انتشارات دانشگاه تهران
۱۹۲۹
چاپ پنجم

آنالیز حقیقی

$$\sum \int f\,d\mu$$

تالیف
اچ. ال - رویدن

ترجمه
دکتر نوروز ایزددوستدار

آنالیز حقیقی

تألیف

اچ. ال. رویدن

ترجمهٔ

دکتر نوروز ایزد دوستدار

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار مترجم

آنالیز ریاضی که آنالیزحقیقی بخشی‌ازآن‌است ، شاخه‌ای‌از ریاضی‌است که برای انجام مطالعات پیشرفته در بخش عمده‌ای‌از ریاضی کاربردی ازجمله فیزیک نظری ، نظریهٔ احتمال ، آمار ریاضی ، پژوهشهای‌عملیاتی ، . . . ، ضروری‌است . دانشجویی‌که‌پایهٔ محکمی درآنالیز ریاضی نداشته باشد در مطالعهٔ احتمال وآمار ریاضی دچار زحمت می‌گردد . کتاب‌آنالیزحقیقی که ترجمهٔ‌آن ازنظرخواننده‌می‌گذرد ، کتابی‌است‌که برای دانشجویان سال آخر دورهٔ کارشناسی و سال اول کارشناسی ارشد رشتهٔ ریاضی وآمار تدوین شده ، ویکی‌ازکتابهای‌برگزیدهٔ چندسال‌اخیر دراین‌زمینه و کتاب‌پایهٔ‌درسی دراغلب دانشگاهها بوده‌است ، و مترجم پس از بررسی‌کتابهای‌موجود دراین‌موضوع ، آن‌را برای‌ترجمه‌برگزید . درترجمهٔ این کتاب‌کوشش براین‌بوده است که از اصطلاحات ریاضی معمول که اغلب نیز موردتأیید انجمن‌ریاضی‌ایران قرار گرفته‌اند . استفاده‌شود ولی گاهی‌چون هم‌ارز مناسبی برای‌نامگذاری‌انگلیسی نیافته است ، همان‌کلمهٔ خارجی را بااملاٴ فارسی به‌کاربرده‌است .

برای خواندن این کتاب دانستن مطالب آنالیز ریاضی دورهٔ کارشناسی ریاضی دانشگاههای‌ایران بسنده است . بسیارکوشش شده که این‌کار بدون‌کاستی‌انجام گیرد ولی نمی‌داندکه تاچه‌حد به‌این‌هدف‌خوددست‌یافته‌است . امیداست موردپذیرش جامعهٔ علمی کشور قرار گیرد . ازهمکاران‌گرامی و دانشجویان‌عزیز که این‌کتاب‌را می‌خوانند خواهشمند است ، که اگر به‌نارسائی‌هائی برخوردند ، با یادآوری آنها اورا سپاسگزار فرمایند .

ازعضوهای ارجمند شورای‌انتشارات و چاپ دانشگاه‌تهران که چاپ آن‌را تصویب کرده‌اند ، از مدیرعامل و کارکنان محترم موٴسسه که امکان چاپ آن را فراهم آورده‌اند ، از کارکنان قسمت آی . بی . ام . موٴسسه به‌ویژه آقای‌مرتضی‌راست‌روان‌فهیم (شهرستانی) که‌دربازسازی‌فرمول‌های ریاضی و نشانه‌ها نهایت کوشش خود را به‌کاربرده‌اند . وسرانجام از کلیه کارکنان این‌موٴسسه که به‌نحوی در چاپ و انتشار این اثر کوشا بوده‌اند ، متشکر و سپاسگزار است .

نوروز ایزد دوستدار

خرداد ماه ۱۳۶۶

تهران

پیشگفتار مؤلف

این‌کتاب نتیجهٔ درسی به‌نام نظریهٔ تابعهای یک متغیر حقیقی است که درمدت ده‌سال‌اخیر گاه‌به‌گاه در دانشگاه استانفورد [1] تدریس کرده‌ام . این‌درس برای‌دانشجویان سال اول فوق‌لیسانس ریاضی‌وآمار طرح‌ریزی شده است . پیشنیاز آن داشتن زمینه‌ای کلی در ریاضیات دورهٔ لیسانس، به‌ویژه آشنایی با مواد درسی مفاهیم بنیادی آنالیز دورهٔ لیسانس است . کوشیده‌ام که این کتاب آن مواد اساسی را که هر دانشجوی فوق‌لیسانس باید در نظریهٔ کلاسیک تابعهای یک‌متغیرحقیقی و نظریهٔ اندازه‌وانتگرال‌گیری ، همچنین برخی‌از موضوعهای بسیارمهم و ابتدایی توپولژی عمومی و نظریهٔ فضاهای خطی نرم‌دار بداند ، دربر داشته‌باشد . روش‌تنظیم مطالب‌این‌کتاب به‌طورکامل‌برطبق‌معیارهای‌متداول دراین‌گونه‌درسهای‌فوق‌لیسانس است ، هرچند اندازهٔ‌لبگ‌وانتگرال‌گیری‌لبگ‌درکتاب‌حاضر پیش از نظریهٔ عمومی اندازه‌وانتگرال‌گیری ارائه‌شده‌است . این‌روش آموزشی‌را از این‌نظر خوشایندیافتم ، که‌دانشجو نخست بایک‌حالت‌ملموس مهمی آشنا گشته و سپس درمی‌یابد که آنچه آموخته است می‌تواند در هر وضع کلی به‌کار رود .

آماده‌ساختن‌کتاب‌برای‌تجدیدچاپ‌به‌من‌فرصت‌داد تانکاتی‌را که‌برای‌دانشجویان مشکل می‌نمود مبسوط‌تر سازم و تعدادی از برهانهای نه‌چندان‌مناسب را بهبود بخشم .

درهفت‌فصل‌نخست ، به‌جز افزودن‌چندمسأله ، تغییرچندانی داده نشده است . بقیهٔ فصلهای بخش دو ، با افزودن بندهایی دربارهٔ حاصلضرب فضاهای توپولژیک ، فشرده‌سازی استون ــ چک [3] ، وفضاهای‌برداری‌توپولژیک ، گسترش یافته‌اند . ازسوی‌دیگر ، بخش سه به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای تجدیدنظر شده است . روش بررسی انتگرال مجرد لبگ

۱— Stanford

۲— Lebesgue

۳— Stone-Čech

در فصل ۱۱ اندکی دگرگون شده است تا گسترش آن را با آنچه در فصل ۱۳ به‌کار رفته‌است، هماهنگ سازد. برهان قضیهٔ رادن ــ نیکودیم[1] ساده گردیده و بندی دربارهٔ فضاهای L^p افزوده شده است. فصل ۱۲ حاوی مطالب تازه‌ای دربارهٔ اندازهٔ درونی و نقش آن در قضیه‌های گسترش و یکتایی است. فصل ۱۳ دربارهٔ انتگرال‌گیری دانیل[2] ازنو تنظیم شده تا برهانهای مغلوط متعددی تصحیح شوند که در آنها ازمطالبی استفادهٔ ضمنی شده بود که تا اواخر به‌اثبات نرسیده بودند. فصل تازه‌ای نیز دربارهٔ نظریهٔ اندازه در فضاهای موضعا" فشرده افزوده شده است.

بین فصلهای این کتاب نابستگی چشم‌گیری وجود دارد، و طرح صفحهٔ ۴ وابستگیهای اساسی را نشان می‌دهد. بنابراین مدرس در تنظیم مطالب موجود کتاب برای درس مطابق سلیقهٔ خود از آزادی چشم‌گیری برخوردار است. بندهایی که در حاشیهٔ بحث اصلی است باعلامت (*) ممتاز شده‌اند. سرآغاز، متضمن فهرستی است از بعضی روشهای نمایش و قراردادها و چند پیشنهاد.

مطالب این کتاب به‌فرهنگ عمومی، ریاضیات تعلق‌دارد و بازتاب مهارت بسیاری از ریاضی‌دانها است. روش من دراین‌مورد به‌ویژه مدیون کارهای نشریافتهٔ کنستانتین کاراتئودوری[3]، پل هالموس[4]، استانیسلاو ساکس[5] وسخنرانیها ومصاحبه‌های اندروگلیسون[6]، جان هریوت[7]، لین لومیس[8] است، فصل ۱۵ نتیجهٔ بحث مفصلی با جان لامبرتی[9] است.

همچنین آرزودارم مرهونیت خود را برای پیشنهادهای مفید و انتقادی بسیاری از دانشجویان وهمکاران بازگوکنم. دوست‌دارم ازبین دانشجویان به پترلوب[10] اشاره کنم

---

۱ — Radon-Nikodym

۲ — Daniel

۳ — Constantin Carathéodory

۴ — Paul Halmos

۵ — Stanislaw Saks

۶ — Andrew Gleason

۷ — John Herriot

۸ — Lynn Loomis

۹ — John Lamberti

۱۰ — Peter Loeb

که‌دست‌نویس چاپ‌اصلی‌را خواند و پیشنهادهای مفید او آشکاری عده‌ای از استدلالها را بهبود بخشید ، و چارلز استانتون[1] ، که دست‌نویس تجدیدنظر شده را خواند و عده‌ای از بیانهای فریبنده و مسئله‌ها را تصحیح کرد . ازبین همکاران تشکر ویژه خود را نثار پل برگ[2] که سه‌اصل‌لیتل‌وود " را به‌من خاطرنشان ساخت ، هرمان روبین[3] که مثالهای نقیضی برای بسیاری‌از قضیه‌ها فراهم ساخت که برای نخستین‌بار تدریس می‌کردم ، و به جان کلی[4] که دست‌نویس را خواند و با دادن اندرزهای مفید موجب شد که تبصره‌های مجادله‌آمیزرا حذف‌کنم (باوجوداین‌چندتاازاین‌تبصره‌هابه‌صورت‌زیرنویس‌ظاهرشده‌است) . دست‌آخر از مارگارت کلاین[5] به‌خاطر صبر و مهارت او در تبدیل دست‌نویس ناخوانا به‌نسخهٔ ماشین‌شدهٔ آراسته برای چاپ اصلی ، از ویلیام‌گلاسمیر[6] به‌خاطر خواندن نمونه‌های‌چاپی ، از والری‌یوچارتز[7] به‌خاطرماشین‌کردن‌مطالب برای این چاپ ، و از ناشر مک‌میلن[8] به‌سبب بردباری‌وتشویق‌او طی سالهایی که این کتاب نوشته شد ، تشکر می‌کنم .

اچ ــ ال ــ ار

استنفــــرد ــ کالیفرنیــا

---

۱ — Charles Stanton

۲ — Paul Berg

۳ — Herman Rubin

۴ — John Kelly

۵ — Margaret Cline

۶ — William Glassmire

۷— Valerie yuchartz

۸ — Macmillan

۹ — Stanford-California

فهرست مطالب

عنوان	صفحه

عنـــوان	صفحـه

صفحه	عنوان

ض ،

عنـــوان | صفحـه

سرآغاز

این‌کتاب بخشی‌از موادی‌را که هر دانشجوی فوق‌لیسانس‌ریاضی باید بداند دربر دارد. برای‌برخورداری از نام بهتری برای این‌مواد، آن‌را آنالیزحقیقی نامیده‌ایم، که منظور، آن بخشهایی از ریاضیات‌جدید است که ریشه‌ای در نظریهٔ کلاسیک تابعهایی از یک متغیر حقیقی دارند. این‌بخشها حاوی‌خود نظریهٔکلاسیک تابعهایی از یک متغیر حقیقی، اندازه‌وانتگرال‌گیری، توپولژی مجموعهٔنقاط، و نظریهٔ فضاهای خطی نرم‌دار است. بنابراین کتاب حاضر به‌سه بخش تقسیم شده است. بخش نخست حاوی نظریهٔ کلاسیک‌تابعها، به‌انضمام فضاهای‌کلاسیک‌باناخ‌است. بخش‌دوم اختصاص‌به‌توپولژی‌عمومی ونظریهٔ فضاهای باناخ‌کلاسیک، وبخش‌سوم به‌بررسی‌اندازه‌وانتگرال‌گیری‌مجرداختصاص‌دارد.

د ــ پیشنیازها:

فرض می‌شود که‌خواننده باقضیه‌های‌اصلی مربوط به‌تابعهای پیوسته از یک متغیر حقیقی و انتگرال‌گیری ریمن تا حدی آشنایی دارد. دراینجا هیچگونه استفادهٔ رسمی از این‌آشنایی‌نشده است، و فصل ۲ به‌طورصوری همه قضیه‌های‌اساسی‌لازم را فراهم می‌آورد. ولی مطالب فصل ۲ نسبتاً" به‌طور خلاصه ارائه شده و به‌منظور یادآوری و مقدمه‌ای برای فصلهای‌بعدی است. برای‌خوانندگانی‌که از پیش بااین‌مطالب آشنایی‌ندارند، ممکن‌است استفاده از آنها به‌نحوی که دراینجا ارائه شده‌اند، دشوار به‌نظر آید. همچنین مقداری آشنایی‌بااصول‌جبرجدید همانگونه که‌در درس معمولی لیسانس آموخته می‌شود موردنیاز است. تعریف‌ها و خاصیت‌های ابتدایی گروهها و حلقه‌ها در بعضی از بندهای حاشیهٔ بحث‌اصلی مورداستفاده قرارگرفته‌اند. ومفاهیم پایه‌ای‌فضاهای‌برداری خطی در فصل ۱۰ به‌کار برده شده است. نظریهٔ مجموعه‌ها پایهٔ همهٔ مطالب این کتاب است و در فصل ۱ بعضی‌از حقایق پایه‌ای نظریهٔ‌مجموعه‌ها به‌اختصار بیان شده است. چون در بقیهٔ کتاب نظریهٔ مجموعه‌ها کاربردهای‌فراوانی‌دارد، و دانشجویان ضمن‌پیشرفت در خواندن کتاب باید در استدلالهای‌مربوط به‌نظریه‌مجموعه‌ها زبردست‌گردند. سفارش من این‌است که خواننده‌نخست فصل ۱ را به‌طورسطحی‌بخواندوبه‌هنگام نیازدوباره‌به‌آن‌مراجعه‌کنند. کتابهای هالموس[۹][1] و سوپس[۲۳] شامل‌بررسی‌کاملتری ازنظریهٔ مجموعه می‌باشند

---

۱ ــ عددهای درون کروشه اشاره به‌کتابهایی است که در کتابنامه آمده‌اند.

و خواندن‌آنها همزمان‌باخواندن این‌کتاب مفید است. گلیسون [۷] نیز حاوی مطالب مفیدی در نظریهٔ مجموعه‌هاست و یک بحث عالی دربارهٔ نقش نظریهٔ مجموعه‌ها در سرشت‌سازی‌ساختمان‌ریاضی مجرد دارد. خواننده‌همچنین بحث جالبی دربارهٔ دستگاه عددهای حقیقی و خاصیتها و نحوهٔ گسترش آنها دراین‌کتاب خواهد یافت.

طرز نمایش منطقی

به‌جای‌عبارتهای‌منطقی بهتراست از بعضی کوتاه‌نویسی‌ها استفاده‌کنیم. '&' را به‌معنی "و" به‌کارمی‌بریم، پس منظور از "$A \& B$" یعنی "A و B"، '$\vee$' به‌معنی (یا) است پس منظور از '$A \vee B$' یعنی "A یا B (یاهردو)، منظور از $\neg$ یعنی (نه) یا "چنین‌نیست که" پس '$\neg A$'، یعنی "چنین‌نیست‌که A" مفهوم‌مهم‌دیگر مفهومی‌است‌که‌با نماد "$\Rightarrow$"، بیان‌می‌کنیم. این‌نماد دربیان‌لفظی‌چندمترادف‌دارد، پس بیان '$A \Rightarrow B$'، را می‌توان باعبارتهای‌زیر بیان کرد، "اگر A آنگاه B"، "A ایجاب می‌کند B را" "A تنها اگر B"، "A کافی است برای B"، یا "B برای A لازم‌است" گزارهٔ '$A \Rightarrow B$'، هم‌ارز هریک از گزاره‌های بعدی است، '$(\neg A) \vee B$' و $\neg (A \& (\neg B))$، همچنین قراردا د "'$A \Leftarrow B$'" را به‌معنی '$(A \Rightarrow B) \& (B \Rightarrow A)$' به‌کارمی‌بریم. مترادف‌های '$A \Leftrightarrow B$' در بیان عبارتنداز A اگر و تنها اگر B"، "A هم‌ارز B است، و "A برای B، لازم و کافی است.

علاوه‌بر نمادهای‌پیشین، دوکوتاه‌نویسی دیگر نیز به‌کارمی‌بریم: '(x)' یعنی "برای همهٔ x ها" یا "برای هر x"، و $(\exists x)$، یعنی "یک x وجود دارد" یا "برای یک x". بنابراین‌گزارهٔ $(x)(\exists y)(x < y)$ می‌گوید که برای هر x یک y وجود داردکه‌بزرگتراز x است. به‌همین‌ترتیب گزارهٔ $(\exists y)(x)(x < y)$ بیان می‌کند که یک y وجود داردکه از هر x بزرگتر است. باید توجه داشت که این دو گزاره متفاوتند: چنانچه درمورد عددهای‌حقیقی، گزارهٔ‌اول درست، ولی‌گزارهٔ دوم **نادرست** است.

چون گفتن این که یک x وجود دارد به‌گونه‌ای است که $A(x)$، به‌معنای آن است‌که چنین‌نیست که برای‌هر x داریم $\neg A(x)$، می‌بینیم که

$$(\exists x)\, A(x) \Leftrightarrow \neg (x) \neg A(x)$$

به‌همین‌ترتیب

$$(x)\, A(x) \Leftrightarrow \neg (\exists x) \neg A(x).$$

این دستور اغلب هنگامی مناسب است که بخواهیم نفی یک گزارهٔ پیچیده را بیان کنیم. **بنابراین**:

$$
\begin{aligned}
\neg \{(x)\,(\exists y)\,(x < y)\} &\Leftrightarrow \neg\,(x) \neg\,(y) \neg\,(x < y)\\
&\Leftrightarrow (\exists x)\,(y) \neg\,(x < y)\\
&\Leftrightarrow (\exists x)\,(y)\,(y \leqq x),
\end{aligned}
$$

که در آن برای رسیدن به‌نتیجهٔ $\neg\,(x < y) \Leftrightarrow (y \leqq x).$ از خواص عددهای حقیقی استفاده کرده‌ایم.

گاهی روش نمایش منطقی متعارف را اندکی تغییر می‌دهیم و می‌نویسیم $(\epsilon > 0)$ (. . .)، $(\exists \delta > 0)$ (. . .)، و $(\exists x \; \varepsilon \; A)$ (. . .) که منظوراز آنها، «برای هر ϵ بزرگتر از ۰ (. . .)»، "یک عدد δ بزرگتر از ۰ وجود دارد به‌گونه‌ای که (. . .)"، و "یک x درمجموعهٔ A وجود دارد به‌گونه‌ای‌که (. . .)". این تغییرجزیی عبارتها را کوتاه می‌سازد. برای مثال $(\epsilon > 0)$ (. . .) باید باروش نمایش متعارف چنین نوشته شود $(\epsilon)\ \{(\epsilon > 0) \Rightarrow$ (. . .) $\}$

برای یک بحث کامل درمورد استفادهٔ رسمی از نمادگذاری منطقی، دانشجو باید به سوپس [۲۲] مراجعه کند.

گزاره‌ها و برهان آنها

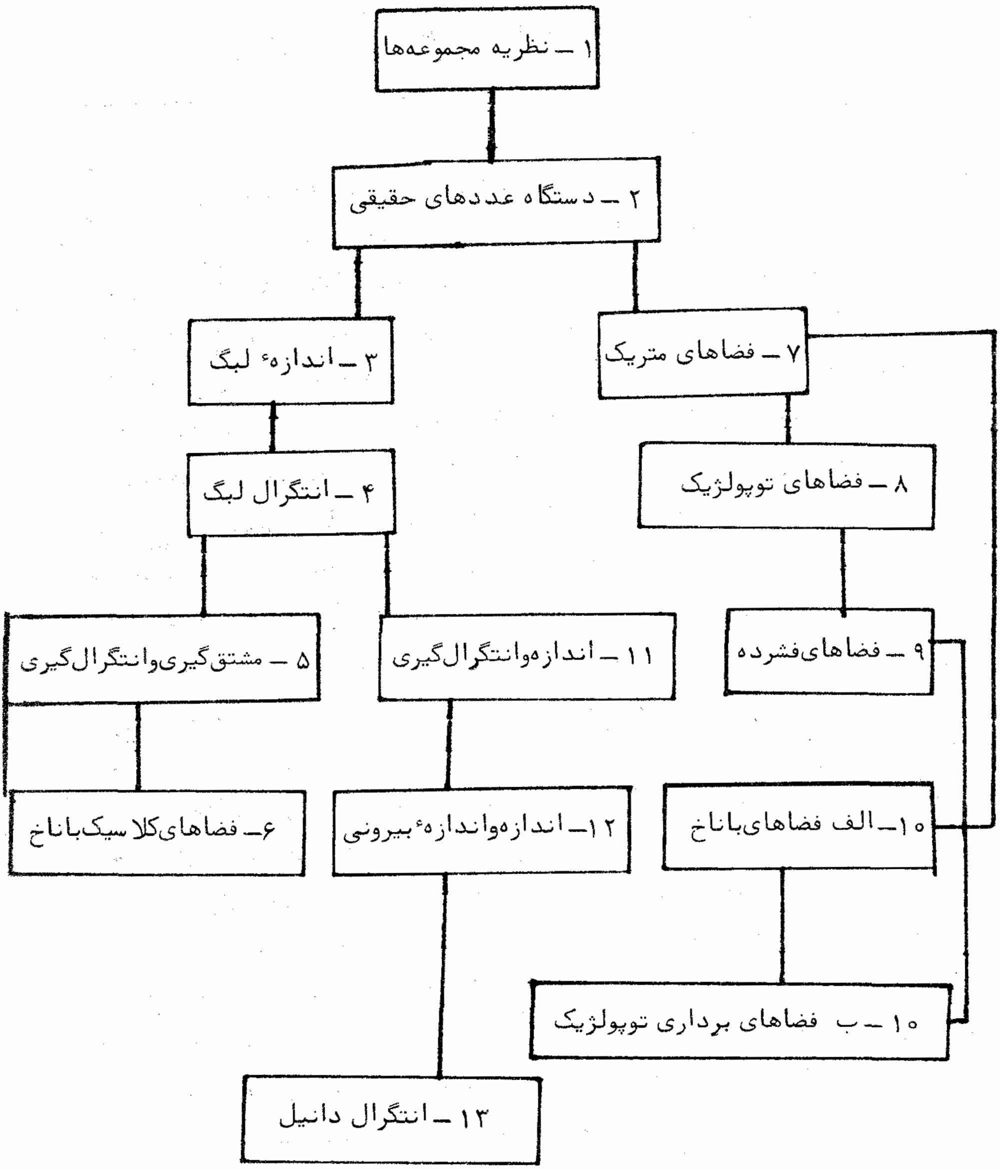
بسیاری از گزاره‌های اصلی (قضیه‌ها، گزاره‌ها، غیره) در ریاضیات به‌شکل متعارف " اگر A، آنگاه B "، یا برحسب نمادها " $‘A \Rightarrow B’$ " هستند. **نقیض** گزارهٔ $A \Rightarrow B$ $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ است. به‌آسانی دیده می‌شود که هر گزاره و نقیض آن هم‌ارزند. یعنی اگر یکی درست باشد، دیگری نیز درست است. روش مستقیم برهان قضیه‌ای به‌شکل " $‘A \Rightarrow B’$ " این است که از A شروع کنیم. پیامدهای گوناگون آن را بگیریم، و به B برسیم. گاهی برهان قضیه با استفاده از عکس نقیض آسانتر است، یعنی با $\neg B$ شروع می‌کنیم و $\neg A$ را نتیجه می‌گیریم. روش سوم، برهان به‌وسیلهٔ تناقض یا **برهان خلف** است. با A و $\neg B$ شروع می‌کنیم و به تناقض می‌رسیم. به همهٔ دانشجویان موٴکدا" سفارش می‌شود که از اثبات با برهان خلف خودداری کنند. برای این ممنوعیت دو دلیل وجود دارد: نخست آن‌که چنین برهانهایی بیشتر اوقات فریبنده هستند. تناقض صفحهٔ آخر بیشتر از یک استنتاج غلط در صفحه‌های پیشین سرچشمه می‌گیرد، تا از ناسازگاری A با $\neg B$. حتی هنگامی هم که چنین برهانی درست است بینش کمی دربارهٔ رابطهٔ بین A و B می‌دهد، درحالیکه هم برهان مستقیم و هم برهان قضیهٔ با عکس نقیض زنجیری از استدلالها می‌سازد که A و B را به هم می‌پیوندد.

درهرفصل این کتاب گزاره‌های اصلی پی‌درپی شماره‌گذاری شده‌اند و با نامهای گوناگون، لم، *گزاره*، قضیه یا پیامد نامگذاری شده‌اند. قضیه، گزاره‌ای پراهمیت است که به‌سبب کاربردهای متوالی باید آن‌را به‌خاطر سپرد. گزاره، گزاره‌ای‌که خود مفید است ولی کاربرد کمی دارد. یک لم معمولا " تنها برای برهان گزاره‌ها و قضیه‌های یک بند به‌کارمی‌رود. درهرفصل مراجعه به‌گزاره‌های همان فصل‌را با دادن شماره‌ٔ آن انجام می‌دهیم، مانند قضیهٔ ۱۷. ولی ارجاع به گزاره‌های یک فصل دیگر را به‌شکل " گزارهٔ ۳ — ۲۱ " انجام می‌دهیم که معنی آن گزارهٔ ۲۱ از فصل ۳ است. درمورد مسئله‌ها نیز از قرارداد مشابهی پیروی می‌کنیم. کوشش‌کرده‌ام که استفادهٔ ضروری از مراجع بین‌فصلی را به‌آوردن نام قضیه‌ها محدودسازم، مانند " قضیهٔ همگرایی لبگ "، مراجعه به‌گزاره‌های شماره‌دار بیشترمراجع کمکی هستندکه دانشجو مراجعه‌به‌آن‌را غیرضروری‌تشخیص‌می‌دهد.

برهان هرقضیه، گزاره، و غیره دراین‌کتاب باکلمهٔ، **برهان**، آغاز و با نماد '▮' " پایان می‌یابد که معنی آن این است، بدین‌نحو اثبات کامل می‌گردد. اگر قضیه‌ای به‌شکل '$A \Leftrightarrow B$' باشد، معمولا "برهان به‌دوبخش‌تقسیم می‌شود، یکی بخش " تنها اگر " است‌که $A \Rightarrow B$ راثابت‌می‌کند و دیگربخش " اگر " است‌که $B \Rightarrow A$ را ثابت می‌کند.

نابستگی فصل‌ها

بستگی یک فصل به‌فصلهای مختلف پیشین (به‌جز برای چند ارجاع فرعی) با طرح زیر نشان داده شده‌است. فصلهای ۱۴ و ۱۵ به‌بیشتر فصلهای پیشین بستگی دارد. فصل ۱۰ الف نمایانندهٔ بندهای ۱ تا ۴ و بند ۸ از فصل ۱۰ است، فصل ۱۰ ب نمایش‌دهندهٔ بندهای ۵ تا ۷ فصل ۱۰ است.



۱ ــ نظریه مجموعه‌ها
۲ ــ دستگاه عددهای حقیقی
۳ ــ اندازهٔ لبگ
۷ ــ فضاهای متریک
۴ ــ انتگرال لبگ
۸ ــ فضاهای توپولژیک
۵ ــ مشتق‌گیری‌وانتگرال‌گیری
۱۱ ــ اندازه‌وانتگرال‌گیری
۹ ــ فضاهای‌فشرده
۶ــ فضاهای‌کلاسیک‌باناخ
۱۲ــ اندازه‌واندازهٔ‌بیرونی
۱۰ــ الف فضاهای‌باناخ
۱۰ ــ ب فضاهای برداری توپولژیک
۱۳ ــ انتگرال دانیل

فصل اول

نظریهٔ مجموعه‌ها

۱ ـ مقدمه

یکی از وسیله‌های مهم در ریاضیات جدید نظریهٔ مجموعه‌هاست. بررسی مجموعه‌ها واستفاده از آنها در بنای ریاضیات درست پیش از آغاز قرن حاضر توسط کانتور[۱]، فرگه[۲]، راسل[۳] و دیگر ریاضیدانان شروع شد و دیده شد که می‌توان همهٔ ریاضیات را برپایهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها بنا نهاد. درواقع می‌توان بخش بزرگی از ریاضیات را برپایهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها قرار داد، ولی متأسفانه خود نظریهٔ مجموعه‌ها برعکس آنچه فرگه و راسل تصور کرده‌اند چندان ساده و طبیعی نیست، زیرا به‌زودی معلوم شد که به‌کاربردن بی‌قید و شرط نظریهٔ مجموعه‌ها منجر به‌تناقضاتی می‌شود که برای احتراز از آنها باید بااستفاده از تدابیر گوناگون دقت زیادی در گسترش نظریهٔ مجموعه‌ها به عمل آید. به‌طورکلی تناقضات هنگامی رخ می‌دهند که بخواهیم از مجموعه‌های "بسیار بزرگ" استفاده کنیم، مانند گفتگو از مجموعه‌ای که شامل همه‌چیز است. دراین‌کتاب برای احتراز ازاین تناقضات برای هربحثی یک مجموعه یا فضای مشخص X را درنظر گرفته و تنها مجموعه‌هایی را درنظر می‌گیریم که عنصرهای آنها از عنصرهای X اند، و یا (دستهٔ) مجموعه‌هایی را درنظر می‌گیریم که عنصرهای آنها زیرمجموعه‌های X اند و یا (خانوادهٔ) مجموعه‌هایی‌را درنظرمی‌گیریم که عنصرهای آنها دسته‌هایی از زیرمجموعه‌های X هستند، و این‌کار رامی‌توان ادامه‌داد. درچند فصل نخست X را مجموعهٔ عددهای حقیقی می‌گیریم.

دراین‌فصل مفاهیمی‌ازنظریهٔ مجموعه‌هارا شرح می‌دهیم که بعداً" مورداستفاده قرار خواهند گرفت. بیان این مفاهیم به‌طور توصیفی انجام خواهد شد و استدلالهای عرضه شده بیشتر درجهت توجیه‌آنهاست تا اثباتهای دقیقی که‌برمبنای‌نظریهٔ مجموعه‌ها انجام می‌گیرد. توصیف‌ها و روشهای‌نمایش این‌کتاب دربیشترموارد بانظریهٔ مجموعه‌های کتاب[۹] تحت عنوان *نظریهٔ مجموعه‌ها به‌طورساده*[۵]، نوشتهٔ *هالموس*[۴] سازگارند.

---

۱ — Cantor

۲ — Frege

۳ — Russell

۴ — Halmos

۵ — Naive Set therory

دراین‌کتاب مفاهیمی نظیر مجموعهٔ عددهای طبیعی ، مجموعهٔ عددهای گویا و غیره را دانسته فرض می‌کنیم هرچند که این مطلب‌ها را (همانند کتاب هالموس) می‌توان برحسب مفاهیم مقدماتی‌تر نظریهٔ مجموعه‌ها بیان کرد .

به‌عنوان کتابی دربارهٔ نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها می‌توان به‌مرجع [۲۳] تحت‌عنوان **نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها** نوشتهٔ سوپس[1] یا به‌پیوست مرجع [۱۴] تحت‌عنوان **توپولوژی عمومی** نوشتهٔ کلی[2] مراجعه کرد .

عددهای طبیعی (عددهای درست و مثبت) دراین کتاب چنان نقش عمده‌ای دارند که این مجموعه‌را با نماد خاص $\mathbf{N}$ نشان خواهیم داد . همچنین اصل‌های استقراء ریاضی و خوش ترتیبی را به‌اختصار بیان می‌کنیم . اصل استقراء ریاضی بیان می‌کند که اگر $P(n)$ گزاره‌ای باشد که برای هر n متعلق به $\mathbf{N}$ تعریف شده‌است ، آنگاه داریم :

$$\{P(1) \,\&\, [P(n) \Rightarrow P(n+1)]\} \Rightarrow (n)P(n)$$

اصل خوش‌ترتیبی بیان می‌کند که‌هرزیرمجموعهٔ ناتهی $\mathbf{N}$ دارای‌کوچکترین عنصراست .

مفاهیم اساسی نظریهٔ مجموعه‌ها عبارتند از مجموعه و اندیشهٔ عضوی از یک‌مجموعه‌بودن . عضوی‌ازیک‌مجموعه‌بودن‌را با ε, نشان می‌دهیم‌وعبارت " x عنصری (یا عضوی) از مجموعهٔ A است " را به‌صورت '$x \varepsilon A$' می‌نویسیم . هر مجموعه به‌طورکامل باعضوهای‌خود معین می‌شود ، یعنی‌اگر دومجموعهٔ A و B دارای‌این‌خاصیت باشندکه $x \varepsilon A$ است ، اگر و تنهااگر $x \varepsilon B$ باشد ، آنگاه $A = B$ خواهد بود . گیریم هر x متعلق به A به‌مجموعهٔ B نیز متعلق است ، یعنی :

$$x \,\varepsilon\, A \Rightarrow x \,\varepsilon\, B,$$

دراین‌صورت‌می‌گوییم A زیر مجموعه‌ای است از B یا A مشمول B است و می‌نویسیم $A \subset B$ ازاین‌روهمواره‌داریم $A \subset A$، واگر $A \subset B$و$B \subset A$آنگاه $A = B$است .

شاید مایهٔ تأسف باشد که عبارت " مشمول است " اغلب برای ارائهٔ هردو مفهوم ε و $\subset$ به‌کار برده می‌شود ، ولی دراین‌کتاب آن‌را تنها برای‌منظور اخیر به‌کار خواهیم برد .

برای بیان این‌که x عضوی از A نیست می‌نویسیم " $x \not\varepsilon A$' " که منظور از آن نفی " $x \varepsilon A$ " است . چون هر مجموعه باعنصرهایش تعیین می‌شود ، لذا یکی از معمول‌ترین‌راهها برای‌مشخص‌کردن یک مجموعه ، تعیین‌عناصرآن همانندتعریف‌زیراست :

مجموعهٔ A عبارت‌است‌از همهٔ‌عنصرهای x متعلق‌به X که دارای خاصیت P هستند .

---

۱ — Suppes

۲ — Kelley

این تعریف را به‌شکل کوتاه:

$$A = \{x \varepsilon X: P(x)\},$$

و هنگامی که مجموعهٔ X از پیش مشخص باشد، به‌شکل:

$$A = \{x: P(x)\}.$$

می‌نویسیم.

معمولاً "فرض‌می‌کنیم که هر مجموعه عضوهایی دارد، ولی معلوم شده که مناسبتر است که مجموعه‌ای را نیز که عنصری ندارد درنظر آوریم. چون هر مجموعه باعناصرش مشخص می‌شود، تنها یک‌چنین‌مجموعه‌ای وجود دارد که آنرا مجموعهٔ **تهی** می‌نامیم و با $\varnothing$ نشان‌می‌دهیم. اگر A مجموعهٔ دلخواهی باشدآنگاه‌هرعضو $\varnothing$ (که‌هیچ‌عضوی‌ندارد) یک‌عضو A است. پس $\varnothing \subset A$ ازاین‌رو مجموعهٔ‌تهی‌زیرمجموعهٔ‌هرمجموعهٔ‌دیگراست.

اگر x, y, z عناصر X باشند. مجموعه‌ای را که تنها عنصرش x است با $\{x\}$ تعریف‌می‌کنیم. مجموعه‌ای‌راکه‌عنصرهای‌آن‌تنها x و y هستندبا $\{x, y\}$ نشان می‌دهیم. مجموعهٔ $\{x, y, z\}$ مجموعه‌ای‌است که‌عنصرهای آن $z, y, x,$ هستند ومانندآن. مجموعهٔ $\{x\}$، **مجموعهٔ یکه** یا **مجموعهٔ تک‌عنصری** x نامیده می‌شود. باید توجه داشت که x و $\{x\}$ کاملاً" متنایزند. برای‌مثال‌همواره $x \varepsilon \{x\}$ است درصورتی‌که به‌ندرت $x \varepsilon x$ است.

درمجموعهٔ $\{x, y\}$ عنصر x هیچ‌امتیازی‌بر y ندارد، یعنی $\{x, y\} = \{y, x\}$ است. به‌این‌سبب $\{x, y\}$ را **یک‌جفت‌بی‌ترتیب** می‌نامیم. گاهی‌لازم‌است که جفت‌مرتب $\langle x, y\rangle$ را نیز درنظر بگیریم. درجفت اخیر عنصر نخست x و عنصر دوم y است‌وآنهاراازهم متمایزمی‌گیریم. ازاین‌رو برابری $\langle x, y\rangle = \langle a, b\rangle$ تنها هنگامی برقرار است که $x = a$ و $y = b$ باشد. پس اگر $x \neq y$ باشد آنگاه $\langle x, y\rangle \neq \langle y, x\rangle$. همچنین‌سه‌تایی‌های‌مرتب $\langle x, y, z\rangle$ وچهارتایی‌های مرتب $\langle x, y, z, w\rangle$ وغیره‌را درنظر خواهیم‌گرفت، دراینجا نیز عنصرهای‌نخست و دوم و سوم ..... را ازهم متمایز می‌گیریم. هرچند که می‌توان جفت‌های مرتب،

---

۱ ــ درتعریف‌مجموعهٔ A حضور (ضمنی یا صریح) مجموعهٔ‌تعریف X ضروری است، وگرنه با پارادوکس راسل مواجه‌می‌شویم. (به سوپس[۲۳] صفحهٔ ۶ مراجعه‌کنید).

سه‌تاییهای مرتب و غیره را (همانند هالموس) برحسب جفت‌های بی‌ترتیب تعریف‌کرد ولی دراینجا از انجام آن خودداری می‌کنیم .

اگر X و Y دو مجموعهٔ دلخواه باشند ، **حاصلضرب مستقیم** یا **حاصلضرب دکارتی** $X \times Y$ را با مجموعهٔ $\{\langle x, y\rangle\}$ ، یعنی مجموعهٔ همهٔ جفتهای مرتبی که عنصر نخست آنها به X و عنصردوم آنها به Y تعلق دارند ، تعریف می‌کنیم . به‌روش مشابه $X \times Y \times Z$ عبارت‌است از مجموعهٔ $\{\langle x, y, z\rangle\}$ ، یعنی همهٔ سه‌تاییهای مرتب به‌گونه‌ای‌که $x \varepsilon X,$ ، $y \varepsilon Y,$ ، و $z \varepsilon Z$ است . اگر X نمایش مجموعهٔ عددهای حقیقی باشد آنگاه $X \times X$ عبارت است از مجموعهٔ جفتهای مرتب عددهای حقیقی ، و همانگونه که در هندسهٔ تحلیلی دیده‌ایم ، این مجموعه با مجموعهٔ نقطه‌های صفحه هم‌ارز است . گاهی به‌جای $X \times X$ می‌نویسیم X^2 و به‌جای $X \times X \times X$ می‌نویسم X^3 ، و همین‌گونه عمل را ادامه می‌دهیم .

مسئله‌ها

۱ ــ نشان دهید $\{x: x \neq x\} = \varnothing$.

۲ ــ نشان دهید که اگر $x \varepsilon \varnothing,$ باشد ، آنگاه x وجود خارجی ندارد .

۳ ــ نشان‌دهید که درحالت‌کلی مجموعه‌های $X \times (Y \times Z)$ و $(X \times Y) \times Z$ متفاوتند ولی یک تناظر طبیعی بین هریک از آنها و $X \times Y \times Z$ وجود دارد .

۴ ــ نشان دهید که اصل خوش‌ترتیبی ، اصل استقراء ریاضی‌را ایجاب می‌کند . [مجموعهٔ $\{n \varepsilon \mathbf{N}$: $P(n)$ نادرست $\}$ را درنظر بگیرید .]

۵ ــ بااستفاده از استقراء ریاضی اصل خوش‌ترتیبی را نتیجه بگیرید . [برای هرمجموعهٔ ناتهی S از مجموعهٔ عددهای درست مثبت ، گزارهٔ " اگر $n \varepsilon S,$ آنگاه S دست‌کم دارای یک کوچکترین عنصر است " را $P(n)$ بگیرید .]

۲ ــ تابعها

منظور از یک‌تابع f از (یا بر) یک‌مجموعهٔ X بر (یا در) یک مجموعهٔ Y ، قانونی‌است‌که‌به‌هر x متعلق‌به X یک‌عنصر یکتای $f(x)$ متعلق‌به Y را نسبت‌می‌دهد . دستهٔ G متشکل‌ازجفتهای $\langle x, f(x)\rangle$ متعلق‌به $X \times Y$ ، نمودارتابع f نامیده می‌شود . هرزیرمجموعهٔ G از $X \times Y$ ، تنها هنگامی نمودار تابعی بر X است که برای

هر X $x \varepsilon X$ یک‌جفت‌یکتا در G وجود داشته باشد که عنصر نخست آن x باشد. چون هر تابع بانمودارش تعیین می‌شود، به‌این‌سبب بسیاری‌دوست‌دارندکه یک‌تابع را با نمودارش تعریف کنند. برای برآوردن منظور خود دراین‌کتاب می‌توان تابع را برحسب نمودار یا مفهوم ابتدایی آن تعریف کرد[1].

گاهی نگاشت را به‌عنوان کلمهٔ مترادف تابع، به‌کارمی‌برند. گاهی، برای‌نشان دادن این که f تابعی است از روی X در Y می‌نویسیم:

$$f: X \rightarrow Y$$

مجموعهٔ X را **دامنه** (یادامنهٔ‌تعریف) تابع f می‌نامند. مجموعهٔ مقادیری که با f گرفته‌می‌شود، یعنی مجموعهٔ $\{y \varepsilon Y: (\exists x)[y = f(x)]\}$, را **برد** f می‌گویند.

درحالت کلی برد یک تابع f کوچکتر از Y است. اگر برد f برابر Y باشد، آنگاه‌می‌گویند f یک‌تابع پوشا است. (دراین‌مورد نامگذاری‌دیگر این‌است‌که می‌گویند: f سورژکتیو است. دراین‌کتاب این نامگذاری را به‌کار نخواهیم برد).

اگر A زیرمجموعه‌ای از X باشد، **نگار** A به‌وسیلهٔ f را بامجموعهٔ آن عنصرهای Y از y تعریف می‌کنیم که‌برای‌هر x متعلق‌به A برابری $y = f(x)$ برقراراباشد. نگار A به‌وسیلهٔ f را با $f[A]$ نشان می‌دهیم، پس:

$$f[A] = \{y \varepsilon Y: (\exists x) [x \varepsilon A \quad \text{و} \quad y = f(x)]\}.$$

بنابراین برد f برابر $f[X]$ است، وبرای‌این‌که f تابعی‌پوشا از روی X به روی Y باشد لازم و کافی است که $Y = f[X]$ باشد.

مهمتر از مفهوم نگار یک مجموعه به‌وسیله f مفهوم نگار وارون است. اگر B،

۱ــ هم‌ارزی بین‌تابعها و نمودارآنها تنها درمورد تابعهایی از مجموعهٔ داده شده X بریک‌مجموعه Y معتبراست. اشکالاتی، ازجمله، درتعریف‌نمودارتابع همانی i که برای هر x با $i(x) = x$ تعریف‌می‌شودوجوددارد. درمواردصوری که مفهوم ابتدائی تابع را درنظرمی‌گیریم، باید اصول‌موضوعی برای‌توصیف‌خاصیت‌های‌تابعها داشته‌باشیم، همانند $(f = g) \Leftrightarrow (x)[f(x) = g(x)]$ به علاوه **باید اصولی موضوعی داشته باشیم** که **ما را قادر** به ساختن تابعها گردانند.

زیرمجموعه‌ای از Y باشد، نگار وارون B را با $f^{-1}[B]$ نشان می‌دهیم و آن را با مجموعهٔ x های متعلق به X که برای آنها $f(x)$ متعلق به B است تعریف می‌کنیم، یعنی:

$$f^{-1}[B] = \{x \varepsilon X: f(x) \varepsilon B\}.$$

باید توجه داشت که برای این‌که f تابعی برروی Y باشد لازم و کافی است که نگار وارون هر زیرمجموعهٔ ناتهی از Y یک زیرمجموعهٔ ناتهی باشد.

تابع $f: X \to Y$ را یک به یک (یا تک‌مقداری، یا انژکتیو) می‌گویند. اگر برابری $f(x_1) = f(x_2)$ تنها هنگامی برقرار باشد که $x_1 = x_2$ است. تابعهایی که از X به روی Y یک‌به‌یک هستند، معمولاً "تناظر یک‌به‌یک بین X و Y نامیده می‌شوند. (این تابعها را تناظر دوسویی نیز می‌گویند). دراین‌حالت یک‌تابع $g: Y \to X$ وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر x و هر y داریم: $g(f(x)) = x$، $f(g(y)) = y$.
تابع g را وارون تابع f نامیده و آن‌را گاهی با f^{-1} می‌نمایانند.

باید توجه‌داشت‌که اگر g را با f^{-1} نشان‌دهیم، آنگاه‌می‌توان $f^{-1}[E]$ را نگار وارون E به‌وسیلهٔ f یا نگار E به‌وسیلهٔ f^{-1} دانست، و بااین‌طرزنمایش این دومجموعه همانند هستند.

گیریم $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$ است. تابع جدید $h: X \to Z$ را با برابری $h(x) = g(f(x))$ تعریف می‌کنیم. تابع h راترکیب‌تابعهای g و f، می‌نامیم و با $g \circ f$ نشان‌می‌دهیم. اگر $f: X \to Y$ و A زیرمجموعه‌ای‌از X باشد می‌توان‌تابع‌جدید $g: A \to Y$ رابرای‌هر $x \varepsilon A$ با $g(x) = f(x)$ تعریف‌کرد. این تابع جدید g را قید f به A نامیده و آن‌را گاهی با $f|A$ نشان‌می‌دهیم. دربیشترموارد تمایز بین g و f دارای‌اهمیت‌است. دامنه‌های این‌دوتابع متفاوت است و نگارهای وارون به‌وسیلهٔ g با نگارهای وارون به‌وسیلهٔ f متفاوتند.

باتوجه به‌این‌که‌امکان تعریف‌تابع ها به‌وسیلهٔ جفتهای‌مرتب‌راخاطرنشان‌ساختیم، بد نیست یادآوری کنیم که به‌وارون می‌توان جفتهای‌مرتب را برحسب مفهوم یک تابع تعریف‌کرد: هرجفت‌مرتب تابعی‌است که دامنهٔ‌آن‌مجموعهٔ $\{۱ \ ۲\}$ است. همچنین هر دنبالهٔ پایاندار، یا هر n گانه، تابعی‌است‌که‌دامنهٔ آن n عددطبیعی نخست یعنی مجموعهٔ $\{i \varepsilon \mathbf{N}: i \leq n\}$ است. (این مجموعه را یک‌پاره از $\mathbf{N}$ می‌نامند). همچنین، یک‌دنبالهٔ بی‌پایان تابعی است که دامنهٔ آن مجموعهٔ عددهای طبیعی یعنی $\mathbf{N}$ است. کلمهٔ دنباله‌را درمورد دنباله‌های پایاندار

یا بی‌پایان به‌کارمی‌بریم ، اگر برد یک دنباله ، مشمول مجموعهٔ X باشد ، دراین‌صورت ، از دنباله‌ای از (یا در) X ، یا از دنبالهٔ عناصر X سخن می‌گوییم . معمولا" درمورد دنباله‌ها نیز تا اندازه‌ای از قراردادهای مربوط به‌تابعها استفاده می‌کنند و مقدار تابع را در i با x_i نشان می‌دهند و آن‌را جملهٔ i ام دنباله می‌گویند . اغلب n گانه‌های مرتب‌را با $\langle x_i \rangle_{i=1}^{n}$ و دنباله‌های بی‌پایان‌را با $\langle x_i \rangle_{i=1}^{\infty}$ نشان می‌دهیم . هرگاه امکان هیچ‌خطایی نباشد ، دنباله‌را اغلب به‌طور ساده با $\langle x_i \rangle$ می‌نمایانیم . برد دنبالهٔ $\langle x_i \rangle$ را با $\{x_i\}$ نشان‌می‌دهیم . ازاین‌رو بردیک n گانهٔ مرتب $\langle x_i \rangle_{i=1}^{n}$ ، n گانهٔ بی‌ترتیب $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ است . این‌قرارداد به‌طور منطقی باقراردادقبلی مربوط به‌جفتها ، سه‌تائیها ، . . . . ، ی‌مرتب‌وبی‌ترتیب سازگاراست .

مجموعهٔ A را شمارش‌پذیرمی‌گویندهرگاه A برد یک‌دنباله‌باشدوآن‌راپایاندار می‌گویند هرگاه برد یک دنبالهٔ پایاندار باشد . مجموعه‌ای که پایاندار نیست بی‌پایان نامیده‌می‌شود . (بسیاری‌ازنویسندگان‌استفاده‌ازکلمهٔ " شمارش پذیر " را به‌مجموعه‌هایی که بی‌پایان‌وشمارش‌پذیرندمقیدمی‌سازند ، ولی این‌تعریف مجموعه‌های‌پایاندار را مشمول مجموعه‌های‌شمارش‌پذیرمی‌سازد) عبارت " شمارش‌پذیربی‌پایان " رادرموردمجموعه‌هایی که‌بی‌پایان‌وشمارش‌پذیرندبه‌کارمی‌بریم . باردیگردربند ۶ به‌این‌مفهوم اشاره‌خواهیم‌کرد .

یکی از متداول‌ترین روشهای تعریف یک دنبالهٔ بی‌پایان روشی است که بااصل زیر داده می‌شود :

اصـــل تعـــریـــف بـــازگشتـــی

گیریم f تابعی‌است‌ازمجموعهٔ X درخودش و a عنصری‌از X است . دراین‌صورت یک دنبالهٔ بی‌پایان یکتای $\langle x_i \rangle$ از عناصر X وجود دارد به‌گونه‌ای که $x_1 = a$ و برای هر i ، $x_{i+1} = f(x_i)$.

وجود چنین‌دنباله‌ای به‌طورمشهود آشکاراست : این دنبالـه را بـــه‌شـــکل $x_1 = a,$ $x_2 = f(a),$ $x_3 = f(f(a)),$ ، الی‌آخر ، تعریف‌می‌کنیم . می‌توان‌یک‌اثبات رسمی‌تر برای وجود چنین دنباله‌ای‌را به‌شرح زیر بیان کرد : نخست بااستقراء روی n ، ثابت می‌کنیم که برای هر عدد طبیعی n یک دنبالهٔ پایاندار یکتا به‌شکل :

$$x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$$

وجود دارد به‌گونه‌ای که $x_1^{(n)} = a$ و

برای $1 \leq i < n$ ، $x_{i+1}^{(n)} = f(x_i^n)$

است . از یکتایی دنباله‌نتیجه می‌شود که برای $i \leq n \leq m$ داریم $x_i^{(n)} = x_i^{(m)}$
از این‌رو اگر x_n را با $x_n^{(n)}$ تعریف کنیم ، داریم $x_i^{(n)} = x_i$ و می‌بینیم که دنبالهٔ $\langle x_i \rangle$ نیازهای اصل بالا را برمی‌آورد .

تعمیم جزیی این اصل چنین است : برای هرعدد طبیعی n ، گیریم f_n تابعی از روی X^n بر X بوده و $a \varepsilon X$ باشد . دراین‌صورت یک دنبالهٔ یکتای $\langle x_i \rangle$ از X وجود دارد به‌گونه‌ای که $x_1 = a$ و $x_{i+1} = f_i(x_1, \ldots, x_i)$

یک مفهوم مهم مربوط به‌یک دنباله ، مفهوم زیر دنباله است . نگاشت g از $\mathbf{N}$ ، در $\mathbf{N}$ را **افزایشی** گوییم هرگاه برای $i > j$ داشته‌باشیم $(g(i) > g(j))$.
گیریم f یک دنبالهٔ بی‌پایان است (یعنی تابعی است که دامنهٔ آن $\mathbf{N}$ است) ، می‌گوییم h یک **زیر دنبالهٔ** بی‌پایان f است هرگاه یک نگاشت افزایشی g از $\mathbf{N}$ در $\mathbf{N}$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $h = f \circ g$. اگر f را به‌شکل $\langle f_i \rangle$ و g را به‌شکل $\langle g_i \rangle$ بنویسیم ،آنگاه $f \circ g$ رامعمولا" با $\langle f_{g_i} \rangle$ نشان می‌دهیم .

مسئله‌ها

۶ . گیریم $f: X \to Y$ نگاشتی ازفضای ناتهی X در Y است . نشان دهید برای این‌که f یک‌به‌یک باشد لازم و کافی است که یک نگاشت $g: Y \to X$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $g \circ f$ روی X نگاشت همانی باشد ، یعنی برای هر $x \varepsilon X$ داشته باشیم $g(f(x)) = x$

۷ . گیریم $f: X \to Y$ نگاشتی از X در Y است . نشان دهید که نگاشت f هنگامی پوشاست که یک نگاشت $g: Y \to X$ وجود داشته‌باشد به‌گونه‌ای که $f \circ g$ روی Y نگاشت همانی باشد ، یعنی ، برای هر $y \varepsilon Y$ داشته‌باشیم $f(g(y)) = y$ ، (وارون این مطلب به‌صورت مسئلهٔ ۲۰ مطرح شده است) .

۸ . با استقراء ریاضی ، اصل تعمیم یافتهٔ تعریف بازگشتی متن را ، ثابت کنید .

۳ــ اجتماع ، اشتراک ، و مکمل

مجموعهٔ X و مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های آن یعنی $\mathcal{P}(X)$ رادرنظرمی‌گیریم .

درنظریهٔ مجموعه‌ها عملیاتی وجود دارد که می‌توان روی زیرمجموعه‌های X انجام داد. اگر A و B دو زیرمجموعهٔ X باشند، اشتراک آنها یعنی $A \cap B$ برابراست بامجموعهٔ همهٔ عنصرهایی که به‌هردومجموعهٔ A و B تعلق دارند. ازاین‌رو:

$$A \cap B = \{x: x \varepsilon A \ \& \ x \varepsilon B\}$$

دیده می‌شود که این تعریف نسبت به A و B متقارن است، یعنی $A \cap B = B \cap A$ همچنین داریم $A \cap B \subset A$ $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$ و $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. مجموعهٔ اخیر را به‌شکل $A \cap B \cap C$ می‌نویسیم که عبارت‌است از مجموعهٔ عنصرهایی که به‌هریک از مجموعه‌های A، B و C تعلق دارند.

اجتماع دومجموعهٔ A و B مجموعهٔ عنصرهایی است‌که به A یا B تعلق دارند و آن‌را با $A \cup B$ نشان می‌دهیم. ازاین‌رو:

$$A \cup B = \{x: x \varepsilon A \vee x \varepsilon B\}.$$

داریم:

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$$
$$A \subset A \cup B$$
$$A = A \cup B \Leftrightarrow B \subset A.$$

همچنین رابطه‌هایی‌بین اجتماع و اشتراک وجود دارند که قانونهای پخشی نامیده می‌شوند:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

مجموعهٔ تهی $\varnothing$ و فضای X نقشهای خاصی دارند که عبارتند از:

$$A \cup \varnothing = A, \qquad A \cap \varnothing = \varnothing$$
$$A \cup X = X, \qquad A \cap X = A.$$

اگر A زیرمجموعه‌ای از X باشد، مکمل A (نسبت‌به X) را با $\tilde{A}$ نشان می‌دهیم، و به‌صورت مجموعهٔ عنصرهایی تعریف می‌کنیم که‌به A تعلق‌ندارند. ازاین‌رو:

$$\tilde{A} = \{x \varepsilon X: x \not\varepsilon A\}.$$

گاهی به‌جای $\tilde{A}$ از نشان $\sim A$ استفاده می‌کنیم. داریم:

$$\tilde{\varnothing} = X, \quad \tilde{X} = \varnothing$$
$$\tilde{\tilde{A}} = A, \quad A \cup \tilde{A} = X, \quad A \cap \tilde{A} = \varnothing$$
$$A \subset B \Leftrightarrow \tilde{B} \subset \tilde{A}.$$

دوقانون خاصی که مکمل‌گیری را با اجتماع و اشتراک مربوط می‌کند، قانونهای دمرگان نام دارند:

$$\sim(A \cup B) = \tilde{A} \cap \tilde{B}$$
$$\sim(A \cap B) = \tilde{A} \cup \tilde{B}.$$

اگر A و B دوزیرمجموعهٔ X باشند **تفاضل** $B \sim A$، یامکمل‌نسبی A در B، مجموعه‌ای از عنصرهای B است که به A تعلق ندارند. ازاین‌رو:

$$B \sim A = \{x: x \varepsilon B \ \&\ x \not\varepsilon A\}.$$

داریم: $B \sim A = B \cap \tilde{A}$

تفاضل‌متقارن دومجموعهٔ A و B را با $A \triangle B$ نشان می‌دهیم و بابرابری زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \triangle B = (A \sim B) \cup (B \sim A).$$

تفاضل‌متقارن دومجموعه متشکل از عنصرهایی است که به‌یکی از این دومجموعه تعلق دارند ولی به‌هردوی آنها تعلق ندارند.

اگر اشتراک دومجموعه تهی باشد آن‌دومجموعه‌را **مجزا ازهم** می‌گویند. دستهٔ $\mathcal{C}$ ازمجموعه‌ها را یک‌دستهٔ‌مجزا ازمجموعه‌ها یا یک‌دسته از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا می‌گویند هرگاه هردومجموعهٔ متعلق‌به $\mathcal{C}$ مجزا باشند.

تعریف عمل‌اجتماع (یااشتراک) دومجموعه‌را می‌توان‌باتکرار تعمیم دادواجتماع (یا اشتراک) هردستهٔ پایاندار از مجموعه‌هارا تعریف کرد. ولی، می‌توان اشتراک هردستهٔ‌دلخواه $\mathcal{C}$ از مجموعه‌هارا به‌این‌شرح تعریف‌کرد: اشتراک‌دستهٔ $\mathcal{C}$، مجموعهٔ عناصری از X است که به‌هریک از عضوهای $\mathcal{C}$ تعلق دارند. این اشتراک را با $\bigcap_{A \varepsilon \mathcal{C}} A$ یا $\bigcap\{A: A \varepsilon \mathcal{C}\}$ نشان می‌دهیم. از این‌رو:

$$\bigcap_{A \varepsilon \mathcal{C}} A = \{x \varepsilon X: (A)(A \varepsilon \mathcal{C} \Rightarrow x \varepsilon A)\}.$$

همچنین اجتماع یک‌دستهٔ دلخواه از مجموعه‌ها را با:

$$\bigcup_{A \varepsilon \mathcal{C}} A = \{x \varepsilon X: (\exists A)(A \varepsilon \mathcal{C} \ \&\ x \varepsilon A)\}.$$

تعریف می‌کنیم.

درمورد اجتماع و اشتراک یک‌دستهٔ دلخواه مجموعه‌ها نیز قانونهای دمرگان[1] برقرار است:

---

۱ – De Morgan

$$\sim\left[\bigcup_{A\varepsilon\mathcal{C}} A\right] = \bigcap_{A\varepsilon\mathcal{C}} \tilde{A}$$

$$\sim\left[\bigcap_{A\varepsilon\mathcal{C}} A\right] = \bigcup_{A\varepsilon\mathcal{C}} \tilde{A}.$$

قانونهای پخشی نیز دراین‌مورد برقرارند :

$$B \cap \left[\bigcup_{A\varepsilon\mathcal{C}} A\right] = \bigcup_{A\varepsilon\mathcal{C}} (B \cap A)$$

$$B \cup \left[\bigcap_{A\varepsilon\mathcal{C}} A\right] = \bigcap_{A\varepsilon\mathcal{C}} (B \cup A).$$

ازتعریف بالا نتیجه می‌شود که اجتماع یک‌دستهٔ تهی از مجموعه‌ها ، تهی است و اشتراک یک‌دستهٔ تهی ازمجموعه‌ها برابر X است .

منظور از یک‌دنباله از زیرمجموعه‌های X دنباله‌ای از عناصر $\mathcal{P}(X)$ یعنی نگاشتی از $\mathbf{N}$ (یا پاره‌ای از $\mathbf{N}$)در $\mathcal{P}(X)$ است . اگر $\langle A_i \rangle$ یک‌دنبالهٔ بی‌پایان از زیرمجموعه‌های X باشد ، اجتماع دامنهٔ این دنباله‌را با $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ نشان می‌دهیم ، ازاین‌رو ، داریم :

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x: (\exists i)(x \ \varepsilon \ A_i)\}.$$

همچنین اگر $\langle B_i \rangle_{i=1}^{n}$ یک‌دنبالهٔ پایاندار از زیرمجموعه‌های X باشد ، اشتراک برد این دنباله‌را با $\bigcap_{i=1}^{n} B_i$ نشان می‌دهیم ، پس:

$$\bigcap_{i=1}^{n} B_i = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n.$$

این‌قرارداد درمورد دنبالهٔ مجموعه‌ها چنان‌مناسب‌است‌که اغلب آن‌را درمورد هردستهٔ دلخواه‌مجموعه‌ها بااستفاده‌از مفهوم یک دستهٔ زیرنویس‌دار‌تعمیم می‌دهیم : **یک‌زیرمجموعهٔ زیرنویس‌دار** X (یایک‌دسته‌از زیرمجموعه‌های‌زیرنویس دار X) تابعی است از روی یک مجموعهٔ‌زیرنویس Λ در X (یا در مجموعهٔ زیرمجموعه‌های X) . اگر Λ مجموعهٔ‌عددهای طبیعی باشد ، آنگاه مفهوم یک مجموعهٔ زیرنویس دار بامفهوم دنباله منطبق می‌شود .

بااستفاده‌از روش نمایش دنباله ، به‌جای $x(\lambda)$, می‌نویسیم x_λ ، و مجموعهٔ زیرنویس‌دار‌رابه‌شکل $\{x_\lambda\}$ یا $\{x_\lambda : \lambda \ \varepsilon \ \Lambda\}$ نشان می‌دهیم و می‌گوییم $\{x_\lambda\}$ با Λ زیرنویس دار است . اجتماع‌واشتراک‌یک‌مجموعهٔ زیرنویس‌دار را بااجتماع‌واشتراک

بسردتابع تعریف‌کننده‌ٔ مجموعه‌ٔ زیرنویس‌دار،تعریف می‌کنیم . ازاین‌رو:

$$\bigcup_{\lambda \varepsilon \Lambda} A_\lambda = \{x \varepsilon X: (\exists\lambda)(\lambda \varepsilon \Lambda \;\&\; x \varepsilon A_\lambda)\}$$

و

$$\bigcap_{\lambda \varepsilon \Lambda} A_\lambda = \{x \varepsilon X: (\lambda)(\lambda \varepsilon \Lambda \Rightarrow x \varepsilon A_\lambda)\}.$$

درحالتی‌که Λ برابر مجموعهٔ عددهای طبیعی یعنی $\mathbf{N}$ است ، داریم :

$$\bigcap_{i \varepsilon N} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i,$$

و طرز نمایش مشابهی نیز درمورد اجتماع به‌کار می‌بریم .

اگر f نگاشتی‌از X در Y و $\{A_\lambda\}$ دسته‌ای‌اززیرمجموعه‌های X باشد ،آنگاه :

$$f\Big[\bigcup_\lambda A_\lambda\Big] = \bigcup_\lambda f[A_\lambda]$$

ولی تنها می‌توان نوشت :

$$f\Big[\bigcap_\lambda A_\lambda\Big] \subset \bigcap_\lambda f[A_\lambda].$$

درموردنگارهای‌وارون ، برای‌یک‌دستهٔ $\{B_\lambda\}$ از مجموعه‌های Y ، داریم :

$$f^{-1}\Big[\bigcup_\lambda B_\lambda\Big] = \bigcup_\lambda f^{-1}[B_\lambda]$$

$$f^{-1}\Big[\bigcap_\lambda B_\lambda\Big] = \bigcap_\lambda f^{-1}[B_\lambda]$$

و برای $B \subset Y$ داریم :

$$f^{-1}[\tilde{B}] = \sim f^{-1}[B]$$

همچنین برای $A \subset X$ و $B \subset Y$ داریم :

$$f[f^{-1}[B]] \subset B$$

و

$$f^{-1}[f[A]] \supset A$$

مسئله‌ها

۹ ــ نشان دهید $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$

۱۰ ــ قانونهای پخشی را ثابت کنید .

۱۱ ــ نشان دهید $A \subset B \Leftrightarrow \tilde{B} \subset \tilde{A}$

۱۲ ــ نشان دهید :

الف ــ $A \triangle B = B \triangle A$ و $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$

ب ــ $A \triangle B = \varnothing \Leftrightarrow A = B$

پ ــ $A \triangle B = X \Leftrightarrow A = \tilde{B}$

ت ــ $A \triangle \varnothing = A$ و $A \triangle X = \tilde{A}$

ث ــ $(A \triangle B) \cap E = (A \cap E) \triangle (B \cap E)$

۱۳ ــ قانونهای دمرگان را برای اجتماع و اشتراک یک دستهٔ دلخواه از زیرمجموعه‌ها ثابت کنید .

۱۴ ــ نشان دهید :

$$B \cap \left[\bigcup_{A \varepsilon \mathcal{C}} A\right] = \bigcup_{A \varepsilon \mathcal{C}} (B \cap A).$$

۱۵ ــ نشان دهید که اگر $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو دسته از مجموعه‌ها باشند ، آنگاه :

$$\left[\bigcup \{A: A \varepsilon \mathcal{A}\}\right] \cap \left[\bigcup \{B: B \varepsilon \mathcal{B}\}\right] = \bigcup \{A \cap B: \langle A, B\rangle \varepsilon \mathcal{A} \times \mathcal{B}\}.$$

۱۶ ــ نشان دهید :

الف ــ $f[\bigcup A_\lambda] = \bigcup f[A_\lambda].$

ب ــ $f[\bigcap A_\lambda] \subset \bigcap f[A_\lambda].$

پ ــ مثالی بیاورید که برای آن داشته باشیم :

$$f[\bigcap A_\lambda] \neq \bigcap f[A_\lambda].$$

۱۷ ــ نشان دهید :

الف ــ $f^{-1}[\bigcup B_\lambda] = \bigcup f^{-1}[B_\lambda].$

ب ــ $f^{-1}[\bigcap B_\lambda] = \bigcap f^{-1}[B_\lambda].$

پ ــ برای $B \subset Y$ ؛ $f^{-1}[\tilde{B}] = \sim f^{-1}[B]$

۱۸ ــ الــف ــ نشان دهید که اگر f نگاشتی از X در Y و $B \subset Y, A \subset X$ باشد آنگاه

$$f[f^{-1}[B]] \subset B$$

و

$$f^{-1}[f[A]] \supset A.$$

ب ــ با آوردن مثالهایی نشان دهید که در مورد الف همواره برابری برقرار نیست.

پ ــ نشان دهید که اگر f نگاشتی از X روی Y و $B \subset Y$ باشد آنگاه

$$f[f^{-1}[B]] = B.$$

۴ ــ جبر مجموعه‌ها

یک دستهٔ $\mathfrak{A}$ از زیرمجموعه‌های X را یک **جبر** مجموعه‌ها یا یک **جبر بول** می‌گویند. هرگاه (i) هنگامی که A و B به $\mathfrak{A}$ تعلق دارند آنگاه $A \cup B$ به $\mathfrak{A}$ متعلق باشد، (ii) برای هر مجموعهٔ A متعلق به $\mathfrak{A}$ مکمل آن یعنی $\tilde{A}$ به $\mathfrak{A}$ متعلق باشد. از قانونهای دمرگان نتیجه می‌شود که (iii) هرگاه A و B به $\mathfrak{A}$ متعلق باشند آنگاه $A \cap B$ نیز به $\mathfrak{A}$ تعلق دارد. اگر یک دستهٔ $\mathfrak{A}$ از زیرمجموعه‌های X دارای شرطهای (ii) و (iii) باشند آنگاه بنابر قانونهای دمرگان $\mathfrak{A}$ شرط (i) را نیز دارد، بنابراین یک جبر بول است. اگر مجموعه‌های A_1 ، ... ، A_n به $\mathfrak{A}$ متعلق باشند با تشکیل اجتماع دوبه‌دوی این مجموعه‌ها می‌بینیم که $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ نیز به $\mathfrak{A}$ تعلق دارد. به‌روش مشابه دیده می‌شود که $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ نیز به $\mathfrak{A}$ تعلق دارد. اکنون به‌بیان چند گزارهٔ مفید در مورد جبر مجموعه‌ها می‌پردازیم، که نخستین آن چنین است:

۱ ــ گزاره:

برای هر دستهٔ $\mathcal{C}$ از زیرمجموعه‌های X، کوچکترین جبر $\mathfrak{A}$ وجود دارد که حاوی $\mathcal{C}$ است، یعنی یک جبر $\mathfrak{A}$ وجود دارد که شامل $\mathcal{C}$ است به‌گونه‌ای که اگر $\mathfrak{B}$ یک جبر دیگر حاوی $\mathcal{C}$ باشد، آنگاه $\mathfrak{B}$ حاوی $\mathfrak{A}$ است.

برهان:

گیریم $\mathfrak{F}$ خانوادهٔ همهٔ جبرهایی (از زیرمجموعه‌های X) است که $\mathcal{C}$ را دربر

دارند ، می‌گیریم $\mathcal{A} = \bigcap\{\mathcal{B} : \mathcal{B} \in \mathcal{F}\}$. دراین‌صورت $\mathcal{C}$ یک زیردستهٔ $\mathcal{A}$ است زیرا هر $\mathcal{B}$ ی متعلق به $\mathcal{F}$ شامل $\mathcal{C}$ است . به‌علاوه $\mathcal{A}$ یک جبر است ، زیرا اگر A و B متعلق به $\mathcal{A}$ باشند ، آنگاه برای‌هر $\mathcal{B} \in \mathcal{F}$ داریم $A \in \mathcal{B}$ و $B \in \mathcal{B}$. چون $\mathcal{B}$ یک جبر است پس $A \cup B$ به $\mathcal{B}$ تعلق‌دارد ، و چون برای‌هر $\mathcal{B}$ اجتماع $A \cup B$ به $\mathcal{B}$ تعلق‌دارد پس $A \cup B$ به $\bigcap\{\mathcal{B} : \mathcal{B} \in \mathcal{F}\}$ تعلق دارد . به‌روش مشابه دیده می‌شود که اگر $A \in \mathcal{A}$ آنگاه $\tilde{A} \in \mathcal{A}$.
ازتعریف $\mathcal{A}$ نتیجه می‌شود که اگر جبر $\mathcal{B}$ حاوی $\mathcal{C}$ باشد ، آنگاه $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. ▮

۲ ــ گـــزاره :

گیریم $\mathcal{A}$ جبری از زیرمجموعه‌ها و $\langle A_i \rangle$ یک دنباله از مجموعه‌های متعلق به $\mathcal{A}$ است . دراین‌صورت یک‌دنبالهٔ $\langle B_i \rangle$ ازمجموعه‌های متعلق به $\mathcal{A}$ وجود دارد به‌گونه‌ای که برای $n \neq m$ داریم $B_n \cap B_m = \varnothing$ و $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

بـــرهـــان :

هنگامی‌که $\langle A_i \rangle$ پایاندار است اثبات گزاره بدیهی است ، پس فرض می‌کنیم دنبالهٔ $\langle A_i \rangle$ بی‌پایان است . قرار می‌دهیم $B_1 = A_1$ و برای هر عدد طبیعی $n > 1$ قرار می‌دهیم .

$$\begin{aligned} B_n &= A_n \sim [A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}] \\ &= A_n \cap \tilde{A}_1 \cap \tilde{A}_2 \cap \cdots \cap \tilde{A}_{n-1}. \end{aligned}$$

چون مکمل‌ها و اشتراک‌های مجموعه‌های متعلق به $\mathcal{A}$ باز به $\mathcal{A}$ تعلق دارند ، پس $B_n \in \mathcal{A}$. همچنین داریم $B_n \subset A_n$. گیریم B_n و B_m دومجموعه‌ای باشند که به‌این‌روش‌تعریف شده‌اند ،وفرض‌می‌کنیم $m < n$ است . دراین‌صورت $B_m \subset A_m$ ، پس :

$$\begin{aligned} B_m \cap B_n &\subset A_m \cap B_n \\ &= A_m \cap A_n \cap \cdots \cap \tilde{A}_m \cap \cdots \\ &= (A_m \cap \tilde{A}_m) \cap \cdots \\ &= \varnothing \cap \cdots \\ &= \varnothing. \end{aligned}$$

چـــون $B_i \subset A_i$ ، پـــــس :

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

اکنون گیریم $x \varepsilon \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ، دراین‌صورت باید x دست‌کم به‌یکی‌از A_i هـــا متعلق باشد . گیریم n کوچکترین مقدار i است به‌گونه‌ای که $x \varepsilon A_i$. دراین‌صورت $x \varepsilon B_n$ پس $x \varepsilon \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. از این‌رو:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

درنتیجـــه:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \blacksquare$$

یک جبر $\mathfrak{a}$ از مجموعه‌هارا یک **σ ــ جبـــر** یا **هیـأت بـــرل** می‌گویند ، اگر اجتماع هردستهٔ شمارش‌پذیر از مجموعه‌های $\mathfrak{a}$ باز متعلق به $\mathfrak{a}$ باشد . یعنی‌اگر $\langle A_i \rangle$ دنباله‌ای از مجموعه‌های متعلق به $\mathfrak{a}$ باشد ، آنگاه $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ نیز متعلق به $\mathfrak{a}$ است . از قانونهای دمرگان نتیجه‌می‌شود که اشتراک هر دستهٔ شمارش‌پذیر ازمجموعه‌های $\mathfrak{a}$ باز به $\mathfrak{a}$ تعلق دارد . بااندکی تغییر در برهان گزارهٔ ۱ می‌توان برهان گزارهٔ زیر را یافت:

۳ ــ گـــزاره:

گیریم $\mathcal{C}$ دستهٔ دلخواهی از زیرمجموعه‌های X است . دراین‌صورت کوچکترین σ ــ جبر وجود داردکه‌حاوی $\mathcal{C}$ است ، یعنی یک σ ــ جبر $\mathfrak{a}$ وجوددارد که‌حاوی $\mathcal{C}$ است به‌گونه‌ای که اگر $\mathfrak{B}$ یک σ ــ جبر دیگر شامل $\mathcal{C}$ باشد . آنگاه $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{B}$.

مسئـــلـــــه

۱۹ ــ گزارهٔ ۳ را ثابت کنید .

۵ ــ اصل موضوع انتخاب و حاصلضرب مستقیم بی‌پایان

یک‌اصل موضوع مهم درنظریهٔ مجموعه‌ها ، اصل موضوع‌انتخاب است . این اصل موضوع کمتر از اصول‌موضوع دیگری که در نظریهٔ‌اصل‌موضوعی مجموعه‌ها به‌کار می‌روند ، ابتدایی است و خود مستقل‌ازآنهاست . بسیاری‌از ریاضیدانان مایلندکه دربارهٔ‌استفاده

از اصل موضوع انتخاب و نتیجه‌های آن صراحت بیشتری داشته باشند ، ولی ما درمورد استفاده‌ازآن تااندازه‌ای غیررسمی خواهیم بود . این‌اصل موضوع به‌شرح‌زیر بیان‌می‌شود :

اصل موضوع انتخاب :

گیریم $\mathcal{C}$ دسته‌ای‌از مجموعه‌های ناتهی است . دراین‌صورت یک‌تابع F وجود دارد که روی $\mathcal{C}$ تعریف‌شده‌است و به‌هرمجموعهٔ $A \in \mathcal{C}$ یک‌عنصر $F(A)$ متعلق به‌آن را مربوط می‌کند .

تابع F راتابع انتخاب می‌گویند ، و می‌توان وجود آن‌را به‌شکل‌گزینش یک عنصر متعلق به‌هرمجموعهٔ A متعلق به $\mathcal{C}$ تصور کرد . البته اگر $\mathcal{C}$ حاوی شمارهٔ با پایانی از مجموعه‌ها باشد مشکلی‌درانجام‌این‌کار وجودندارد ، ولی‌انجام‌این‌کار درحالتی‌که‌شمارهٔ مجموعه‌های $\mathcal{C}$ بی‌پایان است ، نیاز به‌اصل انتخاب دارد . اگر مجموعه‌های متعلق‌به $\mathcal{C}$ مجزا باشند ، می‌توان اصل‌انتخاب‌را به‌شکل ، امکان‌تشکیل‌مجموعه‌ای متشکل از یک‌عنصر از هر مجموعهٔ $\mathcal{C}$ درنظر گرفت .

گیریم $\mathcal{C} = \{X_\lambda\}$ دستهٔ‌مجموعه‌هایی‌باشدکه‌با‌مجموعهٔ‌زیرنویس Λ زیرنویسی شده‌اند . **حاصلضرب مستقیم** :

$$\bigtimes_{\lambda} X_\lambda$$

را به‌شکل دستهٔ همهٔ مجموعه‌های $\{x_\lambda\}$ تعریف می‌کنیم که با Λ زیرنویسی شده‌اند به‌قسمی که $x_\lambda \in X_\lambda$. اگر $\Lambda = \{۱ ، ۲\}$، باشد ، همان تعریف پیشین حاصل‌ضرب‌مستقیم $X_1 \times X_2$ دومجموعهٔ X_1 و X_2 رابه‌دست‌می‌آوریم . اگر $z = \{x_\lambda\}$ ، یک عنصر $\bigtimes_{\lambda} X_\lambda$ باشد ، x_λ را مختص λ ام z می‌گوییم .

اگر یکی‌از مجموعه‌های X_λ تهی باشد ، دراین‌صورت $\bigtimes_{\lambda} X_\lambda$ نیز تهی‌است . اصل‌موضوع‌انتخاب هم‌ارز بیان‌وارون‌زیراست : اگر هیچ‌یک‌ازمجموعه‌های X تهی‌نباشد ، آنگاه $\bigtimes_{\lambda} X_\lambda$ نیز تهی نیست . به‌این‌سبب **برتراند راسل**[1] ترجیح می‌داد که اصل موضوع انتخاب را اصل موضوع ضربی بنامد .

مسئله

۲۰ ــ گیریم $f: X \to Y$ نگاشتی به‌روی Y است . دراین‌صورت یک‌نگاشت

۱ــ Bertrand Russell

$g: Y \to X$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که $f \circ g$ روی Y نگاشت همانی‌است .[اصل‌موضوع انتخاب را درمورد دستهٔ $\{A: (\exists y \in Y) \quad A = f^{-1}[\{y\}]\}$ از زیرمجموعه‌های X ، به‌کار ببرید .]

۶ــ مجموعه‌های شمارش‌پذیر

دربخش ۲ مجموعهٔ شمارش‌پذیر را به‌شکل برد یک‌دنباله تعریف کردیم . اگر مجموعه‌ای‌برد یک دنبالهٔ باپایان باشد آن‌مجموعه باپایان است ، ولی برد یک دنبالهٔ بی‌پایان نیز ممکن‌است‌یک‌مجموعهٔ‌باپایان باشد . درواقع ، هرمجموعهٔ‌ناتهی‌باپایان‌برد یک‌دنبالهٔ‌بی‌پایان‌است . برای‌مثال ، مجموعهٔ‌باپایان $\{x_1 , x_2 , \cdots\cdots , x_n\}$ برد دنبالهٔ بی‌پایانی است که برای $i > n$ با $x_i = x_n$ تعریف می‌شود .

بنابراین مجموعه‌ای‌شمارش‌پذیربی‌پایان‌است‌که‌برد یک‌دنبالهٔ‌بی‌پایان‌باشدولی برد یک‌دنبالهٔ‌باپایان‌نباشد . مجموعهٔ‌اعداد‌طبیعی $\mathbf{N}$ مثالی‌است‌ازیک‌مجموعهٔ‌بی‌پایان . شمارش‌پذیر . پیش‌از‌این‌که‌جلوتر‌رویم بهتر‌است تکلیف مجموعهٔ‌تهی‌را از‌این‌نظر روشن‌کنیم . مجموعهٔ‌تهی‌برد هیچ‌دنباله‌ای‌نیست (مگر این‌که‌وجود دنباله‌ای‌باصفرجمله‌را بپذیریم) . به‌هرحال ، بهتر است مجموعه‌های باپایان و شمارش‌پذیر را به‌گونه‌ای تعریف کنیم که مجموعهٔ تهی هم باپایان و هم شمارش‌پذیر باشد . ازاین‌رو تعریف‌زیر را بیان می‌کنیم :

تعریف :

مجموعه‌ای را باپایان می‌نامند که تهی یا برد یک دنبالهٔ باپایان باشد . مجموعه‌ای را شمارش پذیر می‌گویند که تهی یا برد یک دنباله باشد .

ازاین‌تعریف بی‌درنگ نتیجه‌می‌شود که نگار هرمجموعهٔ‌شمارش‌پذیر یک‌مجموعهٔ شمارش‌پذیراست . به‌گفتهٔ‌دیگر ، برد‌تابعی‌که‌دامنهٔ‌آن شمارش‌پذیراست ، خود‌شمارش‌پذیر است . درمورد مجموعه‌های باپایان نیز چنین است .

معمولاً " در ریاضیات برای شمارش‌پذیری مجموعه‌ها تعریفی اندک متفاوت ولی هم‌ارز تعریف بالا ، به‌کمک تناظر یک‌به‌یک ، بیان می‌کنند . نخست ملاحظه می‌کنیم که هر مجموعه‌ای که بتوان بین‌آن‌ویک‌مجموعهٔ‌باپایان یک‌تناظر یک‌به‌یک برقرارکرد باپایان است و هرمجموعه‌ای که‌بتوان بین‌آن و یک‌مجموعهٔ‌شمارش‌پذیر یک‌تناظر یک‌به‌یک برقرار کرد شمارش‌پذیر است . چون مجموعهٔ‌عددهای‌طبیعی یعنی $\mathbf{N}$ شمارش‌پذیربی‌پایان‌است ،

پس هرمجموعه‌ای که‌بتوان بین‌آن و مجموعهٔ $\mathbf{N}$ یک‌تناظر یک‌به‌یک برقرارکرد شمارش‌پذیر بی‌پایان است. معمولاً از این‌خاصیت برای تعریف‌مفهوم شمارش‌پذیری‌بی‌پایان استفاده می‌کنند. پس برای این‌که نشان دهیم تعریف ما باتعریف سنتی‌هم‌ارز است، باید نشان دهیم که اگر مجموعهٔ بی‌پایان E برد یک دنبالهٔ $\langle x_n \rangle$ باشد، آنگاه‌می‌توان‌بین E، و $\mathbf{N}$ یک تناظر یک‌به‌یک برقرار کرد. برای انجام این‌کار باروش بازگشت،تابعی از $\mathbf{N}$ در $\mathbf{N}$ مانند φ به‌شکل‌زیرتعریف‌می‌کنیم: قرارمی‌دهیم $\varphi(1)=1$، و $\varphi(n+1)$ را برابر کوچکترین‌مقدار m می‌گیریم به‌گونه‌ای‌که برای همهٔ مقدارهای $i \leq \varphi(n)$ داشته باشیم $x_m \neq x_i$. چون E بی‌پایان‌است‌همواره‌چنین m ای‌وجوددارد، وبنابراصل خوش‌ترتیبی $\mathbf{N}$، همواره کوچکترین مقدار m وجود دارد. تناظر $n \to x_{\varphi(n)}$: یک تناظر یک‌به‌یک بین $\mathbf{N}$ و E است. بنابراین نشان دادیم برای این‌که مجموعه‌ای شمارش‌پذیر بی‌پایان باشد لازم و کافی است که بتوان بین آن مجموعه و $\mathbf{N}$ یک‌تناظر یک‌به‌یک برقرار کرد. اکنون می‌توانیم چند قضیهٔ ساده درمورد مجموعه‌های‌شمارش‌پذیر ثابت کنیم.

۴ ــ گزاره:

هر زیر مجموعهٔ یک مجموعهٔ شمارش‌پذیر، خود شمارش‌پذیر است.

برهان:

گیریم $E=\{x_n\}$ یک مجموعهٔ شمارش‌پذیر و A یک زیرمجموعهٔ آن است. اگر A تهی باشد بنابه‌تعریف A شمارش‌پذیر است. اگر A تهی نباشد، عنصر x متعلق به A را انتخاب می‌کنیم. دنبالهٔ جدید $\langle y_n \rangle$ را چنین تعریف می‌کنیم که اگر $x_n \varepsilon A$ باشدآنگاه‌قرارمی‌دهیم $y_n = x_n$ واگر $x_n \not\varepsilon A$، قرارمی‌دهیم $y_n = x$. دراین‌صورت A دامنهٔ $\langle y_n \rangle$ است بنابراین شمارش‌پذیر است.

۵ ــ گزاره:

گیریم A یک‌مجموعهٔ شمارش‌پذیراست. دراین‌صورت مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های باپایان از عناصر A نیز شمارش‌پذیر است.

برهــان :

چون A شمارش‌پذیر است ، پس می‌توان یک تناظر یک به یک بین A و زیرمجموعه‌ای از $\mathbf{N}$ برقرار کرد . بنابراین کافی است ثابت کنیم که مجموعهٔ همه دنباله‌های با پایان عددهای طبیعی که آنرا با S می‌نمایانیم شمارش‌پذیر است . گیریم $\langle ۲ ، ۳ ، ۵ ، ۷ ، ۱۱ ، \ldots ، p_k, \ldots \rangle$ دنبالهٔ عددهای اول است . دراین‌صورت هر عدد n متعلق به $\mathbf{N}$ دارای یک تجزیهٔ یکتا به‌شکل[1] $n = 2^{x_1} 3^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$, است ، که درآن $x_i \in \mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$ و $x_k > 0$ است . گیریم f تابعی است روی $\mathbf{N}$ که به‌هرعدد طبیعی n ، دنبالهٔ پایاندار $\langle x_1, \ldots, x_k \rangle$ از $\mathbf{N}_0$ را مربوط می‌کند . دراین‌صورت S ، زیرمجموعه‌ای است از برد f . از این‌رو S بنابه‌گزارهٔ ۴ شمارش‌پذیر است .

۶ ــ گـــزاره :

مجموعهٔ همهٔ عددهای گویا شمارش‌پذیر است .

۷ ــ گـــزاره :

اجتماع دستهٔ شمارش‌پذیری از مجموعه‌های شمارش‌پذیر یک مجموعهٔ شمارش‌پذیر است .

برهــان :

گیریم $\mathcal{C}$ یک دستهٔ شمارش‌پذیر از مجموعه‌های شمارش‌پذیر است . اگر همه مجموعه‌های متعلق به $\mathcal{C}$ تهی باشند ، اجتماع آنها نیز تهی ، درنتیجه شمارش‌پذیر است . بنابراین فرض می‌کنیم $\mathcal{C}$ حاوی مجموعه‌های ناتهی است و چون مجموعه‌های تهی هیچگونه اثری در اجتماع $\mathcal{C}$ ندارند ، می‌توان همهٔ مجموعه‌های متعلق به $\mathcal{C}$ را ناتهی گرفت . بنابراین $\mathcal{C}$ ، برد یک دنبالهٔ بی‌پایان مانند $\langle A_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ از مجموعه‌هاست و هر A_n ، برد یک دنباله بی‌پایان $\langle x_{nm} \rangle_{m=1}^{\infty}$ است . ولی نگاشتی که به $\langle n, m \rangle$ عنصر x_{nm} را مربوط می‌کند نگاشتی است از مجموعهٔ جفتهای مرتب عددهای طبیعی به‌روی اجتماع $\mathcal{C}$. چون مجموعهٔ

---

۱ ــ به‌جز ۱ ، قرارداد $۱ = ۲^{\circ}$ را می‌پذیریم .

جفتهای عددهای طبیعی شمارش‌پذیر است ، پس اجتماع دستهٔ $\mathcal{C}$ نیز باید شمارش‌پذیر باشد. ∎

مسئله‌ها

۲۱ ــ نشان دهید که هر زیرمجموعهٔ یک مجموعهٔ باپایان خود یک مجموعهٔ باپایان است .

۲۲ ــ گزارهٔ ۶ را بااستفاده‌ازگزاره‌های ۴ و ۵ ثابت کنید. [راهنمایی : نگاشت

$$\langle p, q, 1\rangle \to p/q$$
$$\langle p, q, 2\rangle \to -p/q$$
$$\langle 1, 1, 3\rangle \to 0$$

تابعی است که بردش مجموعهٔ عددهای گویا است و دامنه‌اش زیرمجموعه‌ای است از مجموعهٔ دنباله‌های باپایان از عنصرهای $\mathbf{N}$.]

۲۳ ــ نشان‌دهید که مجموعهٔ دنباله‌های بی‌پایان از عناصر {۱ و ۰} شمارش‌پذیر نیست . [راهنمایی : گیریم f تابعی است از $\mathbf{N}$ به E . دراین‌صورت $f(\nu)$ دنباله‌ای به‌شکل $\langle a_{\nu n}\rangle_{n=1}^{\infty}$ است . گیریم $b_\nu = 1 - a_{\nu\nu}$. دراین‌صورت $\langle b_n\rangle$ بازدنباله‌ای است از عناصر { ۱ ، ۰ } و برای هر $\nu \in \mathbf{N}$ داریم $\langle b_n\rangle \neq \langle a_{\nu n}\rangle$. این‌روش اثبات به‌روش قطری کانتور[1] معروف است .]

۲۴ ــ گیریم f تابعی است از X به دستهٔ $\mathcal{P}(X)$ از زیرمجموعه‌های X . در این‌صورت یک مجموعهٔ $E \subset X$ وجود دارد که متعلق به برد f نیست . (فرض کنید $E = \{x: x \notin f(x)\}$.)

۲۵ ــ بااستفاده‌ازاصل‌موضوع انتخاب و تعمیم اصل تعریف‌بازگشتی نشان دهید که هر زیرمجموعهٔ بی‌پایان X حاوی یک زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیر بی‌پایان است .

۷ ــ رابطه‌ها و هم‌ارزی‌ها

دوموجود داده‌شدهٔ x و y می‌توانند به‌روشهای‌گوناگون به‌هم "مربوط" باشند ، مانند $x = y$ ، $x \in y$ ، $x \subset y$ ، یا $x < y$ وقتی x و y عدد هستند . درحالت کلی می‌گوییم R نمایش‌یک‌رابطه‌است اگر وقتی x و y داده‌شده‌اند یا x در رابطهٔ R با y باشد (دراین‌صورت می‌نویسیم $x \, R \, y$) یا x در رابطهٔ R با y نباشد . می‌گوییم R روی

---

۱ ــ Cantor

مجموعهٔ X یک‌رابطه است هرگاه از $x\ R\ y$ نتیجه‌شود $x \varepsilon X$ و $y \varepsilon X$. اگر R روی مجموعهٔ X یک‌رابطه‌باشد ، نمودار R را با مجموعهٔ $\{\langle x, y\rangle : x\ R\ y\}$ تعریف می‌کنیم.چون دورابطهٔ R و S را هنگامی همانند می‌گیریم که داشته باشیم $(x\ R\ y) \Leftrightarrow (x\ S\ y)$ ، پس هر رابطه روی یک مجموعهٔ X به‌طوریکتا بانمودارش تعریف می‌شود ، به‌وارون هر زیرمجموعهٔ $X \times X$ نمودار یک‌رابطه‌روی X است . بنابراین اگربخواهیم ، می‌توانیم هررابطهٔ روی X را بانمودار آن یکی‌بدانیم و هر رابطه‌را با زیرمجموعه‌ای‌از $X \times X$ تعریف کنیم . در بسیاری از بحثهای‌رسمی نظریهٔ مجموعه‌ها یک‌رابطه‌را درحالت‌کلی به‌طورساده‌با مجموعهٔ جفتهای مرتب تعریف می‌کنند .[1]

رابطهٔ R را روی‌مجموعهٔ X **ترا‌گـــذر** می‌نامیم هرگاه‌برای‌هر x, y و z متعلق به X از $x\ R\ y$ و $y\ R\ z$ نتیجه‌گردد $x\ R\ z$. بنابراین روی‌مجموعهٔ عددهای‌حقیقی $=$ و $>$ ، رابطه‌های‌تراگذرهستند . رابطهٔ R را روی‌مجموعهٔ X **متقـارن** می‌گویند هرگاه برای همهٔ x و y های‌متعلق‌به X از $x\ R\ y$ نتیجه‌گردد $y\ R\ x$. رابطهٔ R راروی‌مجموعهٔ X **بازتابـی** می‌گویند هرگاه برای هر $x \varepsilon X$ داشته باشیم $x\ R\ x$.

رابطه‌ای‌که‌روی‌مجموعهٔ X تراگذر ، بازتابی و متقارن است یک رابطهٔ **هـم‌ارزی** روی X یا به‌طور ساده یک رابطه روی X گفته می‌شود . فرض کنیم که $\equiv$ روی X یک رابطهٔ هم‌ارزی‌است ، برای‌یک‌عنصرداده‌شدهٔ $x \varepsilon X$ گیریم E_x مجموعهٔ عنصرهای‌هم‌ارز x است یعنی $E_x = \{y : y \equiv x\}$. اگر y و z هردو متعلق به E_x باشند آنگاه $y \equiv x$ و $z \equiv x$ ، پس بنابرخاصیتهای‌تقارن‌وبازتابی ، داریم $z \equiv y$.بنابراین هردو عنصر متعلق‌به E_x ، هم‌ارزند . اگر $y \varepsilon E_x$ و $z \equiv y$ ، دراین‌صورت $z \equiv y$ و $y \equiv x$ است‌که‌ازآنجا $z \equiv x$ ، نتیجه می‌شود ، پس $z \varepsilon E_x$. پس هر عنصر X که با یک عنصر E_x هم‌ارز است خود به E_x تعلق‌دارد .درنتیجه‌برای‌هردوعنصر x و y متعلق‌به X ، مجموعه‌های E_x و E_y یا همانندند (اگر $x \equiv y$) یا مجزا هستند (اگر $x \not\equiv y$) . مجموعـه‌هـای دستـــهٔ $\{E_x : x \varepsilon X\}$ را مجموعه‌های هم‌ارزی یا رده‌های هم‌ارزی رابطهٔ $\equiv$ می‌نامند .

---

۱ ــ به‌سوپس [۲۳] صفحهٔ ۵۷ ، یا هالموس [۹] صفحهٔ ۲۶ مراجعه‌شود . بااین‌همه باید خاطرنشان ساخت که دراین‌روش اشکالی‌که وجوددارداین‌است‌که‌بااین‌تعریف دیگر $=$ ، ε و $\subset$ رابطه‌نیستند . به‌این‌سبب من روشی را مانند آنچه که در کلی (Kelley) [۱۴] صفحه ۲۶۰ وجود دارد ترجیح می‌دهم که در آن‌رابطه‌ها لزوما " مجموعه‌هایی‌از جفت‌های مرتب نیستند .

بنابراین X اجتماع رده‌های هم‌ارزی مجزای رابطهٔ $\equiv$ می‌باشد. باید توجه داشت که $x \varepsilon E_x$، پس هیچ ردهٔ هم‌ارزی تهی نیست.

دستهٔ رده‌های هم‌ارزی یک رابطهٔ هم‌ارزی $\equiv$، را خارج‌قسمت X نسبت به $\equiv$ می‌نامند، وگاهی آن‌را با $X/\equiv$ نشان می‌دهند. نگاشت $x \to E_x$ را نگاشت طبیعی X به‌روی $X/\equiv$ می‌نامند.

هر عمل دوتایی روی یک مجموعهٔ X نگاشتی است از $X \times X$ بر X. می‌گوییم رابطهٔ هم‌ارزی $\equiv$ با یک عمل دوتایی $+$ **سازگار** است اگر از $x \equiv x'$ و $y \equiv y'$ نتیجه شود $(x + y) \equiv (x' + y')$. دراین‌حالت $+$ روی خارج‌قسمت $Q = X/\equiv$ عملی به‌شرح زیر تعریف می‌کند. اگر E و F به Q متعلق باشند، عنصرهای $x \varepsilon E$ و $y \varepsilon F$ را برگزیده و $E + F$ را با $E_{(x+y)}$ تعریف می‌کنیم. چون $\equiv$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است پس $E + F$ تنها به E و F بستگی دارد و به‌گزینش x و y بستگی ندارد.

دراین‌مورد خواننده می‌تواند برای جزئیات بیشتر به‌صفحهٔ ۱۴۵ به‌بعد کتاب [۲] نوشتهٔ بیرکهف[۱] و مکلین[۲] رجوع کند.

مسئله‌ها

۲۶ــ ثابت کنید که در تعریف بالا $F + G$ تنها به F، G بستگی دارد.

۲۷ــ گیریم X با عمل $+$ یک گروه آبلی است. دراین‌صورت برای این‌که $\equiv$ با $+$ سازگار باشد لازم و کافی است که از $x \equiv x'$ نتیجه شود $x + y \equiv x' + y$. دراین‌صورت فضای خارج‌قسمت با عمل القاء شده یک گروه است.

۸ــ ترتیب‌های جزیی و اصل ماکسیمال

رابطهٔ R را روی مجموعهٔ X **پادمتقارن** می‌نامند هرگاه برای هر x و y متعلق به X از $x \, R \, y$ و $y \, R \, x$ نتیجه‌گردد $x = y$. یک رابطهٔ $>$ را **ترتیب جزیی** مجموعهٔ X، می‌نامند (یا می‌گویند $>$ مجموعهٔ X را به‌طورجزیی مرتب می‌کند) هرگاه این رابطه روی X تراگذر و پادمتقارن باشد. بنابراین $\leq$ روی مجموعهٔ عددهای حقیقی و $\subset$ روی $\mathcal{P}(X)$،

۱ــ Birkhoff ۲ــ MacLane

ترتیب‌های جزیی هستند . یک ترتیب جزیی $<$ را روی مجموعهٔ X **یک‌ترتیب‌خطی** (یا ترتیب‌سادهٔ) X می‌گویند . هرگاه برای‌هردوعنصر x و y متعلق‌به X یکی‌از دورابطهٔ $y < x$ یا $x < y$ برقرارباشد . بنابراین $\leq$ مجموعهٔ عددهای‌حقیقی‌را به‌طورخطی مرتب می‌کند ، درصورتی که $\subset$ روی $\mathcal{P}(X)$ یک ترتیب خطی نیست .

اگر $<$ روی X یک‌ترتیب‌جزیی‌و $a < b$ باشداغلب‌می‌گوییم a مقدم بر bاست . یا b تالی a است . گاهی‌نیز می‌گویند a کوچکتراز b یا b بزرگتراز a است . اگر $E \subset X$، باشد ، عنصر $a \,\varepsilon\, E$ را عنصرنخست یا کوچکترین‌عنصر E می‌گویند هرگاه‌برای‌هر $x \,\varepsilon\, E$ و $x \neq a$ داشته‌باشیم $a < x$. عنصرآخر (یا بزرگترین‌عنصر) نیز به‌روش‌مشابهی تعریف می‌شود . عنصر $a \,\varepsilon\, E$ را یک عنصر مینیمال E می‌گویند ؛ هرگاه عنصری مانند $x \,\varepsilon\, E$ با $x \neq a$ وجودنداشته‌باشد به‌قسمی که $x < a$ باشد . عنصر ماکسیمال نیز باروش مشابهی تعریف می‌شود . بایدتوجه داشت که اگر مجموعه‌ای‌دارای کوچکترین عنصر باشد ، آنگاه این عنصر یک عنصر مینیمال است . اگر $<$ یک‌ترتیب‌خطی باشد ، دراین‌صورت هرعنصر مینیمال کوچکترین عنصر است ، ولی در حالت کلی ممکن است که عنصرهای مینیمالی وجود داشته باشند که کوچکترین عنصر نیستند .

درتعریف ترتیب‌جزیی هیچگونه‌اشاره‌ای‌دربارهٔ‌امکان‌یالزوم $x < x$ نشده‌است . اگربرای‌هر x داشته‌باشیم $x < x$ ، آنگاه $<$ را یک ترتیب‌جزیی **بازتابی** می‌نامیم . اگر هرگز $x < x$ برقرارنباشدآنگاه $<$ رایک‌ترتیب‌جزیی***اکید*** می‌نامند . بنابراین برای مجموعهٔ عددهای‌حقیقی $<$ یک‌ترتیب جزیی اکید و $\leqslant$ یک ترتیب جزیی بازتابی است . به‌هرترتیب‌جزیی $<$ ، یک‌ترتیب‌جزیی اکید یکتا و یک ترتیب‌جزیی بازتابی یکتا مربوط می‌شود که برای هر جفت $\langle x, y\rangle$ با $x \neq y$ با $<$ مطابقت دارند . اگر $<$ یک ترتیب جزیی باشد ترتیب جزیی بازتابی مربوط به آن‌را با $\leq$ نشان می‌دهیم .

اصل‌زیر هم‌ارز اصل‌موضوع انتخاب است و اغلب استفاده‌ازآن‌مناسبترمی‌باشد . برای برهان این‌هم‌ارزی و بحثی دربارهٔ‌اصل‌های‌وابسته ، فصل ۸ کتاب سوپس[۲۳] یا صفحه‌های ۳۱ تا ۳۶ کتاب کلی[۱۴]را ببینید .

اصل ماکسیمال‌هاوسدورف[1] :

گیریم $<$ روی‌مجموعهٔ X یک ترتیب‌جزیی است . دراین‌صورت یک زیرمجموعهٔ S از X وجوددارد که‌به‌طورخطی‌مرتب و ماکسیمال است ، یعنی یک‌زیرمجموعهٔ S از X ،

۱ — Hausdorff Maximal Principle

وجود دارد که به‌طورخطی به‌وسیلهٔ $<$ مرتب است و دارای این خاصیت است که اگر $S \subset T \subset X$ بوده و T به‌وسیلهٔ $<$ به‌طورخطی مرتب باشد آنگاه $S = T$ است .

مسئله‌ها

۲۸ – گیریم $<$ روی X یک‌ترتیب‌جزیی‌است . دراین‌صورت‌یک‌ترتیب‌جزیی‌اکید و یکتای $<$ و یک‌ترتیب جزیی بازتابی‌یکتای $\leq$ روی X وجود دارند به‌گونه‌ای که برای $x \neq y$ داریم :

$$x < y \Leftrightarrow x < y \Leftrightarrow x \leq y.$$

۲۹ – مثالی‌ازیک‌مجموعهٔ مرتب‌جزیی‌بیاورید که دارای یک عنصر مینیمال یکتا باشد ولی دارای کوچکترین عنصر نباشد .

۹ – خوش‌ترتیبی و عددهای ترتیبی شمارش‌پذیر

یک‌ترتیب خطی اکید $<$ را روی مجموعهٔ X یک خوش‌ترتیبی برای X می‌نامند یا می‌گویند $<$ ، X را خوش‌ترتیب می‌کند . هرگاه هر زیر مجموعهٔ ناتهی از X شامل یک‌عنصر نخستین‌باشد . بنابراین ، اگر $X = \mathbf{N}$ و $<$ رابطهٔ " کوچکتربودن از " باشد آنگاه $\mathbf{N}$ با $<$ خوش‌ترتیب‌است . ازسوی‌دیگر ، مجموعهٔ همهٔ عددهای‌حقیقی $\mathbf{R}$ بارابطهٔ " کوچکتربودن از " خوش‌ترتیب‌نیست . اصل‌زیر به‌روشنی اصل انتخاب‌را نتیجه‌می‌دهد و با آن‌هم‌ارز است . (برای این‌منظور فصل ۸ کتاب سوپس[۲۳] یا صفحه‌های ۳۱ تا ۳۶ کتاب کلی[۱۴] را ببینید) .

اصل خوش ترتیبی :

هر مجموعهٔ X می‌تواند خوش‌ترتیب گردد ، به‌گفتهٔ دیگر یک رابطهٔ $<$ وجود دارد که X را خوش‌ترتیب می‌سازد .

۸ – گزاره :

یک‌مجموعهٔ شمارش‌ناپذیر X وجود دارد که با یک رابطهٔ $<$ خوش‌ترتیب است به‌گونه‌ای که :

i ـ X دارای یک عنصر آخر Ω است .

ii ـ **اگر** X $x \varepsilon$ و $x \neq \Omega$ ، **آنگاه مجموعهٔ** $\{y \varepsilon X: y < x\}$ **شمارش‌پذیر است** .

بـــرهـــــان :

گیریم Y یک مجموعهٔ شمارش‌ناپذیر است مانند آنچه در مسئلهٔ ۲۳ دیدیم . بنابراصل خوش‌ترتیبی ، یک رابطهٔ خوش‌ترتیبی $<$ برای Y وجود دارد . اگر Y دارای یک عنصر آخر نباشد ، عنصر $\alpha \not\varepsilon Y$ را برمی‌گزینیم و $Y \cup \{\alpha\}$ راجانشین Y می‌سازیم . و ترتیب $<$ راباقراردادن $y < \alpha$ برای‌هر $y \varepsilon Y$ تعمیم می‌دهیم . این مجموعهٔ اخیر که آن‌را نیز Y می‌نامیم دارای یک‌عنصرآخر و با $<$ خوش‌ترتیب است . مجموعهٔ عنصرهای y متعلق‌به Y که برای‌آنها مجموعهٔ $\{x \varepsilon Y: x < y\}$ شمارش‌ناپذیر است ناتهی‌است ، زیرا این مجموعه شامل عنصرآخر Y است .گیریم Ω کوچکترین‌عنصر مجموعهٔ اخیر است و قرار می‌دهیم $X = \{x \varepsilon Y: x < \Omega$ یا $x = \Omega\}$.آنگاه X مجموعهٔ مطلوب است . ▮

مجموعهٔ‌خوش‌ترتیب X که‌دراین گزاره داده شد در ساختن مثالها ، بسیارمفید است . می‌توان نشان داد که این مجموعه یکتاســت ، به‌این‌معنی ، که اگر Y مجموعهٔ خوش‌ترتیب دیگری باهمان‌خصوصیات باشد ،آنگاه یک تناظر یک‌به‌یک بین X و Y وجود داردکه ترتیب را حفظ می‌کند . عنصرآخر Ω متعلق به X را **نخستیـن‌عـدد تـرتیبـی شمـارش‌نـاپـذیـری** می‌گویند و X را مجموعه‌ای باعدد ترتیبی کوچکتر یا برابر **نخستین عدد ترتیبی شمارش‌ناپذیر** می‌نامند . عنصرهای $x < \Omega$ را **عددهای‌ترتیبـی شمـارش‌پذیـری** می‌گویند . اگر $\{y: y < x\}$ باپایان باشد x را **عدد ترتیبی باپایان** می‌نامند .اگر ω **نخستین‌عددترتیبی‌بی‌پایان‌باشد** ،آنگاه $\{x: x < \omega\}$ رامجموعهٔ‌عددهای ترتیبی باپایان می‌نامندکه به‌عنوان یک مجموعهٔ مرتب با مجموعهٔ عددهای طبیعی $\mathbf{N}$ ، هـم‌ارز اســـت .

مسئلـــــــدهـا

۳۰ ـ الف ـ نشان دهید که هر زیرمجموعهٔ یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب خود خوش‌ترتیب است .

ب ـ اگر $<$ روی X یک ترتیب جزیی و دارای این خاصیت باشد که هر زیرمجموعهٔ ناتهی X دارای کوچکترین عنصر است ، دراین‌صورت $<$ یک ترتیب خطی و درنتیجه یک خوش‌ترتیبی است .

۳۱ – گیریم Y مجموعهٔ عددهای ترتیبی کوچکتر از نخستین عدد ترتیبی شمارش‌ناپذیر است، یعنی $Y = \{x \varepsilon X: x < \Omega\}$ نشان دهید که هرزیرمجموعهٔ شمارش‌پذیر E از Y دارای یک‌کران بالای متعلق به Y ودرنتیجه دارای کنارهٔ بالاست. (عنصر b را یک‌کران بالای E می‌گویند هرگاه برای هر $x \varepsilon E$ داشته باشیم $x \leq b$، b راکنارهٔ بالای E، می‌گویند هرگاه برای هر کران بالای b^* داشته باشیم $b \leq b^*$).

۳۲ – زیرمجموعهٔ S از یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب X را یک‌پاره می‌گویند هرگاه برای یک $y \varepsilon X$ داشته باشیم $S = \{x \varepsilon X: x < y\}$ یا $S = X$. نشان دهید که اجتماعی از پاره‌ها باز یک پاره است.

۳۳ – گیریم X و Y دومجموعهٔ خوش‌ترتیب هستند. یک تابع f از X بر Y را نگهدارندهٔ تالی می‌گویند. هرگاه برای هر $x \varepsilon X$ عنصر $f(x)$ نخستین عنصری از Y، باشد که متعلق به $f[\{z: z < x\}]$ نیست.

الف – نشان دهید که حداکثر یک نگاشت نگهدارندهٔ تالی از X در Y وجود دارد.

ب – نشان دهید که برد هر نگاشت نگهدارندهٔ تالی یک پاره است.

پ – نشان دهید که اگر f یک نگهدارندهٔ تالی باشد، آنگاه f یک نگاشت یک‌به‌یک و نگهدارندهٔ ترتیب است و f^{-1} نیز نگهدارندهٔ ترتیب است.

ت – اگر f یک نگاشت نگهدارندهٔ تالی از X در Y باشد، آنگاه قید f به یک پاره نیز نگهدارندهٔ تالی است.

ث – اگر X و Y دومجموعهٔ خوش‌ترتیب باشند، دراین صورت یک نگاشت نگهدارندهٔ تالی ازیکی از آنها به‌روی پاره‌ای از دیگری وجود دارد، یعنی ، یا یک نگاشت نگهدارندهٔ تالی از X روی پاره‌ای از Y یا یک نگاشت نگهدارندهٔ تالی از Y برروی پاره‌ای از X وجود دارد. [راهنمایی: دستهٔ همهٔ آن پاره‌هایی از X را درنظربگیرید که یک نگاشت نگهدارندهٔ تالی از روی آنها در Y وجود دارد. نشان دهید که یک نگاشت نگهدارندهٔ تالی f از اجتماع S این دسته در Y وجود دارد و $S = X$ یا $f[S] = Y$ است.]

ج – نشان دهید که مجموعهٔ خوش‌ترتیب گزارهٔ ۸ با تقریب یک ایزومرفیسم یکتاست.

بخش نخست

نظریهٔ تابعهای یک متغیر حقیقی

فصل دوم

دستـــگــاه عــددهای حقیقـــــی

۱ ــ اصلهای موضوع برای عددهای حقیقی

فرض‌می‌کنیم که خواننده با مجموعهٔ عددهای حقیقی $\mathbf{R}$ و خاصیت‌های اساسی عددهای حقیقی که‌در درسهای‌آنالیز دورهٔ‌لیسانس گفته‌می‌شود آشنایی‌دارد . این فصل را به‌یادآوری و اصولی‌سازی نتیجه‌هایی که بعدها مورداستفاده قرار خواهند گرفت ، اختصاص می‌دهیم .

یکی ازشیوه‌های بررسی عددهای حقیقی تعریف آنها بابریدگیهای ددکیند[1] عددهای‌گویاست ، عددهای‌گویا نیز به‌نوبهٔ‌خود برحسب عددهای‌طبیعی‌تعریف‌می‌شوند . چنین‌برنامه‌ای ساختمان‌زیبای عددهای‌حقیقی‌را بااستفاده‌از مفهوم‌های‌ابتدایی ونظریهٔ مجموعه‌ها می‌دهد . دراینجا خود را درگیر ساختمان عددهای حقیقی نمی‌سازیم ، بلکه فرض می‌کنیم این‌ساختمان قبلا" داده‌شده و فهرستی از اصلهای‌موضوع‌را برای‌آنها بیان می‌کنیم . همهٔ‌خاصیت‌هایی که نیازداریم نتیجه‌های این‌اصلهای موضوع هستند و درواقع این اصلهای موضوع عددهای حقیقی‌را به‌طورکامل مشخص می‌سازند .

بنابراین فرض‌می‌کنیم که‌مجموعهٔ‌عددهای‌حقیقی یعنی $\mathbf{R}$ ، مجموعهٔ‌عددهای حقیقی‌مثبت یعنی P ، وتابعهای " $+$ " و " $\cdot$ " از $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ در $\mathbf{R}$ داده‌شده‌اندوهمهٔ اینها دراصلهای‌موضوع‌زیر که‌درسه‌گروه بیان‌می‌شوند ، صدق‌می‌کنند . گروه نخست خاصیت‌های جبری‌وگروه‌دوم خاصیت‌های‌ترتیبی‌راتوصیف‌می‌کنند . گروه‌سوم شامل اصل‌کنارهٔ‌بالاست .

الــف ــ اصلهای موضوع هیــأت : *برای‌همهٔ عددهای‌حقیقی* x, y *و* z *داریم :*

الــف ۱ : $x + y = y + x$

الــف ۲ : $(x + y) + z = x + (y + z)$

الــف ۳ : $\mathbf{R} \ni 0\ \exists$ *به‌گونه‌ای که برای هر* $x \in \mathbf{R}$ *داریم* $x + 0 = x$

الــف ۴ : *برای‌هر* $x \in \mathbf{R}$ *یک‌عدد* $w \in \mathbf{R}$ *وجود دارد به‌گونه‌ای‌که* $x + w = 0$

الــف ۵ : $xy = yx$

الــف ۶ : $(xy)z = x(yz)$

الــف ۷ : $\exists 1 \in \mathbf{R}$ *به‌گونه‌ای‌که* $1 \neq 0$ *بوده و برای هر مقدار* $x \in \mathbf{R}$ *داریم :*

$$x \cdot 1 = x$$

---

1 — Dedekind

الف۸ : برای‌هر x متعلق‌به $\mathbf{R}$ ومخالف ۰ یک‌عدد $w \varepsilon \mathbf{R}$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $xw = 1$.

الف ۹ : $x(y + z) = xy + xz$.

هرمجموعه‌ای‌که این‌اصلهای‌موضوع‌را برآورد (نسبت‌به + و •) یک‌هیأت نامیده می‌شود. بنابر الف ۱ عنصر ۰ دراصل‌الف ۳ یکتاست و این‌حقیقت‌را در اصلهای موضوع الف ۴، الف ۷ و الف ۸ پذیرفته‌ایم. عنصر w ی اصل‌الف ۴ یکتاست‌وبا '$-x$' نشان داده‌می‌شود. تفریق $y - x$ را به‌شکل $x + (-y)$ تعریف‌می‌کنیم. عنصر ۱ دراصل‌الف ۷ یکتاست. می‌توان‌نشان‌دادکه‌عنصر w دراصل‌الف ۸ یکتاست‌وآن‌را با "x^{-1}" می‌نمایانند. در یک هیأت یعنی‌در دستگاهی که در اصل‌های الف ۱ تا الف ۹ صدق می‌کند، می‌توان همهٔ عملهای جبر مقدماتی، ازجمله حل یک دستگاه معادله‌های خطی را انجام داد. نتیجه‌های گوناگون این اصل‌هارا بدون بیان صریح مورد استفاده قرار خواهیم داد.

دستهٔ‌دوم خاصیتهایی‌که عددهای‌حقیقی‌دارند مربوط‌به‌مرتب‌بودن‌آنهاست. می‌توانستیم مفهوم a کوچکتر از b را اصول‌سازی نماییم، ولی بهتر است که مفهوم یک‌عددحقیقی‌مثبت‌را به‌عنوان یک مفهوم‌اولیه به‌کار بریم. بااین‌کار گروه دوم اصلهای موضوع به‌شکل زیر بیان می‌شود.

ب : اصلهای موضوع ترتیب : زیرمجموعهٔ عددهای‌حقیقی‌مثبت یعنی P دارای خاصیتهای زیر است :

ب ۱ : $(x, y \varepsilon P) \Rightarrow x + y \varepsilon P$

ب ۲ : $(x, y \varepsilon P) \Rightarrow xy \varepsilon P$

ب ۳ : $(x \varepsilon P) \Rightarrow -x \not\varepsilon P$

ب ۴ : $(x \varepsilon \mathbf{R}) \Rightarrow (x = 0)$ *or* $(x \varepsilon P)$ *or* $(-x \varepsilon P)$

هر دستگاهی که اصل‌های گروه الف و ب را برآورد هیأت‌مرتب نامیده می‌شود. بنابراین مجموعهٔ عددهای حقیقی یک هیأت مرتب‌است. عددهای گویا مثال‌دیگری از یک هیأت مرتب است.

در هر هیأت مرتب مفهوم $x < y$ را با $y - x \varepsilon P$ تعریف‌می‌کنیم. به‌جای '$x = y$ یا $x < y$'، می‌نویسیم '$x \leq y$'، برحسب > اصل ب ۱ . هم‌ارز است با :

$$(x < y \,\&\, z < w) \Rightarrow x + z < y + w,$$

اصل ب ۲ هم‌ارز است با :

$$(0 < x < y \,\&\, 0 < z < w) \Rightarrow xz < yw.$$

اصل ب ۳ می‌گوید که یک‌عدد نمی‌تواند هم بزرگتر و هم کوچکتر از دیگری باشد، درحالی‌که اصل ب ۴ بیان می‌کند که از دو عدد متفاوت یکی باید بزرگتر باشد. چون اصل ب ۱ ایجاب می‌کند که رابطهٔ $>$ تراگذر است، می‌بینیم که مجموعهٔ عددهای حقیقی به‌طورخطی با $>$ مرتب شده‌اند. به‌جز در بحث ابتدای بند بعدی همهٔ نتیجه‌های این دوگروه از اصول را دانسته‌فرض می‌کنیم و بدون‌اشارهٔ صریح از آنها استفاده‌خواهیم‌کرد. برای دانستن خاصیت‌های بیشتر هیأت‌های مرتب خواننده می‌تواند به‌کتاب بیرکهوف و مکلین [۲] مراجعه کند.

گروه سوم اصل‌ها از یک اصل تشکیل شده‌است و این اصل عددهای حقیقی‌را از سایر هیأت‌های‌مرتب متمایز می‌کند. برعکس خط مشی بدون قید و شرط درمورداستفاده ازنتیجه‌های‌دوگروه‌نخست‌ازاصل‌ها، درمورداستفاده‌ازاین‌اصل‌صراحت‌کامل‌خواهیم داشت.

پیش از بیان آخرین اصل چند نامگذاری ارائه می‌دهیم: اگر S یک‌مجموعه از عددهای‌حقیقی باشد، می‌گوییم b **یک‌کران‌بالای** S است‌هرگاه‌برای‌هر $x \in S$ داشته باشیم $x \leq b$. این‌مطلب‌راگاهی‌بانوشتن $S \leq b$ نشان‌می‌دهیم. عدد c را **کوچکترین کران بالا** (کنارهٔ بالا) ی مجموعهٔ S می‌گویند هرگاه c یک کران بالای S باشد و برای هر کران بالای‌دیگر S مانند b، داشته‌باشیم $c \leq b$. روشن‌است‌که کنارهٔ‌بالای یک‌مجموعهٔ S درصورت‌وجود یکتاست. آخرین‌اصل دربارهٔ‌عددهای حقیقی به‌طورساده وجود کنارهٔ بالا را برای مجموعه‌هایی با یک کران بالا تضمین می‌کند.

پ ـ اصل موضوع کمال: *هرمجموعهٔ ناتهی S ازعددهای‌حقیقی‌که‌دارای یک‌کران بالا باشد دارای کوچکترین کران بالاست.*

گزارهٔ زیر یک نتیجهٔ اصل موضوع پ است.

۱ ـ گزاره: *گیریم L و U زیرمجموعه‌های‌ناتهی $\mathbf{R}$ با $\mathbf{R} = L \cup U$ هستند به‌گونه‌ای‌که برای‌هر l متعلق‌به L و هر u متعلق‌به U داریم $l < u$. دراین‌صورت یا L دارای بزرگترین عنصر و یا U دارای کوچکترین عنصر است.*

معمولاً کنارهٔ‌بالای مجموعهٔ S را با $\sup S$ یا $\sup\limits_{x \in S} x$ و گاهی با $\sup \{x : x \in S\}$ نشان‌می‌دهیم. می‌توان‌کران‌پایین‌وبزرگترین‌کران‌پایین (کنارهٔ‌پایین) را باروش مشابهی تعریف‌کرد. از اصل پ نتیجه می‌شود که هر مجموعهٔ عددهای حقیقی با یک کران پایین دارای کنارهٔ پایین است. کنارهٔ پایین مجموعهٔ S را با $\inf S$ یا $\inf\limits_{x \in S} x$ نشان می‌دهیم. باید توجه داشت که: $\inf\limits_{x \in S} x = -\sup\limits_{x \in S} -x$

مسئلـــــه‌هـا

۱ ــ نشان دهید $1 \varepsilon P$ است.

۲ ــ بااستفاده از اصل موضوع پ نشان‌دهید که هر مجموعه ناتهی از عددهای حقیقی با یک کران پایین دارای کناره‌ٔ پایین است.

۳ ــ بااستفاده از اصل پ گزاره‌ٔ ۱ را ثابت کنید.

۴ ــ اگر x و y دوعددحقیقی‌باشند، $\max(x, y)$ راچنین‌تعریف‌می‌کنیم:

$$\max(x, y) = \begin{cases} x \text{ if } x \geq y & \text{اگـــــر} \\ y \text{ if } y \geq x & \text{اگـــــر} \end{cases}$$

اغلب $\max(x, y)$ رابا "$x \vee y$" می‌نمایانیم. همچنین $\min(x, y)$ را باکوچکترین مقدار x و y تعریف می‌کنیم و با "$x \wedge y$" نشان می‌دهیم. نشان دهید:

الـــف: $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$

ب: $x \wedge y + x \vee y = x + y$

پ: $(-x) \wedge (-y) = -(x \vee y)$

ت: $x \vee y + z = (x + z) \vee (y + z)$

ث: اگـــر $z \geq 0$ آنگاه $z(x \vee y) = (zx) \vee (zy)$

۵ ــ بنابه‌تعریف $|x|$ برابراست با x برای $x \geq 0$ وبرابراست‌با $-x$ برای $x < 0$. نشان دهید:

الـــف. $|xy| = |x|\,|y|$

ب. $|x + y| \leq |x| + |y|$

پ. $|x| = x \vee (-x)$

ت. $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$

ث. اگـــر $-y \leq x \leq y$ آنگـــاه $|x| \leq y$.

۲ ــ عددهای طبیعی و عددهای گویا به‌عنوان زیرمجموعه‌هائی از R

دراینجا عددهای طبیعی‌را دانسته فرض‌کردیم و آنهارا به‌عنوان عددهـــای شمارش به‌کار می‌بریم. ولی همهٔ ما عددی مانند ۳ را نه‌تنها به‌عنوان یک عدد طبیعی بلکه به‌عنوان یک عددحقیقی نیز درنظر می‌گیریم. درواقع، نماد ۱ را نه‌تنها به‌عنوان

نخستین‌عددطبیعی ، بلکه به‌عنوان یک‌عددحقیقی‌خاص داده‌شده با اصل موضوع الف۷ نیز به‌کار می‌بریم ، و می‌توان‌گفت که عددحقیقی ۳ را به‌شکل ۱ + ۱ + ۱ تعریف‌می‌کنیم . به‌روش مشابهی می‌توان عددهای‌حقیقی متناظر باهرعددطبیعی را تعریف کرد . درواقع می‌توان این‌کار را بااستفاده از وسیله‌های‌موجود باروش دقیقتری انجام داد .

بنابراصل تعریف بازگشتی یک تابع φ از عددهای طبیعی بر عددهای حقیقی وجود دارد که با $\varphi(1) = 1$ و $\varphi(n+1) = \varphi(n) + 1$ تعریف‌می‌شود . (دراینجا ۱ در سمت راست نمایش یک عددحقیقی و در سمت‌چپ نمایش یک عدد طبیعی است) . نشان‌می‌دهیم‌که φ یک‌نگاشت یک به‌یک از $\mathbf{N}$ در $\mathbf{R}$ است . گیریم p و q دوعددطبیعی متفاوت‌هستندومثلا" داریم $p < q$. دراین‌صورت $q = p + n$ ، و بااستقراء روی n ، نشان می‌دهیم که $\varphi(p) < \varphi(q)$. برای $n = 1$ داریم $q = p + 1$ و $\varphi(q) = \varphi(p) + 1 > \varphi(p)$. درحالت‌کلی وقتی n دلخواه است داریم :

$$\varphi(p+n+1) = \varphi(p+n) + 1 > \varphi(p+n),$$

پس، از $\varphi(p+n) > \varphi(p)$ نتیجه‌می‌شود $\varphi(p+n+1) > \varphi(p)$. بنابراین به‌استقراء ثابت شد که $\varphi(p+n) > \varphi(p)$ ، می‌بینیم که نگاشت φ یک‌به‌یک است . همچنین می‌توان به‌استقراء ثابت کرد که $\varphi(p+q) = \varphi(p) + \varphi(q)$ و $\varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q)$. بنابراین φ بین N و زیرمجموعه‌ای از $\mathbf{R}$ یک تناظر یک‌به‌یک تعریف‌می‌کندو φ عمل‌جمع و عمل‌ضرب و رابطهٔ ترتیب‌را حفظ می‌کند . به‌گفتهٔ دقیقتر ، باید عددطبیعی n را متمایز از نگار آن به‌وسیلهٔ φ یعنی $\varphi(n)$ بدانیم ، ولی این‌تمایز را اینجادرنظرنمی‌گیریم ومجموعهٔ $\mathbf{N}$ رازیرمجموعه‌ای‌از $\mathbf{R}$ می‌گیریم . بامحاسبهٔ تفاضل عددهای طبیعی ، مجموعهٔ عددهای درست به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbf{R}$ به‌دست می‌آید . مجموعهٔ عددهای گویا باخارج‌قسمت‌های عددهای‌درست تعریف می‌شود . چون دراین‌بحث اصل‌موضوع پ مورداستفاده قرار نگرفت ، این‌نتیجه‌ها برای هر هیأت مرتب دیگر نیز برقرارند . بنابراین گزارهٔ زیر ثابت شد .

۲ ــ گـــــزاره

هر هیأت مرتب حاوی(مجموعه‌های ایزومرف با) عددهای طبیعی ، عددهای درست ، و عددهای گویاست .

بااستفاده از اصل موضوع پ می‌توان حقایق بیشتری دربارهٔ عددهای‌درست و عددهای گویا به‌عنوان زیرمجموعه‌های‌عددهای‌حقیقی ، ثابت کرد . یکی‌از مهمترین‌آنها

قضیهٔ زیر است که به‌دلایل تاریخی [1] اصل موضوع ارشمیدس [2] نام دارد.

۳ ـ اصل موضوع ارشمیدس:

برای هر عدد حقیقی داده‌شدهٔ x ، یک عدد درست n وجود دارد به‌گونه‌ای که $x < n$ است.

برهان

گیریم S مجموعهٔ عددهای درست k است به‌گونه‌ای که $k \leq x$. چون S دارای کران بالای x است، بنابر اصل موضوع پ، S دارای کنارهٔ بالای y است. چون y کنارهٔ بالای S است پس $y - \frac{1}{2}$ نمی‌تواند یک کران بالای S باشد، پس یک عدد $k \in S$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $k > y - \frac{1}{2}$، ولی $y < y+\frac{1}{2} < k+1$ پس $(k+1) \notin S$. چون عدد درست $k+1$ متعلق به S نیست، پس بنابه‌تعریف S عدد $k+1$ باید از x بزرگتر باشد ∎

۴ ـ نتیجه

بین هر دو عدد حقیقی یک عدد گویا وجود دارد، یعنی اگر $x < y$ باشد، آنگاه عدد گویای r وجود دارد با $x < r < y$.

برهان

نخست فرض می‌کنیم $0 \leq x$. بنابر اصل موضوع ارشمیدس یک عدد درست q ، وجود دارد به‌گونه‌ای که $q > (y-x)^{-1}$. دراین‌صورت $(1/q) < y - x$. مجموعهٔ عددهای درست n به‌گونه‌ای که $y \leq (n/q)$ است (بنابر اصل ارشمیدس) یک مجموعهٔ ناتهی از عددهای درست مثبت است، پس دارای کوچکترین عنصر است که آن را p می‌نامیم.

---

۱ ـ این قضیه نخستین‌بار توسط Eudoxus مورد استفاده قرار گرفت.

۲ ـ Axiom of Archimedes

دراین صورت :

$$x = y-(y-x) < (p/q)-(1/q) = (p-1)/q < y \le (p/q)$$

بنابراین $r = (p-1)/q$ بین x و y قرار دارد . اگر $x < 0$ باشد ، می‌توان یک عدد درست n یافت به‌گونه‌ای که $n > -x$ باشد . دراین صورت $n + x > 0$ است ، و یک عدد گویای r وجود دارد با $n + x < r < n + y$ و $r - n$ عدد گویایی است بین x و y . ∎

۳ ـ عددهای حقیقی گسترش یافته

اغلب مناسبتر است که دستگاه عددهای حقیقی را باافزودن دوعنصر $+\infty$ و $-\infty$ گسترش دهیم . این مجموعهٔ وسعت‌یافته‌را **عددهای‌حقیقی‌گسترش‌یافته** می‌نامند . تعریف $<$ را باقراردادن $-\infty < x < \infty$ برای هر عددحقیقی x ، درمورد عددهای حقیقی گسترش‌یافته توسعه می‌دهیم . برای هر عدد حقیقی x قرار می‌دهیم .

$$x + \infty = \infty \quad \text{و} \quad x - \infty = -\infty$$

$$x \cdot \infty = \infty \qquad \text{اگر } x > 0$$

$$x \cdot -\infty = -\infty \qquad \text{اگر } x > 0$$

و

$$\infty + \infty = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty$$

$$\infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty, \quad -\infty \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$$

عمل $\infty - \infty$ تعریف‌نشده‌است‌ولی‌**قرارداداختیاری** $0 \cdot \infty = 0$ رامی‌پذیریم .

یک کاربرد عددهای‌حقیقی‌گسترش‌یافته درعبارت "$\sup S$" است . اگر S ، یک‌مجموعهٔ‌ناتهی از عددهای‌حقیقی‌بایک‌کران‌بالا باشد ، $\sup S$ را بنابه‌تعریف برابر کنارهٔ‌بالای S می‌گیریم . اگر S دارای‌کران‌بالانباشد ، آنگاه‌می‌نویسیم $\sup S = \infty$ ، به‌این‌ترتیب $\sup S$ ، برای‌هرمجموعهٔ‌ناتهی S تعریف‌می‌شود ،واگر $\sup \varnothing$ را با $-\infty$ تعریف‌کنیم ،آنگاه‌درهمهٔ‌حالتها $\sup E$ برابراست‌باکوچکترین‌عددحقیقی گسترش‌یافته که‌بزرگتر یا برابراست با هریک ازعنصرهای E . قراردادهای مشابهی درمورد $\inf S$ ، اتخاذ می‌گردد .

هرتابعی‌که مقدارهای‌آن به‌مجموعهٔ عددهای‌حقیقی گسترش‌یافته متعلق است ، ***تابعی بامقدارهای حقیقی گسترش‌یافته نامیده می‌شود .***

۴ ــ دنباله‌های عددهای حقیقی

هردنباله‌ٔ $\langle x_n \rangle$ ازعددهای‌حقیقی تابعی است که هرعدد درست n را به عددحقیقی x_n می‌نگارد. عددحقیقی l را **حد دنباله‌ٔ** $\langle x_n \rangle$ می‌نامیم هرگاه برای هرعدد مثبت ϵ یک عدد N وجود داشته‌باشد به‌گونه‌ای‌که برای‌هر $n \geq N$ داشته باشیم $|x_n - l| < \epsilon$. به‌آسانی ثابت می‌شود که هر دنباله حداکثر یک حد دارد. ودرصورت‌وجودحد، آن‌رابا $\lim x_n$ نشان‌می‌دهیم. به‌طورنمادی $l = \lim x_n$ است‌اگر

$$(\epsilon > 0)(\exists N)(n \geq N)(|x_n - l| < \epsilon).$$

دنباله‌ٔ $\langle x_n \rangle$ ازعددهای‌حقیقی، **دنباله‌ٔکشی** نامیده می‌شود هرگاه برای هر $0 < \epsilon$ داده شده، یک عدد N وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که برای هر $n \geq N$ و هر $m \geq N$ داشته باشیم $|x_n - x_m| < \epsilon$. **محک کشی** بیان‌می‌کند که برای‌همگرایی یک‌دنباله از عددهای حقیقی لازم و کافی است که این دنباله یک دنباله‌ٔ کشی باشد (مسئله ۱۰ را ببینید).

مفهوم حد یک دنباله را به‌شرح‌زیر گسترش می‌دهیم که‌شامل‌مقدار ∞ نیز باشد:

$\lim x_n = \infty$ است اگر برای هرعدد داده شده‌ٔ Δ یک‌عدد N وجود داشته‌باشد به‌گونه‌ای‌که برای‌هر $n \geq N$ داشته‌باشیم $x_n > \Delta$. اگر دنباله‌ای دارای حد باشد آن دنباله‌را همگرا می‌گویند. این‌تعریف‌مبهم‌است و بستگی‌دارد به‌این‌که منظور ازیک‌حد یک‌عددحقیقی است یا یک‌عددحقیقی گسترش یافته. در بیشتر بخشهای آنالیز استفاده از تعریف مقید حد معمول‌تر است،که درآن منظور از حد یک عددحقیقی است، ولی در چند فصل بعدی پذیرفتن $\pm\infty$ به‌عنوان یک حد معتبر، بسیار مناسب خواهد بود. در حالتهایی که تمیز بین این‌دونوع‌حد اهمیت‌دارد، کوشش خواهیم‌کردکه‌آن‌را بااستفاده از عبارتهایی‌نظیر "به‌یک‌عددحقیقی می‌گراید" یا "درمجموعه‌ٔعددهای‌حقیقی‌گسترش یافته همگراست" تصریح کنیم.

---

۱ ــ بانامگذاریهای‌فصل ۱ این‌دنباله‌ها همان‌دنباله‌های‌بی‌پایان‌هستند. چون دربقیه‌ٔکتاب دنباله‌های‌بی‌پایان بیشتر موردتوجه است، ازاین‌پس صفت "بی‌پایان" را حذف‌می‌کنیم و همه‌ٔ دنباله‌هارا بی‌پایان فرض می‌کنیم مگر این که خلاف آن گفته شود.

اگر $l = \lim x_n$ باشد ، اغلب می‌نویسیم $x_n \to l$. اگـر بـه‌عـلاوه $\langle x_n \rangle$ افزایشی نیز باشد یعنی ، $x_n \le x_{n+1}$ باشد ، می‌نویسیم $x_n \uparrow l$.

درحالتی که دنباله به‌یک عدد حقیقی می‌گراید می‌توان تعریف حد را به‌شرح زیر بیان کرد :

l حد دنبالهٔ $\langle x_n \rangle$ است اگر ، برای هرعدد دادهٔ شدهٔ $\epsilon > 0$ ، دوری همهٔ جمله‌های دنباله به‌جز شمارهٔ باپایانی ازآنها از l کمتراز ϵ باشد . یک شرط ضعیف‌تر این است که دوری عدهٔ بی‌پایانی از جمله‌های دنباله از l کمتراز ϵ باشد ، درحالت اخیر می‌گوییم که l **نقطـهٔ تجمـــع** دنبالهٔ $\langle x_n \rangle$ است . بنابراین l هنگامی نقطهٔ تجمع دنبالهٔ $\langle x_n \rangle$ است که برای هرعدد داده شدهٔ $\epsilon > 0$ و هر عدد دادهٔ شدهٔ N ، $\exists n \ge N$ به‌گونه‌ای که $|x_n - l| < \epsilon$. این تعریف را به‌این‌شکل به‌حالت $l = \infty$ تعمیم می‌دهیم که ∞ هنگامی نقطهٔ تجمع $\langle x_n \rangle$ است که برای عددهای دادهٔ شدهٔ Δ و N ، $\exists n \ge N$ ، به‌گونه‌ای که $x_n \ge \Delta$ باشد . این تعریف باتغییر کمی درمورد $-\infty$ معتبر است . بنابراین اگر دنباله‌ای دارای حد l باشد l نقطهٔ تجمع است ، ولی وارون آن معمولاً درست نیست . برای مثال دنبالهٔ $\langle x_n \rangle$ که با $x_n = (-1)^n$ تعریف می‌شود دارای دونقطهٔ تجمع ۱+ و ۱− است ولی حد ندارد .

حد بالای یک دنبالهٔ $\langle x_n \rangle$ با برابری زیر تعریف می‌شود :

$$\overline{\lim}\, x_n = \inf_n \sup_{k \ge n} x_k.$$

نمادهای $\overline{\lim}$ و $\limsup$ هردو برای نمایاندن حد بالا به‌کار می‌روند . برای این‌که عدد حقیقی l حد بالای دنبالهٔ $\langle x_n \rangle$ باشد لازم و کافی است که دو شرط زیر بـرقـرار بـاشـنـد :

(i) برای هر عدد داده شدهٔ $\epsilon > 0$ ، عدد n وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که برای هرعدد $k \ge n$ داشته باشیم $x_k < l + \epsilon$ ، و

(ii) برای عددهای دادهٔ شدهٔ $\epsilon > 0$ و n ، $\exists k \ge n$ بـه‌گـونـه‌ای کـه $x_k > l - \epsilon$ باشد ، برای این‌که عدد حقیقی گسترش‌یافتهٔ ∞ حد بالای دنبالهٔ $\langle x_n \rangle$ ، باشد لازم و کافی است که برای عددهای داده شدهٔ Δ و n یک عدد $k \ge n$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $x_k > \Delta$ گردد . عدد حقیقی گسترش‌یافته $-\infty$ تنها هنگامی حد بالای $\langle x_n \rangle$ است که $\overline{\lim}\, x_n = -\infty$ بـاشـــد .

حد پایین را با برابری زیر تعریف می‌کنیم :

$$\underline{\lim}\, x_n = \sup_n \inf_{k \ge n} x_k$$

داریم $\overline{\lim} - x_n = -\underline{\lim}\, x_n$ و $\underline{\lim}\, x_n \le \overline{\lim}\, x_n$

دنبالهٔ $\langle x_n \rangle$ به‌عددحقیقی گسترش‌یافتهٔ l می‌گراید اگر و تنها اگر $l = \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$ باشد.

اگر $\langle x_n \rangle$ و $\langle y_n \rangle$ دو دنباله باشند داریم:

$$\underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \le \underline{\lim}\, (x_n + y_n) \le \overline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n$$
$$\le \overline{\lim}\, (x_n + y_n) \le \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$$

مسئله‌ها

۶ ــ نشان دهید که هر دنباله می تواند حداکثر یک حد داشته باشد.

۷ ــ نشان‌دهید که l یک نقطهٔ تجمع $\langle x_n \rangle$ است‌اگر وتنها اگر یک زیر دنبالهٔ $\langle x_{n_j} \rangle_{j=1}^{\infty}$ وجود داشته باشد که به l بگراید.

۸ ــ الف ــ نشان دهید که $\overline{\lim}\, x_n$ و $\underline{\lim}\, x_n$ به‌ترتیب بزرگترین و کوچکترین نقطه‌های تجمع $\langle x_n \rangle$ هستند.

ب ــ نشان دهید که هر دنبالهٔ بی‌پایان کراندار یک زیر دنباله دارد که به‌یک عدد حقیقی می‌گراید.

۹ ــ نشان دهید که دنبالهٔ $\langle x_n \rangle$ همگراست اگر و تنها اگر درست یک عدد حقیقی گسترش‌یافته وجود داشته باشد که نقطهٔ تجمع این دنباله باشد. آیا اگر کلمهٔ " گسترش‌یافته " را حذف کنیم باز این بیان درست است؟

۱۰ ــ الف ــ نشان دهید، هر دنبالهٔ $\langle x_n \rangle$ که به‌عددحقیقی l می‌گراید یک دنبالهٔ کشی است.

ب ــ نشان دهید که هر دنبالهٔ کشی کراندار است.

پ ــ نشان‌دهیدکه اگر یک‌دنبالهٔ‌کشی دارای زیردنباله‌ای باشدکه به l بگراید آنگاه دنبالهٔ اصلی نیز به l می‌گراید.

ت ــ محک‌کشی‌را ثابت‌کنید: یک‌عددحقیقی l وجوددارد‌که‌دنبالهٔ $\langle x_n \rangle$، به‌آن می‌گراید اگر و تنها اگر $\langle x_n \rangle$ یک دنبالهٔ کشی باشد.

۱۱ ــ نشان دهید $x = \lim x_n$ اگر و تنها اگر هر زیر دنبالهٔ $\langle x_n \rangle$ به‌نوبهٔ خود یک زیر دنباله داشته باشد که به x بگراید.

۱۲ ــ نشان‌دهید که عددحقیقی l حدبالای‌دنبالهٔ $\langle x_n \rangle$ است اگر و تنها اگر (i) برای هر عدد داده شدهٔ $\epsilon > 0$، $\exists n$ به‌گونه‌ای که برای‌هر $k \ge n$ داشته باشیم $x_k < l + \epsilon$، و (ii) برای‌عددهای‌داده‌شدهٔ $\epsilon > 0$ و n، $\exists k \ge n$ به‌گونه‌ای که $x_k > l - \epsilon$

۱۳ ــ نشان‌دهید $\overline{\lim}\, x_n = \infty$ است اگر و تنها اگر برای عددهای داده‌شدهٔ Δ و n ، $\exists k \geq n$ با $x_k > \Delta$.

۱۴ ــ نشان‌دهید $\underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n$ و $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = l$ اگر وتنها اگر $l = \lim x_n$ باشد .

۱۵ ــ ثابت کنید :

$$\overline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \leq \overline{\lim}\, (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$$

به‌شرط این‌که طرفهای راست و چپ به‌شکل $\infty - \infty$ نباشند .

۱۶ ــ ثابت‌کنید که اگر $x_n \geq 0$ و $y_n \geq 0$ باشد ، آنگاه :

$$\overline{\lim}\, (x_n y_n) \leq (\overline{\lim}\, x_n)(\overline{\lim}\, y_n),$$

است ، به‌شرط این‌که حاصل‌ضرب سمت راست به‌شکل $\infty \cdot 0$ نباشند .

۱۷ ــ می‌گوییم دنباله (یا سری) $\langle x_\nu \rangle$ به‌عددحقیقی s **جمع پذیر** یا دارای مجموع s است . هرگاه دنبالهٔ $\langle s_n \rangle$ که با $s_n = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu$ تعریف می‌شود دارای حد s باشد . دراین‌حالت می‌نویسیم $s = \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu$. نشان دهید که اگر $x_\nu \geq 0$ باشد ، آنگاه یک‌عدد حقیقی تعمیم‌یافتهٔ s وجود دارد به‌گونه‌ای که :

$$s = \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu.$$

۱۸ــ نشان‌دهیدکه‌اگر $\sum_{\nu=1}^{\infty} |x_\nu| < \infty$ باشدآنگاه‌سری $\langle x_\nu \rangle$ جمع پذیراست .

۱۹ ــ گیریم $\langle x_n \rangle$ یک دنباله از عددهای حقیقی‌است . نشان دهید : $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ است اگر و تنها اگر :

$$x = x_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (x_{\nu+1} - x_\nu)$$

باشد .

۲۰ ــ گیریم E مجموعه‌عددهای‌حقیقی‌مثبت‌است . مجموع $\sum_{x \in E} x$ را با $\sup_{F \in \mathcal{F}} s_F$ تعریف‌می‌کنیم ،که‌درآن $\mathcal{F}$ دستهٔ‌همهٔ‌زیرمجموعه‌های‌باپایان E ، است و s_F مجموع (باپایان) عنصرهای F است .

الف ــ نشان‌دهید که $\sum_{x \in E} x < \infty$ است تنها اگر E شمارش‌پذیر باشد .

ب ــ نشان دهید که اگر E شمارش‌پذیر و $\langle x_n \rangle$ یک نگاشت یک‌به‌یک‌از $\mathbf{N}$ به روی E باشد ، آنگاه $\sum_{x \in E} x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

۲۱ ــ **گیریم** p یک‌عدد درست بزرگتر از ۱ و x یک‌عددحقیقی‌با $0 < x < 1$ است . نشان دهید که یک دنباله‌ٔ $\langle a_n \rangle$ از عددهای درست با $0 \le a_n < p$ وجود دارد به‌گونه‌ای که :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$$

و این‌دنباله یکتاست به‌جز هنگامی که x به‌شکل q/p^n است که دراین‌حالت درست دو دنباله ازاین‌گونه وجوددارد . به‌وارون نشان‌دهید که‌اگر $\langle a_n \rangle$ یک دنباله‌ٔ دلخواه از عددهای درست باشد با $0 \le a_n < p$ ، سری :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$$

به یک عدد حقیقی x با $0 \le x \le 1$ می‌گراید .

اگر $p = 10$ باشد این‌دنباله را **بسط اعشاری** x می‌گویند . برای $p = 2$ آن را بسط دودویی و برای $p = 3$ آنرا بسط سه‌ای می‌گویند .

۲۲ ــ نشان دهید که $\mathbf{R}$ شمارش‌ناپذیر است . از مسئله ۱ . ۲۳ استفاده کنید . برهان دیگر به‌وسیله‌ٔ نتیجه‌ٔ ۴ . ۳ داده خواهد شد .

۵ ــ مجموعه‌های باز و بسته‌ٔ عددهای حقیقی

ساده‌ترین‌نوع ازمجموعه‌ٔ عددهای‌حقیقی فاصله‌هاهستند . فاصله‌ٔ باز (a, b) بامجموعه‌ٔ $\{x: a < x < b\}$ تعریف می‌شود . همواره‌فرض‌می‌کنیم $a < b$ است‌ولی‌فاصله‌های بی‌پایان $(a, \infty) = \{x: a < x\}$ و $(-\infty, b) = \{x: x < b\}$ را نیز درنظر می‌گیریم . گاهی مجموعه‌ٔ عددهای حقیقی‌را با $(-\infty, \infty)$ نشان می‌دهیم . فاصله‌ٔ بسته‌ٔ $[a, b]$ را با مجموعه‌ٔ $\{x: a \le x \le b\}$ تعریف می‌کنیم . درمورد فاصله‌های بسته a و b را باپایان می‌گیریم .فاصله‌ٔ‌نیم باز $(a, b]$ رابامجموعه‌ٔ $\{x: a < x \le b\}$ تعریف‌می‌کنیم ، همچنین ، $[a, b) = \{x: a \le x < b\}$. یک تعمیم مفهوم فاصله‌ٔ باز یک مجموعه‌ٔ باز است :

تعـریـــف :

مجموعهٔ O ازعددهای‌حقیقی را بـــاز می‌گویند هرگاه برای هر $x \varepsilon O$ یک‌عــدد $0 < \delta$ وجود داشته‌باشد به‌گونه‌ای که هر y با $|x - y| < \delta$ به O متعلق باشد.

