIOM
افراز	PARTITION
الحاقی	ADJOINT
انتقال	TRANSLATE
انتگرال	INTEGRAL
انتگرالگیری	INTEGRATION
اندازه	MEASURE
اندیس	INDEX
ایده آل	IDEAL
باز	OPEN
برد	RANGE
بردار	VECTOR
بردار ویژه	EIGENVECTOR
برش	TRUNCATION
برگشت	INVOLUTION
بست	CLOSURE
بشکه	BARREL
بعد	DIMENSION
پادمتقارن	ANTISYMMETRIC
پایه	BASE
پیچش	CONVOLUTION
پیش نقش	PREIMAGE
پیوستگی	CONTINUITY
تابع	FUNCTION
تابع ویژه	EIGENFUNCTION
تابعی	FUNCTIONAL
تبدیل	TRANSFORMATION
تجزیه	RESOLUTION

تحدب	CONVEXITY
ترکیب	COMBINATION
تصویر	PROJECTION
تعویضگر	COMMUTATOR
تکجمله‌ای	MONOMIAL
تناهی	FINITENESS
توپولوژی	TOPOLOGY
توزیع	DISTRIBUTION
جاذب	ABSORBING
جبر	ALGEBRA
جمعی (جمعپذیری)	ADDITIVITY
چنبره	TORUS
چندجمله‌ای	POLYNOMIAL
چند قرص	POLYDISC
حاصلضرب	PRODUCT
حد	LIMIT
حساب	CALCULUS
حکم	PROPOSITION
حل	SOLUTION
حلال	RESOLVENT
خانواده	FAMILY
درجه	DEGREE
درون	INTERIOR
دنباله	SEQUENCE
دوگان	DUAL
دوگانی	DUALITY
رادیکال	RADICAL
رسته	CATEGORY
ریشه	ROOT
زیرپایه	SUBBASE
زیرجمعی(زیرجمعپذیری)	SUBADDITIVITY
زیرفضا	SUBSPACE
زیرمجموعه	SUBSET
سوپرمم	SUPREMUM
شرط	CONDITION
شعاع	RADIUS
شق	ALTERNATIVE
ضرب	MULTIPLICATION
ضریب	COEFFICIENT
طیف	SPECTRUM
عملگر	OPERATOR
عنصر	ELEMENT
غلاف	HULL
فاصله	DISTANCE
فرمول	FORMULA
فشردگی	COMPACTNESS

فضا	SPACE
فناساز	ANNIHILATOR
قانون	LAW
قطب	POLE
قطبی	POLAR
قطر	DIAGONAL
قلمرو	DOMAIN
کنتور	CONTOUR
گراف	GRAPH
گروه	GROUP
گوی	BALL
لاپلاسین	LAPLACIAN
لگاریتم	LOGARITHM
مبدأ	ORIGIN
متر	METRIC
متمم	COMPLEMENT
مجموع	SUM
مجموعه	SET
محافظ	SUPPORT
مرتبه	ORDER
مرز	BOUNDARY
مرکزساز	CENTRALIZER
مشتق	DERIVATIVE
مشتقگیری	DIFFERENTIATION
معادله	EQUATION
معکوس	INVERSE
مقدار ویژه	EIGENVALUE
مقسوم علیه	DIVISOR
مولد	GENERATOR
میدان	FIELD
نامساوی	INEQUALITY
نرم	NORM
نشان	CHARACTER
نقش	IMAGE
نقطه	POINT
نگاشت	MAP
نیمگروه	SEMIGROUP
نیم نرم	SEMINORM
وابرریختی	DIFFEOMORPHISM
هسته	KERNEL
همانی	IDENTITY
همبعد	CODIMENSION
همپیوستگی	EQUICONTINUITY
همریختی	HOMOMORPHISM
همسایگی	NEIGHBORHOOD
یکریختی	ISOMETRY

واژه نامه

انگلیسی به فارسی

ABSORBING	جاذب
ADJOINT	الحاقی
AFFINE	مستوی
ALGEBRA	جبر
ALMOST PERIODIC	تقریباً متناوب
ANNIHILATOR	فناساز
ANTISYMMETRIC	پادمتقارن
APPROXIMATE	تقریب کردن
AUTOMATIC	خودکار
BALANCED	در حال تعادل
BALL	گوی
BARREL	بشکه
BASE	پایه
BILINEAR	دوخطی
BOUNDED	کراندار
CARTESIAN	دکارتی
CATEGORY	رسته
CENTRALIZER	مرکزساز
CHARACTER	نشان
CHARACTERISTIC	مشخص
CLOSED	بسته
CLOSURE	بست
CODIMENSION	همبعد
COMMUTATOR	تعویضگر
COMPACT	فشرده
COMPLETE	تام
COMPLEX	مختلط
COMPONENT	مؤلفه
CONJUGATE	مزدوج
CONTINUITY	پیوستگی
CONTINUOUS	پیوسته
CONTOUR	کنتور
CONVERGENT	همگرا
CONVEX	محدب

