دانشگاه سمنان

آنالیز حقیقی

(چاپ دوم)

مؤلف :
دکتر علی غفاری
دانشیار دانشگاه سمنان

دانشگاه سمنان

آنالیز حقیقی

مؤلف:

علی غفاری

سرشناسه : غفاری، علی، ۱۳۵۱-
عنوان و نام پدیدآور : آنالیز حقیقی/ تالیف علی غفاری .
مشخصات نشر : سمنان: دانشگاه سمنان، ۱۳۸۸،
مشخصات ظاهری : [۱۷۲]ص.
شابک : ۱-۷۸-۷۹۷۸-۹۶۴-۹۷۸
وضعیت فهرست نویسی : فیپا
یادداشت : کتابنامه:ص،[۱۷۲].
موضوع : آنالیز ریاضی
موضوع : توابع چند متغیره حقیقی
شناسه افزوده : دانشگاه سمنان
رده بندی کنگره : AQ ۳۰۰/غ۷آ۷۷ ۱۳۸۸
رده بندی دیویی : ۵۱۵
شماره کتابشناسی ملی : ۱۷۳۰۱۶۷

آنالیز حقیقی

- مؤلف: دکتر علی غفاری
- نوبت چاپ : دوم- ۱۳۹۱
- طرح جلد: اسماعیل شجاعی
- ناشر: انتشارات دانشگاه سمنان
- شمارگان : ۲۰۰ جلد
- قیمت : ۸۰۰۰۰ ریال

شابک : ۱-۷۸-۷۹۷۸-۹۶۴-۹۷۸

تلفن انتشارات: ۰۲۳۱-۳۳۲۰۲۹۵

پیشگفتار

آنالیز ریاضی یکی از شاخه‌های رشته ریاضی است که اهمیت آن بر هیچ ریاضیدانی پوشیده نیست. یکی از دروس اصلی و زیر بنای رشته آنالیز ریاضی در دوره‌های تحصیلات تکمیلی، درس آنالیز حقیقی است. این درس که با نظریه اندازه شروع می‌شود تعمیمی از انتگرال ریمان را به همراه دارد. اندازه لبگ و پس از آن انتگرال لبگ از مطالب مهمی هستند که توسط لبگ در سال ۱۹۰۴ میلادی و بعد از آن معرفی و مطالعه شده است. انتگرال ریمان تنها روی بازه بسته از زیر مجموعه‌های اعداد حقیقی برای توابع کراندار تعریف شده است. انتگرال ریمان جوابگوی نیازها نبوده که انتگرال لبگ تعریف شده است. انتگرال لبگ برای توابع اندازه پذیر لبگ تعریف شده و نیازی نیست که دامنه تعریف، بازه‌های بسته از زیر مجموعه‌های اعداد حقیقی باشند. انتگرال لبگ برای توابع بی‌کران نیز کاربرد دارد. نیاز جامعه ریاضی تنها با اندازه لبگ و انتگرال لبگ برآورده نشده است. همانطور که $\mathbb{R}$ گروهی جمعی است، اندازه لبگ روی این گروه مطرح شده است. هار، اندازه‌ای مشابه را روی هر گروه هاسدورف و فشرده موضعی معرفی کرده که این زمینه‌ای مناسب برای رشته آنالیز هارمونیک است. در دروس پیشرفته‌تر انتگرال توابع برداری نیز معرفی می‌شود که در این حالت لزومی ندارد که توابع حقیقی مقدار و یا مختلط مقدار باشند. در این کتاب توابع تعریف شده حقیقی و گاهی نیز مختلط مقدار است.

کتابی که هم اکنون در اختیار دارید ثمره تدریس چند سال دروس آنالیز در دانشگاه‌ها و موسسات آموزش عالی است. اهمیت درس آنالیز حقیقی سبب شده است که به تالیف این کتاب بپردازم. آنالیز حقیقی نه تنها یکی از دروس دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی است، بلکه در دوره تحصیلات تکمیلی رشته‌های آمار و برق نیز تدریس می‌شود. در این کتاب سعی شده است که مفاهیم، قضایا و مثال‌ها به زبان ساده و روان بیان شود و نکته‌های متعددی برای فهم بهتر ارائه گردد. کتاب‌های متعددی در زمینه آنالیز حقیقی مخصوصاً به زبان انگلیسی به رشته تحریر در آمده است. بیشتر این کتاب‌ها به طور مجرد با موضوع برخورد کرده و برای خواننده که برای اولین بار با

نظریه اندازه و انتگرال آشنا می‌شود، دشوار و درک آن به کندی است. سعی شده که بعد از اثبات هر قضیه مثال و نکته‌ای ارائه گردد که علاوه بر درک بهتر موضوع، اهمیت شرایط موجود در قضیه نیز هویدا گردد. اخیراً نیز اساتیدی به ترجمه و تالیف کتاب‌هایی در زمینه آنالیز حقیقی پرداخته‌اند.

این کتاب بر اساس برنامه شورای عالی برنامه ریزی وزارت فرهنگ و آموزش عالی و بر مبنای تجربیات شخصی نوشته شده و فصول کتاب به شرح زیر است:

در فصل اول به یادآوری مطالبی می‌پردازیم که در فصول آتی مورد استفاده قرار می‌گیرند. از خواننده انتظار می‌رود که برای درک و فهم بهتر این مطالب به مطالعه منابع اشاره شده در انتهای کتاب مراجعه کند.

فصل ۲، نیم حلقه از زیر مجموعه‌های X را تعریف می‌کنیم. در حقیقت نیم حلقه‌ها پایه‌ای برای تعریف و بررسی اندازه است. در این فصل اندازه خارجی را نیز معرفی کرده و با استفاده از آن یک اندازه σ متناهی را به طور منحصربفرد به یک اندازه روی σ حلقه تولید شده توسط نیم حلقه گسترش می‌دهیم. در حالت خاص اندازه لبگ معرفی می‌شود که در واقع تابعی است که روی خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های اعداد حقیقی موسوم به زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر تعریف می‌شود. این تابع به هر بازه طول آن بازه را نسبت می‌دهد.

فصل ۳، اندازه پذیری یک تابع حقیقی مقدار و انتگرال یک تابع اندازه پذیر را تعریف می‌کنیم. قضایای مهم این فصل، قضیه همگرایی یکنوا و نتایج آن است. ارتباط بین انتگرال لبگ و انتگرال ریمان بحث خواهد شد. در انتهای این فصل همگرایی در اندازه یک دنباله از توابع اندازه پذیر تعریف می‌شود و قضیه ایگوروف که یکی از مهم‌ترین قضایای این بخش است را ثابت خواهیم کرد.

فصل ۴، برای هر عدد حقیقی مثبت p، فضای $L^p(X)$ را مطالعه می‌کنیم. برای $p \geq ۱$، نشان خواهیم داد که $L^p(X)$ یک فضای باناخ است. تعدادی قضایای مهم در مورد فضاهای $L^p(X)$ بیان می‌شود و در انتها نیز قضیه هان باناخ که مقدمه‌ای بر آنالیز تابعی است را ثابت می‌کنیم. این قضیه بیان می‌کند که برای $۱ \leq p < +\infty$، $L^p(X)^*$ با فضای باناخ $L^q(X)$ یکی است.

فصل ۵، اندازه‌های علامت‌دار را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که هر اندازه علامت دار تفاضل دو اندازه است. قضیه رادون نیکودیم یکی از مهم‌ترین قضایای این بخش است. با استفاده از قضیه رادون نیکودیم، قضیه نمایش ریس را ثابت می‌کنیم.

فصل ٦، حاصلضرب دو اندازه مورد بحث و بررسی قرار خواهد گرفت و قضیه فوبینی در این بخش اثبات می‌شود.

در نوشتن این کتاب از تجربه اساتید گرانقدر خود آقایان دکتر مدقالچی و دکتر ریاضی بهره بسیار برده‌ام. تجربیات بدست آمده در تدریس نیز نقش خود را در این کتاب به خوبی نشان می‌دهد. در انتها از همه اساتید گرانقدر و دانشجویان محترم که در به انجام رسیدن این کتاب نقش داشته‌اند صمیمانه تشکر می‌کنم. از سرکار خانم زهره اسکندریان به خاطر ارائه پیشنهادها و همکاری خالصانه قدردانی می‌کنم. مطمئنم که این کتاب همانند کتاب‌های قبلی من عاری از اشتباه نیست. لازم است قبلاً از همه همکاران و عزیزانی که اشتباهات احتمالی موجود در این کتاب را برای اصلاح در چاپ‌های بعدی به اینجانب گوشزد می‌کنند، تشکر کنم.

دانشگاه سمنان

علی غفاری

فهرست

فصل ۱

مفاهیم بنیادی

۱—۱ مقدمه

هدف از این بخش معرفی نمادها و اثبات بعضی از قضایای مقدماتی است که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. فهم دقیق تئوری انتگرال‌ها، مستلزم دانستن نظریه مجموعه‌ها و توپولوژی است. همانطور که می‌دانید برای اثبات بعضی احکام در ریاضی از نظریه مجموعه‌ها استفاده می‌شود و بسیاری از مسائل دشوار آنالیز ریاضی با استفاده از این شاخه ریاضی حل شده است. برای ارائه مثال‌های نقض نیز نظریه مجموعه‌ها نقش ارزنده‌ای را ایفاء می‌کند.

بخش اول از این فصل به معرفی نمادها و اصولی از تئوری مجموعه‌ها پرداخته و انتظار داریم که خواننده به‌طور کامل با این مفاهیم آشنا باشد. برای مطالعه بیشتر، کتابهای مقدماتی در این باره خلال مشکل خواهد بود.

دنباله‌ها و سری‌ها موضوع اصلی بخش دوم است و در انتها نیز توپولوژی مورد نیاز در این کتاب را مورد بحث قرار می‌دهیم. فضای توابع پیوسته روی یک فضای توپولوژیک هاسدورف و فشرده موضعی تا انتهای این کتاب مورد استفاده قرار خواهد گرفت. توابع پیوسته روی فضاهای توپولوژیک ابزار مناسبی برای بررسی و حل موضوعات مهم ریاضی است. برای مثال، هر تابع انتگرال پذیر ریمان را می‌توان با تابعی پیوسته تقریب زد. در واقع برای هر تابع انتگرال پذیر f روی بازه $[a,b]$ و هر $\epsilon > 0$، تابعی پیوسته چون g موجود است که $\int_a^b |f(x) - g(x)|dx < \epsilon$. لازم به ذکر است که تنها مواردی که در فصول بعدی استفاده می‌شود، بحث اصلی این فصل است. پرداختن به هر کدام

از این موضوعات مستلزم بحث و بررسی بیشتر بوده که هدف چیزی جز این است.

۱ — ۲ نظریه مجموعه‌ها

گردایه‌ای از اشیا مشخص را یک مجموعه گوئیم. همواره از حروف بزرگ برای نشان دادن مجموعه استفاده می‌شود و برای نشان دادن اعضای یک مجموعه از حروف کوچک استفاده می‌کنیم. از نماد $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ به ترتیب برای نشان دادن اعداد طبیعی، اعداد صحیح، اعداد گویا، اعداد حقیقی و اعداد مختلط استفاده می‌شود. اگر A و B دو مجموعه باشند، $R \subseteq A \times B$ را یک رابطه از A در B گویند. یک تابع از A در B، رابطه‌ای از A در B چون f است که اگر $(x,y), (x,z) \in f$، داشته باشیم $y = z$. اگر f تابعی از A در B و $(x,y) \in f$، برای راحتی کار می‌نویسیم $y = f(x)$ و از نماد $f : A \to B$ برای نمایش دادن تابع f از A در B استفاده می‌کنیم. اگر $C \subseteq B$ زیر مجموعه دلخواهی باشد، $f^{-1}(C)$ تصویر معکوس C نامیم و به صورت $f^{-1}(C) = \{x \in A;\ f(x) \in C\}$ تعریف می‌شود. همینطور برای $D \subseteq A$ از نماد $f(D)$ برای نشان دادن تصویر D استفاده کرده و به صورت $f(D) = \{f(d);\ d \in D\}$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱ ـ ۱. فرض کنید $f : A \to B$ تابعی دلخواه باشد.

الف) f را یک به یک گوئیم هرگاه برای هر $x, y \in A$، از $f(x) = f(y)$ بتوان نتیجه گرفت که $x = y$،

ب) f پوشاست هرگاه برای هر $y \in B$، عنصری چون $x \in A$ موجود باشد که $f(x) = y$،

ج) f دوسوئی است هرگاه f یک به یک و پوشا باشد و در این حالت گوئیم تناظری یک به یک بین A و B وجود دارد.

اگر تناظری یک به یک بین $\mathbb{N}$ و مجموعه‌ای چون A موجود باشد، A را شمارا گوئیم و چنانچه تناظری یک به یک بین A و زیر مجموعه‌ای از اعداد طبیعی موجود باشد، A را حداکثر شمارا گوئیم. در غیر اینصورت A را ناشمارا نامیم.

قضیه زیر ساده است و به خواننده واگذار می‌شود. قسمت‌های الف، ب و ج برای هر خانواده از مجموعه‌ها نیز صحیح است. چون در این کتاب بیشتر برای خانواده شمارا از مجموعه‌ها صحبت به میان می‌آید، لذا تنها برای خانواده شمارا بیان شده است.

قضیه ۱ ـ ۲. *فرض کنید $f : X \to Y$ تابعی دلخواه باشد، شرایط زیر برقرارند:*

الف) *اگر $\{A_n\}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های X باشد، در آن‌صورت* $f(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(A_n)$.

ب) اگر $\{B_n\}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های Y باشد، آن‌گاه $f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n)$.

ج) اگر f یک به یک و $\{A_n\}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های X باشد، در آن‌صورت $f(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(A_n)$.

د) اگر f دوسوئی و $A \subseteq X$، در آن‌صورت $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$.

۱ــ۳ دنباله و سری

در این کتاب دنباله توابع یکی از ابزارهایی است که همواره مورد استفاده قرار می‌گیرد. حدود دنباله‌های توابع چه به صورت نقطه به نقطه و چه به صورت یکنواخت در مسائل و قضایا مورد بررسی قرار خواهد گرفت. ابتدا به حالت خاص دنباله توابع یعنی دنباله‌های عددی اشاره می‌کنیم.

هر تابع از اعداد طبیعی به فضای متریک (X,d) یک دنباله است. اگر x یک دنباله باشد، برای راحتی کار از نماد $\{x_n\}$ برای نشان دادن این تابع استفاده می‌شود. در واقع $\{x_n\}$ تابعی است که به عدد طبیعی n، عنصر x_n از X را نسبت می‌دهد. گوئیم دنباله $\{x_n\}$ در فضای متریک (X,d) به $x \in X$ همگراست هرگاه $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای دلخواه و $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ تابعی اکیداً صعودی باشد، دنباله $\{y_n\}$ با ضابطه $y_n = x_{h(n)}$ زیر دنباله‌ای از $\{x_n\}$ است. بیشتر اوقات از نماد $\{x_{n_k}\}$ برای نشان دادن یک زیر دنباله استفاده می‌شود. در واقع تابع اکیداً صعودی h، برای این زیر دنباله با ضابطه $h(k) = n_k$ تعریف می‌شود. همانطور که در دروس ریاضی عمومی دیده‌اید، هر زیر دنباله یک دنباله همگرا، همگراست. دنباله $\{(-1)^n\}$ دارای زیر دنباله همگرای $\{(-1)^{2n}\}$ است ولی $\{(-1)^n\}$ واگراست. قضیه زیر ارتباط همگرایی دنباله با همگرایی زیر دنباله‌های آن را مورد بررسی قرار می‌دهد.

قضیه۱ ـ ۳. *دنباله $\{x_n\}$ در فضای متریک (X,d) به $x \in X$ همگراست اگر و تنها اگر هر زیر دنباله از $\{x_n\}$ دارای زیر دنباله‌ای همگرا به x باشد.*

برهان. اگر $\{x_n\}$ همگرا باشد، لذا هر زیردنباله‌ی آن نیز همگراست. در واقع فرض کنیم $\{x_{n_k}\}$ زیر دنباله‌ای از $\{x_n\}$ باشد. برای $\epsilon > 0$ عدد طبیعی N وجود دارد که اگر $n \geq N$، $d(x_n, x) < \epsilon$. اگر $k \geq N$، $n_k \geq k \geq N$ و لذا $d(x_{n_k}, x) < \epsilon$.

برای اثبات عکس این قضیه، فرض کنید $\{x_n\}$ همگرا به x نباشد. پس $\epsilon > 0$ موجود است که برای $N = 1$ یک $n_1 > 1$ می‌توان یافت که $d(x_{n_1}, x) \geq \epsilon$. برای $N = n_1$، یک $n_2 > n_1$ یافت

می‌شود که $d(x_{n_2}, x) \geq \epsilon$. با ادامه این روند زیردنباله $\{x_{n_k}\}$ از $\{x_n\}$ به‌دست خواهد آمد. توجه کنید که تابع اکیداً صعودی مورد نیاز، تابعی است که با ضابطه $h(k) = n_k$ تعریف می‌شود. اکنون فرض کنید $\{x_{n_{k_i}}\}$ زیردنباله دلخواه از $\{x_{n_k}\}$ باشد. چون برای هر k، $d(x_{n_k}, x) \geq \epsilon$؛ لذا $\{x_{n_{k_i}}\}$ به x همگرا نیست که این با فرض در تناقض است. بنابراین $\{x_n\}$ به x همگراست. ■

گوئیم دنباله توابع $\{f_n\}$ تعریف شده روی X همگرای نقطه به نقطه است هرگاه برای هر $x \in X$، $\{f_n(x)\}$ همگرا باشد. این دنباله از توابع به تابع f همگرای یکنواخت است هرگاه برای هر ϵ، عددی مانند N موجود باشد که برای هر $n \geq N$ و هر $x \in X$، $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. دنباله توابع $\{f_n\}$ تعریف شده روی $[0, 1]$ با ضابطه $f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n$ به تابع صفر همگرای نقطه به نقطه است ولی همگرای یکنواخت نیست. در فصل سوم همگرایی در اندازه یک دنباله از توابع اندازه پذیر را تعریف خواهیم کرد و خصوصیات این نوع همگرایی و ارتباط آن با دو همگرایی یاد شده را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

توجه کنید که هر دنباله کراندار و صعودی از اعداد حقیقی همگراست. در واقع دنباله صعودی و کراندار $\{a_n\}$ را در نظر بگیرید. قرار دهید $\alpha = \sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. اگر $\epsilon > 0$ داده شده باشد، عدد طبیعی m موجود است که $\alpha \leq a_m + \epsilon$. برای هر عدد طبیعی $n \geq m$، $\alpha \leq a_m + \epsilon \leq a_n + \epsilon$. این نتیجه می‌دهد که $\{a_n\}$ به α همگراست. به همین شیوه ثابت می‌شود که هر دنباله نزولی و کراندار نیز همگراست. دقت کنید که این موضوع برای دنباله از توابع برقرار نیست. برای مثال دنباله توابع $\{f_n\}$ تعریف شده بر بازه $(0, 1)$ با ضابطه $f_n(x) = -x^n$ صعودی است. یعنی برای هر n و هر $x \in (0, 1)$، $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. برای هر n و هر $x \in (0, 1)$، $|f_n(x)| \leq 1$. این دنباله از توابع به تابع صفر همگرای نقطه به نقطه است ولی همگرای یکنواخت نیست.

دنباله $\{x_n\}$ در فضای متریک (X, d) کوشی است هرگاه برای هر $\epsilon > 0$، عدد طبیعی N موجود باشد که برای هر $m, n \geq N$، $d(x_m, x_n) < \epsilon$. واضح است که هر دنباله همگرا کوشی است ولی دنباله کوشی $\{\frac{1}{n}\}$ در فضای متریک $(0, 1]$ همگرا نیست.

اثبات همگرا بودن و یا واگرا بودن یک دنباله همیشه ساده نیست. اگر دنباله‌ای در اعداد حقیقی کوشی باشد، آن دنباله همگراست. همینطور اگر دنباله کرانداری یکنوا باشد، آن دنباله همگراست.

ممکن است حد یک دنباله وجود نداشته باشد. سوال این است که آیا مسئله همین جا تمام است؟ پاسخ منفی است و در این حالت مفهوم حد بالا و همچنین حد پائین تعریف شده است. حد بالا و حد پائین یک دنباله کاربرد زیادی دارد. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای کراندار از اعداد حقیقی باشد. حد بالای این دنباله را با نماد $\limsup x_n$ نمایش

داده و به صورت $\limsup x_n = \inf\{\sup\{x_n;\ n \geq k\},\ k \in \mathbb{N}\}$ تعریف می‌کنیم. همینطور حد پائین این دنباله از اعداد حقیقی را با نماد $\liminf x_n$ نمایش می‌دهیم و به صورت $\liminf x_n = \sup\{\inf\{x_n;\ n \geq k\},\ k \in \mathbb{N}\}$ تعریف می‌شود. توجه کنید که حد بالا و حد پائین برای هر دنباله از اعداد حقیقی تعریف می‌شود. در حالتی که دنباله از بالا کراندار نباشد، حد بالای این دنباله بی‌نهایت است و وقتی که دنباله از پائین کراندار نباشد، حد پائین آن منهای بی‌نهایت است.

از قضیه زیر برای اثبات همگرایی یک دنباله استفاده می‌کنیم. گاهی با توجه به شرایط مسئله، پیدا کردن حد بالا و حد پائین یک دنباله آسان بوده و با استفاده از آن وجود حد دنباله و مقدار آن‌را بدست می‌آوریم. نقش کلیدی قضیه زیر برای همگرایی دنباله و مقدار حد دنباله بر هیچ خواننده‌ای پوشیده نیست.

قضیه ۱ ـ ۴. *دنباله کراندار $\{x_n\}$ از اعداد حقیقی را در نظر می‌گیریم. $\{x_n\}$ به x همگراست اگر و تنها اگر* $\limsup x_n = \liminf x_n = x$.

برهان. فرض کنیم $\{x_n\}$ به x همگرا باشد. فرض کنیم $\epsilon > ۰$ داده شده باشد، N ای هست که اگر $n \geq N$ آن‌گاه $x - \frac{\epsilon}{۲} < x_n < x + \frac{\epsilon}{۲}$. لذا

$$\limsup x_n = \inf\{\sup\{x_n;\ n \geq k\};\ k \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{x_n;\ n \geq N\} < x + \epsilon.$$

همچنین

$$x - \epsilon < \inf\{x_n;\ n \geq N\} \leq \sup\{\inf\{x_n;\ n \geq k\};\ k \in \mathbb{N}\} = \liminf x_n.$$

در نتیجه $x - \epsilon < \liminf x_n \leq \limsup x_n < x + \epsilon$. چون $\epsilon > ۰$ دلخواه است، لذا $\liminf x_n = \limsup x_n = x$.

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنید $\epsilon > ۰$ داده شده باشد. بنابراین، $m_۱$ ای هست که اگر $n \geq m_۱$ آن‌گاه $x_n < \limsup x_n + \epsilon$. همچنین $m_۲$ ای هست که برای هر $n \geq m_۲$، $\liminf x_n - \epsilon < x_n$. قرار می‌دهیم $m = \max\{m_۱, m_۲\}$. اگر $n \geq m$ آن‌گاه

$$x - \epsilon = \liminf x_n - \epsilon < x_n < \limsup x_n + \epsilon = x + \epsilon.$$

لذا $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. ■

قضیه‌هایی مشابه با قضیه زیر در مورد حد بالا و حد پائین وجود دارند که ما تنها قضیه زیر را ثابت خواهیم کرد و صورتهای مشابه و اثبات آنها را به خواننده واگذار می‌کنیم. توجه کنید که اگر دنباله $\{x_n\}$ را با ضابطه $x_n = (-۱)^n$ در نظر بگیریم، در آن‌صورت

۲. $\limsup x_n - x_n \le \limsup x_n + \limsup -x_n = 0$. این تاکیدی بر قضیه زیر است.

قضیه ۱ ـ ۵. *فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای کراندار از اعداد حقیقی باشد. در آن‌صورت $\lim_{n\to\infty} x_n$ موجود است اگر و تنها اگر برای هر دنباله از پائین کراندار $\{y_n\}$،*

$$\liminf(x_n + y_n) = \liminf x_n + \liminf y_n.$$

برهان. فرض کنیم $\{x_n\}$ به x همگرا باشد. فرض کنیم $\{y_n\}$ دنباله‌ای از پائین کراندار و $\epsilon > 0$ داده شده باشد. N ای هست که اگر $n \ge N$ آن‌گاه $x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$. لذا برای هر $n \ge N$، $x - \epsilon + y_n < x_n + y_n < x + \epsilon + y_n$. در نتیجه

$$\begin{aligned}\liminf x_n - \epsilon + \liminf y_n &= x - \epsilon + \liminf y_n \\ &= \liminf(x - \epsilon + y_n) \le \liminf(x_n + y_n) \\ &\le \liminf(x + \epsilon + y_n) = \liminf x_n + \epsilon + \liminf y_n.\end{aligned}$$

چون $\epsilon > 0$ دلخواه است، لذا

$$\liminf x_n + \liminf y_n = \liminf(x_n + y_n).$$

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنید برای هر دنباله از پائین کراندار $\{y_n\}$،

$$\liminf x_n + \liminf y_n = \liminf(x_n + y_n).$$

برای هر n، قرار می‌دهیم $y_n = -x_n$. بنا به فرض خواهیم داشت

$$0 = \liminf(x_n + y_n) = \liminf x_n + \liminf y_n = \liminf x_n - \limsup x_n.$$

بنابراین $\limsup x_n = \liminf x_n$ و لذا بنا به قضیه ۱ـ۴، $\{x_n\}$ همگراست. ■

تعریف ۱ ـ ٦. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد، برای هر $n \in \mathbb{N}$، قرار می‌دهیم $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. چنانچه دنباله $\{S_n\}$ همگرا باشد، حد این دنباله را با نماد $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ نمایش داده و گوئیم سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ همگراست. x_n را جمله عمومی و S_n را مجموع جزئی nام سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ می‌نامیم.

در حالت کلی برای اثبات وجود حد یک دنباله از اعداد حقیقی به اثبات کوشی بودن آن دنباله می‌پردازیم. بعضی اوقات محاسبه حد یک دنباله حقیقی کار آسانی نیست و مجبوریم ثابت کنیم آن دنباله کوشی است و از آنجا نتیجه بگیریم که همگراست. این موضوع برای همگرایی سری‌ها نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. بنابراین برای اینکه ثابت کنیم یک سری همگراست، کافی‌است

ثابت کنیم مجموع جزئی n ام آن کوشی است. ممکن است بدست آوردن مقدار حد مجموع جزئی n ام کار آسانی نباشد. بطور دقیق‌تر اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ همگرا باشد، لذا دنباله $\{S_n\}$ همگرا و لذا کوشی است. در نتیجه برای هر $\epsilon > 0$، عدد طبیعی N موجود است که اگر $m, n \geq N$، آن‌گاه $|S_m - S_n| = |\sum_{k=n+1}^{m} x_k| < \epsilon$. برعکس، چنانچه $\{S_n\}$ کوشی باشد، لذا همگراست. بنا به تعریف سری فوق همگراست.

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ همگرا باشد، برای هر $\epsilon > 0$، عدد طبیعی N موجود است که برای هر $n > N$، $|x_n| = |S_n - S_{n-1}| < \epsilon$. این نتیجه می‌دهد که $x_n \to 0$ و این همان شرط لازم همگرایی سری‌هاست. فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله مثبت از اعداد حقیقی و دنباله $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ به l همگرا باشد. اگر $l \neq 0$، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ هم‌رفتارند. چنانچه $l = 0$، از همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نتیجه می‌شود. اگر $l = +\infty$، از واگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نتیجه می‌شود.

محک‌های زیادی برای بررسی رفتار سری‌ها وجود دارد که در دروس آنالیز بیان می‌شود. ما از بیان آن محک‌ها صرفنظر می‌کنیم و برای مطالعه بیشتر خواننده را به منابع آورده شده در انتهای کتاب ارجاع می‌دهیم.

تعریف ۱ ـ ۷. تابع $\|.\| : X \to [0, +\infty)$ یک نرم روی فضای برداری X است هرگاه

الف) برای هر $x \in X$، $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$؛

ب) برای هر $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$، $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$؛

ج) برای هر $x, y \in X$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

در این صورت $(X, \|.\|)$ را یک فضای نرمدار گوئیم.

واضح است که تابع $d : X \times X \to \mathbb{R}$ با ضابطه $d(x, y) = \|x - y\|$ یک متر روی X است. X یک فضای باناخ است هرگاه هر دنباله کوشی در این فضای متریک همگرا باشد. قضیه زیر شرایط لازم و کافی برای باناخ بودن یک فضای نرمدار را بیان می‌کند که کاربرد زیادی دارد.

قضیه ۱ ـ ۸. *فضای نرمدار X را در نظر بگیرید. X یک فضای باناخ است اگر و تنها اگر هر سری مطلقاً همگرا در X، همگرا باشد.*

برهان. فرض کنید X یک فضای باناخ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ همگرا باشد. برای هر عدد طبیعی n، قرار می‌دهیم $S_n = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$ و $T_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. اگر $\epsilon > 0$ داده شده باشد، عدد طبیعی N موجود

است که برای هر $m, n > N$،

$$\|T_n - T_m\| = \|x_{n+1} + \cdots + x_n\| \leq \|x_{n+1}\| + \cdots + \|x_m\| = |S_n - S_m| < \epsilon.$$

این نشان می‌دهد که $\{T_n\}$ دنباله‌ای کوشی و لذا همگراست.

اکنون فرض کنید هر سری مطلقاً همگرا، همگرا باشد. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای کوشی در X باشد. عدد طبیعی n_1 موجود است که برای هر $n \geq n_1$، $\|x_n - x_{n_1}\| < \frac{1}{2}$. عدد طبیعی $n_2 > n_1$ وجود دارد که برای هر $n > n_2$، $\|x_n - x_{n_2}\| < \frac{1}{2^2}$. با ادامه این روند زیر دنباله $\{x_{n_k}\}$ از $\{x_n\}$ بدست می‌آید که برای هر k، $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$. واضح است که $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ مطلقاً همگرا و لذا همگراست. اما $S_m = \sum_{k=1}^{m} x_{n_{k+1}} - x_{n_k} = x_{n_{m+1}} - x_{n_1}$ و لذا $\{x_{n_k}\}$ همگراست. چون هر دنباله کوشی دارای زیر دنباله همگرا، همگراست. لذا $\{x_n\}$ همگراست. ■

۱—۴ توپولوژی

در این بخش توپولوژی مورد نیاز را به طور خلاصه بیان می‌کنیم. در واقع کلمه توپولوژی به معنی مکان شناسی و شناخت مکان است ولی از معنای آن استفاده نکرده و از کلمه توپولوژی صحبت خواهیم کرد. گفته می‌شود که آنالیز بدون توپولوژی سقف موریانه خورده‌ای بیش نیست.

تعریف ۱ ـ ۹. زیر مجموعه ناتهی X را در نظر بگیرید. خانواده τ از زیر مجموعه‌های X یک توپولوژی روی X است هرگاه

الف) $\emptyset, X \in \tau$.

ب) اجتماع هر تعداد از اعضای τ و اشتراک هر تعداد متناهی از اعضای τ در τ باشد.

در این حالت (X, τ) را یک فضای توپولوژیک و هر عنصر τ را یک مجموعه باز گوئیم.

ساده‌ترین مثال‌ها از فضاهای توپولوژیک، فضاهای متریک هستند. در واقع اگر (X, d) یک فضای توپولوژیک باشد، τ_d خانواده همه زیر مجموعه‌های باز از فضای متریک X یک توپولوژی است. خانواده $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2,3\}\}$ یک توپولوژی روی $X = \{1,2,3\}$ است که به وضوح هیچ متری چون d روی X وجود ندارد که $\tau_d = \tau$. این مثال نشان می‌دهد که فاصله‌ای بین فضاهای توپولوژیک و فضاهای متریک وجود دارد.

فرض کنید (X, τ_1) و (Y, τ_2) دو فضای توپولوژیک و $f: X \to Y$ تابعی دلخواه باشد. f را در

نقطه $x \in X$ پیوسته گوئیم هرگاه برای هر مجموعه باز $U \subseteq Y$ شامل $f(x)$، مجموعه‌ای باز شامل x مانند V موجود باشد که $f(V) \subseteq U$. f را پیوسته گوئیم هرگاه f در هر نقطه پیوسته باشد. معادل بودن اینکه f پیوسته است اگر و تنها اگر تصویر معکوس هر مجموعه باز، باز است به خواننده واگذار می‌شود. از این مطلب نتیجه می‌شود که تصویر معکوس هر بسته، بسته است اگر و تنها اگر f پیوسته باشد. توجه کنید که تابع f را تابعی باز گوئیم هرگاه تصویر هر مجموعه باز تحت f باز باشد. همینطور f بسته است هرگاه تصویر هر مجموعه بسته تحت f بسته باشد.

مثال ۱ ـ ۱. توپولوژی‌های $\tau_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, X\}$ و $\tau_2 = \{\emptyset, \{2\}, \{1,2\}, X\}$ را روی $X = \{1,2,3\}$ در نظر بگیرید. تابع $f : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ را با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 2 \\ 2 & x = 1 \\ 3 & x = 3 \end{cases}$$

تعریف می کنیم. واضح است f تابعی پیوسته، دوسوئی، بسته و باز است. ولی τ_1 و τ_2 با هم قابل مقایسه نیستند.

نکته ۱. تابع خطی f از فضای نرمدار $(X, \|\cdot\|_1)$ به فضای نرمدار $(Y, \|\cdot\|_2)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید برای هر همسایگی V از صفر، $0 \in f(V)^\circ$. ادعا می‌کنیم f تابعی باز است. برای اینکار مجموعه باز U را در نظر بگیرید. اگر $y \in f(U)$ عنصری دلخواه باشد، $x \in U$ را طوری اختیار می‌کنیم که $y = f(x)$. چون $x - U = \{x - u;\ u \in U\}$ یک همسایگی از صفر است، بنا به فرض همسایگی W از صفر در Y وجود دارد که $W \subseteq f(x - U)$. واضح است که $f(x) - W$ یک همسایگی از $f(x)$ است که در $f(U)$ قرار دارد. پس $f(U)$ باز و لذا f باز است.

زیر مجموعه F از فضای متریک (X, d) را در نظر بگیرید. فاصله $x \in X$ از مجموعه F را با نماد $d(x, F)$ نمایش می‌دهیم و به صورت $d(x, F) = \inf\{d(x, y);\ y \in F\}$ تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم که تابع $x \mapsto d(x, F)$ پیوسته است. ابتدا برای هر $x, y \in X$،

$$\begin{aligned} d(x, F) &= \inf\{d(x, z);\ z \in F\} \leq \inf\{d(x, y) + d(y, z);\ z \in F\} \\ &= d(x, y) + \inf\{d(y, z);\ z \in F\} = d(x, y) + d(y, F). \end{aligned}$$

به شیوه مشابه $d(y, F) \leq d(x, F) + d(x, y)$. اگر $\epsilon > 0$ داده شده باشد، قرار می‌دهیم $\delta = \epsilon$. اگر $d(x, y) < \delta$، لذا $|d(x, F) - d(y, F)| \leq d(x, y) < \epsilon$. بنابراین تابع $x \mapsto d(x, F)$ پیوسته است.

فرض کنید F بسته و $d(x, F) = 0$. برای هر عدد طبیعی n، $x_n \in F$ موجود است که $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$. این نشان می‌دهد که دنباله $\{x_n\}$ از اعضای F به x همگراست. اما F بسته است

و بنابراین $x \in F$.

اکنون فرض کنید F زیر مجموعه بسته‌ای از فضای متریک (X, d) باشد. برای هر عدد طبیعی n، زیر مجموعه باز $G_n = \left\{x \in X;\ d(x, F) < \frac{1}{n}\right\}$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. این نشان می‌دهد که F اشتراک تعداد شمارایی از مجموعه‌های باز است. اگر G زیر مجموعه‌ای باز باشد، از خواننده انتظار داریم که گزاره‌ای شبیه فوق را برای G بیان و ثابت کند.

نکته ۲. زیر مجموعه بسته F از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $x \in \mathbb{R}^n$. برای هر n، قرار دهید $F_n = \left\{y \in F;\ |x - y| \leq d(x, F) + \frac{1}{n}\right\}$. بنا به خاصیت اینفیموم برای هر عدد طبیعی n، F_n ناتهی است. واضح است که $\{F_n\}$ دنباله‌ای کراندار، بسته و نزولی از زیر مجموعه‌های فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ است. لذا F_n ها فشرده و بنا به خاصیت اشتراک متناهی، $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین برای هر n، $d(x, F) \leq |x - y| \leq d(x, F) + \frac{1}{n}$. نتیجه اینکه $d(x, F) = |x - y|$.

قرار دهید $F = \mathbb{Q} \cap [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. F زیر مجموعه‌ای بسته در اعداد گویاست و $d(\sqrt{2}, F) = 0$ ولی $\sqrt{2} \notin F$.

نکته ۳. فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژیک باشد. زیر مجموعه A از X را ناهمبند گوئیم هرگاه دو مجموعه باز G_1 و G_2 موجود باشند که $G_1 \cap A \neq \emptyset$، $G_2 \cap A \neq \emptyset$، $G_1 \cap G_2 \cap A = \emptyset$ و $A = (G_1 \cap A) \cup (G_2 \cap A)$. در واقع گفته می‌شود که A توسط دو مجموعه باز از هم جدا می‌شود. اگر A ناهمبند نباشد، A را همبند گوئیم. همانطور که دیده‌اید تنها زیر مجموعه‌های همبند $\mathbb{R}$ بازه‌ها و زیر مجموعه‌های تک نقطه‌ای هستند.

اگر $x \in X$ عنصری دلخواه باشد، در آن‌صورت $\{x\}$ همبند است. $\mathcal{D}$ را خانواده همه زیر مجموعه‌های همبند شامل x در نظر بگیرید. $\mathcal{D}$ با رابطه جزئیت مجموعه‌ای مرتب جزئی است. اگر $\{A_\alpha\}$ زنجیری از اعضای $\mathcal{D}$ باشد، به سادگی دیده می‌شود که اجتماع همه A_α ها زیر مجموعه‌ای همبند شامل x است. در نتیجه این زنجیر دارای کران بالاست. فرض کنید C_x عضو ماکزیمال $\mathcal{D}$ باشد. لذا C_x مجموعه‌ای همبند شامل x است و چنانچه C مجموعه همبند شامل C_x باشد، $C = C_x$. C_x را مولفه x گویند. اگر C_x و C_y به ترتیب مولفه‌های x و y باشند، $C_x \cap C_y = \emptyset$. در غیر این‌صورت $C_x \cup C_y$ همبند است. اما $C_x \subseteq C_x \cup C_y$ و $C_y \subseteq C_x \cup C_y$. از ماکزیمال بودن C_x و C_y، خواهیم داشت $C_x = C_x \cup C_y = C_y$. نتیجه اینکه مولفه‌های یک فضای توپولوژیک آن فضا را افراز می‌کنند. واضح است که مولفه‌های اعداد گویا تک نقطه‌ای‌ها و همچنین مولفه‌های فضای متریک گسسته نیز تک نقطه‌ای‌ها هستند. هر فضای همبند تنها یک مولفه دارد.

زیر مجموعه باز G از اعداد حقیقی را در نظر بگیرید. فرض کنید C_x مولفه $x \in G$ باشد. $y \in C_x$ را در نظر بگیرید. چون G باز است، لذا r ای هست که $(y-r, y+r) \subseteq G$. از طرفی $(y-r, y+r) \cup C_x$ همبند است. بنا به تعریف مولفه، $(y-r, y+r) \subseteq C_x$. این نشان می‌دهد که C_x باز و لذا بازه‌ای باز است. از خواننده انتظار داریم که نشان دهد G اجتماع حداکثر شمارایی از مولفه‌های باز خود است. نتیجه اینکه هر مجموعه باز از اعداد حقیقی، اجتماع حداکثر شمارایی از بازه‌های باز در $\mathbb{R}$ است.

تعریف ۱ ـ ۱۰. فضای توپولوژیک (X, τ) را در نظر بگیرید:

الف) X هاسدورف است هرگاه برای هر $x, y \in X$، دو مجموعه باز G و W به ترتیب شامل x و y موجود باشند که $G \cap W = \emptyset$.

ب) زیر مجموعه A از X، فشرده نسبی است هرگاه بستار A فشرده باشد. اگر هر عنصر X در یک زیر مجموعه باز فشرده نسبی قرار داشته باشد، X را فشرده موضعی گوئیم.

قبل از اینکه فضای توابع پیوسته را بررسی کنیم، به تعریف همیومورف بودن دو فضای توپولوژیک می‌پردازیم. اگر X و Y دو فضای توپولوژیک و $f : X \to Y$ تابعی دوسوئی، پیوسته و دارای معکوس پیوسته باشد، f را یک همیومورفیسم و X و Y را همیومورف گوئیم. از خواننده انتظار داریم که ثابت کند تابع دوسوئی و پیوسته $f : X \to Y$ یک همیومورفیسم است اگر و تنها اگر f باز باشد اگر و تنها اگر f بسته باشد.

اگر (X, τ) یک فضای توپولوژیک هاسدورف و فشرده موضعی باشد، خانواده همه توابع پیوسته و کراندار روی X را با نماد $C_b(X)$ نمایش می‌دهیم. تابع $d : C_b(X) \times C_b(X) \to \mathbb{R}$ با ضابطه $d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)|;\ x \in X\}$ یک متر کامل روی $C_b(X)$ است. $C_\circ(X)$ مجموعه همه توابع پیوسته و کرانداری چون f است که برای هر $\epsilon > \circ$، زیر مجموعه فشرده K موجود است که اگر $x \notin K$، $|f(x)| \leq \epsilon$. اگر $f \in C_\circ(X)$، گوئیم f در بی نهایت صفر می‌شود. به طور بدیهی $C_\circ(X)$ یک فضای برداری است و اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای کوشی در $C_\circ(X)$ باشد، این دنباله به تابع پیوسته و کرانداری چون f همگراست. اگر $\epsilon > \circ$ داده شده باشد، عدد طبیعی n موجود است که برای هر $x \in X$، $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{۲}$. زیر مجموعه فشرده K را طوری اختیار می‌کنیم که اگر $x \notin K$، $|f_n(x)| < \frac{\epsilon}{۲}$. اگر $x \notin K$،

$$|f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x)| < \epsilon.$$

لذا $f \in C_\circ(X)$، این نشان می‌دهد که $C_\circ(X)$ فضای متریک کامل است. مجموعه همه توابع

پیوسته که هر کدام خارج زیر مجموعه فشرده‌ای صفر هستند را با نماد $C_{00}(X)$ نمایش می‌دهیم. این فضای برداری در $C_0(X)$ چگال است، در واقع فرض کنیم $f \in C_0(X)$ و $\epsilon > 0$ داده شده باشد. زیر مجموعه فشرده K موجود است که اگر $x \notin K$، $|f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. برای هر $x \in K$، همسایگی فشرده نسبی V_x از x را در نظر می‌گیریم. چون K فشرده است، زیر مجموعه متناهی $\{x_1, ..., x_m\}$ از عناصر K را طوری می‌یابیم که $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i}$. قرار می‌دهیم $V = \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i}$. چون V زیر مجموعه‌ای باز و فشرده نسبی است، لم اوریسون وجود تابع پیوسته $h : X \to [0, 1]$ را که روی K یک و خارج V صفر است را تضمین می‌کند. واضح است که $hf \in C_{00}(X)$ و برای هر $x \in X$، $|h(x)f(x) - f(x)| < \epsilon$. این نشان می دهد که $C_{00}(X)$ در $C_0(X)$ چگال است.

سوال اینجاست که چرا توابع پیوسته روی فضاهای توپولوژیک هاسدورف و فشرده موضعی مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. دلیل آن این است که روی فضاهای توپولوژیک هاسدورف و فشرده موضعی، توابع پیوسته به اندازه کافی وجود دارد. لم اوریسون وجود چنین توابعی را تضمین می‌کند. در واقع فرض کنیم K و V به ترتیب زیر مجموعه‌های فشرده و باز از فضای توپولوژیک هاسدورف و فشرده موضعی (X, τ) بوده که $K \subseteq V$. در اینصورت تابع پیوسته $f : X \to [0, 1]$ موجود است که $f(K) = \{1\}$ و $f(V) = \{0\}$. دقت کنید که اگر فضای توپولوژیک (X, τ) هاسدورف و فشرده موضعی نباشد، $C_0(X)$ ممکن است تنها تابع ثابت صفر را شامل باشد و لذا فضای خوبی برای مطالعه نیست. در تمرین‌های آورده شده در انتهای فصل خواهید دید که $C_0(\mathbb{Q}) = \{0\}$.

مثال ۱ ــ ۲. برای هر عدد طبیعی n، تابع $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را با ضابطه

$$h_n(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq n+1 \\ x+n+1 & -n-1 \leq x \leq -n \\ 1 & -n \leq x \leq n \\ -x+n+1 & n \leq x \leq n+1 \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. واضح است h_n تابعی پیوسته و خارج مجموعه فشرده $[-n-1, n+1]$ صفر است. برای هر $x \in \mathbb{R}$، قرار می‌دهیم $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{h_k(x)}{2^k}$. f_n تابعی پیوسته و خارج مجموعه فشرده $[-n-1, n+1]$ صفر بوده و بنابراین $f_n \in C_{00}(\mathbb{R})$. چون سری عددی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ همگراست، لذا سری توابع $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n(x)}{2^n}$ همگرای یکنواخت است. اما $C_0(\mathbb{R})$ فضای متریک کامل بوده و لذا $f \in C_0(\mathbb{R})$. چون هر دنباله همگرای یکنواخت، کوشی یکنواخت است. بنابراین دنباله $\{f_n\}$ کوشی است. اگر این دنباله در $C_{00}(\mathbb{R})$ همگرا باشد، چون حد دنباله در فضای متریک منحصربفرد است، باید به تابع f همگرا باشد. اکنون فرض کنیم K زیر مجموعه‌ای فشرده باشد. عدد طبیعی n

موجود است که $K \subseteq [-n,n]$. $n+1 \notin K$ و لذا

$$f(n+1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k(n+1)}{2^k} \geq \frac{h_{n+1}(n+1)}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} > 0.$$

این نشان می‌دهد که $f \notin C_{00}(\mathbb{R})$ و لذا $C_{00}(\mathbb{R})$ کامل نیست.

برای فضای توپولوژیک هاسدورف و فشرده موضعی (X,τ)، $C_{00}(X) \subseteq C_0(X) \subseteq C_b(X)$. ممکن است در رابطه اخیر زیر مجموعه سره باشد. برای مثال تابع ثابت یک تعریف شده روی اعداد حقیقی، تابعی پیوسته و کراندار است اما خارج فشرده‌ای از عدد ثابت $\frac{1}{2}$ کمتر نیست. مثال بالا تابع پیوسته‌ای ارائه می‌کند که در بی نهایت صفر می‌شود ولی خارج هیچ فشرده‌ای صفر نیست.

تمرین ۱

۱. فرض کنید f تابعی از X به Y باشد. اگر f یک به یک باشد، آیا برای هر $A \subseteq X$، $f(X \setminus A) = f(X) \setminus f(A)$؟ اگر f پوشا باشد، چطور؟

۲. ثابت کنید مجموعه همه زیر دنباله‌های دنباله $\{n\}$، ناشماراست.

۳. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای کراندار از اعداد حقیقی باشد. شرط لازم و کافی برای آنکه برای هر دنباله کراندار $\{y_n\}$، $\limsup(x_n + y_n) = \limsup x_n + \limsup y_n$ را بیابید.

۴. فرض کنید E مجموعه همه حدود زیر دنباله‌های دنباله کراندار $\{x_n\}$ باشد. ثابت کنید $\limsup x_n = \sup E$ و $\liminf x_n = \inf E$.

۵. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای کراندار از اعداد حقیقی باشد. اگر α عددی حقیقی و $\limsup x_n < \alpha$، ثابت کنید عدد طبیعی k وجود دارد که برای هر $n \geq k$، $x_n < \alpha$. اگر β عدد حقیقی و $\beta < \limsup x_n$، ثابت کنید زیر دنباله‌ای از $\{x_n\}$ مانند $\{x_{n_k}\}$ وجود دارد که برای هر k، $\beta < x_{n_k}$. این گزاره‌ها را در مورد حد پائین یک دنباله کراندار از اعداد حقیقی بیان و ثابت کنید.

۶. دنباله مثبت $\{x_n\}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید

$$\liminf \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \liminf x_n^{\frac{1}{n}} \leq \limsup x_n^{\frac{1}{n}} \leq \limsup \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

با استفاده از این تمرین و شرط لازم همگرایی سری‌ها، ثابت کنید که دنباله توابع $\{f_n\}$ با ضابطه $f_n(x) = n^2 x(1-x^2)^n$ روی بازه $[0,1]$ به تابع صفر همگرای نقطه به نقطه است.

۷. اگر A و B دو زیر مجموعه بسته از فضای متریک (X,d) باشد، تعریف می‌کنیم $d(A,B) = \inf\{d(a,b);\ a \in A,\ b \in B\}$. $d(A,B)$ را فاصله A و B گوئیم. اگر A فشرده

و B بسته و $A \cap B = \emptyset$، ثابت کنید $d(A,B) > ۰$. اگر A و B بسته و مجزا باشند، چطور؟

۸. فضای متریک (X,d) و زیر مجموعه بسته F از X را طوری مثال بزنید که برای یک $x \in X$ و هر $y \in F$، $d(x,y) \neq d(x,F)$.

۹. دنباله مثبت $\{x_n\}$ را در نظر بگیرید. اگر $\limsup \frac{x_{n+1}}{x_n} < ۱$، ثابت کنید $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ همگراست. اگر $\limsup \frac{x_{n+1}}{x_n} > ۱$، ثابت کنید $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ واگراست. اگر $\limsup \frac{x_{n+1}}{x_n} = ۱$، در مورد رفتار $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ چه می‌توان گفت؟

۱۰. در مورد همگرایی و واگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}}$ بحث کنید.

۱۱. فرض کنید مجموع جزئی n ام سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ کراندار و دنباله نزولی $\{b_n\}$ نیز به صفر همگرا باشد. ثابت کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ همگراست.

۱۲. فرض کنید (X,τ_1) و (Y,τ_2) فضاهای توپولوژیک و $f: X \to Y$ تابعی دلخواه باشد. نشان دهید که پیوستگی تابع f با هر یک از شرایط زیر معادل است.

الف) تصویر معکوس هر مجموعه باز، باز است.

ب) تصویر معکوس هر مجموعه بسته، بسته است.

ج) برای هر زیر مجموعه $A \subseteq X$، $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

د) برای هر زیر مجموعه $B \subseteq Y$، $f^{-1}(B^\circ) \subseteq \left(f^{-1}(B)\right)^\circ$.

۱۳. اگر f تابعی پیوسته از فضای توپولوژیک (X,τ_1) به فضای توپولوژیک هاسدورف (Y,τ_2) باشد، ثابت کنید $\{(x,f(x));\ x \in X\}$ بسته است. آیا مسئله بدون هاسدورف بودن Y درست است؟

۱۴. تابعی پیوسته و باز مثال بزنید که بسته نباشد. تابعی پیوسته و بسته مثال بزنید که باز نباشد. تابعی باز و بسته مثال بزنید که پیوسته نباشد.

۱۵. $\mathbb{R}^n$ را با متر اقلیدسی در نظر بگیرید. برای $x \in \mathbb{R}^n$، ثابت کنید $G \subseteq \mathbb{R}^n$ باز است اگر و تنها اگر $x + G$ باز باشد.

۱۶. ثابت کنید $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ با $\mathbb{R}$ همیومورف نیست.

۱۷. نشان دهید که تنها زیر مجموعه‌های باز و بسته در $\mathbb{R}$، $\emptyset$ و $\mathbb{R}$ است.

۱۸. فرض کنید در فضای توپولوژیک (X,τ)، تنها زیر مجموعه چگال X است. نشان دهید که X فضای متریک گسسته است.

۱۹. فرض کنید زیر مجموعه A از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ دارای حداقل یک نقطه درونی باشد. ثابت کنید نقاط درونی A ناشماراست. آیا این گزاره در مورد نقاط حدی نیز صحیح است؟

۲۰. ثابت کنید $C_\circ(\mathbb{Q}) = \{\circ\}$. از این تمرین نتیجه می‌شود که اگر فضای توپولوژیک مورد مطالعه، هاسدورف و فشرده موضعی نباشد، فضای توابعی که در بی‌نهایت صفر می‌شوند همیشه فضای خوبی برای مطالعه نیست.

۲۱. فرض کنید هر تابع حقیقی و پیوسته f روی فضای متریک (X,d) مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم خود را اختیار می‌کند. یعنی برای دو عنصر $x, y \in X$، $f(x) = \sup\{f(x);\ x \in X\}$ و $f(y) = \inf\{f(x);\ x \in X\}$. ثابت کنید X فشرده است.

فصل ۲

نظریه اندازه

۲−۱ مقدمه

در قرن نوزدهم ریاضیدانان به این نتیجه رسیده‌اند که تئوری ریمان و خواص توابع پیوسته جوابگوی همه مسائل موجود در ریاضی نیست. در قرن بیستم نظریه اندازه مطرح شد و در همان زمان اعداد حقیقی اهمیت فوق‌العاده‌ای داشت. در سال ۱۸۹۸ بورل اندازه را روی زیر مجموعه‌های اعداد حقیقی که امروزه زیر مجموعه‌های بورل اندازه پذیر نامیده می‌شود را مورد مطالعه قرار داد. بعد از آن لبگ اندازه‌ای را که امروزه اندازه لبگ نامیده می‌شود را معرفی کرد.

یکی از مسائل مطرح در ریاضی و مخصوصاً در هندسه تعیین مساحت یا حجم ناحیه‌ای از فضای دو بعدی یا فضای سه بعدی است. حساب دیفرانسیل و انتگرال برای تعیین این مساحت‌ها و یا حجم‌ها در نواحی محدود به منحنی‌ها و رویه‌ها نقش کلیدی دارد و در مورد مجموعه‌های پیچیده‌تر پاسخگو نیست. این نقص با استفاده از تعریف اندازه و انتگرال روی یک فضای اندازه مرتفع خواهد شد.

در این فصل ابتدا مفهوم نیم حلقه و پس از آن حلقه و در نهایت سیگما جبر را بیان می‌کنیم. تعریف اندازه را روی یک نیم حلقه تعریف می‌کنیم و پس از آن این اندازه را روی یک سیگما حلقه تولید شده توسط آن نیم حلقه گسترش می‌دهیم. همه این مطالب کلی است و در حالت خاص اندازه لبگ را ساخته و بعضی از خصوصیات آن‌را مطالعه خواهیم کرد. یک خانواده از زیر مجموعه‌های $\mathbb{R}$ را زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر نامیده و تابعی روی این خانواده از مجموعه‌ها

تعریف می‌کنیم. این تابع را اندازه لبگ نامیم و اثر این تابع روی هر عضو این خانواده، اندازه آن مجموعه است. انتظار داریم اندازه هر بازه متناهی در $\mathbb{R}$ طول بازه باشد که چنین نیز خواهد شد.

۲ــ۲ نیم حلقه و سیگما جبر

در این بخش نیم حلقه را تعریف کرده و پس از بررسی تعدادی از خواص آن به تعریف اندازه روی یک نیم حلقه می‌پردازیم. نیم حلقه‌ها سنگ بنای تعریف اندازه روی یک سیگما جبر است. همانطور که یک پایه در فضای توپولوژیک نقش مهمی دارد، نیم حلقه نیز در تئوری اندازه از اهمیت فوق‌العاده‌ای برخوردار است.

تعریف ۲ ــ ۱. اگر X مجموعه‌ای ناتهی و S خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های X باشد، در آنصورت

الف) S یک نیم حلقه است هرگاه برای هر $A, B \in S$، زیر مجموعه متناهی $\{C_1, ..., C_n\}$ از اعضای S موجود باشد که $A \setminus B = \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i$ و همچنین $A \cap B \in S$.

ب) S یک حلقه است هرگاه برای هر $A, B \in S$، $A \cup B \in S$ و همچنین $A \setminus B \in S$.

ج) حلقه S یک σ حلقه است هرگاه تحت اجتماع شمارا از اعضای S بسته باشد، یعنی برای هر خانواده شمارا $\{A_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ از اعضای S، $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in S$.

د) S یک جبر است هرگاه برای هر $A, B \in S$، $A \cap B \in S$ و همچنین $A^c \in S$. جبر S یک σ جبر است هرگاه تحت اجتماع شمارا از اعضای S بسته باشد.

اگر X مجموعه‌ای ناتهی باشد، $P(X)$ یک σ جبر است. فرض کنیم S خانواده همه زیر مجموعه‌های متناهی از اعداد طبیعی باشد. به وضوح S یک حلقه است ولی یک جبر نیست. این حلقه یک σ حلقه نیست. در حقیقت برای هر عدد طبیعی n، $\{n\} \in S$ ولی $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{n\} = \mathbb{N} \notin S$.
از تعریف بالا چنین استنباط می‌شود که هر σ جبر یک σ حلقه است ولی عکس آن در حالت کلی صحیح نیست. برای مثال خانواده همه زیر مجموعه‌های اعداد طبیعی که عناصرش زوج هستند، یک σ حلقه است ولی یک σ جبر نیست.

مثال ۲ ــ ۱. قرار دهید $S = \{[a, b);\ a, b \in \mathbb{R}\}$. برای هر دو عنصر $[a, b)$ و $[c, d)$ از S،

$$[a,b) \cap [c,d) = \begin{cases} \emptyset & b \leq c \ or\ d \leq a \\ [a,b) & c \leq a,\ b \leq d \\ [c,d) & a \leq c,\ d \leq b \\ [c,b) & a \leq c \leq b \leq d \\ [a,d) & c \leq a \leq d \leq b \end{cases}$$

این نشان می دهد که اشتراک هر دو عنصر از S در S قرار دارد. به شیوه مشابه می‌توان نشان داد که

تفاضل هر دو عنصر از S اجتماعی مجزا از اعضای S است. بنابراین S یک نیم حلقه بوده که یک حلقه نیست. در واقع $[۰,۳) \setminus [۱,۲) = [۰,۱) \cup [۲,۳) \notin S$.

اگر X مجموعه‌ای ناتهی باشد، دو عمل $A + B = A \Delta B$ و $A.B = A \cap B$ را روی $P(X)$ در نظر می‌گیریم. در دروس جبر دیده شده است که $P(X)$ تحت این دو عمل یک حلقه است. اگر S زیر حلقه‌ای از این حلقه باشد، در اینصورت برای هر $A, B \in S$، $A \cap B \in S$. از این موضوع نتیجه می‌گیریم

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = [A \setminus (A \cap B)] \cup [(A \cap B) \setminus A] = A + (A \cap B) \in S.$$

ازطرفی $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B) = (A + B) + (A.B) \in S$. بنابراین S یک حلقه است.

برعکس، فرض کنیم S یک حلقه باشد. نشان می‌دهیم که S زیر حلقه‌ای از $P(X)$ است. برای هر $A, B \in S$، $A + B = A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in S$ و $A.B = (A \cup B) \setminus (A \Delta B) \in S$. این نشان می‌دهد که S تحت عمل جمع و ضرب بسته و لذا S یک زیر حلقه است.

فرض کنیم Ω یک خانواده از زیر مجموعه‌های X باشد. در آنصورت اشتراک همه σ حلقه‌های شامل Ω یک σ حلقه بوده و با نماد $\sigma(\Omega)$ نمایش می‌دهیم. $\sigma(\Omega)$ را σ حلقه تولید شده توسط Ω گوئیم. نکته‌ای که حائز اهمیت است، این است که هر عنصر در σ حلقه تولید شده توسط خانواده Ω، زیر مجموعه اجتماع حداکثر شمارایی از اعضای Ω است. در واقع اگر خانواده همه زیر مجموعه‌های X که مشمول اجتماعی حداکثر شمارا از اعضای Ω است را با نماد Σ نمایش دهیم، در آن صورت برای هر $A, B \in \Sigma$، $A \setminus B \subseteq A$. چون A زیر مجموعه اجتماع حداکثر شمارا از اعضای Ω است، بنابراین $A \setminus B$ چنین است و لذا $A \setminus B \in \Sigma$. به آسانی دیده می‌شود که اجتماع تعداد شمارا از اعضای Σ در Σ است و در نتیجه Σ یک σ حلقه است.

مثال ۲ ـ ۲. اگر X مجموعه‌ای حداکثر شمارا و S نیز σ جبر شامل همه زیر مجموعه‌های تک نقطه‌ای از X باشد. در آن صورت این σ جبر $P(X)$ خواهد بود. اگر X ناشمارا باشد، σ جبر تولید شده توسط زیر مجموعه‌های تک عضوی شامل همه زیر مجموعه‌های حداکثر شماراست. چون هر σ جبر متمم اعضای خود را شامل است، بنابراین هر زیر مجموعه‌ای که متمم آن حداکثر شماراست نیز در این σ جبر قرار دارد. ادعا این است که σ جبر تولید شده توسط زیر مجموعه‌های تک عضوی به جز این عناصر زیر مجموعه دیگری از X را شامل نخواهد بود. برای این‌کار کافی‌است ثابت کنیم خانواده همه زیر مجموعه‌های X که خود حداکثر شمارا و یا متمم آن حداکثر شماراست که با نماد Σ نمایش می‌دهیم، یک σ جبر است. واضح است که $E \subseteq X$ حداکثر شماراست اگر و تنها اگر

$(E^c)^c \subseteq X$ حداکثر شمارا باشد و لذا شرط لازم و کافی برای آنکه $E \in \Sigma$ آن‌است که $E^c \in \Sigma$.

اکنون فرض کنیم $\{A_n\}$ دنباله‌ای از اعضای Σ باشد. اگر همه A_n ها حداکثر شمارا باشند، لذا اجتماع آنها حداکثر شمارا و لذا عضوی از Σ خواهد بود. اگر برای یک m ای ${A_m}^c$ حداکثر شمارا باشد، از ${A_m}^c \subseteq \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c$ نتیجه می‌گیریم که $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c$ نیز حداکثر شماراست. در نتیجه $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$ و ادعا ثابت می‌شود.

نکته‌ای که حائز اهمیت است این است که یک σ حلقه، اشتراک هر تعداد از اعضای خود را شامل است. در واقع اگر $\{A_n\}$ دنباله‌ای از اعضای یک σ حلقه باشد، از $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus A_m\right)$ نتیجه خواهیم گرفت که $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ نیز در σ حلقه یاد شده قرار دارد.

مثال ۲ ـ ۳. زیر مجموعه A از مجموعه ناتهی X را در نظر می‌گیریم. واضح است که σ جبر تولید شده توسط A، $\{\emptyset, A, A^c, X\}$ است. قصد داریم σ جبر تولید شده توسط خانواده همه زیر مجموعه‌هایی چون B از X را بیابیم که A را شامل است. آنچه که به نظر می آید این σ جبر باید شامل همه B هایی باشد که شامل A بوده و همینطور شامل B هایی باشد که $A \subseteq B^c$. ادعا می‌کنیم این σ جبر شامل زیر مجموعه‌ای از X به جز عناصر فوق نیست. برای این‌کار کافی‌است ثابت کنیم که خانواده $\Sigma = \{B;\ A \subseteq B$ یا $A \subseteq B^c\}$ یک σ جبر است. بنا به تعریف واضح است که $X \in \Sigma$ و $B \in \Sigma$ اگر و تنها اگر $B^c \in \Sigma$. اکنون فرض کنیم $\{B_n\}$ دنباله‌ای از اعضای Σ باشد. فرض کنیم برای یک m، $A \subseteq B_m$. لذا $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ و بنابراین $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \Sigma$. فرض کنیم برای هر n، $A \subseteq {B_n}^c$. بنا به تعریف Σ و $A \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} {B_n}^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)^c$، خواهیم داشت $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \Sigma$. این اثبات ادعا را کامل می‌کند.

آنچه که مسلم است خانواده همه زیر مجموعه‌های یک مجموعه متناهی یک σ جبر متناهی است. همینطور خانواده همه زیر مجموعه‌های یک مجموعه نامتناهی، یک σ جبر ناشماراست. سوال این‌است که آیا σ جبر شمارا وجود دارد؟ قضیه زیر پاسخ این سوال را به روشنی بیان می‌کند.

قضیه ۲ ـ ۲. *σ جبر شمارا وجود ندارد.*

برهان. فرض کنید S یک σ جبر نامتناهی باشد. قرار می‌دهیم $A_1 = X$. چون S نامتناهی است، $C \in S$ را طوری می‌یابیم که $\emptyset \subsetneqq C \subsetneqq X$. برای هر $A \in S$، $A = (C \cap A) \cup (C^c \cap A)$ و لذا بنا به فرض، $\{C \cap A;\ A \in S\}$ و یا $\{C^c \cap A;\ A \in S\}$ نامتناهی است. اگر مجموعه اول نامتناهی باشد، قرار دهید $A_2 = C$. اگر مجموعه دوم نامتناهی باشد، قرار دهید $A_2 = C^c$. در هر حال واضح است

که $A_1 \supsetneq A_2 \supsetneq \emptyset$ و $\{A_2 \cap A;\ A \in S\}$ نامتناهی است. برای عدد طبیعی $n \geq 2$، فرض کنید A_n بدست آمده باشد که $A_{n-1} \supsetneq A_n \supsetneq \emptyset$ و $\{A_n \cap A;\ A \in S\}$ نامتناهی است. لذا $D \in S$ موجود است که $A_n \supsetneq A_n \cap D \supsetneq \emptyset$. برای هر $A \in S$، $A_n \cap A = ((A_n \cap D) \cap A) \bigcup ((A_n \setminus D) \cap A)$. به شیوه مشابه اگر $\{(A_n \cap D) \cap A;\ A \in S\}$ نامتناهی باشد، قرار می‌دهیم $A_{n+1} = A_n \cap D$. اگر $\{(A_n \setminus D) \cap A;\ A \in S\}$ نامتناهی باشد، قرار می‌دهیم $A_{n+1} = A_n \setminus D$. بدین ترتیب دنباله اکیداً نزولی $\{A_n\}$ از اعضای S بدست می‌آید. برای هر عدد طبیعی n، قرار می‌دهیم $B_n = A_{n-1} \setminus A_n$. واضح است که $\{B_n\}$ دنباله‌ای مجزا از اعضای S است. تابع $f : P(\mathbb{N}) \to S$ را با ضابطه $f(K) = \bigcup_{k \in K} B_k$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید K_1 و K_2 دو زیر مجموعه از اعداد طبیعی و $K_1 \neq K_2$. در این‌صورت اگر $k \in K_1 \setminus K_2$، $B_k \subseteq f(K_1) \setminus f(K_2)$. اگر $k \in K_2 \setminus K_1$، به شیوه مشابه $B_k \subseteq f(K_2) \setminus f(K_1)$ و لذا تابع $f : P(\mathbb{N}) \to S$ با ضابطه $f(K) = \bigcup_{k \in K} B_k$ یک به یک است. در نتیجه S شمارا نیست.