بیان‌دیگر این‌تعریف چنین‌است : مجموعهٔ O باز است هرگاه‌برای‌هر x متعلق به O یک فاصلهٔ باز I وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $x \varepsilon I \subset O$. فاصله‌های باز مثالهایی از مجموعه‌های بازند. مجموعهٔ تهی یعنی $\varnothing$ و مجموعهٔ $\mathbf{R}$ هردو بازند. اکنون چند خاصیت مجموعه‌های باز را ثابت می‌کنیم :

۵ ــ گـــــزاره :

اشتراک دومجموعهٔ باز O_1 و O_2 یعنی $O_1 \cap O_2$، یک مجموعه باز است.

بــرهـــــان :

گیریم $x \varepsilon O_1 \cap O_2$.چون $x \varepsilon O_1$ و O_1 باز است پس یک $\delta_1 > 0$ وجوددارد به‌گونه‌ای‌که‌هر y با $|x - y| < \delta_1$ به O_1 تعلق‌دارد. همچنین یک $\delta_2 > 0$ وجوددارد به‌گونه‌ای که هر y با $|x - y| < \delta_2$ به O_2 تعلق دارد. کوچکترین مقدار δ_1 و δ_2 را δ، می‌نامیم. دراین‌صورت $0 < \delta$ است، و اگر $|x - y| < \delta$ باشد ،آنگاه y به O_1 و O_2 و درنتیجه به $O_1 \cap O_2$ تعلق دارد. ∎

۶ ــ نتیجــــــه :

اشتراک هر دستهٔ باپایان از مجموعه‌های باز یک مجموعهٔ باز است.

۷ ــ گـــــزاره :

اجتماع هر دستهٔ $\mathcal{C}$ از مجموعه‌های باز یک مجموعهٔ باز است.

برهان :

گیریم U اجتماع دستهٔ $\mathcal{C}$ و $x \varepsilon U$ است . دراین‌صورت یک مجموعهٔ $O \varepsilon \mathcal{C}$ ، وجود دارد به‌گونه‌ای‌که $x \varepsilon O$. چون O باز است یک‌عدد $\epsilon > 0$ وجود دارد به‌گونه‌ای که هر y با $|x-y| < \epsilon$ به O درنتیجه‌به U تعلق‌داردزیرا $O \subset U$ بنابراین U باز است . ∎

از گزارهٔ ۵ نتیجه می‌شود که اشتراک هر دستهٔ باپایان از مجموعه‌های باز یک مجموعهٔ باز است . با این‌همه اشتراک هر دسته از مجموعه‌های‌باز همواره باز نیست . برای مثال فرض کنیم O_n برابر فاصلهٔ باز $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ است . دراین‌صورت $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n = \{0\}$ و $\{0\}$ باز نیست .

بنابرگزارهٔ ۷ اجتماع هر دسته از فاصله‌های باز یک‌مجموعهٔ باز است . شکل پرتوان‌تری از وارون آن نیز درست است .

۸ ــ گزاره :

هرمجموعهٔ باز عددهای‌حقیقی برابر است بااجتماع‌شمارش‌پذیری از فاصله‌های باز مجزا .

برهان :

چون O بازاست ، برای‌هر $x \varepsilon O$ یک $y > x$ وجودداردبه‌گونه‌ای‌که $(x, y) \subset O$.

گیریم $b = \sup\{y: (x, y) \subset O\}$ و $a = \inf\{z: (z, x) \subset O\}$

دراین‌صورت $a<x<b$ و $I_x = (a, b)$ فاصلهٔ بازی است حاوی x . اکنون می‌گوییم $I_x \subset O$ ، زیرا اگر $w \varepsilon I_x$ ، مثلاً $x< w< b$ باشد ، بنابه‌تعریف b ، یک عدد $y > w$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $(x, y) \subset O$ ، پس $w \varepsilon O$. وانگهی $b \not\varepsilon O$ ، زیرا اگر $b \varepsilon O$ ، دراین‌صورت‌برای $\epsilon > 0$ داریم $(b-\epsilon, b+\epsilon) \subset O$ و ازآنجا $(x, b+\epsilon) \subset O$ که مخالف‌تعریف b است . همچنین $a \not\varepsilon O$. دستهٔ‌فاصله‌های‌باز $\{I_x\}$ ، $x \varepsilon O$ را درنظر می‌گیریم چون‌هر x متعلق‌به O به I_x متعلق است و هر I_x مشمول O است پس $O = \bigcup I_x$. گیریم (a, b) و (c, d) دوفاصلهٔ‌متعلق به‌این‌دسته‌هستند که یک‌نقطهٔ مشترک دارند . دراین‌صورت باید $c < b$ و $a < d$ ، چون c به O تعلق ندارد پس به (a, b) نیز تعلق‌ندارد پس $c \le a$ وچون a به O تعلق‌ندارد از این‌رو a به (c, d),

تعلق ندارد پس $a \leq c$. بنابراین $a = c$. به‌همین‌ترتیب $b = d$ و $(a, b) = (c, d)$ ا ·
پس دوفاصلهٔ متفاوت متعلق به‌دستهٔ $\{I_x\}$ باید مجزا باشند . بنابراین O اجتماع دستهٔ مجزایی از فاصله‌های باز است . اکنون باید ثابت کنیم که این دسته شمارش‌پذیر است .
ولی می‌دانیم هر فاصلهٔ باز بنابرنتیجهٔ اصل ارشمیدس حاوی یک عدد گویا است . چون یک دسته از فاصله‌های باز مجزا داریم پس هر فاصلهٔ باز یک عدد گویای متفاوت دارد ومی‌توان یک‌تناظر یک‌به‌یک‌بین‌عناصر این‌دسته و یک‌زیرمجموعه‌ازعددهای‌گویابرقرارکرد .
پس این دسته شمارش‌پذیر است. ∎

۹ ــ گــــــزاره (لیندلـوف) [۱] :

گیریم $\mathcal{C}$ یک‌دسته از مجموعه‌های باز عددهای حقیقی است ، دراین‌صورت یک زیردستهٔ شمارش‌پذیر $\{O_i\}$ از $\mathcal{C}$ وجود دارد به‌گونه‌ای که :

$$\bigcup_{O \varepsilon \mathcal{C}} O = \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i$$

برهــــان :

گیریم $U = \bigcup \{O : O \varepsilon \mathcal{C}\}$، و $x \varepsilon U$ است . دراین‌صورت یک مجموعهٔ $O \varepsilon \mathcal{C}$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $x \varepsilon O$. چون O باز است یک فاصله باز I_x وجود دارد به‌گونه‌ای کـه $x \varepsilon I_x \subset O$. از نتیجهٔ ۴ برمی‌آید که می‌توان یک فاصلهٔ باز J_x با دوانتهای گویا یافت به‌گونه‌ای که $x \varepsilon J_x \subset I_x$. چون دستهٔ همهٔ فاصله‌های باز با دوانتهای گویا شمارش‌پذیر است ، پس دستهٔ $\{J_x\}$، $x \varepsilon U$ شمارش‌پذیر است ، و $U = \bigcup_{x \varepsilon U} J_x$ برای هرفاصلهٔ متعلق‌به $\{J_x\}$ یک‌مجموعهٔ O متعلق‌به $\mathcal{C}$ که‌آن‌فاصله‌را دربرداردبرمی‌گزینیم .
به‌این‌ترتیب زیردستهٔ شمارش‌پذیر $\{O_i\}_{i=1}^{\infty}$ از $\mathcal{C}$ به‌دست می‌آید ، و $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i$. ∎

اکنون مفهوم مجموعه‌های بسته را موردبررسی قرار می‌دهیم که تعمیم مفهوم فاصله‌های بسته می‌باشد . برای این منظور نخست یک نقطه از بستار را تعریف می‌کنیم :

---

۱ ــ Lindelöf

تعریف :

عدد حقیقی x را یک نقطهٔ از بستار مجموعهٔ E می‌گویند هرگاه برای هر $\delta > 0$ ، یک y متعلق به E وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $|x - y| < \delta$.

این تعریف هم‌ارز است با این‌که بگوییم : x یک نقطه از بستار E است هرگاه هرفاصلهٔ باز حاوی x حاوی یک نقطه از E نیز باشد . روشن است که هر نقطهٔ E یک نقطه از بستار آن است . مجموعهٔ نقطه‌های بستار E را با $\overline{E}$ نشان می‌دهیم . بنابراین $E \subset \overline{E}$.

۱۰ ــ گزاره :

اگر $A \subset B$ باشد آنگاه $\overline{A} \subset \overline{B}$ است . همچنین $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

برهان :

بخش نخست بی‌درنگ از تعریف نقطه‌های بستار نتیجه می‌شود . چون $A \subset A \cup B$ پس $\overline{A} \subset \overline{(A \cup B)}$. همچنین $\overline{B} \subset \overline{(A \cup B)}$ بنابراین $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{(A \cup B)}$ اکنون فرض کنیم $x \not\varepsilon \overline{A} \cup \overline{B}$. در این صورت یک عدد $\delta_1 > 0$ وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هیچ $y \varepsilon A$ ، نابرابری $|x - y| < \delta_1$ برقرار نیست ، همچنین یک عدد $\delta_2 > 0$ وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هیچ $y \varepsilon B$ نابرابری $|x - y| < \delta_2$ برقرار نیست . بنابراین اگر $\delta = \min (\delta_1, \delta_2)$, باشد هیچ نقطهٔ $y \varepsilon A \cup B$ وجود ندارد به‌گونه‌ای که $|x - y| < \delta$ برقرار باشد . درنتیجه $x \not\varepsilon \overline{(A \cup B)}$ ، پس داریم $\overline{(A \cup B)} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$: ∎

تعریف :

مجموعهٔ F را بسته می‌گویند هرگاه $F = \overline{F}$ باشد .

چون همواره داریم $F \subset \overline{F}$ ، پس یک مجموعهٔ F بسته است هرگاه $\overline{F} \subset F$ ، یعنی F شامل همهٔ نقطه‌های بستار خود باشد . مجموعهٔ تهی $\varnothing$ و مجموعهٔ $\mathbf{R}$ همهٔ عددهای حقیقی ، هردو بسته‌اند . فاصلهٔ بسته $[a, b]$ و فاصلهٔ $[a, \infty)$ مجموعه‌های بسته‌اند . معمولاً "مجموعه‌های بسته را با حرف F (اول کلمهٔ فرانسوی بسته *fermé*) نشان می‌دهند .

۱۱ ــ گــــزاره:

برای هر مجموعهٔ E مجموعهٔ $\overline{E}$ بسته است. یعنی $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$.

بــرهـــــان:

گیریم x یک نقطه از بستار $\overline{E}$ است. دراین‌صورت برای هر عدد داده شدهٔ $\delta > 0$ یک نقطهٔ $y \varepsilon \overline{E}$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که $|x - y| < \delta/2$. چون $y \varepsilon \overline{E}$، پس یک نقطهٔ $z \varepsilon E$ وجوددارد به‌گونه‌ای‌که $|y - z| < \delta/2$. از این‌رو $|x - z| < \delta$، و می‌بینیم که x یک نقطه از بستار E است ▮.

۱۲ ــ گــــزاره:

اجتماع $F_1 \cup F_2$ ی دو مجموعهٔ بستهٔ F_1 و F_2 یک مجموعهٔ بسته است.

بــرهـــــان:

بنابرگزارهٔ ۱۰ داریـم:

$$(\overline{F_1 \cup F_2}) = \overline{F}_1 \cup \overline{F}_2 = F_1 \cup F_2. ▮$$

۱۳ ــ گــــزاره:

اشتراک هر دستهٔ $\mathcal{C}$ ازمجموعه‌های بسته یک‌مجموعهٔ بسته است.

بــرهـــــان:

گیریم x یک‌نقطه‌ازبستار $\bigcap\{F: F \varepsilon \mathcal{C}\}$ است. دراین‌صورت برای هرعدد داده شدهٔ $\delta > 0$، یک $y \varepsilon \bigcap\{F: F \varepsilon \mathcal{C}\}$ وجود داردبه‌گونه‌ای‌که $|x - y| < \delta$ است. چون چنین‌عنصر y به‌هر $F \varepsilon \mathcal{C}$ تعلق‌دارد، پس‌می‌بینیم که x یک‌نقطه‌ازبستارهر $F \varepsilon \mathcal{C}$ است. چون F بسته‌است‌پس‌برای‌هر $F \varepsilon \mathcal{C}$ داریم $x \varepsilon F$. ازاین‌رو $x \varepsilon \bigcap\{F: F \varepsilon \mathcal{C}\}$ ▮.

۱۴ ــ گـــزاره :

مکمل یک مجموعهٔ باز یک مجموعهٔ بسته‌است و مکمل یک مجموعهٔ بسته یـک مجموعهٔ باز است .

بــرهـــــان :

گیریم O باز است . اگر $x \varepsilon O$ ، آنگاه یک عدد حقیقی $\delta > 0$ وجود دارد به‌گونه‌ای که اگر $|x - y| < \delta$ باشد ، آنگاه $y \varepsilon O$ است . از این‌رو x نمی‌تواند یک نقطه از بستار $\tilde{O}$ باشد ، زیرا هیچ عنصر $y \varepsilon \tilde{O}$ با $|x - y| < \delta$ وجود ندارد . بنابراین $\tilde{O}$ شامل همهٔ نقطه‌های بستار خود است ، درنتیجه $\tilde{O}$ بسته است .

از سوی دیگر ، گیریم F بسته و $x \varepsilon \tilde{F}$ است . دراین‌صورت چون x نقطه‌ای از بستار F نیست ، پس یک عدد $\delta > 0$ وجود دارد به‌گونه‌ای که هیچ y متعلق به F وجود ندارد که برای آن $|x - y| < \delta$ باشد . از این‌رو ، اگر $|x - y| < \delta$ باشد ، دراین‌صورت $y \varepsilon \tilde{F}$ و بنابراین $\tilde{F}$ باز است . ▮

می‌گوییم دستهٔ $\mathcal{C}$ ازمجموعه‌ها یک مجموعهٔ F را **می‌پوشانــــــد** . اگـــــر $F \subset \bigcup\{O : O \varepsilon \mathcal{C}\}$ باشد . دراین‌حالت دستهٔ $\mathcal{C}$ را یک **پــوشـــش** F می‌نامند . اگر هر $O \varepsilon \mathcal{C}$ باز باشد $\mathcal{C}$ را یک پوشش‌باز F می‌گویند . اگر $\mathcal{C}$ تنها حاوی شمارهٔ پایانداری از مجموعه‌ها باشد ، $\mathcal{C}$ را یک **پوشش‌بـــاپـــایـــان** F می‌نامند . این نامگذاری ناسازگار است به‌این‌معنی که در عبارت " پوشش باز " صفت باز مربوط است به‌مجموعه‌های پوشش ، در حالی که درعبارت " پوشش باپایان " صفت باپایان مربوط است به‌دسته و این‌صفت ایجاب نمی‌کند که‌مجموعه‌های این‌دسته مجموعه‌های باپایان‌هستند . بنابراین عبارت "پوشش‌باز" یک غلط مصطلح است و عبارت درست آن " پوشش به‌وسیلهٔ مجموعه‌های باز " است . متاسفانه نامگذاری نخست در ریاضیات به‌خوبی جاافتاده است . بااین‌نامگذاریها قضیهٔ زیر را بیان می‌کنیم :

۱۵ ــ قضیــه (هاینــه ــ بــرل) [۱] :

گیریم F یک‌مجموعهٔ کراندار و بسته از عددهای حقیقی است . درین‌صورت هر

۱ ــ Heine-Borel

پوشش باز F یک زیرپوشش باپایان دارد. به‌دیگرسخن، اگر $\mathcal{C}$ یک دسته از مجموعه‌های بازباشد به‌گونه‌ای‌که $F \subset \bigcup\{O : O \in \mathcal{C}\}$ دراین‌صورت یک‌دستهٔ باپایان $\{O_1, \ldots, O_n\}$ از مجموعه‌های $\mathcal{C}$ وجود دارد به‌گونه‌ای که:

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_i$$

برهـــــان:

نخست حالتی‌را درنظر می‌گیریم که F یک فاصلهٔ بستهٔ $[a, b]$ است، که‌در آن $-\infty < a < b < \infty$. گیریم E مجموعهٔ عددهای $x \leq b$ بااین‌خاصیت‌است‌که فاصلهٔ $[a, x]$ می‌تواندباشمارهٔ باپایانی از مجموعه‌های $\mathcal{C}$ پوشانده‌شود. مجموعهٔ E با b، کراندار است، پس دارای یک‌کرانهٔ بالا مانند c است. چون $c \in [a, b]$ است، پس یک مجموعهٔ $O \in \mathcal{C}$ وجودداردکه c را دربردارد. چون O باز است یک‌عدد $\epsilon > 0$، وجوددارد به‌گونه‌ای‌که‌فاصلهٔ $(c - \epsilon, c + \epsilon)$ مشمول O است. ولی $c - \epsilon$ یک کران بالای E نیست. پس یک‌عدد $x \in E$ وجودداردبا $x > c - \epsilon$ چون $x \in E$ پس، یک‌دسته باپایان $\{O_1, \ldots, O_k\}$ از مجموعه‌های $\mathcal{C}$ وجود دارد که $[a, x]$ را می‌پوشانــد. درنتیجه دستهٔ باپایان $\{O_1, \ldots, O_k, O\}$ فاصلهٔ $[a, c + \epsilon)$ را می‌پوشاند. پس هرعدد از فاصلهٔ $[c, c + \epsilon)$ که کوچکتر یا برابر b باشد به E تعلق‌دارد. چون هیچ نقطهٔ $[c, c + \epsilon)$ به‌جز c نمی‌تواند متعلق‌به E باشد، پس‌باید $c = b$ و $b \in E$ باشد. بنابراین $[a, b]$ می‌تواند باشمارهٔ باپایانی از مجموعه‌های $\mathcal{C}$ پوشانده شود و حالت خاص ثابت می‌گردد.

اکنون‌گیریم F یک‌مجموعهٔ‌کراندار و بستهٔ دلخواه و $\mathcal{C}$ یک پوشش باز F است. چون F کراندار است پس مشمول‌یک‌فاصلهٔ $[a, b]$ است. گیریم دستهٔ $\mathcal{C}^*$ باافزودن $\tilde{F}$ به $\mathcal{C}$ به‌دست آید، یعنی $\mathcal{C}^* = \mathcal{C} \cup \{\tilde{F}\}$. چون F بسته‌است‌پس $\tilde{F}$ بازاست و $\mathcal{C}^*$ یک‌دسته از مجموعه‌های باز است. بنابه‌فرض $F \subset \bigcup\{O : O \in \mathcal{C}\}$. پس:

$$\mathbf{R} = \tilde{F} \cup F \subset \tilde{F} \cup \bigcup\{O : O \in \mathcal{C}\} = \bigcup\{O : O \in \mathcal{C}^*\}$$

پس $\mathcal{C}^*$ یک‌پوشش‌باز $\mathbf{R}$، درنتیجه یک‌پوشش‌باز $[a, b]$ است. بنابرحالت پیش‌یک‌دستهٔ باپایان‌ازمجموعه‌های $\mathcal{C}^*$ وجودداردکه $[a, b]$ ودرنتیجه F رامی‌پوشاند. اگر این‌دستهٔ باپایان $\tilde{F}$ رادربرنداشته‌باشد، پس این‌دسته زیردستهٔ $\mathcal{C}$ است و نتیجهٔ قضیه‌برقراراست. اگراین‌زیردسته، $\tilde{F}$ رادربرداشته‌باشدآن‌رابه‌شکل $\{O_1, \ldots, O_n, \tilde{F}\}$ می‌نویسیم. دراین‌صورت $F \subset \tilde{F} \cup O_1 \cup \cdots \cup O_n$ چون $\tilde{F}$ هیچ‌نقطهٔ F رادربرندارد، پس $F \subset O_1 \cup \cdots \cup O_n$، ودستهٔ $\{O_1, \ldots, O_n\}$ یک‌زیردستهٔ باپایان $\mathcal{C}$ است‌که F را می‌پوشانــد. ∎

۱۶ ــ گـــــزاره:

گیریم $\mathcal{C}$ یک‌دسته از مجموعه‌های بستهٔ عددهای حقیقی است با‌این‌خاصیت‌که اشتراک هر زیر دستهٔ باپایان $\mathcal{C}$ ناتهی است و فرض می‌کنیم یکی از مجموعه‌های متعلق به $\mathcal{C}$ کراندار است. دراین‌صورت:

$$\bigcap_{F \in \mathcal{C}} F \neq \varnothing.$$

مسئـــــلـــــه‌هـــا

۲۳ ــ مجموعهٔ عددهای گویا باز است یا بسته است؟

۲۴ ــ کدام‌یک از مجموعه‌های عددهای حقیقی هم بازند و هم بسته‌اند؟

۲۵ــ دومجموعهٔ A و B را به‌گونه‌ای‌بیابید‌که $A \cap B = \varnothing$ و $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \varnothing$ باشد.

۲۶ ــ نشان دهید که x یک نقطه از بستار E است اگر و تنها اگر یک دنبالهٔ $\langle y_n \rangle$ از عناصر E وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $x = \lim y_n$.

۲۷ ــ عدد x را یک‌نقطهٔ‌تجمع مجموعهٔ E می‌نامنداگر x یک نقطه از بستار $E \sim \{x\}$ باشد. نشان‌دهیدکه مجموعهٔ‌نقطه‌های‌تجمع یک‌مجموعهٔ E که‌آن‌رابا E' نشان می‌دهیم یک مجموعهٔ بسته است.

۲۸ ــ نشان دهید $\overline{E} = E \cup E'$.

۲۹ ــ مجموعهٔ E را منفردمی‌نامیم هرگاه $E \cap E' = \varnothing$ باشد. نشان دهید که هرمجموعهٔ‌منفرداز عددهای حقیقی، شمارش‌پذیر است.

۳۰ــ مجموعهٔ D رادر $\mathbf{R}$ **متـــراکـــم** می‌گویندهرگاه $\overline{D} = \mathbf{R}$ باشد. نشان‌دهید که مجموعهٔ عددهای گویا در $\mathbf{R}$ متراکم است.

۳۱ ــ بااستفاده از گزاره‌های ۵ و ۷ و ۱۴ گزاره‌های ۱۲ و ۱۳ را ثابت کنید.

۳۲ ــ گزاره‌های ۵ و ۷ را بااستفاده از گزاره‌های ۱۲، ۱۳ و ۱۴ ثابت کنید.

۳۳ــ نقطهٔ x رایک**نقطـهٔ درونـی**مجموعهٔ A می‌گویندهرگاه‌یک‌عدد $\delta > 0$، وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که فاصلهٔ $(x - \delta, x + \delta)$ مشمول A باشد. مجموعهٔ نقطه‌های درونی A را با A° نشان می‌دهند. نشان دهید:

الف ــ A باز است اگر و تنها اگر $A = A^\circ$.

ب ــ $A^\circ = \sim(\overline{\sim A})$

۳۴ــ بااستفادهٔازقانونهای‌دمرگان‌گزارهٔ ۱۶ رابه‌کمک‌قضیهٔ هاینه‌ــ برل‌ثابت‌کنید.

۳۵ــ گیریم $\langle F_n \rangle$ یک‌دنباله از مجموعه‌های ناتهی بسته از عددهای‌حقیقی است به‌گونه‌ای که $F_{n+1} \subset F_n$. نشان‌دهید که اگر یکی از مجموعه‌های F_n کراندار باشد. آنگاه $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \varnothing$ با آوردن‌مثالی‌نشان‌دهیدکه‌اگرهیچ‌یک‌ازمجموعه‌ها کراندار نباشد این نتیجه ممکن است نادرست باشد.

۳۶ــ **مجموعهٔ سه‌سه‌ای کانتور**[۱] که با C نشان داده می‌شود متشکل‌از آن عددهای‌حقیقی‌متعلق‌به (۱ ، ۰) است‌که‌دارای بسط سه‌سه‌ای (مسئلهٔ ۲۱ را ببینید) $\langle a_n \rangle$ هستندکه‌درآن a_n هرگز برابر ۱ نیست. (اگر x دارای‌دوبسط سه‌سه‌ای‌باشد، هنگامی x را متعلق‌به‌مجموعهٔ‌کانتور C می‌گیریم که‌یکی‌ازبسط‌ها دارای‌جملهٔ ۱ نباشد). نشان دهید که C یک مجموعهٔ بسته است، و C به‌این‌ترتیب به‌دست می‌آید که نخست یک‌سوم وسط یعنی $(\frac{۱}{۳}، \frac{۲}{۳})$ را از [۱ ، ۰] حذف‌کنیم، سپس یک‌سومهای‌وسط فاصله‌های باقیمانده یعنی $(\frac{۱}{۹}، \frac{۲}{۹})$ و $(\frac{۷}{۹}، \frac{۸}{۹})$ را حذف کنیم‌واین عمل را ادامه می‌دهیم.

۳۷ــ نشان‌دهید که می‌توان یک‌نگاشت یک‌به‌یک بین مجموعهٔ کانتور و فاصلهٔ [۱ ، ۰] برقرار کرد.

۳۸ــ نشان دهید که مجموعهٔ نقطه‌های تجمع مجموعهٔ کانتور برخود مجموعهٔ کانتور منطبق است.

۶ــ تابعهای پیوسته

گیریم f تابعی حقیقی‌است که دامنهٔ تعریف آن یک مجموعهٔ E از عددهای حقیقی است. تابع f **درنقطهٔ** x **ازمجموعهٔ** E **پیوسته است**، اگر برای هر عدد دادهٔ شدهٔ $\epsilon > 0$ یک عدد $\delta > 0$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که برای هر y متعلق به E با $|x - y| < \delta$ داشته‌باشیم $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. تابع f روی‌زیرمجموعهٔ A از E **پیوسته‌است**هرگاه f درهرنقطهٔ A پیوسته‌باشد. اگر تنها بگوییم که f پیوسته است، منظور این است که f در دامنهٔ خود پیوسته است.

۱۷ــ گزاره:

گیریم تابع حقیقی f روی مجموعهٔ کراندار و بستهٔ F پیوسته‌است. دراین

۱ــ Cantor ternary set

صورت f روی F کراندار است و ماکزیمم و مینیمم خود را روی F می‌پذیرد ، یعنی نقطه‌های x_1 و x_2 متعلق به F وجود دارند به‌گونه‌ای که برای هر x متعلق به F داریم :

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$$

برهان :

نخست نشان می‌دهیم که f روی F کراندار است . چون f روی F پیوسته است ، پس برای هر $x \varepsilon F$ یک فاصلهٔ باز I_x حاوی x وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر $y \varepsilon I_x \cap F$ داریم $|f(y) - f(x)| < 1$. بنابراین برای هر $y \varepsilon I_x \cap F$ داریم $|f(y)| \le |f(x)| + 1$ ، پس f روی I_x کراندار است . دستهٔ $\{I_x: x \varepsilon F\}$ یک دسته از فاصله‌های باز است که F را می‌پوشاند ، پس بنابر قضیهٔ هاینه ــ برل یک زیردستهٔ باپایان $\{I_{x_1}, \ldots, I_{x_n}\}$ وجود دارد که F را می‌پوشاند . گیریم $M = 1 + \max [|f(x_1)|, \ldots, |f(x_n)|]$ است . در این صورت هر y ، متعلق به F به یک فاصلهٔ I_{x_k} از فاصله‌های این زیردستهٔ باپایان تعلق دارد ، از این رو $|f(y)| < 1 + |f(x_k)| \le M$. این نشان می‌دهد که f روی F (با M) کراندار است .

برای این‌که نشان دهیم f ماکزیمم خود را روی F می‌پذیرد ، می‌گیریم $m = \sup\limits_{x\varepsilon F} f(x)$. چون f کراندار است ، m باپایان است ، می‌خواهیم نشان دهیم که یک نقطهٔ $x_1 \varepsilon F$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $f(x_1) = m$ فرض کنیم چنین نیست . در این صورت برای هر $x \varepsilon F$ داریم $f(x) < m$ ، و بنابر پیوستگی f یک فاصلهٔ باز I_x وجود دارد که x را دربردارد به‌گونه‌ای که برای هر $y \varepsilon I_x \cap F$ داریم $f(y) < \frac{1}{2}(f(x) + m)$. باز با استفاده از قضیهٔ هاینه ــ برل می‌توان شمارهٔ باپایانی از این فاصله‌ها مانند $\{I_{x_1}, \ldots, I_{x_n}\}$ یافت که F را می‌پوشاند . قرار می‌دهیم $a = \max [f(x_1), \ldots, f(x_n)]$. در این صورت هر $y \varepsilon F$ به یکی از این فاصله‌ها مانند I_{x_k} تعلق دارد و داریم $f(y) < \frac{1}{2}[f(x_k) + m] \le \frac{1}{2}(a + m).$ بنابراین $\frac{1}{2}(a + m)$ یک کران f روی F است . ولی این نشدنی است زیرا $\frac{1}{2}(a + m) < m$. درنتیجه باید یک عدد x_1 وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $f(x_1) = m$ همچنین ، یک عدد x_2 وجود دارد که در آن f می‌نیمم خود را می‌پذیرد ∎ .

۱۸ـ گزاره:

گیریم f یک تابع حقیقی است که روی $(-\infty, \infty)$ تعریف شده‌است. دراین صورت f پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر فاصلهٔ باز O از عددهای حقیقی مجموعهٔ $f^{-1}[O]$ یک مجموعهٔ باز باشد.

برهان:

فرض می‌کنیم برای هر مجموعهٔ باز O مجموعهٔ $f^{-1}[O]$ باز است، و گیریم x یک عدد حقیقی دلخواه است. دراین‌صورت برای عدد داده شدهٔ $0 < \epsilon$، فاصلهٔ $I = (f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon)$ یک فاصلهٔ باز است، پس باید نگار وارون آن یعنی $f^{-1}[I]$ بازباشد. چون $x \varepsilon f^{-1}[I]$، پس‌بایدیک‌عدد $0 < \delta$ وجودداشته باشد به‌گونه‌ای که $(x - \delta, x + \delta) \subset f^{-1}[I]$. ولی این ایجاب می‌کند که اگر $|y - x| < \delta$ باشد، آنگاه $f(y) \varepsilon (f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon)$، یعنی $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ گردد. از این‌رو f در x پیوسته است. چون x یک عدد اختیاری بود، پس f پیوسته است.

اکنون فرض می‌کنیم که f پیوسته و O یک‌مجموعهٔ‌باز است. گیریم x نقطه‌ای متعلق به $f^{-1}[O]$ است. دراین‌صورت $f(x) \varepsilon O$ و عدد $0 < \epsilon$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که $(f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon) \subset O$. چون f در x پیوسته‌است، پس‌یک‌عدد $0 < \delta$ وجود دارد به‌گونه‌ای که برای $|x - y| < \delta$ داریم $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. بنابراین‌برای‌هر $y \varepsilon (x - \delta, x + \delta)$ داریم $f(y) \varepsilon (f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon) \subset O$، از این‌رو $(x - \delta, x + \delta) \subset f^{-1}[O]$ پس $f^{-1}[O]$ باز است. ∎

تعریف:

گیریم تابع حقیقی f روی مجموعهٔ E تعریف شده‌است. می‌گویند f روی E، به‌طوریکنواخت پیوسته است هرگاه برای هر $0 < \epsilon$ یک عدد $0 < \delta$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که برای هر x و y متعلق به E با $|x - y| < \delta$، داشته‌باشیم: $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

۱۹ــ گـــزاره :

اگر تابع حقیقی f روی‌یک‌مجموعهٔ کراندار و بستهٔ F ازعددهای‌حقیقی تعریف شده و پیوسته باشد ، آنگاه f روی F به‌طوریکنواخت پیوسته است .

بـــرهــــان :

برای‌هرعدد $0 < \epsilon$ وهر x متعلق‌به F یک‌عدد $0 < \delta_x$ وجود دارد به‌گونه‌ای از $|x - y| < \delta_x$ نتیجـــه مـــی‌شـــود $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}\epsilon$ فاصلهٔ $(x - \frac{1}{2}\delta_x, x + \frac{1}{2}\delta_x)$ را O_x می‌نامیم . درایـــن‌صـــورت $\{O_x : x \in F\}$ یک پوشش باز F است . بنابرقضیهٔ هاینه ــ برل ، یک‌زیردستهٔ باپایان $\{O_{x_1}, \ldots, O_{x_n}\}$ وجود دارد که F رامی‌پوشاند . گیریم $\delta = \frac{1}{2} \min (\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_n})$ است . دراین‌صورت δ مثبت‌است . گیریم y و z دونقطهٔ متعلق‌به F هستند به‌گونه‌ای که $|y - z| < \delta$. نقطهٔ y به‌یکی‌از فاصله‌های باز O_{x_i} تعلق دارد ، از این‌رو برای یک زیرنویس i داریم $|y - x_i| < \frac{1}{2}\delta_{x_i}$ ؛ درنتیجـــه :

$$|z - x_i| \leq |z - y| + |y - x_i| < \tfrac{1}{2}\delta_{x_i} + \delta \leq \delta_{x_i}$$

از این‌رو

$$|f(y) - f(x_i)| < \frac{\epsilon}{2}$$

و

$$|f(z) - f(x_i)| < \frac{\epsilon}{2}$$

و از آنجا

$$|f(z) - f(y)| < \epsilon$$

که نشان می‌دهد که تابع f روی مجموعهٔ F به‌طوریکنواخت پیوسته است. ▮

تعـــریـــف :

دنبالهٔ $\langle f_n \rangle$ ازتابعهای‌تعریف شده روی مجموعهٔ E ، روی آن به‌طورنقطه‌ای به‌تابع f می‌گراید هرگاه برای هر $x \in E$ داشته‌باشیم : $f(x) = \lim f_n(x)$ ؛ به‌گفتهٔ دیگر برای هر نقطهٔ داده شدهٔ x متعلق‌به E و هر عدد داده‌شدهٔ $0 < \epsilon$ ، یک عدد N وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر $n \geq N$ داریم $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$.

تعـــریـــف :

دنبالهٔ $\langle f_n \rangle$ از تابعهای‌تعریف‌شده‌روی‌مجموعهٔ E ، روی‌آن به‌طوریکنواخت

به E می‌گراید هرگاه برای هرعدد داده‌شده‌ٔ $\epsilon > 0$ یک‌عدد N وجودداشته‌باشد به‌گونه‌ای که برای‌هر $x \varepsilon E$ و هر $n \geq N$ داشته‌باشیم: $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

مسئله‌ها

۳۹ ــ گیریم F یک‌مجموعه‌ٔ بسته از عددهای حقیقی و f یک تابع حقیقی است که روی F تعریف شده و پیوسته است. نشان دهید که یک تابع g وجود دارد که روی $(-\infty, \infty)$ تعریف شده و پیوسته است به‌گونه‌ای که برای هر $x \varepsilon F$ داریم: $f(x) = g(x)$. [راهنمایی: g را در هریک از فاصله‌های‌تشکیل‌دهنده‌ٔ $\tilde{F}$ یک تابع خطی بگیرید.]

۴۰ ــ گیریم f یک تابع حقیقی با دامنه‌ٔ تعریف E است. ثابت کنید، برای پیوستگی f لازم و کافی‌است که برای هر مجموعه‌ٔ باز O یک مجموعه‌ٔ باز U وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $f^{-1}[O] = E \cap U$.

۴۱ ــ گیریم $\langle f_n \rangle$ یک‌دنباله از تابعهای پیوسته است که روی یک مجموعه‌ٔ E، تعریف‌شده‌اند. ثابت‌کنید که اگر $\langle f_n \rangle$ روی E به‌طوریکنواخت به f بگراید آنگاه f روی E، پیوسته است.

۴۲ ــ گیریم تابع f به‌شکل زیر تعریف شده است.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد،} \\ p \sin \frac{1}{q} & \text{اگر } x = \frac{p}{q} \text{ باشد} \end{cases}$$

که در آن $\frac{p}{q}$ کسری است ساده. f در چه‌نقطه‌هایی پیوسته است؟

۴۳ ــ الف: نشان دهید که اگر f، g دوتابع پیوسته باشند، آنگاه تابعهای $f + g$ و fg نیز پیوسته‌اند.

ب ــ نشان دهید که اگر f و g دو تابع پیوسته باشند آنگاه $f \circ g$ پیوسته است.

پ ــ گیریم‌تابع $f \vee g$ با $(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x)$، وتابع $f \wedge g$ نیز به‌روش مشابهی تعریف‌شود. نشان‌دهید که اگر f، g پیوسته باشند، آنگاه $f \vee g$ و $f \wedge g$ نیز پیوسته‌اند.

ت ــ اگر f پیوسته باشد، آنگاه $|f|$ نیز پیوسته است.

۴۴ ــ تابع حقیقی f را *افزایشی یکنوا* می‌گویند هرگاه برای $x \leq y$ داشته

باشیم $f(x) \leq f(y)$. اگر برای $x < y$ نابرابری $f(x) < f(y)$ برقرار باشد آنگاه تابع f را *افزایشی‌اکید* می‌گویند. تابع f را یکنوا (یا اکیداً "یکنوا) می‌گویند هرگاه تابع f یا $-f$ افزایشی‌یکنوا (یا افزایشی‌اکید) باشد. گیریم تابع f روی فاصلهٔ $[a, b]$ یک تابع پیوسته است دراین‌صورت برای‌این‌که یک تابع پیوستهٔ g وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که برای هر $x \varepsilon [a, b]$ داشته‌باشیم $g(f(x)) = x$ ، لازم و کافی است که f اکیداً" یکنوا باشد. دراین‌صورت برای هر y واقع بین $f(a)$ و $f(b)$ برابری $f(g(y)) = y$ نیز برقرار است. هرتابع f که دارای یک وارون پیوسته است یک **همئومرفیسم** *(* بین دامنه و برد خود) نامیده می‌شود.

۴۵ ــ تابع پیوستهٔ φ روی $[a, b]$ را **چندبری** (یا خطی‌پاره‌ای) می‌گویند هرگاه یک تقسیم‌جزیی فاصلهٔ $[a, b]$ مانند $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ وجودداشته باشد به‌گونه‌ای که روی هر فاصلهٔ جزیی ($[x_i, x_{i+1}]$) تابع φ خطی باشد. گیریم تابع دلخواه f روی $[a ، b]$ پیوسته و ϵ یک عدد مثبت‌است. نشان دهید که یک تابع چندبری φ روی $[a, b]$ وجوددارد به‌گونه‌ای که برای هر $x \varepsilon [a, b]$ نابرابری $|f(x) - \varphi(x)| < \epsilon$ برقرار است.

۴۶ ــ گیریم عدد حقیقی x متعلق به‌فاصله $[۰ , ۱]$ و دارای بسط سه‌سه‌ای $\langle a_n \rangle$ است. (مسئلهٔ ۲۱ را ببینید). اگرهیچ‌یک از a_n ها برابر ۱ نباشدقرارمی‌دهیم $N = \infty$ ودرغیراین‌صورت N رابرابرکوچکترین‌مقدار n می‌گیریم به‌گونه‌ای‌که $a_n = ۱$ است. گیریم $b_n = \frac{1}{2}a_n$ برای $n < N$ و $b_N = 1$. نشان دهید که:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{2^n}$$

به‌بسط سه‌سه‌ای x (اگر x دارای‌دوبسط باشد) بستگی‌نداردوتابع f که‌بابرابری

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{2^n}$$

تعریف می‌شود، روی فاصلهٔ $[۰ و ۱]$ تابعی است یکنوا و پیوسته. نشان دهید که f روی هریک ازفاصله‌هایی‌که مشمول مکمل مجموعه‌کانتور هستند (مسئله ۳۶)، ثابت است و f، مجموعهٔ سه‌سه‌ای‌کانتور را روی‌فاصلهٔ $[۰ و ۱]$ می‌نگارد. (این‌تابع را تابع سه‌سه‌ای‌کانتور می‌نامند).

۴۷ ــ **حد بالای یک تابع از یک متغیر حقیقی**. گیریم f یک تابع حقیقی

(یا حقیقی تعمیم یافته) است که در هـــر فاصلهٔ شامل y برای همهٔ مقدارهای x تعریف شده است . تعریف‌های زیر را برای $\overline{\lim}$ بیان می‌کنیم :

$$\overline{\lim_{x\to y}} f(x) = \inf_{\delta>0} \sup_{0<|x-y|<\delta} f(x)$$

$$\overline{\lim_{x\to y+}} f(x) = \inf_{\delta>0} \sup_{0<x-y<\delta} f(x)$$

تعریفهای مشابهی برای $\underline{\lim}$ بیان می‌شود .

الــف ــ $\overline{\lim}_{x\to y} f(x) \le A$ اگر و تنهااگر برای هر $\epsilon > 0$ داده‌شده یک عدد $\delta > 0$ وجود داشته‌باشد به‌گونه‌ای که برای هر x با $0 < |x-y| < \delta$ داشتــه باشیــم $f(x) \le A + \epsilon$

ب ــ $\overline{\lim}_{x\to y} f(x) \ge A$ اگر و تنهااگر برای‌هر $\epsilon > 0$ و هر $\delta > 0$ داده شده یک x وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $0 < |x-y| < \delta$ و $f(x) \ge A - \epsilon$.

پ ــ $\underline{\lim}_{x\to y} f(x) \le \overline{\lim}_{x\to y} f(x)$. برابری (برای $\overline{\lim} f \ne \pm\infty$) برقرار است اگر و تنها اگر $\lim_{x\to y} f(x)$ وجود داشته باشد .

ت ــ اگر $\overline{\lim}_{x\to y} f(x) = A$ و $\langle x_n\rangle$ یک‌دنباله‌با $x_n \ne y$ باشد به‌گونــه‌ای کــه $y = \lim x_n$ دراین‌صورت $\overline{\lim} f(x_n) \le A$

ث ــ اگر $\overline{\lim}_{x\to y} f(x) = A$ باشد ، دراین‌صورت‌یک‌دنبالهٔ $\langle x_n\rangle$ با $x_n \ne y$ ، وجود دارد به‌گونه‌ای که $y = \lim x_n$ و $A = \lim f(x_n)$.

ج ــ برای یک عدد حقیقی l داریم $l = \lim_{x\to y} f(x)$ ، اگر و تنها اگر برای یک دنبالهٔ $\langle x_n\rangle$ با $x_n \ne y$ و $y = \lim x_n$، داشته باشیم $l = \lim f(x_n)$.

۴۸ ــ **تابعهـــای نیمپیوستـــــه** : تابع حقیقی تعمیم‌یافتهٔ f را در نقطهٔ y ، نیمپیوستهٔ پایین می‌گویند . هرگاه $f(y) \ne -\infty$ و $f(y) \le \underline{\lim}_{x\to y} f(x)$ باشد . به‌روش مشابه ، f را در نقطهٔ y نیمپیوسته بالا می‌نامند ، هــرگـــاه $f(y) \ne +\infty$ و $f(y) \ge \overline{\lim}_{x\to y} f(x)$ باشد . تابع f را در یک‌فاصله نیمپیوستهٔ پایین (بالا) می‌گویند هرگاه این تابع درهر نقطهٔ این فاصله نیمپیوسته پایین (بالا) باشد . تابع f ،

نیمپیوستهٔ بالا است اگر و تنها اگر تابع $-f$ نیمپیوستهٔ پایین باشد .

الف ـ گیریم f باپایان‌است . ثابت کنید که f در y نیمپیوستهٔ پایین است اگر و تنها اگر برای هرعدد داده شدهٔ $\epsilon > 0$ یک عدد $\delta > 0$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که برای هر x با $|x - y| < \delta$ داشته باشیم $f(y) \leq f(x) + \epsilon$.

ب ـ تابع f (در یک‌نقطه یا در یک‌فاصله) پیوسته‌است اگر و تنهااگر این‌تابع (در آن‌نقطه یا فاصله) هم نیمپیوسته پایین و هم نیمپیوستهٔ بالا باشد .

پ ـ نشان دهید که یک تابع حقیقی f روی (a, b) نیمپیوستهٔ پایین است اگر و تنها اگر برای هر عدد حقیقی λ مجموعهٔ $\{x: f(x) > \lambda\}$ باز باشد .

ت ـ نشان دهید که اگر تابعهای f و g نیمپیوستهٔ پایین باشند آنگاه تابعهای $f \vee g$ و $f + g$ نیز نیمپیوستهٔ پایین هستند

ث ـ گیریم $\langle f_n \rangle$ یک‌دنباله از تابعهای‌نیمپیوستهٔ‌پایین است . نشان دهید که تابع $f(x) = \sup_n f_n(x)$ نیز نیمپیوستهٔ پایین است .

ج ـ یک‌تابع حقیقی φ راکه‌روی‌فاصلهٔ $[a, b]$ تعریف‌شده‌است یک‌تابع پله‌ای می‌گویند هرگاه یک تقسیم $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که برای هر i تابع φ در فاصلهٔ (x_i, x_{i+1}) تنها یک مقدار بگیرد . نشان دهید که تابع پله‌ای φ نیمپیوستهٔ‌پایین‌است اگر و تنهااگر $\varphi(x_i)$ کوچکتر یا برابر کوچکترین دومقداری باشد که تابع φ در فاصله‌های (x_{i-1}, x_i) و (x_i, x_{i+1}) می‌گیرد .

چ ـ تابع f که‌روی‌فاصلهٔ $[a, b]$ تعریف شده است روی این فاصله نیمپیوستهٔ پایین است اگر و تنها اگر یک دنباله ازتابعهای‌افزایشی‌یکنوای $\langle \varphi_n \rangle$ که‌روی $[a, b]$ ، نیمپیوستهٔ‌پایین‌هستند وجود داشته‌باشد به‌گونه‌ای‌که برای‌هر $x \in [a, b]$ داشته باشیم $f(x) = \lim \varphi_n(x)$.

ح ـ نشان‌دهید که تابعهای‌پله‌ای‌مذکور در (چ) را می‌توان با تابعهای پیوسته جانشین کرد .

خ ـ ثابت کنید که هر تابع f که روی یک فاصلهٔ بستهٔ $[a, b]$ تعریف شده و نیمپیوستهٔ‌پایین‌است ازسوی‌پایین کراندار است و مینیمم خود را روی $[a, b]$ می‌گیرد . یعنی یک عدد $y \in [a, b]$ وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر $x \in [a, b]$ داریم $f(y) \leq f(x)$

۴۹ ـ **پوش بالا** و **پوش پایین** یک‌تابع . گیریم تابع حقیقی f روی $[a, b]$ ، تعریف شده است . g ، **پوش پائین** تابع f را با :

$$g(y) = \sup_{\delta > 0} \inf_{|x-y|<\delta} f(x)$$

و h ، پوشش بالای f را با:

$$h(y) = \inf_{\delta>0} \sup_{|x-y|<\delta} f(x).$$

تعریف می‌کنیم.

الف ــ برای هر $x \varepsilon [a, b]$ ، داریم $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ، و $g(x) = f(x)$ است اگر و تنها اگر تابع f در x نیمپیوستهٔ پایین باشد، درحالی که $g(x) = h(x)$ است اگر و تنها اگر f در x پیوسته باشد.

ب ــ اگر f کراندار باشد، تابع g نیمپیوستهٔ پایین و h نیمپیوستهٔ بالا است.

پ ــ اگر تابع نیمپیوسته پایین φ به‌گونه‌ای باشد که برای هر $x \varepsilon [a, b]$ داشته باشیم $\varphi(x) \leq f(x)$ ، آنگاه برای هر $x \varepsilon [a, b]$ داریم $\varphi(x) \leq g(x)$.

۷ ــ مجموعه‌های برل

گرچه اشتراک هر دسته از مجموعه‌های بسته یک مجموعهٔ بسته است و اجتماع هر دستهٔ **باپایان** ازمجموعه‌های بسته یک مجموعهٔ بسته است. ولی اجتماع یک دستهٔ **شمارش‌پذیر** ازمجموعه‌های بسته ممکن است بسته نباشد. برای مثال، مجموعهٔ عددهای گویا اجتماع شمارش‌پذیر یک دسته از مجموعه‌های بسته است که هریک درست یک عدد را دربر دارد. بنابراین اگر به σ ــ جبرمجموعه‌هایی که حاوی همهٔ مجموعه‌های بسته است علاقمندیم باید انواع مجموعه‌های بسیارکلی‌تر از مجموعه‌های باز و بسته‌را درنظربگیریم. برای این منظور تعریف زیر را بیان می‌کنیم:

تعریف:

دستهٔ مجموعه‌های برل[1] $\mathcal{B}$ ، *کوچکترین* σ *ــ جبری است که حاوی همه مجموعه‌های باز است.*

بنابرگزارهٔ ۳۰۱ کوچکترین σ ــ جبر مذکور دربالا وجود دارد. این σ ــ جبر

---

۱ ــ Borel

همچنین کوچکترین σ ــ جبری است که حاوی همهٔ مجموعه‌های بسته است و نیز کوچکترین σ ــ جبری است که حاوی فاصله‌های باز است .

هرمجموعه که اجتماع شمارش‌پذیری از مجموعه‌های‌بسته است یک $\mathfrak{F}_\sigma$ ($\mathfrak{F}$ برای بسته‌بودن‌و σ برای‌مجموع)نامیده‌می شود . بنابراین هرمجموعهٔ شمارش‌پذیریک $\mathfrak{F}_\sigma$ است . و هر مجموعهٔ بسته نیز یک $\mathfrak{F}_\sigma$ است . هر اجتماع شمارش‌پذیر ازمجموعه‌های $\mathfrak{F}_\sigma$ باز یک مجموعهٔ $\mathfrak{F}_\sigma$ است . چون :

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right],$$

پس هر فاصلهٔ باز یک $\mathfrak{F}_\sigma$ است و از این‌رو هر مجموعهٔ باز یک $\mathfrak{F}_\sigma$ است .

هر مجموعه‌ای که‌اشتراک دستهٔ شمارش‌پذیری از مجموعه‌های‌باز باشد یک $\mathcal{G}_\delta$ ، ($\mathcal{G}$ برای باز و δ برای‌اشتراک) نامیده می شود . بنابراین مکمل یک $\mathfrak{F}_\sigma$ یک $\mathcal{G}_\delta$ است و بــــه وارون . . . . .

$\mathfrak{F}_\sigma$ و $\mathcal{G}_\delta$ انواع‌نسبتا "سادهٔ‌مجموعه‌های‌برل هستند . می‌توان مجموعه‌های ازنوع $\mathfrak{F}_{\sigma\delta}$ را نیز درنظر گرفت که اشتراک دستهٔ شمارش‌پذیری از مجموعه‌های متعلــق به $\mathfrak{F}_\sigma$ هستند . همچنین‌می‌توان‌دسته‌های $\mathcal{G}_{\delta\sigma}$ و $\mathfrak{F}_{\sigma\delta\sigma}$ ، وغیره‌راساخت . بنابراین رده‌های دو دنبالهٔ زیــر :

$$\mathfrak{F}_\sigma, \mathfrak{F}_{\sigma\delta}, \mathfrak{F}_{\sigma\delta\sigma}, \ldots, \mathcal{G}_\delta, \mathcal{G}_{\delta\sigma}, \mathcal{G}_{\delta\sigma\delta}, \ldots$$

رده‌، مجموعه‌های‌برل‌هستند . ولی همهٔ مجموعه‌های‌برل‌به‌یکی‌ازاین‌دورده‌تعلق‌ندارند . می‌توان درکتاب‌کوراتوسکی[1] [۱۶] مطالب‌بیشتری‌دربارهٔ نظریهٔ‌مجموعه‌های‌برلی یافت ، ولی ما تنها به‌خواصی از آنها نیازمندیم‌که ، مستقیما" از این‌واقعیت که آنها کوچکترین σ ــ جبر دربردارندهٔ مجموعه‌های باز و مجموعه‌های بسته هستند ، نتیجه می شوند .

مسئلـــــــه‌هـــا

۵۰ ــ گیریم‌تابع f نیمپیوستهٔ‌پایین‌است و برای همهٔ‌مقدارهای‌حقیقی تعریف شده است . درمورد مجموعه‌های :

$$\{x: f(x) > \alpha\}, \ \{x: f(x) \geq \alpha\}, \{x: f(x) < \alpha\}, \{x: f(x) \leq \alpha\}$$

و $\{x: f(x) = \alpha\}$ چه می‌توان گفت ؟

۱ــ Kuratowski

۵۱ ـ گیریم f تابعی است با مقدارهای حقیقی که برای همهٔ عددهای حقیقی تعریف شده‌است . ثابت کنید که مجموعه نقطه‌هایی که f درآنها پیوسته‌است یک $\mathcal{G}_\delta$ است .

۵۲ ـ گیریم $\langle f_n \rangle$ یک دنباله از تابعهای پیوسته‌است که روی $\mathbf{R}$ تعریف شده‌اند . نشان دهید که مجموعهٔ C یعنی مجموعهٔ نقاطی که این دنباله درآنها همگراست بـــه $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ تعلـــق دارد .

فصل سوم

انــــدازهٔ لبــــگ

۱ ــ مقــدمــــــه

درازی $l(I)$ هرفاصلهٔ I طبق‌معمول باتفاضل طولهای‌دوسرآن‌فاصله تعریف می‌شود. درازی، مثالی‌است از یک‌تابع مجموعه، یعنی، تابعی‌که به‌هرمجموعهٔ یک‌دسته، یک‌عدد‌حقیقی‌گسترش‌یافته‌مربوط می‌کند. درمورد درازی، دامنه، دستهٔ همهٔ فاصله‌هاست. می‌خواهیم مفهوم درازی‌را برای مجموعه‌هایی‌پیچیده‌تر از فاصله تعمیم دهیم. برای‌مثال می‌توانیم، درازی‌یک‌مجموعهٔ باز را به‌شکل‌مجموع درازیهای فاصله‌های باز تشکیل‌دهندهٔ آن تعریف کنیم. چون دستهٔ مجموعه‌های باز هنوز برای منظور ما بسیار محدود است، می‌خواهیم یک تابع مجموعهٔ m بسازیم که برای هر مجموعهٔ E ی متعلق به‌یک دستهٔ $\mathfrak{M}$ ازمجموعه‌های اعداد‌حقیقی، یک عدد‌حقیقی گسترش‌یافتهٔ نامنفی mE مربوط کندکه‌اندازهٔ‌آن‌نامیده‌می‌شود. به‌طورآرمانی، می‌خواهیم‌که m دارای‌ویژگیهای‌زیرباشد:

i ـ mE برای هر مجموعهٔ E از عددهای حقیقی تعریف شده باشد، یعنـــی $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(R)$ باشد.

ii ــ برای هر فاصلهٔ I، $mI = l(I)$ باشد؛

iii ــ اگر $\langle E_n \rangle$ یک دنباله ازمجموعه‌های‌مجزا باشد (که‌برای آنها m، تعریف شده است)، آنگاه $m(\bigcup E_n) = \sum mE_n$ بـــاشـــــد.

iv ــ m نسبت‌به‌انتقال پایا باشد، یعنی‌اگر E مجموعه‌ای باشد که برای آن m تعریف‌شده‌است و اگر $E + y$ مجموعهٔ $\{x + y : x \varepsilon E\}$ باشدکه‌از E باجانشین کردن هر نقطهٔ x آن با $x + y$ به‌دست آمده است، آنگاه $m(E + y) = mE$.

متأسفانه، همانگونه که دربخش ۴ خواهیم دید، ساختن تابع مجموعه‌ای با‌همهٔ این ویژگیها ناممکن است، و معلوم نیست که تابع مجموعه‌ای وجود داشته باشد که در سه ویژگی نخست صدق کند[1]. درنتیجه، یکی از این ویژگیها باید تضعیف گردد، برای

---

۱ ــ اگر فرض پیوستاری را بپذیریم (که هر مجموعهٔ شمارش‌ناپذیر از عددهای حقیقی‌را می‌توان در یک تناظر یک‌به‌یک بامجموعهٔ همهٔ عددهای‌حقیقی گذارد)، آنگاه چنین اندازه‌ای نشدنی است.

این منظور بهتر است که سه ویژگی آخر را نگه داریم و ویژگی نخست را تضعیف کنیم به‌گونه‌ای که نیازی وجود نداشته‌باشد که mE برای همهٔ مجموعه‌های E از عددهای حقیقی معین باشد [1]. ما خواستار آن خواهیم شد که mE برای هرچه‌بیشتر این مجموعه‌ها معین باشد و خواهیم دید که اگر خانوادهٔ $\mathfrak{M}$ مجموعه‌هارا ، که برای آنها m معین است ، یک سیگما ــ جبر بگیریم مناسبتر است . بنابراین ، خواهیم گفت که m یک **اندازهٔ جمعی شمارش‌پذیر** است هرگاه مقادیر m عددهای حقیقی گسترش‌یافتهٔ نامنفی بوده ، دامنهٔ تعریف آن سیگماجبر $\mathfrak{M}$ مجموعه‌ها (ی اعداد حقیقی) باشد و برای هر دنبالهٔ $\langle E_n \rangle$ از مجموعه‌های مجزای $\mathfrak{M}$ داشته باشیم $m(\bigcup E_n) = \sum mE_n$. هدف ما در دو بخش بعدی ساختن یک اندازهٔ جمعی شمارش‌پذیر است که نسبت به انتقال پایا و برای هر فاصلهٔ I دارای ویژگی $mI = l(I)$ است .

مسئله‌ها

گیریم m یک اندازهٔ جمعی شمارش‌پذیر است که برای همهٔ مجموعه‌های سیگما‌ـ جبر $\mathfrak{M}$ تعریف شده است .

۱ ــ اگر A و B دو مجموعهٔ $\mathfrak{M}$ باشند با $A \subset B$ ، آنگاه $mA \leq mB$. این خاصیت را یکنوایی می‌نامند .

۲ ــ گیریم $\langle E_n \rangle$ یک دنباله از مجموعه‌های $\mathfrak{M}$ است ، آنگاه داریم $m(\bigcup E_n) \leq \sum mE_n$ [راهنمایی : از گزارهٔ ۲۰۱ استفاده کنید .] این خاصیت اندازه‌را ، زیرجمعی شمارش‌پذیری می‌گویند .

۳ ــ اگر یک مجموعهٔ A در $\mathfrak{M}$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $mA < \infty$ باشد ، آنگاه $m\varnothing = 0$ است .

۴ ــ گیریم nE برای یک مجموعهٔ بی‌پایان برابر ∞ و برای یک مجموعهٔ باپایان

---

[1] ــ تضعیف خاصیت (i) تنها روش نیست : ممکن است خاصیت (iii) ی جمعی شمارش‌پذیری‌را باخاصیت ضعیف‌تر جمعی‌پایاندار ، یعنی برای هر دنبالهٔ پایاندار $\langle E_n \rangle$ از مجموعه‌های مجزا داریم $m(\bigcup E_n) = \sum mE_n$ (مسئلهٔ ۱۰ ، ۲۱ را ببینید) . جانشین ساخت . شق شدنی دیگر به‌جای خاصیت (iii) زیرجمعی شمارش‌پذیر بودن است ، که به‌وسیلهٔ اندازهٔ بیرونی که در بند بعدی ساخته می‌شود ، برآورده می‌گردد . (مسئلهٔ ۲ را ببینید) .

برابرمجموع عناصرآن است . نشان‌دهیدکه n یک تابع مجموعهٔ جمعی شمارش‌پذیر است کەنسبت به‌انتقال پایاست و برای‌همهٔ مجموعه‌های اعداد حقیقی معین است . این‌اندازه‌را "*اندازهٔ شمارنده*" می‌گویند .

۲ ــ اندازهٔ بیرونی

برای‌هرمجموعهٔ A ازاعداد حقیقی ، یک‌دستهٔ شمارش‌پذیر $\{I_n\}$ از فاصله‌های باز را درنظر می‌گیریم که‌A را می‌پوشاند ، یعنی برای این دسته داریم $A \subset \bigcup I_n$ ، و برای هر دستهٔ نظیر آن،مجموع طولهای فاصله‌های‌دسته‌را درنظر می‌گیریم . چون طولها عددهای مثبت‌اند ، این مجموع به‌طور یکتا تعریف شده و نابسته از ترتیب جمله‌هاست . m^*A ، *اندازهٔ بیرونی* A [1] به‌شکل‌کرانهٔ پائین همهٔ این مجموعها تعریف‌می‌شود . با یک طرز نمایش کوتاه داریم .

$$m^*A = \inf_{A \subset \bigcup I_n} \sum l(I_n)$$

از تعریف m^* بی‌درنگ نتیجه می‌گرددکه $m^*\varnothing = 0$ ، و اگر $A \subset B$ آنگاه $m^*A \leq m^*B$ است . همچنین اندازهٔ بیرونی هر مجموعهٔ شامل یک نقطهٔ تنها ، صفر است . دو گزارهٔ زیر را در بارهٔ اندازهٔ بیرونی ثابت می‌کنیم :

۱ ــ گزاره :

اندازهٔ بیرونی هر فاصله برابر طول آن است .

برهان :

نخست قضیه‌را درمورد یک‌فاصلهٔ بستهٔ باپایان ، مانند $[a, b]$ ثابت می‌کنیم .

۱ــ برای‌متمایزساختن‌این‌اندازهٔ‌بیرونی‌بااندازه‌های‌بیرونی‌کلی‌تری‌که‌درفصل ۱۲ موردتوجه‌قرارگرفته‌اند . این‌اندازهٔ‌بیرونی‌را اندازهٔ‌بیرونی لبگ منسوب به‌هانری‌لبگ Henri Lebesgue می‌نامند . چون هیچ‌اندازهٔ‌بیرونی دیگری دراین فصل درنظر نخواهیم‌گرفت ، m^* را به‌طورساده اندازهٔ‌بیرونی خواهیم نامید .

چون برای هر $\epsilon > 0$ فاصله‌ٔ باز $(a - \epsilon, b + \epsilon)$ فاصله‌ٔ $[a, b]$ را دربردارد، داریم: $m^*[a, b] \le l(a - \epsilon, b + \epsilon) = b - a + 2\epsilon$. چون برای هر $\epsilon > 0$، $m^*[a, b] \le b - a + 2\epsilon$، پس باید داشته باشیم $m^*[a, b] \le b - a$. بنابراین تنها باید ثابت کنیم $m^*[a, b] \ge b - a$. ولی این اثبات هم‌ارز است با این‌که نشان دهیم که اگر $\{I_n\}$ یک دستهٔ شمارش‌پذیر از فاصله‌های باز باشد که $[a, b]$ را می‌پوشاند، آنگاه داریم:

$$\sum l(I_n) \ge b - a \qquad (1)$$

بنابر قضیهٔ هاینه ـ برل، هر دسته از فاصله‌های باز که $[a, b]$ را بپوشاند دارای یک زیردستهٔ باپایان است که باز هم $[a, b]$ را می‌پوشاند، و چون مجموع طولهای زیردستهٔ باپایان بزرگتر از مجموع طولهای دستهٔ اصلی نیست، کافی است نابرابری (۱) را برای یک دستهٔ باپایان $\{I_n\}$ که $[a, b]$ را می‌پوشاند ثابت کنیم. چون a در $\bigcup I_n$ است، باید یکی از I_n ها حاوی a باشد. این فاصله را (a_1, b_1) می‌نامیم. داریم $a_1 < a < b_1$. اگر $b_1 \le b$ باشد، آنگاه $b_1 \in [a, b]$، و چون $b_1 \notin (a_1, b_1)$، پس باید در دستهٔ $\{I_n\}$ یک فاصلهٔ (a_2, b_2) وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $b_1 \in (a_2, b_2)$، یعنی $a_2 < b_1 < b_2$. با ادامهٔ این روش یک دنبالهٔ $(a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k)$ از دستهٔ $\{I_n\}$ به‌دست می‌آوریم به‌گونه‌ای که $a_i < b_{i-1} < b_i$. چون $\{I_n\}$ یک دستهٔ باپایان است، باید عمل ما با یک فاصلهٔ (a_k, b_k) پایان یابد. ولی این عمل هنگامی پایان می‌یابد که $b \in (a_k, b_k)$، یعنی $a_k < b < b_k$ باشد. بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned}\sum l(I_n) &\ge \sum l(a_i, b_i)\\ &= (b_k - a_k) + (b_{k-1} - a_{k-1}) + \ldots + (b_1 - a_1)\\ &= b_k - (a_k - b_{k-1}) - (a_{k-1} - b_{k-2})\\ &\quad - \ldots - (a_2 - b_1) - a_1 > b_k - a_1,\end{aligned}$$

زیرا $a_i < b_{i-1}$، ولی $b_k > b$ و $a_1 < a$ است، پس $b_k - a_1 > b - a$ است، ازاین‌رو $\sum l(I_n) > (b - a)$. این نشان می‌دهد که $m^*[a, b] = b - a$

اگر I یک فاصلهٔ باز دلخواه باشد، آنگاه برای هر $\epsilon > 0$ داده‌شده، یک فاصلهٔ بستهٔ $J \subset I$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $l(J) > l(I) - \epsilon$. ازاین‌رو:

$$l(I) - \epsilon < l(J) = m^*J \le m^*I \le m^*\bar{I} = l(\bar{I}) = l(I).$$

بنابراین برای هر $0 < \epsilon$ داریم :

$$l(I) - \epsilon < m^*I \leq l(I)$$

پس $m^*I = l(I)$

اگر I یک‌فاصلهٔ بی‌پایان‌باشد ،آنگاه‌برای‌هرعددحقیقی‌داده‌شدهٔ Δ ،یک‌فاصلهٔ بستهٔ $J \subset I$ وجودداردبا $l(J) = \Delta$ ،ازاین‌رو $m^*I \geq m^*J = l(J) = \Delta$. چون‌برای هر Δ ، $m^*I \geq \Delta$ است ، پس $m^*I = \infty = l(I)$. ∎

۲ ــ گـــــزاره :

گیریم $\{A_n\}$ یک‌دستهٔ شمارش‌پذیر از مجموعه‌های اعدادحقیقی است . دراین صورت داریم :

$$m^*(\bigcup A_n) \leq \sum m^*A_n.$$

بـــرهـــــان :

اگر اندازهٔ بیرونی یکی از مجموعه‌های A_n بی‌پایان باشد ، برقراری نابرابری بدیهی‌است . اگر m^*A_n باپایان‌باشد ، آنگاه ، برای‌هر $0 < \epsilon$ داده شده، یک دستهٔ شمارش‌پذیر $\{I_{n,i}\}_i$ از فاصله‌های‌باز وجود دارد به‌گونه‌ای‌کــه $A_n \subset \bigcup_i I_{n,i}$ و $\sum_i l(I_{n,i}) < m^*A_n + 2^{-n}\epsilon$. اکنون‌گوییم دستهٔ $\{I_{n,i}\}_{n,i} = \bigcup_n \{I_{n,i}\}_i$ شمارش‌پذیر است ، زیرا اجتماع شمارش‌پذیری از دسته‌های شمارش‌پذیر است ، و $\bigcup A_n$ را می‌پوشاند . بنابراین داریم :

$$m^*(\bigcup A_n) \leq \sum_{n,i} l(I_{n,i}) = \sum_n \sum_i l(I_{n,i}) < \sum_n (m^*A_n + \epsilon 2^{-n})$$
$$= \sum m^*A_n + \epsilon.$$

چون ϵ یک عدد مثبت دلخواه است ، پـــس:

$$m^*(\bigcup A_n) \leq \sum m^*A_n. \blacksquare$$

۳ ــ نتیجـــــه :

اگر A شمارش‌پذیر باشد ، $m^*A = 0$.

۴ ـ نتیجه :

مجموعهٔ [۰ ، ۱] شمارش‌پذیر نیست .

۵ ـ گزاره :

برای هرمجموعهٔ داده‌شدهٔ A و هرعدد $\epsilon > 0$ ، یک‌مجموعهٔ باز O وجود دارد به‌گونه‌ای‌که $A \subset O$ و $m^*O \leq m^*A + \epsilon$ است . یک‌مجموعهٔ $G \in \mathcal{G}_\delta$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $A \subset G$ و $m^*A = m^*G$.

مسئله‌ها

۵ ـ گیریم A نمایش‌مجموعهٔ عددهای‌گویای‌بین ۰و۱ ، و $\{I_n\}$ دستهٔ باپایانی از مجموعه‌های باز است که A را می‌پوشاند . دراین‌صورت $\sum l(I_n) \geq 1$ است .

۶ ـ گزارهٔ ۵ را ثابت کنید .

۷ ـ ثابت‌کنید که m^* نسبت‌به انتقال پایاست .

۸ ـ ثابت کنید که اگر $m^*A = 0$ باشد ، آنگاه $m^*(A \cup B) = m^*B$.

۳ـ مجموعه‌های اندازه پذیر و اندازهٔ لبک

بااین‌که‌اندازهٔ بیرونی برای‌همهٔ مجموعه‌ها تعریف شده‌است ولی جمعی شمارش‌پذیر نیست . هرگاه خانوادهٔ مجموعه‌هایی را که اندازهٔ بیرونی برای آنها تعریف شده است به‌نحو مناسب کاهش دهیم ، این اندازهٔ بیرونی جمعی شمارش‌پذیر خواهد شد . شاید بهترین راه انجام این کار استفاده از تعریف زیر باشد که از کاراتئودوری[1] است :

تعریف :

مجموعهٔ E را اندازه‌پذیر[2] می‌گویند هرگاه برای هرمجموعهٔ A داشته‌باشیم

$$m^*A = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \tilde{E})$$

---

۱ — Caratheodory

۲ـ دنبالهٔ زیرنویس‌درصفحهٔ بعد

چون همواره داریم $m^*A \le m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \tilde{E})$، می‌بینیم E، اندازه‌پذیر است اگر (و تنها اگر) برای هر A داشته باشیم $m^*A \ge m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \tilde{E})$. چون تعریف اندازه‌پذیری نسبت به E و $\tilde{E}$ متقارن است، می‌بینیم که اگر E اندازه‌پذیر باشد $\tilde{E}$ نیز اندازه‌پذیر است. به‌طور آشکار $\varnothing$ و $\mathbf{R}$، مجموعهٔ عددهای حقیقی اندازه‌پذیرند.

۶ــ لـــــم :

اگر $m^*E = 0$ *باشد، آنگاه* E *اندازه‌پذیر است.*

بـرهـــــان :

گیریم A یک مجموعهٔ دلخواه است. دراین‌صورت $A \cap E \subset E$، پـــــس $m^*(A \cap E) \le m^*E = 0$ همچنین $A \supset A \cap \tilde{E}$، پس داریم :

$$m^*A \ge m^*(A \cap \tilde{E}) = m^*(A \cap \tilde{E}) + m^*(A \cap E),$$

بنابراین E اندازه‌پذیر است. ∎

۷ــ لـــــم :

اگر E_1 *و* E_2 *اندازه‌پذیر باشند،* $E_1 \cup E_2$ *نیز اندازه‌پذیر است.*

بـرهـــــان :

گیریم A یک مجموعهٔ دلخواه است. چون E_2 اندازه‌پذیر است، داریم :

$$m^*(A \cap \tilde{E}_1) = m^*(A \cap \tilde{E}_1 \cap E_2) + m^*(A \cap \tilde{E}_1 \cap \tilde{E}_2)$$

(زیرنویس صفحهٔ قبـــل) :

۲ ــ دراین‌حالت m^* اندازهٔ بیرونی لبگ است، و E را اندازه‌پذیر لبگ می‌گوییم. مفهومهای کلی‌تر مجموعه‌های اندازه‌پذیر در فصلهای ۱۱ و ۱۲ درنظرگرفته‌شده‌اند.

وچون $A \cap (E_1 \cup E_2) = [A \cap E_1] \cup [A \cap E_2 \cap \tilde{E}_1]$ پس‌داریم

بنابرایـــن :
$$m^*(A \cap [E_1 \cup E_2]) \leq m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2 \cap \tilde{E}_1)$$

$$\begin{aligned} m^*(A \cap [E_1 \cup E_2]) + m^*(A \cap \tilde{E}_1 \cap \tilde{E}_2) &\leq m^*(A \cap E_1) \\ &+ m^*(A \cap E_2 \cap \tilde{E}_1) + m^*(A \cap \tilde{E}_1 \cap \tilde{E}_2) \\ &= m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap \tilde{E}_1) = m^*A \end{aligned}$$

برابری‌اخیر بنابراندازه‌پذیری E_1 برقرار است . چون $(E_1 \cup E_2)^{\sim} = \tilde{E}_1 \cap \tilde{E}_2$ است ، پـــس نابرابری بالا نشان می‌دهد که $E_1 \cup E_2$ اندازه‌پذیر است.∎

۸ ــ نتیجـــــه :

خانواده‌ٔ $\mathfrak{M}$ مجموعه‌های اندازه‌پذیر یک جبر مجموعه‌هاست .

۹ ــ لـــــم :

گیریم A یک مجموعه‌ٔ دلخواه، و E_1 ، . . . ، E_n یک دنباله‌ٔ باپایان از مجموعه‌های اندازه‌پذیر مجزاست . . دراین‌صورت :

$$m^*\left(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right]\right) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i).$$

بـــرهـــــان :

این‌لم را به‌وسیله‌ٔ‌استقراء روی n ثابت‌می‌کنیم . درستی‌آن‌برای $n = 1$ درست است ، آن‌رابرای $n - 1$ مجموعه‌ٔ E_i درست‌می‌گیریم . چون E_i ها مجموعه‌های‌مجزا هستند ، پس داریـــم :

$$A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right] \cap E_n = A \cap E_n$$

و

$$A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right] \cap \tilde{E}_n = A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right].$$

ازاین‌رو اندازه‌پذیری E_n ایجاب می‌کند که:

$$m^*\left(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right]\right) = m^*(A \cap E_n) + m^*\left(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right]\right)$$
$$= m^*(A \cap E_n) + \sum_{i=1}^{n-1} m^*(A \cap E_i)$$

و بنابرفرض درستی لم برای ۱ ـ n مجموعه، لم ثابت می‌شود ∎

۱۰ ـ قضیـــــه:

دستهٔ مجموعه‌های اندازه‌پذیر، $\mathfrak{M}$، یک σ- جبر است، یعنی مکمل یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر، خود اندازه‌پذیر است، اجتماع (و اشتراک) یک دستهٔ شمارش‌پذیر از مجموعه‌های اندازه‌پذیر نیز اندازه‌پذیر است. به‌علاوه، هر مجموعهٔ با اندازهٔ بیرونی صفر، اندازه‌پذیر است.

برهـــــان:

هم اکنون دیدیم که $\mathfrak{M}$ یک جبر است، پس تنها باید ثابت کنیم که اگر مجموعهٔ E، اجتماع یک دستهٔ شمارش‌پذیر از مجموعه‌های اندازه‌پذیر باشد، E اندازه‌پذیر است. بنابرگزارهٔ ۲۰۱ هر مجموعهٔ نظیر E برابر اجتماع یک دنبالهٔ $\langle E_n \rangle$ از مجموعه‌های دوبه‌دومجزای اندازه‌پذیراست. گیریم A یک مجموعهٔ دلخواه است، وگیریم $F_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$. آنگاه F_n اندازه‌پذیر، و $\tilde{F}_n \supset \tilde{E}$ است. ازاین‌رو:

$$m^*A = m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap \tilde{F}_n) \geq m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap \tilde{E}).$$

بنابر لـــم ۹

$$m^*(A \cap F_n) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i).$$

بنابرایـــن:

$$m^*A \geq \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap \tilde{E}).$$

چون سمت چپ این نابرابری نابسته از n است ، داریم :

$$m^*A \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap \tilde{E})$$

بنابر زیرجمعی شمارش‌پذیربودن m^*

$$\geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \tilde{E}) . \blacksquare$$

۱۱ــ لـــــــم :

فاصلهٔ (a, ∞) *اندازه‌پذیر است*.

برهـــــان :

گیریم A یک مجموعهٔ دلخواه است ، قرارمی‌دهیم $A_1 = A \cap (a, \infty),$ و $A_2 = A \cap (-\infty, a]$ آنگاه باید نشان دهیم که $m^*A_1 + m^*A_2 \leq m^*A$. اگــــر $m^*A = \infty$ باشد آنگاه نابرابری بدیهی است . اگر $m^*A < \infty$ باشد ، آنگاه ، برای $\epsilon > 0$ داده‌شده ، یک دستهٔ شمارش‌پذیر $\{I_n\}$ ازفاصله‌های باز وجود دارد که A را می‌پوشاند ، به‌گونه‌ای که :

$$\sum l(I_n) \leq m^*A + \epsilon$$

گیریم $I'_n = I_n \cap (a, \infty)$ ، و $I''_n = I_n \cap (-\infty, a]$. آنگاه I'_n و I''_n هرکدام یک فاصله (یا تهی) است ، و :

$$l(I_n) = l(I'_n) + l(I''_n) = m^*I'_n + m^*I''_n$$

چــون $A_1 \subset \bigcup I'_n$ ، داریـــم :

$$m^*A_1 \leq m^*(\bigcup I'_n) \leq \sum m^*I'_n$$

و ، چــون $A_2 \subset \bigcup I''_n$ ، داریـــم :

$$m^*A_2 \leq m^*(\bigcup I''_n) \leq \sum m^*I''_n$$

بنابراین

$$m^*A_1 + m^*A_2 \leq \sum (m^*I'_n + m^*I''_n)$$
$$\leq \sum l(I_n) \leq m^*A + \epsilon.$$

ولی ϵ یک عدد مثبت دلخواه است ، پس باید داشته باشیم :

$$m^*A_1 + m^*A_2 \leq m^*A. \blacksquare$$

۱۲ ــ قضیـــه :

هر مجموعهٔ برل اندازه‌پذیر است . به‌ویژه هر مجموعهٔ باز و هر مجموعهٔ بسته اندازه پذیر است .

برهـــان :

چون دستهٔ $\mathfrak{M}$ مجموعه‌های اندازه‌پذیر یک σ ــ جبر است ، پس برای هرعدد حقیقی a ، $(-\infty, a]$ اندازه‌پذیر است زیـــرا $(-\infty, a] = \sim(a, \infty)$. چون $(-\infty, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, b - 1/n]$) ، پس $(-\infty, b)$ اندازه‌پذیراست . ازاین‌رو هرفاصلهٔ باز $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty)$ اندازه‌پذیراست . ولی هرمجموعهٔ باز اجتماع شمارش‌پذیری از فاصله‌های باز است پس باید اندازه‌پذیر باشد . بنابراین $\mathfrak{M}$ ، σ ــ جبری است حاوی مجموعه‌های‌باز ، پس باید حاوی خانوادهٔ $\mathcal{B}$ ی مجموعه‌های برل باشد ، چون $\mathcal{B}$ کوچکترین σ ــ جبر حاوی مجموعه‌های باز است .

یـادداشـــت :

این‌قضیه بی‌درنگ از این‌حقیقت نیز نتیجه می‌شود که $\mathfrak{M}$ ، σ ــ جبری است حاوی هرفاصلهٔ باز به‌شکل (a, ∞) ، و $\mathcal{B}$ کوچکترین σ ــ جبر حاوی‌چنین‌فاصله‌هاست. $\blacksquare$

اگر E یک‌مجموعهٔ اندازه‌پذیرباشد ، mE ، اندازهٔ‌لبـــگ‌آن‌رابرابربااندازهٔ بیرونی‌آن تعریف‌می‌کنیم . بنابراین m تابع مجموعه‌ای‌است که‌ازمقید ساختن‌تابع مجموعهٔ m^* به‌خانوادهٔ $\mathfrak{M}$ ازمجموعه‌های اندازه‌پذیر به‌دست‌می‌آید . دو ویژگی مهم اندازه لبگ در گزارهٔ زیر آمده است .

۱۳ ــ گـــزاره :

گیریم $\langle E_i \rangle$ یک دنباله از مجموعه‌های اندازه‌پذیر است . دراین‌صـورت :

$$m(\bigcup E_i) \leq \sum mE_i.$$

اگر مجموعه‌های E_n دوبه‌دو مجزا باشند، آنگاه:

$$m(\bigcup E_i) = \sum mE_i.$$

برهــــــان:

نابرابری به‌طورساده یک بازگویی زیرجمعی بودن m^* ، بنابرگزارهٔ ۲، است.
اگر $\langle E_i \rangle$ یک‌دنبالهٔ باپایان از مجموعه‌های مجرای اندازه‌پذیر باشد، آنگاه لم ۹ با $A = \mathbf{R}$ ایجاب می‌کند که:

$$m(\bigcup E_i) = \sum mE_i$$

پس m جمعی باپایان‌است. گیریم $\langle E_i \rangle$ یک‌دنبالهٔ بی‌پایان‌ازمجموعه‌های دوبه‌دو مجزای اندازه‌پذیر است. آنگاه:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \supset \bigcup_{i=1}^{n} E_i,$$

پــــس:

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq m\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} mE_i$$

چون سمت چپ این نابرابری نابسته از n است، داریم:

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} mE_i$$

وارون این نابرابری از زیرجمعی شمارش‌پذیر بودن m نتیجه می‌شود، و داریم:

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} mE_i. \blacksquare$$

۱۴ ــ گــــــزاره:

گیریم $\langle E_n \rangle$ یک دنبالهٔ کاهشی بی‌پایان از مجموعه‌های اندازه‌پذیر است، یعنی‌برای‌هر n داریم $E_{n+1} \subset E_n$. گیریم mE_1 باپایان‌است. دراین‌صورت‌داریم:

$$m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} mE_n.$$

برهـــان :

گیریم $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$، و $F_i = E_i \sim E_{i+1}$. آنگاه :

$$E_1 \sim E = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$$

و مجموعه‌های F_i دوبه‌دو مجزا هستند . از این‌رو :

$$m(E_1 \sim E) = \sum_{i=1}^{\infty} mF_i = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i \sim E_{i+1}).$$

ولی $mE_i = mE_{i+1} + m(E_i \sim E_{i+1})$ و $mE_1 = mE + m(E_1 \sim E)$
زیرا $E \subset E_1$ و $E_{i+1} \subset E_i$. ولی چون $mE_i \leq mE_1 < \infty$ است ، داریم :

$$m(E_i \sim E_{i+1}) = mE_i - mE_{i+1} \quad \text{و} \quad m(E_1 \sim E) = mE_1 - mE$$

بنابراین :

$$\begin{aligned} mE_1 - mE &= \sum_{i=1}^{\infty} (mE_i - mE_{i+1}) \\ &= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (mE_i - mE_{i+1}) \\ &= \lim_{n \to \infty} (mE_1 - mE_n) \\ &= mE_1 - \lim_{n \to \infty} mE_n. \end{aligned}$$

چون $mE_1 < \infty$ است ، داریم :

$$mE = \lim_{n \to \infty} mE_n. \blacksquare$$

درگزاره‌ٔ زیر به‌چند روش بیان می‌شود که هر مجموعه‌ٔ اندازه‌پذیر باتقریب زیاد یک مجموعه‌ٔ خوب است . برهان آن به‌خواننده واگذار می‌شود (مسئله ۱۳)

۱۵ ــ گـــزاره:

گیریم E یک مجموعهٔ داده شده است. آنگاه پنج گفتار زیر هم‌ارزند:

i ــ E اندازه‌پذیر است.

ii ــ برای هر عدد داده شدهٔ $\epsilon > 0$، یک مجموعهٔ باز $O \supset E$ وجود دارد با $m^*(O \sim E) < \epsilon$.

iii ــ برای‌هرعدد داده‌شدهٔ $\epsilon > 0$ یک مجموعهٔ بستهٔ $F \subset E$ وجود دارد با $m^*(E \sim F) < \epsilon$.

iv ــ در $\mathcal{G}_\delta$ یک مجموعهٔ G وجود دارد با $E \subset G$ و $m^*(G \sim E) = 0$

v ــ در $\mathcal{F}_\sigma$ یک مجموعهٔ F وجود دارد با $F \subset E$ و $m^*(E \sim F) = 0$.

اگر m^*E باپایان باشد، گفتارهای بالا هم‌ارزند با:

vi ــ برای هرعدد داده‌شدهٔ $\epsilon > 0$، یک‌اجتماع باپایان U از فاصله‌های باز وجود دارد به‌گونه‌ای که $m^*(U \triangle E) < \epsilon$ است.

مسئلـــــه‌هـا

۹ ــ نشان دهید که اگر مجموعهٔ E اندازه‌پذیرباشد، آنگاه هر انتقال $E + y$ از E نیز اندازه‌پذیر است.

۱۰ ــ نشان دهید که اگر E_1 و E_2 اندازه‌پذیر باشند، آنگاه داریم:

$$m(E_1 \cup E_2) + m(E_1 \cap E_2) = mE_1 + mE_2$$

۱۱ ــ یک‌دنبالهٔ‌کاهشی $\langle E_n \rangle$ ازمجموعه‌های‌اندازه‌پذیرمثال‌بزنید به‌گونه‌ای که $\bigcap E_n = \varnothing$ بوده و برای هر n، $mE_n = \infty$ باشد و بااستفاده از آن نشان‌دهید که در گزارهٔ ۱۴ شرط $mE_1 < \infty$ لازم است.

۱۲ ــ گیریم $\langle E_i \rangle$ یک‌دنباله‌ازمجموعه‌های‌مجزای‌اندازه‌پذیرو A یک‌مجموعهٔ دلخواه است، دراین‌صورت‌داریم:

$$m^*(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap E_i)$$

۱۳ ــ گزارهٔ ۱۵ را ثابت کنید. **راهنمایی:**

الف ــ نشان‌دهیدکه‌برای $m^*E < \infty$، $(i) \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (vi)$ (گزارهٔ ۵ را ببینیـــد).

ب ــ بااستفاده از (الــف) نشان دهید که برای هر مجموعــهٔ دلخـــواه E، $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)$.

پ ــ بااستفاده از (ب) نشان دهید [$(i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (v) \Rightarrow (i)$].

۱۴ ــ الف ــ نشان دهید که مجموعهٔ سه‌سه‌ای کانتور (مسئله ۲ . ۳۶) دارای اندازهٔ صفر است .

ب ــ گیریم F زیرمجموعه‌ای از [۰ ، ۱] به‌همان روش مجموعهٔ کانتور ساخته‌شده به‌جز این‌که هریک از فاصله‌هایی که در گام n ام حذف می‌شود دارای طول $\alpha 3^{-n}$ ($0 < \alpha < 1$) می‌باشد . دراین‌صورت F یک مجموعهٔ بسته است ، $\tilde{F}$ در [۰ ۱] متراکم است و $mF = 1 - \alpha$ است . هرمجموعهٔ نظیر F رایک مجموعهٔ **تعمیم‌یافتهٔ کانتور** می‌نامند .

*۴ ــ یک مجموعهٔ اندازه‌ناپذیر

می‌خواهیم وجود یک مجموعهٔ اندازه‌ناپذیر را نشان دهیم . اگر x و y دوعدد حقیقی از فاصلهٔ (۱ ، ۰] باشند ، **مجموع به‌پیمانهٔ ۱** دوعدد x و y را بنابه‌تعریف برابر می‌گیریم با $x + y$ اگر $x + y < 1$ و $x + y - 1$ اگر $x + y \geq 1$ باشد . مجموع به‌پیمانهٔ ۱ دوعدد x و y را با $x \overset{\circ}{+} y$ نشان می‌دهیم . دراین‌صورت $\overset{\circ}{+}$ یک عمل جابه‌جایی و شرکت‌پذیر است که به‌یک جفت عدد از فاصلهٔ (۱ ، ۰] یک عدد از فاصلهٔ (۱ ، ۰] را مربوط می‌کند . اگر به‌هر (۱ ، ۰] $x \in$ زاویهٔ $2\pi x$ را مربوط کنیم . آنگاه ، مجموع به پیمانهٔ ۱ مربوط می‌شود به‌مجموع زاویه‌ها . اگر E زیرمجموعه‌ای از (۱ ، ۰] باشد ، انتقال به‌پیمانهٔ ۱ مجموعهٔ E را چنین تعریف می‌کنیم : $E \overset{\circ}{+} y = \{z : z = x \overset{\circ}{+} y ,\ x \in E$ برای هرمقدار $\}$ اگرمجموع به‌پیمانهٔ ۱ را همانند مجموع زاویه‌ها در نظربگیریم ، انتقال به‌پیمانهٔ ۱ به‌اندازهٔ y ، مربوط می‌شود به دورانی به اندازهٔ زاویه $2\pi y$. لم زیر نشان می‌دهد که اندازهٔ لبگ نسبت به انتقال به پیمانهٔ ۱ پایاست .

۱۶ ــ لــــم :

گیریم (۱ ، ۰] $E \subset$ یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر است . دراین‌صورت برای هر (۱ ، ۰] $y \in$ مجموعهٔ $E \overset{\circ}{+} y$ اندازه‌پذیر است و داریم $m(E \overset{\circ}{+} y) = mE$.

برهان:

گیریم $E_1 = E \cap [0, 1 - y)$ و $E_2 = E \cap [1 - y, 1)$ دراین‌صورت E_1 و E_2، دومجموعهٔ مجزای اندازه‌پذیرند که اجتماعشان برابر E است، پس:

$$mE = mE_1 + mE_2.$$

اکنون داریم $E_1 \dot{+} y = E_1 + y$ پس $E_1 \dot{+} y$ اندازه‌پذیراست وداریم $m(E_1 \dot{+} y) = mE_1$، زیرا m نسبت به‌انتقال پایاست. همچنین $E_2 \dot{+} y = E_2 + (y - 1)$ پس $E_2 \dot{+} y$ اندازه‌پذیر است و داریم: $m(E_2 \dot{+} y) = mE_2$. ولی $E \dot{+} y = (E_1 \dot{+} y) \cup (E_2 \dot{+} y)$ و مجموعه‌های $(E_1 \dot{+} y)$ و $(E_2 \dot{+} y)$ مجموعه‌های مجزای اندازه‌پذیرند. ازاین‌رو $E \dot{+} y$ اندازه‌پذیر است و داریم:

$$\begin{aligned} m(E \dot{+} y) &= m(E_1 \dot{+} y) + m(E_2 \dot{+} y) \\ &= mE_1 + mE_2 \\ &= mE. \blacksquare \end{aligned}$$

اکنون در وضعی هستیم که‌می‌توانیم یک مجموعهٔ اندازه‌ناپذیر را تعریف کنیم. اگر $x - y$ یک‌عددگویاباشد، می‌گوییم x و y هم‌ارزندومی‌نویسیم $x \sim y$. این رابطه یک رابطهٔ هم‌ارزی است، از این‌رو $[0, 1)$ را به‌رده‌های هم‌ارزی بخش می‌کند، یعنی رده‌هایی‌که تفاضل‌دوعنصر از یک‌رده، یک‌عدد گویاست، ولی تفاضل دوعنصر از دوردهٔ متفاوت یک‌عدد گنگ است. بنابراصل موضوع انتخاب یک مجموعهٔ P وجود دارد که از هر ردهٔ هم‌ارزی درست یک عنصر را دربردارد. گیریم $\langle r_i\rangle_{i=0}^{\infty}$ یک شماره‌گذاری عددهای‌گویای $[0, 1)$ است‌با $r_0 = 0$، و بنابرتعریف می‌نویسیم $P_i = P \dot{+} r_i$. دراین‌صورت $P_0 = P$ است. گیریم $x \varepsilon P_i \cap P_j$. آنگاه $x = p_i + r_i = p_j + r_j$ که در آن p_i و p_j به P تعلق‌دارند. ولی $p_i - p_j = r_j - r_i$ یک‌عددگویاست، بنابراین $p_i \sim p_j$ است. چون p ازهررده تنها یک‌عنصر دارد، باید داشته‌باشیم $i = j$. از این‌جا نتیجه می‌شود که اگر $i \neq j$ باشد، آنگاه $P_i \cap P_j = \varnothing$، یعنی، $\langle P_i\rangle$ یک‌دنباله ار مجموعه‌های دوبه‌دو مجزاست. از سوی‌دیگر، هر عدد حقیقی x، متعلق‌به $[0, 1)$ در یکی از رده‌های هم‌ارزی است، پس هم‌ارز یکی از عناصر P است. ولی‌اگرتفاضل x بایکی‌ازعناصر P عددگویای r_i باشد، آنگاه $x \varepsilon P_i$ است، بنابراین $\bigcup P_i = [0, 1)$. چون هر P_i یک انتقال به‌پیمانهٔ ۱ مجموعهٔ P است، اگر P، اندازه‌پذیر باشد، هریک‌از P_i ها اندازه‌پذیر خواهند بود و اندازهٔ آنها برابر

اندازهٔ P خواهد بود. ولی اگر چنین باشد، داریم:

$$m[0, 1) = \sum_{i=1}^{\infty} mP_i = \sum_{i=1}^{\infty} mP$$

عبارت سمت راست یا صفر است یا بینهایت، بسته به این که mP صفر یا یک عدد مثبت باشد، ولی این ناممکن است، زیرا $m[0, 1) = 1$، درنتیجه P نمی‌تواند اندازه‌پذیر باشد.

دربرهان بالا اندازه‌ناپذیربودن P به‌وسیلهٔ تناقض انجام شد، باید توجه‌داشت که (تاجملهٔ آخر) از ویژگیهای اندازهٔ لبگ به‌جز پایایی آن دربرابر انتقال و جمعی شمارش‌پذیربودن آن، هیچ‌گونه استفاده‌ای نکردیم. ازاین‌رو استدلال بالا برهان سرراستی برای قضیهٔ زیر است.

۱۷ ــ قضیــــه:

اگر m یک اندازهٔ جمعی شمارش پذیرودربرابرانتقال پایاباشدکه روی هر σ ــ جبر حاوی مجموعهٔ P تعریف شده است، آنگاه $m[0, 1)$ یا صفر است یا بینهایت.

اندازه‌ناپذیربودن P نسبت به هراندازهٔ m که نسبت به انتقال پایا بوده و جمعی شمارش‌پذیر است و برای آن $m[0, 1)$ برابر ۱ می‌باشد، ازعکس نقیض نتیجه می‌شود.

مسئلــــه‌ها

۱۵ ــ نشان دهید که اگر E اندازه‌پذیر و $E \subset P$ باشد، آنگاه $mE = 0$ است.
[**راهنمایی**: گیریم $E_i = E \dotplus r_i$، آنگاه $\langle E_i \rangle$ یک دنباله از مجموعه‌های اندازه‌پذیر است و داریم $mE_i = mE$. بنابراین $\sum mE_i = m \bigcup E_i \leq m[0, 1)$].

۱۶ ــ نشان دهید، که اگر A یک مجموعهٔ دلخواه باشد با $m^*A > 0$، آنگاه یک مجموعهٔ اندازه‌ناپذیر $E \subset A$ وجوددارد. [**راهنمایی**: اگر $A \subset (0, 1)$، می‌گیریم $E_i = A \cap P_i$. اندازه‌پذیری E_i ایجاب می‌کند که $mE_i = 0$، درحالی که $\sum m^*E_i \geq m^*A > 0$].

۱۷ ــ (الف) ــ مثالی بیاورید که درآن $\langle E_i \rangle$ یک دنباله از مجموعه‌های مجزا باشد و داشته‌باشیم $m^*(\bigcup E_i) < \sum m^*E_i$.

(ب) ــ مثالی از یک دنبالهٔ $\langle E_i \rangle$ از مجموعه‌ها بیاورید با $E_i \supset E_{i+1}$ و $m^*E_i < \infty$ و $m^*(\bigcap E_i) < \lim m^*E_i$.

۵ ــ تابعهای اندازه‌پذیر

چون همهٔ مجموعه‌ها اندازه‌پذیر نیستند ، شناختن مجموعه‌های اندازه‌پذیری که در برخی ساختمانها به‌طور طبیعی به‌وجود می‌آیند ، دارای اهمیت زیاد است ، اگر با یک تابع f شروع کنیم ، مهمترین مجموعه‌هایی که از آن ناشی می‌شوند ، در گزارهٔ زیر درج شده‌اند .

۱۸ ــ گزاره :

گیریم f یک تابع با مقدارهای حقیقی گسترش‌یافته و با دامنهٔ تعریف اندازه‌پذیر است . در این صورت حکمهای زیر هم‌ارزند :

i ــ *برای هر عدد حقیقی α مجموعهٔ $\{x: f(x) > \alpha\}$ اندازه‌پذیر است .*

ii ــ *برای هر عدد حقیقی α مجموعهٔ $\{x: f(x) \geq \alpha\}$ اندازه‌پذیر است .*

iii ــ *برای هر عدد حقیقی α مجموعهٔ $\{x: f(x) < \alpha\}$ اندازه‌پذیر است .*

iv ــ *برای هر عدد حقیقی α مجموعهٔ $\{x: f(x) \leq \alpha\}$ اندازه‌پذیر است .*

از این حکمها نتیجه می‌شود :

v ــ *برای هر عدد حقیقی گسترش‌یافتهٔ α مجموعهٔ $\{x: f(x) = \alpha\}$ اندازه‌پذیر است*

برهان :

گیریم D دامنهٔ f است . داریم $(i) \Rightarrow (iv)$ ، زیرا :
$\{x: f(x) \leq \alpha\} = D \sim \{x: f(x) > \alpha\}$ و تفاضل دو مجموعهٔ اندازه‌پذیر یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر است . به‌روش مشابه ، $(iv) \Rightarrow (i)$ و $(ii) \Leftrightarrow (iii)$
اکنون داریم : $(i) \Rightarrow (ii)$ ، زیرا :
$\{x: f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x: f(x) > \alpha - 1/n\}$ ، و اشتراک هر دنباله از مجموعه‌های اندازه‌پذیر، خود اندازه‌پذیر است . به‌همین روش ،
$(ii) \Rightarrow (i)$ ، زیرا $\{x: f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x: f(x) \geq \alpha + 1/n\}$

واجتماع یک‌دنباله از مجموعه‌های اندازه‌پذیر، یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر است . این نشان می‌دهد که چهار بیان نخست هم‌ارزند . اگر α یک عدد حقیقی باشد ، داریم :
$(iv) \Rightarrow (ii)$ پس از $\{x: f(x) = \alpha\} = \{x: f(x) \geq \alpha\} \cap \{x: f(x) \leq \alpha\}$ برای عدد حقیقی α ، (v) نتیجه می‌شود . چون :

$$\{x: f(x) = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x: f(x) \geq n\}$$

پس (v) برای $\alpha = \infty$ از (ii) نتیجه‌می‌شود (v) . به‌همین‌ترتیب برای $\alpha = -\infty$ ، $(iv) \Rightarrow (v)$ و داریم $(ii) \,\&\, (iv) \Rightarrow (v)$. ▮

تعـــریـــــف :

هر تابع بامقدارهای حقیقی گسترش‌یافتهٔ f اندازه‌پذیر (لبگ) گفته می‌شود اگر دامنهٔ آن اندازه‌پذیر بوده و یکی از چهار حکم نخست گزارهٔ ۱۸ را برآورد .

بنابراین اگر خودرا به‌تابعهای اندازه‌پذیر مقید کنیم ، مهمترین مجموعه‌های مربوط به‌آنها اندازه‌پذیرند ، باید توجه‌داشت که هرتابع پیوسته (بادامنهٔ‌اندازه‌پذیر) اندازه پذیر است ، البته هر تابع پله‌ای اندازه‌پذیر است . اگر f یک‌تابع اندازه‌پذیر و E زیرمجموعهٔ‌اندازه‌پذیری از دامنهٔ‌آن باشد ، آنگاه تابعی‌که از قید f به E به‌دست می‌آید ، نیز اندازه‌پذیر است . گزارهٔ زیر نشان می‌دهد که نتیجهٔ بعضی عملیات روی تابعهای اندازه‌پذیر ، یک تابع اندازه‌پذیر است :

۱۹ ــ گـــــزاره :

گیریم c یک‌ثابت و f و g دوتابع اندازه‌پذیر بامقدارهای حقیقی هستند ، که روی یک‌دامنهٔ مشترک تعریف شده‌اند . آنگاه تابعهای $f + c$ ، cf ، $f + g$ ، $g - f$ و fg نیز اندازه‌پذیرند .

بـــرهـــــان :

از شرط (iii) ی گزارهٔ ۱۸ استفاده می‌کنیم . آنگاه داریم :

$$\{x: f(x) + c < \alpha\} = \{x: f(x) < \alpha - c\}$$

پس هرگاه f اندازه‌پذیر باشد $c + f$ نیز اندازه‌پذیر است. استدلال مشابهی نشان می‌دهد که cf نیز اندازه‌پذیر است.

اگر $f(x) + g(x) < \alpha$ ، آنگاه $f(x) < \alpha - g(x)$ و بنابرنتیجهٔ اصل ارشمیدس یک عدد گویای r وجود دارد به‌گونه‌ای که:

$$f(x) < r < \alpha - g(x)$$

ازاین‌رو:

$$\{x: f(x) + g(x) < \alpha\} = \bigcup_r (\{x: f(x) < r\} \cap \{x: g(x) < \alpha - r\})$$

چون عددهای گویا شمارش‌پذیرند، این مجموعه اندازه‌پذیر است، پس $f + g$ اندازه‌پذیر است. چون وقتی g اندازه‌پذیر است تابع $-g = (-1)g$ اندازه‌پذیر است، پس $f - g$ نیز اندازه‌پذیر است.

تابع f^2 اندازه‌پذیر است، زیرا برای $\alpha \geq 0$ داریم:

$$\{x: f^2(x) > \alpha\} = \{x: f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x: f(x) < -\sqrt{\alpha}\}$$

و برای $\alpha < 0$ ،

$$\{x: f^2(x) > \alpha\} = D$$

که در آن D دامنهٔ f است. بنابراین:

$$fg = \tfrac{1}{2}[(f + g)^2 - f^2 - g^2]$$

اندازه‌پذیر است.∎

اغلب مایل خواهیم بود که گزارهٔ ۱۹ را درمورد تابعهای بامقدارهای حقیقی گسترش‌یافته به‌کاربریم. متاسفانه $f + g$ درنقاطی که به‌شکل $\infty - \infty$ است تعریف نشده است. باوجوداین fg همواره اندازه‌پذیر است و اگر مقدار $f + g$ را درنقاطی که تعریف نشده است همانند بگیریم $f + g$ نیز اندازه‌پذیر خواهدبود. همچنین، اگر مجموعهٔ نقاطی را که در آنها $f + g$ تعریف نشده است، دارای اندازه صفر باشد، باز $f + g$ اندازه‌پذیر است. مسئله ۲۲ را ببینید.

۲۰ ـ قضیه:

گیریم $\langle f_n \rangle$ یک‌دنباله از تابعهای اندازه‌پذیر است (که دامنهٔ تعریف آنها یکی است). آنگاه تابعهای $\sup\{f_1, \ldots, f_n\}$ ، $\inf\{f_1, \ldots, f_n\}$ ، $\sup_n f_n$ ، $\inf_n f_n$ ، $\overline{\lim} f_n$ ، و $\underline{\lim} f_n$ همه اندازه‌پذیرند.

برهــــان :

اگر h را با $h(x) = \sup\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ تعریف کنیم ، آنگاه‌داریم

$\{x: h(x) > \alpha\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{x: f_i(x) > \alpha\}$. ازایـن‌رو انـدازه‌پذیـری f_i هـا

اندازه‌پذیری h را ایجاب می‌کند . به‌روش مشابه اگر g را با $g(x) = \sup f_n(x)$ تعریف‌کنیم ،آنگاه‌داریم $\{x: g(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x: f_n(x) > \alpha\}$ ، پـــس g ، اندازه‌پذیر است . استدلال مشابهی بیان‌های متناظر را برای inf ثابت می‌کنـد . چون $\overline{\lim} f_n = \inf_n \sup_{k \geq n} f_k$ ، پس $\overline{\lim} f_n$ ، به‌همان‌روش $\underline{\lim} f_n$ ، اندازه‌پذیر است ∎

می‌گویند خاصیتی تقـریبـا "همـه‌جـا"[1] (به‌اختصار ت . ه .) برقرار است ، اگر مجموعهٔ‌نقاطی که این‌خاصیت درآن برقرار نیست یک مجموعهٔ بااندازهٔ صفر باشد . بنابراین به‌ویژه می‌گوییم $f = g$ ت . ه . اگر f و g دارای یک دامنهٔ تعریف باشنـد و $m\{x: f(x) \neq g(x)\} = 0$. به‌همان‌گونه ، می‌گوییم f_n تقریبا "همه‌جا به g می‌گراید اگر یک‌مجموعهٔ E بااندازهٔ صفر وجود داشته باشد به‌گونه‌ای‌که $f_n(x)$ برای‌هرمقدار که به E تعلق ندارد به $g(x)$ بگراید . یک نتیجهٔ برابری ت . ه . چنین‌است :

۲۱ ـ گـــزاره :

اگر f یک تابع اندازه‌پذیر و $f = g$ ت . ه . ، آنگاه g اندازه‌پذیر است .

برهــــان :

مجموعهٔ $\{x: f(x) \neq g(x)\}$ را E می‌نامیم . بنابه‌فرض $mE = 0$ اکنـون می‌توان نوشت :

$$\{x: g(x) > \alpha\} = \{x: f(x) > \alpha\} \cup \{x \in E: g(x) > \alpha\} \sim \{x \in E: g(x) \leq \alpha\}.$$

---

1 — Almost every where

نخستین مجموعهٔ سمت راست اندازه‌پذیر است ، زیرا تابع f اندازه‌پذیر است . دومجموعهٔ آخرسمت‌راست‌اندازه‌پذیرند زیرا زیرمجموعه‌های‌مجموعهٔ E هستند با $mE = 0$. بنابراین $\{x: g(x) > \alpha\}$ برای‌هر α اندازه‌پذیراست ، پس g اندازه‌پذیر است.∎

درگزارهٔ زیر گفته‌می‌شود که‌یک‌تابع اندازه‌پذیر " تقریبا " "یک‌تابع پیوسته‌است . برهان آن به‌خواننده واگذار شده است (مسئله ۲۳ را ببینید) .

۲۲ ــ گــــزاره :

گیریم f یک تابع اندازه‌پذیر است که روی $[a, b]$ تعریف شده است ، و فرض کنیم که f مقدارهای $\pm\infty$ را تنها روی یک مجموعهٔ باندازهٔ صفر می‌گیرد . آنگاه برای هرعدد $\epsilon > 0$ ، می‌توان‌یک‌تابع پله‌ای g ویک‌تابع پیوستهٔ h یافت به‌گونه‌ای‌که‌نابرابریهای

$$|f - g| < \epsilon \quad \text{و} \quad |f - h| < \epsilon$$

به‌جز روی یک مجموعهٔ باندازهٔ کوچکتر از ϵ ، برقرار باشند ، یعنی :

$$m\{x: |f(x) - h(x)| \geq \epsilon\} < \epsilon \quad \text{و} \quad m\{x: |f(x) - g(x)| \geq \epsilon\} < \epsilon$$

به‌علاوه ، اگر $m \leq f \leq M$ آنگاه می‌توان تابعهای g و h را به‌گونه‌ای برگزید که $m \leq g \leq M$ و $m \leq h \leq M$.

اگر A یک مجموعهٔ دلخواه باشد ، χ_A ، **تابع مشخص**[1] مجموعهٔ A ، به‌شکل زیر تعریف می‌شود :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \quad \text{اگر} \\ 0 & x \notin A \quad \text{اگر} \end{cases}$$

برای‌اندازه‌پذیری‌تابع χ_A لازم و کافی است که A اندازه‌پذیر باشد . بنابراین از وجود یک مجموعهٔ اندازه‌ناپذیر ، وجود یک تابع اندازه ناپذیـرنتیجه می‌شود .

تابع بامقدارهای‌حقیقی φ را **ســاده**[2] می‌گویند اگر اندازه‌پذیربوده‌وشمارهٔ مقدارهایی‌راکه‌می‌گیردباپایان‌باشد . اگر φ ساده‌باشدومقدارهای $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ را بگیرد آنگاه $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ ، که درآن $A_i = \{x: \varphi(x) = \alpha_i\}$ ، است . مجموع ، حاصلضرب ، تفاضل دوتابع ساده باز یک تابع ساده است .

---

۱ ـ Characteristic function

۲ ـ Simple

مسئله‌ها

۱۸ــ باساختن یک‌تابع f به‌گونه‌ای‌که $E = \{x: f(x) > 0\}$ مجموعه‌ٔ اندازه‌ناپذیر داده‌شده‌ای باشد و f هرمقدار را حداکثر یکبار بگیرد، نشان دهید که در گزاره‌ٔ ۱۸ از (v) گفتار (iv) نتیجه نمی‌شود.

۱۹ ــ گیریم D یک‌مجموعهٔ متراکم از اعداد حقیقی است، یعنی، یک مجموعهٔ اعداد حقیقی است به‌گونه‌ای که هر فاصله حاوی یک عنصر D است. گیریم f یک تابع بامقدارهای حقیقی گسترش‌یافته روی $\mathbf{R}$ است به‌گونه‌ای که برای هر $\alpha \varepsilon D$ مجموعهٔ $\{x: f(x) > \alpha\}$ اندازه‌پذیر باشد. آنگاه f اندازه‌پذیر است.

۲۰ ــ نشان دهید که مجموع و حاصلضرب دوتابع ساده تابعهای ساده‌اند. نشان دهید:

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$$
$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$$
$$\chi_{\tilde{A}} = 1 - \chi_A.$$

۲۱ــ الف ــ گیریم D و E مجموعه‌های اندازه‌پذیر و f تابعی بادامنهٔ $D \cup E$، است. نشان دهیدکه برای اندازه‌پذیربودن f لازم وکافی است که تحدیدهای آن به D و E، اندازه‌پذیر باشند.

ب ــ گیریم f تابعی است بادامنهٔ اندازه‌پذیر D. نشان دهیدکه f اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر تابع g که برای $x \varepsilon D$ با $g(x) = f(x)$ و برای $x \not\varepsilon D$ با $g(x) = 0$ تعریف می‌شود، اندازه‌پذیر باشد.

۲۲ ــ الف ــ گیریم f تابعی است بامقدارهای حقیقی گسترش‌یافته با دامنهٔ اندازه‌پذیر D، و $D_1 = \{x: f(x) = \infty\}$ $D_2 = \{x: f(x) = -\infty\}$. آنگاه f، اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر D_1 و D_2 اندازه‌پذیر باشند وتحدید f به $D \sim (D_1 \cup D_2)$ اندازه‌پذیر باشد.

ب ــ ثابت‌کنیدکه حاصلضرب دوتابع اندازه‌پذیر بامقدارهای حقیقی گسترش‌یافته یک تابع اندازه‌پذیر است.

پ ــ اگر f و g دوتابع اندازه‌پذیر بامقدارهای حقیقی گسترش‌یافته بوده و α یک عدد ثابت باشد، آنگاه $f + g$ اندازه‌پذیر است اگر $f + g$ را هنگامی که به‌شکل $\infty - \infty$ یا $-\infty + \infty$ است برابر α تعریف کنیم.

ت ـ گیریم f و g تابعهای اندازه‌پذیر بامقدارهای حقیقی گسترش‌یافته هستند که تقریبا " همه‌جا باپایانند. آنگاه $f + g$ ، بدون‌توجه به‌چگونگی تعریف‌آن در نقاطی که به‌شکل$\infty - \infty$ است، اندازه‌پذیر می‌باشد.

۲۳ ـ گزاره ۲۲ را بااثبات لم‌های زیر ثابت کنید:

الف ـ روی $[a, b]$ تابعی تعریف کنید که‌مقدارهای $\pm\infty$ را تنهاروی‌مجموعه‌ای بااندازه صفربگیرد و برای‌هر $\epsilon > 0$ داده‌شده، یک‌عدد M وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که به‌جز روی مجموعه‌ای بااندازه کوچکتر از $\epsilon/3$ داشته باشیم $|f| \leq M$

ب ـ گیریم f روی $[a, b]$ یک‌تابع اندازه‌پذیراست. برای‌هر $\epsilon > 0$و M داده شده، یک‌تابع ساده φ وجود دارد به‌گونه‌ای که به‌جز جایی‌که‌درآن $|f(x)| \geq M$ است، داشته‌باشیم $|f(x) - \varphi(x)| < \epsilon$. اگر $m \leq f \leq M$ ، آنگاه‌می‌توانیم φ را چنان بگیریم که $m \leq \varphi \leq M$ باشد.

پ ـ برای هر تابع ساده φ روی $[a, b]$ ، یک تابع پله‌ای g روی $[a, b]$ وجود دارد به‌گونه‌ای که به‌جز روی مجموعه‌ای بااندازه کوچکتر از $\epsilon/3$ داریم:

$$g(x) = \varphi(x)$$

[**راهنمایی**: از گزاره ۱۵ استفاده کنید.] اگر$m \leq \varphi \leq M$آنگاه می‌توان g را چنان گرفت که$m \leq g \leq M$باشد.

ت ـ تابع پله‌ای g روی $[a, b]$ داده‌شده‌است، یک تابع پیوسته h وجوددارد که به‌جز روی مجموعه‌ای بااندازه کوچکتراز $\epsilon/3$ داریم $g(x) = h(x)$. اگر $m \leq g \leq M$، آنگاه h را می‌توان چنان گرفت که $m \leq h \leq M$

۲۴ـ گیریم f اندازه‌پذیرو B یک‌مجموعه برل‌است. آنگاه $f^{-1}[B]$ اندازه‌پذیر است. [**راهنمایی**: رده مجموعه‌هایی که برای آنها $f^{-1}[E]$ اندازه‌پذیر است یک σ ـ جبر است.]

۲۵ ـ نشان‌دهیدکه‌اگر f یک تابع اندازه‌پذیر بامقدارهای حقیقی و g یک تابع پیوسته باشد که روی $(-\infty, \infty)$ تعریف شده است، آنگاه $g \circ f$ اندازه‌پذیر است.

۲۶ ـ اندازه‌پذیری برل

می‌گویند تابع f اندازه‌پذیربرل‌است‌اگربرای‌هر α مجموعه $\{x: f(x) > \alpha\}$ ، یک‌مجموعه برل‌باشد. نشان‌دهید که‌اگر عبارت‌های " مجموعه‌برل " و "اندازه‌پذیر برل" را در گزاره‌های ۱۸ و ۱۹ و قضیه ۲۰ به‌ترتیب به‌جای " مجموعه اندازه‌پذیر " و "اندازه‌پذیر (لبگ) "بگذاریم این‌گزاره‌ها و قضیه بازهم معتبرند. هرتابع اندازه‌پذیربرل، اندازه‌پذیر لبگ است. اگر f یک تابع اندازه‌پذیر برل، و B یک مجموعه برل باشد،

آنگاه $f^{-1}[B]$ یک مجموعهٔ برل است. اگر f و g اندازه‌پذیر برل باشند. $f \circ g$ نیز اندازه‌پذیر برل است. اگر f اندازه‌پذیر برل و g اندازه‌پذیر لبگ باشد آنگاه $f \circ g$، اندازه‌پذیر لبگ است.

۲۷ ــ اگر در مسئلهٔ پیش رده $\mathfrak{B}$ از مجموعه‌های برل را با یک σ ــ جبر دلخواه $\mathfrak{A}$ از مجموعه‌ها جانشین کنیم، چه‌مقدار از احکام آن برقرارند.

۲۸ ــ گیریم f_1 تابع سه‌سه‌ای‌کانتور است (مسئله ۲، ۴۶ را ببینید)، و تابع f را چنین تعریف می‌کنیم $f(x) = f_1(x) + x$.

الف ــ نشان دهید که f یک همئومرفیسم از $[0, 1]$ روی $[0, 2]$ است.

ب ــ نشان‌دهیدکه f مجموعهٔ‌کانتور را روی‌یک‌مجموعهٔ F به‌اندازهٔ ۱ می‌نگارد.

پ ــ می‌گیریم $g = f^{-1}$. نشان‌دهیدکه یک مجموعهٔ‌اندازه‌پذیر A وجوددارد به‌گونه‌ای که $g^{-1}[A]$ اندازه‌پذیر نیست.

ت ــ مثالی‌ازیک‌تابع پیوستهٔ g و یک تابع اندازه‌پذیر h بیاورید به‌گونه‌ای که $h \circ g$ اندازه‌پذیر نباشد. بامسئله‌های ۲۵ و ۲۶ مقایسه کنید.

ث ــ نشان‌دهیدکه‌یک‌مجموعهٔ‌اندازه‌پذیر وجود دارد که‌یک‌مجموعهٔ‌برل‌نیست.

۶ ــ سه اصل لیتلوود :

هنگام گفتگو دربارهٔ نظریهٔ تابعهای یک متغیر حقیقی ، جی . ای . لیتلوود[1] ، چنین اظهارنظر می‌کند[2] . " وسعت دانایی موردنیاز ، آن‌قدر نیست که گاهی تصور می شود . سه اصل وجود دارد ، که تقریبا " باعبارتهای زیر قابل‌بیانند : هر مجموعهٔ (اندازه‌پذیر) تقریبا " اجتماع باپایانی از فاصله‌هاست . هرتابع (اندازه‌پذیر) تقریبا " پیوسته است ، هر دنبالهٔ همگرا از تابعهای (اندازه‌پذیر) تقریبا " همگرای یکنواخت است . بسیاری‌از نتیجه‌های (نظریه) ، کاربردهای نسبتا " شهودی این اندیشه‌ها هستند ، و دانشجویانی که با آنها مجهزند ، باید ازعهدهٔ اغلب مواردی‌که بانظریهٔ متغیر حقیقی روبرو هستیم ، برآیند . اگر یکی‌ازاین‌اصول‌وسیلهٔ روشنی‌برای‌اثبات مسئله‌ای باشد که " کاملا " " درست است ، به‌طورطبیعی این‌سئوال پیش‌می‌آید که‌آیا (تقریب) به‌قدرکافی خوب است . و برای مسئله‌ای که واقعا " حل‌شدنی است درحالت‌کلی چنین‌است " .

پیش از این ، دوتا ازاصل‌های‌لیتلوود را دیده‌ایم : شکل‌های‌گوناگون‌اصل‌نخست در گزارهٔ ۱۵ داده شده است . یک شکل اصل دوم به‌وسیلهٔ گزارهٔ ۲۲ ، شکل دیگر آن به‌وسیلهٔ مسئلهٔ ۳۱ ، و سومی به‌وسیلهٔ مسئله ۴ . ۱۵ و ۶ . ۱۶ داده شده است . درگزارهٔ زیر یک شکل از اصل‌سوم داده‌می‌شود . یک‌شکل اندکی پرتوان‌تر به‌وسیلهٔ قضیهٔ‌اگوروف[3] (مسئله ۳۰) داده شده است ، ولی عموما " شکل کم‌توان آن کافی خواهد بود .

۲۳ ــ گزاره :

گیریم E مجموعه‌ای اندازه‌پذیر با اندازهٔ باپایان ، و $\langle f_n \rangle$ یک دنباله‌از تابعهای اندازه‌پذیر است که روی E تعریف شده‌اند . گیریم f یک تابع اندازه‌پذیر با مقدارهای حقیقی است به‌گونه‌ای‌که‌برای‌هر x متعلق‌به E داریم : $f_n(x) \to f(x)$ ، دراین‌صورت برای هر دو عدد داده شدهٔ $0 < \epsilon$ و $0 < \delta$ ، یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر $A \subset E$ با $mA < \delta$ ، و یک عدد درست N وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر $x \notin A$ و

---

۱ — Littlewood

۲ — Lectures on the theory of functions,oxford,1944,P.26

۳ — Egoroff's theorem

و هر عدد $n \geq N$ داریم:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

برهان:

گیریم:

$$G_n = \{x \varepsilon E: |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$$

و قرار می‌دهیم:

$$E_N = \bigcup_{n=N}^{\infty} G_n = \{x \varepsilon E: |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon \text{ برای یک مقدار } n \text{ ، } n \geq N\}$$

داریم $E_{N+1} \subset E_N$ ، و برای هر $x \varepsilon E$ باید یک مجموعهٔ E_N وجود داشته باشد که x ، به آن تعلق ندارد، زیرا $f_n(x) \to f(x)$. بنابراین $\bigcap E_N = \varnothing$ ، پس بنابر گزارهٔ ۱۴ ، $\lim mE_N = 0$ است. از این رو برای هر عدد داده شدهٔ $\delta > 0$ و $\exists N$ به گونه‌ای که $mE_N < \delta$ ، یعنی:

$$m\{x \varepsilon E: |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon \text{ ، } n \geq N \text{ برای یک مقدار}\} < \delta.$$

اگر این مجموعهٔ E_N را A بنامیم ، آنگاه $mA < \delta$ و

$$\tilde{A} = \{x \varepsilon E: |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \text{ ، } n \geq N \text{ برای هر مقدار}\}. \blacksquare$$

اگر ، همانند فرض گزاره ، برای هر x داشته باشیم $f_n(x) \to f(x)$ ، می‌گوییم دنبالهٔ $\langle f_n \rangle$ روی مجموعهٔ E **به‌طور نقطه‌ای** به f می‌گراید. اگر E دارای یک زیرمجموعهٔ B باشد با $mB = 0$ به‌گونه‌ای که روی $E \sim B$ به‌طور نقطه‌ای داشته باشیم $f_n \to f$ ، می‌گوییم ت. هـ. روی E ، $f_n \to f$.

به این ترتیب شکل دیگر گزارهٔ اخیر را می‌توان چنین بیان کرد:

۲۴ ــ گزاره:

گیریم E مجموعه‌ای است اندازه‌پذیر با اندازهٔ باپایان ، و $\langle f_n \rangle$ یک دنباله از تابعهای اندازه‌پذیر است که ت. هـ. روی E به یک تابع حقیقی f می‌گراید. آنگاه برای عددهای داده‌شدهٔ $\epsilon > 0$ و $\delta > 0$ ، یک مجموعهٔ $A \subset E$ با $mA < \delta$ ، و یک عدد N ، وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر $x \varepsilon A$ و هر $n \geq N$ ، داریم:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

مسئلـــــه‌هـــا

۲۹ ــ با آوردن مثالی نشان دهید که در گزاره‌ٔ ۲۳ شرط $mE < \infty$ لازم است.

۳۰ ــ قضیه‌ٔ اگوروف را ثابت کنید: اگر $\langle f_n \rangle$ یک دنباله از تابعهای اندازه‌پذیر باشد که ت. ه. روی یک مجموعه‌ٔ اندازه‌پذیر E با اندازه‌ٔ باپایان به یک تابع حقیقی f می‌گراید، آنگاه، برای هر $\eta > 0$، یک زیرمجموعه‌ٔ $A \subset E$ با $mA < \eta$ وجود دارد به‌گونه‌ای که f_n روی $E \sim A$ به‌طور یکنواخت به f می‌گراید.

[راهنمایی: گزاره‌ٔ ۲۴ را پی‌درپی با $\epsilon_n = 1/n$ و $\delta_n = 2^{-n}\eta$ به‌کار ببرید.]

۳۱ ــ قضیه‌ٔ لوزن[1] را ثابت کنید: گیریم f روی فاصله‌ٔ $[a, b]$ یک تابع اندازه‌پذیر حقیقی است. دراین صورت برای هر عدد داده شده‌ٔ $\delta > 0$، روی $[a, b]$ یک تابع پیوسته‌ٔ φ وجود دارد به‌گونه‌ای که $m\{x: f(x) \neq \varphi(x)\} < \delta$. آیا در فاصله‌ٔ $(-\infty, \infty)$ نیز این مطلب درست است؟ [راهنمایی: از قضیه‌ٔ اگوروف، گزاره‌های ۱۵ و ۲۲، و مسئله ۲.۳۹ استفاده کنید.]

۳۲ ــ نشان دهید که اگر در گزاره‌ٔ ۲۳ به‌جای متغیر درست n یک متغیر حقیقی t بگذاریم، دیگر لازم نیست گزاره درست باشد. یعنی، یک خانواده $\langle f_t \rangle$ از تابعهای اندازه‌پذیر حقیقی روی [۰، ۱] بسازید به‌گونه‌ای که برای هر x $\lim_{t \to 0} f_t(x) = 0$ باشد، ولی برای یک مقدار $\delta > 0$، $m^*\{x: f_t(x) > \frac{1}{2}\} \geq \delta$ را داشته باشیـــم.

راهنمایی: گیریم P_i ها مجموعه‌های نامبرده در بند ۴ هستند. برای $2^{-i-1} \leq t < 2^{-i}$ تابع f_t را به شکل زیر تعریف کنید:

$$f_t(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر} \quad x \in P_i \quad \text{و} \quad x = 2^{i+1}t - 1 \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

---

[1] — Lusin's Theorem

فصل چهارم

انتگرال لبگ

۱ ـ انتگرال ریمن

ابتدا چند تعریف مربوط به انتگرال ریمن [1] را یادآوری می‌کنیم . گیریم f یک تابع حقیقی کراندار است که روی $[a, b]$ تعریف شده است و گیریم :

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_n = b$$

یک تقسیم جزیی $[a, b]$ است . آنگاه برای هر تقسیم جزیی می‌توان مجموع های زیر را تعریف کرد .

$$S = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \xi_{i-1})M_i$$

و

$$s = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \xi_{i-1})m_i$$

که در آن

$$M_i = \sup_{\xi_{i-1} < x \leq \xi_i} f(x) \quad \text{و} \quad m_i = \inf_{\xi_{i-1} < x \leq \xi_i} f(x)$$

آنگاه انتگرال ریمن بالای تابع f را با :

$$R\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \inf S$$

تعریف می‌کنیم ، که در آن inf روی همهٔ تقسیمات جزیی ممکن $[a, b]$ گرفته می‌شود . به‌همین‌روش ، انتگرال پایین را با برابری زیر تعریف می‌کنیم :

$$R\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup s.$$

انتگرال بالا هرگز کوچکتر از انتگرال پایین نیست ، و اگر هردو برابر باشند می‌گوییم f **انتگرال‌پذیر ریمن** است و این مقدار مشترک را انتگرال ریمن تابع f می‌گوییم . برای تمیز آن از انتگرال لبگ [2] که بعدا" درنظر خواهیم گرفت ، آن را به شکل زیر نشان می دهیم

---

۱ ـ The Riemann Integral

۲ ـ The Lebesgue Integral

$$R\int_a^b f(x)\,dx$$

منظور از یک تـابـع پلـه‌ای، تابعی است مانند ψ که برای یک تقسیم جزیـی $[a, b]$ و برای یک مجموعه از ثابت‌های c_i دارای شکل زیر می‌باشد:

$$\psi(x) = c_i, \qquad \xi_{i-1} < x < \xi_i$$

با هرنوع تعریف عملی انتگرال، داریم:

$$\int_a^b \psi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(\xi_i - \xi_{i-1})$$

بااین‌تعریف می‌بینیم که برای همهٔ تابعهای پله‌ای $\psi(x) \geq f(x)$ داریم:

$$R\bar{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf \int_a^b \psi(x)\,dx$$

همچنین برای همهٔ تابعهای پله‌ای $\varphi(x) \leq f(x)$ داریـم:

$$R\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

مسئلـــــه

۱ ــ الــف ــ نشان دهید که اگر:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ گنگ ،} \\ 1 & x \text{ گویا} \end{cases}$$

باشد، آنگاه داریم $R\bar{\int_a^b} f(x)\,dx = b - a$ و $R\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0$

ب ــ یک دنبالهٔ $\langle f_n \rangle$ از تابعهای نامنفی انتگرال‌پذیر بسازید به‌گونه‌ای که f_n، به‌طورافزایشی یکنوا به f بگراید. از آنچه گذشت چه نتیجه‌ای دربارهٔ تعویض ترتیب انتگرال‌گیری و عمل حدگیری می‌شود.

۲ ــ انتگرال لبگ یک تابع کران‌دار روی مجموعه‌ای بااندازهٔ باپایان

مسئلهٔ مذکور در بند پیش پاره‌ای ازنارسائی‌های انتگرال‌ریمن را نشان می‌دهد. به‌ویژه، می‌خواهیم تابعی که‌روی‌یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر برابر ۱ و سایرجاها برابر ۰ است

انتگرال‌پذیر بوده و مقدار انتگرال آن برابر اندازهٔ آن مجموعه باشد.

تابع χ_E که با:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \varepsilon E \\ 0 & x \not\varepsilon E \end{cases}$$

تعریف می‌شود تابع مشخص مجموعهٔ E نام دارد. هر ترکیب خطی به‌شکل:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}(x)$$

را، که درآن E_i ها اندازه‌پذیرند، یک تابع **ساده** می‌نامند. این طرز نمایش φ یکتا نیست. بااین‌همه، می‌بینیم که یک تابع φ ساده است اگر و تنها اگر اندازه‌پذیر بوده و شمارهٔ مقدارهای آن باپایان باشد. اگر φ یک تابع ساده و $\{a_1, \ldots, a_n\}$ مجموعهٔ مقدارهای ناصفر آن باشد، آنگاه:

$$\varphi = \sum a_i \chi_{A_i},$$

که درآن $A_i = \{x: \varphi(x) = a_i\}$، است. این طرز نمایش φ را نمایش کانونی آن می‌گویند و دارای این خاصیت است که A_i ها مجزا و a_i ها متمایز و ناصفر، هستند.

اگر φ بیرون یک مجموعه با اندازهٔ باپایان صفر باشد، انتگرال آن چنین تعریف می‌شود:

$$\int \varphi(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} a_i m A_i$$

که در آن φ دارای نمایش کانونی $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ است.

گاهی این انتگرال را به‌شکل‌اختصاری $\int \varphi$ نشان می‌دهیم. اگر E یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر دلخواه باشد، انتگرال φ روی E را بابرابری زیر تعریف می‌کنیم:

$$\int_E \varphi = \int \varphi \cdot \chi_E$$

گاهی بهتر است طرز نمایشی بکارببریم که کانونی نیست، دراین‌مورد لم زیر مورداستفاده قرار می‌گیرد:

۱ ــ لــم:

گیریم $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$ است که درآن برای $i \neq j$ داریم $E_i \cap E_j = \varnothing$.

فرض می‌کنیم که هر E_i یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر بااندازهٔ باپایان است. دراین‌صورت

داریم:

$$\int \varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i m E_i$$

برهان:

گیریم $A_a = \{x: \varphi(x) = a\} = \bigcup_{a_i = a} E_i$. ازاین‌رو بنابرخاصیت جمعی m ،
داریم: $a\, mA_a = \sum_{a_i = a} a_i m E_i$ ، پس:

$$\int \varphi(x)\, dx = \sum a m A_a = \sum a_i m E_i. \blacksquare$$

۲ـ گزاره:

گیریم φ و ψ دوتابع ساده‌هستند که بیرون‌یک‌مجموعه بااندازهٔ باپایان‌صفرند . دراین‌صورت داریم:

$$\int (a\varphi + b\psi) = a\int \varphi + b\int \psi,$$

واگر ت . ه . $\psi \geq \varphi$ باشد، آنگاه:

$$\int \varphi \geq \int \psi.$$

است .

برهان:

گیریم $\{A_i\}$ و $\{B_i\}$ دو دسته‌مجموعه هستند که در نمایش‌کانونی φ و ψ ، به‌کارمی‌روند، گیریم A_0 و B_0 مجموعه‌هایی هستند که روی آنها φ و ψ صفرند . آنگاه مجموعه‌های E_k متشکل‌ازهمهٔ‌اشتراکهای $A_i \cap B_j$ ، یک دستهٔ‌باپایان ازمجموعه‌های اندازه‌پذیر مجزا تشکیل می‌دهند، و می‌توان نوشت:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}$$

$$\psi = \sum_{k=1}^{N} b_k \chi_{E_k},$$

پس
$$a\varphi + b\psi = \sum (aa_k + bb_k)\chi_{E_k}$$
از آنجا برابری $\int(a\varphi + b\psi) = a\int\varphi + b\int\psi$ بااستفاده از لم ۱ نتیجه می‌شود.

برای اثبات گفتار دوم، می‌بینیم که:
$$\int\varphi - \int\psi = \int(\varphi - \psi) \geq 0,$$
زیرا انتگرال هر تابع ساده که ت. ه. نامنفی است، بنابه‌تعریف انتگرال، نامنفی است. ∎

ازاین‌گزاره‌نتیجه‌می‌شودکه‌اگر $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{E_i}$ باشد، آنگاه $\int\varphi = \sum a_i mE_i$.

پس محدودیت لم ۱ مبنی برمجزابودن مجموعه‌های E_i ضروری نیست.

گیریم f یک‌تابع حقیقی‌کراندار و E یک مجموعهٔ‌اندازه‌پذیر با اندازهٔ‌باپایان است. همانند انتگرال‌ریمن برای تابعهای سادهٔ φ و ψ عددهای‌زیر را درنظرمی‌گیریم:
$$\inf_{\psi \geq f} \int_E \psi$$
و
$$\sup_{\varphi \leq f} \int_E \varphi$$

می‌خواهیم بدانیم چه‌وقت این دوعدد برابرند. جواب این‌سئوال درگزارهٔ‌زیر داده شده است:

۳ـ گـــزاره:

گیریم f روی‌یک‌مجموعهٔ اندازه‌پذیر E باندازهٔ باپایان mE، تعریف شده وکراندار است. برای برقرار برابری:
$$\inf_{f \leq \psi} \int_E \psi(x)\,dx = \sup_{f \geq \varphi} \int_E \varphi(x)\,dx$$
برای‌همهٔ تابعهای سادهٔ φ و ψ، لازم وکافی است که f اندازه‌پذیر باشد.

برهـــان:

گیریم f اندازه‌پذیر و دارای کران M است. دراین‌صورت مجموعه‌های.

$$E_k = \left\{x: \frac{kM}{n} \geq f(x) > \frac{(k-1)M}{n}\right\}, \qquad -n \leq k \leq n.$$

اندازه‌پذیر، مجزا، و دارای اجتماع E هستند. بنابراین:

$$\sum_{k=-n}^{n} mE_k = mE.$$

تابعهای ساده‌ای که به‌شکل:

$$\psi_n(x) = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} k\chi_{E_k}(x)$$

و

$$\varphi_n(x) = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} (k-1)\chi_{E_k}(x)$$

تعریف می‌شوند در نابرابری

$$\varphi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x).$$

صدق می‌کنند. بنابراین داریم:

$$\inf \int_E \psi(x)\,dx \leq \int_E \psi_n(x)\,dx = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} kmE_k$$

و

$$\sup \int_E \varphi(x)\,dx \geq \int_E \varphi_n(x)\,dx = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} (k-1)mE_k,$$

از این دونابرابری نتیجه می‌شود:

$$0 \leq \inf \int_E \psi(x)\,dx - \sup \int_E \varphi(x)\,dx \leq \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} mE_k = \frac{M}{n} mE$$

چون n دلخواه است، داریم:

$$\inf \int_E \psi(x)\,dx - \sup \int_E \varphi(x)\,dx = 0,$$

و کفایت شرط ثابت می‌شود.

اکنون فرض می‌کنیم

$$\inf_{\psi \geq f} \int_E \psi(x)\, dx = \sup_{\varphi \leq f} \int_E \varphi(x)\, dx.$$

آنگاه برای هر n داده شده، تابعهای سادهٔ φ_n و ψ_n وجود دارند به‌گونه‌ای که :

$$\varphi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x)$$

و

$$\int \psi_n(x)\, dx - \int \varphi_n(x)\, dx < \frac{1}{n} \cdot$$

آنگاه تابعهای

$$\psi^* = \inf \psi_n$$

$$\varphi^* = \sup \varphi_n$$

بنابرقضیهٔ ۳ . ۲۰ ، اندازه‌پذیرند ، و داریم :

$$\varphi^*(x) \leq f(x) \leq \psi^*(x).$$

اکنون گوییم ، مجموعهٔ

$$\Delta = \{x: \varphi^*(x) < \psi^*(x)\}$$

اجتماع مجموعه‌های

$$\Delta_\nu = \left\{x: \varphi^*(x) < \psi^*(x) - \frac{1}{\nu}\right\} \cdot$$

است . ولی هر Δ_ν مشمول مجموعهٔ $\{x: \varphi_n(x) < \psi_n(x) - 1/\nu\}$ است ، و اندازهٔ مجموعهٔ اخیر از ν/n کمتر است . چون n دلخواه است ، $m\Delta_\nu = 0$ ، پس $m\Delta = 0$. بنابراین به‌جز روی‌مجموعه‌ای بااندازهٔ‌صفر ، داریم $\psi^* = \varphi^*$ ، و به‌جز روی‌مجموعه‌ای بااندازهٔ‌صفر داریم $f = \varphi^*$. پس بنابرگزارهٔ ۳ ، ۲۱ ، f اندازه‌پذیر است و لزوم شرط ثابت می‌شود . ▮

تعـــریـــــف :

اگر f یک‌تابع‌کراندار اندازه‌پذیر باشدکه روی مجموعهٔ‌اندازه‌پذیر E بااندازهٔ باپایان mE تعریف شده است ، انتگرال (لبگ) f را روی E بابرابری :

$$\int_E f(x)\,dx = \inf \int_E \psi(x)\,dx$$

تعریف می‌کنیم ، که در آن انفیمم روی همهٔ تابعهای سادهٔ $\psi \geq f$ گرفته می‌شود .

این انتگرال را گاهی به‌شکل $\int_E f$ می‌نویسیم . اگر $E = [a, b]$ باشد به‌جای $\int_{[a,b]} f$ می‌نویسیم $\int_a^b f$. اگر f یک‌تابع کراندار اندازه‌پذیرباشد که بیرون‌مجموعهٔ بااندازهٔ باپایان E صفر است ، به‌جای $\int_E f$ می‌نویسیم $\int f$. باید دانست که $\int_E f = \int f \cdot \chi_E$. گزارهٔزیر نتیجهٔگزارهٔ ۳ است و نشان می‌دهد که انتگرال لبگ درواقع تعمیم انتگرال ریمن است .

۴ــ گــــزاره :

گیریم f یک تابع کراندار است که روی $[a, b]$ تعریف شده است . اگر f روی $[a, b]$ انتگرال‌پذیر ریمن باشد ، آنگاه f اندازه‌پذیر است و داریم

$$R\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

بــرهــــان :

چون هر تابع پله‌ای یک تابع ساده نیز می‌باشد ، داریم :

$$R\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \sup_{\varphi \leq f} \int_a^b \varphi(x)\,dx \leq \inf_{\psi \geq f} \int_a^b \psi(x)\,dx \leq R\overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

چون f انتگرال‌پذیرریمن‌است ، همهٔنابرابریها به‌برابری‌تبدیل می‌شوند ، وبنابرگزارهٔ ۳ ، f اندازه‌پذیر است . ∎

۵ــ گـــــزاره :

اگر f و g دوتابع‌کراندار اندازه‌پذیر باشند که روی مجموعهٔ بااندازهٔ باپایان E ، تعریف شده‌اند ، آنگاه داریم :

i ــ $$\int_E (af + bg) = a\int_E f + b\int_E g$$

ii ــ اگر ت . هـ . $f = g$ باشد ، آنگاه :

$$\int_E f = \int_E g$$

iii ــ اگر ت . هـ . $f \leq g$ ، آنگاه :

$$\int_E f \leq \int_E g.$$

از این‌رو $|\int f| \leq \int |f|$.

iv ــ اگر $A \leq f(x) \leq B$ ، آنگاه :

$$AmE \leq \int_E f \leq BmE.$$

v ــ اگر A و B مجموعه‌های مجزای اندازه‌پذیر با اندازه‌های باپایان باشند ، آنگاه :

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$$

برهـــــان :

اگر ψ یک تابع ساده باشد $a\psi$ نیز ساده است ، و به‌وارون (به‌شرط $a \neq 0$) .
از این‌رو برای $a > 0$ داریم :

$$\int_E af = \inf_{\psi \geq f} \int_E a\psi = a \inf_{\psi \geq f} \int_E \psi = a\int_E f.$$

اگر $a < 0$ باشد ، بااستفاده از گزارهٔ ۳ داریم :

$$\int_E af = \inf_{\varphi \leq f} \int_E a\varphi = a \sup_{\varphi \leq f} \int_E \varphi = a \inf_{\psi \geq f} \int_E \psi = a\int_E f,$$

اگر ψ_1 تابع ساده‌ای باشد که از f کوچکتر نیست و ψ_2 تابع ساده‌ای باشد که از g ، کوچکتر نیست ،آنگاه تابع سادهٔ $\psi_1 + \psi_2$ از $f + g$ کوچکتر نیست . ازاین‌رو :

$$\int_E f + g \leq \int_E (\psi_1 + \psi_2) = \int_E \psi_1 + \int_E \psi_2.$$

چون انفیمم عبارت سمت راست برابر است با $\int f + \int g$ ، داریم :

$$\int_E f + g \leq \int_E f + \int_E g$$

از سوی دیگر $\varphi_1 \leq f$ و $\varphi_2 \leq g$ ایجاب می‌کند که تابع سادهٔ $\varphi_1 + \varphi_2$ بزرگتر از $f + g$ نباشد . ازاین‌رو :

$$\int_E f + g \geq \int_E (\varphi_1 + \varphi_2) = \int_E \varphi_1 + \int_E \varphi_2.$$

اکنون ، به‌سبب‌آنکه سوپر مم عبارت‌سمت‌راست‌برابراست‌با $\int f + \int g$ ، داریم :

$$\int_E f + g \geq \int_E f + \int_E g,$$

و گفتار (i) ی گزاره ثابت می‌شود .

برای اثبات (ii) ، کافی است نشان دهیم که :

$$\int_E f - g = 0$$

چون ت . هـ . $f - g = 0$ ، پس اگر $\psi \geq f - g$ ، آنگاه ت . هـ . $\psi \geq 0$.

از اینجا نتیجه می‌شود که :

که از آن به‌دست می‌آید :

$$\int_E \psi \geq 0$$

به‌همین‌روش ثابت می‌شود که :

$$\int_E f - g \geq 0$$

از آنجا (ii) نتیجه می‌شود .

$$\int_E f - g \leq 0,$$

این‌استدلال‌برای‌اثبات (iii) نیز به‌کارمی‌رود . گفتار (iv) از (iii) وبرابری :

$$\int_E 1 = mE.$$

نتیجه می‌شود .

گفتار (v) از (i) و برابری $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$ نتیجه می‌شود ∎ .

اکنون گزاره‌ای ثابت‌می‌کنیم که در اثبات‌قضیهٔ ۱۵ به‌کارخواهیم‌برد . این گزاره حالت خاص قضیهٔ ۱۵ است .

۶ـ گـــزاره (قضیهٔ همگرایی کراندار) :

گیریم $\langle f_n \rangle$ یک‌دنباله‌ازتابعهای‌اندازه‌پذیر است ، که‌روی‌مجموعهٔ با‌اندازهٔ باپایان E تعریف‌شده‌اند ، و فرض‌کنید که یک‌عدد‌حقیقی M وجود دارد به‌گونه‌ای‌که‌برای هر n و هر x ، $|f_n(x)| \leq M$.

اگربرای‌هر x متعلق‌به E ، $f(x) = \lim f_n(x)$ باشد ، آنگاه :

$$\int_E f = \lim \int_E f_n.$$

برهـــان :

برهان این‌گزاره، توضیح‌دقیقی از استفاده‌از " سه‌اصل " لیتلوود می‌دهد . اگر دنباله‌ٔ $\langle f_n \rangle$ به‌طوریکنواخت به f بگراید، نتیجـــهٔ گـزاره بـدیهـــی اسـت . اصـــل سـوم لیتلـــوود بیان‌می‌کند که اگر $\langle f_n \rangle$ به‌طورنقطه‌ای به f بگراید، آنگاه $\langle f_n \rangle$ " تقریبا " به‌طوریکنواخت به f می‌گراید . برگرادان دقیق این اصل به‌وسیلهٔ گزارهٔ ۲۳.۳ داده‌شده‌است ،که‌می‌گوید ، برای‌هرعدد $\epsilon > 0$ ، یک‌عدد N ویک‌مجموعهٔ اندازه‌پذیر $A \subset E$ با $mA < \epsilon/4M$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که‌برای $n \geq N$ و $x \varepsilon E \sim A$ داریم $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/2mE.$ بنابراین :

$$\begin{aligned}\left|\int_E f_n - \int_E f\right| &= \left|\int_E f_n - f\right| \\ &\leq \int_E |f_n - f| \\ &= \int_{E\sim A} |f_n - f| + \int_A |f_n - f| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

ازاین‌رو :

$$\int_E f_n \to \int_E f. \blacksquare$$

مسئلـــه

۲ ــ الـف . گیریم f روی $[a, b]$ تابعی‌است کراندار و h پوش بالای f است (مسئلهٔ ۴۹.۲ را ببینید) . دراین‌صورت $R\overline{\int_a^b} f = \int_a^b h$. (اگر $\varphi \geq f$ یک‌تابع پله‌ای‌باشد ،آنگاه‌به‌جزدرعدهٔ باپایانی‌ازنقاط ، $\varphi \geq h$ ، پس $\int_a^b h \leq R\overline{\int_a^b} f$ ولی یک‌دنبالهٔ $\langle \varphi_n \rangle$ از تابعهای‌پله‌ای وجود دارد به‌گونه‌ای که $\varphi_n \downarrow h$. بنـابـر گزراه ۶ داریم :

$$\left(\cdot \int_a^b h = \lim \int_a^b \varphi_n \geq R\overline{\int_a^b} f\right.$$

ب ـ بااستفاده‌ازقسمت (الف) ، **قضیهٔ لبگ** را ثابت‌کنید : هرتابع‌کراندار روی $[a, b]$ انتگرال‌پذیر ریمن است ، اگر و تنها اگر مجموعهٔ نقطه‌هایی که f در آنها ناپیوسته است دارای اندازهٔ صفر باشد .

۳ ـ انتگرال یک تابع نامنفی

گیریم f یک‌تابع‌اندازه‌پذیر نامنفی است که روی یک مجموعهٔ‌اندازه‌پذیر E ، تعریف شده است . انتگرال f را روی E بابرابری :

$$\int_E f = \sup_{h \le f} \int_E h,$$

تعریف می‌کنیم که‌درآن h یک‌تابع کراندار‌اندازه‌پذیر‌است‌به‌گونه‌ای‌که $m\{x: h(x) \neq 0\}$ باپایان است .