CONVOLUTION	پیچش
DEFICIENCY	کاستی
DEGREE	درجه
DENSE	چگال
DERIVATION	اشتقاق
DIAGONAL	قطر
DIFFERENTIAL	دیفرانسیل
DIFFERENTIATION	مشتقگیری
DILATION	اتساع
DIMENSION	بعد
DIRECT	مستقیم
DISC	قرص
DISTANCE	فاصله
DISTRIBUTION	توزیع
DOMAIN	قلمرو
DUAL	دوگان
EIGENFUNCTION	تابع ویژه
EIGENVALUE	مقدار ویژه
EIGENVECTOR	بردار ویژه
ELLIPTIC	بیضوی
ENTIRE	تمام
EQUICONTINUITY	همپیوستگی
EQUICONTINUOUS	همپیوسته
ERGODIC	ارگودیک
ESSENTIAL	اساسی
EVALUATION	ارزیاب
EXACT	دقیق
EXPONENTIAL	نمایی
EXTENSION	توسیع
EXTREME	اکستریم
FINITE	متناهی
FREE	آزاد
FUNCTION	تابع
FUNCTIONAL	تابعی
FUNDAMENTAL	اساسی
GRAPH	گراف
GROUP	گروه
HARMONIC	توافقی
HERMITIAN	هرمیتی
HOLOMORPHIC	هلوریخت
HOMOMORPHIC	همریخت
HYPERPLANE	ابر صفحه
IDEAL	ایده آل
IDEMPOTENT	خودتوان
IMAGE	نقش
INDEX	اندیس
INDUCTIVE	استقرایی
INFINITESIMAL	بی‌نهایت کوچک
INHERITED	موروثی
INNER	داخلی
INTEGRAL	انتگرال
INTEGRATION	انتگرالگیری
INTERIOR	درون
INTERNAL	درونی

INVARIANT	پایا
INVERSE	معکوس
INVERSION	انعکاس
INVERTIBLE	معکوسپذیر
INVOLUTION	پیچش
LAPLACIAN	لاپلاسین
LIMIT	حد
LINEAR	خطی
LOCAL	موضعی
LOGARITHM	لگاریتم
MAPPING	نگاشت
MAXIMAL	ماکزیمال
MEAN	میانگین
MEASURE	اندازه
METRIC	متر
METRIZATION	متری سازی
MONOMIAL	تکجملهای
MULTI INDEX	اندیس چندگانه
MULTIPLICATION	ضرب
MULTIPLICATIVE	ضربی
NEIGHBORHOOD	همسایگی
NONATOMIC	غیر اتمی
NONTANGENTIALLY	غیر مماسی
NORM	نرم
NORMABLE	نرم پذیر
NORMAL	نرمال
NORMALIZED	نرمال شده

NORMED	نرمدار
NULL	پوچ
OPEN	باز
OPERATIONAL	عملیاتی
OPERATOR	عملگر
ORDER	مرتبه
ORIGIN	مبدأ
ORIGINAL	اصلی
ORTHOGONAL	متعامد
PARALLELOGRAM	متوازی الاضلاع
PARTIAL	جزئی
PARTITION	افراز
POINT	نقطه
POLAR	قطبی
POLE	قطب
POLYDISC	چند قرص
POLYNOMIAL	چند جملهای
POSITIVE-DEFINITE	مثبت - معین
POWER	توان
PREIMAGE	پیش نقش
PRIME	اول
PRINCIPAL	اصلی
PROBABILITY	احتمال
PRODUCT	حاصلضرب
PROJECTION	تصویر
QUOTIENT	خارج قسمت

RADICAL	رادیکال
RANGE	برد
REAL	حقیقی
REFLEXIVE	منعکس
REGULARITY	انتظام
RENEWAL	تجدید
RESIDUAL	مانده‌ای
RESOLUTION	تجزیه
RESOLVENT	حلال
ROOT	ریشه
SCALAR	اسکالر
SELF-ADJOINT	خودالحاق
SEMIGROUP	نیمگروه
SEMINORM	نیم نرم
SEMISIMPLE	نیمه ساده
SEPARABLE	جدایی پذیر
SEPARATING	جداساز
SEPARATION	جداسازی
SEQUENTIAL	دنباله‌ای
SEQUILINEAR	یک و نیم خطی
SET	مجموعه
SHIFT	جابجایی
SIMILAR	متشابه
SPACE	فضا
SPECTRAL	طیفی
SPECTRUM	طیف
SQUARE ROOT	ریشهٔ دوم
SUBADDITIVITY	زیرجمعی(جمعپذیری)
SUBBASE	زیرپایه
SUBSPACE	زیرفضا
SUPPORT	محافظ
SYMBOLIC	علامتی
SYMMETRIC	متقارن
TEMPERED	متعادل
TEST	آزمون
TOPLOGICAL	توپولوژیک
TOPOLOGY	توپولوژی
TORUS	چنبره
TRANSFORMATION	تبدیل
TRANSLATE	انتقال
TRANSLATION	انتقال
TRUNCATION	برش
UNIFORM	یکنواخت
UNIT	یکه
UNITARY	یکه‌ای
VECTOR	بردار
WEAK	ضعیف

فهرست راهنما