■

تعریف ۲ ـ ۳. یک خانواده $\mathcal{M}$ از زیر مجموعه‌های X را یک رده یکنوا گوئیم هرگاه این خانواده تحت اشتراک دنباله‌های نزولی و اجتماع دنباله‌های صعودی از اعضای خودش بسته باشد. به عبارت دیگر اگر $\{A_n\}$ و $\{B_n\}$ به‌ترتیب دنباله‌های صعودی و نزولی از اعضای $\mathcal{M}$ باشند، در آن‌صورت $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ و $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{M}$.

نکته ۱. یک حلقه R یک σ حلقه است اگر و تنها اگر یک رده یکنوا باشد. در واقع به طور بدیهی هر σ حلقه یک رده یکنواست. زیرا طبق تعریف، اجتماع تعداد شمارا از اعضای خود را شامل بوده و همینطور دیدید که اشتراک هر تعداد شمارا از اعضای خود را نیز شامل است. اکنون فرض کنیم حلقه R یک رده یکنوا باشد. اگر $\{A_n\}$ دنباله‌ای از اعضای R باشد، برای هر عدد طبیعی n، قرار می‌دهیم $B_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$. واضح است که دنباله $\{B_n\}$ صعودی است و برای هر عدد طبیعی n، $B_n \in R$. اما R رده‌ای یکنوا و لذا $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in R$.

شبیه σ حلقه تولید شده توسط یک خانواده از زیر مجموعه‌های X، می‌توان رده یکنوای تولید شده توسط یک خانواده از زیر مجموعه‌های X را تعریف کرد. بنابراین رده یکنوای تولید شده توسط یک خانواده از زیر مجموعه‌های X، کوچکترین رده یکنوای شامل این خانواده از مجموعه‌هاست. به آسانی دیده می‌شود که اشتراک هر تعداد از رده‌های یکنوا، رده‌ای یکنواست و لذا اشتراک همه رده‌های یکنوای شامل یک خانواده از زیر مجموعه‌های X، رده یکنوای تولید شده توسط این خانواده از زیر مجموعه‌های X است. رده یکنوای تولید شده توسط یک خانواده از زیر مجموعه‌های X مانند Ω را با $\mathcal{M}(\Omega)$ نمایش می‌دهیم.

دیدیم که $S=\{[a,b); a,b\in\mathbb{R}\}$ یک نیم حلقه است. رده یکنوای تولید شده توسط S، شامل هر مجموعه تک عضوی است. در واقع اشتراک دنباله نزولی $\{[a,a+\frac{1}{n})\}$ مجموعه تک عضوی $\{a\}$ است. رده تولید شده توسط این نیم حلقه یک σ حلقه نیست. برای دیدن این موضوع خانواده همه زیر مجموعه‌های همبند $\mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. چون اشتراک هر دنباله از زیر مجموعه‌های نزولی همبند و همینطور اجتماع یک دنباله از زیر مجموعه‌های صعودی همبند، زیر مجموعه‌ای همبند است، لذا این خانواده رده‌ای یکنوا شامل S است. بنابراین رده یکنوای تولید شده توسط S، تنها شامل تعدادی از زیر مجموعه‌های همبند $\mathbb{R}$ است. در نتیجه $[0,1)\cup[2,3)$ عضوی از رده یکنوای تولید شده توسط S نیست ولی در σ حلقه تولید شده توسط S قرار دارد. این مطلب برای حلقه‌ها درست است، به قضیه زیر توجه کنید.

قضیه ۲ ـ ۴. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. در آن‌صورت* $\mathcal{M}(R)=\sigma(R)$

برهان. چون $\sigma(R)$ یک σ حلقه است، لذا رده یکنوای شامل R است. بنابراین $\mathcal{M}(R)\subseteq\sigma(R)$. برای اتمام برهان، کافی‌است ثابت کنیم $\mathcal{M}(R)$ یک σ حلقه است. برای این منظور، برای هر $F\in\mathcal{M}(R)$ قرار می‌دهیم

$$\mathcal{K}(F)=\{E\in\mathcal{M}(R);\ E\setminus F,\ F\setminus E, E\cup F\in\mathcal{M}(R)\}.$$

ابتدا نشان می‌دهیم $\mathcal{K}(F)$ رده‌ای یکنواست. فرض کنیم $\{E_n\}$ دنباله‌ای صعودی از اعضای $\mathcal{K}(F)$ باشد. در این‌صورت دنباله‌های $\{E_n\setminus F\}$ و $\{F\setminus E_n\}$ به ترتیب صعودی و نزولی از عناصر $\mathcal{M}(R)$ است. واضح است که دنباله $\{E_n\cup F\}$ نیز صعودی و از عناصر $\mathcal{M}(R)$ است. چون $\mathcal{M}(R)$ رده‌ای یکنواست، لذا

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)\setminus F,\ F\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}(F\setminus E_n),\ (\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)\cup F=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\cup F\in\mathcal{M}(R).$$

به شیوه مشابه، اشتراک یک خانواده از زیر مجموعه‌های نزولی از $\mathcal{K}(F)$ در $\mathcal{K}(F)$ قرار دارد و لذا $\mathcal{K}(F)$ رده‌ای یکنواست. اکنون عنصر F را از حلقه R در نظر می‌گیریم. بنا به تعریف حلقه و $\mathcal{K}(F)$، $R\subseteq\mathcal{K}(F)$ و لذا $\mathcal{M}(R)\subseteq\mathcal{K}(F)$. این نشان می‌دهد که برای هر $E\in\mathcal{M}(R)$ و $F\in R$، $E\setminus F,\ F\setminus E, E\cup F\in M(R)$. در نتیجه برای هر $E\in\mathcal{M}(R)$ و $F\in R$، $F\in\mathcal{K}(E)$. بنابراین برای هر $E\in\mathcal{M}(R)$، $R\subseteq\mathcal{K}(E)$. از طرفی $\mathcal{K}(E)$ رده‌ای یکنوا و لذا $\mathcal{M}(R)\subseteq\mathcal{K}(E)$. این مطلب نشان می‌دهد که برای هر $E\in\mathcal{M}(R)$، $\mathcal{M}(R)=\mathcal{K}(E)$ و لذا $\mathcal{M}(R)$ یک حلقه است. چون $\mathcal{M}(R)$ رده یکنواست، پس $\mathcal{M}(R)$ یک σ حلقه است و برهان کامل می‌شود. ∎

۲-۳ اندازه روی یک نیم حلقه

اکنون که با تعریف نیم حلقه آشنا شده‌اید، اندازه روی آن را تعریف می‌کنیم. در حقیقت اندازه تابعی است که به هر عضو از نیم حلقه، عددی نامنفی از اعداد حقیقی توسعه یافته نسبت می‌دهد. در حالت خاص اندازه‌ای روی بازه‌ها از زیر مجموعه‌های اعداد حقیقی وجود دارد که به هر بازه از زیر مجموعه اعداد حقیقی طول آن بازه را نسبت می‌دهد.

تعریف ۲ ـ ۵. فرض کنیم S یک نیم حلقه از زیر مجموعه‌های X باشد. تابع $\mu : S \to [0,+\infty]$ یک اندازه است هرگاه

الف) $\mu(\emptyset) = 0$؛

ب) اگر $\{A_n\}$ دنباله‌ای مجزا از اعضای S باشد به طوری که $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S$،

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

در این حالت (X, S, μ) را یک فضای اندازه گوئیم و برای هر $A \in S$، مقدار $\mu(A)$ را اندازه A نامیم.

به سه اندازه که در ریاضی نقش عمده‌ای دارند اشاره می‌کنیم. اگر X مجموعه‌ای ناتهی و S نیم حلقه‌ای از زیر مجموعه‌های X باشد، تابع $\mu : S \to [0,+\infty]$ با ضابطه $\mu(A) = |A|$ ($|A|$ تعداد اعضای A است) یک اندازه روی S است که به آن اندازه شمارشی گوئیم. برای $x \in X$، تابع $\delta_x : S \to [0,+\infty]$ با ضابطه

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

یک اندازه روی S است که به آن اندازه دیراک گوئیم.

قرار دهید $S = \{[a,b); a,b \in \mathbb{R}\}$. تابع $\mu : S \to [0,\infty]$ را با ضابطه $\mu([a,b)) = b - a$ در نظر می‌گیریم. واضح است که $\mu(\emptyset) = 0$. اکنون فرض کنید $\{[a_n, b_n)\}$ دنباله‌ای مجزا از اعضای S بوده و $[a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n)$. فرض کنید $\{[c_n, c_{n+1})\}$ نمایشی از $\{[a_n, b_n)\}$ بوده که $c_1 = a$ و همچنین دنباله $\{c_n\}$ به b صعود کند. بنابراین

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu([c_n, c_{n+1})) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu([c_k, c_{k+1})) = \lim_{n\to\infty} c_{n+1} - c_1 = b - a.$$

چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} \mu([c_n, c_{n+1}))$ مطلقاً همگراست، لذا مستقل از تجدید آرایش است. بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty} \mu([a_n, b_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu([c_n, c_{n+1})) = b - a = \mu([a,b))$. نتیجه اینکه μ یک اندازه است.

نکته۲. فرض کنیم (X,S,μ) یک فضای اندازه، $A,B\in S$ و $A\subseteq B$. زیر مجموعه‌های مجزای $C_1,\dots,C_n$ از S موجودند که $A\setminus B=\bigcup\limits_{i=1}^{n}C_i$. بنابراین $B=\bigcup\limits_{i=1}^{n}C_i\cup A$ و لذا

$$\mu(B)=\sum_{i=1}^{n}\mu(C_i)+\mu(A)\geq\mu(A).$$

به بیان دیگر μ تابعی صعودی است.

قضیه۲ ـ ۶. *فرض کنید در فضای اندازه (X,S,μ)، نیم حلقه S یک σ جبر باشد. گزاره‌های زیر برقرارند:*

الف) دنباله صعودی $\{A_n\}$ از اعضای S را در نظر بگیرید و قرار دهید $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. در آن‌صورت دنباله $\{\mu(A_n)\}$ به $\mu(A)$ همگراست.

ب) دنباله نزولی $\{A_n\}$ از اعضای S را در نظر بگیرید و قرار دهید $A=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. اگر $\mu(A_1)<\infty$، در آن‌صورت دنباله $\{\mu(A_n)\}$ به $\mu(A)$ همگراست.

برهان. قرار دهید $B_1=A_1$ و برای $n>1$، $B_n=A_n\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{n-1}A_i$. دنباله $\{B_n\}$ دنباله‌ای مجزا از عناصر S بوده و $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$. اما $\mu(A_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(B_i)$ به $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(B_n)$ همگراست. چون $\mu(A)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(B_n)$، لذا $\mu(A_n)$ به $\mu(A)$ همگراست.

ب) برای هر عدد طبیعی n، قرار دهید $D_n=A_1\setminus A_n$. در این‌صورت $\{D_n\}$ دنباله‌ای صعودی از اعضای S بوده و $A_1\setminus A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D_n$. بنا به قسمت الف،

$$\mu(A_1)-\mu(A)=\mu(A_1\setminus A)=\lim_{n\to\infty}\mu(D_n)=\mu(A_1)-\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

در نتیجه $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(A)$ ■

اندازه شمارشی μ را روی $P(\mathbb{N})$ در نظر می گیریم. برای هر عدد طبیعی n، قرار دهید $A_n=\{n,n+1,\dots\}$. $\{A_n\}$ دنباله‌ای نزولی است و $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\emptyset$. برای هر n، $\mu(A_n)=|A_n|=+\infty$ و لذا $\mu(A_n)$ به $\mu(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n)=0$ همگرا نیست. این نکته نشان می‌دهد که شرط متناهی بودن اندازه A_1 در قضیه قبل ضروری است.

در دروس آنالیز ریاضی، مفهوم حد بالا و حد پائین یک دنباله از اعداد مورد مطالعه قرار می‌گیرد. حد بالا و پائین یک دنباله از مجموعه‌ها نیز به شکل زیر تعریف می‌شود. اگر $\{E_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌ها باشد، حد بالای این دنباله را با نماد $\limsup E_n$ نمایش داده و مجموعه همه نقاطی است که در تعداد نامتناهی از E_n ها قرار دارد. برای هر عدد طبیعی n،

قرار می‌دهیم $F_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k$. فرض کنید $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. لذا برای هر n، $x \in F_n$ و این نتیجه می‌دهد که x در تعداد نامتناهی از E_n ها قرار دارد. چنانچه عنصری مانند x در تعداد نامتناهی E_n ها قرار داشته باشد، پس برای هر n، $x \in F_n$. در نتیجه $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. این نشان می‌دهد که $\limsup E_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k$. حد پائین یک دنباله $\{E_n\}$ از مجموعه‌ها که با نماد $\liminf E_n$ نمایش می‌دهیم، مجموعه همه نقاطی است که تنها در تعداد متناهی از E_n ها قرار ندارد. به شیوه مشابه دیده می‌شود که $\liminf E_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} E_k$. می‌دانیم یک دنباله همگراست اگر و تنها اگر حد بالا و حد پائین دنباله با هم مساوی و مقدار مساوی حد دنباله است. حد یک دنباله از مجموعه‌ها نیز به همین روش تعریف می‌شود. گوئیم دنباله $\{E_n\}$ از مجموعه‌ها دارای حد است اگر و تنها اگر $\limsup E_n = \liminf E_n$ و در این حالت این مقدار مساوی را حد دنباله گوئیم. همانطور که دنباله‌های یکنوا و کراندار از اعداد حقیقی حد دارند، به آسانی دیده می‌شود که دنباله‌های یکنوا از مجموعه‌ها دارای حد هستند.

نکته ۳. بر طبق نماد گذاری قبل، دنباله $\{\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} E_k\}$ صعودی است. بنا به قضیه ۲—۶،

$$\mu(\liminf E_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k) = \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k).$$

برای هر n، $\mu(E_n) \geq \mu(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} E_k)$ و لذا $\liminf \mu(E_n) \geq \lim\limits_{n\to\infty} \mu(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} E_k) = \mu(\liminf E_n)$.

همچنین $\{\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k\}$ دنباله‌ای نزولی است. اگر $\mu(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k) < \infty$، بنا به قضیه ۲—۶

$$\mu(\limsup E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k) \geq \limsup \mu(E_n).$$

این نتیجه می‌دهد که $\mu(\limsup E_n) \geq \limsup \mu(E_n)$

نکته ۴. فرض کنید S در فضای اندازه (X, S, μ) یک σ جبر باشد. فرض کنید $\{E_n\}$ دنباله‌ای از اعضای S بوده که $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < +\infty$. لذا $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) < +\infty$. از طرفی $\{\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k\}$ نزولی است و برای هر ϵ، عدد طبیعی n هست که $\mu(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k) \leq \sum\limits_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) < \epsilon$. بنابراین $\mu(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k) < \epsilon$ و لذا $\mu(\limsup E_n) = 0$. این نشان می‌دهد که اگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < +\infty$، آن‌گاه هر $x \in X$ حداکثر در تعداد متناهی از E_n ها قرار دارد.

قضیه ۲ ــ ۷. *فضای اندازه (X, S, μ) را در نظر بگیرید. شرایط زیر برقرارند:*

الف) فرض کنیم $A_1, \ldots, A_n$ تعدادی متناهی از اعضای مجزای S، $A \in S$ و $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \subseteq A$. در

این‌صورت $\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i) \le \mu(A)$.

ب) *فرض کنیم* $\{A_n\}$ *دنباله‌ای از اعضای* S، $A \in S$ و $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. *در این‌صورت* $\mu(A) \le \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که $A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ به صورت اجتماع تعدادی متناهی از اعضای مجزای S است. اگر $n = 1$، بنا به تعریف نیم حلقه حکم برقرار است. فرض کنیم برای $n = k$ حکم برقرار باشد. یعنی اعضای مجزای $B_1, \dots, B_m$ از S موجود است که $A \setminus \bigcup_{i=1}^{k} A_i = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$. می‌توان نوشت

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i = \big(A \setminus \bigcup_{i=1}^{k} A_i\big) \setminus A_{k+1} = \big(\bigcup_{i=1}^{m} B_i\big) \setminus A_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{m} (B_i \setminus A_{k+1})$$

چون B_i ها مجزا و از اعضای S هستند و $A_{k+1} \in S$، بنا به تعریف نیم حلقه $B_i \setminus A_{k+1}$ اجتماعی متناهی از اعضای مجزای S بوده و لذا ادعا ثابت می‌شود. با توجه به نتیجه بدست آمده تعداد متناهی از اعضای مجزای S مانند $B_1, \dots, B_m$ موجود است که $A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$. واضح است $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \bigcup \bigcup_{i=1}^{m} B_i$ و لذا

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n}\mu(A_i) + \sum_{i=1}^{m}\mu(B_i) \ge \sum_{i=1}^{n}\mu(A_i).$$

این برهان قسمت الف را کامل می‌کند.

ب) گیریم $A_1 = B_1$ و برای هر n، قرار دهید $B_{n+1} = A_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. واضح است که B_n ها مجزا و $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. شیوه برهان قسمت الف نشان می‌دهد که B_n ها به صورت اجتماعی متناهی و مجزا از عناصر S می‌باشند. فرض کنیم $C_1^n, \dots, C_{n_n}^n$ عناصر مجزای S باشند که $B_n = \bigcup_{i=1}^{n_n} C_i^n$. چون برای هر n، $B_n \subseteq A_n$. لذا $\bigcup_{i=1}^{n_n} C_i^n \subseteq A_n$ و بنا به قسمت الف، $\sum_{i=1}^{n_n}\mu(C_i^n) \le \mu(A_n)$. اما

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \cap A = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{n_n} C_i^n \cap A$$

و چون B_n ها مجزا و C_i^n ها مجزا هستند، خواهیم داشت

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n_n}\mu(C_i^n \cap A) \le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n_n}\mu(C_i^n) \le \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).$$

این برهان را کامل می‌کند. ∎

۲ـ۴ اندازه‌خارجی

اندازه μ را روی نیم حلقه $S = \{[a,b);\ a,b \in \mathbb{R}\}$ با ضابطه $\mu([a,b)) = b - a$ تعریف کردیم. سوال این‌جاست که آیا اندازه‌ای روی σ حلقه تولید شده توسط S وجود دارد که گسترشی از μ باشد؟ برای پاسخ دادن به این سوال، ابتدا اندازه خارجی را تعریف کرده و با استفاده از آن به این سوال پاسخ مثبت می‌دهیم.

تعریف ۲ ـ ۸. زیر مجموعه ناتهی X را در نظر بگیرید. فرض کنیم Σ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های X شامل مجموعه تهی باشد. تابع $\mu : \Sigma \to [\circ, +\infty]$ یک اندازه خارجی است هرگاه:

الف) $\mu(\emptyset) = \circ$،

ب) اگر $A, B \in \Sigma$ و $A \subseteq B$، $\mu(A) \leq \mu(B)$،

ج) اگر $\{A_n\}$ دنباله‌ای از اعضای Σ بوده که $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$، در آن‌صورت

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

به خاصیت یاد شده در قسمت ج از تعریف بالا خاصیت شمارا زیر جمعی گوئیم. واضح است که هر اندازه روی یک نیم حلقه اندازه‌ای خارجی است. تابع $\mu : P(\mathbb{R}) \to [\circ, +\infty]$ با ضابطه

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & A \neq \emptyset \\ \circ & A = \emptyset \end{cases}$$

اندازه‌ای خارجی است اما اندازه نیست. درواقع $\mu(\{1,2\}) = 1 < 2 = \mu(\{1\}) + \mu(\{2\})$ و لذا μ اندازه نیست.

مثال ۲ ـ ۴. قرار دهید $X = \{a,b,c\}$ و تابع $\mu : P(X) \to \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = \mu(\{c\}) = \mu(\{a,b\}) = \mu(\{a,c\}) = \mu(\{b,c\}) = 2$$

و همچنین $\mu(\{a,b,c\}) = 3$ و $\mu(\emptyset) = \circ$. به آسانی می‌توان دید که μ یکنواست. برای اثبات اینکه μ اندازه‌ای خارجی است، کافی‌است ثابت کنیم μ زیر جمعی است. داریم

$$2 = \mu(\{a,b\}) \leq \mu(\{a\}) + \mu(\{b\}) = 4,\ \ 2 = \mu(\{b,c\}) \leq \mu(\{b\}) + \mu(\{c\}) = 4$$

$$2 = \mu(\{a,c\}) \leq \mu(\{a\}) + \mu(\{c\}) = 4$$

و همچنین

$$\mu(\{a,b,c\}) \leq \mu(\{a\}) + \mu(\{b,c\}) = \mu(\{b\}) + \mu(\{a,c\}) = \mu(\{c\}) + \mu(\{a,b\})$$

و $3 = \mu(\{a,b,c\}) \leq \mu(\{a\}) + \mu(\{b\}) + \mu(\{c\}) = 6$. با بررسی حالت‌های دیگر به آسانی

دیده می‌شود که μ زیر جمعی است. اگر $A = \{a,b\}$ و $B = \{b,c\}$، لذا $A \cap B = \{b\}$ و $A \cup B = \{a,b,c\}$. می‌توان نوشت

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = ۳ + ۲ > \mu(A) + \mu(B) = ۴.$$

این نشان می‌دهد که لزومی ندارد برای یک اندازه خارجی μ و دو زیر مجموعه A و B، همواره نامساوی $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ برقرار باشد. بعلاوه اینکه $\mu(\{a,b\}) < \mu(\{a\}) + \mu(\{b\})$. یعنی در نامساوی زیر جمعی برای اندازه خارجی، ممکن است نامساوی اکید نیز اتفاق افتد.

تعریف ۲ ـ ۹. اندازه خارجی μ را روی $P(X)$ در نظر می‌گیریم. زیر مجموعه E از X را اندازه پذیر گوئیم هرگاه برای هر $A \subseteq X$، $\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c)$.

بررسی اینکه زیر مجموعه‌های A و B تعریف شده در مثال بالا نسبت به اندازه خارجی تعریف شده در آن مثال اندازه پذیر و یا اندازه پذیر نیستند، به خواننده واگذار می‌شود.

توجه کنید در تعریف بالا برای اندازه پذیری زیر مجموعه E، کافی‌است برای هر زیر مجموعه A ثابت کنیم $\mu(A) \geq \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c)$. زیرا از تعریف اندازه خارجی و $A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$، خواهیم داشت $\mu(A) \leq \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c)$. لازم به ذکر است که همواره $\emptyset$ و X اندازه پذیرند و E اندازه پذیر است اگر و تنها اگر E^c اندازه پذیر باشد. بعلاوه اگر اندازه خارجی E صفر باشد، E اندازه پذیر است. زیرا برای هر زیر مجموعه A از X، $\mu(A) \geq ۰ + \mu(A \cap E^c) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c)$. اگر $E_۱$ و $E_۲$ اندازه پذیر باشند، قرار می‌دهیم $E = E_۱ \cup E_۲$. چون $E = E_۱ \cup (E_۱^c \cap E_۲)$، لذا برای هر $A \subseteq X$،

$$\begin{aligned}
\mu(A) &\leq \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c) \\
&\leq \mu(A \cap E_۱) + \mu\big(A \cap (E_۱^c \cap E_۲)\big) + \mu\big((A \cap E_۱^c) \cap E_۲^c\big) \\
&= \mu(A \cap E_۱) + \Big[\mu\big((A \cap E_۱^c) \cap E_۲\big) + \mu\big((A \cap E_۱^c) \cap E_۲^c\big)\Big] \\
&= \mu(A \cap E_۱) + \mu(A \cap E_۱^c) = \mu(A).
\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که E اندازه پذیر است. از طرفی $E_۲ \setminus E_۱ = E_۲ \cap E_۱^c = (E_۲^c \cup E_۱)^c$ و این نتیجه می‌دهد که تفاضل دو مجموعه اندازه پذیر نیز اندازه پذیر است. بنابراین خانواده همه زیر مجموعه‌های اندازه پذیر یک جبر است و σ جبر بودن این خانواده بوسیله قضیه زیر تضمین می‌شود.

قضیه ۲ ـ ۱۰. *خانواده همه زیر مجموعه‌های اندازه پذیر، یک σ جبر است.*

برهان. فرض کنیم Σ خانواده همه زیر مجموعه‌های اندازه پذیر باشد. Σ یک جبر است و برای کامل شدن برهان، کافی‌است ثابت کنیم Σ تحت اجتماع تعداد شمارا بسته است. فرض کنیم $\{K_n\}$ دنباله‌ای از زیر مجموعه‌های اندازه پذیر باشد. قرار می‌دهیم $E_1 = K_1$ و برای هر $n > 1$، $E_n = K_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} K_i$. واضح است که E_n ها اندازه پذیر، مجزا و $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. بنابراین کافی‌است ثابت کنیم $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ اندازه پذیر است. برای این‌کار برای هر عدد طبیعی n، قرار می‌دهیم $F_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$. هر F_n اندازه پذیر است و لذا برای هر $A \subseteq X$،

$$\mu(A) = \mu(A \cap F_n) + \mu(A \cap F_n^c) \geq \mu(A \cap F_n) + \mu(A \cap E^c) \qquad (1)$$

از اندازه پذیری E_n استفاده کرده و برای هر $n > 1$، می‌توان نوشت

$$\mu(A \cap F_n) = \mu\big((A \cap F_n) \cap E_n\big) + \mu(A \cap F_n \cap E_n^c) = \mu(A \cap E_n) + \mu(A \cap F_{n-1}).$$

از رابطه اخیر نتیجه می‌گیریم $\mu(A \cap F_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A \cap E_i)$. از این نتیجه و رابطه (۱)،

$$\mu(A) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu(A \cap E_i) + \mu(A \cap E^c).$$

چون رابطه اخیر برای هر n برقرار است، خواهیم داشت

$$\mu(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A \cap E_i) + \mu(A \cap E^c) \geq \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c).$$

در نتیجه E اندازه پذیر و لذا Σ یک σ جبر است. ∎

تاکنون ثابت کردیم که خانواده همه زیر مجموعه‌های X که نسبت به اندازه خارجی μ اندازه پذیر هستند یک σ جبر است. در قضیه زیر نشان می‌دهیم که تحدید μ روی این σ جبر یک اندازه است. بنا به تعریف اندازه خارجی $\mu(\emptyset) = 0$ و لذا تنها شمارا جمعی بودن μ باید ثابت شود که قضیه زیر بیان کننده این موضوع است.

قضیه ۲ ـ ۱۱. *اگر μ اندازه خارجی تعریف شده روی خانواده همه زیر مجموعه‌های X و Σ خانواده همه زیر مجموعه‌های اندازه پذیر باشد، تحدید μ روی Σ یک اندازه است.*

برهان. فرض کنیم E_1 و E_2 دو مجموعه اندازه پذیر و مجزا باشند. بنا به اندازه‌پذیری E_2،

$$\begin{aligned}\mu(E_1 \cup E_2) &= \mu\big((E_1 \cup E_2) \cap E_2^c\big) + \mu\big((E_1 \cup E_2) \cap E_2\big) \\ &= \mu(E_1) + \mu(E_2).\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که μ روی Σ متناهی جمعی است. فرض کنیم $\{E_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های اندازه پذیر مجزا باشد. برای هر عدد طبیعی n، $\mu(E) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \geq \mu(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)$.

بنابراین $\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i) \geq \mu(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$ و لذا تحدید μ روی Σ یک اندازه است. ■

قضیه ۲ ـ ۱۲. *فرض کنیم (X, S, μ) یک فضای اندازه باشد. μ^* را بر $P(X)$ با ضابطه*

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n);\ E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, E_n \in S\right\}.$$

تعریف می‌کنیم. در این‌صورت μ^* یک اندازه خارجی است. μ^* را اندازه خارجی تولید شده توسط μ گوئیم.

برهان. چون $\emptyset \in S$، لذا $\mu^*(\emptyset) = 0$. فرض کنیم A و B دو زیر مجموعه از X و $A \subseteq B$. فرض کنید $\{E_n\}$ دنباله‌ای از اعضای S باشد که $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. از اینکه $A \subseteq B$، نتیجه می‌گیریم که $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. بنابراین $\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$ و لذا $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. این نشان می‌دهد که μ^* صعودی است.

اکنون فرض کنیم $\{A_n\}$ دنباله‌ای از زیر مجموعه‌های X باشد. قرار می‌دهیم $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. فرض کنید برای یک عدد طبیعی n، $\mu^*(A_n) = +\infty$. پس بوضوح $\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)$. اگر برای هر n، $\mu^*(A_n) < +\infty$، در این‌صورت برای هر $\epsilon > 0$ و هر عدد طبیعی n، یک دنباله $\{E_k^n\}$ از اعضای S یافت می‌شود که $A_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^n$ و $\mu^*(A_n) \geq \sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k^n) - \frac{\epsilon}{2^n}$. واضح است که $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k^n) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n) + \epsilon$. از تعریف μ^* نتیجه می‌گیریم $\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n) + \epsilon$ و بنابراین μ^* اندازه‌ای خارجی است. ■

اگر (X, S, μ) یک فضای اندازه و μ^* اندازه خارجی تولید شده توسط μ باشد، در آن‌صورت برای هر $E \in S$، $\mu^*(E) \leq \mu(E)$. اکنون فرض کنیم $\{E_n\}$ دنباله‌ای از اعضای S بوده که $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. بنا به قضیه ۲ــ۷، $\mu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$ و لذا $\mu(E) \leq \mu^*(E)$. این نشان می‌دهد که $\mu(E) = \mu^*(E)$. نتیجه اینکه μ^* توسیعی از μ روی S است.

قضیه ۲ ـ ۱۳. *فرض کنیم (X, S, μ) یک فضای اندازه و μ^* اندازه خارجی متناظر با μ باشد. در این‌صورت $E \subseteq X$ اندازه پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $A \in S$ که $\mu^*(A) < \infty$،*

$$\mu(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

برهان. فرض کنیم E اندازه پذیر باشد. برای هر $A \in S$، $\mu(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$.

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنیم A زیر مجموعه‌ای دلخواه از X باشد. اگر $\mu^*(A) = +\infty$، در آن‌صورت $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$ بطور بدیهی برقرار است. اکنون فرض کنیم $\mu^*(A) < +\infty$ و $\epsilon > 0$ داده شده باشد. بنا به تعریف μ^*، دنباله $\{E_n\}$ از اعضای S وجود دارد که $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leq \mu^*(A) + \epsilon$. اما $\mu^*(A) < \infty$ و لذا برای هر عدد طبیعی n، $\mu(E_n) < +\infty$. بنا به فرض برای هر n، $\mu(E_n) = \mu^*(E_n \cap E) + \mu^*(E_n \cap E^c)$. در نتیجه

$$\begin{aligned}
\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) &\leq \mu^*\Big(\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\big) \bigcap E\Big) + \mu^*\Big(\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\big) \bigcap E^c\Big) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n \cap E) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n \cap E^c) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n \cap E) + \mu^*(E_n \cap E^c) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leq \mu^*(A) + \epsilon.
\end{aligned}$$

چون $\epsilon > 0$ دلخواه است، لذا E اندازه پذیر است. ■

قصد داشتیم یک اندازه روی یک نیم حلقه را به اندازه‌ای روی σ حلقه تولید شده توسط آن نیم حلقه گسترش دهیم. برای این منظور مجبور شدیم اندازه خارجی و مطالعاتی در مورد آن انجام دهیم. سوال این است که آیا اندازه‌ای روی σ جبر تولید شده توسط $S = \{[a,b);\ a,b \in \mathbb{R}\}$ وجود دارد که به هر بازه موجود در S طول آن‌را نسبت دهد؟ اگر چنین اندازه‌ای موجود باشد، تعریف آن روی اعضای این σ جبر که قابل تجسم نیست چگونه است؟ در بخش بعدی به این سوالات تا حدی پاسخ خواهیم گفت.

۲—۵ . توسیع یک اندازه

فرض کنیم (X, S, μ) یک فضای اندازه باشد. قصد داریم این اندازه را به یک اندازه روی σ جبر شامل S گسترش دهیم. قضیه زیر یکی از مهمترین قضایای این بخش است که نشان می‌دهد هر عنصر از S نسبت به اندازه خارجی متناظر با μ اندازه پذیر است. مهم‌تر اینکه μ به اندازه‌ای روی $\sigma(S)$ گسترش می‌یابد.

قضیه ۲ ـ ۱۴. *فرض کنیم (X, S, μ) یک فضای اندازه و μ^* اندازه خارجی متناظر با μ باشد. اگر خانواده زیر مجموعه‌های μ^* اندازه پذیر را با نماد Σ نمایش دهیم، در آن‌صورت $\sigma(S) \subseteq \Sigma$ و نیز تحدید μ^* روی $\sigma(S)$ یک اندازه بوده که گسترشی از μ است.*

برهان. فرض کنیم $E \in S$ عنصری دلخواه باشد. فرض کنیم $A \in S$ و $\mu(A) < +\infty$. عناصر

مجزای $B_1, B_2, \dots, B_n$ از S وجود دارند که $A \setminus E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$. واضح است که $A \cap E$، B_1 و ... و B_n عناصر مجزای S بوده و $A = (A \cap E) \cup B_1 \cup \dots \cup B_n$. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) &\le \mu(A \cap E) + \sum_{i=1}^{n} \mu^*(B_i)\\ &= \mu(A \cap E) + \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \mu(A).\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که E اندازه پذیر است و بنابراین $S \subseteq \Sigma$. در نتیجه $\sigma(S) \subseteq \Sigma$. بنا به مطالب قبل، تحدید μ^* بر $\sigma(S)$ یک اندازه است که گسترشی از μ می‌باشد. ■

فرض کنیم (X, S, μ) یک فضای اندازه و μ^* اندازه خارجی ساخته شده بوسیله μ باشد. فرض کنیم $E \subseteq X$ و $\mu^*(E) < \infty$. برای هر $\epsilon > 0$، دنباله $\{E_n\}$ از اعضای S وجود دارد که $E \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \mu^*(E) + \epsilon$. قرار می‌دهیم $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. لذا $E \subseteq F$ و $\mu^*(F) \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \mu^*(E) + \epsilon$. از این مطلب نتیجه می‌گیریم که $\mu^*(E) \ge \inf\{\mu^*(F);\ F \in \sigma(S), E \subseteq F\}$. اکنون فرض کنیم $F \in \sigma(S)$ داده شده باشد طوری که $E \subseteq F$. بنابراین $\mu^*(E) \le \mu^*(F)$ و لذا $\mu^*(E) \le \inf\{\mu^*(F);\ F \in \sigma(S),\ E \subseteq F\}$. در نتیجه $\mu^*(E) = \inf\{\mu^*(F);\ F \in \sigma(S),\ E \subseteq F\}$.

اکنون فرض کنیم $E \subseteq X$ و $\mu^*(E) < +\infty$. برای هر عدد طبیعی n، $E_n \in \sigma(S)$ وجود دارد که $E \subseteq E_n$ و $\mu^*(E_n \setminus E) < \frac{1}{n}$. قرار دهید $F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ و لذا برای هر n، $\mu^*(F \setminus E) \le \mu^*(E_n \setminus E) \le \frac{1}{n}$. این نشان می‌دهد که $F \in \sigma(S)$ و $\mu^*(F) = \mu^*(E)$.

قضیه ۲ ـ ۱۵. فرض کنیم μ یک اندازه روی یک حلقه S از زیرمجموعه‌های X باشد. فرض کنید $E \in \sigma(S)$، $\mu^*(E) < +\infty$ و $A \subseteq E$. در آن‌صورت A اندازه پذیر است اگر و تنها اگر $\mu^*(E) = \mu^*(A) + \mu^*(E \setminus A)$.

برهان. فرض کنیم A اندازه پذیر باشد. لذا $\mu^*(E) = \mu^*(A) + \mu^*(E \setminus A)$.

برای اثبات عکس قضیه، چون $\mu^*(E) < +\infty$، لذا $\mu^*(E \setminus A) < +\infty$ و $\mu^*(A) < +\infty$. بنابراین $H, G \in \sigma(S)$ وجود دارند که $A \subseteq H$، $E \setminus A \subseteq G$ و همچنین $\mu^*(A) = \mu^*(H)$ و $\mu^*(E \setminus A) = \mu^*(G)$. از آنجا که $E \setminus A \subseteq G$، خواهیم داشت $E \setminus G \subseteq A$. بنابراین $\mu^*(E \setminus G) \le \mu^*(A)$. از طرفی

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &\le \mu^*((E \setminus G) \cup G) \le \mu^*(E \setminus G) + \mu^*(G)\\ &\le \mu^*(A) + \mu^*(E \setminus A) = \mu^*(E).\end{aligned}$$

بنابراین $\mu^*(E\setminus G)+\mu^*(G)=\mu^*(A)+\mu^*(E\setminus A)$ و لذا $\mu^*(E\setminus G)=\mu^*(A)$. چون $\mu^*(H)=\mu^*(A)$، لذا $\mu^*(E\setminus G)=\mu^*(H)$. اما $\mu^*(H\setminus(E\setminus G))=\mu^*(H)-\mu^*(E\setminus G)=0$ و لذا $A\cap(H\setminus(E\setminus G))$ اندازه پذیر است. از طرفی H و $E\setminus G$ اندازه پذیر بوده و $A=(E\setminus G)\cup[A\cap(H\setminus(E\setminus G))]$. بنابراین A اندازه پذیر است. ■

تعریف ۲ ـ ۱۶. فضای اندازه (X,S,μ) را متناهی گوئیم هرگاه برای هر $E\in S$، $\mu(E)<\infty$. همینطور فضای اندازه (X,S,μ) را σ متناهی گوئیم هرگاه برای هر $E\in S$، دنباله‌ای مانند $\{E_n\}$ از اعضای S با اندازه متناهی موجود باشد که $E\subseteq\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$.

فرض کنید μ اندازه‌ای روی σ حلقه تولید شده توسط نیم حلقه S باشد. اگر تحدید μ روی S اندازه‌ای σ متناهی باشد، در آن‌صورت این اندازه روی $\sigma(S)$ نیز σ متناهی است. در واقع اگر $E\in\sigma(S)$ عنصری دلخواه باشد، چون هر عنصر در σ حلقه تولید شده توسط نیم حلقه S زیر مجموعه اجتماعی از اعضای نیم جلقه S است، بنابراین دنباله $\{E_n\}$ از اعضای S وجود دارد که $E\subseteq\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$. چون $E_n\in S$ و μ روی S اندازه‌ای σ متناهی است، دنباله $\{E_k^n\}$ از اعضای S با اندازه متناهی وجود دارد که $E_n\subseteq\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k^n$. لذا $E\subseteq\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k^n$ و هر E_k^n دارای اندازه متناهی است. یعنی μ روی $\sigma(S)$ اندازه‌ای σ متناهی است.

نکته ۵. فرض کنید μ و ν دو اندازه متناهی روی σ حلقه تولید شده توسط حلقه S باشند. اگر تحدید μ و ν روی S با هم برابر باشند، آنگاه $\mu=\nu$. برای اثبات این ادعا، تعریف می‌کنیم $\Sigma=\{E\in\sigma(S);\ \mu(E)=\nu(E)\}$. واضح است که $S\subseteq\Sigma$. فرض کنیم $\{E_n\}$ دنباله‌ای یکنوا از اعضای Σ باشد. چون μ و ν اندازه‌های متناهی روی $\sigma(S)$ بوده و نیز برای هر n، $\mu(E_n)=\nu(E_n)$، بنابراین $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\nu(E_n)$. این نتیجه می‌دهد که $\lim\limits_{n\to\infty}E_n\in\Sigma$. در نتیجه Σ رده‌ای یکنواست و لذا بنا به قضیه ۲ـ۴، $\sigma(S)=\mathcal{M}\subseteq\Sigma\subseteq\sigma(S)$. این نتیجه می‌دهد که $\mu=\nu$.

قضیه زیر بیان می‌کند که یک اندازه σ متناهی روی یک حلقه S، به طور منحصربفرد قابل گسترش به یک اندازه روی $\sigma(S)$ است. این قضیه به قضیه توسیع یکتایی معروف است.

قضیه ۲ ـ ۱۷. *فرض کنید S یک حلقه و μ و ν دو اندازه بر σ حلقه $\sigma(S)$ باشند. فرض کنید تحدید این دو اندازه روی حلقه S، σ متناهی و بر S با هم مساوی باشند. در آن‌صورت $\mu=\nu$.*

برهان. فرض کنیم $E\in\sigma(S)$ عنصری دلخواه باشد. دنباله‌ای از اعضای S چون $\{E_n\}$ وجود دارد که $E\subseteq\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ و برای هر n، $\mu(E_n)<+\infty$ و $\nu(E_n)<+\infty$. برای هر عدد طبیعی n،

قرار می‌دهیم $F_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$. واضح است که دنباله $\{F_n \cap E\}$ به مجموعه E صعود می‌کند و لذا $\{\mu(F_n \cap E)\}$ و $\{\nu(F_n \cap E)\}$ به ترتیب به $\mu(E)$ و $\nu(E)$ همگرا هستند. برای عدد طبیعی n، دو اندازه μ_1 و ν_1 را بر $\sigma(S)$ با ضابطه $\mu_1(F) = \mu(F_n \cap F)$ و $\nu_1(F) = \nu(F_n \cap F)$ تعریف می‌کنیم. چون S یک حلقه است، دو اندازه μ_1 و ν_1 روی S با هم مساوی و روی $\sigma(S)$ نیز متناهی هستند. بنابراین μ_1 و ν_1 روی $\sigma(S)$ با هم مساویند. این نتیجه می‌دهد که برای هر عدد طبیعی n، $\mu(F_n \cap E) = \nu(F_n \cap E)$ و لذا $\mu(E) = \nu(E)$. یعنی μ و ν روی $\sigma(S)$ با هم مساویند. ■

نکته۶. فرض کنید S یک نیم حلقه و R خانواده همه اجتماع‌های متناهی مجزا از اعضای S باشد. اگر $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ و $\bigcup\limits_{j=1}^{m} B_j$ دو عنصر از R باشند، لذا

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{m} B_j = \bigcup_{i=1}^{n} \big(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{m} B_j\big).$$

بنا به برهان آورده شده در قضیه ۲–۱۷، هر $A_i \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m} B_j$ اجتماعی متناهی از عناصر مجزای S است. اما A_i ها نیز مجزا هستند و لذا $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m} B_j = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \big(A_i \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m} B_j\big)$ اجتماعی از عناصر مجزای S است. لذا R تحت تفاضل بسته است.

برای هر $1 \le i \le n$، $A_i \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m} B_j$ اجتماعی متناهی از اعضای مجزای S است و برای هر $1 \le j \le m$، $B_j \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ اجتماعی متناهی از اعضای مجزای S است. اما

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \bigcup \bigcup_{j=1}^{m} B_j = \bigcup_{i=1}^{n} \big(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{m} B_j\big) \bigcup \bigcup_{j=1}^{m} \big(B_j \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\big) \bigcup \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} A_i \cap B_j$$

و لذا $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \bigcup \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i$ اجتماعی متناهی و مجزا از اعضای S است و در نتیجه R یک حلقه است. از طرفی هر حلقه شامل S اجتماع‌های متناهی از اعضای S را شامل است و بنابراین R کوچکترین حلقه شامل S است.

قضیه۲ ـ ۱۸. هر اندازه μ روی یک نیم حلقه S، بطور منحصر بفرد قابل گسترش به یک اندازه روی حلقه تولید شده توسط S است.

برهان. فرض کنیم $R(S)$ حلقه تولید شده توسط S باشد. تابع $\overline{\mu} : R(S) \to [0,+\infty]$ را با ضابطه $\overline{\mu}(E) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(E_i)$ تعریف می‌کنیم که در آن $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ یک نمایش از E به صورت اجتماع تعداد متناهی و مجزا از اعضای S است. اولین چیزی که باید ثابت شود آن‌است که $\overline{\mu}$ خوش تعریف است. اگر $E = \bigcup\limits_{j=1}^{m} F_j$ نمایش دیگری از E به صورت اجتماع تعداد متناهی و مجزا از اعضای S باشد، در آن‌صورت برای هر i، $E_i = \bigcup\limits_{j=1}^{m} (E_i \cap F_j)$. بنابراین برای هر

i، $\mu(E_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu(E_i \cap F_j)$. در نتیجه $\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mu(E_i \cap F_j)$. به شیوه مشابه $\sum_{j=1}^{m} \mu(F_j) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \mu(F_j \cap E_i)$. دو رابطه اخیر نشان می‌دهند که

$$\overline{\mu}(E) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mu(E_i \cap F_j) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \mu(F_j \cap E_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu(F_j).$$

لذا تعریف $\overline{\mu}$ مستقل از نمایش بوده و لذا تابع است. واضح است که $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$. فرض کنیم $\{E_n\}$ دنباله‌ای از اعضای مجزا از $R(S)$ باشد. برای هر عدد طبیعی n، تعداد متناهی و مجزا از اعضای S وجود دارد که $E_n = \bigcup_{i=1}^{n_n} E_i^n$. اگر $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in S$، چون μ یک اندازه روی S است لذا

$$\overline{\mu}(E) = \mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n_n} \mu(E_i^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(E_n).$$

در حالت کلی تعداد متناهی از اعضای مجزای S مانند $F_1, \ldots, F_m$ وجود دارد که $E = \bigcup_{k=1}^{m} F_k$. برای هر k، $F_k = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_k \cap E_i$ و چون $F_k \in S$، لذا $\mu(F_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}(F_k \cap E_i)$. اما برای هر i و هر k، $F_k \cap E_i = F_k \bigcap \bigcup_{j=1}^{i_i} E_j^i = \bigcup_{j=1}^{i_i} F_k \cap E_j^i$. بنابراین

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} \overline{\mu}(F_k \cap E_i) &= \sum_{k=1}^{m} \overline{\mu}\Big(\bigcup_{j=1}^{i_i} F_k \cap E_j^i\Big) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{i_i} \mu(F_k \cap E_j^i) \\ &= \sum_{j=1}^{i_i}\sum_{k=1}^{m} \mu(F_k \cap E_j^i) = \sum_{j=1}^{i_i} \mu(E_j^i) = \overline{\mu}(E_i).\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(E) &= \sum_{k=1}^{m} \mu(F_k) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}(F_k \cap E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} \overline{\mu}(F_k \cap E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}(E_i)\end{aligned}$$

و لذا $\overline{\mu}$ یک اندازه و توسیعی از μ است.

اکنون فرض کنیم ν گسترش دیگری از μ باشد. اگر $E \in R(S)$ عنصری دلخواه باشد، E دارای نمایشی مجزا از اعضای S به صورت $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ است. لذا $\overline{\mu}(E) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{n} \nu(E_i) = \nu(E)$ و بنابراین گسترش فوق منحصر بفرد است. ∎

فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه σ متناهی باشد. اگر μ^* اندازه خارجی متناظر با μ باشد، در آن‌صورت بنا به قضیه ۲–۱۴، تحدید μ^* روی $\sigma(S)$ یک اندازه است که گسترشی از μ می‌باشد. بنا به قضیه ۲–۱۸، μ بطور منحصربفرد به یک اندازه روی حلقه تولید شده توسط S

قابل گسترش بوده و این گسترش نیز σ متناهی است. از طرفی هر گسترش μ روی $\sigma(S)$ اندازه‌ای σ متناهی است و تحدید آن روی حلقه تولید شده توسط S نیز σ متناهی است. بنا به قضیه ۲—۱۷، گسترش هر اندازه σ متناهی روی یک حلقه منحصربفرد است، لذا گسترش μ روی $\sigma(S)$ منحصربفرد است.

اکنون ما آماده‌ایم تا حالت خاص موارد گفته شده که همان اندازه لبگ است را بیان و بررسی کنیم.

۲—۶ اندازه لبگ

دیدیم $\{[a,b);\ a,b \in \mathbb{R}\}$ یک نیم حلقه از زیر مجموعه‌های اعداد حقیقی است. تابع $\mu : S \to [\circ,+\infty]$ را با ضابطه $\mu([a,b)) = b-a$ تعریف می‌کنیم. μ اندازه‌ای متناهی روی این نیم حلقه است. قصد داریم این اندازه را روی $\sigma(S)$ گسترش داده و خواص آن‌را بررسی کنیم.

نکته۷. اندازه μ تعریف شده در بالا روی $S = \{[a,b);a,b \in \mathbb{R}\}$ را به اندازه خارجی μ^* روی $P(\mathbb{R})$ گسترش می‌دهیم. ثابت کردیم مجموعه همه زیر مجموعه‌های اندازه پذیر که با نماد Σ نمایش می‌دهیم، یک σ جبر بوده و $\sigma(S) \subseteq \Sigma$. نشان دادیم که تحدید μ^* روی Σ یک اندازه است. به این اندازه، اندازه لبگ و به اعضای Σ زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر گوئیم. تحدید اندازه لبگ روی $\sigma(S)$ را در نظر می‌گیریم. قبلاً نشان دادیم گسترش μ روی $\sigma(S)$ منحصربفرد است. برای توضیح بیشتر، فرض کنیم اندازه ν گسترش دیگری از μ روی $\sigma(S)$ باشد. چون گسترش یک اندازه روی حلقه تولید شده توسط S منحصر بفرد است، لذا گسترش μ با تحدید اندازه ν روی $R(S)$ با هم مساویند. واضح است که اندازه μ روی S متناهی و لذا σ متناهی است. گسترش این اندازه روی $R(S)$ نیز σ متناهی است و بنا به قضیه ۲—۱۷، گسترش μ با اندازه ν روی $\sigma(S)$ با هم مساویند. این نتیجه می‌دهد که μ قابل گسترش به اندازه منحصربفردی روی $\sigma(S)$ است. گسترش μ روی زیر مجموعه‌های اندازه پذیر لبگ را نیز با نماد μ نمایش می‌دهیم. در همین فصل ثابت خواهیم کرد که گسترش اندازه μ روی همه زیر مجموعه‌های μ^* اندازه پذیر که همان مجموعه‌های اندازه پذیر لبگ است، منحصربفرد است.

توجه کنید که اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، اعضای σ جبر تولید شده توسط زیر مجموعه‌های باز این فضا را زیر مجموعه‌های بورل گوئیم. بنابراین در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$، $\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}\right)$ مجموعه‌ای بورل است. بنابراین $[a,b) = \{a\} \cup (a,b)$ نیز بورل است

و لذا هر عنصر در $\sigma(S)$ مجموعه‌ای بورل است. از طرف دیگر $\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a, a+\frac{1}{n}) \in \sigma(S)$ و بنابراین $(a,b) = [a,b) \setminus \{a\} \in \sigma(S)$. این نتیجه می‌دهد که $\sigma(S)$ همان زیر مجموعه‌های بورل فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ است. با این توصیف هر زیر مجموعه بسته، مجموعه‌ای بورل است. زیر مجموعه حداکثر شمارا در $\mathbb{R}$، زیر مجموعه‌ای بورل با اندازه صفر است. در واقع برای هر $a \in \mathbb{R}$، $\{[a, a+\frac{1}{n})\}$ دنباله‌ای نزولی و به $\{a\}$ همگراست. چون $\mu([a, a+\frac{1}{n})) = \frac{1}{n}$ به صفر همگراست، لذا $\mu(\{a\}) = 0$. هر زیر مجموعه حداکثر شمارا، اجتماعی حداکثر شمارا از زیر مجموعه‌های تک عضوی و لذا دارای اندازه صفر است.

مثال ۲ ـ ۵. زیر مجموعه $[0,1]$ از اعداد حقیقی را در نظر می‌گیریم. بازه باز $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ را از بازه $[0,1]$ حذف کرده و مجموعه بسته باقیمانده را با نماد C_1 نمایش می‌دهیم. واضح است که $\mu(C_1) = \frac{2}{3}$. اکنون از دو بازه بسته باقیمانده، دو بازه باز به طول‌های $\frac{1}{9}$ از مراکز آنها حذف می‌کنیم. در واقع مجموعه باقیمانده $[0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ بوده و با نماد C_2 نمایش می‌دهیم. واضح است که $\mu(C_2) = \frac{4}{9}$. با ادامه این روند، از چهار بازه بسته دوباره چهار بازه باز به طول‌های $\frac{1}{27}$ حذف می‌کنیم و مجموعه بسته باقیمانده را با نماد C_3 نمایش می‌دهیم. واضح است $\mu(C_3) = \frac{8}{27}$. با ادامه این روند دنباله‌ای از زیر مجموعه‌های بسته نزولی C_n بدست می‌آید که $\mu(C_n) = \frac{2^n}{3^n}$. مجموعه کانتور به صورت $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ تعریف می‌شود و $\mu(C) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = 0$. مجموعه کانتور مجموعه‌ای فشرده و ناشماراست که دارای اندازه صفر است. از اینکه $\mu(C) = 0$، نتیجه می‌گیریم C شامل هیچ بازه‌ای نیست و بنابراین C هیچ جا چگال است.

چون مجموعه کانتور دارای اندازه صفر است، لذا برای هر زیر مجموعه E از مجموعه کانتور، $\mu^*(E) = 0$. این نشان می‌دهد که همه زیر مجموعه‌های مجموعه کانتور اندازه پذیر لبگ هستند. لذا اگر Σ خانواده همه زیر مجموعه‌های اندازه پذیر لبگ باشد، در آن‌صورت $2^C \subseteq \Sigma \subseteq P(\mathbb{R})$ و بنابراین $card\Sigma = cardP(\mathbb{R})$.

قضیه ۲ ـ ۱۹. *اندازه μ را روی σ جبر S در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم*

$$\overline{S} = \{E \subseteq X;\ A \subseteq E \subseteq B,\ \mu(B \setminus A) = 0,\ A, B \in S\}.$$

در آن‌صورت $\overline{S}$ یک σ جبر شامل S است. تابع $\overline{\mu} : \overline{S} \to [0, +\infty]$ با ضابطه $\overline{\mu}(E) = \mu(A)$ که در آن $A \subseteq E \subseteq B$ و $\mu(B \setminus A) = 0$، یک اندازه و گسترشی از μ است.

برهان. برای هر $E \in S$، قرار می‌دهیم $A = B = E$. بنا به تعریف $\overline{S}$، $E \in \overline{S}$ و بنابراین $S \subseteq \overline{S}$.

اکنون فرض کنیم $E \in \overline{S}$ عنصری دلخواه باشد. لذا $A, B \in S$ وجود دارد که $A \subseteq E \subseteq B$ و $\mu(B \setminus A) = 0$. واضح است که $B^c \subseteq E^c \subseteq A^c$، $A^c \setminus B^c = B \setminus A$ و لذا

$$\mu(A^c \setminus B^c) = \mu(B \setminus A) = 0.$$

این نشان می‌دهد که $E^c \in \overline{S}$. اکنون فرض کنید $\{E_n\}$ دنباله‌ای از اعضای $\overline{S}$ باشد. لذا برای هر عدد طبیعی n، دو عنصر A_n و B_n از S وجود دارد که $A_n \subseteq E_n \subseteq B_n$ و $\mu(B_n \setminus A_n) = 0$. چون S یک σ جبر است، لذا $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S$، $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in S$ و $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. اما

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \setminus A_n)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n \setminus A_n) = 0$$

و لذا $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \overline{S}$. این نتیجه می‌دهد که $\overline{S}$ یک σ جبر است.

ابتدا ثابت می‌کنیم که $\overline{\mu}$ تابع است. عنصر $E \in \overline{S}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید $A, B, A_1, B_1 \in S$، $A \subseteq E \subseteq B$، $A_1 \subseteq E \subseteq B_1$، $\mu(B \setminus A) = 0$ و $\mu(B_1 \setminus A_1) = 0$. لذا $A \setminus A_1 \subseteq E \setminus A_1 \subseteq B_1 \setminus A_1$ و $A_1 \setminus A \subseteq E \setminus A \subseteq B \setminus A$. در نتیجه $\mu(A \setminus A_1) = \mu(A_1 \setminus A) = 0$. اما $A = (A \cap A_1) \cup (A \setminus A_1)$ و $A_1 = (A \cap A_1) \cup (A_1 \setminus A)$. در نتیجه $\mu(A) = \mu(A \cap A_1) = \mu(A_1)$. پس $\overline{\mu}$ خوش تعریف است. دوباره فرض کنید $\{E_n\}$ دنباله‌ای مجزا از اعضای $\overline{S}$ باشد. لذا برای هر عدد طبیعی n، دو عنصر A_n و B_n از S وجود دارد که $A_n \subseteq E_n \subseteq B_n$ و $\mu(B_n \setminus A_n) = 0$. اما $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$، $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$ و $\{A_n\}$ دنباله‌ای مجزاست. بنابراین

$$\overline{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(E_n).$$

این نتیجه می‌دهد که $\overline{\mu}$ یک اندازه است. به سادگی دیده می‌شود که $\overline{\mu}$ گسترشی از μ است. ∎

نکته ۸. روی اعداد حقیقی، نیم حلقه $S = \{[a,b);\ a, b \in \mathbb{R}\}$ را در نظر می‌گیریم. اگر Σ خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر باشد، در آن‌صورت $\Sigma = \overline{\sigma(S)}$. در واقع برای هر $E \in \overline{\sigma(S)}$، دو مجموعه بورل A و B وجود دارند که $A \subseteq E \subseteq B$ و $\mu(B \setminus A) = 0$. چون $\mu^*((B \setminus A) \cap E) \leq \mu(B \setminus A) = 0$، لذا $(B \setminus A) \cap E$ اندازه پذیر لبگ است. از طرفی $E = A \cup [(B \setminus A) \cap E]$ و چون A مجموعه‌ای بورل و لذا اندازه پذیر لبگ است، لذا E اندازه پذیر لبگ است.

حالا در Σ

اکنون فرض کنیم E اندازه پذیر لبگ باشد. بیشتر فرض کنیم $\mu(E) < +\infty$. برای هر عدد طبیعی n، $F_n \in \sigma(S)$ را طوری می‌یابیم که $E \subseteq F_n$ و $\mu(F_n) < \mu^*(E) + \frac{1}{n}$. قرار می‌دهیم

$F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ و لذا $E \subseteq F$ و برای هر n، $\mu(F \setminus E) \leq \mu(F_n \setminus E) \leq \frac{1}{n}$. این نتیجه می‌دهد که عنصری مانند F در $\sigma(S)$ وجود دارد که $\mu(E) = \mu(F)$. به شیوه مشابه $G \in \sigma(S)$ وجود دارد که $F \setminus E \subseteq G$ و $\mu(F \setminus E) = \mu(G) = 0$. از طرفی $\emptyset \subseteq E \cap G \subseteq G$ و لذا $E \cap G \in \overline{\sigma(S)}$. چون $F \setminus G \in \sigma(S) \subseteq \overline{\sigma(S)}$ و $E = (F \setminus G) \cup (E \cap G)$، لذا $E \in \overline{\sigma(S)}$.

در حالت کلی اگر E اندازه پذیر لبگ باشد، برای هر عدد طبیعی n، $E \cap [-n, n] \in \overline{\sigma(S)}$ و لذا $E \in \overline{\sigma(S)}$.

نکته ۹. فرض کنید S در فضای اندازه (X, S, μ) یک σ جبر باشد. این فضای اندازه را یک فضای اندازه کامل گوئیم هرگاه $E \subseteq X$ و $\mu^*(E) = 0$، داشته باشیم $E \in S$. واضح است که خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر یک فضای اندازه کامل است، ولی خانواده همه زیر مجموعه‌های بورل یک فضای اندازه کامل نیست.

نکته ۱۰. فرض کنید $S = \{[a, b);\ a, b \in \mathbb{R}\}$ و $\mu : S \to \mathbb{R}$ با ضابطه $\mu([a, b)) = b - a$ تعریف شده باشد. فرض کنید ν اندازه‌ای روی σ جبر همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر بوده که برای هر $[a, b) \in S$، $\nu([a, b)) = b - a$. اگر اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر را نیز با μ نمایش دهیم، در آن‌صورت برای هر $A \in \sigma(S)$، $\mu(A) = \nu(A)$. اکنون فرض کنید E زیر مجموعه‌ای لبگ اندازه پذیر با اندازه متناهی باشد، $A, B \in \sigma(S)$ وجود دارد که $A \subseteq E \subseteq B$ و $\mu(B \setminus A) = 0$. واضح است که $E = A \cup [E \cap (B \setminus A)]$ و $\mu(E) = \mu(A)$. برای $\epsilon > 0$، دنباله $\{A_n\}$ از زیر مجموعه‌های $\mathbb{R}$ در S موجود است که $E \cap (B \setminus A) \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ و $\mu(E \cap (B \setminus A)) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \epsilon$. بنابراین $\nu(E \cap (B \setminus A)) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \epsilon$. درنتیجه $\nu(E \cap (B \setminus A)) = 0$ و لذا $\nu(E) = \nu(A)$. نتیجه اینکه $\nu(E) = \mu(E)$. اگر E زیر مجموعه اندازه پذیر دلخواه باشد، برای هر n، $\mu(E \cap [-n, n]) = \nu(E \cap [-n, n])$ و لذا $\mu(E) = \nu(E)$. این توضیح نشان می‌دهد که اندازه μ روی S به‌طور منحصربفرد قابل گسترش به یک اندازه روی σ جبر همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر است.

نکته ۱۱. اگر $A \subseteq \mathbb{R}$ زیر مجموعه‌ای بورل باشد، در آن‌صورت $A + c$ بورل است. در واقع خانواده همه زیر مجموعه‌های اعداد حقیقی مانند B که $B + c$ بورل است، شامل همه زیر مجموعه‌های باز در $\mathbb{R}$ است (زیرا تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = x + c$ یک همیومورفیسم است). نشان می‌دهیم این خانواده از زیر مجموعه‌های $\mathbb{R}$ یک σ جبر است. اگر $B + c$ بورل باشد، لذا $B^c + c = (B + c)^c$ بورل است. فرض کنیم $\{B_n\}$ دنباله‌ای از زیر مجموعه‌های اعداد حقیقی باشد که برای هر n،

$B_n + c$ بورل باشد. لذا $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n + c = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (B_n + c)$ بورل است. بنابراین خانواده فوق یک σ جبر بوده و چون σ جبر بورل‌ها کوچکترین σ جبر شامل مجموعه‌های باز است، لذا $A + c$ بورل است.

ادعا می‌کنیم $\mu(A + c) = \mu(A)$. برای اثبات این ادعا، اندازه $\mu_1 : \sigma(S) \to [0, +\infty]$ را با ضابطه $\mu_1(A) = \mu(A + c)$ تعریف می‌کنیم. چون

$$\mu_1([a, b)) = \mu([a + c, b + c)) = b - a = \mu([a, b)).$$

بنا به یکتایی گسترش اندازه‌های σ متناهی روی نیم حلقه‌ها، $\mu = \mu_1$. پس $\mu(A + c) = \mu(A)$.

اکنون فرض کنیم E اندازه پذیر لبگ باشد، زیر مجموعه‌های بورل A و B وجود دارد که $A \subseteq E \subseteq B$ و $\mu(B \setminus A) = 0$. واضح است که $A + c \subseteq E + c \subseteq B + c$ و

$$\mu(B + c \setminus A + c) = \mu((B \setminus A) + c) = \mu(B \setminus A) = 0.$$

بنابراین $\mu(E + c) = \mu(A + c) = \mu(A) = \mu(E)$.

به شیوه مشابه می‌توان دید که اگر $c \neq 0$، آنگاه cA بورل است اگر و تنها اگر A بورل باشد. همچنین A اندازه پذیر لبگ است اگر و تنها اگر cA لبگ اندازه پذیر باشد. در این حالت $\mu(cA) = |c|\mu(A)$.

نکته ۱۲. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $\mathbb{R}$ باشد. فرض کنید $A \subseteq (-b, b)$ و $\mu^*(A) > 0$. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را با ضابطه $f(x) = \mu^*(A \cap (-x, x))$ و همچنین تابع $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را با ضابطه $g(x) = \mu^*(A \cap (-x, x)^c)$ تعریف می‌کنیم. برای هر x و هر عدد نامنفی h، $f(x + h) - f(x) = \mu^*(A \cap (-x - h, x + h)) - \mu^*(A \cap (-x, x)) \leq 2h$. در نتیجه f از راست پیوسته است. به شیوه مشابه می‌توان دید که f از چپ پیوسته و لذا پیوسته است. چون هر بازه اندازه پذیر است، لذا برای هر x، $f(x) + g(x) = \mu^*(A)$. عدد حقیقی t وجود دارد که $f(t) < \frac{\mu^*(A)}{2}$. اما $f(b) = \mu^*(A)$. نتیجه اینکه $c \in (-b, b)$ وجود دارد که $f(c) = g(c) = \frac{\mu^*(A)}{2}$.

مثال ۲ ـ ۶. رابطه $\sim$ را روی $[0, 1]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم. گوئیم $x \sim y$ اگر و تنها اگر $x - y \in \mathbb{Q}$. این رابطه هم ارزی رده‌های هم ارزی دارد. از هر رده یک عنصر را انتخاب کرده و مجموعه همه چنین عناصری را با E نمایش می‌دهیم. فرض کنید $\{r_1, r_2, \ldots\}$ یک نمایش از اعداد گویای موجود در بازه $[-1, 1]$ باشد. برای هر عدد طبیعی n، قرار می‌دهیم $E_n = E + r_n = \{x + r_n ; x \in E\}$. ابتدا ثابت می‌کنیم $\{E_n\}$ دنباله‌ای مجزا از زیر مجموعه‌های $[-1, 1]$ است. برای هر دو عدد $m, n \in \mathbb{N}$، $E_n \cap E_m = \emptyset$. زیرا اگر $x \in E_n \cap E_m$ عنصری

دلخواه باشد، برای دو عنصر $e_۱, e_۲$ از E، $x = e_۱ + r_n = e_۲ + r_m$ و لذا $e_۱ \sim e_۲$. این یک تناقض است زیرا از هر رده تنها یک عنصر انتخاب و در E قرار گرفته است. بنابراین E_n ها مجزا هستند. فرض کنیم $x \in [۰, ۱]$ عنصری دلخواه باشد. x در یکی از رده‌ها قرار دارد. اگر y عنصری در E باشد که در رده x قرار دارد، لذا $x - y \in \mathbb{Q}$. بنابراین برای n ای، $x = y + r_n \in E_n$. در نتیجه $[۰, ۱] \subseteq \bigcup\limits_{n=۱}^{\infty} E_n \subseteq [-۱, ۲]$. اگر E اندازه پذیر لبگ باشد، لذا برای هر n، E_n اندازه پذیر است و $\mu(E_n) = \mu(E)$. از طرفی

$$۱ = \mu([۰, ۱]) \leq \sum_{n=۱}^{\infty} \mu(E_n) = \mu(\bigcup_{n=۱}^{\infty} E_n) \leq \mu([-۱, ۲]) = ۳$$

و لذا $۳ \geq \sum\limits_{n=۱}^{\infty} \mu(E) \geq ۱$. اگر $\mu(E) = ۰$، پس $۰ \geq ۱$ که تناقض است. اگر $\mu(E) > ۰$، لذا $۳ \geq \sum\limits_{n=۱}^{\infty} \mu(E) = +\infty$ که دوباره تناقض است. بنابراین E اندازه پذیر نیست.