۷ ـ گزاره :

اگر f و g دوتابع اندازه‌پذیر نامنفی باشند ، آنگاه :

i ـ $\int_E cf = c\int_E f, \quad c > 0.$

ii ـ $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g.$

iii ـ اگر ت . ه . $f \le g$ آنگاه

$$\int_E f \le \int_E g.$$

برهان :

بخشهای (i) و (iii) به‌طور سرراست از گزارهٔ ۵ نتیجه می‌شوند ، و تنها (ii) را به‌تفصیل ثابت‌می‌کنیم . اگر $h(x) \le f(x)$ و $k(x) \le g(x)$ باشد . داریم $h(x) + k(x) \le f(x) + g(x)$ پس :

$$\int_E h + \int_E k \le \int_E f + g$$

پس از گرفتن کنارهٔ بالا داریم :

$$\int_E f + \int_E g \le \int_E f + g$$

از سوی دیگر، گیریم l یک تابع اندازه‌پذیر کراندار است که بیرون مجموعه‌ای بااندازهٔ باپایان صفر است و بزرگتر از $g+f$ نیست. دراین‌صورت تابعهای h و k را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$h(x) = \min\,(f(x), l(x))$$

و

$$k(x) = l(x) - h(x).$$

داریم

$$h(x) \le f(x) \qquad \text{و} \qquad k(x) \le g(x)$$

درحالی‌که h و k باکران l کراندارندوهرجا l صفراست‌آنهانیزصفرند. ازاین‌رو:

$$\int_E l = \int_E h + \int_E k \le \int_E f + \int_E g,$$

پس:

$$\int_E f + \int_E g \ge \int_E f + g. \blacksquare$$

۸ــ قضیه (لم‌فاتو[1]):

اگر $\langle f_n \rangle$ یک دنباله از تابعهای اندازه‌پذیر نامنفی باشد و تقریباً" همه‌جا روی یک مجموعهٔ E، $f_n(x) \to f(x)$، آنگاه:

$$\int_E f \le \underline{\lim} \int_E f_n.$$

برهان:

بدون‌کاستن از کلیت می‌توانیم فرض‌کنیم که این‌گرایش همه‌جا برقراراست، زیرا انتگرال روی هرمجموعهٔ بااندازهٔ صفر برابرصفر است. گیریم h تابع اندازه‌پذیرکرانداری است که بزرگتراز f نیست و بیرون یک مجموعهٔ E' با اندازهٔ باپایان صفر است. h_n را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$h_n(x) = \min\,\{h(x), f_n(x)\}$$

دراین‌صورت h_n با h کراندار است‌وبیرون E' صفراست. ولی‌برای‌هر x متعلق به E' داریم $h_n(x) \to h(x)$. از این رو بنابرگزارهٔ ۶ داریم:

$$\int_E h = \int_{E'} h = \lim \int_{E'} h_n \le \underline{\lim} \int_E f_n.$$

باگرفتن کنارهٔ بالا روی h، به‌دست می‌آوریم:

$$\int_E f \le \underline{\lim} \int_E f_n. \blacksquare$$

---

۱ — Fatou's Lemma

۹ـ قضیهٔ همگرایی یکنوا:

گیریم $\langle f_n \rangle$ یک دنبالهٔ افزایشی از تابعهای اندازه‌پذیر نامنفی است و $f = \lim f_n$. دراین‌صورت:

$$\int f = \lim \int f_n.$$

برهان:

بنابرقضیهٔ ۸ داریم:

$$\int f \leq \underline{\lim} \int f_n.$$

ولی برای‌هر n داریم $f_n \leq f$ ، پس $\int f_n \leq \int f$. ولی این ایجاب می‌کند که:

$$\overline{\lim} \int f_n \leq \int f$$

از این‌رو:

$$\int f = \lim \int f_n. \blacksquare$$

۱۰ـ نتیجه:

گیریم u_n یک دنباله از تابعهای اندازه‌پذیر نامنفی و $f = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ است.

دراین‌صورت:

$$\int f = \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n.$$

۱۱ـ گزاره:

گیریم f یک‌تابع نامنفی‌و $\langle E_i \rangle$ یک‌دنباله‌ازمجموعه‌های‌اندازه‌پذیر مجزا و$E = \bigcup E_i$ است. دراین‌صورت:

$$\int_E f = \sum \int_{E_i} f.$$

برهان:

گیریم $u_i = f \cdot \chi_{E_i}$. دراین‌صورت $f \cdot \chi_E = \sum u_i$ ، پس گزاره ازنتیجهٔ پیش به‌دست می‌آید. $\blacksquare$

تعـریـــــف :

یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی f را روی مجموعهٔ اندازه‌پذیر E انتگرال‌پذیـر می‌گویند هرگاه :

$$\int_E f < \infty.$$

۱۲ ــ گــــزاره :

گیریم f و g دوتابع نامنفی اندازه‌پذیرند . اگر f روی E انتگرال‌پذیر و روی E ، $g(x) < f(x)$ باشد ، آنگاه g نیز روی E انتگرال‌پذیر است ، و :

$$\int_E f - g = \int_E f - \int_E g.$$

بـرهــــان :

بنابرگزارهٔ ۷ ،

$$\int_E f = \int_E (f - g) + \int_E g.$$

چون سمت چپ پایاندار است ، جمله‌های سمت‌راست نیز باید پایاندار باشند ، پس g ، انتگرال‌پذیر است ∎ .

۱۳ ــ گــــزاره :

گیریم f یک‌تابع نامنفی است‌که‌روی‌مجموعهٔ E انتگرال‌پذیر است . دراین‌صورت برای هر $0 < \epsilon$ داده شده یک عدد $0 < \delta$ وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هرمجموعهٔ $A \subset E$ با $mA < \delta$ داریم :

$$\int_A f < \epsilon.$$

بـرهــــان :

اگر f کراندارباشدگزاره‌بدیهی خواهدبود . قرارمی‌دهیم $f_n(x) = f(x)$ اگر $f(x) \leq n$ وگرنه‌قرارمی‌دهیم $f_n(x) = n$. دراین‌صورت‌هر f_n کراندار است و در هرنقطه ، f_n به f می‌گراید . بنابرقضیهٔ همگرایی‌یکنوا عددی‌مانند N وجود دارد به‌گونه‌ای که $\int_E f_N > \int_E f - \epsilon/2$ ، $\int_E f - f_N < \epsilon/2$ ، δ راکوچکتراز $\frac{\epsilon}{2N}$

برمی‌گزینیم . اگر $mA < \delta$ باشد ، داریم :

$$\begin{aligned}\int_A f &= \int_A (f - f_N) + \int_A f_N \\ &< \int_E (f - f_N) + NmA \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \blacksquare\end{aligned}$$

مسئله‌ها

۳ ــ گیریم f یک‌تابع اندازه‌پذیر نامنفی‌است . نشان دهید که $\int f = 0$ ایجاب می‌کند . $f = 0$ ت . ه .

۴ ــ گیریم f یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی است .

الف ــ نشان دهید یک دنباله‌ٔ افزایشی $\langle \varphi_n \rangle$ از تابعهای نامنفی ساده وجود دارد ، که هریک بیرون یک مجموعهٔ باندازهٔ باپایان صفر است به‌گونه‌ای کـــه $f = \lim \varphi_n$

ب ــ نشان‌دهید $\int f = \sup \int \varphi$ که‌درآن‌کنارهٔ‌بالا روی‌همهٔ‌تابعهای سادهٔ با $\varphi \leq f$ ، گرفته می‌شود .

۵ ــ گیریم f یک تابع انتگرال‌پذیر نامنفی است . بااستفاده از قضیهٔ ۹ نشان دهید که تابع F که با

$$F(x) = \int_{-x}^{x} f$$

تعریف می‌شود پیوسته است .

۶ ــ گیریم $\langle f_n \rangle$ یک دنباله از تابعهای اندازه‌پذیر نامنفی است که به f ، می‌گراید ، گیریم برای هر n داریم $f_n \leq f$. دراین‌صورت

$$\int f = \lim \int f_n.$$

۷ ــ الــف . نشان‌دهیدکه‌در لم فاتو می‌توانیم یک‌نابرابری اکید داشته باشیم . [دنبالهٔ $\langle f_n \rangle$ را ، که‌برای $n \leq x < n+1$ بــا $f_n(x) = 1$ وســایــر جــاهــا بــا $f_n(x) = 0$ تعریف می‌شود ، درنظر بگیرید .]

ب ــ نشان دهید لزومی ندارد که قضیهٔ همگرایی یکنوا برای دنبالهٔ تابعهای کاهشی برقرارباشد . [می‌گیریم $f_n(x) = 0$ برای $x < n$ و $f_n(x) = 1$ برای $x \geq n$.]

۸ ــ تعمیم زیر از لم فاتو را ثابت کنید :

اگر $\langle f_n \rangle$ یک دنباله از تابعهای نامنفی باشد ، آنگاه داریم :

$$\int \underline{\lim}\, f_n \leq \underline{\lim} \int f_n.$$

۹ـ گیریم $\langle f_n \rangle$ روی $(-\infty, \infty)$ یک دنباله از تابعهای نامنفی است به‌گونه‌ای که تقریباً "همه‌جا" $f_n \to f$ وفرض می‌کنیم که $\int f_n \to \int f < \infty$. دراین‌صورت برای هرمجموعهٔ اندازه‌پذیر E داریم $\int_E f_n \to \int_E f$

۴ـ انتگرال عمومی لبگ

منظور از f^+ ، یعنی بخش‌مثبت یک‌تابع f ، تابع $f^+ = f \vee 0$ است که به‌شکل زیر تعریف می‌شود :

$$f^+(x) = \max \{f(x), 0\}.$$

به‌همین‌ترتیب f^- ، بخش منفی تابع f با $f^- = (-f) \vee 0$ تعریف می‌شود .
اگر تابع f اندازه‌پذیر باشد f^+ و f^- نیز اندازه‌پذیرند . داریم :

$$f = f^+ - f^-$$

و

$$|f| = f^+ + f^-$$

با به‌یادداشتن این مفهومها تعریف زیر را بیان می‌کنیم :

تعریف :

تابع اندازه‌پذیر f را روی E انتگرال‌پذیر می‌گویند هرگاه f^+ و f^- هر دو روی E ، انتگرال پذیر باشند . در این‌صورت تعریف می‌کنیم .

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$$

۱۴ـ گزاره :

گیریم f و g روی E انتگرال پذیرند . دراین صورت :

i ـ تابع cf روی E انتگرال پذیر است و داریم $\int_E cf = c \int_E f$.

ii ـ تابع $f + g$ روی E انتگرال پذیراست ، وداریم :

$$\int_E f + g = \int_E f + \int_E g.$$

iii ـ اگرت . هـ . $f \le g$ باشد ، آنگاه $\int_E f \le \int_E g$ است .

iv ـ اگر A و B دو مجموعهٔ مجرای اندازه پذیر مشمول E باشند ، آنگاه :

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

برهــــان :

بخش (i) مستقیما" ازتعریف انتگرال و گزارهٔ ۷ نتیجه می‌شود . برای اثبات بخش((ii)) نخست می‌بینیم که اگر f_1 و f_2 دوتابع نامنفی انتگرال‌پذیر باشند با $f = f_1 - f_2$ ، آنگاه داریم $f^+ + f_2 = f^- + f_1$. بنابرگزارهٔ ۷ ،

$$\int f^+ + \int f_2 = \int f^- + \int f_1$$

پس :

$$\int f = \int f^+ - \int f^- = \int f_1 - \int f_2.$$

ولی‌اگر f و g انتگرال پذیر باشند ، $f^+ + g^+$ و $f^- + g^-$ ، $(f+g) =$ $(f^+ + g^+) - (f^- + g^-) =$ نیزانتگرال‌پذیرند. ازاین‌رو : $\int (f+g) = \int (f^+ + g^+) -$

$$-\int (f^- + g^-) = \int f^+ + \int g^+ - \int f^- - \int g^- = \int f + \int g.$$

بخش (iii) ازبخش (ii) واین که انتگرال یک تابع نامنفی مقداری‌نامنفی است نتیجه می‌شود . برای (iv) داریم :

$$\int_{A\cup B} f = \int f\chi_{A\cup B} = \int f\chi_A + \int f\chi_B = \int_A f + \int_B f. \blacksquare$$

باید توجه داشت ، در نقاطی که $f = \infty$ و $g = -\infty$ یا $f = -\infty$ و $g = \infty$ است $f + g$ تعریف نشده است . ولی اندازهٔ مجموعهٔ این نقاط باید صفر باشد ، زیراتابعهای f و g انتگرال‌پذیرند . ازاین‌رو انتگرال‌پذیری‌ومقدارانتگرال $\int (f+g)$ بستگی به‌گزینش مقدار تابع دراین‌حالتهای مبهم ندارد .

۱۵ ــ قضیــهٔ همگرایــی لبــگ :

گیریم g روی E انتگرال‌پذیر و $\langle f_n \rangle$ یک‌دنباله از تابعهای اندازه‌پذیر است به‌گونه‌ای که روی E ، $|f_n| \leq g$ و تقریبا" برای همهٔ x های متعلق به E داریم : $f(x) = \lim f_n(x)$. دراین‌صورت :

$$\int_E f = \lim \int_E f_n.$$

برهــــان :

تابع $g - f_n$ نامنفی است ، پس بنابرقضیهٔ ۸ :

$$\int_E (g - f) \leq \underline{\lim} \int_E (g - f_n).$$

چـــــون $g \leq |f|$ ، f انتگرال‌پذیر است و داریم :

$$\int_E g - \int_E f \leq \int_E g - \overline{\lim} \int_E f_n.$$

از آنجا :

$$\int_E f \geq \overline{\lim} \int_E f_n$$

به‌روش مشابه با درنظر گرفتن $g + f_n$ ، به‌دست می‌آوریم :

$$\int_E f \leq \underline{\lim} \int_E f_n.$$

و قضیه ثابت می‌شود . ∎

در قضیهٔ بالا لازم است که دنبالهٔ $\langle f_n \rangle$ با یک تابع معلوم انتگرال‌پذیر فروگرفته شود . ولی برهان به‌این‌اندازه به‌آن‌شرط نیازندارد . اگر در برهان بالا به‌جای g ی مناسب‌تابعهای g_n را بگذاریم ، تعمیم زیر ازقضیهٔ همگرایی‌لبگ‌را به‌دست‌می‌آوریم :

۱۶ ـ قضیـــــه :

گیریم $\langle g_n \rangle$ یک‌دنباله از تابعهای‌انتگرال‌پذیر است‌که‌تقریبا " همه‌جا به‌تابع انتگرال‌پذیر g می‌گراید . گیریم $\langle f_n \rangle$ یک‌دنباله‌ازتابعهای‌اندازه‌پذیر است به‌گونه‌ای که $|f_n| \leq g_n$ و $\langle f_n \rangle$ تقریبا " همه‌جا به f می‌گراید . اگر :

$$\int g = \lim \int g_n$$

باشـد ، آنگـاه :

$$\int f = \lim \int f_n.$$

اگر $\langle f_n \rangle$ دنباله‌ای از تابعهای اندازه‌پذیر باشد که ت . هـ . به f می‌گراید ، دراین‌صورت لم فاتو ، قضیهٔ همگرایی یکنوا و قضیهٔ همگرایی لبگ ، همه گویای این‌هستند که تحت‌فرضهای‌مناسب می‌توان دربارهٔ $\int f$ مطلبی‌برحسب $\int f_n$ بیان کرد . لــم فاتــو کم‌توان‌ترین فرضهارا دارد : تنها نیازداریم‌که f_n ازسوی‌پایین با صفر (یا به‌طورکلی‌تر بایک‌تابع انتگرال‌پذیر)کراندارباشد . به‌این‌سبب نتیجه‌های‌لم فاتو کم توان‌ترازنتیجه‌های دیگرقضیه‌های‌بالاست : تنها می‌توانیم حکم کنیم که $\int f \leq \underline{\lim} \int f_n$. قضیهٔ همگرایی لبگ نیاز داردکه f_n ازسوی بالا و پایین با یک تابع انتگرال‌پذیر مشخص کراندار باشد وآنگاه‌حکم به‌برابری $\int f$ و $\lim \int f_n$ می‌دهد . قضیهٔ همگرایی‌یکنوا (که در مسئلهٔ ۶ تعمیم داده شده است) چیزی دورگاه‌است : این‌قضیه‌نیازداردکه f_n ازسوی پایین‌باصفر (یا یک‌تابع انتگرال‌پذیر) و از سوی‌بالا با خود تابع حد یعنی f ،کرانداراباشد . البته

اگر f انتگرال‌پذیر باشد ، این‌قضیه حالت‌خاصی‌از قضیهٔ همگرائی لبگ است ، ولی امتیاز لم فاتو و قضیهٔ همگرائی یکنوا این است که حتی هنگامی هم که f انتگرال‌پذیر نیست ، کاربرد دارند و اغلب روش خوبی برای نشان دادن انتگرال‌پذیری f هستند . لم فاتو و قضیهٔ همگرایی‌یکنوا بسیار به‌هم نزدیکند ، به‌این‌معنی که می‌توان هریک را بااستفاده از خاصیت مثبت و خطی بودن انتگرال از دیگری نتیجه گرفت .

مسئله‌ها

۱۰ ــ الف ــ نشان دهید که اگر f روی E انتگرال‌پذیر باشد ، آنگاه $|f|$ نیز روی E انتگرال‌پذیر است و داریم :

$$\left|\int_E f\right| \leq \int_E |f|.$$

آیا انتگرال‌پذیری $|f|$ انتگرال‌پذیری f را ایجاب می‌کند ؟

ب ــ ممکن است انتگرال ناسرهٔ ریمن یک‌تابع وجود داشته‌باشد بدون‌این‌که‌تابع (به‌معنی لبگ) انتگرال‌پذیر باشد ، مانند $f(x) = (\sin x)/x$ روی $[0, \infty)$. اگر f، انتگرال‌پذیرباشد ، نشان‌دهید هرگاه انتگرال‌ناسرهٔ‌ریمن‌آن‌وجودداشته‌باشد ، باانتگرال لبگ آن برابر است .

۱۱ ــ اگر φ یک‌تابع ساده‌باشد برای $\int \varphi$ دوتعریف درصفحه‌های ۱۰۴و۱۱۸ وجود دارد . نشان دهید که این‌دو تعریف همانندند .

۱۲ ــ گیریم g روی‌مجموعهٔ E انتگرال‌پذیرو $\langle f_n \rangle$ یک‌دنباله‌ازتابعهای‌اندازه پذیراست‌به‌گونه‌ای‌که‌ت . هـ . روی E ، $|f_n(x)| \leq g(x)$ است . دراین‌صورت داریم :

$$\int_E \underline{\lim}\, f_n \leq \underline{\lim} \int_E f_n \leq \overline{\lim} \int_E f_n \leq \int_E \overline{\lim}\, f_n.$$

۱۳ ــ گیریم h یک‌تابع انتگرال‌پذیر و $\langle f_n \rangle$ یک‌دنباله از تابعهای اندازه‌پذیر است با $f_n \geq -h$ و $\lim f_n = f$. نشان‌دهید که $\int f_n$ و $\int f$ معنی دارند و $\int f \leq \underline{\lim} \int f_n$ است .

۱۴ ــ گیریم $\langle f_n \rangle$ یک‌دنباله‌ازتابعهای‌انتگرال‌پذیراست‌به‌گونه‌ای‌که ت . هـ . $f_n \to f$ و f انتگرال‌پذیر است . دراین‌صورت $\int |f - f_n| \to 0$ اگر وتنها اگر $\int |f_n| \to \int |f|$ باشد .

۱۵ ــ الف ــ گیریم f روی E انتگرال‌پذیر است . دراین‌صورت برای‌هر $\epsilon > 0$، داده شده یک تابع سادهٔ φ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که :

$$\int_E |f - \varphi| < \epsilon.$$

(مسئلهٔ ۴ را برای‌بخش مثبت و بخش منفی f به‌کار ببرید) .

ب ـ تحت همان فرضها ، یک تابع پله‌ای ψ وجود دارد به‌گونه‌ای که :

$$\int_E |f - \psi| < \epsilon.$$

(بخش الف‌را همراه با گزارهٔ ۲۲ ، ۳ به‌کار ببرید) .

پ ـ تحت‌همان فرض‌ها ، یک‌تابع پیوستهٔ g که بیرون یک فاصلهٔ باپایان صفر است ، وجود دارد به‌گونه‌ای که :

$$\int_E |f - g| < \epsilon.$$

۱۶ ـ قضیهٔ ریمن ـ لبگ راثابت‌کنید : اگر f روی $(-\infty, \infty)$, انتگرال‌پذیر باشدآنگاه $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos nx\, dx = 0$. (راهنمایی : اگر f یک‌تابع پله‌ای باشد قضیه آسان است . از مسئلهٔ ۱۵ استفاده کنید) .

۱۷ ـ الف ـ گیریم f روی $(-\infty, \infty)$ انتگرال‌پذیر است . دراین‌صورت :

$$\int f(x)\, dx = \int f(x + t)\, dx.$$

ب ـ گیریم g یک تابع اندازه‌پذیر کراندار است . دراین‌صورت :

$$\lim_{t\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)[f(x) - f(x + t)]| = 0.$$

(راهنمایی : اگر f پیوسته و بیرون یک فاصلهٔ‌باپایان صفر باشد ، این نتیجه از پیوستگی یکنواخت f برمی‌آید . مسئلهٔ ۱۵ را به‌کار ببرید) .

۱۸ ـ گیریم f تابعی از دو متغیر $\langle x, t\rangle$ است که در مربع : $Q = \{\langle x, t\rangle : 0 \le x \le 1, 0 \le t \le 1\}$ تعریف شده و برای هر مقدار ثابت t تابع اندازه‌پذیری‌از x است . فرض‌کنیم که $\lim_{t\to 0} f(x, t) = f(x)$ وبرای‌همهٔ t هاداریم :

$|f(x, t)| \le g(x)$ ، که در آن g روی [۱ ، ۰] یک‌تابع انتگرال‌پذیر است . دراین‌صورت داریم :

$$\lim_{t\to 0} \int f(x, t)\, dx = \int f(x)\, dx.$$

(دراینجا مسئلهٔ ۲ ، ۴۷ (ج) مفید است) . همچنین نشان دهید که اگر تابع $f(x, t)$ برای هر x نسبت‌به t پیوسته باشد ، آنگاه :

$$h(t) = \int f(x, t)\, dx$$

یک تابع پیوسته از t است .

۱۹ ـ گیریم f تابعی است که در مربع : $Q = \{\langle x, t\rangle : 0 \le x \le 1, 0 \le t \le 1\}$ تعریف‌شده و کراندار است ، فرض کنیم‌که برای هر t ی‌ثابت ، f تابع اندازه‌پذیری‌از x است . برای‌هر $\langle x, t\rangle \in Q$ ، گیریم مشتق‌جزیی

$\frac{\partial f}{\partial t}$ وجود دارد. فرض کنیم که $\frac{\partial f}{\partial t}$ در Q کراندار است. در این صورت داریم:

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 f(x,t)\,dx = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}\,dx.$$

۵* ــ همگرایی در اندازه

فرض کنیم که $\langle f_n \rangle$ یک دنباله از تابعهای اندازه‌پذیر است به‌گونه‌ای که $\int |f_n| \to 0$. درباره‌ٔ دنبالهٔ $\langle f_n \rangle$ چه‌می‌توان‌گفت؟شاید مهمترین خاصیت چنین دنباله‌ای این‌است‌که‌برای‌هر عدد مثبت η، اندازهٔ مجموعهٔ $\{x: |f_n(x)| > \eta\}$ باید به‌صفر بگراید. این ما را به‌تعریف زیر می‌رساند:

تعریف:

دنبالهٔ $\langle f_n \rangle$ از تابعهای اندازه‌پذیر را، در اندازه همگرا به f می‌گویند، هرگاه برای‌هر $0 < \epsilon$ داده‌شده، یک N وجود داشته‌باشد به‌گونه‌ای که برای هر $n \geq N$، داشته باشیم:

$$m\{x: |f(x) - f_n(x)| \geq \epsilon\} < \epsilon.$$

مثالی ازیک‌دنبالهٔ $\langle f_n \rangle$ را که روی[۱ ، ۰] دراندازه به‌صفر می‌گراید ولی $\langle f_n(x) \rangle$ برای هر x متعلق‌به[۱ ، ۰] همگرا نیست، می‌توان به‌شکل‌زیر ساخت: گیریم $n = k + 2^\nu$، $0 \leq k < 2^\nu$، وقرارمی‌دهیم $f_n(x) = 1$ اگر $x \in [k2^{-\nu}, (k+1)2^{-\nu}]$ وگرنه $f_n(x) = 0$. دراین‌صورت:

$$m\{x: |f_n(x)| > \epsilon\} \leq \frac{2}{n},$$

پس f_n دراندازه به‌صفر می‌گراید، گرچه برای‌هر $x \in [0,1]$، دنبالهٔ $\langle f_n(x) \rangle$ برای‌هرمقداربزرگ n دارای‌مقدار ۱ است، پس‌همگرانیست. باوجوداین‌گزارهٔ زیررا داریم:

۱۷ ــ گزاره:

گیریم $\langle f_n \rangle$ یک‌دنباله‌ازتابعهای‌اندازه‌پذیراست که دراندازه به f می‌گراید. دراین‌صورت یک زیردنبالهٔ $\langle f_{n_k} \rangle$ وجود داردکه تقریباً" همه‌جا به f می‌گراید.

برهـــان :

برای هر ν ی داده شده، یک عدد درست مثبت n_ν وجود دارد، به‌گونه‌ای‌که برای هر $n \geq n_\nu$ داریـم :

$$m\{x: |f_n(x) - f(x)| \geq 2^{-\nu}\} < 2^{-\nu}.$$

گیریم $E_\nu = \{x: |f_{n_\nu}(x) - f(x)| \geq 2^{-\nu}\}$. دراین‌صورت‌اگر $x \notin \bigcup_{\nu=k}^{\infty} E_\nu$ ، بـرای $\nu \geq k$ داریـم $|f_{n_\nu}(x) - f(x)| < 2^{-\nu}$ ، پـس $f_{n_\nu}(x) \to f(x)$ ازاین‌رو برای‌هر $x \notin A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{\nu=k}^{\infty} E_\nu$ داریـم $f_{n_\nu}(x) \to f(x)$ ولـــی

$$mA \leq m\left[\bigcup_{\nu=k}^{\infty} E_\nu\right] \leq \sum_{\nu=k}^{\infty} mE_\nu = 2^{-k+1}.$$ ازاین‌رو $mA = 0$. ∎

۱۸ ــ گـــــزاره

اگر در لم‌فاتو و قضیه‌های‌همگرایی‌یکنوا و لبگ به‌جای‌عبارت " همگرایی تقریبا" همه‌جا " عبارت " همگرایی در اندازه " را بگذاریم ، بازهم معتبر خواهند بود .

مسئلــــــه‌ها

۲۰ ــ نشان دهید که‌اگر دنباله‌ٔ $\langle f_n \rangle$ دراندازه به f بگراید ، آنگاه هـر زیردنباله‌ٔ $\langle f_{n_k} \rangle$ نیز در اندازه به f خواهد گرایید .

۲۱ ــ ازگزاره‌ٔ ۱۷ بااستفاده‌ازمسئله‌ٔ ۲۰ و ۲ . ۱۱ ، گزاره‌ٔ ۱۸ را نتیجه‌بگیرید .

۲۲ ــ ثابت کنید که یک دنباله‌ٔ $\langle f_n \rangle$ از تابعهای اندازه‌پذیر، در اندازه به f می‌گراید اگروتنها‌اگر هر زیردنباله‌ٔ $\langle f_n \rangle$ به‌نوبه‌ٔ‌خود یک‌زیردنباله داشته‌باشد که در اندازه به f بگراید .

۲۳ ــ ثابت‌کنید که یک‌دنباله‌ٔ $\langle f_n \rangle$ ازتابعهای‌اندازه‌پذیر روی یک‌مجموعهٔ بااندازه‌ٔ باپایان E ، در اندازه به f می‌گراید اگر و تنها اگر هر زیردنباله‌ٔ $\langle f_n \rangle$ ، به‌نوبه‌ٔ خود یک زیردنباله داشته باشد که ت . هـ . روی E به f بگراید .

۲۴ ــ بااستفاده از گزاره‌ٔ ۱۳ مستقیما" ثابت کنید ، اگر در اندازه f_n به f ، بگراید و اگر یک تابع انتگرال‌پذیر g موجود باشد به‌گونه‌ای که برای هر n داشته باشیم $|f_n| \leq g$ ، آنگاه: $\int |f_n - f| \to 0$.

۲۵ــ یک‌دنبالهٔ‌ازتابعهای‌اندازه‌پذیر $\langle f_n \rangle$ را دنبالهٔ‌کشی‌دراندازه می‌گویند هرگاه برای‌هر $\epsilon > 0$ داده‌شده‌یک‌عدد N موجودباشد به‌گونه‌ای‌که‌برای‌همهٔ $m, n \geq N$ ، داشته باشیم :

$$m\{x: |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\} < \epsilon.$$

نشان‌دهیدکه‌اگر $\langle f_n \rangle$ یک دنبالهٔ‌کشی دراندازه باشد ، آنگاه یک‌تابع f ، وجود دارد که‌دنبالهٔ $\langle f_n \rangle$ دراندازه به‌آن می‌گراید . [$n_{\nu+1} > n_\nu$ را به‌گونه‌ای برگزینید که $m\{x: |f_{n_\nu} - f_{n_{\nu+1}}| > 2^{-\nu}\} < 2^{-\nu}$. آنگاه سری $\sum(f_{n_{\nu+1}} - f_{n_\nu})$ تقریبا" همه‌جابه‌یک‌تابع g می‌گراید .گیریم $f = g + f_{n_1}$. آنگاه‌دراندازه $f_{n_\nu} \to f$ ، درنتیجه‌می‌توان‌نشان‌دادکه f_n دراندازه‌به f می‌گراید .]

فصل پنجم

مشتــق‌گیـری و انتگـرال‌گیــری

دراین‌فصل مشتق‌گیری را به‌معنی وارون انتگرال‌گیری درنظر می‌گیریم . به‌ویژه باپرسشهای زیر روبرو خواهیم بود :

چه هنگامی برابریهای زیر برقرارند ؟

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(y)\,dy = f(x)$$

بنابرنظریهٔ انتگرال‌گیری ریمن ، می‌دانیم رابطهٔ دوم هنگامی برقرار است که x ، یک‌نقطهٔ پیوستگی f باشد . دراینجا نشان خواهیم داد که این‌رابطه در حالت کلی تقریبا " همه‌جا برقرار است . ازاین‌رو مشتق‌گیری‌وارون‌عمل انتگرال‌گیری‌لبگ است . ولی پاسخ‌به‌پرسش‌نخست دشوارتراست ، حتی درمورد انتگرال‌لبگ نیز این‌برابری‌تنهادرمورد رده‌های خاص تابعها برقرار است که آنهارا مشخص خواهیم ساخت .

۱ ــ مشتــق‌گیـری از تابعهــای یکنـــوا

گیریم $\mathcal{g}$ دسته‌ای‌ازفاصله‌هاست . می‌گوییم $\mathcal{g}$ بــه‌معنــی‌ویتــالــی[۱] مجموعهٔ E را می‌پوشاند ، هرگاه‌برای‌هر $\epsilon > 0$ و هر x متعلق‌به E یک‌فاصلهٔ $I \in \mathcal{g}$ وجودداشته باشد به‌گونه‌ای‌که $x \in I$ و $l(I) < \epsilon$.

۱ ــ لــم (ویتــالــی) :

گیریم E مجموعه‌ای‌است بااندازهٔ بیرونی‌باپایان و $\mathcal{g}$ مجموعه‌ای‌ازفاصله‌هاست که به‌مفهوم ویتالی E را می‌پوشاند . دراین‌صورت برای‌هر $\epsilon > 0$ داده شده یک دستهٔ باپایان $\{I_1, \ldots, I_N\}$ ازفاصله‌های مجزای $\mathcal{g}$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که :

$$m^*\left[E \sim \bigcup_{n=1}^{N} I_n\right] < \epsilon.$$

۱ —Vitali

برهــــان :

کافی‌است قضیه‌را درحالتی‌که هریک ازفاصله‌های $\mathcal{g}$ بسته‌اند ثابت کنیم ، وگرنه به‌جای هرفاصله ، بستار آن‌را قرار داده و مشاهده می‌کنیم که اندازهٔ مجموعهٔ نقطه‌های انتهایی فاصله‌های $I_1, \ldots, I_N$ صفر است .

گیریم مجموعهٔ باز و باندازهٔ باپایان O شامل E است . چون $\mathcal{g}$ برای E یک پوشش ویتالی است ، بدون ازدست دادن کلیت می‌توان فرض کرد که هر فاصلهٔ $I \in \mathcal{g}$ مشمول O است . دنبالهٔ $\langle I_n \rangle$ از فاصله‌های مجزای $\mathcal{g}$ را باروش استقراء به‌ترتیب زیــر برمی‌گزینیــم :

گیــــریــــم I_1 یک‌فاصلهٔ دلخواه‌از $\mathcal{g}$ است ، و فرض‌می‌کنیم‌که $I_1, \ldots, I_n$ ازپیش برگزیده‌شده‌اند . گیریم k_n کرانهٔ‌بالای درازی فاصله‌هایی از $\mathcal{g}$ است که با هیچیک از فاصله‌های $I_1, \ldots, I_n$ ، اشتراک‌ندارند . چون‌هرفاصلهٔ $\mathcal{g}$ $I \in$ مشمول O است ، داریم $k_n \leq mO < \infty$.

اگــــــر $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ نباشد می‌توان I_{n+1} متعلق به $\mathcal{g}$ را به‌گونه‌ای‌یافت که : $l(I_{n+1}) > \frac{1}{2}k_n$ بوده و I_{n+1} از $I_1, \ldots, I_n$ مجزا باشد . بنـــابرایـــن یک‌دنبالهٔ $\langle I_n \rangle$ ازفاصله‌های‌باز $\mathcal{g}$ داریم ، وچون $\bigcup I_n \subset O$ داریم $\sum l(I_n) \leq mO < \infty$ پس می‌توان عدد درست و مثبت N را چنان یافت که :

$$\sum_{N+1}^{\infty} l(I_n) < \frac{\epsilon}{5}$$

گیــریـــم :

$$R = E \sim \bigcup_{n=1}^{N} I_n$$

اگر ثابت‌کنیم $m^*R < \epsilon$ ، اثبات لم پایان‌خواهدیافت . گیریم x یک‌نقطهٔ دلخواه R است ، چون $\bigcup_{n=1}^{N} I_n$ یک‌مجموعهٔ‌بسته است که‌شامل x نیست ، می‌توان فاصلهٔ I متعلق‌به $\mathcal{g}$ را چنان یافت که شامل x بوده و درازی آن آنقدر کوچک‌باشد که I ، هیچ‌یک از فاصله‌های $I_1, \ldots, I_N$ را قطع نکند . اکنـــون اگـــر بـــرای $i \leq n$ ، $I \cap I_i = \varnothing$ باشد ، آنگاه‌باید $l(I) \leq k_n < 2l(I_{n+1})$. چون $\lim l(I_n) = 0$ است ، فاصلهٔ I دست‌کم باید یکی‌از فاصله‌های I_n را قطع‌کند . گیریم n کوچکترین عدد درست و مثبتی است به‌گونه‌ای‌که I فاصلهٔ I_n را قطع نمی‌کند . داریم $n > N$ ، و $l(I) \leq k_{n-1} \leq 2l(I_n)$. چون x متعلق‌است به I و I با I_n یک نقطهٔ‌مشترک دارد ، نتیجه می‌شود که دوری x تاوسط I_n حداکثر برابر است با :

$l(I) + \frac{1}{2}l(I_n) \leq \frac{5}{2}l(I_n)$ از ایـــــــــــــــن‌رو x متعلق است به‌فاصلهٔ J_n ، که وسطش بر وسط I_n منطبق و طولش پنج‌برابر طول آن است . بنابراین نشان دادیم که :

$$R \subset \bigcup_{N+1}^{\infty} J_n$$

ازایـــن‌رو :

$$m^*R \leq \sum_{N+1}^{\infty} l(J_n) = 5 \sum_{N+1}^{\infty} l(I_n) < \epsilon. \blacksquare$$

برای گفتگو دربارهٔ مشتق‌های یک تابع f ، نخست مجموعهٔ چهار کمیت زیر را که مشتـــــق‌های f در x نامیده می‌شوند ، تعریف می‌کنیم :

$$D^+f(x) = \overline{\lim_{h \to 0+}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

$$D^-f(x) = \overline{\lim_{h \to 0+}} \frac{f(x) - f(x-h)}{h},$$

$$D_+f(x) = \underline{\lim_{h \to 0+}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

$$D_-f(x) = \underline{\lim_{h \to 0+}} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

روشن است که $D_+f(x) \geq D^+f(x)$ و $D^-f(x) \geq D_-f(x)$. اگر

$$D^+f(x) = D_+f(x) = D^-f(x) = D_-f(x) \neq \pm\infty$$

می‌گوییم f در نقطهٔ x دارای مشتق است و مقدار مشترک مشتق‌های f را درنقطهٔ x ، برابر $f'(x)$ می‌گیریم .

۲ ـ قضیـــــــه :

گیریم تابع حقیقی f روی فاصلهٔ $[a, b]$ افزایشی است . دراین‌صورت f تقریباً " همه‌جا دارای مشتق است . f' مشتق f اندازه‌پذیر است ، و داریم :

$$\int_a^b f'(x)\,dx \le f(b) - f(a).$$

برهــــان :

نشان می‌دهیم که مجموعه‌هایی که روی آن‌ها دومشتق برابر نیستند دارای اندازهٔ صفرند. برای این منظور تنها مجموعهٔ E را که روی آن $D^+f(x) > D_-f(x)$ است درنظر می‌گیریم ، درمورد مجموعه‌هائی که از ترکیبات دیگر مشتق‌ها به‌دست می‌آیند ، باروش مشابهی عمل می‌کنیم . اکنون گوییم که مجموعهٔ E اجتماع مجموعه‌های زیر است :

$$E_{u,v} = \{x: D^+f(x) > u > v > D_-f(x)\}$$

که‌درآن u و v دوعدد گویا هستند . ازاین‌رو کافی است ثابت کنیم که $m^*E_{u,v} = 0$ فرض می‌کنیم $s = m^*E_{u,v}$ ، و $\epsilon > 0$ یک‌عدد اختیاری‌است ، $E_{u,v}$ را درمجموعهٔ بازO محاط می‌کنیم به‌گونه‌ای‌که $mO < s + \epsilon$ باشد . برای‌هرنقطهٔ $x \in E_{u,v}$ ، یک‌فاصلهٔ $[x - h, x]$ وجود داردکه به‌دلخواه کوچک بوده و مشمول O است،به‌گونه‌ای‌که :

$$f(x) - f(x - h) < vh.$$

بنابر لم ۱ می‌توان مجموعهٔ باپایان $\{I_1, \ldots, I_N\}$ ازاین‌فاصله‌هارا برگزید به‌گونه‌ای‌که درون آنها یک زیرمجموعهٔ A از $E_{u,v}$ را که اندازهٔ بیرونی‌آن از $s - \epsilon$ بزرگتراست ، بپوشاند . دراین‌صورت اگر نابرابری اخیر را روی این فاصله‌ها جمع کنیم ، داریم :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} [f(x_n) - f(x_n - h_n)] &< v \sum_{n=1}^{N} h_n \\ &< vmO \\ &< v(s + \epsilon).\end{aligned}$$

اکنون‌گوییم ، هر نقطهٔ $y \in A$ نقطهٔ انتهایی چپ یک فاصلهٔ به‌دلخواه کوچک $(y, y + k)$ است که مشمول یکی‌از I_n هاست ، به‌گونه‌ای‌که $f(y + k) - f(y) > uk$ بااستفادهٔ دوباره از لم ۱ می‌توان یک‌مجموعهٔ‌باپایان $\{J_1, \ldots, J_M\}$ ازاین‌فاصله‌هارا برگزید به‌گونه‌ای‌که اجتماع‌آنها شامل‌یک‌زیرمجموعهٔ A بااندازهٔ‌بیرونی‌بزرگتراز $s - 2\epsilon$ ، باشد . دراین‌صورت ، اگر نابرابری‌اخیر را روی‌این‌فاصله‌هاجمع‌کنیم ، داریم :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{M} f(y_i + k_i) - f(y_i) &> u \sum k_i \\ &> u(s - 2\epsilon).\end{aligned}$$

هرفاصلهٔ J_i مشمول یکی‌از فاصله‌های I_n است ، و اگر نسبت‌به i هایی که برای آنها $J_i \subset I_n$ است جمع کنیم ، داریم :

$$\sum f(y_i + k_i) - f(y_i) \le f(x_n) - f(x_n - h_n),$$

زیرا f افزایشی است ، ازاین‌رو :

$$\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - f(x_n - h_n) \ge \sum_{i=1}^{M} f(y_i + k_i) - f(y_i),$$

پس :

$$v(s + \epsilon) > u(s - 2\epsilon).$$

چون این نابرابری برای‌هرمقدار $\varepsilon > 0$ درست‌است ، پس $vs \ge us$. ولی $u > v$ است ، بنابراین s باید صفر باشد .

این نشان می‌دهد که :

$$g(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

تقریبا" همه‌جا تعریف شده‌وهروقت g باپایان است ، f مشتق‌پذیر است .

گیریم :

$$g_n(x) = n[f(x + 1/n) - f(x)]$$

که درآن برای $x \ge b$ قرار می‌دهیم $f(x) = f(b)$. دراین‌صورت تقریبا" برای همهٔ x ها ، $g_n(x) \to g(x)$ ، پس g اندازه‌پذیراست . چون f افزایشی‌است ، داریم $g_n \ge 0$. ازاین‌رو بنابر لم فاتو :

$$\begin{aligned}
\int_a^b g \le \varliminf \int_a^b g_n &= \varliminf n\int_a^b [f(x + 1/n) - f(x)]\,dx \\
&= \varliminf \left[n\int_b^{b+1/n} f - n\int_a^{a+1/n} f\right] \\
&= \varliminf \left[f(b) - n\int_a^{a+1/n} f\right] \\
&\le f(b) - f(a).
\end{aligned}$$

این‌نشان‌می‌دهدکه g انتگرال‌پذیر است ، ازاین‌رو تقریبا" همه‌جا باپایان است .
بنابراین f تقریبا" همه‌جا مشتق‌پذیر است و تقریبا" همه‌جا داریم : $g = f'$ ∎

مسئله‌ها

۱ ــ گیریم تابع f به‌شکل $f(0) = 0$ و $f(x) = x \sin(1/x)$ برای $x \ne 0$ ،

تعریف شده است ، $D^-f(0)$ ، $D_+f(0)$ ، $D^+f(0)$ و $D_-f(0)$ راپیداکنید .

۲ ــ اگر تابع f مقدار ماکزیمم خود را در c اختیار کند ، هراین صورت :
$D^+f(c) \leq 0$ و $D_-f(c) \geq 0$.

۳ ــ اگر f روی $[a, b]$ پیوسته و یکی از مشتق‌های آن (مثلاً " D^+) همه‌جا روی $[a, b]$ نامنفی باشد ، دراین‌صورت $f(b) \geq f(a)$ [راهنمایی : این مطلب‌را نخست درمورد تابع g که برای آن $D^+g \geq \epsilon > 0$ است نشان دهید و سپس آن‌را برای تابع $g = f + \epsilon x$ بکار ببرید] .

۲ ــ تابعهای باتغییر کراندار

گیریم تابع حقیقی f روی‌فاصلهٔ $[a, b]$ تعریف شده‌و $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ یک‌تقسیم جزیی دلخواه $[a, b]$ است . قرار می‌دهیم :

$$p = \sum_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^+$$

$$n = \sum_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^-$$

$$t = n + p = \sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

که‌درآن r^+ نمایش r است‌اگر $r \geq 0$ و ه است‌اگر $r \leq 0$ ،وقرار می‌دهیم $r^- = |r| - r^+$. داریم $f(b) - f(a) = p - n$. قرار می‌دهیم :

$$P = \sup p$$
$$N = \sup n$$
$$T = \sup t$$

که‌درآن کنارهٔ بالا روی‌همهٔ تقسیمهای جزیی ممکن $[a, b]$ گرفته می‌شود . روشن‌است که $P \leq T \leq P + N$. T ، N، P رابه‌ترتیب تغییرات مثبت ، منفی‌وکلی f روی $[a, b]$ می‌نامیم . گاهی می‌نویسیم T_a^b، $T_a^b(f)$ و غیره ، برای این‌که نشان دهیم این تغییرات به‌فاصلهٔ $[a, b]$ یا به‌تابع f بستگی دارند . اگر $T < \infty$ باشد می‌گوییم که f ، روی $[a, b]$ دارای **تغییر کراندار** است . گاهی این مفهوم را به‌کوتاهی با $f \varepsilon BV$ نشان می‌دهیم .

۳ــ لـــــم :

اگر f روی $[a, b]$ دارای تغییرکراندار باشد ، آنگاه :

$$T_a^b = P_a^b + N_a^b$$

و

$$f(b) - f(a) = P_a^b - N_a^b$$

بــــرهـــــان :

برای هر تقسیم جزیی $[a, b]$ داریم :

$$p = n + f(b) - f(a) \leq N + f(b) - f(a)$$

اگـــــر روی همهٔ تقسیمهـــای جـــزیـــــی ممکن کنارهٔ بالا بگیریم ، به‌دست می‌آوریم :

$$P \leq N + f(b) - f(a)$$

چون $N \leq T < \infty$ است ، پس:

$$P - N \leq f(b) - f(a)$$

به‌همین‌ترتیب :

$$N - P \leq f(a) - f(b)$$

پـس:

$$P - N = f(b) - f(a).$$

بنــابــرایـــن :

$$T \geq p + n = p + p - \{f(b) - f(a)\} = 2p + N - P$$

و

$$T \geq 2P + N - P = P + N.$$

چون $T \leq P + N$ است ، داریم $T = P + N$. ∎

۴ــ قضیـــــه:

تابع f روی $[a, b]$ باتغییر کراندار است اگر و تنها اگر f روی $[a, b]$ تفاضل دوتابع حـقیقی یکنوا باشد .

برهـــــان :

گیریم f باتغییرکرانداراست . و قرارمی‌دهیم $g(x) = P_a^x$ و $h(x) = N_a^x$.
دراین‌صورت g و h دوتابع حقیقی افزایشی یکنوا هستند . زیرا :
$0 \le P_a^x \le T_a^x \le T_a^b < \infty$ و $0 \le N_a^x \le T_a^x \le T_a^b < \infty$. ولـی بنـابر لـــم ۳ ، $f(x) = g(x) - h(x) + f(a)$. چون $h - f(a)$ تابعی‌یکنوا است ، بنابراین f ، به‌شکل تفاضل دوتابع یکنوا بیان شد .

ازسوی‌دیگر ، اگر g و h روی $[a, b]$ ، دوتابع افزایشی و $f = g - h$ باشد ، آنگاه برای هرتقسیم جزیی داریم :

$$\sum |f(x_i) - f(x_{i-1})| \le \sum [g(x_i) - g(x_{i-1})] + \sum [h(x_i) - h(x_{i-1})]$$
$$= g(b) - g(a) + h(b) - h(a).$$

از ایـــن‌رو :

$$T_a^b(f) \le g(b) + h(b) - g(a) - h(a). \blacksquare$$

۵ ــ نتیجــــــه :

اگر f روی $[a, b]$ باتغییر کراندار باشد ، آنگاه $f'(x)$ تقریبا " برای همهٔ مقدارهای x متعلق‌به $[a, b]$ وجود دارد .

مسئلـــــه‌هـا

۴ ــ الــف ــ گیریم f روی $[a, b]$ باتغییر کراندار است . نشان دهید کــه برای‌هر $c \in (a, b)$ حدتابع $f(x)$ هنگامی‌که $x \to c+$ یا $x \to c-$ وجود دارد . ثابت کنید که هر تابع یکنوا (درنتیجه هرتابع باتغییر کراندار) تنها می‌تواند نقطه‌های ناپیوستگی شمارش‌پذیری‌داشته‌باشد .[**راهنمـــایـــی** :اگر f یکنواباشد ، شمارهٔ نقطه‌هایی که برای آنـها $|f(c+) - f(c-)| > 1/n$ است ، باپایان است].

ب ــ روی [۰ ، ۱] تابع یکنوایی بسازید که در هر نقطهٔ گویا ناپیوسته باشد .

۵ ــ نشان‌دهیدکه‌اگر $a \le c \le b$ باشد ، دراین‌صورت $T_a^b = T_a^c + T_c^b$ و ازاین‌رو $T_a^c \le T_a^b$ است .

۶ ــ نشان دهید که $T_a^b(f+g) \le T_a^b(f) + T_a^b(g)$ و $T_a^b(cf) = |c|\, T_a^b(f)$ است.

۷ ــ گیریم $\langle f_n \rangle$ یک دنباله از تابعهای روی $[a, b]$ است که در هرنقطهٔ $[a, b]$ به یک تابع f می‌گراید. دراین صورت داریم $T_a^b(f) \le \varliminf T_a^b(f_n)$

۸ ــ الف ــ گیریم f به شکل $f(0) = 0$، و $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ برای $x \neq 0$ تعریف شده است. آیا f روی $[-1, 1]$ باتغییر کراندار است ؟

ب ــ گیریم g به‌شکل $g(0) = 0$ و $g(x) = x^2 \sin(1/x)$ برای $x \neq 0$، تعریف شده است. آیا g روی $[-1, 1]$ باتغییر کراندار است ؟

۳ــ مشتق‌گیری‌از یک انتگرال

دراین بند نشان خواهیم داد که مشتق انتگرال نامعین یک تابع انتگرال‌پذیر تقریبا" همه‌جا برابر تابع زیر نشان‌انتگرال‌است. بااثبات‌چند لم آغازمی‌کنیم.

۶ ــ لم :

اگر f روی $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشد، دراین‌صورت تابع F که با :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

تعریف می‌شود، روی $[a, b]$ پیوسته و باتغییر کراندار است.

برهان :

پیوستگی F ازگزارهٔ ۴ . ۱۳ نتیجه‌می‌شود. برای‌این‌که نشان دهیم F باتغییر کراندار است، فرض‌می‌کنیم $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ یک‌تقسیم جزیی دلخواه $[a, b]$ است. دراین‌صورت :

$$\sum_{i=1}^{k} |F(x_i) - F(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{k} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\, dt \right| \le \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|\, dt$$
$$= \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

از این‌رو:
$$T_a^b(F) \le \int_a^b |f(t)|\,dt < \infty. \blacksquare$$

۷ـ لـــم:

اگر f روی $[a, b]$ انتگرال‌پذیر و برای همهٔ مقدارهای $x \varepsilon [a, b]$:
$$\int_a^x f(t)\,dt = 0$$
باشد، آنگاه تقریبا" همه‌جا روی $[a, b]$ ، $f(t) = 0$ است.

برهـــان:

فرض کنیم که روی مجموعهٔ بااندازهٔ مثبت E ، $f(x) > 0$. دراین‌صورت بنابرگزارهٔ ۳ . ۱۵ یک‌مجموعهٔ بستهٔ $F \subset E$ با $mF > 0$ وجود دارد. گیریم $O = (a, b) \sim F$. دراین‌صورت یا $\int_a^b f \neq 0$ ، یا:
$$0 = \int_a^b f = \int_F f + \int_O f$$
و
$$\int_O f = -\int_F f \neq 0$$
ولی O اجتماع یک‌دستهٔ شمارش‌پذیر $\{(a_n, b_n)\}$ ازفاصله‌های بازمجزاست، پس بنابرگزارهٔ ۴ . ۱۱ داریم:
$$\int_O f = \sum \int_{a_n}^{b_n} f$$
بنابراین دست‌کم برای یک مقدار n داریم:
$$\int_{a_n}^{b_n} f \neq 0$$
پس:
$$\int_a^{a_n} f \neq 0$$
یا:
$$\int_a^{b_n} f \neq 0.$$

درهرحال می‌بینیم که اگر روی مجموعه‌ای بااندازهٔ مثبت، f مثبت باشد، دراین‌صورت برای یک x متعلق‌به $x \varepsilon [a, b]$ داریم:
$$\int_a^x f \neq 0.$$

این مطلب برای هنگامی که روی یک مجموعهٔ با اندازهٔ مثبت ، f منفی است درست است ، و لم با عکس نقیض ثابت می شود.∎

۸ـ لـــــم :

اگر f روی $[a, b]$ کراندار و اندازه‌پذیر بوده و :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt + F(a),$$ باشد ،

دراین‌صورت تقریباً برای همهٔ مقدارهای x متعلق به $[a, b]$ داریم $F'(x) = f(x)$

بـــرهـــــان :

بنابر لم ۶ ، F روی $[a, b]$ باتغییرکرانداراست ، پس $F'(x)$ تقریباً برای همهٔ مقدارهای x متعلق به $[a, b]$ وجود دارد . گیریم $|f| \leq K$. دراین‌صورت اگر قرار دهیم :

$$f_n(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

با $h = 1/n$ ، داریم :

$$f_n(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt$$

پـــس :

$$|f_n| \leq K$$

چون تقریباً همه‌جا

$$f_n(x) \to F'(x)$$

قضیـــه همـگـرایـی کـرانـدارایجاب می‌کند که :

$$\int_a^c F'(x)\, dx = \lim \int_a^c f_n(x)\, dx = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_a^c (F(x+h) - F(x))\, dx$$

$$= \lim \left[\frac{1}{h} \int_c^{c+h} F(x)\, dx - \frac{1}{h} \int_a^{a+h} F(x)\, dx\right]$$

$$= F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)\, dx$$

زیــــــــرا F پیوسته است . ازاین‌رو برای هر $c \in [a, b]$ داریم :

$$\int_a^c \{F'(x) - f(x)\}\, dx = 0$$

پس، بنابر لم ۷ :

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{ت . ه .}$$ ∎

۹ ــ قضیــــه :

اگر تابع f روی $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشد و فرض کنیم :

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\, dt$$

دراین‌صورت تقریبا" برای همهٔ مقدارهای x در $[a, b]$ داریم $F'(x) = f(x)$

برهــــان :

بدون ازدست‌دادن حالت کلی ، می‌توانیم فرض کنیم $f \geq 0$. گیــریــــــم f_n بــــه‌شـــــکل : $f_n(x) = f(x)$ اگر $f(x) \leq n$ و $f_n(x) = n$ اگــــر $f(x) > n$ ، تعریف شده است . دراین‌صورت $f - f_n \geq 0$ ، پـــس :

$$G_n(x) = \int_a^x f - f_n$$

یک تابع افزایشی از x است که باید تقریبا" همه‌جا دارای‌مشتق‌باشد و این مشتق نامنفی است . اکنون بنابر لم ۸ داریم :

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f_n = f_n(x) \qquad \text{ت . ه .}$$

پـــس :

$$F'(x) = \frac{d}{dx} G_n + \frac{d}{dx}\int_a^x f_n$$
$$\geq f_n(x) \qquad \text{ت . ه .}$$

چون n دلخواه است ، پـــس :

$$F'(x) \geq f(x) \qquad \text{ت . ه .}$$

درنتیجــــه :

$$\int_a^b F'(x)\, dx \geq \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

از این‌رو بنابرقضیهٔ ۲ داریم :

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

و

$$\int_a^b (F'(x) - f(x))\,dx = 0$$

چون $F'(x) - f(x) \geq 0$ ، این ایجاب می‌کند که ت . ه 0 ، $F'(x) - f(x) = 0$ باشد ، پس ت . ه . $F'(x) = f(x)$

۴ ـ پیوستگی مطلق

تابع حقیقی f را که روی فاصلهٔ $[a, b]$ تعریف شده است ، روی این فاصله پیوستهٔ مطلق می‌گویند هرگاه برای‌هر $\epsilon > 0$ یک‌عدد $\delta > 0$ وجود داشته‌باشد به‌گونه‌ای که برای هردستهٔ باپایان $\{(x_i, x_i')\}$ ازفاصله‌هایی که نقطهٔ مشترکی باهم ندارند و در نابرابری :

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i' - x_i| < \delta$$

صدق می‌کنند ، داشته باشیم :

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i') - f(x_i)| < \epsilon$$

هر تابع پیوستهٔ مطلق پیوسته است ، و از گزارهٔ ۴ ۰ ۱۳ نتیجه می‌شود که هر انتگرال نامعین به‌طورمطلق پیوسته است .

۱۰ ـ لم :

اگر f روی $[a, b]$ پیوستهٔ مطلق باشد ، دراین‌صورت روی این فاصله با تغییر کراندار است .

برهان :

گیریم در تعریف پیوستگی‌مطلق δ نظیر $\epsilon = 1$ است . دراین‌صورت هر تقسیم جزیی $[a, b]$ را می‌توان‌به K دستهٔ مجزا ازفاصله‌هابخش‌کرد (درصورت‌لزوم باافزودن

نقطه‌های‌تقسیم‌تازه) ، که طول کلی هریک از δ کوچکتر باشد ، که درآن K بزرگترین‌عدد درست مثبت‌کوچکتر از $(b-a)/\delta + 1$ است . بنابراین برای هرتقسیم داریم : $t \leq K$ ، پس $T \leq K$ ∎

۱۱ــ نتیجه :

اگر f پیوستهٔ مطلق باشد ، دراین‌صورت f تقریبا" همه‌جا مشتق دارد .

۱۲ــ لم :

اگر f روی $[a, b]$ پیوستهٔ مطلق و ت.ه. $f'(x) = 0$ باشد ، آنگاه f ، ثابت است .

برهان :

می‌خواهیم نشان دهیم که برای هر $c \in [a, b]$ ، $f(a) = f(c)$ است . گیریم $E \subset (a, c)$ مجموعه‌ای‌با‌اندازهٔ $c - a$ است‌که‌درآن $f'(x) = 0$ است ، و گیریم ϵ و η عددهای مثبت دلخواه هستند . برای هر $x \in E$ یک فاصلهٔ به‌دلخواه کوچک $[x, x + h]$ مشمول $[a, c]$ وجوددارد‌به‌گونه‌ای‌که $|f(x + h) - f(x)| < \eta h$:
بنابر لم ۱ می‌توان یک دستهٔ باپایان $\{[x_k, y_k]\}$ از این‌گونه فاصله‌ها که نقطهٔ مشترکی باهم ندارند یافت به‌گونه‌ای‌که همهٔ E به‌جز مجموعه‌ای بااندازهٔ کوچکتر از δ ، را بپوشاند ، که‌درآن $\delta > 0$ عددمربوط به ϵ درتعریف پیوستگی مطلق f است . اگر x_k ها را به‌گونه‌ای نامگذاری‌کنیم که $x_k \leq x_{k+1}$ باشد ، داریم :

$$y_0 = a \leq x_1 < y_1 \leq x_2 < \cdots \leq y_n \leq c = x_{n+1}$$

و

$$\sum_{k=0}^{n} |x_{k+1} - y_k| < \delta.$$

اکنون بنابه‌روشی که فاصله‌های $\{[x_k, y_k]\}$ ساخته‌شده‌اند ، داریم :

$$\sum_{k=1}^{n} |f(y_k) - f(x_k)| \leq \eta \sum (y_k - x_k)$$
$$< \eta(c - a)$$

وبنابرپیوستگی مطلق f ، داریم :

$$\sum_{k=0}^{n} |f(x_{k+1}) - f(y_k)| < \epsilon$$

بنابرایــــن :

$$|f(c) - f(a)| = \left| \sum_{k=0}^{n} [f(x_{k+1}) - f(y_k)] + \sum_{k=1}^{n} [f(y_k) - f(x_k)] \right|$$
$$\leq \epsilon + \eta(b - a)$$

چون ϵ و η عددهای مثبت دلخواه هستند ، پس $f(c) - f(a) = 0$. ▮

۱۳ ــ قضیــــه :

هرتابع F انتگرال نامعین یک تابع است ، اگر و تنها اگر پیوستهٔ مطلق باشد .

بــرهـــــان :

اگر F یک‌انتگرال‌نامعین باشد ، آنگاه بنابرگزارهٔ ۴ . ۱۳ ، پیوستهٔ مطلق است .
از سوی دیگر فرض کنیم که F روی $[a, b]$ پیوستهٔ مطلق‌است . دراین‌صورت F باتغییر کراندار است و می‌توان نوشت :

$$F(x) = F_1(x) - F_2(x)$$

که‌درآن F_i هاتابعهای‌افزایشی‌یکنواهستند . بنابراین $F'(x)$ تقریبا "همه‌جاوجود داردو

$$|F'(x)| \leq F_1'(x) + F_2'(x).$$

پس بنابرقضیهٔ ۲ :

$$\int |F'(x)|\, dx \leq F_1(b) + F_2(b) - F_1(a) - F_2(a)$$

و $F'(x)$ انتگرال‌پذیر است . گیریم :

$$G(x) = \int_a^x F'(t)\, dt.$$

دراین‌صورت تابع G و درنتیجه تابع $f = F - G$ پیوستهٔ‌مطلق است . از قضیهٔ ۹ نتیجه می‌شود :

$$f'(x) = F'(x) - G'(x) = 0 \qquad \text{ت . هـ .}$$

پس بنابر لم ۱۲ ، f ثابت است ، بنابراین :

$$F(x) = \int_a^x F'(t)\, dt + F(a). \ ▮$$

۱۴ نتیجــــه:

هرتابع پیوستهٔ مطلق، *انتگرال نامعین مشتق خودش است*.

مسئلــــه‌ها

۹ ــ گیریم برای هر $0 < \epsilon$ تابع f درفاصلهٔ $[\epsilon, 1]$ پیوستهٔ مطلق است. آیاپیوستگی f در ۰ پیوستگی‌مطلق f روی $[0, 1]$ را ایجاب‌می‌کند؟ اگر fروی $[0, 1]$ باتغییر کراندار نیز باشد، دراین‌مورد چه می‌توان گفت؟

۱۰ ــ گیریم f روی $[a, b]$ پیوستهٔ مطلق است، نشان دهید:

$$T_a^b(f) = \int_a^b |f'| \quad \text{و} \quad P_a^b(f) = \int_a^b [f']^+.$$

۱۱ ــ تابع سه‌سه‌ای‌کانتــــور (مسئلهٔ۲۰ . ۴۶) پیوسته و یکنواست ولـــــی پیوستهٔ مطلق نیست.

۱۲ ــ یک تابع یکنوای f را روی $[a, b]$ استثنــایـــــی می‌نامند. هــرگــاه ت . هـ . $f' = 0$ باشد.

الف ــ نشان دهید که هر تابع افزایشی یکنوا مجموع یک تابع پیوستهٔ مطلق و یک تابع استثنایی است.

ب ــ یک‌تابع f بسازید که روی $[0, 1]$ یکنوا و پیوسته باشدولی روی هیچ‌یک از زیرفاصله‌های $[0, 1]$ پیوسته مطلق نباشد.

پ ــ نشان‌دهیدکه‌روی $[0, 1]$ یک‌تابع استثنائی اکیدا" افزایشی وجوددارد.

۱۳ ــ تعــویـــض متغیـــر:

گیریم g روی $[a, b]$ یک تابع افزایشی یکنوا و پیوستهٔ مطلق اســت بـــا $g(a) = c, g(b) = d$

الف ــ نشان دهید که برای هر مجموعهٔ باز $O \subset [c, d]$

$$mO = \int_{g^{-1}[O]} g'(x)\, dx.$$

ب ــ گیریم $H = \{x: g'(x) \neq 0\}$. اگر E زیرمجموعه‌ای از $[c, d]$ با $mE = 0$ باشد ، دراین‌صورت $g^{-1}(E) \cap H$ دارای اندازهٔ صفر است .

پ ــ اگر E یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر $[c, d]$ باشد ، دراین‌صورت $F = g^{-1}[E] \cap H$ اندازه‌پذیر است و داریم :

$$mE = \int_F g' = \int_a^b \chi_E(g(x))g'(x)\,dx.$$

ت ــ اگر f روی $[c, d]$ یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی باشد ، دراین‌صورت $(f \circ g)g'$ روی $[a, b]$ اندازه‌پذیر است و :

$$\int_c^d f(y)\,dy = \int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx.$$

۱۴ ــ گیریم g روی $[0, 1]$ یک تابع یکنوا و پیوستهٔ مطلق و E مجموعه‌ای با اندازهٔ صفر است . دراین‌صورت $g[E]$ دارای اندازهٔ صفر است .

۱۵ ــ الف ــ روی‌فاصلهٔ $[0, 1]$ تابع اکیدا" یکنوای g را به‌گونه‌ای بسازید که پیوستهٔ مطلق بوده و g' روی‌مجموعه‌ای بااندازهٔ مثبت ، صفر باشد . [**راهنمایی** : G را مکمل یک مجموعهٔ تعمیم‌یافتهٔ کانتور بااندازهٔ مثبت (مسئلهٔ ۳ . ۱۴) و g را انتگرال نامعین χ_G بگیرید].

ب ــ نشان دهید که یک مجموعهٔ E بااندازهٔ صفر وجود دارد به‌گونه‌ای که $g^{-1}[E]$ اندازه‌پذیر نیست . این‌مثال‌را چگونه‌بامسئله۳ . ۲۸مقایسه‌می‌کنیم ؟

۱۶ ــ می‌گویند تابع f روی یک فاصله در شرط لیپ‌شیتز[1] صدق می‌کند ، هرگاه یک‌عددثابت M وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که برای همهٔ‌مقدارهای x و y از این فاصله داشته باشیم :

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

الف ــ نشان‌دهید که هرتابع که‌درشرط لیپ‌شیتز صدق کند پیوستهٔ مطلق‌است .

ب ــ نشان دهید که هر تابع پیوستهٔ مطلق f در شرط لیپ‌شیتز صدق می‌کند ، اگر و تنها اگر $|f'|$ کراندار باشد .

۵ ــ تابعهای کــــوژ

تابع φ که‌روی‌یک‌فاصلهٔ‌باز (a, b) تعریف شده است ، دراین فاصله کـــوژ

---

[1] Lipschitz

گفته می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in (a, b)$ و هر λ با $0 \leq \lambda \leq 1$ داشته باشیم:

$$\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y).$$

با توجه به‌نمودار φ در $\mathbf{R}^2$ می‌توان این شرط را به‌طورهندسی چنین بیان کرد، که هر نقطه‌ٔ واقع بر وتر گذرنده بر نقطه‌های $\langle x, \varphi(x) \rangle$ و $\langle y, \varphi(y) \rangle$ بالای نمودار φ است. یکی‌از خاصیتهای مهم وترهای یک تابع کوژ در لم زیر داده شده است که اثبات آن به‌خواننده واگذار شده است.

۱۵ ــ لــــم:

اگر φ روی (a, b) کوژ بوده و x, y, x', y' نقطه‌هایی از (a, b) باشند با $x \leq x' < y'$ و $x < y \leq y'$، دراین‌صورت شیب‌وتر مربوط به (x', y') از شیب‌وتر مربوط به (x, y) بزرگتر است، یعنی:

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} \leq \frac{\varphi(y') - \varphi(x')}{y' - x'}.$$

اگر مشتقهای چپ بالایی و پایینی یک‌تابع f یعنی D^-f و D_-f در یک نقطهٔ x، باپایان و برابر باشند، می‌گویند f در نقطهٔ x مشتق چپ دارد و این مقدار مشترک را مشتق‌چپ‌تابع f درنقطهٔ x می‌نامند. به‌همین‌ترتیب می‌گوییم تابع f در نقطهٔ x دارای مشتق‌راست‌است‌هرگاه D^+f و D_+f برابرباشند. درگزارهٔ زیر برخی‌از خاصیتهای پیوستگی و مشتق‌پذیری تابعهای کوژ داده شده‌اند.

۱۶ ــ گـــــزاره:

اگر φ روی (a, b) کوژباشد، دراین‌صورت φ روی‌هرزیرفاصله‌بستهٔ (a, b) پیوستهٔ مطلق است. مشتق راست و مشتق چپ φ در هرنقطهٔ (a, b) وجود دارد و به‌جز روی یک مجموعهٔ شمارش‌پذیر باهم برابرند. مشتقهای چپ و راست φ، تابعهای افزایشی‌یکنوا هستند، و درهرنقطه مشتق‌چپ‌کوچکتر یا برابرمشتق‌راست‌است.

بـــرهـــــان:

گیریم $[c, d] \subset (a, b)$. دراین‌صورت‌بنابرلم ۱۵برای‌هر $x, y \in [c, d]$،

داریـــــم :

$$\frac{\varphi(c)-\varphi(a)}{c-a} \le \frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} \le \frac{\varphi(b)-\varphi(d)}{b-d}$$

ازاین‌رو در $[c, d]$ داریم $|\varphi(y)-\varphi(x)| \le M|x-y|$ پـــس، φ روی $[c, d]$ پیوسته‌ٔ مطلق است.

اگر $x_0 \in (a, b)$ باشد، آنگاه‌بنابرلم ۱۵، $[\varphi(x)-\varphi(x_0)]/(x-x_0)$ یک‌تابع افزایشی‌از x است، پس حد آن هنگامی‌که x ازراست‌یاازچپ به x_0 نزدیک‌می‌شود وجود دارد و باپایان است. بنابراین تابع φ درهرنقطه دارای مشتق‌چپ و مشتق‌راست است، و مشتق‌چپ‌آن کوچکتر است‌از، یا برابر است با مشتق‌راست‌آن. اگر $x_0 < y_0$، $x < y_0$ و $x_0 < y$، آنگاه :

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} \le \frac{\varphi(y)-\varphi(y_0)}{y-y_0},$$

و هرمشتق در x_0 کوچکتر یا مساوی‌هرمشتق در y_0 است. درنتیجه هرمشتق‌یکنوا است و این مشتقها در هر نقطه که یکی از آنها پیوسته باشد، برابرند. چون شماره‌ٔ نقطه‌های ناپیوستگی یک تابع یکنوا شمارش‌پذیر است. پس این مشتقها به‌جز روی یک مجموعه‌ٔ شمارش‌پذیر برابرند. ∎

گیـریـم تابـع φ روی (a, b) کـــوژ و $x_0 \in (a, b)$ اســت. خـــط $y = m(x-x_0) + \varphi(x_0)$ گذرنده‌بر $\langle x_0, \varphi(x_0)\rangle$ **یک‌خـــط تکیـه‌گـــاه** در x_0 نامیده می‌شود هرگاه همواره زیر نمودار φ قرار گیرد، به‌گفتـهٔ دیگـر اگـــر $\varphi(x) \ge m(x-x_0) + \varphi(x_0)$. باشد. از لم ۱۵ نتیجه‌می‌شود، که چنین خطی یک خط تکیه‌گاه است اگر و تنها اگر شیب آن، یعنی m، بین مشتق چپ و مشتق راست تابع در x_0 باشد. بنابراین به‌ویژه، همواره‌درهرنقطه دست‌کم یک‌خط تکیه‌گاه وجود دارد. این مفهوم ما را در ارائهٔ برهان کوتاهی برای‌گزارهٔ زیر توانا می‌سازد.

۱۷ ــ گـــزاره (نابـرابـری جنســـن)[۱]:

گیریم φ روی $(-\infty, \infty)$ یک‌تابع کوژ و f روی $[0, 1]$ یک‌تابع انتگرال‌پذیر

---

۱ — Jensen Inequality

است . دراین‌صورت داریم :

$$\int \varphi(f(t))\,dt \geq \varphi\left[\int f(t)\,dt\right].$$

برهـــان :

گیـریم $\alpha = \int f(t)\,dt$ و $y = m(x - \alpha) + \varphi(\alpha)$ معادلهٔ یک‌خط تکیه‌گاه در α است . دراین‌صورت :

$$\varphi(f(t)) \geq m(f(t) - \alpha) + \varphi(\alpha).$$

با انتگرال گیری از دوطرف‌نسبت‌به t، گزاره ثابت می‌شود .

این نابرابری دارای یک تعبیر هندسی جالب‌توجه است . چـون نقطـهٔ $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ گرانیگاه‌جرمهای λ و $1 - \lambda$ واقع در نقطه‌های x_1 و x_2 است ، می‌توان گفت که یک تابع هنگامی کوژ است که مقدارآن در گرانیگاه دونقطهٔ مادی کمتراز میانگین‌وزین مقدارهای‌آن دراین‌دونقطه‌باشد . نابرابری‌جنسن یک‌تعمیم این‌حقیقت‌است : اگرروی‌خط حقیقی‌یک‌تابع پخش‌جرم مانند μ ،رابا $\mu(a, b] = m\{t: a < f(t) \leq b\}$ تعریف‌کنیم ،آنگاه $\int f(t)\,dt$ گرانیگاه‌این‌جـرم و $\int \varphi(f(t))\,dt = \int \varphi(x)\,d\mu$ میانگین وزین φ است .

اگر تابع‌کوژ φ را تابع نمایی $\exp x = e^x$ بگیریم ، یک‌کاربرد مهم‌نابرابری جنسن به‌دست می‌آید . دراین‌صورت این نابرابری تبدیل‌به‌تعمیم نابرابری بین میانگین حسابی و هندسی می‌شود :

۱۸ ــ نتیجـــــه :

گیریم f روی $[0 \quad 1]$ انتگرال‌پذیر است ، دراین‌صورت :

$$\int \exp\,(f(t))\,dt \geq \exp\left[\int f(t)\,dt\right].$$

مسئلـــــه‌هـا :

۱۷ ــ گیریم g روی $[0, 1]$ یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی است . دراین‌صورت داریم $\log \int g(t)\,dt \geq \int \log\,(g(t))\,dt$ ، به‌شرط‌آنکه سمت راست آن تعریف شده باشد .

۱۸ ــ درنتیجهٔ ۱۸ چه هنگام برابری برقرار است ؟

۱۹ ــ گیریم $\langle \alpha_n \rangle$ یک دنباله ازعددهای‌نامنفی است که مجموع آنها برابر ۱ است. و گیریم $\langle \xi_n \rangle$ یک‌دنباله از عددهای‌مثبت است. دراین‌صورت‌داریم :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \xi_n^{\alpha_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n.$$

فصل ششم

فضاهای کلاسیک باناخ

۱ــ فضاهای L^p

دراین‌فصل برخی‌ازفضاهای‌تابعهای یک متغیرحقیقی‌را موردبررسی قرارمی‌دهیم. گیریم p یک عدد حقیقی مثبت است. تابع اندازه‌پذیر f را که روی $[0, 1]$ تعریف شده است متعلق‌به‌فضای $L^p = L^p[0, 1]$ می‌گویندهرگاه، $\int_0^1 |f|^p < \infty$. بنابراین L^1 دقیقاً" از تابعهای‌انتگرال‌پذیرلبگ روی $[0, 1]$ تشکیل شده‌است. چون $|f + g|^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$، است‌می‌بینیم‌که‌مجموع‌دوتابع متعلق‌بهL^pبازهم درL^p است. چون هنگامی‌که f در L^p است، αf نیز در آن است، پس هنگامی که f و g، در L^p هستند $\alpha f + \beta g$ نیزدرآن‌است. فضای X ازتابعهای‌حقیقی‌را یک**فضای‌خطی** (یافضای‌برداری) می‌نامند، هرگاه، برای‌هرجفت f و g ی‌متعلق‌به X وهرجفت‌ثابتهای α و β، تابع $\alpha f + \beta g$ نیزمتعلق‌به X باشد. بنابراین‌فضاهای L^p فضاهای‌خطی‌هستند.

برای هر $f \varepsilon L^p$، تعریف می‌کنیم:

$$\|f\| = \|f\|_p = \left\{\int_0^1 |f|^p\right\}^{1/p}$$

می‌بینیم $\|f\| = 0$ است اگر و تنهااگر ت. هـ، $f = 0$ باشد. اگر α یک‌ثابت‌باشد، دراین‌صورت $\|\alpha f\| = |\alpha|\,\|f\|$. در بند بعد دونابرابری به‌دست خواهیم‌آورد، که‌دومی‌مبین‌این‌است‌که‌اگر $p \geq 1$ باشد، آنگاه $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. ازاین‌پس همواره فرض خواهیم‌کردکه $p \geq 1$ است. یک‌فضای خطی را فضای‌خطی‌نرم‌دارمی‌گویند هرگاه به‌هرتابع f یک‌عددحقیقی نامنفی $\|f\|$ مربوط‌کنیم به‌گونه‌ای که:

$$\|\alpha f\| = |\alpha|\,\|f\| \qquad \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \text{ و } \|f\| = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$$

متاسفانه، نرم‌فضای L^p در شرط‌اخیر صدق نمی‌کند، زیرا از $\|f\| = 0$ تنها می‌توان نتیجه گرفت $f = 0$ ت. هـ. بااین‌وجود، دوتابع اندازه‌پذیر را هم‌ارز خواهیم گرفت. هرگاه تقریباً" همه‌جا برابرباشند، اگر دوتابع هم‌ارز را متمایز از هم نگیریم دراین‌صورت فضاهای L^p فضاهای خطی نرم‌دار خواهند بود.[۱]

۱ــ برای دقت بیشتر باید بگوییم که عنصرهای L^p تابع نیستند بلکه‌رده‌های هم‌ارزی از تابعها هستند (مسئله ۱۰.۱۰ را ببینید).

بهتر است فضای همهٔ تابعهای کراندار اندازه‌پذیر روی [۱ ، ۰] (یا همهٔ تابعهای اندازه‌پذیر که به‌جز شاید روی یک زیرمجموعهٔ با اندازهٔ صفر کراندارند) را با L^∞ بنمایانیم . روی این فضا نیز تابعهای هم ارز را منطبق بر هم می‌گیریم . دراین صورت L^∞ یک فضای خطی و با :

$$\|f\| = \|f\|_\infty = \text{ess sup}\,|f(t)|$$

یک فضای خطی نرم داراست . $\text{ess sup}\, f(t)$ برابر است با کنارهٔ پایین $\sup g(t)$ هنگامی که g روی همهٔ تابعهایی که تقریبا " همه‌جا برابر f هستند تغییر می‌کند . بنابراین

$$\text{ess sup}\, f(t) = \inf\,\{M:\ m\{t:\ f(t) > M\} = 0\}.$$

مسئله‌ها

۱ ــ نشان دهید که : $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

۲ ــ گیریم f روی [۱ ، ۰] یک تابع اندازه‌پذیر کراندار است . دراین صورت $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

۳ ــ ثابت کنید : $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$.

۴ ــ اگر $f \in L^1$ و $g \in L^\infty$ ، آنگاه :

$$\int |fg| \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty.$$

۲ ــ نابرابریهای هولدر و مینکوسکی[۱]

پیش از اثبات نابرابریهایی دربارهٔ نرم L^p ، نخست لم زیر را که تعمیم نابرابری موجود بین میانگین حسابی و میانگین هندسی است ، ثابت می‌کنیم :

۱ ــ لم :

گیریم α و β دو عدد حقیقی نامنفی و $0 < \lambda < 1$ است . دراین صورت $\alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta$. برابری تنها برای $\alpha = \beta$ برقرار است .

برهان :

تابع φ را که برای عددهای حقیقی نامنفی t به‌شکل زیر تعریف شده است

۱ — Holder and Minkowski Inequalities

درنظر می‌گیریم : $\varphi(t) = (1-\lambda) + \lambda t - t^{\lambda}$

دراین‌صورت $\varphi'(t) = \lambda(1 - t^{\lambda-1})$

چون $0 < 1-\lambda$ است، پس برای $t < 1$ داریم $\varphi'(t) < 0$ وبرای $t > 1$ ، $\varphi'(t) > 0$. بنابراین برای $t \neq 1$ داریم $\varphi(t) < \varphi(1) = 0$. از این‌رو :

$$(1-\lambda) + \lambda t \geq t^{\lambda}$$

برابری تنها برای $t = 1$ برقرار است . اگر $\beta \neq 0$ باشد باقراردادن α/β به‌جای t ، این لم ثابت می‌شود . این‌لم برای $\beta = 0$ بدیهی است . ▮

۲ ــ نابرابری هولدر :

اگر p و q دوعدد حقیقی گسترش‌یافتهٔ نامنفی باشند به‌گونه‌ای‌که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ باشد ، و اگر $f \varepsilon L^p$ ، $g \varepsilon L^q$ باشند ، دراین‌صورت $f \cdot g \varepsilon L^1$ است‌و داریم :

$$\int |fg| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

برابری تنها هنگامی برقراراست‌که‌برای بعضی ثابتهای ناصفر α و β داشته‌باشیم $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ ت . ه .

برهان :

حالت $p = 1$ ، $q = \infty$ سرراست است و به‌خواننده واگذار می‌شود . از این‌رو فرض می‌کنیم $1 < p < \infty$ و درنتیجه $1 < q < \infty$ است . نخست فرض می‌کنیم : $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ ، و لم‌بالا را برای $\alpha = |f(t)|^p$, $\beta = |g(t)|^q$, $\lambda = \frac{1}{p}$ ، $1 - \lambda = \frac{1}{q}$ به‌کار می‌بریم . دراین‌صورت داریم :

$$|f(t)g(t)| \leq \lambda|f(t)|^p + (1-\lambda)|g(t)|^q \qquad (۱)$$

باانتگرال‌گیری از دوطرف داریم :

$$\int |fg| \leq \lambda \int |f|^p + (1-\lambda)\int |g|^q = 1 \qquad (۲)$$

اگر $\|f\| = 0$ یا $\|g\| = 0$ باشد ، نابرابری بدیهی است . گیریم f و g ، عنصرهای دلخواه L^p و L^q با $\|f\| \neq 0$ و $\|g\| \neq 0$ هستند . دراین‌صورت

$f/\|f\|_p$ و $g/\|g\|_q$ هردو دارای نوم یک هستند . اگر آنها را در (۲) قرار دهیم ، نتیجه می دهد .

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int|fg| = \int\frac{|f|}{\|f\|_p}\cdot\frac{|g|}{\|g\|_q}\leq 1$$

در (۱) برابری تنها هنگامی برقرار است که $|f(t)|^p = |g(t)|^q$ و برابری در (۲) تنها هنگامی می تواند برقرار باشد که در (۱) تقریبا "همه جا برقرار باشد . از این رو برابری تنها هنگامی برقرار است که ت . ه . $\|g\|^q|f|^p = \|f\|^p|g|^q$ باشد . ∎

۳ــ نابرابری مینکوسکی :

اگر f و g به L^p متعلق باشند آنگاه $f + g$ نیز به آن تعلق دارد و داریم :

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

برهان :

حالتهای $p = 1$ و $p = \infty$ سرراست هستند و به خواننده واگذار می شوند . از این رو فرض می کنیم $1 < p < \infty$ است .

چون $|f + g|^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$ ، پس $f + g$ به L^p تعلق دارد . همچنین داریم .

$$\int|f + g|^p \leq \int|f + g|^{p-1}|f| + \int|f + g|^{p-1}|g|.$$

بنابر نابرابری هولدر ، داریم :

$$\int|f + g|^{p-1}|f| \leq \|f\|_p\|(|f + g|^{p-1})\|_q,$$

و

$$\int|f + g|^{p-1}|g| \leq \|g\|_p\|(|f + g|^{p-1})\|_q,$$

و
$$\|(|f+g|^{p-1})\|_q = \left\{\int |f+g|^{(p-1)q}\right\}^{1/q} = \{\|f+g\|_p\}^{p/q},$$

زیرا $p = q(p-1)$. از این‌رو:

$$\|f+g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)(\|f+g\|_p)^{p/q}$$

یا:

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \blacksquare$$

مسئله‌ها

۵ــ برای $1 \leq p < \infty$ ، فضای همهٔ دنباله‌های $\langle\xi_\nu\rangle_{\nu=1}^{\infty}$ را به‌گونه‌ای که $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|^p < \infty$ است، با l^p می‌نمایانیم. نشان دهید که اگر $\langle\xi_\nu\rangle \in l^p$ و $\langle\eta_\nu\rangle \in l^q$ باشد با $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ، در این صورت:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu\eta_\nu| \leq \|\langle\xi_\nu\rangle\|_p \cdot \|\langle\eta_\nu\rangle\|_q$$

که در آن $(\|\langle\xi_\nu\rangle\|_p)^p = \sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|^p$ و $\|\langle\eta_\nu\rangle\|_\infty = \sup |\eta_\nu|.$

این نابرابری همان نابرابری هولدر درمورد دنباله‌هاست.

۶ــ نابرابری مینکوسکی را درمورد دنباله‌ها ثابت کنید: $1 \leq p \leq \infty$

$$\|\langle\xi_\nu + \eta_\nu\rangle\|_p \leq \|\langle\xi_\nu\rangle\|_p + \|\langle\eta_\nu\rangle\|_p.$$

۳ــ همگرایی و کمال

مفهوم همگرایی دنبالهٔ عددهای حقیقی درمورد همگرایی دنباله‌ها در یک فضای خطی نرم‌دار، تعمیم می‌یابد.

تعریف :

دنبالهٔ $\langle f_n \rangle$ دریک‌فضای‌خطی‌نرم‌دار را به‌عنصر f این‌فضا همگرا می‌گویند هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ داده شده یک عدد N وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که برای هر $n > N$ داشته باشیم $\|f - f_n\| < \epsilon$. اگر f_n به f بگراید می‌نویسیم $f = \lim f_n$ یا $f_n \to f$.

روش دیگر بیان همگرایی f_n به f این است که توجه کنیم اگر $f_n \to f$ $\|f_n - f\| \to 0$. همگرایی درفضای L^p ، $1 \le p < \infty$ رااغلب **همگرایی درمیانگین‌مرتبهٔ p** می‌نامند . بنابراین می‌گویند دنبالهٔ تابعهای $\langle f_n \rangle$ در میانگین مرتبهٔ p ام به f می‌گراید ، هرگاه هر f_n به L^p تعلق داشته و $\|f - f_n\|_p \to 0$ باشد . همگرایی در L^∞ تقریبا" همان همگرایی یکنواخت است (مسئلهٔ ۸) .

چون بایک‌فضای‌خطی X ازتابعها روبرو هستیم ، باید مفهوم همگرایی در X را ، که در بالا به‌آن اشاره شد ، از مفهوم همگرایی یک دنباله از تابعها که در هر نقطه همگرا است، تمیز دهیم . همگرایی نوع‌اخیر را **همگرایی نقطه‌ای** خواهیم نامید ،و خواهیم گفت که $\langle f_n \rangle$ به‌طورنقطه‌ای به f می‌گراید ، هرگاه برای هر x داشته باشیم $f(x) = \lim f_n(x)$. اگریک‌مجموعه E بااندازهٔ صفروجود داشته‌باشد به‌گونه‌ای که‌برای‌هر x متعلق‌به $\tilde{E}$ داشته‌باشیم $f(x) = \lim f_n(x)$ ، دراین‌صورت‌می‌گوییم که f_n تقریبا" همه‌جا به f می‌گراید

درست همانگونه که درمورد دنباله‌های عددهای حقیقی دیدیم ، می‌گوییم دنبالهٔ $\langle f_n \rangle$ دریک‌فضای‌خطی‌نرم دار یک **دنبالهٔ‌کشی** است هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ ، داده شده یک N وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که برای همهٔ عددهای $n \ge N$ و $m \ge N$ داشته‌باشیم $\|f_n - f_m\| < \epsilon$. به‌آسانی می‌توان نشان داد که هر دنبالهٔ همگرا یک دنبالهٔ کشی است .

تعریف :

یک فضای‌خطی‌نرم‌دار، کامل گفته‌می‌شود هرگاه هر دنبالهٔ کشی دراین‌فضا همگرا باشد ، یعنی برای هر دنبالهٔ کشی $\langle f_n \rangle$ دراین‌فضا یک عنصر f متعلق‌به‌این فضا وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $f_n \to f$. هرفضای خطی نرم‌دارکامل فضای باناخ نامیده می‌شود .

سری $\langle f_n \rangle$ در یک‌فضای خطی نرم‌دار، **جمع پذیر** و دارای مجموع s ، گفته‌می‌شود ،هرگاه s متعلق‌به‌این‌فضابوده و دنبالهٔ مجموعهای‌جزیی‌سری به s بگراید ، یعنی داشته باشیم :

$$\left\| s - \sum_{i=1}^{n} f_i \right\| \to 0$$

دراین‌حالت‌می‌نویسیم $s = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$. سری $\langle f_n \rangle$ رابه‌طورمطلق‌جمع پذیرمی‌گویند هرگاه $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < \infty$ باشد .

می‌دانیم که‌جمع پذیری‌مطلق‌یک‌سری از عددهای‌حقیقی ،جمع پذیری‌آن‌را ایجاب می‌کند . درصورتی‌که این‌خاصیت‌درحالت‌کلی برای‌سری‌های‌عناصریک‌فضای خطی نرم‌دار درست نیست ، گزارهٔ زیر نشان می‌دهد که این استلزام دریک فضای کامل برقرار است .

۴ــ گـــزاره :

فضای خطی نرم‌دار X کامل است اگر و تنها اگر هر سری جمع پذیر مطلق درآن جمع پذیر باشد .

بـرهـــان :

$\Rightarrow$: گیریم X کامل ، و $\langle f_n \rangle$ یک‌سری‌جمع پذیر مطلق از عنصرهای‌آن است . چون $\sum \|f_n\| = M < \infty$ ،پس‌برای هر $\epsilon > 0$ یک N وجوددارد به‌گونه‌ای‌که $\sum_{n=N}^{\infty} \|f_n\| < \epsilon$. گیریم $s_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$ مجموعهای جزیی سری $\langle f_n \rangle$ است . دراین‌صورت برای $n \geq m \geq N$ داریم :

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{i=m}^{n} f_i \right\| \leq \sum_{i=m}^{n} \|f_i\| \leq \sum_{i=N}^{\infty} \|f_i\| < \epsilon.$$

از این‌رو دنبالهٔ مجموعهای‌جزیی $\langle s_n \rangle$ یک‌دنبالهٔ کشی است و باید به‌یک عنصر s از فضای X بگراید ، زیرا X کامل است .

$\Leftarrow$: گیریم $\langle f_n \rangle$ در X یک‌دنبالهٔ‌کشی‌است . برای هر عدد درست و مثبت k یک عدد درست و مثبت n_k وجود دارد به‌گونه‌ای که برای همهٔ مقدارهای m و n بزرگتراز n_k، داریم $\|f_n - f_m\| < 2^{-k}$ ومی‌تـوان عـددهای n_k را

به‌گونه‌ای برگزیدکه $n_{k+1} > n_k$ باشد. دراین‌صورت $\langle f_{n_k}\rangle_{k=1}^{\infty}$ یک‌زیردنباله‌ٔ $\langle f_n\rangle$ است‌واگرقراردهیم $g_1 = f_{n_1}$ ، $g_k = f_{n_k} - f_{n_{k-1}}$ ، بـرای $k > 1$ یک سری $\langle g_k\rangle$ به‌دست می‌آید که مجموع جزیی k ام آن f_{n_k} است. ولی‌اگر $k > 1$ باشد، داریم $\|g_k\| \leq 2^{-k+1}$. بنابراین:

$$\sum\|g_k\| \leq \|g_1\| + \sum 2^{-k+1} = \|g_1\| + 1$$

بنـابـرایـــن ســـری $\langle g_k\rangle$ به‌طورمطلق جمع پذیر است، پس بنابه‌فرض یک عنصر f در X وجود دارد که مجموعهای جزیی سری به‌آن می‌گراید. بنـابـرایـن دنباله‌ٔ $\langle f_{n_k}\rangle$ به f می‌گراید. اکنون‌نشان‌می‌دهیم‌که $f = \lim f_n$. چون $\langle f_n\rangle$ یک دنباله‌ٔکشی‌است، برای هر $\epsilon > 0$ داده شده یک N وجود دارد به‌گونه‌ای که برای همهٔ عددهای n و m بزرگتر از N ، داریم $\|f_n - f_m\| < \epsilon/2$. چون $f_{n_k} \to f$ یک‌عدد K وجود دارد به‌گونه‌ای‌که‌برای‌همهٔ عددهای $k \geq K$ داریم $\|f_{n_k} - f\| < \epsilon/2$. فرض کنیم که k چنان بزرگ است که $k > K$ و $n_k \geq N$ است. دراین‌صورت:

$$\|f_n - f\| \leq \|f_n - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

بنابراین‌برای‌همهٔ عددهای $n > N$ داریم $\|f_n - f\| < \epsilon$ ، پس $f_n \to f$. ∎

۵ ــ قضیهٔ (ریس ــ فیشر)[۱]:

فضاهای L^p فضاهای کامل هستند.

برهـــان:

چون حالت $p = \infty$ مقدماتی است، آن‌را به‌خواننده واگذارمی‌کنیم، و فرض می‌کنیم $1 \leq p < \infty$. بنابرگزارهٔ پیشین تنها نیازداریم نشان‌دهیم‌که‌هرسری جمع پذیر مطلق در L^p درآن جمع پذیر و مجموع آن به L^p تعلق‌دارد.

گیریم $\langle f_n\rangle$ دنباله‌ای‌است‌در L^p با $\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\| = M < \infty$. تابعهای g_n رابا $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|$ تعریف‌می‌کنیم. بنابرنابرابری‌مینکوسکی‌داریم:

$$\|g_n\| \leq \sum_{k=1}^{n}\|f_k\| \leq M$$

۱ــ Riesz-Fischer

از ایــــن‌رو :
$$\int (g_n)^p \le M^p.$$

برای‌هر x ، $\langle g_n(x) \rangle$ یک‌دنباله‌ٔ افزایشی‌از‌عددهای‌حقیقی (گسترش‌یافته) است ، پس باید به‌یک‌عدد حقیقی گسترش‌یافته‌ٔ $g(x)$ بگراید . تابع $g(x)$ که چنین تعریف می‌شود اندازه‌پذیر است ، و چون $g_n \ge 0$ است ، پس بنابر لم‌فاتو داریم :
$$\int g^p \le M^p$$
ازاین‌رو g^p انتگرال‌پذیر است ، و $g(x)$ تقریبا" برای همهٔ x ها باپایان است .

برای هر x که $g(x)$ برای آن باپایان است ، سری $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ یک‌سـری جمع‌پذیر مطلق از عددهای‌حقیقی است ، پس باید مجموع آن یک‌عدد حقیقی $s(x)$ ، باشد . اگر برای x هایی که برای‌آنها $g(x) = \infty$ است ، قراردهیم $s(x) = 0$ ، یک تابع s تعریف‌کرده‌ایم که‌تقریبا" همه‌جاحدمجموعهای‌جزیی $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ است . ازاین‌رو s ، اندازه‌پذیراست . چـــون $|s_n(x)| \le g(x)$ ، داریم $|s(x)| \le g(x)$. درنتیجه s به L^p تعلق دارد و داریم :
$$|s_n(x) - s(x)|^p \le 2^p [g(x)]^p$$

چون $2^p g^p$ انتگرال‌پذیر است و $|s_n(x) - s(x)|^p$ تقریبا" برای همهٔ x ها به 0 ، می‌گراید ، پس بنابرقضیهٔ همگرایی لبگ داریم :
$$\int |s_n - s|^p \to 0$$

بنابراین $\|s_n - s\|^p \to 0$ ، و ازآنجا $\|s_n - s\| \to 0$. درنتیجـــه سـری $\langle f_n \rangle$ در L^p دارای مجموع s است . ∎

مسئلـــــه‌ها

۷ ــ ثابت کنید که هر دنبالهٔ همگرا یک دنباله کشی است .

۸ ــ گیریم $\langle f_n \rangle$ یک دنباله از تابعهای L^∞ است . ثابت‌کنید $\langle f_n \rangle$ در L^∞ به f می‌گراید اگر و تنها اگر یک مجموعهٔ E بااندازهٔ صفر موجود باشد به‌گونه‌ای که f_n روی $\tilde{E}$ به‌طوریکنواخت به f بگراید .

۹ ــ ثابت کنید L^∞ کامل است .

۱۰ ــ ثابت‌کنید l^p ، $(1 \le p < \infty)$ کامل است (مسئله ۵ را ببینید) .

۱۱ــ گیریم $C = C[0, 1]$ فضای همهٔ تابعهایی است که روی $[0, 1]$ ، پیوسته‌اند. روی C نرم $\|f\| = \max |f(x)|$ را تعریف می‌کنیم. نشان‌دهید که C ، یک فضای باناخ است.

۱۲ــ فضای همهٔ دنباله‌های عددهای حقیقی کراندار را با l^∞ می‌نمایانیم و در آن نرم $\|\langle \xi_\nu \rangle\|_\infty = \sup |\xi_\nu|$ را تعریف می‌کنیم. نشان دهید که l^∞ یک فضای باناخ است.

۱۳ــ نشان‌دهید که‌فضای c ی همهٔ دنباله‌های حقیقی‌همگرا و فضای c_0 همهٔ دنباله‌هایی که به o می‌گرایند (با نرم l^∞) فضاهای باناخ هستند.

۱۴ــ گیریم f تابعی‌است‌متعلق‌به L^p ، $1 \leq p < \infty$. نشان دهید که برای هر $\epsilon > 0$ داده شده، یک تابع پیوستهٔ φ و یک تابع پله‌ای ψ وجود دارد به‌گونه‌ای که:

$$\|f - \varphi\| < \epsilon \quad \text{و} \quad \|f - \psi\| < \epsilon$$

۱۵ــ گیریم $\langle f_n \rangle$ یک‌دنباله‌از تابعهای متعلق‌به L^p ، $1 \leq p < \infty$ است‌که تقریبا" همه‌جا در L^p به‌تابع f می‌گراید. نشان‌دهید $\langle f_n \rangle$ در L^p به f می‌گراید ، اگر و تنها اگر $\|f_n\| \to \|f\|$. (برای $p = 1$ این‌همان‌مسئلهٔ ۴ . ۱۴ است).

۱۶ــ گیریم $\langle f_n \rangle$ یک‌دنباله‌ازتابعهای L^p ، $1 < p < \infty$ ، است که‌تقریبا" همه‌جا به‌یک‌تابع f در L^p می‌گراید و فرض می‌کنیم که یک عدد ثابت M وجود دارد به‌گونه‌ای که برای همهٔ مقدارهای n ، $\|f_n\| \leq M$ است. دراین‌صورت برای هرتابع g ، در L^q داریم:

$$\int fg = \lim \int f_n g$$

آیا این نتیجه برای $p = 1$ درست است؟

۱۷ــ گیریم‌در L^p ، $1 \leq p < \infty$ ، $f_n \to f$ و $\langle g_n \rangle$ یک‌دنباله‌ازتابعهای اندازه‌پذیر است به‌گونه‌ای‌که‌برای‌هرمقدار n داریم ، $|g_n| \leq M$ و $g_n \to g$ ت . هـ . دراین‌صورت در L^p داریم $g_n f_n \to g f$

۴ــ فونکسیونلهای خطی کراندار روی فضاهای L^p

روی یک‌فضای‌خطی نرم‌دار X یک **فونکسیونل‌خطی** را با یک‌نگاشت F ازفضای X در مجموعهٔ عددهای‌حقیقی تعریف می‌کنیم به‌گونه‌ای‌که $F(\alpha f + \beta g) = \alpha F(f) + \beta F(g)$ یک‌فونکسیونل‌خطی‌را *کراندار* می‌گویند هرگاه‌یک عدد‌ثابت M وجود‌داشته‌باشد به‌گونه‌ای

که برای همهٔ f های‌متعلق‌به X ، داشته‌باشیم $|F(f)| \leq M \cdot \|f\|$. کوچکترین عدد ثابت M، که برای آن این نابرابری درست است ، نرم F نامیده می‌شود . بنابراین :

$$\|F\| = \sup \frac{|F(f)|}{\|f\|}$$

هنگامی که f روی‌همهٔ عنصرهای ناصفر X تغییر می‌کند .

اگر g تابعی‌متعلق‌به L^q باشد ، می‌توان یک‌فونکسیونل‌خطی‌کراندار F روی L^p را به‌شکل زیر تعریف کرد:

$$F(f) = \int fg$$

خطی بودن فونکسیونل F آشکاراست ، وبنابرنابرابری‌هولدر $\|F\| \leq \|g\|_q$. درواقع داریم $\|F\| = \|g\|_q$. برای‌اثبات آن درحالت $1 < p < \infty$ قرار می‌دهیم [۱]

$$f = |g|^{q/p} \operatorname{sgn} g$$

دراین‌صورت $|f|^p = |g|^q = fg$. ازاین‌رو f به L^p تعلق دارد و $\|f\|_p = (\|g\|_q)^{q/p}$ است . اکنون داریم :

$$F(f) = \int fg = \int |g|^q$$

$$= (\|g\|_q)^q = \|g\|_q \|f\|_p$$

پس $\|F\|$ بایددست‌کم به‌بزرگی $\|g\|_q$ باشد . اکنون‌این‌نتیجه‌رابه‌شکل‌یک‌گزاره بیان‌می‌کنیم ، حالتهای $p = 1$ و $p = \infty$ به‌خوانندهٔ واگذارمی‌شوند(مسئلهٔ ۱۸ راببینید) .

۶ ــ گزاره :

هر تابع g ی متعلق به L^q با برابری:

$$F(f) = \int fg$$

یک فونکسیونل خطی کراندار F روی L^p تعریف می‌کند و داریم $\|F\| = \|g\|_q$.

هدف این‌بند این‌است‌که‌نشان‌دهیم وارون این‌گزاره برای $1 \leq p < \infty$ برقرار است ، یعنی هرفونکسیونل خطی کراندار روی L^p را بااین‌روش به‌دست می‌آوریم . برای این منظور نخست اثبات لم زیر مفید خواهد بود .

---

۱ ــ برای هرعددحقیقی x ، $\operatorname{sgn} x$ را به‌شکل $\operatorname{sgn} x = 1$ ، برای $x > 0$ ، $\operatorname{sgn} 0 = 0$ ، و $\operatorname{sgn} x = -1$ برای $x < 0$ ،تعریف می‌کنیم .

۷ــ لـــــم :

گیریم g روی $[0, 1]$ یک تابع انتگرال‌پذیر است و یک ثابت M وجــود دارد به‌گونه‌ای که برای همهٔ تابعهای اندازه‌پذیر کراندار f ، داریم :

$$\left|\int fg\right| \le M\|f\|_p$$

دراین‌صورت g متعلق به L^q و $\|g\|_q \le M$ است .

بـــرهـــــان :

نخست فرض می‌کنیم $1 < p < \infty$ است . یک دنباله از تابعهای اندازه‌پذیر کراندار را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم :

$$g_n(x) = \begin{cases} g(x) & |g(x)| \le n \quad \text{اگـــر} \\ 0 & |g(x)| > n \quad \text{اگـــر} \end{cases}$$

و قرارمی‌دهیم : $f_n = |g_n|^{q/p} \operatorname{sgn} g_n$

اکنون داریم :

$$|g_n|^q = f_n \cdot g_n = f_n \cdot g \quad \text{و} \quad \|f_n\|_p = (\|g_n\|_q)^{q/p}$$

از ایـــن‌رو :

$$(\|g_n\|_q)^q = \int f_n g \le M\|f_n\|_p = M(\|g_n\|_q)^{q/p}$$

چـــون $q - q/p = 1,$ ، پــس:

$$\|g_n\|_q \le M$$

و

$$\int |g_n|^q \le M^q$$

چون $|g_n|^q$ تقریبا" همه‌جا به $|g|^q$ می‌گراید ، بنابر لم فاتو داریم :

$$\int |g|^q \le \lim \int |g_n|^q \le M^q$$

بنابراین $g \,\varepsilon\, L^q$ و $\|g\|_q \le M$.

درحالت $p = 1$ ، گیریم $E = \{x: |g(x)| \ge M + \epsilon\}$ ، و قرار می‌دهیم $f = (\operatorname{sgn} g)\chi_E$. دراین‌صورت $\|f\|_1 = mE$ ، و

$$MmE = M\|f\|_1 \ge \left|\int fg\right| \ge (M + \epsilon)mE$$

بنابراین $mE = 0$ و $\|g\|_\infty \leq M$ ∎

اکنون در وضعی هستیم که قضیهٔ سرشت‌نمایی فونکسونلهای خطی کراندار روی L^p را برای $1 \leq p < \infty$ بیان کنیم .

۸ــ قضیهٔ نمایش ریس :

گیریم F روی L^p یک‌فونکسیونل‌خطی کراندار است . دراین‌صورت یک‌تابع g ، در L^q وجود دارد به‌گونه‌ای که :

$$F(f) = \int fg.$$

همچنین داریم : $\|F\| = \|g\|_q$ $1 \leq p < \infty$

برهان :

گیریم χ_s تابع مشخص فاصلهٔ $[0, s]$ است . جستجوی F را با مشاهدهٔ اثرآن‌روی χ_s آغازمی‌کنیم . برای‌هر s مقدار $F(\chi_s)$ یک‌عددحقیقی $\Phi(s)$ است ، و این عدد $\Phi(s)$ روی $[0, 1]$ یک‌تابع Φ تعریف می‌کند .

اکنون به‌عقیدهٔ من Φ پیوستهٔ مطلق است ، زیرا اگر $\{(s_i, s_i')\}$ یک دستهٔ باپایان از فاصله‌های‌جزئی $[0, 1]$ باشد که نقطهٔ مشترکی باهم نداشته و درازی کل آنها از δ کوچکتر است ، دراین‌صورت داریم :

$$\sum_i |\Phi(s_i') - \Phi(s_i)| = F(f)$$

کــه درآن :

$$f = \sum_i (\chi_{s'_i} - \chi_{s_i}) \operatorname{sgn} (\Phi(s_i') - \Phi(s_i))$$

چون $(\|f\|_p)^p < \delta$ است ، پس داریم :

$$\sum_i |\Phi(s_i') - \Phi(s_i)| = F(f) \leq \|F\| \, \|f\|_p < \|F\|\delta^{1/p}$$

این‌رابطه نشان‌می‌دهدکه تغییرکلی Φ روی هردستهٔ‌باپایان از فاصله‌های مجزا بادرازی‌کلی δ از ϵ کمتراست ،به‌شرط‌این‌که $\delta = \epsilon^p/\|F\|^p$ گرفته‌شود . بنابراین Φ پیوستهٔ مطلق است .

بنابرقضیهٔ ۱۳.۵ روی $[0, 1]$ یک تابع انتگرال‌پذیر g وجوددارد به‌گونه‌ای‌که :

$$\Phi(s) = \int_0^s g$$

بنــابــرایـــن :
$$F(\chi_s) = \int_0^1 g\cdot \chi_s.$$

چون هر تابع پله‌ای روی $[0, 1]$ با یک ترکیب خطی مناسب $\sum c_i\chi_{s_i}$، (به‌جز در شماره‌ٔ باپایانی از نقطه‌ها) برابر است ، پس بنابرخاصیت خطی بودن F و انتگرال ، برای هر تابع پله‌ای ψ باید داشته باشیم :
$$F(\psi) = \int_0^1 g\psi$$
گیریم f روی $[0, 1]$ یک‌تابع اندازه‌پذیر کرانداراست . دراین‌صورت‌ازگزارهٔ ۲۲.۳ نتیجه می‌شود که یک دنبالهٔ $\langle\psi_n\rangle$ از تابعهای پله‌ای وجود دارد که تقریبا " همه‌جابه f می‌گراید . چون‌دنبالهٔ $\langle|f-\psi_n|^p\rangle$ به‌طوریکنواخت‌کرانداراست‌وتقریبا " همه‌جا به‌صفرمی‌گراید ، قضیهٔ همگرایی‌کراندارایجاب‌می‌کندکه $\|f-\psi_n\|_p \to 0$.
چون F کراندار و :
$$|F(f)-F(\psi_n)| = |F(f-\psi_n)| \le \|F\|\,\|f-\psi_n\|_p,$$
است ، پس باید داشته باشیم :
$$F(f) = \lim F(\psi_n).$$
چون $g\psi_n$ همواره‌کوچکتراز $|g|$ برابرکران‌یکنواخت‌دنباله $\langle\psi_n\rangle$ است ، بنابرقضیهٔ همگرایی لبگ داریم :
$$\int fg = \lim \int g\psi_n$$
درنتیجه برای هرتابع اندازه‌پذیر کراندار f باید داشته باشیم :
$$\int fg = F(f)$$
چون $|F(f)| \le \|F\|\,\|f\|_p$ ، بنابر لم ۷ ، g در L^q و $\|g\|_q \le \|F\|$ است .
بنابراین تنهابایدنشان‌دهیم‌که‌برای‌هر f در L^p داریم ، $F(f) = \int fg$.
گیریم f یک‌تابع دلخواه‌در L^p است . دراین‌صورت بنابرمسئلهٔ ۱۴ برای‌هرعدد $\epsilon > 0$ ، یک‌تابع پله‌ای ψ وجودداردبه‌گونه‌ای‌که $\|f-\psi\|_p < \epsilon$. چون ψ کرانداراست ، داریم :
$$F(\psi) = \int \psi g.$$
از ایـــن‌رو :
$$\begin{aligned}\left|F(f)-\int fg\right| &= \left|F(f)-F(\psi)+\int\psi g-\int fg\right|\\ &\le |F(f-\psi)| + \left|\int(\psi-f)g\right|\\ &\le \|F\|\,\|f-\psi\|_p + \|g\|_q\|f-\psi\|_p\\ &< (\|F\|+\|g\|_q)\epsilon.\end{aligned}$$

چون ϵ دلخواه است ، باید داشته باشیم :

$$F(f) = \int fg.$$

برابری $\|F\| = \|g\|_q$ از گزارهٔ ۶ نتیجه می‌شود. ∎

درمسئله‌های زیر از خواننده خواسته شده است که چنین نمایشی برای فونکسیونلهای خطی کراندار روی l^p $1 \le p < \infty$ ، c و c_0 پیاده کند . درقضیهٔ ۸ ۰ ۱۴ نمایشی برای فونکسیونلهای خطی کراندار روی C داده‌ایم . متاسفانه فونکسوینهای خطی کراندار روی L^∞ (همچنین l^∞) چنین نمایشی ندارند .

مسئـلـــــه‌هـــا

۱۸ ــ الـف ــ گیریم g روی $[0, 1]$ یک‌تابع انتگرال‌پذیر است . نشان دهید که یک تابع اندازه‌پذیر کراندار f وجود دارد به‌گونه‌ای‌که $\|f\| \neq 0$ و

$$\int fg = \|g\|_1 \cdot \|f\|_\infty$$

ب ــ گیریم g یک‌تابع اندازه‌پذیر کراندار است . نشان دهید که برای هر $\epsilon > 0$ ، یک تابع انتگرال‌پذیر f وجود دارد به‌گونه‌ای‌که داریم :

$$\int fg \ge (\|g\|_\infty - \epsilon)\|f\|_1$$

[**راهنمـایـــی:** f را می‌توان یک‌تابع سرشت‌نمای مناسب اختیار کرد] .

۱۹ ــ نمایشی برای فونکسیونلهای خطی کراندار روی l^p $1 \le p < \infty$ بیابید .

۲۰ ــ نمایشی برای فونکسیونلهای خطی کراندار روی c و c_0 بیابیـــــد . (**توجـــه:** این نمایشها متفاوتند) .

۲۱ ــ نشان دهید عنصر g متعلق به L^q که با قضیهٔ ۸ داده شده است یکتاست .

بخش دوم

فضاهای مجرد

فصل هفتم

فضاهای متریک

۱ ــ مقدمه

دستگاه عددهای حقیقی دارای دونوع خاصیت است. نوع اول شامل خاصیتهای جبری مربوط به جمع و ضرب و غیره است. نوع دوم خاصیتهای مربوط به مفهوم دوری بین دوعدد و مفهوم حد است. خاصیتهای نوع اخیر را خاصیتهای توپولوژیکی یا متریکی می نامند. موضوع این فصل بررسی این خاصیتها در یک فضای کلی است که در آن مفهوم دوری تعریف شده است ابتدا تعریف زیر را بیان می کنیم:

تعریف:

هرفضای متریک ($\langle X, \rho \rangle$) عبارت است از یک مجموعهٔ ناتهی X از عنصرها (که آنها را نقطه می نامیم) و یک تابع حقیقی ρ که روی $X \times X$ تعریف شده است به گونه ای که برای هر x, y و z متعلق به X داریم:

i ــ $\rho(x, y) \geq 0$

ii ــ $\rho(x, y) = 0$ *اگر و تنها اگر* $x = y$

iii ــ $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

iv ــ $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

تابع ρ را متریک می نامند.

یک مثال بدیهی از فضای متریک، مجموعهٔ $\mathbf{R}$ همهٔ عددهای حقیقی با $\rho(x, y) = |x - y|$ است. مثال دیگر فضای اقلیدسی n بعدی $\mathbf{R}^n$ است که نقطه های آن n گانه های $x = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ از عددهای حقیقی هستند و:

$$\rho(x, y) = [(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2]^{1/2}$$

درمورد $\mathbf{R}^n$ خاصیت (iv) متریک بیان می کند که درازی هرضلع مثلث از مجموع درازیهای دوضلع دیگر کوچکتر است. درنتیجه (iv) را معمولا "نابرابری مثلث" می نامند.

مثالهای دیگر فضاهای متریک، فضاهای خطی نرم‌دار فصل اخیر است، به‌شرط این‌که قرار دهیم:

$$\rho(x, y) = \|x - y\|$$

دراین‌صورت نابرابری مثلث هم‌ارز با نابرابری:

$$\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$$

می‌شود.

باید تاکید کرد که یک فضای متریک مجموعهٔ نقطه‌های یک‌مجموعهٔ X نیست، بلکه‌جفت $\langle X, \rho\rangle$ متشکل از مجموعهٔ نقطه‌های X همراه‌با متریک ρ، یک‌فضای‌متریک است. برای‌مثال می‌توان از مجموعهٔ همهٔ n گانه‌های عددهای حقیقی، همراه بامتریک ρ^* که‌به‌شکل‌زیر تعریف می‌شود یک فضای متریک ساخت.

$$\rho^*(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$$

و این فضای متریک بافضای متریک $\mathbf{R}^n$ (اگر $n > 1$) یکی نیست. اغلب در یک مجموعهٔ داده‌شده از نقطه‌ها تنها به‌یک متریک‌علاقمندیم، دراین‌حالتها گاهی نماد X را هم برای‌نمایاندن مجموعهٔ نقطه‌ها و هم برای نمایاندن فضای متریک $\langle X, \rho\rangle$، به‌کار می‌بریم.

اگر دوفضای‌متریک $\langle X, \rho\rangle$ و $\langle Y, \sigma\rangle$ داشته‌باشیم می‌توانیم فضای‌متریک تازه‌ای به‌نام *فضای متریک حاصل‌ضرب* $X \times Y$ بسازیم که مجموعهٔ نقطه‌های آن مجموعهٔ $X \times Y = \{\langle x, y\rangle : x \in X, y \in Y\}$ بوده‌ومتریک‌آن τ به‌شکل‌زیرتعریف شود:

$$\tau(\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle) = [\rho(x_1, x_2)^2 + \sigma(y_1, y_2)^2]^{1/2}$$

به‌آسانی می‌توان نشان داد که τ دارای همهٔ خاصیتهای یک متریک است و داریم: $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{m+n}$.

هر زیرمجموعهٔ ناتهی از یک‌فضای متریک بامقیدساختن متریک آن‌فضا به‌این زیرمجموعه، خود یک فضای متریک است. برای مثال، فضای C ی فصل اخیر زیرفضایی از L^∞ است.

مسئله‌ها

۱ ـ الف ـ نشان‌دهید که مجموعهٔ همهٔ n گانه‌های عددهای حقیقی باهریک از متریک‌های زیر یک فضای متریک است:

$$\rho^*(x, y) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|$$
$$\rho^+(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}.$$

ب ـ برای $n = ۲$ و $n = ۳$ مجموعه‌های $\{x: \rho(x, y) < 1\}$ ، $\{x: \rho^*(x, y) < 1\}$ و $\{x: \rho^+(x, y) < 1\}$ را توصیف کنید.

۲ ـ یک گوی (یا کره) به‌مرکز x و به‌شعاع δ عبارت‌است از مجموعه:

$$S_{x,\delta} = \{y: \rho(x, y) < \delta\}$$

نشان‌دهیدکه‌اگر $0 < \epsilon < \delta - \rho(x, z)$ ، آنگاه $S_{z,\epsilon} \subset S_{x,\delta}$

۳ ـ شبه متریک:

جفت $\langle X, \rho\rangle$ را یک‌فضای‌شبه‌متریک می‌گویندهرگاه ρ همهٔ شرطهای‌متریک را برآورد به‌جز این‌که $\rho(x, y) = 0$ لزوماً $x = y$ را ایجاب نکند.

نشان‌دهید $\rho(x, y) = 0$ یک‌رابطهٔ‌هم‌ارزی‌است‌واگر X^* مجموعهٔ‌رده‌های هم‌ارزی این‌رابطه باشد، آنگاه $\rho(x, y)$ تنها به‌رده‌های هم‌ارزی x و y بستگی‌دارد و روی X^* یک متریک تعریف می‌کند.

۲ ـ مجموعه‌های باز و بسته

بسیاری از خاصیتهای مجموعه‌های عددهای حقیقی‌را می‌توان بی‌درنگ درمورد مجموعه‌های یک فضای متریک بکار برد. درسرتاسر این بند همهٔ مجموعه‌های موردنظر، زیرمجموعه‌هایی‌ازیک‌فضای‌متریک داده‌شدهٔ $\langle X, \rho\rangle$ هستند. گزاره‌ها و تعریفهای‌زیر باگزاره‌هاوتعریفهای بند ۵ از فصل‌دوم متناظرند، و از خواننده خواسته‌می‌شود تا درستی برهانهای داده‌شده درآنجارا درمورد فضاهای متریک بررسی کند.

تعریف:

مجموعهٔ O باز نامیده‌می‌شود هرگاه برای هر $x \in O$ ، $\exists\delta > 0$ ، به‌گونه‌ای که همهٔ y ها با $\rho(x, y) < \delta$ به O متعلق باشند.

۱ ـ گزاره:

مجموعه‌های X و $\varnothing$ باز هستند، اشتراک‌دومجموعهٔ باز یک مجموعهٔ باز است،

اجتماع هر دسته از مجموعه‌های باز یک‌مجموعهٔ باز است .

تعریف :

نقطهٔ $x \varepsilon X$ را یک نقطهٔ بستار مجموعهٔ E می‌نامند هرگاه برای هر $\delta > 0$ یک‌نقطهٔ $y \varepsilon E$ وجود داشته‌باشد به‌گونه‌ای‌که $\rho(x, y) < \delta$ باشد . مجموعهٔ نقطه‌های بستار E را با $\overline{E}$ می‌نمایانیم . آشکار است که $E \subset \overline{E}$.

۲ ــ گزاره :

اگر $A \subset B$ باشد ، آنگاه $\overline{A} \subset \overline{B}$ است . همچنین‌داریم $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ و $\overline{(A \cap B)} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

تعریف :

مجموعهٔ F را بسته می‌گویند هرگاه $F = \overline{F}$ باشد .

۳ ــ گزاره :

$\overline{E}$ ، بستار هر مجموعهٔ E ، بسته است ، یعنی $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$.

۴ ــ گزاره :

مجموعه‌های $\varnothing$ و X بسته‌اند ، اجتماع دومجموعهٔ بسته یک مجموعهٔ بسته است ، اشتراک هر دسته از مجموعه‌های بسته یک مجموعهٔ بسته است .

۵ ــ گزاره :

مکمل هرمجموعهٔ باز یک مجموعه بسته است . مکمل هرمجموعهٔ بسته یک مجموعهٔ باز است .

تعـریـــف :

یک فضای متریک X را جدایی‌پذیر می‌گویند هرگاه دارای یک زیرمجموعهٔ D ، باشد که تعداد نقطه‌هایش شمارش‌پذیربوده‌ودر X متراکم باشد یعنی $\overline{D} = X$.

چون مجموعهٔ عددهای گویا یک زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیرمتراکم $\mathbf{R}$ است ، می‌بینیم که $\mathbf{R}$ جدایی‌پذیر است . گزارهٔ زیر نشان می‌دهد ، که قضیهٔ لیندلوف درمورد یک‌فضای متریک ، تنها هنگامی برقرار است که آن‌فضا جدایی‌پذیر باشد .

۶ــ گـــزاره :

یک‌فضای‌متریک X جدایی‌پذیراست‌اگروتنهااگریک‌خانوادهٔ شمارش‌پذیر $\{O_i\}$ از مجموعه‌های باز وجود داشته‌باشد به‌گونه‌ای‌که برای هرمجموعهٔ باز $O \subset X$ ، داشته‌باشیم :

$$O = \bigcup_{O_i \subset O} O_i$$

بـرهـــان :

گیریم X جدایی‌پذیر و D یک‌مجموعهٔ شمارش‌پذیرمتراکم است . منظوراز گوی‌باز به‌مرکز x و به‌شعاع δ عبارت است از مجموعهٔ :

$$S_{x,\delta} = \{y\colon \rho(x, y) < \delta\}$$

گیریم $\{O_i\}$ شامل‌آن‌گویهای $S_{x,\delta}$ است‌که‌درآنها x متعلق‌به D بوده‌و δ یک عدد گویـا‌است . دراین‌صورت $\{O_i\}$ یک دستهٔ شمارش‌پذیر از مجموعه‌های‌بازاست . اگـــــــر O یک مجموعهٔ باز و $y \in O$ باشد ، دراین‌صورت می‌خواهیم نشان دهیم که برای‌یک O_i داریم $y \in O_i \subset O$. چون O باز است ، یک‌گوی $S_{y,\delta}$ وجودداردبه‌گونه‌ای که $S_{y,\delta} \subset O$. می‌توان δ راکوچکتروددرنتیجه‌گویاگرفت . چون y نقطه‌ای‌ازبستار D است ، یک $x \in D$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $\rho(x, y) < \delta/2$. ازاین‌رو :

$$S_{x,\delta/2} \subset S_{y,\delta} \subset O$$

ولــــــی $S_{x,\delta/2}$ یکی‌ازعنصرهای $\{O_i\}$ است ، پس بخش "تنهااگر" قضیه‌ثابت‌شد .

از سوی دیگر ، فرض می‌کنیم که یک دستهٔ شمارش‌پذیر $\{O_i\}$ در دست است . گیریم x_i نقطه‌ای از O_i و D مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های x_i است . اکنون نشان می‌دهیم که D متراکم‌است . گیریم x یک‌نقطهٔ دلخواه X و S یک‌گوی‌به‌مرکز x است . دراین‌صورت

بایدنشان‌دهیم‌که S حاوی یک‌نقطهٔ D است . ولی S یک‌مجموعهٔ‌بازاست (مسئله ۶) ، پس باید یک O_i وجود داشته باشد به‌گونه‌ای‌که $x \varepsilon O_i \subset S$. ازاین‌رو $x_i \varepsilon S$ است ، و می‌بینیم که $x \varepsilon \overline{D}$. ∎

مسئله‌ها

۴ــ الف ــ نشان دهیدکه C یک‌زیرمجموعهٔ‌بستهٔ L^∞ است (فصل ۶ را ببینید) .

ب ــ نشان دهید که مجموعهٔ همهٔ تابعهای انتگرال‌پذیر که در فاصلهٔ $0 \leq t < \frac{1}{2}$ برابر صفرند ، یک زیرمجموعهٔ بستهٔ L^1 است .

پ ــ نشان‌دهید که مجموعهٔ‌همهٔ‌تابعهای اندازه‌پذیر $x(t)$ با $\int x < 1$ یک زیرمجموعهٔ باز L^1 است .

۵ ــ نشان‌دهید که برای مجموعه‌های بستهٔ F داریم $\overline{E} = \bigcap_{E \subset F} F$. درون یک یک‌مجموعهٔ E را با E° نشان‌می‌دهیم وآن مجموعهٔ‌همهٔ عنصرهای $y \varepsilon E$ است که برای آنها یک عدد $\delta > 0$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که $\rho(y, z) < \delta \Rightarrow z \varepsilon E$

الف ــ نشان دهید :

$$E^\circ = \bigcup_{O \subset E} O$$

ب ــ نشان دهید :

$$\sim(\overline{E}) = (\sim E)^\circ$$

۶ ــ الف ــ نشان دهید که هر گوی ، باز است .

ب ــ نشان دهید که مجموعه‌های $\{x: \rho(x, y) \leq \delta\}$ بسته‌اند .

پ ــ آیا مجموعهٔ مذکور در (ب) همواره بستار گوی $\{x: \rho(x, y) < \delta\}$ است ؟

۷ ــ کدامیک از فضاهای $\mathbf{R}^n$ ، C ، L^∞ ، L^1 جدایی‌پذیرند .

۳ ــ تابعهای پیوسته و همئومرفیسم‌ها

هر تابع f برفضای‌متریک $\langle X, \rho \rangle$ در فضای متریک $\langle Y, \sigma \rangle$ قاعده‌ای است که‌به‌هرعنصر $x \varepsilon X$ یک‌عنصریکتای $y \varepsilon Y$ مربوط می‌سازد . f را یک‌نگاشت از X در Y نیز می‌نامند و واژه‌های تابع و نگاشت‌را بدون‌تمایز از هم بکار خواهیم برد . منظور از

نگاشت f از X بر Y طبق معمول این است که برای هر $y \in Y$ یک $x \in X$ وجود داود بهگونهای‌که $f(x) = y$ ، یعنی Y برد f است . دراین‌صورت همانند بند ۶ از فصل ۲ تعریف وگزاره‌های زیر را داریم :

تعریف :

تابع f را در x پیوسته‌می‌گوییم ،هرگاه‌برای‌هر $\epsilon > 0$ یک $\delta > 0$ موجودباشد بهگونه‌ای‌که‌وقتی $\rho(x, y) < \delta$ است ،آنگاه $\sigma[f(x), f(y)] < \epsilon$ گردد .

تابع f پیوسته نامیده می‌شود هرگاه درهر نقطهٔ $x \in X$ پیوسته باشد .

۷ ــ گزاره :

تابع f از فضای متریک X برفضای متریک Y پیوسته است اگر و تنها اگر برای هرمجموعهٔ باز O در Y ، $f^{-1}[O]$ در X باز باشد .

۸ ــ گزاره :

اگر f یک نگاشت پیوسته از X بر Y و g یک نگاشت پیوسته از Y بر Z باشد ، آنگاه نگاشت $g \circ f$ از X بر Z نیز پیوسته است .

هر نگاشت یک‌به‌یک از X به‌روی Y وقتی یک‌همئومرفیسم بین Y,X نامیده می‌شود که f و نگاشت وارون آن f^{-1} ، هردو پیوسته باشند . اگر بین X و Y یک همئومرفیسم وجود داشته باشد . آنگاه این دو فضا را همئومرف می‌گویند . موضوع توپولوژی اساسا" بررسی خاصیتهایی است‌که با همئومرفیسم‌ها تغییرنمی‌کنند ، و این‌خاصیتهارا خاصیتهای توپولوژیک می‌نامیم . بنابرگزارهٔ ۷ ، هرتناظر یک‌به‌یک بین X و Y یک‌همئومرفیسم است اگر و تنهااگر این تناظر هرمجموعهٔ باز X را به‌یک‌مجموعهٔ باز Y تبدیل کند و به‌وارون . بنابراین خاصیت بازبودن زیرمجموعه‌های یک‌فضا ، یک خاصیت توپولوژیک است . چون هرمجموعهٔ بسته مکمل یک مجموعهٔ‌بازاست . بنابراین خاصیت بسته بودن زیرمجموعه‌های‌یک‌فضا نیز یک‌خاصیت توپولوژیک است . درحقیقت هرخاصیتی که بتوان آن‌را به‌وسیلهٔ مجموعه‌های‌باز تعریف کرد یک‌خاصیت توپولوژیک است . ازاین‌رو خاصیت پیوسته‌بودن‌تابع ازاین‌گونه‌است : یعنی ،اگر f روی X یک‌تابع پیوسته و $h: X \to Y$

یک‌همئومرفیسم بین X و Y باشد، آنگاه $f \circ h^{-1}$ روی Y یک‌تابع پیوسته است.

باوجوداین، همهٔ خاصیتهای یک فضای متریک با همئومرفیسم حفظ نمی‌شوند. برای مثال معمولاً" دوری بین دونقطه با همئومرفیسم تغییر می‌کند. هر همئومرفیسمی که دوری را حفظ کند، یعنی برای آن برابری:

$$\sigma[h(x_1), h(x_2)] = \rho(x_1, x_2)$$

برای هر x_1 و x_2 ی‌متعلق‌به X برقرار باشد، یک **ایزومتری** بین X و Y، نامیده می‌شود. اگر بین فضاهای X و Y یک ایزومتری وجود داشته باشد، این‌دوفضا را **ایزومتریک‌می‌گویند. بایک‌دیدمجرد، دوفضای‌متریک‌ایزومتریک‌به‌طورکامل‌همانندهستند،** یک‌ایزومتری تنها منجر به‌بازنامیدن‌نقطه‌ها می‌شود. مفهومی‌که به‌طورطبیعی‌از این‌تعریف ناشی می‌شود، متریک‌های هم‌ارز است: دومتریک ρ و σ روی مجموعهٔ X **هم‌ارزند** هرگاه‌نگاشت‌همانی‌از $\langle X, \rho\rangle$ به‌روی $\langle X, \sigma\rangle$ یک‌همئومرفیسم باشد. بنابراین برای این‌که دومتریک هم‌ارز باشند لازم و کافی است که مجموعه‌های باز همانند تعریف کنند، یعنی اگر مجموعه‌ای نسبت به‌یکی باز است، نسبت‌به‌دیگری نیز باز باشد.

مسئله‌ها

۸ ــ نشان دهید که تابع h که روی $[0, 1)$ با $h(x) = x/(1-x)$ تعریف می‌شود یک همئومرفیسم بین $[0, 1)$ و $[0, \infty)$ است.

۹ ــ گیریم E یک‌مجموعه و x نقطه‌ای‌از یک‌فضای‌متریک است. تعریف می‌کنیم:

$$\rho(x, E) = \inf_{y \varepsilon E} \rho(x, y)$$

الف ــ نشان دهید که برای یک مجموعهٔ داده‌شدهٔ E، تابع f که با $f(x) = \rho(x, E)$ تعریف می‌شود، پیوسته است.

ب ــ نشان دهید $\{x: \rho(x, E) = 0\} = \bar{E}$:

۱۰ ــ الف ــ نشان‌دهید دومتریک‌روی X هم‌ارزنداگروتنهااگر برای‌هر $x \varepsilon X$ و هر $\epsilon > 0$ داده‌شده‌یک $\delta > 0$ وجودداشته‌باشد به‌گونه‌ای‌که‌برای‌هر $y \varepsilon X$ داشته‌باشیم:

$$\rho(x, y) < \delta \Rightarrow \sigma(x, y) < \epsilon$$

و

$$\sigma(x, y) < \delta \Rightarrow \rho(x, y) < \epsilon.$$

ب ــ نشان‌دهیدکه مجموعهٔ متریک‌های زیر برای مجموعهٔ n گانه‌های عددهای حقیقی هم‌ارزند :

$$\rho(x, y) = [(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2]^{1/2}$$
$$\rho^*(x, y) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|$$
$$\rho^+(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}.$$

پ ــ برای‌مجموعهٔ n گانه‌ها یک متریک بیابید که هم‌ارز متریکهای‌بالا نباشد .

۱۱ــ نشان‌دهیدکه‌اگر ρ روی‌مجموعهٔ X یک‌متریک‌باشد ،آنگاه $\sigma = \rho/(1 + \rho)$ نیز روی X یک‌متریک‌هم‌ارزآن‌است . ثابت‌کنید که $\langle X, \sigma\rangle$ یک‌فضای متریک کراندار است ، یعنی برای هر x و y متعلق‌به X داریم $\sigma(x, y) \leq 1$.

۴ ــ همگرایی و کمال

درست‌مانندحالت‌عددهای‌حقیقی ، می‌گوییم یک دنبالهٔ $\langle x_n\rangle$ ازیک‌فضای متریک X ، به‌نقطهٔ x متعلق‌به X می‌گراید (یا دارای حد x است) ، هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ داده‌شده یک N وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که برای‌همهٔ مقدارهای $n \geq N$ ، $\rho(x, x_n) < \epsilon$ باشد . این‌تعریف‌رامی‌توان‌به‌طورهندسی چنین‌بیان‌کرد که دنبالهٔ $\langle x_n\rangle$ به x می‌گراید هرگاه هرگوی‌به‌مرکز x شامل همهٔ نقطه‌های دنباله به‌جز شمارهٔ پایانداری از آنها باشد .

وقتی x حددنبالهٔ $\langle x_n\rangle$ است‌اغلب‌می‌نویسیم $x = \lim x_n$ یا $x_n \to x$. هرگاه تنها شرط ضعیف‌تری داشته‌باشیم ، مبنی براین‌که هرگوی به‌مرکز x شامل شمارهٔ بی‌پایانی از نقطه‌های دنباله است ، دراین‌صورت x را یک نقطهٔ تجمع دنبالهٔ $\langle x_n\rangle$ می‌نامند . بنابراین x یک‌نقطهٔ تجمع $\langle x_n\rangle$ است هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ داده شده و هر N داده شده یک $n \geq N$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای‌که $\rho(x, x_n) < \epsilon$ باشد . بنابراین اگر x حد $\langle x_n\rangle$ باشد نقطهٔ تجمع آن است ، ولی وارون آن لزوما " درست نیست . تعدادی‌ازخاصیتهای‌مربوط به‌حدها ونقطه‌های‌تجمع درمسئله‌هاداده‌شده‌اند .

دنبالهٔ $\langle x_n\rangle$ ازعنصرهای یک فضای‌متریک **یک‌دنبالهٔ‌کشی** نامیده می‌شود ، هرگاه‌برای‌هر $\epsilon > 0$ داده شده یک N وجودداشته باشد به‌گونه‌ای که برای‌همهٔ عددهای m و n بزرگترازِ N داشته‌باشیم $\rho(x_n, x_m) < \epsilon$ اگر دنبالهٔ $\langle x_n\rangle$ به x بگراید ، دراین‌صورت برای هر $\epsilon > 0$ داده شده می‌توان عدد N را چنان بزرگ

برگزید که برای $n \geq N$ ، $\rho(x_n, x) < \epsilon/2$ باشد ، ازاین‌رو برای‌همهٔ مقدارهای $m \geq N$ و n داریم :

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x_m, x) < \epsilon$$

و $\langle x_n \rangle$ یک‌دنباله‌ٔکشی‌است . وارون‌این‌گفته که هردنباله‌ٔکشی همگراست درهرفضای متریک دلخواه (برای‌مثال ، درفضای عددهای‌گویا با متریک‌معمولی) درست نیست . اگر یک‌فضای‌متریک دارای این‌خاصیت‌باشد که هر دنباله‌ٔکشی‌درآن‌فضا (به‌یک‌نقطه‌ٔآن‌فضا) **همگرا باشد ،آن‌فضای‌متریک‌راکامل‌می‌گوییم . محک‌کشی درمورد عددهای‌حقیقی ، گویای** این‌حقیقت است که فضای $\mathbf{R}$ عددهای حقیقی کامل است . مثالهای دیگر فضاهای کامل به‌وسیلهٔ فضاهای باناخ در فصل ۶ داده شده‌اند .

اگر X یک‌فضای‌متریک‌ناکامل باشد همواره می‌توان آن‌را بابزرگنمایی کامل کرد . بیان‌دقیق این‌حقیقت درقضیه‌زیرآمده‌است . یک‌برهان این قضیه درمسئله ۱۷ و دیگری در مسئلهٔ ۱۰. ۱۶ مطرح شده است .

۹ ــ قضیه :

اگر $\langle X, \rho \rangle$ یک‌فضای متریک ناکامل باشد ، می‌توان یک فضای متریک کامل X^* را به‌گونه‌ای یافت که X به‌عنوان یک زیرمجموعهٔ ***متراکم‌آن به‌طورایزومتریک‌درآن*** *غوطه‌ور باشد . اگر X مشمول یک‌فضای‌کامل دلخواه Y باشد ، آنگاه X^* با بستار X در Y* ***ایزومتریک است .***

مسئله‌ها

۱۲ ــ نشان‌دهید ، که هر دنبالهٔ $\langle x_n \rangle$ در هرفضای متریک ، دارای نقطهٔ تجمع x است اگروتنهااگر یک زیردنبالهٔ $\langle x_{n_k} \rangle$ از $\langle x_n \rangle$ وجود داشته‌باشد که به x بگراید .

۱۳ ــ نشان‌دهید که در یک فضای متریک دنبالهٔ $\langle x_n \rangle$ به x می‌گراید اگر و تنها اگر x نقطهٔ تجمع هر زیردنبالهٔ آن باشد . ازاین‌رو $\langle x_n \rangle$ به x می‌گراید هرگاه هر زیردنبالهٔ آن به‌نوبهٔ خود دارای زیردنباله‌ای باشد که به x بگراید .

۱۴ ــ گیریم E مجموعه‌ای در فضای‌متریک X است . اگر x یک‌نقطهٔ تجمع یک دنباله از عنصرهای E باشد ، آنگاه $x \in E$ ، واگر $x \in E$ باشد ، آنگاه یک‌دنباله از عنصرهای E وجود دارد که به x می‌گراید .

۱۵ ــ اگر در یک فضای متریک ، دنباله‌ٔ کشی $\langle x_n \rangle$ دارای یک نقطهٔ تجمع x ، باشد ، آنگاه $\langle x_n \rangle$ به x می‌گراید .

۱۶ ــ اگر X و Y دو فضای متریک و f نگاشتی از X بر Y باشد ، آنگاه f در x ، پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر دنبالهٔ $\langle x_n \rangle$ از نقاط X که به x می‌گراید ، دنبالهٔ $\langle f(x_n) \rangle$ در Y به $f(x)$ بگراید .

۱۷ ــ الف ــ اگر $\langle x_n \rangle$ و $\langle y_n \rangle$ دو دنبالهٔ کشی از فضای متریک X ، باشند ، در این صورت $\rho(x_n, y_n)$ همگراست .

ب ــ هرگاه $\rho^*(\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle) = \lim \rho(x_n, y_n)$ باشد ، در این صورت مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های کشی از یک فضای متریک X ، یک فضای شبه‌متریک می‌سازند (مسئلهٔ ۳ را ببینید) .

پ ــ اگر عنصرهایی را که برای آنها $\rho^* = 0$ است ، برهم منطبق بگیریم (مانند مسئلهٔ ۳) این فضای شبه‌متریک ، تبدیل به یک فضای متریک X^* می‌شود ، و X ، به‌طور ایزومتریک درآن غوطه‌ور است .

ت ــ فضای متریک $\langle X^*, \rho^* \rangle$ کامل است . [راهنمایی : اگر $\langle x_n \rangle$ یک دنبالهٔ کشی از X باشد می‌توان (با گرفتن زیردنباله‌ها) فرض کرد که $\rho(x_n, x_{n+1}) < 2^{-n}$. اگر $\langle \langle x_{n,m} \rangle_{n=1}^{\infty} \rangle_{m=1}^{\infty}$ ، دنباله‌ای از این دنباله‌های کشی باشد که در X^* یک دنبالهٔ کشی را نشان می‌دهد . آنگاه $\langle x_{n,n} \rangle_{n=1}^{\infty}$ یک دنبالهٔ کشی از X است که حد دنباله‌های کشی را در X^* ، نشان می‌دهد .]

ث ــ با استفاده از گزاره‌های ۱۰ ، ۱۱ و ۱۲ دو بند بعدی ، برهان قضیهٔ ۹ را کامل کنید .

۱۸ ــ ثابت کنید که حاصلضرب دکارتی دو فضای متریک کامل ، یک فضای کامل است .

۵ ــ پیوستگی یکنواخت و یکنواختی

گیریم f نگاشتی از فضای متریک $\langle X, \rho \rangle$ برفضای متریک $\langle Y, \sigma \rangle$ است . f را **به‌طور یکنواخت پیوسته** گوییم هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ داده شده یک $\delta > 0$ ، وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که برای همهٔ عنصرهای x و x' متعلق به X با $\rho(x, x') < \delta$ ، داشته باشیم $\sigma(f(x), f(x')) < \epsilon$. تابع h که روی (۱ ، ۰] با $h(x) = x/(1 - x)$ تعریف شده است ، پیوسته است ولی پیوستهٔ یکنواخت نیست . به‌علاوه این تابع h دنبالهٔ کشی $\langle x_n \rangle$ با $x_n = 1 - 1/n$ را به دنبالهٔ $y_n = n - 1$ ،

تبدیل می‌کند که یک دنباله‌ٔ کشی نیست. بنابراین لزومی ندارد که سایهٔ یک دنبالهٔ کشی با یک تابع پیوسته، یک دنبالهٔ کشی باشد. باوجود این گزارهٔ زیر را داریم:

۱۰ ــ گـــزاره:

گیریم f یک نگاشت پیوستهٔ یکنواخت از فضای متریک X درفضای متریک Y است. اگر $\langle x_n \rangle$ در X یک دنبالهٔ کشی باشد، آنگاه $\langle f(x_n) \rangle$ نیز در Y یک دنبالهٔ کشی است.

یک همئومرفیسم f بین دوفضای متریک X و Y، **یک همئومرفیسم یکنواخت** نامیده می‌شود هرگاه f و f^{-1} هردو پیوستهٔ یکنواخت باشند. از گزارهٔ ۱۰ نتیجه می‌شود که خاصیت کشی بودن یک دنباله، تحت همئومرفیسم یکنواخت محفوظ می‌ماند، همانگونه که خاصیت کامل بودن نیز چنین است. خاصیتهائی که تحت همئومرفیسمهای یکنواخت محفوظ می‌مانند خاصیتهای یکنواخت نامیده می‌شوند. علاوه بر خاصیتهای، کشی بودن دنباله، و کمال، پیوستگی یکنواخت نیز از خاصیتهای یکنواخت است. این سه خاصیت، خاصیتهای توپولژیکی نیستند، زیرا تابع h که به‌شکل $h(x) = x/(1 - x)$ تعریف می‌شود، بین فضای ناکامل (۱ ، ۰] و فضای کامل $[0, \infty)$ یک همئومرفیسم است که هر دنبالهٔ کشی را تبدیل به‌دنباله‌ای می‌کند که کشی نیست و وارون آن تابع پیوستهٔ یکنواخت سینوس را به‌تابعی تبدیل می‌کند که در (۱ ، ۰] پیوستهٔ یکنواخت نیست.

برای یک مجموعهٔ X از نقاط، دومتریک ρ و σ را **به‌طوریکنواخت هم‌ارز** می‌گویند، هرگاه نگاشت همانی از $\langle X, \rho \rangle$ بر $\langle X, \sigma \rangle$ یک همئومرفیسم یکنواخت باشد. بنابراین σ و ρ به‌طوریکنواخت هم‌ارزند، هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ داده‌شده یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که برای همهٔ عنصرهای x و y داشته باشیم:

$$\sigma(x, y) < \delta \Rightarrow \rho(x, y) < \epsilon \quad \text{و} \quad \rho(x, y) < \delta \Rightarrow \sigma(x, y) < \epsilon$$

این بند را با بیان قضیهٔ گسترش مفید زیر درمورد نگاشتهای پیوستهٔ یکنواخت پایان می‌دهیم. برهان آن در مسئلهٔ ۲۰ مطرح شده است.

۱۱ ــ گـــزاره:

گیریم $\langle X, \rho \rangle$ ، $\langle Y, \sigma \rangle$ دوفضای متریک و Y کامل است. گیریم f یک نگاشت پیوستهٔ یکنواخت از یک زیرمجموعهٔ E ی X در Y است. دراین صورت یک گسترش

پیوستهٔ یکتای g ی f از E بر $\overline{E}$ وجود دارد، یعنی یک‌نگاشت‌پیوستهٔ یکتای g از $\overline{E}$ در Y وجود دارد به‌گونه‌ای‌که برای‌هر $x \varepsilon E$ ، $g(x) = f(x)$ باشد. به‌علاوه g به‌طور یکنواخت پیوسته است.

مسئله‌ها

۱۹ ــ گزارهٔ ۱۰ را ثابت کنید.

۲۰ ــ گزارهٔ ۱۱ را به‌ترتیب زیر ثابت کنید:

الف ــ اگر $\langle x_n \rangle$ دنباله‌ای از E باشد که به‌نقطهٔ $x \varepsilon \overline{E}$ می‌گراید، آنگاه $\langle f(x_n) \rangle$ به‌نقطهٔ $y \varepsilon Y$ می‌گراید (گزارهٔ ۱۰ را ببینید).

ب ــ در (الف) نقطهٔ y تنها به x بستگی دارد نه به‌دنبالهٔ $\langle x_n \rangle$. بنابراین اگر تعریف کنیم $y = g(x)$ ، یک تابع g روی $\overline{E}$ تعریف کرده‌ایم که یک گسترش f است.

پ ــ تابع g روی $\overline{E}$ به‌طوریکنواخت پیوسته است.

ت ــ اگر h تابع پیوستهٔ دلخواهی از $\overline{E}$ بر Y باشد که روی E بر f منطبق‌است، دراین‌صورت $h \equiv g$.

۲۱ ــ الف ــ نشان‌دهیدکه متریک‌های‌مسئلهٔ ۱۰ ب به‌طوریکنواخت هم‌ارزند.

ب ــ برای مجموعهٔ n گانه‌های عددهای حقیقی یک متریک بیابید که بامتریک معمولی هم‌ارز باشد. ولی با آن هم‌ارز یکنواخت نباشد.

پ ــ اگر $\langle X, \rho \rangle$ یک فضای متریک باشد، متریک $\sigma = \rho/(1 + \rho)$ به‌طور یکنواخت هم‌ارز ρ است.

۲۲ ــ الف ــ کراندار بودن، یک متریک‌است‌ولی‌یک‌خاصیت یکنواخت نیست (به‌مسئلهٔ ۲۱ پ مراجعه کنید).

ب ــ فضای‌متریک X تماما" کراندار گفته‌می‌شودهرگاه‌برای‌هر $\epsilon > 0$ داده‌شده، شمارهٔ‌پایانداری ازگویهای به‌شعاع ϵ وجود داشته‌باشد که X را بپوشانند (یعنی‌اجتماع آنها X باشد). نشان دهید که تماما" کراندار بودن یک خاصیت یکنواخت است.

پ ــ نشان دهید که تماما" کراندار بودن یک خاصیت توپولوژیک نیست. [(۱ ، ۰] و (∞ ، ۰] را درنظر بگیرید.]

اگر $\langle X, \rho \rangle$ یک‌فضای متریک و S یک‌زیرمجموعهٔ X باشد، آنگاه S با تحدید ρ به‌آن به‌یک‌فضای‌متریک تبدیل می‌شود. منظور از تحدید ρ به S این‌است‌که دوری‌دونقطهٔ S راهمان‌دوری‌آنهابه‌عنوان‌نقطه‌های X بگیریم. بااین‌متریک، فضای‌متریک S را زیرفضای X می‌نامند. برای‌مثال، عددهای‌گویازیرمجموعه‌ای‌است‌از $\mathbf{R}$ ومجموعهٔ $\{\langle x, 0\rangle\}$ در $\mathbf{R}^2$ زیرفضایی‌است ایزومتریک‌با $\mathbf{R}$. فضای C زیرفضایی‌است‌از L^∞.

اگر E زیرمجموعه‌ای‌از S باشد، دراین‌صورت می‌توان‌بستار E را در S یا در X درنظر گرفت، یعنی ممکن است بخواهیم نقطه‌هایی از X را درنظر بگیریم که نقطه‌های بستار E باشند، یانقطه‌هایی‌از S رادرنظربگیریم که‌نقطه‌های‌بستار E هستند. درحالت‌کلی این‌دومجموعه‌متفاوتند. برای‌مثال، گیریم X همان‌فضای $\mathbf{R}$ و S فاصلهٔ $(۰، ۱)$ است. دراین‌صورت اگر E فاصلهٔ $(۰، \frac{۱}{۲}]$ باشد، بستار E در $\mathbf{R}$ فاصلهٔ $[۰، \frac{۱}{۲}]$ است، درصورتی‌که بستارآن در S همان $(۰، \frac{۱}{۲}]$ است، یعنی E در S بسته است. بنابراین می‌بینیم که بستاریک‌مجموعه مانند خاصیتهای بسته یا باز بودن، همه بستگی به‌فضایی دارندکه آن‌مجموعه‌را دربردارد. باوجوداین رابطه‌های‌زیر بین‌این‌مفهوم‌ها وجود دارد.

۱۲ ــ گزاره:

گیریم X یک‌فضای‌متریک و S زیرفضایی از آن‌است، دراین‌صورت‌بستار E، نسبت‌به S برابر $\overline{E} \cap S$ است‌که‌درآن $\overline{E}$ نمایش‌بستار E در X است. مجموعهٔ $A \subset S$ را نسبت‌به S بسته‌می‌گویند اگر و تنهااگر در X یک‌مجموعهٔ بستهٔ F موجود باشد به‌گونه‌ای که $A = S \cap F$ باشد، مجموعهٔ $A \subset S$ رانسبت‌به S بازمی‌گویند اگر و تنهااگر $A = S \cap O$ که درآن O در X باز است.