فرض کنید $E \subseteq [۰, ۱]$ زیر مجموعه اندازه ناپذیر ساخته شده در بالا باشد. فرض کنید $P \subseteq E$ اندازه پذیر و $\{r_۱, r_۲, \ldots\}$ نیز یک نمایش از اعداد گویای موجود در بازه $[-۱, ۱]$ باشد. اما E_n ها مجزا و برای هر n، $P_n = P + r_n \subseteq E + r_n = E_n$. لذا P_n ها نیز مجزا هستند. برای هر n، P_n اندازه پذیر است و لذا $\mu(P_n) = \mu(P)$. واضح است که $\bigcup\limits_{n=۱}^{\infty} P_n \subseteq \bigcup\limits_{n=۱}^{\infty} E_n \subseteq [-۱, ۲]$ و بنابراین

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \mu(P) = \sum_{n=۱}^{\infty} \mu(P_n) \leq ۳.$$

نتیجه اینکه $\mu(P) = ۰$. این نشان می‌دهد که تنها زیر مجموعه‌های اندازه پذیر از E زیر مجموعه‌های پوچ از E است.

مثال ۲ ـ ۷. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های اندازه پذیر لبگ، $A \subseteq [۰, ۱]$ و هر زیر مجموعه از A نیز اندازه پذیر لبگ باشد. فرض کنید $\{E_n\}$ دنباله ساخته شده در مثال بالا باشد. لذا برای هر n، $E_n \cap A \subseteq A$ اندازه پذیر است. از توضیح بالا و $E_n \cap A \subseteq E_n$ نتیجه می‌گیریم که $\mu(E_n \cap A) = ۰$. از طرفی $A = \bigcup\limits_{n=۱}^{\infty} E_n \cap A$ و لذا $\mu(A) = \sum\limits_{n=۱}^{\infty} \mu(E_n \cap A) = ۰$. اکنون فرض کنید هر زیر مجموعه از $A \subseteq \mathbb{R}$ اندازه پذیر باشد. لذا برای هر عدد صحیح n، هر زیر مجموعه از $A \cap [n, n + ۱]$ نیز اندازه پذیر است. بنابراین هر زیر مجموعه از $-n + (A \cap [n, n + ۱]) = (-n + A) \cap [۰, ۱]$ اندازه پذیر است. اما $(-n + A) \cap [۰, ۱] \subseteq [۰, ۱]$ و لذا

$$\mu(A \cap [n, n + ۱]) = \mu(-n + (A \cap [n, n + ۱])) = \mu((-n + A) \cap [۰, ۱]) = ۰.$$

این نشان می‌دهد که $\mu(A) = 0$. نتیجه اینکه اگر هر زیر مجموعه از A اندازه پذیر لبگ باشد، آن‌گاه $\mu(A) = 0$. بنابراین برای زیر مجموعه‌ای چون $A \subseteq \mathbb{R}$، اگر $\mu^*(A) > 0$ آن‌گاه A شامل زیر مجموعه‌ای اندازه ناپذیر است.

نکته۱۳. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های اندازه پذیر لبگ از $\mathbb{R}$ باشد. $\mathbb{R}$ را با توپولوژی اقلیدسی در نظر می‌گیریم. فرض کنید E زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی و $\mu^*(E) < +\infty$. نشان می‌دهیم که $\mu^*(E) = \inf\{\mu(U);\ E \subseteq U,$ باز است $U\}$. واضح است که $\mu^*(E) \leq \inf\{\mu(U);\ E \subseteq U,$ باز است $U\}$. اکنون فرض کنیم $\epsilon > 0$ داده شده باشد. دنباله $\{[a_n, b_n)\}$ از اعضای S وجود دارد که $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n)$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n - a_n \leq \mu^*(E) + \frac{\epsilon}{2}$. قرار می‌دهیم $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n - \frac{\epsilon}{2^{n+2}}, b_n)$. واضح است که $E \subseteq U$ و

$$\mu(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n - a_n + \frac{\epsilon}{2^{n+2}} \leq \mu^*(E) + \epsilon.$$

لذا $\mu^*(E) = \inf\{\mu(U);\ E \subseteq U,$ باز است $U\}$.

نکته۱۴. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $\mathbb{R}$ باشد. فرض کنید E زیر مجموعه‌ای لبگ اندازه پذیر بوده که $\mu(E) < +\infty$. برای $\epsilon > 0$ داده شده، زیر مجموعه باز O وجود دارد که $E \subseteq O$ و $\mu(O \setminus E) < \frac{\epsilon}{2}$. دنباله‌ای از بازه‌های باز مجزای $\{I_n\}$ وجود دارد که $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. عدد طبیعی n موجود است که $\sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(I_i) < \frac{\epsilon}{2}$. قرار می‌دهیم $U = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ و لذا $E\Delta U \subseteq (O \setminus U) \cup (O \setminus E)$. بنابراین $\mu(E\Delta U) < \epsilon$. نتیجه اینکه برای هر زیر مجموعه اندازه پذیر با اندازه متناهی چون E و هر $\epsilon > 0$، تعدادی متناهی از بازه‌های باز I_1 و ... و I_n وجود دارند که $\mu(E\Delta \bigcup_{i=1}^{n} I_i) < \epsilon$.

اکنون فرض کنید E زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد که $\mu^*(E) < +\infty$ و نیز برای هر $\epsilon > 0$، تعدادی متناهی از بازه‌های باز مجزای I_1 و ... و I_n وجود داشته باشد که $\mu^*(E\Delta \bigcup_{i=1}^{n} I_i) < \epsilon$. برای $\epsilon > 0$، زیر مجموعه باز O شامل E وجود دارد که $\mu(O) < \mu^*(E) + \frac{\epsilon}{4}$. مطابق فرض بازه‌های باز I_1 و ... و I_n وجود دارند که اگر $H = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$، $\mu^*(E\Delta H) < \frac{\epsilon}{4}$. قرار می‌دهیم $U = O \cap H$ و لذا

$$\mu^*(O\Delta E) \leq \mu^*(O\Delta U) + \mu^*(U\Delta E) \qquad (1)$$

واضح است که $U\Delta E \subseteq H\Delta E$ و بنابراین $\mu^*(U\Delta E) < \frac{\epsilon}{4}$. از طرفی $E \subseteq (U\Delta E) \cup U$ و لذا $\mu^*(E) \leq \mu(U) + \frac{\epsilon}{4}$. نتیجه اینکه

$$\mu(O\Delta U)=\mu(O\setminus U)=\mu(O)-\mu(U)$$
$$<\mu^*(E)-\mu(U)+\frac{\epsilon}{۴}<\frac{\epsilon}{۲}.$$

از رابطه اخیر و رابطه (۱) نتیجه می‌شود که $\mu^*(O\setminus E)=\mu^*(O\Delta E)<\epsilon$. پس E اندازه پذیر است.

قضیه ۲ ـ ۲۰. *فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های اندازه پذیر لبگ از $\mathbb{R}$ باشد. اگر E لبگ اندازه پذیر باشد، آن‌گاه* $\mu(E)=\sup\{\mu(K);\ K\subseteq E,\ \text{فشرده } K\}$.

برهان. فرض کنیم زیر مجموعه E کراندار باشد. اگر E بسته باشد، در آن‌صورت E فشرده و بنابراین $\mu(E)\leq\sup\{\mu(K);\ K\subseteq E,\ \text{فشرده } K\}\leq\mu(E)$. اگر E بسته نباشد، برای $\epsilon>۰$، مجموعه‌ای باز چون U وجود دارد که $\overline{E}\setminus E\subseteq U$ و $\mu(U)\leq\mu(\overline{E}\setminus E)+\epsilon$. قرار دهید $K=\overline{E}\setminus U$. در این‌صورت $K\subseteq E$، K فشرده بوده و

$$\mu(K)=\mu(E)-\mu(E\cap U)=\mu(E)-\big(\mu(U)-\mu(U\setminus E)\big)$$
$$\geq\mu(E)-\mu(U)+\mu(\overline{E}\setminus E)\geq\mu(E)-\epsilon.$$

چون $\epsilon>۰$ دلخواه است، در این حالت $\mu(E)=\sup\{\mu(K);\ K\subseteq E,\ \text{فشرده } K\}$. در حالت کلی برای هر عدد طبیعی n، قرار می‌دهیم $E_n=E\cap([-n,-n+۱)\cup[n-۱,n))$. بنابراین زیر مجموعه فشرده $K_n\subseteq E_n$ وجود دارد که $\mu(K_n)\geq\mu(E_n)-\frac{\epsilon}{۲^{n+۲}}$. برای هر n، تعریف می‌کنیم $H_n=\bigcup_{i=۱}^{n}K_i$. لذا H_n فشرده و همچنین $H_n\subseteq\bigcup_{n=۱}^{\infty}E_n=E$. از طرفی

$$\mu(H_n)=\sum_{i=۱}^{n}\mu(K_i)\geq\sum_{i=۱}^{n}\mu(E_i)-\frac{\epsilon}{۲}\geq\mu(\bigcup_{i=۱}^{n}E_i)-\frac{\epsilon}{۲}.$$

بنابراین $\lim_{n\to\infty}\mu(H_n)\geq\mu(E)-\frac{\epsilon}{۲}$. از این رابطه نتیجه می‌گیریم که برای حداقل یک n، $\mu(H_n)>\mu(E)-\epsilon$. این برهان را کامل می‌کند. ■

نکته۱۵. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $[۰,۱]$ باشد. فرض کنید $f:[۰,۱]\to\mathbb{R}$ دارای مشتق کراندار باشد. فرض کنید M عددی باشد که برای هر $x\in[۰,۱]$، $|f'(x)|\leq M$. اگر $a,b\in[۰,۱]$ عناصری دلخواه باشند، چون f پیوسته است، $c,d\in[a,b]$ وجود دارند که $f([a,b])=[f(c),f(d)]$. بنابراین $f([a,b])$ اندازه پذیر بوده و $\mu(f([a,b]))=\mu([f(c),f(d)])=f(d)-f(c)\leq M(d-c)\leq M(b-a)$. اگر زیر مجموعه E از $[۰,۱]$ دارای اندازه صفر باشد، برای ϵ داده شده، دنباله $\{[a_n,b_n]\}$ وجود دارد که $E\subseteq\bigcup_{n=۱}^{\infty}[a_n,b_n]$ و $\sum_{n=۱}^{\infty}b_n-a_n<\epsilon$. از طرفی $f(E)\subseteq\bigcup_{n=۱}^{\infty}f([a_n,b_n])$ و لذا

$\mu^*(f(E)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} M(b_n - a_n) < M\epsilon$. چون ϵ دلخواه است، $\mu^*(f(E)) = 0$ و لذا $f(E)$ اندازه پذیر است. اگر $E \subseteq [0, 1]$ اندازه پذیر باشد، دنباله $\{K_n\}$ از زیر مجموعه‌های فشرده از $[0, 1]$ و زیر مجموعه با اندازه صفر N موجود است که $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cup N$. با توضیحات فوق، $f(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(K_n) \cup f(N)$ اندازه پذیر است.

اکنون قصد داریم ارتباط بین اندازه مجموعه اندازه‌پذیر لبگ E را با اندازه مجموعه اندازه‌پذیر لبگ $f(E)$ را بیابیم. فرض کنید که عدد مثبت ϵ داده شده باشد. دنباله $\{[a_n, b_n]\}$ وجود دارد که $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n - a_n < \mu(E) + \epsilon$. از طرفی $f(E) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} f([a_n, b_n])$ و لذا $\mu(f(E)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} M(b_n - a_n) < M\epsilon + M\mu(E)$. از اینکه ϵ دلخواه است، $\mu(f(E)) \leq M\mu(E)$.

نکته۱۶. فرض کنیم $E \subseteq \mathbb{R}$ لبگ اندازه پذیر، $0 < \mu(E) < \infty$ و $\alpha \in (0, 1)$ داده شده باشد. چون $\mu(E) = \mu^*(E) \leq \inf\{\mu(U);\ E \subseteq U,$ باز است $U\} < \frac{\mu(E)}{\alpha}$، لذا مجموعه بازی چون U شامل E موجود است که $\alpha\mu(U) < \mu(E)$. اما هر زیر مجموعه باز از $\mathbb{R}$ اجتماع تعداد حداکثر شمارا از بازه‌های باز در $\mathbb{R}$ است. بنابراین دنباله $\{I_n\}$ از بازه‌های باز مجزا وجود دارد که $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. می‌توان نوشت

$$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) = \alpha\mu(U) < \mu(E) = \mu(E \cap U) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap I_n).$$

از رابطه اخیر نتیجه می‌شود که برای حداقل یک n، $\alpha\mu(I_n) < \mu(E \cap I_n)$. از این موضوع نتیجه می‌گیریم که اگر E دارای اندازه لبگ مثبت و متناهی باشد، در آن صورت برای $0 < \alpha < 1$ یک بازه باز I یافت می‌شود که $\alpha\mu(I) < \mu(E \cap I)$.

قضیه۲ ـ ۲۱. *فرض کنیم E زیر مجموعه‌ای لبگ اندازه پذیر از اعداد حقیقی باشد. قرار می‌دهیم $D(E) = \{x - y;\ x, y \in E\}$. اگر $\mu(E) > 0$، در آن‌صورت بازه بازی شامل صفر مانند I وجود دارد که $I \subseteq D(E)$.*

برهان. اگر برای هر n، $\mu(E \cap [-n, n]) = 0$، در آن‌صورت $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E \cap [-n, n]$ دارای اندازه صفر است. بنابراین برای حداقل یک n، $\mu(E \cap [-n, n]) > 0$. بازه بازی مانند $I = (a, b)$ وجود دارد که $\mu(E \cap I) \geq \mu(E \cap [-n, n] \cap I) > \frac{3}{4}\mu(I)$. فرض کنید $|x| < \frac{1}{2}\mu(I)$. بنابراین

$$(E \cap I) \cup \big((E \cap I) + x\big) \subseteq I \cup (I + x) \qquad (1)$$

ادعا می‌کنیم $\mu\big(I \cup (I + x)\big) < \frac{3}{2}\mu(I)$. در واقع اگر x عددی مثبت باشد، بنابراین $\mu(I \cup (I + x)) = b + x - a < \frac{3}{2}\mu(I)$. اگر $x < 0$، لذا $\mu(I \cup (I + x)) = b - a - x < \frac{3}{2}\mu(I)$

و این اثبات ادعا را کامل می‌کند. ادعای بعدی این است که $(E\cap I)\cap((E\cap I)+x)\neq\emptyset$. اگر $(E\cap I)+x$ و $E\cap I$ دو مجموعه مجزا باشند، لذا

$$\mu(E\cap I)+\mu((E\cap I)+x)=۲\mu(E\cap I)>\frac{۳}{۲}\mu(I)$$

که این با رابطه (۱) در تناقض است. بنابراین $z\in(E\cap I)\cap\big((E\cap I)+x\big)$ را در نظر می‌گیریم. دو عنصر $e_۱$ و $e_۲$ از $E\cap I$ را طوری می‌گیریم که $z=e_۱=e_۲+x$. از این رابطه نتیجه می‌شود که $x=e_۱-e_۲\in D(E)$. بنابراین $(-\frac{۱}{۲}\mu(I),\frac{۱}{۲}\mu(I))\subseteq D(E)$ و طرف چپ، بازه شامل صفر مورد نظر است.
■

مثال ۲ ـ ۸. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $[۰,۱]$ باشد. فرض کنیم $۰<\delta<۱$ و قرار می‌دهیم $P_۰=[۰,۱]$. بازه باز به‌طول $\frac{\delta}{۲}$ را از مرکز $P_۰$ حذف می‌کنیم و مجموعه بسته باقیمانده را با $P_۱$ نمایش می‌دهیم. در واقع $P_۱=[۰,\frac{۱}{۲}-\frac{\delta}{۴}]\cup[\frac{۱}{۲}+\frac{\delta}{۴},۱]$. واضح است $\mu(P_۱)=۱-\frac{\delta}{۲}$. در مرحله بعدی از مرکز بازه‌های بسته باقیمانده، بازه بازی به طول $\frac{\delta}{۲^۳}$ را حذف کرده و اجتماع بازه‌های بسته باقیمانده را با نماد $P_۲$ نمایش می‌دهیم. واضح است که طول بازه حذف شده از مجموعه $P_۱$ برابر $\frac{\delta}{۴}$ بوده و لذا $\mu(P_۲)=\mu(P_۱)-\frac{\delta}{۴}=۱-\big(\frac{\delta}{۲}+\frac{\delta}{۴}\big)$. فرض کنید P_n اجتماع ۲^n بازه بسته به‌طول یکسان بوده و

$$\mu(P_n)=۱-\big(\frac{۱}{۲}+\cdots+\frac{۱}{۲^n}\big)\delta.$$

از مرکز هر بازه بسته در P_n یک بازه باز به‌طول $\frac{\delta}{۲^{۲n+۱}}$ حذف می‌کنیم و اجتماع بازه‌های بسته را با $P_{n+۱}$ نمایش می‌دهیم. چون کل طول حذف شده از P_n برابر $\frac{\delta}{۲^{n+۱}}$ است، لذا

$$\mu(P_{n+۱})=۱-\big(\frac{۱}{۲}+\cdots+\frac{۱}{۲^{n+۱}}\big)\delta.$$

این روند را ادامه داده و قرار می‌دهیم $P_\delta=\bigcap_{n=۱}^{\infty}P_n$. لذا P_δ فشرده، هیچ جا چگال است. بعلاوه $\mu(P_\delta)=\lim_{n\to\infty}\mu(P_n)=۱-\delta$.

برای $۰<\delta<۱$، تابعی تعریف می‌کنیم که این تابع برای فراهم کردن مثال‌های نقض نقش مهمی ایفاء می‌کند. این تابع به تابع کانتور معروف است و تابعی اکیداً صعودی و پیوسته است. برای تعریف این تابع، فرض کنیم $\{I_۱,I_۲,\cdots\}$ بازه‌های بازی باشند که در طرز ساخت مجموعه P_δ حذف می‌شوند. دقت کنید که این بازه‌های باز از چپ به راست شماره گذاری می‌شوند. یعنی $I_۱=(\frac{۱}{۲}-\frac{\delta}{۴},\frac{۱}{۲}+\frac{\delta}{۴})$ و $I_۲=(\frac{۱}{۴}-\frac{۳\delta}{۲^۴},\frac{۱}{۴}-\frac{\delta}{۲^۴})$ و $\cdots$. شبیه این موضوع، فرض کنیم $\{J_۱,J_۲,\cdots\}$ بازه‌های بازی باشند که در ساختن مجموعه کانتور از چپ به راست شماره

گذاری و حذف می‌شوند. برای هر n، فرض کنیم $I_n = (a_n, b_n)$ و $J_n = (c_n, d_n)$. تابع کانتور $f : [۰, ۱] \to [۰, ۱]$ را با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & x = ۰ \\ \sup\{f(t);\ t < x,\ t \in \bigcup_{n=۱}^{\infty} I_n\} & x \in P_\delta \\ \dfrac{d_n - c_n}{b_n - a_n}(x - a_n) + c_n & x \in I_n \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. به آسانی دیده می‌شود که f اکیداً صعودی و پیوسته است.

مثال ۲ ـ ۹. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $[۰, ۱]$ باشد. برای هر عدد طبیعی n، $P_{\frac{۱}{n}}$ را در نظر می‌گیریم. برای هر عدد طبیعی n، واضح است که $\mu(\bigcup_{k=۱}^{\infty} P_{\frac{۱}{k}}) \geq \mu(P_{\frac{۱}{n}}) = ۱ - \frac{۱}{n}$. قرار می‌دهیم $E = \bigcup_{n=۱}^{\infty} P_{\frac{۱}{n}}$ و لذا $\mu(E) = ۱$. در نتیجه زیر مجموعه از اندازه صفر A وجود دارد که $E \cup A = [۰, ۱]$. فرض کنیم V زیر مجموعه‌ای اندازه ناپذیر از $[۰, ۱]$ باشد. در آن‌صورت

$$V = (E \cap V) \cup (V \cap A) = [\bigcup_{n=۱}^{\infty} (P_{\frac{۱}{n}} \cap V)] \cup (V \cap A).$$

چون V اندازه ناپذیر است، لذا برای حداقل یک n، $P_{\frac{۱}{n}} \cap V$ اندازه ناپذیر است. فرض کنیم $f : [۰, ۱] \to [۰, ۱]$ تابع کانتور متناظر با $P_{\frac{۱}{n}}$ باشد. پس f تابعی پیوسته و اکیداً صعودی است. قرار می‌دهیم $\Sigma = \{B \subseteq [۰, ۱];\ f^{-۱}(B) \text{ اندازه پذیر است}\}$. چون f پیوسته است، Σ شامل همه زیر مجموعه‌های باز از $[۰, ۱]$ است. اگر $E \subseteq [۰, ۱]$ زیر مجموعه‌ای دلخواه باشد، در آن‌صورت $f^{-۱}(E)$ اندازه پذیر است اگر و تنها اگر $f^{-۱}(E^c) = [۰, ۱] \setminus f^{-۱}(E)$ اندازه پذیر باشد. لذا $E \in \Sigma$ اگر و تنها اگر $E^c \in \Sigma$. اگر $\{E_n\}$ دنباله‌ای از اعضای Σ باشد، در آن‌صورت برای هر n، $f^{-۱}(E_n)$ اندازه پذیر است. لذا $f^{-۱}(\bigcup_{n=۱}^{\infty} E_n) = \bigcup_{n=۱}^{\infty} f^{-۱}(E_n)$ اندازه پذیر است و بنابراین $\bigcup_{n=۱}^{\infty} E_n \in \Sigma$. این نتیجه می‌دهد که Σ یک σ جبر بوده و Σ شامل همه زیر مجموعه‌های بورل از $[۰, ۱]$ است. چون $f(P_{\frac{۱}{n}} \cap V) \subseteq C$، لذا $f(P_{\frac{۱}{n}} \cap V)$ دارای اندازه صفر و بنابراین اندازه پذیر است. اما $f^{-۱}(f(P_{\frac{۱}{n}} \cap V)) = P_{\frac{۱}{n}} \cap V$ اندازه پذیر نیست و لذا $f(P_{\frac{۱}{n}} \cap V)$ بورل نیست. این نشان می‌دهد که زیر مجموعه‌ای لبگ اندازه پذیر وجود دارد که بورل اندازه پذیر نیست.

تمرین ۲

۱. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی نامنفی باشد. تابع $\mu : P(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ را با ضابطه $\mu(A) = \sum_{n \in A} a_n$ تعریف می‌کنیم. ثابت کنید μ یک اندازه است.

۲. فرض کنید $f : X \to [0, +\infty)$ تابعی دلخواه باشد. فرض کنید $\mu : P(X) \to \mathbb{R}$ تابعی باشد که به هر زیر مجموعه حداکثر شمارای A عدد $\sum_{a\in A} f(a)$ و به زیر مجموعه‌های ناشمارا از X، بی‌نهایت را نسبت دهد. ثابت کنید μ یک اندازه است.

۳. فرض کنید X مجموعه‌ای ناشمارا و S خانواده همه زیر مجموعه‌های از X بوده که حداکثر شمارا و یا متمم آن حداکثر شماراست. فرض کنید تابع μ به زیر مجموعه‌های حداکثر شمارا عدد یک و به زیر مجموعه‌هایی که متمم آنها حداکثر شماراست عدد صفر را نسبت دهد. ثابت کنید μ یک اندازه است.

۴. نشان دهید که هر خانواده از زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $\mathbb{R}$ که هر یک دارای اندازه مثبت است، شماراست.

۵. فرض کنید μ اندازه‌ای خارجی روی زیر مجموعه‌های X باشد. اگر E اندازه پذیر بوده و $\mu(E\Delta F) = 0$، ثابت کنید F اندازه پذیر است.

۶. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های اندازه پذیر از $\mathbb{R}$ باشد. اگر زیر مجموعه اندازه پذیر A دارای اندازه مثبت باشد، ثابت کنید برای هر $\delta < \mu(A)$ زیر مجموعه اندازه پذیر لبگ E از A وجود دارد که $\mu(E) = \delta$.

۷. کاردینال همه زیر مجموعه‌های بورل اندازه‌پذیر از اعداد حقیقی را بیابید.

۸. فرض کنید μ اندازه‌ای خارجی روی خانواده همه زیر مجموعه‌های X باشد. اگر E اندازه پذیر باشد، ثابت کنید برای هر $A \subseteq X$،

$$\mu(E \cup A) + \mu(E \cap A) = \mu(E) + \mu(A).$$

۹. تابع μ را روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X را متناهی جمعی گوئیم هرگاه برای هر زیر مجموعه متناهی E_1 و ... و E_n از S، $\mu(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) = \sum_{k=1}^{n}\mu(E_k)$. تابع متناهی جمعی، نامنفی و متناهی μ را روی σ جبر S در نظر می‌گیریم. ثابت کنید μ یک اندازه است اگر و تنها اگر برای هر دنباله نزولی $\{A_n\}$ از اعضای S که اشتراک آنها تهی است، دنباله $\{\mu(A_n)\}$ به صفر همگرا باشد.

۱۰. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $[0, 1]$ باشد. فرض کنید $\{E_n\}$ دنباله‌ای از زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $[0, 1]$ بوده که $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) \neq 0$. آیا برای $\epsilon \in (0, 1)$، زیر دنباله‌ای مانند $\{E_{n_k}\}$ وجود دارد که $\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_k}) > \epsilon$؟

۱۱. فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیک هاسدورف و فشرده موضعی باشد. فرض کنید μ تابعی متناهی جمعی، نامنفی و متناهی روی σ جبر همه زیر مجموعه‌های بورل از X باشد. فرض کنید μ اندازه‌ای منظم باشد، یعنی برای هر زیر مجموعه بورل B از X، $\mu(B) = \sup\{\mu(K);\ K \subseteq X\}$ فشرده است. ثابت کنید μ یک اندازه است.

۱۲. فرض کنید $x \in \mathbb{R}$ عنصری دلخواه باشد. اندازه دیراک متناظر با x را در نظر بگیرید. چه زیر مجموعه‌هایی نسبت به اندازه خارجی δ_x^* اندازه پذیرند؟

۱۳. فرض کنید μ اندازه‌ای خارجی روی زیر مجموعه‌های X باشد. فرض کنید $\{A_n\}$ دنباله‌ای از زیر مجموعه‌های μ اندازه پذیر مجزا باشد. ثابت کنید که برای هر $E \subseteq X$، $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E \cap A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap A_n)$.

۱۴. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های اندازه پذیر لبگ باشد. فرض کنید $A \subseteq R$ اندازه پذیر لبگ بوده و برای هر $a, b \in \mathbb{R}$، $\mu(A \cap (a,b)) \leq \frac{b-a}{2}$. ثابت کنید $\mu(A) = 0$.

۱۵. فرض کنید E زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی بوده که برای هر $x \in \mathbb{R}$، عدد حقیقی مثبت r موجود است که $S_r(x) \cap E$ اندازه پذیر لبگ است. ثابت کنید E اندازه پذیر لبگ است.

۱۶. فرض کنید $A \subseteq [0,1]$ اندازه پذیر لبگ بوده و دارای اندازه مثبت باشد. ثابت کنید دو نقطه $x, y \in A$ وجود دارد که $x - y \in \mathbb{Q}$.

فصل ۳

انتگرال روی توابع اندازه پذیر

۳−۱ مقدمه

همانطور که می‌دانید انتگرال ریمان برای توابع کراندار و روی بازه‌های بسته تعریف می‌شود. این دو محدودیتی است که در تعریف انتگرال ریمان وجود دارد. لبگ با استفاده از نظریه مجموعه‌ها مفهوم جدیدی را معرفی کرد که دو محدودیت یاد شده را ندارد و امروزه انتگرال لبگ نامیده می‌شود. این مفهوم تعمیمی از انتگرال ریمان است.

در این فصل ابتدا توابع اندازه پذیر را تعریف کرده و پس از آن به معرفی توابع ساده و انتگرال توابع ساده می‌پردازیم. همانطور که در تعریف انتگرال ریمان از مجموع ریمان پائین و مجموع ریمان بالا استفاده می‌شود، معادل با آن، انتگرال توابع ساده در انتگرال‌گیری لبگ معرفی می‌شود. با استفاده از تعریف انتگرال توابع ساده به تعریف انتگرال توابع اندازه پذیر نامنفی و در نهایت انتگرال یک تابع اندازه پذیر را تعریف خواهیم کرد. به اثبات قضایای مهمی در این فصل پرداخته و در نهایت نشان خواهیم داد که هر تابع ریمان انتگرال‌پذیر، لبگ اندازه پذیر است و دو مقدار انتگرال باهم مساویند. این نشان می‌دهد که انتگرال لبگ تعمیمی از انتگرال ریمان است. نشان می‌دهیم که اگر تابعی انتگرال‌پذیر ریمان باشد، آن تابع تقریباً همه جا پیوسته است.

در انتها به معرفی نوعی همگرایی دنباله‌های توابع اندازه پذیر پرداخته و نشان می‌دهیم که این نوع همگرایی با همگرایی نقطه به نقطه دنباله توابع و همگرایی یکنواخت دنباله توابع متفاوت است. این مفهوم جدید در نظریه اندازه و انتگرال نقش بسزایی داشته و همگرایی در اندازه نامیده می‌شود.

۳ــ۲ توابع اندازه پذیر

انتگرال لبگ برای توابع اندازه پذیر لبگ تعریف می‌شود. همانطور که در انتگرال ریمان، توابع کراندار تعریف شده روی بازه بسته مورد توجه است، در تعریف انتگرال لبگ نیز انتگرال توابع اندازه پذیر بررسی می‌شود. ابتدا به تعریف توابع اندازه پذیر می‌پردازیم.

تعریف۳ ـ ۱. فرض کنید S یک σ جبر از زیر مجموعه‌های X و $f : X \to [-\infty, +\infty]$ تابعی دلخواه باشد. f را اندازه پذیر گوئیم هرگاه برای هر α، $\{x;\ f(x) > \alpha\} \in S$.

فرض کنید f تابعی اندازه پذیر باشد. برای هر α، $\{x;\ f(x) > \alpha\} \in S$ و بنابراین $\{x;\ f(x) \leq \alpha\} \in S$. این نشان می‌دهد که برای هر n و α، $\{x;\ f(x) \leq \alpha - \frac{1}{n}\} \in S$. در نتیجه برای هر α،

$$\{x;\ f(x) < \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x;\ f(x) \leq \alpha - \frac{1}{n}\} \in S.$$

اکنون فرض کنیم برای هر α، $\{x;\ f(x) < \alpha\} \in S$. بنابراین $\{x;\ f(x) \geq \alpha\} \in S$. این نشان می‌دهد که برای هر n و α، $\{x;\ f(x) \geq \alpha + \frac{1}{n}\} \in S$. در نتیجه برای هر α،

$$\{x;\ f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x;\ f(x) \geq \alpha + \frac{1}{n}\} \in S.$$

در نتیجه f اندازه پذیر است اگر و تنها اگر برای هر α، $\{x;\ f(x) < \alpha\} \in S$.

برهان قضیه زیر ساده بوده و به خواننده واگذار می‌شود.

قضیه۳ ـ ۲. *فرض کنیم S یک σ جبر از زیر مجموعه‌های X و $f : X \to [-\infty, \infty]$ تابعی دلخواه باشد. در آن‌صورت شرایط زیر معادلند:*

الف) *f تابعی اندازه پذیر است.*

ب) $\{x \in X;\ f(x) \geq \alpha\} \in S$.

ج) $\{x \in X;\ f(x) \leq \alpha\} \in S$.

اگر f تابعی اندازه پذیر و α عدد حقیقی دلخواه باشد، در آن‌صورت

$$\{x;\ f(x) = \alpha\} = \{x;\ f(x) \leq \alpha\} \cap \{x;\ f(x) \geq \alpha\} \in S.$$

همینطور $\{x \in X;\ f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > n\} \in S$. سوالی که مطرح می‌شود این است که اگر برای هر α، $\{x \in X;\ f(x) = \alpha\} \in S$، آیا f اندازه پذیر است؟ جواب منفی است، برای مثال خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر روی $\mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. زیر مجموعه اندازه ناپذیر $E \subseteq [0, 1]$ را در نظر بگیرید. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in E \\ ۴ + e^x & x \notin E \end{cases}$$

تعریف کنید. f تابعی یک به یک بوده و لذا برای هر α، $\{x \in X;\ f(x) = \alpha\}$ اندازه پذیر لبگ است. اما $E = f^{-۱}([\circ, ۱])$ اندازه پذیر لبگ نیست. در نتیجه f اندازه پذیر نیست.

دوباره زیر مجموعه اندازه ناپذیر لبگ $E \subseteq [\circ, ۱]$ را در نظر می‌گیریم. تابع

$$g(x) = \begin{cases} +\infty & x \in E \\ -\infty & x \notin E \end{cases}$$

اندازه پذیر نیست ولی برای هر بازه باز (a,b) در $\mathbb{R}$، $f^{-۱}((a,b))$ اندازه پذیر لبگ است.

نکته۱. فرض کنیم S یک σ جبر از زیر مجموعه‌های X و $f, g : X \to [-\infty, +\infty]$ دو تابع اندازه پذیر باشند. فرض کنیم $\{r_۱, r_۲, \ldots\}$ یک نمایش از مجموعه اعداد گویا باشد. در این‌صورت

$$\{x \in X;\ f(x) > g(x)\} = \bigcup_{n=۱}^{\infty} \{x \in X;\ f(x) > r_n\} \cap \{x \in X;\ g(x) < r_n\}.$$

واضح است که طرف راست رابطه اخیر، اجتماع تعداد شمارایی از اعضای S بوده و لذا در S قرار دارد. به همین شیوه $\{x \in X;\ g(x) > f(x)\}$ عضوی از S است و بنابراین $\{x \in X;\ g(x) \leq f(x)\}$ در S قرار دارد. این نتیجه می‌دهد که

$$\{x \in X;\ f(x) = g(x)\} = \{x \in X;\ f(x) \geq g(x)\} \setminus \{x \in X;\ f(x) > g(x)\}.$$

عضوی از S است.

تعریف۳ ـ ۳. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بورل اندازه پذیر گوئیم هرگاه برای هر بازه باز (a,b) در $\mathbb{R}$، $f^{-۱}((a,b))$ بورل اندازه پذیر باشد.

از تعریف بالا چنین بر می‌آید که هر تابع پیوسته، تابعی بورل اندازه پذیر است. بعلاوه هر تابع بورل اندازه پذیر، لبگ اندازه پذیر است. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & x = \circ \\ -۱ & x \neq \circ \end{cases}$$

پیوسته نیست ولی بورل اندازه پذیر است.

فرض کنید S یک σ جبر از زیر مجموعه‌های X باشد. برای $E \subseteq X$، تابع مشخصه را با نماد χ_E نمایش داده و با ضابطه

$$\chi_E(x) = \begin{cases} ۱ & x \in E \\ \circ & x \notin E \end{cases}$$

تعریف می‌شود. اگر این تابع مشخصه اندازه پذیر باشد، لذا $E \in S = \chi_E^{-۱}(\{۱\})$. اگر $E \in S$ و α داده شده باشد، در آن‌صورت

$$\chi_E^{-1}([-\infty,\alpha)) = \begin{cases} \emptyset & \alpha \leq 0 \\ E^c & 0 < \alpha \leq 1 \\ X & \alpha > 1 \end{cases}$$

و بنابراین χ_E اندازه پذیر است.

نکته۲. فرض کنید S یک σ جبر از زیر مجموعه‌های X و $f,g : X \to \mathbb{R}$ دو تابع اندازه پذیر باشند. برای هر عدد ثابت c، $c-g$ تابعی اندازه پذیر است. در حقیقت برای هر α، $\{x \in X;\ c-g(x) > \alpha\} = \{x \in X;\ c-\alpha > g(x)\} \in S$. از طرفی

$$\{x \in X;\ f(x)+g(x) > \alpha\} = \{x \in X;\ f(x) > \alpha - g(x)\}$$

و لذا $f+g$ تابعی اندازه پذیر است.

اگر $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد، به سادگی دیده می‌شود که $\phi o f$ تابعی اندازه پذیر لبگ است. با این توصیف $(f+g)^2$، f^2 و g^2 توابعی اندازه پذیرند. در نتیجه $2fg = (f+g)^2 - f^2 - g^2$ اندازه پذیر است.

محدودیتی وجود ندارد که توابع متناهی مقدار باشند. بنابراین اگر $f,g : X \to [-\infty,+\infty]$ توابعی اندازه پذیر باشند، تابع h را جاهایی که $f+g$ تعریف شده است را $f+g$ تعریف کرده و جاهایی که $f+g$ تعریف نشده است را عدد ثابت β تعریف می‌کنیم. اگر α عدد حقیقی دلخواه و $\beta > \alpha$، در آن‌صورت $\{x;\ h(x) > \alpha\} = \{x;\ f(x)+g(x) > \alpha\} \cup A_\beta = \{x;\ f(x) > \alpha - g(x)\} \cup A_\beta$ که در آن $A_\beta = [\{x;\ f(x) = +\infty\} \cap \{x;\ g(x) = -\infty\}] \cup [\{x;\ f(x) = -\infty\} \cap \{x;\ g(x) = +\infty\}]$. در این حالت h اندازه پذیر است. اگر $\beta \geq \alpha$، در آن‌صورت

$$\{x;\ h(x) > \alpha\} = \{x;\ f(x)+g(x) > \alpha\} = \{x;\ f(x) > \alpha - g(x)\}$$

که نشان می‌دهد h اندازه پذیر است. اگر S یک σ جبر از زیر مجموعه‌های X باشد، همین موضوع برای حاصلضرب دو تابع اندازه پذیر $f,g : X \to [-\infty,+\infty]$ وجود دارد. اگر تابع h را جاهایی که fg تعریف شده است را با fg و جاهایی که تعریف نشده است را عدد ثابت β تعریف کنیم، در آن‌صورت h تابعی اندازه پذیر است. در واقع اگر α عددی حقیقی و مثبت و $\beta > \alpha$، قرار می‌دهیم

$$A_\beta = \{x;\ f(x) = +\infty,\ g(x) = -\infty\} \cup \{x;\ f(x) = -\infty,\ g(x) = +\infty\}$$

و همچنین $A = \{x;\ g(x) > 0,\ f(x) = +\infty\}$، $B = \{x;\ f(x) > 0,\ g(x) = +\infty\}$، $C = \{x;\ f(x) < 0,\ g(x) = -\infty\}$ و $D = \{x;\ f(x) = -\infty,\ g(x) < 0\}$. همینطور E را مجموعه همه x هایی از X در نظر می‌گیریم که $f(x)$ و $g(x)$ متناهی مقدار بوده و $f(x)g(x) > \alpha$.

واضح است که $\{x;\ h(x) > \alpha\} = A_\beta \cup A \cup B \cup C \cup D \cup E \in S$. حالت‌های دیگر نیز به شیوه مشابه است و لذا h اندازه پذیر است. توجه کنید که در ادامه توابع انتگرال پذیر مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. خوشبختانه توابع انتگرال‌پذیر تنها در یک زیر مجموعه از اندازه صفر متناهی مقدار نیست و خواهیم دید که مجموعه‌های اندازه صفر نقش مهمی ندارند. بنابراین بیشتر اوقات و شاید همیشه از توابع متناهی مقدار صحبت به میان خواهد آمد.

اگر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ اندازه پذیر و $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بورل اندازه پذیر باشد، در آن‌صورت gof اندازه پذیر است. در واقع $\Sigma = \{A \subseteq \mathbb{R};$ اندازه پذیراست $f^{-1}(A)\}$ شامل همه زیر مجموعه‌های باز است. $A \in \Sigma$ اگر و تنها اگر $f^{-1}(A)$ اندازه پذیر است اگر و تنها اگر $\mathbb{R} \setminus f^{-1}(A)$ اندازه پذیر است اگر و تنها اگر $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus A)$ اندازه پذیر باشد. این نتیجه می‌دهد که Σ تحت متمم گیری بسته است. اگر $\{A_n\}$ دنباله‌ای از اعضای Σ باشد، لذا برای هر n، $f^{-1}(A_n)$ اندازه پذیر است و بنابراین $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) = f^{-1}(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n)$ اندازه پذیر است. این نشان می‌دهد که Σ یک σ جبر شامل همه زیر مجموعه‌های باز $\mathbb{R}$ است و لذا شامل همه زیر مجموعه‌های بورل است. از این نتیجه می‌گیریم که اگر (a,b) بازه بازی در $\mathbb{R}$ باشد، بنابراین $g^{-1}((a,b))$ بورل بوده و لذا $f^{-1}(g^{-1}(a,b))$ اندازه پذیر است.

فرض کنید $1 > \delta > 0$، زیر مجموعه اندازه ناپذیر E از P_δ را در نظر بگیرید. فرض کنیم $f : [0,1] \to [0,1]$ تابع کانتور باشد. در این‌صورت $E_1 = f(E) \subseteq C$ اندازه پذیر است. از طرفی $\chi_{E_1} of = \chi_E$ اندازه پذیر نیست و این نتیجه می‌دهد که لزومی ندارد ترکیب تابعی اندازه پذیر با تابعی پیوسته، اندازه پذیر باشد.

قضیه ۳ ـ ۴. *فرض کنید S یک σ جبر از زیر مجموعه‌های X و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر تعریف شده روی X باشد. در آن‌صورت*

الف) *توابع* $g(x) = \sup f_n(x)$ *و* $h(x) = \inf f_n(x)$ *اندازه پذیرند.*

ب) *توابع* $k(x) = \limsup f_n(x)$ *و* $r(x) = \liminf f_n(x)$ *اندازه پذیرند.*

برهان. فرض کنیم α عدد حقیقی دلخواه باشد، لذا

$$\{x \in X;\ g(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X;\ f_n(x) > \alpha\}.$$

طرف راست اجتماع تعداد شمارا از عناصر S بوده و لذا g اندازه پذیر است. چون $h(x) = \inf f_n(x) = -\sup -f_n(x)$، بنا به قسمت الف، h اندازه پذیر است. البته از اینکه

$$\{x \in X;\ h(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X;\ f_n(x) \geq \alpha\}$$

نیز می‌توان نتیجه گرفت که h اندازه پذیر است.

برای اثبات قسمت ب، برای هر m، تعریف می‌کنیم $h_m(x) = \sup\{f_n(x);\ n \geq m\}$. بنا به قسمت الف، h_m اندازه پذیر است. در نتیجه $k(x) = \inf\{h_m(x);\ m \in \mathbb{N}\}$ اندازه پذیر است. به شیوه مشابه $r(x) = \liminf f_n(x)$ اندازه پذیر است. ■

نتیجه‌ای که از قضیه بالا بدست می‌آید، این است که اگر دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر به تابعی مانند f همگرای نقطه به نقطه باشد، در آن‌صورت f اندازه پذیر است. در واقع $f(x) = \limsup f_n(x)$ و بنا به قضیه بالا f اندازه پذیر است.

تعریف ۳ ـ ۵. فرض کنیم (X, S, μ) یک فضای اندازه و P یک خاصیت باشد. گوئیم یک گزاره تقریباً همه جا دارای خاصیت P است هرگاه آن گزاره همه جا به جز حداکثر در یک مجموعه از اندازه صفر دارای خاصیت P باشد.

خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. اگر P خاصیت صفر بودن باشد، در آن‌صورت تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & x \in \mathbb{Q} \\ ۰ & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

تقریباً همه جا صفر است. چون تنها جاهایی که f ناصفر است دارای اندازه صفر است.

توجه کنید که اگر (X, S, μ) یک فضای اندازه باشد، مرسوم است که عناصر S را مجموعه‌های اندازه پذیر بنامیم. بنابراین گفته می‌شود که تابع $f : X \to [-\infty, +\infty]$ اندازه پذیر است اگر و تنها اگر برای هر α، $f^{-۱}([\alpha, +\infty])$ اندازه‌پذیر باشد. در واقع اگر (X, S, μ) یک فضای اندازه کامل باشد، در آن‌صورت E نسبت به μ^* اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر $E \in S$.

اکنون فرض کنیم $f, g : X \to [-\infty, +\infty]$ دو تابع تعریف شده روی فضای اندازه کامل (X, S, μ) باشند. فرض کنیم f اندازه پذیر و f با g تقریباً همه جا با هم مساوی باشند. در آن‌صورت g اندازه پذیر است. در واقع برای α داده شده،

$$\{x \in X;\ f(x) > \alpha\} \Delta \{x \in X;\ g(x) > \alpha\} \subseteq \{x \in X;\ f(x) \neq g(x)\}$$

و طرف راست رابطه اخیر دارای اندازه صفر بوده و همچنین $F = \{x \in X; f(x) > \alpha\}$ نیز اندازه پذیر است. ثابت می‌کنیم $G = \{x \in X;\ g(x) > \alpha\}$ اندازه پذیر است. چون $F \cap G = F \setminus (F \setminus G)$ و $F \setminus G$ دارای اندازه صفر و لذا اندازه پذیر است. استفاده از اندازه پذیری F نتیجه می‌دهد که $F \cap G$ اندازه پذیر است. اما $G \setminus F$ دارای اندازه صفر بوده و بنابراین $G = (G \setminus F) \cup (G \cap F)$

اندازه پذیر است.

نکته۳. در زیر چند نکته مهم را دسته بندی کرده که خواص توابع اندازه‌پذیر را مشخص می‌کند. σ جبر مورد بحث خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر است.

الف) اگر $|f|$ اندازه پذیر باشد، لزومی ندارد که f اندازه پذیر باشد. برای مثال زیر مجموعه اندازه ناپذیر $E \subseteq [\circ, 1]$ را در نظر بگیرید. تعریف کنید

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ -1 & x \notin E \end{cases}$$

واضح است که تابع ثابت $|f| = 1$ اندازه پذیر است ولی f اندازه پذیر نیست.

ب) فرض کنید μ اندازه لبگ و $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ اندازه پذیر لبگ باشد. اینطور تصور می‌شود که ممکن است این تابع با تابعی پیوسته تقریباً همه جا مساوی باشد. این موضوع درست نیست. زیرا تابع $f = \chi_{[\circ,1]}$ اندازه پذیر است و چنانچه با تابع پیوسته g تقریباً همه جا مساوی باشد، بایستی $\mu(\{x \in \mathbb{R};\ \circ < g(x) < 1\}) = \circ$. اما g پیوسته است و لذا $g^{-1}((\circ, 1))$ باز و ناتهی است. در نتیجه $\mu(\{x \in \mathbb{R};\ \circ < g(x) < 1\}) \neq \circ$، که یک تناقض است. لذا تابعی اندازه پذیر لبگ وجود دارد که با هیچ تابع پیوسته تقریباً همه جا مساوی نیست.

ج) تابع علامت که با ضابطه

$$sgn(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq \circ \\ \circ & x = \circ \end{cases}$$

تعریف می‌شود تنها در نقطه صفر پیوسته نیست و لذا تقریباً همه جا با تابعی پیوسته مساوی است. در نتیجه تابع علامت اندازه پذیر است.

د) در دروس آنالیز ریاضی دیدیم که مشتق یک تابع لزوماً پیوسته نیست و ناپیوستگی‌های مشتق یک تابع همه از نوع دوم هستند. اما مشتق یک تابع، تابعی اندازه پذیر است. زیرا دنباله توابع $\{n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x))\}$ به تابع $f'(x)$ همگرای نقطه به نقطه است. این نشان می‌دهد که f' اندازه پذیر است.

ه) فرض کنید E زیر مجموعه‌ای اندازه ناپذیر باشد. برای هر $\alpha \in E$، تعریف کنید $f_\alpha = \chi_{\{\alpha\}}$. در این‌صورت هر f_α اندازه پذیر بوده ولی $\sup\{f_\alpha;\ \alpha \in E\} = \chi_E$ اندازه پذیر نیست.

نکته۴. اگر تابع حقیقی مقدار f اندازه پذیر باشد، در آن‌صورت $f^+(x) = max\{f(x), \circ\}$ و همینطور $f^-(x) = max\{-f(x), \circ\}$ اندازه پذیرند و $f = f^+ - f^-$ و $|f| = f^+ + f^-$.

فرض کنید μ اندازه‌ای روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. تابع $f : X \to [-\infty, +\infty]$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $|f|$ تقریباً همه جا نامتناهی نباشد، بدین معنی که

$E = \{x \in X;\ |f(x)| \neq +\infty\}$ دارای اندازه ناصفر است. برای هر عدد طبیعی n قرار می‌دهیم، $E_n = \{x \in X;\ |f(x)| < n\}$. واضح است که E_n به E صعود می‌کند و لذا دنباله $\{\mu(E_n)\}$ به $\mu(E)$ همگراست. فرض کنید برای هر n، $\mu(E_n) = 0$. لذا $\mu(E) = 0$ که یک تناقض است. در نتیجه برای حداقل یک n، $\mu(E_n) > 0$. این نشان می‌دهد که f روی یک مجموعه از اندازه مثبت کراندار است.

تعریف۳ ـ ٦. فرض کنیم (X, S, μ) یک فضای اندازه باشد. تابع $s : X \to [-\infty, +\infty]$ را ساده گوئیم هرگاه تعداد متناهی از اعضای مجزای S مانند $E_1, ..., E_n$ و اسکالرهای $\alpha_1, ..., \alpha_n$ موجود باشند که $X = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ و $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$.

از تعریف چنین بر می‌آید که هر تابع ساده اندازه پذیر و دارای برد متناهی است. اگر t تابعی اندازه پذیر و دارای برد متناهی $\{\beta_1, ..., \beta_m\}$ باشد، قرار می‌دهیم $E_i = t^{-1}(\{\beta_i\})$. واضح است که هر E_i اندازه پذیر، مجزا و $X = \bigcup_{i=1}^{m} E_i$. همچنین $t = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \chi_{E_i}$ که نتیجه می‌دهد t تابعی ساده است.

قضیه۳ ـ ۷. *حاصلضرب و مجموع دو تابع ساده، تابعی ساده است.*

برهان. فرض کنیم $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ و $t = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{F_j}$ دو تابع ساده باشند. بنابراین $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup_{j=1}^{m} F_j = X$، E_i ها مجزا و F_j ها مجزا هستند. بنابراین

$$\begin{aligned} st &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i} \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{F_j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \chi_{E_i} \chi_{F_j} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \chi_{E_i \cap F_j}. \end{aligned}$$

چون $E_i \cap F_j$ ها مجزا و $\bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} E_i \cap F_j = X$، لذا st یک تابع ساده است.

واضح است که $s = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \chi_{E_i \cap F_j}$ و $t = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \beta_j \chi_{E_i \cap F_j}$. بنابراین

$$s + t = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \chi_{E_i \cap F_j} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \beta_j \chi_{E_i \cap F_j} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_j) \chi_{E_i \cap F_j}$$

چون $E_i \cap F_j$ ها مجزا و $\bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} E_i \cap F_j = X$، لذا $s + t$ یک تابع ساده است. ∎

قضیه زیر یکی از مهم‌ترین قضایاست. در حقیقت بررسی شرایط روی یک تابع ساده اصولاً به آسانی انجام می‌شود. قضیه زیر بیان می‌کند که هر تابع اندازه پذیر، حد نقطه به نقطه از یک دنباله

از توابع ساده است. اگر حکمی برای توابع ساده برقرار باشد، با فراهم بودن شرایط می‌توان آن حکم را برای توابع اندازه پذیر نتیجه گرفت.

قضیه۳ ـ ۸. *فرض کنیم (X, S, μ) یک فضای اندازه و $f : X \to [0, +\infty]$ تابعی اندازه پذیر باشد. در آن صورت دنباله‌ای از توابع ساده وجود دارد که نقطه به نقطه به تابع f همگراست.*

برهان. برای هر عدد طبیعی n و $1 \leq k \leq n2^n$، قرار می‌دهیم

$$E_{n,k} = f^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)\right), \quad F_n = f^{-1}([n, +\infty])$$

چون f اندازه پذیر است، لذا $E_{n,k}$ ها مجزا و با F_n نیز مجزا و در S قرار دارند. تعریف می‌کنیم

$$s_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{2^n} & \dfrac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \dfrac{k}{2^n} \\ n & f(x) \geq n \end{cases}$$

در واقع $s_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n}\chi_{E_{n,k}} + n\chi_{F_n}$. واضح است که s_n تابعی ساده است. ادعا می‌کنیم s_n صعودی است. فرض کنیم $x \in X$ و n عدد طبیعی دلخواه باشد. فرض کنیم برای $1 \leq k \leq n2^n$، $\frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}$. در این‌صورت $s_n(x) = \frac{k-1}{2^n}$ و $\frac{2k-2}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k}{2^{n+1}}$. اگر $\frac{2k-2}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k-1}{2^{n+1}}$، $s_{n+1}(x) = \frac{2k-2}{2^{n+1}}$ و در این حالت $s_n(x) = s_{n+1}(x)$. چنانچه $\frac{2k-1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k}{2^{n+1}}$، لذا $s_{n+1}(x) = \frac{2k-1}{2^{n+1}} \geq s_n(x)$.

اکنون فرض کنیم $f(x) \geq n$. اگر $f(x) \geq n+1$، لذا $s_{n+1}(x) = n+1 \geq n = s_n(x)$. چنانچه $n \leq f(x) < n+1$، $\frac{n2^{n+1}}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{(n+1)2^{n+1}}{2^{n+1}}$. بنابراین عدد طبیعی مانند k هست که $n2^{n+1} \leq k-1 < (n+1)2^{n+1}$ و $\frac{k-1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{k}{2^{n+1}}$. در نتیجه $s_n(x) = n \leq \frac{k-1}{2^{n+1}} = s_{n+1}(x)$. با این تفاسیر s_n صعودی است.

حال ثابت می‌کنیم $\{s_n\}$ به f همگرای نقطه به نقطه است. اگر $x \in X$ و $f(x) = +\infty$، لذا برای هر n، $s_n(x) = n$ که به وضوح به $f(x)$ همگراست. اگر $f(x) < +\infty$، لذا برای یک m، $f(x) < m$. برای $n \geq m$، عدد طبیعی $1 \leq k \leq n2^n$ موجود است که $\frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}$. بنابراین $|f(x) - s_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ و لذا $s_n(x) \to f(x)$. ■

۳ـ۳ انتگرال توابع اندازه پذیر

همانطور که در دروس پایه مجموع ریمان پائین و مجموع ریمان بالا تقریبی برای انتگرال ریمان بوده است، در تعریف انتگرال لبگ از تعریف انتگرال توابع ساده استفاده می‌کنیم. اگر $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

تابعی کراندار باشد، برای افراز $P = \{x_0, ..., x_n\}$ از $[a,b]$، $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_{x_i}$ مجموع ریمان پائین است که در آن $m_i = \inf\{f(x);\ x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$. این مجموع ریمان پائین در واقع انتگرال تابع ساده $\sum_{i=1}^{n} m_i \chi_{[x_i, x_{i-1}]}$ است. بنابراین اگر f انتگرال پذیر ریمان باشد، انتگرال تابع f را می‌توان با انتگرال تابعی ساده تقریب زد. از این موضوع ایده گرفته و انتگرال یک تابع اندازه پذیر را تعریف می‌کنیم.

تعریف۳ ــ ۹. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه و $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ تابعی ساده باشد. انتگرال این تابع ساده را با نماد $\int s(x) d\mu(x)$ نمایش داده و به‌صورت $\int s(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i)$ تعریف می‌کنیم.

گاهی اوقات به‌جای $\int s(x) d\mu(x)$ از نماد $\int s d\mu$ نیز استفاده می‌شود. اولین مطلبی که باید ثابت شود این است که چرا این انتگرال خوش تعریف است. در واقع چرا این تعریف مستقل از انتخاب نمایش یک تابع ساده است. برای بررسی این موضوع، فرض کنید $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ و $\sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{F_j}$ دو نمایش برای s باشند. بنابراین E_i ،$X = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup_{j=1}^{m} F_j$ ها مجزا و F_j ها مجزا هستند. چون s یک تابع است، چنانچه برای i, j ای $E_i \cap F_j \neq \emptyset$، لذا $\alpha_i = \beta_j$. می‌توان نوشت $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(\bigcup_{j=1}^{m} F_j \cap E_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} \mu(E_i \cap F_j)$ و به شیوه مشابه $\sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(F_j) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i \cap F_j)$. چنانچه برای i, j ای $\mu(E_i \cap F_j) > 0$، لذا $\alpha_i = \beta_j$ و از دو رابطه اخیر نتیجه می‌شود که $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(F_j)$. پس انتگرال یک تابع ساده خوش تعریف است.

نکته۵. فرض کنیم $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ و $t = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{F_j}$ دو تابع ساده و a و b دو عدد حقیقی باشند. واضح است که $a\phi + b\psi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a\alpha_i + b\beta_j) \chi_{E_i \cap F_j}$ و لذا

$$\begin{aligned}
\int (a\phi + b\psi) d\mu &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a\alpha_i + b\beta_j) \mu(E_i \cap F_j) \\
&= a \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \mu(E_i \cap F_j) + b \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(E_i \cap F_j) \\
&= a \int \phi d\mu + b \int \psi d\mu.
\end{aligned}$$

فرض کنیم $s=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{E_i}$ و $t=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\chi_{F_j}$ دو تابع ساده و $s\leq t$. اگر برای i,j ای $E_i\cap F_j\neq\emptyset$، لذا $\alpha_i\leq\beta_j$. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\int sd\mu&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\mu(E_i\cap F_j)\\&\leq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\beta_j\mu(E_i\cap F_j)=\int td\mu.\end{aligned}$$

تعریف ۳ ـ ۱۰. فرض کنید S در فضای اندازه (X,S,μ) یک σ جبر و $f:X\to[0,+\infty]$ تابعی اندازه پذیر باشد. دنباله توابع ساده و صعودی $\{s_n\}$ وجود دارد که به f همگرای نقطه به نقطه است. تعریف می‌کنیم $\int fd\mu=\lim_{n\to\infty}\int s_nd\mu$.

قضیه ۳ ـ ۱۱. *فرض کنید S در فضای اندازه (X,S,μ) یک σ جبر و $f:X\to[0,+\infty]$ تابعی اندازه پذیر باشد. فرض کنید $\{s_n\}$ دنباله‌ای صعودی از توابع ساده و t نیز تابعی ساده باشد. اگر $\{s_n\}$ به f همگرای نقطه به نقطه و $f\geq t$، در آن‌صورت $\int td\mu\leq\lim_{n\to\infty}\int s_nd\mu$.*

برهان. فرض کنید $t=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\chi_{E_i}$ نمایشی برای تابع ساده t باشد که در آن E_i ها مجزا و $X=\bigcup_{i=1}^{m}E_i$.

حالت اول: اگر $\int td\mu=+\infty$، در این حالت برای یک $1\leq k\leq m$، $\mu(E_k)=+\infty$ و $\alpha_k>0$. $0<\epsilon<\alpha_k$ را در نظر می‌گیریم و برای هر n، قرار می‌دهیم

$$A_n=\{x\in X;\ s_n(x)+\epsilon>t(x)\}.$$

واضح است که $\{A_n\}$ صعودی و چون $\{s_n\}$ به f همگراست، لذا $\{A_n\}$ به X صعود می‌کند. بنابراین $\lim_{n\to\infty}A_n\cap E_k=E_k$ و لذا $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n\cap E_k)=\mu(E_k)$. اما

$$s_n\geq s_n\chi_{A_n\cap E_k}\geq(t-\epsilon)\chi_{A_n\cap E_k}\geq(\alpha_k-\epsilon)\chi_{A_n\cap E_k}$$

و بنابراین $\int s_nd\mu\geq(\alpha_k-\epsilon)\mu(A_n\cap E_k)$. این نتیجه می‌دهد که $\lim_{n\to\infty}\int s_nd\mu=+\infty$.

حالت دوم: اگر $\int td\mu<+\infty$، قرار می‌دهیم $A=\{x\in X;\ t(x)>0\}$. واضح است که $A=\bigcup_{i=1}^{m}\{E_i;\ \alpha_i>0\}$. قرار می‌دهیم $\alpha=\min\{\alpha_i;\ \alpha_i>0,\ 1\leq i\leq m\}$ و $0<\epsilon<\alpha$ را در نظر می‌گیریم. دوباره برای هر n، تعریف می‌کنیم $A_n=\{x\in X;\ s_n(x)>t(x)-\epsilon\}$. پس $s_n\geq s_n\chi_{A_n\cap A}\geq(t-\epsilon)\chi_{A_n\cap A}$. نتیجه اینکه

$$\int s_nd\mu\geq\int(t-\epsilon)\chi_{A_n\cap A}d\mu=\int t\chi_{A_n\cap A}d\mu-\epsilon\mu(A_n\cap A)$$

$$\geq \int t\chi_{A_n\cap A}d\mu - \epsilon\mu(A) = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mu(A_n\cap E_i) - \epsilon\mu(A).$$

از طرفی $\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mu(A_n\cap E_i)\}$ به $\int td\mu$ همگراست و لذا $\lim_{n\to\infty}\int s_n d\mu \geq \int td\mu - \epsilon\mu(A)$.

چون $\int td\mu < \infty$، لذا $\mu(A) < +\infty$. در نتیجه $\lim_{n\to\infty}\int s_n d\mu \geq \int td\mu$. ∎

فرض کنیم $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ دو دنباله صعودی از توابع ساده و همگرا به تابع اندازه پذیر $f : X \to [0,+\infty]$ باشند. برای هر عدد طبیعی m، $\lim_{n\to\infty} s_n = f \geq t_m$. بنا به قضیه قبل، $\lim_{n\to\infty}\int s_n d\mu \geq \int t_m d\mu$. این نتیجه می‌دهد که $\lim_{n\to\infty}\int s_n d\mu \geq \lim_{m\to\infty}\int t_m d\mu$. به همین شیوه $\lim_{m\to\infty}\int t_m d\mu \geq \lim_{n\to\infty}\int s_n d\mu$ و لذا $\lim_{n\to\infty}\int s_n d\mu = \lim_{m\to\infty}\int t_m d\mu$.

نکته۶. فرض کنید S در فضای اندازه (X,S,μ) یک σ جبر و $f : X \to [0,+\infty]$ تابعی اندازه پذیر باشد. دنباله توابع صعودی و ساده $\{s_n\}$ را طوری می‌یابیم که این دنباله به f همگرا باشد. فرض کنید t تابعی ساده و $t \leq f$. بنا به قضیه قبل $\int fd\mu = \lim_{n\to\infty}\int s_n d\mu \geq \int td\mu$. از این رابطه نتیجه می‌شود که $\int fd\mu = \sup\{\int sd\mu;\ s \leq f$ ساده $s\}$.

تعریف۳ ـ ۱۲. فرض کنید S در فضای اندازه (X,S,μ) یک σ جبر و $f : X \to [-\infty,+\infty]$ تابعی اندازه پذیر باشد. اگر $\int f^+d\mu - \int f^-d\mu$ به شکل $+\infty - \infty$ نباشد، در آن‌صورت انتگرال f را به صورت $\int fd\mu = \int f^+d\mu - \int f^-d\mu$ تعریف می‌کنیم.

نکته۷. فرض کنید S در فضای اندازه (X,S,μ) یک σ جبر و $E \in S$. منظور از $\int_E fd\mu$ برای تابع اندازه پذیر $f : X \to [0,+\infty]$ مقدار $\int f\chi_E d\mu$ است. به چند نکته توجه کنید:

الف) فرض کنید $A \in S$ و $\mu(A) = 0$. اگر $s = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\chi_{E_i}$ تابع ساده دلخواهی باشد. در آن‌صورت

$$\int s\chi_A d\mu = \int\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\chi_{E_i\cap A}d\mu = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mu(E_i\cap A) = 0.$$

از آنجا که انتگرال یک تابع اندازه پذیر نامنفی، حد انتگرال یک دنباله از توابع ساده است و انتگرال هر تابع ساده روی A صفر است. بنابراین انتگرال هر تابع اندازه پذیر نامنفی روی A صفر است.

ب) اگر $f : X \to [0,+\infty]$ تابعی اندازه پذیر و $\int fd\mu = 0$، در آن‌صورت f تقریباً همه جا صفر است. در واقع برای هر عدد طبیعی n، قرار می‌دهیم $E_n = \{x \in X;\ f(x) > \frac{1}{n}\}$. خواهیم داشت

$$0 = \int fd\mu \geq \int f\chi_{E_n}d\mu \geq \frac{1}{n}\int\chi_{E_n}d\mu = \frac{1}{n}\mu(E_n).$$

در نتیجه $\{x \in X; f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ دارای اندازه صفر است. پس f تقریباً همه جا صفر است.

ج) فرض کنید $s = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{F_i}$ تابعی ساده و نامنفی باشد. برای هر $E \in S$، قرار می‌دهیم $\nu(E) = \int_E s d\mu$. واضح است که $\nu(\emptyset) = 0$ و اگر $\{E_n\}$ دنباله‌ای مجزا از اعضای S و $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$، لذا

$$\begin{aligned}
\nu(E) &= \int_E s d\mu = \int s\chi_E d\mu = \int \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{F_i \cap E} d\mu \\
&= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(F_i \cap E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(F_i \cap E_j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} s d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j).
\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که ν یک اندازه است.