برهان:

اگر x یک نقطه از بستار E در X باشد، دراین‌صورت اگر این نقطه متعلق‌به S باشد، یک‌نقطه از بستار E در S است. ازاین‌رو بستار E در S برابر $\overline{E} \cap S$ است. اگر A در S بسته باشد باید $A = S \cap \overline{A}$ باشد، از سوی دیگر اگر F در X بسته باشد، دراین‌صورت بستار $S \cap F$ در S برابر است با:

$$S \cap \overline{(S \cap F)} \subset S \cap (\overline{S} \cap \overline{F}) \subset S \cap F$$

پس $S \cap F$ نسبت به S بسته است .

اگر A نسبت به S باز باشد ، دراین‌صورت $S \sim A$ نسبت‌به S بسته است و داریم $S \sim A = S \cap F$ ، یا $S \cap A = S \cap (\sim F)$ و $\sim F$ در X باز است .

به‌همین‌ترتیب اگر O باز باشد ، دراین‌صورت $S \cap O$ که‌مکمل $S \cap (\sim O)$ در است ، در S بسته است . ∎

۱۳ ـ گـــزاره :

هر زیرفضای یک فضای متریک جدایی‌پذیر ، خود جدایی‌پذیر است .

بـرهـــان :

گیریم X یک‌فضای‌متریک‌جدایی‌پذیر و S یک‌زیـرفضای آن است . بنابرگـزارهٔ ۶ یک‌دستهٔ شمارش‌پذیر $\{O_i\}$ ازمجموعه‌های‌باز X وجودداردبه‌گونه‌ای‌که‌هرمجموعهٔ باز X اجتماع‌یک‌زیردسته‌از $\{O_i\}$ هاست . بنابرگزارهٔ ۱۲ $\{O_i \cap S\}$ یک‌دستهٔ شمارش‌پذیر از زیرمجموعه‌های‌باز S است‌به‌گونه‌ای‌که‌هرزیرمجموعهٔ باز S اجتماع‌یک‌زیردسته‌ازآنهاست . ازاین‌رو S بنابرگزارهٔ ۶ جدایی‌پذیر است . ∎

دربرابر خاصیتهای نسبی توصیف شده در بالا ، خاصیتهایی وجود دارند ، که ذاتی هستند . برای‌مثال اگر خاصیت " تعلق x به‌بستار E " دریک‌زیرفضای‌شامل x و E ، برقرار باشد درسایر زیرفضاهای X هم که شامل x و E هستند برقرار است . یک خاصیت ذاتی دیگر " کامل بودن " است . زیرا تعریف کامل بودن یک فضا برحسب نقطه‌های آن داده شده است . باوجوداین در گزارهٔ زیر چند رابطهٔ موجود بین مجموعه‌های کامل و مجموعه‌های بسته ، بیان می‌شود .

۱۴ ـ گـــزاره :

اگر یک زیرمجموعهٔ A از یک‌فضای متریک X کامل باشد ، آنگاه این‌زیرمجموعه بسته است . از سوی دیگر ، هر زیرمجموعهٔ بستهٔ یک‌فضای‌متریک‌کامل خود کامل است .

مسئلــــــه .

۲۳ ـ گزارهٔ ۱۴ را ثابت کنید.[**راهنمایی** : از مسئلهٔ ۱۴ استفاده کنید .]

۷ ـ کاتگوری بیر[1]

دراین‌بند برخی‌از جنبه‌های‌فضاهای متریک‌را با ژرفای‌بیشتری موردبررسی قرار می‌دهیم . می‌گویند مجموعهٔ E **هیچ‌جا متراکم است** . هرگاه $\sim\overline{E}$ متراکم باشد . این‌تعریف‌هم‌ارز این‌گفتار است‌که $\overline{E}$ حاوی‌هیچ‌گوی‌نیست . برای‌مثال مجموعهٔ عددهای درست در $\mathbf{R}$ هیچ‌جا متراکم است، و مجموعهٔ سه‌سه‌ای‌کانتوردر[۱ و ۰] هیچ‌جا متراکم است .مجموعهٔ E را از **کاتگوری‌نخست** (یا نحیف) می‌گویند هرگاه اجتماع‌دستهٔ **شمارش‌پذیری از مجموعه‌های** هیچ‌جا متراکم **باشد** . مجموعه‌ای‌که‌از کاتگوری‌نخست نیست‌از **کاتگوری‌دوم** گفته‌می‌شود ، مکمل‌هرمجموعهٔ از کاتگوری‌نخست ، **پسمانده** نامیده می‌شود . نشان‌می‌دهیم که هر فضای متریک کامل هنگامی‌که به‌شکل زیرمجموعه‌ای از خودش درنظر گرفته شود از کاتگوری دوم است . برای‌این‌منظور نخست به‌بیان قضیهٔ زیــر می‌پردازیم :

۱۵ ـ قضیــــه :

گیریم X یک‌فضای‌متریک‌کامل و $\{O_n\}$ یک‌دستهٔ شمارش‌پذیر از زیرمجموعه‌های باز متراکم X است . دراین‌صورت $\bigcap O_n$ تهی نیست .

برهـــان :

گیریم x_1 نقطه‌ای از O_1 و S_1 یک گوی (به‌شعاع r_1) و به‌مرکز x_1 است که مشمول O_1 می‌باشد . چون O_2 متراکم است ، باید یک‌نقطهٔ x_2 در $O_2 \cap S_1$ وجودداشته‌باشد . چون O_2 بازاست‌یک‌گوی S_2 به‌مرکز x_2 وجوددارد‌که‌مشمول O_2 است ، و می‌توان r_2 شعاع گوی S_2 راکوچکتراز $\frac{1}{2} r_1$ و $r_1 - \rho(x_1, x_2)$ گرفت . دراین‌صورت $\overline{S}_2 \subset S_1$.

---

[1] ـ Baire Category

باروش استقراء یک دنباله‌ٔ $\langle S_n \rangle$ ازگویها به‌دست می‌آید به‌گونه‌ای‌که $\overline{S}_n \subset S_{n-1}$ و $S_n \subset O_n$ بوده‌ودنباله‌ٔ شعاعهای آنها ، $\langle r_n \rangle$ به‌صفربگراید . گیریم $\langle x_n \rangle$ دنباله‌ٔ مرکزهای این‌گوی‌هاست . دراین‌صورت برای $n, m \geq N$ داریم $x_n \in S_N$ و $x_m \in S_N$. ازاین‌رو $\rho(x_n, x_m) \leq 2r_N$ وچون $r_n \to 0$ پس $\langle x_n \rangle$ یک دنباله‌ٔ کشی است . چون X کامل است ، یک نقطه‌ٔ x متعلق به‌آن وجوددارد ، به‌گونه‌ای‌که $x_n \to x$. چون برای $n > N$ ، $x_n \in S_{N+1}$ است . پس داریم :

$x \in \overline{S}_{N+1} \subset S_N \subset O_N$ ، ازاین‌رو $x \in \bigcap O_n$. ∎

۱۶ ــ نتیجه (قضیه‌ٔ کاتگوری بیر) :

یک‌فضای‌متریک کامل نمی‌تواند اجتماع یک‌دسته‌ٔ شمارش‌پذیر از مجموعه‌های هیچ‌جا متراکم باشد .

برهان :

گیریم $\{E_n\}$ دسته‌ٔ شمارش‌پذیری از مجموعه‌های هیچ‌جا متراکم است . دراین صورت $O_n = \sim\overline{E}_n$ یک‌مجموعه‌ٔ بازمتراکم است ، پس یک‌نقطه‌ٔ $x \in \bigcap O_n$ وجود دارد . ولی این می‌رساند که $x \notin \bigcup E_n$. ∎

یک‌کاربرد قضیه‌ٔ کاتگوری‌بیر قضیه‌ٔ زیر است ، که اصل کرانداری‌یکنواخت نام دارد :

۱۷ ــ قضیه :

گیریم $\mathfrak{F}$ یک‌خانواده از تابعهای‌حقیقی پیوسته روی فضای متریک کامل X است و فرض می‌کنیم که برای هر $x \in X$ یک‌عدد M_x وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر $f \in \mathfrak{F}$ ، $|f(x)| \leq M_x$. دراین‌صورت یک‌مجموعه‌ٔ ناتهی باز $O \subset X$ و یک‌عدد ثابت M وجود دارد به‌گونه‌ای‌که برای همه‌ٔ تابعهای $f \in \mathfrak{F}$ و هر $x \in O$ داریم $|f(x)| \leq M$.

برهان :

برای‌هرعدد درست و مثبت m ، گیریم $E_{m,f} = \{x: |f(x)| \le m\}$ است ، وقرارمی‌دهیم $E_m = \bigcap_{\mathfrak{F}} E_{m,f}$ ، چون‌هرتابع f پیوسته‌است ، پس $E_{m,f}$ بسته‌است ، درنتیجه E_m بسته‌است . برای هر $x \varepsilon X$ یک‌عدد m وجود دارد به‌گونه‌ای که برای همهٔ تابعهای $f \varepsilon \mathfrak{F}$ ، داریم $|f(x)| \le m$ ، یعنی یک‌عدد m وجود دارد به‌گونه‌ای کـه $x \varepsilon E_m$ ، ازاین‌رو :

$$X = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m.$$

چون X یک‌فضای متریک کامل است ، یک مجموعهٔ E_m وجود دارد که هیچ‌جا متراکم نیست . چون E_m یک‌مجموعهٔ‌بسته‌است ، باید شامل‌یک‌گوی O باشد . ولی‌برای هر $x \varepsilon O$ ، برای همهٔ تابعهای $f \varepsilon \mathfrak{F}$ داریم : $|f(x)| \le m$. ∎

مسئلــــه‌ها

۲۴ ــ الف ــ ثابت‌کنید برای این‌که مجموعهٔ‌بستهٔ F هیچ‌جا متراکم‌باشد لازم و کافی است که شامل هیچ‌مجموعهٔ باز نباشد .

ب ــ ثابت‌کنید که E هیچ‌جا متراکم است اگر و تنهااگر برای هرمجموعهٔ باز ناتهی O یک‌گوی مشمول در $O \sim E$ وجود داشته باشد .

۲۵ ــ الف ــ ثابت کنید که اگر E ازکاتگوری‌نخست‌بوده‌و $A \subset E$ باشد ، آنگـاه A نیز از کاتگوری نخست است .

ب ــ ثابت کنیدکه اگر $\langle E_n \rangle$ یک‌دنباله‌ازمجموعه‌های‌کاتگوری‌نخست‌باشد ، آنگاه $\bigcup E_n$ نیز از کاتگوری نخست است .

۲۶ ــ اگر X یک‌فضای متریک کامل و E یک‌مجموعه‌ازکاتگوری‌نخست‌باشد ، آنگاه $\sim E$ در X متراکم است .

۲۷ ــ الف ــ نشان‌دهیدکه‌روی [۱ ، ۰] یک‌مجموعهٔ‌بستهٔ هیچ‌جا متراکم وجود دارد که اندازهٔ لبگ آن $1 - 1/n$ است .

ب ــ روی [۱ ، ۰] مجموعه‌ای‌ازکاتگوری‌نخست‌بسازیدکه‌اندازه‌اش ۱ باشد .

۲۸ــ دریک‌فضای‌متریک x رایک‌نقطهٔ‌منفردمی‌نامنداگرمجموعهٔ $\{x\}$ بازباشد ، ثابت‌کنیدکه‌هرفضای‌متریک‌کامل‌بدون‌نقطه‌های‌منفرد دارای شمارهٔ‌بی‌پایانی‌ازنقطه‌هاست .

۲۹ ـ الف ـ اگر $\bar{E}$ متراکم و F مجموعهٔ بسته‌ای‌مشمول E باشد، آنگاه F هیچ‌جا متراکم است.

ب ـ اگر E و $\tilde{E}$ هردو متراکم باشند، آنگاه حداکثر یکی از آنها یک $\mathfrak{F}_\sigma$ است.

پ ـ مجموعهٔ عددهای گویای فاصلهٔ $[0, 1]$ یک $\mathcal{G}_\delta$ نیست.

ت ـ آیا روی $[0, 1]$ یک‌تابع حقیقی وجود دارد که روی عددهای گویا پیوسته و روی عددهای گنگ ناپیوسته باشد؟

۳۰ ـ گیریم C فضای تابعهای پیوستهٔ روی $[0, 1]$ است، قرار می‌دهیم.

$F_n = \{f: (\exists x_0)$ با $|f(x) - f(x_0)| \leq n(x - x_0)$ $x_0 \leq x < 1\}$ برای‌هر x با ;

الف ـ نشان دهید که F_n یک‌زیرمجموعهٔ بسته از C است.

ب ـ نشان‌دهید که F_n هیچ‌جا متراکم است. [**راهنمایی**: هر $g \varepsilon C$ را می‌توان باتقریب حداکثر $\epsilon/2$ با یک تابع چندچندضلعی φ جانشین‌ساخت، و φ را می‌توان‌باتقریب‌حداکثر $\epsilon/2$ بایک‌تابع چندضلعی ψ جانشین‌کرد به‌گونه‌ای‌که‌قدرمطلق مشتق راست آن در هر نقطه، بزرگتر از n باشد.]

پ ـ نشان‌دهید که مجموعهٔ D از تابعهای پیوسته‌ای که دست کم در یک‌نقطهٔ $[0, 1]$ دارای مشتق راست باپایان هستند، **یک‌مجموعه‌ازکاتگوری نخست‌در** C است.

ت ـ روی $[0, 1]$ یک‌تابع پیوستهٔ هیچ‌جا مشتق‌پذیر وجود دارد.

۳۱ ـ گیریم $\langle f_n \rangle$ یک دنباله از تابعهای پیوسته از یک فضای متریک X بر یک‌فضای‌متریک Y است به‌گونه‌ای که برای‌هر x متعلق‌به X دنبالهٔ $\langle f_n(x) \rangle$ در Y به‌یک‌نقطهٔ $f(x)$ می‌گراید. دراین‌صورت f یک‌نگاشت‌از X در Y تعریف، می‌کند. نشان دهیدکه یک مجموعهٔ E **ازکاتگوری‌نخست‌در** X وجود دارد به‌گونه‌ای که f درهر نقطهٔ $x \varepsilon X \sim E$ پیوسته است. ازاین‌رو اگر f کامل باشد. X دریک‌مجموعهٔ متراکم ازنقطه‌های X پیوسته‌است.

[راهنمایی: گیریم $\{$ برای‌هر $k \geq n$ $F_{n,m} = \{x: \sigma(f_n(x), f_k(x)) < 1/m$ و گیریم $F^\circ_{n,m}$ درون $F_{n,m}$ است. قراردهید $E = \bigcup_{n,m} [F_{n,m} \sim F^\circ_{n,m}]$.

فصل هشتم

فضاهای توپولوژیک

۱ ـ مفاهیم بنیادی

در فصل ۷ خواص فضاهای متریک را تشریح کردیم و دیدیم که عده‌ای از قضایا تنها به‌خواص مجموعه‌های باز و بسته ، بستگی دارند . دراین‌فصل فضاهائی‌را موردمطالعه قرار می‌دهیم که مفهوم مجموعهٔ باز درآنها بنیادی است و سایر مفاهیم برحسب آن تعریف می‌شوند . این‌فضاهارا فضاهای‌توپولوژیک‌می‌نامند و بسیارکلی‌تر از فضاهای متریک هستند . دراینجا شایداین سئوال پیش‌آید : که‌چرا به‌مطالعهٔ فضاهای‌متریک‌اکتفانمی‌کنیم ؟ درست‌است‌که‌فضاهای‌متریک ساده‌ترهستند ، ولی مثالهائی از فضاهای‌توابع وجود دارند که درآنها برخی مفاهیم توپولوژیکی دارای معنایی طبیعی است که با مفاهیم توپولوژیکی ناشی‌ازهیچ‌متریکی که بتوان روی‌آن‌فضا تعریف‌کرد ، سازگارنیست . مثالهای‌مهم به‌وسیلهٔ توپولوژی‌های‌کم‌توان درفضاهای‌باناخ‌داده‌می‌شوند . اکنون‌به‌تعریف‌فضای‌توپولوژیک‌می‌پردازیم :

تعریف :

هرفضای‌توپولوژیک $\langle X, \mathfrak{J}\rangle$ عبارت‌است از یک‌مجموعهٔ ناتهی X از نقاط ، توأم‌باخانوادهٔ $\mathfrak{J}$ اززیرمجموعه‌های‌آن (که‌آنها را بازخواهیم‌نامید) که‌دارای‌خواص‌زیرهستند :

i ــ $X \in \mathfrak{J}, \varnothing \in \mathfrak{J}$

ii ــ $O_1 \in \mathfrak{J}$ و $O_2 \in \mathfrak{J}$ ایجاب می‌کند $O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{J}$

iii ــ $O_\alpha \in \mathfrak{J}$ ایجاب می‌کند $\bigcup_\alpha O_\alpha \in \mathfrak{J}$

خانوادهٔ $\mathfrak{J}$ برای مجموعهٔ X یک توپولوژی نامیده می‌شود .

خواصی که دراین‌تعریف گفته شد ، درمورد مجموعه‌های باز یک فضای متریک $\langle X, \rho\rangle$ صدق می‌کنند ، ازاین‌رو به‌هرفضای متریک $\langle X, \rho\rangle$ می‌توان یک‌فضای

توپولوژیک $\langle X, \rho \rangle$ وابسته ساخت ، که درآن $\mathfrak{J}$ خانوادهٔ مجموعه‌های باز $\langle X, \mathfrak{J} \rangle$ است . فضای‌توپولوژیکی که‌به‌این ترتیب به‌یک‌فضای‌متریک‌وابسته‌می شود ، **متریک‌پذیر** نامیده‌می‌شود ، و ρ را یک‌متریک این‌فضای‌توپولوژیک می‌نامند . تمیز بین یک‌فضای‌متریک و فضای‌توپولوژیک‌وابسته‌به‌آن ، ازنظرمنطقی‌اساسی است، زیرا ممکن‌است‌ازفضاهای متریک گوناگون یک فضای توپولوژیک نتیجه شود . البته چنین دوفضای متریک هم‌ارزند . و درحالت‌هائی‌که احتمال اشتباه وجود ندارد . بین یک‌فضای متریک و فضای توپولوژیک مربوط به‌آن فرقی قایل‌نمی‌شویم . دربعضی‌حالتها ، حتی بین فضای توپولوژیک ($\langle X, \mathfrak{J} \rangle$ و مجموعهٔ نقاط‌آن X وجه‌تمایزی قایل نشده و هردورا با X نشان می‌دهیم . بااین‌همه باید به‌خاطرداشت‌که فضاهای‌متریک و فضاهای توپولوژیک هرکدام یک‌جفت است ، و در بیشترموارد لازم است که این واقعیت به‌طورصریح بیان شود .

روی‌هرمجموعهٔ X ازنقاط همواره‌می‌توان دوتوپولوژی تعریف کرد . یکی از آنها توپولوژی بدیهی است که درآن تنها مجموعه‌های باز $\varnothing$ و X هستند . توپولوژی دیگر توپولوژی گسسته است ، که درآن هرزیرمجموعهٔ X یک‌مجموعهٔ باز است .

به‌کمک مفهوم مجموعهٔ باز می‌توان سایرخاصیت‌های توپولوژیک را تعریف کرد ، برای‌مثال : زیرمجموعهٔ F از X را **بسته** می‌گویند اگر $\tilde{F}$ باز باشد .

۱ ــ گزاره :

مجموعه‌های $\varnothing$ و X بسته‌اند . اجتماع‌هردومجموعهٔ بسته‌یک‌مجموعهٔ بسته است . اشتراک هردسته از مجموعه‌های بسته یک مجموعهٔ بسته است .

اگر A زیرمجموعه‌ای‌ازفضای‌توپولوژیک $\langle X, \mathfrak{J} \rangle$ باشد ، می‌توان برای A یک **توپولوژی** $\mathfrak{S}$ به‌این‌ترتیب تعریف‌کرد ، $\mathfrak{S}$ شامل‌آن زیرمجموعه‌های B از A است که برای آنها یک زیرمجموعهٔ $O \in \mathfrak{J}$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که $B = A \cap O$. $\mathfrak{S}$ را توپولوژی موروث از $\mathfrak{J}$ می‌نامند و $\langle A, \mathfrak{S} \rangle$ را یک‌زیرفضای $\langle X, \mathfrak{J} \rangle$ می‌گویند . این‌نامگذاری بانامگذاری مربوط به‌فضاهای متریک سازگار است .

می‌گویند دنبالهٔ $\langle x_n \rangle$ دریک‌فضای توپولوژیک به‌سوی نقطهٔ x می‌گراید ، یا دارای حد x است ، هرگاه برای هرمجموعهٔ باز O شامل x یک‌عدد درست N وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که برای همهٔ اعداد $n \geq N$ ، $x_n \in O$ باشد . همچنین x را نقطهٔ‌تجمع دنبالهٔ $\langle x_n \rangle$ می‌نامند هرگاه برای هرمجموعهٔ‌باز O ی‌شامل x و هرعدد درست N یک‌عدد درست $n \geq N$ وجود داشته‌باشد به‌گونه‌ای‌که $x_n \in O$ باشد . بنابراین

اگر $\langle x_n \rangle$ دارای زیر دنباله‌ای باشد که به‌سوی x بگراید، آنگاه x یک نقطهٔ تجمع $\langle x_n \rangle$ است. وارون این‌بیان در یک‌فضای توپولوژیک دلخواه همیشه درست نیست.

بنابرگزارهٔ ۷ . ۷ می‌توان تعریف یک‌تابع پیوسته روی یک فضای توپولوژیک را به‌گونه‌ای بیان‌کرد که با مفهوم معمولی پیوستگی درحالتی‌که فضای توپولوژیک، فضای‌متریک نیز است،مطابقت داشته باشد.

تعریف:

نگاشت f از فضای توپولوژیک $\langle X, \mathfrak{J} \rangle$ درفضای توپولوژیک $\langle Y, \mathfrak{S} \rangle$ را پیوسته می‌گویند هرگاه سایهٔ وارون هرمجموعهٔ باز یک مجموعهٔ باز باشد، یعنی اگر $O \in \mathfrak{S}$ باشد آنگاه $f^{-1}[O] \in \mathfrak{J}$ گردد.

باید توجه‌داشت که اگر تابع f روی فضای X پیوسته باشد آنگاه تحدید آن f_1، به‌هر زیرفضای A ی X نیز روی A پیوسته است، زیرا برای هر باز O مجموعهٔ $f_1^{-1}[O] = A \cap f^{-1}[O]$ بنابرپیوستگی f و تعریف مجموعه‌های باز در A، باز است.

تعریف:

هرهمئومرفیسم بین دوفضای توپولوژیک یک‌نگاشت پیوستهٔ یک‌به‌یک از X به‌روی Y است که‌وارون‌آن یعنی f^{-1} پیوسته‌است. اگر بین‌دوفضای X و Y یک‌همئومرفیسم وجود داشته باشد، آنها را همئومرف می‌نامند.

از یک‌نظر مجرد دوفضای توپولوژیک‌همئومرف تمیزناپذیرند، همئومرفیسم تنها منجر به‌بازنامیدن‌نقطه‌های‌یک‌مجموعه به‌وسیله نقطه‌های‌یک‌مجموعهٔ دیگر است. بنابراین مفهوم همئومرفیسم برای فضاهای‌توپولوژیک همان نقشی‌را بازی‌می‌کند که ایزومتری برای فضاهای متریک و ایزومرفیسم برای دستگاههای جبری دارد.

فرض کنیم $\mathfrak{J}$ و $\mathfrak{S}$ دو توپولوژی برای یک‌مجموعهٔ X هستند. دراین‌صورت $\mathfrak{S}$ را پرتوان‌تر از $\mathfrak{J}$ می‌گویند‌اگر $\mathfrak{S} \supset \mathfrak{J}$. بنابراین $\mathfrak{S}$ از $\mathfrak{J}$ پرتوان‌تراست‌اگر و تنهااگر نگاشت همانی‌از $(X, \mathfrak{S})$ در $(X, \mathfrak{J})$ پیوسته باشد. توپولوژی بدیهی برای‌یک‌مجموعهٔ X، کم‌توان‌ترین توپولوژی ممکن روی X است، درحالی‌که توپولوژی گسسته پرتوان‌ترین توپولوژی ممکن است.

اگر $\mathcal{T}$ و $\mathcal{S}$ دو توپولوژی برای مجموعهٔ X باشند، آنگاه $\mathcal{T} \cap \mathcal{S}$ نیز یک توپولوژی برای X است. درحقیقت، اگر $\{\mathcal{T}_\alpha\}$ یک‌دستهٔ دلخواه از توپولوژی‌ها باشد، آنگاه $\bigcap_\alpha \mathcal{T}_\alpha$ یک توپولوژی است. بنابراین اگر $\mathcal{C}$ یک‌دسته از زیرمجموعه‌های X باشد، آنگاه اشتراک‌همهٔ توپولوژی‌های‌حاوی $\mathcal{C}$ یک‌توپولوژی‌حاوی $\mathcal{C}$ است. این‌توپولوژی‌کم‌توان‌ترین توپولوژی است به‌گونه‌ای که همهٔ مجموعه‌های $\mathcal{C}$ باز هستند.

۲ــ گــــــزاره:

گیریم X یک‌مجموعهٔ ناتهی از نقاط و $\mathcal{C}$ یک دسته از زیرمجموعه‌های X است. دراین‌صورت کم‌توان‌ترین توپولوژی $\mathcal{T}$ وجود دارد که حاوی $\mathcal{C}$ است.

مسئلــــــه‌ها

۱ ــ الف ــ یک‌مجموعهٔ X داده شده‌است، آیا می‌توان روی X متریکی تعریف کرد که فضای توپولوژیکی وابسته به‌آن گسسته یا بدیهی باشد؟

ب ــ گیریم X فضایی بایک توپولوژی بدیهی است. همهٔ نگاشتهای پیوسته از X در $\mathbb{R}$ را بیابید.

پ ــ گیریم X فضایی‌باتوپولوژی گسسته است. همهٔ نگاشتهای‌پیوسته از X در $\mathbb{R}$ را بیابید.

۲ ــ x را یک‌نقطه‌ازبستـــار یک‌مجموعهٔ E می‌گویندهرگاه‌برای‌هر $O \in \mathcal{T}$ با $x \in O$ داشته‌باشیم $O \cap E \neq \varnothing$. ثابت‌کنیدکه $\bar{E}$، مجموعهٔ‌نقطه‌های بستار E اشتراک همهٔ مجموعه‌های بستهٔ حاوی E است.

۳ ــ ثابت کنید یک مجموعهٔ $A \subset X$ باز است اگروتنهااگر برای‌هر $x \in A$ یک مجموعهٔ باز O وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $x \in O \subset A$.

۴ ــ ثابت‌کنید که یک‌نگاشت‌از X در Y پیوسته‌است اگر و تنها اگر سایهٔ‌وارون هرمجموعهٔ بسته با آن یک مجموعهٔ بسته باشد.

۵ ــ نشان دهید که اگر f یک نگاشت پیوسته از X در Y و g یک‌نگاشت پیوسته از Y در Z باشد، آنگاه $g \circ f$ یک نگاشت پیوسته از X در Z است.

۶ــ ثابت‌کنیدکه‌مجموع‌وحاصل‌ضرب دوتابع حقیقی پیوسته‌خودتابعهای‌پیوسته‌اند.

۷ ــ الف ــ گیریم F یک زیرمجموعهٔ بسته از یک‌فضای‌توپولوژیک و $\langle x_n \rangle$

دنباله‌ای از نقطه‌های F است. نشان دهید که اگر x یک‌نقطهٔ‌تجمع $\langle x_n \rangle$ باشد، آنگاه $x \varepsilon F$ است.

ب ـ نشان دهید که اگر f پیوسته و $x = \lim x_n$ باشد، آنگاه $\langle f(x_n) \rangle$ دارای حد $f(x)$ است.

پ ـ نشان‌دهیدکه‌اگر f پیوسته‌و x یک‌نقطهٔ‌تجمع $\langle x_n \rangle$ باشدآنگاه $f(x)$، یک‌نقطهٔ تجمع $\langle f(x_n) \rangle$ است.

۲ ـ پایـــه‌ها و شمـارش‌پـذیـــری

یک‌دستهٔ $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های‌باز یک‌فضای توپولوژیک X را یک پـایـــه برای توپولوژی $\mathfrak{J}$ از X می‌نامنداگربرای‌هرمجموعهٔ‌باز O از X وهر $x \varepsilon O$ یک‌مجموعهٔ $B \varepsilon \mathcal{B}$، وجود داشته‌باشد به‌گونه‌ای‌که $x \varepsilon B \subset O$. یک‌دستهٔ $\mathcal{B}_x$ ازمجموعه‌های‌بازحاوی‌یک‌نقطهٔ x یک‌پایه در x نامیده می‌شود اگر برای هر مجموعهٔ باز O ی حاوی x یک $B \varepsilon \mathcal{B}_x$ وجود داشته‌باشدبه‌گونه‌ای‌که $x \varepsilon B \subset O$. بنابراین‌یک‌دستهٔ $\mathcal{B}$ ازمجموعه‌های‌باز تنهاهنگامی یک پایه است که حاوی یک پایه درهر نقطهٔ $x \varepsilon X$ باشد. اگر X یک‌فضای متریک باشد، گویها برای آن یک‌پایه می‌سازند و گویهای به‌مرکز x یک‌پایه در x تشکیل می‌دهند.

اگر $\mathcal{B}$ یک‌پایه‌برای‌توپولوژی $\mathfrak{J}$ باشد، دراین‌صورت $O \varepsilon \mathfrak{J}$ است اگر و تنها اگر برای‌هر $x \varepsilon O$ یک $B \varepsilon \mathcal{B}$ وجود داشته‌باشد با $x \varepsilon B \subset O$. بخش " تنها اگر " این‌گفته از تعریف پایه نتیجه می‌شود. برای برهان بخش " اگر " گوییم، اگر برای‌هر x متعلق به O داشته‌باشیم $x \varepsilon B \subset O$، آنگاه O بایداجتماع آن B های متعلق‌به $\mathcal{B}$ باشد که‌برای آنها $B \subset O$ است. و O باز است زیرا O اجتماعی از مجموعه‌های باز است.

گاهی بهتر است که یک توپولوژی برای مجموعهٔ X را باتوصیف یک‌پایهٔ $\mathcal{B}$ از مجموعه‌های‌باز مشخص‌کنیم ومحک‌پیشین‌را برای‌تعریف‌مجموعه‌های‌باز به‌کاربریم. شرطهایی که‌تحت‌آنهایک‌دستهٔ $\mathcal{B}$ برای یک توپولوژی یک‌پایه باشد، درگزارهٔ زیر داده شده‌اند.

۳ ـ گـــــزاره:

یک‌دستهٔ $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های‌یک‌مجموعهٔ X برای‌یک‌توپولوژی‌روی X یک‌پایه است اگروتنهااگر هر x متعلق‌به X مشمول یک B باشد، و اگر $x \varepsilon B_1 \cap B_2$ باشد، آنگاه یک $B_3 \varepsilon \mathcal{B}$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $x \varepsilon B_3 \subset B_1 \cap B_2$

برهـــان :

لزوم این شرطها از تعریف پایه و این حقیقت که X و $B_1 \cap B_2$ باز هستند ، نتیجه می‌شود . اکنون فرض کنیم که $\mathcal{B}$ این شرطها را برمی‌آورد . اگر قرار دهیم : $\mathfrak{J} = \{O : (x \varepsilon O)(\exists B \varepsilon \mathcal{B})(x \varepsilon B \subset O)\}$ ، آنگاه $\varnothing \varepsilon \mathfrak{J}$ ، واجتماع مجموعه‌های متعلق به $\mathfrak{J}$ بازهم به $\mathfrak{J}$ متعلق است ، وشرط نخست روی $\mathcal{B}$ ایجاب می‌کند که $X \varepsilon \mathfrak{J}$ باشد . برای اینکه نشان دهیم اشتراک دومجموعهٔ O_1 و O_2 ی متعلق به $\mathfrak{J}$ باز به آن تعلق دارد ، می‌گیریم $x \varepsilon O_1 \cap O_2$ ، دراین صورت مجموعه‌های B_1 و B_2 در $\mathcal{B}$ وجود دارند به‌گونه‌ای که $x \varepsilon B_1 \subset O_1$ و $x \varepsilon B_2 \subset O_2$ گیریم B_3 مجموعه‌ای متعلق به $\mathcal{B}$ است با $x \varepsilon B_3 \subset B_1 \cap B_2$ دراین صورت $x \varepsilon B_3 \subset O_1 \cap O_2$ درنتیجه $O_1 \cap O_2$ باز است . ∎

یک فضای توپولوژیک در *اصل موضوع اول شمارش‌پذیری* صدق می‌کند اگر در هرنقطهٔ آن یک پایهٔ شمارش‌پذیر وجود داشته باشد . هرفضای متریک دراصل موضوع اول شمارش‌پذیری صدق می‌کند ، زیرا گویهای به‌مرکز x و به‌شعاعهای گویا شمارش‌پذیرند و پایه‌ای در x می‌سازند . می‌گویند یک فضا در *اصل موضوع دوم شمارش‌پذیری* صدق می‌کند اگر برای توپولوژی یک پایهٔ شمارش‌پذیر وجود داشته باشد . بنابراین گزارهٔ ۶ . ۷ مبین این است که هرفضای متریک دراصل موضوع دوم شماره‌پذیری صدق می‌کند اگر و تنها اگر جدایی‌پذیر باشد .

مسئـــله‌ها

۸ ــ الف ــ گیریم $\mathcal{B}$ برای فضای توپولوژیک $\langle X, \mathfrak{J} \rangle$ یک پایه است. دراین صورت $x \varepsilon \bar{E}$ اگروتنها اگر برای هر $B \varepsilon \mathcal{B}$ با $x \varepsilon B$ یک $y \varepsilon B \cap E$ وجود داشته باشد .

ب ــ گیریم X دراصل موضوع اول شمارش‌پذیری صدق می‌کند ، آنگاه $x \varepsilon \bar{E}$ اگر و تنها اگر یک دنباله از نقاط E وجود داشته باشد که به x می‌گراید .

پ ــ گیریم X دراصل موضوع اول شمارش‌پذیری صدق می‌کند . دراین صورت x ، یک نقطهٔ تجمع یک دنبالهٔ $\langle x_n \rangle$ ازنقاط X است ، اگر و تنها اگر $\langle x_n \rangle$ دارای زیردنباله‌ای باشد که به x می‌گراید .

۹ ــ نگاشت f ازیک فضای توپولوژیک X دریک فضای توپولوژیک Y در x پیوسته گفته می‌شود اگر برای هر باز O حاوی $f(x)$ یک مجموعهٔ باز U حاوی x وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $f[U] \subset O$

الف ــ نشان‌دهیدکه f پیوسته‌است اگر و تنها اگر درهرنقطهٔ X پیوسته باشد.

ب ــ گیریم $\mathcal{B}_x$ پایه‌ای‌در x، $\mathcal{C}_y$ پایه‌ای‌در $y = f(x)$ است. دراین‌صورت f در x پیوسته است اگر و تنها اگربرای هر $C \varepsilon \mathcal{C}_y$ یک $B \varepsilon \mathcal{B}_x$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $B \subset f^{-1}[C]$ گردد.

۱۰ ــ گیریم $\mathcal{C}$ یک‌دستهٔ دلخواه از زیرمجموعه‌های X است. گیریم $\mathcal{B}$ متشکل است از X و همهٔ‌اشتراکهای باپایان‌مجموعه‌های $\mathcal{C}$. نشان‌دهیدکه $\mathcal{B}$ برای‌کم‌توان‌ترین توپولوژی حاوی $\mathcal{C}$، یک پایه است.

۱۱ ــ گیریم X یک مجموعهٔ شمارش‌ناپذیر از نقطه‌ها بوده و $\mathfrak{J}$ متشکل است از مجموعهٔ‌تهی‌وهمهٔ‌زیرمجموعه‌های X که مکمل‌آنها باپایان است. نشان‌دهیدکه $\mathfrak{J}$ برای X یک‌توپولوژی‌است‌ولی‌فضای $\langle X, \mathfrak{J} \rangle$ دراصل‌موضوع‌اول‌شمارش‌پذیری‌صدق‌نمی‌کند.

۱۲ ــ گیریم X مجموعهٔ‌عددهای‌حقیقی، و $\mathcal{B}$ مجموعهٔ همهٔ‌فاصله‌های به‌شکل $[a, b)$ است. نشان‌دهیدکه $\mathcal{B}$ پایهٔ‌یک توپولوژی $\mathfrak{J}$ برای X است. (این توپولوژی، توپولوژی‌فاصلهٔ نیم‌باز نامیده‌می‌شود). نشان‌دهیدکه $\langle X, \mathfrak{J} \rangle$ دراصل موضوع اول شمارش‌پذیری صدق‌می‌کند ولی در دومی صدق‌نمی‌کند، و مجموعهٔ‌عددهای گویا در X متراکم است. آیا $\langle X, \mathfrak{J} \rangle$ متریک‌پذیر است ؟

۳ــ اصلهای موضوع جداسازی و توابع حقیقی پیوسته

خاصیت‌های‌فضاهای‌توپولوژیک درحالت‌کلی کاملاً باخاصیت‌های‌فضاهای‌متریک متفاوتند و گاهی‌بهتراست فرض‌کنیم که فضای‌توپولوژیک دربعضی شرطهای اضافی که در فضاهای متریک درستند، صدق‌می‌کند. مجموعهٔ‌شرطهای زیر را روی یک فضای توپولوژیک درنظر می‌گیریم :

T_1ــ برای دونقطهٔ متمایز دادهٔ شدهٔ x و y، یک مجموعهٔ باز وجود دارد که y را دربردارد ولی x را دربر ندارد.

T_2ــ برای دونقطهٔ متمایز داده‌شدهٔ x و y، مجموعه‌های بازمجزای O_1 و O_2، وجود دارند به‌گونه‌ای $x \varepsilon O_1$ و $y \varepsilon O_2$ است.

T_3ــ علاوه‌بر T_1، برای‌هرمجموعهٔ بستهٔ F ویک‌نقطهٔ x که‌به F متعلق نیست، مجموعه‌های‌بازمجزای‌بازمجزای O_1 و O_2 وجود دارند به‌گونه‌ای که $x \varepsilon O_1$ و $F \subset O_2$.

T_4ــ علاوه‌بر T_1، برای دو مجموعهٔ بستهٔ‌مجزای F_1 و F_2، مجموعه‌های بازمجزای O_1 و O_2 وجود دارند به‌گونه‌ای‌که $F_1 \subset O_1$ و $F_2 \subset O_2$

این شرطها را اصلهای جداسازی می‌نامند، و همه به‌وسیلهٔ یک‌فضای متریک برآورده‌می‌شوند. هرفضای‌توپولوژیک که‌شرط T_2 را برآورد فضای هاسدورف[1] نامیده می‌شود، هرفضای‌توپولوژیک که T_3 را برآورد فضای منظم وهرآن‌که T_4 را برآورد فضای نرمال گفته می‌شود. درگزارهٔ زیر ثابت می‌شود که شرط T_1 هم‌ارز با این‌گفته است‌که هر مجموعهٔ متشکل‌از یک نقطهٔ تنها، بسته است. باتوجه به‌آن می‌بینیم که:

$$T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$$

۴ ـ گزاره:

یک‌فضای توپولوژیک تنها هنگامی در T_1 صدق می‌کند که هرمجموعهٔ متشکل از یک نقطهٔ تنها درآن بسته باشد.

برهان:

اگرهرمجموعهٔ $\{x\}$ بسته‌باشد، آنگاه برای دونقطهٔ متمایز x و y می‌توان‌گرفت $O = \sim\{x\}$. دراین‌صورت O مجموعهٔ بازی‌است‌حاوی y که x را دربرندارد. فرض کنیم که T_1 برقرار است. هر $y \in \sim\{x\}$ مشمول‌یک‌مجموعهٔ باز $O \subset \sim\{x\}$ است. بنابراین مجموعهٔ $\sim\{x\}$ اجتماع مجموعه‌های‌باز مشمول‌خودش است پس‌باید‌باز‌باشد. ازاین‌رو $\{x\}$ بسته است. ∎

پیامدهای‌مهم نرمال‌بودن، درگزارهٔ زیر، که‌برهان‌آن به‌خواننده واگذار‌می‌شود، آورده شده‌اند (مسئله‌های ۱۸ و ۱۹).

۵ ـ لم اوریزون[2]:

گیریم A و B دوزیرمجموعهٔ بستهٔ مجزای‌یک‌فضای‌نرمال X هستند. دراین‌صورت یک‌تابع‌حقیقی پیوستهٔ f وجود دارد که روی X تعریف شده است به‌گونه‌ای که روی X، داریم $0 \leq f \leq 1$، درحالی‌که روی A، $f \equiv 0$ و روی B، $f \equiv 1$ است.

---

۱ ـ Hausdorff

۲ ـ Urysohn

۶ــ قضیهٔ گسترش تیتــــز[۱] :

گیریم X یک‌فضای‌توپولوژیک‌نرمال ، A یک‌زیرمجموعهٔ بستهٔ X ، و f یک‌تابع حقیقی‌پیوسته روی A است . دراین‌صورت یک‌تابع پیوستهٔ حقیقی g روی X وجود دارد به‌گونه‌ای که‌برای $x \varepsilon A$ داریم $g(x) = f(x)$.

اگر X یک مجموعهٔ دلخواه از نقطه‌ها و $\mathfrak{F}$ دسته‌ای از تابعهای حقیقی روی X ، باشد . همواره کم‌توان‌ترین‌توپولوژی روی X وجود دارد به‌گونه‌ای‌که‌هرتابع متعلق‌به $\mathfrak{F}$ ، پیوسته است ، زیرا گیریم :

$$C = \{E: E = f^{-1}[O], \text{ است } \mathbf{R} \text{ یک‌زیرمجموعهٔ باز } O \text{ و } f \varepsilon \mathfrak{F}\}$$

وازگزارهٔ ۱۳ استفاده کنید . این توپولوژی‌را تــوپــولــوژی کــم‌تــوان تولید شده (یا القاشده) به‌وسیلهٔ $\mathfrak{F}$ می‌نامند . اگر تابعهای‌متعلق‌به $\mathfrak{J}$ همه‌در یک توپولوژی $\mathfrak{J}$ ، پیوسته باشند ، آنگاه توپولوژی کم‌توان تولید شده به‌وسیلهٔ $\mathfrak{F}$ درحالت‌کلی کم‌توان‌تر از $\mathfrak{J}$ است . برای‌انطباق این توپولوژی‌ها ، باید به‌قدرکافی تابعهای حقیقی‌پیوسته وجود داشته‌باشد . یک شرط‌که این انطباق را تضمین می‌کند شرط زیر است : برای هر مجموعهٔ بستهٔ F وهرنقطهٔ $x \not\varepsilon F$ یک‌تابع $f \varepsilon \mathfrak{F}$ باشرط $f(x) = 1$ و $f \equiv 0$ روی F ، وجود دارد . هنگامی‌که $\mathfrak{F}$ فضای $C(X)$ همهٔ‌تابعهای حقیقی پیوسته روی X است ، اگر این شرط برقرارباشد ،آنگاه‌می‌گوییم‌که X **به‌طــورکــامــل‌منظـــم** است ، به‌شرط این‌که X در T_1 صدق کند . از لم اوریزن نتیجه می‌شود که هر فضای‌نرمال به‌طورکامل منظم است ، و به‌آسانی دیده‌می‌شودکه نظم کامل ایجاب کننده نظم است . به‌این‌سبب گاهی شرط معرف نظم کامل را $T_{3\frac{1}{2}}$ می‌نامند .

قضیهٔ‌زیر مشخص‌کنندهٔ‌فضاهای متریک جدایی‌پذیر است . این‌قضیه بااستفاده از مفهوم‌های بند بعد ثابت می‌شود (مسئله ۳۰ را ببینید) .

۷ــ قضیهٔ متری‌سازی اوریزن :

هرفضای توپولوژیک نرمال که در اصل دوم شمارش‌پذیری صـــدق کنـــــد متــریــک‌پــذ یــر اســـت .

---

۱ ــ Tietz

مسئلـــــه‌ها

۱۳ ــ الف ــ نشان دهید که هر فضای متریک یک فضای هاوسدورف است .

ب ــ نشان دهید که هرفضای متریک یک فضای نرمال است .[راهنمایی : گیریم F_1 و F_2 دومجموعهٔ بستهٔ مجزا هستند ، قرار دهید :

$O_1 = \{x: \rho(x, F_1) < \rho(x, F_2)\}$ و $[O_2 = \{x: \rho(x, F_2) < \rho(x, F_1)\}.]$

۱۴ ــ گیریم X متشکل از عددهای فاصله $[0, 1]$ و یک عنصر $0'$ است ، و برای یک‌توپولوژی ، مجموعه‌های (α, β) ، $[0, \beta)$ ، $(\alpha, 1]$ ، و $\{0'\} \cup (0, \beta)$ را پایه‌بگیرید . نشان‌دهیدکه‌این‌مجموعه‌ها پایه‌ای برای‌یک‌توپولوژی روی X است‌که T_1 است ولی هاسدورف نیست .

۱۵ــ گیریم f روی‌فضای‌توپولوژیک X یک‌تابع حقیقی‌است . نشان‌دهیدکه f پیوسته است‌اگروتنها‌اگر برای‌هرعددحقیقی a مجموعه‌های $\{x: f(x) < a\}$ و $\{x: f(x) > a\}$ بازباشند . نشان‌دهید f پیوسته است اگر و تنها‌اگر برای هرعددحقیقی a مجموعهٔ $\{x: f(x) > a\}$ باز و مجموعهٔ $\{x: f(x) \geq a\}$ بسته باشد .

۱۶ ــ اگر f و g ، روی‌یک فضای توپولوژیک X ، دوتابع حقیقی پیوسته باشند ، آنگاه‌تابعهای $f + g$ ، fg ، $f \vee g$ و $f \wedge g$ نیزپیوسته‌اند .(دراینجاطبق‌معمول‌داریم : $(f \vee g)(x) = \max f(x), g(x)$.)

۱۷ ــ گیریم $\langle f_n \rangle$ یک‌دنباله‌از تابعهای‌پیوسته از یک‌فضای‌توپولوژیک X بر یک فضای متریک Y است . اگر $\langle f_n \rangle$ به‌طوریکنواخت به‌یک‌تابع f بگراید ، آنگاه f ، پیوسته است .

۱۸ ــ الف ــ نشان دهید که یک فضای هاوسدورف تنها هنگامی نرمال است که برای هرمجموعهٔ‌بستهٔ داده شدهٔ F و هرمجموعهٔ باز O حاوی F ، یک مجموعهٔ باز U، وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $F \subset U$ و $\bar{U} \subset O$.

ب ــ گیریم F یک‌زیرمجموعهٔ‌بستهٔ یک فضای‌نرمال است که مشمول یک‌مجموعهٔ باز O می‌باشد . باتکرار نتیجهٔ مذکور در (الف) نشان دهید که می‌توان یک‌خانوادهٔ $\{U_r\}$ ازمجموعه‌های‌باز ساخت ، که هریک متناظر بایک‌عددگویا به‌شکل $r = p \cdot 2^{-n}$ از فاصلهٔ (۰ ، ۱) باشد ، به‌گونه‌ای‌که $F \subset U_r \subset O$ بوده و برای $r < s$ داشته باشیم $\bar{U}_r \subset U_s$.

پ ــ گیریم $\{U_r\}$ خانواده‌ای‌است که‌در (ب) ساخته‌شده‌با $U_1 = X$. گیریم f یک تابع حقیقی روی X است‌که‌با $f(x) = \inf \{r: x \varepsilon U_r\}$ تعریف می‌شود .

دراین‌صورت f یک تابع پیوسته باشرط $0 \leq f \leq 1$ است به‌گونه‌ای‌که روی F داریم $f \equiv 0$ و روی $\tilde{O}$ داریم $f \equiv 1$.

ت ــ گیریم X یک‌فضای هاوسدورف است . ثابت کنید X تنها هنگامی نرمال است‌که برای‌هرجفت از مجموعه‌های‌بستهٔ مجزای A و B روی X یک‌تابع حقیقی‌پیوستهٔ f ، روی X باشرط $0 \leq f \leq 1$ وجود داشته‌باشد به‌گونه‌ای‌که روی A داشته باشیم $f \equiv 0$ و روی B داشته باشیم $f \equiv 1$.

۱۹ ــ بااستفاده از گامهای زیر قضیهٔ گسترش تیتز را ثابت کنید :

الف ــ می‌گیریم $h = f/(1 + |f|)$. دراین‌صورت $|h| < 1$

ب ــ گیریم $B = \{x: h(x) \leq -\frac{1}{3}\}$ ، $C = \{x: h(x) \geq \frac{1}{3}\}$

دراین‌صورت بنابرلم اوریزن روی X یک تابع پیوستهٔ حقیقی h_1 وجود دارد که روی B ، برابر $-\frac{۱}{۳}$ و روی C برابر $\frac{۱}{۳}$ است ، درحالی‌که برای همهٔ $x \varepsilon X$ داریم ، $|h_1(x)| \leq \frac{۱}{۳}$ ، روشن است که برای همهٔ $x \varepsilon A$ داریم :

$$|h(x) - h_1(x)| < \frac{۲}{۳}$$

پ ــ بنابه‌استقراء یک‌تابع h_n روی X وجود دارد به‌گونه‌ای‌که برای‌هر $x \varepsilon X$ ، داریم $|h_n(x)| < \frac{2^{n-1}}{3^n}$ و برای هر $x \varepsilon A$ داریم :

$$|h(x) - \sum_{i=1}^{n} h_i(x)| < \frac{2^n}{3^n}$$

ت ــ دنبالهٔ $\langle h_n \rangle$ روی X به‌طوریکنواخت به‌یک‌تابع پیوستهٔ k ، جمع پذیر است ، به‌گونه‌ای‌که $|k| < 1$ وروی A داریم $k = h$. قراردهید $g = k/(1 - |k|)$.

۲۰ ــ گیریم $\mathfrak{F}$ یک‌خانواده از تابعهای‌حقیقی روی X است . نشان دهید برای توپولوژی کم‌توانی روی X که با $\mathfrak{F}$ تولید می‌شود یک پایه بامجموعه‌هایی به‌شکل $\{x: |f_i(x) - f_i(y)| < \epsilon$ ویک‌مجموعه‌باپایان $f_1, \ldots, f_n$ ازتابعهای $\mathfrak{F}$ و برای‌یک $\epsilon > 0$ ، $y \varepsilon X\}$, داده می‌شود .

نشان‌دهید این توپولوژی یک‌توپولوژی هاوسدورف است اگر و تنها اگر برای هر جفت $\{x, y\}$ ازنقطه‌های‌متمایز X یک $f \varepsilon \mathfrak{F}$ با $f(x) \neq f(y)$ ،وجودداشته‌باشد .

۲۱ ــ گیریم $\mathfrak{F}$ یک‌خانواده از تابعهای حقیقی‌پیوسته ، روی‌یک‌فضای‌توپولوژیک $\langle X, \mathfrak{J} \rangle$ است . نشان‌دهیدکه‌توپولوژی‌کم توان‌تولید شده‌با $\mathfrak{F}$ همان‌توپولوژی $\mathfrak{J}$ است اگربرای هرمجموعهٔ بستهٔ F ،یک $f \varepsilon \mathfrak{F}$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای‌که برای‌هر $x \varepsilon F$ ، داشته باشیم $f(x) = 1$ و برای‌هر $x \notin F$ داشته‌باشیم $f(x) = ۰$.

۲۲ ــ نشان دهید که هرفضای کاملاً منظم یک فضای منظم است .

۲۲ ــ ثابت‌کنید که هرزیرمجموعهٔ یک فضای‌هاوسدورف خود هاوسدورف است.

۴ ــ فضاهای حاصلضرب

اگر $\langle X, \mathfrak{J}\rangle$ و $\langle Y, \mathfrak{S}\rangle$ دوفضای توپولوژیک باشند، یک توپولوژی روی $X \times Y$ را چنین تعریف می‌کنیم که پایهٔ آن را دستهٔ همهٔ مجموعه‌هایی به‌شکل $O_1 \times O_2$ می‌گیریم که درآن $O_1 \varepsilon \mathfrak{J}$ و $O_2 \varepsilon \mathfrak{S}$ است. این‌توپولوژی را برای $X \times Y$ **توپولوژی‌حاصلضرب** می‌نامیم. اگر X و Y دوفضای‌متریک‌باشند، آنگاه‌توپولوژی حاصلضرب باتوپولوژی حاصل از متریک‌حاصلضرب تطبیق‌می‌کند. اگر $\langle X_\alpha, \mathfrak{J}_\alpha\rangle$ یک خانوادهٔ‌زیرنویس‌دار از فضاهای‌توپولوژیک باشد، توپولوژی‌حاصلضرب را روی $\underset{\alpha}{\times} X_\alpha$، چنین تعریف می‌کنیم که پایهٔ‌آن‌را همهٔ‌مجموعه‌های به‌شکل $\underset{\alpha}{\times} O_\alpha$ می‌گیریم‌که‌در آن $O_\alpha \varepsilon \mathfrak{J}_\alpha$ بوده و به‌جز برای شمارهٔ‌باپایانی از α هاداریم $O_\alpha = X_\alpha$. هرگاه همهٔ X_α ها بافضای X یکی باشند، که با یک مجموعهٔ زیرنویس A زیرنویسی شده‌اند آنگاه به‌جای $\underset{\alpha}{\times} X_\alpha$ می‌نویسیم X^A.

اگر $\langle X_\alpha, \mathfrak{J}_\alpha\rangle$ یک دسته از فضاهای توپولوژیک و Y حاصلضرب آنها باشد، برای‌هر α یک‌نگاشت π_α (به‌نام‌**تصویر**)از Y در X_α راباگرفتن $\pi_\alpha(x)$ برابر بامختص α ام x، تعریف‌می‌کنیم. هر π_α پیوسته‌است، و توپولوژی حاصلضرب‌در Y، کم‌توان‌ترین توپولوژی است به‌گونه‌ای که هر π_α پیوسته است.

اگر A شمارش‌پذیر و X متریک‌پذیر باشد، آنگاه X^A متریک‌پذیر است. چون تنها شمارهٔ‌عنصرهای A در تعیین X^A مهم‌است، معمولاً یک حاصلضرب شمارش‌پذیر رابا X^ω (یا $X^{\mathbb{N}}$) می‌نمایانیم. اگر فضای‌گسستهٔ حاوی دوعنصر را با $\mathbf{2}$ نشان‌دهیم، آنگاه $\mathbf{2}^\omega$ بامجموعهٔ‌کانتورهمئومرف‌است. اگر ω را نه‌تنها برای نمایاندن‌یک‌مجموعهٔ شمارش‌پذیر بلکه برای‌نمایاندن‌یک‌مجموعهٔ شمارش‌پذیرباتوپولوژی‌گسسته نیزبه‌کار ببریم، آنگاه ω^ω یک‌فضای‌توپولوژیک‌است‌که‌با مجموعهٔ عددهای‌گنگ‌همئومرف‌است.

اگر $I = [0, 1]$، آنگاه I^A یک‌**مکعب** نامیده‌می‌شود. مکعب I^ω متریک‌پذیر است و **مکعب‌هیلبرت** نام‌دارد. گیریم X یک مجموعهٔ دلخواه و $\mathfrak{F}$ یک خانواده از تابعهای f روی X است به‌گونه‌ای که همواره $0 \leq f \leq 1$ بوده و برای هردونقطهٔ‌متمایز x و y متعلق‌به X یک‌تابع $f \varepsilon \mathfrak{F}$ با $f(x) \neq f(y)$ وجود دارد. دراین‌صورت، اگر هر $\mathfrak{F}$ را باعنصری که مختص x ام آن $f(x)$ است نظیر کنیم، می‌توان $\mathfrak{F}$ را با زیرمجموعه‌ای‌از I^X یکی‌دانست. نگاشت $\mathfrak{F}$ در I که f رابه $f(x)$ می‌برد، به‌طورساده

تحدید تصویر π_x به‌سایهٔ $\mathfrak{F}$ است. توپولوژی‌که $\mathfrak{F}$ به‌عنوان یک‌زیرفضای I^X وارث می‌شود **توپولوژی همگرایی نقطه‌ای** نام دارد.

ازسوی‌دیگر، بامتناظر گرفتن هر x باعنصری که مختص f ام آن $f(x)$ است می‌توان X رابازیرمجموعه‌ای‌از $I^{\mathfrak{F}}$ یکی‌دانست. توپولوژی X به‌عنوان‌زیرفضایی‌از $I^{\mathfrak{F}}$، توپولوژی کم‌توان تولید شده با $\mathfrak{F}$ است. اگر X یک‌فضای توپولوژیک و هر f متعلق‌به $\mathfrak{F}$، پیوسته‌باشد، آنگاه نگاشتی‌که X را برسایه‌اش در $I^{\mathfrak{F}}$ می‌نگارد پیوسته‌است، و اگر $\mathfrak{F}$، دارای‌این‌خاصیت‌باشدکه‌برای‌هرزیرمجموعهٔ‌بستهٔ $F \subset X$ و هر $x \not\in F$ یک $f \in \mathfrak{F}$ موجود باشد به‌گونه‌ای‌که $f(x) = 1$ بوده و روی $\mathfrak{F}$ داشته‌باشیم $f \equiv 0$، آنگاه X با سایهٔ خودش در $I^{\mathfrak{F}}$ همئومرف است.

مسئله‌ها

۲۴ــ ثابت‌کنیدکه‌حاصلضرب مستقیم فضاهای‌هاوسدورف یک‌فضای‌هاوسدورف است.

۲۵ ــ ثابت کنید دسته‌ای که در تعریف توپولوژی‌های حاصلضرب به‌عنوان پایه گرفتیم در شرطهای گزارهٔ ۳ صدق می‌کند. نشان دهیدکه اگر $\langle X, \rho\rangle$ و $\langle Y, \sigma\rangle$ دوفضای متریک باشند، آنگاه توپولوژی حاصلضرب روی $X \times Y$ همانند توپولوژی القایی بامتریک حاصلضرب است.

۲۶ ــ نشان دهید کهاگر X^A مجموعهٔ همهٔ‌تابعهای نگارندهٔ A در X باشد که پایهٔ توپولوژی آن مجموعه‌های باز به‌شکل:

$$\{f: f(\alpha_1) \in O_1, \quad f(\alpha_2) \in O_2, \ldots, f(\alpha_n) \in O_n\}$$

است‌که درآن $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ یک‌زیرمجموعهٔ‌باپایان‌از A و $\{O_1, \ldots, O_n\}$ دستهٔ باپایانی‌از زیرمجموعه‌های باز X است. ثابت‌کنید که دنبالهٔ $\langle f_n\rangle$ در X^A به f، می‌گراید، اگروتنها اگر برای هر α ی متعلق‌به A، $f_n(\alpha)$ به $f(\alpha)$ بگراید.

۲۷ــ نشان‌دهیدکه‌اگر X متریک‌پذیرو A شمارش‌پذیرباشد، آنگاه X^A متریک‌پذیر است. [**راهنمایی**: X همواره می‌تواند بایک متریک کراندار ρ متری‌سازی گردد.

روی X^A متریک σ را با $\sigma(x, y) = \sum_{\alpha \in A} 2^{-n} \rho(x_\alpha, y_\alpha)$ تعریف کنید.]

۲۸ ــ نشان‌دهید که هر تصویر π_α پیوسته است و توپولوژی حاصلضرب روی X^A کم‌توان‌ترین توپولوژی است به‌گونه‌ای که هر π_α پیوسته است.

۲۹ ــ نشان‌دهید که 2^ω بامجموعهٔ سه‌سه‌ای کانتورهمئومرف است.

۳۰ ــ الف ــ نشان دهید که تناظر بیان شده در متن کتاب بین یک فضای توپولوژیک X و سایهٔ آن در $I^{\mathfrak{F}}$ یک همئومرفیسم است اگر $\mathfrak{F}$ دارای این خاصیت باشد، که برای هر مجموعهٔ بستهٔ F و هر $x \notin F$، یک $f \in \mathfrak{F}$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که $f[F] = 0$ و $f(x) = 1$ باشد.

ب ــ نشان دهید که هرگاه X یک فضای نرمال باشد که در اصل دوم شمارش پذیری صدق می‌کند، آنگاه می‌توان یک خانوادهٔ $\mathfrak{F}$ از تابعهای پیوسته با خاصیت مذکور در (الف) یافت.

پ ــ قضیهٔ متری‌سازی اوریزون را ثابت کنید.

۵ ــ همبندی

فضای توپولوژیک X **همبند** گفته می‌شود هرگاه دو مجموعهٔ باز مجزا و ناتهی O_1 و O_2 وجود نداشته باشند، به‌گونه‌ای که $X = O_1 \cup O_2$ باشد. هر دو مجموعهٔ باز نظیر آنها را یک *جداسازی* X می‌نامند. چون هر مجموعه مکمل یک مجموعهٔ دیگر است، پس این مجموعه‌ها به همان خوبی که باز هستند، بسته نیز می‌باشند. هر جفت از مجموعه‌های بسته و مجزای ناتهی که اجتماع آنها برابر X است، یک جداسازی X است، زیرا هر یک از این مجموعه‌ها باید باز نیز باشند. فضای X همبند است اگر و تنها اگر تنها زیرمجموعه‌های X که هم بازند و هم بسته‌اند مجموعه‌های $\varnothing$ و X باشند. یک زیرمجموعهٔ E از X همبند است هرگاه در توپولوژی موروث از X یک فضای همبند باشد: بنابراین E همبند است هرگاه در X مجموعه‌های باز O_1 و O_2 وجود نداشته باشند به‌گونه‌ای که هر دو E را قطع کنند، $E \subset O_1 \cup O_2$ و $E \cap O_1 \cap O_2 = \varnothing$ باشد.

۸ ــ گزاره:

گیریم f یک نگاشت پیوسته از یک فضای همبند X به روی یک فضای توپولوژیک Y، است. در این صورت Y همبند است.

برهان:

گیریم O_1 و O_2 یک جداسازی Y هستند. در این صورت $f^{-1}[O_1]$ و $f^{-1}[O_2]$

زیرمجموعه‌های باز و مجزای X هستند که اجتماع آنها برابر X است. چون f پوشاست، هیچ‌یک از دومجموعهٔ $f^{-1}[O_1]$ و $f^{-1}[O_2]$ تهی نیستند، پس این‌جفت یک جداسازی X است. بنابراین‌اگر Y همبندنباشد، X نیزهمبندنیست‌وگزاره‌بابرهان‌خلف‌ثابت‌می‌شود. ▮

۹ــ گــــزاره:

گیریم f روی یک فضای‌همبند X یک تابع حقیقی پیوسته است. گیریم x و y، دونقطه از X و c یک‌عددحقیقی‌است به‌گونه‌ای‌که $f(x) < c < f(y)$ دراین‌صورت یک $z \varepsilon X$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که $f(z) = c$ است. ▮

برهــــان:

اگر f مقدار c رانپذیرد، آنگاه $f^{-1}[(-\infty, c)]$ و $f^{-1}[(c, \infty)]$ مجموعه‌های باز مجزا هستندکه اجتماعشان‌برابر X است. این‌مجموعه‌ها تهی نیستند، زیرا x به‌اولی و y به‌دومی تعلق دارد. بنابراین X همبند نیست. ▮

۱۰ ــ گــــزاره:

یک‌زیرمجموعهٔ E از $\mathbf{R}$ تنهاهنگامی‌همبنداست‌که‌یک‌فاصله‌یایک‌نقطهٔ تنهاباشد.

مسئلــــه‌ها

۳۱ ــ گیریم A یک زیرمجموعهٔ همبند ازیک‌فضای‌توپولوژیک‌است، و فرض کنیم $A \subset B \subset \overline{A}$. دراین‌صورت B همبند است.

۳۲ ــ الف ــ گیریم E زیرمجموعهٔ همبندی‌از $\mathbf{R}$ است‌که بیش از یک نقطه دارد. ثابت‌کنید که E یک فاصله است. [اگر x و y متعلق‌به E باشند با $x < y$، آنگــاه $[x, y] \subset E$. گیریم $a = \inf E$، $b = \sup E$، آنگاه $(a, b) \subset E \subset [a, b]$.]

ب ــ ثابت کنید که هرفاصله‌در $\mathbf{R}$ همبند است. [گیریم $I = (a, b)$ و O یک زیرمجموعهٔ I است که در I هم باز است و هم بسته. ثابت کنید: $\sup\{y: (x, y) \subset O\} = b$ وبرای‌توجه‌به‌فاصله‌هایی‌که‌بازنیستنداز‌مسئلهٔ ۳۱ استفاده‌کنید.]

۳۳ ـ یک‌فضای X راهمبندکمانوارمی‌گویندهرگاه برای‌هردو نقطهٔ x و y متعلق به X یک‌نگاشت‌پیوستهٔ f از $[۱ \text{ و } ۰]$ در X وجود داشته‌باشد به‌گونه‌ای‌که $f(0) = x$ و $f(1) = y$ ، گـــردد.

الف ـ نشان دهید که هر فضای همبند کمانوار یک فضای همبند است.

ب ـ در صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ زیرفضای :

$$X = \{\langle x, y\rangle : x = 0, -1 \leq y \leq 1\} \cup \{\langle x, y\rangle : y = \sin 1/x, 0 < x \leq 1\}.$$

را درنظرمی‌گیریم . نشان دهید که X همبند است ولی همبند کمانوار نیست.

پ ـ نشان‌دهید که هرمجموعهٔ باز همبند G در $\mathbf{R}^n$ همبند کمانوار اســـت.
[گیریم $x \varepsilon G$ و H مجموعهٔ نقطه‌هایی‌از G است‌که‌می‌توان آنهارا با یک کمان چندضلعی به x وصل کرد . دراین‌صورت H در G هم‌بسته است و هم باز است.]

۳۴ ـ گیریم X یک‌فضای‌توپولوژیک و $\{E_\alpha\}$ یک‌دسته‌از زیرمجموعه‌های‌همبند X است‌که‌هرکدام‌ازآنهادارای‌یک‌نقطهٔ ثابت x می‌باشد . دراین‌صورت $\bigcup E_\alpha$ همبنداست.

۳۵ ـ نشان دهیدکه‌حاصلضرب‌مستقیم‌فضاهای‌توپولوژیک‌همبندخودهمبنداست.

۶* ـ $\mathcal{G}_\delta$ هـای مطلـــق

هدف‌این‌بند سرشت‌نمایی‌آن فضاهای‌توپولوژیک است که بافضاهای‌متریک کامل همئومرف‌هستند: این‌فضاها، فضاهای‌متریک‌پذیرند ،که‌سایه‌های همئومرف متراکم آنها در هرفضای‌هاوسدورف‌مجموعه‌های $\mathcal{G}_\delta$ هستند .این‌خاصیت‌رابه‌عنوان‌یک‌قضیه‌بیان‌می‌کنیم . در مسئلـــــه‌هـای ۳۷ و ۳۸ پیشنهادهایی برای برهان این قضیه و در مسئله ۳۹ یک کاربرد آن داده‌شده‌است . این سرشت‌نمایی در فصل ۱۵ مورداستفاده قرار گرفته‌است تا نشان دهد که فضاهای متریک کامل به‌یک‌معنی به‌طورمطلق اندازه‌پذیرند .

۱۱ ـ قضیـــــه :

گیریم X یک فضای متریک کامل و φ یک همئومرفیسم از X بر یک زیرمجموعهٔ متراکم E ازیک‌فضای هاوسدورف F است . دراین‌صورت E یک $\mathcal{G}_\delta$ است . به‌وارون ، اگر E دریک‌فضای‌متریک‌کامل‌یک $\mathcal{G}_\delta$ باشد ،آنگاه E بایک‌فضای متریک کامل همئومرف است .

مسئله‌ها

۳۶ ــ نشان دهید که اگر فضای هاوسدورف F مذکور درقضیهٔ ۱۱ متریک‌پذیر باشد، آنگاه نیازی به‌متراکم بودن E نداریم.

۳۷ ــ گیریم E یک‌زیرمجموعهٔ متراکم ازیک‌فضای‌هاوسدورف F و g همئومرفیسمی از E بر یک‌فضای متریک کامل X است. دراین‌صورت E یک $\mathcal{G}_\delta$ است. (برای هر عدد درست مثبت n، گیریم O_n زیرمجموعه‌ای متشکل ازهمهٔ $y \varepsilon F$ هاست‌به‌گونه‌ای که یک مجموعهٔ باز حاوی y، تحت g، دارای سایه‌ای است که قطر آن کمتر از $1/n$ است. دراین‌صورت O_n یک‌مجموعهٔ‌بازاست، و می‌توان همئومرفیسم g را به‌یک‌نگاشت پیوسته از $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ در h گسترش داد، زیرا X کامل است. ولی نگاشت $g^{-1} \circ h$ باید نگاشت همانی باشد، ازآنجا $E = G$.)

۳۸ ــ گیریم (Y, σ) یک‌فضای‌متریک‌کامل، و $E = \bigcap O_n$ یک $\mathcal{G}_\delta$ است. برای هر n، روی Y یک تابع حقیقی پیوسته بسازید به‌گونه‌ای‌که $0 \leq \varphi_n \leq 1$ بوده و $O_n = \{x: \varphi_n(x) > 0\}$ باشد. برای هر x و y متعلق به E گیریم:

$$\rho(x, y) = \sigma(x, y) + \sum 2^{-n}|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| \times [|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| + |\varphi_n(x)\varphi_n(y)|]^{-1}$$

دراین‌صورت ρ روی E یک متریک هم‌ارزبا σ است و E را به‌یک‌فضای‌متریک‌کامل تبدیل می‌کند.

۳۹ ــ گیریم E یک $\mathcal{G}_\delta$ متراکم در [۰، ۱] است و فرض‌می‌کنیم‌که $\tilde{E}$ نیز متراکم است. دراین‌صورت E بافضای‌حاصل‌ضرب ω^ω همئومرف‌است. [راهنمایی: نشان دهید $E = \bigcap O_n$ که درآن $O_{n+1} \subset O_n$ هرمؤلفهٔ O_n حاوی شمارهٔ بی‌پایانی از مؤلفه‌های O_{n+1} است. و هرمؤلفهٔ O_n درمتریک‌کامل برای E، دارای قطری است که به‌صفر می‌گراید. دراین‌صورت تناظر طبیعی‌بین‌عنصرهای ω^ω ودنبالهٔ کاهشی $\langle I_n \rangle$ از مؤلفه‌های O_n یک همئومرفیسم برروی E است.]

۷* ــ شبکه‌ها

هردستگاه جهت‌دار، یک‌مجموعهٔ A است توام بایک‌رابطهٔ $>$، که درشرطهای زیر صدق می‌کند:

i ــ اگر $\beta > \alpha$ و $\gamma > \beta$ ، آنگاه $\gamma > \alpha$.

ii ــ اگر $\alpha, \beta \varepsilon A$ ، آنگاه یک $\gamma \varepsilon A$ وجود دارد با $\gamma > \alpha$ و $\gamma > \beta$.

مثالی از یک دستگاه جهت‌دار، مجموعهٔ عددهای درست و مثبت N است با رابطهٔ $\leq$ به‌جای $>$. مجموعهٔ جهت‌دار دیگری که به‌طورعموم مورداستفاده قرارمی‌گیرد، مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌های باز حاوی یک‌نقطهٔ x است، که درآن $O_2 > O_1$ به‌معنی $O_1 \supset O_2$ تعریف می‌شود.

هر شبکه نگاشتی‌از یک دستگاه جهت‌دار دریک‌فضای توپولوژیک X است. اگر دستگاه‌جهت‌دارمجموعهٔ‌عددهای درست باشد، یک دنباله داریم و می‌توان شبکه‌ها را به‌عنوان‌تعمیم‌هایی‌از دنباله‌ها تصورکرد. معمولاً "مقدار شبکه در α را با x_α و خود شبکه‌را با $\langle x_\alpha \rangle$ می‌نمایانیم. یک‌نقطهٔ $x \varepsilon X$ را **حد** یک‌شبکه $\langle x_\alpha \rangle$ می‌گویند هرگاه برای هرمجموعهٔ باز O حاوی x یک $\alpha_0 \varepsilon A$ موجود باشد به‌گونه‌ای‌که برای هر $\alpha > \alpha_0$ ، $x_\alpha \varepsilon O$ گردد. نقطهٔ x را **نقطهٔ تجمع** $\langle x_\alpha \rangle$ می‌نامند اگر برای هر O ی حاوی x و هر $\alpha \varepsilon A$ ، یک $\alpha > \beta$ موجود باشد، به‌گونه‌ای‌که $x_\beta \varepsilon O$ باشد. درمورد دنباله‌ها این‌مفهوم‌ها بامفهومهای پیشین حد و نقطهٔ تجمع منطبق است.

۱۲ ــ گزاره :

یک‌نقطهٔ x یک‌نقطه *از* **بستار یک مجموعه** E *است اگر وتنها اگر* x **حد یک شبکه** $\langle x_\alpha \rangle$ *از* E **باشد.**

برهان :

بخش " اگر " به‌طورمستقیم ازتعریفهای حدونقطهٔ بستار نتیجه‌می‌شود. ازاین‌رو می‌پذیریم‌که x یک‌نقطه از بستار E است. دستگاه جهت‌دار را دستهٔ A از مجموعه‌های بازی‌می‌گیریم‌که x رادربردارندواگر $O_1 \supset O_2$ باشدقرارمی‌دهیم $O_1 > O_2$. چون x یک نقطه‌ازبستار E است، برای‌هر $O \varepsilon A$ یک‌نقطهٔ x_O در $E \cap O$ وجوددارد. دراین‌صورت $\langle x_O \rangle$ شبکه‌ای‌است‌از E و به x می‌گراید، زیرا، برای O ی حاوی x برای‌همهٔ $O' > O$ داریم $x_{O'} \varepsilon O$. ∎

مسئلـــــه‌ها

۴۰ ــ ثابت‌کنید X هاوسدورف‌است اگر و تنها‌اگر هرشبکه در X حداکثریک‌حد داشته باشد. [برای‌اثبات بخش " اگر " ، گیریم x و y دونقطه هستند که نمی‌توان آنها را از هم جدا ساخت و دستگاه‌جهت‌دار را دسته‌ٔ همه‌ٔ جفتهای $\langle A, B\rangle$ از مجموعه‌های باز می‌گیریم با $x \varepsilon A$ و $y \varepsilon B$. $x_{\langle A,B\rangle}$ را در $A \cap B$ برگزینید و نشان‌دهید که x و y هردو حدهای این شبکه‌اند.

۴۱ ــ ثابت کنید که یک تابع f از X بر Y در x پیوسته است اگر و تنها اگر برای هرشبکه‌ٔ $\langle x_\alpha\rangle$ که به x می‌گراید. شبکه‌ٔ $\langle f(x_\alpha)\rangle$ به $f(x)$ بگراید.

۴۲ ــ گیریم X یک مجموعه‌ٔ دلخواه و f روی X یک تابع حقیقی است. گیریم A ، دستگاه متشکل از همه‌ٔ زیرمجموعه‌های باپایان X است، که درآن $F < G$ به‌معنای $F \subset G$ است. برای هر $F \varepsilon A$ ، گیریم $y_F = \sum_{x \varepsilon F} f(x)$. ثابت کنید که شبکـــه‌ٔ $\langle y_F\rangle$ دارای حد است اگر و تنها اگر به‌جز برای x های متعلق به یک زیرمجموعه‌ٔ شمارش‌پذیر $\{x_n\}$ و $\sum |f(x_n)| < \infty$ داشته‌باشیم $f(x) = 0$. دراین‌حالت

$$\lim y_F = \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$$

۴۳ــ گیریم $X = \bigtimes_\alpha X_\alpha$. دراین‌صورت‌یک‌شبکه‌ٔ $\langle x_\beta\rangle$ در X به x می‌گراید اگر و تنها اگر هر مؤلفه‌ٔ x_β به‌مؤلفه‌ٔ متناظر x بگراید.

فصل نهم

فضاهـای فشـــرده

۱ ــ خاصیـت‌های اساسی

بسیاری‌از‌خاصیت‌های‌فاصله‌ٔ $[0, 1]$ از قضیه‌ٔ‌هاینه ــ برل [1] نتیجه می‌شوند . در‌اینجا رده‌ای ازفضاهای‌توپولوژیک‌را معرفی می‌کنیم‌که درآنها نتیجه‌ٔقضیه‌ٔ هاینه‌ــ برل پابرجا است و نشان‌می‌دهیم‌که بسیاری از خاصیت‌های فاصله‌ٔ $[0, 1]$ نیز دراین‌فضاها درست هستند . این‌فضاها‌را فضاهای‌فشرده می‌نامیم . برای‌تعریف‌دقیق فشردگی ، گوییم یک‌دسته‌ٔ $\mathcal{U}$ ازمجموعه‌های‌باز در یک‌فضای‌توپولوژیک یک‌پوشش باز یک‌مجموعه‌ٔ K است ، اگر K مشمول اجتماع مجموعه‌های $\mathcal{U}$ باشد . یک‌فضای توپولوژیک X را **فشـــرده** می‌گوییم هرگاه هرپوشش باز $\mathcal{U}$ ی X یک‌زیرپوشش‌باپایان‌داشته‌باشد ، یعنی ،اگر یک‌دسته‌ٔ‌باپایان $\{O_1, O_2, \ldots, O_N\} \subset \mathcal{U}$ موجودباشد به‌گونه‌ای‌که $X = \bigcup_{i=1}^{N} O_i$. زیرمجموعه‌ٔ K ، از یک‌فضای توپولوژیک را فشرده می‌نامند اگر K به‌عنوان زیرفضایی از X فشرده باشد . ازنظرتعریف‌توپولوژی یک زیرفضا ، این‌تعریف‌هم‌ارز است‌بااین‌که‌بگوییم ، یک‌زیرمجموعه‌ٔ K از X فشرده‌است اگر هر پوشش $\mathcal{U}$ ی K بامجموعه‌های‌باز X یک‌زیرپوشش‌باپایان‌داشته باشد . قضیه‌ٔ‌هاینه ــ برل مبین این است که هر زیرمجموعه‌ٔ کراندار و بسته از عددهای حقیقی فشرده است .

اگر $\mathcal{U}$ یک‌پوشش‌باز فضای X باشد ،آنگاه دسته‌ٔ $\mathcal{F}$ مکملهای‌مجموعه‌های $\mathcal{U}$ یک دسته‌ازمجموعه‌های‌بسته است‌که اشتراک‌آنها تهی‌است ، و به‌وارون . بنابراین‌یک‌مجموعه‌ٔ X فشرده‌است اگروتنهااگر هردسته از مجموعه‌های‌بسته بااشتراک‌تهی دارای‌یک‌زیردسته‌ٔ باپایان‌بااشتراک‌تهی‌باشد . دسته‌ٔ $\mathcal{F}$ ازمجموعه‌های X دارای‌*خاصیت‌اشتراک‌باپایان* است اگر هر زیردسته‌ٔ‌باپایان $\mathcal{F}$ دارای‌اشتراک‌ناتهی‌باشد . ازاین‌رو گزاره‌ٔ‌زیر را داریم :

---

۱ ــ Heine-Borel

۱ ـ گزاره :

یک‌فضای‌توپولوژیک X فشرده‌است اگروتنهااگر هردستهٔ $\mathfrak{F}$ ازمجموعه‌های‌بسته باخاصیت اشتراک باپایان دارای یک اشتراک ناتهی باشد .

مفهوم فشردگی همانگونه‌که گزارهٔ‌زیر نشان می‌دهد رابطهٔ نزدیکی بابسته‌بودن دارد . بنابراین می‌توان فشردگی را به‌عنوان یک‌نوع بسته‌بودن مطلق تلقی کرد .

۲ ـ گزاره :

هر زیرمجموعهٔ بستهٔ یک‌فضای فشرده خود فشرده است . هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ یک فضای هاوسدورف بسته است .

برهان :

گیریم X فشرده ، F یک زیرمجموعهٔ بستهٔ X و $\mathcal{U}$ یک پوشش باز F است . دراین‌صورت $\mathcal{U} \cup \{\tilde{F}\}$ یک پوشش باز X است ، پس باید دارای یک زیرپوشش باپایان مانند $\{\tilde{F}, O_1, \ldots, O_N\}$ داشته باشد . دراین‌صورت مجموعه‌های O_1 ، O_2 ، . . . O_N ، مجموعهٔ F را می‌پوشانند ، پس $\mathcal{U}$ یک زیرپوشش باپایان دارد .

اکنون فرض‌کنیم که X ، یک‌فضای هاوسدورف و K زیرمجموعهٔ‌فشرده‌ای‌از X است . نشان‌می‌دهیم که $\tilde{K}$ باز است . گیریم $y \varepsilon \tilde{K}$. چون X هاوسدورف‌است ، برای‌هر $x \varepsilon K$ ، مجموعه‌های‌باز O_x و N_x وجوددارندبه‌گونه‌ای‌که $x \varepsilon O_x$ و $y \varepsilon N_x$. مجموعه‌های $\{O_x : x \varepsilon K\}$ یک‌پوشش باز K را تشکیل‌می‌دهند ، پس یک زیرپوشش باپایان $\{O_{x_1}, O_{x_2}, \ldots, O_{x_n}\}$ وجود دارد که K را می‌پوشاند . گیریم :

$$N = \bigcap_{i=1}^{n} N_{x_i}$$

دراین‌صورت N مجموعهٔ بازی حاوی y است‌که‌هیچ‌یک‌از مجموعه‌های O_{x_i} را تلاقی‌نمی‌کند . چون $K \subset \bigcup O_{x_i}$ ، N مجموعهٔ $\tilde{K}$ راتلاقی‌نمی‌کند ، پس‌مشمول K است . بنابراین $\tilde{K}$ باز و K بسته است . ∎

۳ـ نتیجـــــه :

هر مجموعهٔ فشرده از عددهای حقیقی بسته و کراندار است .

بـرهـــان :

چون $\mathbf{R}$ هاوسدورف است ، هرزیرمجموعهٔ فشرده K از $\mathbf{R}$ بایدبسته‌باشد . به‌علاوه ، فاصله‌های $I_n = (-n, n)$ یک پوشش باز K را تشکیل میدهند ، پس شمارهٔ باپایانی ازآنها باید K را بپوشاند . ازاین‌رو K باید کراندار باشد . ∎

۴ـ گـــزاره :

سایهٔ پیوستهٔ یک مجموعهٔ فشرده ، خود فشرده است .

بـرهـــان :

گیریم f یک‌تابع پیوسته است که مجموعهٔ فشردهٔ K را به‌روی فضای توپولوژیک Y می‌نگارد . اگر $\mathfrak{U}$ یک‌پوشش باز Y باشد ، آنگاه دستهٔ مجموعه‌های $f^{-1}[O]$ بـرای‌هـر $O \in \mathfrak{U}$ یک‌پوشش باز K است . بنابرفشردگی K ، یک شمارهٔ باپایان $O_1, \ldots, O_n$ از مجموعه‌های $\mathfrak{U}$ وجوددارد به‌گونه‌ای‌که مجموعه‌های $f^{-1}[O_i]$ مجموعهٔ K را می‌پوشاند . چون f پوشاست . پس مجموعه‌های $O_1, \ldots, O_n$ مجموعهٔ Y را می‌پوشانند . ∎

۵ـ گـــزاره :

هرنگاشت پیوستهٔ یک‌به‌یک از یک فضای فشرده بر یک فضای هاوسدورف یک همئومرفیسم است .

بـرهـــان :

گیریم X فشرده ، Y هاوسدورف ، و f یک‌نگاشت‌یک‌به‌یک‌پیوسته (از X) بر Y است .

برای‌نشان‌دادن‌این‌که f یک‌همئومرفیسم‌است تنها لازم‌است نشان‌دهیم‌که f مجموعه‌های باز را به‌مجموعه‌های‌باز تبدیل‌می‌کند ، یا به‌طورهم‌ارز مجموعه‌های‌بسته را به‌مجموعه‌های بسته تبدیل می‌کند . ولی‌اگر F زیرمجموعهٔ بسته‌ای از X باشد ، بنابرگزارهٔ ۲ ، فشرده است . پس بنابرگزارهٔ ۴ ، $f[F]$ فشرده است پس بنابرگزارهٔ ۲ باید بسته باشد . ∎

مسئله‌ها

۱ ــ الف ــ ثابت‌کنید که هرفضای هاوسدورف فشرده ، منظم‌است .

ب ــ ثابت‌کنید که هرفضای هاوسدورف فشرده ، نرمال است .

۲ ــ گیریم f یک‌نگاشت‌پیوسته از فضای‌فشردهٔ X برفضای‌هاوسدورف Y است . دراین‌صورت‌هرنگاشت g از Y در Z که‌برای‌آن $g \circ f$ پیوسته‌است ، خودبایدپیوسته‌باشد .

۳ ــ الف ــ ثابت‌کنیدکه‌اگر $(X, \mathfrak{J})$ یک‌فضای فشرده باشد ، آنگاه $(X, \mathfrak{J}_1)$ برای هر $\mathfrak{J}_1$ کم‌توان‌تر از $\mathfrak{J}$ ، فشرده است .

ب ــ نشان‌دهید که اگر $(X, \mathfrak{J})$ یک‌فضای هاوسدورف باشد آنگاه $(X, \mathfrak{J}_2)$ برای هر $\mathfrak{J}_2$ ی پرتوان‌تر از $\mathfrak{J}$ یک فضای هاوسدورف است .

پ ــ نشان دهید که اگر $(X, \mathfrak{J})$ یک فضای هاوسدورف فشرده باشد ، آنگاه هر توپولوژی کم‌توان‌تر ، هاوسدورف نیست و هر توپولوژی پرتوان‌تر فشرده نیست .

۲ ــ فشردگی شمارش‌پذیر وخاصیت بولتسانو ــ وایرشتراس[۱]

یک مفهوم کم‌توان‌تر از فشردگی ، فشردگی شمارش‌پذیر است : فضای X را به‌طورشمارش‌پذیرفشرده می‌گویندهرگاه‌هرپوشش باز شمارش‌پذیریک‌زیرپوشش باپایان داشته‌باشد . چون هرفضای برآورندهٔ‌اصل‌دوم‌شمارش‌پذیری دارای این خاصیت است‌که‌هرپوشش‌بازآن‌دارای‌یک‌زیرپوشش‌شمارش‌پذیراست ، پس‌فشردگی‌شمارش‌پذیر هم‌ارز فشردگی توام با اصل دوم شمارش‌پذیری است . اگر برهان گزارهٔ ۴ را درحالت فشردهٔ شمارش‌پذیری به‌کار ببریم برهان گزارهٔ زیر به‌دست می‌آید :

---

۱ ــ Bolzano-Weierstrass

۶ـ گـــــــزاره :

سـایـهٔ پیوستهٔ یک فضای فشردهٔ شمارش‌پذیر خود فشردهٔ شمارش‌پذیر است .

فضای‌توپولوژیک X دارای‌خاصیت‌بـولتسانــو ــ وایــرشتـــراس نامیده‌می‌شود هرگاه هر دنبالهٔ $\langle x_n \rangle$ در X دست‌کم یک نقطهٔ تجمع داشته باشد ، یعنی ، یـک $x \varepsilon X$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که برای هر باز O ی حاوی x و هر N یک عـــدد $n \geq N$ وجود داشته باشد با $x_n \varepsilon O$

۷ـ گـــــــزاره :

یک فضای‌توپولوژیک‌دارای‌خاصیت‌بولتسانـــو ــ وایرشتراس است اگر و تنها اگر فشردهٔ شمارش‌پذیر باشد .

بـرهـــان :

نخست‌مشاهده‌می‌کنیم‌که X فشردهٔ شمارش‌پذیر است اگر وتنهااگر هر خانوادهٔ شمارش‌پذیر $\mathfrak{F}$ از مجموعه‌های بسته باخاصیت اشتراک باپایان ، دارای اشتراک ناتهی باشد . اکنون‌فرض‌کنیم‌که X دارای‌خاصیت بولتسانو ــ وایرشتراس است‌و $\mathfrak{F} = \{F_i\}$ یک‌خانوادهٔ شمارش‌پذیر ازمجموعه‌های‌بسته باخاصیت اشتراک‌باپایان است . چون‌اشتراک $H_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} F_k$ برای‌هیچ n تهی نیست ، می‌توان برای هر n یک عنصـر $x_n \varepsilon H_n$ برگزید . بنابرخاصیت‌بولتسانو ــ وایرشتراس . دنبالهٔ $\langle x_n \rangle$ دارای یک‌نقطهٔ تجمع x است . ولی برای هر $n \geq i$ ، $x_n \varepsilon F_i$ است ، پس x باید به F_i تعلق‌داشته‌باشد ، زیرا F بسته‌است . بنابراین x به‌هریک‌از F_i ها و درنتیجه به‌اشتراک آنها تعلق دارد .

از سوی دیگر فرض کنیم که X فشردهٔ شمارش‌پذیر و $\langle x_i \rangle$ دنباله‌ای‌از X است . گیریم B_n مجموعهٔ $\{x_n, x_{n+1}, \ldots, \}$ است . دراین‌صورت $\{\overline{B}_n\}$ دستهٔ شمارش‌پذیری از مجموعه‌های بسته باخاصیت اشتراک باپایان است ، پس یک‌نقطهٔ x وجودداردکه‌به $\bigcap \overline{B}_n$ تعلق‌دارد . نقطهٔ x نقطهٔ تجمع دنباله‌است ، زیرا برای عدددادهٔ‌شدهٔ N وهرمجموعهٔ‌باز O حاوی x داریم $x \varepsilon \overline{B}_N$ ، پس‌بایدیک $x_n \varepsilon O$ ، با $n \geq N$ وجود داشته باشد . ∎

یک مفهوم اندکی قدیمی که شبیه خاصیت بولتسانو ـ وایرشتراس است، فشردگی دنباله‌ای است. فضای X را **فشردهٔ دنباله‌ای** می‌گویند هرگاه هر دنبالهٔ بی‌پایان از X، دارای یک زیردنبالهٔ همگرا باشد. رابطهٔ فشردگی دنباله‌ای و فشردگی شمارش‌پذیر در گزارهٔ زیر داده شده‌است. در مسئلهٔ ۶ یک مثال از فضایی داده‌شده که فشردهٔ دنباله‌ای است ولی فشرده نیست، و در مسئله ۲۷ مثالی از یک فضای فشرده داده‌شده‌است که فشردهٔ دنباله‌ای نیست. در مسئلهٔ ۷ نشان داده می‌شود که یک فضا می‌تواند فشرده باشد، بدون این‌که جدایی‌پذیر یا شمارش‌پذیر با اصل اول باشد.

۸ــ گــــزاره:

هرفضای فشردهٔ دنباله‌ای فشردهٔ شمارش‌پذیر است. هرفضای فشردهٔ شمارش‌پذیر که در اصل اول شمارش‌پذیری صدق می‌کند فشردهٔ دنباله‌ای است.

بــرهــان:

فشردگی دنباله‌ای خاصیت بولتسانو ـ وایرشتراس را ایجاب می‌کند که خود هم‌ارز فشردگی شمارش‌پذیر است. بخش دوم نتیجهٔ بی‌درنگ مسئلهٔ ۸ . ۸ پ است. ▮

۹ــ گــــزاره:

گیریم f روی فضای فشردهٔ شمارش‌پذیر X یک تابع حقیقی پیوسته است. دراین‌صورت f کراندار است و ماکزیمم و می‌نیمم خود را می‌پذیرد.

این گزاره را می‌توان به‌کمک گزارهٔ ۶ و این حقیقت که هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ شمارش‌پذیر $\mathbf{R}$ کراندار و بسته است، ثابت‌کرد. ولی می‌توان یک برهان مستقیم به‌آن داد که مطمئن‌تر است. یک‌تابع حقیقی f روی یک فضای توپولوژیک، **نیمپیوستهٔ بالایی** نامیده می‌شود، اگر برای هرعدد حقیقی α مجموعهٔ $\{x: f(x) < \alpha\}$ بازباشد. اگر f پیوسته باشد، آنگاه f و $-f$ هردو نیمپیوسته بالایی هستند ازآنجا نتیجه می‌شود که گزارهٔ ۹ نتیجه‌ای از گزارهٔ زیر است:

۱۰ــ گـــــزاره:

گیریم f روی یک فضای فشردهٔ شمارش‌پذیر X یک تابع حقیقی نیمپیوستهٔ بالا یی است. دراین‌صورت f از سوی بالا کراندار است و ماکزیمم خود را می‌پذیرد.

بـــرهـــان:

مجموعه‌های $O_n = \{x: f(x) < n\}$ تشکیل یک پوشش باز شمارش‌پذیـــر برای X می‌دهند، پس باید یک زیرپوشش باپایان مانند $\{O_1, \ldots, O_N\}$ داشته باشد، ولی این ایجاب می‌کند که $X \subset O_N$ باشد. ازاین‌رو برای هر x، $f(x) < N$ و f از سوی‌بالاکراندارا‌ست. گیریم $\beta = \sup\{f(x): x \varepsilon X\}$. دراین‌صورت مجموعه‌های

$$F_n = \left\{x: f(x) \geq \beta - \frac{1}{n}\right\}$$

تشکیل یک دستهٔ شمارش‌پذیر از مجموعه‌های بسته می‌دهند که دارای خاصیت اشتراک باپایان است. ازاین‌رو یک y وجود دارد که به‌هر F_n تعلق دارد. دراین‌صـــورت $f(y) = \beta$، و f ماکزیمم خود را در y می‌گیرد. ∎

۱۱ــ گـــــزاره (دینـــــی[1]):

گیریم $\langle f_n \rangle$ روی یک‌فضای فشردهٔ شمارش‌پذیر X، یک دنباله از تابعهای حقیقی‌نیمپیوسته‌بالا یی است، و فرض کنیم که برای هر $x \varepsilon X$ دنبـــالـــهٔ $\langle f_n(x) \rangle$ به‌طورکاهشی یکنوا به‌صفرمی‌گراید. دراین‌صورت $\langle f_n \rangle$ به‌طوریکنواخت به‌صفرمی‌گراید.

بـــرهـــان:

گیریم $\epsilon > 0$ داده شده و $O_n = \{x: f_n(x) < \epsilon\}$ است. چون f_n نیمپیوستهٔ بالایی‌است. پس O_n باز است. چون برای هر x، $f_n(x) \to 0$ داریم $X \subset \bigcup O_n$. بنابرفشردگی شمارش‌پذیری X، شمارهٔ باپایانی از مجموعه‌های باز $\{O_1, \ldots, O_N\}$ وجود دارد که اجتماعشان شامل X است. ولی این‌ایجاب می‌کند که $O_N = X$، و ازاین‌رو برای همهٔ x ها $f_N(x) < \epsilon$ باشد. اگر $n \geq N$ باشد، داریم $0 \leq f_n(x) \leq f_N(x) < \epsilon$ و دنبالهٔ $\langle f_n \rangle$ به‌طوریکنواخـــت بـــه ۰ مـــی‌گـــرایـــد. ∎

1- Dini

۴ ــ الف ــ تابع حقیقی f را نیمپیوسته پایینی می‌گویند هرگاه $-f$ نیمپیوسته بالایی باشد. ثابت‌کنید که یک‌تابع حقیقی f روی یک فضای X پیوسته است اگروتنهااگر نیمپیوسته بالایی و پایینی باشد.

ب ــ نشان‌دهید که اگر f و g نیمپیوستهٔ بالایی‌باشند، $f+g$ نیز نیمپیوستهٔ بالایی است.

پ ــ گیریم $\langle f_n \rangle$ یک دنبالهٔ کاهشی از تابعهای نیمپیوستهٔ بالایی است که به‌طورنقطه‌ای به‌یک‌تابع حقیقی f می‌گراید. دراین‌صورت f نیمپیوستهٔ‌بالایی است.

ت ــ گیریم $\langle f_n \rangle$ روی‌یک فضای فشردهٔ شمارش‌پذیر، یک دنبالهٔ کاهشی ازتابعهای‌نیمپیوستهٔ بالائی‌است، وفرض‌کنیم $\lim f_n(x) = f(x)$ که‌درآن f یک تابع حقیقی‌نیمپیوستهٔ‌پایینی‌است. دراین‌صورت f پیوسته‌است و $\langle f_n \rangle$ به‌طوریکنواخت به f می‌گرایــد.

ث ــ نشان‌دهیدکه اگر دنبالهٔ $\langle f_n \rangle$ ازتابعهای نیمپیوستهٔ بالایی به‌طور یکنواخت‌به f، بگرایدآنگاه f نیز نیمپیوستهٔ بالایی است.

۵ ــ گیریم X یک‌فضای‌توپولوژیک‌نرمال‌است. دراین‌صورت‌گفته‌های‌زیرهم‌ارزند:

i ــ X فشردهٔ شمارش‌پذیر است.

ii ــ روی X هر تابع حقیقی پیوسته، کراندار است.

iii ــ روی X هرتابع‌حقیقی کراندار پیوسته، ماکزیمم خود را می‌پذیرد.

۶ ــ گیریم X مجموعهٔ عددهای ترتیبی کوچکتر از نخستین عدد ترتیبی شمارش‌پذیر، و $\mathcal{B}$ دستهٔ‌مجموعه‌هایی به‌شکل $\{x: x < a\}, \{x: a < x < b\}$، و $\{x: a < x\}$، است.

الف ــ نشان دهید که $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی برای X است.

ب ــ نشان‌دهید X فشردهٔ دنباله‌ای است ولی فشرده‌نیست [**راهنمایی:** از خوش‌ترتیبی عددهای ترتیبی استفاده کنید.]

پ ــ نشان‌دهیدکه‌اگر f روی X یک‌تابع حقیقی پیوسته باشد، آنگاه‌یک x_0، وجوددارد‌به‌گونه‌ای که برای هر $x \geq x_0$، $f(x) = f(x_0)$. [**راهنمایی:** نشان‌دهیدکه‌مجموعهٔ x هایی‌که برای‌آن $f(x) < \overline{\lim} f$ است شمارش پذیر است.]

۷ ــ گیریم Y مجموعهٔ‌عددهای ترتیبی کوچکتر یا برابر نخستین عدد ترتیبی شمارش‌پذیر یعنی Ω است. و $\mathcal{B}$ دستهٔ مجموعه‌های به‌شکل $\{x: x < a\}$،

$\{x: a < x < b\}$ ، و $\{x: a < x\}$ اســت .

الف ــ نشان دهید که $\mathcal{B}$ پایهٔ یک توپولوژی برای X است .

ب ــ نشان دهید که X فشرده است ، ولی نه جدایی‌پذیر و نه‌شمارش‌پذیر طبق اصل اول است .

۳ ــ فضــاهای متــریــک فشـــرده

دراین‌بند خاصیت‌های بخصوص فشردگی که در فضاهای متریک درست هستند موردرسیدگی‌قرارمی‌گیرند . نشان خواهیم داد که در فضاهای متریک مفهوم‌های فشردگی ، فشردگی شمارش‌پذیر ، و فشردگی دنباله‌ای برهم منطبق هستند .

۱۲ ــ لـــــم :

گیریم X یک‌فضای‌متریک‌فشردهٔ شمارش‌پذیراست . دراین‌صورت‌برای $\epsilon > 0$ ، داده شده ، شمارهٔ باپایانی ، از نقطه‌های $x_1, \ldots, x_N$ متعلق‌به X وجود دارد ، به‌گونه‌ای که برای هر $x \varepsilon X$ یک x_k با $\rho(x, x_k) < \epsilon$ وجود دارد .

بــرهـــــان :

فرض‌کنیم که‌چنین دستهٔ باپایانی ازنقطه‌ها وجودندارد . دراین‌صورت می‌توان یک‌دنبالهٔ بی‌پایان $\langle x_n \rangle$ ازنقطه‌های X برگزیدبه‌طــــوری‌کـه‌بــــرای $m \neq n$ ، $\rho(x_n, x_m) \geq \epsilon$. چـــون هــرگــوی بـــه شعـــاع $\epsilon/۳$ می‌تواند حداکثر حاوی یک‌جملهٔ این‌دنباله‌باشد ، خاصیت‌بولتسانو-وایرشتراس‌برقرارنیست ، و X فشردهٔ شمارش‌پذیرنیست . ∎

۱۳ ــ گــــــزاره :

هر فضای متریک فشردهٔ شمارش‌پذیر ، جدایی‌پذیر است .

بــرهـــــان :

برای‌هرعدد درست‌مثبت n ، گیریم F_n یک‌مجموعهٔ باپایان‌ازنقطـــه‌هاست

به‌گونه‌ای‌که برای‌هر $x \varepsilon X$ یک $y \varepsilon F_n$ باشرط $\rho(x, y) < 1/n$ وجـــود داود.
دراین‌صـورت $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ یک زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیر متراکم X است.

۱۴ ـ نتیـجــــه:

برای هرفضای متریک مفهوم‌های فشردگی، فشردگی شمارش‌پذیر و فشردگـــی دنباله‌ای هم‌ارزند.

بـرهـــان:

چون هرفضای‌متریک دراصل‌اول شمارش‌پذیری صدق‌می‌کند، مفهوم‌های‌فشردگی شمارش‌پذیروفشردگی دنباله‌ای‌بنابرگزارهٔ ۸ منطبق‌هستند. فشردگی به‌طوربدیهی‌فشردگی شمارش‌پذیر را ایجاب می‌کند. اگر X فشردهٔ شمارش‌پذیرباشد، بنابرگزارهٔ ۱۳ باید در اصل دوم شمارش‌پذیری صدق کند، پس باید فشرده باشد. ∎

فضای‌متریک X را تمـامـا "کـرانـــدار می‌گویند هرگاه‌برای هر $\epsilon > 0$ دستهٔ باپایانی از گویهای به‌شعاع ϵ وجود داشته باشد که X را می‌پوشانند. هرفضای فشرده تماما "کراندار است، و هرزیرمجموعهٔ یک‌فضای تماما "کراندار خود تماما "کرانداراست. گزارهٔ زیر فشردگی‌را برحسب کمال و تماما "کرانداری‌سرشت نمایی می‌کند:

۱۵ ـ گـــزاره:

هرفضای‌متریک X فشرده‌است اگروتنها‌اگر هم کامل و هم تماما "کراندار باشد.

بـرهـــان:

بدیهی‌است‌که‌اگر X فشرده‌باشد، تماما "کرانداراست. اگر $\langle x_n \rangle$ یک‌دنبالهٔ کشی در X باشد، آنگاه $\langle x_n \rangle$ بایدیک‌نقطهٔ‌تجمع داشته‌باشد. ولی هردنبالهٔ‌کشـی که دارای یک‌نقطهٔ تجمع است به آن‌نقطه می‌گراید. بنابراین X کامل است.
فرض‌کنیم X کامل‌وتماما "کرانداراست. برای‌این‌که نشان‌دهیم X فشرده‌است،

کافی است نشان دهیم که هر دنباله‌ٔ بی‌پایان $\langle x_n \rangle$ ، یک زیردنباله‌ٔ همگرا دارد. چون X تماماً" کراندار است، می‌توان X را با شماره‌ٔ باپایانی از گویهای به‌شعاع ۱ پوشاند. بین این گویها باید یک‌گوی S_1 وجود داشته‌باشد که شماره‌ٔ بی‌پایانی از جمله‌های دنباله‌ٔ $\langle x_n \rangle$ را دربردارد. باپوشاندن X با شماره‌ٔ باپایانی از گویهای به‌شعاع ۱/۲، می‌توان بین آنها یک گوی S_2 یافت به‌گونه‌ای که $S_1 \cap S_2$ حاوی شماره‌ٔ بی‌پایانی از جمله‌های $\langle x_n \rangle$ است. باادامه‌ٔ این‌کار، می‌توان‌یک‌دنباله‌ٔ $\langle S_k \rangle$ ازگویها به‌دست آورد، به‌گونه‌ای‌که S_k دارای‌شعاع $1/k$ بوده‌و $S_1 \cap \cdots \cap S_k$ حاوی شماره‌ٔ بی‌پایانی ازجمله‌های‌دنباله‌باشد. چون‌شماره‌ٔ بی‌پایانی‌ازجمله‌های‌دنباله به $S_1 \cap \cdots \cap S_k$ تعلق دارند، می‌توان n_k راطوری برگزید که $n_k > n_{k-1}$ بوده‌و $x_{n_k} \in S_1 \cap \cdots \cap S_k$ باشد. دراین‌صورت $\langle x_{n_k} \rangle$ یک‌زیردنباله‌ٔ $\langle x_n \rangle$ است، وبایدیک‌دنباله‌ٔ کشی‌باشد، زیرابرای‌هر $k, l \geq N$، داریم $\rho(x_{n_k}, x_{n_l}) \leq 2/N$. چون X کامل است، پس این زیردنباله همگرا است. ∎

۱۶ ــ گـــزاره:

گیریم f یک نگاشت پیوسته از یک فضای متریک فشرده‌ٔ X در یک‌فضای متریک Y است. دراین‌صورت f به‌طوریکنواخت پیوسته است.

بـرهـــان:

برای‌هر $\epsilon > 0$ داده‌شده‌وهر $x \in X$، یک $\delta_x > 0$ وجود دارد به‌گونه‌ای که‌نابرابری $\rho(x, y) < \delta_x$ ایجاب‌می‌کند، $\sigma(f(x), f(y)) < \epsilon/2$. گیریم O_x گوی $\{y: \rho(x, y) < \frac{1}{2}\delta_x\}$ است. دراین‌صورت $\{O_x : x \in X\}$ یک پوشش باز X است، پس یک زیرپوشش‌باپایان‌مانند $\{O_{x_1}, \ldots, O_{x_n}\}$ دارد. گیریم $\delta = \frac{1}{2}\min\{\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_n}\}$. در این‌صورت $\delta > 0$ است. گیریم دونقطه‌ٔ y و z متعلق به Xبه‌گونه‌ای‌هستند که $\rho(y, z) < \delta$ نقطه‌ٔ y باید متعلق به یک O_{x_i} باشد، از این رو $\rho(y, x_i) < \frac{1}{2}\delta_{x_i}$ درنتیجه، $\rho(z, x_i) \leq \rho(z, y) + \rho(y, x_i) < \frac{1}{2}\delta_{x_i} + \delta \leq \delta_{x_i}$ بنابراین داریم:

$\sigma(f(y), f(x_i)) < \epsilon/2$ و $\sigma(f(z), f(x_i)) < \epsilon/2$

از اینجا نتیجه می‌شود $\sigma(f(z), f(y)) < \epsilon$ ، کـــــه نشان می‌دهد f روی X ، پیوستهٔ یکنواخت است . ∎

مسئلـــــه‌ها

۸ ــ گیریم X یک‌فضای متریک ، K یک‌زیرمجموعهٔ فشرده و F یک‌زیرمجموعهٔ بسته آن است . دراین‌صورت $F \cap K = \varnothing$ است‌اگروتنهااگر $\rho(F, K) > 0$ باشد ، یعنی اگروتنهااگر یک $\delta > 0$ وجود داشته‌باشد به‌گونه‌ای‌که برای همهٔ x های متعلق‌به F و همهٔ y های‌متعلق‌به K ، $\rho(x, y) > \delta$ [تابع $\rho(x, F) = \inf_{y \in F} \rho(x, y)$ را در نظر بگیرید .]

۹ ــ گیریم X یک‌فضای‌متریک فشرده و $\mathfrak{U}$ یک‌پوشش باز X است . دراین‌صورت یک $\delta > 0$ وجود داود به‌گونه‌ای‌که هر گوی به‌شعاع δ مشمول یک عنصر $\mathfrak{U}$ است .

۴ ــ حاصلضرب فضاهای فشـــرده

دراین‌بند قضیهٔ تیخونف [1] را دوبارهٔ این‌که هرحاصلضرب فضاهای‌فشرده خود فشرده‌است‌ثابت‌می‌کنیم . این‌قضیه شاید مهمترین قضیهٔ توپولوژی‌عمومی است . بسیاری از کاربردهای آن در آنالیز تنها نیاز به‌حالت‌خاص حاصلضرب فاصله‌ها (ی‌بسته) داود . ولی برهان این‌حالت‌خاص ساده‌تر از برهان حالت‌کلی به‌نظرنمی‌رسد . برهان‌را بادو لم مربوط به‌خاصیت اشتراک باپایان آغاز می‌کنیم .

۱۷ ــ لـــــم :

گیریم $\mathcal{A}$ دسته‌ای از زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ X است که دارای خاصیت اشتراک باپایان است . دراین‌صورت یک‌دستهٔ $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که $\mathcal{B}$ ، دارای خاصیت‌اشتراک‌باپایان بوده و نسبت‌به‌آن‌ماکسیمال‌است ، یعنی هیچ‌دستهٔ دیگری که به‌طور سره شامل $\mathcal{B}$ باشد دارای خاصیت اشتراک باپایان نیست .

1- Tychonoff

برهـــان :

خانوادهٔ همهٔ دسته‌های شامل $\mathfrak{a}$ را که دارای خاصیت اشتراک باپایان است، درنظر می‌گیریم. این خانواده با رابطهٔ شمول به‌طور جزیی مرتب است. بنابراصل ماکسیمال هاوسدوورف یک زیرخانوادهٔ مرتب خطی $\mathfrak{F}$ وجود دارد. گیریم $\mathfrak{B}$ اجتماع دسته‌های $\mathfrak{F}$ است. اگر $B_1, \ldots, B_n$ در $\mathfrak{B}$ باشند. دراین‌صورت هر B_i به‌یک $\mathcal{C}_i \in \mathfrak{F}$ تعلق دارد. چون $\mathfrak{F}$ با شمول به‌طورخطی مرتب است. یکی از دسته‌های $\mathcal{C}_k$ دیگران را دربرداود، پس همهٔ B_i ها به $\mathcal{C}_k$ تعلق‌دارند، وچون $\mathcal{C}_k$ دارای خاصیت اشتراک باپایان است، پس $\bigcap B_i \neq \varnothing$. بنابراین $\mathfrak{B}$ دارای خاصیت اشتراک باپایان است. اگر $\mathfrak{B}' \supset \mathfrak{B}$ بوده و $\mathfrak{B}'$ دارای خاصیت اشتراک باپایان باشد، آنگاه $\mathfrak{B}'$ حاوی هر $\mathcal{C}$ متعلق‌به $\mathfrak{F}$ است پس بنابرماکسیمال‌بودن $\mathfrak{F}$ باید به $\mathfrak{F}$ متعلق باشـــد. بنابراین $\mathfrak{B}$ اجتماع دسته‌هایی است که یکی ازآنـها $\mathfrak{B}'$ است. پس $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$. ایـن نشان می‌دهد که $\mathfrak{B}$ نسبت‌به‌خاصیت اشتراک باپایان ماکسیمال است.

۱۸ ــ لـــــم :

گیریم $\mathfrak{B}$ یک‌دسته‌از زیرمجموعه‌های X است‌که‌نسبت به‌خاصیت‌اشتراک‌باپایان ماکسیمال‌است. دراین‌صورت اشتراک‌هرشمارهٔ باپایانی‌ازمجموعه‌های $\mathfrak{B}$ باز به $\mathfrak{B}$ تعلق دارد، و هرمجموعه‌ای که هرمجموعهٔ متعلق‌به $\mathfrak{B}$ را تلاقی می‌کند خود به $\mathfrak{B}$ تعلق‌دارد.

برهـــان :

گیریم $\mathfrak{B}'$ دستهٔ همهٔ مجموعه‌هایی است که هرکدام اشتراک باپایانی از مجموعه‌های $\mathfrak{B}$ هستند. دراین‌صورت $\mathfrak{B}'$ دسته‌ای‌است‌که دارای خاصیت اشتراک‌باپایان بوده و شامل $\mathfrak{B}$ است. پس بنابرماکسیمال بودن $\mathfrak{B}$ داریم $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}$.

فرض‌کنیم که یک‌مجموعهٔ C هریک ازعنصرهای $\mathfrak{B}$ را تلاقی‌می‌کند. چون $\mathfrak{B}$، شامل‌هراشتراک‌باپایان‌ازمجموعه‌های $\mathfrak{B}$ است، پس $\mathfrak{B} \cup \{C\}$ دارای‌خاصیت‌اشتراک باپایان است. بنابرماکسیمال بودن $\mathfrak{B}$ داریم $\mathfrak{B} \cup \{C\} = \mathfrak{B}$، پس $C \in \mathfrak{B}$. ∎

۱۹ ــ قضیه (تیخونف) :

گیریم $\langle X_\alpha \rangle$ یک‌خانواده‌ٔ زیرنویس‌دار از فضاهای توپولوژیک فشرده‌است . دراین‌صورت فضای حاصلضرب $\bigtimes_\alpha X_\alpha$ در توپولوژی حاصلضرب فشرده است .

برهـــان :

گیریم π_α نگاشتی‌است‌از X به X_α که به‌هر $x \in X$ مختص α ام آن‌را نسبت می‌دهد . دراین‌صورت مجموعه‌هایی که از اشتراک شماره‌ٔ باپایانی از مجموعه‌های به‌شکل $\pi_\alpha^{-1}[O_\alpha]$ به‌دست‌می‌آیند ،که درآن O_α یک باز X_α است ، یک پایه‌ٔ $\mathfrak{N}$ برای توپولوژی X می‌سازند .

گیریم $\mathcal{A}$ یک دسته‌ٔ دلخواه از زیرمجموعه‌های بسته‌ٔ X باخاصیت اشتراک باپایان است ، و گیریم $\mathcal{B}$ یک دسته از مجموعه‌ها (که لازم نیست بسته باشند) است که $\mathcal{A}$ را دربرداردونسبت به‌خاصیت‌اشتراک‌باپایان‌ماکسیمال‌است . گیریم $\mathcal{B}_\alpha$ دسته‌ای اززیرمجموعه‌های X_α است‌که‌به‌شکل $\pi_\alpha(B)$ با $B \in \mathcal{B}$ ، هستند . دراین‌صورت $\mathcal{B}_\alpha$ دارای خاصیت اشتراک باپایان است و بنابرفشردگی X_α می‌توان یک نقطه‌ٔ x_α ، متعلق به $\bigcap_{\mathcal{B}} \overline{[\pi_\alpha(B)]}$ ، یعنی یک‌نقطه‌ٔ x_α که یک‌نقطه از بستار هـریـک از مجموعه‌های $\pi_\alpha[B]$ است ، برگزید . گیریم x نقطه‌ای از X است که مختص α ام آن x_α اســـت .

یک‌مجموعه‌ٔ S درنظرمی‌گیریم که برای‌یک α ویک‌مجموعه‌ٔ‌باز O_α در X_α با $x_\alpha \in O_\alpha$ ، بـــه‌شـــکل $\pi_\alpha^{-1}[O_\alpha]$ است . چون x_α ، برای هر B ی متعلق‌به $\mathcal{B}$ ، یک‌نقطه از بستار $\pi_\alpha[B]$ است ،مجموعه‌ٔ S باید هرمجموعه‌ٔ B ی متعلق‌به $\mathcal{B}$ را تلاقی‌کند . بنابرلم ۱۸ باید داشته‌باشیم $S \in \mathcal{B}$. درپایه‌ٔ $\mathfrak{N}$ هرمجموعه‌ٔ حاوی x ، برای توپولوژی X ، اشتراک‌باپایانی از مجموعه‌های به‌این‌شکل است ، پس بنابرلم ۱۸ باید به $\mathcal{B}$ متعلق‌باشد . گیریم F یک‌مجموعه‌ٔ بسته در $\mathcal{B}$ است . دراین‌صورت F هر $N \in \mathfrak{N}$ با $x \in N$ را تلاقی می‌کند . درنتیجه، x یک‌نقطه‌ٔ از بستار F است پس به F تعلق‌دارد .ازاین‌رو x به‌هریک از مجموعه‌های متعلق‌به $\mathcal{A}$ تعلق دارد ، و $\mathcal{A}$ ، دارای اشتراک ناتهی است .

مسئلـــــه‌ها

۱۰ ــ هرمجموعهٔ بسته و کراندار در $\mathbf{R}^n$ فشرده است .

۱۱ ــ بدون استفاده از اصل موضوع انتخاب ثابت کنید که اگر X فشرده و I یک فاصلهٔ بسته باشد ، آنگاه $X \times I$ فشرده است .[راهنمــایـــی : گیریم $\mathfrak{U}$ یک پوشش باز $X \times I$ است . کوچکترین مقدار $t \varepsilon I$ را درنظربگیرید به‌گونه‌ای که برای هر $t' < t$ بتوان مجموعهٔ $X \times [0, t']$ را با شمارهٔ باپایانی ازمجموعه‌های $\mathfrak{U}$ پوشاند . بااستفاده ازفشردگی X نشان دهید که می‌توان مجموعهٔ $X \times [0, t]$ را نیز با شمارهٔ باپایانی ازمجموعه‌های $\mathfrak{U}$ پوشاندواگر $t < 1$ ،آنگاه برای یک $t'' > t$ ، می‌توان $X \times [0, t'']$ را با شمارهٔ باپایانی از مجموعه‌های $\mathfrak{U}$ پوشاند .]

۱۲ ــ ثابت کنید که حاصلضرب تعداد شمارش‌پذیری از فضاهای فشردهٔ دنباله‌ای یک فضای فشردهٔ دنباله‌ای است .[گیریم $\langle x_n \rangle$ دنباله‌ای درفضای حاصلضرب است ، یک زیردنبالهٔ $\langle x_n^1 \rangle$ برگزینید که مختص یکم آن همگراست ، یک زیردنبالهٔ $\langle x_n^2 \rangle$ از آن برگزینید که مختص دوم آن همگرا است ، وغیره . دراین صورت دنبالهٔ قطری $\langle x_n^n \rangle$ در فضای حاصلضرب همگرا است .]

۱۳ ــ هرحاصلضرب I^A از فاصله‌های یکه ، یک مکعب (تعمیم یافته) نامیده می‌شود . ثابت کنید که هرفضای هاوسدورف فشردهٔ X بازیرمجموعهٔ بسته‌ای ازیک مکعب همئومرف است .[گیریم $\mathfrak{F}$ خانوادهٔ تابعهای حقیقی پیوسته روی X است که مقادیرآن به [۰ ، ۱] تعلق دارند . گیریم $Q = \bigtimes_{f \varepsilon \mathfrak{F}} I_f$. دراین صورت نگاشت g از X در Q که ، x را به نقطه‌ای که مختص f ام آن $f(x)$ است ، می‌برد ، در Q یک به‌یک و پیوسته است .]

۱۴ ــ گیریم $Q = I^A$ یک مکعب و f روی Q یک تابع حقیقی پیوسته است . دراین صورت برای هر $\epsilon > 0$ داده‌شده ، روی Q یک تابع حقیقی پیوستهٔ g وجود دارد به‌گونه‌ای که $|f - g| < \epsilon$ و g تابعی است که تنها تعداد باپایانی مختص دارد . [راهنمــایـــی : برد f را باتعداد باپایانی از فاصله‌های به‌درازی ϵ بپوشانید وسایهٔ وارون این فاصله‌ها را بررسی کنید .]

۵ ــ فضــاهــای فشــردهٔ مــوضعـــــی

فضای توپولوژیک X را فشــردهٔ مــوضعـــی می‌نامند هرگاه برای هر $x \varepsilon X$ یک مجموعهٔ باز O حاوی x وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $\overline{O}$ فشرده باشد . بنابراین ، X ،

فشردهٔ موضعی است اگروتنهااگر دستهٔ مجموعه‌های باز بابستار فشرده، برای توپولوژی X یک‌پایه‌تشکیل‌دهد. هرفضای‌فشرده، فشردهٔ موضعی‌است، درحالی‌که‌فضاهای‌اقلیدسی $\mathbf{R}^n$ مثالهایی از فضاهایی هستند که فشردهٔ موضعی‌اند ولی فشرده نیستند.

اگر X یک‌فضای‌هاوسدورف فشردهٔ‌موضعی باشد، می‌توان فضای جدید X^* را چنین ساخت. نقطهٔ تک ω را که به X تعلق ندارد به‌آن می‌افزاییم و سپس در X، مجموعه‌ای را بازمی‌گیریم که یا زیرمجموعهٔ بازی از X و یا مکمل یک‌زیرمجموعهٔ فشردهٔ X، باشد. دراین‌صورت X^* یک‌فضای‌هاوسدورف فشرده‌است، و نگاشت‌همانی‌از X در X^* یک‌همئومورفیسم از X و $\{\omega\} \sim X^*$ است. فضای X^* فشرده‌سازی یک‌نقطهٔ الکساندورف[1] X نامیده‌می‌شود، وبه ω اغلب‌به‌عنوان نقطهٔ بینهایت‌در X^*، اشاره می‌گردد.

بعضی‌از خاصیت‌های‌زیرمجموعه‌های‌فشردهٔ یک‌فضای هاوسدورف فشردهٔ‌موضعی درگزاره‌های‌زیر، که برهان‌آنها به‌خواننده واگذارشده، داده شده‌اند. (مسئله‌های ۱۶، ۱۷ و ۱۸ را ببینید).

۲۰ ــ گــــزاره:

گیریم K زیرمجموعه‌ای فشرده از یک فضای هاوسدورف فشردهٔ موضعی X است. دراین‌صورت یک‌مجموعهٔ باز O حاوی K با $\overline{O}$ فشرده وجوددارد. برای‌هرمجموعهٔ داده شدهٔ نظیرآن مانند O، روی X یک‌تابع نامنفی‌پیوستهٔ f وجود داردکه بیرون O صفر، و روی K متحد با ۱ است. اگر K یک $\mathcal{G}_\delta$ نیز باشد، می‌توان روی $\tilde{K}$ مقدار f را کوچکتر از ۱ گرفت.

۲۱ ــ گــــزاره:

گیریم K یک زیرمجموعهٔ فشرده از یک فضای هاوسدورف فشردهٔ موضعی و $\{O_\alpha\}$ یک‌پوشش باز K، است‌دراین‌صورت‌روی X شمارهٔ باپایانی از تابعهای نامنفی پیوستهٔ $f_1, \ldots, f_n$ وجوددارند، که هر f_i بیرون‌یک‌مجموعهٔ فشرده و بیرون یک O_{α_i} صفر است به‌گونه‌ای‌که $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ روی K متحدبا ۱ است.

---

۱ ــ Alexandroff

مسئلــــه‌ها

۱۵ ــ الــف ــ ثابت‌کنید زیرمجموعه‌هایی‌از X^* که یا زیرمجموعه‌های باز X و یا مکمل‌های‌زیرمجموعه‌های‌فشردهٔ X هستند ، یک توپولوژی برای X^* تشکیل‌می‌دهند ، یعنی ، اشتراک‌دومجموعهٔ‌نظیرآنها و اجتماع‌هردسته ازآنها باز مجموعه‌ای‌ازاین‌نوع‌است .

ب ــ نشان‌دهیدکه‌نگاشت‌همانی‌از X به‌زیرفضای $X^* \sim \{\omega\}$ یک‌همئومرفیسم‌است

پ ــ نشان دهید که X^* فشرده و هاوسدورف است .

۱۶ ــ گیریم X یک‌فضای‌فشردهٔ‌موضعی و K یک‌زیرمجموعهٔ فشردهٔ آن است . نشان‌دهیدیک‌مجموعهٔ باز $O \supset K$ وجودداردبه‌گونه‌ای‌که $\bar{O}$ فشرده‌است .[راهنمایــی : برای هرنقطهٔ $x \varepsilon K$ یک O_x حاوی x با $\bar{O}_x$ فشرده وجوددارد . O را اجتماع شمارهٔ باپایانی از این O_x ها ، که K را می‌پوشانند ، بگیرید .]

۱۷ ــ گیریم X یک‌فضای‌هاوسدورف‌فشردهٔ‌موضعی‌و K یک‌مجموعهٔ‌فشرده‌است . دراین‌صورت روی X یک تابع حقیقی پیوسته وجود دارد که روی K متحد با ۱ است و برای آن ، مجموعهٔ $O = \{x: f(x) \neq 0\}$ دارای بستار فشرده است . [راهنمــایـــی : از مسئلهٔ ۱۶ و لم اوریزن استفاده کنید .] گزارهٔ ۲۰ را ثابت کنید .

۱۸ ــ گزارهٔ ۲۱ را ثابت‌کنید . [برای‌هر x متعلق‌به K یک‌تابع نامنفی‌پیوستهٔ g وجود دارد که در x مثبت ، و بیرون یک O_α متحد صفر است . شمارهٔ باپایــان $g_1, \ldots, g_n$ ازاین‌تابعهارا برگزینید به‌گونه‌ای‌که $g = g_1 + \cdots + g_n$ روی K مثبت باشد . روی X ، تابع h را تابع پیوسته‌ای بگیرید که روی K برابر $1/g$ است و قــرار دهیــد $f_i = hg_i$] .

۱۹ ــ نشان‌دهیدکه‌فشرده‌سازی یک‌نقطهٔ‌الکساندروف‌فضای $\mathbf{R}^n$ در $\mathbf{R}^{n+1}$ با مرز یک کره همئومرف است .

۲۰ ــ نشان‌دهید که فشرده‌سازی یک‌نقطهٔ‌فضای X مسئلهٔ ۶ همان فضــای Y ، مسئلــهٔ ۷ اســت .

۲۱ ــ الــف ــ گیریم O زیرمجموعهٔ‌بازی از یک فضای هاوسدورف‌فشرده است . دراین‌صورت O فشردهٔ موضعی است .

ب ــ گیریم O مجموعهٔ‌بازی‌دریک‌فضای‌فشردهٔ‌هاوسدورف X است . دراین‌صورت نگاشتی از X برفشرده‌سازی یک نقطهٔ O که روی O همانی و در $X \sim O$ هرنقطه را به ω می‌برد ، پیوسته است .

۲۲ ــ یک نگاشت پیوستهٔ f از یک فضای توپولوژیک X بریک‌فضای توپولوژیک Y ســـــره نامیده‌می‌شود هرگاه سایهٔ وارون هرمجموعهٔ فشرده‌خودفشرده‌باشد. گیریم X و Y دوفضای هاوسدورف‌فشردهٔ موضعی هستند، و f یک‌نگاشت پیوسته از X در Y، است. گیریم X^* و Y^* به‌ترتیب‌فشرده‌سازی‌یک‌نقطهٔ X و Y و f^* نگاشتی‌از X^* در Y^* است که تحدید آن به X تابع f بوده و نقطهٔ بینهایت X^* را به‌نقطهٔ بینهایت Y^* می‌برد. دراین‌صورت f سره است اگروتنهااگر f^* پیوسته باشد.

۲۳ ــ الف ــ گیریم X یک‌فضای‌فشردهٔ‌موضعی‌است. زیرمجموعهٔ F از X بسته است اگر وتنها اگر برای هرمجموعهٔ بستهٔ‌فشردهٔ K مجموعهٔ $F \cap K$ بسته‌باشد.

ب ــ اگر X به‌جای فشردهٔ‌موضعی‌بودن، یک‌فضای هاوسدورف باشد که دراصل نخست شمارش‌پذیری صدق می‌کند، باز نتیجهٔ بالا درست است.

۲۴ ــ مـانیفـلـد مـــور[۱]:

گیریم X مجموعه‌ای است که عنصرهای آن نقطه‌های نیم‌صفحهٔ باز سمت راست (یعنی، $\{\langle x, y\rangle : x > 0\}$ و خطهایی از صفحــه با شیب نامنفی‌است. شیب و نقطهٔ برخورد بامحور y، خط l را به‌ترتیب با $m(l)$ و $b(l)$ می‌نمایانیم. با انتخــاب قرصهای باز نیم‌صفحه و مجموعه‌های:

$$V_\epsilon = \{l : |m(l) - m_0| < \epsilon, \quad b(l) = b_0\} \cup \{\langle x, y\rangle : |(y - b_0)/x \pm m_0| < \epsilon, \quad x < \epsilon\}$$

پایه‌ای برای یک توپولوژی برای X تعریف می‌کنیم.

الف ــ نشان‌دهیدکه X یک‌فضای‌هاوسدورف‌همبنداست وهرنقطهٔ X به‌مجموعهٔ بازی متعلق است. که بازیرمجموعهٔ‌بازی از $\mathbb{R}^2$ همئومرف‌است. (چنین فضایی، مانیفلد دوبعدی یا «رویه» نامیده می‌شود).

ب ــ نشان‌دهیدکه X (یا هر مانیفلد) فشردهٔ‌موضعی، به‌طورکامل منظم‌است و نخستین اصل شمارش‌پذیری را برمی‌آورد.

پ ــ نشان‌دهید که X دارای یک زیرمجموعهٔ‌شمارش‌پذیر متراکم است ولی در اصل دوم شمارش‌پذیری صدق نمی‌کند.

ت ــ نشان دهید که X نرمال نیست.

---

۱ ــ The Moore Manifold

*۶ ــ فشرده‌سازی استون ــ چک [1]

گیریم X یک‌فضای‌توپولوژیک کاملاً "منظم و $\mathfrak{F}$ خانوادهٔ تابعهای‌حقیقی پیوستهٔ f روی X با $|f| \leq 1$ است. اگرفرض‌کنیم $I = [-1, 1]$ ، آنگاه‌بنابرمسئلهٔ ۸۰۳ ، X بایک‌مجموعهٔ $E \subset I^{\mathfrak{F}}$ همئومرف‌است. گیریم $F = \overline{E}$. چون $I^{\mathfrak{F}}$ یک‌فضای‌هاوسدورف فشرده‌است ، F نیزیک‌فضای‌هاوسدورف‌فشرده‌است ، و بایکی‌گرفتن X با E ، مجموعهٔ X یک‌زیرمجموعهٔ‌بازمتراکم F می‌گردد. فضای F رافشرده‌سازی‌استون‌ــ چک X نامیده وآن‌رابا $\beta(X)$ نشان‌می‌دهند. بعضی‌ازخاصیتهای‌این فضاهارادرگزارهٔ زیرخلاصه‌می‌کنیم :

۲۲ ــ گزاره:

گیریم X یک‌فضای‌توپولوژیک‌کاملاً "منظم‌است. دراین‌صورت‌یک‌فضای‌هاوسدورف فشردهٔ یکتای $\beta(X)$ وجوددارد که دارای خاصیت‌های زیر است:

i ــ فضای X یک زیرمجموعهٔ باز متراکم از $\beta(X)$ است.

ii ــ هرتابع حقیقی پیوستهٔ کراندار روی X به‌یک‌تابع پیوسته روی $\beta(X)$ گسترش می‌یابد.

iii ــ اگر X یک زیرمجموعهٔ بازمتراکم‌ازیک‌فضای‌هاوسدورف‌فشردهٔ Y باشد، آنگاه یک نگاشت پیوستهٔ یکتای φ از $\beta(X)$ بر Y وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر $x \in X$ داریم $\varphi(x) = x$.

مسئله‌ها

۲۵ ــ گزاره ۲۲ را ثابت کنید:

الف ــ اگر f یک تابع حقیقی پیوستهٔ‌کراندار روی X باشد به‌گونه‌ای که $|f| \leq 1$ ، آنگاه f تحدید π_f به X ، و π_f روی $\beta(X)$ پیوسته است.

ب ــ بااستفاده‌ازاین‌حقیقت‌که Y یک‌زیرمجموعهٔ $I^{\mathcal{G}}$ است ، که‌درآن $\mathcal{G}$ فضای تابعهای پیوستهٔ g با $|g| \leq 1$ ، روی Y است ، (iii) را ثابت کنید.

پ ــ نشان‌دهیدکه $\beta(X)$ یکتاست‌به‌این‌معنی‌که‌اگر Z فضای دیگری باهمان خاصیت‌ها باشد، آنگاه یک همئومرفیسم φ از Z با $\beta(X)$ وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر $x \in X$ داریم ، $\varphi(x) = x$.

---

[1] Stone-Čech

۲۶ ــ گیریم X و Y فضاهای مسئله‌های ۶ و ۷ هستند. نشان دهید که $\beta(X) = Y$.

۲۷ ــ گیریم $\mathbf{N}$ مجموعهٔ عددهای طبیعی است. $\beta(\mathbf{N})$ را توصیف کنید. نشان دهید که هر دنباله از $\mathbf{N}$ در $\beta(\mathbf{N})$ همگراست اگر و تنها اگر در $\mathbf{N}$ همگرا باشد. از این رو $\beta(\mathbf{N})$ فشرده است ولی فشردهٔ دنباله‌ای نیست.

۷ ــ قضیهٔ استون ــ وایرشتراس[1]

گیریم X یک فضای هاوسدورف فشرده است. مجموعهٔ همهٔ تابعهای حقیقی پیوسته روی X را با $C(X)$ می‌نمایانیم. چون X نرمال است، از لم اوریزون نتیجه می‌شود که در $C(X)$ به قدر کافی تابع برای جداسازی نقطه‌ها وجود دارد، یعنی برای هر دو نقطهٔ متمایز داده شدهٔ x و y متعلق به X، می‌توان تابع f را در $C(X)$ یافت به گونه‌ای که $f(x) \neq f(y)$ باشد. مجموعهٔ $C(X)$ یک فضای خطی است، زیرا حاصلضرب هر تابع حقیقی پیوسته در یک ثابت یک تابع پیوسته است و مجموع دو تابع پیوسته یک تابع پیوسته است. اگر بنویسیم $\|f\| = \max |f(x)|$ ، $C(X)$ یک فضای خطی نرم‌دار و اگر قرار دهیم $\rho(f, g) = \|f - g\|$ این فضا یک فضای متریک می‌شود. به عنوان یک فضای متریک $C(X)$ کامل است.

فضای $C(X)$ یک ساختمان حلقه نیز دارد: fg ، یعنی حاصلضرب دو تابع f و g ی متعلق به $C(X)$ باز متعلق به $C(X)$ است. یک فضای خطی A از تابعهای $C(X)$ یک **جبر** نامیده می‌شود هرگاه حاصلضرب هر دو عنصر A باز متعلق به A باشد. بنابراین A جبر است اگر برای هر دو تابع f و g ی متعلق به A و هر دو عدد حقیقی a و b، تابعهای $af + bg$ و fg متعلق به A باشند. گفته می‌شود که یک خانوادهٔ A از تابعهای روی X نقطه‌ها را جدا می‌سازد اگر برای هر دو نقطهٔ متمایز x و y از X یک تابع f در A موجود باشد به گونه‌ای که $f(x) \neq f(y)$. در این بند زیرجبرهای بستهٔ $C(X)$ را مطالعه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که اگر A زیرجبری از $C(X)$ باشد که نقطه‌ها را جدا می‌سازد، حاوی تابعهای ثابت بوده، و بسته باشد، آنگاه $A = C(X)$ است.

فضای $C(X)$ یک ساختمان شبکه نیز دارد: اگر f و g در $C(X)$ باشند، آنگاه تابع $f \wedge g$ که با $(f \wedge g)(x) = \min [f(x), g(x)]$ و تابع $f \vee g$ که

---

1. Stone-Weierstrass

بـا $(f \vee g)(x) = \max[f(x), g(x)]$ تعریف می‌شود، هردوبه $C(X)$ تعلق دارند. زیرمجموعهٔ L از $C(X)$ یک شبـکـــه نامیده می‌شود اگر برای هرجفت از تابعهای f و g متعلق‌به L تابعهای $f \vee g$ و $f \wedge g$ نیزمتعلق‌به L باشند. بهتراست‌که جستجوی زیرجبرهای $C(X)$ راباجستجوی‌شبکهٔ‌تابعها آغازکنیم. گزارهٔ‌زیر را می‌توان به‌عنوان یک‌تعمیم قضیهٔ دینی تصور کرد:

۲۳ ــ گـــزاره:

گیریم L شبکه‌ای ازتابعهای‌حقیقی پیوسته روی یک‌فضای‌فشردهٔ X است، فرض کنیم تابع h که با:

$$h(x) = \inf_{f \varepsilon L} f(x)$$

تعریف می‌شود پیوسته‌است. دراین‌صورت برای‌هر $\epsilon > 0$ داده‌شده یک تابع g در L، وجود دارد به‌گونه‌ای برای همهٔ x های متعلق‌به X داریم $0 \leq g(x) - h(x) < \epsilon$.

بـرهـــان:

برای هر x متعلق‌به X یک‌تابع f_x در L وجود دارد به‌گونـــه‌ای کــــه $f_x(x) < h(x) + \epsilon/3$. چون f_x و h پیوسته‌اند، یک‌مجموعهٔ‌باز O_x حاوی x، وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر $y \varepsilon O_x$ داریم:

$$|f_x(y) - f_x(x)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{and} \quad |h(y) - h(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

ازاین‌رو برای‌هر y متعلق‌به O_x داریم، $f_x(y) - h(y) < \epsilon$. ولـــی مجموعه‌های O_x فضای X رامی‌پوشانند، وبنابرفشردگی، شمارهٔ‌باپایانی از آنها مانند $\{O_{x_1}, \ldots, O_{x_n}\}$ وجوددارندکه X رامی‌پوشانند. گیریم $g = f_{x_1} \wedge f_{x_2} \wedge \cdots \wedge f_{x_n}$ دراین‌صورت $g \varepsilon L$، و برای‌هر y داده‌شدهٔ متعلق‌به X می‌توان i را به‌گونه‌ای‌برگزید که $y \varepsilon O_{x_i}$ باشد، ازآنجا نتیجه می‌شود:

$$g(y) - h(y) \leq f_{x_i}(y) - h(y) < \epsilon. ∎$$

۲۴ ـ گــزاره :

گیریم X یک‌فضای‌فشرده و L شبکه‌ای‌از تابعهای‌حقیقی‌پیوسته روی X است که دارای خاصیت‌های زیر می‌باشد :

i. ـ L نقطه‌ها‌را جدا می‌سازد ، یعنی اگر $x \neq y$ ، آنگاه یک‌تابع f متعلـق به L وجود دارد به‌گونه‌ای‌که $f(x) \neq f(y)$ است .

ii. ـ اگر $f \varepsilon L$ ، و c یک‌عدد‌حقیقی‌دلخواه‌باشد ، آنگاه cf و $f + c$ نیز به L تعلق دارند .

دراین‌صورت برای‌هرتابع حقیقی پیوستهٔ داده شدهhروی X و هر $0 < \epsilon$ ، یک‌تابع $g \varepsilon L$ وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر $x \varepsilon X$ داریم :

$$0 \leq g(x) - h(x) < \epsilon$$

پیش‌از برهان گزاره ، دو لم زیر را ثابت می‌کنیم :

۲۵ ـ لــــم :

گیریم L یک‌خانواده از تابع‌های‌حقیقی روی یک فضای‌فشردهٔ X است که در خاصیت‌های (i) و (ii) گزارهٔ ۲۴ صدق‌می‌کنند . دراین‌صورت برای‌هردوعدد‌حقیقی a و b و هرجفت x و y ازنقطه‌های متمایز X ، یک‌تابع f متعلق‌به L وجود دارد به‌گونه‌ای که $f(x) = a$ و $f(y) = b$ اســـت .

بـــرهـــان :

گیریم g تابعی متعلق‌به L است به‌گونه‌ای‌که $g(x) \neq g(y)$. گیریم :

$$f = \frac{a-b}{g(x)-g(y)}\, g + \frac{bg(x)-ag(y)}{g(x)-g(y)}$$

دراین‌صورت‌بنابرخاصیت (ii) داریم $f \varepsilon L$ و $f(x) = a$ و $f(y) = b$ ∎

۲۶ ـ لـــم :

گیریم L همانندگزارهٔ ۲۴، a و b دوعددحقیقی با $a \le b$، F یک زیرمجموعهٔ بستهٔ X، است و p نقطه‌ای است که به F تعلق ندارد . دراین صورت یک تابع f متعلق به L وجوددارد به‌گونه‌ای که $f(p) = a, f \ge a$ بوده‌وبرای هر x متعلق به F داریم $f(x) > b$.

بــرهـــــان :

بنابرلم ۲۵، برای هر $x \varepsilon F$ می‌توان یک تابع f_x برگزید به‌گونـه‌ای کـــه $f_x(p) = a$ و $f_x(x) = b + 1$ باشد. گیریم $O_x = \{y: f_x(y) > b\}$. دراین صورت مجموعه‌های $\{O_x\}$ مجموعهٔ F رامی‌پوشانند ،وچون F فشرده است ، شمارهٔ باپایانی از آنها مانند $\{O_{x_1}, \ldots, O_{x_n}\}$ وجود دارد که F را می‌پوشانند . گیـریـــــم $f = f_{x_1} \vee \cdots \vee f_{x_n}$. دراین صورت $f \varepsilon L$، $f(p) = a$ بوده و روی F داریم $f > b$. اگر $f \vee a$ راجانشین f سازیم ،دراین صورت روی X نیزداریم $f \ge a$ ∎

بــرهــان گـــزارهٔ ۲۴ :

چون L ناتهی است ،از (ii) نتیجه می‌شود که تابع ثابت به L تعلـق دارد . برای هر $g \varepsilon C(X)$، گیریم $L' = \{f: f \varepsilon L$ و $f \ge g\}$. اگر نشان دهیم که برای هر $p \varepsilon X$ داریم $g(p) = \inf f(p)$، $f \varepsilon L'$، آنگاه گزارهٔ ۲۴ از گـزارهٔ ۲۳ نتیجه خواهدشد . عددحقیقی مثبت η را برمی‌گزینیم . چون g پیوسته است ، مجموعهٔ

$$F = \{x: g(x) \ge g(p) + \eta\}$$

بسته است . چون X فشرده است ، g روی X باعددی مانند M کـرانـدار اســـت . بنــابــرلـــــم ۲۶ می‌توان یک تابع $f \varepsilon L$ به‌گونه‌ای یافـت کــه $f \ge g(p) + \eta$، $f(p) = g(p) + \eta$، و روی F، $f(x) > M$ باشـد . چـون روی $\bar{F}$ داریـــم $g < g(p) + \eta$، روی X داریم $g < f$. بنابراین $f \varepsilon L'$، و $f(p) \le g(p) + \eta$ چون η یک عدد مثبت دلخواه است پس، داریم $g(p) = \inf f(p)$، $f \varepsilon L'$. ∎

۲۷ ـ لــــم :

برای هر $\epsilon > 0$ داده‌شده، یک چندجمله‌ای یک‌متغیری P جود دارد به‌گونه‌ای‌که برای هر $s \in [-1, 1]$ داریم $\big|P(s) - |s|\big| < \epsilon$

بـرهـــــان :

گیریم $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ سری دوجمله‌ای $(1 - t)^{1/2}$ است، این سری برای t های‌متعلق‌به $[0, 1]$ به‌طوریکنواخت‌همگراست. ازاین‌رو، برای‌هر $\epsilon > 0$ داده شده می‌توان N را به‌گونه‌ای برگزید که برای‌هر $t \in [0, 1]$ داشته‌باشیم :

$$|(1 - t)^{1/2} - Q_N(t)| < \epsilon$$

که‌درآن $Q_N = \sum_{n=0}^{N} c_n t^n$ است. گیریم $P(s) = Q_N(1 - s^2)$. در این‌صورت P یک چندجمله‌ای برحسب s است، و برای‌هر $s \in [-1, 1]$ داریــــم :

$$\big||s| - P(s)\big| < \epsilon \quad \blacksquare$$

۲۸ ـ قضیـــهٔ (استـــون ـ وایـــرشتـــراس) :

گیریم X یک‌فضای‌فشرده و A جبری از تابعهای‌حقیقی‌پیوسته روی X است‌که نقطه‌های X راجدامی‌سازندوحاوی‌تابعهای‌ثابت‌است. دراین‌صورت برای‌هرتابع‌حقیقی پیوستهٔ f روی X و هر $\epsilon > 0$ یک تابع g در A وجود دارد به‌گونه‌ای که برای همـهٔ x های‌متعلق‌به X داریم $|g(x) - f(x)| < \epsilon$. به‌گفتهٔ دیگر A یک‌زیرمجموعهٔ متراکم از $C(X)$ است.

بـرهـــــان :

گیریم $\overline{A}$ که‌نمایش‌بستار A است‌به‌عنوان‌یک‌زیرمجموعهٔ $C(X)$ درنظرگرفته شود. بنابراین $\overline{A}$ شامل آن تابعهای‌روی X است که حد یکنواخت دنبالهٔ تابعهای متعلق به A هستند. به‌آسانی دیده‌می‌شود که $\overline{A}$ خودیک‌جبراز تابعهای حقیقی پیوسته روی X است. این‌قضیه‌هم‌ارز است بااین‌حکم‌که $\overline{A} = C(X)$ است. اگر نشان‌دهیم

که $\overline{A}$ یک‌شبکه است حکم اخیر ثابت خواهد شد. گیریم $f \varepsilon \overline{A}$ و $\|f\| \leq 1$. در اینصورت‌برای‌هر $\epsilon > 0$ ، $\||f| - P(f)\| < \epsilon$ است ،که‌در‌آن P چندجمله‌ای داده شده در لم ۲۷ می‌باشد. چون $\overline{A}$ جبری است حاوی ثابتها، پس $P(f) \varepsilon \overline{A}$ ، و چون $\overline{A}$ یک‌زیرمجموعهٔ بستهٔ $C(X)$ است، داریم $|f| \varepsilon A$. اکنون اگر f یک تابع دلخواه در A باشد، آنگاه نرم $f/\|f\|$ برابر ۱ است، پس $\|f\| |f|/\|f\|$ و ازاین‌رو $|f|$ نیز به $\overline{A}$ تعلق‌دارد. بنابراین $\overline{A}$ حاوی‌قدرمطلق همهٔ‌تابعهای‌متعلق به $\overline{A}$ است. ولـــی:

$$f \vee g = \tfrac{1}{2}(f + g) + \tfrac{1}{2}|f - g|$$

و

$$f \wedge g = \tfrac{1}{2}(f + g) - \tfrac{1}{2}|f - g|.$$

بنابراین $\overline{A}$ یک‌شبکه است و باید بنابرگزارهٔ ۲۴ بر $C(X)$ منطبق باشـــد. ∎

۲۹ ـ نتیجـــــــه:

هرتابع پیوسته روی یک مجموعهٔ کراندار و بستهٔ X در $\mathbf{R}^n$ را می‌توان روی X به‌طوریکنواخت به‌یک چندجمله‌ای (از مختص‌ها) نزدیک ساخت.

بـــرهـــــان:

مجموعهٔ همهٔ‌چندجمله‌ای‌ها از تابعهای‌مختص تشکیل یک جبر می‌دهد که حاوی ثابتها است. این‌جبر نقطه‌ها‌را جدا می‌کند، زیرا برای هردونقطهٔ‌متمایز از $\mathbf{R}^n$ ، یکی از تابعهای مختصات روی این‌نقطه‌ها مقدارهای متفاوت می‌گیرد. ازاین‌رو بااستفاده از قضیهٔ ۲۸ نتیجه ثابت می‌شود. ∎

مسئـلـــــه‌ها

۲۸ ـ گیریم f روی $\mathbf{R}$ یک تابع حقیقی پیوستهٔ دوره‌ای با دورهٔ 2π اســت، یعنی $f(x + 2\pi) = f(x)$ نشان‌دهیدکه‌برای‌هر $\epsilon > 0$ داده‌شده، یک‌سری‌فوریهٔ باپایان φ وجودداردکه با

$$\varphi(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

داده می‌شود به‌گونه‌ای که برای همهٔ x ها داریم: $|\varphi(x) - f(x)| < \epsilon$

[راهنمـایـــی: توجه کنید که تابعهای دوره‌ای درحقیقت تابعهایی هستند که روی محیط دایرهٔ یکه تعریف شده‌اند، و داریم:

$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos (m + n)x - \cos (m - n)x]$, etc.] ، و غیـره .]

۲۹ ـ گیریم A جبری از تابعهای حقیقی پیوسته روی یک فضای فشردهٔ X است و فرض می‌کنیم که A نقطه‌های X را جدا می‌سازد. دراین‌صورت یا $\overline{A} = C(X)$ یا یک نقطهٔ $p \varepsilon X$ وجود دارد و $\overline{A} = \{f: f \varepsilon C(X), f(p) = 0\}$

۳۰ ـ گیریم $\mathfrak{F}$ خانواده‌ای از تابعهای حقیقی پیوسته روی یک فضای هاوسدورف X است، وفرض می‌کنیم $\mathfrak{F}$ نقطه‌های X را جدا می‌سازد. دراین‌صورت هرتابع حقیقی پیوسته روی X را می‌توان به‌طوریکنواخت بایک‌چندجمله‌ای از تعداد باپایان از تابعهای $\mathfrak{F}$ نزدیک ساخت.

۳۱ ـ الف ـ گیریم X یک‌فضای توپولوژیک و A مجموعه‌ای از تابعهای حقیقی پیوسته روی X است. رابطهٔ $\equiv$ را چنین تعریف می‌کنیم: $x \equiv y$ اگربرای‌هر $f \varepsilon A$، $f(x) = f(y)$ $\equiv$ بـاشد. نشان دهید که $\equiv$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

ب ـ گیریم $\tilde{X}$ مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی $\equiv$ و φ نگاشت طبیعی از X در $\tilde{X}$ است. نشان دهید که برای‌هر $f \varepsilon A$ یک تابع حقیقی یکتای $\tilde{f}$ روی $\tilde{X}$ وجود دارد. به‌گونه‌ای که $f = \tilde{f} \circ \varphi$.

پ ـ گیریم $\tilde{X}$ دارای‌توپولوژی‌کم‌توانی است که بااین $\tilde{f}$ ها تولیدشده‌است. دراین‌صورت φ پیوسته است.

ت ـ اگر X فشرده‌باشد، آنگاه $\tilde{X}$ نیز فشرده است و تابعهای $\tilde{f}$ مذکور در (ب) پیوسته‌اند.

ث ـ گیریم X یک‌فضای فشرده و A یک زیرجبر بسته از $C(X)$ اسـت کـه تابعهای‌ثابت‌را دوبردارد. دراین‌صورت یک‌فضای‌هاوسدورف فشردهٔ $\tilde{X}$ و یک نگاشت φ از X بر $\tilde{X}$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که A مجموعهٔ همهٔ تابعهای f به‌شکل $\tilde{f} \circ \varphi$ با $\tilde{f} \varepsilon C(\tilde{X})$ اســـت.

۳۲ ـ گیریم X و Y دوفضای‌فشرده‌اند. دراین‌صورت برای‌هرتابع حقیقی پیوستهٔ f روی $X \times Y$ وهر $\epsilon > 0$، می‌توان تابعهای‌حقیقی‌پیوستهٔ $g_1, \ldots, g_n$ را روی X و $h_1, \ldots, h_n$ راروی Y به‌گونه‌ای یافت که برای هر $\langle x, y \rangle \varepsilon X \times Y$ داشته‌باشیم:

$$|f(x, y) - \sum_{i=1}^{n} g_i(x)h_i(y)| < \epsilon$$

۳۳ ــ قضیهٔ وایرشتراس، مبنی براین‌که هرتابع پیوستهٔ روی یک مکعب R^n را می‌توان به‌طوریکنواخت بایک‌چندجمله‌ای نزدیک ساخت، می‌توان به‌طورمستقیم بادادن یک‌دستور انتگرال برای چندجمله‌ای‌های‌نزدیک‌شونده[1]، ثابت‌کرد. بانشان‌دادن این‌که تابعهای به‌نرم ۱ در جبر $\mathfrak{a}$ نگاشتی از X در مکعب با بعد بی‌پایان $X\{I_f : f \varepsilon \mathfrak{a}, \|f\| = 1\}$ می‌دهد، ثابت‌کنید که این‌حالت خاص حالت کلی قضیهٔ استون ــ وایرشتراس را ایجاب می‌کند. بااستفاده‌از قضیهٔ‌گسترش تیتز و مسئلهٔ ۱۴ نشان دهید که هر تابع پیوسته روی سایهٔ X را می‌توان بایک چندجمله‌ای از (تعداد باپایانی از) تابعهای مختص‌ها نزدیک ساخت.

قضیهٔ‌استون ــ وایرشتراس دربارهٔ نزدیک‌سازی‌با تابعهای یک جبر از تابعهای پیوسته آگاهی‌دقیقی می‌دهد. یک‌پرسش‌طبیعی دربارهٔ‌طبیعت تابعهایی‌است که می‌توان آنهارا باحلقه‌ای‌از تابعهای حقیقی پیوسته نزدیک‌ساخت، یعنی، چه هنگام امکان ضرب در عددهای‌حقیقی دلخواه‌را دیگر لازم نمی‌دانیم. سه مسئلهٔ بعد نتیجه‌هایی دراین‌جهت می‌دهند.

۳۴ ــ گیریم I نمایش فاصلهٔ $[-۱ ، ۱]$ در $\mathbf{R}$ و f یک تابع حقیقی پیوسته روی I است‌به‌گونه‌ای‌که $f(0)$ ، $f(-1)$ ، و $f(1)$ عددهای‌درست‌بوده‌وبه‌پیمانهٔ ۲ داریم $f(1) \equiv f(-1)$. دراین‌صورت برای‌هر $\epsilon > 0$ داده‌شده یک‌چندجمله‌ای P با ضریبهای‌درست‌وجود دارد به‌گونه‌ای‌که‌برای‌هر $x \varepsilon I$ داریم $|f(x) - P(x)| < \epsilon$

[راهنمایی‌ها:

الف ــ گیریم‌چندجمله‌ای φ با $\varphi(x) = x + x(1-2x)(1-x)$ تعریف شده‌است. دراین‌صورت φ یک‌تابع افزایشی‌یکنواست که نقطه‌های ثابتش 0 ، $\frac{۱}{۲}$ و ۱ می‌باشد.

ب ــ $\epsilon > 0$ رابرگزینید. دراین‌صورت‌یک‌تکرار φ_n از φ یک‌چندجمله‌ای باضریبهای‌درست‌است که‌روی $[۰ ، ۱]$ افزایشی یکنواست و برای $x \varepsilon [\epsilon, 1-\epsilon]$ داریم

$$|\varphi_n(x) - \tfrac{1}{2}| < \epsilon$$

پ ــ برای یک عدد داده شدهٔ α ، $0 < \alpha < 1$ ، و هر عدد $\epsilon > 0$ ،

---

[1] ــ برای مثال کتاب R.Courant and D.Hilbert, Mathematische physik, Bd. I, pp.55-57, Springer, Berlin, 1931.

را ببینید.

یک چندجمله‌ای ψ باضریبهای درست (و بدون جملهٔ ثابت) موجود است به‌گونه‌ای که درفاصلهٔ [۱ ، ۰]داریم $0 \le \psi(x) \le 1$ و برای همهٔ x های‌متعلق‌به $[\epsilon, 1 - \epsilon]$ داریم $|\psi(x) - \alpha| < \epsilon$

ت ــ گیریم p یک‌چندجمله‌ای باضریبهای درست است و فرض می‌کنیم $P(-1) = P(0) = P(1) = 0$ گیریم . β یک‌عدد حقیقی دلخواه است . در این‌صورت برای‌هر $\epsilon > 0$ ، می‌توان βP راروی [۱ ، ۱ــ]باتقریب ϵ به‌یک‌چندجمله‌ای باضریبهای درست و بدون جملهٔ ثابت به‌طور یکنواخت نزدیک ساخت .

ج ــ حکم مسئله‌را به‌حالت (ت) و قضیهٔ استون ــ وایرشتراس تبدیل کنید .

۳۵ ــ الف ــ گیریم X یک‌مجموعه‌دلخواه و R یک‌حلقه از تابعهای‌حقیقی روی X است . گیریم $\overline{R}$ حلقهٔ همهٔ تابع های‌حقیقی‌است که می‌توان آنها را به‌طوریکنواخت با تابعهای R نزدیک ساخت . اگر $f \in \overline{R}$ بوده و $\sup_X |f(x)| < 1$ باشد ، دراین‌صورت برای هر عدد حقیقی c داریم $cf \in \overline{R}$

ب ــ گیریم X یک‌فضای‌هاوسدورف‌فشرده و R حلقه‌ای از تابعهای حقیقی روی X است به‌گونه‌ای که $1 \in R$.وبرای‌هرجفت‌ازنقطه‌های‌متمایز x و y یک تابع f در R ، وجود دارد به‌گونه‌ای که $f(x) \neq f(y)$ بوده و برای هر $z \in X$ داریم $|f(z)| < 1$. در این‌صورت‌هر تابع حقیقی‌پیوسته‌روی X را می‌توان به‌طوریکنواخت با تابعهای R نزدیک ساخت .

۳۶ ــ الف ــ حکم مسئلهٔ ۳۴ را می‌توان اندکی بهبود بخشید . نشان دهید ، برای مثال ، که می‌توان به‌جای I هرفاصلهٔ بستهٔ مشمول $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ را گرفت . [قدر مطلق چندجمله‌ای $1 - x^2$ روی I حداکثر ۱ است . مسئلهٔ ۳۵ ب را به‌کارببرید .]

ب ــ نشان دهید که در مسئلهٔ ۳۴ نمی‌توان I را برابر [۲ و ۲ ــ]گرفت .
[راهنمایی : اگر P یک‌چند جمله‌ای باضریبهای درست باشد ، آنگاه
$$\frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2} P(x)(4 - x^2)^{1/2}\, dx$$
یک عدد درست است .]

* ۸ ــ قضیه آسکولی [1]

گاهی در آنالیز دانستن شرطهایی که تحت این شرطها هر دنباله از تابعها ، دارای زیردنباله‌ای است که به‌یک‌معنی همگراست ، مفید است . مفهوم زیر نقش عمده‌ای

---

۱ — Ascoli Theorem

درچنین پرسشها دارد: خانواده‌ٔ $\mathcal{F}$ ازتابعهایی از یک‌فضای‌توپولوژیک X بریک فضای متریک $\langle Y, \sigma \rangle$ ، درنقطه‌ٔ $x \varepsilon X$ همپیوسته نامیده‌می‌شوداگربرای‌هر $0 < \epsilon$ داده‌شده یک مجموعه‌ٔ باز O حاوی x وجود داشته‌باشد به‌گونه‌ای که نابرابری $\sigma[f(x), f(y)] < \epsilon$ برای‌همه‌ٔ y های‌متعلق‌به O وهر $f \varepsilon \mathcal{F}$ برقرارباشد. این خانواده روی X همپیوسته نامیده می‌شود اگر در هرنقطه‌ٔ x از X همپیوسته باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که اگر $\langle f_n \rangle$ دنباله‌ای از یک‌خانواده از تابعهای همپیوسته باشد و اگر در هر نقطه‌ٔ x از X یک زیردنباله‌ٔ همگرای $\langle f_n(x) \rangle$ وجود داشته باشد، آنگاه $\langle f_n \rangle$ دارای زیردنباله‌ای است که روی هر زیرمجموعه‌ٔ فشرده‌ٔ X ، به‌طوریکنواخت همگراست. اثبات این مطلب را با بیان چند لم آغاز می‌کنیم:

۳۰ـ لم:

گیریم $\langle f_n \rangle$ یک‌دنباله‌ازنگاشتهای‌ازیک‌مجموعه‌ٔ شمارش‌پذیر D دریک‌فضای توپولوژیک Y است‌به‌گونه‌ای‌که‌برای‌هر $x \varepsilon D$ بستارمجموعه‌ٔ $\{f_n(x): 0 \leq n < \infty\}$ فشرده‌ٔ دنباله‌ای است. دراین‌صورت یک‌زیردنباله‌ٔ $\langle f_{n_k} \rangle$ وجوددارد که در هر نقطه‌ٔ x از D همگراست.

برهان:

گیریم $D = \{x_k\}$. بنابرفشردگی دنباله‌ای‌بستار $\{f_n(x_1): 0 \leq n < \infty\}$ می‌توان یک‌زیردنباله‌ٔ $\langle f_{1n} \rangle$ از $\langle f_n \rangle$ برگزید به‌گونه‌ای‌که $\langle f_{1n}(x) \rangle$ همگرا باشد. اکنون‌یک زیردنباله‌ٔ $\langle f_{2n} \rangle$ از $\langle f_{1n} \rangle$ برمی‌گزینیم که $\langle f_{2n}(x_2) \rangle$ همگرا باشد. باادامه‌ٔ این‌کار یک زیردنباله‌ٔ $\langle f_{jn} \rangle$ می‌یابیم که‌در x_j همگراست. دنباله‌ٔ "قطری" $\langle f_{nn} \rangle$ رادرنظرمی‌گیریم. $\langle f_{nn} \rangle_{n=j}^{\infty}$ زیردنباله‌ای‌از $\langle f_{jn} \rangle$ است، پس $\langle f_{nn}(x_j) \rangle$ همگراست ∎

۳۱ـ لم:

گیریم $\langle f_n \rangle$ یک‌دنباله از نگاشتهای همپیوسته ازیک فضای توپولوژیک X ، بر یک‌فضای‌متریک کامل Y است. اگر دنباله‌ٔ $\langle f_n(x) \rangle$ درهرنقطه‌ٔ x از یک

زیرمجموعهٔ متراکم D ی X همگرا باشد، آنگاه $\langle f_n \rangle$ درهرنقطهٔ X همگراست و تابع حد پیوسته است.

برهان:

برای هرنقطهٔ دادهشدهٔ x متعلقبه X و هر $\epsilon > 0$، میتوان یکمجموعهٔ بازO حاوی x یافتبه گونهای که $\sigma[f_n(x), f_n(y)] < \epsilon/3$ برای همهٔ y های متعلقبه O برقرارباشد. چون D متراکماست، بایدیکنقطهٔ $y \in D \cap O$ موجود باشد، و چون $\langle f_n(y) \rangle$ همگراست. پس باید یکدنبالهٔ کشی باشد، و میتوان N را چنان بزرگ گرفت کهبرایهر $m, n \geq N$ داشته باشیم:

$\sigma[f_n(y), f_m(y)] < \epsilon/3$. در این صورت هر $m, n \geq N$ داریم:

$$\sigma[f_n(x), f_m(x)] \leq \sigma[f_n(x), f_n(y)] + \sigma[f_n(y), f_m(y)] + \sigma[f_m(x), f_m(y)] < \epsilon$$

بنابراین $\langle f_n(x) \rangle$ یکدنبالهٔکشیاستوبنابرکمال Y، این دنبالههمگراست. گیریم $f(x) = \lim f_n(x)$ است. برایاینکهببینیم f در x پیوستهاست، گیریم $\epsilon > 0$ دادهشده است. بنابرهمپیوستگی $\langle f_n \rangle$ یکمجموعهٔباز O حاوی x، وجود دارد بهگونهای که برای همهٔ n ها و همهٔ y های متعلق به O داریم $\sigma[f_n(x), f_n(y)] < \epsilon$. از این رو برای هر y متعلقبه O داریم:

$$\sigma[f(x), f(y)] = \lim \sigma[f_n(x), f_n(y)] \leq \epsilon$$

و f در x پیوسته است. ∎

۳۲ــ لم:

گیریم K یکفضایتوپولوژیکفشردهو $\langle f_n \rangle$ یکدنبالهٔ همپیوستهاز تابعهای از K بهیکفضایمتریک Y است که در هرنقطهٔ K بهیکتابع f میگراید. دراینصورت $\langle f_n \rangle$ روی K بهطور یکنواخت به f میگراید.

برهان:

$\epsilon > 0$ را برمیگزینیم. بنابرهمپیوستگی دنباله، هر x متعلقبه K مشمول یک

مجموعهٔ باز O_x است به‌گونه‌ای که برای همهٔ y های متعلق‌به O_x و همهٔ n ها داریم $\sigma[f_n(x), f_n(y)] < \epsilon/3$ از اینجا نتیجه می‌شود که برای همهٔ y های متعلق‌به O_x نابرابری $\sigma[f(x), f(y)] \le \epsilon/3$ نیز برقرار است.

بنابرفشردگی K یک‌دستهٔ باپایان $\{O_{x_1}, \ldots, O_{x_k}\}$ از مجموعه‌هایی از نوع O_X وجوددارد‌که K را می‌پوشاند. N را چنان بزرگ برمی‌گزینیم که برای همهٔ $n \ge N$ نابرابری $\sigma[f_n(x_i), f(x_i)] < \epsilon/3$ برای هر x_i متناظر به‌این دستهٔ باپایان برقرارباشد. دراین‌صورت‌برای‌هر y متعلق‌به K یک $i \le k$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که $y \in O_{x_i}$. ازاین‌رو برای $n \ge N$ داریم:

$$\sigma[f_n(y), f(y)] \le \sigma[f_n(y), f_n(x_i)] + \sigma[f_n(x_i), f(x_i)] + \sigma[f(y), f(x_i)] < \epsilon$$

بنابراین $\langle f_n \rangle$ روی K به‌طوریکنواخت به f می‌گراید. ∎

این سه لم رویهم قضیهٔ زیر را ایجاب می‌کنند:

قضیه (آسکولی):

گیریم $\mathfrak{F}$ یک‌خانوادهٔ همپیوسته از تابعهایی ازیک فضای جدایی‌پذیر X بریک فضای متریک Y است. گیریم دنبالهٔ $\langle f_n \rangle$ در $\mathfrak{F}$ به‌گونه‌ای است که برای هر x، متعلق‌به X بستار مجموعهٔ $\{f_n(x): 0 \le n < \infty\}$ فشرده است. دراین‌صورت یک زیردنبالهٔ $\langle f_{n_k} \rangle$ وجوددارد‌که‌به‌طورنقطه‌ای‌به‌یک‌تابع پیوسته f می‌گراید، و همگرایی روی هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ X یکنواخت است.

۳۴ ــ نتیجه:

گیریم $\mathfrak{F}$ یک‌خانوادهٔ همپیوسته از تابعهای‌حقیقی روی یک فضای جدایی‌پذیر X است. دراین‌صورت‌هردنبالهٔ $\langle f_n \rangle$ در $\mathfrak{F}$ که‌درهرنقطه (ازیک‌مجموعهٔ متراکم) کراندار است دارای یک‌زیردنبالهٔ $\langle f_{n_k} \rangle$ است‌که به‌طورنقطه‌ای به‌یک‌تابع پیوسته می‌گراید، این همگرایی روی هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ X یکنواخت است.

۳۷ ــ مجموعهٔ همهٔ تابعهای از X بر Y دقیقاً " حاصلضرب X عامل برابر Y ، است که اغلب با Y^X نمایانده‌می‌شود . توپولوژی حاصلضرب در Y^X **توپولوژی همگرایی نقطه‌وار** نامیده می‌شود .

الف ــ نشان دهید که هر دنبالهٔ $\langle f_n \rangle$ از نگاشتهایی از X در Y در توپولوژی همگرایی نقطه‌وار به f می‌گراید اگر و تنها اگر برای هر x متعلق به X دنبالهٔ $\langle f_n(x) \rangle$ به $f(x)$ بگراید .

ب ــ گیریم $\mathfrak{F}$ یک خانوادهٔ همپیوسته از تابعهای از یک فضای توپولوژیک X بر یک فضای متریک Y است . دراین‌صورت $\bar{\mathfrak{F}}$ بستار $\mathfrak{F}$ نیز در توپولوژی همگرایی یکنواخت همپیوسته است .

۳۸ ــ گیریم فضای X یا فشردهٔ موضعی و یا هاوسدورف است ودراصل اول شمارش‌پذیری صدق می‌کند . گیریم $\langle f_n \rangle$ یک دنباله از تابعهای پیوستهٔ از X بر یک‌فضای متریک Y است که روی هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ K از X به‌طوریکنواخت به‌یک تابع f می‌گراید . دراین‌صورت f پیوسته‌است .[راهنمایی : ازمسئله۲۳استفاده‌کنید .]

۳۹ ــ گیریم X یک فضای متریک جدایی‌پذیر ، فشردهٔ موضعی ، و $\langle Y, \sigma \rangle$ یک‌فضای متریک دلخواه است . نشان دهید :

الف ــ یک‌دستهٔ شمارش‌پذیر $\{O_n\}$ از زیرمجموعه‌های باز X وجــود دارد به‌گونه‌ای که $\bar{O}_n$ فشرده بوده و $X = \bigcup O_n$ است .

ب ــ مجموعهٔ تابعهای از X در Y با متریک 6^* تعریف‌شده در زیر ، یک فضای متریک است .

$$\sigma^*(f, g) = \sum 2^{-n} \sigma_n^*(f, g),$$

که در آن

$$\sigma_n^*(f, g) = \sup_{\bar{O}_n} \frac{\sigma[f(x), g(x)]}{1 + \sigma[f(x), g(x)]}$$

پ ــ دنبالهٔ $\langle f_n \rangle$ روی زیرمجموعه‌های فشردهٔ X به‌طوریکنواخت به f ، می‌گراید اگر و تنها اگر $\sigma^*(f, f_n) \to 0$

۴۰ــ گیریم X و Y دوفضای متریک هستند. گفته می‌شود که دنبالهٔ $\langle f_n \rangle$ ازنگاشتهایی‌از X بر Y در x به‌طور پیوسته به f می‌گرایداگربرای‌هردنبالهٔ $\langle x_n \rangle$ به‌گونه‌ای که $x = \lim x_n$ باشد، داشته باشیم $f(x) = \lim f_n(x_n)$. می‌گوییم $\langle f_n \rangle$ به‌طورپیوسته به f می‌گراید اگر درهرنقطهٔ x متعلق‌به X همگرای پیوسته باشد.

الف ــ نشان دهید که‌اگرهر f_n روی X پیوسته‌بوده‌و $\langle f_n \rangle$ درهرنقطهٔ x، از X به‌طورپیوسته به f بگراید، آنگاه f پیوسته است.

ب ــ نشان دهید $\langle f_n \rangle$ به‌طورپیوسته به f می‌گراید اگروتنهااگر $\langle f_n \rangle$ روی هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ X به‌طوریکنواخت به f بگراید.

۴۱ــ یک‌تابع حقیقی f روی $[0, 1]$ پیوستهٔ‌هولدری[1] ازمرتبهٔ α گفته‌می‌شوداگر یک‌ثابت C موجودباشد به‌گونه‌ای که $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$. تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_\alpha = \max |f(x)| + \sup \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

نشان دهید که برای هر $0 < \alpha \leq 1$ مجموعهٔ تابعهایی که در شرط $\|f\|_\alpha \leq 1$ صدق می‌کنند، زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از $C[0, 1]$ است.

۱ــ Holder Continuous

فصل دهم

فضاهای باناخ

۱ ـ مقدمه

می‌خواهیم رده‌ای از فضاها را بررسی کنیم که هم دارای ساختمان توپولوژیک هستند و هم دارای ساختمان جبری. مجموعهٔ X از عنصرها را روی مجموعهٔ عددهای حقیقی یک فضای برداری (یا فضای خطی، یا فضای برداری خطی) می‌گویند هرگاه یک تابع $+$ از روی $X \times X$ بر X و یک تابع $\cdot$ از روی $\mathbf{R} \times X$ بر X داشته باشیم که در شرطهای زیر صدق کنند.

i $\quad x + y = y + x.$

ii $\quad (x + y) + z = x + (y + z)$

iii ـ در X یک بردار θ وجود دارد به‌گونه‌ای که برای همهٔ x های متعلق به X داریم $x + \theta = x$.

iv $\quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y;\ \lambda \,\varepsilon\, \mathbf{R},\ x, y \,\varepsilon\, X.$

v $\quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x;\ \lambda, \mu \,\varepsilon\, \mathbf{R},\ x \,\varepsilon\, X.$

vi $\quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x;\ \lambda, \mu \,\varepsilon\, \mathbf{R},\ x \,\varepsilon\, X.$

vii $\quad 0 \cdot x = \theta,\ 1 \cdot x = x.$

$+$ را جمع و $\cdot$ را ضرب در اسکالر می‌نامیم. باید توجه داشت که عنصر θ که در (iii) تعریف شده، یکتاست، زیرا اگر θ' نیز دارای این خاصیت باشد آنگاه $\theta = \theta + \theta' = \theta' + \theta = \theta'$. عنصر $(-1)x$ را منفی x نامیده و $-x$ می‌نویسند.

داریم $\quad x + (-x) = 1 \cdot x + (-1)x = (1 - 1)x = 0 \cdot x = \theta$

یک تابع حقیقی نامنفی $\| \ \|$ که روی یک فضای برداری تعریف گردد نرم نامیده می‌شود اگر:

i $\quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta.$

ii $\quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

iii $\quad \|\alpha x\| = |\alpha|\, \|x\|.$

یک فضای برداری نرم‌دار وقتی تبدیل به‌یک‌فضای‌متریک‌می‌شود که‌متریک ρ را با $\rho(x, y) = \|x - y\|$ تعریف‌کنیم . هنگامی که‌در یک‌فضای‌نرم‌دار از خاصیت‌های متریک گفتگو می‌کنیم . اشاره به‌همین متریک داریم .

اگر یک فضای برداری‌نرم‌دار بااین‌متریک ، کامل‌باشد فضای‌باناخ نامیده‌می‌شود . در فصل ۶ مثالهایی از فضاهای باناخ داده شده است . مثال دیگر ، $C(X)$ ، فضای‌تابعهای‌حقیقی‌پیوسته‌روی‌یک‌فضای‌فشرده‌ٔ X است . گزاره‌ٔ ۶. ۴ را دراینجا بازگو کرده‌وملاحظه‌می‌کنیم که‌برهانی‌که‌در‌فصل ۶داده‌شده‌است در هرفضای‌برداری‌نرم‌دار معتبراست .

۱ ــ گزاره :

یک‌فضای برداری نرم‌دار کامل است اگر و تنها اگر هر دنباله‌ٔ به‌طور مطلق جمع پذیر ، جمع پذیر باشد .

یک‌زیرمجموعه‌ٔ ناتهی S ازفضای‌برداری X یک‌**زیرفضا** یا یک‌**مانیفلد خطی** است ، اگروقتی x_1 و x_2 به S تعلق‌دارند $\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2$ نیز متعلق‌به‌آن‌باشد . اگر S یک‌زیرمجموعه‌ٔ‌بسته‌ٔ X نیزباشدآن‌را**مانیفلدخطی‌بسته**می‌نامند . اشتراک‌هرخانواده ازمانیفلدهای‌خطی‌باز یک‌مانیفلدخطی است . از این‌رو برای هرزیرمجموعه‌ٔ A از X ، همواره‌کوچکترین‌مانیفلدخطی‌حاوی A وجوددارد .این‌مانیفلدرااغلب‌با $\{A\}$ می‌نمایانیم .

اگر A یک زیرمجموعه‌ٔ دلخواه X باشد ، آنگاه $A + x$ برای نمایاندن همه‌ٔ عنصرهای‌به‌شکل $z = x + y$ $y \varepsilon A$ به‌کارمی‌رود . مجموعه‌ٔ $A + x$ را انتقال A ، به‌وسیله‌ٔ x می‌نامند . مجموعه‌ٔ λA مجموعه‌ٔ‌همه‌ٔ‌عنصرهای‌به‌شکل λx با $x \varepsilon A$ است ، ومجموعه‌ٔ $A + B$ مجموعه‌ٔ‌همه‌ٔ‌عنصرهای‌به‌شکل $x + y$ با x متعلق‌به A و y متعلق به B ، می‌باشد .

مسئله‌ها

۱ ــ نشان دهید که اگر $x_n \to x$ آنگاه $\|x_n\| \to \|x\|$.

۲ــ دونرم $\|\ \|_1$ و $\|\ \|_2$ راهم‌ارزمی‌گویند هرگاه‌یک‌عدد ثابت مثبت K وجودداشته‌باشد به‌گونه‌ای‌که $K^{-1}\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le K\|x\|_1$. اگر نرم‌ها هم‌ارز باشند آنگاه متریکهای‌مشتق از آنها به‌طوریکنواخت هم‌ارزند . نشان دهید که متریکهای ارائه‌شده برای R^n در مسئله ۷ . ۱۰ ب ازنرمهای R^n مشتق شده‌اند و همه‌ٔ این نرمها هم‌ارزند .

۳ ــ نشان دهید که $+$ تابع پیوسته‌ای از $X \times X$ در X و $\cdot$ تابع پیوسته‌ای از $\mathbf{R} \times X$ در X است .

۴ ــ نشان دهید که هر مجموعهٔ ناتهی M یک مانیفلد خطی است اگر و تنها اگر $M + M = M$ بوده و برای هر λ ، $\lambda M = M$ باشد .

۵ ــ الف ــ ثابت کنید که اشتراک هر خانواده از مانیفلدهای خطی یک مانیفلد خطی است .

ب ــ ثابت کنید که کوچکترین مانیفلد خطی $\{A\}$ وجود دارد که حاوی مجموعهٔ داده شدهٔ A است .

پ ــ نشان دهید که $\{A\}$ متشکل از همهٔ ترکیبهای خطی به‌شکل $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ با $x_i \in A$ است .

۶ ــ الف ــ اگر M و N دو مانیفلد خطی باشند آنگاه $M + N$ نیز یک مانیفلد خطی است و داریم $M + N = \{M \cup N\}$.

ب ــ اگر M یک مانیفلد خطی باشد $\overline{M}$ نیز یک مانیفلد خطی است .

۷ــ نشان دهید که مجموعهٔ P ی همهٔ چندجمله‌ای‌های روی $[0, 1]$ در $C[0, 1]$ یک مانیفلد خطی است .

آیا این مانیفلد بسته است . مثالی از یک مانیفلد خطی بسته در $[\ C[0, 1]\ ]$ بیاورید .

۸ ــ یک مانیفلد خطی M دارای بعد باپایان گفته می‌شود اگر شمارهٔ باپایانی از عنصرهای $x_1, \ldots, x_n$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$ باشد . ثابت کنید که در هرفضای برداری نرم‌دار X هر مانیفلد خطی با بعد باپایان باید بسته باشد .

۹ ــ گیریم S گوی به‌شعاع ۱ و به‌مرکز θ است ، یعنی $S = \{x: \|x\| < 1\}$
ثابت کنید که S باز است و :

$$\overline{S} = \{x: \|x\| \leq 1\}$$

را کره (یا گوی) باز یکه و $\overline{S}$ را کره (یا گوی) یکه می‌نامیم .

۱۰ ــ یک تابع حقیقی نامنفی $\|\ \|$ تعریف شده روی یک فضای برداری X را شبه‌نرم می‌نامند ، هرگاه داشته باشیم :

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ و $\|\alpha x\| = |\alpha|\, \|x\|$. نشان دهید که رابطهٔ $x \equiv y$ تعریف شده با $\|x - y\| = 0$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است که با جمع و ضرب در اسکالر سازگار است و اگر $x \equiv y$ باشد آنگاه $\|x\| = \|y\|$. گیریم X' مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی X تحت $\equiv$ است . دراین صورت ، اگر $\alpha x' + \beta y'$ را به‌عنوان یکردهٔ هم‌ارزی (یکتا) که برای هر $x \in x'$ ، $y \in y'$ ، حاوی $\alpha x + \beta y$ است ، تعریف کنیم

وبرای $x \varepsilon x'$ قراردهیم $\|x'\| = \|x\|$ ، آنگاه X' یک‌فضای برداری نرم‌دار می‌شود . نگاشت φ از X بر X' که هر عنصر X را به‌ردهٔ هم‌ارزی آن می‌برد یک همئومرفیسم از X بر X' است (که همئومرفیسم‌طبیعی نام دارد) . هستهٔ φ کدام است ؟ این روند را به‌کمک فضاهای L^p ی روی [۱ ، ۰] شرح دهید .

۱۱ ــ گیریم X یک‌فضای خطی نرم‌دار (با نرم $\| \ \|$) و M یک مانیفلد خطی در X است . نشان‌دهیدکه $\|x\|_1 = \inf_{m \varepsilon M} \|x - m\|$ روی X یک‌شبه‌نرم تعریف می‌کند . گیریم X' یک‌فضای‌خطی‌نرم‌داراست‌که‌باروش‌مسئلهٔ ۱۰ از X وشبه‌نرم $\| \ \|_1$ به‌دست‌می‌آید . نگاشت‌طبیعی φ از X بر X' دارای‌هستهٔ $\overline{M}$ است . ثابت‌کنید که φ ، مجموعه‌های‌باز را به‌مجموعه‌های‌باز می‌نگارد . فضای X' رامعمولاً با $X/\overline{M}$ نمایانده و **فضای خارج‌قسمت** X به پیمانهٔ $\overline{M}$ می‌نامند .

۱۲ ــ نشان دهید که اگر X کامل ، و M یک مانیفلد خطی بسته از X باشد . آنگاه X/M نیز کامل است .[**راهنمایی** : ازگزارهٔ ۱ استفاده کنید]

۲ ــ عملگرهای خطی

نگاشت A از یک فضای برداری X در یک‌فضای برداری Y یک نگاشت خطی ، یک **عملگر خطی** ، یا یک **تبدیل خطی** نامیده‌می‌شود هرگاه برای هر x_1 و x_2 ، متعلق‌به X و همهٔ عددهای حقیقی α_1, α_2 داشته باشیم :

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2$$

اگر X و Y فضاهای برداری نرم‌دار باشند ، عملگر خطی A را *کراندار* می‌گویند هرگاه یک عددثابت M موجود باشد به‌گونه‌ای که برای همهٔ x ها داشته‌باشیم $\|Ax\| \le M\|x\|$. کوچکترین‌مقدار این M ها را **نرم** A نامیده و با $\|A\|$ می‌نمایانیم . بنابراین :

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \varepsilon X \\ x \neq \theta}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

چون $A(\alpha x) = \alpha A x$ است ، همچنین داریم :

$$\|A\| = \sup_{\|x\| = 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\|$$

یک‌تبدیل‌خطی‌کراندار A از X بر Y یک *ایزومرفیسم* بین X و Y نامیده می‌شود اگر یک تبدیل‌خطی‌کراندار B از Y بر X موجود باشد به‌گونه‌ای که AB روی Y و BA روی X همانی‌باشند. گزارهٔ زیر مبین رابطهٔ بین مفهوم‌های کرانداری و پیوستگی عملگرهای خطی است:

۲ــ گــــزاره:

هر عملگر خطی *کراندار* به‌طوریکنواخت پیوسته است. *اگر یک عملگر خطی در یک‌نقطه پیوسته باشد، کراندار است.*

بــرهـــان:

گیریم A کراندار است. دراین‌صورت برای همهٔ x_1 و x_2 های متعلق‌به X با شرط $\|x_1 - x_2\| < \epsilon/\|A\|$ داریم:

$$\|Ax_1 - Ax_2\| \le \|A\| \cdot \|x_1 - x_2\| < \epsilon$$

بنابراین A به‌طوریکنواخت پیوسته است.

اکنون‌فرض‌کنیم که عملگرخطی A در x_0 پیوسته‌است. دراین‌صورت یک $\delta > 0$ وجوددارد‌به‌گونه‌ای‌که‌برای همهٔ x ها با $\|x - x_0\| < \delta$، داریم $\|Ax - Ax_0\| < 1$ برای هر z متعلق‌به X، قرارمی‌دهیم $w = \eta z/\|z\|$ که‌درآن $0 < \eta < \delta$ است. دراین‌صورت داریم:

$$\frac{\eta}{\|z\|} Az = Aw = A(w + x_0) - A(x_0)$$

و

$$\frac{\eta}{\|z\|} \|Az\| = \|A(w + x_0) - A(x_0)\| < 1,$$

زیرا $\|w + x_0 - x_0\| = \|w\| = \eta < \delta$. درنتیجه، $\|Az\| \le \eta^{-1}\|z\|$ و A کراندار است. ∎

۳ـ گـــــزاره :

فضای $\mathcal{B}$ متشکل از همهٔ عملگرهای خطی کراندار از فضای برداری نرم‌دار X ، بر یک‌فضای باناخ Y خود یک فضای باناخ است .

بـرهـــــان :

اگـر A و B بـه $\mathcal{B}$ متعلـق باشنـد ، آنـگــــاه $\alpha A + \beta B$ را بـــــا $(\alpha A + \beta B)x = \alpha Ax + \beta Bx$ تعریف می‌کنیم . به‌آسانی دیـده مـی‌شـود کـه $\alpha A + \beta B$ یک عملگر خطی است . اکنون داریم :

$$\|\lambda A\| = \sup_{\|x\|=1} \|\lambda Ax\| = |\lambda| \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\lambda|\, \|A\|$$

و

$$\|A + B\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax + Bx\| \leq \sup_{\|x\|=1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \leq \|A\| + \|B\|$$

بنــابــرایـــــن هرترکیب‌خطی‌دوعملگرخطی‌کراندار باز یک عملگر خطی کراندار است . اگر $\|A\| = 0$ باشد ، آنگاه داریم :

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| = 0$$

پــــــس $Ax = \theta$. بنابراین تنهابرای‌عملگر o که‌هر x را به θ می‌نگارد‌داریم $\|A\| = 0$. بنابراین $\|\ \|$ همهٔ شرایط یک نرم‌را برمی‌آورد و تنها باید نشان دهیم که اگر Y کامل باشد $\mathcal{B}$ نیز کامل است .

گیریم $\langle A_n \rangle$ یک دنبالهٔ کشی در $\mathcal{B}$ است . برای‌هر $x \in X$ داریم : $\|A_nx - A_mx\| \leq \|A_n - A_m\| \cdot \|x\|$ ، پس $\langle A_nx \rangle$ در Y یک‌دنبالهٔ کشی است و باید به‌یک‌عنصر y متعلق‌به Y بگراید . این‌عنصر را Ax می‌نامیـــم . از تعریف Ax نتیجه می‌شود که :

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 \quad \text{و} \quad A(\lambda x) = \lambda Ax$$

برای این‌که نشان دهیم که عملگر خطی A کراندار است ، می‌بینیم که برای هر $\epsilon > 0$ یک N وجودداردبه‌گونه‌ای‌که‌برای‌هر $m, n \geq N$ داریم $\|A_n - A_m\| < \epsilon$. ازاین‌رو برای‌هر $n \geq N$ داریم $\|A_n\| < \|A_N\| + \epsilon$ ، پس :

$$\|Ax\| = \lim \|A_nx\| \leq (\|A_N\| + \epsilon)\|x\|.$$

بنابراین $\|A\|$ کراندار است. برای هر x متعلق‌به X و هر $n \geq N$ داریم:

$$\begin{aligned}\|A_n x - Ax\| &= \lim_{m\to\infty} \|A_n x - A_m x\| \\ &\leq \overline{\lim_{m\to\infty}} \|A_n - A_m\| \, \|x\| \\ &\leq \epsilon\|x\|\end{aligned}$$

پس برای هر $n \geq N$ داریم:

$$\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|=1} \|(A_n - A)x\| \leq \epsilon$$

بنابراین $A_n \to A$ و $\mathcal{B}$ کامل است. ∎

مسئله‌ها

۱۳ــ نشان‌دهید که اگر A_n به A و x_n به x بگراید آنگاه $A_n x_n$ به Ax می‌گراید.

۱۴ــ هستهٔ عملگر A مجموعهٔ $\{x: Ax = \theta\}$ است. ثابت کنید که هستهٔ یک عملگر خطی یک مانیفلد خطی و هستهٔ یک عملگر پیوسته یک مجموعهٔ بسته است.

۱۵ــ الف ــ گیریم X یک‌فضای‌خطی‌نرم‌دار و M یک‌مانیفلدخطی‌بسته‌است. دراین‌صورت نرم هومومرفیسم طبیعی φ از X بر X/M برابر ۱ است.

ب ــ گیریم X و Y دوفضای‌خطی‌نرم‌دار و A یک‌عملگرخطی‌کراندار از X در Y، است‌که‌هستهٔ‌آن M می‌باشد. دراین‌صورت یک‌عملگرخطی کرانداریکتای B از X/M در Y وجوددارد به‌گونه‌ای‌که $A = B \circ \varphi$. به‌علاوه $\|A\| = \|B\|$.

۱۶ــ گیریم X یک‌فضای‌متریک و Y فضای‌متشکل‌ازآن تابعهای f روی X است که‌دریک‌نقطهٔ‌ثابت $x_0 \varepsilon X$ صفربوده و برای یک‌مقدار M (وابسته‌به f) درنابرابری $|f(x) - f(y)| \leq M\rho(x, y)$ صدق می‌کند. $\|f\|$ را با

$$\|f\| = \sup \frac{|f(x) - f(y)|}{\rho(x, y)}$$

تعریف می‌کنیم. دراین‌صورت Y یک‌فضای خطی نرم‌دار است. برای هر $x \varepsilon X$،

فونکسیونل F_x که با $F_x(f) = f(x)$ تعریف می‌شود یک فونکسیونل خطی کراندار روی Y است، و $\|F_x - F_y\| = \rho(x, y)$. بنابراین X بازیرمجموعه‌ای از Y^* ، فضای عملگرهای خطی کراندار از Y به $\mathbf{R}$ ایزومتر است. چون بنابرگزارهٔ ۳ فضای Y^* ، کامل است، بستار این زیرمجموعه یک‌کمال Y را می‌دهد، و برهان دیگری برای قضیهٔ ۷ . ۹ می‌یابیم.

۳ــ فونکسونل‌های خطی و قضیهٔ هان ــ باناخ:

هرفونکسیونل‌خطی روی یک فضای‌برداری X یک‌عملگرخطی از X برفضای $\mathbf{R}$ ، عددهای حقیقی است. بنابراین هر فونکسیونل خطی روی X یک تابع حقیقی f است، به‌گونه‌ای‌که‌داریم $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$. نخستین مسئله‌ای که در اینجا با آن روبرو هستیم گسترش یک فونکسیونل خطی از یک زیرفضای X برهمهٔ فضای X است به‌گونه‌ای که خاصیتهای گوناگون فونکسیونل محفوظ بماند. دراین‌مورد نتیجهٔ اصلی در قضیهٔ زیر بیان می‌شود:

۴ــ قضیه (هان ــ باناخ[1]):

گیریم تابع‌حقیقی p که روی فضای برداری X تعریف شده است، در شرطهای $p(x + y) \le p(x) + p(y)$ و $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ ،برای‌هر $\alpha \ge 0$ ،صدق‌می‌کند. فرض‌کنیم که f یک فونکسیونل خطی است که روی زیرفضای S تعریف شده و برای هر s در S داریم $f(s) \le p(s)$. دراین‌صورت یک‌فونکسیونل‌خطی F وجوددارد که روی X تعریف‌شده‌به‌گونه‌ای‌که‌برای‌همهٔ x ها $F(x) \le p(x)$ وبرای‌همهٔ s های متعلق به S ، $F(s) = f(s)$ است.

برهان:

مجموعهٔ همهٔ فونکسیونل‌های خطی g را که روی یک زیرفضای X تعریف شده و در نقاط تعریف g ، در نابرابری $g(x) \le p(x)$ صدق می‌کنند، درنظر می‌گیریم. اگر وقتی g_2 یک گسترش g_1 است، یعنی دامنهٔ g_1 مشمول‌دامنهٔ g_2 است، قرار

---

۱ — Hahn-Banach

دهیم $g_2 \prec g_1$ وروی دامنهٔ g_1 قرار دهیم $g_1 = g_2$ این مجموعه به طور جزیی مرتب می شود .

بنابر اصل ماکسیمال ها وسدورف یک زیرخانوادهٔ ماکسیمال مرتب خطی $\{g_\alpha\}$ ، وجود دارد که شامل فونکسیونل دادهشدهٔ f است . روی اجتماع دامنههای g_α ها فونکسیونل F را با برابری $F(x) = g_\alpha(x)$ ، وقتی x بهدامنهٔ g_α تعلق دارد ، تعریف میکنیم . چون $\{g_\alpha\}$ بهطورخطی مرتباست ، این تعریف نابسته از g_α ی انتخابی است . دامنهٔ F یکزیرفضا ، و خود F یک فونکسیونل خطی است ، زیرا اگر x و y بهدامنهٔ F متعلقباشند ، آنگاه برای یک α و یک β ، x بهدامنهٔ g_α و y به دامنهٔ g_β تعلق دارد . بنابرترتیبخطی $\{g_\alpha\}$ ، یا $g_\alpha \prec g_\beta$ و یا $g_\beta \prec g_\alpha$ ، است ، گیریم رابطهٔاولی برقرار است . دراینصورت x و y بهدامنهٔ g_β تعلق دارند ، پس $\lambda x + \mu y$ نیز بهدامنهٔ g_β و درنتیجه بهدامنهٔ F تعلق دارد و داریم :

$$F(\lambda x + \mu y) = g_\beta(\lambda x + \mu y) = \lambda g_\beta(x) + \mu g_\beta(y) = \lambda F(x) + \mu F(y)$$

بنابراین F یکگسترش f است . بهعلاوه ، F یکگسترش ماکسیمال است . زیرا اگر G یک گسترش دلخواه F باشد ، آنگاه رابطهٔ $g_\alpha \prec F \prec G$ ایجاب میکند که بنابرماکسیمال بودن $\{g_\alpha\}$ ، G باید به $\{g_\alpha\}$ متعلق باشد . از اینرو $G \prec F$ ، پس $G = F$.

اکنون باید نشان دهیم که F برای هر $x \varepsilon X$ تعریف شدهاست ،چون F ماکسیمال است ، پس اگر بتوانیم نشان دهیم که هر g که روی یک زیرفضای سرهٔ T از X تعریف شدهاستودر $g(t) \leq p(t)$ صدق میکند دارای یک گسترش سرهٔ h است ، آنگاه آنچه میخواهیم ، ثابت میشود .

گیریم y یکعنصر $X \sim T$ است . نشان میدهیم که میتوان g رابهزیرفضای U کهبا T و y ایجاد میشود ،یعنی بهزیرفضایشامل عنصرهایی بهشکل $\lambda y + t$ با $t \varepsilon T$ ،گسترشداد . اگر h یکگسترش g باشد ،بایدداشتهباشیم :

$$h(\lambda y + t) = \lambda h(y) + h(t) = \lambda h(y) + g(t),$$

پس بهمحض تعیین $h(y)$ ، h تعریف میشود .

برای $t_1, t_2 \varepsilon T$ داریم :

$$g(t_1) + g(t_2) = g(t_1 + t_2) \leq p(t_1 + t_2) \leq p(t_1 - y) + p(t_2 + y).$$

از اینرو

$$-p(t_1 - y) + g(t_1) \leq p(t_2 + y) - g(t_2),$$

پـــس

$$\sup_{t\varepsilon T}[-p(t-y)+g(t)] \le \inf_{t\varepsilon T}[p(t+y)-g(t)].$$

تعریف می‌کنیم $h(y)=\alpha$ که درآن عدد حقیقی α به‌گونه‌ای است که:

$$\sup[-p(t-y)+g(t)] \le \alpha \le \inf[p(t+y)-g(t)].$$

اکنون باید نشان دهیم که:

$$h(\lambda y+t)=\lambda\alpha+g(t)\le p(\lambda y+t).$$

اگـر $\lambda>0$ باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned}\lambda\alpha+g(t) &= \lambda[\alpha+g(t/\lambda)]\\ &\le \lambda[\{p(t/\lambda+y)-g(t/\lambda)\}+g(t/\lambda)]\\ &= \lambda p(t/\lambda+y)=p(t+\lambda y).\end{aligned}$$

اگر $\lambda=-\mu<0$ باشد، آنگاه داریم

$$\begin{aligned}-\alpha\mu+g(t) &= \mu(-\alpha+g(t/\mu))\\ &\le \mu(\{p(t/\mu-y)-g(t/\mu)\}+g(t/\mu))\\ &= \mu p(t/\mu-y)=p(t-\mu y).\end{aligned}$$

بنابراین‌برای‌هر λ داریم، $h(\lambda y+t)\le p(\lambda y+t)$، و h یک‌گسترش سرهٔ g است. ∎

قضیهٔ هان ــ باناخ دارای‌کاربردهای گسترده‌ای است، بسیاری از آنها مبتنـی برگزینش ماهرانهٔ تابع زیرجمعی p است. گزاره‌های ۶ و ۷ و قضیهٔ ۲۰ کاربردهایی ازاین‌گونه‌اند. گزارهٔ زیر تعمیمی‌ازقضیهٔ‌هان‌ــ باناخ‌است‌که‌در برخی‌کاربردها مفیداست. (به‌مسئله‌های ۲۰، ۲۱ رجوع‌کنید). منظور از یک نیم‌گروه‌آبلی از عملگرهای خطی روی یک‌فضای برداری، یک‌دستهٔ G ازعملگرهای خطی از X بر X است به‌گونه‌ای که‌اگر A و B به G متعلق باشند آنگاه $AB=BA$ بوده‌و AB بــــه G متعلق است. همچنین فرض می‌کنیم که عملگر همانی به G تعلق دارد.

۵ـ گـــــزاره:

گیریم X ، S ، p و f همانگونه‌اند که در قضیهٔ ۴ گفتیم، و گیریم G یک نیم‌گروه آبلی از عملگرهای خطی روی X است، به‌گونه‌ای که برای هر A متعلق‌به G ، برای همهٔ x های‌متعلق‌به X ، داریم $p(Ax) \leq p(x)$ ، درحالی‌که برای هر s ، متعلق‌به S ، As متعلق‌به S بوده‌و $f(As) = f(s)$ است. دراین‌صورت‌یک‌گسترش F از f به‌یک‌فونکسیونل‌خطی روی X وجود دارد به‌گونه‌ای‌که برای‌هر x متعلق‌به X ، داریم $F(x) \leq p(x)$ و $F(Ax) = F(x)$

بـــرهـــــان:

تابع q روی X را با برابری

$$q(x) = \inf \frac{1}{n} p(A_1x + \cdots + A_nx),$$

تعریف می‌کنیم، که درآن انفیمم روی همهٔ دنباله‌های باپایان $\langle A_1, \ldots, A_n \rangle$ از G ، گرفته‌می‌شود. آشکارا $q(x) \leq p(x)$ اســت‌وبـرای‌هــر $\alpha \geq 0$ داریــــم ، $q(\alpha x) = \alpha q(x)$. برای‌هر x و y متعلق‌به X وهر $\epsilon > 0$ ، مـی‌تــوان $\langle A_1, \ldots, A_n \rangle$ و $\langle B_1, \ldots, B_m \rangle$ را به‌گونه‌ای برگزید که داشته باشیــم:

$$\frac{1}{n} p(A_1x + \cdots + A_nx) < q(x) + \epsilon$$

و

$$\frac{1}{m} p(B_1y + \cdots + B_my) < q(y) + \epsilon.$$

درایـــن‌صــــــورت:

$$\begin{aligned} q(x+y) &\leq \frac{1}{nm} p\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} A_iB_j(x+y)\right) \\ &\leq \frac{1}{nm} p\left(\sum_{j=1}^{m} B_j\left(\sum_{i=1}^{n} A_ix\right)\right) + \frac{1}{nm} p\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\left(\sum_{j=1}^{m} B_jy\right)\right) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{n} p\left(\sum_{i=1}^{n} A_i x\right) + \frac{1}{m} p\left(\sum_{j=1}^{m} B_j y\right)$$
$$< q(x) + q(y) + 2\epsilon.$$

چون ϵ دلخواه است ، پس $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$
برای هر s متعلق به S داریم :

$$f(s) = \frac{1}{n} f(A_1 s + \cdots + A_n s) \leq \frac{1}{n} p(A_1 s + \cdots + A_n s).$$

ازاین‌رو $f(s) \leq q(s)$ ، و می‌توان قضیهٔ ۴ را باجایگزین کردن p ، به‌وسیلهٔ q به‌کاربردتایک‌گسترش F از f را برای‌همهٔ‌فضای X به‌دست آورد به‌گونه‌ای که $F(x) \leq q(x) \leq p(x)$. تنها باید نشان دهیم‌که $F(Ax) = F(x)$ است . اکنون می‌توان نوشت :

$$q(x - Ax) \leq \frac{1}{n} p((x - Ax) + A(x - Ax) + \cdots + A^n(x - Ax))$$
$$= \frac{1}{n} p(x - A^{n+1}x) \leq \frac{1}{n}[p(x) + p(-x)].$$

بنابراین $q(x - Ax) \leq 0$ چون

$$F(x) - F(Ax) = F(x - Ax) \leq q(x - Ax) \leq 0,$$

پس داریم $F(x) \leq F(Ax)$ ، بابه‌کاربردن این‌نابرابری درمورد $-x$ به‌دست می‌آوریم $F(x) = F(Ax)$. ∎

۶ــ گزاره :

گیریم x عنصری‌ازیک‌فضای‌برداری نرم‌دار X است . دراین‌صورت روی X یک فونکسیونل خطی کراندار f وجود دارد به‌گونه‌ای که $\|f\|\,\|x\| = f(x)$.

برهان:

گیریم S زیرفضای متشکل از همهٔ مضربهای x است، f را روی S با $f(\lambda x) = \lambda \|x\|$ تعریف می‌کنیم و قرار می‌دهیم $p(y) = \|y\|$ دراین‌صورت بنابرقضیهٔ‌هان ــ باناخ یک‌گسترش f به‌یک فونکسیونل خطی روی X وجود دارد به‌گونه‌ای‌که $f(y) \leq \|y\|$. چون $f(-y) \leq \|y\|$، داریم $\|f\| \leq 1$. همچنین‌داریم $f(x) = \|x\| \leq \|f\| \cdot \|x\|$. بنابراین: $\|f\| = 1$ و $f(x) = \|f\| \cdot \|x\|$. ∎

۷ــ گزاره:

گیریم T یک زیرفضای خطی از یک فضای خطی نرم‌دار X بوده و y عنصری است از X که دوری‌آن تا T دست‌کم δ است، یعنی y عنصری‌است که برای هر $t \in T$ داریم $\|y - t\| \geq \delta$. دراین‌صورت یک‌فونکسیونل‌خطی‌کراندار f روی X وجود دارد با $\|f\| \leq 1$، $f(y) = \delta$، و به‌گونه‌ای‌که‌برای هر t در T، داریم $f(t) = 0$

برهان:

گیریم S زیرفضای تولیدشده با T و y است، یعنی زیرفضای S شامل همهٔ عنصرهای‌به‌شکل $\alpha y + t$، با $t \in T$، است. تعریف‌می‌کنیم $f(\alpha y + t) = \alpha\delta$ دراین‌صورت f روی S یک فونکسیونل خطی است و چون

$$\|\alpha y + t\| = |\alpha| \cdot \|y + t/\alpha\| \geq \alpha\delta$$

پس روی S داریم $f(s) \leq \|s\|$. بنابرقضیهٔ هان ــ باناخ می‌توان f را به همهٔ X گسترش داد به‌طوری‌که $f(x) \leq \|x\|$ باشد. ولی این ایجاب می‌کند که $\|f\| \leq 1$ باشد. بنابه‌تعریف f روی S، برای‌هر $t \in T$ داریم $f(t) = 0$، و $f(y) = \delta$ است. ∎

فضای‌فونکسیونلهای‌خطی کراندار روی یک فضای نرم‌دار X را **دوگان** (یا مزدوج) X نامیده و با X^* می‌نمایانیم. چون $\mathbf{R}$ کامل است، X^*، دوگان هرفضای نرم‌دار X، بنابرگزارهٔ ۳ یک فضای باناخ است. دو فضای برداری نرم‌دار

به‌طورایزومتریک، ایزومرف گفته می‌شوند هرگاه یک نگاشت خطی یک‌به‌یک از یکی از آنها بر دیگری موجود باشد که نرم‌ها را محفوظ نگاه‌دارد. بادید مجرد، فضاهای به‌طورایزومتریک ایزومرف، همانند هستند، ایزومرفیسم تنها منجر به‌بازنامیدن عنصرها می‌گردد. در فصل ۶ دیدیم که دوگان L^p (به‌طورایزومتری‌ایزومرف) $1 \le p < \infty$ برای L^q است و یک نمایش طبیعی از فونکسیونلهای خطی کراندار روی L^p به‌وسیلهٔ عنصرهای L^q وجـــود دارد.

اکنون دروضعی‌هستیم که نشان‌دهیم که نمایش مشابهی برای‌فونکسونلهای‌خطی کراندار روی $L^\infty[0, 1]$ برقرار نیست. توجه‌داریم که $C[0, 1]$ یک زیرفضای‌بستهٔ $L^\infty[0, 1]$ است. گیریم f آن فونکسیونل خطی روی $C[0, 1]$ است که به‌هر x، متعلق‌به $C[0, 1]$، مقدار آن در ۰ یعنی $x(0)$ را نسبـت می‌دهـد. نـرم‌آن روی C برابر ۱ است، پس می‌توان‌آن‌را به‌یک‌فونکسیونل‌خطی کراندار F روی $L^\infty[0, 1]$، گسترش داد. اکنون‌می‌گوییم که‌در $L^1[0, 1]$ عنـــصری مانند y وجود ندارد به‌گونه‌ای که برای‌همهٔ x های‌متعلق‌به C، $F(x) = \int_0^1 xy\, dt$ باشد، زیرا گیریم $\langle x_n \rangle$، یک دنباله از تابعهای پیوسته روی $[0, 1]$ است که با ۱ کراندارند، و $x_n(0) = 1$، وبه‌گونه‌ای‌هستند که برای‌هر $t \neq 0$ داریـــم $x_n(t) \to 0$؛ . دراین‌صورت بـرای هر $y \in L^1$، $\int x_n y \to 0$، درحالی‌که $F(x_n) = 1$.

اگر X^{**} دوگان X^* رادرنظرگیریم، آنگاه‌به‌هر x متعلق‌به X یک‌عنصر φx در X^{**} متناظراست‌کهبـــــا $(\varphi x)(f) = f(x)$ تعـریـف‌می‌شـود. داریم

$$\|\varphi x\| = \sup_{\|f\| = 1} f(x) .$$

چـــون $f(x) \le \|f\| \|x\|$، داریـــــم $\|\varphi x\| \le \|x\|$، درحـالـــــی‌کـه بنابرگزارهٔ ۶ یک فونکسیونل‌خطی f به‌نرم ۱ وجود دارد بـــا $f(x) = \|x\|$. ازاین‌رو $\|\varphi x\| = \|x\|$. چون φ به‌روشنی یک‌نگاشت‌خطی‌است، φ یک‌ایزومرفیسم ایزومتریک از X بریک زیرفضای خطی X^{**} مانند $\varphi[X]$ است. نگاشت φ، ایزومرفیسم طبیعی X در X^{**} نامیده می‌شود. واگـــــــر $\varphi[X] = X^{**}$ باشد، می‌گوییم X **بـازتـابـــی** است.

بنابراین اگر $1 < p < \infty$ باشد، آنگاه L^p بازتابی است. چـون روی L^∞ فونکسونلهایی‌وجوددارندکه با انتگرال‌گیری‌نسبت‌به‌یک‌تابع متعلق‌به L^1 داده نمی‌شوند، پس L^1 بازتابی نیست. این مطلب توام بامسئله ۲۲ نشان‌می‌دهد کـــه L^∞ بازتابی نیست. باید توجه داشت که X می‌تواند بدون بازتابی‌بودن، ایزومتـر X^{**} بـاشـد.

بنابرگزارهٔ ۳، فضای X^{**} کامل است، پس بنابرگزارهٔ ۱۴۰۷ باید بستار $\overline{\varphi[X]}$ در X^{**} کامل باشد. بنابراین هرفضای برداری نرم‌دار به‌طور ایزومتریک با یک زیرمجموعهٔ متراکم از یک فضای باناخ ایزومرف است.

پیش از به‌پایان‌رساندن این‌بند، چند کلمه دربارهٔ قضیهٔ هان ــ باناخ درمورد فضاهای برداری مختلط می‌افزاییم. یک فضای برداری مختلط یک فضای برداری است که درآن ضرب در اسکالرهای مختلط مجاز است. گسترش زیر از قضیهٔ هان ــ باناخ درمورد فضاهای مختلط اثر بوهنن بلوشت[1] و سوبتزیک[2] است.

۸ ــ قضیه:

گیریم X یک‌فضای‌برداری‌مختلط، S یک زیرفضای‌خطی، p یک‌تابع‌حقیقی روی X، است‌به‌گونه‌ای‌که $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ و $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$. گیریم f یک فونکسیونل‌خطی(مختلط) روی S است به‌گونه‌ای که برای همهٔ s های متعلق‌به S داریم، $|f(s)| \leq p(s)$. دراین‌صورت‌یک‌فونکسیونل‌خطی F وجود داردکه‌روی X تعریف‌شده به‌گونه‌ای‌که‌برای‌هر s متعلق‌به S داریم $F(s) = f(s)$ و برای همهٔ x های متعلق‌به X داریم، $|F(x)| \leq p(x)$.

برهـــان:

نخست می‌بینیم که اگر به‌طورساده از امکان‌ضرب در ثابتهای‌مختلط چشم‌پوشی کنیم می‌توان X رابه‌عنوان‌یک‌فضای برداری‌حقیقی درنظرگرفت. یک نگاشت F از X، برعددهای‌مختلط که به‌معنای حقیقی خطی است، به‌معنای مختلط خطی است اگر و تنها اگربرای‌هر x داشته‌باشیم $F(ix) = iF(x)$. روی S تابعهای g، h رابابرابر گرفتـــن $g(s)$ بابخش‌حقیقی $f(s)$ و $h(s)$ بابخش موهومی‌آن تعریف‌می‌کنیم. دراین‌صورت g و h به‌معنای‌حقیقی‌خطی‌اندوداریم $f = g + ih$. چون f به‌معنای مختلط خطی است، پس: $g(is) + ih(is) = f(is) = if(s) = ig(s) - h(s)$،

و می‌بینیم که $h(s) = -g(is)$ است.

۱ــ Bohnenblust

۲ــ Sobczyk

چون $g(s) \le |f(s)| \le p(s)$ ، می‌توان g را به‌یک‌فونکسونل G ، روی X گسترش دادکه به‌معنای‌حقیقی خطی‌است و در $G(x) \le p(x)$ صدق می‌کند. گیریم $F(x) = G(x) - iG(ix)$. دراین‌صورت برای هر s متعلق به S داریم $F(s) = f(s)$. چون

$$F(ix) = G(ix) - iG(-x) = i[G(x) - iG(ix)],$$

پس F به‌معنای مختلط خطی است. برای هر x ، عددمختلط ω را به‌گونه‌ای برگزینید که $|\omega| = 1$ و $\omega F(x) = |F(x)|$ باشد. دراین‌صورت:

$$|F(x)| = \omega F(x) = F(\omega x) = G(\omega x) \le p(\omega x) = p(x) \blacksquare$$

مسئله‌ها

۱۷ ـ نشان‌دهیدکه روی یک فضای خطی‌نرم‌دار یک فونکسیونل‌خطی f کراندار است اگروتنهااگر هستهٔ‌آن بسته باشد. (هستهٔ f برابراست‌با $\{x: f(x) = 0\}$.)

۱۸ ـ گیریم T یک‌زیرفضای‌خطی از یک‌فضای‌خطی نرم‌دار X ، و y عنصر داده‌شده‌ای از X است. نشان دهید:

$$\inf_{t\in T} \|y - t\| = \sup \{f(y): \|f\| = 1,\ f(t) = 0 \text{ برای همهٔ } t\in T\}$$

۱۹ ـ درگزارهٔ ۷، S را زیرفضای متشکل از مضربهای y ، $f(\lambda y) = \lambda\delta$ و p را به‌صورت $p(x) = \inf_{t\in T} \|x - t\|$ بگیرید و آن‌را ثابت کنید.

۲۰ ـ گیریم l^∞ فضای‌همهٔ‌دنباله‌های کراندار است. بااستفاده‌از گزارهٔ۵ نشان‌دهیدکه‌روی l^∞ یک‌فونکسیونل‌خطی F وجودداردکه‌دارای‌خاصیتهای‌زیراست:

i. $\underline{\lim}\, \xi_n \le F[\langle \xi_n \rangle] \le \overline{\lim}\, \xi_n.$

ii. $F[\langle \xi_n + \eta_n \rangle] = F[\langle \xi_n \rangle] + F[\langle \eta_n \rangle].$

iii. $F[\langle \alpha\xi_n \rangle] = \alpha F[\langle \xi_n \rangle].$

iv. اگر $\eta_n = \xi_{n+1}$ باشد، آنگاه $F[\langle \eta_n \rangle] = F[\langle \xi_n \rangle].$

فونکسیونل F **حدباناخ** نامیده‌می‌شودواغلب‌با LIM نمایانده‌می‌شود.

۲۱ ـ بااستفاده‌از گزارهٔ۵ نشان دهید که یک تابع مجموعهٔ μ وجود دارد که برای همهٔ مجموعه‌های کراندار **R** تعریف شده و دارای خاصیتهای زیر است:

i. اگر $A \cap B = \varnothing$ باشد، آنگاه $\mu(A \cup B) = \mu A + \mu B$ است.

ii. $\mu(A + t) = \mu A$

iii ــ اگر $A \subset B$ باشد آنگاه $\mu A \leq \mu B$ است .

iv ــ اگر مجموعهٔ A اندازه‌پذیر لبگ باشد ،آنگاه μA اندازه‌لبگ A است .

[**راهنمایی**: دراینجا کارکردن‌باانتگرالها ساده‌تراز کارکردن بامجموعه‌هاست]

۲۲ ــ نشان‌دهیدکه یک فضای‌باناخ X بازتابی‌است اگر و تنهااگر X^* بازتابی باشد .[**راهنمایی**: اگر $\varphi[X]$ برابرهمهٔ X^{**} نباشد ،آنگاه یک فونکسیونل ناصفر $y \varepsilon X^{***}$ وجود دارد ، به‌گونه‌ای‌که برای هر x متعلق‌به $\varphi[X]$ داریم $y(x) = 0$]

۲۳ ــ گیریم S یک‌زیرفضای خطی یک فضای‌باناخ X است ، پوچ‌ساز S^0 فضای S رابا زیرمجموعهٔ $S^0 = \{y \varepsilon X^*: y(s) = 0$ ، $s \varepsilon S$ برای‌همهٔ$\}$ تعریف‌می‌کنیم .
اگر T یک زیرفضای X^* باشد ، T^0 را با $T^0 = \{x \varepsilon X: t(x) = 0$ ، $t \varepsilon T$ برای همهٔ$\}$ تعریف می‌کنیم .

الف ــ نشان دهید که S^0 یک زیرفضای خطی بسته‌از X^* است .

ب ــ نشان دهید که $S^{00} = \bar{S}$.

پ ــ اگر S یک‌زیرفضای‌بستهٔ X باشد ،آنگاه S^* با X^*/S^0 ایزومرف‌است .

ت ــ اگر S یک زیرفضای بسته از یک فضای باناخ بازتابی X باشد ، آنگاه S بازتابی است .

۲۴ ــ گیریم X یک‌فضای برداری و P یک‌زیرمجموعهٔ آن به‌گونه‌ای است که $x, y \varepsilon P$ ایجاب می‌کند $x + y \varepsilon P$ و $\alpha x \varepsilon P$ برای هر $\alpha > 0$. در X یک ترتیب جزیی را با $x \leq y$ به‌معنی $y - x \varepsilon P$ ،تعریف‌می‌کنیم . یک فونکسیونل‌خطی f روی X (نسبت‌به P)مثبت‌گفته می‌شود اگر برای هر $x \varepsilon P$ داشته‌باشیم $f(x) \geq 0$ گیریم S یک‌زیرفضای‌دلخواه X است بااین‌خاصیت که برای‌هر $x \varepsilon X$ یک s متعلق به S وجودداردبا $x \leq s$. دراین‌صورت می‌توان‌هرفونکسیونل‌خطی‌مثبت‌روی S را به‌یک‌فونکسیونل‌خطی‌مثبت‌روی X گسترش داد[**راهنمایی**:بخش‌ترابا پایان‌برهان همانند برهان‌آن برای قضیهٔ هان ــ باناخ‌است . امکان‌گسترش یک‌فونکسیونل‌برای فضایی که حاوی یک عنصر بیشتر است حتی آسانتر از آن برای قضیهٔ هان ــ باناخ است .]

۲۵ ــ گیریم f نگاشتی از کرهٔ یکهٔ $S = \{x: \|x\| \leq 1\}$ در $\mathbf{R}$ است ، به‌گونه‌ای‌که‌برابری $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ هنگامی‌که x, y و $\alpha x + \beta y$ به S تعلق‌دارند ، برقراراست . نشان دهید که‌می‌توان f را به‌همهٔ X گسترش داد به‌طوری‌که یک فونکسیونل خطی باشد .

۴ ـ قضیهٔ نگار بسته

یک نگاشت از یک فضای توپولوژیک بر یک فضای توپولوژیک دیگر یک **نگاشت باز** نامیده می‌شود هرگاه سایهٔ هر مجموعهٔ باز یک مجموعهٔ باز باشد. بنابراین هر نگاشت باز یک‌به‌یک پیوسته یک همئومرفیسم است. نشان خواهیم داد که هر تبدیل خطی پیوسته از یک فضای باناخ برروی یک فضای باناخ دیگر همواره یک نگاشت باز است، و با استفاده از آن، محک پیوستگی یک تبدیل خطی را بیان خواهیم کرد. با یک لم آغاز می‌کنیم.

۹ ـ لم:

گیریم A یک تبدیل خطی پیوسته از فضای باناخ X برروی فضای باناخ Y است. دراین‌صورت سایه کره یکه در X به‌وسیلهٔ A شامل کره‌ای حول مبداء در Y است.

برهان:

گیریم $S_n = \{x: \|x\| < 1/2^n\}$. چون A پوشاست و

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} kS_1$$

داریم

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} kA(S_1)$$

ولی Y یک فضای متریک کامل است، پس در خودش از کاتگوری نخست نیست. درنتیجه، $A(S_1)$ نمی‌تواند هیچ‌جا متراکم باشد، و $\overline{A(S_1)}$ شامل یک کره است، مانند:

$$\{y: \|y - p\| < \eta\}$$

دراین‌صورت $\overline{A(S_1)} - p$ حاوی کرهٔ زیر است.

$$\{y: \|y\| < \eta\}.$$

ولـــی $\overline{A(S_1)} - p \subset \overline{A(S_1)} - \overline{A(S_1)} \subset 2\overline{A(S_1)} = \overline{A(S_0)}.$

بنابراین $\overline{A(S_0)}$ حاوی کره‌ای به‌شعاع η حول مبداء است پس بنابرخطی بودن A ، $\overline{A(S_n)}$ حاوی کره‌ای به‌شعاع $\eta/2^n$ حول مبداء است.

اکنون نشان می‌دهیم که $A(S_0)$ حاوی کره‌ای به‌شعاع $\eta/2$ حول مبداء است. گیریم y یک نقطهٔ دلخواه از Y با $\|y\| < \eta/2$ است. چون $y \varepsilon \overline{A(S_1)}$ ، می‌توان $x_1 \varepsilon S_1$ را به‌گونه‌ای برگزید که نابرابری

$$\|y - A(x_1)\| < \frac{\eta}{4}$$

برقرار باشد. به‌همین‌ترتیب می‌توان $x_2 \varepsilon S_2$ را به‌گونه‌ای برگزید که نـابـرابـری

$$\|y - A(x_1) - A(x_2)\| < \frac{\eta}{8}$$

برقرار باشد و این‌کار را ادامه می‌دهیم تا $x_n \varepsilon S_n$ را با شرط

$$\left\|y - \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\right\| < \frac{\eta}{2^{n+1}} \cdot$$

برگزینیم چون $\|x_k\| < 1/2^k,$ است، پس $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ همگـرای مطلـــق اسـت‌و

$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ به S_0 تعلق دارد. به‌علاوه

$$A(x) = A\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} A(x_k) = y$$

بنابراین $y \varepsilon A(S_0)$ ، پـس

$$\left\{y: \|y\| < \frac{\eta}{2}\right\} \subset A(S_0). \blacksquare$$

۱۰ ــ گـــــزاره:

هرتبدیل‌خطی‌پیوستهٔ A ازیک فضای‌باناخ X بر یک‌فضای باناخ Y یک‌نگاشت باز است. بنابراین به‌ویژه اگر A یک به‌یک باشد، یک ایزومرفیسم است.

برهان:

گیریم O یک‌زیرمجموعهٔ بازدلخواه X و y یک‌نقطهٔ دلخواه‌از $A[O]$ است. دراین‌صورت‌یک‌نقطهٔ $x \varepsilon O$ وجوددارد‌به‌گونه‌ای که $y = A(x)$. چون O باز است یک‌کرهٔ S شامل x و مشمول O وجود دارد. ولی بنابر لم ۹ ، باید، $A[S - x]$ شامل یک‌کره حول‌مبداء یا $A[S]$ شامل یک‌کره حول y باشد. بنابراین y مشمول کره‌ای است که خود مشمول $A[O]$ است، پس $A[O]$ باز است. ∎

۱۱ـ گزاره:

گیریم X یک‌فضای‌برداری خطی است که نسبت‌به‌هریک‌از نرمهای $\| \|$ و $||| \; |||$ کامل است، و فرض می‌کنیم‌یک ثابت C وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر $x \varepsilon X$ داریم.

$$\|x\| \le C|||x|||$$

دراین‌صورت این نرمهاهم‌ارزند. به‌گفتهٔ دیگر یک ثابت‌دیگر C' وجود دارد به‌گونه‌ای‌که برای هر $x \varepsilon X$ داریم

$$|||x||| \le C'\|x\|$$

برهان:

نگاشت همانی از $(X, |||\;|||)$ به‌روی $(X, \|\;\|)$ یک تبدیل خطی یک‌به‌یک‌پیوسته‌است‌پس بنابرگزارهٔ ۱۰ باید یک‌ایزومرفیسم‌باشد. بنابراین نگاشت‌وارون باید کراندار باشد. ∎

۱۲ـ قضیهٔ نگار بسته:

گیریم A یک‌تبدیل‌خطی از روی‌یک فضای‌باناخ X بر یک‌فضای‌باناخ Y است. فرض می‌کنیم که A دارای این خاصیت است که، هرگاه دنباله $\langle x_n \rangle$ در X به‌یک نقطهٔ x و دنبالهٔ $\langle Ax_n \rangle$ در Y به‌یک نقطهٔ y بگراید، آنگاه $y = Ax$ است. دراین‌صورت A پیوسته است.

برهــــان :

در X نرم جدیدی با
$$|||x||| = \|x\| + \|Ax\|$$
تعریف می‌کنیم . دراین‌صورت X نسبت‌به نرم $|||\ |||$ کـامـل اسـت . زیـرا اگـر $|||x_p - x_q||| \to 0$ ، آنگاه $\|Ax_p - Ax_q\| \to 0$ و $\|x_p - x_q\| \to 0$.
ازاین‌رو بنابرکمال X و Y نقطه‌های $x \varepsilon X$ و $y \varepsilon Y$ وجـود دارنـد به‌گونه‌ای کـه $\|x_p - x\| \to 0$ و $\|Ax_p - y\| \to 0$. بنابه فـرض قضیه $y = Ax$
ازاین‌رو $|||x_p - x||| \to 0$ ، و X نسبت‌به $|||\ |||$ کامل است . اکنـون بنابرگزارهٔ ۱۱ یک‌عدد C' وجود دارد به‌گونه‌ای‌که
$$\|x\| + \|Ax\| \leq C'\|x\|.$$
بنابراین
$$\|Ax\| \leq C'\|x\|,$$
و A کراندار است . ∎

نگار هرنگاشت‌از X در Y درست مجموعهٔ‌همهٔ جفتهای (x, Ax) متعلق به $X \times Y$ است . فرض قضیهٔ ۱۲ تنها مبین این است که نگار A بسته است .

نتیجهٔ دیگر نظریهٔ‌کاتگوری گزارهٔ‌زیر است که به‌اصل **کراندارِی یکنواخت** معروف است .

۱۳ ــ گــــزاره :

گیریم X یک‌فضای‌باناخ و $\mathfrak{F}$ خانواده‌ای ازعملگرهای خطی کراندار از X بر یک فضای نرم‌دار Y است . فرض می‌کنیم که برای هر x متعلق‌به X یک‌ثابت M_x وجوددارد به‌گونه‌ای‌که‌برای‌همهٔ T های متعلق‌به $\mathfrak{F}$ داریم $\|Tx\| \leq M_x$. دراین صورت عملگرهای $\mathfrak{F}$ به‌طوریکنواخت‌کراندارند ،یعنی یک‌ثابت M وجوددارد به‌گونه‌ای که برای همهٔ T های متعلق به $\mathfrak{F}$ داریم : $\|T\| \leq M$

برهــــان :

برای‌هر T تابع f که با $f(x) = \|Tx\|$ تعریف می‌شود ، روی X یک

تابع حقیقی پیوسته است. چون خانوادهٔ این تابعها درهر نقطهٔ x متعلق به X کراندارند و X کامل است، بنابرقضیهٔ ۷.۱۷ یک زیرمجموعهٔ باز O از X وجود دارد که روی آن این تابعها به‌طوریکنواخت کراندارند. بنابراین یک ثابت M' وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر $x \varepsilon O$ داریم: $\|Tx\| \leq M'$. گیریم y یک نقطهٔ متعلق به O است. چون O باز است یک کرهٔ $S = \{x: \|x - y\| < \delta\}$ به‌شعاع δ و به‌مرکز y وجود دارد که مشمول O است. اگر $\|z\| \leq \delta$، آنگاه $Tz = T(y + z) - Ty$ که در آن $y + z \epsilon S \subset O$ ازاین‌رو $\|Tz\| \leq \|T(y + z)\| + \|Ty\| \leq M' + M_y$

درنتیجه برای‌همهٔ T های‌متعلق‌به $\mathfrak{F}$ داریم $\|T\| \leq \dfrac{M' + M_y}{\delta}$. ∎

مسئله‌ها

۲۶ـ گیریم $\langle T_n \rangle$ یک دنباله‌از عملگرهای خطی پیوسته از روی یک فضای باناخ X بر یک فضای برداری نرم‌دار Y است، و فرض می‌کنیم که برای هر x متعلق‌به X دنبالهٔ $\langle T_n x \rangle$ به‌مقدار Tx می‌گراید. دراین‌صورت T یک عملگر خطی کراندار است.

۲۷ـ گیریم A یک‌تبدیل‌خطی‌کراندار از یک فضای‌باناخ X بر یک‌فضای باناخ Y، M هسته، و S برد A، است. دراین‌صورت S با X/M ایزومرف است، اگر و تنها اگر S بسته باشد.

۲۸ـ گیریم S یک زیرفضای خطی از $C[0, 1]$ است که خود به‌عنوان یک زیرفضای $L^2[0, 1]$، بسته است.

الف ـ نشان دهید که S یک زیرفضای بستهٔ $C[0, 1]$ است.

ب ـ نشان‌دهیدکه‌یک‌ثابت M وجود دارد به‌گونه‌ای‌که برای‌هر $f \varepsilon S$ داریم

$$\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty \quad \text{و} \quad \|f\|_\infty \leq M\|f\|_2$$

پ ـ نشان‌دهیدکه برای هر $y \varepsilon [0, 1]$ یک‌تابع k_y در L^2 وجوددارد، به‌گونه‌ای که برای هر $f \varepsilon S$ داریم $f(y) = \int k_y(x) f(x)\, dx$.

می‌توان‌نشان‌دادکه S دارای‌بعد باپایان‌است (مسئلهٔ ۴۱ یا ۵۵ را ببینید).

۲۹ ـ الف ـ مثالی از یک عملگر ناپیوستهٔ A از یک فضای خطی نرم‌دار X بر یک‌فضای باناخ Y بیاورید به‌گونه‌ای که A دارای نگار بسته باشد.

ب ــ مثالی از یک عملگر ناپیوستهٔ A از یک فضای باناخ X بریک فضای خطی نرم‌دار Y بیاورید به‌گونه‌ای که A دارای نگار بسته باشد.

*۵ ــ فضاهای برداری توپولوژیک

همانگونه که مفهوم یک فضای متریک به‌فضای توپولوژیک تعمیم می‌یابد، مفهوم یک فضای‌خطی نرم‌دار نیز به‌فضای‌برداری‌توپولوژیک تعمیم‌پیدامی‌کند: هرفضای برداری خطی X با یک توپولوژی $\mathfrak{T}$ روی آن هنگامی یک **فضای برداری توپولوژیک** نامیده می‌شود که عمل‌جمع، یک تابع پیوسته از $X \times X$ در X بوده و عمل ضرب در اسکالرها نیز یک تابع پیوسته از $\mathbf{R} \times X$ در X باشد. ازپیوستگی عمل‌جمع نتیجه می‌شود که انتقال به‌وسیله یک عنصر x یک‌همئومرفیسم‌است و انتقال‌یافتهٔ‌یک مجموعهٔ باز O یعنی $x + O$ باز است. هرتوپولوژی که‌روی یک فضای‌برداری دارای‌این‌خاصیت باشد نسبت‌به‌انتقال‌پایا، گفته‌می‌شود. اگر $\mathfrak{T}$ روی X یک‌توپولوژی‌پایا نسبت‌به‌انتقال، و $\mathcal{B}$ یک پایهٔ $\mathfrak{T}$ در θ باشد، دراین‌صورت مجموعه‌های به‌شکل $x + U$، $U \in \mathcal{B}$ یک‌پایه برای $\mathfrak{T}$ در x می‌سازند. بنابراین برای‌تعیین یک توپولوژی‌پایا نسبت‌به‌انتقال کافی است که پایه‌ای در θ بدهیم. هرپایه‌در θ اغلب‌یک **پایهٔ موضعی** نامیده می‌شود. در گزارهٔ زیر شرطهایی روی یک‌مجموعهٔ $\mathcal{B}$ داده می‌شود که پایه بودن آن‌را برای یک توپولوژی یک فضای برداری‌توپولوژیک تضمین‌می‌کند، و مبین‌آن است‌که همواره می‌توان یک پایه یافت که دراین شرطها صدق کند.

۱۴ ــ گزاره:

گیریم X یک فضای برداری توپولوژیک است. دراین‌صورت می‌توانیم یک‌پایهٔ $\mathcal{B}$ در θ بیابیم که در شرطهای زیر صدق کند:

i ــ *اگر $U, V \in \mathcal{B}$ باشد، آنگاه یک $W \in \mathcal{B}$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $W \subset U \cap V$.*

ii ــ *اگر $U \in \mathcal{B}$ و $x \in U$ باشد آنگاه یک $V \in \mathcal{B}$ وجوددارد به‌گونه‌ای که $x + V \subset U$ است.*

iii ــ *اگر $U \in \mathcal{B}$ باشد، آنگاه یک $V \in \mathcal{B}$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $V + V \subset U$ است.*

iv ــ اگر $\mathcal{B}$ $U \varepsilon$ و $x \varepsilon X$ باشد، آنگاه یک $\alpha \varepsilon \mathbf{R}$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که $x \varepsilon \alpha U$.

v ــ اگر $U \varepsilon \mathcal{B}$ و $0 < |\alpha| \leq 1$ باشد، آنگاه $\alpha U \subset U$ و $\alpha U \varepsilon \mathcal{B}$ است.

به‌وارون برای هردستهٔ $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های‌حاوی θ و برآورندهٔ شرطهای بالا، یک‌توپولوژی‌برای X وجود داردکه آن‌را فضای‌برداری توپولوژیک‌می‌سازد و $\mathcal{B}$ یک‌پایهٔ آن در θ است. این توپولوژی هاوسدورف است اگر و تنها اگر داشته باشیم:

vi ــ $\bigcap \{U \varepsilon \mathcal{B}\} = \{\theta\}$

برهان این‌گزاره به‌خواننده واگذارمی‌شود. ملاحظه می‌کنیم که اگر X یک‌فضای خطی نرم‌دار باشد، می‌توان $\mathcal{B}$ را مجموعهٔ کره‌های حول θ گرفت، و این‌گزاره پایه‌ای برای حالت کلی می‌دهد که دارای بسیاری از خواص متعلق به‌دستهٔ کره‌هاست.

دریک‌فضای برداری توپولوژیک می‌توان همسایگیهای یک‌نقطه‌را باانتقال با همسایگیهای سایرنقطه‌ها مقایسه کرد. بنابراین می‌توان ازخاصیتهای‌یکنواخت گفتگوکرد: یک نگاشت f ازیک فضای برداری توپولوژیک X در یک فضای برداری توپولوژیک Y، به‌طور یکنواخت پیوسته گفته می‌شود اگر برای هرمجموعهٔ باز O، حاوی مبداء در Y یک مجموعهٔ باز U حاوی مبداء در X وجود داشته باشد. به‌گونه‌ای‌که‌برای‌هر $x \varepsilon X$ داشته‌باشیم $f[x + U] \subset f(x) + O$. به‌آسانی‌دیده می‌شودکه‌یک‌تبدیل‌خطی از X بر Y به‌طوریکنواخت‌پیوسته‌است، اگر دریک‌نقطه‌پیوسته باشد. یک‌نگاشت‌خطی φ از X برروی Y یک‌ایزومرفیسم (توپولوژیک) نامیده‌می‌شود هرگاه φ و φ^{-1} هردو پیوسته باشند. بایک دید مجرد فضاهای ایزومرف یکی هستند. قضیهٔ زیر مبین این‌است که روی یک فضای برداری بابعد باپایان تنها توپولوژی که آن‌را یک فضای برداری توپولوژیک می‌سازد، توپولوژی معمولی است.

۱۵ ــ گزاره (تیخونف[1]):

گیریم X یک فضای برداری توپولوژیک با بعد باپایان است. دراین‌صورت برای یک مقدار n، فضای X به‌طور توپولوژیک با $\mathbf{R}^n$ ایزومرف است.

برای‌برهان‌این‌گزاره پیشنهادهایی درمسئلهٔ ۳۳ داده شده‌است. در مسئله‌های ۳۴، ۳۵، و ۳۶ نیز نتیجه‌های مفیدی داده شده است.

---

۱ ــ Tychonoff

مسئله‌ها

۳۰ ــ گزارهٔ ۱۴ را ثابت کنید:

الف ــ یک‌دستهٔ $\mathcal{B}$ اززیرمجموعه‌های‌حاوی θ برای‌توپولوژی‌پایانسبت‌به‌انتقال، یک پایه در θ است، اگر و تنها اگر (i) و (ii) برقرار باشند.

ب ــ عمل جمع از $X \times X$ بر X پیوسته است اگر و تنها اگر (iii) برقرار باشد.

پ ــ اگر ضرب‌در اسکالرها از $\mathbf{R} \times X$ بر X (در $\langle 0, 0 \rangle$) پیوسته‌باشد، آنگاه (iv) برقرار است.

ت ــ اگر X یک فضای برداری توپولوژیک باشد، آنگاه خانوادهٔ $\mathcal{B}$ ی همهٔ مجموعه‌های باز U که θ را دربردارند و به‌گونه‌ای‌هستند که برای‌هر α با $|\alpha| < 1$، $\alpha U \subset U$ است، برای این‌توپولوژی یک پایه موضعی بوده و در (v) صدق می‌کند. [اگر O یک مجموعهٔ باز دلخواه حاوی θ باشد، پیوستگی ضرب ایجاب می‌کند که یک مجموعهٔ باز V حاوی θ و یک $\epsilon > 0$ وجود دارد به‌گونه‌ای که برای همهٔ λ ها با $|\lambda| < \epsilon$ داریم $\lambda V \subset O$. دراین‌صورت $U = \bigcup_{|\lambda|<\epsilon} \lambda V$ بازاست، $\theta \varepsilon U \subset O$، وبرای هر α با $|\alpha| < 1$، داریم $\alpha U \subset U$]

ث ــ اگر $\mathcal{B}$ درشرطهای‌گزاره‌صدق‌کند، دراین‌صورت آن یک‌توپولوژی تولید می‌کندکه در آن ضرب‌در اسکالرها از $\mathbf{R} \times X$ بر X پیوسته‌است. [نشان‌دهید که (iv) و (v) پیوستگی‌در $\langle 0, x \rangle$ و $\langle \alpha, 0 \rangle$ راایجاب‌می‌کنند، واز (iii) استفاده‌کنید.]

(ج) ــ اگر X، T_1 باشد، آنگاه (vi) برقراراست. اگر (vi) و (iii) برقرار باشند، آنگاه X هاوسدورف است.

۳۱ ــ الف ــ نشان‌دهید که هر تبدیل خطی از یک‌فضای برداری توپولوژیک برفضای‌برداری‌توپولوژیک‌دیگر وقتی به‌طوریکنواخت‌پیوسته‌است‌که دریک‌نقطه‌پیوسته‌باشد.

ب ــ نشان‌دهید که هر فونکسیونل خطی f روی X پیوسته است اگر و تنها اگر یک‌مجموعهٔ‌باز O موجود باشد به‌گونه‌ای‌که $f[O] \neq \mathbf{R}$ گردد[**راهنمایی**: می‌توان O را به‌گونه‌ای گرفت که در خاصیت (v) گزارهٔ ۱۴ صدق کند.]

۳۲ ــ گیریم X یک‌فضای‌برداری‌توپولوژیک و M یک‌زیرفضای‌خطی‌بسته‌آن‌است. گیریم φ یک‌همومرفیسم طبیعی از X برروی X/M است، و روی X/M یک توپولوژی چنین تعریف می‌کنیم: که O را بازمی‌گیریم اگر و تنها اگر $\varphi^{-1}[O]$ در X باز باشد.

دراین‌صورت این توپولوژی X/M را یک‌فضای برداری توپولوژیک و φ را یک‌نگاشت باز پیوسته‌می‌سازد. هنگامی‌که‌از X/M به‌عنوان یک‌فضای‌برداری‌توپولوژیک گفتگو می‌کنیم. همواره منظورمان X/M با این توپولوژی است.

۳۳ ــ گزارهٔ ۱۵ را ثابت کنید:

الف ــ اگر بعد X برابر n باشد، آنگاه یک نگاشت خطی یک به یک و پیوستهٔ φ از $\mathbf{R}^n$ به‌روی X وجود دارد.

ب ــ گیریم S و B زیرمجموعه‌هایی‌از $\mathbf{R}^n$ هستندکه‌با $S = \{y: \|y\| = 1\}$ و $B = \{y: \|y\| < 1\}$ تعریف‌شده‌اند. دراین‌صورت $\varphi[S]$ بسته‌و $X \sim \varphi[S]$ باز است.

پ ــ یک‌زیرمجموعهٔ باز U از X حاوی θ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که‌برای‌هر α، با $|\alpha| < 1$، داریم، $\alpha U \subset U$ و $U \subset X \sim \varphi[S]$.

ت ــ مجموعهٔ U مذکوردر (پ) مشمول $\varphi[B]$ است، پس φ^{-1} پیوسته‌است.

۳۴ ــ نشان‌دهیدکه هرزیرفضای با بعدباپایان M ازیک‌فضای‌برداری توپولوژیک X، بسته‌است. [**راهنمایی**: گیریم $x \notin M$ و N زیرفضای‌بابعدباپایان‌تولید شده به‌وسیلهٔ x و M است. دراین‌صورت N دارای‌توپولوژی‌معمولی است، پس x یک نقطه از بستار M نیست.]

۳۵ ــ گیریم A یک‌نگاشت‌خطی‌از یک‌فضای‌برداری‌توپولوژیک با بعد باپایان X، دریک فضای برداری توپولوژیک Y است. دراین‌صورت A پیوسته است. [**راهنمایی**: برد A دارای بعد باپایان است و از این‌رو دارای توپولوژی معمولی است.]

۳۶ ــ یک‌نگاشت‌خطی A از یک فضای برداری توپولوژیک X به یک فضای توپولوژیک با بعد باپایان Y پیوسته است اگر و تنها اگر هستهٔ آن، M، بسته باشد. [**راهنمایی**: $A = B \circ \varphi$، که‌درآن φ نگاشت‌طبیعی از X به X/M و B بنابر مسئلهٔ ۳۵ پیوسته است.]

۳۷ ــ ثابت کنید که هر فضای برداری توپولوژیک فشردهٔ موضعی X دارای بعد باپایان است. **راهنمایی**: گیریم V یک همسایگی θ با $\bar{V}$ فشرده است‌وبرای هر α با $|\alpha| < 1$ داریم $\alpha V \subset V$. اگر $\bar{V}$ راباشماره‌ٔباپایانی‌ازانتقال‌یافته‌های $x_1 + \frac{1}{3}V$، ...، $x_n + \frac{1}{3}V$ بپوشانیم، آنگاه $x_1, \ldots, x_n$ پایه‌ای‌برای X است.

*۶ــ توپولوژی‌های کم‌توان

اگر X یک‌فضای‌برداری‌دلخواه و $\mathfrak{F}$ دسته‌ای از فونکسیونل‌های خطی روی X ، باشد ، آنگاه توپولوژی‌کم‌توان تولید شده‌با $\mathfrak{F}$ راکم‌توان‌ترین توپولوژی تعریف می‌کنیم به‌گونه‌ای‌که هر f متعلق به $\mathfrak{F}$ پیوسته باشد (به‌مسئله‌ٔ ۸ ، ۲۰ رجوع کنید) . به‌آسانی دیده‌می‌شودکه این توپولوژی نسبت‌به‌انتقال‌پایاست ، و پایه‌ای‌برای‌این‌توپولوژی در θ بامجموعه‌های $\{x: |f_i(x)| < \epsilon, i = 1, \dots, n\}$ داده می‌شود ، که در آن $\epsilon > 0$ و $\{f_1, \dots, f_n\}$ یک‌زیرمجموعهٔ باپایان از $\mathfrak{F}$ است . چون خانوادهٔ همهٔ مجموعه‌هایی از این‌گونه ، در شرطهای گزارهٔ ۱۴ صدق می‌کند ، این توپولوژی ، X را یک‌فضای‌برداری‌توپولوژیک می‌سازد . یک دنبالهٔ (یا تور) $\langle x_n \rangle$ دراین توپولوژی به x می‌گراید اگر و تنها اگر برای هر $f \in \mathfrak{F}$ داشته‌باشیم $f(x_n) \to f(x)$.

اگر X یک‌فضای‌برداری‌نرم‌دار باشد و همهٔ فونکسیونل‌های متعلق‌به $\mathfrak{F}$ پیوسته باشند (یعنی‌اگر $\mathfrak{F} \subset X^*$) ، آنگاه توپولوژی کم‌توان تولید شده با $\mathfrak{F}$ کم‌توانتر (دارای‌مجموعه‌های‌باز کمتر) از توپولوژی نرم X است . معمولاً "توپولوژی‌متریک تولید شده به‌وسیلهٔ نرم را توپولوژی پرتوان X و توپولوژی‌کم‌توان روی X تولیدشده به‌وسیلهٔ X^* را توپولوژی‌کم‌توان X می‌نامیم . بنابراین هنگام‌اشاره‌به‌توپولوژی‌پرتوان از مجموعه‌های‌بستهٔ‌پرتوان و بازپرتوان ، و درمورد توپولوژی‌کم‌توان ازمجموعه‌های‌بستهٔ کم‌توان و باز کم‌توان گفتگو خواهیم کرد . هرمجموعهٔ بستهٔ کم‌توان یک‌مجموعهٔ بستهٔ پرتوان است ولی وارون آن درست نیست . هر دنبالهٔ (یا تور) همگرای پرتوان ، به‌طور کم‌توان‌همگراست . درحالیکه هرمجموعهٔ‌بستهٔ‌پرتوان‌به‌طورکم‌توان‌بسته‌نیست . گزارهٔ‌زیر را داریم ، که یک تعمیم آن بانتیجهٔ ۲۳ داده شده است .

۱۶ ــ گزاره :

هرمانیفلدخطی M به‌طورکم‌توان‌بسته‌است اگروتنهااگر به‌طورپرتوان‌بسته‌باشد .

برهان :

چون‌هرمجموعهٔ‌بستهٔ کم‌توان به‌طور پرتوان بسته است ، تنها باید نشان دهیم که اگر M بستهٔ پرتوان باشد به‌طورکم‌توان نیز بسته است . فرض کنیم M بستهٔ پرتوان

و x نقطه‌ای است که به M تعلق ندارد . باید نشان دهیم که در توپولوژی کم توان نقطهٔ x یک‌نقطه‌از بستار M نیست . چون x در توپولوژی پرتوان (توپولوژی متریک) یک‌نقطه‌ازبستار M نیست ، داریم $\inf_{s\varepsilon M} \|x - s\| \geq \delta > 0$. ازاین‌رو بنابرگزارهٔ ۷ یک فونکسیونل‌خطی پیوستهٔ f وجود دارد که روی M صفر می‌شود و در x صفرنمی‌شود . ولی مجموعهٔ $\{y: f(y) \neq 0\}$ در توپولوژی کم‌توان یک‌مجموعهٔ باز است که حاوی x است‌ولی‌با M برخورد ندارد . ازاین‌رو x یک نقطهٔ‌کم‌توان از بستار M نیست. ∎

اگرمفهوم توپولوژی‌کم توان‌رادرمورددوگان X^* یک‌فضای‌نرم‌دار X به‌کار ببریم می‌بینیم که توپولوژی‌کم‌توان X^* کم‌توانترین توپولوژی برای آن است به‌گونه‌ای که همهٔ فونکسیونلهای‌متعلق‌به X^{**} پیوسته‌اند . ثابت‌می‌شودکه توپولوژی‌کم‌توان برای X^* ، کم‌فایده‌تر از توپولوژی کم‌توان برای X^* تولید شده با X (یا به‌طوردقیقتر ، با $\varphi[X]$ که درآن φ غوطه‌ورساز طبیعی X در X^{**} است) می‌باشد ، این‌توپولوژی برای X^* **توپولوژی‌کم‌توان*** نامیده‌می‌شودوحتی‌کم‌توان‌ترازتوپولوژی‌کم‌توان‌است .

بنابراین هرزیرمجموعهٔ‌بستهٔ‌کم‌توان* از X^* بستهٔ‌کم‌توان است ، و همگرایی کم‌توان ، همگرایی‌کم‌توان* را ایجاب می‌کند . برای توپولوژی کم‌توان* یک‌پایه‌در θ با مجموعه‌های‌به‌شکل $\{f: |f(x_i)| < \epsilon, i = 1, \ldots, n\}$ داده می‌شود ، که درآن $\{x_1, \ldots, x_n\}$ یک‌زیرمجموعهٔ باپایان X است . اگر X بازتابی باشد ، آنگاه توپولوژی‌های‌کم‌توان‌و کم‌توان* برای X^* برهم منطبق‌هستند . مقداری‌ازاهمیت‌توپولوژی کم‌توان* در قضیهٔ زیر جلوه‌گر است :

۱۷ ــ قضیه (آلااوغلو[1]) :

کرهٔ یکهٔ $S^* = \{f: \|f\| \leq 1\}$ از X^* درتوپولوژی‌کم‌توان*فشرده‌است .

برهان :

اگر $f \varepsilon S^*$ باشد ، آنگاه $|f(x)| \leq \|x\|$ است ، پس $f(x) \varepsilon [-\|x\|, \|x\|]$ گیریم $I_x = [-\|x\|, \|x\|]$ است . دراین‌صورت‌هر $f \varepsilon S^*$ نظیر یک‌نقطه‌در $P = \bigtimes_{x\varepsilon X} I_x$ است ، زیرا مجموعهٔ‌اخیر بنابه‌تعریف برابرمجموعهٔ‌همهٔ تابعهای f ،

---

۱ — Alaoglu

روی X است به‌گونه‌ای‌که $f(x) \varepsilon I_x$. بنابراین می‌توان S^* را به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از P تصور کرد و تعریف توپولوژی‌برای P نشان می‌دهد که توپولوژی S^* ، گرفته شده به‌عنوان یک زیرفضای P توپولوژی‌کم‌توان S^* است . چون P بنابرقضیهٔ تیخونف فشرده است ، اگر S^* یک زیرمجموعهٔ بستهٔ P باشد، فشرده خواهد بود . گیریم f یک نقطه از بستار S^* در P است . دراین‌صورت f نگاشتی از X در $\mathbf{R}$ است . چون‌برای $g \varepsilon S^*$ ، داریم $|g(x)| \leq \|x\|$ ، و ارزیابی در x یک‌تابع پیوسته روی P است ، داریم $|f(x)| \leq \|x\|$. گیریم x ، y و z سه‌نقطهٔ متعلق‌به X اند به‌گونه‌ای‌که $z = \alpha x + \beta y$. برای هر $\epsilon > 0$ مجموعهٔ

$$N = \{g \varepsilon P: |g(x) - f(x)| < \epsilon, |g(y) - f(y)| < \epsilon, |g(z) - f(z)| < \epsilon\}$$

یک‌زیرمجموعهٔ باز P است‌که‌حاوی f می‌باشد . چون f یک نقطه از بستار S^* ، است ، می‌توان در $N \cap S^*$ یک g یافت . چون این g (به‌سبب تعلق‌به S^*) خطی است داریم $g(z) = \alpha g(x) + \beta g(y)$. ازاین‌رو نتیجه می‌شود که :

$$|f(z) - \alpha f(x) - \beta f(y)| < \epsilon(1 + |\alpha| + |\beta|)$$

پس، از این نابرابری‌که‌برای هر $\epsilon > 0$ برقرار است‌نتیجه‌می‌شود $f(z) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ ، و f روی X خطی‌است . بنابراین f به S^* تعلق دارد ، پس S^* بسته است . ∎

مسئله‌ها

۳۸ ــ الف ــ نشان‌دهید که اگر x_n به‌طورکم‌توان به x بگراید ، آنگاه $\langle\|x_n\|\rangle$ کراندار است .

ب ــ گیریم $\langle x_n \rangle$ دنباله‌ای در l^p ، $1 < p < \infty$ است و گیریم $x_n = \langle \xi_{m,n} \rangle_{m=1}^{\infty}$. نشان دهید که $\langle x_n \rangle$ به‌طورکم‌توان‌به $x = \langle \xi_m \rangle$ می‌گراید اگروتنهااگر $\langle\|x_n\|\rangle$ کراندارباشدوبرای‌هر m ، $\xi_{m,n} \to \xi_m$ باشد .

پ ــ گیریم $\langle x_n \rangle$ دنباله‌ای‌است‌در $L^p[0, 1]$ ، $1 \leq p < \infty$. نشان دهید که $\langle x_n \rangle$ به‌طورکم‌توان به x می‌گراید ، اگر $\langle\|x_n\|\rangle$ کرانداربوده و $\langle x_n \rangle$ دراندازه به x بگراید (مسئلهٔ ۶، ۱۶ را ببینید) .

ت ـ گیریم x_n در l^p $1 < p < \infty$ ، دنباله‌ای است که جملهٔ n ام آن ۱ و سایر جمله‌های آن ۰ است . دراین‌صورت $\langle x_n \rangle$ درتوپولوژی پرتوان همگرا نیست ، ولی در توپولوژی کم توان x_n به ۰ می‌گراید .

ث ـ گیریم $\langle x_n \rangle$ دنبالهٔ مذکور در (ت) است ، و $y_{n,m}$ را بـــا $y_{n,m} = x_n + nx_m$ تعریف می‌کنیم . دراین‌صورت مجموعهٔ $F = \{y_{n,m} : m > n\}$ به‌طورپرتوان بسته است [**راهنمـــایـــی** : دوری‌بین هردونقطهٔ F دست‌کم برابریک است . ازاین‌رو F هیچ دنبالهٔ ناثابت را ، که در توپولوژی پرتوان همگرا باشد ، دربر ندارد]

ج ـ θ نقطهٔ بستار کم توان مجموعهٔ F مذکور در (ث) است . ولی هیچ دنبالهٔ $\langle z_n \rangle$ از F وجود ندارد که به‌طور کم توان به‌صفر بگراید .

۳۹ ـ الــف ـ گیریم S یک زیرمجموعهٔ کراندار یک فضای نرم دار X است . گیریم $\mathfrak{F}$ مجموعه‌ای از فونکسیونلهای X^* و $\mathfrak{F}_0$ یک زیرمجموعهٔ متراکم $\mathfrak{F}$ است (متراکم به‌معنی نرم توپولوژی روی X^*) . دراین‌صورت ممکن است $\mathfrak{F}$ و $\mathfrak{F}_0$ توپولوژی‌های کم توان متفاوتی برای X تولید کنند ، ولی این توپولوژی‌ها روی S یکسانند ، یعنی S توپولوژی یکسانی از هریک از آنها می‌گیرد .

ب ـ گیریم S^* در دوگان X^* یک فضای باناخ جدایی‌پذیر X ، کرهٔ یکه است . دراین‌صورت توپولوژی کم توان* روی S^* متریک‌پذیر است . (**تـــوجـــه** : این بدان معنی نیست که توپولوژی کم توان* روی X^* متریک‌پذیر است) .

۴۰ ـ نشان دهید که هرمجموعهٔ فشردهٔ کم توان در توپولوژی نرم ، کراندار است .

۴۱ ـ گیریم S زیرفضای خطی $C[0, 1]$ ، مذکور در مسئلهٔ ۲۸ است .

الف ـ نشان دهید که اگر در L^2 به‌طورکم توان داشته‌باشیم $f_n \to f$ ، آنگاه برای هر $y \in [0, 1]$ ، داریم ، $f_n(y) \to f(y)$.

ب ـ اگر در L^2 به‌طورکم توان داشته‌باشیم $f_n \to f$ ، آنگاه $\|f_n\|_\infty$ کراندار است ، ازاین‌رو بنابرقضیهٔ همگرایی لبگ به‌طورپرتوان در L^2 داریم $f_n \to f$

پ ـ فضای S یک زیرفضای فشردهٔ موضعی L^2 است وازاین‌رو با بعد باپایان است .

۷* ـ کـــــــوژی

یک زیرمجموعهٔ K ازیک فضای برداری X **کـــوژ** نامیده می‌شود اگر ، هروقت شامل دونقطهٔ x و y است شامل $\lambda x + (1 - \lambda)y$ ، $0 \le \lambda \le 1$ نیز باشد . مجموعهٔ $\{z : z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ و $0 \le \lambda \le 1$ برای $\}$ پاره‌خط واصل‌بین x و y نامیده

می‌شود. نقطه‌های x و y را نقطه‌های انتهایی آن و z ی که برای آن $0 < \lambda < 1$ است یک نقطهٔ درونی پاره‌خط نامیده می‌شود. بنابراین یک مجموعهٔ K کوژ است اگر و تنها اگر هنگامی که شامل x و y است شامل پاره‌خط واصل بین x و y باشد. هر منیفلد خطی کوژ است و هر گوی‌یکه در یک فضای نرم‌دار کوژ است. در لم زیر برخی از خاصیت‌های اساسی مجموعه‌های کوژ داده شده‌است. خاصیت‌های دیگر در مسئله‌های ۴۲، ۴۳ و ۴۴ آمده‌است. برهان این لم سرراست است و حذف شده است.

۱۸ ــ لم:

اگر K_1 و K_2 دو مجموعهٔ کوژ باشند، آنگاه $K_1 \cap K_2$، λK_1، و $K_1 + K_2$ نیز مجموعه‌های کوژ هستند.

نقطه x_0 را یک نقطهٔ اندرونی یک مجموعهٔ K می‌گویند، هرگاه اشتراک هر خط گذرنده از x_0 با K شامل فاصلهٔ بازی حول x_0 باشد. بنابراین x_0، یک نقطهٔ اندرونی K است، هرگاه برای هر $x \varepsilon X$ داده‌شده، یک $\epsilon > 0$ موجود باشد به‌گونه‌ای که برای هر λ با $|\lambda| < \epsilon$، $x_0 + \lambda x \varepsilon K$ باشد. گیریم K یک مجموعهٔ کوژ است که θ یک نقطهٔ درونی آن است. دراین‌صورت تابع تکیه‌گاه p برای K (نسبت‌به θ) را با $p(x) = \inf \{\lambda: \lambda^{-1}x \varepsilon K, \lambda > 0\}$ تعریف می‌کنیم. این تابع تکیه‌گاه دارای خاصیت‌های زیر است:

۱۹ ــ لم:

اگر K یک مجموعهٔ کوژ و θ یک نقطهٔ درونی آن باشد، دراین‌صورت تابع تکیه‌گاه p دارای خاصیت‌های زیر است:

i. برای هر $\lambda \geq 0$، $p(\lambda x) = \lambda p(x)$.
ii. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.
iii. $\{x: p(x) < 1\} \subset K \subset \{x: p(x) \leq 1\}$.

برهان:

خاصیت‌های اول و سوم بی‌درنگ از تعریف p نتیجه می‌شوند. برای اثبات خاصیت دوم،

فرض می‌کنیم $\lambda^{-1}x$ و $\mu^{-1}y$ به K تعلق دارند. دراین‌صورت:

$$(\lambda + \mu)^{-1}(x + y) = \lambda(\lambda + \mu)^{-1}(\lambda^{-1}x) + \mu(\lambda + \mu)^{-1}(\mu^{-1}y)$$

به K تعلق‌دارد، زیرا K کوژ است، بنابراین $p(x + y) \leq \lambda + \mu$، و باگرفتن انفیمم روی‌همهٔ λ و μ های‌پذیرفتنی، به‌دست‌می‌آوریم $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ ∎

گفته‌می‌شود که دومجموعهٔ کوژ K_1 و K_2 به‌وسیلهٔ یک فونکسیونل‌خطی f جدا می‌شوند. هرگاه یک‌عددحقیقی α موجودباشد به‌گونه‌ای‌که روی K_1، $f(x) \leq \alpha$ بوده و روی K_2، $f(x) \geq \alpha$ باشد.

۲۰ ــ قضیــــه:

گیریم در یک فضای‌برداری X دومجموعهٔ K_1 و K_2 دومجموعهٔ‌کوژ مجزا هستند، و فرض می‌کنیم که یکی از آنها دارای یک نقطهٔ اندرونی است. راین‌صورت یک فونکسیول خطی ناصفر f وجود دارد که K_1 و K_2 را جدا می‌سازد.

بـرهـــــان:

گیریم x_1 یک‌نقطهٔ‌اندرونی K_1 است. دراین‌صورت $K_1 - K_2$ کـوژ و نقطـهٔ $x_0 = x_1 - x_2$ برای‌هر x_2 متعلق‌به K_2 یک‌نقطهٔ اندرونی $K_1 - K_2$ است. گیـریـــم $K = K_1 - K_2 - x_0$ است. دراین‌صورت K یک مجموعهٔ‌کوژاست‌که θ رابه‌عنوان‌یک‌نقطهٔ اندرونی‌خود دربردارد. چون K_1 و K_2 مجزاهستنند، $\theta \not\in K_1 - K_2$، پس $-x_0 \not\in K$
گیریم p تابع تکیه‌گاه K (نسبت‌به θ) است. دراین‌صورت $p(-x_0) \geq 1$ است. گیریم S زیرفضای یک‌بعدی X است که از همهٔ مضربهای x_0 تشکیل یافته است. f را روی S با $f(\alpha x_0) = -\alpha$ تعریف‌می‌کنیم. دراین‌صورت $f(s) \leq p(s)$ بوده و بنابرلم ۱۹، p شرط قضیهٔ هان ــ باناخ را برمی‌آورد. بنابراین می‌توان f را به‌یک فونکسیونل‌خطی گسترش داد که‌روی‌همهٔ X تعریف‌شده‌است به‌طوری که برای همهٔ x هــا $f(x) \leq p(x)$ باشد. بنابراین اگر $x \in K$ باشد داریم $f(x) \leq 1$.
گیریم $x \in K_1$ و $y \in K_2$ است. دراین‌صورت $x - y - x_0 \in K$ بوده و داریـــم

$$f(x) - f(y) - f(x_0) = f(x - y - x_0) \leq 1.$$

چون $f(x_0) = -1$، داریم $f(x) \leq f(y)$. این نابرابری که برای‌هر $x \in K_1$ و

هر y در K_2 درست است، نتیجه می دهد $\sup_{x\varepsilon K_1} f(x) \leq \inf_{y\varepsilon K_2} f(y)$. بنابراین f دو مجموعهٔ K_1 و K_2 را جدا می سازد و f یک فونکسیونل ناصفر است، زیرا $f(x_0) = -1$. ∎

یک فضای برداری توپولوژیک کـــوژ مـوضعـــی نامیده می شود هرگاه بتوانیم پایه‌ای برای این توپولوژی بیابیم که از مجموعه‌های کوژ تشکیل شده است. برای تضمین این‌که یک توپولوژی داده‌شدهٔ $\mathfrak{J}$ برای یک فضای برداری X ، آن‌را به‌یک‌فضای برداری توپولوژیک کوژ موضعی تبدیل می کند، محک مناسب در گزارهٔ زیر داده می شود. پیشنهادهایی برای برهان آن در مسئله ۴۶ داده شده است.

۲۱ ــ گـــــزاره:

گیریم $\mathfrak{N}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های کوژ در یک فضای برداری X است. در این صورت برای این‌که انتقال‌های مجموعه‌های متعلق به $\mathfrak{N}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی باشند که X را به‌یک‌فضای برداری توپولژیک کوژ موضعی بدل می سازد، شرطهــای زیـر کـافـی هستنــد:

i — *اگر $N \varepsilon \mathfrak{N}$ باشد، آنگاه هر نقطهٔ N اندرونی است.*

ii — *اگر N_1 و N_2 متعلق به $\mathfrak{N}$ باشند یک N_3 متعلق به $\mathfrak{N}$ وجود دارد با $N_3 \subset N_1 \cap N_2$.*

iii — *اگر N به $\mathfrak{N}$ متعلق باشد، آنگاه برای هر α با $0 < |\alpha| < 1$ داریم $\alpha N \varepsilon \mathfrak{N}$.*

به‌علاوه، در هر فضای برداری توپولوژیک کوژ موضعی یک پایهٔ $\mathfrak{N}$ در θ وجود دارد که در این شرطها صدق می کند.

از این گزاره نتیجه می شود که توپولوژی کم‌توان روی یک فضای برداری X که با یک خانواده از فونکسیونل‌های خطی تولید می شود، X را به‌یک‌فضای برداری توپولوژیک کوژ موضعی بدل می سازد. هر فضای برداری نرم دار نیز یک فضای برداری توپولوژیک کوژ موضعی است.

۲۲ ــ گـــــزاره:

گیریم X یک‌فضای برداری توپولوژیک کوژ موضعی و F یک زیرمجموعهٔ بستهٔ کوژ آن است. گیریم x_0 نقطه‌ای از X است که به F تعلق ندارد. در این صورت روی X یـــک فونکسیونل خطی پیوستهٔ f وجود دارد به‌گونه‌ای که

$$f(x_0) < \inf_{x\varepsilon F} f(x)$$

برهـــــان :

با انتقال به اندازهٔ $-x_0$، گزاره را به حالت $\theta = x_0$ برمی‌گردانیم. چون θ یک نقطه از بستار F نیست، یک مجموعهٔ کوژ باز N وجود دارد که θ را دربردارد، ولی با F برخورد ندارد. گیریم $O = N \cap (-N)$. در این صورت O یک مجموعهٔ کوژ باز است که θ را دربردارد، و مجزا از F و $O = -O$ است. چون θ یک نقطهٔ درونی O است (مسئلهٔ ۴۴ الف را ببینید)، بنابر قضیهٔ ۲۰ یک فونکسیونل خطی ناصفر f وجود دارد به‌گونه‌ای که $\sup_{x \in O} f(x) \leq \inf_{y \in F} f(y) = \alpha$. بنابراین برای هر x متعلق به O داریم $f(x) \leq \alpha$ ولی چون $O \ni x$ ایجاب می‌کند $-x \in O$ پس روی O داریم $-f(x) \leq \alpha$، از آنجا روی O، داریم $|f(x)| \leq \alpha$. بنابراین برای هر $\epsilon > 0$ روی مجموعهٔ $O' = (\epsilon\alpha^{-1})O$ داریم $|f(x)| < \epsilon$. ولی O' یک مجموعهٔ باز حاوی θ است، پس f در θ پیوسته است. چون f خطی و در θ پیوسته است، پس در هر نقطه پیوسته است.

اکنون تنها باید نشان دهیم که $\alpha > 0$ است. چون f یک فونکسیونل ناصفر است، یک x وجود دارد به‌گونه‌ای که $f(x) > 0$. چون θ یک نقطهٔ درونی O است، می‌توانیم $\lambda > 0$ را طوری برگزینیم که λx در O باشد. در این صورت:

$$0 < \lambda f(x) = f(\lambda x) \leq \alpha. \blacksquare$$

۲۳ ــ نتیجـــــه :

گیریم K در یک فضای توپولوژیک کوژ موضعی یک مجموعهٔ کوژ است. در این صورت K به‌طور پرتوان بسته است اگر و تنها اگر به‌طور کم‌توان بسته باشد.

۲۴ ــ نتیجـــــه :

گیریم x و y دو نقطهٔ متمایز از یک فضای برداری توپولوژیک کوژ موضعی X، هستند. در این صورت یک فونکسیونل خطی پیوستهٔ f وجود دارد به‌گونه‌ای که $f(x) \neq f(y)$.

گیریم K یک زیرمجموعهٔ کوژ یک فضای برداری X است. نقطهٔ x متعلق به K، یک نقطهٔ نهـــایـــــی نامیده می‌شود هرگاه یک نقطهٔ درونی هیچ پاره‌خط واقع در K، نباشد. بنابراین x نهایی است اگر و تنها اگر، هر وقت $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ با $0 < \lambda < 1$ باشد،

داشته‌باشیم $y \notin K$ یا $z \notin K$. می‌خواهیم نشان دهیم که هرمجموعهٔ فشردهٔ کوژ دارای نقطه‌های‌نهایی‌است ، ولی نخست چندمفهوم‌ابتدایی‌را درنظر می‌گیریم. زیرمجموعهٔ K از یک‌مجموعهٔ کوژ S یک‌مجموعهٔ تکیه‌گاه K نامیده می‌شود هرگاه بسته و کوژ بوده و دارای این‌خاصیت باشد که اگر یک‌نقطهٔ درونی یک پاره‌خط‌واقع در K به S تعلق داشته باشد ، آنگاه‌همهٔ‌پاره‌خط به S متعلق‌باشد . بنابراین هرنقطهٔ‌نهایی یک مجموعهٔ‌تکیه‌گاه درست از یک نقطه تشکیل می‌شود .

۲۵ ــ لــــم :

گیریم f ، روی یک مجموعهٔ بستهٔ کوژ K ، یک فونکسیونل خطی پیوسته *است* . دراین‌صورت‌مجموعهٔ S متشکل‌از نقطه‌هایی که درآنها f ماکزیمم خودرا روی K می‌گیرد یک‌مجموعهٔ تکیه‌گاه K *اســت* .

بــرهــــان :

مجموعهٔ S کوژ است ، زیرا اگر $f(x) = m$ و $f(y) = m$ باشد ، آنــگــاه $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = m$ است . اگرپاره‌خط‌واصل‌بین x و y در K باشدو f ماکزیمم خود ، m رادرنقطهٔ $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ بگیرد ،آنگاه $m = \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$ وچون $f(x)$ و $f(y)$ بزرگتراز m نیستند ، باید داشته‌باشیم $f(x) = f(y) = m$. ولی این‌ایجاب‌می‌کند که $f(\mu x + (1 - \mu)y) = m$ ، پس همهٔ‌پاره‌خط‌واصل x به y ، به S تعلق‌دارد. ∎

اشتــــراک همــهٔ مجموعه‌های کوژ حاوی‌یک‌مجموعهٔ E یک‌مجموعهٔ کوژ است که شامل E و مشمول‌هرمجموعهٔ‌کوژ شامل E است . این‌مجموعه **قشــر کـــوژ** E نامیده می‌شود . اشتراک‌همه‌مجموعه‌های‌کوژ بستهٔ‌حاوی E مجموعهٔ کوژ بسته‌ای است که شامل E ، است و مشمول هرمجموعهٔ‌کوژ بستهٔ‌شامل E است . این مجموعه **قشــر کــوژ بستـــهٔ** E ، نامیــده مــی‌شــود .

۲۶ ــ قضیــهٔ (کــریــن ــ میلمــن)[1]

گیریم K ، درفضای‌برداری‌توپولوژیک‌کوژموضعی X یک‌مجموعهٔ‌کوژ فشرده *است* . دراین‌صورت K ، قشرکوژ بستهٔ نقطه‌های نهایی خودش *است* .

برهان (کلی[1]) :

فرض می‌کنیم که K تهی نیست . ازتعریف مجموعه‌های تکیه‌گاه نتیجه می‌شود که اشتراک‌هردسته ازمجموعه‌های‌تکیه‌گاه K یک‌مجموعه‌ٔتکیه‌گاه آن‌است ، و اگر S یک‌مجموعهٔ تکیه‌گاه Kو T یک‌مجموعهٔ تکیه‌گاه S باشد آنگاه T یک‌مجموعهٔ تکیه‌گاه Kاست .

برای هر مجموعهٔ تکیه‌گاه ناتهی S از K ، خانوادهٔ همهٔ مجموعه‌های تکیه‌گاه ناتهی K با رابطهٔ شمول به‌طورجزیی مرتب است ، و بنابراصل ماکسیمال هاوسدورف یک خانوادهٔ به‌طورخطی‌مرتب ماکسیمال $\mathcal{S}$ از مجموعه‌های‌تکیه‌گاه ناتهی وجود دارد که S ، متعلق‌به‌آن‌است . چون K فشرده است ، اشتراک T ی همهٔ عضوهای $\mathcal{S}$ ناتهی است و از این‌رو خود یک مجموعهٔ‌تکیه‌گاه ناتهی K است . به‌علاوه این‌اشتراک یک مجموعهٔ تکیه‌گاه ناتهی مینیمال‌است ، زیرا اگر T به‌طورسره شامل یک‌مجموعهٔ‌تکیه‌گاه‌باشد ، آنگاه‌خانوادهٔ $\mathcal{S}$ ماکسیمال نخواهدبود . بنابراین هرمجموعهٔ‌تکیه‌گاه شامل یک‌مجموعهٔ‌تکیه‌گاه ناتهی مینیمال است . ولی هرمجموعهٔ‌تکیه‌گاه ناتهی مینیمال می‌تواند شامل تنها یک‌نقطه‌باشد . زیرا اگر یک مجموعهٔ تکیه‌گاه S شامل دونقطهٔ‌متمایز x و y باشد ، یک فونکسیونل خطی پیوستهٔ f وجود دارد به‌گونه‌ای‌که $f(x) > f(y)$. دراین‌صورت زیرمجموعه‌ای از S که در آن f ماکزیمم خود را می‌گیرد ، بنابرلم ۲۵ ، یک زیرمجموعهٔ تکیه‌گاه S و از این‌رو یک‌تکیه‌گاه K است . چون K فشرده‌است ، پس این‌زیرمجموعه یک‌زیرمجموعهٔ‌تکیه‌گاه ناتهی K است که شامل y نیست .

اگر یک‌مجموعهٔ‌تکیه‌گاه درست از یک‌نقطه‌متشکل‌باشد ، این‌نقطه‌بایدنهایی‌باشد . ازاین‌رو نشان دادیم که هر مجموعهٔ تکیه‌گاه ناتهی شامل یک نقطهٔ نهایی است .

چون زیرمجموعه‌ای از K که‌در آن یک فونکسیونل خطی ماکزیمم خودرا می‌گیرد یک‌مجموعهٔ‌تکیه‌گاه‌ناتهی‌است ، نتیجه می‌گیریم که ماکزیمم یک فونکسیونل خطی پیوسته روی K برابر است باماکزیمم آن روی‌مجموعهٔ E ی نقطه‌های نهایی K . گیریم C قشرکوژ بستهٔ نقطه‌های‌نهایی K است ، و فرض‌کنیم $x \notin C$. بنابرگزارهٔ ۲۲ یک‌فونکسیونل‌خطی پیوستهٔ f وجودداردبه‌گونه‌ای‌که $f(x) > \max\limits_{y\epsilon C} f(y) = \max\limits_{y\epsilon K} f(y)$. بنابراین $x \notin K$ ، و داریم $K \subset C$. ازاین‌رو $K = C$ است . ∎ .

---

1 — Kelley

مسئله‌ها

۴۲ ــ گیریم A یک عملگرخطی از فضای برداری X برفضای‌برداری Y است . در این‌صورت سایهٔ هرمجموعهٔ کوژ (یا مانیفلدخطی) در X یک‌مجموعهٔ کوژ (یا مانیفلدخطی) در Y است و سایهٔ وارون هرمجموعهٔ کوژ (یا مانیفلد خطی) در Y یک مجموعهٔ کوژ (یا مانیفلد خطی) در X است . با آوردن مثالی نشان دهید که یک مجموعهٔ ناکوژ می‌تواند یک سایهٔ کوژ داشته باشد .

۴۳ــ نشان‌دهیدکه‌بستاریک‌مجموعهٔ‌کوژ K دریک‌فضای‌برداری‌توپولوژیک‌کوژاست .

۴۴ ــ الف ــ نشان‌دهیدکه هرنقطهٔ‌درونی یک زیرمجموعهٔ‌کوژ یک فضای‌برداری توپولوژیک ، یک‌نقطهٔ‌اندرونی‌است [**راهنمایی** : از پیوستگی عمل ضرب استفاده‌کنید]

ب ــ نشان‌دهیدکه‌در $\mathbf{R}^n$ هرنقطهٔ‌اندرونی یک‌مجموعهٔ‌کوژ یک نقطهٔ‌درونی‌است .

پ ــ درصفحه‌مجموعه‌ای مثال‌بزنیدکه‌دارای یک‌نقطهٔ اندرونی (Internal) است که یک نقطهٔ درونی (Interior)آن نیست .

۴۵ ــ گیریم K یک‌مجموعهٔ‌کوژ شامل θ است ، وفرض کنیم که x یک‌نقطهٔ‌اندرونی K است . دراین‌صورت‌برای‌یک $\lambda > 0$ مجموعهٔ $x + \lambda K$ مشمول K است [**راهنمایی** : $\lambda > 0$ را طوری برگزینید که $(1 - \lambda)^{-1}x$ متعلق‌به K باشد.]

۴۶ ــ گزارهٔ ۲۱ را ثابت‌کنید .[**راهنمایی** :اگر N کوژ باشد ، دراین‌صورت داریم : $\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N \subset N$. از گزارهٔ ۱۴ و برهان آن استفاده کنید.]

۴۷ــ **تواناترین‌توپولوژی‌کوژموضعی** . گیریم X یک‌فضای‌برداری و $\mathfrak{B}$ دستهٔ‌همهٔ مجموعه‌های کوژ V ی شامل θ است به‌گونه‌ای‌که برای هر $x \varepsilon X$ یک $\alpha > 0$ وجودداردبا $\alpha x \varepsilon V$. دراین‌صورت $\mathfrak{B}$ ، برای‌یک‌توپولوژی کوژ موضعی روی X ، یک پایهٔ‌موضعی‌است . و این توپولوژی تواناتر از هر توپولوژی کوژ موضعی دیگر روی X است .

۴۸ ــ الف ــ در $L^p[0, 1]$ ، $1 < p < \infty$ ، هر x با $\|x\| = 1$ یک‌نقطهٔ نهایی کرهٔ یکهٔ $S = \{x: \|x\| \leq 1\}$ است .

ب ــ در $L^\infty[0, 1]$ نقطه‌های‌نهایی کرهٔ یکه ، آن x هایی است که برای آنها ت . ه . $|x(t)| = 1$ است .

پ ــ در $L^1[0, 1]$ کرهٔ یکه هیچ نقطهٔ نهایی ندارد .

ت ــ $L^1[0, 1]$ دوگان هیچ فضای خطی نرم‌دار نیست .

ث ــ در l^p نقطه‌های نهایی کرهٔ یکه کدامند ؟

ج ـ نقطه‌های نهایی کرهٔ یکه در $C(X)$ ، که درآن X یک‌فضای هاوسدورف فشرده است ، کدامند ؟ نشان دهید که $C[0, 1]$ دوگان هیچ‌فضای خطی نرم‌دار نیست .

۴۹ ـ گیریم X فضای‌برداری همهٔ‌تابعهای‌حقیقی اندازه‌پذیر روی $[0, 1]$ است ، که روی آن دوعمل‌جمع وضرب‌دراسکالر به‌طور معمولی تعریف شده‌اند ، $\sigma(x)$ را بـا

$$\sigma(x) = \int_0^1 \frac{|x(t)|}{1 + |x(t)|}\, dt$$

تعریف می‌کنیم .

الف ـ داریم $\sigma(x + y) \leq \sigma(x) + \sigma(y)$. از این رو اگر تعریف کنیـــم $\rho(x, y) = \sigma(x - y)$ ، دراین‌صورت ρ برای X یک متریک است .

ب ـ دراین‌متریک x_n به x می‌گراید اگروتنهااگر x_n دراندازه‌به x بگراید .

پ ـ X یک فضای متریک کامل است (مسئلهٔ ۴ ، ۲۵ را ببینید) .

ت ـ جمع ، یک نگاشت پیوسته از $X \times X$ در X است .

ث ـ ضرب ، یک‌نگاشت‌پیوسته از $\mathbf{R} \times X$ در X است .[چون X یک‌فضای‌متریک است ، کافی‌است ثابت‌کنید که اگر $x_n \to x$ و $\lambda_n \to \lambda$ آنگاه $\lambda_n x_n \to \lambda x$ این مطلب ازقضیهٔ همگرایی کراندار برای همگرایی در اندازه نتیجه می‌شود .]

ج ـ نشان دهید که مجموعهٔ تابعهای پله‌ای در X متراکم است .

چ ـ روی X هیچ فونکسیونل خطی پیوستهٔ ناصفر وجود ندارد .[نشان دهیدکه یک n وجود داردبه‌گونه‌ای‌که‌هروقت x تابع مشخص فاصله‌ای به‌طول کمتراز $1/n$ است ، آنگاه $f(x) = 0$ است . ازاین‌رو برای‌همهٔ‌تابعهای‌پله‌ای x داریم $f(x) = 0$]

ح ـ X یک فضای برداری توپولوژیک است که کوژ موضعی نیست .

خ ـ گیریم s فضای همهٔ دنباله‌های عددهای حقیقی است و تعریف می‌کنیم :

$$\sigma(\langle\xi_\nu\rangle) = \sum \frac{2^{-\nu}|\xi_\nu|}{1 + |\xi_\nu|}$$

همتاهای (الف) ، (پ) ، (ت) ،و (ث) را ثابت کنید . روی s کلی‌ترین فونکسیونـــل خطی پیوسته کدام است ؟

۸ ــ فضــای هیلبــــــرت[1]

فضای‌هیلبرت‌یک‌فضای‌باناخ H است که‌درآن یک تابع (x, y) از روی $H \times H$ بر $\mathbf{R}$ تعریف شده است که دارای خاصیتهای زیر است[2]:

i. $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1(x_1, y) + \alpha_2(x_2, y)$

ii. $(x, y) = (y, x)$

iii. $(x, x) = \|x\|^2$

(x, y) را ضرب داخلی x و y می‌نامیم . دومثال بدیهی عبارتند از: یکی فضای $\mathbf{R}^n$ با $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ است .

مثال دیگر فضای L^2 با

$$(x, y) = \int x(t)y(t)\, dt$$

اســـت .

چون $\|x\| \geq 0$ است‌وبرابری‌هنگامی‌برقراراست‌که $x = \theta$ باشد ، پس‌داریم :

$$0 \leq \|x - \lambda y\|^2 = (x - \lambda y, x - \lambda y)$$
$$= (x, x) - 2\lambda(x, y) + \lambda^2(y, y).$$

اگر $\lambda > 0$ باشد ، داریم :

$$2(x, y) \leq \lambda^{-1}\|x\|^2 + \lambda\|y\|^2.$$

باقرار دادن $\lambda = \|x\|/\|y\|$ ، به‌دست می‌آوریم

$$(x, y) \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

و می‌بینیم که‌برابری تنها هنگامی رخ‌می‌دهد که $y = \theta$ یا برای یک $\lambda \geq 0$ ، $x = \lambda y$ باشد . این نابرابری به‌نامهای گوناگون شوارتز[3] ، کشی ــ شوارتز ، کشی ــ بونیاکوسکی ــ شوارتز ، شناخته می‌شود . یک نتیجهٔ این نابرابری این است که فونکسیونل خطی f کـه

۱ــ Hilbert space

۲ ــ دراینجا یک‌فضای هیلبرت‌حقیقی‌را تعریف کردیم . درآنالیز به‌طورکلی بهتراست که بافضای‌هیلبرت‌مختلط کارکنیم ، یعنی فضای‌هیلبرتی که‌در آن اسکالرها عددهای مختلط هستند ، ضرب داخلی ، یک تابع بامقدارهای مختلط‌است و (ii) با (ii′) یعنی $(x,y) = \overline{(y,x)}$. جانشین می‌شود .

۳ ــ Schwarz ۴ ــ Cauchy ۵ ــ Buniakowsky

با $f(x) = (x, y)$ تعریف می‌شود، با $\|y\|$ کراندار است، وازاینجا نتیجه می‌شود که (x, y) یک تابع پیوسته از $H \times H$ بر $\mathbf{R}$ است.

دوعنصر x و y متعلق‌به H **متعامد** نامیده می‌شود هرگاه $(x, y) = 0$ باشد. برای نشان دادن متعامد بودن x و y می‌نویسیم $x \perp y$. در H مجموعهٔ $\mathcal{S}$ یک **دستگاه‌متعامد** نامیده می‌شود اگر هردو عنصر φ و ψ متعلق‌به $\mathcal{S}$ متعامدباشند، یعنی $(\varphi, \psi) = 0$ باشد. یک‌دستگاه‌متعامد $\mathcal{S}$ را **متعامد یکه** می‌گویندهرگاه برای هر φ متعلق به $\mathcal{S}$ داشته باشیم $\|\varphi\| = 1$. دوری هر دو عنصر یک دستگاه متعامد یکه‌ازیکدیگربرابر $\sqrt{2}$ است. ازاین‌رو اگر H جدایی‌پذیرباشد، هردستگاه‌متعامد یکهٔ آن باید شمارش پذیر باشد.

ازاین پس تنها بافضاهای‌هیلبرت جدایی‌پذیر کارمی‌کنیم. بنابراین هردستگاه متعامد را می‌توان‌به‌شکل‌یک‌دنبالهٔ $\langle \varphi_\nu \rangle$ بیان‌کرد که ممکن‌است باپایان یا بی‌پایان باشد. **ضریبهای‌فوریهٔ**[1] **یک‌عنصر** x متعلق‌به H را (نسبت به $\langle \varphi_\nu \rangle$) با $a_\nu = (x, \varphi_\nu)$ تعریف می‌کنیم. برای هر n داریم[2]:

$$0 \le \left\| x - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi_\nu \right\|^2 = \|x\|^2 - 2 \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu (x, \varphi_\nu) + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} a_\nu a_\mu (\varphi_\nu, \varphi_\mu)$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2$$

بنابراین

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2 \le \|x\|^2$$

---

1 – Fourier

۲ ــ اگر شمارهٔ عناصر متعلق به $\langle \varphi_\nu \rangle$ پایاندار و برابر N باشد، قرار می‌گذاریم که منظور از $\sum_{\nu=1}^{n}$ همان $\sum_{\nu=1}^{N}$ برای $N \le n \le \infty$ است.

و چون n دلخواه بود، نابرابری بسل[1] به‌دست می‌آید:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2 \leq \|x\|^2.$$

ازسوی دیگر،گیریم $\langle a_\nu \rangle$ یک دنباله از عددهای حقیقی است با $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2 < \infty$ دراین‌صورت دنبالهٔ $z_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi_\nu$ یک دنبالهٔ کشی است، زیرا برای $m \geq n$ داریم

$$z_m - z_n = \sum_{n+1}^{m} a_\nu \varphi_\nu$$

و

$$\|z_m - z_n\|^2 = \sum_{n+1}^{m} a_\nu^2$$

که باید به‌صفربگراید زیرا $\sum a_\nu^2$ همگراست. بنابرکمال H یک عنصر y در $\mathbf{H}$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $y = \lim z_n$ ، و می‌نویسیم

$$y = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu$$

چون ضرب درونی پیوسته است، داریم

$$(y, \varphi_\nu) = \lim (z_n, \varphi_\nu) = a_\nu$$

بنابراین نشان‌دادیم‌که برای هر x یک y به‌شکل $y = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu$ وجود دارد که ضریبهای فوریهٔ آن همانند ضریبهای فوریهٔ x است.

چه موقعی این y با x برابر است؟ اگر به‌$x - y$ توجه کنیم، می‌بینیم‌که همهٔ ضریبهای فوریهٔ آن صفرند. ازاین‌رو هنگامی $x = y$ است که دستگاه متعامد $\langle \varphi_\nu \rangle$ دارای این خاصیت باشد که اگر برای همهٔ ν ها $(z, \varphi_\nu) = 0$ باشد،آنگاه $z = \theta$ گردد. هر دستگاه متعامد بااین‌خاصیت یک دستگاه کامل (یا کلی) نامیده‌می‌شود.

۱ـ Bessel

هردستگاه‌متعامدیکهٔ‌کامل‌ماکسیمال‌است، در حالی که، اگر $\langle\varphi_\nu\rangle$یک دستگاه متعامد یکهٔ‌ماکسیمال باشد، بایدکامل‌باشد. زیرا ،اگر $(z, \varphi_\nu) = 0$ برای‌همه ν ها برقراربوده و $z \neq \theta$ باشد،آنگاه‌می توان $z/\|z\|$ را به $\langle\varphi_\nu\rangle$ افزود. اصل ماکسیمال هاوسدورف وجود یک دستگاه متعامد یکه را ایجاب می‌کند. بنابراین گزارهٔ‌زیر را ثابت کردیم:

۲۷ ــ گزاره:

درهرفضای‌هیلبرت‌جدایی‌پذیرهردستگاه‌متعامدیکه شمارش‌پذیراست ،ویک‌دستگاه متعامدیکهٔ‌کامل وجود دارد. اگر $\langle\varphi_\nu\rangle$ یک‌دستگاه‌متعامدیکه کامل‌دلخواه‌و x عنصر دلخواهی از H باشد داریم:

$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu,$$

که در آن $a_\nu = (x, \varphi_\nu)$ به‌علاوه $\|x\|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2$.

درهرفضای جدایی‌پذیر هیلبرت دو شق وجود دارد: یا هر دستگاه متعامد یکهٔ کامل دارای شمارهٔ‌بی‌پایانی عنصر است، یا یک دستگاه‌متعامد یکهٔ کامل وجود دارد که شمارهٔ عناصرآن باپایان و برابر N است. درحالت‌اخیر چنین دستگاهی بنابرگزارهٔ ۲۷ پایهٔ H (به‌معنی فضای برداری) است. ازاین‌رو H یک فضای برداری با بعد باپایان است، و هردستگاه از $N + 1$ عنصر به‌طورخطی وابسته‌اند. درنتیجه، هردستگاه‌متعامد یکه می‌تواند حداکثر N عنصر داشته باشد. از اینجا نتیجه می‌شود که هردستگاه متعامد یکهٔ کامل باید N عنصر داشته باشد. بنابراین ثابت کردیم که در هر فضای هیلبرت جدایی‌پذیر H شمارهٔ‌عنصرهای هردستگاه متعامد یکهٔ کامل همانند است. این شماره‌را بعد H می‌نامیم. (بنابراین اگر H دارای یک دستگاه متعامد یکهٔ کامل بی‌پایان باشد می‌گوییم $\aleph_0 =$ بعْد H است).

یک‌ایزومرفیسم Φ ازیک‌فضای‌هیلبرت H به‌روی یک فضای هیلبرت H' یک نگاشت خطی از H بر H' است‌به‌گونه‌ای‌که $(\Phi x, \Phi y) = (x, y)$. بنابراین هرایزومرفیسم بین‌فضاهای‌هیلبرت یک ایزومتری است. هرفضای n بعدی‌هیلبرت با $\mathbf{R}^n$ ایزومرف است،

زیرا نگاشتی‌که با $\Phi(x) = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ ،که در آن $a_\nu = (x, \varphi_\nu)$ است ، تعریف‌می‌شود یک ایزومرفیسم است . به‌همین‌ترتیب هرفضای‌هیلبرت از بعد $\aleph_0$ با l^2 ، ایزومرف‌است . چون $L^2[0, \pi]$ جدایی‌پذیرو $\{\cos \nu t\}$ یک‌دستگاه‌متعامدبی‌پایان است ، می‌بینیم که بعد L^2 برابر $\aleph_0$ است ، پس L^2 با l^2 ایزومرف است .

۲۸ ــ گـــــــزاره :

گیریم f یک‌فونکسیونل‌خطی‌کراندار ،روی‌فضای‌هیلبرت H ،است . دراین‌صورت‌یک $y \in H$ وجوددارد به‌گونه‌ای‌که‌برای‌همهٔ x ها $f(x) = (x, y)$. به‌علاوه $\|f\| = \|y\|$.

بـــرهـــــان :

(تنها حالتی‌را که H جدایی‌پذیر است درنظر می‌گیریم . برای حالتی که H ، جدایی‌ناپذیراست ، مسئلهٔ ۵۲ را ببینید) . گیریم $\langle \varphi_\nu \rangle$ یک‌دستگاه‌متعامد یکهٔ‌کامل برای H است ، و قرارمی‌دهیم $b_\nu = f(\varphi_\nu)$. دراین‌صورت برای هر n داریم :

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^2 = f\left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \varphi_\nu\right) \leq \|f\| \cdot \left\|\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \varphi_\nu\right\| \leq \|f\| \left[\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^2\right]^{1/2}.$$

بنابراین $\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^2 \leq \|f\|^2$ ، پس $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu^2 \leq \|f\|^2 < \infty$. ازاین‌رو یک

عنصر $y = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \varphi_\nu$ وجود دارد . داریم $\|y\| \leq \|f\|$

گیریم x یک‌عنصردلخواه H است . دراین‌صورت $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi_\nu \to x$ ، پس

$$f(x) = \lim f\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi_\nu\right) = \lim \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu b_\nu$$
$$= (x, y).$$

بنابرنابرابری شوارتز $\|y\|$ $\|f\| \leq \|y\|$

مسئله‌ها

۵۰ ـ نشان دهید که ضرب درونی پیوسته است، یعنی اگر $x_n \to x$ و $y_n \to y$ ، آنگاه $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

۵۱ ـ الف ـ نشان‌دهیدکه $\{\cos \nu t, \sin \nu t\}$ (هنگامی‌که‌به‌طورمناسبی نرمال شده باشند) یک دستگاه متعامد یکهٔ کامل برای $L^2[0, 2\pi]$ است (مسئله‌های ۶ . ۱۴ و ۹ . ۲۸ را ببینید) .

ب ـ در $L^2[0, 2\pi]$ ، هرتابع برابر با حد در میانگین (مرتبهٔ دوم) سری فوریهٔ خودش است (بند ۶ . ۳ را ببینید) .

۵۲ ـ الف ـ نشان‌دهید که در هر فضای هیلبرت جدایی‌ناپذیر، برای هر x ، تنها تعداد شمارش‌پذیری از ضریبهای فوریهٔ (نسبت‌به یک‌دستگاه متعامد یکهٔ مشخص) ناصفر وجود دارد .

ب ـ نشان دهید که گزارهٔ ۲۷ در یک فضای هیلبرت جدایی‌ناپذیر باز برقرار است به‌جز این‌که هر دستگاه متعامد یکهٔ کامل شمارش‌ناپذیر است .

پ ـ نشان‌دهیدکه‌گزارهٔ ۲۸ دریک‌فضای‌هیلبرت‌جدایی‌ناپذیربازهم‌برقراراست .

ت ـ نشان‌دهیدکه‌اگر H یک‌فضای‌هیلبرت با بعد بی‌پایان باشد، آنگاه شمارهٔ عنصرهای یک دستگاه متعامد یکهٔ کامل در H که آن‌را با $\mathbf{n}$ می‌نمایانیم کوچکترین عدد اصلی $\mathbf{n}$ است به‌گونه‌ای که یک زیرمجموعهٔ متراکم H با $\mathbf{n}$ عنصر وجود دارد . ازاین‌رو شمارهٔ عنصرهای‌دستگاههای‌متعامدیکهٔ‌کامل در H برابرند . این‌شماره‌رابعد H می‌نامیم .

ث ـ نشان دهید که دو فضای هیلبرت ایزومرف هستند اگر و تنها اگر بعدشان برابر باشد .

ج ـ نشان دهید که بعد یک فضای هیلبرت می‌تواند هرعددی باشد .

۵۳ ـ گیریم P زیرمجموعه‌ای از H است . منظور از مکمل متعامد P که آن‌را با $P^\perp$ می‌نمایانیم مجموعهٔ $\{y: y \perp x$ ، برای همهٔ $x \varepsilon P\}$ است .

الف ــ نشان دهید که $P^{\perp}$ همواره یک مانیفلد خطی بسته است .

ب ــ نشان دهید که $P^{\perp\perp}$ کوچکترین مانیفلد خطی بسته شامل P است .

پ ــ گیریم M یک مانیفلد خطی بسته است . دراین‌صورت هر $x \in H$ را می‌توان به‌طور یکتا به‌شکل $x = y + z$ نوشت با $y \in M$ و $z \in M^{\perp}$ به‌علاوه $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$.

۵۴ ــ گیریم $\langle x_n \rangle$ یک‌دنبالهٔ کراندار از عنصرهای یک‌فضای هیلبرت جدایی‌پذیراست . دراین‌صورت $\langle x_n \rangle$ زیردنباله‌ای‌دارد که به‌طورکم‌توان همگراست .

۵۵ ــ گیریم S یک‌زیرفضای $L^2[0, 1]$ است ، و فرض می‌کنیم که یک ثابت K ، وجوددارد به‌گونه‌ای‌که‌برای‌هر $x \in [0, 1]$ داریم $|f(x)| \leq K\|f\|$. دراین‌صورت بعد S حداکثر K^2 است . [راهنمایی : اگر $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle$ در S یک‌دنبالهٔ متعامد یکهٔ باپایانی باشد ، آنگاه داریم : $\sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|^2 \leq K^2$.]

بخش سه

نظریه اندازه‌وانتگرال گیری عمومی

فصل یازدهم

اندازه و انتگرال گیری

۱ ــ فضاهای اندازه

مقصود از این فصل تجرید مهمترین خاصیت‌های اندازهٔ لبگ و انتگرال‌گیری لبگ است . این کار را با بیان اصلهایی انجام می‌دهیم که اندازهٔ لبگ در آنها صدق می‌کند ، و نظریهٔ انتگرال‌گیری را برآنها پایه‌گذاری می‌کنیم . به‌عنوان یک پیامد ، نظریهٔ ما برای هر دستگاهی که در اصلهای ذکر شده صدق کند معتبر خواهد بود .