د) فرض کنید $f, g : X \to [0, +\infty]$ دو تابع اندازه پذیر و $f \leq g$. اگر s تابعی ساده باشد که $s \leq f$، در آن‌صورت $s \leq g$. بنابراین

$$\int f d\mu = \sup\left\{ \int s d\mu;\ s \leq f \right\} \leq \sup\left\{ \int s d\mu;\ s \leq g \right\} = \int g d\mu.$$

فرض کنید μ اندازه‌ای روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. فرض کنید $f : X \to \mathbb{R}$ تابعی اندازه پذیر بوده و برای هر $E \in S$، $\int_E f d\mu = 0$. قرار دهید $E_1 = \{x \in X;\ f(x) > 0\}$ و $E_2 = \{x \in X;\ f(x) < 0\}$. بنا به فرض، $\int_{E_1} f d\mu = 0$ و لذا برای هر عدد طبیعی n، $\mu(\{x;\ f(x) > \frac{1}{n}\}) = 0$. این نشان می‌دهد که $\mu(E_1) = 0$. به طور مشابه $\mu(E_2) = 0$ و لذا f تقریباً همه جا صفر است.

قضیه ۳ ـ ۱۳. فرض کنید μ اندازه‌ای روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع نامنفی، صعودی و اندازه پذیر روی X باشد. فرض کنیم دنباله توابع $\{f_n\}$ به تابع f همگرا باشد، در آن‌صورت $\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$.

برهان. چون $\{\int f_n d\mu\}$ دنباله‌ای صعودی از اعداد حقیقی است، لذا همگراست. از طرفی برای هر n، $f_n \leq f$ و لذا $\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$. این نتیجه می‌دهد که $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$.

برای ثابت کردن عکس نامساوی، عدد $\alpha \in (0, 1)$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم s تابعی ساده و $0 \leq s \leq f$. تابع $\nu(E) = \int_E s d\mu$ یک اندازه روی σ جبر S است. برای هر عدد طبیعی n، قرار می‌دهیم $E_n = \{x \in X;\ f_n(x) \geq \alpha s(x)\}$. واضح است که $\{E_n\}$ دنباله‌ای

صعودی و همگرا به X است. در نتیجه $\{\int_{E_n} sd\mu\}$ به $\int sd\mu$ همگراست. از طرفی برای هر n، $\int f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq \alpha \int_{E_n} sd\mu = \alpha\nu(E_n)$ و لذا $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geq \alpha\nu(X) = \alpha \int sd\mu$. از اینکه $\alpha \in (\circ, \text{۱})$ دلخواه است، نتیجه می‌گیریم که $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geq \int sd\mu$. با استفاده از نکته ۶، $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$. ■

قضیه‌ای که در بالا ثابت شده است به قضیه همگرایی یکنوا معروف است. توجه کنید که صعودی بودن در قضیه همگرایی یکنوا لازم است. در واقع فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های اندازه پذیر لبگ از $\mathbb{R}$ بوده و دنباله توابع نامنفی و اندازه پذیر $\{n\chi_{(\circ,\frac{1}{n})}\}$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که این دنباله از توابع به تابع صفر همگرای نقطه به نقطه است و برای هر n، $\int n\chi_{(\circ,\frac{1}{n})} d\mu = \text{۱}$. در نتیجه $\lim\limits_{n\to\infty} \int n\chi_{(\circ,\frac{1}{n})} d\mu \neq \circ$.

قضیه ۳ ـ ۱۴. *فرض کنید μ اندازه‌ای روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع نامنفی و اندازه پذیر روی X باشد، در آن‌صورت* $\int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$.

برهان. دنباله توابع $\{g_n\}$ را با ضابطه $g_n = \inf\{f_k;\ k \geq n\}$ در نظر می‌گیریم. $\{g_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر نامنفی و صعودی است. واضح است که این دنباله از توابع به $\liminf f_n$ همگرای نقطه به نقطه است. از طرفی برای هر n، $f_n \geq g_n$. بنا به قضیه همگرایی یکنوا،

$$\liminf \int f_n d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu = \int \lim_{n\to\infty} g_n d\mu = \int \liminf f_n d\mu.$$

این برهان قضیه را کامل می‌کند. ■

قضیه ثابت شده در بالا به لم فاتو مشهور است. لم فاتو و قضیه همگرایی یکنوا کاربرد فراوانی در اثبات همگرایی انتگرال دنباله‌های توابع دارند.

نکته ۸. فرض کنید μ اندازه‌ای روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد.

الف) اگر $\{E_n\}$ دنباله‌ای از اعضای S باشد، در این‌صورت $\chi_{\liminf E_n} = \liminf \chi_{E_n}$. با استفاده از لم فاتو $\int \liminf \chi_{E_n} d\mu \leq \liminf \int \chi_{E_n} d\mu = \liminf \mu(E_n)$. از طرفی

$$\mu(\liminf E_n) = \int \chi_{\liminf E_n} d\mu = \int \liminf \chi_{E_n} d\mu.$$

و لذا $\mu(\liminf E_n) \leq \liminf \mu(E_n)$.

ب) فرض کنید $f : X \to [\circ, +\infty]$ تابعی اندازه پذیر باشد. دنباله توابع ساده و نامنفی $\{s_n\}$ وجود دارد که به تابع f همگرای نقطه به نقطه است. فرض کنید A و B دو زیر مجموعه

اندازه پذیر و مجزا باشند. عدد طبیعی n را در نظر بگیرید و فرض کنید $s_n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{E_i}$.
لذا

$$\begin{aligned}\int_{A\cup B} s_n d\mu &= \int_{A\cup B} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{E_i} d\mu = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu((A\cup B)\cap E_i)\\ &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A\cap E_i) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(B\cap E_i)\\ &= \int_A s_n d\mu + \int_B s_n d\mu.\end{aligned}$$

از این رابطه نتیجه می‌گیریم که $\int_{A\cup B} s_n d\mu = \int_A s_n d\mu + \int_B s_n d\mu$. با حد گیری از رابطه اخیر و قضیه همگرایی یکنوا، $\int_{A\cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$.

نکته ۹. فرض کنید (X, S, μ) یک فضای اندازه کامل و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر نامنفی که تقریباً همه جا تعریف شده و نیز تقریباً همه جا به تابع f صعود کند. فرض کنید E زیر مجموعه‌ای از اندازه صفر باشد که دنباله $\{f_n\}$ روی E^c تعریف شده و همچنین روی E^c به تابع f صعود کند. بنا به قضیه همگرایی یکنوا $\lim_{n\to\infty} \int_{E^c} f_n d\mu = \int_{E^c} f d\mu$. از طرفی

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu &= \lim_{n\to\infty} \Big(\int_{E^c} f_n d\mu + \int_E f_n d\mu\Big)\\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{E^c} f_n d\mu = \int_{E^c} f d\mu = \int f d\mu.\end{aligned}$$

از این موضوع نتیجه می‌گیریم که در قضیه همگرایی یکنوا، کافی‌است که دنباله توابع اندازه پذیر تقریباً همه جا نامنفی، تقریباً همه جا تعریف شده و تقریباً همه جا به تابعی صعود کند. همین موضوع در مورد لم فاتو برقرار است. به شیوه مشابه اگر دنباله توابع $\{f_n\}$ تقریباً همه جا تعریف شده و تقریباً همه جا نامنفی باشد، در آن‌صورت $\int \liminf f_n d\mu \le \liminf \int f_n d\mu$.

تعریف ۳ ـ ۱۵. اگر μ اندازه‌ای روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد، تابع اندازه پذیر $f : X \to \mathbb{R}$ را انتگرال پذیر گوئیم هرگاه $\int |f| d\mu < +\infty$. مجموعه همه توابع انتگرال‌پذیر را با نماد $L^1(X)$ نمایش می‌دهیم.

اگر f تابعی انتگرال پذیر باشد، در آن‌صورت $E = \{x \in X;\ |f(x)| = +\infty\}$ دارای اندازه صفر است. اگر چنین نباشد، برای هر عدد طبیعی n، $\int |f| d\mu \ge \int |f|\chi_E d\mu \ge n\mu(E)$. چون n عدد طبیعی دلخواه است، این تناقضی را برای انتگرال پذیری f ایجاب می‌کند.

نکته ۱۰. فرض کنیم μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $[1, +\infty)$ باشد. فرض کنیم $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر باشد. برای هر عدد طبیعی n، قرار می‌دهیم $A_n = [n, n+1)$. واضح است که $\{A_n\}$ دنباله‌ای از زیر مجموعه‌های اندازه پذیر مجزا

بوده و $[1,+\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. داریم $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}|f|d\mu = \int |f|d\mu < +\infty$. اگر $\epsilon > 0$ داده شده باشد، عدد طبیعی k موجود است که $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}|f|d\mu - \sum_{n=1}^{k}\int_{A_n}|f|d\mu < \epsilon$ و لذا

$$\int_{k+1}^{\infty}|f|d\mu = \sum_{n=k+1}^{\infty}\int_{A_n}|f|d\mu < \epsilon.$$

نکته۱۱. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $[a,b]$ باشد. فرض کنید $f \in L^1([a,b])$ و برای هر $c,d \in [a,b]$، $\int_c^d f d\mu = 0$. قرار دهید $E = \{x;\ f(x) > 0\}$. فرض کنید $\mu(E) > 0$. چون $\mu(E^c) = \inf\{\mu(U);\ E^c \subseteq U$ و U باز$\}$، لذا U باز شامل E^c موجود است که $\mu(U \setminus E^c) < \mu(E)$. واضح است که $[a,b]\setminus U \subseteq E$ و $\mu(E\setminus([a,b]\setminus U)) = \mu(U\setminus E^c) < \mu(E)$. بنابراین $\mu([a,b]\setminus U) > 0$. دنباله $\{(a_n,b_n)\cap[a,b]\}$ از زیر مجموعه‌های باز و مجزا از $[a,b]$ وجود دارد که $U = \bigcup_{n=1}^{\infty}[a,b]\cap(a_n,b_n)$. بنا به فرض $\int_U f d\mu = 0$ و بنابراین $\int_{[a,b]\setminus U} f d\mu = \int_a^b f d\mu - \int_U f d\mu = 0$. این یک تناقض است، زیرا $[a,b]\setminus U \subseteq E$ و $\mu([a,b]\setminus U) > 0$ و لذا $\mu(E) = 0$. به شیوه مشابه $\mu(\{x;\ f(x) < 0\}) = 0$ و لذا f تقریباً همه جا صفر است.

قضیه۳ ـ ۱۶. *اندازه μ را روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X در نظر بگیرید. فرض کنید g تابعی نامنفی، انتگرال پذیر و $\{f_n\}$ نیز دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر باشد که برای هر n، $|f_n| \le g$. اگر $\{f_n\}$ به تابع f همگرای نقطه به نقطه باشد، در آن‌صورت* $\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu = \int f d\mu$.

برهان. چون g انتگرال پذیر است، لذا g و همچنین دنباله $\{f_n\}$ خارج یک مجموعه از اندازه صفر حقیقی مقدار هستند. بنابراین بدون کاستن از کلیت می‌توان فرض کرد که g و لذا دنباله توابع $\{f_n\}$ حقیقی مقدار هستند. اکنون دنباله توابع $\{h_n\}$ را با ضابطه $h_n = g + f_n$ تعریف می‌کنیم. واضح است که $\{h_n\}$ دنباله‌ای از توابع نامنفی و اندازه پذیر بوده که به تابع $h = g + f$ نیز همگرای نقطه به نقطه است. با استفاده از لم فاتو،

$$\int g d\mu + \int f d\mu = \int h d\mu = \int \liminf h_n d\mu \le \liminf \int h_n d\mu$$
$$= \liminf \int (g+f_n) d\mu = \int g d\mu + \liminf \int f_n d\mu.$$

از انتگرال پذیری g استفاده کرده و از رابطه اخیر داریم $\int f d\mu \le \liminf \int f_n d\mu$.

اکنون برای هر n، قرار می‌دهیم $r_n = g - f_n$. واضح است که $\{r_n\}$ دنباله‌ای از توابع نامنفی و اندازه پذیر بوده که به تابع $r = g - f$ نیز همگرای نقطه به نقطه است. با استفاده از لم فاتو،

$$\int g d\mu - \int f d\mu = \int r d\mu = \int \liminf r_n d\mu \leq \liminf \int r_n d\mu$$
$$= \liminf \int (g - f_n) d\mu = \int g d\mu - \limsup \int f_n d\mu.$$

از انتگرال پذیری g استفاده کرده و از رابطه اخیر داریم $\limsup \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$. در نتیجه

$$\int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu \leq \limsup \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$$

و لذا $\liminf \int f_n d\mu = \limsup \int f_n d\mu = \int f d\mu$ یعنی $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$. ∎

قضیه‌ای که ثابت شد، قضیه همگرایی مغلوب است که اهمیت آن از قضیه همگرایی یکنوا و لم فاتو کمتر نیست.

نکته ۱۲. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های اندازه پذیر لبگ از $[a,b]$ و فرض کنید $E \subseteq [a,b]$ زیر مجموعه‌ای لبگ اندازه پذیر باشد. برای $\epsilon > ۰$، تعداد متناهی از بازه‌های مجزا چون $I_۱$ و ... و I_n از $[a,b]$ موجود است که $\mu(E \Delta \bigcup_{i=۱}^{n} I_i) < \epsilon$. لذا $\int |\chi_E - \sum_{i=۱}^{n} \chi_{I_i}| d\mu = \mu(E \Delta \bigcup_{i=۱}^{n} I_i) < \epsilon$. به توابعی چون $\sum_{i=۱}^{n} \chi_{I_i}$ تابع پله‌ای گفته می‌شود.

اکنون فرض کنید $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی نامنفی و انتگرال پذیر باشد. دنباله‌ای از توابع ساده مانند $\{s_n\}$ وجود دارد که به تابع f همگرای نقطه به نقطه است. برای هر عدد طبیعی n و هر $x \in [a,b]$، $|s_n(x) - f(x)| < ۲|f(x)|$. چون f انتگرال پذیر است، بنا به قضیه همگرایی مغلوب، $\lim_{n\to\infty} \int_a^b |s_n(x) - f(x)| d\mu(x) = ۰$. اگر $\epsilon > ۰$ داده باشد، عدد طبیعی n هست که $\int_a^b |s_n(x) - f(x)| d\mu(x) < \frac{\epsilon}{۲}$. بنا به توضیح بالا، ترکیبات خطی از توابع پله‌ای چون h وجود دارد که $\int |h - s_n| d\mu < \frac{\epsilon}{۲}$. در نتیجه $\int |f - h| d\mu < \epsilon$. این به این معنی است که هر تابع انتگرال پذیر $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ را می‌توان با تابعی پله‌ای به مفهوم فوق تقریب زد.

مثال ۳ ـ ۱. فرض کنید S در فضای اندازه (X, S, μ) یک σ جبر بوده و $f : X \to [۰, +\infty)$ تابعی انتگرال‌پذیر باشد. فرض کنید $\int f d\mu = c > ۰$ و $\alpha > ۰$. چون تابع لگاریتم پیوسته و f اندازه پذیر است، لذا برای هر n، تابع $n \ln [۱ + (\frac{f}{n})^\alpha]$ اندازه‌پذیر است. اگر $۰ < \alpha < ۱$، واضح است که برای هر $x \in X$، $\lim_{n\to\infty} n \ln [۱ + (\frac{f(x)}{n})^\alpha] = +\infty$. بنا به لم فاتو، $+\infty = \int \liminf n \ln [۱ + (\frac{f}{n})^\alpha] d\mu \leq \liminf \int n \ln [۱ + (\frac{f}{n})^\alpha] d\mu$. اگر $\alpha \geq ۱$،

$$n \ln [۱ + (\frac{f}{n})^\alpha] \leq n \ln (۱ + \frac{f}{n})^\alpha = n\alpha \ln (۱ + \frac{f}{n})$$
$$\leq n\alpha \frac{f}{n} = \alpha f.$$

بنا به قضیه همگرایی مغلوب، $\lim_{n\to\infty} \int n \ln [۱ + (\frac{f}{n})^\alpha] d\mu = \int \lim_{n\to\infty} n \ln [۱ + (\frac{f}{n})^\alpha] d\mu$.

لذا

$$\lim_{n\to\infty}\int n\ln\left[1+\left(\frac{f}{n}\right)^{\alpha}\right]d\mu=\begin{cases}+\infty & 0<\alpha<1\\ c & \alpha=1\\ 0 & \alpha>1\end{cases}$$

مثال ۳ ـ ۲. فرض کنید μ اندازه لبگ روی $[0,1]$ و $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ تابعی اندازه پذیر باشد. قرار دهید $A=\{x\in[0,1];\ f(x)\in\mathbb{Z}\}$. چون برای هر عدد صحیح n، $f^{-1}(\{n\})$ اندازه پذیر بوده و همچنین A اجتماع همه این $f^{-1}(\{n\})$ هاست، لذا A اندازه پذیر لبگ است. دنباله توابع $\{f_n\}$ را با ضابطه $f_n(x)=[\cos(\pi f(x))]^{2n}$ روی $[0,1]$ در نظر می‌گیریم. اگر $x\in A$، لذا $f(x)\in\mathbb{Z}$ و بنابراین برای هر n، $f_n(x)=[\cos(\pi f(x))]^{2n}=1$. اگر $x\notin A$، لذا $f(x)\notin\mathbb{Z}$ و بنابراین برای هر عدد n، $0\leq f_n(x)<1$. نتیجه اینکه $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\chi_A(x)$. برای هر عدد طبیعی n و هر $x\in[0,1]$، $|f_n(x)|\leq 1$. چون تابع ثابت یک روی بازه $[0,1]$ انتگرال‌پذیر است، بنا به قضیه همگرایی مغلوب

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1[\cos(\pi f(x))]^{2n}d\mu(x)&=\int_0^1\lim_{n\to\infty}[\cos(\pi f(x))]^{2n}d\mu(x)\\&=\int_0^1\chi_A(x)d\mu(x)=\mu(A).\end{aligned}$$

مثال ۳ ـ ۳. فرض کنید μ اندازه‌ای متناهی روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X و $f:X\to\mathbb{R}$ تابعی اندازه پذیر باشد. اگر $\lim\limits_{n\to\infty}\int f^n d\mu$ موجود و متناهی باشد، آن‌گاه

$$\lim_{n\to\infty}\int f^n d\mu=\mu(\{x\in X;\ f(x)=1\}).$$

برای اثبات این موضوع، قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned}&E_1=\{x;\ f(x)=1\},\ E_2=\{x;\ f(x)>1\},\ E_3=\{x;\ f(x)=-1\}\\&E_4=\{x;\ f(x)<-1\},\ E_5=\{x;\ |f(x)|<1\}.\end{aligned}$$

بنا به اندازه پذیری f، همه زیر مجموعه‌های فوق اندازه پذیرند و همچنین برای هر عدد طبیعی n، $\int f^n d\mu=\mu(E_1)+\sum\limits_{i=2}^{5}\int_{E_i}f^n d\mu$. اگر $\mu(E_2)>0$، عدد مثبت δ و زیر مجموعه از اندازه مثبت $F\subseteq E_2$ وجود دارد که برای هر $x\in F$، $f(x)>1+\delta$. در واقع اگر برای هر n، $\{x;\ f(x)>1+\frac{1}{n}\}$ دارای اندازه صفر باشد، آن‌گاه $E_2=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x;\ f(x)>1+\frac{1}{n}\}$ دارای اندازه صفر است که یک تناقض است. بنابراین عدد مثبت δ و زیر مجموعه از اندازه مثبت $F\subseteq E_2$ وجود دارد که برای هر $x\in F$، $f(x)>1+\delta$. از طرفی برای هر n،

$$\int f^{2n} d\mu \geq \int_F f^{2n} d\mu \geq (1+\delta)^{2n}\mu(F)$$

طرف راست رابطه اخیر به بی‌نهایت همگراست و لذا طرف چپ به بی‌نهایت همگراست که تناقض است. لذا $\mu(E_2) = 0$.

برای هر $x \in E_5$، $|f(x)| < 1$ و لذا $\{f^n\}$ روی E_5 به تابع صفر همگرای نقطه به نقطه است. بنا به قضیه همگرایی مغلوب، $\lim_{n\to\infty} \int_{E_5} f^n d\mu = 0$.

اگر $\mu(E_4) > 0$، عدد مثبت δ و زیر مجموعه از اندازه مثبت $F \subseteq E_4$ وجود دارد که برای هر $x \in F$، $f(x) < -1-\delta$. از طرفی برای هر n،

$$\int f^{2n} d\mu \geq \int_F f^{2n} d\mu \geq (1+\delta)^{2n}\mu(F)$$

طرف راست رابطه اخیر به بی‌نهایت همگراست و لذا طرف چپ به بی‌نهایت همگراست که تناقض است. لذا $\mu(E_4) = 0$.

در نتیجه $\lim_{n\to\infty} \int f^n d\mu = \mu(E_1) + \lim_{n\to\infty} \int_{E_3} f^n d\mu = \mu(E_1) + \lim_{n\to\infty} (-1)^n \mu(E_3)$. بنا به فرض، حد طرف چپ موجود و متناهی است. لذا $\mu(E_3) = 0$ و بنابراین $\lim_{n\to\infty} \int f^n d\mu = \mu(E_1)$.

مثال۳ ـ ۴. فرض کنید μ اندازه‌ای روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. فرض کنید $f \in L^1(X)$ تابعی نامنفی باشد. دو زیر مجموعه اندازه پذیر مجزا $E_1 = \{x \in X;\ f(x) < 1\}$ و $E_2 = \{x \in X;\ f(x) \geq 1\}$ که افرازی برای X است را در نظر می‌گیریم. واضح است که دنباله توابع $\{f^{\frac{1}{n}}\}$، دنباله‌ای نزولی روی E_2 بوده و برای هر n، $f^{\frac{1}{n}} \leq f$. بنا به قضیه همگرایی مغلوب،

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_1} f^{\frac{1}{n}} d\mu = \int_{E_1} \lim_{n\to\infty} f^{\frac{1}{n}} d\mu = \mu(E_1).$$

دنباله توابع نامنفی $\{f^{\frac{1}{n}}\}$ روی E_1 صعودی بوده و بنا به قضیه همگرایی یکنوا، $\lim_{n\to\infty} \int_{E_2} f^{\frac{1}{n}} d\mu = \mu(E_2)$. در نتیجه

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int f^{\frac{1}{n}} d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_{E_1} f^{\frac{1}{n}} d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_{E_2} f^{\frac{1}{n}} d\mu \\ &= \mu(E_1) + \mu(E_2) = \mu(X).\end{aligned}$$

نکته۱۳. فرض کنید μ اندازه‌ای روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر نامنفی تعریف شده روی X باشد. برای هر n، قرار می‌دهیم $g_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$. لذا $\{g_n\}$ دنباله‌ای از توابع نامنفی، اندازه پذیر و صعودی است. چون دنباله $\{g_n\}$ به

$\{\sum_{n=1}^{\infty} f_n\}$ همگراست، از قضیه همگرایی یکنوا داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int f_n d\mu = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int f_k d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\sum_{k=1}^{n} f_k d\mu$$
$$= \lim_{n\to\infty}\int g_n d\mu = \int\lim_{n\to\infty} g_n d\mu = \int\sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu.$$

از این موضوع نتیجه می‌گیریم که اگر f تابعی نامنفی و اندازه پذیر باشد، در آن‌صورت تابع $\nu : S \to [0,+\infty]$ با ضابطه $\nu(A) = \int_A f d\mu$ یک اندازه است. در واقع فرض کنید $\{E_n\}$ دنباله‌ای مجزا از اعضای S باشد. قرار می‌دهیم $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ و لذا

$$\nu(E) = \int_E f d\mu = \int f\chi_E d\mu = \int f\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int f\chi_{E_n} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\nu(E_n).$$

نکته۱۴. اندازه μ را روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X در نظر می‌گیریم.

الف) فرض کنید $f : X \to [-\infty,+\infty]$ تابعی انتگرال پذیر باشد. بنابراین f خارج زیر مجموعه با اندازه صفری چون E حقیقی مقدار است. تابع h را در خارج این مجموعه به صورت $h = |f| - f$ و روی E نیز صفر تعریف می‌کنیم. واضح است که تابع h تابعی نامنفی و اندازه پذیر است. بنابراین $\int |f| - f d\mu = \int h d\mu \geq 0$ و لذا $\int |f| d\mu \geq \int f d\mu$. به همین شیوه با تعریف تابعی چون $r = |f| + f$ خارج مجموعه‌ای از اندازه صفر می‌توان نتیجه گرفت که $\int |f| d\mu \geq -\int f d\mu$. پس $\int |f| d\mu \geq |\int f d\mu|$.

اکنون فرض کنیم $\int |f| d\mu = |\int f d\mu|$. اگر $\int f d\mu \geq 0$، لذا $\int |f| d\mu = \int f d\mu$. از این رابطه نتیجه می‌گیریم که $\int |f| - f d\mu = 0$ و لذا $|f|$ تقریباً همه جا با تابع f مساوی است. در این حالت تابع f تقریباً همه جا نامنفی است.

اگر $\int f d\mu \leq 0$، خواهیم داشت $\int |f| d\mu = -\int f d\mu$. از این رابطه نتیجه می‌گیریم که $\int |f| + f d\mu = 0$ و لذا $|f|$ تقریباً همه جا با تابع $-f$ مساوی است. در این حالت تابع f تقریباً همه جا کمتر یا مساوی صفر است. نتیجه اینکه اگر در نامساوی بالا تساوی برقرار باشد، f تقریباً همه جا نامنفی و یا همه جا کمتر یا مساوی صفر است.

عکس این مطلب نیز برقرار است، یعنی اگر f تقریباً همه جا دارای یک علامت باشد $\int |f| d\mu = |\int f d\mu|$.

ب) فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر باشد که $\sum_{n=1}^{\infty}\int |f_n|d\mu < +\infty$. قرار می‌دهیم $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n| = \phi$. چون ϕ حد یک دنباله از توابع اندازه‌پذیر است، لذا ϕ اندازه پذیر است. از طرفی

$$\int \phi d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty}|f_n|d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int |f_n|d\mu < +\infty.$$

این نشان می‌دهد که ϕ انتگرال پذیر است. در نتیجه ϕ تقریباً همه جا متناهی است و لذا $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ تقریباً همه جا متناهی است. چون f_n ها اندازه پذیر و f نیز حد دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر است، لذا f اندازه پذیر است. چون $\phi \leq |f|$، بنابراین f انتگرال پذیر است. برای هر عدد طبیعی n، قرار می‌دهیم $g_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ و لذا $|g_n| \leq \phi$. از این که دنباله توابع $\{g_n\}$ به f همگراست، بنا به قضیه همگرایی مغلوب

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \int f d\mu = \int \lim_{n\to\infty} g_n d\mu = \lim_{n\to\infty}\int g_n d\mu$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int f_k d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int f_n d\mu.$$

در نتیجه $\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int f_n d\mu$.

ج) فرض کنیم $x_\circ \in (a,b)$ و برای هر $x \in (a,b)$، f_x تابعی اندازه پذیر باشد. فرض کنید تابع انتگرال پذیر g موجود است که برای هر x، $g \leq |f_x|$. فرض کنید f تابعی است که $\lim_{x\to x_\circ} f_x = f$. دنباله $\{x_n\}$ از (a,b) را طوری می‌گیریم که $x_n \to x_\circ$. واضح است که $\lim_{n\to\infty} f_{x_n} = f$ و بنابراین f اندازه پذیر است. ادعا می‌کنیم $\int f d\mu = \lim_{x\to x_\circ}\int f_x d\mu$. اگر اینطور نباشد، لذا $\epsilon > \circ$ و دنباله $\{x_n\}$ از (a,b) وجود دارد که $x_n \to x_\circ$ ولی برای هر n، $|\int f d\mu - \int f_{x_n} d\mu| \geq \epsilon$. در واقع برای $\delta = \frac{1}{n}$ یک $x_n \in (a,b)$ موجود است که $|x_n - x_\circ| < \delta$ و $|\int f d\mu - \int f_{x_n} d\mu| \geq \epsilon$. چون $x_n \to x_\circ$، لذا $f_{x_n} \to f$. بنا به قضیه همگرایی مغلوب $\int f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int f_{x_n} d\mu$. این یک تناقض است و بنابراین $\int f d\mu = \lim_{x\to x_\circ}\int f_x d\mu$.

نکته ۱۵. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $\mathbb{R}$ باشد. فرض کنید E زیر مجموعه‌ای اندازه پذیر لبگ باشد. زیر مجموعه بورل اندازه پذیر F وجود دارد که $E \subseteq F$ و $\mu(F \setminus E) = \circ$. این نشان می‌دهد که تابع لبگ اندازه پذیر χ_E با تابع بورل اندازه پذیر χ_F تقریباً همه جا مساوی است. چون هر تابع ساده ترکیب خطی تعداد متناهی از توابع مشخصه

است، لذا هر تابع ساده با تابعی بورل اندازه پذیر تقریباً همه جا مساوی باشد. اکنون فرض کنید $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ تابعی اندازه پذیر باشد. دنباله‌ای از توابع ساده $\{s_n\}$ وجود دارد که به تابع f همگرای نقطه به نقطه است. برای هر n، تابع بورل اندازه پذیر t_n را طوری می‌یابیم که t_n با s_n تقریباً همه جا مساوی است. فرض کنید K_n زیر مجموعه‌ای از اندازه صفر در $\mathbb{R}$ بوده که روی K_n^c دو تابع t_n و s_n با هم مساویند. قرار دهید $K = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ و لذا $\mu(K) = 0$. اکنون زیر مجموعه بورل اندازه پذیر $K \subseteq G$ را طوری می‌یابیم که $\mu(G \setminus K) = 0$. واضح است که برای هر n، $s_n\chi_{G^c} = t_n\chi_{G^c}$. چون دنباله توابع $\{s_n\chi_{G^c}\}$ به تابع $f\chi_{G^c}$ همگراست، لذا $\{t_n\chi_{G^c}\}$ به $f\chi_{G^c}$ همگراست. اما حد یک دنباله از توابع بورل اندازه پذیر، تابعی بورل اندازه پذیر است و لذا $f\chi_{G^c}$ بورل اندازه پذیر است. اما توابع f و $f\chi_{G^c}$ تقریباً همه جا با هم مساوی هستند و لذا هر تابع اندازه پذیر با تابعی بورل اندازه پذیر تقریباً همه جا مساوی است.

اگر $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی انتگرال پذیر ریمان باشد، در آن‌صورت

$\sup\{L(P,f);\ \text{افراز دلخواه } P\} = \int f(x)dx = \inf\{U(P,f);\ \text{افراز دلخواه } P\}$. افراز P_1 از $[a,b]$ هست که

$$\int f(x)dx \le U(P_1,f) \le \int f(x)dx+1,\quad \int f(x)dx \ge L(P_1,f) \ge \int f(x)dx-1$$

برای هر عدد طبیعی $n > 1$، افراز P_n را طوری می‌یابیم که اولاً $P_{n-1} \subseteq P_n$، دوماً فاصله هر دو عنصر متوالی در P_n از $\frac{1}{n}$ کمتر بوده و سوماً $\int f(x)dx \le U(P_n,f) \le \int f(x)dx + \frac{1}{n}$ و نهایتاً $\int f(x)dx \ge L(P_n,f) \ge \int f(x)dx - \frac{1}{n}$. واضح است که

$$\lim_{n\to\infty} L(P_n,f) = \lim_{n\to\infty} U(P_n,f) = \int f(x)dx.$$

قضیه ۳ ـ ۱۷. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه‌پذیر از $[a,b]$ و $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی انتگرال پذیر ریمان باشد. در این‌صورت f اندازه پذیر لبگ و لذا انتگرال پذیر لبگ بوده و همچنین دو مقدار انتگرال ریمان و انتگرال لبگ با هم مساویند.

برهان. دنباله صعودی از افرازها مانند $\{P_n\}$ وجود دارد که فاصله هر دو عنصر متوالی آن از $\frac{1}{n}$ کمتر بوده و همچنین

$$\lim_{n\to\infty} L(P_n,f) = \lim_{n\to\infty} U(P_n,f) = \int f(x)dx.$$

برای هر عدد طبیعی n، فرض کنید $P_n = \{x_0, ..., x_{n_n}\}$ و قرار می‌دهیم $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n_n} m_i\chi_{[x_{i-1},x_i)}$

و $t_n = \sum_{i=1}^{n_n} M_i \chi_{(x_{i-1}, x_i)}$. چون $\{P_n\}$ صعودی است، لذا $\{s_n\}$ صعودی و $\{t_n\}$ نزولی است. فرض کنید $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ به ترتیب به توابع g و h همگرا باشند. واضح است که g و h اندازه پذیرند. از طرفی برای هر عدد طبیعی n، $s_n \leq f \leq t_n$. بنابراین $g \leq f \leq h$. اما دنباله توابع نزولی $\{t_n - s_n\}$ به تابع نامنفی $h - g$ همگرای نقطه به نقطه است. پس بنا به قضیه همگرایی مغلوب،

$$\int h - gd\mu = \lim_{n\to\infty}\int t_n - s_n d\mu = \lim_{n\to\infty}\int t_n d\mu - \lim_{n\to\infty}\int s_n d\mu$$
$$= \lim_{n\to\infty} U(P_n, f) - \lim_{n\to\infty} L(P_n, f) = ٠.$$

این نتیجه می‌دهد که $\int h - gd\mu = ٠$ و لذا h با g تقریباً همه جا مساویند. اما $g \leq f \leq h$ و لذا هر سه تابع f و g و h تقریباً همه جا با هم مساویند. این نشان می‌دهد که f اندازه پذیر است. چون f کراندار است پس f انتگرال پذیر لبگ است. از طرفی $\{s_n\}$ به تابع f صعود می‌کند و لذا

$$\int fd\mu = \lim_{n\to\infty}\int s_n d\mu = \lim_{n\to\infty} L(P_n, f) = \int f(x)dx.$$

■

تابع f را با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} ١ & x \in \mathbb{Q}\cap[٠, ١] \\ ٠ & x \in \mathbb{Q}^c\cap[٠.١] \end{cases}$$

در نظر می‌گیریم. همانطور که در دروس آنالیز ریاضی دیده‌اید f انتگرال پذیر ریمان نیست ولی انتگرال پذیر لبگ بوده و $\int fd\mu = ٠$.

نکته۱۶. اندازه لبگ را روی خانواده همه زیر مجموعه‌های اندازه پذیر لبگ از $(٠, ١)$ در نظر می‌گیریم. دنباله توابع $\{f_n\}$ را با ضابطه $f_n(x) = nx^{n-١} - (n+١)x^n$ تعریف می‌کنیم. توجه کنید که برای هر $x \in (٠, ١)$،

$$\sum_{n=١}^{\infty}[nx^{n-١} - (n+١)x^n] = \sum_{n=١}^{\infty}(x^n - x^{n+١})' = \Big(\sum_{n=١}^{\infty} x^n - x^{n+١}\Big)' = ١.$$

می‌توان نوشت

$$\int_٠^١ \sum_{n=١}^{\infty} f_n(x)d\mu(x) = \int_٠^١ \sum_{n=١}^{\infty}[nx^{n-١} - (n+١)x^n]d\mu(x) = ١.$$

از طرف دیگر

$$\sum_{n=١}^{\infty}\int_٠^١ f_n(x)d\mu(x) = \sum_{n=١}^{\infty}\int_٠^١ (nx^{n-١} - (n+١)x^n)d\mu(x) = ٠.$$

نتیجه اینکه $\int_٠^١ \sum_{n=١}^{\infty} f_n(x)d\mu(x) \neq \sum_{n=١}^{\infty}\int_٠^١ f_n(x)d\mu(x)$. بنا به قسمت ب از نکته ۱۴، نتیجه

می‌گیریم که $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{1}|f_n(x)|d\mu(x)=+\infty$.

مثال۳ ـ ۵. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از بازه $(0,2\pi)$ باشد. برای هر $(a,b)\subseteq(0,2\pi)$ و هر عدد طبیعی n، خواهیم داشت $\left|\int_a^b\cos(nx)d\mu(x)\right|=\left|\frac{\sin(nb)-\sin(na)}{n}\right|\leq\frac{2}{n}$. بنابراین $\lim_{n\to\infty}\int_a^b\cos(nx)d\mu(x)=0$.
اکنون فرض کنیم A زیر مجموعه‌ای اندازه پذیر لبگ از $(0,2\pi)$ و $\epsilon>0$ داده شده باشد. مجموعه باز G شامل A وجود دارد که $\mu(G\setminus A)<\frac{\epsilon}{2}$. دنباله‌ای مجزا از بازه‌ها $\{I_n\}$ وجود دارد که $G=\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$. عدد طبیعی k را طوری اختیار می‌کنیم که $\sum_{i=k+1}^{\infty}\mu(I_i)<\frac{\epsilon}{4}$. قرار دهید $O=\bigcup_{i=1}^{k}I_i$ و لذا $\mu(G\setminus O)<\frac{\epsilon}{4}$. عدد طبیعی N را طوری اختیار می‌کنیم که برای هر $n\geq N$، $\left|\int_O\cos(nx)d\mu(x)\right|<\frac{\epsilon}{4}$. برای هر $n\geq N$،

$$\begin{aligned}\left|\int_G\cos(nx)d\mu(x)\right|&\leq\left|\int_{G\setminus O}\cos(nx)d\mu(x)\right|+\left|\int_O\cos(nx)d\mu(x)\right|\\&<\mu(G\setminus O)+\frac{\epsilon}{4}.\end{aligned}$$

بنابراین برای هر $n\geq N$، $\left|\int_G\cos(nx)d\mu(x)\right|<\frac{\epsilon}{2}$. از طرفی برای هر n،

$$\left|\int_{G\setminus A}\cos(nx)d\mu(x)\right|\leq\int_{G\setminus A}|\cos(nx)|d\mu(x)\leq\mu(G\setminus A)<\frac{\epsilon}{2}.$$

در نتیجه برای هر $n\geq N$،

$$\left|\int_A\cos(nx)d\mu(x)\right|\leq\left|\int_G\cos(nx)d\mu(x)\right|+\left|\int_{G\setminus A}\cos(nx)d\mu(x)\right|<\epsilon.$$

بنابراین $\lim_{n\to\infty}\int_A\cos(nx)d\mu(x)=0$.

قضیه۳ ـ ۱۸. *فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعی کراندار باشد. f انتگرال پذیر ریمان است اگر و تنها اگر f تقریباً همه جا پیوسته باشد.*

برهان. فرض کنید f انتگرال پذیر ریمان، $\{P_n\}$ دنباله صعودی از افرازها و $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ نیز به ترتیب دنباله‌های صعودی و نزولی از توابع ساده در قضیه ۳—۱۷ باشند. مطابق قضیه ۳—۱۷، f با حدود دنباله‌های $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ تقریباً همه جا مساوی است. از این موضوع نتیجه می‌گیریم که زیر مجموعه‌ای از اندازه صفر مانند A موجود است که اگر $x\notin A$، $\{s_n(x)\}$ و $\{t_n(x)\}$ به $f(x)$ همگرا هستند. قرار می‌دهیم $D=A\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}P_n$ و لذا $\mu(D)=0$ (μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $[a,b]$ است). ادعا می‌کنیم f خارج D پیوسته است. فرض کنید $y\in[a,b]\setminus D$ و $\epsilon>0$ داده شده باشد. عدد طبیعی n وجود دارد که $f(y)-s_n(y)<\epsilon$ و $t_n(y)-f(y)<\epsilon$. اگر (x_{i-1},x_i) بازه بازی شامل y باشد که نقاط x_{i-1}

و x_i از افراز P_n بدست آمده است، بنا به تعریف s_n و t_n و دو رابطه اخیر، $f(y) - m_i < \epsilon$ و $M_i - f(y) < \epsilon$. چون $m_i = \inf\{f(x);\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ و $M_i = \sup\{f(x);\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$، لذا برای هر $x \in (x_{i-1}, x_i)$، $f(y) - f(x) \leq f(y) - m_i < \epsilon,\ f(x) - f(y) \leq M_i - f(y) < \epsilon$. در نتیجه $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنید f در نقطه z پیوسته باشد. برای $\epsilon > 0$ عدد مثبت δ هست که اگر $x, y \in (z - \delta, z + \delta)$، $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$. این نتیجه می‌دهد که

$$\sup\{f(t);\ t \in (z - \delta, z + \delta)\} - \inf\{f(t);\ t \in (z - \delta, z + \delta)\} < \epsilon.$$

اما فاصله هر دو عنصر در افراز P_n از $\frac{1}{n}$ کمتر است و لذا عدد طبیعی k و عناصر متوالی x_{i-1} و x_i در افراز P_k وجود دارد که $z \in [x_{i-1}, x_i) \subseteq (z - \delta, z + \delta)$. در نتیجه

$$M_i - m_i \leq \sup\{f(t);\ t \in (z - \delta, z + \delta)\} - \inf\{f(t);\ t \in (z - \delta, z + \delta)\} < \epsilon.$$

بنا به تعریف s_k و t_k، $t_k(z) - s_k(z) < \epsilon$. رابطه اخیر برای هر $n \geq k$ برقرار است و این نتیجه می‌دهد که $0 \leq h(z) - g(z) \leq \epsilon$. بنابراین $h(z) = g(z)$ و لذا h، g و f در نقاط پیوستگی f با هم مساویند. چون h اندازه پذیر است، لذا f اندازه پذیر است. با استفاده از قضیه همگرایی مغلوب،

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} U(P_n, f) &= \lim_{n\to\infty} \int t_n d\mu = \int h d\mu = \int g d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \int s_n d\mu = \lim_{n\to\infty} L(P_n, f). \end{aligned}$$

از طرفی برای هر عدد طبیعی n، $L(P_n, f) \leq \int_{a^-}^{b} f(x)dx \leq \int_a^{b^-} f(x)dx \leq U(P_n, f)$ و لذا f انتگرال پذیر ریمان است. ■

مثال ۳ ـ ۶. تابع $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ را با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = \frac{1}{n} \\ 0 & x \neq \frac{1}{n} \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. واضح است که f تقریباً همه جا با تابع ثابت صفر برابر است. بنابراین f تقریباً همه جا پیوسته بوده و لذا انتگرال‌پذیر ریمان است. اما هر تابع انتگرال‌پذیر ریمان، انتگرال‌پذیر لبگ بوده و نیز دو انتگرال با هم مساوی هستند. چون تابع f تقریباً همه جا صفر است، لذا انتگرال لبگ f صفر بوده و بنابراین انتگرال ریمان f نیز صفر است.

مثال ۳ ـ ۷. اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $[a, b]$ را با μ نمایش می‌دهیم. فرض کنید $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعی انتگرال‌پذیر ریمان باشد که برای هر $x \in \mathbb{Q} \cap [a, b]$، $f(x) = 0$. بنا به قضیه ۳ـ۱۸، f تقریباً همه جا روی $[a, b]$ پیوسته است. اگر D مجموعه همه

نقاط ناپیوستگی f باشد، لذا $\mu(D) = \circ$ و f روی $[a,b] \setminus D$ پیوسته است. چون $\mathbb{Q} \cap [a,b]$ در $[a,b]$ چگال است لذا برای هر $x \in [a,b] \setminus D$، $f(x) = \circ$. بدین ترتیب

$$\int_a^b f(x)dx = \int_D f(x)d\mu(x) + \int_{[a,b]\setminus D} f(x)d\mu(x) = \circ + \int_{[a,b]\setminus D} \circ d\mu(x) = \circ.$$

نکته۱۷. فرض کنید μ اندازه‌ای متناهی روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. فرض کنید $f : X \to (\circ, +\infty)$ تابعی اندازه پذیر و $\{E_n\}$ نیز دنباله‌ای از اعضای S بوده که $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \circ$. ادعا می‌کنیم که $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f d\mu = \circ$. اگر چنین نباشد، $\circ < \epsilon$ و زیر دنباله $\{E_{n_k}\}$ از دنباله $\{E_n\}$ وجود دارد که برای هر k، $\mu(E_{n_k}) > \epsilon$. برای هر عدد طبیعی k، قرار دهید $G_{n_k} = \{x \in X;\ \circ < f(x) < \frac{1}{n_k}\}$. واضح است که $\lim_{k\to\infty} \mu(G_{n_k}) = \mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_{n_k}) = \circ$ و بنابراین عدد طبیعی N موجود است که برای هر $k \geq N$، $\mu(G_{n_k}) < \frac{\epsilon}{2}$. برای هر عدد طبیعی $k \geq N$، $\mu(E_{n_k} \setminus G_{n_N}) \geq \mu(E_{n_k}) - \mu(G_{n_N}) > \frac{\epsilon}{2}$. برای هر $k \geq N$، $\int_{E_{n_k}} f d\mu \geq \int_{E_{n_k}\setminus G_{n_N}} f d\mu \geq \int_{E_{n_k}\setminus G_{n_N}} \frac{1}{n_N} d\mu \geq \frac{\epsilon}{2n_N}$. این نشان می‌دهد که $\lim_{n\to\infty} \int_{E_{n_k}} f d\mu \neq \circ$ که یک تناقض است.

۳ــ۴ همگرایی در اندازه

در دروس مقدماتی آنالیز، همگرایی نقطه به نقطه و همگرایی یکنواخت یک دنباله از توابع مطرح و بررسی می‌شود. در این کتاب حداقل دو نوع همگرایی برای دنباله توابع معرفی و مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در این بخش همگرایی در اندازه یک دنباله از توابع را بیان و ارتباط آن‌را با دو نوع همگرایی یاد شده مورد بررسی قرار می‌دهیم. نخست به تعریف همگرایی در اندازه یک دنباله از توابع اندازه‌پذیر می‌پردازیم. در این بخش S در فضای اندازه (X, S, μ) یک σ جبر و شرایط مورد نیاز بیشتر دقیقاً قید می‌گردد.

تعریف۳ ـ ۱۹. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر تعریف شده روی X باشد. این دنباله از توابع به تابع اندازه پذیر f در اندازه همگراست هرگاه برای هر $\circ < \epsilon$، $\mu(\{x \in X;\ |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) \to \circ$ و در این حالت می‌نویسیم $f_n \to^m f$.

ابتدا شرط لازم و کافی برای همگرایی در اندازه یک دنباله از توابع اندازه‌پذیر را بیان و ثابت می‌کنیم.

قضیه۳ ـ ۲۰. دنباله توابع اندازه پذیر $\{f_n\}$ تعریف شده روی X به تابع اندازه پذیر f در اندازه همگراست اگر و تنها اگر برای هر $\epsilon > ۰$، عدد طبیعی N موجود باشد که اگر $n \geq N$، $\mu(\{x \in X;\ |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) < \epsilon$.

برهان. فرض کنیم دنباله $\{f_n\}$ به تابع f در اندازه همگرا باشد. فرض کنید $\epsilon > ۰$ داده شده باشد. چون $\mu(\{x \in X;\ |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) \to ۰$، لذا عدد طبیعی N موجود است که اگر $n \geq N$، $\mu(\{x \in X;\ |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) < \epsilon$.

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنیم $\epsilon > ۰$ داده شده باشد. ثابت می‌کنیم $\mu(\{x \in X;\ |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) \to ۰$. برای اثبات این موضوع اگر $\epsilon_۰$ داده شده باشد، دو حالت اتفاق می‌افتد. حالت اول اینکه $\epsilon \leq \epsilon_۰$. در این حالت عدد طبیعی N هست که اگر $n \geq N$، $\mu(\{x \in X;\ |f_n(x) - f(x)| > \epsilon_۰\}) < \epsilon_۰$. اما

$$\{x \in X;\ |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\} \subseteq \{x \in X;\ |f_n(x) - f(x)| > \epsilon_۰\}$$

و لذا برای $n \geq N$، $\mu(\{x \in X;\ |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) < \epsilon_۰$.

حالت دوم اینکه $\epsilon > \epsilon_۰$. عدد طبیعی N هست که اگر $n \geq N$، آن‌گاه $\mu(\{x \in X;\ |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) < \epsilon < \epsilon_۰$ و این برهان را کامل می‌کند. ■

نکته۱۸. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر تعریف شده روی X بوده که به توابع اندازه پذیر f و g در اندازه همگراست. ادعا می‌کنیم f و g تقریباً همه جا با هم مساویند. برای هر دو عدد طبیعی m و n،

$$\begin{aligned}\left\{x \in X;\ |f(x) - g(x)| > \frac{۲}{m}\right\} \subseteq &\left\{x \in X;\ |f_n(x) - f(x)| > \frac{۱}{m}\right\} \\ &\cup \left\{x \in X;\ |f_n(x) - g(x)| > \frac{۱}{m}\right\} \qquad (۱)\end{aligned}$$

بنا به فرض $\mu(\{x \in X;\ |f_n(x) - g(x)| > \frac{۱}{m}\})$ و $\mu(\{x \in X;\ |f_n(x) - f(x)| > \frac{۱}{m}\})$ وقتی n به بی نهایت میل کند، به صفر همگراست. با استفاده از این روابط به همراه رابطه (۱)، نتیجه می‌گیریم که برای هر m، $\mu(\{x \in X;\ |f(x) - g(x)| > \frac{۲}{m}\}) = ۰$. از طرفی

$$\bigcup_{m=۱}^{\infty} \left\{x \in X;\ |f(x) - g(x)| > \frac{۱}{m}\right\} = \{x \in X;\ f(x) \neq g(x)\}$$

و اندازه طرف چپ رابطه فوق صفر بوده و بنابراین f با g تقریباً همه جا مساویند.

توجه کنید که فضای همه دنباله‌های اندازه پذیر که در اندازه همگرا هستند یک فضای برداری است. در واقع فرض کنید $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ دو دنباله از توابع اندازه پذیر بوده که به ترتیب به توابع اندازه پذیر f و g همگرا باشند. $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\epsilon > ۰$ را در نظر بگیرید. عدد طبیعی N موجود است که

اگر $n \geq N$، $\mu(\{x;\ |\alpha f_n(x) - \alpha f(x)| > \frac{\epsilon}{2}\}) < \frac{\epsilon}{2}$ و $\mu(\{x;\ |g_n(x) - g(x)| > \frac{\epsilon}{2}\}) < \frac{\epsilon}{2}$. از آنجا که برای هر n،

$$\{x;\ |\alpha f_n(x) + g_n(x) - \alpha f(x) - g(x)| > \epsilon\} \subseteq \{x;\ |\alpha||f_n(x) - f(x)| > \frac{\epsilon}{2}\} \cup \{x;\ |g_n(x) - g(x)| > \frac{\epsilon}{2}\}.$$

لذا برای هر $n \geq N$، $\mu(\{x \in X;\ |\alpha f_n(x) + g_n(x) - (\alpha f(x) + g(x))| > \epsilon\}) < \epsilon$. بنابراین $\{\alpha f_n + g_n\}$ به تابع $\alpha f + g$ در اندازه همگراست.

مثال ۳ ـ ۸. اندازه لبگ را روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر را با μ نمایش می‌دهیم. برای هر عدد طبیعی n، تعریف می‌کنیم $f_n = \chi_{[n, n+1]}$. $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر است. اگر $x \in \mathbb{R}$ عنصری دلخواه باشد، عدد طبیعی m وجود دارد که $m > x$. لذا برای هر $n \geq m$، $f_n(x) = 0$ و بنابراین $\{f_n\}$ نقطه به نقطه به تابع صفر همگراست. از طرفی برای هر n، $\mu(\{x \in \mathbb{R};\ |f_n(x)| \geq 1\}) = 1$ و لذا $\{f_n\}$ در اندازه به صفر همگرا نیست.

مثال ۳ ـ ۹. اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $[0, 1]$ را با μ نمایش می‌دهیم. بازه $[0, 1]$ را برای هر عدد طبیعی n به n قسمت تقسیم مساوی می‌کنیم، یعنی

$$[0, \frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \cup \cdots \cup [\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}]$$

بازه‌های تقسیم شده را به شکل زیر مرتب می‌کنیم

$$[0, \tfrac{1}{2}], [\tfrac{1}{2}, 1], [0, \tfrac{1}{3}], [\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}], [\tfrac{2}{3}, 1], [0, \tfrac{1}{4}], \cdots$$

قرار می‌دهیم $f_1 = \chi_{[0, \frac{1}{2}]}$، $f_2 = \chi_{[\frac{1}{2}, 1]}$، $f_3 = \chi_{[0, \frac{1}{3}]}$ و الی آخر. واضح است که دنباله تعریف شده $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر است. واضح است که اندازه مجموعه‌هایی که در بالا مرتب شده‌اند به صفر همگراست و بنابراین $\{f_n\}$ در اندازه به صفر همگراست. ادعا می‌کنیم که $\{f_n\}$ به تابع صفر همگرای نقطه به نقطه نیست. برای اثبات این ادعا، اگر $x \in [0, 1]$ و n عدد طبیعی دلخواه باشد لذا برای یک $1 \leq k \leq 2n$، $x \in [\frac{k-1}{2n}, \frac{k}{2n}]$. در نتیجه تابع مشخصه $[\frac{k-1}{2n}, \frac{k}{2n}]$ در این نقطه یک بوده و اندیس تابع مشخصه متناظر با این مجموعه در نماد گذاری بالا از n بیشتر یا مساوی است. این نتیجه می‌دهد که $\{f_n\}$ به صفر همگرا نیست.

تعریف ۳ ـ ۲۱. فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر باشد. گوئیم این دنباله از توابع در اندازه کوشی است هرگاه برای هر $\epsilon > 0$، عدد طبیعی k موجود باشد که برای هر $m, n \geq k$،

$$\mu(\{x \in X;\ |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\}) < \epsilon.$$

فرض کنید دنباله توابع اندازه پذیر $\{f_n\}$ دنباله‌ای کوشی در اندازه باشد. فرض کنید این دنباله دارای زیر دنباله‌ای چون $\{f_{n_k}\}$ بوده که در اندازه به تابع اندازه پذیر f همگراست. اکنون فرض کنید $\epsilon > 0$ داده شده باشد. عدد طبیعی N موجود است که برای هر $m, n \geq N$، $\mu(\{x \in X;\ |f_{n_n}(x) - f(x)| > \frac{\epsilon}{2}\}) < \frac{\epsilon}{2}$ و $\mu(\{x \in X;\ |f_n(x) - f_m(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\}) < \frac{\epsilon}{2}$. برای هر $n \geq N$، از

$$\{x \in X;\ |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\} \subseteq \{x \in X;\ |f_n(x) - f_{n_n}(x)| > \tfrac{\epsilon}{2}\} \cup \{x \in X;\ |f_{n_n}(x) - f(x)| > \tfrac{\epsilon}{2}\}$$

و دو رابطه ما قبل آن نتیجه می‌شود که $\mu(\{x \in X;\ |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) < \epsilon$. یعنی $\{f_n\}$ در اندازه به تابع f همگراست.

قضیه ۳ ـ ۲۲. دنباله توابع اندازه پذیر $\{f_n\}$ در اندازه کوشی است اگر و تنها اگر تابع اندازه پذیر f موجود بوده که $\{f_n\}$ در اندازه به f همگرا باشد.

برهان. فرض کنیم دنباله $\{f_n\}$ در اندازه کوشی باشد. لذا برای هر عدد طبیعی k، عدد طبیعی n_k موجود است که اگر $m, n \geq n_k$ آن‌گاه

$$\mu\big(\{x \in X;\ |f_n(x) - f_m(x)| \geq \tfrac{1}{2^k}\}\big) < \tfrac{1}{2^k}.$$

بدون اینکه به کلیت خلل وارد آید، می‌توان فرض کرد که $n_{k+1} > n_k$. برای هر k، زیر مجموعه اندازه پذیر $E_k = \{x \in X;\ |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| \geq \frac{1}{2^k}\}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم m عدد طبیعی دلخواه، $x \notin \bigcup\limits_{k=m}^{\infty} E_k$ و $r, s \geq m$،

$$\begin{aligned}|f_{n_r}(x) - f_{n_s}(x)| &\leq \sum_{i=s+1}^{r} |f_{n_i}(x) - f_{n_{i-1}}(x)| \\ &< \sum_{i=s+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \qquad (1)\end{aligned}$$

اکنون فرض کنیم $x \notin \limsup E_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k$ و $\epsilon > 0$ داده شده باشد. عدد طبیعی m وجود دارد که $\frac{1}{2^m} < \epsilon$ و $x \notin \bigcup\limits_{k=m}^{\infty} E_k$. برای هر $r, s \geq m$، $|f_{n_r}(x) - f_{n_s}(x)| < \frac{1}{2^m} < \epsilon$. این نشان می‌دهد که $\{f_{n_k}\}$ خارج $\limsup E_n$ کوشی و لذا همگراست. از طرفی برای هر m،

$$\mu(\bigcup_{k=m}^{\infty} E_k) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \mu(E_k) < \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m-1}}$$

و لذا $\mu(\limsup E_n) = 0$. چون $\{f_{n_k}\}$ خارج $\limsup E_n$ کوشی است، پس f اندازه پذیری وجود دارد که $\{f_{n_k}\}$ به f در خارج $\limsup E_n$ همگراست. یعنی $\{f_{n_k}\}$ به تابع f تقریباً همه جا

همگراست.

فرض کنیم $\epsilon > 0$ داده شده باشد. ثابت می‌کنیم عدد طبیعی m هست که برای هر $k \geq m$، $\mu(\{x \in X;\ |f_{n_k}(x) - f(x)| > \epsilon\}) < \epsilon$. عدد طبیعی m هست که $\frac{1}{2^{m-1}} < \epsilon$. فرض کنید $r, s \geq m$. برای هر $x \notin \bigcup_{i=m}^{\infty} E_i$، بنا به رابطه (۱) خواهیم داشت $|f_{n_r}(x) - f_{n_s}(x)| < \frac{1}{2^m}$. بنابراین برای هر $k \geq m$ و $x \notin \bigcup_{i=m}^{\infty} E_i$، $|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^m} < \epsilon$. این نتیجه می‌دهد که برای هر $k \geq m$، $\{x;\ |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \epsilon\} \subseteq \bigcup_{i=m}^{\infty} E_i$. اما $\mu(\bigcup_{i=m}^{\infty} E_i) < \frac{1}{2^{m-1}} < \epsilon$ و لذا برای هر $k \geq m$، $\mu(\{x;\ |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) < \epsilon$. این نشان می‌دهد که $\{f_{n_k}\}$ به f در اندازه همگراست و لذا $\{f_n\}$ در اندازه به f همگراست.

اثبات عکس قضیه ساده است و به خواننده واگذار می‌شود. ■

نکته۱۹. فرض کنید μ اندازه‌ای متناهی روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. دنباله توابع اندازه پذیر $\{f_n\}$ را روی X در نظر می‌گیریم. فرض کنید دنباله $\{f_n\}$ به تابع صفر در اندازه همگرا باشد. فرض کنید $\epsilon > 0$ داده شده باشد. عدد مثبت δ را طوری می‌یابیم که $\frac{\delta}{1+\delta}\mu(X) < \epsilon$. برای هر عدد طبیعی n، قرار می‌دهیم $A_n = \{x \in X;\ |f_n(x)| \geq \delta\}$. واضح است که برای $x \in X$، $|f_n(x)| < \delta$ اگر و تنها اگر $\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} < \frac{\delta}{1+\delta}$. برای هر عدد طبیعی n،

$$\begin{aligned}
\int \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} d\mu(x) &= \int_{A_n} \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} d\mu(x) + \int_{X \setminus A_n} \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} d\mu(x) \\
&\leq \int_{A_n} 1 d\mu(x) + \int_{X \setminus A_n} \frac{\delta}{1+\delta} d\mu \\
&= \mu(A_n) + \frac{\delta}{1+\delta}\mu(X \setminus A_n) \\
&\leq \mu(A_n) + \frac{\delta}{1+\delta}\mu(X).
\end{aligned}$$

چون $\{f_n\}$ در اندازه به صفر همگراست، لذا $\{\mu(A_n)\}$ به صفر همگراست و بنابراین $\lim_{n\to\infty} \int \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} d\mu(x) \leq \frac{\delta}{1+\delta}\mu(X) < \epsilon$. در نتیجه $\lim_{n\to\infty} \int \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} d\mu(x) = 0$.

اکنون فرض کنیم $\lim_{n\to\infty} \int \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} d\mu(x) = 0$ و $\epsilon > 0$ داده شده باشد. برای هر عدد طبیعی n، قرار می‌دهیم $A_n = \{x \in X;\ |f_n(x)| \geq \epsilon\}$. واضح است که برای $x \in X$، $|f_n(x)| \geq \epsilon$ اگر و تنها اگر $\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} \geq \frac{\epsilon}{1+\epsilon}$. برای هر عدد طبیعی n،

$$0 \leq \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\mu(A_n) \leq \int_{A_n} \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} d\mu(x) \leq \int_X \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} d\mu(x).$$

چون طرف راست رابطه اخیر به صفر همگراست، لذا $\{\mu(A_n)\}$ به صفر همگراست و بنابراین $\{f_n\}$ در اندازه به صفر همگراست. نتیجه اینکه $\{f_n\}$ در اندازه به صفر همگراست اگر و تنها اگر

$$\lim_{n\to\infty}\int_X \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}d\mu(x) = 0$$

توجه کنید که در نکتهٔ فوق متناهی بودن اندازه فضا را نمی‌توان حذف کرد. برای مثال اندازه لبگ μ را روی زیر مجموعه‌های اندازه پذیر لبگ از $\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم. دنباله توابع $\{f_n\}$ را با ضابطه $f_n(x) = \frac{1}{n}$ روی $\mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم. واضح است که $\{f_n\}$ به تابع صفر در اندازه همگراست ولی برای هر عدد طبیعی n، $\int \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}d\mu(x) = \int \frac{1}{n+1}d\mu(x) = +\infty$

تعریف ۳ ـ ۲۳. دنباله $\{f_n\}$ به تابع f تقریباً همگرای یکنواخت است هرگاه برای هر $\epsilon > 0$، مجموعه‌ای اندازه پذیر E موجود بوده که $\mu(E) < \epsilon$ و $\{f_n\}$ به f روی E^c همگرای یکنواخت باشد.

فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر بوده که در اندازه کوشی است. زیر دنباله $\{f_{n_k}\}$ از $\{f_n\}$ موجود است که تقریباً همه جا به تابع اندازه پذیر f همگراست. فرض کنید $\{E_k\}$ دنباله تعریف شده در قضیه ۳—۲۲ باشد. برای $\epsilon > 0$، عدد طبیعی m وجود دارد که $\frac{1}{2^{m-1}} < \epsilon$. دیدیم که $\mu(\bigcup_{i=m}^{\infty} E_i) < \frac{1}{2^{m-1}} < \epsilon$. اگر δ داده شده باشد، عدد طبیعی $N > m$ هست که $\frac{1}{2^{N-1}} < \delta$. برای هر $k \geq N$ و $x \notin \bigcup_{i=m}^{\infty} E_i$، $x \notin E_k$ و $|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^{N-1}} < \delta$. این نتیجه می‌دهد که $\{f_{n_k}\}$ به تابع f خارج $\bigcup_{i=m}^{\infty} E_i$ همگرای یکنواخت است و در نتیجه $\{f_{n_k}\}$ به تابع f تقریباً همه جا همگرای یکنواخت است.

نکته ۲۰. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر بوده که به تابع اندازه پذیر f در اندازه همگراست. چون هر دنباله همگرا در اندازه، در اندازه کوشی است، بنا به برهان قضیه ۳—۲۲، $\{f_n\}$ دارای زیر دنباله تقریباً همه جا همگرای $\{f_{n_k}\}$ به تابعی اندازه پذیر چون g است. چون $\{f_n\}$ در اندازه همگراست، لذا $\{f_{n_k}\}$ در اندازه به تابع f همگراست. این نتیجه می‌دهد که f با g تقریباً همه جا مساوی است و لذا $\{f_{n_k}\}$ به تابع f تقریباً همه جا همگراست.

قضیه ۳ ـ ۲۴. *فرض کنید μ اندازه‌ای متناهی روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. فرض کنید دنباله توابع اندازه پذیر $\{f_n\}$ تعریف شده روی X به f همگرای نقطه به نقطه باشد. در آن‌صورت $\{f_n\}$ تقریباً همگرای یکنواخت به تابع f است.*

برهان. برای هر k و n، قرار می‌دهیم $E_n(k) = \bigcup_{m=n}^{\infty} \{x \in X;\ |f_m(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\}$. واضح است که همه $E_n(k)$ ها اندازه پذیر و برای k ثابت، $\{E_n(k)\}$ دنباله‌ای نزولی است. چون $\{f_n\}$ دنباله‌ای همگراست، لذا برای هر عدد طبیعی k، $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(k) = \emptyset$. با این تفاسیر برای هر عدد ثابت k، دنباله $\{\mu(E_n(k))\}$ به صفر همگراست. فرض کنیم $\epsilon > 0$ داده شده باشد، برای هر عدد طبیعی k، عدد طبیعی n_k هست که $\mu(E_{n_k}) < \frac{\epsilon}{2^k}$. قرار می‌دهیم $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n_k}(k)$ و لذا $\mu(E) < \epsilon$.

حال ثابت می‌کنیم که $\{f_n\}$ به f روی E^c همگرای یکنواخت است. فرض کنید ϵ_1 داده شده باشد. عدد طبیعی k هست که $\frac{1}{k} < \epsilon_1$. فرض کنید $n \geq n_k$ و $x \notin E$. در نتیجه $x \notin E_{n_k}(k)$. اما $\{E_n(k)\}$ دنباله‌ای نزولی است و بنابراین $x \notin E_n(k)$. بنا به تعریف $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} < \epsilon_1$. بنابراین $\{f_n\}$ به f تقریباً همگرای یکنواخت است. ■

قضیه فوق به قضیه ایگوروف مشهور است. توجه کنید که در قضیه ایگوروف به جای شرط $\mu(X) < +\infty$ می‌توان شرط دیگری را جایگزین کرد و آن این است که تابعی انتگرال پذیر مانند g موجود باشد که برای هر n، $|f_n| \leq g$. دقت کنید که در اثبات قضیه ایگوروف از متناهی بودن فضای اندازه تنها در همگرایی دنباله $\{\mu(E_n(k))\}$ به صفر استفاده شده است. از شرط دوم استفاده کرده و نشان می‌دهیم که برای هر k و n، $\mu(E_n(k)) < +\infty$. اگر k داده شده باشد، در آن‌صورت برای هر عدد طبیعی n خواهیم داشت $E_n(k) \subseteq \{x \in X;\ |g(x)| > \frac{1}{2k}\}$. چون g انتگرال پذیر است، لذا $\mu(\{x \in X;\ |g(x)| > \frac{1}{2k}\}) < +\infty$ و بنابراین $\mu(E_n(k)) < +\infty$.