درآغاز یادآوری می‌کنیم که هر σ جبر $\mathcal{B}$ ، یک خانوادهٔ از زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ دادهٔشدهٔ X است که شامل $\varnothing$ است و نسبت به‌مکمل‌گیری و اجتماع شمارش‌پذیر بسته است . منظور از یک تابع مجموعهٔ μ تابعی است که به‌هرعضو دستهٔ خاصی از مجموعه‌ها ، یک عدد حقیقی گسترش‌یافته نسبت می‌دهد . با توجه به‌این تعریف زیر را بیان می‌کنیم :

تعریف :

منظور از یک فضای اندازه‌پذیر یک جفت $(X, \mathcal{B})$ متشکل از یک مجموعهٔ X و یک σ-جبر $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های آن است . زیرمجموعهٔ A از X را اندازه‌پذیر (یا اندازه‌پذیر نسبت به $\mathcal{B}$) می‌نامند هرگاه $A \in \mathcal{B}$ باشد .

تعریف :

منظور از یک اندازهٔ μ روی یک فضای اندازه‌پذیر $(X, \mathcal{B})$ ، یک تابع مجموعهٔ نامنفی است که برای همهٔ مجموعه‌های $\mathcal{B}$ تعریف‌شده و دارای خاصیت‌های زیر است : $\mu(\varnothing) = 0$ و برای هر دنبالهٔ E_i از مجموعه‌های اندازه‌پذیر مجزا داریم :

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu E_i$$

هرفضای اندازهٔ $(X, \mathcal{B}, \mu)$. *یک‌فضای اندازه‌پذیر* $(X, \mathcal{B})$ *است توأم با یک اندازهٔ* μ *که روی* $\mathcal{B}$ *تعریف شده است .*

خاصیت دوم μ را اغلب خاصیت جمعی شمارش‌پذیر می‌گویند . دراین‌صورت μ جمعی باپایان نیز می‌باشد ، یعنی برای مجموعه‌های مجزای E_i متعلق‌به $\mathcal{B}$ داریم :

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{N} E_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \mu E_i,$$

زیرا می توان برای $i > N$ قرار داد $E_i = \varnothing$.

مثالی از یک فضای اندازه ، فضای $(\mathbf{R}, \mathfrak{M}, m)$ است ، که درآن $\mathbf{R}$ مجموعهٔ عددهای‌حقیقی ، $\mathfrak{M}$ مجموعه‌های‌اندازه‌پذیرلبگ‌ازعددهای‌حقیقی ،و m اندازه‌لبگ‌است . فضای‌اندازهٔ دیگر فضایی است که در آن $\mathbf{R}$ با فاصلهٔ $[0, 1]$ و $\mathfrak{M}$ بازیرمجموعه‌های اندازه‌پذیرآن فاصله جایگزین‌می‌شود . مثال سوم $(\mathbf{R}, \mathcal{B}, m)$ است که در آن $\mathcal{B}$ دستهٔ مجموعه‌های برل و m نیز همان اندازهٔ لبگ است . مثال دیگر اندازهٔ شمارنده است (مسئلهٔ ۳ . ۴ را ببینید) . مثال‌اندکی‌شگفت‌انگیزمثال‌زیراست . گیریم X یک‌مجموعهٔ شمارش‌ناپذیر و $\mathcal{B}$ خانوادهٔ آن زیرمجموعه‌هایی‌است‌که یا شمارش‌پذیرند و یا مکمل آنها شمارش‌پذیر است . دراین‌صورت $\mathcal{B}$ یک σ جبر است و می‌توان روی‌آن یک اندازه باقرار دادن، $\mu A = 0$ برای‌هرمجموعهٔ‌شمارش‌پذیر و $\mu B = 1$ برای‌هرمجموعه که مکمل‌آن شمارش پذیر است تعریف کرد .

دو خاصیت دیگر اندازه‌ها در گزاره‌های زیر آمده است :

---

۱ ــ یک تابع مجموعهٔ μ که روی یک جبر مجموعه‌ها تعریف شده و در شرطهای $\mu(\varnothing) = 0$ و $\mu(A \cup B) = \mu A + \mu B$ برای دومجموعهٔ‌مجزای A و B ی متعلق به‌جبر ، صدق می‌کند *اندازهٔ* **جمعی باپایان** نامیده می‌شود .

چون تعریف ما (و کاربردهای معمولی) نیازمند یک اندازهٔ جمعی شمارش‌پذیر است ، نتیجه‌می‌شود که هراندازهٔ جمعی باپایان درحالت کلی اندازه نیست ، هرچندکه هر اندازه یک اندازهٔ جمعی باپایان است .

۱ ــ گــــزاره:

اگر $A \,\varepsilon\, \mathcal{B}$ ، $B \,\varepsilon\, \mathcal{B}$ ، و $A \subset B$ باشد، دراین‌صورت داریم:

$$\mu A \leq \mu B.$$

بــرهـــــان:

چون $B = A \cup [B \sim A]$

احتماع مجموعه‌های مجزاست، پس داریم:

$$\mu B = \mu A + \mu(B \sim A) \geq \mu A. \blacksquare$$

۲ ــ گــــزاره:

اگر $E_i \,\varepsilon\, \mathcal{B}$ ، $\mu E_1 < \infty$ ، $E_i \supset E_{i+1}$ ،باشد دراین‌صورت داریم:

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n \to \infty} \mu E_n.$$

بــرهـــــان:

قرار می‌دهیم: $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$

دراین‌صورت داریم: $E_1 = E \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i \sim E_{i+1}),$

پس E_1 اجتماعی از مجموعه‌های مجزاست . ازاین‌رو:

$$\mu E_1 = \mu E + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i \sim E_{i+1})$$

چون

$$E_i = E_{i+1} \cup (E_i \sim E_{i+1})$$

یک اجتماع مجزا است ، داریم :

$$\mu(E_i \sim E_{i+1}) = \mu E_i - \mu E_{i+1}$$

از این‌رو

$$\mu E_1 = \mu E + \sum_{i=1}^{\infty} (\mu E_i - \mu E_{i+1})$$

$$= \mu E + \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n-1} (\mu E_i - \mu E_{i+1})$$

$$= \mu E + \mu E_1 - \lim \mu E_n$$

و از آنجا برهان گزاره نتیجه می‌شود . ∎

۳ـ گـــــزاره :

اگر $E_i \in \mathcal{B}$ باشد ، دراین‌صورت :

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu E_i.$$

بـرهـــان :

گیریم $G_n = E_n \sim \left[\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right]$. دراین‌صورت $G_n \subset E_n$ ومجموعه‌های G_n مجزا هستند . ازاین‌رو :

$$\mu G_n \le \mu E_n$$

از آنجا
$$\mu(\bigcup E_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu G_n \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n. \blacksquare$$

اگر $\mu(X) < \infty$ ، باشد، اندازهٔ μ را *باپایان* می‌گویند. μ را یک اندازهٔ σ-باپایان‌می‌نامند، هرگاه یک‌دنبالهٔ $\langle X_n \rangle$ از مجموعه‌های $\mathcal{B}$ وجودداشته باشد به‌گونه‌ای که :
$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

بوده‌و $\mu X_n < \infty$ باشد. بنابرگزارهٔ ۲.۱ همواره‌می‌توان $\langle X_n \rangle$ رایک‌دنباله از مجموعه‌های مجزا گرفت. اندازهٔ لبگ روی $[0, 1]$ یک‌مثال از اندازهٔ باپایان است، درصورتیکه اندازهٔ لبگ روی$(-\infty, \infty)$یک‌اندازهٔ σ-باپایان است. اندازهٔ شمارنده روی یک مجموعهٔ شمارش‌ناپذیر، σ-باپایان نیست. در مسئله ۴۶ مثالهای دیگری داده شده است.

مجموعهٔ E را دارای *اندازهٔ باپایان* می‌گویند هرگاه $E \in \mathcal{B}$ و $\mu E < \infty$ باشد. مجموعهٔ E را دارای اندازهٔ *σ-باپایان* می‌گویند. هرگاه E اجتماع یک‌دستهٔ شمارش‌پذیر ازمجموعه‌های اندازه‌پذیر با اندازهٔ باپایان باشد. هرمجموعهٔ‌اندازه‌پذیری که مشمول یک مجموعهٔ‌بااندازهٔ σ-باپایان‌باشد خود بااندازهٔ σ-باپایان‌است، و اجتماع یک‌دستهٔ شمارش‌پذیر از مجموعه‌های‌بااندازهٔ σ-باپایان بازهم مجموعه‌ای بااندازهٔ σ-باپایان است. اگر μ یک اندازهٔ σ-باپایان باشد، دراین‌صورت هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر دارای اندازهٔ σ-باپایان است.

به‌طورکلی، تقریبا" همهٔ خاصیتهای معمولی اندازهٔ لبگ و انتگرال لبگ، برای هر اندازهٔ σ-باپایان برقرار است، و در نظریهٔ مجرد اندازه، در بسیاری از مطلب‌ها خود را به‌اندازه‌های σ-باپایان محدود می‌کنیم. باوجود این، دربسیاری از قسمتها نظریهٔ‌عمومی نیازمند فرض σ-**باپایانی‌نیست**. و داشتن‌پیشرفتی که به‌طور غیرضروری مقید کننده‌است نامطلوب به‌نظرمی‌رسد. مفهومی‌اندکی کم‌توان‌تر ازمفهوم σ-باپایان بودن، نیم‌باپایان‌بودن‌است. اندازهٔ μ را*نیم‌باپایان* می‌گویندهرگاه‌هرمجموعهٔ اندازه‌پذیر، بااندازهٔ بینهایت، شامل مجموعه‌های اندازه‌پذیری با اندازهٔ باپایان و به‌دلخواه بزرگ باشد. بنابراین هراندازهٔ σ-باپایان، نیم‌باپایان‌است، درحالی‌که، اندازه‌ای که به‌یک زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیر از مجموعهٔ شمارش‌ناپذیر X مقدار 0 و به‌هر زیرمجموعهٔ شمارش‌ناپذیر آن ∞ نسبت می‌دهد، نیم‌باپایان نیست. اندازه‌هائی که

نیم‌باپایان نیستند تااندازه‌ای شگفت‌انگیز به‌نظر می‌رسند ، و گرایش برای مقید ساختن خود به‌درنظرگرفتن‌اندازه‌های‌نیم‌باپایان وجود دارد . متأسفانه بسیاری‌ازعملهای‌طبیعی روی‌اندازه‌ها ، همانندروندگسترش‌فصل‌بعد ، ماراازرده‌ٔاندازه‌های‌نیم‌باپایان‌خارج‌می‌سازد .

فضای اندازهٔ $(X, \mathcal{B}, \mu)$ را **کامل** می‌گویند هرگاه $\mathcal{B}$ شامل همهٔ زیرمجموعه‌های ، مجموعه‌های بااندازهٔ صفر باشد ، یعنی ، اگر $B \varepsilon \mathcal{B}$ ، $\mu B = 0$ و $A \subset B$ باشددراین‌صورت $A \varepsilon \mathcal{B}$. بنابراین اندازهٔلبگ‌کامل‌است ، درحالی‌که‌اندازهٔ لبگ که به σ -جبر مجموعه‌های برل مقید شده است کامل نیست .

گزارهٔزیر که برهان آن به‌خواننده واگذار شده است (مسئله ۲) نشان می‌دهد که می‌توان هرفضای اندازه‌را باافزودن مجموعه‌های بااندازهٔصفر کامل کرد . دراین‌گزاره فضای اندازهٔ $(X, \mathcal{B}_0, \mu_0)$ را **کامل‌شدهٔ** $(X, \mathcal{B}, \mu)$ می‌نامند .

۴ ـ گزاره :

اگر $(X, \mathcal{B}, \mu)$ یک‌فضای‌اندازه‌باشد ، دراین‌صورت می‌توان‌یک‌فضای‌اندازهٔ کامل $(X, \mathcal{B}_0, \mu_0)$ یافت به‌گونه‌ای که :

i. $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_0$.

ii. $E \varepsilon \mathcal{B} \Rightarrow \mu E = \mu_0 E$.

iii. $E \varepsilon \mathcal{B}_0 \Leftrightarrow E = A \cup B$ که‌درآن $B \varepsilon \mathcal{B}$ و $A \subset C$ ، $C \varepsilon \mathcal{B}$ ، $\mu C = 0$ ،است .

اگر $(X, \mathcal{B}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد ، زیرمجموعهٔ E از X را اندازه‌پذیر موضعی می‌گویندهرگاه‌برای‌هر $B \varepsilon \mathcal{B}$ با $\mu B < \infty$ داشته‌باشیم $E \cap B \varepsilon \mathcal{B}$. دستهٔ $\mathcal{C}$ ی همهٔ مجموعه‌های اندازه‌پذیر موضعی ، σ -جبری است شامل $\mathcal{B}$.

اندازهٔ μ را **اشباع** شده می‌گویند هرگاه هرمجموعهٔ اندازه‌پذیر موضعی ، جود اندازه‌پذیر ، یعنی متعلق به $\mathcal{B}$ باشد . هراندازهٔ σ- باپایان اشباع شده است . می‌توان هراندازه‌را گسترش داد به‌گونه‌ای که به‌یک‌اندازهٔ اشباع شده تبدیل گردد ، ولی برخلاف روند کامل‌سازی ، روند اشباع‌سازی ، به‌طوریکتا تعیین‌نمی‌شود : درمورد σ-جبر هیچ‌اشکالی‌وجودندارد ،زیرابه‌طورساده σ -جبر $\mathcal{C}$ متشکل‌ازهمهٔمجموعه‌های‌اندازه‌پذیر را درنظر می‌گیریم ، ولی‌اندازهٔ μ را می‌توان باروشهای گوناگون روی $\mathcal{C}$ گسترش داد . برخی‌از جزئیات این‌عمل در مسئلهٔ ۸ داده شده‌است ، و ما این موضوع را در فصل بعد بار دیگر درنظر خواهیم گرفت .

مسئله‌ها

۱ ــ گیریم $\{A_n\}$ یک دستهٔ شمارش‌پذیر از مجموعه‌های اندازه‌پذیر است. دراین‌صورت:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$$

۲ ــ فرض می‌کنیم $\{(X_\alpha, \mathcal{B}_\alpha, \mu_\alpha)\}$ یک دسته از فضاهای اندازه بوده و مجموعه‌های $\{X_\alpha\}$ مجزا هستند. دراین‌صورت اگر قرار دهیم:

$$\mathcal{B} = \{B: (\alpha)[B \cap X_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha]\}، X = \bigcup X_\alpha$$

و μ را با برابری $\mu(B) = \sum \mu_\alpha(B \cap X_\alpha)$ تعریف کنیم، یک فضای اندازهٔ جدید $(X, \mathcal{B}, \mu)$ به دست می‌آید (که اجتماع فضاهای پیشین نامیده می‌شود).

الف ــ نشان دهید که $\mathcal{B}$ یک σ - جبر است.

ب ــ نشان دهید که μ یک اندازه است.

پ ــ نشان دهید برای این‌که μ یک اندازهٔ σ - باپایان باشد، لازم و کافی است که عدهٔ شمارش‌پذیری از μ_α ها σ - باپایان بوده و بقیه صفر باشند.

۳ ــ الف ــ نشان دهید که که اگر $E_1 \in \mathcal{B}$ و $E_2 \in \mathcal{B}$ باشد دراین‌صورت از $\mu(E_1 \triangle E_2) = 0$ نتیجه می‌شود $\mu E_1 = \mu E_2$.

ب ــ نشان دهید که اگر μ کامل باشد دراین‌صورت از $E_1 \in \mathcal{B}$ و $\mu(E_1 \triangle E_2) = 0$ نتیجه می‌شود $E_2 \in \mathcal{B}$.

۴ ــ فرض می‌کنیم $(X, \mathcal{B}, \mu)$ یک فضای اندازه و $Y \in \mathcal{B}$ است. فرض می‌کنیم $\mathcal{B}_Y$ شامل آن مجموعه‌های متعلق به $\mathcal{B}$ است که مشمول Y هستند. اگر $E \in \mathcal{B}_Y$ باشد، قرار می‌دهیم $\mu_Y E = \mu E$. دراین صورت ثابت کنید $(Y, \mathcal{B}_Y, \mu_Y)$ یک فضای اندازه است. اندازهٔ μ_Y را تحدید μ به Y می‌نامند.

۵ ــ فرض می‌کنیم $(X, \mathcal{B})$ یک فضای اندازه‌پذیر است.

الف ــ اگر دو اندازهٔ μ و ν روی $\mathcal{B}$ تعریف شده باشند، دراین‌صورت تابع مجموعهٔ λ که روی $\mathcal{B}$ با $\lambda E = \mu E + \nu E$ تعریف می‌شود نیز یک اندازه است. λ را با $\mu + \nu$ نشان می‌دهیم.

ب ــ اگر μ و ν اندازه‌هایی روی $\mathcal{B}$ و $\mu \geq \nu$ باشد، دراین‌صورت روی $\mathcal{B}$ یک اندازهٔ λ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که $\mu = \nu + \lambda$.

پ ــ اگر ν، یک‌اندازهٔ σ-باپایان‌باشد، آنگاه‌اندازهٔ λ مذکوردر (ب) یکتاست.

ت ــ نشان دهید که در حالت کلی اندازهٔ λ لزوماً یکتا نیست، ولی همواره کوچکترین اندازهٔ λ وجود دارد.

۶ ــ الف ــ نشان دهید که هراندازهٔ σ - باپایان، نیم‌باپایان است.

ب ــ نشان‌دهیدکه‌هراندازهٔ μ مجموع یک اندازهٔ‌نیم‌باپایان μ_1 و یک‌اندازهٔ μ_2 است، که تنها مقادیر 0 و ∞ را می‌پذیرد. اندازهٔ μ_1 همواره یکتاست و کوچکترین اندازهٔ μ_2 نیز وجود دارد.

۷ ــ گزارهٔ ۴ را ثابت‌کنید. [نخست‌نشان‌دهیدکه خانوادهٔ $\mathcal{B}_0$ که در (iii) تعریف شد یک σ-جبر است. اگر $E \in \mathcal{B}_0$ باشد، نشان دهید که μA برای همهٔ مجموعه‌های $A \in \mathcal{B}$، به‌گونه‌ای‌که $E = A \cup B$ بوده‌و B زیرمجموعهٔ یک‌مجموعهٔ‌بااندازهٔ صفر است، یکسان است بااستفاده از آن μ_0 را تعریف کنید و نشان دهید که μ_0 یک اندازه است.]

۸ ــ الف ــ نشان‌دهیدکه هراندازهٔ σ-باپایان، یک اندازهٔ اشباع شده است.

ب ــ نشان‌دهیدکه دستهٔ‌همهٔ مجموعه‌های‌اندازه‌پذیرموضعی‌یک σ-جبر است.

پ ــ گیریم $(X, \mathcal{B}, \mu)$ یک‌فضای‌اندازه‌و $\mathcal{C}$، σ-جبرمجموعه‌های‌اندازه‌پذیر موضعی است. برای هر $E \in \mathcal{C}$ قرار می‌دهیم: $\bar{\mu}E = \mu E$ اگر $E \in \mathcal{B}$ و $\bar{\mu}E = \infty$ اگر $E \notin \mathcal{B}$. نشان دهید که $(X, \mathcal{C}, \bar{\mu})$ یک فضای اندازهٔ اشباع شده است.

ت ــ اگر μ نیم‌باپایان و $E \in \mathcal{C}$ باشد، قرارمی‌دهیم: $\underline{\mu}E = \sup \{\mu B: B \in \mathcal{B}, B \subset E\}$. نشان‌دهیدکه $(X, \mathcal{C}, \underline{\mu})$ یک‌فضای‌اندازهٔ‌اشباع شده و $\underline{\mu}$ یک گسترش μ است.

ث ــ بااستفاده‌ازمسئله ۵ (ت). نشان دهید که حتی اگر μ نیم‌باپایان‌نباشد، کوچکترین گسترش $\underline{\mu}$ از μ به $\mathcal{C}$ وجود دارد و $(X, \mathcal{C}, \underline{\mu})$ اشباع شده است.

ج ــ مثالی بیاورید که نشان دهید $\underline{\mu}$ و $\bar{\mu}$ ممکن است متفاوت باشند.

۹ ــ *σ-حلقه‌ها و σ-جبرها*. بعضی‌از مؤلفین ترجیح‌می‌دهند که اندازه را روی یک σ-حلقهٔ $\mathcal{R}$ تعریف‌کنند، σ- حلقهٔ $\mathcal{R}$ دستهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های X است به‌گونه‌ای‌وقتی A و B متعلق‌به $\mathcal{R}$ هستند، آنگاه $A \sim B$ نیز به $\mathcal{R}$ تعلق‌دارد، و اگر $\langle A_n \rangle$ یک‌دنباله‌ازعناصر $\mathcal{R}$ باشد، دراین‌صورت $\bigcup A_n$ نیز به $\mathcal{R}$ تعلق‌دارد. بنابراین برای این‌که یک σ-حلقه تبدیل‌به یک σ-جبر گردد لازم و کافی است که $X \in \mathcal{R}$ باشد. برخی‌از وابستگیهای‌بین σ-حلقه‌ها و σ-جبرها در زیرداده‌شده‌اند:

الف ــ گیریم $\mathcal{R}$ یک σ-حلقه‌بوده‌ولی σ-جبرنیست، و $\mathcal{B}$ کوچکترین σ-جبر

حاوی $\mathcal{B}$ است ، قرار می‌دهیم $\mathcal{B}' = \{E: \tilde{E} \varepsilon \mathcal{B}\}$. نشان دهید که $\mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ و $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}' = \varnothing$

ب ــ اگر μ روی $\mathcal{B}$ یک‌اندازه باشد ، $\bar{\mu}$ را روی $\mathcal{B}$ چنین تعریف می‌کنیم ، اگر $E \varepsilon \mathcal{B}$ باشد ، قرار می‌دهیم $\bar{\mu}E = \mu E$ و اگر $E \varepsilon \mathcal{B}'$ باشد ، قرارمی‌دهیم $\bar{\mu}E = \infty$ دراین‌صورت $\bar{\mu}$ روی $\mathcal{B}$ یک‌اندازه است .

پ ــ $\underline{\mu}$ را روی $\mathcal{B}$ به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم .

اگر $E \varepsilon \mathcal{B}$ باشد قرار می‌دهیم $\underline{\mu}E = \mu E$ و اگر $E \varepsilon \mathcal{B}'$ باشد قرار می‌دهیم :

$$\underline{\mu}E = \sup \{\mu A: A \subset E, A \varepsilon \mathcal{B}\}$$

دراین‌صورت $\underline{\mu}$ نیز روی $\mathcal{B}$ یک‌اندازه است .

ت ــ به‌طور کلی‌تر ، برای هرعدد حقیقی تعمیم‌یافته نامنفی مانند β ، اندازهٔ μ_β را روی $\mathcal{B}$ چنین تعریف می‌کنیم ، اگر $E \varepsilon \mathcal{B}$ باشد قرار می‌دهیم $\mu_\beta E = \mu E$ ، و اگر $E \varepsilon \mathcal{B}'$ باشدقرارمی‌دهیم $\mu_\beta E = \underline{\mu}E + \beta$. دراین‌صورت‌نشان‌دهید μ_β روی $\mathcal{B}$ یک اندازه است .

ث ــ اگر ν روی $\mathcal{B}$ اندازه‌ای باشد که روی $\mathcal{B}$ بر μ منطبق است ، دراین‌صورت برای یک $\beta \geq 0$ داریم $\nu = \mu_\beta$.

۲ ــ تابع‌های اندازه‌پذیر

مفهوم یک‌تابع اندازه‌پذیر روی‌یک فضای اندازهٔ‌مجرد تقریبا " همانند‌این‌مفهوم درمورد تابعهای‌حقیقی است . درنتیجه ، گزاره‌هاوقضیه‌هایی‌که اثبات‌آنها اساسا "همانند اثبات قضیه‌های‌بند ۵ از فصل ۳ است بدون‌اثبات بیان شده‌اند . به‌آسانی دیده می‌شود که اثباتهای فصل ۳ را می‌توان درحالت مجرد نیز به‌کار برد . دراین‌بند فرض می‌کنیم که یک فضای اندازه‌پذیر مشخص $(X, \mathcal{B})$ داده شده است .

۵ ــ گزاره

گیریم تابع حقیقی تعمیم‌یافتهٔ f روی X تعریف شده است . دراین‌صورت گفتارهای زیر هم‌ارزند :

i . برای هر α $\{x: f(x) < \alpha\} \varepsilon \mathcal{B}$

ii . برای هر α $\{x: f(x) \leq \alpha\} \varepsilon \mathcal{B}$

iii . برای هر α $\{x: f(x) > \alpha\} \in \mathcal{B}$

iv . برای هر α $\{x: f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{B}$

(گزارهٔ ۳ . ۱۸ را ببینید) .

تعــریــــف

تابع حقیقی تعمیم‌یافتهٔ f که روی X تعریف شده است ، اندازه‌پذیر (یا نسبت به $\mathcal{B}$ اندازه‌پذیر) نامیده می‌شود هرگاه یکی از گفتارهای گزارهٔ ۵ برقرار باشند .

۶ ــ قضیـــــه

اگر c یک عدد ثابت و f و g دو تابع اندازه‌پذیر باشند ، دراین‌صورت $f + c$ ، cf ، $f + g$ ، $f \cdot g$ ، $f \vee g$ ، اندازه‌پذیرند . به‌علاوه‌اگر $\langle f_n \rangle$ یک‌دنباله از تابعهای اندازه‌پذیر باشد ، آنگاه $\sup f_n$ ، $\inf f_n$ ، $\overline{\lim} f_n$ و $\underline{\lim} f_n$ همه اندازه‌پذیرند .

(قضیه‌های ۳ . ۱۹ و ۳ . ۲۰ را ببینید) .

منظور از یک تابع ساده همانند پیش، یک ترکیب خطی باپایان مانند :

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x)$$

از تابعهای مشخص مجموعه‌های اندازه‌پذیر E_i است .

۷ ــ گــــــزاره :

گیریم f یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی است . دراین‌صورت یک دنبالهٔ $\langle \varphi_n \rangle$ از تابعهای ساده با $\varphi_{n+1} \geq \varphi_n$ وجود دارد به‌گونه‌ای که در هر نقطهٔ X داریم :

$f = \lim \varphi_n$

اگر f روی یک فضای اندازهٔ σ -باپایان ، تعریف شده باشد ، دراین‌صـــورت می‌توان توابع φ_n را طوری اختیار کرد که بیرون یک مجموعهٔ باندازهٔ باپایان صفـر باشنـد .

گـــــزاره :

اگر μ یک اندازهٔ کامل و f یک تابع اندازه‌پذیر باشد ، در این صورت از $g = f$ ت . هـ نتیجه می‌شود که g اندازه‌پذیر است .

(گزارهٔ ۳ . ۲۱ را ببینید) .

مجموعه‌های $\{x: f(x) < \alpha\}$ ، گاهی مجموعه‌های عرضی f نامیده می‌شوند . این مجموعه‌ها با α افزایشی هستند . دو لم زیر بعدا" مورد استفاده قرار خواهند گرفت . بنابراین لم‌ها ، اگر $\{B_\alpha\}$ یک دسته از مجموعه‌های اندازه‌پذیر باشد که با α افزایشی هستند ، می‌توان یک تابع اندازه‌پذیر f طوری یافت که مجموعه‌های عرضی آن تقریبا" همین مجموعه‌ها باشند، به این معنی که :

$$\{x: f(x) < \alpha\} \subset B_\alpha \subset \{x: f(x) \le \alpha\}$$

۹ ـ لـــــم :

فرض می‌کنیم که به هر عدد α متعلق به یک مجموعهٔ شمارش‌پذیر D از اعداد حقیقی ، یک مجموعهٔ $B_\alpha \in \mathcal{B}$ مربوط می‌شود به گونه‌ای که برای $\alpha < \beta$ ، $B_\alpha \subset B_\beta$. در این صورت روی X یک تابع حقیقی تعمیم یافته و اندازه‌پذیر f وجود دارد به گونه‌ای که روی B_α ، $f \le \alpha$ و روی $X \sim B_\alpha$ ، $f \ge \alpha$.

بـرهـــــان :

برای هر $x \in X$ ، گیریم $f(x) = \inf\{\alpha: x \in B_\alpha\}$ که در آن همانند معمول می‌نویسیم $\inf \varnothing = \infty$. اگر $x \in B_\alpha$ باشد ، داریم $f(x) \le \alpha$. اگـــر $x \notin B_\alpha$ برای $\beta < \alpha$ داریم $x \notin B_\beta$ ، پس $f(x) \ge \alpha$. بنابراین تنها بـایـد نـشـان دهیـم کـه f انـــدازه‌پــذیـــر است . ولی برای هر عـــدد حقیقـــی α ، داریـــم $\{x: f(x) < \alpha\} = \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta$ زیرا ، اگر $f(x) < \alpha$ باشد ، در این صـورت بنابر تعریف f ، برای یک β با $\beta < \alpha$ داریم $x \in B_\beta$. از سوی دیگر ، اگـــر بـــرای $\beta < \alpha$ ، $x \in B_\beta$ باشد ، در این صورت $f(x) \le \beta < \alpha$. ∎

۱۰ ـ لـــــم :

فرض‌می‌کنیم که به‌هر α متعلق‌به یک مجموعهٔ شمارش‌پذیر D ازاعداد حقیقی ، یک مجموعهٔ $B_\alpha \in \mathcal{B}$ مربوط باشد به‌گونه‌ای‌که‌برای $\alpha < \beta$ ، داشته‌باشیم $\mu(B_\alpha \sim B_\beta) = 0$ دراین‌صورت یک‌تابع اندازه‌پذیر f وجود دارد به‌طوری‌که‌ت . هـ روی B_α داریم $f \leq \alpha$ وتقریبا " همه‌جا روی $X \sim B_\alpha$ داریم $f \geq \alpha$

بـرهـــان :

گیریم $C = \bigcup_{\alpha<\beta} B_\alpha \sim B_\beta$. دراین‌صورت $\mu C = 0$ است . قرارمی‌دهیم $B'_\alpha = B_\alpha \cup C$. اگر $\alpha < \beta$ باشد ، داریم $B'_\alpha \sim B'_\beta = (B_\alpha \sim B_\beta) \sim C = \varnothing$ پس بنابرلم ۹ یک‌تابع اندازه‌پذیر f وجود دارد به‌گونه‌ای‌که روی B'_α ، $f \geq \alpha$ و روی $X \sim B'_\alpha$ ، $f \leq \alpha$ است . پس روی B_α داریم $f \leq \alpha$ و روی $X \sim B_\alpha$ داریم $f \geq \alpha$ به‌جز برای $x \in C$. ∎

مسئلـــــه‌ها

۱۰ ـ گزارهٔ ۷ را ثابت‌کنید .[برای‌هرجفت $\langle n, k\rangle$ ازعددهای‌درست‌ومثبت ، فـرض کنیـــد $E_{n,k} = \{x: k2^{-n} \leq f(x) < (k+1)2^{-n}\}$ و بگـــذاریــــد $\varphi_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^{2n}} k\chi_{E_{n,k}}$] .

۱۱ ـ گزارهٔ ۸ را ثابت‌کنید ، و نشان‌دهید که اگر کلمهٔ " کامل " را حذف کنیم این گزاره دیگر درست نخواهد بود .

۱۲ ـ گیریم $(X, \mathcal{B}, \mu)$ یک‌فضای‌اندازه و $(X, \mathcal{B}_0, \mu_0)$ تکمیل‌آن است . آنگاه یک تابع f نسبت‌به $\mathcal{B}_0$ اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر یک تابع g ی اندازه‌پذیـر نسبت‌به $\mathcal{B}$ موجود باشد به‌گونه‌ای‌که تقریبا " همه‌جا داشته‌باشیم $f = g$ به‌این‌معنی کـه یک‌مجموعهٔ $E \in \mathcal{B}$ وجودداشته‌باشدبا $\mu E = 0$ وروی $X \sim E$ برابری $f = g$ برقرارباشد . توجه‌داشته‌باشیـد کـه برای ایـن کار لازم نیسـت کـه مجمـوعـهٔ $\{x: f(x) \neq g(x)\}$ ، بـه $\mathcal{B}$ متعلق باشد .

۱۳ ــ نشان دهیدکه شرط شمارش‌پذیر بودن D در لم‌های ۹ و ۱۰ ضروری‌نیست. [یک D ی شمارش‌ناپذیر را با یک زیرمجموعه شماره‌پذیر آن E که در D متراکم است جانشین سازید.]

۱۴ ــ نشان دهید که اگر D در $\mathbf{R}$ متراکم باشد، آنگاه تابع f مذکور در لم ۹ یکتاست و تابع f مذکور در لم ۱۰ باتقریب یک هم‌ارزی یکتاست. یعنی، هرتابع دیگری که درنتیجهٔ لم صدق کندتقریباً" همه‌جا برابر f است.

۱۵ ــ گیریم D مجموعهٔ عددهای‌گویا و f تابع مذکور درلم ۹است. مجموعه‌های $\{x: f(x) \leq \alpha\}$ ، $\{x: f(x) = \alpha\}$ ، $\{x: f(x) < \alpha\}$ را برحسب مجموعه‌های $\{B_\beta\}$ بنویسید.

۳ ــ انتگرال‌گیری

بسیاری از تعریف‌ها و اثبات‌های فصل ۴ تنها به‌آن خاصیت‌های اندازهٔ لبگ بستگی دارند که برای‌هراندازهٔ‌دلخواه در یک‌فضای اندازهٔ‌مجرد نیز درستند و دراینجا به‌کار برده می‌شوند. اگر E یک‌مجموعهٔ اندازه‌پذیر و φ یک تابع سادهٔ نامنفی باشد، تعریف زیر را بیان می‌کنیم:

$$\int_E \varphi\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E_i \cap E)$$

که در آن

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x)$$

به‌آسانی دیده می‌شود که مقدار این انتگرال به‌طرز نمایش φ که ما به‌کار بردیم، بستگی ندارد. اگر a و b عددهای‌مثبت‌و φ و ψ تابعهای‌سادهٔ‌نامنفی‌باشند، آنگاه‌داریم:

$$\int a\varphi + b\psi = a \int \varphi + b \int \psi$$

در فصل ۴ نخست انتگرال را برای تابعهای اندازه‌پذیر کراندار تعریف کردیم، آنگاه تعریف‌آن‌را برای هر تابع اندازه‌پذیر نامنفی f برابر سوپرمم $\int g\, d\mu$ گرفتیم هنگامی‌که g روی مجموعهٔ همهٔ تابعهای اندازه‌پذیر کرانداری تغییر می‌کند که بیرون یک مجموعه بااندازهٔ باپایان صفرند.

متأسفانه این تعریف درحالت اندازه‌های عمومی کاملاً" مناسب نیست، زیرا، اگر $\mathfrak{B} = \{X, \varnothing\}$ و $\mu\varnothing = 0$ ، $\mu X = \infty$ باشد، آنگاه به‌طوریقین می‌خواهیم $\int 1\, d\mu = \infty$ باشد. ولی، تنهاتابع‌اندازه‌پذیر g که‌بیرون‌یک‌مجموعه‌بااندازهٔ‌باپایان

صفر است تابع $g \equiv 0$ است ، ازاین‌رو $\sup \int g\,d\mu = 0$. برای دوری از این اشکال ، انتگرال هر تابع اندازه‌پذیر نامنفی‌را مستقیما" برحسب انتگرال تابعهای سادهٔ نامنفی تعریف می‌کنیم .

تعـریـــف :

گیریم f روی‌فضای‌اندازهٔ $(X, \mathcal{B}, \mu)$ یک‌تابع حقیقی تعمیم‌یافتهٔ نامنفی واندازه‌پذیر است . آنگاه $\int f\,d\mu$ برابراست‌با سوپرمم انتگرالهای $\int \varphi\,d\mu$ ، هنگامی که φ روی‌همهٔ تابعهای ساده‌ای تغییرمی‌کند که در شرط $0 \le \varphi \le f$ صدق می‌کنند .

ازاین‌تعریف‌بی‌درنگ‌نتیجه‌می‌شودکه $\int cf = c\int f$ ، واز $f < g$ نتیجه‌می‌شود $\int f \le \int g$. باوجود این به‌کاربردن این‌تعریف درسایرموارد اندکی غیرماهرانه است ، زیرا سوپرمم را روی یک دستهٔ بزرگ از تابعهای ساده می‌گیریم ، و از این تعریف درستی برابری $\int(f + g) = \int f + \int g$ آشکارنمی‌شود . درنتیجه ، بحث درمورد انتگرال را با اثبات قضیه‌های همگرایی آغاز می‌کنیم . این قضیه‌ها ما را در تعیین مقدار انتگرال $\int f$ به‌عنوان‌حد $\int \varphi_n$ برای‌هردنبالهٔ‌افزایشی $\langle \varphi_n \rangle$ ازتابعهای ساده که به f ، می‌گراید ، توانا می‌سازد . با لم‌فاتو[۱] آغاز می‌کنیم :

۱۱ ـ قضیــه (لــم‌فــاتــو)[۱] :

گیریم $\langle f_n \rangle$ یک‌دنباله‌ازتابعهای‌اندازه‌پذیرنامنفی است ، که‌تقریبا "همه‌جا روی مجموعهٔ E به f می‌گراید ، دراین‌صورت داریم :

$$\int_E f \le \underline{\lim} \int_E f_n$$

بــرهـــان :

بدون از دست دادنِ کلیت می‌توان فرض کرد که برای هر $x \in E$ داریـــم $f_n(x) \to f(x)$. بنابه‌تعریف $\int f$ ، کافی‌است نشان‌دهیم که ، اگر φ یک‌تابع سادهٔ نامنفی دلخواه باشد با $\varphi \le f$ ، آنگاه $\int_E \varphi \le \underline{\lim} \int_E f_n$

---

۱ ـ Fatou's Lemma

اگر $\int_E \varphi = \infty$ ، آنگاه یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر $A \subset E$ با $\mu A = \infty$ وجود دارد به‌گونه‌ای که روی A $0 < a < \varphi$ است . می‌گذاریم ؛ برای هر $k \geq n$ ، $A_n = \{x \in E: f_k(x) > a$ آنگاه $\langle A_n \rangle$ یک دنبالهٔ افزایشی از مجموعه‌های اندازه‌پذیر است که اجتماعشان شامل A است ، زیرا $\varphi \leq \lim f_n$. بنابراین $\lim \mu A_n = \infty$. چون $\int_E f_n \geq a\mu A_n$ است ، پس داریم $\lim \int_E f_n = \infty = \int_E \varphi$

اگر $\int_E \varphi < \infty$ ، آنگاه یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر $A \subset E$ با $\mu A < \infty$ وجود دارد به‌گونه‌ای که روی $E \sim A$ φ متحد صفر است . گیریم M ماکزیمم φ ، ϵ یک عدد مثبت داده شده است ، و قرار می‌دهیم

برای هر $k \geq n\}$ ، $A_n = \{x \in E: f_k(x) > (1-\epsilon)\varphi(x)$

دراین‌صورت $\langle A_n \rangle$ یک دنبالهٔ افزایشی از مجموعه‌هایی است که اجتماعشان A را دربردارد ، پس $\langle A \sim A_n \rangle$ یک دنبالهٔ کاهشی از مجموعه‌هاست که اشتراکشان تهی است . بنابرگزارهٔ ۲ داریم $\lim \mu(A \sim A_n) = 0$ ، پس می‌توانیم یک مقدار n را بیابیم به‌گونه‌ای که برای هرمقدار $k \geq n$ داشته باشیم $\mu(A \sim A_k) < \epsilon$. بنابراین برای $k \geq n$ داریم

$$\int_E f_k \geq \int_{A_k} f_k \geq (1-\epsilon)\int_{A_k} \varphi$$
$$\geq (1-\epsilon)\int_E \varphi - \int_{A \sim A_k} \varphi$$
$$\geq \int_E \varphi - \epsilon\left[\int_E \varphi + M\right].$$

ازاین‌رو

$$\underline{\lim} \int_E f_n \geq \int_E \varphi - \epsilon\left[\int_E \varphi + M\right]$$

چون ϵ دلخواه است ، پس

$$\underline{\lim} \int_E f_n \geq \int_E \varphi. \blacksquare$$

۱۲ ــ قضیهٔ همگرایی یکنوا[1] :

گیریم $\langle f_n \rangle$. دنباله‌ای از تابعهای اندازه‌پذیرنامنفی است که تقریبا " همه‌جا به‌تابع f می‌گراید و فرض می‌کنیم که برای هرمقدار n ، $f_n \leq f$ است . دراین‌صورت :

$$\int f = \lim \int f_n$$

---

1 — Manotone Convergence Theorem

برهـــان:

چون $f_n \le f$ است، پس $\int f_n \le \int f$ بوده و بنابرلم‌فاتو داریم

$$\int f \le \varliminf \int f_n \le \varlimsup \int f_n \le \int f. \blacksquare$$

اکنون می‌توانیم بعضی‌از خاصیتهای متعارف انتگرال را ثابت کنیم.

۱۳ ـ گـــزاره:

اگر f و g تابعهای اندازه‌پذیر نامنفی و a و b ثابتهای نامنفی باشند، آنگاه:

$$\int af + bg = a\int f + b\int g$$

همچنین داریم

$$\int f \ge 0$$

برابری تنها هنگامی برقرار است که ت. هـ $f = 0$ باشد.

برهـــان:

برای‌اثبات گفتار نخست، گیریم $\langle\varphi_n\rangle$ و $\langle\psi_n\rangle$ دنباله‌های افزایشی‌از تابعهای ساده هستند که به f و g می‌گرایند. آنگاه $\langle a\varphi_n + b\psi_n\rangle$ دنباله‌ای‌است افزایشی از تابعهای ساده که به $af + bg$ می‌گراید. بنابرقضیهٔ همگرایی یکنوا داریم،

$$\begin{aligned}\int af + bg &= \lim\int a\varphi_n + b\psi_n \\ &= \lim\left(a\int \varphi_n + b\int \psi_n\right) \\ &= a\int f + b\int g.\end{aligned}$$

آشکاراست که $\int f \ge 0$. اگر $\int f = 0$ باشد، می‌گیریم $A_n = \{x: f(x) \ge 1/n\}$ آنگاه $f \ge \frac{1}{n}\chi_{A_n}$، پس $\mu A_n = \int \chi_{A_n} = 0$. چون مجموعه‌ای که روی آن $f > 0$ است اجتماع مجموعه‌های A_n است، پس این‌مجموعه‌دارای‌اندازهٔ صفراست. $\blacksquare$

از این گزاره توأم باقضیهٔ همگرایی یکنوا نتیجه زیر به‌دست می‌آید:

۱۴ ـ نتیجه :

گیریم $\langle f_n \rangle$ یک دنباله از تابعهای اندازه‌پذیر نامنفی است ، در این صورت داریم :

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n$$

تابع نامنفی f (روی مجموعهٔ اندازه‌پذیر E نسبت به μ) **انتگرال‌پذیر** نامیده می‌شود هرگاه اندازه‌پذیر بوده و

$$\int_E f\,d\mu < \infty$$

باشد .

تابع دلخواه f انتگرال‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه f^+ و f^- هردو انتگرال‌پذیر باشند . دراین‌حالت انتگرال f را با برابری زیر تعریف می‌کنیم :

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$$

برخی از خاصیتهای انتگرال درگزارهٔ زیر ، که اثبات آن به‌خواننده واگذار می‌شود ، آمده است .

۱۵ ـ گزاره :

اگر f و g تابعهای انتگرال‌پذیر و E یک‌مجموعهٔ اندازه‌پذیر باشد ، آنگاه داریم :

i . $\int_E (c_1 f + c_2 g) = c_1 \int_E f + c_2 \int_E g$

ii . *اگر* $|h| \leq |f|$ بوده و h *اندازه‌پذیر باشد آنگاه* h *انتگرال‌پذیر است .*

iii . *اگر ت . هـ .* $f \geq g$ باشد ، آنگاه $\int f \geq \int g$ *است .*

۱۶ ـ قضیهٔ همگرائی لبگ[۱] :

گیریم g روی E انتگرال‌پذیر است وفرض‌می‌کنیم‌که $\langle f_n \rangle$ یک‌دنباله از تابعهای اندازه‌پذیر است به‌گونه‌ای که‌روی E نابرابری $|f_n(x)| \leq g(x)$ برقراربوده‌وتقریبا "

۱ — Lebesgue Convergence Theorem

همه‌جا روی E داریم $\qquad f_n(x) \to f(x) \qquad$ دراین‌صورت :

$$\int_E f = \lim \int_E f_n$$

برهان :

لم فاتو را درمورد دنباله‌های $g + f_n$ و $g - f_n$ به‌کار ببرید .

مسئله‌ها

۱۶ ــ گزاره‌ٔ ۱۵ را ثابت کنید .

۱۷ ــ فرض‌می‌کنیم μ کامل‌نیست ، و بنابه‌تعریف می‌گوییم که تابع کراندار f روی مجموعه‌ٔ باانداز‌هٔ باپایان E انتگرال‌پذیر است هرگاه برای همه‌ٔ تابعهای ساده‌ٔ φ و ψ ، داشته باشیم :

$$\sup_{\varphi \le f} \int_E \varphi \, d\mu = \inf_{\psi \ge f} \int_E \psi \, d\mu$$

نشان‌دهید که برای انتگرال‌پذیر بودن f لازم و کافی است‌که این تابع نسبت‌به کامل شده‌ٔ μ اندازه‌پذیر باشد .

۱۸ ــ گیریم f روی فضای اندازه‌ٔ $(X, \mathcal{B}, \mu)$ یک‌تابع انتگرال‌پذیر است . نشان دهید که برای هرعدد $\epsilon > 0$ ، یک‌عدد $\delta > 0$ وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر مجموعه‌ٔ اندازه‌پذیر E با $\mu E < \delta$ ، داریم

$$\left| \int_E f \right| < \epsilon$$

۱۹ ــ گیریم $\langle f_n \rangle$ یک‌دنباله‌از تابعهای‌اندازه‌پذیراست . می‌گوییم f_n در اندازه‌به f می‌گراید اگر برای هرعدد $\epsilon > 0$ ، یک‌عدد N وجود داشته باشد به‌گونه‌ای‌که برای هر $n \ge N$ ، داشته باشیم :

$$\mu\{x: |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\} < \epsilon$$

می‌گوییم دنباله‌ٔ $\langle f_n \rangle$ در اندازه یک دنباله‌ٔ کشی است هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ ، یک عدد N وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که برای هر $m, n \ge N$ داشته‌باشیم :

$$\mu\{x: |f_n(x) - f_m(x)| > \epsilon\} < \epsilon$$

نشان‌دهید شرط لازم‌وکافی برای‌این‌که دنباله‌ٔ $\langle f_n \rangle$ ازتابعهای‌اندازه‌پذیر

دراندازه‌به‌یک‌تابع f بگراید این‌است‌که یک دنباله‌ٔ کشی دراندازه‌باشد. اگر $\langle f_n \rangle$ دراندازه به f بگراید، آنگاه یک زیردنباله‌ٔ $\langle f_{n_\nu} \rangle$ وجود دارد که تقریبا" همه‌جا به f می‌گراید، ازاین‌رو درهمه‌ٔ قضیه‌های همگرایی می‌توان همگرایی در اندازه‌را جانشین همگرایی تقریبا" همه‌جا ساخت.

۲۰ ــ نشان‌دهیدکه‌اگر f انتگرال‌پذیرباشد آنگاه‌مجموعه‌ٔ $\{x: f(x) \neq 0\}$ ، **دارای اندازه‌ٔ σ** باپایان است.

۲۱ــ الف‌ــ گیریم $(X, \mathcal{B}, \mu)$ یک‌فضای‌اندازه و g روی X یک‌تابع اندازه‌پذیر نامنفی‌است. می‌گذاریم $\nu E = \int_E g\, d\mu$. نشان‌دهیدکه ν روی $\mathcal{B}$ یک‌اندازه است.

ب ــ گیریم f روی X یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی است. آنگاه داریم:

$$\int f\, d\nu = \int fg\, d\mu$$

[**راهنمایی**: **این** برابری‌را نخست‌برای‌حالتی‌که g یک‌تابع ساده است ثابت کنید. آنگاه از قضیهٔ همگرایی یکنوا استفاده کنید.]

۲۲ ــ تابع f را روی‌فضای‌اندازه‌ٔ $(X, \mathcal{B}, \mu)$ اندازه‌پذیرموضعی می‌گویندهرگاه تحدید f به‌هرمجموعه‌ٔ E متعلق‌به $\mathcal{B}$ با $\mu E < \infty$ ، یعنی‌تابع $f\chi_E$ ، اندازه‌پذیرباشد.

الف ــ نشان‌دهیدکه f اندازه‌پذیر موضعی است اگر و تنهااگر **نسبت به** σ جبر مجموعه‌های اندازه‌پذیر موضعی، اندازه‌پذیر باشد.

ب ــ برای‌تابعهای‌نامنفی اندازه‌پذیر موضعی f ، انتگرال‌را چنین‌تعریف‌می‌کنیم که $\int f$ را برابرسوپرمم $\int \varphi$ می‌گیریم‌هنگامی‌که φ روی همه‌ٔ تابعهای ساده‌ٔ کوچکتر از f ، تغییرمی‌کند. دراین‌صورت نشان‌دهید $\int f = \int f\, d\underline{\mu}$ که‌درآن $\underline{\mu}$ همان گسترش μ داده شده در مسئله‌ٔ ۸ ت است.

*۴ ــ قضیه‌های همگرایی عمومی

در بند پیش‌رفتار انتگرال یک‌دنباله‌ٔ همگرا از تابعهارا موردبحث قرار دادیم. همه‌ٔ این‌ها، انتگرال نسبت‌به یک اندازه‌ٔ معین μ بودند. می‌توان بامتغیر گرفتن خود μ ، نیز این بحث‌را تعمیم داد. گیریم $(X, \mathcal{B})$ یک فضای اندازه‌پذیر و $\langle \mu_n \rangle$ یک دنباله‌ازتابعهای‌مجموعه است که‌روی $\mathcal{B}$ تعریف‌شده‌اند. می‌گوییم μ_n به‌طورمجموعه‌ای به‌یک تابع مجموعه‌ٔ μ می‌گراید اگر برای هر $E \in \mathcal{B}$ داشته‌باشیم $\mu E = \lim \mu_n E$. بااین‌مفهوم دوگزاره‌ٔ زیر را بیان می‌کنیم که تعمیم لم‌فاتو و قضیه‌ٔ همگرایی لبگ می‌باشند.

۱۷ــ گــــزاره :

گیریم $(X, \mathcal{B})$ یک‌فضای اندازه‌پذیر ، $\langle \mu_n \rangle$ یک‌دنباله از اندازه‌هاست که به‌طور مجموعه‌ای به‌یک‌اندازهٔ μ می‌گراید ،وفرض‌می‌کنیم‌که $\langle f_n \rangle$ یک‌دنباله‌از‌تابعهای اندازه‌پذیر نامنفی است که به‌طور نقطه‌ای به f می‌گراید . دراین‌صورت داریم :

$$\int f\, d\mu \le \varliminf \int f_n\, d\mu_n.$$

بــرهــــــان :

گرایش‌مجموعه‌ای μ_n به μ ایجاب‌می‌کندکه‌برای‌هرتابع سادهٔ φ داشته‌باشیم :

$$\int \varphi\, d\mu = \lim \int \varphi\, d\mu_n$$

بنابرتعریف $\int f\, d\mu$ ،کافی‌است‌ثابت‌کنیم‌که‌برای‌هرتابع سادهٔ $\varphi \le f$ ، داریم :

$$\int \varphi\, d\mu \le \varliminf \int f_n\, d\mu_n$$

فرض‌می‌کنیم $\int \varphi\, d\mu < \infty$ است . دراین‌صورت φ بیرون‌یک‌مجموعهٔ‌بااندازهٔ باپایان E برابر صفر است . گیریم ϵ یک عدد مثبت است ، و قرار می‌دهیم :

$$E_n = \{x\colon f_k(x) \ge (1-\epsilon)\varphi(x), k \ge n\}$$

دراین‌صورت $\langle E_n \rangle$ یک‌دنبالهٔ‌افزایشی از مجموعه‌هاست‌که‌اجتماعشان‌حاوی E است ،پس $\langle E \sim E_n \rangle$ یک‌دنبالهٔ‌کاهشی ازمجموعه‌های‌اندازه‌پذیر است‌که‌اشتراکشان تهی‌است . پس بنابرگزارهٔ ۲ یک‌عدد m وجودداردبه‌گونه‌ای‌که $\mu(E \sim E_m) < \epsilon$ چون $\mu(E \sim E_m) = \lim \mu_k(E \sim E_m)$ است ،پس‌می‌توان $n \ge m$ رابه‌گونه‌ای برگزید که برای $k \ge n$ داشته‌باشیم $\mu_k(E \sim E_m) < \epsilon$. چون $E \sim E_k \subset E \sim E_m$ است ، پس برای $k \ge n$ داریم $\mu_k(E \sim E_k) < \epsilon$ بنابراین

$$\begin{aligned}\int f_k\, d\mu_k \ge \int_{E_k} f_k\, d\mu_k &\ge (1-\epsilon)\int_{E_k} \varphi\, d\mu_k\\ &\ge (1-\epsilon)\int_E \varphi\, d\mu_k - \int_{E \sim E_k} \varphi\, d\mu_k\\ &\ge (1-\epsilon)\int_E \varphi\, d\mu_k - M\epsilon\end{aligned}$$

که در آن M ماکزیمم φ است . بنابراین داریم :

$$\underline{\lim} \int f_k \, d\mu_k \geq \int_E \varphi \, d\mu - \epsilon\left[M + \int \varphi \, d\mu\right].$$

چون ϵ دلخواه است ، پس

$$\int_E \varphi \, d\mu \leq \underline{\lim} \int f_k \, d\mu_k.$$

حالتی که $\int \varphi \, d\mu = \infty$ است به‌روش مشابهی ثابت می‌شود . ∎

۱۸ ــ گزاره :

گیریم $(X, \mathcal{B})$ یک فضای اندازه‌پذیر و $\langle \mu_n \rangle$ یک‌دنباله‌ٔ از اندازه‌ها روی $\mathcal{B}$ است‌که به‌طورمجموعه‌ای به‌یک‌اندازه‌ٔ μ می‌گراید . گیریم $\langle f_n \rangle$ و $\langle g_n \rangle$ دو دنباله از تابعهای اندازه‌پذیر هستندکه به‌طور نقطه‌ای به‌ترتیب به f و g می‌گرایند فرض می‌کنیم که $|f_n| \leq g_n$ و

$$\lim \int g_n \, d\mu_n = \int g \, d\mu < \infty$$

است ، دراین‌صورت داریم

$$\lim \int f_n \, d\mu_n = \int f \, d\mu.$$

برهان :

گزاره‌ٔ ۱۷ را درمورد دنباله‌های $g_n + f_n$ و $g_n - f_n$ به‌کار می‌بریم . ∎

مسئله‌ها

۲۳ ــ گیریم $(X, \mathcal{B})$ یک فضای اندازه‌پذیر و $\langle \mu_n \rangle$ یک‌دنباله‌ٔ اندازه روی $\mathcal{B}$ است به‌گونه‌ای که برای هر $E \in \mathcal{B}$ داریم ، $\mu_{n+1}E \geq \mu_n E$ گیریم $\mu E = \lim \mu_n E$. دراین‌صورت μ روی $\mathcal{B}$ یک‌اندازه است .

۲۴ ــ مثالی ازیک‌دنباله‌ٔکاهشی $\langle \mu_n \rangle$ ازاندازه‌های‌روی‌یک‌فضای‌اندازه‌پذیر داده‌شده بیاورید به‌گونه‌ای‌که تابع مجموعه‌ٔ μ که با $\mu E = \lim \mu_n E$ تعریف‌می‌شود یک اندازه نباشد .

۲۵ ــ گیریم $(X, \mathcal{B})$ یک فضای اندازه‌پذیر و $\langle \mu_n \rangle$ یک‌دنباله‌ٔ اندازه

وی $\mathcal{B}$ است . که به‌طور مجموعه‌ای به‌تابع مجموعهٔ μ می‌گراید . اگر $\mu X < \infty$ باشد ، آنگاه μ یک اندازه است .

۵ ـ اندازه‌های علامت‌دار

دراین‌بند امکاناتی‌را درنظرمی‌گیریم که ممکن‌است هنگامی رخ‌دهد که یک اندازه می‌تواند هم مقدارهای منفی و هم مقدارهای مثبت را بپذیرد .

نخست می‌بینیم که اگر دو اندازهٔ μ_1 و μ_2 روی یک فضای اندازه‌پذیر $(X, \mathcal{B})$ تعریف شده‌باشند ، آنگاه می‌توانیم اندازهٔ جدید μ_3 را روی $(X, \mathcal{B})$ به‌شکل زیر تعریف کنیم .

$$\mu_3(E) = c_1\mu_1(E) + c_2\mu_2(E) \qquad c_1, c_2 \geq 0$$

اکنون ببینیم که اگر اندازهٔ ν را به‌شکل

$$\nu E = \mu_1 E - \mu_2 E$$

تعریف کنیم چه رخ می‌دهد .

نخستین چیزی که می‌تواند رخ دهد این است که دیگر ν همیشه نامنفی نیست ، و این منجر به‌درنظر گرفتن اندازه‌های علامت‌دار می‌گردد که بعد تعریف خواهیم کرد . اشکال اندکی جدی این است که اگر $\mu_1 E = \mu_2 E = \infty$ باشد آنگاه ν دیگر تعریف شده ، نیست . به‌این‌سبب باید یکی‌از دو اندازهٔ μ_1 یا μ_2 باپایان‌باشند . باتوجه به‌این‌مطالب تعریف زیر را بیان می‌کنیم :

تعریف :

منظور ازیک‌اندازهٔ علامت‌دار روی‌فضای‌اندازه‌پذیر $(X, \mathcal{B})$ یک تابع مجموعهٔ ν با مقدارهای حقیقی تعمیم‌یافته است که روی مجموعه‌های $\mathcal{B}$ تعریف شده‌است و در شرطهای زیر صدق می‌کند :

i ـ ν *حداکثر یکی‌از دومقدار $-\infty$, $+\infty$ را می‌پذیرد .*

ii ـ $\nu(\varnothing) = 0$

iii ـ *برای‌هردنبالهٔ E_i از مجموعه‌های اندازه‌پذیر مجزا داریم*

$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu E_i$ ، *معنای‌برابری‌این‌است‌که‌اگر $\nu(\bigcup E_i)$ باپایان باشد ،*

سری سمت راست به‌طور مطلق همگراست ، وگرنه به‌طور سره واگراست .

بنابراین‌اندازه ، حالت‌خاصی‌از اندازهٔ علامت‌دار است ، ولی‌اندازهٔ علامت‌دار درحالت‌کلی اندازه نیست . می‌گویند A نسبت‌به‌اندازهٔ علامت‌دار ν یک مجموعهٔ مثبت است هرگاه A اندازه‌پذیر باشد و برای هر زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر E از A داشته باشیم $\nu E \geq 0$. هرزیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر یک مجموعهٔ مثبت‌باز مثبت است ، و تحدید ν به‌یک مجموعهٔ مثبت یک‌اندازه است . به‌همین‌ترتیب ، می‌گویند مجموعهٔ B یک‌مجموعهٔ منفی است هرگاه اندازه‌پذیر باشد و هر زیرمجموعهٔ **اندازه‌پذیر** آن دارای اندازهٔ ν ی نامثبت باشد . مجموعه‌ای که نسبت‌به ν هم مثبت و هم منفی است **مجموعهٔ صفر** نامیده‌می‌شود . یک‌مجموعهٔ اندازه‌پذیر یک مجموعهٔ صفر است اگروتنهااگر هرزیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر آن دارای‌اندازهٔ ν ی صفر باشد . خواننده باید به‌تمایز بین‌یک‌مجموعهٔ صفر ، و یک‌مجموعهٔ‌بااندازهٔ‌صفر توجه داشته باشد : درحالیکه هرمجموعهٔ صفر دارای اندازهٔ صفراست ، یک‌مجموعهٔ‌بااندازهٔ‌صفرممکن‌است‌برابراجتماع دومجموعه‌باشدکه‌اندازه‌هایشان صفر نیست ولی قرنیهٔ یکدیگرند . به‌همین‌ترتیب نباید یک مجموعهٔ مثبت‌را بامجموعه‌ای که اندازهٔ آن مثبت است اشتباه‌کرد . لم زیر را دربارهٔ مجموعه‌های **مثبت داریم** . البته گفتارهای مشابهی دربارهٔ مجموعه‌های منفی برقرار است .

۱۹ ــ لم

هر زیرمجموعهٔ *اندازه‌پذیر* یک مجموعهٔ مثبت ، خود مثبت *است* . *اجتماع* یک دستهٔ شمارش‌پذیر *از* مجموعه‌*های* مثبت یک مجموعهٔ مثبت *است* .

برهان

درستی گفتار نخست بنابه‌تعریف یک مجموعهٔ مثبت بدیهی است . برای اثبات گفتار دوم ، گیریم A اجتماع یک دنبالهٔ $\langle A_n \rangle$ از مجموعه‌های مثبت است . اگر E یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر A باشد ، قرار می‌دهیم :

$$E_n = E \cap A_n \cap \tilde{A}_{n-1} \cap \cdots \cap \tilde{A}_1$$

دراین‌صورت E_n یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر A_n است ، پس $\nu E_n \geq 0$

چون E_n ها مجزا هستند و $E = \bigcup E_n$ است ، پس داریم :

$$\nu E = \sum_{n=1}^{\infty} \nu E_n \geq 0.$$

بنابراین E مثبت است . ▮

۲۰ ـ لـــــــم :

گیریم E یک‌مجموعهٔ اندازه‌پذیر است به‌گونه‌ای‌که $0 < \nu E < \infty$ دراین‌صورت یک مجموعهٔ مثبت A مشمول E با $\nu A > 0$ وجود دارد .

برهـــــان :

E یا یک‌مجموعهٔ مثبت است یا شامل مجموعه‌هایی بااندازهٔ منفی است . درحالت اخیر گیریم n_1 کوچکترین عدد درست مثبت است به‌گونه‌ای که یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر $E_1 \subset E$ بااندازهٔ

$$\nu E_1 < -\frac{1}{n_1}\cdot$$

وجـــود دارد .

روند استقراء را در پیش‌می‌گیریم . فرض کنیم n_k کوچکترین عدد درست مثبت است به‌گونه‌ای که یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر E_k باشرطهای

$$E_k \subset E \sim \left[\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j\right]$$

و

$$\nu E_k < -\frac{1}{n_k}$$

وجود دارد . اگر قراردهیم

$$A = E \sim \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

آنگاه داریم

$$E = A \cup \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right]$$

چون این اجتماع ، اجتماعی از مجموعه‌های مجزاست ، پس داریم

$$\nu E = \nu A + \sum_{k=1}^{\infty} \nu E_k$$

سری سمت راست همگرای مطلق است ، زیرا νE باپایان است . بنابراین $\sum \frac{1}{n_k}$ همگرا است ،وداریم $n_k \to \infty$.چون $\nu E_k \leq 0$ و $\nu E > 0$ ، پس باید داشته باشیم $\nu A > 0$

برای این که نشان دهیم که A یک مجموعهٔ مثبت است ، فرض می‌کنیم $\epsilon > 0$ داده شده است . چون $n_k \to \infty$ ، می‌توان k را چنان بزرگ برگزید که $\epsilon > (n_k - 1)^{-1}$ باشد . چون داریم

$$A \subset E \sim \left[\bigcup_{j=1}^{k} E_j \right]$$

A می‌تواند حاوی هیچ مجموعه‌ای با اندازهٔ کمتر از $-(n_k - 1)^{-1}$ ، که خود بزرگتر از $-\epsilon$ است ، نباشد . بنابراین A حاوی هیچ مجموعهٔ اندازه‌پذیری با اندازهٔ کمتر از $-\epsilon$ نیست . چون ϵ یک عدد مثبت دلخواه است ، پس A نمی‌تواند حاوی هیچ مجموعه‌ای با اندازهٔ منفی باشد ، پس باید یک مجموعهٔ مثبت باشد . ∎

۲۱ ـ گــــزاره (قضیهٔ تجزیه هــان[1]) :

گیریم ν روی فضای اندازه‌پذیر $(X, \mathcal{B})$ یک اندازهٔ علامت‌دار است . دراین صورت یک مجموعهٔ مثبت A و یک مجموعهٔ منفی B وجود دارند به‌گونه‌ای که $X = A \cup B$ و $A \cap B = \emptyset$ است .

برهــــان :

بدون کاستن از کلیت می‌توان فرض کرد که ν هرگز نمی‌تواند $+\infty$ را بگیرد . گیریم λ کنارهٔ بالای νA روی همهٔ مجموعه‌های A است ، که نسبت به ν مثبت هستند . چون مجموعه تهی یک مجموعهٔ مثبت است ، پس $\lambda \geq 0$. گیریم $\langle A_i \rangle$ یک دنباله ار مجموعه‌های مثبت است ، به‌گونه‌ای که

$$\lambda = \lim_{i \to \infty} \nu A_i$$

و قرار می‌دهیم

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

---

۱ — Hahn Decomposition Theorem

بنابرلم ۱۸ خود مجموعهٔ A مثبت‌است ،پس $\lambda \geq \nu A$. ولی $A \sim A_i \subset A$ پس $\nu(A \sim A_i) \geq 0$. بنابراین

$$\nu A = \nu A_i + \nu(A \sim A_i) \geq \nu A_i.$$

ازاین‌رو $\nu A \geq \lambda$ ، پس $\nu A = \lambda$ ، و $\lambda < \infty$ است .

می‌گیریم $B = \sim A$ ،وفرض‌می‌کنیم E یک‌زیرمجموعهٔ مثبتB است . دراین‌صورت E و A مجزا هستند و $E \cup A$ یک‌مجموعهٔ مثبت است . ازاین‌رو

$$\lambda \geq \nu(E \cup A) = \nu E + \nu A = \nu E + \lambda$$

ازآنجانتیجه‌می‌شود $\nu E = 0$ ، زیرا $0 \leq \lambda < \infty$است . بنابراین B حاوی‌هیچ زیرمجموعهٔ مثبت بااندازهٔ مثبت ، درنتیجه بنابرلم ۲۰ حاوی هیچ زیرمجموعه بااندازه مثبت نیست . پس B یک‌مجموعهٔ منفی است . ∎ .

هر تجزیهٔ X به‌دومجموعهٔ مجزای A و B به‌گونه‌ای‌که A برای ν مثبت و B برای ν منفی باشد یک **تجزیهٔ هان** برای ν نامیده می‌شود . گزارهٔ ۲۱ مبین وجودیک تجزیهٔ هان برای هر اندازهٔ علامت‌دار است . متأسفانه تجزیهٔ هان یکتا نیست .

اگر $\{A, B\}$ یک‌تجزیهٔ‌هان‌برای ν باشد ،آنگاه می‌توان‌دواندازهٔ ν^+ و ν^- را با برابریهای

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap A)$$

و

$$\nu^-(E) = -\nu(E \cap B).$$

تعریف کرد .

دو اندازهٔ ν_1 و ν_2 را روی $(X, \mathcal{B})$ متقابلا" استثنایی می‌گویند (و می‌نویسند $\nu_1 \perp \nu_2$) اگر مجموعه‌های‌اندازه‌پذیرمجزای A و B وجود داشته‌باشندبا $X = A \cup B$ به‌گونه‌ای‌که $\nu_1(A) = \nu_2(B) = 0$. بنابراین اندازه‌های ν^+ و ν^- که در بالاتعریف‌شدند متقابلا" استثنایی هستند . به‌این‌ترتیب قسمت مربوط به‌وجود گزارهٔ زیر ثابت شد اثبات قسمت یکتایی به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌شود .

۲۲ ــ گزاره:

گیریم ν روی‌فضای‌اندازه‌پذیر $(X, \mathcal{B})$ یک‌اندازهٔ علامت‌داراست . دراین‌صورت روی $(X, \mathcal{B})$ دو اندازهٔ متقابلا" استثنایی ν^+ و ν^- وجود دارد به‌گونه‌ای که داریم $\nu = \nu^+ - \nu^-$. به‌علاوه چنین جفتی از اندازه‌های متقابلا" استثنایی یکتاست .

تجزیهٔ ν که با این‌گزاره داده می‌شود، **تجـزیـــه ژوردان**[1] ν نام دارد. اندازه‌های ν^+ و ν^- بخشها (یا تغییرها)ی مثبت و منفی ν نامیده می‌شوند. چون ν حداکثر یکی از مقدارهای $\infty+$ و $\infty-$ را می‌گیرد، ν^+ یا ν^- باید باپایان باشنـد.

اگر هردو باپایان باشند، ν را اندازهٔ علامت‌دار باپایان می‌نامند.

اندازهٔ $|\nu|$ که با

$$|\nu|(E) = \nu^+E + \nu^-E$$

تعریف می‌شود **مقـــدارمطلـــق** یا **تغییـــرکلـــی** ν نامیده‌می‌شود. مجموعهٔ E برای ν مثبت‌است‌اگر $\nu^-E = 0$ باشد. E یک‌مجموعهٔ‌صفراست‌اگر $|\nu|(E) = 0$ باشد.

مسئلـــه‌ها

۲۶ ــ (الف) ــ مثالی‌بیاورید که نشان‌دهد که تجزیهٔ‌هان لزوماً" یکتا نیست.

(ب) ــ نشان‌دهیدکه تجزیهٔ‌هان یکتاست به‌جز برای‌مجموعه‌های‌صفر.

۲۷ ــ نشان‌دهید که تنها یک جفت اندازهٔ‌متقابلاً" استثنایی ν^+ و ν^- وجود دارد به‌گونه‌ای‌که داریم $\nu = \nu^+ - \nu^-$. [**راهنمـایـــی**: نشان دهید که هرجفت نظیر آن‌یک‌تجزیهٔ **هان** ν را تعیین می‌کند و نتیجه‌های مسئلهٔ ۲۶ ب را کار بندید].

۲۸ ــ نشان دهید که اگر E یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر باشد آنگاه داریم

$$-\nu^-E \leq \nu E \leq \nu^+E$$

و

$$|\nu E| \leq |\nu|(E).$$

۲۹ ــ نشان دهید که اگر ν_1 و ν_2 دواندازهٔ علامت‌دار باپایان باشند، آنگاه $\alpha\nu_1 + \beta\nu_2$، که در آن α و β دوعدد حقیقی هستند، نیز یک اندازهٔ علامت‌دار باپایان است. نشان دهید

$$|\alpha\nu| = |\alpha|\,|\nu|$$

و

$$|\nu_1 + \nu_2| \leq |\nu_1| + |\nu_2|,$$

که در آن معنی $\nu \leq \mu$ این است که برای همهٔ مجموعه‌های اندازه‌پذیر E، داریـــم

$$\nu E \leq \mu E$$

۳۰ ــ انتگرال‌گیری نسبت به‌یک اندازهٔ علامت‌دار را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\int f\,d\nu = \int f\,d\nu^+ - \int f\,d\nu^-$$

---

[1] ــ Jordan decomposition

اگر $M \leq |f|$ باشد، آنگاه داریم

$$\left|\int_E f\,d\nu\right| \leq M|\nu|(E).$$

به‌علاوه، یک تابع اندازه‌پذیر f با $|f| \leq 1$ وجود دارد به‌گونه‌ای که

$$\int_E f\,d\nu = |\nu|(E).$$

۳۱ ـ الف ـ گیریم μ و ν اندازه‌های علامت‌دار باپایان هستند. نشان دهید که یک اندازهٔ علامت‌دار $\mu \wedge \nu$ وجود دارد که از μ و ν کوچکتر است ولی از هراندازهٔ علامت‌دار دیگری که از μ و ν کوچکتر است، بزرگتر می‌باشد. [**راهنمایی**: داریم

$$[\mu \wedge \nu = \tfrac{1}{2}(\mu + \nu - |\mu - \nu|).]$$

ب ـ نشان‌دهیدکه یک‌اندازهٔ علامت‌دار $\mu \vee \nu$ وجود داردکه از μ و ν بزرگتر است ولی از هر اندازهٔ دیگری که از μ و ν بزرگتر است، کوچکتر می‌باشد. همچنین

$$\mu \vee \nu + \mu \wedge \nu = \mu + \nu$$

پ ـ اگر μ و ν اندازه‌های مثبت‌باشند، آنگاه برای‌این‌که این‌اندازه‌ها متقابلا" استثنایی باشند لازم و کافی است که $\mu \wedge \nu = 0$ برقرار باشد.

۶ ـ قضیهٔ رادن ـ نیکودیم [1]

گیریم $(X, \mathcal{B})$ **یک‌فضای‌اندازه‌پذیرمشخص‌است**. اگر دو اندازهٔ μ و ν روی $(X, \mathcal{B})$ تعریف شده‌باشند، μ و ν را**متقابلا" استثنایی**می‌گوییم (ومی‌نویسیم $\mu \perp \nu$)، اگر در $\mathcal{B}$ مجموعه‌های مجزای A و B وجودداشته‌باشندبه‌گونه‌ای‌که $X = A \cup B$ و $\nu A = \mu B = 0$ باشد. باوجود این که استثنایی بودن نسبت‌به μ و ν متقارن است، گاهی می‌گوییم‌که ν نسبت‌به μ استثنایی است. دربرابر استثنایی بودن مفهوم پیوستگی مطلق قرار دارد. می‌گویند اندازهٔ ν نسبت‌به‌اندازهٔ μ **پیوستهٔ مطلق** است، اگر برای هرمجموعهٔ A که برای‌آن $\mu A = 0$ است داشته باشیم $\nu A = 0$ برای نمایاندن پیوستگی مطلق ν نسبت‌به μ از نمادگذاری $\nu \ll \mu$ استفاده می‌کنیم.

درحالت اندازه‌های علامت‌دار μ و ν، می‌گوییم $\nu \ll \mu$، اگر

$$|\nu| \ll |\mu| \quad \text{و} \quad \nu \perp \mu \quad \text{اگر} \quad |\nu| \perp |\mu|$$

هنگامی‌که‌روی یک‌فضای‌اندازه‌پذیر $(X, \mathcal{B})$ با بیش‌از یک‌اندازه‌روبروهستیم، عبارت "تقریبا" همه‌جا" مبهم‌خواهدبود، و باید مشخص‌کنیم که تقریبا" همه‌جا نسبت

---

1 — Radon-Nikodym Theorem

به μ است یا نسبت به ν ، وغیره . این عبارتها را به اختصار چنین می‌نویسیم $[\mu]$ ت.ه . و $[\nu]$ ت.ه . اگر $\nu \ll \mu$ بوده و یک خاصیت $[\mu]$ ت . ه . برقرار باشد ، آنگاه این خاصیت $[\nu]$ ت . ه . برقرار است .

گیریم μ یک اندازه و f یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی روی X است . برای هر E ، متعلق به $\mathcal{B}$ ، قرار می‌دهیم

$$\nu E = \int_E f \, d\mu$$

آنگاه ν تابع مجموعه‌ای است که روی $\mathcal{B}$ تعریف شده است ، و از نتیجهٔ ۱۴ برمی‌آید که ν جمعی شمارش‌پذیر و از این‌رو یک اندازه است . برای باپایان‌بودن ν لازم و کافی است که f انتگرال‌پذیر باشد . چون انتگرال روی مجموعه‌ای با μ اندازهٔ صفر ، برابر صفر است ، پس ν به‌طور مطلق نسبت به μ پیوسته است . قضیه بعد نشان می‌دهد که با قید σ باپایانی ، هر اندازهٔ پیوستهٔ مطلق ν با این روش به‌دست می‌آید .

۲۳ ــ قضیه (رادن ــ نیکودیم) :

گیریم $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ، یک فضای اندازهٔ σ ـ باپایان است ، و اندازهٔ ν که روی $\mathcal{B}$ تعریف شده ، نسبت به μ پیوستهٔ مطلق است . در این صورت یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی f ، وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر مجموعهٔ E ی متعلق به $\mathcal{B}$ داریم $\nu E = \int_E f \, d\mu$

تابع f یکتاست به این معنی که اگر g تابع اندازه‌پذیر دیگری با این خاصیت باشد آنگاه $g = f$ ت . ه . $[\mu]$ است .

برهان :

گسترش از حالت باپایان به σ ـ باپایان دشوار نیست و به خواننده واگذار می‌شود . بنابراین فرض می‌کنیم که μ باپایان است . در این صورت $\nu - \alpha\mu$ ، برای هر عدد گویای α ، یک اندازهٔ علامت‌دار است . گیریم (A_α, B_α) برای $\nu - \alpha\mu$ یک تجزیهٔ هان[1] است ، و می‌گیریم $A_0 = X$ ، $B_0 = \varnothing$.

اکنون داریم $B_\alpha \sim B_\beta = B_\alpha \cap A_\beta$. بنابراین داریم :
$(\nu - \alpha\mu)(B_\alpha \sim B_\beta) \leq 0$ و $(\nu - \beta\mu)(B_\alpha \sim B_\beta) \geq 0$.اگر $\beta > \alpha$ باشد

---
۱ ــ Hahn

ازاین‌نابرابریهانتیجه‌می‌شود $\mu(B_\alpha \sim B_\beta) = 0$ ، پس بنابرلم ۱۰ یک‌تابع اندازه‌پذیر f وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هرعدد گویای α ، روی A_α داریم $f \geq \alpha$ ت . هـ . و روی B_α داریم $\alpha \leq f$ ت . هـ . چون $B_0 = \varnothing$ است ، پس می‌توان f را نامنفی گرفت .

گیریم E یک مجموعهٔ دلخواه $\mathcal{B}$ است ، و قرار می‌دهیم

$$E_k = E \cap \left(B_{\frac{k+1}{N}} \sim B_{\frac{k}{N}}\right), \qquad E_\infty = E \sim \bigcup B_{\frac{k}{N}}$$

دراین‌صورت $E = E_\infty \cup \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} E_k$ ، و این یک اجتماع مجزاست . بنابراین

$$\nu E = \nu E_\infty + \sum_{k=0}^{\infty} \nu E_k.$$

چون $E_k \subset B_{\frac{k+1}{N}} \cap A_{\frac{k}{N}}$ است ، روی E_k داریم : $\dfrac{k}{N} \leq f \leq \dfrac{k+1}{N}$ پس

$$\frac{k}{N}\,\mu E_k \leq \int_{E_k} f\,d\mu \leq \frac{k+1}{N}\,\mu E_k.$$

چون $\dfrac{k}{N}\,\mu E_k \leq \nu E_k \leq \dfrac{k+1}{N}\,\mu E_k$ است ، داریم ،

$$\nu E_k - \frac{1}{N}\,\mu E_k \leq \int_{E_k} f\,d\mu \leq \nu E_k + \frac{1}{N}\,\mu E_k.$$

روی E_∞ ت.هـ. ، $f = \infty$ است .اگر $\mu E_\infty > 0$ باشد ،باید $\nu E_\infty = \infty$ باشد ، زیرا برای‌هرعدد α مقدار $(\nu - \alpha\mu)\, E_\infty$ مثبت‌است . اگر $\mu E_\infty = 0$ باشد باید $\nu E_\infty = 0$ باشد ، زیرا $\nu \ll \mu$. در هر حالت

$$\nu E_\infty = \int_{E_\infty} f\,d\mu.$$

باجمع کردن این برابری و نابرابریهای پیشین ، به‌دست می‌آوریم

$$\nu E - \frac{1}{N}\,\mu E \leq \int_E f\,d\mu \leq \nu E + \frac{1}{N}\,\mu E.$$

چون μE باپایان و N دلخواه است ، باید داشته باشیم

$$\nu E = \int_E f\,d\mu. \ \blacksquare$$

تابع f که با قضیهٔ ۲۳ تعریف می‌شود **مشتــق رادن ـ نیکــودیــم** ν نسبت به μ نامیده می‌شود. این مشتق را گاهی به‌صورت $\left[\frac{d\nu}{d\mu}\right]$ نشان می‌دهند.

۲۴ ـ گـــزاره (تجـزیـهٔ لبـــگ[1]):

گیریم $(X, \mathcal{B}, \mu)$ یک‌فضای اندازهٔ σ - باپایان، و ν یک‌اندازهٔ σ-باپایان تعریف‌شده روی $\mathcal{B}$ است. دراین‌صورت می‌توان یک اندازهٔ ν_0 و یک اندازهٔ ν_1 یافت به‌گونه‌ای که ν_0 نسبت‌به μ استثنایی و ν_1 نسبت‌به μ به‌طورمطلق پیوستـــه بـــوده و $\nu = \nu_0 + \nu_1$ باشد. اندازه‌های ν_0 و ν_1 یکتا هستند.

بـرهـــان:

چون‌اندازه‌های μ و ν، σ- باپایانند، پس $\lambda = \mu + \nu$ نیز σ- باپایان‌است. چون μ و ν نسبت‌به λ به‌طورمطلق پیوسته‌اند، بنابرقضیهٔ رادن ـ نیکودیم تابعهای اندازه‌پذیر نامنفی f و g وجود دارند به‌گونه‌ای که برای هر $E \varepsilon \mathcal{B}$ داریم:

$$\mu E = \int_E f\, d\lambda, \qquad \nu E = \int_E g\, d\lambda$$

گیریم $A = \{x: f(x) > 0\}$ و $B = \{x: f(x) = 0\}$. دراین‌صورت X اجتمـــاع دومجموعهٔ مجزای A و B است، با $\mu B = 0$. اگر ν_0 را با

$$\nu_0 E = \nu(E \cap B)$$

تعریف کنیم، داریم $\nu_0(A) = 0$ پس $\nu_0 \perp \mu$. گیریم

$$\nu_1(E) = \nu(E \cap A) = \int_{E \cap A} g\, d\lambda$$

دراین‌صورت $\nu = \nu_0 + \nu_1$، وتنهاباید ثابت‌کنیم‌که $\nu_1 \ll \mu$. گیریم E مجموعه‌ای با μ - اندازهٔ صفر است. دراین‌صورت

$$0 = \mu E = \int_E f\, d\lambda,$$

و $f = 0$ [λ] ت.هـ. روی E داریم $f = 0$. چون‌روی $A \cap E$، $f > 0$ است، پس باید داشته باشیم $\lambda(A \cap E) = 0$. ازاین‌رو $\nu(A \cap E) = 0$، پس $\nu_1(E) = \nu(A \cap E) = 0$. این قضیه‌را برقرارمی‌سازد، به‌جزقسمت یکتایی آن که به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذارمی‌شود ▮

---

۱ ـ Lebesgue Decomposition

مسئله‌ها

۳۲ ــ الف ــ نشان دهید که درستی قضیهٔ رادن ــ نیکودیم برای یک اندازهٔ باپایان ، درستی آن‌را برای یک اندازهٔ σ ـ باپایان ایجاب می‌کند . [**راهنمایی :** X را به‌اجتماع شمارش‌پذیری از مجموعه‌های X_i با μ اندازهٔ باپایان تجزیه کنید و برای یافتن f قضیه را درمورد هر X_i به‌کار ببرید . نشان دهید که f خاصیتهای مطلوب را دارد .]

ب ــ یکتایی f را در قضیهٔ رادن ــ نیکودیم ثابت کنید .

۳۳ ــ **مشتق‌های رادن ــ نیکودیم** ــ نشان دهید که $\left[\frac{d\nu}{d\mu}\right]$ یعنی مشتق رادن ــ نیکودیم دارای خواص زیر است :

الف ــ اگر $\nu \ll \mu$ و f یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی باشد ، آنگاه داریم

$$\int f\, d\nu = \int f\left[\frac{d\nu}{d\mu}\right] d\mu.$$

ب ــ

$$\left[\frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu}\right] = \left[\frac{d\nu_1}{d\mu}\right] + \left[\frac{d\nu_2}{d\mu}\right].$$

پ ــ اگر $\nu \ll \mu \ll \lambda$ ، آنگاه داریم :

$$\left[\frac{d\nu}{d\lambda}\right] = \left[\frac{d\nu}{d\mu}\right]\left[\frac{d\mu}{d\lambda}\right]$$

ت ــ اگر $\nu \ll \mu$ و $\mu \ll \nu$ ، آنگاه

$$\left[\frac{d\nu}{d\mu}\right] = \left[\frac{d\mu}{d\nu}\right]^{-1}.$$

۳۴ ــ الف ــ نشان دهید که اگر ν یک اندازهٔ علامت‌دار باشد به‌گونه‌ای که $\nu \perp \mu$ و $\nu \ll \mu$ ، آنگاه $\nu = 0$ است .

ب ــ نشان دهید که اگر ν_1 و ν_2 نسبت به μ استثنایی باشند ، آنگاه $c_1\nu_1 + c_2\nu_2$ نیز نسبت به μ استثنایی است .

پ ــ یکتایی را در قضیهٔ تجزیه لبگ ثابت کنید .

۳۵ ــ قضیهٔ رادن ــ نیکودیم را به‌حالت اندازهٔ علامت‌دار تعمیم دهید .

۳۶ــ اندازه‌های مختلط ــ تابع مجموعهٔ ν که‌به‌هرمجموعهٔ E از σ-جبر $\mathcal{B}$ یک‌عدد مختلط νE مربوط می‌کند ، اندازهٔ مختلط نامیده می‌شود اگر $\nu\emptyset = 0$ بوده و برای هر اجتماع مجزای شمارش‌پذیر $\bigcup E_i$ از مجموعه‌های $\mathcal{B}$ داشته باشیم

$$\nu(\bigcup E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu E_i$$

که در آن مجموع سمت راست به‌طور مطلق همگراست .

الف ــ نشان دهید که هر اندازهٔ مختلط را می‌توان به‌شکل $\nu = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$ نوشت‌که‌درآن μ_1 ، μ_2 ، μ_3 و μ_4 اندازه‌های باپایانند .

ب ــ نشان‌دهیدکه برای هراندازهٔ‌مختلط ν یک اندازهٔ μ و یک تابع مختلط اندازه‌پذیر φ با $|\varphi| = 1$ وجودداردبه‌گونه‌ای‌که‌برای‌هرمجموعهٔ E متعلق‌به $\mathcal{B}$ داریم

$$\nu E = \int_E \varphi \, d\mu.$$

[**راهنمایی** : قضیهٔ‌رادن‌ــ نیکودیم را درمورداندازه‌های μ_i نسبت‌به‌اندازهٔ $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4$. به‌کار ببرید .]

پ ــ نشان دهید که اندازهٔ μ مذکور در (ب) یکتاست و تابع φ به‌جز روی مجموعه‌های با μ اندازهٔ صفر ، به‌طور یکتا تعیین می‌شود .

ت ــ اندازهٔ μ مذکور در (ب) **تغییرکلی یا مقدارمطلق** ν نامیده‌می‌شود و گاهی با $|\nu|$ نشان داده می‌شود . نشان دهید که نتیجه‌های مسئلهٔ ۳۰ درمورد اندازه‌های مختلط برقرار است .

ث ــ اگر ν اندازهٔ مختلطی‌با $|\nu|(X) = 1$ و $\nu(X) = 1$ باشد ، دراین صورت ν یک اندازهٔ مثبت حقیقی است .

۳۷ــ اثبات دیگرقضیهٔ رادن‌ــ نیکودیم ــ بااستفاده‌ازگزارهٔ ۲۸ . ۱۰ می‌توان اثبات دیگری برای قضیهٔ رادن ــ نیکودیم بیان کرد که به‌قضیهٔ تجزیهٔ هان بستگی ندارد . بنابرگزارهٔ ۲۸ . ۱۰ ، برای هر فونکسیونل کراندار خطی F روی یک‌فضای هیلبرت H ، یک تابع g در H وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر f در H داریم $F(f) = (f, g)$. این اثبات از فون ــ نیومان[1] است . جزئیات این اثبات در زیر خاطرنشان می‌شود :

---

1 ــ Von Neumann

الــف ــ گیریم μ و ν اندازه‌های باپایانی روی فضای اندازهٔ $(X, \mathcal{B})$ هستند و قرار می‌دهیم ، $\nu + \mu = \lambda \cdot F$ را بابرابری $F(f) = \int f\, d\mu$ تعریــف می‌کنیــم . دراین‌صورت F روی $L^2(\lambda)$ یک فونکسیونل خطی کراندار است .

ب ــ تابع $g \varepsilon L^2(\lambda)$ به‌گونه‌ای‌که $F(f) = (f, g)$ است ، دارای‌این‌خاصیت است که $0 \leq g \leq 1$ بوده و داریم

$$\mu(E) = \int_E g\, d\lambda$$
$$\nu(E) = \int_E (1 - g)\, d\lambda.$$

پ ــ اگر $\mu \ll \nu$ ، آنگاه $\lambda \ll \mu$ بوده‌وتنها‌روی‌یک‌مجموعهٔ‌با μ اندازهٔ صفر ، $g = 0$ است . دراین‌حالت

$$\lambda(E) = \int_E g^{-1} d\mu$$

[راهنمــایـــــی: از مسئلهٔ ۲۱ استفاده کنید .]

ت ــ اگر $\nu \ll \mu$ ، آنگاه $(1 - g)g^{-1}$ نسبت‌به μ انتگرال‌پذیراست‌وداریم :

$$\nu(E) = \int_E (1 - g)g^{-1}\, d\mu$$

۳۸ ــ بااستفاده از مثال‌زیر نشان دهید که نمی‌توان در قضیهٔ رادن ــ نیکودیم فرض σ ‑ باپایان بودن μ را حذف کرد .

گیریم $X = [0, 1]$ و $\mathcal{B}$ ردهٔ‌زیرمجموعه‌های‌اندازه‌پذیرلبگ $[0, 1]$ است . ν را اندازهٔ‌لبگ و μ را اندازهٔ‌شمارنده ، روی $\mathcal{B}$ ، می‌گیریم . دراین‌صورت ν باپایان و نسبت‌به μ به‌طورمطلق پیوسته است ، ولی هیچ تابع f وجود ندارد به‌قسمتی که برای هر $E \varepsilon \mathcal{B}$ ، $\nu E = \int_E f\, d\mu$ باشد . درکدام‌نقطه برهان قضیهٔ ۲۳ درمورد این‌مثال صــادق نیســـت ؟

۳۹ ــ ***انــدازه‌هــای‌تجــزیــه‌پــذیـــر*** : گیریم $(X, \mathcal{B}, \mu)$ یک‌فضای‌اندازه است . یک‌دستهٔ $\{X_\alpha\}$ اززیرمجموعه‌های‌مجزای‌اندازه‌پذیر X رابرای μ یک **تجــزیـــه** می‌نامیم‌هرگاه‌برای‌هر α ، $\mu X_\alpha < \infty$ بوده و برای هرمجموعهٔ اندازه‌پذیر E به‌گونه‌ای که‌برای‌هر α $\mu(E \cap X_\alpha) = 0$ است ، داشته‌باشیم $\mu E = 0$. اندازهٔ μ را**تجــزیه‌پــذیــر** می‌گوییم هرگاه μ یک تجزیه داشته باشد .

الف ــ اگر $\{X_\alpha\}$ برای μ یک تجزیه ، و E یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر باشد آنگاه $\mu E = \sum \mu(X_\alpha \cap E)$ ، که‌درآن‌معنی $\sum$ همان‌است که‌درمسئلهٔ ۲ . ۲۰ دیدیم .

ب ــ اگر $\{X_\alpha\}$ برای‌اندازهٔ‌کامل μ ، یک تجزیه باشد ، آنگاه f اندازه‌پذیر موضعی‌است اگر و تنها‌اگر قید f به X_α نیز برای‌هر α اندازه‌پذیرباشد . اگر f روی X ، یک تابع نامنفی و اندازه‌پذیر موضعی باشد ، آنگاه داریم :

$$\int_X f\,d\mu = \sum_\alpha \int_{X_\alpha} f\,d\mu.$$

پ ــ اگر ν نسبت‌به μ به‌طورمطلق پیوسته‌باشد ، و فرض کنیم که یک‌دستهٔ $\{X_\alpha\}$ وجودداردکه‌برای μ و ν تواماً "یک‌تجزیه است . دراین‌صورت یک تابع حقیقی نامنفی‌واندازه‌پذیرموضعی f وجودداردبه‌گونه‌ای‌که برای هرمجموعهٔ‌اندازه‌پذیر E داریم

$$\nu E = \int_E f\,d\mu.$$

ت ــ اگر به‌جای این‌که فرض کنیم $\{X_\alpha\}$ برای ν یک تجزیه است ، تنها فرض کنیم که اگر $E \in \mathfrak{B}$ بوده و برای هر α ، $\nu(E \cap X_\alpha) = 0$ باشد ، آنگاه $\nu E = 0$ است ، نتیجهٔ (پ) بازهم معتبر است .

۷ ــ فضاهای L^p

اگر $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ یک‌فضای‌اندازه‌باشد ، $L^p(\mu)$ نمایش فضای‌همهٔ‌تابعهای اندازه‌پذیری‌است‌روی X که‌برای‌آنها $\int |f|^p\,d\mu < \infty$ است ، باتوجه‌به‌این‌که دوتابع روی L^p هنگامی‌هم‌ارزندکه‌تقریباً " همه‌جا برابر باشند . همانند فصل ۶ ، $L^\infty(\mu)$ را بافضای‌همهٔ‌تابعهای‌اندازه‌پذیرکراندار تعریف می‌کنیم . برای $1 \le p < \infty$ قرارمی‌دهیم

$$\|f\|_p = \left\{\int |f|^p\,d\mu\right\}^{\frac{1}{p}},$$

وبرای $p = \infty$ قرار می‌دهیم

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f|.$$

باید دانست که فضای $L^\infty(\mu)$ به‌گزینش μ برای‌تعیین نرم و ردهٔ تابعهای هم‌ارزبستگی دارد ، ولی‌تنها لازمه‌این‌کارآن‌است‌که‌بدانیم مجموعه‌های‌بااندازهٔ‌صفرکدامند .

نابرابریهای‌هولدر و منیکوسکی و قضیهٔ‌ریس ــ فیشرهمانند فصل ۶ثابت‌می‌شوند ، و آنها را در قضیهٔ زیر خلاصه می‌کنیم .

۲۵ ــ قضیه :

برای هر $1 \le p \le \infty$ فضاهای $L^p(\mu)$ فضاهای باناخ هستند ، و اگر

$f \varepsilon L^p(\mu)$ ، $g \varepsilon L^q(\mu)$ ، با $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ باشد، آنگاه $fg \varepsilon L^1(\mu)$ است و داریم

$$\int |fg|\, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

گزارهٔ زیر که برهان آن به خواننده واگذار می‌شود، برگردانی از اصل دوم لتیل‌وود است :

۲۶ــ گـــــزاره :

گیریم $f \varepsilon L^p(\mu)$ ، $1 \leq p < \infty$ است. دراین‌صورت برای هر $0 < \epsilon$ داده شده یک تابع سادهٔ φ ، که بیرون مجموعه‌ای باندازهٔ باپایان صفر است، وجود دارد به‌گونه‌ای که $\|f - \varphi\|_p < \epsilon$.

از نابرابری هولدر نتیجه می‌شود که هر $g \varepsilon L^q$ بابرابری

$$F(f) = \int fg\, d\mu,$$

روی L^p یک‌فونکسیونل‌خطی F تعریف می‌کند، و می‌توان ثابت کرد که $\|F\| = \|g\|$. $L^p(\mu)$ $1 < p < \infty$ هرفونکسیونل خطی به‌این‌شکل است، واگر μ ، σ باپایان باشد، هر فونکسیونل‌خطی روی $L^1(\mu)$ به‌این‌شکل‌است . بااثبات لم زیر آغاز می‌کنیم .

۲۷ــ لـــــم :

گیریم $(X, \mathcal{B}, \mu)$ یک‌فضای‌اندازهٔ باپایان و g تابعی‌است‌انتگرال‌پذیربه‌گونه‌ای که برای یک مقدار ثابت M و برای همهٔ تابعهای سادهٔ φ داریم :

$$\left| \int g\varphi\, d\mu \right| \leq M \|\varphi\|_p$$

دراین‌صورت $g \varepsilon L^q$ اســت .

بـــرهـــان :

فرض‌کنیم $p > 1$ ، و $\langle \psi_n \rangle$ یک‌دنبالهٔ افزایشی از تابعهای نامنفی ساده است که به $|g|^q$ می‌گراید . قرار می‌دهیم :

$$\varphi_n = (\psi_n)^{\frac{1}{p}} \operatorname{sgn} g$$

دراین‌صورت φ_n یک‌تابع ساده است، و

$$\|\varphi_n\|_p = \left\{ \int \psi_n\, d\mu \right\}^{\frac{1}{p}}$$

چون $\varphi_n g \geq |\varphi_n|\,|\psi_n|^{\frac{1}{q}} = |\psi_n|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} = \psi_n$ پس داریم :

$$\begin{aligned}\int \psi_n\, d\mu &\leq \int \varphi_n g\, d\mu \\ &\leq M\|\varphi_n\|_p \\ &\leq M\left\{\int \psi_n\, d\mu\right\}^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

چون $1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}$ ، است ، پس

$$\left\{\int \psi_n\, d\mu\right\}^{\frac{1}{q}} \leq M$$

یا

$$\int \psi_n\, d\mu \leq M^q,$$

و بنابرقضیهٔ همگرایی یکنوا داریم

$$\int |g|^q\, d\mu \leq M^q.$$

برهان حالت $p=1$ به‌خواننده واگذار می‌شود ▮.

از لم‌زیر نیز، که اثبات آن به‌خواننده واگذار می‌شود، استفاده خواهیم کرد.

۲۸ ــ لم :

گیریم $\langle E_n\rangle$ یک‌دنباله‌از مجموعه‌های اندازه‌پذیر مجزاست، و گیریم برای هر n ، f_n تابعی‌است‌در L^p $(1 \leq p < \infty)$ که‌بیرون E_n صفراست. قرارمی‌دهیم $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. دراین‌صورت $f \varepsilon L^p$ استاگروتنهااگر $\sum \|f_n\|^p < \infty$ باشد. دراین‌حالت در L^p داریم $f=\sum f_n$ ، یعنی

$$\left\|f - \sum_{i=1}^{n} f_i\right\|_p \to 0$$

و

$$\|f\|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|^p.$$

۲۹ ــ قضیهٔ نمایش ریس:

گیریم F روی $L^p(\mu)$ با $1 \leq p < \infty$ یک‌فونکسیونل‌خطی‌کراندار و μ یک اندازهٔ σ - باپایان‌است. دراین‌صورت یک‌عضویکتای g در L^q با $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ،

وجود دارد به‌گونه‌ای که

$$F(f) = \int fg\, d\mu$$

همچنین داریم $\|F\| = \|g\|_q$.

برهـــــان:

نخست حالتی را در نظر می‌گیریم که μ باپایان است. دراین‌صورت هرتابع اندازه‌پذیر کراندار در $L^p(\mu)$ است. تابع مجموعهٔ ν را روی مجموعه‌های اندازه‌پذیر با برابری

$$\nu E = F(\chi_E)$$

تعریف می‌کنیم.

اگر E اجتماع یک دنبالهٔ $\langle E_n \rangle$ ازمجموعه‌های اندازه‌پذیر مجزا باشد، می‌گیریم $\alpha_n = \operatorname{sgn} F(\chi_{E_n})$ ، و قرار می‌دهیم $f = \sum \alpha_n \chi_{E_n}$. در ایـن صـورت بنا برلم ۲۸ و کرانداری F داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\nu E_n| = F(f) < \infty$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu E_n = F(\chi_E) = \nu E.$$

بنابراین ν یک اندازهٔ علامت‌دار است، پس بنابرقضیهٔ رادن ـ نیکودیم یک تابع اندازه‌پذیر g وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هرمجموعـهٔ انـدازه‌پـذیـر E داریـم $\nu E = \int_E g\, d\mu$. چـون ν ، همواره باپایان است، پس g انتگرال‌پذیر است.

اگر φ یک تابع ساده باشد، از خطی بودن F و انتگـرال نتیجـه می‌شود کـه

$$F(\varphi) = \int \varphi g\, d\mu.$$

چون سمت چپ دارای کران $\|F\|\,\|\varphi\|_p$ اسـت، پـس بنـابـرلـم ۲۷ داریـم $g \in L^q$ گیریم G یک فونکسیونل خطی کراندار است که روی L^p با

$$G(f) = \int fg\, d\mu.$$

تعریف می‌شود. دراین‌صورت $G - F$ یک فونکسیونل خطی کراندار است که روی زیرفضای تابعهای ساده صفر است. بنابرگزارهٔ ۲۶ تابعهای ساده در L^p متـراکمنـد، پـس $G - F = 0$. بنابراین برای هر $f \in L^p$ داریم

$$F(f) = \int fg\, d\mu,$$

به‌این‌ترتیب ثابت گردید که $\|F\| = \|G\| = \|g\|_q$

تابع g باید یک عنصر یکتای L^q را تعیین کند، زیرا اگر g_1 و g_2 هردو یک فونکسیونل مانند F را تعیین کنند، آنگاه $g_1 - g_2$ باید فونکسیونل صفر را بدهد، پس $\|g_1 - g_2\|_q = 0$ است. بنابراین ت. هـ. داریم $g_1 = g_2$.

برای گسترش قضیه به‌حالت σ-باپایان، گیریم $\langle X_n \rangle$ یک دنباله‌ٔ افزایشی از مجموعه‌های اندازه‌پذیر باندازهٔ باپایان است که اجتماعشان برابر X می‌باشد. از بخش اول قضیه درمورد فضاهای باندازهٔ باپایان، نتیجه می‌شود که برای هر n یک تابع g_n در L^q وجود داردکه بیرون X_n صفر است به‌گونه‌ای‌که برای هر $f \varepsilon L^p$ که‌بیرون X_n صفر است داریم:

$$F(f) = \int f g_n \, d\mu$$

به‌علاوه $\|g_n\|_q \leq \|F\|$. چون هر تابع g_n با این خاصیت روی X_n به‌جز روی مجموعه‌های باندازهٔ صفر به‌طور یکتا تعیین‌می‌شود، وچون g_{n+1} نیز دارای این خاصیت است، می‌توانیم روی X_n فرض کنیم $g_{n+1} = g_n$. برای $x \varepsilon X_n$ قرار می‌دهیم $g(x) = g_n(x)$. دراین‌صورت g تابعی است اندازه‌پذیر که به‌خوبی تعریف شده‌است و $|g_n|$ افزایشی و به‌طورنقطه‌ای‌به $|g|$ می‌گراید. پس بنابر قضیهٔ همگرایی یکنوا داریم:

$$\int |g|^q \, d\mu = \lim \int |g_n|^q \, d\mu$$

$$\leq \|F\|^q,$$

و $g \varepsilon L^q$.

اگر $f \varepsilon L^p$ باشد، آنگاه‌روی X_n می‌گیریم $f_n = f$ و بیرون X_n می‌گیریم $f_n = 0$. دراین‌صورت f_n در L^p به‌طورنقطه‌ای به f می‌گراید. چون $|fg|$ انتگرال‌پذیر و $|f_n g| \leq |fg|$ است، پس بنابرقضیهٔ همگرایی لبگ داریم:

$$\int fg \, d\mu = \lim \int f_n g \, d\mu$$

$$= \lim \int f_n g_n \, d\mu$$

$$= \lim F(f_n)$$

$$= F(f). \blacksquare$$

اگر $p = 1$ باشد شرط σ-باپایان‌بودن μ لازم‌است. در مسئله‌های ۴۵و۴۶ چندگسترش وچندمثال‌نقیض‌داده‌شده‌است. اگر $p > 1$ باشد، آنگاه σ-باپایان‌بودن μ لازم‌نیست.

۳۰ ــ قضیـــــــه :

گیریم F روی $L^p(\mu)$ با $1 < p < \infty$ ، یک‌فونکسیونل‌خطی‌کراندار است . دراین‌صورت یک عنصر یکتای $g \varepsilon L^q$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $F(f) = \int fg\, d\mu$.

داریم $\|F\| = \|g\|_q$

بـــرهـــــــان

از قضیهٔ پیشین نتیجه می‌شود که اگر E یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر بااندازهٔ σ - باپایان‌باشدآنگاه‌یک‌تابع یکتای $g_E \varepsilon L^q$ وجود دارد که بیرون E صفر است به‌گونه‌ای که برای هر $f \varepsilon L^p$ که بیرون E صفر است داریم :

$$F(f) = \int g_E f\, d\mu$$

یکتایی g_E ایجاب‌می‌کند که اگر $A \subset E$ باشدآنگاه ت . هـ . روی A ، $g_A = g_E$ است . برای‌هرمجموعهٔ E بااندازهٔ σ-باپایان‌قرارمی‌دهیم $\lambda(E) = \int |g_E|^q\, d\mu$
دراین‌صورت برای $A \subset E$ داریم $\lambda(A) \leq \lambda(E) \leq \|F\|^q$. گیریم $\langle E_n \rangle$ یک دنباله‌ازمجموعه‌های‌بااندازهٔ σ - باپایان‌است به‌گونه‌ای‌که $\lambda(E_n)$ به m مقدار ماکزیمم λ می‌گراید . دراین‌صورت $H = \bigcup E_n$ مجموعه‌ای‌است بااندازهٔ σ - باپایان ، و بنابـــر یکنوایی λ داریم $\lambda(H) = m$.

گیریم g روی H با g_H و بیرون H با 0 تعریف‌می‌شود . دراین‌صورت $g \varepsilon L^q$ است . اگر E مجموعه‌ای بااندازهٔ σ- باپایان باشد که شامل H است ، دراین‌صورت روی H ت . هـ . داریم $g_E = g_H$. ولی $\int |g_E|^q = \lambda(E) \leq \lambda(H) = \int |g_H|^q$ ، پس‌روی $E \sim H$ ت . هـ . داریم $g_E = 0$. بنابراین‌تقریبا "همه‌جاروی E ، $g_E = g$ است .

اگر $f \varepsilon L^p$ باشد ، دراین‌صورت‌مجموعهٔ $N = \{x: f(x) \neq 0\}$ مجموعه‌ای بااندازهٔ σ-باپایان است ، پس $E = N \cup H$ نیز مجموعه‌ای بااندازهٔ σ-باپایان است . بنابراین

$$F(f) = \int fg_E\, d\mu = \int fg\, d\mu.$$

برابری $\|F\|$ و $\|g\|_q$ همانند قضیهٔ پیش نتیجه می‌شود . ∎

۴۰ ــ گزارهٔ ۲۶ را ثابت کنید .

۴۱ ــ لم ۲۷ را برای حالت $p = 1$ ثابت کنید .

۴۲ ــ لم ۲۸ را ثابت کنید .

۴۳ ــ برای $g \varepsilon L^q$ ، گیریم فونکسیونل خطی F روی L^p با

$$F(f) = \int fg\, d\mu$$

تعریف شده است . نشان دهید $\|F\| = \|g\|_q$

۴۴ ــ الـف ــ گیریم μ روی مجموعهٔ شمارش‌پذیر X همان اندازهٔ شمارنده است . نشان دهید که $L^p(\mu) = l^p$.

ب ــ فضای $l^p(X) = L^p(\mu)$ را توصیف کنید ، که در آن μ اندازه‌ای است شمارنده ، روی یک مجموعهٔ X که لزوماً" شمارش‌پذیر نیست .

۴۵ــ گیریم $(X, \mathcal{B}, \mu)$ یک فضای اندازهٔ تجزیه‌پذیر است (مسئلهٔ ۳۹ را ببینید) .

الف ــ نشان دهید که برای هر فونکسیونل خطی کراندار F روی $L^1(\mu)$ یک تابع کراندار و اندازه‌پذیر موضعی g وجود دارد به‌گونه‌ای که داریم : $F(f) = \int fg\, d\mu$

ب ــ نشان دهید که فضای دوگان $L^1(\mu)$ عبارت است از فضای $L^\infty(\underline{\mu})$ ، که در آن $\underline{\mu}$ اشباع شدهٔ μ است که در مسئله ۸ ث . داده شده است .

۴۶ ــ گیریم A و B دو مجموعهٔ شمارش‌ناپذیرند که شمارهٔ عناصر آنها متفاوت است ، وگیریم $X = A \times B$ است . هر مجموعهٔ به شکل $\{\langle x, y\rangle : x = a\}$ را یک خط قایم و هر مجموعهٔ به شکل $\{\langle x, y\rangle : y = b\}$ را یک خط افقی می‌نامند . گیریم $\mathcal{B}$ دستهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های E از X است به‌گونه‌ای که برای هر خط افقی یا قایم L ، یکی از دو مجموعهٔ $E \cap L$ یا $\tilde{E} \cap L$ شمارش‌پذیر است . دراین‌صورت $\mathcal{B}$ یک σ-جبر است . گیریم μE برابر شمارهٔ خط های افقی و قایم L است که برای آنها $\tilde{E} \cap L$ شمارش‌پذیر است و νE شمارهٔ خط های افقی است که برای آنها $\tilde{E} \cap L$ شمارش‌پذیر است . دراین‌صورت μ و ν اندازه‌هایی روی $\mathcal{B}$ هستند ، و می‌توانیم یک فونکسیونل خطی کراندار F روی $L^1(\mu)$ را بـــــا $F(f) = \int f\, d\nu$ تعریف کنیم . هیچ تابع اندازه‌پذیر موضعی g وجود ندارد به‌گونه‌ای که $F(f) = \int fg\, d\mu$.

فصل دوازدهم

اندازه و اندازهٔ بیرونی

دراین‌فصل نخست بعضی‌از روشهایی‌را درنظر می‌گیریم که می‌توان با آنها روی یک σ-جبر یک اندازه تعریف‌کرد. درحالت‌اندازهٔ‌لبگ، نخست‌اندازه‌رابرای‌مجموعه‌های باز تعریف‌کردیم و سپس بااستفاده‌ازآن اندازهٔ‌بیرونی‌را تعریف کردیم، که‌از آن مفهوم مجموعه‌های اندازه‌پذیر و اندازهٔ لبگ را به‌دست آوردیم. چنین عملی درحالت‌کلی نیز شدنی است. در بند نخست روند استنتاج اندازه از اندازهٔ بیرونی را توصیف می‌کنیم، و در بند دوم اندازهٔ بیرونی را از اندازه‌ای که تنها روی یک جبر مجموعه‌ها تعریف شده است به‌دست می‌آوریم. بقیهٔ این فصل اختصاص به‌کاربردهایی از این‌روند دارد.

۱ ــ اندازهٔ بیرونی و اندازه‌پذیری

منظوراز یک اندازهٔ بیرونی μ^* یک‌تابع مجموعهٔ حقیقی گسترش‌یافته است که روی همهٔ زیرمجموعه‌های یک فضای X تعریف شده و دارای خواص زیر است:

i. $\mu^*\varnothing = 0.$

ii. $A \subset B \Rightarrow \mu^*A \leq \mu^*B.$

iii. $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \Rightarrow \mu^*E \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*E_i.$

خاصیت‌دوم‌را خاصیت‌یکنوایی و خاصیت‌سوم را زیرجمعی شمارش‌پذیری‌می‌گویند. بنابر (i) زیرجمعی باپایان از (iii) نتیجه می‌شود. بنابر (ii) می‌توان‌به‌جای (iii) خاصیت زیر را گذاشت:

(iii′.) اگر $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ و E_i ها مجزا باشند آنگاه داریم:

$$\mu^*E \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*E_i$$

اندازهٔ‌بیرونی μ^* راباپایان‌می‌نامندهرگاه $\mu^*X < \infty$ باشد.

به‌سبب شباهت با اندازهٔ لبگ، مجموعهٔ E نسبت‌به μ^* اندازه‌پذیر است.
هرگاه برای هر مجموعهٔ A داشته باشیم:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \tilde{E})$$

چون μ^* زیرجمعی است، پس برای اثبات اندازه‌پذیر بودن یک مجموعهٔ E لازم است تنها نشان دهیم که برای هر A داریم:

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \tilde{E})$$

درستی این نابرابری درحالت $\mu^*A = \infty$ بدیهی‌است، پس تنها نیاز داریم که درستی آن‌را درمورد مجموعه‌های A که برای آنها μ^*A باپایان است ثابت کنیم.

۱ ــ قضیـــــه:

ردهٔ $\mathfrak{B}$ ی‌مجموعه‌های μ^*-اندازه‌پذیر یک σ-جبراست. اگر $\bar{\mu}$ تحدید μ^*، به $\mathfrak{B}$ باشد، دراین‌صورت $\bar{\mu}$ روی $\mathfrak{B}$ یک اندازهٔ کامل است.

برهـــان:

بدیهی‌است‌که مجموعهٔ‌تهی‌اندازه‌پذیر است. تقارن تعریف‌اندازه‌پذیری نسبت به E و $\tilde{E}$ نشان می‌دهد که اگر E اندازه‌پذیر باشد، $\tilde{E}$ نیز اندازه‌پذیر است.
گیریم مجموعه‌های E_1 و E_2 اندازه‌پذیرند. بنابراندازه‌پذیری E_2،

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_2) + \mu^*(A \cap \tilde{E}_2)$$

و بنابراندازه‌پذیری E_1 داریم:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_2) + \mu^*(A \cap \tilde{E}_2 \cap E_1) + \mu^*(A \cap \tilde{E}_1 \cap \tilde{E}_2)$$

چـون

$$A \cap [E_1 \cup E_2] = [A \cap E_2] \cup [A \cap E_1 \cap \tilde{E}_2],$$

پس بنابرخاصیت زیرجمعی داریم:

$$\mu^*(A \cap [E_1 \cup E_2]) \leq \mu^*(A \cap E_2) + \mu^*(A \cap \tilde{E}_2 \cap E_1)$$

پـس

$$\mu^*A \geq \mu^*(A \cap [E_1 \cup E_2]) + \mu^*(A \cap \tilde{E}_1 \cap \tilde{E}_2).$$

این می‌رساند که $E_1 \cup E_2$ اندازه‌پذیر است زیرا

$$\sim(E_1 \cup E_2) = \tilde{E}_1 \cap \tilde{E}_2.$$

بنابراین اجتماع دومجموعهٔ اندازه‌پذیر یک‌مجموعهٔ اندازه‌پذیر است و به‌استقراء ثابت می‌شود که اجتماع هر دستهٔ باپایان از مجموعه‌های اندازه‌پذیر باز یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر است . پس $\mathcal{B}$ یک جبر مجموعه‌هاست .

اکنون‌گیریم $\langle E_i \rangle$ یک‌دنبالهٔ مجزااز مجموعه‌های‌اندازه‌پذیرو $E = \bigcup E_i$ است ، و قرار می‌دهیم

$$G_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i.$$

دراین‌صورت G_n اندازه‌پذیر است و داریم

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap G_n) + \mu^*(A \cap \tilde{G}_n) \geq \mu^*(A \cap G_n) + \mu^*(A \cap \tilde{E}),$$

زیرا $\tilde{E} \subset \tilde{G}_n$. اکنون‌داریم $G_n \cap E_n = E_n$ و $G_n \cap \tilde{E}_n = G_{n-1}$ ، و بنابر اندازه‌پذیری E_n داریم :

$$\mu^*(A \cap G_n) = \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \cap G_{n-1}).$$

پس به‌استقراء داریم

$$\mu^*(A \cap G_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i),$$

پس

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &\geq \mu^*(A \cap \tilde{E}) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_i) \\ &\geq \mu^*(A \cap \tilde{E}) + \mu^*(A \cap E), \end{aligned}$$

زیرا

$$A \cap E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap E_i).$$

بنابراین E اندازه‌پذیر است . چون‌اجتماع‌هردنباله ازمجموعه‌های یک جبر را ، می‌توان‌بایک‌اجتماع‌ازمجموعه‌های‌مجزای‌همان‌جبرجایگزین‌کرد ، پس $\mathcal{B}$ یک σ -جبراست .

اکنون جمع‌پذیری باپایان $\bar{\mu}$ را ثابت می‌کنیم . گیریم E_1 و E_2 دو مجموعهٔ اندازه‌پذیر مجزا هستند . دراین‌صورت بنابراندازه‌پذیری E_2 داریم :

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(E_1 \cup E_2) &= \mu^*(E_1 \cup E_2) \\ &= \mu^*([E_1 \cup E_2] \cap E_2) + \mu^*([E_1 \cup E_2] \cap \tilde{E}_2) \\ &= \mu^* E_2 + \mu^* E_1. \end{aligned}$$

جمع‌پذیری باپایان μ باروش استقراء ثابت می‌شود .

اگر E اجتماع مجزای مجموعه‌های اندازه‌پذیر $\{E_i\}$ باشد، آنگاه

$$\bar{\mu}(E) \geq \bar{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \bar{\mu}(E_i),$$

پس.

$$\bar{\mu}(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(E_i).$$

ولی بنابرخاصیت زیرجمعی μ^* داریم

$$\bar{\mu}(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(E_i)$$

ازاین‌رو $\bar{\mu}$ جمعی شمارش‌پذیر است. بنابراین با توجه به‌نامنفی‌بودن آن و برابری $\bar{\mu}\emptyset = \mu^*\emptyset = 0$، نتیجه می‌شود که $\bar{\mu}$ یک اندازه است.

مسئله‌ها

۱ ـ ثابت کنید که $\bar{\mu}$ کامل است.

۲ ـ نشان دهید $\bar{\mu}$ اشباع شده است.

۳ ـ گیریم $\langle E_i \rangle$ یک دنباله از مجموعه‌های مجزای اندازه‌پذیر است و $E = \bigcup E_i$. دراین‌صورت برای هرمجموعهٔ A داریم

$$\mu^*(A \cap E) = \sum \mu^*(A \cap E_i).$$

۲ ـ قضیهٔ گسترش

هر *اندازه* روی یک *جبر*، یک تابع مجموعهٔ نامنفی μ بامقدارهای حقیقی گسترش‌یافته است که روی یک جبر $\mathcal{a}$ از مجموعه‌ها تعریف شده است به‌گونه‌ای‌که:

i ـ $\mu(\emptyset) = 0$

ii ـ اگر $\langle A_i \rangle$ یک‌دنباله از مجموعه‌های مجزا در $\mathcal{a}$ باشد که اجتماع آنها نیز در $\mathcal{a}$ است، آنگاه

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i$$

است.

بنابراین هراندازه‌روی‌یک‌جبر $\mathfrak{a}$ یک اندازه است اگروتنهااگر $\mathfrak{a}$ یک σ-جبرباشد.
دراین‌بند می‌خواهیم نشان‌دهیم که اگر بااندازه‌ای روی یک جبر $\mathfrak{a}$ ازمجموعه‌ها شروع‌کنیم می‌توانیم آن‌را به‌یک اندازه روی یک σ-جبر $\mathfrak{B}$ حاوی $\mathfrak{a}$ گسترش دهیم. برای انجام‌این‌کار، بااستفاده‌ازاندازهٔ‌تعریف‌شده‌روی یک‌جبر، یک‌اندازهٔ‌بیرونی μ^* می‌سازیم ونشان‌می‌دهیم‌که‌اندازهٔ $\bar{\mu}$ که‌به‌وسیلهٔ μ^* القاء‌می‌شود گسترش مطلوب μ است. روندی که با آن μ^* را بااستفاده از μ می‌سازیم مشابه روشی‌است که با آن اندازهٔ‌بیرونی لبگ‌را به‌کمک طول فاصله‌ها ساختیم. μ^* را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\mu^*E = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i \tag{1}$$

که در آن $\langle A_i \rangle$ روی همهٔ دنباله‌های $\mathfrak{a}$ تغییر می‌کند که‌برای‌آنها $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ است. نخست چند لم دربارهٔ μ^* ثابت می‌کنیم.

۲ــ لـــــم:

اگر $A \in \mathfrak{a}$ و $\langle A_i \rangle$ یک‌دنباله از مجموعه‌های $\mathfrak{a}$ باشد به‌گونه‌ای که $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$، آنگاه $\mu A \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i$

بـــرهـــــان:

قرار می‌دهیم:

$$B_n = A \cap A_n \cap \tilde{A}_{n-1} \cap \cdots \cap \tilde{A}_1$$

دراین‌صورت $B_n \in \mathfrak{a}$ و $B_n \subset A_n$ است. ولی A اجتماع مجزای‌دنبالهٔ $\langle B_n \rangle$ است، پس بنابرخاصیت جمعی شمارش‌پذیر

$$\mu A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu B_n \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n. \blacksquare$$

نتیجـــــه:

اگر $A \in \mathfrak{a}$، آنگاه $\mu^* A = \mu A$

۴ ـ لـــــم :

تابع مجموعهٔ μ^* یک اندازهٔ بیرونی است .

بـرهــــان :

چون μ^* آشکارا یک‌تابع مجموعهٔ‌نامنفی‌یکنواست که روی همهٔ مجموعه‌ها تعریف شده و $\mu^*\varnothing = 0$ است ، پس تنها باید نشان دهیم که μ زیرجمعی شمارش‌پذیراست . گیریم $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. اگر برای یک i ، $\mu^*E_i = \infty$ باشد ، آنگاه $\mu^*E \leq \sum \mu^*E_i = \infty$
اگر نه ، برای $\epsilon > 0$ داده‌شده ، برای‌هر i یک‌دنبالهٔ $\langle A_{ij} \rangle_{j=1}^{\infty}$ ازمجموعه‌های $\mathfrak{a}$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $E_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}$ و

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu A_{ij} < \mu^*E_i + \epsilon/2^i$$

پـــس

$$\mu^*E \leq \sum_{ij} \mu A_{ij} < \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*E_i + \epsilon.$$

چون ϵ یک عدد مثبت دلخواه است ، پس

$$\mu^*E \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*E_i,$$

و μ^* زیرجمعی است . ∎

۵ ـ لـــــم :

اگر $A \in \mathfrak{a}$ ، آنگاه A نسبت‌به μ^* اندازه‌پذیر است .

بـرهــــان :

گیریم E یک‌مجموعهٔ‌دلخواه بااندازهٔ‌بیرونی‌باپایان و ϵ یک عدد مثبت است .
دراین‌صورت یک دنبالهٔ $\langle A_i \rangle$ از $\mathfrak{a}$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌کــه $E \subset \bigcup A_i$ و

$$\sum \mu A_i < \mu^*E + \epsilon.$$

بنابرخاصیت جمعی μ روی $\mathfrak{a}$ داریم :

$$\mu(A_i) = \mu(A_i \cap A) + \mu(A_i \cap \tilde{A}).$$

از این‌رو

$$\mu^*E + \epsilon > \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \cap A) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \cap \tilde{A})$$
$$> \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \tilde{A}),$$

زیرا

$$E \cap A \subset \bigcup (A_i \cap A)$$

و

$$E \cap \tilde{A} \subset \bigcup (A_i \cap \tilde{A}).$$

چون ϵ یک عدد مثبت دلخواه است، پس

$$\mu^*E \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \tilde{A}),$$

و A اندازه‌پذیر است. ∎

اندازهٔ بیرونی μ^* که‌تعریف‌کردیم اندازهٔ بیرونی القاءشده به‌وسیلهٔ μ نامیده می‌شود. برای‌یک‌جبر داده‌شدهٔ $\mathfrak{A}$ از مجموعه‌ها، مجموعه‌هایی‌را که اجتماع شمارش‌پذیر از مجموعه‌های $\mathfrak{A}$ هستند با $\mathfrak{A}_\sigma$ و مجموعه‌هایی‌را که اشتراک‌شمارش‌پذیر از مجموعه‌های $\mathfrak{A}_\sigma$ هستند با $\mathfrak{A}_{\sigma\delta}$ نشان می‌دهیم.

۶ــ گزاره:

گیریم μ روی‌جبر $\mathfrak{A}$ یک‌اندازه، μ^* اندازهٔ بیرونی القاءشده به‌وسیلهٔ μ و E یک‌مجموعهٔ دلخواه‌است. دراین‌صورت برای‌هر $\epsilon > 0$، یک‌مجموعهٔ $A \in \mathfrak{A}_\sigma$ وجود دارد با $E \subset A$ و

$$\mu^*A \leq \mu^*E + \epsilon.$$

همچنین یک مجموعهٔ $B \in \mathfrak{A}_{\sigma\delta}$ وجود دارد با $E \subset B$ و $\mu^*E = \mu^*B$

برهان:

بنابه‌تعریف μ^* یک دنبالهٔ $\langle A_i \rangle$ ازمجموعه‌های $\mathfrak{A}$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $E \subset \bigcup A_i$ و

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i \leq \mu^*E + \epsilon.$$

قرار می‌دهیم $A = \bigcup A_i$. دراین‌صورت $\mu^*A \leq \sum \mu^*A_i = \sum \mu A_i$

برای‌اثبات گفتاردوم ، می‌بینیم که برای هر عدد درست و مثبت n یک‌مجموعهٔ A_n در $\mathfrak{a}_\sigma$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که $E \subset A_n$ و $\mu^*A_n < \mu^*E + \frac{1}{n}$. گیریم $B = \bigcap A_n$. دراین‌صورت $B \varepsilon \mathfrak{a}_{\sigma\delta}$ و $E \subset B$. چون $B \subset A_n$ ، پس $\mu^*B \le \mu^*A_n < \mu^*E + \frac{1}{n}$ چون n دلخواه‌است ،پس $\mu^*B \le \mu^*E$. ولی چون $E \subset B$ ، پس بنابریکنوائی $\mu^*B \ge \mu^*E$. از این‌رو $\mu^*B = \mu^*E$. ∎

اگر این گزاره را درحالتی‌که E یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر بااندازهٔ باپایان است به‌کاربریم می‌بینیم‌که E بایدبرابرتفاضل‌یک‌مجموعهٔ B ی متعلق‌به $\mathfrak{a}_{\sigma\delta}$ ویک‌مجموعهٔ بااندازهٔ‌صفر باشد . این ساختمان مجموعه‌های اندازه‌پذیر بااندازهٔ‌باپایان را می‌دهد ، در گزارهٔ بعد این مطلب‌را به‌حالت σ-باپایان گسترش می‌دهیم . گزارهٔ بعد را می‌توان یک تعمیم اصل نخست لیتلوود دانست .

۷ـ گـــــزاره :

گیریم μ روی‌یک‌جبر $\mathfrak{a}$ یک‌اندازهٔ σ-باپایان و μ^* اندازهٔ بیرونی تولید شده به‌وسیلهٔ μ است . مجموعهٔ E ، μ^* اندازه‌پذیر است اگر و تنهااگر E برابر تفاضل‌سرهٔ $A \sim B$ یک‌مجموعهٔ A متعلق‌به $\mathfrak{a}_{\sigma\delta}$ و یک‌مجموعهٔ B با $\mu^*B = 0$ ، باشد . هر مجموعهٔ B با $\mu^*B = 0$ مشمول یک مجموعهٔ C متعلق‌به $\mathfrak{a}_{\sigma\delta}$ با $\mu^*C = 0$ است .

بـــرهـــــان :

بخش" اگر " گزاره ازاین‌واقعیت‌نتیجه‌می‌شودکه هرمجموعهٔ متعلق‌به $\mathfrak{a}_{\sigma\delta}$ ، بایداندازه‌پذیرباشد ، زیرا مجموعه‌های‌اندازه‌پذیر یک σ-جبر تشکیل‌می‌دهندوهر مجموعهٔ با μ^* اندازهٔ صفر اندازه‌پذیر است ، زیرا $\bar{\mu}$ کامل است .

برای اثبات‌بخش " تنها اگر " گزاره ، گیریم $\{X_i\}$ یک‌دستهٔ‌شمارش‌پذیر از مجموعه‌های‌مجزای $\mathfrak{a}$ با μX_i باپایان و $X = \bigcup X_i$ است . اگر E اندازه‌پذیرباشد ، آنگاه E اجتماع‌مجموعه‌های‌اندازه‌پذیرومجزای $E_i = X_i \cap E$ است . بنابرگزارهٔ۶برای هرعدد درست و مثبت n می‌توانیم یک مجموعهٔ A_{ni} متعلق‌به $\mathfrak{a}_\sigma$ بیابیم‌به‌گونه‌ای‌که $E_i \subset A_{ni}$ بوده و

$$\bar{\mu}A_{ni} \le \bar{\mu}E_i + \frac{1}{n2^i}$$

قـرار می‌دهیـم

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ni}$$

دراین‌صورت $E \subset A_n$ ، و $A_n \sim E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} [A_{ni} \sim E_i]$ است . ازاین‌رو

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(A_n \sim E) &\le \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_{ni} \sim E_i)\\ &\le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n2^i} = \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

چون $A_n \in \mathcal{A}_\sigma$ ، پس مجموعهٔ $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ به $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ متعلق است، و برای هر n داریـــم

$$A \sim E \subset A_n \sim E.$$

ازایـــن‌رو

$$\bar{\mu}(A \sim E) \le \bar{\mu}(A_n \sim E) \le \frac{1}{n}$$

چون این‌نابرابری برای‌هرمقدار درست و مثبت n برقراراست ، پـــس بـــایـــد داشتـــه باشیـــم :

$$\bar{\mu}(A \sim E) = 0. \blacksquare$$

نتیجه‌های این بند را در قضیهٔ زیر بیان می‌کنیم .

۸ ــ قضیـــــه (کـــاراتئــــــودوری[1]) :

گیریم μ اندازه‌ای‌روی‌جبر $\mathcal{A}$ و μ^* اندازهٔ بیرونی‌القاء شده‌به‌وسیلهٔ μ ، است . دراین‌صورت‌تحدید $\bar{\mu}$ از μ^* به‌مجموعه‌های μ^*-اندازه‌پذیرگسترشی‌است‌از μ به σ-جبر حاوی $\mathcal{A}$. اگر μ باپایان(یا σ-باپایان)باشد $\bar{\mu}$ نیز چنین‌است . اگر μ اندازه‌ای σ-باپایان باشد ، دراین‌صورت $\bar{\mu}$ تنها اندازهٔ روی‌کوچکترین σ-جبر حاوی $\mathcal{A}$ است کـه یک گسترش μ است .

---

۱ — Carathéodory

برهـــــان:

بنابرنتیجهٔ ۳، لم ۵ و قضیهٔ ۱، $\bar{\mu}$ یک گسترش μ از $\mathfrak{A}$ به‌یک‌اندازه روی یـک σ-جبر حاوی $\mathfrak{A}$ می‌باشد و به‌آسانی دیده می‌شود که اگر μ باپایان یا σ-باپایان باشد آنگاه $\bar{\mu}$ نیز باپایان یا σ-باپایان است.

برای‌اثبات‌یکتایی $\bar{\mu}$ هنگامی‌که μ اندازه‌ای σ-باپایان‌است،گیریم $\mathfrak{B}$ کوچکترین σ-جبر حاوی $\mathfrak{A}$ است و $\tilde{\mu}$ اندازه‌ای است روی $\mathfrak{B}$ که روی $\mathfrak{A}$ با μ برابر است.

چون‌هرمجموعهٔ‌متعلق‌به $\mathfrak{A}_\sigma$ می‌تواندبه‌شکل‌اجتماع شمارش‌پذیری‌از مجموعه‌های مجزای $\mathfrak{A}$ نوشته‌شود، پس‌اندازهٔ $\tilde{\mu}$ باید روی $\mathfrak{A}_\sigma$ برابر $\bar{\mu}$ باشد. گیریم B یک‌مجموعهٔ دلخواه $\mathfrak{B}$ بااندازهٔ‌بیرونی‌باپایان است. دراین‌صورت بنابرگزارهٔ ۶ یک مجموعهٔ A در $\mathfrak{A}_\sigma$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $B \subset A$ و

$$\mu^*A \leq \mu^*B + \epsilon.$$

چون $B \subset A$، پس

$$\tilde{\mu}B \leq \tilde{\mu}A = \mu^*A \leq \mu^*B + \epsilon.$$

چون ϵ یک عدد مثبت دلخواه است، پس برای هر $B \in \mathfrak{B}$ داریم:

$$\tilde{\mu}B \leq \mu^*B$$

چون ردهٔ‌مجموعه‌های اندازه‌پذیر نسبت‌به μ^* یک σ-جبر حاوی $\mathfrak{A}$ است، پس هر B در $\mathfrak{B}$ باید اندازه‌پذیر باشد. اگر B اندازه‌پذیر و A در $\mathfrak{A}_\sigma$ بـاشـد بـا $B \subset A$ و $\mu^*A \leq \mu^*B + \epsilon$، آنگاه

$$\mu^*A = \mu^*B + \mu^*(A \sim B),$$

پس اگر $\mu^*B < \infty$ باشد،

$$\mu^*(A \sim B) \leq \epsilon$$

از ایـن‌رو

$$\begin{aligned}\mu^*B \leq \mu^*A &= \tilde{\mu}A \\ &= \tilde{\mu}B + \tilde{\mu}(A \sim B) \\ &\leq \tilde{\mu}B + \epsilon\end{aligned}$$

چون ϵ دلخواه است داریم

$$\mu^*B \leq \tilde{\mu}B$$

پـس

$$\mu^*B = \tilde{\mu}B.$$

اگر μ یک اندازهٔ σ-باپایان باشد، گیریم $\{X_i\}$ یک‌دسته شمارش‌پذیر از مجموعه‌های‌مجزای $\mathfrak{A}$ است‌به‌گونه‌ای‌که $X = \bigcup X_i$ و μX_i باپایان است. اگر B یک مجموعهٔ دلخواه متعلق‌به $\mathfrak{B}$ باشد، آنگاه داریم:

$$B = \bigcup (X_i \cap B)$$

و این یک اجتماع شمارش‌پذیر از مجموعه‌های مجزای $\mathfrak{B}$ است، پس داریم

$$\tilde{\mu} B = \sum \tilde{\mu}(X_i \cap B)$$

و

$$\bar{\mu} B = \sum \bar{\mu}(X_i \cap B).$$

چون $\mu^*(X_i \cap B) < \infty$ است، داریم:

$$\bar{\mu}(X_i \cap B) = \tilde{\mu}(X_i \cap B). \blacksquare$$

این روند گسترش نه‌تنها μ را به‌اندازه‌ای روی کوچکترین σ-جبر $\mathfrak{B}$ حاوی $\mathfrak{A}$ گسترش می‌دهد، بلکه اندازهٔ μ را کامل‌واشباع می‌سازد. اگر μ یک‌اندازهٔ σ-باپایان باشد، گسترش آن به $\mathfrak{B}$ اشباع شده‌است و گسترش μ به‌مجموعه‌های μ^*-اندازه‌پذیر فقط تکمیل μ است. اگر μ یک‌اندازهٔ σ-باپایان‌نباشد، دراین‌صورت‌گسترش‌آن‌به‌مجموعه‌های μ^*-اندازه‌پذیر نیز $\bar{\mu}$ را اشباع می‌کند. باید توجه داشت که دراین‌حالت گسترش μ، به $\mathfrak{B}$ لزوماً" یکتا نیست (مسئلهٔ ۴)، گرچه هر گسترش دلخواه $\tilde{\mu}$، برای هر مجموعهٔ B از $\mathfrak{B}$ با $\bar{\mu} B < \infty$ باید با $\bar{\mu}$ تطبیق‌کند، وهمواره‌داریم $\tilde{\mu} B \leq \mu^* B$. در بندهای ۵ و ۶ بار دیگر مسئلهٔ گسترش و یکتایی را موردبحث قرار خواهیم داد.

اغلب بهتر است با یک تابع مجموعه روی دستهٔ $\mathfrak{C}$ از زیرمجموعه‌ها شروع کنیم که ساختمانی ضعیف‌تر از یک جبر مجموعه دارد. دستهٔ $\mathfrak{C}$ از زیرمجموعه‌های X را یک **نیم‌جبر** مجموعه‌هامی‌گوییم هرگاه اشتراک هردو مجموعهٔ متعلق‌به $\mathfrak{C}$ باز متعلق‌به $\mathfrak{C}$ باشد و مکمل هرمجموعهٔ $\mathfrak{C}$ برابر اجتماع‌باپایانی از مجموعه‌های‌مجزای $\mathfrak{C}$ باشد. اگر $\mathfrak{C}$ یک نیم‌جبر دلخواه از مجموعه‌ها باشد. دراین‌صورت دستهٔ $\mathfrak{A}$ متشکل از مجموعهٔ تهی و همهٔ اجتماع‌های باپایان از مجموعه‌های مجزای $\mathfrak{C}$ یک جبر مجموعه‌هاست که جبر تولید شده‌به‌وسیلهٔ $\mathfrak{C}$ نامیده‌می‌شود. اگر μ تابع مجموعه‌ای‌باشد که روی $\mathfrak{C}$ تعریف شده است، به‌طورطبیعی یک تابع مجموعهٔ جمعی باپایان روی $\mathfrak{A}$ را بابرابری

$$\mu A = \sum_{i=1}^{n} \mu E_i$$

تعریف‌می‌کنیم. که‌درآن A اجتماع‌باپایانی از مجموعه‌های‌مجزای E_i متعلق‌به $\mathfrak{C}$ است. چون هر مجموعهٔ A متعلق‌به $\mathfrak{A}$ را می‌توان به‌گونه‌های مختلف به‌شکل اجتماع مجزایی

از مجموعه‌های $\mathcal{C}$ نوشت ، پس باید یقین حاصل کنیم که این روند منجر به‌مقدار یکتائی برای μA می‌شود . گزارهٔ زیر شرطهایی‌رامی‌دهد که‌تحت‌آنها می‌توان این روند را انجام داد و اندازه‌ای روی جبر $\mathcal{A}$ تعریف کرد .

۹ ــ گزاره :

گیریم $\mathcal{C}$ یک نیم‌جبر مجموعه‌ها و μ یک تابع مجموعهٔ نامنفی است که روی $\mathcal{C}$ ، تعریف شده است به‌گونه‌ای که (اگر $\varnothing \in \mathcal{C}$ باشد) $\mu\varnothing = 0$ است . دراین‌صورت اگر شرطهای زیر برقرارباشند آنگاه μ دارای‌یک‌گسترش یکتا به‌یک‌اندازه روی جبر $\mathcal{A}$ تولید شده به‌وسیله $\mathcal{C}$ ، است :

i ــ *اگر مجموعهٔ C ی متعلق‌به $\mathcal{C}$ برابر اجتماع دستهٔ باپایان $\{C_i\}$ از مجموعه‌های مجزای $\mathcal{C}$ باشد ، آنگاه $\mu C = \sum \mu C_i$.*

ii ــ *اگرمجموعهٔ C ی‌متعلق‌به $\mathcal{C}$ اجتماع‌دستهٔ شمارش‌پذیر $\{C_i\}$ ازمجموعه‌های مجزای $\mathcal{C}$ باشد ، آنگاه $\mu C \le \sum \mu C_i$ است .*

مسئله‌ها

۴ ــ گیریم X مجموعهٔ عددهای گویا و $\mathcal{A}$ جبر اجتماعهای باپایان فاصله‌هایی به‌شکل $(a, b]$ است با $\mu(a, b] = \infty$ و $\mu\varnothing = 0$. نشان دهید که گسترش μ به کوچکترین σ-جبر حاوی $\mathcal{A}$ یکتا نیست .

۵ ــ گزارهٔ ۹ را به‌ترتیب زیر ثابت کنید :

الف ــ نشان‌دهید که شرط (i) ایجاب‌می‌کند که اگر A برابر اجتماع هریک از دو دستهٔ باپایان $\{C_i\}$ و $\{D_j\}$ از مجموعه‌های مجزای $\mathcal{C}$ باشد آنگاه

$$\sum \mu C_i = \sum \mu D_j$$

[راهنمایی : $\mu C_i = \sum_j \mu(C_i \cap D_j)$.]

ب ــ نشان‌دهیدکه‌شرط (ii) ایجاب‌می‌کند که μ روی $\mathcal{A}$ جمعی شمارش‌پذیر است . (زیرا جمعی باپایان‌بودن و یکنوائی بی‌درنگ نابرابری‌وارون‌را ایجاب‌می‌کند) .

۶ ــ گیریم $\mathcal{A}$ دسته‌ای است از مجموعه‌ها که نسبت‌به عملهای اجتماع باپایان و اشتراک باپایان بسته است ، مانند یک جبر مجموعه‌ها .

الف ــ نشان‌دهیدکه $\mathcal{A}_\sigma$ نسبت‌به‌اجتماع شمارش‌پذیرواشتراک‌پایاندار بسته‌است .

ب ــ نشان دهید که هر مجموعهٔ متعلق‌به $\mathfrak{A}_{\sigma\delta}$ برابر اشتراک یک دنبالهٔ کـاهشـــی از مجموعه‌های متعلق‌به $\mathfrak{A}_{\sigma}$ است.

۷ ــ گیریم μ روی‌جبر $\mathfrak{A}$ یک اندازهٔ‌باپایان، و μ^* اندازهٔ بیرونی القاء شده است. نشان‌دهیدکه‌مجموعهٔ E اندازه‌پذیراست‌اگروتنهااگر برای‌هر $\epsilon > 0$ یک‌مجموعهٔ $A \in \mathfrak{A}_{\delta}$ با $A \subset E$، موجود باشد به‌گونه‌ای که $\mu^*(E \sim A) < \epsilon$ باشد.

۸ ــ اگر بایک‌اندازهٔ‌بیرونی μ^* روی X شروع‌کنیم و اندازهٔ‌القاء‌شدهٔ $\bar{\mu}$ را روی‌مجموعه‌های μ^* اندازه‌پذیر تشکیل دهیم، می‌توانیم $\bar{\mu}$ را برای القای یک اندازهٔ بیرونی μ^+ به‌کار ببریم.

الف ــ نشان دهید که برای هر مجموعهٔ E داریم $\mu^+E \geq \mu^*E$

ب ــ برای هر مجموعهٔ داده شدهٔ E داریم $\mu^+E = \mu^*E$ اگر و تنها اگر یک مجموعهٔ μ^*-اندازه‌پذیر $A \supset E$ با $\mu^*A = \mu^*E$ موجود باشد.

پ ــ هراندازهٔ‌بیرونی که برای هر مجموعهٔ E در محک نامبرده در (ب) صدق کند یک‌اندازهٔ‌بیرونی **منظـــم** نامیده‌می‌شود. نشان دهید که هر اندازهٔ بیرونی القاء شده به‌وسیلهٔ یک اندازه روی یک جبر، منظم است.

ت ــ گیریم مجموعهٔ X از دونقطه تشکیل شده‌است. روی X یک‌اندازهٔ‌بیرونی بسازید که منظم نباشد.

*۳ ــ انتگـرال لبـگ‌ـاستیلتیـــــس

گیریم X مجموعهٔ عددهای حقیقی و $\mathfrak{B}$ ردهٔ همهٔ مجموعه‌های برل است. هر اندازهٔ μ که‌روی $\mathfrak{B}$ تعریف‌شده‌وبرای‌مجموعه‌های‌کراندارباپایان‌است‌یک *انـدازهٔ بــرل* (روی خط حقیقی) نامیده می‌شود. به‌هر اندازهٔ باپایان برل یک تابع F بابـرابــری

$$F(x) = \mu(-\infty, x]$$

مربوط می‌سازیم. تابع F **تـابــع پخـش تجمعـــی** μ نامیده می‌شود که تابعی است با مقدارهای حقیقی و افزایشی یکنوا. داریم:

$$\mu(a, b] = F(b) - F(a).$$

چون $(a, b]$ برابراشتراک‌مجموعه‌های $\left(a, b + \frac{1}{n}\right]$ است، بنابه‌گزارهٔ ۲.۱۱داریم

$$\mu(a, b] = \lim_{n\to\infty} \mu\left(a, b + \frac{1}{n}\right],$$

پـــس

$$F(b) = \lim_{n\to\infty} F\left(b + \frac{1}{n}\right) = F(b+).$$

بنابراین هر تابع پخش تجمعی از سمت راست پیوسته است، همچنین داریم

$$\begin{aligned}\mu\{b\} &= \lim_{n\to\infty} \mu\left(b-\frac{1}{n}, b\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} F(b) - F\left(b-\frac{1}{n}\right) \\ &= F(b) - F(b-).\end{aligned}$$

از این‌رو F در b پیوسته است اگر و تنهااگر مجموعهٔ $\{b\}$ متشکل از یک‌نقطهٔ تنهای b دارای اندازهٔ صفر باشد. چون $\emptyset = \bigcap (-\infty, -n]$ ، پس داریم

$$\lim_{n\to -\infty} F(n) = 0,$$

و از این رو بنابریکنوایی F ،

$$\lim_{x\to -\infty} F(x) = 0,$$

این خاصیت‌ها را در لم زیر خلاصه می‌کنیم:

۱۰ــ لــــــــم:

اگر μ روی خط حقیقی یک اندازهٔ برل باپایان باشد، دراین‌صورت تابع پخش تجمعی آن یعنی F یک‌تابع افزایشی‌یکنوا و کراندار است که از سمت راست پیوسته است. به‌علاوه داریم $\lim_{x\to -\infty} F(x) = 0$

فرض کنیم که با یک‌تابع افزایشی یکنوای F که از سمت راست پیوسته است شروع کنیم. دراین‌صورت نشان می‌دهیم که یک اندازهٔ برل یکتای μ وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر فاصلهٔ به‌شکل $(a, b]$ ،

$$\mu(a, b] = F(b) - F(a) \qquad (۲)$$

است، که در آن تعریف می‌کنیم

$$F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x) \qquad F(-\infty) = \lim_{x\to -\infty} F(x)$$

برای این منظور نخست لم زیر را بیان می‌کنیم و اثبات آن را به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌کنیم (مسئله ۹):

۱۱ـ لـــــــم :

گیریم F یک‌تابع یکنوای افزایشی است که از سمت راست پیوسته است . اگـــــر $(a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i]$ ، آنگاه

$$F(b) - F(a) \leq \sum_{i=1}^{\infty} F(b_i) - F(a_i).$$

اگر $\mathcal{C}$ را نیم‌جبر متشکل‌از همهٔ‌فاصله‌های به‌شکل $(a, b]$ بگیریم و قرارد هیم $\mu(a, b] = F(b) - F(a)$ ، دراین‌صورت به‌آسانی دیده می‌شود که μ در شرط (i) گزارهٔ ۹ صدق می‌کند ، وچون‌لم ۱۱ دقیقاً "همان‌شرط دوم‌است ، می‌بینیم‌که μ روی‌جبـــر تولید شده‌به‌وسیلهٔ $\mathcal{C}$ دارای‌یک‌گسترش‌به‌یک‌اندازه‌است . بنابرقضیهٔ ۸ این μ می‌تـــوانـــد به‌یک σ -جبرحاوی $\mathcal{C}$ گسترش‌یابد . چون ردهٔ $\mathcal{B}$ ازمجموعه‌های برل کوچکترین σ-جبر حاوی $\mathcal{C}$ است ، پس μ به‌یک اندازهٔ برل قابل‌گسترش است . μ یک اندازهٔ σ-باپایان است ، زیرا X اجتماع فاصله‌های $(n, n+1]$ است که اندازهٔ هریک باپایان است . بنابراین گسترش μ به $\mathcal{B}$ یکتاست ، و گزارهٔ زیر را داریم :

۱۲ ـ گـــــــزاره :

گیریم F یک‌تابع‌افزایشی‌یکنواست که از سمت‌راست پیوسته است . دراین‌صورت یک اندازهٔ یکتای برل μ وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر a و b داریم

$$\mu(a, b] = F(b) - F(a).$$

۱۳ ـ نتیجـــــــه :

هرتابع‌کراندار یکنوا که از سمت‌راست پیوسته‌باشد تابع پخش تجمعی یک‌اندازهٔ برل باپایان و یکتاست به‌شرط این‌که $F(-\infty) = 0$ باشد .