قضیه ۳ ـ ۲۵. *فرض کنید μ اندازه‌ای متناهی روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. فرض کنید دنباله توابع اندازه پذیر و متناهی مقدار $\{f_n\}$ به f همگرای نقطه به نقطه باشد. در آن‌صورت زیر مجموعه از اندازه مثبت $F \in S$ و عدد مثبت C وجود دارد که برای هر n و $x \in F$، $|f_n(x)| \leq C$.*

برهان. بنا به فرض $\{f_n\}$ به تابع f همگرای نقطه به نقطه بوده و $\mu(X) < +\infty$. بنا به قضیه ایگوروف، $\{f_n\}$ به تابع f تقریباً همه جا همگرای یکنواخت است. لذا برای $\epsilon = \frac{\mu(X)}{3}$، $F_\epsilon \in S$ وجود دارد که $\mu(F_\epsilon) < \epsilon$ و $\{f_n\}$ روی F_ϵ^c به تابع f همگرای یکنواخت است. لذا عدد طبیعی N موجود است که برای هر $n \geq N$ و $x \in F_\epsilon^c$، $|f_n(x) - f_N(x)| < \epsilon$. برای هر عدد طبیعی k و $1 \leq m \leq N$، قرار می‌دهیم $F_m^k = \{x \in X;\ |f_m(x)| < k\}$. چون $\{f_n\}$ ها اندازه پذیر هستند، لذا هر F_m^k اندازه پذیر بوده و برای هر m دنباله $\{F_m^k\}$ صعودی است. اما $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع متناهی مقدار است. لذا برای هر m، $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_m^k$ و $\{\mu(F_m^k)\}$ نیز به $\mu(X)$ همگراست. برای هر $1 \leq m \leq N$، عدد طبیعی k_m وجود دارد که برای هر $n \geq k_m$، $\mu(X \setminus F_m^n) = \mu(X) - \mu(F_m^n) < \frac{\epsilon}{N}$. قرار دهید $k = \max\{k_1, ..., k_N\}$. در نتیجه برای هر $1 \leq m \leq N$، $\mu(X \setminus F_m^k) < \frac{\epsilon}{N}$. دوباره قرار دهید $F = X \setminus \left(\bigcup_{m=1}^{N} (X \setminus F_m^k) \cup F_\epsilon \right)$. خواهیم داشت

$$\mu(F) \geq \mu(X) - \mu(F_\epsilon) - \sum_{m=1}^{N} \mu(X \setminus F_m^k) \geq \mu(X) - 2\epsilon$$

که نتیجه می‌دهد $\circ < \mu(F)$. ادعا می‌کنیم که برای هر $x \in F$ و $n \in \mathbb{N}$، $|f_n(x)| < k + \epsilon$. برای اثبات این ادعا، $x \in F$ و $n \in \mathbb{N}$ را در نظر بگیرید. اگر $n \leq N$، بنا به تعریف F، $x \notin X \setminus F_n^k$ و لذا $x \in F_n^k$. بنا به تعریف F_n^k، $|f_n(x)| < k < k + \epsilon$.

اگر $n > N$، بنا به تعریف F، $x \notin F_\epsilon$. در نتیجه $|f_n(x)| \leq |f_N(x)| + \epsilon$. دوباره از تعریف F استفاده کرده و نتیجه می‌گیریم که $x \in F_N^k$. بنابراین $|f_N(x)| < k$ و لذا $|f_n(x)| < k + \epsilon$. این برهان قضیه را کامل می‌کند. ■

مثال۳ ـ ۱۰. اندازه لبگ روی زیر مجموعه‌های اندازه پذیر لبگ از $[\circ, ۱]$ را با نماد μ نمایش می‌دهیم. برای هر عدد طبیعی n، تابع $f_n(x) = x^n$ را روی $[\circ, ۱]$ در نظر می‌گیریم. واضح است که دنباله توابع $\{f_n\}$ به تابع

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۱ \\ \circ & x \in (\circ, ۱) \end{cases}$$

همگرای نقطه به نقطه است. در دروس آنالیز ریاضی دیده شده است که این دنباله از توابع همگرای یکنواخت نیست. اگر $\epsilon \in (\circ, ۱)$ داده شده باشد، قرار می‌دهیم $E = \left[۱ - \frac{\epsilon}{۲}, ۱\right]$. واضح است که $\mu(E) < \epsilon$ و $\{f_n\}$ روی E^c همگرای یکنواخت است.

نکته۲۱. فرض کنید دنباله توابع اندازه پذیر $\{f_n\}$ تقریباً همگرای یکنواخت به تابع f باشد. ادعا می‌کنیم $\{f_n\}$ به تابع f در اندازه همگراست. اگر چنین نباشد، عدد مثبت ϵ و زیر دنباله $\{f_{n_k}\}$ وجود دارد که برای هر k،

$$\mu(\{x \in X;\ |f_{n_k}(x) - f(x)| > \epsilon\}) \geq \epsilon.$$

زیر مجموعه اندازه پذیر E وجود دارد که $\mu(E) < \epsilon$ و $\{f_n\}$ روی E^c به f همگرای یکنواخت است. بنابراین عدد طبیعی k موجود است که برای هر $x \in E^c$، $|f_{n_k}(x) - f(x)| < \epsilon$. این نشان می‌دهد که $\{x \in X;\ |f_{n_k}(x) - f(x)| > \epsilon\} \subseteq E$ و این تناقض با $\mu(E) < \epsilon$ است.

نکته۲۲. فرض کنید دنباله توابع $\{f_n\}$ تقریباً همگرای یکنواخت به تابع f باشد. ادعا می‌کنیم $\{f_n\}$ به تابع f تقریباً همه جا همگراست. در واقع برای هر m، مجموعه اندازه پذیر E_m موجود است که $\mu(E_m) < \frac{۱}{m}$ و $\{f_n\}$ روی E_m^c همگرای یکنواخت به f است. قرار دهید $E = \bigcap_{m=۱}^{\infty} E_m$ و لذا $\mu(E) = \circ$. اگر $z \notin E$، لذا برای یک m، $z \notin E_m$. فرض کنید $\epsilon > \circ$ داده شده باشد، از اینکه $\{f_n\}$ روی E_m^c همگرای یکنواخت است عدد طبیعی N موجود است که برای هر $n \geq N$ و $x \in E_m^c$، $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. اما $z \in E_m^c$ و لذا برای $n \geq N$، $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$. این نتیجه می‌دهد که $\{f_n\}$ به تابع f تقریباً همه جا همگراست.

قضیه۳ ـ ۲۶. *فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر نامنفی بوده که در اندازه به تابع اندازه پذیر f همگراست. در آن‌صورت $\int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$.*

برهان. ابتدا فرض کنیم $\int f d\mu < +\infty$. فرض کنیم $\int f d\mu > \liminf \int f_n d\mu$. عدد مثبت δ را طوری می‌گیریم که $\int f d\mu - \delta > \liminf \int f_n d\mu$. لذا

$$\sup\{\inf\{\int f_n d\mu;\ n \geq k\},\ k \in \mathbb{N}\} < \int f d\mu - \delta.$$

برای $k = 1$، عدد طبیعی n_1 هست که $\int f_{n_1} d\mu < \int f d\mu - \delta$. برای $k = n_1 + 1$، عدد طبیعی $n_2 \geq k$ موجود است که $\int f_{n_2} d\mu < \int f d\mu - \delta$. با ادامه این روند زیر دنباله $\{f_{n_i}\}$ بدست می‌آید که برای هر i، $\int f_{n_i} d\mu < \int f d\mu - \delta$. چون دنباله $\{f_n\}$ به تابع f در اندازه همگراست، بنابراین $\{f_{n_i}\}$ نیز به تابع f در اندازه همگراست. بنا به نکته ۲، زیر دنباله $\{f_{n_{i_k}}\}$ از $\{f_{n_i}\}$ وجود دارد که تقریباً همه جا به f همگراست. با استفاده از لم فاتو،

$$\int f d\mu \leq \liminf \int f_{n_{i_k}} d\mu \leq \int f d\mu - \delta$$

که یک تناقض است.

اکنون فرض کنید $\int f d\mu = +\infty$ و $\liminf \int f_n d\mu < +\infty$. شبیه حالت قبل، عدد طبیعی k و زیر دنباله $\{f_{n_i}\}$ از $\{f_n\}$ وجود دارد که $\int f_{n_i} d\mu < k$. زیر دنباله $\{f_{n_{i_k}}\}$ از $\{f_{n_i}\}$ وجود دارد که تقریباً همه جا به تابع f همگراست. با استفاده از لم فاتو،

$$+\infty = \int f d\mu \leq \liminf \int f_{n_{i_k}} d\mu$$

که یک تناقض است. ∎

اندازه μ را روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X در نظر بگیرید. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر باشد که به تابع f در اندازه همگراست. فرض کنید g تابعی انتگرال‌پذیر باشد که برای هر $x \in X$ و n، $|f_n(x)| \leq g(x)$. ادعا می‌کنیم $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$. اگر اینگونه نباشد، عدد مثبت ϵ و زیر دنباله‌ای از $\{f_n\}$ مانند $\{f_{n_k}\}$ وجود دارد که برای هر k، $|\int f_{n_k}(x) d\mu(x) - \int f(x) d\mu(x)| \geq \epsilon$. چون $\{f_n\}$ در اندازه به f همگراست، لذا $\{f_{n_k}\}$ نیز به f در اندازه همگراست. بنا به نکته ۲، زیر دنباله $\{f_{n_{k_m}}\}$ از $\{f_{n_k}\}$ وجود دارد که به f نقطه به نقطه همگراست. برای هر عدد طبیعی m، $|\int f_{n_{k_m}}(x) d\mu(x) - \int f(x) d\mu(x)| \geq \epsilon$ و $|f_{n_{k_m}}| \leq g$. بنا به قضیه همگرایی مغلوب، $\lim\limits_{m\to\infty} \int f_{n_{k_m}}(x) d\mu(x) = \int f(x) d\mu(x)$. که این امکان پذیر نیست و لذا $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n(x) d\mu(x) = \int f(x) d\mu(x)$.

نکته۲۳. اندازه متناهی μ را روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X در نظر می‌گیریم. فرض

کنید دنباله توابع اندازه پذیر $\{f_n\}$ به تابع اندازه پذیر f در اندازه همگرا باشد. فرض کنید M عددی باشد که برای هر $x \in X$ و هر n، $|f_n(x)| \leq M$ و $|f(x)| \leq M$. تابع پیوسته $g : [-M, M] \to \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم که دنباله توابع $\{gof_n\}$ در اندازه به gof همگراست. برای $\epsilon > 0$، عدد مثبت δ هست که اگر $|x-y| \leq \delta$ آن‌گاه $|g(x) - g(y)| < \epsilon$. چون $\{f_n\}$ در اندازه به f همگراست، بنابراین عدد طبیعی N موجود است که برای هر $n \geq N$، $\mu(\{x \in X;\ |f_n(x) - f(x)| > \delta\}) < \epsilon$. از طرفی

$$\{x \in X;\ |g(f_n(x)) - g(f(x))| > \epsilon\} \subseteq \{x \in X;\ |f_n(x) - f(x)| > \delta\}$$

و لذا برای $n \geq \mathbb{N}$، $\mu(\{x \in X;\ |g(f_n(x)) - g(f(x))| > \epsilon\}) < \epsilon$. این نشان می‌دهد که دنباله توابع $\{gof_n\}$ در اندازه به تابع gof همگراست.

برای هر عدد طبیعی n، $|gof_n| \leq \|g\|$. چون $\int \|g\| d\mu = \|g\|\mu(X) < +\infty$، لذا تابع ثابت $\|g\|$ انتگرال‌پذیر است. بنابراین $\lim_{n\to\infty} \int gof_n d\mu = \int gof d\mu$.

از توضیحات فوق نتیجه می‌شود که اگر μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $[0, 1]$ و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر لبگ روی $[0, 1]$ بوده که به تابع اندازه پذیر f در اندازه همگرا باشد، در آن‌صورت $\lim_{n\to\infty} \int \sin(f_n) d\mu = \int \sin(f) d\mu$.

تمرین ۳

۱. فرض کنید μ اندازه‌ای روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X، $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر و $f : X \to \mathbb{R}$ تابعی دلخواه باشد. اگر برای هر $\epsilon > 0$، $\lim_{n\to\infty} \mu^*(\{x;\ |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = 0$. ثابت کنید f اندازه پذیر است.

۲. فرض کنید μ اندازه‌ای روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X و $f : X \to \mathbb{R}$ تابعی دلخواه باشد. فرض کنید D در $\mathbb{R}$ چگال و برای هر $\alpha \in D$، $\{x;\ f(x) > \alpha\} \in S$. ثابت کنید f اندازه پذیر است.

۳. فرض کنید μ اندازه‌ای روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر و f نیز تابعی اندازه پذیر باشد. فرض کنید هر زیر دنباله از $\{f_n\}$ دارای زیر دنباله‌ای بوده که در اندازه به تابع f همگراست. آیا $\{f_n\}$ به تابع f در اندازه همگراست؟

۴. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $\mathbb{R}$ باشد.

فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی باشد که برای هر $\epsilon > 0$، زیر مجموعه بازی از $\mathbb{R}$ مانند U موجود بوده که $\mu(U) < \epsilon$ و f روی $\mathbb{R} \setminus U$ پیوسته است. ثابت کنید f اندازه پذیر است.

۵. فرض کنید μ اندازه‌ای متناهی روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. فرض کنید f تابعی اندازه پذیر و نامنفی باشد. برای هر عدد صحیح و نامنفی k، قرار می‌دهیم $A_k = \{x \in X;\ k \le f(x) < k+1\}$. ثابت کنید f انتگرال پذیر است اگر و تنها اگر $\sum_{k=0}^{\infty} k\mu(A_k) < +\infty$.

۶. فرض کنید μ اندازه‌ای متناهی روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. فرض کنید f تابعی اندازه پذیر و نامنفی باشد. برای هر عدد صحیح و نامنفی k، قرار می‌دهیم $B_k = \{x \in X;\ f(x) \ge k\}$. ثابت کنید f انتگرال پذیر است اگر و تنها اگر $\sum_{k=0}^{\infty} \mu(B_k) < +\infty$.

۷. فرض کنید μ اندازه‌ای متناهی روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. فرض کنید f تابعی اندازه پذیر، نامنفی و $\epsilon > 0$ داده شده باشد. برای هر عدد صحیح و نامنفی k، قرار می‌دهیم $A_k = \{x \in X;\ k\epsilon \le f(x) < (k+1)\epsilon\}$ و $S(\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} k\epsilon\mu(A_k)$. ثابت کنید

$$\lim_{\epsilon \to 0} S(\epsilon) = \int f(x) d\mu(x)$$

۸. فرض کنید μ اندازه‌ای روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر و g نیز تابعی انتگرال‌پذیر باشد. فرض کنید برای هر عدد طبیعی n، $|f_n| \le g$. ثابت کنید

$$\int \liminf f_n d\mu \le \liminf \int f_n d\mu \le \limsup \int f_n d\mu \le \int \limsup f_n d\mu.$$

۹. فرض کنیم μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر $\mathbb{R}$ باشد. تعریف کنید

$$f(x) = \begin{cases} n & 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \le x < 1 \end{cases}$$

الف: حد نقطه به نقطه این دنباله از توابع را بیابید. ب: مقدار $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) d\mu(x)$ را بیابید. ج: ثابت کنید تابعی چون $g \in L^1((0,1))$ وجود ندارد که برای هر n، $f_n \le g$.

۱۰. فرض کنید μ اندازه‌ای روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر باشد که به تابع اندازه پذیر f همگرای نقطه به نقطه است. فرض کنید برای هر n، $f_n \le f$. آیا $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$؟

۱۱. فرض کنیم μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $(\circ, +\infty)$ باشد. فرض کنید $f : (\circ, +\infty) \to [\circ, +\infty]$ تابعی انتگرال‌پذیر باشد. ثابت کنید $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{\circ}^{n} xf(x)d\mu(x) = \circ$.

۱۲. فرض کنیم μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر $\mathbb{R}$ باشد. اگر f تابعی انتگرال‌پذیر لبگ باشد، ثابت کنید که لزومی ندارد تابع پیوسته g موجود باشد که $\int |f - g| d\mu = \circ$.

۱۳. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی انتگرال پذیر لبگ بوده و برای هر $x, y \in \mathbb{R}$، $f(x+y) = f(x) + f(y)$. ثابت کنید f پیوسته است. آیا شرط انتگرال‌پذیری را می‌توان با اندازه پذیری عوض کرد؟

۱۴. فرض کنیم μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر $\mathbb{R}$ باشد. دنباله توابع انتگرال‌پذیر $\{f_n\}$ روی زیر مجموعه لبگ اندازه پذیر A را هم انتگرال‌پذیر گوئیم هرگاه برای هر $\epsilon > \circ$ عدد مثبت δ موجود باشد که اگر $E \subseteq A$ زیر مجموعه‌ای اندازه پذیر لبگ بوده و $\mu(E) < \delta$، آن‌گاه برای هر عدد طبیعی n، $\int_E f_n d\mu < \epsilon$. فرض کنید A زیر مجموعه‌ای لبگ اندازه‌پذیر و $\mu(A) < +\infty$. اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع هم انتگرال‌پذیر تعریف شده روی A بوده که به تابع انتگرال‌پذیر f همگرای نقطه به نقطه باشد، ثابت کنید $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu$.

۱۵. فرض کنید A زیر مجموعه‌ای لبگ اندازه‌پذیر و $\mu(A) < +\infty$. اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع هم انتگرال‌پذیر تعریف شده روی A بوده که به تابع انتگرال‌پذیر f در اندازه همگرا باشد، ثابت کنید $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu$.

۱۶. فرض کنید دنباله توابع اندازه پذیر لبگ $\{f_n\}$ تعریف شده روی $\mathbb{R}$، به تابع اندازه پذیر f در اندازه همگرا باشد. اگر g تابعی اندازه پذیر روی $\mathbb{R}$ باشد، آیا $\{gof_n\}$ به تابع gof در اندازه همگراست.

۱۷. فرض کنید μ اندازه‌ای روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر و f نیز اندازه پذیر باشد. اگر $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی دلخواه باشد،

الف) در صورتی که ϕ پیوسته و دنباله $\{f_n\}$ تقریباً همه جا به تابع f همگرای نقطه به نقطه باشد، ثابت کنید $\{\phi of_n\}$ تقریباً همه جا به تابع ϕof همگرای نقطه به نقطه است.

ب) اگر ϕ پیوسته یکنواخت بوده و $\{f_n\}$ به f در اندازه همگرا باشد، ثابت کنید $\{\phi of_n\}$ به ϕof در اندازه همگراست.

۱۸. اندازه μ را روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X در نظر می‌گیریم. فرض کنید $f \in L^1(X)$ تابعی نامنفی باشد. ثابت کنید $\{x \in X;\ f(x) > 0\}$ مجموعه‌ای σ متناهی است، یعنی دنباله $\{A_n\}$ از اعضای S موجود است که $\{x \in X;\ f(x) > 0\} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و برای هر n، $\mu(A_n) < +\infty$.

۱۹. دو اندازه μ و ν را روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید برای هر $f \in C_{00}(\mathbb{R})$، $\int f d\mu = \int f d\nu$. آیا $\mu = \nu$؟

۲۰. با دلیل کافی مقدار $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$ را بیابید.

۲۱. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $\mathbb{R}$ باشد. فرض کنید A و B دو زیر مجموعه لبگ اندازه پذیر و $f \in L^1(\mathbb{R})$. اگر $\int_A f d\mu < t < \int_B f d\mu$، ثابت کنید زیر مجموعه اندازه پذیر لبگ C موجود است که $t = \int_C f d\mu$.

۲۲. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $[0, +\infty)$ باشد. فرض کنید $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد که برای هر $x \geq 0$، $f(x+1) = f(x)$. فرض کنید $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد. ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g(x) f(nx) d\mu(x) = \int_0^1 g(x) d\mu(x) \int_0^1 f(x) d\mu(x).$$

۲۳. اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $\mathbb{R}$ را با نماد μ نمایش می‌دهیم. اگر زیر مجموعه اندازه پذیر لبگ E دارای اندازه متناهی و تابع اندازه پذیر $f : E \to \mathbb{R}$ کراندار باشد، ثابت کنید $F(x) = \int_{E\cap(-\infty, x)} f d\mu$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت است.

۲۴. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $\mathbb{R}$ و $f \in L^1(\mathbb{R})$. ثابت کنید $\lim\limits_{\mu(E)\to 0} \int_E |f(x)| d\mu(x) = 0$.

۲۵. اندازه شمارشی μ را روی زیر مجموعه‌های اعداد طبیعی در نظر می‌گیریم. ثابت کنید دنباله $\{f_n\}$ به تابع f در اندازه همگراست اگر و تنها اگر $\{f_n\}$ به f همگرای یکنواخت باشد.

۲۶. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $\mathbb{R}$ و $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ نیز اندازه پذیر باشد. فرض کنید $\int f d\mu = 1$. دنباله توابع $\{f_n\}$ را با ضابطه $f_n(x) = nf(nx)$ تعریف کنید. ثابت کنید برای هر تابع پیوسته و کراندار g، $\lim\limits_{n\to\infty} \int g f_n d\mu = f(0)$.

۲۷. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $[a,b]$ باشد. فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعی اندازه پذیر و $\epsilon > 0$ داده شده باشد. ثابت کنید زیر مجموعه فشرده $E \subseteq [a,b]$ وجود دارد که $\mu(E^c) < \epsilon$ و $f|_E$ پیوسته است.

۲۸. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $\mathbb{R}$ باشد. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر بوده که به تابع f همگرای نقطه به نقطه است. فرض کنید g تابعی انتگرال پذیر لبگ و برای هر n، $|f_n| \leq g$. ثابت کنید $\{f_n\}$ به تابع f تقریباً همه جا همگراست.

۲۹. فرض کنید S در فضای اندازه (X,S,μ) یک σ جبر و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر باشد که در اندازه به تابع اندازه پذیر f همگراست. آیا $\{f_n^2\}$ به f^2 در اندازه همگراست؟ اگر $\mu(X) < +\infty$، آیا $\{f_n^2\}$ به f^2 در اندازه همگراست؟

فصل ۴

فضاهای L^p و قضیه هان باناخ

۴−۱ مقدمه

در آنالیز فضاهای نرمدار و مخصوصاً فضاهای باناخ از اهمیت خاصی برخوردارند. مهمترین مثال‌ها از فضاهای باناخ فضاهای L^p هستند. همانطور که می‌دانید عمل جمع و ضرب در اعداد حقیقی پیوسته است. اگر G گروهی دلخواه همراه با یک توپولوژی هاسدورف و فشرده موضعی بوده که عمل ضرب و عمل وارون پیوسته باشند، G را یک گروه توپولوژیک گوئیم. ثابت شده است که اندازه‌ای مشابه با اندازه لبگ روی گروه G وجود دارد که به آن اندازه هار گوئیم. برای $1 \leq p < +\infty$ ، $L^p(G)$ یک فضای باناخ است و یکی از مهمترین فضاهای باناخی است که در آنالیز مورد بررسی قرار می‌گیرد. ریاضیدانان به باناخ بودن این فضا اکتفا نکرده و حتی عمل ضربی روی $L^1(G)$ تعریف کرده که این فضا را به یک جبر باناخ تبدیل می‌کند. فضاهای L^p یکی از ابزارهای مهم ریاضیدانان است و در رشته‌های فنی مخصوصاً در رشته مخابرات از اهمیت خاصی برخوردار است.

در این فصل پس از معرفی فضاهای L^p به بحث و بررسی خواص این فضاها می‌پردازیم. نامساوی‌های هلدر و مینکوفسکی را ثابت کرده و از این نامساوی‌ها در ادامه بحث استفاده‌های زیادی خواهیم برد. در ادامه قضیه هان باناخ که یکی از مهمترین قضایای آنالیز است را بیان و ثابت می‌کنیم. همانطور که در دروس مقدماتی ریاضی گسترش توابع پیوسته از اهمیت خاصی برخوردار است، گسترش تابعک‌های خطی پیوسته نیز اهمیت شایانی دارد. قضیه گسترش تیتزه در درس

توپولوژی هر چند که دارای اهمیت زیادی است اما به اندازه قضیه هان باناخ دارای اهمیت نیست. قضیه گسترش تیتزه با گسترش توابع پیوسته سر و کار دارد ولی بحث قضیه هان باناخ در مورد گسترش تابعک‌های خطی پیوسته است.

۴-۲ فضاهای L^p

در این فصل فرض می‌کنیم S در فضای اندازه (X, S, μ) یک σ جبر است.

تعریف ۴ ـ ۱. فرض کنید $0 < p < +\infty$. خانواده همه توابع اندازه پذیر $f : X \to [-\infty, +\infty]$ که $|f|^p$ انتگرال پذیر است را با نماد $L^p(X)$ نمایش می‌دهیم.

اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، $|a+b| \leq 2\max\{|a|, |b|\}$. اگر p عدد حقیقی مثبت باشد، در آن‌صورت $|a+b|^p \leq 2^p \max\{|a|^p, |b|^p\} \leq 2^p(|a|^p + |b|^p)$. اکنون فرض کنید f و g دو عنصر از $L^p(X)$ باشند. در آن‌صورت

$$\begin{aligned}\int |f(x)+g(x)|^p d\mu(x) &\leq 2^p \int |f(x)|^p + |g(x)|^p d\mu(x)\\ &= 2^p \int |f(x)|^p d\mu(x) + 2^p \int |g(x)|^p) d\mu(x).\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که $f + g \in L^p(X)$ و لذا $L^p(X)$ تحت جمع بسته است. واضح است که برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $\int |\alpha f(x)|^p d\mu(x) = |\alpha|^p \int |f(x)|^p d\mu(x)$. نتیجه اینکه $L^p(X)$ یک فضای برداری است. در این فضا دو تابع مساویند هرگاه این دو تابع تقریباً همه جا با هم مساوی باشند. برای هر $f \in L^p(X)$، قرار می‌دهیم $\|f\|_p = \left(\int |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$. در این فصل نشان می‌دهیم که اگر $p \geq 1$، در آن‌صورت تابع $f \mapsto \|f\|_p$ یک نرم روی $L^p(X)$ است.

فرض کنید $0 < p < 1$، در آن‌صورت تابع $d : L^p(X) \times L^p(X) \to \mathbb{R}$ با ضابطه $d(f, g) = \int |f(x) - g(x)|^p d\mu(x)$ یک متر روی $L^p(X)$ است. در واقع با قرارداد فوق $d(f, g) = 0$ اگر و تنها اگر f با g تقریباً همه جا مساوی است و در این فضا این دو تابع با هم مساویند. واضح است که برای هر f و g در این فضا $d(f, g) = d(g, f)$. برای بررسی نامساوی مثلث، ابتدا برای هر دو عدد حقیقی نامنفی a و b، ثابت می‌کنیم $a^p + b^p \geq (a+b)^p$. اگر a و b دو عدد حقیقی نامنفی و $0 < t$، در آن‌صورت $t^{p-1} \geq (a+t)^{p-1}$. از دو طرف نامساوی از صفر تا b انتگرال می‌گیریم و لذا $a^p + b^p \geq (a+b)^p$. اکنون فرض کنیم f، g و h سه عنصر از $L^p(X)$ باشند. بنا به توضیح بالا برای هر $x \in X$،

$$|f(x) - g(x)|^p + |g(x) - h(x)|^p \geq |f(x) - h(x)|^p.$$

با انتگرال گیری از دو طرف نامساوی بالا، خواهیم داشت $d(f,g) + d(g,h) \geq d(f,h)$. این نشان می‌دهد که d یک متر است.

فرض کنیم E و F دو مجموعه اندازه پذیر مجزا با اندازه مثبت و متناهی باشند. قرار می‌دهیم $a = \mu(E)^{\frac{1}{p}}$ و $b = \mu(F)^{\frac{1}{p}}$. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\|\chi_E + \chi_F\|_p^p &= \int (\chi_E + \chi_F)^p d\mu = \int_E (\chi_E + \chi_F)^p d\mu + \int_{E^c} (\chi_E + \chi_F)^p d\mu \\ &= \mu(E) + \mu(F) = a^p + b^p.\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\|\chi_E + \chi_F\|_p = (a^p + b^p)^{\frac{1}{p}} \geq a + b = \|\chi_E\|_p + \|\chi_F\|_p.$$

این نشان می‌دهد که تابع $f \mapsto \|f\|_p$ یک نرم روی $L^p(X)$ نیست.

توجه کنید که زیر مجموعه C از یک فضای برداری را محدب گوئیم هرگاه برای هر $\circ < t < 1$ و $x, y \in C$، $tx + (1-t)y \in C$. زیر مجموعه‌های محدب در فضاهای نرم‌دار بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرند.

قضیه ۴ ـ ۲. *اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $[\circ, 1]$ را با نماد μ نمایش می‌دهیم. برای $\circ < p < 1$، $L^p([\circ, 1])$ شامل هیچ همسایگی محدب سره شامل تابع صفر نیست.*

برهان. فرض کنیم V یک همسایگی محدب شامل صفر باشد. عدد مثبت r موجود است که $S_r(\circ) \subseteq V$. فرض کنیم f عنصری دلخواه از $L^p([\circ, 1])$ باشد. عدد طبیعی n موجود است که $n^{p-1}\|f\|_p^p < r$. افراز $P = \{x_\circ, \cdots, x_n\}$ را طوری می‌یابیم که برای هر $1 \leq i \leq n$،

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|^p dt = \frac{\|f\|_p^p}{n}.$$

در واقع اگر $n = 1$، کافی‌است $P = \{\circ, 1\}$ اختیار شود. در غیر این‌صورت تابع $F : [\circ, 1] \to \mathbb{R}$ را با ضابطه $F(t) = \int_\circ^t |f(x)|^p d\mu(x)$ در نظر می‌گیریم. F تابعی پیوسته است. واضح است که $F(\circ) = \circ < \frac{\|f\|_p^p}{n} < \|f\|_p^p = F(1)$. با استفاده از قضیه مقدار میانی، $\circ < x_1 < 1$ موجود است که $F(x_1) = \int_\circ^{x_1} |f(t)|^p dt = \frac{\|f\|_p^p}{n}$. اگر $n = 2$، کافی‌است $P = \{x_\circ, x_1, 1\}$ انتخاب شود. در غیر این صورت روند بالا را ادامه می‌دهیم و افراز P با خصوصیت یاد شده را بدست می‌آوریم. برای هر $1 \leq i \leq n$، تعریف می‌کنیم

$$h_i(t) = \begin{cases} nf(t) & t \in (x_{i-1}, x_i] \\ \circ & t \notin (x_{i-1}, x_i] \end{cases}$$

به‌وضوح هر h_i اندازه پذیر است و $\|h_i\|_p^p = d(h_i, \circ) = n^p \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|^p dt = n^p \frac{\|f\|_p^p}{n} < r$. بنابراین $h_i \in S_r(\circ) \subseteq V$. از طرفی f تقریباً همه جا با تابع $\frac{h_1 + \cdots + h_n}{n}$ مساوی است و چون V محدب است، لذا $f \in V$. این نشان می‌دهد که $V = L^p([\circ, 1])$. ■

نکته۱. فرض کنید $1 \le p < \infty$ و $\{f_n\}$ نیز دنباله‌ای از اعضای $L^p(X)$ بوده که به تابع اندازه پذیر f همگرای نقطه به نقطه است. فرض کنید

الف) عدد طبیعی n_1 و زیر مجموعه $A \in S$ موجود است که $\mu(A) < +\infty$ و برای هر عدد طبیعی $n \ge n_1$، $\int_{X \setminus A} |f_n|^p d\mu \le 1$.

ب) عدد طبیعی $n_\circ$ و عدد مثبت $\delta < 1$ موجود است که برای هر $F \in S$ که $\mu(F) < \delta$، نامساوی $\int_F |f_n|^p d\mu \le 1$ برای هر $n \ge n_\circ$ برقرار است.

در آن‌صورت $f \in L^p(X)$. در واقع دنباله $\{f_n\}$ به تابع f همگرای نقطه به نقطه است و لذا $\{|f_n^p|\}$ به تابع $|f^p|$ نیز همگرای نقطه به نقطه است. بنا به فرض و لم فاتو، $\int_{X \setminus A} |f|^p d\mu = \int_{X \setminus A} \liminf |f_n|^p d\mu \le \liminf \int_{X \setminus A} |f_n|^p d\mu \le 1$. دوباره از فرض استفاده کرده و لذا برای هر $F \in S$ که $\mu(F) < \delta$، $\int_F |f|^p d\mu \le \liminf \int_F |f_n|^p d\mu \le 1$. از طرفی $\mu(A) < +\infty$ و لذا بنا به قضیه ایگوروف، $B \in S$ با $\mu(B) < \delta$ موجود است که دنباله $\{|f_n|^p\}$ به تابع $|f|^p$ روی $A \setminus B$ همگرای یکنواخت است. لذا عدد طبیعی k موجود است که برای هر $x \in A \setminus B$، $|f(x)|^p \le 1 + |f_k(x)|^p$. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
\int |f(x)|^p d\mu(x) &\le \int_{X \setminus A} |f(x)|^p d\mu(x) + \int_{A \setminus B} |f(x)|^p d\mu(x) + \int_B |f(x)|^p d\mu(x) \\
&\le 1 + \int_{A \setminus B} (1 + |f_k(x)|^p) d\mu(x) + 1 \\
&= 2 + \mu(A \setminus B) + \int_{A \setminus B} |f_k(x)|^p d\mu(x) < +\infty.
\end{aligned}$$

بنابراین $f \in L^p(X)$.

نکته۲. فرض کنید μ اندازه‌ای روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر نامنفی در $L^1(X)$ بوده که به تابع f نقطه به نقطه همگراست. فرض کنید $\lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$. برای هر $A \in S$، با استفاده از لم فاتو

$$\begin{aligned}
\int_A f d\mu = \int_A \liminf f_n d\mu &\le \liminf \int_A f_n d\mu \le \limsup \int_A f_n d\mu \\
&\le \limsup \Big(\int f_n d\mu - \int_{X \setminus A} f_n d\mu \Big) \\
&= \limsup \int f_n d\mu - \liminf \int_{X \setminus A} f_n d\mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \int f d\mu - \liminf \int_{X\setminus A} f_n d\mu\\ &\leq \int f d\mu - \int_{X\setminus A} \liminf f_n d\mu\\ &= \int f d\mu - \int_{X\setminus A} f d\mu = \int_A f d\mu.\end{aligned}$$

از رابطه اخیر داریم $\int_A f d\mu \leq \liminf \int_A f_n d\mu \leq \limsup \int_A f_n d\mu \leq \int_A f d\mu$. بنابراین خواهیم داشت $\liminf \int_A f_n d\mu = \limsup \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu$. لذا $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu$.

نکته۳. فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی نامنفی و $۰ < t < ۱$. تابع $f : (۰, +\infty) \to \mathbb{R}$ را با ضابطه $f(x) = ۱ - t + tx - x^t$ تعریف می‌کنیم. f تابعی مشتق‌پذیر بوده و $f'(x) = t - tx^{t-۱} = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۱$. به‌سادگی دیده می‌شود که $x = ۱$ نقطه می‌نیمم تابع است و لذا برای هر x، $f(x) \geq f(۱) = ۰$. این نتیجه می‌دهد که برای هر $۰ < t < ۱$ و $x > ۰$، $x^t - tx \leq ۱ - t$. دیدیم که $f \geq ۰$ و برای $x \in (۰, +\infty)$، $f(x) = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۱$. از این نتیجه می‌شود که $۱ - t + tx - x^t = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۱$. اکنون فرض کنید $p > ۱$ و q مزدوج p باشد، یعنی $\frac{۱}{q} + \frac{۱}{p} = ۱$. قرار دهید $t = \frac{۱}{p}$. برای دو عدد حقیقی مثبت a و b،

$$\frac{۱}{q} = ۱ - \frac{۱}{p} \geq \left(\frac{a^p}{b^q}\right)^{\frac{۱}{p}} - \frac{a^p}{pb^q}$$

اکنون دو طرف رابطه اخیر را در b^q ضرب کرده و لذا $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. بنا به توضیحات بالا، در رابطه اخیر تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $a^p = b^q$.

قضیه زیر به نامساوی هلدر مشهور است. این قضیه در بررسی نامساوی‌ها نقش مهمی دارد. حالت خاص آن نیز که بعد از قضیه اثبات می‌شود در ریاضی عمومی دیده شده است.

قضیه۴ ـ ۳. *فرض کنید $۱ < p < +\infty$ و q نیز مزدوج p باشد. اگر $f \in L^p(X)$ و $g \in L^q(X)$، در آن‌صورت $fg \in L^۱(X)$ و $\|fg\|_۱ \leq \|f\|_p \|g\|_q$. بعلاوه تساوی برقرار است اگر و تنها اگر دو عدد حقیقی مثبت α و β موجود باشند که $\alpha|f|^p$ و $\beta|g|^q$ تقریباً همه جا با هم مساوی باشند.*

برهان. اگر $\|f\|_p = ۰$ یا $\|g\|_q = ۰$، در آن‌صورت f و یا g تقریباً همه جا صفر است و بنابراین $\int |f(x)g(x)| d\mu(x) = ۰$. فرض کنیم $\|f\|_p \neq ۰$ و $\|g\|_q \neq ۰$. برای هر $x \in X$،

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q}.$$

از دو طرف رابطه اخیر انتگرال گرفته و لذا $\int \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} d\mu(x) \leq \frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$. بنابراین $\|fg\|_۱ \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

اکنون فرض کنید تساوی برقرار باشد. بنابراین

$$\int \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p}+\frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q}-\frac{|f(x)||g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q}d\mu(x)=\circ.$$

چون زیر انتگرال همواره نامنفی است، لذا $\frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p}+\frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q}$ تقریباً همه جا با تابع $\frac{|f(x)||g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q}$ مساوی است. در نتیجه $\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}$ تقریباً همه جا با $\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$ مساوی است. لذا کافی‌است $\alpha=\|g\|_q^q$ و $\beta=\|f\|_p^p$ انتخاب شود.

اکنون فرض کنیم دو عدد مثبت α و β موجود باشند که دو تابع $\alpha|f|^p$ و $\beta|g|^q$ تقریباً همه جا با هم برابر باشند. بنابراین $\alpha\int|f(x)|^pd\mu(x)=\beta\int|g(x)|^qd\mu(x)$ و لذا $\alpha\|f\|_p^p=\beta\|g\|_q^q$. از این روابط نتیجه می‌گیریم که $\frac{\beta|g|^q}{\beta\|g\|_q^q}$ تقریباً همه جا با تابع $\frac{\alpha|f|^p}{\alpha\|f\|_p^p}$ مساوی است. در نتیجه

$$\int \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p}+\frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q}-\frac{|f(x)||g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q}d\mu(x)=\circ$$

و لذا $\|fg\|_1=\|f\|_p\|g\|_q$. ∎

فرض کنیم $\{a_1,\cdots,a_n\}$ و $\{b_1,\cdots,b_n\}$ دو زیر مجموعه از اعداد حقیقی باشند. اندازه شمارشی μ را روی خانواده همه زیر مجموعه‌های $X=\{1,\cdots,n\}$ در نظر می‌گیریم. دو تابع $f,g:X\to\mathbb{R}$ را به صورت $f(i)=a_i$ و $g(i)=b_i$ تعریف می‌کنیم. واضح است که $f=\sum_{i=1}^{n}f(i)\chi_{\{i\}}$ و $g=\sum_{i=1}^{n}g(i)\chi_{\{i\}}$. بنا به نامساوی هلدر

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i|&=\sum_{i=1}^{n}|f(i)g(i)|=\int|f(x)g(x)|d\mu(x)\\&\le\Big(\int|f(x)|^pd\mu(x)\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int|g(x)|^qd\mu(x)\Big)^{\frac{1}{q}}\\&\le\Big(\sum_{i=1}^{n}|f(i)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i=1}^{n}|g(i)|^q\Big)^{\frac{1}{q}}\\&\le\Big(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\Big)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

این همان نامساوی آشنایی است که در ریاضی عمومی بیان و ثابت می‌شود.

قضیه۴ ـ ۴. *فرض کنید $1\le p<+\infty$. دو تابع f و g را در $L^p(X)$ در نظر بگیرید. در آن‌صورت $\|f+g\|_p\le\|f\|_p+\|g\|_p$.*

برهان. فرض کنید $p=1$. برای هر $x\in X$، $|f(x)+g(x)|\le|f(x)|+|g(x)|$ و لذا $\|f+g\|_1\le\|f\|_1+\|g\|_1$. اکنون فرض کنید $p>1$ و q مزدوج p باشد. در آن‌صورت $(p-1)q=p$. چنانچه $\|f+g\|_p=\circ$، حکم به وضوح برقرار است. در غیر این‌صورت با استفاده از نامساوی هلدر

$$\int |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}d\mu(x) \leq \|f\|_p \Big(\int |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}d\mu(x)\Big)^{\frac{1}{q}}$$
$$= \|f\|_p \Big(\|f+g\|_p\Big)^{\frac{p}{q}}$$

و همچنین $\int |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}d\mu(x) \leq \|g\|_p \Big(\|f+g\|_p\Big)^{\frac{p}{q}}$. بنابراین

$$\begin{aligned}(\|f+g\|_p)^p &= \int |f(x)+g(x)|^p d\mu(x)\\ &\leq \int |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}d\mu(x) + \int |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}d\mu(x)\\ &\leq \|f\|_p\Big(\|f+g\|_p\Big)^{\frac{p}{q}} + \|g\|_p\Big(\|f+g\|_p\Big)^{\frac{p}{q}}\\ &= (\|f\|_p+\|g\|_p)\Big(\|f+g\|_p\Big)^{\frac{p}{q}}.\end{aligned}$$

از طرف دیگر $p - \frac{p}{q} = p(1-\frac{1}{q}) = 1$. در نتیجه

$$\|f+g\|_p = \Big(\|f+g\|_p\Big)^{p-\frac{p}{q}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

که این همان حکم قضیه است. ■

نامساوی که در بالا اثبات شد به نامساوی مینکوفسکی معروف است. از این نامساوی نتیجه می‌شود که تابع $f \mapsto \|f\|_p$ یک نرم روی $L^p(X)$ است و بنابراین $L^p(X)$ یک فضای نرمدار است. در همین فصل ثابت می‌کنیم $L^p(X)$ یک فضای باناخ است.

فرض کنید دنباله $\{f_n\}$ و تابع f از فضای $L^p(X)$ داده شده باشد. گوئیم دنباله $\{f_n\}$ به تابع f در نرم L^p همگراست هرگاه $\lim\limits_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p d\mu = 0$.

قضیه ۴ ـ ۵. *فرض کنید $1 \leq p < +\infty$ و $\{f_n\}$ نیز دنباله‌ای از اعضای $L^p(X)$ بوده که به تابع $f \in L^p(X)$ نقطه به نقطه همگراست. شرط لازم و کافی برای آنکه $\{f_n\}$ به f در نرم L^p همگرا باشد آن‌است که $\{\|f_n\|_p\}$ به $\|f\|_p$ همگرا باشد.*

برهان. فرض کنید $\{f_n\}$ به f در نرم L^p همگرا باشد. فرض کنید $\epsilon > 0$ داده شده باشد. عدد طبیعی N وجود دارد که برای هر $n \geq N$، $\|f_n - f\|_p < \epsilon$. بنا به نامساوی مینکوفسکی، $\|f_n\|_p \leq \|f_n - f\|_p + \|f\|_p$ و لذا برای هر $n \geq N$، $\|f_n\|_p - \|f\|_p \leq \|f_n - f\|_p < \epsilon$. به شیوه مشابه برای هر $n \geq N$، $\|f\|_p - \|f_n\|_p \leq \|f - f_n\|_p < \epsilon$. در نتیجه $\{\|f_n\|_p\}$ به $\{\|f\|_p\}$ همگراست.

برای اثبات عکس قضیه، از آنجا که $\{f_n\}$ به f همگرای نقطه به نقطه است، لذا $\{|f_n|^p\}$ به $\|f\|^p$ و $\{|f_n - f|^p\}$ به تابع صفر همگرای نقطه به نقطه است. در نتیجه

$$\begin{aligned}\liminf 2^p(|f_n|^p+|f|^p)-|f_n-f|^p &= \lim_{n\to\infty} 2^p(|f_n|^p+|f|^p)-|f_n-f|^p\\ &= 2^{p+1}|f|^p.\end{aligned}$$

از طرفی $|f_n-f|\le 2\max\{|f_n|,|f|\}$ و لذا $|f_n-f|^p\le 2^p(|f_n|^p+|f|^p)$. از لم فاتو و همگرایی $\{\int|f_n|^pd\mu\}$ به $\int|f|^pd\mu$،

$$\begin{aligned}2^{p+1}\int|f|^pd\mu &= \int\liminf\big(2^p(|f_n|^p+|f|^p)-|f_n-f|^p\big)d\mu\\ &\le \liminf\big(2^p\int|f_n|^pd\mu+2^p\int|f|^pd\mu-\int|f_n-f|^pd\mu\big)\\ &= \lim_{n\to\infty}2^p\big(\int|f_n|^pd\mu+\int|f|^pd\mu\big)-\limsup\int|f_n-f|^pd\mu\\ &= 2^{p+1}\int|f|^pd\mu-\limsup\int|f_n-f|^pd\mu.\end{aligned}$$

لذا $\limsup\int|f_n-f|^pd\mu=0$، که نشان می‌دهد $\{f_n\}$ به f در نرم L^p همگراست. ■

قضیه ۴ ـ ۶. فرض کنید μ اندازه‌ای متناهی روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. فرض کنید $1<p<+\infty$ و $\{f_n\}$ نیز دنباله‌ای کراندار در $L^p(X)$ بوده که به تابع f نقطه به نقطه همگراست. اگر q مزدوج p و $g\in L^q(X)$ دلخواه باشد، در آن‌صورت $\{f_ng\}$ به fg در نرم L^1 همگراست.

برهان. چون $\{f_n\}$ دنباله‌ای کراندار در فضای $L^p(X)$ است، عدد مثبت C وجود دارد که برای هر n، $\|f_n\|_p\le C$. بنا به لم فاتو، $\int|f|^pd\mu\le\liminf\int|f_n|^pd\mu\le C^p$ و لذا $f\in L^p(X)$. فرض کنید $\epsilon>0$ داده شده باشد. عدد مثبت δ موجود است که اگر $E\in S$ و $\mu(E)<\delta$، آن‌گاه $\big(\int_E|g|^qd\mu\big)^{\frac{1}{q}}<\frac{\epsilon}{2^{2+\frac{1}{p}}C}$. بنا به قضیه ایگوروف، $E\in S$ موجود است که $\mu(E)<\delta$ و $\{f_n\}$ روی E^c به تابع f همگرای یکنواخت است. لذا عدد طبیعی N موجود است که برای هر $n\ge N$ و $x\in E^c$، $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\epsilon}{2\|g\|_q\mu(X)^{\frac{1}{p}}+1}$. برای $n\ge N$،

$$\begin{aligned}\int|f_ng-fg|d\mu &= \int_E|f_ng-fg|d\mu+\int_{X\setminus E}|f_ng-fg|d\mu\\ &\le \big(\int_E|f_n-f|^pd\mu\big)^{\frac{1}{p}}\big(\int_E|g|^qd\mu\big)^{\frac{1}{q}}+\int_{X\setminus E}|f_ng-fg|d\mu\\ &\le 2(\|f_n\|_p^p+\|f\|_p^p)^{\frac{1}{p}}\frac{\epsilon}{2^{2+\frac{1}{p}}C}+\int_{X\setminus E}|f_ng-fg|d\mu\\ &\le 2^{1+\frac{1}{p}}C\frac{\epsilon}{2^{2+\frac{1}{p}}C}+\int_{X\setminus E}|f_ng-fg|d\mu\\ &\le \frac{\epsilon}{2}+\big(\int_{X\setminus E}|f_n-f|^pd\mu\big)^{\frac{1}{p}}\big(\int_{X\setminus E}|g|^qd\mu\big)^{\frac{1}{q}}\\ &< \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2\|g\|_q\mu(X)^{\frac{1}{p}}+1}\mu(X)^{\frac{1}{p}}\|g\|_q<\epsilon.\end{aligned}$$

لذا $\{f_n g\}$ به fg در نرم L^1 همگراست. ■

اندازه لبگ را روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $[0,1]$ در نظر بگیرید. دنباله $\{f_n\}$ را با ضابطه $f_n(x) = n\chi_{(0,\frac{1}{n}]}(x)$ تعریف می‌کنیم. برای هر n، $f_n \in L^1([0,1])$ و $\{f_n\}$ به تابع صفر نقطه به نقطه همگراست. قرار دهید $g = \chi_{[0,1]}$. به سادگی دیده می‌شود که $\{\int f_n g d\mu\}$ به تابع صفر همگرا نیست. از طرفی برای هر n، $\|f_n\|_1 = 1$. این نشان می‌دهد که قضیه ۴–۶ لزوماً برای $p = 1$ برقرار نیست.

اندازه لبگ را روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. دنباله $\{f_n\}$ را با ضابطه $f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[1,e^n]}(x)$ تعریف می‌کنیم. فرض کنید $1 < p < +\infty$. برای هر n، $f_n \in L^p(\mathbb{R})$ و $\{f_n\}$ به تابع صفر همگرای یکنواخت است. تابع

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. واضح است که $\{\int f_n g d\mu\}$ به یک همگراست. این نتیجه می‌دهد که شرط متناهی بودن اندازه X در قضیه ۴–۶ لازم است.

قضیه ۴ ـ ۷. *اندازه متناهی μ را روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X در نظر بگیرید. فرض کنید $1 \leq p < +\infty$ و $\{f_n\}$ نیز دنباله‌ای در $L^p(X)$ بوده که به تابع f با نرم L^p همگراست. فرض کنید $\{g_n\}$ دنباله‌ای کراندار یکنواخت از توابع اندازه پذیر بوده که به تابع g همگرای نقطه به نقطه است. در آن‌صورت $\{f_n g_n\}$ به fg در نرم L^p همگرا است.*

برهان. چون $\{g_n\}$ دنباله‌ای کراندار یکنواخت است، عدد مثبت C وجود دارد که برای هر n و هر $x \in X$، $|g_n(x)| \leq C$. لذا برای هر n، $|fg_n|^p \leq C^p|f|^p$. بنا به قضیه همگرایی مغلوب و همگرایی نقطه به نقطه $\{fg_n\}$ به تابع fg، $\lim_{n\to\infty}\int |f^p g_n^p| d\mu = \int |f^p g^p| d\mu$. بنابراین $\lim_{n\to\infty}\int |fg_n - fg|^p d\mu = 0$. با استفاده از نامساوی مینکوفسکی،

$$\begin{aligned} \|f_n g_n - fg\|_p &\leq \|f_n g_n - fg_n\|_p + \|fg_n - fg\|_p \\ &= \Big(\int |g_n|^p |f_n - f|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int |fg_n - fg|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \Big(C^p \int |f_n - f|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int |fg_n - fg|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

چون $\{f_n\}$ در نرم L^p به f و نیز $\lim_{n\to\infty}\int |fg_n - fg|^p d\mu = 0$، لذا $\{f_n g_n\}$ به تابع fg در نرم L^p همگراست. ■

قضیه استون وایراشتراس بیان می‌کند که می‌توان هر تابع پیوسته روی بازه $[a,b]$ را با یک چند

جمله‌ای تقریب زد. این تقریب در حل بسیاری از مسائل در مورد توابع پیوسته کارساز است. در زیر قصد داریم نشان دهیم که می‌توان هر تابع در $L^p(\mathbb{R})$ را با یک تابع پیوسته که خارج فشرده‌ای صفر است، تقریب زد.

قضیه ۴ ـ ۸. *فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $\mathbb{R}$ باشد. فرض کنید $1 \leq p < +\infty$ و زیر مجموعه A از اعداد حقیقی دارای اندازه مثبت و متناهی است. در آن‌صورت دنباله‌ای از توابع $\{\phi_n\}$ در $C_{00}(\mathbb{R})$ وجود دارد که $\{\phi_n\}$ به χ_A در نرم L^p همگراست.*

برهان. برای $n = 1$، زیر مجموعه باز U_1 و زیر مجموعه فشرده F_1 از اعداد حقیقی وجود دارد که $F_1 \subseteq A \subseteq U_1$ و $\mu(U_1 \setminus F_1) < 1$. برای $n = 2$، زیر مجموعه باز U_2^* و زیر مجموعه فشرده F_2^* از اعداد حقیقی وجود دارد که $F_2^* \subseteq A \subseteq U_2^*$ و $\mu(U_2^* \setminus F_2^*) < \frac{1}{2}$. قرار می‌دهیم $U_2 = U_1 \cap U_2^*$ و $F_2 = F_1 \cup F_2^*$. واضح است که $F_2 \subseteq A \subseteq U_2$ و $\mu(U_2 \setminus F_2) < \frac{1}{2}$. با ادامه این روند دنباله صعودی از زیر مجموعه‌های فشرده $\{F_n\}$ و همچنین دنباله‌ای از زیر مجموعه‌های باز نزولی $\{U_n\}$ وجود دارد که $F_n \subseteq A \subseteq U_n$ و $\mu(U_n \setminus F_n) < \frac{1}{n}$. لم اوریسون وجود تابع پیوسته $\phi_n \in C_{00}(\mathbb{R})$ که $\chi_{F_n} \leq \phi_n \leq \chi_{U_n}$ را تضمین می‌کند. نشان می‌دهیم $\{\phi_n\}$ دنباله مطلوب است. قرار می‌دهیم $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. برای هر عدد طبیعی n، $\mu(E) \leq \mu(U_n \setminus F_n) < \frac{1}{n}$ و لذا $\mu(E) = 0$. اکنون فرض کنیم $x \notin E$. دو حالت اتفاق می‌افتد، اول اینکه برای حداقل یک m، $x \in F_m$. چون $\{F_n\}$ دنباله‌ای صعودی از مجموعه‌هاست، لذا برای هر $n \geq m$، $x \in F_n$. در نتیجه برای هر $n \geq m$، $\phi_n(x) = 1$ و بنابراین $\{\phi_n(x)\}$ به $\chi_A(x)$ همگراست. حالت دوم اینکه برای حداقل یک m، $x \notin U_m$. چون $\{U_n\}$ دنباله‌ای نزولی از مجموعه‌هاست، لذا برای هر $n \geq m$، $x \notin U_n$. در نتیجه برای هر $n \geq m$، $\phi_n(x) = 0$ و بنابراین $\{\phi_n(x)\}$ به $\chi_A(x)$ همگراست. نتیجه اینکه دنباله $\{\phi_n\}$ روی E^c به تابع χ_A نقطه به نقطه همگراست و لذا $\{\phi_n\}$ به تابع χ_A تقریباً همه جا همگراست. از طرفی برای هر n، $\phi_n \leq \chi_{U_1}$ و همینطور $\chi_A \leq \chi_{U_1}$. بنابراین برای هر n، $|\phi_n - \chi_A| \leq 2\chi_{U_1}$ و بنا به قضیه همگرایی مغلوب،

$$\lim_{n\to\infty} \|\phi_n - \chi_A\|_p^p = \lim_{n\to\infty} \int |\phi_n - \chi_A|^p d\mu = 0.$$

بنابراین $\{\phi_n\}$ به تابع χ_A با نرم L^p همگراست. ■

مثال ۴ ـ ۱. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $(0, 1)$ باشد. دنباله توابع $\{f_n\}$ را با ضابطه $f_n(x) = \sqrt{n}e^{-nx}$ در نظر می‌گیریم.

واضح است که $\{f_n\}$ نقطه به نقطه به تابع صفر همگراست. در واقع برای $x \in (0,1)$، $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}e^{-(n+1)x}}{\sqrt{n}e^{-nx}} = e^{-x} < 1$ و لذا $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}e^{-nx}$ همگراست. نتیجه اینکه $\{\sqrt{n}e^{-nx}\}$ به صفر همگراست. برای هر عدد طبیعی n، $1 \leq \int f_n(x)^2 d\mu(x) = \frac{1}{2}(1-e^{-2n})$. لذا $\{f_n\}$ دنباله‌ای کراندار در $L^2((0,1))$ بوده و $\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)^2 d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(1-e^{-2n}) = \frac{1}{2}$.

فرض کنید $\phi = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i} \in L^2((0,1))$ تابعی ساده باشد. در آن‌صورت

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\phi(x)d\mu(x) &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}(x) d\mu(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \int_0^1 f_n(x)\chi_{A_i}(x) d\mu(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \int_{A_i} f_n(x) d\mu(x).\end{aligned}$$

از طرفی $\int_0^1 f_n(x)d\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}(1-e^{-n})$ و لذا $\{f_n\}$ در $L^1((0,1))$ به تابع صفر همگراست. بنابه نکته ۲، $\lim_{n\to\infty} \int_{A_i} f_n(x)d\mu(x) = \int_{A_i} \lim_{n\to\infty} f_n(x)d\mu(x) = 0$. در نتیجه $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\phi(x)d\mu(x) = 0$. اکنون فرض کنید $g \in L^2((0,1))$ و $\epsilon > 0$ داده شده باشد. تابعی ساده مانند $\phi \in L^2((0,1))$ موجود است که $\int_0^1 |g-\phi|^2 d\mu < \frac{\epsilon^2}{4}$. بنا به توضیحات بالا عدد طبیعی N وجود دارد که برای هر $n \geq N$، $\int_0^1 |f_n(x)\phi(x)|d\mu(x) < \frac{\epsilon}{2}$. بدین ترتیب برای هر عدد طبیعی $n \geq N$،

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f_n g|(x)d\mu(x) &\leq \int_0^1 |f_n(x)||g(x)-\phi(x)|d\mu(x) + \int_0^1 |f_n\phi|(x)d\mu(x) \\ &\leq \|f_n\|_2\|g-\phi\|_2 + \int_0^1 |f_n(x)\phi(x)|d\mu(x) < \epsilon.\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)g(x)d\mu(x) = 0$.

اندازه لبگ را روی خانواده همه زیر مجموعه‌های $[0,1]$ در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم $\mathcal{A} = \{r_0 + r_1x + \cdots + r_nx^n;\ r_i \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N}\}$. واضح است که $\mathcal{A}$ زیر مجموعه‌ای شمارا از $C([0,1])$ است. اگر $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ یک چند جمله‌ای با ضرائب حقیقی از $C([0,1])$ باشد، چون $\mathbb{Q}$ در اعداد حقیقی چگال است، لذا دنباله‌ای از اعضای $\mathcal{A}$ وجود دارد که به $p(x)$ همگرای یکنواخت است. بنا به قضیه استون وایراشتراس، مجموعه همه چند جمله‌ای ها با ضرائب حقیقی در $C([0,1])$ چگال بوده و لذا $\mathcal{A}$ در $C([0,1])$ چگال است. این نشان می‌دهد که

$C([\circ,\text{۱}])$ تفکیک پذیر است. اگر $f \in L^p([\circ,\text{۱}])$ تابعی نامنفی و $\epsilon > \circ$ داده شده باشد، تابع ساده s وجود دارد که $\|f - s\|_p < \frac{\epsilon}{\text{۳}}$. بنا به برهان قضیه ۴ــ۸، $\phi \in C([\circ,\text{۱}])$ وجود دارد که $\|s - \phi\|_p < \frac{\epsilon}{\text{۳}}$. $r(x) \in \mathcal{A}$ موجود است که $\|\phi - r\| < \frac{\epsilon}{\text{۳}}$. با انتگرال گیری از دو طرف نامساوی اخیر، $\|\phi - r\|_p \le \frac{\epsilon}{\text{۳}}$. با استفاده از نامساوی مینکوفسکی $\|f - r\|_p < \epsilon$. چون هر عنصر در $L^p([\circ,\text{۱}])$ تفاضل دو تابع نامنفی در $L^p([\circ,\text{۱}])$ است، لذا $\mathcal{A}$ در $L^p([\circ,\text{۱}])$ چگال است. یعنی $L^p([\circ,\text{۱}])$ تفکیک پذیر است.

اندازه شمارشی μ را روی خانواده همه زیر مجموعه‌های $\mathbb{N}$ در نظر می‌گیریم. واضح است که اعضای $L^p(\mathbb{N})$ $(\text{۱} \le p < +\infty)$ مجموعه همه دنباله‌هایی مانند $\{x_n\}$ هستند که $\sum_{n=\text{۱}}^{\infty} |x_n|^p < +\infty$. مرسوم است که از نماد l^p به جای $L^p(\mathbb{N})$ استفاده شود. $\mathcal{D}$ را خانواده همه دنباله‌هایی در نظر می‌گیریم که تنها تعداد متناهی مولفه آن ناصفر و مولفه‌های ناصفر آن نیز اعداد گویا باشند. فرض کنید $x \in l^p$ و $\epsilon > \circ$ داده شده باشد. عدد طبیعی k هست که $\sum_{n=k+\text{۱}}^{\infty} |x_n|^p < \frac{\epsilon^p}{\text{۲}}$. برای هر $\text{۱} \le i \le k$، عدد گویای r_i وجود دارد که $|x_i - r_i|^p < \frac{\epsilon^p}{\text{۲}^{i+\text{۲}}}$. دنباله $\{s_n\}$ در $\mathcal{D}$ را با ضابطه

$$s_n = \begin{cases} r_n & n \le k \\ \circ & n > k \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. خواهیم داشت

$$\|s - x\|_p^p = \sum_{i=\text{۱}}^{k} |r_i - x_i|^p + \sum_{i=k+\text{۱}}^{\infty} |x_i|^p < \epsilon^p$$

و لذا $\mathcal{D}$ در l^p چگال است. توجه کنید که $\mathcal{D}$ زیر مجموعه‌ای حداکثر شمارا بوده و لذا l^p تفکیک پذیر است.

نکته ۴. اندازه لبگ μ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $\mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید $\text{۱} \le p < +\infty$ و $f : \mathbb{R} \to [\circ, +\infty]$ تابعی از فضای $L^p(\mathbb{R})$ باشد. دنباله‌ای صعودی از توابع ساده مانند $\{s_n\}$ وجود دارد که به تابع f نقطه به نقطه همگراست. واضح است که دنباله توابع $\{s_n\chi_{[\circ,n]}\}$ نیز به تابع f همگرای نقطه به نقطه است. از اینکه برای هر عدد طبیعی n، $|s_n\chi_{[\circ,n]} - f| \le \text{۲}f$. قضیه همگرایی مغلوب تساوی $\lim_{n\to\infty} \int |s_n\chi_{[\circ,n]} - f|^p d\mu = \circ$ را تضمین می‌کند. اگر $\epsilon > \circ$ داده شده باشد، عدد طبیعی n موجود است که $\|s_n\chi_{[\circ,n]} - f\|_p < \frac{\epsilon}{\text{۲}}$. بنا به قضیه ۴ــ۸، $\phi \in C_{\circ\circ}(\mathbb{R})$ وجود دارد که $\|\phi - s_n\chi_{[\circ,n]}\|_p < \frac{\epsilon}{\text{۲}}$. در نتیجه

$$\|f - \phi\|_p \le \|\phi - s_n\chi_{[\circ,n]}\|_p + \|s_n\chi_{[\circ,n]} - f\|_p < \epsilon.$$

در حالت کلی فرض کنید $f : X \to [-\infty, +\infty]$ تابعی از فضای $L^p(\mathbb{R})$ باشد. لذا f^+ و f^-

توابعی نامنفی از فضای $L^p(\mathbb{R})$ هستند. برای $\epsilon > 0$، دو تابع ϕ و ψ در $C_{00}(\mathbb{R})$ وجود دارند که $\|\phi - f^+\|_p < \frac{\epsilon}{2}$ و $\|\psi - f^-\|_p < \frac{\epsilon}{2}$. در نتیجه $\|\phi - \psi - f\|_p = \|\phi - \psi - f^+ + f^-\|_p < \epsilon$.
این نشان می‌دهد که مجموعه همه توابع پیوسته که خارج فشرده صفر هستند در $L^p(\mathbb{R})$ چگال است.

قضیه ۴ ـ ۹. *فرض کنید $1 \le p < +\infty$ و $\{f_n\}$ دنباله‌ای کوشی از توابع در $L^p(X)$ باشد. در آن‌صورت زیر دنباله‌ای از $\{f_n\}$ مانند $\{f_{n_i}\}$ موجود است که به تابعی چون $f \in L^p(X)$ نقطه به نقطه همگراست. بعلاوه $\{f_n\}$ به f در نرم L^p همگراست.*

برهان. چون $\{f_n\}$ دنباله‌ای کوشی در فضای $L^p(X)$ است، لذا زیر دنباله $\{f_{n_i}\}$ از $\{f_n\}$ وجود دارد که برای هر i،

$$\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p < \frac{1}{2^i}.$$

فرض کنیم $g_n = \sum_{i=1}^{n} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$ مجموع جزئی سری $g = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$ باشد. واضح است که برای هر n، $g_n \in L^p(X)$ و بنا به نامساوی مینکوفسکی $\|g_n\|_p \le 1$. لم فاتو را برای دنباله توابع $\{g_n\}$ بکار برده و لذا

$$\|g\|_p^p = \int \lim_{n\to\infty} g_n^p d\mu \le \liminf \int g_n^p d\mu \le 1.$$

بنابراین g تقریباً همه جا متناهی است و بنابراین $f_{n_1} + \sum_{i=1}^{\infty} f_{n_{i+1}} - f_{n_i}$ تقریباً همه جا مطلقاً همگراست. برای x هایی که سری اخیر همگراست مقدار آن را با $f(x)$ نمایش داده و جاهایی که سری همگرا نیست، مقدار f را صفر تعریف می‌کنیم. واضح است که f اندازه‌پذیر بوده و

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{k} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i}) = f_{n_{k+1}}$$

به تابع f تقریباً همه جا همگراست. این نشان می‌دهد که $\{f_{n_k}\}$ به تابع f تقریباً همه جا همگراست. اکنون ثابت می‌کنیم $f \in L^p(X)$ و $\{f_n\}$ به f در نرم L^p همگراست. اگر $\epsilon > 0$ داده شده باشد، عدد طبیعی N وجود دارد که برای هر $m, n \ge N$، $\|f_n - f_m\|_p < \epsilon$. با استفاده از لم فاتو، برای هر $m \ge N$،

$$\int |f - f_m|^p d\mu \le \liminf \int |f_{n_i} - f_m|^p d\mu < \epsilon^p \qquad (1)$$

این نشان می‌دهد که $f - f_N \in L^p(X)$ و لذا $f = f - f_N + f_N \in L^p(X)$. از رابطه (۱) نتیجه می‌گیریم که برای هر $m \ge N$، $\|f_m - f\|_p < \epsilon$ و این برهان را کامل می‌کند. ■

مثال ۴ ـ ۲. در زیر به ارائه چند مثال می‌پردازیم. در این مثال μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های اندازه پذیر از $\mathbb{R}$ است.