اگر φ یک‌تابع نامنفی‌و اندازه‌پذیر برل ، و F یک تابع افزایشی یکنوا و پیوسته از راست ، باشد آنگاه انتگرال لبگ ـ استیلتیس φ نسبت‌به F با برابری

$$\int \varphi \, dF = \int \varphi \, d\mu$$

تعریف می‌شود که در آن μ اندازهٔ برلی است که تابع پخش تجمعی آن F اســـــت .

اگر φ هم مثبت باشد و هم منفی باشد، φ را نسبت‌به F انتگرال‌پذیر می‌گوییم هرگاه φ نسبت‌به μ انتگرال‌پذیر باشد.

اگر F یک تابع افزایشی یکنوای دلخواه باشد، آنگاه یک تابع یکتای F^* وجود دارد که افزایشی‌یکنوا و پیوسته از راست است و در هرنقطه که‌در آن F از راست پیوسته است F با آن مطابقت‌دارد. (مسئله ۱۰). دراین‌صورت انتگرال‌لبگ ــ استیلتیس φ، را نسبت‌به F بابرابری

$$\int\varphi\, dF = \int\varphi\, dF^*.$$

تعریف می‌کنیم. اگر F یک‌تابع یکنواوپیوسته‌ازراست‌باشد، آنگاه $\int_a^b \varphi\, dF$ باانتگرال ریمن ــ استیلتیس‌برابراست هروقت که‌انتگرال‌ریمن ــ استیلتیس‌تعریف شده باشد. انتگرال لبگ ــ استیلتیس تنهاهنگامی‌تعریف می‌شودکه F یکنوا (یا همانگونه که در مسئله ۱۱ پ نشان‌داده‌می‌شود باتغییر کراندار)، باشد درحالی‌که انتگرال‌ریمن ــ استیلتیس می‌تواند هنگامی‌که F با تغییرکراندار نیست وجود داشته‌باشد، مثلاً" هنگامی که F پیوسته و φ با تغییر کراندار است.

مسئله‌ها

۹ ــ لم ۱۱ را ثابت کنید. [عدد $\epsilon > 0$ را انتخاب کنید. بنابرپیوستگی از راست تابع F عددهای $\eta_i > 0$ و $\delta > 0$ وجود دارند به‌گونه‌ای که به‌ترتیب داریم:

$F(b_i + \eta_i) < F(b_i) + \epsilon 2^{-i}$ و $F(a + \delta) < F(a) + \epsilon$. دراین‌صورت فاصله‌های باز $(a_i, b_i + \eta_i)$ فاصلهٔ بستهٔ $[a + \delta, b]$ رامی‌پوشانند، و اثبات، همانند اثبات‌گزارهٔ ۳. ۱ ادامه‌می‌یابد. ولی‌هنگامی‌که $(a, b]$ یک‌فاصلهٔ بی‌پایان است باید دقت بیشتری در اثبات به‌عمل آورد.]

۱۰ ــ گیریم F یک تابع افزایشی یکنواست، F^* را با

$$F^*(x) = \lim_{y\to x+} F(y)$$

تعریف می‌کنیم. دراین‌صورت F^* یک‌تابع افزایشی‌یکنواست که ازسمت‌راست پیوسته است و هرجا که F از راست پیوسته است، F^* با F تطبیق می‌کند. داریم $(F^*)^* = F^*$ و اگر F و G دو تابع افزایشی یکنوا باشند که در نقطه‌های پیوستگی باهم مطابقت دارند آنگاه $F^* = G^*$ است.

۱۱ ــ الف ــ نشان‌دهید‌که هر تابع کراندار F باتغییرکراندار، یک اندازهٔ برل علامت‌دار و پایاندار ν می‌دهد به‌گونه‌ای که

$$\nu(a, b] = F(b+) - F(a+).$$

ب ــ قضیهٔ ۵ . ۴ را باتجزیهٔ ژوردان ν مقایسه کنید.

پ ــ تعریف انتگرال لبگ ــ استیلیتس $\int \varphi \, dF$ را درمورد تابعهای باتغییرکراندار F گسترش دهید.

ت ــ نشان دهید که اگر $|\varphi| \leq M$ و اگر تغییر کلی F برابر T باشد، آنگـــاه $|\int \varphi \, dF| \leq MT$

۱۲ ــ الف ــ گیریم F تابع پخش تجمعی اندازهٔ برل ν است و فرض می‌کنیم که F پیوسته است. دراین‌صورت برای هر مجموعهٔ برل E مشمــول بـــرد F داریـــــم $mE = \nu[F^{-1}(E)]$ ، که‌درآن m اندازهٔ لبگ‌است. [راهنمـــایـــــی: این‌درمورد فاصله‌ها درست است، بااستفاده‌از بخش یکتایی قضیهٔ ۸ می‌توان درستی آن‌را درحالت کلی ثابت کرد.]

ب ــ حالت (الف) را درمورد تابعهای پخش تجمعی ناپیوسته تعمیم دهید.

۱۳ ــ گیریم F روی $[a, b]$ یک‌تابع افزایشی‌پیوسته‌با $F(b) = d, \ F(a) = c$ است، و φ روی $[c, d]$ یک تابع نامنفی و اندازه‌پذیر برل است. درایـــن‌صـــورت

$$\int_a^b \varphi(F(x)) \, dF(x) = \int_c^d \varphi(y) \, dy$$

[راهنمـــایـــــی: بااستفاده از مسئله ۱۲ (الف) این‌مسئله را نخست درحالتی که φ یک‌تابع مشخص‌است ثابت کنید، سپس آن‌را ابتدا به‌حالتی‌که φ یک‌تابع ساده‌است، سرانجام به‌حالت یک تابع دلخواه φ ، تعمیم دهید.]

۱۴ ــ الف ــ نشان‌دهید که اندازهٔ μ نسبت‌به‌اندازهٔ لبگ به‌طورمطلق پیوسته است اگر و تنها اگر تابع پخش تجمعی آن پیوستهٔ مطلق باشد.

ب ــ اگر μ نسبت‌به‌اندازهٔ‌لبگ‌به‌طورمطلق‌پیوسته‌باشد، آنگاه‌مشتق‌رادن‌نیکودیم آن برابر است بامشتق تابع پخش تجمعی آن.

پ ــ اگر F به‌طورمطلق پیوسته باشد، آنگاه داریم:

$$\int f \, dF = \int f F' \, dx$$

۴ ــ انـــدازه‌های حـــاصلضـــرب

گیریم $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ و $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ دوفضای اندازهٔ کامل هستند، حاصلضرب مستقیم X و Y ، یعنی $X \times Y$ را درنظر می‌گیریم. اگر $A \subset X$ و $B \subset Y$ بـــاشـــد،

آنگاه $A \times B$ را یک مستطیل می‌نامیم. اگر $A \in \mathcal{A}$ و $B \in \mathcal{B}$ باشد، آنگاه $A \times B$ را یک مستطیل اندازه‌پذیر می‌نامیم. دستهٔ $\mathcal{R}$ همهٔ مستطیل‌های اندازه‌پذیر یک نیم جبر است، زیرا

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

و

$$\sim(A \times B) = (\tilde{A} \times B) \cup (A \times \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \times \tilde{B})$$

اگر $A \times B$ یک مستطیل اندازه‌پذیر باشد، قرار می‌دهیم:

$$\lambda(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$$

۱۴ ــ لــــم:

گیریم $\{(A_i \times B_i)\}$ یک‌دستهٔ شمارش‌پذیر از مستطیل‌های اندازه‌پذیر مجزا ازهم هستند که اجتماعشان مستطیل اندازه‌پذیر $A \times B$ است. دراین‌صورت داریم:

$$\lambda(A \times B) = \sum \lambda(A_i \times B_i)$$

برهـــان:

نقطهٔ ثابت $x \in A$ را درنظر می‌گیریم. دراین‌صورت برای هر $y \in B$، نقطهٔ $\langle x, y\rangle$ درست به‌یکی ازمستطیلهای $A_i \times B_i$ تعلق دارد. بنابراین B اجتماع مجزای آن B_i هایی است که x به A_i متناظر با آنها تعلق دارد. از این‌رو

$$\sum \nu B_i \cdot \chi_{A_i}(x) = \nu B \cdot \chi_A(x),$$

زیرا ν جمعی شمارش‌پذیر است. پس بنابرنتیجهٔ قضیهٔ همگرایی یکنوا (۱۱ . ۱۴)، داریم:

$$\sum \int \nu B_i \cdot \chi_{A_i}\, d\mu = \int \nu(B) \cdot \chi_A\, d\mu$$

یا

$$\sum \nu B_i \cdot \mu A_i = \nu B \cdot \mu A. \blacksquare$$

بنابراین لم، λ شرطهای گزارهٔ ۹ را برمی‌آورد، پس دارای یک گسترش یکتا به یک‌اندازه‌روی‌جبر $\mathcal{R}'$ متشکل از همهٔ اجتماعهای باپایان و مجزای مجموعه‌های $\mathcal{R}$ است. بنابرقضیهٔ ۸ می‌توانیم λ را به‌یک‌اندازهٔ کامل‌روی‌یک σ-جبر $\mathcal{S}$ حاوی $\mathcal{R}$ گسترش‌دهیم. این‌اندازهٔ گسترش‌یافته اندازهٔ حاصلضرب μ و ν نامیده‌می‌شودوبا $\mu \times \nu$ نشان داده می‌شود. اگر μ و ν باپایان (یا σ-باپایان) باشند، $\mu \times \nu$ نیز باپایان (یا σ-باپایان) است. اگر X و Y خط‌حقیقی و μ و ν هردو اندازهٔ لبگ باشند، آنگاه $\mu \times \nu$ اندازهٔ لبگ دوبعدی در صفحه نامیده می‌شود.

هدف چند لم بعدی توصیف ساختمان مجموعه‌هایی است که نسبت به‌اندازهٔ حاصلضرب $\mu \times \nu$ اندازه‌پذیرند. اگر E زیرمجموعه‌ای‌از $X \times Y$ و x نقطه‌ای‌از X باشد، x ـ مقطع عرضی E_x را با

$$E_x = \{y: \langle x, y\rangle \varepsilon E\}$$

تعریف می‌کنیم، و به‌روش مشابه، برای y متعلق‌به Y ، y-مقطع عرضی‌را تعریف می‌کنیم. تابع مشخص E_x و تابع مشخص E با برابری

$$\chi_{E_x}(y) = \chi_E(x, y)$$

به‌هم مربوطند. همچنین داریم $(\tilde{E})_x = \sim(E_x)$ وبرای‌هردستهٔ $\{E_\alpha\}$ داریم

$$(\bigcup E_\alpha)_x = \bigcup (E_\alpha)_x.$$

۱۵ ـ لـــــــم :

گیریم x نقطه‌ای‌از X و E مجموعه‌ای‌در $\mathfrak{R}_{\sigma\delta}$ است. دراین‌صورت E_x زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیری از Y است.

بـــرهـــــان :

اگر E متعلق‌به‌ردهٔ $\mathfrak{R}$ از مستطیل‌های اندازه‌پذیر باشد آنگاه لم بدیهی است. اکنون نشان می‌دهیم که اگر E متعلق به $\mathfrak{R}_\sigma$ باشد بازهم لم درست است. گیریم $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ است، که‌درآن‌هر E_i یک‌مستطیل اندازه‌پذیراست، دراین‌صورت

$$\begin{aligned}\chi_{E_x}(y) &= \chi_E(x, y)\\ &= \sup_i \chi_{E_i}(x, y)\\ &= \sup_i \chi_{(E_i)_x}(y).\end{aligned}$$

چون هر E_i یک مستطیل اندازه‌پذیر است، پس $\chi_{(E_i)_x}(y)$ تابعی اندازه‌پذیر از y است، پس χ_{E_x} نیز باید اندازه‌پذیر باشد، از آنجا E_x اندازه‌پذیر است.

اکنون فرض‌کنیم $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ با $E_i \varepsilon \mathfrak{R}_\sigma$. دراین‌صورت

$$\chi_{E_x}(y) = \chi_E(x, y)$$

$$= \inf_i \chi_{E_i}(x, y)$$
$$= \inf_i \chi_{(E_i)_x}(y),$$

ومی‌بینیم‌که χ_{E_x} اندازه‌پذیراست . بنابراین‌برای‌هر $E \varepsilon \mathfrak{R}_{\sigma\delta}$ ، E_x اندازه‌پذیراست . ∎

۱۶ ــ لـــــم :

گیریم E یک‌مجموعهٔ $\mathfrak{R}_{\sigma\delta}$ با $\mu \times \nu(E) < \infty$ است . دراین‌صورت تابع g که با

$$g(x) = \nu E_x$$

تعریف می‌شود تابعی است اندازه‌پذیر از x و داریم

$$\int g\, d\mu = \mu \times \nu(E).$$

بــرهـــــان :

اگر E یک‌مستطیل‌اندازه‌پذیرباشد درستی‌لم آشکار است . نخست توجه می‌کنیم که‌هرمجموعهٔ $\mathfrak{R}_\sigma$ اجتماع‌یک‌دسته‌ازمستطیل‌های‌اندازه‌پذیرمجزاست . گیریم $\langle E_i \rangle$ ، یک دنباله از مستطیل‌های اندازه‌پذیر مجزا و $E = \bigcup E_i$ است ، و قرار می‌دهیـــم ،

$$g_i(x) = \nu[(E_i)_x]$$

دراین‌صورت هر g_i یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی است و

$$g = \sum g_i$$

بنابراین g اندازه‌پذیراست ، وبنابرنتیجهٔ قضیهٔ همگرایی یکنوا (۱۴۰۱۱) داریم :

$$\int g\, d\mu = \sum \int g_i\, d\mu$$
$$= \sum \mu \times \nu(E_i)$$
$$= \mu \times \nu(E).$$

درنتیجـــــه ، لم برای هر $E \varepsilon \mathfrak{R}_\sigma$ برقرار است .

گیریم E مجموعه‌ای متعلق به $\mathfrak{R}_{\sigma\delta}$ و با اندازهٔ باپایان است . دراین‌صـورت یک دنبالهٔ $\langle E_i \rangle$ از مجموعه‌های $\mathfrak{R}_\sigma$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $E_{i+1} \subset E_i$ و $E = \bigcap E_i$ بنابرگزارهٔ ۶ می‌توان فرض کرد $\mu \times \nu(E_1) < \infty$. گیـــــریـــــــم $g_i(x) = \nu[(E_i)_x]$. دراین‌صورت $g(x) = \lim g_i(x)$ ، پـــس g ،

اندازه‌پذیر است . چون $\int g_1\, d\mu = \mu \times \nu(E_1) < \infty$

پس تقریبا" برای همهٔ x ها ، $g_1(x) < \infty$ است . برای هر x با $g_1(x) < \infty$ $\langle (E_i)_x \rangle$ یک‌دنبالهٔ کاهشی از مجموعه‌های اندازه‌پذیر با اندازهٔ باپایان است که اشتراک آنها برابر E_x است .

پس بنابرگزارهٔ ۱۱ . ۲ داریم

$$g(x) = \nu(E_x) = \lim \nu[(E_i)_x]$$
$$= \lim g_i(x).$$

ازایـــن‌رو

$$g_i \to g \quad \text{ت . هـ .}$$

پس g اندازه‌پذیر است . چون $0 \le g_i \le g_1$ ، پس قضیهٔ همگرایی لبـــگ ایجاب می‌کند که

$$\int g\, d\mu = \lim \int g_i\, d\mu$$
$$= \lim \mu \times \nu(E_i)$$
$$= \mu \times \nu(E),$$

برابری اخیر بنابرگزارهٔ ۱۱ . ۲ نتیجه می‌شود. ▮ .

۱۷ ـ لـــــم :

گیریم E مجموعه‌ای‌است‌که‌برای‌آن $\mu \times \nu(E) = 0$ است . دراین‌صورت‌تقریبا " برای همهٔ x ها داریم $\nu(E_x) = 0$

برهـــان :

بنابرگزارهٔ ۶ یک‌مجموعهٔ F متعلق‌به $\mathcal{R}_{\sigma\delta}$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $E \subset F$ و $\mu \times \nu(F) = 0$. ازلم ۱۶ نتیجه‌می‌شودکه‌تقریبا "برای‌همهٔ x هاداریم $\nu(F_x) = 0$ ولی $E_x \subset F_x$ ، پس تقریبا" برای همهٔ x ها $\nu E_x = 0$ است زیرا ν کامل است . ▮

۱۸ ــ گــــــزاره :

گیریم E زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیری از $X \times Y$ است به‌گونه‌ای که $\mu \times \nu(E)$ باپایان است. دراین‌صورت تقریبا "برای همهٔ x ها مجموعهٔ E_x یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر از Y است. تابع g که با

$$g(x) = \nu(E_x)$$

تعریف می‌شود تابعی است اندازه‌پذیر که تقریبا "برای همهٔ x ها تعریف شده است و داریم

$$\int g\, d\mu = \mu \times \nu(E)$$

برهـــــان :

بنابرگزارهٔ ۶ یک مجموعهٔ F متعلق به $\mathcal{R}_{\sigma\delta}$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $E \subset F$ و $\mu \times \nu(F) = \mu \times \nu(E)$ است. گیریم $G = F \sim E$. چون E و F اندازه‌پذیرند، پس G نیز اندازه‌پذیر است و داریم

$$\mu \times \nu(F) = \mu \times \nu(E) + \mu \times \nu(G).$$

چون $\mu \times \nu(E)$ باپایان و برابر $\mu \times \nu(F)$ است، پس $\mu \times \nu(G) = 0$. پس بنابرلم ۱۷ تقریبا " برای همهٔ x ها داریم $\nu G_x = 0$. از این‌رو

$$g(x) = \nu E_x = \nu F_x \qquad \text{ت. هـ.}$$

پس بنابرلم ۱۶، تابع g اندازه‌پذیر است. بازهم بنابرلم ۱۶ داریم

$$\int g\, d\mu = \mu \times \nu(F)$$
$$= \mu \times \nu(E). \blacksquare$$

دوقضیهٔ زیر مارا قادرمی‌سازند که ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کنیم و انتگرالها را نسبت به اندازهٔ حاصلضرب با روش تکرار حساب کنیم.

۱۹ ــ قضیـــــه (فـوبینـــــی[1]) :

گیریم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ و $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ دوفضای اندازهٔ کامل هستند و f روی $X \times Y$، تابعی است انتگرال‌پذیر. دراین‌صورت

---

۱ — Fubini

i. ـ تقریباً "برای‌همهٔ x ها تابع f_x که‌با $f_x(y) = f(x, y)$ تعریف می‌شود ، روی Y یک‌تابع انتگرال‌پذیر است .

i′ ـ تقریباً "برای‌همهٔ y ها ،تابع f_y که‌با $f_y(x) = f(x, y)$ تعریف می‌شود ، روی X تابعی انتگرال‌پذیر است .

ii ـ $\int_Y f(x, y)\, d\nu(y)$ روی X تابعی انتگرال‌پذیر است .

ii′ ـ $\int_X f(x, y)\, d\mu(x)$ روی Y تابعی انتگرال‌پذیر است .

iii ـ $\int_X \left[\int_Y f\, d\nu\right] d\mu = \int_{X\times Y} f\, d(\mu \times \nu) = \int_Y \left[\int_X f\, d\mu\right] d\nu$

برهـــان :

به‌سبب وجود تقارن بین x و y کافی است که (i) ، (ii) و نیمهٔ نخست (iii) را ثابت کنیم . اگر نتیجهٔ این قضیه در مورد هریک از دو تابع برقرار باشد درمورد تفاضل آنها نیز برقراراست ، ازاین‌رو کافی‌است حالتی‌را درنظربگیریم‌که f نامنفی است . بنابرگزارهٔ ۱۸ اگر f تابع مشخص یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر با اندازهٔ باپایان باشد، قضیه برقرار است . ازاین‌رو اگر f تابع ساده‌ای‌باشدکه بیرون مجموعه‌ای بااندازهٔ باپایان صفر است ، بازهم قضیه برقراراست . ولی‌بنابرگزارهٔ ۱۱ . ۷ هرتابع انتگرال‌پذیر نامنفی f ، حد یک دنبالهٔ افزایشی $\langle \varphi_n \rangle$ از تابعهای سادهٔ نامنفی است ، و چون هر φ_n ، انتگرال‌پذیر و ساده است ، این‌تابع باید بیرون مجموعه‌ای با اندازهٔ‌باپایان صفر باشد . بنابراین f_x حد دنبالهٔ‌افزایشی $\langle (\varphi_n)_x \rangle$ و تابعی‌اندازه‌پذیراست . بنابرقضیهٔ همگرایـی یکنـوا

$$\int_Y f(x, y)\, d\nu(y) = \lim \int_Y \varphi_n(x, y)\, d\nu(y),$$

پس این‌انتگرال‌تابعی‌است‌اندازه‌پذیر از x . باز بنابرقضیهٔ‌همگرایی‌یکنواداریم :

$$\int_X \left[\int_Y f\, d\nu\right] d\mu = \lim \int_X \left[\int_Y \varphi_n\, d\nu\right] d\mu$$

$$= \lim \int_{X\times Y} \varphi_n\, d(\mu \times \nu)$$

$$= \int_{X\times Y} f\, d(\mu \times \nu). \blacksquare$$

برای کاربردن قضیهٔ فوبینی ، نخست باید تحقیق گردد که f نسبت‌به $\mu \times \nu$ انتگرال‌پذیر است ، یعنی باید نشان داده شود که تابع f روی $X \times Y$ اندازه‌پذیر است‌و $\int |f|\, d(\mu \times \nu) < \infty$. اثبات اندازه‌پذیری f روی $X \times Y$ گاهی دشوار است . ولی دربسیاری‌حالتها می‌توانیم آن‌را باملاحظات توپولوژیکی ثابت‌کنیم (مسئلهٔ ۱۷ را ببینید) .

درحالتی‌که μ و ν اندازه‌های σ-باپایان‌هستند، می‌توان انتگرال‌پذیری f را بااستفاده از قضیهٔ زیر به‌کمک انتگرال‌گیری پی‌درپی تعیین کرد:

۲۰ ــ قضیــــه (تــونـلـــــی[1]):

گیریم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ و $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ دوفضای اندازهٔ σ-باپایان هستند و f روی $X \times Y$ یک‌تابع اندازه‌پذیر نامنفی است. دراین‌صورت:

i ــ *تقریباً "برای‌همهٔ x هاتابع f_x که‌با $f_x(y) = f(x, y)$ تعریف‌می‌شود، روی Y یک تابع اندازه‌پذیر است.*

i′ ــ *تقریباً "برای‌همهٔ y هاتابع f_y که‌با $f_y(x) = f(x, y)$ تعریف‌می‌شود، روی X یک تابع اندازه‌پذیر است.*

ii ــ $\int_Y f(x, y)\, d\nu(y)$ *روی X یک تابع اندازه‌پذیر است.*

ii′ ــ $\int_X f(x, y)\, d\mu(x)$ *روی Y یک‌تابع اندازه‌پذیر است.*

iii ــ $$\int_X \left[\int_Y f\, d\nu\right] d\mu = \int_{X\times Y} f\, d(\mu \times \nu) = \int_Y \left[\int_X f\, d\mu\right] d\nu$$

بــرهـــــان:

برای یک تابع اندازه‌پذیر و نامنفی f، تنها نکته‌ای دربرهان قضیهٔ ۱۹ که در آن‌انتگرال‌پذیری f مورداستفاده‌قرارگرفت. استنباط‌وجود یک دنبالهٔ افزایشی $\langle \varphi_n \rangle$ ازتابعهای‌ساده بود که هرجملهٔ‌آن بیرون‌مجموعه‌ای بااندازهٔ‌باپایان صفر است به‌گونه‌ای که $f = \lim \varphi_n$ است. ولی‌اگر μ و ν دواندازهٔ σ-باپایان‌باشند، آنگاه $\mu \times \nu$ نیز σ-باپایان است. و بنابرگزارهٔ ۱۱. ۷. هرتابع اندازه‌پذیر نامنفی روی $X \times Y$را می‌توان حد چنین دنباله‌ای گرفت. ∎

اگر $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ به‌ترتیب σ-جبرهایی روی X و Y باشند، دراین‌صورت کوچکترین σ-جبر حاوی مستطیل‌های اندازه‌پذیر را با $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ نشان می‌دهیم. بنابراین اندازهٔ حاصلضرب‌روی‌یک σ-جبر حاوی $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ تعریف‌می‌شودوچون $\mu \times \nu$ با روند گسترش کاراتئودوری‌به‌دست‌آمده‌است، پس کامل‌واشباع شده‌است. اگر μ و ν هردو σ-باپایان باشند، آنگاه اندازهٔ حاصلضرب روی $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ آشکارا اشباع شده است و مجموعه‌های

---

[1] ــ Tonelli

اندازه‌پذیر برای $\mu \times \nu$ آن مجموعه‌هایی است که تفاضلشان با مجموعه‌های متعلق به $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ مجموعه‌هایی با اندازهٔ صفر است.

بسیاری از مؤلفین ترجیح می‌دهند که اندازهٔ حاصلضرب را به‌صورت تحدید $\nu \times \mu$ به $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ تعریف کنند. مزیت کامل گرفتن $\nu \times \mu$، همانگونه که در اینجا انجام شد، آن‌است‌که این همان‌کاری‌را می‌کند که برای‌اندازهٔ‌لبگ‌می‌خواهیم: حاصلضرب اندازهٔ‌لبگ n بعدی در اندازهٔ‌لبگ m بعدی، یک اندازهٔ‌لبگ $(n+m)$ بعدی‌است. چون فرض‌های ما برای‌قضیه‌های‌فوبینی‌وتونلی تنهانیازبه‌اندازه‌پذیری‌نسبت‌به‌اندازهٔ‌حاصلضرب کامل دارد، لذا این فرضها ضعیف‌تر از فرض اندازه‌پذیری نسبت به $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ هستند. بهای‌استفاده‌ازاین‌فرضهای‌ضعیف‌تر لزوم گنجاندن‌عبارت "تقریبا" برای‌همه " درنتیجهٔ این‌قضیه‌هاست. می‌بایست‌چنین‌انتظاری نیز داشته‌باشیم، زیرا تعویض f به‌طور دلخواه برای x های‌مجموعه‌ای بااندازهٔ‌صفر، اندازه‌پذیری یا انتگرال‌پذیری f را عوض‌نمی‌کند، ولی f_x برای‌چنین x هایی‌می‌تواندد‌لخواه‌باشد. بااین‌وجوداگر f نسبت‌به $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ اندازه‌پذیر باشد، آنگاه f_x برای هر x اندازه‌پذیر است.

بااستفاده از کامل بودن μ، همچنین نشان دادیم که $\int f(x, y)\, d\nu(y)$ اندازه‌پذیر است، زیرا اگر μ کامل‌نبود تنها می‌توانستیم نتیجه بگیریم که این تابعی است‌که‌روی یک زیرمجموعهٔ‌بااندازهٔ‌صفر با یک تابع اندازه‌پذیر متفاوت‌است. باوجوداین اگر f نسبت‌به $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ اندازه‌پذیرباشد، آنگاه‌می‌توان‌ثابت‌کرد‌که $\int f(x, y)\, d\nu(y)$ (به‌شرط‌انتگرال‌پذیری f) نسبت‌به $\mathcal{A}$ اندازه‌پذیر است، حتی‌اگر μ کامل نباشد، ولی اثبات‌آن به‌طورشگفت‌انگیزی‌پیچیده‌است. برای‌دانستن‌برهان‌آن صفحهٔ ۱۴۳ ازکتاب (۸) نوشتهٔ هالموس را ببینید.

مثالهایی که درضمن مسئله‌ها آورده‌شده‌اند، نشان می‌دهند که نمی‌توانیم فرض انتگرال‌پذیری f رااز‌قضیهٔ‌فوبینی، یافرض σ-باپایانی‌ونامنفی‌بودن‌را از قضیهٔ تونلی حذف‌کنیم. درمسئلهٔ ۲۲ نقش اساسی‌اندازه‌پذیری f دراین‌قضیه‌ها نشان‌داده‌شده‌است: اگر این‌فرض را حذف‌کنیم، حتی‌برای‌تابعهای‌کراندار و اندازه‌های باپایان، ممکن است، دوانتگرال $\int[\int f\, d\nu]\, d\mu$ و $\int[\int f\, d\mu]\, d\nu$ به‌خوبی‌تعریف شده‌باشند ولی‌برابرنباشند.

مسئله‌ها

۱۵– گیریم $X = Y$ مجموعهٔ‌عددهای درست‌مثبت، $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$، و $\mu = \nu$ اندازه‌ای است که باقراردادن $\mu(E)$ برابر شمارهٔ نقطه‌های E وقتی E باپایان

است و ∞ وقتی E یک مجموعهٔ بی‌پایان است، تعریف می‌گردد. (این اندازه را اندازهٔ شمارنده می‌گویند). قضیه‌های فوبینی و تونلی را در این حالت به‌طور صریح بیان کنید.

۱۶ ـ گیریم $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ یک فضای اندازهٔ σ-باپایان دلخواه و Y مجموعهٔ عددهای درست و مثبت و ν اندازهٔ شمارنده است (مسئلهٔ ۱۵). در این صورت قضیهٔ ۲۰ و نتیجهٔ ۱۱، ۱۴ مبین یک حقیقت هستند. ولی نتیجهٔ ۱۱، ۱۴، حتی اگر μ یک اندازهٔ σ-باپایان نباشد باز برقرار است، و از این رو قضیهٔ تونلی بدون قید σ-باپایانی درست است به‌شرط این‌که $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ همین فضای اندازهٔ خاص باشد.

۱۷ـ گیریم $X = Y = [0, 1]$، و $\mu = \nu$ اندازهٔ لبگ است. نشان دهید که هر مجموعهٔ باز در $X \times Y$ اندازه‌پذیر است، و از این رو هر مجموعهٔ برل در $X \times Y$ اندازه‌پذیر است.

۱۸ ـ گیریم تابعهای h و g به‌ترتیب روی X و Y انتگرال‌پذیرند، و f را با $f(x, y) = h(x)g(y)$ تعریف می‌کنیم. در این صورت f روی $X \times Y$ انتگرال‌پذیر است و

$$\int_{X\times Y} f\, d(\mu \times \nu) = \int_X h\, d\mu \int_Y g\, d\nu$$

(*یادداشت*: نیازی به‌فرض σ-باپایانی μ و ν نداریم).

۱۹ ـ نشان دهید که اگر در قضیهٔ تونلی به‌جای فرض σ-باپایانی μ و ν، تنها فرض کنیم که $\{\langle x, y\rangle : f(x, y) \neq 0\}$ یک مجموعهٔ با اندازهٔ σ-باپایان است، این قضیه بازهم درست است.

۲۰ ـ مثال زیر نشان می‌دهد که نمی‌توانیم فرض نامنفی بودن f را از قضیهٔ تونلی و فرض انتگرال‌پذیری f را از قضیهٔ فوبینی حذف کنیم. فرض می‌کنیم $X = Y$ مجموعهٔ عددهای درست و مثبت و $\mu = \nu$ اندازهٔ شمارنده است. می‌گیریم

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - 2^{-x} & \text{اگر } x = y \\ -2 + 2^{-x} & \text{اگر } x = y + 1 \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

۲۱ ـ مثال زیر نشان می‌دهد که نمی‌توانیم فرض انتگرال‌پذیری f را از قضیهٔ فوبینی، یا فرض σ-باپایانی μ و ν را از قضیهٔ تونلی حذف کنیم:

گیریم $X = Y$ فاصلهٔ $[0, 1]$ و $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ ردهٔ مجموعه‌های برل هستند.

گیریم μ اندازهٔ لبگ و ν اندازهٔ شمارنده است. در این صورت قطر $\Delta = \{\langle x, y\rangle \in X \times Y : x = y\}$ اندازه‌پذیر (در واقع یک $\mathfrak{R}_{\sigma\delta}$) است، ولی تابع مشخص آن در هیچ یک از برابریهای شرط (iii) ی قضیه‌های فوبینی و تونلی صدق نمی‌کند.

۲۲ ــ مثال زیر نشان می‌دهد که نمی‌توان فرض اندازه‌پذیری f نسبت‌به اندازهٔ حاصلضرب‌را ازقضیه‌های فوبینی و تونلی حذف‌کرد ،حتی‌اگر f_y و f_x را اندازه‌پذیر و $\int f(x, y)\, d\nu(y)$ و $\int f(x, y)\, d\mu(x)$ را انتگرال‌پذیرفرض‌کنیم : گیریم $X = Y$ برابرمجموعهٔ عددهای‌ترتیبی‌کوچکتر یا برابر نخستین عدد ترتیبی شمارش‌ناپذیر Ω است .گیریم $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ برابر σ - جبرمتشکل‌ازهمهٔ مجموعه‌های‌شمارش‌پذیر و مکملهای آنهاست . $\nu = \mu$ راچنین‌تعریف‌می‌کنیم ،اگر E شمارش‌پذیرباشدقرارمی‌دهیم $\mu E = 0$ وگرنه‌قرارمی‌دهیم $\mu E = 1$. یک‌زیرمجموعهٔ S از $X \times Y$ را با $S = \{\langle x, y\rangle : x < y\}$ تعریف‌می‌کنیم . دراین‌صورت S_x و S_y برای‌هر x و هر y اندازه‌پذیرند ،ولی‌اگر f تابع مشخص S باشد داریم

$$\int\left[\int f(x, y)\, d\mu(x)\right] d\nu(y) \neq \int\left[\int f(x, y)\, d\nu(y)\right] d\mu(x)$$

اگر فرض پیوستاری را بپذیریم ، یعنی اگر بتوانیم یک تناظر یک‌به‌یک بین X و $[0, 1]$ برقرار کنیم ، آنگاه می‌توانیم f را روی مربع یکه تابعی بگیریم به‌گونه‌ای‌که f_x و f_y برای هر x و هر y کراندار و اندازه‌پذیر باشند ولی نتیجهٔ قضیه‌های فوبینی و تونلی برقرار نباشد .

۲۳ ــ نشان‌دهیدکه‌اگر $(X, \mathcal{A}, \mu)$ و $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ دوفضای‌اندازهٔ σ - باپایان باشند ،دراین‌صورت $\mu \times \nu$ تنهااندازه‌ای‌روی $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ است‌که‌به‌هر مستطیل اندازه‌پذیر $A \times B$ مقدار $\mu A\, \nu B$ رامربوط می‌کند . نشان‌دهیدکه‌اگرشرط σ - باپایانی‌برقرارنباشد ، هراندازهٔ بااین‌خاصیت روی $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ لزوماً" یکتا نیست .

۲۴ ــ الف ــ نشان دهید که اگر $E \varepsilon \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ باشد ، آنگاه برای‌هر x داریم $E_x \varepsilon \mathcal{B}$.

ب ــ اگر f نسبت‌به $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ اندازه‌پذیر باشد ، آنگاه f_x برای هر x نسبت‌به $\mathcal{B}$ اندازه‌پذیر است .

۲۵ ــ گیریم $X = Y = \mathbf{R}$ و $\mu = \nu$ برابر اندازهٔ‌لبگ است . دراین‌صورت $\mu \times \nu$ روی $X \times Y = \mathbf{R}^2$ یک‌اندازهٔ لبگ دوبعدی است . اغلب به‌جای $d(\mu \times \nu)$ ، می‌نویسیم $dx\, dy$

الف ــ برای هر زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر E از $\mathbf{R}$ ، گیریم

$$\sigma(E) = \{\langle x, y\rangle : x - y \varepsilon E\}$$

نشان‌دهیدکه $\sigma(E)$ یک‌زیرمجموعهٔ‌اندازه‌پذیر از $\mathbf{R}^2$ است .[**راهنمایی** : نخست حالتهایی‌را درنظربگیریدکه E ، به‌ترتیب‌باز ، $\mathcal{G}_\delta$ ،بااندازهٔ‌صفر ، واندازه‌پذیر ، است .]

ب ــ اگر f روی $\mathbf{R}$ تابعی اندازه‌پذیرباشد، آنگاه تابع F که با $F(x, y) = f(x - y)$ تعریف می‌شود روی $\mathbf{R}^2$ تابعی اندازه‌پذیر است.

پ ــ اگر f و g روی $\mathbf{R}$ توابعی اندازه‌پذیر باشند، دراین‌صورت برای تقریبا" همهٔ x ها، تابع φ که با $\varphi(y) = f(x - y)g(y)$ تعریف می‌شود، انتگرال‌پذیراست. اگر انتگرال آن‌را با $h(x)$ نشان دهیم، آنگاه h انتگرال‌پذیر است و

$$\int |h| \leq \int |f| \int |g|$$

۲۶ــ گیریم f و g دوتابع متعلق‌به $L^1(-\infty,\infty)$ هستند، تابع $f * g$ را با h نمایانده و با $h(y) = \int f(y - x)g(x)\, dx$ تعریف می‌کنیم.

الف ــ نشان دهید $f * g = g * f$

ب ــ نشان دهید $(f * g) * h = f * (g * h)$

پ ــ برای $f \in L^1$، تابع $\hat{f}$ را با $\hat{f}(s) = \int e^{ist} f(t)\, dt$ تعریف می‌کنیم. دراین‌صورت $\hat{f}$ یک‌تابع مختلط کراندار است و

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$$

۲۷ ــ گیریم f روی $(-\infty,\infty)$ یک‌تابع انتگرال‌پذیر نامنفی و m_2 روی $\mathbf{R}^2$ اندازهٔ لبگ دوبعدی است. دراین‌صورت:

$$m_2\{\langle x, y\rangle : 0 \leq y \leq f(x)\} = m_2\{\langle x, y\rangle : 0 < y < f(x)\} = \int f(x)\, dx.$$

گیریم $\varphi(t) = m\{x : f(x) \geq t\}$ است. دراین‌صورت φ یک‌تابع کاهشی است‌و

$$\int_0^\infty \varphi(t)\, dt = \int f(x)\, dx$$

*۵ ــ انــدازهٔ درونـــی

گیریم μ روی‌جبر $\mathcal{Q}$ یک‌اندازه و μ^* اندازهٔ بیرونی‌القایی است. دراین‌صورت می‌توان $\mu^* E$ را به‌عنوان بزرگترین اندازهٔ ممکن برای E پنداشت‌که با μ سازگار است. همچنین می‌توان یک اندازهٔ درونی μ_* تعریف کرد که به هر مجموعهٔ دادهٔ شدهٔ E، کوچکترین اندازه سازگار با μ را مربوط می‌کند:

تعـــریـــف :

گیریم μ روی‌جبر $\mathcal{A}$ یک‌اندازه‌و μ^* اندازهٔ بیرونی‌القایی‌است ، اندازهٔ درونی μ_* القاء شده به‌وسیلهٔ μ را بابرابری

$$\mu_*E = \sup \mu A - \mu^*(A \sim E)$$

تعریف می‌کنیم ، که در آن سوپرمم روی همهٔ مجموعه‌های $A \varepsilon \mathcal{A}$ کـه بـرای آنهـــا $\mu^*(A \sim E) < \infty$ است ، گرفته می‌شود .

اندازهٔ درونی‌اهمیت‌تاریخی‌داردزیرا درآغاز اندازه‌پذیری‌یک‌مجموعه‌بااستفادهٔ توأم از اندازهٔ درونی و اندازهٔ بیرونی مشخص گردید . مجموعهٔ E بااندازهٔ بیرونی باپایان ، اندازه‌پذیر تعریف می‌شدهرگاه $\mu^*E = \mu_*E$ ، و اندازه‌پذیری مجموعه‌های با اندازهٔ بیرونی‌بی‌پایان‌برحسب‌اشتراک‌های‌آنها‌با‌مجموعه‌های‌بااندازهٔ‌باپایان‌تعریف می‌شد . حتی‌درحالت یک اندازهٔ‌باپایان μ ، این‌روش بسیارپیچیده‌تر ازشیوهٔ‌زیبای‌کاراتئودوری است که در این‌فصل دنبال کردیم . علاوه‌براهمیت تاریخی ، اندازهٔ درونی ، درگسترش μ از $\mathcal{A}$ به‌جبری حاوی $\mathcal{A}$ و یک‌مجموعهٔ‌داده‌شدهٔ E (که‌لازم‌نیست اندازه‌پذیرباشد) و برای تعیین میزان آزادی که در گسترش μ به σ-جبری حاوی $\mathcal{A}$ داریم ، مفید اســت ، هدف این بند انجام این‌کار و بیان خواص اساسی اندازهٔ دورنی است .

۲۱ـ لــــــم :

داریم $\mu_*E \le \mu^*E$. اگـــر $E \varepsilon \mathcal{A}$ ، آنـــگـــاه $\mu_*E = \mu E$

بـــرهــــــان :

چـــــون $\mu A \le \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \tilde{E})$

است ، پس داریم $\mu A - \mu^*(A \cap \tilde{E}) \le \mu^*(A \cap E) \le \mu^*E$

درنتیجـــه $\mu_*E \le \mu^*E$

اگر $E \varepsilon \mathcal{A}$ باشد ،آنگاه‌درتعریف μ_* می‌گیریم $A = E$. دراین‌صورت‌داریم

$$\mu_*E \ge \mu E = \mu^*E. \blacksquare$$

۲۲ ــ لــــــم :

اگر $E \subset F$ آنگاه $\mu_* E \leq \mu_* F$

بــرهـــــان :

اگر $\mu^*(A \sim E) < \infty$ باشد ، آنگاه $\mu^*(A \sim F) < \infty$ اســـــت ، پــــس

$$\mu_* F \geq \mu A - \mu^*(A \sim F) \geq \mu A - \mu^*(A \sim E)$$

پس از گرفتن سوپرمم روی $A \varepsilon \mathfrak{a}$ با $\mu^*(A \sim E) < \infty$ داریم $\mu_* F \geq \mu_* E$ ∎ .

یکی از اشکالات استفاده از تعریف اندازهٔ درونی این است که سـوپـرمـم $\mu A - \mu^*(A \sim E)$ را باید روی همه مجموعه‌های A با $\mu^*(A \sim E) < \infty$ گرفت . لم بعدی نشان می‌دهد که این عبارت نسبت به A یکنواست و مارا قادرمی‌سازدکه $\mu_* E$ را به‌طور آسانتری حساب کنیم .

۲۳ ــ لــــــم :

گیریم A و B دومجموعه‌در $\mathfrak{a}$ هستندبا $\mu^*(A \sim E) < \infty$ و $\mu^*(B \sim E) < \infty$ اگر $A \subset B$ ، داریم $\mu A - \mu^*(A \sim E) \leq \mu B - \mu^*(B \sim E)$. همچنیـــــن اگـــــر $E \subset A$ باشد نابرابری اخیر به‌برابری تبدیل می‌شود ، ازاین‌رو

$$\mu_* E = \mu A - \mu^*(A \sim E)$$

بــرهـــــان :

چــــون $B \sim E \subset (B \sim A) \cup (A \sim E)$ ، پـــــــس داریــــــــم : $\mu^*(B \sim E) \leq \mu(B \sim A) + \mu^*(A \sim E)$. اگر $E \subset A$ باشد ، آنگاه این اجتماع یک اجتماع مجزاست ، و اندازه‌پذیری $B \sim A$ بــرابــری را نتیجـــه مـی‌دهـــد . چـــون $\mu B = \mu A + \mu(B \sim A)$ ، داریـــم

$$\mu B - \mu^*(B \sim E) \geq \mu A - \mu^*(A \sim E)$$

و اگر $E \subset A$ باشد ، آنگاه دوطرف برابرند . ∎

۲۴ ـ نتیجه :

اگر $A \varepsilon \mathfrak{A}$ باشد، آنگاه $\mu A = \mu_*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \tilde{E})$ است.

برهان :

اگر $\mu^*(A \cap \tilde{E}) = \infty$ باشد، دراین‌صورت $\mu A = \infty$ است‌وچیزی برای اثبات وجود ندارد. درغیراین‌صورت قرارمی‌دهیم $F = A \cap E$. دراین صورت $A \sim F = A \cap \tilde{E}$، و $\mu_* F = \mu A - \mu^*(A \cap \tilde{E})$، زیرا $F \subset A$ و $\mu^*(A \sim F) < \infty$ است. ∎

لم زیر جمع پذیری μ_* را روی تجزیهٔ یک‌مجموعه به‌وسیلهٔ یک دنبالهٔ مجزا از مجموعه‌های متعلق‌به $\mathfrak{A}$، نشان می‌دهد. نتیجهٔ متناظر درمورد اندازهٔ بیرونی درست است حتی اگر مجموعه‌های A_i تنهااندازه‌پذیر فرض شوند. (مسئلهٔ ۳۲۰۳ث راببینید).

۲۵ ـ لم :

گیریم $\langle A_i \rangle$ یک‌دنبالهٔ مجزا ازمجموعه‌های‌متعلق‌به $\mathfrak{A}$ است. دراین‌صورت:

$$\mu_*\left(E \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_*(E \cap A_i).$$

برهان :

باجانشین‌ساختن E با $E \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$، می‌توان فرض‌کرد $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

برای هر $B \varepsilon \mathfrak{A}$ با $\mu^*(B \sim E) < \infty$ داریم

$$\mu B - \mu^*(B \sim E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \cap B) - \mu^*(A_i \cap B \cap \tilde{E})$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_*(A_i \cap B \cap E)$$
$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_*(A_i \cap E).$$

باگرفتن سوپرموم روی همهٔ چنین B هایی به‌دست می‌آوریم :

$$\mu_* E \leq \sum \mu_*(A_i \cap E)$$

گیریم B_i مجموعهٔ دلخواهی است متعلق‌به $\mathfrak{A}$ با $\mu^*(B_i \sim (E \cap A_i)) < \infty$ دراین‌صورت

$$\mu B_i - \mu^*(B_i \sim (E \cap A_i)) = \mu_*(B_i \cap A_i \cap E)$$
$$= \mu(B_i') - \mu^*(B_i' \cap \tilde{E}),$$

که‌درآن $B_i' = B_i \cap A_i$. چون مجموعه‌های B_i' مجزا و اندازه‌پذیرند ، پس

$$\sum_{i=1}^{n} \mu B_i - \mu^*(B_i \sim (E \cap A_i)) = \mu\left[\bigcup_{i=1}^{n} B_i'\right] - \mu^*\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i'\right) \cap \tilde{E}\right]$$
$$\leq \mu_* E.$$

باگرفتن سوپرموم روی همهٔ گزینشهای $B_i \,\varepsilon\, \mathfrak{A}$ با

$$\mu^*(B_i \sim (E \cap A_i)) < \infty,$$

داریم

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_*(E \cap A_i) \leq \mu_* E.$$

بنابراین

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_*(E \cap A_i) \leq \mu_* E. \blacksquare$$

۲۶ ــ قضیه :

گیریم μ روی‌جبر $\mathfrak{A}$ از زیرمجموعه‌های X ، یک‌اندازه‌و E زیرمجموعهٔ دلخواهی از X است . اگر $\mathfrak{B}$ جبر تولیدشده به‌وسیلهٔ $\mathfrak{A}$ و E و $\tilde{\mu}$ یک گسترش μ بر $\mathfrak{B}$ ، باشد ، آنگاه

$$\mu_* E \leq \tilde{\mu} E \leq \mu^* E.$$

به‌علاوه، گسترشهای $\bar{\mu}$ و $\underline{\mu}$ ی μ به $\mathcal{B}$ (وازاین‌روهمچنین‌به σ- جبر تولیدشده به‌وسیلهٔ $\mathcal{B}$)وجود دارند به‌گونه‌ای که $\bar{\mu}E = \mu^*E$ و $\underline{\mu}E = \mu_*E$.

برهــــــان:

اگر $\langle A_i \rangle$ یک‌دنبالهٔ‌دلخواه از مجموعه‌های‌مجزای $\mathcal{A}$ با $E \subset \bigcup A_i$ باشد، آنگاه $E = \bigcup (A_i \cap E)$، پس:

$$\bar{\mu}E = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_i \cap E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i$$

بنابراین $\bar{\mu}E \leq \mu^*E$

اگر A یک مجموعهٔ دلخواه در $\mathcal{A}$ باشد با $\mu^*(A \sim E) < \infty$ ، دراین‌صورت $\bar{\mu}(A \sim E) \leq \mu^*(A \sim E)$ ، و

$$\mu A - \mu^*(A \sim E) \leq \mu A - \bar{\mu}(A \sim E) = \bar{\mu}(E \cap A) \\ \leq \bar{\mu}E.$$

ازاین‌رو $\mu_*E \leq \bar{\mu}E$.

مجموعه‌های B ی متعلق‌به $\mathcal{B}$ به‌صورت $B = (A \cap E) \cup (A' \cap \tilde{E})$ هستند که درآن A و A' به $\mathcal{A}$ تعلق دارند، زیرا دستهٔ همهٔ مجموعه‌های به‌این‌شکل تشکیل جبری می‌دهندکه مشمول $\mathcal{B}$ و شامل $\mathcal{A}$ و E است. برای هر $B \in \mathcal{B}$، $\bar{\mu}$ و $\underline{\mu}$ را با برابریهای زیر تعریف می‌کنیم .

$$\bar{\mu}B = \mu^*(B \cap E) + \mu_*(B \cap \tilde{E})$$

$$\underline{\mu}B = \mu_*(B \cap E) + \mu^*(B \cap \tilde{E}).$$

دراین‌صورت $\bar{\mu}$ و $\underline{\mu}$ تابعهایی هستند یکنوا و نامنفی که روی $\mathcal{B}$ تعریف شده‌اند و بنابر نتیجهٔ ۲۴ برای $A \in \mathcal{A}$ داریم $\bar{\mu}A = \underline{\mu}A = \mu A$. بنابراین اگر ثابت‌کنیم کــــه $\bar{\mu}$ و $\underline{\mu}$ روی $\mathcal{B}$ جمعی شمارش‌پذیرند قضیه ثابت می‌شود .

گیریم $B_i = (A_i \cap E) \cup (A_i' \cap \tilde{E})$ یک‌دنبالهٔ‌مجزا ازمجموعه‌هایی‌باشد که‌اجتماع‌آنها B نیز به $\mathcal{B}$ تعلق دارد. دراین‌صورت $B = (A \cap E) \cup (A' \cap \tilde{E})$ ، که درآن $A = \bigcup A_i$ و $A' = \bigcup A_i'$. اگر $i \neq j$ باشد، آنگاه $B_i \cap B_j = \varnothing$ است، وازایــــــن‌رو

$$A_i' \cap A_j' \cap \tilde{E} = B_i \cap B_j \cap \tilde{E} = \varnothing \text{ و } A_i \cap A_j \cap E = B_i \cap B_j \cap E = \varnothing$$

گیریم $C_n = A_n \cap \tilde{A}_1 \cap \cdots \cap \tilde{A}_{n-1}$ و $C'_n = A'_n \cap \tilde{A}'_1 \cap \cdots \cap \tilde{A}'_{n-1}$
دراین‌صورت C_i و C'_i به $\mathfrak{A}$ تعلق دارند و برای $i \neq j$ داریم، $C'_i \cap C'_j = \varnothing$،
$C_i \cap C_j = \varnothing$. همچنین $C_n \cap E = A_n \cap \tilde{A}_1 \cap \cdots \cap \tilde{A}_{n-1} \cap E = A_n \cap E$
زیرا داریم $A_n \cap \tilde{A}_j \cap E = (A_n \cap \tilde{A}_j \cap E) \cup (A_n \cap A_j \cap E) = A_n \cap E$. به‌روش
مشابه $C'_n \cap \tilde{E} = A'_n \cap \tilde{E}$ پس $B_n = (C_n \cap E) \cup (C'_n \cap \tilde{E})$. اکنون داریم
$B \cap E = \bigcup (C_n \cap E)$ و $B \cap \tilde{E} = \bigcup (C'_n \cap \tilde{E})$. چون C_n و C'_n دنباله‌هایی از
مجموعه‌های مجزای متعلق‌به $\mathfrak{A}$ هستند . پس بنابرمسئلهٔ ۳ داریم

$$\mu^*(B \cap E) = \sum \mu^*(C_n \cap E) = \sum \mu^*(B_n \cap E)$$

و

$$\mu^*(B \cap \tilde{E}) = \sum \mu^*(C'_n \cap \tilde{E}) = \sum \mu^*(B_n \cap \tilde{E})$$

$$\mu_*(B \cap E) = \sum \mu_*(C_n \cap E) = \sum \mu_*(B_n \cap E)$$

و

$$\mu_*(B \cap \tilde{E}) = \sum \mu_*(C'_n \cap E) = \sum \mu_*(B_n \cap \tilde{E}).$$

بنابراین $\bar{\mu}B = \sum \bar{\mu}B_n$ و $\underline{\mu}B = \sum \underline{\mu}B_n$ ، که نشان می‌دهند که $\bar{\mu}$ و $\underline{\mu}$ جمعی شمارش‌پذیر و ازاین‌رو اندازه‌هایی روی $\mathfrak{B}$ هستند . ∎

گزارهٔ ۶ می‌گوید که هر مجموعهٔ بااندازهٔ بیرونی باپایان مشمول‌یک $\mathfrak{A}_{\sigma\delta}$ با همان اندازهٔ بیرونی است . گزارهٔ زیر همتای گزارهٔ ۶ درمورد اندازهٔ درونی است .

۲۷ ـ گزاره :

گیریم E مجموعه‌ای‌است با $\mu_*E < \infty$. دراین‌صورت‌یک‌مجموعهٔ $H \varepsilon \mathfrak{A}_{\delta\sigma}$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $H \subset E$ و $\bar{\mu}H = \mu_*E$

برهان :

گیریم A_n یک‌مجموعهٔ‌متعلق به $\mathfrak{A}$ است با $\mu^*(A_n \sim E) < \infty$ و $\mu A_n - \mu^*(A_n \sim E) > \mu_*E - \frac{1}{n}$. بنابرگزارهٔ ۶ یک $G_n \varepsilon \mathfrak{A}_{\sigma\delta}$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که $G_n \supset A_n \sim E$ و $\bar{\mu}G_n = \mu^*(A_n \sim E)$. گیریم $H_n = A_n \sim G_n$. دراین‌صورت $H_n \varepsilon \mathfrak{A}_{\delta\sigma}$ و $H_n \subset E$ است . به‌علاوه، $\bar{\mu}H_n = \mu A_n - \bar{\mu}G_n > \mu_*E - \frac{1}{n}$. بنابراین اگر بگیریم $H = \bigcup H_n$ ، قضیه ثابت می‌شود . ∎

۲۸ ـ گــــــزاره:

فرض‌کنیم $\mu^*E < \infty$ است. دراین‌صورت E اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر $\mu_*E = \mu^*E$ بـاشـد.

بـرهـــان:

فرض‌کنیم $\mu_*E = \mu^*E < \infty$. دراین‌صورت گزاره‌های ۶ و ۲۷ مجموعه‌های اندازه‌پذیر G و H را با $G \subset E \subset H$ و $\bar{\mu}G = \bar{\mu}H$ می‌دهند. بنابراین تفاضل E با یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر، مجموعه‌ای با اندازهٔ صفر است پس E اندازه‌پذیر است.

فرض‌کنیم E مجموعهٔ اندازه‌پذیری با اندازهٔ بیرونی باپایان است. دراین‌صورت E مشمول اجتماع یک دنبالهٔ $\langle A_n \rangle$ از مجموعه‌های مجزای $\mathcal{a}$ با اندازهٔ باپایان است. بنابرگزارهٔ ۲۵ و اندازه‌پذیری E داریم:

$$\begin{aligned}\mu_*E &= \sum \mu_*(E \cap A_n)\\ &= \sum \mu A_n - \mu^*(A_n \cap \tilde{E})\\ &= \sum \bar{\mu}(A_n \cap E)\\ &= \bar{\mu}E = \mu^*E. \blacksquare\end{aligned}$$

۲۹ ـ قضیــــــــه:

گیریم E و F دومجموعهٔ مجزا هستند. دراین‌صورت داریم:

$$\mu_*E + \mu_*F \leq \mu_*(E \cup F) \leq \mu_*E + \mu^*F \leq \mu^*(E \cup F) \leq \mu^*E + \mu^*F.$$

بـرهـــان:

اگر μ_*E یا μ_*F بی‌پایان باشند، نابرابری نخست از یکنوایی μ_* نتیجه می‌شود. اگر μ_*E و μ_*F هردوباپایان‌باشند، فرض‌می‌کنیم G و H مجموعه‌های اندازه‌پذیری هستند با $G \subset E$ و $H \subset F$ به‌گونه‌ای‌که $\bar{\mu}G = \mu_*E$ و $\bar{\mu}H = \mu_*F$. دراین‌صـورت $G \cup H$ مجموعهٔ اندازه‌پذیری‌است با اندازهٔ بیرونی‌باپایان و مشمول $E \cup F$. بنابرایـن

$$\begin{aligned}\mu_*(E \cup F) \geq \mu_*(G \cup H) &= \bar{\mu}(G \cup H)\\ &= \bar{\mu}G + \bar{\mu}H\\ &= \mu_*E + \mu_*F,\end{aligned}$$

و نابرابری نخست ثابت می‌گردد.

اگر $\mu^*F = \infty$ باشد، نابرابری دوم بدیهی است. اگر $\mu^*F < \infty$ باشد، فرض می‌کنیم که A مجموعهٔ دلخواهی است در $\mathcal{A}$ با $\mu^*(A \sim (E \cup F)) < \infty$. چون $A \sim E \subset [A \sim (E \cup F)] \dot{\cup} F$ است، داریم

$$\mu^*(A \sim E) \leq \mu^*(A \sim (E \cup F)) + \mu^*F.$$

بنابراین $\mu^*(A \sim E) < \infty$ و

$$\begin{aligned}\mu A - \mu^*(A \sim (E \cup F)) &\leq \mu A - \mu^*(A \sim E) + \mu^*F \\ &\leq \mu_* E + \mu^*F.\end{aligned}$$

باگرفتن سوپرموم روی A ، به‌دست می‌آوریم

$$\mu_*(E \cup F) \leq \mu_* E + \mu^*F$$

برای اثبات نابرابری سوم، یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر $G \subset E$ با $\bar{\mu}G = \mu_* E$ برمی‌گزینیم. دراین‌صورت اندازه‌پذیری G ایجاب می‌کند که

$$\begin{aligned}\mu_* E + \mu^*F &= \bar{\mu}G + \mu^*F \\ &= \mu^*(G \cup F) \\ &\leq \mu^*(E \cup F).\end{aligned}$$

نابرابری اخیر همان خاصیت زیرجمعی اندازهٔ بیرونی است. ▮

مسئله‌ها

۲۸ ــ الف ــ اگر $\mu X < \infty$ ، آنگاه $\mu_* E = \mu X - \mu^*(\tilde{E})$

ب ــ اگر $\mathcal{A}$ یک σ -جبر باشد، آنگاه

$$\mu^* E = \inf \{\mu A: E \subset A, A \in \mathcal{A}\}$$

و

$$\mu_* E = \sup \{\mu A: A \subset E, A \in \mathcal{A}\}$$

پ ــ اگر μ روی $\mathbf{R}$ اندازهٔ لبگ باشد، آنگاه

$$\mu_* E = \sup \{\mu F: F \subset E \text{ و } F \text{ بسته}\}$$

۲۹ ــ گیریم E یک مجموعهٔ دلخواه است. مجموعهٔ اندازه‌پذیر $G \subset E$ را یک *هستهٔ اندازه‌پذیر* برای E می‌نامند هرگاه $\mu_*(E \sim G) = 0$. مجموعهٔ اندازه‌پذیر $H \supset E$ را یک *پوشش اندازه‌پذیر* E می‌گویند، هرگاه $\mu_*(H \sim E) = 0$ باشد.

الف ـ نشان دهید که تفاضل هر دو هسته (یا پوشش) اندازه‌پذیر E یک مجموعهٔ پوچ است.

ب ـ نشان دهید که اگر E مجموعه‌ای با اندازهٔ بیرونی σ-باپایان باشد آنگاه E دارای یک هستهٔ اندازه‌پذیر و یک پوشش اندازه‌پذیر است.

۳۰ ـ گیریم μ اندازه‌ای است روی یک جبر $\mathcal{A}$ و E مجموعه‌ای است با $\mu^*E < \infty$. اگر β یک عدد حقیقی با $\mu_*E \leq \beta \leq \mu^*E$ باشد، آنگاه یک گسترش $\bar{\mu}$ از μ به σ-جبر حاوی $\mathcal{A}$ و E وجود دارد به‌گونه‌ای که $\bar{\mu}E = \beta$

۳۱ ـ الف ـ اگر μ یک اندازهٔ نیم باپایان روی یک جبر $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ کوچکترین σ-جبر حاوی $\mathcal{A}$ باشد، آنگاه تحدید μ_* به $\mathcal{B}$ یک اندازهٔ نیم باپایان است و کوچکترین گسترش μ به $\mathcal{B}$ است.

ب ـ ممکن است بیش از یک گسترش نیم باپایان به $\mathcal{B}$ وجود داشته باشد (برای مثال، گیریم $X = \mathbf{N} \cup \{\omega\}$ و $\mathcal{A}$ جبر تولید شده به‌وسیلهٔ زیرمجموعه‌های باپایان $\mathbf{N}$ و μ، اندازهٔ شمارنده است).

۳۲ ـ گیریم $\mathcal{A}$، جبر اجتماعهای باپایان از فاصله‌های نیم باز $\mathbf{R}$، و $\mu\emptyset = 0$ و برای $A \neq 0$، $\mu A = \infty$ است. دستهٔ $\mathcal{B}$ از مجموعه‌های برل کوچکترین σ-جبر حاوی $\mathcal{A}$ است.

الف ـ نشان دهید که اگر $E \neq \emptyset$، آنگاه $\mu^*E = \infty$

ب ـ نشان دهید که اگر E حاوی هیچ فاصله‌ای نباشد آنگاه $\mu_*E = 0$، و اگر E حاوی یک فاصله باشد آنگاه $\mu_*E = \infty$ است.

پ ـ تحدید μ_* به $\mathcal{B}$ یک اندازه نیست، از این‌رو کوچکترین گسترش μ به $\mathcal{B}$، وجود ندارد.

ت ـ اندازهٔ شمارنده روی $\mathcal{B}$ یک گسترش μ به $\mathcal{B}$ است.

ث ـ نشان دهید که اگر در لم ۲۵ عبارت "مجموعه‌های متعلق به $\mathcal{A}$" را با عبارت "مجموعه‌های اندازه‌پذیر" جانشین سازیم، این لم دیگر درست نخواهد بود.

۳۳ ـ اگر μ^* یک اندازهٔ بیرونی منظم نباشد (یعنی، اگر μ^* از اندازه‌ای روی یک جبر نتیجه نشده باشد)، در این صورت از اندازهٔ درونی، با گذاردن $\mu_*E = \mu^*X - \mu^*(\tilde{E})$ یک نظریهٔ منطقی به‌دست نمی‌آوریم. گیریم $X = \{a, b, c\}$، قرار می‌دهیم $\mu^*X = 2$، $\mu^*\emptyset = 0$، و اگر E به‌جز X و $\emptyset$ باشد آنگاه $\mu^*E = 1$

الف ـ μ_* را حساب کنید.

ب ـ زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر X کدامند؟

پ ـ نشان دهید که یک مجموعهٔ اندازه‌ناپذیر E با $\mu_*E = \mu^*E$ وجود دارد.

ت ــ نشان دهید که نابرابریهای اول و سوم قضیهٔ ۲۹ دراینجا برقرار نیستند .

۳۴ــ گیریم $X = \mathbf{R}^2$ و $\mathfrak{A}$ جبر متشکل از همهٔ اجتماعهای مجزای فاصله‌های قایم به‌شکل $I = \{\langle x, y\rangle : a < y \leq b\}$ است . گیریم μA مجموعه‌طولهای فاصله‌های تشکیل دهندهٔ A است . دراین‌صورت μ روی $\mathfrak{A}$ یک‌اندازه‌است . گیریم $E = \{\langle x, y\rangle : y = 0\}$

الف ــ نشان دهید $\mu^*E = \infty, \mu_*E = 0$

ب ــ نشان دهید که هر زیرمجموعهٔ E یک $\mathfrak{A}_\delta$ است .

پ ــ به‌فرض این‌که‌هیچ‌اندازهٔ‌نااتمی‌باپایان‌روی $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ تعریف نشده است ، نشان‌دهیدکه‌هرگسترش μ به‌یک‌اندازه‌روی‌یک σ-جبر ، بایدبه‌E مقدار 0 یا ∞ رانسبت‌دهد .

*۶ــ گسترش بامجموعه‌های صفر اندازه

نتیجه‌های بند ۲ ما را مجاز می‌سازند که یک اندازهٔ μ روی یک‌جبر $\mathfrak{A}$ را به‌یک σ-جبر حاوی $\mathfrak{A}$ گسترش دهیم و نتیجه‌های بخش ۵ گسترش را ازیک‌جبر $\mathfrak{A}$ به σ-جبر حاوی $\mathfrak{A}$ و یک مجموعهٔ دیگر فراهم می‌آورند . گاهی بهتر است بتوانیم گسترش را به σ-جبری حاوی $\mathfrak{A}$ ویک دستهٔ $\mathfrak{M}$ از زیرمجموعه‌های X انجام دهیم به‌گونه‌ای که هریک از مجموعه‌های متعلق‌به $\mathfrak{M}$ دارای اندازهٔ صفر باشد . یک شرط‌لازم برای این‌که این‌کار شدنی‌باشداین‌است‌که‌هروقت‌یک‌مجموعهٔ $A \in \mathfrak{A}$ داشته‌باشیم به‌گونه‌ای‌که $A \subset M \in \mathfrak{M}$ ، آنگاه $\mu A = 0$ باشد . درحالت کلی این شرط‌کافی نیست ، زیرا یک اجتماع شمارش‌پذیر از مجموعه‌های $\mathfrak{M}$ ممکن‌است‌حاوی‌یک‌مجموعهٔ‌بااندازهٔ‌مثبت باشد ، ولی اگر فرض‌کنیم که $\mathfrak{M}$ نسبت‌به‌اجتماع شمارش‌پذیر بسته است ، دراین‌صورت این‌شرط‌کافی نیز می‌باشد .

۳۰ــ گــــزاره :

گیریم μ اندازه‌ای است روی σ-جبر $\mathfrak{A}$ از زیرمجموعه‌های X ، و $\mathfrak{M}$ دسته‌ای از زیرمجموعه‌های X است‌که نسبت‌به‌اجتماع شمارش‌پذیر بسته است و برای‌هر $A \in \mathfrak{A}$ با $A \subset M \in \mathfrak{M}$ داریم $\mu A = 0$. دراین‌صورت‌یک‌گسترش $\bar{\mu}$ از μ به‌کوچکترین σ-جبر $\mathfrak{B}$ حاوی $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{M}$ وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر $M \in \mathfrak{M}$ داریم $\bar{\mu}M = 0$

برهـــــان :

چون دستهٔ همهٔ مجموعه‌هایی که زیرمجموعهٔ یک مجموعهٔ متعلق به $\mathfrak{M}$ هستند درفرضهایی همانند $\mathfrak{M}$ صدق می‌کنند ، می‌توان فرض‌کرد که‌هرزیرمجموعهٔ یک‌مجموعهٔ متعلق به $\mathfrak{M}$ خودبه $\mathfrak{M}$ تعلق‌دارد . بااین‌فرض‌دستهٔ $\mathfrak{B} = \{B: B = A \triangle M, A \in \mathfrak{A}, M \in \mathfrak{M}\}$ یک σ-جبر حاوی $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{M}$ است ، و چون هر σ-جبر حاوی $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{M}$ حاوی $\mathfrak{B}$ است ، پس $\mathfrak{B}$ کوچکترین σ-جبر حاوی $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{M}$ است .

اگر $B = A_1 \triangle M_1 = A_2 \triangle M_2$ آنگـــاه $A_1 \triangle A_2 = M_1 \triangle M_2$ پـــس $\mu(A_1 \triangle A_2) = 0$ است . بنابراین $\mu A_1 = \mu A_2$ ، واگر $\bar{\mu} B$ را با μA_1 تعریف‌کنیم ، دراین‌صورت $\bar{\mu}$ ، روی $\mathfrak{B}$ به‌خوبی تعریف می‌شود و یک گسترش μ است . اکنون تنها باید نشان دهیم کـه $\bar{\mu}$ جمعی شمارش‌پذیر است .

گیریم $B = \bigcup B_i$ ، $B_i \cap B_j = \varnothing$ است . اگر $B_i = A_i \triangle M_i$ ، آنگـــاه $A_i \triangle A_j \in \mathfrak{M}$. باقراردادن $A'_n = A_n \cap \tilde{A}_1 \cap \cdots \cap \tilde{A}_{n-1}$ داریم $A'_i \cap A'_j = \varnothing$ و $A_n \triangle A'_n \in \mathfrak{M}$. بنابراین $B_i = A'_i \triangle M'_i$ و $B = A \triangle M$ که‌در آن $A = \bigcup A'_i$ و $M \subset \bigcup M'_i$. بنابراین $\bar{\mu} B = \mu A = \sum \mu A'_i = \sum \bar{\mu} B_i$

می‌بینیم که شرط $\mu A = 0$ برای هر $A \in \mathfrak{A}$ با $A \subset M$ به‌طورساده بیان‌می‌کندکه $\mu_* M = 0$. بنابراین ، گزاره می‌گوید که می‌توان دامنهٔ μ را گسترش داد که حاوی هر دستهٔ $\mathfrak{M}$ ازمجموعه‌های بااندازهٔ درونی صفر باشد به‌شرط این‌که $\mathfrak{M}$ نسبت‌به اجتماع شمارش‌پذیر بسته باشد . باید توجه‌داشت‌که روی σ-جبر تولید شده به‌وسیلهٔ $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{M}$ ، داریم $\mu_* = \bar{\mu}$. پس این گزاره یک تعمیم از عمل تکامل می‌دهد که دامنهٔ یک‌اندازه‌را باافزودن مجموعه‌هایی بااندازهٔ بیرونی صفر گسترش می‌دهد .

مسئلـــــه

۳۵ ــ گیریم $\mathfrak{A}$ یک σ-جبر روی X و $\mathfrak{M}$ یک‌دسته‌از زیرمجموعه‌های X است‌که نسبت‌به‌اجتماع شمارش‌پذیر بسته‌است و هرزیرمجموعهٔ یک‌مجموعهٔ $\mathfrak{M}$ به $\mathfrak{M}$ تعلق دارد . نشان دهید که دستهٔ

$$\mathfrak{B} = \{B: B = A \triangle M, A \in \mathfrak{A} \text{ و } M \in \mathfrak{M}\}$$

یک σ-جبـر است .

۳۶ ــ نشان‌دهیدکه اگر در گزارهٔ ۳۰ ، $\mathfrak{A}$ تنها یک جبر مجموعه‌ها باشد ، لازم نیست این گزاره دیگر درست باشد .

۷*ـ اندازهٔ بیرونی کاراتئودوری

گیریم X مجموعه‌ای از نقطه‌ها و Γ مجموعه‌ای از تابعهای حقیقی مقدار روی X، است. گاهی دانستن شرطهایی مورد توجه است که تحت آنها یک اندازهٔ بیرونی μ^* دارای این خاصیت می‌شود که هر تابع متعلق به Γ اندازه‌پذیر باشد. منظور این بند اثبات کفایت محکی برای این است.

دو مجموعه *به‌وسیلهٔ تابع φ مجزا* می‌شوند اگر دو عدد a و b با $a > b$ وجود داشته باشند به‌گونه‌ای که روی یکی از مجموعه‌ها φ بزرگتر از a و روی دیگری φ کوچکتر از b باشد. یک اندازهٔ بیرونی μ^*، *یک اندازهٔ بیرونی کاراتئودوری* (نسبت به Γ) گفته می‌شود هرگاه در اصل زیر صدق کند:

(iv) ـ *اگر A و B دو مجموعه باشند که به‌وسیلهٔ یک تابع متعلق به Γ مجزا می‌شوند*، آنگاه $\mu^*(A \cup B) = \mu^*A + \mu^*B$

۳۱ـ گزاره:

اگر μ^* یک اندازهٔ بیرونی کاراتئودوری باشد، آنگاه هر تابع متعلق به Γ، μ^*-اندازه‌پذیر است.

برهان:

گیریم عدد حقیقی a و تابع $\varphi \varepsilon \Gamma$ داده شده‌اند، باید نشان دهیم که مجموعهٔ

$$E = \{x: \varphi(x) > a\}$$

μ^*-اندازه‌پذیر است یا به‌طور هم‌ارز برای هر مجموعهٔ A داریم:

$$\mu^*A \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \tilde{E})$$

چون این نابرابری برای $\mu^*A = \infty$ بدیهی است، فرض می‌کنیم $\mu^*A < \infty$
با قراردادهای $B = E \cap A$، $C = \tilde{E} \cap A$، و

$$B_n = \left\{x: (x \varepsilon B) \,\&\, \left(\varphi(x) > a + \frac{1}{n}\right)\right\}$$

آغاز می‌کنیم.

بـه‌فـرض $R_n = B_n \sim B_{n-1}$ ، داریم

$$B = B_n \cup \left[\bigcup_{k=n+1}^{\infty} R_k\right]$$

اینک روی B_{n-2} داریم $\varphi > a + 1/(n-2)$ ،درصورتی‌که‌روی R_n ، داریم $\varphi \leq a + 1/(n-1)$. بنابراین φ دومجموعهٔ R_n و B_{n-2} رامجزامی‌سازد ، ازاین‌رو دومجموعهٔ R_{2k} و $\bigcup_{j=1}^{k-1} R_{2j}$ را مجزا می‌سازد ، زیرا مجموعهٔ اخیر مشمول B_{2k-2} است . درنتیجه به‌استقراء داریم :

$$\mu^*\left[\bigcup_{j=1}^{k} R_{2j}\right] = \mu^* R_{2k} + \mu^*\left[\bigcup_{j=1}^{k-1} R_{2j}\right]$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \mu^* R_{2j}.$$

چـــــــون

$$\bigcup_{j=1}^{k} R_{2j} \subset B \subset A,$$

پـس داریــــم

$$\sum_{j=1}^{k} \mu^* R_{2j} \leq \mu^* A,$$

پس سری $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^* R_{2j}$ همگراست . به‌همین روش سری

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu^* R_{2j+1}$$

نیز همگراست، بنابراین سری

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu^* R_k$$

نیز همگراست . ازاینجا نتیجه‌می‌شودکه‌برای‌هر $\epsilon > 0$ می‌توان عدد n را چنان بزرگ اختیار کرد که

$$\sum_{k=n}^{\infty} \mu^* R_k < \epsilon.$$

دراین‌صورت بنابرخاصیت زیرجمعی بودن μ^* داریم :

$$\mu^* B \leq \mu^* B_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu^* R_k$$
$$< \mu^* B_n + \epsilon$$

یـــا

$$\mu^* B_n > \mu^* B - \epsilon.$$

اکنون داریـــم :

$$\mu^* A \geq \mu^*(B_n \cup C)$$
$$= \mu^* B_n + \mu^* C$$

زیرا φ دو مجموعهٔ B_n و C را مجزا می‌کند . درنتیجه داریم

$$\mu^* A \geq \mu^* B + \mu^* C - \epsilon$$

چون ϵ یک عدد مثبت دلخواه است ، پس

$$\mu^* A \geq \mu^* B + \mu^* C. \blacksquare$$

۳۲ ــ گـــــــــزاره :

گیریم (X, ρ) یک‌فضای متریک و μ^* یک اندازهٔ بیرونی روی X است بااین خاصیت‌که‌وقتی $\rho(A, B) > 0$ آنگاه $\mu^*(A \cup B) = \mu^* A + \mu^* B$. دراین‌صورت هر مجموعهٔ بسته(وازاین‌رو هرمجموعهٔ برل) نسبت‌به μ^* اندازه‌پذیر است .

مسئلـــــــه

۳۷ ــ گزارهٔ ۳۲ را ثابت کنید .[گیریم Γ مجموعـــهٔ تابعهـــای φ بـــه‌شکـــل $\varphi(x) = \rho(x, E)$ است . نشان‌دهیدکه μ^* در (iv) نسبت‌به Γ صدق‌می‌کند وتوجه‌داشته‌باشیدکه‌برای‌یک‌مجموعهٔ‌بستهٔ F داریم $F = \{x: \rho(x, F) \leq 0\}$.]

فصل سیزدهم

انتگرال دانیل

۱ ــ مقدمه

گاهی بهتر است انتگرال‌گیری را مستقیماً "بدون استفاده از مفهوم اندازه" معرفی کنیم. این کار هنگامی رخ می‌دهد که یک انتگرال مقدماتی I داشته باشیم که روی یک ردهٔ L از "تابعهای مقدماتی" تعریف شده است و بخواهیم ردهٔ L را توسعه دهیم و انتگرال I را به‌گونه‌ای گسترش دهیم که همهٔ خاصیت‌های انتگرال مجرد لبگ به‌انضمام قضیه‌های همگرایی را داشته باشد. برای مثال اگر ردهٔ L را همهٔ تابعهای حقیقی پیوسته که روی $(-\infty, \infty)$ تعریف شده‌اند و هریک بیرون یک فاصلهٔ باپایان صفرند و I را انتگرال ریمن، بگیریم، ممکن است انتظار داشته باشیم که با یک‌نوع عمل‌گسترش، بتوانیم ردهٔ همهٔ تابعهای انتگرال‌پذیر لبگ و انتگرال لبگ را بیابیم. چنین عملی در این‌حالت توسط دانیل[1] انجام شده و به‌وسیلهٔ استون تعمیم یافته‌است. استون ساختمان انتگرال گسترش‌یافته را نیز آشکار ساخته است. در این‌فصل این عمل گسترش را توصیف می‌کنیم و رابطهٔ آن‌را با نظریهٔ اندازه نشان می‌دهیم.

گیریم L یک‌خانواده از تابعهای حقیقی است که روی یک مجموعهٔ X تعریف شده‌اند و فرض‌می‌کنیم L یک‌شبکهٔ برداری است، یعنی هرگاه تابعهای f و g به L تعلق‌دارند، آنگاه تابعهای $\alpha f + \beta g$ ، $f \vee g$ و $f \wedge g$ نیز به L تعلق‌دارند. با توجه به برابریهای $f \wedge g = f + g - (f \vee g)$ و $f \vee g = (f - g) \vee 0 + g$ دیده می‌شود که فضای برداری L از توابع، هنگامی یک شبکهٔ برداری است، که برای هر h متعلق به L تابع $h \vee 0$ به L متعلق‌باشد. بنابراین یک‌فضای برداری از تابعها، هنگامی یک شبکهٔ برداری است‌که نسبت به عمل $f \to f^+ = f \vee 0$ بسته‌باشد. چون $|f| = f^+ + (-f)^+$ پس هر شبکهٔ برداری مقدار مطلق هر تابع متعلق به‌خود را دربردارد. به‌وارون، اگر L، یک‌فضای برداری باشد به‌گونه‌ای‌که برای هر f متعلق به L تابع $|f|$ نیز به L متعلق باشد آنگاه L یک شبکهٔ برداری است زیرا $f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$.

---

1 — Daniell

یک فونکسیونل خطی I روی L را مثبت[1] می‌گویند اگر برای هر تابع نامنفی φ ، متعلق به L داشته باشیم $I(\varphi) \geq 0$. اگر I مثبت و $\psi \leq \varphi$ آنگاه $I(\varphi) \leq I(\psi)$. هرفونکسیونل خطی مثبت I روی L را یک فونکسیونل دانیل یا یک انتگرال دانیل می‌گویند هرگاه دارای شرط زیر باشد.

D ــ اگر $\langle \varphi_n \rangle$ یک دنباله از تابعهای متعلق به L باشد که در هرنقطه به‌طور کاهشی به‌صفر بگراید، آنگاه $\lim I(\varphi_n) = 0$.[2]

این شرط به‌طور آشکار با هریک از شرطهای زیر هم‌ارز است:

D′ ــ اگر $\langle \varphi_n \rangle$ یک دنبالهٔ افزایشی از تابعهای متعلق به L و φ یک تابع دیگر متعلق به L باشد به‌گونه‌ای که $\varphi \leq \lim \varphi_n$ ، آنگاه $I(\varphi) \leq \lim I(\varphi_n)$

D″ ــ اگر $\langle u_n \rangle$ یک دنباله از تابعهای نامنفی متعلق به L باشد و اگر φ تابعی متعلق به L باشد به‌گونه‌ای که $\varphi \leq \sum u_n$ ، آنگاه $I(\varphi) \leq \sum I(u_n)$

یک مثال انتگرال دانیل به‌این‌ترتیب به‌دست می‌آید که L را مجموعهٔ تابعهای پیوسته‌روی $(-\infty, \infty)$ بگیریم که هریک بیرون یک‌فاصلهٔ باپایان صفر است و I را انتگرال ریمن‌بگیریم. مثال دیگر، ازیک‌اندازهٔ μ روی‌یک‌جبر $\mathfrak{a}$ اززیرمجموعه‌های X به‌این‌ترتیب به‌دست‌می‌آیدکه L را ردهٔ تابعهای ساده و I را انتگرال‌گیری طبیعی نسبت‌به μ بگیریم. در مثال سوم، L را ردهٔ همهٔ تابعهای انتگرال‌پذیر نسبت‌به یک اندازهٔ μ می‌گیریم. مثال اخیر به‌طور کامل، درتعریف داده شده صدق نمی‌کند زیرا تابعهای انتگرال‌پذیر ممکن‌است تابعهای‌حقیقی گسترش‌یافته‌باشند. اکنون می‌خواهیم تعریف بالا را به‌گونه‌ای گسترش دهیم که‌شامل این‌حالت‌نیز باشد ولی باید دقت‌کرد که تابع $f + g$ در نقطه‌هایی که به‌صورت $\infty - \infty$ یا $-\infty + \infty$ است تعریف‌نشده‌است. بنابراین، L را یک‌شبکهٔ برداری از تابعهای حقیقی گسترش‌یافته روی X می‌نامیم هرگاه وقتی f، g به L تعلق دارند تابعهای $f \vee g$، $f \wedge g$ و αf نیز به L تعلق داشته باشند، همچنین تابع h به‌گونه‌ای‌که $h(x) = f(x) + g(x)$ است هنگامی‌که سمت‌راست‌آن تعریف شده است به L متعلق باشد بنابراین می‌خواهیم که همهٔ گزینش‌های ممکن برای $f + g$ متعلق‌به L باشد و هنگامی که h یکی از این گزینش‌های ممکن است می‌نویسیم $h = f + g$. یک فونکسیونل خطی روی L یک نگاشت I از L در $\mathbf{R}$ است به‌گونه‌ای که

---

۱ ــ به‌گفتهٔ دقیقتر باید I را "نامنفی" بنامیم، ولی استفاده‌از کلمهٔ "مثبت" دراینجا متعارف به‌نظر می‌رسد.

۲ ــ البته دراینجا منظور از lim حد نقطه‌ای است.

$I(\alpha f) = \alpha I(f)$ بوده و وقتی $h = f + g$ است $I(h) = I(f) + I(g)$ باشد.
بیان اخیر ایجاب می‌کند که اگر دو تابع h_1 و h_2 به‌گونه‌ای باشند که $h_1 = f + g$ و $h_2 = f + g$ آنگاه $I(h_1) = I(h_2)$. یک فونکسیونل خطی مثبت I روی L که در شرط D صدق می‌کند **انتگـــرال دانیـــل** نامیده می‌شود.

درحالت کلی حدهای تابعهای L به L تعلق ندارند، و شیوهٔ دانیل و استون که می‌خواهیم در این فصل شرح دهیم عبارت است از گسترش I به یک ردهٔ L_1 که L را دربردارد و تحت عملهای حدگیری مناسبی بسته است. از بسیاری جهات این روش گسترش موازی روش گسترش کاراتئودوری برای اندازه‌هاست، و در بخش ۳ نشان خواهیم داد که تحت قیدهای ملایمی این انتگرال گسترش یافته درواقع انتگرال‌گیری نسبت به یک اندازهٔ مناسب است.

مسئلـــه‌ها

۱ ــ نشان دهید که شرطهای D، D′ و D″ هم‌ارزند.

۲ــ گیریم μ اندازه‌ای روی جبر $\mathfrak{a}$، L ردهٔ تابعهای ساده روی $\mathfrak{a}$ و I انتگرال‌گیری نسبت به μ است. نشان دهید که L یک شبکهٔ برداری و I انتگرال دانیل است.

۳ ــ گیریم L خانوادهٔ تابعهای حقیقی پیوسته روی $(-\infty, \infty)$ است که هریک بیرون یک فاصلهٔ باپایان صفرند، و گیریم I روی L انتگرال‌گیری ریمن است. نشان دهید که I، یک انتگرال دانیل است. [**راهنمـایـــی**: قضیهٔ دینی[1] مفید است.]

۴ــ گیریم L یک شبکهٔ برداری از تابعهای حقیقی گسترش یافته روی X و I همانگونه که در این بند تعریف شده یک فونکسیونل خطی مثبت روی L است. گیـــریـــم $f \varepsilon L$ و $E = \{x: f(x) = \infty\}$ است. نشان دهید که هر تابع حقیقی گسترش یافتهٔ h که بیرون E صفر است، به L تعلق دارد و $I(h) = 0$ اســت.

۲ ــ قضیـــهٔ گستـــرش

ابتدا ردهٔ L_u را متشکل از آن توابع حقیقی گسترش یافتهٔ روی X می‌گیریم که هر یک حد یک دنبالهٔ یکنوای افزایشی از تابعهای متعلق به L است. آشکار است که اگر دو تابع f و g متعلق به L_u باشند آنگاه تابع $\alpha f + \beta g$ نیز که در آن α و β عددهای ثابت نامنفی هستند، به L_u تعلق دارد. اگر $\langle \varphi_n \rangle$ یک دنبالهٔ افزایشی از تابعهای L،

---
۱ ــ Dini

باشد آنگاه $\langle I(\varphi_n)\rangle$ باید یک دنبالهٔ افزایشی از عددهای حقیقی باشد، پس دارای حد است که ممکن است ∞ نیز باشد. اکنون می‌خواهیم کوشش کنیم که $\lim I(\varphi_n)$ را به‌عنوان مقدار I برای تابع f که حد نقطه‌ای دنبالهٔ $\langle\varphi_n\rangle$ است تعریف نماییم. برای انجام این کار باید نشان دهیم که این مقدار تنها بستگی به تابع f دارد و به‌گزینش دنبالهٔ افزایشی $\langle\varphi_n\rangle$ که حد آن f است بستگی ندارد. این مطلب در لم زیر نشان داده شده است.

۱ــ لـــم:

اگر $\langle\varphi_n\rangle$ و $\langle\psi_m\rangle$ دو دنبالهٔ افزایشی از تابعهای متعلق به L باشند، به‌گونه‌ای که $\lim \varphi_n \leq \lim \psi_m$ ، آنگاه $\lim I(\varphi_n) \leq \lim I(\psi_m)$

بـرهـــان:

برای هرعدد ثابت n داریم $\varphi_n \leq \lim \varphi_n \leq \lim \psi_m$ ، پس بنابر (D') ، $I(\varphi_n) \leq \lim I(\psi_m)$. ازاین‌رو $\lim I(\varphi_n) \leq \lim I(\psi_m)$

بنابراین می‌توانیم فونکسیونل I را گسترش دهیم به‌گونه‌ای که روی L_u یک فونکسیونل حقیقی گسترش‌یافته گردد با خاصیت $I(f) \leq I(g)$ برای $f \leq g$ و اگر α و β دو ثابت مثبت و f ، g دو تابع متعلق به L_u باشند آنگاه $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$. آشکار است که L_u یک شبکه است، زیرا اگر $\varphi_n \uparrow f$ و $\psi_n \uparrow g$ آنگاه $\varphi_n \wedge \psi_n \uparrow f \wedge g$ $\varphi_n \vee \psi_n \uparrow f \vee g$

۲ــ لـــم:

یک تابع نامنفی f به L_u متعلق است اگر و تنها اگر یک دنبالهٔ $\langle\psi_\nu\rangle$ از تابعهای نامنفی متعلق به L وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $f = \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_\nu$ باشد. در این حالت داریم $I(f) = \sum_{\nu=1}^{\infty} I(\psi_\nu)$.

برهـــــان :

قسمت " اگر " بدیهی است . از سوی دیگر ، گیریم f یک تابع نامنفی و $\varphi_n \uparrow f$ ، با $\varphi_n \varepsilon L$ است . با جانشین ساختن φ_n با $\varphi_n \vee 0$ می توانیم فرض کنیم که هر φ_n ، نامنفی است . قرار می دهیم $\psi_1 = \varphi_1$ و $\psi_n = \varphi_n - \varphi_{n-1}$ بـــــرای $n > 1$.

درایـــن صــــــورت $f = \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_\nu$ ، و

$$\begin{aligned} I(f) &= \lim I(\varphi_n) \\ &= \lim I\left(\sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu\right) \\ &= \lim \sum_{\nu=1}^{n} I(\psi_\nu) \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} I(\psi_\nu). \ \blacksquare \end{aligned}$$

۳ـ لـــــــم :

گیریم $\langle f_n \rangle$ یک دنباله از تابعهای نامنفی در L_u است . دراین صورت تابع $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ در L_u است و داریم $I(f) = \sum_{n=1}^{\infty} I(f_n)$.

برهـــــان :

برای هر n یک دنبالهٔ $\langle \psi_{n,\nu} \rangle$ از تابعهای نامنفی متعلق به L وجود دارد به گونه ای که $f_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_{n,\nu}$. از این رو $f = \sum_{\nu,n} \psi_{n,\nu}$. چون مجموعهٔ جفتهای عددهای درست مثبت شمارش پذیر است ، پس f مجموع یک دنباله از تابعهای نامنفی متعلق به L است ، پس باید متعلق به L_u باشد . همچنین داریم :

$$\begin{aligned} I(f) &= \sum_{\nu,n} I(\psi_{n,\nu}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} I(f_n). \ \blacksquare \end{aligned}$$

برای یک تابع دلخواه f روی X انتگرال بالایی را با $\bar{I}(f)$ نشان می دهیم و به شکل زیر تعریف می کنیم :

$$\bar{I}(f) = \inf_{\substack{g \geq f \\ g \varepsilon L_u}} I(g),$$

که‌درآن،این قراردادرا می‌پذیریم که انفیمم یک‌مجموعهٔ تهی $+\infty$ است . انتگرال پایینی یعنی $\underline{I}$ را با $\underline{I}(f) = -\bar{I}(-f)$ تعریف می‌کنیم . خاصیت‌های مقدماتی این انتگرالهای بالایی و پایینی ، با لم‌های زیر داده شده‌اند . خاصیت‌های لم ۴ مستقیما " از تعریف $\bar{I}$ نتیجه می‌شوند .

۴ـ لـم :

اگر $h = f + g$ باشد، آنگاه $\bar{I}(h) \le \bar{I}(f) + \bar{I}(g)$ ، به‌شرط این‌که سمت راست تعریف شده باشد . اگر $c \ge 0$ ، آنگاه $\bar{I}(cf) = c\bar{I}(f)$.
اگر $f \le g$ ، آنگاه $\bar{I}(f) \le \bar{I}(g)$ و $\underline{I}(f) \le \underline{I}(g)$.

۵ـ لـم :

داریم $\underline{I}(f) \le \bar{I}(f)$. اگر $f \in L_u$ ، آنگاه $\underline{I}(f) = \bar{I}(f) = I(f)$.

برهان :

داریم $0 = I(0) = I(f-f) \le \bar{I}(f) + \bar{I}(-f)$
ازاین‌رو $\underline{I}(f) = -\bar{I}(-f) \le \bar{I}(f)$
برای اثبات گفتار دوم ، می‌بینیم که اگر $f \in L_u$ باشد آنگاه بنابه تعریف $\bar{I}$ داریم $\bar{I}(f) \le I(f)$. اگر $g \in L_u$ و $f \le g$، آنگاه $I(f) \le I(g)$ پس $I(f) \le \bar{I}(f)$ وازآنجا $\bar{I}(f) = I(f)$. اگر $\varphi \in L$، آنگاه $-\varphi \in L \subset L_u$ پس $\bar{I}(-\varphi) = I(-\varphi) = -I(\varphi)$ ، ازاین‌رو $\underline{I}(\varphi) = I(\varphi)$. ولی هر $f \in L_u$ حد یک دنبالهٔ افزایشی $\langle\varphi_\nu\rangle$ از تابعهای متعلق به L است . چون $f \ge \varphi_\nu$ است ، پس $\underline{I}(f) \ge \underline{I}(\varphi_\nu) = I(\varphi_\nu)$. از این رو $\underline{I}(f) \ge \lim I(\varphi_\nu) = I(f)$

چون $\underline{I}(f) \le \bar{I}(f) = I(f)$ ، پس داریم $\underline{I}(f) = I(f)$.■

۶ـ لــــــم :

گیریم $\langle f_\nu \rangle$ یک دنباله از تابعهای نامنفی و $f = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ اســـــت .

درایـــن‌صـــــورت $\bar{I}(f) \le \sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{I}(f_\nu)$ ،

بـــرهــــــان :

اگربرای‌یک‌مقدار ν ، $\bar{I}(f_\nu) = \infty$ باشدنابرابری‌برقراراست . درغیراین‌صورت گیریم $\epsilon > 0$ داده‌شده‌است ، یک‌تابع $g_\nu \,\varepsilon\, L_u$ وجودداردبه‌گونه‌ای‌که $f_\nu \le g_\nu$ و $I(g_\nu) \le \bar{I}(f_\nu) + \epsilon \cdot 2^{-\nu}$. چون هر تابع g_ν نامنفی است پس بنابرلم ۳ تابع $g = \sum g_\nu$ به L_u متعلق‌است‌وداریم $I(g) = \sum I(g_\nu) \le \sum \bar{I}(f_\nu) + \epsilon$.
چون $g \ge f$ ، پس داریم :

$$\bar{I}(f) \le \sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{I}(f_\nu) + \epsilon$$

و چون ϵ یک عدد مثبت دلخواه است پس اثبات لم پایان می‌یابد . ∎

تابع f را روی X نسبت‌به I انتگرال‌پذیر (یا I-انتگرال‌پذیر) می‌نامیم هرگاه $\bar{I}(f) = \underline{I}(f)$ بوده و این مقدار باپایان باشد . ردهٔ تابعهای انتگرال‌پذیر نسبت به I را با L_1 نشان می‌دهیم . وقتی f به L_1 متعلق است به‌جای $\hat{I}(f)$ می‌نویسیـــم $I(f)$. بنابراین I ی‌آغازی به‌همهٔ L_1 گسترش می‌یابد . درگزارهٔ زیر خواص L_1 و خواص I ی گسترش یافته بیان شده است .

۷ـ گــــــزاره :

مجموعهٔ L_1 یک شبکهٔ برداری از تابعهاست که L را دربردارد ، و I روی L_1 ، یک فونکسیونل خطی مثبت است که فونکسیونل I روی L راگسترش می‌دهد .

بـــرهــــــان :

اگر f متعلق‌به L_1 باشد cf نیز به L_1 متعلـــق‌اســـت ، زیـــرا بـــرای $c \ge 0$

داریم $\bar{I}(cf) = c\bar{I}(f) = c\underline{I}(f) = \underline{I}(cf)$ و برای $c \leq 0$ داریم $\bar{I}(cf) = c\underline{I}(f) = c\bar{I}(f) = \underline{I}(cf)$. اگر f و g متعلق به L_1 باشند آنگاه داریم:

$$\bar{I}(f+g) \leq I(f) + I(g)$$

و

$$-\underline{I}(f+g) = \bar{I}(-f-g) \leq -I(f) - I(g),$$

یعنی

$$\underline{I}(f+g) \geq I(f) + I(g).$$

بنابراین

$$\underline{I}(f+g) = \bar{I}(f+g) = I(f) + I(g)$$

پس $f+g$ به L_1 متعلق است. درنتیجه L_1 یک فضای خطی است، و I روی L_1 یک فونکسیونل خطی است. بنابر لم ۵ داریم $L \subset L_1$ و تعریف I روی L_1 یک فونکسیونل خطی مثبت می‌دهد که روی L_1 با I ی آغازی سازگار است.

برای اثبات شبکه بودن L_1، کافی است نشان دهیم که اگر $f \varepsilon L_1$ باشد آنگاه $f^+ \varepsilon L_1$ است. گیریم $f \varepsilon L_1$، دراین‌صورت برای‌هر $\epsilon > 0$ تابعهای g و h متعلق‌به L_u وجوددارند به‌گونه‌ای‌که $g \geq f \geq -h$، درحالیکه $I(g) < I(f) + \epsilon < \infty$ و $I(h) \leq -I(f) + \epsilon < \infty$. چون $g = (g \vee 0) + (g \wedge 0)$ و $(g \wedge 0) \varepsilon L_u$ است، پس $I(g \wedge 0) > -\infty$ و $I(g \vee 0) \leq I(g) - I(g \wedge 0) < \infty$ بنابراین تابع $g_1 = g \vee 0$ متعلق‌به L_u است و $I(g_1) < \infty$. گیریم $h_1 = h \wedge 0$. دراین‌صورت $h_1 \varepsilon L_u$ و $-h_1 \leq f^+ \leq g_1$. چون $g \geq -h$ پس $g_1 + h_1 \leq g + h$. درنتیجه $I(g_1) + I(h_1) \leq I(g) + I(h) < 2\epsilon$. چون $-I(h_1) \leq \underline{I}(f^+) \leq \bar{I}(f^+) \leq I(g_1)$، پس داریم $\bar{I}(f^+) - \underline{I}(f^+) < 2\epsilon$ و چون ϵ اختیاری است پس $\bar{I}(f^+) = \underline{I}(f^+)$، وچون $0 \leq \bar{I}(f^+) \leq I(g_1) < \infty$ پس $f^+ \varepsilon L_1$. بنابراین L_1 یک شبکه است. ∎

گزارهٔ زیر همتای قضیهٔ همگرایی یکنوا برای L_1 است. این گزاره همچنین نشان می‌دهد که L_1 و I شرط D' و ازاین‌رو شرط D را برمی‌آورند.

۸ـ گزاره:

گیریم $\langle f_n \rangle$ یک‌دنبالهٔ افزایشی‌ازتابعهای‌متعلق‌به L_1، و $f = \lim f_n$ است. دراین‌صورت $f \varepsilon L_1$، اگر و تنها اگر $\lim I(f_n) < \infty$. دراین‌حالت $I(f) = \lim I(f_n)$.

برهـــــان :

چون $f \geq f_n$ ، پس $\bar{I}(f) \geq I(f_n)$.بنابراین‌اگر $\lim I(f_n) = \infty$ باشد ، آنگاه $\bar{I}(f) = \infty$ و $f \notin L_1$.

فرض کنیم $\lim I(f_n) < \infty$. قرار می‌دهیم $g = f - f_1$. دراین‌صورت $g \geq 0$ و $g = \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1} - f_n)$ است . ازاین‌رو بنابرلم ۶ داریم :

$$\begin{aligned} \bar{I}(g) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} I(f_{n+1} - f_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} I(f_{n+1}) - I(f_n) \\ &= \lim I(f_n) - I(f_1). \end{aligned}$$

بنـــابـــرایــــن

$$\begin{aligned} \bar{I}(f) &= \bar{I}(f_1 + g) \\ &\leq I(f_1) + \bar{I}(g) \leq \lim I(f_n) \end{aligned}$$

چـــون $f_n \leq f$ است ، داریـــم $\underline{I}(f) \geq I(f_n)$ ، پس $\underline{I}(f) \geq \lim I(f_n)$.

بنـــابـــرایــــن $\underline{I}(f) = \bar{I}(f) = \lim I(f_n)$ ∎.

۹ ــ نتیجـــــــه :

فونکسیونل I روی شبکهٔ برداری L_1 یک انتگرال دانیل است .

دو گزارهٔ زیر همتاهای لم‌فاتو و قضیهٔ همگرایی‌لبگ برای انتگرال I هستنـــد .

۱۰ ــ گـــــــزاره :

گیریم $\langle f_\nu \rangle$ یک دنباله از تابعهای نامنفی متعلق‌به L_1 است . دراین‌صورت تابع $\inf f_\nu$ در L_1 است ،واگر $\underline{\lim}\, I(f_\nu) < \infty$ باشد ،آنگاه $\underline{\lim}\, f_\nu$ به L_1 ، تعلق دارد . دراین‌حالت داریم :

$$I(\underline{\lim}\, f_\nu) \leq \underline{\lim}\, I(f_\nu)$$

برهـــــان :

گیریم $g_n = f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n$. دراین‌صورت $\langle g_n \rangle$ یک‌دنبالهٔ کاهشی ازتابعهای‌نامنفی‌متعلق‌به L_1 است‌که‌به $g = \inf f_\nu$ می‌گراید . بنابراین $-g_n \uparrow -g$ و چون $I(-g_n) \leq 0$ ، پس بنابرگزارهٔ ۸ باید $g \,\varepsilon\, L_1$ باشد .

برای اثبات بقیهٔ گزاره ، گیریم $h_n = \inf_{\nu \geq n} f_\nu$. دراین‌صـورت $\langle h_n \rangle$ یک دنبالهٔ افزایشی از تابعهای‌نامنفی متعلق‌به L_1 است‌که به $\underline{\lim}\, f_\nu$ می‌گرایـد .

چون‌برای $n \leq \nu$ داریم $h_n \leq f_\nu$ ، پس $\lim I(h_n) \leq \underline{\lim}\, I(f_\nu) < \infty$

ازاین‌رو $\underline{\lim}\, f_\nu \,\varepsilon\, L_1$ وبنابرگزارهٔ ۸ داریم $I(\underline{\lim}\, f_\nu) \leq \underline{\lim}\, I(f_\nu)$ ∎.

۱۱ ـ گـــــزاره :

گیریم $\langle f_n \rangle$ یک‌دنباله از تابعهای متعلق‌به L_1 است و فرض می‌کنیم که یک تابع g متعلق‌به L_1 وجود دارد به‌گونه‌ای‌که برای‌هرمقـدار n داریـــــم $|f_n| \leq g$. دراین‌صورت اگر $f = \lim f_n$ باشد ، داریم :

$$I(f) = \lim I(f_n).$$

برهـــــان :

تابعهای $f_n + g$ نامنفی‌اند ، وداریم $I(f_n + g) \leq 2I(g)$. ازاین‌رو بنابرگزارهٔ ۱۰ تابع $f + g$ به L_1 تعلق دارد و داریم :

$$I(f+g) \leq \underline{\lim}\, I(f_n + g) = I(g) + \underline{\lim}\, I(f_n).$$

ازایـــــن‌رو

$$I(f) \leq \underline{\lim}\, I(f_n).$$

چون تابعهای $g - f_n$ نیز نامنفی هستند ، پس داریم :

$$\begin{aligned} I(g-f) &\leq \underline{\lim}\, I(g - f_n) \\ &= I(g) - \overline{\lim}\, I(f_n). \end{aligned}$$

ازایـــن‌رو $\overline{\lim}\, I(f_n) \leq I(f)$ ،

پس $\lim I(f_n)$ وجود دارد و برابر $I(f)$ اســـت . ∎

مسئلــــــه‌ها

۵ــ یک تابع f به L_u متعلق است اگر و تنها اگر $f = g + \varphi$ باشد کـه در آن $g \in L_u$ ، $g \geq 0$ و $\varphi \in L$.

۶ــ لم ۴ را ثابت کنید .

۷ــ نشان دهید که حالت مبهم لم ۴ در لم ۵ اشکالی ایجاد نمی‌کند .

۳ــ یکتـایـــــی

دراین‌بنـــد نشان می‌دهیم که گسترش انتگرال دانیل I تعریف شده روی L به L_1 یکتاست . برای‌این‌منظور گزاره‌ای ثابت می‌کنیم که به‌نوبهٔ خود جالب است و ساختار تابعهای L_1 را توصیف می‌کند . این گزاره همتای گزارهٔ ۱۲ . ۷ برای I است .

ردهٔ تابعهایی‌را درنظرمی‌گیریم که‌روی X تعریف‌شده‌اند و هریک حدیک‌دنبالهٔ کاهشی $\langle f_n \rangle$ ازتابعهای‌متعلق‌به L_u با $I(f_n) < \infty$ و $\lim I(f_n) > -\infty$ است این‌رده‌را با L_{ul} می‌نمایانیم . ازبه‌کاربردن‌گزارهٔ ۸ درمورد $\langle -f_n \rangle$ نتیجه می‌شود که $L_{ul} \subset L_1$. اگر f تابع‌دلخواهی‌باشد که روی X تعریف شده‌است به‌گونه‌ای که‌برای آن $\bar{I}(f)$ باپایان‌است ،دراین‌صورت‌برای‌هر n می‌توان $h_n \in L_u$ رایافت‌به‌گونه‌ای‌که

$$f \leq h_n \quad \text{و} \quad I(h_n) \leq \bar{I}(f) + \tfrac{1}{n}$$

با قرار دادن $g_n = h_1 \wedge h_2 \wedge \cdots \wedge h_n$ داریم $f \leq g_n \leq h_n$ پس . $\langle g_n \rangle$ یک دنبالــهٔ کـاهشـــی از تابعهـای متعلـق‌بـه L_u اســت کـه بــــــرای آن $\bar{I}(f) \leq I(g_n) \leq \bar{I}(f) + \frac{1}{n}$. ازاین‌رو تابع $g = \lim g_n$ متعلق‌به L_{ul} است ، درحالیکه $f \leq g$ و $\bar{I}(f) = I(g)$. به‌این‌ترتیب لم زیر ثابت شد :

۱۲ ــ لــــــم :

اگر تابع دلخواه f روی X تعریف شده و $\bar{I}(f)$ باپایان باشد، آنگاه یک تابع $g \varepsilon L_{ul}$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $f \leq g$ و $\bar{I}(f) = I(g)$.

یک‌تابع f روی X رایک‌تابع پوچ‌می‌گویند هرگاه $f \varepsilon L_1$ و $I(|f|) = 0$ باشد. گیریم f تابعی‌پوچ و $|g| \leq f$ است، دراین‌صورت باتوجه به $0 \leq \underline{I}(|g|) \leq \bar{I}(|g|) \leq I(f) = 0$ ، نتیجه‌می‌گیریم‌که $g \varepsilon L_1$ و g یک‌تابع پوچ است.

۱۳ ــ گــــزاره :

برای‌این‌که‌تابع f تعریف شده روی X به L_1 متعلق باشد لازم و کافی است‌که f، برابرتفاضل‌یک‌تابع g متعلق‌به L_{ul} و یک تابع پوچ نامنفی h، باشد. برای این‌که h، یک‌تابع پوچ باشد لازم و کافی است که یک تابع پوچ k متعلق‌به L_{ul} وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $|h| \leq k$

برهــــان :

اگر $f = g - h$ باشددراین‌صورت f تفاضل‌دوتابع متعلق‌به L_1 است، پس خودش بایدبه L_1 متعلق‌باشد. اگر k یک‌تابع پوچ و $|h| \leq k$ باشد، دراین‌صورت h یک‌تابع پوچ‌است.

اگر f متعلق‌به L_1 باشد، دراین‌صورت بنابرلم ۱۲ یک تابع $g \varepsilon L_{ul}$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که $f \leq g$ و $I(f) = I(g)$. ازاین‌رو $h = g - f$ یک‌تابع نامنفی است و بنابر $I(h) = 0$ ، تابع h یک‌تابع پوچ است. اگر h یک تابع پوچ باشد دراین‌صورت بنابرلم ۱۲ یک تابع $k \varepsilon L_{ul}$ وجوددارد با $|h| \leq k$ و $I(k) = I(|h|) = 0$ ∎

۱۴ ــ گــــزاره :

گیریم L یک‌شبکهٔ برداری از تابعهای‌تعریف‌شده روی X و I یک انتگرال‌دانیل روی آن است. همچنین گیریم J روی شبکهٔ برداری $\Lambda \supset L$ یک انتگرال‌دانیل است. اگر برای‌هر $f \varepsilon L$ داشته باشیم $I(f) = J(f)$ ، دراین‌صورت $L_1 \supset \Lambda_1$ است و برای هر $f \varepsilon L_1$ داریم $I(f) = J(f)$.

برهـــــان :

با دوبار استفاده از گزارهٔ ۸ می‌بینیم $L_{ul} \subset \Lambda_1$ و برای $f \in L_{ul}$ داریم $I(f) = J(f)$. ازاین‌رو بنابربخش دوم گزارهٔ ۱۳ هر تابع که نسبت‌به I پوچ است باید نسبت‌به J نیز پوچ باشد . بنابربخش نخست گزارهٔ ۱۳ هرتابع f متعلق‌به L_1 باید به Λ_1 نیز متعلق باشد و $I(f) = J(f)$.

انـــدازه‌پـذیـــری و انــــدازه

تابع نامنفی f روی X را (نسبت‌به I) *انـــدازه‌پـذیـــر* می‌گویند هرگاه برای هر g ی متعلق‌به L_1 تابع $f \wedge g$ به L_1 متعلق باشد .

۱۵ ــ لـــــم :

اگر f و g دوتابع اندازه‌پذیرنامنفی‌باشندآنگاه $f \wedge g$ و $f \vee g$ نیز اندازه‌پذیر نامنفی هستند . اگر $\langle f_n \rangle$ یک دنباله از تابعهای اندازه‌پذیر نامنفی باشد که به‌طور نقطه‌ای به‌تابع f می‌گراید ، آنگاه f اندازه‌پذیر است .

برهـــــان :

اگر f و g دوتابع اندازه‌پذیر نامنفی و h متعلق‌به L_1 باشد ، آنگـاه داریـــم $h \wedge (f \wedge g) = (h \wedge f) \wedge (h \wedge g)$ و $h \wedge (f \vee g) = (h \wedge f) \vee (h \wedge g)$.
ازاین‌رو باتوجه به‌این‌که L_1 یک شبکه است ، اندازه‌پذیری $f \wedge g$ و $f \vee g$ نتیجه می‌شود .
اگر $\langle f_n \rangle$ یک‌دنباله از تابعهای اندازه‌پذیرنامنفی باشد که به f می‌گراید و g تابعی متعلق‌به L_1 باشد ، دراین‌صورت $\langle f_n \wedge g \rangle$ دنباله‌ای‌ازتابعهای L_1 است‌که به $f \wedge g$ ، می‌گراید . چون $|f_n \wedge g| \leq |g|$ ، پس بنابرگزارهٔ ۱۱ تابع $f \wedge g$ به L_1 متعلق‌است . ∎

۱۶ ــ لـــــم :

هرتابع نامنفی f روی X نسبت‌به I اندازه‌پذیر است اگر برای هرتابع φ متعلق به L تابع $f \wedge \varphi$ به L_1 متعلق باشد .

برهـــان :

اگـر $\varphi \varepsilon L$ باشـــد آنـگاه $f \wedge \varphi$ به L_1 متعلـق اسـت و گـزارهٔ ۸ ایجـاب می‌کنـد کـه بـرای $g \varepsilon L_u$ و $I(g) < \infty$ تابـع $f \wedge g$ به L_1 متعلـــق بـاشـد .

از گـــــــزارهٔ ۱۱ نتیجه می‌شود که برای هر $g \varepsilon L_{ul}$ داریم $g \wedge f \varepsilon L_1$. اگر h تابع دلخواهی متعلق‌به L_1 باشد ، بنابرگزارهٔ ۱۳ $h = g - k$ که درآن $g \varepsilon L_{ul}$ و k، یک‌تابع نامنفی‌پوچ‌است .چون $0 \leq g \wedge f - h \wedge f \leq k$، پس تفاضل $h \wedge f$ و تـابـع انتگرال‌پذیر $g \wedge f$ یک تابع پوچ است . بنابراین $h \wedge f$ انتگرال‌پذیر است و این ثابت می‌کند که f اندازه‌پذیر است . ▮

زیرمجموعهٔ A از X رانسبت‌به I *انـدازه‌پـذیـــر* می‌گویند هرگاه‌تابع مشخص آن یعنی χ_A اندازه‌پذیر باشد . A را انتگرال‌پذیر می‌گویند هرگاه تابع مشخص‌آن χ_A انتگرال‌پذیر باشد . باید توجه داشت که هر زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر از یک مجمـوعـــهٔ انتگرال‌پذیر ، خود انتگرال‌پذیر است .

۱۷ ــ لـــــم :

اگر A و B دومجموعهٔ اندازه‌پذیر باشند آنگاه $A \cup B$ ، $A \cap B$ و $A \sim B$ نیز اندازه‌پذیرند . اگر $\langle A_n \rangle$ یک دنباله از مجموعه‌های اندازه‌پذیر باشد ، دراین‌صورت مجموعه‌های $\bigcap A_n$ و $\bigcup A_n$ اندازه‌پذیرند . اگر تابع 1 اندازه‌پذیر باشد ،دراین‌صورت ردهٔ $\mathfrak{A}$ از توابع اندازه‌پذیر یک σ-جبر است .

برهـــان :

اندازه‌پذیری $A \cap B$ و $A \cup B$ به‌ترتیب از برابریهای $\chi_{A \cap B} = \chi_A \wedge \chi_B$ و $\chi_{A \cup B} = \chi_A \vee \chi_B$ نتیجـه‌مـی‌شـود . اگـــر g بـــه L_1 متعلـق‌بـاشـد ، داریـم :
$g \wedge \chi_{A \sim B} = g \wedge \chi_A - g \wedge \chi_{A \cap B} + g \wedge 0$ ، وانـدازه پـذیـری $A \sim B$، ازاندازه پـذیـری A و B نتیجه می‌شود . اگر $A = \bigcup A_n$ باشد ، دراین‌صورت .

$$\chi_A = \lim (\chi_{A_1} \vee \ldots \vee \chi_{A_n})$$

و اندازه‌پذیری A از لم ۱۵ نتیجه‌می‌شود . استدلال‌همانندی‌درمورد $\bigcap A_n$ برقراراست . اگر ۱ یک تابع اندازه‌پذیر باشد ، دراین‌صورت مجموعهٔ X اندازه‌پذیر است ، و مکمـل هرمجموعهٔ اندازه‌پذیر یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر است . ▮

۱۸ـ لـــــم :

اگر I یک تابع اندازه‌پذیر و f یک‌تابع انتگرال‌پذیر نامنفی باشد ، دراین‌صورت برای هر عدد حقیقی α مجموعهٔ

$$E = \{x: f(x) > \alpha\}$$

انــدازه‌پــذیــر اســـت .

بــرهـــــان :

اگر α منفی‌باشد ، $E = X$ واندازه‌پذیراست ،زیرا $\chi_E = 1$ و I اندازه‌پذیراست . ازاین‌رو فرض می‌کنیم $\alpha \geq 0$. اگر $\alpha = 0$ بـاشـــد ، قــرار مــی‌دهیــم $g = f$ و اگر $\alpha > 0$ باشد می‌گیریم $g = (\alpha^{-1}f) - [(\alpha^{-1}f) \wedge 1]$. چون g تفاضل‌دوتابع متعلق‌به L_1 است پس g به L_1 تعلق دارد . درهردوحالت برای $x \varepsilon E$ ، $g(x) > 0$ و برای $x \varepsilon \tilde{E}$ ، $g(x) = 0$ است . گیریم $\varphi_n = 1 \wedge (ng)$. دراین‌صورت $\varphi_n \varepsilon L_1$ ، و $\varphi_n \uparrow \chi_E$. ازاین‌رو χ_E اندازه‌پذیر است پس E اندازه‌پذیر است . ∎

۱۹ـ لـــــم :

گیریم‌تابع I اندازه‌پذیر است . تابع مجموعهٔ μ راروی ردهٔ $\mathfrak{A}$ ازمجموعه‌های اندازه‌پذیر به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم ، اگر χ_E انتگرال‌پذیر باشد قــرار مــی‌دهیــم $\mu E = I(\chi_E)$ وگرنه ، قرار می‌دهیم $\mu E = \infty$. دراین‌صورت μ یک اندازه است .

بــرهـــــان :

داریم $\mu\varnothing = I(0) = 0$.اگر A و B دومجموعهٔ انتگرال‌پذیرو $A \subset B$ ،آنگاه $\chi_A \leq \chi_B$ ،پس $\mu A \leq \mu B$. بنابراین μ برای‌مجموعه‌های‌انتگرال‌پذیر و درنتیجه برای مجموعه‌های اندازه‌پذیر یکنواست .

گیریم $\langle E_i \rangle$ یک‌دنبالهٔ مجزاازمجموعه‌های‌اندازه‌پذیرو $E = \bigcup E_i$ است . اگر یکی از E_i ها انتگرال‌ناپذیر باشد آنگاه E انتگرال‌ناپذیر است و

$$\mu E = \infty = \sum \mu E_i$$

اگر هریک از E_i ها انتگرال‌پذیر باشد، برای انتگرال‌پذیر بودن E بنابرگزارهٔ ۸ لازم و کافی‌است‌که $\sum \mu E_i < \infty$ ، زیـــرا $\chi_E = \sum \chi_{E_i}$. درهرحالت، $\mu E = \sum \mu E_i$ و اندازهٔ μ جمعی شمارش‌پذیر است. ∎

این اندازهٔ μ دارای این خاصیت است که برای آن مجموعه‌های انتگرال‌پذیر درست همان مجموعه‌های اندازه‌پذیر بااندازهٔ باپایان هستند. در قضیهٔ زیر هم‌ارزی انتگرال دانیل I روی L_1 با انتگرال نسبت‌به‌این‌اندازهٔ μ بیان‌می‌شود.

۲۰ ــ قضیـــــهٔ (استـــــون):

گیریم L یک شبکهٔ برداری از تابعهای روی X ، و دارای این خاصیت است که برای هر $f \varepsilon L$ تابع $f \wedge 1$ در L است، و گیریم I روی L یک انتگـــرال دانیـــل است. دراین‌صورت یک σ-جبر $\mathfrak{A}$ از زیرمجموعه‌های X و یک‌اندازهٔ μ روی $\mathfrak{A}$ وجـــود دارد به‌گونه‌ای که‌هرتابع f روی X نسبت‌به I انتگرال‌پذیر است اگر و تنها‌اگر این تابع نسبت به μ انتگرال‌پذیر باشد. به‌علاوه

$$I(f) = \int f\,d\mu.$$

بـــرهـــــان:

گیریم $\mathfrak{A}$ ردهٔ مجموعه‌هایی‌است که نسبت‌به I اندازه‌پذیرند. از لم ۱۶ نتیجـــه می‌شودکه ۱ اندازه‌پذیر است. دراین‌صورت بنابرلم ۱۷ ردهٔ $\mathfrak{A}$ یک σ-جبراست‌ولم ۱۸ بیان می‌کند که هر تابع نامنفی I انتگرال‌پذیر، نسبت‌به $\mathfrak{A}$ اندازه‌پذیر است. چون هر تابع I-انتگرال‌پذیر تفاضل دوتابع نامنفی I-انتگرال‌پذیر است، پس هرتابع I-انتگرال‌پذیر باید نسبت‌به $\mathfrak{A}$ اندازه‌پذیر باشد.

گیریم μ همان‌اندازهٔ لم ۱۹ و f یک‌تابع نامنفی‌است‌که‌نسبت‌به I انتگرال‌پذیر است. برای هرجفت $\langle k, n \rangle$ از عددهای درست مثبت می‌گیریم.

$$E_{k,n} = \{x : f(x) > k2^{-n}\}$$

$E_{k,n}$ اندازه‌پذیر است و چون

$$\chi_{E_{k,n}} = \chi_{E_{k,n}} \wedge (k^{-1}2^n f)$$

پس $\chi_{E_{k,n}} \varepsilon L_1$ و $\mu(E_{k,n}) < \infty$. قرار می‌دهیم

$$\varphi_n = 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^{2n}} \chi_{E_{k,n}}$$

دراین‌صورت $\varphi_n \varepsilon L_1$ و $\varphi_n \uparrow f$. ازاین‌رو $I(f) = \lim I(\varphi_n)$. ولی

$$I(\varphi_n) = 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^{2n}} I(\chi_{E_{k,n}})$$

$$= 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^{2n}} \mu(E_{k,n})$$

$$= \int \varphi_n \, d\mu.$$

چون

$$\int f \, d\mu = \lim \int \varphi_n \, d\mu$$

بنابرقضیهٔ همگرایی یکنوا داریم

$$I(f) = \int f \, d\mu$$

و f نسبت‌به μ انتگرال‌پذیر است . چون هرتابع دلخواه f که I-انتگرال‌پذیراست برابر تفاضل دوتابع نامنفی I-انتگرال‌پذیر است . پس چنین تابعی باید نسبت‌به μ نیز انتگرال‌پذیر باشد و

$$I(f) = \int f \, d\mu$$

اگر f یک‌تابع نامنفی روی X باشد که نسبت‌به μ انتگرال‌پذیر است ، آنگاه $E_{k,n}$ و φ_n را همانندپیش می‌سازیم . چون $\int f \, d\mu < \infty$ ،پس هر $E_{k,n}$ دارای اندازهٔ باپایان است ، پس $\chi_{E_{k,n}}$ وازاین‌رو φ_n به L_1 تعلق‌دارد . چون $\varphi_n \uparrow f$ و $\lim I(\varphi_n) = \int f \, d\mu < \infty$ ، پس بنابرگزارهٔ ۸ داریم $f \varepsilon L_1$. بنابراین هر تابع f که نسبت‌به μ انتگرال‌پذیر است ، نسبت‌به I نیز انتگرال‌پذیر است . ∎

۲۱ ــ گزاره :

گیریم L یک‌شبکهٔ برداری از تابعهای تعریف شده روی X و $1 \varepsilon L$ است . گیریم $\mathcal{B}$ کوچکترین σ -جبر از زیرمجموعه‌های X است به‌گونه‌ای که هرتابع متعلق‌به L نسبت به $\mathcal{B}$ اندازه‌پذیر است . دراین‌صورت برای هر انتگرال‌دانیل I یک‌اندازهٔ یکتای μ

روی $\mathcal{B}$ وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر $f \varepsilon L$ داریم

$$I(f) = \int f \, d\mu$$

برهـــــان :

وجود μ حالت خاصی از قضیهٔ ۲۰ است و تنها باید یکتایی μ را روی $\mathcal{B}$ ثابت کنیم. گیریم $\mathcal{A}$ ، σ-جبر مجموعه‌های اندازه‌پذیر است که در لم ۱۷ داده شد. لم ۱۸ بیان می‌کند که هر f متعلق‌به L نسبت‌به $\mathcal{A}$ اندازه‌پذیر است. پس باید داشته باشیم $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. چون $1 \varepsilon L$. پس برای هر B ی متعلق‌به $\mathcal{A}$ و درنتیجه برای هر B ی متعلق به $\mathcal{B}$ تابع χ_B به L_1 تعلق‌دارد. اگر نشان دهیم که برای هر B ی متعلق‌به $\mathcal{B}$ برابری $\mu(B) = I(\chi_B)$ برقرار است یکتایی μ روی $\mathcal{B}$ ثابت می‌شود.

اگر مجموعهٔ تابعهای روی X را که نسبت‌به $\mathcal{B}$ اندازه‌پذیر و نسبت‌به μ ، انتگرال‌پذیرند با Λ نشان دهیم و برای هر $f \varepsilon \Lambda$ قرار دهیم :

$$J(f) = \int f \, d\mu$$

آنگاه از گزارهٔ ۱۴ نتیجه‌می‌شود که برای $f \varepsilon L_1 \cap \Lambda$ داریم $J(f) = I(f)$. ولی اگر $B \varepsilon \mathcal{B}$ ، آنگاه $\chi_B \varepsilon L_1 \cap \Lambda$ ، پس

$$\mu B = J(\chi_B)$$
$$= I(\chi_B).$$

بنابراین μ روی $\mathcal{B}$ به‌طوریکتا با I تعیین می‌شود. ∎

اگر به‌جای فرض $1 \varepsilon L$ دراین‌گزاره، فرض کم‌توان‌تری بگذاریم مبنی براین که یک‌تابع همه‌جا مثبت متعلق‌به L_1 وجوددارد بازمی‌توانیم یکتایی‌اندازهٔ μ راثابت‌کنیم. (مسئلهٔ ۱۰) بدون چنین فرضهایی، یکتایی μ روی $\mathcal{B}$ الزامی نیست (مسئلهٔ ۱۱).

مسئـلـــــه‌ها

۸ ــ گیریم μ روی یک جبر $\mathcal{A}$ از مجموعه‌ها یک اندازه و L خانوادهٔ متشکل از تابعهایی‌است‌که ترکیب خطی باپایان تابعهای‌مشخص مجموعه‌های بااندازهٔ باپایان $\mathcal{A}$ ، هستند و I انتگرال‌گیری نسبت‌به μ است. گسترش I به L_1 را شرح دهید، و این رونـد را باگسترش کاراتئودوری برای μ مقایسه کنید.

۹ ــ بااستفاده‌ازتعریف ، مستقیما" ثابت‌کنید که اگر f_1 و f_2 دوتابع اندازه‌پذیر نامنفی باشند ، آنگاه $f_1 + f_2$ اندازه‌پذیر است .

۱۰ ــ ثابت‌کنید که اگر در گزارهٔ ۲۱ فرض " $1 \varepsilon L$ " را بافرض " وجود یک تابع همه‌جامثبت e در L_1" را جانشین‌سازیم ، این‌گزاره بازهم برقرار است .[**راهنمایی :**

$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x: e(x) > 1/n\}$ ، و می‌توان اثبات گزاره را به‌گونه‌ای تغییر داد که نشان دهد μ روی مجموعه‌های $\mathcal{B}$ که مشمول $\{x: e(x) > 1/n\}$. هستند یکتاست .]

۱۱ ــ گیریم $X = (-\infty, \infty) \cup \{\omega\}$ ، و L متشکل از همهٔ تابعهای‌روی X است که روی $(-\infty, \infty)$ انتگرال‌پذیر لبگ و در ω صفرند . دراین‌صورت L یک‌شبکهٔ برداری است‌وکوچکترین σ ـ جبری‌که‌نسبت‌به‌آن هرتابع متعلق‌به L اندازه‌پذیراست ، خانوادهٔ $\mathcal{B}$ ، متشکل از همهٔ مجموعه‌های B است به‌گونه‌ای‌که $B \cap (-\infty, \infty)$ اندازه‌پذیر لبگ است . گیریم I روی L با $I(f) = \int f(x)\,dx$ تعریف‌گردد . دراین‌صورت I روی L یک انتگرال‌دانیل است . اندازهٔ μ ی ساخته شده در قضیهٔ ۲۰ را تعیین‌کنید . نشان دهید که یک اندازهٔ دیگر ν تعریف‌شده‌روی $\mathcal{B}$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که برای هر f در L داریم $I(f) = \int f\,d\nu$.

۱۲ــ الف ــ اندازهٔ μ را روی‌مجموعه‌های I-اندازه‌پذیربه‌شکل‌زیرتعریف‌کنید : اگر E انتگرال‌پذیر باشد ، $\mu E = I(\chi_E)$ ، وگرنه ، A انتگرال‌پذیر و $I(\chi_E) = \sup\{I(\chi_A): A \subset \bar{E}$. نشان دهید که μ یک اندازه است و کوچکترین اندازه‌ای است به‌گونه‌ای که $I(f) = \int f\,d\mu$.

ب ــ نشان دهید که برای این اندازه

$$\mu(X) = \|I\| = \sup\{I(f): f \varepsilon L \ \ f \leq 1\}$$

پ ــ نشان‌دهیدکه‌اگر $\|I\| < \infty$ ، آنگاه این اندازهٔ μ تنها اندازه‌ای است به‌گونه‌ای که

$$I(f) = \int f\,d\mu \ \text{ و } \ \mu(X) = \|I\|.$$

فصل چهاردهم

انـــــدازه و تـــوپـــولـــوژی

اغلب با اندازه‌هایی برخورد می‌کنیم که روی یک مجموعهٔ X که ضمناً "فضای توپولوژیک نیز می‌باشد تعریف شده‌اند ، و طبیعی است که برای این اندازه‌ها شرطهایی قایل شویم که آنها را به‌ساختمان توپولوژیک فضا مربوط سازد . به‌نظر می‌رسد که دو رده از فضاهای توپولوژیک وجود دارند که برای آنها می‌توان یک نظریهٔ منطقی بیان کرد . یکی از آنها ردهٔ فضاهای هاوسدورف موضعاً "فشرده است که در این فصل نظریه‌را دربارهٔ آن شرح می‌دهیم . ردهٔ دیگر ردهٔ فضاهای متریک کامل است که شمه‌ای از معنی‌دار بودن این رده برای نظریهٔ اندازه در فصل ۱۵ تشریح شده است .

۱ ــ مجموعه‌های بیـــر و مجموعه‌های بـــرل

گیریم X یک فضای هاوسدورف موضعاً "فشرده است . ازدیدگاه نظریهٔ انتگرال‌گیری مفیدترین خانوادهٔ تابعهای روی X خانوادهٔ $C_c(X)$ است که شامل همهٔ تابعهای حقیقی پیوسته می‌باشد که بیرون زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از X صفرند . اگر f یک تابع حقیقی باشد ، تکیـه‌گـــــاه f عبارت است ازبستار مجموعهٔ $\{x: f(x) \neq 0\}$. بنابراین $C_c(X)$ ، ردهٔ همهٔ تابعهای حقیقی پیوسته روی X است که دارای تکیه‌گاه فشرده می‌باشنـــد . ردهٔ **مجمـوعـــه‌های بیـــــر** عبارت است ازکوچکترین σ-جبر $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های X ، به‌گونه‌ای که هر تابع متعلق به $C_c(X)$ نسبت به $\mathcal{B}$ اندازه‌پذیر باشد . بنابرایــن $\mathcal{B}$ ، σ -جبری است که به‌وسیلهٔ مجموعه‌های $\{x: f(x) \geq \alpha\}$ با $f \varepsilon C_c(X)$ تولیـــد شده‌است . اگر $0 < \alpha$ باشد ،این مجموعه‌ها ، $\mathcal{G}_\delta$ های فشرده هستند . ازگزارهٔ ۹ . ۲۰ نتیجه می‌شود که هر $\mathcal{G}_\delta$ فشرده یک مجموعهٔ بیر است . درنتیجه ، $\mathcal{B}$ همان σ -جبـــر تولید شده با $\mathcal{G}_\delta$ های فشرده است .

اگر X یک فضای توپولوژیک باشد ، کوچکترین σ-جبر حاوی همهٔ مجموعه‌های بسته را ردهٔ **مجموعه‌های بــرل** می‌نامند . بنابراین اگر X موضعا " فشرده باشد ، هر مجموعهٔ بیر یک‌مجموعهٔ برل است . وارون این گفته هنگامی درست است که X یک‌فضای متریک موضعا "فشرده‌باشد ، ولی‌فضاهای‌فشرده‌ای وجوددارندکه درآنها ردهٔ مجموعه‌های برل وسیعتر از ردهٔ مجموعه‌های بیر است (مسئله ۵) .

بایددانست‌که‌همه‌کس ، تعریفهای‌همانندی‌برای‌مجموعه‌های‌بیر و مجموعه‌های‌برل به‌کار نمی‌برند . هنگامی‌که X فشرده (یا σ-فشرده) است همه دراین‌تعریفها‌توافق‌دارند که‌مجموعه‌های‌بیرکوچکترین σ جبری‌است‌که‌هر f متعلق‌به $C(X)$ نسبت‌به‌آن‌اندازه‌پذیر است ، و مجموعه‌های برل کوچکترین σ-جبر حاوی مجموعه‌های بسته‌اند ، ولی هنگامی‌که X را موضعا " فشرده بگیریم آنگاه این تعریفها متفاوتند . بعضی مؤلفین مجموعه‌های‌بیر را کوچکترین σ-حلقهٔ حاوی $\mathcal{G}_\delta$ های فشرده می‌گیرند و برخی دیگر آن‌را کوچکترین σ-جبری‌می‌گیرندکه هر f متعلق‌به $C(X)$ نسبت‌به‌آن‌اندازه‌پذیراست . بعضی مؤلفین ترجیح می‌دهند که ردهٔ مجموعه‌های برل را کوچکترین σ-جبر (یا σ-حلقهٔ) حاوی مجموعه‌های فشرده بگیرند . تعریفهایی که دراینجا بیان شد به‌نظر مفیدتر از همه است .

مجموعه‌ای‌را *σ-فشــــرده* می‌نامندکه‌اجتماع‌دستهٔ شمارش‌پذیری‌ازمجموعه‌های فشرده‌باشد . مجموعه‌ای‌که‌مشمول یک‌مجموعهٔ فشرده‌است *کــرانـــدار* نامیده می‌شود ، ومجموعه‌ای‌که مشمول‌یک‌مجموعهٔ σ- فشرده است *σ-کــرانـــدار* نام دارد . اکنون به‌بیان لم مفید زیر می‌پردازیم .

۱ ـ لــــــم :

اگر B یک مجموعهٔ بیر باشد دراین‌صورت B یا $\tilde{B}$ ، σ-کراندارند .

بــرهــــان :

دستهٔ مجموعه‌های B به‌گونه‌ای‌که B یا $\tilde{B}$ ، σ-کرانداراست‌یک σ-جبراست . چون‌این‌دسته‌حاوی‌همهٔ مجموعه‌های‌فشرده‌است ،باید حاوی‌همهٔ مجموعه‌های‌بیر نیز باشد ∎.

اندازهٔ μ که‌روی σ-جبرمجموعه‌های‌بیر تعریف شده‌است‌یک‌**اـنــدازهٔ بیــــر** نامیده می‌شود ، هرگاه این اندازه برای هر مجموعهٔ فشرده بیر باپایان باشد . اندازه‌ای که‌روی مجموعه‌های برل تعریف شده است یک *انــــدازهٔ بــــرل* نامیده می‌شود هرگاه

این اندازه برای هر مجموعهٔ فشرده باپایان باشد . در دوبخش بعدی نشان می‌دهیم که هرفونکسیونل‌خطی مثبت روی $C_c(X)$ ، باانتگرال‌گیری نسبت‌به‌یک‌اندازهٔ مناسب بیر به‌دست‌می‌آید و برای فضاهای‌فشردهٔ X هرفونکسیونل خطی کراندار روی $C(X)$ بایک اندازهٔ باپایان و علامت‌دار بیر داده می‌شود . در بخش ۴ نشان می‌دهیم که می‌توان هر اندازهٔ بیر را به‌یک‌اندازهٔ برل گسترش داد .

مسئله‌ها

۱ ــ گیریم X یک فضای متریک موضعا" فشردهٔ جدایی‌پذیر است . نشان دهید که ردهٔ مجموعه‌های بیر و ردهٔ مجموعه‌های برل همانندند .

۲ ــ نشان دهید که دستهٔ مجموعه‌های فشردهٔ $\mathcal{G}_\delta$ نسبت‌به اجتماع و اشتراک باپایان بسته است .

۳ ــ الف ــ نشان‌دهیدکه هر مجموعهٔ فشرده دریک‌فضای موضعا" فشرده مشمول یک مجموعهٔ باز σ-فشردهٔ O با $\bar{O}$ فشرده است .

ب ــ نشان‌دهیدکه‌هرمجموعهٔ σ-کراندارمشمول‌یک‌مجموعهٔ‌باز σ-فشرده‌است .

۴ ــ گیریم X یک‌فضای‌هاوسدورف‌موضعا"فشرده و $C_0(X)$ فضای همهٔ‌حدهای یکنواخت تابعهای متعلق‌به $C_c(X)$ است .

الف ــ نشان‌دهیدکه هر تابع حقیقی پیوسته f روی X متعلق‌به $C_0(X)$ است اگر و تنها اگر برای هر $\alpha > 0$ مجموعهٔ $\{x: |f(x)| \geq \alpha\}$ فشرده باشد .

ب ــ گیریم X^* فشرده‌سازی‌یک‌نقطه‌ای X است . دراین‌صورت $C_0(X)$ دقیقا" شامل تحدیدهای تابعهایی از $C(X^*)$ به X است که در ∞ صفر می‌شوند .

پ ــ اگر B یک‌مجموعهٔ بیر در X^* باشد ، دراین‌صورت $B \cap X$ یک‌مجموعهٔ‌بیر در X است .

۵ ــ گیریم X یک مجموعهٔ شمارش‌ناپذیر با توپولوژی گسسته است .

الف ــ $C_c(X)$ و $C_0(X)$ کدامند ؟

ب ــ مجموعه‌های بیر در X کدامند ؟

پ ــ گیریم X^* فشرده‌سازی یک‌نقطه‌ای X است . $C(X^*)$ کدام است ؟

ت ــ زیرمجموعه‌های بیر X^* کدامند ؟ نشان‌دهیدکه X^* دارای یک زیرمجموعهٔ فشرده است که یک مجموعهٔ بیر نیست .

ث ــ نشان دهید که روی X یک اندازهٔ بیر μ وجود دارد به‌گونه‌ای که $\mu(X) = 1$ و برای هر f متعلق‌به $C_0(X)$ داریم $\int f\,d\mu = 0$

۶ــ گیریم X و Y دوفضای هاوسدورف موضعاً " فشرده هستند .

الف ــ نشان دهید که هر $f \varepsilon C_c(X \times Y)$ حــد مجموعهایی بــه‌شکــل

$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\psi_i(y)$ است .[**راهنمــایـــی** : از قضیهٔ استــون ــ وایــرشتــراس استفاده کنیــد .]

ب ــ اگر $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ به‌ترتیب نمایش زیرمجموعه‌های بیر X و Y باشند ،آنگاه ردهٔ زیرمجموعه‌های بیر $X \times Y$ برابر $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ است .

پ ــ گیریم X و Y هرکدام فشرده‌سازی یک‌نقطه‌ای الکساندروف یک مجموعهٔ گسستهٔ شمارش‌ناپذیر است . دراین‌صورت جبر زیرمجموعه‌های برل $X \times Y$ بزرگتراز σ - جبری است که برابر حاصلضرب مجموعه‌های برل X و مجموعه‌های برل Y است .

۲ ــ فونکسیونل‌های خطی مثبت و اندازه‌های بیــر

دراین‌بند نشان می‌دهیم که‌هرفونکسیونل خطی‌مثبت‌روی $C_c(X)$ باانتگرال‌گیری نسبت به‌یک‌اندازهٔ بیر حاصل می‌شود و این اندازه لزوماً " یکتاست .

با بیان دو لم دربارهٔ $\mathcal{G}_\delta$ های فشرده و اندازه‌های بیر آغاز می‌کنیم .

۲ ــ لـــــــم :

اگر K یک $\mathcal{G}_\delta$ ی‌فشرده باشد ، یک دنبالهٔ $\langle \varphi_n \rangle$ از تابعهای متعلــق بــه $C_c(X)$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $\varphi_n \downarrow \chi_K$

بــرهـــــان :

بنابرگزارهٔ ۹ . ۲۰ . یک‌تابع نامنفی $\varphi \varepsilon C_c(X)$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که روی Kداریم $\varphi \equiv 1$ و روی $\tilde{K}$ داریم $0 \leq \varphi < 1$ ، قرار می‌دهیم $\varphi_n = \varphi^n$. ∎

۳ ــ لـــــم :

گیریم μ_1 و μ_2روی فضای‌هاوسدورف‌فشردهٔ X **دو اندازهٔ بیر هستند . اگر برای**

یک $\mathcal{G}_\delta$ فشردهٔ K داشته باشیم $\mu_1 K = \mu_2 K$، دراین‌صورت $\mu_1 = \mu_2$ است.

برهــــان:

نیم‌جبر $\mathcal{C}$ که با $\mathcal{G}_\delta$ های فشرده تولید می‌شود برابر است با دستهٔ همهٔ مجموعه‌های به‌شکل $C = K_1 \cap \tilde{K}_2$، که در آن K_1 و K_2، $\mathcal{G}_\delta$ های فشرده هستند بـا $K_2 \subset K_1$. چون $\mu_i C = \mu_i K_1 - \mu_i K_2$ ، می‌بینیم که μ_1 و μ_2 روی $\mathcal{C}$ برابرند. گزاره‌های ۱۲ . ۹ و ۱۲ . ۸ ایجاب می‌کنند که گسترش این اندازه‌ها به‌کوچکترین σ-جبر حاوی $\mathcal{C}$ نیز همانندند، زیرا $\mu_1 X = \mu_2 X < \infty$. ∎

۴ ـ نتیجـــــــه:

گیریم μ_1 و μ_2 روی یک‌فضای هاوسدورف موضعاً فشرده، دو اندازهٔ بیر هستند به‌گونه‌ای که وقتی K یک $\mathcal{G}_\delta$ فشرده است داریم $\mu_1 K = \mu_2 K$. دراین‌صورت برای هر مجموعهٔ بیر σ-کراندار E داریم $\mu_1 E = \mu_2 E$.

این‌نتیجه نشان می‌دهد تاجایی‌که مجموعه‌های σ-کراندار درنظراست. مقدار یک‌اندازهٔ بیر با مقدارهای آن روی $\mathcal{G}_\delta$ های‌فشرده تعیین می‌شود. متأسفانه ممکن است که‌مقدار دو اندازهٔ‌بیر روی مجموعه‌های σ-کراندار بیر برابر باشند ولی مقدارشان روی مجموعه‌هایی که σ-کراندار نیستند متفاوت باشند[1]. (مسئله ۱۰ را ببینید).

۵ ـ قضیـــــــه:

گیریم X یک‌فضای‌هاوسدورف‌موضعاً فشرده و I روی $C_c(X)$ یک‌فونکسیونل خطی‌مثبت است. دراین‌صورت یک اندازهٔ بیر μ وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر f، متعلق‌به $C_c(X)$ داریـــم:

$$I(f) = \int f \, d\mu.$$

---

۱ ـ این‌یکی‌ازدلایل‌اصلی است‌که به‌سبب‌آن بسیاری‌ازموءلفین ترجیح می‌دهند اندازه‌هارا روی σ-حلقه تعریف کنند تا روی σ-جبر، چون کوچکترین σ-حلقهٔ شامل $\mathcal{G}_\delta$ های فشرده تنها مجموعه‌های σ-کراندار را دربردارد.

اگر X فشرده باشد ، اندازهٔ μ یکتاست . درحالت کلی μ روی مجموعه‌های کراندار بیر به‌طوریکتا تعیین می‌شود .

برهـــــان:

فضای $C_c(X)$ یک‌شبکهٔ برداری است ، و اگر I در شرط D ی‌دانیل صدق کند آنگاه I یک انتگرال دانیل است . گیریم $\langle\varphi_n\rangle$ یک‌دنباله کاهشی از تابعهای متعلق به $C_c(X)$ است ،که به o می‌گراید و K تکیه‌گاه φ_1 است . گیریم ψ یک تابع نامنفی متعلق‌به $C_c(X)$ است‌که‌روی K مثبت‌می‌باشد . دراین‌صورت برای‌هر $0 < \epsilon$ داده‌شده مجموعه‌های $F_n = \{x: \varphi_n(x) \geq \epsilon\psi(x)\}$ یک‌خانوادهٔ‌کاهشی‌از زیرمجموعه‌های بستهٔ K است که اشتراک آنها تهی است . بنابراین برای یک مقدار N داریم $F_N = 0$ ، وبرای $n \geq N$ داریم $\varphi_n < \epsilon\psi$. بنابراین‌برای $n \geq N$ داریم $I(\varphi_n) \leq \epsilon I(\psi)$ و چون ϵ دلخواه است پس $I(\varphi_n) \to 0$. اکنون وجود یک‌اندازهٔ بیر μ به‌قسمی که برای هر $f \,\varepsilon\, C_c(X)$ داشته‌باشیم $I(f) = \int f\, d\mu$ از قضیـهٔ استـون (۱۳ . ۲۰) نتیجـه مـی‌شــود .

برای‌اثبات‌یکتایی μ ، دیده‌می‌شودکه‌اگر K یک $\mathcal{G}_\delta$ فشرده‌باشد ، دراین‌صورت χ_K حد یک‌دنبالهٔ کاهشی $\langle\varphi_n\rangle$ از تابعهای متعلق‌به $C_c(X)$ است . چون φ_1 ، انتگرال‌پذیر است ، پس بنابرقضیهٔ همگرایی لبگ داریم :

$$\mu K = \lim \int \varphi_n\, d\mu = \lim I(\varphi_n).$$

بنابراین μK به‌طوریکتا با I تعیین می‌شود . بنابرنتیجهٔ ۴ اندازهٔ μ روی مجموعه‌های σ-کراندار بیر ، درنتیجه روی همهٔ مجموعه‌های بیر ، اگر X فشرده باشد ، به‌طور یکتا تعیین می‌شود . ▮

گزارهٔ زیر درمورد اندازه‌های بیر ، همتای گزارهٔ ۳ . ۱۵ است .

۶ـ گــــــزاره:

گیریم μ روی‌فضای‌هاوسدورف‌موضعا" فشردهٔ X یک‌اندازهٔ بیراست . دراین‌صورت برای یک مجموعهٔ σ-کراندار دادهٔ شدهٔ بیر مانند E داریم :

$$\mu E = \inf \{\mu O: E \subset O,\ O \text{ برای یک مجموعهٔ باز } \sigma\text{-فشردهٔ } \}$$

و

$$\mu E = \sup \{\mu K: K \subset E \text{، برای یک مجموعهٔ } K \text{ ی } \mathcal{G}_\delta \text{ فشرده } \}$$

برهـــــــان :

برای اثبات گفتار نخست ، می‌بینیم که چون E یک مجموعهٔ σ-کراندار است ، پس مشمول یک‌مجموعهٔ باز σ-فشردهٔ O است . اگر $\mu E = \infty$ باشد ، دراین‌صورت $\mu O = \infty$ است و چیزی برای اثبات نداریم . ازاین‌رو فرض می‌کنیم $\mu E < \infty$

اگر E یک $\mathcal{G}_\delta$ فشرده‌باشد ، دراین‌صورت یک‌تابع $\varphi \in C_c(X)$ وجود دارد که‌روی E برابر ۱ و روی $\tilde{E}$ در $1 > \varphi \geq 0$ صدق می‌کند . گیریم $O_n = \{x: \varphi(x) > 1 - 1/n\}$ دراین‌صورت هر O_n یک‌مجموعهٔ باز σ-فشرده است ، $O_n \supset O_{n+1}$ و $E = \bigcap O_n$ چون $\overline{O}_1$ فشرده‌است ، $\mu O_1 < \infty$ ، و $\mu E = \lim \mu O_n$. بنابراین برای‌یک‌مجموعهٔ O_n داریم $\mu O_n < \mu E + \epsilon$.