الف) فرض کنیم $1 \leq p < +\infty$. دنباله توابع $\{f_n\}$ را با ضابطه

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} & x \in [0, n] \\ 0 & x \notin [0, n] \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. اگر $\epsilon > 0$ داده شده باشد، عدد طبیعی N موجود است که $\frac{1}{N} < \epsilon^p$. برای هر $n \geq N$ و $x \in \mathbb{R}$، $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} < \epsilon$ و لذا $\{f_n\}$ به‌طور یکنواخت به صفر همگراست.

از طرفی برای هر n، $\int f_n(x)^p d\mu = 1$ و لذا $\{f_n\}$ در نرم L^p به تابع صفر همگرا نیست.

ب) بازه بسته $[0, 1]$ را برای هر عدد طبیعی n به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم، یعنی

$$[0, \frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \cup \cdots \cup [\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}].$$

بازه‌های تقسیم شده برای هر n را به شکل زیر مرتب می‌کنیم

$$[0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1], [0, \frac{1}{3}], [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], [\frac{2}{3}, 1], [0, \frac{1}{4}], \cdots$$

قرار می‌دهیم $f_1 = \chi_{[0, \frac{1}{2}]}$، $f_2 = \chi_{[\frac{1}{2}, 1]}$، $f_3 = \chi_{[0, \frac{1}{3}]}$ و الی آخر. واضح است که دنباله تعریف شده $\{f_n\}$ در L^1 نرم به صفر همگراست، ولی $\{f_n\}$ به صفر همگرا نیست.

ج) برای هر عدد طبیعی n، تعریف می‌کنیم $f_n = \frac{1}{n}\chi_{(n, 2n)}$. اگر $1 < p < +\infty$، در آن‌صورت

$$\int f_n^p d\mu = \frac{1}{n^p} \int_n^{2n} 1 d\mu = \frac{1}{n^{p-1}}$$

و لذا $\{f_n\}$ با نرم L^p به صفر همگراست. از طرفی برای هر n، $\int f_n d\mu = 1$. این نشان می‌دهد که $\{f_n\}$ در نرم L^1 به صفر همگرا نیست.

فرض کنیم دنباله توابع $\{f_n\}$ از اعضای $L^p(X)$ در نرم L^p به تابع $f \in L^p(X)$ همگرا باشد. فرض کنیم این دنباله در اندازه به f همگرا نباشد. لذا عدد مثبت ϵ و زیر دنباله $\{f_{n_i}\}$ وجود دارد که برای هر i، $\mu(\{x \in X;\ |f_{n_i}(x) - f(x)| > \epsilon\}) \geq \epsilon$. برای هر i، قرار می‌دهیم $E_{n_i} = \{x \in X;\ |f_{n_i}(x) - f(x)| > \epsilon\}$ و لذا

$$\begin{aligned} \|f_{n_i} - f\|_p^p &= \int |f_{n_i} - f|^p d\mu \\ &\geq \int_{E_{n_i}} |f_{n_i} - f|^p d\mu \geq \epsilon^{p+1}. \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که $\{f_{n_i}\}$ در نرم L^p به f همگرا نیست که یک تناقض است.

نکته۵. دیدیم که دنباله‌ای از توابع نامنفی و اندازه پذیر لبگ $\{f_n\}$ وجود دارد که به تابع f همگرای یکنواخت است، ولی $\int f_n d\mu$ به $\int f d\mu$ همگرا نیست. این موضوع نشان می‌دهد که دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر وجود دارد که در اندازه به تابعی مانند f همگراست، ولی با نرم L^1 به f همگرا نیست. در واقع فرض کنیم هر دنباله که در اندازه به تابعی چون f همگرا باشد با نرم L^1 نیز به f همگرا باشد. بنابراین از همگرایی یکنواخت، همگرایی در اندازه نتیجه می‌شود و بنا به فرض خلف

این دنباله باید با نرم L^1،نیز همگرا باشد که اینطور نیست.

نکته۶. چند نکته کوتاه در زیر آورده شده است:

الف) فرض کنید $1 \leq p < q < +\infty$ و $\mu(X) < +\infty$. برای $f \in L^q(X)$، واضح است که $\int |f|^p d\mu \leq \int 1 + |f|^q d\mu = \mu(X) + \|f\|_q^q$. این نتیجه می‌دهد که $L^q(X) \subseteq L^p(X)$.

ب) اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $[1, +\infty)$ را با μ نمایش می‌دهیم. برای هر n، تابع $f_n : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ را با ضابطه $f_n(x) = \frac{1}{x}\chi_{[1,n]}$ تعریف می‌کنیم. واضح است که $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر است. واضح است که برای هر n، $\int f_n^2 d\mu = 1 - \frac{1}{n}$ و $\int f_n d\mu = ln(n)$. همینطور $\{f_n\}$ نقطه به نقطه به تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ و $\{f_n^2\}$ نقطه به نقطه به تابع f^2 همگراست. بنا به قضیه همگرایی یکنوا، $\int f^2 d\mu = 1$ و $\int f d\mu = +\infty$. لذا $f \in L^2([1, +\infty)) \setminus L^1([1, +\infty))$.

ج) اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای کراندار از فضای $L^2(X)$ باشد، در آن‌صورت سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2}{n^2}$ تقریباً همه جا همگراست. در واقع از کرانداری این دنباله در این فضا نتیجه می‌گیریم که عددی مانند k وجود دارد که برای هر n، $\|f_n\|_2 \leq k$. می‌توان نوشت

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2}{n^2} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{f_n^2}{n^2} d\mu \leq k^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

و لذا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2}{n^2}$ تقریباً همه جا همگراست.

۴ــ۳ فضای L^∞

در این بخش نیز S در فضای اندازه (X, S, μ) یک σ جبر است.

تعریف ۴ ــ ۱۰. تابع اندازه پذیر $f : X \to \mathbb{R}$ را اساساً کراندار گوئیم هرگاه عددی مانند α موجود بوده که $|f|$ تقریباً همه جا از عدد ثابت α کمتر یا مساوی باشد. مجموعه همه توابع اساساً کراندار روی X را با نماد $L^\infty(X)$ نمایش می‌دهیم.

توجه کنید که زیر مجموعه‌های اندازه پذیر با اندازه صفر را زیر مجموعه‌های پوچ فضا گوئیم. واضح است که شرط لازم و کافی برای آنکه $f \in L^\infty(X)$، آن است که عددی مانند α موجود باشد که $\{x \in X;\ |f(x)| > \alpha\}$ پوچ باشد. در فضای $L^\infty(X)$ دو تابع را مساوی گوئیم هرگاه آن دو تابع تقریباً همه جا با هم مساوی باشند. قصد داریم روی $L^\infty(X)$ یک نرم قرار دهیم. برای $f \in L^\infty(X)$، تعریف می‌کنیم $\|f\|_\infty = \inf\{\alpha;\ \{x;\ |f(x)| > \alpha\}$ پوچ است$\}$. بنا به تعریف،

برای هر n، $\{x\in X;\ |f(x)|>\|f\|_\infty+\frac{1}{n}\}$ پوچ است و لذا

$$\{x\in X;\ |f(x)|>\|f\|_\infty\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in X;\ |f(x)|>\|f\|_\infty+\frac{1}{n}\}$$

پوچ است. این موضوع نشان می‌دهد که در اینفیموم تعریف شده در بالا، مجموعه فوق اینفیموم خود را شامل است و اینفیموم همان می‌نیمم مجموعه است. تابع $f\mapsto\|f\|_\infty$ یک نرم روی $L^\infty(X)$ است. در واقع بنا به قرارداد، f صفر است اگر و تنها اگر $\|f\|_\infty=0$. واضح است که برای هر c، $\|cf\|_\infty=|c|\|f\|_\infty$. برای هر دو عنصر $f,g\in L^\infty(X)$، $|f|$ و $|g|$ به ترتیب از $\|f\|_\infty$ و $\|g\|_\infty$ تقریباً همه جا کمتر یا مساوی هستند و لذا $|f+g|$ تقریباً همه جا از $\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$ کمتر یا مساوی است. بنابراین $\|f+g\|_\infty\le\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$ و لذا $f\mapsto\|f\|_\infty$ یک نرم است.

مثال۴ ـ ۳. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $\mathbb{R}$ باشد. در مثال‌های زیر ارتباط بین L^∞ و L^p را مشخص می‌کند.

الف) تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=1$ در $L^\infty(\mathbb{R})$ قرار دارد ولی برای هر $1\le p<+\infty$، $f\notin L^p(\mathbb{R})$.

ب) فرض کنید $X=(0,1)$ و $1<p<+\infty$. تابع $f:X\to\mathbb{R}$ را با ضابطه $f(x)=x^{\frac{-1}{p}}$ تعریف می‌کنیم. برای هر عدد طبیعی m، $\{x;\ f(x)>m\}$ پوچ نیست. این نشان می‌دهد که $f\notin L^\infty(X)$. برای هر n، تعریف می‌کنیم $f_n=\chi_{[\frac{1}{n},1)}x^{\frac{-1}{p}}$. واضح است که دنباله $\{f_n\}$ دنباله‌ای صعودی از توابع اندازه پذیر است که به تابع f همگرای نقطه به نقطه است. برای هر n،

$$\int f_n d\mu=\int_{\frac{1}{n}}^{1}x^{\frac{-1}{p}}d\mu=q-\left(\frac{1}{n}\right)^q.$$

بنا به قضیه همگرایی یکنوا، $\int f d\mu=\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n d\mu=q$. این نتیجه می‌دهد که $f\in L^1((0,1))$ ولی $f\notin L^\infty((0,1))$.

نکته۷. فرض کنید μ اندازه‌ای متناهی روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای کراندار در $L^1(X)$ بوده که در اندازه به تابع صفر همگراست. فرض کنید $g\in L^1(X)$ عنصری دلخواه و دنباله $\{\int\sqrt{|f_ng|(x)}d\mu(x)\}$ به تابع صفر همگرا نباشد. لذا $\delta>0$ و زیر دنباله‌ای مانند $\{\int\sqrt{|f_{n_k}g|(x)}d\mu(x)\}$ از $\{\int\sqrt{|f_ng|(x)}d\mu(x)\}$ وجود دارد که برای هر k، $\int\sqrt{|f_{n_k}g|(x)}d\mu(x)\ge\delta$. بنا به نامساوی هلدر، $\left(\int\sqrt{|f_{n_k}g|(x)}d\mu(x)\right)^2\le\int|f_{n_k}|(x)d\mu(x)\int|g(x)|d\mu(x)$. چون $\{f_{n_k}\}$ در اندازه به صفر همگراست، زیر دنباله $\{f_{n_{k_m}}\}$ از $\{f_{n_k}\}$ وجود دارد که به تابع صفر همگرای نقطه به نقطه

است. فرض کنید M عددی باشد که برای هر n، $\|f_n\|_1 \leq M$ و $\epsilon > 0$ نیز داده شده باشد. بنا به قضیه ایگوروف، $E \in S$ وجود دارد که $\mu(E) < \frac{\epsilon}{2M}$ و $\{f_{n_{k_m}}\}$ روی E^c به تابع صفر همگرای یکنواخت است. بنابراین عدد طبیعی N وجود دارد که برای هر $m \geq N$ و هر $x \in E^c$، $|f_{n_{k_m}}(x)| < \frac{\epsilon}{2\mu(X)}$ و لذا $\int_E |f_{n_{k_m}}(x)|d\mu(x) \leq \|f_{n_{k_m}}\|_1 \mu(E) < \frac{\epsilon}{2}$. بنابراین برای هر $m \geq N$،

$$\begin{aligned}\int |f_{n_{k_m}}(x)|d\mu(x) &= \int_{X\setminus E} |f_{n_{k_m}}(x)|d\mu(x) + \int_E |f_{n_{k_m}}(x)|d\mu(x) \\ &\leq \int_{X\setminus E} \frac{\epsilon}{2\mu(X)} d\mu(x) + \int_E |f_{n_{k_m}}(x)|d\mu(x) < \epsilon.\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که $\lim_{m\to\infty} \int |f_{n_{k_m}}(x)|d\mu(x) = 0$ و لذا $\lim_{m\to\infty} \int \sqrt{|f_{n_{k_m}} g(x)|}d\mu(x) = 0$. این یک تناقض است و لذا دنباله $\{\int \sqrt{|f_n g|(x)}d\mu(x)\}$ به صفر همگراست.

قضیه ۴ ـ ۱۱. *$L^\infty(X)$ یک فضای باناخ است.*

برهان. فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای کوشی در فضای $L^\infty(X)$ باشد. برای هر دو عدد طبیعی m, n، قرار می‌دهیم

$$A_{n,m} = \{x \in X;\ |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}$$

و همچنین $B_n = \{x \in X;\ |f_n(x)| > \|f_n\|_\infty\}$. لذا $\{f_n\}$ خارج $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} B_n \cup A_{n,m}$ کوشی است. در حقیقت برای هر $x \notin E$ و $m, n \in \mathbb{N}$، $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$ و چون $\{f_n\}$ دنباله‌ای کوشی در $L^\infty(X)$ است. لذا برای هر $x \notin E$، $\{f_n(x)\}$ کوشی است و لذا همگراست. از طرفی E پوچ است و بنابراین تابع اندازه پذیر f وجود دارد که $\{f_n\}$ به f تقریباً همه جا همگراست.

اکنون فرض کنیم $\epsilon > 0$ داده شده باشد، عدد طبیعی N وجود دارد که برای هر $m, n \geq N$، $\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon$. برای هر $x \notin E$ و $n \geq N$، $|f_n(x) - f_N(x)| \leq \|f_n - f_N\|_\infty < \epsilon$. بنابراین $|f(x) - f_N(x)| < \epsilon$. این نتیجه می‌دهد که برای هر $x \notin E$، $|f(x)| \leq \epsilon + |f_N(x)| \leq \epsilon + \|f_N\|_\infty$. این نشان می‌دهد که $f \in L^\infty(X)$. از توضیحات بالا چنین بر می‌آید که برای هر $x \notin E$ و $n \geq N$، $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ و لذا برای هر $n \geq N$، $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon$. ∎

اندازه شمارشی μ را روی $P(\mathbb{N})$ در نظر می‌گیریم. $L^\infty(\mathbb{N})$ مجموعه همه دنباله‌های کراندار $\{x_n\}$ است. مرسوم است که در این حالت از نماد l^∞ به جای $L^\infty(\mathbb{N})$ استفاده شود. برای $x \in l^\infty$، واضح است که $\|x\|_\infty = \sup\{|x_i|;\ i \in \mathbb{N}\}$. گوئیم l^∞ تفکیک پذیر نیست. در واقع فرض کنیم $D = \{z_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ زیر مجموعه‌ای از l^∞ باشد. فرض کنیم برای هر n، $z_n = (z_1^n, z_2^n, \cdots)$.

دنباله $x \in l^\infty$ را با ضابطه

$$x_n = \begin{cases} z_n^n + 1 & |z_n^n| < 1 \\ 0 & |z_n^n| \geq 1 \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. در این‌صورت برای هر n، $|x_n - z_n^n| \geq 1$. بنابراین برای هر n، $\|x - z_n\|_\infty \geq 1$. این نشان می‌دهد که گوی به مرکز x و شعاع یک هیچ عنصری از D را شامل نیست و بنابراین D در l^∞ چگال نیست. نتیجه اینکه l^∞ تفکیک پذیر نیست.

برای هر $x \in (0, 1)$، تعریف می‌کنیم $f_x = \chi_{[0,x]}$. واضح است که $f_x \in L^\infty([0, 1])$. برای هر دو عنصر $x, y \in (0, 1)$، $\|f_x - f_y\|_\infty = 1$. لذا $\{S_1(f_x);\ x \in (0, 1)\}$ خانواده‌ای ناشمارا از زیر مجموعه‌های باز مجزا از $L^\infty([0, 1])$ است و بنابراین $L^\infty([0, 1])$ تفکیک پذیر نیست.

دیدید که برای هر $1 \leq p < +\infty$، $L^p([0, 1])$ تفکیک پذیر و لذا شمارای دوم است. چون $L^\infty([0, 1])$ تفکیک پذیر نیست، شمارای دوم نیز نیست.

نکته۸. فرض کنید $\mu(X) < +\infty$ و $f \in L^\infty(X)$. واضح است که برای هر $1 \leq p < +\infty$،

$$\Big(\int |f|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\int \|f\|_\infty^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty \mu(X)^{\frac{1}{p}}.$$

این نشان می‌دهد که برای هر $1 \leq p < +\infty$، $f \in L^p(X)$. واضح است که

$$\limsup \|f\|_p \leq \|f\|_\infty \lim_{p\to\infty} \mu(X)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty.$$

فرض کنید $\epsilon > 0$ داده شده باشد. از اینکه $\|f\|_\infty - \epsilon < \|f\|_\infty$، زیر مجموعه اندازه پذیر با اندازه مثبت E وجود دارد که اگر $x \in E$، $|f(x)| \geq \|f\|_\infty - \epsilon$. بنابراین

$$\begin{aligned}\|f\|_p = \Big(\int |f|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} &\geq \Big(\int_E |f|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq (\|f\|_\infty - \epsilon)\mu(E)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

بنابراین $\liminf \|f\|_p \geq \|f\|_\infty - \epsilon$. داریم

$$\limsup \|f\|_p \leq \|f\|_\infty \lim_{p\to\infty} \mu(X)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty \leq \liminf \|f\|_\infty + \epsilon.$$

این نشان می‌دهد که $\limsup \|f\|_p = \liminf \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

تعریف۴ ـ ۱۲. تابع $\psi : (a, b) \to \mathbb{R}$ را محدب گوئیم هرگاه برای هر $0 < t < 1$ و $x, y \in (a, b)$، $\psi(tx + (1 - t)y) \leq t\psi(x) + (1 - t)\psi(y)$.

اگر $\psi : (a, b) \to \mathbb{R}$ تابعی دلخواه باشد، برای هر $x, y \in (0, 1)$، قرار می‌دهیم $\psi(x, y) = \dfrac{\psi(y) - \psi(x)}{y - x}$. از این نماد برای ادامه کار استفاده خواهیم کرد. همانطور که در دروس آنالیز ریاضی دیده‌اید برای هر تابع محدب ψ و $a < s < t < u < b$،

$\psi(s,t) \le \psi(s,u) \le \psi(t,u)$. علاوه براین اگر ψ دارای مشتق دوم مثبت باشد، آن‌گاه ψ محدب است.

قضیه ۴ ـ ۱۳. *فرض کنید $f : X \to (a,b)$ تابعی اندازه پذیر و $\mu(X) = ۱$. اگر $\psi : (a,b) \to \mathbb{R}$ تابعی محدب باشد، آن‌گاه $\psi(\int f d\mu) \le \int \psi o f d\mu$.*

برهان. چون f اندازه پذیر و کراندار است، لذا انتگرال‌پذیر است. قرار دهید $t = \int f d\mu$ و فرض کنید $t = b$. از اینکه $b - f \ge ۰$ و $\int b - f d\mu = ۰$، نتیجه می‌شود که تابع f تقریباً همه جا با تابع ثابت b مساوی است که یک تناقض است. بنابراین $t < b$ و به همین صورت می‌توان نشان داد که $a < t$.
قرار دهید $\beta = \sup\{\psi(x,t);\ x \in (a,t)\}$ و لذا برای هر $s \in (a,t)$، $\beta(t-s) \ge \psi(t) - \psi(s)$. از طرفی برای هر $u \in (t,b)$، $\beta \le \frac{\psi(u)-\psi(t)}{u-t}$ و لذا $\beta(t-u) \ge \psi(t) - \psi(u)$. در نتیجه برای هر $\gamma \in (a,b)$، $\psi(\gamma) \ge \psi(t) + \beta(\gamma - t)$. برای $x \in X$، $a < f(x) < b$. با قرار دادن $\gamma = f(x)$ داریم لذا $\psi o f(x) \ge \psi(t) + \beta(f(x) - t)$. چون هر تابع محدب روی یک بازه باز پیوسته است، لذا $\psi o f$ اندازه پذیر است. طرف راست رابطه اخیر انتگرال‌پذیر و لذا انتگرال سمت چپ وجود دارد و

$$\int \psi o f(x) d\mu(x) \ge \int \psi(t) d\mu(x) = \psi(\int f(x) d\mu(x)).$$

این برهان قضیه را کامل می‌کند.
■

قضیه فوق به نامساوی جنسن مشهور است. استفاده‌های زیادی از این قضیه می‌شود که ما تنها به یک کاربرد از این قضیه کار را در این بخش پایان می‌بریم.

مثال ۴ ـ ۴. تابع اندازه پذیر $f : X \to [۰, +\infty]$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $\mu(X) = ۱$ و قرار دهید $A = \int f(x) d\mu(x)$. تعریف کنید $\phi(t) = \sqrt{۱ + t^۲}$. واضح است که $\phi'' > ۰$ و لذا ϕ محدب است. بنا به قضیه جنسن، $\phi(\int f d\mu) \le \int \phi o f d\mu$. در نتیجه $\sqrt{۱ + A^۲} \le \int \sqrt{۱ + f^۲} d\mu \le ۱ + A$.

۴ــ۴ قضیه هان باناخ و کاربردهای آن

همانطور که در دروس مقدماتی توسیع تابعی پیوسته از زیر فضایی از یک فضای توپولوژیک به تابعی پیوسته روی کل فضا از اهمیت فوق العاده‌ای برخوردار بود، توسیع تابعکی خطی پیوسته از زیر فضای یک فضای نرمدار به کل فضا از اهمیت زیادی برخوردار است. لم اوریسون در یک فضای هاسدورف و فشرده موضعی، وجود توسیع تابعی پیوسته روی زیر مجموعه‌ای فشرده از آن فضا به

کل فضا را تضمین می‌کند. قضیه گسترش تیتزه نیز در هر فضای توپولوژیک نرمال، گسترش تابع پیوسته روی زیر مجموعه بسته از این فضا را به کل فضا بیان می‌کند. قضیه هان باناخ و نتایج آن گسترش تابعک خطی روی زیر فضاهای یک فضای نرمدار را مورد بررسی قرار می‌دهد. ابتدا خواص تابعک‌های خطی پیوسته را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۴ ـ ۱۴. *فرض کنید X یک فضای نرمدار و $\Lambda : X \to \mathbb{C}$ تابعکی خطی ناصفر باشد. شرایط زیر معادلند:*

الف) Λ *پیوسته است.*

ب) Λ *در صفر پیوسته است.*

ج) $ker n\Lambda$ *بسته است.*

د) Λ *در یک همسایگی از صفر کراندار است.*

برهان. هر تابع پیوسته، در هر نقطه پیوسته و لذا الف قسمت ب را به آسانی نتیجه می‌دهد. اکنون فرض کنید ب برقرار باشد. چون Λ خطی است، به آسانی دیده می‌شود که Λ در هر نقطه پیوسته است. این نتیجه می‌دهد که الف با ب معادل است.

اکنون فرض کنید ب برقرار باشد و $x \in \overline{kern\Lambda}$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین دنباله $\{x_n\}$ از $kern\Lambda$ وجود دارد که به x همگراست. واضح است که $\{x_n - x\}$ به صفر همگراست و بنا به فرض $\{\Lambda(x_n - x)\}$ به صفر همگراست. از طرفی برای هر n، $\Lambda(x_n) = \circ$ و لذا $\Lambda(x) = \circ$. این نتیجه می‌دهد که $x \in kern\Lambda$ و بنابراین $kern\Lambda$ بسته است.

اکنون فرض کنیم ج برقرار باشد. از ناصفر بودن Λ و بسته بودن $kern\Lambda$ استفاده کرده و $x \in X \setminus kern\Lambda$ را در نظر می‌گیریم. عدد مثبت δ وجود دارد که $x + S_\delta(\circ) \cap kern\Lambda = \emptyset$. ادعا می‌کنیم که $\Lambda(S_\delta(\circ))$ کراندار است. فرض کنید $\Lambda(S_\delta(\circ))$ کراندار نباشد و $z \in \mathbb{C}$ را در نظر می‌گیریم. $x_\circ \in S_\delta(\circ)$ وجود دارد که $|z| \geq |\Lambda(x_\circ)|$. اگر $z = |z|e^{i\phi}$ و $\Lambda(x_\circ) = |\Lambda(x_\circ)|e^{i\psi}$، در آن‌صورت قرار می‌دهیم $y = \frac{|z|}{|\Lambda(x_\circ)|}e^{i(\phi-\psi)}x_\circ$. واضح است که $y \in S_\delta(\circ)$ و $\Lambda(y) = \frac{|z|}{|\Lambda(x_\circ)|}e^{i(\phi-\psi)}\Lambda(x_\circ) = z$. این نتیجه می‌دهد که $\Lambda(S_\delta(\circ)) = \mathbb{C}$. حال $t \in S_\delta(\circ)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\Lambda(x) = \Lambda(t)$. بنابراین $x - t \in x + S_\delta(\circ) \cap kern\Lambda$ که یک تناقض است. در نتیجه $\Lambda(S_\delta(\circ))$ کراندار است.

برای اتمام برهان، فرض کنیم د برقرار باشد. لذا δ وجود دارد که $\Lambda(S_\delta(\circ))$ کراندار است. عددی مانند M وجود دارد که برای هر $x \in S_\delta(\circ)$، $|\Lambda(x)| < M$. ادعا می‌کنیم Λ در صفر پیوسته

است. اگر $0 < \epsilon$ داده شده باشد، قرار دهید $r = \delta \frac{\epsilon}{M}$. برای هر $x \in S_r(0)$، $\frac{M}{\epsilon}x \in S_\delta(0)$. لذا $\left|\Lambda(\frac{M}{\epsilon}x)\right| < M$ و بنابراین $|\Lambda(x)| < \epsilon$. یعنی Λ در صفر پیوسته و لذا پیوسته است. ■

مجموعه همه تابعک‌های خطی پیوسته روی فضای نرمدار X را با نماد X^* نمایش می‌دهیم. برای هر دو عنصر $\Lambda_1, \Lambda_2 \in X^*$، $\Lambda_1 + \Lambda_2$ با ضابطه $\Lambda_1 + \Lambda_2(x) = \Lambda_1(x) + \Lambda_2(x)$ تابعکی خطی و پیوسته است. همینطور برای $\alpha \in \mathbb{C}$، تابع $\alpha\Lambda_1 : X \to \mathbb{C}$ با ضابطه $(\alpha\Lambda_1)(x) = \alpha\Lambda_1(x)$ تابعکی خطی و پیوسته است. واضح است که X^* با عمل جمع و ضرب اسکالر تعریف شده در بالا یک فضای برداری است. برای هر $\Lambda \in X^*$، عدد مثبت δ موجود است که $\Lambda(S_\delta(0))$ کراندار است. لذا عدد M وجود دارد که برای هر $x \in S_\delta(0)$، $|\Lambda(x)| \leq M$. اگر $\|x\| \leq 1$، لذا $\Lambda(\frac{\delta x}{2}) \leq M$. این نتیجه می‌دهد که $|\Lambda(x)| \leq \frac{2M}{\delta}$. بنابراین $\{|\Lambda(x)|;\ \|x\| \leq 1\}$ کراندار است و سوپریموم این مجموعه را با نماد $\|\Lambda\|$ نمایش می‌دهیم. به سادگی دیده می‌شود که تابع $\Lambda \mapsto \|\Lambda\|$ یک نرم روی X^* است.

فرض کنیم X یک فضای برداری مختلط و $f : X \to \mathbb{C}$ تابعک خطی مختلط باشد. در این‌صورت $Ref : X \to \mathbb{R}$ تابعکی خطی حقیقی است. برای هر $x \in X$، $f(ix) = Ref(ix) + iImf(ix)$. همینطور $if(x) = iRef(x) - Imf(x)$. چون f تابعکی خطی است، لذا $f(ix) = if(x)$. در نتیجه $f(x) = Ref(x) - iRef(ix)$. این نشان می‌دهد که هر تابعک خطی با قسمت حقیقی خودش به طور کامل مشخص می‌شود. برعکس نیز صحیح است. یعنی اگر $u : X \to \mathbb{R}$ تابعکی خطی حقیقی باشد، در آن‌صورت $g(x) = u(x) - iu(ix)$ یک تابعک خطی مختلط است.

قضیه ۴ ـ ۱۵. *فرض کنید X یک فضای برداری حقیقی و M زیر فضایی از X باشد. فرض کنید $p : X \to \mathbb{R}$ تابعی باشد که برای هر x, y از X و $t > 0$، $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ و $p(tx) = tp(x)$. فرض کنید $f : M \to \mathbb{R}$ تابعکی باشد که برای هر $x \in M$، $f(x) \leq p(x)$. در آن‌صورت f قابل گسترش به تابعکی خطی چون Λ روی X است که برای هر $x \in X$، $-p(-x) \leq \Lambda(x) \leq p(x)$.*

برهان. اگر $M = X$، در آن‌صورت $\Lambda = f$ در نظر می‌گیریم و برای هر $x \in X$، $\Lambda(x) \leq p(x)$. لذا $-\Lambda(x) = \Lambda(-x) \leq p(-x)$ و بنابراین $-p(-x) \leq \Lambda(x) \leq p(x)$.

اکنون فرض کنیم $M \neq X$. $x_1 \in X \setminus M$ را در نظر گرفته و قرار می‌دهیم $M_1 = M + \langle x_1 \rangle$. برای هر $x, y \in M$،

$$f(x)+f(y)=f(x+y)=f(x-x_1+y+x_1)\leq p(x-x_1+x_1+y)$$
$$\leq p(x-x_1)+p(x_1+y).$$

از این موضوع نتیجه می‌گیریم که برای هر $x,y\in M$، $f(x)-p(x-x_1)\leq p(x_1+y)-f(y)$. قرار می‌دهیم $\alpha=\sup\{f(x)-p(x-x_1);\ x\in M\}$. لذا برای هر $x,y\in M$،

$$f(y)+\alpha\leq p(x_1+y),\ f(x)-\alpha\leq p(x-x_1).$$

تعریف می‌کنیم $f_1:M_1\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f_1(x+tx_1)=f(x)+t\alpha$. به آسانی دیده می‌شود که f_1 تابعکی خطی و گسترشی از f است. فرض کنیم $x\in X$ و $t>0$. لذا $f(t^{-1}x)+\alpha\leq p(t^{-1}x+x_1)$ و بنابراین

$$f_1(x+tx_1)=f(x)+t\alpha\leq p(x+tx_1).$$

فرض کنیم $t<0$. بنابراین $f(-t^{-1}x)-\alpha\leq p(-t^{-1}x-x_1)$ و لذا

$$f_1(x+tx_1)=f(x)+t\alpha\leq p(x+tx_1).$$

از این روابط نتیجه می‌شود که برای هر $x\in M_1$، $f_1(x)\leq p(x)$. به آسانی دیده می‌شود که برای هر $x\in M_1$، $-p(-x)\leq f_1(x)\leq p(x)$. قرار می‌دهیم

$$\mathcal{D}=\{(M',f');\ M\leq M',f'\leq p,\ f'|_M=f\}.$$

واضح است که $(M,f)\in\mathcal{D}$ و لذا $\mathcal{D}$ ناتهی است. برای $(M',f'),(M'',f'')\in\mathcal{D}$، تعریف می‌کنیم $(M',f')\preceq(M'',f'')$ اگر و تنها اگر $M'\leq M''$ و $f''|_{M'}=f'$. فرض کنیم $\{(M_\alpha,f_\alpha)\}$ زنجیری در $\mathcal{D}$ باشد. اجتماع همه M_α ها را با نماد N نمایش داده و تعریف می‌کنیم $f^*:N\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f^*(x_\alpha)=f_\alpha(x_\alpha)$. واضح است که f^* خطی است و $f^*|_M=f$. این نتیجه می‌دهد که $(N,f^*)\in\mathcal{D}$. بنابراین $\mathcal{D}$ دارای عضو ماکزیمال (M^*,h) است. ادعا می‌کنیم $M^*=X$. اگر $M^*\neq X$، در آن‌صورت $x_1\in X\setminus M^*$ را اختیار کرده و قرار می‌دهیم $H=M^*+\langle x_1\rangle$. مطابق قسمت اول، h قابل گسترش به تابعک g روی H است و برای هر $x\in H$، $g(x)\leq p(x)$. این با عضو ماکزیمال در تناقض است. پس $M^*=X$ و برهان کامل می‌شود. ■

قضیه فوق به قضیه هان باناخ مشهور است. در بعضی از کتابها نتایج این قضیه را به‌عنوان قضیه هان باناخ می‌شناسند.

تعریف ۴ ـ ۱۶. تابع $p:X\to\mathbb{R}$ یک شبه نرم است هرگاه برای هر $x,y\in X$ و $\alpha\in\mathbb{C}$، $p(x+y)\leq p(x)+p(y)$ و $p(\alpha x)=|\alpha|p(x)$.

نکته۹. در زیر به بیان چند نتیجه از قضیه هان باناخ می‌پردازیم که در قالب نکته بیان می‌شود.

الف) فرض کنیم M زیر فضایی از X و f تابعکی خطی روی M باشد. فرض کنیم $p : X \to \mathbb{R}$ یک شبه نرم و برای هر $x \in M$، $|f(x)| \leq p(x)$. ابتدا میدان زمینه را حقیقی فرض کرده و از اینکه برای هر $x \in M$، $|f(x)| \leq p(x)$، نتیجه می‌گیریم که $Ref(x) \leq p(x)$. بنا به قضیه هان باناخ Ref قابل گسترش به تابعک خطی $f_۱$ روی X بوده و همچنین برای هر $x \in X$، $|f_۱(x)| \leq p(x)$. برای هر $x \in X$، قرار می‌دهیم $f^*(x) = f_۱(x) - if_۱(ix)$. f^* تابعکی خطی مختلط است. ثابت می‌کنیم که برای هر $x \in X$، $|f^*(x)| \leq p(x)$. اگر $x \in X$ داده شده باشد، عدد $\alpha \in \mathbb{C}$ را طوری اختیار می‌کنیم که $|\alpha| = ۱$ و $|f^*(x)| = \alpha f^*(x)$. می‌توان نوشت

$$|f^*(x)| = \alpha f^*(x) = f^*(\alpha x) = f_۱(\alpha x) \leq p(\alpha x) = p(x).$$

نتیجه اینکه هر تابعک خطی روی یک زیر فضا که از یک شبه نرم کمتر یا مساوی است را می‌توان به تابعکی خطی روی کل فضا با همان خاصیت گسترش داد.

ب) فرض کنید X یک فضای نرمدار و $x_\circ \in X$ عنصری دلخواه باشد. قرار می‌دهیم $M = \langle x_\circ \rangle$ و $p = \|.\|$. تابع $f : M \to \mathbb{C}$ با ضابطه $f(\alpha x_\circ) = \alpha\|x_\circ\|$ تابعکی خطی است. واضح است که برای هر $x \in M$، $|f(x)| \leq p(x)$. بنا به قسمت الف، f قابل گسترش به تابعک Λ روی X است و برای هر $x \in X$، $|\Lambda(x)| \leq p(x) = \|x\|$. همچنین $\Lambda(x_\circ) = f(x_\circ) = \|x_\circ\|$ و Λ تابعک خطی پیوسته است.

ج) فرض کنید X یک فضای نرمدار و $x_\circ \in X$. بنا به قسمت ب، تابعک خطی Λ وجود دارد که $\|\Lambda\| \leq ۱$ و $\Lambda(x_\circ) = \|x_\circ\|$. چون نرم $\frac{x_\circ}{\|x_\circ\|}$ یک است، از اینکه $\Lambda(\frac{x_\circ}{\|x_\circ\|}) = ۱$ نتیجه می‌شود که $\|\Lambda\| = ۱$.

د) اگر X یک فضای نرمدار و $x_\circ \in X$. فرض کنید Λ تابعکی خطی دلخواه و $\|\Lambda\| \leq ۱$. در این صورت $|\Lambda(x_\circ)| \leq \|\Lambda\|\|x_\circ\| \leq \|x_\circ\|$. بنا به نتیجه قبل تابعک خطی Λ وجود دارد که $\|\Lambda\| = ۱$ و $|\Lambda(x_\circ)| = \|x_\circ\|$. این نتیجه می‌دهد که

$$\|x_\circ\| = \sup\{|\Lambda(x_\circ)|;\ \Lambda \in X^*,\ \|\Lambda\| \leq ۱\}.$$

برای $x \in X$، تابع $\hat{x} : X^* \to \mathbb{C}$ با ضابطه $\hat{x}(\Lambda) = \Lambda(x)$ خطی است. بنا به توضیحات بالا $\|\hat{x}\| = \|x\|$. در نتیجه تابع $x \mapsto \hat{x}$ از X به توی X^{**} یک نشاندن است. گاهی اوقات با این نشاندن X را به عنوان زیر مجموعه‌ای از X^{**} در نظر می‌گیرند.

قضیه۴ ـ ۱۷. *فرض کنید f تابعکی خطی و پیوسته روی زیرفضای M از فضای نرمدار X باشد. در آن‌صورت f قابل گسترش به تابعکی خطی و پیوسته چون Λ روی X بوده و $\|f\| = \|\Lambda\|$.*

برهان. تابع $p : X \to \mathbb{R}$ را با ضابطه $p(x) = \|f\|\|x\|$ تعریف می‌کنیم. واضح است که p یک شبه نرم است. برای هر $x \in M$، $|f(x)| \le \|f\|\|x\| = p(x)$. بنا به نتایج قضیه هان باناخ f قابل گسترش به تابعک خطی و پیوسته چون Λ روی X است و برای هر $x \in X$، $|\Lambda(x)| \le p(x) = \|f\|\|x\|$. این نشان می‌دهد که $\|\Lambda\| \le \|f\|$. از طرفی Λ گسترشی از f بوده و لذا $\|f\| = \|\Lambda\|$. ■

قضیه۴ ـ ۱۸. *فرض کنید M زیرفضایی بسته از فضای نرمدار X باشد. اگر $x_0 \notin M$، در آن‌صورت $\Lambda \in X^*$ وجود دارد که $\Lambda(x_0) = 1$ و $\Lambda|_M = 0$.*

برهان. قرار می‌دهیم $\delta = d(x_0, M) = \inf\{\|x_0 - y\|;\ y \in M\}$. دقت کنید که بسته بودن M ایجاب می‌کند که $\delta > 0$. تابعک f را روی $N = M + \langle x_0 \rangle$ با ضابطه $f(x + tx_0) = t\delta$ تعریف می‌کنیم. واضح است که $f(x_0) = \delta$ و $f|_M = 0$. برای هر $t \in \mathbb{C}$ و $y \in M$،

$$\begin{aligned} |f(y + tx_0)| &= |t|\delta \le |t|\|t^{-1}y + x_0\| \\ &= \|y + tx_0\|. \end{aligned}$$

این نتیجه می‌دهد که روی N، $f \le \|.\|$. بنا به نتایج قضیه هان باناخ، f قابل گسترش به تابعک Λ_1 روی X است که برای هر $x \in X$، $|\Lambda_1(x)| \le \|x\|$. واضح است که $\Lambda_1|_M = 0$ و $\Lambda_1(x_0) = \delta$. $\Lambda = \frac{\Lambda_1}{\delta}$ جواب مسئله است. ■

نکته۱۰. در زیر به بیان تعدادی از کاربردهای قضیه هان باناخ می‌پردازیم.

الف) فرض کنید فضای نرمدار X دارای بعد نامتناهی باشد. زیر مجموعه مستقل خطی $\{e_1, e_2, \cdots\}$ از X را در نظر می‌گیریم. مطابق قضیه ۴ـ۱۸، تابعک خطی پیوسته f_1 را طوری می‌یابیم که $f_1(e_1) = 0$. چون $\langle e_1 \rangle$ زیر فضایی بسته است، تابعک خطی پیوسته f_2 وجود دارد که $f_2(e_2) = 1$ و $f_2(e_1) = 0$. همینطور زیر فضای $\langle e_1, e_2 \rangle$ بسته بوده و لذا تابعک خطی پیوسته f_3 وجود دارد که $f_3(e_3) = 1$ و $f_3(e_1) = f_3(e_2) = 0$. با ادامه این روند دنباله مستقل خطی $\{f_n\}$ از اعضای X^* بدست می‌آید و لذا X^* دارای بعد نامتناهی است.

ب) فرض کنید X^* تفکیک پذیر و $\{\Lambda_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ زیر مجموعه چگال از اعضای X^* باشد. برای هر عدد طبیعی n، $x_n \in X$ را طوری می‌یابیم که $\|x_n\| \le 1$ و $|\Lambda_n(x_n)| \ge \frac{\|\Lambda_n\|}{2}$.

فرض کنیم M زیر فضای بسته تولید شده توسط x_n ها باشد. ثابت می‌کنیم $M = X$. اگر $M \neq X$، $x_\circ \in X \setminus M$ را در نظر می‌گیریم. $\Lambda \in X^*$ را طوری می‌گیریم که $\|\Lambda\| = ۱$، $\Lambda|_M = \circ$ و $\Lambda(x_\circ) = ۱$. برای هر عدد طبیعی n،

$$\left\|\frac{\Lambda_n}{۲}\right\| \leq |\Lambda_n(x_n)| = |\Lambda_n(x_n) - \Lambda(x_n)| + |\Lambda(x_n)|$$
$$\leq \|\Lambda_n - \Lambda\|\|x_n\| \leq \|\Lambda_n - \Lambda\|.$$

عدد طبیعی m موجود است که $\left\|\frac{\Lambda_m}{۲}\right\| \leq \|\Lambda_m - \Lambda\| < \frac{۱}{۴}$. لذا $\|\Lambda_m\| < \frac{۱}{۲}$. از طرفی

$$\|\Lambda_m\| = \|\Lambda_m - \Lambda + \Lambda\| \geq \|\Lambda\| - \|\Lambda_m - \Lambda\| \geq ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

که یک تناقض است. بنابراین $M = X$. به آسانی دیده می‌شود که مجموعه همه ترکیبات خطی متناهی با ضرائبی که قسمت حقیقی و موهومی گویاست، زیر مجموعه‌ای چگال در X است و لذا X تفکیک پذیر است.

فرض کنید $۰ < p < ۱$ و Λ تابعکی خطی و پیوسته از $L^p([\circ, ۱])$ به فضای نرم‌دار X باشد. $\Lambda^{-۱}(\{x \in X;\ \|x\| < ۱\})$ مجموعه‌ای باز، محدب و شامل صفر است. لذا $\Lambda^{-۱}(\{x \in X;\ \|x\| < ۱\}) = L^p([\circ, ۱])$. اما $\Lambda(L^p([\circ, ۱]))$ زیر فضایی از X است و چون $\Lambda(L^p([\circ, ۱])) \subseteq \{x \in X;\ \|x\| < ۱\}$، لذا $\Lambda = \circ$. این نتیجه می‌دهد که تنها تابعک خطی و پیوسته از $L^p([\circ, ۱])$ به توی هر فضای نرم‌دار، تابعک صفر است.

تمرین ۴

۱. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $\mathbb{R}$ و $f \in L^۱(\mathbb{R})$. ثابت کنید تابع $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)d\mu(t)$ پیوسته است.

۲. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های اندازه پذیر لبگ از $\mathbb{R}$ باشد. فرض کنید $f \in L^۱(\mathbb{R})$. ثابت کنید

$$\lim_{t\to\infty} \int f(x)\cos(xt)d\mu(x) = \lim_{t\to\infty} \int f(x)\sin(xt)d\mu(x) = \circ$$

۳. فرض کنید μ اندازه‌ای روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. فرض کنید دنباله $\{f_n\}$ از اعضای $L^۱(X)$ به تابع $f \in L^۱(X)$ همگرای نقطه به نقطه باشد. اگر $\{\|f_n\|_۱\}$ به $\|f\|_۱$ همگرا باشد، نشان دهید که برای هر $E \in S$، دنباله $\{\int_E |f_n| d\mu\}$ به $\int_E |f| d\mu$ همگراست.

۴. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های اندازه پذیر لبگ از $\mathbb{R}$ باشد.

فرض کنید $f \in L^1(\mathbb{R})$. ثابت کنید $\lim\limits_{t\to 0}\int |f(t+x)-f(x)|d\mu(x) = 0$.

۵. فرض کنید μ نمایانگر اندازه لبگ و $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی نامنفی و انتگرال‌پذیر لبگ باشد. ثابت کنید

$$\Big(\int_a^b f(x)\cos x d\mu(x)\Big)^2 + \Big(\int_a^b f(x)\sin x d\mu(x)\Big)^2 \le \Big(\int_a^b f(x)d\mu(x)\Big)^2.$$

٦. فرض کنید μ نمایانگر اندازه لبگ و $\{r_n\}$ یک نمایش از اعداد گویا در بازه $[a,b]$ باشد. تعریف کنید $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{|x-r_n|}}$ (توجه کنید که f تقریباً همه جا تعریف شده است). ثابت کنید $\int_a^b f(x)d\mu(x) < +\infty$ ولی $\int_a^b f(x)^2 d\mu(x) = +\infty$

۷. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی نامنفی بوده که $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای در $[0, 1]$ باشد. ثابت کنید $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{|x-x_n|}}$ تقریباً همه جا همگراست.

۸. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $[0, 1]$ باشد. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از اعضای $L^1([0, 1])$ و $h \in L^1([0, 1])$ نیز تابعی نامنفی باشد. فرض کنید

الف) برای هر $g \in C([0, 1])$، دنباله $\{\int f_n g d\mu\}$ به صفر همگراست،

ب) برای هر n، $|f_n| \le h$.

ثابت کنید برای هر زیر مجموعه بورل $A \subseteq [0, 1]$، $\{\int_A f_n d\mu\}$ به صفر همگراست.

۹. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های اندازه پذیر لبگ باشد. فرض کنید $1 \le p < +\infty$ و $\mathcal{A}$ نیز خانواده همه توابع اندازه پذیر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ باشد که $\int |f|^p(x)d\mu(x) \le 1$. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای در $\mathcal{A}$ باشد که به تابع اندازه پذیر f در اندازه همگراست. ثابت کنید $f \in \mathcal{A}$.

۱۰. اندازه μ را روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X در نظر می‌گیریم. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر باشد که به تابع انتگرال‌پذیر f در نرم L^1 همگرا باشد. فرض کنید $\{g_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر باشد که به تابع g نقطه به نقطه همگراست. فرض کنید برای هر n، $|g_n| \le f_n$. ثابت کنید $\limsup \int g_n d\mu \le \int g d\mu$.

۱۱. اندازه μ را روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X در نظر می‌گیریم. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر باشد که به تابع انتگرال‌پذیر f در نرم L^1 همگرا باشد. فرض

کنید $\{g_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر باشد که به تابع g در اندازه همگراست. فرض کنید برای هر n، $|g_n| \le f_n$. ثابت کنید $\limsup \int g_n d\mu \le \int g d\mu$.

۱۲. فرض کنید $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ اعداد حقیقی مثبت باشند و $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. فرض کنید μ اندازه‌ای روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. اگر $f_1, \dots, f_n \in L^1(X)$، ثابت کنید $\int |f_1^{\alpha_1} \dots f_n^{\alpha_n}| d\mu \le \|f_1\|_1^{\alpha_1} \dots \|f_n\|_n^{\alpha_n}$.

۱۳. فرض کنید μ اندازه‌ای متناهی روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. فرض کنید $0 < p_1 < p_2 < +\infty$. ثابت کنید $\|f\|_{p_1} \le \|f\|_{p_2} \mu(X)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}$.

۱۴. فرض کنید μ اندازه لبگ روی زیر مجموعه‌های اندازه پذیر لبگ از $\mathbb{R}$ باشد. برای هر دو تابع انتگرال‌پذیر f و g، پیچش این دو تابع را با نماد $f * g$ نمایش داده و با ضابطه $f * g(x) = \int f(x-y) g(y) d\mu(y)$ تعریف می‌کنیم. تابع نامنفی $f \in L^1(\mathbb{R})$ را در نظر بگیرید. برای هر n، n پیچش f با خودش را با f_n نمایش می‌دهیم. ثابت کنید که برای هر n، $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ و همچنین دنباله $\{f_n\}$ به تابع صفر با نرم L^1 همگراست.

۱۵. اندازه متناهی μ را روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X در نظر بگیرید. فرض کنید اعداد حقیقی و مثبت α و β موجود باشند که $\frac{1}{\mu(X)} \int f d\mu \ge \alpha$ و $\frac{1}{\mu(X)} \int f^2 d\mu \le \beta$. فرض کنید $\delta \in (0, 1)$ و قرار دهید $A_\delta = \{x;\ f(x) \ge \alpha\delta\}$. ثابت کنید $\mu(A_\delta) \ge \mu(X)(1-\delta)^2 \frac{\alpha^2}{\beta}$.

۱۶. فرض کنید $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و مثبت باشد. برای $p \ne 0$، قرار دهید $N(p) = \left(\int_a^b f(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$. در صورت وجود، حدود زیر را بیابید:

الف) $\lim_{p \to 0} N(p)$

ب) $\lim_{p \to -\infty} N(p)$

۱۷. اندازه μ را روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X در نظر می‌گیریم. فرض کنید برای هر $x \in X$، $\{x\} \in S$ و $\mu(\{x\}) > 0$. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از اعضای $L^1(X)$ و $f \in L^1(X)$. فرض کنید برای هر $g \in L^\infty(X)$، $\{\int f_n g d\mu\}$ به $\int fg d\mu$ همگرا باشد. آیا $\{f_n\}$ به f همگرای نقطه به نقطه است؟ آیا عکس موضوع فوق صحیح است؟

۱۸. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $\mathbb{R}$ و $f \in L^1(\mathbb{R})$. فرض کنید برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x) = \int f(x-y) f(y) d\mu(y)$. ثابت کنید $f = 0$.

۱۹. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $\mathbb{R}$ و

$f \in L^1(\mathbb{R})$. فرض کنید برای هر $g \in L^1(\mathbb{R})$، $fg \in L^1(\mathbb{R})$. ثابت کنید $f \in L^\infty(\mathbb{R})$.

۲۰. فرض کنید μ اندازه‌ای روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. فرض کنید $1 \leq p < +\infty$ و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع کراندار یکنواخت در $L^p(X)$ باشد. فرض کنید $\{f_n\}$ به تابع اندازه پذیر f در اندازه همگرا باشد. آیا برای هر $g \in L^q(X)$، $\{\int f_n g d\mu\}$ به $\{\int f g d\mu\}$ همگراست؟

فصل ۵

اندازه‌های علامت دار

۵−۱ مقدمه

فرض کنید μ اندازه‌ای روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X و $f \in L^1(X)$. تابع ν را روی σ جبر S با ضابطه $\nu(E) = \int_E f d\mu$ تعریف می‌کنیم. توجه کنید که اثر ν روی مجموعه تهی صفر و همچنین ν شمارا جمعی است. تنها اختلافی که ν با اندازه دارد این است که ν لزوماً تابعی نامنفی نیست. از این توضیح می‌توان ایده گرفت و اندازه علامت‌دار را تعریف کرد. اندازه علامت‌دار تابعی است که روی یک σ جبر تعریف شده و تقریباً شرایط یک اندازه را داراست. این سبب می‌شود از محدودیت نامنفی بودن یک اندازه رهایی یابیم. نتایج حاصل از این فصل کاربرد زیادی در نظریه احتمال داشته و قضیه رادون نیکودیم که یکی از مهمترین قضایای این فصل است در تعریف امید ریاضی نقش مهمی دارد. اهمیت اندازه‌های علامت‌دار در رشته‌های فنی است. برای مثال اندازه علامت‌دار مبین چیزهایی از قبیل بار الکتریکی است که می‌توانند مثبت یا منفی باشند. اهمیت اندازه‌های علامت‌دار و مختلط در رشته آنالیز هارمونیک بر هیچ خواننده‌ای پوشیده نیست.

در بخش اول این فصل ساختار اندازه‌های علامت‌دار را مورد بحث و بررسی قرار داده و نشان می‌دهیم که ارتباط تنگاتنگی بین اندازه‌های علامت‌دار و اندازه‌ها وجود دارد. مفهوم بطور مطلق پیوسته و تکینی اندازه‌ها مطرح و اندازه‌های علامت‌دار را به شیوه‌ای استادانه به تفاضل دو اندازه تجزیه خواهیم کرد. در انتهای این فصل نیز قضیه رادون نیکودیم که یکی از پر اهمیت‌ترین قضایای آنالیز حقیقی است را اثبات می‌کنیم.

۵ـ۲ اندازه علامت دار

تعریف۵ ـ ۱. فرض کنیم S یک σ جبر از زیر مجموعه‌های X باشد. در آن‌صورت تابع $\nu : S \to [-\infty, +\infty]$ یک اندازه علامت‌دار است هرگاه

الف) $\nu(\emptyset) = \circ$.

ب) ν حداکثر یکی از مقادیر $+\infty$ و یا $-\infty$ را اختیار کند.

ج) اگر $\{E_n\}$ دنباله‌ای از اعضای مجزای S باشد، آن‌گاه $\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$.

توجه کنید که اگر $\{E_n\}$ دنباله‌ای از اعضای مجزای S باشد و $|\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)| < +\infty$، در آن‌صورت $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$ مستقل از تجدید آرایش است. در واقع در اجتماع شمارای فوق، به هر ترتیبی می‌توان عناصر موجود در این اجتماع را جابجا کرد و هر جابجایی بایستی با $\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$ مساوی باشد. این چیزی جز یکسان بودن مقدار سری فوق به ازاء هر تجدید آرایش نیست و بنابراین سری فوق مستقل از هر تجدید آرایش و لذا همگرای مطلق است.

نکته۱. به چند مثال و نکته در زیر توجه کنید.

الف) فرض کنید μ_1 و μ_2 دو اندازه روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. اگر حداقل یکی از این اندازه‌ها متناهی باشد، در آن‌صورت $\mu = \mu_1 - \mu_2$ اندازه‌ای علامت‌دار است.

ب) فرض کنید μ یک اندازه روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. فرض کنید $f \in L^1(X)$. چون $f^+ \leq |f|$ و $f^- \leq |f|$، لذا توابع μ_1 و μ_2 با ضابطه‌های $\mu_1(E) = \int f^+ d\mu$ و $\mu_2(E) = \int f^- d\mu$ دو اندازه متناهی روی σ جبر S است. از طرفی برای هر $E \in S$،

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \int_E f d\mu = \int_E f^+ - f^- d\mu \\ &= \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu = \mu_1(E) - \mu_2(E).\end{aligned}$$

لذا μ اندازه‌ای علامت دار است.

ج) فرض کنید ν اندازه‌ای علامت دار روی σ جبر S و $A, B \in S$. فرض کنید $B \subseteq A$ و $|\nu(A)| < +\infty$. واضح است که B و $A \setminus B$ افرازی از A هستند. لذا $\nu(A) = \nu(A \setminus B) + \nu(B)$ و بنابراین $|\nu(B)| < +\infty$. همینطور $\nu(A) - \nu(B) = \nu(A \setminus B)$.

فرض کنید ν اندازه‌ای علامت‌دار روی σ جبر S باشد. برهانی شبیه به حالت اندازه‌ها نشان می‌دهد که اگر $\{E_n\}$ دنباله‌ای صعودی از اعضای S باشد، در آن‌صورت دنباله $\{\nu(E_n)\}$

همگراست و حد آن نیز $\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$ است. همینطور اگر $\{F_n\}$ دنباله‌ای نزولی از اعضای S باشد و برای یک m ای، $|\nu(F_m)| < +\infty$، در آن‌صورت $\{\nu(F_n)\}$ به $\nu(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n)$ همگراست.

تعریف۵ ـ ۲. فرض کنیم ν اندازه‌ای علامت‌دار روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد.

الف) $A \in S$ مجموعه‌ای مثبت است هرگاه برای هر $B \subseteq A$ و $B \in S$، $\nu(B) \geq 0$.

ب) $A \in S$ مجموعه‌ای منفی است هرگاه برای هر $B \subseteq A$ و $B \in S$، $\nu(B) \leq 0$.

ج) $A \in S$ مجموعه‌ای صفر است هرگاه برای هر $B \subseteq A$ و $B \in S$، $\nu(B) = 0$.

مثال۵ ـ ۱. به مثال‌های زیر درباره زیر مجموعه‌های مثبت و منفی اندازه‌علامت‌دار توجه کنید.

الف) اندازه لبگ μ را روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $X = [-1, 1]$ در نظر می‌گیریم. تابع ν تعریف شده روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $[-1, 1]$ با ضابطه $\nu(E) = \int_E x d\mu(x)$ اندازه‌ای علامت‌دار است. واضح است که $\nu([-1, 1]) = 0$ و لذا $[-1, 1]$ نسبت به ν پوچ است. این مجموعه صفر نیست، در واقع X مجموعه‌ای مثبت نیست زیرا $\nu([-1, 0]) = \frac{-1}{2}$. X مجموعه‌ای منفی نیست ولی $\nu([0, 1]) = \frac{1}{2}$. $[0, 1]$ مجموعه‌ای مثبت و $[-1, 0]$ مجموعه‌ای منفی است. اگر زیر مجموعه لبگ اندازه پذیر A مجموعه‌ای صفر باشد، در آن‌صورت A نسبت به اندازه لبگ پوچ است. در واقع $\nu(A \cap [0, 1]) = 0$ و $\nu(A \cap [-1, 0]) = 0$. از اینکه $\nu(A \cap [0, 1]) = \int_{A\cap[0,1]} x d\mu(x) = 0$ نتیجه می‌شود که $\mu(A \cap [0, 1]) = 0$. به همین ترتیب $\mu(A \cap [-1, 0]) = 0$ و لذا A نسبت به اندازه لبگ پوچ است. برعکس نیز صحیح است، یعنی اگر A نسبت به اندازه لبگ پوچ باشد در آن‌صورت A مجموعه‌ای صفر است.

ب) فرض کنید ν اندازه علامت‌دار قسمت الف باشد. واضح است که برای هر $x \in [-1, 1]$، $\nu(\{x\}) = 0$. واضح است که مجموعه‌های تک نقطه‌ای مجموعه‌ای مثبت است ولی اجتماع همه این تک نقطه‌ای‌ها که $[-1, 1]$ است مجموعه‌ای مثبت نیست. نتیجه اینکه لزوماً اجتماع هر تعداد مجموعه مثبت مجموعه‌ای مثبت نیست.

توجه کنید که اگر ν اندازه‌ای علامت‌دار روی σ جبر S و A زیر مجموعه‌ای مثبت و B زیر مجموعه‌ای منفی باشد، در آن‌صورت $\mu_1(E) = \nu(A \cap E)$ و $\mu_2(E) = -\nu(B \cap E)$ دو اندازه روی S هستند.

قضیه۵ ـ ۳. *فرض کنیم ν اندازه علامت‌دار روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. در آن‌صورت*

الف) *اگر A نسبت به اندازه علامت‌دار ν مثبت باشد، در آن‌صورت هر زیر مجموعه A نیز مثبت است.*

ب) *اجتماع هر تعداد شمارا از زیر مجموعه‌های مثبت، مجموعه‌ای مثبت است.*

ج) *اجتماع هر تعداد شمارا از زیر مجموعه‌های منفی، مجموعه‌ای منفی است.*

د) *اجتماع هر تعداد شمارا از زیر مجموعه‌های صفر، مجموعه‌ای صفر است.*

برهان. فرض کنیم A زیر مجموعه‌ای مثبت، $B \subseteq A$ و $B \in S$. اگر $C \in S$ و $C \subseteq B$، آن‌گاه $C \subseteq A$ و لذا $\nu(C) \geq 0$. این برهان قسمت الف را کامل می‌کند.

برای اثبات قسمت ب، فرض کنید $\{A_n\}$ دنباله‌ای از زیر مجموعه‌های مثبت باشد. قرار دهید $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. دنباله $\{B_n\}$ از اعضای مجزای S وجود دارد که برای هر n، $B_n \subseteq A_n$ و $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. اکنون فرض کنید $E \in S$ و $E \subseteq A$ داده شده باشد. می‌توان نوشت

$$\nu(E) = \nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \cap E) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n \cap E) \geq 0.$$

لذا A مجموعه‌ای مثبت است.

اثبات قسمت‌های ج و د به شیوه مشابه است که به خواننده واگذار می‌شود. ■

قضیه ۵ ـ ۴. *فرض کنیم ν اندازه علامت‌دار روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. فرض کنید $E \in S$ و $\nu(E) > 0$. در این‌صورت زیر مجموعه مثبت $A \subseteq E$ موجود است که $\nu(A) > 0$.*

برهان. اگر E شامل هیچ مجموعه از اندازه منفی نباشد، در آن‌صورت E مجموعه‌ای مثبت است و کافی‌است A را همان E انتخاب کنیم.

اکنون فرض کنیم E شامل زیر مجموعه‌ای از اندازه منفی باشد. قرار می‌دهیم

$$P = \left\{n \in \mathbb{N};\ \exists B \in S,\ B \subseteq E,\ \nu(B) < \frac{-1}{n}\right\}$$

واضح است که P ناتهی است. فرض کنیم n_1 کوچکترین عدد طبیعی در P باشد. لذا زیر مجموعه $E_1 \subseteq E$ از S هست که $\nu(E_1) < \frac{-1}{n_1}$. اگر $E \setminus E_1$ شامل هیچ مجموعه با اندازه منفی نباشد، لذا $E \setminus E_1$ زیر مجموعه مثبتی از E است. از طرفی $0 < \nu(E) = \nu(E \setminus E_1) + \nu(E_1) \leq \nu(E \setminus E_1) + \frac{-1}{n_1}$ و لذا $\nu(E \setminus E_1) > 0$ و در این حالت کافی‌است A را $E \setminus E_1$ اختیار کنیم.

اگر $E \setminus E_1$ شامل زیر مجموعه‌ای از اندازه منفی باشد، شبیه فوق کوچکترین عدد طبیعی n_2 را طوری می‌یابیم که برای زیر مجموعه $E_2 \subseteq (E \setminus E_1)$ از S، $\nu(E_2) < \frac{-1}{n_2}$. اگر $E \setminus (E_1 \cup E_2)$

شامل زیر مجموعه‌ای از اندازه منفی نباشد، این مجموعه مثبت و شبیه فوق دارای اندازه مثبت است. اگر $E \setminus (E_1 \cup E_2)$ شامل زیر مجموعه‌ای از اندازه منفی باشد، این روند را ادامه می‌دهیم. اگر در این روند برای یک m، $E \setminus \bigcup_{i=1}^{m} E_i$ شامل هیچ زیر مجموعه با اندازه منفی نباشد، در این‌صورت $E \setminus \bigcup_{i=1}^{m} E_i$ مجموعه‌ای مثبت است. از طرفی

$$\nu(E) = \nu(E \setminus \bigcup_{i=1}^{m} E_i) + \sum_{i=1}^{m} \nu(E_i) \leq \nu(E \setminus \bigcup_{i=1}^{m} E_i) + \sum_{i=1}^{m} \frac{-1}{n_i}$$

و لذا $\nu(E \setminus \bigcup_{i=1}^{m} E_i) > 0$. در این حالت A را $E \setminus \bigcup_{i=1}^{m} E_i$ در نظر می‌گیریم. فرض کنیم برای هر m، $E \setminus \bigcup_{i=1}^{m} E_i$ شامل زیر مجموعه‌ای از اندازه منفی باشد. قرار می‌دهیم $A = E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ و لذا $\nu(E) = \nu(A) + \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i)$. از $\nu(E) > 0$ و رابطه اخیر نتیجه می‌گیریم که $-\infty < \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-1}{n_i}$. بنابراین دنباله $\{\frac{1}{n_i}\}$ به صفر همگراست. اکنون فرض کنیم $B \subseteq A$ و $B \in S$. برای هر عدد طبیعی k، $B \subseteq E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} E_i$. چون n_{k+1} کوچکترین عدد طبیعی است که برای زیر مجموعه‌ای چون $F \subseteq (E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} E_i)$، $\nu(F) < \frac{-1}{n_{k+1}}$. لذا $\nu(B) \geq \frac{-1}{n_{k+1} - 1}$. این نتیجه می‌دهد که $\nu(B) \geq 0$ و لذا A زیر مجموعه‌ای مثبت است. از طرفی $\nu(E) = \nu(A) + \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i)$ و لذا $\nu(A) > 0$ که برهان را کامل می‌کند. ■

قضیه زیر یکی از مهمترین قضیه این بخش است. در این قضیه ثابت خواهیم کرد که هر اندازه علامت‌دار، دو مجموعه مثبت و منفی تولید می‌کند که افرازی برای X است.

قضیه ۵ ـ ۵. *فرض کنیم ν اندازه علامت‌دار روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. در آن‌صورت زیر مجموعه‌های مثبت A و منفی B وجود دارند که $X = A \cup B$ و $A \cap B = \emptyset$. زوج (A, B) را یک تجزیه هان از X نسبت به ν گوئیم. بعلاوه اینکه اگر (C, D) تجزیه هان دیگری از X نسبت به ν باشد، در آن‌صورت $A \Delta C$ زیر مجموعه‌ای پوچ است.*

برهان. ابتدا فرض کنید اندازه علامت‌دار ν مقدار مثبت بی‌نهایت را اختیار نمی‌کند. قرار می‌دهیم $\alpha = \sup\{\nu(E);$ زیر مجموعه‌ای مثبت است $E\}$. چون $\emptyset$ مجموعه‌ای مثبت است، لذا $\alpha \geq 0$. فرض کنید $\{E_n\}$ دنباله‌ای از زیر مجموعه‌های مثبت بوده که $\{\nu(E_n)\}$ به α همگرا باشد. چون اجتماع تعداد شمارا از زیر مجموعه‌های مثبت زیر مجموعه‌ای مثبت است، لذا $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ مجموعه‌ای مثبت بوده و همچنین $\alpha \geq \nu(A)$. برای هر عدد طبیعی n، $A \setminus E_n \subseteq A$ و لذا

$A \setminus E_n$ مجموعه‌ای مثبت است. برای هر n، $\nu(A) = \nu(A \setminus E_n) + \nu(E_n) \geq \nu(E_n)$ و لذا $\nu(A) \geq \alpha$. از این توضیحات نتیجه می‌گیریم که $\alpha = \nu(A) < +\infty$ و در حقیقت مجموعه فوق سوپریموم خود را اختیار می‌کند. قرار می‌دهیم $B = A^c$. اگر B شامل زیر مجموعه‌ای از اندازه مثبت چون D باشد، لذا D شامل زیر مجموعه‌ای مثبت با اندازه مثبت مانند F است. از طرفی $\nu(A \cup F) = \nu(A) + \nu(F) > \nu(A) = \alpha$ و $A \cup F$ مجموعه‌ای مثبت است. این متناقض با تعریف سوپریموم است و بنابراین B شامل هیچ مجموعه از اندازه مثبت نیست. این نشان می‌دهد که B مجموعه‌ای منفی و زوج (A, B) یک تجزیه هان برای X است.