گیریم $E = E_1 \cap \tilde{E}_2$ که در آن E_1 و E_2 مجموعه‌های $\mathcal{G}_\delta$ فشرده‌اندبا $E_2 \subset E_1$ ، و گیریم U یک مجموعهٔ باز σ-فشرده است با $\overline{U}$ فشـرده بـه‌گـونــه‌ای‌کـه $E_1 \subset U$ و $\mu U < \mu E_1 + \epsilon$. قرارمی‌دهیم $O = U \cap \tilde{E}_2$. دراین‌صورت O که برابر اشتـراک دومجموعهٔ $\mathfrak{F}_\sigma$ است ، خود $\mathfrak{F}_\sigma$ است . چون O مشمول مجموعهٔ فشرده $\overline{U}$ است پس O بایـد σ فشرده‌باشد . چون $O \sim E = U \sim E_1$ داریم $\mu(O \sim E) = \mu(U \sim E_1) = \mu U - \mu E_1 < \epsilon$ بنابراین $\mu O < \mu E + \epsilon$ ، وگفتارنخست‌گزاره‌برای‌مجموعه‌های E ی متعلق‌به‌نیم‌جبر $\mathcal{C}$ ، تولید شده به‌وسیلهٔ $\mathcal{G}_\delta$ های فشرده برقرار است .

جبر $\mathcal{A}$ ی تولید شده به‌وسیلهٔ $\mathcal{G}_\delta$ های فشرده برابر است بادستهٔ همـهٔ اجتماع‌های‌باپایان‌ازمجموعه‌های $\mathcal{C}$ ، و $\mathcal{A}_\sigma$ متشکل‌است از همهٔ اجتماع‌های شمارش‌پذیر از مجموعه‌های متعلق‌به $\mathcal{C}$.

بنابرگزارهٔ ۱۲ . ۶ هرمجموعهٔ E متعلق‌به σ-جبر تولید شده به‌وسیلـهٔ $\mathcal{A}$ ، (یعنی ، هرمجموعهٔ بیر E)با $\mu E < \infty$ مشمول‌یک $A \in \mathcal{A}_\sigma$ است‌با $\mu A < \mu E + \frac{\epsilon}{2}$ گیریم A اجتماع مجزای‌دنبالهٔ $\langle C_i \rangle$ از $\mathcal{C}$ است ، ومجموعه‌های σ فشردهٔ‌باز O_i را به‌گونه‌ای برگزینیدکه $C_i \subset O_i$ بوده‌و $\mu O_i < \mu C_i + \frac{\epsilon}{2^{i+1}}$ بـاشــد . دراین‌صورت $O = \bigcup O_i$ یک‌مجموعهٔ باز σ فشرده‌است، $A \subset O$ و $\mu(O \sim A) < \frac{\epsilon}{2}$ است . بنابراین $E \subset O$ و $\mu O < \mu E + \epsilon$.

به‌این‌ترتیب گفتار نخست گزاره ثابت می‌شود .

اگر E یک مجموعهٔ σ-کراندار بیر باشد ، دراین‌صورت $E \subset \bigcup K_i$ ، که‌در آن K_i فشرده است . چون هرمجموعهٔ فشرده مشمول یک $\mathcal{G}_\delta$ ی فشرده است ، می‌توانیم هر K_i را یک $\mathcal{G}_\delta$ ی فشرده، ازاین‌رو یک مجموعهٔ بیر فرض کنیم . بنـابـرایــــن

$E_n = E \cap \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ یک‌مجموعهٔ کراندار بیر است ، و E اجتماع دنبالهٔ افزایشی $\langle E_n \rangle$ از مجموعه‌های کراندار بیر است . از این‌رو $\mu E = \lim \mu E_n$ ، پس B یک مجموعهٔ کراندار بیر است و $\mu E = \sup \{\mu B: B \subset E$

گیریم B یک مجموعهٔ کراندار بیر و C یک مجموعهٔ $\mathcal{G}_\delta$ فشردهٔ حاوی B است . چون $C \sim B$ یک‌مجموعهٔ کراندار بیر است ، می‌توان یک‌مجموعهٔ σ ـ فشردهٔ باز O ، حاوی $C \sim B$ را یافت به‌گونه‌ای‌که $\mu O < \mu(C \sim B) + \epsilon$. گیریم $K = C \cap \tilde{O}$ دراین‌صورت $K \subset B$ ، و K یک $\mathcal{G}_\delta$ است‌چون اشتراک‌دومجموعهٔ $\mathcal{G}_\delta$ است و فشرده‌است زیرا K زیرمجموعهٔ بستهٔ یک‌مجموعهٔ فشرده است . چون $C \subset K \cup O$ ، داریم :

$$\mu C \leq \mu O + \mu K < \mu(C \sim B) + \mu K + \epsilon$$

از این‌رو

$$\mu B < \mu K + \epsilon$$

و $\mu B = \sup \{\mu K: K \subset B$ و $K\}$ یک $\mathcal{G}_\delta$ فشرده است و ∎.

یک‌اندازهٔ بیر μ را **منظم** می‌گویند هرگاه برای‌هرمجموعهٔ بیر E داشته‌باشیم $\mu E = \sup \mu K$ هنگامی‌که مجموعهٔ K روی $\mathcal{G}_\delta$ های فشردهٔ مشمول E تغییر می‌کند . بنابراین ، گزارهٔ ۶ می‌گوید که هراندازهٔ بیر روی‌یک‌فضای σ ـ فشرده منظم است . برخی دیگر از خواص اندازه‌های منظم بیر در مسئله ۱۰ داده شده است .

در سرتاسر این‌بند ازاین‌واقعیت استفاده‌شدکه‌اگر مجموعهٔ فشرده‌ای‌یک $\mathcal{G}_\delta$ ، باشد ، یک‌مجموعهٔ بیر است . وارون‌این‌مطلب‌نیز درست است ، یعنی‌اگرمجموعهٔ فشرده‌ای یک‌مجموعهٔ بیر باشد ، یک $\mathcal{G}_\delta$ است . چون دراینجا نیازی‌به‌آن نداریم ازبیان برهان آن خودداری می‌کنیم ولی می‌توان اثبات آن را در صفحهٔ ۲۲۱ کتاب هالموس [۸] یافت .

مسئله‌ها

۷ ــ گیریم $\mathcal{K}$ ، یک‌دسته‌از زیرمجموعه‌های X ، دارای‌این‌خاصیت‌است که‌اجتماع هردومجموعهٔ متعلق‌به $\mathcal{K}$ باز متعلق‌است‌به $\mathcal{K}$ و اشتراک هردومجموعهٔ متعلق‌به $\mathcal{K}$ بازهم متعلق‌است‌به $\mathcal{K}$. نشان‌دهید که‌جبر تولیدشده به‌وسیلهٔ $\mathcal{K}$ شامل‌مجموعه‌هایی است که هریک اجتماع‌باپایان‌مجزا از مجموعه‌هایی به‌شکل $K_1 \cap \tilde{K}_2$ است که درآن K_1 و K_2 به $\mathcal{K}$ ، تعلق دارند و $K_2 \subset K_1$ است .

۸ ــ نشان دهید که هر مجموعهٔ فشرده دریک‌فضای هاوسدورف موضعا" فشرده ، مشمول یک $\mathcal{G}_\delta$ ی فشرده است .

۹ ــ می‌توان با استفاده از نتیجه‌های بند ۱۲ . ۷ به‌جای نتایج فصل ۱۳ اثبات دیگری برای قضیهٔ ۵ بیان کرد .

الف ــ روی X یک اندازهٔ بیرونی μ^* با قراردادن $\mu^*E = \inf \sum I(\varphi_\nu)$ برای همهٔ دنباله‌های $\langle \varphi_\nu \rangle$ از $C_c(X)$ که روی E در $\sum \varphi_\nu \geq 1$ صدق می‌کنند ، تعریف می‌کنیم . نشان دهید μ^* نسبت به $C_c(X)$ یک اندازهٔ بیرونی کاراتئودوری است ، و از این رو هر مجموعهٔ بیر μ^* اندازه‌پذیر است .

ب ــ گیریم μ تحدید μ^* به مجموعه‌های بیر است . اگر f روی $C_c(X)$ یک تابع نامنفی ، و روی یک مجموعهٔ بیر E ، $f \geq 1$ باشد ، آنگاه $\mu(E) \leq I(f)$ است .
اگر $f \leq 1$ و تکیه‌گاه f مشمول یک مجموعهٔ فشردهٔ بیر مانند K باشد ، دراین‌صورت $\mu K \geq I(f)$ است .

پ ــ نشان دهید برای هر اندازهٔ بیر با خاصیت ذکر شده در (ب) و هر $f \varepsilon C_c(X)$ داریم :

$$I(f) = \int f\, d\mu$$

۱۰ ــ الف ــ نشان دهید که هر اندازهٔ بیر با پایان μ روی یک فضای هاوسدورف موضعاً "فشردهٔ X منظم است اگر و تنها اگر $\mu X = \sup \{K:$ فشرده $\mathcal{G}_\delta$ یک $K\}$ باشد . [مسئلهٔ ۱۱ . ۹ برای حل آن مفید است].

ب ــ اگر μ روی X یک اندازهٔ بیر منظم باشد ، دراین‌صورت برای هر مجموعهٔ بیر E داریم $\mu E = \inf \{\mu O: O \supset E$ یک مجموعهٔ باز بیر است $O\}$.

پ ــ نشان دهید که می‌توان اندازهٔ μ ی قضیهٔ ۵ را به‌گونه‌ای برگزید که منظم باشد ، و دراین‌صورت این اندازه یکتاست . [مسئلهٔ ۱۳ . ۱۲ را ببینید] .

ت ــ گیریم X یک مجموعهٔ شمارش‌ناپذیر با توپولوژی گسسته است . روی X یک اندازهٔ بیر نامنظم بسازید .

ث ــ گیریم μ روی X یک اندازهٔ بیر است . دراین‌صورت یک اندازهٔ یکتای منظم بیر روی X وجود دارد که روی مجموعه‌های σ-کراندار بیر با μ مطابقت دارد .

۱۱ ــ گیریم μ روی یک فضای موضعاً "فشردهٔ X یک اندازهٔ بیر است . گیریم U ، اجتماع همهٔ مجموعه‌های باز بیر O با $\mu O = 0$ است . مکمل U یعنی $F = \tilde{U}$ یک مجموعهٔ بسته است که تکیه‌گاه (یا محمل) μ نامیده می‌شود . .

الف ــ اگر O یک مجموعهٔ باز بیر با $O \cap F \neq \varnothing$ باشد ، دراین‌صورت $\mu O > 0$ است .

ب ــ اگر K یک مجموعهٔ فشردهٔ بیر با $K \cap F = \varnothing$ باشد ، دراین‌صورت $\mu K = 0$ است .

هرنقطهٔ K مشمول یک مجموعهٔ باز بااندازهٔ صفر است ، پس بنابرفشردگی K مشمول یک مجموعهٔ باز بااندازهٔ صفر است.]

پ ـ اگر E یک‌مجموعهٔ σ-کراندار بیر باشد با $E \cap F = \varnothing$ ، دراین صورت $\mu E = 0$ است .

ت ـ اگر $f \varepsilon C_c(X)$ و $f \geq 0$ ، دراین‌صورت $\int f\, d\mu = 0$ اگروتنهااگرروی F داشته‌باشیم $f \equiv 0$.[راهنمایی: مجموعهٔ $\{x: f(x) > 0\}$ یک‌مجموعهٔ σ-کراندار بیر است .]

ث ـ با آوردن مثالی نشان دهید که لازم نیست F یک مجموعهٔ بیر باشد .

ج ـ از (پ) نتیجه‌می‌شودکه‌اگر X فشرده (یا σ- فشرده) باشد ، دراین‌صورت برای‌هرمجموعهٔ بیر E با $E \cap F = \varnothing$ داریم $\mu E = 0$. مثالی‌بسازیدکه‌نشان‌دهد که‌این مطلب درحالتی‌که X ، σ- فشرده‌نیست‌لزوماً "درست‌نمی‌باشد . (مسئله ۵ ث رابببینید) .

۳ ـ فونکسیونل‌های خطی کراندار روی $C(X)$

گیریم X یک‌فضای‌هاوسدورف‌فشرده و $C(X)$ فضای‌تابعهای‌حقیقی‌پیوسته روی X است . در بند ۲ فونکسیونل‌های‌خطی‌مثبت‌را روی $C(X)$ توصیف‌کردیم ،ودراین‌بند فونکسیونل‌های‌خطی کراندار روی $C(X)$ را موردبحث قرار می‌دهیم . نخست می‌بینیم که‌اگر F روی $C(X)$ یک‌فونکسیونل‌خطی مثبت باشد و اگر $|f| \leq 1$ ، دراین‌صورت

$$|F(f)| \leq F(|f|) \leq F(1)$$

از این‌رو نتیجه می‌شود

$$\|F\| = F(1)$$

گزارهٔ بعدی نشان می‌دهد که هر فونکسیونل خطی کراندار روی $C(X)$ تفاضل دوفونکسیونل‌مثبت‌است . چون‌دراثبات‌آن از هیچ‌خاصیت‌ویژهٔ $C(X)$ استفاده نمی‌کنیم به‌جز این‌که $C(X)$ یک‌شبکهٔ برداری توابع کراندار و حاوی ۱ است ، گزاره‌را بااین‌کلیت بیان می‌کنیم . اگر L یک‌شبکهٔ برداری از تابعهای حقیقی کراندار روی مجموعهٔ X باشد و اگر $\|f\|$ را با $\|f\| = \sup |f(x)|$ تعریف کنیم ، L یک فضای خطی نرم‌دار می‌شود . یک فونکسیونل خطی کراندار است ، هرگاه یک‌عدد M وجود داشته باشد به‌گونه‌ای کــه

$$|F(f)| \leq M\|f\|$$

و طبق معمول $\|F\|$ را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم :

$$\|F\| = \sup_{\|f\| \leq 1} F(f)$$

۷ـ گــــــزاره:

گیریم L یک شبکهٔ برداری از تابعهای کراندار روی یک مجموعهٔ X و $1 \varepsilon L$ ، است . دراین‌صورت برای هر فونکسیونل خطی کراندار F روی L ، دو فونکسیونل خطی مثبت F_+ و F_- وجود داردبه‌گونه‌ای‌که $F = F_+ - F_-$ و $\|F\| = F_+(1) + F_-(1)$

برهــــان:

برای هرتابع نامنفی f متعلق‌به L فونکسیونل F_+ را چنین تعریف می‌کنیم .

$$F_+(f) = \sup_{0 \leq \varphi \leq f} F(\varphi)$$

دراین‌صورت $F_+(f) \geq 0$ ، و $F_+(f) \geq F(f)$. به‌علاوه برای $c \geq 0$ داریـــم $F_+(cf) = cF_+(f)$. گیریم f و g دوتابع نامنفی متعلق‌به L هستند . اگـــــر $0 \leq \varphi \leq f$ و $0 \leq \psi \leq g$ ، آنگاه $0 \leq \varphi + \psi \leq f + g$ پس

$$F_+(f + g) \geq F(\varphi) + F(\psi)$$

باگرفتن سوپرموم روی همهٔ این‌گونه φ ها و ψ ها ، به‌دست می‌آوریم

$$F_+(f + g) \geq F_+(f) + F_+(g)$$

ازســـوی دیگـــــر، اگـــــر $0 \leq \psi \leq f + g$ دراین‌صـــورت $0 \leq \psi \wedge f \leq f$ و $0 \leq \psi - (\psi \wedge f) \leq g$ ، پس:

$$\begin{aligned} F(\psi) &= F(\psi \wedge f) + F(\psi - [\psi \wedge f]) \\ &\leq F_+(f) + F_+(g). \end{aligned}$$

باگرفتن سوپرموم روی همهٔ این‌گونه ψ ها ، به‌دست می‌آوریم

$$F_+(f + g) \leq F_+(f) + F_+(g)$$

پـــس

$$F_+(f + g) = F_+(f) + F_+(g)$$

گیریم f تابع دلخواهی متعلق‌به L و M و N دومقدارثابت نامنفی‌اند به‌گونه‌ای که $f + M$ و $f + N$ نامنفی‌اند . دراین‌صورت

$$\begin{aligned} F_+(f + M + N) &= F_+(f + M) + F_+(N) \\ &= F_+(f + N) + F_+(M) \end{aligned}$$

از ایـــــن‌رو

$$F_+(f+M) - F_+(M) = F_+(f+N) - F_+(N)$$

بنابراین مقدار $F_+(f+M)-F_+(M)$ نابسته از گزینش M است و $F_+(f)$ را با این مقدار تعریف می‌کنیم . اکنون فونکسیونل F_+ روی همهٔ L تعریف شده است و به‌آسانی ثـابـت مـی‌شـودکـه $F_+(f+g) = F_+(f) + F_+(g)$ وبـــرای $c \geq 0$ داریـــــم ، $F_+(cf) = cF_+(f)$ چـــــون $F_+(-f) + F_+(f) = F_+(0) = 0$، پـــــس $F_+(-f) = -F_+(f)$ ، و F_+ روی L یک‌فونکسیونل خطی است . چون $0 \leq F_+(f)$ و برای $f \geq 0$، $F(f) \leq F_+(f)$ ، پس هم F_+ و هم فونکسیونل خطی $F_- = F_+ - F$ فونکسیونل‌های خطی مثبت هستند و داریم $F = F_+ - F_-$

همواره‌داریم $\|F\| \leq \|F_+\| + \|F_-\| = F_+(1) + F_-(1)$.برای‌برقراری نابرابری درجهت‌مخالف ، گیریم φ یک‌تابع دلخواه L است به‌گونه‌ای‌که $0 \leq \varphi \leq 1$. دراین‌صورت $|2\varphi - 1| \leq 1$ ، و

$$\|F\| \geq F(2\varphi - 1) = 2F(\varphi) - F(1)$$

باگرفتن سوپرموم روی همهٔ این‌گونه φ ها ، داریم :

$$\begin{aligned}\|F\| &\geq 2F_+(1) - F(1)\\ &= F_+(1) + F_-(1)\end{aligned}$$

ازایـــن‌رو $\|F\| = F_+(1) + F_-(1)$. ∎

۸ ــ قضیـــــهٔ نمـایش ریـــــس :

گیریم X یک‌فضای هاوسدورف فشرده و $C(X)$ فضای تابع‌های حقیقی پیوسته روی X است . دراین‌صورت به‌هرفونکسیونل‌خطی‌کراندار F روی $C(X)$ یک‌اندازهٔ علامت‌دار باپایان‌ویکتای‌بیرمانند ν روی X مربوط می‌شود به‌گونه‌ای‌که برای‌هر f متعلق‌به $C(X)$ ، داریـــــم :

$$F(f) = \int f\,d\nu$$

به‌علاوه ، داریم $\|F\| = |\nu|\,(X)$

بـــرهـــــان :

همانندگزارهٔ ۷ ،گیریم $F = F_+ - F_-$ دراین‌صورت بنابرقضیهٔ ۵ اندازه‌های‌بیر

باپایان μ_1 و μ_2 وجود دارند به‌گونه‌ای که‌داریم :

$$F_+(f) = \int f\, d\mu_1$$

و

$$F_-(f) = \int f\, d\mu_2.$$

اگر قرار دهیم $\nu = \mu_1 - \mu_2$، دراین‌صورت ν یک‌اندازهٔ علامت‌دار و باپایان‌بیر است ،
و

$$F(f) = \int f\, d\nu.$$

اکنون داریم

$$|F(f)| \leq \int |f|\, d|\nu| \leq \|f\|\, |\nu|(X)$$

از این‌رو $\|F\| \leq |\nu|(X)$. ولی

$$|\nu|(X) \leq \mu_1(X) + \mu_2(X) = F_+(1) + F_-(1) = \|F\|$$

بنابراین $\|F\| = |\nu|(X)$

برای‌نشان‌دادن یکتایی ν ، می‌بینیم‌که اگر ν_1 و ν_2 هردواندازه‌های‌علامت‌دار و باپایان بیر باشند به‌گونه‌ای که برای $i = 1, 2$ و $f \in C(X)$ داشته باشیم :

$$\int f\, d\nu_i = F(f)$$

دراین‌صورت $\lambda = \nu_1 - \nu_2$ باید یک‌اندازهٔ علامت‌دار و باپایان بیر باشد به‌گونه‌ای کـــه برای هر $f \in C(X)$ ، $\int f\, d\lambda = 0$.

گیریم $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ تجزیهٔ ژوردان λ است . دراین‌صورت انتگرال‌گیری نسبت به λ^+ همان فونکسیونل خطی مثبت را روی $C(X)$ می‌دهد که انتگرال‌گیری نسبت‌به λ^- ، می‌دهد ، پس بنابرقضیهٔ ۵ باید داشته باشیم $\lambda^- = \lambda^+$. از این‌رو $\lambda = 0$ و $\nu_2 = \nu_1$.

۹ ــ نتیجـــــــه:

گیریم X یک‌فضای‌هاوسدورف‌فشرده‌است . دراین‌صورت دوگان $C(X)$ برابراست (به‌طورایزومتری‌ایزومرف‌است) بافضای‌همهٔ‌اندازه‌های علامت‌دار باپایان بیر روی X با نرمی که به‌شکل $\nu = |\nu|(X)$ تعریف می‌شود .

حقیقت این‌که فضای‌اندازه‌های علامت‌دار باپایان بیر روی X دوگان $C(X)$ ، است ، مارا قادربه‌چندنتیجه‌گیری‌دربارهٔ‌این‌فضا می‌سازد . برای‌مثال ، از گزارهٔ ۱۰ . ۳

نتیجه‌می‌شود که فضای اندازه‌های بیر کامل است ، و از قضیهٔ ۱۰ . ۱۷ نتیجه می‌شود که مجموعهٔ اندازه‌های‌بیر با $|\nu|(X) \leq 1$ درتوپولوژی‌کم‌توان* فشرده‌است . یافتن‌برخی از این نتایج در مسئله‌ها مطرح شده است .

مسئله‌ها

۱۲ ـ گیریم L و F همانهایی هستند که در گزارهٔ ۷ بودند . نشان دهید که اگر G و H دو فونکسیونل‌خطی‌مثبت روی L باشند به‌گونه‌ای که $F = G - H$ ، و $\|F\| \leq G(1) + H(1)$ باشد ، دراین‌صورت $G = F^+$ و $H = F^-$ [راهنمایی : بااستفاده از تعریف F^+ نشان دهید که $G - F^+$ یک فونکسیونل خطی مثبت است .]

۱۳ ـ گیریم X یک‌فضای‌هاوسدورف‌فشرده ، $\mathfrak{F} = \{f_\alpha\}$ یک‌خانواده‌ازتابعهای حقیقی پیوسته روی X و $\{c_\alpha\}$ یک‌خانوادهٔ متناظر از ثابتهاست .

فرض‌کنیم که برای‌هرمجموعهٔ باپایان $\{f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_n}\}$ یک‌اندازهٔ علامت‌دار بیر ν با $|\nu|(X) \leq 1$ وجود دارد به‌گونه‌ای که

$$\int f_{\alpha_i}\, d\nu = c_{\alpha_i}$$

دراین‌صورت یک اندازهٔ علامت‌دار و باپایان بیر ν با $|\nu|(X) \leq 1$ وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر f_α داریم

$$\int f_\alpha\, d\nu = c_\alpha$$

۱۴ ـ الف ـ گیریم X یک‌فضای‌هاوسدورف‌فشرده‌و g $f_1, \ldots, f_n$ تابعهای حقیقی پیوسته روی X هستند . فرض کنیم روی X یک اندازهٔ علامت‌دار بیر ν با $|\nu|(X) \leq 1$ وجودداردبه‌گونه‌ای‌که‌برای‌هر i داریم $\int f_i\, d\nu = c_i$. دراین‌صورت روی X یک‌اندازهٔ‌بیر علامت‌دار μ با $|\mu|(X) \leq 1$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که

$$\int f_i\, d\mu = c_i$$

وبرای‌هراندازهٔ علامت‌داربیر λ با $|\lambda|(X) \leq 1$ به‌گونه‌ای‌که $\int f_i\, d\lambda = c_i$ ، داریم :

$$\int g\, d\mu \leq \int g\, d\lambda$$

ب ـ فرض‌کنیم روی X یک‌اندازهٔ‌بیر ν با $\nu(X) = 1$ و $\int f_i\, d\nu = c_i$ وجود دارد . دراین‌صورت‌روی X یک‌اندازهٔ‌بیر μ با $\mu(X) = 1$ و $\int f_i\, d\mu = c_i$ وجود داردکه‌بین‌همهٔ‌اندازه‌های‌بیری‌که‌دراین‌شرط هاصدق‌می‌کنند ، $\int g\, d\mu$ رامینیمم‌می‌سازد .

پ ـ گیریم G ، F_1 ، . . . ، F_n تابعهای‌پیوسته‌ای‌روی $\mathbf{R}^m$ (= فضای‌اقلیدسی m بعدی) ، و f_1 ، . . . ، f_m تابعهای‌پیوسته‌ای روی X هستند . نشان‌دهید که اگر

یک‌اندازهٔ بیر ν با $\nu(X) = 1$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که

$$F_i\left(\int f_1\, d\nu, \ldots, \int f_m\, d\nu\right) = c_i.$$

آنگاه، روی X یک اندازهٔ بیر وجود دارد که

$$G\left(\int f_1\, d\nu, \ldots, \int f_m\, d\nu\right)$$

را تحت این قیدها مینیمم می‌سازد.

۱۵ ـ گیریم B فضای‌باناخ اندازه‌های‌علامت‌دار بیر روی یک فضای هاوسدورف فشردهٔ X است. نقطه‌های نهایی کرهٔ یکهٔ B کدامند ؟

۱۶ ـ *اثبات دیگر برای قضیهٔ استون ـ وایرشتراس*. می‌توان به‌کمک فنون مذکور در این بند، توام با نتیجه‌های فصل ۱۰، برهانی برای قضیهٔ استون ـ وایرشتراس آورد که به لم ۹. ۲۷ بستگی ندارد. این برهان اثر دوبرانژ[1] است.

گیریم $\mathfrak{A}$ یک جبر از تابعهای حقیقی پیوسته روی یک فضای فشردهٔ X است که نقطه‌ها را جدا می‌سازد و حاوی ثابتهاست. گیریم $\mathfrak{A}^{\perp}$ مجموعهٔ اندازه‌های نشاندار بیر روی X است به‌گونه‌ای که $|\mu|(X) \leq 1$ و برای هر $f \in \mathfrak{A}$ داریم $\int f\, d\mu = 0$.

الف ـ به‌کمک قضیهٔ هان ـ باناخ و نتیجهٔ ۹ نشان دهید که اگر $\mathfrak{A}^{\perp}$ تنها حاوی اندازهٔ صفر باشد، آنگاه $\overline{\mathfrak{A}} = C(X)$.

ب ـ به‌کمک قضیهٔ کرین ـ میلمن و فشردگی گوی‌یکه در $C^*(X)$، نشان دهید که اگر اندازهٔ صفر تنها نقطهٔ نهایی $\mathfrak{A}^{\perp}$ باشد، در این صورت $\mathfrak{A}^{\perp}$ تنها حاوی اندازهٔ صفر است.

پ ـ گیریم μ یک نقطهٔ نهایی $\mathfrak{A}^{\perp}$ است. اگر $f \in \mathfrak{A}$، $0 \leq f \leq 1$، آنگاه اندازه‌های μ_1 و μ_2 که با $d\mu_1 = f\, d\mu$ و $d\mu_2 = (1-f)\, d\mu$ داده می‌شوند به $\mathfrak{A}^{\perp}$، تعلق دارند، و داریم $\|\mu\| = \|\mu_2\| + \|\mu_1\|$، و $\mu_1 + \mu_2 = \mu$ چون μ یک نقطهٔ نهایی است، برای یک ثابت c داریم $\mu_1 = c\mu$.

ت ـ در این صورت روی تکیه‌گاه μ داریم $f - c \equiv 0$ (مسئلهٔ ۱۱ ت را ببینید).

ج ـ چون f نقطه‌ها را جدا می‌سازد، تکیه‌گاه μ تنها می‌تواند حاوی یک نقطه باشد.

چون $\int 1\, d\mu = 0$، تکیه‌گاه μ تهی است و μ اندازهٔ صفر است.

۴* ـ گسترش برل یک اندازه

پیش از این تنها اندازه‌های بیر را روی یک فضای هاوسدورف فشرده در نظر گرفتیم، ولی گاهی سزاوار است که یک اندازهٔ بیر داده شده را گسترش دهیم تا به یک اندازهٔ برل

۱ — de Branges

تبدیل گردد . دراین‌بند نشان می‌دهیم که اگر اندازهٔ بیر منظم باشد ، دراین‌صورت می‌توان آن‌را به‌گونه‌ای گسترش داد که همتای گزارهٔ ۶ برقرار باشد ، پس اندازهٔ برل درحقیقت روی‌مجموعه‌های‌بیر وجود دارد ، به‌این‌معنی‌که‌هرمجموعهٔ‌بااندازهٔ‌باپایان‌برل دریک‌مجموعهٔ‌بااندازهٔ صفر با یک مجموعهٔ بیر اختلاف دارد . با یک لم آغاز می‌کنیم .

۱۰ ــ لـــم :

گیریم K یک $\mathcal{G}_\delta$ ی فشرده ، و O_i باز و $K \subset \bigcup O_i$ است . دراین‌صورت $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ ، که درآن K_i ها $\mathcal{G}_\delta$ های فشرده و $K_i \subset O_i$ است .

برهــــان :

بنابرگزارهٔ ۹ . ۲۱ تابعهای‌نامنفی‌وپیوستهٔ f_i باتکیه‌گاههای O_i وجوددارند به‌گونه‌ای‌که‌روی K ، داریم $f_1 + \cdots + f_n = 1$. گیریم $C_i = \{x: f_i(x) \geq \frac{1}{n}\}$. دراین‌صورت C_i یک $\mathcal{G}_\delta$ فشردهٔ مشمول O_i و $K \subset \bigcup C_i$ است . قرار می‌دهیم $K_i = C_i \cap K$. ∎

۱۱ ــ قضیــــه :

گیریم μ روی‌یک‌فضای‌هاوسدورف موضعاً "فشردهٔ X یک‌اندازهٔ منظم بیر است . دراین‌صورت‌روی X یک‌اندازهٔ یکتای‌برل $\bar{\mu}$ وجوددارد‌که μ را گسترش می‌دهدوبرای‌آن :

i ــ برای هر مجموعهٔ باز O داریم ،

$$\bar{\mu}O = \sup \{\mu K: K \subset O \text{ و } K \text{ یک } \mathcal{G}_\delta \text{ فشرده است}\}$$

ii ــ برای هر مجموعهٔ برل E داریم

$$\bar{\mu}E = \inf \{\bar{\mu}O: E \subset O \text{ و } O \text{ یک مجموعهٔ باز است}\}$$

اندازهٔ $\bar{\mu}$ در دوخاصیت زیر نیز صدق می‌کند :

iii. ــ برای هر مجموعهٔ برل E با $\bar{\mu}E < \infty$ ، داریم

$$\bar{\mu}E = \sup \{\bar{\mu}K: K \subset E \text{ و } K \text{ فشرده}\}$$

iv. ــ برای‌هرمجموعهٔ برل E با $\bar{\mu}E < \infty$ ، یک‌مجموعهٔ بیر H و یک‌مجموعهٔ برل N با $\bar{\mu}N = 0$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $E = H \triangle N$.

برهـــــان:

آشکاراست‌که این اندازهٔ $\bar{\mu}$ یکتاست، زیرا (i) اندازهٔ‌آن را روی مجموعه‌های بازتصریح‌می‌کند، و توأماً با (ii) مقدارآن‌را برای همهٔ مجموعه‌های برل تعیین می‌کند.
تابع مجموعهٔ μ^* را با قرار دادن

$$\mu^*O = \sup \{\mu K: K \subset O \text{ و } K \text{ یک } \mathcal{G}_\delta \text{ فشرده}\}$$

روی‌مجموعه‌های‌باز تعریف می‌کنیم. چون μ منظم‌است، پس اگر O یک مجموعهٔ باز بیر باشد آنگاه $\mu^*O = \mu O$ است. گیریم $O = \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i$، و گیریم K یک $\mathcal{G}_\delta$ فشردهٔ مشمول O است. دراین‌صورت‌بنـابرلـــم ۱۰، $K = \bigcup K_i$ بـــا $K_i \subset O_i$، پـــس $\mu K \leq \sum \mu K_i \leq \sum \mu^* O_i$. باگرفتن سوپرمم روی K، داریم $\mu^*O \leq \sum \mu^* O_i$، پس μ^* روی مجموعه‌های باز زیرجمعی شمارش‌پذیر است.

گیریم $\mathfrak{M}$ دستهٔ زیرمجموعه‌های M از X با این‌خاصیت است که بـرای هـر $\epsilon > 0$ یک‌مجموعهٔ باز O وجود دارد به‌گونه‌ای‌که $M \subset O$ و $\mu^*O < \epsilon$. هر زیرمجموعهٔ یک‌مجموعهٔ متعلق‌به $\mathfrak{M}$ بازمتعلق‌به $\mathfrak{M}$ است وخاصیت زیرجمعی‌شمارش‌پذیری μ^*، ایجاب می‌کند که اجتماع هر دستهٔ شمارش‌پذیر از مجموعه‌های $\mathfrak{M}$ متعلق‌به $\mathfrak{M}$ است.
اگر E یک مجموعهٔ بیر متعلق به $\mathfrak{M}$ باشد، آنگاه

$$\mu E = \sup \{\mu K: K \subset E \text{ و } K \text{ یک } \mathcal{G}_\delta \text{ فشـــرده اســـت}\}.$$

ولـی بـرای هـــر $K \subset E$ و هـــر $\epsilon > 0$ یـــک‌مجمـــوعـــهٔ بـــــاز $O \supset K$، با $\mu^*O < \epsilon$ وجوددارد. پس‌بنابه‌تعریف μ^*O داریم $\mu K < \epsilon$. چون ϵ دلخواه است پس $\mu K = 0$ درنتیجه $\mu E = 0$ و فرضهای گزارهٔ ۱۲ . ۳۰ برقرارند. بنابراین یـــک گسترش $\bar{\mu}$ از μ به‌یک σ-جبر $\mathfrak{B}$ شامل $\mathfrak{M}$ و مجموعه‌های بیر وجود دارد به‌گونه‌ای که برای $M \in \mathfrak{M}$ داریم $\bar{\mu} M = 0$.

هر $B \in \mathfrak{B}$ به‌شکل $H \triangle M$ است که در آن H یک مجموعهٔ بیر، $M \in \mathfrak{M}$، و $\bar{\mu} B = \mu H$ است. چون M مشمول یک مجموعهٔ باز با اندازهٔ به‌دلخواه کوچک است، از مسئله ۱۰ ب نتیجه‌می‌شود که اگر $\bar{\mu} B < \infty$ باشد، آنگاه یک مجموعهٔ باز O با $B \subset O$ و $\mu^*O < \infty$ وجود دارد.

گیریم O یک‌مجموعهٔ باز با $\mu^*O < \infty$ است. اگر K یک $\mathcal{G}_\delta$ فشرده‌ومشمول O، باشد، دراین‌صورت $\mu^*(O \sim K) = \mu^*O - \mu K$. گیریم $\langle K_n \rangle$ یک‌دنباله‌از $\mathcal{G}_\delta$ های فشردهٔ مشمول O است به‌گونه‌ای‌که $\mu^*O = \lim \mu K_n$. دراین‌صـــورت $H = \bigcup K_n$

یک مجموعهٔ بیر مشمول O است، و چون $\mathcal{O} \sim H \subset O \sim K_n$
$\mu^*(O \sim K_n) = \mu^*O - \mu K_n \to 0$، پس $O \sim H \in \mathfrak{M}$. بنابراین
$\bar{\mu}O = \mu H = \mu^*O$، و $O \in \mathfrak{B}$

گیریم $\mathfrak{A}$، σ-جبر متشکل از همهٔ مجموعه‌هایی است که نسبت‌به $\bar{\mu}$ موضعاً اندازه‌پذیرند، یعنی $\mathfrak{A}$، σ-جبر همهٔ مجموعه‌های E است به‌گونه‌ای‌که برای هر $B \in \mathfrak{B}$ با $\bar{\mu}B < \infty$ داریم $E \cap B \in \mathfrak{B}$. چون هر زیرمجموعهٔ $\mathfrak{B}$ با اندازهٔ باپایان مشمول یک مجموعهٔ باز با اندازهٔ باپایان است و هر مجموعهٔ باز با اندازهٔ باپایان متعلق‌به $\mathfrak{B}$ است پس E متعلق است به $\mathfrak{A}$ اگر و تنها اگر اشتراک E با هر مجموعهٔ باز با اندازهٔ باپایا متعلق‌به $\mathfrak{B}$ باشد. درنتیجه $\mathfrak{A}$ شامل همهٔ مجموعه‌های باز و از این‌رو $\mathfrak{A}$ شامل همهٔ مجموعه‌ها برل است. $\bar{\mu}$ را با قراردادن $\bar{\mu}E = \infty$ اگر $E \in \mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ باشد، به $\mathfrak{A}$ گسترش می‌دهیم

اگر $\bar{\mu}$ را به مجموعه‌های برل مقید سازیم، یک اندازهٔ برل به‌دست می‌آوریم گسترش μ است و در خاصیت‌های (i) و (iv) قضیه صدق می‌کند. اگر مجموعهٔ E به $\mathfrak{B}$ متعلق نباشد، آنگاه برای هر مجموعهٔ باز O حاوی E داریم $\bar{\mu}O = \infty$ و $\bar{\mu}E = \infty$ بنابراین (ii) برای چنین مجموعهٔ E برقرار است. گیریم E مجموعه‌ای متعلق‌به $\mathfrak{B}$ است در این صورت $E = H \,\triangle\, M$ که در آن H یک مجموعهٔ بیرو $M \in \mathfrak{M}$ است. چون H مشمو یک مجموعهٔ باز بیر O_1 با $\mu O_1 \le \mu H + \epsilon$ و M مشمول یک مجموعهٔ باز O_2 با $\mu O_2 < \epsilon$ است، پس داریم $E \subset O_1 \cup O_2$ با $\mu(O_1 \cup O_2) \le \mu E + 2\epsilon$. به این ترتیب (ii) ثابت می‌شود.

برای اثبات (iii)، گیریم $\bar{\mu}E < \infty$. در این صورت یک مجموعهٔ باز $\mathcal{O} \supset E$ با $\bar{\mu}(O \sim E) < \frac{\epsilon}{3}$ وجود دارد. بنابر (i) یک مجموعهٔ فشردهٔ $C \subset O$ با $\bar{\mu}(O \sim C) < \frac{\epsilon}{2}$ وجود دارد و بنابر (ii) یک مجموعهٔ باز $U \supset (O \sim E)$ با $\bar{\mu}U < \frac{\epsilon}{2}$ وجود دارد. قرار می‌دهیم $K = C \cap \tilde{U}$. در این صورت $K \subset E$

$$\bar{\mu}K > \bar{\mu}C - \frac{\epsilon}{2} > \bar{\mu}O - \epsilon \ge \bar{\mu}E - \epsilon \quad \blacksquare$$

مسئله

۱۷ ـ الف ـ گیریم f روی یک فضای هاوسدورف موضعاً" فشردهٔ X یک تابع اندازه‌پذیر برل و μ روی X یک اندازهٔ برل σ-باپایان است که در شرطهای (i) و (ii) قضیهٔ ۱۱ صدق می‌کند. در این صورت یک تابع اندازه‌پذیر برل g وجود دارد به‌گونه‌ای‌که $f = g$ [μ] تقریباً" همه‌جا داریم.

ب ــ اگر μ یک اندازهٔ σ ـ باپایان نباشد ، درحالت الف چه پیش می‌آید ؟
پ ــ اگر $0 \geq f$ ، آیا می‌توان همواره g را به‌گونه‌ای برگزید که $f \leq g \leq 0$ باشد ؟

فصل پانزدهم

نگاشت‌های فضاهای اندازه

۱ ــ نگاشت‌های نقطه و نگاشت‌های مجموعه

گیریم X و Y دوفضای دلخواه و φ نگاشتی از X در Y است. نگاشتهای زیادی ازاشیاء مربوط به Y دراشیاء متناظرمربوط به X وجود دارندکه‌به φ وابسته‌اند. برای‌مثال، نگاشت مجموعه Φ که‌با $\Phi(E) = \varphi^{-1}[E]$ تعریف می‌شود، نگاشتی‌است‌اززیرمجموعه‌های Y در زیرمجموعه‌های X، این‌نگاشت اجتماع، اشتراک‌ومکمل‌گیری‌را حفظ می‌کند، وآن‌را نگاشت مجموعهٔ القاء شده‌با φ یا الحاقی‌به φ می‌نامند. خود φ را نگاشت‌نقطه‌می‌گویند.

اگر $\langle X, \mathfrak{A}\rangle$ و $\langle Y, \mathfrak{B}\rangle$ دو فضای اندازه‌پذیر باشند، نگاشت φ از X در Y را *اندازه‌پذیر* می‌نامند هرگاه‌برای‌هر $E \in \mathfrak{B}$ داشته‌باشیم $\varphi^{-1}[E] \in \mathfrak{A}$ بنابراین φ اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر Φ، $\mathfrak{B}$ را در $\mathfrak{A}$ بنگارد.

اگر f روی $\langle X, \mathfrak{A}\rangle$ یک تابع حقیقی باشد، دراین‌صورت f نگاشتی‌است‌از X، در $\mathbf{R}$، و f نسبت‌به $\mathfrak{A}$ اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر f نگاشت اندازه‌پذیری از $\langle X, \mathfrak{A}\rangle$ در $\langle \mathbf{R}, \mathfrak{B}\rangle$ باشدکه‌درآن $\mathfrak{B}$، σ - جبرمجموعه‌های‌برل‌است. یک‌تابع حقیقی ازیک‌متغیرحقیقی‌اندازه‌پذیرلبگ‌است اگر و تنهااگر نگاشت اندازه‌پذیری‌از $\langle \mathbf{R}, \mathfrak{M}\rangle$، در $\langle \mathbf{R}, \mathfrak{B}\rangle$ باشدکه‌درآن $\mathfrak{M}$ ردهٔ مجموعه‌های‌اندازه‌پذیرلبگ‌است. f اندازه‌پذیر برل است اگر و تنها اگر f نگاشت اندازه‌پذیری از $\langle \mathbf{R}, \mathfrak{B}\rangle$ در $\langle \mathbf{R}, \mathfrak{B}\rangle$ باشد.

نگاشت دیگر وابسته به φ نگاشت φ^* از فضای تابعهای حقیقی روی Y در فضای تابعهای‌حقیقی‌روی X، است‌که‌با $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ تعریف می‌شود. نگاشت φ^* را اغلب الحاقی φ می‌نامند، این نگاشت جمع، ضرب، ماکزیمم و غیره را حفظ می‌کند. اگر φ، اندازه‌پذیر باشد، آنگاه φ^* تابعهای اندازه‌پذیر را به‌تابعهای اندازه‌پذیر مربوط می‌کند.

گیریم $\mathcal{A}$ جبری از زیرمجموعه‌های X و $\mathcal{B}$ جبری از زیرمجموعه‌های Y است. دراین‌صورت هرنگاشت Φ از $\mathcal{B}$ در $\mathcal{A}$ به‌گونه‌ای‌که $\Phi(Y) = X$ ، $\Phi(\tilde{E}) = \sim\Phi(E)$ و $\Phi(A \cup B) = \Phi(A) \cup \Phi(B)$ باشدیک **همومرفیسم** (شبکه) نامیده‌می‌شود، اگر $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو σ-جبر باشند و Φ دارای خاصیت $\Phi\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Phi(E_i)$ باشد، دراین‌صورت Φ **را σ-همومرفیسم می‌نامند**. هرنگاشت مجموعه‌که‌با‌یک‌نگاشت نقطه از X در Y القاء شده‌است یک σ-همومرفیسم‌است، ولی σ-همومرفیسم‌هایی وجوددارند که با هیچ نگاشت نقطه القاء نشده‌اند (مسئلهٔ ۲).

گیریم $\langle X, \mathcal{A}\rangle$ و $\langle Y, \mathcal{B}\rangle$ دوفضای‌اندازه‌پذیر و Φ یک σ-همومرفیسم از $\mathcal{B}$ در $\mathcal{A}$ است. دراین‌صورت‌اگر $\Phi^*\mu$ را با $(\Phi^*\mu)(E) = \mu(\Phi(E))$ تعریف‌کنیم آنگاه Φ^* نگاشتی‌است از اندازه‌های روی $\langle X, \mathcal{A}\rangle$ در اندازه‌های روی $\langle Y, \mathcal{B}\rangle$ که با Φ القاء شده‌است. گزارهٔ زیر را می‌توان به‌عنوان یک‌دستور تعویض متغیر درنظر گرفت.

۱ــ گـــــزاره:

گیریم φ یک‌نگاشت نقطهٔ اندازه‌پذیراز فضای اندازهٔ $\langle X, \mathcal{A}, \mu\rangle$ درفضای اندازه‌پذیر $\langle Y, \mathcal{B}\rangle$ است. گیریم Φ نگاشت‌مجموعهٔ القایی‌از $\mathcal{B}$ در $\mathcal{A}$ است. دراین‌صورت برای هر تابع نامنفی اندازه‌پذیر f روی Y داریم:

$$\int_Y f\, d\Phi^*\mu = \int_X (f\circ\varphi)\, d\mu$$

بـــرهـــــان:

اگر f یک‌تابع مشخص‌باشد گزاره آشکارا برقراراست. ازاینجا درستی قضیه برای یک‌تابع ساده نتیجه‌می‌شود. چون $\int f$ برابراست با کرانهٔ بالای انتگرال همهٔ تابعهای سادهٔ نامنفی کوچکتر از f ، پس اثبات گزاره پایان می‌یابد. ∎

مسئلـــــه‌ها

۱ــ گیریم $\mathcal{B}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های Y است که $Y, \varnothing$ و هر مجموعهٔ یک‌عنصری $\{y\}$ را دربردارد. دراین‌صورت هر نگاشت Φ از $\mathcal{B}$ در زیرمجموعه‌های X ،

که اشتراک باپایان و اجتماع دلخواه را حفظ می‌کند و برای آن داریم $\Phi(Y) = X$ و $\Phi(\varnothing) = \varnothing$ ، با یک نگاشت نقطه القاء می‌شود. [مجموعه‌های $E_y = \Phi(\{y\})$ مجزا هستندواجتماعشان‌برابر X است. برای‌هر x متعلق‌به E_y قرارمی‌دهیم $\varphi(x) = y$.]

۲ ــ گیریم $X = Y = [0, 1]$ ، و $\mathfrak{A}$ دستهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های $[0, 1]$ است‌که یا شمارش‌پذیرندویامکملشان‌شمارش‌پذیر است. دراین‌صورت $\mathfrak{A}$ یک σ-جبر است. گیریم $\mathfrak{B} = \{Y, \varnothing\}$. برای هر $E \varepsilon \mathfrak{A}$ ، Φ را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم:

اگر E شمارش پذیر باشد، $\Phi(E) = \varnothing$

اگر مکمل E شمارش‌پذیر باشد، $\Phi(E) = Y$

دراین‌صورت Φ یک σ-همومرفیسم است‌که‌با هیچ‌نگاشت نقطه‌از Y در X القاء نمی‌شود.

۳ ــ نشان‌دهیدکه‌می‌توان نگاشت‌الحاقی φ^* را به‌گونه‌ای‌گسترش‌دادکه‌تابعهای حقیقی‌گسترش‌یافتهٔ روی Y را درفضای‌چنین‌توابع روی X بنگارد. گزارهٔ ۱ را دراین‌حالت تعمیم دهید.

۴ ــ گیریم $\langle X, \mathfrak{A}\rangle$ ، $\langle Y, \mathfrak{B}\rangle$ ، و $\langle Z, \mathfrak{C}\rangle$ سه‌فضای اندازه‌پذیر، و $\varphi: X \to Y$ و $\psi: Y \to Z$ نگاشتهای‌اندازه‌پذیرهستند. نشان‌دهیدکه $\psi \circ \varphi$ ، یک نگاشت اندازه‌پذیر از $\langle X, \mathfrak{A}\rangle$ در $\langle Z, \mathfrak{C}\rangle$ است.

آنچه‌گذشت چه رابطه‌ای‌بااین‌حقیقت دارد که، اگر f یک تابع اندازه‌پذیر لبگ و g یک تابع حقیقی اندازه‌پذیر برل باشد، آنگاه $g \circ f$ اندازه‌پذیر لبگ است ولی لازم نیست $f \circ g$ اندازه‌پذیر باشد.

۵ ــ ثابت کنید $\Phi^*\mu$ یک اندازه است.

۶ ــ الف ــ گیریم φ یک‌نگاشت‌نقطهٔ اندازه‌پذیر از $\langle X, \mathfrak{A}, \mu\rangle$ ، در $\langle Y, \mathfrak{B}, \nu\rangle$ و Φ نگاشت‌مجموعهٔ القائی از $\mathfrak{B}$ در $\mathfrak{A}$ است. فرض‌کنیم $\Phi^*\mu$ ، نسبت‌به ν به‌طورمطلق پیوسته است و ν یک اندازهٔ باپایان (یا σ-باپایان) است. مشتق‌رادن‌ــ نیکودیم $\Phi^*\mu$ نسبت‌به ν رابا $\left[\frac{d\mu}{d\nu}\right]$ تعریف‌می‌کنیم. دراین‌صورت برای هر تابع نامنفی و اندازه‌پذیر f روی Y داریم:

$$\int_X (f \circ \varphi)\, d\mu = \int_Y f\left[\frac{d\mu}{d\nu}\right] d\nu.$$

ب ــ گیریم f یک تابع‌اندازه‌پذیر نامنفی روی $[0, 1]$ و g یک تابع یکنوا و به‌طور مطلق پیوسته روی $[0, 1]$ است با $g(0) = 0$ و $g(1) = 1$. دراین‌صورت

$$\int_0^1 f[g(t)]g'(t)\, dt = \int_0^1 f(t)\, dt.$$

۷ ــ الف ــ گیریم $\langle X, \mathcal{A} \rangle$ و $\langle Y, \mathcal{B} \rangle$ دوفضای اندازه‌پذیر و Φ یک σ- هومرفیسم از $\mathcal{B}$ بر $\mathcal{A}$ است . نشان دهید که یک نگاشت خطی یکتای T_Φ از تابعهای حقیقی اندازه‌پذیر روی Y در تابعهای حقیقی اندازه‌پذیر روی X وجود دارد ، که تابعهای نامنفی را به تابعهای نامنفی می‌برد ، به‌گونه‌ای که برای تابع مشخص χ_E داریم :

$$T_\Phi(\chi_E) = \chi_{\Phi(E)}$$

ب ــ گیریم μ اندازه‌ای روی $\langle X, \mathcal{A} \rangle$ و f تابعی نامنفی و اندازه‌پذیر روی Y است . در این صورت داریم :

$$\int_X T_\Phi(f)\, d\mu = \int_Y f\, d\Phi^*(\mu)$$

۲ ــ جبرهای اندازه

یک جبر بول مجموعهٔ عناصری است که روی آنها دو عمل دوتائی $\vee$ و $\wedge$ و یک عمل یکتایی $'$ تعریف شده است که در قاعده‌های زیر صدق می‌کنند :

i. $A \vee A = A$

i'. $A \wedge A = A$

ii. $A \vee B = B \vee A$

ii'. $A \wedge B = B \wedge A$

iii. $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$

iii'. $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$

iv. $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

iv'. $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

v. $(A \wedge B)' = A' \vee B'$

vi. $(A')' = A,$

vii. $0\exists$ به‌گونه‌ای که $A \wedge 0 = 0$ و $A \vee 0 = A$

viii. $A' \wedge A = 0.$

مثالی از یک جبر بول ، جبر $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ X است که در آن عملهای $\cup, \cap, \sim$ به‌جای $\vee, \wedge, '$ عمل می‌کنند . گاهی عملهای $\vee, \wedge, '$ را به‌ترتیب اجتماع ، اشتراک و مکمل‌گیری می‌نامیم .

اگر در یک جبر بول $\mathcal{A}$ عمل $A \le B$ را با $A \wedge B = A$ تعریف کنیم آنگاه $\mathcal{A}$ مرتب جزیی می‌شود . در این صورت 0 کوچکترین عنصر است ، در حالیکه $X = 0'$ بزرگترین عنصر است .

به‌علاوه، $A \vee B$ کوچکترین عنصر $\mathfrak{A}$ است که از A و B بزرگتر است.

یک جبر بول $\mathfrak{A}$ یک σ-جبر بول نامیده می‌شود اگر برای هر دنبالهٔ $\langle A_n \rangle$ ازعنصرهای $\mathfrak{A}$ کوچکترین عنصر B وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که برای هر n، داشته‌باشیم $A_n \leq B$. این عنصر B را با $\bigvee_{n=1}^{\infty} A_n$ نشان می‌دهند. در یک σ-جبر بول عنصر $C = \left(\bigvee_{n=1}^{\infty} A'_n\right)'$ بزرگترین عنصری است به‌گونه‌ای‌که برای هر n داریم $C \leq A_n$، می‌نویسیم $C = \bigwedge_{n=1}^{\infty} A_n$. مثالی از یک σ-جبر بول عبارت است از یک σ-جبر از زیرمجموعه‌های یک‌مجموعهٔ X. مثال دیگر چنین است: گیریم $\langle X, \mathfrak{A}, \bar{\mu} \rangle$ یک فضای اندازه و $\mathfrak{N}$ خانوادهٔ مجموعه‌های بااندازهٔ صفر است. دومجموعهٔ متعلق‌به $\mathfrak{A}$ را به‌پیمانهٔ $\mathfrak{N}$ هم‌ارز می‌گویند هرگاه تفاضل متقارن آنها به $\mathfrak{A}$، متعلق‌باشد. اجتماع‌واشتراک‌باپایان یا شمارش‌پذیر از مجموعه‌های‌هم‌ارز باز مجموعه‌های هم‌ارزند، پس ردهٔ مجموعه‌های هم‌ارز تشکیل یک σ-جبر بول می‌دهد. این رده را با $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ نشان‌می‌دهیم. درحقیقت‌تنهاخاصیتهائی از $\mathfrak{N}$ راکه‌لازم‌داریم عبارتنداز: (i) اگر $A \,\varepsilon\, \mathfrak{N}$ و $B \,\varepsilon\, \mathfrak{A}$ و $B \subseteq A$ باشد، آنگاه $B \,\varepsilon\, \mathfrak{N}$ است، و (ii) اگر $A_n \,\varepsilon\, \mathfrak{N}$، باشد، آنگاه $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \,\varepsilon\, \mathfrak{N}$ است. هرزیرمجموعهٔ یک σ-جبربول $\mathfrak{A}$ بااین‌خاصیت‌ها را یک σ-*ایده‌آل* می‌نامند، و می‌توان σ-جبر بول $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$، از رده‌های هم‌ارزی $\mathfrak{A}$ به‌پیمانهٔ $\mathfrak{N}$ را تعریف کرد.

منظوراز یک *جبر اندازه* عبارت است از یک σ-جبر بول $\mathfrak{A}$ توأم بایک تابع حقیقی‌ونامنفی μ که روی $\mathfrak{A}$ تعریف شده است به‌گونه‌ای که $\mu(A) = 0$ است اگروتنهااگر $A = 0$ باشد، و $\mu\left(\bigvee_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i$ است، اگربرای $i \neq j$، داشته‌باشیم $A_i \wedge A_j = 0$. μ رایک‌اندازه‌روی $\mathfrak{A}$ می‌نامند. اگر $\langle X, \mathfrak{B}, \mu \rangle$ یک فضای اندازهٔ باپایان و $\mathfrak{N}$ دستهٔ مجموعه‌های بااندازهٔ صفر باشد، آنگاه اگر μ را روی σ-جبر بول $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}/\mathfrak{N}$ درنظر بگیریم، به‌گفتهٔ دیگر، اگر بین مجموعه‌هایی‌از $\mathfrak{B}$، که در یک مجموعهٔ بااندازهٔ صفر باهم اختلاف دارند فرقی قایل نشویم، یک جبر اندازه به‌دست می‌آوریم.

دریک‌جبربول‌تفاضل‌متقارن $A \triangle B$ی‌دوعنصررابا $A \triangle B = (A \wedge B') \vee (A' \wedge B)$ تعریف می‌کنیم. اگر در یک جبر اندازه قرار دهیم $\rho(A, B) = \mu(A \triangle B)$، آنگاه جبر

اندازه یک فضای متریک می‌شود . این فضای متریک همواره کامل است و نگاشت‌های $A \to A'$ ، $\langle A, B\rangle \to A \vee B$ و $\langle A, B\rangle \to A \wedge B$ پیوسته‌اند . یک جبراندازه هنگامی *جدایی‌پذیر* نامیده می‌شود که همانند یک فضای متریک جدایی‌پذیر باشد .

یک نگاشت Φ از یک جبراندازهٔ $\langle \mathfrak{A}, \mu\rangle$ در یک جبر اندازهٔ $\langle \mathfrak{B}, \nu\rangle$ ، یک *ایزومرفیسم* درنامیده می‌شود ، اگر $\Phi(A') = [\Phi(A)]'$ ، $\Phi(A_1 \vee A_2) = \Phi(A_1) \vee \Phi(A_2)$ و $\mu(A) = \nu(\Phi(A))$ باشد . اگر این نگاشت Φ پوشا باشد آن‌را ایزومرفیسم می‌گویند . اگر جبرهای اندازه به‌عنوان فضاهای متریک در نظر گرفته شوند ، آنگاه یک ایزومرفیسم یک ایزومتری است که مکمل و اجتماع با پایان را حفظ می‌کند . از اینجا نتیجه می‌شود که یک ایزومرفیسم اجتماع و اشتراک شمارش‌پذیر را نیز حفظ می‌کند (مسئلهٔ ۱۰) .

در یک جبراندازهٔ $\mathfrak{A}$ یک عنصر $A \neq 0$ را یک *اتم* می‌گویند هرگاه $B \le A$ ، تنها برای $B = 0$ یا $B = A$ بتواند رخ دهد . گیریم $\mathfrak{M}$ ردهٔ زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر $[0, 1]$ ، $\mathfrak{N}$ ردهٔ زیرمجموعه‌های با اندازهٔ صفر ، و m اندازهٔ لبگ است . در این صورت $\langle \mathfrak{M}/\mathfrak{N}, m\rangle$ ، یک جبر اندازهٔ جدایی‌پذیر بدون اتم است . در قضیهٔ زیر ثابت می‌شود که صرف‌نظر از ایزومرفیسم ، این تنها جبر اندازه از این‌نوع است .

۲ ــ قضیه (کاراتئودوری) :

گیریم $\langle \mathfrak{A}, \mu\rangle$ یک جبراندازهٔ جدایی‌پذیر با $\mu(X) = 1$ است . در این صورت یک ایزومرفیسم Φ از $\langle \mathfrak{A}, \mu\rangle$ در جبراندازهٔ $\langle \mathfrak{M}/\mathfrak{N}, m\rangle$ ، که با اندازهٔ لبگ m ، روی $[0, 1]$ القاء می‌شود ، وجود دارد . ایزومرفیسم Φ پوشاست اگر و تنها اگر $\mathfrak{A}$ اتم نداشته باشد .

برهان :

چون $\langle \mathfrak{A}, \mu\rangle$ جدایی‌پذیر است ، یک دنبالهٔ $\langle A_n\rangle$ از عنصرها وجود دارد که در $\mathfrak{A}$ متراکم است . گیریم جبر بول $\mathfrak{A}_n$ ، از همهٔ اجتماعهای اشتراکهای مجموعه‌های $A_1, \ldots, A_n$ و مکمل‌های آنها به دست آمده است و گیریم $\mathfrak{A}_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n$ است . در این صورت $\mathfrak{A}_\infty$ نیز یک جبر بول است ، زیرا اگر A و B ،

به $\mathcal{A}_\infty$ متعلق‌باشند، آنگاه آنها به‌ترتیب به $\mathcal{A}_n$ و $\mathcal{A}_m$ تعلق دارند. ولی اگر $m \leq n$ باشد، آنگاه $\mathcal{A}_m \subset \mathcal{A}_n$ است، پس A'، $A \vee B$، و$A \wedge B$ همه متعلق به $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_\infty$ هستند.

نگاشت Φ از $\mathcal{A}_\infty$ در جبر $\mathcal{J}$ ی همهٔ اجتماعهای باپایان زیر فاصله‌های نیم‌باز فاصلهٔ $[0, 1)$ را باروش استقراء تعریف می‌کنیم. جبر $\mathcal{A}_1$ شامل چهارمجموعهٔ 0، A_1, A_1', X است، وداریم $\mu A_1 + \mu A_1' = \mu X = 1$. گیریم $\Phi(A_1) = [0, \mu A_1)$ $\Phi(A_1') = [\mu A_1, 1)$، $\Phi(0) = \varnothing$، $\Phi(X) = [0, 1)$. دراین‌صورت Φ، اجتماع، اشتراک، مکمل‌گیری‌واندازه‌را حفظ می‌کند. اکنون فرض کنیم که Φ روی $\mathcal{A}_{n-1}$ تعریف شده است به‌طوری‌که $\mathcal{A}_{n-1}$ را روی‌جبر تولیدشده به‌وسیلهٔ فاصله‌های‌نیم‌باز $[0, x_1)$، $[x_1, x_2), \ldots, [x_k, 1)$، می‌نگارد و Φ، اجتماع، مکمل‌گیری‌واندازه را حفظ می‌کند. می‌خواهیم‌نگاشت Φ را به $\mathcal{A}_n$ گسترش دهیم. گیریم $B_0, \ldots, B_k$ مجموعه‌هایی در $\mathcal{A}_{n-1}$ هستند که به‌ترتیب روی فاصله‌های $[0, x_1), \ldots, [x_k, 1)$ نگاشته می‌شوند. در این‌صورت $\mathcal{A}_{n-1}$ شامل همهٔ اجتماعهای باپایان‌مجموعه‌های $B_0, \ldots, B_k$ است و $\mathcal{A}_n$ شامل‌همهٔ اجتماعهای‌باپایان $A_n \wedge B_0, \ldots, A_n \wedge B_k, A_n' \wedge B_0, \ldots, A_n' \wedge B_k$ است. برای‌همهٔ اشتراکهایی‌که‌برابر 0 هستند Φ را برابر $\varnothing$ می‌گذاریم. برای‌اشتراکهایی که‌برابر 0 نیستند، می‌گیریم $\Phi(A_n \wedge B_j) = [x_j, x_j + \mu(A_n \wedge B_j))$
و $\Phi(A_n' \wedge B_j) = [x_j + \mu(A_n \wedge B_j), x_{j+1})$. چون $\mu(A_n \wedge B_j) + \mu(A_n' \wedge B_j) = \mu(B_j) = x_{j+1} - x_j$، می‌بینیم که همهٔ فاصله‌های‌اخیر به‌طور سره تعریف شده‌اند، Φ حافظ اندازه است، و

$$\Phi(A_n \wedge B_j) \cup \Phi(A_n' \wedge B_j) = [x_j, x_{j+1}) = \Phi(B_j)$$

ازاینجا نتیجه می‌شود که می‌توان Φ را به‌همهٔ $\mathcal{A}_n$ ها گسترش داد به‌گونه‌ای که اجتماع، مکمل و اندازه را حفظ کند.

بنابراین نگاشت Φ را به‌استقراء از $\mathcal{A}_\infty$ بر $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ تعریف کردیم به‌طوری‌که حافظ اندازه‌است. ازاین‌رو یک ایزومتری است. چون $\mathcal{A}_\infty$ در $\mathcal{A}$، متراکم است و فضای متریک $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ کامل است، می‌توان Φ را به‌یک ایزومتری از $\mathcal{A}$ در $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ گسترش داد.

برای‌اثبات این که Φ مکمل‌گیری‌را حفظ می‌کند، گیریم E عنصری است در $\mathcal{A}$ و $A \in \mathcal{A}_\infty$ را به‌گونه‌ای‌برمی‌گزینیم که $\mu(E \bigtriangleup A) < \epsilon$، باشد. دراین‌صورت $A' \in \mathcal{A}_\infty$ و، $\mu(E' \bigtriangleup A') = \mu(E \bigtriangleup A) < \epsilon$.
چون Φ یک‌ایزومتری و $\Phi(A') = \sim\Phi(A)$، داریم

$$m(\Phi(E') \bigtriangleup \widetilde{\Phi}(A)) < \epsilon \quad \text{و} \quad m(\widetilde{\Phi}(E) \bigtriangleup \widetilde{\Phi}(A)) = m(\Phi(E) \bigtriangleup \Phi(A)) < \epsilon$$

ازاین‌رو برای هر $0 < \epsilon$ داریم $m(\Phi(E') \triangle \widetilde{\Phi(E)}) < 2\epsilon$. بنابراین در جبر $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ داریم $\Phi(E') = \sim\Phi(E)$. استدلال مشابهی نشان می‌دهد که $\Phi(E \vee F) = \Phi(E) \cup \Phi(F)$

چون Φ یک ایزومتری است، پس Φ یک به یک است ولی پوشا نیست. برای تعیین برد Φ ، گیریم E مجموعهٔ نقطه‌های انتهائی فاصله‌هایی است که در تعریف نگاشت Φ ، روی جبر $\mathfrak{A}_n$ به‌کار رفت. دراین‌صورت Φ ، $\mathfrak{A}_\infty$ را روی جبر اجتماعهای با پایان فاصله‌های نیم باز با نقاط نهایی متعلق به E می‌نگارد. فرض کنیم که $\overline{E}$ برابر همهٔ فاصلهٔ $[0, 1]$ نیست، و گیریم I یکی از فاصله‌های باز تشکیل دهندهٔ $\overline{E} \sim [0, 1)$ است، یعنی فاصله‌ای مشمول $\sim\overline{E}$ که نقاط انتهایی آن متعلق به $\overline{E}$ است. چون نقطه‌های انتهایی I به $\overline{E}$ متعلق است، I یک حد از فاصله‌های $\Phi[\mathfrak{A}_\infty]$ است، پس به $\Phi[\mathfrak{A}]$ تعلق دارد. گیریم $A \in \mathfrak{A}$ ، به‌گونه‌ای است که $\Phi(A) = I$ است و B عنصری از $\mathfrak{A}$ می‌باشد با $B \leq A$. دراین‌صورت $\Phi(B) \subset I$. چون B را می‌توان با عناصر $\mathfrak{A}_\infty$ تقریب سازی کرد، پس $\Phi(B)$ را نیز می‌توان با عناصر $\Phi[\mathfrak{A}_\infty]$ تقریب گذارد. ولی عناصر اخیر مجموعه‌هایی هستند که یا شامل I هستند و یا با I نقطهٔ مشترکی ندارند. ازاین‌رو $\Phi(B) = I$ یا $\Phi(B) = \varnothing$ و داریم $B = A$ یا $B = \varnothing$، زیرا Φ یک‌به‌یک است. درنتیجه A یک اتم است.

به‌این‌ترتیب ثابت شد که اگر $\mathfrak{A}$ دارای اتم نباشد، دراین‌صورت $\overline{E} = [0, 1]$ است. ولی اگر $\overline{E} = [0, 1]$ باشد، دراین‌صورت هر فاصلهٔ نیم باز متعلق به $\Phi[\mathfrak{A}]$ است، ازاین‌رو $\Phi[\mathfrak{A}]$ حاوی همهٔ مجموعه‌های برل است. چون هرزیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر $[0, 1]$ اجتماع یک مجموعهٔ برل و یک مجموعهٔ با اندازهٔ صفر است، دراین‌حالت داریم $\Phi[\mathfrak{A}] = \mathfrak{M}/\mathfrak{N}$. ∎

این قضیه بیان می‌کند که اگر $\langle X, \mathfrak{B}, \mu \rangle$ یک فضای اندازهٔ جدایی‌پذیر بدون اتم باشد که برای آن $\mu(X) = 1$ است، دراین‌صورت جبر اندازهٔ متناظر، با جبر اندازهٔ القاء شده به‌وسیله اندازهٔ لبگ روی $[0, 1]$ ایزومرف است. دراین‌قضیه وجود یک نگاشت نقطه بین $[0, 1]$ و X ، و یا حتی وجود یک نگاشت مجموعه از $\mathfrak{B}$ در زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر $[0, 1]$ ادعا نمی‌گردد ولی تنها وجود یک تناظر بین مجموعه‌های $\mathfrak{B}$ به‌پیمانهٔ مجموعه‌های پوچ و مجموعه‌های اندازه‌پذیر به‌پیمانهٔ مجموعه‌های با اندازهٔ صفر بیان می‌شود. بنابراین اگر یک مجموعهٔ $B \in \mathfrak{B}$ داشته باشیم، مجموعهٔ اندازه‌پذیر ویژه‌ای به‌آن مربوط نمی‌سازیم ولی تنها یک ردهٔ هم‌ارزی از مجموعه‌های اندازه‌پذیر در $[0, 1]$ به‌آن مربوط می‌گردد. دربند بعد برای تأیید وجود نگاشتهای نقطه که نگاشت داده شدهٔ جبر اندازه‌ها را القاء می‌کند محکی به‌دست خواهیم آورد.

مسئلـــــه‌ها

۸ــ ثابت کنید که در یک σ-جبر بول داریم

$$B \wedge \left(\bigvee_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigvee_{n=1}^{\infty} (B \wedge A_n)$$

۹ــ گیریم $\mathcal{A}$ یک σ-جبر بول و $\mathcal{N}$ یک σ-ایده‌آل بول است. نشان دهید که اگر $A \triangle B \varepsilon \mathcal{N}$ باشد، آنگاه $A' \triangle B' \varepsilon \mathcal{N}$ است، و اگر $(A_n \triangle B_n) \varepsilon \mathcal{N}$ باشد، آنگاه $(\bigvee A_n) \triangle (\bigvee B_n) \varepsilon \mathcal{N}$

۱۰ــ الف ــ گیریم $\langle \mathcal{A}, \mu \rangle$ یک جبر اندازه و $\langle A_n \rangle$ یک دنباله از عنصرهای آن است، به‌گونه‌ای که برای $n \neq m$ داریـــم $A_n \wedge A_m = 0$. درایـــن صـــورت $\bigvee_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{k \to \infty} \bigvee_{n=1}^{k} A_n$. (دراینجا منظور از lim، حد در فضای متریک تعریف‌شده به‌وسیلهٔ μ است).

ب ــ گیریم $\langle \mathcal{A}, \mu \rangle$ یک جبر اندازه و $\langle A_n \rangle$ دنبالهٔ دلخواهی از عنصرهای $\mathcal{A}$ است. دراین‌صورت $\bigvee_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{k \to \infty} \bigvee_{n=1}^{k} A_n$.

پ ــ نشان دهید که اگر Φ یک ایزومرفیسم از یک جبر اندازهٔ $\langle \mathcal{A}, \mu \rangle$ در یک جبر اندازهٔ $\langle \mathcal{B}, \nu \rangle$ باشد، آنگاه $\Phi\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigvee_{n=1}^{\infty} \Phi(A_n)$.

۱۱ ــ ثابت کنید که هر جبر اندازه به‌عنوان یک فضای متریک، کامل است. [اگـــر $\langle A_n \rangle$ یک دنبالهٔ کشی باشد می‌توان فرض کرد که برای $n, m \geq N$ داریـــم $\mu(A_n \triangle A_m) < 2^{-N}$. دراین‌صورت اگر $B_n = \bigvee_{\nu=n}^{\infty} A_\nu$ بـــاشـــد، داریـــم $\mu(A_n \triangle B_n) < 2^{-n+1}$. اکنون داریم $\bigwedge_{n=1}^{\infty} B_n = \lim B_n = \lim A_n$.]

۱۲ ــ نشان دهید که در یک جبر اندازه عملهای $'$، $\wedge$، و $\vee$ پیوسته‌اند.

۱۳ ــ نشان دهید که هر جبر اندازه (همانگونه که آن را تعریف کردیم بـــا $\mu(X) < \infty$) تنها می‌تواند عدهٔ شمارش‌پذیری اتم داشته‌باشد. ازاین‌رو هرجبر اندازهٔ جدایی‌پذیر کامل یا با یک فاصله (با اندازهٔ لبگ)، یا با یک فضای اندازه‌ای که شامل عدهٔ

شمارش‌پذیری از اتمهاست (فضای‌اندازهٔ‌گسسته) ، یا بافضای اندازه‌ای که اجتماع دوتای قبلی است ، ایزومرف است .

۱۴ ــ جبراندازه‌رادرحالتی‌که μ یک‌تابع حقیقی گسترش‌یافته‌است توضیح‌دهید .

۳ ــ هم‌ارزی‌های بــــرل

اگر $\langle X, \mathcal{A} \rangle$ و $\langle Y, \mathcal{B} \rangle$ دوفضای اندازه‌پذیر باشند ، می‌خواهیم ببینیم درچه‌شرایطی این‌دوفضا هم‌ارزند ، به‌این‌معنی‌که یک نگاشت یک‌به‌یک φ از X به‌روی Y ، وجود دارد به‌گونه‌ای که φ و φ^{-1} اندازه‌پذیر باشند ، یعنی بــــرای هــــر $A \varepsilon \mathcal{A}$ ، $\varphi[A] \varepsilon \mathcal{B}$ ، و برای هر $B \varepsilon \mathcal{B}$ ، $\varphi^{-1}[B] \varepsilon \mathcal{A}$ ، باشد . دراین‌بند X و Y را همواره دوفضای‌متریک و $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ را جبر مجموعه‌های برل می‌گیریم . هرنگاشت یک به یک از X به‌روی Y که‌مجموعه‌های‌برل‌را به‌مجموعه‌های‌برل می‌برد و وارون‌آن نیز مجموعه‌های برل را به‌مجموعه‌های برل می‌برد یک *هــــم‌ارزی‌بــــرل* نامیده می‌شود . بنابرایــن هر همئومرفیسم یک‌هم‌ارزی‌برل است ، ولی‌هم‌ارزیهای‌برلی وجود دارند که همئومرفیسم نیستند . اگر X هم‌ارز برل Y و Y هم‌ارز برل Z باشد ، آنگاه X هم‌ارز برل Z اســت . بررسی هم‌ارزیهای برل را با اثبات چند لم شروع می‌کنیم .

۳ ــ لــــــم :

گیریم X یک فضای متریک و E یک زیرمجموعهٔ برل از X است . دراین‌صورت زیرمجموعه‌های برل E آن زیرمجموعه‌های برل X هستند که مشمول E می‌باشند .

بــرهــــان :

چون E یک زیرمجموعهٔ برل X است ، پس برای هر زیرمجموعهٔ باز O از X ، مجموعهٔ $O \cap E$ یک‌زیرمجموعهٔ برل X است . ازاین‌رو زیرمجموعه‌های‌برل X که مشمول E هستندیک σ -جبرتشکیل‌می‌دهند که شامل زیرمجموعه‌های (به‌طور نسبی) باز E ، است ، پس باید شامل هرزیرمجموعهٔ برل E باشد ،ازسوی‌دیگر دستهٔ آن زیرمجموعه‌هایی از X که هریک اجتماع یک زیرمجموعهٔ برل E و یک زیرمجموعهٔ برل $X \sim E$ است ، یک σ-جبر است که‌شامل زیرمجموعه‌های‌باز X است ، ازاین‌رو باید شامل‌همهٔ زیرمجموعه‌های

برل X باشد، ومی‌بینیم که هر زیرمجموعهٔ برل X که مشمول E است باید یک زیرمجموعهٔ برل E باشد. ▮

۴ـ لـــــم :

گیریم X و Y دروفضای متریک و X_0 و Y_0 به‌ترتیب زیرمجموعه‌های شمارش‌پذیر بی‌پایان X و Y هستند. دراین‌صورت هر هم‌ارزی برل بین $X \sim X_0$ و $Y \sim Y_0$ را می‌توان به‌یک هم‌ارزی برل بین X و Y گسترش داد.

بـرهـــان :

چون X_0 و Y_0 شمارش‌پذیر بی‌پایان هستند، می‌توان هم‌ارزی برل بیـــن $X \sim X_0$ و $Y \sim Y_0$ را گسترش داد تا یک‌تناظر یک‌به‌یک بین X و Y باشد. چون هر زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیر یک‌فضای‌متریک خود یک F_σ است، اجتماع و تفاضل یک‌مجموعهٔ برل و یک مجموعهٔ شمارش‌پذیر باز مجموعه‌های برل هستند. بنابراین یک زیرمجموعهٔ X یا Y یک مجموعهٔ برل است اگروتنهااگر اشتراک‌آن‌با $X \sim X_0$ [یا $Y \sim Y_0$] یک مجموعهٔ برل باشد. ازاین‌رو تناظر گسترش‌یافته بین X و Y یک هم‌ارزی برل است. ▮

اگر X یک فضای توپولوژیک و A یک مجموعهٔ دلخواه باشد، فضای حاصل‌ضرب $\bigtimes_{\alpha\varepsilon A} X_\alpha$ را که درآن هر X_α برابر X است با X^A نشان‌می‌دهیم. مجموعهٔ X^A، مجموعهٔ همهٔ نگاشتهای A در X است. اگر X یک فضای متریک و A شمارش‌پذیر باشد، آنگاه X^A متریک‌پذیراست (مسئله ۸.۲۷ را ببینید). دراینجا مجموعهٔ عددهای‌درست را با ω نشان می‌دهیم. لم زیر یکی از نتیجه‌های فوری شمارش‌پذیری $\omega \times \omega$ اســت.

۵ـ لـــــم :

اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، آنگاه X^ω و $(X^\omega)^\omega$ همئومرف هستند.

یکی‌ازساده‌ترین‌فضاهای‌توپولوژیک فضایی‌است که عنصرهایش ۰ و ۱ و توپولوژی آن توپولوژی گسسته است. معمولاً" این‌فضارا با $\mathbf{2}$ نشان‌می‌دهیم. فضای‌حاصل‌ضرب $\mathbf{2}^\omega$ یک فضای متریک کامل است. ▮

۶ ــ گـــــزاره :

فاصلهٔ یکهٔ $[0, 1]$ با 2^{ω} هم‌ارز برل است .

بـــرهـــان :

گیریم X_0 آن‌زیرمجموعه‌ای‌از 2^{ω} است‌که متشکل‌از عناصری است‌که تنها شمارهٔ باپایانی از مختصات‌آنها برابر ۰ یا تنها شمارهٔ باپایانی از مختصات آنها برابر ۱ است . دراین‌صورت X_0 شمارش‌پذیربی‌پایان‌است . روی $2^{\omega} \sim X_0$ ، φ را به‌عنوان نگاشتی تعریف‌می‌کنیم که به x مقدار $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i 2^{-i}$ را ، که درآن ξ_i مختص i ام x است ، مربوط می‌کند . دراین‌صورت φ ،مجموعهٔ $2^{\omega} \sim X_0$ را به‌طور یک به یک به‌روی عناصری از $[0, 1]$ می‌نگاردکه‌به‌شکل $p \cdot 2^{-n}$ نیستند ، p و n عددهای‌درست‌هستند ، وبی‌درنگ دیده‌می‌شود که φ بین $2^{\omega} \sim X_0$ و این‌گونه عناصر $[0, 1]$ یک همئومرفیسم است . چون مجموعهٔ عناصر $[0, 1]$ که به‌شکل $p \cdot 2^{-n}$ هستند شمارش‌پذیر بی‌پایان است ، بنابرلم ۴ ، گزاره ثابت می‌شود . ∎

۷ ــ گـــــزاره :

اگر فاصلهٔ $[0, 1]$ را I بنامیم آنگاه I^{ω} و I هم‌ارز برل هستند .

بـــرهـــان :

بنابر لم ۵ دوفضای 2^{ω} و $(2^{\omega})^{\omega}$ همئومرف هستند . پس بنابرگزارهٔ ۶ فاصلهٔ I ، با 2^{ω} هم‌ارز برل است ولی 2^{ω} هم‌ارز برل $(2^{\omega})^{\omega}$ است‌که‌به‌نوبهٔ خود هم‌ارز I^{ω} است ∎ .

۸ ــ قضیـــــه :

هرفضای متریک کامل جدائی‌پذیر با یک‌زیرمجموعهٔ برل $[0, 1]$ هم‌ارز برل است .

برهـــــان :

چون $I = [0, 1]$ و I^ω هم‌ارزبرل‌اند ،کافی‌است‌نشان‌دهیم‌که‌هرفضای‌متریک جدایی‌پذیرکامل $\langle X, \rho\rangle$ با یک زیرمجموعهٔ برل از I^ω همئومرف است . بدون کاستن از کلیت می‌توان فرض کرد که ρ با یک‌کراندار است . گیریم $\langle r_n\rangle$ یک دنبالهٔ متراکم‌از نقاط و f آن‌نگاشتی‌از X در I^ω است‌که‌به x نقطه‌ای راکه مختص i ام‌آن $\rho(x, r_i)$ ، است مربوط می‌کند . دراین‌صورت f یک نگاشت یک‌به‌یک از X به‌روی یک زیرمجموعهٔ E ، از I^ω است ، زیرا ، اگر $x \neq y$ باشد ، یک r_i وجود دارد بــه‌گــونــه‌ای کــه $\rho(x, r_i) < \rho(y, r_i)$. چون X و I^ω دوفضای‌متریک‌هستند ، پس نگاشت f ، پیوسته است اگر وقتی $x_n \to x$ آنگاه $f(x_n) \to f(x)$. ولی‌اگــر $x_n \to x$ آنگاه برای هر i داریم $\rho(x_n, r_i) \to \rho(x, r_i)$ ، پس هر مختص $f(x_n)$ به‌مختص‌نظیر $f(x)$ می‌گراید .بنابراین $f(x_n) \to f(x)$. (مسئلهٔ ۲۶.۸رابببینید) . نگاشت f^{-1} از E به‌روی X پیوسته است هرگاه از $f(x_n) \to f(x)$ نتیجــه‌شــود $x_n \to x$.ولی‌اگر $f(x_n) \to f(x)$ ، آنگاه‌برای‌هر i داریم $\rho(x_n, r_i) \to \rho(x, r_i)$. برای‌هر $\epsilon > 0$ ، r_i راچنان‌برمی‌گزینیم‌که $\rho(x, r_i) < \epsilon/3$ باشدو N راچنان‌می‌گیریم که برای $n \geq N$ داشته‌باشیم $|\rho(x_n, r_i) - \rho(x, r_i)| < \epsilon/3$. دراین‌صــورت ، برای $n \geq N$ داریم $\rho(x_n, r_i) < 2\epsilon/3$ ، پس $\rho(x_n, x) < \epsilon$. درنتیجه ، f یک همئومرفیسم از X به‌روی E است .

اکنون باید ثابت کنیم که E یک مجموعهٔ برل است . چون E در $F = \overline{E}$ متراکم است . بنابرقضیهٔ ۱۱.۸ کامل‌بودن X ایجاب‌می‌کندکه E نسبت‌به F یک $\mathcal{G}_\delta$ و ازاین‌رو نسبت‌به F یک مجموعهٔ برل است . بنابراین E یک زیرمجموعهٔ برل از I^ω است . ∎

درعمل ، بیان‌اندکی‌قویتر این‌قضیه‌برقراراست : هرفضای‌متریک‌کامل‌جدایی‌پذیر هم‌ارز برل $[0, 1]$ است (کتاب‌کوراتوسکی[1] [۱۶] صفحهٔ ۲۲۷ راببینید) . ولی‌ما ازبیان ضعیفتر که در قضیه ۸ آمده استفاده می‌کنیم .

۹ ــ قضیـــــه :

گیریم X یک فضای متریک کامل جدایی‌پذیر و μ روی X یک اندازهٔ برل است به‌گونه‌ای که $\mu X = 1$ و برای هرمجموعهٔ $\{x\}$ متشکل از یک عنصر ، $\mu\{x\} = 0$ است .

---

1 — Kuratowski

دراین‌صورت یک مجموعهٔ برل $X_0 \subset X$ با $\mu X_0 = 0$ و یک‌زیرمجموعهٔ Y_0 از $[0, 1]$ بااندازهٔ لبگ 0 وجود دارد به‌گونه‌ای‌که‌یک‌هم‌ارزی‌برل ψ بین $X \sim X_0$ و $Y_0 \sim [0, 1]$، وجود دارد ، بااین‌خاصیت‌که $\mu(\psi^{-1}[A]) = mA$ ،که‌درآن m اندازهٔ لبگ‌روی $[0, 1]$ است .

بـرهـــــان :

گیریم φ یک‌هم‌ارزی‌برل X بایک‌زیرمجموعهٔ برل E از $[0, 1]$ است ، واندازهٔ برل ν را روی $[0, 1]$ با $\nu A = \mu(\varphi^{-1}[A])$ تعریف می‌کنیم .گیریم f تابع پخش‌تجمعی ν است‌یعنی $f(x) = \nu[0, x]$. دراین‌صورت f روی $[0, 1]$ یک‌تابع ناکاهشی‌است که‌از سمت‌راست‌پیوسته‌است . چون $f(x) - \lim_{t \to x^-} f(t) = \nu\{x\} = \mu\{\varphi^{-1}[x]\} = 0$ می‌بینیم‌که f پیوسته‌است . چون $f(0) = 0$ و $f(1) = \nu[0, 1] = \mu X = 1$ ، پـس f یک نگاشت پیوسته از $[0, 1]$ به‌روی $[0, 1]$ است . برای‌هر $y \varepsilon [0, 1]$ ، مجموعـــهٔ $f^{-1}[\{y\}]$ یک‌مجموعهٔ بسته‌است و چون f ناکاهشی‌است پس این‌مجموعه یا یک‌فاصلهٔ بسته است یا یک نقطهٔ تنهاست . گیریم M مجموعهٔ y هایی است کـه بـرای آنـهـــا $f^{-1}[\{y\}]$ یک فاصلهٔ ناتباهیده است . چون این فاصله‌ها مجزا هستند ، پس M ، شمارش‌پذیر است . اکنون بنابرمسئلهٔ ۱۲ . ۱۲ داریم $mE = \nu(f^{-1}[E])$ ، پـــس مجموعهٔ $N = f^{-1}[M]$ دارای ν اندازهٔ صفر است . اینک f یـک همئـومـرفیســـم از $N \sim [0, 1]$ به‌روی $M \sim [0, 1]$ است . چون N یک‌مجموعهٔ برل است ، مجموعـــهٔ $X_0 = \varphi^{-1}[N]$ نیز یک مجموعهٔ برل است‌و داریم $\mu X_0 = \nu N = 0$. بنابراین نگاشت $\psi = f \circ \varphi$ یک‌هم‌ارزی‌برل $X \sim X_0$ با $\psi[X \sim X_0]$ است .چون φ یک‌هم‌ارزی‌برل از X به‌روی‌یک‌زیرمجموعهٔ برل از $[0, 1]$ است ،پس $\varphi[X \sim X_0]$ یک‌زیرمجموعهٔ بـــرل $[0, 1]$ مشمول $N \sim [0, 1]$ است و ازاین‌رو یک زیرمجموعهٔ برل از $N \sim [0, 1]$ اســت . بنابراین $\psi[X \sim X_0] = f[\varphi[X \sim X_0]]$ یک زیرمجموعهٔ برل از $M \sim [0, 1]$ و درنتیجه از $[0, 1]$ است . بنابراین ψ یک‌هم‌ارزی‌برل از $X \sim X_0$ با یک زیرمجموعهٔ بـــــرل‌از $[0, 1]$ اســـــت . چـــــون $mA = \mu(\psi^{-1}[A])$ ، پــس داریـــم $m(\psi[X \sim X_0]) = \mu(X \sim X_0) = 1$ ، و مـی‌بینیـــم کــــه مجمـوعـــــهٔ $Y_0 = [0, 1] \sim \psi[X \sim X_0]$ یک زیرمجموعهٔ برل بااندازهٔ لبگ صفر است . ∎

مسئله‌ها

۱۵ ــ گیریم X یک‌فضای‌متریک کامل جدایی‌پذیر و μ روی آن یک اندازهٔ برل است. گیریم E یک‌زیرمجموعهٔ برل X با این‌خاصیت است که‌اگر A یک زیرمجموعهٔ برل E، باشدآنگاه $\mu A = 0$ یا $\mu(E \sim A) = 0$. دراین‌صورت یک‌نقطهٔ x متعلق‌به E وجود دارد به‌گونه‌ای‌که $\mu(E \sim \{x\}) = 0$. [از قضیهٔ ۹ استفاده کنید.]

۱۶ ــ گیریم μ روی‌فضای X یک‌اندازهٔ برل‌است. دراین‌صورت $\mu = \mu_0 + \mu_1$، که درآن برای هر $x \varepsilon X$ ، $\mu_1\{x\} = 0$ است و $\mu_0 E = \sum_{x\varepsilon E} \mu\{x\}$

۴ ــ نگاشتهای مجموعه و نگاشتهای نقطه روی فضاهای متریک کامل

فضای $\langle X, \mathfrak{A}, \mathfrak{N}\rangle$ رایک‌فضای‌اندازه‌پذیر با مجموعه‌های‌پوچ می‌گویند هرگاه $\mathfrak{A}$ یک σ ـ جبر از زیرمجموعه‌های X ، و $\mathfrak{N}$ یک σ ـ ایده‌آل در $\mathfrak{A}$ ، باشد.

هرنگاشت نقطه‌ای اندازه‌پذیر φ از X در $[0, 1]$ یک σ-همئومرفیسم Φ از زیرمجموعه‌های‌برل $[0, 1]$ در σ-جبر $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ ، به‌این‌شکل‌القاء می‌کند که $\Phi(A)$ را برابر ردهٔ هم‌ارزی حاوی $\varphi^{-1}[A]$ بگیریم. درقضیهٔ زیر ثابت می‌شود که به‌وارون، هر σ-همئومرفیسم از زیرمجموعه‌های برل $[0, 1]$ در $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ به‌این‌روش با یک نگاشت نقطهٔ φ از X در $[0, 1]$ القاء می‌شود. این قضیه اساساً" شکل دیگر لم ۱۱ . ۱۰ است.

۱۰ ــ قضیه (سیکورسکی[1]):

گیریم $\langle X, \mathfrak{A}, \mathfrak{N}\rangle$ یک فضای اندازه‌پذیر با مجموعه‌های پوچ، و Φ یک σ-همئومرفیسم از خانوادهٔ $\mathfrak{B}$ ی مجموعه‌های برل $[0, 1]$ در σ-جبر $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ با $\Phi([0, 1]) = X$ است. دراین‌صورت یک‌نگاشت‌اندازه‌پذیر φ از X در $[0, 1]$ وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر $B \varepsilon \mathfrak{B}$ ، $\varphi^{-1}[B]$ به‌ردهٔ هم‌ارزی $\Phi(B)$ تعلق دارد. اگر ψ یک نگاشت نقطهٔ دیگر با این خاصیت باشد، آنگاه $\varphi = \psi$ است مگر روی یک زیرمجموعهٔ متعلق به $\mathfrak{N}$.

---

1 ــ Sikorski

برهـــــان :

برای‌هرعددگویای α ازفاصلهٔ $[0, 1]$ ، گیریم A_α مجموعه‌ای از ردهٔ هم‌ارزی $\Phi([0, \alpha])$ است . می‌توان‌فرض‌کرد $A_1 = X$ اگـــر $\alpha < \beta$ بـــاشـــد ، آنـــگـــاه $\Phi([0, \alpha]) \leq \Phi([0, \beta])$ است ، پس مجموعهٔ $E_{\alpha\beta} = A_\alpha \sim A_\beta$ به $\mathfrak{N}$ تعلق دارد . گیریم $E = \bigcup_{\alpha<\beta} E_{\alpha\beta}$ که در آن α و β عددهای گویا هستند . چون این یک اجتماع شمارش‌پذیر و $\mathfrak{N}$ یک σ-ایده‌آل است ، پس $E \varepsilon \mathfrak{N}$. قـــرار مـــی‌دهیـــم $B_\alpha = A_\alpha \cup E$. دراین‌صورت B_α به‌ردهٔ هم‌ارزی $\Phi([0, \alpha])$ تعلق‌دارد و بـــرای $\alpha < \beta$ داریـــم $B_\alpha \subset B_\beta$

برای هر $x \varepsilon X$ ، گیریم $\varphi(x) = \inf \{\alpha: x \varepsilon B_\alpha\}$. چون $B_1 = X$ اســـت ، پس $\varphi(x)$ برای هر x تعریف شده است ، و $0 \leq \varphi(x) \leq 1$. بنابراین φ نگاشتی از X در $[0, 1]$ است . برای هر t داریم $\{x: \varphi(x) \leq t\} = \bigcup_{\alpha \leq t} B_\alpha$ ازاین‌رو ، φ اندازه‌پذیراست و $\varphi^{-1}[[0, \alpha]] = B_\alpha$. اگر فرض‌کنیم‌که Ψ ، σ-همئومرفیسمی‌از $\mathfrak{B}$ در $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ است که با φ القاء می‌شود ، آنگاه Ψ روی فاصله‌های بسته با دوسر گویا با Φ ، سازگاری دارد . چون Ψ و Φ هردو σ - همئومرفیسم هستند ، خانوادهٔ مجموعه‌هایی‌که روی آنـها این دو همئومرفیسم سازگارند یک σ -جبر است ، پس باید خانوادهٔ $\mathfrak{B}$ ی مجموعه‌های برل باشد .

اگر ψ نگاشت‌دیگری‌از X در $[0, 1]$ باشدکه σ- همئومرفیسم Φ راالقاء می‌کند ، آنگاه برای هرجفت α و β از عددهای گویا داریم :

$$\{x: \varphi(x) \leq \alpha < \beta < \psi(x)\} = \varphi^{-1}[[0, \alpha]] \sim \psi^{-1}[[0, \beta]]$$

پس این مجموعه باید به $\mathfrak{N}$ متعلق باشد ، بنابراین می‌بینیم که مجموعهٔ

$$\{x: \varphi(x) < \psi(x)\} = \bigcup_{\alpha,\beta} \{x: \varphi(x) \leq \alpha < \beta < \psi(x)\}$$

به $\mathfrak{N}$ متعلق است . همچنین داریم :

$$\{x: \varphi(x) > \psi(x)\} \ \varepsilon\ \mathfrak{N}$$

پـــس

$$\{x: \varphi(x) \neq \psi(x)\} \ \varepsilon\ \mathfrak{N}. \blacksquare$$

۱۱ ـ قضیـــــــه:

گیریم $\langle X, \mathfrak{A}, \mathfrak{N} \rangle$ یک‌فضای‌اندازه‌پذیربامجموعه‌های‌پوچ ، Y یک‌فضای‌متریک کامل‌جدایی‌پذیر، و Φ یک σ ـ همئومرفیسم از مجموعه‌های‌برل $\mathfrak{B}$ ی Y در $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ با $\Phi(Y) = X$ ، است . دراین‌صورت یک مجموعهٔ $X_0 \in \mathfrak{N}$ و یک‌نگاشت نقطهٔ φ از $X \sim X_0$ در Y وجود دارد به‌گونه‌ای‌که برای‌هر $B \in \mathfrak{B}$ ، $\varphi^{-1}[B]$ به‌ردهٔ هم‌ارزی $\Phi(B)$ تعلـــــق دارد .

بـرهـــــان:

بنابرقضیهٔ ۸ یک هم‌ارزی‌برل χ از Y بایک‌زیرمجموعهٔ برل E از $[0, 1]$ وجود دارد . برای‌هرزیرمجموعه‌برل B از $[0, 1]$ ، گیریم $\Psi(B) = \Phi(\chi^{-1}[B \cap E])$ دراین‌صورت یک نگاشت ψ از X در $[0, 1]$ وجود دارد که Ψ را القاء می‌کند . گیریم $X_0 = \psi^{-1}[\tilde{E}]$. چون $\psi^{-1}[\tilde{E}] = \Phi(\varnothing)$ ، پس $X_0 \in \mathfrak{N}$. نگاشت $\chi^{-1} \circ \psi$ روی $X \sim X_0$ تعریف شده است و σ ـ همئومرفیسم Φ را القاء می‌کند . ∎

هر σـ همئومرفیسم Φ از یک σـ جبر بول $\mathfrak{A}$ به یک σـ جبر بول $\mathfrak{B}$ یـــک σ ـ ایزومرفیسم نامیده می‌شود هرگاه یک σ ـ همئومرفیسم Ψ از $\mathfrak{B}$ به $\mathfrak{A}$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای‌که $\Psi \circ \Phi$ و $\Phi \circ \Psi$ به‌ترتیب‌روی $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ نگاشتهای همانی باشند . قضیهٔ زیر یک تعمیم یک قضیه از فون نیومن[1] است که یک فرض غیرضروری را پذیرفته است مبنی‌بر این‌که Φ نسبت‌به‌اندازه‌های مناسب روی $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ حافظ اندازه است .

۱۲ ـ قضیـــــــه:

گیریم X و Y دوفضای متریک‌کامل‌جدایی‌پذیر ، $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ مجموعه‌های‌برل آنها ، و $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ به‌ترتیب σ ـ ایده‌آل‌های $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ ی‌آنهاهستند . اگر Φ یک σـ ایزومرفیسم از $\mathfrak{A}/\mathfrak{M}$ به‌روی $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$ باشد آنگاه مجموعه‌های $X_0 \in \mathfrak{M}$ و $Y_0 \in \mathfrak{N}$ و یک نگاشت یک‌به‌یک φ از $Y \sim Y_0$ به‌روی $X \sim X_0$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که φ و φ^{-1} اندازه‌پذیرند و به‌پیمانه $\mathfrak{N}$ داریم $\Phi(A) = \varphi^{-1}[A]$.

---

1 — Von Neumann

برهـــان :

بنابرقضیهٔ ۱۱ یک مجموعهٔ $Y_1 \varepsilon \mathfrak{N}$ و یک نگاشت φ از $Y \sim Y_1$ در X وجود دارد به‌گونه‌ای که به‌پیمانهٔ $\mathfrak{N}$ داریم $\Phi(A) = \varphi^{-1}[A]$. به‌روش مشابه یک مجموعهٔ $X_1 \varepsilon \mathfrak{M}$ ویک‌نگاشت ψ از $X \sim X_1$ در Y وجوددارد به‌گونه‌ای‌که $\Psi(B) = \psi^{-1}[B]$ چون $\Phi \circ \Psi$ روی $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$ همانی است ، نگاشت $\varphi \circ \psi$ می‌تواند روی مجموعهٔ $Y \sim Y_1$ بانگاشت‌همانی‌تنهادریک‌زیرمجموعهٔ $Y_2 \varepsilon \mathfrak{N}$ متفاوت‌باشد . گیریم $Y_0 = Y_1 \cup Y_2$ دراین‌صورت φ روی $Y \sim Y_0$ یک‌به‌یک است و به‌پیمانهٔ $\mathfrak{N}$ و $\mathfrak{M}$ به‌ترتیب داریـــم : $\varphi^{-1}[A] = \Phi(A)$ و $\varphi[B] = \Psi(B)$. بنابراین‌اختلاف $\varphi[Y \sim Y_0]$ و X یـــک مجموعهٔ $X_0 \varepsilon \mathfrak{M}$ اســـت . ∎

متاسفانه‌ممکن‌است مجموعه‌های استثنایی X_0 و Y_0 قضیهٔ پیش اجتناب‌ناپذیر باشند (مسئلهٔ ۱۷ را ببینید) ، ولی می‌توان در حالتهای خاص آنها را حذف کرد . یکی از این حالتها در مسئلهٔ ۱۸ و دیگری در قضیهٔ زیر آمده است .

۱۳ ــ قضیـــــــــه :

گیریم X یک‌فضای متریک کامل جدایی‌پذیر ، $\mathfrak{B}$ خانوادهٔ مجموعه‌های‌برل X ، و $\mathfrak{N}$ یک σ ـ ایده‌آل $\mathfrak{B}$ است . اگر Φ یک σ ـ ایزومرفیسم دلخواه از $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$ به‌روی خودش باشد ، دراین‌صورت یک‌نگاشت یک به یک φ از X به‌روی خود وجود دارد به‌گونه‌ای کـه φ و φ^{-1} اندازه‌پذیر برل هستند ، و به‌پیمانهٔ $\mathfrak{N}$ داریم $\Phi(A) = \varphi^{-1}[A]$

برهـــان :

بنابرقضیهٔ ۱۲ مجموعه‌های X_0 و Y_0 متعلق‌به $\mathfrak{N}$ ، و یک نگاشت‌یک‌به‌یک و اندازه‌پذیر برل ψ از $X \sim Y_0$ به‌روی $X \sim X_0$ وجـــود دارد . گیـریـــــــم

$$Z_{n+1} = \psi[Z_n] \cup \psi^{-1}[Z_n] \quad Z_1 = \psi[Z_0] \cup \psi^{-1}[Z_0], \ Z_0 = X_0 \cup Y_0,$$

چون ψ و ψ^{-1} هردو مجموعه‌های $\mathfrak{N}$ را به‌مجموعه‌های $\mathfrak{N}$ می‌برند ، پس داریم $Z_n \varepsilon \mathfrak{N}$. قرارمی‌دهیم $Z = \bigcup Z_n$. دراین‌صورت $Z \varepsilon \mathfrak{N}$ ، $\psi[Z] \subset Z$ و $\psi^{-1}[Z] \subset Z$ است . بنابراین ψ و ψ^{-1} نگاشتهای یک به یک از $X \sim Z$ در $X \sim Z$ هستند و چـــون

وارون یکدیگرند ، پس باید نگاشتهای از $Z \sim X$ به‌روی $Z \sim X$ باشند . نگاشت φ راچنین تعریف می‌کنیم : $\varphi(x) = \psi(x)$ اگر $x \varepsilon X \sim Z$ باشدو $\varphi(x) = x$ اگر $x \varepsilon Z$ درا ین‌صورت φ یک‌هم‌ارزی‌برل‌از X به‌روی‌خودش است‌که‌به‌جز روی‌یک‌مجموعهٔ $Z \varepsilon \mathfrak{N}$ ، با ψ تطبیق می‌کند . ∎

مسئله‌ها

۱۷ ــ الف ــ نشان دهید که مجموعهٔ استثنائی X_0 قضیهٔ ۱۱ ممکن است اجتناب‌ناپذیر باشد .[گیریم Y یک فضای شمارش‌پذیر با توپولوژی گسسته ، و X فاصلهٔ یکه است ، که‌برای‌آن $\mathfrak{N}$ خانوادهٔ همهٔ مجموعه‌هایی‌است که هیچ عددگویایی دربر ندارد .]

ب ــ نشان دهید که ممکن است مجموعه‌های استثنایی X_0 و Y_0 قضیهٔ ۱۲ اجتناب‌ناپذیر باشند .

۱۸ ــ نشان‌دهیدکه اگر در قضیهٔ ۱۲ ، $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ ، به‌ترتیب σ- ایده‌آلهای $\mathcal{P}(X)$ و $\mathcal{P}(Y)$ بوده و هریک حاوی مجموعه‌ای هم‌توان با مجموعه عددهای حقیقی باشد ، آنگاه می‌توان از مجموعه‌های استثنایی X_0 و Y_0 چشم‌پوشی کرد .

۱۹ ــ گیریم X ، Y ، $\mathfrak{A}$ ، $\mathfrak{B}$ ، $\mathfrak{M}$ ، $\mathfrak{N}$ همانهایی هستند که در قضیهٔ ۱۲ گفته‌شد ، Φ یک σ - همئومرفیسم‌از $\mathfrak{A}/\mathfrak{M}$ در $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$ ، و φ همان‌نگاشت‌قضیهٔ ۱۱است .

الف ــ φ یک‌نگاشت یک‌به‌یک است به‌جز روی‌مجموعهٔ $Y_0 \varepsilon \mathfrak{N}$ اگروتنهااگر یک σ - همئومرفیسم Ψ از $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$ در $\mathfrak{A}/\mathfrak{M}$ وجودداشته‌باشدبه‌گونه‌ای‌که $\Phi \circ \Psi$ روی $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$ همانی باشد .

ب ــ نگاشت φ همهٔ X به‌جز یک مجموعهٔ متعلق‌به $\mathfrak{M}$ را ، می‌پوشاند اگر و تنها اگر از $\Phi(A) = 0$ نتیجه شود $A = 0$.

۵ ــ ایزومتری‌های L^p

اکنون قضیه‌های بند پیش را با نتیجه‌گیری یک خاصیت مشخصهٔ ایزومتری‌های $L^p[0, 1]$ به‌روی‌خود ، یعنی آن نگاشتهای‌خطی U از $L^p[0, 1]$ در خودش به‌گونه‌ای که $\|Uf\| = \|f\|$ ، روشن‌می‌سازیم . برای‌این‌منظور نخست دونابرابری ثابت‌می‌کنیم که یکی در بارهٔ عددهای حقیقی (یا مختلط) و دیگری دربارهٔ عناصر L^p است .

۱۴ ـ لـــــــم :

گیریم η و ξ عددهای حقیقی هستند . دراین‌صورت اگر $\infty > p \geq 2$ باشد ، آنگاه داریم :

$$|\xi + \eta|^p + |\xi - \eta|^p \geq 2(|\xi|^p + |\eta|^p)$$

درحالیکه اگر $0 < p \leq 2$ باشد ، آنگاه داریم :

$$|\xi + \eta|^p + |\xi - \eta|^p \leq 2(|\xi|^p + |\eta|^p).$$

اگر $p \neq 2$ باشد ، برابری فقط هنگامی می‌تواند برقرار باشد که ξ یا η صفر باشند .

برهـــــان :

اگر $p = 2$ باشد ، برای همهٔ ξ ها و همهٔ η ها برابری برقرار اســـــت .
اگر $\infty > p > 2$ باشد ، دراین‌صورت $1 \leq p/2$ ، و بابه‌کاربردن نابرابری هلدر باتوانهای $p/2$ و $p/(p-2)$ درمورد $\alpha^2 + \beta^2$ ، نتیجه می‌دهد .

$$\alpha^2 + \beta^2 \leq (\alpha^p + \beta^p)^{2/p}(1+1)^{(p-2)/p}$$

یـــا

$$\alpha^p + \beta^p \geq 2^{(2-p)/2}(\alpha^2 + \beta^2)^{p/2}. \qquad (۱)$$

اگر $0 < p < 2$ باشد ،آنگاه $4/p$ را جایگزین p می‌سازیم . درایـن‌صـــورت (۱) چنین می‌شود :

$$\alpha^{4/p} + \beta^{4/p} \geq 2^{(p-2)/p}(\alpha^2 + \beta^2)^{2/p}$$

اکنون اگر $\alpha^{p/2}$ و $\beta^{p/2}$ را به‌ترتیب به‌جای α و β قـــرار دهیـــم به‌دست می‌آوریم .

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq 2^{(p-2)/p}(\alpha^p + \beta^p)^{2/p}$$

یـــا

$$\alpha^p + \beta^p \leq 2^{(2-p)/2}(\alpha^2 + \beta^2)^{p/2}. \qquad (۲)$$

چـــون

$$0 \leq \frac{\xi^2}{\xi^2 + \eta^2} \leq 1,$$

داریـــــــم

$$\frac{|\xi|^p}{(\xi^2 + \eta^2)^{p/2}} \leq \frac{\xi^2}{\xi^2 + \eta^2} \qquad 2 < p \tag{۳}$$

و

$$\frac{|\xi|^p}{(\xi^2 + \eta^2)^{p/2}} \geq \frac{\xi^2}{\xi^2 + \eta^2} \qquad p < 2. \tag{۴}$$

نابرابری‌دیگری‌می‌نویسیم‌که‌ازنابرابری (۴)باتعویض جای ξ ، η به‌دست‌می‌آید ، از جمع طرفین این دو نابرابری اخیر نتیجه می‌شود :

$$|\xi|^p + |\eta|^p \leq (\xi^2 + \eta^2)^{p/2} \qquad 2 < p \tag{۵}$$

و

$$|\xi|^p + |\eta|^p \geq (\xi^2 + \eta^2)^{p/2} \qquad p < 2. \tag{۶}$$

می‌توان‌بررسی‌کرد که برابری در (۳) یا ۴ درنتیجه در (۵) یا (۶) تنها هنگامی می‌تواند برقرار باشد که $\xi = 0$ یـا $\eta = 0$.

فرض کنیم $p > 2$ ، ودر (۱) به‌جای α و β به‌ترتیب $|\xi + \eta|$ و $|\xi - \eta|$ ، قرار می‌دهیم . دراین‌صورت بنابر (۵) داریم :

$$\begin{aligned} |\xi + \eta|^p + |\xi - \eta|^p &\geq 2^{(2-p)/2}(|\xi + \eta|^2 + |\xi - \eta|^2)^{p/2} \\ &= 2(\xi^2 + \eta^2)^{p/2} \\ &\geq 2(|\xi|^p + |\eta|^p) \end{aligned}$$

به‌این‌ترتیب نخستین نابرابری لم ثابت شد ، نابرابری دوم باروش مشابهـی بااستفاده از (۲) و (۶) به‌دست می‌آید . می‌بینیم که در هر حال برای $p \neq 2$ برابری در (۳) و (۴) تنـها برای $\xi = 0$ یا $\eta = 0$ می‌تواند برقرار باشد . ∎

از لم ۱۴ با انتگرال‌گیری،لم زیر نتیجه می‌شود .

۱۵ ــ لــــــــم :

گیریم $1 \le p < \infty$ ، $p \neq 2$ و f و g به L^p تعلق دارند : دراین‌صورت برابـــری
$$\|f+g\|^p + \|f-g\|^p = 2(\|f\|^p + \|g\|^p)$$
برقرار است اگر و تنها اگر $f \cdot g = 0$ تقریبا " همه‌جا برقرار باشد .

۱۶ ــ قضیـــه (لامپـرتـــــی [1]) :

گیریم $1 \le p < \infty$ ، $p \neq 2$ ،وگیریم U یک‌تبدیل خطی از $L^p[0, 1]$ در خودش است به‌گونه‌ای که $\|Uf\|_p = \|f\|_p$. دراین‌صورت یک نگاشت اندازه‌پذیربرل φ از $[0, 1]$ به‌روی (تقریبا " همهٔ) $[0, 1]$ و یک $h \in L^p$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که :
$$Uf = h \cdot (f \circ \varphi)$$
تابع h به‌طوریکتا (باهم‌ارزی تقریبا " همه‌جا) تعیین می‌شود و تابـع φ روی مجموعه‌ای‌که‌درآن $h \neq 0$ است به‌طوریکتا (باهم‌ارزی تقریبا " همه‌جا) تعیین‌می‌گردد .
برای هر مجموعهٔ برل E داریم :
$$\int_{\varphi^{-1}[E]} |h|^p \, dt = \int_E dt$$

بــرهـــــان :

تکیه‌گاه‌تابع f را با‌مجموعهٔ $\{t: f(t) \neq 0\}$ تعریف‌می‌کنیم . اگر $f \in L^p$ ، باشد ، آنگاه تکیه‌گاه f تنـها به‌پیمانهٔ مجموعه‌های پوچ تعریف شده است . بنابراین برای $f \in L^p$ تکیه‌گاه f عنصری‌است‌از σ جبر $\mathcal{B}/\mathfrak{N}$ ازمجموعه‌های برل به‌پیمانهٔ مجموعه‌های باندازهٔ صفر . نگاشت Φ ازمجموعه‌های‌برل $[0, 1]$ درمجموعه‌های‌برل‌به‌پیمانهٔ مجموعه‌های پوچ‌را با برابرگذاردن $\Phi(A)$ وتکیه‌گاه $U\chi_A$ تعریف‌می‌کنیم . اگر A و B مجزاباشند ، بنابر لم ۱۵ داریم :
$$\|\chi_A + \chi_B\|^p + \|\chi_A - \chi_B\|^p = 2(\|\chi_A\|^p + \|\chi_B\|^p)$$

چون U خطی است و نرم را حفظ می‌کند ، باز بااستفاده از لم ۱۵ داریم :
$$(U\chi_A) \cdot (U\chi_B) = 0 \quad \text{تقریبا " همه‌جا}$$

---
[1] — Lamperti

بنابراین Φ مجموعه‌های مجزا را به مجموعه‌های مجزا می‌برد. اگر A و B مجزا باشند آنگاه داریم $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$ ، پس $U\chi_{A \cup B} = U\chi_A + U\chi_B$ چون دو تابع سمت راست دارای تکیه‌گاه مجزا هستند، می‌بینیم که برای مجموعه‌های مجزا داریم $\Phi(A \cup B) = \Phi(A) \cup \Phi(B)$ ، ازاین‌رو برای هر جفت از مجموعه‌های برل نیز این برابری برقرار است.

اگر $\Phi[[0, 1]] = E$ ، آنگاه داریم $\Phi(\tilde{A}) = E \sim \Phi(A)$ بنابراین Φ یک همئومرفیسم از $\mathfrak{B}$ در جبر زیرمجموعه‌های برل E است. اگر $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ و A_i ها مجزا باشند، در L^p داریم:

$$\chi_A = \lim \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}$$

پس بنابر پیوستگی U داریم:

$$U\chi_A = \lim \sum_{i=1}^{n} U\chi_{A_i}$$

ازاین‌رو $\Phi(A) = \bigcup \Phi(A_i)$ و Φ یک σ-همئومرفیسم است.

بنابر قضیهٔ ۱۰ یک نگاشت اندازه‌پذیر برل φ از E در $[0, 1]$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که $\Phi(A) = \varphi^{-1}[A]$. چون Φ تنها مجموعه‌های با اندازهٔ صفر را به مجموعه‌های با اندازهٔ صفر می‌برد، نگاشت φ باید روی $[0, 1]$ به‌جز یک مجموعهٔ با اندازهٔ صفر پوشا باشد. φ را روی همهٔ $[0, 1]$ با قراردادن $\varphi(t) = 0$ برای $t \varepsilon E$ گسترش می‌دهیم.

تابع $1 = \chi_{[0,1]}$ به L^p تعلق دارد. گیریم $h = U(1)$ ، دراین‌صورت $h \varepsilon L^p$ و تکیه‌گاه h مجموعهٔ E است. اگر A یک مجموعهٔ برل $[0, 1]$ باشد داریم $1 = \chi_A + \chi_{\tilde{A}}$. ازاین‌رو $h = U\chi_A + U\chi_{\tilde{A}}$. ولی تابعهای سمت راست دارای تکیه‌گاههای مجزا هستند، پس $U\chi_A$ باید روی تکیه‌گاه χ_A برابر h باشد. بنابراین $U\chi_A = h \cdot \chi_{\Phi(A)} = h \cdot (\chi_A \circ \varphi)$. ازاین‌رو، اگر ψ تابع سادهٔ دلخواهی باشد، باید داشته‌باشیم $U\psi = h \cdot (\psi \circ \varphi)$. چون هر تابع متعلق به L^p را می‌توان به‌طور تقریب با یک تابع ساده جانشین کرد به‌گونه‌ای که نرم دو تابع برابر باشد و چون U حافظ نرم است برای هر $f \varepsilon L^p$ داریم $Uf = h \cdot (f \circ \varphi)$.

اکنون بقیهٔ قضیه به‌آسانی نتیجه می‌شود. ▌

مسئلــــــه‌ها

۲۰ ــ الف ــ نشان‌دهیدکه‌اگر تبدیل‌خطی U در $L^p[0,1]$ پوشا باشد آنگاه اندازهٔ $X \sim E$ صفر است .

ب ــ دراین‌حالت نشان دهید که φ اساسا " یک‌به‌یک است (یعنی φ یک‌به‌یک است به‌جز روی مجموعه‌ای بااندازهٔ صفر) ، φ^{-1} اندازه‌پذیر است و φ و φ^{-1} مجموعه‌های بااندازهٔ صفر را به‌مجموعه‌های بااندازهٔ صفر می‌برند .[**راهنمـایـــــی** : قضیهٔ ۱۶ را درمورد تبدیل U^{-1} ، یکتابی قضیه را درمورد $I = UU^{-1}$ و $I = U^{-1}U$ به‌کار ببرید]

پ ــ نشان‌دهیدکه دراین‌حالت اگر اندازهٔ μ را با $\mu A = m(\varphi[A])$ تعریف کنیم آنگاه داریم ، $|h|^p = \left[\dfrac{d\mu}{dm}\right]$.

۲۱ ــ برای‌فضاهای اندازهٔ باپایان کلی درمورد ایزومتری‌های $L^p(X, \mu)$ چه می‌توان‌گفت ؟ (دراینجا نمی‌توان یک نگاشت نقطه‌ای یافت و باید به‌نگاشت مجموعه‌ای Φ اکتفـا کـــرد) .

۲۲ ــ نشان دهید که قضیهٔ ۱۶ برای $L^2[0, 1]$ درست نیست .

۲۳ ــ فضای‌باناخ X به‌طوریکنواخت کوژ نامیده‌می‌شوداگربرای‌هر $\epsilon > 0$ داده شده یک عدد $\eta < 1$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که وقتی u و v دوعنصر از X در $\|u\| = \|v\| = 1$ و $\|u - v\| \geq 2\epsilon$ صدق‌می‌کنندداریم $\|u + v\| \leq 2\eta$ بااستفاده از لم ۱۵ نشان دهید که اگر $p \geq 2$ باشد L^p به‌طوریکنواخت کوژ است و می‌توان η را برابر $\eta = (1 - \epsilon^p)^{\frac{1}{p}}$ گـرفــــــت .

سرانجام

در بخش نخست کتاب بسیاری از نظریهٔ اساسی توابع یک متغیر حقیقی را درنظر گرفتیم . این مواد به‌طور تقریبی در سه رده جای می‌گیرند : مجموعه‌های عددهای حقیقی و خاصیتهای آنها : اندازه و انتگرال‌گیری ، و خاصیتهای تابعهای حقیقی مقدار مانند پیوستگی ، مشتق‌پذیری . کتابهای [۲۰] نوشتهٔ ساکس و [۱۲] نوشتهٔ هوبسون یک شرح بسیار عالی از این نظریهٔ کلاسیک ، به‌ویژه آن نتیجه‌هایی که قویا " به‌خواص بخصوصی از عددهای حقیقی بستگی دارند ، می‌دهند . عرضهٔ بسیار زیبایی از این نظریهٔ کلاسیک در بخش اول کتاب [۱۸] نوشتهٔ ریتس ـ ناگی داده شده است . کتابهای [۳] نوشتهٔ کاراتئودوری و [۲۴] نوشتهٔ دولاواله پوسن ، احساسی درمورد نوع بررسی این موضوع توسط پیشینیان را به‌خواننده می‌دهد . مبحثی از نظریهٔ کلاسیک تابعهای یک متغیر حقیقی که در اینجا حذف شده ، نظریهٔ سری فوریه است ، و مرجع خوبی برای این مبحث کتاب [۲۵] نوشتهٔ زیگموند است . مبحث دیگری که حذف کردیم نظریهٔ کلاسیک تابعهای چند متغیر حقیقی است . هرچند که بسیاری از این نظریه در بخش سوم تحت عنوان نظریهٔ عمومی انتگرال‌گیری طبقه‌بندی شده است ، به‌خصوص قضیهٔ فوبینی درآنجا بیان شده است ، خواص دیگری وجود دارند که به‌ساختمان خاص $\mathbf{R}^n$ بستگی دارند . این خواص شامل قسمت عمدهٔ نظریهٔ مشتق‌گیری جزیی ، تعویض متغیر ، و انتگرال‌گیری جزء به‌جزء است . بسیاری از این موضوعات در کتاب [۲۰] نوشتهٔ ساکس و کتاب [۶] نوشتهٔ ادواردز بیان شده‌اند .

در فصلهای ۷ ، ۸ ، و ۹ جنبه‌های گوناگون توپولوژی عمومی را مورد توجه قرار داده‌ایم . برای بررسی مفصل این موضوع کتاب [۱۴] نوشتهٔ کلی مرجع عالی است ، و در آن کتاب می‌توان مراجع گوناگون نوشتارهای توپولوژی را یافت . علاوه بر موضوعاتی که به‌طور خلاصه توصیف کردیم ، فصلی دربارهٔ فضاهای یکنواخت وجود دارد که فضاهای متریک و توپولوژی فضاهای خطی را تعمیم می‌دهد به‌طوری که مفاهیم کمال و پیوستگی یکنواخت معنی دارند . کتاب [۱۶] نوشتهٔ کوراتوسکی درمورد خواص ژرفتر فضاهای متریک و مجموعه‌های بـرل کتاب خوبی است .

در فصل ۱۰ بعضی از جنبه‌های هندسی فضاهای باناخ را تشریح کردیم ، و فضاهای خطی توپولوژیک به‌اندازه‌ای که برای توپولوژی‌های کم‌توان و کم‌توان* در فضاهای بـاناخ

موردنیازبود ، بررسی‌شده‌اند ، قضیه‌های (هان ــ باناخ ، نموداربسته ، کرانداری‌یکنواخت ، آلااوقلو ، کرین‌میلمن) برخی از ابزارهای عمومی مفید در دسترس آنالیز کارها هستند . قضیه‌های‌مفیدی‌که‌دراینجاخاطرنشان‌نکردیم ، قضیه‌های‌نقطهٔ ــ ثابت شودرولری [۱] هستند کاتالوگ‌دقیقی‌ازخاصیتهای " هندسی " چنین‌فضاهایی در کتاب[۴]نوشتهٔ دی [۲]، داده‌شده است ، که درعین‌حال یک راهنمای عالی برای نوشتارهاست . کتاب[۱] نوشتهٔ باناخ ، بسیار خواندنی است ، گرچه ازجهت نبودن توپولوژی‌عمومی در زمان تدوین کتاب نقص دارد و مفهوم‌توپولوژی‌کم‌توان به‌طورکامل برحسب همگرایی دنباله‌ای بررسی شده است . بررسی‌دقیقی از فضاهای‌برداری‌توپولوژیک‌را می‌توان در کتاب[۱۵]نوشتهٔ کلی ــ نامیوکا [۳] یا در کتاب[۲۱]نوشتهٔ شائفر [۴] یافت . مبحث عمده‌ای از آنالیز جدید را که دراینجا خاطرنشان‌نساختیم ، نظریهٔ عملگرهای‌خطی روی یک فضای‌باناخ یا یک فضای هیلبرت است . بحث این موضوعها ، از دیدگاههای گوناگون را می‌توان در کتاب[۵]نوشتهٔ دونفرد ــ شوارتز ، کتاب[۶]نوشتهٔ ادواردزکتاب[۱۲]نوشتهٔ هیل ــ فیلیپس [۵]، کتاب[۱۸] نوشتهٔ ریس ــ ناگی [۶] یافت .

دربخش سه بحث جامع ومنطقی ازنظریهٔ اندازه و انتگرال‌گیری‌مجرد داده‌ایم . قضیه‌های عمده عبارتند از ، قضیه‌های همگرایی ، قضیهٔ رادن ــ نیکودیم ، قضیهٔ گسترش اندازه‌ها روی یک جبر ، اندازه‌های حاصلضرب و قضیه‌های فوبینی ــ تونلی ؛ هم‌ارزی انتگرال‌گیری مجرد نسبت به انتگرال‌گیری برپایهٔ یک اندازه ، و نمایش فونکسیونلهای کراندار خطی روی $C(X)$.

برای‌توصیف‌کامل نظریهٔ‌اندازه‌برپایهٔ σ ـ حلقه‌ها و نظریهٔ‌اندازه در فضاهای موضعا " فشرده ، خواننده باید به‌کتاب[۸]نوشتهٔ هالموس رجوع کند ، که حاوی مطالب بسیارخواندنی و جامع نظریهٔ‌اندازه است . برای بررسی اصولی نظریهٔ انتگرال‌گیری در فضاهای موضعا " فشرده ، کتاب[۱۷]نوشتهٔ لومیس [۷] مرجع خوبی است .

شاخهٔ مهمی‌ازنظریهٔ‌اندازه‌راکه‌دراینجا لمس‌نکردیم ، نظریهٔ‌اندازه هاراست [۸] که نظریهٔ اندازه‌ای است که در یک فضای اندازه تحت یک گروه از تبدیلات پایاست .

---

۱ — Schauder and Leray

۲ — Day

۳ — Kelly-Namioka

۴ — Schaefer

۵ — Hille-Phillips

۶ — Riesz-Nagy

۷ — Loomis

۸ — Haar

مقدمه‌ای زیبا برآن در پیوست باناخ به‌کتاب[۲۰]نوشتهٔ ساکس، و یک بررسی کامل در کتاب[۸]نوشتهٔ هالموس، و یک بررسی برحسب انتگرال دانیل در کتاب[۱۷]نوشتهٔ لومیس، آمده است .

جنبهٔ دیگری از نظریهٔ اندازه، نظریهٔ ارگودیک است که عبارت‌ازمطالعهٔ خواص یک تبدیل حافظ اندازه و تکرارهای آن‌است . مطالب‌خواندنی دراین‌مورد را می توان در کتاب[۱۳] نوشتهٔ هوف [1] و کتاب [۱۰] نوشتهٔ هالموس یافت .

شماری از کاربردهای آنالیز حقیقی برنظریهٔ تابعهایی از یک‌متغیر مختلط وجود دارد، و خواننده می‌تواند بررسی زیبایی از بسیاری‌ازآنهارا در کتاب[۱۹]نوشتهٔ رودین بیابد .

---

۱ — Hopf

کتابنامه

[1] S. BANACH, *Théorie des Opérations Linéaires* (Monografje Matematyczne, Vol. 1), Warsaw, 1932.

[2] G. BIRKHOFF and S. MAC LANE, *A Survey of Modern Algebra* (3rd ed.), New York, Macmillan, 1965.

[3] C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Leipzig-Berlin, 1927.

[4] M. M. DAY, *Normed Linear Spaces* (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, No. 21), Berlin, Julius Springer, 1958.

[5] N. DUNFORD and J. SCHWARTZ, *Linear Operators*, New York, Interscience, 1958.

[6] R. E. EDWARDS, *Functional Analysis, Theory and Applications*, New York, Holt, Rinehart and Winston, 1965.

[7] A. M. GLEASON, *Fundamentals of Abstract Analysis*, Reading, Mass., Addison-Wesley, 1966.

[8] P. R. HALMOS, *Measure Theory*, New York, Van Nostrand, 1950.

[9] P. R. HALMOS, *Naive Set Theory*, Princeton, Van Nostrand, 1960.

[10] P. R. HALMOS, *Entropy in Ergodic Theory*, Chicago, Univ. of Chicago Press, 1959.

[11] E. HILLE and R. PHILLIPS, *Functional Analysis and Semi-Groups* (American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 31), Providence, 1957.

[12] E. W. HOBSON, *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series* (3rd ed.), Vol. 1, Cambridge, 1927.

[13] E. HOPF, *Ergodentheorie* (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, No. 5), Berlin, Julius Springer, 1937.

[14] J. L. KELLEY, *General Topology*, New York, Van Nostrand, 1955.

[15] J. L. KELLEY, I. NAMIOKA, *et al.*, *Linear Topological Spaces*, Princeton, Van Nostrand, 1963.

[16] C. KURATOWSKI, *Topologie I* (Monografje Matematyczne, Vol. 3), Warsaw, 1933.

[17] L. H. LOOMIS, *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis*, New York, Van Nostrand, 1953.

[18] F. RIESZ and B. NAGY, *Functional Analysis* (English ed.), New York, Ungar, 1956.

[19] W. RUDIN, *Real and Complex Analysis*, New York, McGraw-Hill, 1966.

[20] S. SAKS, *Theory of the Integral* (Monografje Matematyczne, Vol. 7), Warsaw, 1937.

[21] H. H. SCHAEFER, *Topological Vector Spaces*, New York, Macmillan, 1966.

[22] P. C. SUPPES, *Introduction to Logic*, Princeton, Van Nostrand, 1957.

[23] P. C. SUPPES, *Axiomatic Set Theory*, Princeton, Van Nostrand, 1960.

[24] C. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Intégrales de Lebesgue, Fonctions d'ensemble, Classe de Baire*, Paris, 1916.

[25] A. ZYGMUND, *Trigonometrical Series* (Monografje Matematyczne, Vol. 5), Warsaw, 1935.

راهنمای نمادها

A و B	$A \& B$
A یا B	$A \vee B$
نفی A	$\neg A$
اگر A ، آنگاه B	$A \Rightarrow B$
A اگروتنها اگر B	$A \Leftrightarrow B$
برای همهٔ x	(x)
x ی‌هست	$(\exists x)$
پایان برهان	$\blacksquare$
مجموعهٔ عددهای طبیعی	$\mathbf{N}$
x عضوی است از A	$x \in A$
A زیر مجموعه‌ای‌است از B	$A \subset B$
مجموعهٔ x های X با $P(x)$	$\{x \in X: P(x)\}$
مجموعه تهی	$\varnothing$
مجموعه‌تک‌عضوی	$\{x\}$
جفت بی ترتیب	$\{x, y\}$
جفت مرتب	$\langle x, y \rangle$
فاصلهٔ بسته	$[a, b]$
فاصله باز	(a, b)
حاصلضرب مستقیم X و Y	$X \times Y$
حاصلضرب مستقیم	$\bigtimes_{\lambda} X_{\lambda}$
حاصلضرب مستقیم	X^{A}
ترکیب	$g \circ f$
تحدید f به A	$f \mid A$

دنبالهٔ باپایان	$\langle x_i \rangle_{i=1}^{n}$
دنبالهٔ بی‌پایان	$\langle x_i \rangle_{i=1}^{\infty}$
مجموعهٔ زیرمجموعه‌های X	$\mathcal{P}(X)$
اشتراک	$A \cap B$
اجتماع	$A \cup B$
مکمل A	$\tilde{A}$
تفاضل متقارن	$A \triangle B$
اشتراک A در $\mathcal{C}$	$\bigcap\limits_{A\in\mathcal{C}} A$, $\bigcap \{A: A \in \mathcal{C}\}$
مجموعهٔ عددهای حقیقی	$\mathbf{R}$
$\max(x, y)$	$x \vee y$
$\min(x, y)$	$x \wedge y$
حد بالا	$\overline{\lim}$
مجموعه‌های خاص برل	$\mathcal{F}_\sigma$
مجموعه‌های خاص برل	$\mathcal{G}_\delta$
درازی I	$l(I)$
ردهٔ مجموعه‌های لبگ اندازه‌پذیر	$\mathfrak{M}$
تابع مشخص A	χ_A
ردهٔ تابعهای پیوسته روی $[0, 1]$	$C[0, 1]$
فضای اقلیدسی	$\mathbf{R}^n$
گوی به‌مرکز x	$S_{x,\delta}$
بستار E	$\overline{E}$
اندازه‌های متقابلاً "استثنایی	$\mu \perp \nu$
به‌جز برای یک مجموعهٔ E، با $\mu E = 0$	a.e. $[\mu]$
ν نسبت به μ به‌طور مطلق پیوسته است	$\nu \ll \mu$
مشتق رادن ـ نیکودیم	$\left[\dfrac{d\nu}{d\mu}\right]$
اجتماع شمارش‌پذیر از $\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}_\sigma$
اندازهٔ حاصلضرب	$\mu \times \nu$

واژه‌نامه

A

Abbreviation	اختصار
Absolute value of a measure	قدر مطلق یک اندازه
Absolutely Continuous	پیوستهٔ مطلق
- function	تابع ـ
- measure	اندازهٔ ـ
Absolutely Summable	جمع پذیر مطلق
Accumulation point	نقطهٔ تجمع
Acquaintance	آشنایی
Additive	جمعی
Algebra	جبر
- of functions	ـ توابع
Almost every where	تقریبا" همه‌جا
A.e.	ت . هـ .
Annihilator	پوچ‌ساز
Approach	شیوه
Arcwise	کمانوار
Approximate	نزدیک‌ساختن
Associative	شرکت‌پذیر
Axiom	اصل موضوع
- of choice	ـ انتخاب

B

Baire category theorem	قضیهٔ کاتگوری بیر
Baire measure	اندازهٔ بیر
Baire set	مجموعهٔ بیر
Banach limit	حد باناخ
Banach space	فضای باناخ

Base for a topology	پایه برای یک توپولوژی
Basic	اساسی
Bijective	یک‌به‌یک و پوشا
Binary expansion	بسط دوتایی
Bolzano weierstrass property	خاصیت بولتسانو-وایرشتراس
Boolean algebra	جبر بول
Boolean σ-algebra	σ-جبر بول
Borel equivalence	هم‌ارزی برل
Borel extention of a measure	بسط برل یک‌اندازه
Borel field	هیأت برل
Borel measurability	اندازه‌پذیری برل
Borel measure	اندازهٔ برل
Borel set	مجموعهٔ برل
Bound	کران
Bounded Convergence theorem	قضیهٔ همگرایی‌کراندار
Bounded linear functional	فونکسیونل‌خطی‌کراندار
Bounded operator	عملگر کراندار
Bounded set	مجموعهٔ کراندار
Bounded variation	تغییر کراندار
Boundedness, total	کرانداری کلی

C

Cantor ternary function	تابع سه‌تایی کانتور
Cantor ternary set	مجموعهٔ سه‌تایی کانتور
Carathèodory extension theorem	قضیهٔ گسترش‌کاراتئودوری
Carathéodory outer measure	اندازهٔ بیرونی کاراتئودوری
Cardinal number	عدد اصلی
Category	کاتگوری
Cauchy criterion	محک‌کشی
Cauchy sequence	دنبالهٔ کشی
- in measure	دنبالهٔ‌کشی‌در اندازه

Change of variable	تعویض متغیر
Characteristic function	تابع مشخص
Choice	انتخاب
Closed graph theorem	قضیهٔ نمودار بسته
Closed set	مجموعهٔ بسته
Closure point	نقطهٔ بستار
Cluster point	نقطهٔ تجمع
Collection	دسته
Compactification	فشرده‌سازی
Compactness	فشردگی
Complement	مکمل
Complete measure	اندازهٔ کامل
Complete orthonormal system	دستگاه متعامد یکهٔ کامل
Complete space	فضای کامل
Completely regular space	فضای کاملا" منظم
Completion	کامل‌سازی
Complex measure	اندازهٔ مختلط
Composition	ترکیب
Conjugate space	فضای مزدوج
Connected space	فضای همبند
Continuity	پیوستگی
Continuous	پیوسته
- function	تابع ــ
Contraposition	عکس نقیض
Convergence	همگرایی
-in mean	ــ در میانگین
-in measure	ــ در اندازه
Pointwise-	ــ نقطه‌وار
Uniform -	ــ یکنواخت
Convex	کوژ

- function	تابع ـ
- hull	قشر (پوستهٔ) ـ
- set	مجموعهٔ ـ
Convexity	کوژی
Correspondence	تناظر
Countable	شمارش‌پذیر
- Compactness	فشردگی ـ
- Subadditive	زیرجمعی ـ
Counting measure	اندازهٔ شمارنده
Cover	پوشش
Criterion	محک
Cube	مکعب
Cumulative distribution function	تابع پخش تجمعی
Cummutative	جابه‌جایی

D

Daniel	دانیل
- functional	فوکسیونل ـ
- integral	انتگرال ـ
Decimal expansion	بسط اعشاری
Decomposable measure	اندازهٔ تجزیه‌پذیر
Decreasing	کاهشی
Definition	تعریف
Dense	متراکم (چگال)
Dense subset	زیرمجموعهٔ ـ
Derivate	اشتقاق
Diagonal	قطری
Diffrentiation	مشتق‌گیری
Dimension	بعـــد
Dini Theorem	قضیهٔ دینی
Direct product	حاصلضرب مستقیم

Directed system	دستگاه سودار
Discrete topology	توپولوژی‌دیسکرت (گسسته)
Disjoint	مجزا
Domain	دامنه
Dual space	فضای‌دوآل (دوگان)

E

Egoroff's Theorem	قضیهٔ اگوروف
Element	عنصر (عضو)
Embedding	غوطه‌ورساز
Empty	تهـی
- Set	مجموعهٔ ـــ
Envelopes of a function	پوش‌های یک‌تابع
Epilogue	سرانجام
Equicontinuous	همپیوسته
Equivalence	هم‌ارزی
- of metrics	ـ متریکها
- of norms	ـ نرمها
Equivalence, uniform	هم‌ارزی‌یکنواخت
Equivalence relation	رابطهٔ هم‌ارزی
Equivalent	هم‌ارز
Expression	عبارت
Extended real numbers	عددهای‌حقیقی‌گسترش‌یافته
Extended real valued function	تابع با مقدارهای‌حقیقی‌گسترش‌یافته
Extreme	نـهایی
- point	نقطهٔ ـــ

F

Family	خانواده
Fatou's Lemma	لم‌فاتو
Field	هیأت
Finite	باپایان

- intersection property	خاصیت اشتراک ـ
- measure	اندازه ـ
- set	مجموعهٔ ـ
First axiom of countability	اصل موضوع اول شمارشپذیری
First Category	کاتگوری نخست
First element	عنصر نخست
Fubini Theorem	قضیهٔ فوبینی
Function	تابع
Cantor ternary-	ـ سه‌تایی کانتور
Characteristic -	ـ مشخص
Choice -	ـ انتخاب
Continuous-	ـ پیوسته
absolutely continuous-	ـ پیوستهٔ مطلق
semicontinuous-	ـ نیمپیوسته
Convex-	ـ کوژ
measurable-	ـ اندازه پذیر
set-	ـ مجموعه
simple-	ـ ساده
Functional	فونکسیونل
Fundamental	بنیادی

G

Generalized Cantor set	مجموعهٔ تعمیم یافتهٔ کانتور
Graph	نمودار

H

Hahn-Banach Theorem	قضیهٔ هان ـ باناخ
Hahn decomposition	تجزیهٔ هان
Half-open interval topology	توپولژی فاصلهٔ نیمباز
Hausdorff Maximal principle	اصل ماکسیمال هاوسدرف
Hausdorff space	فضای هاوسدورف

Heine-Borel Theorem	قضیهٔ هاینه ـ برل
Hilbert Cube	مکعب هیلبرت
Hilbert space	فضای هیلبرت
Holder Inequality	نابرابری هولدر
Homeomorphism	همئومرفیسم
Uniform-	همئومرفیسم یکنواخت
Homomorphism	همومرفیسم
lattice-	ـ شبکه

I

Improve	بهبود بخشیدن
Incomplete	ناکامل
Induction	استقراء
Integer	عدد درست مثبت
Interior	درون (درونی)
Internal	اندرون (اندرونی)
- point	نقطه ـ
Intersection	اشتراک
Interval	فاصله
Intrinsec property	خاصیت ذاتی
Invariant	پایا
Inverse image	سایهٔ وارون
Isolated set	مجموعه منفرد
Isometry	ایزومتری
Isomorphism	ایزومرفیسم
Iterate	تکرار

J

Jensen Inequality	نابرابری جنس
Jordan decomposition	تجزیه ژوردان

K

Kernel	هسته
measurable-	ـ اندازه پذیر
Kernel of an operator	ـ یک عملگر
Krein-Milman Theorem	قضیهٔ کرین ـ میلمن

L

Lamperti Theorem	قضیهٔ لامپرتی
Lattice	شبکه
Least element	کوچکترین عنصر
Lebesgue Convergence Theorem	قضیهٔ همگرایی لبگ
Lebesgue decomposition	تجزیه لبگ
Lebesgue Integral	انتگرال لبگ
Lebesgue measure	اندازهٔ لبگ
Lebesgue-Stieltjes Integral	انتگرال لبگ ـ استیلتیس
Lebesgue's Theorem	قضیهٔ لبگ
Length	درازی
Limit	حد
- superior	حد بالایی
Lindelöf Theorem	قضیهٔ لیندلف
Linear functional	فونکسیونل خطی
Linear operator	عملگر خطی
Linear ordering	ترتیب خطی
Linear space	فضای خطی
Linear transformation	تبدیل خطی
Local base	پایهٔ موضعی
Locally compact space	فضای موضعاً "فشرده
Locally Convex space	فضای کوژموضعی
Locally measurable	اندازه پذیر موضعی،
Lower envelope	پوش پایینی

Lower semicontinuous	نیمپیوستهٔ پایینی
Lusin's Theorem	قضیهٔ لوزین

M

Manifold	مانیفلد
Manifold, linear	مانیفلد خطی
Maximal element	عنصرماکسیمال
Measurable	اندازه پذیر
- Cover	پوشش ـ
- function	تابع ـ
- kernel	هستهٔ ـ
- mapping	نگاشت ـ
- set	مجموعهٔ ـ
- space	فضای ـ
Measure	اندازه
- on an algebra	ـ روی یک جبر
Baire-	ـ بیر
Borel-	ـ برل
Complex-	ـ مختلط
Counting-	ـ شمارنده
Inner-	ـ درونی
Lebesgue-	ـ لبگ
Outer-	ـ بیرونی
Caratheodory outer-	ـ بیرونی کاراتئودوری
Product-	ـ حاصلضرب
Signed-	ـ علامت دار
- Algebra	جبر ـ
Separable- -	ـ ـ جدایی پذیر
Metric	متریک
-space	فضای ـ
Metrizable space	فضای متریک پذیر

Minimal element	عنصر مینیمال
Minkowski Inequality	نابرابری مینکوسکی
Modulo	پیمانه
Monotone	یکنوا
- function	تابع ـ
- sequence	دنبالهٔ ـ
Monotone Convergence Theorem	قضیهٔ همگرائی یکنوا
Monotonicity	یکنوایی

N

Natural number	عدد طبیعی
Negative variation	تغییر منفی
Net	تور
Nonoverlap	ناهمپوش
Norm	نـرم
Normal space	فضای نرمال
Nowhere dense	هیچ جا متراکم
Null	پوچ
- function	تابع ـ
- set	مجموعه ـ

O

One-to-one	یک به‌یک
- Correspondence	تناظر یک‌به‌یک
On to	پـوشا
Open	باز
- mapping	نگاشت ـ
- - theorem	قضیهٔ ـ ـ
- set	مجموعهٔ ـ
Operator	عملگـر
linear-	عملگر خطی

Order	ترتیب
Ordered	مرتب
- field	هیاءت ـ
- pair	جفت ـ
Ordering	ترتیب ـ ترتیبی
- Relation	رابطهٔ ـ
Ordinal	ترتیبی
- number	عدد ـ
Orthogonal	متعامد
Orthonormal	متعامدیکه
- system	دستگاه ـ
Outer measure	اندازهٔ بیرونی
Caratheodory-	اندازهٔ بیرونی‌کار ا تئودوری
Regalar-	اندازه بیرونی‌منظم
Overlap	همپوش

P

پ

Partial ordering	ترتیب جزیی
Partially ordered	مرتب جزیی
Point of Closure	نقطهٔ بستار
Pointwise Convergence	همگرائی نقطه‌وار
Polygonal function	تابع چندضلعی
Positive set	مجموعهٔ مثبت
Positive variation	تغییر مثبت
Postulate	اصل موضوع پذیرائی
Product	حاصلضرب
direct-	ـ مستقیم
- measure	اندازهٔ ـ
- topology	توپولژی ـ
Projection	تصویر
Proper map	نگار سره

Property	خاصیت
Proposition	گزاره
Pseudometric	شبه متریک
Pseudonorm	شبه نرم
Q	
Quotient	حاصل تقسیم
R	
Radon-Nikodym derivative	مشتق رادن ــ نیکودیم
- Theorem	قضیهٔ ــ
Range	برد
Real number	عدد حقیقی
Recursive definition	تعریف بازگشتی
Reductio ad absurdum	برهان خلف
Reflexive	بازتابی
- partial order	ترتیب جزیی ــ
- relation	رابطهٔ ــ
- space	فضای ــ
Regular	منظم
- Baire measure	اندازهٔ بیر ــ
- outer measure	اندازهٔ بیرونی ــ
- space	فضای ــ
Relation	رابطه
Relative properties	خاصیتهای نسبی
Restriction	تحدید
- of a function	ــ یک تابع
- of a measure	ــ یک اندازه
Riemann integral	انتگرال ریمن
Riemann-Lebesgue Theorem	قضیهٔ ریمن ــ لبگ
Riesz-Fisher Theorem	قضیهٔ ریس ــ فیشر

Riesz Representation Theorem	قضیهٔ نمایش ریس

S

σ-algebra	σ ــ جبر
σ-bounded set	مجموعه σ ــ کراندار
σ-Compact	σ ــ فشرده
σ-finite measure	اندازه σ ــ باپایان
σ-homomorphism	σ ــ هومومرفیسم
σ-indeal	σ ــ ایدآل
σ-isomorphism	σ ــ ایزومرفیسم
σ-ring	σ ــ حلقه
Saturated measure	اندازهٔ اشباع شده
Schwarz inequality	نابرابری شوارتز
Second axiom of countability	اصل موضوع دوم شمارشپذیری
Semialgebra	نیم جبر
Semicontinuous function	تابع نیمپیوسته
Semifinite measure	اندازهٔ نیم باپایان
Separable	جدایی پذیر
- measure algebra	جبراندازهٔ ــ
- space	فضای ــ
Separated linearly	جدای خطی
Separation	جداسازی
Sequence	دنباله
Sequentially compact	فشردهٔ دنبالهای
Set	مجموعه
- function	تابع ــ
- mapping	نگاشت ــ
Setwise convergent	همگرای مجموعهوار
Signed measure	اندازهٔ علامت دار
Simple function	تابع ساده

Singleton	تک عنصری
Singular	استثنایی
- function	تابع ـ
- measure	اندازهٔ ـ
Sphere	کره
Spheroid	گوی
Step function	تابع پلهای
Stone representation theorem	قضیهٔ نمایش استون
Stone-Weierstrass Theorem	قضیهٔ استون ـ وایرشتراس
Strict partial order	ترتیب جزیی اکید
Strong topology	توپولژی پرتوان
Stronger topology	توپولژی پرتوانتر
Subadditivity	زیرجمعی بودن
Subsequence	زیردنباله
Subspace	زیرفضا
Summable sequence	دنبالهٔ جمعپذیر
Support (of a measure)	تکیهگاه (یک اندازه)
Surjective	پوششی
Symetric difference	تفاضل متقارن
Symetric relation	رابطهٔ متقارن
System (directed)	دستگاه (جهت دارشده)

T

Ternary	سهتایی
- expansion	بسط سهتایی
- function	تابع سهتایی
- set	مجموعه سهتایی
Tietze's Extention Theorem	قضیهٔ گسترش تیتز
Tonelli Theorem	قضیهٔ تونلی
Topological	توپولژیک (توپولژیکی)
- property	خاصیت ـ

- space	فضای ــ
- vector space	فضای برداری ــ
Topology	توپولژی
- of pointwise convergence	ــ همگرایی نقطه وار
Total boundedness	کرانداری تام
Total variation	تغییر تام (کلی)
- of a function	ــ یک تابع
- of a measure	ــ یک اندازه
Transitive relation	رابطهٔ تراگذر
Translation invariance	پایایی انتقال
Trivial topology	توپولژی بدیهی
Tychonoff Theorem	قضیهٔ تیخونف

U

Uncountable set	مجموعه شمارش ناپذیر
Uniform	یکنواخت
- boundedness principle	اصل کرانداری ــ
- Continuity	پیوستگی ــ
- Convergence	همگرایی ــ
- homeomorphism	همئومرفیسم ــ
- property	خاصیت ــ
- Convex	کوژ ــ
- equivalent	هم ارز ــ
Union	اجتماع
Unordered pair	جفت بی‌ترتیب
Upper and lower envelopes of a function	پوشهای بالایی و پایینی یک تابع
Upper bound	کران بالا
Uryson's Lemma	لم اوریزون

V

Variation	تغییر
total-	تغییر تام
Vector lattice	شبکهٔ برداری
Vector space	فضای برداری
topological-	ـ توپولژیک
Vitali covering	پوشش ویتالی

W

Weak topology	توپولژی کم توان
Weak* topology	توپولژی کم توان*
Weaker topology	توپولژی کم توانتر
Weakest topology	کم توانترین توپولژی
Well ordering	خوش ترتیبی