اگر (C, D) تجزیه هان دیگری برای X باشد، لذا $A \setminus C \subseteq A \cap D$. چون $A \cap D$ مجموعه‌ای مثبت و منفی است، لذا $\nu(A \cap D) = 0$ و بنابراین $A \setminus C$ مجموعه‌ای پوچ است. به شیوه مشابه $C \setminus A$ نیز پوچ است و بنابراین $A \Delta C$ پوچ است.

اگر ν مقدار $+\infty$ را اختیار کند، به جای ν از $-\nu$ استفاده کرده و نتیجه مطلوب را بدست می‌آوریم. ■

فرض کنید (A, B) و (C, D) دو تجزیه هان برای X نسبت به اندازه علامت‌دار ν باشد. برای هر $E \in S$، هر دو مجموعه $E \cap A \cap D$ و $E \cap B \cap C$ مجموعه‌های مثبت و منفی بوده و لذا پوچ هستند. داریم

$$\begin{aligned} \nu(E \cap A) &= \nu(E \cap A \cap (C \cup D)) = \nu(E \cap A \cap C) + \nu(E \cap A \cap D) \\ &= \nu(E \cap A \cap C) \end{aligned}$$

و همینطور

$$\begin{aligned} \nu(E \cap C) &= \nu(E \cap C \cap (A \cup B)) = \nu(E \cap C \cap A) + \nu(E \cap C \cap B) \\ &= \nu(E \cap A \cap C). \end{aligned}$$

در نتیجه $\nu(E \cap A) = \nu(E \cap C)$. به شیوه مشابه $\nu(E \cap B) = \nu(E \cap D)$.

مثال ۵ ـ ۲. اندازه لبگ μ را روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. اندازه ν روی σ جبر همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر را با ضابطه $\nu(E) = \int_E xe^{-x^2} d\mu(x)$ تعریف می‌کنیم. فرض کنیم A زیر مجموعه‌ای مثبت باشد. ادعا می‌کنیم اندازه لبگ $A \cap (-\infty, 0)$ صفر است. از $0 \leq \nu(A \cap (-\infty, 0)) = \int_{A \cap (-\infty, 0)} xe^{-x^2} d\mu(x) \leq 0$، نتیجه می‌شود که $\int_{A \cap (-\infty, 0)} xe^{-x^2} d\mu(x) = 0$. بنابراین برای هر عدد طبیعی n، $\{x \in A \cap (-\infty, 0);\ xe^{-x^2} < \frac{-1}{n}\}$ نسبت به اندازه لبگ پوچ است. در نتیجه

$\{x \in A\cap(-\infty,\circ);\ xe^{-x^{2}} < \circ\}$ نسبت به اندازه لبگ پوچ است. از طرفی برای هر $x \in A\cap(-\infty,\circ)$، $xe^{-x^{2}} < \circ$ و لذا

$$A\cap(-\infty,\circ) = \{x\in A\cap(-\infty,\circ);\ xe^{-x^{2}} < \circ\}$$

نسبت به اندازه لبگ پوچ است.

از طرف دیگر فرض کنید A زیر مجموعه‌ای لبگ اندازه پذیر باشد که $\mu(A\cap(-\infty,\circ)) = \circ$. برای هر زیر مجموعه لبگ اندازه پذیر $C \subseteq A$، $\mu(C\cap(-\infty,\circ)) = \circ$. اما

$$\int_C xe^{-x^{2}}d\mu(x) = \int_{C\cap(-\infty,\circ)} xe^{-x^{2}}d\mu(x) + \int_{C\cap(\circ,+\infty)} xe^{-x^{2}}d\mu(x) \geq \circ$$

و لذا $\nu(C) \geq \circ$. این نتیجه می‌دهد که زیر مجموعه لبگ اندازه پذیر A مثبت است اگر و تنها اگر $\mu(A\cap(-\infty,\circ)) = \circ$.

به شیوه مشابه می‌توان ثابت کرد که زیر مجموعه لبگ اندازه پذیر B منفی است اگر و تنها اگر $\mu(B\cap(\circ,+\infty)) = \circ$. همینطور زیر مجموعه لبگ اندازه پذیر N صفر است اگر و تنها اگر $\mu(N) = \circ$. واضح است که زوج $((-\infty,\circ),[\circ,+\infty))$ یک تجزیه هان برای $\mathbb{R}$ است.

مثال ۵ ـ ۳. اندازه μ را روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X در نظر می‌گیریم. فرض کنید $f \in L^{1}(X)$. اندازه علامت‌دار ν را روی S با ضابطه $\nu(E) = \int_E fd\mu$ در نظر می‌گیریم. در آن‌صورت $A = \{x\in X;\ f(x) \geq \circ\}$ مجموعه‌ای مثبت، $B = \{x\in X;\ f(x) \leq \circ\}$ مجموعه‌ای منفی و $C = \{x\in X;\ f(x) = \circ\}$ نیز مجموعه صفر است. توجه کنید که ممکن است $\nu = \circ$ ولی $\mu \neq \circ$. برای مثال اندازه لبگ را روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر $\mathbb{R}$ در نظر گرفته و تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x\in\mathbb{Q} \\ \circ & x\in\mathbb{Q}^c \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. واضح است که برای هر زیر مجموعه لبگ اندازه پذیر E، $\nu(E) = \int_E fd\mu = \circ$ ولی $\mu \neq \circ$.

مثال ۵ ـ ۴. اندازه لبگ μ را روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر $\mathbb{R}$ در نظر گرفته و تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & |x| > 1 \\ \circ & |x| \leq 1 \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. واضح است که برای هر عدد حقیقی $|a| < 1$، زوج $((-\infty,a),[a,+\infty))$ یک تجزیه هان برای $\mathbb{R}$ نسبت به اندازه علامت‌دار $\nu(E) = \int_E f(x)d\mu(x)$ است. این مثال نشان

می‌دهد که تجزیه هان یک مجموعه منحصربفرد نیست.

فرض کنیم ν اندازه‌ای علامت‌دار روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X و (A, B) یک تجزیه هان برای X باشد. توابع ν^+ و ν^- را روی S با ضوابط $\nu^+(E) = \nu(E \cap A)$ و $\nu^-(E) = -\nu(E \cap B)$ تعریف می‌کنیم. واضح است که ν^+ و ν^- دو اندازه روی S هستند و همچنین برای هر $E \in S$، $\nu(E) = \nu(E \cap A) + \nu(E \cap B) = \nu^+(E) - \nu^-(E)$. این نتیجه می‌دهد که اندازه علامت‌دار ν را می‌توان به صورت تفاضل دو اندازه نوشت. قدر مطلق اندازه علامت‌دار ν را با نماد $|\nu|$ نمایش داده و به صورت $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۵ ـ ۶. دو اندازه μ و ν روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X را نسبت به هم تکین گوئیم هرگاه دو عنصر مجزای A و B در S موجود باشند که $X = A \cup B$، $\mu(A) = 0$ و $\nu(B) = 0$. برای نمایش دو اندازه نسبت به هم تکین μ و ν، از نماد $\mu \perp \nu$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۵ ـ ۵. به مثال‌های زیر در مورد تکین بودن دو اندازه توجه کنید.

الف) اندازه علامت‌دار ν روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X را در نظر بگیرید. اگر (A, B) تجزیه هان X نسبت به اندازه علامت‌دار ν باشد، لذا $\nu^+(B) = 0$ و $\nu^-(A) = 0$. بنابراین $\nu^+ \perp \nu^-$.

ب) فرض کنیم μ اندازه‌ای روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. اگر A و B افرازی از اعضای S برای X باشد، در آن‌صورت اندازه‌های تعریف شده μ_1 و μ_2 روی S با ضوابط $\mu_1(E) = \mu(E \cap A)$ و $\mu_2(E) = \mu(E \cap B)$ نسبت به هم تکین هستند.

قضیه ۵ ـ ۷. *فرض کنیم ν اندازه علامت‌دار روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. در آن‌صورت $\nu = \nu^+ - \nu^-$، $\nu^+ \perp \nu^-$ و تجزیه ν با این شرط منحصر بفرد است.*

برهان. دیدید که اندازه علامت‌دار ν قابل تجزیه به دو اندازه ν^+ و ν^- است و $\nu^+ \perp \nu^-$. اکنون فرض کنید دو اندازه ν_1 و ν_2 موجود باشند که $\nu_1 \perp \nu_2$ و $\nu = \nu_1 - \nu_2$. دو زیر مجموعه مجزای C و D از اعضای S وجود دارد که $\nu_1(D) = 0$، $\nu_2(C) = 0$ و $X = C \cup D$. برای هر $E \subseteq C$ از S، $\nu(E) = \nu_1(E) - \nu_2(E) = \nu_1(E) \geq 0$. لذا C مجموعه‌ای مثبت است. همینطور برای هر $E \subseteq D$ از S، $\nu(E) = \nu_1(E) - \nu_2(E) = -\nu_2(E) \leq 0$. لذا D مجموعه‌ای منفی است. در نتیجه (C, D) تجزیه هان دیگری از X است.

برای هر $E \in S$،

$$-\nu^-(E) = \nu(E \cap B) = \nu(E \cap D) = \nu_1(E \cap D) - \nu_2(E \cap D)$$

$$= -\nu_2(E \cap D) = -\nu_2(E \cap D) - \nu_2(E \cap C) = -\nu_2(E).$$

لذا $\nu_2 = \nu^-$. به شیوه مشابه، می‌توان نتیجه گرفت که $\nu_1 = \nu^+$ و بنابراین برهان کامل می‌شود. ∎

نکته ۲. در زیر به بیان چند نکته درباره تجزیه اندازه علامت‌دار می‌پردازیم.

الف) فرض کنید ν اندازه علامت‌دار روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. فرض کنید (A, B) تجزیه هان X باشد. برای $E \in S$،

$$\nu^+(E) = \nu(A \cap E) \leq \sup\{\nu(F);\ F \in S,\ F \subseteq E\}.$$

از طرف دیگر اگر $F \subseteq E$ و $F \in S$، آن‌گاه

$$\nu(F) = \nu(F \cap A) + \nu(F \cap B) \leq \nu(F \cap A)$$
$$\leq \nu(E \cap A) = \nu^+(E).$$

این نشان می‌دهد که $\nu^+(E) = \sup\{\nu(F);\ F \in S,\ F \subseteq E\}$.

ب) اگر (A, B) تجزیه هان X نسبت به ν باشد، (B, A) تجزیه هان X نسبت به $-\nu$ است. لذا $\nu^- = (-\nu)^+$. بنا به الف، برای $E \in S$،

$$\nu^-(E) = (-\nu)^+(E) = \sup\{-\nu(F);\ F \in S,\ F \subseteq E\}.$$

ج) برای $E \in S$، گیریم $\mu(E) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} |\nu(F_i)|;\ \bigcup_{i=1}^{n} F_i \subseteq E,$ ها مجزا $F_i \in S,\ n \in \mathbb{N}\}$. در آن‌صورت

$$|\nu|(E) = \nu^+(E) + \nu^-(E) = \nu(E \cap A) - \nu(E \cap B)$$
$$= |\nu(E \cap A)| + |\nu(E \cap B)| \leq \mu(E)$$

که در آن (A, B) تجزیه هان X نسبت به اندازه علامت‌دار ν است. اکنون فرض کنیم F_1 و ... و F_n تعدادی متناهی از اعضای مجزای S بوده و $\bigcup_{i=1}^{n} F_i \subseteq E$. بنابراین

$$\sum_{i=1}^{n} |\nu(F_i)| = \sum_{i=1}^{n} |\nu^+(F_i) - \nu^-(F_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} \nu^+(F_i) + \nu^-(F_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} |\nu|(F_i) = |\nu|(\bigcup_{i=1}^{n} F_i) \leq |\nu|(E).$$

در نتیجه $|\nu|(E) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} |\nu(F_i)|;\ \bigcup_{i=1}^{n} F_i \subseteq E,$ ها مجزا $F_i \in S,\ n \in \mathbb{N}\}$.

تعریف ۵ ـ ۸. دو اندازه علامت دار μ و ν روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X را در نظر بگیرید. گوئیم ν نسبت به μ به طور مطلق پیوسته است هرگاه برای هر $E \in S$، $|\mu|(E) = 0$ ایجاب کند $\nu(E) = 0$. در این حالت می‌نویسیم $\nu \ll \mu$.

اگر μ یک اندازه روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X و $f \in L^1(X)$، آن‌گاه اندازه علامت‌دار $\nu(E) = \int_E f d\mu$ تعریف شده روی S نسبت به اندازه μ بطور مطلق پیوسته است.

قضیه۵ ـ ۹. *فرض کنیم μ و ν دو اندازه علامت‌دار روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشند. شرایط زیر معادلند:*

الف) $\nu \ll \mu$.

ب) $\nu^+ \ll \mu$ و $\nu^- \ll \mu$.

ج) $|\nu| \ll |\mu|$

برهان. فرض کنید الف برقرار باشد. فرض کنیم $A \in S$ و $|\mu|(A) = 0$. برای هر $B \in S$ و $B \subseteq A$، $|\mu|(B) \leq |\mu|(A) = 0$. بنابراین

$$\nu^+(A) = \sup\{\nu(B);\ B \in S,\ B \subseteq A\} = 0.$$

همینطور $\nu^-(A) = \sup\{-\nu(B);\ B \in S,\ B \subseteq A\} = 0$. نتیجه اینکه $\nu^+ \ll \mu$ و $\nu^- \ll \mu$.

اثبات اینکه ب، قسمت ج و همچنین قسمت ج، قسمت الف را نتیجه می‌دهد ساده بوده و به خواننده واگذار می‌شود. ■

مثال۵ ـ ٦. فرض کنید S خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $\mathbb{R}$ باشد. فرض کنید μ نمایانگر اندازه لبگ روی $\mathbb{R}$ باشد. دو اندازه کراندار ν و η را با ضوابط $\nu(E) = \int_{E\cap[0,+\infty)} e^{-x^2} d\mu(x)$ و $\eta(E) = \int_{E\cap(-\infty,1)} e^{-x^2} d\mu(x)$ روی S تعریف می‌کنیم. واضح است که $\nu([-1,0]) = 0$ ولی $\eta([-1,0]) \neq 0$. این نشان می‌دهد η بطور مطلق پیوسته نسبت به ν نیست. همینطور $\eta([1,2]) = 0$ ولی $\nu([1,2]) \neq 0$. بنابراین ν بطور مطلق پیوسته نسبت به η نیست.

اکنون فرض کنید A زیر مجموعه‌ای لبگ اندازه پذیر بوده که $\nu(A) = 0$. بنابراین $\mu(A \cap ([0,+\infty)) = 0$. اگر $\eta(A^c) = 0$، لذا $\mu(A^c \cap (-\infty,1)) = 0$.

از طرفی

$$\begin{aligned}\mu([0,1)) &= \mu(A\cap[0,1)) + \mu(A^c \cap [0,1)) \\ &\leq \mu(A \cap ([0,+\infty)) + \mu(A^c \cap (-\infty,1)) = 0\end{aligned}$$

که یک تناقض است. لذا دو اندازه ν و η تکین نیستند. این مثال دو اندازه متناهی ارائه می‌کند که هیچ کدام نسبت به دیگری بطور مطلق پیوسته نیست و همچنین نسبت به هم تکین نیستند.

تعریف۵ ـ ۱۰. اندازه علامت دار ν روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X را در نظر بگیرید. ν

متناهی است هرگاه $|\nu(X)| < +\infty$. ν را σ متناهی گوئیم هرگاه دنباله $\{A_n\}$ از اعضای S موجود باشد که $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و برای هر n، $|\nu(A_n)| < +\infty$.

اگر ν اندازه‌ای متناهی باشد، در آن‌صورت $|\nu^+(X) - \nu^-(X)| = |\nu(X)| < +\infty$ و لذا $|\nu|(X) = \nu^+(X) + \nu^-(X) < +\infty$. این نتیجه می‌دهد که $|\nu|$ نیز متناهی است. اگر ν اندازه علامت‌دار σ متناهی باشد، در آن‌صورت دنباله $\{A_n\}$ از اعضای S موجود است که $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و برای هر n، $|\nu(A_n)| < +\infty$. از اینکه $|\nu(A_n)| < +\infty$، نتیجه می‌شود که $|\nu|(A_n) < +\infty$. بنابراین $|\nu|$ نیز σ متناهی است. عکس این موضوع نیز درست است.

قضیه۵ ـ ۱۱. *فرض کنیم μ و ν دو اندازه روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشند. اگر ν اندازه‌ای متناهی باشد، شرایط زیر معادلند:*

الف) $\nu \ll \mu$.

ب) *برای هر $\epsilon > 0$ عدد مثبت δ موجود است که اگر $E \in S$ و $\mu(E) < \delta$، آن‌گاه $\nu(E) < \epsilon$.*

برهان. فرض کنید $\nu \ll \mu$ و ب برقرار نباشد. لذا عدد مثبت ϵ و دنباله $\{E_n\}$ از اعضای S وجود دارد که برای هر n، $\mu(E_n) < \frac{1}{2^n}$ ولی $\nu(E_n) \geq \epsilon$. برای هر عدد طبیعی n،

$$\mu(\limsup E_n) \leq \mu\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\Big) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

بنابراین $\mu(\limsup E_n) = 0$. چون $\Big\{\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\Big\}$ دنباله‌ای نزولی و اندازه ν نیز متناهی است،

$$\nu(\limsup E_n) = \nu\Big(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\Big) = \lim_{n\to\infty} \nu\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\Big).$$

از طرفی برای هر n، $\nu\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\Big) \geq \nu(E_n) \geq \epsilon$. این نتیجه می‌دهد که $\nu(\limsup E_n) \geq \epsilon$ و این یک تناقض است.

اکنون فرض کنیم ب برقرار باشد. فرض کنیم $E \in S$ و $\mu(E) = 0$. بنا به فرض، برای هر عدد طبیعی n، $\nu(E) < \frac{1}{n}$. این نتیجه می‌دهد که $\nu(E) = 0$ و لذا $\nu \ll \mu$. ■

از قضیه بالا نتیجه می‌شود که اگر μ و ν دو اندازه علامت‌دار روی σ جبر S و ν اندازه متناهی باشد، در آن‌صورت $\nu \ll \mu$ اگر و تنها اگر برای هر $\epsilon > 0$ عدد مثبت δ موجود است که اگر $E \in S$ و $|\mu|(E) < \delta$، آن‌گاه $|\nu|(E) < \epsilon$.

مثال۵ ـ ۷. اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $\mathbb{R}$ را با نماد μ نمایش می‌دهیم. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی انتگرال‌پذیر باشد. اندازه ν روی σ جبر همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر را با ضابطه $\nu(E) = \int_E |f| d\mu$ تعریف می‌کنیم. واضح است

که ν اندازه‌ای متناهی است و همچنین $\nu \ll \mu$. بنابراین برای $\epsilon > 0$ عدد مثبت δ وجود دارد که اگر E زیر مجموعه‌ای لبگ اندازه پذیر بوده و $\mu(E) < \delta$، آن‌گاه $\nu(E) < \frac{\epsilon}{2}$. زیر مجموعه فشرده از $\mathbb{R}$ مانند K وجود دارد که $\nu(\mathbb{R} \setminus K) < \frac{\epsilon}{2}$. برای هر عدد طبیعی n، قرار می‌دهیم $D_n = \{x \in K; \ |f(x)| > n\}$. واضح است که $\{D_n\}$ دنباله‌ای نزولی از زیر مجموعه‌های K است و لذا $\{\mu(D_n)\}$ به صفر همگراست. عدد طبیعی N وجود دارد که برای هر $n \geq N$، $\mu(D_n) < \delta$. قرار دهید $A = K \setminus D_N$ و لذا $\mathbb{R} \setminus A = (\mathbb{R} \setminus K) \cup D_N$. واضح است که A اندازه پذیر است و برای هر $x \in A$، $|f(x)| \leq N$. بعلاوه اینکه

$$\int_{\mathbb{R}\setminus A} |f| d\mu = \int_{\mathbb{R}\setminus K} |f| d\mu + \int_{D_N} |f| d\mu < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

این نتیجه می‌دهد که اگر f تابعی انتگرال‌پذیر لبگ باشد، برای هر $\epsilon > 0$، زیر مجموعه اندازه پذیر A وجود دارد که $\int_{\mathbb{R}\setminus A} |f| d\mu < \epsilon$ و f روی A کراندار است.

نکته۳. فرض کنیم μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر $\mathbb{R}$ باشد. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی انتگرال پذیر باشد. برای هر عدد طبیعی n، قرار دهید $A_n = \{x \in \mathbb{R}; \ |f(x)| \geq n\}$. واضح است که $\{A_n\}$ دنباله‌ای نزولی از زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر است. چون $\mu(A_1) \leq \int_{A_1} |f| d\mu \leq \int |f| d\mu$، لذا $\{\mu(A_n)\}$ به صفر همگراست. اندازه ν را روی زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر با ضابطه $\nu(E) = \int_E f d\mu$ تعریف می‌کنیم. واضح است که $\nu \ll \mu$ و ν اندازه علامت‌دار متناهی است. فرض کنید $\epsilon > 0$ داده شده باشد، عدد مثبت δ وجود دارد که اگر E اندازه پذیر لبگ و $\mu(E) < \delta$، آن‌گاه $\nu(E) < \epsilon$. عدد طبیعی N موجود است که اگر $n \geq N$، $\mu(A_n) < \delta$. نتیجه اینکه اگر $n \geq N$، آن‌گاه $\int_{A_n} |f| d\mu = \nu(A_n) < \epsilon$. بنابراین $\lim_{n \to \infty} \int_{A_n} |f| d\mu = 0$. از طرفی برای هر عدد طبیعی n، $\int_{A_n} |f| d\mu \geq n\mu(A_n) \geq 0$ و لذا $\lim_{n \to \infty} n\mu(A_n) = 0$.

مثال۵ ـ ۸. فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله از اعداد حقیقی مثبت، $\inf\{a_n; \ n \in \mathbb{N}\} = 0$ و $\inf\{b_n; \ n \in \mathbb{N}\} > 0$. دو اندازه μ و ν را روی زیر مجموعه‌های اعداد طبیعی طوری می‌گیریم که $\mu(\{n\}) = a_n$ و $\nu(\{n\}) = b_n$. در واقع $S = \{\{n\}; \ n \in \mathbb{N}\}$ یک نیم حلقه است و تابع $\mu : S \to \mathbb{R}$ با ضابطه $\mu(\{n\}) = a_n$ یک اندازه روی S است. این اندازه بطور منحصربفرد قابل گسترش به یک اندازه روی $P(\mathbb{N})$ است. چون $\inf\{a_n; \ n \in \mathbb{N}\} = 0$، لذا زیر دنباله $\{a_{n_i}\}$ از $\{a_n\}$ وجود دارد که به صفر همگراست. برای هر n، $\mu(\{n\}) = a_n > 0$ و لذا $\nu \ll \mu$. اختیار کنید $\epsilon = \inf\{b_n; \ n \in \mathbb{N}\}$. اگر δ دلخواه باشد، عدد طبیعی i موجود است که $\mu(\{n_i\}) = a_{n_i} < \delta$ ولی $\nu(\{n_i\}) = b_{n_i} \geq \inf\{b_n; \ n \in \mathbb{N}\} = \epsilon$. این مثال بیان می‌کند که شرط متناهی بودن ν در قضیه

۵–۱۱ را نمی‌توان حذف کرد.

۵–۳ قضیه رادون نیکودیم و کاربردهای آن

قضیه رادون نیکودیم یکی از قضایای مهم است. فرض کنید μ اندازه‌ای روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. تابع انتگرال پذیر $f : X \to \mathbb{R}$ را در نظر گرفته و تابع $\nu : S \to [-\infty, +\infty]$ را با ضابطه $\nu(E) = \int_E f d\mu$ تعریف کنید. دیدید که ν اندازه‌ای علامت‌دار بوده و $\nu \ll \mu$. سوال این است که آیا عکس این موضوع صحیح است؟ قضیه رادون نیکودیم جوابی برای این سوال دارد. ابتدا به نکته زیر توجه کنید.

نکته۴. فرض کنید S یک σ جبر از زیر مجموعه‌های X باشد. فرض کنید n عددی طبیعی و $\{f_1, ..., f_n\}$ مجموعه‌ای از توابع اندازه پذیر نامنفی تعریف شده روی X باشند. قرار می‌دهیم $f = \max\{f_1, ..., f_n\}$. اگر $A \in S$ دلخواه باشد، قصد داریم زیر مجموعه‌های مجزای $A_1, ..., A_n$ از S را طوری بیابیم که $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ و برای هر $1 \leq i \leq n$، $f|_{A_i} = f_i$. برای $n = 2$، قرار دهید

$$A_1 = \{x \in A;\ f_1(x) \geq f_2(x)\},\ A_2 = \{x \in A;\ f_2(x) > f_1(x)\}.$$

چون f_1 و f_2 اندازه پذیرند، لذا A_1 و A_2 اندازه پذیر، مجزا و $A = A_1 \cup A_2$. واضح است که $f|_{A_1} = f_1$ و $f|_{A_2} = f_2$. اکنون فرض کنید حکم برای $n = k$ برقرار باشد و $\{f_1, ..., f_{k+1}\}$ توابع اندازه پذیر نامنفی تعریف شده روی X باشند. قرار دهید $h = \max\{f, f_{k+1}\}$ که در آن $f = \max\{f_1, ..., f_k\}$. فرض کنید $A \in S$ داده شده باشد. لذا مجموعه‌های اندازه پذیر و مجزای B و A_{k+1} وجود دارند که $A = B \cup A_{k+1}$، $h|_B = f$ و $h|_{A_{k+1}} = f_{k+1}$. بنا به فرض استقرا زیر مجموعه‌های اندازه پذیر و مجزای $A_1, ..., A_k$ وجود دارند که $B = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ و برای هر $1 \leq i \leq k$، $f|_{A_i} = f_i$. $A_1, ..., A_{k+1}$ جوابی برای حکم استقراست.

قضیه۵ ـ ۱۲. *فرض کنید μ و ν دو اندازه متناهی روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشند. اگر $\nu \ll \mu$، در آن‌صورت تابع اندازه پذیر، نامنفی و متناهی مقدار f وجود دارد که برای هر $E \in S$، $\nu(E) = \int_E f d\mu$.*

برهان. قرار می‌دهیم $K = \{f \geq 0;\ \int_E f d\mu \leq \nu(E)$ ،$E \in S$ اندازه پذیر و برای هر $f\}$. چون $0 \in K$، لذا K ناتهی است. فرض کنید $\alpha = \sup\{\int f d\mu;\ f \in K\}$. دنباله‌ای از اعضای K چون $\{f_n\}$ وجود دارد که $\{\int f_n d\mu\}$ به α همگراست. برای هر عدد طبیعی n، قرار دهید

$h_n = \max\{f_1, ..., f_n\}$. واضح است که $\{h_n\}$ دنباله‌ای صعودی از توابع اندازه پذیر نامنفی است. لذا این دنباله به تابعی چون h همگراست. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $E \in S$ دلخواه باشد. $E_1, ..., E_n$ از اعضای مجزای S وجود دارند که $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ و برای هر $1 \leq i \leq n$، $h_n|_{E_i} = f_i$. می‌توان نوشت

$$\int_E h_n d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f_i d\mu \leq \sum_{i=1}^{n} \nu(E_i) = \nu(E).$$

بنابراین $h_n \in \mathcal{K}$ و بنا به قضیه همگرایی یکنوا، برای هر $E \in S$ خواهیم داشت $\int_E h d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E h_n d\mu \leq \nu(E)$. این نشان می‌دهد که $h \in \mathcal{K}$. برای هر عدد طبیعی n، $\alpha \geq \int h d\mu \geq \int h_n d\mu \geq \int f_n d\mu$. وقتی n به بی‌نهایت میل کند، نتیجه می‌دهد که $\alpha = \int h d\mu$. از طرفی $\alpha = \int h d\mu \leq \nu(X) < +\infty$ و لذا تابع اندازه پذیر نامنفی و متناهی مقدار f وجود دارد که با h تقریباً همه جا مساوی است. ادعا می‌کنیم که برای هر $E \in S$، $\nu(E) = \int_E f d\mu$. تابع $\eta : S \to [0, +\infty]$ را با ضابطه $\eta(E) = \nu(E) - \int_E f d\mu$ تعریف می‌کنیم. ثابت می‌کنیم $\eta = 0$. چون $h \in \mathcal{K}$ با f تقریباً همه جا مساوی است، لذا $f \in \mathcal{K}$ و بنابراین $\eta \geq 0$. اگر η ناصفر باشد، $C \in S$ را طوری می‌گیریم که $\eta(C) > 0$. اما μ اندازه‌ای متناهی است و لذا عدد مثبت ϵ را طوری اختیار می‌کنیم که $(\eta - \epsilon\mu)(C) > 0$. بنا به قضیه ۵−۴، C شامل زیر مجموعه مثبت A با اندازه مثبت نسبت به اندازه علامت‌دار $\eta - \epsilon\mu$ است. برای هر $E \in S$،

$$\epsilon\mu(E \cap A) \leq \eta(E \cap A) = \nu(E \cap A) - \int_{E\cap A} f d\mu.$$

قرار می‌دهیم $g = f + \epsilon\chi_A$ و لذا برای هر $E \in S$،

$$\begin{aligned}\int_E g d\mu = \int_E f d\mu + \epsilon\mu(A \cap E) &\leq \int_{E\setminus A} f d\mu + \nu(E \cap A)\\ &\leq \nu(E \setminus A) + \nu(E \cap A) = \nu(E).\end{aligned}$$

این نتیجه می‌دهد که $g \in \mathcal{K}$ و لذا باید $\int g d\mu = \int f d\mu + \epsilon\mu(A) \leq \alpha$. اما $\int f d\mu = \alpha$ و بنابراین $\mu(A) = 0$. چون $\nu \ll \mu$، پس $\nu(A) = 0$. از تعریف η نتیجه می‌گیریم که $\eta(A) = 0$ و لذا $\eta(A) - \epsilon\mu(A) = 0$. این تناقض است و بنابراین $\eta = 0$. از $\eta = 0$ نتیجه می‌شود که برای هر $E \in S$، $\nu(E) = \int_E f d\mu$. ■

قضیه بالا ارتباط بین دو اندازه متناهی که یکی نسبت به دیگری به طور مطلق پیوسته است را مشخص می‌کند. سوال این است که آیا قضیه فوق برای اندازه‌های σ متناهی نیز برقرار است؟ پاسخ مثبت است و نکته زیر این موضوع را ثابت می‌کند.

نکته ۵. فرض کنید μ و ν دو اندازه σ متناهی روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X بوده و

$\nu \ll \mu$. دنباله‌های $\{A_n\}$ و $\{B_m\}$ از اعضای S وجود دارند که $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$ و برای هر m و n، $\mu(A_n) < +\infty$ و $\nu(B_m) < +\infty$. فرض کنید $\{C_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ یک نمایش از $\{A_n \cap B_m;\ m,n \in \mathbb{N}\}$ باشد. اما $X = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty} A_n \cap B_m$ و برای هر $m,n \in \mathbb{N}$، $\mu(A_n \cap B_m) < +\infty$ و $\nu(A_n \cap B_m) < +\infty$. لذا $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$ و برای هر عدد طبیعی k، $\mu(C_k) < +\infty$ و $\nu(C_k) < +\infty$. قرار دهید $X_1 = C_1$ و برای هر $n > 1$، $X_n = C_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} X_i$. لذا $\{X_n\}$ دنباله‌ای از اعضای مجزای S بوده که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\mu(X_n) < +\infty$ و $\nu(X_n) < +\infty$.

اکنون فرض کنید n عدد طبیعی دلخواه باشد. اندازه‌های μ و ν روی σ جبر $S_n = \{E \cap X_n;\ E \in S\}$ متناهی هستند. بنا به قضیه بالا، تابع اندازه پذیر $f_n : X_n \to [0,+\infty)$ وجود دارد که برای هر $E \in S$، $\nu(E \cap X_n) = \int_{E\cap X_n} f_n d\mu$. برای هر $x \in X$، عدد طبیعی n وجود دارد که $x \in X_n$. قرار دهید $f(x) = f_n(x)$. چون X_n ها مجزا هستند، لذا $f : X \to [0,+\infty)$ تابع است. برای هر عدد حقیقی α، $\{x;\ f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x;\ f_n(x) > \alpha\}$ و بنابراین f تابعی اندازه پذیر است. برای هر $E \in S$،

$$\int_E f d\mu = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \cap E} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{X_n \cap E} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{X_n \cap E} f_n d\mu$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(X_n \cap E) = \nu(E).$$

نتیجه اینکه اگر μ و ν دو اندازه σ متناهی روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X بوده و $\nu \ll \mu$، در آن‌صورت تابع اندازه پذیر $f : X \to [0,+\infty)$ وجود دارد که برای هر $E \in S$، $\nu(E) = \int_E f d\mu$.

نکته۶. فرض کنید μ و ν دو اندازه σ متناهی روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X بوده و $\nu \ll \mu$. تابع اندازه پذیر $f : X \to [0,+\infty)$ وجود دارد که برای هر $E \in S$، $\nu(E) = \int_E f d\mu$. فرض کنید $g : X \to [0,+\infty)$ تابع اندازه پذیر دیگری باشد که برای هر $E \in S$، $\nu(E) = \int_E g d\mu$. قرار می‌دهیم $E = \{x \in X;\ f(x) > g(x)\}$ و فرض کنیم $\{A_n\}$ دنباله‌ای صعودی از اعضای S باشد که $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و برای هر n، $\nu(A_n) < +\infty$. برای هر عدد طبیعی n، $\int_{E\cap A_n} f d\mu = \int_{E\cap A_n} g d\mu$ و بنابراین $\int_{E\cap A_n} f - g d\mu = 0$. استفاده از قضیه همگرایی یکنوا نشان می‌دهد که $\int_E f - g d\mu = 0$. نتیجه اینکه $\mu(E) = 0$. به شیوه مشابه می‌توان نشان داد که $\mu(\{x \in X;\ g(x) > f(x)\}) = 0$ و لذا f تقریباً همه جا با تابع g نسبت به اندازه μ مساوی است.

فرض کنید μ اندازه‌ای σ متناهی و ν نیز اندازه‌ای علامت‌دار σ متناهی روی σ جبر S از زیر

مجموعه‌های X باشد. فرض کنید $\nu \ll \mu$. در آن‌صورت $\nu = \nu^+ - \nu^-$ و همچنین $\nu^+ \ll \mu$ و $\nu^- \ll \mu$. توابع اندازه پذیر $f_1 : X \to [0, +\infty)$ و $f_2 : X \to [0, +\infty)$ وجود دارند که برای هر $E \in S$، $\nu^+(E) = \int_E f_1 d\mu$ و $\nu^-(E) = \int_E f_2 d\mu$. قرار دهید $f = f_1 - f_2$. f تابعی اندازه پذیر و متناهی مقدار است. برای هر $E \in S$،

$$\nu(E) = \nu^+(E) - \nu^-(E) = \int_E f_1 d\mu - \int_E f_2 d\mu = \int_E f d\mu.$$

تعریف۵ ــ ۱۳. فرض کنید μ اندازه‌ای علامت دار روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X و $f : X \to [-\infty, +\infty]$ تابعی اندازه پذیر باشد. اگر $\int f d\mu^+ - \int f d\mu^-$ موجود باشد، تعریف می‌کنیم $\int f d\mu = \int f d\mu^+ - \int f d\mu^-$.

قضیه۵ ــ ۱۴. *فرض کنید μ و ν دو اندازه علامت‌دار σ متناهی روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشند. اگر $\nu \ll \mu$، در آن‌صورت تابع اندازه پذیر و متناهی مقدار f وجود دارد که برای هر $E \in S$، $\nu(E) = \int_E f d\mu$.*

برهان. فرض کنیم (A, B) تجزیه هان X نسبت به اندازه علامت‌دار μ باشد. چون $\nu \ll \mu$، لذا $\nu \ll \mu^+$ روی σ جبر $\{E \cap A;\ E \in S\}$ از زیر مجموعه‌های A و همچنین روی σ جبر $\{E \cap B;\ E \in S\}$ از زیر مجموعه‌های B، $\nu \ll \mu^-$. واضح است که μ^+ و μ^- اندازه‌های σ متناهی هستند. بنابراین تابع اندازه‌پذیر $f_1 : A \to \mathbb{R}$ وجود دارد که برای هر $E \in S$، $\nu(E \cap A) = \int_{E \cap A} f_1 d\mu^+$. همینطور تابع اندازه‌پذیر $f_2 : B \to \mathbb{R}$ وجود دارد که برای هر $E \in S$، $\nu(E \cap B) = \int_{E \cap B} f_2 d\mu^-$. تابع $f : X \to \mathbb{R}$ را با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in A \\ -f_2(x) & x \in B \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. فرض کنیم α عدد حقیقی دلخواه باشد. چون

$$\{x \in X;\ f(x) > \alpha\} = \{x \in A;\ f(x) > \alpha\} \cup \{x \in B;\ f(x) > \alpha\}$$

و طرف راست عضوی از S است، لذا $\{x \in X;\ f(x) > \alpha\} \in S$. این نشان می‌دهد که f اندازه پذیر است. برای هر $E \in S$،

$$\begin{aligned} \nu(E) = \nu(E \cap A) + \nu(E \cap B) &= \int_{E \cap A} f_1 d\mu^+ + \int_{E \cap B} f_2 d\mu^- \\ &= \int_{E \cap A} f d\mu^+ - \int_{E \cap B} f d\mu^- = \int_E f d\mu. \end{aligned}$$

این برهان قضیه را کامل می‌کند. ■

قضیه بالا به قضیه رادون نیکودیم مشهور است.

تعریف۵ ـ ۱۵. فرض کنید μ و ν دو اندازه علامت‌دار σ متناهی روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X و $\nu \ll \mu$. در آن‌صورت تابع اندازه پذیر $f : X \to [\circ, +\infty)$ وجود دارد که برای هر $E \in S$، $\nu(E) = \int_E f d\mu$. f را مشتق رادون ν نسبت به μ گوئیم و می‌نویسیم $f = \frac{d\nu}{d\mu}$.

نکته۷. فرض کنید μ، ν و η سه اندازه σ متناهی روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشند. فرض کنیم $\nu \ll \mu$ و $\mu \ll \eta$. واضح است که $\nu \ll \eta$. برای هر دو عنصر $E, F \in S$،

$$\int_E \chi_F d\mu = \mu(E \cap F) = \int_{E\cap F} \frac{d\mu}{d\eta} d\eta = \int_E \chi_F \frac{d\mu}{d\eta} d\eta.$$

این نشان می‌دهد که برای هر $E, F \in S$، $\int_E \chi_F d\mu = \int_E \chi_F \frac{d\mu}{d\eta} d\eta$.

اکنون فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع ساده و اندازه پذیر بوده که به تابع $\frac{d\nu}{d\mu}$ همگرای نقطه به نقطه است. لذا برای هر n، $\int_E f_n d\mu = \int_E f_n \frac{d\mu}{d\eta} d\eta$. قضیه همگرایی یکنوا، نتیجه می‌دهد که $\nu(E) = \int_E \frac{d\nu}{d\mu} d\mu$. اما $\int_E \frac{d\nu}{d\mu} d\mu = \int_E \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\eta} d\eta$. بنابراین $\frac{d\nu}{d\eta}$ و $\frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\eta}$ تقریباً همه جا نسبت به اندازه η با هم مساوی هستند.

فرض کنید μ و ν دو اندازه روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. فرض کنید μ اندازه‌ای σ متناهی و $f : X \to [\circ, +\infty)$ تابعی اندازه پذیر باشد که برای هر $E \in S$، $\nu(E) = \int_E f d\mu$. دنباله $\{A_n\}$ از اعضای S وجود دارد که $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و $\mu(A_n) < +\infty$. برای هر عدد طبیعی n، قرار دهید $B_n = \{x \in X;\ f(x) \leq n\}$. واضح است که $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. فرض کنید $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ یک نمایش از $\{A_n \cap B_m;\ n, m \in \mathbb{N}\}$ باشد. لذا $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$، $\mu(X_n) < +\infty$ و برای هر $x \in X_n$، $f(x) \leq n$. برای هر n، $\nu(X_n) = \int_{X_n} f d\mu \leq n\mu(X_n) < +\infty$. این نتیجه می‌دهد که اگر اندازه μ، اندازه‌ای σ متناهی باشد و نتیجه قضیه رادون نیکودیم برقرار باشد، اندازه ν نیز σ متناهی خواهد بود.

مثال۵ ـ ۹. فرض کنید S خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $[\circ, 1]$ باشد. اندازه μ را روی S با ضابطه

$$\mu(A) = \begin{cases} +\infty & A \neq \emptyset \\ \circ & A = \emptyset \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. فرض کنید ν اندازه لبگ روی $[\circ, 1]$ باشد. واضح است که $\nu \ll \mu$. فرض کنید تابع اندازه پذیر $f : X \to [\circ, +\infty)$ موجود باشد که برای هر $E \in S$، $\nu(E) = \int_E f d\mu$. برای هر $x \in [\circ, 1]$، $\int_{\{x\}} f d\mu = \nu(\{x\}) = \circ$. چون $\mu(\{x\}) = +\infty$، لذا برای هر $x \in [\circ, 1]$،

$f(x) = \circ$. این نتیجه می‌دهد که $\nu = \circ$، که یک تناقض است. این مثال نشان می‌دهد که در قضیه رادون نیکودیم شرط σ متناهی بودن μ قابل حذف کردن نیست.

نکته۸. فرض کنید μ اندازه‌ای متناهی روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. فرض کنید $f : X \to X$ تابعی باشد که برای هر $E \in S$، $f^{-1}(E) \in S$ و همچنین برای هر $E \in S$ که اندازه‌اش صفر است، $f^{-1}(E)$ نیز دارای اندازه صفر باشد. تابع ν را روی S با ضابطه $\nu(E) = \mu(f^{-1}(E))$ تعریف می‌کنیم. به آسانی دیده می‌شود که ν یک اندازه است و بنا به فرض $\nu \ll \mu$. بنا به قضیه رادون نیکودیم تابع نامنفی و متناهی مقدار h وجود دارد که برای هر $E \in S$، $\nu(E) = \int h d\mu$. اما $\int \chi_E(x) d\nu(x) = \nu(E) = \mu(f^{-1}(E)) = \int \chi_{f^{-1}(E)}(x) d\mu(x)$. چون برای هر $E \in S$ و $x \in X$، $\chi_E(f(x)) = \chi_{f^{-1}(E)}(x)$. لذا برای هر تابع ساده ϕ، $\int \phi(x) d\nu(x) = \int \phi(f(x)) d\mu(x)$. اکنون فرض کنید $g \in L^{\infty}(X)$ تابعی نامنفی باشد. دنباله‌ای از توابع ساده $\{s_n\}$ وجود دارد که به تابع g نقطه به نقطه همگرا بوده و همچنین برای هر n، $|s_n| \leq g$. بنا به قضیه همگرایی مغلوب و توضیحات بالا

$$\int g(x) d\nu(x) = \lim_{n\to\infty} \int s_n(x) d\nu(x) = \lim_{n\to\infty} \int s_n(f(x)) d\mu(x) = \int gof(x) d\mu(x)$$

قضیه زیر به قضیه تجزیه لبگ معروف است و در این قضیه یک اندازه را بر حسب اندازه دیگری به دو اندازه دیگر تحت شرایطی تجزیه می‌کنیم.

قضیه۵ ـ ۱۶. *فرض کنید μ و ν دو اندازه σ متناهی روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشند. در آن‌صورت دو اندازه $\nu_\circ$ و ν_1 روی S وجود دارد که $\nu = \nu_\circ + \nu_1$، $\nu_1 \ll \mu$ و $\mu \perp \nu_\circ$. بعلاوه این تجزیه با شرایط فوق منحصربفرد است.*

برهان. قرار دهید $\eta = \mu + \nu$. چون μ و ν دو اندازه σ متناهی هستند، دنباله صعودی $\{A_n\}$ از اعضای S وجود دارد که برای هر n، $\mu(A_n) < +\infty$، $\nu(A_n) < +\infty$ و $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. واضح است که برای هر n، $\eta(A_n) < +\infty$ و لذا η نیز σ متناهی خواهد بود. به آسانی دیده می‌شود که $\mu \ll \eta$. بنا به قضیه رادون نیکودیم، تابع اندازه پذیر $f : X \to [\circ, +\infty)$ وجود دارد که برای هر $E \in S$، $\mu(E) = \int_E f d\eta$. قرار می‌دهیم

$$A = \{x \in X;\ f(x) > \circ\},\quad B = \{x \in X;\ f(x) = \circ\}.$$

اندازه پذیری f نشان می‌دهد که $A, B \in S$. واضح است که $A \cup B = X$ و $A \cap B = \emptyset$. دو اندازه $\nu_\circ$ و ν_1 را روی S با ضوابط $\nu_\circ(E) = \nu(E \cap B)$ و $\nu_1(E) = \nu(E \cap A)$ تعریف می‌کنیم. واضح است که $\nu = \nu_\circ + \nu_1$، $\nu_\circ(A) = \circ$. اما برای هر $E \in S$، $\mu(E) = \int_E f d\eta$. بنا به تعریف B،

$\mu(B) = 0$. این نتیجه می‌دهد که $\nu_0 \perp \mu$. فرض کنید $E \in S$ و $\mu(E) = 0$. چون f بر $A \cap E$ مثبت است، لذا $\eta(A \cap E) = 0$. چون $\eta = \mu + \nu$، بنابراین $\nu_1(E) = \nu(A \cap E) = 0$. در نتیجه $\nu_1 \ll \mu$.

اکنون فرض کنید ν'_0 و ν'_1 اندازه‌های دیگری روی σ جبر S بوده که $\nu'_0 \perp \mu$، $\nu'_1 \ll \mu$ و $\nu = \nu'_0 + \nu'_1$. لذا $A', B' \in S$ وجود دارد که $X = A' \cup B'$، $A' \cap B' = \emptyset$، $\mu(B') = 0$، $\nu'_0(A') = 0$ و $\nu'_1 \ll \mu$. فرض کنید $E \in S$ و $\nu(E) < +\infty$. لذا

$$E = (E \cap B \cap B') \cup (E \cap A' \cap B) \cup (E \cap A \cap B') \cup (E \cap A \cap A').$$

اما $\mu(E \cap B \cap B') = \mu(E \cap A' \cap B) = \mu(E \cap A \cap B') = 0$ و لذا

$$\begin{aligned}\nu_1(E \cap B \cap B') &= \nu_1(E \cap B \cap A') = \nu_1(E \cap A \cap B') = \nu'_1(E \cap B \cap B') \\ &= \nu'_1(E \cap A' \cap B) = \nu'_1(E \cap A \cap B') = 0.\end{aligned}$$

از روابط بالا و $\nu_0 + \nu_1 = \nu'_0 + \nu'_1$ نتیجه می‌شود که

$$(\nu'_1 - \nu_1)(E) = (\nu'_1 - \nu_1)(E \cap A \cap A') = (\nu_0 - \nu'_0)(E \cap A \cap A') = 0.$$

بنابراین $\nu_1(E) = \nu'_1(E)$ و لذا $\nu_0(E) = \nu'_0(E)$. فرض کنیم $E \in S$ دلخواه باشد. برای هر عدد طبیعی n، $\nu_1(E \cap A_n) = \nu'_1(E \cap A_n)$ و $\nu_0(E \cap A_n) = \nu'_0(E \cap A_n)$. لذا $\nu_1(E) = \nu'_1(E)$ و $\nu_0(E) = \nu'_0(E)$. بنابراین تجزیه فوق منحصر بفرد است. ■

مثال۵ ـ ۱۰. توابع f و g را روی مجموعه اعداد حقیقی با ضوابط $f(x) = \sqrt{|1 - x|}\chi_{(-\infty,1]}(x)$ و $g(x) = x^2\chi_{[0,+\infty)}(x)$ در نظر می‌گیریم. اگر μ نمایانگر اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های اندازه پذیر لبگ از $\mathbb{R}$ باشد، دو اندازه ν و η را روی زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر با ضوابط $\nu(E) = \int_E f d\mu$ و $\eta(E) = \int_E g d\mu$ تعریف می‌کنیم. دو اندازه ν_0 و ν_1 را روی زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر با ضوابط $\nu_0(E) = \nu((-\infty, 0] \cap E)$ و $\nu_1(E) = \nu((0, +\infty) \cap E)$ تعریف می‌کنیم. واضح است که $\eta((-\infty, 0]) = 0$، $\nu_0((0, +\infty)) = 0$ و بنابراین $\eta \perp \nu_0$. فرض کنید E زیر مجموعه‌ای لبگ اندازه پذیر بوده و $\eta(E) = 0$. لذا $\mu(E \cap (0, +\infty)) = 0$ و بنابراین $\nu_1(E) = \nu((0, +\infty) \cap E) = \int_{(0,+\infty)\cap E} f d\mu = 0$. این نشان می‌دهد که $\nu_1 \ll \eta$ و چون $\nu = \nu_0 + \nu_1$، تجزیه اخیر تجزیه لبگ ν است.

نکته۹. فرض کنید μ و ν دو اندازه σ متناهی روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. فرض کنید S شامل همه زیر مجموعه‌های متناهی از X باشد. بنا به قضیه تجزیه لبگ، دو اندازه ν_0 و ν_1 روی S وجود دارد که $\nu = \nu_0 + \nu_1$، $\mu \perp \nu_0$ و $\nu_1 \ll \mu$. قرار می‌دهیم

$D = \{x \in X;\ \nu_\circ(\{x\}) > \circ\}$. فرض کنید $\{A_n\}$ دنباله‌ای صعودی از اعضای S باشد که $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و برای هر n، $\nu(A_n) < +\infty$. نشان می‌دهیم که برای هر n، $D \cap A_n$ حداکثر شماراست. برای هر عدد طبیعی k، $\{x \in D \cap A_n;\ \nu_\circ(\{x\}) > \frac{1}{k}\}$ متناهی است. بنابراین $D \cap A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in D \cap A_n;\ \nu_\circ(\{x\}) > \frac{1}{k}\}$ حداکثر شماراست. نتیجه اینکه D حداکثر شمارا و لذا $D \in S$. اندازه‌های ν_2 و ν_3 را روی S با ضوابط $\nu_2(E) = \nu_\circ(E \cap D)$ و $\nu_3(E) = \nu_\circ(E \cap D^c)$ تعریف می‌کنیم. واضح است که $\nu_\circ = \nu_2 + \nu_3$ و $\nu_2 \perp \nu_3$. از اینکه $\mu \perp \nu_\circ$ نتیجه می‌گیریم که $\mu \perp \nu_2$ و $\mu \perp \nu_3$. از $\mu \perp \nu_2$ و $\mu \gg \nu_1$ نتیجه می‌شود که $\nu_2 \perp \nu_1$. از $\mu \perp \nu_3$ و $\mu \gg \nu_1$ نتیجه می‌شود که $\nu_3 \perp \nu_1$. با این توضیحات، ν به مجموع سه اندازه ν_1، ν_2 و ν_3 تجزیه می‌شود که برای هر $\{1, 2, 3\} \ni i, j$، $\nu_i \perp \nu_j$ و همچنین برای هر $x \in X$، $\nu_3(\{x\}) = \circ$.

۵–۴ قضیه نمایش ریس

در این بخش به بیان و اثبات یکی از قضایای مهم می‌پردازیم. این قضیه طولانی است و ما مجبوریم آن‌را به قسمت‌های ساده تقسیم کرده که فهم آن آسان باشد.

نکته۵.۱۰. اندازه μ را روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X در نظر می‌گیریم. فرض کنید $1 \leq p < \infty$ و q نیز مزدوج p باشد. توجه کنید که در حالت $p = 1$، $q = +\infty$. اگر $g \in L^q(X)$ عنصری دلخواه باشد، تابع $\Lambda_g : L^p(X) \to \mathbb{R}$ با ضابطه $\Lambda_g(f) = \int fg d\mu$ تابعکی خطی است. برای $f \in L^p(X)$، $|\Lambda_g(f)| = |\int fgd\mu| \leq \|f\|_p \|g\|_q$. این نشان می‌دهد که $\Lambda_g \in L^p(X)^*$ و $\|\Lambda_g\| \leq \|g\|_q$.

سوال این است که آیا عکس نکته بالا نیز صحیح است؟ در واقع اگر Λ تابعکی حقیقی مقدار و پیوسته روی $L^p(X)$ باشد، آیا همواره $g \in L^q(X)$ وجود دارد که $\Lambda = \Lambda_g$؟ پاسخ مثبت است و قضیه نمایش ریس بیان می‌کند که چنین عنصری در $L^q(X)$ وجود خواهد داشت. ثابت خواهیم کرد که در این حالت $\|\Lambda_g\| = \|g\|_q$. با این ایزومتری $L^p(X)^* = L^q(X)$.

قضیه۵ ـ ۱۷. *فرض کنید μ اندازه‌ای متناهی روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. فرض کنید q مزدوج $1 \leq p < +\infty$ و $\Lambda \in L^p(X)^*$ نیز تابعکی حقیقی مقدار باشد. در آن‌صورت تابع اندازه پذیر و متناهی مقدار g وجود دارد که برای هر $f \in L^p(X)$، $\Lambda(f) = \int fgd\mu$.*

برهان. چون μ اندازه‌ای متناهی است، لذا برای هر $E \in S$، $\chi_E \in L^p(X)$. تابع $\nu : S \to \mathbb{R}$ را با

ضابطه $\nu(E) = \Lambda(\chi_E)$ تعریف می‌کنیم. چون Λ تابعکی خطی است لذا برای زیر مجموعه متناهی و مجزای $\{E_1, ..., E_m\}$ از S،

$$\nu(\bigcup_{i=1}^{m} E_i) = \Lambda(\sum_{i=1}^{m} \chi_{E_i}) = \sum_{i=1}^{m} \Lambda(\chi_{E_i}) = \sum_{i=1}^{m} \nu(E_i).$$

بنابراین ν متناهی جمعی است. اکنون فرض کنید $\{E_n\}$ دنباله‌ای نزولی از اعضای S بوده که $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$. چون $\|\chi_{E_n}\|_p = \left(\int \chi_{E_n} d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \mu(E_n)^{\frac{1}{p}}$، لذا $\{\|\chi_{E_n}\|_p\}$ به صفر همگراست. از طرفی Λ پیوسته بوده و لذا $\{\nu(E_n)\}$ به صفر همگراست. این نتیجه می‌دهد که ν اندازه‌ای علامت‌دار است.

اکنون فرض کنید که برای $E \in S$، $\mu(E) = 0$. در نتیجه χ_E در فضای $L^p(X)$ صفر است و بنابراین $\nu(E) = \Lambda(\chi_E) = 0$. این نتیجه می‌دهد که $\nu \ll \mu$. از آنجا که ν اندازه‌ای متناهی است، بنا به قضیه رادون نیکودیم، تابع اندازه پذیر و متناهی مقدار g موجود است که برای هر $E \in S$، $\nu(E) = \int_E g d\mu$. پس برای هر $E \in S$، $\Lambda(\chi_E) = \int \chi_E g d\mu$.

برای هر عدد طبیعی m، قرار می‌دهیم $E_m = \{x \in X;\ |g(x)| \leq m\}$. فرض کنید $f \in L^p(X)$ تابعی نامنفی بوده که $f|_{E_m^c} = 0$. دنباله‌ای از توابع ساده و صعودی $\{s_n\}$ وجود دارد که به تابع f همگرای نقطه به نقطه است. برای هر n و هر $x \in E_m$، $|(s_n - f)(x)g(x)| \leq 2mf(x)$. از طرفی

$$\int |f| d\mu = \int |f|.1 d\mu \leq \|f\|_p \mu(X)^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

بنا به قضیه همگرایی مغلوب، $\lim_{n\to\infty} \Lambda(s_n) = \lim_{n\to\infty} \int s_n g d\mu = \int f g d\mu$. از طرفی برای هر عدد طبیعی n و هر $x \in E_m$، $|s_n(x) - f(x)|^p \leq 2^p |f(x)|^p$ و لذا $\{s_n\}$ در نرم L^p به f همگراست. نتیجه اینکه $\{\Lambda(s_n)\}$ به $\Lambda(f)$ همگراست. از این توضیحات نتیجه می‌گیریم که $\Lambda(f) = \int f g d\mu$. چون هر عنصر در $L^p(X)$ تفاضل دو عنصر نامنفی از $L^p(X)$ است، لذا برای هر $f \in L^p(X)$ که $f|_{E_m^c} = 0$، $\Lambda(f) = \int f g d\mu$.

اکنون فرض کنید $f \in L^p(X)$ عنصری دلخواه باشد. چون $\{E_m\}$ دنباله‌ای صعودی از اعضای S بوده که به X همگراست، لذا $\{f\chi_{E_m}\}$ نقطه به نقطه به f همگراست. از طرفی برای هر m و برای هر x، $|f - f\chi_{E_m}|^p(x) \leq 2^p |f(x)|^p$. بنا به قضیه همگرایی مغلوب، $\{f\chi_{E_m}\}$ در نرم L^p به f همگراست. با توجه به پیوستگی Λ،

$$\Lambda(f) = \lim_{m\to\infty} \Lambda(f\chi_{E_m}) = \lim_{m\to\infty} \int f\chi_{E_m} g d\mu = \int f g d\mu.$$

این برهان قضیه را کامل می‌کند.

■

در نکات زیر ثابت خواهیم کرد که تابع g بدست آمده در قضیه قبل عنصری از $L^q(X)$ است و $\|\Lambda\| = \|g\|_q$.

نکته۱۱. فرض کنید $p = ۱$ و μ، Λ، g و E_m ها نمادهای قضیه قبل باشند. برای $\epsilon > ۰$، قرار دهید $A = \{x \in X;\ |g(x)| > \|\Lambda\| + \epsilon\}$. تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \begin{cases} \chi_{E_m \cap A}(x)\dfrac{|g|(x)}{g(x)} & g(x) \neq ۰ \\ ۰ & g(x) = ۰ \end{cases}$$

لذا $\|f\|_۱ = \mu(A \cap E_m)$ و بنابراین

$$\|\Lambda\|\mu(A \cap E_m) = \|\Lambda\|\|f\|_۱ \geq |\Lambda(f)| = \Big|\int fgd\mu\Big|$$
$$= \int_{A \cap E_m} |g|d\mu \geq (\|\Lambda\| + \epsilon)\mu(A \cap E_m).$$

رابطه اخیر برای هر m برقرار است و لذا $\|\Lambda\|\mu(A) \geq (\|\Lambda\| + \epsilon)\mu(A)$. رابطه اخیر وقتی برقرار است که $\mu(A) = ۰$. در نتیجه $\|g\|_\infty \leq \|\Lambda\|$.

نکته۱۲. فرض کنید $p > ۱$ و μ، Λ، g و E_m ها نمادهای به کار برده شده در قضیه قبل باشند. برای عدد طبیعی m، تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \begin{cases} \chi_{E_m}(x)\dfrac{|g|^q(x)}{g(x)} & g(x) \neq ۰ \\ ۰ & g(x) = ۰ \end{cases}$$

قرار دهید $A = \{x;\ g(x) \neq ۰\}$. از اینکه $pq - p = q$،

$$\int |f|^p d\mu = \int_{E_m \cap A} \frac{|g|^{pq}}{|g|^p} d\mu = \int_{E_m} |g|^q d\mu.$$

بنابراین

$$\int_{E_m} |g|^q d\mu = \int fgd\mu = \Lambda(f) \leq \|\Lambda\|\|f\|_p$$
$$= \|\Lambda\|\Big(\int_{E_m} |g|^q d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

بدین ترتیب $\left(\int_{E_m} |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_{E_m} |g|^q d\mu\right)^{۱-\frac{۱}{p}} \leq \|\Lambda\|$. رابطه اخیر برای هر m برقرار است و لذا $\|g\|_q \leq \|\Lambda\|$.

اکنون آماده‌ایم که قضیه نمایش ریس را برای حالت $۱ < p < +\infty$ بیان و ثابت کنیم.

قضیه۵ ـ ۱۸. *اندازه μ را روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X در نظر بگیرید. فرض کنید q مزدوج $۱ < p < +\infty$ و $\Lambda \in L^p(X)^*$ نیز تابعکی حقیقی مقدار باشد. در آن‌صورت $g \in L^q(X)$ وجود دارد که برای هر $f \in L^p(X)$، $\Lambda(f) = \int fgd\mu$. بعلاوه $\|\Lambda\| = \|g\|_q$.*

برهان. برای هر عنصر $E \in S$، قرار دهید $L^p(E) = \{f \in L^p(X);\ f|_{E^c} = ۰\}$. واضح است

که $L^p(E) = \{f\chi_E;\ f \in L^p(X)\}$. قرار دهید $\mathcal{A} = \{E \in S;\ \mu(E) < +\infty\}$. برای $E \in \mathcal{A}$، $g_E \in L^q(E)$ وجود دارد که برای هر $f \in L^p(X)$، $\Lambda(f\chi_E) = \int fg_E d\mu$. بعلاوه اینکه

$$\|g_E\|_q = \sup\{|\Lambda(f\chi_E)|;\ \|f\|_p \leq 1\} \leq \|\Lambda\| < +\infty.$$

فرض کنید $\alpha = \sup\{\|g_E\|_q;\ E \in \mathcal{A}\} \leq \|\Lambda\|$. اگر $E, F \in \mathcal{A}$ و $E \subseteq F$، آن‌گاه تقریباً برای هر $x \in E$، $g_E(x) = g_F(x)$. این نشان می‌دهد که تقریباً همه جا روی E، $|g_E| \leq |g_F|$ و $\|g_E\|_q \leq \|g_F\|_q$. بنابراین دنباله صعودی $\{E_n\}$ از اعضای $\mathcal{A}$ وجود دارد که $\{\|g_{E_n}\|_q\}$ به α همگراست. قرار دهید $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ و تعریف کنید

$$g(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} g_{E_n}(x) & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

واضح است که $g \in L^q(X)$.

اکنون فرض کنید $f \in L^p(X)$ و $f|_E = 0$. فرض کنید $F \subseteq E^c$ عنصری دلخواه از S و $\mu(F) < +\infty$. برای هر عدد طبیعی n، $F \cap E_n = \emptyset$ و لذا $\alpha^q \geq \|g_{F\cup E_n}\|_q^q = \|g_F\|_q^q + \|g_{E_n}\|_q^q$. اما $\{\|g_{E_n}\|_q^q\}$ به α^q همگراست. بنابراین $\|g_F\|_q^q = 0$. چون مجموعه همه توابع ساده در $L^p(X)$ چگال است، این نشان می‌دهد که $\Lambda(f) = 0$.

اگر $f \in L^p(X)$ داده شده باشد، $\{fg_{E_n}\}$ به fg همگرا بوده و نیز برای هر n، $|fg_{E_n}| \leq |fg|$. از قضیه همگرایی مغلوب نتیجه می‌گیریم که $\{\int fg_{E_n} d\mu\}$ به $\int fg d\mu$ همگراست. واضح است که $\{f\chi_{E_n}\}$ در نرم L^p به $f\chi_E$ همگراست. از پیوستگی Λ استفاده کرده و نتیجه می‌گیریم که $\{\Lambda(f\chi_{E_n})\}$ به $\Lambda(f\chi_E)$ همگراست. از طرفی

$$\begin{aligned}\Lambda(f) &= \Lambda(f\chi_E + f\chi_{E^c}) = \Lambda(f\chi_E) + \Lambda(f\chi_{E^c}) = \Lambda(f\chi_E) \\ &= \lim_{n\to\infty} \Lambda(f\chi_{E_n}) = \lim_{n\to\infty} \int fg_{E_n} d\mu = \int fg d\mu.\end{aligned}$$

این برهان قسمت اول قضیه را کامل می‌کند. بنا به برهان نکته بالا برای $p > 1$، $\|g\|_q = \|\Lambda\|$. ■

نکته۱۳. فرض کنید μ اندازه‌ای σ متناهی روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. دنباله‌ای مجزا از اعضای S مانند $\{X_n\}$ وجود دارد که برای هر n، $\mu(X_n) < +\infty$ و $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$. $\Lambda \in L^1(X)^*$ را در نظر می‌گیریم. برای هر n، $g_n \in L^\infty(X)$ موجود است که $g_n|_{X_n^c} = 0$، $\|g_n\|_\infty \leq \|\Lambda\|$ و همچنین برای هر $f \in L^1(X)$، $\Lambda(f\chi_{X_n}) = \int fg_n d\mu$. برای $x \in X$، n ای موجود است که $x \in X_n$. قرار می‌دهیم $g(x) = g_n(x)$. واضح است که g تابعی اندازه پذیر بوده و $\|g\|_\infty \leq \|\Lambda\|$.

اگر $f \in L^1(X)$ تابعی دلخواه باشد، دنباله $\{\sum_{k=1}^{n} f\chi_{X_k}\}$ به تابع f نقطه به نقطه همگراست. این دنباله به تابع f در L^1 نرم همگراست. بنابراین $\{\Lambda(\sum_{k=1}^{n} f\chi_{X_k})\}$ به $\Lambda(f)$ همگراست. از طرفی برای هر n، $\Lambda(\sum_{k=1}^{n} f\chi_{X_k}) = \sum_{k=1}^{n}\Lambda(f\chi_{X_k}) = \sum_{k=1}^{n}\int fg_k d\mu = \sum_{k=1}^{n}\int_{X_k} fg d\mu$. در نتیجه $\Lambda(f) = \int fg d\mu$.

دیدیم $L^1([0,1])^* = L^\infty([0,1])$ و $L^1([0,1]) \subseteq L^1([0,1])^{**}$ تفکیک پذیر نیست. بنا به نکته ۱۰ فصل ۴، $L^1([0,1])^{**}$ تفکیک پذیر نیست. چون $L^1([0,1])$ تفکیک پذیر است، لذا $L^1([0,1]) \neq L^1([0,1])^{**}$. برای $1 < p < +\infty$، $L^p([0,1])^{**} = L^p([0,1])$. هر فضای نرمداری که دوگان دوم آن با آن فضای نرمدار یکی باشد (یک ایزومتریک ایزومرفیسم بین آنها برقرار باشد)، آن فضا را انعکاسی گوئیم. بنابراین برای $p > 1$، $L^p([0,1])$ انعکاسی است ولی $L^1([0,1])$ انعکاسی نیست.

۵ـ۵ اندازه مختلط

پس از تعریف اندازه روی یک σ جبر، به تعریف اندازه علامت‌دار پرداختیم و اندازه‌های علامت‌دار را مورد بررسی قرار دادیم. همانطور که همه توابع نامنفی نیستند و توابع با مقادیر حقیقی نیز از اهمیت خاصی برخوردارند، اندازه‌های علامت‌دار نیز چنین هستند. در این بخش به معرفی اندازه‌های مختلط پرداخته و یکی از قضایای این بخش که به قضیه نمایش ریس معروف است را بیان می‌کنیم. این قضیه همانند قضیه نمایش ریس درباره دوگان فضاهای $L^p(X)$ از اهمیت زیادی برخوردار است.

تعریف۵ ـ ۱۹. فرض کنیم S یک σ جبر از زیر مجموعه‌های X باشد. در آن‌صورت تابع $\mu : S \to \mathbb{C}$ یک اندازه مختلط است هرگاه

الف) $\mu(\emptyset) = 0$.

ب) اگر $\{E_n\}$ دنباله‌ای از اعضای مجزای S باشد، آن‌گاه $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$.

توجه کنید که سری در قسمت ب از تعریف اندازه مختلط، همگرای مطلق است. بعلاوه اینکه $Re\mu : S \to \mathbb{R}$ و $Im\mu : S \to \mathbb{R}$ اندازه‌های علامت‌دار هستند و $\mu = Re\mu + iIm\mu$. بنا به قضیه تجزیه لبگ، اندازه‌های متناهی μ_1، μ_2، μ_3 و μ_4 وجود دارند که $\mu_1 \perp \mu_2$، $\mu_3 \perp \mu_4$ و $\mu = (\mu_1 - \mu_2) + i(\mu_3 - \mu_4)$.

تعریف۵ ـ ۲۰. فرض کنید μ اندازه‌ای مختلط روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. در آن‌صورت تغییر کل اندازه مختلط μ را با نماد $|\mu|$ نمایش داده که برای هر عنصر $E \in S$ به صورت $|\mu|(E) = \sup \{ \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)|;$ افرازی از اعضای S برای E است $\{E_1, ..., E_n\}\}$ تعریف می‌شود.

نکته۱۴. فرض کنید ν یک اندازه روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. فرض کنید f تابعی مختلط مقدار تعریف شده روی X باشد. اگر Ref و Imf اندازه پذیر باشند، در آن‌صورت f را اندازه پذیر گوئیم. در این حالت اگر انتگرال‌های $\int Refd\nu$ و $\int Imfd\nu$ تعریف شده باشند، $\int fd\nu$ را به صورت $\int Refd\nu + i \int Imfd\nu$ تعریف می‌کنیم. اگر تابع مختلط مقدار f انتگرال‌پذیر باشد، یعنی $|f| \in L^1(X)$، در این‌صورت می‌نویسیم $f \in L^1(X)$.

فرض کنید ν اندازه‌ای روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. اگر $f_1, f_2 \in L^1(X)$، در آنصورت تابع $\mu : S \to \mathbb{C}$ با ضابطه $\mu(E) = \int_E f_1 d\nu + i \int_E f_2 d\nu$ اندازه‌ای مختلط است.

اکنون فرض کنید f تابعی مختلط مقدار بوده که $|f| \in L^1(X)$. اندازه مختلط $\mu : S \to \mathbb{C}$ را با ضابطه $\mu(F) = \int_F fd\nu$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید $E \in S$ و $\{E_1, ..., E_n\}$ نیز افرازی از اعضای S برای E باشد. واضح است که

$$\sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} |f| d\nu = \int_E |f| d\nu.$$

تابع $g : X \to \mathbb{C}$ را با ضابطه

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\overline{f(x)}}{|f(x)|} & f(x) \neq 0, x \in E \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. دنباله توابع ساده $\{s_n\}$ وجود دارد که برای هر n، $|s_n| \leq |g| \leq 1$ و $\{s_n\}$ نیز به تابع g همگرای نقطه به نقطه است. واضح است که برای هر n، $|fs_n| \leq |f|\chi_E$، $f\chi_E \in L^1(X)$ و همچنین دنباله $\{fs_n\}$ به $|f|\chi_E$ همگرای نقطه به نقطه است. بنا به قضیه همگرایی مغلوب، دنباله $\{\int fs_n d\nu\}$ به $\int_E |f| d\nu$ همگراست. فرض کنید n عدد طبیعی دلخواه و E_1 و ... و E_m افرازی از E باشد که $s_n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{E_i}$. چون $|s_n| \leq 1$، لذا برای هر $1 \leq i \leq m$، $|\alpha_i| \leq 1$. می‌توان نوشت $|\int fs_n d\nu| = |\int s_n d\mu| = |\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(E_i)| \leq |\mu|(E)$. چون n عددی طبیعی دلخواه است، نتیجه می‌گیریم که $\int_E |f| d\nu \leq |\mu|(E)$ و لذا $\int_E |f| d\nu = |\mu|(E)$.

فرض کنید X یک فضای توپولوژیک هاسدورف و فشرده موضعی باشد. توجه کنید که اعضای σ جبر تولید شده توسط خانواده همه زیر مجموعه‌های باز از X را زیر مجموعه‌های بورل گوئیم. اندازه μ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های بورل X را اندازه بورل منظم گوئیم هرگاه

الف) برای هر زیر مجموعه فشرده K، $\mu(K) < +\infty$.

ب) برای هر $E \in S$، $\mu(E) = \sup\{\mu(K);\ K \subseteq E,$ فشرده است $K\}$.

ج) برای هر $E \in S$، $\mu(E) = \inf\{\mu(U);\ E \subseteq U,$ باز است $U\}$.

اگر μ اندازه‌ای مختلط باشد، μ را بورل منظم گوئیم هرگاه $|\mu|$ اندازه‌ای بورل منظم باشد. مجموعه همه اندازه‌های مختلط بورل و منظم روی X را با نماد $M(X)$ نمایش می‌دهیم. $M(X)$ یک فضای برداری است و تابع $\mu \mapsto \|\mu\| = |\mu|(X)$ یک نرم روی $M(X)$ است.

قضیه۵ ـ ۲۱. *فرض کنید X یک فضای توپولوژیک هاسدورف و فشرده موضعی باشد. برای $\mu \in M(X)$، تابع $\Lambda_\mu : C_\circ(X) \to \mathbb{C}$ با ضابطه $\Lambda_\mu(f) = \int f d\mu$ تابعکی خطی و پیوسته است. اگر $\Lambda \in C_\circ(X)^*$ تابعکی دلخواه باشد، اندازه بورل و منظم $\mu \in M(X)$ موجود است که $\Lambda = \Lambda_\mu$ و در این حالت $\|\mu\| = \|\Lambda\|$.*

قضیه فوق به قضیه نمایش ریس معروف است که برهان آن در منابع آورده شده در انتهای کتاب آمده است. این قضیه بیان می‌کند که یک ایزومتریک ایزومورفیسم بین $M(X)$ و $C_\circ(X)^*$ وجود دارد و لذا $M(X) = C_\circ(X)^*$.

تمرین ۵

۱. فرض کنید μ اندازه علامت‌دار σ متناهی روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X بوده و $\mu(X) = +\infty$. آیا می‌توان گفت که برای $c > \circ$، $F \in S$ وجود دارد که $\mu(F) = c$؟

۲. فرض کنید μ و ν دو اندازه علامت‌دار متناهی روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. ثابت کنید $|\mu + \nu| \leq |\mu| + |\nu|$. آیا تجزیه هان برای اندازه علامت‌دار $\mu + \nu$ بر حسب اندازه‌های علامت‌دار μ و ν وجود دارد؟ مثالی ارائه کنید که نامساوی بالا اکید باشد.

۳. فرض کنید μ و ν دو اندازه علامت‌دار باشد. آیا $\nu \ll \mu$ ایجاب می‌کند که $\nu \ll \mu^+$؟

۴. فرض کنید μ اندازه علامت‌دار متناهی روی σ جبر همه زیر مجموعه‌های بورل اندازه پذیر از $[-a, a]$ باشد. ثابت کنید

$$|\mu|([-a,a]) = \sup\left\{\left|\int f d\mu\right|;\ |f| \leq \text{۱},\ f \in C([a,b])\right\}.$$

۵. فرض کنید μ اندازه علامت‌دار متناهی روی σ جبر S باشد. ثابت کنید $f \in L^\text{۱}(|\mu|)$ وجود دارد که برای هر $E \in S$، $\mu(E) = \int_E f d|\mu|$.

۶. دو اندازه متناهی μ و ν را روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X در نظر بگیرید. ثابت کنید $\mu \ll \nu$ اگر و تنها اگر برای هر دنباله $\{E_n\}$ از اعضای S که $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$، نتیجه شود که $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(E_n) = 0$.

۷. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $[1, +\infty)$ باشد. اندازه ν را طوری بیابید که $\frac{d\mu}{d\nu} = x^2 + 1$.

۸. فرض کنید μ و ν دو اندازه σ متناهی روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. فرض کنید $\mu \ll \nu$ و قرار دهید $\eta = \mu + \nu$. اگر $f = \frac{d\nu}{d\eta}$، ثابت کنید که تقریباً همه جا $0 \leq f \leq 1$. ثابت کنید $\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{f}{1-f}$.

۹. فرض کنید μ اندازه لبگ و ν اندازه شمارشی روی خانواده همه زیر مجموعه‌های بورل اندازه پذیر از $[0, 1]$ باشند. در صورت وجود تجزیه لبگ ν را نسبت به μ بیابید.

۱۰. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $(0, 1)$ باشد. فرض کنید ν اندازه‌ای باشد که برای هر x، $\frac{d\mu}{d\nu}(x) = x$. آیا شرایط زیر معادلند؟

الف) $\nu \ll \mu$.

ب) برای هر $\epsilon > 0$ عدد مثبت δ موجود است که اگر $E \in S$ و $\mu(E) < \delta$، آن‌گاه $\nu(E) < \epsilon$.

دوباره برای هر $E \subseteq \mathbb{N}$، قرار دهید $\mu(E) = \sum_{n\in E} \frac{1}{2^n}$. اگر ν اندازه شمارشی روی $P(\mathbb{N})$ باشد، آیا دو گزاره فوق معادلند؟

۱۱. فرض کنید μ اندازه‌ای روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشد. برای $1 < p < +\infty$، فضای همه توابع اندازه پذیر و مختلط مقدار f که $\int |f|^p d\mu < +\infty$ را با نماد $L^p(X)$ نمایش می‌دهیم. ثابت کنید $L^p(X)$ یک فضای باناخ است و مجموعه همه تابعک‌های مختلط مقدار و پیوسته روی $L^p(X)$ با $L^q(X)$ برابر است.

۱۲. اگر X یک فضای هاسدورف و فشرده موضعی باشد، اندازه مختلط μ را روی σ جبر خانواده همه زیر مجموعه‌های بورل از X را در نظر بگیرید. ثابت کنید تابع بورل اندازه پذیر $h : X \to \mathbb{C}$ موجود است که برای هر $f \in C_0(X)$، $\int f d\mu = \int fh d|\mu|$.

۱۳. اگر μ و ν دو اندازه مختلط و η اندازه‌ای روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X باشند. گوئیم $\mu \perp \nu$ هرگاه $|\mu| \perp |\nu|$ و همچنین $\nu \ll \eta$ هرگاه $|\nu| \ll \eta$.

اگر ν اندازه‌ای مختلط و μ نیز اندازه‌ای σ متناهی روی S باشند، ثابت کنید دو اندازه مختلط η و λ موجود است که $\lambda \perp \mu$، $\eta \ll \mu$ و $\nu = \lambda + \eta$. اکنون فرض کنید دو اندازه مختلط η' و

λ' موجود باشند که $\lambda' \perp \mu'$، $\eta' \ll \mu'$ و $\nu = \lambda' + \eta'$. ثابت کنید $\lambda = \lambda'$ و $\eta = \eta'$.

فصل ۶

ضرب اندازه‌ها

۶—۱ مقدمه

در بحث توپولوژی حاصلضرب فضاهای توپولوژیک مطرح می‌شود. اگر (X, τ_1) و (Y, τ_2) دو فضای توپولوژیک باشند، روی مجموعه $X \times Y$ توپولوژی حاصلضربی وجود دارد که ارتباط زیادی بین توپولوژی‌های موجود روی X و Y وجود دارد. خوشبختانه این حاصلضرب برای هر تعداد از فضاهای توپولوژیک تعمیم یافته است. اکنون سوال این‌جاست که آیا حاصلضرب دو فضای اندازه قابل تعریف است؟ اگر قابل تعریف باشد، آیا نتایج مناسبی به همراه دارد؟ پاسخ مثبت است و در این فصل با معرفی یک σ جبر روی حاصلضرب دو فضای اندازه، به تعریف اندازه حاصلضرب می‌پردازیم. نتایجی که از این تعریف و مطالعات بدست می‌آید، قضیه فوبینی است که با استفاده از آن می‌توان جای دو انتگرال را عوض کرد. این قضیه کاربرد فراوانی نه‌تنها در ریاضی، بلکه در بیشتر رشته‌های دیگر علوم پایه و فنی مهندسی دارد. در این فصل بیشتر به بررسی حاصلضرب دو فضای اندازه می‌پردازیم و حاصلضرب تعداد نامتناهی از فضاهای اندازه نیز تعریف می‌شود که از حوصله این کتاب خارج است.

در این فصل ابتدا از دو فضای اندازه (X, S) و (Y, T) یک σ جبر روی حاصلضرب دکارتی $X \times Y$ تعریف کرده و پس از آن اندازه حاصلضرب و قضیه فوبینی و نتایج آن‌را بیان می‌کنیم.

۶ــ۲ اندازه در فضای حاصلضرب

برای تعریف حاصلضرب دو اندازه، ابتدا زمینه را برای تعریف یک σ جبر مهیا کرده و پس از ساختن یک σ جبر به تعریف یک اندازه روی σ جبر تعریف شده می‌پردازیم. همانطور که می‌دانید نیم حلقه‌ها، سنگ بنای تعریف یک اندازه روی σ جبر شامل آن نیم حلقه است. بنابراین به تعریف یک مستطیل اندازه پذیر پرداخته و کار را ادامه خواهیم داد.

تعریف۶ ـ ۱. فرض کنیم S و T دو σ حلقه به ترتیب از زیر مجموعه‌های X و Y باشند. برای $A \in S$ و $B \in T$، $A \times B$ را یک مستطیل اندازه پذیر گوئیم. σ حلقه تولید شده توسط مجموعه همه مستطیل‌های اندازه پذیر را با نماد $S \times T$ نمایش می‌دهیم و $(X \times Y, S \times T)$ را فضای اندازه حاصلضرب نامیم.

اگر $E \subseteq A \times B$، در آن‌صورت x مقطع E را با نماد E_x نمایش داده و به صورت $E_x = \{y \in Y;\ (x,y) \in E\}$ تعریف می‌کنیم. همینطور y مقطع E را با نماد E_y نمایش داده و به صورت $E_y = \{x \in X;\ (x,y) \in E\}$ تعریف می‌کنیم.

نکته۱. فرض کنیم $A \subseteq X$، $B \subseteq Y$ و $x \in X$ عنصری دلخواه باشد. بنا به تعریف، $(A \times B)_x = \{y \in Y;\ (x,y) \in A \times B\}$. اگر نقطه x عنصری از A باشد، واضح است که $(A \times B)_x = B$. اگر $x \notin A$، در آن‌صورت $(A \times B)_x = \emptyset$. به شیوه مشابه برای هر $y \in Y$،

$$(A \times B)_y = \begin{cases} A & y \in B \\ \emptyset & y \notin B \end{cases}$$

قضیه۶ ـ ۲. *فرض کنیم S و T دو σ جبر به ترتیب از زیر مجموعه‌های X و Y باشند. اگر $E \in S \times T$، آن‌گاه برای هر $x \in X$ و $y \in Y$، $E_x \in T$ و $E_y \in S$.*

برهان. فرض کنیم $x \in X$، نشان خواهیم داد که $E_x \in T$. قرار می‌دهیم

$$T_x = \{E \in S \times T;\ E_x \in T\}.$$

اگر $A \times B$ مستطیلی اندازه پذیر باشد، در این‌صورت $(A \times B)_x$ مجموعه تهی و یا B است. در هر حال $(A \times B)_x \in T$. این نشان می‌دهد که T_x شامل همه مستطیل‌های اندازه پذیر است. ادعا می‌کنیم T_x یک σ جبراست. چون $x \in X$، لذا $(X \times Y)_x = Y \in T$ و بنابراین $X \times Y \in T_x$. اگر $E \in T_x$، $(X \times Y \setminus E)_x = Y \setminus E_x \in T$ و لذا T_x نسبت به متمم گیری بسته است.

اکنون فرض کنیم $\{E_n\}$ دنباله‌ای از اعضای T_x باشد. لذا برای هر n، $E_{n_x} \in T$. چون T یک

σ جبر است، لذا $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_{n_x}^{\circ} \in T$. از طرفی $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_{n_x} = \big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\big)_x$ و لذا $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in T_x$. این نتیجه می‌دهد که T_x یک σ جبر است. چون این σ جبر شامل همه مستطیل‌های اندازه پذیر است، بنابراین $S \times T \subseteq T_x \subseteq S \times T$. نتیجه اینکه برای هر $E \in S \times T$، $E_x \in T$. به شیوه مشابه می‌توان ثابت کرد که برای هر $y \in Y$، $E_y \in S$. ■

توجه کنید که اگر $A \times B \in S \times T$، لزومی ندارد که $A \in S$ و $B \in T$. برای مثال S و T را σ جبر همه زیر مجموعه‌های بورل از $\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید $E \subseteq [0, 1]$ زیر مجموعه اندازه ناپذیر لبگ باشد. در این‌صورت $E \notin S$ ولی $E \times \emptyset = \emptyset \in S \times T$. این مثال نقضی برای ادعای فوق است.

دقت کنید که اجتماع دو مستطیل اندازه پذیر لزومی ندارد که یک مستطیل اندازه پذیر باشد. برای مثال S و T را σ جبر همه زیر مجموعه‌های بورل از $\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم. واضح است که

$$\big((0, 2) \times (3, 5)\big) \cup \big((6, 8) \times (9, 11)\big) \in S \times T.$$

اگر برای $A \in S$ و $B \in T$، $A \times B = \big((6, 8) \times (9, 11)\big) \cup \big((0, 2) \times (3, 5)\big)$. چون $(1, 4)$ و $(7, 10)$ در طرف چپ هستند، لذا این دو زوج در طرف راست تساوی اخیر قرار دارند. بنابراین $7 \in A$ و $4 \in B$ و لذا $(4, 7) \in A \times B$. این زوج در طرف چپ تساوی قرار ندارد و این تناقض نشان می‌دهد که اجتماع دو مستطیل اندازه پذیر، لزوماً مستطیل اندازه پذیر نیست.

تعریف ۶ ـ ۳. فرض کنیم X و Y دو مجموعه ناتهی و $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ تابعی دلخواه باشد. برای هر $x \in X$، تابع $f_x : Y \to \mathbb{R}$ را با ضابطه $f_x(y) = f(x, y)$ تعریف می‌کنیم. همینطور برای هر $y \in Y$، تابع $f_y : X \to \mathbb{R}$ را با ضابطه $f_y(x) = f(x, y)$ تعریف می‌کنیم.

نکته ۲. فرض کنیم S و T دو σ جبر به ترتیب از زیر مجموعه‌های X و Y باشند. اگر $f : X \times Y \to [-\infty, +\infty]$ تابعی اندازه پذیر باشد، برای هر $x \in X$ و $y \in Y$، توابع f_x و f_y اندازه پذیرند. در واقع برای هر عدد حقیقی α، $\{(x, y) \in X \times Y;\ f(x, y) > \alpha\} \in S \times T$. از طرفی

$$\begin{aligned}\{y \in Y;\ f_x(y) > \alpha\} &= \{y \in Y;\ f(x, y) > \alpha\}\\ &= \{(x, y) \in X \times Y;\ f(x, y) > \alpha\}_x \in T.\end{aligned}$$

بنابراین f_x اندازه پذیر است و به شیوه مشابه f_y اندازه پذیراست.

مثال ۶ ـ ۱. فرض کنیم $X = Y = [0, 1]$ و $S = T$ نیز σ حلقه زیر مجموعه‌های حداکثر شمارای $[0, 1]$ باشد. اگر E زیر مجموعه‌ای شمارا از $X \times Y$ باشد، در آن‌صورت $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$ و لذا E اجتماع تعداد شمارا از مستطیل‌های اندازه پذیر است و لذا $E \in S \times T$. اکنون فرض کنیم

$E \in S \times T$، لذا دنباله $\{A_n \times B_n\}$ از مستطیل‌های اندازه پذیر وجود دارد که $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \times B_n$. بنابراین E حداکثر شماراست. در نتیجه $S \times T$ خانواده همه زیر مجموعه‌های حداکثر شمارای $X \times Y$ است. چون $\Delta = \{(x, x);\ x \in [0, 1]\}$ حداکثر شمارا نیست، لذا $\Delta \notin S \times T$. از طرفی برای هر $x, y \in X$، $\Delta_x = \{x\}$ و $\Delta_y = \{y\}$. قرار دهید $h = \chi_\Delta$. واضح است که h اندازه پذیر نیست ولی برای هر $x, y \in X$، h_x و h_y اندازه پذیرند.

نکته۳. فرض کنیم S و T دو σ جبر به ترتیب از زیر مجموعه‌های X و Y باشند. اگر $f : X \to \mathbb{R}$ و $g : Y \to \mathbb{R}$ توابعی اندازه پذیر باشند، تابع $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ با ضابطه $h(x, y) = f(x)g(x)$ اندازه پذیر است. برای دیدن این موضوع، توابع f_1 و g_1 را با ضوابط $f_1(x, y) = f(x)$ و $g_1(x, y) = g(y)$ روی $X \times Y$ تعریف می‌کنیم. برای هر عدد حقیقی α،

$$\begin{aligned}\{(x, y) \in X \times Y;\ f_1(x, y) > \alpha\} &= \{(x, y) \in X \times Y;\ f(x) > \alpha\}\\ &= \{x \in X;\ f(x) > \alpha\} \times Y.\end{aligned}$$

چون f اندازه پذیر است، لذا $\{x \in X;\ f(x) > \alpha\} \times Y$ مستطیلی اندازه پذیر است. بنابراین f_1 اندازه پذیر است. به شیوه مشابه g_1 اندازه پذیر است و نتیجه اینکه $h = f_1 g_1$ اندازه پذیر است.

نکته۴. در زیر دو نکته در ارتباط با حاصلضرب دو σ جبر بیان شده است.

الف) توجه کنید که اگر S و T دو σ جبر به ترتیب از زیر مجموعه‌های X و Y باشند، در آن‌صورت رده همه مستطیل‌های اندازه پذیر یک نیم حلقه از زیر مجموعه‌های $X \times Y$ است. در واقع برای $A, A_1 \in S$ و $B, B_1 \in T$، $(A \times B) \cap (A_1 \times B_1) = (A \cap A_1) \times (B \cap B_1)$ مستطیلی اندازه پذیر است. بعلاوه اینکه

$$(A \times B) \setminus (A_1 \times B_1) = [(A \setminus A_1) \times B] \cup [(A \cap A_1) \times (B \setminus B_1)]$$

نیز مستطیلی اندازه پذیر است. دیدیم که لزوماً این رده از مجموعه‌ها یک حلقه نیست. بنا به آنچه که قبلاً گفته شد، اجتماع‌های متناهی و مجزا از این مستطیل‌های اندازه پذیر، حلقه تولید شده توسط این نیم حلقه است.

ب) فرض کنید S و T دو σ جبر به ترتیب از زیر مجموعه‌های X و Y باشند. $A_1 \in S$ و $B_1 \in T$ را در نظر می‌گیریم. در آن‌صورت $S_1 = \{A \cap A_1;\ A \in S\}$ و $T_1 = \{B \cap B_1;\ B \in T\}$ دو σ جبر به ترتیب از زیر مجموعه‌های A_1 و B_1 هستند. قصد داریم ارتباط بین اعضای $S_1 \times T_1$ و $S \times T$ را بیابیم. قرار می‌دهیم $\Sigma = \{E \cap (A_1 \times B_1);\ E \in S \times T\}$. اگر $E \cap (A_1 \times B_1) \in \Sigma$، لذا $(A_1 \times B_1) \setminus (E \cap (A_1 \times B_1)) = E^c \cap (A_1 \times B_1)$ نیز عنصری

در Σ است. واضح است که Σ تحت اجتماع شمارا از اعضای خود بسته بوده و بنابراین Σ یک σ جبر است. واضح است که $\{A\cap A_1\times B\cap B_1;\ A\in S,\ B\in T\}\subseteq\Sigma$ و لذا $S_1\times T_1\subseteq\Sigma$. اکنون قرار می‌دهیم $\Sigma_1=\{E\in S\times T;\ E\cap(A_1\times B_1)\in S_1\times T_1\}$. چون برای هر $A\in S$ و $B\in T$، $(A\times B)\cap(A_1\times B_1)=A\cap A_1\times B\cap B_1$، واضح است که Σ_1 شامل همه مستطیل‌های اندازه پذیر است. اگر $E\in S\times T$ و $E\cap(A_1\times B_1)\in S_1\times T_1$، لذا $E^c\cap(A_1\times B_1)=A_1\times B_1\setminus(E\cap(A_1\times B_1))\in S_1\times T_1$. این نشان می‌دهد که Σ_1 تحت متمم گیری بسته است. چون $S_1\times T_1$ یک σ جبر از زیر مجموعه‌های $A_1\times B_1$ است، لذا Σ_1 تحت اجتماع شمارا نیز بسته است. بنابراین Σ_1 نیز یک σ جبر است و لذا $\Sigma_1=S\times T$. از این توضیحات نتیجه می‌شود که هر عنصر از $S_1\times T_1$ به صورت $E\cap(A_1\times B_1)$ است که در آن $E\in S\times T$ و برعکس.

قضیه۶ ـ ۴. *فرض کنیم μ و ν دو اندازه σ متناهی به ترتیب روی σ جبرهای S و T از زیر مجموعه‌های X و Y باشند. فرض کنیم $E\in S\times T$. دو تابع $f:X\to\mathbb{R}$ و $g:Y\to\mathbb{R}$ را با ضوابط $f(x)=\nu(E_x)$ و $g(y)=\mu(E_y)$ تعریف می‌کنیم. در آن‌صورت f و g اندازه پذیر و نامنفی هستند و همچنین $\int fd\mu=\int gd\nu$.*

برهان. ابتدا حکم را برای حالتی که μ و ν دو اندازه متناهی هستند ثابت می‌کنیم. فرض کنید Σ رده همه زیر مجموعه‌های اندازه پذیر باشد که حکم قضیه برای آن برقرار است. اگر $A\times B$ یک مستطیل اندازه پذیر باشد، در آن‌صورت توابع

$$x\mapsto\chi_A(x)\nu(B)=\nu\big((A\times B)_x\big),\ y\mapsto\chi_B(y)\mu(A)=\mu\big((A\times B)_y\big)$$

به ترتیب تعریف شده روی X و Y اندازه پذیرند. بعلاوه $\mu(A)\nu(B)=\int\nu\big((A\times B)_x\big)d\mu(x)$ و $\mu(A)\nu(B)=\int\mu\big((A\times B)_y\big)d\nu(y)$. این نشان می‌دهد که Σ شامل همه مستطیل‌های اندازه پذیر است. فرض کنیم $A_1\times B_1$ و $A_2\times B_2$ دو مستطیل اندازه پذیر مجزا باشند. برای هر $x\in X$،

$$\nu\big(((A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_2))_x\big)=\chi_{A_1}(x)\nu(B_1)+\chi_{A_2}(x)\nu(B_2)$$

و همینطور

$$\mu\big(((A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_2))_y\big)=\chi_{B_1}(y)\mu(A_1)+\chi_{B_2}(y)\mu(A_2).$$

می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\int\nu\big(((A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_2))_x\big)d\mu(x)&=\int\chi_{A_1}(x)\nu(B_1)+\chi_{A_2}(x)\nu(B_2)d\mu(x)\\&=\mu(A_1)\nu(B_1)+\mu(A_2)\nu(B_2)\end{aligned}$$

$$= \int \chi_{B_1}(y)\mu(A_1)+\chi_{B_2}(y)\mu(A_2)d\nu(y)$$
$$= \int \mu\big(((A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_2))_y\big)d\nu(y).$$

در نتیجه Σ شامل اجتماع دو مستطیل اندازه پذیر مجزاست. به شیوه مشابه Σ شامل هر تعداد متناهی و مجزا از مستطیل‌های اندازه پذیر است. این نشان می‌دهد که Σ شامل حلقه تولید شده توسط مستطیل‌های اندازه پذیر است.

اکنون فرض کنیم $\{E_n\}$ دنباله‌ای صعودی از اعضای Σ باشد. برای هر عدد طبیعی n، دو تابع $\phi_n(x) = \nu(E_{n_x})$ و $\psi_n(y) = \mu(E_{n_y})$ را به ترتیب روی X و Y تعریف می‌کنیم. بنا به تعریف Σ، توابع ϕ_n و ψ_n اندازه پذیر بوده و نیز $\int \phi_n d\mu = \int \psi_n d\nu$. قرار دهید $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. چون $\{\phi_n\}$ و $\{\psi_n\}$ دنباله‌های توابع صعودی و نامنفی بوده که به ترتیب به توابع $\phi(x) = \nu(E_x)$ و $\psi(y) = \mu(E_y)$ همگراست، بنا به قضیه همگرایی یکنوا

$$\int \nu(E_x)d\mu(x) = \int \phi(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty}\int \phi_n(x)d\mu(x)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\int \psi_n(y)d\nu(y) = \int \mu(E_y)d\nu(y).$$

این نشان می‌دهد که Σ شامل اجتماع هر دنباله صعودی از اعضای خود است.

اکنون فرض کنیم $\{E_n\}$ دنباله‌ای نزولی از اعضای Σ باشد. قرار می‌دهیم $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ و دنباله توابع $\{\phi_n\}$ و $\{\psi_n\}$ را همانند فوق تعریف می‌کنیم. واضح است که $\{\phi_n\}$ و $\{\psi_n\}$ دنباله‌هایی نزولی بوده که به ترتیب به توابع $\phi(x) = \nu(E_x)$ و $\psi(y) = \mu(E_y)$ همگرا هستند. برای هر عدد طبیعی n و هر $x \in X$، $\phi_n(x) = \nu(E_{n_x}) \le \nu(Y)\chi_X(x)$. چون $\nu(Y)\int \chi_X(x)d\mu(x) = \mu(X)\nu(Y) < +\infty$، قضیه همگرایی مغلوب نتیجه می‌دهد که $\lim\limits_{n\to\infty}\int \phi_n(x)d\mu(x) = \int \phi(x)d\mu(x)$. به شیوه مشابه $\lim\limits_{n\to\infty}\int \psi_n(y)d\nu(y) = \int \psi(y)d\nu(y)$ و بنابراین

$$\int \nu(E_x)d\mu(x) = \int \phi(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty}\int \phi_n(x)d\mu(x)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\int \psi_n(y)d\nu(y) = \int \mu(E_y)d\nu(y).$$

این نشان می‌دهد که Σ شامل اشتراک هر دنباله نزولی از اعضای خود بوده و بنابراین رده‌ای یکنواست. بنا به قضیه ۲—۴، $\Sigma = S \times T$، یعنی برای هر $E \in S \times T$، توابع $f(x) = \nu(E_x)$ و $g(y) = \mu(E_y)$ اندازه پذیر و نامنفی بوده و همچنین $\int f d\mu = \int g d\nu$.

اکنون فرض کنیم $\{A_n\}$ دنباله‌ای صعودی از اعضای S بوده که $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ و برای هر n،

$\mu(A_n) < +\infty$. همچنین فرض کنیم $\{B_n\}$ دنباله‌ای صعودی از اعضای T بوده که $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ و برای هر n، $\nu(B_n) < +\infty$. واضح است که $\{A_n \times B_n\}$ دنباله‌ای از مستطیل‌های اندازه پذیر است که به $X \times Y$ صعود می‌کند. برای هر $E \in S \times T$، $x \in X$ و $y \in Y$،

$$\nu(E_x) = \lim_{n\to\infty} \nu\big((E \cap (A_n \times B_n))_x\big), \;\; \mu(E_y) = \lim_{n\to\infty} \mu\big((E \cap (A_n \times B_n))_y\big).$$

برای هر عدد طبیعی n، μ و ν به ترتیب روی σ جبرهای $\{A \cap A_n;\ A \in S\}$ و $\{B \cap B_n;\ B \in T\}$ اندازه‌های متناهی هستند. بنا به حالت قبل،

$$\int \nu\big((E \cap (A_n \times B_n))_x\big) d\mu(x) = \int \mu\big((E \cap (A_n \times B_n))_y\big) d\nu(y).$$

قضیه همگرایی یکنوا نتیجه می‌دهد که $\int \nu(E_x) d\mu(x) = \int \mu(E_y) d\nu(y)$ و لذا برهان کامل می‌شود.

■

قضیه ۶ ـ ۵. فرض کنیم μ و ν دو اندازه σ متناهی به ترتیب روی دو σ جبر S و T باشند. تابع λ با ضابطه $\lambda(E) = \int \nu(E_x) d\mu(x) = \int \mu(E_y) d\nu(y)$ یک اندازه روی $S \times T$ است. این اندازه منحصربفردی است که برای هر مستطیل اندازه پذیر $A \times B$، $\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.

برهان. واضح است که $\lambda(\emptyset) = \int \nu(\emptyset_x) d\mu(x) = 0$. اکنون فرض کنیم $\{E_n\}$ دنباله‌ای مجزا از اعضای $S \times T$ باشد. برای هر $x \in X$، $\{E_{n_x}\}$ دنباله‌ای مجزا از اعضای T است. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) &= \int \nu\Big(\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\big)_x\Big) d\mu(x) = \int \nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_{n_x}\Big) d\mu(x) \\ &= \int \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_{n_x}) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \nu(E_{n_x}) d\mu(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n). \end{aligned}$$

لذا λ یک اندازه روی $S \times T$ است و بنا به قضیه ۶ـ۴، برای هر $E \in S \times T$، $\int \nu(E_x) d\mu(x) = \int \mu(E_y) d\nu(y)$.

اگر $A \times B$ مستطیل اندازه پذیر باشد،

$$\lambda(A \times B) = \int \nu((A \times B)_x) d\mu(x) = \int \chi_A(x)\nu(B) d\mu(x) = \mu(A)\nu(B).$$

چون μ و ν اندازه‌های σ متناهی به ترتیب روی S و T هستند، لذا λ اندازه‌ای σ متناهی روی رده همه مستطیل‌های اندازه پذیر است. این اندازه به طور منحصربفرد قابل گسترش به اندازه‌ای روی حلقه تولید شده توسط این رده از مستطیل‌های اندازه پذیر است و در نتیجه به طور منحصربفزد قابل گسترش به اندازه منحصربفرد روی $S \times T$ است. نتیجه اینکه λ اندازه منحصربفردی است که روی مستطیل $A \times B$ به صورت $\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ تعریف می‌شود.

■

توجه کنید که اندازه تعریف شده در قضیه بالا روی $S \times T$ را حاصلضرب μ و ν گوئیم و با نماد $\mu \times \nu$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنیم μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر $\mathbb{R}$ و $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی اندازه پذیر باشد. برای هر $x \in \mathbb{R}$، $G(f)_x = \{y \in \mathbb{R};\ (x, y) \in G(f)\} = \{f(x)\}$. می‌توان نوشت $\mu \times \mu\big(G(f)\big) = \int \mu(G(f)_x)d\mu(x) = \circ$. این نکته همراه با مثال بالا نشان می‌دهد که نمودار تابع اندازه پذیر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ مجموعه‌ای اندازه پذیر با اندازه صفر است.

مثال۶ ـ ۲. اندازه μ را روی σ جبر S از زیر مجموعه‌های X در نظر بگیرید. برای تابع اندازه پذیر $f : X \to [\circ, +\infty)$، قرار دهید $O_f = \{(x, y);\ \circ \le y < f(x)\}$. در آن‌صورت

الف) O_f اندازه پذیر است. در واقع اگر $\phi = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{E_i}$ تابعی ساده و نامنفی باشد، آن‌گاه

$$O_\phi = \big(E_1 \times [\circ, \alpha_1)\big) \cup \cdots \cup \big(E_m \times [\circ, \alpha_m)\big)$$

اندازه پذیر است. چون f تابعی نامنفی و اندازه پذیر است، دنباله صعودی $\{\phi_n\}$ از توابع ساده وجود دارد که به تابع f نقطه به نقطه همگراست. فرض کنید $(x, y) \in O_f$ عنصری دلخواه باشد. لذا $\circ \le y < f(x)$. چون $\{\phi_n(x)\}$ به $f(x)$ همگراست، لذا برای یک n، $\phi_n(x) > y$. در نتیجه $(x, y) \in O_{\phi_n}$. بنابراین $O_f \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} O_{\phi_n}$. فرض کنید n عددی طبیعی و $(x, y) \in O_{\phi_n}$ عنصری دلخواه باشد. لذا $\circ \le y < \phi_n(x)$ و بنابراین $\circ \le y < f(x)$. این نتیجه می‌دهد که $(x, y) \in O_f$. با این توصیف $O_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_{\phi_n}$ اندازه پذیر است.

ب) فرض کنید m و n دو عدد طبیعی دلخواه و $m < n$. فرض کنید $\phi_n = \sum_{i=1}^{n_n} \alpha_i^n E_i^n$ و $\phi_m = \sum_{i=1}^{m_m} \alpha_i^m E_i^m$ دو عنصر از دنباله یاد شده در قسمت الف باشند. فرض کنیم $(x, y) \in O_{\phi_m}$، لذا $\circ \le y < \phi_m(x)$. چون دنباله $\{\phi_n\}$ دنباله‌ای صعودی است، لذا $\circ \le y < \phi_n(x)$ و بنابراین $O_{\phi_m} \subseteq O_{\phi_n}$. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\int f d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int \phi_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n_n} \alpha_i^n \mu(E_i^n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu \times \mu(O_{\phi_n}) = \mu \times \mu(O_f).\end{aligned}$$

ج) برای هر عدد طبیعی k، قرار می‌دهیم $G_k = \{(x, f(x));\ f(x) \le k\}$. واضح است که $G(f) = \{(x, f(x));\ x \in X\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$. برای هر عدد طبیعی k، زیر مجموعه اندازه پذیر $X_k = \{x;\ f(x) \le k\}$ را در نظر بگیرید. دنباله توابع صعودی $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ از توابع ساده

را طوری اختیار می‌کنیم که $\{s_n\}$ به تابع f و $\{t_n\}$ به تابع $k - f$ روی X_k همگرا باشند. واضح است که دنباله توابع نزولی $\{r_n\}$ با ضابطه $r_n = k + \frac{1}{n} - t_n$ به تابع f نقطه به نقطه همگراست. بنا به قسمت الف، هر O_{s_n} و O_{r_n} اندازه پذیر است. اکنون فرض کنید $(x, f(x)) \in G_k$ عنصری دلخواه باشد. برای هر عدد طبیعی n، $f(x) < r_n(x)$ و لذا $(x, f(x)) \in O_{r_n}$. برای هر عدد طبیعی n، $s_n(x) \leq f(x)$ و لذا $(x, f(x)) \notin O_{s_n}$. نتیجه اینکه $G_k \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} O_{r_n} \setminus O_{s_n}$. اکنون $(x, y) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} O_{r_n} \setminus O_{s_n}$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین برای هر n، $s_n(x) \leq y < r_n(x)$. چون $\{s_n(x)\}$ و $\{r_n(x)\}$ به $f(x)$ همگرا هستند، لذا $y = f(x)$. اما برای هر n، $s_n(x) \leq k$ و لذا $f(x) \leq k$. بنابراین $(x, y) \in G_k$. نتیجه اینکه $G_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_{r_n} \setminus O_{s_n}$ اندازه پذیر است. بنابراین $G(f)$ اندازه پذیر است.

نکته۵. فرض کنیم μ و ν به ترتیب دو اندازه علامت‌دار متناهی روی σ جبرهای S و T از زیر مجموعه‌های X و Y باشند. فرض کنید $\mu = \mu^+ - \mu^-$ و $\nu = \nu^+ - \nu^-$ تجزیه‌های μ و ν باشند. برای هر مستطیل اندازه پذیر $A \times B$،

$$|\mu|(A)|\nu|(B) = \mu^+(A)\nu^+(B) + \mu^+(A)\nu^-(B) + \mu^-(A)\nu^+(B) + \mu^-(A)\nu^-(B).$$

این نشان می‌دهد که برای هر مستطیل اندازه پذیر $A \times B$،

$$|\mu| \times |\nu|(A \times B) = (\mu^+ \times \nu^+ + \mu^+ \times \nu^- + \mu^- \times \nu^+ + \mu^- \times \nu^-)(A \times B).$$

چون دو اندازه فوق روی مستطیل‌های اندازه پذیر با هم برابر و همچنین متناهی هستند، لذا $\mu^+ \times \nu^+ + \mu^+ \times \nu^- + \mu^- \times \nu^+ + \mu^- \times \nu^-$ با $|\mu| \times |\nu|$ روی $S \times T$ مساویند. از این توضیح ایده گرفته و حاصلضرب دو اندازه علامت‌دار متناهی μ و ν را به صورت

$$\mu \times \nu = \mu^+ \times \nu^+ - \mu^+ \times \nu^- - \mu^- \times \nu^+ + \mu^- \times \nu^-.$$

تعریف می‌کنیم.

اکنون فرض کنید (A, B) و (C, D) به ترتیب تجزیه هان X و Y نسبت به اندازه‌های علامت‌دار μ و ν باشند. به سادگی دیده می‌شود که $(A \times C) \cup (B \times D)$ و $(A \times D) \cup (B \times C)$ افرازی از $X \times Y$ از مستطیل‌های اندازه پذیر است. فرض کنید $E \in S \times T$ و $E \subseteq (A \times C \cup B \times D)$. چون $\nu^-(C) = \mu^+(B) = 0$، واضح است که $\mu^+ \times \nu^-(E) \leq \mu^+ \times \nu^-(A \times C) + \mu^+ \times \nu^-(B \times D) = 0$ و بنابراین $\mu^+ \times \nu^-(E) = 0$. چون $\mu^-(A) = \nu^+(D) = 0$، لذا $\mu^- \times \nu^+(E) \leq \mu^- \times \nu^+(A \times C) + \mu^- \times \nu^+(B \times D) = 0$ و بنابراین $\mu^- \times \nu^+(E) = 0$. نتیجه اینکه

$$(\mu^+\times\nu^+-\mu^+\times\nu^--\mu^-\times\nu^++\mu^-\times\nu^-)(E)=\mu^+\times\nu^+(E)+\mu^-\times\nu^-(E)\geq \circ.$$

بنابراین $(A\times C\cup B\times D)$ مجموعه‌ای مثبت است. به طریق مشابه می‌توان دید که $(A\times D\cup B\times C)$ مجموعه‌ای منفی است و این دو مجموعه اخیر تجزیه هان برای $X\times Y$ است.

اکنون فرض کنید $E\in S\times T$ عنصری دلخواه باشد. برای راحتی کار قرار می‌دهیم $\eta=\mu^+\times\nu^+-\mu^+\times\nu^--\mu^-\times\nu^++\mu^-\times\nu^-$. می‌توان نوشت

$$\mu^-\times\nu^-(E\cap A\times C)=\mu^-\times\nu^+(E\cap A\times C)=\mu^+\times\nu^-(E\cap A\times C)=\circ$$

و همینطور

$$\mu^+\times\nu^+(E\cap B\times D)=\mu^-\times\nu^+(E\cap B\times D)=\mu^+\times\nu^-(E\cap B\times D)=\circ.$$

بنابراین $\eta^+(E)=\eta(E\cap(A\times C\cup B\times D))=\mu^+\times\nu^+(E\cap A\times C)+\mu^-\times\nu^-(E\cap B\times D)$.
به شیوهٔ مشابه می‌توان نشان داد که

$$\begin{aligned}-\eta^-(E)&=\eta(E\cap(A\times D\cup B\times C))\\&=-\mu^-\times\nu^+(E\cap B\times C)-\mu^+\times\nu^-(E\cap A\times D).\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}|\eta|(E)&=\mu^+\times\nu^+(E\cap A\times C)+\mu^-\times\nu^-(E\cap B\times D)\\&\quad+\mu^-\times\nu^+(E\cap B\times C)+\mu^+\times\nu^-(E\cap A\times D).\end{aligned}$$

اما $E=(E\cap A\times C)\cup(E\cap B\times D)\cup(E\cap A\times D)\cup(E\cap B\times C)$. با کمی تامل می‌توان دید که $(\mu^+\times\nu^++\mu^+\times\nu^-+\mu^-\times\nu^++\mu^-\times\nu^-)(E)$ با

$$\begin{aligned}&\mu^+\times\nu^+(E\cap A\times C)+\mu^+\times\nu^-(E\cap A\times D)+\mu^-\times\nu^+(E\cap B\times C)\\&\qquad+\mu^-\times\nu^-(E\cap B\times D).\end{aligned}$$

مساوی است. بنابراین $|\mu^+\times\nu^+-\mu^+\times\nu^--\mu^-\times\nu^++\mu^-\times\nu^-|(E)=|\mu|\times|\nu|(E)$ و لذا $|\mu\times\nu|=|\mu|\times|\nu|$.

مثال۶ ـ ۳. فرض کنید $S=T$ خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $[\circ,1]$ و μ نیراندازه لبگ روی S باشد. زیر مجموعه اندازه ناپذیر لبگ $E\subseteq[\circ,1]$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که

$$(\mu\times\mu)^*(E\times\{\circ\})\leq(\mu\times\mu)^*([\circ,1]\times\{\circ\})=(\mu\times\mu)([\circ,1]\times\{\circ\})=\circ.$$

از اینکه $E\notin S$ و $(E\times\{\circ\})_\circ=E\notin S$، نتیجه می‌شود که $E\times\{\circ\}\notin S\times T$ و لذا اندازه $\mu\times\mu$ کامل

نیست.

۶—۳ قضیه فوبینی

تاکنون حاصلضرب دو اندازه σ متناهی را روی حاصلضرب دو σ جبر تعریف کرده و بعضی از خصوصیات آن‌را مورد بررسی قرار دادیم. شرایط فراهم شده تا قضیه فوبینی را مورد بررسی قرار دهیم. ابتدا به تعریف انتگرال مضاعف و انتگرال‌های مکرر می‌پردازیم.

تعریف۶ ـ ۶. فرض کنید μ و ν دو اندازه σ متناهی به ترتیب روی σ جبرهای S و T از زیر مجموعه‌های X و Y باشند. اگر $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ تابعی اندازه پذیر باشد، در صورت وجود $\int h d\mu \times \nu$ به آن انتگرال مضاعف h گوئیم. اگر $\int\int h_x(y)d\nu(y)d\mu(x)$ و $\int\int h_y(x)d\mu(x)d\nu(y)$ موجود باشند، به این انتگرال‌ها انتگرال مکرر h گوئیم.

توجه کنید که در انتگرال مکرر $\int\int h_x(y)d\nu(y)d\mu(x)$، ابتدا x را ثابت فرض کرده و انتگرال داخلی را محاسبه می‌کنیم. با این وجود تابع $x \mapsto \int h_x(y)d\nu(y)$ حاصل می‌شود که مجدداً از این تابع نسبت به μ انتگرال می‌گیریم. محاسبه $\int\int h_y(x)d\mu(x)d\nu(y)$ به شیوه مشابه است.

فرض کنید μ و ν دو اندازه σ متناهی به ترتیب روی σ جبرهای S و T از زیر مجموعه‌های X و Y و $E \in S \times T$. بنا به قضیه ۶—۴، توابع $x \mapsto \nu(E_x)$ و $y \mapsto \mu(E_y)$ به ترتیب تعریف شده روی X و Y توابعی اندازه پذیر و نامنفی بوده و بعلاوه اینکه $\mu \times \nu(E) = \int \nu(E_x)d\mu(x) = \int \mu(E_y)d\nu(y)$. این نشان می‌دهد که انتگرال‌های مکرر تابع مشخصه χ_E وجود دارند و با هم و با انتگرال مضاعف برابر هستند. چون توابع ساده، ترکیب خطی از توابع مشخصه است، لذا انتگرال مکرر یک تابع ساده وجود دارد و با انتگرال مضاعف مساوی است. اکنون فرض کنیم h تابعی اندازه پذیر و نامنفی تعریف شده روی $X \times Y$ باشد. دنباله‌ای صعودی از توابع ساده $\{h_n\}$ وجود دارد که $\{h_n\}$ نقطه به نقطه به تابع h همگراست. برای هر عدد طبیعی n، h_n ترکیب خطی از توابع مشخصه است و لذا تابع $\phi_n(x) = \int h_{n_x}(y)d\nu(y)$ تعریف شده روی X اندازه پذیر است. چون دنباله $\{h_n\}$ دنباله‌ای صعودی از توابع نامنفی است، لذا $\{\phi_n\}$ نیز دنباله‌ای صعودی از توابع نامنفی است. بنا به قضیه همگرایی یکنوا، $\{\phi_n\}$ به تابع $\int h_x(y)d\nu(y)$ همگرای نقطه به نقطه است. بنابراین $\int h_x(y)d\nu(y)$ اندازه پذیر است. به شیوه مشابه برای هر عدد طبیعی n، تابع $\psi_n(y) = \int h_{n_y}(x)d\mu(x)$ تعریف شده روی Y اندازه پذیر است و دنباله توابع

صعودی $\{\psi_n\}$ به تابع اندازه پذیر $\int h_y(x)d\mu(x)$ همگرای نقطه به نقطه است. بنا به توضیحات قبل، برای هر عدد طبیعی n،

$$\int h_n(x,y)d\mu\times\nu(x,y)=\int\phi_n(x)d\mu(x)=\int\psi_n(y)d\nu(y).$$

قضیه همگرایی یکنوا نتیجه می‌دهد که

$$\int h(x,y)d\mu\times\nu(x,y)=\int\int h_x(y)d\nu(y)d\mu(x)=\int\int h_y(x)d\mu(x)d\nu(y).$$

از توضیحات بالا قضیه فوبینی برای توابع اندازه پذیر نامنفی بدست می‌آید که در زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۶ ـ ۷. *فرض کنید μ و ν دو اندازه σ متناهی به ترتیب روی σ جبرهای S و T از زیر مجموعه‌های X و Y باشند. اگر h تابعی اندازه پذیر و نامنفی تعریف شده روی $X\times Y$ باشد، در آن‌صورت توابع $x\mapsto\int h_x(y)d\nu(y)$ و $y\mapsto\int h_y(x)d\mu(x)$ به ترتیب تعریف شده روی X و Y اندازه پذیر بوده و بعلاوه*

$$\int h(x,y)d\mu\times\nu(x,y)=\int\int h_y(x)d\mu(x)d\nu(y)=\int\int h_x(y)d\nu(y)d\mu(x).$$

مثال ۶ ـ ۴. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $[\circ,a]$ باشد. تابع $f:[\circ,a]\times[\circ,a]\to\mathbb{R}$ را با ضابطه $f(x,y)=\chi_{[x,a]}(y)$ تعریف می‌کنیم. فرض کنیم $\{r_1,r_2,...\}$ یک نمایش از اعداد گویای موجود در بازه $[\circ,a]$ باشد. فرض کنید $\circ\le\alpha<1$. در آن‌صورت

$$\{(x,y);\ f(x,y)>\alpha\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}[\circ,r_n]\times[r_n,a]\cup\{(x,x);\ x\in[\circ,a]\}.$$

اگر عدد حقیقی $\alpha>1$، $\{(x,y);\ f(x,y)>\alpha\}=\emptyset$ و در نهایت چنانچه عدد حقیقی $\alpha<\circ$، $\{(x,y);\ f(x,y)>\alpha\}=[\circ,a]\times[\circ,a]$. این نشان می‌دهد که f اندازه پذیر است. برای هر $[c,d]\subseteq[\circ,a]$، $\int_c^d\chi_{[x,a]}(y)d\mu(y)=\mu([x,a]\cap[c,d])$. از طرفی

$$\mu([x,a]\cap[c,d])=\begin{cases} d-c & x\le c\\ d-x & c<x\le d\\ \circ & x>d\end{cases}$$

و لذا بنا به قضیه بالا

$$\begin{aligned}\int_c^d\int_\circ^a\chi_{[x,a]}(y)d\mu(x)d\mu(y)&=\int_\circ^a\int_c^d\chi_{[x,a]}(y)d\mu(y)d\mu(x)\\&=\int_\circ^a\mu([x,a]\cap[c,d])d\mu(x)\\&=\Big(\int_\circ^c+\int_c^d+\int_d^a\Big)\mu([x,a]\cap[c,d])d\mu(x)\end{aligned}$$

$$= \frac{d^2}{2} - \frac{c^2}{2}.$$

نتیجه اینکه $\int_c^d y d\mu(y) = \int_c^d \int_0^a \chi_{[x,a]}(y) d\mu(x) d\mu(y)$ و لذا $\int_0^a \chi_{[x,a]}(y) d\mu(x) = y$.

قضیه۶ ــ ۸. *فرض کنید μ و ν دو اندازه σ متناهی به ترتیب روی σ جبرهای S و T از زیرمجموعه‌های X و Y و h نیز تابعی اندازه پذیر تعریف شده روی $X \times Y$ باشد. اگر یکی از شرایط $\int |h|(x,y) d\mu \times \nu(x,y) < +\infty$، $\int \int |h|_y(x) d\mu(x) d\nu(y) < +\infty$ و یا $\int \int |h|_x(y) d\nu(y) d\mu(x) < +\infty$ برقرار باشد، در آن‌صورت دو شرط دیگر نیز برقرار است و سه انتگرال فوق با هم برابرند. بعلاوه اینکه برای هر $x \in X$، تابع $h_x : Y \to [-\infty, +\infty]$ اندازه پذیر بوده و تقریباً برای هر $x \in X$، $h_x \in L^1(Y)$. تابع $x \mapsto h_x$ نیز اندازه پذیر است و در $L^1(X)$ قرار دارد. همینطور برای هر $y \in Y$، تابع $h_y : X \to [-\infty, +\infty]$ اندازه پذیر بوده و تقریباً برای هر $y \in Y$، $h_y \in L^1(X)$. تابع $y \mapsto h_y$ اندازه پذیر است و در $L^1(Y)$ قرار دارد. همچنین*

$$\int h(x,y) d\mu \times \nu(x,y) = \int \int h_y(x) d\mu(x) d\nu(y) = \int \int h_x(y) d\nu(y) d\mu(x).$$

برهان. چون h اندازه پذیر است، لذا برای هر $x \in X$ و $y \in Y$، توابع h_x، h_y و $|h|$ اندازه پذیر هستند. بنا به قضیه فوبینی برای توابع اندازه پذیر نامنفی،

$$\int |h|(x,y) d\mu \times \nu(x,y) = \int \int |h|_y(x) d\mu(x) d\nu(y) = \int \int |h|_x(y) d\nu(y) d\mu(x).$$

از این موضوع نتیجه می‌گیریم که اگر یکی از انتگرال‌های اخیر متناهی باشد، دو انتگرال دیگر نیز متناهی بوده و با هم مساوی هستند. بنابراین بدون اینکه به کلیت برهان خللی وارد آید می‌توان فرض کرد که $\int |h|(x,y) d\mu \times \nu(x,y) < +\infty$. بنابراین $\int h^+(x,y) d\mu \times \nu(x,y) < +\infty$ و $\int h^-(x,y) d\mu \times \nu(x,y) < +\infty$. چون h^+ تابعی اندازه پذیر و نامنفی است، بنا به قضیه فوبینی برای توابع اندازه پذیر نامنفی، تابع $x \mapsto \int h_x^+(y) d\nu(y)$ اندازه پذیر است. از طرفی $\int \int h_x^+(y) d\nu(y) d\mu(x) = \int h^+(x,y) d\mu \times \nu(x,y) < +\infty$ و لذا تابع $x \mapsto \int h_x^+(y) d\nu(y)$ تقریباً همه جا نسبت به اندازه μ متناهی است. نتیجه اینکه تقریباً برای همه $x \in X$، $h_x^+ \in L^1(Y)$. بعلاوه اینکه تابع $x \mapsto \int h_x^+(y) d\nu(y)$ عضوی از $L^1(X)$ است. به شیوه مشابه $\int \int h_x^-(y) d\nu(y) d\mu(x) = \int h^-(x,y) d\mu \times \nu(x,y) < +\infty$ و لذا تابع $x \mapsto \int h_x^-(y) d\nu(y)$ تقریباً همه جا نسبت به اندازه μ متناهی است. نتیجه اینکه تقریباً برای همه $x \in X$، $h_x^- \in L^1(Y)$. بعلاوه اینکه تابع $x \mapsto \int h_x^-(y) d\nu(y)$ عضوی از $L^1(X)$ است. از توضیحات بالا نتیجه می‌گیریم که تابع

$$x \mapsto \int h_x(y)d\nu(y) = \int h_x^+(y)d\nu(y) - \int h_x^-(y)d\nu(y)$$

عضوی از $L^1(X)$ است. داریم

$$\begin{aligned}\int h(x,y)d\mu\times\nu(x,y) &= \int h^+(x,y)d\mu\times\nu(x,y) - \int h^-(x,y)d\mu\times\nu(x,y)\\ &= \int\int h_x^+(y)d\nu(y)d\mu(x) - \int\int h_x^-(y)d\nu(y)d\mu(x)\\ &= \int\int h_x(y)d\nu(y)d\mu(x) \qquad (1)\end{aligned}$$

به شیوه مشابه می‌توان دید که تقریباً برای همه y، $h_y \in L^1(X)$ و تابع $y \mapsto \int h_y(x)d\mu(x)$ اندازه پذیر و عضوی از $L^1(Y)$ است. همچنین

$$\begin{aligned}\int h(x,y)d\mu\times\nu(x,y) &= \int h^+(x,y)d\mu\times\nu(x,y) - \int h^-(x,y)d\mu\times\nu(x,y)\\ &= \int\int h_y^+(x)d\mu(x)d\nu(y) - \int\int h_y^-(x)d\mu(x)d\nu(y)\\ &= \int\int h_y(x)d\mu(x)d\nu(y) \qquad (2)\end{aligned}$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه حاصل می‌شود. ■

قضیه بالا به قضیهٔ فوبینیٔ برای توابع انتگرال‌پذیر مشهور است. این قضیه کاربرد فراوانی جهت تعویض جای دو انتگرال دارد. از تعویض جای دو انتگرال برای محاسبه انتگرال‌ها استفاده زیادی می‌شود.

مثال ۶ ـ ۵. خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $[0,1]$ را با نماد S و خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر از $[0,+\infty)$ را با نماد T نمایش می‌دهیم. اندازه لبگ μ را روی این دو رده در نظر می‌گیریم. برای هر $(x,y) \in [0,1]\times[0,+\infty)$، $|e^{-y}\sin 2xy| \le e^{-y}$. لذا تابع $h:[0,1]\times[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ با ضابطه $h(x,y)=e^{-y}\sin 2xy$ انتگرال‌پذیر است. بنا به قضیه فوبینی برای توابع انتگرال‌پذیر،

$$\int_0^\infty\int_0^1 e^{-y}\sin 2xy\,d\mu(x)d\mu(y) = \int_0^1\int_0^\infty e^{-y}\sin 2xy\,d\mu(y)d\mu(x).$$

از طرفی برای هر $(x,y)\in[0,1]\times[0,+\infty)$،

$$\int_0^\infty e^{-y}\sin 2xy\,d\mu(y) = \frac{2x}{1+4x^2},\quad \int_0^1 e^{-y}\sin 2xy\,d\mu(x) = e^{-y}\frac{\sin^2 y}{y}$$

و لذا

$$\int_0^\infty e^{-y}\frac{\sin^2 y}{y}d\mu(y) = \int_0^1 \frac{2x}{1+4x^2}d\mu(x) = \frac{\ln 5}{4}.$$

تمرین ٦

۱. فرض کنید R، S و T سه σ جبر به ترتیب از زیر مجموعه‌های X، Y و Z باشند. σ جبر تولید شده توسط $\{A \times B \times C;\ A \in R, B \in S, C \in T\}$ را با نماد $R \times S \times T$ نمایش می‌دهیم. ثابت کنید $R \times S \times T = (R \times S) \times T = R \times (S \times T)$.

۲. فرض کنید R، S و T سه σ جبر به ترتیب از زیر مجموعه‌های X، Y و Z باشند. فرض کنید μ، ν و η سه اندازه σ متناهی به ترتیب روی R، S و T باشند. ثابت کنید $(\mu \times \nu) \times \eta = \mu \times (\nu \times \eta)$.

۳. فرض کنید μ و ν دو اندازه σ متناهی به‌ترتیب روی σ جبرهای S و T از زیر مجموعه‌های X و Y باشند. اگر $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$ دو زیر مجموعه دلخواه باشند، چه ارتباطی بین $\mu^*(A)\mu^*(B)$ و $(\mu \times \nu)^*(A \times B)$ وجود دارد؟

۴. اگر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی اندازه پذیر لبگ باشد، ثابت کنید توابع $g, h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضوابط $g(x,y) = f(x+y)$ و $h(x,y) = f(x-y)$ اندازه پذیرند.

۵. فرض کنید $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد. ثابت کنید

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dydx.$$

٦. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های اندازه پذیر از $(\circ, a)$ باشد. فرض کنید $f \in L^1((\circ,a))$ و تابع $g : (\circ,a) \to \mathbb{R}$ را با ضابطه $g(x) = \int_x^a \frac{f(t)}{t} d\mu(t)$ تعریف کنید. ثابت کنید $g \in L^1((\circ,a))$ و $\int_\circ^a g(x)d\mu(x) = \int_\circ^a f(t)d\mu(t)$.

۷. اندازه شمارشی را روی خانواده همه زیر مجموعه‌های اعداد طبیعی در نظر بگیرید. تابع $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ را با ضابطه

$$f(m,n) = \begin{cases} ۲ - ۲^{-m} & m = n \\ -۲ + ۲^{-m} & m = n + ۱ \\ \circ & otherwise \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. ثابت کنید انتگرال‌های مکرر با هم برابر نیستند.

۸. فرض کنید μ اندازه لبگ روی خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه‌پذیر از $[\circ, ۱]$ باشد. تابع $f : [\circ, ۱] \times [\circ, ۱] \to \mathbb{R}$ را با ضابطه زیر تعریف کنید

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ - y^۲}{(x^۲ + y^۲)^۲} & (x,y) \neq (\circ, \circ) \\ \circ & (x,y) = (\circ, \circ) \end{cases}$$

ثابت کنید $\int_\circ^۱ \int_\circ^۱ f(x,y)d\mu(y)d\mu(x) = \frac{\pi}{۴}$ و $\int_\circ^۱ \int_\circ^۱ f(x,y)d\mu(x)d\mu(y) = \frac{-\pi}{۴}$. آیا این موضوع با قضیه فوبینی در تناقض نیست؟

۹. فرض کنید μ، ν، η و λ اندازه‌های متناهی و ناصفر روی σ جبر خانواده همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر باشند. ثابت کنید

الف) $\mu \times \nu \ll \eta \times \lambda$ اگر و تنها اگر $\mu \ll \eta$ و $\nu \ll \lambda$.

ب) ثابت کنید $\mu \times \nu \perp \eta \times \lambda$ اگر و تنها اگر $\mu \perp \eta$ و $\nu \perp \lambda$.

۱۰. فرض کنید μ، ν، η و λ اندازه‌های متناهی روی σ جبر همه زیر مجموعه‌های لبگ اندازه پذیر باشند. فرض کنید $\mu \ll \eta$ و $\nu \ll \lambda$. چه ارتباطی بین $\frac{d\mu}{d\eta} \times \frac{d\nu}{d\lambda}$ و $\frac{d\mu \times \nu}{d\eta \times \lambda}$ وجود دارد؟

مراجع

[1] C. D. Aliprantis and O. B. Burkinshaw, Principles of real analysis, 1975.

[2] G. de Barra, Measure theory and integration, *John Wiley & Sons Inc.*, 1981.

[3] G. B. Folland, Real analysis, *Springer Verlag*, 1982.

[4] P. R. Halmos, Measure theory, *D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J.*, 1950.

[5] E. Hewitt and K. Stromberg, Real and abstract analysis, *Springer-Verlag, Berlin*, 1970.

[6] W. Rudin, Functional analysis, *McGraw Hill, New York*, 1991.

[7] W. Rudin, Principles of mathematical analysis, *McGraw Hill, New York*, 1953.

[8] W. Rudin, Real and complex analysis, *McGraw Hill, New York*, 1966.

فهرست نشانه‌ها و نمادها

واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی

A

Absolutely coutinuous .... به‌طور مطلق پیوسته، ۱۲۵

Algebra .... جبر، ۱۸

Almost everywhere .... تقریبا همه جا، ۵۴

Almost uniform convergence .... تقریباً همگرایی یکنواخت، ۷۹

B

Banach space .... فضای باناخ، ۷، ۹۵، ۱۰۵

Bijective .... تابع دو سویی، ۲

Borel measurability .... اندازه‌پذیری بورل، ۵۱

Borel measurable function .... تابع بورل اندازه‌پذیر، ۵۱

Borel measure .... اندازه بورل، ۳۶

Borel set .... مجموعه بورل، ۳۶

C

Cantor function .... تابع کانتور، ۴۵، ۵۳

Cantor set .... مجموعه کانتور، ۳۷

Cauchy sequence .... دنباله کوشی، ۴

-in measure .... دنباله کوشی در اندازه، ۷۶

Characteristic function .... تابع مشخصه، ۵۱

Complete measure .... اندازه کامل، ۳۹

Complex measure .... اندازه مختلط، ۱۴۰

Connected set .... مجموعه همبند، ۱۰

Continuous function .... تابع پیوسته، ۹

Convergence in L^p .... همگرایی در L^p، ۹۵

Convergence in measure .... همگرایی در اندازه، ۷۴

Convex set .... مجموعه محدب، ۹۱

واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی

آ، ا

ب

پ

ت

Semnan University

REAL ANALYSIS

by: Ali Ghaffari (Ph.D.)

انتشارات دانشگاه سمنان

ISBN 978-964-7978-78-1

Semnan University Press
2012